

به نام خدا



دانشکده مکانیک

# تعیین تابع رهایی انرژی کرنشی در صفحات FGP ترکدار به کمک روش بدون المان گالرکین

نگارش:

هاشم عابدزاده سعیدی

استاد راهنما

دکتر محمود شریعتی

تابستان ۱۳۸۹

تقدیم بہ

پدر و مادر عزیزم

و

ہمسفر مہربانم صدف

کہ با صبر و شکیبایی، ہموارہ یار و یاورم بودند.

# چکیده

شکست و تحلیل ترک یکی از مهمترین شاخه های علم مکانیک جامدات می باشد. در این پژوهش بر روی تعیین میزان انرژی رهایی کرنشی در مواد FGP ترک دار مطالعه شده است. تغییرات تدریجی خواص مواد بصورت تابعی خاص (FGM) نامیده می شود. حال اگر این مواد دارای خاصیت پیزوالکتریک نیز باشند، اصطلاحاً به آنها مواد FGP گفته می شود. در سال های اخیر در زمینه های در زمینه های کمانش، ارتعاشات، شکست، تحلیل تنش و نیروهای الکترومکانیکی و حرارتی مطالعات متنوعی بر روی این نوع از مواد انجام گردیده است.

روش عددی مورد استفاده در این پژوهش، روش بدون المان گالرکین می باشد. این روش که از سال ۱۹۹۴ توسط بلیچکو ابداع شده است مبتنی بر تقریب مجموع کمترین مربعات میان چندین گره در نظر گرفته شده در جسم می باشد. این روش نسبت به روش های مرسوم اجزاء محدود دارای مزیت های بسیاری است. از جمله می توان به همگرا شدن سریع تر، عدم نیاز به شبکه بندی جسم و توانایی افزایش گره ها در هر لحظه اشاره کرد. یکی از قابلیت های مهم این روش استفاده در تحلیل مکانیک شکست می باشد که در این پروژه به آن پرداخته شده است.

برنامه نوشته شده به وسیله نرم افزار MATLAB می باشد. ترک تحت بررسی در حالت مود I می باشد. صفحه تحت تنش یکسان گسترده و جابه جایی الکتریکی یکسان قرار گرفته است. در این پژوهش اثرات نیروی گسترده مکانیکی و جابه جایی الکتریکی بر روی میدان های تنش، انرژی رهایی کرنشی، جا به جایی و میدان الکتریکی حالت های صفحه یکسان همگن، صفحه پیزوالکتریک ساده و صفحه FGP ساده و نهایتاً صفحه FGP ترک دار بررسی شده است. همچنین برنامه برای چهار نوع پیزوسرامیک و با ضرایب نسبت هندسی متفاوت اجرا شده و اثرات تغییرات مواد و نسبت هندسی مورد بررسی قرار گرفته است.

طبق نتایج این پژوهش میتوان گفت که با افزایش ضریب نسبت هندسی مقدار انرژی رهایی کرنشی کاهش می یابد. در مواد FGP بدون ترک نیز با افزایش مقدار ضریب  $\beta$  میزان جابجایی و تنش و پتانسیل الکتریکی افزایش یافته است.

کلمات کلیدی: ترک – مواد FGP – مکانیک شکست – انرژی رهایی کرنشی

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول : مقدمه
۲	۱-۱- مقدمه
۲	۱-۲- تاریخچه علم شکست
۳	۱-۳- تحلیل پدیده شکست
۶	فصل دوم: مکانیک شکست
۷	۱-۲- مقدمه
۷	۲-۲- معادلات پایه
۱۱	۲-۳- مفهوم مواد FG
۱۳	۲-۴- ویژگی های مواد FG
۱۵	۲-۵- مواد پیزوالکتریک
۱۵	۲-۶- روابط حاکم بر معادلات پیزوالکتریک
۱۷	فصل سوم: روش تحلیل بدون المان گالرکین
۱۸	۱-۳- مقدمه
۲۰	۲-۳- روش های بدون المان
۲۴	۳-۳- روش بدون المان گالرکین
۲۵	۳-۴- توابع وزنی
۲۹	۳-۵- توابع پایه کامل
۳۰	۳-۶- شبکه انتگرال گیری
۳۱	۳-۷- توابع شکل در روش بدون المان گالرکین
۳۴	۳-۸- بررسی معادلات تعادل و فرم ضعیف شده
۳۵	۳-۹- فرمول بندی و گسسته سازی معادلات در روش EFG
۴۳	۳-۱۰- روش پنالتی
۴۷	فصل چهارم: روش انجام پروژه
۴۸	۱-۴- مقدمه
۴۸	۲-۴- صفحه ساده ایزوتروپیک
۴۹	۴-۲-۱- پیش پردازش
۵۰	۴-۲-۲- حل مسئله
۵۱	۴-۲-۳- پس پردازش
۵۷	۳-۴- صفحه ساده پیزوالکتریک
۶۵	۴-۴- صفحه ساده FGPM

صفحه	عنوان
۷۸	۴-۵- صفحه FGPM ترک دار
۷۹	۴-۵-۱- هندسه و بارگذاری مسئله حل شده
۸۲	۴-۵-۲- نتایج به دست آمده برای پارامترهای مختلف
۹۰	۴-۵-۳- تاثیر هندسه بر میزان انرژی رهایی کرنشی
۹۳	فصل پنجم: نتیجه گیری و پیشنهادات
۹۴	۵-۱- مقدمه
۹۴	۵-۲- نتایج
۹۵	۵-۳- پیشنهادات
۹۶	منابع

# فصل اول

مقدمه

**۱-۱- مقدمه**

مکانیک شکست یکی از علوم مهندسی است که به بررسی شکست در مواد مختلف می پردازد و روش های طراحی برای عملکرد مطمئن سازه و یا قطعات ماشین را ارائه می نماید. این علم دارای کاربرد های فراوان و گسترده ای در طراحی قطعات سازه ها و ماشین آلات مربوط به صنایع مختلف می باشد. از جمله این صنایع می توان به صنایع نیروگاهی، خودرو سازی، کشتی سازی، هوا و فضا و ... اشاره نمود. امروزه قریب به اتفاق طراحی ها در زمینه های مختلف مهندسی بر اساس دانش مکانیک شکست انجام می گیرد و سازه های طراحی شده با روش های دیگر، به منظور اطمینان از ایمنی و کارآیی لازم، با روش های مکانیک شکست مورد بررسی و آزمایش قرار می گیرند.

وجود و یا ایجاد ترک و ناپیوستگی ها در سازه و قطعات دلایل مختلفی دارد. بسیاری از روش های تولید مواد و سازه - به عنوان مثال فرایند جوشکاری - به طور طبیعی باعث ایجاد شکاف و یا ناپیوستگی می شوند. ترک ها می توانند از این شکاف ها و ناپیوستگی ها که می توانند بسیار ریز باشند شروع به رشد کرده و در نهایت موجب از هم گسیختگی قطعه و از کار افتادن سازه شوند. بنابراین می توان گفت مهم ترین هدف علم مکانیک شکست، محاسبه میزان حساسیت قطعه به ترک و اندازه بحرانی ترک است که می تواند باعث شکست ناگهانی در بارهای اعمالی گردد.

**۱-۲- تاریخچه علم شکست**

تاریخچه شکست سازه ها در حین فعالیت به سال های بسیار گذشته بر می گردد. در زمان های گذشته موارد متعددی از شکست های ناگهانی اتفاق افتاد که برخی از آنها با خسارات زیادی همراه بودند. حتی در مواردی دیده شد که یک کشتی به طور کامل از وسط به دو نیم تقسیم شد. بسیاری از موارد به خاطر عبور کشتی ها از آب های سرد بوده که در این حالت فولاد از خود رفتار ترد را نشان می دهد. یکی از عوامل مهم و محل شروع بسیاری از ترک ها را نیز محل های جوشکاری تشخیص دادند.

سابقه علم مکانیک شکست به دهه ۱۹۲۰ و آزمایشات گریفیث [Griffith] بر روی شیشه بر می گردد. او ضمن آزمایشات خود متوجه شد که استحکام کششی تارهای شیشه درصد نا چیزی از استحکام نظری این ماده است که از روابط حاکم بر اتصالات اتمی به دست می آید. در عین حال او متوجه شد که با کاهش ضخامت الیاف های شیشه، استحکام واقعی به مقدار استحکام نظری نزدیک می گردد. بر این اساس او نتیجه گرفت که وجود این اختلاف ها ناشی از وجود ترک های ریز در داخل شیشه می باشد. بر این اساس او معیاری را برای شکست قطعات در نظر گرفت. گریفیث بیان کرد که شکست هنگامی رخ می دهد که نرخ تغییر انرژی پتانسیل ناشی از رشد ترک با مقاومت در برابر رشد ترک یکسان شود. [1]

بر این اساس می توان گفت دیدگاه گریفیث بیشتر متوجه ساختار میکروسکوپی ماده بود. البته به علت دشوار بودن سنجش و تحلیل در مقیاس اتمی، پس از گریفیث تا چند دهه این عرصه به عنوان یک زمینه تئوری محض بدون استفاده باقی ماند. حوزه مکانیک شکست در دهه ۱۹۵۰ با وقوع سوانح هوایی و همچنین شکستن قطعات بسیاری از وسایل که میزان بارگذاری بر روی آنها بسیار کمتر از حد تحمل آنها بود وارد مرحله جدیدی گردید. این مورد بیشتر در وسایلی دیده می شد که بارگذاری بر روی آنها به صورت تناوبی انجام می گرفت. به همین علت این نوع شکست را اصطلاحاً شکست خستگی نامگذاری کردند. از آن زمان به بعد مطالعه بر روی این موضوع اهمیت برجسته ای در طراحی سازه های تحت بارگذاری های تکراری پیدا کرد. اکنون نیز با گذشت بیش از سه دهه، محققان روش ها و مدل های گوناگونی برای تحلیل پدیده ایجاد ترک و رشد آن ارائه کرده اند.

### ۱-۳- تحلیل پدیده شکست

با افزایش موارد شکست در اواسط قرن بیستم میلادی توجه زیادی به این موضوع شد. به این ترتیب مکانیک شکست در زمره یکی از علوم مهم در زمینه مکانیک قرار گرفت. عوامل زیادی که می توانست در ایجاد پدیده شکست موثر باشد بررسی گردید. به این ترتیب سه عامل که نقش موثرتری



در ایجاد شکست داشتند به عنوان پارامتر های اصلی شکست در نظر گرفته شدند. این سه عامل به

شرح زیر می باشند:

استحکام شکست ماده،

طول ترک،

سطح تنش اعمالی.

استحکام شکست ماده، میزان توانایی ماده برای تحمل بارهای وارد شده بر روی جسم دارای ترک می باشد. این پارامتر که یکی از خواص ذاتی ماده می باشد به تغییر شکل پلاستیک ماده در اطراف ترک بستگی دارد که خود تابعی از درجه حرارت محیط می باشد. طول ترک نیز تاثیر به سزایی در شکست قطعات دارد و به طور عام می توان گفت هر چه طول ترک موجود بیشتر باشد احتمال به وقوع پیوستن شکست ناگهانی بر اثر اعمال نیروی مشخص بیشتر می گردد. البته در برخی موارد خاص در طول های بزرگ، لبه های ترک به هم نزدیک می گردند و فاکتور شدت تنش را کاهش می دهند که این مساله وقوع شکست را به تاخیر می اندازد. عاملی که باعث رشد ترک و ایجاد شکست می گردد تنش کششی می باشد. در این رابطه می توان گفت که هر چه سطح تنش اعمالی بیشتر گردد احتمال به وقوع پیوستن گسیختگی نیز بیشتر می شود.

با توجه به مطالبی که گفته شد علم مکانیک شکست پایه ریزی شد. در ابتدا با روش های تئوری به بررسی پدیده شکست پرداخته شد. روش های تئوری در ابتدای امر با توجه به ساده بودن مسائل و هندسه های موجود، کارایی مطلوبی را از خود نشان می دادند. با پیچیده شدن قطعات و سازه ها، دیگر روش های تئوری به صورت کامل نمی توانستند شرایط ایجاد شده را در نظر بگیرند. به همین علت ساده سازی هایی در صورت مسائل انجام می گرفت و در جهت مقابل برای حصول اطمینان ضرایب اطمینانی نیز در طراحی قطعات منظور می گردید.

در دهه های اخیر با پیشرفت در علوم کامپیوتر و سریع تر شدن وسایل محاسباتی شاخه دیگری که روش حل عددی بود مورد توجه بیشتری قرار گرفت. ابداع این روش ها به دهه ۵۰ میلادی

بازمی گردد، ولی در آن زمان شرایط لازم برای به کار گرفتن این روش ها موجود نبود. با به کارگیری این روش ها بسیاری از مشکلات موجود بر سر راه علوم مکانیک از جمله مکانیک شکست برداشته شد. اصل اولیه در استفاده از این روش ها این است که دامنه حل به قطعات کوچکتر و هندسه های ساده تر تقسیم می شوند و سپس با تامین شرایط پیوستگی نتایج کلی برای کل دامنه مساله به دست می آید. روش های مختلفی نیز در این رابطه ابداع گردیدند که در هر یک سعی شده به صورت دقیق تری به بررسی مسایل شکست پرداخته شود.

یکی از قدیمی ترین روش های عددی، روش المان محدود<sup>۱</sup> می باشد. در ادامه روش های دیگری نظیر روش المان مرزی<sup>۲</sup> و نیز روش های بدون المان<sup>۳</sup> ابداع گردیدند.

در این پایان نامه به بررسی مکانیک شکست در صفحات پیزوالکتریک دارای خاصیت **FG** با استفاده از روش بدون المان گالرکین<sup>۴</sup> پرداخته شده است. فصل دوم به معرفی مواد **FG** اختصاص یافته و خاصیت پیزوالکتریک و روابط حاکم بر الاستیسیته این مواد بررسی گردیده است. در فصل سوم روش عددی استفاده شده به تفصیل توضیح داده شده است.

در فصل چهارم، کارهای انجام گرفته در پایان نامه توضیح داده شده و نتایج آن به تفصیل آمده است. فصل پنجم به نتیجه گیری حاصل از فعالیت ها پرداخته و در انتها پیشنهاداتی برای ادامه کار ارائه گردیده است.

---

<sup>1</sup> Finite Element Method (FEM)

<sup>2</sup> Boundary Element Method (BEM)

<sup>3</sup> Element Free Method (EFM)

<sup>4</sup> Element Free Galerkin (EFG)

## فصل دوم

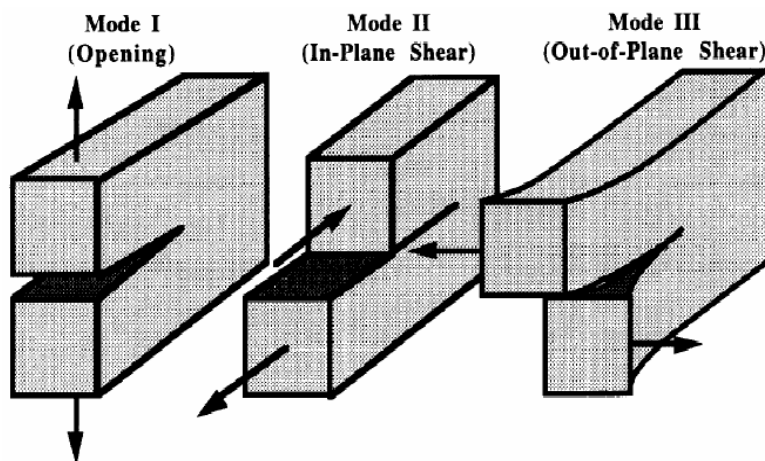
مکانیک شکست در مواد FGP

## ۲-۱- مقدمه

در این فصل به بررسی مختصری در مورد مواد **FGP** و مکانیک شکست در این گونه مواد پرداخته شده است. ابتدا معادلات پایه در مکانیک شکست بیان شده و در ادامه مواد **FGP** و روابط حاکم بر آن بررسی شده است.

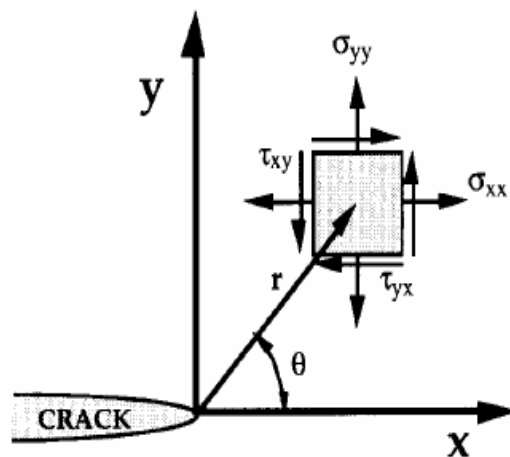
## ۲-۲- معادلات پایه

با در نظر گرفتن شکل ۱-۲ میدان های جابجایی اطراف یک ترک را می توان به یکی از سه مود نشان داده شده تقسیم کرد. اولین مود گشایش نامیده می شود. مد دوم برش یا لغزش نامیده می شود و مود سوم پاد صفحه ای یا پارگی نامیده می شود. مودهای اول و دوم بر روی صفحه ی ترک رخ می دهند ولی مود سوم در جهت خارج از صفحه به وجود می آید. به همین دلیل در اکثر موارد تنها شاهد رخ دادن مودهای اول و دوم هستیم و بیشتر به مسایل صفحه ای پرداخته می شود. در اینجا نیز چون به تحلیل صفحه پرداخته می شود حداکثر مودهای اول و دوم مورد بررسی قرار می گیرند [1].



شکل ۱-۲: مود های ایجاد شده در اطراف ترک [1]

برای تعیین شرایط نوک ترک از فاکتورهای ضریب شدت تنش به عنوان نمادی از نحوه توزیع تنش و کمیت دیگری به نام نرخ رهایی انرژی که وضعیت میدان های تنش را در اطراف ترک مشخص می کند استفاده می گردد. نرخ رهایی انرژی که نشان دهنده تغییر انرژی کرنشی در اثر رشد ترک می باشد به ضریب شدت تنش مرتبط می گردد. ضرایب شدت تنش، ضرایبی هستند که به طول ترک، هندسه قطعه و بارگذاری بستگی دارند و معمولاً محاسبه این ثوابت به تنهایی برای مشخص کردن میدان های تنش و جابجایی در مجاورت نوک ترک کفایت می کند.



شکل ۲-۲: مشخصات میدان های موجود در نزدیکی ترک [1]

در این رابطه معادلات زیر را با توجه به شکل ۲-۲ می توان برای مودهای اول و دوم در صفحه در حالت منفرد در نظر گرفت. در این صورت میدان های تنش و جابجایی برای مود اول برحسب ضریب شدت تنش به صورت زیر نوشته می شوند. [1]

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (1-2)$$

$$\begin{cases} u_x \\ u_y \end{cases} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} (k-1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} (k+1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \end{cases} \quad (2-2)$$

برای مود دوم نیز این روابط به صورت زیر هستند.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} -\sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{cases} \quad (3-2)$$

$$\begin{cases} u_x \\ u_y \end{cases} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} \sin \frac{\theta}{2} (k+1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\ -\cos \frac{\theta}{2} (k-1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \end{cases} \quad (4-2)$$

که در این روابط، مطابق شکل ۲-۲،  $r$  فاصله شعاعی از نوک ترک و  $\theta$  زاویه ای است که با راستای ترک ایجاد می کند. در این روابط  $k$  ثابت کولوسوف<sup>۱</sup> نامیده می شود که بر حسب ضریب پواسون به صورت زیر است.

$$k = 3 - 4\nu \quad \text{کرنش صفحه ای} \quad (5-2)$$

$$k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{تنش صفحه ای} \quad (6-2)$$

و  $\mu$  نیز مدول ارتجاعی برشی می باشد.

همانگونه که در معادلات بالا دیده می شود مقادیر تنش با جذر فاصله از نوک ترک نسبت عکس دارند. به این ترتیب با نزدیک شدن به نوک ترک مقدار تنش به سمت بینهایت میل می کند. این مطلب بیانگر ایجاد نوعی حالت تکین در نوک ترک می باشد. نکته دیگری که دیده می شود وابستگی میدان های جابجایی و تنش به ضرایب شدت تنش می باشد که به این ترتیب با مشخص بودن ضرایب شدت تنش در نوک ترک می توان میدان های تنش و جابجایی را در این محدوده پیش بینی کرد.

<sup>1</sup>Kolosov

البته باید توجه داشت که این روابط تنها برای محدوده نزدیک به نوک ترک صادق هستند و با دور شدن از نوک ترک دقت این روابط کاهش می یابد.

اگر راستای ترک و راستای بارگذاری با یکدیگر موازی نباشند، در این حالت در نوک ترک شاهد ایجاد هر دو مود اول و دوم می باشیم. در این صورت روابط بین میدان های جابجایی و تنش با ضرایب شدت تنش حالت پیچیده تری پیدا می کنند.

در روابط ۲-۱ تا ۲-۴ که میدان های تنش و جابجایی را در موده های اول و دوم در حالت منفرد نشان می دهند به علت کوچک بودن جملات با درجات بالاتر  $r$  از آنها صرف نظر کرده شد. ولی در حالت ترکیب مودها لازم است این جملات را نیز در نظر گرفت. به این ترتیب میدان های جابجایی و تنش را در ترکیب مودها به این صورت می توان بیان کرد.

میدان های تنش:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (7-2)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \sigma_y (1 - \lambda) \cos 2\beta \quad (8-2)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (9-2)$$

و میدان های جابجایی:

$$u = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(k-1) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(k+1) + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \quad (10-2)$$

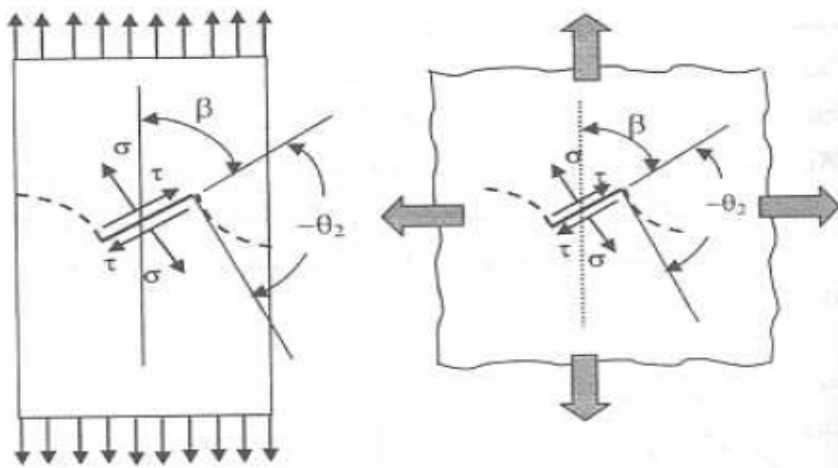
$$\frac{(1-\lambda)\sigma_y}{8\mu} \{ r [\cos(\theta+2\beta) + k \cos(\theta-2\beta) - 2 \sin \theta \sin 2\beta] + (k+1)a \cdot \cos 2\beta \}$$

$$V = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(k+1) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1}{2}(-k+1) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \quad (11-2)$$

$$\frac{(1-\lambda)\sigma_y}{8\mu} \{ r[\sin(-\theta+2\beta) + k \sin(\theta+2\beta) - 2 \sin \theta \cos 2\beta] + (k+1)a \sin 2\beta \}$$

که در روابط بالا  $\lambda$  نسبت بار اعمال شده در جهت  $x$  به بار اعمال شده در جهت  $y$  می باشد. در شکل

۳-۲ هندسه مربوط به این روابط نشان داده شده است. [1]



شکل ۳-۲: ساختار صفحه ترکدار تحت حالت ترکیب مودهای اول و دوم [1]

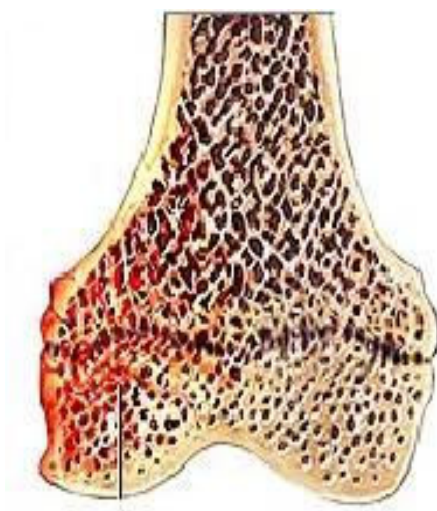
### ۳-۲- مفهوم مواد FG

با وجود آنکه تحقیقات علمی در مورد مواد FG سابقه زیادی ندارد ولی تصور کلی و مفهوم مواد FG از زمان های دور در ساختار سازه های فولادی اولیه و حتی در ساختار ارگانسیم های زنده طبیعت مانند استخوان و خیزران وجود داشته است. اینگونه مواد در ساختارشان دارای تغییرات



تدریجی هستند تا اجزای قویتر ساختار آنها در مکان‌هایی متمرکز شوند که تنش وارد بر سازه در آن نقاط بیشتر است.

به عنوان مثال در ساختار استخوان بدن که لازم است در سطوح خارجی آن مقاومت مناسبی در مقابل عوامل بیرونی از جمله ضربات شدید داشته باشد و در قسمت‌های داخلی شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی داشته باشد، ساختاری که کاملاً مشابه ساختار مواد FG می‌باشد، وجود دارد. به گونه‌ای که استخوان در سطوح خارجی کاملاً سخت و مقاوم می‌باشد ولی در مرکز ساختاری کاملاً نرم و اسفنجی را داراست و تغییرات بین این دو ناحیه نیز به صورت کاملاً پیوسته و هموار می‌باشد (شکل ۲-۴).



شکل ۲-۴: چگونگی تغییر در ساختار استخوان [2].

البته یک تفاوت اساسی در ساختار تغییرات تدریجی مواد زنده و مواد مصنوعی وجود دارد. چرا که ارگانیسم‌های زنده قابلیت وفق دادن سازه خود، با توجه به ظرفیت عناصر مورد نیاز خود، را دارند [2].

در ساختار مواد FG می بایست خواص از یک ترکیب یا ماده به سمت خواص یک ترکیب یا ماده دیگر تغییر کند. به عبارت دیگر مواد FG به طور معمول از دو فاز جداگانه ساخته شده اند به گونه ای که کسر حجمی آنها به صورت پیوسته و مستمر در حالت تغییر از یک فاز به فاز دیگر می باشد. معمولاً نوع ترکیب به گونه ای است که خواص مواد ترکیبی مکمل یکدیگر می باشند و کمبودها و نواقص یکدیگر را جبران می کنند.

## ۲-۴- ویژگی های مواد FG

با توجه به نکاتی که گفته شد و با تحقیقاتی که بر روی مواد FG انجام گرفته است، می توان ویژگی های زیر را برای مواد FG نام برد [3].

۱- مقاومت بالا در برابر گرادیان دمایی بالا. در حقیقت اینگونه مواد با کاهش دادن تنش های حرارتی، اثرات منفی آن را به طور قابل توجهی کاهش می دهند. به کمک این خاصیت می توان در اطراف نقاطی که تنش های حرارتی دارای مقدار بیشینه است و در حقیقت نوعی حالت بحرانی به وجود آمده است، تنش ها را کنترل کرد.

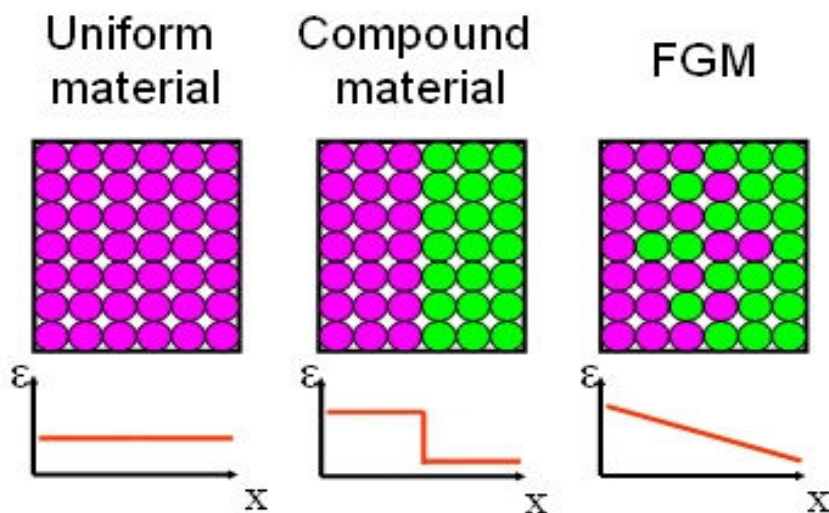
۲- به کمک مواد FG می توان استحکام مواد را افزایش داد و از ورود اجسام به منطقه پلاستیک و حتی شکست اجسام تا حدود زیادی جلوگیری کرد.

۳- یکی از مهم ترین ویژگی هایی که مواد FG دارند، قابلیت از بین بردن تمرکز تنش می باشد. در بسیاری از اجسام به علت وجود شکل های خاص هندسی، تمرکز تنش در برخی از نقاط جسم ایجاد می گردد، مانند لبه های جسم یا در نزدیکی سوراخ های درون جسم که به وسیله مواد FG می توان اثرات آنها را کاهش داد.

۴- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد موجب استحکام بین فاز های مختلف می گردد. در مواد مرکب کامپوزیتی تداخل موجود بین ساختارهای زمینه و الیاف تقویت کننده، یک نوع

ناهماهنگی در خواص مکانیکی را ایجاد می کند. به عنوان مثال هنگامی که در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می گیرند، ترک ابتدا در پهنه مرزی زمینه و الیاف ایجاد می گردد و سپس در لایه ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می گردد. در شکل ۲-۵ تفاوت در تغییر ساختار مواد ساده، مواد مرکب و مواد FG نشان داده شده است. در مواد FG به علت پیوستگی موجود در خواص، تنش ها و هم گرادیان آنها نیز حالت پیوسته ای پیدا می کنند و این مساله باعث افزایش استحکام مواد FG می گردد.

۵- نیروهایی که باعث ایجاد و رشد ترک می گردند با استفاده از مواد FG و یافتن بهترین ترکیب برای تغییر خواص قابل کنترل می باشند.



شکل ۲-۵: مقایسه تغییرات خواص در مواد ساده، مواد مرکب و مواد FG [3]

۶- اگر هنگام قرار دادن یک روکش سخت و ترد بر روی مواد نرم این کار به وسیله تغییرات پیوسته و تدریجی انجام پذیرد، این کار بسیار ساده تر انجام می گیرد و احتمال جدا شدن لایه کاهش می یابد.

۷- به کمک تغییرات تدریجی خواص مکانیکی در لایه های سطحی می توان از بریدگی های سطحی که باعث ایجاد میدان های تکین می شوند، جلوگیری کرد و خواص تغییر شکل پلاستیک ماده را در اطراف این بریدگی ها تغییر داد.

## ۲-۵- مواد پیزوالکتریک

اثر پیزوالکتریک ، قابلیت بعضی مواد است برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و برعکس. تولید اختلاف پتانسیل الکتریکی در برخی بلورهای نارسانا مثل کوارتز تحت کشش یا فشار متداول است. علامت پتانسیل های دو وجه بلور در دو حالت فشردگی یا کشیدگی معکوس هم ارزند و هر چه میزان فشار و کشش بیشتر باشد ، اختلاف پتانسیل تولید شده بیشتر است. اثر معکوس پیزوالکتریک نیز به این معنی است که تغییر شکل آنها بر اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو وجه روبروی آنهاست. اگر دو وجه روبروی در هر یک از این بلورها را به اختلاف پتانسیل متناوب الکتریکی وصل کنیم ، تغییر شکل متناوبی در آن رخ می دهد و به ارتعاش در می آید. ترکیبات سرب ، زیرکات ، تیتانات PZT با ساختار پروسکایت ، ZnO و کوارتز مثال هایی از مواد پیزوالکتریک هستند.

## ۲-۶- روابط حاکم بر معادلات پیزوالکتریک

بر اساس تئوری خطی پیزوالکتریک ها معادلات تعادل در یک ماده پیزوالکتریک به صورت زیر بیان می گردد.

$$T_{ji,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (12-2)$$

$$D_{i,i} = \rho_e \quad (13-2)$$

روابط سازگاری نیز به صورت زیر قابل تعریف می باشد.

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} - e_{kij} E_k \quad (14-2)$$

$$D_i = e_{ijk} S_{jk} + \epsilon_{ij} E_j \quad (15-2)$$

روابط کرنش - جابه جایی و میدان پتانسیل الکتریکی به گونه زیر ارائه می شود.

$$S_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (16-2)$$

$$E_i = -\Phi_{,i} \quad (17-2)$$

در این روابط  $\mathbf{u}$  بردار جابه جایی مکانیکی،  $\mathbf{T}$  تانسور تنش،  $\mathbf{S}$  تانسور کرنش،  $\mathbf{E}$  میدان الکتریکی،  $\mathbf{D}$  میدان جابه جایی الکتریکی،  $\Phi$  پتانسیل الکتریکی،  $\rho$  چگالی جرمی،  $\rho_e$  چگالی شار جسم آزاد و  $\mathbf{f}$  چگالی نیرو برای هر واحد جرم می باشد. ضرایب  $C_{ijkl}$ ،  $e_{ijk}$  و  $\varepsilon_{ij}$  به ترتیب ثوابت الاستیک، پیزوالکتریک و دی الکتریک می باشند. [4]

با تلفیق شش معادله بالا خواهیم داشت.

$$C_{ijkl}u_{k,lj} + e_{kij}\Phi_{,kj} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (18-2)$$

$$e_{ikl}u_{k,li} - \varepsilon_{ij}\Phi_{,ij} = \rho_e \quad (19-2)$$

همان گونه که ملاحظه می شود در مواد پیزوالکتریک رابطه تعادل شامل دو مجموعه معادله می شود که بایستی به طور همزمان حل شود.

# فصل سوم

روش تحلیل بدون المان گالرکین

## ۳-۱- مقدمه

از آنجا که در این پروژه بناست از روش بدون المان گالرکین برای تحلیل صفحه FGP ترک دار استفاده گردد، در این بخش به معرفی کامل تر این روش و معادلات حاکم بر آن می پردازیم.

در تحلیل مسایل مهندسی، به ویژه در حیطه مهندسی مکانیک، مسایل موجود رفته رفته با چالش فکری و عملی بیشتری مواجه می گردند. اکنون بسیاری از سازه های ساخته شده به دست بشر - مانند هواپیماها - آنچنان حساس و پیچیده شده اند که باید ریسک از کار افتادن یا خرابی قطعات در آنها بسیار اندک باشد. در حیطه مهندسی مکانیک، یکی از مواردی که توجه به آن بسیار مهم و ضروری می باشد تحلیل های مربوط به شکست قطعات می باشد که نکته اصلی در اینگونه مسایل نیز بررسی و تحلیل ترک های موجود در قطعات می باشد. به همین دلیل در تحلیل و شبیه سازی فرایند های خرابی مواد، نیاز به مدلی است که بتواند گسترش ترک را در مسیرهای پیچیده و دلخواه میسر سازد.

در ابتدای گسترش تحلیل های قطعات و در دهه های گذشته، بیشتر سعی بر آن بود که اینگونه تحلیل های پیش از ساخت توسط روش های تحلیلی انجام پذیرد ولی پیچیده تر شدن مسایل باعث گردید که در بسیاری از موارد روشهای تحلیلی صرف، به علت ساده سازی های فراوان و بیش از حد، کارایی خود را از دست بدهند.

پس از آن، ابداع روش های حل عددی و پیشرفت تکنولوژی های مربوط به کامپیوترهای محاسباتی باعث گردید، روش هایی که اساس آن بر شبکه بندی هندسه ساختار مسایل بود - از جمله المان محدود، تفاضل محدود و حجم محدود - برای تحلیل قطعات به کار گرفته شوند که این امر باعث گردید تا بسیاری از نقیصه های موجود در روش های تحلیلی مرتفع گردند. بر اساس این روش ها صد ها برنامه و نرم افزار جامع برای تحلیل موضوعات در زمینه های مختلف طراحی گردید.

ولی این روش ها نیز به نوبه خود دارای مشکلات زیادی بودند. چرا که هر کدام از این روش ها نیازمند در نظر گرفتن تمهیدات و تدابیر خاصی در مدل سازی و پیش بینی تغییرات در ساختار شبکه خود بودند که در موارد متعددی انجام آنها به سادگی امکان پذیر نبود.

برای رفع این مشکلات، گروه جدیدی از روش های حل معادلات دیفرانسیلی ارائه شده اند که در اینگونه روش ها نیازی به شبکه بندی متعارف مانند آنچه در روش های المان محدود نیاز بود، وجود ندارد. در این روش ها تقریب های عددی حل معادله دیفرانسیلی، نه بر مبنای المان ها و روابط پیوستگی بین آنها، بلکه بر مبنای مجموعه ای از نقاط انجام می پذیرد و هیچگونه المان بندی و یا مشخصات و ویژگی هایی برای پیوستگی نقاط مشترک برای ساخت معادلات گسسته سازی نیاز نیست. به این گونه روشها اصطلاحاً روش های تحلیل بدون المان یا بدون شبکه<sup>۱</sup> گفته می شود. این مساله باعث می گردد که اینگونه تحلیل ها قابلیت سازگاری بیشتری با شکل های پیچیده و تغییر شکل های شدید و بیش از حد داشته باشند.

البته به علت اینکه پرداختن به این روش ها قدمت زیادی ندارد، می توان گفت اینگونه روش ها شکل استاندارد کاملی به خود نگرفته اند و چگونگی تحلیل و میزان همگرایی نتایج در این روش ها در برخی موارد به صورت بسیار شدید به انتخاب برخی پارامترهای دلخواه و اختیاری وابسته است که این مساله، همگرایی نتایج این روش را تحت الشعاع خود قرار می دهد. به همین دلیل استفاده از این روش ها برای افرادی که آشنایی کافی و مناسب با این روش ها را ندارند، بسیار دشوار می باشد. در ضمن این روش ها از لحاظ ساختاری شکل پیچیده تری نسبت به روش های مرسوم المان محدود و دیفرانسیل محدود دارند که این موضوع خود باعث دشوارتر شدن استفاده از این روش ها می گردد.

به طور خلاصه اینگونه می توان بیان کرد، در مسایلی که تغییر شکل های بزرگ و غیر قابل پیش بینی وجود دارد، تکیه بر روش های مرسوم مکانیک محاسباتی که بر پایه شبکه های المان

---

<sup>۱</sup> Mesh less



بندی شده بنا شده اند منجر به افت شدید دقت محاسباتی می گردد. چرا که ممکن است در طی روند تحلیل مساله، تغییر شکل های المان ها به مشکلات عددی ناخواسته ای منجر گردد. به عنوان مثال در مواردی ممکن است در حوزه تحلیل، نقاط منفردی که در آنها تغییرات شدیدی در پاسخ ها ایجاد می گردد، وجود داشته باشد. استفاده غیر معقول و ساده از این روش ها در چنین نقاطی باعث ایجاد خطای فراوان در تحلیل می گردد. نمونه بارز این مساله تحلیل ترک در مکانیک خستگی می باشد. با رشد ترک، المان هایی که با هم در ارتباط هستند از هم گسیخته می شوند و ساختار شبکه به طور کلی تغییر می کند. در اینگونه روش ها برای مرتفع ساختن این مساله به شبکه بندی مجدد دامنه حل پرداخته می شود. انجام این کار نیز با توجه به آنکه اگر دقت بالایی در تحلیل لازم باشد، باید بازسازی شبکه در فواصل بسیار کم انجام پذیرد، زمان و هزینه بسیار زیادی را به خود اختصاص خواهد داد. همچنین در بین این مراحل باید هماهنگی بین المان ها و متغیر ها در شبکه های متوالی حفظ گردد که این مطلب نیز به تجربه، دقت و صرف زمان زیادی نیاز دارد. از طرف دیگر اگر تغییر شکل های زیادی داشته باشیم المان ها ممکن است از شکل طبیعی خود خارج گردند. به صورتی که اگر زاویه بین اضلاع المان از حدود ۳۰ درجه کمتر و یا از ۱۲۰ درجه بیشتر گردد، در نتایج خطاهای بسیار دیده می شود و یا اینکه نتایج مساله به طور کامل واگرا می گردند. به همین خاطر می توان با توسعه روش های بدون المان، گام موثری در بهینه سازی روش های حل عددی بنا نهاد تا بر مشکلات روش های المان محدود غلبه کرد.

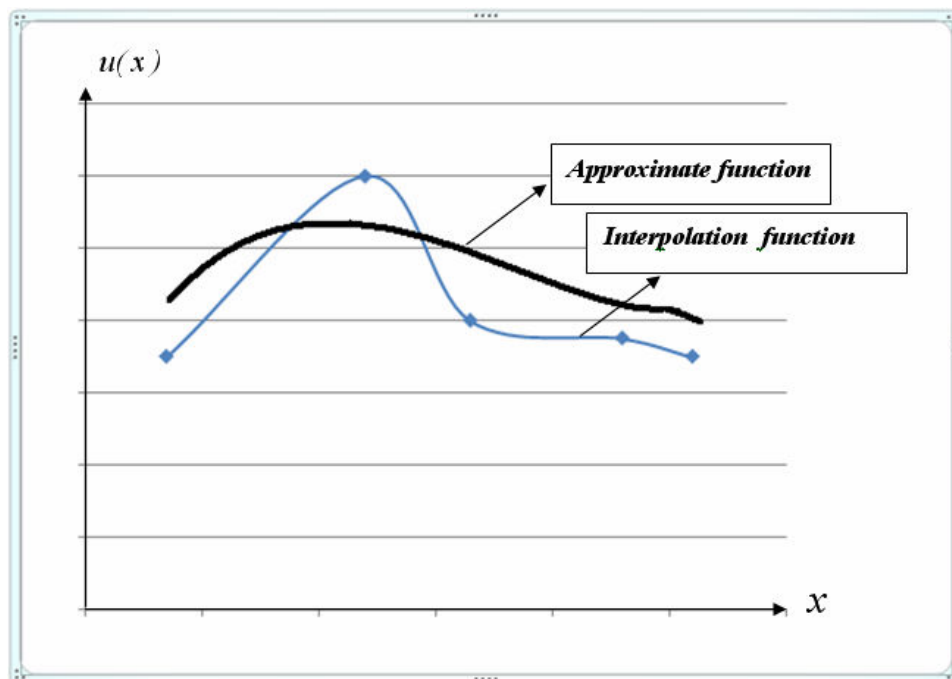
### ۳-۲- روش های بدون المان

از لحاظ مفهومی تفاوت اساسی موجود میان روش های المان محدود و روش های بدون المان، ناشی از تفاوت میان مفاهیم تقریب و میانیابی می باشد. فرض کنید در یک دامنه از مساله در نقاطی خاص ( نقاط پایه ) مقدار جواب مساله موجود باشد ولی در دیگر نقاط، مقدار مساله مجهول باشد و بخواهیم جواب کلی را به صورت یک میدان یا تابع در تمامی نقاط دامنه به دست آوریم. اگر در صورت تحلیل قید شده باشد که تابع داده شده از مقادیر نقاط پایه عبور کند، نتیجه به دست آمده را

میانمایی می گویند ولی اگر تولید تابع، نرمی از میان مقادیر پایه مورد نظر باشد و لزومی برای عبور از روی خود نقاط پایه در آن وجود نداشته باشد، غالباً نتیجه را تقریب می گویند.

حال فرض کنید تنها در نقاط کمی که نقاط پایه هستند مقادیر تابع تقریب زننده موجود باشد و به کمک یک تابع تقریب زننده بخواهیم ناپیوستگی موجود بین مقادیر را رفع کنیم. در روش اجزای محدود ناحیه کل را به قطعاتی با هندسه های ساده تر تفکیک می کنیم. در هر یک از این مناطق با استفاده از مقادیر موجود در نقاط پایه آن محدوده، با انتخاب یک روش مناسب اقدام به ایجاد یک تابع درونیاب می کنیم. به این ترتیب این تابع لزوماً می بایست از مقادیر نقاط پایه عبور کند [5].

در روش های بدون المان تمام میدان حل به عنوان یک المان در نظر گرفته می شود. اما چون در این محدوده تعداد نقاط پایه بسیار زیاد می باشد با انتخاب معیاری مناسب تابع تقریب زننده را از بین مقادیر پایه عبور می دهیم و لازم نیست حتماً تابع از روی مقادیر موجود عبور کند. در شکل ۱-۳ تفاوت میان این دو روش نشان داده شده است.

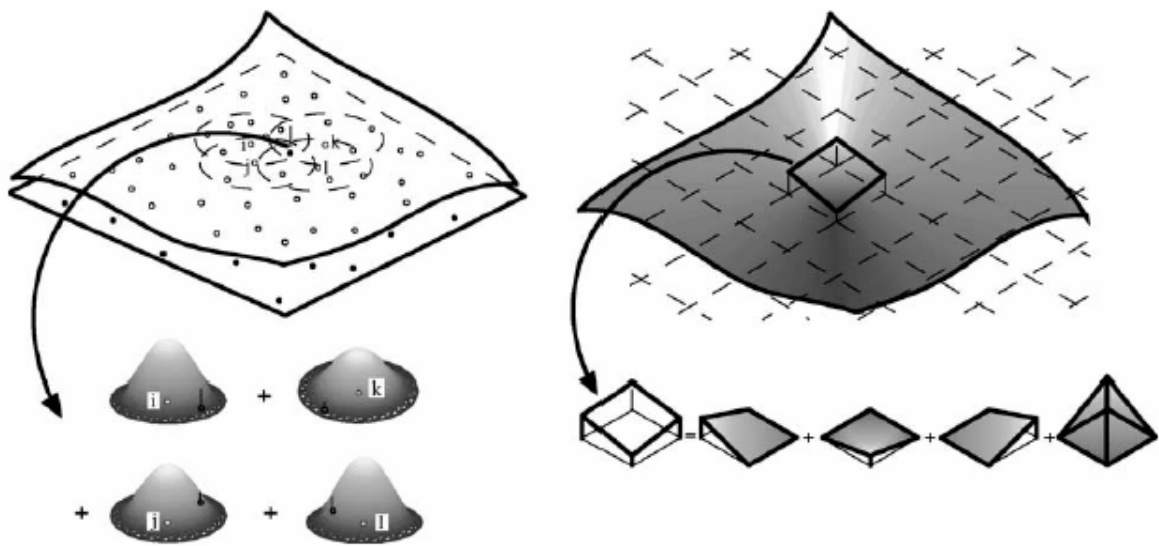


شکل ۱-۳: تفاوت بین روش های تقریب و میانمایی

از لحاظ ساختاری نیز تفاوت بین این دو روش با توجه به فرم توابع شکل آنها کاملاً مشخص می‌گردد. به طوریکه در توابع شکل روش های المان محدود، تابع شکل مربوط به هر گره باید در آن گره مقدار واحد را داشته باشد و در باقی نقاط مقدار صفر را اتخاذ کند که این امر باعث می‌گردد مقدار تقریب زده شده با مقدار واقعی یکسان گردد ولی در روش های بدون المان که از تقریب زننده های حداقل مربعات متحرک استفاده می‌کنند این شرط ارضا نمی‌گردد که این مساله باعث ایجاد مشکلاتی در اینگونه ساختارها می‌گردد.

نکته مهم در روش های تحلیل بدون المان، امکان تسهیل تحلیل خطا و دقت در سازگار سازی شبکه در مسایل با مرزها و ناپیوستگی های متحرک می‌باشد. به عنوان مثال در مساله مربوط به گسترش ترک، می‌توان به تعداد دلخواه نقاط فراوان حول نوک ترک اضافه کرد تا ضرایب شدت تنش با دقت مطلوبی محاسبه گردد.

نکته مثبت دیگر این روش ها این است که بر خلاف روش های اجزای محدود که تغییر دادن یک المان باعث تغییر در المان های مجاور می‌شود - که این مطلب نیز خود باعث تغییر اساسی در ساختار کلی شبکه خواهد گردید - در این روش ها برای افزودن هر تعداد نقاط دلخواه برای بالا بردن دقت در تحلیل مساله نیاز به هیچگونه تغییر در دیگر موارد ساختار شبکه نمی‌باشد.



توابع شکل در روش بدون المان

توابع شکل در روش المان محدود

شکل ۳-۲: مقایسه توابع شکل در روش های المان محدود و روش های بدون شبکه [16].

از طرف دیگر در این دو روش تفاوت اساسی بین توابع شکل تخمین زنده نتایج وجود دارد. به صورتی که در روش های اجزای محدود از توابع شکل خطی استفاده می گردد در صورتی که در روش های بدون المان توابع شکل، دارای درجات بالاتری از چند جمله ای ها می باشند و گاهی از توابع شکلی که به صورت نمایی می باشند استفاده شده است که نتایج قابل قبولی از خود نشان داده اند [16]. در شکل ۳-۲ توابع شکلی مربوط به دو روش و چگونگی تاثیر آنها بر تقریب در یک نقطه نشان داده شده است.

یکی دیگر از مزایای این روش این است که اگر در نقطه ای دلخواه بخواهیم پارامترهایی را محاسبه کنیم کافی است در آن نقطه یک گره قرار دهیم و با انجام محاسبات مقادیر به دست آمده برای آن نقطه را یادداشت کنیم. در حالی که در روش های المان محدود به دلیل آنکه نتایج به دست آمده مربوط به نقطه مرکزی المان می باشد اگر نقطه مورد نظر ما در قسمت های دیگر المان باشد لازم است یا با تقریب از همان نتایج نقطه مرکزی استفاده کنیم و یا اینکه با استفاده از روش های

تقریبی نتایج در نقطه مورد نظر را حدس بزنییم و یا اگر نقطه مورد نظر بر روی مرز بین المان ها باشد از تقریب میان دو المان استفاده کنیم.

### ۳-۳- روش بدون المان گالرکین

یکی از روش های بدون المان که بیش از دیگر روش ها مورد توجه قرار گرفته است، روش بدون المان گالرکین می باشد. اولین مقاله ای که در این رابطه انتشار یافته است در سال ۱۹۹۴ توسط بلیچکو<sup>۱</sup> [7] و همکارانش منتشر گردید. در این مقاله، کاربرد توابع حداقل مربعات متحرک در تولید سطوح بیان گردید. در روش بدون المان گالرکین با به کارگیری تقریب روش حداقل مربعات متحرک<sup>۲</sup> شرایط پیوستگی لحاظ می گردد و توابع شکل بر این اساس ساخته می شوند (معادله ۳-۱).

$$s(x) = \sum_{l=1}^{n_{sn}} w(x - x_l) [u_l - p^T(x_l) a(x)]^2 \quad (۱-۳)$$

این روش بر سه پایه استوار است [6]:

۱- تابع وزنی با محدوده اثر فشرده برای هر گره،  $w(x-x_l)$ .

۲- یک چند جمله ای پایه،  $p^T(x_l)$ .

۳- مجموعه ای از ضرایب مجهول که به موقعیت مکانی بستگی دارند،  $a(x)$ .

همانگونه که دیده می شود این روش بسط یافته روش حداقل مربعات استاندارد می باشد که به صورت زیر تعریف می شود.

$$s(x) = \sum_{l=1}^{n_{sn}} [u_l - p^T(x_l) a(x)]^2 \quad (۲-۳)$$

تفاوت بین این دو روش کاملا مشهود می باشد و همانگونه که دیده می شود در روش حداقل مربعات استاندارد، تابع وزنی موجود در روش حداقل مربعات متحرک وجود ندارد. به طور مختصر می توان گفت این عبارت باعث می گردد که نقاط شرکت کننده در تقریب، اثر یکسانی بر مقادیر به دست

<sup>1</sup> Blytschko

<sup>2</sup> Moving Least Square (MLS)

آمده نداشته باشند که این مساله خود باعث می شود میزان همگرایی در این روش افزایش یابد. در ادامه به صورت مفصل در مورد هر یک از این عبارات شرح داده می شود.

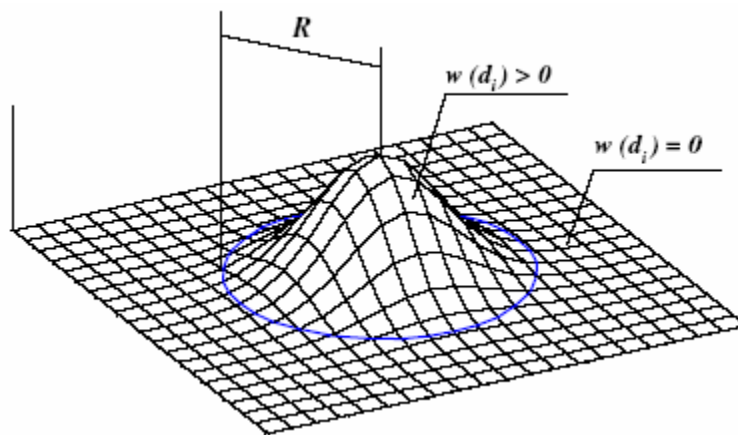
این روش دارای امتیازات زیادی است که در زیر به برخی از این امتیازات اشاره می گردد [7]:

- ۱- این روش هیچگونه قفل شدگی حجمی را ایجاد نمی کند، حتی اگر توابع پایه خطی باشند.
- ۲- سرعت همگرایی را در این روش می توان به مقدار زیادی نسبت به روش های المان محدود افزایش داد.
- ۳- حتی در شرایطی که مساله با گرادیان های شدید محلی مواجه است میتوان به نتایجی با قدرت تفکیک بالا دست پیدا کرد.

### ۳-۴- توابع وزنی

توابع وزنی بیان شده در معادله ۳-۱ در اصل عبارات چند جمله ای یا نمایی می باشند که به صورت کاملاً مستقیم بر روی توابع شکل تاثیر می گذارند. محدوده اثر تابع وزنی برای هر گره یک دامنه تاثیر تعریف می کند که در اصل زیر دامنه ای است از دامنه کلی جسم که در آن محدوده، هر گره خاص بر تقریب کمترین مجموع مربعات تاثیرگذار است و گره هایی که خارج از این محدوده می باشند هیچگونه اثری بر روی میزان تقریب ندارند. همچنین در دامنه تاثیر نیز نقاطی که در فاصله بیشتری از نقطه مرکزی هستند اثر کمتری بر روی تقریب می گذارند که این مساله باعث افزایش دقت در این روش می گردد. علت این موضوع را اینگونه می توان بیان کرد که بین تمامی گره های داخل دامنه نوعی تاثیر متقابل وجود دارد ولی طبیعی است که نقاط نزدیکتر اثر بیشتری در این بر هم کنش دارند، به همین دلیل در محاسبات نیز باید اثر آنها بر روی گره های مرکزی بیشتر باشد. همپوشانی بین دامنه گره ها تعیین کننده پیوستگی بین نقاط می باشد.

البته باید توجه داشت، انتخاب توابع وزنی باید به صورتی باشد که هم دارای جواب یگانه برای  $a_i(x)$  باشند و هم اینکه این توابع دارای مقدار مثبت باشند. باید به این نکته نیز توجه داشت که مقدار تابع وزنی  $w(x-x_I)$  بر روی تقریب  $u^h(x)$  تاثیر به سزایی دارد. در روش تحلیل بدون المان گالرکین عموماً تابع وزنی  $w(x-x_I)$  به گونه ای انتخاب می شود که با افزایش مقدار  $\|x-x_I\|$  مقدار آن به صورت پیوسته کاهش یابد. برای درک بهتر این مطلب در شکل ۳-۳ [8] یک تابع وزنی فرضی نشان داده شده است. همانگونه که در این شکل دیده می شود نکات ذکر شده، در این تابع لحاظ شده است.



شکل ۳-۳: تصویر کیفی یک تابع وزنی [8]

برای ساده سازی شکل این توابع، متغیرهای زیر تعریف شده اند:

$$r = \frac{d_I}{d_{Im}} \quad d_I = \|x - x_I\| \quad (3-3)$$

در این روابط  $d_{Im}$  شعاع دامنه تاثیر گره  $I$  ام می باشد. اکنون تابع وزنی را می توان به صورت ساده تر و فشرده تری بر حسب فاصله نرمال شده  $r$  بیان کرد. چند تابع وزنی متداول در این رابطه به صورت زیر بیان شده است.

تابع وزنی گوسی [17]:

$$w(r) = \begin{cases} e^{-(r/0.4)^2} & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (4-3)$$

تابع وزنی اسپلاین درجه سوم [9]:

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \text{for } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \text{for } \frac{1}{2} < r < 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (5-3)$$

تابع وزنی چند جمله ای درجه چهارم [10]:

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (6-3)$$

تابع وزنی چند جمله ای درجه سوم:

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 3r^2 + 2r^3 & \text{for } r \leq 1 \\ 0 & \text{for } r > 1 \end{cases} \quad (7-3)$$

توابع وزنی اسپلاین درجه سوم و چند جمله ای درجه ۴ پیوستگی  $C^2$  دارند و تابع وزنی چند جمله ای درجه سوم و گوسی نیز پیوستگی  $C^{-1}$  دارند ولی تابع گوس در اهداف محاسباتی پیوستگی  $C^1$  یا بالاتر از خود نشان می دهد.

شعاع محدوده اثر در یک گره مفروض،  $d_{lm}$ ، با رابطه زیر بیان می گردد:

$$d_m = d_{\max} \cdot c_l \quad (8-3)$$

که  $d_{\max}$  ضریب مقیاس و  $c_l$  فاصله مطلوب برای جستجوی گره های به اندازه کافی نزدیک به گره مرکزی است که شرایط چند جمله ای را ارضا کنند و برابر کمترین شعاع دامنه تاثیر مجاز برای گره **I** ام می باشد که همان فاصله گره **I** تا نزدیکترین گره مجاور می باشد.



ضریب مقیاس دامنه تاثیر  $d_{\max}$ ، نیز معمولاً برای تحلیل های استاتیکی مقادیر ۲ و برای تحلیل های دینامیکی مقداری بین ۲ تا ۲,۵ را اختیار می کند. باید توجه داشت با اینکه ابعاد دامنه تاثیر مقداری دلخواه و اختیاری می باشد ولی با کمترین تغییر در آن ممکن است در نتایج خطای زیادی به وجود آید. همچنین افزایش بیش از حد آن می تواند باعث شود تا زمان بسیار زیادی برای محاسبات نیاز باشد.

با وجود آنکه دامنه تاثیر به صورت کلی به شکل دایره در نظر گرفته می شود ولی در حالاتی خاص ممکن است استفاده از اشکال دیگر برای این محدوده باعث ساده سازی های مناسب در مساله گردند. به عنوان مثال گاهی می توان از دامنه ای به شکل مربع استفاده کرد که با استفاده از این دامنه مقدار محاسبات کاهش می یابد و در ضمن تاثیر چندانی هم در همگرایی نتایج ندارد.

اگر تابع وزنی در تمام طول دامنه ثابت فرض گردد، تقریب حداقل مربعات متحرک -MLS- به روش آشنای حداقل مربعات استاندارد تبدیل می گردد. در این حالت  $a(x)$  تابعی از موقعیت مکانی  $x$  نبوده و در تمامی دامنه مقدار ثابتی دارد.

اگر تابع وزنی به گونه ای انتخاب گردد که در محدوده ای خاص برای هر گره دارای مقدار ثابت و در باقی گره ها مقدار صفر را دارا باشد تقریب حداقل مربعات متحرک به روش اجزای محدود تبدیل می گردد که در این حالت مفهوم المان، همان زیر دامنه ای است که تابع وزنی در آنجا غیر صفر است.

توابع وزنی که از طریق معادله ۱-۳ وارد فرمول بندی مساله شده اند، تاثیر تعیین کننده ای در پاسخ های مساله دارند. با توجه به اینکه خاصیت پیوستگی تابع وزنی عیناً به تابع شکل و از آن نیز به تابع تقریب یعنی همان پاسخ عددی مورد نظر منتقل می گردد، بهتراست تابع تقریب از لحاظ پیوستگی دارای مرتبه بالایی باشد. همچنین چون مشتقات تابع وزنی نیز در محاسبات استفاده می

گردند بهتر است از توابعی که دارای مشتقات پیوسته هستند استفاده کرد. تابع وزنی چند جمله ای درجه چهار با توجه به نکات گفته شده از مناسب ترین توابع گفته شده می باشد که در بسیاری از تحلیل های انجام شده توسط افراد خبره به کار گرفته شده است.

### ۳-۵- توابع پایه کامل

در روش حداقل مربعات متحرک، یک تابع میانیاب  $u^h(x)$  به صورت زیر به عنوان تقریبی از تابع حقیقی  $u(x)$  در نظر گرفته می شود.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) a_i(x) \equiv p^T(x) a(x) \quad (9-3)$$

که در آن  $p_i(x)$  یک تابع چند جمله ای پایه کامل با رتبه دلخواه  $m$  می باشد.  $a_i(x)$  نیز ماتریس ضرایب مجهول می باشد که با یافتن این ماتریس، تابع  $u(x)$  نیز تقریب زده می شود. هم تابع چند جمله ای  $p_i(x)$  و هم ماتریس  $a_i(x)$  توابعی از موقعیت مکانی  $x$  می باشند.

$$p^T(x) = \{p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\} \quad (10-3)$$

$$a^T(x) = \{a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)\} \quad (11-3)$$

در روابط فوق همواره  $p_1(x)$  برابر واحد می باشد.  $p_i(x)$  نیز تک جمله ای هایی در مختصات فضایی می باشند. برای پی بردن به مفهوم توابع پایه کامل مثال های زیر آورده شده است:

در یک بعد:

$$p^T(x) = \{1, x_1\}, m = 2 \quad \text{چند جمله ای پایه از درجه ۱ (تابع خطی):}$$

$$p^T(x) = \{1, x_1, x_1^2\}, m = 3 \quad \text{چند جمله ای پایه از درجه ۲ (تابع سهموی):}$$

در دو بعد:

$$p^T(x) = \{1, x_1, x_2\}, m = 3 \quad \text{چند جمله ای پایه از درجه ۱ (تابع خطی):}$$

چند جمله ای پایه از درجه ۲ (تابع سهموی):  $p^T(x) = \{1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2\}, m = 6$

در موارد خاص، با توجه به اینکه لازم است نوع خاصی از مساله حل گردد توابعی که در آن حالت کارایی بهتری داشته باشند نیز پیشنهاد شده اند. به عنوان مثال، تابع زیر برای بررسی نوک ترک پیشنهاد شده است. جملات ویژه موجود باعث می گردد تا ضرایب تمرکز تنش به خوبی در نوک ترک محاسبه گردند [11].

$$p^T(x) = \{1, x_1, x_2, \sqrt{r} \cos(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta)\}, m = 7 \quad (12-3)$$

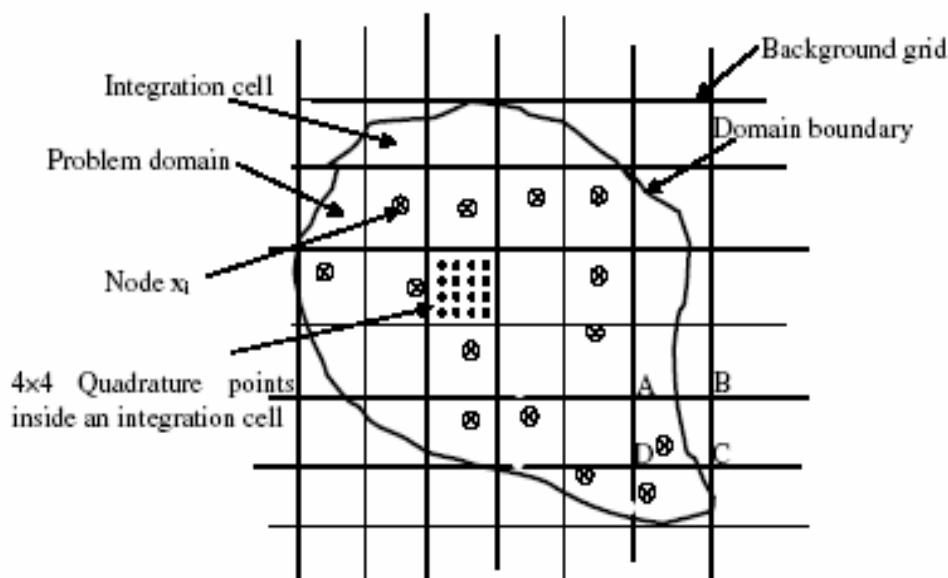
البته با وجود آنکه استفاده از توابع پایه با درجات بالاتر باعث ایجاد همگرایی بیشتر در نتایج می گردد ولی با این وجود استفاده از این درجات بالاتر باعث افزایش مقدار محاسبات می گردد. همچنین همگرایی ایجاد شده با استفاده از توابع پایه خطی به اندازه ای مطلوب می باشد که دیگر نیازی به استفاده از توابع پایه با درجات بالاتر نمی باشد.

### ۳-۶- شبکه انتگرال گیری

باید توجه داشت با وجود اینکه این روش به عنوان یک روش بدون المان و شبکه در نظر گرفته می شود ولی با این وجود برای حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره ای<sup>۱</sup> چون از روش گالرکین استفاده شده است نیاز به ایجاد شبکه ای برای انتگرال گیری می باشد. هر چند استفاده از یک شبکه در پیاده سازی روش بدون المان گالرکین متداول، برای انتگرال گیری لازم است ولی در طی فرایند شبیه سازی نیازی به شبکه بندی مجدد دامنه نمی باشد و همچنین می توان گفت محاسبات انجام شده در این روش کاملاً مستقل از شکل این شبکه انتگرال گیری می باشد و این شبکه تنها به عنوان یک شبکه زمینه در روش های بدون المان کاربرد دارد و با تعریف معمول در روش های المان محدود

<sup>۱</sup> - PDE

کاملاً متفاوت می باشد. این مساله هنگامی که هندسه مساله دائماً در حال تغییر است بسیار مفید می باشد. در شکل ۳-۴ ساختار کلی این شبکه برای تحلیل هندسه های مختلف نشان داده شده است [9]. یکی از مهم ترین مزایای اینگونه شبکه بندی این است که با توجه به این که در روش های تحلیل عددی بیشتر از روش های انتگرال گیری عددی گوس استفاده می کنند \_ چون در روش های بدون المان شبکه انتگرال گیری کاملاً مستقل از دیگر پارامترها می باشد \_ به راحتی می توان از توابع گوسی با درجات بالا استفاده کرد که این مساله باعث ایجاد دقت بیشتر در موارد ضروری می گردد.



شکل ۳-۴ : ساختار شبکه بندی زمینه برای انتگرال گیری [9]

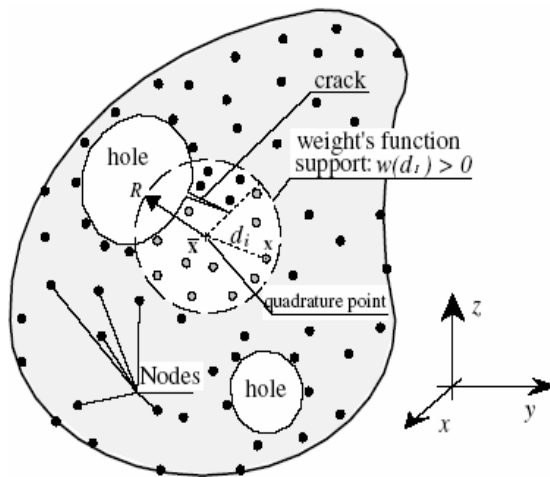
### ۳-۷- توابع شکل در روش بدون المان گالرکین

همانگونه که گفته شد در عبارت تخمینی ۳-۹ ضرایب  $a_i(x)$  مجهول می باشند که به دست آمدن آنها برای هر نقطه  $x$  با حداقل سازی نرم  $L$  - خطای وزندار - زیر محاسبه می شود.

$$s(x) = \sum_{I=1}^{n_{sn}} w(x - x_I) [u_I - p^T(x_I) a(x)]^2 \quad (13-3)$$

در این رابطه  $u_I$  مقدار واقعی تابع در گره  $I$  برای  $x = x_I$  می باشد. تابع وزنی نیز  $w(x - x_I)$  یک تابع با محدوده اثر فشرده متناظر با گره  $I$  ام می باشد.  $n_{sn}$  نیز تعداد گره هایی می باشد که مقدار تابع در این نقاط بر روی تخمین مقدار نقطه  $x$  تاثیر می گذارد. به عبارت دیگر در این نقاط مقدار تابع وزنی غیر صفر می باشد. در شکل ۳-۵ [8] چگونگی شبکه بندی یک جسم فرضی و چگونگی محاسبه محدوده اثر هر نقطه نشان داده شده است. به صورت هندسی نشان داده شده است.

$$\begin{cases} w(r) \neq 0 & r < 1 \\ w(r) = 0 & r > 1 \end{cases} \quad (14-3)$$



شکل ۳-۵: محدوده اثر فشرده متناظر با نقطه  $x$  [8]

همان گونه که گفته شد ضرایب  $a_i(x)$  برای هر نقطه  $x$  با حداقل سازی نرم  $L_2$  - خطای وزندار - محاسبه می شوند. در روش های تحلیل عددی بهتر است این ضرایب مجهول را با قرار دادن آنها در توابعی که اصطلاحاً به آنها توابع شکل گفته می شود محاسبه کرد و با توجه به وابستگی توابع شکل به این ضرایب مجهول برای محاسبه آنها نیز از کمینه کردن  $s(x)$  استفاده می شود. با توجه به معادله نرم  $L_2$  خواهیم داشت [11]:

$$\frac{\partial s(x)}{\partial a(x)} = 0 \rightarrow A(x)a(x) = c(x)u \quad (۱۵-۳)$$

که در این رابطه داریم:

$$A(x) = \sum_{I=1}^{n_{sn}} w(x-x_I)p(x_I)p^T(x_I)$$

$$c(x) = [w(x-x_1)p(x_1), w(x-x_2)p(x_2), \dots, w(x-x_n)p(x_n)] \quad (۱۶-۳)$$

$$u^T = [u_1, u_2, \dots, u_{n_{sn}}]$$

با توجه به این روابط، ضرایب  $a(x)$  را می توان اینگونه به دست آورد:

$$a(x) = A^{-1}(x)c(x)u \quad (۱۷-۳)$$

با جایگذاری معادله ۱۷-۳ در ۹-۳ تقریب زننده های MLS اینگونه به دست می آیند:

$$u^h(x) = p^T(x)a(x) \equiv \phi(x)u \quad (۱۸-۳)$$

که با توجه به معادلات قبل، تابع  $\phi(x)$  که همان تابع شکل است به این صورت بیان می گردد:

$$\phi(x) = p^T(x)A^{-1}(x)c(x) \quad (۱۹-۳)$$

برای یافتن مشتقات توابع شکلی، هر دو تابع  $p(x)$  و  $a(x)$  متغیر فرض می گردند. مشتق توابع

شکلی به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$u_j^h = \phi_{,i(x)} u \quad (۲۰-۳)$$

که در آن:

$$\phi_{,i}(x) = p_{,i}^T A^{-1}c + p^T (A_{,i}^{-1}c + A^{-1}c_{,i}) \quad (۲۱-۳)$$

مشتق گیری از تابع  $A^{-1}$  را می توان با مشتق گیری از رابطه  $A^{-1}A = I$  به دست آورد که نتیجه

می گردد:

$$A_{,i}^{-1} = -A^{-1}A_{,i}A^{-1} \quad (۲۲-۳)$$

یکی از نکاتی که به آن اشاره شد این است که تقریب زننده های MLS بر خلاف روش های

اجزای محدود در حالت کلی دارای خاصیت دلتای کرونکر نمی باشند. یعنی:

$$\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij} \quad (23-3)$$

لذا معادلات به دست آمده ضرورتاً شرایط مرزی را ارضا نمی کنند. به همین علت باید تمهیدات خاصی برای اعمال شرایط مرزی به کار بست که این مساله یکی از مهم ترین مشکلات این روش ها می باشد.

نتیجتاً اعمال شرایط مرزی ضروری بسیار پیچیده تر از روش استاندارد اجزای محدود می باشد. برای اعمال شرایط مرزی روش های گوناگونی بیان شده است که از بین آنها می توان به معادلات ضعیف شده الاستیسیته ( تعادل استاتیکی و دینامیکی ) به روش ضرایب لاگرانژ و ترکیب روش های اجزای محدود با روش های بدون المان گالرکین اشاره کرد.

### ۳-۸- بررسی معادلات تعادل و فرم ضعیف

با فرض تغییر مکان های کوچک، معادله تعادل استاتیکی در تئوری الاستیسیته برای مساله ای با دامنه  $\Omega$  و مرز  $\Gamma$  از این قرار است:

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (24-3)$$

که در آن  $\sigma$  تانسور تنش می باشد که متناظر با میدان تغییر مکان  $u$  است.  $b$  نیز بردار نیروی حجمی وارد بر جسم است.

اگر به جای مساله تعادل با مساله ای از نوع دینامیکی سر و کار داشته باشیم، آنگاه در سمت راست معادله ۲۴-۳ به جای مقدار صفر عبارت  $\rho a$  قرار می گیرد که در آن  $\rho$  بیانگر چگالی و  $a$  بیانگر شتاب می باشد. در این حالت لازم است که علاوه بر شرایط مرزی، شرایط اولیه نیز معین گردد.

رابطه بین تانسور تنش و میدان تغییر مکان نیز با استفاده از روابط زیر بیان می گردد:

$$\varepsilon = \nabla_s u \quad , \quad \sigma = D\varepsilon \quad (25-3)$$

که ماتریس  $D$  ماتریس خواص ماده،  $u$  میدان تغییر مکان و عملگر  $\nabla$  نیز عملگر گرادیان می باشد.  $\nabla_s u$  نیز بخش متقارن عبارت  $\nabla u$  می باشد.

شرایط مرزی اعمال شده بر مساله نیز اینگونه هستند:

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i & \text{on } \Gamma_{ui} \\ \sigma_{ij} . n_j = \bar{t}_i & \text{on } \Gamma_{ti} \end{cases} \quad (26-3)$$

که در آنها، مقادیر سمت راست معادلات، مقادیر تعیین شده توسط شرایط مساله و بردار  $n$  بردار نرمال بر مرز  $\Gamma$  در هر نقطه می باشد.

تا کنون روش های گوناگونی برای اعمال شرایط مرزی در روش بدون المان گالرکین ارائه گردیده که در برخی از این روش ها از اعمال معادلات اضافه برای اثر دادن شرایط مرزی استفاده می شود و در برخی دیگر نیز از تلفیق این روش ها با روش های دیگر استفاده شده است. در پژوهش حاضر از روش پنالتی برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده شده است.

### ۳-۹- فرمول بندی و گسسته سازی معادلات در روش EFG

معادله دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی یک مسئله دو بعدی الاستیسیته خطی به صورت زیر

است:

معادله دیفرانسیل تعادل:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (27-3)$$

شرایط مرزی طبیعی:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (28-3)$$

شرایط مرزی اساسی:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (29-3)$$



که در معادله فوق و شرایط مرزی،  $\mathbf{L}$  عملگر دیفرانسیلی بصورت زیر است:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ : بردار تنش با مولفه های  $\{\sigma_{xx}; \sigma_{yy}; \tau_{xy}\}$  است.

$\mathbf{u}$ : بردار تغییر مکان یا جابجایی با مولفه های  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{v}$  است:  $\mathbf{u} = \{u; v\}$

$\mathbf{b}$ : بردار نیروهای کالبدی با مولفه های  $\mathbf{b}_x$  و  $\mathbf{b}_y$  است:  $\mathbf{b} = \{b_x; b_y\}$

$\mathbf{t}$ : بردار تنش معلوم روی قسمتی مشخص از مرز مساله (مرز طبیعی) است.

$\bar{\mathbf{u}}$ : تغییر مکان معلوم روی قسمتی مشخص از مرز مساله (مرز اصلی) است.

$\mathbf{n}$ : بردار یکه و عمود رو به خارج در بخشی از مرز مساله است.

فرم استاندارد تغییراتی یا ضعیف معادله تعادل (3-27) بصورت زیر است:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (3-31)$$

که در آن،  $\mathbf{D}$  ماتریس ثابت های سختی الاستیک با فرم زیر برای حالت تنش صفحه ای:

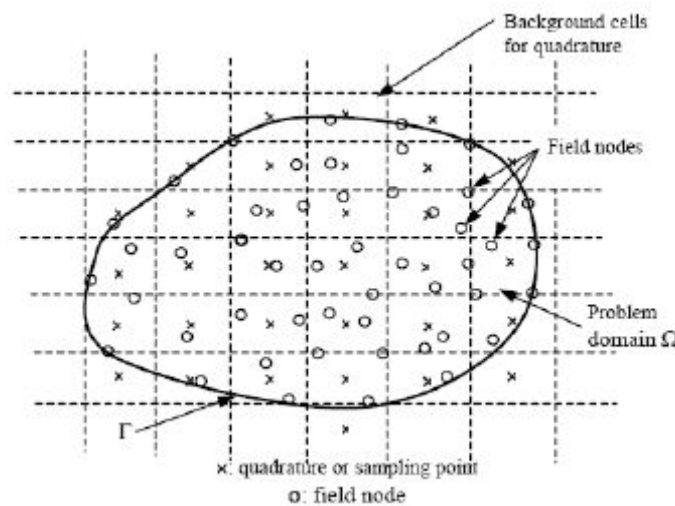
$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

و با فرم:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

برای حالت کرنش صفحه ای است.

معادله (۳-۳۱) فرم ضعیفی است که روی کل ناحیه حل  $\Omega$  تعریف شده است. برای محاسبه انتگرال های رابطه (۳-۳۱) ناحیه حل مسئله  $\Omega$  به مجموعه ای از المان ها یا سلول های زمينه<sup>۱</sup> شکسته می شود که هم پوشانی ندارند (مطابق شکل (۳-۶)). برای محاسبه انتگرال ها روی شرایط مرزی طبیعی  $\Gamma_I$  نیز مجموعه ای از المان های منحنی (برای مسئله دوبعدی) بکار می رود. این المان های منحنی نیز مانند شبکه داخلی هم پوشانی ندارند.



شکل ۳-۶ شبکه بندی زمينه در روش های بدون مش روی کل ناحیه. نمایش ناحیه حل با گره ها و استفاده

از شبکه بندی زمينه

از این پس برای تقریب متغیر میدان - در اینجا تغییر مکان - ناحیه حل مسئله با مجموعه مناسبی از گره ها نمایش داده می شود. این گره ها به ترتیب از ۱ تا  $N$  برای کل ناحیه حل شماره گذاری می شوند. برای تخمین تغییر مکان ها در هر نقطه از ناحیه حل از توابع شکل **MLS** و تغییر مکان گره های موجود در ناحیه تکیه گاهی نقطه مورد نظر استفاده می شود.

<sup>۱</sup> Background Cells

$$\mathbf{u}_{(2*1)}^h = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \mathbf{\Phi}_{(2*2n)} \mathbf{u}_{(2n*1)} \quad (3-34)$$

که در آن  $\mathbf{\Phi}$  ماتریس تابع شکل،  $n$  تعداد گره های موجود در ناحیه تکیه گاهی و  $\mathbf{u}$  بردار تغییر مکان ها در گره های ناحیه تکیه گاهی است. معادله (۳-۳۴) را به صورت مجموعی از مشخصه های گرهی نیز می توان نوشت:

$$\mathbf{u}_{(2*1)}^h = \sum_I^n \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} = \sum_I^n \mathbf{\Phi}_I \mathbf{u}_I \quad (3-35)$$

در این رابطه،  $\mathbf{\Phi}_I$  ماتریس توابع شکل گره  $I$  ام و  $\mathbf{u}_I$  بردار تغییر مکان گرهی است. در رابطه (۳-۳۵)،  $\mathbf{u}^h$  بردار تغییر مکانی است که برای نقطه مورد نظر تخمین زده شده است. این نقطه می تواند یک نقطه دلخواه از ناحیه حل و یا یک نقطه انتگرال گیری گوسی باشد. فرم وردشی معادله (۳-۳۵) بصورت زیر است:

$$\delta \mathbf{u}_{(2*1)}^h = \sum_I^n \mathbf{\Phi}_I \delta \mathbf{u}_I \quad (3-36)$$

مولفه های کرنش با استفاده از تغییر مکان های تخمینی بصورت زیر تقریب زده می شوند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(3*1)} = \mathbf{L} \mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{(3*2n)} \mathbf{u}_{(2n*1)} = \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \quad (3-37)$$

که در آن،  $\mathbf{B}$  ماتریس کرنش و  $\mathbf{B}_I$  ماتریس کرنش در گره  $I$  ام است. بطور مشابه، فرم وردشی کرنش با توجه به رابطه (۳۷-۳) بصورت زیر بدست می آید:

$$\mathbf{L}\delta\mathbf{u}^h = \mathbf{L}_{(3*2)} \Phi_{(2*2n)} \delta\mathbf{u}_{(2n*1)} = \mathbf{B}_{(3*2n)} \delta\mathbf{u}_{(2n*1)} = \sum_I^n (\mathbf{B}_I)_{(3*2)} (\mathbf{u}_I)_{(2*1)} \quad (38-3)$$

با استفاده از روابط ساختاری<sup>۱</sup> بردار تنش در هر نقطه از ناحیه حل بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_{(3*3)} \mathbf{B}_{(3*2n)} \mathbf{u}_{(2n*1)} = \sum_I^n \mathbf{D}_{(3*3)} (\mathbf{B}_I)_{(3*2)} (\mathbf{u}_I)_{(2*1)} \quad (39-3)$$

با در نظر گرفتن روابط (۳۷-۳) و (۳۸-۳)، عبارت اول رابطه (۳۱-۳) بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega &= \int_{\Omega} \left( \sum_I^n \mathbf{B}_I \delta\mathbf{u}_I \right)^T \left( \sum_J^n \mathbf{D}\mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_I^n \sum_J^n \delta\mathbf{u}_I^T [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D}\mathbf{B}_J] \mathbf{u}_J d\Omega \end{aligned} \quad (40-3)$$

تا این مرحله، گره ها در ناحیه محلی تکیه گاهی شماره گذاری می شوند و  $I$  و  $J$  شماره های محلی گره ها هستند. از این پس، شماره گذاری گره ها از سیستم های محلی به شماره گذاری آن ها در سیستم کل تغییر می کند. در سیستم کل، تمام گره های مساله دارای یک شماره واحد از ۱ تا  $N$  می باشند. بنابراین، در رابطه (۴۰-۳) شماره گره های  $I$  و  $J$  می تواند از ۱ تا  $N$  تغییر کند. اگر  $I$  و  $J$  در یک ناحیه تکیه گاهی واحد قرار نداشته باشند، عبارت داخل انتگرال رابطه (۴۰-۳) و در نتیجه مقدار انتگرال صفر می شود. با در نظر گرفتن شماره گذاری در کل سیستم، رابطه (۴۰-۳) بصورت زیر بیان می شود:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_I^N \sum_J^N \delta\mathbf{u}_I^T [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D}\mathbf{B}_J] \mathbf{u}_J d\Omega \quad (41-3)$$

می توان عملگر انتگرال گیری را به داخل عملگرهای جمع بصورت زیر منتقل نمود:

<sup>۱</sup> Constitutive Equations

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u})d\Omega = \sum_I^N \sum_J^N \delta\mathbf{u}_I^T \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D}\mathbf{B}_J d\Omega \right) \mathbf{u}_J \quad (42-3)$$

طبق این رابطه، ماتریس  $2 \times 2$  سختی گرهی<sup>۱</sup> بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_I^T)_{2 \times 3} \mathbf{D}_{3 \times 3} (\mathbf{B}_J)_{3 \times 2} d\Omega \quad (43-3)$$

البته اگر گره های  $I$  و  $J$  هر دو در ناحیه تکیه گاهی یک نقطه انتگرال گیری گوسی قرار نداشته باشند، مقدار  $\mathbf{K}_{IJ}$  صفر است. با در نظر گرفتن تعریف فوق، رابطه (۴۲-۳) بصورت زیر بیان می شود:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u})d\Omega = \sum_I^N \sum_J^N \delta\mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J \quad (44-3)$$

عملگرهای جمع در رابطه بالا، فرآیند مونتاژ را انجام می دهند. بسط عبارت سمت راست در رابطه

(۴۴-۳) فرآیند مونتاژ را نشان می دهد. در نهایت، فرم معادله (۴۲-۳) بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \sum_I^n \sum_J^N \delta\mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J &= \delta\mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{u}_1 + \delta\mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{12} \mathbf{u}_2 + \dots + \delta\mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{1N} \mathbf{u}_N \\ &\delta\mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{21} \mathbf{u}_1 + \delta\mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{u}_2 + \dots + \delta\mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{2N} \mathbf{u}_N \\ &\vdots \\ &+ \delta\mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{1N} \mathbf{u}_N + \delta\mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{2N} \mathbf{u}_N + \dots + \delta\mathbf{u}_N^T \mathbf{K}_{NN} \mathbf{u}_N \end{aligned} \quad (45-3)$$

که در آن  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی کل سیستم است. با توجه به  $2 \times 2$  بودن ماتریس سختی گرهی و تعداد

گره های کل مسئله،  $N$ ، بعد ماتریس سختی کل برابر  $2N \times 2N$  می باشد.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1N} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \dots & \mathbf{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N1} & \mathbf{K}_{N2} & \dots & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix} \quad (46-3)$$

با در نظر گرفتن روابط فوق، فرم نهایی رابطه (۴۲-۳) بصورت زیر است:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u})d\Omega = \delta\mathbf{U}^T \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (47-3)$$

<sup>1</sup> Nodal Stiffness Matrix

در این رابطه، بردار  $\mathbf{U}$  بردار تغییر مکان کل سیستم است و شامل تغییر مکان های گرهی تمام گره های مسئله می باشد. بردار  $\mathbf{U}$ ،  $2N$  مولفه دارد.

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (48-3)$$

عبارت دوم معادله (۳۱-۳) با جایگزینی رابطه (۳۵-۳) و استفاده از فرآیندی مشابه فرآیند

ماتریس سختی، بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega} (\delta \sum_I^n \Phi_I \mathbf{u}_I)^T \mathbf{b} d\Omega \quad (49-3)$$

عبارت فوق با تغییر سیستم شماره گذاری محلی به سیستم شماره گذاری کل بصورت زیر نمایش داده می شود:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega} (\delta \sum_I^N \Phi_I \mathbf{u}_I)^T \mathbf{b} d\Omega \quad (50-3)$$

با انتقال عملگر انتگرال گیری به داخل عملگر جمع، رابطه (۵۰-۳) بصورت زیر نوشته می شود:

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega \quad (51-3)$$

بردار نیروی کالبدی گرهی  $\mathbf{F}_I^{(b)}$  بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{F}_I^b = \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega \quad (52-3)$$

که در آن،  $\mathbf{b}$  بردار نیروی کالبدی است. بسط عبارت سمت راست رابطه (۵۱-۳) فرم ماتریسی آنرا بصورت زیر نمایش می دهد:

$$\begin{aligned} \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega &= \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{F}_I^b = \\ \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{F}_1^b + \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{F}_2^b + \dots + \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{F}_N^b &= \\ \left\{ \delta \mathbf{u}_1^T \quad \dots \quad \delta \mathbf{u}_N^T \right\}_{(1*2N)} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^b \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N^b \end{Bmatrix}_{(2N*1)} &= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^b \end{aligned} \quad (53-3)$$

در عبارت فوق،  $\mathbf{F}^{(b)}$  بردار نیروی کالبدی کل است که با مونتاژ بردارهای نیروی کالبدی گرهی بصورت زیر بدست می آید:

$$\mathbf{F}^b = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^b \\ \mathbf{F}_2^b \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N^b \end{Bmatrix}_{(2N*1)} \quad (54-3)$$

عبارت آخر معادله (۳-۳۱) با فرآیندی دقیقاً شبیه نیروی کالبدی - روابط (۳-۴۹) تا (۳-۵۳)

- بصورت زیر قابل بیان است. این عبارت ها برای نیروهای **traction** محاسبه می شوند و انتگرال گیری ناحیه ای با انتگرال گیری روی مرزهای طبیعی جایگزین می شود.

$$\int_{\Gamma_i} (\delta \mathbf{u})^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \sum_I^n \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Gamma_i} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \delta \mathbf{U}^T \sum_I^N \int_{\Gamma_i} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(t)} \quad (55-3)$$

بردار نیروی **traction** گرهی  $\mathbf{F}_I^{(t)}$  بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{F}_I^{(t)} = \int_{\Gamma_i} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (56-3)$$

در معادله (۳-۵۵)،  $\mathbf{F}^{(t)}$  بردار نیروی **traction** کل است که با مونتاژ نیروهای **traction** گرهی  $\mathbf{F}_I^{(t)}$  بدست می آید.

<sup>1</sup> Nodal Traction Force

$$\mathbf{F}^t = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^t \\ \mathbf{F}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N^t \end{Bmatrix}_{(2N*1)} \quad (57-3)$$

با جایگزینی روابط (۳-۴۷)، (۳-۵۳) و (۳-۵۵) در معادله (۳-۳۱) رابطه زیر بدست می آید:

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(b)} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(t)} = 0 \quad (58-3)$$

چون مقدار  $\delta \mathbf{U}$  اختیاری است، معادله بالا هنگامی برقرار می شود که:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}^{(b)} - \mathbf{F}^{(t)} = 0 \quad (59-3)$$

یا:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}^{(b)} + \mathbf{F}^{(t)} \quad (60-3)$$

معادله فوق را می توان بصورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (60-3)$$

که در آن  $\mathbf{F}$  بردار نیروی کل است و بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(b)} + \mathbf{F}^{(t)} \quad (61-3)$$

رابطه (۳-۶۰) شکل نهایی معادلات گسسته سیستم در روش های بدون مش روی کل ناحیه حل است. پس از اعمال شرایط مرزی اساسی، حل معادله (۳-۶۰) تغییر مکان های گرهی را می دهد. پس از محاسبه تغییر مکان های گرهی یا پارامترهای گرهی، با استفاده از روابط (۳-۳۷) و (۳-۳۹) می توان مولفه های کرنش و تنش را بدست آورد.

### ۳-۱۰- روش پنالتی

یک مسئله دو بعدی مکانیک جامدات در ناحیه  $\Omega$  و محصور به مرز  $\Gamma$  در نظر گرفته می شود. فرم قوی<sup>۱</sup> معادلات حاکم در روابط (۳-۲۷) تا (۳-۳۱) آمده است. در روش بدون المان گالرکین برای

<sup>۱</sup> Strong Form



ساخت توابع شکل، از تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) استفاده می شود. چون تقریب MLS فاقد خاصیت تابع دلتای کرونکر است، برای اعمال شرایط مرزی اساسی در فرم ضعیف، از روش گالرکین مقید بصورت زیر استفاده می شود:

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}(\mathbf{Lu}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \delta \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (۶۲-۳)$$

که در آن،  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_k]$  ماتریس قطری فاکتورهای پنالتی است. برای مسایل دوبعدی  $k = 2$  و برای مسایل سه بعدی  $k = 3$  می باشد. توابع پنالتی  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) می توانند تابع مختصه های مکانی باشند و لزوماً با هم برابر نیستند. در عمل، این فاکتورها بصورت اعداد مثبت بزرگی در نظر گرفته می شوند که قبل از شروع تحلیل باید مقدار آنها معلوم شود. در استفاده از روش بدون المان گالرکین، سازگاری تابع شکل روی کل ناحیه حل، با انتخاب مناسب توابع وزنی در تقریب MLS تامین می شود. بدین جهت، برای تامین سازگاری عبارت مقید در فرم ضعیف (۶۲-۳) لازم نیست.

در این روش، توابع شکل با استفاده از گره های ناحیه تکیه گاهی و تقریب MLS ساخته می شود و میدان تغییر مکان (متغیر میدان) با کاربرد توابع شکل و پارامترهای گرهی بصورت زیر تخمین زده می شود:

$$\mathbf{u}_{2*1}^h = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_{(2*2n)} \mathbf{u}_{(2n*1)} \quad (۶۳-۳)$$

در عبارت فوق،  $\boldsymbol{\Phi}$  ماتریس توابع شکل است و دارای فرم زیر می باشد:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \quad (۶۴-۳)$$

در معادله (۳-۶۳) برای گره  $I$  ام،  $u_I$  و  $v_I$  پارامترهای تغییر مکان هستند. مقدار آنها با تغییر مکان گره ها تفاوت دارد. چون توابع شکل MLS فاقد خاصیت تابع دلتای کرونکر هستند، با جایگزینی عبارت فوق در معادله فرم ضعیف (۳-۶۲) و اعمال فرآیندی دقیقاً شبیه آنچه در بخش (۳-۹) طی شد، معادلات گسسته سیستم با روش بدون المان گالرکین بصورت زیر بدست می آیند:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha)\mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^\alpha \quad (۳-۶۵)$$

در این عبارت،  $\mathbf{U}$  بردار پارامترهای گرهی تمام گره های ناحیه حل است،  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی کل است که از مونتاژ ماتریس های سختی گرهی بدست می آید و  $\mathbf{F}$  بردار نیروی خارجی کل است که با مونتاژ بردارهای نیروی گرهی حاصل می شود. مطابق معادلات (۳-۴۹) و (۳-۵۳)، ماتریس جدید  $\mathbf{K}^\alpha$  ماتریس سختی پنالتی کل است. این ماتریس مانند ماتریس سختی کل از مونتاژ ماتریس های سختی پنالتی گره ها، درست با همان روش، بدست می آید.

$$\mathbf{K}_{IJ}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \boldsymbol{\alpha} \Phi_J d\Gamma \quad (۳-۶۶)$$

ماتریس  $\mathbf{K}_{IJ}^\alpha$  یک ماتریس  $2 \times 2$  است. در رابطه (۳-۶۵)، بردار نیروی  $\mathbf{F}^\alpha$  بخاطر شرایط مرزی اساسی ایجاد می شود. این بردار با روشی مشابه روش مونتاژ بردار نیروی  $\mathbf{F}$  و با کاربرد بردار نیروی پنالتی گرهی  $\mathbf{F}_I^\alpha$  بدست می آید. بردار نیروی پنالتی گرهی بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{F}_I^\alpha = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \boldsymbol{\alpha} \bar{u} d\Gamma \quad (۳-۶۷)$$

انتگرال گیری ماتریس سختی پنالتی و بردار نیروی پنالتی با استفاده از روش های استاندارد انتگرال گیری عددی انجام می شود. البته انتگرال گیری های اخیر، روابط (۳-۶۶) و (۳-۶۷)، برای مسایل دوبعدی بصورت انتگرال خطی است که روی مرزهای شرط اساسی صورت می گیرد. بنابراین، در ماتریس  $\mathbf{K}^\alpha$  فقط برای گره های نزدیک به مرزهای اساسی  $\Gamma_u$  نقش دارند که در ناحیه تکیه گاهی نقاط گوسی واقع بر  $\Gamma_u$  قرار می گیرند ماتریس های سختی  $\mathbf{K}$  و  $\mathbf{K}^\alpha$  که با فرآیند بدون المان گالرکین بدست می آیند، ماتریس های متقارن هستند. اگر شرایط مرزی مسئله، با فرض

جلوگیری از حرکت صلب جسم، ماتریس  $K + K^\alpha$ ، مثبت معین<sup>۱</sup> است، بنابراین می توان از روش های متعارف حل دستگاه معادلات جبری خطی برای حل دستگاه معادلات (۳-۶۵) استفاده نمود و پارامترهای تغییر مکان گرهی را بدست آورد. در این بخش، در روابط بدون المان گالرکین از روش پنالتی برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده شد. با کاربرد این روش خصوصیات ماتریس سختی مثل تقارن، ابعاد و مثبت معین بودن، با در نظر گرفتن فاکتورهای پنالتی مثبت، حفظ می شود. علاوه بر این، تقارن و بانددار بودن ماتریس سیستم حفظ می گردد (دستگاه معادله (۳-۶۵)).

علیرغم مزایای فوق، روش پنالتی دارای نقص های زیر است:

۱- بسته به بزرگی فاکتورهای پنالتی، شرایط مرزی اساسی بطور تقریبی ارضا می شوند. از نظر تئوری، انتخاب مقادیر بزرگ تر فاکتورهای پنالتی، ارضای دقیق تر شرایط مرزی اساسی را در پی دارد، اما انتخاب مقادیر بسیار بزرگ این فاکتورها باعث ایجاد مشکلات عددی در حل دستگاه معادلات می شود.

۲- ارائه روشی برای انتخاب مجموع فاکتورهای پنالتی مناسب برای تمام انواع مسایل مشکل است. برای انتخاب مناسب فاکتورهای پنالتی نیاز به فرآیند سعی و خطا می باشد.

۳- بطور کلی، نتایج حاصل از کاربرد این روش از دقت کمتری نسبت به روش ضرایب لاگرانژ برخوردار است. علیرغم نقص های فوق، روش پنالتی بطور گسترده استفاده می شود.

---

<sup>۱</sup> Positive Definite

# فصل چهارم

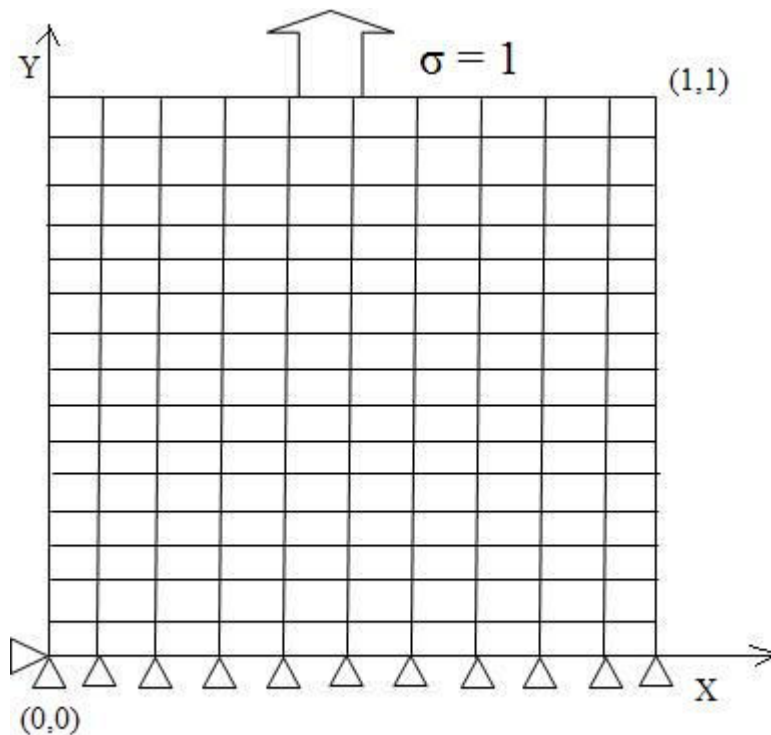
## روش انجام پروژه

#### ۴-۱- مقدمه

در این فصل به بیان مراحل مختلف پروژه و نحوه انجام آن پرداخته شده است. کار انجام شده به چند مرحله متفاوت تقسیم گردیده است.

#### ۴-۲- صفحه ساده ایزوتروپیک

پس از شناخت روش بدون المان آن را برای یک صفحه ساده ایزوتروپیک تحت کشش ساده اجرایی کردیم. مسئله حل شده شامل یک صفحه ساده مربعی به ابعاد واحد، تحت کشش به میزان یک واحد در سطح بالایی بوده و در خط پایینی مربع، گره ها در جهت  $y$  مقید شده و فقط گره قرار داده شده در مرکز  $(0,0)$  در جهت  $x$  هم مقید شده است. سطح مورد نظر را به ۲۱ گره در جهت  $x$  و  $y$  تقسیم نموده ایم. (شکل ۴-۱)



شکل ۴-۱: مدل صفحه ساده ایزوتروپیک مورد استفاده در تحلیل

کد نوشته شده در برنامه متلب از چندین زیر برنامه و یک برنامه اصلی تشکیل گردیده است. برنامه نوشته شده را می توان به سه قسمت پیش پردازش ، حل مسئله و پس پردازش تقسیم نمود.

#### ۴-۲-۱ - پیش پردازش

ابتدا ورودی های مسئله نظیر ابعاد، تعداد گره ها، خواص مواد و ... در یک زیربرنامه قرار داده شده است. ماده با ضریب الاستیسیته واحد و ضریب پواسون ۰,۳ در نظر گرفته شده است.

در ادامه به کمک یک زیر برنامه گرهها بر روی سطح مورد نظر پخش گردیده است. گره ها می تواند منظم و یا به صورت نامنظم (با توجه به شرایط مسئله) توزیع شود. در این مسئله گره ها منظم و با فواصل ثابت پخش شده است. تعداد گره ها با توجه به تحقیقات قبلی بیست و یک عدد در هر راستا انتخاب شده است. [12]

سپس طی یک زیربرنامه برای گره های پخش شده در سطح، سلول های انتگرال گیری تعریف شده و موقعیت نقاط گوسی مشخص می شود. همچنین خواص این نقاط نظیر وزن و ژاکوبین برای هر یک محاسبه شده است.

در ادامه توابع پایه برای تک تک گره ها و نقاط گوسی مورد محاسبه قرار می گیرد. تابع پایه در نظر

گرفته شده در این برنامه به صورت تابع خطی به شکل ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$  می باشد.

در ادامه دامنه اثر هر کدام از گره ها و نقاط گوسی در زیر برنامه های جداگانه ای به دست آمده است. سپس طبق روابط موجود در روش بدون المان که در فصول قبل به آن ها پرداختیم، مقدار اثر تکیه گاهی هر گره بر روی گره های دیگر محاسبه شده است.

پس از این مرحله تابع وزن هر گره نیز بررسی گردیده و در نهایت در یک زیربرنامه مقدار تابع شکل هر گره بر اساس روابط موجود به دست آمده است. با به دست آمدن توابع شکل مرحله پیش پردازش تقریباً به اتمام می رسد.

#### ۴-۲-۲ - حل مسئله

سپس در برنامه اصلی - که با نرم افزار برنامه نویسی متلب نوشته شده است - مرحله گسسته سازی معادلات و ساخت ماتریس های سختی انجام می شود. با استفاده از حلقه های تکرار بر روی تک تک سلول ها مقادیر ماتریس سختی جزء برای هر گره به دست آمده است.

در واقع تا اینجا توانسته ایم توابع شکل جزئی را برای هر گره به دست آوریم، این توابع را ماتریس سختی جزء هر گره نیز می توان نامید. در ادامه به مانند روش های المان محدود بایستی ماتریس های سختی جزء را با یکدیگر ترکیب کرده و ماتریس سختی کل را به دست آورد.

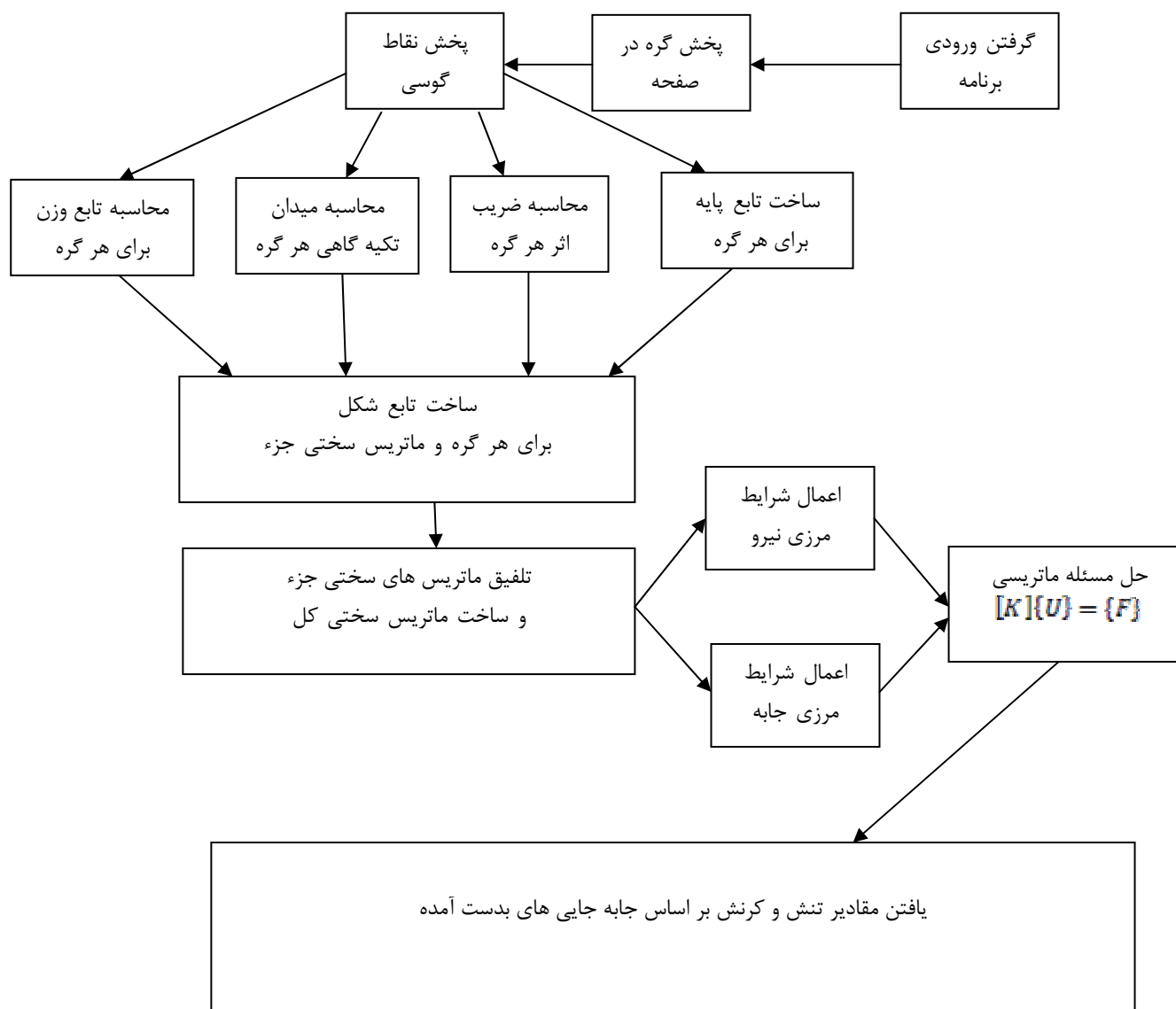
بنابراین عملیات مونتاژ ماتریس سختی نهایی در برنامه اصلی انجام می شود. با ساخت ماتریس سختی نهایی که با  $[K]$  نمایش داده می شود، بخش مهمی از مسیر برنامه طی گردیده است. حال بایستی ماتریس  $[F]$  که نماینده نیرو های مرزی می باشد را تشکیل دهیم. برای انجام این کار نوشتن دو زیربرنامه ضروری می باشد. طی زیر برنامه اول گره های محل اعمال نیرو و میزان نیرو مشخص شده و ماتریس ستونی نیرو بر اساس روابط پیش گفته شده تشکیل گردیده است. در ادامه تحت زیربرنامه دوم جهت اعمال شرط اساسی مرزی ( اعمال قید های  $UX$  و  $UY$  ) از روش پنالتی، تغییرات در ماتریس سختی و بردار ستونی نیرو اعمال گردیده است.

سپس به کمک دستور `linsolve` معادله  $[K]\{U\} = \{F\}$  حل شده و مقادیر جا به جایی به دست آمده است. در اینجا قسمت دوم برنامه نیز به پایان می رسد.

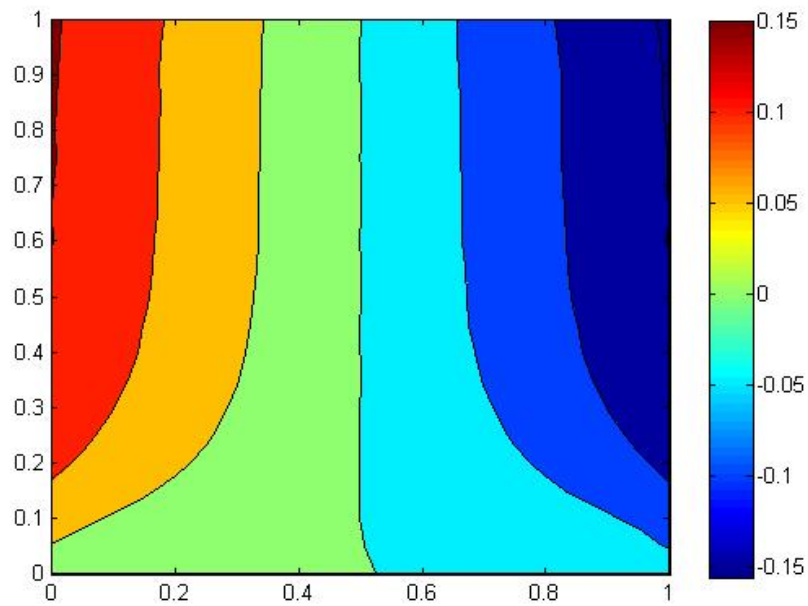
### ۳-۲-۴ - پس پردازش

با مشخص شدن مقادیر جابه جایی در تمامی گره ها، طی یک زیر برنامه پس پردازش مسئله شامل مقادیر تنش و کرنش برای هر کدام از گره ها محاسبه گردیده است. در ادامه فلوچارت برنامه آمده و برخی نتایج به دست آمده از برنامه نوشته شده با نتایج به دست آمده از نرم افزار ANSYS مقایسه گردیده است.

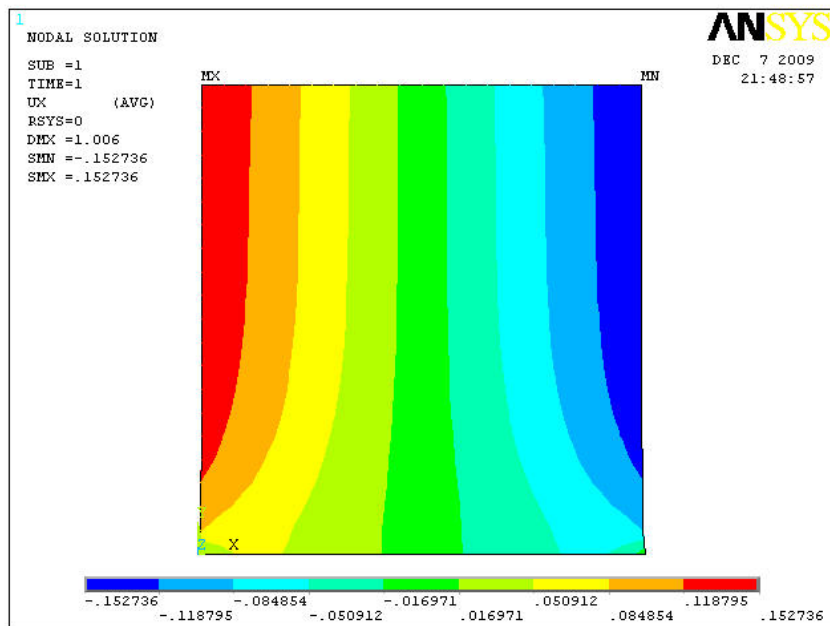
صفحه تحلیل شده به کمک ANSYS دارای ابعاد واحد بوده و دقیقاً شرایط نشان داده شده در شکل ۱-۴ را دارا می باشد. از المان صفحه ای Quad42 استفاده گردیده و صفحه در طول و عرض هر کدام به ۲۱ گره تقسیم بندی شده است.



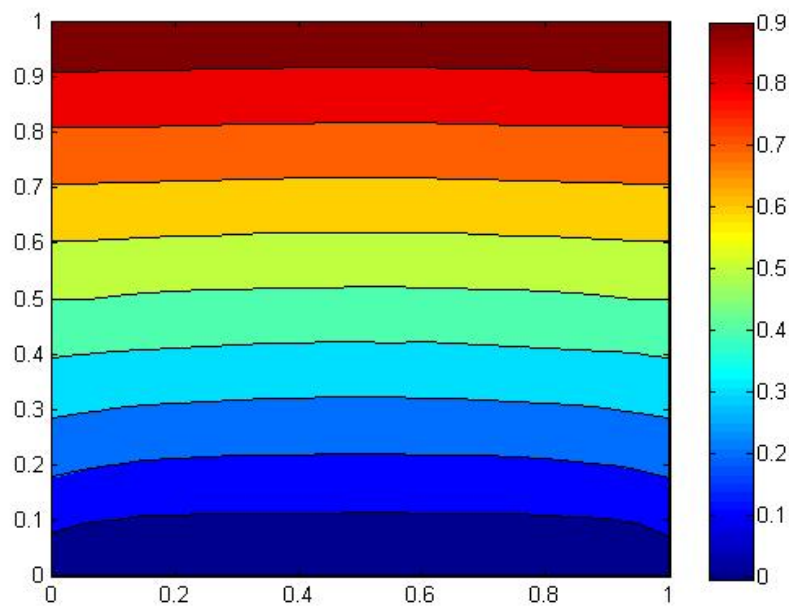




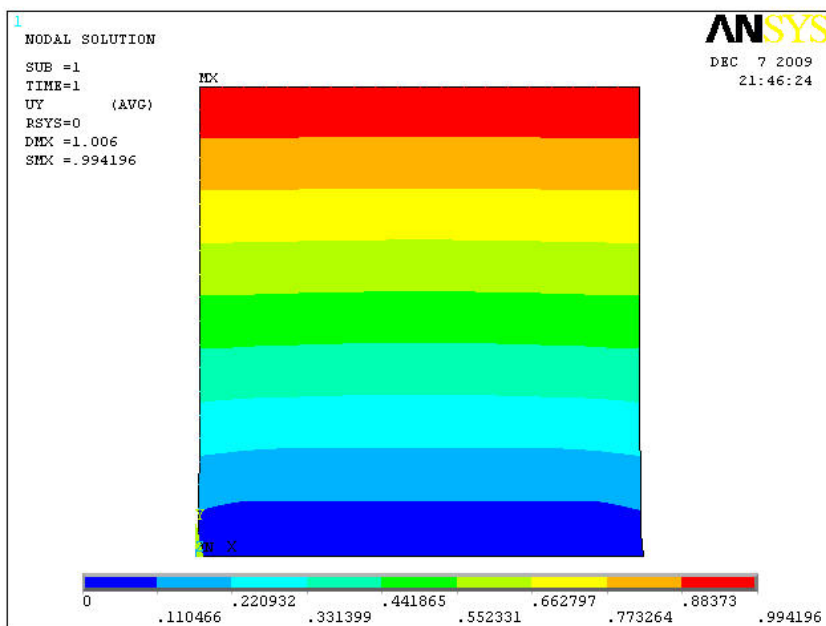
شکل ۴-۲: کانتور جابه جایی در جهت X به دست آمده از روش ارائه شده



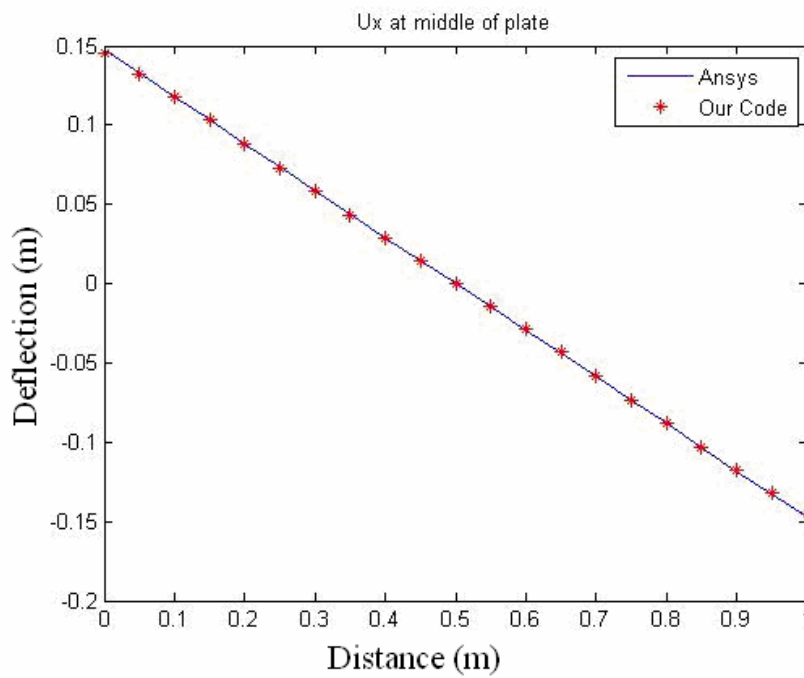
شکل ۴-۳: کانتور جابه جایی در جهت X به دست آمده از تحلیل در ANSYS



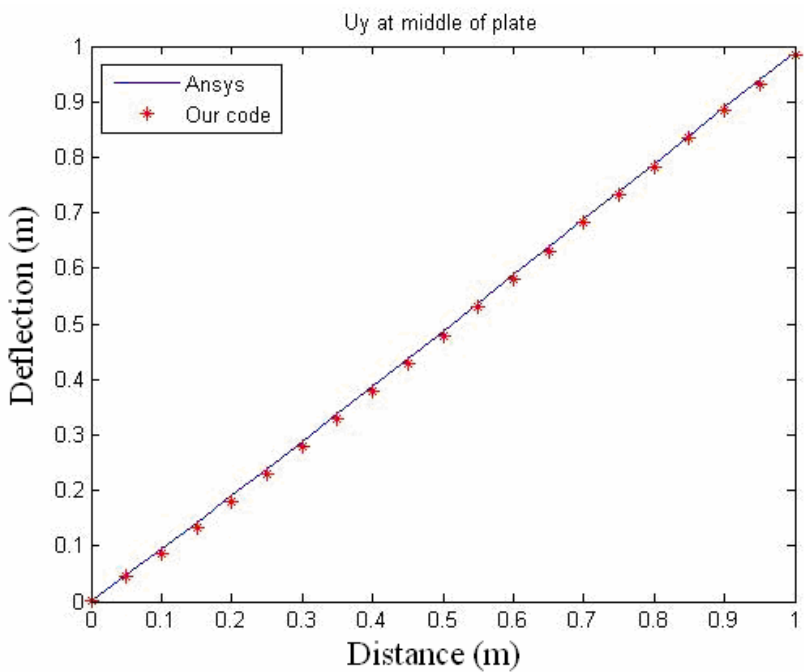
شکل ۴-۴: کانتور جابه جایی در جهت Y به دست آمده از روش ارائه شده



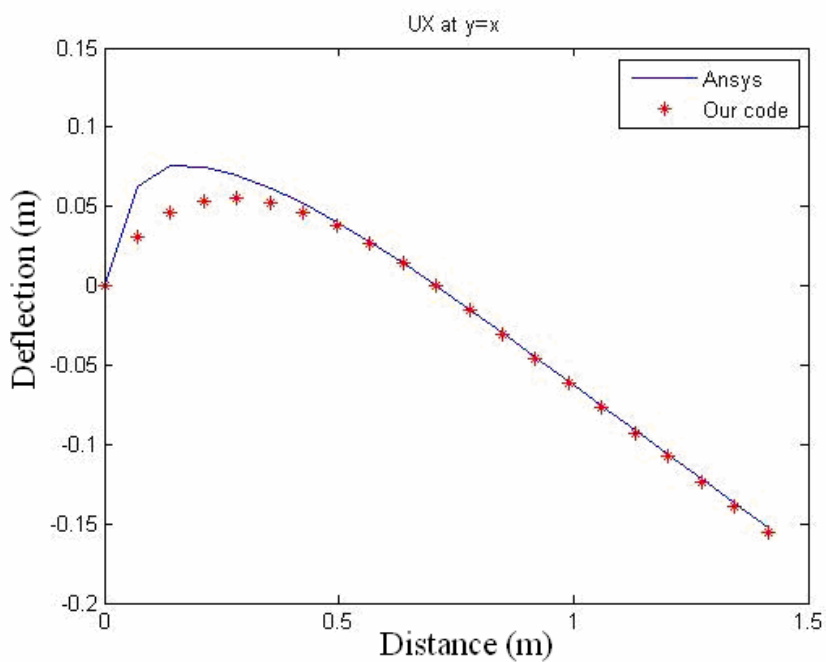
شکل ۴-۵: کانتور جابه جایی در جهت Y به دست آمده از تحلیل در ANSYS



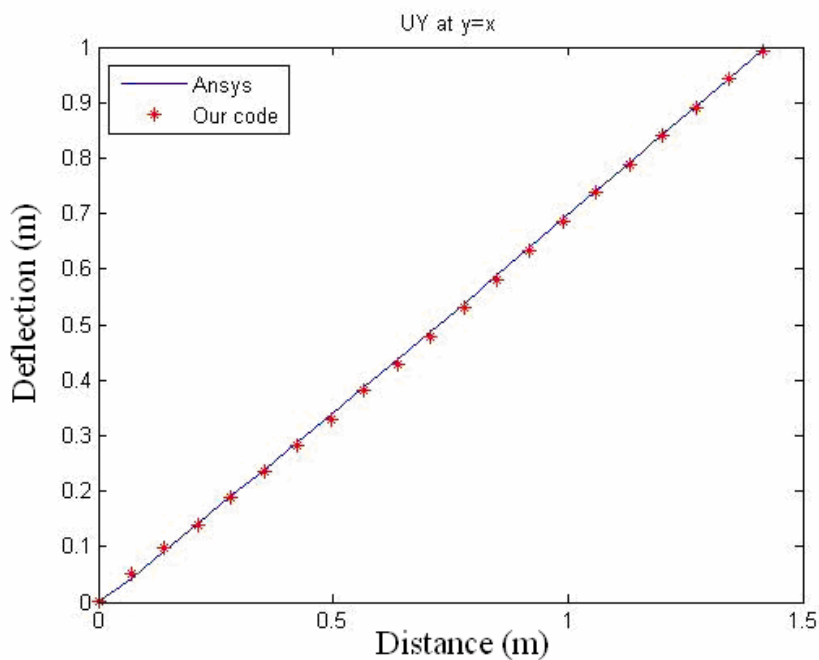
شکل ۴-۶: مقایسه مقادیر جابه جایی در جهت X در وسط صفحه ( $y=0.5$ )



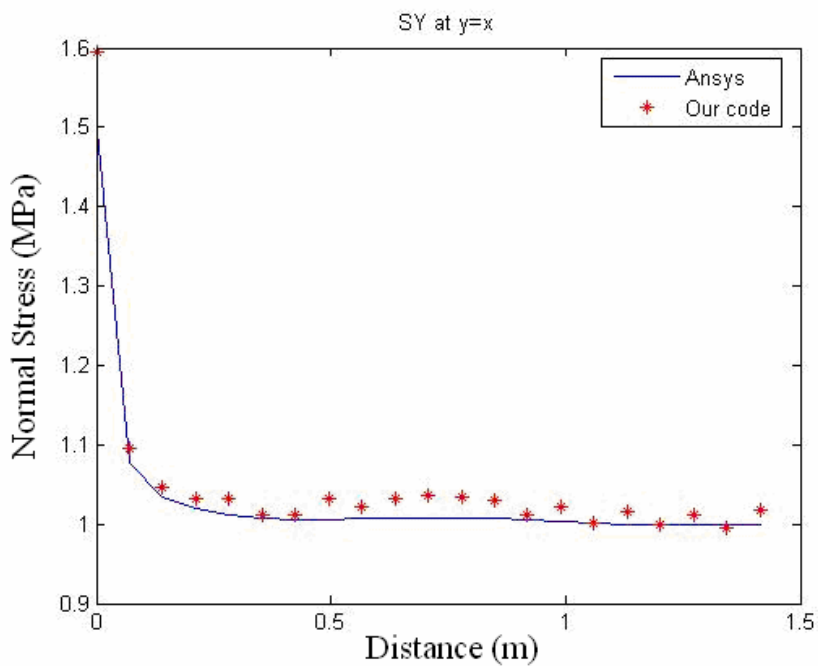
شکل ۴-۷: مقایسه مقادیر جابه جایی در جهت Y در وسط صفحه ( $y=0.5$ )



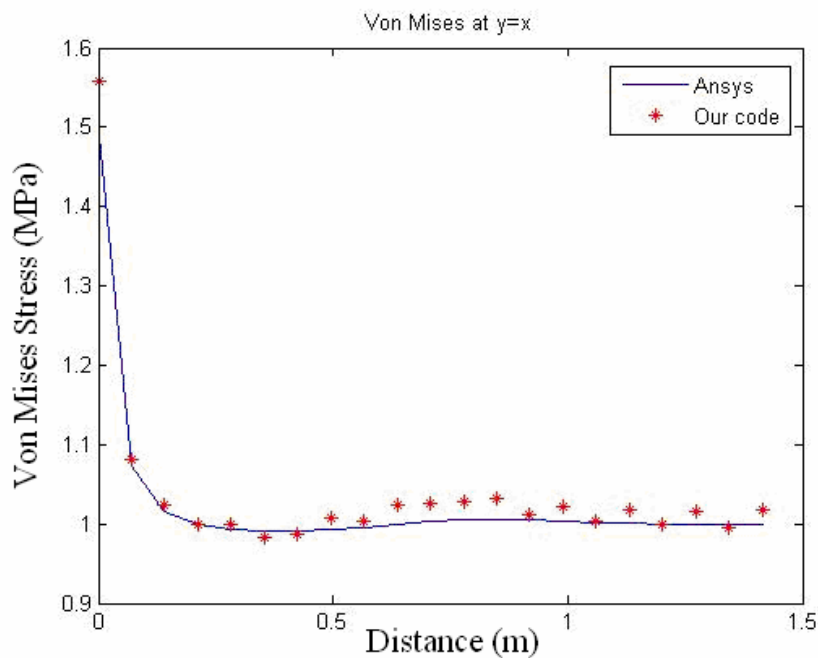
شکل ۴-۸: مقایسه مقادیر جابه جایی در جهت X در قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۹: مقایسه مقادیر جابه جایی در جهت Y در قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۱۰: مقایسه مقادیر تنش در جهت Y در قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۱۱: مقایسه مقادیر تنش فون میسز در قطر اصلی صفحه

### ۳-۴ - صفحه ساده پیزوالکتریک

پس از اطمینان از صحت برنامه صفحه ساده ایزوتروپیک، خواص پیزوالکتریک به آن اضافه گردیده است. این روابط همان گونه که در فصل دوم آمده است، به گونه زیر خواهند بود:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]\{E\} \quad (1-4)$$

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} - [k]\{E\} \quad (2-4)$$

همان طور که پیشتر اشاره گردید، [C] ماتریس الاستیک، [e] ماتریس دی الکتریک، [k] ماتریس

پیزوالکتریک می باشند. در ضمن داریم:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (3-4)$$

$$E_i = -\Phi_{,i} \quad (4-4)$$

شرایط مرزی در دو قسمت بایستی ارضا شود.

شرایط مرزی مکانیکی:

$$u_i = \bar{u}_i \quad (5-4)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{f}_{si} \quad (6-4)$$

شرایط مرزی الکتریکی:

$$\Phi = \bar{\Phi} \quad (7-4)$$

$$D_i n_i = -q \quad (۸-۴)$$

روابط تعادل در الاستیسیته مواد پیزوالکتریک نیز به شرح زیر است: [13]

$$\int (\sigma_{ij,j} + f_{bi}) \delta u_i d\Omega = 0 \quad (۹-۴)$$

$$\int (-D_{i,i} \delta \Phi) d\Omega = 0 \quad (۱۰-۴)$$

این روابط پس از گسسته سازی و در نظر گرفتن شرایط مرزی ذکر شده در بالا به صورت زیر به دست می آید [14].

$$[K_{uu}]\{u\} + [K_{u\phi}]\{\Phi\} = \{F_m\} \quad (۱۱-۴)$$

$$[K_{u\phi}]\{u\} + [K_{\phi\phi}]\{\Phi\} = \{F_q\} \quad (۱۲-۴)$$

در اینجا همان گونه که ملاحظه می شود، دو معادله به طور همزمان بایستی حل شود.

روابط ماتریس های ذکر شده در معادلات بالا از روابط زیر حاصل می شود:

$$[K_{uu}] = [B_u]^T [C] [B_u] \quad (۱۳-۴)$$

$$[K_{u\phi}] = [B_\phi]^T [e]^T [B_u] \quad (۱۴-۴)$$

$$[K_{\phi u}] = [B_u]^T [e] [B_\phi] \quad (۱۵-۴)$$

$$[K_{\phi\phi}] = [B_\phi]^T [k] [B_\phi] \quad (۱۶-۴)$$

برای حل همزمان معادلات ذکر شده ، معادلات را به صورت ماتریسی زیر در می آوریم:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (۱۷-۴)$$

در این رابطه داریم:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (18-4)$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (19-4)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_q \end{Bmatrix} \quad (20-4)$$

بدین صورت به صورت همزمان معادلات کوپله بالا حل شده و مقادیر میدان جا به جایی و میدان پتانسیل الکتریکی به دست می آید.

برای یک صفحه پیزوالکتریک با مشخصات ذیل که در مقاله پروفیسور یودا<sup>1</sup> [5] از آن استفاده شده است، برنامه نوشته شده و نتایج به دست آمده است.

این ماده یکی از انواع PZT-5H می باشد.

$$[C] = \begin{bmatrix} 12.6 & 8.41 & 0 \\ 8.41 & 11.7 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3 \end{bmatrix} \times 10^{10} [Pa]$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 17 \\ -6.5 & 23.3 & 0 \end{bmatrix} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

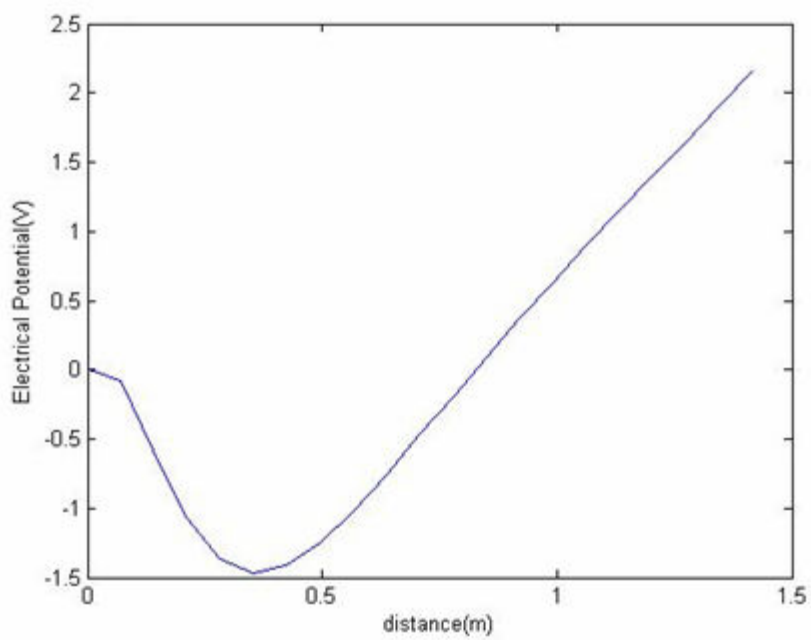
$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 150.4 & 0 \\ 0 & 130 \end{bmatrix} \times 10^{-10} \left[ \frac{C}{Vm} \right]$$

شرایط مرزی صفحه مورد نظر به صورتی است که در لبه بالایی مقدار 1 Mpa تنش به آن وارد شده و در لبه سمت راست به میزان دو واحد شار الکتریکی به آن اعمال شده است در حالیکه گره های لبه پایینی در راستای Y مقید شده و گره های لبه سمت راست دارای پتانسیل مقدار واحد می باشد.

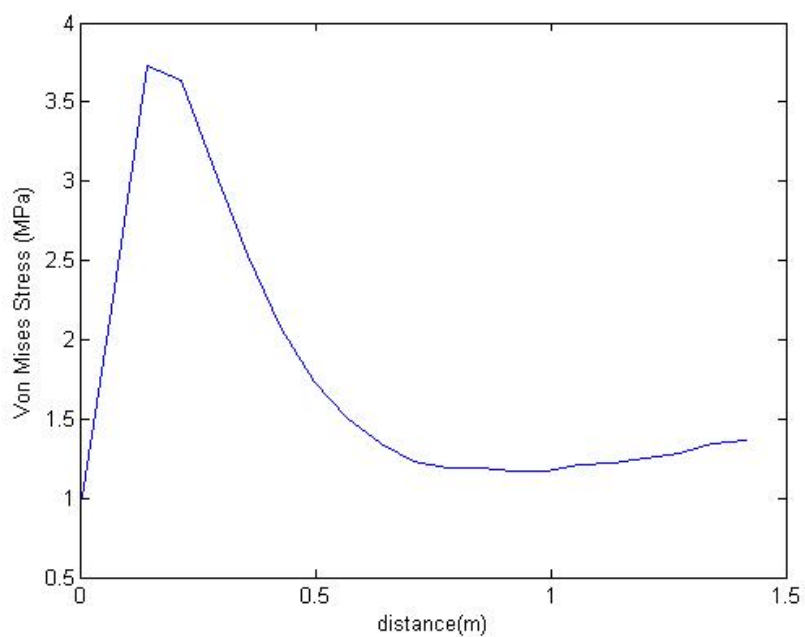
<sup>1</sup> S.Ueda







شکل ۴-۱۴: پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۱۵: مقادیر تنش فون میسز بر روی قطر اصلی صفحه

در ادامه نتایج برای یک ماده پیزوالکتریک دیگر که در مقاله آقای رائو<sup>۱</sup> [15] مورد استفاده قرار گرفته است نیز بررسی شده و با ماده قبلی مقایسه گردیده است.

خواص ماده جدید که یکی از انواع PZT-5H می باشد، به شرح زیر است:

$$[C] = \begin{bmatrix} 12.6 & 5.3 & 0 \\ 5.3 & 11.7 & 0 \\ 0 & 0 & 3.53 \end{bmatrix} \times 10^{10} [Pa]$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 17 \\ -6.5 & 23.3 & 0 \end{bmatrix} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 151 & 0 \\ 0 & 130 \end{bmatrix} \times 10^{-10} \left[ \frac{C}{Vm} \right]$$

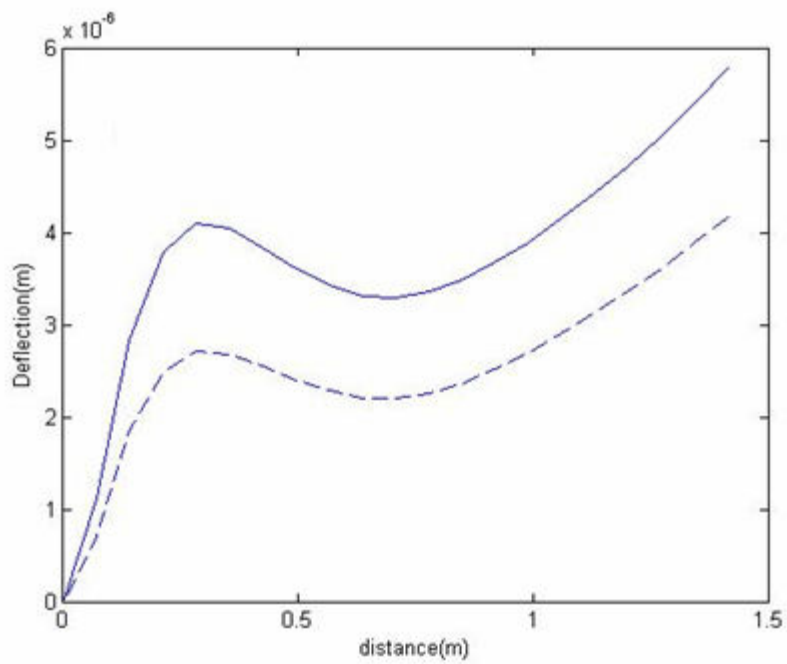
از آنجا که اختلاف میان دو ماده بررسی شده بیشتر در ماتریس الاستیک  $[C]$  می باشد، انتظار می رود که اختلاف نتایج دو ماده در مقادیر جابه جایی مکانیکی و تنش باشد و مقادیر به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی با هم منطبق باشد.

نتایجی که در ادامه آمده است این انتظار را برآورده ساخته است.

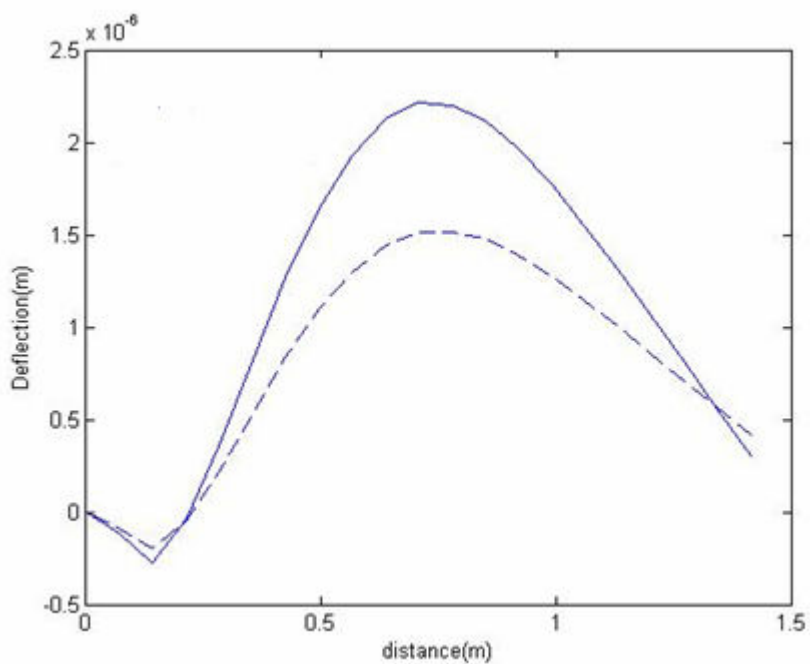
خط چین نشان دهنده نتایج برنامه ما بر روی ماده آقای رائو و خط ممتد نتایج همین برنامه بر روی ماده آقای یودا [5] می باشد.

---

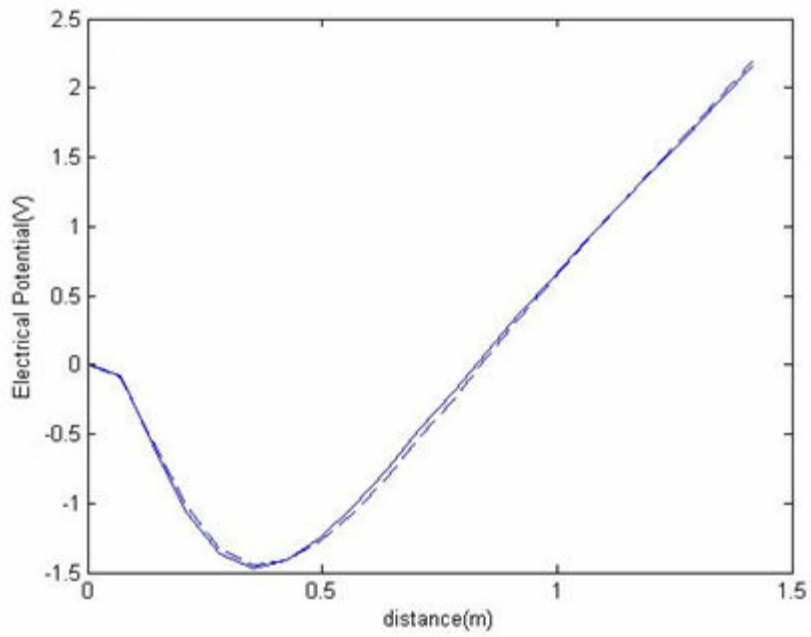
<sup>1</sup> B.N.Rao



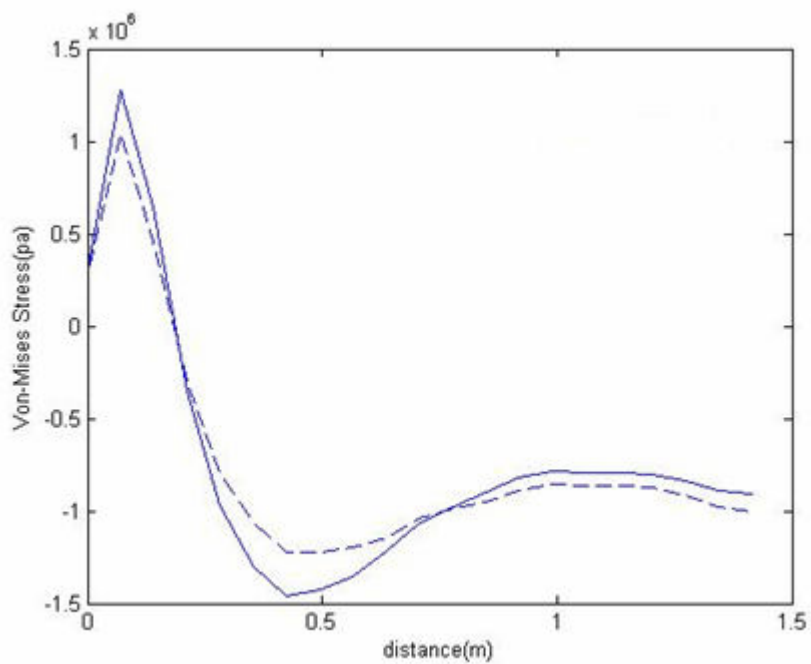
شکل ۴-۱۶: جابه جایی در جهت X بر روی قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۱۷: جابه جایی در جهت Y بر روی قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۱۸: پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۱۹: مقادیر تنش فون میسز بر روی قطر اصلی صفحه

## ۴-۴ - صفحه ساده FGPM

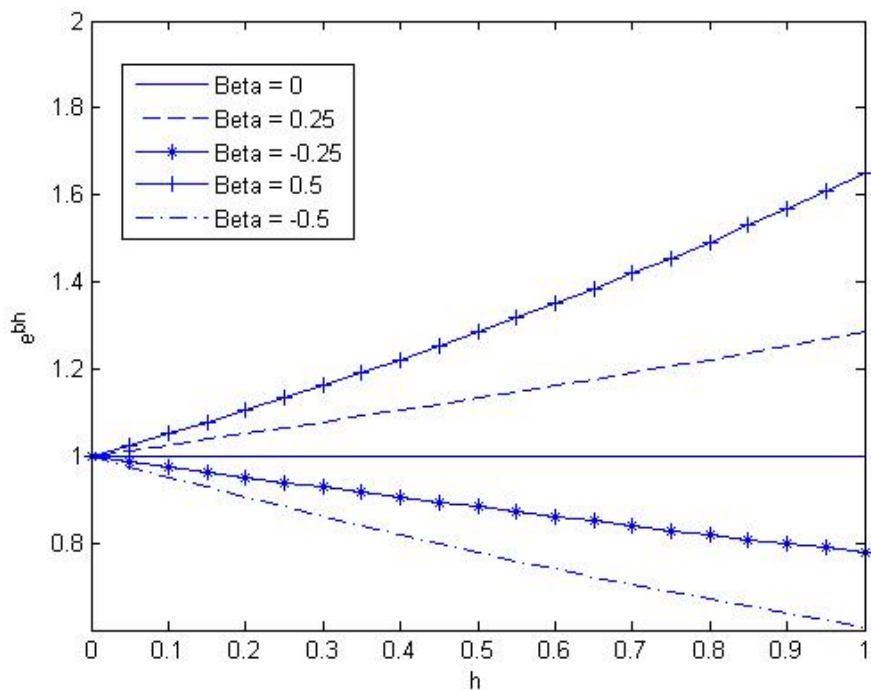
در ادامه و جهت کامل تر شدن برنامه، برای تبدیل صفحه پیزوالکتریک به صفحه FGPM بایستی یک تابع نوشته شود که شرایط FG را به ماده مورد نظر اعمال کند. با توجه به مقالات نوشته شده و تحقیقات انجام شده در این زمینه، معمولاً توابع نمایی در جهت FG نمودن مواد به کار می رود [15]. بر این اساس ماتریس های سه گانه خواص پیزوالکتریک که پیشتر راجع به آن صحبت گردید در عدد  $e^{\beta h}$  ضرب گردیده است. در اینجا  $h$  برای هر گره متفاوت است، بدین صورت که بر اساس فاصله هر گره از محور افقی مقدار  $h$  تغییر می کند، مقدار  $h$  از رابطه زیر بدست می آید.

$$h = \frac{y - Y_0}{Y_L - Y_0} \quad (۲۱-۴)$$

$y$  در اینجا فاصله گره از محور افقی مختصات بوده و  $Y_0$  کمترین مقدار عمودی و  $Y_L$  بیشترین مقدار آن می باشد.

خواص ماده پیزوالکتریک و  $\beta$  در اینجا بر اساس مقاله راثو [15] مقادیر  $0,25$ ،  $0$ ،  $-0,25$ ،  $-0,5$  و  $0,5$  را اختیار کرده است. در ادامه نتایج عددی به دست آمده برای این چند حالت از مواد FGPM آمده است. نمودارهای زیر نتایج بر روی قطر اصلی صفحه می باشند که از مبدا  $(0,0)$  به نقطه  $(1,1)$  ختمی می شود.

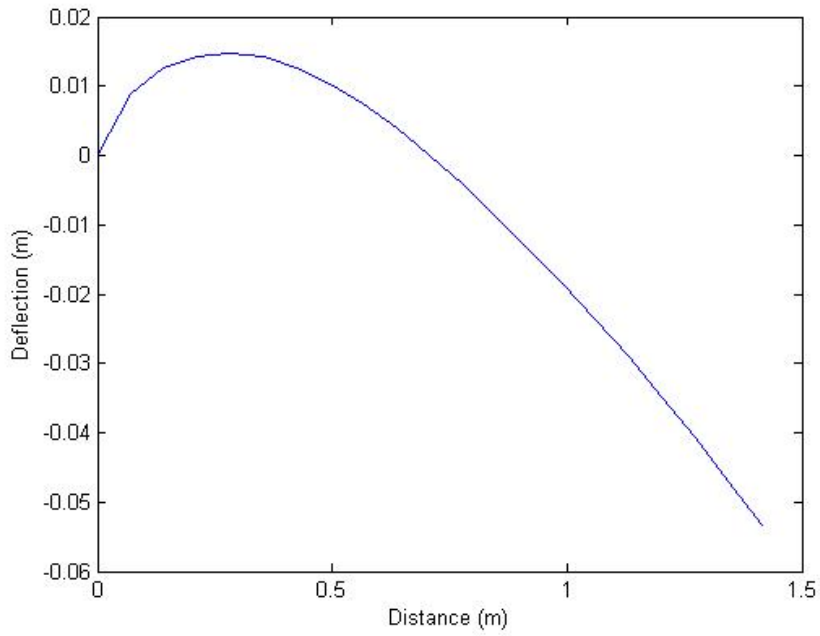
جهت درک بهتر رابطه  $e^{\beta h}$ ، شکل ۴-۲۰ در زیر آورده شده است که در آن رابطه فوق برای مقادیر مختلف  $\beta$  در محدوده ای که  $h$  بین صفر و یک قرار دارد آورده شده است.



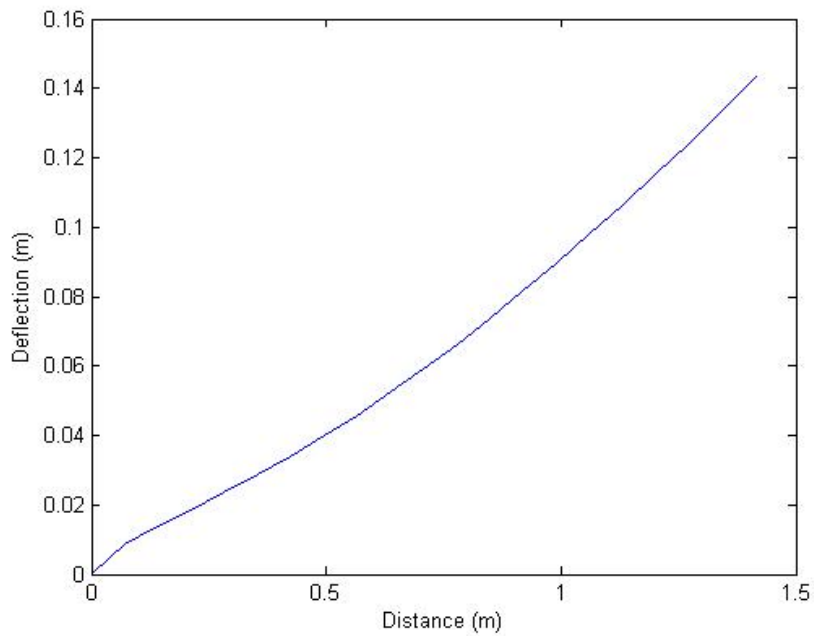
شکل ۴-۲۰: نمودار رابطه  $e^{\beta h}$  برای  $\beta$  های متفاوت

لازم به ذکر است که شرایط مرزی شامل کشش ۱۰۰ مگاپاسکال و ولتاژ ۱۰ ولت در بالای صفحه و جابه جایی مکانیکی و پتانسیل صفر در پایین صفحه می باشد.

حالت اول:  $\beta = -0.5$

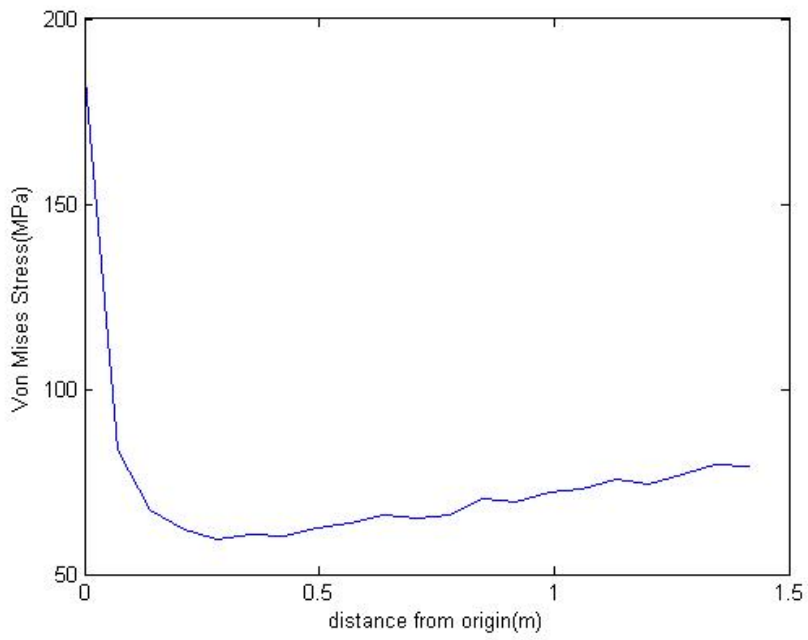


شکل ۴-۲۱: جابه جایی در جهت X بر روی قطر اصلی صفحه

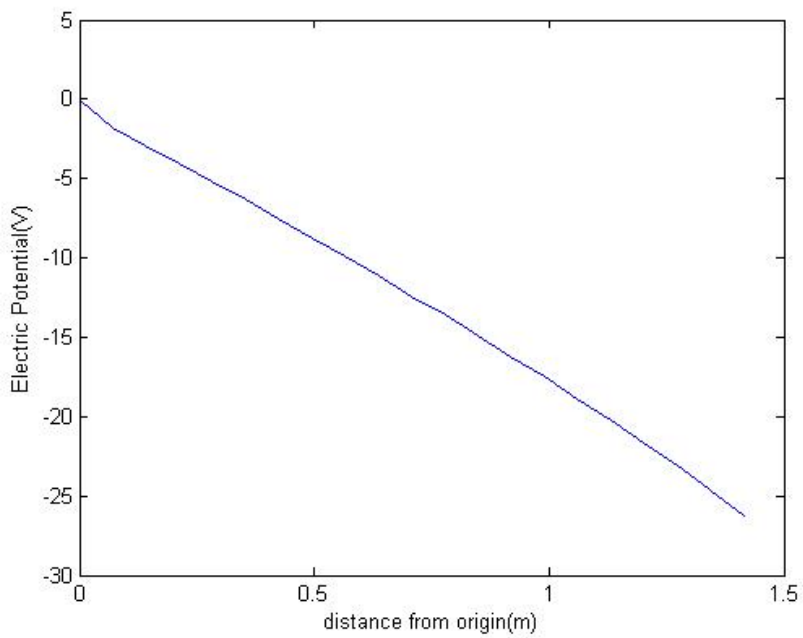


شکل ۴-۲۲: جابه جایی در جهت Y بر روی قطر اصلی صفحه



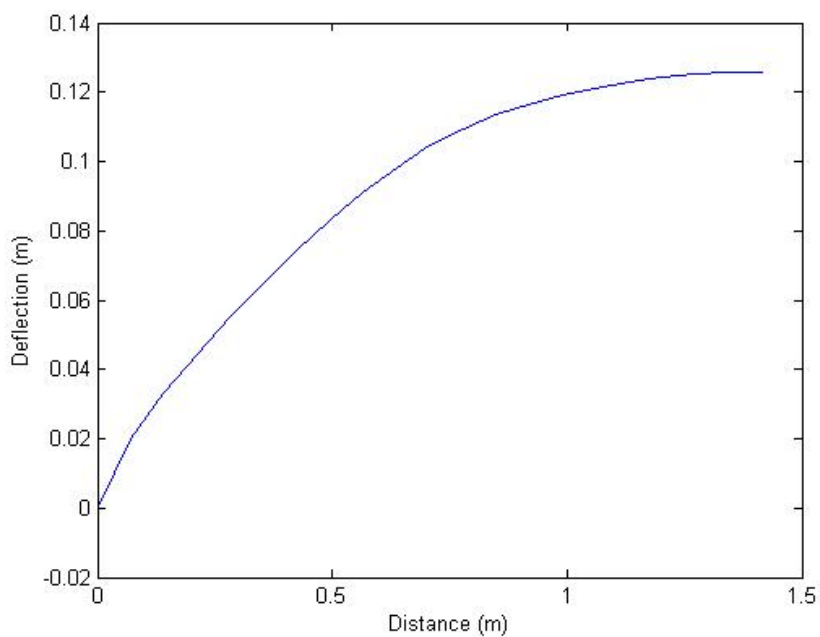


شکل ۴-۲۳: مقادیر تنش فون میسز بر روی قطر اصلی صفحه

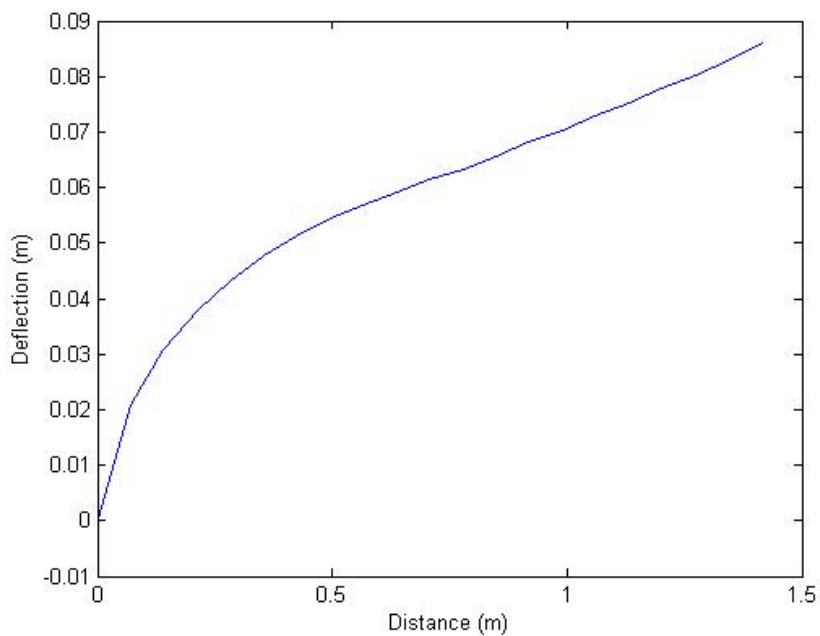


شکل ۴-۲۴: پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه

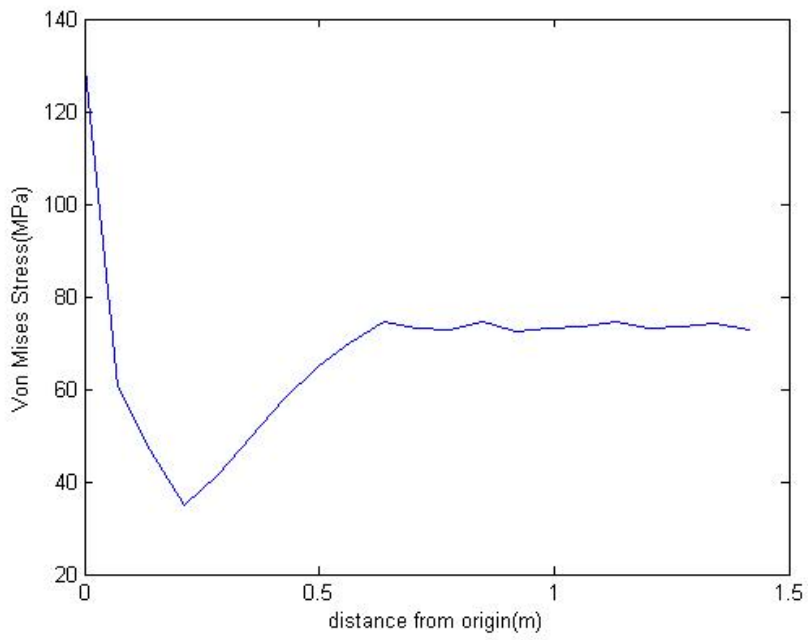
حالت دوم :  $\beta = -0.25$



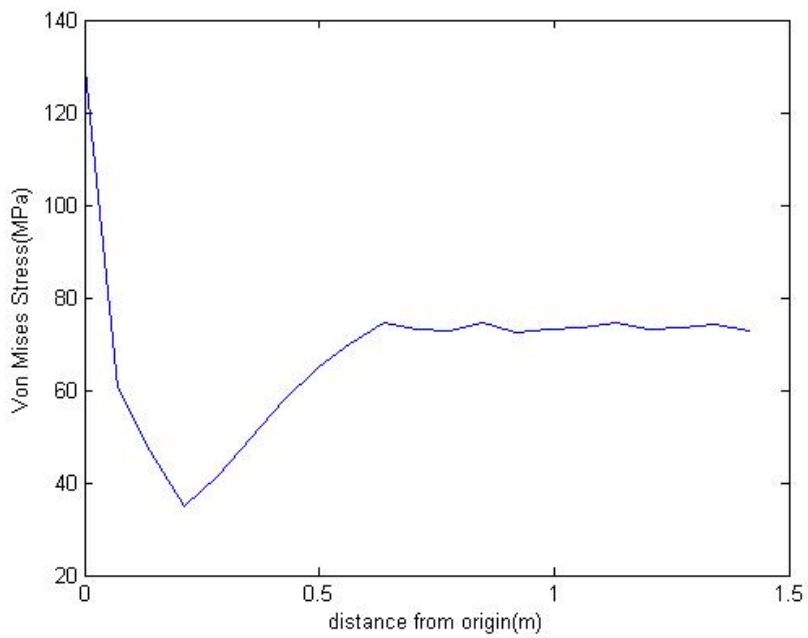
شکل ۴-۲۵: جابه جایی در جهت X بر روی قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۲۶: جابه جایی در جهت Y بر روی قطر اصلی صفحه

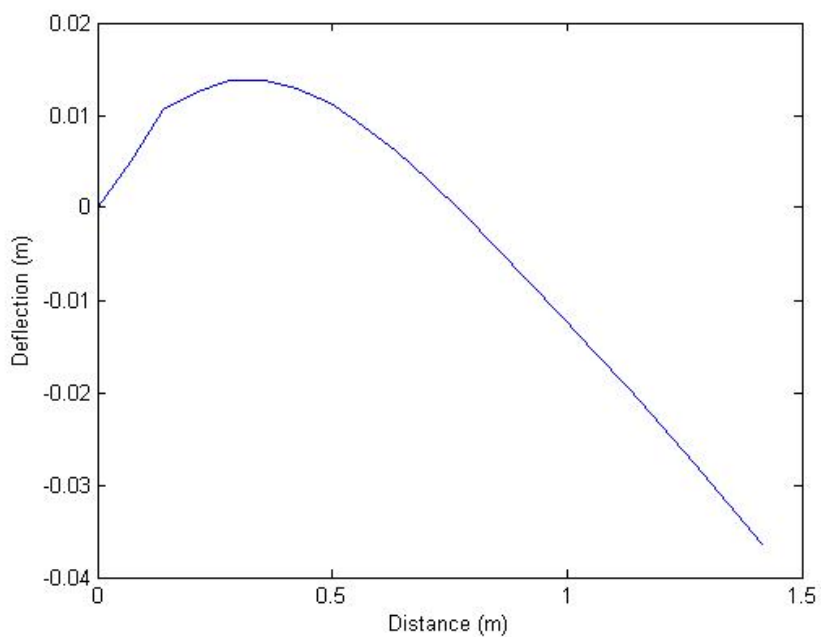


شکل ۴-۲۷: مقادیر تنش فون میسز بر روی قطر اصلی صفحه

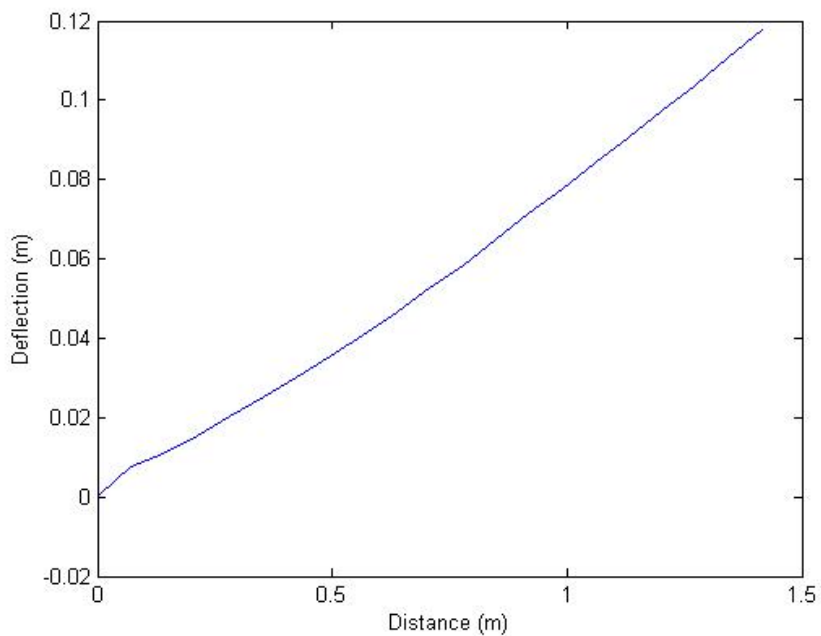


شکل ۴-۲۸: پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه

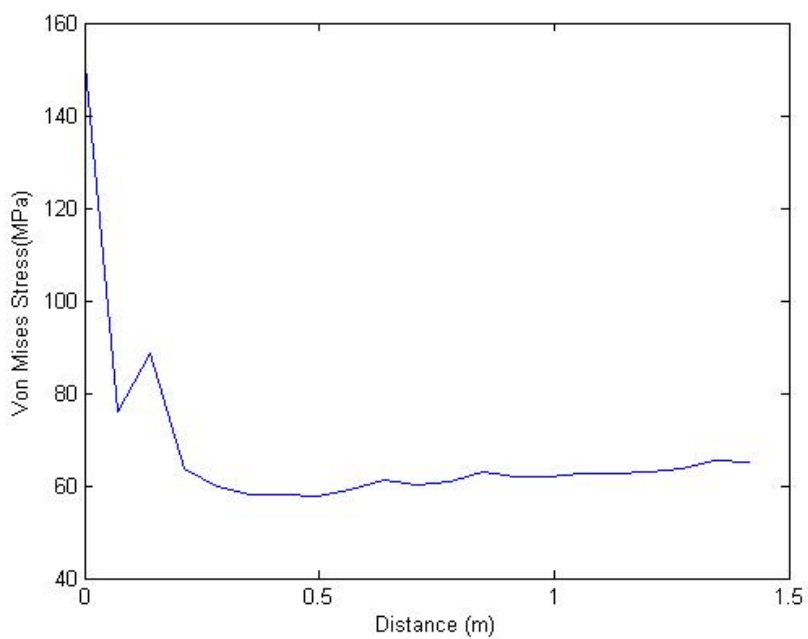
حالت سوم:  $\beta = 0$



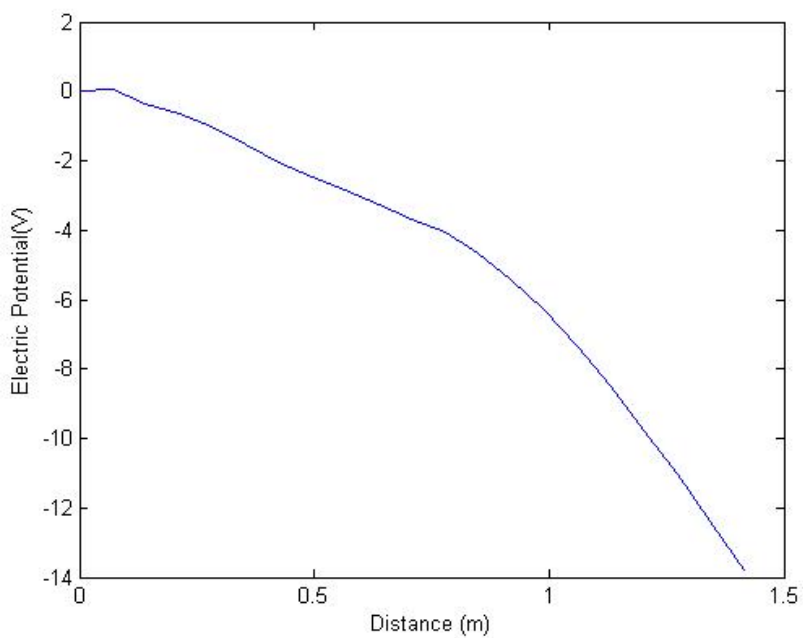
شکل ۴-۲۹: جابه جایی در جهت X بر روی قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۳۰: جابه جایی در جهت Y بر روی قطر اصلی صفحه

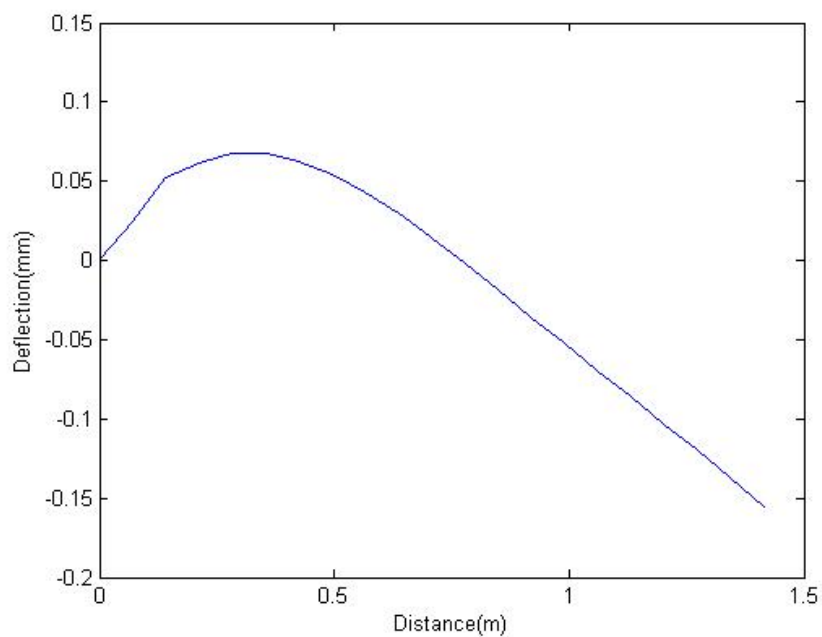


شکل ۴-۳۱: مقادیر تنش فون میسز بر روی قطر اصلی صفحه

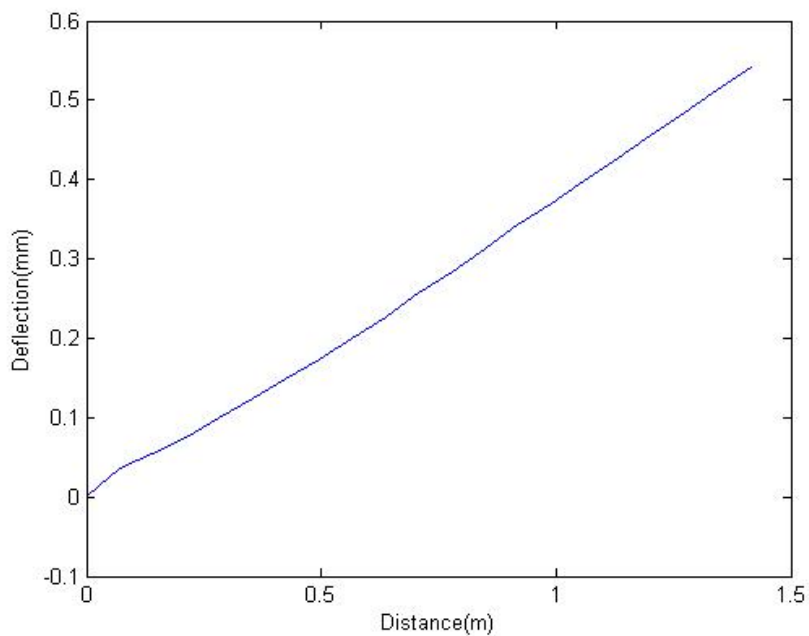


شکل ۴-۳۲: پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه

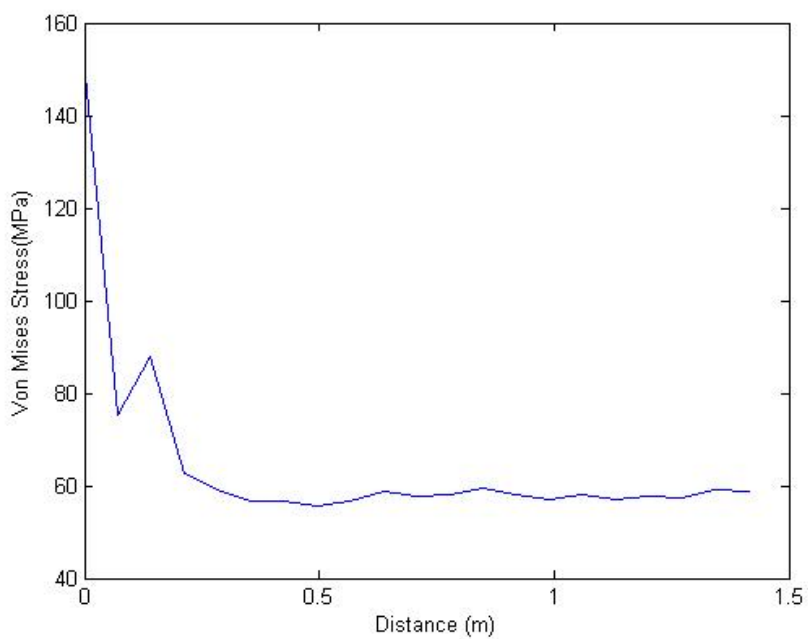
حالت چهارم:  $\beta = 0.25$



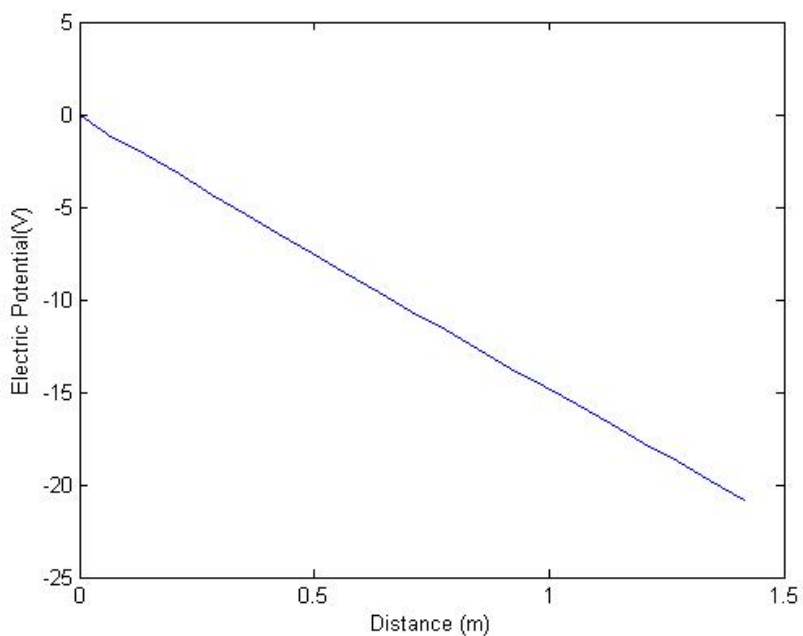
شکل ۴-۳۳: جابه جایی در جهت X بر روی قطر اصلی صفحه



شکل ۴-۳۴: جابه جایی در جهت Y بر روی قطر اصلی صفحه

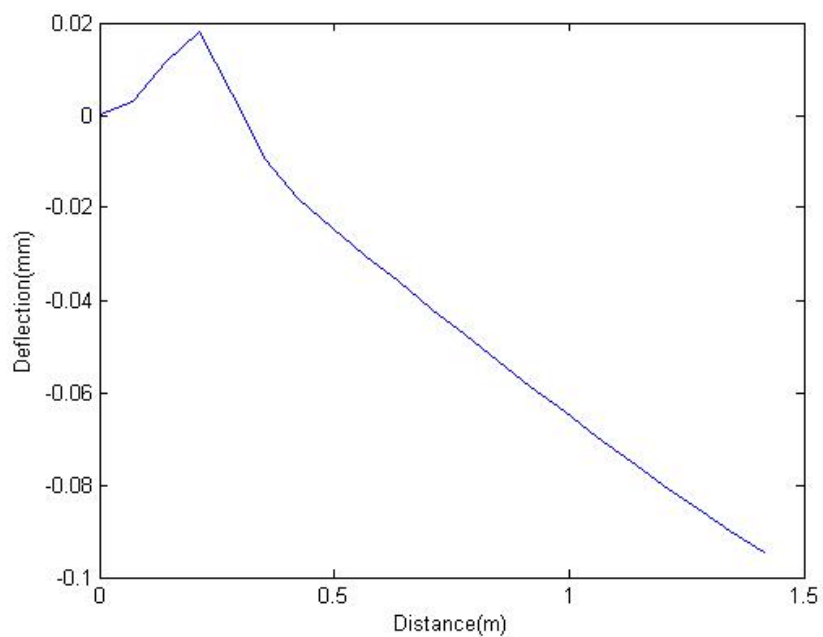


شکل ۴-۳۵: مقادیر تنش فون میسز بر روی قطر اصلی صفحه

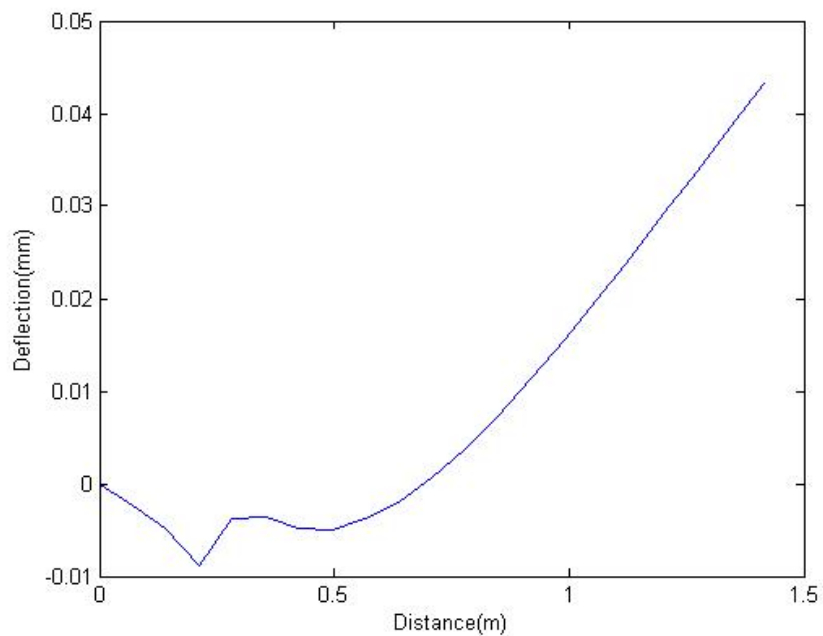


شکل ۴-۳۶: پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه

حالت پنجم:  $\beta = 0.5$

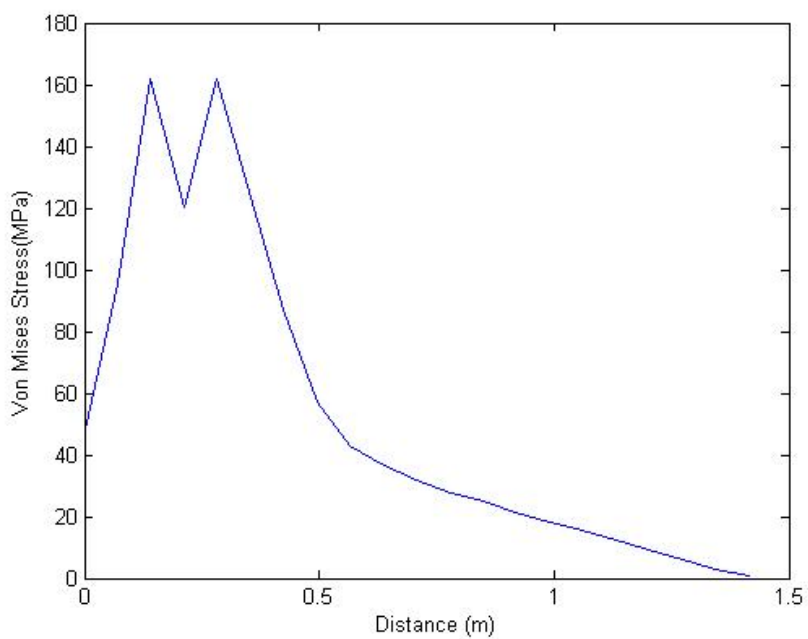


شکل ۴-۳۷: جابه جایی در جهت X بر روی قطر اصلی صفحه

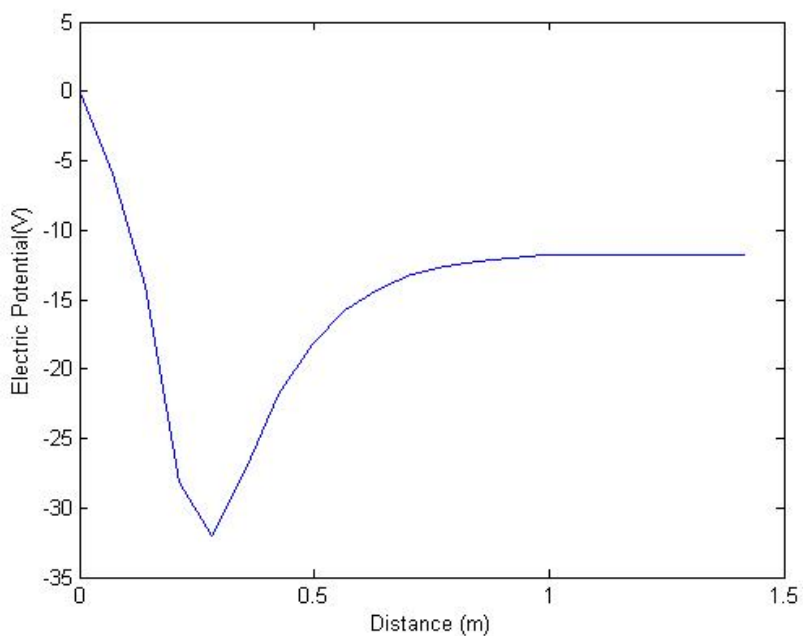


شکل ۴-۳۸: جابه جایی در جهت Y بر روی قطر اصلی صفحه



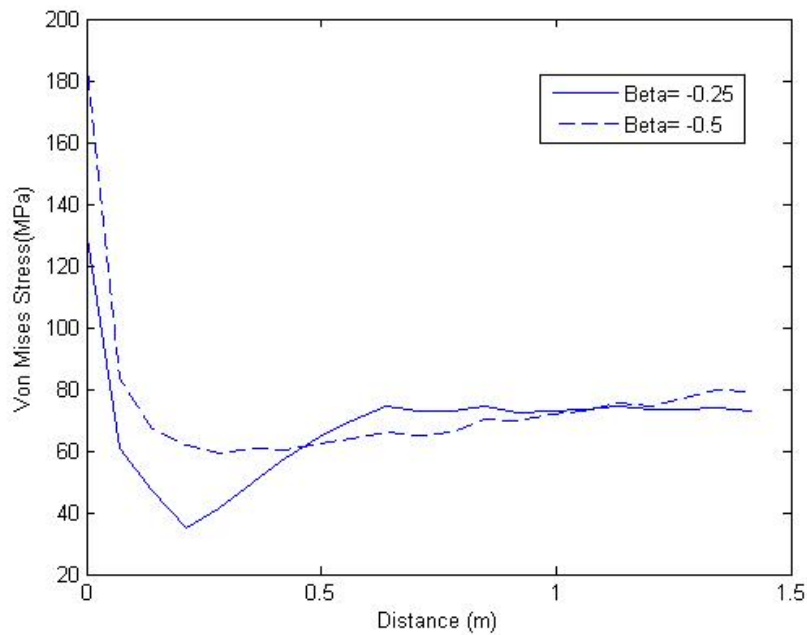


شکل ۴-۳۹: مقادیر تنش فون میسز بر روی قطر اصلی صفحه

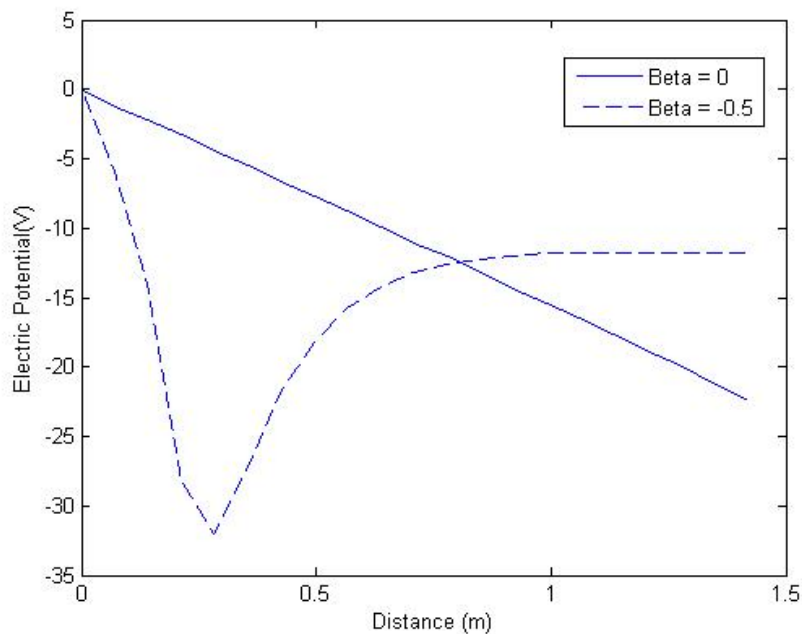


شکل ۴-۴۰: پتانسیل الکتریکی بر روی قطر اصلی صفحه

جهت بررسی اثر  $\beta$  برخی نمودارها با یکدیگر مقایسه گردیده است که در ذیل آمده است.



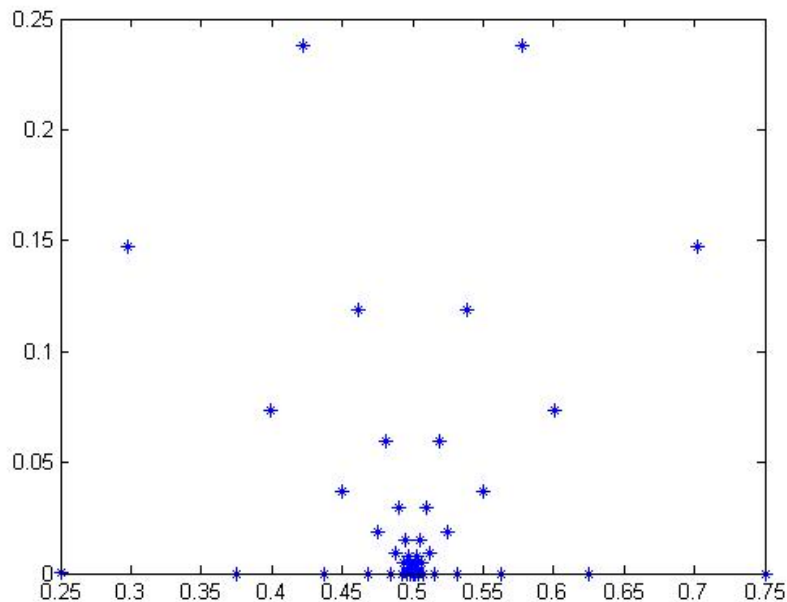
شکل ۴-۴۱: مقایسه تنش فون میسز برای دو  $\beta$  متفاوت



شکل ۴-۴۲: مقایسه پتانسیل الکتریکی برای دو  $\beta$  متفاوت

## ۴-۵- صفحه FGPM ترک دار

در این قسمت به مرحله نهایی برنامه که همان هدف نهایی پروژه می باشد پرداخته شده است. جهت تعریف ترک در روش های عددی المان محدود از تکنیک ریزتر کردن المان ها در محدوده ترک استفاده می گردد. در روش بدون المان گالرکین برای این منظور تعدادی گره در محل مورد نظر ترک را برای صفحه مورد نظر تعریف می شود. گره ها به صورت دایره ای و با ضریب نسبت متفاوت در اطراف محل پخش شده است. یک نمونه از این نوع پخش گره در شکل زیر آمده است.

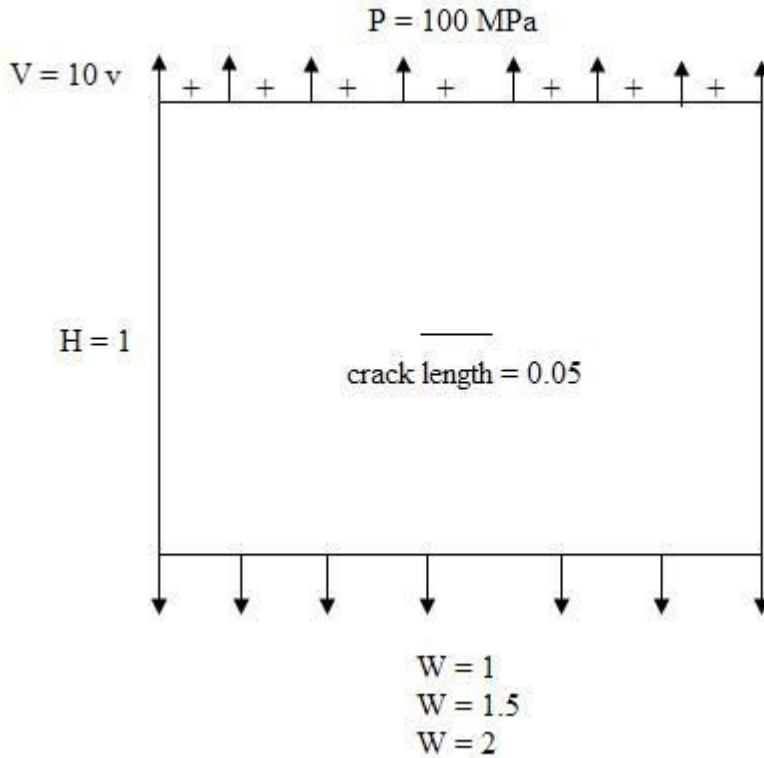


شکل ۴-۴: نمونه گره های پخش شده اطراف ترک

همان گونه که در شکل ۴-۴ ملاحظه می گردد مختصات (۰,۵,۰) نوک ترک مورد نظر می باشد و گره های اضافی در اطراف آن گسترده شده است. پس از پخش گره های مربوطه تغییرات دیگری که باید صورت گیرد در تابع شکل مربوط به هر گره می باشد. در اینجا متغیر  $r$  که نمایانگر فاصله هر گره از نوک ترک می باشد بایستی محاسبه شود. بدین ترتیب توابع پایه از حالت ماتریسی  $[1 \ x \ y]$  به حالت  $[1 \ x \ y \ r]$  تغییر می یابد.

#### ۴-۵-۱- هندسه و بارگذاری مسئله حل شده

در شکل ۴-۴ هندسه مسئله حل شده در این قسمت آورده شده است.



شکل ۴-۴ : هندسه و بارگذاری نمونه مسئله های حل شده در این بخش

همان گونه که میدانیم در بررسی مقادیر در نوک ترک به جای تنش از معیار های دیگری نظیر ضریب شدت تنش  $K_I$  ، انتگرال  $J$  و یا میزان انرژی رهایی کرنشی استفاده می کنند. در این جا نیز پس از یافتن مقادیر میدان جابه جایی و پتانسیل الکتریکی، جابه جایی مکانیکی و تنش، طی یک برنامه جداگانه مقادیر ذکر شده مورد محاسبه قرار گرفته است که توضیح آن در ادامه آمده است.

بر اساس مقاله آقای راثو [15] روابط به دست آمده برای شکست در مواد پیزوالکتریک به گونه زیر به دست می آید .

$$J = \int (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + D_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - H \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (22-4)$$

این رابطه میزان انتگرال  $J$  را در مواد پیزوالکتریک ساده نشان میدهد.

لازم به توضیح است که مشخصه  $H$  در این رابطه تابعی به صورت زیر می باشد:

$$H = (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} - D_j E_j) / 2 \quad (23-4)$$

$\delta$  نیز بیانگر تابع دلتای کرونکر می باشد و  $q$  تابع وزن در نظر گرفته شده است.

اما در مورد مواد FGP چند جمله دیگر به رابطه (22-4) اضافه می شود که در ذیل بیان شده است.

$$J = \int (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + D_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - H \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA - \int (\frac{1}{2} \epsilon_{ij} \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_k} \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl} \frac{\partial e_{nkl}}{\partial x_n} E_n - \frac{1}{2} E_n \frac{\partial \kappa_{nm}}{\partial x_m} E_m) q dA \quad (23-4)$$

ماتریس های خواص به صورت نمایی به حالت FG در آمده اند. بنابراین داریم:

$$[C] = [C_0] e^{\beta h} \quad (24-4)$$

$$[e] = [e_0] e^{\beta h} \quad (25-4)$$

$$[\kappa] = [\kappa_0] e^{\beta h} \quad (26-4)$$

همان گونه که میدانیم ماتریس های  $[C_0]$  ،  $[e_0]$  و  $[\kappa_0]$  به ترتیب ماتریس های الاستیک، دی

الکتریک و پیزوالکتریک برای ماده پایه می باشند.  $\beta$  و  $h$  نیز قبلا معرفی شده اند.

از آنجا که  $h$  تابع موقعیت مکانی می باشد داریم:

$$\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_1} = \beta e^{\beta h} C_{0ijkl} \quad (27-4)$$

$$\frac{\partial e_{nkl}}{\partial x_1} = \beta e^{\beta h} e_{0nkl} \quad (28-4)$$

$$\frac{\partial \kappa_{nm}}{\partial x_1} = \beta e^{\beta h} \kappa_{0nm} \quad (29-4)$$

از طرفی میدانیم که:

$$C_{ijkl} = e^{\beta h} C_{0ijkl} \quad (30-4)$$

$$e_{nkl} = e^{\beta h} e_{0nkl} \quad (31-4)$$

$$\kappa_{nm} = e^{\beta h} \kappa_{0nm} \quad (32-4)$$

پس می توان نوشت:

$$\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_1} = \beta C_{ijkl} \quad (33-4)$$

$$\frac{\partial e_{nkl}}{\partial x_1} = \beta e_{nkl} \quad (34-4)$$

$$\frac{\partial \kappa_{nm}}{\partial x_1} = \beta \kappa_{nm} \quad (35-4)$$

با قراردادن روابط (۳۳-۴) ، (۳۴-۴) و (۳۵-۴) در رابطه (۲۳-۴) خواهیم داشت:

$$J = \int (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + D_j \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - H \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA - \int (\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \beta C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl} \beta e_{nkl} E_n - \frac{1}{2} E_n \beta \kappa_{nm} E_m) q dA \quad (36-4)$$

رابطه (۳۶-۴) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$J = \int (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + D_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - H \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA - \beta \int (\frac{1}{2} \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \frac{1}{2} \epsilon_{kl} e_{nkl} E_n - \frac{1}{2} \epsilon_{kl} e_{nkl} E_n - \frac{1}{2} E_n \kappa_{nm} E_m) q dA \quad (37-4)$$

با کمی تغییرات داریم:

$$J = \int (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + D_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - H \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA - \frac{1}{2} \beta \int (\epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl} e_{nkl} E_n) - (\epsilon_{kl} e_{nkl} E_n + E_n \kappa_{nm} E_m) q dA \quad (38-4)$$

با توجه به روابط (۱-۴) و (۲-۴) انتگرال J در این حالت به صورت زیر در می آید.

$$J = \int (\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + D_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - H \delta_{1j}) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA - \frac{1}{2} \beta \int (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} - D_j E_j) q dA \quad (39-4)$$

از طرفی میدانیم که میزان انرژی رهایی کرنشی در مواد پیزوالکتریک با مقدار انتگرال J برابر است. بنابراین برای تعیین انرژی رهایی کرنشی در مواد FGP ترک دار کفایت مقدار معادله بالا برای یکسری نقاط گوسی که در اطراف نوک ترک تعریف شده است یافت شود.

این کار به کمک یک زیربرنامه انجام شده و پس از به دست آمدن مقادیر تنش، کرنش، پتانسیل و جابه جایی الکتریکی در صفحه ، انتگرال بالا روی اطراف نوک ترک محاسبه شده است.

#### ۴-۵-۲ نتایج به دست آمده برای پارامترهای مختلف

در ادامه تاثیر پارامترهای مختلف نظیر هندسه و مواد بر روی میزان انرژی رهایی کرنشی مورد بررسی قرار گرفته است. نسبت طول صفحه به عرض صفحه به عنوان ضریب نسبت در نظر گرفته شده است.

برای چهار نوع متفاوت از پیزوسرامیک ها با نام های **PZT-4** ، **PZT-5H** ، **PZT-6B** و **PZT-**

**7A** و نیز صفحات با ضریب نسبت ۱ ، ۱/۵ و ۲ بررسی انجام شده است. ضمن آن که در هر حالت نیز

ضریب  $\beta$  مقادیر ۰,۵ ، ۰,۲۵ ، صفر ، ۰,۲۵ ، -۰,۲۵ و -۰,۵ را اختیار کرده است.

در جداول صفحات بعد محور عمودی معرف مقدار انرژی رهایی کرنشی و محور افقی مقدار  $\beta$

می باشد.

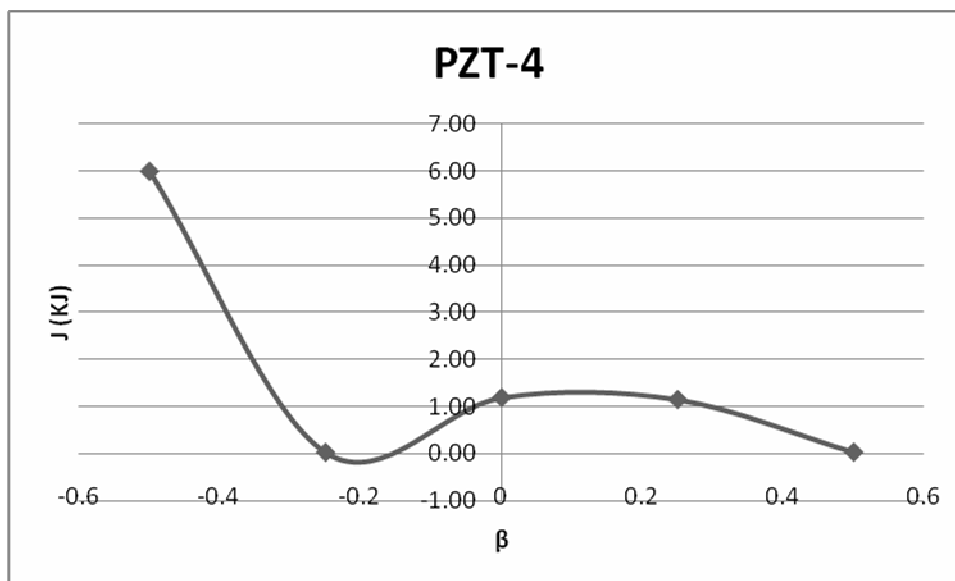
یکی از انواع پیزوسرامیک هایی که در این پروژه مورد بررسی قرار گرفته است **PZT-4** می

باشد. خواص این ماده به شرح زیر است:

$$[C] = \begin{bmatrix} 13.9 & 7.4 & 0 \\ 7.4 & 11.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.56 \end{bmatrix} \times 10^{10} [Pa]$$

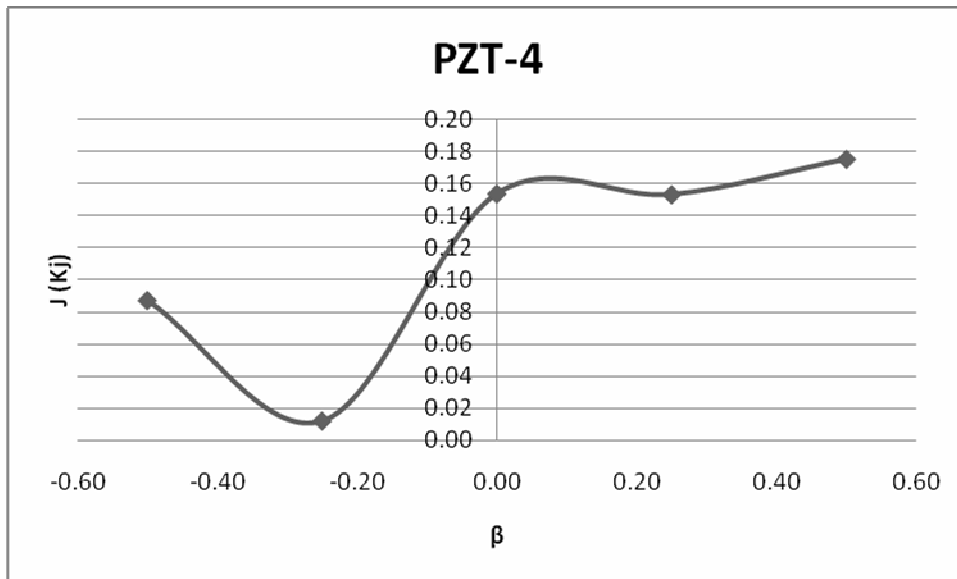
$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12.7 \\ -5.2 & 15.1 & 0 \end{bmatrix} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 64.6 & 0 \\ 0 & 56.2 \end{bmatrix} \times 10^{-10} \left[ \frac{C}{Vm} \right]$$

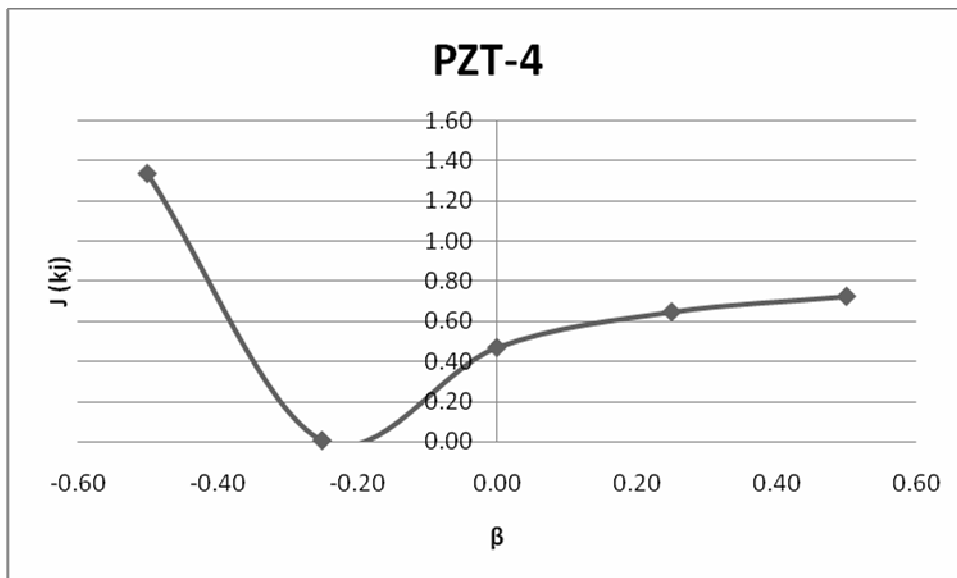


شکل ۴-۴۵: ضریب نسبت ۱





شکل ۴-۴۶ : ضریب نسبت ۱/۵



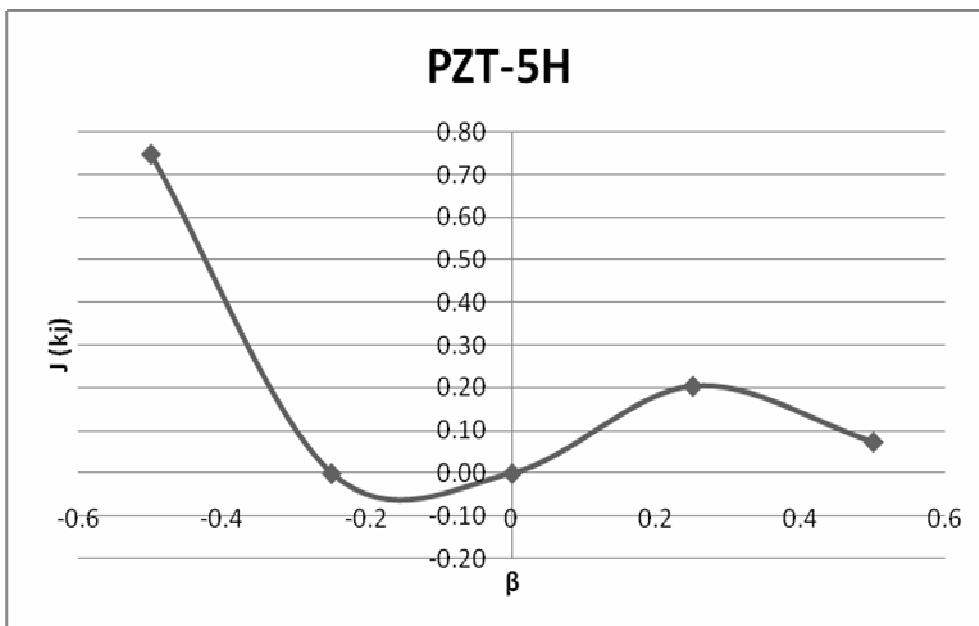
شکل ۴-۴۷ : ضریب نسبت ۲

ماده بعدی که مورد بررسی قرار گرفته است **PZT-5H** با خواص زیر است:

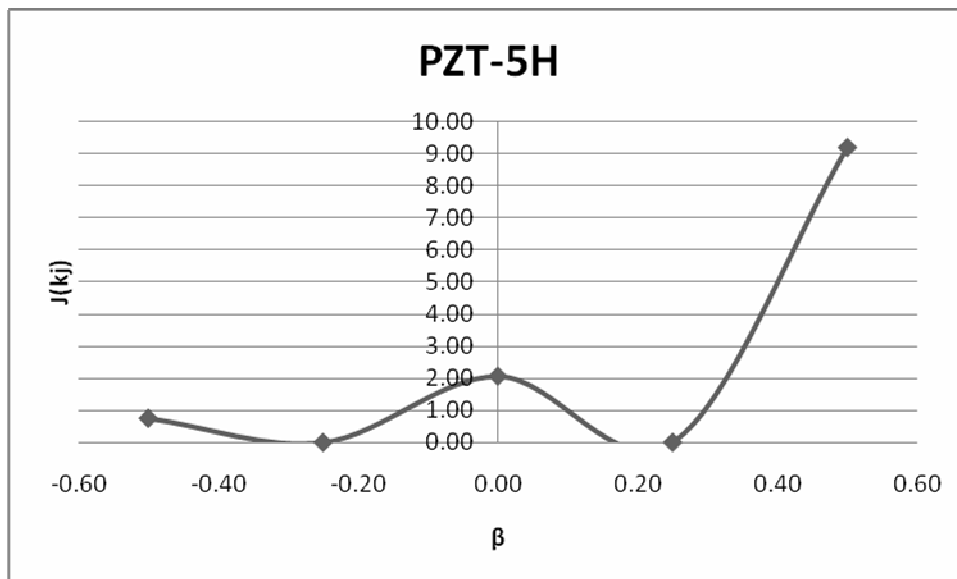
$$[C] = \begin{bmatrix} 12.6 & 8.39 & 0 \\ 8.39 & 11.7 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3 \end{bmatrix} \times 10^{10} [Pa]$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 17 \\ -6.5 & 23.3 & 0 \end{bmatrix} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

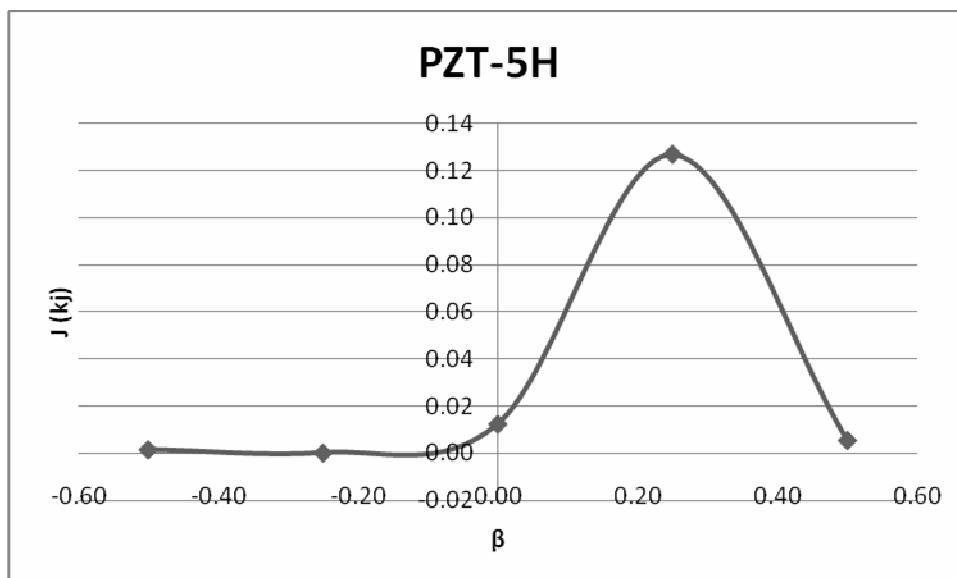
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 150.5 & 0 \\ 0 & 130.2 \end{bmatrix} \times 10^{-10} \left[ \frac{C}{Vm} \right]$$



شکل ۴-۴۸: ضریب نسبت ۱



شکل ۴-۴۹: ضریب نسبت ۱/۵



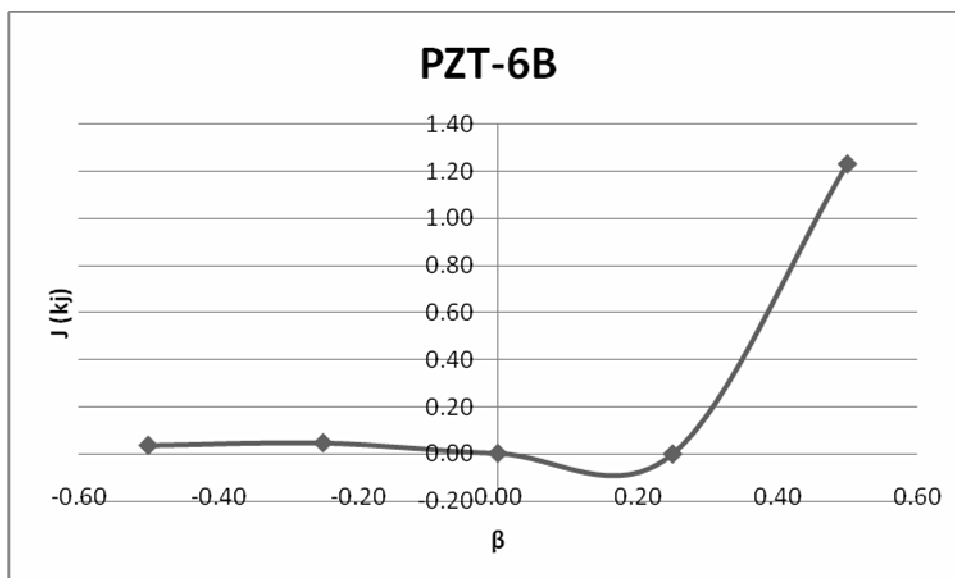
شکل ۴-۵۰: ضریب نسبت ۲

ماده بعدی که مورد بررسی قرار گرفته است **PZT-6B** با خواص زیر است:

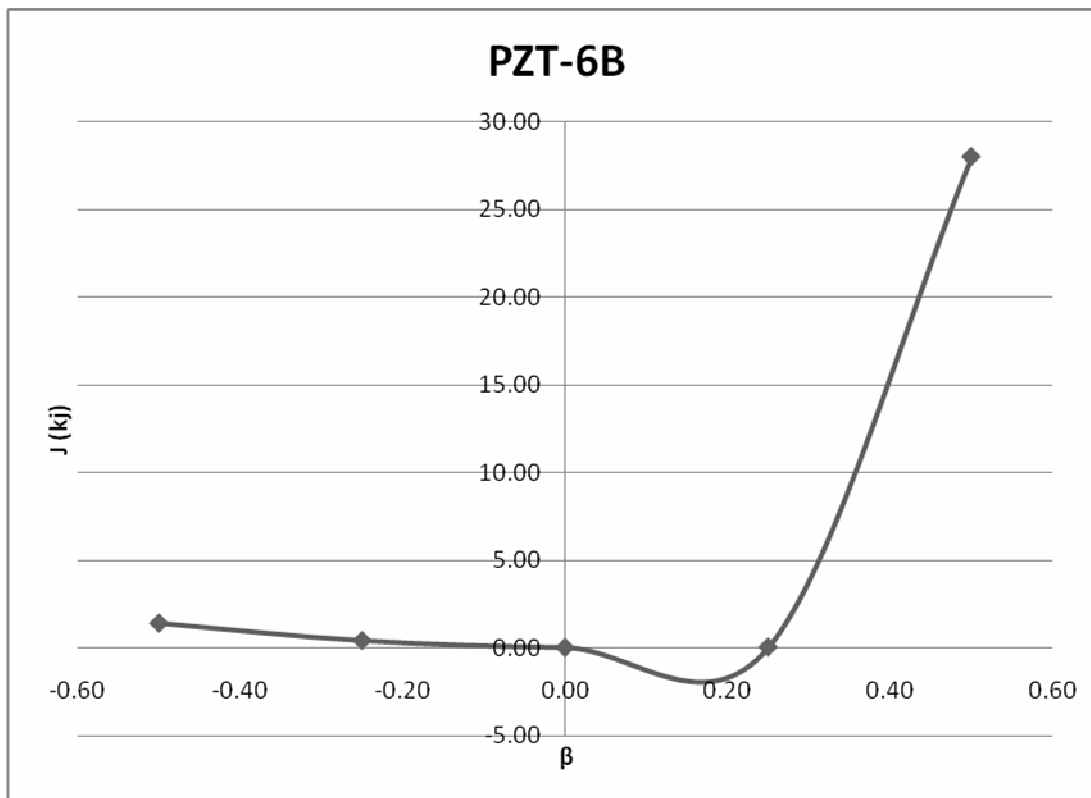
$$[C] = \begin{bmatrix} 16.8 & 8.42 & 0 \\ 8.42 & 16.3 & 0 \\ 0 & 0 & 3.55 \end{bmatrix} \times 10^{10} [Pa]$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4.6 \\ -0.9 & 7.1 & 0 \end{bmatrix} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

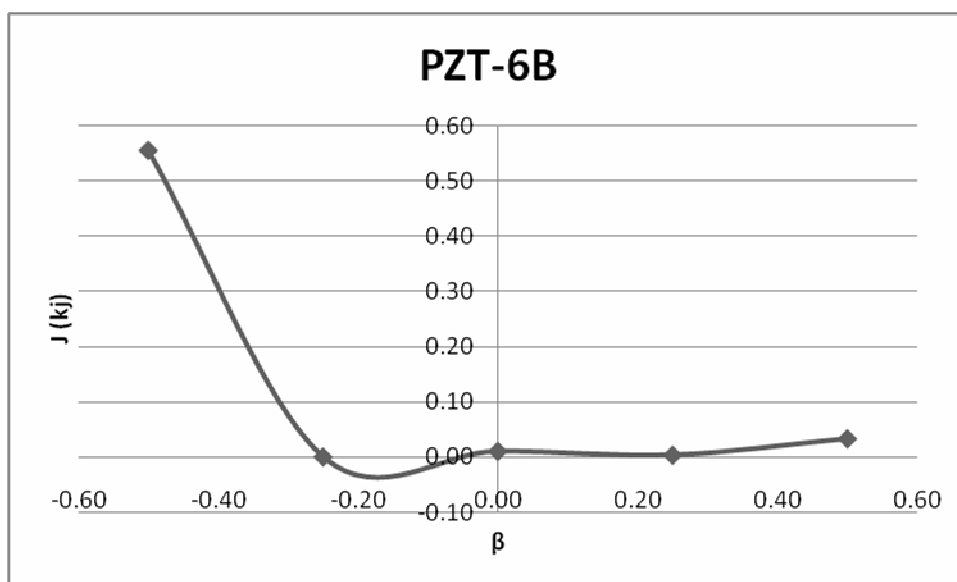
$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 34.2 \end{bmatrix} \times 10^{-10} \left[ \frac{C}{Vm} \right]$$



شکل ۴-۵۱: ضریب نسبت ۱



شکل ۴-۵۲ : ضریب نسبت ۱/۵



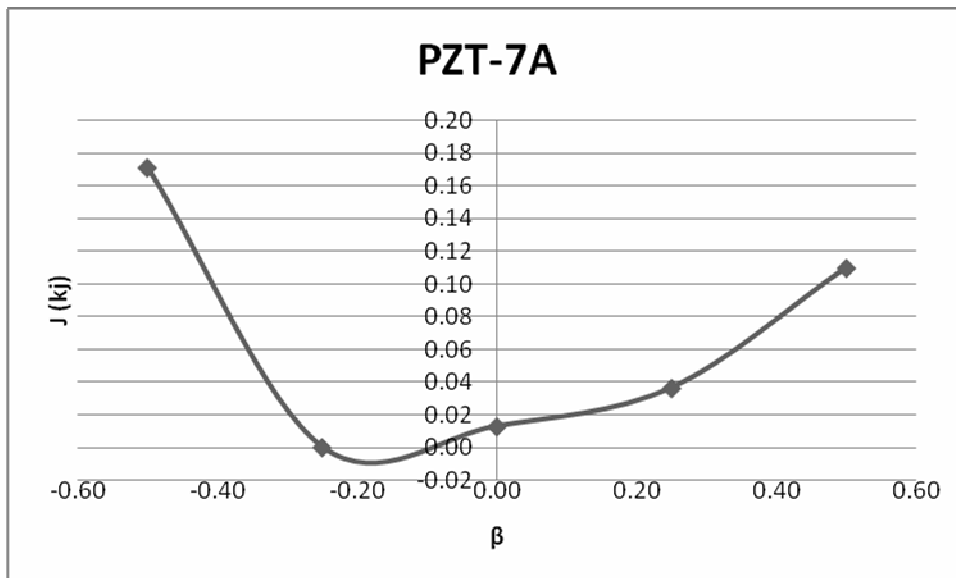
شکل ۴-۵۳ : ضریب نسبت ۲

ماده بعدی که مورد بررسی قرار گرفته است **PZT-7A** با خواص زیر است:

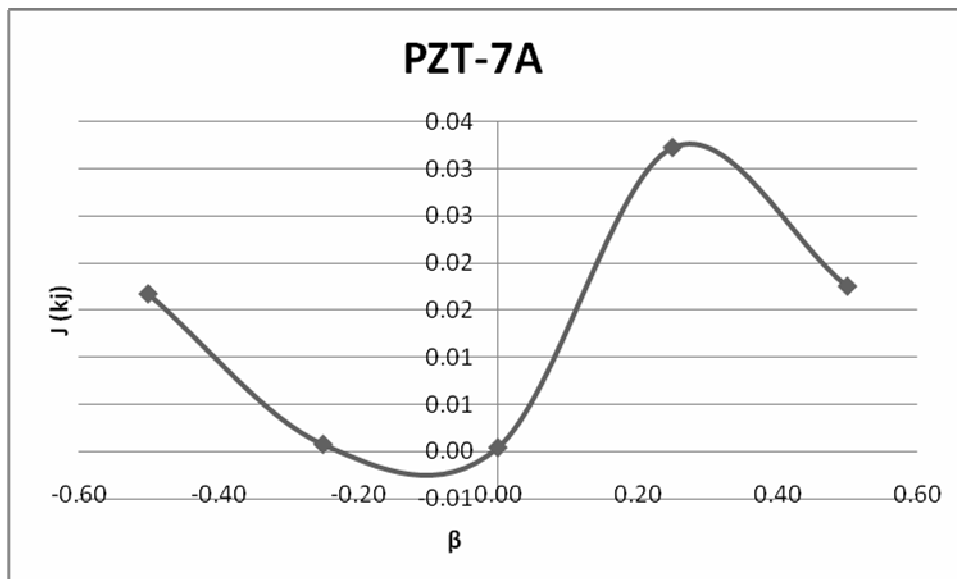
$$[C] = \begin{bmatrix} 14.8 & 8.13 & 0 \\ 8.13 & 13.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2.53 \end{bmatrix} \times 10^{10} [Pa]$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9.2 \\ -2.1 & 9.5 & 0 \end{bmatrix} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

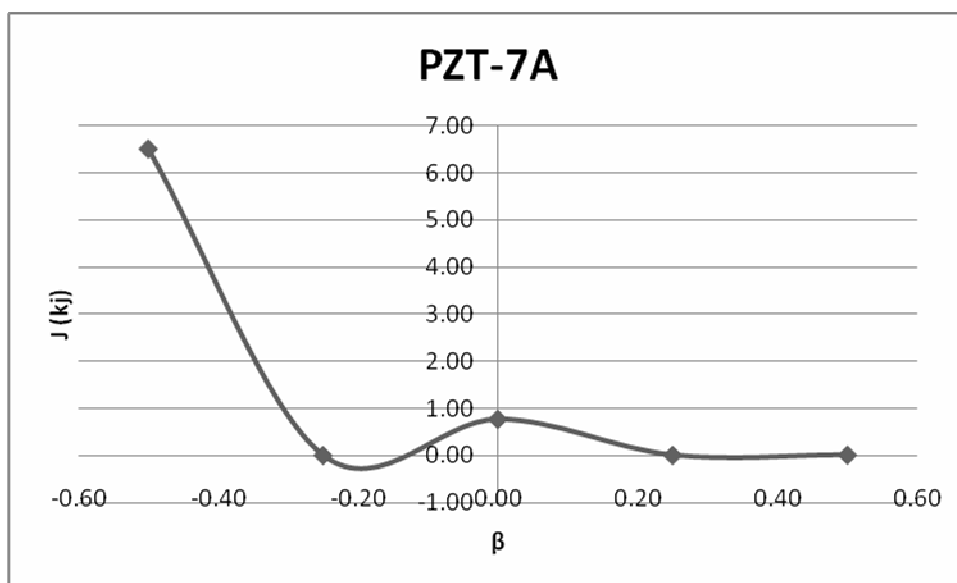
$$] [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 40.7 & 0 \\ 0 & 20.8 \end{bmatrix} \times 10^{-10} \left[ \frac{C}{Vm} \right]$$



شکل ۴-۵۴: ضریب نسبت ۱



شکل ۴-۵۵: ضریب نسبت ۱/۵



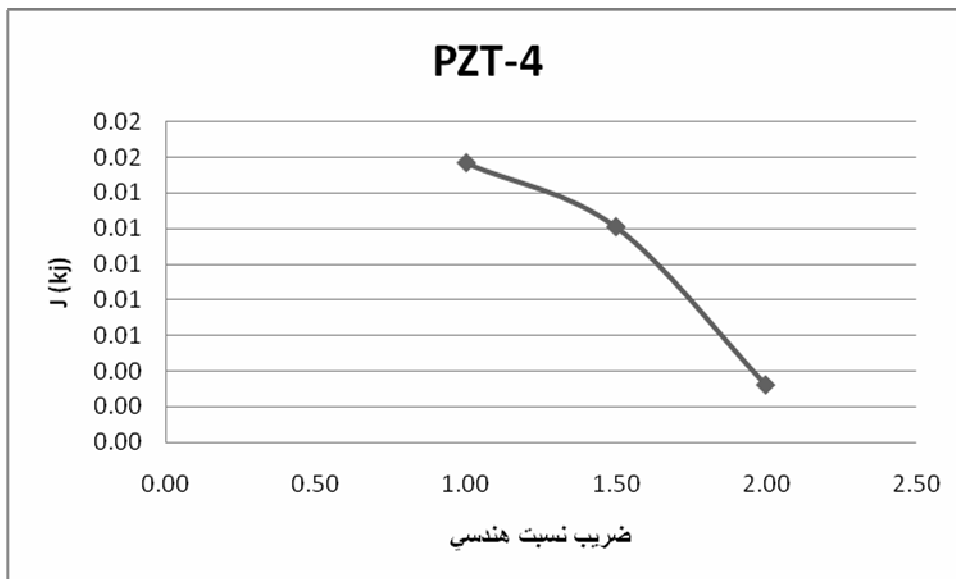
شکل ۴-۵۶: ضریب نسبت ۲

#### ۴-۵-۳- تاثیر هندسه بر میزان انرژی رهایی کرنشی

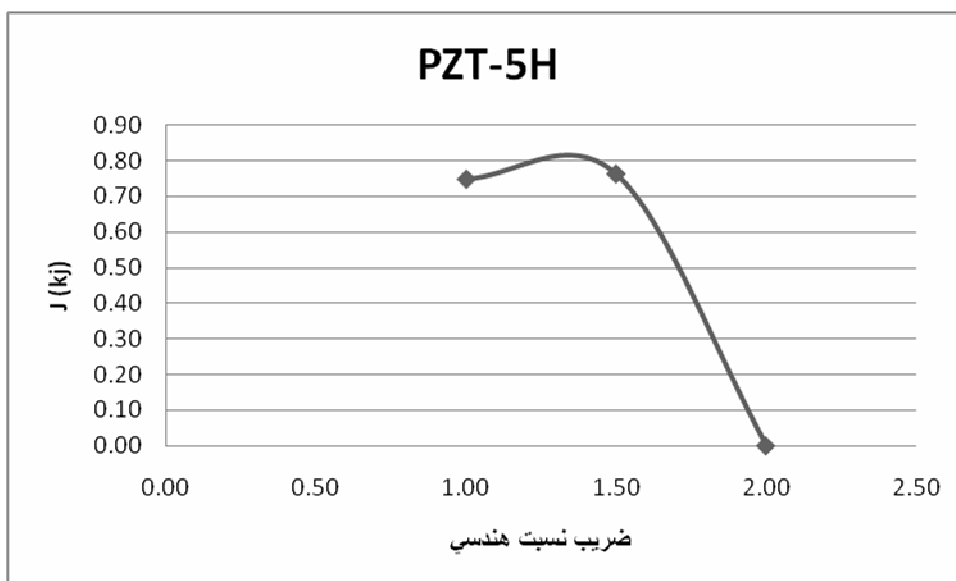
چهار نمودار زیر نشان دهنده اثر ضریب نسبت صفحات بررسی شده در مواد مختلف بر میزان

انرژی رهایی کرنشی می باشند. در این چهار نمودار محور افقی ضریب نسبت هندسی و محور عمودی

بیانگر میزان انرژی کرنشی رهایی می باشد.

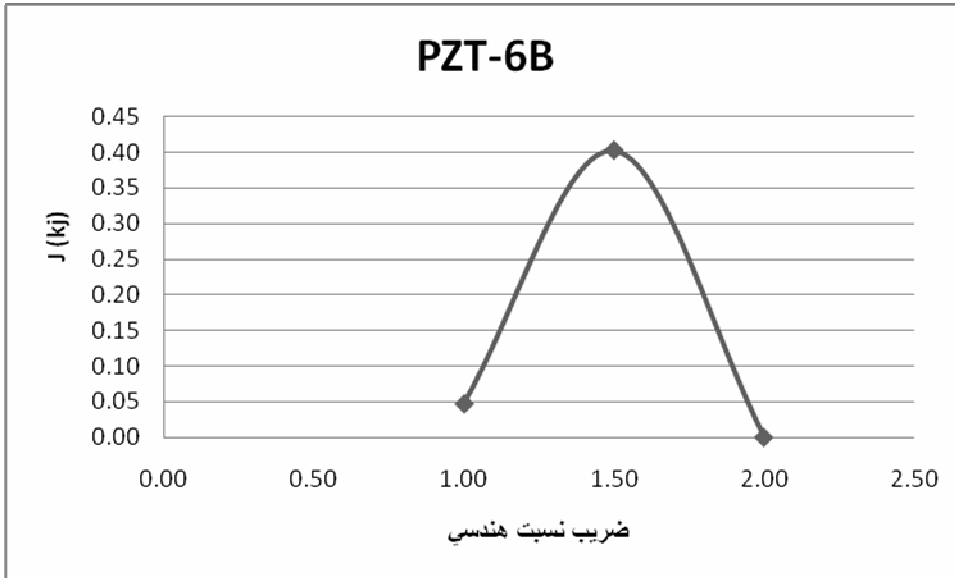


شکل ۴-۵۷: اثر ضریب هندسی بر میزان انرژی رهایی کرنشی در PZT-4

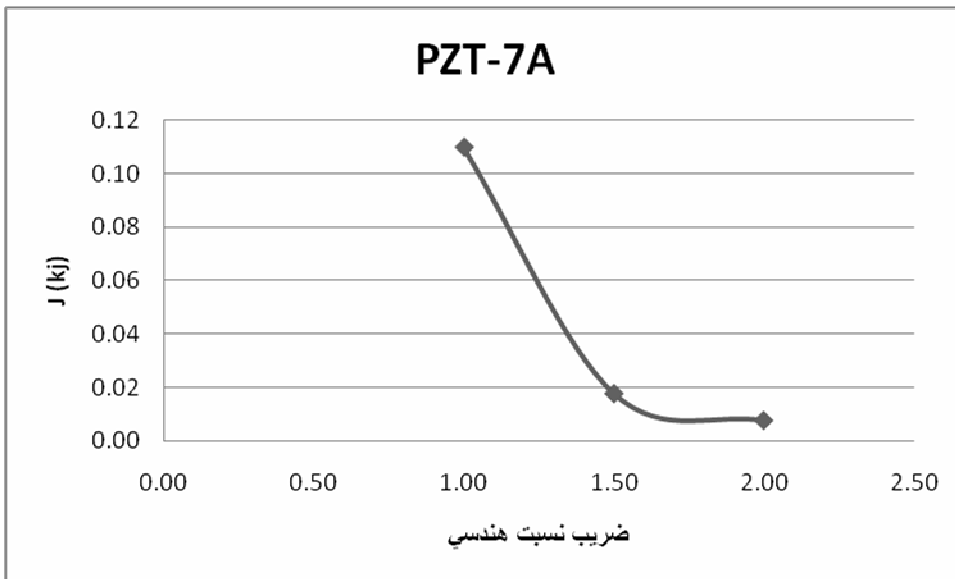


شکل ۴-۵۸: اثر ضریب هندسی بر میزان انرژی رهایی کرنشی در PZT-5H





شکل ۴-۵۹: اثر ضریب هندسی بر میزان انرژی رهایی کرنشی در PZT-6B



شکل ۴-۶۰: اثر ضریب هندسی بر میزان انرژی رهایی کرنشی در PZT-7A

## فصل پنجم

### نتیجه گیری و پیشنهادات

## ۵-۱- مقدمه

در این فصل به بررسی نتایج به دست آمده پرداخته و در نهایت پیشنهاداتی برای ادامه کار ارائه می گردد.

## ۵-۲- نتایج

۱- به طور نسبی میتوان گفت با افزایش مقدار ضریب  $\beta$ ، مقدار انرژی رهایی کرنشی افزایش می یابد.

۲- ضرایب  $\beta$  مثبت رفتارهای مشابه به هم و ضرایب منفی نیز رفتارهای مشابه تری را نشان می دهند که کاملاً قابل انتظار می باشد.

۳- طبق نتایج به دست آمده در اکثر موارد با افزایش ضریب نسبت هندسی مقدار انرژی رهایی کرنشی کاهش یافته است که میتوان علت آن را کاهش نسبت طول ترک به طول صفحه ارزیابی کرد.

۴- در مواد FGP بدون ترک نیز با افزایش مقدار ضریب  $\beta$  میزان جابه جایی و تنش و پتانسیل الکتریکی افزایش یافته است که کاملاً بدیهی بوده و نشان دهنده صحت برنامه نوشته شده می باشد.

۵- در این پروژه قابلیت بالای روش بدون المان برای تحلیل شرایط متنوع خواص مواد مشخص گردید. می توان گفت که با این روش می توان هر گونه خواص پیچیده را بر روی مواد قرار داده و به سادگی نتایج را به دست آورد.

۶- این روش برای تحلیل مکانیک شکست مواد بسیار قابل بهره برداری می باشد.

۷- در این پروژه برای اولین بار تحلیل مکانیک شکست مواد FGP به کمک روش بدون المان مورد بررسی قرار گرفته است.

۸- در این پروژه بر روش برنامه نویسی ساخت یافته تاکید شده و از زیربرنامه ها به خوبی استفاده گردید که باعث کاهش بی نظیر زمان اجرای برنامه های بزرگ شد.

### ۵-۳- پیشنهادات

۱- با توجه به حساسیت روش بدون المان نسبت به پارامترهای همگرایی، بررسی یک تحقیق گسترده در مورد رابطه این پارامترها و بدست آوردن روش مشخصی برای یافتن این پارامترها ضروری به نظر می رسد.

۲- با توجه به عدم وجود تحلیل های آزمایشگاهی در مورد ترک در مواد FGP و نیز کمبود تحلیل های دقیق در این زمینه، انجام چنین تحقیقاتی به رشد علم در این رشته کمک خواهد کرد.

۳- یافتن روش های دقیق تر در زمینه اعمال شرایط مرزی در روش بدون المان

۴- با گسترده تر شدن روش بدون المان ساختن نرم افزاری که به این روش به تحلیل مکانیکی بپردازد دور از دسترس نیست.

## منابع

- ۱- جاوید راد، فرهاد، زمستان ۱۳۸۳، مکانیک شکست و کاربرد آن در مهندسی، انتشارات صنایع هوا و فضا.
- 2 – www .What's FGM . htm.
- 3 – Suresh, S., and Mortensen, A., 1998, “*Fundamentals of Functionally Graded Materials*”, Combridge Publication, London.
- 4 – Yang Jiashi , “*An Introduction to the theory of piezoelectricity*” vol 9 , 35-38
- 5 – S.Ueda , 2002, “*The mode I crack problem for layered piezoelectric plate*” International Journal of Fracture, vol 114 , 63-86.
- 6 - Belytschko, .T and Lu, .Y.Y and Gu, .L, 1994, “*A new implementation of the Element free Galerkin method*”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol 113, 397- 414.
- 7 – Belytschko, .T and Lu, .Y.Y and Gu, .L, 1995, “*Element free Galerkin method for static and dynamic fracture*”, International journal of Solids ans Structures, vol 32, 2547-2570.
- 8 - Roberto Brighenti, 2005, “*Application of the element-free Galerkin meshless method to 3-D fracture mechanics problems*”, Engineering Fracture Mechanics, vol 72, 2808–2820.
- 9 - C.K. Lee, C.E. Zhou, 2004, “*On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method*”, Computers and Structures, vol 82, 413–428.
- 10 - K.Y. Dai, G.R. Liu, X. Han, K.M. Lim, 2005, “*Thermomechanical analysis of functionally graded material (FGM) plates using element-free Galerkin method*”, Computers and Structures, vol 83, 1487–1502.
- 11 - B.N. Rao, S. Rahman, 2003, “*Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials*”, Engineering Fracture Mechanics, vol 70, 1–27.

۱۲ – مجید زاده محمد، پایان نامه کارشناسی ارشد، آنالیز ترک در صفحه مستطیلی FGM به کمک

روش بدون المان گالرکین

13 – T.Y.Ng, X.Q.He, K.M Liew , 2002, “*Finite element modeling of active control of graded shells in frequency domain via piezoelectric sensors and actuators*” Computational Mechanics , vol 28 , 1-9.

14 – X.L.Chen, Z.Y.Zhao, K.M Liew , 2008, “*Stability of piezoelectric FGM rectangular plate subjected to non-uniformly disturbed load, heat and voltage*” Advances in Engineering Software , vol 39 , 121-131.

15 – B.N. Rao, M. Kuna, 2008, *Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded piezoelectric materials*” International Journal of Solids and Structures, vol 45 , 5237-5257

16 - H. Karutz, R. Chudoba, W.B. Kratzig, 2002, “*Automatic adaptive generation of a coupled finite element/element-free Galerkin discretization*”, Finite Elements in Analysis and Design, vol 38, 1075–1091.

17 - Sang-Ho Lee, Young-Cheol Yoon, 2004, “*Numerical prediction of crack propagation by an enhanced element-free Galerkin method*”, Nuclear Engineering and Design, vol 227, 257–271.

# ABSTRACT

Fracture and crack analysis is one of the most important branches of Solid Mechanics. In this research, the determination of strain release energy in cracked FGP materials is studied. The gradual variations of material properties are named as a special function (FGM). If these materials, however, have piezoelectric property too, then they are called FGP. In recent years in the fields of buckling, vibrations, fracture, stress analysis and electromechanical and thermal forces of these materials have been widely studied.

The numerical method used in this research, is the Galerkin element less method which was created by Blichko in 1994. This method is based on the approximation of least square summation between several grids selected in the body and has some advantages to the common Finite Element methods. For instance, faster convergence, no need to meshing the body and the ability of the increasing the grids at any instant can be mentioned as its advantages. One of the most important capabilities of this method is its application in the analysis of fracture mechanics which is the subject of this research.

The computer program is written in MATLAB. The crack considered here is in mode I. The plate is subjected to uniform distributed stress and uniform electrical displacement. In this research, the effects of distributed mechanical force and electrical displacement on the stress field, strain release energy, displacement and electrical field for the cases of homogenous uniform plate, simple piezoelectric plate and simple FGP plate and finally cracked FGP plate are studied. Also the program is run for four piezoceramic types with different values for geometry ratio and the effects of variation of material and geometry ratio are also investigated.

The results show that when the geometry ratio is increased, the strain release energy is reduced. In FGP with no crack, by increasing the factor  $\beta$ , the displacement, stress and electrical potential will increase.

Keywords: Crack, FGP Materials, Fracture Mechanics, Energy Release Rate.



**Faculty of Mechanical Engineering**

**Determination of Energy Release Rate in Cracked  
FGP Plates by Element Free Galerkin Method**

**By:**

**Hashem Abedzadeh Saeedi**

**Supervisor:**

**Dr. Mahmoud Shariati**

Summer 2010