بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی تبدیل انرژی

بررسی توزیع تنش در اطراف گشودگی شبه-مربعی واقع در صفحه ویسکوالاستیک ارتوتروپیک نامحدود تحت بارگذاری محوری

نگارنده: علیرضا طالبی

استاد راهنما:

دکتر محمد جعفری

شهریور ۱۳۹۷

شماره: ۳د/۲۹۷/۱۳۴
تاریخ: ۹۷/۸/۱۲

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **علیرضا طالبی** با شماره دانشجویی ۹٤۱۱٤۰٤ رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان **بررسی توزیع تنش در اطراف گشودگی شبه-مربعی در صفحه ویسکوالاستیک ارتوتروپیک نامحدود تحت بارگذاری محوری** که در تاریخ ۱۳۹۷/۰٦/۲۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: خوب ......) ☑ **مردود** ☐

نوع تحقیق: **نظری** ■ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر محمد جعفری	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	—	—	—
۳- استاد مشاور	-	-	-
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی بامداد	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حمیدرضا ایپک چی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر علیرضا شاطرزاده	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمدمحسن شاه‌مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

۶

تقدیم به

همه علم دوستان، علم آموزان و عالمان جهان.

تشکر و قدردانی از

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمد جعفری که بدون راهنمایی های ایشان

پیمودن این مسیر، میسر نبود.

تعهد نامه

اینجانب علیرضا طالبی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه بررسی توزیع تنش در اطراف گشودگی شبه-مربعی واقع در صفحه ویسکوالاستیک ارتوتروپیک نامحدود تحت بارگذاری محوری تحت راهنمائی دکتر محمد جعفری متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایح اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

چکیده

شکست معمولا به دلیل وجود ناپیوستگی‌های هندسی از جمله: ترک، گشودگی، پستی و بلندی‌ها و هر نوع ناپیوستگی دیگر رخ می‌دهد، به همین دلیل یکی از مهمترین مباحث در طراحی سازه‌ها می‌باشد. دلیل اصلی شکست مواد کاهش استحکام ماده و ایجاد تمرکز تنش می باشد. با افزایش تنش در این نقاط ناپیوستگی‌ها رشد کرده و منجر به بهم پیوستن ناپیوستگی و رشد آسیب خواهد شد که در نهایت منجر به شکست نهایی ماده می‌شود. بررسی رفتار دقیق ماده با وجود ناپیوستگی به طراحان کمک شایانی می‌کند که بتوانند طراحی بهینه‌ای را از ماده بکارگرفته داشته باشند. علاوه بر هندسه گشودگی و نوع قرارگیری آن نسبت به بارگذاری و شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی در رفتار ماده بسیار تاثیرگذار خواهد بود.

در این پایان‌نامه به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی در یک صفحه ارتوتروپیک-ویسکوالاستیک نامحدود تحت بار محوری با استفاده از روش مدول موثر و اصل برهمنهی بولتزمن و روش متناظرسازی پرداخته شده است که در ابتدا توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی واقع در یک ورق نامحدود ارتوتروپیک با استفاده از روش متغیر مختلط لخنیتسکی برحسب تابعی از خواص مکانیکی $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ محاسبه شده است. سپس با استفاده از اصل برهمنهی بولتزمن و روش متناظرسازی، حل مسئله الاستیک به حل ویسکوالاستیک در حوزه لاپلاس تبدیل می شود. آنگاه با گرفتن لاپلاس معکوس به روش های عددی مناسب، حل ویسکوالاستیک در حوزه زمان نیز به دست می آید. در نهایت با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه برای گشودگی شبه مربعی رابطه ای صریح برای مولفه‌های تنش بر حسب خواص مکانیکی نیز ارائه شده است. سپس تاثیر پارامترهای انحنای گشودگی و زاویه چرخش نیز ارائه شده است. همچنین در انتها تابع رگرسیون خطی بر حسب شش پارامتر، از جمله چهار پارامتر مادی کامپوزیت و دو پارامتر زاویه چرخش و انحنای گشودگی نیز ارائه شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل تنش، صفحه ویسکوالاستیک، گشودگی، متناظرسازی

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

فهرست جدول ها

فصل ۱: مقدمه

۱-۱- مقدمه

در این فصل به سوالات اساسی اولیه پیرامون موضوع پایان‌نامه از جمله تعریف مساله، هدف و ضـرورت مسئله پاسخ داده خواهد شد و سپس به معرفی بخش‌های مختلف پایان‌نامه پرداخته خواهد شد.

۱-۲- تعریف مسئله

در سالیان اخیر با معرفی مواد ویسکوالاستیک و پلیمری، امکان تهیه بـا قیمـت مناسـب و بکـارگیری روزافزون آنها در صنعت از یکسو و ویژگی های مکانیکی مناسب آنها در میرا نمودن تنش های وارده از سوی دیگر، تفکر استفاده از لایه ها و قطعات تهیه شده از این مواد در بخش هایی از سـازه‌هـا ایجـاد گردیده است.

هدف این پایان‌نامه بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی مختلف در یک صفحه ارتوتروپیک-ویسکوالاستیک نامحدود تحت بار محوری با استفاده از روش مدول موثر و اصل برهمنهی بولتزمن و روش متناظرسازی است. در ابتدا توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی واقع در یک ورق نامحدود ارتوتروپیک با استفاده از روش متغیر مختلط لخنیتسکی برحسب تابعی از خواص مکانیکی $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه برای گشودگی شبه مربعی رابطه ای صریح برای مولفه‌های تنش بر حسب خواص مکانیکی و انحنای گشودگی و زاویه چرخش ارائه می‌شود. درنهایت با استفاده از اصل برهمنهی بولتزمن و روش متناظر سازی، حل مسئله الاستیک به حل ویسکوالاستیک در حوزه لاپلاس تبدیل می شود. آنگاه با گرفتن لاپلاس معکوس به روش های عددی مناسب، حل ویسکوالاستیک در حوزه زمان نیز به دست می آید.

۱-۳-ضرورت انجام تحقیق

در غالب تحقیقات انجام شده، صفحات مورد بررسی دارای گشودگی دایروی و یا بیضوی می باشند. ارائه یک رابطه صریح برای توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی که ارتباط بین σ_θو مقادیر E_1, E_2, ν_{12}, G_{12} را داشته باشد تاکنون برای یک صفحه ارتوتروپیک-ویسکوالاستیک بررسی نشده معرفی می شود.

۱-۴-نوآوری مسئله

استفاده از حل تحلیلی برای به دست آوردن توزیع تنش صفحات ارتوتروپیک-ویسکوالاستیک دارای گشودگی شبه مربعی.

ترکیب استفاده از روش لخنیتسکی و اصل برهم نهی بولتزمن در تحلیل صفحات ارتوتروپیک-ویسکوالاستیک دارای گشودگی

۱-۵-ساختار پایان نامه

این پایان‌نامه شامل پنج فصل است. در بخش دوم به بررسی روابط پایه مربوط به تحلیل تنش در صفحه‌ها با گشودگی‌های مختلف پرداخته شده است سپس روابط تبدیل تنش ویسکوالاستیک بااستفاده از تنش‌های الاستیک توضیح داده شده است و در پایان این فصل مروری کوتاهی بر پیشینه تحقیق صورت گرفته است. در فصل سوم با ترکیب روابط ویسکوالاستیک و روابط توزیع تنش با گشودگی شبه-مربعی، روابط توزیع تنش مورد نیاز در این پایان نامه بدست آمده است. در فصل چهارم خروجی‌های مورد نیاز استخراج اس و به بررسی خروجی‌ها پرداخته شده است. در فصل پنجم پیشنهادها در خصوص ادامه تحقیقات نیز ذکر شده است.

فصل ۲: مروری بر منابع

۲-۱-مقدمه

هدف از این فصل مروری بر روابط پایه‌ای به کار گرفته شده در این پایان‌نامه می‌باشد. در ابتدا روابط توزیع تنش در یک صحفه بی‌نهایت با گشودگی مختلف بیان شده است، سپس روابط مربوط به ویسکوالاستیک بیان شده است و سپس مروری کوتاه بر تحقیقات انجام شده صورت گرفته است.

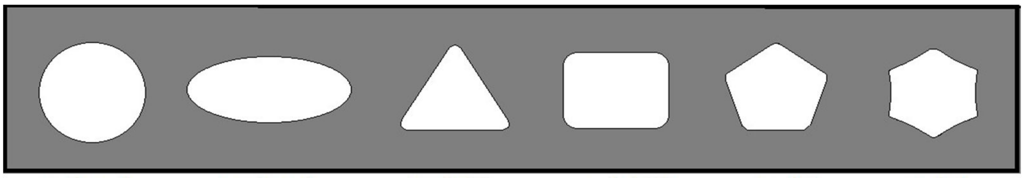
۲-۲-تحلیل تئوری توزیع تنش اطراف گشودگی

۲-۲-۱-مقدمه

برای نگاشت صفحات حاوی گشودگی مختلف به صفحات حاوی گشودگی دایره‌ای با شعاع واحد، از رابطه‌ای که ابوالفتوح [۱] در سال ۱۹۹۳ارائه کرد، استفاده می‌شود. در این رابطه، پارامترهای مختلفی چون n، c، w،λ وجود دارد که برای تعیین نوع گشودگی حائز اهمیت است. همانطور که در شکل زیر دیده می‌شود با انتخاب مناسب و تغییر این پارامترها، می‌توان گشودگی‌های مختلف را ایجاد کرد. این رابطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

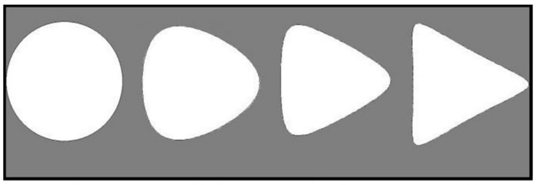
$$X = \lambda\big(c\cos\theta + w\cos(n\theta)\big)$$
$$Y = -\lambda(c\sin\theta + w\sin(n\theta)) \qquad (۱-۲)$$

پارامتر W، معیاری برای نشان دادن انحنای گشودگی یا میزان نرمی و تیزی لبه های گشودگی می‌باشد. λ پارامتری است که نشان دهنده‌ی اندازه و بزرگی گشودگی و در نهایت، پارامترهای c و n نشان دهنده‌ی نوع هندسه گشودگی است.



شکل۲-۱ تاثیر پارامترهای مختلف در ایجاد گشودگی

برای هر گشودگی وقتی W کاهش می‌یابد گشودگی ملایم‌تر می‌شود تا اینکه W بـه کمتـرین مقـدار خود، یعنی W=0 می‌رسد. در این حالت گشودگی به دایره تبدیل می‌شود.به عنوان مثال، برای نگاشت گشودگی مثلثی توسط معادله‌ی (۲-۱)، باید مقادیر c و n را به ترتیب برابر ۱ و ۲ قرار داد. بـا کـاهش w، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی مطابق آنچه در شکل زیرنشان داده شده، افـزایش مـی‌یابـد و در نهایت شکل در w=0 به دایره تبدیل می‌شود.



شکل ۲-۲ تاثیر پارامتر W بر روی گشودگی مثلثی

با مشخص شدن گشودگی شرایط مرزی حاکم بر گشودگی که به صورت $(\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0)$ مـی‌باشـد، اعمال می‌شود.چون تنها تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی σ_θ است و بقیه تـنش‌هـا در مقایسـه بـا این تنش کوچک هستند. با استفاده از این شرایط می‌توان توابـع تـنش مربوطـه را بـه صـورت کامـل مشخص کرد. از رابطه‌ی (۲-۱) برای ترسیم مرز روی گشودگی و از رابطه (۲-۲) بـرای ترسـیم خـارج

این مرز استفاده می‌شود.

$$\xi = \rho e^{i\theta} = \rho(cos\theta + isin\theta) \quad (۲-۲)$$

ξ یک متغیر مختلط است که بر حسب مختصات ρ و θ تعریف شده است .بـرای نگاشـت کلیـه نقـاط گشودگی های مختلف روی دایره ای به شعاع واحد از رابطه ی (۲-۳) استفاده می‌شود:

$$W(\xi)=rx+iy \quad (۲-۳)$$

$W(\xi)$ یک تابع انتقال است و ضریب r را برای ایجاد شکل های غیرمنتظم مانند مثلث متساوی الساقین به صورت رابطه (۲-۴) تعریف می‌شود.

$$r = \frac{2h}{\sqrt{3}l} \quad (۲-۴)$$

r بصورت تابعی از قاعده و ارتفاع مثلث که قابل تغییر می باشد؛ تعریـف مـی شـود. h ارتفـاع و l قاعـده مثلث متساوی الساقین می‌باشد. از رابطه اویلر به دست می آید:

$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= \cos(n\theta) + isin(n\theta) \\ e^{-in\theta} &= \cos(n\theta) - isin(n\theta) \end{aligned} \quad (۲-۵)$$

با ترکیب رابطه (۲-۲) و (۲-۵) برای دایره‌ای به شعاع واحد $\rho = 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \frac{1}{2}[\xi^n + \frac{1}{\xi^n}] \\ \sin(n\theta) &= -\frac{1}{2}[\xi^n - \frac{1}{\xi^n}] \end{aligned} \quad (۲-۶)$$

و همچنین با ترکیب روابط (۲-۱) و (۲-۳) و با کمک گرفتن از روابط (۲-۵) داریم:

$$W(\xi)=\frac{\lambda}{2}\left[\left(\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + w\left(\xi^n + \frac{1}{\xi^n}\right)\right) - c\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) + w\left(\xi^n - \frac{1}{\xi^n}\right)\right] \quad (۲-۷)$$

در ادامه:

$$W(\xi)=\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{(r+c)}{\xi}\right)+(r-c)\xi+w(r+1)\xi^{n}+\frac{w(r-1)}{\xi^{n}}\right] \tag{۲-۸}$$

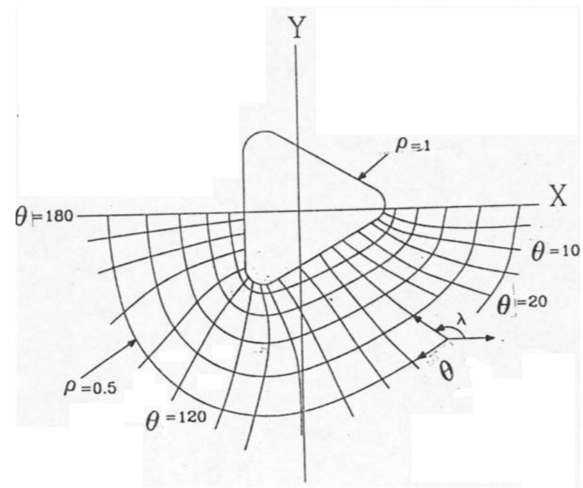
اگر فرض شود:

$$a=r+c \qquad b=r-c$$
$$d=r+1 \qquad e=r-1 \tag{۲-۹}$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$W(\xi)=\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{a}{\xi}\right)+b\xi+wd\xi^{n}+\frac{we}{\xi^{n}}\right] \tag{۲-۱۰}$$

حال اگر بخواهیم نقاط روی مرز گشودگی را مشخص کنـیم $\rho = 1$ خواهـد بـود. بـرای نقـاط خـارج گشودگی مانند شکل (۲-۳) کافیست مقدار ρ را کوچکتر از یک انتخاب کرد .به این ترتیب و به کمک روابط (۲-۲) و (۲-۱۰) با انتخاب پارامترهای مناسب برای n، c و w توانایی مدل کردن گشودگی هایی با هندسه های مختلف را خواهیم داشت.



شکل ۲-۳ تعریف نقاط خارج از مرز گشودگی

۲-۲-۲-روش تحلیلی

برای بررسی تمرکز تنش در اطراف گشودگی های مختلف می توان از روش های تحلیلی، عددی و تجربی استفاده نمود. در بین این روش ها، به دلیل هزینه‌ی کم، حل تحلیلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. ساوین در مورد مواد همسان‌گرد[۲]، برای گشودگی های مختلف و برای مواد غیرهمسانگرد، فقط برای گشودگی بیضوی، حل‌هایی را ارائه داد. صفحات غیرهمسان‌گرد حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضوی توسط لخنیتسکی مورد بررسی قرار گرفت. روش تحلیلی ارائه شده در این پایان‌نامه، برگرفته از گسترش روش حل تحلیلی توسط ساوین [۲] و لخنیتسکی [۳] می‌باشد که بر اساس تئوری الاستیسیته مواد غیرهمسان‌گرد ارائه شده است. در این روش، تابع تنش به عبارتی تحلیلی با ضرایب نامعین تبدیل می شود و با مشخص شدن تابع تنش می‌توان تغییر مکان‌ها و تنش‌ها را محاسبه نمود. اگر میدان های جابه جایی در یک صفحه‌ی کامپوزیتی u(x,y)، v(x,y)، w(x,y) باشد، در حالت کرنش صفحه‌ای ($\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$) که یکی از دو حالت مورد بررسی در این پایان‌نامه می‌باشد، رابطه‌ی بین میدان جابه‌جایی و کرنش به این صورت بیان می‌شود:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (۲-۱۱)$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

بنابراین با توجه به روابط (۲-۱۱)، معادله‌ی سازگاری تغییر شکل در حالت دو بعدی را بـه‌صـورت زیـر بیان می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \qquad (۲-۱۲)$$

با مروری بر روابط تنش و کرنش، با استفاده از ماتریس نرمی کاهش یافته [R]، خواهیم داشت:

$$\varepsilon_x = R_{11}\sigma_x + R_{12}\sigma_y + R_{16}\tau_{xy}$$
$$\varepsilon_y = R_{12}\sigma_x + R_{22}\sigma_y + R_{26}\tau_{xy} \qquad (۱۳-۲)$$
$$\gamma_{xy} = R_{16}\sigma_x + R_{26}\sigma_y + R_{66}\tau_{xy}$$

R_{ij} و A_{ij} به ترتیب ضرایب ماتریس های نرمی کاهش یافته و سفتی ماده می‌باشد:

$$R_{ij} = A_{ij} - \frac{A_{ij}A_{ij}}{A_{33}} \qquad (\mathrm{i,j}=1,2,6) \qquad (۱۴-۲)$$

برای ضرایب ماتریس نرمی کاهش یافته R_{ij} در حالت تنش صفحه‌ای ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$) که در واقع حالت دوم بحث مورد بررسی ما بوده خواهیم داشت:

$$R_{ij} = A_{ij} \qquad (\mathrm{i,j}=1,2,6) \qquad (۱۵-۲)$$

معادله‌ی تعادل با معرفی U(x,y) و F(x,y) به ترتیب به عنوان تابع پتانسیل و تابع تنش ارضا خواهد شد. با فرض اینکه:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{y}^2} + U$$
$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial \mathrm{x}^2} + U \qquad (۱۶-۲)$$
$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial \mathrm{y}} + U$$

با جایگذاری روابط تنش-کرنش (۲-۱۳) در روابط سازگاری (۲-۱۲) و نوشتن معادله‌ی حاصل برحسب توابع تنش و پتانسیل با کمک گرفتن از روابط (۲-۱۶) خواهیم داشت:

$$R_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial \mathrm{y}^4}-2R_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x\,\partial \mathrm{y}^3}+(2R_{12}+R_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial \mathrm{y}^2\,\partial \mathrm{y}^2}-2R_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial y\,\partial \mathrm{x}^3}+R_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial \mathrm{x}^4}=-(R_{12}+R_{22})\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{x}^2}+(R_{16}+R_{26})\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial \mathrm{y}}-(R_{11}+R_{12})\frac{\partial^2 U}{\partial \mathrm{y}^2} \qquad (۱۷-۲)$$

در غیاب نیروهای حجمی و یا در صورت ثابت بودن آنها معادلـه‌ی (۲-۱۸) نتیجـه مـی‌شـود کـه حـل مسائل الاستیسیته‌ی صفحه‌ای در حالت دو بعدی، منجر به معرفی و حل معادله‌ی دیفرانسیل مرتبـه ۴ خواهد بود که با تابع تنش F(x,y) در یک ناحیه از صفحه‌ی x,y بنام S ارضا خواهد شد:

$$R_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial \mathrm{y}^4}-2R_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x\,\partial \mathrm{y}^3}+(2R_{12}+R_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial \mathrm{y}^2\,\partial \mathrm{y}^2}-2R_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial y\,\partial \mathrm{x}^3}+R_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial \mathrm{x}^4}=0 \qquad (۱۸-۲)$$

در واقع معادله (۲-۱۸) معادله ی سازگاری برای ماده‌ی غیرهمسان گرد می باشد که F(x,y) تابع تنش و R_{ij} اعضای ماتریس نرمی کاهش یافته می‌باشد و بر اساس فرض کرنش صفحه‌ای یا تـنش صـفحه‌ای به‌صورت تابعی از A_{ij} مطابق با روابط معادلات (۲-۱۴) و (۲-۱۵) محاسبه می‌شود. لخنیتسکی نشـان داده که معادله (۲-۱۸) به کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه اول بیان می شود:

$$D_1D_2D_3D_4F=0 \qquad k=1,2,3,4$$
$$D_k=\frac{\partial}{\partial y}-\mu_k\frac{\partial}{\partial x} \qquad (۱۹-۲)$$

معادله ی مشخصه ی مربوط به ماده ی ارتوتروپیک که در معادله ی (۲-۲۰) آمده است در حالت کلی ۴ ریشه مختلط دارد .لخنیتسکی اثبات کرده این معادله مشخصه حاضر دارای ریشه های دو به دو مزدوج می باشد که μ_k ریشه های معادله ی زیر است:

$$R_{11}\mu^4 - 2R_{16}\mu^3 + (2R_{12} + R_{66})\mu^2 - 2R_{26}\mu + R_{22} = 0 \qquad (۲\text{-}۲۰)$$

برای ماده ی همسان گرد ($R_{16} = R_{26} = 0$) و معادله (۲-۲۰) بصورت زیر بدست می آید:

$$R_{11}\mu^4 + (2R_{12} + R_{66})\mu^2 + R_{22} = 0 \qquad (۲\text{-}۲۱)$$

برای این معادلات از چهار ریشه ی μ_4، μ_3، μ_2، μ_1 استفاده می شود .لخنیتسکی با توجه به ثابت های الاستیک دو حالت را در نظر گرفت .حالت اول :تمام ریشه ها مختلف باشند.

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha + i\beta \qquad & \mu_2 &= \gamma + i\delta \\ \overline{\mu_1} &= \alpha - i\beta \qquad & \overline{\mu_2} &= \gamma - i\delta \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۲۲)$$

حالت دوم :ریشه ها دو به دو با هم برابر باشند.

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha + i\beta \qquad \overline{\mu_1} = \overline{\mu_2} = \alpha - i\beta \qquad (۲\text{-}۲۳)$$

در هر دو حالت α،β،γ،δ اعداد حقیقی می باشد؛ $\beta > 0$ ،$\delta > 0$، برای مواد همسان گرد $\gamma = \beta$ خواهد بود.

حالت اول: ۴ ریشه موهومی مختلف.

$$F = F_1(x+\mu_1 y) + F_2(x+\mu_2 y) + F_3(x+\overline{\mu_1} y) + F_4(x+\overline{\mu_2} y) \tag{۲-۲۴}$$

حالت دوم: ۴ ریشه موهومی که دو به دو باهم برابرند.

$$\begin{aligned} F = {} & F_1(x+\mu_1 y) + (x+\overline{\mu_1} y)F_2(x+\mu_1 y) + F_3(x+\overline{\mu_1} y) \\ & + (x+\mu_1 y)F_4(x+\overline{\mu_1} y) \end{aligned} \tag{۲-۲۵}$$

در اینجا F_1،F_2 ،F_3 ،F_4 توابع دلخواهی از متغیرهای $(x+\overline{\mu_k} y)$ یا $(x+\mu_k y)$ می باشند .متغیر $(x+\mu_k y)$ مختلط می باشد، البته نه از نوع معمولی آن یعنی (x+iy) بلکه پیچیده تر و تعمیم داده شده بصورت زیر معرفی می شود:

$$\begin{aligned} & Z_1 = (x+\mu_1 y) && Z_2 = (x+\mu_2 y) \\ & \bar{Z}_1 = (x+\overline{\mu_1} y) && \bar{Z}_2 = (x+\overline{\mu_2} y) \end{aligned} \tag{۲-۲۶}$$

در حالت کلی برای مواد غیرهمسان‌گرد این چهار ریشه باهم برابر نمی باشند. بنابراین برای ادامه ی کار حالت اول؛ روابط (۲-۲۴) در نظر گرفته می شود و چون این ریشه ها دو به دو مزدوج هم هستند، حل معادله‌ی (۲-۲۰) با توجه به وجود ۴ ریشه موهومی مختلف در معادله ی مشخصه، با جایگذاری روابط (۲-۲۶) در معادله‌ی (۲-۲۴) بصورت زیر خواهد بود:

$$F = F_1(Z_1) + F_2(Z_2) + \overline{F_1(Z_1)} + \overline{F_2(Z_2)} \tag{۲-۲۷}$$

$\bar{F}_1$ و $\bar{F}_2$ به ترتیب مزدوج توابع F_1 و F_2 خواهند بود و با قراردادن معادله‌ی (۲-۲۷) در روابط (۲-۱۶)، البته بدون وجود نیروهای حجمی خواهیم داشت:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}[F_1(Z_1) + F_2(Z_2) + \overline{F_1(Z_1)} + \overline{F_2(Z_2)}]$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[F_1(Z_1) + F_2(Z_2) + \overline{F_1(Z_1)} + \overline{F_2(Z_2)}] \quad (۲۸-۲)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = -\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}[F_1(Z_1) + F_2(Z_2) + \overline{F_1(Z_1)} + \overline{F_2(Z_2)}]$$

با محاسبه ی مشتق اول داریم:

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial F_1}{\partial Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial \overline{F_1}}{\partial \overline{Z_1}}\frac{\partial \overline{Z_1}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{F_2}}{\partial \overline{Z_2}}\frac{\partial \overline{Z_2}}{\partial y}]$$

$$\sigma_y = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial F_1}{\partial Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_1}}{\partial \overline{Z_1}}\frac{\partial \overline{Z_1}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_2}}{\partial \overline{Z_2}}\frac{\partial \overline{Z_2}}{\partial x}] \quad (۲۹-۲)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial F_1}{\partial Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial \overline{F_1}}{\partial \overline{Z_1}}\frac{\partial \overline{Z_1}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{F_2}}{\partial \overline{Z_2}}\frac{\partial \overline{Z_2}}{\partial y}]$$

برای پایین آوردن مرتبه ی مشتق تعریف زیر در نظر گرفته می شود:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Z_1} = \emptyset_0(Z_1) \qquad \frac{\partial F_2}{\partial Z_2} = \psi_0(Z_2)$$

$$\frac{\partial \overline{F_1}}{\partial Z_1} = \overline{\emptyset_0(Z_1)} \qquad \frac{\partial \overline{F_2}}{\partial Z_2} = \overline{\psi_0(Z_2)} \quad (۳۰-۲)$$

ψ_0 و $\emptyset_0$ در واقع توابع تنش دلخواه می باشد که تنش های داخل صفحه ای را ارضا می نمایند و از طرفی دیگر از آنجایی که طبق روابط (۲-۲۶)، $Z_{1=}(x + \mu_1 y)$ و همچنین طبق روابط (۲-۲۲)، $\mu_1 = \alpha + i\beta$ می باشد، در نتیجه با ترکیب این دو رابطه داریم $Z_{1=}(x + \alpha y + i\beta y)$ در ادامه خواهیم داشت $\bar{Z}_{1=}(x + \alpha y - i\beta y)$ بنابراین با مشتق گرفتن از ۴ عبارت، Z_1، Z_2 و $\bar{Z}_1$، $\bar{Z}_2$ نسبت

به y:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial y} = \mu_1 \qquad \frac{\partial Z_2}{\partial y} = \mu_2$$
$$\frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial y} = \overline{\mu_1} \qquad \frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial y} = \overline{\mu_2} \qquad (۳۱-۲)$$

و با مشتق گیری نسبت به x به دست می آید:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial x} = \frac{\partial Z_2}{\partial x} = \frac{\partial \bar{Z}_1}{\partial x} = \frac{\partial \bar{Z}_2}{\partial x} = 1 \qquad (۳۲-۲)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۲-۳۰)،(۲-۳۱) و (۲-۳۲) در معادلات (۲-۲۹) خواهیم داشت:

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}[\mu_1 \emptyset_0(Z_1) + \mu_2 \psi_0(Z_2) + \overline{\mu_1 \emptyset_0(Z_1)} + \overline{\mu_2 \psi_0(Z_2)}]$$

$$\sigma_y = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}[\emptyset_0(Z_1) + \psi_0(Z_2) + \overline{\emptyset_0(Z_1)} + \overline{\psi_0(Z_2)}] \qquad (۳۳-۲)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}[\mu_1 \emptyset_0(Z_1) + \mu_2 \psi_0(Z_2) + \overline{\mu_1 \emptyset_0(Z_1)} + \overline{\mu_2 \psi_0(Z_2)}]$$

مراحل مشتق دوم، مشابه مشتق اول انجام می شود و در نتیجه مقدار تنش ها بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\sigma_x = [\mu_1{}^2 \emptyset_0{}'(Z_1) + \mu_2{}^2 \psi_0{}'(Z_1) + \overline{\mu_1{}^2 \emptyset_0{}'(Z_1)} + \overline{\mu_2{}^2 \psi_0{}'(Z_2)}]$$

$$\sigma_y = [\emptyset_0{}'(Z_1) + \psi_0{}'(Z_1) + \overline{\emptyset_0{}'(Z_1)} + \overline{\psi_0{}'(Z_2)}] \qquad (۳۴-۲)$$

$$\tau_{xy} = -[\mu_1 \emptyset_0{}'(Z_1) + \mu_2 \psi_0{}'(Z_1) + \overline{\mu_1 \emptyset_0{}'(Z_1)} + \overline{\mu_2 \psi_0{}'(Z_2)}]$$

برای قسمت حقیقی عبارت مختلط می‌توان نوشت $Z + \bar{Z} = 2Re[Z]$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\sigma_x = 2Re\,[\mu_1{}^2\emptyset_0{}'(Z_1) + \mu_2{}^2\psi_0{}'(Z_1)]$$

$$\sigma_y = 2Re\,[\emptyset_0{}'(Z_1) + \psi_0{}'(Z_1)] \tag{۳۵-۲}$$

$$\tau_{xy} = -2Re\,[\mu_1\emptyset_0{}'(Z_1) + \mu_2\psi_0{}'(Z_1)]$$

از طرفی دیگر در این پایان نامه، صفحه ی بی نهایت حاوی گشودگی تحت تنش برشی τ'_{xy} قرار دارد و تنش نرمال در جهات x و y صفر می‌باشد ($\sigma_x{}' = \sigma_y{}'$=0; $\tau_{xy}{}'$≠0) با توجه به روابط تبدیل تنش صفحه ای:

$$\sigma_x^\infty = [\sigma_x{}'cos^2\theta + \sigma_y{}'sin^2\theta + 2\tau_{xy}{}'sin\theta cos\theta]$$

$$\sigma_y^\infty = [\sigma_x{}'cos^2\theta + \sigma_y{}'sin^2\theta - 2\tau_{xy}{}'sin\theta cos\theta] \tag{۳۶-۲}$$

$$\tau_{xy}^\infty = -(\sigma_x{}' - \sigma_y{}')sin\theta cos\theta + \tau_{xy}{}'(cos^2\theta - sin^2\theta)$$

بنابراین با قرار دادن ($\sigma_x{}' = \sigma_y{}'$=0; $\tau_{xy}{}'$≠0) در روابط (۲-۳۶) برای صفحه ی بدون گشودگی، تنش ها به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_x^\infty = 2\tau_{xy}{}'sin\theta cos\theta$$

$$\sigma_y^\infty = -2\tau_{xy}{}'sin\theta cos\theta \tag{۳۷-۲}$$

$$\tau_{xy}^\infty = \tau_{xy}{}'(cos^2\theta - sin^2\theta)$$

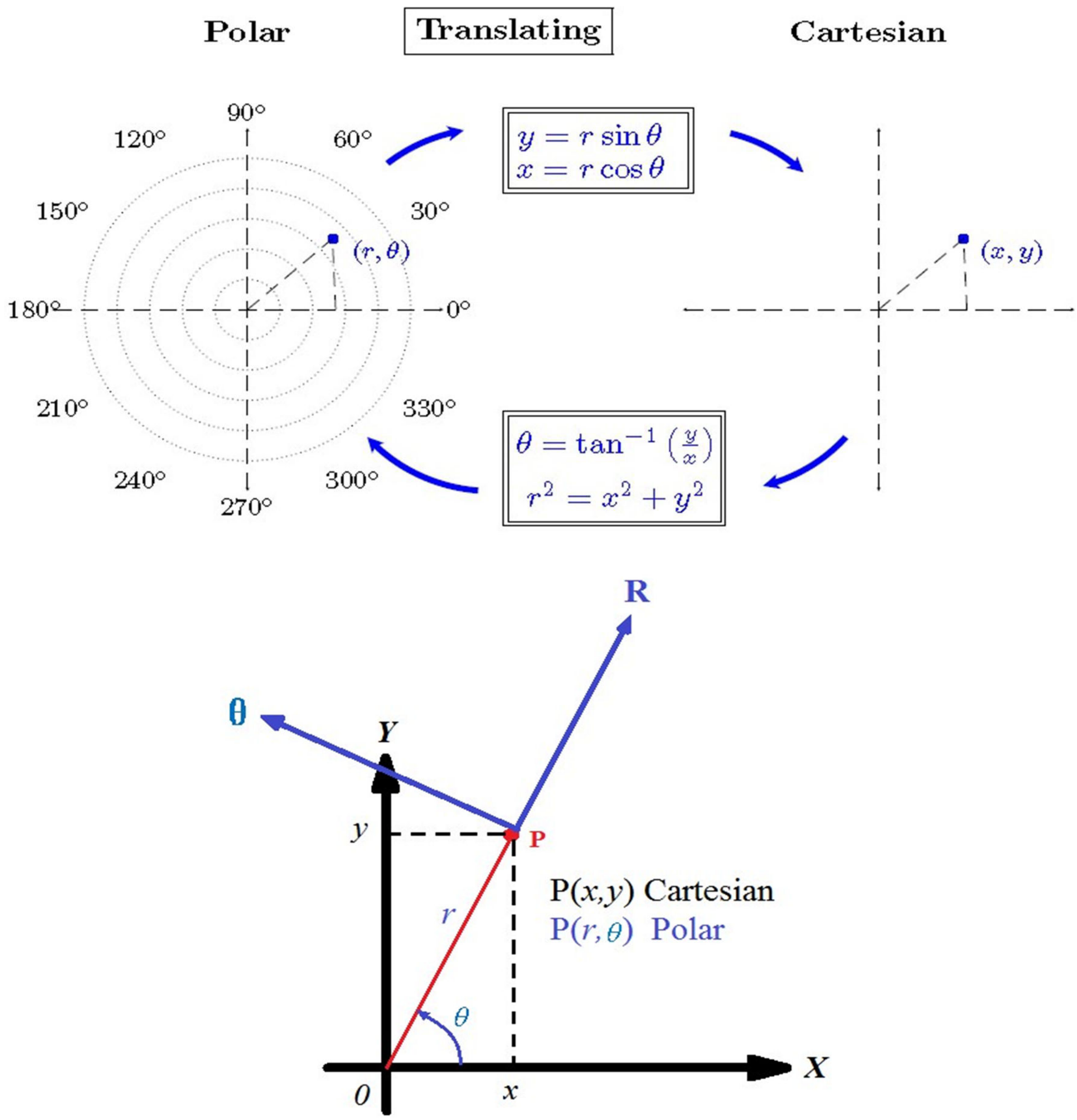
با ترکیب روابط معادلات (۲-۳۵)، (۲-۳۷)، تنش‌ها در یک صفحه‌ی بی نهایت حاوی گشودگی تحت تنش برشی با استفاده از روابط زیر بدست می آید:

$$\sigma_x^{\infty} = 2\tau_{xy}' sin\theta cos\theta + 2Re\,[\mu_1{}^2 \emptyset_0{}'(Z_1) + \mu_2{}^2 \psi_0{}'(Z_1)]$$

$$\sigma_y^{\infty} = -2\tau_{xy}' sin\theta cos\theta + 2Re\,[\emptyset_0{}'(Z_1) + \psi_0{}'(Z_1)] \qquad (۳۸-۲)$$

$$\tau_{xy}^{\infty} = \tau_{xy}'(cos^2\theta - sin^2\theta) - 2Re\,[\mu_1 \emptyset_0{}'(Z_1) + \mu_2 \psi_0{}'(Z_1)]$$

$\emptyset_0{}'(Z_1)$ و $\psi_0{}'(Z_1)$ به ترتیب مشتق توابع $\emptyset_0(Z_1)$ و $\psi_0(Z_1)$ نسبت به Z_1 و Z_2 می باشد که بعدا تعریف می شوند .با انتقال دستگاه مختصات کـارتزین بـه مختصـات قطبـی، شـکل (۲-۴) مـی تـوان تنش های σ_r، σ_θ و $\tau_{r\theta}$ را بدست آورد.



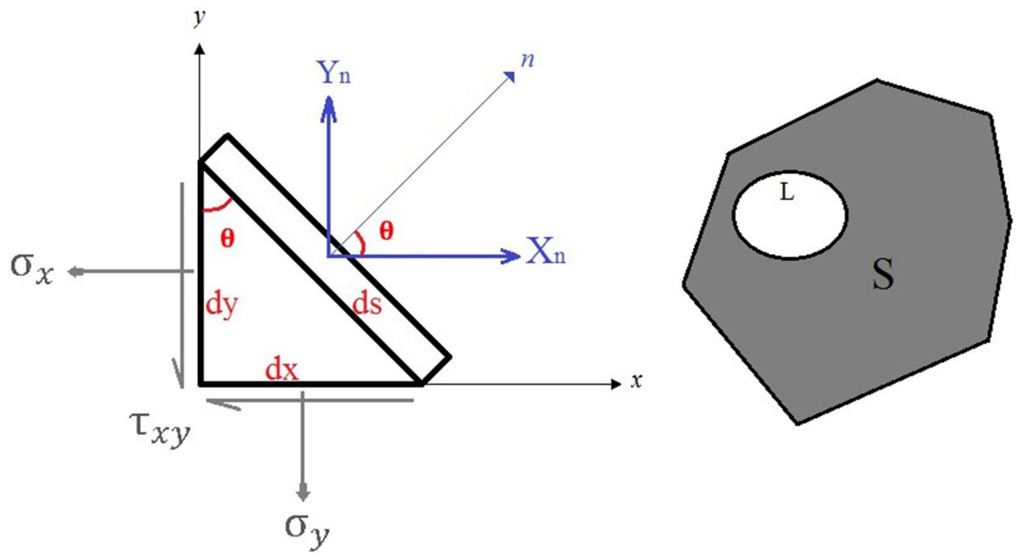
شکل۲-۴ انتقال بین مختصات کارتزین (x,y) و مختصات قطبی (r,θ) و بالعکس

و برای این انتقال از ماتریس دوران زیر استفاده می شود تا تنش ها بدست آید:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2-n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۳۹-۲}$$

در رابطه‌ی (۲-۳۹)، n و m به ترتیب $sin\theta$ و $cos\theta$ می‌باشند و θ زاویه بین محور x ها و محور منحنی الخط r می‌باشد (جهت r جهت عمود بر سطح گشودگی است). برای حالتی که بردار تنش X_n و Y_n بر روی کانتور L از ناحیه S داده شده است (شکل (۲-۵)) شرایط مرزی بصورت زیر برقرار می باشد.

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n,x) + \tau_{xy}\cos(n,y) \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n,x) + \sigma_y\cos(n,y) \end{aligned} \tag{۴۰-۲}$$



شکل ۲-۵ کانتور L در ناحیه S

با توجه به شکل (۲-۵) روابط زیر برقرار است.

$$\cos(n,y) = \frac{dx}{ds}$$
$$\cos(n,x) = -\frac{dy}{ds} \qquad (۴۱\text{-}۲)$$

با جایگذاری روابط (۲-۱۶) و (۲-۴۱) در معادلات (۲-۴۰) و بدون در نظر گـرفتن نیروهـای حجمـی داریم:

$$X_n = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$
$$Y_n = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \qquad (۴۲\text{-}۲)$$

با گرفتن انتگرال از دو طرف معادله‌ی (۲-۴۲):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^s X_N\, ds + C_2$$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\int_0^s Y_N\, ds + C_1 \qquad (۴۳\text{-}۲)$$

C_1 و C_2 ثابت های حقیقی دلخواه هستند و با توجه به تعریف تابع تنش F در رابطه (۲-۲۹) داریم:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_1}}{\partial \overline{Z_1}}\frac{\partial \overline{Z_1}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{F_2}}{\partial \overline{Z_2}}\frac{\partial \overline{Z_2}}{\partial x}] = -\int_0^s Y_N\, ds + C_1 = f_1^0$$

$$(۴۴\text{-}۲)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial \overline{F_1}}{\partial \overline{Z_1}}\frac{\partial \overline{Z_1}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{F_2}}{\partial \overline{Z_2}}\frac{\partial \overline{Z_2}}{\partial y}] = \int_0^s X_N\, ds + C_1 = f_2^0$$

و با استفاده از تعریف روابط (۲-۳۰)، (۲-۳۱) و (۲-۳۲) و جایگذاری در معادله ی (۲-۴۴):

$$[\emptyset_0(Z_1) + \psi_0(Z_2) + \overline{\emptyset_0(Z_1)} + \overline{\psi_0(Z_2)}] = -\int_0^s Y_N\, ds + C_1 = f_1^0$$

$$\mu_1\emptyset_0(Z_1) + \mu_2\psi_0(Z_2) + \overline{\mu_1\emptyset_0(Z_1)} + \overline{\mu_2\psi_0(Z_2)} = \int_0^s X_N\, ds + C_1 = f_2^0 \qquad (۲-۴۵)$$

و در نتیجه:

$$2Re\,[\emptyset_0(Z_1) + \psi_0(Z_2)] = -\int_0^s Y_N\, ds + C_1 = f_1^0$$

$$2Re\,[\mu_1\emptyset_0(Z_1) + \mu_2\psi_0(Z_2)] = -\int_0^s X_N\, ds + C_1 = f_2^0 \qquad (۲-۴۶)$$

با کمک گرفتن از رابطه شوارتز[۱] که به صورت زیر است:

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int U(\theta)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0 \qquad (۲-۴۷)$$

در این انتگرال $U(\theta)$ قسمت حقیقی تابع $F(\xi)$ روی دایره ای به شعاع واحد (γ) مـی‌باشـد و α_0 یـک ثابت حقیقی است. با ضرب هر دو طرف معادلـه (۲-۴۶) در $\frac{1}{2\pi i}\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}$ و گـرفتن انتگـرال روی دایـره واحد و استفاده از قضیه شوارتز می‌توان نوشت:

$$\emptyset_0(\xi) + \psi_0(\xi) = \frac{1}{4\pi i}\int f_1^0(\theta)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0$$

$$\mu_1\emptyset_0(Z_1) + \mu_2\psi_0(Z_2) = \frac{1}{4\pi i}\int f_2^0(\theta)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0 \qquad (۲-۴۸)$$

با مرتب کردن معادلات بالا توابع تحلیلی زیر حاصل می شود:

$$\emptyset_0(\xi) = \frac{i}{4\pi(\mu_1-\mu_2)}\int (\mu_2 f_1^0 - f_2^0)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} \qquad (۲-۴۹)$$

---

[۱] Shwartz

$$\psi_0(\xi) = \frac{-i}{4\pi(\mu_1 - \mu_2)} \int (\mu_1 f_1^0 - f_2^0) \frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi} \frac{d\sigma}{\sigma} \qquad (۲-۵۰)$$

انتگرالهای فوق روی دایره مبنا (دایره ای به شعاع واحد) محاسبه می شوند .توابـع $\psi_0(Z_2)$ و $\emptyset_0(Z_1)$ لزوماً بصورتی که در بالا ارائه شده نمی باشند بلکه روش های دیگری هم برای تعریف این توابع وجـود دارد .باتوجه به اینکه در مرز گشودگی $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ است و مطابق با مرجع [۷] توابع شرایط مـرزی f_1^0 و f_2^0 بصورت زیر تعریف می شوند:

$$f_1^0 = -2Re[B^* Z_1 + (B'^* + iC'^*)Z_2] \qquad (۲-۵۱)$$

$$f_2^0 = -2Re[B^* Z_1 \mu_1 + (B'^* + iC'^*)Z_2 \mu_2] \qquad (۲-۵۲)$$

در این رابطه:

$$B^* = P\, \frac{cos^2\alpha + \left({\alpha_2}^2 + {\beta_2}^2\right)sin^2\alpha + sin^2 sin2\alpha}{2\left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \left({\beta_2}^2 - {\beta_1}^2\right)\right]} \qquad (۲-۵۳)$$

$$B'^* = P\, \frac{\left[\left({\alpha_1}^2 - {\beta_1}^2\right) - 2\alpha_1\alpha_2\right]sin^2\alpha - cos^2\alpha - \alpha_2 sin2\alpha}{2\left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \left({\beta_2}^2 - {\beta_1}^2\right)\right]} \qquad (۲-۵۴)$$

$$\begin{aligned} C'^* &= \frac{P}{2\beta_2\left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \left({\beta_2}^2 - {\beta_1}^2\right)\right]} \times \\ &(\alpha_1 - \alpha_2)cos^2\alpha + \left[\alpha_2\left({\alpha_1}^2 - {\beta_1}^2\right) - \alpha_1\left({\alpha_2}^2 - {\beta_2}^2\right)\right]sin^2\alpha \\ &+ \left[\left({\alpha_1}^2 - {\beta_1}^2\right) - \left({\alpha_2}^2 - {\beta_2}^2\right)\right]sin\alpha cos\alpha \end{aligned} \qquad (۲-۵۵)$$

Z_i توسط انتقال ساده زیر بدست می آید:

$$Z_i = x + s_i y \quad \text{i=1,2} \qquad (۲-۵۶)$$

با استفاده از تعریف x و y در معادله (۲-۲) معادله (۲-۵۶) به صورت زیر خواهد شد:

$$Z_i = \lambda[r(cos\theta + wcosn\theta) - \mu_i(csin\theta - wsinn\theta)] \quad (۵۷-۲)$$

Z_i بر حسب ξ با استفاده از معادلات (۲-۳) و (۲-۵۷) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Z_1 = \frac{\lambda}{2}\left[a_1\xi + \frac{b_1}{\xi} + wc_1\xi^n + \frac{wd_1}{\xi^n}\right] \quad (۵۸-۲)$$

که با فرض r=1،

$$a_1=1+i\mu_1 c \qquad c_1=1-i\mu_1$$
$$b_1=1-i\mu_1 c \qquad d_1=1+i\mu_1 \quad (۵۹-۲)$$

به طور مشابه خواهیم داشت:

$$Z_2 = x + \mu_2 y$$
$$Z_2 = \frac{\lambda}{2}\left[a_1\xi + \frac{b_2}{\xi} + wc_2\xi^n + \frac{wd_2}{\xi^n}\right] \quad (۶۰-۲)$$

$$a_2=1+i\mu_2 c \qquad c_2=1-i\mu_2$$
$$b_2=1-i\mu_2 c \qquad d_2=1+i\mu_2 \quad (۶۱-۲)$$

با جایگذاری معادلات (۲-۵۸) و (۲-۶۰) در معادله (۲-۵۱) خواهیم داشت:

$$f_1^0 = -2Re\left[K_1\xi + \frac{K_2}{\xi} + K_3\xi^n + \frac{K_4}{\xi^n}\right] \quad (۶۲-۲)$$

داریم:

$$K_1 = \frac{\lambda}{2}[B^*a_1 + (B'^* + iC'^*)a_2]$$
$$K_2 = \frac{\lambda}{2}[B^*b_1 + (B'^* + iC'^*)b_2]$$
$$K_3 = \frac{\lambda}{2}[B^*c_1w + (B'^* + iC'^*)wc_2] \quad (۶۳-۲)$$
$$K_4 = \frac{\lambda}{2}[B^*wd_1 + (B'^* + iC'^*)wd_2]$$

به همین ترتیب:

$$f_2^0 = -2Re\left[K_5\xi + \frac{K_6}{\xi} + K_7\xi^n + \frac{K_8}{\xi^n}\right] \quad (۶۴-۲)$$

داریم:

$$K_5 = \frac{\lambda}{2}[\mu_1 B^* a_1 + (B'^* + iC'^*)a_2\mu_2]$$

$$K_6 = \frac{\lambda}{2}[\mu_1 B^* b_1 + (B'^* + iC'^*)b_2\mu_2]$$

$$K_7 = \frac{\lambda}{2}[\mu_1 B^* c_1 w + (B'^* + iC'^*)wc_{2\mu_2}]$$

$$K_8 = \frac{\lambda}{2}[\mu_1 B^* w d_1 + (B'^* + iC'^*)wd_2\mu_2] \quad (۶۵-۲)$$

برای حل معادلات (۲-۴۹) و (۲-۵۰) از رابطه شوارتز استفاده شد .رابطه دیگر شوارتز که از آن استفاده می شود انتگرال زیر است:

$$\frac{i}{4\pi(\mu_1 - \mu_2)}\int 2aRe\left(K_1\sigma^n + \frac{K_2}{\sigma^n}\right)\frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi}\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{-a}{\mu_1 - \mu_2}(K_1 + \bar{K}_2)\xi^n \quad (۶۶-۲)$$

با جایگذاری معادلات (۲-۶۲) و (۲-۶۴) در روابط (۲-۴۹) و (۲-۵۰) و استفاده از قضیه بالا:

$$\emptyset_0(\xi) = \frac{\xi}{\mu_1 - \mu_2}\left(\mu_2(K_1 + \bar{K}_2) - (K_5 + \bar{K}_6)\right) + \frac{\xi^n}{\mu_1 - \mu_2}(\mu_2(K_3 + \bar{K}_4) - (K_7 + \bar{K}_5)) \quad (۶۷-۲)$$

$$\psi_0(\xi) = \frac{\xi}{\mu_2 - \mu_1}\left(\mu_1(K_1 + \bar{K}_2) - (K_5 + \bar{K}_6)\right) + \frac{\xi^n}{\mu_2 - \mu_1}(\mu_1(K_3 + \bar{K}_4) - (K_7 + \bar{K}_5)) \quad (۶۸-۲)$$

در این رابطه $\bar{K}$ مزدوج K می‌باشد. باشد .حال آخرین مرحلـه ی محاسـبه $\emptyset_0'(\xi)$ و $\psi_0'(\xi)$ اسـت . برای به دست آوردن مشتق ها از تعریف مشتق بصورت زیر استفاده می شود:

$$\emptyset_0'(z_1) = \frac{d\emptyset_0(z_1)}{dz_1} = \frac{d\emptyset_0(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dz_1} = \frac{d\emptyset_0(\xi)}{d\xi}\frac{1}{dz_1/d\xi} \quad (۶۹-۲)$$

و به همین ترتیب برای محاسبه $\psi_0'(z_2)$ داریم:

$$\psi_0'(z_2) = \frac{d\psi_0(z_1)}{dz_2} = \frac{d\psi(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dz_2} = \frac{d\psi(\xi)}{d\xi}\frac{1}{dz_2/d\xi} \quad (۷۰-۲)$$

با توجه به معادلات (۲-۶۷) و (۲-۶۷) و به کمک روابط (۲-۶۹) و (۲-۷۰) خواهیم داشت:

$$\frac{dz_1}{d\xi} = \frac{\lambda}{2}\left[a_1 - \frac{b_1}{\xi^2} + wc_1 n\xi^{n-1} - \frac{wd_1 n}{\xi^{n+1}}\right] \tag{۲-۷۱}$$

$$\frac{dz_2}{d\xi} = \frac{\lambda}{2}\left[a_2 - \frac{b_2}{\xi^2} + wc_2 n\xi^{n-1} - \frac{wd_2 n}{\xi^{n+1}}\right] \tag{۲-۷۲}$$

$$\begin{aligned}\emptyset_0{}'(\xi) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}\left(\mu_2(K_1 + \bar{K}_2) - (K_5 + \bar{K}_6)\right) + \frac{n\xi^{n-1}}{\mu_1 - \mu_2}(\mu_2(K_3 + \bar{K}_4) \\ - (K_7 + \bar{K}_5))\end{aligned} \tag{۲-۷۳}$$

$$\begin{aligned}\psi_0{}'(\xi) = \frac{\xi 1}{\mu_2 - \mu_1}\left(\mu_1(K_1 + \bar{K}_2) - (K_5 + \bar{K}_6)\right) + \frac{n\xi^{n-1}}{\mu_2 - \mu_1}(\mu_1(K_3 + \bar{K}_4) \\ - (K_7 + \bar{K}_5))\end{aligned} \tag{۲-۷۴}$$

با یافتن $\emptyset_0{}'(\xi)$ و $\psi_0{}'(\xi)$ و قرار دادن آنها در روابطه (۲-۳۸) مقادیر تـنش اطـراف گشـودگی بطـور کامل از روش تحلیلی بدست می آید.

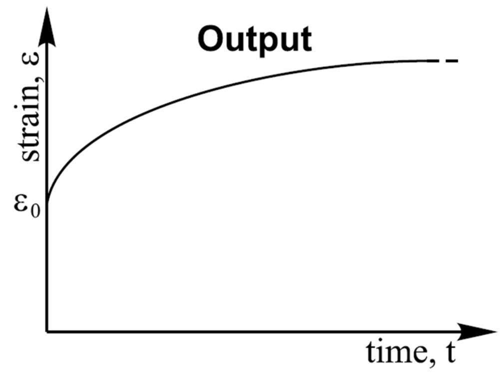
۲-۳-تئوری‌های ویسکوالاستیک

۲-۳-۱-مقدمه

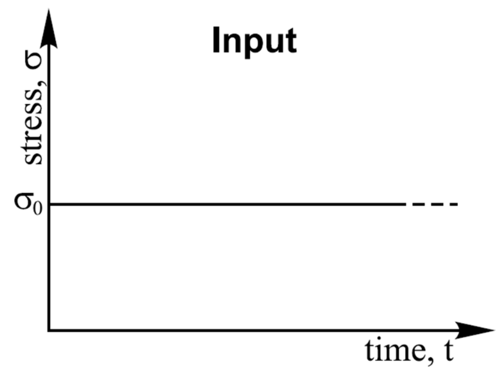
مواد ویسکوالاستیک اجسامی هستند که دارای خواص فی‌مابین خواص جامدات و سیالات می‌باشند به عبارت دیگر نه مانند جامدات آنقدر سخت می‌باشند که در مقابل نیروهای وارده شـکل خـود را حفـظ کنند و به طور الاستیک رفتار کنند و نه مانند سیالات جریان پیدا می‌کنند یعنی اینکه تا حـدی دارای مقاومت در برابر تغییر شکل می‌باشند. معادله مشخصه این اجسام تابعی از تـنش σ، کـرنش ε، درجـه حرارت T و زمان t که می‌توان آن را به صورت [۴-۷]:

$$F(\sigma, \varepsilon, T, t) = 0 \tag{۲-۷۵}$$

نوشت. تاثیر زمان در رفتار فیزیکی اجسام ویسکوالاستیک را می‌توان با تشـریح دو پدیـده بیـان کـرد. یکـی از ایـن دو پدیـده خـزش[1] نـام دارد و آن عبارتسـت از تغییـر شـکل و تغییـرات زمـانی مـاده ویسکوالاستیک که با ثابت نگهداشتن مقدار تنش در جسم ایجاد می‌شود. جسـمی را در نظـر بگیریـد که مطابق شکل زیر تحت تنش σ_0 قرار گرفته باشد اگر این جسم ویسکوالاستیک فرض شود با وجـود آنکه تنش ثابت باقی می‌ماند ولی کرنش جسم مطابق شکل زیر با گذشت زمان افزایش می‌یابد.



شکل۲-۶ نمودار تغییرات کرنش در
طول زمان بر اثر اعمال یک تنش ثابت
به جسم ویسکوالاستیک [۷]



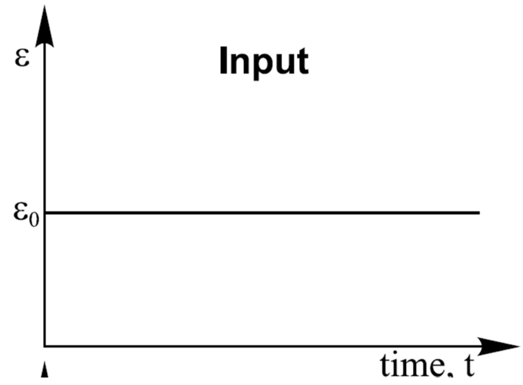
شکل ۲-۷ نمودار اعمال تنش ثابت
به یک جسم ویسکوالاستیک [۷]

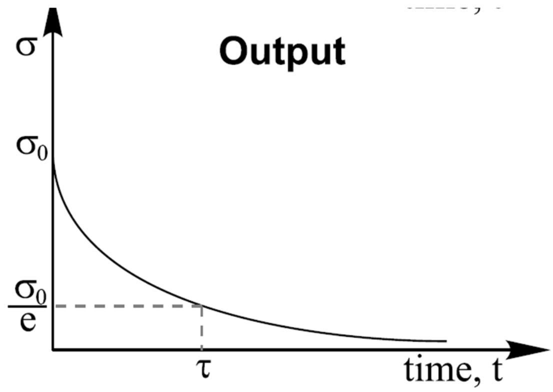
همانطور که در شکل فوق ملاحظه می‌شود در لحظه $t=0$ یک کرنش اولیه مثل ε_0 که می‌توان آن را مشابه کرنش الاستیک در جامدات فرض کرد در جسم ویسکوالاستیک ایجاده شده و به دنبال آن منحنی نمایش‌دهنده افزایش کرنش با زمان به ازای تنش ثابت قرار دارد که نمایشگر پدیده خزش است. پدیده دوم که می‌توان آنرا پدیده آسایش تنش[2] نامید، عبارت است از کاهش تنش که در یک جسم ویسکوالاستیک تحت اثر کرنش ثابت مطابق شکل زیر با گذشت زمان به وجود می‌آید.

---

۱ Creep

۱Stress Relaxtion



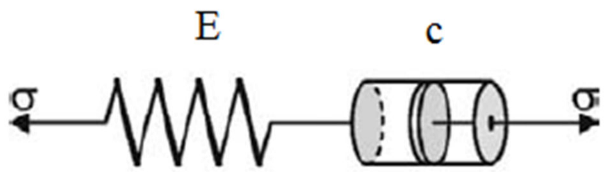


شکل ۲-۹ نمودار اعمال کرنش ثابت به یک جسم ویسکوالاستیک [۷]

شکل ۲-۸ نمودار تغییرات تنش در طول زمان بر اثر اعمال یک کرنش ثابت به جسم ویسکوالاستیک [۷]

معادله مشخصه اجسام ویسکوالاستیک برای مواد مختلف شکل‌های گوناگونی پیدا می‌کند بـرای بیـان این خواص مدل‌های مختلفی پیشنهاد شده است. در این مدل‌ها خاصیت الاستیک جسم به وسیله فنر و خاصیت سیلان جسم با یک میرا کننده مثل سیلندر و پیستون نمایش داده می‌شود.

۲-۳-۲-مدل ماکسول



شکل۲-۱۰نمونه شماتیک مدل ماکسول [۷]

این مدل شامل یک فنر و یک میراکننده است که مطابق شکل بـالا بـه طـور سـری بـا یکـدیگر قـرار گرفته‌اند. در صورتی‌که به این مدل یک بعدی تنش σ وارد شود در فنر که نمایشـگر عنصـر الاسـتیک است تغییر شکل یا کرنش ε_1 و در میراکننده که نمایشگر عنصر لزجی است تغییر شکل یا کـرنش ε_2

ایجاد می‌شود.

$$\sigma = E\varepsilon_1 \quad (۷۶-۲)$$

$$\sigma = c\dot{\varepsilon}_2 \quad (۷۷-۲)$$

که در آنها E ثابت الاستیک فنر و c ثابت لزجی میراکننده است. همچنین با توجه به اینکه در این مدل عناصر الاستیک و لزجی بطور سری با یکدیگر قرار دارند، روابط زیر برقرار است.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (۷۸-۲)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 \quad (۷۹-۲)$$

بنابراین با بکارگیری روابط ۲-۷۶ و ۲-۷۷، رابطه ۲-۸۰ به صورت:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{c} \quad (۸۰-۲)$$

نوشته می‌شود. معادله ۲-۸۰، معادله مشخصه مدل ماکسول را بدست می‌دهد. جهت بررسی پدیده خزش برای این مدل چنانکه مدل در t=0 تحت اثر تنش ثابت $\sigma = \sigma_0$ قرار گیرد، با استفاده از رابطه ۲-۸۰ می‌توان نوشت:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{c} \quad (۸۱-۲)$$

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon = \frac{\sigma_0}{c}\int_0^t dt \quad (۸۲-۲)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{c}t \quad (۸۳-۲)$$

$\frac{\sigma_0}{E}$، کرنش در لحظه t=0 است، بنابراین به هنگامی که مدل تحت اثر تنش ثابت $\sigma = \sigma_0$ قرار گیرد تغییرات کرنش بر حسب زمان با استفاده از رابطه ۲-۸۳ به صورت:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{C}\left(t + \frac{C}{E}\right) \tag{۸۴-۲}$$

داده می‌شود. در مرحله بعد جهت بررسی پدیده آسایش تنش چنانچه در لحظه $t=t_1$ مدل تحت تاثیر اثر کرنش ثابت

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_0}{C}\left(t_1 + \frac{C}{E}\right) \tag{۸۵-۲}$$

قرار گیرد با استفاده از معادله مشخصه ۲-۸۰ رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{c} = 0 \tag{۸۶-۲}$$

با انتگرال گیری از این رابطه می‌توان نوشت:

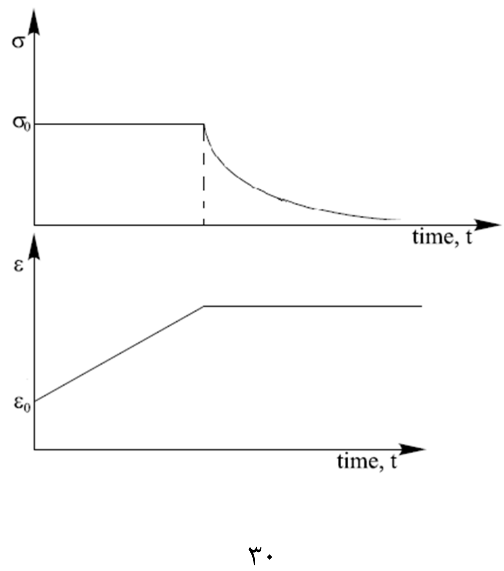
$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{\mathrm{E}}{c}\int_{t_1}^{t} dt \tag{۸۷-۲}$$

بنابراین تغییرات تنش بر حسب زمان در مرحله پدیده آسایش تنش برای مدل ماکسول به صورت:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E}{C}(t-t_1)} \tag{۸۸-۲}$$

نوشته می‌شود.

با بکارگیری روابط ۲-۸۴ و ۲-۸۸ نمایش هندسی پدیده خزش و آسایش تنش برای این مدل مطابق شکل‌های زیر می‌باشد.

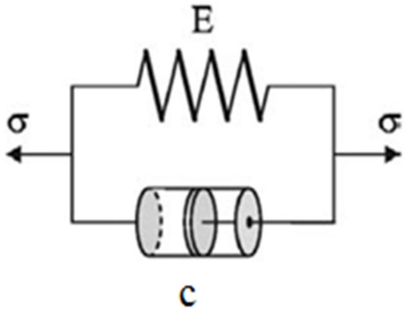


شکل ۲-۱۱ نمایش هندسی پدیده‌های خزش و آسایش تنش در مدل ماکسول [۷]

۲-۳-۳-مدل کلوین

این مدل شامل یک فنر و یک میراکننده است که مطابق شکل بطور موازی با یکدگیر قرار گرفته اند. در صورتیکه به این مدل یک بعدی تنش σ وارد شود در فنر تنش σ_s و در میراکننده تنش σ_d ایجاد می‌شود.

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_d = E\varepsilon + C\dot{\varepsilon} \tag{۲-۸۹}$$



شکل ۲-۱۲ نمونه شماتیک مدل کلوین [۷]

معادله ۲-۸۹، معادله مشخصه مدل کلوین را بدست می‌دهد. جهت بررسی پدیده خزش برای این مدل چنانچه مدل در لحظه t=0 تحت اثر تنش ثابت $\sigma = \sigma_0$ قرار گیرد با استفاده از رابطه ۲-۸۹، رابطه زیر برقرار است.

$$dt = \frac{Cd\varepsilon}{\sigma_0 E\varepsilon} \tag{۲-۹۰}$$

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{\frac{\sigma_0}{E} - \varepsilon} dt = \frac{E}{C} \int_0^t dt \tag{۹۱-۲}$$

در نتیجه با انتگرال‌گیری می‌توان به رابطه زیر دست پیدا نمود.

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{C}t}\right) \tag{۹۲-۲}$$

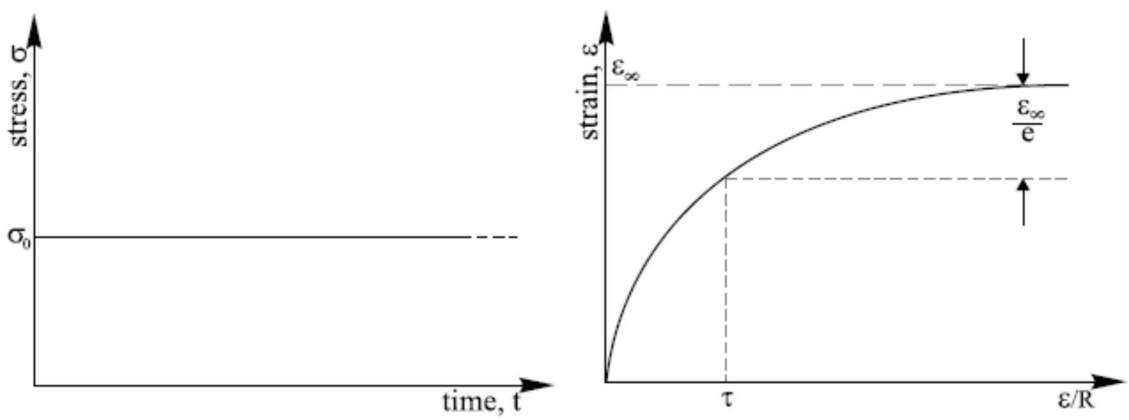
بنابراین هنگامی که مدل تحت اثر تنش ثابت $\sigma = \sigma_0$ قرار گیرد تغییرات کرنش بـر حسـب زمـان بـه وسیله رابطه ۲-۹۳ دادده می‌شود. در مرحله بعد جهت بررسی پیده آسـایش تـنش چنانچـه در لحظـه $t = t_1$ مدل تحت اثر کرنش ثابت

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{C}t_1}\right) \tag{۹۳-۲}$$

قرار گیرد با استفاده از معادله ۲-۹۰ می‌توان نوشت:

$$\sigma = E\varepsilon^* \tag{۹۴-۲}$$

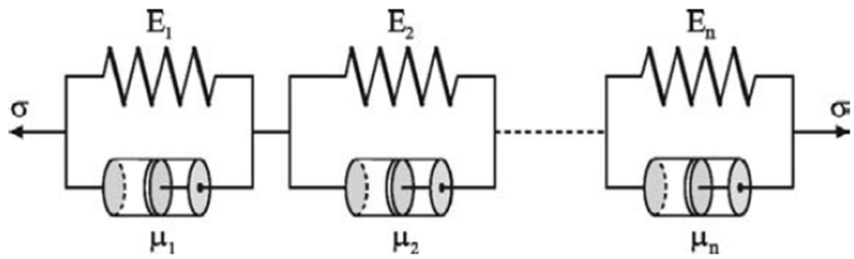
بنابراین تغییرات تنش بر حسب زمان در مرحله پدیده آسایش تنش برای مدل کلوین به وسیله رابطـه ۲-۹۴ داده می‌شود با بکارگیری روابط ۲-۹۳ و ۲-۹۴ نمایش هندسی پیده‌هـای خـزش و آسـایش در این مدل مطابق شکل‌های زیر می‌باشند.



شکل ۲-۱۳ نمایش هندسی پدیده‌های خزش و آسایش تنش در مدل کلوین [۷]

۲-۳-۴-مدل‌های تعمیم یافته کلوین و ماکسول

مدل تعمیم یافته تشکیل شده از مجموعه‌ای از واحدهای کلوین که مطابق شکل زیر به طور سری با یکدیگر قرار گرفته اند. در نتیجه کرنش در این مدل تعمیم یافته برابر با مجموع کرنش‌های عر یک از واحدهای کلوین می‌باشد.



شکل ۲-۱۴ نمایش مدل تعمیم یافته کلوبن و ماکسول که در آن
واحدهای کلوین به صورت سری با یکدیگر قرار گرفته‌اند [۷].

با توجه به اینکه برای مدل کلوین واحد معادله مشخصه به صورت:

$$\sigma = E\varepsilon + C\dot{\varepsilon} = (E + C\frac{\partial}{\partial t})\varepsilon \qquad (۲\text{-}۹۵)$$

است.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{(E + C\frac{\partial}{\partial t})} \qquad (۲\text{-}۹۶)$$

بنابراین کرنش در مدل تعمیم یافته کلوین به صورت:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{(E_1 + C_1\frac{\partial}{\partial t})} + \frac{\sigma}{(E_2 + C_2\frac{\partial}{\partial t})} + \cdots + \frac{\sigma}{(E_N + C_N\frac{\partial}{\partial t})} \qquad (۲\text{-}۹۷)$$

نوشته می‌شود. به طریق مشابه مجموعه‌ای از واحدهای ماکسول که مطابق شکل زیر به طور موازی بـا یکدیگر قرار گرفته‌اند مدل تعمیم یافته ماکسول را تشـکیل مـی‌دهنـد. بنـابراین تـنش در ایـن مـدل تعمیم یافته برابر با مجموع تنش‌های هر یک از واحدهای ماکسول می‌باشد.

با توجه به اینکه برای مدل ماکسول واحد معادله مشخصه به صورت:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{C} = (\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{C})\sigma \qquad (۲-۹۸)$$

است.

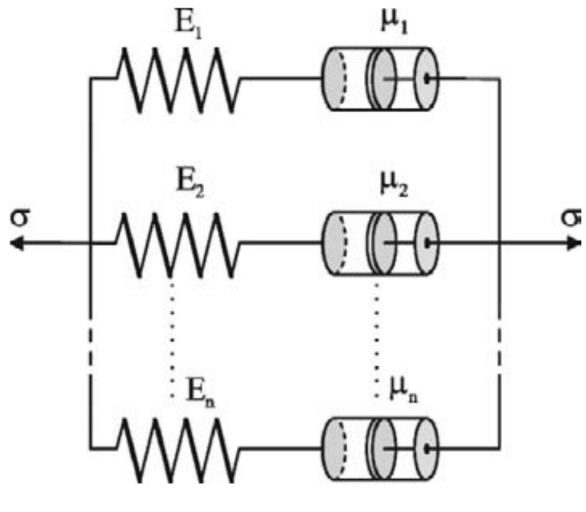
همچنین می‌توان نوشت:

$$\sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{C}} \qquad (۲-۹۹)$$

بنابراین تنش در مدل تعمیم یافته ماکسول یه صورت:

$$\sigma = \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{E_1}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{C_1}} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{E_2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{C_2}} + \cdots + \frac{\dot{\varepsilon}}{\frac{1}{E_N}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{C_N}} \qquad (۲-۱۰۰)$$

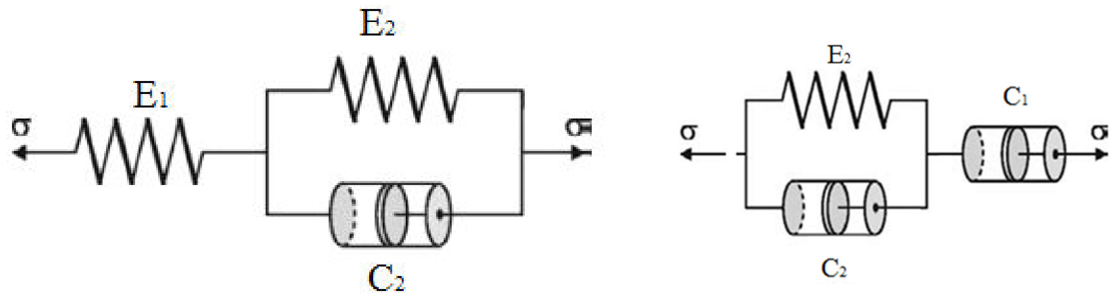
نوشته می‌شود.



شکل ۲-۱۵ نمایش مدل تعمیم یافته کلوین و ماکسول که در آن واحدهای ماکسول به صورت موازی با یکدیگر قرار گرفته‌اند.

۲-۳-۵-مدل‌های مختلط

خصوصیات مدل ماکسول به خواص سیالات و خوصوصیات مدل کلوین بـه خـواص جامـدات شـباهت دارد. مدل‌های ساده کلوین و ماکسول در کل جهت ارائه رفتار واقعـی مـواد کـافی نیسـتند. بـا اضـافه کردن عناصر الاستیک با عناصر میـرا بـه ایـن مـدل‌هـا مـی‌تـوان مـدل‌هـای مختلفـی بـرای اجسـام ویسکوالاستیک پیشنهاد نمود. از انواع مدل‌های مختلط می‌توان از مدل جامـد سـه پـارامتری مطـابق شکل زیر-الف، و مدل ویسکوز سه پارامتری مطابق شکل زیر-ب نام برد.



(الف) (ب)

شکل ۲-۱۶مدل سه پارامتری، الف) سه پارامتری جامد. ب) سه پارامتری ویسکوز[۷]

جهت تعیین معادله مشخصه برای مدل جامد سـه پـارامتری بـا اسـتفاده از رابطـه ۲-۹۷ بـرای N=2 می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{(E_1 + C_1 \frac{\partial}{\partial t})} + \frac{\sigma}{(E_2 + C_2 \frac{\partial}{\partial t})} \quad (۲-۱۰۱)$$

در نتیجه با جانشین کردن $E_1 = E_1^*$، $C_1 = 0$، $C_2 = C_2^*$، $E_2 = E_2^*$ در رابطه ۲-۱۰۱، رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{(E_1^*)} + \frac{\sigma}{(E_2^* + C_2^* \frac{\partial}{\partial t})} \tag{۱۰۲-۲}$$

رابطه ۲-۱۰۲ بعد از تاثیر عملگر $\frac{\partial}{\partial t}$ بر روی جملات مربوط و ساده‌سازی به صورت:

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \tag{۱۰۳-۲}$$

نوشته می‌شود که در آن:

$$p_0 = E_1^* + E_2^*, \qquad p_1 = C_2^*, \qquad q_1 = E_1^* E_2^*, \qquad q_2 = C_2^* E_1^* \tag{۱۰۴-۲}$$

است. چنانچه این مدل در لحظه t=0 تحت تاثیر تنش ثابت $\sigma = \sigma_0 U(t)$ قرار گیرد که در آن U(t) تابع پله‌ای واحد است می‌توان نوشت:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0}{S} \tag{۱۰۵-۲}$$

که در آن $\bar{\sigma}$ تبدیل لاپلاس σ می‌باشد. همچنین تبدیل لاپلاس معادله ۲-۱۰۳ به صورت:

$$p_0\bar{\sigma} + p_1(S\bar{\sigma} - \sigma(0)) = q_0\bar{\varepsilon} + q_1(S\bar{\varepsilon} - \dot{} \varepsilon(0)) \tag{۱۰۶-۲}$$

نوشته می‌شود. با جانشین کردن $\bar{\sigma}$ از رابطه ۲-۱۰۶ و $\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_1^*}$ در رابطه ۲-۱۰۶ رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{\sigma_0(p_0 + p_1 S)}{S(q_0 + q_1 S)} = \frac{\sigma_0}{q_1}\left[\frac{p_0}{S(S+\lambda)} + \frac{p_1}{(S+\lambda)}\right] \\ &= \frac{\sigma_0}{q_1}\left[\frac{p_0}{\lambda}\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{(S+\lambda)}\right) + \frac{p_1}{(S+\lambda)}\right] \end{aligned} \tag{۱۰۷-۲}$$

که در آن $\lambda = \frac{q_0}{q_1}$ است. تبدیل لاپلاس رابطه ۲-۱۰۷ عبارت است از:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 p_0}{q_0}(1 - e^{-\lambda t} + \frac{p_1 q_0}{q_1 p_0} e^{-\lambda t}) \tag{۱۰۸-۲}$$

بنابراین به هنگامی که مدل جامد سه پارامتری تحت تاثیر تنش ثابت $\sigma = \sigma_0 U(t)$ قرار می‌گیرد. تغییرات کرنش بر حسب زمان که نمایشگر پدیده خزش می‌باشد به وسیله رابطه ۲-۱۰۸ داده می‌شود. در مرحله بعد جهت بررسی پدیده آسایش تنش چنانچه در لحظه $t=t_1$ مدل تحت اثر کرنش ثابت:

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_0 p_0}{q_0}(1 - e^{-\lambda t_1} + \frac{p_1 q_0}{q_1 p_0} e^{-\lambda t_1}) \tag{۲-۱۰۹}$$

قرار گیرد می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \varepsilon^* U(t - t_1) = \varepsilon^* U(\tau) \tag{۲-۱۱۰}$$

که در آن $\tau = t - t_1$ و $U(\tau)$ تابع پله‌ای واحد است، با بازنویسی رابطه ۲-۱۰۶ به صورت:

$$p_0\bar{\sigma} + p_1(S\bar{\sigma} - \sigma(t_1)) = q_0\bar{\varepsilon} + q_1 q_1(S\bar{\varepsilon} - \varepsilon(t_1))$$

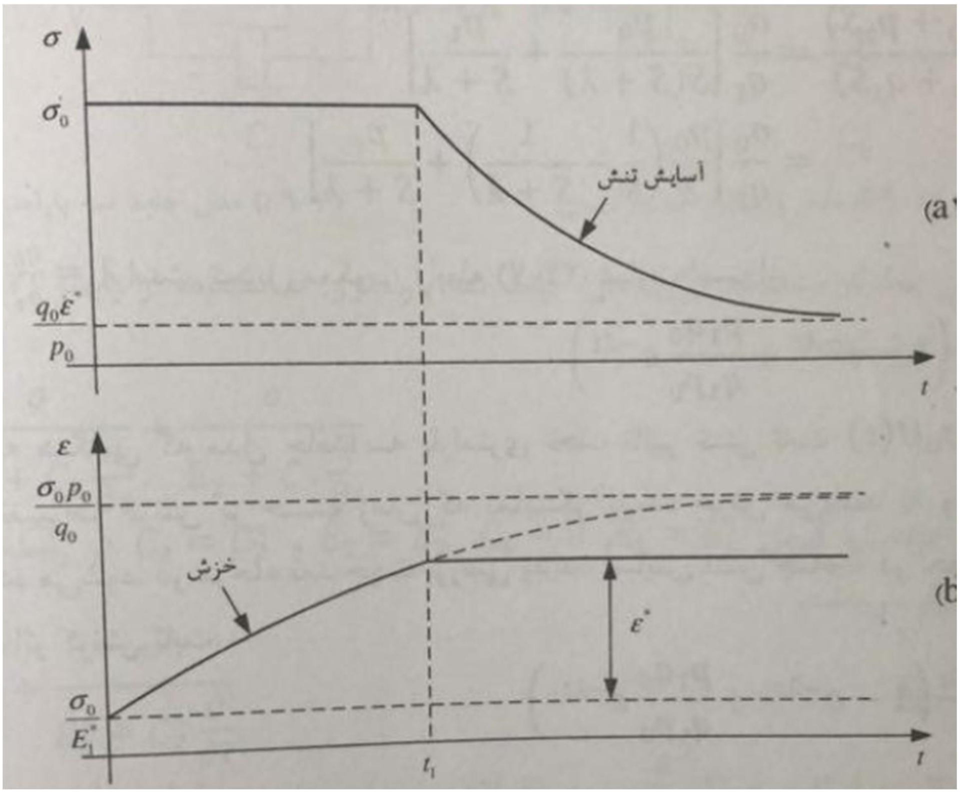
و جانشین کردن $\sigma(t_1) = \sigma_0$، $\varepsilon(t_1) = \varepsilon^*$ و $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^*}{S}$ در آن، رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \frac{q_0\varepsilon^* + p_1\sigma_0 S}{S(p_0 + p_1 S)} = \frac{q_0\varepsilon^*}{p_1 S(S + \lambda^*)} + \frac{\sigma_0}{(S + \lambda^*)} \\ &= \frac{q_0\varepsilon^*}{p_0}(\frac{1}{S} - \frac{1}{(S + \lambda^*)}) + \frac{\sigma_0}{(S + \lambda^*)}\end{aligned} \tag{۲-۱۱۱}$$

که در آن $\lambda^* = \frac{p_0}{p_1}$ است. تبدیل معکوس رابطه ۲-۱۱۰ به صورت :

$$\sigma = \frac{q_0\varepsilon^*}{p_0}(1 - e^{-\lambda^*(t-t_1)}) + \sigma_0 e^{-\lambda^*(t-t_1)} \tag{۲-۱۱۲}$$

نوشته می‌شود. با بکارگیری روابط ۲-۱۰۸ و ۲-۱۱۲ نمایش هندسی پدیده‌های خزش و آسایش تنش برای این مدل مطابق شکل زیر می‌باشند.



شکل ۲-۱۷ نماش هندسی پدیده‌های خزش و آسایش تنش

جهت تعیین معادله مشخصه برای مدل ویسکوز سه پارامتری با استفاده از رابطـه ۲-۱۰۱ بـا جانشـین کردن $E_1 = 0$، $C_1 = C_1^*$، $C_2 = C_2^*$، $E_2 = E_2^*$ می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{C_1^* \frac{\partial}{\partial t}} + \frac{\sigma}{(E_2^* + C_2^* \frac{\partial}{\partial t})} \tag{۱۱۳-۲}$$

رابطه ۲-۱۱۳ بعد از تاثیر عملگر $\frac{\partial}{\partial t}$ بر روی جملات مربوط و ساده‌سازی به صورت:

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_1\dot{\varepsilon} + q_2\ddot{\varepsilon} \tag{۱۱۴-۲}$$

نوشته می‌شود که در آن:

$$p_0 = E_2^*, \qquad p_1 = C_1^* + C_2^*, \qquad q_1 = C_1^* E_2^*, \qquad q_2 = C_2^* C_1^* \tag{۱۱۵-۲}$$

است.

۲-۴-ویسکوالاستیسیته سه بعدی

در تئوری ویسکوزیته سه بعدی متداول است که رفتار جسم ویسکوالاستیک را تحت شرایط برش و انبساط خالص مورد بررسی قرار می‌دهند. بدین منظور تانسورهای تنش و کرنش بر حسب مولفه‌های انحرافی و هیدرواستاتیک به صورت:

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} \tag{۲-۱۱۶}$$

نوشته می‌شوند. همچنین در تئوری الاستیسیته سه بعدی مولفه‌های تانسور تنش بر حسب مولفه‌های تانسور کرنش عبارتند از:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{۲-۱۱۷}$$

$$\lambda = k - \frac{2}{3}\mu \tag{۲-۱۱۸}$$

که در آن $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ مدول بالک است. با جانشین کردن روابط ۲-۱۱۷ و رابطه ۲-۱۱۸ رابطه زیر برقرار است.

$$\sigma'_{ij} + \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon'_{ij} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}) \tag{۲-۱۱۹}$$

بنابراین:

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\varepsilon'_{ij} \quad , \quad \sigma_{kk} = 3\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{۲-۱۲۰}$$

حال چنانچه معادله جسم ویسکوالاستیک به صورت کلی:

$$\left(p_0 + p_1\frac{\partial}{\partial t} + p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\sigma = \left(q_0 + q_1\frac{\partial}{\partial t} + q_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varepsilon \tag{۲-۱۲۱}$$

باشد، با تعویض σ و ε در رابطه ۲-۱۲۱ با σ'_{ij} و $2\varepsilon'_{ij}$ می‌توان نوشت:

$$\left(p_0 + p_1\frac{\partial}{\partial t} + p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)\sigma'_{ij} = 2\left(q_0 + q_1\frac{\partial}{\partial t} + q_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varepsilon'_{ij} \tag{۲-۱۲۲}$$

اما:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - k\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{۱۲۳-۲}$$

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} \tag{۱۲۴-۲}$$

در نتیجه رابطه ۲-۱۲۲ به صورت

$$\begin{aligned}\left(p_0 + p_1\frac{\partial}{\partial t} + p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \cdots\right)(\sigma_{ij} - k\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) \\ = 2\left(q_0 + q_1\frac{\partial}{\partial t} + q_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij})\end{aligned} \tag{۱۲۵-۲}$$

نوشته می‌شود. با استفاده از رابطه ۲-۱۲۵ می‌توان مولفه‌های تانسور تـنش را بـه مولفـه‌هـای تانسـور کرنش و ویسکوالاستیسیته سه بعدی مرتبط کرد. به عنوان مثال چنانچه جسم ویسکوالاستیک از نـوع مدل جامد سه پارامتری باشد. با استفاده از رابطه ۲-۱۲۳، رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} \tag{۱۲۶-۲}$$

که در آن:

$$p_0 = E_1^* + E_2^*, \qquad p_1 = C_2^*, \qquad q_1 = E_1^*E_2^*, \qquad q_1 = C_2^*E_1^* \tag{۱۲۷-۲}$$

است. در نتیجه با بکارگیری رابطه ۲-۱۲۶ می‌توان نوشت:

$$\left(p_0 + p_1\frac{\partial}{\partial t}\right)(\sigma_{ij} - k\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) = 2\left(q_0 + q_1\frac{\partial}{\partial t}\right)(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}) \tag{۱۲۸-۲}$$

و یا:

$$\begin{aligned}p_0\sigma_{ij} + p_1\dot{\sigma}_{ij} = 2(q_0\varepsilon_{ij} + q_1\dot{\varepsilon}_{ij}) + \left(p_0\mathrm{k} - \frac{2}{3}q_0\right)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + (p_1\mathrm{k} \\ - \frac{2}{3}q_1)\dot{\varepsilon_{kk}}\delta_{ij}\end{aligned} \tag{۱۲۹-۲}$$

همچنین می‌توان از مقایسه تبدیل لاپلاس رابطه مربوط بـه جسـم ویسکوالاسـتیک و تبـدیل لاپـلاس رابطه نظیرش در الاستیسیته نیز به نتیجه رسید. به عنـوان مثـال تبـدیل لاپـلاس رابطـه ۲-۱۲۶ بـه صورت:

$$(p_0 + p_1S)L\sigma = (q_0 + q_1S)L\varepsilon \tag{۱۳۰-۲}$$

و یا:

$$L\sigma = \frac{(q_0\varepsilon + q_1S)}{(p_0\sigma + p_1S)}L\varepsilon \tag{۱۳۱-۲}$$

است. همچنین تبدیل لاپلاس رابطه:

$$L\sigma = \frac{(q_0\varepsilon + q_1S)}{(p_0\sigma + p_1S)}L\varepsilon \tag{۱۳۲-۲}$$

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\varepsilon'_{ij} \tag{۱۳۳-۲}$$

نیز به صورت:

$$L\sigma'_{ij} = 2\mu L\varepsilon'_{ij} \tag{۱۳۴-۲}$$

نوشته می‌شود. از مقایسه روابط ۲-۱۳۰ و ۲-۱۳۲ می‌توان نتیجه‌گیری کرد که چنانچـه در رابطـه ۲-۱۳۲ ضریب μ با ضریب $\frac{(q_0\varepsilon+q_1S)}{(p_0\sigma+p_1S)}$ تعویض شود روابطی که مولفه‌های تانسور تنش را بـه مولفـه‌هـای تانسور کرنش مربوط می‌کنند برای جسم ویسکولاستیک تعیین می‌گردند.

$$L\sigma'_{ij} = \frac{(q_0\varepsilon + q_1S)}{(p_0\sigma + p_1S)}L\varepsilon'_{ij} \tag{۱۳۵-۲}$$

و یا:

$$(p_0 + p_1S)L\sigma'_{ij} = 2(q_0 + q_1S)L\varepsilon'_{ij} \tag{۱۳۶-۲}$$

تبدیل معکوس رابطه ۲-۱۳۶ عبارتست از:

$$(p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t})\sigma'_{ij} = 2(q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t})\varepsilon'_{ij} \quad (۱۳۷-۲)$$

با بکارگیری روابط ۲-۱۲۵ و ۲-۱۲۶، رابطه ۲-۱۳۷ به صورت:

$$\left(p_0 + p_1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{ij} - k\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = 2(q_0 + q_1 \frac{\partial}{\partial t})\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} \quad (۱۳۸-۲)$$

نوشته می‌شود که همان نتیجه ایست که قبلاً به وسیله رابطه ۲-۱۲۹ داده شده است. با انتگرال‌های تابع خزش و تابع آسودگی تنش نیز در ویسکوالاستیسیته سه بعدی جهت مرتبط کردن مولفه‌های تانسور تنش و کرنش به کار گرفته می‌شوند. مولفه‌های انحرافی و هیدرواستاتیک کرنش به ترتیب به مولفه‌های انحرافی و هیدرواستاتیک تنش به وسیله انتگرال تابع خزش مربوط می‌شوند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\varepsilon'_{ij} = \int_0^t \varphi(t-\eta)\, d\sigma'_{ij}(\eta) \quad (۱۳۹-۲)$$

$$\varepsilon_{kk} = \int_0^t \varphi(t-\eta)\, d\sigma_{kk}(\eta) \quad (۱۴۰-۲)$$

که در آن $\varphi(t)$ تابع خزش می‌باشد. به هر طریق مشابه مولفه‌های تنش انحرافی و هیدرواستاتیک تنش به ترتیب به مولفه‌های انحرافی و هیدرواستاتیک کرنش به وسیله انتگرال تابع آسودگی تنش مربوط می‌شوند.

$$\sigma'_{ij} = \int_0^t \psi(t-\eta)\, d\varepsilon'_{ij}(\eta) \quad (۱۴۱-۲)$$

$$\sigma_{kk} = \int_0^t \psi(t-\eta)\, d\varepsilon_{kk}(\eta) \quad (۱۴۲-۲)$$

که در آن $\psi(t)$ تابع آسودگی تنش است. حال چنانچه از طرفین روابط ۲-۱۳۳ و ۲-۱۳۵ تبدیل لاپلاس گرفته شود می‌توان نوشت:

$$L\varepsilon'_{ij} = L\int_0^t \varphi(t-\eta)\, d\sigma'_{ij}(\eta) = L\int_0^t \varphi(t-\eta)\frac{d}{dt}\sigma'_{ij}(\eta)d\eta$$
$$= L\varphi(t)L\frac{d}{dt}\sigma'_{ij}(t) = SL\varphi(t)L\sigma'_{ij}(t) \quad (۱۴۳-۲)$$

و

$$L\sigma'_{ij} = L\int_0^t \psi(t-\eta)\, d\varepsilon'_{ij}(\eta) = L\int_0^t \psi(t-\eta)\frac{d}{dt}\varepsilon'_{ij}(\eta)d\eta$$
$$= L\psi(t)L\frac{d}{dt}\varepsilon'_{ij}(t) = SL\psi(t)L\varepsilon'_{ij}(t) \quad (۱۴۴-۲)$$

با ضرب رابطه ۲-۱۴۳ در رابطه ۲-۱۴۴، رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$L\varepsilon'_{ij}L\sigma'_{ij} = S^2L\psi(t)L\varphi(t)L\varepsilon'_{ij}(t)L\sigma'_{ij}(t) \quad (۱۴۵-۲)$$

بنابراین:

$$L\psi(t)L\varphi(t) = \frac{1}{S^2} \quad (۱۴۶-۲)$$

با استفاده از رابطه ۲-۱۴۶ چنانچه تابع $\psi(t)$ معلوم باشد می‌توان تابع $\varphi(t)$ و بالعکس در صورتی که تابع $\varphi(t)$ معلوم باشد می‌توان تابع $\psi(t)$ را تعیین نمود. پس:

$$L\sigma_{33} = (\frac{2\mu-k}{2\mu+6k})\frac{\sigma_0}{S} \quad (۱۴۷-۲)$$

با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس معادله مشخصه قطعه ویسکوالاستیک به صورت $L\sigma = \left(\frac{\beta S+\gamma}{S+\alpha}\right)L\varepsilon$ نوشته می‌شود، جهت تعیین تنش σ_{33} قطعه ویسکوالاستیک کافیست در رابطه بالا μ به $\frac{\beta S+\gamma}{S+\alpha}$ تبدیل گردد.

$$L\sigma_{33} = \left(\frac{2(\beta S+\gamma) - 3k(S+\alpha)}{2(\beta S+\gamma) + 6k(S+\alpha)}\right)\frac{\sigma_0}{S} = \left(\frac{(2\beta - 3k)S + 2\gamma - 3k\alpha}{2(3k+\beta)S(S+\lambda)}\right)\sigma_0$$
$$= \frac{\sigma_0}{2(3k+\beta)}\left[\frac{a_2}{\lambda S} - \frac{a_2}{\lambda(S+\lambda)} + \frac{a_1}{S+\lambda}\right] \qquad (۱۴۸-۲)$$

که در آن:

$$\lambda = \frac{\gamma + 3k\alpha}{\beta + 3k} \quad , \quad a_1 = 2\beta - 3k \quad , \quad a_1 = 2\gamma - 3k\alpha \qquad (۱۴۹-۲)$$

اختیار شده است. در نتیجه:

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_0}{2(3k+\beta)}\left[\frac{a_2}{\lambda} - \frac{a_2}{\lambda}e^{-\lambda t} + a_1 e^{-\lambda t}\right] \qquad (۱۷۰-۲)$$

و یا:

$$\sigma_{33} = \frac{\sigma_0}{2}\left\{\frac{2\gamma - 3k\alpha}{\gamma + 3k\alpha} + \left[\frac{2\beta - 3k}{\beta + 3k} - \frac{2\gamma - 3k\alpha}{\gamma + 3k\alpha}\right]e^{-\lambda t}\right\} \qquad (۱۷۱-۲)$$

۱-۴-۲-حل مدل مدل حالت الاستیک به ویسکوالاستیک

چنانچه تانسورهای تنش و کرنش را برحسب مولفه‌های هیدرواستاتیک نوشته شود، رابطــه زیــر برقــرار می‌باشد.

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} \qquad (۱۷۲-۲)$$

حال چنانچه رابطه تنش و کرنش برای اجسام الاستیک در نظر گرفته شود، می‌توان نوشت:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (۱۷۳-۲)$$

$$\sigma'_{ij} + \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon'_{ij} + \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij})$$
$$\lambda = k - \frac{2}{3}\mu \quad (۱۷۴-۲)$$

که در آن k مدول بالک می‌باشد.

$$\sigma'_{ij} + \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} = 2\mu\varepsilon'_{ij} + k\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (۱۷۵-۲)$$

بنابراین

$$\sigma'_{ij} = 2\mu\varepsilon'_{ij} \qquad ,\sigma_{kk} = k\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (۱۷۶-۲)$$

حال از با توجه به اینکه معادله مشخصه مدل کلوین به صورت

$$\sigma = E\varepsilon + C\dot{\varepsilon} \quad (۱۷۷-۲)$$

است با گرفتن لاپلاس از طرفین معادله، رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$L\sigma = EL\varepsilon + CL\dot{\varepsilon} = (E + CS)L\varepsilon = E(1 + \tau S)L\varepsilon \quad (۱۷۸-۲)$$

که در آن $\tau = \frac{C}{E}$ است. در نتیجه جهت بدست آوردن روابط مربوط ویسکوالاستیک سه بعدی مدل کلوین کافیست که در تبدیل لاپلاس معادله الاستیک یعنی معادله

$$L\sigma'_{ij} = 2\mu L\varepsilon'_{ij} \quad (۱۷۹-۲)$$

با تبدیل μ به $E(1 + \tau S)$، می‌توان نوشت:

$$L\sigma'_{ij} = 2E(1 + \tau S)L\varepsilon'_{ij} \quad (۱۸۰-۲)$$

بنابراین با تبدیل‌گیری معکوس از طرفین رابطه ۲-۱۸۰، رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$\sigma'_{ij} = 2E(\varepsilon'_{ij} + \tau \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon'_{ij}) = 2E(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t})\varepsilon'_{ij} \quad (۱۸۱-۲)$$

حال برای حالت تنش صفحه‌ای، جهت تعیین کرنش ε_{11} و ε_{22} و ε_{33} تنش‌های σ_{11} و σ_{22} می‌توان نوشت:

$$\sigma_{11} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = 2E(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t})(\varepsilon_{11} - \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}) \quad (۱۸۲-۲)$$

به علت در نظر گرفتن تنش هیدرواستاتیکی و تقارن هندسه مسئله می‌توان فرض نمود:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \quad \text{و} \quad \sigma_{22} = \sigma_{11} \quad (۱۸۳-۲)$$

$$\sigma_{11} - \frac{2\sigma_{11}}{3} = 2E(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t})(\varepsilon_{11} - \frac{2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}}{3}) \quad (۱۸۴-۲)$$

$$\frac{\sigma_{11}}{3} = 2E(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t})(\frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}}{3}) \quad (۱۸۵-۲)$$

همچنین با توجه به اینکه $\sigma_{kk} = 3k\varepsilon_{kk}$ می‌توان نوشت:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3k(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (۱۸۶-۲)$$

$$2\sigma_{11} = 3k(2\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) \quad (۱۸۷-۲)$$

با استفاده از معادلات فوق می‌توان نوشت:

$$\sigma_{11}(1 + \frac{4E}{3k}) = 6E(\varepsilon_{11} + \tau\dot{\varepsilon}_{11}) \quad (۱۸۸-۲)$$

$$\varepsilon_{11} + \tau\dot{\varepsilon}_{11} = (\frac{3k + 4E}{18Ek})\sigma_{0x} \quad (۱۸۹-۲)$$

$$L(\varepsilon_{11} + \tau\dot{\varepsilon}_{11}) = (\frac{3k + 4E}{18Ek})\sigma_{0x}U(t) \quad (۱۹۰-۲)$$

$$\varepsilon_{11}(s(s + \tau)) = (\frac{3k + 4E}{18Ek}) \quad (۱۹۱-۲)$$

$$\varepsilon_{11} = (\frac{3k + 4E}{18Ek})(\frac{1}{(s(s + \tau))})\sigma_{0x} \quad (۱۹۲-۲)$$

$$\varepsilon_{11} = (\frac{3k + 4E}{18Ek})(\frac{1}{(s(s + \tau))})\sigma_{0x} \quad (۱۹۳-۲)$$

$$\varepsilon_{11} = (\frac{3k+4E}{18Ek})(\frac{1}{\tau s} - \frac{1}{\tau(s+\tau)})\sigma_{0x} \quad (۱۹۴-۲)$$

$$\varepsilon_{11} = (\frac{3k+4E}{18Ek\tau})(1-e^{\tau t})\sigma_{0x} \quad (۱۹۵-۲)$$

همچنین برای بیان تنش در راستاهای x و y بر حسب زمان داریم:

$$\sigma_{1x} = \sigma_{1y} \quad (۱۹۶-۲)$$

$$\sigma_{1x} = \sigma_{2x} = ((1-e^{\tau t}) - \tau^2(e^{\tau t})\sigma_{0x} \quad (۱۹۷-۲)$$

۲-۵-مروری بر ادبیات موضوع

تعیین فاکتورهای تمرکز تنش در طراحی سازه‌های مهندسی با استفاده از مواد کامپوزیتی ویسکوالاستیک از اهمیت بالایی برخوردار است. در سال‌های اخیر موضوع مواد ویسکوالاستیک از دیدگاه تجربی و عددی مورد توجه محققینی از جمله هیلتون [۴]، لی [۵] و ویلیامز [۶] قرار گرفته است. محققان مختلف از روش‌های تحلیل الاستیک به منظور حل مسائل ویسکوالاستیک استفاده می‌کنند. لی [۷] روابطی ایزوتروپیک مستقل از دما ارائه داد و همچنین مورلند و لی [۸] روابط وابسته به متغیر دما را مطالعه نمود. بایوت [۹] روابط ویسکوالاستیک را برای مواد ایزوترپیک ارائه داد که این روابط در گذشته توسط هشین [۱۰-۱۱] مطالعه شد. روش‌هایی برای حل مسائل ویسکوالاستیک شبه الاستیک در مواد کامپوزیتی توسط تعدادی از محققین ارائه شد [۱۲-۱۶]. الام و اپل بای [۱۷] روشی را برای حل تغییر شکل یک صفحه مستطیلی ساخته شده از دو نوع الیاف ایزوتروپیک ارائه دادند. بخش اول الیاف ها به صورت الاستیک بوده و بخش دیگر دارای زمینه ویسکوالاستیک می‌باشد. آلام و همکارانش [۱۸-۱۹] از روش تقریب ایلیوشین[1] به منظور حل مسئله

[1] Illyushin method

پیچش یک ماده کامپوزیتی، با نوارهای ویسکوالاستیک با سطح مقطع‌های مستطیلی و مثلثی استفاده نمودند. ویتورس و محاسه [۲۰]، تمرکز تنش در صفحات کامپوزیتی اپوکسی/گرافیت تحت بارگذاری تک محوری را بررسی نمودند. اخیراً، معادلات سازنده‌ای برای پلمرهای لاستیکی نامنظم توسط دروزدوف [۲۱] ارائه شده است. توروتیماتام [۲۲] یک تحلیل ویسکوالاستیک را در کامپوزیت تک جهته انجام دادند و اثر وابستگی زمان به تنش انتقالی بین یک فایبر الاستیک و زمینه ویسکوالاستیک را تحت بارگذاری محوری بررسی کردند. آلام و زنکور [۲۰] از روش پارامتر کوچک همانند روش مدول موثر برای بررسی پاسخ خمشی یک مدل ویسکوالاستیک با الیاف تقویت شده بررسی نمودند. مسائل مربوط به تعیین تنش در یک صفحه ضعیف شده به واسطه تغییر شکل یافتن با گشودگی با استفاده از یک نیروی به کار گرفته شده در وسط صفحه در طراحی سازه‌های مهندسی بسیار مهم می‌باشد. مشخص است که اثر گشودگی در صفحه ایزوتروپیک تقویت نشده باعث افزایش تنش در نزدیکی گشودگی در مقایسه با صفحات بدون بازشوندگی می‌شود. این اثر تمرکز تنش نامیده می‌شود.مسائل تمرکز تنش در صفحات ایزوتروپیک به اندازه کافی بررسی شده است که شامل گشودگی و بارگذاری‌های مختلف مطالعه شده است [۲۳]. برای مواد انیزوتروپیک[1]، توزیع تنش به اندازه کافی فقط برای گشودگی‌های دایروی و بیضوی بررسی شده است. برای مابقی گشودگی‌ها فقط حل تقریبی آنها شناسایی شده است. برای گشودگی‌های مثلثی، بعضی مسائل توزیع تنش در صفحه آنیزوتروپیک توسط ساوین [۲] و نایمن [۲۴] بررسی شده است.کراسیوکوف [۲۵] اولین نفری بود که روش تقریب را برای صفحات انیزوتروپیک با گشودگی مثلثی بکار برد. ستفن [۲۶] روش دیگری برای تخمین توزیع تنش در صفحه اورتوتروپیک با گشودگی مثلثی را پیشنهاد داد. همچنین لخنیتسکی [۳] گزارش نمود که بیشترین تنش در صفحات چوب سه لایه بیشتر از صفحات ایزوتروپیک است.

مطالعات تحقیقاتی صورت گرفته بر روی تمرکز تنش حفره‌های در صفحات ویسکوالاستیک، مربوط به

---

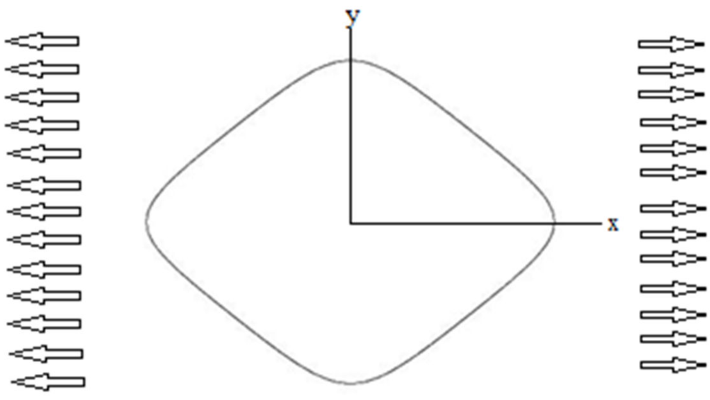
[1] Anisotropic

صفحاتی با حفره‌های دایره‌ای، مربعی و بیضوی می‌باشد. در مقابل، آلام و آپلبای [۲۷] تمرکز تنش اطراف حفره‌های دایره‌ای یا نابجایی‌های دایره‌ای در یک صفحه ویسکوالاستیک تقویت شده تحت بار برشی یکنواخت را بررسی نمودند. اثر حفره کوچک بر روی توزیع تنش بر روی یک صفحه ایزوتروپیک تحت بارگذاری کشش توسط گرینسپان [۲۸] بررسی شد و تنش اطراف یک گشودگی کوچک تحت خمش خالص توسط بروک [۲۹] و برای گشودگی بیضوی توسط بورمیستروف [۳۰] مطالعه گردید. آلام [۳۱] تمرکز تنش در اطراف یک حفره مثلثی تحت بارگذاری ترکیبی کششی و گشتاوری بررسی کرد. در گزارشی دیگر که توسط آلام و زنکور ارائه شد؛ در این بررسی مسائل مربوط به کشش و خمش خالص بر روی ورق کامپوزیتی انیزوتروپیک با یک گشودگی بیضوی یا ترک مطالعه شده است و با نتایج گشودگی بیضوی کوچک مقایسه شده است. همچنین زنکور و آلام [۳۲] توزیع تنش در اطراف حفره‌های دایروی در اطراف یک صفحه ویسکوالاستیک تقویت شده با الیاف تحت بارگذاری خمشی بررسی کرده اند.

فصل ۳: روش تحقیق

۳-۱-مقدمه

در این بخش به محاسبه توزیع تنش در یک صفحه ارتوتروپیک ویسکوالاستیک با گشودگی شبه-مربعی تحت بارگذاری محوری پرداخته می‌شود. برای حل این نوع مسائل ابتدا توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی واقع در یک ورق نامحدود ارتوتروپیک با استفاده از روش متغیر مختلط لخنیتسکی برحسب تابعی از خواص مکانیکی $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$ محاسبه می شود. سپس با استفاده از رگرسیون خطی چندگانه برای گشودگی شبه مربعی رابطه ای صریح برای مولفه‌های تنش بر حسب خواص مکانیکی و انحنای گشودگی و زاویه چرخش ارائه می‌شود. درنهایت با استفاده از اصل برهمنهی بولتزمن و روش متناظر سازی، حل مسئله الاستیک به حل ویسکوالاستیک در حوزه لاپلاس تبدیل می شود. آنگاه با گرفتن لاپلاس معکوس به روش های عددی مناسب، حل ویسکوالاستیک در حوزه زمان نیز به دست می آید.



شکل (۳-۱) مدل جامد سه پارامتری

۳-۲-انتقال از حالت الاستیک به ویسکوالاستیک

مواد کامپوزیت پایه پلیمری انواع متعددی دارند .یکی از پرکاربردترین این مواد در صنعت، کربن اپوکسی است .هر لایه در کامپوزیت‌های تک لایه‌ای، چهار خاصیت مستقل مرتبط با ماده دارد که رفتار مکانیکی درون صفحه‌ای را بیان می کند که هریک از این خواص می توانند به صورت تابعی از زمان، دما و تنش بیان شوند.[۳۵] این خواص در قالب ماتریس نرمی و به صورت زیر محاسبه می شوند: [۳۵]

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & 0\\ S_{21}(=S_{12}) & S_{22} & 0\\ 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=[S]\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} \quad (۱-۳)$$

که اعضای ماتریس نرمی بصورت زیر هستند:

$$S_{11}=\frac{1}{E_{11}}, S_{12}=S_{21}=\frac{\vartheta_{12}}{E_{11}}=-\frac{\vartheta_{21}}{E_{22}}, S_{22}=\frac{1}{E_{22}}, S_{66}=\frac{1}{G_{12}} \quad (۲-۳)$$

همچنین ماتریس سفتی بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{21}(=Q_{12}) & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=[Q]\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}$$

$$Q_{11}=\frac{E_{11}}{1-\vartheta_{12}\vartheta_{21}}, Q_{22}=\frac{E_{22}}{1-\vartheta_{12}\vartheta_{21}}, Q_{66}=G_{12} \quad (۳-۳)$$

$$Q_{12}=Q_{21}=\frac{\vartheta_{12}E_{22}}{1-\vartheta_{12}\vartheta_{21}}=\frac{\vartheta_{21}E_{11}}{1-\vartheta_{12}\vartheta_{21}}$$

استخراج و بسط روابط حاکم ویسکوالاستیک با استفاده از معادلات انتگرالی و دیفرانسیلی برای معادله به صورت جداگانه قابل استفاده می‌باشد. از این رو، اصل برهم نهی بولتزمن برای کرنش‌های اتساعی و برشی قابل استفاده می‌باشد. علاوه بر آن اجزای تنش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_{ij}(t) = 2\int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\frac{\partial e_{ij}(\tau)}{\partial \tau}d\tau$$
$$\sigma_{kk}(t) = 3\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\frac{\partial \varepsilon_{kk}(\tau)}{\partial \tau}d\tau \quad (۴-۳)$$

در جایی که k(t) و G(t) مدول آسایش حجمی و برشی می‌باشند. به دنبال آن، روابط تنش کرنش ویسکوالاستیک در شکل انتگرالی به صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

$$e_{ij}(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\frac{\partial s_{ij}(\tau)}{\partial \tau}d\tau$$
$$\varepsilon_{kk}(t) = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)\frac{\partial \sigma_{kk}(\tau)}{\partial \tau}d\tau \quad (۵-۳)$$

که B(t) و J(t) مدول نرمی حجمی و برشی می‌باشد.

معادلات دیفرانسیلی برای پاسخ اتساعی و برشی یک ماده ی ویسکوالاستیک را مـی تـوان بـه صـورتی مشابه حالت یک بعدی نوشت.

$$P[S_{ij}(t)] = 2Q[e_{ij}(t)]$$
$$\tilde{P}[\sigma(t)] = 3\tilde{Q}[\varepsilon(t)] \quad (۶-۳)$$

در جایی که P، Q، $\tilde{P}$ و $\tilde{Q}$ عملگرهای دیفرانسیلی بوده و شامل مدول ویسـکوزیته و دمپـر مـدل‌هـای مکانیکی می‌باشد. با تبدیل لاپلاس روابط فوق خواهیم داشت:

$$\bar{s}_{ij}(s) = 2\overline{G^*(s)}\bar{e}_{ij}(s)$$
$$\bar{\sigma}_{kk}(s) = 2\overline{K^*(s)}\bar{\varepsilon}_{kk}(s) \quad (۷-۳)$$

که $\overline{K}^*(s)$ و $\overline{G}^*(s)$ مطابق روابط زیر مرتبط با تبدیل یافته‌ی مدول آسایش حجمی و برشی می‌باشد.

$$\bar{G}^*(s) = s\bar{G}(s)$$
$$\bar{K}^*(s) = s\bar{K}(s) \quad (۸-۳)$$

به این ترتیب، رابطه ی تنش-کرنش ویسکوالاستیک در حوزه ی تبدیل را می توان به صورت زیر نوشت:

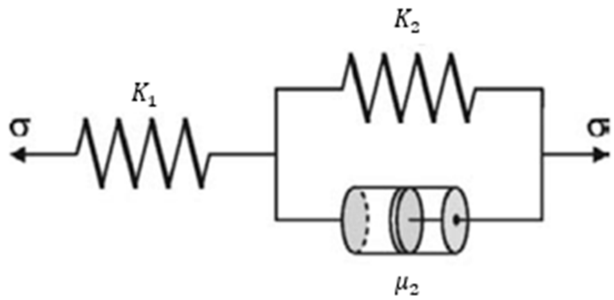
$$\bar{e}_{ij}(s) = \frac{1}{2}\bar{J}^*(s)\bar{s}_{ij}(s)$$
$$\bar{\varepsilon}_{kk}(s) = \frac{1}{3}\bar{B}^*(s)\bar{\sigma}_{kk}(s) \qquad (۹-۳)$$

در جایی که $\bar{J}^*(s)$ و $\bar{B}^*(s)$ مطابق روابط زیر مرتبط با تبدیل یافته ی نرمی خزشی برشی و حجمی هستند.

$$\bar{J}^*(s) = s\bar{J}(s)$$
$$\bar{B}^*(s) = s\bar{B}(s) \qquad (۱۰-۳)$$

۳-۲-۱-مدل جامد استاندارد

همانطور که قبلا گفته شد ماده ویسکوالاستیک را با المان‌هایی از فنر و ویسکوز تقریب می‌زنند. آنگاه با استفاده از معادله مشخصه مدل مزبور، اقدام به تحلیل ماده ویسکوالاستیک می‌کنند. در این بررسی رفتار ویسکوالاستیک یک صفحه ارتوتروپیک با استفاده از مدل جامد استاندارد که شامل سه المان مطابق شکل زیر می‌باشد، مدل شده است.



شکل ۳-۲ مدل جامد سه پارامتری [۷]

معادله مشخصه مدل جامد استاندارد خطی به صورت زیر است:

$$\sigma+\frac{\mu_2}{K_1+K_2}\dot{\sigma}=\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}\varepsilon+\frac{K_1\mu_2}{K_1+K_2}\dot{\varepsilon} \tag{۳-۱۱}$$

معادلات کلی زیر مربوط به مواد ویسکوالاستیک، در نظر گرفته می‌شود:

$$P_i s_{ij}(t)=Q_i d_{ij}(t) \tag{۳-۱۲}$$

$$\left[p'_0+p'_1\frac{\partial}{\partial t}+p'_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\cdots+p'_a\frac{\partial^a}{\partial t^a}\right]s_{ij}(t) \\ =\left[q'_0+q'_1\frac{\partial}{\partial t}+q'_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\cdots+q'_b\frac{\partial^b}{\partial t^b}\right]d_{ij}(t) \tag{۳-۱۳}$$

با مقایسه سه رابطه فوق اپراتورهای P_i و Q_i برای کرنش‌های برشی مهندسی بدست می‌آیند. بایستی توجه داشت که کرنش‌های برشی مهندسی دوبرابر کرنش‌های برشی معمولی هستند. بدین ترتیب با فرض $D=\frac{\partial}{\partial t}$ خواهیم داشت:

$$P_1=\frac{K_1+K_2}{K_1}+\frac{\mu_2}{K_1}D \tag{۳-۱۴}$$

$$Q_1=2[K_2+\mu_2D] \tag{۳-۱۵}$$

از طرفی در مواد ویسکوالاستیک داریم:

$$\frac{1}{G}=\frac{2P_1}{Q_1} \tag{۳-۱۶}$$

$$\frac{1}{G}=\frac{2[\frac{K_1+K_2}{K_1}+\frac{\mu_2}{K_1}D]}{2[K_2+\mu_2D]} \tag{۳-۱۷}$$

با ساده کردن رابطه فوق، معادله زبر بدست خواهد آمد،

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{K_1} + \frac{\frac{1}{\mu_2}}{D + (\frac{K_2}{\mu_2})} \qquad (۱۸-۳)$$

با توجه به معادله فوق رفتار خزشی والاستیک ماده به صورت زیر از هم تفکیک می‌شوند:

قسمت مربوط به رفتار الاستیک:

$$\frac{1}{G_e} = \frac{1}{K_1} \qquad (۱۹-۳)$$

قسمت مربوط به رفتار خزش:

$$\frac{1}{G_c} = \frac{\frac{1}{\mu_2}}{D + (\frac{K_2}{\mu_2})} \qquad (۲۰-۳)$$

فرض می‌شود که مواد ویسکوالاستیک تحت اثر تنش‌های هیدرواستاتیکی، الاستیک غیرقابل تراکم هستند و به عبارت دیگر مدول حجمی را بی نهایت در نظر می‌گیرند. با چنین فرضی ضریب پواسون برابر با یک دوم است. و رفتار ایزوتروپیک ساده کننده زیر را می‌توان در نظر گرفت:

۱. با فرض غیرقابل تراکم بودن در تغییرات حجمی و فرض رفتار ویسکوالاستیک در برش خواهیم داشت:

$$K(s) = \infty$$
$$\nu(t) = \frac{1}{2} \qquad (۲۱-۳)$$
$$E(s) = 1/3G(s)$$

(s متغیر لاپلاس است.)

۲. رفتار ماده تحت اثر تنش‌های هیدرواستاتیکی، الاستیک است.

۳. رفتار ماده در برش ویسکوالاستیک می‌باشد.

۴. خصوصیات ماده در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شود.

با توجه به فرضیات فوق و روابط بدست آمده برای مدول برشی، خصوصیات ماده عبارتند از:

برای رفتار الاستیک

مدول برشی:

$$G_e = K_1 \tag{۳-۲۲}$$

مدول حجمی:

$$K_e = K \tag{۳-۲۳}$$

ضریب پواسون:

$$\nu_e = \frac{3K - 2K_1}{6K + 2K_1} \tag{۳-۲۴}$$

برای رفتار خزشی

مدول برشی:

$$G_c(D) = K_2 + \mu_2 D \tag{۳-۲۵}$$

مدول حجمی:

$$K_c = \infty \tag{۳-۲۶}$$

ضریب پواسون:

$$\nu_c = \frac{1}{2} \tag{۳-۲۷}$$

اما با توجه به آنکه ماده مورد نظر در این پژوهش دارای رفتار ارتوتروپیک می‌باشد، نمی‌توان به راحتی از روابط ساختاری فوق استفاده نمود. با توجه به آنکه در لحظه t=0 کرنش ناشی از خزش برابر با صفر می باشد و کرنش مانده در روابط مربوط به کرنش الاستیک می‌باشد می‌توان مقدار K_1 را محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} K_{1x} &= E_x \\ K_{1y} &= E_y \\ K_{1xy} &= G_{xy} \end{aligned} \tag{۳-۲۸}$$

محاسبه کرنش‌های خزشی

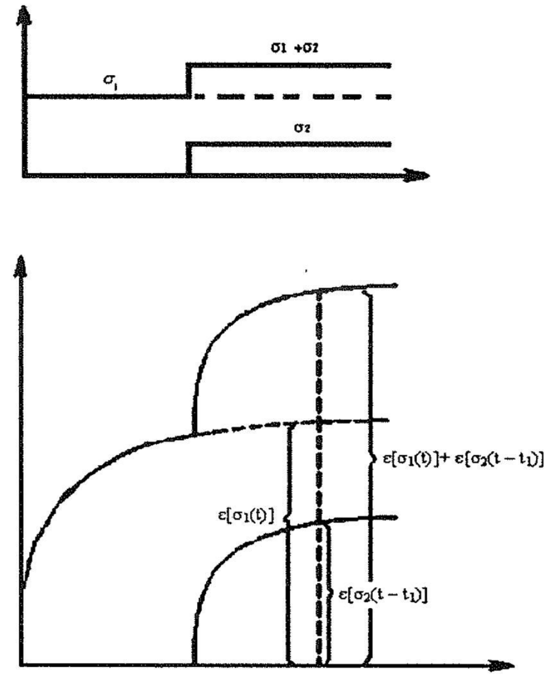
برای بدست آوردن کرنش‌های خزشی به جای ثابت‌های الاستیک معادل ا آنها را در رابطه تنش-کرنش قرار می‌دهیم. بر همین اساس با استفاده از رابطه نرمی مقادیر کرنش‌های خزشی را بر حسب تنش بدست می‌دهد.

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x^v\\ \varepsilon_y^v\\ \gamma_{xy}^v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[\left(\frac{1}{k_{1x}}+\frac{1}{k_2}\right)(1-e^{-\lambda t_1})+\frac{1}{k_{1x}}e^{-\lambda t_1}](\sigma_x-\upsilon_{12}\sigma_y)\\ [\left(\frac{1}{k_{1y}}+\frac{1}{k_2}\right)(1-e^{-\lambda t_1})+\frac{1}{k_{1y}}e^{-\lambda t_1}](\sigma_y-\upsilon_{21}\sigma_x)\\ [\left(\frac{1}{k_{1xy}}+\frac{1}{k_2}\right)(1-e^{-\lambda t_1})+\frac{1}{k_{1xy}}e^{-\lambda t_1}](\tau_{xy})\end{bmatrix}$$

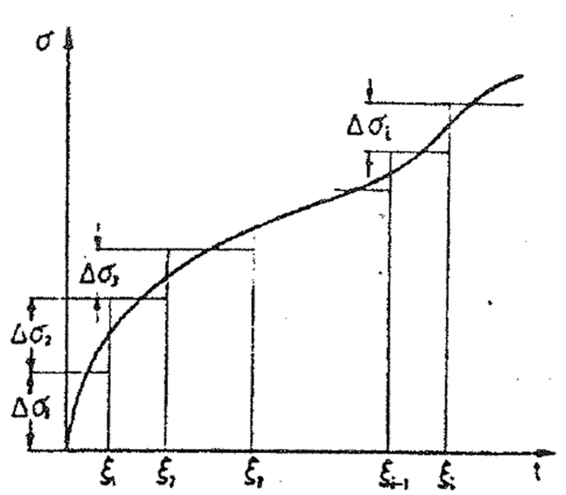
$$=\begin{bmatrix}[\left(\frac{1}{k_2}\right)(1-e^{-\lambda t_1})+\frac{1}{E_x}](\sigma_x-\upsilon_{12}\sigma_y)\\ [\left(\frac{1}{k_2}\right)(1-e^{-\lambda t_1})+\frac{1}{E_y}](\sigma_y-\upsilon_{21}\sigma_x)\\ [\left(\frac{1}{k_2}\right)(1-e^{-\lambda t_1})+\frac{1}{G_{xy}}](\tau_{xy})\end{bmatrix} \tag{۳-۲۹}$$

از آنجایی که رفتار ماده ویسکوز خطی در نظر گرفته شده و از طرفی مقدار تنش را در طول هر گام زمانی ثابت فرض کرده‌ایم می‌توانیم با عنایت به اصل جمع آثار بولتزمن کرنش‌های خزشی را در پایان هر پله زمانی محاسبه کنیم. اصل جمع آثار بولتزمن چنانکه در شکل زیر نمایش داده شده است این مطلب را بیان می‌دارد که خروجی کرنش ناشی از ترکیب دو ورودی تنش مختلف که در زمان‌های متفاوتی اعمال شده‌اند، برابر با مجموع خروجی‌های کرنش ناشی از اعمال هر یک از آنها به تنهایی است. از این رو باید کرنش خزشی حاصل از تغییرات تنش در هر گام را به کرنش‌های جزئی بوجود آمده در گام‌های پیشین اضافه نمود، یعنی کرنش خزشی در هر گره حاصل از جمع آثار همه تغییرات پله‌ای تنش در ان نقطه است که در گام‌های زمانی پیشین به وجود آمده است. واضح است که تغییرات تنش در عمل پیوسته است اما به دلیل این که پله‌های زمانی، کوچک فرض شده‌اند می‌توانیم

مقدار تنش را در هر پله ثابت بگیریم. این تغییرات پله‌ای تنش ($\Delta\sigma$) در شـکل زیـر نشـان داده شـده است. از این رو، در واقع تنش‌ها و کرنش‌ها، به ترتیب نشانگر تغییرات پله‌ای تـنش و تغییـرات کـرنش خزشی در هر گره و در هر گام زمانی نسبت به گام زمانی پیشین است.



شکل ۳-۳ نمایش اصل جمع آثار بولتزمن



شکل ۳-۴ تقریب زدن تغییرات تنش پیوسته به تغییرات تنش پله‌ای [۷]

محاسبه تنش‌ها

با در نظر گرفتن کرنش خزشی به عنوان یک کرنش اولیه در ابتدای هر گام زمانی بـه معادلـه اساسـی زیر خواهیم رسید:.

$$[K][U]= [P] + [F] \tag{۳۰-۳}$$

ماتریس سفتی [K] مربوط به قسمت الاستیک است و بردار نیـروی [P] وابســته بـه بـار اعمـال شـده خارجی و بردار نیروی [F] وابسته به کرنش اولیه خزشی است. با حل معادله فـوق و بـه دســت آوردن جابجایی گره‌ای [U]، تنش در هرگام زمانی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$[\sigma] = [Q]\ ([\varepsilon]-[\varepsilon_c]) \tag{۳۱-۳}$$

کرنش‌های $[\varepsilon_c]$، $[\varepsilon]$ کرنش‌های کلی سیستم و [Q] ماتریس خواص مصالح است.

بدین ترتیب در هر گام زمانی کرنش‌های خزشی سیستم بدست می‌آید و نهایتا توزیـع تـنش در گـام زمانی مربوطه از طریق معادله فوق مشخص می‌گردد و این روند برای هر گام زمانی تکرار می‌شود.

جهت بررسی پدیده آسایش تنش چنانچه در لحظه $t=t_1$ مدل تحت اثر کرنش ثابت:

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma_0 p_0}{q_0}(1 - e^{-\lambda t_1} + \frac{p_1 q_0}{q_1 p_0} e^{-\lambda t_1}) \tag{۳۲-۳}$$

قرار گیرد می‌توان نوشت:

$$\varepsilon = \varepsilon^* U(t - t_1) = \varepsilon^* U(t) \tag{۳۳-۳}$$

که در آن $\tau = t - t_1$ و $U(\tau)$ تابع پله‌ای واحد است، تبدیل لاپلاس رابطه ۲-۳۴ به صورت:

$$p_0\bar{\sigma} + p_1(S\bar{\sigma} - \sigma(t_1)) = q_0\bar{\varepsilon} + q_1(S\bar{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}(t_1)) \tag{۳۴-۳}$$

و جانشین کردن $\sigma(t_1) = \sigma_0$، $\varepsilon(t_1) = \varepsilon^*$ و $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^*}{S}$ در آن، رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$\bar{\sigma} = \frac{q_0\varepsilon^* + p_1\sigma_0 S}{S(p_0 + p_1 S)} = \frac{q_0\varepsilon^*}{p_1 S(S+\lambda^*)} + \frac{\sigma_0}{(S+\lambda^*)}$$
$$= \frac{q_0\varepsilon^*}{p_0}\left(\frac{1}{S} - \frac{1}{(S+\lambda^*)}\right) + \frac{\sigma_0}{(S+\lambda^*)} \quad (۳-۳۵)$$

که در آن $\lambda^* = \frac{p_0}{p_1}$ است. تبدیل معکوس رابطه به صورت :

$$\sigma = \frac{q_0\varepsilon^*}{p_0}(1 - e^{-\lambda^*(t-t_1)}) + \sigma_0 e^{-\lambda^*(t-t_1)}) \quad (۳-۳۶)$$

با توجه به روابط فوق و ماتریس سفتی برای مواد ارتوتروپیک میزان تنش برابر است با:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^v \\ \varepsilon_y^v \\ \gamma_{xy}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\left(\frac{1}{k_2}\right)(1 - e^{-\lambda t_1}) + \frac{1}{E_x}](\sigma_x - \upsilon_{12}\sigma_y) \\ [\left(\frac{1}{k_2}\right)(1 - e^{-\lambda t_1}) + \frac{1}{E_y}](\sigma_y - \upsilon_{21}\sigma_x) \\ [\left(\frac{1}{k_2}\right)(1 - e^{-\lambda t_1}) + \frac{1}{G_{xy}}](\tau_{xy}) \end{bmatrix} \quad (۳-۳۷)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^v \\ \sigma_y^v \\ \tau_{xy}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon_{xc} \\ \varepsilon_{yc} \\ \gamma_{xyc} \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} Q_{11}(\varepsilon_x - \varepsilon_{xc}) + Q_{12}(\varepsilon_y - \varepsilon_{yc}) \\ Q_{21}(\varepsilon_x - \varepsilon_{xc}) + Q_{22}(\varepsilon_y - \varepsilon_{yc}) \\ Q_{33}(\gamma_{xy} - \gamma_{xyc}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \left[\frac{E_x}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}}\right]\left[\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(1 - e^{-\lambda(t-t_1)}\right) + \frac{1}{E_x}\right]\left(\sigma_x - \upsilon_{12}\sigma_y\right) + \left[\frac{\upsilon_{21}E_x}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}}\right][\left(\frac{1}{k_2}\right) \\ (1 - e^{-\lambda(t-t_1)}) + \frac{1}{E_y}](\sigma_y - \upsilon_{21}\sigma_x) \\ \left[\frac{\upsilon_{21}E_x}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}}\right]\left[\left(\frac{1}{k_2}\right)\left(1 - e^{-\lambda(t-t_1)}\right) + \frac{1}{E_x}\right]\left(\sigma_x - \upsilon_{12}\sigma_y\right) + \left[\frac{E_y}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}}\right][\left(\frac{1}{k_2}\right) \\ (1 - e^{-\lambda(t-t_1)}) + \frac{1}{E_y}](\sigma_y - \upsilon_{21}\sigma_x) \\ G_{xy}[\left(\frac{1}{k_2}\right)(1 - e^{-\lambda(t-t_1)}) + \frac{1}{G_{xy}}](\tau_{xy}) \end{bmatrix} \quad (۳-۳۸)$$

فصل ۴: نتایج و تفسیر آن

۴-۱-تنش در صفحه بی نهایت با گشودگی شبه‌مربعی تحت بارگذاری محوری

طبق روابط ارائه شده در بخش ۲-۲ به منظور توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی واقع در یک ورق نامحدود لازم است در روابط ذکر شده مقادیر n=3 و c=1 می‌باشد. محدوده مجاز تغییرات w نیز بین صفر تا ۰.۳۳ خواهد بود. توزیع تنش برای مواد ارتوتروپیک نیز با استفاده از متغیر مختلط لخنیتسکی بر حسب تابعی از خواص مکانیکی محاسبه می‌شود. با فرض آنکه روابط مربوط به توزیع تنش به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma cos^2\alpha + 2Re[\mu_1^2 f_1''(z_1) + \mu_2^2 f_2''(z_2)] \\
\sigma_y &= \sigma cos^2\alpha + 2Re[f_1''(z_1) + f_2''(z_2)] \\
\tau_{xy} &= \sigma cos\alpha sin\alpha - 2Re[\mu_1 f_1''(z_1) + \mu_2 f_2''(z_2)]
\end{aligned} \tag{۴-۱}$$

با جایگزین کردن مقادیر تنش فوق در روابط ماده ویسکوالاستیک ارتوتروپیک تنش در صفحه ارتوتروپیک محاسبه خواهد شد. برای انتقال تنش از ماتریس دوران استفاده خواهد شد.

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ 2mn & -2mn & -n^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix} \tag{۴-۲}$$

مقادیر تنش $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ و $\sigma_\theta \neq 0$، در رابطه فوق n و m به ترتیب برابر با $sin\theta$ و $cos\theta$ می‌باشند و θ زاویه بین محورهای x و منحنی الخط r می‌باشد و به ازای $\theta = 0$،

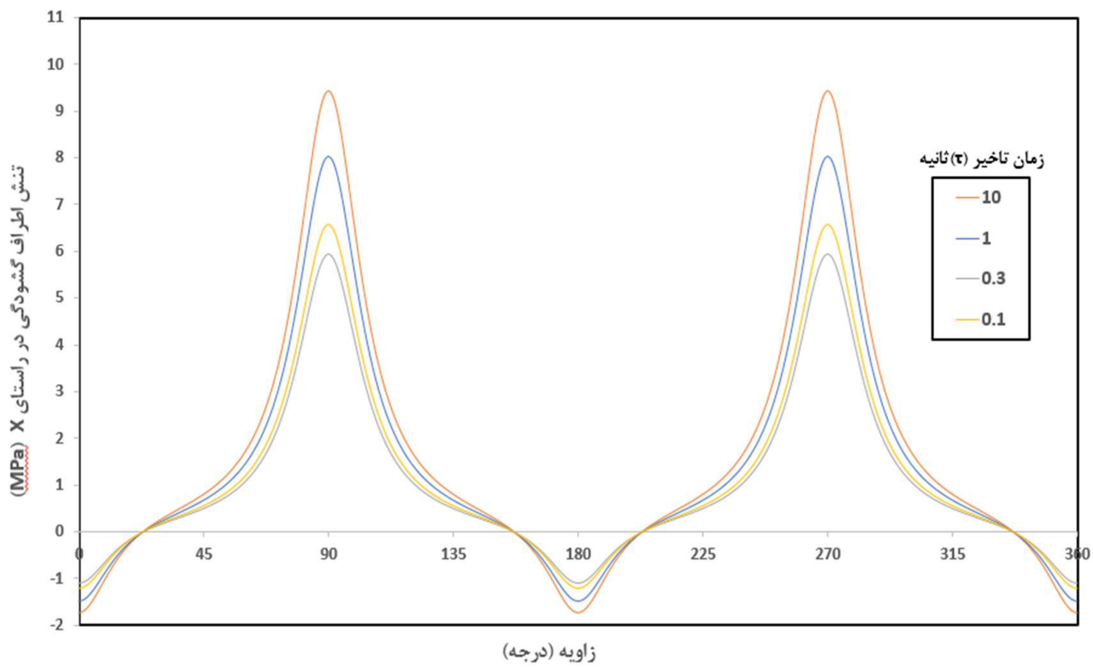
$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}0\\ \sigma_\theta\\ 0\end{bmatrix} \tag{۴-۳}$$

مقادیر $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ و $\sigma_y = \sigma_\theta$ می باشد. با توجه به روابط به دست آمده برای حالت ویسکوالاستیک-ارتوتروپیک داریم:

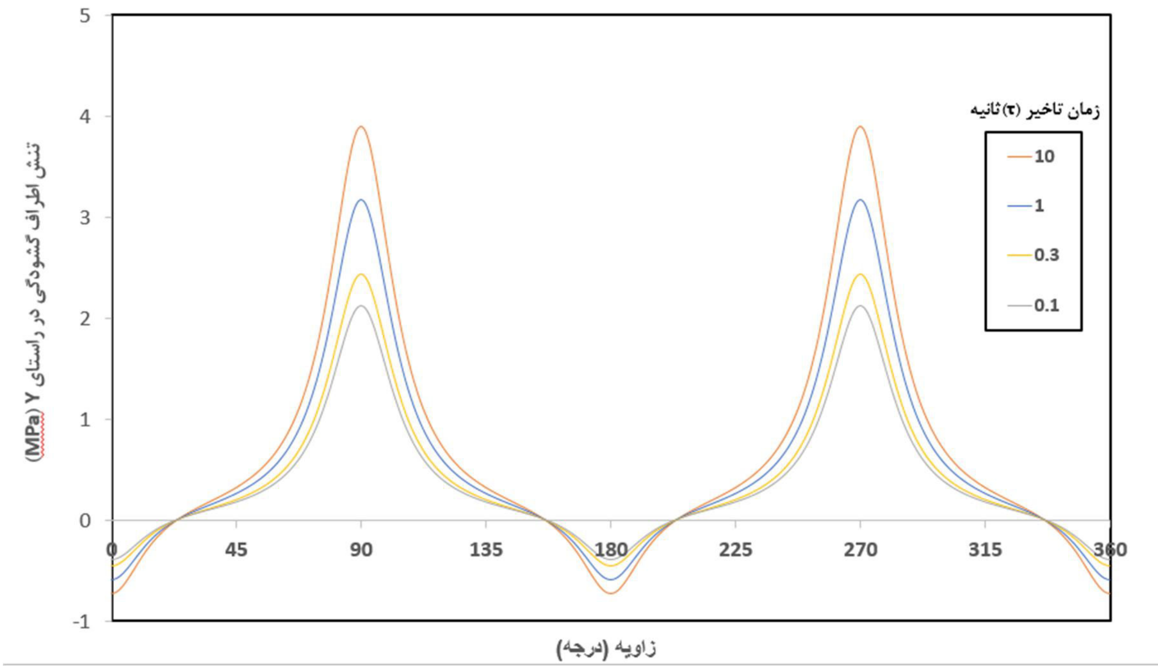
$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left[\dfrac{E_x}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}}\right]\left[\left(\dfrac{1}{k_2}\right)\left(1-e^{-\lambda(t-t_1)}\right)+\dfrac{1}{E_x}\right](\upsilon_{12}\sigma_\theta)+\left[\dfrac{\upsilon_{21}E_x}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}}\right][\left(\dfrac{1}{k_2}\right)\\ \left(1-e^{-\lambda(t-t_1)}\right)+\dfrac{1}{E_y}](\sigma_\theta)\\ \left[\dfrac{\upsilon_{21}E_x}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}}\right]\left[\left(\dfrac{1}{k_2}\right)\left(1-e^{-\lambda(t-t_1)}\right)+\dfrac{1}{E_x}\right](\upsilon_{12}\sigma_\theta)+\left[\dfrac{E_y}{1-\upsilon_{12}\upsilon_{21}}\right][\left(\dfrac{1}{k_2}\right)\\ \left(1-e^{-\lambda(t-t_1)}\right)+\dfrac{1}{E_y}](\sigma_\theta)\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۴-۴)$$

توزیع تنش σ_x و σ_y در اطراف تنش یک صفحه بی نهایت با گشودگی شبه مربعی به صورت زیر می‌باشد. توزیع تنش به ازای مقادیر مختلف تاخیر زمانی نشان داده شده است.

همانطور که از تصاویر زیر مشاهده می‌شود مقادیر تنش σ_x به ازای زاویای یکسان نسبت به مقادیر تنش σ_y بیشتر می‌باشد. همچنین با افزایش میزان تاخیر زمانی، میزان تنش‌های ایجاد شده در اطراف گشودگی‌ها نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۱ توزیع تنش σ_x یک صفحه ویسکوالاستیک-ارتوتروپیک بی نهایت در اطراف گشودگی شبه مربعی

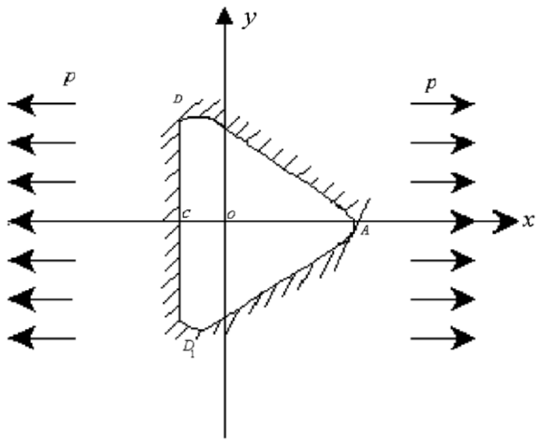


شکل ۴-۲ توزیع تنش σ_y در اطراف یک صفحه ویسکوالاستیک-ارتوتروپیک بی نهایت با گشودگی شبه مربعی

همانطور که در شکل (۲-۴) و (۱-۴) نشان داده شده است بیشترین مقادیر تنش مربوط به زاویای ۹۰ و ۲۷۰ درجه می‌باشد. مقادیر این تنش در زاویای تقریبا ۲۵، ۱۶۰، ۲۰۰ و ۳۳۰ به صفر می‌رسند همچنین در زاویای صفر،۱۸۰ و ۳۶۰ به کمترین میزان خود می‌رسند و دارای مقادیر منفی می‌باشند.

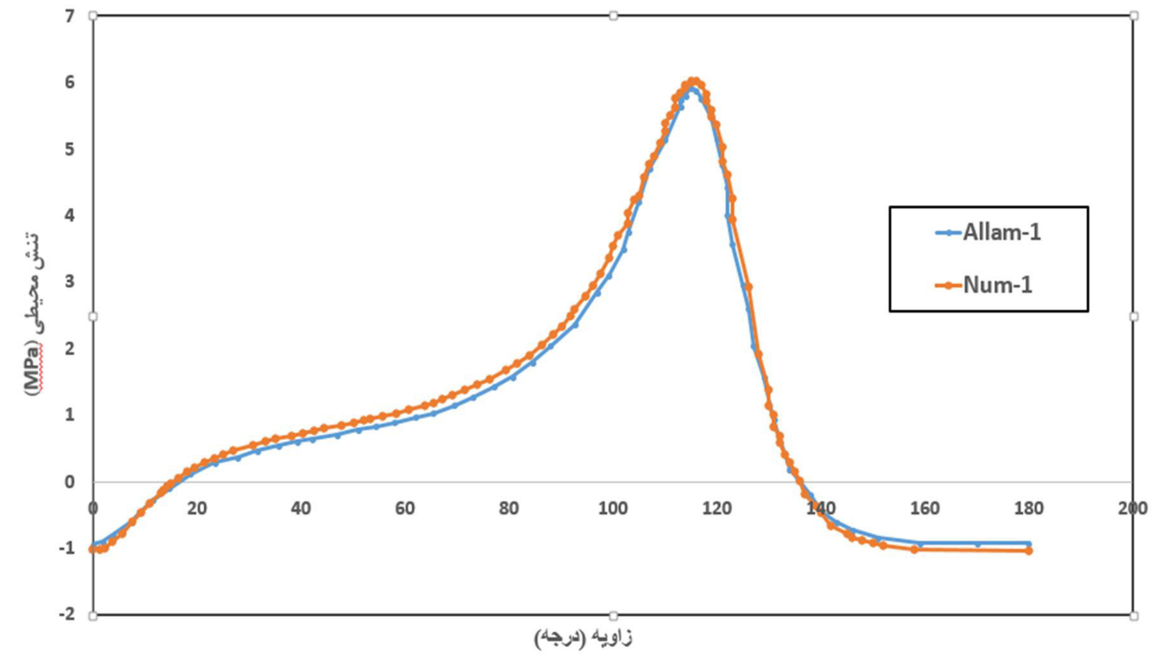
۴-۲-اعتبار سنجی

در این پایان نامه به منظور اعتبارسنجی روش استفاده شده نتایج مقاله آلام و همکاران [۳۶] بازتولید شده است. آلام و همکاران [۳۶] توزیع تنش اطراف گشودگی مثلث یک ماده ویسکوالاستیک ارتوتروپیک را تحت بارگذاری محوری در یک صفحه بی‌نهایت بررسی نمودند که تصویر شماتیک گشودگی و بارگذاری آن در شکل ۴-۳ نشان داده شده است.



شکل۴-۳ شماتیک گشودگی مثلثی [۳۶]

آلام و همکاران در این مقاله [۳۶] از روش مدول موثر استفاده کرده اند. در شکل زیر نتایج توزیع تنش در اطراف یک سمت مثلث نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود روش ارائه شده در این پایان‌نامه به خوبی توانسته نتایج مقاله را بازتولید نماید.



شکل ۴-۴ مقایسه توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی با استفاده از روش ارائه شده در این پایان‌نامه و مقاله آلام و همکاران [۳۶]

۴-۳-رگرسیون خطی

با توجه به اینکه ضریب تمرکز تنش در صفحات با گشودگی دایره‌ای تابعی از چهار متغیر E_1، E_2، ν_{12} و G_{12} می‌باشد .جهت بی‌بعد سازی تنش از نسبت σ_θ/σ_0 استفاده شده است که برابر همان ضریب تمرکز تنش است .در اینجا σ_0 تنش اعمالی در مرز ورق بوده که میزان آن 1Pa می‌باشد. همچنین به دلیل آنکه متغیر ν_{12} بر خلاف سه عامل دیگر بدون بعد بوده، بنابراین به کمک ترکیبات مختلفی از E_1، E_2 و G_{12} اقدام به بی‌بعدسازی متغیرها شده است .برای بی‌بعدسازی متغیرها از شش گزینه به عنوان متغیرهای مستقل مدل رگرسیونی خطی چندگانه استفاده شد. به کمک این طرح آماری کلیه ضرایب مدل رگرسیون و اثرات متقابل ضریب تمرکز تنش استفاده شده که این مدل به صورت رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^{m} b_i x_i \tag{۵-۴}$$

که در آن، Y، متغیر پاسخ(ضریب تمرکز تنش یا بیشینه تنش محیطی)،b_0ضریب ثابت، b_i اثر خطی و x_i متغیرهای مستقل می‌باشند .رابطه‌ی فوق با توجه به تعداد متغیرها قابل بسط می‌باشد که برای مطالعه‌ی حاضر به صورت رابطه‌ای بسط می‌یابد.

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 \tag{۶-۴}$$

که درآن، Y میزان ماکزیمم تنش محیطی σ_θ، x_1 مدول الاستیک G_{12}، x_2 ضریب پواسون ν_{12}، x_3 مدول الاستیک E_2 و x_4 مدول الاستیک E_1 می‌باشد.

جدول ۴-۱: خواص مواد کامپوزیتی ارتوتروپیک

No	ماده	$\sigma_\theta\ (MPa)$	$E_1(MPa)$	$E_2(MPa)$	ν_{12}	$G_{12}(MPa)$
۱	ای-گلس/اپوکسی	۱۰.۴	۳۹	۸.۶	۰.۲۸	۳.۸
۲	اس-گلس/اپوکسی	۱۰.۲	۴۳	۸.۹	۰.۲۷	۴.۵
۳	وون-گلس/اپوکسی	۷.۸۷	۲۹.۷	۲۹.۷	۰.۱۷	۵.۳
۴	کولار/اپوکسی	۱۸	۸۷	۵.۵	۰.۳۴	۲.۲
۵	کربن/اپوکسی	۱۳.۹	۱۴۲	۱۰.۳	۰.۲۷	۷.۲
۶	کربن پیک	۱۵.۴	۱۳۱	۸.۷	۰.۲۸	۵

شکل کلی تجزیه واریانس مدل رگرسیون خطی چند گانه در جدول زیر آورده شده است .همانطور که ملاحظه می‌شود، در مدل رگرسیونی مجموع تغییرات به دو عامل مجموع مربعات رگرسیون (SSR) و مجموع مربعات خطا (SSE) تجزیه می‌شود. در جدول زیر، n تعداد داده‌ها، P پارامترهای مدل، y بیشینه تنش محیطی محاسبه شده از روش تحلیلی، $\hat{y}$ میانگین بیشینه تنش محیطی می‌باشد. بدین

ترتیب می‌توان اثر معنی‌داری برای هر یک ازعامل‌های مدل ارزیابی شود.

پس از انتخاب یکی از چهار مدل رگرسیون خطی، اثرات متقابل، درجه دوم کاهش یافته، درجه دوم و نیز تجزیه واریانس، عامل‌هایی که اثرات معنی‌دار ندارند از مدل حذف خواهد شد. سپس می‌توان به کمک مدل نهایی ضریب تمرکز تنش را بر حسب ویژگی‌های مواد محاسبه کرد.

جدول ۴-۲: تجزیه واریانس مدل رگراسیونی

منبع تغییرات	درجه آزادی	مجموع مربعات	متوسط مربعات
رگرسیون	p-1	SSR=$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	MSR=SSR/p-1
باقیمانده	n-p	SSE=$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$	MSE=SSE/n-p
کل	n-1	SST=$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$	-

در ادامه با استفاده از نرم افزار آماری SPSS به بررسی آماری خروجی نشان داده شده در جدول ۴-۱ پرداخته می‌شود. که مقادیر تنش محیطی به عنوان متغیر وابسته و ۴ پارامتر مادی به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته شده‌اند. G_{12}، ν_{12}، E_1 و E_2 به ترتیب به عنوان متغیرهای اول تا چهارم معرفی شده‌اند.

در شکل زیر مقادیر R نشان داده شده است. مقدار R تصحیح شده نشان می‌دهد که چه مقدار از کل تنوع (واریانس) متغیر وابسته (مقادیر تنش محیطی) توسط چهار پارامتر مستقل (پارامترهای مادی) توجیه شده است. در این مطالعه این مقدار ۰.۹۸۳ می‌باشد که نشان دهنده دقت قابل قبولی می‌باشد.

جدول ۴-۳: مقادیر بدست آمده R در رگراسیون خطی چندگانه

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.998[a]	.997	.983	.50049

a. Predictors: (Constant), VAR00004, VAR00001, VAR00003, VAR00002

در جدول زیر مقادیر ثابت بدست آمده برای معادله ریگرسیون خطی نشان داده شده است که در ستون B ذکر شده‌اند. که در این ستون و از بالا به پایین به ترتیب نشان دهنده مقادیر b_0، b_1، b_2، b_3 و b_4 می‌باشند. که در نهایت رابطه بدست آمده با استفاده از ریگراسیون خطی چندگانه به صورت زیر می‌باشد.

$$Y=-7.424-0.89x_1+60.247x_2+0.267x_3+0.062x_4$$

$$Y = -7.424 - 0.89G_{12} + 60.247\nu_{12} + 0.267E_2 + 0.062E_1 \quad (۴-۷)$$

جدول ۴-۳: مقادیر ثابت رابطه بدست آمده در ریگراسیون خطی

Coefficients[a]

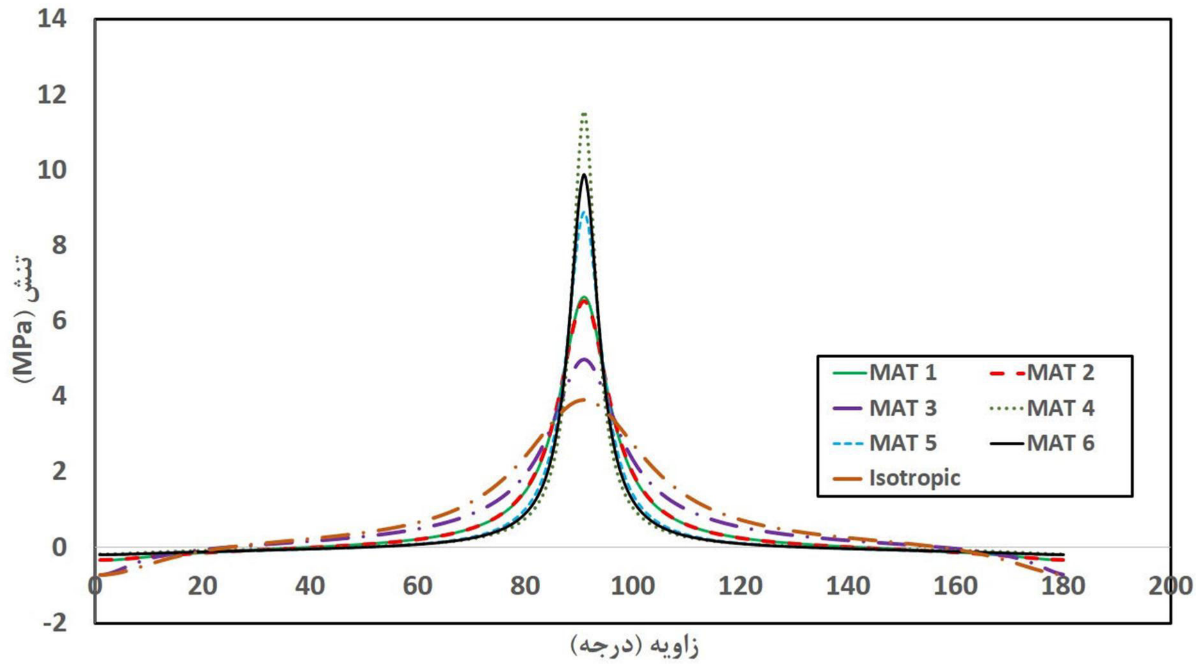
Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-7.424	9.478		-.783	.577
	VAR00001	-.890	.410	-.391	-2.173	.275
	VAR00002	60.247	26.469	.874	2.276	.264
	VAR00003	.267	.117	.623	2.280	.263
	VAR00004	.062	.011	.800	5.673	.111

a. Dependent Variable: VAR00005

در شکل زیر مقادیر توزیع تنش در اطراف گشودگی شبه مربعی برای ۶ ماده ارتوپروپیک ویسکوالاستیک جدول ۴-۱ و یک ماده ایزوتروپیک مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود مواد کامپوزیتی نسبت به ماده ایزوتروپیک دارای افزایش لحظه‌ای بیشتری است به طوری که در مواد کامپوزیتی تنش با شیب زیادی افزایش می‌یابد در حالی که در ماده ایزوتروپیک توزیع تنش با شیب ملایمی افزایش می‌یابد و میزان افزایش آن نسبت به مواد کامپوزیتی بسیار کمتر می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود در ماده ایزوتروپیک در ابتدای نمودار، مقادیر تنش کاهش بیشتری را دارد که نشان دهنده فشار بیشتر در زاویه صفر درجه در ماده ایزوتروپیک می‌باشد.

با مقایسه مواد کامپوزیتی با یکدیگر مشاهده می‌شود که هرچه ماکزیمم تنش در ماده ناشـی از تغییـر ماده افزایش یابد، نرخ افزایش تنش نیز افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شـود کـه میـزان توزیـع تنش در ماده کامپوزیتی کولار/اپوکسی نسبت به مابقی مواد بیشتر و میزان توزیع تنش در مـاده اس-گلس/اپوکسی نسبت به مابقی مواد کمتر می‌باشد.

مواد اس-گلس/اپوکسی و ای-گلس/اپوکسی تقریبا دارای رفتار یکسانی می‌باشند.

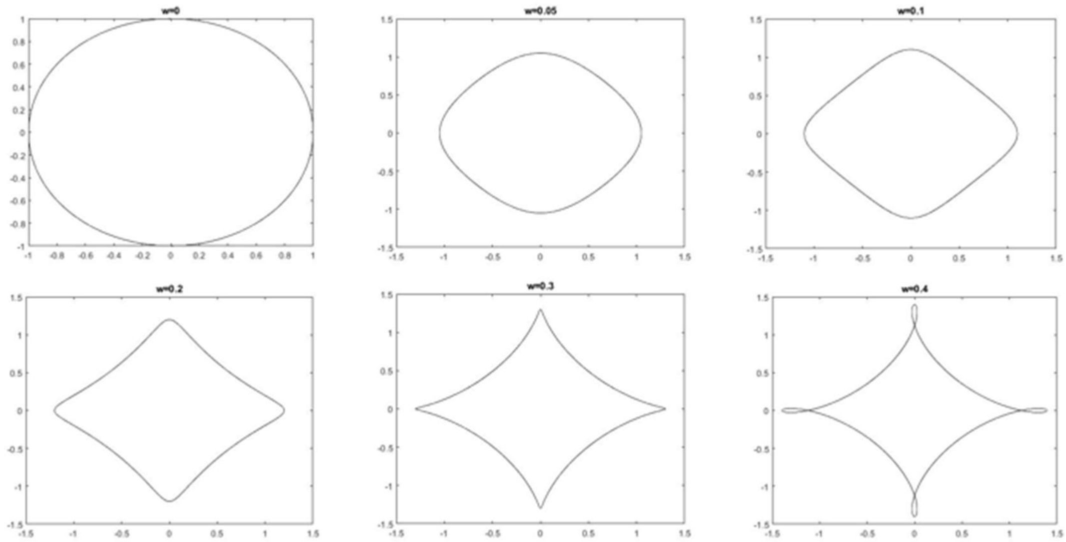


شکل ۴-۵مقادیر توزیع تنش در اطراف گشودگی شبه مربعی برای مواد مختلف

۴-۴-بررسی اثر انحنا

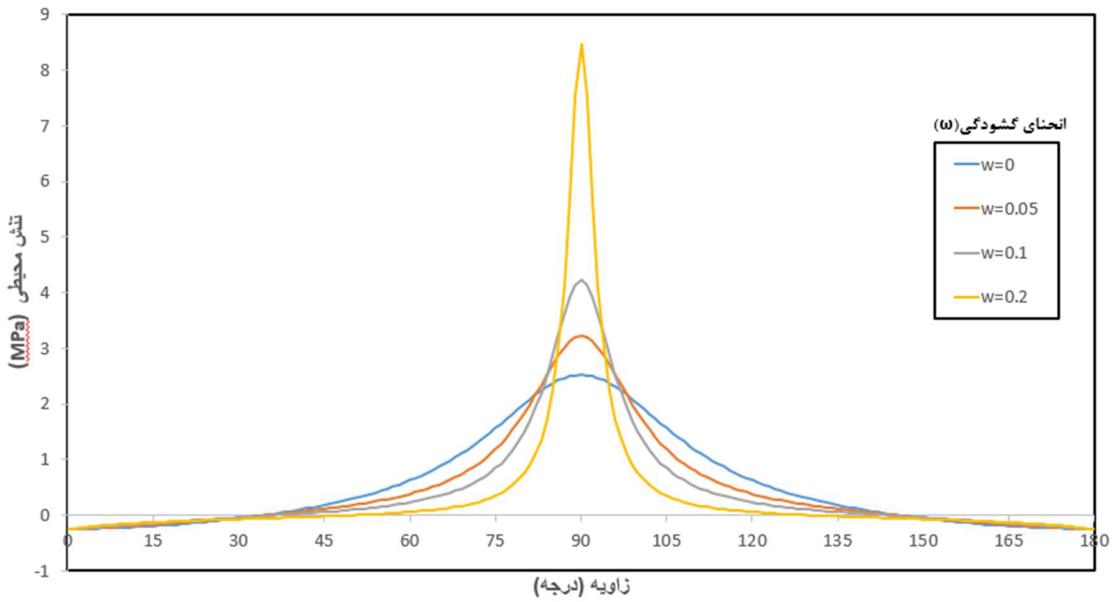
همانطور که در بخش قبل ذکر شد شکل هندسی گشودگی به پارامترهای n، c و w وابسته می‌باشد. مقادیر n و c برای گشودگی شبه مربع به ترتیب ۳ و ۱ می‌باشد. برای wهای مختلف در بازه 0<w<0.33، نقاط به دست آمده در فاصله $0 < \theta < 2\pi$ مربع با انحناهای مختلف را ایجاد می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش مقادیر w انحنای لبه‌های ضلع مربع تیزتر شده و به سمت

مربع کامل پیش می‌رود که به ازای مقدار *w=0.125* تبدیل به مربع خواهد شد. با افزاش مقدار *w*، هنگامی که *w* از ۰.۳۳ گذار خواهد کرد، ضلع‌های مجاور مربع همانند شکل زیر همدیگر را قطع خواهند کرد.



شکل ۴-۶ تاثیر انحنای گوشه (w) در شکل گشودگی شبه مربعی

در شکل زیر مقادیر توزیع تنش به ازای مقادیر مختلف w نشان داده شده است، در مقادیر w کمتر به دلیل آنکه لبه‌های مربع دارای تیزی کمتری می‌باشد میزان تمرکز تنش در این نقاط بسیار کم می‌باشد و با افزایش مقادیر w و افزایش تیزی لبه‌ها میزان تنش در این نقاط افزایش چشم‌گیری خواهد داشت. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر w، میزان یکنواختی تا قبل از شروع افزایش سریع، افزایش می‌یابد، یا به عبارتی با افزایش w شیب افزایشی تنش بیشتر می‌شود.



شکل ۴-۷توزیع تنش در اطراف گشودگی شبه مربع به ازای w های مختلف

در جدول ۴-۵ مقادیر ماکزیمم تنش در برای شش ماده مختلف، برای سه مقدار w مختلف ارائه شده است. از نتایج این جدول به منظور دست یافتن به تابع خطی با استفاده از روش ریگراسیون خطی استفاده شده است. با استفاده از نرم‌افزار SPSS، ثوابت ماده رگریسیون خطی با دقت خوبی بدست آمده است که جدول ۴-۶ نشان دهنده پارامتر حداقل مربعات بالایی می‌باشد. در جدول ۴-۷ ضرایب پارامترهای وابسته معادله ریگراسیون در ستون B نشان داده شده است.

معادله به دست آماده برای ماکزیمم تنش وابسته به خواص مکانیکی مواد و انحنای گشودگی به صورت زیر می‌باشد.

جدول ۴-۴: مقادیر ماکزیمم تنش به ازای پارامترهای خواص مکانیکی و انحنای گشودگی w

w	G_{12}	ν_{12}	E_2	E_1	σ_θ	ماده	No
۰.۰۵					۷.۹		
۰.۱	۳.۸	۰.۲۸	۸.۶	۳۹	۱۰.۴	ای-گلس/اپوکسی	۱
۰.۲					۲۰.۹		
۰.۰۵					۷.۸		
۰.۱	۴.۵	۰.۲۷	۸.۹	۴۳	۱۰.۲	اس-گلس/اپوکسی	۲
۰.۲					۲۰.۵		
۰.۰۵					۶.۰۹		
۰.۱	۵.۳	۰.۱۷	۲۹.۷	۲۹.۷	۷.۸۷	وون-گلس/اپوکسی	۳
۰.۲					۱۵.۴		
۰.۰۵					۱۳.۴		
۰.۱	۲.۲	۰.۳۴	۵.۵	۸۷	۱۸	کولار/اپوکسی	۴
۰.۲					۳۷.۲		
۰.۰۵					۱۰.۵		
۰.۱	۷.۲	۰.۲۷	۱۰.۳	۱۴۲	۱۳.۹	کربن/اپوکسی	۵
۰.۲					۲۸.۳		
۰.۰۵					۱۱.۶		
۰.۱	۵	۰.۲۸	۸.۷	۱۳۱	۱۵.۴	کربن پیک	۶
۰.۲					۳۱.۶		

جدول ۴-۵: مقادیر حدقل مربعات ریگرسیون خطی

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	.960[a]	.922	.889	2.92816

a. Predictors: (Constant), VAR00005, VAR00001, VAR00002, VAR00004, VAR00003

جدول ۴-۶: ضرایب ثابت ریگراسیون خطی مرتبه ۵

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	-22.346	32.042		-.697	.499
	VAR00001	110.612	11.067	.807	9.994	.000
	VAR00002	-1.164	1.384	-.206	-.841	.417
	VAR00003	76.421	89.408	.448	.855	.409
	VAR00004	.338	.396	.318	.853	.410
	VAR00005	.080	.037	.419	2.174	.050

a. Dependent Variable: VAR00006

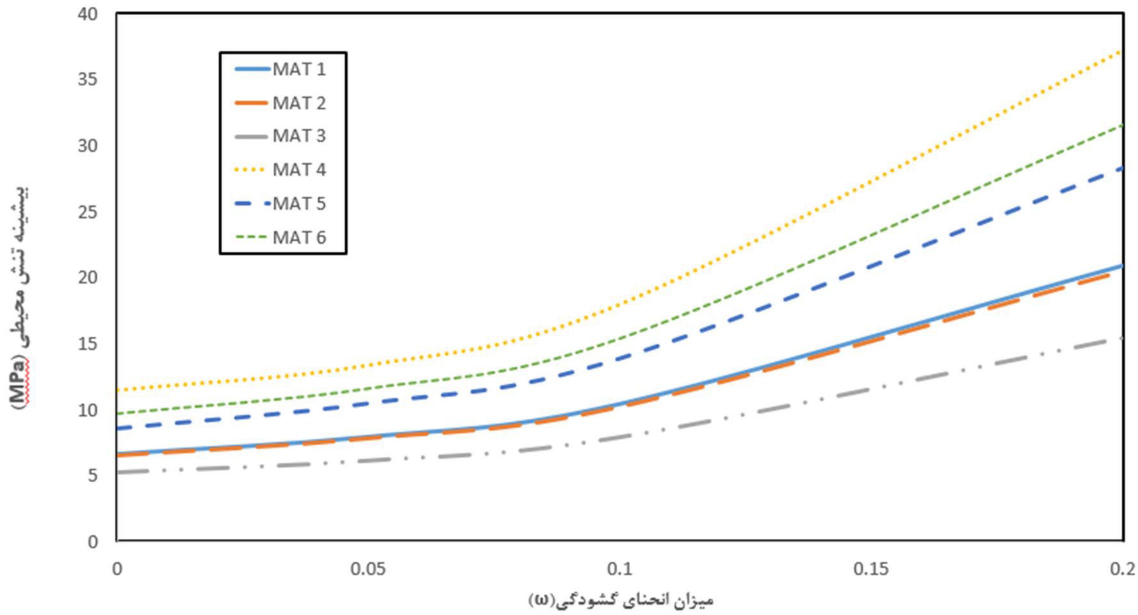
$$Y = -22.346 + 110.612x_1 - 1.164x_2 + 76.421x_3 + 0.338x_4 + 0.080x_5$$
$$Y = -22.346 + 110.612\mathrm{W} - 1.164G_{12} + 76.421\nu_{12} + 0.338E_2 + 0.080E_1$$

در شکل زیر اثر زاویه انحنا در مواد مختلف بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش میزان انحنا میزان تنش افزایش می‌یابد، افزایش میزان تنش تا w=0.1 با شیب ملایم می‌باشد و پس از آن به دلیل نوک تیز شدن لبه‌های گشودگی میزان افزایش ماکزیمم تنش در لبه‌های گشودگی به شدت افزایش می‌یابد.

همچنین در شکل زیر مشاهده می‌شود که میزان اختلاف ماکزیمم تنش در در مواد مختلف، در اطراف گشودگی با افزایش زاویه انحنا، افزایش می‌یابد.

در مواد مختلف میزان شیب متفاوت می‌باشد که در ماده ۴ تغییرات افزایش تنش دارای بیشترین

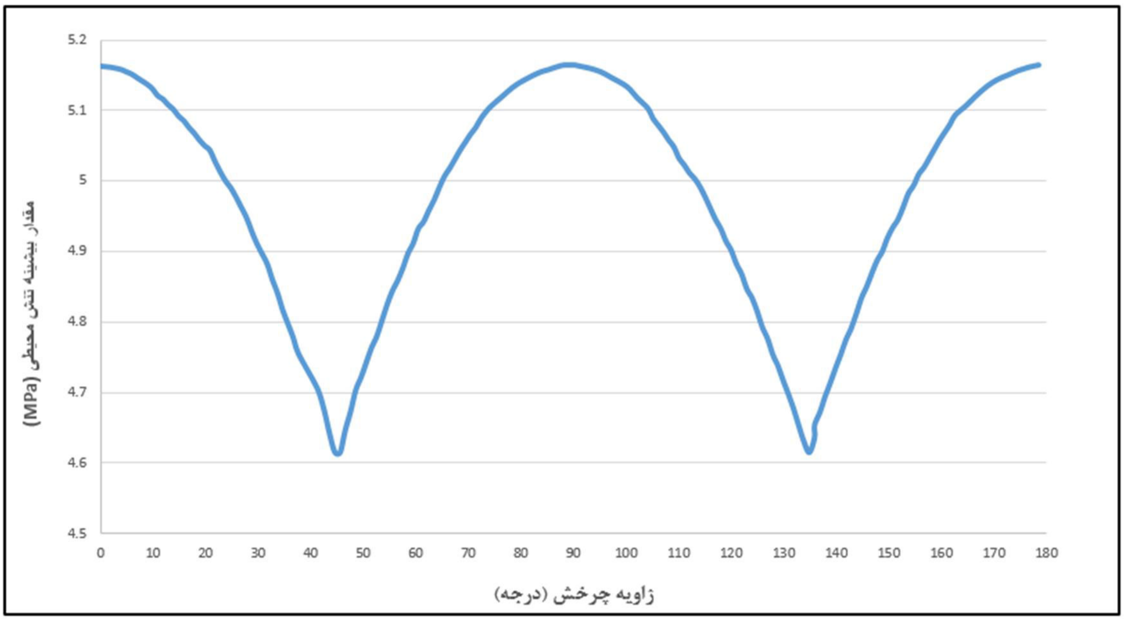
شیب و ماده۱ دارای کمترین نرخ افزایش تنش می‌باشدو در نتیجه میزان افزایش تنش در مواد مختلف ثابت نمی‌باشد.



شکل ۴-۸ بررسی اثر زاویه انحنا در مواد ارتوتروپیک ویسکو الاستیک بر روی ماکزیمم تنش در اطراف گشودگی شبه مربعی

۴-۵-بررسی اثر زاویه چرخش

در شکل زیر اثر زاویه چرخش بر رفتار ویسکوالاستیک ماده ای-گلس/اپوکسی نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود میزان تنش در زوایای صفر، ۹۰ و ۱۸۰ بیشترین میزان می‌باشند در حالیکه این میزان در زاویه ۴۵ درجه کمترین میزان تنش نسبت به مابقی زوایا وارد می‌شود. در نتیجه گشودگی‌هایی با زاویای صفر و ۴۵ به ترتیب گشودگی‌های نامطلوب و مطلوب درنظر گرفته می‌شود.



شکل ۴-۹ میزان تنش اطراف گشودگی مختلف با زاویه چرخش مختلف

در جدول زیر میزان حداکثر تنش برای زاویه چرخش‌های صفر، ۳۰ و ۴۵ برای دو حالت w مختلف و برای مواد مختلف نشان داده شده است. در نتیجه در پیش‌بینی حداکثر تنش چهار پارامتر مادی، پارامتر زاویه چرخش و پارامتر w تاثیر گذار می‌باشد. با استفاده از ریگراسیون خطی تابعی بر اساس این شش متغیر با استفاده از نرم افزار SPSS ارائه شده است که می‌توان میزان حداکثر تنش را برای مواد مختلف به ازای زاویه چرخش و w مختلف به راحتی پیش‌بینی نمود.

جدول ۴-۷: مقادیر ماکزیمم تنش به ازای پارامترهای خواص مکانیکی و انحنای گشودگی w و زاویه چرخش

No	ماده	σ_θ	E_1	E_2	ν_{12}	G_{12}	w	β
۱	ای-گلس/اپوکسی	۷.۹	۳۹	۸.۶	۰.۲۸	۳.۸	۰.۰۵	۰
		۷.۵						۳۰
		۷.۱۵						۴۵
		۱۰.۴					۰.۱	۰
		۹.۵						۳۰
		۹						۴۵
۲	اس-گلس/اپوکسی	۷.۸	۴۳	۸.۹	۰.۲۷	۴.۵	۰.۰۵	۰
		۷.۴						۳۰
		۷						۴۵
		۱۰.۲					۰.۱	۰
		۹.۳						۳۰
		۸.۸						۴۵
۳	ووی-گلس/اپوکسی	۶.۰۹	۲۹.۷	۲۹.۷	۰.۱۷	۵.۳	۰.۰۵	۰
		۵.۷						۳۰
		۵.۲						۴۵
		۷.۸۷					۰.۱	۰
		۷.۳						۳۰
		۶.۶						۴۵
۴	کولار/اپوکسی	۱۳.۴	۸۷	۵.۵	۰.۳۴	۲.۲	۰.۰۵	۰
		۱۲.۵						۳۰
		۱۱.۷						۴۵
		۱۸					۰.۱	۰
		۱۶.۸						۳۰
		۱۵.۷						۴۵
۵	کربن/اپوکسی	۱۰.۵	۱۴۲	۱۰.۳	۰.۲۷	۷.۲	۰.۰۵	۰
		۹.۶						۳۰
		۹						۴۵
		۱۳.۹					۰.۱	۰
		۱۲.۳						۳۰
		۱۱						۴۵
۶	کربن پیک	۱۱.۶	۱۳۱	۸.۷	۰.۲۸	۵	۰.۰۵	۰
		۱۰.۷						۳۰
		۱۰						۴۵
		۱۵.۴					۰.۱	۰
		۱۳.۶						۳۰
		۱۲.۵						۴۵

خروجی نرم افزار SPSS به صورت جدول زیر می‌باشد که ستون B ثوابت ریگراسیون خطی مورد نظر می‌باشد و در نهایت تابع ریگراسیون با دقت مناسبی به صورت زیر ارائه می‌شود.

جدول ۴-۸: ضرایب ثابت ریگراسیون خطی مرتبه ۶

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	-9.608	4.868		-1.974	.058
	VAR00001	-.035	.006	-.208	-6.276	.000
	VAR00002	52.700	4.187	.417	12.586	.000
	VAR00003	-.710	.210	-.341	-3.382	.002
	VAR00004	51.428	13.561	.817	3.792	.001
	VAR00005	.223	.060	.571	3.725	.001
	VAR00006	.046	.006	.655	8.272	.000

a. Dependent Variable: VAR00007

$$Y=-9.608-0.035x_1+52.7x_2-0.71x_3+51.428\ x_4+0.223x_5+0.046x_6$$

$$Y=-9.608-0.035\beta+52.7w-0.71G_{12}+51.428\nu_{12}\quad+0.223E_2+0.046\ E_1 \qquad (۸-۴)$$

فصل ۵: جمع بندی و پیشنهادها

۵-۱-جمع بندی

در این پایان نامه ابتدا با استفاده از توابع پتانسیل مختلط و با بکارگیری نگاشت همنوا و حل معادلات انتگرالی، توزیع تنش اطراف گشودگی برای یک مواد کامپوزیتی ارتوتروپیک با رویکرد الاستیک محاسبه شده است. سپس با استفاده از معادلات ویسکوالاستیک خطی تنش‌های الاستیک به ویسکوالاستیک تبدیل شده است. همچنین نتایج بدست آمده با نتایج دیگر مقالات که برای گشودگی مثلثی بدست آمده بود، صحت گذاری شد. نتایج حاصل تطابق قابل قبولی با نتایج و مقادیر گزارش شده دارد. در ادامه با استفاده از رگرسیون خطی و نتایج بدست آمده برای شش ماده مختلف، تابعی برحسب چهار پارامتر مادی کامپوزیت ارتوتروپیک ارائه شد. در انتها اثر پارامترهای مهمی از جمله زاویه چرخش گشودگی و انحنای گشودگی در توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربع نیز بررسی شد.

همانطور که در نتایج اولیه ویسکوالاستیک مشاهده شد مقادیر تنش σ_x به دلیل قرارگیری در راستای محور الیاف‌ها میزان تنش بیشتری را نسبت به σ_y نشان می‌دهد. بیشترین مقادیر تنش در گشودگی شبه مربعی مربوط به زاویای ۹۰ و ۲۷۰ درجه می‌باشد. مقادیر این تنش در زاویای تقریبا ۲۵، ۱۶۰، ۲۰۰ و ۳۳۰ به صفر می‌رسند همچنین در زاویای صفر،۱۸۰ و ۳۶۰ به کمترین میزان خود می‌رسند و دارای مقادیر منفی می‌باشند.

در نتایج رگرسیون نشان داده شده که با استفاده از رگرسیون خطی و با داشتن پارامترهای مادی ماده کامپوزیت می‌توان ماکزیمم تنش در اطراف گشودگی را نیز با دقت قابل قبولی تخمین زد.

با افزایش مقادیر w انحنای لبه‌های ضلع مربع تیزتر شده و به سمت مربع کامل پیش می‌رود که به ازای مقدار $w=0.125$ تبدیل به مربع خواهد شد. به ازای مقادیر w کمتر به دلیل آنکه لبه‌های مربع دارای تیزی کمتری می‌باشد میزان تمرکز تنش در این نقاطه بسیار کم می‌باشد و با افزایش مقادیر w و افزایش تیزی لبه‌ها میزان تنش در این نقاط افزایش چشم‌گیری خواهد داشت. تا جائیکه با افزایش w از ۰.۱۲۵ به ۰.۲ میزان ماکزیمم تنش تقریبا دو برابر خواهد شد.

با بررسی‌های صورت گرفته بر روی زاویه چرخش‌های مختلف، میزان تنش در زوایای صفر، ۹۰ و ۱۸۰ بیشترین میزان می‌باشند در حالیکه این میزان در زاویه ۴۵ درجه کمترین میزان تنش نسبت به مابقی زوایا وارد می‌شود. در نتیجه گشودگی‌هایی با زاویای صفر و ۴۵ به ترتیب گشودگی‌های نامطلوب و مطلوب درنظر گرفته می‌شود.

تابع رگراسیون خطی وابسته به ۶ پارامتر، از جمله ۴ پارامتر مادی و ۲ پارامتر هندسی به صورت زیر پیشنهاد می‌شود.

$$Y=-9.608-0.035\beta+52.7w-0.71G_{12}+51.428\nu_{12}\quad+0.223E_2+0.046E_1 \qquad (۸-۴)$$

۵-۲-موضوعات پیشنهادی

- بررسی توزیع تنش در صفحات ویسکوالاستیک ارتوتروپیک با گشودگی شبه-مربعی با بارگذاری‌های حرارتی
- بررسی توزیع تنش در صفحات ویسکوالاستیک مختلف با گشودگی‌های مختلف تحت بارگذاری خستگی
- بررسی هندسه گشودگی بر شروع و رشد ترک
- بررسی امکان استفاده از گشودگی به منظور جلوگیری از رشد ترک یا انحراف ترک

مراجع

[1] N.M. Abuelfoutouh, (1993)"Preliminary Design of Unstiffend Composite Shells", Symposium of 7th Technical Conference of ASC, pp. 693-786.

[2] Savin GN. Stress concentration at openings. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat; 1951.

[3] Likhnitskii SG. Anisotropic plates. Gordon and Breach; 1968.

[4] Hilton HH. A summary of linear viscoelastic stress analysis. Aeronautical and Astronautically Engineering Department, University of Illinois Technical Report AAE652, March 1964.

[5] Lee EH. Some recent developments in linear viscoelastic stress analysis. Springer; 1964.

[6] Williams ML. Structural analysis of viscoelastic materials. AIAA J 1964;2:758.

[7] Lee EH. Stress analysis in viscoelastic bodies. Q Appl Math 1965;32:661.

[8] Morland LW, Lee EH. Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation. Trans Soc Rheol 1960:233.

[9] Biot MA. Linear thermodynamics and the mechanics of solids. J Appl Mech ASME 1958:1.

[10] Hashin Z. Viscoelastic behavior of heterogeneous media. J Appl Mech 1965;32:630.

[11] Hashin Z. Viscoelastic fiber reinforced materials. AIAA J 1966;4:1411.

[12] Abolinsh D. Elasticity tensor for unidirectionally reinforced elastic material. Polymer Mech 1965;4:25–59.

[13] Allam MNM, Pobedria BE. On the solution of quasi-static problem in anisotropic viscoelasticity. ISV Acad Nauk Ar SSR, Mech 1978;31:19–27 [in Russian].

[14] Illyushin AA, Pobedria BE. Foundations of mathematical theory of thermo viscoelasticity. Moscow: Nauka; 1970 [in Russian].

[15] Bland D. The linear theory of visco-elasticity. New York: Pergamon; 1960.

[16] Halpin CJ, Pagano NJ. Observations on linear anisotropic viscoelasicity. J Compos Mater 1968;2:68–80.

[17] Allam MNM, Appleby PG. On the stress concentrations around a circular hole in a fiber-reinforced viscoelastic plate. Res Mech 1986;19:113–26.

[18] Allam MNM. Torsion of a composite, viscoelastic prismatic bar of triangular cross-section. Indian J Pure Appl Math 1982;13:1364–8.

[19] Allam MNM, Ghaleb AF. Torsion of a composite, viscoelastic prismatic bar of rectangular cross-section. Appl Math Modell 1982;6:197–201.

[20] Whitworth HA, Mahase H. Stress concentration in, graphite/epoxy laminates containing a circular hole. J Adv Mater 1999;4.

[21] Drozdov AD. A model of cooperative relaxation in finite viscoelasticity of amorphous polymers. Int J Non-Linear Mech 2000;35:897–909.

[22] Thuruthimattam BJ, Waas AM, Wineman AS. Stress transfers modeling in viscoelastic polymer matrix composites. Int J Non-Linear Mech 2001;36:69–87.

[23] Allam MNM, Zenkour AM. Bending response of fiber reinforced viscoelastic arched bridge model. Appl Math Modell 2003;27:233–48.

[24] Nayman, MI. Stresses in a beam with curvilinear opening. Trudy TsAG1. No. 313, 1937.

[25] Krasyukov VP. Tenstion of an orthotropic plate with an opening having three symmetry axes and which is almost circular. Dissertation, Saratovski Gosudarestvenny Universitet, 1952.

[26] Katheleen MA. Boundary problem in orthotropic generalized plane stress. Q J Mech Appl Math 1952;5.

[27] Allam MNM, Appleby PG. On the plane deformation of fiberreinforced viscoelastic plates. Appl Math Modell 1985;9:341–6.

[28] Greenspan M. Effect of a small hole on the stresses in a uniformly loaded plate. Appl Math 1944;2:69–71.

[29] Joseph JA, Brock JS. The stress around a small opening in a beam subjected to pure bending. J Appl Mech 1950;17.

[30] Burmistrov EF. Stress concentration around oval openings of particular. Inzhenernyy Sbornik XVII, 1953.

[31] Allam MNM. Stress concentrations in structurally anisotropic viscoelastic plate with a square hole. Military Technical College, Cairo, Egypt, 1987, ST-4. p. 507–16.

[32] Allam MNM, Zenkour AM. Stress concentration factor of structurally anisotropic composite plates weakened by an oval opening. Compos Struct 2003;61:199–211.

[33] Zenkour AM, Allam MNM. Stresses around filled and unfilled circular holes in a fiber-reinforced viscoelastic plate under bending. Mech Adv Mater Struct 2005;12:379–89.

[34] J. Rezaeepazhand, M. Jafari, (2010) Stress Concentration in Metallic Plates with Special Shaped Cutout, International Journal of Mechanical Sciences, 52, pp. 96-102.

[35] Jacek J. Skrzypek and Artur W. Ganczarski, Constitutive Equations for Isotropic and Anisotropic Linear Viscoelastic Materials, Mechanics of Anisotropic Materials pp 57-85.

[36] M.N.M. Allam, A.M. Zenkour, H.F. El-Mekawy, Stress concentrations in a viscoelastic composite plate weakened by a triangular hole, Composite Structures 79 (2007) 1–11.

Abstract

Failure is usually due to geometric discontinuities such as cracks, openings, poses and heights, and any other discontinuities, which is why one of the most important issues in designing structures. The main reason for the failure of the material is to reduce the strength of the material and to create a stress concentration. With increasing tensions, these discontinuities grow and lead to discontinuity and damage growth that ultimately leads to the ultimate failure of matter. Exact Material Behavior Despite Discontinuity, Helps designers make the most effective design from the material. In addition to the hole geometry and its placement in relation to the loading and radius of curvature of the openings in the material behavior, it will be very effective.

In this thesis, the distribution of stress around quasi-square hole in an infinity orthotropic-viscoelastic plate under axial loading has been investigated using the effective modulus method and the Boltzmann's superposition principle and the corresponding method. First, the stress distribution around the quasi-square opening in one The infinity orthotropic platet is calculated using the Lekhnitskii complex variable method in terms of the function of mechanical properties E_1, E_2, G_{12}, υ_{12}. Then, using the Boltzmann's superposition principle and the method of corresponding method, the solution of the elastic problem turns into a viscoelastic solution in the Laplace area. Then, by inversing Laplace in reciprocal numerical methods, the viscoelastic solution in the time domain is also obtained. Finally, using a multiple linear regression for quasi-square hole, an explicit relationship is also proposed for stress components based on mechanical properties. Then the effect of the curvature parameters of hole and rotation angle is also presented. Finally, the linear regression function is based on six parameters, including four composite material parameters and two parameters of the angle and rotation of curvature of the hole.

Keywords: stress analysis, Viscoelastic plate, hole, corresponding method

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Energy Conversion Engineering

Study Of Stress Distribution around Quasi-Square Hole in Infinite Orthotropic-Viscoleastic Plate Under Axial loading

By: Alireza Talebi

Supervisor:

Dr. Mohammad jafari

September 2018