بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی پردیس بین الملل خوارزمی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک طراحی کاربردی

محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترکی در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت نفوذ گاز

نگارنده

کیوان مولوی

استاد راهنما

دکتر محمدباقر نظری

تیرماه ۱۳۹۸

فرم شماره ۳

تقدیم اثر

تقدیم به پدر و مادر عزیزم که با صبر و حمایت و تشویق بی دریغشان، اینجانب را در پیشبرد این پایان نامه همراهی نمودند.

تشکر و قدردانی

در ابتدا از استاد بزرگوارم جناب دکتر محمدباقر نظری که مرا در تمامی مراحل گردآوری، تدوین و نگارش این پایان‌نامه یاری و همراهی نمودند، کمال تشکر را دارم. همچنین از دوستان عزیزم، جناب آقای دکتر هادی بیات و مهندس جوانشیر لطفی که در فرآیند کدنویسی این پایان نامه به اینجانب کمک شایانی نمودند تشکر می‌نمایم. همچنین از مهندس سینا مزینانی که سیستم خود را برای انجام عملیات‌های محاسباتی نرم افزار MATLAB در اختیار اینجانب گذاشتند تشکر می نمایم. در پایان از پدر و مادر عزیز و دلسوزم که در این مدت برایم آرامش فکری و روحی را فراهم نمودند و بنده را در لحظه به لحظه این مسیر یاری رساندند تشکر می‌نمایم.

تعهدنامه

اینجانب **کیوان مولوی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد **رشته مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه **محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترکی در یک محیط محدود ایزوتروپیک تحت نفوذ گاز** تحت راهنمایی **دکتر محمدباقر نظری** متعهد می‌شوم:

❋ تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است.

❋ در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

❋ مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچگونه مدرک یا امتیاز ارائه نشده است.

❋ کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.

❋ در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده است، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

❋ کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و ...) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

❋ استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه، ضریب شدت تنش برای ترکی در یک ناحیه محدود محاسبه شده‌است که در آن انتقال جرم صورت می‌گیرد. در معادلات حاکم کوپل میدان‌های تغییر شکل و غلظت در نظر گرفته شده‌اند. همچنین انتشار ماده طبق قانونی غیر از قانون فیک انجام می‌شود. معادلات حاکم به روش المان محدود توسعه‌یافته گسسته شده و سپس با روش نیومارک در حوزه زمان حل می‌شود. ضرایب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش استخراج می‌شود. در این پژوهش، تاثیر زمان آسایش بر توزیع غلظت و ضرایب شدت تنش در معرض شوک غلظتی و همچنین اثر موج‌های تنش و غلظت روی تغییرات زمانی بررسی شده‌است. اثر تعداد المان‌ها و اندازه ناحیه انتگرال‌گیری و مقدار گام زمانی نیز مطالعه شده‌است. در ادامه، تغییرات غلظت در نزدیکی نوک یک ترک مایل به دلیل بازتاب موج غلظت از سطح آن و در نتیجه انحراف موضعی در میدان‌های غلظت و جابجایی به طور مفصل بحث شده است.

کلید واژگان:

الاستیسیته-انتشار؛ روش اجزای محدود توسعه‌یافته؛ انتگرال برهم‌کنش؛ ضرایب شدت تنش؛ شوک.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جداول

فهرست علامت‌ها

a	طول ترک، (m)
$\mathbf{a_n}$	بردار مجهولات گره‌ای
$\mathbf{b_n}$	بردار مجهولات گره‌ای
$\mathbf{B^U}$	ماتریس مشتق توابع شکل جابجایی
$\boldsymbol{B^C}$	ماتریس مشتق توابع شکل غلظت
$\mathbf{C}$	ماتریس میرایی
C	غلظت مولی
C_0	غلظت مرجع
$\mathbf{C_{nm}}$	بردار مجهولات گره‌ای
$\hat{C}_p$	سرعت موج تنش
$\hat{C}_c$	سرعت موج غلظت
$\mathbf{C}_{ijkl}$	تنسور سختی
D	ماتریس سفتی
E	مدول یانگ، (N/m^2)
$\mathbf{F}$	بردار نیروهای گره‌ای، (N)
F_m	توابع غنی‌سازی نوک ترک، ($m^{0.5}$)
f	بردار نیروی حجمی، (N/m^3)
G	مدول برشی
H	ارتفاع باریکه، (m)
$H_{(z)}$	تابع پله‌ای یکه
I	شار انتشار
J	انتگرال J، (N/m)
$\mathbf{K}$	ماتریس سختی
K_I	ضریب شدت تنش مود یک، ($N.m^{-1.5}$)

K_{II}	ضریب شدت تنش مود دو، ($N.m^{-1.5}$)
l	طول مشخصه، (m)
$\mathbf{M}$	ماتریس جرم، (kg)
M	انتگرال برهم‌کنش، (N/m)
$\mathbf{m_j}$	بردار نرمال بر مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J
N_I	توابع شکل استاندارد
$\mathbf{n_j}$	بردار نرمال بر مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J
O	ماتریس الاستیک
P	منبع انتشار
q	تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهم‌کنش
q_I	مقادیر گره‌ای مجهول
R	ثابت جهانی گازها، (J/K.mol)
r	شعاع ناحیه انتگرال‌گیری، (m)
r_n	مولفه دستگاه قطبی، (m)
S_A	گره‌های بریده نشده توسط ترک
S_c	گره‌های غنی‌سازی شده نوک ترک
S_H	گره‌های غنی سازی شده گام در مسیر ترک
t	زمان، (s)
u	بردار جابجایی
$\dot{u}$	بردار سرعت
$\ddot{u}$	بردار شتاب
U_I	درجات آزادی استاندارد گره‌ای
v	سرعت مشخصه، (m/s)
W	عرض نمونه، (m)
w	چگالی انرژی کرنشی، (N/m^2)

x	مولفه افقی دستگاه مختصات دکارتی
y	مولفه عمودی دستگاه مختصات دکارتی
Z	تابع موقعیت نقطه نسبت به مسیر

علامت های یونانی

$\boldsymbol{\sigma}$	تنسور تنش، (N/m^2)
ρ	چگالی، (kg/m^3)
μ	ثابت لامه، (N/m^2)
ε	تنسور کرنش
γ	ضریب وابستگی
λ	ثابت لامه، (N/m^2)
δ	تابع دلتای کرونیکر
υ	نسبت پواسون
α	ضریب انتقال غلظت
$\boldsymbol{\alpha_0}$	ضریب شیمیایی مکانیکی
ψ	تابع شکل غنی‌سازی شده برای المان‌های نوک ترک
φ_I	تابع شکل غنی سازی شده برای المان‌های مسیر ترک
$\boldsymbol{\varphi^U}$	توابع شکل جابجایی
$\boldsymbol{\varphi^C}$	توابع شکل غلظت
Γ_s	مسیر انتگرال‌گیری در انتگرال J
κ	ضریب کوپل
$\boldsymbol{\kappa}$	تابع دلتای دیراک
β	ضریب انتقال غلظت
ζ	دقت الگوریتم در معادلات نیومارک
ϵ	مولفه محلی طبیعی تابع شکل استاندارد

بالانویس‌ها

aux	مخفف واژه auxiliary ، مربوط به میدان کمکی
int	مخفف واژه interaction ، مربوط به برهم کنش
s	مربوط به حالت برهم‌نهی

زیرنویس‌ها

0	مربوط به حالت اولیه
I	شمارنده، مربوط به تابع شکل ، شمارنده مود ضریب شدت تنش
(z)	مربوط به تابع z
m	شمارنده، مربوط به تابع غنی‌سازی نوک ترک
n	شمارنده، مربوط به بردار مجهولات گره‌ای
nm	شمارنده، مربوط به بردار مجهولات گره‌ای
s	مربوط به سطوح مرزی
tip	مربوط به نوک ترک
j	شمارنده، مربوط به بردار نرمال بیرونی
C	نامگذاری برای موقعیت المان‌های نوک
H	نامگذاری برای موقعیت المان‌های مسیر
A	نامگذاری موقعیت المان‌های شکل

فصل اول

کلیات

۱-۱- مقدمه

از منظر مهندسی، انتشار جرم در جامدات یکی از موارد مهم در انتقال جرم محسوب می‌شود. [۱] انتشار به معنای حرکت ماکروسکوپیک اجزا یک سیستم است که می تواند ناشی از اختلاف غلظت در سطح سیستم باشد و به صورت جابجایی از یک نقطه به نقطه دیگر تعریف شود که این فرآیند در واقع انتقال اتم‌های متحرک در محیط زمینه است بنابراین نمی‌تواند سرعت نامحدود داشته باشد. [۲] هنگامی که یک گاز در سطح یک فلز پخش می شود بر هم کنش ناشی از انتشار-الاستیسیته برای شبیه سازی غلظت مولی و نحوه رشد موج الاستیک که دارای سرعت محدودی می باشد، محاسبه می شود که این رشد موج با سرعت محدود، در زمینه الاستیسیته-انتشار قابل ملاحظه است. برای مثال نفوذ هیدروژن در فلزات می تواند سبب ایجاد ترک و نرمی موضعی شود.[۳و۴] همچنین انتشار اکسیژن در قطعه به دلیل اثر گذاری غلظت آن روی توزیع تنش می تواند تاثیرات مهمی روی اکسیداسیون، نرخ انتشار و جدایی داشته باشد. با افزایش ضخامت لایه اکسیداسیون اکسیژن کمتری به فلزات یا آلیاژهای فلزی می‌رسد که باعث واکنش شیمیایی کندتر خواهد شد و از سوی دیگر دما تاثیر قابل توجهی روی انتشار غلظت و توزیع تنش دارد که نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد. یکی از مواردی که می تواند موجب تغییر شکل و یا حتی شکست ماده شود تاثیر کوپل انتشار مکانیکی است.[۵] برخی تحقیقات ارتباط سازنده مکانیکی و توزیع غلظت را از کوپل شیمیایی و مکانیکی استخراج می نمایند که معادلات حاکم و شرایط مرزی آن‌ها با استفاده از تعریف پتانسیل شیمیایی و قوانین اول و دوم نیوتون بیان شده است. در بسیاری از مسایل، قانون فیک که طبق آن، انتشار با سرعت بی‌نهایت انجام می‌شود نمی‌تواند پدیده انتشار را با دقت مناسب بیان کند. مشاهدات آزمایشگاهی در مقیاس میکرو و نانو انتشار جرم با سرعت محدود و به عبارتی رفتار موج‌گونه پدیده انتشار را تایید می‌کند.[۶]

۱-۲- تحقیقات گذشته

گزارش‌هایی از برهم‌کنش الاستیسیته و انتشار در دسترس است. جیانگ و لیو [۷] تاثیرات انتشار طبق قانون غیر فیک را در چند حالت بررسی کردند. الری و سیمپسون [۸] یک راه حل تحلیلی برای مطالعه مدل‌های انتقال جرم غیرخطی پیشنهاد کردند. با معرفی کوپل الاستیسیته و انتشار، گرسکی [۹] تحلیلی از برهم‌کنش انتشار و تنش ارایه داد. عزیز [۱۰] به تحلیل تاثیر فشار و تنش بر انتشار از منظر اتمی پرداخت. یانگ [۱۱] به گسترش رابطه بین تنش هیدرواستاتیک و تمرکز تنش پرداخت و به این مهم دست یافت که در برهم‌کنش و انتشار در یک صفحه باریک توزیع غلظت خطی وجود ندارد. برای بیان دقیق کوپل الاستیسیته و انتشار، کوانگ [۱۲] مفهوم انتروپی اینرسیایی و غلظت دارای اینرسی را در ترمودینامیک مساله برای در نظر گرفتن انتشار طبق قانون غیر فیک مشابه هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای- معرفی کرد. حسینی و همکاران [۱۳] مساله یک‌بعدی کوپل الاستیسیته-انتشار دینامیکی را با قانون غیرفیک بصورت تحلیلی حل کردند و مسیر موج جابجایی و موج غلظت مولی را در هر زمان دلخواه با این روش تحلیلی محاسبه نمودند. اگرچه روش‌های تحلیلی در مهندسی برای مسایل کوپل الاستیسیته-انتشار از اهمیت بالایی برخوردار است، اما به واسطه محدودیت‌های علم ریاضیات، برخی روش‌های عددی مثل روش المان محدود و روش المان مرزی و روش بدون شبکه در زمینه مهندسی پیشرفت قابل توجهی داشته‌اند. اخیرا حسینی و همکاران[۱۴] با استفاده از روش محلی بدون شبکه پترو گلرکین پیشرفت‌های موفقیت‌آمیزی پیرامون مساله کوپل الاستیسیته-انتشار و کوپل ترموالاستیسیته-انتشار با قانون غیرفیک داشته‌اند. همچنین با استفاده از این روش به موفقیت‌هایی پیرامون مساله کوپل ترموالاستیسیته-انتشار بر اساس نظریه گرین‌نقدی کوپل ترموالاستیسیته دست‌یافتند. یکی از روش‌های مؤثر بدون شبکه، روش اختلاف محدود عمومی[۱] است که در کارهای گذشته بررسی شده‌است [۱۵]. گاوت و همکاران[۱۶] به گسترش روش اختلاف محدود عمومی و مقایسه آن با

[۱] Generalized finite difference method

روش المان آزاد گلرکین پرداختند. بنیتو و همکاران[۱۷] به توسعه روش اختلاف محدود عمومی با حل صریح معادلات سهموی و هذلولوی برای معادلات با مشتقات جزیی با ضرایب ثابت در فضای یک، دو و سه بعدی پرداختند. عباس‌بندی[۱۸] یک حل تقریبی برای مدل غیر خطی انتشار و واکنش در کاتالیزور متخلخل تحت عنوان روش تحلیلی هوموتوپی معرفی نمود. اخیراً، سو و شن [۱۹] مدل دینامیکی برای کوپل دما و انتشار با مثال‌های عددی برای بررسی انتشار غلظت مولی با سرعت محدود محاسبه کردند.حسینی[۲۰] به حل عددی یک مسأله دو بعدی از کوپل الاستیسیته و انتشار بر اساس قانون غیر فیک به کمک روش بدون شبکه پرداخت. همچنین وی به گسترش روش بدون شبکه بر اساس مدل ضعیف شده پترو گلرکین به مسأله الاستیسیته انتشار غیرفیک پرداخت. ماگیاری [۲۲و۲۱] یک حل تحلیلی دقیق برای بررسی واکنش خطی و غیر خطی از انتشار در محیط متخلخل معرفی نمود. سان و همکاران [۲۳] به مطالعه روی انتشار و واکنش در محیط متخلخل با روش تجزیه و مدل غیر خطی از یک حل تقریبی پرداختند.

تیانهو و همکاران، مساله ترموالاستیسیته-انتشار تعمیم‌یافته دو بعدی را با روش عددی تبدیل لاپلاس اجزای‌محدود بررسی نمودند. [۲۴] وانگ و همکاران، واکنش ترموالاستیک یک صفحه نازک تحت شوک حرارتی گذرا را با تئوری ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته بررسی کردند. [۲۵] تیان و همکاران، واکنش گذرا خطی ترموالاستیسیته-انتشار تعمیم‌یافته را با روش ناحیه زمانی المان‌محدود بررسی نمودند.[۲۶] همچنین پاسخی گذرا برای محیط نیم بی‌نهایت تحت شوک حرارتی و شیمیایی با تئوری ترموالاستیسیته-انتشار تعمیم یافته ارائه نمودند.[۲۷] تیان و همکاران، نحوه انتشار موج گرما و تحلیل صفحه نازک ویسکوالاستیک تحت شوک و بار گرمایی گذرا با تئوری ترموویسکوالاستیک تعمیم‌یافته را بررسی نمودند.[۲۸] همچنین اثر سورت روی واکنش شوک کوپل ترموالاستیسیته-انتشار تعمیم‌یافته را با تکنیک تبدیل لاپلاس بررسی نمودند.[۲۹]

هدف از این پایان‌نامه بررسی اثر کوپل الاستیسیته - انتشار بر روی ترک و محاسبه ضرایب شدت تنش می‌باشد که تاکنون بررسی نشده است.

۱-۳- ساختار پایان نامه

در فصل دوم جهت تحلیل یک سازه تحت انتشار ترک، معادلات حاکم از شکل کوپل معادلات الاستیسیته-انتشار استخراج شده‌است. سپس با استفاده از فرآیند بی‌بعدسازی و گسسته‌سازی، معادلات به فرم ماتریسی درآمده و از روش جابجایی نیومارک برای حل معادله حرکت استفاده شده‌است. در ادامه کاربرد المان محدود توسعه‌یافته در مدلسازی ترک با توابع غنی‌سازی نوک ترک شرح داده شده‌است. در فصل سوم، میدان‌های کمکی و انتگرال برهم‌کنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش بیان شده‌است. در فصل چهارم به بررسی تغییرات غلظت در یک باریکه تحت شوک، با ذکر سه مثال و تحلیل تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش و تاریخچه زمانی غلظت در نوک ترک و در نهایت تحلیل تغییر شکل باریکه پرداخته شده‌است.

فصل دوم

روش اجزای محدود توسعه‌یافته

۲-۱- مقدمه

روش اجزای محدود یکی از ابزارهای عددی مرسوم برای حل تقریبی معادلات با مشتقات جزئی است. این روش برای مطالعات، مدل‌سازی و پیش‌بینی رفتار ساختاری مواد در زمینه‌های مختلف علمی مهندسی بسیار موفقیت‌آمیز بوده‌است. محدوده کاربردی این روش در مواد صنعتی خودروسازی، مهندسی‌مکانیک، مهندسی‌عمران، بیومکانیک، مهندسی‌هوافضا، علوم‌هوانوردی و بسیاری موارد دیگر است.

روش اجزای محدود برای حل مسائلی با مرزهای پیوسته و مسائل مقدار اولیه به فرم مقادیر هم‌ارز فرمول‌سازی می‌شوند. این روش نیازمند محدوده‌ای غیر همپوشانی‌شده برای تقسیم به اجزای کوچکتری به نام المان است. تمامی المان‌ها توسط نظم‌بندی خاصی بنام مش‌بندی به یکدیگر متصل‌اند. یکی از اصلی‌ترین مزایای این روش که آن را با روش‌های دیگر متمایز ساخته است توانایی کنترل‌کردن مرزبندی‌های خیلی پیچیده است.

لازم به ذکر است که در روش اجزای محدود، ترک به صورت مستقل توانایی عبور از المان‌ها را داراست و از غنی‌سازی‌های موضعی بهره‌مند است که به آن تقریب روش اجزای محدود گفته می‌شود. بلیچو و همکاران [۳۰] روش المان محدود توسعه یافته را برای مدلسازی ناپیوستگی های دلخواه در شبکه المان محدود پیشنهاد دادند.

۲-۲- معادلات حاکم بر انتشار در محیط الاستیک

جهت تحلیل یک سازه تحت انتشار ترک باید از شکل کوپل معادلات الاستیسیته-انتشار استفاده شود. معادلات اساسی که بر یک پیوستار الاستیسیته-انتشار حاکم هستند عبارتند از [۳۱]:

معادله حرکت:

$$\sigma_{ij,j} + \mathrm{f_i} = \rho \ddot{\mathrm{u}}_{\mathbf{i}} \qquad (۱-۲)$$

که $\boldsymbol{\sigma}$ *تنسور تنش*، f بردار نیروی حجمی، u بردار جابجایی و ρ *چگالی* هستند.

معادله تعادل غلظت مولی:

$$\dot{\mu} + \dot{\mu}^{(a)} = \frac{P}{c_{\mathbf{0}}} - \frac{\beta' I_{i,j}}{c_{\mathbf{0}}} \tag{۲-۲}$$

که μ اینرسی پتانسیل شیمیایی، P منبع انتشار،c_0 غلظت مرجع، I شار انتشارهستند.

در رابطه فوق، $\beta' = RT$ است که R ثابت جهانی گازها و T دمای مطلق است.

رابطه سینماتیک:

$$\mathrm{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2}(\mathrm{u_{i,j}} + \mathrm{u_{j,i}}) \tag{۳-۲}$$

که در آن، $\boldsymbol{\varepsilon}$ تنسور کرنش است.

رابطه ساختاری تنش:

$$\sigma_{ij} = \mathrm{C}_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \alpha_{ij}c \tag{۴-۲}$$

که α ضریب انتقال غلظت هستند.

رابطه ساختاری غلظت:

$$\mu = \alpha_{ij}\varepsilon_{ij} + \beta c \tag{۵-۲}$$

رابطه شار انتشار برای مواد ایزوتروپیک وهمگن (قانون فیک):

$$I_i = -D_{ij}c_j = -D_{\mathbf{0}}\delta_{ij}c_j = -D_{\mathbf{0}}c_{,i} \tag{۶-۲}$$

که D_0 ضریب انتشار و δ دلتای کرونیکراست.

$$\mathrm{\mu^{(a)}} = \gamma\dot{\mathrm{c}} \tag{۷-۲}$$

در رابطه فوق، ارتباط μ به نرخ غلظت نشان داده شده است و γ ضریب تناسب[۲] است. در رابطه زیر، رابطه بین β و β' بیان شده است.

---

[۲] Proportional coefficient

$$\beta = \frac{\beta'}{c_0} \quad (۸-۲)$$

برای مواد ایزوتروپیک و همگن تنسور الاستیسیته عبارت است از:

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \frac{2\nu G}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G\delta_{ik}\delta_{jl} + G\delta_{il}\delta_{jk} \quad (۹-۲)$$

در رابطه فوق، G مدول برشی و ν نسبت پواسون هستند.

معادلات حاکم برحسب مؤلفه‌های جابجایی و غلظت مولی عبارتند از:

$$(\lambda + \mu)\mathrm{u}_{\mathbf{i,jj}} + \mu \mathrm{u}_{\mathbf{i,jj}} - \alpha_{\mathbf{0}} c_{,i} = \rho \ddot{\mathrm{u}}_{\mathbf{i}} \quad (۱۰-۲)$$

$$D_{\mathbf{0}}\mathbf{c}_{,\mathbf{ii}} - \dot{c} - \tau_{\mathbf{0}}\ddot{c} - \frac{\alpha_{\mathbf{0}}}{\beta}\dot{\mathrm{u}}_{\mathbf{i,i}} = 0 \quad (۱۱-۲)$$

در معادلات فوق، τ_0 زمان آسایش[۳] می‌باشد.

برای بی بعد کردن معادلات حاکم متغیر های زیر تعریف شده است:

$$\hat{c} = \frac{c}{c_{\mathbf{0}}} \quad (۱۲-۲)$$

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{l} \quad (۱۳-۲)$$

$$\hat{t} = \frac{v}{l}t \quad (۱۴-۲)$$

$$\hat{u}_i = \frac{u_i}{l} \quad (۱۵-۲)$$

l طول مشخصه و v سرعت مشخصه هستند که بصورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$l = \frac{D_{\mathbf{0}}}{v} \quad (۱۶-۲)$$

$$v = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (۱۷-۲)$$

---

[۳] Relaxation time

بر این اساس با جایگزینی و ساده سازی روابط بالا در معادلات حاکم، معادلات بی‌بعد برای یک ماده همگن ایزوتروپیک به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$(\hat{\lambda}+\hat{\mu})\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{j,ij}}+\hat{\mu}\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{i,jj}}-\hat{\alpha}_{\mathbf{0}}\hat{c}_{,i}-\rho\ddot{\hat{\mathrm{u}}}_{\mathrm{i}}=0 \qquad (۱۸-۲)$$

$$\widehat{D}_{\mathbf{0}}\hat{\mathrm{c}}_{,ii}-\dot{\hat{c}}-\hat{\tau}_{\mathbf{0}}\ddot{\hat{\mathrm{c}}}-\kappa\dot{\hat{\mathrm{u}}}_{\mathrm{i,i}}=0 \qquad (۱۹-۲)$$

در معادلات فوق، $\hat{\lambda}$ و $\hat{\mu}$ و $\widehat{D}_0$ و $\hat{\tau}_0$ و $\hat{\alpha}_0$ و κ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\kappa=\frac{\alpha_{\mathbf{0}}}{c_{\mathbf{0}}\beta} \qquad (۲۰-۲)$$

$$\hat{\alpha}_{\mathbf{0}}=\frac{\alpha_{\mathbf{0}}c_{\mathbf{0}}}{\lambda+2\mu} \qquad (۲۱-۲)$$

$$\hat{\tau}_{\mathbf{0}}=\frac{\tau_{\mathbf{0}}v}{l} \qquad (۲۲-۲)$$

$$\widehat{D}_{\mathbf{0}}=\frac{D_{\mathbf{0}}}{lv} \qquad (۲۳-۲)$$

$$\hat{\mu}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu} \qquad (۲۴-۲)$$

$$\hat{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \qquad (۲۵-۲)$$

در رابطه فوق، κ ضریب کوپل است. در ادامه، تمام معادلات در فضای بی‌بعد بیان می‌شوند و برای سهولت در نوشتار از علامت $\widehat{}$ صرف نظر می‌شود. در معادلات بی‌بعد (۲-۱۸) و (۲-۱۹) با در نظر گرفتن $u_1=u$ و $u_2=v$ و $x_1=x$ و $x_2=y$ معادلات به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$(\lambda+2\mu)\mathrm{u}_{,\mathrm{xx}}+\mu\mathrm{u}_{,\mathrm{yy}}+(\lambda+\mu)\mathrm{v}_{,\mathrm{xy}}-\alpha_0c_{,x}=\rho\ddot{\mathrm{u}} \qquad (۲۶-۲)$$

$$(\lambda+\mu)\mathrm{u}_{,\mathrm{xy}}+\mu\mathrm{v}_{,\mathrm{xx}}+(\lambda+2\,\mu)\mathrm{v}_{,\mathrm{yy}}-\alpha_0c_{,y}=\rho\ddot{\mathrm{v}} \qquad (۲۷-۲)$$

$$\tau_0\ddot{\mathrm{c}}+\dot{\mathrm{c}}+\mathrm{D}_0\left(\mathrm{c}_{,\mathrm{xx}}+\mathrm{c}_{,\mathrm{yy}}\right)+\kappa\left(\dot{\mathrm{u}}_{,\mathrm{x}}+\dot{\mathrm{v}}_{,\mathrm{y}}\right)=0 \qquad (۲۸-۲)$$

فرم ضعیف شده معادلات فوق، با در نظر گرفتن توابع تقریب $u = \varphi_i^u U_i$ و $v = \varphi_i^v V_i$ و $c = \varphi_i^c C_i$ به ترتیب به صورت زیر است:

$$\int_{\Omega^e}((\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,xx}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}U_i + \mu\boldsymbol{\varphi}_{i,yy}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}U_i + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,xy}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{v}V_i - \alpha_0\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}C_i - \rho\boldsymbol{\varphi}_{i}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}\ddot{U}_i)\mathrm{d}\Omega = 0 \qquad (۲-۲۹)$$

$$\int_{\Omega^e}\left((\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,yy}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{v}V_i + \mu\boldsymbol{\varphi}_{i,xx}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{v}V_i + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,xy}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}U_i - \alpha_0\boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}C_i - \rho\boldsymbol{\varphi}_{i}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}\ddot{V}_i\right)d\Omega = 0 \qquad (۲-۳۰)$$

$$\int_{\Omega^e}\left(\tau_0\boldsymbol{\varphi}_{i}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}\ddot{C}_i + \boldsymbol{\varphi}_{i}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}\dot{C}_i - D_0\left(\boldsymbol{\varphi}_{i,xx}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c} + \boldsymbol{\varphi}_{i,yy}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}\right)C_i + \kappa\left(\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u} + \boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{v}\right)\dot{V}_i\right)d\Omega = 0 \qquad (۲-۳۱)$$

با انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء و سپس دسته‌بندی معادلات فوق، در نهایت معادلات زیر نمایان می‌شوند:

$$\int_{\Omega^\mathrm{e}}\left((\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j,x}^{u}U_i + \mu\boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j,y}^{u}U_i + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j,y}^{v}V_i + \alpha_0\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}C_i + \rho\boldsymbol{\varphi}_{i}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}\ddot{U}_i\right)\mathrm{d}\Omega = (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}U_i + \mu\boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}U_i + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{v}V_i \qquad (۲-۳۲)$$

$$\int_{\Omega^\mathrm{e}}\left((\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j,y}^{v}V_i + \mu\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j,x}^{v}V_i + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j,y}^{u}U_i + \alpha_0\boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}C_i + \rho\boldsymbol{\varphi}_{i}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}\ddot{V}_i\right)d\Omega = (\lambda + 2\mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{v}V_i + \mu\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{v}V_i + (\lambda + \mu)\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{v}U_i \qquad (۲-۳۳)$$

$$\int_{\Omega^e}\left(\tau_0\boldsymbol{\varphi}_{i}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}\ddot{C}_i + \boldsymbol{\varphi}_{i}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}\dot{C}_i + D_0\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j,x}^{c}C_i + D_0\boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j,y}^{c}C_i + \kappa\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{u}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{u}\dot{V}_i + \kappa\boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{v}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{v}\dot{V}_i\right)d\Omega = D_0\boldsymbol{\varphi}_{i,x}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}C_i + D_0\boldsymbol{\varphi}_{i,y}^{c}\boldsymbol{\varphi}_{j}^{c}C_i \qquad (۲-۳۴)$$

معادلات (۲-۳۲) تا (۲-۳۴) را می‌توان در غالب یک معادله ماتریسی که همان معادله کوپل اجزا محدود توسعه‌یافته است به شکل زیر نوشت:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\boldsymbol{\eta}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\boldsymbol{\eta}}\} + [\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\eta}\} = \{\mathbf{F}\} \qquad (۲-۳۵)$$

در رابطه فوق، $[\mathbf{M}]$ ماتریس جرم، $[\mathbf{C}]$ ماتریس میرایی و $[\mathbf{K}]$ ماتریس سفتی هستند.

به علاوه، $\{\boldsymbol{\eta}\}$ بردار مجهولات گره‌ای و $\{\mathbf{F}\}$ بردار نیروهای گره‌ای هستند. برای یک المان مبنا (e) ماتریس‌ها به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M^{UU}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M^{CC}}\end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{\eta}}+\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C^{CU}} & \mathbf{C^{CC}}\end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\eta}}+\begin{bmatrix}\mathbf{K^{UU}} & \mathbf{K^{UC}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K^{CC}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\eta}=\mathbf{F} \tag{۳۶-۲}$$

در معادله ماتریسی فوق، درایه‌های ماتریس $\mathbf{M}$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{M^{UU}}=\int_{\Omega}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{U}^{\mathbf{T}}}\rho\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{U}}\mathrm{d}\Omega \tag{۳۷-۲}$$

$$\mathbf{M^{CC}}=\int_{\Omega}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{C}^{\mathbf{T}}}\tau_{\mathbf{0}}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{C}}\mathrm{d}\Omega \tag{۳۸-۲}$$

که در آن‌ها، $\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{U}}$ و $\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{C}}$ به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{U}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_2 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_3 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_4 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_1 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_2 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_3 & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_4\end{bmatrix} \tag{۳۹-۲}$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{C}}=[\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \boldsymbol{\varphi}_3 \quad \boldsymbol{\varphi}_4] \tag{۴۰-۲}$$

در معادلات ماتریسی (۲-۳۶)، درایه‌های ماتریس $\mathbf{C}$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{C^{CU}}=\int_{\Omega}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{C}^{\mathbf{T}}}\boldsymbol{\kappa}\mathbf{B}^{\mathbf{U}}\mathrm{d}\Omega \tag{۴۱-۲}$$

$$\mathbf{C^{CC}}=\int_{\Omega}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{C}^{\mathbf{T}}}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{C}}\mathrm{d}\Omega \tag{۴۲-۲}$$

در معادله (۲-۴۱)، $\boldsymbol{\kappa}$ تابع دلتای دیراک می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\kappa}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{\kappa} \tag{۴۳-۲}$$

در معادلات ماتریسی (۲-۳۶)، درایه‌های ماتریس $\mathbf{K}$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{K^{UU}}=\int_{\Omega}\mathbf{B}^{\mathbf{U}^{\mathbf{T}}}\mathbf{D}\mathbf{B}^{\mathbf{U}}d\Omega \tag{۴۴-۲}$$

$$\mathbf{K^{UC}}=-\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{U}^{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{0}}\boldsymbol{\varphi}^{\boldsymbol{C}}d\Omega \tag{۴۵-۲}$$

$$\mathbf{K^{CC}}=\int_{\Omega}\mathbf{B}^{\mathbf{C}^{\mathbf{T}}}\mathrm{O}\mathbf{B}^{\mathbf{C}}d\Omega \tag{۴۶-۲}$$

در معادله (۲-۴۴)، $\mathbf{D}$ ماتریس سفتی و O ماتریس الاستیک نامیده می‌شوند و $\mathbf{B^U}$ ، $\boldsymbol{\alpha_0}$ و $\mathbf{B^C}$ به ترتیب، در معادلات (۲-۴۴)، (۲-۴۵) و (۲-۴۶) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mathbf{B^U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{1,x} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{2,x} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{3,x} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{4,x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{1,y} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{2,y} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{3,y} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi}_{4,y} \\ \boldsymbol{\varphi}_{1,y} & \boldsymbol{\varphi}_{1,x} & \boldsymbol{\varphi}_{2,y} & \boldsymbol{\varphi}_{2,x} & \boldsymbol{\varphi}_{3,y} & \boldsymbol{\varphi}_{3,x} & \boldsymbol{\varphi}_{4,y} & \boldsymbol{\varphi}_{4,x} \end{bmatrix} \tag{۴۷-۲}$$

$$\boldsymbol{\alpha_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_0} \tag{۴۸-۲}$$

$$\mathbf{B^C} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,x} & \varphi_{2,x} & \varphi_{3,x} & \varphi_{4,x} \\ \varphi_{1,y} & \varphi_{2,y} & \varphi_{3,y} & \varphi_{4,y} \end{bmatrix} \tag{۴۹-۲}$$

۲-۳- روش نیومارک[۴]

یکی از روش‌های مناسب برای حل معادله حرکت گسسته شده، استفاده از روش‌های خانواده نیومارک است. در اینجا از روش جابجایی برای حل معادله حرکت استفاده شده‌است[۳۲].

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\eta}}_{i+1} + \mathbf{K}\boldsymbol{\eta}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1} \tag{۵۰-۲}$$

ماتریس‌های $\mathbf{M}$ ، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{K}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی و $\mathbf{F}$ بردار نیرو هستندکه پیشتر نحوه محاسبه آن‌ها بحث شده‌است. هدف، محاسبه بردارهای تغییرات جابجایی، تغییرات سرعت و تغییرات شتاب که به ترتیب $\boldsymbol{\eta}$ ، $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ و $\ddot{\boldsymbol{\eta}}$ می‌باشد. جابجایی و سرعت به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i+1}} = \dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i}} + [(1-\zeta)\Delta t]\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i}} + (\zeta\Delta t)\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i+1}} \tag{۵۱-۲}$$

$$\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{i+1}} = \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{i}} + (\Delta t)\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i}} + [(0/5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i}} + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i+1}} \tag{۵۲-۲}$$

در معادلات فوق، پارامترهای β و ζ مشخصات پایداری و دقت الگوریتم را مشخص می‌کنند که به ترتیب ζ=۰/۵ و $\frac{1}{6} \le \beta \le \frac{1}{4}$ در نظر گرفته شده‌اند. برای گسترش معادلات خطی از معادلات زیر استفاده می‌شود.

$$\boldsymbol{\Delta\eta}_{\mathbf{i}} = (\Delta t)\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i}} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i}} + \beta(\Delta t)^2\boldsymbol{\Delta}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{i}} \tag{۵۳-۲}$$

---

[۴] Newmark method

$$\mathbf{\Delta\dot{\eta}_i} = (\Delta t)\mathbf{\ddot{\eta}_i} + (\zeta\Delta t)\mathbf{\Delta\ddot{\eta}_i} \quad (۵۴\text{-}۲)$$

$$\mathbf{\Delta\ddot{\eta}_i} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\mathbf{\Delta\eta_i} - \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{\dot{\eta}_i} - \frac{1}{2\,\beta}\mathbf{\ddot{\eta}_i} \quad (۵۵\text{-}۲)$$

با جایگذاری معادله (۲-۵۵) در (۲-۵۴)، فرم ساده شده تغییرات سرعت به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\mathbf{\Delta\dot{\eta}_i} = \frac{\zeta}{\beta\Delta t}\mathbf{\Delta\eta_i} - \frac{\zeta}{\beta}\mathbf{\dot{\eta}_i} + \Delta t(1 - \frac{\zeta}{2\,\beta})\mathbf{\ddot{\eta}_i} \quad (۵۶\text{-}۲)$$

برای بدست آوردن روابط نهایی برای استفاده از روش نیومارک از روابط زیر استفاده شده است.

$$a_1 = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}M + \frac{\zeta}{\beta\Delta t}C \quad (۵۷\text{-}۲)$$

$$a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t}M + \left(\frac{\xi}{\beta} - 1\right)C \quad (۵۸\text{-}۲)$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)M + \Delta t\left(\frac{\zeta}{2\beta} - 1\right)C \quad (۵۹\text{-}۲)$$

$$\widehat{K} = K + a_1 \quad (۶۰\text{-}۲)$$

با جایگذاری روابط زیر در رابطه (۲-۵۰) بردار تغییرات نیرو محاسبه می‌شود.

$$\widehat{F}_{i+1} = F_{i+1} + a_1\eta_i + a_2\dot{\eta}_i + a_3\ddot{\eta}_i \quad (۶۱\text{-}۲)$$

$$\eta_{i+1} = \frac{\widehat{F}_{i+1}}{\widehat{K}} \quad (۶۲\text{-}۲)$$

$$\dot{\eta}_{i+1} = \frac{\xi}{\beta\Delta t}(\eta_{i+1} - \eta_i) + \left(1 - \frac{\xi}{\beta}\right)\dot{\eta}_i + \Delta t(1 - \frac{\xi}{2\beta})\ddot{\eta}_i \quad (۶۳\text{-}۲)$$

$$\ddot{\eta}_{i+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}(\eta_{i+1} - \eta_i) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\eta}_i - (\frac{1}{2\beta} - 1)\ddot{\eta}_i \quad (۶۴\text{-}۲)$$

۲-۴- تقریب تابع غنی‌سازی[۵]

در روش اجزای محدود توسعه‌یافته، تابع غنی‌سازی را می‌توان به روش زیر تقریب زد.[۳۳]

$$u^h(x) = \sum_{\forall I} N_I(x)u_I + \sum_{\forall I} \varphi_I(x)\psi(x)q_I \quad (۶۵\text{-}۲)$$

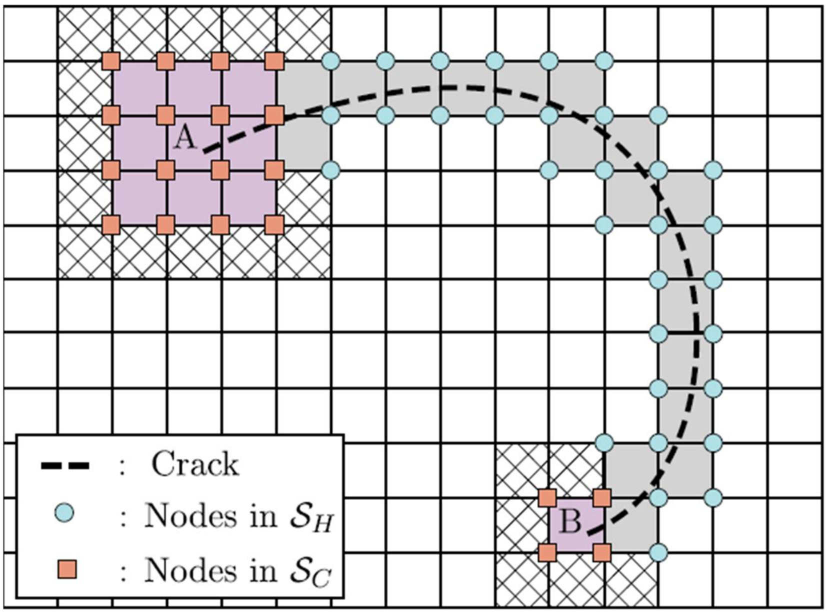
در رابطه فوق،N_I ها توابع شکل استاندارد هستند. u_I ها درجات آزادی استاندارد گره‌ای هستند. q_I ها مقادیر گره‌ای مجهولی هستند که تنظیم غنی‌سازی را بر عهده دارند. توابع $\varphi_I(x)$ و $\psi(x)$ به ترتیب

Enrichment function [۵]

توابع شکل و تابع غنی‌سازی هستند. لازم به ذکر است که توابع شکل $N_I(x)$ و $\varphi_I(x)$ یکسان فرض شده‌اند. همچنین در رابطه فوق، عبارت اول در سمت راست تقریب اجزای محدود استاندارد است و عبارت دوم شامل عبارات غنی‌سازی می‌باشد.

۲-۵- مدلسازی یک ترک به روش اجزای محدود توسعه‌یافته

یک صفحه مطابق شکل (۲-۱) به عنوان مدل المان محدود در نظر گرفته شده است.[۳۳]



شکل ۲-۱- نمایش یک ترک در شبکه اجزای محدود توسعه یافته همراه با المان‌های غنی‌سازی شده گام (دایره) و نوک (مربع) [۳۳]

به گره‌های المان‌های نوک ترک گره‌های غنی‌سازی‌شده گفته می‌شود که با S_C نشان داده شده است. به گره‌های روی المان‌های مسیر ترک گره‌های غنی‌سازی‌شده گام گفته می‌شود که با S_H نشان داده شده است و گره‌های روی المان‌هایی که توسط ترک بریده نشده است با S_A نشان داده شده است.

میدان جابجایی در روش اجزای محدود توسعه یافته برای یک المان غنی‌سازی‌شده شامل ترک به صورت زیر است [۳۴].

$$u(x,y,t) = \sum_{n \epsilon S_A} N_n(x,y) a_n(t) + \sum_{n \epsilon S_H} \mathrm{N}_n(x,y)[H(z) - H(z_n)] b_n(t) + \sum_m \sum_{n \epsilon S_C} \mathrm{N}_n(x,y)[F_m(r,\varphi) - F_m(r_n, \varphi_n)] C_{nm}(t) \quad (۲\text{-}۶۶)$$

در این رابطه $a_n(t)$ و $b_n(t)$ و $c_{nm}(t)$ هر سه بردار مجهولات گره‌ای تابع زمان هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

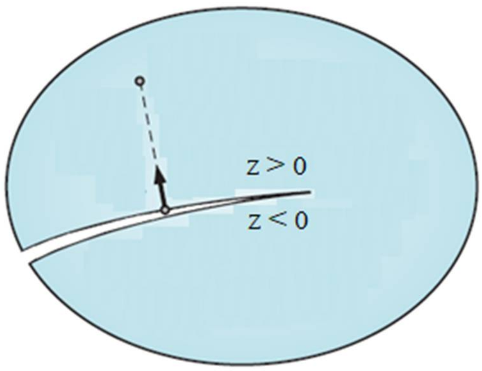
$$a_n(t) = \{a_n^u(t), a_n^v(t)\}^T \qquad (۶۷-۲)$$

$$b_n(t) = \{b_n^u(t), b_n^v(t)\}^T \qquad (۶۸-۲)$$

$$c_{nm}(t) = \{c_{nm}^u(t), c_{nm}^v(t)\}^T \qquad (۶۹-۲)$$

در رابطه (۲-۶۶) $H(z)$ تابع پله‌ای[۶] یکه است و z تابع موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است. تابع پله‌ای یکه در شکل زیر نشان داده شده‌است [۳۵].

$$H(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases} \qquad (۷۰-۲)$$



شکل ۲-۲- تابع پله‌ای واحد [۲۹]

در رابطه (۲-۶۶) F_m مجموعه‌ای از توابع غنی‌سازی شده است که رفتار نزدیک نوک ترک را بر حسب مختصات محلی نوک ترک $(\varphi.r)$ به صورت زیر تقریب می‌زند[۳۴]:

$$\{F_m\} = \{\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\} \qquad (۷۱-۲)$$

Heaviside function [۶]

فصل سوم

مکانیک شکست دینامیکی

۳-۱- مقدمه

طراحان،تولیدکنندگان،مهندسان و بازرسان برای اطمینان از عملکرد ایمن یک قطعه، توجه شایانی به کنترل شکست در ساختار ماده دارند. چرا که عدم توجه به این موضوع می‌تواند نتایج مصیبت‌باری را به ارمغان آورد. در مدهای شکست‌های ساختاری مختلف که شامل خمش، شکست و تغییر شکل پلاستیک می‌شود می‌توان پدیده شکست را یکتا دانست. پدیده شکست روی قطعه سالم تحت بار بیش از حد مجاز بسیار به ندرت اتفاق می‌افتد. معمولا علت این شکست وجود نقوص ساختاری در قطعه و یا وجود یک ترک است. ترک به واسطه نیروهای اعمالی نرمال و مکرر به مرور زمان در قطعه رشد می‌کند. نقطه شروع رشد ترک از محل نقوص ساختاری و یا تمرکز تنش رخ می‌دهد.

هدف در کنترل شکست، جلوگیری از وجود کاستی‌ها و ترک‌ها تحت بارگذاری‌های زیاد مجاز در قطعه است. طراح با محاسبه توان ساختاری قطعه توسط توابعی از اندازه ترک، حدود و اندازه قابل قبول ترک در قطعه را مشخص می‌سازد. در ابتدا باید موقعیت‌هایی که ترک‌ها در آن قرار دارند و جهت رشد آن‌ها مشخص شود. سپس به بررسی و تحلیل آن بر اساس ایجاد اطلاعاتی مبنی بر زمان رشد ترک و قدرت ساختاری به وسیله توابعی ار اندازه ترک پرداخت. به این روند، تحلیل محدوده آسیب‌پذیری[۷] گفته می‌شود. یکی از راه‌های رفع مشکل ترک در قطعه، تعمیر و یا جایگزینی ساختاری ترک و یا جایگزینی جزئی دیگر روی منطقه ترک می‌باشد. انتخاب موادی که در مقابل ترک مقاوم‌تر هستند از راه‌های بسیار خوب برای جلوگیری از شکست می‌باشد که در مرحله طراحی اولیه باید توجه شود. بهبود طراحی ساختاری در قطعه نیز یکی از عوامل مؤثر این امر می‌باشد.

به ابزار بکار گرفته شده در محاسبات ریاضی تحلیل محدوده آسیب‌پذیری، مکانیک شکست گفته می‌شود. در این تحلیل مفاهیم و معادلاتی از چگونگی رشد ترک و چگونگی تاثیر ترک بر روی قدرت ساختاری قطعه ارائه می‌شود. در ۲۵ سال گذشته علم مکانیک شکست تکامل بسیاری در حوزه ابزار

---

[۷] Damage tolerance analysis

مکانیکی کاربردی داشته است. ممکن است تحلیل کاملی نباشد اما تنها تحلیل مهندسی مناسب در دسترس است[۳۶].

۳-۲- انتگرال J

انتگرال J را می‌توان برای مسیر جمع شونده‌ای بسمت نوک ترک به صورت زیر بیان کرد[۳۷]:

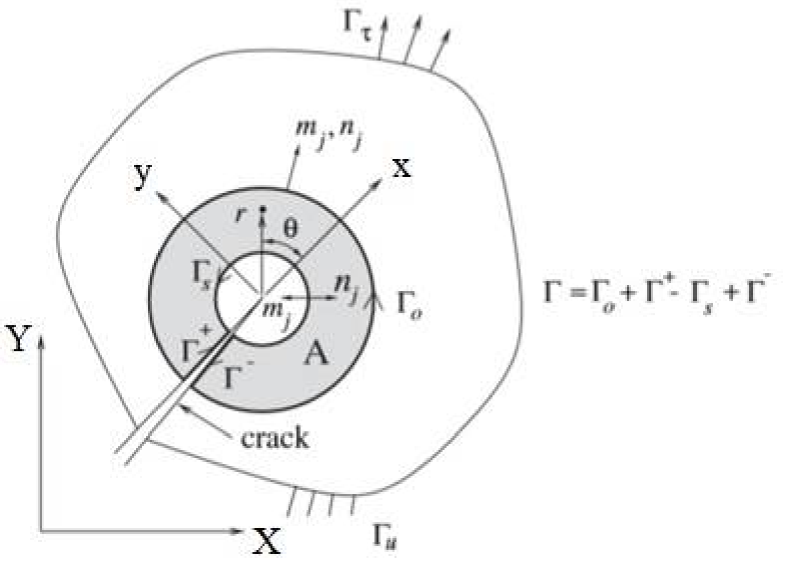
$$J = \lim_{\Gamma_s \to 0} \int_{\Gamma_s} (w\delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j d\Gamma_s \tag{۳-۱}$$

در رابطه فوق، w چگالی انرژی کرنشی است. n_j بردار نرمال بیرونی بر مسیر Γ_s که در شکل (۳-۱) نمایش داده شده است. رابطه چگالی انرژی کرنشی به صورت زیر بیان می‌شود[۳۸]:

$$w = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} \tag{۳-۲}$$

انتگرال H را حول مسیر بسته با کمک رابطه (۳-۱) بازنویسی می‌کنیم:

$$H = \oint_{\Gamma} (w\delta_{1j} - \delta_{ij} u_{i,1}) m_j q d\Gamma \tag{۳-۳}$$



شکل۳-۱- مسیر انتگرال J در نزدیکی نوک ترک [۲۹]

همانطور که در شکل فوق، مشاهده می‌کنید روی مسیر Γ_0 رابطه $m_j = n_j$ و q=۰ و روی مسیر Γ_s رابطه $m_j = -n_j$ و q=۱ برقرار هستند. مسیر انتگرال‌گیری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma^+ - \Gamma_s + \Gamma^- \quad (۴-۳)$$

با توجه به شرایط شکل (۳-۱) معادله (۳-۱) به صورت زیر شکسته می‌شود:

$$\lim_{\Gamma\to 0} H = \lim_{\Gamma_s\to 0} \int_{\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^--\Gamma_s} (w\delta_{1\,j} - \delta_{ij}u_{i.1})m_j q d\Gamma = \lim_{\Gamma_s\to 0} [\int_{\Gamma_0+\Gamma^++\Gamma^-} (w\delta_{1\,j} - \delta_{ij}u_{i.1})m_j q d\Gamma - \int_{\Gamma_s} (w\delta_{1\,j} - \delta_{ij}u_{i.1})n_j q d\Gamma] \quad (۵-۳)$$

به دلیل اینکه، روی مسیر Γ_0 ، $q = 0$ است، رابطه فوق بصورت رابطه زیر بازنویسی می‌شود:

$$J = -\lim_{\Gamma\to 0} H = -\lim_{\Gamma_s\to 0} \oint_{\Gamma} (w\delta_{1\,j} - \delta_{ij}u_{i.1})m_j q d\Gamma \quad (۶-۳)$$

با استفاده از تئوری دیورژانس[۸] و تابع وزنی q، ناحیه انتگرال‌گیری هم‌ارز[۹] به صورت زیر بدست می‌آید:

$$J = \int_A (\delta_{ij}u_{i.1} - w\delta_{1\,j})_{.j} q dA + \int_A (\delta_{ij}u_{i.1} - w\delta_{1\,j}) q_{.j} dA \quad (۷-۳)$$

۳-۳- انتگرال برهم‌کنش

یایو و همکاران [۳۳] از روش انتگرال برهم‌کنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش استفاده کردند. در این بخش، انتگرال برهم‌کنش با استفاده از برهم‌نهی میدان‌های کمکی و واقعی در انتگرال J محاسبه می‌شوند. انتگرال J برای اعمال همزمان دو بارگذاری مستقل اصلی و کمکی بصورت زیر بدست است:

$$j^s = j + j^{aux} + M \quad (۸-۳)$$

در رابطه فوق، J^{aux} انتگرال J برای میدان کمکی است و M انتگرال برهم کنش می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M = \int_A \left(\sigma_{ij}u_{i.1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i.1} - w^{int}\delta_{1j}\right) q_{.j} dA + \int_A \left(\delta_{ij}u_{i.1}^{aux} + \delta_{ij}^{aux}u_{i.1} - w^{int}\delta_{1\,j}\right)_{.j} q dA \quad (۹-۳)$$

در رابطه فوق، w^{int} چگالی انرژی کرنشی برهم‌کنش است که به صورت زیر بیان می‌شود:

Divergence theorem ۸

Equivalent domain integral (EDI) ۹

$$w^{int} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\varepsilon^{m}) \quad (۳-۱۰)$$

با توجه به اینکه $\sigma_{ij,j}^{aux} = 0$ است، با مشتق‌گیری از عبارت اول در سمت راست معادله (۳-۹)، انتگرال برهم‌کنش M بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$M = \int_A(\delta_{ij}u_{i.1}^{aux} + \delta_{ij}^{aux}u_{i.1} - w^{int}\delta_{ij})q_{.j}dA + \int_A \big(\delta_{ij}u_{i.1\,j}^{aux} + \delta_{ij}^{aux}u_{i.1\,j} - w_{.1}^{int}\big)qdA \quad (۳-۱۱)$$

در رابطه فوق، مشتق جزئی w^{int} نسبت به x_1 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{w^{int}}{\partial x_1} = \sigma_{ij}u_{i.j1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i.j1} + \frac{\partial w^{int}}{\Delta c}\frac{\partial \Delta c}{\partial x_1} + (\frac{\partial w^{int}}{\partial x_1})_{exp} \quad (۳-۱۲)$$

لازم به ذکر است که برای مواد ایزوتروپیک و همگن، تانسور الاستیک و ضریب مواد به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial w^{int}}{\partial \Delta c} = -\alpha_0\varepsilon_{ll}^{aux} \quad (۳-۱۳)$$

رابطه فوق، مشتق w^{int} را بر حسب تغییرات غلظت بیان می‌نماید. با استفاده از این رابطه، w^{int} به صورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$w^{int} = \Big[\big[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\big(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\big)\big]\varepsilon_{kl} - \alpha_0 c\delta_{ij}\Big]\varepsilon_{ij}^{aux} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^{aux} + \mu\big(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\big)\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^{aux} - \alpha_0\delta_{ij}c\varepsilon_{ij}^{aux} = \lambda\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ij}^{aux} + 2\,\mu\big(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}\big) - \alpha_0\varepsilon_{ll}^{aux}c \quad (۳-۱۴)$$

در نهایت، با جایگذاری روابط (۳-۱۳) و (۳-۱۴) و (۳-۱۲) در رابطه (۳-۱۱)، انتگرال برهم‌کنش M به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M = \int_A (\sigma_{ij}u_{i.1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i.1} - w^{int}\delta_{ij})q_{.j}dA + \int_A \left((-\alpha_0^C\varepsilon_{ll}^{aux})\frac{\partial \Delta c}{\partial x_1}\right)qdA \quad (۳-۱۵)$$

فصل چهارم

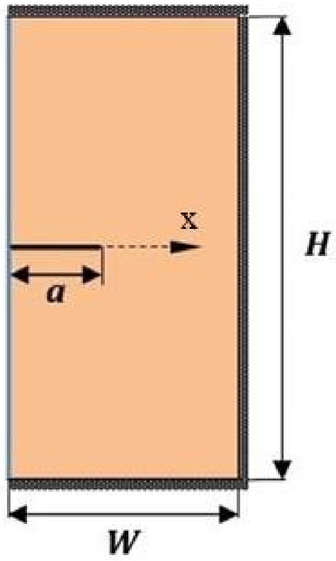
نتایج

۴-۱- مقدمه

در این بخش به تحلیل و بررسی تغییرات غلظت در صفحه‌ای با هندسه مشخص تحت شرایط مرزی متفاوت و دارای ترک پرداخته می‌شود. تغییرات غلظت در صفحه‌ی دارای ترک، به دلیل مرتبط بودن معادلات غلظت با معادلات حرکت و جابجایی سبب رشد ترک می‌شود. در ابتدا کارایی و دقت روش اجزای محدود توسعه‌یافته که برای استخراج داده‌های عددی بکار رفته است، در سه مثال بررسی می‌شود. در مثال اول تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I، برای باریکه‌ای دارای ترک در معرض شوک غلظت متقارن در مش‌بندی‌های مختلف بررسی شده‌است. در مثال دوم، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I و مود II برای باریکه‌ای دارای ترک عمود بر لبه در معرض شوک غلظت نامتقارن در مش‌بندی‌های مختلف بررسی شده‌است. در مثال سوم، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I و II، برای باریکه‌ای دارای ترک با زاویه α=۳۰ درجه در معرض شوک غلظت متقارن در مش‌بندی‌های مختلف بررسی شده‌است. پیرامون تاثیر سرعت موج تنش، سرعت موج غلظت و زمان آسایش بر تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش و توزیع غلظت به طور مفصل بحث شده است. لازم به ذکر است که تمام وجوه به غیر از لبه‌های تحت شرایط مرزی اعمالی در همه مثال‌ها عایق و بدون تنش فرض شده‌است.

۴-۲- ترک عمود برلبه در معرض شوک غلظت متقارن:

در این مثال، ضریب شدت تنش مود I با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش بر اساس روش المان محدود توسعه‌یافته محاسبه شده است. مسأله شامل ترکی عمود بر یکی از وجوه یک باریکه طراحی شده است. ضخامت باریکه در جهت z به اندازه‌ای بزرگ فرض شده است که شرایط کرنش صفحه‌ای بر مسأله حاکم شود. یک تغییر ناگهانی غلظت در وجه دارای ترک باریکه به عنوان بارگذاری اعمال شده است. صفحه در ابتدا بدون قید مکانیکی و بدون تنش می‌باشد. در اینجا یک صفحه محدود همگن با عرض W=۱، ارتفاع H=۲ و ترکی به طول a =۰/۵ واحد در فضای بی‌بعد موازی محور x مطابق شکل (۴-۱) به عنوان هندسه باریکه در نظر گرفته شده است.



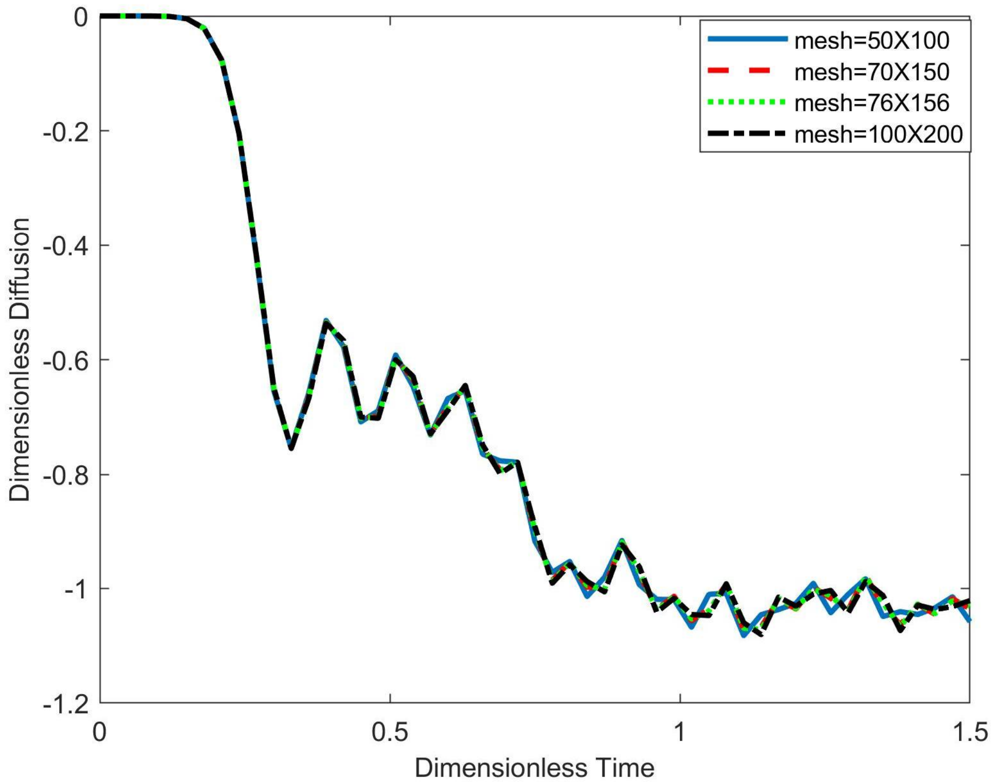
شکل ۴-۱- باریکه مستطیلی دارای یک ترک لبه‌ای و شرایط غلظتی

غلظت در وجه دارای ترک بطور ناگهانی تغییر می‌کند. در تحلیل المان محدود از چهار شبکه یکنواخت با المان مستطیلی چهار گره‌ای استفاده شده‌است. گام زمانی با توجه به زمان نهایی و تعداد گام زمانی برابر $\Delta t =$ ۰/۰۳ در فضای بی‌بعد، بدست آمده‌است. خواص صفحه مطابق جدول (۴-۱) در نظر گرفته شده است. طول و سرعت مشخصه بر اساس روابط (۲-۱۶) و (۲-۱۷) ترتیب l=۱۵/۰۴ (m) و v=۶۶۵/۰۶ (m/s) محاسبه شده‌اند.

جدول۴-۱- خواص ماده باریکه

ضریب انتقال غلظت	ضریب انتشار	غلظت مرجع $({}^{mol}/{}_{m^3})$	ضریب انتقال غلظت $({}^{1}/{}_{K})$	چگالی $({}^{kg}/{}_{m^3})$	نسبت پواسون	مدول یانگ (Gpa)
۲۹۱۶۶/۳۰۹	۱۰۰۰۰	۹۳۵۴۰/۸۲۴	۱/۸۷۰۸۲۸۶۹۳	۲۰۰۰	۰/۳	۲/۳

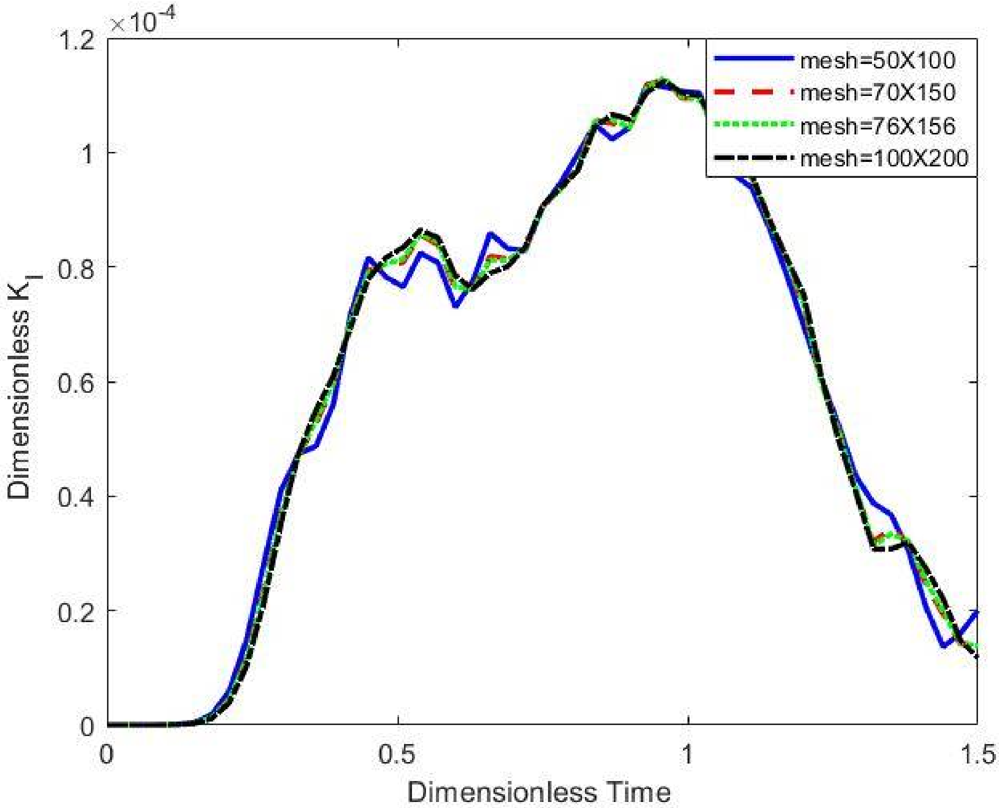
سرعت موج غلظت و موج تنش برای زمان آسایش τ_0=۰/۲ به ترتیب $\hat{C}_C$=۲/۲۳ و $\hat{C}_P$=۰/۵۳ واحد در فضای بی‌بعد بدست آمده‌اند. تغییرات زمانی غلظت در نوک ترک برای سه مش یکنواخت مستطیلی چهار گره‌ای در شکل (۴-۲) نشان داده شده‌است.



شکل ۴-۲- تغییرات غلظت در نوک ترک برای شبکه‌های یکنواخت چهارگره‌ای

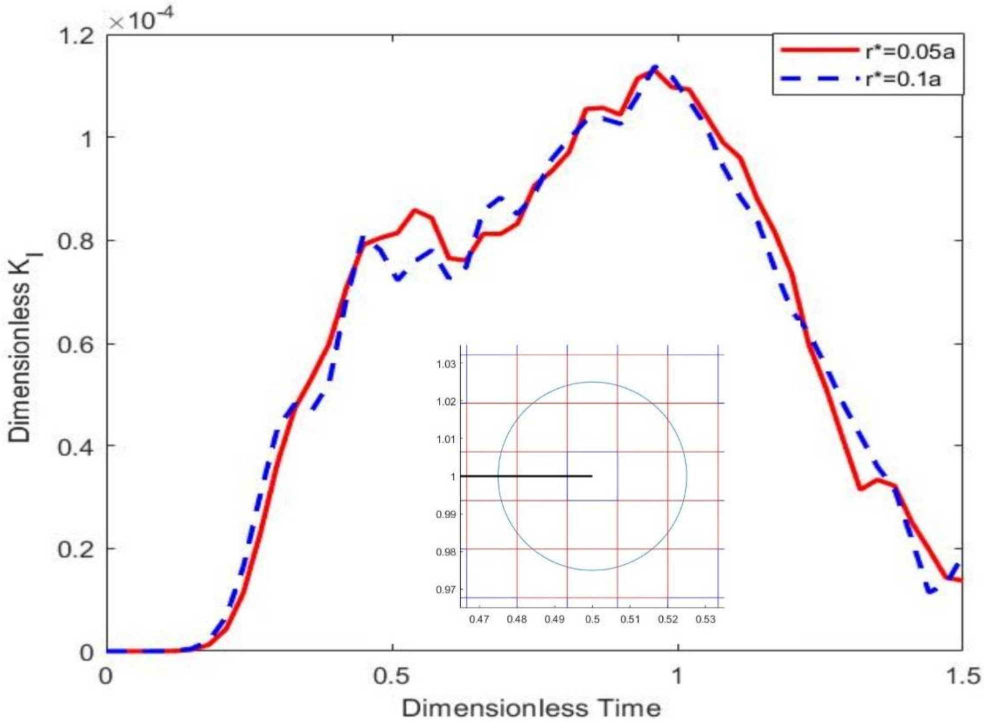
سرعت محدود موج غلظت در این شکل، براحتی قابل مشاهده است. موج غلظت در t=۰/۲۲ در فضای بی‌بعد به نوک ترک می‌رسد که این امر موجب افت شدید غلظت در نوک ترک شده است. نوسانات اضافی در منحنی تغییرات غلظت به علت استفاده از روش ضمنی نیومارک وارد شده‌است. موج تنش در زمان t=۰/۵۳ به نوک ترک می‌رسد و موجب کاهش دوباره غلظت در نوک ترک می‌شود. تطابق منحنی ها با تعداد المان‌های مختلف، نشانگر این است که نتایج بدست آمده مستقل از تعداد المان است.

بررسی اثر تعداد المان‌ها روی ضریب شدت تنش مود I در شکل(۴-۳) نشان داده شده‌است. با رسیدن موج غلظت به نوک ترک در زمان بی بعد t=۰/۲۲ ضریب شدت تنش مود I شروع به افزایش می‌کند. این افزایش تا زمان رسیدن موج تنش و بازتاب آن به ترتیب در زمان‌های t=۰/۵۳ و t=۰/۹۳ ادامه پیدا می‌کند. با عبور انعکاس موج تنش از نوک ترک ضریب شدت تنش مود I کاهش پیدا کرده‌است.



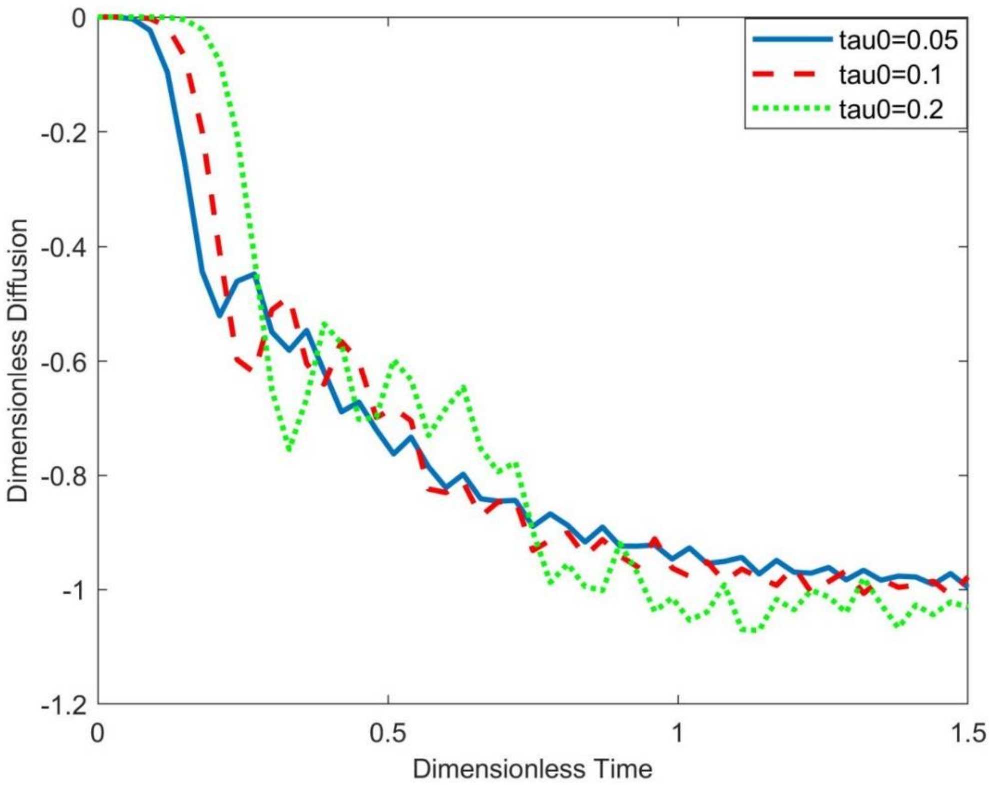
شکل ۴-۳- بررسی اثر تعداد المان‌ها روی ضریب شدت تنش مود I

اثر تغییر اندازه ناحیه انتگرال‌گیری روی مقدار ضریب شدت تنش در شکل (۴-۴) نشان داده شده‌است. در مدل گسسته، یک شبکه یکنواخت شامل ۱۵۶*۷۶ المان چهار گره‌ای با زمان آسایش τ_0=۰/۲ در فضای بدون بعد در نظر گرفته شده‌است. برای بررسی مستقل از ناحیه بودن از انتگرال بر هم‌کنش استفاده شده، که دو ناحیه حلقوی شکل در نظر گرفته شده و ضرایب شدت تنش مرتبط به هم مقایسه شده‌اند.



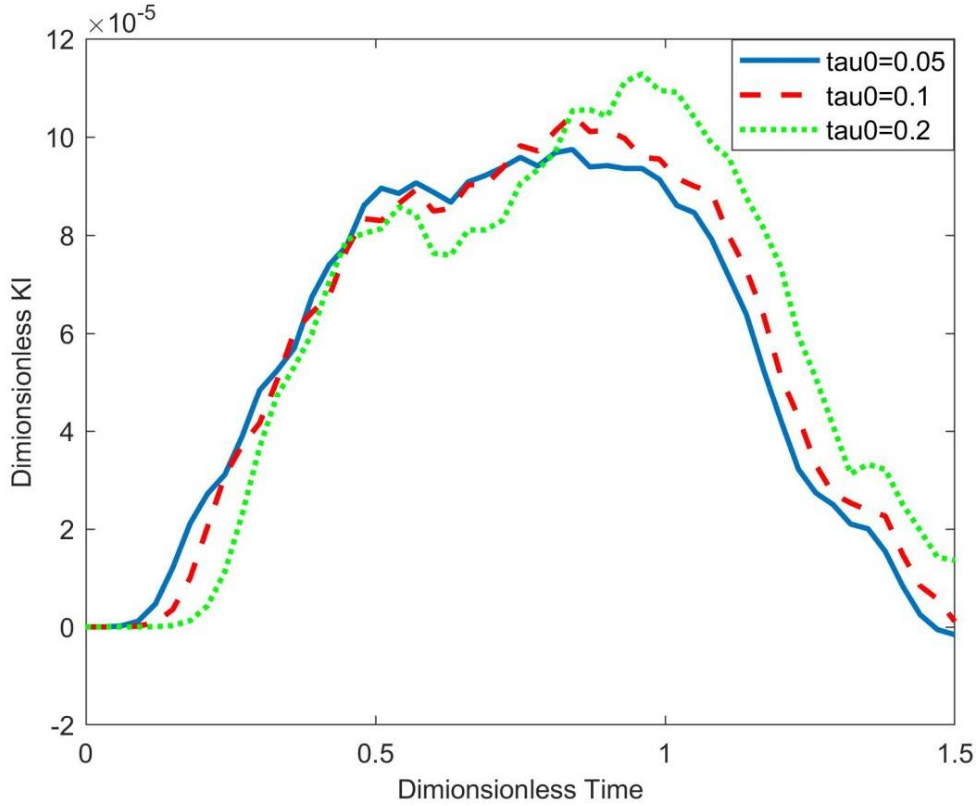
شکل ۴-۴- استقلال از ناحیه انتگرال‌گیری ضریب شدت تنش مود I

در شکل (۴-۵)، اثر زمان آسایش بر تغییرات زمانی غلظت در نوک ترک و در شکل (۴-۶)، تغییرات ضریب شدت تنش برای زمان‌های آسایش مختلف نشان داده شده‌است. یک شبکه یکنواخت شامل ۱۵۶*۷۶ المان چهار گره‌ای به همراه گام زمانی برابر Δt=۰/۰۲ در فضای بدون بعد، فرض شده و شعاع ناحیه انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای $\frac{r}{a}$=۰/۰۳۵ در نظر گرفته شده‌است. برای بررسی اثر سرعت موج غلظت بر تغییرات زمانی ضریب شدت تنش، سه مقدار مختلف برای سرعت موج غلظت شامل ۲/۲۴ و ۳/۱۶ و ۴/۴۷ = $\hat{C}_C$ محاسبه شده‌است. زمان آسایش مربوط به یک سرعت موج غلظت معلوم به ترتیب ۰/۲ و ۰/۱ و ۰/۰۵ = τ_0 هستند.



شکل ۴-۵- تاریخچه زمانی غلظت در نوک ترک برای مقادیر مختلف زمان آسایش

موج غلظت برای اولین‌بار در زمان‌های ۰/۲۲ و ۰/۱۵ و ۰/۱۱ = t_{tip} به ترتیب برای ۰/۲ و ۰/۱ و ۰/۰۵ = τ_0 به نوک ترک می‌رسد که با نتایج نشان داده شده در شکل (۴-۵) مطابقت قابل قبولی دارد. هنگامی که موج غلظت به نوک ترک می‌رسد، غلظت نوک ترک به طور ناگهانی تغییر کرده و ممکن است از مقدار شوک غلظتی اعمالی نیز تجاوز کند. با توجه به شکل فوق، می‌توان گفت زمان آسایش بزرگتر موجب تغییرات غلظت بیشتر می‌شود. تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود یک برای مقادیر مختلف زمان آسایش در شکل (۴-۶) نشان داده شده‌است.



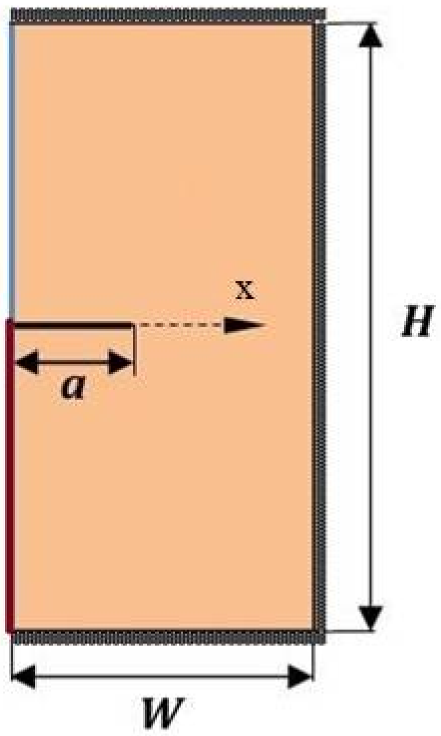
شکل ۴-۶- تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I برای زمان‌های آسایش مختلف

موج غلظت سریعتر از موج تنش است و هنگامی که به نوک ترک می‌رسد، سبب افزایش ضریب شدت تنش مود I می‌شود تا زمانی که موج تنش در زمان t=۰/۵۳ به نوک ترک برسد که روند افزایشی آن را متوقف می‌کند. سپس، ضریب شدت تنش دوباره افزایش پیدا می کند تا زمانی که بازتاب موج تنش از لبه سمت راست به نوک ترک برسد و سبب افت شدید ضریب شدت تنش شود.

۴-۳- ترک عمود بر لبه در معرض شوک غلظت غیر متقارن:

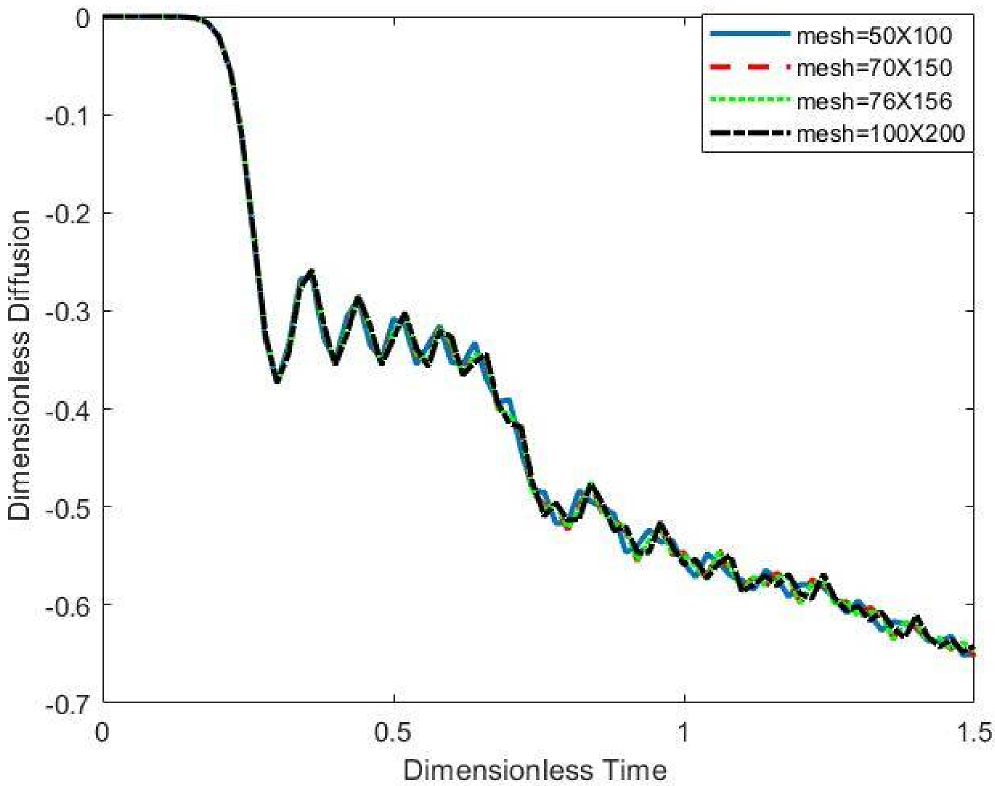
هندسه مورد استفاده در مثال قبل در این مثال تکرار شده‌است. خواص صفحه مطابق مثال قبل در جدول (۴-۱) معین شده‌است. مساله شامل ترکی عمود بر یکی از وجوه باریکه طراحی شده است. یک تغییر ناگهانی غلظت فقط در بخش بالایی لبه دارای ترک اعمال می‌شود. صفحه در ابتدا بدون قید

مکانیکی در غیاب تنش می‌باشد. تمامی وجوه دیگر باریکه و نیز ترک عایق غلظت و دما فرض شده‌است.



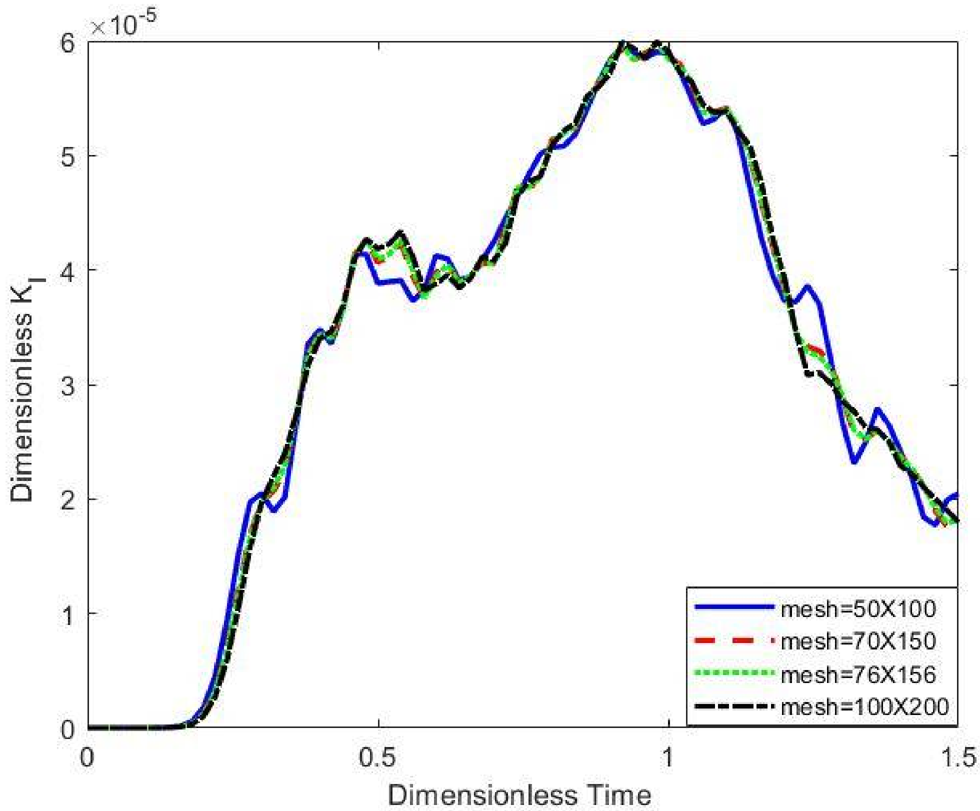
شکل ۴-۷- باریکه مستطیلی دارای یک ترک لبه‌ای و شرایط غلظتی

در تحلیل المان محدود از چهار شبکه یکنواخت با المان‌های چهار گره‌ای استفاده شده‌است. طول و سرعت مشخصه و شعاع ناحیه انتگرال‌گیری همانند مثال قبل فرض شده‌اند. گام زمانی و زمان آسایش به ترتیب برابر Δt=۰/۰۲ و $\tau_0 =$ ۰/۲ در فضای بدون بعد در نظر گرفته شده‌اند. همانند مثال قبل، سرعت موج غلظت و موج تنش به ترتیب $\hat{C}_C =$ ۲/۲۳ و $\hat{C}_P =$ ۰/۵۳ واحد در فضای بدون بعد است. تغییرات زمانی غلظت در نوک ترک برای شبکه‌های یکنواخت مستطیلی چهار گره‌ای در شکل (۴-۸) نشان داده شده‌است.



شکل ۴-۸- تغییرات غلظت در نوک ترک برای شبکه‌های یکنواخت چهارگره‌ای

موج غلظت در t=۰/۲۲ در فضای بی‌بعد به نوک ترک می‌رسد که این امر موجب افت شدید غلظت شده‌است. با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۵۳ دوباره غلظت در نوک ترک کاهش می‌یابد. نوسانات اضافی در منحنی تغییرات غلظت به علت استفاده از روش ضمنی نیومارک وارد شده‌است. در شکل (۴-۹) با رسیدن موج غلظت به نوک ترک در زمان بی بعد t=۰/۲۲ ضریب شدت تنش مود I شروع به افزایش می‌کند. این افزایش تا زمان رسیدن موج تنش و بازتاب آن به ترتیب در زمان‌های t=۰/۵۳ و t=۰/۹۳ ادامه پیدا می‌کند. با عبور انعکاس موج تنش از نوک ترک ضریب شدت تنش مود I کاهش پیدا کرده‌است.

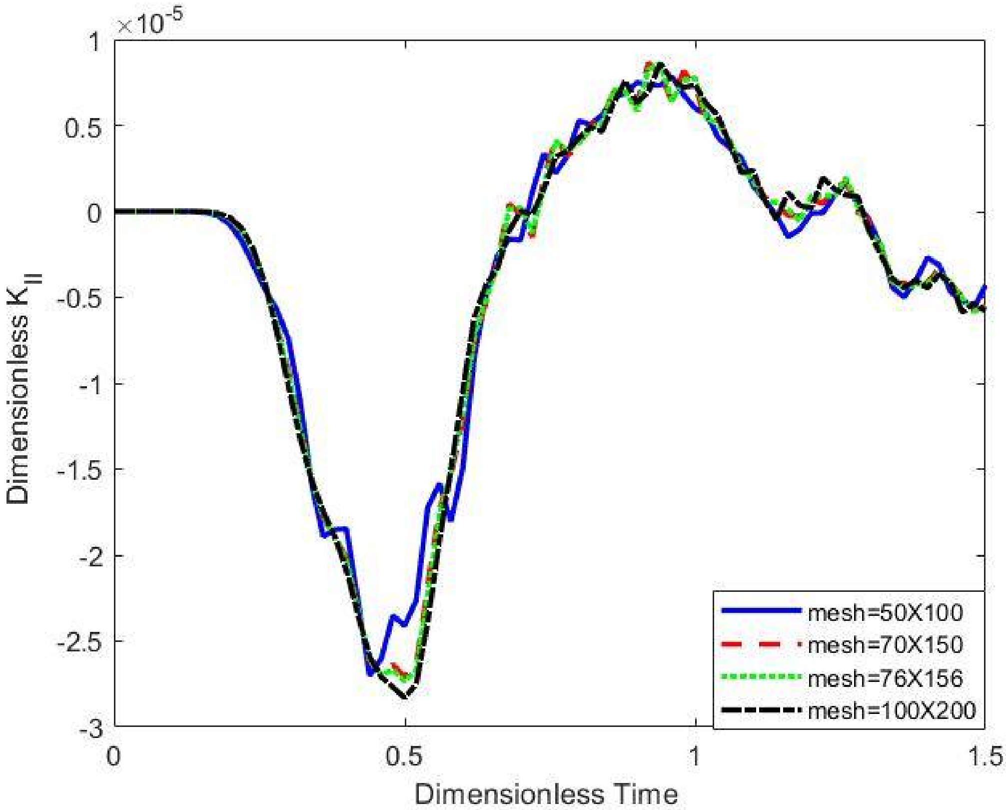


شکل ۴-۹- بررسی اثر تعداد المان‌ها روی ضریب شدت تنش مود I

در شکل (۴-۹) اثر تعداد المان‌های روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I بررسی شده‌است. با رسیدن موج غلظت به نوک ترک در زمان بی بعد t=۰/۲۲ ضریب شدت تنش مود I شروع به افزایش می‌کند. این افزایش تا زمان رسیدن موج تنش و بازتاب آن به ترتیب در زمان‌های t=۰/۵۳ و t=۰/۹۳ ادامه پیدا می‌کند. با عبور انعکاس موج تنش از نوک ترک ضریب شدت تنش مود I کاهش پیدا کرده‌است.

در شکل (۴-۱۰) اثر تعداد المان های روی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود II بررسی شده است. با رسیدن موج غلظت برای زمان آسایش $\tau_0 =$ ۰/۲ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود II شروع به کاهش می‌کند. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود II به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخ داده‌است. با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۵۳ به نوک ترک ضریب شدت تنش مود II افزایش یافته سپس به حالت نوسانات پیوسته خود ادامه می‌دهد. این امر تا رسیدن

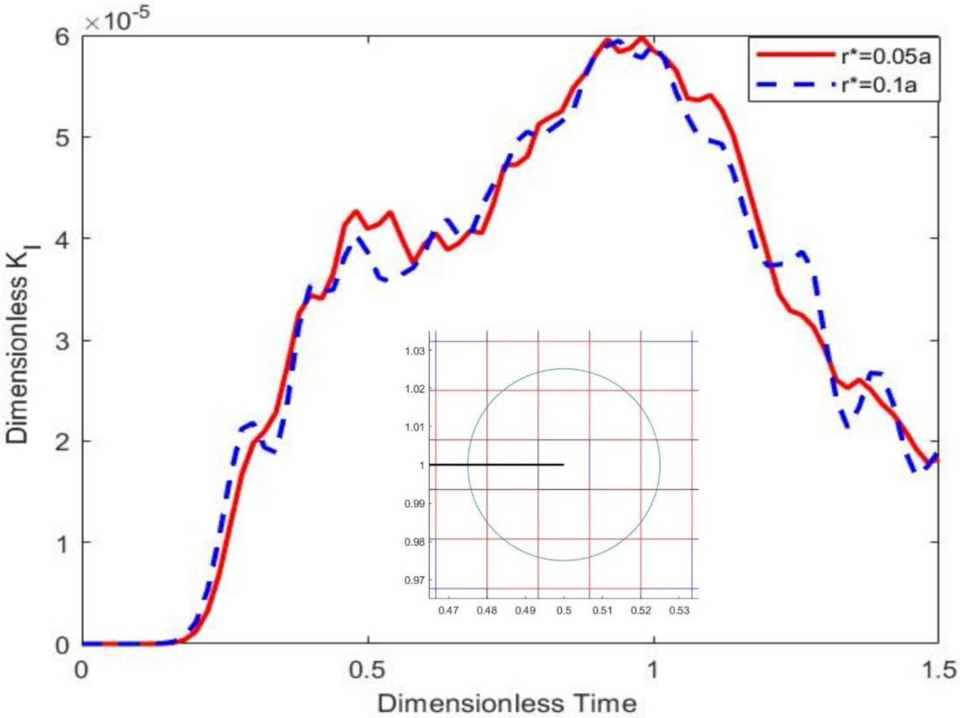
بازتاب موج تنش به نوک ترک در زمان t=۰/۹۳ ادامه پیدا می‌کند. با رسیدن بازتاب موج تنش به نوک ترک ضریب شدت تنش مود II شروع به کاهش می‌کند و سپس دوباره به نوسانات پایدار خود می‌رسد.



شکل ۴-۱۰- بررسی اثر تعداد المان‌ها روی ضریب شدت تنش مود II

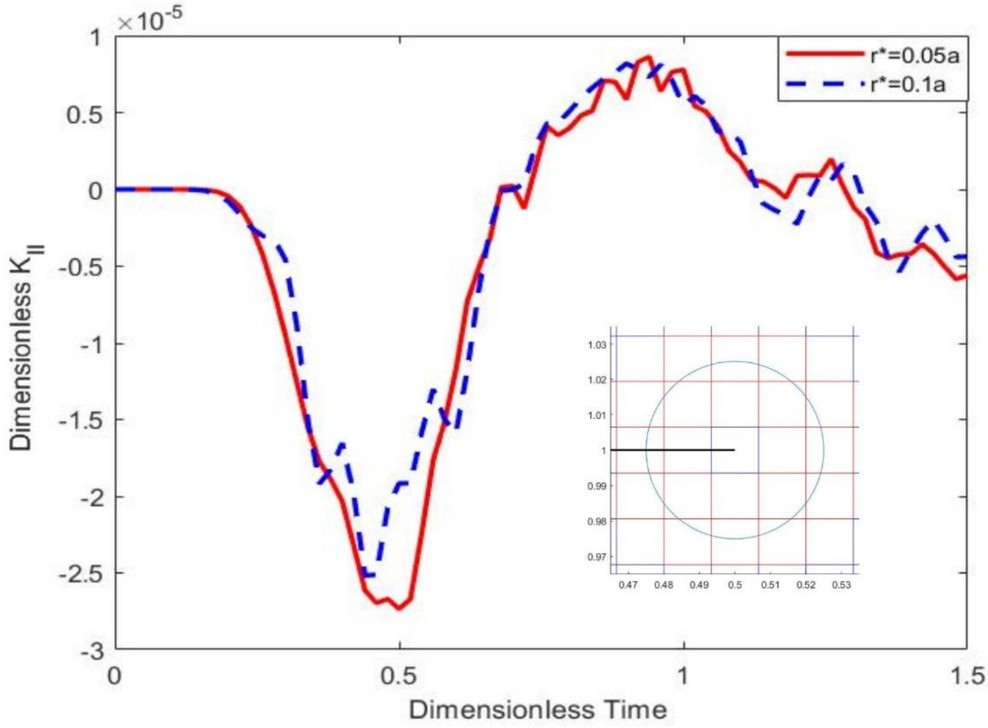
در شکل (۴-۱۱) اثر تغییر اندازه ناحیه انتگرال‌گیری روی مقدار ضریب شدت تنش مود I نشان داده شده است. در مدل گسسته، یک شبکه یکنواخت شامل ۱۵۶*۷۶ المان چهار گره‌ای با گام زمانی ۰/۲ $= \tau_0$ در فضای بدون بعد در نظر گرفته شده‌است. موج غلظت با سرعت ۲/۲۳ $= \hat{C}_C$ در فضای بدون بعد، در زمان t=۰/۲۲ به نوک ترک می‌رسد. بر این اساس مقدار ضریب شدت تنش مود I از صفر افزایش می‌یابد تا اینکه موج تنش و انعکاس آن به ترتیب در زمان‌های t=۰/۵۳ و t=۰/۹۳ به نوک ترک برسند که اولی باعث توقف روند افزایشی و دومی باعث کاهش ضریب شدت تنش می‌شود. برای

بررسی مستقل از ناحیه بودن از انتگرال برهم‌کنش استفاده شده،که دو ناحیه حلقوی شکل در نظر گرفته شده و ضرایب شدت تنش مرتبط با هم مقایسه شده‌اند.



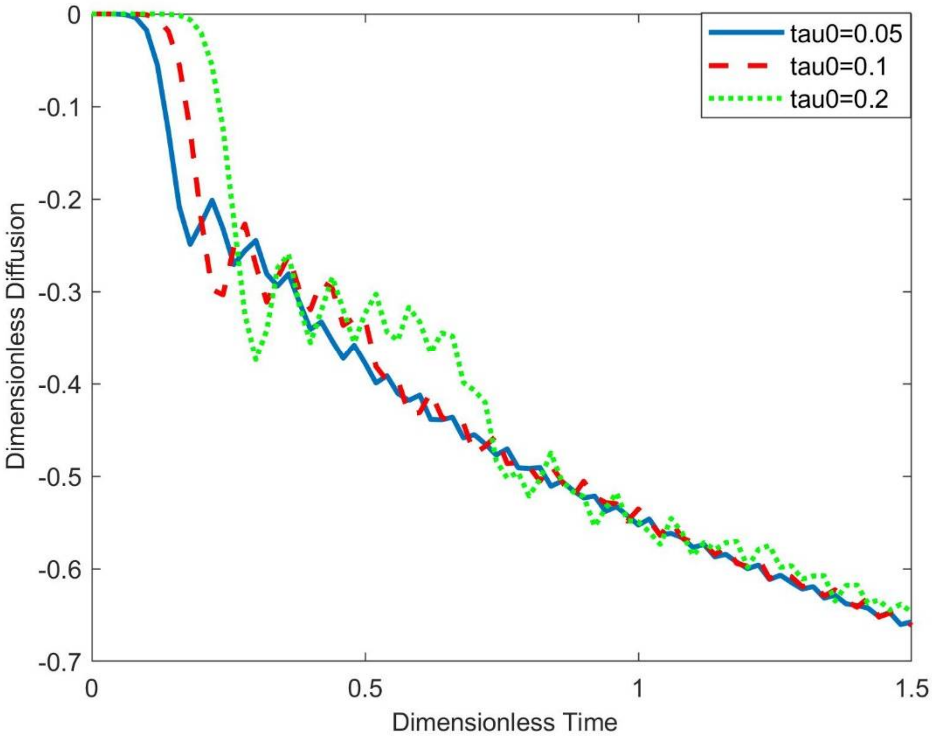
شکل ۴-۱۱- استقلال از ناحیه انتگرال‌گیری ضریب شدت تنش مود I

در شکل (۴-۱۲) اثر تغییر اندازه ناحیه انتگرال‌گیری روی مقدار ضریب شدت تنش مود II نشان داده شده است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۲۲ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود II کاهش پیدا می‌کند و با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۵۳ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود دو شروع به افزایش می‌کند. بازتاب موج تنش در زمان t=۰/۹۳ به نوک ترک میرسد. با رسیدن بازتاب موج تنش به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود II نیز شبیه ضریب شدت تنش مود I کاهش پیدا می‌کند.



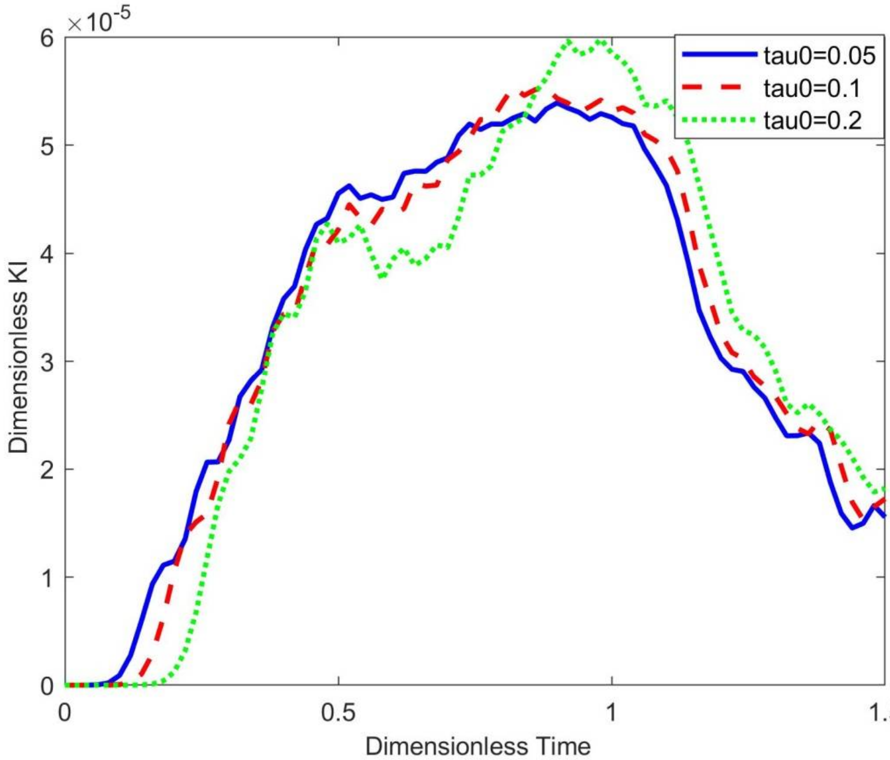
شکل ۴-۱۲- استقلال از ناحیه انتگرال‌گیری ضریب شدت تنش مود II

در شکل (۴-۱۳) منحنی تغییرات زمانی غلظت در نوک ترک برای زمان‌های آسایش مختلف نشان داده شده‌است. یک شبکه یکنواخت شامل ۱۵۶*۷۶ المان چهار گره‌ای با گام زمانی Δt=۰/۰۲ در فضای بدون بعد، فرض شده و شعاع ناحیه انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای $\frac{r}{a} =$ ۰/۰۳۵ در نظر گرفته شده‌است. برای بررسی اثر سرعت موج غلظت بر تغییرات زمانی ضریب شدت تنش، سه مقدار مختلف برای سرعت موج غلظت شامل ۲/۲۴ و ۳/۱۶ و ۴/۴۷ $= \hat{C}_C$ محاسبه شده‌است. زمان آسایش مربوط به یک سرعت موج غلظت معلوم به ترتیب ۰/۲ و ۰/۱ و ۰/۰۵ $= \tau_0$ هستند.



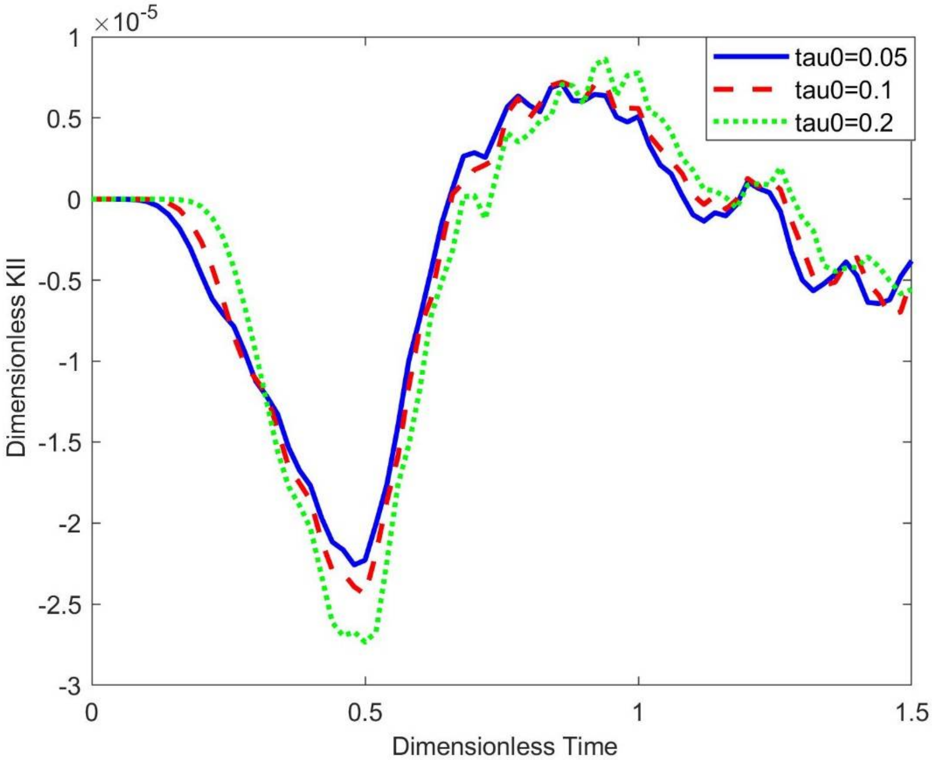
شکل ۴-۱۳- تغییرات زمانی غلظت در نوک ترک برای مقادیر مختلف زمان آسایش

موج غلظت برای اولین‌بار در زمان‌های ۰/۲۲ و ۰/۱۵ و ۰/۱۱ = t_{tip} به ترتیب برای ۰/۲ و۰/۱ و ۰/۰۵ = τ_0 به نوک ترک می‌رسد که با نتایج نشان داده شده در شکل (۴-۱۳) مطابقت قابل قبولی دارد. هنگامی که موج غلظت به نوک ترک می‌رسد، غلظت نوک ترک به طور ناگهانی تغییر کرده و ممکن است از مقدار شوک غلظتی اعمالی نیز تجاوز کند. به طور کلی هر چه مقدار زمان آسایش بزرگتر فرض شود سرعت موج غلظت کمتر شده و دیرتر به نوک ترک می‌رسد.



شکل ۴-۱۴- تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I برای زمان‌های آسایش مختلف

در شکل (۴-۱۴) منحنی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I برای زمان‌های آسایش مختلف نشان داده شده‌است. موج غلظت سریعتر از موج تنش است و هنگامی که در زمان‌های ۰/۲۲ و ۰/۱۵ و ۰/۱۱ = t_{tip} به ترتیب برای ۰/۲ و ۰/۱ و ۰/۰۵ = τ_0 به نوک ترک می‌رسد، سبب افزایش ضریب شدت تنش مود یک می‌شود تا زمانی که موج تنش در زمان t=۰/۵۳ به نوک ترک برسد. با رسیدن بازتاب موج تنش از لبه سمت راست در زمان t=۰/۹۳ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود یک کاهش می‌یابد. هرچه زمان آسایش بزرگتر شود تغییرات افزایشی و کاهشی ضریب شدت تنش مود یک شدیدتر خواهد شد.

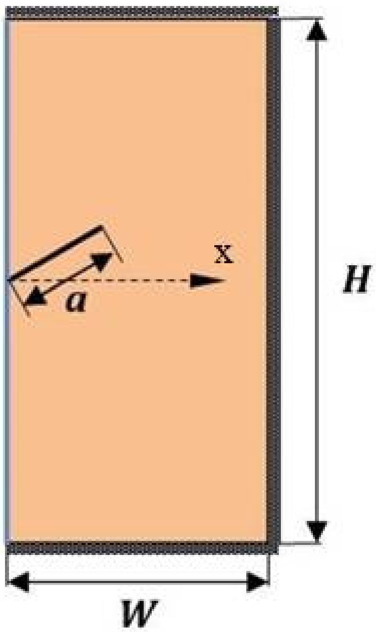


شکل ۴-۱۵- تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود II برای زمان‌های آسایش مختلف

در شکل (۴-۱۵) منحنی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود II برای زمان‌های آسایش مختلف نشان داده شده‌است. ضریب شدت تنش مود II تا زمان رسیدن موج غلظت به نوک ترک ثابت می‌ماند. هنگامی که موج غلظت در زمان‌های ۰/۲۲ و ۰/۱۵ و ۰/۱۱ = t_{tip} به ترتیب برای ۰/۲ و ۰/۱ و ۰/۰۵ = τ_0 به نوک ترک می‌رسد، ضریب شدت تنش مود II کاهش پیدا می‌کند. هرچه مقدار زمان آسایش بزگتر باشد این کاهش دیرتر اتفاق می‌افتد. با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۵۳ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود II شروع به افزایش می‌کند. این افزایش تا زمان رسیدن بازتاب موج تنش به نوک ترک در زمان t=۰/۹۳ ادامه پیدا می‌کند و سپس با دور شدن این موج از نوک ترک ضریب شدت تنش مود II رفته رفته کاهش پیدا می‌کند.

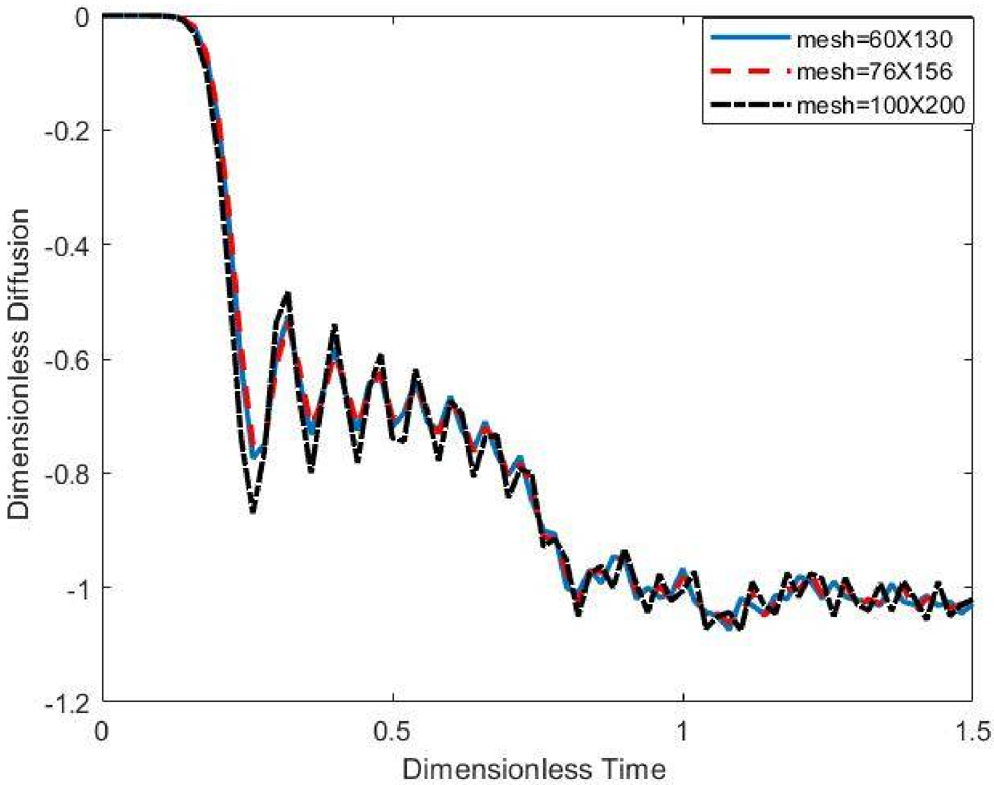
۴-۴- ترک مایل بر لبه در معرض شوک غلظت متقارن:

مطابق شکل (۴-۱۶)، یک باریکه دارای ترک با خواص مکانیکی و جنس مشابه مثال اول مطابق با جدول (۴-۱) در نظر گرفته شده‌است. یک صفحه محدود همگن با عرض W=۱ و ارتفاع H=۲ دارای ترکی مایل با زاویه α=۳۰ درجه نسبت به محور x و طول a=۰/۵ در فضای بدون بعد فرض شده‌است. وجه دارای ترک در معرض شوک غلظتی قرار گرفته است. این باریکه بدون قید مکانیکی و بدون تنش در نظر گرفته شده‌است. همه وجوه دیگر باریکه و نیز ترک عایق می‌باشند. در تحلیل المان محدود از سه شبکه یکنواخت با المان مستطیلی چهار گره‌ای استفاده شده‌است. گام زمانی برابر Δt=۰/۰۲ در فضای بی‌بعد، فرض شده‌است. طول و سرعت مشخصه بر اساس روابط (۲-۱۶) و (۲-۱۷) به ترتیب l=۱۵/۰۴ (m) و(m/s) v=۶۶۵/۰۶ محاسبه شده‌اند.



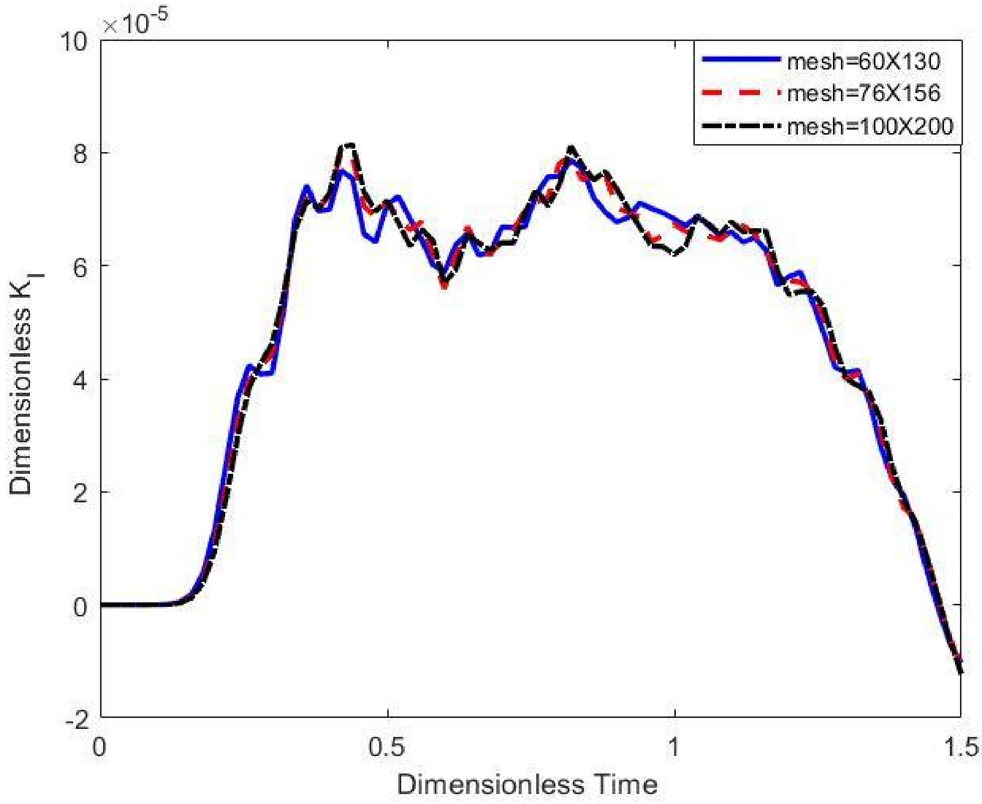
شکل ۴-۱۶- هندسه و بارگذاری یک باریکه دارای ترک لبه‌ای مایل

تغییرات زمانی غلظت در نوک ترک برای شبکه‌های یکنواخت مختلف در شکل (۴-۱۷) نشان داده شده‌است.

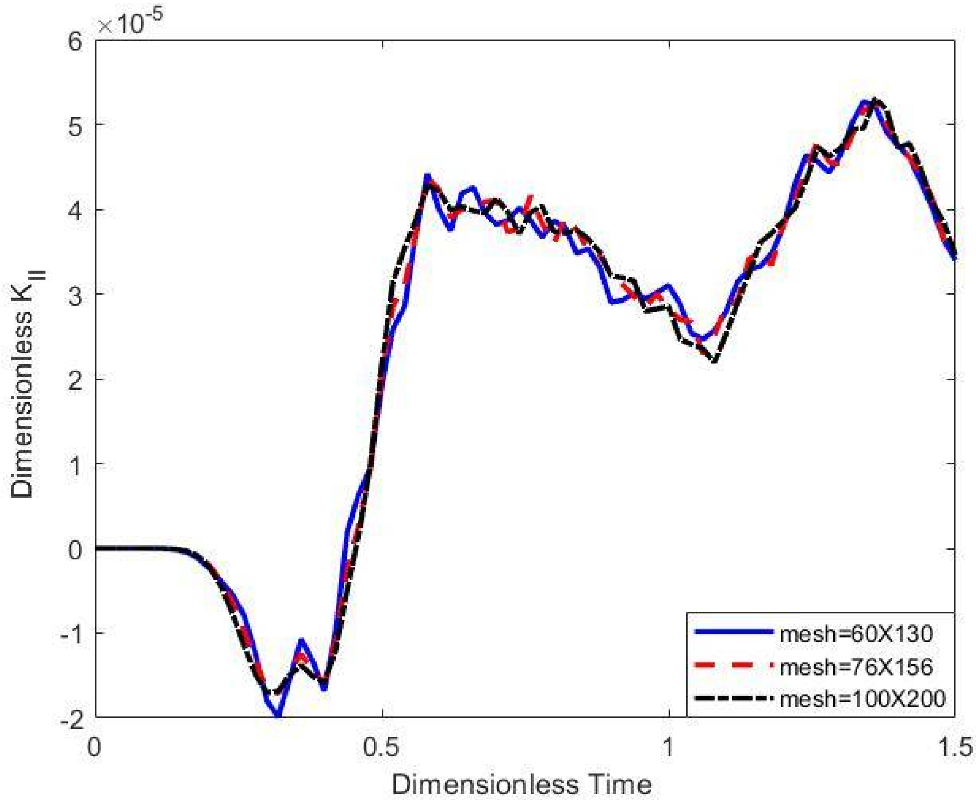


شکل ۴-۱۷- تغییرات غلظت در نوک ترک برای شبکه‌های یکنواخت مختلف

همانطور که قبلا گفته شد، هنگامی که موج غلظت به نوک ترک می‌رسد، یک ناپیوستگی محدود اتفاق می‌افتد. موج غلظت در t=۰/۲۲ در فضای بی‌بعد به نوک ترک می‌رسد که این امر موجب افت شدید غلظت در نوک ترک شده است. با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۵۳ به نوک ترک غلظت افت محدودی پیدا می‌کند. اثر بازتاب موج تنش در نوک ترک تغییرات چشم‌گیری را ایجاد نکرده‌است. تطابق منحنی‌ها با تعداد المان‌های مختلف، نشانگر این است که نتایج بدست آمده مستقل از تعداد المان است. تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود I و II ، برای شبکه‌های یکنواخت مختلف به ترتیب در شکل‌های (۴-۱۸) و (۴-۱۹) نشان داده شده‌است.



شکل ۴-۱۸- بررسی اثر تعداد المان‌ها روی ضریب شدت تنش مود I

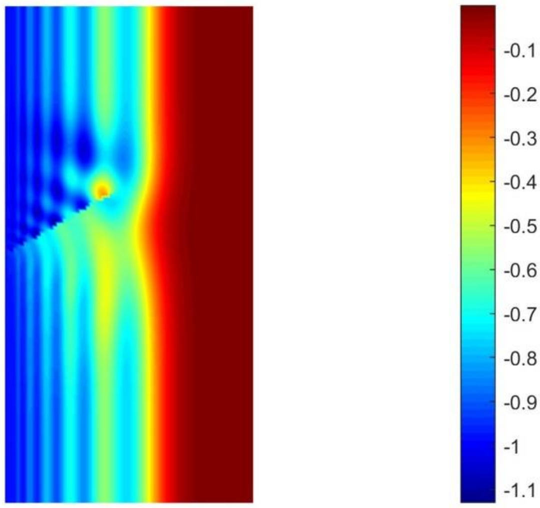


شکل ۴-۱۹- بررسی اثر تعداد المان‌ها روی ضریب شدت تنش مود II

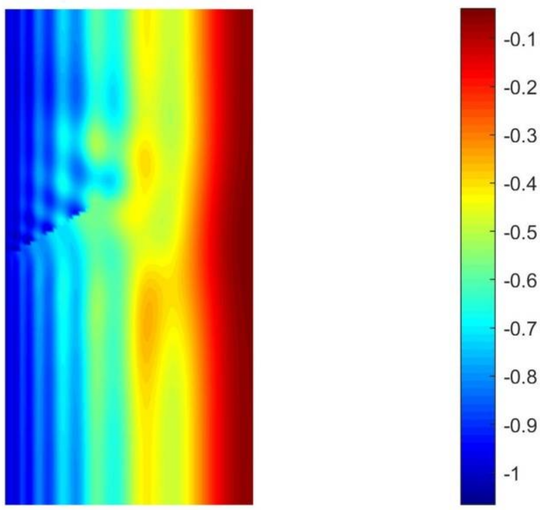
حداکثر تغییر در مقدار ضریب شدت تنش مود I ، زمانی که موج غلظت در زمان t=۰/۲۲ به نوک ترک می‌رسد اتفاق می‌افتد. ضریب شدت تنش مود I افزایش پیدا می‌کند این افزایش تا زمان رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۵۳ به نوک ترک ادامه می‌یابد. با رسیدن بازتاب موج تنش در زمان t=۰/۹۳ به نوک ترک ضریب شدت تنش مود I رفته رفته کاهش می‌یابد. همانطور که در شکل (۱۹-۴) قابل مشاهده است، ضریب شدت تنش مود II تا زمانی که موج غلظت به نوک ترک برسد تغییری نمی‌کند. با عبور موج غلظت از نوک ترک در زمان t=۰/۲۲ ضریب شدت تنش مود II ابتدا کاهش پیدا می‌کند و سپس به سرعت افزایش می‌یابد این امر تا رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۵۳ به نوک ترک ادامه پیدا می‌کند. با رسیدن بازتاب موج تنش در زمان t=۰/۹۳ به نوک ترک ضریب شدت تنش مود II شروع به افزایش می‌کند.

توزیع غلظت باریکه در ۱/۲ و ۰/۵ و ۰/۳ = t برای زمان‌های آسایش ۰/۵ و ۰/۱ و ۰/۲ = τ_0 در شکل‌های (۴-۲۰) تا (۴-۲۹) نشان داده شده‌است. عایق غلظتی بودن ترک و سرعت محدود موج غلظت به وضوح در این شکل‌ها مشاهده می‌شود. بازتاب موج غلظت از سطح ترک و تداخل با موج غلظت در نقاط بالایی، موج غلظت دوم را ایجاد می‌کند و موجب ناحیه کاهشی موج غلظت می‌گردد. این ناحیه در امتداد سطح ترک حرکت می‌کند و تا زمانی که پیشانی موج غلظت اعمال شده به نزدیکی نوک ترک برسد، ادامه پیدا می‌کند. با عبور شوک غلظتی اعمال شده از نوک ترک، این ناحیه کاهشی و نیز بازتاب موج غلظت با حرکت در جهت خود و دور شدن از نوک ترک، رفته رفته از بین می‌روند.

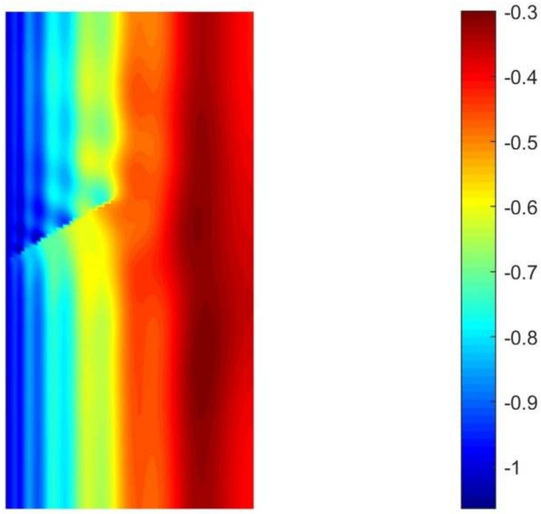
توزیع غلظت در زمان t=۰/۳ برای مقادیر ۰/۵ و ۰/۱ و ۰/۲ = τ_0 در شکل‌های (۴-۲۰) تا (۴-۲۲) نشان داده شده‌است.



شکل ۴-۲۰- کانتور غلظت در t=۰/۳ برای زمان آسایش $\tau_0 = ۰/۲$

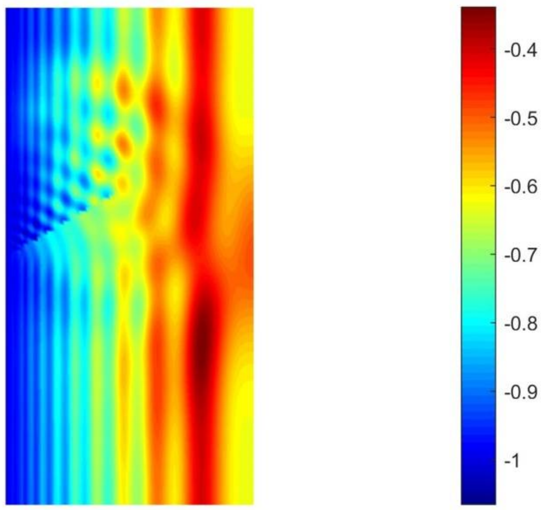


شکل ۴-۲۱- کانتور غلظت در t=۰/۳ برای زمان آسایش $\tau_0 = ۰/۱$

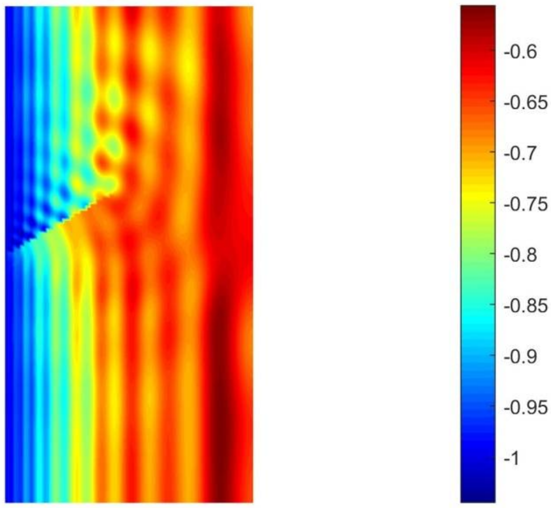


شکل ۴-۲۲- کانتور غلظت در t=۰/۳ برای زمان آسایش $\tau_0 = ۰/۰۵$

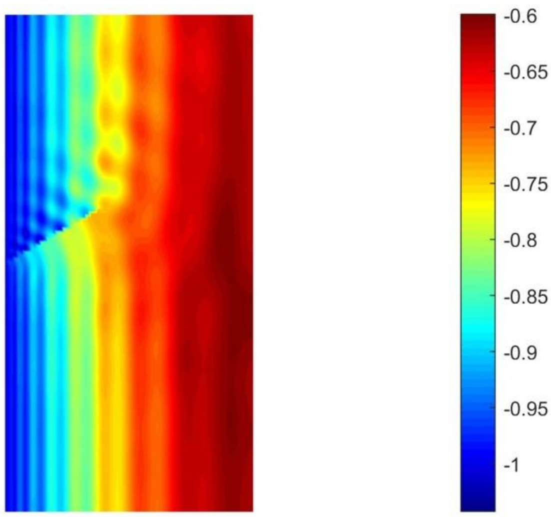
توزیع غلظت برای زمان t=۰/۵ برای مقادیر ۰/۰۵ و ۰/۱ و ۰/۲ $= \tau_0$ در شکل‌های (۴-۲۳) تا (۴-۲۵) نشان داده شده‌است.



شکل ۴-۲۳- کانتور غلظت در t=۰/۵ برای زمان آسایش $\tau_0 = ۰/۲$

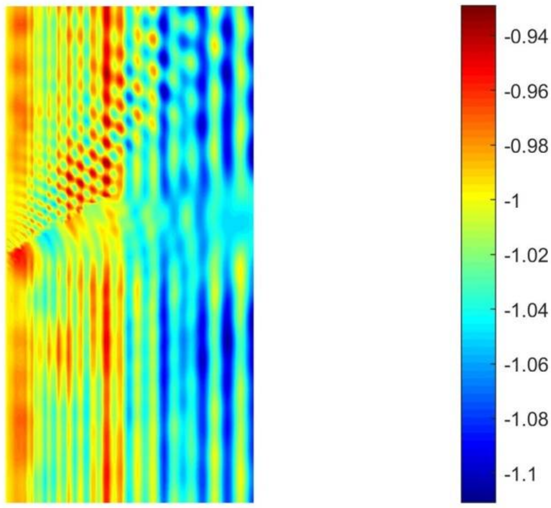


شکل ۴-۲۴-کانتور غلظت در t=۰/۵ برای زمان آسایش $\tau_0 =$ ۰/۱

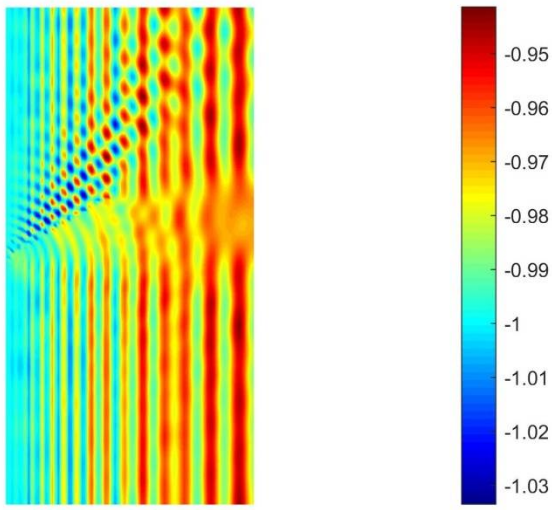


شکل ۴-۲۵-کانتور غلظت در t=۰/۵ برای زمان آسایش $\tau_0 =$ ۰/۰۵

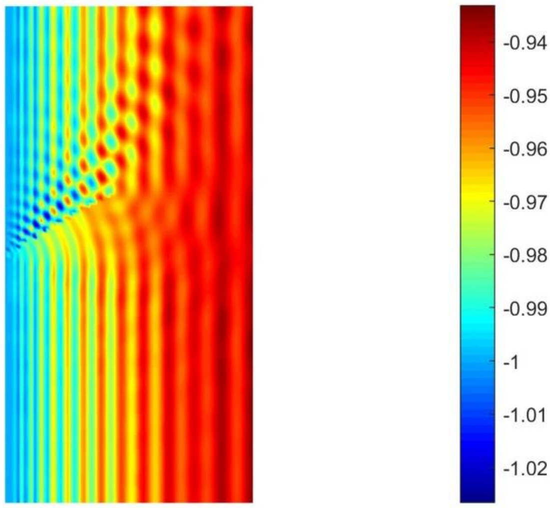
توزیع غلظت برای زمان t=۱/۲ برای مقادیر مختلف ۰/۰۵ و ۰/۱ و ۰/۲ $= \tau_0$ در شکل‌های (۴-۲۶) تا (۴-۲۸) نشان داده شده‌است.



شکل ۴-۲۶- کانتور غلظت در t=۱/۲ برای زمان آسایش ۰/۲ $= \tau_0$

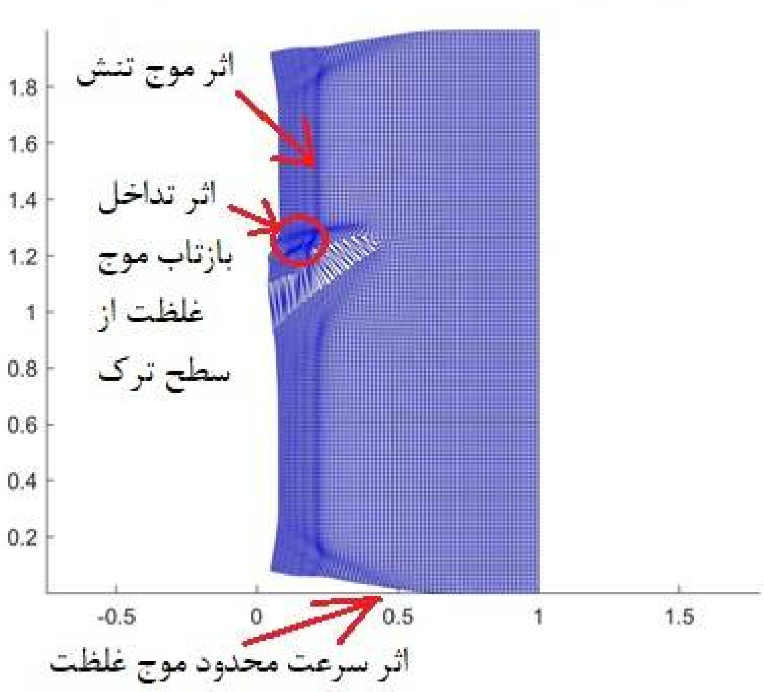


شکل ۴-۲۷- کانتور غلظت در t=۱/۲ برای زمان آسایش ۰/۱ $= \tau_0$

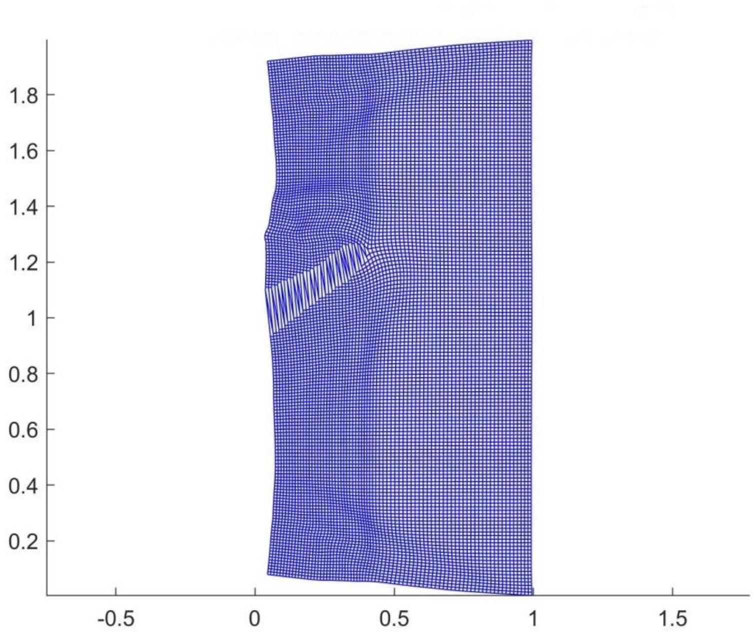


شکل ۴-۲۸- کانتور غلظت در زمان t=۱/۲ برای زمان آسایش $\tau_0 = ۰/۰۵$

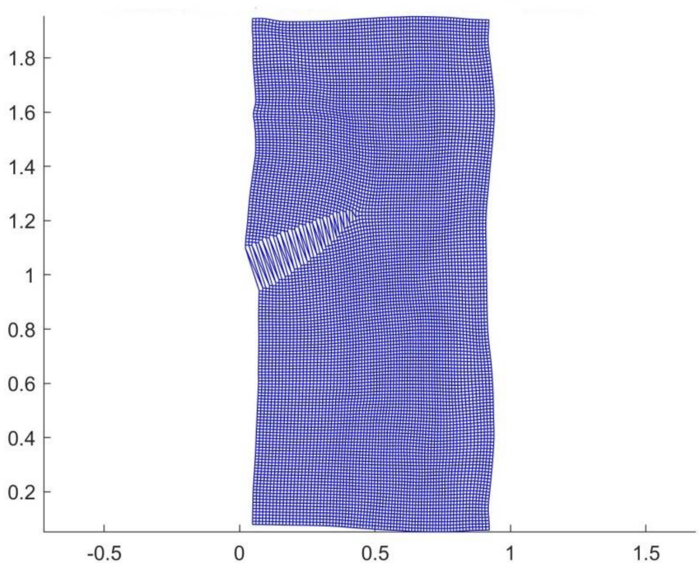
نمای تغییر شکل یافته باریکه در ۱/۲ و ۰/۵ و $t = ۰/۳$ در شکل‌های (۴-۲۹) تا (۴-۳۱) نشان داده شده‌است.



شکل ۴-۲۹- نمای تغییر شکل یافته باریکه دارای ترک در t=۰/۳



شکل ۴-۳۰- نمای تغییر شکل یافته باریکه دارای ترک در t=۰/۵



شکل ۴-۳۱- نمای تغییر شکل یافته باریکه دارای ترک در t=۱/۲

سرعت محدود جابجایی در تمام نواحی و انحراف در تغییر شکل باریکه در نزدیکی نوک ترک، با توجه به توزیع غلظت در این شکل‌ها مشهود است. به نظر می‌رسد، انحراف غلظت و نیز تغییر شکل در نزدیکی نوک ترک، به ویژه برای انتگرال ناحیه‌ای معادل با ناحیه انتگرال‌گیری بزرگ، منبعی از ایجاد نوسانات در منحنی تغییرات زمانی ضریب شدت تنش است.

فصل پنجم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۱-۵- نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، ضرایب شدت تنش برای ترکی در معرض شوک غلظتی با استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای مدل‌سازی ترک محاسبه شده‌اند. برای استخراج ضرایب شدت تنش از روش انتگرال برهم‌کنش استفاده شده‌است. مطالعه حاضر حاکی از این است که:

۱- برای زمان آسایش کوچکتر، دامنه تغییرات ضرایب شدت تنش کمتر است.

۲- تغییر غلظت تاثیر مهمی بر تغییرات زمانی ضریب شدت تنش دارد. زمانی که مقدار غلظت نوک ترک به غلظت وجه دارای ترک می‌رسد، ضرایب شدت تنش به بیشترین مقدار خود می‌رسند. حداکثر ضریب شدت تنش برای زمان آسایش بزرگتر، بیشتر است و دیرتر اتفاق می‌افتد.

۳- زمانی که ترک، سبب مختل شدن انتشار موج غلظت می شود، یک ناحیه با غلظت کم در امتداد سطح ترک حرکت می‌کند. وجود این ناحیه به دلیل تداخل موج غلظت منعکس شده از سطح ترک و موج غلظت اولیه در نقاط بالاتر است که می‌تواند میدان‌های غلظت و تغییر شکل اطراف نوک ترک را منحرف سازد.

۴- موج تنش منعکس شده از سطح ترک، میدان‌های تنش و تغییر شکل اطراف نوک ترک را مختل می‌کند. زمانی که موج تنش منعکس شده به نوک ترک می‌رسد، منجر به نوسان منحنی تغییرات ضریب شدت تنش مود یک می‌شود به علاوه در منحنی تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش در فاصله زمانی عبور امواج از نوک ترک، نوساناتی اتفاق می‌افتد.

۲-۵- پیشنهادها

- محاسبه ضرایب شدت تنش و بررسی رشد ترک تحت شوک غلظتی برای مواد تابعی (FGM)
- در نظر گرفتن تغییر دما ناشی از انتقال جرم

مراجع و منابع:

[1] S. M. Hosseini, J. Sladek, and V. Sladek, "Application of meshless local integral equations to two dimensional analysis of coupled non-Fick diffusion–elasticity," *Engineering Analysis with Boundary Elements,* vol. 37, no. 3, pp. 603-615, 2013

[2] S. A. Hosseini, M. H. Abolbashari, and S. M. Hosseini, "Shock-induced molar concentration wave propagation and coupled non-Fick diffusion–elasticity analysis using an analytical method," *Acta Mechanica,* vol. 225, no. 12, pp. 3591-3599, 2014.

[3] M. Gerard, A. Chaubey, and B. Malhotra, "Application of conducting polymers to biosensors," *Biosensors and bioelectronics,* vol. 17, no. 5, pp. 345-359, 2002.

[4] J. Genin and W. Xu, "Thermoelastic plastic metals with mass diffusion," *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP,* vol. 50, no. 4, pp. 511-528, 1999

[5] Y. Suo and S. Shen, "Analytical solution for one-dimensional coupled non-Fick diffusion and mechanics," *Archive of Applied Mechanics,* vol. 83, no. 3, pp. 397-411, 2013.

[6] T. Qiu, T. Juhasz, C. Suarez, W. Bron, and C. Tien, "Femtosecond laser heating of multi-layer metals—II. Experiments," *International Journal of Heat and Mass Transfer,* vol. 37, no. 17, pp. 2799-2808, 1994

[7] F. Jiang and D. Liu, "Instantaneous thin layer" model for non-Fick mass transfer," *J. Appl. Sci,* vol. 19, no. 2, pp. 95-99, 2001

[8] A. J. Ellery and M. J. Simpson, "An analytical method to solve a general class of nonlinear reactive transport models," *Chemical engineering journal,* vol. 169, no. 1-3, pp. 313-318, 2011.

[9] W. Gorsky, "Theory of elastic after effect in unordered mixed crystals (elastic after effect of the second kind)," *Zeit. Phys. Soviet. U,* vol. 8, pp. 457-471, 1935

[10] M. J. Aziz, "Pressure and stress effects on diffusion in Si," in *Defect and Diffusion Forum*, vol. 153, pp. 1-10: Trans Tech Publ, 1998

[11] F. Yang, "Interaction between diffusion and chemical stresses," *Materials Science and Engineering: A,* vol. 409, no. 1-2, pp. 153-159, 2005.

[12] Z.-B. Kuang, "Variational principles for generalized thermodiffusion theory in pyroelectricity," *Acta Mechanica,* vol. 214, no. 3-4, pp. 275-289, 2010.

[13] S. A. Hosseini, M. H. Abolbashari, and S. M. Hosseini, "Shock-induced molar concentration wave propagation and coupled non-Fick diffusion–elasticity analysis using an analytical method," *Acta Mechanica,* vol. 225, no. 12, pp. 3591-3599, 2014.

[14] S. M. Hosseini, J. Sladek, and V. Sladek, "Two dimensional analysis of coupled non-Fick diffusion-elastodynamics problems in functionally graded materials using meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method," *Applied Mathematics and Computation,* vol. 268, pp. 937-946, 2015.

[15] J. Benito, F. Urena, and L. Gavete, "Influence of several factors in the generalized finite difference method," *Applied Mathematical Modelling,* vol. 25, no. 12, pp. 1039-1053, 2001.

[16] L. Gavete, M. Gavete, and J. Benito, "Improvements of generalized finite difference method and comparison with other meshless method," *Applied Mathematical Modelling,* vol. 27, no. 10, pp. 831-847, 2003.

[17] J. Benito, F. Urena, and L. Gavete, "Solving parabolic and hyperbolic equations by the generalized finite difference method," *Journal of computational and applied mathematics,* vol. 209, no. 2, pp. 208-233, 2007

[18] S. Abbasbandy, "Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method," *Chemical Engineering Journal,* vol. 136, no. 2-3, pp. 144-150, 2008

[19] Y. Suo and S. Shen, "Dynamical theoretical model and variational principles for coupled temperature–diffusion–mechanics," *Acta Mechanica,* vol. 223, no. 1, pp. 29-41, 2012

[20] S. M. Hosseini, J. Sladek, and V. Sladek, "Application of meshless local integral equations to two dimensional analysis of coupled non-Fick diffusion–elasticity," *Engineering Analysis with Boundary Elements,* vol. 37, no. 3, pp. 603-615, 2013

[21] E. Magyari, "Exact analytical solutions of diffusion reaction in spherical porous catalyst," *Chemical Engineering Journal,* vol. 158, no. 2, pp. 266-270, 2010

[22] E. Magyari, "Exact analytical solution of a nonlinear reaction–diffusion model in porous catalysts," *Chemical Engineering Journal,* vol. 143, no. 1-3, pp. 167-171, 2008.
[23] Y.-P. Sun, S.-B. Liu, and S. Keith, "Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by the decomposition method," *Chemical Engineering Journal,* vol. 102, no. 1, pp. 1-10, 2004
[24] T. He, C. Li, S. Shi, and Y. Ma, "A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space," *European Journal of Mechanics-A/Solids,* vol. 52, pp. 37-43, 2015.
[25] Y. Wang, D. Liu, Q. Wang, and C. Shu, "Thermoelastic response of thin plate with variable material properties under transient thermal shock," *International Journal of Mechanical Sciences,* vol. 104, pp. 200-206, 2015.
[26] C. Li, H. Guo, and X. Tian, "Time-domain finite element analysis to nonlinear transient responses of generalized diffusion-thermoelasticity with variable thermal conductivity and diffusivity," *International Journal of Mechanical Sciences,* vol. 131, pp. 234-244, 2017.
[27] C. Li, H. Guo, X. Tian, and X. Tian, "Transient response for a half-space with variable thermal conductivity and diffusivity under thermal and chemical shock," *Journal of Thermal Stresses,* vol. 40, no. 3, pp. 389-401, 2017.
[28] C. Li, H. Guo, and X. Tian, "Shock-induced thermal wave propagation and response analysis of a viscoelastic thin plate under transient heating loads," *Waves in Random and Complex Media,* vol. 28, no. 2, pp. 270-286, 2018.
[29] C. Li, H. Guo, and X. Tian, "Soret effect on the shock responses of generalized diffusion-thermoelasticity," *Journal of Thermal Stresses,* vol. 40, no. 12, pp. 1563-1574, 2017.

[30] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl, "Meshless methods: an overview and recent developments," *Computer methods in applied mechanics and engineering,* vol. 139, no. 1-4, pp. 3-47, 1996.

[31] S. M. Hosseini, J. Sladek, and V. Sladek, "Application of meshless local integral equations to two dimensional analysis of coupled non-Fick diffusion–elasticity," *Engineering Analysis with Boundary Elements,* vol. 37, no. 3, pp. 603-615, 2013

[32] A. K. Chopra, *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. Prentice-Hall, 2001

[33] T. Belytschko, R. Gracie, and G. Ventura,"A review ofextended/generalized finite element methods for material modeling," *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering,* vol. 17, no. 4, p. 043001, 2009.

[34] مهدی‌زاده رخی م، (۱۳۹۱)، رساله دکتری، **"تحلیل عددی گسترش ترک در یک صفحه از جنس ماده تابعی تحت بار دینامیکی و شوک حرارتی"** دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[35] A. R. Khoei, *Extended finite element method: theory and applications* . John Wiley & Sons, 2014

[36] D. Broek, "The Practical Use of Fracture," *Mechanics, Kluwer, Boston,* 1989

[37] A. Zamani and M. R. Eslami, "Implementation of the extended finite element method for dynamic thermoelastic fracture initiation," *International Journal of Solids and Structures,* vol. 47, no. 10, pp. 1392-1404, 2010.

[38] J. H. Kim and G. H. Paulino, "An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models," *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* vol. 58, no. 10, pp. 1457-1497, 2003

[39] J. Yau, S. Wang, and H. Corten, "A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity," *Journal of applied mechanics,* vol. 47, no. 2, pp. 335-341, 1980

Abstract

In this thesis, the extended finite element method is used to model a finite domain which contains a crack that the surface is subjected to a concentration shock. The dynamic coupled elastic diffusion equations are considered. The Non-iterative version of the newmark scheme is used to solve semi discrete governing equations. The interaction integral is used to extract SIFs.

In this research, the effect of relaxation time on the concentration distribution and SIFs under concentration shock are investigated. Also, the time variation of SIFs are investigated in time interval at which the waves pass through the crack tip. The effect of integral domain, mesh sizes and time steps on the time variation of SIFs are investigated. Furthermore, variation of concentration near the tip of an inclined crack due to the reflection of the concentration wave from its surface and consequently local deviation in concentration and displacement fields are discussed in detail.

Keywords

Elastic diffusion, Extended finite element method, Interaction integral, Stress intensity factors.

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Calculation of the stress intensity coefficients for a crack in an Isotropic limited environment under the influence of Gas

By

Keyvan Molavi

Supervisor

Dr. Mohammad Bagher Nazari

June 2019