

الله
الرحمن الرحيم
محمد بن حبيب



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک
پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

تحلیل کماتش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی جدار متغیر با روش المان محدود نیمه تحلیلی

نگارنده: رامین جعفری

استاد راهنما

دکتر علیرضا شاطرزاده

بهمن ۱۳۹۷

تشکر و قدردانی

منت و سپاس، یزدان پاک را که در سایه‌ی رحمتش توانستیم گامی به سوی تکامل برداشته و وجود خویش را به زینت علم بیاراییم. باشد که به خود آیم، شاکر باشم و طریقی برگزینم تا ستایش و بندگی او را در صراط مستقیم برآورم و در خدمت خلق او باشم.

اکنون که به یاری خداوند متعال این پایان‌نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از تمامی کسانی که به نوعی این جانب را در انجام پایان‌نامه یاری کرده‌اند، کمال تشکر را داشته باشم و ضمن سپاس فراوان از پدر و مادر و همسر عزیزم، از استاد فاضل و بزرگوارم جناب آقای دکتر شاطرزاده که فراتر از یک استاد در کنارم بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم اثر

تمامی تلاش چندین ماهه‌ی خود را در این تحقیق به پدر و مادر و همسر عزیزم که با صبر و حوصله و همراهی‌های بی دریغشان، اینجانب را در پیشرفت هرچه بهتر پایان‌نامه یاری و مساعدت نموده‌اند، تقدیم می‌نمایم.

تعهدنامه

اینجانب رامین جعفری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک، از دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای مدرج تابعی جدار متغیّر با روش المان محدود نیمه‌تحلیلی تحت راهنمایی دکتر علیرضا شاطرزاده متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده، استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو رامین جعفری

تاریخ

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزار-ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه، کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی با جدار متغیّر مطالعه شده است. خواص مکانیکی و حرارتی پوسته‌ها در راستای ضخامت و محور پوسته به صورت پیوسته تغییر می‌کند. روابط کرنش-جابجایی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم به دست آمد. توزیع دما به دو صورت خطی و یکنواخت به صورت متقارن محوری در نظر گرفته شده است. دمای بحرانی کمانش با اصل کمینه انرژی پتانسیل و با روش اجزا محدود نیمه تحلیلی محاسبه شده است. شرایط مرزی از نوع ساده و گیردار می‌باشد. تأثیر پارامترهای مختلف شامل نحوه توزیع خواص مواد متغیّر تابعی، تغییرات ضخامت جداره، شرایط مرزی مختلف، نسبت طول به شعاع، نسبت شعاع به ضخامت و تغییرات ضریب قانون نمایی بر کمانش پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیّر مورد مطالعه قرار گرفته است.

کلید واژگان:

پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیّر، مواد متغیّر تابعی، کمانش حرارتی، تئوری تغییر شکل برشی، روش اجزا محدود نیمه تحلیلی

فهرست مطالب

- فصل اول: پیش‌گفتار..... ۱
- ۱-۱ مقدمه ۲
- ۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها..... ۲
- ۱-۲-۱ دیدگاه هندسی..... ۳
- ۲-۲-۱ دیدگاه مادی ۳
- ۳-۲-۱ دیدگاه رفتاری..... ۴
- ۳-۱ پدیده کمانش..... ۶
- ۱-۳-۱ روش‌های مختلف حل مسأله کمانش پوسته‌ها..... ۷
- ۴-۱ مواد متغیّر تابعی ۸
- ۱-۴-۱ تاریخچه مواد متغیّر تابعی ۸
- ۲-۴-۱ معرفی مواد متغیّر تابعی..... ۹
- ۳-۴-۱ موارد کاربرد مواد FG..... ۱۱
- ۵-۱ مروری بر کارهای انجام‌شده..... ۱۱
- ۶-۱ نوآوری..... ۱۷
- ۷-۱ معرفی پایان‌نامه حاضر..... ۱۷
- فصل دوم: معادلات پوسته‌های استوانه‌ای..... ۱۹

۲۰	۱-۲ مقدمه
۲۰	۲-۲ مدل ریاضی مواد متغیر تابعی
۲۲	۳-۲ هندسه مسأله
۲۳	۴-۲ میدان جابجایی پوسته‌های استوانه‌ای
۲۳	۵-۲ روابط کرنش-جابجایی
۲۸	۶-۲ رابطه‌ی تنش-کرنش
۳۱	فصل سوم: روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی برای پوسته‌های استوانه‌ای
۳۲	۱-۳ مقدمه
۳۲	۲-۳ روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی
۳۴	۳-۳ تابع شکل المان
۳۶	۴-۳ انرژی پتانسیل
۳۷	۱-۴-۳ محاسبه ماتریس سفتی و بردار بار حرارتی المان
۳۹	۲-۴-۳ محاسبه ماتریس سفتی هندسی
۴۳	۳-۴-۳ اعمال اصل حداقل انرژی پتانسیل
۴۴	۵-۳ انتگرال‌گیری عددی به روش گوس
۴۷	فصل چهارم: نتایج
۴۸	۱-۴ مقدمه
۴۸	۲-۴ مشخصه‌های مکانیکی و حرارتی مواد متغیر تابعی

۴۹	۳-۴ شرایط مرزی
۵۰	۴-۴ تحلیل کماتش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر
۶۳	فصل پنجم: نتیجه‌گیری‌ها و پیشنهادها
۶۴	۱-۵ مقدمه
۶۴	۲-۵ خلاصه نتایج
۶۵	۳-۵ پیشنهادها
۶۶	پیوست‌ها:
۷۰	مراجع

فهرست جدول‌ها

- جدول (۱-۳) مختصات و وزن نقاط گوسی ۴۴
- جدول (۱-۴) نحوه چینش مواد متغیّر تابعی در کار حاضر ۴۸
- جدول (۲-۴) مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون برای مواد فلزی و سرامیکی ۴۹
- جدول (۳-۴) پارامترهای ورودی استفاده‌شده برای بررسی همگرایی ۵۰
- جدول (۴-۴) پارامترهای ورودی برای نتایج کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی جدار ثابت ۵۱
- جدول (۵-۴) مقایسه دمای بحرانی کمانش حرارتی (K) برای پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی جدار ثابت ۵۲
- جدول (۶-۴) پارامترهای ورودی برای تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی جدار متغیّر .. ۵۳

فهرست شکل‌ها و نمودارها

- شکل (۱-۱) پوسته‌های استوانه‌ای در صنعت ۵
- شکل (۲-۱) نمونه‌هایی از پوسته‌های دوار با کاربرد آن‌ها ۶
- شکل (۳-۱) تغییرات کسر حجمی اجزای تشکیل‌دهنده یک ماده متغیر تابعی در یک جهت مشخص ۱۰
- شکل (۱-۲) هندسه پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر ۲۲
- شکل (۱-۳) المان‌بندی پوسته‌های استوانه‌ای به وسیله المان سه‌گره‌ای ایزو پارامتریک ۳۳
- شکل (۲-۳) نمایش جابجایی‌های سه‌گره‌ای درجه دو ۳۵
- شکل (۱-۴) همگرایی دمای بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر ۵۱
- شکل (۲-۴) نتایج کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر ۵۳
- شکل (۳-۴) تأثیر β بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم ۵۴
- شکل (۴-۴) تأثیر جنس ماده بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم ۵۵
- شکل (۵-۴) تأثیر μ و توزیع دماهای خطی و یکنواخت بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر ۵۶
- شکل (۶-۴) تأثیر شرط مرزی بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم ۵۷
- شکل (۷-۴) تأثیر نسبت طول به شعاع بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر ۵۸

شکل (۴-۸) تأثیر پارامترهای μ و β بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر ۵۹

شکل (۴-۹) تأثیر β و نسبت طول به شعاع بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر بر

مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم..... ۶۰

شکل (۴-۱۰) تأثیر پارامتر تغییر ضخامت و نسبت شعاع به ضخامت بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای

متغیر تابعی جدار متغیر ۶۱

فهرست علائم

علائم لاتین

N_1, N_2 و N_3 توابع شکل	A_1 و A_2 ضرایب لامه
R شعاع سطح میانی	$[B_L]$ ماتریس کرنش-جابجایی خطی
R_1 و R_2 شعاع انحنا	$[B_{NL}]$ ماتریس کرنش-جابجایی غیرخطی
T دما	cr حد بحرانی
ΔT مقدار افزایش دما	$[D]$ ماتریس الاستیسیته
u, v و w جابجایی‌های پوسته	$\{d\}$ بردارهای تغییر مکان گره‌ای
u_0, v_0 و w_0 جابجایی‌های سطح میانی	$\{d_e\}$ بردارهای تغییر مکان گره‌ای المان
U انرژی کرنشی کل	E مدول یانگ
U_1 انرژی کرنشی خطی	e_i مشتق اول توابع شکل نسبت به x
U_2 انرژی کرنشی غیرخطی	$\{F\}$ بردار نیرو کل
v_c حجم سرامیک	$\{F_e^{th}\}$ بردار بار حرارتی المان
V_c کسر حجمی سرامیک	g_i ضرایب مقیاس هندسی
v_m حجم فلز	h ضخامت

V_m کسر حجمی فلز	h_0 ضخامت اولیه
W_i وزن نقاط گوسی	$[K]$ ماتریس سفتی کل
x مختصات در جهت طولی	$[K_e]$ ماتریس سفتی المان
x_i مختصات نقاط گوسی	$[K_{Ge}]$ ماتریس سفتی هندسی المان
γ_i مشتق دوم توابع شکل نسبت به x	L طول پوسته
z مختصات در جهت ضخامت	m شماره مد محیطی
	n شاخص توانی
	علائم یونانی
θ مختصات در جهت محیطی	α ضریب انبساط حرارتی
ϑ ضریب پواسون	$\{\alpha\}$ بردار ضرایب انبساط حرارتی
Π انرژی پتانسیل	β پارامتر تغییر ضخامت
$\{\sigma\}$ بردار تنش کل	γ_{ij} مؤلفه‌های کرنش برشی
$\{\sigma_e^*\}$ بردار تنش‌های اولیه المان	$\{\varepsilon\}$ بردار کرنش کل
σ_i مؤلفه‌های تنش عمودی	ε_i مؤلفه‌های کرنش عمودی
τ_{ij} مؤلفه‌های تنش برشی	$\{\varepsilon_L\}$ بردار کرنش‌های خطی

Ψ_x دوران عمود بر سطح میانی در صفحه

$$x - z$$

Ψ_θ دوران عمود بر سطح میانی در صفحه

$$\theta - z$$

$\{\varepsilon^{NL}\}$ بردار کرنش‌های غیرخطی

$\{\varepsilon^T\}$ بردار کرنش‌های حرارتی

μ ضریب قانون نمایی

فصل اول

پیش‌گفتار

۱-۱ مقدمه

پوسته‌ها^۱ به‌طور کلی، سازه‌هایی خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای واردشده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به‌تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آن‌ها نیز با اهمیت است. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرض‌هایی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. پوسته‌ها را می‌توان بر اساس انحنای متفاوت به‌صورت زیر دسته‌بندی کرد.

- پوسته‌های استوانه‌ای^۲
- پوسته‌های مخروطی^۳
- پوسته‌های کره‌ای^۴
- پوسته‌های سهموی^۵
- پوسته‌های بیضوی^۶
- پوسته‌های هذلولی^۷

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

¹ Shells

² Cylindrical shells

³ Conical shells

⁴ Spherical shells

⁵ Parabolic shells

⁶ Ellipsoid shells

⁷ Hyperbolic parabolic shells

۱-۲-۱ دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل از انتقال^۱: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران^۲: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک^۳: پوسته‌ای نازک است که دارای شرط زیر باشد.

$$\max\left(\frac{h}{R}\right) \leq \frac{1}{20} \quad (1-1)$$

در رابطه بالا h ضخامت پوسته و R شعاع سطح میانی می‌باشند.

پوسته‌ی جدار ضخیم^۴: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع آن از رابطه زیر پیروی کند [۱-۲].

$$\frac{h}{R} \geq \frac{1}{20} \quad (2-1)$$

۲-۲-۱ دیدگاه مادی

پوسته‌ی همگن^۵: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن^۶: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت

¹ Shell of translation

² Shell of revolution

³ Thin shell

⁴ Thick shell

⁵ Homogeneous shell

⁶ Inhomogeneous shell

نقاط می باشد.

پوسته‌ی همسانگرد^۱: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در جهت‌های مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد^۲: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در جهت‌های مربوط به هر نقطه، یکسان نیست [۲].

۱-۲-۳ دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک^۳: جابجایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ^۴: جابجایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک نیست (رفتار غیرخطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان^۵: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیر هستند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان^۶: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیر نیستند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیرخطی از نظر مادی) [۲].

از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه رفتار این پوسته‌ها از گذشته‌ها تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و هم‌چنان ادامه دارد. پژوهشگران پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در

¹ Isotropic shell

² Anisotropic shell

³ Small deflection

⁴ Large deflection

⁵ Elastic behavior

⁶ Plastic behavior

برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش داده و در صورت امکان، وزن آن‌ها را کاهش دهند. پوسته‌های استوانه‌ای از مهم‌ترین سازه‌های مورد استفاده در صنایع مختلف هستند. این سازه‌ها به جهت داشتن تناسب قابل قبول میان میزان وزن و مقاومت مکانیکی، از پرکاربردترین سازه‌های مهندسی هستند و برای همین دلیل شاخه‌های مختلف مهندسی مانند مکانیک، هوافضا، الکترونیک، معدن، هسته‌ای و غیره از این سازه‌ها برای تأمین نیازهای خود بهره بردند. محدوده‌ی استفاده آن‌ها، از ساختارهای بزرگ مکانیکی و عمرانی تا تجهیزات کوچک الکترونیکی را شامل می‌شود.

در شکل (۱-۱) نمونه‌هایی از پوسته‌های استوانه‌ای در صنعت نشان داده شده است.



شکل (۱-۱) پوسته‌های استوانه‌ای در صنعت [۳]

شکل (۲-۱) نمونه‌هایی از پوسته‌های دوار با کاربرد آن‌ها مشاهده می‌شود.



الف- پوسته‌ی استوانه‌ای در زیردریایی‌ها ب- پوسته‌ی کره‌ی مخازن تحت فشار



ج- پوسته‌ی مخروطی در فضاپیماها د- پوسته‌ی هذلولی در برج خنک‌کننده

شکل (۱-۲) نمونه‌هایی از پوسته‌های دوار با کاربرد آن‌ها

۱-۳ پدیده کمانش

پدیده کمانش^۱، انتقال وضعیت سازه از یک حالت تعادل به حالت تعادل دیگر (نقطه انشعاب^۲) و یا یک جهش از یک مسیر تعادل پایدار به یک مسیر تعادل ناپایدار (نقطه حدی^۳) بر روی نمودار بار-جابجایی است و مقدار باری که در آن سازه پایداری خود را از دست داده و پدیده کمانش رخ می‌دهد را بار کمانش گویند. برای بسیاری از سازه‌ها، ممکن است در مرحله تعادل با اعمال بار، مقدار جابجایی و یا قوس در سازه ایجاد شود که این تغییرها در شکل سازه را نباید به‌عنوان کمانش تلقی کرد زیرا که این تغییرها به-

¹ Buckling

² Bifurcation point

³ Limit point

صورت ناگهانی نبوده و تنها تغییر شکل‌های معمولی در مرحله‌ی تعادل هستند. در یک سطح خاص از بارگذاری، برخی سازه‌ها به صورت ناگهانی تغییر شکل داده که به این رفتار کمانش گفته می‌شود. در یک سازه ممکن است بیش از یک بار پدیده کمانش رخ دهد و این امکان وجود دارد که یک سازه کمانش یافته در یک بار مشخص، به شکل مدی دیگر کمانش کند. بنابراین برخی سازه‌ها ممکن است که بارهای کمانش زیادی داشته باشند که کم‌ترین مقدار در بین آن‌ها بار کمانش سازه در نظر گرفته می‌شود. می‌دانیم که کمانش به صورت ناگهانی اتفاق می‌افتد و همین باعث شده که اهمیت بررسی آن بیش‌تر شود. کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ممکن است تحت اثر موارد زیر رخ دهد [۴].

- فشار محوری
- فشار خارجی
- پیچش
- دما
- ترکیب موارد فوق

۱-۳-۱ روش‌های مختلف حل مسأله کمانش پوسته‌ها

استفاده وسیع از پوسته‌ها به‌عنوان المان‌های سازه‌ای باعث شده که تحقیقات دیرینه و وسیعی در مورد آن‌ها انجام شود. تحقیقات به یکی از سه روش زیر می‌باشد.

- روش تحلیلی سازه‌ها
- روش عددی سازه‌ها
- روش تجربی سازه‌ها

امروزه سه روش فوق رایج بوده و گاهی از هر سه روش برای انجام یک تحقیق استفاده می‌شود. حل تحلیلی سازه‌ها، روشی است که بر یک یا چند اصل فیزیکی استوار است که توسط روش‌های ریاضی توسعه داده شده‌اند. این روش حل بیش‌تر برای مسائل و سازه‌هایی با هندسه‌ی ساده و بارگذاری‌ها و شرایط مرزی متقارن جواب‌های دقیقی ارائه می‌دهند. در این روش اگر اندکی مسأله از لحاظ هندسه، بارگذاری یا شرایط مرزی پیچیده شود دست‌یافتن به جواب دقیق بسیار دشوار و حتی غیرممکن می‌گردد. روش عددی سازه‌ها نیز روش دیگری است که امروزه توسط برنامه‌های قدرتمند المان محدود به بازار صنعت آمده است. این روش ارزان‌قیمت و مقرون‌به‌صرفه است و همواره می‌توان از آن بهره برد. این روش رایج‌ترین روش عددی است که امروزه مهندسين و محققين از آن استفاده می‌کنند که به‌وسیله‌ی آن یک سازه‌ی پیوسته تبدیل به تعداد زیادی المان سازه‌ای می‌شود.

آخرین روش برای حل مسائل سازه‌ای روش آزمایشی یا تجربی می‌باشد. این روش همواره جواب نهایی مسأله می‌باشد. هیچ‌گاه نمی‌توان جواب‌های تحلیلی یا عددی را بر جواب‌های تجربی ترجیح داد. در بسیاری از مسائل روابط تحلیلی وجود دارند که توسط نتایج آزمایش بهینه شده‌اند. بنابراین اولین معیار مقایسه برای صحت نتایج عددی یا تحلیلی، مقایسه با نتایج تجربی می‌باشد.

۱-۴ مواد متغیر تابعی

۱-۴-۱ تاریخچه مواد متغیر تابعی

نیاز بشر برای یافتن موادی که دارای ویژگی‌های بهتری نسبت به مواد خالص و مرکب موجود در صنایع بودند، دانشمندان را به سمت تولید مواد متغیر تابعی^۱ (FGM) هدایت نمود. هرچند اولین پیشنهاد در مورد ساخت و تولید مواد متغیر تابعی در خواص را در سال ۱۹۷۲ بور و دووز [۵] ارائه کردند و قبل از آن

^۱ Functionally graded materials

هم تحقیقاتی در مورد آن به صورت گسسته صورت گرفته بود ولی اولین بار نام FGM توسط محققان ژاپنی در دهه ۱۹۸۰ به این مواد داده شده و پس از آن به تدریج این مواد در سطح بین‌المللی ساخته شدند. نینو و کویزومی [۶] از جمله افرادی بودند که در آن زمان در ژاپن مأمور تحقیق در مورد مواد جدید شدند و به علت نیاز این کشور به این مواد برای توسعه‌ی صنایع هوایی، این تحقیقات به صورت جدی دنبال شد.

۱-۴-۲ معرفی مواد متغیّر تابعی

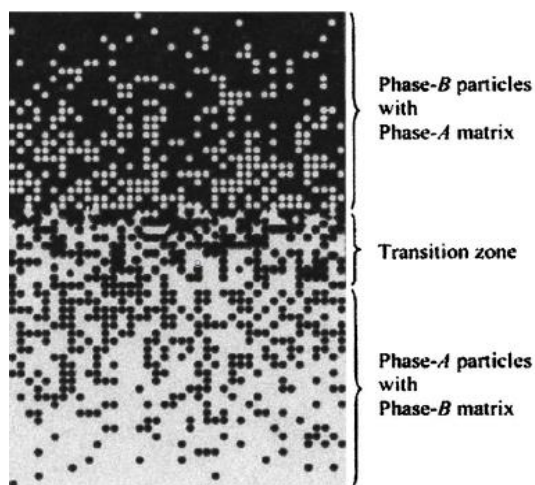
مواد متغیّر تابعی مواد کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگن می‌باشند که خواص مکانیکی آن‌ها به طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. این خاصیت ویژه به وسیله تغییر یکنواخت در نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهنده آن‌ها به دست می‌آید. در سال‌های اخیر با توسعه‌ی موتورهای پرقدرت الکتریکی، توربین‌ها، راکتورها و تجهیزات صنایع هوافضا و دیگر ماشین‌آلات صنعتی، استفاده از موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاوم از لحاظ مکانیکی یک نیاز ضروری به شمار می‌رود. مواد FG در صنعت، جهت استفاده در محیط‌هایی با درجه حرارت بالا مانند راکتورهای هسته‌ای به شمار می‌روند و پیش‌بینی می‌گردد با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد این مواد، کاربردهای صنعتی آن‌ها در طی سال‌های آتی توسعه یابد. در سال‌های قبل در صنایع هوافضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش‌دهی و روکش نمودن قطعه‌ها تحت اثر دمای کاری بالا استفاده می‌شد. این مواد استحکام قابل قبولی در برابر گرادیان دما دارند ولی مقاومت زیادی در برابر تنش‌های اعمالی نداشتند. به ویژه تنش‌های پسماند در این مواد مشکل‌های فراوانی از جمله حفره و ترک ایجاد می‌نمودند که بعدها برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده شد. این مواد نیز موجب پدیده تورق^۱ می‌گردید. با توجه به این مشکل‌ها، طرح ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکل تورق را نداشته باشد، ضرورت پیدا کرد. به این ترتیب

^۱ Scroll

با توجه به مشکلاتی که در صنایع مختلف برای مواد تحت تنش‌های حرارتی بالا وجود داشت، دانشمندان علم مواد برای اولین بار مواد FG را به‌عنوان ماده‌ای با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نمودند و نخستین نمونه از این مواد را در سال ۱۹۸۴ در منطقه سندائی^۱ ژاپن در آزمایش هوافضای نینو تولید کردند [۵].

نوع رایج این مواد ترکیب پوسته‌هایی از فلزات و سرامیک‌ها می‌باشد که از مخلوط نمودن پودر آن‌ها به‌دست می‌آیند به‌طوری‌که تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر به‌طور کامل پیوسته می‌باشد. به‌گونه‌ای که برای مثال یک سطح از جنس سرامیک خالص و سطح دیگر از جنس فلز خالص است و بین دو سطح ترکیب پیوسته‌ای از هر دو ماده می‌باشد. از این‌رو خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب اجزای تشکیل‌دهنده‌شان دارای خواص مکانیکی مؤثرتری نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای می‌باشند. نسبت این ترکیب در راستای ضخامت جسم متغیر بوده و چگالی ذرات فلز معلق در بستر سرامیک از سطح فلزی تا سطح سرامیکی توسط یک تابع معین که می‌تواند خطی، غیرخطی یا نمایی باشد، کاهش یا افزایش می‌یابد.

شکل (۱-۳) تغییرات کسر حجمی اجزای تشکیل‌دهنده یک ماده متغیر تابعی را نشان می‌دهد.



شکل (۱-۳) تغییرات کسر حجمی اجزای تشکیل‌دهنده یک ماده متغیر تابعی در یک جهت مشخص [۶]

^۱ Sendai

۱-۴-۳ موارد کاربرد مواد FG

از جمله کاربردهای اصلی این مواد می‌توان استفاده در راکتورهای هسته‌ای (مواد تشکیل‌دهنده دیوار داخلی)، استفاده در صنایع شیمیایی (غشاها و کاتالیت‌ها)، استفاده در مهندسی پزشکی (کاشت دندان مصنوعی، استخوان‌ها یا اندام‌های مصنوعی) و سایر فناوری‌های نوین نام برد. همچنین این مواد در ساخت صفحات و پوسته‌های مخازن، راکتورها، توربین‌ها و دیگر اجزای ماشین‌ها نیز کاربرد زیادی دارند. زیرا این قطعه‌ها آمادگی بالایی جهت واماندگی ناشی از کمانش حرارتی را دارند. از دیگر مزایای این مواد نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای عدم گسستگی در محل اتصال لایه‌ها می‌باشد. زیرا همان‌طور که گفته شده است در این مواد ترکیب عناصر پیوسته و تدریجی می‌باشد. استفاده از پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیر تابعی، به دلیل تحمل بارهای فشاری و همچنین مقاومت در دمای حرارتی بالا، کاربردهای فراوانی در صنایع هوافضا، صنایع شیمیایی و راکتورهای هسته‌ای دارند. در اکثر این کاربردها، پوسته تحت بارگذاری فشاری قرار دارد و ممکن است دچار کمانش شود. به‌عنوان مثال، یافتن بار بحرانی^۱ کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی از اهمیت ویژه‌ای در طراحی برخوردار است.

۱-۵ مروری بر کارهای انجام‌شده

پاتل و همکارانش [۷] به مطالعه‌ی رفتار کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از تئوری مرتبه بالا به کمک روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی^۲ پرداختند و مشاهده کردند مقدار دمای کمانش به نسبت ضخامت به طول و مد کمانش بستگی دارد. درویزه و همکاران [۸] به مطالعه‌ی نیمه‌تحلیلی پوسته‌های مرکب استوانه‌ای ضخیم تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۳

¹ Critical load

² Semi-analytical finite element method

³ First-order shear deformation theory

(FSDT) پرداختند و برای محاسبه‌ی ماتریس سفتی هندسی^۱ از تئوری ساده‌شده و ساده‌نشده سندرز استفاده کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که دمای کمانش بحرانی در تئوری ساده‌شده سندرز^۲ کم‌تر از تئوری ساده‌شده سندرز است. محمدزاده و همکاران [۹] نیز به بررسی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی دوبعدی (تغییرات در دو جهت شعاعی و محوری) تحت بارهای ترکیبی محوری و فشار خارجی بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها^۳ پرداختند. آن‌ها با روش مربعات دیفرانسیلی^۴ (GDQM)، بار بحرانی کمانش برای پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی دوبعدی را به دست آوردند و آن را با بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی یک‌بعدی مقایسه کردند و به این نتیجه رسیدند که بار بحرانی کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای دوبعدی بیش‌تر از بار بحرانی کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای یک‌بعدی است.

پاتل و همکاران [۱۰-۱۴] به کمک روش نیمه‌تحلیلی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی ناقص تحت بارگذاری‌های پیچشی، فشار جانبی و فشار محوری را مطالعه کردند و مشاهده کردند با افزایش زاویه مخروط بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. هم‌چنین مشاهده کردند که رفتار کیفی پس‌کمانش در پوسته‌ها در معرض بار پیچشی، فشار خارجی، فشار محوری و بار حرارتی مشابه است. گانسان [۱۵] به بررسی و تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت چندلایه پیزوالکتریک با استفاده از روش المان محدود نیمه‌تحلیلی پرداخت. علی‌جانی و همکاران [۱۶] کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیر تابعی و کامپوزیتی را با استفاده از روش المان محدود نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. آن‌ها هم‌چنین تأثیر شرایط هندسی مختلف را بر پاسخ مورد مطالعه قرار دادند. فراهانی و همکاران [۱۷] کمانش مکانیکی پوسته‌ی استوانه‌ای متغیر تابعی تقویت‌شده در جهت شعاعی و محوری را با استفاده از

¹ Geometric stiffness matrix

² Simplify sanders theory

³ Classic shell theory

⁴ Generalized differential quadrature method

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم^۱ (TSDT) مطالعه کردند.

اسمیتس و آناستاسیادیس [۱۸] با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا به تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری‌های فشار محوری، فشار عرضی و فشار خارجی پرداختند و بار بحرانی کمانش را در طول‌های مختلف و نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت و شعاع به طول محاسبه کردند و نتایج حاصل از مطالعه‌ی خود را با تئوری‌های مرتبه پایین‌تر مقایسه کردند. شریعت و عسگری [۱۹] کمانش و پس-کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیّر تابعی تحت بارگذاری حرارتی را با روش المان محدود بررسی کردند و از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده کردند. همچنین اثر متغیّر بودن ضخامت بر روی دمای بحرانی کمانش را بررسی کردند. قربان‌پور و همکاران [۲۰] بر روی پایداری پوسته‌های استوانه‌ای با هسته الاستیک تحت فشار محوری با شرایط مرزی ساده پرداختند. آن‌ها با استفاده از روابط غیرخطی کرنش-جابجایی سندرز^۲ و به روش انرژی، معادلات پایداری و سازگاری را به-دست آوردند و برای تحلیل کمانش از روش گالرکین^۳ استفاده کردند.

تانگاراتنام و همکارانش [۲۱] به بررسی کمانش حرارتی و مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی مرکب با شرایط مرزی و زوایای الیاف مختلف و تحت بارگذاری حرارتی با استفاده از روش المان محدود پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که رفتار کمانش پوسته‌ها تحت بارگذاری حرارتی از پوسته‌های تحت بارگذاری مکانیکی، با توجه به جهت زاویه الیاف متفاوت است. شاه‌سیاه و همکاران [۲۲] به مطالعه‌ی کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از تئوری پوسته‌ی دانل^۴ پرداختند. آن‌ها فرض کردند که دما به شکل یکنواخت و خطی در جهت شعاعی و طولی افزایش می‌یابد و شرایط مرزی را ساده در نظر گرفتند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش نسبت ضخامت به شعاع بار کمانش نیز افزایش می‌یابد. یانگ

¹ Third-order shear deformation theory

² Sanders

³ Galerkin method

⁴ Donnell shell theory

و همکاران [۲۳] با در نظر گرفتن تغییر ضخامت غیرممتقارن در یک پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک تحت فشار جانبی خارجی یکنواخت، یک روش تحلیلی برای کمانش آن ارائه دادند و به این نتیجه رسیدند که می‌توان از این روش برای تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک با ضخامت متغیر کلی نیز استفاده کرد. کادولی و گانسان [۲۴] کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی در معرض حرارت را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و به روش المان محدود نیمه‌تحلیلی مطالعه کردند. آن‌ها چند مواد متغیر تابعی مختلف را تحت شرایط مرزی گیردار بررسی کردند. فونگ و بک [۲۵] به بررسی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی تقویت‌شده، تحت بار محوری فشاری، فشار خارجی و بار پیچشی پرداختند. آن‌ها معادلات حاکم را با استفاده از تئوری کلاسیک به‌دست آوردند و با روش گالرکین آن را حل کردند.

ژو و همکارانش [۲۶] به مطالعه‌ی کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای بر اساس معادلات دانل و اصل همیلتون پرداختند و بار کمانش را با استفاده از حل یک مسأله‌ی مقدار ویژه محاسبه کردند و تأثیر شرایط مرزی مختلف را مورد بحث قرار دادند و نتیجه گرفتند که با افزایش طول، دمای کمانش بحرانی کاهش می‌یابد و با افزایش ضخامت، دمای کمانش بحرانی نیز افزایش می‌یابد. انگوین و همکارانش [۲۷] به مطالعه‌ی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت بارگذاری فشار خارجی با استفاده از روش گالرکین پرداختند و نتیجه گرفتند که تغییر ضخامت بر ظرفیت تحمل بار در پوسته‌ها مؤثر است. نارایانا و همکارانش [۲۸] به مطالعه‌ی کمانش خطی و غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای مرکب تحت بارگذاری مکانیکی با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند و تأثیر ضخامت و شعاع بر رفتار کمانشی پوسته‌ها را بررسی کردند. ژائو و همکارانش [۲۹-۳۱] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی را با استفاده از روش ریتز^۱ مطالعه کردند. آن‌ها فرمول‌بندی مسأله را با استفاده از نوع

^۱ Ritz method

بهبودیافته تئوری غیرخطی پوسته‌ها که توسط ساندرز ارائه شد به‌دست آوردند. سپیانی و همکارانش [۳۲] به مطالعه‌ی ارتعاشات و کمانش پوسته‌های استوانه‌ای FGM تحت بارگذاری حرارتی و دینامیکی با استفاده از تئوری کلاسیک و مرتبه اول پرداختند و دریافتند که کمیت‌های هندسی و ترکیب مواد، اثر قابل توجهی بر بار بحرانی کمانش دارد به‌طوری‌که حداقل بار بحرانی کمانش برای پوسته‌های فلزی کامل رخ می‌دهد و نیروی برشی اثر قابل توجهی بر ارتعاشات آزاد پوسته‌ها دارد.

درویزه و همکاران [۳۳] به مطالعه‌ی کمانش پوسته‌های مرکب استوانه‌ای تحت بارگذاری‌های مختلف بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی پرداختند و نتیجه گرفتند که در بارگذاری محوری، مد محیطی کمیت مؤثرتری بر بار کمانش است. لی و باترا [۳۴] به تحلیل کمانش پوسته‌های جدار نازک با لایه میانی از جنس مواد متغیّر تابعی، تحت بارگذاری فشاری محوری پرداختند. پوسته دارای سه لایه بوده و شرایط تکیه‌گاهی ساده در دو انتها برای آن‌ها در نظر گرفته شده بود. دو لایه بیرونی پوسته از مواد همسانگرد همگن و لایه میانی از ماده متغیّر تابعی با تغییرات سهمی‌گون تشکیل شده بود. نشان داده شد مدهای کمانشی در راستای محیطی هارمونیک می‌باشند و افزایش نسبت طول به شعاع موجب افزایش شکل مدهای کمانشی در راستای محوری می‌گردند. های‌گوی و همکاران [۳۵] کمانش دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای نازک با ضخامت متغیّر متقارن دلخواه تحت فشار محوری وابسته به دما را بررسی کردند. جمال و همکارانش [۳۶] به تجزیه و تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری با روش نیمه‌تحلیلی پرداختند. نجفی‌زاده و همکارانش [۳۷] تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای کوتاه و بلند FGM را بررسی کردند. تکیه‌گاه‌ها به‌صورت ساده و تئوری مورد استفاده تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم در نظر گرفته شده است. معادلات تعادل و پایداری با کاربرد انرژی پتانسیل کل و معادلات اولر استخراج شده‌اند. دما و نیروی بحرانی کمانش برای هر دو نوع پوسته‌های استوانه‌ای کوتاه و بلند به‌دست آمده است. چن و همکارانش [۳۸] کمانش مکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای ضخامت

متغیر تحت فشار یکسان محوری را بررسی کردند. نتایج با استفاده از حل تحلیلی و نرم‌افزار آباکوس برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. نتایج حاصل به صورت تابعی از ضخامت پوسته و سایر پارامترهای هندسی نشان داده شده است.

شن [۳۹] رفتار پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی با خواص ترموالاستیک وابسته به دما را مطالعه کردند. هونگ و هن [۴۰] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ساخته‌شده از مواد متغیر تابعی، تحت فشار محوری با استفاده از تئوری پوسته دائل و روابط کرنش-جابجایی غیرخطی مربوط به تغییر شکل‌ها را تحلیل کردند. شاطرزاده و فروتن [۴۱] پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت‌کننده‌های مایل بر بستر الاستیک را بررسی کردند. درویزه و همکاران [۴۲] کمانش حرارتی پوسته‌های کروی‌شکل کامپوزیتی سوراخ‌دار را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با روش اجزا محدود نیمه-تحلیلی بررسی کردند. همچنین آن‌ها اثر زاویه الیاف را بر رفتار کمانشی بررسی کردند. لی و همکارانش [۴۳] کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی با تغییرات ضخامت پریودیک را بررسی کردند. ایشان در این تحقیق به بررسی اثر تغییرات ضخامت روی استحکام پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بار محوری پرداختند. آن‌ها طی این تحقیقات نشان دادند که یک نوع تابع ضخامت وجود دارد که با استفاده از آن می‌توان بار بحرانی کمانش را کاهش داد. شن [۴۴] رفتار کمانشی و پس‌کمانشی حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی و همچنین پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده با نانو لوله‌های ساخته‌شده از ماده متغیر تابعی را مورد مطالعه قرار داد. شاه‌سیاه و اسلامی [۴۵] به مطالعه‌ی کمانش حرارتی پوسته‌ی استوانه‌ای FGM تحت دو نوع بارگذاری حرارتی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. در تجزیه و تحلیل آن‌ها خواص مواد مستقل از دما می‌باشد. حدادپور و همکاران [۴۶] مطالعه را بر روی کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی با تکیه‌گاه ساده، تحت اثر دما انجام دادند. آن‌ها خواص مواد را وابسته به دما و در جهت ضخامت بر اساس رابطه توزیع توانی فرض کردند. معادلات حاکم

بر اساس تئوری لوو و روابط غیرخطی دانل-کارمن^۱ استخراج و برای حل معادلات حرکت از روش گالرکین استفاده کردند. شادمه‌ری و همکاران [۴۷] با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به مطالعه‌ی کمانش پوسته‌های مخروطی تحت فشار محوری پرداختند و مشاهده کردند برای پوسته‌های مخروطی نازک و کوتاه با افزایش زاویه رأس مخروط بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. شاطرزاده [۴۸] به مطالعه‌ی کمانش ترمومکانیکی ورق FG با گشودگی دایروی و بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی با استفاده از روش اجزای محدود پرداخت و تأثیر شرایط مرزی و شعاع گشودگی بر رفتار کمانشی ورق را بررسی کرد. جمیل و نصیف [۴۹] بر روی تأثیر ضخامت و شرایط مرزی بر کمانش ترمومکانیکی ورق پرداختند. میچالسکا و مانیا [۵۰] به مطالعه‌ی کمانش ترمومکانیکی ورق نازک تحت افزایش دمای یکنواخت با شرایط مرزی ساده پرداختند.

۱-۶ نوآوری

نوآوری این پایان‌نامه تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی با جداره متغیر بر مبنای تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم با روش المان محدود نیمه‌تحلیلی تحت دو نوع بارگذاری حرارتی خطی و یکنواخت می‌باشد.

۱-۷ معرفی پایان‌نامه حاضر

در این پایان‌نامه، کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی با ضخامت متغیر بر مبنای تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم بررسی شده است. با روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی نتایج حاصل از آن به دست آمده است. هم‌چنین فرض‌های استفاده‌شده در کار حاضر شامل موارد زیر است.

● از دو نوع بارگذاری حرارتی خطی و یکنواخت استفاده شده است که به صورت متقارن محوری

^۱ Donnell-Karman

می‌باشد.

- پوسته نازک در نظر گرفته شده است.
- ضخامت پوسته به صورت متغیّر فرض شده است.
- خواص مکانیکی و حرارتی در جهت ضخامت با استفاده از مدل ردی و در جهت محور پوسته به کمک قانون نمایی به صورت پیوسته تغییر می‌کند.
- روابط کرنش-جابجایی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم به دست آمده است.
- برای مدل کردن پوسته‌ی استوانه‌ای از المان‌های سه‌گره‌ای خطی مرتبه دو با پنج درجه آزادی در هر گره استفاده شده است.
- در تحلیل مسأله تنش به صورت صفحه‌ای فرض شده است.
- مسأله تابع زمان نیست.

در فصل دوم به استخراج معادلات کرنش-جابجایی پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی با ضخامت متغیّر پرداخته شده است. در فصل سوم با روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی اقدام به مدل کردن پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی با ضخامت متغیّر شده تا معادله تعادل کمانش حرارتی به دست آید. فصل چهارم شامل صفحه‌گذاری و ارائه‌ی نتایج کمانش حرارتی و نتیجه‌گیری از تحلیل‌های انجام شده می‌باشد. فصل پنجم شامل خلاصه نتایج و پیشنهادهایی برای ادامه کار می‌باشد.

فصل دوم

معادلات پوسته‌های استوانه‌ای

۲-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا جنس پوسته، روابط ریاضی حاکم بر آن و هندسه پوسته‌های استوانه‌ای را بررسی کرده و سپس با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم روابط کرنش-جابجایی به دست می‌آید.

۲-۲ مدل ریاضی مواد متغیر تابعی

خواص مکانیکی مواد متغیر تابعی در یک، دو و یا سه جهت به صورت پیوسته تغییر می‌کند. مدل‌های ریاضی گوناگونی توسط ردی^۱، اردوگان^۲ و تانیگاوا^۳ برای بیان خواص این مواد به صورت ریاضی پیشنهاد شده است که در کار حاضر از مدل ریاضی ردی یا همان مدل توانی برای اعمال تغییرات پیوسته خواص در جهت ضخامت، همچنین قانون نمایی برای تغییرات در جهت محوری استفاده شده است.

در اغلب موارد، مواد متغیر تابعی از دو فاز سرامیک و فلز تشکیل می‌شود. اگر زیرنویس m و c به ترتیب برای بیان فاز فلز و سرامیک استفاده شود، v_m و v_c به ترتیب به عنوان حجم فلز و سرامیک در نظر گرفته می‌شود و کسر حجمی هر یک از دو فاز به صورت زیر خواهد بود.

$$V_m = \frac{v_m}{v_m + v_c}, \quad V_c = \frac{v_c}{v_m + v_c} \quad (1-2)$$

در رابطه بالا V_m و V_c به ترتیب معرف کسر حجمی فاز فلزی و سرامیکی می‌باشند و همواره از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند.

$$V_m + V_c = 1 \quad (2-2)$$

¹ Reddy

² Erdogan

³ Tanigawa

با استفاده از توابع نسبت حجمی، خواص مکانیکی مواد متغیر تابعی به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (۳-۲)$$

که در رابطه بالا P ، P_m و P_c به ترتیب بیان گر خاصیت ماده متغیر تابعی، خاصیت فلزی و سرامیکی است. این رابطه می‌تواند برای هر خاصیت مکانیکی و حرارتی مانند مدول یانگ^۱، ضریب پواسون^۲ و ضریب انبساط حرارتی^۳ باشد.

ردی کسر حجمی به کاررفته در رابطه بالا را با تابع توانی به صورت زیر مدل کرد [۵].

$$V_m(z) = \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^n \quad (۴-۲)$$

که در رابطه بالا z و n مختصات در جهت ضخامت و شاخص توانی^۴ ماده متغیر تابعی می‌باشند. چون مجموع کسر حجمی مواد سازنده برابر یک است، کسر حجمی سرامیک طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$V_c(z) = 1 - \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^n \quad (۵-۲)$$

طبق قانون ویت^۵ [۱۹] هر خاصیت مکانیکی پوسته را می‌توان بر حسب خواص اصلی بیان کرد. چون در این کار خواص ماده‌ی متغیر تابعی در جهت محوری پوسته نیز تغییر می‌کند، با اعمال قانون نمایی رابطه کلی تغییرات خواص در جهت ضخامت و محور پوسته‌های استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود.

$$P_i(\text{or})P_o = \left\{ P_o + (P_i - P_o) \left(0.5 + \frac{z}{h}\right)^n \right\} e^{\frac{\mu x}{L}} \quad (۶-۲)$$

که در رابطه بالا μ ضریب قانون نمایی و L طول پوسته‌های استوانه‌ای است. P_o و P_i بیان گر خواص سطح

¹ Young's modulus

² Poisson's coefficient

³ thermal expansion coefficient

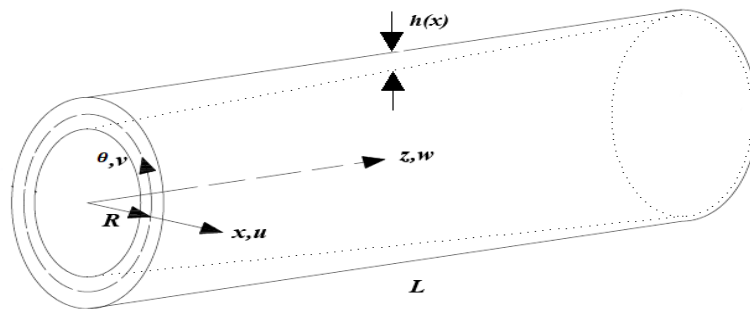
⁴ Power law index

⁵ Voigt

داخلی و خارجی هستند که در این پژوهش با توجه به انتخاب نوع ماده، هم ماده‌ای با خواص داخلی
 سرامیک و خارجی فلز و هم ماده‌ای با خواص داخلی فلز و خارجی سرامیک وجود دارد که در قسمت
 نتایج نشان داده شده است.

۳-۲ هندسه مسأله

مطابق شکل (۱-۲) یک پوسته‌ی استوانه‌ای با ضخامت متغیّر به طول L ، ضخامت h و شعاع متوسط R
 مفروض است. برای تحلیل هندسه این پوسته از دستگاه مختصات (x, θ, z) استفاده شده است که x ، θ و
 z به ترتیب بیان‌گر مختصات در جهت طولی، محیطی و ضخامت هستند.



شکل (۱-۲) هندسه پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیّر

که در کار حاضر جداره پوسته‌های استوانه‌ای در راستای محور آن متغیّر در نظر گرفته شده است. با
 استفاده از تابع نمایی^۱ [۱۹] زیر متغیّر بودن ضخامت بررسی شده است.

$$h(x) = h_0 e^{\frac{\beta x}{L}} \quad (۷-۲)$$

در رابطه بالا h_0 ضخامت اولیه و β پارامتر تغییر ضخامت می‌باشد.

^۱ Exponent of the thickness variations

۲-۴ میدان جابجایی پوسته‌های استوانه‌ای

مؤلفه‌های جابجایی بر مبنای تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم برای هر نقطه دلخواه از پوسته در جهت x ، θ و z به صورت زیر قابل بیان است [۵۱-۵۲].

$$u(x, \theta, z) = u_0 + z\Psi_x - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\Psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (۸-۲)$$

$$v(x, \theta, z) = v_0 + z\Psi_\theta - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)$$

$$w(x, \theta, z) = w_0(x, \theta)$$

در رابطه بالا، اگر a برابر صفر باشد تئوری موردنظر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است و اگر a برابر یک باشد تئوری موردنظر تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم می‌باشد. همچنین در رابطه بالا u_0 ، v_0 و w_0 به ترتیب جابجایی‌های سطح میانی در جهت x ، θ و z بوده و Ψ_x و Ψ_θ دوران‌های عمود بر سطح میانی در صفحات $x - z$ و $\theta - z$ می‌باشند.

۲-۵ روابط کرنش-جابجایی

از تئوری الاستیسیته [۴۸] می‌دانیم در یک سیستم منحنی الخط متعامد مؤلفه‌های کرنش نرمال و برشی با مؤلفه‌های بردار جابجایی به صورت زیر رابطه دارند.

$$\varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_i}{\sqrt{g_i}} \right) + \frac{1}{2g_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} \frac{u_k}{\sqrt{g_k}} \quad i = 1, 2, 3 \quad (۹-۲)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}} \left[g_i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{\sqrt{g_i}} \right) + g_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{\sqrt{g_j}} \right) \right] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j$$

که α_i ، u_i و g_i به ترتیب مختصات منحنی الخط^۱، مؤلفه‌های بردار جابجایی و ضرایب مقیاس هندسی^۲ می‌باشند. برای پوسته‌های استوانه‌ای داریم:

$$\alpha_1 = x \quad , \quad \alpha_2 = \theta \quad , \quad \alpha_3 = z$$

$$u_1 = u \quad , \quad u_2 = v \quad , \quad u_3 = w \quad (۱۰-۲)$$

$$g_1 = A_1^2 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)^2 \quad , \quad g_2 = A_2^2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)^2 \quad , \quad g_3 = 1$$

که در رابطه بالا، A_1 و A_2 ضرایب لامه^۳ هستند و R_1 و R_2 به ترتیب شعاع انحنا^۴ و فاصله سطح از محور دوران هستند که برای پوسته‌های استوانه‌ای به صورت زیر خواهند بود [۵۳].

$$A_1 = 1 \quad , \quad A_2 = R \quad (۱۱-۲)$$

$$R_1 = \infty \quad , \quad R_2 = R$$

با توجه به روابط ساده‌سازی گوس-کودازی^۵ می‌توان روابط زیر را نوشت.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \right] = \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \quad (۱۲-۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \right] = \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \frac{\partial A_2}{\partial x}$$

با جای‌گذاری معادلات (۱۰-۲) در معادلات (۹-۲) و با توجه به معادلات (۱۲-۲) معادلات کرنش-جابجایی برای پوسته‌های استوانه‌ای به شکل زیر خواهد بود.

¹ Curvilinear co-ordinates

² Geometrical scale factor quantities

³ Lamé's parameters

⁴ Curvature radius

⁵ Gauss-codazzi condition

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{A_1 w}{R_1} \right) \quad (۱۳-۲)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{A_2 w}{R_2} \right)$$

$$\gamma_{xz} = A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \right) + \frac{1}{A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{\theta z} = A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right) + \frac{1}{A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)}{A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u}{A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \right) + \frac{A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)}{A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right)$$

در ادامه با جای گذاری روابط (۸-۲) در (۱۳-۲) و با استفاده از تقریب $\left(1 + \frac{z}{R}\right) \cong 1$ برای پوسته‌های

استوانه‌ای جدار نازک روابط زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = & \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{v_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + \frac{w_0}{R_1} + \frac{z}{A_1} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{z \Psi_\theta}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \\ & - \frac{4az^3}{3h^2(x)A_1} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} - \frac{2\beta}{L} \Psi_x \right) - \frac{4az^3}{3h^2(x)A_1} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{2\beta}{L} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ & - \frac{4az^3}{3h^2(x)A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (۱۴-۲)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = & \frac{1}{A_2} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{u_0}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{w_0}{R_2} + \frac{z}{A_2} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{z \Psi_x}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \\ & - \frac{4az^3}{3h^2(x)A_2} \left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) - \frac{4az^3}{3h^2(x)A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \left(\Psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$\gamma_{xz} = -\frac{u_0}{R_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{4az^3}{3h^2(x)R_1} \left(\Psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) - \frac{z}{R_1} \Psi_x + \Psi_x - \frac{4az^2}{h^2(x)} \left(\Psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{\theta z} = -\frac{v_0}{R_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{4az^3}{3h^2(x)R_2} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) - \frac{z}{R_2} \Psi_\theta + \Psi_\theta - \frac{4az^2}{h^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{x\theta} = & \frac{1}{A_2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right) \right) \\ & - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \left(u_0 + z \Psi_x - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\Psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) \\ & + \frac{1}{A_1} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right) \right) \\ & + \frac{8a\beta z^3}{3Lh^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \\ & - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x} \left(v_0 + z \Psi_\theta - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \right) \end{aligned}$$

با جای گذاری روابط (۲-۱۱) در (۲-۱۴) معادلات کرنش-جابجایی برای پوسته‌های استوانه‌ای به صورت

زیر به دست می‌آید.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} - \frac{2\beta}{L} \Psi_x \right) - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{2\beta}{L} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w_0}{R} + \frac{z}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{4az^3}{3Rh^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right)$$

(۲-۱۵)

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi_x - \frac{4az^2}{h^2(x)} \left(\Psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta z} &= -\frac{v_0}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{4az^3}{3Rh^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) - \frac{z}{R} \Psi_\theta + \Psi_\theta \\ &\quad - \frac{4az^2}{h^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{z}{R} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} - \frac{4az^3}{3Rh^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} \\ &\quad - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{8a\beta z^3}{3Lh^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

همان طور که بیان شده است اگر a برابر یک باشد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم است که معادلات کرنش-جابجایی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} - \frac{2\beta}{L} \Psi_x \right) - \frac{4z^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{2\beta}{L} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w_0}{R} + \frac{z}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{4z^3}{3Rh^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi_x - \frac{4z^2}{h^2(x)} \left(\Psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \gamma_{\theta z} &= -\frac{v_0}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{4z^3}{3Rh^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) - \frac{z}{R} \Psi_\theta + \Psi_\theta \\ &\quad - \frac{4z^2}{h^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{z}{R} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} - \frac{4z^3}{3Rh^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} \\ &\quad - \frac{4z^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right) + \frac{8\beta z^3}{3Lh^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \tag{۱۶-۲}$$

و اگر a برابر صفر باشد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است که معادلات کرنش-جابجایی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \frac{w_0}{R} + \frac{z}{R} \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \Psi_x \quad (17-2)$$

$$\gamma_{\theta z} = -\frac{v_0}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{z}{R} \Psi_\theta + \Psi_\theta$$

$$\gamma_{x\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{z}{R} \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial x}$$

۲-۶ رابطه‌ی تنش-کرنش

با توجه به قانون هوک و با فرض رفتار الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای و تحت بارگذاری حرارتی، رابطه‌ی تنش-کرنش پوسته‌های استوانه‌ای به صورت زیر است.

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\}) \quad (18-2)$$

که در رابطه بالا، $[D]$ ماتریس الاستیسیته است که به موقعیت در جهت پوسته وابسته است و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$D(x, z) = \frac{E(x, z)}{1 - \vartheta^2(z)} \begin{bmatrix} 1 & \vartheta(z) & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta(z) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1 - \vartheta(z)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5(1 - \vartheta(z)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5(1 - \vartheta(z)) \end{bmatrix} \quad (19-2)$$

که در رابطه بالا، E مدول یانگ و ϑ ضریب پواسون می‌باشد و $\{\sigma\}$ و $\{\varepsilon\}$ به ترتیب بردار تنش و کرنش

کل پوسته‌های استوانه‌ای هستند که مؤلفه‌های آن‌ها به صورت زیر می‌باشد.

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_\theta \quad \tau_{xz} \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{x\theta}\} \quad (20-2)$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_\theta \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{x\theta}\}$$

و $\{\varepsilon_T\}$ بردار کرنش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای است که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\{\varepsilon_T\} = \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\alpha\} \Delta T \quad (21-2)$$

که در این جا، α ضریب انبساط حرارتی ماده‌ی متغیّر تابعی و $\{\alpha\}$ بردار ضرایب انبساط حرارتی می‌باشند و ΔT مقدار افزایش دما در جهت ضخامت پوسته‌های استوانه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Delta T = \sum_{m=0}^{\infty} \Delta T(z) \cos(m\theta) \quad (22-2)$$

در رابطه بالا $\Delta T(z)$ توزیع دما می‌باشد که در کار حاضر به صورت یکنواخت و خطی در نظر گرفته شده است و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\Delta T(z) = \Delta T_m (a_1 + b_1 z) \quad (23-2)$$

که اگر $a_1 = 1$ و $b_1 = 0$ باشد، توزیع دما یکنواخت^۱ (UTD) است و اگر $a_1 = \frac{1}{2}$ و $b_1 = \frac{1}{h}$ باشد، توزیع دما خطی^۲ (LTD) می‌باشد [۴۲].

¹ Uniform temperature distribution

² Linear temperature distribution

فصل سوم

روش اجزای محدود نیمه تحلیلی

برای پوسته‌های استوانه‌ای

۳-۱ مقدمه

توسعه سریع روش‌های عددی مختلف در تحلیل‌های مهندسی در سه دهه‌ی اخیر همراه با پیشرفت علوم کامپیوتر موفقیت‌های زیادی به‌همراه داشته است. با ظهور سوپر کامپیوترها مهندسان و محققان می‌توانند میلیون‌ها مسأله‌ی که به‌دلیل طبیعت پیچیده به‌صورت لاینحل ماندند را با استفاده از روش‌های اجزای محدود با موفقیت حل کنند. در این بین روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی برتری نسبت به روش اجزای محدود کامل دارد که به چند مورد آن اشاره می‌کنیم.

- تعداد معادله کم‌تر و پهنای ماتریس کوچک‌تر به‌خصوص برای مسأله‌ی با تکیه‌گاه ساده، در نتیجه زمان محاسبات بسیار کوتاه‌تر خواهد شد.
- به‌دلیل کاهش در ابعاد مسأله، مقادیر ورودی کوتاه‌تر می‌باشند.
- خروجی‌ها کوچک‌تر هستند زیرا تنها مکان‌هایی که تنش‌ها و جابجایی‌ها مورد نیاز هستند را مشخص می‌کند و در نتیجه فقط خروجی‌های مطابق با آن‌ها را می‌دهد.

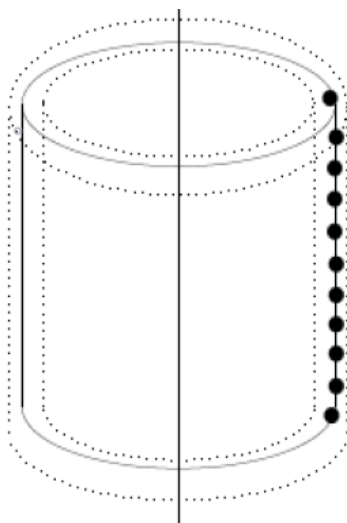
۳-۲ روش اجزای محدود نیمه‌تحلیلی

در این روش، انتخاب توابع درون‌یاب^۱ مناسب مهم‌ترین قسمت کار است. پس در این مرحله از تحقیق باید دقت ویژه‌ای داشت. انتخاب اشتباه توابع درون‌یاب نه‌تنها ممکن است به‌طور واضح پاسخ‌هایی دور از انتظار بدهد بلکه ممکن است نتایج برای شبکه‌بندی^۲ صورت گرفته به پاسخی اشتباه همگرا شود. اولین گام در حل اجزا محدود یک مسأله، گسسته‌سازی جسم به‌وسیله تعداد المان مناسب است. می‌توان ناحیه موردنظر را با استفاده از المان‌های یک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی شبکه‌بندی کرد.

¹ Interpolation functions

² Mesh generation

در این پایان‌نامه، پوسته‌های استوانه‌ای شکل توسط یک المان سه گره‌ای ایزو پارامتریک^۱ خطی مرتبه دوم مطابق شکل (۱-۳) مدل شده است. تابع شکل در جهت محور پوسته (مختصه x) و سری مثلثاتی^۲ در جهت دورانی پوسته (مختصه θ) در نظر گرفته می‌شود. یعنی فرض بر این است که میدان جابجایی به جهت دوران وابسته است.



شکل (۱-۳) المان بندی پوسته‌های استوانه‌ای به وسیله المان سه گره‌ای ایزو پارامتریک

بنابراین میدان جابجایی در جهت θ با سری فوریه به صورت زیر بیان می‌شود [۴۲].

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \Psi_x \\ \Psi_\theta \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \cos(m\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(m\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(m\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(m\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(m\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0m} \\ v_{0m} \\ w_{0m} \\ \Psi_{xm} \\ \Psi_{\theta m} \end{Bmatrix} \quad (1-3)$$

که m شماره m امین مد محیطی^۳ می‌باشد.

¹ Isoparametric element

² Trigonometric series

³ Circumferential mode

المان انتخاب شده برای پوسته‌های استوانه‌ای، یک المان سه گره‌ای درجه دوم می‌باشد. هر گره از این المان دارای پنج درجه آزادی شامل u_0, v_0, w_0, Ψ_x و Ψ_θ می‌باشد. در نتیجه هر المان پوسته دارای پانزده درجه آزادی خواهد بود. بنابراین بردار جابجایی برای هر المان به صورت زیر می‌باشد.

$$\{d_e\}^T = \{u_{0i} \ v_{0i} \ w_{0i} \ \Psi_{xi} \ \Psi_{\theta i}\} \quad i = 1,2,3 \quad (2-3)$$

که i شماره گره المان است. با توجه به المان انتخاب شده، تابع شکل^۱ مناسب را به دست می‌آوریم.

۳-۳ تابع شکل المان

توابع شکل، توابع درونیابی هستند که مقدار متغیر میدان را در هر نقطه از المان بر حسب مقادیر گره‌ای آن میان‌یابی می‌کنند. تابع شکل باید به گونه‌ای انتخاب شود که با استفاده از تعداد المان‌های مناسب حل اجزای محدود مسأله به حل تحلیلی آن نزدیک شود.

با توجه به انتخاب المان مرتبه دوم، تابع جابجایی را بر حسب مختصات محلی به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$x = a_1 + a_2 s + a_3 s^2 \quad (3-3)$$

که $s = \frac{x}{l}$ و l طول المان می‌باشد.

هم‌چنین رابطه‌ی بالا را می‌توان به فرم زیر نوشت.

$$x = [1 \ s \ s^2] \{a_1 \ a_2 \ a_3\}^T \quad (4-3)$$

مطابق شکل (۳-۲)، تابع شکل مربوط به هر گره برابر یک در همان گره و در تمام گره‌های دیگر صفر

^۱ Shape function

است. با توجه به این نکته می‌توان روابط (۳-۳) و (۳-۴) را برای مختصات سه گره به صورت زیر بیان کرد.

$$x(-1) = x_1 = a_1 - a_2 + a_3$$

$$x(0) = x_2 = a_1$$

(۳-۵)

$$x(+1) = x_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

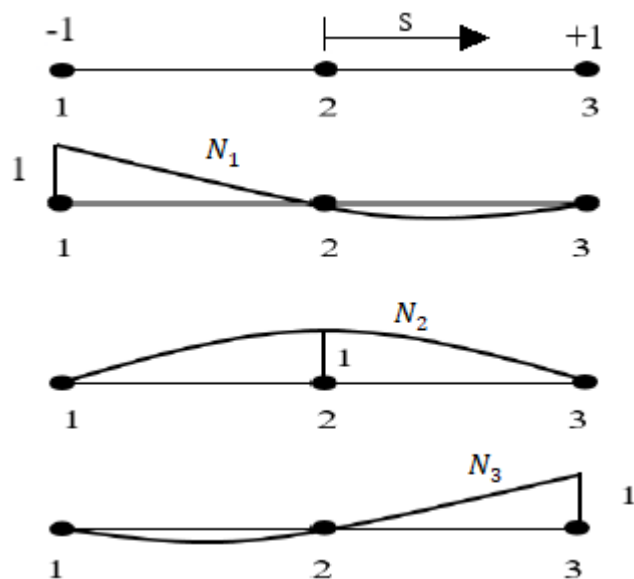
اکنون رابطه بالا را به فرم زیر می‌نویسیم.

$$-a_2 + a_3 = x_1 - x_2$$

$$x_2 = a_1$$

(۳-۶)

$$+a_2 + a_3 = x_3 - x_2$$



شکل (۳-۲) نمایش جابجایی‌های سه‌گره‌ای درجه دو [۵۴]

با حل معادلات (۶-۳) می‌توان مقادیر a_1 ، a_2 و a_3 را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$a_1 = x_2 \quad , \quad a_2 = \frac{x_3}{2} - \frac{x_1}{2} \quad , \quad a_3 = \frac{x_3}{2} + \frac{x_1}{2} - x_2 \quad (۷-۳)$$

با جای‌گذاری رابطه (۷-۳) در (۳-۳)، x به صورت زیر به دست می‌آید.

$$x = x_2 + \left(\frac{x_3}{2} - \frac{x_1}{2}\right)s + \left(\frac{x_3}{2} + \frac{x_1}{2} - x_2\right)s^2 \quad (۸-۳)$$

در نهایت رابطه بالا را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد.

$$x = [N] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (۹-۳)$$

که در رابطه بالا $[N]$ ماتریس تابع شکل برای المان سه‌گره‌ای خطی مرتبه دوم می‌باشد. مقادیر N_1 ، N_2 و N_3 برای هر گره به صورت زیر می‌باشد.

$$[N_1 \quad N_2 \quad N_3] = \left[\frac{s^2 - s}{2} \quad 1 - s^2 \quad \frac{s^2 - s}{2} \right] \quad (۱۰-۳)$$

۳-۴ انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل یک جسم الاستیک به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Pi = U - W \quad (۱۱-۳)$$

که در رابطه بالا، U انرژی کرنشی کل پوسته است و شامل انرژی کرنشی خطی و غیرخطی می‌باشد.

$$U = U_1 + U_2 \quad (۱۲-۳)$$

که U_1 انرژی کرنشی خطی و U_2 انرژی کرنشی غیرخطی می‌باشد.

هم‌چنین در رابطه (۳-۱۱)، کار پتانسیل می‌باشد که شامل کار نیروهای خارجی است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W = W_b + W_s + W_p \quad (۳-۱۳)$$

در رابطه بالا W_b ، W_s و W_p به ترتیب کار نیروهای خارجی حجمی، سطحی و متمرکز اعمال‌شده بر پوسته‌های استوانه‌ای می‌باشد و چون در کار حاضر هیچ‌گونه کار خارجی حجمی، سطحی و متمرکز اعمال‌شده وجود ندارد کار پتانسیل برابر صفر است ($W = 0$).

۳-۴-۱ محاسبه ماتریس سفتی^۱ و بردار بار حرارتی^۲ المان

قبل از پدیده کمانش رابطه تنش-کرنش به‌صورت خطی است. در نتیجه انرژی کرنشی خطی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_V (\{\varepsilon_m\}^T \{\sigma\}) dV \quad (۳-۱۴)$$

که $\{\varepsilon_m\}$ بردار کرنش است که برای یک جسم که در معرض بار حرارتی قرار دارد به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{\varepsilon_m\} = \{\varepsilon_L\} - \{\varepsilon_T\} \quad (۳-۱۵)$$

که $\{\varepsilon_L\}$ بردار کرنش‌های خطی می‌باشد و به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\{\varepsilon_L\} = [B_L] \{d_e\} \quad (۳-۱۶)$$

که در رابطه بالا $[B_L]$ ماتریس کرنش-جابجایی خطی می‌باشد که از توابع شکل و مشتقات آن تشکیل

¹ Stiffness matrix

² Thermal load vector

می‌شود و در پیوست پایان‌نامه آمده است. $\{d_e\}$ هم همان‌طور که گفته‌شده بردار تغییرمکان گره‌ای برای هر المان می‌باشد.

با جای‌گذاری روابط (۲-۲۱)، (۳-۱۵) و (۳-۱۶) در (۳-۱۴) می‌توان انرژی کرنشی خطی پوسته‌های استوانه‌ای را به‌دست آورد.

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{2} \int_V (\{d_e\}^T [B_L]^T - \{\alpha\}^T \Delta T) [D] ([B_L] \{d_e\} - \{\alpha\} \Delta T) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V (\{d_e\}^T [B_L]^T [D] [B_L] \{d_e\}) dV \\
 &\quad - \int_V (\{d_e\}^T [B_L]^T [D] \{\alpha\} \Delta T) dV + \frac{1}{2} \int_V (\{\alpha\}^T [D] \{\alpha\} (\Delta T)^2) dV
 \end{aligned}
 \tag{۳-۱۷}$$

که روابط زیر را خواهیم داشت.

$$[K_e] = \int_V ([B_L]^T [D] [B_L]) dV
 \tag{۳-۱۸}$$

$$\{F_e^{th}\} = \int_V ([B_L]^T [D] \{\alpha\} \Delta T) dV$$

که $[K_e]$ ماتریس سفتی هر المان برای m آمین مد محیطی و $\{F_e^{th}\}$ بردار بار حرارتی المان می‌باشد.

بنابراین رابطه (۳-۱۷) را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$U_1 = \frac{1}{2} \{d_e\}^T [K_e] \{d_e\} - \{d_e\}^T \{F_e^{th}\} + \frac{1}{2} \int_V (\{\alpha\}^T [D] \{\alpha\} (\Delta T)^2) dV
 \tag{۳-۱۹}$$

با توجه به خواص تعامد، ماتریس سفتی برای هر مد محیطی m به صورت مجزا خواهد شد یعنی برای هر شماره مد محیطی، تنها یک جمله از سری فوریه باقی خواهد ماند و سایر جملات سری صفر می شود. بنابراین می توان ماتریس سفتی یک المان را محاسبه کرد و بعد از مونتاژ کردن^۱ با اعمال شرایط مرزی ماتریس سفتی برای کل پوسته را به دست آورد.

۳-۴-۲ محاسبه ماتریس سفتی هندسی

بردار تنش های اولیه هر المان که به آن تنش های پیش کمانش می گویند را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\{\sigma_e^*\} = [D]([B_L]\{d_e\} - \{\alpha\}\Delta T) \quad (۳-۲۰)$$

در ادامه برای به دست آوردن معادله ی عمومی کمانش چون پدیده کمانش رخ می دهد، رابطه کرنش-جابجایی غیرخطی است و انرژی کرنش های غیرخطی به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_V (\{\varepsilon^{NL}\}^T \{\sigma^*\}) dV = \frac{1}{2} \int_V \{(\varepsilon_x^{NL})\sigma_x^0 + (\varepsilon_\theta^{NL})\sigma_\theta^0 + (\gamma_{x\theta}^{NL})\tau_{x\theta}^0\} dV \quad (۳-۲۱)$$

که σ_x^0 ، σ_θ^0 و $\tau_{x\theta}^0$ تنش های اولیه ناشی از اعمال بار است. مطابق آن ها عبارت های کرنش های غیرخطی برای پوسته های استوانه ای به صورت کامل و بر مبنای تئوری غیرخطی الاستیسیته به صورت زیر بیان می گردد.

$$\varepsilon_x^{NL} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} (e_{11}^2 + e_{21}^2 + e_{31}^2) \quad (۳-۲۲)$$

^۱ Assemble

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta}^{NL} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R \left(1 + \frac{z}{R}\right)} \right)^2 \left(\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (e_{22}^2 + e_{12}^2 + e_{32}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{x\theta}^{NL} &= \left(\frac{1}{R \left(1 + \frac{z}{R}\right)} \right) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) \right) \\ &= (e_{11}e_{12} + e_{22}e_{21} + e_{31}e_{32})\end{aligned}$$

با جای گذاری روابط (۲-۸) در (۳-۲۲) روابط زیر به دست می آید.

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{8a\beta z^3}{3Lh^2(x)} \left(\Psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}e_{21} &= \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi_{\theta}}{\partial x} - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_{\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{8a\beta z^3}{3Lh^2(x)} \left(\Psi_{\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

(۳-۲۳)

$$e_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$e_{22} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \Psi_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) + w_0 \right)$$

$$e_{12} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + z \frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} - \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial \theta} \right) \right)$$

$$e_{32} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 - z \Psi_{\theta} + \frac{4az^3}{3h^2(x)} \left(\Psi_{\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) \right)$$

طبق تئوری ساده شده سندرز با فرض صرف نظر کردن از کرنش‌های برشی عرضی، می‌توان کرنش

غیرخطی را به صورت زیر به دست آورد [۵۵].

$$\varepsilon_x^{NL} = \frac{1}{2} e_{31}^2$$

$$\varepsilon_\theta^{NL} = \frac{1}{2} e_{32}^2 \quad (24-3)$$

$$\gamma_{x\theta}^{NL} = e_{31}e_{32}$$

می توانیم e_{31} و e_{32} را بر حسب توان های z به صورت زیر نوشت.

$$e_{31} = \beta_1 z^0 + \gamma_1 z^1 + \alpha_1 z^3 \quad (25-3)$$

$$e_{32} = \beta_2 z^0 + \gamma_2 z^1 + \alpha_2 z^3$$

با جای گذاری رابطه (۲۵-۳) در (۲۴-۳) و مقایسه با روابط (۲۳-۳) ضرایب z^0 ، z^1 و z^3 به صورت زیر می باشد.

$$\beta_1 = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{v_0}{R}$$

$$\gamma_1 = 0$$

$$\gamma_1 = -\frac{\Psi_\theta}{R} \quad (26-3)$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{4a}{3Rh^2(x)} \left(\Psi_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۳-۲۴) و (۳-۲۶) می‌توان بردار کرنش‌های غیرخطی و رابطه آن با جابجایی گره‌ای را به صورت زیر نوشت.

$$\{\varepsilon^{NL}\}^T = \{\beta_1 \ \beta_2 \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2\} \quad (۳-۲۷)$$

$$\{\varepsilon^{NL}\} = [B_{NL}]\{d_e\} \quad (۳-۲۸)$$

که در رابطه بالا $[B_{NL}]$ ماتریس کرنش-جابجایی غیرخطی می‌باشد که از توابع شکل و مشتقات آن تشکیل شده و در پیوست آمده است. $\{d_e\}$ مانند آن چه در قبل گفته شده بردار تغییر مکان گره‌ای هر المان می‌باشد.

در ادامه ماتریس تنش‌های اولیه در رابطه (۳-۲۱) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$[\sigma^*] = [z]^T [\sigma] [z] \quad (۳-۲۹)$$

که ماتریس‌های $[z]$ و $[\sigma]$ در پیوست پایان نامه آمده است.

اکنون با استفاده از رابطه (۳-۲۹) و (۳-۲۸) انرژی کرنشی غیرخطی در رابطه (۳-۲۱) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_V (\{d_e\}^T [B_{NL}]^T [z]^T [\sigma] [z] [B_{NL}] \{d_e\}) dV \quad (۳-۳۰)$$

رابطه بالا را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$U_2 = \frac{1}{2} \{d_e\}^T [K_{Ge}] \{d_e\} \quad (31-3)$$

که $[K_{Ge}]$ ماتریس سفتی هندسی المان می‌باشد و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$[K_{Ge}] = \int_V ([B_{NL}]^T [Z]^T [\sigma] [Z] [B_{NL}]) dV \quad (32-3)$$

۳-۴-۳ اعمال اصل حداقل انرژی پتانسیل

اکنون رابطه‌ی انرژی پتانسیل که تحت بارگذاری حرارتی است به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \Pi = U_1 + U_2 = & \frac{1}{2} \{d_e\}^T [K_e] \{d_e\} - \{d_e\}^T \{F_e^{th}\} + \frac{1}{2} \int_V (\{\alpha\}^T [D] \{\alpha\} (\Delta T)^2) dV \quad (33-3) \\ & + \frac{1}{2} \{d_e\}^T [K_{Ge}] \{d_e\} \end{aligned}$$

طبق قضیه انرژی پتانسیل حداقل، برای یک سیستم از میان تمام میدان‌های تغییرمکانی از نقطه نظر هندسی قابل قبول هستند، آن میدان تغییرمکانی شرایط تعادل را ارضا می‌کند که انرژی پتانسیل کل را اکسترمم کند و اگر شرایط حداقل برقرار باشد، تعادل پایدار خواهد بود. بر این اساس با مینیمم‌سازی Π نسبت به بردار جابجایی، معادله استاندارد مربوط به اجزای محدود به صورت زیر می‌باشد.

$$[K_e] \{d_e\} + [K_{Ge}] \{d_e\} = \{F_e\} \quad (34-3)$$

بعد از مونتاژ ماتریس سفتی، ماتریس سفتی هندسی و بردار نیرو برای کل پوسته در تحلیل خطی

استاتیکی معادله به فرم زیر خواهد شد.

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (35-3)$$

پس از به دست آوردن بردار تغییر مکان $\{d\}$ ، می توان معادله تعادل کمانش حرارتی را به صورت زیر به دست آورد.

$$|[K] + \Delta T_{cr}[K_G^*]_T|\{d\} = 0 \quad (36-3)$$

که $[K_G^*]_T$ ماتریس سفتی هندسی کل بر اثر افزایش دمای واحد می باشد.

۳-۵ انتگرال گیری عددی به روش گوس

در این پایان نامه برای حل از نرم افزارهای میپل و متلب استفاده شده است. انتگرال های موجود روی حجم و به صورت سه گانه در جهت های x ، θ و z بوده که انتگرال در راستای θ را با نرم افزار میپل گرفته و برای انتگرال در راستای x و z از نرم افزار متلب و روش عددی گوس استفاده شده است.

برای انتگرال گیری گوس، در هر جهت چهار نقطه در نظر گرفته شده است. در جدول (۳-۱) مختصات نقاط گوسی (x_i) و وزن نقاط گوسی (w_i) به صورت زیر آمده است.

جدول (۳-۱) مختصات و وزن نقاط گوسی		
تعداد نقاط گوسی	مختصات نقاط گوسی (x_i)	وزن نقاط گوسی (w_i)
4	$x_1, x_4 = \pm 0.8611363116$	0.3478548451
	$x_2, x_3 = \pm 0.3399810436$	0.6521451549

اکنون پس از انتگرال گیری جهت θ با میپل و با توجه به انتگرال گیری عددی گوس می توان رابطه های (۱۸-۳) و (۳۲-۳) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$[K_e] \cong \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 w_i w_j [B_L(s_i, z_j)]^T [D] [B_L(s_i, z_j)] |J| \quad (۳۷-۳)$$

$$\{F_e^{th}\} \cong \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 w_i w_j [B_L(s_i, z_j)]^T [D] \{a(s_i, z_j)\} \Delta T |J| \quad (۳۸-۳)$$

$$[K_{Ge}] \cong \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 w_i w_j [B_{NL}(s_i, z_j)]^T [Z_j]^T [\sigma] [Z_j] [B_{NL}(s_i, z_j)] |J| \quad (۳۹-۳)$$

که داریم:

$$|J| = \frac{dx}{ds} = l \quad (۴۰-۳)$$

فصل چہارم

نتیج

۱-۴ مقدمه

در این فصل پس از نوشتن فرمول بندی مسأله، معادله کمانش و کدهای مربوط، نتایج کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی جدار متغیّر ارائه شده است.

۲-۴ مشخصه‌های مکانیکی و حرارتی مواد متغیّر تابعی

در کار حاضر، ماده متغیّر تابعی مورد نظر از دو فاز فلزی و سرامیکی ساخته شده است که فاز فلزی آن از فولاد ضدزنگ^۱ و آلیاژ تیتانیوم^۲ و فاز سرامیکی آن از آلومینا^۳، زیرکونیا^۴ و سیلیکون نیتريد^۵ تشکیل شده است. در جدول (۱-۴) سه نوع ماده معرفی و نحوه چینش لایه فلزی و سرامیکی آن‌ها بیان شده است.

جدول (۱-۴) نحوه چینش مواد متغیّر تابعی در کار حاضر

پوسته‌های استوانه‌ای متغیّر تابعی	فاز فلزی	فاز سرامیکی	لایه درونی	لایه بیرونی
ماده الف	فولاد ضدزنگ	آلومینا	سرامیکی	فلزی
ماده ب	آلیاژ تیتانیوم	زیرکونیا	سرامیکی	فلزی
ماده پ	فولاد ضدزنگ	سیلیکون نیتريد	فلزی	سرامیکی

هم‌چنین در جدول (۲-۴) مقادیر مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون برای مواد فلزی و سرامیکی به صورت زیر آمده است [۵۶].

¹ SUS304

² Ti-6Al-4V

³ Al₂O₃

⁴ ZrO₂

⁵ Si₃N₄

جدول (۲-۴) مدول یانگ، ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون برای مواد فلزی و سرامیکی [۵۶]

ν	$\alpha(\frac{1}{^{\circ}\text{C}})$	$E(\frac{\text{N}}{\text{m}^2})$	جنس
0.3262	12.330×10^{-6}	201.04×10^9	فولاد ضدزنگ
0.2884	7.5788×10^{-6}	122.56×10^9	آلیاژ تیتانیوم
0.24	5.8723×10^{-6}	348.43×10^9	سیلیکون نیتريد
0.26	6.8269×10^{-6}	349.55×10^9	آلومینا
0.2882	12.766×10^{-6}	244.27×10^9	زیرکونیا

۳-۴ شرایط مرزی

در کار حاضر از دو شرط مرزی دوسر ساده و دوسر گیردار استفاده شده است. در شرایط مرزی دوسر گیردار تمام درجه‌های آزادی صفر می‌باشد و در شرایط مرزی دوسر ساده فقط درجه‌های آزادی Ψ_x و Ψ_θ باز بوده و بقیه درجه‌های آزادی صفر هستند.

- شرایط مرزی دوسر گیردار

$$u_0 = v_0 = w_0 = \Psi_x = \Psi_\theta = 0 \quad (۱-۴)$$

- شرایط مرزی دوسر ساده

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0 \quad (۲-۴)$$

در ادامه برای شرایط مرزی دوسر گیردار و ساده به ترتیب از عبارتهای C-C و S-S استفاده شده است.

۴-۴ تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر

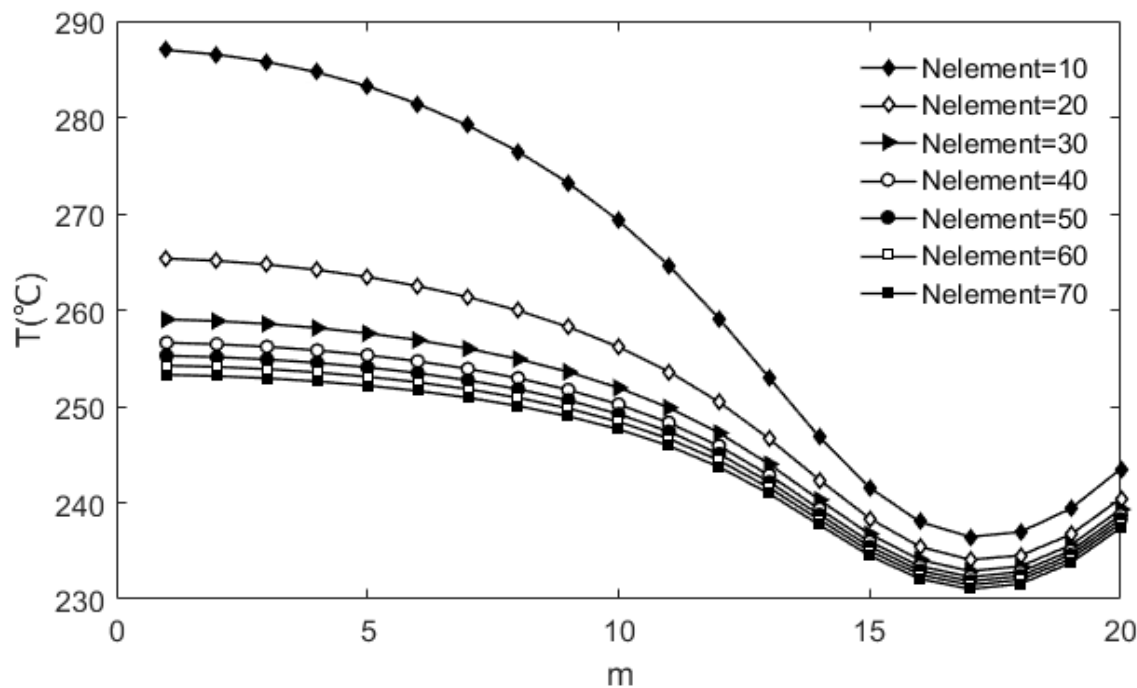
با داشتن ماتریس سفتی کل و ماتریس سفتی هندسی کل برای پوسته‌های استوانه‌ای و با رابطه (۳-۳۶) می‌توان دمای بحرانی کمانش را محاسبه کرد. برای درستی نتایج به‌دست‌آمده از کدنویسی نرم افزار متلب، ابتدا همگرایی نتایج کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای بررسی شده است.

جنس پوسته انتخاب‌شده از ماده الف می‌باشد و همگرایی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و توزیع دما خطی (LTD) بررسی شده است. هم‌چنین سایر پارامترهای ورودی در جدول (۳-۴) به‌صورت زیر آورده شده است.

جدول (۳-۴) پارامترهای ورودی استفاده‌شده برای بررسی همگرایی

$\frac{R}{h_0}$	$\frac{L}{R}$	$h_0(m)$	n	β	μ	Boundary condition
400	0.5	0.005	0.5	0.2	0.5	C-C

شکل (۴-۱) نمودار همگرایی دمای بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که کد نوشته‌شده در نرم‌افزار متلب از همگرایی خوبی برخوردار است. می‌توان نتیجه گرفت که تابع درون‌یاب انتخاب‌شده برای مدل کردن جابجایی‌های گره‌ای مناسب است. در ادامه برای بالا بردن دقت در تحلیل کمانش حرارتی از تعداد ۵۰ المان استفاده شده است.



شکل (۱-۴) همگرایی دمایی بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر

پس از بررسی همگرایی، نتایج کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار ثابت با مرجع‌های [۱۹] و [۳۹] مقایسه شده است. این مقایسه، برای دو ماده ب و ماده پ انجام شده است. دمایی محیط ۳۰۰ درجه کلوین است. همچنین این مقایسه بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و توزیع دما یکنواخت (UTD) می‌باشد و سایر پارامترهای ورودی در جدول (۴-۴) به صورت زیر می‌باشند.

جدول (۴-۴) پارامترهای ورودی برای نتایج کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار ثابت

$\frac{R}{h_0}$	$\frac{L^2}{Rh_0}$	$h_0(m)$	β	μ	Boundary condition
400	300	0.005	0	0	C-C

در جدول (۵-۴) مقادیر دمایی بحرانی کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار ثابت برای کار حاضر و مرجع‌های [۱۹] و [۳۹] آمده است. دماهای به دست آمده بر حسب درجه کلوین می‌باشد.

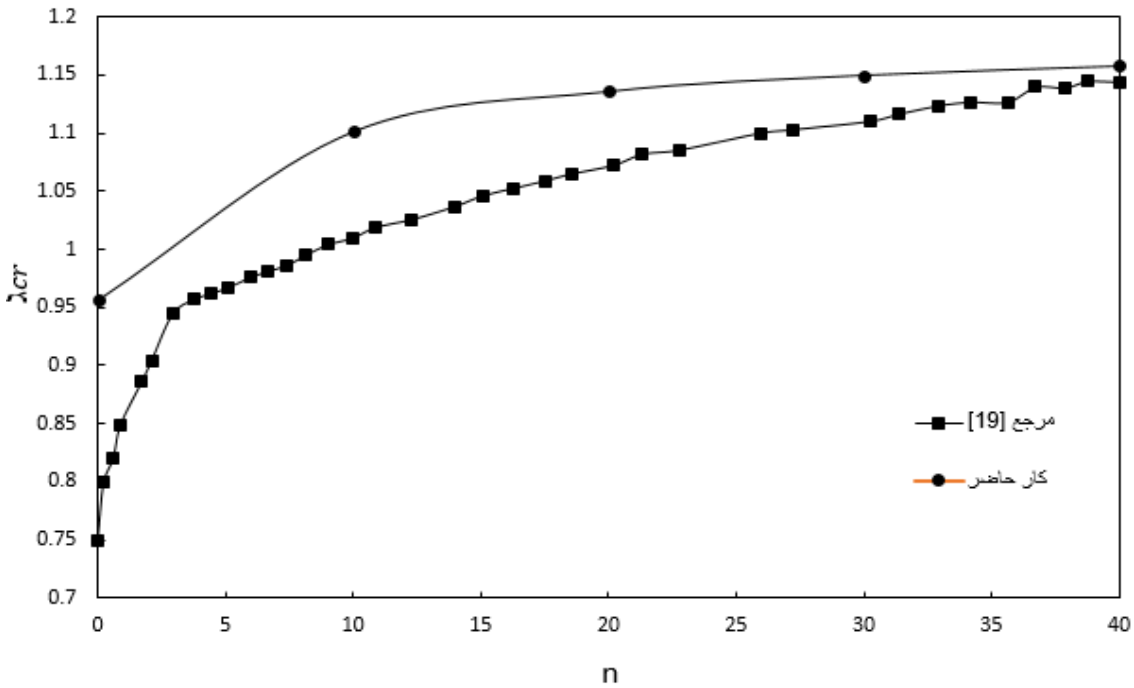
اختلاف پیش‌آمده به دلیل تفاوت در تئوری‌ها و روش‌های عددی استفاده‌شده در حل تحلیلی آن‌ها می‌باشد.

در مرجع [۱۹] شریعات از روش اجزای محدود طبق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده نمود و در مرجع [۳۹] شن نتایج را به کمک روش تحلیلی و طبق تئوری کلاسیک پوسته‌ها استخراج نمود.

جدول (۴-۵) مقایسه دمای بحرانی کمانش حرارتی (K) برای پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار ثابت

جنس پوسته	n	کار حاضر	مرجع [۱۹]	مرجع [۳۹]
	0	395	336	386
	0.5	416	381	406
ماده پ	1	429	388	418
	2	444	417	432
	3	453	433	440
	5	464	443	450
	0	378	336	371
	0.5	395	351	388
ماده ب	1	408	358	399
	2	429	385	417
	3	443	392	430
	5	461	415	447

شکل (۴-۲) مقایسه نتایج کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر با مرجع [۱۹] می‌باشد. $\beta = -0.2$ و $\mu = 0$ می‌باشد. شرایط مرزی گیردار بوده و این مقایسه بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم و توزیع دما یکنواخت (UTD) می‌باشد. اختلاف پیش‌آمده به دلیل تفاوت در روش‌های عددی می‌باشد.



شکل (۲-۴) نتایج کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر

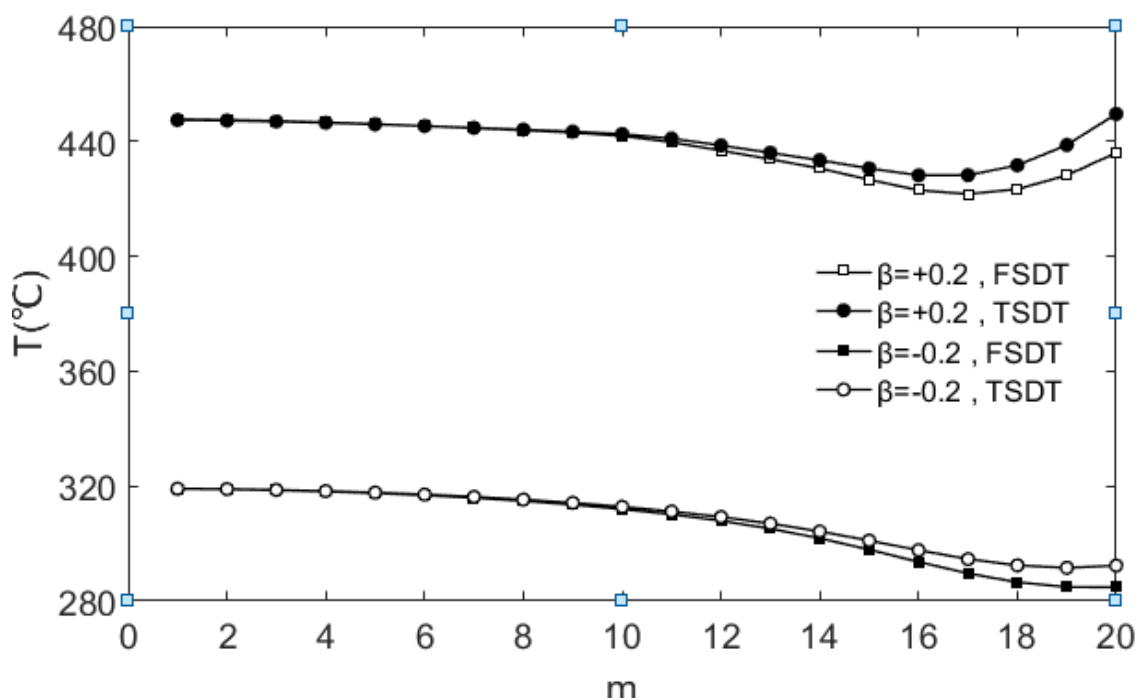
اکنون تأثیر پارامترهای مختلف بر دمای بحرانی کمانش بررسی می‌شود. توزیع دما و جنس ماده در هر قسمت بیان شده است و سایر پارامترهای ورودی در جدول (۴-۶) آمده است و اگر پارامتری تغییر کرده باشد در بخش موردنظر ذکر شده است.

جدول (۴-۶) پارامترهای ورودی برای تحلیل کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر

$\frac{R}{h_0}$	$\frac{L}{R}$	$h_0(m)$	n	β	μ	Boundary condition
400	0.5	0.005	1	-0.2	-0.5	C-C

شکل (۳-۴) تأثیر تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم (TSMT) در حالت‌های $\beta = +0.2$ و $\beta = -0.2$ را بر دمای بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای

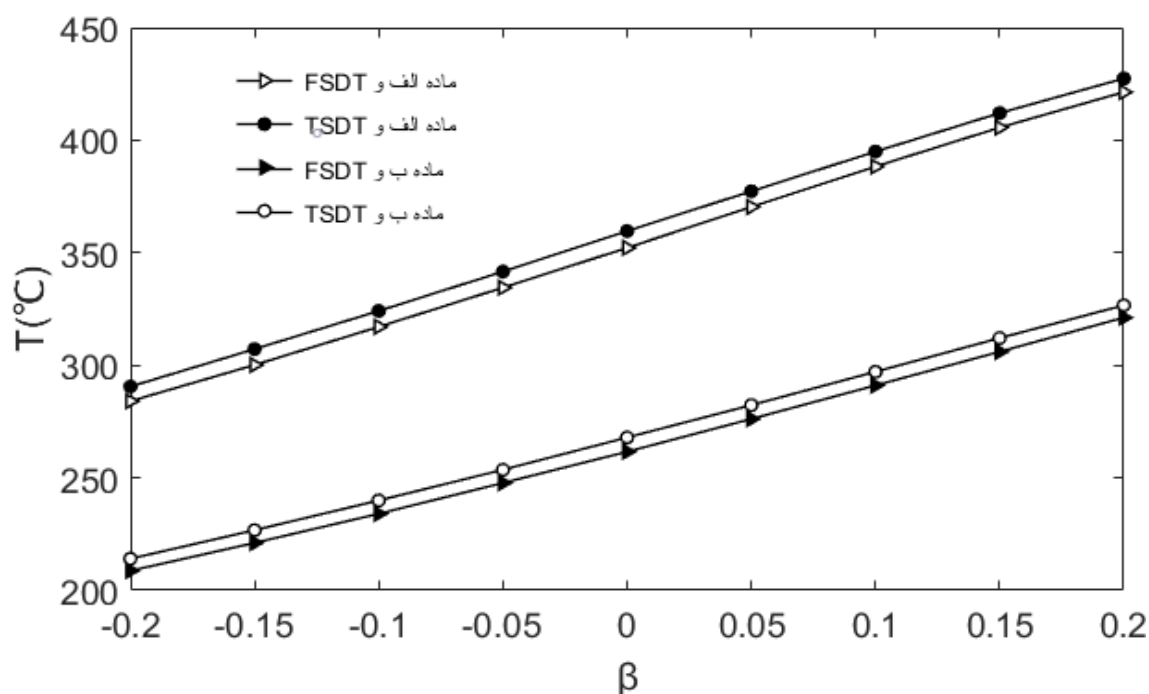
متغیر تابعی جدار متغیر بر حسب مد محیطی نشان می‌دهد. جنس پوسته‌ی استوانه‌ای از نوع ماده الف می‌باشد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود تا مد محیطی ۱۰ اختلاف بین تئوری‌های مرتبه اول و مرتبه سوم بسیار ناچیز است ولی از مد محیطی ۱۰ به بعد اختلافی مشاهده می‌شود که نشان می‌دهد در تئوری مرتبه سوم دمای بحرانی کماتش بیش‌تر است. هم‌چنین در حالت $\beta = 0.2$ به دلیل افزایش ضخامت در راستای محوری پوسته دمای بحرانی در حال افزایش و در حالت $\beta = -0.2$ به دلیل کاهش ضخامت در راستای محوری پوسته دمای بحرانی کماتش در حال کاهش می‌باشد.



شکل (۳-۴) تأثیر β بر کماتش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم

شکل (۴-۴) تأثیر جنس پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر با تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم بر حسب β را بر دمای بحرانی کماتش نشان می‌دهد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم دمای بحرانی کماتش در هر دو ماده الف و ب بیش‌تر از

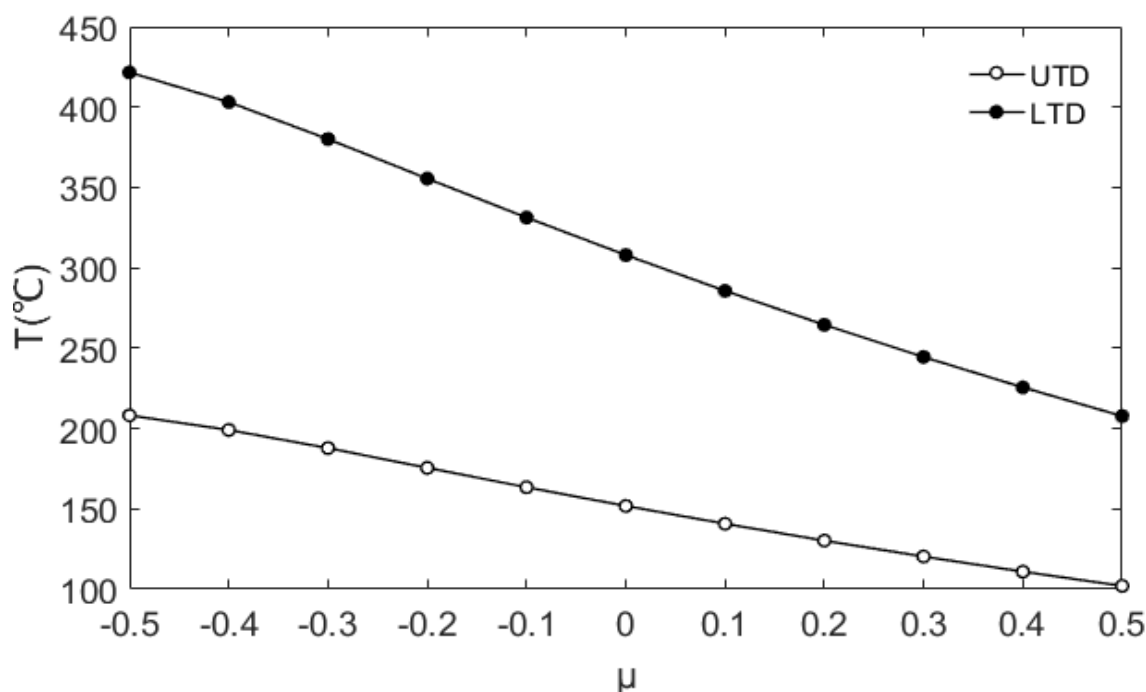
تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است. با توجه به جدول (۲-۴) و رابطه‌ی (۲-۹) می‌توان ضریب انبساط حرارتی ماده الف و ب را محاسبه کرد که ضریب انبساط حرارتی ماده ب بیش‌تر از ماده الف است و با توجه به شکل مشاهده می‌شود که مقاومت آن در برابر دمای کم‌تر از ماده الف است و با انتخاب β مثبت می‌توان تا حدی این کاهش دما را جبران کرد. همچنین مشاهده می‌شود که برای هر دو ماده الف و ب در هر دو تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم افزایش β (افزایش ضخامت پوسته در راستای محوری) باعث بهبود دمای کم‌اندام می‌شود. در ادامه کار از ماده الف استفاده شده است.



شکل (۴-۴) تأثیر جنس ماده بر کم‌اندام حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم

شکل (۴-۵) تأثیر μ در توزیع دما یکنواخت (UTD) و توزیع دما خطی (LTD) را بر دمای بحرانی کم‌اندام پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر نشان می‌دهد. پوسته‌ی استوانه‌ای بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول می‌باشد و $\beta = +0.2$ است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در حالت توزیع

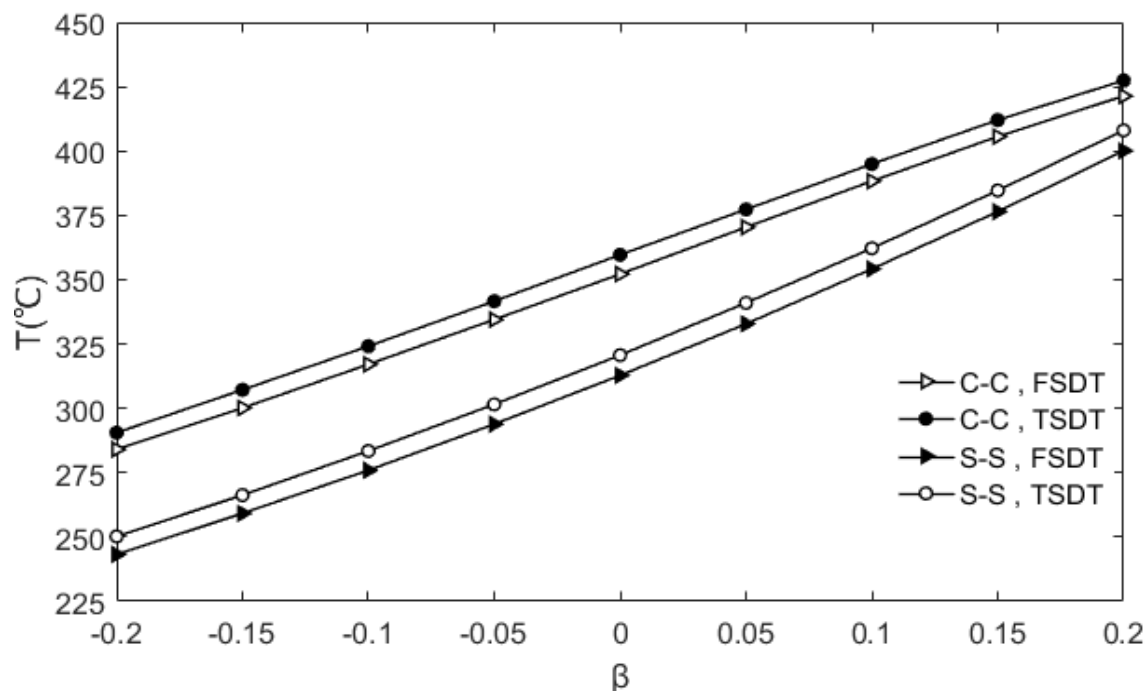
دما خطی دمای کمانش از حالت توزیع دما یکنواخت بیش تر است. هم‌چنین مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار μ به دلیل افزایش ضریب انبساط حرارتی دمای بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. پس بهتر است با انتخاب یک مقدار منفی برای μ تا حدی کاهش دمای کمانش را جبران کرد.



شکل (۴-۵) تأثیر μ و توزیع دماهای خطی و یکنواخت بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر

شکل (۴-۶) تأثیر شرایط مرزی دوسر ساده و دوسر گیردار با تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم را بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر بر حسب β نشان می‌دهد. توزیع دما به صورت خطی می‌باشد. با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت که اعمال شرایط مرزی دوسر ساده به دلیل این‌که این نوع تکیه‌گاه انعطاف‌پذیری بیشتری دارد و پایداری سازه را کاهش می‌دهد، باعث کاهش دمای بحرانی کمانش خواهد شد.

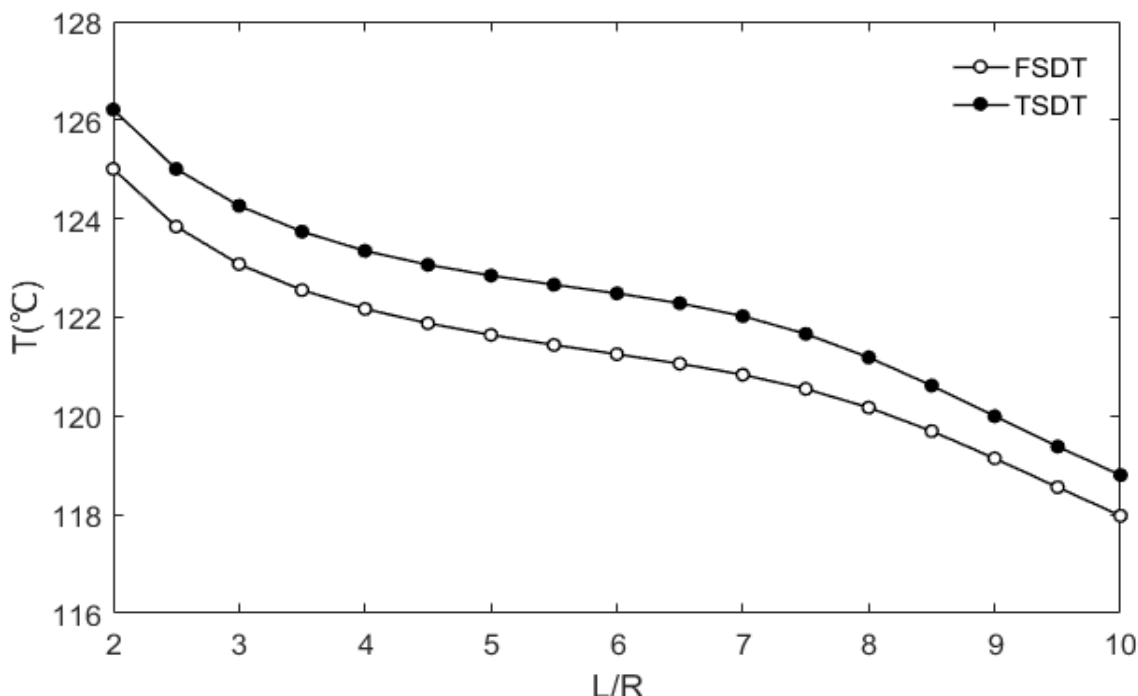
همان‌طور که در شکل مشخص است در حالت شرایط مرزی دوسر ساده با افزایش ضخامت در راستای محوری پوسته می‌توان تا حدی دمای کمانش را بهبود داد. در حالت دوسرگیردار نیز این قضیه صادق است، همچنین با افزایش ضخامت تأثیر شرایط مرزی بر دمای کمانش کم‌تر می‌شود. انتخاب مقادیر منفی β در هر دو حالت شرایط مرزی دوسر گیردار و ساده باعث کاهش دمای کمانش خواهد شد. همچنین دمای کمانش در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم در هر دو حالت شرایط مرزی دوسر گیردار و ساده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بیش‌تر است.



شکل (۴-۶) تأثیر شرط مرزی بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم

شکل (۴-۷) تأثیر نسبت طول به شعاع را در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر نشان می‌دهد. توزیع دما به صورت یکنواخت است.

با توجه به شکل مشاهده می‌شود با افزایش طول دمای کمانش در هر دو تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم کاهش پیدا می‌کند.



شکل (۷-۴) تأثیر نسبت طول به شعاع بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر

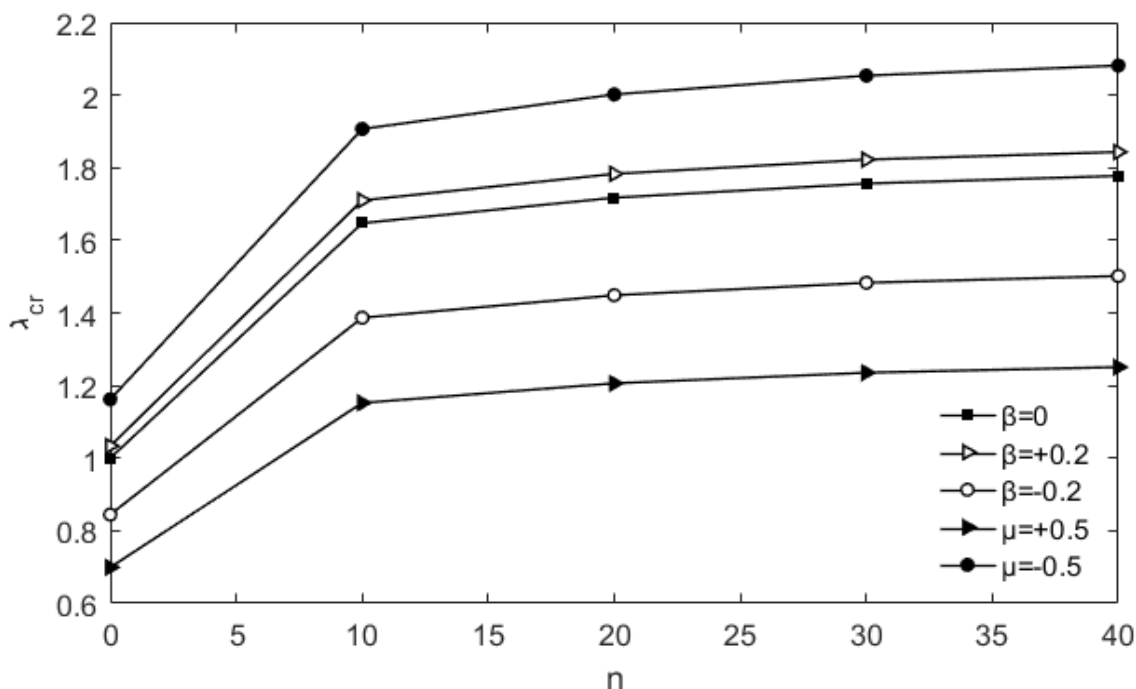
در ادامه برای تحلیل هم‌زمان تأثیر توان نسبت حجمی (n)، پارامتر تغییر ضخامت (β) و ضریب قانون نمایی (μ) بر دمای بحرانی کمانش می‌توان پارامتری به‌عنوان ضریب بار کمانش حرارتی [۱۹] به‌صورت زیر تعریف کرد.

$$\lambda_{cr} = \frac{\Delta T_{cr}}{\Delta T_{Baseline}} \quad (۳-۴)$$

که در رابطه بالا $\Delta T_{Baseline}$ مقدار افزایش دمای بحرانی به ازای β ، n و یا μ صفر است.

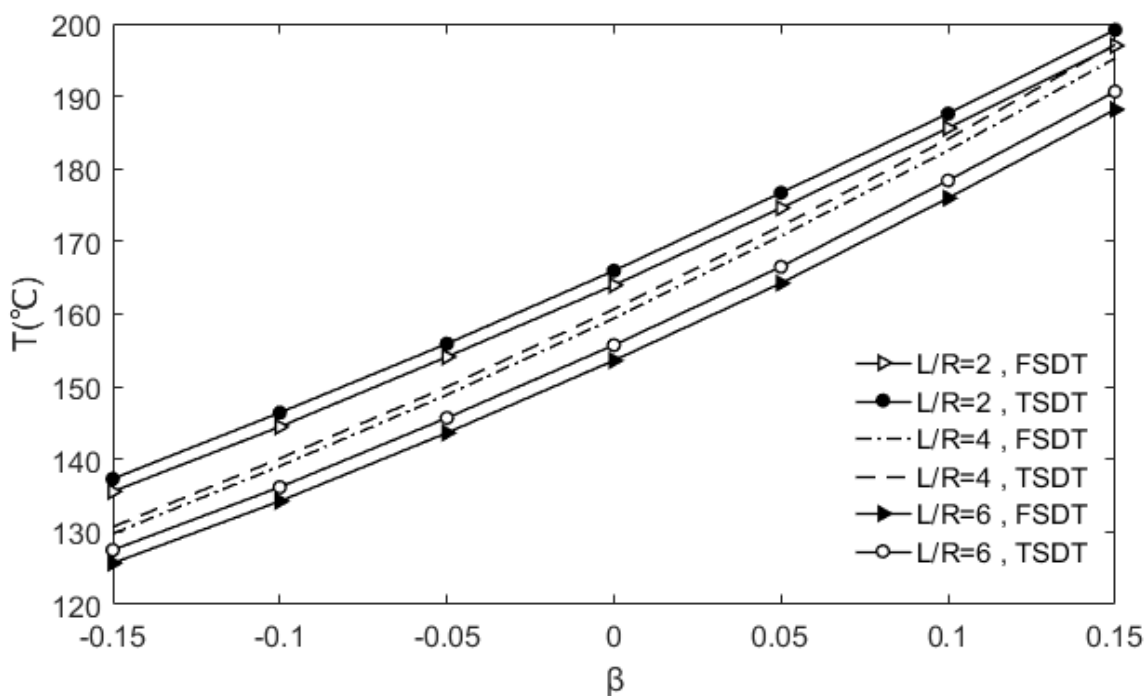
شکل (۸-۴) تأثیر n را به ازای مقادیر مختلف β و μ را بر ضریب بار حرارتی کمانش نشان می‌دهد. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و توزیع دما به‌صورت یکنواخت است. در حالت کاهش ضخامت پوسته در

جهت محوری ($\beta < 0$) به دلیل افزایش انعطاف پذیری پوسته‌های استوانه‌ای، دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند که با افزایش مقدار n این کاهش جبران می‌شود. هم‌چنین در حالت ($\mu > 0$) به دلیل افزایش ضریب انبساط حرارتی دمای کمانش کم شده است و در حالت μ منفی با کاهش ضریب انبساط حرارتی دمای کمانش افزایش یافته است.



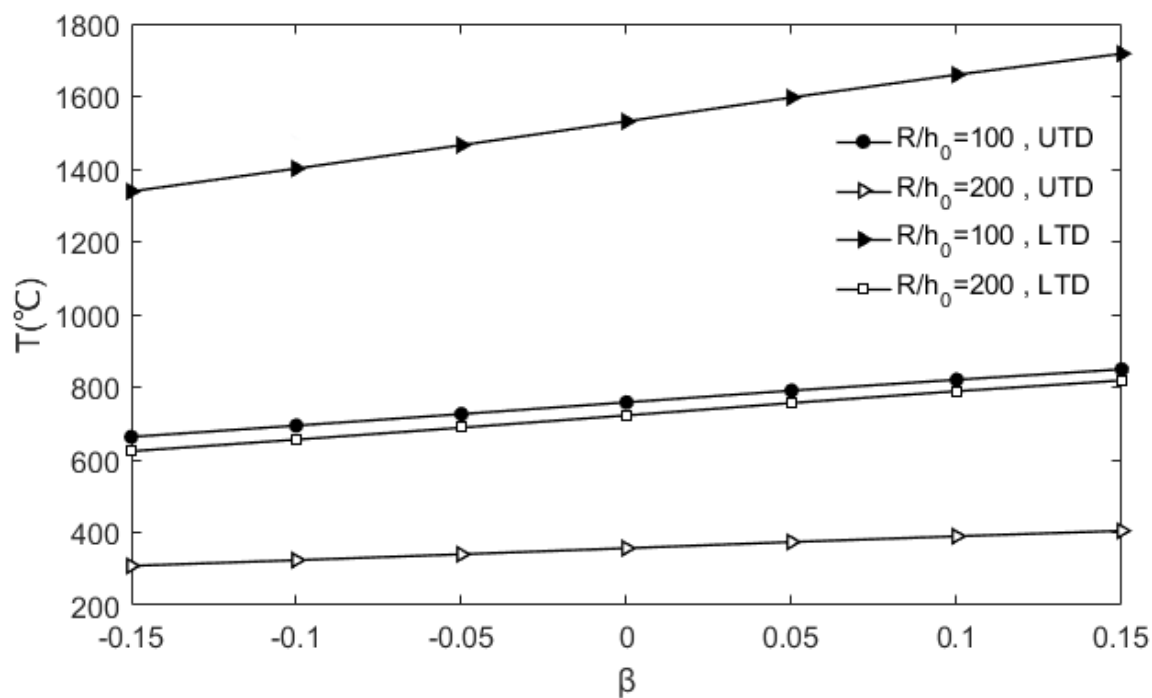
شکل (۴-۸) تأثیر پارامترهای μ و β بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر

شکل (۴-۹) تأثیر پارامتر تغییر ضخامت برای طول‌های مختلف را در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم نشان می‌دهد. توزیع دما به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است. در نتایج قبل مشخص شد که با افزایش طول به دلیل انعطاف پذیری بیش‌تر پوسته‌های استوانه‌ای دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند. با توجه به شکل مشخص است برای پوسته‌های استوانه‌ای با طول‌های بالا می‌توان با افزایش ضخامت پوسته در جهت محوری ($\beta > 0$) از میزان کاهش دمای کمانش جلوگیری کرد. هم‌چنین مشاهده می‌شود در طول‌های کم استفاده از مقادیر منفی دمای بحرانی کمانش را کاهش می‌دهد.

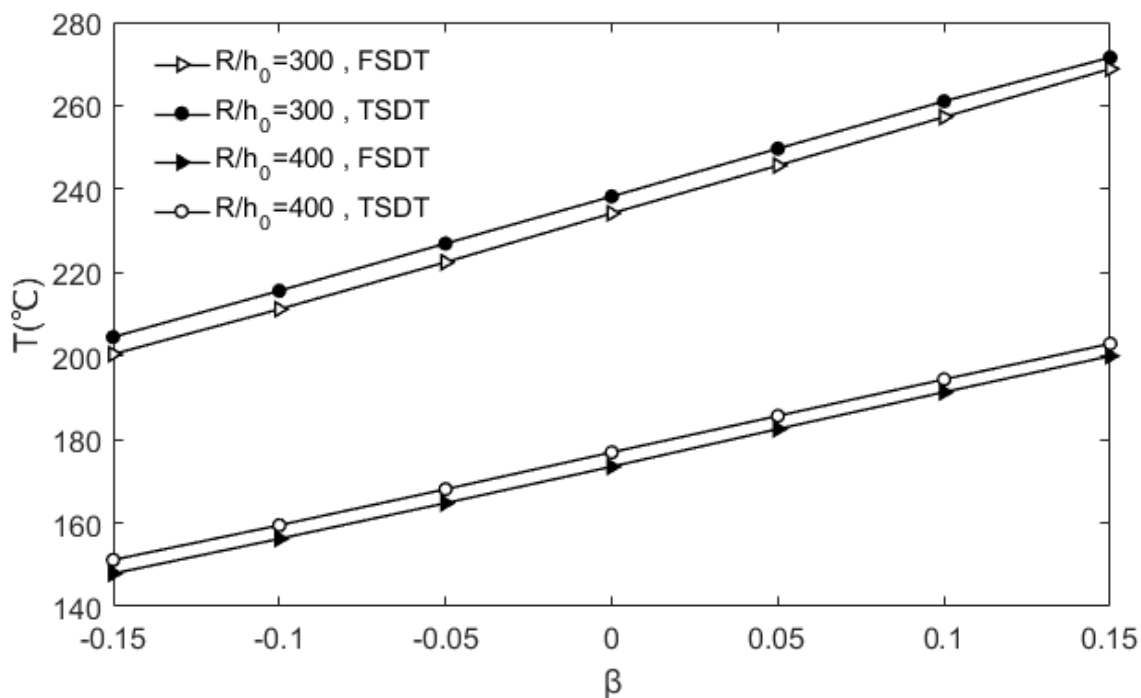


شکل (۹-۴) تأثیر β و نسبت طول به شعاع بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم

شکل (۱۰-۴) تأثیر پارامتر تغییر ضخامت را بر حسب شعاع‌های مختلف نشان می‌دهد. در شکل الف از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و در شکل ب از توزیع دمایی یکنواخت استفاده شده است. در هر دو شکل الف و ب مشاهده می‌شود با کاهش شعاع به دلیل افزایش سفتی پوسته‌های استوانه‌ای دمایی کمانش افزایش می‌یابد و با افزایش نسبت $\frac{R}{h_0}$ دمایی بحرانی کمانش کاهش می‌یابد که با افزایش مقدار ضخامت ($\beta > 0$) می‌توان از کاهش دمایی کمانش جلوگیری کرد. هم‌چنین در شکل الف در هر دو مقدار نسبت شعاع به ضخامت اولیه، دمایی بحرانی کمانش در توزیع دمایی خطی بیش‌تر از توزیع دمایی یکنواخت است و در شکل ب هم دمایی بحرانی کمانش در تمام نسبت‌های شعاع به ضخامت اولیه، در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم بیش‌تر از مرتبه اول است.



الف- دمای کمانش بر مبنای توزیع دمای خطی و یکنواخت



ب- دمای کمانش بر مبنای تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم

شکل (۴-۱۰) تأثیر پارامتر تغییر ضخامت و نسبت شعاع به ضخامت بر کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر

فصل پنجم

نتیجه‌گیری‌ها و پیشنهادها

۵-۱ مقدمه

این فصل شامل دو بخش نتایج و ارائه پیشنهادهایی است. در قسمت اول به بررسی خلاصه نتایج تأثیر پارامترهای گوناگون مانند جداره متغیر، شرایط مرزی و هندسی و جنس پوسته پرداخته شده است و در قسمت دوم پیشنهادهایی برای گسترده‌تری نتایج در راستای کار حاضر ارائه شده است.

۵-۲ خلاصه نتایج

خلاصه نتایج به صورت زیر گردآوری شده است.

- استفاده از روش المان محدود نیمه تحلیلی باعث کاهش تعداد المان موردنیاز در همگرایی پاسخها شده است.
- به طور کلی دمای کمانش در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم بیش تر از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است.
- در تمام نتایج دمای کمانش در حالت توزیع دمای خطی بیش تر از توزیع دمای یکنواخت و تقریباً دو برابر آن است.
- به طور کلی انتخاب β مثبت (افزایش ضخامت پوسته در جهت محوری) باعث افزایش دمای کمانش و انتخاب β منفی (کاهش ضخامت پوسته در جهت محوری) باعث کاهش دمای کمانش می شود.
- شرایط مرزی تأثیر زیادی بر رفتار کمانش حرارتی پوسته‌های استوانه‌ای دارد به طوری که انتخاب تکیه‌گاه‌های انعطاف پذیرتر پایداری سازه را کاهش داده و باعث کاهش دمای کمانش می شود.
- ماده‌ای که ضریب انبساط حرارتی بیش تری دارد مقاومتش در برابر کمانش حرارتی کم تر است.

- استفاده از μ مثبت به دلیل افزایش ضریب انبساط حرارتی باعث کاهش دمای کمانش و μ منفی به دلیل کاهش ضریب انبساط حرارتی باعث افزایش دمای کمانش می‌شود.
- افزایش نسبت توان حجمی باعث افزایش دمای کمانش می‌شود.
- به‌طور کلی با افزایش طول پوسته دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند که با افزایش ضخامت در جهت محوری پوسته از این کاهش دما جلوگیری می‌شود.
- با افزایش شعاع پوسته دمای کمانش کاهش پیدا می‌کند که می‌توان با افزایش ضخامت در جهت محوری پوسته این کاهش دما را بهبود بخشید.

۳-۵ پیشنهادها

با توجه به کاربرد گسترده پوسته در صنایع مختلف انجام مطالعات و پژوهش‌های بیش‌تری احساس می‌شود. موارد زیر را برای ادامه کار می‌توان پیشنهاد کرد.

- تحلیل کمانش مکانیکی و ترمومکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای، مخروطی و کروی جداره متغیر
- تحلیل غیر خطی کمانش ترمومکانیکی پوسته‌های استوانه‌ای متغیر تابعی جدار متغیر
- تحلیل کمانش ترمومکانیکی پوسته مخروطی جداره متغیر با انواع گشودگی‌ها
- تحلیل پس کمانش ترمومکانیکی پوسته مخروطی جداره متغیر دارای تقویت کننده
- استفاده از روش‌های حل تحلیلی بجای استفاده از روش‌های حل عددی

پیوست‌ها:

پیوست الف:

ماتریس کرنش-جابجایی خطی پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیر:

$$B_L^i = \begin{bmatrix} B_{11}^{(i)} & B_{12}^{(i)} & B_{13}^{(i)} & B_{14}^{(i)} & B_{15}^{(i)} \\ B_{21}^{(i)} & B_{22}^{(i)} & B_{23}^{(i)} & B_{24}^{(i)} & B_{25}^{(i)} \\ B_{31}^{(i)} & B_{32}^{(i)} & B_{33}^{(i)} & B_{34}^{(i)} & B_{35}^{(i)} \\ B_{41}^{(i)} & B_{42}^{(i)} & B_{43}^{(i)} & B_{44}^{(i)} & B_{45}^{(i)} \\ B_{51}^{(i)} & B_{52}^{(i)} & B_{53}^{(i)} & B_{54}^{(i)} & B_{55}^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$B_{11}^{(i)} = e_i c$$

$$B_{12}^{(i)} = 0$$

$$B_{13}^{(i)} = \frac{4az^3}{3Lh^2(x)} (2\beta e_i - y_i L) c$$

$$B_{14}^{(i)} = \left(ze_i + \frac{4az^3}{3Lh^2(x)} (2\beta N_i - e_i L) \right) c$$

$$B_{15}^{(i)} = 0$$

$$B_{21}^{(i)} = 0$$

$$B_{22}^{(i)} = \frac{mN_i}{R} c$$

$$B_{23}^{(i)} = \left(\frac{N_i}{R} + \frac{4am^2z^3N_i}{3R^2h^2(x)} \right) c$$

$$B_{24}^{(i)} = 0$$

$$B_{25}^{(i)} = \left(\frac{mzN_i}{R} - \frac{4amz^3N_i}{3Rh^2(x)} \right) c$$

$$B_{31}^{(i)} = 0$$

$$B_{32}^{(i)} = 0$$

$$B_{33}^{(i)} = \left(e_i - \frac{4az^2e_i}{h^2(x)} \right) c$$

$$B_{34}^{(i)} = \left(N_i - \frac{4az^2N_i}{h^2(x)} \right) c$$

$$B_{35}^{(i)} = 0$$

$$B_{41}^{(i)} = 0$$

$$B_{42}^{(i)} = -\frac{N_i}{R} s$$

$$B_{43}^{(i)} = \left(\frac{4amz^2N_i}{Rh^2(x)} - \frac{mN_i}{R} - \frac{4amz^3N_i}{3R^2h^2(x)} \right) s$$

$$B_{44}^{(i)} = 0$$

$$B_{45}^{(i)} = \left(N_i - \frac{N_i z}{R} - \frac{4az^2N_i}{h^2(x)} + \frac{4az^3N_i}{3Rh^2(x)} \right) s$$

$$B_{51}^{(i)} = -\frac{mN_i}{R} s$$

$$B_{52}^{(i)} = e_i s$$

$$B_{53}^{(i)} = \left(\frac{8amz^3 e_i}{3Rh^2(x)} - \frac{8am\beta z^3 N_i}{3RLh^2(x)} \right) s$$

$$B_{54}^{(i)} = \left(\frac{4amz^3 N_i}{3Rh^2(x)} - \frac{mzN_i}{R} \right) s$$

$$B_{55}^{(i)} = \left(ze_i + \frac{4az^3}{3Lh^2(x)} (2\beta N_i - e_i L) \right) s$$

$$B_L = [B_L^1 \quad B_L^2 \quad B_L^3]$$

پیوست ب:

ماتریس کرنش-جابجایی غیرخطی برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیر:

$$B_{NL}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_i c & 0 & 0 \\ 0 & -N_i/R & -mN_i/R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_i s/R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4mN_i s/3R^2 h^2(x) & 0 & 4N_i s/3R h^2(x) \end{bmatrix}$$

$$B_{NL} = [B_{NL}^1 \quad B_{NL}^2 \quad B_{NL}^3]$$

در روابط بالا $i = 1, 2, 3$ شماره گره المان، $c = \cos(m\theta)$ ، $s = \sin(m\theta)$ و m شماره مد محیطی می-

باشند. e_i و y_i مشتق اول و دوم توابع شکل نسبت به x می‌باشند که به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$e_i = \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial s} \frac{1}{|J|} = \frac{\partial N_i}{l \partial s}$$

$$y_i = \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \frac{1}{|J|^2} = \frac{\partial^2 N_i}{l^2 \partial s^2}$$

پیوست ج:

ماتریس $[\sigma]$ برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیر:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{x\theta} \\ \tau_{x\theta} & \sigma_\theta \end{bmatrix}$$

ماتریس $[Z]$ برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار متغیر:

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z & 0 & z^3 \end{bmatrix}$$

مراجع

[1] Ventsel E. and Krauthammer T. (2001), "Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications", CRC press, New York.

[۲] فارونی ح، (۱۳۹۰)، پایان نامه ارشد: "تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول"، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود،

[3] Eugeniusz H. and Lukasz S. (2014) "Experimental investigations on the stability of stiffened cylindrical shells of steel silos" **Journal of Constructional Steel Research**, **96**, pp **81-94**.

[۴] نوروزی ح، (۱۳۹۰)، پایان نامه ارشد: "بررسی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی به روش رینگ محدود"، دانشکده مکانیک و هوافضا، دانشگاه صنعتی شیراز،

[۵] شهابی ا، (۱۳۹۳)، پایان نامه ارشد: "تحلیل کمانش ترمومکانیکی ورق حلقوی نازک FGM تحت بار فشاری شعاعی یکنواخت و حرارت"، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود،

[6] Koizumi M. (1997) "FGM Activities in Japan" **journal of Composites Part B Engineering**, **28**, **1**, pp **1-4**.

[7] Patel B. P., Shukla K. K. and Nath Y. (2004) "Thermal buckling of laminated cross-ply oval cylindrical shells" **Composite Structures**, **65**, pp **217-229**.

[8] Darvizeh M., Darvizeh A., Shaterzadeh A. R. and Ansari R. (2007) "Thermal buckling analysis of moderately thick composite cylindrical shells under axisymmetric thermal load" **Mech. & Aerospace Eng. Journal**, **3**, **2**, pp **99-107**.

[9] Mohammadzadeh R., Najafizadeh M. M. and Nejati M. (2013) "Buckling of 2d-FG

cylindrical shells under combined external pressure and axial compression” **Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, **5**, **3**, pp **391-406**.

[10] Patel B. P., Shukla K. K. and Nath Y. (2005) “Thermal post-buckling analysis of laminated cross-ply truncated circular conical shell” **Composite Structures**, **71**, pp **101-114**.

[11] Patel B. P., Shukla K. K. and Nath Y. (2006) “Nonlinear thermo-elastic buckling characteristics of cross-ply laminated joined conical–cylindrical shells” **International Journal of Solids and Structures**, **43**, pp **4810-4829**.

[12] Patel B. P., Singh S. and Nath Y. (2008) “Post-buckling characteristics of angle-ply laminated truncated circular conical shells” **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, **13**, pp **1411-11430**.

[13] Singh S., Patel B. P. and Nath Y. (2009) “Post-buckling of angle-ply laminated cylindrical shells with meridional curvature” **Thin-Walled Structures**, **47**, pp **359-364**.

[14] Patel B. P., Singh S. and Nath Y. (2006) “Stability and nonlinear dynamic behaviour of cross-ply laminated heated cylindrical shells” **Latin American Journal of Solids and Structures**, **3**, pp **245-261**.

[15] Ganesan N. and Kadoli R. (2003) “Buckling and dynamic analysis of piezothermoelastic composite cylindrical shells” **Composite Structures**, **59**, pp **45-60**.

[16] Alijani A., Darvizeh M., Darvizeh A. and Ansari A. (2015) “On nonlinear thermal buckling analysis of cylindrical shells” **Thin-Walled Structures**, **95**, pp **170-182**.

[17] Farahani H., Azarafza R. and Barati F. (2014) “Mechanical buckling of a functionally graded cylindrical shell with axial and circumferential stiffeners using the third-order shear deformation theory” **Journal of Comptes Rendus Mecanique**, **342**, **9**, pp **501-512**.

[18] Simitse G. J. and Anastasiadis J. S. (1991) “Buckling of axially-loaded moderately-thick cylindrical laminated shells” **Composite Engineering**, **1**, **6**, pp **375-391**.

[19] Shariyat M. and Asgari D. (2013) “Nonlinear thermal buckling and post-buckling

analyses of imperfect variable thickness temperature-dependent bidirectional functionally graded cylindrical shells” **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, **111**, pp **310-320**.

[20] Ghorbanpour Arani A., Golabi S., Loghman A. and Daneshi H. (2007) “Investigating elastic stability of cylindrical shell with an elastic core under axial compression by energy method” **Journal of Mechanical science and technology**, **21**, **7**, pp **983-996**.

[21] Thangartnam R. K., Palaninathan R. and Ramachandram J. (1990) “Thermal buckling of laminated composite shells” **AIAA Journal**, **28**, **5**, pp **859-860**.

[22] Eslami M. R. and Shahsiah R. (2001) “Thermal buckling of imperfect cylindrical shells” **Journal of Thermal Buckling**, **24**, **1**, pp **71-89**.

[23] Yang L., Luo Y., Qiu T., Yang M., Zhou G. and Xie G. (2014) “An analytical method for the buckling analysis of cylindrical shells with non-axisymmetric thickness variations under external pressure” **Thin-Walled Structures**, **82**, pp **431-440**.

[24] Kadoli R. and Ganesan N. (2006) “Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperature-specified boundary condition” **Journal of Sound and Vibration**, **289**, **3**, pp **450-480**.

[25] Phuong N. T. and Bich D. H. (2013) “Buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular thin shells under mechanical load” **Journal of Mathematics-Physics**, **29**, **2**, pp **55-72**.

[26] Xu X., Chu H. and Lim C. (2010) “A symplectic hamiltonian approach for thermal buckling of cylindrical shells” **International Journal of Structure Stability and Dynamic**, **10**, **2**, pp **273-286**.

[27] Nguyen H. L. T., Elishakoff I. and Nguyen V. T. (2009) “Buckling under the external pressure of cylindrical shells with variable thickness” **International Journal of Solids and Structures**, **46**, pp **4163-4168**.

[28] Narayana Y. V., Reddy P. R. and Markandeya R. (2013) “Buckling analysis of

laminated composite cylindrical shells subjected to axial compressive load using finite element method” **International Journal of Engineering Research and Technology**, **2**, **1**, pp **1-5**.

[29] Zhao X. and Liew K. M. (2009) “Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells” **International Journal of Mechanical Sciences**, **51**, pp **131-144**.

[30] Zhao X. and Liew K. M. (2010) “A mesh-free method for analysis of the thermal and mechanical buckling of functionally graded cylindrical shell panels” **Computational Mechanics**, **45**, pp **297-310**.

[31] Zhao X. and Liew K. M. (2007) “Geometrically nonlinear analysis of cylindrical shells using the element-free kp-ritz method” **Engineering Analysis with Boundary Elements**, **31**, pp **783-792**.

[32] Sepiani H. A., Rastgoo A., Ebrahimi F. and Ghorbanpour Arani A. (2010) “Vibration and buckling analysis of two-layered functionally graded cylindrical shell, considering the effects of transverse shear and rotary inertia” **Material and Design**, **31**, pp **1063-1069**.

[۳۳] درویزه م، درویزه ا، انصاری ر. و علی جانی ع. (۱۳۹۱) "تحلیل کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای کامپوزیتی تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی با استفاده از روش المان محدود نیمه‌تحلیلی" **مجله‌ی مهندسی مکانیک**، شماره ۲، ص ۳۳-۴۴.

[34] Li S. R. and Batra R. C. (2006) “Buckling of axially compressed thin cylindrical shells with functionally graded middle layer” **Thin-Walled Structures**, **44**, **10**, pp **1039-1047**.

[35] Haigui F., Zhiping C., Jian C., Song H., Wenzhuo F. and Lige L. (2016) “Analytical research on dynamic buckling of thin cylindrical shells with thickness variation under axial pressure” **Thin-Walled Structures**, **101**, pp **213-221**.

[36] Jamal M., Lahlou L., Midani M., Zahrouni H., Limam A., Damil N. and Potierferry M. (2003) “A semi-analytical buckling analysis of imperfect cylindrical shells under axial compression” **International Journal of Solids and Structure**, **40**, pp **1311-1327**.

- [37] Miraliyari O., Najafizadeh M. M., Rahmani A. R. and Momeni Hazaveh A. (2011) "Thermal and mechanical buckling of short and long functionally graded cylindrical shells using first order shear deformation theory" **World Academy of Science, Engineering and Technology**, **5**, **2**, pp **518-522**.
- [38] Chen L., Michael Rotter J. and Doerich C. (2011) "Buckling of cylindrical shells with stepwise variable wall thickness under uniform external pressure" **Engineering Structures**, **33**, pp **3570-3578**.
- [39] Shen H. S. (2004) "Thermal post-buckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties" **International Journal of Solids and Structures**, **41**, **7**, pp **1961-1974**.
- [40] Huang H. and Han Q. (2008) "Buckling of imperfect functionally graded cylindrical shells under axial compression" **European Journal of Mechanics A/Solids**, **27**, **6**, pp **1026-1036**.
- [41] Shaterzadeh A. and Foroutan K. (2016) "Post-buckling of cylindrical shells with spiral stiffeners under elastic foundation" **Journal of Structural Engineering and Mechanics**, **60**, **4**, pp **615-631**.
- [42] Darvizeh M., Darvizeh A., Shaterzadeh A. R. and Ansari R. (2010) "Thermal buckling of spherical shells with cut-out" **Journal of Thermal Stresses**, **33**, **5**, pp **441-458**.
- [43] Li Y. W., Elishakoff I. and Starnes J. H. (1995) "Axial buckling of composite cylindrical shells with periodic variable thickness variation" **Computers & Structures**, **56**, **1**, pp **65-74**.
- [44] Shen H. S. (2012) "Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells" **Composites Part B: Engineering**, **43**, **3**, pp **1030-1038**.
- [45] Shahsiah R. and Eslami M. R. (2003) "Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell" **Journal of Thermal Stresses**, **26**, pp **277-294**.

[۴۶] حدادپور ح.، محمودخانی س. و محمدنوازی ح. (۱۳۸۶)، "بررسی کمانش و ارتعاشات آزاد پوسته-های استوانه‌ای با خواص هدفمند تحت اثر دما برای شرایط مرزی مختلف"، پانزدهمین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۲۵-۲۷، تهران

[47] Shadmehri F., Hoa S. V. and Hojjati M. (2012) "Buckling of conical composite shells" **Composite Structures**, **94**, pp 787-792.

[۴۸] شاطرزاده ع. ر. (۱۳۹۴) "تحلیل کمانش ترمومکانیکی ورق‌های ساخته‌شده از مواد تابعی با گشودگی دایروی در مرکز" مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، شماره ۲، دوره ۵، ص ۹۹-۱۰۹.

[49] Jamal A. N. and Nasif H. I. (2013) "Buckling analysis of composite plate under thermo-mechanical loading" **Journal of Al Rafidain University College**, **32**, pp 1-31.

[50] Michalska K. K. and Mania R. I. (2013) "Static and dynamic thermo-mechanical buckling loads of functionally graded plates" **Mechanics and Mechanical Engineering**, **17**, **1**, pp 99-112.

[51] Reddy R. (2004) "**Mechanics of laminated composite plates and shell: theory and analysis**", 2nd-ed, Taylor & Francis, CRC press.

[52] Reddy R. (2007) "**Theory and analysis of elastic plates and shells**", 2nd-ed, Taylor & Francis, CRC press.

[53] Shaterzadeh A. R., Darvizeh M., Darvizeh A. and Ansari R. (2011) "Thermal post-buckling of shells of revolution" **Journal of Thermal Stresses**, **34**, **10**, pp 1035-1053.

[54] Harris B. (1999) "**Engineering composite materials**" The Institute of Materials, London.

[۵۵] شاطرزاده ع. ر.، (۱۳۸۴)، پایان‌نامه ارشد: "تحلیل استاتیکی و دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ای شکل

مرکب حاوی سیال داغ یا سرد"، دانشکده فنی مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه گیلان،

[56] Reddy J. N. and Chin C. D. (1998) "Thermo-mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates" **Journal of Thermal Stresses**, 21, 6, pp 593-626.

Abstract

In this thesis, the thermal buckling of the functional variable cylindrical shell with a variable wall is studied. The mechanical and thermal properties of the shell in the direction of the thickness and axis of the shell are continuously changed. Strain-displacement equations are based on the shear deformation theory. Two kinds of temperature distribution consist of uniform and linear distribution is considered. The critical temperature of the buckling is calculated with the semi-analytical finite element method using the minimum potential energy principle. The boundary conditions are simply supported and fully clamped. The effect of different parameters including the distribution of properties of functional variable materials, changes in the thickness of the wall, different boundary conditions, length ratio to radius, radius ratio to thickness and changes in the exponential-law coefficient on the buckling of the variable cylindrical shell has been studied.

KeyWord

Variable thickness cylindrical shells, Functionaly graded materials, Thermal buckling, shear deformation theory, Semi analytical finite element method



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanical Engineering

**Thermal Buckling Analysis of Variable Thickness FGM Cylindrical
Shells using a Semi-Analytical Finite Element Method**

By: Ramin Jafari

**Supervisor:
Dr. Alireza Shaterzadeh**

January 2019