





دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل پس کمانش تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی متغیر

تابعی در محیط حرارتی

نگارنده: عارفه باباجانی شانی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا شاطرزاده

بهمن ماه ۱۳۹۷

تقدیر و تشکر

اینجانب معتقد است که طی مسیر و رسیدن به مقصود بی لطف و عنایت حق تعالی میسر نمی‌شود،
زیرا که:

نوربخش تمام خلق یکی‌ست/آینه گر هزارها باشد.

با سپاس بی‌کران به محضر مقدّس الهی؛

از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر شاطرزاده سپاسگزارم که راهنما و چراغ راه اینجانب

در این پایان‌نامه بودند.

قدردان خانواده‌ی دوست‌داشتنی‌ام، پدر و مادر مهربانم، حامی همیشگی من در همه‌ی مراحل

زندگی و همسر عزیزم که با کمک‌های علمی خود مشوق و راهنمای من در انجام هر چه بهتر این

پایان‌نامه بودند، هستم.

چراغ اگر می‌خواهد که او را بر بلندی نهند برای دیگران می‌خواهد و برای خود نمی‌خواهد

او را چه زیر چه بالا هر جا که هست چراغ منورست. آلا می‌خواهد که نور او به دیگران رسد.

این آفتاب که بر بالای آسمان است، اگر زیر باشد همان آفتاب است؛ آلا عالم تاریک ماند.

پس او بالا برای خود نیست برای دیگران است. (فیه ما فیه)

عارفه باباجانی

بهمن ۱۳۹

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم؛

که از ابتدای راه همراه و حامی من بوده و با حمایت‌ها و دلگرمی‌های خود راه‌گشای مشکلات بودند.

و همسرم سپهر،

که با حمایت، صبر و عشق خود کمک بزرگی در تهیه‌ی این پایان‌نامه کرد.

دین و دل و حُسن و هنر و دولت و دانش

چندان که نگه می‌کنمت هر ششی ای عشق (ها.سایه)

تعهد نامه

اینجانب عارفه باباجانی شانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل پس کمانش

تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی متغیّر تابعی در محیط حرارتی تحت راهنمایی جناب

آقای دکتر علیرضا شاطرزاده متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « Shahrood University » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

پایان‌نامه‌ی حاضر رفتار پس‌کمانشی تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیّر تابعی را در محیط حرارتی و در شرایط مرزی مختلف (دوسرگردار و دوسرلولا) ارائه می‌دهد. خواص ماده به طور متغیّر در راستای ضخامت تیر شبیه‌سازی شده و وابستگی خواص اجزای تشکیل‌دهنده به دما نیز در نظر گرفته شده است. تیر تحت تغییرات دمای یکنواخت و غیریکنواخت فرض شده است. به منظور در نظر گرفتن کرنش برشی جانبی، تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و مراتب بالاتر به کار گرفته شده‌اند. معادله‌های حاکم بر اساس روابط غیرخطی هندسی فون-کارمن، به کمک معادلات تعادل تیر و شامل پارامترهای دمایی استخراج شده‌اند. روش دیفرانسیل کوادریچر (DQM) به همراه یک الگوریتم بازگشتی به عنوان یک تکنیک حل غیرخطی برای حل معادله‌های دیفرانسیل حاکم، محاسبه‌ی دماهای کمانش بحرانی و تعیین مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی تیرهای FG-CNTRC به کار گرفته شد. با مقایسه‌ی نتایج پژوهش حاضر با آنچه در منابع دیگر آمده است، کارایی، همگرایی و درستی روش DQ تأیید شده است. در رابطه با جزئیات تأثیر هر یک از تئوری‌های تغییر شکل برشی در نظر گرفته شده، طرح توزیع و کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، شرایط مرزی و نسبت لاغری تیر بر روی دمای کمانش و عملکرد پس‌کمانشی تیرهای FG-CNTRC بحث صورت گرفته است. نتایج نشان می‌دهد کمانش تیر FG-CNTRC تحت تغییرات دمایی یکنواخت در مقایسه با شرایط دمایی غیریکنواخت، با احتمال بیشتری می‌باشد. نتایج عددی حاضر نشان می‌دهند تیر CNTRC با مقدار متوسطی از کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، الزاماً منجر به دمای کمانش و مسیر تعادل پس‌کمانش متوسطی نمی‌شوند. تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده با CNT به ترتیب با طرح‌های توزیع FGX، UD و FGO دارای بالاترین دمای کمانش و مسیر تعادل پس‌کمانشی می‌باشند. همچنین بر اساس پاسخ پس‌کمانشی، نتیجه گرفته شده است که به ازای مقادیر نسبت لاغری معینی برای تیرهای UD-CNTRC و FGX-NTRC، می‌توان از تأثیر تغییر شکل برشی چشم‌پوشی کرد.

کلمات کلیدی: کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی، تیر متغیّر تابعی، کمانش حرارتی، مسیر تعادل

پس‌کمانش، روش دیفرانسیل کوادریچر

فهرست مطالب

فهرست مطالب.....	ز
فهرست شکل ها.....	ی
فهرست جداول.....	ک
۱- پیش گفتار.....	۱
۱-۱ مقدمه.....	۲
۲- مروری بر منابع علمی.....	۵
۱-۲ کامپوزیت ها.....	۶
۱-۱-۲ انواع کامپوزیت ها.....	۶
۲-۱-۲ نانو کامپوزیت ها.....	۸
۲-۲ نانولوله های کربنی.....	۹
۱-۲-۲ انواع نانولوله های کربنی.....	۹
۲-۲-۲ سنتز نانولوله های کربنی.....	۱۲
۳-۲-۲ خواص حرارتی نانولوله های کربنی.....	۱۳
۳-۲ کامپوزیت های تقویت شده با نانولوله های کربنی متغیر تابعی.....	۱۳
۱-۳-۲ روش های ساخت FGM ها.....	۱۴
۴-۲ مکانیک غیر خطی و پدیده ی کمانش.....	۱۵
۱-۴-۲ مفهوم پایداری.....	۱۵
۲-۴-۲ انواع ناپایداری و کمانش سازه ها.....	۱۶
۵-۲ تئوری تغییر شکل برشی تیرها.....	۱۸

۱۹.....	تئوری اویلر-برنولی (EBT).....	۱-۵-۲
۱۹.....	تئوری تیموشنکو (TBT) یا تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT).....	۲-۵-۲
۲۰.....	تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم (TSDT).....	۳-۵-۲
۲۱.....	تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی (TrSDT).....	۴-۵-۲
۲۱.....	تئوری تغییر شکل برشی نمایی (ESDT).....	۵-۵-۲
۲۱.....	تئوری تغییر شکل برشی آیدو گدو (ASDT).....	۶-۵-۲
۲۲.....	مروری بر پژوهش‌های انجام شده.....	۶-۲
۲۹.....	فرمول‌بندی و حل مسأله.....	۳-
۳۰.....	مقدمه.....	۱-۳
۳۰.....	مدل و خواص تیر کامپوزیتی.....	۲-۳
۳۲.....	قانون اختلاط.....	۱-۲-۳
۳۴.....	خواص SWCNT نوع دسته‌صندلی (۱۰، ۱۰).....	۱-۲-۳-۱
۳۶.....	خواص PMMA.....	۱-۲-۳-۲
۳۶.....	میدان جابه‌جایی.....	۳-۳
۳۷.....	میدان دما.....	۴-۳
۳۷.....	میدان کرنش و رابطه‌ی غیرخطی کرنش-جابه‌جایی.....	۵-۳
۴۰.....	معادله‌های حاکم بر پایداری تیر CNTRC.....	۶-۳
۴۳.....	شرایط مرزی.....	۷-۳
۴۴.....	روش حل معادلات غیرخطی حاکم بر مسأله.....	۸-۳
۴۴.....	شرح مختصری پیرامون روش‌های عددی.....	۱-۸-۳
۴۵.....	روش DQ.....	۲-۸-۳
۴۷.....	اعمال گسسته‌سازی DQ بر دستگاه معادلات غیرخطی حاکم بر تیر CNTRC.....	۳-۸-۳
۵۰.....	اعمال شرایط مرزی.....	۴-۸-۳
۵۶.....	کمانش از نوع دوشاخگی تیرهای FG-CNTRC.....	۵-۸-۳

۵۷.....	۶-۸-۳ پاسخ پس کمانشی تیرهای FG-CNTRC
۵۹.....	۴- نتایج و بحث
۶۰.....	۴-۱ مقدمه
۶۰.....	۴-۲ یافتن حداقل تعداد گره در روش DQ
۶۳.....	۴-۳ صحت سنجی الگوریتم بازگشتی جهت تعیین مسیر تعادل پس کمانش
۶۵.....	۴-۴ تعیین مسیر تعادل پس کمانش حرارتی برای تیرهای CNTRC
۶۶.....	۴-۵ مقایسه‌ی تأثیر چگونگی توزیع تقویت کننده بر مسیر تعادل پس کمانشی
	۴-۶ بررسی تأثیر کسر حجمی نانولوله‌ها بر روی دمای کمانش (T_1) تیرهای CNTRC تحت تغییرات دمایی یکنواخت
۶۷.....	۴-۷ محاسبه‌ی دمای کمانش (T_2) تیرهای CNTRC دوسر لولا تحت تغییرات دمایی غیر یکنواخت
۶۹.....	۴-۸ تأثیر نسبت دمای T_1/T_2 بر مسیر تعادل پس کمانش حرارتی تیر FG-CNTRC
۷۳.....	۴-۹ بررسی تأثیر نسبت لاغری (L/H) بر دماهای کمانش
۷۴.....	۴-۱۰ تحلیل پاسخ‌های کمانشی و پس کمانشی با تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی
	۴-۱۰-۱ محاسبه‌ی دمای کمانش تیرهای CNTRC تحت تغییرات دمایی یکنواخت بر اساس تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی
۷۴.....	۴-۱۰-۲ مقایسه‌ی مسیر تعادل پس کمانش حرارتی تیرهای CNTRC تحت تغییرات دمایی یکنواخت به ازای تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی
۷۶.....	۴-۱۰-۳ مقایسه‌ی مسیر تعادل پس کمانش حرارتی تیرهای CNTRC تحت تغییرات دمایی یکنواخت به ازای تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی
۸۳.....	۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۸۴.....	۵-۱ نتیجه‌گیری
۸۵.....	۵-۲ پیشنهادها
۸۷.....	منابع

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۲- تصویر شماتیک انواع کامپوزیت‌ها بر اساس نوع تقویت‌کننده [۳۸]. ۸.....
- شکل ۲-۲- ساختارهای مختلف SWCNT [۴۱]. ۱۰.....
- شکل ۳-۲- ساختار الف (SWCNT، ب) DWCNT و ج) MWCNT [۴۱]. ۱۱.....
- شکل ۴-۲- تصویری از FGM الف) نمای میکروسکوپی، ب) ریزساختار [۴۵]. ۱۴.....
- شکل ۵-۲- تعادل ایستایی الف) تعادل پایدار، ب) تعادل ناپایدار [۴۸]. ۱۶.....
- شکل ۶-۲- تیر تحت بارگذاری محوری. مسیر پس‌کمانش پایدار و مسیر خطی ناپایدار [۴۸]. ۱۷.....
- شکل ۷-۲- مسیر پس‌کمانش پایدار [۴۸]. ۱۷.....
- شکل ۸-۲- مسیر پس‌کمانش ناپایدار [۴۸]. ۱۸.....
- شکل ۹-۲- خمش یک تیر طبق تئوری اویلر-برنولی [۵۶]. ۱۹.....
- شکل ۱۰-۲- خمش یک تیر طبق تئوری تیموشنکو [۵۶]. ۲۰.....
- شکل ۱-۳- الف) تصویر شماتیک تیر CNTRC، ب) طرح‌های توزیع متفاوت CNT در سطح مقطع تیر. ۳۱.....
- شکل ۲-۳- المان خطی قبل و بعد از تغییر شکل. ۳۸.....
- شکل ۳-۳- تیر تحت نیروی محوری. ۴۰.....
- شکل ۴-۳- علامت قراردادی مثبت نیروها و ممان‌های وارد بر المان الف) قبل از تغییر شکل، ب) بعد از تغییر شکل. ۴۱.....
- شکل ۵-۳- شبکه‌بندی روش DQ برای دامنه‌ی مستطیلی. ۴۵.....
- شکل ۶-۳- گره‌بندی تیر الف) نقاط انتخابی با فاصله‌ی برابر، ب) نقاط انتخابی با فاصله‌ی نابرابر. ۴۸.....
- شکل ۱-۴- مقایسه مسیر تعادل پس‌کمانشی برای تیرهای همسانگرد. ۶۴.....
- شکل ۲-۴- نتایج حاصل و مقایسه‌ی مسیر پس‌کمانش حرارتی برای تیرهای CNTRC با شرایط تکیه‌گاهی دوسر لولا، تحت تغییرات دمایی یکنواخت. ۶۶.....
- شکل ۳-۴- مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی برای تیرهای UD، FGX و FGO. ۶۷.....
- شکل ۴-۴- تأثیر نسبت دمایی T_1/T_2 بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی تیر FGX-CNTRC الف) H-H، ب) C-C؛ در هر دو حالت $L/h = 50$ در نظر گرفته شده است. ۷۲.....
- شکل ۵-۴- مقایسه‌ی مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی تیر UD-CNTRC الف) $L/h = 25$ ، ب) $L/h = 50$ و ج) $L/h = 80$. ۷۸.....
- شکل ۶-۴- مقایسه‌ی مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی تیر FGX-CNTRC الف) $L/h = 25$ ، ب) $L/h = 50$ و ج) $L/h = 80$. ۸۰.....

فهرست جداول

- جدول ۱-۲ - تئوری‌های تغییر شکل برشی مورد استفاده در پژوهش حاضر. ۲۲.....
- جدول ۱-۳ - توابع کسر حجمی CNT برای انواع مختلف تیرهای CNTRC. ۳۲.....
- جدول ۲-۳ - پارامترهای بازدهی به ازای کسرهای حجمی کل متفاوت [۲۳]. ۳۴.....
- جدول ۳-۳ - خواص ترمومکانیکی نانولوله‌ی کربنی تک‌دیواره دسته‌صندلی (۱۰، ۱۰) در دماهای مشخص [۱۴]. ۳۴.....
- جدول ۳-۴ - خواص در نظر گرفته‌شده برای PMMA [۱۴]. ۳۶.....
- جدول ۱-۴ - مقایسه نتایج به دست آمده‌ی پارامتر بی بعد دمای کمانش حرارتی (λ) برای تیر کامپوزیتی سه لایه (L/h) (= 10). ۶۱.....
- جدول ۲-۴ - خواص ترمومکانیکی فرض شده برای تیر کامپوزیتی گرافیت-اپوکسی [۷۱]. ۶۱.....
- جدول ۳-۴ - مقادیر $(\Delta T/\Delta T_{cr})$ برای تیرهای یکنواخت حاصل از حل تحلیلی [۲۱]، حل به روش اجزای محدود [۷۳] و روش DQ برای تیرهای همسانگرد. ۶۳.....
- جدول ۴-۴ - دمای کمانش T_1 (K) برای تیرهای CNTRC تحت تغییرات دمایی یکنواخت ($L/h = 100$). ۶۸.....
- جدول ۵-۴ - دمای کمانش T_2 (K) برای تیرهای CNTRC دوسرلولا تحت تغییرات دمایی غیریکنواخت ($L/h = 60$). ۷۱.....
- جدول ۶-۴ - مقایسه دماهای کمانش یکنواخت T_1 (K) و غیریکنواخت T_2 (K) تیر دوسرلولا FGX-CNTRC. ۷۳.....
- جدول ۷-۴ - مقایسه دماهای کمانش یکنواخت T_1 (K) و غیریکنواخت T_2 (K) تیر دوسرگیردار FGX-CNTRC. ۷۴.....
- جدول ۸-۴ - دمای کمانش بحرانی T_1 (K) تیرهای CNTRC با شرایط مرزی دوسرلولا. ۷۶.....

۱- پیش گفتار

۱-۱ مقدمه

تیرها به عنوان عضو مؤثر و پرکاربرد سازه‌های مهندسی همواره مورد توجه پژوهشگران بوده‌اند. تلاش‌های گسترده‌ی محققان در راستای بهبود خواص و کارایی مواد، همگام با پیشرفت صنایع و تکنولوژی منجر به کشف مواد جدید و پیشرفته مانند کامپوزیت‌ها و نانوکامپوزیت‌ها شده‌اند. با کشف نانولوله‌های کربنی (CNTs)^۱ توسط سامیو ایجیما^۲ [۱، ۲] افق‌های جدیدی پیرامون خواص و کاربردهای CNTها گشوده شد. مطالعه‌های انجام شده بر روی نانولوله‌های کربنی نشان می‌دهد این مواد با توجه به خواص منحصر به فرد مکانیکی، الکتریکی و حرارتی، یک تقویت‌کننده‌ی ایده‌آل برای سازه‌های کامپوزیتی محسوب می‌شوند [۳-۵]. کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی (CNTRCs)^۳ در مقایسه با کامپوزیت‌های تقویت‌شده با فیبر کربن استحکام و سفتی بسیار بالاتری دارند [۶، ۷]. در نانوکامپوزیت‌های مرسوم که توزیع تقویت‌کننده‌ها به صورت پخش همگن و یا تصادفی صورت می‌گرفت، تنها رسیدن به سطح متوسطی از خواص مکانیکی مطلوب امکان پذیر بود. شن^۴ [۲] ایده‌ی مواد متغیر تابعی (FGMs)^۵ را بر روی کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی پیاده‌سازی کرد و پیش‌بینی کرد با توزیع غیریکنواخت و مشخصی از CNTها در زمینه‌ی^۶ کامپوزیتی، ارتقای خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی در ماده‌ی نهایی حاصل می‌شود. از این رو می‌توان خواص کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیر تابعی (FG-CNTRCs)^۷ را به آرامی و به صورت پیوسته در جهت تعیین شده تغییر داد. جهت آماده‌سازی FG-CNTRCها از روش‌های متعددی مثل پاشش حرارتی، رسوب‌دهی الکتروشیمیایی و متالورژی پودر استفاده می‌کنند که در این میان وان^۸ و همکارانش به صورت عملی از

^۱. Carbon nanotubes

^۲. Samiu Iijima

^۳. Carbon nanotube-reinforced composites

^۴. Shen

^۵. Functionally graded materials

^۶. Matrix

^۷. Functionally graded carbon nanotube-reinforced composites

^۸. Kwon

روش متالوژی پودر جهت ساخت کامپوزیت با زمینه‌ی آلومینیومی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیّر تابعی بهره بردند [۸]. کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیّر تابعی به واسطه‌ی خواص ویژه‌ی حرارتی، الکتریکی و مکانیکی، بسیار مورد توجه پژوهشگرها در مطالعه و تحلیل رفتار سازه‌های پرکاربردی چون تیرها، ورق‌ها^۱ و پوسته‌ها^۲ قرار گرفته است [۲، ۹-۱۹]. همچنین با هدف تحلیل و تعیین رفتار کمانشی و پس‌کمانشی غیرخطی FG-CNTRCها مطالعه‌های گسترده‌ای انجام شده است [۱۸، ۲۰-۲۸]. از جمله فعالیت‌های محققان در راستای بهبود عملکرد و بالا بردن ضریب اطمینان طراحی تیرهای مورد مطالعه، به کارگیری روش‌های متعدّد برای حل معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی تیرهای FG-CNTRC بوده است. روش‌های گلرکین^۳، ریتز^۴، المان محدود^۵ و دیفرانسیل کوادریچر^۶ از جمله روش‌های مورد استفاده بوده‌اند [۱۱، ۲۰، ۲۹]. همچنین تأثیر هر یک از تئوری‌های موجود و مورد استفاده از مدل‌های کلاسیک گرفته تا تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر (HSDT)^۷، بر روی روابط استخراج شده و در نهایت پاسخ سازه‌ها اعم از تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها، بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۱، ۱۶، ۳۰-۳۵].

از آن جایی که FG-CNTRCها می‌توانند در سازه‌های مهندسی بسیاری از جمله در صنایع هوایی، خودرو، دریایی و دفاعی به منظور دستیابی به عملکردهای چندگانه‌ی مدنظر مورد استفاده قرار بگیرند، مطالعه و بررسی رفتار تیرهای نانوکامپوزیت تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیّر تابعی تحت بارگذاری حرارتی، مکانیکی و الکتریکی از اهمیت بسیاری برخوردار است.

در کنار بیان مفاهیم پایداری تیرها، آشنایی با نسل جدید مواد کامپوزیتی، ارائه‌ی اطلاعاتی در خصوص نانولوله‌های کربنی و معرفی نمونه‌هایی از تئوری‌های تغییر شکل برشی تیرها، هدف از ارائه‌ی این

1. Plates

2. Shells

3. Galerkin

4. Ritz

5. Finite element

6. Differential quadrature

7. Higher order shear deformation theory

پژوهش در گام اول، پیاده‌سازی و صحت‌سنجی روش DQ به عنوان یک تکنیک حل عددی قدرتمند جهت حل دستگاه معادلات غیرخطی حاکم بر مسأله می‌باشد. همچنین، با توجه به محدود بودن منابع موجود در حوزه‌ی تحلیل رفتار کمانشی و پس‌کمانشی در محیط حرارتی، در گام بعد پایان‌نامه‌ی حاضر تلاش شده است این رفتارها برای تیرهای FG-CNTRC مورد مطالعه قرار گیرد. به این صورت که، گزارشی مبنی بر مطالعه‌ی رفتار کمانشی و پس‌کمانشی تیرهای FG-CNTRC ارائه شود و به همین ترتیب دمای کمانش و مسیر تعادل پس‌کمانشی حرارتی^۱ آن‌ها تحت اثر تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی تعیین شود. مطالعه و مقایسه‌ی تأثیر به کارگیری هر یک از تئوری‌های تغییر شکل برشی در کنار برخی پارامترهای اساسی مؤثر مانند طرح توزیع تقویت‌کننده‌ها، کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، شرایط مرزی و نسبت لاغری^۲ تیر، به مهندسان و سازندگان سازه‌های مهندسی جهت پیش‌بینی و جلوگیری از مخاطرات احتمالی کمک خواهد کرد. دیگر فصول این پایان‌نامه به این صورت ارائه شده‌اند: در فصل دوم اطلاعاتی پیرامون کامپوزیت‌ها و انواع آن، CNTها، مفهوم پایداری، کمانش غیرخطی تیرها، تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی تیرها با نگاه و مروری بر منابع علمی موجود ارائه شده است. در فصل سوم پس از شرح بیشتر مشخصات و تعریف تیر مورد مطالعه، شرایط مرزی و محیط حرارتی فرض شده برای آن، مراحل حل عددی شامل استخراج معادلات حاکم، تشریح روش DQ و چگونگی به کارگیری آن جهت حل مسأله مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل چهارم نتایج به دست آمده از حل معادلات به کمک حل مسأله‌ی مقدار ویژه و الگوریتم بازگشتی ارائه و تفسیر می‌شوند. تعیین دماهای کمانش و مسیر تعادل پس‌کمانش تیرهای FG-CNTRC به همراه بررسی و مقایسه‌ی تأثیر طرح‌های توزیع و کسرهای حجمی مختلف CNTها، شرایط مرزی و نسبت لاغری تیرها، در فصل چهارم مورد مطالعه خواهند بود. در پایان نتیجه‌گیری و پیشنهادهای نیز در فصل پنجم ارائه شده است.

1. Thermal post-buckling equilibrium path

2. Slenderness ratio

۲- مروری بر منابع علمی

۲-۱ کامپوزیت‌ها

کامپوزیت‌ها یا مواد مرکب حاصل ترکیب دو یا چند جزء مختلف می‌باشند که به صورت مکانیکی و یا با پیوند شیمیایی به هم متصل شده‌اند. کارکرد اصلی کامپوزیت‌ها به این صورت است که نسخه‌ی با کیفیت‌تری نسبت به اجزای تشکیل دهنده‌شان هستند و خواص ویژه‌ای را که هر یک از اجزا به صورت مستقل ندارند، از خود بروز می‌دهند و بهبود خصوصیات هم‌چون وزن، مقاومت مکانیکی، سفتی، مقاومت به خوردگی، رسانایی حرارتی و ... را به دنبال دارند. بدیهی است که همه‌ی این ویژگی‌ها به طور هم‌زمان در یک ماده پدیدار نمی‌شود، هم‌چنین ما به این خصوصیات به صورت یک‌جا در یک ماده‌ی کامپوزیتی نیازی نداریم. اجزای تشکیل دهنده‌ی هر کامپوزیت از لحاظ شکل، ترکیب شیمیایی و خواص با یکدیگر متفاوت‌اند. به طور کلی هدف از تولید و به کارگیری مواد مرکب عبارت است از اختلاط تعدادی از مواد با هم به صورتی که هر جزء کاستی‌های دیگری را بپوشاند. نتیجه‌ی این امر تولید مواد جدیدی است که خصوصیات منحصر به فردی دارند و باعث افزایش کیفیت محصول می‌شوند.

مواد مرکب از دو قسمت اصلی زمینه^۱ و تقویت‌کننده^۲ (یا پرکننده)^۳ تشکیل می‌شوند. فاز پیوسته را عموماً به عنوان زمینه، و فاز توزیع شده‌ی ناپیوسته را که توسط ماتریس احاطه شده است، تقویت‌کننده می‌نامند [۳۶].

۲-۱-۱ انواع کامپوزیت‌ها

تا به امروز تقسیم‌بندی‌های مختلفی برای کامپوزیت‌ها ارائه شده است. کامپوزیت‌ها بر اساس نوع فاز تقویت‌کننده‌شان به سه گروه تقسیم‌بندی می‌شوند (شکل ۲-۱):

الف) کامپوزیت‌های تقویت‌شده با ذرات^۴: در این دسته از کامپوزیت‌ها، فاز تقویت‌کننده شامل

1. Matrix

2. Reinforcement

3. Filler

4. Particle reinforced composites

ذرات ریزی هستند که با وجود کاربرد طیف وسیعی از آنها در کامپوزیت‌ها، عمده‌ی ذرات مورد استفاده ذرات اکسیدی مانند آلومینا^۱ و ذرات غیر اکسیدی چون سیلیسیم کاربید^۲ و تنگستن کاربید^۳ می‌باشند. (ب) کامپوزیت‌های تقویت‌شده با الیاف: تقویت‌کننده‌ها در این دسته از کامپوزیت‌ها به صورت رشته‌ای می‌باشند که منجر به تولید دو نوع از کامپوزیت‌ها با عنوان‌های الیاف کوتاه و الیاف بلند می‌شوند. فاز تقویت‌کننده در کامپوزیت‌های با الیاف کوتاه به صورت الیاف ناپیوسته‌ای که طول آنها بین ۱۰ تا ۱۰۰ برابر قطرشان است، به صورت تصادفی یا متغیّر تابعی در ماتریس توزیع شده‌اند. در کامپوزیت‌های با الیاف بلند نیز، تقویت‌کننده‌ها به صورت الیاف پیوسته قرار گرفته‌اند.

(ج) کامپوزیت‌های لایه‌ای^۴: لایه‌های مختلف مواد عموماً با ماهیت فلزی، سرامیکی و یا پلیمرهای تقویت‌شده در کنار یکدیگر به صورت متناوب تشکیل کامپوزیت‌های لایه‌ای می‌دهند.

کامپوزیت‌ها بر حسب نوع ماده‌ی زمینه نیز تقسیم‌بندی می‌شوند:

(الف) کامپوزیت‌های زمینه فلزی

(ب) کامپوزیت‌های زمینه سرامیکی (CMC)^۵

(ج) کامپوزیت‌های زمینه پلیمری

لازم به ذکر است در پژوهش حاضر از کامپوزیت‌های زمینه پلیمری از نوع زمینه‌ی پلی‌متیل متاکریلات (PMMA)^۶ استفاده خواهد شد. این پلیمر نوع مهم مواد ترموپلاستیک می‌باشد که کاربردهای وسیعی در حوزه‌های مختلف تکنولوژی و تولید دارد. از جمله ویژگی‌های این پلیمر می‌توان به خواص بسیار خوب نوری (وضوح^۷، شفافیت^۸)، خنثی بودن شیمیایی، خواص مکانیکی خوب، پایداری حرارتی و قابلیت شکل‌گیری آسان اشاره نمود [۳۷].

^۱. Al₂O₃

^۲. SiC

^۳. TiC

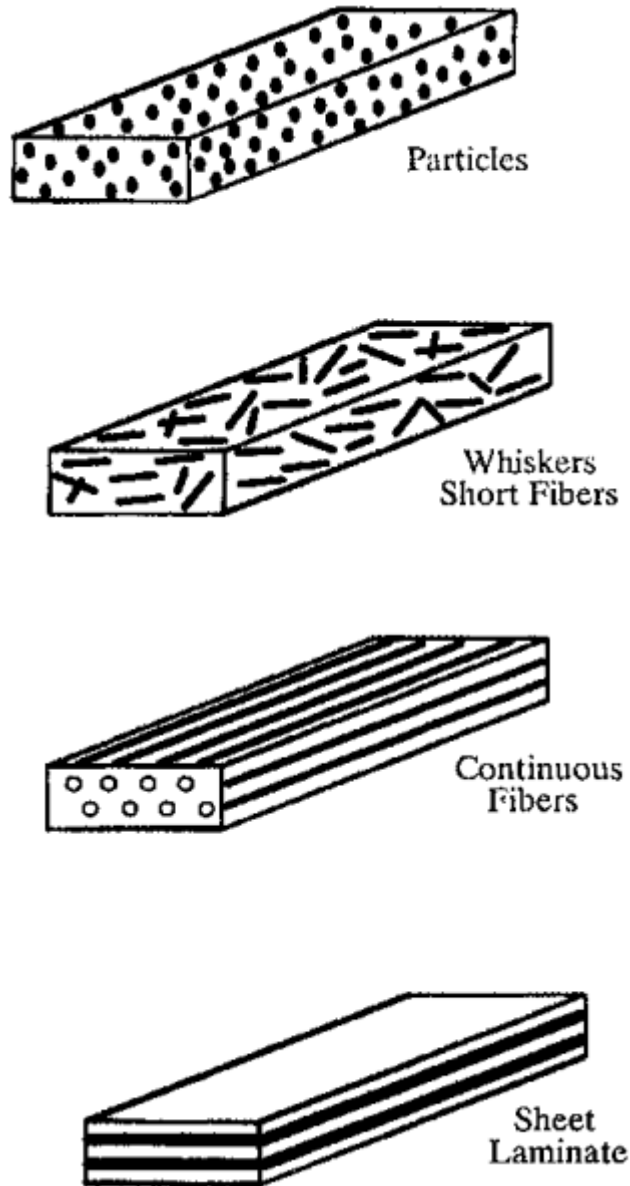
^۴. Sheet laminate composites

^۵. Ceramic matrix composites

^۶. Poly methyl methacrylate

^۷. Clarity

^۸. Transparency



شکل ۲-۱- تصویب شماتیک انواع کامپوزیت‌ها بر اساس نوع تقویت‌کننده [۳۸].

۲-۱-۲ نانوکامپوزیت‌ها

نوعی از کامپوزیت‌ها که ترکیبی از ماتریس و افزودنی‌هایی که حداقل یک بعد آن‌ها کمتر از ۱۰۰ نانومتر باشند، معرفی می‌شوند. افزودنی‌ها می‌توانند یک بعدی مانند نانوتیوب‌ها و فیبرها، دو بعدی شامل مواد معدنی چندلایه مثل خاک رس و سه بعدی مانند ذرات کروی شکل باشند. به عنوان مثال یک نانوکامپوزیت پلیمری ترکیبی است از یک نوع پلیمر به عنوان ماتریس و تقویت‌کننده که چگونگی ترکیب آن‌ها به عنوان یک تکنیک و نقش آن در متمایز کردن نانوکامپوزیت‌ها نسبت به کامپوزیت‌های

مرسوم بسیار مورد مطالعه‌ی پژوهشگرها می‌باشند [۳۹]. از آن جایی که ابعاد پرکننده‌های مدنظر در نانوکامپوزیت‌ها در مقیاس نانو هستند، برهم‌کنش‌های بین ماتریس و تقویت‌کننده‌ها در مقایسه با برهم‌کنش‌های موجود در کامپوزیت‌های معمولی متفاوت هستند و به واسطه‌ی همین تفاوت‌ها در نوع و میزان برهم‌کنش‌ها، ویژگی‌های الکتریکی، مکانیکی، نوری و حلالیت و ... متفاوتی در نانوکامپوزیت‌های مختلف شاهد هستیم.

۲-۲ نانولوله‌های کربنی

از لوله شدن صفحه‌ی گرافیتی به شکل استوانه‌ای توخالی با ضخامت یک اتم، نانولوله‌های کربنی تولید می‌شوند که هزار برابر نازک تر از تار موی انسان هستند و اولین بار توسط سامیو ایجیما در دوده‌های حاصل از تخلیه‌ی قوس الکتریکی کشف شدند [۱]. البته مارک مونتیکوس^۱ و ولادیمیر کوزنتسوف^۲ عقیده داشتند تاریخ لوله‌های نانومتری کربن به سال ۱۹۵۲ بر می‌گردد که تصاویری واضح از لوله‌های ۵۰ نانومتری کربنی در نشریه‌ای روسی‌زبان توسط رادوشکویچ^۳ و لوکیانویچ^۴ به چاپ رسید [۴۰]. به طور کلی علاوه بر ویژگی‌های منحصر به فرد نظیر مدول یانگ و استحکام کششی بالای نانولوله‌های کربنی، طبیعت کربنی CNTها مبنی بر سبک وزن بودن، پایداری قابل قبول و مقرون به صرفه بودن نسبت به دیگر فلزات، موجب شدند که تحقیقات نظری و عملی مهمی روی روش‌های مختلف سنتز و کاربردهای مختلف این مواد صورت گیرد.

۱-۲-۲ انواع نانولوله‌های کربنی

نانولوله‌های کربنی بسته به چیدمان و تعداد استوانه‌ها انواع مختلفی دارند. نانولوله‌ی کربنی تک‌دیواره (SWCNT^۵) هندسه‌ای ساده با شعاعی در بازه‌ی ۰/۴ تا ۳ نانومتر دارد و از لوله کردن ورقه‌ی گرافیتی

^۱. Marc Monthieux

^۲. Vladimir Kuznetsov

^۳. Radushkevich

^۴. Lukyanovich

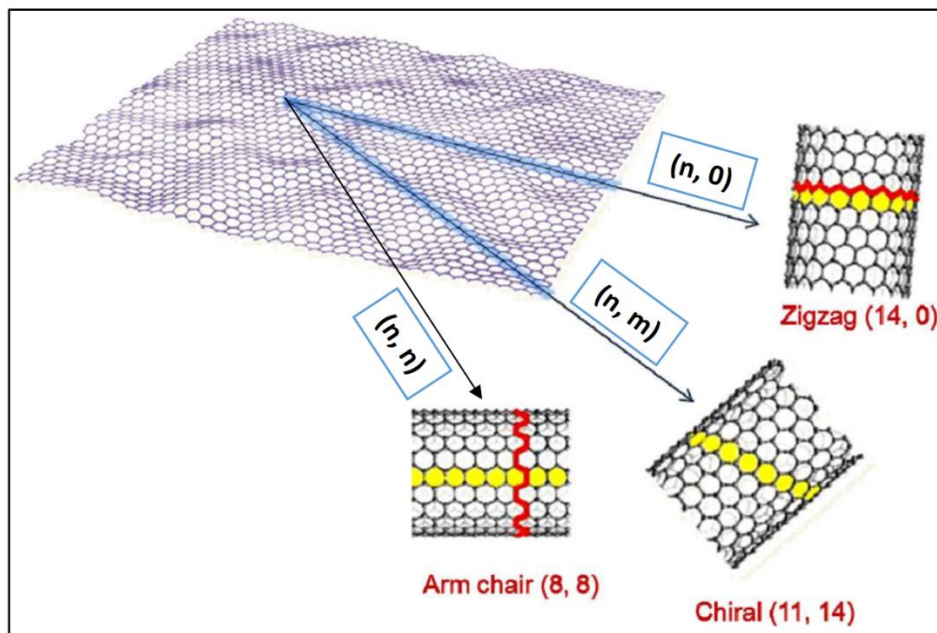
^۵. Single wall carbon nanotube

حاصل می‌شود (شکل ۲-۲). حال بر اساس این که چگونه دو سر صفحه‌ی گرافیتی به هم متصل شوند،

انواع مختلفی

از SWCNTها به وجود می‌آید. مشخصه‌ی این ساختارها با مختصه‌های (n, m) که n مربوط به ستون اتم‌ها و m مربوط به ردیف اتم‌ها می‌باشند، معرفی می‌شوند. در نتیجه نانولوله‌ها بر حسب آرایش الکترونی اتم‌های کربنِ مقطع لوله، در سه گروه دسته‌بندی^۱ $(n = m)$ ، زیگزاگ^۲ $(m = 0)$ و کایرال^۳ تقسیم‌بندی می‌شوند (شکل ۲-۲). مثلاً در صورتی که اتم ابتدایی و اتمی که در وضعیت ۴۵ درجه نسبت به آن قرار دارد، روی هم قرار بگیرند، نوع دسته‌بندی را خواهیم داشت. به طور کلی نحوه پیچش نانولوله‌ها، تأثیر فراوانی روی خواص الکتریکی نانولوله‌ها دارد تا جایی که بر حسب آن نانولوله‌های فلزی یا نیمه‌هادی ارائه می‌شوند. حالت کایرال نیز مشابه دسته‌بندی است، با این تفاوت که با یک بار چرخش افقی به دور نانولوله‌ها، مجموعه‌ای از دسته‌بندی‌ها نسبت به افق به صورت مایل قرار می‌گیرند ($m \neq$

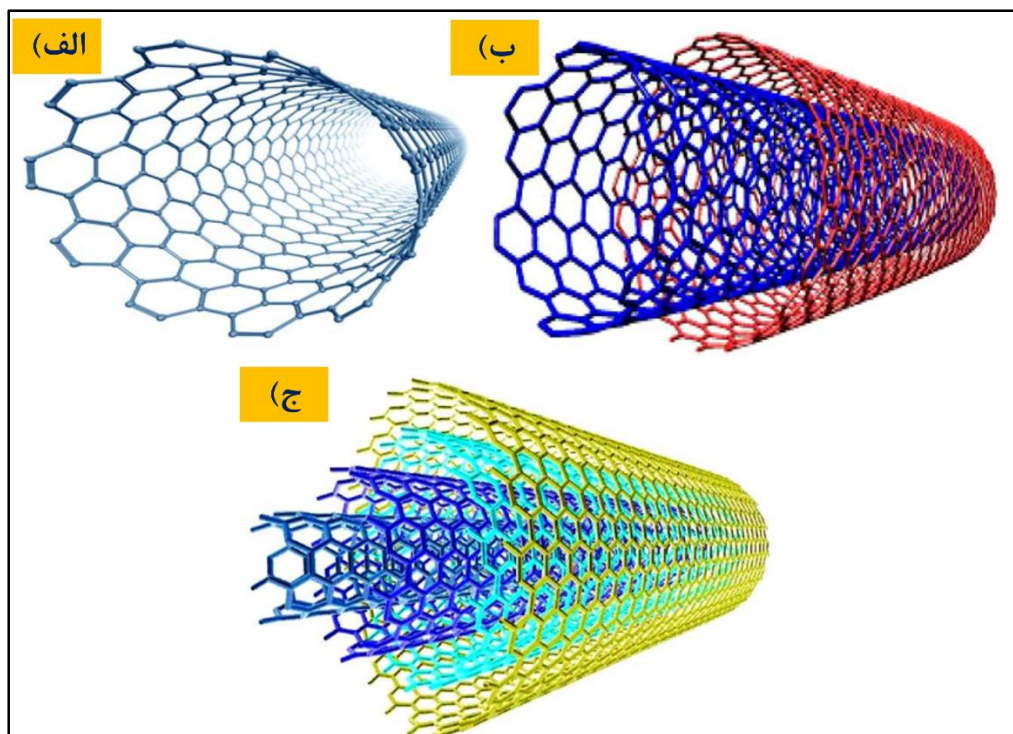
$n \neq 0$)



شکل ۲-۲- ساختارهای مختلف SWCNT [۴۱].

1. Armchair
2. Zigzag
3. Chiral

نوع دیگر CNTها، نانولوله‌های کربنی چنددیواره (MWCNT)^۱ هستند که از چند استوانه‌ی کربنی هم‌محور و تودرتو تشکیل می‌شوند. یعنی می‌توان آن‌ها را به صورت دسته‌ای از نانولوله‌های هم‌مرکز با قطرهای متفاوت در نظر گرفت. همچنین طول و قطر متفاوت‌شان در مقایسه با SWCNTها، خواص آن‌ها را نیز متفاوت کرده‌است. طبق شکل ۲-۳ در حالی که دو استوانه‌ی هم‌مرکز داشته باشیم، نانولوله‌ی کربنی دودیواره (DWCNT)^۲ شکل می‌گیرد که نوعی MWCNT محسوب می‌شود [۴۱].



شکل ۲-۳- ساختار (الف) SWCNT، (ب) DWCNT و (ج) MWCNT [۴۱].

در این پژوهش به دلیل موجود بودن مقادیر خواص وابسته به دما برای SWCNTهای دسته‌سندلی (۱۰، ۱۰)، که در فصل‌های آتی به آن خواهیم پرداخت، این نوع از نانولوله‌ها استفاده خواهد شد.

^۱. Multiwall carbon nanotubes

^۲. Double wall carbon nanotube

۲-۲-۲ سنتز نانولوله‌های کربنی

برای آماده‌سازی CNTها روش‌های متعددی به کار گرفته شده است و عمدتاً به سه روش اصلی ساخته می‌شوند:

الف) تخلیه‌ی قوس الکتریکی^۱: به عنوان متداول‌ترین و ساده‌ترین روش تولید CNTها که در آن بخاری از کربن به واسطه‌ی تخلیه‌ی الکتریکی بین دو الکترود کربن ساعت می‌شود، شناخته شده است. ساختار نانولوله از میان این بخار کربن در جوار کاتالیست یا بدون کاتالیست شکل می‌پذیرد. البته مواردی مثل درجه‌ی حرارت، غلظت کربن و کاتالیست فلزی روی توزیع قطر نانولوله‌ها تأثیر دارند. همچنین بسته به جزئیات روش، امکان رشد هر دو نوع نانولوله‌های تک‌دیواره و چنددیواره با این روش وجود دارد.

ب) گدازش لیزری^۲: از آن جایی که این عملیات نیازمند میله‌های گرافیتی با خلوص بالا و لیزر با توان بالا می‌باشد، از لحاظ اقتصادی روش مقرون به صرفه‌ای نیست.

ج) رسوب (انباشت) بخار شیمیایی^۳: این روش شامل قرار دادن منبع کربن در حالت گازی و استفاده از یک منبع انرژی برای انتقال انرژی (حرارتی یا پلاسما با طول موج کوتاه) به مولکول‌های گازی کربنی می‌باشد. از منبع انرژی جهت شکست مولکول گاز و آزاد کردن اتم واکنش‌پذیر و فعال کربن استفاده می‌شود، سپس کربن به سمت زیرلایه‌ی گرمی که توسط یک کاتالیست پوشش داده شده است، هدایت شده و در آن جا نشست می‌کند. این روش معمولاً منتهی به تولید هم‌زمان نانولوله‌های کربنی چنددیواره یا تک‌دیواره‌ی نامرغوب نیز می‌شود. که البته در سال‌های اخیر، با کنترل پارامترهای فرآیند، امکان تنظیم قطر نانولوله‌ها و همچنین نرخ رشد آنها امکان‌پذیر شده است. همین‌طور با انتخاب یک کاتالیست فلزی مناسب می‌توان SWCNTهایی با خلوص بالاتر از ۹۰ درصد تولید کرد. از لحاظ تولید صنعتی، روش CVD از مهم‌ترین روش‌هاست و برای تولید با مقیاس زیاد و انبوه، روش رسوب

1. Arc discharge

2. Laser ablation

3. Chemical Vapor Deposition

بخار شیمیایی مناسب‌ترین روش جهت سنتز نانولوله‌ی کربنی به حساب می‌آید [۴۱, ۴۲].

۳-۲-۲ خواص حرارتی نانولوله‌های کربنی

یکی از مزایای CNTها، خواص حرارتی و هدایت گرمایی فوق‌العاده‌شان می‌باشد که در تمامی انواع نانولوله‌ها برقرار است. تشابه ساختاری بین CNTها و گرافیت باعث شده تا از لحاظ خواص حرارتی بسیار شبیه یکدیگر باشند. با این تفاوت که نانولوله‌های کربنی تنها در امتداد محورشان رسانای گرما هستند و در جهت عمود بر محورشان هدایت حرارتی ضعیف دارند و تا حدی عایق محسوب می‌شوند [۴۳, ۴۴].

۳-۲ کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیر تابعی

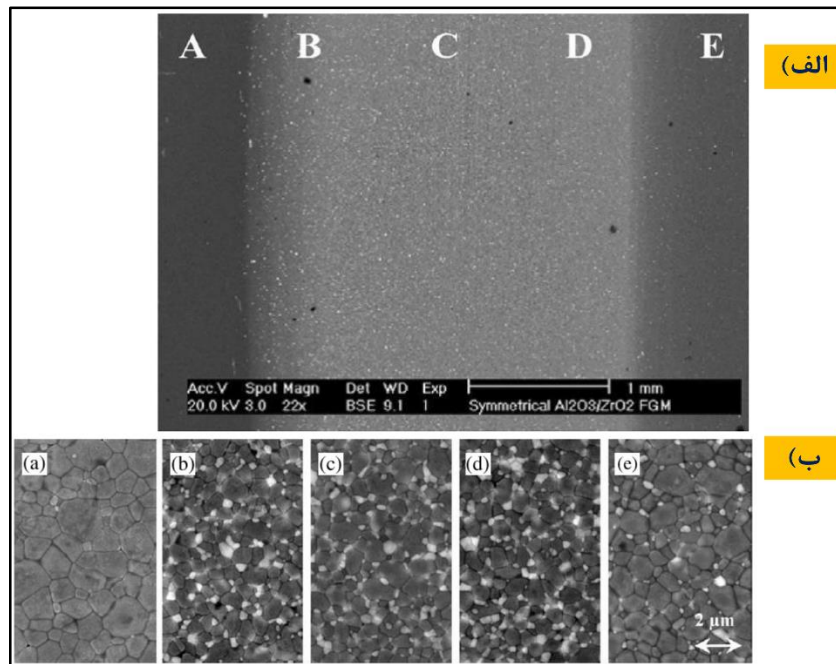
مواد کامپوزیتی پیشرفته به واسطه‌ی خواص منحصر به فردی چون استحکام و سفتی بالا به سرعت و به صورت گسترده در صنایع مختلف و سازه‌های فضایی، هواپیماها و قطعات اتومبیل مورد استفاده قرار گرفتند. یکی از دلایل استقبال از مواد پیشرفته‌ی کامپوزیتی داشتن این قابلیت است که می‌توان آن‌ها را با هر ترکیبی از مواد افزودنی به نحوی تولید کرد که متناسب با خواص نهایی مورد نیاز بشر باشد. الگوهای مختلفی به منظور توزیع فاز تقویت‌کننده در کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی وجود دارد. از میان این الگوها می‌توان به الگوی توزیع تصادفی^۱، توزیع یکنواخت (UD)^۲ و توزیع متغیر تابعی^۳ اشاره کرد. مواد متغیر تابعی به عنوان نسل جدیدی از مواد کامپوزیتی است که در آن خواص مواد از یک سطح به سطحی دیگر به صورت پیوسته، طبق تابعی تعریف شده، تغییر می‌کند. این تغییرات پیوسته و دائمی باعث کاهش تنش‌های حرارتی، تنش‌های پسماند و تمرکز تنش شده و به صورت کارآمدتری نسبت به CNTRCهای مرسوم، خواص مورد نظر ساختارهای مختلف مدنظر را ارائه می‌دهند.

¹. Random distribution

². Uniform distribution

³. Functionally graded distribution

مواد سازنده‌ی FGMها عموماً مواد همسانگردی^۱ مثل فلزها، پلیمرها و سرامیک‌ها هستند. در شکل ۴-۲ نشان داده شده است که مواد متغیّر تابعی نوعی مواد کامپوزیتی هستند که از نظر میکروسکوپی ماهیت ناهمگن دارند. در واقع به واسطه‌ی همین تغییرات پیوسته در ریزساختارشان است که از مواد کامپوزیتی معمول، متمایز می‌شوند.



شکل ۴-۲- تصویری از FGM الف) نمای میکروسکوپی، ب) ریزساختار [۴۵].

۲-۳-۱ روش‌های ساخت FGMها

روش‌های متعددی برای سنتز مواد متغیّر تابعی چون پاشش حرارتی^۲، متالورژی پودری^۳، انباشت به روش تبخیر شیمیایی و فیزیکی^۴، سنتز احتراقی خود پیش‌رونده‌ی دما بالا (SHS)^۵ به کار گرفته می‌شوند. در این میان روش سنتز دما-بالا، به دلیل سرعت بالای واکنش احتراقی روش بسیار مناسبی برای ساخت FGMها می‌باشد که شامل واکنش سنتز احتراقی و فشرده‌شدن مواد پودری خام تحت فشار

1. Isotropic
2. Thermal spray
3. Powder metallurgy
4. Physical and chemical vapor deposition
5. Self-propagating high-temperature synthesis

هیدوراستاتیک به طور هم‌زمان می‌باشند [۴۵]. همچنین تکنیک ریخته‌گری گریز از مرکز سرعت-بالا^۱ که در آن لایه‌ها به واسطه‌ی چگالی جرمی متفاوت، در جهت شعاعی شکل می‌گیرند [۴۶].

۲-۴ مکانیک غیرخطی و پدیده‌ی کمانش

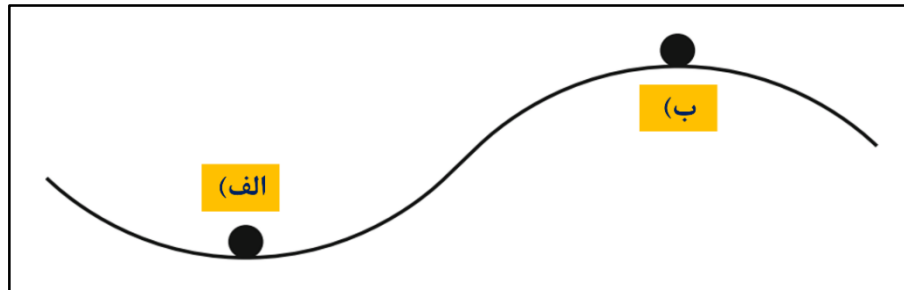
مطالعه‌ی کمانش سازه‌ها در حوزه‌ی مکانیک غیرخطی قرار می‌گیرد که به دو صورت فیزیکی یا هندسی می‌تواند نمود پیدا کند. این اثرگذاری در تئوری مسأله، یا در روابط تنش-کرنش وارد می‌شود یا در عبارت‌هایی که نشان‌دهنده‌ی تأثیر چرخش عناصر ساختاری روی رفتار کلی سازه می‌باشند، پدیدار می‌شود. از آن جایی که تنش‌ها و کرنش‌ها در روابط موجود از قانون هوک^۲ پیروی می‌کنند، عوامل غیرخطی در فیزیک مسأله حاضر نمی‌شوند و نتیجه می‌گیریم عامل غیرخطی در موضوع کمانش به طور خالص هندسی می‌باشد [۴۷, ۴۸].

۲-۴-۱ مفهوم پایداری

وقتی یک سازه (عموماً تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها) تحت تنش فشاری ناشی از بارگذاری (حرارتی یا مکانیکی) قرار می‌گیرد، پایداری به عنوان موضوعی مهم مطرح می‌شود. به عبارتی زمانی به سازه‌ای پایدار گوییم که تحت تنش‌ها و نیروهای وارده، حالت خود را از دست ندهد و در اثر افزایش مقدار کوچکی از تنش یا بار وارده همچنان تعادل خود را حفظ نماید. نقطه‌ی مقابل این تعریف، حالت تعادل ناپایدار است که ضمن اعمال تغییر کوچکی در تنش یا نیروی اعمالی، سازه دچار انحراف می‌شود (شکل ۲-۵).

¹. High-speed centrifugal casting techniques

². Hook's law



شکل ۲-۵- تعادل ایستایی الف) تعادل پایدار، ب) تعادل ناپایدار [۴۸].

۲-۴-۲ انواع ناپایداری و کمانش سازه‌ها

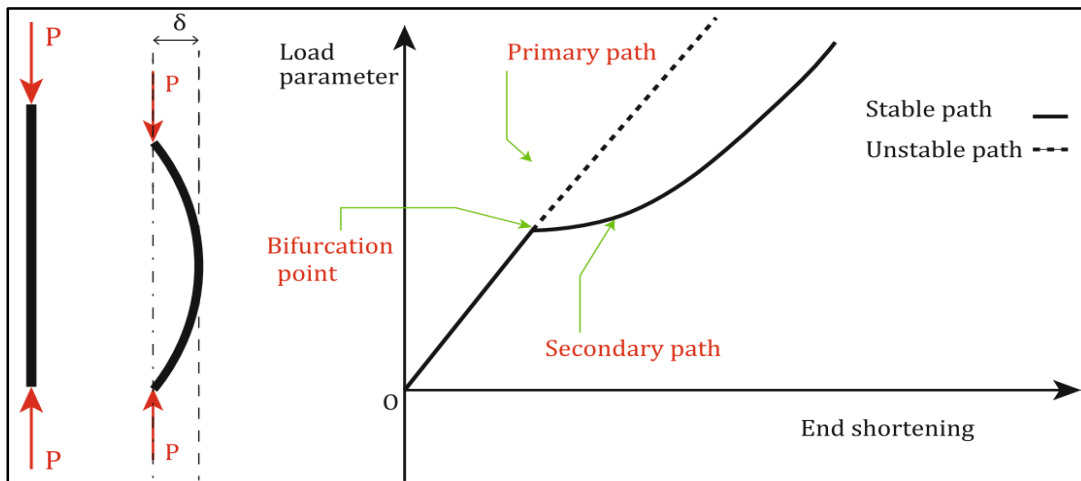
به طور کلی سه نوع ناپایداری استاتیکی تعریف شده‌اند که عبارت‌اند از کمانش کلاسیک^۱ یا دوشاخه‌ای شدن^۲، کمانش اختلالی محدود^۳ و کمانش ناگهانی رو به جلو^۴. رخ دادن هر یک از این موارد به فاکتورهایی چون هندسه‌ی سازه، نقص هندسی اولیه، شرایط مرزی و توزیع مناسب مواد وابسته است. در راستای تشریح و توصیف نوع اول ناپایداری، به طور مثال یک تیر الاستیک تحت نیروی محوری P تا قبل از کمانش، مسیر اولیه‌ی تغییر شکل را مطابق شکل ۲-۶ طی می‌کند یعنی تا نقطه‌ی انشعاب به طور خطی پیش می‌رود و پس آن یا وارد مسیر پایدار پس‌کمانش ثانویه می‌شود یا مسیر اولیه را در حالت ناپایدار ادامه می‌دهد. در حقیقت مسیر تعادل پس‌کمانش و ماهیت آن مبنی بر پایدار یا ناپایدار بودن آن به هندسه‌ی سازه و نوع بارگذاری آن دارد.

1. Classical buckling

2. Bifurcation

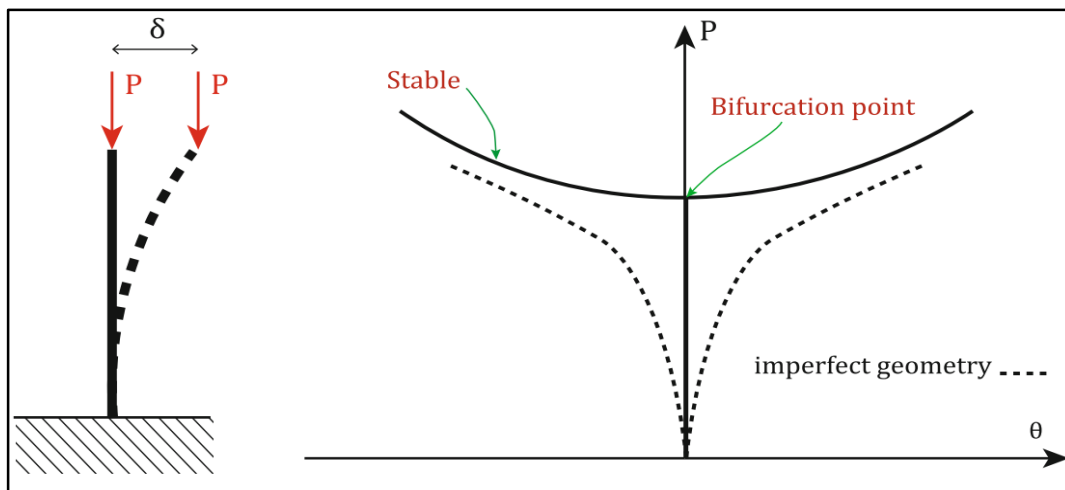
3. Finite disturbance buckling

4. Snapthrough buckling



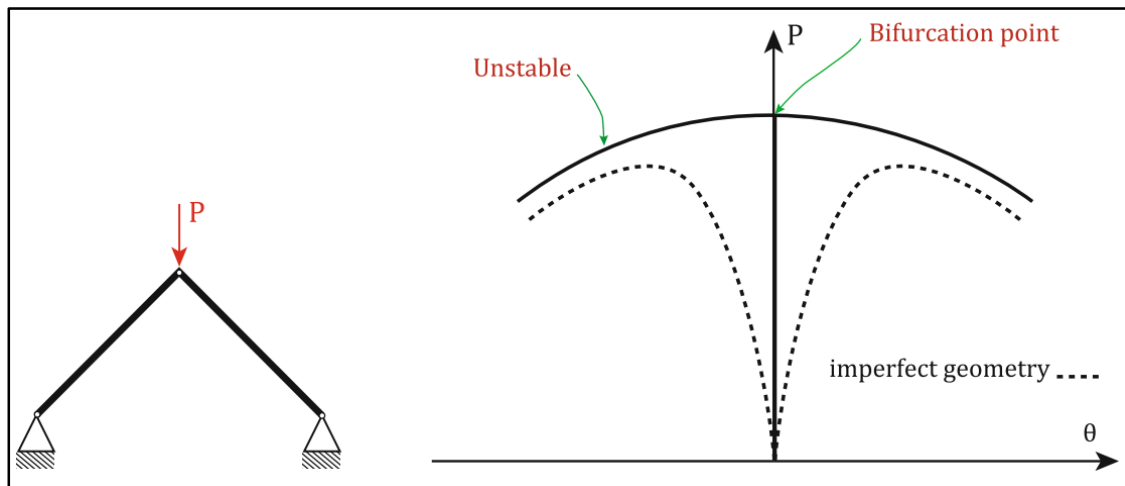
شکل ۲-۶- تیر تحت بارگذاری محوری. مسیر پس کمانش پایدار و مسیر خطی ناپایدار [۴۸].

نمونه‌ی دیگر می‌تواند تیر مستقیم و بدون نقصی باشد که تحت نیروی فشاری P در انتهای آزادش است. در این حالت با رسیدن مقدار بار وارده به نقطه‌ی انشعاب، تیر کمانش می‌کند و به ازای بار وارده‌ی بیشتر، مسیر پایدار پس کمانش را می‌پیماید. از طرفی اگر تیر دارای نقص هندسی اولیه باشد، اصلاً به نقطه‌ی دو شاخگی نمی‌رسد و طبق شکل ۲-۷ مسیر خط چین را طی می‌کند.



شکل ۲-۷- مسیر پس کمانش پایدار [۴۸].

البته قابل ذکر است امکان حالتی که در آن مسیر پس کمانش ثانویه ناپایدار باشد نیز وجود دارد، به عنوان نمونه برای خرپای تحت نیروی متمرکز P که در شکل ۲-۸ هر دو شرایط با نقص هندسی اولیه و بدون آن نیز نشان داده شده است.



شکل ۲-۸- مسیر پس کمانش ناپایدار [۴۸]

۲-۵ تئوری تغییر شکل برشی تیرها

هر یک از تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی تیرها به واسطه‌ی میدان‌های جابه‌جایی متفاوت تعریف شده‌شان، تأثیر تغییر شکل برشی بر رفتار سازه را ارائه می‌دهند. برای تعیین خصوصیات استاتیکی و دینامیکی و به دنبال آن تحلیل خمش، کمانش و ارتعاشات تیرها از تئوری‌های کلاسیک تیرها مثل اویلر-برنولی^۱ و تیموشنکو^۲ استفاده می‌شود. از طرفی محدودیت‌های موجود در تئوری‌های کلاسیک تیرها، موجب شد تا پژوهشگرهای این حوزه به بهبود و تصحیح مدل‌های ارائه شده بپردازند و تئوری مراتب بالاتر تغییر شکل برشی تیرها را مطرح نمایند. مطالعه‌های بسیاری در راستای تحلیل دینامیکی و استاتیکی تیرها بر اساس تئوری‌های مختلف موجود انجام شده است [۱۱، ۱۷، ۳۰، ۳۱، ۳۳، ۴۹-۵۵]. لازم به ذکر است شاخصه‌ای به نام تابع شکل^۳ معرف چگونگی توزیع برش که شکل تغییرات برش را در طول ضخامت تیر تعیین می‌کند، وجود دارد. چگونگی تأثیر تابع شکل در میدان جابه‌جایی در فصل آینده به طور مفصل توضیح داده خواهد شد. در این مرحله به معرفی نمونه‌هایی از تئوری‌های تغییر شکل برشی تیرها به همراه تابع شکل‌شان می‌پردازیم.

^۱. Euler-Bernoulli

^۲. Timoshenko

^۳. Shape function

۲-۵-۱ تئوری اویلر-برنولی (EBT)^۱

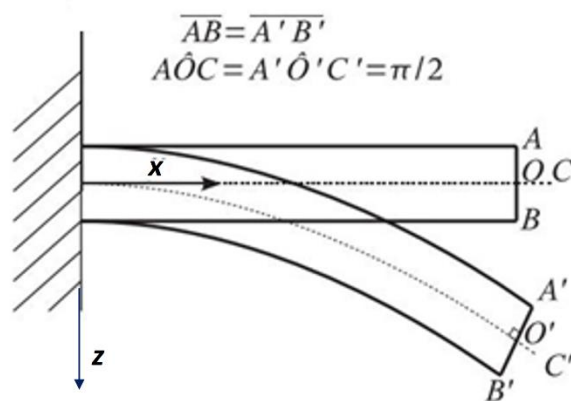
برای اولین بار در سال ۱۷۴۴ میلادی، مدلی مرجع با چشم‌پوشی از اثر تغییر شکل برشی تیر، برای نشان دادن رفتار سازه تحت بار محوری و خمشی با عنوان تئوری اویلر-برنولی مطرح شد. این تئوری با توجه به شکل ۲-۹ بر فرضیه‌های زیر استوار است [۵۶]:

الف. سطح مقطع تیر در صفحه‌ی خودش صلب است.

ب. سطح مقطع تیر ضمن چرخش حول محور عمود بر صفحه‌ی خودش، به صورت تخت باقی

می‌ماند.

ج. سطح مقطع تیر پس از تغییر شکل همچنان عمود بر صفحه‌ی میانی باقی می‌ماند.



شکل ۲-۹- خمشی یک تیر طبق تئوری اویلر-برنولی [۵۶].

لازم به ذکر است تابع شکل مربوط به این مدل $\psi(z) = 0$ می‌باشد.

۲-۵-۲ تئوری تیموشنکو (TBT)^۲ یا تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT)^۳

مدل تیموشنکو (شکل ۲-۱۰) از سری تئوری‌های کلاسیک تیرها برای اولین بار در سال ۱۹۲۱ میلادی با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی در رفتار تیرها ارائه شد [۵۷]. این تئوری به صورت گسترده با عنوان تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول تیرها جهت تعیین میدان جابه‌جایی تیرها مورد استفاده

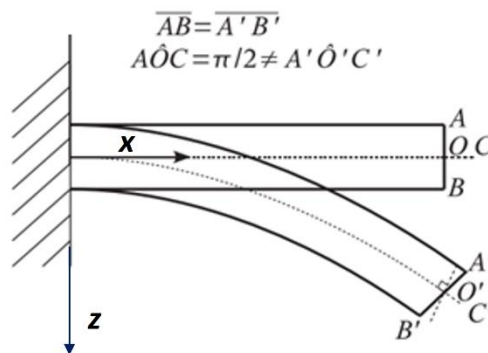
¹. Euler-Bernoulli theory

². Timoshenko beam theory

³. First order shear deformation theory

قرار گرفته است که در آن برخلاف فرض سوم تیر اویلر-برنولی، سطح مقطع تیر ضمن تغییر شکل، عمود بر صفحه‌ی میانی باقی نمی‌ماند. در حالی که دو فرض دیگر مربوط به مدل اویلر-برنولی هم‌چنان برای مدل تیموشنکو نیز پابرجاست.

لازم به ذکر است به واسطه‌ی ضریب تصحیح برشی (K_s)^۱ به کار گرفته شده در نیروی منتجه‌ی برشی، نتایج درست‌تری به دست می‌آید. ضریب تصحیح برشی به شرایط مرزی، خواص مواد و نوع بارگذاری در نظر گرفته شده برای تیر بستگی دارد. از این رو تعیین مقدار دقیق آن آسان نیست اما در پژوهش‌ها تقریب‌های معادل $K_s = 5/6$ یا $K_s = \pi^2/12$ به صورت گسترده استفاده شده‌اند. تابع شکل به کار گرفته در این تئوری $\psi(z) = z$ می‌باشد.



شکل ۲-۱۰- خمش یک تیر طبق تئوری تیموشنکو [۵۶].

۲-۵-۳ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم (TSDT)^۲

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم که آن را مدل ردی^۳ نیز می‌نامند، ضمن در نظر گرفتن کرنش برشی جانبی در روابط، تغییرات سهمی‌گون^۴ برای کرنش برشی جانبی در طول ضخامت تیر فرض می‌کند. در نتیجه نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی برای محاسبه‌ی تنش‌های برشی نیز نمی‌باشد. در مدل ردی مجهول‌های مسأله مشابه مجهول‌های تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

^۱. Shear correction factor

^۲. Third order shear deformation theory

^۳. Reddy

^۴. Parabolic

می‌باشد [۴۹].

$$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$$

تابع شکل به کار گرفته شده در این تئوری می‌باشد.

۲-۵-۴ تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی^۱ (TrSDT)

این تئوری از لحاظ پیچیدگی و مرتبه‌ی معادله‌ها مشابه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول می‌باشد اما کارآمدتر از آن است و نیازی به به کارگیری ضریب تصحیح برشی ندارد. برش در طول ضخامت تیر طبق تابع سینوسی معینی تعیین می‌شود. همچنین این مدل برای سازه‌های چندلایه، از تیر یا ورق‌های خیلی نازک تا ضخیم کاربرد دارد. توریتر^۲ این مدل را با این عنوان که یک مدل استاندارد و قابل تعمیم برای پوسته‌ها و به طور کلی قابل ارائه برای رفتار غیرخطی دیگر سازه‌ها نیز باشد، مطرح کرد [۵۰].

$$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$$

تابع توصیف‌کننده‌ی تغییر شکل برشی در راستای ضخامت تیر می‌باشد.

۲-۵-۵ تئوری تغییر شکل برشی نمایی^۳ (ESDT)

تلاش کاراما^۴ و همکارهایش در راستای بهبود روند حل و تکنیک‌های عددی برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی سازه‌های کامپوزیتی چندلایه منجر به ارائه‌ی تابعی نمایی به عنوان تابع شکل و توصیف‌کننده‌ی توزیع برش در راستای ضخامت شد. نتایج حاصل از این مدل ارائه شده به مراتب از تئوری تغییر شکل برشی مثلثاتی قابل قبول‌تر می‌باشد [۵۱]. چگونگی توزیع برش در راستای ضخامت در این تئوری با $\psi(z) = ze^{-2(z/h)^2}$ تعیین می‌شود.

۲-۵-۶ تئوری تغییر شکل برشی آیدوگدو^۵ (ASDT)

تابع توصیف‌کننده‌ی تغییر شکل برشی در این مدل بر اساس حل الاستیسیته‌ی سه بعدی و به کمک

^۱. Trigonometric shear deformation theory

^۲. Touratier

^۳. Exponential shear deformation theory

^۴. Karama

^۵. Aydogdu

^۶. Aydogdu shear deformation theory

روش معکوس^۱ توسط آیدوگدو معرفی شد و معادل $\alpha = 3$ ، $\psi(z) = z\alpha^{-2\frac{(z/h)^2}{\ln \alpha}}$ می‌باشد. نتایج به دست آمده از حل معادلات بر اساس تئوری آیدوگدو مانند سایر تئوری‌های تغییر شکل برشی معرفی شده از دقت خوبی برخوردار است.

به منظور جمع بندی توابع شکل معرفی شده برای هر یک از تئوری‌های مورد استفاده در پژوهش حاضر، جدول ۱-۲ ارائه شده است.

جدول ۱-۲- تئوری‌های تغییر شکل برشی مورد استفاده در پژوهش حاضر.

تابع شکل	تئوری‌های تیرها
$\psi(z) = z$	تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT)
$\psi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$	تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم (TSDT)
$\psi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	تغییر شکل برشی مثلثاتی (TrSDT)
$\psi(z) = ze^{-2(z/h)^2}$	تغییر شکل برشی نمایی (ESDT)
$\psi(z) = z\alpha^{-2\frac{(z/h)^2}{\ln \alpha}}$ ، $\alpha = 3$	تغییر شکل برشی آیدوگدو (ASDT)

۶-۲ مروری بر پژوهش‌های انجام شده

همانطور که در مقدمه اشاره شد، پژوهش‌های بسیاری در سال‌های اخیر در حوزه‌ی کمانش و پس‌کمانش تیرهای FG-CNTRC صورت گرفته است.

بررسی پایداری دینامیکی تیرهای نانوکامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تک‌دیواره توسط که^۲ و همکاران [۱۲] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و به کمک روش DQ ارائه شد. آن‌ها با محاسبه‌ی کمانش در تیرهای FG-CNTRC با شرایط تکیه‌گاهی مختلف دریافتند که با افزایش کسر

¹. Inverse method

². Ke

حجمی CNTها، بار کمانش بحرانی و فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند. که و همکاران [۹] در پژوهش دیگر خود ضمن بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای FG-CNTRC با کمک روش ریتز و یک الگوریتم بازگشتی، بیان کردند که افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی منجر به فرکانس‌های خطی و غیرخطی بالاتر برای تیرهای UD-CNTRC و FG-CNTRC خواهند شد.

انصاری و همکاران [۳۴] به تحلیل ارتعاش اجباری غیرخطی تیرهای FG-CNTRC براساس تئوری تیر تیموشنکو و به کمک روش GDQ^1 پرداختند و نتیجه گرفتند با افزایش نسبت لاغری تیرها، پیک دامنه افزایش می‌یابد.

تحلیل کمانش و پس‌کمانش حرارتی تیرهای کامپوزیتی چندلایه تحت تغییرات دمایی یکنواخت در شرایط مرزی مختلف به کمک روش DQ و با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما توسط وثوقی و همکاران [۲۴] انجام شد. آن‌ها طبق مقایسه‌های صورت گرفته مبنی بر درستی نتایج و با توجه به سرعت همگرایی نتیجه گرفتند که روش DQ، یک تکنیک حل عددی کارآمد برای مسائل کمانشی و پس‌کمانشی حرارتی تیرهای کامپوزیتی چندلایه می‌باشد. همچنین نتایج آن‌ها بر این مسأله که نمی‌توان از تأثیر وابستگی خواص مواد به دما بر روی نتایج تیرهای چندلایه به خصوص با شرایط مرزی دوسرگیردار چشم‌پوشی کرد، دلالت دارد. به این معنی که با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما، کمانش در دمای پایین تر رخ می‌دهد و به طور کلی سفتی تیر کاهش می‌یابد.

برت و مالیک^۲ [۵۹] در پژوهش خود به مفاهیم اساسی و روابط ریاضی^۳ DQM به عنوان یک روش حل عددی پرداختند. ضمناً چگونگی اعمال روش حل DQ را در قالب حل چند مسأله‌ی واقعی ارائه کردند. به این دلیل که در آن زمان روش دیفرانسیل کوادریچر روشی نو و تقریباً ناشناخته برای جامعه‌ی محققان در حوزه‌ی مکانیک محاسباتی به حساب می‌آمد، این پژوهش با هدف آموزشی و آشنایی با

¹. Generalized differential quadrature

². Bert and Malik

³. Differential quadrature method

روش DQ نگاشته شد. آن‌ها با ارائه‌ی مسائل و مرور منابع، کارآمد بودن این روش عددی را نشان دادند و از طرفی محدودیت‌های موجود در به کارگیری روش DQ را برشمردند.

وو^۱ و همکاران [۳۵] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نتایجی مبنی بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی تیرهای FG-CNTRC ارائه کردند و نشان دادند در نظر گرفتن نقص‌های هندسی اولیه در تیرها که ممکن است در روند ساخت ایجاد شوند، منجر به کمانش از نوع دوشاخگی نمی‌شود و مسیر تعادل با این شرایط بسیار به عدد نیم موج^۲ و دامنه‌ی نقص بستگی دارد. آن‌ها همچنین در پژوهش خود با ارائه‌ی دماهای کمانش بحرانی تیرهای FG-CNTRC تحت تغییرات دمای یکنواخت و غیریکنواخت و مقایسه‌ی آن‌ها نتیجه گرفتند که تیر تحت تغییرات دمایی یکنواخت به مراتب زودتر دچار کمانش می‌شود.

مطالعه بر روی کمانش و ارتعاشات آزاد تیرهای نانوکامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تک دیواره روی بستر الاستیک^۳ بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و به کمک روش GDQ توسط یاس و صمدی [۱۰] نشان می‌دهد که افزودن CNTها با طرح توزیع FGX در مقایسه با طرح‌های دیگر توزیع CNT، موجب افزایش فرکانس و بار کمانشی می‌شود. همچنین آن‌ها به تحلیل هندسه‌ی سطح مقطع تیر کامپوزیتی جهت پیش‌بینی مقاومت تیر در برابر خمش یا کمانش پرداختند با توجه به تشابه هندسی تیر FGX-CNTRC به هندسه‌ی تیر I-شکل که نسبت به دیگر هندسه‌های تیر، ممان اینرسی بالاتری دارد، پیش‌بینی کردند که افزایش فرکانس طبیعی و بار کمانشی در تیر FGX مشخص‌تر می‌باشد.

شن و ژانگ^۴ [۲۳] رفتار کمانشی و پس‌کمانشی صفحه‌های FG-CNTRC را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها دریافتند که دمای کمانش مانند استحکام پس‌کمانشی حرارتی با تقویت صفحات به صورت متغیر تابعی، افزایش می‌یابد و به طور کلی رفتارهای پس‌کمانشی حرارتی صفحات CNTRC بسیار تحت تأثیر

1. Wu

2. Half wave number

3. Elastic foundation

4. Shen and zhang

نسبت بار حرارتی، تغییر شکل برشی جانبی، نسبت منظر صفحات و کسر حجمی نانولوله‌های کربنی می‌باشند.

شن [۶۰] با ارائه‌ی نتایج مطالعه‌ی خود بر روی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیّر تابعی تحت تغییرات دمایی یکنواخت، نشان داد چنانچه تقویت‌کننده‌های متغیّر تابعی نسبت به صفحه‌ی میانی متقارن باشند، منجر به نتایج بهتری مبنی بر افزایش دمای کمانش و افزایش مقاومت پس‌کمانش حرارتی پوسته می‌شوند. اما این تأثیر در مقایسه با پوسته‌ی مشابه تحت نیروی فشاری محوری به مراتب کمتر است.

نتایج تحلیل خمش غیرخطی و پس‌کمانش حرارتی تیرهای FG-CNTRC و UD-CNTRC توسط شن و ژیانگ^۱ [۱۴] ثابت کردند برای تیرهای CNTRC، مقدار متوسطی از کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، الزاماً منجر به فرکانس‌های غیرخطی، دماهای کمانشی و مقاومت پس‌کمانش حرارتی متوسطی نمی‌شوند. به این معنی که در بعضی موارد با بالابردن کسر حجمی CNTها، دمای کمانش، فرکانس غیرخطی و مقاومت پس‌کمانش حرارتی کاهش می‌یابد. همچنین نشان دادند چنانچه CNTها به صورت نامتقارن در زمینه توزیع شوند، کمانش از نوع دوشاخگی اتفاق نمی‌افتد.

کیانی [۱۸] با به دست آوردن بار کمانشی پوسته‌های چندلایه‌ی کامپوزیتی مخروطی شکل تقویت‌شده با ورقه‌های گرافن^۲ متغیّر تابعی، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به نتایجی مبنی بر کاهش بار کمانش پوسته به ازای بالا رفتن دما در محیط دست یافت.

به کارگیری تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر به منظور حذف ضریب تصحیح برشی در روابط و استخراج معادلات نهایی مسأله، محققان را بر آن داشت تا به محاسبه، بررسی و مقایسه‌ی نتایج تحلیل‌های کمانشی و پس‌کمانشی سازه‌های کامپوزیتی بر اساس تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی کلاسیک و مراتب بالاتر بپردازند.

¹. Xiang

². Graphene sheets

آیدوگدو [۳۳] به منظور مقایسه‌ی خمش، کمانش و ارتعاشات ورق‌های متعامد متقارن مستطیلی، بر اساس تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی پژوهشی ارائه کرده است و نتیجه گرفت که تئوری تغییر شکل برشی نمایی به خوبی تنش‌ها و جابه‌جایی جانبی را پیش‌بینی می‌کند، در حالی که به کارگیری تئوری‌های تغییر شکل برشی سهمی‌گون منجر به نتایج صحیح‌تری برای فرکانس‌های طبیعی و بارهای کمانشی خواهد شد.

امام^۱ [۳۰] با بررسی و مقایسه‌ی تأثیر هر یک از تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و مراتب بالاتر بر روی پاسخ پس‌کمانشی تیرهای کامپوزیتی چندلایه‌ی متقارن با ضخامت متوسط یا شدیداً ناهمسانگرد، نشان داد که مقادیر دامنه‌ی کمانش به دست آمده از به کارگیری تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر نسبت به نتایج حاصل از تئوری‌های کلاسیک بیشتر می‌باشد. همچنین او دریافت برای تیر به ازای نسبت طول به ضخامت معادل ۵۰، می‌توان از تأثیر تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر چشم‌پوشی کرد.

پس‌کمانش حرارتی تیرهای FGM روی بستر الاستیک بر اساس تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر توسط شن و ونگ^۲ [۶۱] مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. طبق نتایج به دست آمده نشان دادند که شاخص کسر حجمی^۳ بر پاسخ پس‌کمانش حرارتی بسیار مؤثر است در حالی که این تأثیر روی نتایج نسبت فرکانس غیرخطی به خطی برای تیر FGM مشابه کمتر مشاهده می‌شود.

فرزام و حسنی [۶۲] پژوهشی با عنوان تحلیل کمانش مکانیکی و حرارتی ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیّر تابعی ارائه کردند و نتیجه گرفتند که از ورق‌های با طرح توزیع FGO و FGX، صرف‌نظر از نوع شرایط مرزی به ترتیب کمترین و بیشترین مقادیر بار و دمای کمانشی حاصل می‌شوند و تأثیر وابستگی خواص مواد به دما در نتایج مربوط به ورق با شرایط مرزی گیردار نسبت به شرایط مرزی ساده مشخص‌تر و قابل مشاهده است. همچنین به کارگیری خواص مواد وابسته به دما در

1. Emam

2. Wang

3. Volume fraction index

محاسبات کمترین تأثیر را بر روی ورق‌های نوع FGO می‌گذارد.

در پژوهش واتاناساکول‌پونگ و اونگ‌بهاکرن^۱ [۲۶] چندین تئوری تغییر شکل برشی به منظور تعیین پاسخ کمانشی تیرهای کامپوزیتی تقویت‌شده با چند نوع طرح توزیع مختلف CNT روی بستر الاستیک به کار گرفته شد و دریافتند تیرهای FGX-CNTRC مقاومت بالاتری در برابر کمانش نسبت به دیگر انواع تیرها نشان می‌دهند. همچنین نتیجه گرفتند از آنجایی که تئوری‌های فرض شده توصیف‌کننده‌ی توزیع برش هستند، به کارگیری هر یک از تئوری‌ها تنها بر نتایج تنش برشی تأثیرگذار است و بر مقادیر تنش نرمال اثری ندارد.

شه^۲ و همکاران [۶۳] با به کارگیری تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی و با تکنیک اختلال دومرحله‌ای^۳ و در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما به تحلیل رفتار کمانشی و پس‌کمانشی حرارتی تیرهای FGM با شرایط تکیه‌گاهی دوسرگردار تحت تغییرات دمایی یکنواخت پرداختند و روند مسیر تعادل پس‌کمانشی را به ازای تئوری‌های مختلف ارائه کردند.

در پژوهش حاضر گزارشی مبنی بر مطالعه‌ی رفتار کمانشی و پس‌کمانشی تیرهای FG-CNTRC در محیط حرارتی تحت تغییرات دمایی یکنواخت و غیریکنواخت با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما، به کمک روش DQ و به کارگیری یک الگوریتم بازگشتی ارائه می‌شود. مطالعه و مقایسه‌ی تأثیر هر یک از تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی به همراه پارامترهای مؤثر دیگر مانند شرایط مرزی، وابستگی یا عدم وابستگی خواص مواد به دما، کسر حجمی CNTها و نسبت لاغری تیرها نیز انجام خواهد شد.

¹. Wattanasakulpong and Ungbhakorn

². She

³. Two-step perturbation technique

۳- فرمول بندی و حل مسأله

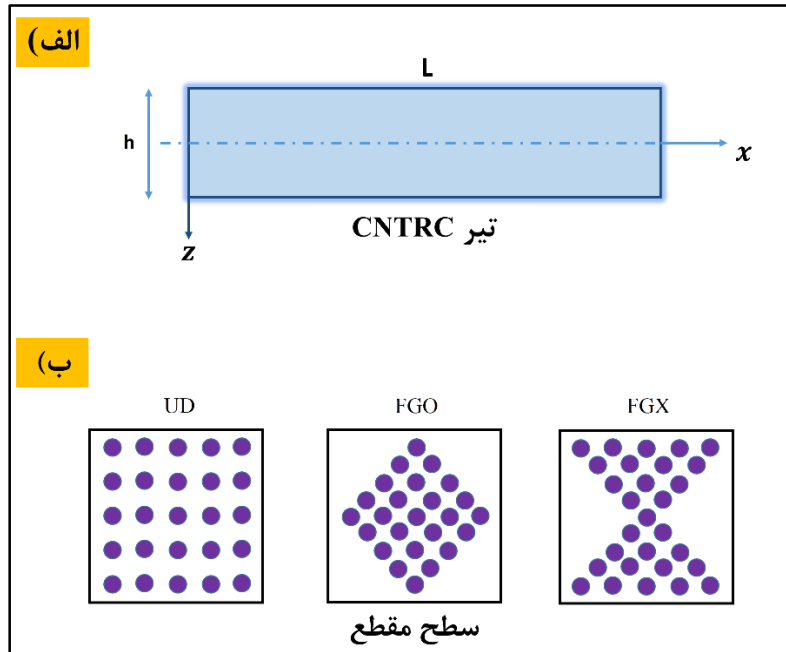
۳-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مدل تیر CNTRC مورد نظر تعریف می‌شود. سپس با بهره‌گیری از قانون اختلاط^۱ و همچنین نتایج حاصل از پژوهش‌های دینامیک مولکولی^۲، خواص معادل کامپوزیت‌ها محاسبه می‌شوند. سپس با تعریف میدان جابه‌جایی تیر بر اساس تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی که در فصل پیشین ذکر شدند، روابط کرنش-جابه‌جایی را مطابق روابط فون-کارمن^۳ و با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما تعریف می‌کنیم. در گام بعدی به کمک معادلات تعادل، معادله‌های حاکم بر تیر کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌ی کربنی را استخراج می‌کنیم و در ادامه از روش دیفرانسیل کوادریچر (DQ) برای تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE)^۴ به دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری غیرخطی^۵ استفاده می‌کنیم. در نهایت با اعمال شرایط مرزی، دستگاه معادلات را به فرم ماتریسی بازنویسی کرده و به حل مسأله‌ی مقدار ویژه، می‌پردازیم. در ادامه با به کارگیری الگوریتم بازگشتی به تعیین مسیر تعادل پس‌کمانشی حرارتی تیر CNTRC می‌پردازیم.

۳-۲ مدل و خواص تیر کامپوزیتی

در این پژوهش تیر CNTRC با طول L و ضخامت h مطابق شکل ۳-۱ الف در نظر گرفته شده است. ماده‌ی زمینه‌ی این کامپوزیت، پلیمری همسانگرد از جنس PMMA است. تقویت‌کننده‌ها نیز نانوله‌های کربنی تک‌دیواره از نوع دسته‌سندلی (۱۰، ۱۰) می‌باشند.

1. Rule of mixture
 2. Molecular dynamic
 3. Von-Kármán
 4. Ordinary differential equation
 5. Nonlinear algebraic equation system



شکل ۳-۱- الف) تصویر شماتیک تیر CNTRC. ب) طرح‌های توزیع متفاوت CNT در سطح مقطع تیر.

در راستای بررسی تأثیر نحوه‌ی توزیع CNTها در زمینه‌ی پلیمری، حالت توزیع یکنواخت (UD) که در آن کسر حجمی نانولوله‌ها (V_{cn}^1) در راستای ضخامت ثابت است و حالت توزیع متغیّر تابعی فرض می‌شوند. دو نوع طرح توزیع برای حالت متغیّر تابعی در نظر گرفته شده است، که در آنها کسر حجمی CNTها به صورت پیوسته و معینی در جهت ضخامت تیر تغییر می‌کند (شکل ۳-۱ب) و در حقیقت تابعی از ضخامت تیر (z) می‌باشند. در تیر FGX-CNTRC سطح بالایی و پایینی تیر غنی‌شده از نانولوله‌هاست و برای تیر FGO-CNTRC، این قضیه برعکس است و تمرکز CNTها در صفحه‌ی میانی تیر می‌باشد.

کسر حجمی سه نوع نانولوله‌ی کربنی شرح داده شده مطابق جدول ۳-۱ تعریف می‌شوند. لازم به ذکر است که توابع کسر حجمی مربوط به هر یک از انواع نانولوله‌های کربنی UD، FGO و FGX به منظور استفاده‌ی آنها در روند حل معادلات نهایی و همچنین جهت مقایسه‌ی نتایج، در نرم‌افزار متلب منظور شده‌اند.

¹. Volume fraction of CNTs

جدول ۱-۳ توابع کسر حجمی CNT برای انواع مختلف تیرهای CNTRC.

کسر حجمی (V_{cn})	الگوی توزیع
V_{cn}^*	UD
$4 \frac{ z }{h} V_{cn}^*$	FGX
$\left(2 - 4 \frac{ z }{h}\right) V_{cn}^*$	FGO

V_{cn}^* معرف کسر حجمی کل است که بر اساس رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$V_{cn}^* = \frac{w_{cn}}{w_{cn} + (\rho_{cn}/\rho_m) - (\rho_{cn}/\rho_m) w_{cn}} \quad (۱-۳)$$

لازم به ذکر است که مقدار کسر حجمی کل برای انواع تیرهای CNTRC موجود در جدول ۱-۳، برابر است.

در رابطه‌ی فوق، w_{cn} کسر جرمی نانولوله‌ها، ρ_{cn} و ρ_m به ترتیب چگالی‌های نانولوله و ماتریس می‌باشند.

۱-۲-۳ قانون اختلاط

برای یک ماده‌ی کامپوزیتی حاصل از ترکیب دو ماده‌ی مجزا، اغلب اطلاعات دقیقی از سایز و شکل و توزیع اجزای تشکیل‌دهنده‌ی آن در دسترس نیست. در نتیجه مدول الاستیک معادل یا هر خاصیت معادل مورد نیازِ دیگرِ ماده‌ی مورد نظر باید بر اساس توزیع کسر حجمی و شکل تقریبی فازهای تشکیل‌دهنده محاسبه شوند. در طول این سال‌ها چندین مدل جهت پیش‌بینی خواص معادل مواد کامپوزیتی ارائه شده است که قانون اختلاط یکی از تکنیک‌های معمول در این حوزه می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شوند [۴۵، ۶۴]:

$$E_{11} = \eta_1 V_{cn} E_{11}^{cn} + V_m E_m \quad (۲-۳ الف)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{cn}}{E_{22}^{cn}} + \frac{V_m}{E_m} \quad (۲-۳ ب)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{cn}}{G_{12}^{cn}} + \frac{V_m}{G_m} \quad (3-2 \text{ ج})$$

که در روابط فوق، E_{11}^{cn} ، E_{22}^{cn} و G_{12}^{cn} به ترتیب مدول یانگ و مدول برشی نانولوله‌ی کربنی می‌باشند. E_m و G_m نیز به ترتیب مدول یانگ و برشی زمینه‌ی پلیمری هستند. V_m و V_{cn} به ترتیب معرف کسر حجمی CNT و ماتریس می‌باشند که رابطه‌ی $V_{cn} + V_m = 1$ بر آن‌ها حاکم است. α_{22} و α_{11} ضرایب انبساط حرارتی^۱ معادل به ترتیب در راستاهای طولی و جانبی هستند که طبق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\alpha_{11} = \frac{V_{cn} E_{11}^{cn} \alpha_{11}^{cn} + V_m E_m \alpha_m}{V_{cn} E_{11}^{cn} + V_m E_m} \quad (3-3 \text{ الف})$$

$$\alpha_{22} = (1 + \nu_{12}^{cn}) V_{cn} \alpha_{22}^{cn} + (1 + \nu_m) V_m \alpha_m - \nu_{12} \alpha_{11} \quad (3-3 \text{ ب})$$

α_{11}^{cn} و α_{22}^{cn} ضرایب انبساط حرارتی CNTها و α_m ضریب انبساط حرارتی زمینه می‌باشند. ضرایب پواسون نانولوله‌های کربنی و زمینه‌ی ماده‌ی مرکب، به ترتیب با ν_{12}^{cn} و ν_m معرفی می‌شوند. η_i (i = 1,2,3) پارامترهای بازدهی^۲ می‌باشند که توصیف‌کننده‌ی تأثیر نانولوله‌های کربنی در نظر گرفته می‌شوند. مقادیر این پارامترها برای V_{cn}^* ها و ماتریس زمینه‌ی مختلف، متفاوت هستند و از به کارگیری قانون اختلاط و نتایج پژوهش‌های دینامیک مولکولی حاصل می‌شوند. دینامیک مولکولی یک روش شبیه‌سازی بر پایه‌ی فیزیک است که به عنوان روشی مؤثر در مطالعه‌ی رفتار فیزیکی مواد در مقیاس اتمی به کار می‌رود. به کمک این روش، با ایجاد برهم‌کنش بین اتم‌ها و مولکول‌ها در یک بازه‌ی زمانی ثابت، می‌توان اطلاعات میکروسکوپی و جزئیاتی از برهم‌کنش بین مولکول‌ها را مطالعه کرد [۶۵].

بنابراین بر اساس رفتار تنش-کرنش مواد در مقیاس اتمی و بنا بر آنچه در خصوص شبیه‌سازی دینامیک مولکولی توضیح داده شد، برای ماده‌ی مرکب مورد مطالعه در این پژوهش که متشکل از PMAA به عنوان زمینه‌ی پلیمری و SWCNTهای دسته‌سندلی (۱۰، ۱۰) به عنوان تقویت‌کننده می‌باشد، پارامترهای بازدهی برای کسرهای حجمی کل ۰/۱۲، ۰/۱۷ و ۰/۲۸ طبق جدول ۳-۲ به دست آمده‌اند

¹. Thermal expansion coefficients

². CNT efficiency parameters

[۲۳]

جدول ۲-۳ پارامترهای بازدهی به ازای کسرهای حجمی کل متفاوت [۲۳].

η_3	η_2	η_1	کسر حجمی کل (V_{cn}^*)
$0.7\eta_2$	۱/۰۲۲	۰/۱۳۷	۰/۱۲
$0.7\eta_2$	۱/۶۲۶	۰/۱۴۲	۰/۱۷
$0.7\eta_2$	۱/۵۸۵	۰/۱۴۱	۰/۲۸

در ادامه ضریب پواسون معادل نیز که وابستگی کمی به تغییرات دما نشان می‌دهد، طبق رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$v_{12} = V_{cn}v_{12}^{cn} + V_m v_m \quad (۴-۳)$$

عبارت‌های ارائه شده در رابطه‌های ۲-۳ و ۳-۳ نیز با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما و متغیر بودن خواص در جهت ضخامت تعیین شده‌اند.

در ادامه به ارائه‌ی خواص زمینه و تقویت کننده‌ی مورد مطالعه در این پژوهش که وابسته به دما هستند، می‌پردازیم.

۳-۱-۱-۲-۳- خواص SWCNT نوع دسته‌سندلی (۱۰، ۱۰)

به کمک جدول ۳-۳، شامل خواص مواد وابسته به دما در پنج دمای مشخص، می‌توان خواص ترمومکانیکی نانولوله‌ی کربنی تک‌دیواره از نوع دسته‌سندلی (۱۰، ۱۰) را در دماهایی غیر از آنچه در جدول ارائه شده است را پیش‌بینی کرد.

جدول ۳-۳ - خواص ترمومکانیکی نانولوله‌ی کربنی تک‌دیواره دسته‌سندلی (۱۰، ۱۰) در دماهای مشخص [۱۴، ۲۵].

$\alpha_{22}^{cn} (\times 10^{-6} / K)$	$\alpha_{11}^{cn} (\times 10^{-6} / K)$	ν_{12}^{cn}	$G_{12}^{cn} (TPa)$	$E_{22}^{cn} (TPa)$	$E_{11}^{cn} (TPa)$	دما (K)
۵/۱۶۸۲	۳/۴۵۸۴	۰/۱۷۵	۱/۹۴۴۵	۷/۰۸۰۰	۵/۶۴۶۶	۳۰۰
۵/۰۹۰۵	۴/۱۴۹۶	۰/۱۷۵	۱/۹۷۰۳	۶/۹۸۱۴	۵/۵۶۷۹	۴۰۰
۵/۰۱۸۹	۴/۵۳۶۱	۰/۱۷۵	۱/۹۶۴۳	۶/۹۳۸۴	۵/۵۳۰۸	۵۰۰
۴/۸۹۴۳	۴/۶۶۷۷	۰/۱۷۵	۱/۹۶۴۴	۶/۸۶۴۱	۵/۴۷۴۴	۷۰۰
۴/۷۵۳۲	۴/۲۸۰۰	۰/۱۷۵	۱/۹۴۵۱	۶/۶۲۲۰	۵/۴۷۴۴	۱۰۰۰

به این معنی که با عمل درون‌یابی، خواص مورد نظر به صورت تابعی از دما به دست می‌آید. در همین راستا به کمک جعبه ابزار برازش منحنی^۱ در نرم‌افزار متلب، با در نظر گرفتن خواص ماده‌ی مدنظر در پنج دمای متفاوت و مشخص، ضرایب چندجمله‌ای درجه چهار تعریف‌شده برای هر یک از خواص مورد نظر تعیین می‌شوند. برای دما در بازه‌ی ۳۰۰ تا ۱۰۰۰ کلوین، تغییرات خواص ترمومکانیکی نانولوله‌ی کربنی مدنظر بر حسب دما به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$E_{11}^{cn} [\text{TPa}] = 3.942 \times 10^{-12}T^4 - 1.195 \times 10^{-8}T^3 + 1.259 \times 10^{-5}T^2 - 0.005872T + 6.565 \quad (3-5\text{الف})$$

$$E_{22}^{cn} [\text{TPa}] = 4.894 \times 10^{-12}T^4 - 1.486 \times 10^{-8}T^3 + 1.569 \times 10^{-5}T^2 - 0.007324T + 8.227 \quad (3-5\text{ب})$$

$$G_{12}^{cn} [\text{TPa}] = -7.188 \times 10^{-12}T^4 + 1.814 \times 10^{-8}T^3 - 1.638 \times 10^{-5}T^2 - 0.006272T + 1.106 \quad (3-5\text{ج})$$

$$\alpha_{11}^{cn} \left[\times 10^{-6}/K \right] = -6.706 \times 10^{-14}T^4 + 1.149 \times 10^{-8}T^3 - 2.896 \times 10^{-5}T^2 + 0.02294T - 1.128 \quad (3-5\text{د})$$

$$\alpha_{22}^{cn} \left[\times 10^{-6}/K \right] = -2.897 \times 10^{-14}T^4 + 6.754 \times 10^{-11}T^3 + 2.521 \times 10^{-7}T^2 - 0.0009734T - 5.436 \quad (3-5\text{د})$$

$$v_{12}^{cn} = 0.0175 \quad (3-5\text{ه})$$

حال با داشتن روابط بالا می‌توان خواص ترمومکانیکی SWCNTها را در هر دمایی در بازه‌ی ۳۰۰-۱۰۰۰ کلوین با تقریب خوبی به دست آورد.

^۱. Curve Fitting toolbox

۳-۲-۱-۲-۳ - خواص PMMA

ویژگی‌های پلی‌متیل‌متاکریلات را نیز می‌توان طبق جدول ۳-۴ ارائه نمود [۱۴]. که در آن‌ها $T = T_0 + \Delta T$ و $T_0 = 300 \text{ K}$ دمای مرجع^۱ می‌باشند. همچنین مقادیر مدول الاستیک و ضریب انبساط حرارتی وابسته به دما گزارش شده‌اند.

تمامی پارامترهای معرفی شده و فرمول‌های ارائه شده در ارتباط با قانون اختلاط در نرم‌افزار برنامه‌نویسی متلب پیاده‌سازی شده و در مراحل مربوط به حل معادلات نهایی حاکم بر مسأله به کار گرفته می‌شوند.

جدول ۳-۴ - خواص در نظر گرفته شده برای PMMA [۱۴].

خواص PMMA

$$\rho_m = 1150 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu_m = 0.34$$

$$E_m = (3.52 - 0.0034T) \text{ GPa}$$

$$\alpha_m = 45(1 + 0.0005\Delta T) \times 10^{-6} / \text{K}$$

۳-۳ میدان جابه‌جایی

مؤلفه‌های جابه‌جایی برای نقطه‌ای دلخواه در تیر بر اساس تئوری مراتب بالاتر تغییر شکل برشی تیرها و نسبت به صفحه‌ی میانی تیر به صورت زیر نشان داده می‌شود [۲۶، ۶۶]:

$$\bar{U}(x, z) = U(x) - z \frac{\partial W(x)}{\partial x} + \psi(z) \left(\frac{\partial W(x)}{\partial x} - \phi \right), \quad \bar{W}(x, z) = W(x) \quad (۶-۳)$$

\bar{U} و \bar{W} به ترتیب جابه‌جایی‌های یک نقطه‌ی دلخواه در تیر در راستاهای x و z هستند. مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه‌ی میانی تیر نیز با U و W در رابطه‌ی ۳-۶ نشان داده شده است. Φ دوران حول محور y نسبت به سطح مقطع تیر می‌باشد و $\psi(z)$ با عنوان تابع شکل، همان تابع توصیف‌کننده‌ی توزیع برش است که از تئوری‌ای به تئوری دیگر متفاوت می‌باشد. در جدول ۲-۱ نام تئوری‌های مورد بررسی در این پژوهش به همراه تابع شکل‌شان نشان داده شده است.

^۱. Reference temperature

۳-۴ میدان دما

در پژوهش حاضر تیر FG-CNTRC در محیط حرارتی تحت تغییرات دمایی درون-صفحه‌ای است. فرض شده تیر مورد مطالعه در دمای مرجع T_0 ، تنش-آزاد است و میدان تغییرات دما طبق رابطه‌ی ۳-۷ با توزیع سهمی‌گون در صفحه‌ی x-y تیر در نظر گرفته شده است [۳۵].

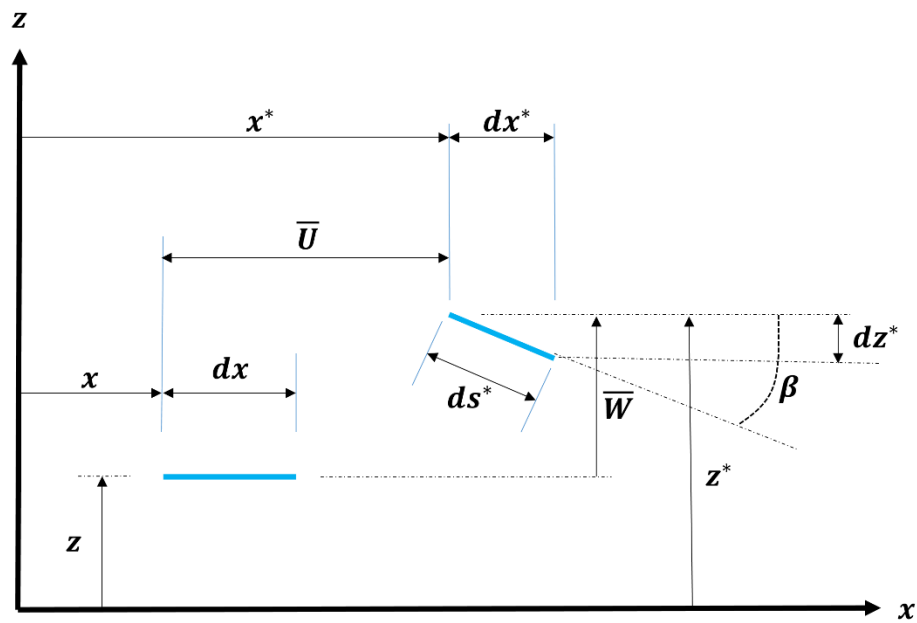
$$\Delta T(x) = T_1 + T_2 [1 - (2\zeta - 1)^2] \quad (۷-۳)$$

که $\zeta = \frac{x}{L}$ ، T_1 معرف مؤلفه‌ی تغییر دمای یکنواخت و T_2 تغییر دمای غیریکنواخت را نشان می‌دهد. با توجه به میدان دمای در نظر گرفته شده، دما در راستای ضخامت ثابت است ولی در راستای طول تیر بر حسب x متغیر است.

اگر از تغییرات دمای غیریکنواخت در طول تیر چشم‌پوشی کنیم ($T_2 = 0$)، واضح است که $\Delta T = T_1$ برقرار می‌شود. همچنین برای دمای کل (T)، رابطه‌ی $T = T_0 + \Delta T$ برقرار است.

۳-۵ میدان کرنش و رابطه‌ی غیرخطی کرنش-جاب‌جایی

یک المان خطی به طول dx که ابتدا موازی با محور x است را در نظر می‌گیریم. المان مورد نظر مطابق شکل ۳-۲ بعد از دوران در صفحه‌ی x-z حول محور y، به طول ds و موقعیت جدید با مختصات x^* و z^* تعریف می‌شود. جاب‌جایی‌های یک نقطه‌ی دلخواه در راستای x و z به ترتیب با U و W نشان داده می‌شوند. برای هر نقطه واقع در صفحه‌ی میانی نیز از \bar{U} و \bar{W} (جهت متمایز کردن آن‌ها از U و W) استفاده می‌کنند.



شکل ۲-۳ المان خطی قبل و بعد از تغییر شکل.

با توجه به شکل ۲-۳ داریم:

$$x^* = x + \bar{U}, \quad z^* = z + \bar{W} \quad (۸-۳)$$

از رابطه‌ی فوق نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dx^*}{dx} = 1 + \bar{U}' \quad (۹-۳ \text{ الف})$$

$$\frac{dz^*}{dx} = \bar{W}' \quad (۹-۳ \text{ ب})$$

همچنین با توجه به قضیه‌ی فیثاغورث^۱ داریم:

$$(ds^*)^2 = (dx^*)^2 + (dz^*)^2 \quad (۱۰-۳)$$

با تقسیم کردن رابطه‌ی بالا بر dx^2 می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{ds^*}{dx}\right)^2 - 1 = 2\bar{U}' + (\bar{U}')^2 + (\bar{W}')^2 \quad (۱۱-۳)$$

^۱. Pythagoreon

از طرفی با در نظر گرفتن عبارت تعریف کرنش $\bar{\varepsilon} = \frac{ds^* - dx}{dx}$ ، انجام چند عملیات ریاضی به منظور رسیدن به عبارت $\bar{\varepsilon} + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds^*}{dx} \right)^2 - 1 \right]$ (چشم‌پوشی از عبارت دارای $\bar{\varepsilon}^2$)، می‌توان آن را به فرم زیر نوشت:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ds^*}{dx} \right)^2 - 1 \right] \quad (۱۲-۳)$$

با جایگزین کردن رابطه‌ی ۱۱-۳ در رابطه‌ی فوق، میتوان رابطه‌ی کرنش را به صورت زیر نشان داد:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{U}' + \frac{1}{2} [(\bar{U}')^2 + (\bar{W}')^2] \quad (۱۳-۳)$$

به طور کلی این رابطه با فرض کوچک بودن $\bar{\varepsilon}$ ، معتبر است. با توجه به شکل ۲-۳ می‌توان دریافت که زاویه‌ی چرخش المان نسبت به محور y (β) بسیار کوچک است و $\beta = -\bar{W}'$ که البته کوچکی آن قابل چشم‌پوشی نیست در نتیجه از کوچکی \bar{U}' و به دنبال آن از عبارت $(\bar{U}')^2$ صرف‌نظر کرده و رابطه‌ی نهایی کرنش را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{U}' + \frac{1}{2} (\bar{W}')^2 \quad (۱۴-۳)$$

با به کارگیری رابطه‌ی غیرخطی کرنش-جاب‌جایی فون-کارمن (رابطه‌ی ۱۴-۳)، مؤلفه‌های کرنش تیر FG-CNTRC در محیط حرارتی را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 - \alpha_{11} \Delta T \\ &= \varepsilon_x^{(0)} + z \varepsilon_x^{(1)} + \psi(z) \varepsilon_x^{(2)} - \alpha_{11} \Delta T \end{aligned} \quad (الف \ ۱۵-۳)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} = \frac{d\psi}{dz} \gamma_{xz}^{(0)} \quad (ب \ ۱۵-۳)$$

که در آن‌ها:

$$\varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \quad (الف \ ۱۶-۳)$$

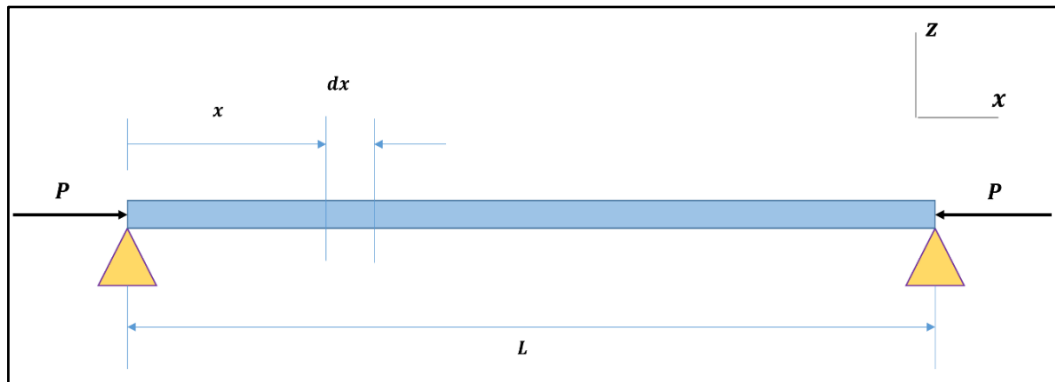
$$\varepsilon_x^{(1)} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (ب \ ۱۶-۳)$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3-16 \text{ ج})$$

$$\gamma_{xz}^{(0)} = \frac{\partial W}{\partial x} - \phi \quad (3-16 \text{ د})$$

۳-۶ معادله‌های حاکم بر پایداری تیر CNTRC

در این مرحله با به کارگیری روابط تعادل تیر به استخراج معادلات دیفرانسیل غیرخطی تیر کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی می‌پردازیم. ابتدا یک تیر مستقیم به طول L تحت نیروی محوری P در راستای x در نظر گرفته شده است (شکل ۳-۳).



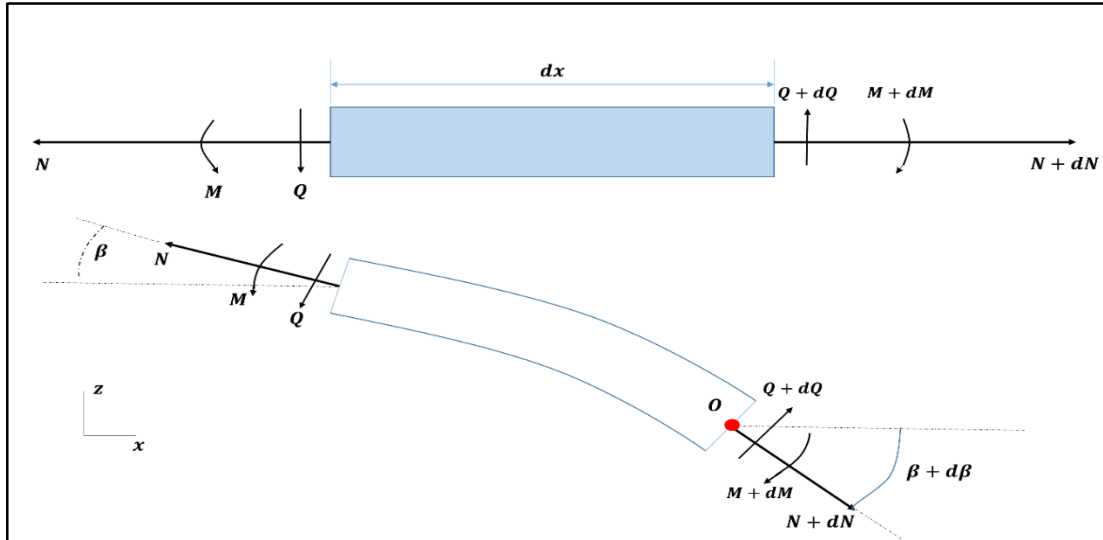
شکل ۳-۳ تیر تحت نیروی محوری.

در شکل ۳-۴ الف المانی از آن به طول dx و نیروی محوری، نیروی برشی و ممان خمشی وارد بر آن نشان داده شده است. به منظور در نظر گرفتن اثر چرخش در رفتار تیر، باید معادلات تعادل را برای المان تغییر شکل یافته استفاده کنیم (شکل ۳-۴ ب). به دلیل کوچک بودن زاویه‌ی دوران (β)، در معادلات تعادل $\sin \beta$ و $\cos \beta$ به ترتیب با β و ۱ جایگزین می‌شوند. با توجه به این که نیروی P در صفحه‌ی تیر (x - z) اعمال شده است، برآیند نیروها را نیز در راستاهای x و z مطرح می‌شوند. در نظر داریم که

$$d\beta dQ = 0 \text{ و } N' \equiv \frac{dN}{dx}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N' + Q\beta' + \beta Q' = 0 \quad (3-17 \text{ الف})$$

$$\sum F_z = 0 \rightarrow -N\beta' - \beta N' + Q' = 0 \quad (3-17 \text{ ب})$$



شکل ۳-۴ علامت قراردادی مثبت نیروها و ممان‌های وارد بر المان (الف) قبل از تغییر شکل، (ب) بعد از تغییر شکل.

همچنین در ادامه با در نظر گرفتن $M' \equiv dM/dx$ برآیند ممان‌ها حول نقطه‌ی O به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\sum M_O = 0 \rightarrow Q = M' \quad (۱۸-۳)$$

برای تیرهای نازک و بلند، با چشم‌پوشی از نیروها و تنش‌های برشی جانبی ($Q = 0$) و همچنین فرض ساده‌شونده‌ی همیشگی مبنی بر حذف عبارت درجه‌ی دو که نشان‌دهنده‌ی تعامل بین نیروی برشی جانبی کوچک و چرخش می‌باشد ($\beta Q' = 0$)، می‌توان روابط ۳-۱۷ و ۳-۱۸ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$N' = 0 \quad (۳-۱۹ الف)$$

$$Q' - N\beta' = 0 \quad (۳-۱۹ ب)$$

$$Q = M' \quad (۳-۱۹ ج)$$

با توجه به این که $\beta' = -W''$ ، میتوان معادلات پایداری حاکم بر تیر را بر حسب N_x ، M_x و W جهت مطالعه در این پژوهش به فرم زیر ارائه نمود:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad (۳-۲۰ الف)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_x \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (۳-۲۰ ب)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (۳-۲۰ج)$$

منتجه‌های نیروی محوری، ممان خمشی و نیروی برشی جانبی به ترتیب با N_x ، M_x و Q_x معرفی می‌شوند و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (۳-۲۱الف)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (۳-۲۱ب)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (۳-۲۱ج)$$

با حل انتگرال‌های فوق می‌توان آن‌ها را بر حسب A_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) که مؤلفه‌های سفتی تعریف می‌شوند، نتیجه‌های دمایی نیرو و ممان که به ترتیب با N_x^T و M_x^T معرفی می‌شوند، به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_4 & A_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_x^{(2)} \end{bmatrix} - \quad Q_x = A_6 \gamma_{xz}^{(0)} \quad (۳-۲۲)$$

$$\begin{bmatrix} N_x^T \\ M_x^T \end{bmatrix},$$

که در آن‌ها مؤلفه‌های سفتی طبق رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z, T) \{1, z, f(z), z^2, zf(z)\} dz \quad (۳-۲۳الف)$$

$$A_6 = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{55}(z, T) dz \quad (۳-۲۳ب)$$

که در رابطه‌های بالا Q_{11} و Q_{55} به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$Q_{11}(z, T) = \frac{E_{11}(z, T)}{1 - \nu_{12}(z)\nu_{21}(z)}, \quad Q_{55}(z, T) = G_{13}(z, T) \quad (۳-۲۴)$$

G_{13} نیز معادل G_{12} می‌باشد که در روابط قانون اختلاط محاسبه شده است.

منتجه‌های دمایی نیرو و ممان نیز به این صورت محاسبه می‌شوند:

$$N_x^T = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z, T) \alpha_{11}(z, T) \Delta T dz \quad (3-25 \text{ الف})$$

$$M_x^T = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z, T) \alpha_{11}(z, T) \Delta T z dz \quad (3-25 \text{ ب})$$

لازم به ذکر است چنانچه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول را برای تعیین میدان جابه‌جایی و به دنبال آن استخراج معادله‌های حاکم در نظر می‌گیریم، باید در رابطه‌ی ۳-۲۳ ضریب تصحیح برشی را که در فصل دوم توضیح داده شد، لحاظ کنیم. ضریب تصحیح برشی را در این پژوهش معادل ۵/۶ در نظر می‌گیریم.

در این مرحله با جایگذاری روابط ۳-۲۲ در ۳-۲۰ و لحاظ رابطه‌ی ۳-۱۶، معادلات غیرخطی حاکم بر تیر CNTRC بر حسب جابه‌جایی‌ها به دست می‌آیند:

$$A_1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - A_2 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + A_3 \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial N_x^T}{\partial x} = 0 \quad (3-26 \text{ الف})$$

$$A_6 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left[A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} A_1 \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - A_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + A_3 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - N_x^T \right] \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3-26 \text{ ب})$$

$$A_2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - A_4 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + A_5 \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial M_x^T}{\partial x} - A_6 \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \phi \right) = 0 \quad (3-26 \text{ ج})$$

۷-۳ شرایط مرزی

در این پژوهش دو نوع شرایط تکیه‌گاهی گیردار و لولا در هر دو انتها ($x = 0, L$)، برای تیر CNTRC در نظر گرفته شده است که برای برقراری آن از جهت ریاضی ارضای روابط زیر مورد نیاز است:

$$U = W = M_x = 0 \quad \text{تیر دوسرلولا (H-H)} \quad (3-27 \text{ الف})$$

$$U = W = \phi = 0 \quad \text{تیر دوسرگیردار (C-C)} \quad (3-27 \text{ ب})$$

۳-۸ روش حل معادلات غیرخطی حاکم بر مسأله

۳-۸-۱ شرح مختصری پیرامون روش‌های عددی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مدل کردن پدیده‌های گوناگون طبیعی مانند حرارت به کار می‌روند. با توجه به پیچیدگی این معادلات، روش‌های تحلیلی محدودی برای حل دسته‌ی خاصی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وجود دارد. به همین دلیل روش‌های عددی به اصلی‌ترین ابزار در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل شده‌اند. روش دیفرانسیل کوادریچر یک روش حل عددی است که در بسیاری از مسائل مهندسی به کار گرفته شده است. روش DQ به عنوان یک جایگزین کارآمد برای روش‌های مرسوم حل عددی مثل المان محدود و تفاضل محدود^۱ به حساب می‌آید. در اغلب موارد در روش DQ مانند حل تحلیلی نتایج دقیقی حاصل می‌شود. ویژگی‌هایی مثل سرعت همگرایی بالا، درستی و دقت زیاد و کارایی آن از لحاظ محاسباتی موجب شده به عنوان یک روش شناخته شده در حوزه‌ی محاسبات مطرح شود. همچنین منابعی در رابطه با کاربردهای DQM در مهندسی و پیشرفت‌هایی که از ابتدا داشته، برای پژوهشگران و علاقه‌مندان این حوزه در دسترس می‌باشند [۶۷، ۶۸].

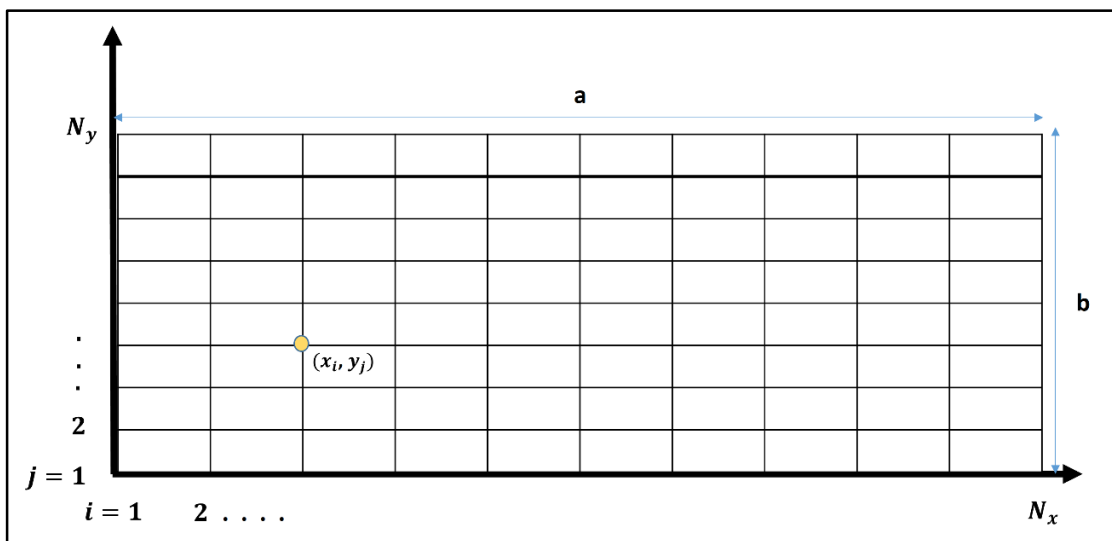
در روش‌های عددی برای حل مسائل عموماً به تبدیل معادلات از طریق فرمول‌های مشتق یا انتگرال می‌پردازند و تلاش می‌کنند دستگاه معادلات پیچیده‌ی حاکم بر مسأله را به دستگاه مشابهی از معادله‌های جبری یا مرتبه‌ی اول تبدیل کنند. در واقع ایده‌ی کلی بیشتر روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به این شکل است که ابتدا دامنه‌ی پیوسته‌ی مسأله در محدوده‌ی معین

^۱. Finite difference

خود، گسسته‌سازی می‌شود. سپس تابع مجهول یا مشتقات آن به کمک تکنیکی عددی تقریب زده می‌شود. به عبارتی تفاوت بین روش‌های حل عددی، از متمایز بودن نوع تقریب تابع مجهول یا مشتقات آن نشأت می‌گیرد. سپس با تبدیل معادله به دستگاه ماتریسی و حل دستگاه، جواب معادله‌ی دیفرانسیل به دست می‌آید. در روش دیفرانسیل کوادریچر این معادله‌ها در نقاط گسسته‌ی تعیین‌شده‌ای، بر حسب مقادیر گسسته‌ای از تابع‌های موجود در مسأله تعریف می‌شوند.

۲-۸-۳ روش DQ

در راستای تشریح روش DQ، تابع پیوسته و مشتق‌پذیر $F = F(x, y)$ را در نظر می‌گیریم که در دامنه‌ی مستطیلی به طول a و عرض b تعریف شده است. خواسته‌ی مسأله، مقدار تابع F در هر یک از نقاط موجود در شبکه بندی شکل ۳-۵ است. با مشخص کردن تعدادی گره در راستای x (N_x) و به طور مشابه در راستای y (N_y) شبکه‌ی مورد نظر برای حل به روش DQ شکل می‌گیرد.



شکل ۳-۵ شبکه‌بندی روش DQ برای دامنه‌ی مستطیلی.

مطابق این روش، مشتق مرتبه‌ی r م تابع F نسبت به متغیر x در نقطه‌ی $x = x_i$ و مشتق مرتبه‌ی r م تابع F نسبت به متغیر y در نقطه‌ی $y = y_j$ به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left. \frac{\partial^r F}{\partial x^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{k=1}^{N_x} A_{ik}^{(r)} F_{kj}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (3-28 \text{ الف})$$

$$\frac{\partial^s F}{\partial y^s} \Big|_{y=y_i} = \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(s)} F_{il}; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (28-3)$$

که در آن‌ها $A_{ik}^{(r)}$ و $B_{jl}^{(s)}$ را ضرایب وزنی می‌نامند. در نظر داشته باشید، $F_{ij} = F(x_i, y_j)$ دو رابطه‌ی بالا را می‌توان اساس روش DQ دانست که در آن مشتق تابع در هر یک از این نقاط گرهی به صورت جمع خطی وزن دار از مقدار تابع در تمام نقاط گرهی تعیین شده در آن راستا می‌باشد.

در ادامه‌ی حل به روش DQ نیاز به محاسبه‌ی ضرایب وزنی داریم. روش‌های متعددی برای تعیین ضرایب وزنی وجود دارد. روش واندرموند^۱ با افزایش تعداد گره‌ها، نتایج نادرستی را ارائه می‌دهد و همچنین ماتریس‌های بد رفتار ایجاد می‌کند. در اینجا به ارائه‌ی روشی که اولین بار در سال ۱۹۹۲ میلادی توسط شو^۲ و ریچاردز^۳ معرفی شد، می‌پردازیم. روابط جهت اختصار برای گره بندی در راستای x ارائه شده است و فرمول بندی در جهت y نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. درایه‌های غیر قطری ماتریس ضرایب وزنی مرتبه‌ی اول به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A_{ik}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_k) \Pi(x_k)} \quad \text{for } i, k = 1, 2, \dots, N_x \text{ and } k \neq i \quad (29-3)$$

که در آن

$$\Pi(x_i) = \prod_{v=1, v \neq i}^{N_x} (x_i - x_v), \quad \Pi(x_k) = \prod_{v=1, v \neq i}^{N_y} (x_k - x_v), \quad (30-3)$$

ماتریس ضرایب وزنی مرتبه‌ی دوم و بالاتر $2 \leq r \leq (N-1)$ نیز به فرم زیر قابل محاسبه است:

$$A_{ik}^{(r)} = r \left(A_{ii}^{(r-1)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right) \quad \text{for } i, k = \quad (31-3)$$

$$1, 2, \dots, N_x \text{ and } k \neq i$$

درایه‌های قطری ماتریس ضرایب وزنی مراتب یک، دو و بالاتر نیز به این صورت است:

$$A_{ii}^{(r)} = \sum_{v=1, v \neq i}^{N_x} A_{iv}^{(r)} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N_x \quad (32-3)$$

1. Vandermonde

2. Shu

3. Richards

محاسبه‌ی درست ضرایب وزنی از این جهت که عامل مؤثری بر کارآمد بودن روش DQ می‌باشد، بسیار حائز اهمیت است. عامل دیگر، انتخاب درست گره‌های نمونه در دامنه‌ی حل می‌باشد. در این مرحله دو مدل برای انتخاب نقاط مطرح می‌شوند. انتخاب نقاط با فاصله‌ی برابر^۱ که به ترتیب در راستاهای x و y به این صورت می‌باشند:

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1} a; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (3-33 \text{ الف})$$

$$y_i = \frac{i-1}{N_y-1} b; \quad i = 1, 2, \dots, N_y \quad (3-33 \text{ ب})$$

اغلب اوقات انتخاب نقاط با فاصله‌ی نابرابر، نتایج صحیح‌تری را در حل مسأله به دنبال دارد که فرم زیر نمونه‌ای از آن به ترتیب در راستاهای x و y می‌تواند باشد:

$$x_i = \frac{a}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{N_x-1} \right]; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (3-34 \text{ الف})$$

$$y_i = \frac{b}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{N_y-1} \right]; \quad i = 1, 2, \dots, N_y \quad (3-34 \text{ ب})$$

۳-۸-۳ اعمال گسسته‌سازی DQ بر دستگاه معادلات غیر خطی حاکم بر تیر CNTRC

دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی (معادله‌ی ۳-۲۶) برحسب مؤلفه‌های جابه‌جایی U ، W ، ϕ و مشتقات آن‌ها نسبت به متغیر x می‌باشند. طبق روش DQ، مشتق k ام تابع‌های جابه‌جایی در دستگاه معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

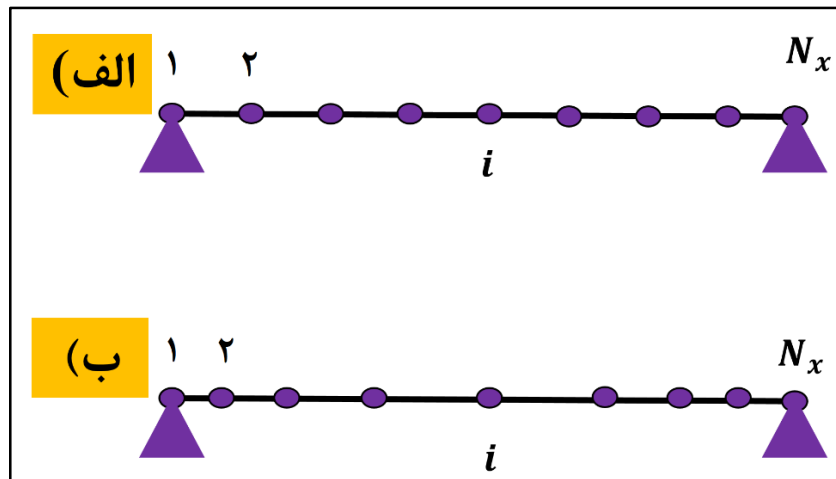
$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \{U, W, \phi\} \Big|_{x=x_i} = \sum_{m=1}^N C_{ij}^{(k)} \{U_j, W_j, \phi_j\} \quad (3-35)$$

لازم به ذکر است با توجه به یک‌بعدی بودن تیر محدوده‌ی دامنه‌ی نقاط نمونه نیز در یک بعد و به صورت خطی در راستای x می‌باشد. دو نوع گره‌بندی با فواصل برابر و نابرابر به ترتیب در شکل ۳-۶ الف

¹. Equally spaced points

و ب نمایش داده شده‌اند. در پژوهش حاضر نقاط انتخابی با فاصله‌ی نابرابر فرض شده‌اند که در آن موقعیت گره‌ها طبق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شوند (شکل ۳-۶-ب):

$$x_i = \frac{L}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi(i-1)}{N-1} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3-36)$$



شکل ۳-۶-گره‌بندی تیر الف) نقاط انتخابی با فاصله‌ی برابر، ب) نقاط انتخابی با فاصله‌ی نابرابر.

در ادامه مطابق توضیحات داده شده در خصوص DQ، روابط مربوط به ماتریس‌های ضرایب وزنی مرتبه‌ی اول و مراتب بالاتر برای مسأله‌ی یک بعدی تیر CNTRC به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_j) \Pi(x_j)} \quad \text{for } i, j = 1, 2, \dots, N \text{ and } j \neq i \quad (3-37)$$

که در آن‌ها:

$$\Pi(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k), \quad \Pi(x_j) = \prod_{k=1, k \neq j}^N (x_j - x_k), \quad (3-38)$$

برای ماتریس ضرایب وزنی با مرتبه‌ی بیشتر $2 \leq k \leq (N-1)$ می‌توان نوشت:

$$c_{ij}^{(k)} = k \left(c_{ii}^{(k-1)} c_{ij}^{(1)} - \frac{c_{ij}^{(k-1)}}{x_i - x_j} \right) \quad \text{for } i, j = 1, 2, \dots, N \text{ and } j \neq i \quad (3-39)$$

و در نهایت برای درایه‌های قطری ماتریس‌های ضرایب وزنی داریم:

$$c_{ii}^{(K)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N c_{ij}^{(K)} \quad \text{for } i, j = 1, 2, \dots, N \text{ and } j \neq i \quad (3-40)$$

با اعمال رابطه‌ی ۳-۳۵، هر یک از عبارت‌های موجود در معادله‌های ۳-۲۶ شامل مشتق‌های مرتبه‌ی اول و بالاتر تابع‌های U ، W و ϕ در هر یک از نقاط گرهی را می‌توان به صورت جمع خطی وزن‌دار از مقدار تابع در تمام نقاط گرهی تعیین‌شده در آن راستا نوشت که به صورت زیر قابل ارائه است (چگونگی تبدیل چند عبارت به عنوان نمونه ارائه می‌کنیم):

$$A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = A_1 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j \quad (۳-۴۱الف)$$

$$A_1 \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = A_1 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} W_j \sum_{m=1}^N c_{im}^{(2)} W_m \quad (۳-۴۱ب)$$

$$A_2 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = A_2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} W_j \quad (۳-۴۱ج)$$

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = A_1 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} U_j \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} W_j \quad (۳-۴۱د)$$

$$\frac{1}{2} A_1 \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{1}{2} A_1 \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} W_j \right)^2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} W_j \quad (۳-۴۱ه)$$

در نهایت با اعمال قوانین DQ و محاسبه‌ی ضرایب وزنی، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned} & A_1 \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j + \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} W_j \sum_{m=1}^N c_{im}^{(2)} W_m \right) - A_2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} W_j \\ & + A_3 \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} W_j - \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} \phi_j \right) - \frac{\partial N_x^T}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (۳-۴۲الف)$$

$$\begin{aligned}
& A_6 \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} W_j - \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} \phi_j \right) \\
& + \left[A_1 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} U_j + \frac{1}{2} A_1 \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} W_j \right)^2 \right. \\
& - A_2 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} W_j + A_3 \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} W_j - \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} \phi_j \right) \\
& \left. - N_x^T \Big|_{x=x_i} \right] \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} W_j \right) = 0
\end{aligned} \tag{۳-۴۲ب}$$

$$\begin{aligned}
& A_2 \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} U_j + \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} W_j \sum_{m=1}^N c_{im}^{(2)} W_m \right) - A_4 \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} W_j \\
& + A_5 \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(3)} W_j - \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} \phi_j \right) - \frac{\partial M_x^T}{\partial x} \Big|_{x=x_i} \\
& - A_6 \left(\sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} W_j - \phi_i \right) = 0
\end{aligned} \tag{۳-۴۲ج}$$

۳-۸-۴ اعمال شرایط مرزی

با در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی فرض شده در و به کارگیری قانون DQ در روابط ۳-۲۷، شرایط

مرزی تیر دوسرلولا را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$U_1 = 0, \quad W_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& A_2 \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} U_j + \frac{1}{2} A_2 \left(\sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} W_j \right)^2 - A_4 \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(2)} W_j \\
& + A_5 \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(2)} W_j - A_5 \sum_{j=1}^N c_{1j}^{(1)} \phi_j - M_x^T \Big|_{x=x_1} = 0
\end{aligned} \tag{۳-۴۳الف}$$

$$U_N = 0, W_N = 0,$$

$$A_2 \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} U_j + \frac{1}{2} A_2 \left(\sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} W_j \right)^2 - A_4 \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} W_j \quad (3-43 \text{ ب})$$

$$+ A_5 \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(2)} W_j - A_5 \sum_{j=1}^N c_{Nj}^{(1)} \phi_j - M_x^T \Big|_{x=x_N} = 0$$

همچنین شرایط مرزی برای تیر دوسرگیردار را می‌توان طبق رابطه‌ی زیر بیان نمود:

$$U_1 = 0, W_1 = 0, \phi_1 = 0, \quad (3-44 \text{ الف})$$

$$U_N = 0, W_N = 0, \phi_N = 0, \quad (3-44 \text{ ب})$$

حال با جایگذاری شرایط مرزی در معادله‌ی ۳-۴۲، می‌توان دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاکم بر رفتار کمانشی و پس‌کمانشی تیر FG-CNTRC تحت بارگذاری حرارتی را به فرم ماتریسی زیر ارائه نمود:

$$[K_{L1} - \Delta TK_{L2}] \{d\} + [K_{NL1} + K_{NL2}] \{d\} = \{R\} \quad (3-45)$$

در معادله‌ی فوق d معرف بردار جابه‌جایی مجهول است و به شکل زیر نشان داده می‌شود:

$$\{d\} = \{ \{U_i\}^T, \{W_i\}^T, \{\phi_i\}^T \}^T, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3-46)$$

K_{L1} , K_{L2} , K_{NL1} و K_{NL2} ماتریس‌های سفتی با ابعاد $3N \times 3N$ می‌باشند. K_{L1} ماتریس ضرایب ثابت، K_{L2} ماتریس ضرایب مرتبط با تغییرات دما، K_{NL1} و K_{NL2} نیز به ترتیب توابع خطی و درجه دو از بردار جابه‌جایی مجهول می‌باشند. R نیز مشخصه‌ی بردار بارگذاری حرارتی است و به طور کلی اجزای آن می‌تواند ناشی از تنش‌های مربوط به شرایط مرزی، نقص‌های هندسی اولیه و تغییر دمای غیریکنواخت باشند.

نحوه‌ی تعریف ماتریس‌های سفتی خطی (K_{L1} و K_{L2}) و غیرخطی (K_{NL1} و K_{NL2}) در ادامه شرح داده خواهد شد. از آن جایی که N گره در طول تیر طبق روش DQ فرض شده است و هر گره دارای سه

درجه‌ی آزادی است، بنابراین دستگاه معادلات ماتریسی $3N \times 3N$ می‌باشد. زیرماتریس‌های هر یک از ماتریس‌های سفتی معرفی شده به فرم زیر در نرم‌افزار متلب کدنویسی شده‌اند. هر یک از زیرماتریس‌ها در K_{L1} و K_{L2} شامل مؤلفه‌های سفتی و ضرایب وزنی می‌باشند. زیرماتریس‌های K_{NL1} و K_{NL2} نیز که به ترتیب توابعی خطی و درجه دو از بردار جابه‌جایی هستند، از مؤلفه‌های سفتی و عبارت‌های خطی و درجه دو از بردار جابه‌جایی تشکیل شده‌اند.

$$K_{L1} = \begin{bmatrix} [K_{11}]_{N \times N} & [K_{12}]_{N \times N} & [K_{13}]_{N \times N} \\ [K_{21}]_{N \times N} & [K_{22}]_{N \times N} & [K_{23}]_{N \times N} \\ [K_{31}]_{N \times N} & [K_{32}]_{N \times N} & [K_{33}]_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (۳-۴۷\text{الف})$$

$$K_{L2} = \begin{bmatrix} [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} \\ [0]_{N \times N} & [G_{22}]_{N \times N} & [0]_{N \times N} \\ [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (۳-۴۷\text{ب})$$

$$K_{NL1} = \begin{bmatrix} [F_{11}]_{N \times N} & [F_{12}]_{N \times N} & [F_{13}]_{N \times N} \\ [F_{21}]_{N \times N} & [F_{22}]_{N \times N} & [F_{23}]_{N \times N} \\ [F_{31}]_{N \times N} & [F_{32}]_{N \times N} & [F_{33}]_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (۳-۴۷\text{ج})$$

$$K_{NL1} = \begin{bmatrix} [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} \\ [0]_{N \times N} & [H_{22}]_{N \times N} & [0]_{N \times N} \\ [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} & [0]_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (۳-۴۷\text{د})$$

دستگاه معادلات ماتریسی حاکم بر تیر FG-CNTRC بر حسب زیرماتریس‌های تعریف شده را نیز می‌توان به فرم گسترده‌ی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [G_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \right) \Delta T \\
 & + \begin{bmatrix} [F_{11}] & [F_{12}] & [F_{13}] \\ [F_{21}] & [F_{22}] & [F_{23}] \\ [F_{31}] & [F_{32}] & [F_{33}] \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [H_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \left. \begin{matrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \\ W_1 \\ \vdots \\ W_N \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{matrix} \right\} = \{R\}_{(3N \times 1)} \quad (48-3)
 \end{aligned}$$

استخراج زیرماتریس‌های هر یک از ماتریس‌های K_{L1} و K_{L2} بر حسب مؤلفه‌های سفتی و ضرایب وزنی طبق روابط زیر صورت گرفته است:

$$K_{11} = A_1 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(2)} & \cdots & c_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(2)} & \cdots & c_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3-49الف)$$

$$K_{12} = (A_3 - A_2) \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(3)} & \cdots & c_{1N}^{(3)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(3)} & \cdots & c_{NN}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (3-49ب)$$

$$K_{13} = -A_3 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(2)} & \cdots & c_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(2)} & \cdots & c_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3-49ج)$$

$$K_{21} = [0]_{N \times N} \quad (3-49د)$$

$$K_{22} = A_6 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(2)} & \cdots & c_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(2)} & \cdots & c_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3-49ه)$$

$$K_{23} = -A_6 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(1)} & \cdots & c_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(1)} & \cdots & c_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3-49\text{و})$$

$$K_{31} = A_2 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(2)} & \cdots & c_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(2)} & \cdots & c_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3-49\text{ز})$$

$$K_{32} = (A_5 - A_4) \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(3)} & \cdots & c_{1N}^{(3)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(3)} & \cdots & c_{NN}^{(3)} \end{bmatrix} - A_6 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(1)} & \cdots & c_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(1)} & \cdots & c_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3-49\text{ح})$$

$$K_{33} = -A_5 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(2)} & \cdots & c_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(2)} & \cdots & c_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} + A_6 I_{N \times N} \quad (3-49\text{ط})$$

$$G_{22} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(2)} & \cdots & c_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(2)} & \cdots & c_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11}(z, T) \alpha_{11}(z, T) dz \quad (3-49\text{ی})$$

ضمناً I معرف ماتریس همانی می باشد.

زیرماتریس های هر یک از ماتریس های K_{NL1} و K_{NL2} نیز بر حسب مؤلفه های سفتی، ضرایب وزنی و جابه جایی طبق روابط زیر استخراج می شوند:

$$F_{11} = [0]_{N \times N} \quad (3-50\text{الف})$$

$$F_{12} = A_1 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(1)} & \cdots & c_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(1)} & \cdots & c_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 \cdots & G_1 \\ G_2 & G_2 \cdots & G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N & G_N \cdots & G_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (3-50\text{ب})$$

$$F_{13} = [0]_{N \times N} \quad (3-50\text{ج})$$

$$F_{21} = A_1 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(1)} & \dots & c_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(1)} & \dots & c_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 \dots & G_1 \\ G_2 & G_2 \dots & G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N & G_N \dots & G_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (د۵۰-۳)$$

$$F_{22} = (A_3 - A_2) \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(2)} & \dots & c_{1N}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(2)} & \dots & c_{NN}^{(2)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 \dots & G_1 \\ G_2 & G_2 \dots & G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N & G_N \dots & G_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (ه۵۰-۳)$$

$$F_{23} = -A_3 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(1)} & \dots & c_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(1)} & \dots & c_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 \dots & G_1 \\ G_2 & G_2 \dots & G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N & G_N \dots & G_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (و۵۰-۳)$$

$$F_{31} = [0]_{N \times N} \quad (ز۵۰-۳)$$

$$F_{32} = A_2 \times \begin{bmatrix} c_{11}^{(1)} & \dots & c_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(1)} & \dots & c_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 \dots & G_1 \\ G_2 & G_2 \dots & G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N & G_N \dots & G_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (ح۵۰-۳)$$

$$F_{33} = [0]_{N \times N} \quad (ط۵۰-۳)$$

$$H_{22} = \frac{1}{2} A_1 \begin{bmatrix} c_{11}^{(1)} & \dots & c_{1N}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1}^{(1)} & \dots & c_{NN}^{(1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_1 & G_1 \dots & G_1 \\ G_2 & G_2 \dots & G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_N & G_N \dots & G_N \end{bmatrix}_{N \times N} \times \begin{bmatrix} J_1 & J_1 \dots & J_1 \\ J_2 & J_2 \dots & J_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ J_N & J_N \dots & J_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (ی۵۰-۳)$$

که در آنها

$$G_i = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(2)} W_j ; i = 1, 2, \dots, N \quad (الف۵۱-۳)$$

$$J_i = \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(1)} W_j ; i = 1, 2, \dots, N \quad (ب۵۱-۳)$$

۳-۸-۵ کمانش از نوع دوشاخگی تیرهای FG-CNTRC

چنانچه در تیرهای FG-CNTRC، نانولوله‌های کربنی به طور متقارن توزیع شوند، به واسطه‌ی نبود اثر متقابل کششی-خمشی^۱ ($B_{11} = 0$)، صرف‌نظر از این که تغییرات دما چگونه باشد، تیر دچار کمانش از نوع دوشاخگی می‌شود. در مقابل اگر CNTها به صورت غیرمتقارن در زمینه توزیع شوند، اثر متقابل کششی-خمشی غیر صفر شده و کمانش از نوع دوشاخگی اتفاق نمی‌افتد، مگر این که شرایط تکیه‌گاهی تیر دوسرگیردار باشد. به این دلیل که در حالت دوسرگیردار، ممان‌های خمشی که به واسطه‌ی بارگذاری حرارتی ایجاد می‌شوند، می‌توانند توسط ممان‌های واکنشی تکیه‌گاه دوسرگیردار خنثی شوند. به این معنی که قیود گیردار قابلیت تولید نوعی ممان خمشی جهت بازیابی خود در برابر ممان‌های خمشی اعمالی دارند و در نتیجه تیر می‌تواند تا قبل از کمانش تخت باقی بماند [۲۰، ۲۸، ۶۹]. بدیهی است با توجه به توضیحات ارائه‌شده، تیر FG-CNTRC مورد مطالعه در این پژوهش دچار کمانش از نوع دوشاخگی می‌شود. به همین ترتیب سمت راست معادله‌ی ماتریسی صفر شده و با حذف عبارت‌های غیرخطی (K_{NL1} و K_{NL2})، دستگاه ماتریسی غیرخطی مسأله به یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی خطی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$[K_{L1} - \Delta TK_{L2}]\{d\} = 0 \quad (۳-۵۲)$$

که با حل معادله‌ی فوق کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی مثبت به عنوان دمای کمانش بحرانی^۲ به دست می‌آید. مراحل حل مسأله‌ی مقدار ویژه و محاسبه‌ی دمای بحرانی کمانش با توجه به وابستگی خواص مواد به دما مطابق یک الگوی برگشتی، به شرح زیر می‌باشد:

(۱-۱) با استفاده از خواص مواد مستقل از دما (در دمای مرجع T_0) ماتریس‌های سفتی K_{L1} و

K_{L2} تشکیل می‌شوند. سپس به حل معادله‌ی ۳-۵۲ که با حذف عبارت‌های غیرخطی به

مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی خطی تبدیل شده است، می‌پردازیم و دمای کمانش بحرانی ΔT_{cr}

1. Stretching-bending coupling element

2. Critical buckling temperature

(کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی مثبت) را به دست می‌آوریم.

(۲-۱) مجدداً ماتریس‌های سفتی را بر اساس مقادیرِ خواص ترمومکانیکی مواد در دمای $T =$

$T_0 + \Delta T_{cr}$ که طبق روابط ۳-۵ (چندجمله‌ای‌های درجه‌ی چهار حاصل از برازش منحنی)

محاسبه می‌شوند، بازنویسی می‌کنیم و دمای کمانش جدید را به همان ترتیب به دست

می‌آوریم.

(۳-۱) مرحله‌ی قبل را تا زمانی که دمای کمانش بحرانی به حدی از خطای تعیین شده همگرا

شود، ادامه می‌دهیم.

۳-۸-۶ پاسخ پس کمانشی تیرهای FG-CNTRC

مطابق آنچه توضیح داده شد، به دلیل توزیع متقارن CNT، سمت راست دستگاه معادله‌ی ماتریسی ۳-

۴۵ برابر صفر می‌شود و در نهایت دستگاه معادلات ماتریسی غیرخطی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[K_{L1} - \Delta TK_{L2}]\{d\} + [K_{NL1} + K_{NL2}]\{d\} = 0 \quad (۵۳-۳)$$

مراحل حل غیرخطی به کمک یک الگوریتم بازگشتی برای تعیین مسیر تعادل پس کمانش حرارتی به

شرح زیر می‌باشد [۷۰]:

(۱-۲) با $W_m/r = 0$ شروع می‌کنیم. جابه‌جایی مرکزی بی بعد تیر به واسطه‌ی تغییرات

دماست. r نیز معادل $h/(2\sqrt{3})$ ، شعاع ژیراسیون سطح مقطع تیر می‌باشد.

(۲-۲) مراحل بازگشتی ۱-۱ تا ۳-۱ را به کار می‌گیریم.

(۳-۲) W_m/r جدید اختیار می‌کنیم.

(۴-۲) بردارهای ویژه‌ی (مد کمانش) متناظر با مقدار ویژه‌ی به دست آمده در مرحله‌ی ۲-۲، به

عنوان حدس‌های اولیه‌ی جابه‌جایی در تشکیل K_{NL1} و K_{NL2} به کار گرفته می‌شوند و با

محاسبه‌ی خواص ترمومکانیکی در $T = T_0 + \Delta T_{cr}$ ایجاد یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی

جدید می‌کنند.

(۵-۲) مرحله‌ی ۲-۴ را تا جایی ادامه می‌دهیم تا دمای پس‌کمانش به تolerانس خطای تعریف شده

همگرا شود.

(۶-۲) برای تعیین مسیر پس‌کمانش نیز مراحل ۲-۳ تا ۲-۵ را گام به گام تکرار می‌کنیم.

تمامی مراحل اشاره شده، شامل چگونگی محاسبه‌ی دمای کمانش و تعیین مسیر تعادل پس‌کمانش

حرارتی در نرم‌افزار متلب به همراه توابعی جهت تشکیل الگوریتم بازگشتی کدنویسی شده‌اند.

خطایی که به منظور معیار همگرایی در الگوریتم بازگشتی به کار گرفته شده است، معادل 10^{-6} می‌باشد

و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|(\Delta T^{r+1} - \Delta T^r) / \Delta T^r| \leq 10^{-6} \quad (۵۴-۳)$$

انتخاب این مقدار خطا به این صورت انجام گرفت که، مقادیر مختلف خطا مورد بررسی قرار گرفتند و

مشاهده شد که در مقادیر معیار همگرایی کمتر از 10^{-4} نتایج به مقدار ثابتی همگرا می‌شوند. همچنین

مشاهده شد که زمان انجام محاسبات در معیارهای همگرایی 10^{-4} تا 10^{-6} تفاوت چندانی ندارند لذا

در نهایت مقدار 10^{-6} به عنوان معیار همگرایی در تمام محاسبات لحاظ شد.

در فصل آینده به ارائه‌ی نتایج حل عددی و بحث پیرامون آن‌ها خواهیم پرداخت.

۴- نتایج و بحث

۴-۱ مقدمه

در این فصل نتایج حاصل از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل تیرهای FG-CNTRC که به کمک روش DQ و الگوریتم بازگشتی صورت گرفت را ارائه خواهیم داد. نتایج ابتدا شامل صحت‌سنجی روش DQ، مسیر تعادل پس‌کمانش برای تیر کامپوزیتی سه‌لایه‌ی همسانگرد و تیر FG-CNTRC می‌باشند. سپس به تعیین، تحلیل و مقایسه‌ی دماهای کمانش بحرانی و مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی تیر مورد مطالعه در پژوهش حاضر می‌پردازیم.

۴-۲ یافتن حداقل تعداد گره در روش DQ

همانطور که در فصل پیش اشاره شد، چگونگی انتخاب نقاط گرهی از لحاظ موقعیت در دامنه‌ی مسأله، برای دستیابی به نتایج بهتر بسیار حائز اهمیت می‌باشد. علاوه بر موقعیت نقاط، تعداد گره‌های انتخابی در محدوده‌ی مسأله نیز قابل بحث است. به طور معمول انتظار می‌رود با افزایش تعداد گره‌ها نتایج به مراتب درست‌تر، و با خطای کمتری به دست آیند. به همین منظور پیش از ارائه و تحلیل رفتار کمانشی و پس‌کمانشی تیرهای FG-CNTRC به بررسی درستی روش DQ و تعیین حداقل تعداد نقاط گرهی در تیر مورد مطالعه در این پژوهش می‌پردازیم.

با اعمال روش DQ بر روی معادلات حاکم بر تیر FG-CNTRC که بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استخراج شده‌اند، طبق مراحل که در فصل پیشین توضیح داده شد و حل مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی خطی، مقادیر دمای کمانش بحرانی به ازای تعداد گره‌های متفاوت برای دو نوع شرایط مرزی دوسرلولا و دوسرگیردار به دست می‌آیند.

λ معرف پارامتر بی‌بعد دمای کمانش حرارتی است که طبق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = \frac{\Delta T_{cr} L^2 \alpha_{11}}{h^2} \quad (1-4)$$

در جدول ۴-۱ پارامتر بی بعد برای تیرهای کامپوزیتی سه لایه‌ی $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ به دو روش حل DQ و ریتز جهت مقایسه، ارائه شده است.

جدول ۴-۱- مقایسه نتایج به دست آمده‌ی پارامتر بی بعد دمای کمانش حرارتی (λ) برای تیر کامپوزیتی سه لایه $(L/h = 10)$.

آیدوگدو	نتایج پژوهش حاضر (DQ)						شرایط مرزی
	N=۲۰	N=۱۰	N=۹	N=۸	N=۷	N=۶	
(ریتز) [۷۱]							
دوسرلولا	۰/۷۹۱	۰/۷۹۵۷	۰/۷۹۵۷	۰/۷۹۵۷	۰/۷۹۶۱	۰/۷۹۲۸	
دوسرگیردار	۱/۸۰۴	۰/۸۱۲۱	۰/۸۱۲۱	۰/۸۱۲۱	۱/۸۱۲۲	۱/۸۱۲۸	۱/۸۵۰۶

تیرهای کامپوزیتی سه لایه‌ی متعامد $(0^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$ در پژوهش آیدوگدو از جنس گرافیت-اپوکسی^۱ در نظر گرفته شده‌اند. ثابت‌های الاستیک نیز برای تیر گرافیت-اپوکسی که نتایج آن در جدول فوق گزارش شده است، طبق جدول ۴-۲ فرض می‌شوند.

جدول ۴-۲- خواص ترمومکانیکی فرض شده برای تیر کامپوزیتی گرافیت-اپوکسی [۷۱].

خواص ترمومکانیکی برای تیر گرافیت-اپوکسی

$$\frac{E_1}{E_2} = 20$$

$$G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$$

$$G_{23} = 0.5E_2$$

$$\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} = 3$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

با توجه به پارامترهای بی بعد محاسبه شده برای تیرهای کامپوزیتی سه لایه به روش دیفرانسیل کوادریچر و مقایسه‌ی آن با آنچه در پژوهش آیدوگدو به روش ریتز صورت گرفت، می‌توان به خوبی

^۱. Graphite-epoxy

مشاهده کرد که نتایج به ازای $N \geq 9$ همگرایی بسیار خوبی دارند. در نتیجه محاسبات عددی پیش رو در پژوهش حاضر را با $N = 9$ ادامه می‌دهیم. تعیین حداقل تعداد گره قابل قبول در طول تیر از آن جهت که مانع از هزینه‌های سخت‌افزاری و محاسباتی می‌شود، مورد توجه بسیاری از محققان می‌باشد. در خصوص اهمیت چگونگی انتخاب نقاط گرهی همانطور که در فصل پیش اشاره شد، افزایش تعداد گره‌ها همیشه و الزاماً به بالا بردن دقت و کارایی روش DQ نمی‌انجامد بلکه در مواردی باعث انحراف نتایج نیز می‌شود. یعنی نتیجه‌ی مطلوبی به ازای تعداد گره مشخصی حاصل می‌شود ولی در صورت ادامه و افزایش تعداد گره‌ها از آن تعداد مشخص، همگرایی به سرعت از بین می‌رود.

به عنوان نمونه در حل مسأله‌ای ساده مرتبط با انتقال حرارت یک پره به روش DQ نشان داده شده است چنانچه مختصات نقاط گرهی با طول یکسان از یکدیگر (equally spaced) در طول سازه‌ی مورد نظر اختیار شود، با افزایش تعداد نقاط گرهی تا مقدار مشخصی، نتیجه‌ی مطلوبی حاصل می‌شود ولی در ادامه با افزایش گره‌ها، خطای نتایج به سرعت افزایش می‌یابد و نتایج روند نامطلوبی را پیش می‌گیرد. در مقابل در مسأله‌ی دیگری مربوط به پیچش یک شفت با سطح مقطع مستطیلی نشان داده شده است در صورت انتخاب نقاط با فواصل برابر، نتایج به مراتب همگرایی بهتری نسبت به حالت انتخاب نقاط با فواصل نابرابر (unequally spaced) دارند [۵۹]. با مطالعه‌ی چنین مواردی می‌توان نتیجه گرفت که نحوه‌ی شبکه بندی سازه‌ی مورد نظر در محدوده‌ی حل بسیار چالش برانگیز و قابل تأمل است.

لازم به ذکر است پژوهش‌هایی که به روش DQ در حوزه‌ی تحلیل رفتار کمانشی و پس‌کمانشی سازه‌ها صورت گرفته است، به اتفاق موقعیت گره‌ها را با فاصله‌های نابرابر و به طور غیریکنواخت فرض کرده‌اند [۲۴، ۲۷، ۷۰، ۷۲].

۳-۴ صحت سنجی الگوریتم بازگشتی جهت تعیین مسیر تعادل پس کمانش

به منظور بررسی کارکرد و صحت الگوریتم بازگشتی نوشته شده در نرم افزار متلب و همچنین اطمینان مجدد از عملکرد صحیح روش DQ، مسیر تعادل پس کمانشی تیر همسانگرد از جنس پلی متیل متاکریلات بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، در دو شرایط تکیه گاهی دوسرلولا و دوسرگیردار تحت تغییرات یکنواخت دمایی مورد مطالعه قرار گرفت. مطابق مراحل الگوریتم بازگشتی که در فصل ۳ شرح داده شد، نتایج حاصل از حل عددی در این پژوهش در جدول ۳-۴ به ازای تعدادی از W_m/r ها نشان داده شده‌اند؛ که W_m معرف جابه جایی مرکزی بیشینه‌ی تیر می‌باشد. در این جدول مقادیر بی بعد $\Delta T/\Delta T_{cr}$ معرف نسبت دمایی پس کمانش به دمایی کمانش می‌باشد.

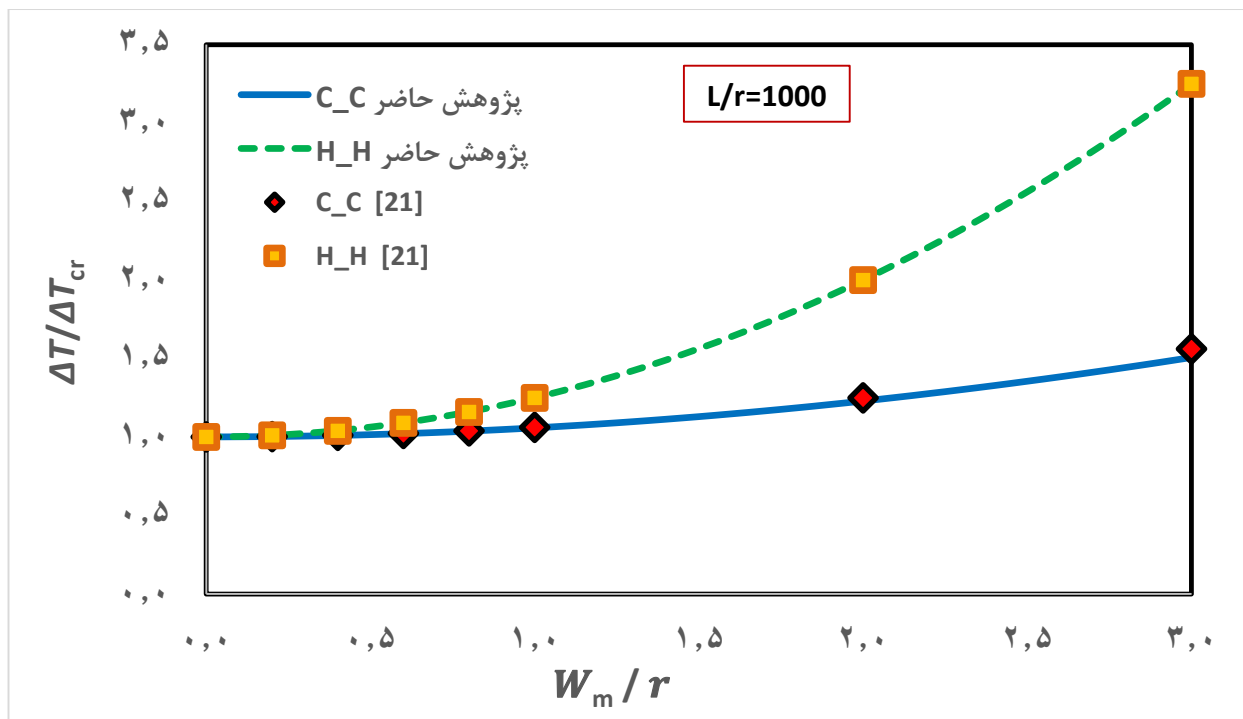
جدول ۳-۴ - مقادیر $(\Delta T/\Delta T_{cr})$ برای تیرهای یکنواخت حاصل از حل تحلیلی [۲۱]، حل به روش اجزای محدود [۷۳] و روش DQ برای تیرهای همسانگرد.

$\Delta T/\Delta T_{cr}$						W_m/r
حل به روش DQ (پژوهش حاضر)		حل اجزای محدود [۷۳]		حل تحلیلی [۲۱]		
C-C	H-H	C-C	H-H	C-C	H-H	
۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۰
۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۰	۱/۰۱	۱/۰۰	۱/۰۱	۰/۲
۱/۰۱	۱/۰۴	۱/۰۱	۱/۰۴	۱/۰۱	۱/۰۴	۰/۴
۱/۰۲	۱/۰۹	۱/۰۲	۱/۱۱	۱/۰۲	۱/۱۱	۰/۶
۱/۰۴	۱/۱۶	۱/۰۴	۱/۱۶	۱/۰۴	۱/۱۶	۰/۸
۱/۰۶	۱/۲۵	۱/۰۶	۱/۲۵	۱/۰۶	۱/۲۵	۱
۱/۲۳	۲/۰۰	۱/۲۵	۲/۰۰	۱/۲۵	۲/۰۰	۲
۱/۵۱	۳/۲۵	۱/۵۶	۳/۲۵	۱/۵۶	۳/۲۵	۳

به منظور صحت سنجی، نتایج حل تحلیلی رائو و وارما^۱ [۲۱] و همچنین حل به روش اجزای محدود توسط رائو و همکاران [۷۳] بر روی تیرها، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این نتایج برای تیرهای با شرایط مرزی دوسرلولا و دوسرگیردار در جدول فوق ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، تطابق بسیار

^۱. Rao and Varma

خوبی بین نتایج پژوهش حاضر و سایر روش‌ها حاصل شده است. به نحوی که به طور مثال در W_m/r برابر ۱، ۲ و ۳ برای شرایط مرزی دوسر لولا، نتایج عیناً مشابه هم به دست آمده‌اند. لازم به ذکر است که نتایج اشاره شده در بالا تنها برای تیرهای همسانگرد و غیر کامپوزیتی برقرار است، و تنها به منظور صحت‌سنجی روش DQ و کدهای نوشته شده در این بخش، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. اما، برای مواد کامپوزیتی و یا ناهمسانگرد (مانند کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیر تابعی در پژوهش حاضر) به دلیل در دسترس نبودن حل تحلیلی و همچنین دشواری‌های شبیه‌سازی اجزای محدود، در این پژوهش از روش حل عددی DQ استفاده شده است. در ادامه در شکل ۴-۱ به منظور نمایش دقیق‌تر، مسیر تعادل پس‌کمانشی حرارتی تیرهای همسانگرد تحت تغییرات یکنواخت دمایی در طول تیر به صورت پیوسته رسم شده است و با نتایج حاصل از حل تحلیلی رانو و وارما قابل مقایسه است.



شکل ۴-۱- مقایسه مسیر تعادل پس‌کمانشی برای تیرهای همسانگرد.

بدیهی است کمانش تیر همسانگرد بررسی شده در پژوهش از نوع دوشاخگی می‌باشد. نمودار فوق مسیری که تیر بعد از نقطه‌ی کمانش یا دوشاخگی طی می‌کند را نمایش می‌دهد.

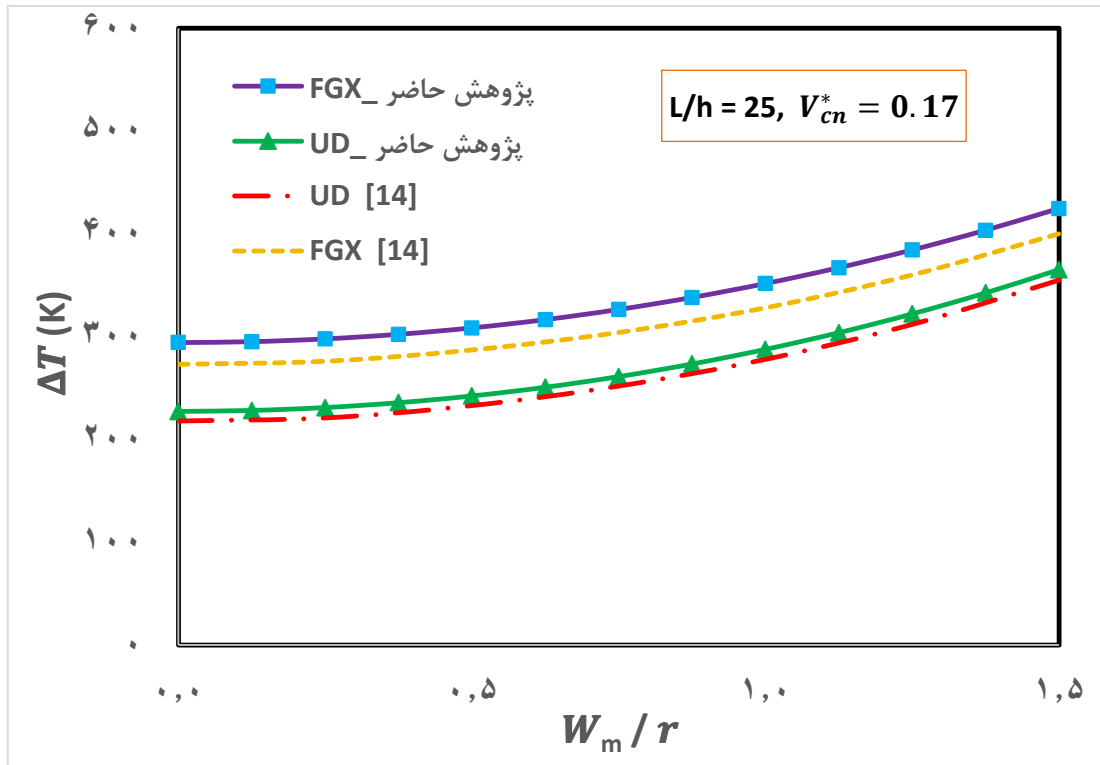
۴-۴ تعیین مسیر تعادل پس کمانش حرارتی برای تیرهای CNTRC

حال به بررسی مسیر تعادل پس کمانشی حرارتی برای تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی متغیر تابعی با شرایط تکیه‌گاهی دوسر لولا، تحت تغییرات دمایی یکنواخت می‌پردازیم. معادله‌ها بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نوشته شده‌اند و CNTها با دو فرض توزیع یکنواخت (UD) و متغیر تابعی FGX در زمینه پخش شده‌اند.

نتایج حاصل در شکل ۴-۲ برای تیرهای CNTRC با شرایط تکیه‌گاهی دوسر لولا نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود که تیرهای دوسر لولای UD-CNTRC در اختلاف دمای پایین‌تری (۲۲۷ کلوین) نسبت به تیر FG-CNTRC (۲۹۴ کلوین) دچار کمانش می‌شوند، که بیانگر بهبود مقاومت تیر در برابر کمانش با توزیع FGX است. همچنین مطابق انتظار، ادامه‌ی مسیر تعادل پس کمانش حرارتی در حالت توزیع FGX مقادیر دمایی بالاتری نسبت به توزیع UD دارند.

به منظور مقایسه، نتایج پژوهش شن و ژیانگ^۱ [۱۴] که تحلیل تیرهای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی (با زمینه پلیمری از جنس PMMA و تقویت کننده‌ی CNT) روی بستر الاستیک می‌باشد، در شکل ۴-۲ مورد استفاده قرار گرفته است. در پژوهش آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مراتب بالاتر جهت استخراج معادله‌ها و از تکنیک اختلال دو مرحله‌ای به منظور حل معادلات غیرخطی استفاده شده است. به طور کلی، روند مسیر تعادل پس کمانش حرارتی در هر دو پژوهش یکسان است. دلیل اصلی اختلاف و بالاتر بودن منحنی نتایج پژوهش حاضر با منحنی نتایج شن و ژیانگ، می‌تواند مربوط به تفاوت در تئوری‌های مورد استفاده و روش حل مورد استفاده در هر یک از آن‌ها می‌باشد. همانطور که در فصل ۲ اشاره شد، به کارگیری تئوری‌های مرتبه‌های بالاتر منجر به پاسخ‌های دقیق‌تر و نزدیک‌تر به واقعیت خواهند شد که در ادامه‌ی نتایج این پژوهش این تئوری‌ها مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

^۱. Shen and Xiang



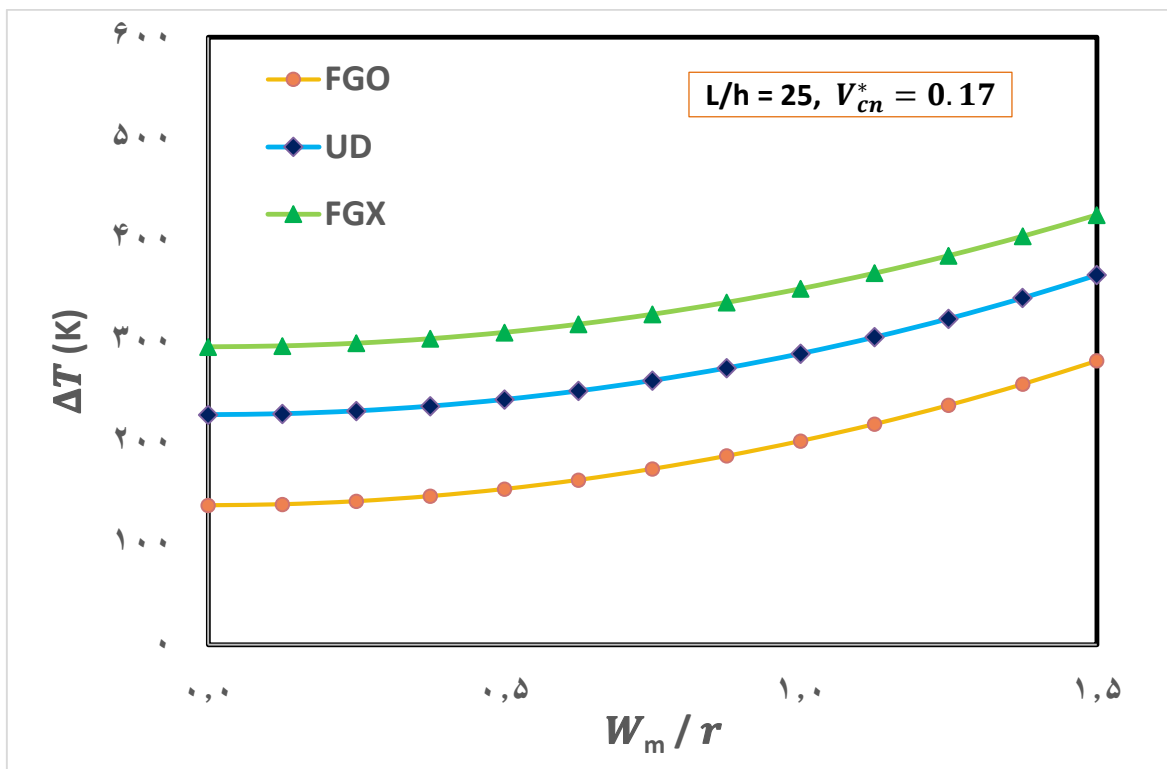
شکل ۴-۲- نتایج حاصل و مقایسه‌ی مسیر پس‌کمانش حرارتی برای تیرهای CNTRC با شرایط تکیه‌گاهی دوسر لولا، تحت تغییرات دمایی یکنواخت.

۴-۵ مقایسه‌ی تأثیر چگونگی توزیع تقویت‌کننده بر مسیر تعادل پس‌کمانشی

حال که از صحت روش DQ، الگوریتم بازگشتی و کدنویسی انجام گرفته اطمینان حاصل شد، به ارائه و مقایسه‌ی مسیر تعادل پس‌کمانشی برای سه طرح توزیع فرض شده در این پژوهش (UD، FGX و FGO) خواهیم پرداخت. تئوری به کار گرفته شده برای حل معادلات تیرهای CNTRC مجدداً FSDT فرض شده است.

در این پژوهش انتظار بر این بود که تقویت تیرها به صورت متغیر تابعی منجر به بهبود خواص حرارتی تیر کامپوزیتی شود. اما طبق شکل ۴-۳ مشاهده می‌شود بین سه طرح توزیع تقویت‌کننده‌ها، تیر FGX دمای کمانش و به تبع آن مسیر تعادل پس‌کمانش بالاتری دارد. نمودارهای UD و FGO نیز به ترتیب پایین‌تر قرار گرفته‌اند. این که تیر تقویت‌شده با نانوله‌های کربنی FGO در دمای پایین‌تری نسبت به تیرهای UD و FGX دچار کمانش می‌شود، بیانگر این است که متغیر تابعی کردن توزیع تقویت‌کننده‌ها به هر نحوی، الزاماً منجر به بهبود خواص حرارتی تیر کامپوزیتی نمی‌شود. از آن جایی که تیرهای دارای

ممان اینرسی بالاتر مانند تیرهای I-شکل مقاومت بیشتری در برابر خمش یا کمانش دارند و با توجه به شباهت هندسه‌ی توزیع تقویت‌کننده‌ها در تیر FGX-CNTRC به هندسه تیر I-شکل، انتظار می‌رود تیر FGX-CNTRC در دمای بالاتری نسبت به تیرهای CNTRC با طرح‌های دیگر توزیع (UD و FGO) دچار کمانش شود و مقاومت بالاتری از خود نشان دهد. این نتیجه با سایر پژوهش‌ها که تأثیر طرح توزیع تقویت‌کننده را بر خواص مکانیکی و ارتعاشاتی تیرها بررسی کرده‌اند، تطابق دارد [۱۰، ۷۴].



شکل ۴-۳- مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی برای تیرهای FGX، UD و FGO.

۶-۴ بررسی تأثیر کسر حجمی نانولوله‌ها بر روی دمای کمانش (T_1) تیرهای

CNTRC تحت تغییرات دمایی یکنواخت

در این مرحله با فرض این که تیر تحت تغییرات دمایی یکنواخت باشد ($\Delta T = T_1$) و با به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، به حل مسأله‌ی مقدار ویژه به منظور محاسبه‌ی دمای کمانش بحرانی تیر CNTRC می‌پردازیم. نتایج برای سه طرح توزیع مختلف جهت تقویت کردن CNTها، به ازای کسر حجمی‌های مختلف ۰/۱۲، ۰/۱۷ و ۰/۲۸ در جدول ۴-۴ نشان داده شده است.

جدول ۴-۴- دمای کمانش T_1 (K) برای تیرهای CNTRC تحت تغییرات دمایی یکنواخت ($L/h = 100$).

C-C		H-H		CNTRC		
V_{cn}^*		V_{cn}^*				
۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲	۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲	
۱۲۸/۸۰	۱۲۹/۷۵	۱۲۶/۴۳	۳۴/۲۷	۳۳/۹۴	۳۳/۳۱	مواد مستقل از دما (T-ID)
۸۸/۳۸	۸۸/۹۲	۸۷/۲۴	۲۳/۱۰	۲۲/۹۳	۲۲/۶۱	UD
۴۶/۱۴	۴۶/۳۰	۴۵/۸۵	۱۱/۷۹	۱۱/۷۶	۱۱/۶۸	FGO
۱۰۵/۷۸	۱۰۷/۱۱	۱۰۴/۹۱	۳۱/۹۲	۳۱/۶۸	۳۱/۱۶	FGX
۷۵/۷۶	۷۶/۶۳	۷۵/۴۵	۲۱/۹۷	۲۱/۸۴	۲۱/۵۶	UD
۴۲/۰۹	۴۲/۲۸	۴۱/۹۵	۱۱/۴۷	۱۱/۴۵	۱۱/۳۸	FGO

T-ID (temperature-independent) در جدول بالا به این معنی است که از خواص مواد مستقل از دما (در این پژوهش خواص مواد در دمای ۳۰۰ K) در محاسبات استفاده شده است در حالی که T-D (temperature-dependent) معرف وابستگی خواص مواد به دما می باشد.

همانطور که از جدول فوق قابل مشاهده است، میان سه نوع توزیع CNT، طرح توزیع FGX بزرگترین دمای کمانش را دارا است. به عبارتی تیر کامپوزیتی تقویت شده با طرح توزیع FGX در دمای بالاتری نسبت به تیر UD و تیر UD در دمای بالاتری نسبت به تیر کامپوزیتی تقویت شده با طرح توزیع FGO، دچار کمانش می شوند.

همچنین دماهای کمانش حاصل از حل مسأله در شرایط مرزی دوسرگیردار به مراتب بیشتر از مقادیر حاصل از شرایط تکیه گاهی دوسرلولا می باشد. دلیل آن می تواند قابلیت قيود گیردار مبنی بر تولید نوعی ممان خمشی جهت بازیابی و مقاومت در برابر ممان های خمشی اعمالی باشد که در نتیجهی آن می تواند تا دماهای بالاتری در برابر کمانش مقاومت کند و دیرتر دچار آن شود.

با توجه به نتایج برای تیر با شرایط تکیه گاهی دوسرلولا، با افزایش کسر حجمی نانولوله های کربنی، دماهای کمانش نیز کمی افزایش می یابند در حالی که برای تیرهای CNTRC با شرایط مرزی دوسر گیردار، دمای کمانش برای کسر حجمی معادل ۰/۱۷ دارای بیشترین مقدار می باشد. بنابراین می توان

نتیجه گرفت افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها الزاماً منجر به افزایش دمای کمانش نمی‌شود، یعنی در بعضی موارد نمی‌توان با افزایش کسر حجمی CNT در تیر کامپوزیتی، انتظار بهبود خواص حرارتی را داشت. منشأ تغییرات غیریکنواخت دمای کمانش به ازای افزایش کسر حجمی CNTها می‌تواند در رفتار غیرخطی کمانشی تیر CNTRC باشد. این نتیجه‌گیری‌ها در خصوص تأثیر افزایش کسر حجمی CNTها تطابق خوبی با نتایج پژوهش شن و شیانگ دارد [۱۴].

لازم به ذکر است که با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما و وارد کردن آن‌ها در محاسبات، مقادیر دمای کمانش دقیق‌تری حاصل می‌شوند. طبق مقایسه‌ی دو حالت T-ID و T-D نیز می‌توان دریافت که با استفاده از خواص مستقل از دما، نتایج نهایی بیش از مقدار واقعی برآورد شده‌اند. به عبارتی می‌توان گفت زمانی که وابستگی خواص مواد به دما را در محاسبات در نظر می‌گیریم، دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند.

همچنین با مقایسه‌ی نتایج بین دو شرایط مرزی فرض شده، تأثیر وابستگی خواص مواد به دما در تیر دوسرگیردار نسبت به تیر دوسرلولا به مراتب بیشتر قابل مشاهده است. وابستگی خواص مواد به دما کمترین تأثیر را بر روی تیر FGO-CNTRC در مقایسه با انواع دیگر تیرها (UD-CNTRC و FGX-CNTRC) نشان می‌دهد. بررسی‌ها در خصوص تأثیر خواص مواد T-ID و T-D بر روند نتایج به دست آمده تطابق بسیار خوبی با پژوهش فرزام و حسنی دارد که در آن کمانش مکانیکی و حرارتی ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی متغیّر تابعی بررسی شده است [۶۲].

۷-۴ محاسبه‌ی دمای کمانش (T_2) تیرهای CNTRC دوسرلولا تحت تغییرات دمایی غیریکنواخت

در ادامه مطابق تعریفی که برای میدان دما در فصل پیش ارائه شد، با در نظر گرفتن تغییرات دمایی غیریکنواخت ($T_2 \neq 0$) و با به کارگیری FSDT در استخراج معادلات حاکم، برای تیر با شرایط مرزی دوسرلولا به محاسبه‌ی دمای کمانش غیریکنواخت می‌پردازیم. در جدول ۴-۵ دمای کمانش T_2 مربوط به سه طرح توزیع CNTها برای کسرهای حجمی مختلف به ازای مقادیر مشخص برای T_1/T_2 محاسبه

شده است. $T_1/T_2 = 0$ به معنی چشم‌پوشی از تغییرات دمایی یکنواخت می‌باشد ($T_1 = 0$) و دمای کمانش تیر CNTRC دوسرلولا تنها تحت تغییرات دمایی غیریکنواخت به دست می‌آید. نسبت‌های معادل ۰/۵ و ۱ نیز به معنی در نظر گرفتن توأمان هر دو نوع تغییرات دمایی یکنواخت و غیریکنواخت می‌باشد.

از نتایج جدول ۴-۵، می‌توان مشاهده کرد به محض حضور تغییرات دمایی یکنواخت (نسبت T_1 به T_2 معادل ۰/۵ یا ۱ باشد)، دمای کمانش کاهش می‌یابد و این کاهش با افزایش سهم تغییر دمای یکنواخت ادامه پیدا می‌کند. به عبارتی می‌توان گفت با حذف و یا کم کردن سهم تغییرات یکنواخت دمایی، خواص حرارتی تیر بهبود می‌یابد و در دماهای بالاتری دچار کمانش می‌شود. بنابراین به طور کلی تیر تحت تغییرات دمایی یکنواخت بیشتر در معرض کمانش قرار دارد ($T_2 > T_1$). لازم به ذکر است نتایج ذکرشده تطابق بسیار خوبی با نتایج به دست آمده توسط وو و همکاران دارد [۳۵].

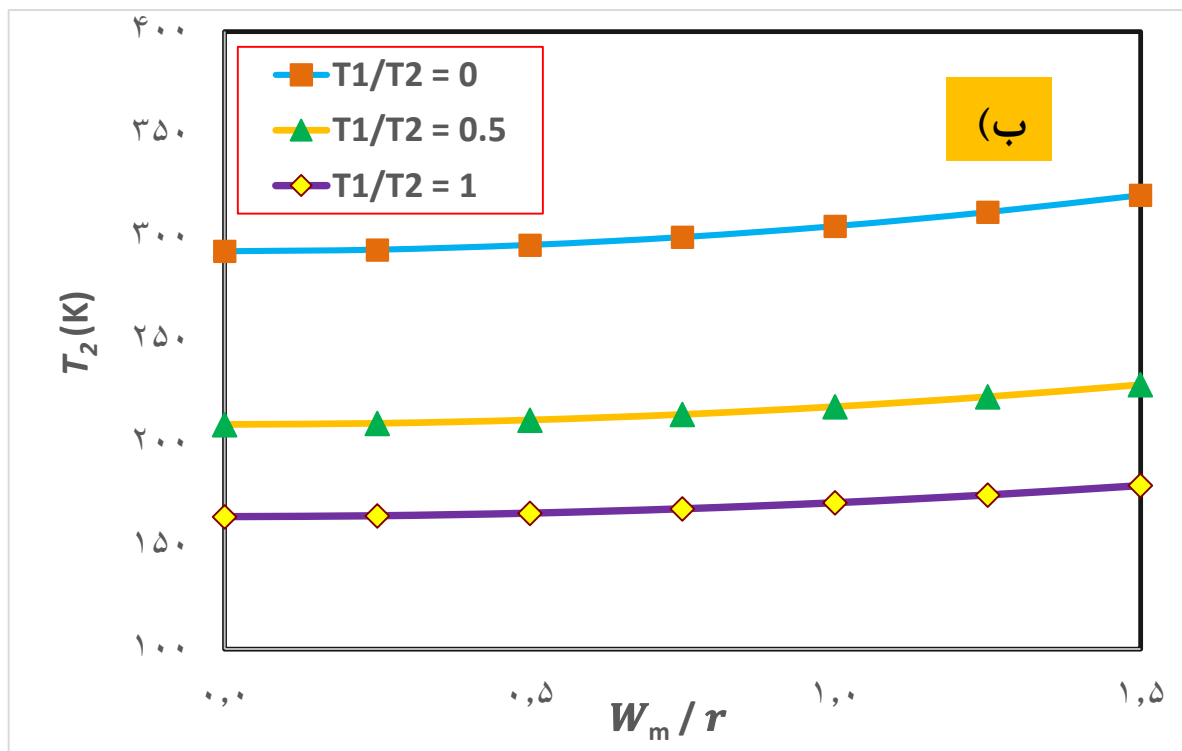
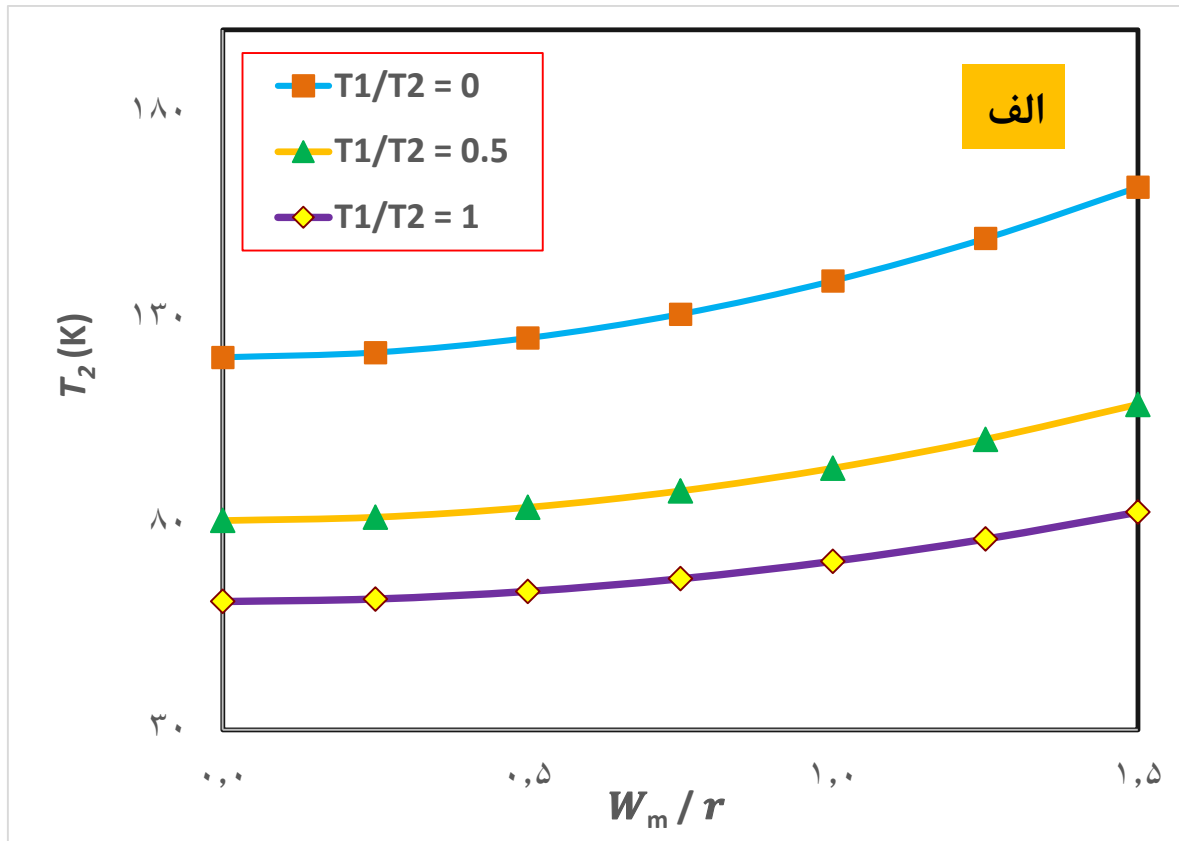
همچنین بر خلاف جدول ۴-۴، تیر CNTRC با نسبت لاغری معادل ۶۰ با شرایط تکیه‌گاهی دوسرلولا بین کسرهای حجمی مختلف، به ازای $V_{cn}^* = 0.17$ دمای کمانش بالاتری دارد.

جدول ۴-۵- دمای کمانش T_2 (K) برای تیرهای CNTRC دوسرلولا تحت تغییرات دمایی غیریکنواخت ($L/h = 60$).

T-D			T-ID			CNTRC	T_1/T_2
V_{cn}^*			V_{cn}^*				
۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲	۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲		
۸۸/۴۵	۸۸/۹۵	۸۷/۳۱	۱۰۴/۸۶	۱۰۴/۹۸	۱۰۲/۵۶	FGX	
۶۲/۸۳	۶۳/۰۷	۶۲/۱۸	۷۱/۴۹	۷۱/۵۸	۷۰/۳۵	UD	*
۳۴/۲۹	۳۴/۳۷	۳۴/۱۳	۳۷/۰۱	۳۷/۰۶	۳۶/۷۴	FGO	
۵۹/۰۴	۵۹/۲۸	۵۸/۱۳	۶۶/۸۰	۶۶/۸۶	۶۵/۳۲	FGX	
۴۱/۵۷	۴۱/۶۸	۴۱/۰۷	۴۵/۵۳	۴۵/۵۷	۴۴/۷۹	UD	۰/۵
۲۲/۳۸	۲۲/۴۲	۲۲/۲۵	۲۳/۵۶	۲۳/۵۹	۲۳/۳۹	FGO	
۴۴/۴۶	۴۴/۶۰	۴۳/۷۱	۴۸/۹۹	۴۹/۰۲	۴۷/۹۰	FGX	
۳۱/۱۲	۳۱/۱۹	۳۰/۷۸	۳۳/۳۸	۳۳/۴۱	۳۲/۸۴	UD	۱
۱۶/۶۱	۱۶/۶۴	۱۶/۵۱	۱۷/۲۷	۱۷/۲۹	۱۷/۱۵	FGO	

۸-۴ تأثیر نسبت دمای T_1/T_2 بر مسیر تعادل پس کمانش حرارتی تیر FGX-CNTRC

به منظور مقایسه و بررسی تأثیر نسبت دمای T_1/T_2 بر روی مسیر تعادل پس کمانش حرارتی تحت تغییرات دمای غیریکنواخت، برای تیر FGX-CNTRC شرایط مرزی دوسرلولا و دوسرگیردار را در نظر می‌گیریم. بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، به ازای نسبت لاغری معادل ۵۰، با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما و $V_{cn}^* = 0.17$ تعیین مسیر تعادل طبق شکل ۴-۴ به دست می‌آید. مشابه تحلیل نتایج جدول ۴-۵ با در نظر گرفتن تیر FGX-CNTRC تحت تغییرات دمایی غیریکنواخت، خواص حرارتی به طور ویژه‌ای بهبود می‌یابد و تیر در دماهای نسبتاً بالاتری دچار کمانش می‌شود و به طور کلی مسیر تعادل پس کمانشی نیز بالاتر است. همچنین از مقایسه‌ی شکل ۴-۴ الف و ب مشاهده می‌شود که تیر با شرایط مرزی دوسرگیردار نسبت به حالت دوسرلولا، در مقابل کمانش مقاوم‌تر و صرف‌نظر از چگونگی توزیع دما به طور کلی در دمای بالاتری کمانش یافته و مسیر تعادل پس کمانش بالاتری را طی می‌کند.



شکل ۴-۴- تأثیر نسبت دمای T_1/T_2 بر مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی تیر FGX-CNTRC (الف H-H، ب C-C)؛ در

هر دو حالت $L/h = 50$ در نظر گرفته شده است.

۹-۴ بررسی تأثیر نسبت لاغری (L/h) بر دماهای کمانش

یکی دیگر از مواردی که می‌تواند روی دمای کمانش تأثیرگذار باشد، میزان لاغری تیر FG-CNTRC می‌باشد. به همین منظور به ازای L/h های مختلف (۵۰، ۶۰، ۸۰ و ۱۰۰) برای کسرهای حجمی مختلف و با در نظر گرفتن دو حالت تغییرات دمایی یکنواخت و غیریکنواخت به محاسبه‌ی دمای کمانش برای تیرهای FGX-CNTRC با شرایط مرزی دوسرلولا می‌پردازیم.

از مقایسه‌ی نتایج جدول ۴-۶ می‌توان مشاهده کرد که به ازای مقادیر $L/h \leq 60$ ، دمای کمانش تیر FGX-CNTRC با افزایش کسر حجمی CNT ها، روند یکنواختی ندارد و به ازای مقدار متوسط $V_{cn}^* = 0.17$ ، دارای بیشترین دمای کمانش می‌باشد. همچنین می‌توان دریافت با افزایش کسر حجمی CNT ها برای تیرهای با نسبت لاغری بزرگتر از ۶۰ ($L/h > 60$)، دمای کمانش به طور یکنواخت افزایش می‌یابد. جدول ۴-۶ مقایسه دماهای کمانش یکنواخت T_1 (K) و غیریکنواخت T_2 (K) تیر دوسرلولا FGX-CNTRC

$T_2 (T_1 = 0)$			$T_1 (T_2 = 0)$			L/h
V_{cn}^*			V_{cn}^*			
۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲	۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲	
۱۱۸/۸۱	۱۲۰/۴۷	۱۱۷/۹۹	۱۰۵/۷۸	۱۰۷/۱۰	۱۰۴/۹۱	۵۰
۸۸/۴۵	۸۸/۹۵	۸۷/۳۱	۷۸/۵۲	۷۸/۸۹	۷۷/۴۲	۶۰
۵۴/۰۷	۵۳/۹۲	۵۳/۰۱	۴۷/۷۸	۴۷/۶۲	۴۶/۸۱	۸۰
۳۶/۲۴	۳۵/۹۸	۳۵/۳۹	۳۱/۹۲	۳۱/۶۸	۳۱/۱۶	۱۰۰

در جدول ۴-۷ نیز دماهای کمانش یکنواخت و غیریکنواخت برای تیر FGX-CNTRC به ازای نسبت‌های لاغری و کسرهای حجمی مختلف در شرایط مرزی دوسرگیردار گزارش شده است. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود در تیر با نسبت لاغری ثابت، با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ی کربنی، دمای کمانش تغییرات یکنواخت ندارد و به ترتیب به ازای کسر حجمی معادل ۰/۱۷، ۰/۱۲ و ۰/۲۸ بیشترین دمای کمانش به دست می‌آیند.

همچنین بدیهی است با افزایش نسبت لاغری تیر، مقاومت تیر CNTRC در برابر کمانش کاهش یافته

و در دمای پایین‌تری دچار کم‌انرژی می‌شود.

جدول ۴-۷- مقایسه دماهای کم‌انرژی یکنواخت T_1 (K) و غیریکنواخت T_2 (K) تیر دوسرگیردار FGX-CNTRC.

$T_2 (T_1 = 0)$			$T_1 (T_2 = 0)$			L/h
V_{cn}^*			V_{cn}^*			
۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲	۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲	
۲۷۱/۵۴	۲۹۳/۳۰	۲۸۰/۸۳	۲۷۱/۹۵	۲۹۴/۲۹	۲۸۱/۵۵	۵۰
۲۱۹/۸۲	۲۳۱/۸۹	۲۲۴/۰۱	۲۲۰/۸۲	۲۳۳/۳۴	۲۲۵/۲۵	۶۰
۱۴۷/۸۶	۱۵۱/۶۶	۱۴۷/۹۷	۱۴۹/۰۳	۱۵۳/۰۳	۱۴۹/۲۴	۸۰
۱۰۴/۷۸	۱۰۶/۰۲	۱۰۳/۸۷	۱۰۵/۷۸	۱۰۷/۱۱	۱۰۴/۹۱	۱۰۰

۴-۱۰ تحلیل پاسخ‌های کم‌انرژی و پس‌کم‌انرژی با تئوری‌های مختلف تغییر شکل

برشی

تا این مرحله با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به حل مسائل، ارائه‌ی نتایج و تحلیل آن‌ها پرداختیم. در ادامه تأثیر تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر بر نتایج حاصل از حل معادلات غیرخطی را مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهیم.

۴-۱۰-۱ محاسبه‌ی دمای کم‌انرژی تیرهای CNTRC تحت تغییرات دمایی یکنواخت

بر اساس تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی

بنا بر مباحثی که در فصل ۲ در خصوص به کارگیری تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی مطرح شد، می‌دانیم تئوری کلاسیک اویلر-برنولی به دلیل در نظر نگرفتن کرنش برشی جانبی، جابه‌جایی‌ها را کمتر و بار کم‌انرژی، دمای کم‌انرژی و فرکانس طبیعی را بیشتر پیش‌بینی می‌کند. از این رو بررسی تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و مراتب بالاتر با هدف بالا بردن دقت نتایج اهمیت پیدا کرده و ضروری می‌شوند.

مطابق توابع شکل تعریف شده در جدول ۲-۱ برای هر یک از تئوری‌های مختلف، میدان جابه‌جایی

متفاوتی تعریف می‌شود. به کمک معادلات تعادل تیرها و با به کارگیری روابط غیرخطی کرنش-جابجایی، معادلات پایداری غیرخطی حاکم بر مسأله بر حسب جابجایی‌ها به دست می‌آیند. در ادامه با روش DQ و الگوریتم بازگشتی که پیش‌تر در فصل سوم شرح داده شدند، دماهای کمانش بحرانی تیر UD-CNTRC و FGX-CNTRC به ازای کسرهای حجمی مختلف CNT با شرایط مرزی دوسرلولا و در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما، محاسبه می‌شوند. ردی با مقایسه‌ی نتایج پژوهش خود و نتایج حاصل از پژوهش‌های دیگر (حل الاستیسیته‌ی سه بعدی و حل بر اساس FSĐT) نشان داد که حل بر اساس تئوری ردی جابجایی‌ها و تنش‌ها را صحیح‌تر پیش‌بینی می‌کند [۴۹]. در ادامه جهت بالا بردن دقت نتایج و بهبود تئوری‌های پیشین، توریته‌ر با طرح یک تئوری جدید و تعریف یک تابع سینوسی به عنوان تابع شکل به حل مسأله‌های مختلف پرداخت. او از نتایج حاصل از حل دقیق الاستیسیته‌ی سه بعدی، حل بر اساس تئوری ردی و تیموشنکو به منظور مقایسه و صحت‌سنجی بهره گرفت و کارآمد بودن تئوری مثلثاتی ارائه شده در پژوهش خود را نسبت به دیگر تئوری‌ها نشان داد [۵۰]. کاراما و همکاران برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی سازه‌های کامپوزیتی چندلایه مدلی را ارائه کردند و با حل مسائل مختلف خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد، به مقایسه‌ی نتایج آن‌ها با نتایج روش عددی اجزای محدود که با نرم‌افزار آباکوس انجام شده است، پرداختند. آن‌ها نشان دادند تابع نمایی ارائه شده برای سازه‌های کامپوزیتی چندلایه که شرایط پیوستگی تنش برشی جانبی در سطح مشترک لایه‌ها در آن‌ها اهمیت دارد، منجر به نتایج دقیق‌تری می‌شود [۵۱].

از آن جایی که موضوع مورد مطالعه در این پژوهش کمانش تیر FG-CNTRC می‌باشد و در پژوهش‌های معرف تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی مدنظر، به حل، مقایسه و تفسیر چنین مسائلی پرداخته شده است، انتظار روند مشابهی را برای خواص حرارتی حاصل از حل مسأله‌ی پژوهش حاضر داریم. به این ترتیب که با بالا بردن مرتبه‌ی تئوری تغییر شکل برشی، نتایج دقیق‌تری مطابق جدول ۴-۸ برای دمای کمانش به دست می‌آید. با مشاهده‌ی نتایج جدول ۴-۸ و با توجه به شباهت تابع شکل ارائه شده برای تئوری کاراما (ESDT) و آیدوگدو (ASDT)، همان‌طور که انتظار می‌رود دماهای کمانش برابر

برای آن‌ها به دست آمده است.

جدول ۴-۸- دمای کمانش بحرانی T_1 (K) تیرهای CNTRC با شرایط مرزی دوسرولوا.

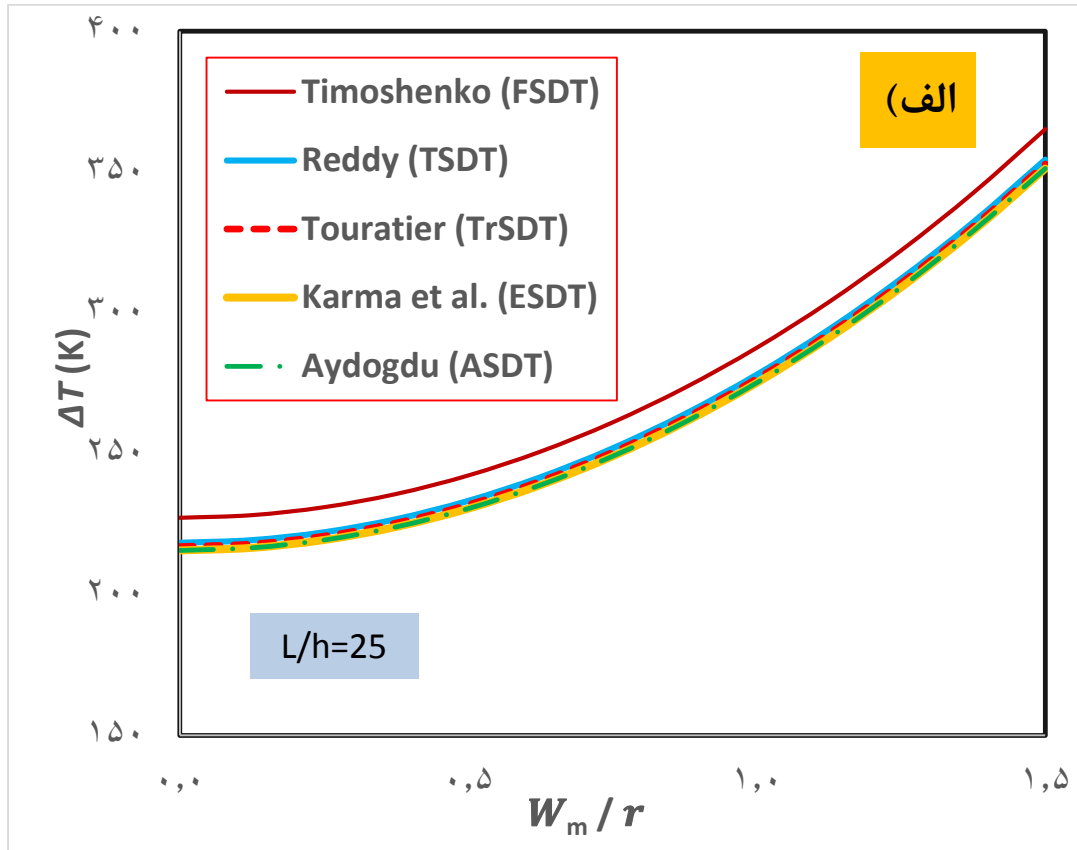
FGX-CNTRC			UD-CNTRC			تئوری تغییر شکل برشی	L/h
V_{cn}^*			V_{cn}^*				
۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲	۰/۲۸	۰/۱۷	۰/۱۲		
۲۷۱/۹۴	۲۹۴/۲۹	۲۸۱/۵۵	۲۱۳/۳۱	۲۲۷/۲۶	۲۲۰/۲۱	FSDT	۲۵
۲۴۳/۶۰	۲۹۴/۲۴	۲۶۳/۰۷	۲۰۲/۸۰	۲۱۸/۳۷	۲۱۰/۷۴	TSDT	
۲۴۰/۳۵	۲۷۱/۶۵	۲۶۰/۵۹	۲۰۱/۲۵	۲۱۷/۰۴	۲۰۹/۳۲	TrSDT	
۲۳۷/۱۸	۲۶۹/۱۲	۲۵۸/۱۸	۱۹۹/۷۲	۲۱۵/۷۲	۲۰۷/۹۳	ESDT	
۲۳۷/۱۸	۲۶۹/۱۲	۲۵۸/۱۸	۱۹۹/۷۲	۲۱۵/۷۱	۲۰۷/۹۳	ASDT	
۱۰۵/۷۸	۱۰۷/۱۰	۱۰۴/۹۱	۷۵/۹۳	۷۶/۶۲	۷۵/۴۵	FSDT	۵۰
۱۰۲/۲۳	۱۰۵/۱۲	۱۰۲/۹۳	۷۴/۸۷	۷۵/۸۶	۷۴/۵۸	TSDT	
۱۰۱/۷۷	۱۰۴/۸۳	۱۰۲/۶۴	۷۴/۷۰	۷۵/۷۴	۷۴/۴۵	TrSDT	
۱۰۱/۳۱	۱۰۴/۵۵	۱۰۲/۳۵	۷۴/۵۳	۷۵/۶۲	۷۴/۳۱	ESDT	
۱۰۱/۳۱	۱۰۴/۵۵	۱۰۲/۳۵	۷۴/۵۳	۷۵/۶۲	۷۴/۳۱	ASDT	
۴۷/۷۸	۴۷/۶۲	۴۶/۸۱	۳۳/۲۴	۳۳/۱۴	۳۲/۷۰	FSDT	۸۰
۴۷/۱۲	۴۷/۲۶	۴۶/۴۶	۳۳/۰۵	۳۳/۰۱	۳۲/۵۵	TSDT	
۴۷/۰۳۷	۴۷/۲۱	۴۶/۴۰	۳۳/۰۲	۳۲/۹۹	۳۲/۵۳	TrSDT	
۴۶/۹۵	۴۷/۱۶	۴۶/۳۵	۳۲/۹۹	۳۲/۹۷	۳۲/۵۱	ESDT	
۴۶/۹۵	۴۷/۱۶	۴۶/۳۵	۳۲/۹۹	۳۲/۹۷	۳۲/۵۱	ASDT	

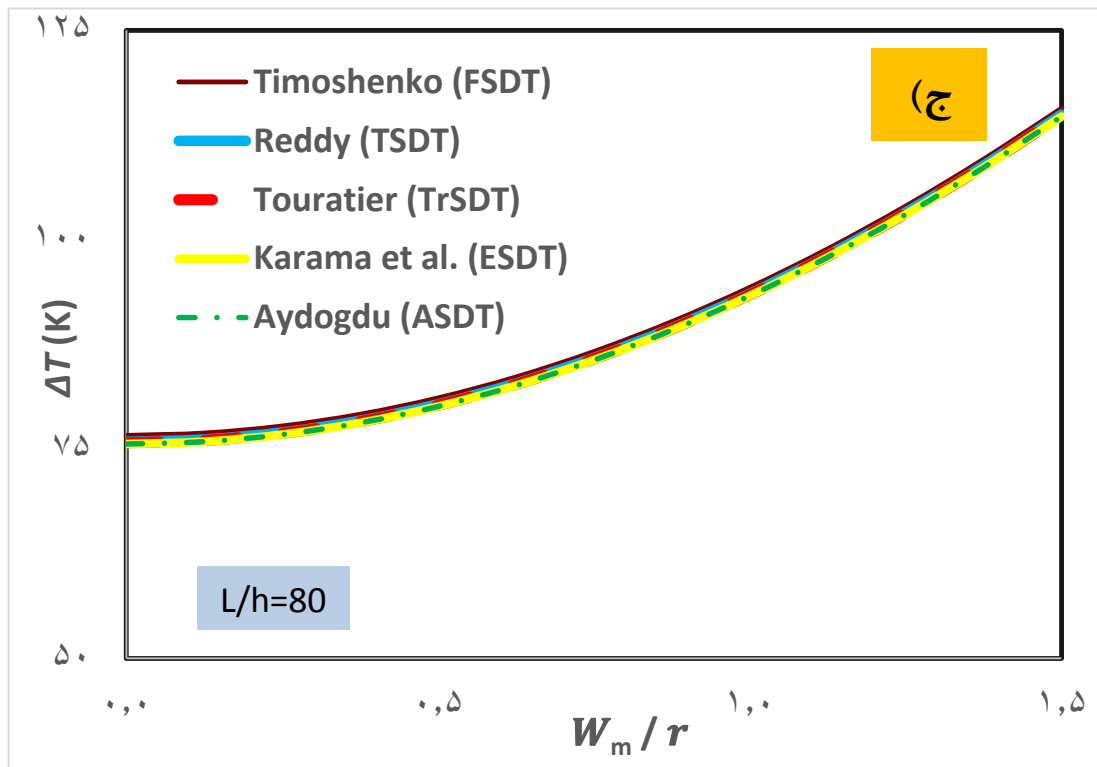
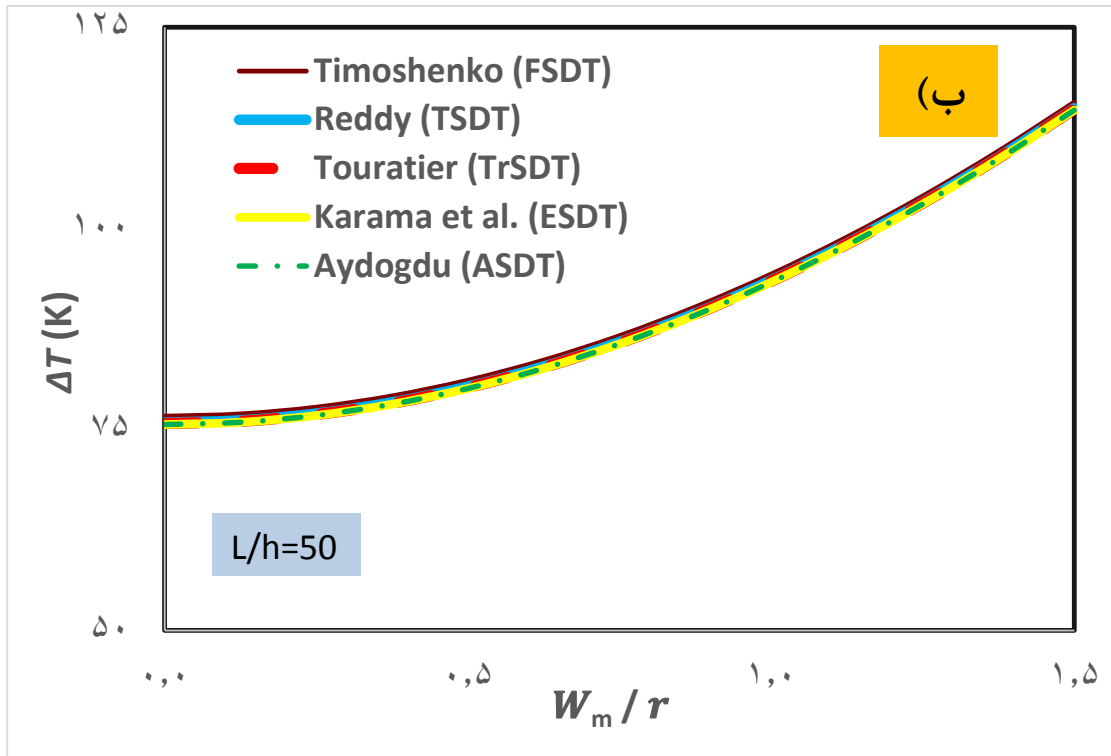
۴-۱۰-۲ مقایسه‌ی مسیر تعادل پس کمانش حرارتی تیرهای CNTRC تحت تغییرات

دمایی یکنواخت به ازای تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی

بررسی تأثیر تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر بر مسیر تعادل پس کمانش حرارتی تیر CNTRC نیز حائز اهمیت است. در شکل ۴-۵ الف مسیر پس کمانشی را برای تیر UD-CNTRC به ازای تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی با کسر حجمی معادل $0/17$ ($V_{cn}^* = 0/17$) و نسبت لاغری معادل ۲۵ ($L/h = 25$) ارائه شده است. شکل ۴-۵ ب و ج نیز مسیر تعادل پس کمانش تیر مورد مطالعه را به ازای L/h ‌های به ترتیب ۵۰ و ۸۰ ارائه می‌دهند. به وضوح پیداست با افزایش نسبت لاغری تیر UD-CNTRC،

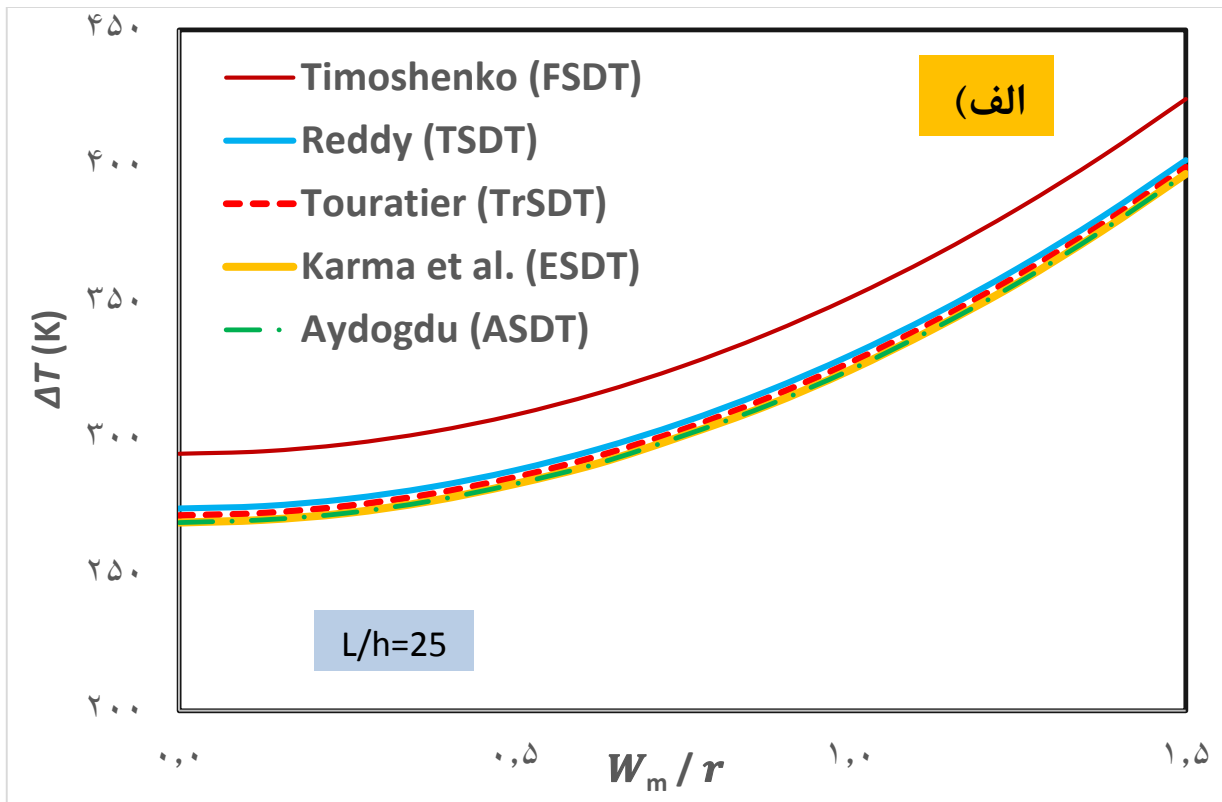
می‌توان از تأثیر تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر روی پاسخ پس‌کمانشی تیرها چشم‌پوشی کرد.

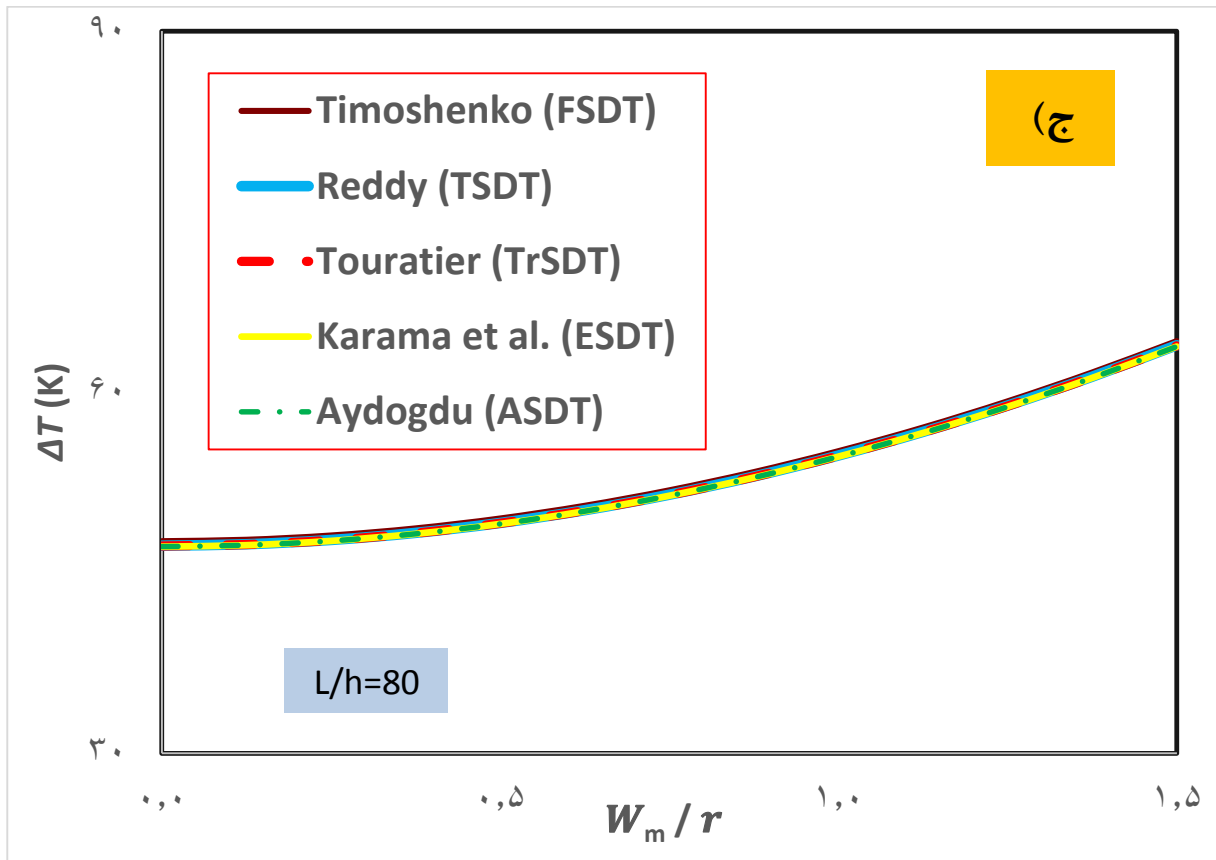
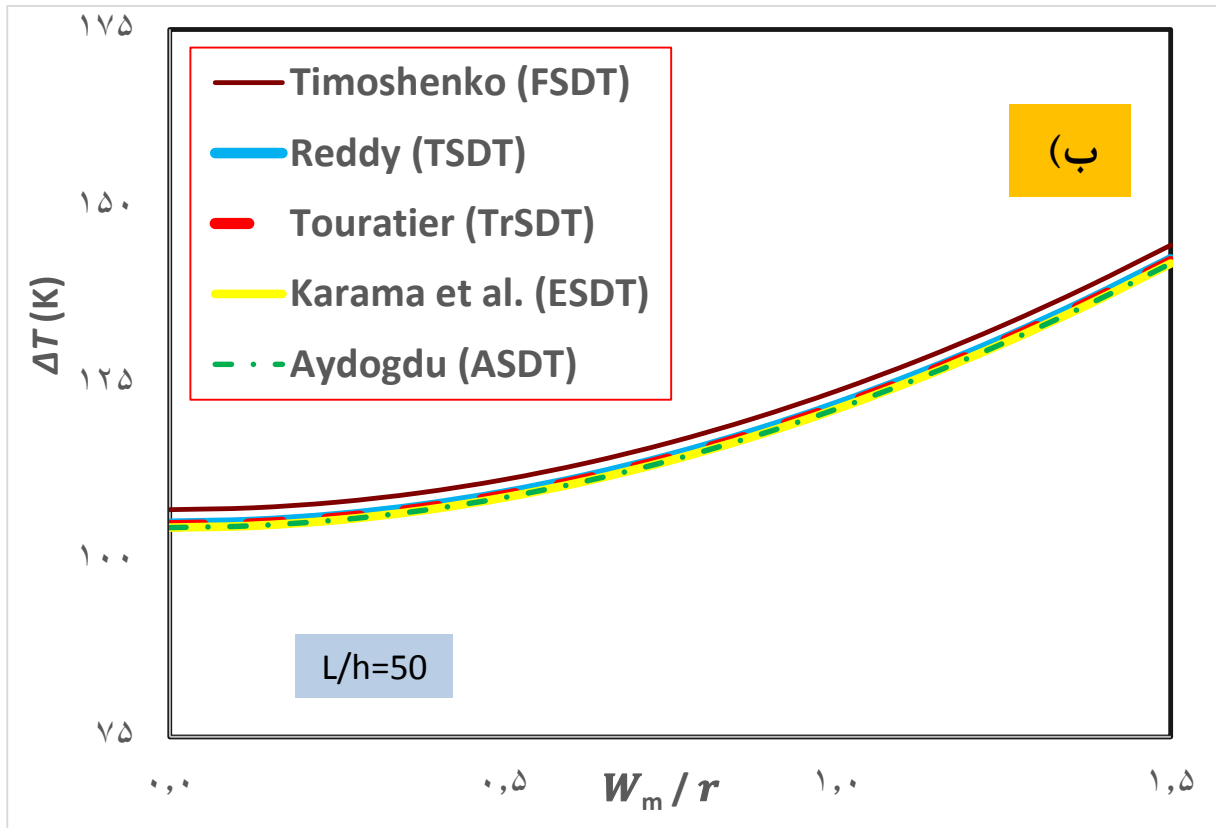




شکل ۴-۵- مقایسه‌ی مسیر تعادل پس‌گمانش حرارتی تیر UD-CNTRC (الف) $L/h = 25$ ، (ب) $L/h = 50$ و (ج) $L/h = 80$.

در ادامه، در شکل ۴-۶ به تعیین مسیر تعادل پس‌کمانش تیرهای FGX-CNTRC به ازای L/h های به ترتیب ۲۵، ۵۰ و ۸۰ پرداخته‌ایم. تأثیر به کارگیری هر یک از تئوری‌های تغییر شکل برشی و نسبت‌های لاغری مختلف تیر در این شکل قابل مشاهده است.





شکل ۴-۶- مقایسه‌ی مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی تیر FGX-CNTRC (الف) $L/h = 25$ ، (ب) $L/h = 50$ و (ج) $L/h = 80$.

مشاهده می‌شود که مسیرهای تعادل پس‌کمانش حرارتی تیر FGX-CNTRC بر اساس تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی روندی مشابه تیر UD-CNTRC طی می‌کند. با این تفاوت که تیر FGX-CNTRC در نسبت لاغری بزرگتری ($L/h=80$) به یکدیگر همگرا شدند.

در این بخش تأثیر به کارگیری تئوری‌های تغییر شکل برشی مراتب بالاتر به همراه نسبت‌های لاغری متفاوت تیرهای UD-CNTRC و FGX-CNTRC روی مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی مورد مطالعه و مقایسه قرار گرفته است. از این مطالعه می‌توان نتیجه گرفت که هر چه تیر نازک‌تر (L/h بیشتر) باشد، بالا بردن مراتب تئوری‌های تغییر شکل برشی تفاوت چندانی در نتیجه ایجاد نمی‌کند و نمودارهای نتایج به ازای نسبت‌های لاغری بزرگتر از ۵۰ در حالت UD و ۸۰ در حالت FGX، بر یکدیگر منطبق خواهند بود. لذا در حالت‌های ذکر شده می‌توان به منظور کاهش محاسبات و زمان حل از تئوری مرتبه پایینی مثل FSDT استفاده کرد. این نتایج تطابق خوبی با پژوهش امام مبنی بر تحلیل کمانش تیرهای کامپوزیتی چندلایه دارند که در آن تأثیر نسبت‌های لاغری و تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی روی حداکثر کمانش تیرهای چندلایه‌ی کامپوزیتی مورد مطالعه قرار گرفته است. با روندی مشابه، در پژوهش امام نیز مشاهده شد که در نسبت لاغری ۵۰ پاسخ حاصل از تئوری‌های مختلف بر یکدیگر منطبق خواهند بود [۳۰].

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵-۱ نتیجه‌گیری

در پایان‌نامه‌ی حاضر به منظور حل معادله‌های حاکم بر تیر CNTRC، روش DQ به عنوان تکنیک حل عددی قدرتمند برای تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری به کار گرفته شد. محاسبه‌ی دماهای کمانش و تعیین مسیر پس‌کمانش حرارتی با در نظر گرفتن وابستگی خواص مواد به دما و بر اساس تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و مراتب بالاتر به کمک یک الگوریتم بازگشتی تحت میدان تغییرات دمایی سهمی‌گون انجام گرفته است. کارایی روش‌های مورد استفاده در روند حل نیز با بررسی نتایج و مقایسه‌ی آن‌ها با نتایج موجود در پژوهش‌های دیگر صحت‌سنجی شده است. نتایج به دست آمده در این پایان‌نامه به شرح زیر می‌باشند:

- با مقایسه و تطابق نتایج حاصل از روش DQ در پژوهش حاضر با دیگر منابع موجود، روش DQ صحت‌سنجی و حداقل گره مورد نیاز شبکه ($N = 9$) در این روش تعیین شد.
- کارایی الگوریتم بازگشتی به کار رفته در این پژوهش به منظور محاسبه‌ی دمای کمانش و مسیر تعادل پس‌کمانش با مقایسه‌ی نتایج به دست آمده و تطبیق آن‌ها با دیگر پژوهش‌ها مورد بررسی قرار گرفت.
- تیرهای UD-CNTRC، FGX-CNTRC و FGO-CNTRC به ترتیب مسیر تعادل پس‌کمانش حرارتی بالاتری را طی می‌کنند.
- برای تیرهای FG-CNTRC با شرایط مرزی H-H و C-C، با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، می‌توان دریافت افزایش کسر حجمی CNTها الزاماً منجر به افزایش دمای کمانش نمی‌شود.
- به طور کلی تیر FG-CNTRC با شرایط تکیه‌گاهی دوسرگیردار صرف‌نظر از چگونگی توزیع دما یا توزیع تقویت‌کننده‌ها، در مقابل کمانش مقاوم‌تر می‌باشند.
- بررسی تأثیر محیط حرارتی بر رفتار حرارتی تیرهای CNTRC نشان می‌دهد که خواص تیر

تحت تغییرات دمایی غیریکنواخت بهبود می‌یابد، تیر در دمای بالاتری دچار کماتش می‌شود و مسیر تعادل بالاتری را طی می‌کند.

- از بررسی تأثیر نسبت لاغری تیر بر رفتار کماتشی تیر FGX-CNTRC می‌توان به کاهش دمای کماتش به ازای افزایش نسبت لاغری تیر اشاره کرد. همچنین نتیجه‌ی افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر روند تغییرات دمای کماتش برای تیر با نسبت لاغری ثابت ارائه شده است.
- با تعیین مسیر تعادل پس کماتش تیرهای CNTRC، می‌توان نشان داد بالا بردن مرتبه‌ی تئوری تغییر شکل برشی تفاوت چندانی در نتیجه ایجاد نمی‌کند. به عبارتی نمودارهای نتایج به ازای نسبت‌های لاغری معینی، بر یکدیگر منطبق خواهند شد.

۲-۵ پیشنهادها

به منظور توسعه و تحقیق بیشتر در زمینه‌ی روش‌های ارائه شده، تعیین خصوصیات استاتیکی و دینامیکی و به دنبال آن تحلیل خمش، کماتش و ارتعاشات تیرها، پیشنهادهای زیر در ادامه‌ی پژوهش حاضر ارائه می‌گردند:

- علی‌رغم استفاده از روش DQ در بسیاری از پژوهش‌ها طی سال‌های اخیر، همچنان پژوهش‌های محدودی با به کارگیری از روش DQ در حوزه‌ی مطالعه‌ی خواص مکانیکی، حرارتی و الکتریکی سازه‌های مهندسی از جمله تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها وجود دارد.
- همچنین در نظر گرفتن سازه‌ی مورد مطالعه روی بستر الاستیک، با هدف بهبود خواص حرارتی و مکانیکی، می‌تواند مورد توجه قرار گرفته و کارآمد باشد.
- سازه‌هایی با ابعاد نانو، مانند نانوتیرها و نانورق‌ها به واسطه‌ی ویژگی‌های الکتریکی، مکانیکی و شیمیایی فوق‌العاده و کاربرد وسیعی که در تجهیزات با مقیاس نانو دارند، می‌توانند بسیار مورد توجه محققان قرار بگیرند. بررسی تأثیر و کارایی هر یک از تئوری‌های تغییر شکل برشی بر رفتار کماتشی، خمشی و ارتعاشاتی سازه‌های با ابعاد نانو می‌تواند موضوع بسیاری از پژوهش‌های

پیش رو باشد.

- به دلیل تأثیر پارامترهای مختلف بررسی شده مثل کسر حجمی، نسبت لاغری، شرایط مرزی و همچنین سایر پارامترهای بررسی نشده در پژوهش حاضر (از جمله ناهمسانگردی تیرها، جنس زمینه و ...)، استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی می‌تواند ابزار مفیدی برای محققان به منظور دستیابی به ترکیب و هندسه‌ی بهینه‌ی نهایی برای سازه‌های تقویت شده باشد.
- از آن جایی که در حوزه‌ی مواد کامپوزیتی پیشرفته، مطالعه‌های زیادی در خصوص رفتار حرارتی سازه‌های FG-CNTRC با نقص هندسی اولیه صورت نگرفته است، می‌توان این موضوع را که بسیار از لحاظ کاربردی در علوم مهندسی حائز اهمیت می‌باشد، در ادامه‌ی مسیر پژوهش حاضر پیشنهاد داد. اغلب پژوهش‌های حاضر تحت عنوان بررسی رفتار حرارتی و مکانیکی سازه‌های بی‌نقص توسط محققان ارائه شده است. در شرایط واقعی نقص‌های هندسی به طور معمول و به صورت اجتناب‌ناپذیر در روند ساخت و تولید و یا با گذشت زمان و بالا رفتن عمر در سازه‌های مهندسی به وجود می‌آیند. به همین دلیل تأثیر وجود نقص‌ها و لحاظ کردن هندسه‌ی آن‌ها در محاسبات، به تحلیل هر چه دقیق‌تر رفتارهای مکانیکی و حرارتی سازه‌ها کمک خواهد کرد

منابع

1. Iijima, S.; *Helical microtubules of graphitic carbon*. Nature, 1991, 354: pp. 56-58.
2. Shen, H. S.; *Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments*. Composite Structures, 2009, 91 (1): pp. 9-19.
3. Ruoff, R. S., and Lorents, D. C.; *Mechanical and thermal properties of carbon nanotubes*. Carbon, 1995, 33 (7): pp. 925-930.
4. Ajayan, P. M., and Tour, J. M.; *Nanotube composites*. Nature, 2007, 447: pp. 1066-1068.
5. Li, C., Thostenson, E. T., and Chou, T.; *Sensors and actuators based on carbon nanotubes and their composites: A review*. Composites Science and Technology, 2008, 68 (6): pp. 1227-1249.
6. Esawi, A. M. K., and Farag, M. M.; *Carbon nanotube reinforced composites: Potential and current challenges*. Materials & Design, 2007, 28 (9): pp. 2394-2401.
7. Ma, P. C., Siddiqui, N. A., Marom, G., and Kim, J. K.; *Dispersion and functionalization of carbon nanotubes for polymer-based nanocomposites: A review*. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2010, 41 (10): pp. 1345-1367.
8. Kwon, H., Bradbury, C. R., and Leparoux, M.; *Fabrication of functionally graded carbon nanotube-reinforced aluminum matrix composite*. Advanced Engineering Materials, 2011, 13 (4): pp. 325-329.
9. Ke, L. L., Yang, J., and Kitipornchai, S.; *Nonlinear free vibration of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams*. Composite Structures, 2010, 92 (3): pp. 676-683.
10. Yas, M. H., and Samadi, N.; *Free vibrations and buckling analysis of carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams on elastic foundation*. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2012, 98: pp. 119-128.
11. Zhu, P., Lei, Z. X., and Liew, K. M.; *Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order*

- shear deformation plate theory*. Composite Structures, 2012, 94 (4): pp. 1450-1460.
12. Ke, L. L., Yang, J., and Kitipornchai, S.; *Dynamic stability of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2013, 20 (1): pp. 28-37.
 13. Lei, Z. X., Liew, K. M., and Yu, J. L.; *Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment*. Composite Structures, 2013, 106: pp. 128-138.
 14. Shen, H. S., and Xiang, Y.; *Nonlinear analysis of nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundations in thermal environments*. Engineering Structures, 2013, 56: pp. 698-708.
 15. Liew, K. M., Lei, Z. X., and Zhang, L. W.; *Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites: A review*. Composite Structures, 2015, 120: pp. 90-97.
 16. Nguyen, T. K., Truong-Phong Nguyen, T., Vo, T. P., and Thai, H. T.; *Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory*. Composites Part B: Engineering, 2015, 76: pp. 273-285.
 17. Ebrahimi, F., and Barati, M. R.; *A nonlocal higher-order shear deformation beam theory for vibration analysis of size-dependent functionally graded nanobeams*. Arabian Journal for Science and Engineering, 2016, 41 (5): pp. 1679-1690.
 18. Kiani, Y.; *Buckling of functionally graded graphene reinforced conical shells under external pressure in thermal environment*. Composites Part B: Engineering, 2019, 156: pp. 128-137.
 19. Gharooni, H., Ghannad, M., and Zamani-Nejad, M.; *Thermo-elastic analysis of clamped-clamped thick FGM cylinders by using third-order shear deformation theory*. Latin American Journal of Solids and Structures, 2016, 13 (4): pp. 750-774.
 20. Liew, K. M., Yang, J., and Kitipornchai, S.; *Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading*. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40 (15): pp. 3869-3892.
 21. Rao, G. V., and Varma, R. R.; *Heuristic thermal postbuckling and large-*

- amplitude vibration formulations of beams*. AIAA Journal, 2009, 47 (8): pp. 1977-1980.
22. Zhao, X., Lee, Y. Y., and Liew, K. M.; *Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates*. Composite Structures, 2009, 90 (2): pp. 161-171.
 23. Shen, H. S., and Zhang, C. L.; *Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates*. Materials & Design, 2010, 31 (7): pp. 3403-3411.
 24. Vosoughi, A. R., Malekzadeh, P., Banan, Ma. R., and Banan, Mo. R.; *Thermal buckling and postbuckling of laminated composite beams with temperature-dependent properties*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012, 47 (3): pp. 96-102.
 25. Mirzaei, M., and Kiani, Y.; *Thermal buckling of temperature dependent FG-CNT reinforced composite conical shells*. Aerospace Science and Technology, 2015, 47: pp. 42-53.
 26. Wattanasakulpong, N., and Ungbhakorn, V.; *Analytical solutions for bending, buckling and vibration responses of carbon nanotube-reinforced composite beams resting on elastic foundation*. Computational Materials Science, 2013, 71: pp. 201-208.
 27. Wu, H., Kitipornchai, S., and Yang, J.; *Free vibration and buckling analysis of sandwich beams with functionally graded carbon nanotube-reinforced composite face sheets*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2015, 15 (7): pp. 1-17.
 28. Wu, H., Kitipornchai, S., and Yang, J.; *Thermal buckling and postbuckling of functionally graded graphene nanocomposite plates*. Materials & Design, 2017, 132: pp. 430-441.
 29. Wattanasakulpong, N., Prusty, G., and Kelly, D.; *Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams*. International Journal of Mechanical Sciences, 2011, 53: pp. 734-743.
 30. Emam, S. A.; *Analysis of shear-deformable composite beams in postbuckling*. Composite Structures, 2011, 94 (1): pp. 24-30.
 31. Matsunaga, H.; *Vibration and buckling of multilayered composite beams according to higher order deformation theories*. Journal of Sound and Vibration, 2001, 246 (1): pp. 47-62.

32. Najafizadeh, M. M., and Heydari, H. R.; *Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2004, 23 (6): pp. 1085-1100.
 33. Aydogdu, M.; *Comparison of various shear deformation theories for bending, buckling, and vibration of rectangular symmetric cross-ply plate with simply supported edges*. Journal of Composite Materials, 2006, 40 (23): pp. 2143-2155.
 34. Ansari, R., Faghih Shojaei, M., Mohammadi, V., Gholami, R., and Sadeghi, F.; *Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams*. Composite Structures, 2014, 113: pp. 316-327.
 35. Wu, H., Kitipornchai, S., and Yang, J.; *Imperfection sensitivity of thermal post-buckling behaviour of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite beams*. Applied Mathematical Modelling, 2017, 42: pp. 735-752.
 36. Jones, R. M.; *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., 1999: CRC Press, USA.
 37. El-Zaher, N. A., Melegy, M. S., and Guirguis, O. W.; *Thermal and structural analyses of PMMA/TiO₂ nanoparticles composites*. Natural Science, 2014, 6 (11): pp. 859-870.
 38. Chawla, N., and Chawla, K. K.; *Metal Matrix Composites*, 2006: Springer, USA.
 39. Mai, Y. W., and Yu, Z. Z.; *Polymer Nanocomposites*, 2006: Woodhead Publishing, England.
 40. Monthioux, M., and Kuznetsov, V. L.; *Who should be given the credit for the discovery of carbon nanotubes?* Carbon, 2006, 44 (9): pp. 1621-1623.
 41. Rafique, I., Kausar, A., Anwar, Z., and Muhammad, B.; *Exploration of epoxy resins, hardening systems, and epoxy/carbon nanotube composite designed for high performance materials: A review*. Polymer-Plastics Technology and Engineering, 2016, 55 (3): pp. 312-333.
۴۲. علی‌زاده صحرائی، ا.؛ ۱۳۹۲، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، ساخت کامپوزیت زمینه مسی تقویت شده با نانوله‌های کربنی با استفاده از روش متالورژی پودر، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل.
43. Jianwei, C., Tahir, Ç., and William, A. G.; *Thermal conductivity of carbon nanotubes*. Nanotechnology, 2000, 11 (2): pp. 65-69.

44. Hone, J.; *Carbon nanotubes: thermal properties*, In: "Dekker Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology", Schwarz, J. A., Lyshevski, S. E., and Contescu, C. I., 3rd ed., 2004, CRC Press: pp. 603-610.
45. Elishakof, I., Demetris, P., and Cristina, G.; *Mechanics of Functionally Graded Material Structures*, 2015: World Scientific Publishing Company, Singapore.
46. Fukui, Y.; *Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force*. Japanese Society of Mechanical Engineering Ser. 3, Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry, 1991, 34 (1): pp. 144-148.
47. Brush, D. O., and Almroth, B. O.; *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, 1975: McGraw-Hill, USA.
48. Eslami, M. R.; *Buckling and Postbuckling of Beams, Plates, and Shells*, 2017: Springer, USA.
49. Reddy, J. N.; *A simple higher-order theory for laminated composite plates*. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51 (4): pp. 745-752.
50. Touratier, M.; *An efficient standard plate theory*. International Journal of Engineering Science, 1991, 29 (8): pp. 901-916.
51. Karama, M., Afaq, K. S., and Mistou, S.; *Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity*. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40 (6): pp. 1525-1546.
52. Yang, J., and Shen, H. S.; *Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions*. Composites Part B: Engineering, 2003, 34 (2): pp. 103-115.
53. Aydogdu, M., *A new shear deformation theory for laminated composite plates*. Composite Structures, 2009, 89 (1): pp. 94-101.
54. Ke, L. L., Yang, J., and Kitipornchai, S.; *Postbuckling analysis of edge cracked functionally graded Timoshenko beams under end shortening*. Composite Structures, 2009, 90 (2): pp. 152-160.
55. Torabi, J., Ansari, R., and Hassani, R.; *Numerical study on the thermal buckling analysis of CNT-reinforced composite plates with different shapes based on the higher-order shear deformation theory*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2019, 73: pp. 144-160.

56. Carrera, E., Giunta, G., and Petrolo, M.; *Beam Structures: Classical and Advanced Theories*, 2011: John Wiley & Sons, UK.
57. Timoshenko, S. P.; *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars*. Philosophical Magazine, 1921, 41: pp. 744-746.
58. Wang, C. M., Reddy, J. N., and Lee, K. H.; *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*, 2000: Elsevier, UK.
59. Bert, C. W. and Malik, M.; *Differential quadrature method in computational mechanics: A review*. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49 (1): pp. 1-28.
60. Shen, H. S.; *Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells*. Composites Part B: Engineering, 2012, 43 (3): pp. 1030-1038.
61. Shen, H. S., and Wang, Z.X.; *Nonlinear analysis of shear deformable FGM beams resting on elastic foundations in thermal environments*. International Journal of Mechanical Sciences, 2014, 81: pp. 195-206.
62. Farzam, A., and Hassani, B.; *Thermal and mechanical buckling analysis of FG carbon nanotube reinforced composite plates using modified couple stress theory and isogeometric approach*. Composite Structures, 2018, 206: pp. 774-790.
63. She, G. L., Yuan, F. G., and Ren, Y.R.; *Thermal buckling and post-buckling analysis of functionally graded beams based on a general higher-order shear deformation theory*. Applied Mathematical Modelling, 2017, 47: pp. 340-357.
64. Shen, H. S.; *Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells*. Composite Structures, 2011, 93 (8): pp. 2096-2108.
65. Li, Y., Wang, Q., and Wang, S.; *A review on enhancement of mechanical and tribological properties of polymer composites reinforced by carbon nanotubes and graphene sheet: molecular dynamics simulations*. Composites Part B: Engineering, 2018, 160: pp. 348-361.
66. Zhang, D. G.; *Nonlinear bending analysis of FGM beams based on physical neutral surface and high order shear deformation theory*. Composite Structures, 2013, 100: pp. 121-126.
67. Shu, C.; *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. 2000: Springer London.

68. Wang, X.; *Differential Quadrature and Differential Quadrature Based Element Methods: Theory and Applications*. 2015: Elsevier, UK.
69. Wu, H., Kitipornchai, S., and Yang, J.; *Thermo-electro-mechanical postbuckling of piezoelectric FG-CNTRC beams with geometric imperfections*. *Smart Materials and Structures*, 2016, 25 (9): pp. 1-14.
70. Yang, J., Liew, K. M., Wu, Y. F., and Kitipornchai, S.; *Thermo-mechanical post-buckling of FGM cylindrical panels with temperature-dependent properties*. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43 (2): pp. 307-324.
71. Aydogdu, M.; *Thermal buckling analysis of cross-ply laminated composite beams with general boundary conditions*. *Composites Science and Technology*, 2007, 67 (6): pp. 1096-1104.
72. Alinaghizadeh, F., and Kadkhodayan, M.; *Large deflection analysis of moderately thick radially functionally graded annular sector plates fully and partially rested on two-parameter elastic foundations by GDQ method*. *Aerospace Science and Technology*, 2014, 39: pp. 260-271.
73. Rao, G. V., Raju, K. K., and Raju, I. S.; *Finite element formulation for the large amplitude free vibrations of beams and orthotropic circular plates*. *Computers & Structures*, 1976, 6 (3): pp. 169-172.
74. Lin, F., and Xiang, Y.; *Vibration of carbon nanotube reinforced composite beams based on the first and third order beam theories*. *Applied Mathematical Modelling*, 2014, 38 (15): pp. 3741-3754.

Abstract

This paper presents thermal post-buckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite (FG-CNTRC) beams in thermal environments and under various boundary conditions. The material properties are simulated to be graded in the thickness direction, and temperature dependency of the constituents is also considered. It is assumed that the beam is subjected to both uniform and non-uniform temperature rises. To take into account the transverse shear strains, various shear deformation theories namely, the first-order and higher-order shear deformation theories utilized for theoretical formulations. The governing equations are derived based on von Kármán geometric nonlinearity with equilibrium equations and including thermal effects. The differential quadrature method with an iterative algorithm as a nonlinear solution scheme is adopted to solve the governing partial differential equations, determine the critical buckling temperatures and the thermal post-buckling equilibrium path of FG-CNTRC beams. By comparing the results with those of existing in the literature, the applicability, convergence, and accuracy of the DQ method are verified. The influences of each considered shear deformation theories, distribution pattern and volume fraction of carbon nanotubes, boundary conditions and slenderness ratio on the thermal buckling and post-buckling performance are discussed in details. The results indicate an FG-CNTRC beam under a uniform temperature rise is more likely to buckle compared with the non-uniform temperature variation. Our numerical results showed that a CNTRC beam with an intermediate CNT volume fraction does not necessarily have intermediate buckling temperature and post-buckling equilibrium path. Also, the FGX-CNTRC beam has the highest buckling temperature and thermal post-buckling equilibrium path, followed by UD- and FGO-CNTRC beams. Based on the post-buckling response, it is also found out that the effect of shear deformation may be neglected if the slenderness ratio reached to a specific amount for UD-CNTRC and FGX-CNTRC beams.

Keywords: Carbon nanotube-reinforced composite, Functionally graded beam, Thermal buckling, Post-buckling equilibrium path, Differential quadrature method



Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

**Analysis of Post-buckling of Functionally
Graded Carbon Nanotube-reinforced Composite
Beams in Thermal Environment**

By: Arefeh Babajani Shani

Under Supervision of:
Dr. Alireza Shaterzadeh

January 2019