

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا-سازه‌های هوایی

بررسی ارتعاشات آزاد داخل صفحه هسته استاتور ماشین‌های الکتریکی

جریان متناوب با در نظر گرفتن اثر تقارن دوره‌ای

نگارنده: صابر شیخ خوشکار

اساتید راهنما:

دکتر علیرضا شاطرزاده

دکتر سیدعلی سینا

بهمن ۱۳۹۷

شماره: B, ۲۹۷, ۱۵۵
تاریخ: ۱۳۹۷ / ۱۲ / ۰۴

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

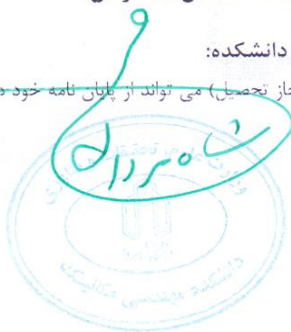
با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای: صابر شیخ خوشکار با شماره دانشجویی: ۹۵۰۸۸۸۴ رشته: مهندسی هوافضا گرایش: سازه‌های هوایی تحت عنوان: بررسی ارتعاشات آزاد داخل صفحه هسته استاتور ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب با در نظر گرفتن اثر تقارن دوره‌ای که در تاریخ: ۱۳۹۷/۱۱/۰۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: <input checked="" type="checkbox"/> شویست) <input type="checkbox"/> مردود			
نوع تحقیق: <input checked="" type="checkbox"/> نظری <input type="checkbox"/> عملی			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر علیرضا شاطرزاده	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر سیدعلی سمینا	استادیار	
۳- استاد مشاور
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر حبیب احمدی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر اردشیر کرمی محمدی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر حسین توژنده‌جانی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: محمد محسن شاه‌مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید. مجدداً باید زودتر از ۴ ماه برگزار شود.



أَلَيْسَ اللَّهُ بِكَافٍ عَبْدَهُ

(قرآن کریم، س ۳۹، ی ۳۶)

تقدیم به با ارزش ترین انسان های زندگی

پدر و مادرم

به جبران قطره ای از دریای محبتشان

تشکر و قدردانی

در انجام پایان نامه حاضر از جناب آقای دکتر **علیرضا شاطرزاده** به پاس راهنمایی‌های ارزشمند و زحمات ایشان صمیمانه سپاسگزارم.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر **سیدعلی سینا صمیمانه** تشکر می‌کنم، تمام دانستی‌های بنده در این زمینه قطره‌ای از علم ایشان است که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ نمودند. آموخته‌های خویش را مرهون ایشان هستم و از خداوند متعال برای ایشان سلامتی و توفیق خواستارم.

تعهدنامه

اینجانب صابر شیخ خوشکار دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته هوافضا-سازه‌های هوایی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه با موضوع بررسی ارتعاشات آزاد داخل صفحه هسته استاتور ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب با در نظر گرفتن اثر تقارن دوره‌ای تحت راهنمایی دکتر علیرضا شاطرزاده و دکتر سیدعلی سینا متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام دانشگاه صنعتی شاهرود و یا Shahrood University of Technology به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضاء دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات، مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در پژوهش حاضر، به بررسی ارتعاشات استاتور در ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب با استفاده از مدل رینگ و فنر با در نظر گرفتن اثر تقارن دوره‌ای پرداخته شده است. سازه استاتور به صورت رینگ با فرضیات تیر اویلر برنولی مدل‌سازی شده است. اندرکنش سازه و نیروی الکترومغناطیس با استفاده از فنرهای گسسته مدل‌سازی شده‌اند. معادلات حاکم بر حرکت رینگ دوار با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. بر اساس حضور و یا عدم حضور ضرایب متغیر با زمان در معادلات حرکت، سیستم‌های پایا و یا ناپایای مربوطه تحلیل فرکانسی شده‌اند. برای بدست آوردن معادلات در زمان، جداسازی ترم‌های زمانی و مکانی در معادلات حرکت و استفاده از فرضیات حرکت تک مودی در مکان به کار رفته است. مقادیر ویژه سیستم با استفاده از حل اغتشاشی به صورت نیمه تحلیلی به دست آمده است. نتایج حل بیانگر ظهور ناپایداری به ازای نسبت‌های مشخصی از سرعت دورانی رینگ و تکیه‌گاه و مرتبه تقارن دوره‌ای در مودهای مختلف سیستم است. مطالعه در خصوص اثرات متغیر بودن سختی فنرهای گسسته با زمان و زاویه اتصال این فنرها به رینگ در خواص فرکانسی ارتعاشات داخل صفحه رینگ به تفصیل انجام شده است.

کلمات کلیدی: استاتور ماشین‌های الکتریکی، ارتعاشات آزاد داخل صفحه‌ای، رینگ دوار با تقارن

دوره‌ای، افتراق مودها، نظریه اغتشاش

- ۱- فصل اول: پیشگفتار ۱
- ۱-۱- ماشین‌های الکتریکی ۲
- ۲-۱- ارتعاشات و انواع آن ۳
- ۳-۱- ارتعاشات استاتور ماشین‌های الکتریکی ۵
- ۴-۱- مسئله رینگ متقارن ۶
- ۱-۴-۱- مسئله رینگ با تقارن دوره‌ای ۷
- ۵-۱- چارچوب بررسی مسئله در پایان‌نامه حاضر ۱۰
- ۶-۱- نوآوری و ساختار پایان‌نامه حاضر ۱۰
- ۲- فصل دوم: معادلات حرکت رینگ الاستیک با تقارن دوره‌ای ۱۳
- ۱-۲- مقدمه ۱۴
- ۲-۲- تشریح مدل رینگ ۱۴
- ۳-۲- میدان کرنش و انرژی پتانسیل ۱۵
- ۴-۲- انرژی جنبشی ۱۶
- ۵-۲- معادلات حاکم بر حرکت ۱۷
- ۳- فصل سوم: معادلات حاکم ۱۹
- ۱-۳- مقدمه ۲۰
- ۲-۳- نظریه اغتشاش ۲۱

- ۳-۳- حل اغتشاشی سیستم در حالت پایا..... ۲۲
- ۳-۳-۱- رینگ متقارن ۲۲
- ۳-۳-۲- رینگ با تقارن دوره‌ای ۲۳
- ۳-۴- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای ۲۵
- ۳-۵- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای ۲۶
- ۳-۶- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای ۲۷
- ۳-۶-۱- سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک در زمان ۲۸
- ۳-۶-۲- فنر با سختی به صورت تابع دندانه اره‌ای از زمان ۳۶
- ۳-۷- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای ۳۸
- ۴- فصل چهارم: نتایج عددی ۳۹
- ۴-۱- بررسی اثر دندانه در ارتعاشات رینگ ثابت- بدون حضور نیروی الکترومغناطیس ۴۰
- ۴-۱-۱- مدل گسسته رینگ ۴۰
- ۴-۱-۲- مدل گسسته استاتور دندانه‌دار ۴۱
- ۴-۱-۳- اضافه کردن اثر سیم پیچی مس با استفاده از خواص جرمی و هندسی استاتور ۴۵
- ۴-۱-۴- نتایج عددی برای بررسی اثر دندانه در ارتعاشات رینگ ثابت- بدون حضور نیروی الکترومغناطیس ۴۶
- ۴-۲- سیستم رینگ و فنر با سختی ثابت و با تقارن دوره‌ای ۵۲
- ۴-۳- بررسی اثر ضریب سختی در سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای ۵۶
- ۴-۴- مطالعه اثر β در سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای ۵۷

- ۵۹-۴- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای
- ۶۳-۴- سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر در زمان بدون تقارن دوره‌ای
- ۶۳-۴-۱- سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک در زمان
- ۶۷-۴-۲- فنر با سختی به صورت تابع دندانه اره‌ای از زمان
- ۷۱-۴-۷- سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای
- ۷۵-۴-۸- سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک و زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای
- ۸۱-۵- فصل پنجم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات
- ۸۲-۵-۱- نتیجه‌گیری
- ۸۳-۵-۲- پیشنهادات
- ۸۵- پیوست
- ۸۷- مراجع

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱) رسم توضیحی نیکولا تسلا از ماشین الکتریکی جریان متناوب در ثبت اختراع شماره ۳۹۰۷۲۱ ایالات متحده ۳
- شکل (۲-۱) استاتور ماشین الکتریکی ۵
- شکل (۱-۲) هندسه رینگ مدل استاتور ۱۴
- شکل (۱-۳) سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای ۲۶
- شکل (۲-۳) تابع دندان‌اره‌ای ۳۶
- شکل (۱-۴) مدل جرم و فنر برای رینگ ساده ۴۰
- شکل (۲-۴) ارتباط بین هر جرم با اجرام کناری در مدل گسسته رینگ ساده ۴۱
- شکل (۳-۴) مدل جرم فنر رینگ دارای دندان ۴۲
- شکل (۴-۴) ارتباط بین هر جرم با اجرام کناری در مدل گسسته رینگ دارای دندان ۴۲
- شکل (۵-۴) نمای استاتور ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب ۴۴
- شکل (۶-۴) تغییرات شکل مود رینگ به ازای شماره مود ۲ ۴۷
- شکل (۷-۴) تغییرات شکل مود دوم رینگ دارای ۶ دندان به ازای فرکانس طبیعی ۴۷/۴۲۸۸ ۴۸
- شکل (۸-۴) تغییرات شکل مود دوم رینگ دارای ۸ دندان به ازای فرکانس طبیعی ۴۷/۴۲۸ ۵۰
- شکل (۹-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان ۵۳
- شکل (۱۰-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان ۵۴
- شکل (۱۱-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان ۵۵
- شکل (۱۲-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و

- کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان ۵۶
- شکل (۱۳-۴) تغییرات فرکانس مودهای سینوسی و کسینوسی به ازای تغییر ضریب سختی فنر ۵۷
- شکل (۱۴-۴) تغییرات فرکانس مودهای سینوسی و کسینوسی به ازای تغییر ضریب سختی فنر ۵۷
- شکل (۱۵-۴) اثر β در فرکانس طبیعی متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای ۵۸
- شکل (۱۶-۴) اثر β در فرکانس طبیعی متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای ۵۸
- شکل (۱۷-۴) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای ۶۰
- شکل (۱۸-۴) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای ۶۰
- شکل (۱۹-۴) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای ۶۱
- شکل (۲۰-۴) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای ۶۲
- شکل (۲۱-۴) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای ۶۳
- شکل (۲۲-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای ۶۴
- شکل (۲۳-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای ۶۵

- کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک بدون
تقارن دوره‌ای ۶۶
- شکل (۲۴-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و
کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک بدون
تقارن دوره‌ای ۶۷
- شکل (۲۵-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و
کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر به صورت تابع
دندانه اره‌ای بدون تقارن دوره‌ای ۶۸
- شکل (۲۶-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و
کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر به صورت تابع
دندانه اره‌ای بدون تقارن دوره‌ای ۶۹
- شکل (۲۷-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و
کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر به صورت تابع
دندانه اره‌ای بدون تقارن دوره‌ای ۷۰
- شکل (۲۸-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و
کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر به صورت تابع
دندانه اره‌ای بدون تقارن دوره‌ای ۷۱
- شکل (۲۹-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و
کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون
تقارن دوره‌ای ۷۲
- شکل (۳۰-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و
کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون

تقارن دوره‌ای ۷۳

شکل (۳۱-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و

کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون

تقارن دوره‌ای ۷۴

شکل (۳۲-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و

کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون

تقارن دوره‌ای ۷۵

شکل (۳۳-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و

کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β و سختی متغیر

هارمونیک با زمان بدون تقارن دوره‌ای ۷۶

شکل (۳۴-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و

کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β و سختی متغیر

هارمونیک با زمان بدون تقارن دوره‌ای ۷۷

شکل (۳۵-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و

کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β و سختی متغیر

هارمونیک با زمان بدون تقارن دوره‌ای ۷۸

شکل (۳۶-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و

کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β و سختی متغیر

هارمونیک با زمان بدون تقارن دوره‌ای ۷۹

فهرست جداول

- جدول (۱-۳) طبیعت فرکانس‌های طبیعی پیش‌رونده و پس‌رونده در حالت سیستم رینگ و فنر گسسته با سختی متغیر کسینوسی بدون تقارن دوره‌ای به ازای مقادیر مختلف سرعت دورانی و نسبت‌های مختلف n/N ۳۴
- جدول (۱-۴) مشخصات هندسی رینگ، دندان‌ها و فرکانس رینگ ۴۶
- جدول (۲-۴) بردارهای ویژه و فرکانس‌های طبیعی سیستم گسسته رینگ با ۶ دندان مرتب با مود دوم رینگ ۴۷
- جدول (۳-۴) بردارهای ویژه و فرکانس‌های طبیعی سیستم گسسته رینگ با ۸ دندان مرتب با مود دوم رینگ ۴۹
- جدول (۴-۴) بردارهای ویژه و فرکانس‌های طبیعی سیستم گسسته رینگ با ۶ دندان و سیم پیچ مرتبط با مود دوم رینگ ۵۰
- جدول (۵-۴) بردارهای ویژه و فرکانس‌های طبیعی سیستم گسسته رینگ با ۸ دندان و سیم پیچ مرتبط با مود دوم رینگ ۵۱

فهرست علائم

A	مساحت سطح مقطع رینگ
A_{cn}, A_{sn}	n امین ضرایب هارمونیک کسینوسی و سینوسی
A_n	n امین ضرایب هارمونیک
b	عمق رینگ
E	مدول الاستیسیته
$f_n^{(1)}, f_n^{(2)}$	فرکانس طبیعی پیش رونده و پس رونده
$f_{n0}^{(1)}, f_{n0}^{(2)}$	فرکانس طبیعی در سیستم رینگ ثابت
D	اپراتور ایجاد شده توسط اثر چرخش
G	اپراتور ایجاد شده توسط اثر چرخش
h	ضخامت شعاعی
i	یکه موهومی
I	ممان اینرسی سطح
k	سختی ناشی از چرخش تکیه‌گاه
$K^{(0)}$	اپراتور سختی
$K^{(1)}$	اپراتور سختی ناشی از فنرهای متصل به رینگ
m	جرم
M	اپراتور جرم
n	شماره مود
N	مرتبه تکرار هر سیکل تقارن در رینگ
q'	عدد صحیح

r_n	مقدار ویژه سیستم رینگ و فنر
r'_n	ترم اغتشاشی مقادیر ویژه
r_{n0}	مقدار ویژه در رینگ متقارن
r'_{n0}	مقدار ویژه در رینگ ثابت
r_{n1}	مقادیر ویژه در رینگ با تقارن دوره‌ای سیستم ناپایا
r'_{n1}	مقادیر ویژه در رینگ با تقارن دوره‌ای سیستم پایا
R	شعاع رینگ
t	زمان
\bar{t}	زمان بی‌بعد
u, v	جابجایی مماسی و شعاعی در رینگ
\bar{u}	جابجایی مماسی بی‌بعد
u_n	پاسخ در سیستم رینگ و فنر با فرض حرکت تک مودی در مود nام
u_{n0}	توزیع مکانی پاسخ در مود nام
β	زاویه امتداد فنرها با جهت شعاعی
ε	ضریب سختی بی‌بعد و پارامتر اغتشاشی
$\omega_{cn}^{(0)}, \omega_{sn}^{(0)}$	فرکانس طبیعی سینوسی و کسینوسی
Ω_p	سرعت بی‌بعد رینگ
Ω_r	سرعت رینگ

Ω_{rel}	سرعت نسبی بی‌بعد بین رینگ و تکیه‌گاه
Ω_s	سرعت تکیه‌گاه
Ω_v	سرعت بی‌بعد تکیه‌گاه
ρ_0	چگالی
θ	زاویه موقعیت مکانی
θ_{j1}	زاویه موقعیت مکانی در $j = 1, 2, 3, \dots$

فصل اول

پیشگفتار

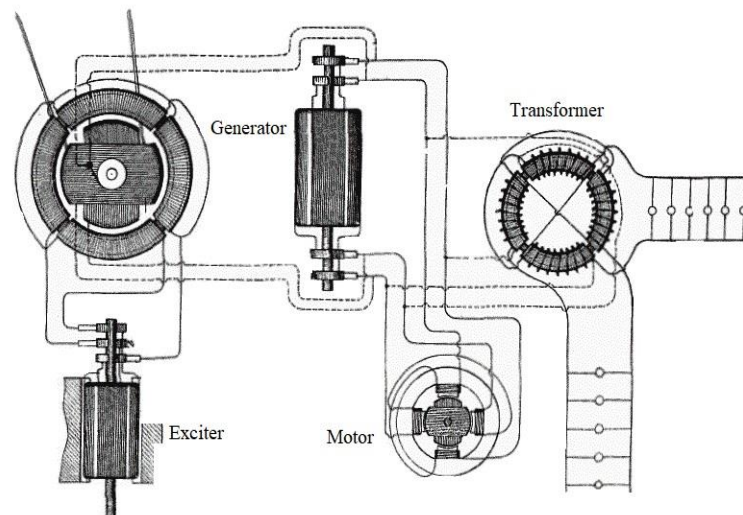
۱-۱- ماشین‌های الکتریکی

ماشین الکتریکی وسیله‌ای است که می‌تواند انرژی مکانیکی را به انرژی الکتریکی یا انرژی الکتریکی را به انرژی مکانیکی تبدیل کند. هر ماشین الکتریکی می‌تواند توان را در هر دو سو تبدیل کند. وقتی چنین وسیله‌ای برای تولید انرژی مکانیکی به کار می‌رود، ژنراتور و هنگامی که برای تولید انرژی الکتریکی به کار می‌رود، موتور نامیده می‌شود. بنابراین هر ماشین الکتریکی را هم به صورت موتور و هم به صورت ژنراتور می‌توان به کار برد. تقریباً همه موتورهای و ژنراتورهای عمل تبدیل انرژی را از یک شکل به شکل دیگر را از طریق اندرکنش یک میدان مغناطیسی انجام می‌دهند. ماشین‌های الکتریکی در زندگی روزمره امروزی حضور فراوانی دارند: موتورهای الکتریکی یخچال فریزر، جارو برقی، هم زن و تهویه مطبوع و اسباب‌های مشابه بسیاری را به کار می‌اندازند. در کارگاه‌های نیروی محرکه در بیشتر ابزارها موتور الکتریکی به کار رفته است.

البته برای تامین توان مصرفی این موتورهای ژنراتور نیاز است. انرژی الکتریکی یک منبع انرژی تمیز و کارآمد است. موتورهای الکتریکی بر خلاف موتورهای احتراق داخلی به تهویه دائم و سوخت نیاز ندارند. بنابراین برای محیط‌هایی که آلودگی ناشی از احتراق مطلوب نیست، بسیار مناسب هستند. می‌توان حرارت و انرژی مکانیکی را در مکان دور به شکل الکتریکی در آورد و آن را توسط سیم به محلی که لازم است منتقل کرد تا به دور از آلودگی در منازل ادارات و کارخانه‌ها مصرف شود.

تحقیقات در ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب با نام نیکولا تسلا گره خورده است. در سال ۱۸۸۲ نیکولا تسلا اصول میدان مغناطیسی دوار را پایه‌گذاری کرد و راه را برای استفاده از میدان دوار به عنوان یک نیروی مکانیکی باز کرد. در سال ۱۸۸۳ او از این اصول برای طراحی یک موتور القایی دو فاز استفاده کرد. در سال ۱۸۸۵، گالیلئو فراریس مستقلاً تحقیقاتی را در این باره آغاز کرد و در سال ۱۸۸۸ نتایج تحقیقات خود را در قالب مقاله‌ای به آکادمی سلطنتی علوم در تورین ایتالیا ارائه داد. حرکتی که نیکولا تسلا در سال ۱۸۸۲ آغاز کرد، چیزی بود که امروزه برخی از آن به عنوان انقلاب صنعتی دوم یاد می‌کنند. چرا که این حرکت به تولید آسانتر انرژی الکتریکی و همچنین امکان انتقال

انرژی الکتریکی در طول مسافت‌های طولانی انجامید. قبل از اختراع موتورهای جریان متناوب به وسیله تسلا، موتورها به وسیله حرکت دائم یک هادی در میدان مغناطیسی ثابت به حرکت در می‌آمدند. تسلا به این نکته اشاره کرد که می‌توان کلکتورهای موتور را حذف کرد به طوری که موتور به وسیله میدانی دوار به حرکت درآید. تسلا بعدها موفق به کسب حق امتیاز برای اختراع موتور خود در ایالات متحده شد (شکل ۱-۱). این موتور که در بسیاری از عکس‌های تسلا نیز هست نوع خاصی از موتور القایی بود. در سال ۱۸۹۰ میخایل اسیبویچ یک موتور سه فاز روتور قفسی اختراع کرد. این نوع موتور امروزه به طور وسیعی برای کاربردهای گوناگون استفاده می‌شود.



شکل (۱-۱) رسم توضیحی نیکولا تسلا از ماشین الکتریکی جریان متناوب در ثبت اختراع شماره ۳۹۰۷۲۱ ایالات

متحده [۱]

۲-۱- ارتعاشات و انواع آن

ارتعاشات در قطعات منجر به ایجاد تنش در قطعه، بروز پدیده خستگی سازه‌ای و در نهایت شکست قطعه است. از طرف دیگر، ارتعاشات قطعات با ایجاد صدا و نویز بر محیط اطراف اثرگذار است. مسائل

مرتبط با ارتعاشات عموماً به دو دسته کلی ارتعاشات ناشی از تحریک خارجی و ارتعاشات خودتحریک^۱ تقسیم می‌شوند. در ارتعاشات ناشی از تحریک خارجی، سازه در اثر تحریک ارتعاش می‌کند و حرکت نهائی به توزیع مکانی و فرکانسی نیروی ورودی وابسته است. در این دسته از مسائل ارتعاشی در صورتی که فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم یکسان نباشد، مسئله شامل پدیده رزونانس نیست. در صورتی که فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم یکسان باشد و توزیع مکانی نیروی تحریک عمود بر توزیع مکانی مود مورد نظر در سیستم باشد، ارتعاش رزونانسی در سیستم مشاهده نمی‌شود. در حالتی که مودی از سیستم با فرکانس خود تحریک شود و توزیع مکانی تحریک و مود مورد نظر بر هم عمود نباشند، آنگاه رزونانس اتفاق می‌افتد. بنابراین برای تحریک مود یک سیستم پیوسته هر دو شرط یکسان بودن فرکانس تحریک و فرکانس مود و عدم تعامد بین توزیع مکانی نیرو و شکل مود مورد نظر باید همزمان ارضا شوند.

در ارتعاشات خودتحریک سازه بدون حضور تحریک خارجی به ارتعاش درمی‌آید. این نوع از ارتعاشات به علت وجود مکانیسم ذخیره انرژی در سیستم که قابلیت تغذیه ارتعاشات را دارد، به وجود می‌آید. این دسته از ارتعاشات به ارتعاشات سیکل محدود^۲ و یا واماندگی سازه ختم می‌شوند. پس ناپایداری دینامیکی ارتعاش خود تحریکی است که دامنه حرکت با گذر زمان بیشتر شود و در سطح بالاتری از ارتعاشات پایدار می‌شود (ارتعاشات سیکل محدود) و یا سازه به نقطه خرابی^۳ برسد. در مکانیسم متداول ناپایداری‌های دینامیکی، یک یا چند بار که در اثر حرکت سیستم ایجاد می‌شوند و هم‌فاز با سرعت سیستم هستند، انرژی را به مودهای ناپایدار سیستم پمپ می‌کنند. در ناپایداری دینامیکی، سازه می‌تواند در اثر منبع انرژی درونی آن به لرزه درآید ولو اینکه نیروی خارجی به سازه وارد نشود. رزونانس پارامتری و ناپایداری مربوطه در سیستم‌های با تحریک پارامتری (سیستم‌هایی که تحریک در آن‌ها وابسته به درجات آزادی سیستم است) رخ می‌دهند.

^۱ Self Excited Vibrations

^۲ Limit Cycle Oscillations

^۳ Failure

۱-۳- ارتعاشات استاتور ماشین‌های الکتریکی

از جمله قطعات تحت ارتعاشات می‌توان به دندانه‌های چرخ دنده‌ها، دیسک‌ها، اتصالات مکانیکی در یاتاقان‌ها اشاره کرد که در واقع رینگ‌های متقارنی هستند که در معرض بارهای چرخان قرار دارند. از مهم‌ترین کاربردهای رینگ‌ها در صنعت می‌توان به استاتور ماشین‌های الکتریکی اشاره کرد که تحت نیروهای الکترومغناطیسی دوار است. یکی از مهم‌ترین اجزای ماشین‌های الکتریکی، استاتور است. استاتور شامل دو بخش یوغ^۱ و دندانه^۲ است که سیم‌پیچ مابین دندانه‌ها قرار می‌گیرد. در شکل (۱-۲) نمایی از استاتور ماشین‌های الکتریکی نشان داده شده است با توجه به کاربرد فراوان ماشین‌های الکتریکی بررسی ارتعاشات در این ماشین‌ها در جهت بهبود کارایی آنها، بسیار حائز اهمیت است. در ادامه توضیحاتی در مورد ارتعاشات استاتور ماشین‌های الکتریکی ارائه می‌شود.



شکل (۱-۲) استاتور ماشین الکتریکی

برای کاهش افت توان ناشی از جریان ادی^۳ معمولاً استاتور به صورت لایه‌هائی با ضخامت بسیار کم از جنس فولاد مخصوص ساخته می‌شود. استاتورها معمولاً شامل یوغ و دندانه است که استاتور ماشین‌های الکتریکی در معرض بارگذاری الکترومغناطیسی متحرک داخل صفحه است. فرکانس‌های اجزای

^۱ Yoke

^۲ Tooth

^۳ Eddy-Current loss

استاتور باید تا حد ممکن از فرکانس‌های تحریک دور باشند. این موضوع دارای اهمیت فراوانی در حفظ سلامت ماشین، کاهش خستگی سازه‌ای، افزایش عمر ماشین و کاهش نویز حین عملکرد ماشین است.

استاتور در ماشین‌های الکتریکی رینگ متقارنی است که در معرض بارهای الکترومغناطیس چرخان داخل صفحه قرار دارد. بنابراین لازمه بررسی ارتعاشات این سیستم، تحلیل مسئله رینگ در معرض بار متحرک^۱ است. مدل‌سازی بار الکترومغناطیس نیز وجه دیگر مسئله است. برای مدل‌سازی این بار در معادلات حرکت سیستم از فنر متمرکز استفاده می‌شود. طبیعتاً، مدل‌سازی نیروی الکترومغناطیسی با استفاده از فنر متحرک منجر به از دست رفتن تقارن در مسئله می‌شود. ولیکن تقارن دوره‌ای در مسئله همچنان برقرار است. در بخش‌های آتی مروری بر فعالیت‌های محققین در هر یک از زمینه‌های ذکر شده ارائه می‌گردد.

۴-۱- مسئله رینگ متقارن

بخشی از تحقیقات انجام شده در بررسی ارتعاشات استاتور با صرف‌نظر کردن از اندرکنش میدان الکترومغناطیسی و رینگ، مسئله را به بررسی ارتعاشاتی رینگ متقارن محدود کرده‌اند. بدیهی است بسته به نوع ماشین الکتریکی، رینگ ثابت یا دوار فرض شده است.

بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری رینگ ثابت یا دوار موضوع فعالیت بسیاری از محققین بوده است. راثو و ساندارا راژان [۲] و کرخوپ [۳] ارتعاشات داخل صفحه رینگ ثابت را با استفاده از مدلی خطی بررسی کردند. اونسن مساله مشابه را در حالت غیرخطی مورد بررسی قرار داد [۴]. ارتعاشات خطی رینگ دوار توسط کریر [۵] و ارتعاشات غیرخطی آن نیز توسط هوانگ و سئودل [۶] ناتسیاواس [۷] و بیکفورد و ردی [۸] مورد بررسی قرار گرفت. کیم و چانگ [۹] به بررسی ارتعاشات غیرخطی رینگ

^۱ Moving Load

دوار پرداختند. فعالیت‌های زیادی نیز به بررسی ارتعاشات خارج از صفحه و ارتعاشات ترکیبی داخل و خارج از صفحه رینگ پرداخته‌اند که برای رعایت اختصار از ذکر آن‌ها خودداری می‌گردد. در مسئله رینگ دوار به واسطه حضور ترم‌های مرتبط با سرعت دورانی در معادله حرکت، شکل موده‌های ویرلینگ^۱ و فرکانس‌های پسرو^۲ و پیشرو^۳ مربوطه ظاهر می‌گردند. این موضوع در پژوهش‌های ذکر شده به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است.

شایان ذکر است که برخورد اصلی محققین گرایش برق-قدرت با مساله ارتعاشات استاتور در این چارچوب است. به عنوان نمونه، الیسون و یانگ [۱۰] به بررسی ارتعاشات آزاد استاتور ماشین‌های الکتریکی کوچک پرداخته‌اند. جرجیس و ورما [۱۱]، ونگ و ویلیام [۱۲] با استفاده از روش‌های تحلیلی و تجربی در چارچوب مسئله رینگ متقارن به بررسی ارتعاشات استاتور پرداخته‌اند. اخیراً، خاوی و شرام [۱۳] ارتعاشات استاتور موتورهای سنکرون مغناطیس دائم را که در موتورهای هیبرید کاربرد دارند، بر مبنای مدلسازی استاتور به صورت رینگ متقارن و بدون در نظر گرفتن اثرات اندرکنش سازه و نیروی الکترومغناطیس مورد بررسی قرار داده‌اند. در پژوهشی دیگر، ویتزاک [۱۴] ارتعاشات خطی استاتور ماشین‌های جریان متناوب را با استفاده از مدل رینگ و تئوری‌های تیر اوپلر برنولی و تیر تیموشینکو بررسی کرده است. اثر دندان‌ها و سیم پیچ‌ها نیز به صورت تصحیحاتی بر ضرایب جرم و سختی معادله اصلی وارد شده‌اند البته این تصحیحات به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که تقارن در رینگ حفظ شود.

۱-۴-۱- مسئله رینگ با تقارن دوره‌ای

سازه‌ها با تقارن دوره‌ای دارای کاربرد زیادی در مهندسی هستند. روتور و استاتور توربو ماشین‌ها، آنتن‌های ماهواره، رینگ‌های مرتعش در ژیرسکوپ‌ها و استاتور و روتور ماشین‌های الکتریکی نمونه-

^۱ Wirling Modes

^۲ Backward

^۳ Forward

هایی از این سازه‌ها هستند. تقارن و تناوب موجود در رینگ متقارن منجر به آن می‌شود که جفت شکل موده‌های هارمونیک در فرکانس یکسان ایجاد شود. این مساله هنگامی که تقارن در سازه به هم بخورد منجر به ظهور یک جفت فرکانس جدید به ازای جفت شکل موده‌های فوق‌الذکر می‌گردد، که به این پدیده افتراق^۱ می‌گویند. در بسیاری از کاربردها، افتراق موده‌ها پدیده نامطلوبی است که باید با استفاده از فرایندی بنام تریم کردن فرکانس^۲ از بین برود. به عنوان مثال در مراجع [۱۵-۱۷] این پدیده در ژیرسکوپ‌های رینگ مرتعش مورد بررسی قرار گرفته است. این پدیده از طرف دیگر منجر به آن می‌شود که در نقاط مشخصی از سازه دامنه ارتعاشات بیشتر از بقیه نقاط شود که از آن به عنوان محلی شدن ارتعاشات^۳ یاد می‌شود. محلی شدن ارتعاشات از مهم‌ترین دلایل خستگی در سازه‌ها است [۱۸ و ۱۹]. افتراق می‌تواند باعث ناپایداری در سیستم‌ها شود.

در گذشته افتراق موده‌ها با استفاده از روش‌های تجربی و تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است [۲۰-۲۲]. رورک و همکاران [۲۳] به از بین بردن اثر افتراق موده‌ها با تعریف ذرات جرم در مکان‌های مشخصی از رینگ پرداختند. یو و موت [۲۴] به افتراق موده‌ها در ورق‌های دندانه‌دار با شکاف‌های شعاعی هم فاصله پرداختند. کیم و همکاران [۲۵]، همچنین چانگ و ویکرت [۲۶ و ۲۷] به افتراق موده‌ها در سازه‌ای دیسک شکل با استفاده از روش حل اغتشاشی پرداختند. وو و پارکر [۲۸] به بررسی یک رینگ با فنداسیون الاستیک با استفاده از روش‌های اغتشاشات و روش گلرکین پرداختند. بایسنا و کرسو [۲۹] رفتارهای افتراقی در سازه‌ها را با روش اغتشاشی مورد مطالعه قرار دادند. نویسندگان این مقاله به بررسی افتراق موده‌ها و اختلاط موده‌ها در استاتورهای اولتراسونیک، رینگ‌های شامل چندین جرم نقطه‌ای و با تقارن دوره‌ای پرداختند.

بررسی دقیق ارتعاشات استاتور نیازمند در نظر گرفتن اثرات اندرکنش سازه با نیروی الکترومغناطیس است. بدیهی است که نیروی الکترومغناطیس وارد به استاتور متأثر از جابجایی‌های

^۱ Splitting

^۲ Frequency Trimming

^۳ Vibration Localization

استاتور است. اضافه بر آن که نیروی الکترومغناطیس به صورت بار در حال حرکت به استاتور وارد می-شود.

هوانگ و سئودل [۳۰] حل دقیق ارتعاشات اجباری رینگ دوار تحت بارگذاری نقطه‌ای هارمونیک با توزیع مکانی مشخص بدست آوردند. متریکین و توچولین [۳۱] در بررسی ارتعاشات چرخ قطار، مساله رینگ الاستیک با نیروی خارجی نقطه‌ای متغیر با زمان در حال حرکت را بررسی کردند. ارتعاشات تیر و دیسک با فنر متحرک نیز موضوع پژوهش‌های متعددی بوده است [۳۲-۳۷]. در مقایسه با حجم تحقیقات انجام گرفته بر دیسک و تیر، تحقیقات زیادی بر مساله ارتعاشات رینگ با فنر در حال حرکت صورت نگرفته است.

پارکر و کانچی [۳۸] برای بررسی ارتعاشات دنده‌های سیاره‌ای-خورشیدی رینگ ثابت در معرض فنرهای نقطه‌ای متحرک با سختی ثابت بررسی کردند. ایشان در پژوهشی دیگر [۳۹]، ارتعاشات رینگ در معرض فنرهای متحرک نقطه‌ای و با سختی متغیر با زمان را مورد بررسی قرار دادند. ناپایداری ارتعاشی پارامتری نیز در این پژوهش‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین ژائو و همکاران [۴۰] ناپایداری پارامتری ناشی از بار مغناطیسی دوار در استاتور موتورهای مغناطیس دائم را مورد بررسی قرار دادند. بار مغناطیسی در این پژوهش به صورت بار گسترده مدل شده است. سان و همکاران [۴۱] به بررسی پدیده افتراق در شکل مودهای ارتعاشی رینگ متقارن دوار پرداختند. چیا و همکاران [۴۲] به بررسی ناپایداری فلانر و دایورجنس در ارتعاشات استاتور ماشین‌های الکتریکی القائی سه فاز پرداختند.

۱-۵- چارچوب بررسی مسئله در پایان نامه حاضر

در پژوهش حاضر، برای بررسی ارتعاشات استاتور در ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب از مدل رینگ استفاده شده است. منظور از ارتعاشات در بخش‌های مختلف پایان نامه حاضر، ارتعاشات داخل صفحه استاتور است. برای مدل‌سازی سازه استاتور از مدل رینگ دوار با فرضیات تیر اویلر برنولی استفاده شده است. اندرکنش نیروهای الکترومغناطیسی و سازه با استفاده از فنرهای متصل به وجه داخلی رینگ مدل شده است. این فنرها به صورت متمرکز و با فاصله یکسان توزیع شده‌اند. زاویه اعمال نیروی این فنرها به رینگ نیز جداگانه مدل شده است. بدیهی است که این فرضیات به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که مدلسازی استاتور در چارچوب مسئله رینگ با تقارن دوره‌ای قرار گیرد. البته اثرات متغیر بودن سختی فنرها با زمان نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

در معادلات حاکم بر حرکت، دوران رینگ و دوران نیروی الکترومغناطیس به صورت همزمان در نظر گرفته شده است. اگرچه در غالب ماشین‌های الکتریکی استاتور به عنوان بخش غیر متحرک ماشین در نظر گرفته می‌شود، اما این تعریف در همه ماشین‌های الکتریکی صادق نیست. به عنوان مثال پاره‌ای از ماشین‌های الکتریکی به گونه‌ای طراحی می‌شوند که در آن‌ها هر دو بخش اصلی ماشین متحرک هستند. از جمله این ماشین‌ها می‌توان به ماشین‌های الکتریکی کانتر روتیتینگ^۱ اشاره کرد. در مثال دیگر می‌توان به موتورهای روتور بیرون (نظیر موتور پنکه سقفی) اشاره کرد در این موتورها نیز بخش دوار هندسه‌ای کاملاً استاتور گونه (شکل ۱-۲) دارد.

۱-۶- نوآوری و ساختار پایان نامه حاضر

از دیدگاه نوآوری و آنچه در این پایان نامه برای نخستین بار انجام گرفته است، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- مدل جرم و فنر گسسته از استاتور برای بررسی اندرکنش دندانه‌ها و یوغ در ارتعاشات

^۱ Counter rotating electric machines

استاتور ارائه گردیده است. نتایج بدست آمده از این مدل نشان می‌دهد که تغییر نظام حرکت جمعی دندانه‌ها و یوغ می‌تواند منجر به ظهور فرکانس‌های طبیعی متفاوتی شود که از حیث ارتعاشی دارای اهمیت فراوان است.

- استفاده از مدل جرم و فنر در تحلیل سازه‌های مدور با بار متحرک دارای سابقه است. در این پایان‌نامه از این مدل و نتایج مربوط به آن در تحلیل ارتعاشی استاتور ماشین‌های الکتریکی استفاده شد.

- تحلیل مسئله ارتعاشات استاتور در چارچوب مدل رینگ و فنر با در نظر گرفتن تغییرات سختی الکترومغناطیس بر حسب زمان برای نخستین بار در این پایان‌نامه انجام گرفته است. تغییرات سختی الکترومغناطیس با زمان علاوه بر اثرات مربوط به بار متحرک در نظر گرفته شده است و این تغییرات در دو حالت حفظ تقارن دوره‌ای و عدم وجود تقارن دوره-ای مورد بررسی قرار گرفته است. از حیث کاربرد این پدیده در موارد وجود خطا در ماشین الکتریکی (ناهمراستایی اجزا ماشین، اختلال در کارکرد ادوات ماشین و...) دارای اهمیت است.

- تحلیل مسئله ارتعاشات استاتور در چارچوب مدل رینگ و فنر با در نظر گرفتن تغییرات زاویه اعمال نیروی الکترومغناطیس به رینگ بر حسب زمان برای نخستین بار در این پایان‌نامه انجام گرفته است.

در فصل اول از این پایان‌نامه، تلاش شده است تا کلیاتی از مفاهیم و پدیده‌های مرتبط با موضوع پایان‌نامه ارائه گردد. بر این مبنا، ابتدا اهمیت بررسی ارتعاشات استاتور ماشین‌های الکتریکی ذکر گردیده است. در ادامه روش‌های مختلف مدل‌سازی مسئله ارتعاشات استاتور توضیح داده شده است. در هر بخش فعالیت‌های محققین و پدیده‌های گزارش شده ذکر گردیده‌اند. در فصل دوم، معادلات حرکت برای رینگ الاستیک با در نظر گرفتن اثر تقارن دوره‌ای استخراج شده است. برای این منظور از

روش همپلتون و از فرضیات تیر اویلر-برنولی در میدان جابجایی استفاده شده است. در فصل سوم، تحلیل فرکانسی رینگ با تقارن دوره‌ای با استفاده از روش تحلیلی صورت گرفته است. در این بررسی، هر دو حالت سیستم در حالت پایا (عدم وجود ضرایب متغیر با زمان در معادله حرکت) و سیستم در حالت ناپایا (وجود ضرایب متغیر با زمان در معادله حرکت) در نظر گرفته شده است. اثرات انحراف از تقارن کامل در رینگ با استفاده از روش حل اغتشاشی^۱ در نظر گرفته شده است. نیروی الکترومغناطیسی وارده به استاتور با استفاده از فنرهای متصل به رینگ مدل شده است که اثرات متغیر بودن سختی این فنرها در زمان نیز بررسی شده است. پدیده افتراق مودها و ارتباط آن با ناپایداری به تفصیل در هر یک از موارد فوق‌الذکر بررسی شده است. در فصل چهارم نتایج عددی مربوط به حل‌های تحلیلی ذکر شده در فصل سوم آمده است. علاوه بر این در این فصل مدل گسسته جرم و فنر از استاتور بدون در نظر گرفتن اثرات دوران و نیروی الکترومغناطیسی توسعه داده شده است هدف از این مدل بررسی اثر متقابل یوغ و دندانه در استاتور از دیدگاه تقارن دوره‌ای است. در فصل پنجم نتایج حاصل از کار حاضر و پیشنهادهایی برای ادامه کار ارائه شده است.

^۱ Perturbation Methods

معادلات حرکت رینگ الاستیک

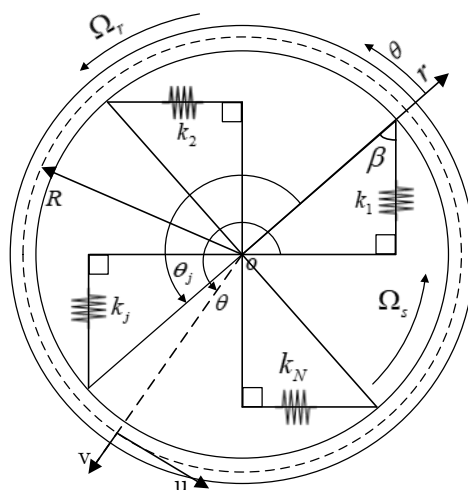
با تقارن دوره‌ای

۲-۱- مقدمه

معادلات حاکم بر حرکت رینگ دوار در این فصل با استفاده میدان جابجائی و کرنش و اصل همیلتون استخراج خواهند شد. با دانستن میدان کرنش در رینگ دوار، انرژی پتانسیل رینگ مشخص شده و سپس با دانستن انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی و استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم بر حرکت رینگ به دست می‌آیند.

۲-۲- تشریح مدل رینگ

رینگ دوار مطابق شکل (۱-۲) مدلسازی می‌شود که شامل رینگ با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω_r و تکیه‌گاه با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω_s است. همانگونه که در شکل (۱-۲) مشخص شده است، تعدادی فنر با سختی مشابه از تکیه‌گاه در فواصل یکسان به وجه داخلی رینگ متصل شده‌اند که زاویه امتداد فنرها با جهت شعاعی با β نشان داده شده است. و همچنین ضخامت رینگ، عمق، چگالی، جرم، مدول یانگ و شعاع رینگ با E, m, ρ_0, b, h و R نشان داده شده است.



شکل (۱-۲) هندسه رینگ مدل استاتور [۴۱]

بدیهی است که سازه در مختصات چسبیده به رینگ $(o - r\theta z)$ دارای سختی متغیر با زمان است. U و V به ترتیب بیانگر جابجایی در جهت های شعاعی و مماسی در یک نقطه از رینگ هستند که

وابسته به زمان و زاویه موقعیت مکانی θ می‌باشند. سختی فنرهای متصل شده به رینگ با K نشان داده شده است. θ_{j_1} به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۱].

$$\theta_{j_1} = \frac{2\pi(j_1-1)}{N}, \quad j_1 = 1, 2, \dots, N \quad (۱-۲)$$

که در آن N تعداد فنرها است.

۳-۲- میدان کرنش و انرژی پتانسیل

کرنش مماسی در مختصات (r, θ) به صورت زیر بیان می‌شود [۴۳].

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta 0} + \frac{r-R}{R} \frac{\partial \phi_z}{\partial \theta}, \quad (۲-۲)$$

که

$$\varepsilon_{\theta 0} = \varepsilon_{\theta}^L + \frac{\left[(\varepsilon_{\theta}^L) + \phi_z^2 \right]}{2}. \quad (۳-۲)$$

توجه شود که ε_{θ}^L و ϕ_z به ترتیب کرنش غشائی^۱ و زاویه چرخش حول محور Z - هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۴۱].

$$\varepsilon_{\theta}^L = \frac{(v + \partial u / \partial \theta)}{R}, \quad (۴-۲)$$

$$\phi_z = \frac{(u - \partial v / \partial \theta)}{R}.$$

انرژی پتانسیل ناشی از خمش درون صفحه به صورت زیر بیان می‌شود ([۴۳] و [۶]).

$$U_0 = \frac{b}{2} \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta} r d\theta dr \quad (۵-۲)$$

$$\approx \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ER (\varepsilon_{\theta 0}^2 A + \varepsilon_{\theta 1}^2 I) d\theta,$$

در رابطه فوق $I (I = bh^3/12)$ ، ممان اینرسی سطح مقطع و $\varepsilon_{\theta 1} = \partial \phi_z / (R \partial \theta)$ است.

انرژی پتانسیل ناشی از فنرهای متصل شده به رینگ به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۱].

^۱ Membrane Strain

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k(\theta, t) (u \sin \beta + v \cos \beta)^2 d\theta, \quad (6-2)$$

که

$$k(\theta, t) = k\delta[\theta - (\Omega_s - \Omega_r)t - \theta_{j1}].$$

جز دیگر انرژی پتانسیل به واسطه نیروی گریز از مرکز ناشی از دوران رینگ ایجاد می شود که به صورت زیر در نظر گرفته می شود [۶].

$$U_2 = \int_0^{2\pi} \rho AR^3 \Omega_r^2 \varepsilon_{\theta\theta} d\theta. \quad (7-2)$$

در نتیجه انرژی پتانسیل رینگ به صورت زیر است.

$$U = U_0 + U_1 + U_2. \quad (8-2)$$

۴-۲- انرژی جنبشی

در مختصات چرخان $O - r\theta z$ ، مختصات هر نقطه با در نظر گرفتن جابجائی های مماسی و شعاعی u و v به صورت زیر بیان می شود.

$$r = (r+v)e_r + ue_\theta, \quad (9-2)$$

که e_r و e_θ به ترتیب بردارهای یکه مماسی و شعاعی هستند. بردار سرعت با استفاده از رابطه (۹-۲) به صورت زیر تعریف می شود.

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} - u\Omega_r \right) e_r + \left[\Omega_r (r+v) + \frac{\partial u}{\partial t} \right] e_\theta. \quad (10-2)$$

انرژی جنبشی (T_0) با چشم پوشی از اثر اینرسی چرخشی^۱ به صورت زیر بیان می شود [۶].

^۱ Rotary Inertia

$$T_0 = \frac{1}{2} \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi} \rho_0 |\dot{r}|^2 r d\theta dr \quad (11-2)$$

$$\approx \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_0 A \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial t} - u \Omega_r \right)^2 + \left[\Omega_r (r+v) + \frac{\partial u}{\partial t} \right]^2 \right\} R d\theta,$$

که در آن A ($A = bh$)، سطح مقطع رینگ است.

۲-۵- معادلات حاکم بر حرکت

برای استخراج معادلات حاکم از اصل همیلتون استفاده می‌شود. بر اساس اصل همیلتون [۴۴]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T_0 - U) dt = 0, \quad (12-2)$$

که T_0 و U به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم هستند. در استخراج معادلات حرکت از

فرضیات مربوط به صفر بودن کرنش محوری در خمش^۱ رینگ استفاده می‌شود. بر این اساس می‌توان

جابه‌جایی‌های مماسی و شعاعی را به صورت زیر به هم مرتبط کرد [۳۸] و [۳۹].

$$v + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0. \quad (13-2)$$

برای بی‌بعد سازی معادلات، زمان و مکان بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند [۴۱].

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, \quad (14-2)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{R},$$

که

$$T = \sqrt{\frac{\rho_0 A R^4}{EI}}. \quad (15-2)$$

برای رعایت اختصار، در ادامه t و u به عنوان زمان و مکان بی‌بعد به کار می‌روند.

با استفاده از اصل همیلتون و فرضیات ذکر شده، معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند [۴۱].

^۱ Inextensible Bending

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G \frac{\partial u}{\partial t} + [D + K^{(0)} + \varepsilon K^{(1)}] u = 0, \quad (16-2)$$

که عملگرهای جرم و سختی به صورت زیر هستند [۴۱].

$$M = 1 - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

$$K^{(0)} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^6}{\partial \theta^6}\right). \quad (17-2)$$

عملگرهای D و G که بر اثر دوران رینگ ایجاد می‌شوند، به صورت زیر تعریف می‌شوند [۴۱].

$$G = -4\Omega_p \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$D = \Omega_p^2 \left(3\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \theta^4}\right). \quad (18-2)$$

همچنین عملگر $K^{(1)}$ که توسط فنرهای متصل به رینگ ایجاد می‌شود، به صورت زیر است [۴۱].

$$K^{(1)} = (k^* \sin \beta + k^* \cos \beta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial k^*}{\partial \theta} \cos \beta) \times (\sin \beta - \cos \beta \frac{\partial}{\partial \theta}), \quad (19-2)$$

که

$$k^* = \sum_{j_1=1}^N \delta(\theta - \theta_{j_1} - \Omega_{rel} t), \quad (20-2)$$

$$\Omega_{rel} = \Omega_v - \Omega_p.$$

در رابطه فوق، Ω_{rel} اختلاف بین سرعت دورانی تکیه‌گاه و رینگ است. ($\Omega_v = T\Omega_s$) Ω_v بیانگر

سرعت بی بعد شده تکیه‌گاه و ($\Omega_p = T\Omega_r$) Ω_p معرف سرعت بی بعد شده رینگ است.

در رابطه (۱۶-۲)، ε به عنوان یک پارامتر کوچک بیانی از ضریب سختی فنرهای متصل به رینگ

است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۱].

$$\varepsilon = \frac{kR^3}{EI}. \quad (21-2)$$

حل تحلیلی معادلات حاکم

۳-۱- مقدمه

در این فصل حل معادلات حاکم بر حرکت که در بخش قبل استخراج شد، با استفاده از روش‌های شبه تحلیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیستم رینگ و فنر در دو حالت کلی با تقارن دوره‌ای و بدون تقارن دوره‌ای بررسی شده است. سیستم در حالت تقارن دوره‌ای شامل مسئله رینگ و فنر با سختی ثابت و مسئله رینگ و فنر با سختی هارمونیک متغیر با زمان می‌باشد. سیستم در حالت فقدان تقارن دوره‌ای شامل مسئله رینگ و فنر با سختی هارمونیک در زمان و سختی دندانه‌اره‌ای در زمان، مسئله رینگ و فنر با زاویه اتصال فنر به رینگ متغیر با زمان می‌باشد.

۳-۲- نظریه اغتشاش^۱

نظریه اغتشاش شامل روش‌های ریاضی است که برای یافتن پاسخ تقریبی برای مسئله‌ای که پاسخ دقیق آن قابل دسترسی نیست، به کار می‌رود. یافتن این جواب تقریبی با یک پاسخ دقیق در یک مسئله مرتبط آغاز می‌شود. نظریه اغتشاش را زمانی می‌توان به کار برد که بتوان مسئله را با افزودن یک عبارت کوچک به توصیف ریاضی مسئله‌ای که قابل حل دقیق است، فرمول‌بندی نمود.

نظریه اغتشاش به عبارتی به صورت یک سری توانی صوری از یک پارامتر کوچک که با نام سری اغتشاش شناخته می‌شود، برای پاسخ مورد نظر منجر می‌شود که انحرافات از مسئله قابل حل کامل را به صورت کمی بیان می‌کند. اولین جمله از این سری توانی پاسخ مسئله قابل حل دقیق است و جملات بعدی انحراف از این پاسخ به دلیل انحراف از مسئله اصلی را توصیف می‌کنند. برای تقریب زدن یک پاسخ کامل A یک سری از پارامتر کوچک ε به صورت زیر خواهیم داشت:

$$A = A_0 + \varepsilon^1 A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots \quad (۱-۳)$$

در این مثال، A_0 پاسخ معلوم برای مسئله قابل حل دقیق اولیه است و A_1 و A_2 جمله‌های مرتبه بالاتر هستند که توسط یک روش سیستماتیک می‌توان آن‌ها را به دست آورد. برای ε کوچک، این جمله‌های مرتبه بالاتر به تدریج کوچکتر می‌شوند. یک پاسخ اغتشاشی تقریبی را می‌توان از طریق قطع کردن این سری به دست آورد. در این رساله تنها دو جمله اول سری نگه داشته می‌شوند، یعنی پاسخ اولیه و اصلاح اغتشاشی مرتبه اول:

$$A \approx A_0 + \varepsilon^1 A_1. \quad (۲-۳)$$

^۱ Perturbation Theory

۳-۳- حل اغتشاشی سیستم در حالت پایا

منظور از این حالت، وقتی است که سختی فنرها وابسته به زمان نیست به عبارت دیگر ترم $\Omega_{rel}t$ در رابطه (۲۰-۲) حذف گردد.

۳-۳-۱- رینگ متقارن

وجود فنرها در سیستم منجر به از دست رفتن تقارن در رینگ می‌شود. در این قسمت با صرفنظر کردن از فنرها، حل سیستم را در حالت کاملاً متقارن به دست می‌آوریم. رابطه (۱۶-۲) معادله حاکم بر حرکت رینگ دوار است [۴۱]. با صرفنظر کردن از مقادیر \mathcal{E} و بالطبع $K^{(1)}$ در معادلات حاکم داریم [۴۱]:

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G \frac{\partial u}{\partial t} + [D + K^{(0)}] u = 0. \quad (۳-۳)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها^۱، $u(\theta, t)$ به صورت زیر فرض می‌شود [۴۱].

$$u(\theta, t) = u_{n0}(\theta) e^{r_{n0}t}, \quad (۴-۳)$$

که

$$u_{n0}(\theta) = A_n e^{in\theta} + \tilde{A}_n e^{-in\theta}.$$

در معادله بالا A_n ، \tilde{A}_n امین ضریب هارمونیک و (\sim) به معنای مزدوج مختلط^۲ و همچنین r_{n0} مقادیر

ویژه است و i ($i = \sqrt{-1}$) یک موهومی است. با قرار دادن رابطه (۴-۳) در (۳-۳) داریم [۴۱]:

$$r_{n0} = if_n, \quad (۵-۳)$$

که

$$f_n^{(1,2)} = \frac{2n\Omega_p}{1+n^2} \pm i \sqrt{\frac{n^2\Omega_p^2(n^2-1)^2}{(1+n^2)^2} + \frac{n^2(n^2-1)^2}{1+n^2}}.$$

^۱ Separation of Variables

^۲ Complex Conjugate

که با صفر بودن سرعت بی بعد شده Ω_p ، مقادیر ویژه در رینگ ثابت به صورت زیر حاصل می‌شود [۴۱].

$$r'_{n0} = \pm i \frac{n^2(n^2 - 1)}{\sqrt{1+n^2}}, \quad (۶-۳)$$

که

$$f_{n0} = \frac{n^2(n^2 - 1)}{\sqrt{1+n^2}}.$$

فرکانس طبیعی سینوسی و کسینوسی به صورت زیر خواهد بود [۴۱].

$$\omega_{cn}^{(0)} = \omega_{sn}^{(0)} = |\text{Im}(r_{n0})| = |f_n|. \quad (۷-۳)$$

همان فرکانس‌های پیش رونده^۱ و پس رونده^۲ هستند که این موضوع با نتایج قبلی سازگار است [۶].

۳-۳-۲- رینگ با تقارن دوره‌ای^۳

در نظر گرفتن فنرها در رینگ منجر به از دست رفتن تقارن می‌شود و سازه در این حالت اصطلاحاً دارای تقارن دوره‌ای است. برای حل سیستم در حالت تقارن دوره‌ای فرض می‌شود که جواب در این حالت گسترش یافته‌ای از جواب در حالت رینگ متقارن است. تئوری اغتشاشات به این منظور مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از تکنیک حل اغتشاشی به بررسی پدیده افتراق مودها و فرکانس‌های طبیعی در سیستم پرداخته می‌شود.

پارامترهای رابطه (۴-۳) در این حالت به صورت زیر فرض می‌شوند [۴۱].

$$u_n(\theta) = u_{n0}(\theta), \quad r'_n = r'_{n0} + \varepsilon r'_{n1}. \quad (۸-۳)$$

مقدار ویژه اغتشاشی (r'_{n1}) در این حالت مستقل از زمان است زیرا تکیه‌گاه بدون حرکت فرض شده

^۱ Foreward

^۲ Backward

^۳ Cyclic Symmetry

است. بنابراین پاسخ به صورت زیر است [۴۱].

$$u(\theta, t) = u_{n0} e^{(r'_{n0} + \varepsilon r'_{n1})t} \quad (۹-۳)$$

مقادیر ویژه r'_{n1} به صورت زیر بدست می‌آید [۴۱].

$$r'_{n1} = i \frac{1}{4\pi f_{n0}(1+n^2)} \left[N(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) + \frac{\tilde{A}_n}{A_n} (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \right] \quad (۱۰-۳)$$

از طرف دیگر [۴۱].

$$\sum_{p=1}^N e^{2i\pi(p-1)q'/N} = \begin{cases} 0, & q' / N \neq \text{Integer} \\ N, & q' / N = \text{Integer} \end{cases} \quad (۱۱-۳)$$

است. همانگونه که از روابط (۱۰-۳) و (۱۱-۳) مشخص است، تقارن دوره‌ای در سیستم در حالت

پایا منجر به تغییر فرکانس طبیعی به اندازه $\varepsilon r'_{n1}$ می‌شود. این تغییر اندازه فرکانس به ازای مقادیر

غیر صحیح q' ، مقدار کوچکی است که تغییری در طبیعت اصلی ارتعاشی سیستم ایجاد نمی‌کند. اما

در مواقعی که q' عددی صحیح باشد، در این حالت با توجه به رابطه (۱۱-۳) مقدار عددی ترم

مشخص شده با زیرخط^۱ غیر صفر خواهد بود. مقدار $\frac{\tilde{A}_n}{A_n}$ برای مودهای کسینوسی برابر ۱ و برای

مودهای سینوسی برابر ۱- است. در نتیجه به ازای مقادیر صحیح q' ، r'_{n1} مستعد آن است که مقدار

آن برای مودهای سینوسی و کسینوسی متفاوت شود. آنچه در این بین اثرگذار است مقدار عبارت

$\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta$ است. اگر مقدار r'_{n1} به ازای مودهای سینوسی و کسینوسی متفاوت شود آنگاه

پدیده افتراق^۲ مودها روی داده است و در غیر این صورت سیستم شاهد تکرار^۳ مودها است [۴۱].

با استفاده از یک نسبت مناسب $2n$ به N غیر صحیح می‌توان از ایجاد رخداد افتراق مودها جلوگیری

کرد. اما در عمل، تغییر این دو پارامتر ممکن نیست بنابراین با تنظیم زاویه فنرها پدیده افتراق را

^۱ Under Line

^۲ Splitting

^۳ Repeating

کنترل می‌نمایند. اگر $\beta = \arctan(n)$ یا نهایتاً $\beta \approx \arctan(n)$ باشد، پدیده افتراق مودها از بین خواهد رفت [۴۱].

۳-۴- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای

دوران در رینگ یا تکیه‌گاه امکان ظهور ضرایب متغیر با زمان را در معادله حاکم بر حرکت ایجاد می‌کند. شماتیک سیستم رینگ و فنر در این حالت مطابق شکل (۲-۱) است. برای حل معادله حرکت در این حالت، ترم اغتشاشی در رابطه (۳-۸) به صورت تابعی از زمان فرض می‌شود [۴۱].

$$r_n(t) = r_{n0} + \varepsilon r_{n1}(t). \quad (۳-۱۲)$$

بدیهی است که حل کلی به صورت حاصل ضرب توابع مکانی و زمانی به صورت زیر خواهد بود [۴۱].

$$u(\theta, t) = u_{n0} e^{[r_{n0} + \varepsilon r_{n1}(t)]t}. \quad (۳-۱۳)$$

با تغییر متغیر $r_{n2}(t) = t r_{n1}(t)$ مقادیر ویژه r_{n2} بدست می‌آید [۴۱].

$$r_{n2} = \begin{cases} H_1 t + H_2 t e^{-2i\Gamma t}, & \Omega_{rel} = \Gamma / n \\ H_1 t + H_3 e^{-2in\Omega_{rel}t}, & \Omega_{rel} \neq \Gamma / n \end{cases} \quad (۳-۱۴)$$

که

$$H_1 = iVN(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta),$$

$$H_2 = -iV \frac{\tilde{A}_n}{A_n} (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta + in \sin 2\beta) \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}},$$

$$H_3 = \frac{-V}{2n\Omega_{rel}(1 - n\Omega_{rel}/\Gamma)} \frac{\tilde{A}_n}{A_n} \times (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta + in \sin 2\beta) \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}},$$

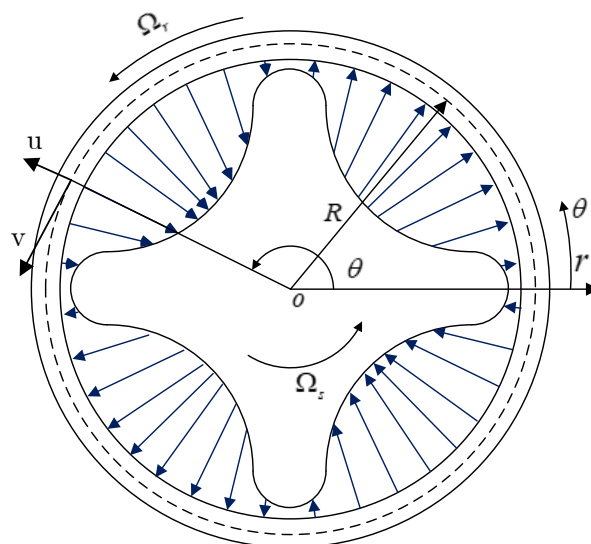
$$V = \frac{1}{4\pi(1+n^2)\Gamma},$$

$$\Gamma = f_n - 2n\Omega_p / (1+n^2).$$

۵-۳- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر با زمان با تقارن دوره-

ای

وقتی که رینگ و تکیه‌گاه هر دو در حال دوران هستند، معادله حاکم بر حرکت دارای ضرایب متغیر با زمان است. برای حل معادله حرکت در این حالت، ترم اغتشاشی در رابطه (۳-۸) به صورت تابعی از زمان فرض می‌شود. در این بخش فرض می‌شود که سختی فنر به صورت تابعی سینوسی با فرکانس $2\pi N\Omega_{rel}$ تغییر می‌کند. دقت شود که در این حالت تقارن دوره‌ای در کل رینگ برقرار است. شماتیک سیستم در این حالت در شکل (۳-۱) آمده است.



شکل (۳-۱) سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای

برای حل سیستم در این حالت از تکنیک انتگرال کانولوشن^۱ استفاده می‌گردد. بر مبنای این روش پاسخ سیستم در حالتی که سختی فنرها به صورت تابع $f(t)$ در زمان باشد، به صورت زیر است.

$$x(t) = \int_0^t f(\xi)h(t-\xi)d\xi \quad (۳-۱۵)$$

^۱ Convolution Integral

که $h(t)$ پاسخ سیستم به ازای وجود فتر گسسته (موضوع بخش ۳-۴) است. همانگونه که گفته شد، پاسخ سیستم در این حالت با استفاده از روابط (۳-۱۲) تا (۳-۱۵) بدست می‌آید. در این حالت به صورت زیر است:

$$r_{n2} = \begin{cases} H_1 t + H_2 t e^{-2i\Gamma t}, & \Omega_{rel} = \Gamma / n \\ H_1 t + H_3 e^{-2in\Omega_{rel}t}, & \Omega_{rel} \neq \Gamma / n \end{cases} \quad (۳-۱۶)$$

با استفاده از انتگرال کانولوشن، پاسخ زمانی فوق به صورت زیر بدست می‌آید.

$$r_{n2} = \begin{cases} H_1 I_1 + H_2 I_2, & \Omega_{rel} = \Gamma / n \\ H_1 I_1 + H_3 I_3, & \Omega_{rel} \neq \Gamma / n \end{cases} \quad (۳-۱۷)$$

که

$$I_1 = \frac{1}{2\pi N \Omega_{rel}} \left(t - \frac{\sin(2\pi N \Omega_{rel} t)}{2\pi N \Omega_{rel}} \right),$$

$$I_2 = \frac{t e^{-2i\Gamma t}}{4(\pi N \Omega_{rel} - \Gamma)} + \frac{t e^{2i\Gamma t}}{4(\pi N \Omega_{rel} + \Gamma)} + \frac{e^{-2i\pi N \Omega_{rel}t} - e^{-2i\Gamma t}}{8i(\pi N \Omega_{rel} - \Gamma)^2} + \frac{e^{-2i\Gamma t} - e^{2i\pi N \Omega_{rel}t}}{8i(\pi N \Omega_{rel} + \Gamma)^2},$$

$$I_3 = \frac{-e^{-2i\pi N \Omega_{rel}t} + e^{-2in\Omega_{rel}t}}{4(\pi N \Omega_{rel} - n\Omega_{rel})} + \frac{-e^{2i\pi N \Omega_{rel}t} + e^{-2in\Omega_{rel}t}}{4(\pi N \Omega_{rel} + n\Omega_{rel})}.$$

حال با ساده سازی رابطه (۳-۱۸) و در نهایت طبق تغییر متغیر $r_{n1}(t) = r_{n2}(t)/t$ می‌توان مقادیر جواب که مجموعی از بخش حقیقی که بیانگر پایداری نحوه پایداری سیستم و بخش موهومی که بیانگر فرکانس‌های طبیعی سیستم است، بدست آورد. که به دلیل رعایت اختصار بیان نشده است.

۳-۶- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فتر با سختی متغیر با زمان بدون تقارن

دوره‌ای

در این حالت فرض می‌شود که فنرهای گسسته دارای مقادیر سختی متغیر با زمان باشند به نحوی که تقارن دوره‌ای در رینگ به واسطه متغیر بودن سختی فنرها از بین برود. از دیدگاه ناظر نشسته

روی رینگ با توالی زمان مشخصی نیروی فنر احساس می‌شود اما دامنه این نیرو خود تابعی از زمان است.

۳-۶-۱- سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک در زمان

معادله حاکم به صورت زیر تغییر خواهد کرد.

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G \frac{\partial u}{\partial t} + [D + K^{(0)} + \varepsilon \times f(t) \times K^{(1)}] u = 0. \quad (19-3)$$

که $f(t)$ به صورت هارمونیک فرض می‌شود.

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + G \frac{\partial u}{\partial t} + [D + K^{(0)} + \varepsilon \times \cos(\Lambda t) \times K^{(1)}] u = 0. \quad (20-3)$$

با استفاده از تابع مکان-زمان (۳-۱۳) و جایگذاری در رابطه (۳-۱۹) و ساده سازی، r_{n1} با حل رابطه (۳-۲۱) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} & [2\dot{r}_{n1}(t) + \ddot{r}_{n1}(t)t + 2r_{n0}\dot{r}_{n1}(t)t + 2r_{n0}r_{n1}(t)]Mu_{n0} \\ & + [\dot{r}_{n1}(t) + \ddot{r}_{n1}(t)t]Gu_{n0} = -K^{(1)}u_{n0} \times \cos(\Lambda t). \end{aligned} \quad (21-3)$$

با تغییر متغیر $r_{n2}(t) = tr_{n1}(t)$ و ضرب داخلی رابطه (۳-۲۱) در $e^{in\theta}$ ،

$$\ddot{r}_{n2} + 2i\Gamma \dot{r}_{n2} = \frac{-\cos(\Lambda t)}{2\pi(1+n^2)} \left[\begin{aligned} & N(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta + in \sin 2\beta) \\ & + \frac{\tilde{A}_n}{A_n} (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \sum_{j_1=1}^N e^{-2in(\theta_{j_1} + \Omega_{rel}t)} \end{aligned} \right]. \quad (22-3)$$

که حل معادله (۳-۲۲) به صورت زیر است.

$$r_{n2} = \begin{cases} H_1 + H_2 e^{-2i\Gamma t}, & \Omega_{rel} = \Gamma / n \\ H_1 + H_3 e^{-2in\Omega_{rel}t}, & \Omega_{rel} \neq \Gamma / n \end{cases} \quad (23-3)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
H_1 &= VN(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \times \left[\cos(\Lambda t) - \frac{2i\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \right], \\
H_2 &= V \frac{\tilde{A}_n}{A_n} (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta + in \sin 2\beta) \\
&\quad \times \sum_{j=1}^N e^{-2in\theta_{j1}} \left[\cos(\Lambda t) + \frac{2i\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \right], \\
H_3 &= P \times \frac{\tilde{A}_n}{A_n} \times (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta + in \sin 2\beta) \\
&\quad \times \sum_{j=1}^N e^{-2in\theta_{j1}} \left[\begin{aligned} &(4n\Omega_{rel}\Gamma - 4n^2\Omega_{rel}^2 - \Lambda^2) \times \cos(\Lambda t) \\ &+ (2i\Gamma\Lambda - 4in\Omega_{rel}\Gamma\Lambda) \times \sin(\Lambda t) \end{aligned} \right], \\
V &= \frac{-1}{2\pi(1+n^2) \times (4\Gamma^2 - \Lambda^2)}, \\
P &= \frac{1}{2\pi(1+n^2) \times \left[(4n\Omega_{rel}\Lambda - 2\Gamma\Lambda)^2 + (4n\Omega_{rel}\Gamma - 4n^2\Omega_{rel}^2 - \Lambda^2)^2 \right]}.
\end{aligned}$$

۳-۶-۱-۱- بررسی مقادیر ویژه

براساس رابطه (۳-۲۳) بخش اغتشاشی فرکانس طبیعی سیستم به صورت زیر است [۴۱].

$$\text{Im}(r_{n1})_{c,s} = \text{Im}\left(\frac{r_{n2}}{t}\right)_{c,s}. \quad (۳-۲۴)$$

اندیس‌های "c" و "s" به معنای موده‌های سینوسی و کسینوسی هستند که نسبت‌های زیر برای آن‌ها در حالت رینگ متقارن برقرار است.

$$\left(\frac{\tilde{A}_n}{A_n}\right)_c = 1, \quad \left(\frac{\tilde{A}_n}{A_n}\right)_s = -1. \quad (۳-۲۵)$$

بنابراین فرکانس‌های طبیعی سیستم را می‌توان به شکل زیر نوشت [۴۱].

$$\omega_{s,c} = |\text{Im}(r_{n0}) + \text{Im}(r_{n1})|_{A_n(s,c)}. \quad (۳-۲۶)$$

با حل رابطه (۳-۲۳) و (۳-۵) و جایگذاری در (۳-۲۶) مقادیر فرکانس‌های طبیعی برای سرعت‌های مختلف بدست می‌آید که حل دارای دو دسته جواب است مقادیر موهومی که میزان فرکانس‌های طبیعی و مقادیر حقیقی در تحلیل پایداری سازه استفاده می‌شود.

در حالتیکه $\Omega_{rel} = \Gamma / n$

براساس جواب متناظر با $\Omega_{rel} = \Gamma / n$ در رابطه (۲۳-۳)،

$$\begin{aligned} r_{n2} = H_1 + H_2 e^{-2i\Gamma t} = & VN(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \times \left[\cos(\Lambda t) - \frac{2i\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \right] \\ & - V \frac{\tilde{A}_n}{A_n} (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta + in \sin 2\beta) \\ & \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \left[\cos(\Lambda t) + \frac{2i\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \right] \times e^{-2i\Gamma t}. \end{aligned} \quad (۲۷-۳)$$

و از آنجا که

$$e^{-2i\Gamma t} = \cos(2\Gamma t) - i \sin(2\Gamma t). \quad (۲۸-۳)$$

با جایگذاری در قسمت دوم معادله (۲۷-۳) و ساده سازی،

$$\begin{aligned} H_2 e^{-2i\Gamma t} = & \pm V \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \left[(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \cos(2\Gamma t) \right. \\ & - i(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \sin(2\Gamma t) \\ & + in \sin(2\beta) \times \cos(2\Gamma t) \\ & \left. + n \sin(2\beta) \times \sin(2\Gamma t) \right] \times \left(\cos(\Lambda t) + \frac{2i\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \right). \end{aligned} \quad (۲۹-۳)$$

مقادیر موهومی r_{n2} برای سرعت دورانی $\Omega_{rel} = \Gamma / n$ به صورت زیر است.

$$\text{Im}(r_{n2}) = \text{Im}(H_1) + \text{Im}(H_2 e^{-2i\Gamma t}), \quad (۳۰-۳)$$

که

$$\text{Im}(H_1) = VN(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \times \left[-\frac{2\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \right],$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \text{Im}(H_2 e^{-2i\Gamma t}) &= \pm V \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \\ &\left[\left[(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \cos(2\Gamma t) + n \sin(2\beta) \times \sin(2\Gamma t) \right] \times \frac{2\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \right. \\ &\left. + \left[-(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \sin(2\Gamma t) + n \sin(2\beta) \times \cos(2\Gamma t) \right] \times \cos(\Lambda t) \right]. \end{aligned}$$

به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Im}(H_2 e^{-2i\Gamma t}) &= \mp V \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} (\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \\ &\times \left[\frac{2\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \times \left[\frac{(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta)}{\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta} \times \cos(2\Gamma t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n \sin 2\beta}{\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta} \times \sin(2\Gamma t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos(\Lambda t) \times \left[\frac{-(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta)}{\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta} \times \sin(2\Gamma t) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n \sin 2\beta}{\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta} \times \cos(2\Gamma t) \right] \right]. \end{aligned} \quad (31-3)$$

در نهایت با توجه به تغییر متغیر $r_{n_2}(t) = tr_{n_1}(t)$ و با استفاده از رابطه مثلثاتی زیر:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \quad (32-3)$$

مقدار فرکانس‌های طبیعی r_{n_1} برای $\Omega_{rel} = \Gamma / n$ به صورت زیر ساده می‌شود..

$$\begin{aligned} \text{Im}(r_{n_1})_{c,s} &= \frac{VN(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta)}{t} \times \left[-\frac{2\Gamma}{\Lambda} \times \sin(\Lambda t) \right] \\ &\pm \frac{V \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} (\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta)}{t} \times \left[\left(\frac{2\Gamma}{\Lambda} \times \sin(2\Gamma t + \phi_1) \times \sin(\Lambda t) \right) \right. \\ &\quad \left. + (\sin(2\Gamma t + \phi_2) \times \cos(\Lambda t)) \right]. \end{aligned} \quad (33-3)$$

که در آن

$$\phi_1 = \arctan\left(\frac{\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta}{n \sin 2\beta}\right),$$

$$\phi_2 = \arctan\left(\frac{n \sin 2\beta}{\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta}\right).$$

در حالتیکه $\Omega_{rel} \neq \Gamma / n$

براساس جواب متناظر با $\Omega_{rel} \neq \Gamma / n$ در رابطه (۳۳-۳)،

$$\begin{aligned} r_{n2} = H_1 + H_3 e^{-2in\Omega_{rel}t} = VN(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \times & \left[\cos(\Lambda t) - \frac{2i\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \right] \\ & + P \times \frac{\tilde{A}_n}{A_n} \times (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta + in \sin 2\beta) \\ & \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in(\theta_{j_1} + \Omega_{rel}t)} \left[(4n\Omega_{rel}\Gamma - 4n^2\Omega_{rel}^2 - \Lambda^2) \times \cos(\Lambda t) \right. \\ & \left. + (2i\Gamma\Lambda - 4in\Omega_{rel}\Gamma\Lambda) \times \sin(\Lambda t) \right]. \end{aligned} \quad (۳۴-۳)$$

از آنجایی که

$$e^{-2in\Omega_{rel}t} = \cos(2n\Omega_{rel}t) - i \sin(2n\Omega_{rel}t), \quad (۳۵-۳)$$

با جایگذاری در قسمت دوم معادله (۳۴-۳) و ساده سازی،

$$\begin{aligned} H_3 e^{-2in\Omega_{rel}t} = \pm P \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} & \left[\cos(\Lambda t) \times (4n\Omega_{rel}\Gamma - 4n^2\Omega_{rel}^2 - \Lambda^2) \right. \\ & \left. + (2i\Gamma\Lambda - 4in\Omega_{rel}\Gamma\Lambda) \times \sin(\Lambda t) \right] \\ & \times \left[(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \cos(2n\Omega_{rel}t) \right. \\ & - i(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \sin(2n\Omega_{rel}t) \\ & + (in \sin 2\beta) \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \cos(2n\Omega_{rel}t) \\ & \left. + n \sin 2\beta \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \sin(2n\Omega_{rel}t) \right]. \end{aligned} \quad (۳۶-۳)$$

بخش موهومی r_{n2} برای سرعت دورانی $\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$ به صورت زیر است.

$$\text{Im}(r_{n2}) = \text{Im}(H_1) + \text{Im}(H_3 e^{-2in\Omega_{rel}t}), \quad (۳۷-۳)$$

$$\begin{aligned}
\text{Im}(H_3 e^{-2in\Omega_{rel}t}) = & \pm P \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \times [(2\Gamma\Lambda - 4n\Omega_{rel}\Gamma\Lambda) \times \sin(\Lambda t)] \\
& \times [(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \cos(2n\Omega_{rel}t) \\
& + n \sin(2\beta) \times \sin(2n\Omega_{rel}t)] \\
& \pm P \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} [\cos(\Lambda t) \times (4n\Omega_{rel}\Gamma - 4n^2\Omega_{rel}^2 - \Lambda^2)] \\
& \times [-(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \sin(2n\Omega_{rel}t) \\
& + n \sin(2\beta) \times \cos(2n\Omega_{rel}t)].
\end{aligned}$$

که رابطه فوق به صورت زیر بازنویسی می شود.

$$\begin{aligned}
\text{Im}(H_3 e^{-2in\Omega_{rel}t}) = & \pm P \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \cos(\Lambda t) \times (4n\Omega_{rel}\Gamma - 4n^2\Omega_{rel}^2 - \Lambda^2) \\
& \times (\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \\
& \times \left[\frac{-(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta)}{\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta} \times \sin(2n\Omega_{rel}t) \right. \\
& \left. + \frac{n \sin 2\beta}{\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta} \times \cos(2n\Omega_{rel}t) \right] \quad (38-3) \\
& \pm P \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} (2\Gamma\Lambda - 4n\Omega_{rel}\Gamma\Lambda) \times \sin(\Lambda t) \\
& \times (\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \\
& \times \left[\frac{(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta)}{\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta} \times \cos(2n\Omega_{rel}t) \right. \\
& \left. + \frac{n \sin 2\beta}{\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta} \times \sin(2n\Omega_{rel}t) \right].
\end{aligned}$$

در نهایت با توجه به تغییر متغیر $r_{n2}(t) = tr_{n1}(t)$ و با استفاده از رابطه مثلثاتی (32-3) و ساده

سازی، $\text{Im}(r_{n1})_{c,s}$ به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} \text{Im}(r_{n1})_{c,s} = & \frac{VN(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta)}{t} \times \left[-\frac{2\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \right] \\ & \pm \frac{P \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} (\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta)}{t} \\ & \times \left[\cos(\Lambda t) \times (4n\Omega_{rel}\Gamma - 4n^2\Omega_{rel}^2 - \Lambda^2) \times \sin(2n\Omega_{rel}t + \phi_2) \right. \\ & \left. + (2\Gamma\Lambda - 4n\Omega_{rel}\Gamma\Lambda) \times \sin(\Lambda t) \times \sin(2n\Omega_{rel}t + \phi_1) \right]. \end{aligned} \quad (39-3)$$

بررسی روابط (33-3) و (39-3) نشان می‌دهد که مقدار ترم عامل افتراق مودها در گذر زمان مستهلک می‌گردد. به عبارات نشان داده شده با زیر خط در روابط (33-3) و (39-3) دقت شود.

جدول (1-3) طبیعت فرکانس‌های طبیعی پیش‌رونده و پس‌رونده در حالت سیستم رینگ و فنر گسسته با سختی متغیر کسینوسی بدون تقارن دوره‌ای به ازای مقادیر مختلف سرعت دورانی و نسبت‌های مختلف n/N

	$2n/N \neq \text{int}$	$2n/N = \text{int}$
$\Omega_{rel} = \Gamma/n$	تکرار مودها	از افتراق مودها به تکرار مودها
$\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$	تکرار مودها	از افتراق مودها به تکرار مودها

۳-۶-۱-۲- بررسی پایداری

در اینجا نیز ناپایداری اصلی سیستم تنها توسط ترم اغتشاشی r_{n1} ، ایجاد می‌شود.

در حالتیکه $\Omega_{rel} = \Gamma/n$

بر اساس پاسخ متناظر با $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ در رابطه (34-3) به تحلیل این قسمت پرداخته می‌شود.

طبق رابطه (29-3) بخش حقیقی، H_1 به صورت زیر است.

$$\text{Re}(H_1) = VN(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \times \cos(\Lambda t). \quad (40-3)$$

همچنین براساس رابطه (30-3)، بخش حقیقی $H_2 e^{-2i\Gamma t}$ به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(H_2 e^{-2i\Gamma t}) = & \pm V \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \times \cos(\Lambda t) \times \left[(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \cos(2\Gamma t) \right. \\ & \left. + n \sin(2\beta) \times \sin(2\Gamma t) \right] \\ & \pm V \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \frac{2\Gamma}{\Lambda} \sin(\Lambda t) \left[(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \sin(2\Gamma t) \right. \\ & \left. - n \sin(2\beta) \times \cos(2\Gamma t) \right]. \end{aligned} \quad (41-3)$$

با ضرب معادله فوق در $(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta)$ و با استفاده از رابطه مثلثاتی (۳۲-۳) و با توجه به تغییر متغیر $r_{n2}(t) = tr_{n1}(t)$ ، بخش حقیقی مقادیر ویژه در سرعت $\Omega_{rel} = \Gamma / n$ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(r_{n1})_{c,s} = & VN(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \times \cos(\Lambda t) \\ & \pm V \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} (\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \left[\sin(2\Gamma t - \phi_2) \times \cos(\Lambda t) \right. \\ & \left. + \frac{2\Gamma}{\Lambda} \times \sin(2\Gamma t - \phi_1) \times \sin(\Lambda t) \right]. \end{aligned} \quad (42-3)$$

در حالتیکه $\Omega_{rel} \neq \Gamma / n$

بر اساس پاسخ متناظر با $\Omega_{rel} \neq \Gamma / n$ در رابطه (۳۴-۳) به تحلیل این قسمت پرداخته می‌شود. طبق رابطه (۳۶-۳) بخش حقیقی $H_3 e^{-2i\Omega_{rel} t}$ به صورت زیر است.

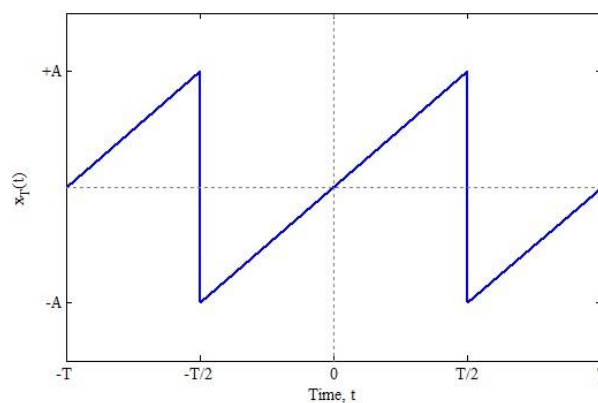
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(H_3 e^{-2i\Omega_{rel} t}) = & \pm P \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \times \cos(\Lambda t) \times (4n\Omega_{rel}\Gamma - 4n^2\Omega_{rel}^2 - \Lambda^2) \\ & \times \left[(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \cos(2n\Omega_{rel} t) \right. \\ & \left. + n \sin 2\beta \times \sin(2n\Omega_{rel} t) \right] \\ & \pm P \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} (2\Gamma\Lambda - 4n\Omega_{rel}\Gamma\Lambda) \times \sin(\Lambda t) \\ & \times \left[(\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \times \sin(2n\Omega_{rel} t) \right. \\ & \left. - n \sin 2\beta \times \cos(2n\Omega_{rel} t) \right]. \end{aligned} \quad (43-3)$$

با ضرب معادله فوق در $(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta)$ و با استفاده از رابطه مثلثاتی (۳۲-۳) و با توجه به تغییر متغیر $r_{n2}(t) = tr_{n1}(t)$ ، بخش حقیق مقادیر ویژه در سرعت $\Omega_{rel} \neq \Gamma / n$ به صورت زیر بیان

می‌شود.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(r_{n1})_{c,s} &= \frac{VN}{t} (\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \times \cos(\Lambda t) \\ &\pm \frac{P \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}}}{t} \times \left[(4n\Omega_{rel}\Gamma - 4n^2\Omega_{rel}^2 - \Lambda^2) \right. \\ &\quad \times \cos(\Lambda t) \times \sin(2n\Omega_{rel}t - \phi_2) \\ &\quad + (2\Gamma\Lambda - 4n\Omega_{rel}\Gamma\Lambda) \\ &\quad \left. \times \sin(\Lambda t) \times \sin(2n\Omega_{rel}t - \phi_1) \right]. \end{aligned} \quad (44-3)$$

۳-۶-۲- فنر با سختی به صورت تابع دندانه اره‌ای از زمان



شکل (۲-۳) تابع دندانه اره‌ای [۴۵]

تابع دندانه اره‌ای $f(t)$ (مطابق شکل (۲-۳)) با استفاده از رابطه زیر برحسب توابع هارمونیک بسط

داده می‌شود [۴۴].

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\Lambda t) \quad (45-3)$$

ضرایب b_m به شکل زیر بدست می‌آیند.

$$b_m = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(m\Lambda t) dt \quad (46-3)$$

با انتگرال گیری از معادله فوق در بازه انتگرال گیری $\left[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ خواهیم داشت.

$$f(t) = \frac{2At}{T} \quad (47-3)$$

با جایگزینی (47-3) در (46-3) و دانستن آن که $\Lambda t = 2\pi$ ، b_m به صورت زیر بدست می آید.

$$b_m = \frac{2AT \times [\sin(m\pi) - m\pi \cos(m\pi)]}{\pi^2 m^2} \quad (48-3)$$

از آنجا که $\cos(m\pi) = (-1)^m$ و $\sin(m\pi) = 0$ معادله بالا به صورت زیر قابل بیان است.

$$b_m = \frac{-2A}{m\pi} \times (-1)^m \quad (49-3)$$

در نهایت $f(t)$ برحسب توابع هارمونیک به صورت بسط زیر قابل بیان است.

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2A}{m\pi} \times (-1)^m \sin(m\Lambda t) \quad (50-3)$$

با جایگذاری $f(t)$ از رابطه فوق در رابطه (19-3) معادله حاکم بدست می آید و در ادامه r_{n2} مربوطه از رابطه زیر به دست می آید.

$$\ddot{r}_{n2} + 2i\Gamma \dot{r}_{n2} = \frac{-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2A}{m\pi} \times (-1)^m \sin(m\Lambda t)}{2\pi(1+n^2)} \left[N(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta + in \sin 2\beta) + \frac{\tilde{A}_n}{A_n} (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \sum_{j_1=1}^N e^{-2in(\theta_{j_1} + \Omega_{rel} t)} \right] \quad (51-3)$$

برای حل این معادله از روش تغییر پارامترها استفاده می شود. جواب های پایه معادله همگن متناظر به صورت زیر هستند.

$$(r_{n2})_1 = 1, (r_{n2})_2 = e^{-2i\Gamma t} \quad (52-3)$$

حل خصوصی رابطه (51-3) با روش تغییر پارامتر به شکل زیر است.

$$r_{n2} = -\int \frac{e^{-2i\Gamma t} \times f}{w(t)} dt + e^{-2i\Gamma t} \int \frac{f}{w(t)} dt \quad (53-3)$$

در این رابطه f همان عبارت سمت راست رابطه (51-3) و $w(t)$ رونسکین جوابها است که به

صورت زیر تعریف می‌شود.

$$w(t) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-2i\Gamma t} \\ 0 & -2i\Gamma e^{-2i\Gamma t} \end{vmatrix} = -2i\Gamma e^{-2i\Gamma t} \quad (54-3)$$

حال با حل رابطه (53-3) و در نهایت طبق تغییر متغیر $r_{n1}(t) = r_{n2}(t)/t$ می‌توان مقادیر جواب که مجموعی از بخش‌های حقیقی و موهومی است، بدست آورد.

۷-۳- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن

دوره‌ای

در این حالت زاویه β به صورت تابعی هارمونیک از زمان فرض شده است. در این حالت رابطه (19-2) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} K^{(1)} &= (k^* \sin(\cos(\Lambda t)) + k^* \cos(\cos(\Lambda t))) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ \frac{\partial k^*}{\partial \theta} \cos(\cos(\Lambda t)) \times (\sin(\cos(\Lambda t)) - \cos(\cos(\Lambda t))) \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (55-3)$$

با اعمال سختی ناشی از β متغیر معادله حاکم در زمان به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \ddot{r}_{n2} + 2i\Gamma \dot{r}_{n2} &= \frac{-1}{2\pi(1+n^2)} \left[N \times \left[\sin^2(\cos(\Lambda t)) + n^2 \cos^2(\cos(\Lambda t)) \right] \right. \\ &+ \frac{\tilde{A}_n}{A_n} \left[\sin^2(\cos(\Lambda t)) - n^2 \cos^2(\cos(\Lambda t)) + in \sin 2(\cos(\Lambda t)) \right] \\ &\left. \times \sum_{j_1=1}^N e^{-2in(\theta_{j_1} + \Omega_{rel} t)} \right] \end{aligned} \quad (56-3)$$

چنانچه مشاهده می‌شود حل تحلیلی برای معادله فوق موجود نمی‌باشد. این معادله در نرم افزار با استفاده از روش‌های عددی حل می‌شود.

نتایج عددی

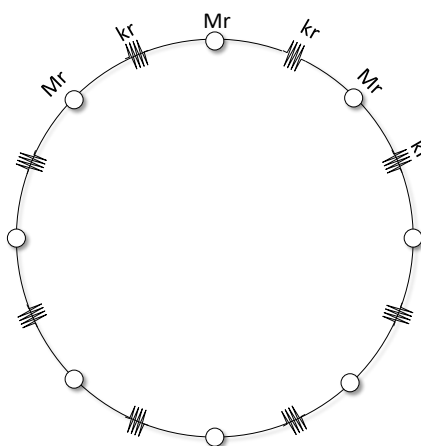
۱-۴- بررسی اثر دندان‌ها در ارتعاشات رینگ ثابت- بدون حضور نیروی

الکترومغناطیس

اگرچه روش‌های متعددی برای تحلیل رینگ به عنوان یک محیط پیوسته وجود دارد، اما استفاده از مدل‌های گسسته همانند جرم و فنر می‌تواند راه حلی سریع و مطمئن در تعیین خواص ارتعاشی رینگ محسوب شود. به دلیل کاهش حجم محاسبات و سادگی، این رویکرد توسط بسیاری از محققان استفاده می‌شود و روش خوبی برای یافتن فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و پاسخ‌های زمانی می‌باشد. برای استخراج مدل مناسب گسسته، ابتدا مدل جرم و فنر رینگ استخراج می‌شود و سپس اثر دندان‌ها به صورت جرم و فنر به مدل گسسته رینگ اضافه می‌شود.

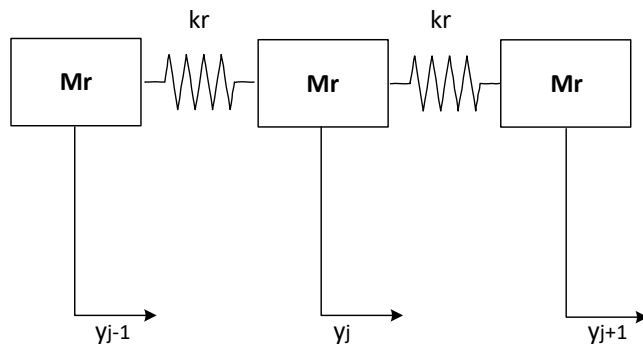
۱-۱-۴- مدل گسسته رینگ

مدل ارائه شده برای رینگ ساده به صورت زیر است. در مرجع [۴۷] برای تحلیل ارتعاشات دیسک‌های پره‌دار از مدل جرم و فنر استفاده شده است. مدل به کار رفته در مطالعه حاضر از مدل مذکور اقتباس شده است. که در شکل (۱-۴) آمده است.



شکل (۱-۴) مدل جرم و فنر برای رینگ ساده

به عنوان مثال، مدل گسسته خطی سه درجه آزادی از رینگ در شکل (۲-۴) نشان داده شده است.



شکل (۲-۴) ارتباط بین هر جرم با اجرام کناری در مدل گسسته رینگ ساده

معادله حرکت برای مدل جرم و فنر فوق به شکل زیر است.

$$M_r \ddot{x}_j + k_r (2x_j - x_{j-1} - x_{j+1}) = 0. \quad (۱-۴)$$

فرم ماتریسی رابطه فوق برای سه جرم و فنر به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} M_r & 0 & 0 \\ 0 & M_r & 0 \\ 0 & 0 & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_r & -k_r & -k_r \\ -k_r & 2k_r & -k_r \\ -k_r & -k_r & 2k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (۲-۴)$$

با فرض $x = A \cos(\omega t)$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 2k_r - M_r \omega^2 & -k_r & -k_r \\ -k_r & 2k_r - M_r \omega^2 & -k_r \\ -k_r & -k_r & 2k_r - M_r \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (۳-۴)$$

از مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله مشخصه سیستم حاصل می‌شود.

$$-M_r^3 \omega^6 + 6k_r M_r^2 \omega^4 - 9k_r^2 M_r \omega^2 = 0. \quad (۴-۴)$$

در نهایت از مساوی قرار دادن فرکانس‌های طبیعی رینگ (رابطه ۳-۵) با ریشه‌های معادله مشخصه

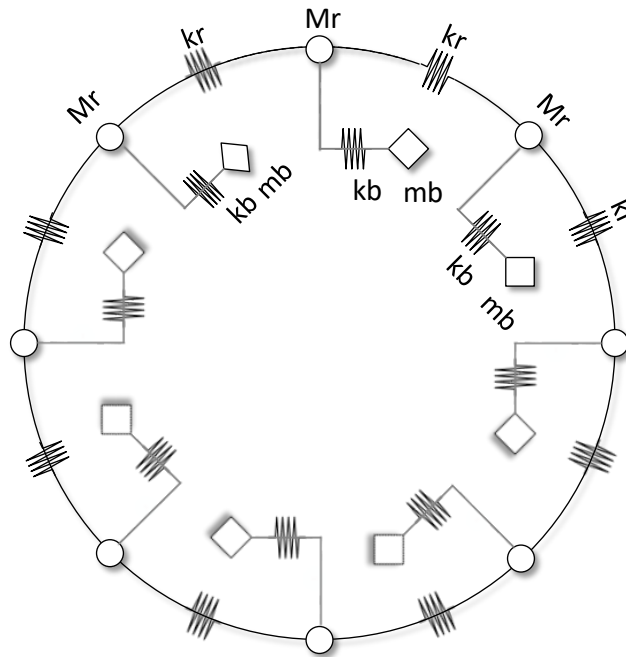
فوق، نسبت بین جرم و سختی گسسته به دست می‌آید.

۴-۱-۲- مدل گسسته استاتور دندانه‌دار

برای اضافه کردن اثر دندانه در مدل گسسته رینگ، از مدل شکل (۱-۴) استفاده می‌شود. در اینجا

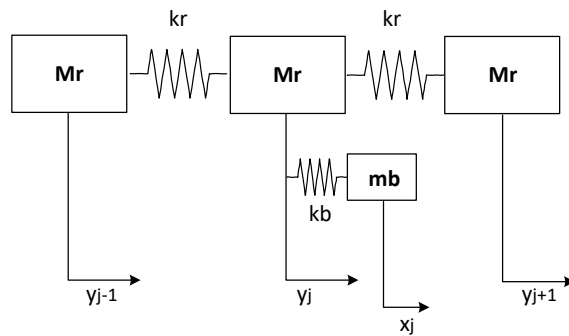
جرم و فنر با اندیس r نشان دهنده قسمت رینگ و همچنین جرم و فنر با اندیس b نشان دهنده

قسمت دندانها است.



شکل (۳-۴) مدل جرم فنر رینگ دارای دندانه

برای تعیین معادله حرکت، بخشی از مدل به شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۴-۴) ارتباط بین هر جرم با اجرام کناری در مدل گسسته رینگ دارای دندانه

انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم به شکل زیر بیان می‌شود.

$$KE = \frac{1}{2} M_r \dot{y}_j^2 + \frac{1}{2} M_r \dot{x}_j^2, \quad (۵-۴)$$

$$PE = \frac{1}{2} k_r (y_j - y_{j-1})^2 + \frac{1}{2} k_r (y_j - y_{j+1})^2 + \frac{1}{2} k_b (y_j - x_j)^2.$$

با استفاده از معادله لاگرانژ، معادله حرکت به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_j + k_b (x_j - y_j) &= 0, \\ M_r \ddot{y}_j + k_b (y_j - x_j) + k_r (2y_j - y_{j-1} - y_{j+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (۶-۴)$$

به عنوان مثال، برای رینگ با سه دندان معادلات حرکت سیستم گسسته معادل به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_1 + k_b (x_1 - y_1) &= 0 \\ M_r \ddot{y}_1 + k_b (y_1 - x_1) + k_r (2y_1 - y_3 - y_2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_2 + k_b (x_2 - y_2) &= 0 \\ M_r \ddot{y}_2 + k_b (y_2 - x_2) + k_r (2y_2 - y_1 - y_3) &= 0 \end{aligned} \quad (۷-۴)$$

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_3 + k_b (x_3 - y_3) &= 0 \\ M_r \ddot{y}_3 + k_b (y_3 - x_3) + k_r (2y_3 - y_2 - y_1) &= 0. \end{aligned}$$

فرم ماتریسی معادله فوق به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_b & 0 & 0 & -k_b & 0 & 0 \\ 0 & k_b & 0 & 0 & -k_b & 0 \\ 0 & 0 & k_b & 0 & 0 & -k_b \\ -k_b & 0 & 0 & k_b + 2k_r & -k_r & -k_r \\ 0 & -k_b & 0 & -k_r & k_b + 2k_r & -k_r \\ 0 & 0 & -k_b & -k_r & -k_r & k_b + 2k_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (۸-۴)$$

با فرض $x = A \cos(\omega t)$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} k_b - m_b \omega^2 & 0 & 0 & -k_b & 0 & 0 \\ 0 & k_b - m_b \omega^2 & 0 & 0 & -k_b & 0 \\ 0 & 0 & k_b - m_b \omega^2 & 0 & 0 & -k_b \\ -k_b & 0 & 0 & k_b + 2k_r - M_r \omega^2 & -k_r & -k_r \\ 0 & -k_b & 0 & -k_r & k_b + 2k_r - M_r \omega^2 & -k_r \\ 0 & 0 & -k_b & -k_r & -k_r & k_b + 2k_r - M_r \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (۹-۴)$$

با استفاده از نتایج رینگ ساده:

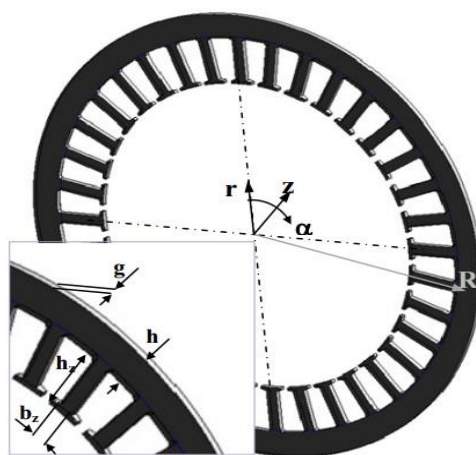
$$\begin{bmatrix} \frac{k_b}{m_b} - \omega^2 & 0 & 0 & \frac{-k_b}{m_b} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_b}{m_b} - \omega^2 & 0 & 0 & \frac{-k_b}{m_b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_b}{m_b} - \omega^2 & 0 & 0 & \frac{-k_b}{m_b} \\ \frac{-k_b}{M_r} & 0 & 0 & \frac{k_b}{M_r} + \frac{2k_r}{M_r} - \omega^2 & \frac{-k_r}{M_r} & \frac{-k_r}{M_r} \\ 0 & \frac{-k_b}{M_r} & 0 & \frac{-k_r}{M_r} & \frac{k_b}{M_r} + \frac{2k_{dr}}{M_r} - \omega^2 & \frac{-k_r}{M_r} \\ 0 & 0 & \frac{-k_b}{M_r} & \frac{-k_r}{M_r} & \frac{-k_r}{M_r} & \frac{k_b}{M_r} + \frac{2k_r}{M_r} - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10-4)$$

اثر کوپل در سختی دندانه‌ها بر جرم رینگ با استفاده از روش ضرب زنجیره‌ای به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\frac{k_b}{M_r} = \frac{k_b}{m_b} \times \frac{m_b}{M_r} \quad (11-4)$$

از آنجایی که جنس استاتور همگن است در نتیجه چگالی رینگ و دندانه برابر خواهد بود.

$$\rho_r = \rho_b \Rightarrow \frac{M_r}{V_r} = \frac{m_b}{V_b} \quad (12-4)$$



شکل (۵-۴) نمای استاتور ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب [۱۴]

حجم رینگ و دندانه با توجه به شکل (۵-۴) به صورت زیر است.

$$V_r = g\pi(R + \frac{h}{2})^2 - g\pi(R - \frac{h}{2})^2. \quad (13-4)$$

$$V_b = b_z h_z g.$$

در نتیجه نسبت جرم دندان به رینگ به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{m_b}{M_r} = \frac{b_z h_z}{2\pi R h}. \quad (14-4)$$

با استفاده از نسبت جرم دندان به جرم رینگ، روش ضرب زنجیره‌ای و جایگزینی در ماتریس (۴-۱۰) فرکانس‌های طبیعی سیستم بدست خواهد آمد.

۴-۱-۳- اضافه کردن اثر سیم پیچی مس با استفاده از خواص جرمی و هندسی استاتور

در ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب در اطراف دندان‌های استاتور سیم پیچی مسی قرار دارد که این سیم پیچ‌ها در ارتعاشات این دندان‌ها و استاتور اثر به سزایی دارند که بررسی آن‌ها در خور توجه است.

حجم قسمت سیم پیچ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} ve &= g\pi(R - (h/2))^2 - \pi g(R - ((h/2) + h_z))^2 \\ vb_{all} &= nb_z h_z g \\ vc_{all} &= ve - vb_{all} \\ vc &= \frac{vc_{all}}{n}. \end{aligned} \quad (15-4)$$

که در آن ve حجم دندان‌ها به همراه حجم سیم پیچی مسی اطراف آنها، vb حجم دندان‌های مربوط و vc حجم سیم پیچی اطراف هر دندان می باشد (بافرض کامل بودن فضای اطراف دندان‌ها توسط مس).

با اضافه کردن جرم مس به ماتریس (۴-۱۰) به صورت زیر داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{k_b}{m_b+m_c} - \omega^2 & 0 & 0 & \frac{-k_b}{m_b+m_c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_b}{m_b+m_c} - \omega^2 & 0 & 0 & \frac{-k_b}{m_b+m_c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_b}{m_b+m_c} - \omega^2 & 0 & 0 & \frac{-k_b}{m_b+m_c} \\ \frac{-k_b}{M_d} & 0 & 0 & \frac{k_b}{M_d} + \frac{2k_d}{M_d} - \omega^2 & \frac{-k_d}{M_d} & \frac{-k_d}{M_d} \\ 0 & \frac{-k_b}{M_d} & 0 & -0.001284 & \frac{k_b}{M_d} + \frac{2k_d}{M_d} - \omega^2 & \frac{-k_d}{M_d} \\ 0 & 0 & \frac{-k_b}{M_d} & \frac{-k_d}{M_d} & \frac{-k_d}{M_d} & \frac{k_b}{M_d} + \frac{2k_d}{M_d} - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16-4)$$

که با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب ابتدا نسبت سختی به جرم و در نهایت فرکانس طبیعی بدست خواهد آمد.

۴-۱-۴- نتایج عددی برای بررسی اثر دندان‌ها در ارتعاشات رینگ ثابت- بدون حضور نیروی

الکترومغناطیس

ابعاد هندسی رینگ و دندان‌ها و همچنین فرکانس طبیعی بدست آمده با استفاده از نتایج حل

تحلیلی در مرجع [۱۴] به صورت زیر است.

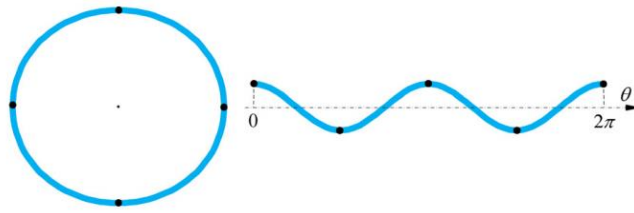
جدول (۱-۴) مشخصات هندسی رینگ، دندان‌ها و فرکانس رینگ

۰/۰۰۸(m)	شعاع (R)	رینگ
۰/۰۱(m)	ضخامت (h)	
۰/۰۰۴(m)	عرض دندان (b _z)	دندان
۰/۰۱۸(m)	طول دندان (h _z)	
۴۷/۵۲۷۲	سیستم بدون دندان	فرکانس طبیعی به ازای شماره مود ۲
۴۷/۴۲۸۸	سیستم با ۳ دندان	

۴-۱-۴-۱- سیستم رینگ ثابت دندان‌دار بدون سیم پیچ

در این بخش به بررسی اثر اندرکنش دندان‌ها بر یوغ به ازای تعداد دندان‌ها ۶ و ۸ پرداخته شده

است. در مود شماره ۲، رینگ مطابق شکل (۷-۴) دارای دو لوب داخلی و دو لوب خارجی است.



شکل (۴-۶) تغییرات شکل مود رینگ به ازای شماره مود ۲ [۴۳]

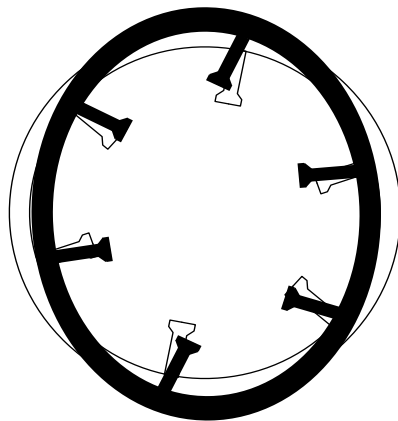
بررسی اثر اندرکنش رینگ و دندان در ارتعاشات استاتور با تعداد دندان ۶

در این حالت بردارهای ویژه سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرند. بررسی ارقام مرتبط با هر جرم در بردار ویژه می‌تواند نحوه حرکت کلی سیستم را در آن مود مشخص نشان دهد. از آنجا که سیستم دارای تقارن دوره‌ای است، با بررسی بردارهای ویژه حرکت زیر بخش‌های سیستم نیز مشخص می‌شوند. بدیهی است که بخشی از درایه‌های هر بردار ویژه مربوط به جرم دندانها و بخشی مربوط به جرم یوغ است. برهم خوردن نظام تغییرات حرکت رینگ و دندان باعث ظهور فرکانس متفاوتی در سیستم می‌شود که بررسی آن را بسیار حائز اهمیت می‌کند.

جدول (۴-۲) بردارهای ویژه و فرکانسهای طبیعی سیستم گسسته رینگ با ۶ دندان مرتبط با مود دوم رینگ

فرکانس طبیعی	۰	۳۰/۱۵۹۶	۴۷/۲۸۸	۴۷/۱۰۴	۴۷/۴۲۸۸	۳۰/۱۵۹۶
درایه‌های مربوط به اثر متقابل دندانه‌ها بر یکدیگر	۰/۲۳۵۰۱۵	۰/۷۸۷۷۷۷	-۰/۹۱۲۶	-۰/۴۰۸۲۳	۰/۰۵۴۴۸۴	-۰/۰۴۲۱۱
	۰/۲۳۵۰۱۵	-۰/۱۵۷۵۶	۰/۱۸۲۵۲	-۰/۴۰۸۲۳	-۰/۲۴۸۵	-۰/۳۰۳۲
	۰/۲۳۵۰۱۵	-۰/۱۵۷۵۶	۰/۱۸۲۵۲	-۰/۴۰۸۲۳	-۰/۱۸۹۴۷	۰/۳۹۱۳۹۳
	۰/۲۳۵۰۱۵	-۰/۱۵۷۵۶	۰/۱۸۲۵۲	-۰/۴۰۸۲۳	۰/۸۸۰۴۹۶	۰/۵۶۰۳۱۹
	۰/۲۳۵۰۱۵	-۰/۱۵۷۵۶	۰/۱۸۲۵۲	-۰/۴۰۸۲۳	-۰/۲۴۸۵	-۰/۳۰۳۲
درایه‌های مربوط به اثر متقابل رینگ و دندان	۰/۳۳۳۸۱۸	۰/۴۶۱۲۳۸	۰/۰۲۲۳۲۶	۰/۰۰۴۱۱۷	-۰/۰۰۱۳۳	-۰/۰۲۴۶۵
	۰/۳۳۳۸۱۸	-۰/۰۹۲۲۵	-۰/۰۰۴۴۷	۰/۰۰۴۱۱۷	۰/۰۰۶۰۸	-۰/۱۷۷۵۲
	۰/۳۳۳۸۱۸	-۰/۰۹۲۲۵	-۰/۰۰۴۴۷	۰/۰۰۴۱۱۷	۰/۰۰۴۶۳۵	۰/۲۲۹۱۵۸
	۰/۳۳۳۸۱۸	-۰/۰۹۲۲۵	-۰/۰۰۴۴۷	۰/۰۰۴۱۱۷	-۰/۰۲۱۵۴	۰/۳۲۸۰۶۳
	۰/۳۳۳۸۱۸	-۰/۰۹۲۲۵	-۰/۰۰۴۴۷	۰/۰۰۴۱۱۷	۰/۰۰۶۰۸	-۰/۱۷۷۵۲
۰/۳۳۳۸۱۸	-۰/۰۹۲۲۵	-۰/۰۰۴۴۷	۰/۰۰۴۱۱۷	۰/۰۰۶۰۸	-۰/۱۷۷۵۲	

همانطور که در جدول (۲-۴) مشاهده می‌شود تغییرات شکل موده‌های استاتور دارای ۶ دندانه به ازای شماره مود ۲ مطابق شکل (۶-۴) اتفاق خواهد افتاد به نحوی که تغییر شکل دندانه در خلاف جهت حرکت بخش بیرونی یوغ می‌شود که این نکته فقط در فرکانس ۴۷/۴۲۸۸ اتفاق می‌افتد که همان فرکانس موجود در حل تحلیلی است. شماتیک این تغییرات در شکل (۷-۴) نشان داده شده است.



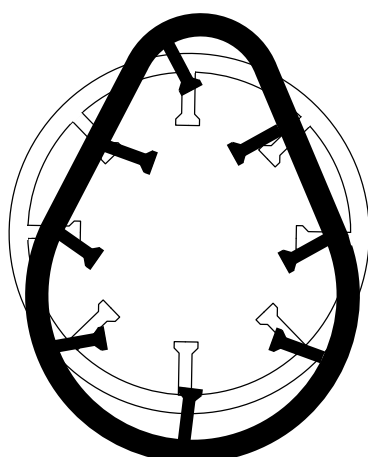
شکل (۷-۴) تغییرات شکل مود دوم رینگ دارای ۶ دندانه به ازای فرکانس طبیعی ۴۷/۴۲۸۸ همانگونه که ملاحظه می‌شود در جدول (۲-۴) انواع حرکت‌های ممکن مربوط به یوغ و دندانه در حضور تقارن دوره‌ای ظاهر شده‌اند. نکته اصلی آن است که هر نظام حرکتی بین یوغ و دندانه‌ها دارای فرکانس طبیعی متفاوتی است.

بررسی اثر اندرکنش رینگ و دندان در ارتعاشات استاتور با تعداد دندان ۸

جدول (۳-۴) بردارهای ویژه و فرکانس‌های طبیعی سیستم گسسته رینگ با ۸ دندان مرتبط با مود دوم رینگ

فرکانس طبیعی	۰	۳۰/۱۵۹	۴۷/۰۳۵	۴۷/۴۲۸	۴۷/۴۲۸	۳۰/۱۵۹	۳۰/۱۵۹	۴۷/۴۲۸
درایه‌های مربوط به اثر متقابل دندان‌ها بر یکدیگر	۰/۱۷۹۱	۰/۸۰۷۲	-۰/۳۵۳۵	۰/۶۶۱۳	۰/۶۶۱۳	۰/۰۸۶۷	۰/۰۸۹۵	-۰/۲۴۹۹
	۰/۱۷۹۱	-۰/۱۱۵۳	-۰/۳۵۳۵	۰/۰۵۶۲	-۰/۲۴۵۱	-۰/۰۴۱۳	۰/۲۱۵۷	۰/۰۰۳۸
	۰/۱۷۹۱	-۰/۱۱۵۳	-۰/۳۵۳۵	-۰/۱۹۹۸	۰/۰۱۰۹	۰/۲۰۰۳	-۰/۰۹۱۲	۰/۱۲۰۳
	۰/۱۷۹۱	-۰/۱۱۵۳	-۰/۳۵۳۵	-۰/۷۱۳۵	۰/۵۲۴۵	۰/۵۷۲۰	-۰/۰۳۹۲	-۰/۰۴۸۵
	۰/۱۷۹۱	-۰/۱۱۵۳	-۰/۳۵۳۵	۰/۰۵۶۲	-۰/۲۴۵۱	-۰/۰۴۱۳	۰/۳۳۰۳	-۰/۶۵۵۸
	۰/۱۷۹۱	-۰/۱۱۵۳	-۰/۳۵۳۵	۰/۰۵۶۲	-۰/۲۴۵۱	-۰/۰۴۱۳	۰/۲۳۷۹	-۰/۰۹۶۶
	۰/۱۷۹۱	-۰/۱۱۵۳	-۰/۳۵۳۵	۰/۰۵۱۴	-۰/۲۴۰۳	-۰/۱۵۰۱	-۰/۰۲۶۲	۰/۶۲۳۶
۰/۱۷۹۱	-۰/۱۱۵۳	-۰/۳۵۳۵	۰/۰۳۲۱	-۰/۲۲۱۰	-۰/۵۸۵۰	-۰/۷۱۶۹	۰/۳۰۳۰	
درایه‌های مربوط به اثر متقابل رینگ و دندان	۰/۳۰۴۸	۰/۴۷۲۶	۰/۰۰۳۰	-۰/۰۱۶۲	-۰/۰۱۶۲	۰/۰۵۰۷	۰/۰۵۲۴	۰/۰۰۶۱
	۰/۳۰۴۸	-۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۳۰	-۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۶۰	-۰/۰۲۴۲	۰/۱۲۶۳	-۰/۰۰۰۱
	۰/۳۰۴۸	-۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۴۹	-۰/۰۰۰۳	۰/۱۱۷۳	-۰/۰۵۳۴	-۰/۰۰۲۹
	۰/۳۰۴۸	-۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۳۰	۰/۰۱۷۵	-۰/۰۱۲۸	۰/۳۳۴۹	-۰/۰۲۳۰	۰/۰۰۱۲
	۰/۳۰۴۸	-۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۳۰	-۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۶۰	-۰/۰۲۴۲	۰/۱۹۳۴	۰/۰۱۶۰
	۰/۳۰۴۸	-۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۳۰	-۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۶۰	-۰/۰۲۴۲	۰/۱۳۹۳	۰/۰۰۲۴
	۰/۳۰۴۸	-۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۳۰	-۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۵۹	-۰/۰۸۷۹	-۰/۰۱۵۳	-۰/۰۱۵۳
۰/۳۰۴۸	-۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۳۰	-۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۵۴	-۰/۳۴۲۵	-۰/۴۱۹۷	-۰/۰۰۷۴	

همانطور که در جدول (۳-۴) مشاهده می‌شود تغییرات شکل مودهای استاتور دارای ۸ دندان به ازای شماره مود ۲ مطابق شکل (۴-۶) اتفاق خواهد افتاد به نحوی که تغییر شکل دندان در خلاف جهت حرکت بخش بیرونی یوغ می‌شود که این نکته فقط در فرکانس ۴۷/۴۲۸ اتفاق می‌افتد که همان فرکانس موجود در حل تحلیلی است. شماتیک این تغییرات در شکل (۴-۸) نشان داده شده است.



شکل (۴-۸) تغییرات شکل مود دوم رینگ دارای ۸ دندان به ازای فرکانس طبیعی ۴۷/۴۲۸

۴-۱-۲- سیستم رینگ ثابت دندانه‌دار با در نظر گرفتن اثر سیم پیچی

بررسی اثر اندرکنش رینگ و دندانه در ارتعاشات استاتور با تعداد ۶ دندان و سیم پیچ

جدول (۴-۴) بردارهای ویژه و فرکانس‌های طبیعی سیستم گسسته رینگ با ۶ دندان و سیم پیچ مرتبط با مود دوم رینگ

فرکانس طبیعی	۰	۲۹/۴۷۰۸	۴۷/۴۲۸	۴۶/۴۴۴۸	۲۹/۴۷۰۸	۴۷/۴۲۸
	-۰/۲۳۳۷۱	-۰/۷۸۷۷۸	۰/۹۱۰۳۴۱	-۰/۴۰۸۱	-۰/۰۵۰۶	-۰/۰۸۷۹
	-۰/۲۳۳۷۱	۰/۱۵۷۵۵۵	-۰/۱۸۲۰۷	-۰/۴۰۸۱	-۰/۱۵۱۷	۰/۰۴۹۳۳
درایه‌های مربوط به اثر متقابل دندانه‌ها بر یکدیگر	-۰/۲۳۳۷۱	۰/۱۵۷۵۵۵	-۰/۱۸۲۰۷	-۰/۴۰۸۱	۰/۷۷۵	۰/۷۰۱۲۸
	-۰/۲۳۳۷۱	۰/۱۵۷۵۵۵	-۰/۱۸۲۰۷	-۰/۴۰۸۱	-۰/۲۶۹۲	-۰/۱۰۳۹
	-۰/۲۳۳۷۱	۰/۱۵۷۵۵۵	-۰/۱۸۲۰۷	-۰/۴۰۸۱	-۰/۱۵۱۷	-۰/۶۸۲۹
	-۰/۲۳۳۷۱	۰/۱۵۷۵۵۵	-۰/۱۸۲۰۷	-۰/۴۰۸۱	-۰/۱۵۱۷	۰/۱۲۴۰۳
	-۰/۳۳۴۷۳	-۰/۴۶۱۲۴	-۰/۰۶۷۹۱	۰/۰۱۲۴۴	-۰/۰۲۹۶	۰/۰۰۶۵۶
	-۰/۳۳۴۷۳	۰/۰۹۲۲۴۸	۰/۰۱۳۵۸۳	۰/۰۱۲۴۴	-۰/۰۸۸۸	-۰/۰۰۳۷
درایه‌های مربوط به اثر متقابل رینگ و دندانه	-۰/۳۳۴۷۳	۰/۰۹۲۲۴۸	۰/۰۱۳۵۸۳	۰/۰۱۲۴۴	۰/۴۵۳۷۵	-۰/۰۵۲۳
	-۰/۳۳۴۷۳	۰/۰۹۲۲۴۸	۰/۰۱۳۵۸۳	۰/۰۱۲۴۴	-۰/۱۵۷۶	۰/۰۰۷۷۵
	-۰/۳۳۴۷۳	۰/۰۹۲۲۴۸	۰/۰۱۳۵۸۳	۰/۰۱۲۴۴	-۰/۰۸۸۸	۰/۰۵۰۹۵
	-۰/۳۳۴۷۳	۰/۰۹۲۲۴۸	۰/۰۱۳۵۸۳	۰/۰۱۲۴۴	-۰/۰۸۸۸	-۰/۰۰۹۳

همانطور که در جدول (۴-۶) مشاهده می‌شود تغییرات شکل مودهای استاتور دارای ۶ دندان و سیم

پیچ به ازای شماره مود ۲ مطابق شکل (۴-۶) اتفاق خواهد افتاد به نحوی که تغییر شکل دندانه در خلاف جهت حرکت بخش بیرونی یوغ می‌شود که این نکته فقط در فرکانس ۴۷/۴۲۸ اتفاق می‌افتد.

بررسی اثر اندرکنش رینگ و دندانه در ارتعاشات استاتور با تعداد ۸ دندانه و سیم پیچ

جدول (۴-۵) بردارهای ویژه و فرکانس‌های طبیعی سیستم گسسته رینگ با ۸ دندانه و سیم پیچ مرتبط با مود دوم رینگ

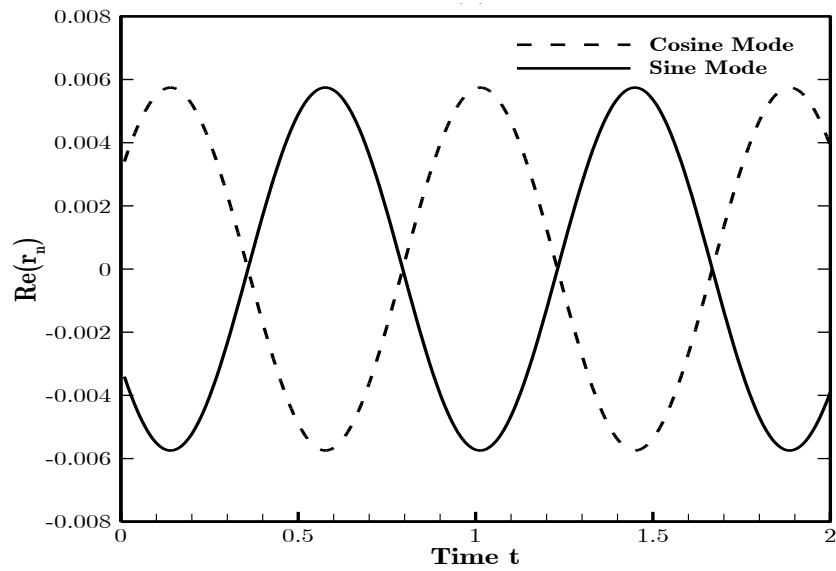
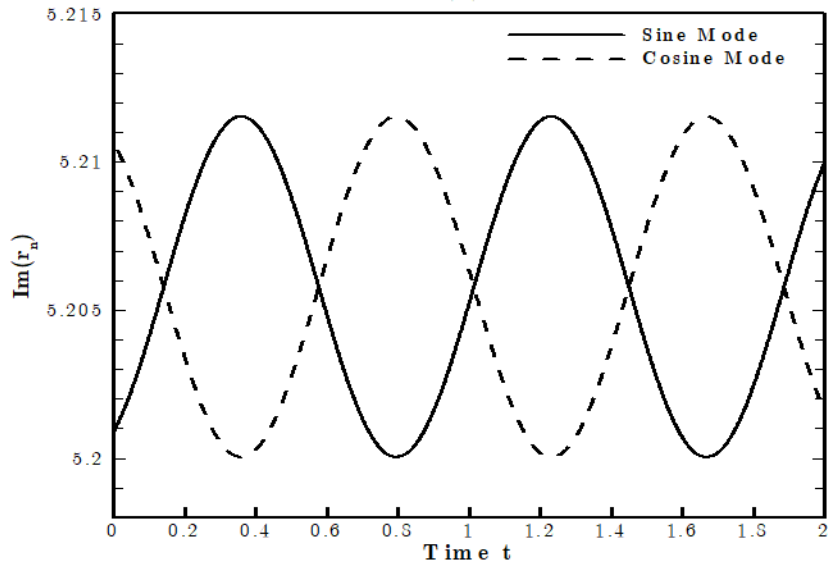
فرکانس طبیعی	۰	۲۹/۴۷۰	۴۷/۴۲۸	۴۶/۳۴۶	۴۷/۴۲۸	۴۷/۴۲۸	۲۹/۴۷۰	۲۹/۴۷۰
درایه‌های مربوط به اثر متقابل دندانه‌ها بر یکدیگر	-۰/۱۷۷۴	-۰/۸۰۷۲	۰/۹۳۲۸	-۰/۳۵۳۴	۰/۱۳۳۹	-۰/۲۹۰۴	۰/۲۶۰۲	۰/۰۰۴۱
	-۰/۱۷۷۴	۰/۱۱۵۳	-۰/۱۳۳۳	-۰/۳۵۳۴	۰/۰۲۶۱	۰/۰۸۹۶	-۰/۴۰۷۵	-۰/۱۵۲۶
	-۰/۱۷۷۴	۰/۱۱۵۳	-۰/۱۳۳۳	-۰/۳۵۳۴	۰/۱۰۲۳	۰/۶۹۵۴	-۰/۰۹۱۱	-۰/۲۵۰۹
	-۰/۱۷۷۴	۰/۱۱۵۳	-۰/۱۳۳۳	-۰/۳۵۳۴	۰/۷۳۰۷	-۰/۰۸۴۷	-۰/۴۶۴۵	۰/۴۵۹۱
	-۰/۱۷۷۴	۰/۱۱۵۳	-۰/۱۳۳۳	-۰/۳۵۳۴	-۰/۶۱۰۸	-۰/۶۲۷۵	۰/۰۵۹۱	-۰/۳۳۳۸
	-۰/۱۷۷۴	۰/۱۱۵۳	-۰/۱۳۳۳	-۰/۳۵۳۴	-۰/۱۱۰۸	۰/۰۴۷۳	۰/۰۵۹۱	-۰/۳۰۴۳
	-۰/۱۷۷۴	۰/۱۱۵۳	-۰/۱۳۳۳	-۰/۳۵۳۴	-۰/۰۶۷۶	۰/۱۰۵۷	۰/۰۵۹۱	۰/۰۹۳۹
	-۰/۱۷۷۴	۰/۱۱۵۳	-۰/۱۳۳۳	-۰/۳۵۳۴	-۰/۲۰۳۸	۰/۰۶۴۵	۰/۵۲۵۷	۰/۴۸۴۶
درایه‌های مربوط به اثر متقابل رینگ و دندانه	-۰/۳۰۵۸	-۰/۴۷۲۶	-۰/۰۶۹۶	۰/۰۰۹۰	-۰/۰۱۰۰	۰/۰۲۱۷	۰/۱۵۲۴	۰/۰۰۲۴
	-۰/۳۰۵۸	۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۰	-۰/۰۰۱۹	-۰/۰۰۶۷	-۰/۲۳۸۶	-۰/۰۸۹۴
	-۰/۳۰۵۸	۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۰	-۰/۰۰۷۶	-۰/۰۰۵۱۹	-۰/۰۵۳۴	-۰/۱۴۶۹
	-۰/۳۰۵۸	۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۰	-۰/۰۰۵۴۵	۰/۰۰۰۶۳	-۰/۲۷۲۰	۰/۲۶۸۸
	-۰/۳۰۵۸	۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۰	۰/۰۴۵۶	۰/۰۴۶۸	۰/۰۳۴۶	-۰/۱۹۵۴
	-۰/۳۰۵۸	۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۸۳	-۰/۰۰۳۵	۰/۰۳۴۶	-۰/۱۷۸۲
	-۰/۳۰۵۸	۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۵۰	-۰/۰۰۷۹	۰/۰۳۴۶	۰/۰۵۵۰
-۰/۳۰۵۸	۰/۰۶۷۵	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۹۰	۰/۰۱۵۲	-۰/۰۰۴۸	۰/۳۰۷۸	۰/۲۸۳۷	

همانطور که در جدول (۴-۷) مشاهده می‌شود تغییرات شکل مودهای استاتور دارای ۸ دندانه و سیم پیچ به ازای شماره مود ۲ مطابق شکل (۴-۶) اتفاق خواهد افتاد به نحوی که تغییر شکل دندانه در خلاف جهت حرکت بخش بیرونی یوغ می‌شود که این نکته فقط در فرکانس ۴۷/۴۲۸ اتفاق می‌افتد.

۲-۴- سیستم رینگ و فنر با سختی ثابت و با تقارن دوره‌ای

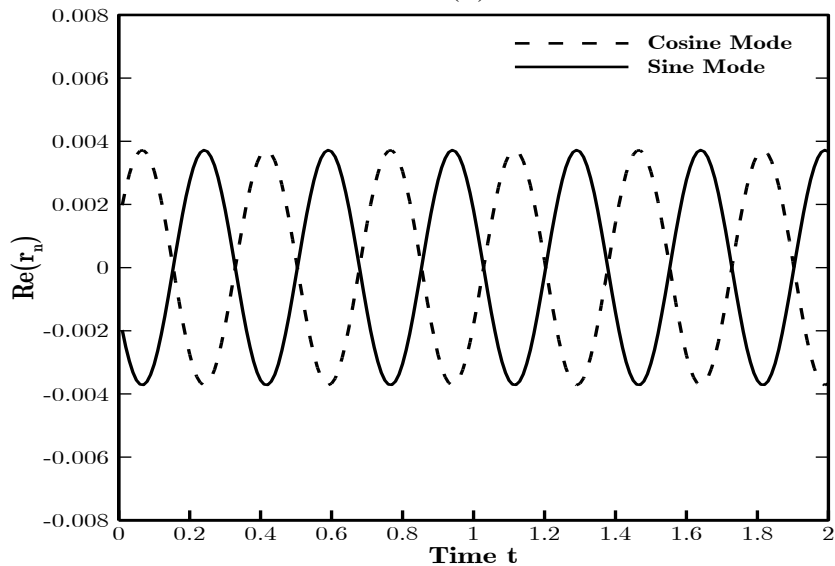
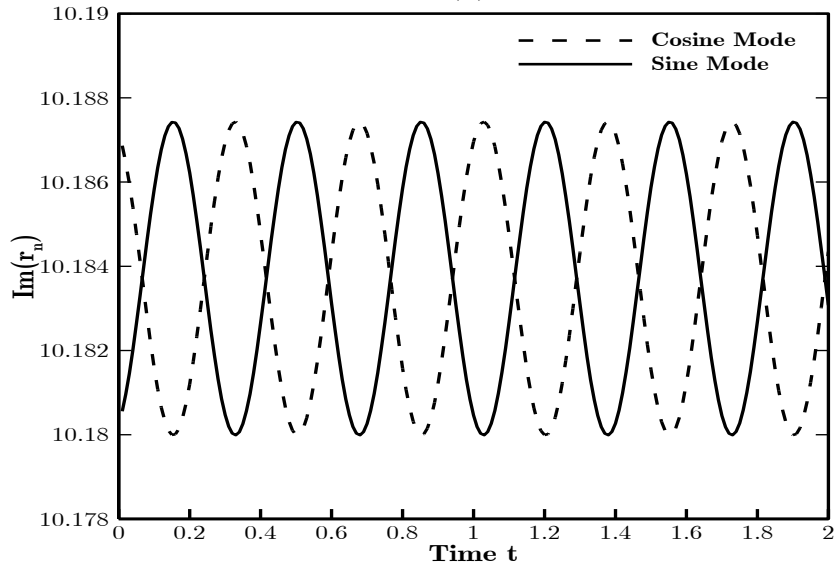
در این بخش سیستم رینگ و فنر با سختی ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این بخش دارای همخوانی و انطباق کامل با نتایج ارائه شده در مرجع [۴۱] است که بیانگر صحت نتایج و روند محاسبات در پایان‌نامه است.

شکل‌های (۹-۴) و (۱۰-۴) به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ و $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ براساس رابطه (۱۴-۳) نشان می‌دهد. همچنان که ملاحظه می‌شود به علت آنکه $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ و $2n/N$ عدد صحیح می‌باشد، موده‌های کسینوسی و سینوسی دارای فرکانس‌های متفاوت هستند و در واقع افتراق مودها صورت گرفته است. در این حالت فرکانس مودها در اطراف مقدار مشخصی به صورت هارمونیک نوسان می‌کند. همچنین مقدار مثبت بخش حقیقی مقادیر ویژه بیانگر وجود ناپایداری در سیستم است. همانگونه که مشاهده می‌شود، پدیده افتراق همراه با ناپایداری در سیستم است.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 3.8, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۹-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان

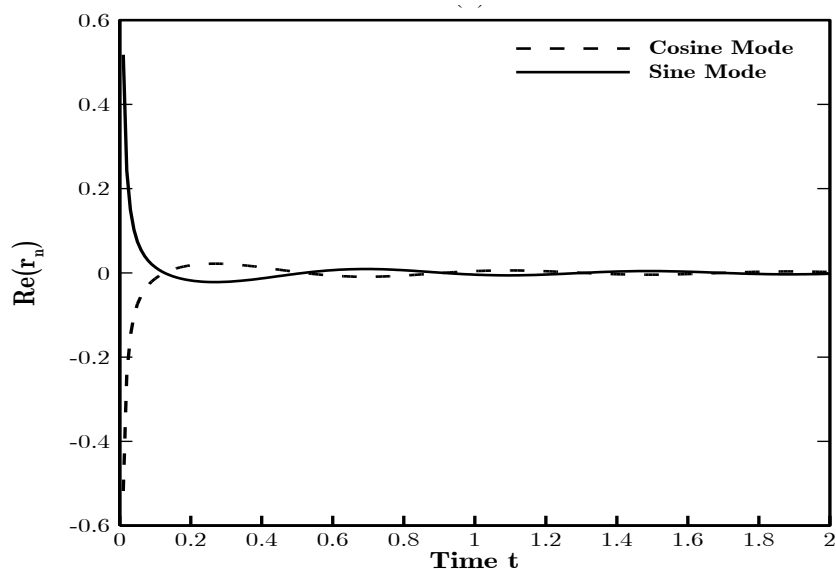
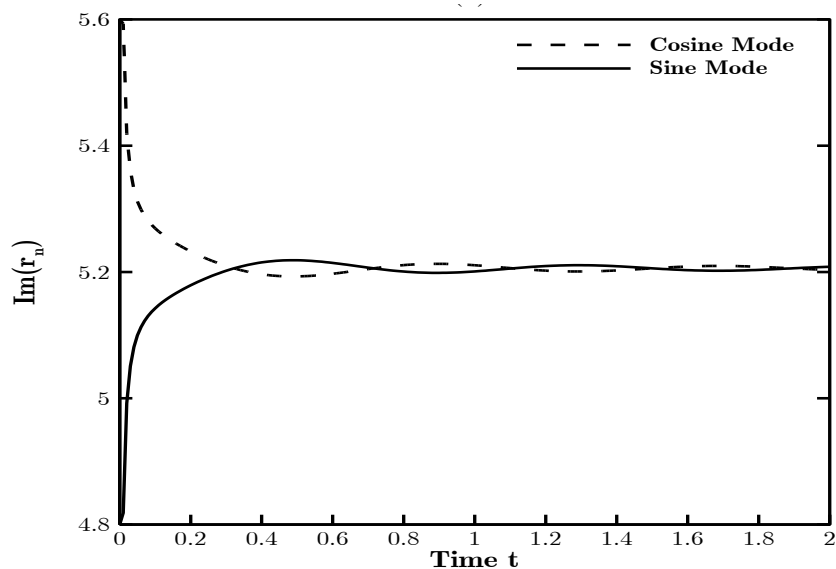


$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4.99, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۱۰) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان

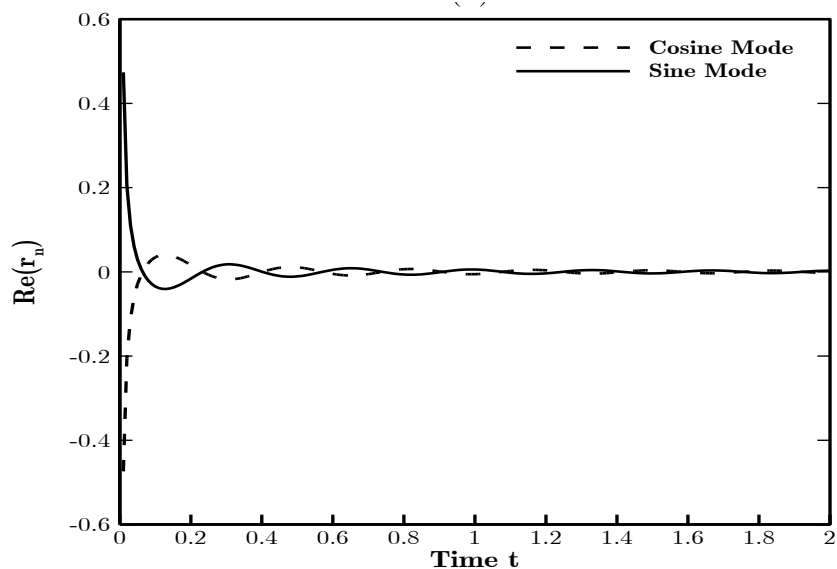
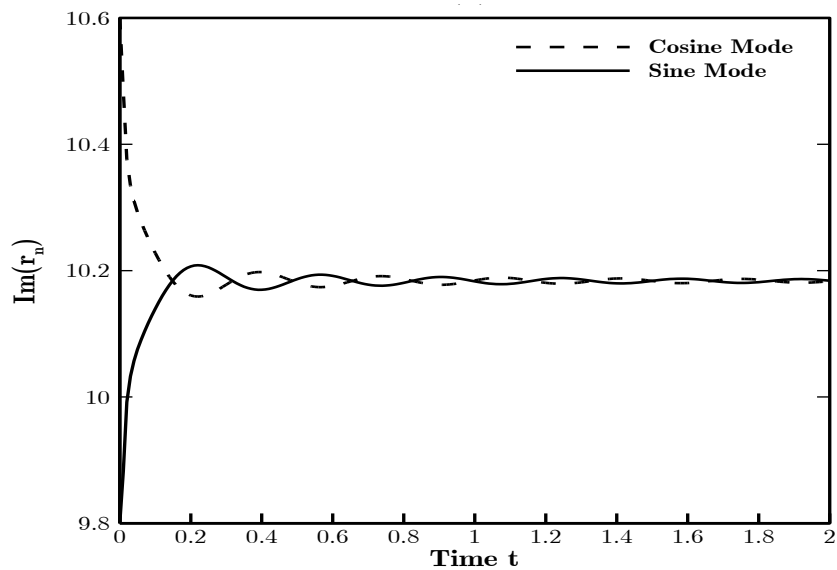
تغییرات مقادیر موهومی و حقیقی مقادیر ویژه شکل مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم در حالتیکه $\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$ به ترتیب در شکل‌های (۴-۱۱) و (۴-۱۲) آمده است همانگونه که ملاحظه می‌شود در این حالت، نحوه تغییرات فرکانس مدها در زمان دگرگون شده و فرکانس مدهای

سینوسی و کسینوسی به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. بررسی بخش حقیقی مقادیر ویژه نشان می‌دهد که در این حالت پدیده افتراق از بین می‌رود و با تکراری شدن مدهای سینوسی و کسینوسی مقادیر حقیقی به مقدار صفر نزدیک می‌شوند.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۱۱) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان



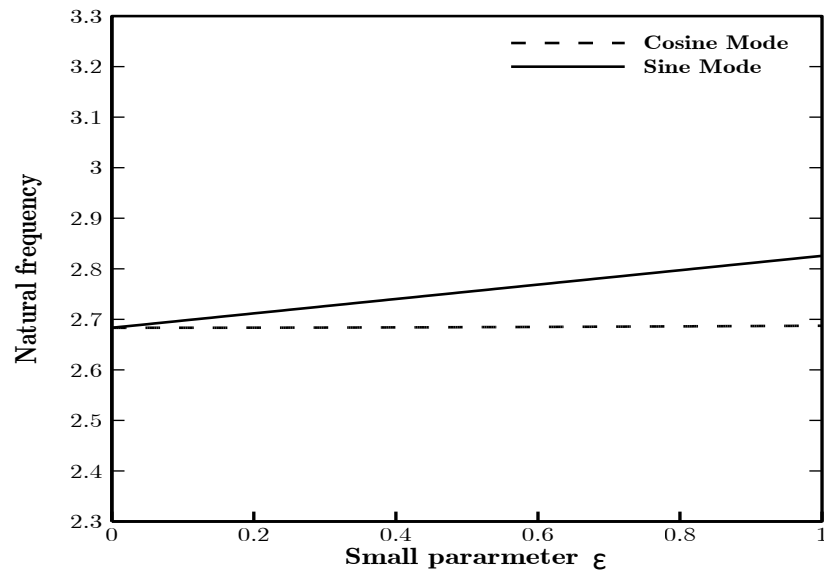
$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 5.1, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۱۲-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان

۳-۴ بررسی اثر ضریب سختی در سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای

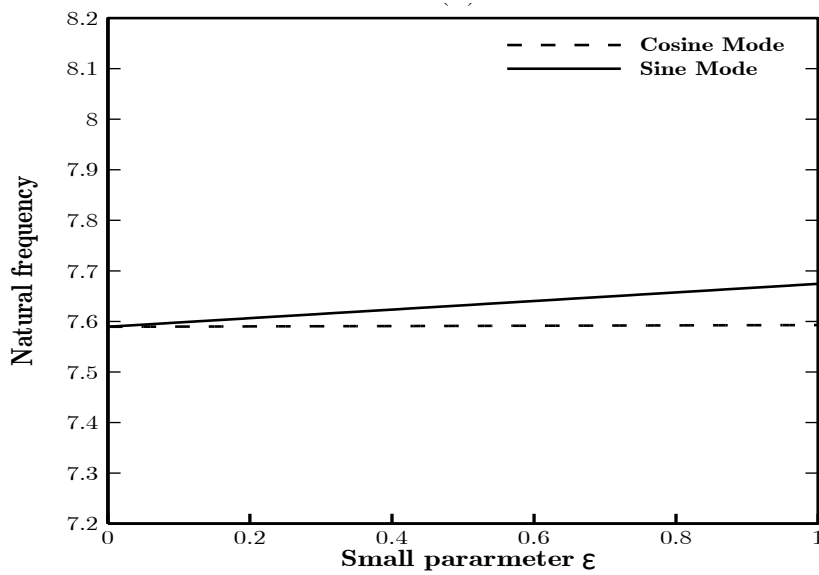
شکل‌های (۱۳-۴) و (۱۴-۴) اثر تغییرات مقادیر کوچک ε در فرکانس مدهای سینوسی و کسینوسی را به ازای مقادیر $\{n, N\} = \{2, 4\}$ و $\{n, N\} = \{3, 6\}$ برای سیستم در حالت پایا نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، افزایش مقدار ε در حالت باعث افزایش فرکانس طبیعی

سیستم می شود.



$$n = 2, N = 4, \Omega_p = 0, \Omega_v = 0, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۱۳) تغییرات فرکانس مدهای سینوسی و کسینوسی به ازای تغییر ضریب سختی فنر

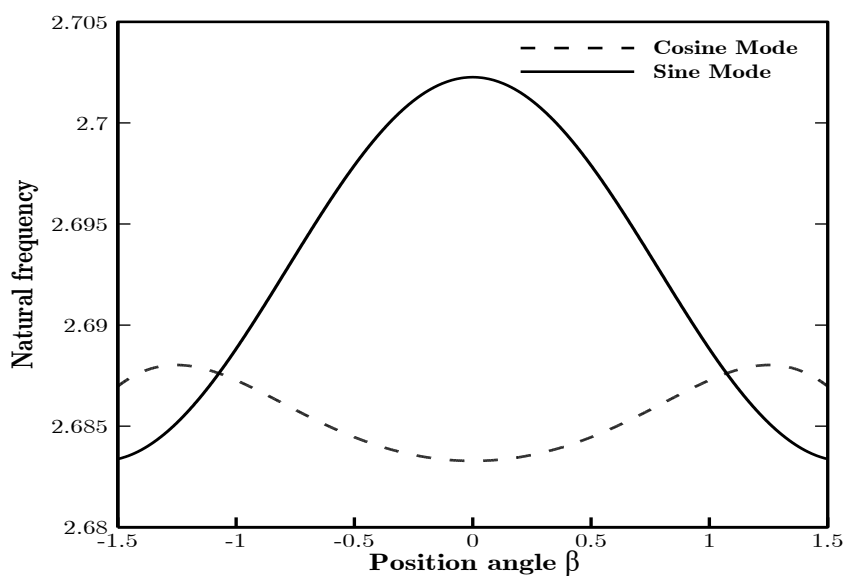


$$n = 3, N = 6, \Omega_p = 0, \Omega_v = 0, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۱۴) تغییرات فرکانس مدهای سینوسی و کسینوسی به ازای تغییر ضریب سختی فنر

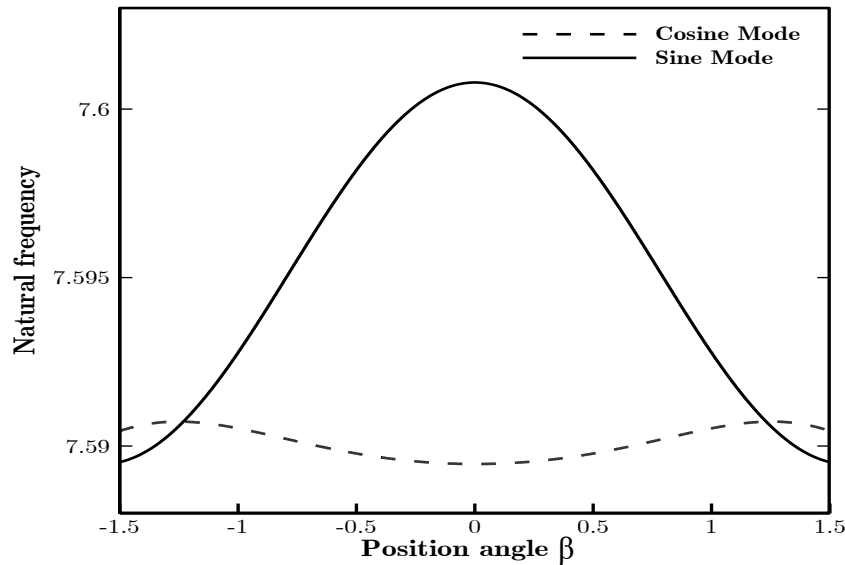
۴-۴- مطالعه اثر β در سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای

شکل‌های (۱۵-۴) و (۱۶-۴)، تغییرات فرکانس‌های طبیعی مدهای سینوسی و کسینوسی را به ازای مقادیر زاویه β مختلف به ترتیب برای مقادیر $\{n, N\} = \{2, 4\}$ و $\{n, N\} = \{3, 6\}$ نشان می‌دهد. چنانچه مشاهده می‌شود، بیشترین افزایش فرکانس طبیعی در شکل مدهای سینوسی و کمترین مقدار در شکل مدهای کسینوسی به ازای زاویه $\beta = 0$ است که این پدیده با استفاده از رابطه (۳-۱۰) توجیه پذیر است.



$$n = 2, N = 4, \Omega_p = 0, \Omega_v = 0$$

شکل (۱۵-۴) اثر β در فرکانس طبیعی متناظر با شکل مدهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای



$$n = 3, N = 6, \Omega_p = 0, \Omega_v = 0$$

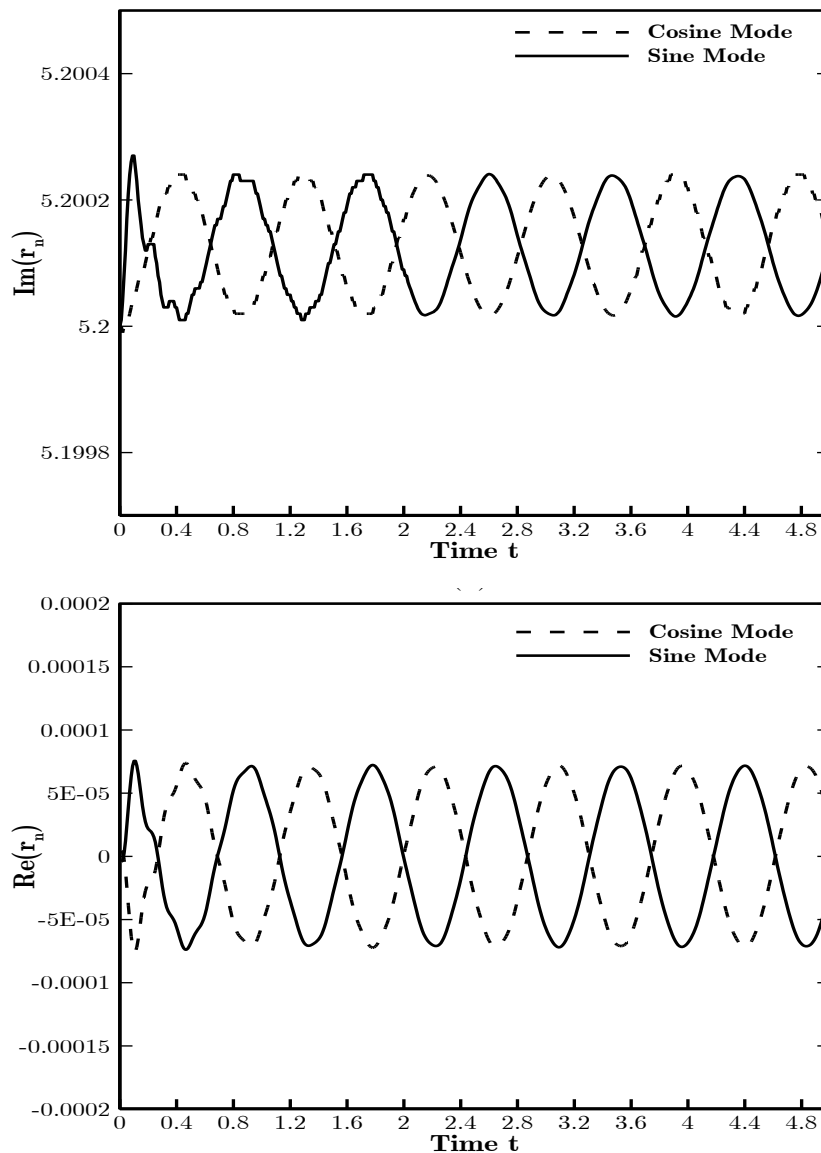
شکل (۴-۱۶) اثر β در فرکانس طبیعی متناظر با شکل مدهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر گسسته با تقارن دوره‌ای

۴-۵- حل اغتشاشی سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر با زمان با تقارن دوره-

ای

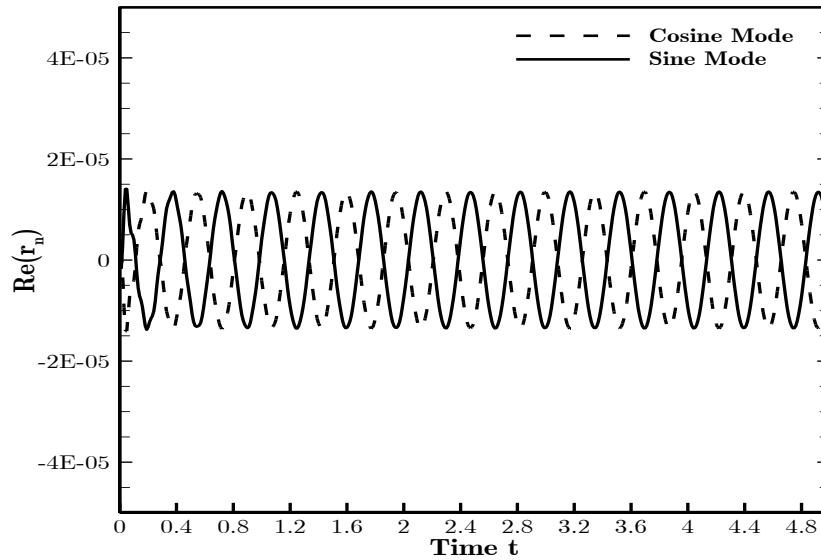
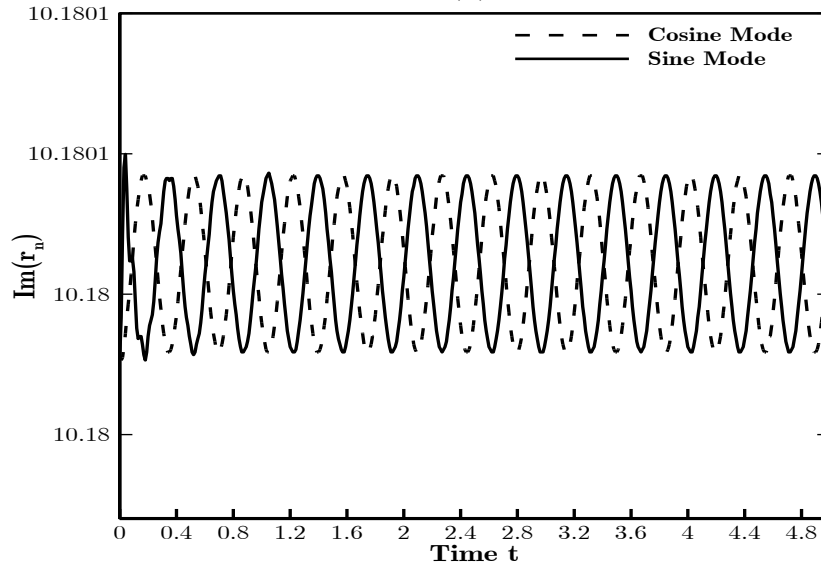
شکل (۴-۱۷) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای را به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ بر اساس رابطه (۳-۱۷) نشان می‌دهد. از آنجا که $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ ، مدهای کسینوسی و سینوسی دارای فرکانس‌های متفاوت هستند و در واقع افتراق مدها صورت گرفته است. در این حالت فرکانس مدها در اطراف مقدار مشخصی به صورت هارمونیک نوسان می‌کند. نوسانات فرکانس در این حالت نسبت به حل سیستم با فنر گسسته دارای دامنه کوچکتری است که در واقع بیانگر طبیعت پایدارساز فرضیات در این بخش است. چنانچه مشاهده می‌شود، نوسانات فرکانس در لحظات اولیه شامل هارمونیک‌های مرتبه بالاتری است که با گذشت زمان تاثیر آن در سیستم از بین می‌رود. همچنین مقدار مثبت بخش حقیقی مقادیر ویژه بیانگر وجود ناپایداری در سیستم است. همانگونه که ملاحظه

می‌شود، پدیده افتراق همراه با ناپایداری در سیستم است و با از بین رفتن افتراق و با تکراری شدن مدهای سینوسی و کسینوسی مقادیر حقیقی به مقدار صفر نزدیک می‌شوند. به طور مشابه، شکل (۴-۱۸) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای را به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ بر اساس رابطه (۳-۱۷) نشان می‌دهد.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 3.8, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۱۷) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مدهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای

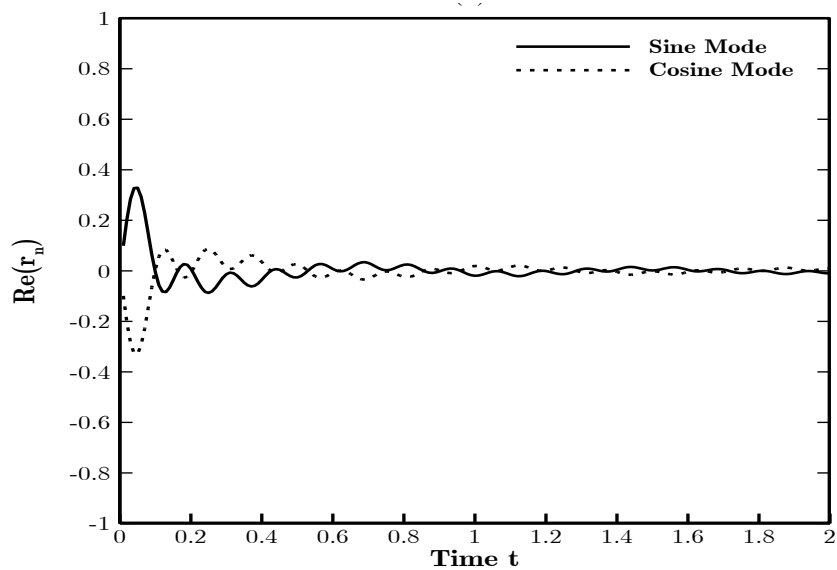
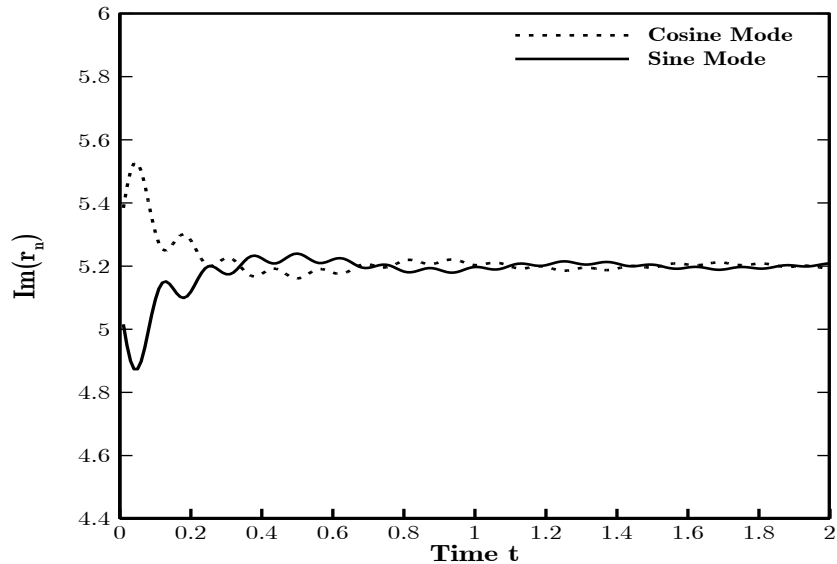


$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4.99, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۱۸-۴) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای

شکل (۱۹-۴) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای را به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ بر اساس رابطه (۱۷-۳) نشان می‌دهد. از آنجا که در این حالت $\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$ است، نحوه تغییرات فرکانس مودها در مقایسه با شکل (۱۷-۴) دگرگون شده و در این حالت فرکانس مودهای سینوسی و

کسینوسی به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. همچنین مقایسه این شکل با شکل (۴-۱۱) مؤید طبیعت پایدارساز فرضیات سختی متغیر با زمان در این بخش است.

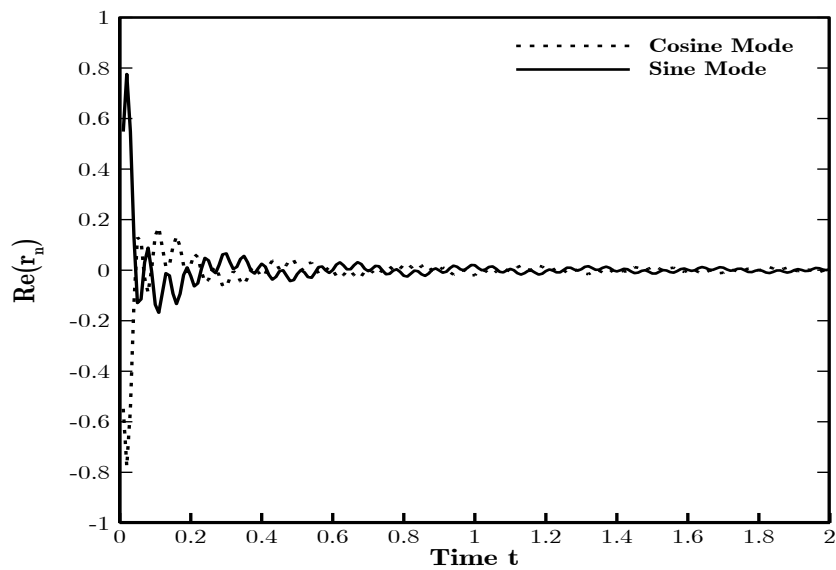
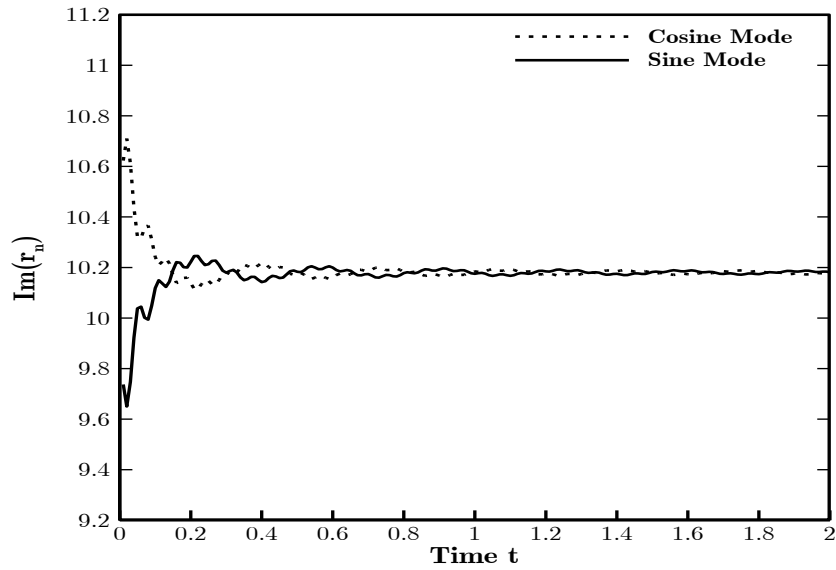


$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۱۹) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مدهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای

به طور مشابه، شکل (۴-۲۰) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای را به ازای مقادیر

بر اساس رابطه (۳-۱۷) نشان می‌دهد. $\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$



$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 5.1, \beta = \frac{\pi}{6}$$

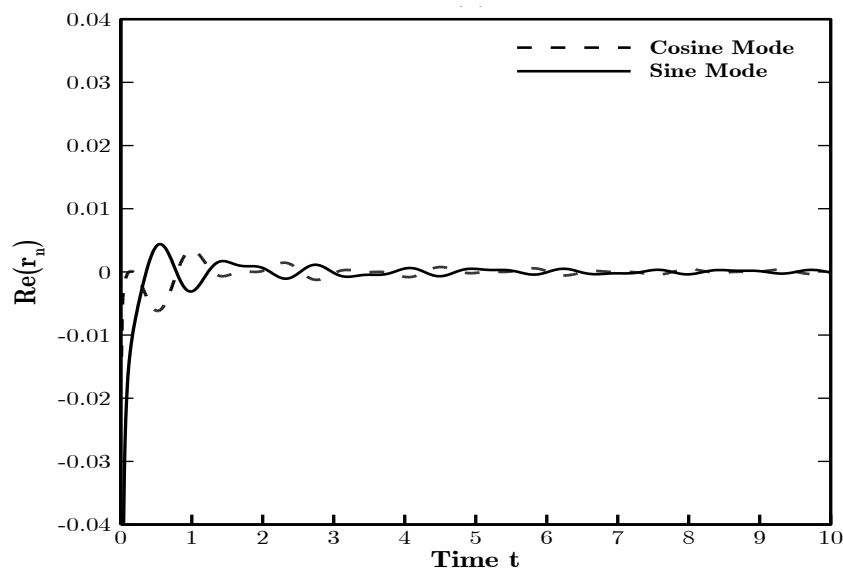
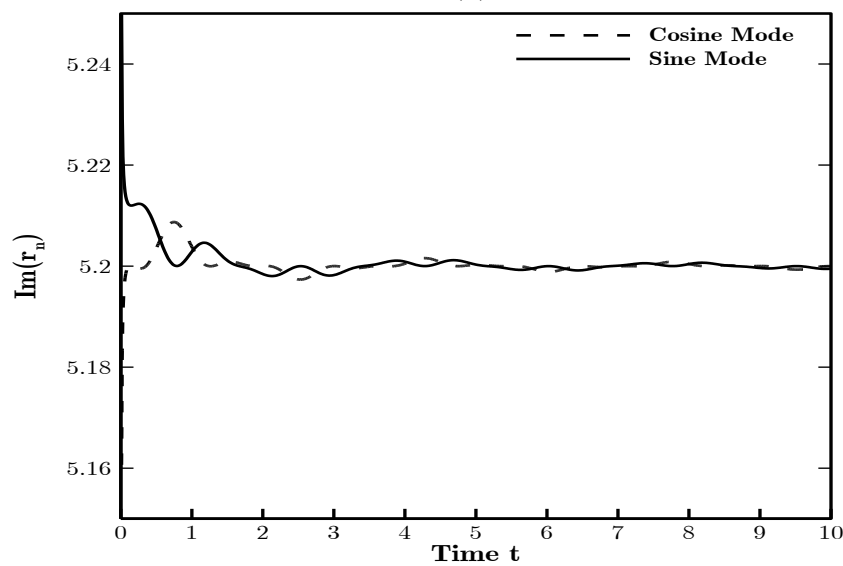
شکل (۴-۲۰) تغییرات بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه شکل مودهای سینوسی و کسینوسی در سیستم رینگ و فنر متغیر با زمان با تقارن دوره‌ای

۴-۶- سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر در زمان بدون تقارن دوره‌ای

۴-۶-۱- سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک در زمان

سختی فنر گسسته در این حالت به صورت تابعی کسینوسی از زمان فرض شده است که با

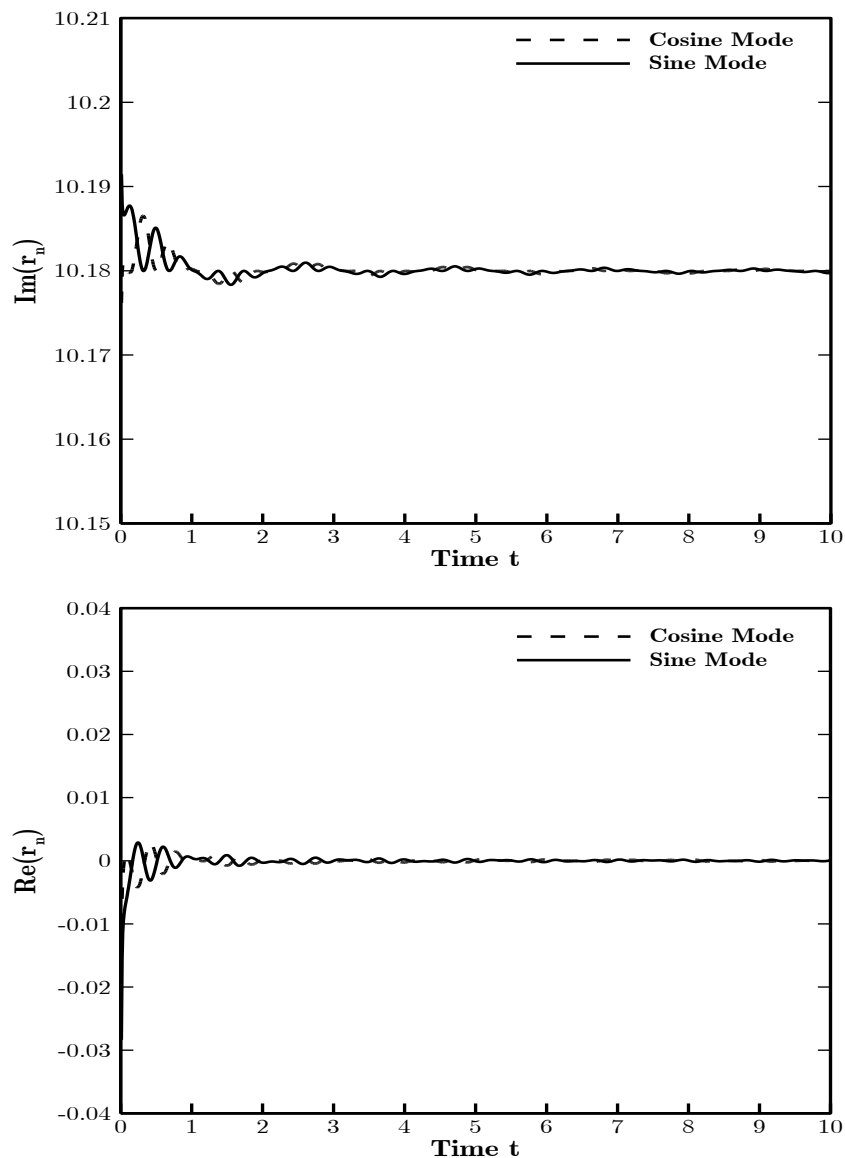
فرکانس Ω_{rel} تغییر می‌کند. در این حالت، سیستم رینگ و فنر به واسطه متغیر بودن سختی گسسته فاقد تقارن دوره‌ای است. شکل‌های (۲۱-۴) و (۲۲-۴) به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ و $\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ و براساس روابط (۳۳-۳) و (۳۲-۳) نشان می‌دهد.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 3.8, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۲۱-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای

همانطور که ملاحظه می‌شود در این حالت به ازای $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ و مقادیر صحیح $2n/N$ پدیده افتراق مودها از بین رفته و در گذر زمان فرکانس مودهای سینوسی و کسینوسی به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. با از بین رفتن افتراق و با تکراری شدن مودهای سینوسی و کسینوسی، بخش حقیقی مقادیر ویژه نیز در همه سرعت‌ها به مقدار صفر نزدیک می‌شوند که این نتایج با جدول (۳-۱) سازگار است.

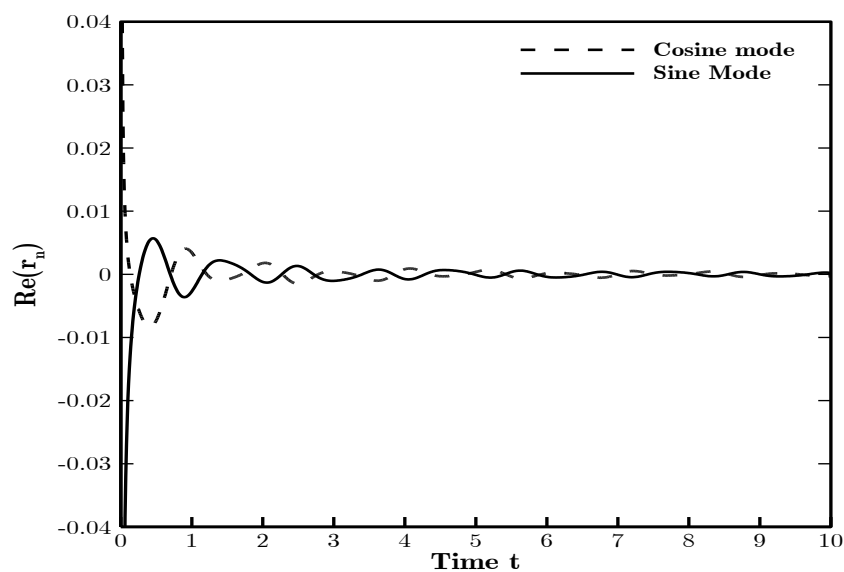
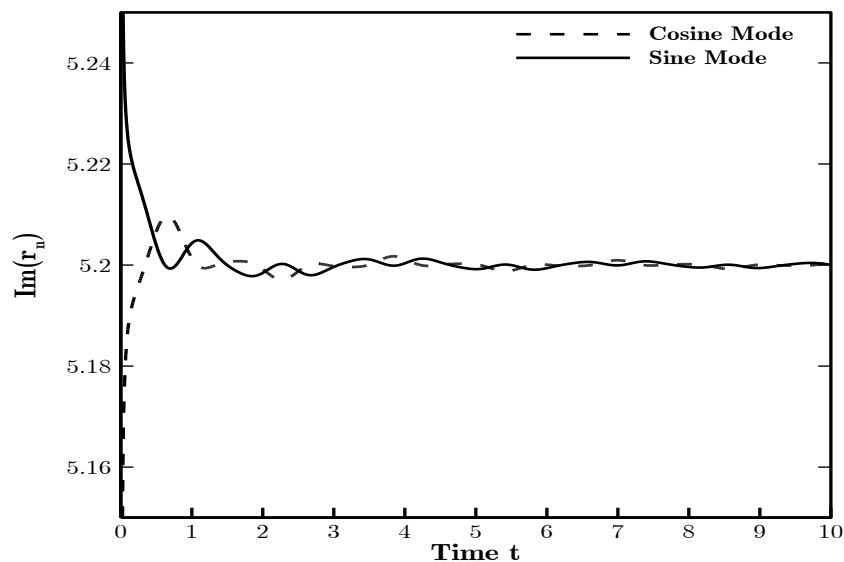


$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4.99, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۲۲) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای

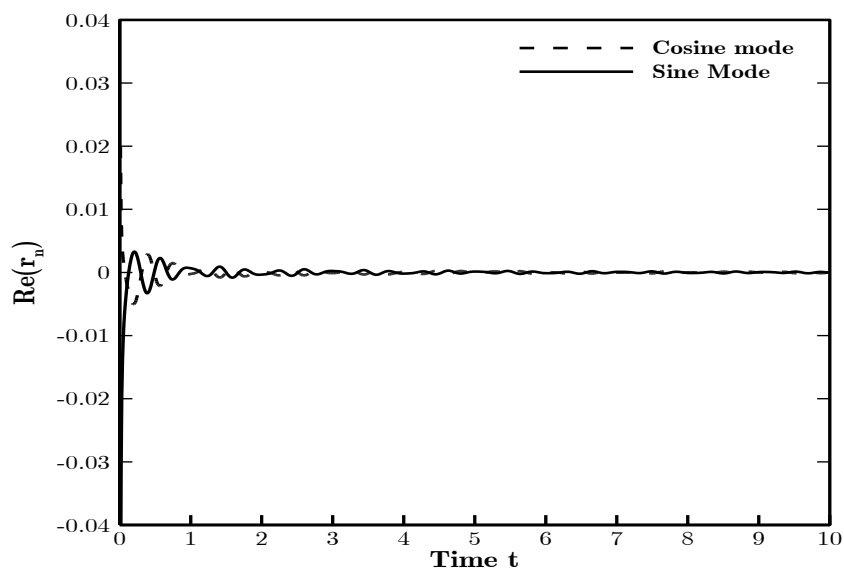
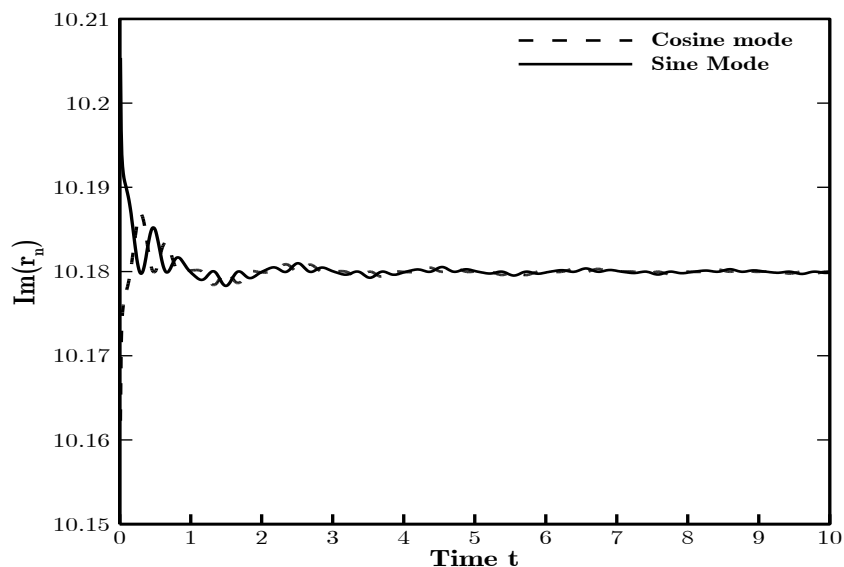
شکل‌های (۴-۲۳) و (۴-۲۴) به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با

شکل موده‌های سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ و $\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ و براساس روابط (۳-۳۹) و (۳-۴۴) نشان می‌دهد. به ازای $\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$ مقدار صحیح $2n/N$ نیز ناپایداری افتراق رخ نمی‌دهد.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۲۳) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک بدون تقارن دوره‌ای



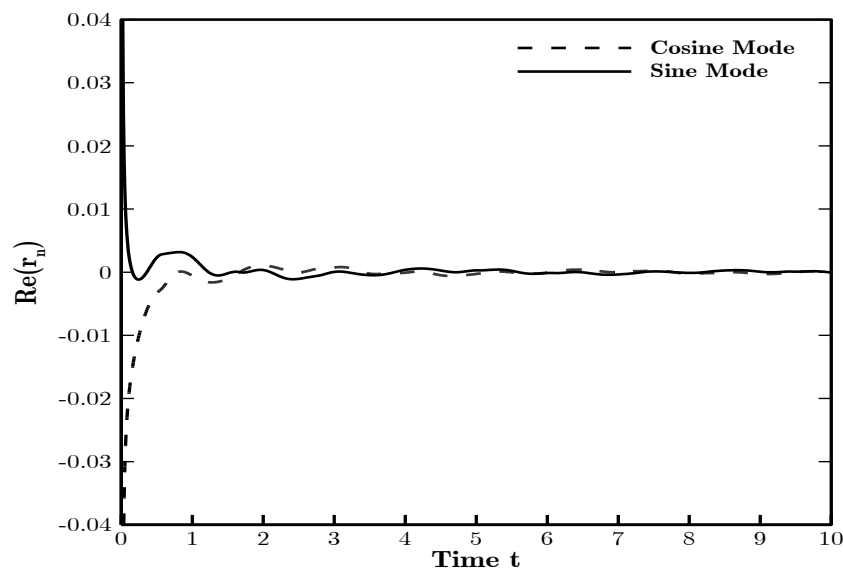
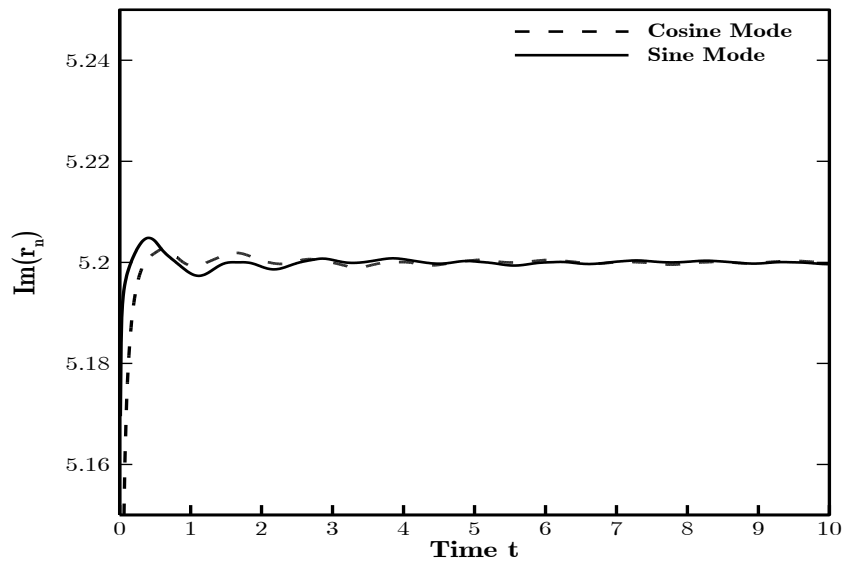
$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 5.1, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۲۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک بدون تقارن دوره‌ای

۴-۶-۲- فنر با سختی به صورت تابع دندان‌اره‌ای از زمان

شکل‌های (۴-۲۵) و (۴-۲۶) به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ و

$\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ و بر اساس رابطه (۳-۵۳) نشان می‌دهد.

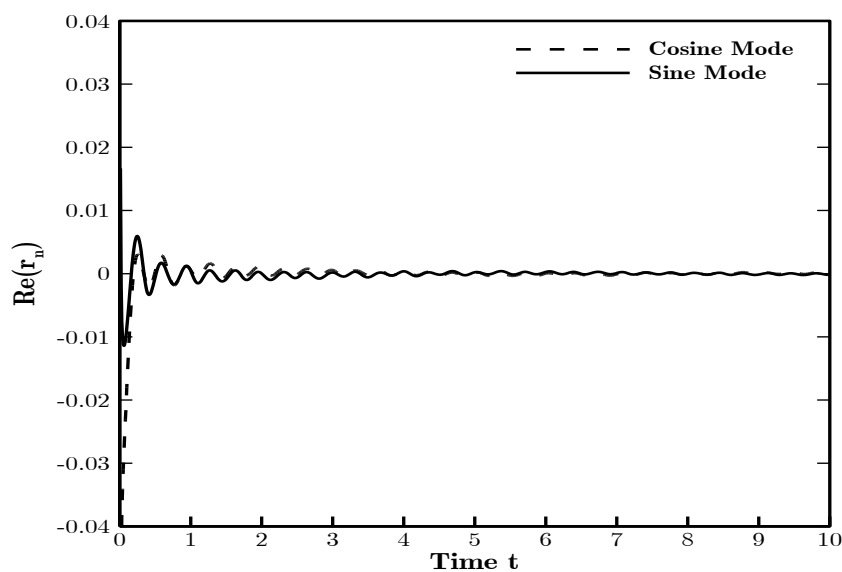
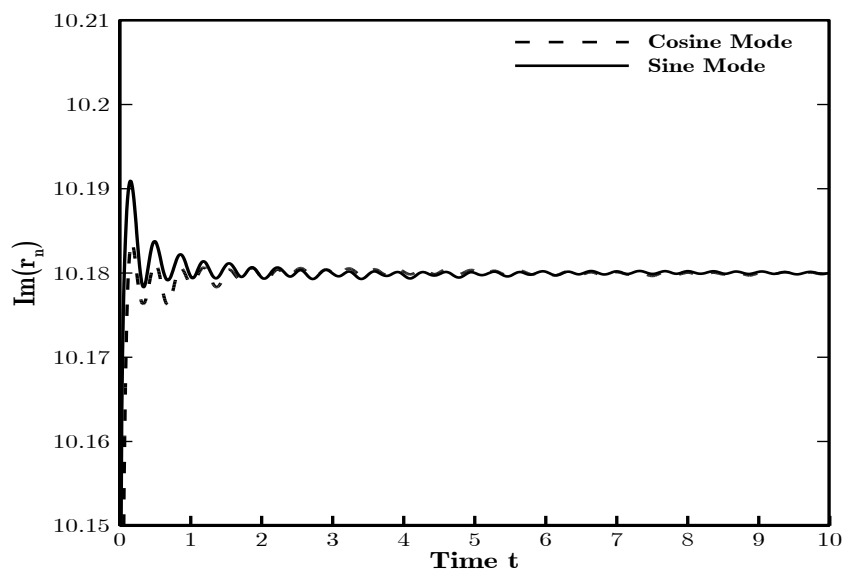


$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 3.8, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۲۵) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مدهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر به صورت تابع دندانه اره‌ای بدون تقارن دوره‌ای

به ازای $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ و مقدار صحیح $2n/N$ ، همانطور که ملاحظه می‌شود فقدان تقارن دوره‌ای باعث از بین رفتن پدیده افتراق مودها شده و در گذر زمان فرکانس مدهای سینوسی و کسینوسی به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. با از بین رفتن افتراق و با تکراری شدن مدهای سینوسی و کسینوسی

بخش حقیقی مقادیر ویژه نیز در همه سرعت‌ها به مقدار صفر نزدیک می‌شوند.



$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4.99, \beta = \frac{\pi}{6}$$

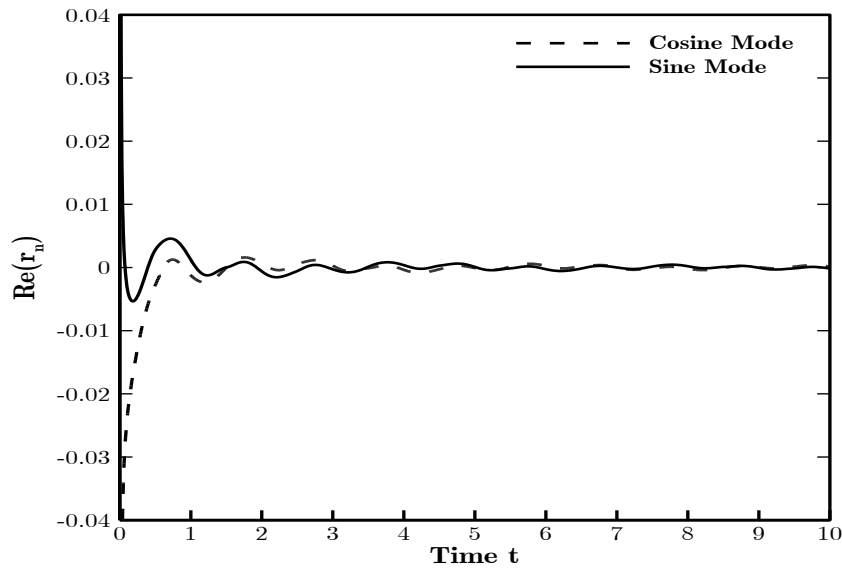
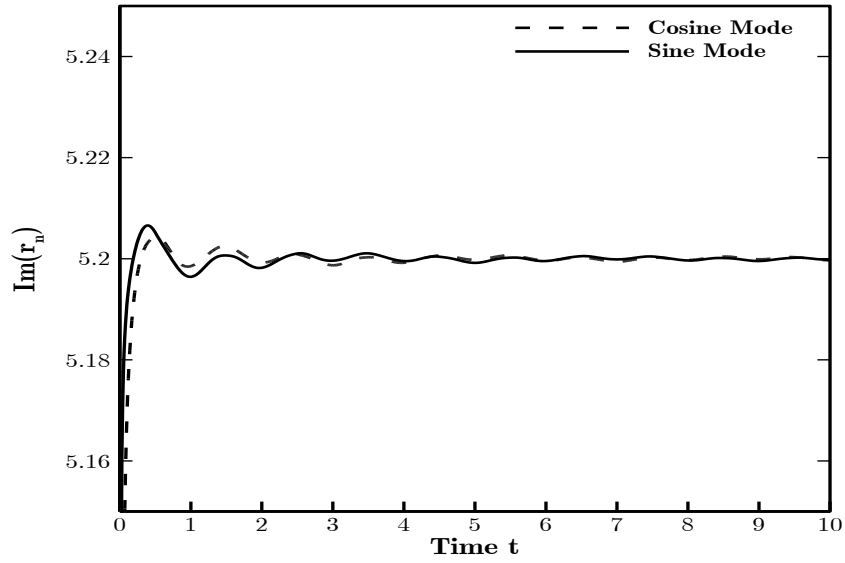
شکل (۲۶-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر به صورت تابع دندانه اره‌ای بدون تقارن دوره‌ای

شکل‌های (۲۷-۴) و (۲۸-۴) به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با

شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ و

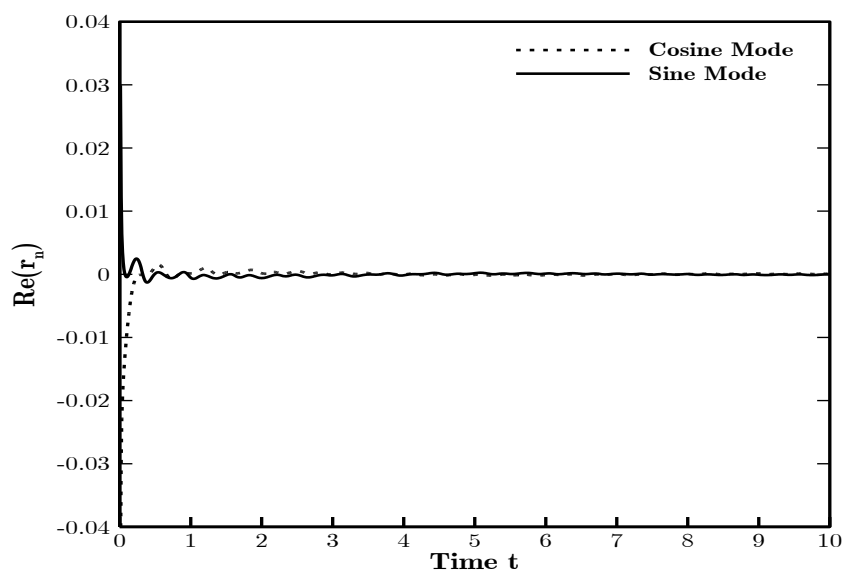
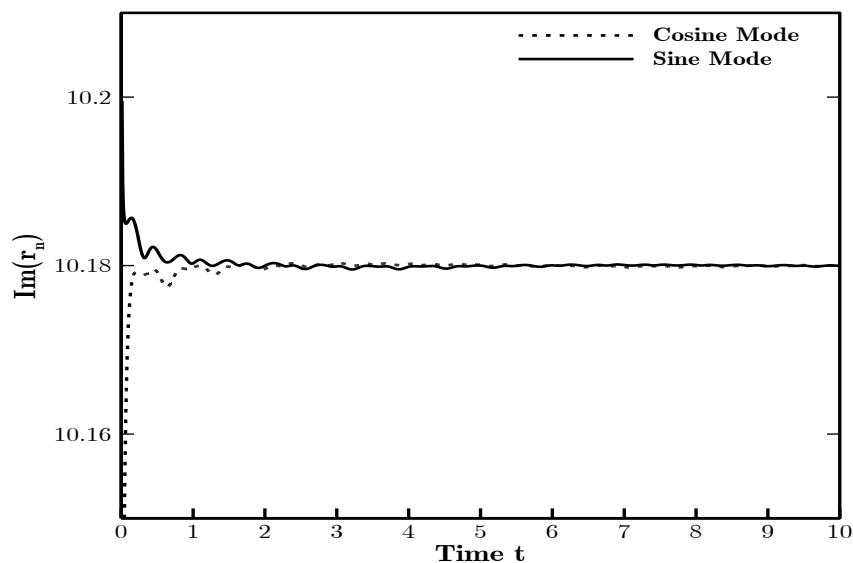
$\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ و براساس رابطه (۵۳-۳) نشان می‌دهد. به ازای $\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$ و مقدار

صحیح $2n/N$ نیز ناپایداری افتراق رخ نمی‌دهد.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4, \beta = \frac{\pi}{6}$$

شکل (۴-۲۷) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر به صورت تابع دندانانه اره‌ای بدون تقارن دوره‌ای



$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 5.1, \beta = \frac{\pi}{6}$$

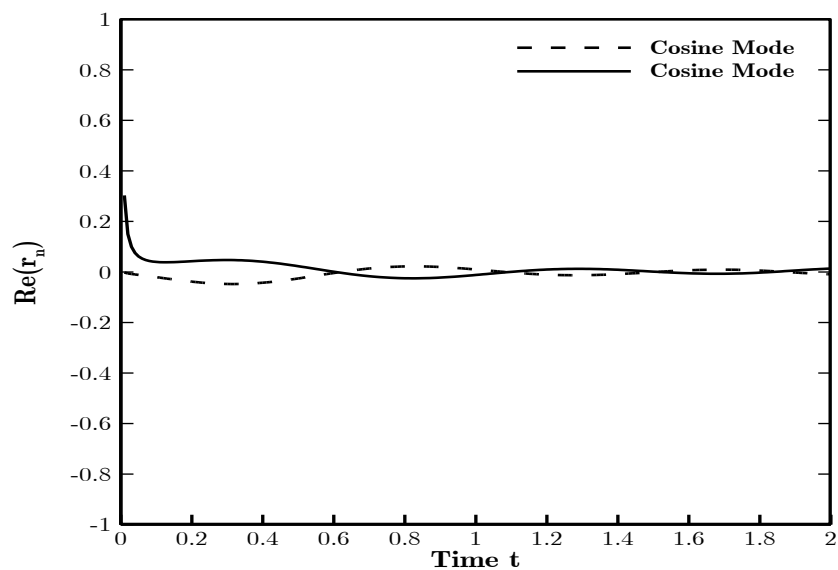
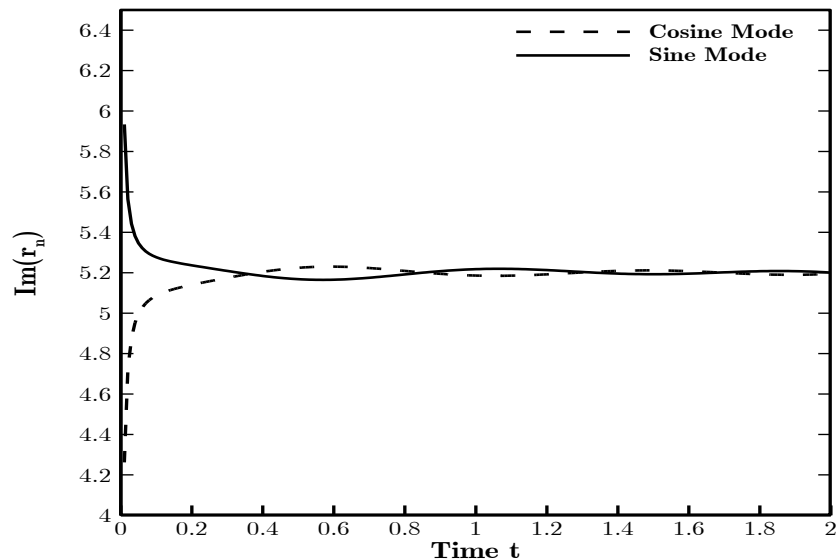
شکل (۴-۲۸) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با سختی متغیر به صورت تابع دندانه اره‌ای بدون تقارن دوره‌ای

۴-۷- سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای

زاویه β فنر گسسته در این حالت به صورت تابعی کسینوسی از زمان فرض شده است که با فرکانس Ω_{rel} تغییر می‌کند. شکل‌های (۴-۲۹) و (۴-۳۰) به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و

حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر

$\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ و $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ براساس حل رابطه (۳-۵۶) نشان می‌دهد.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4$$

شکل (۴-۲۹) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و کسینوسی

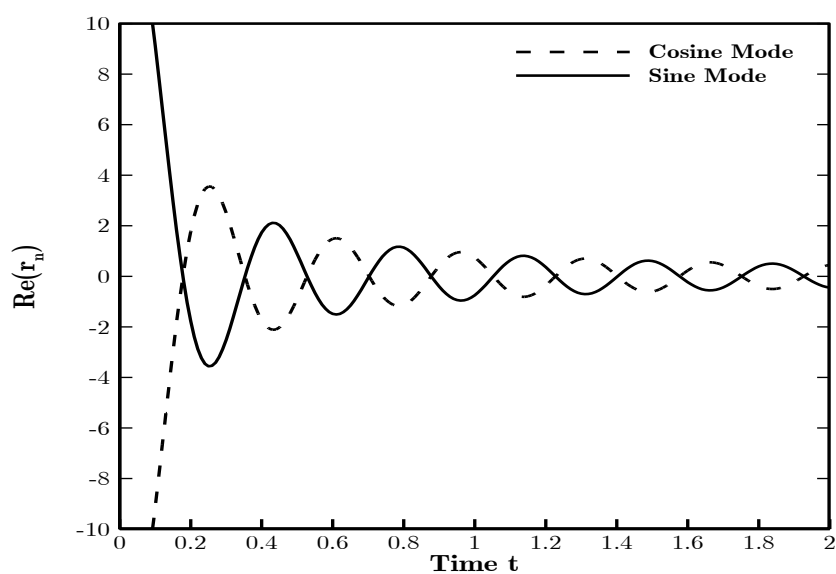
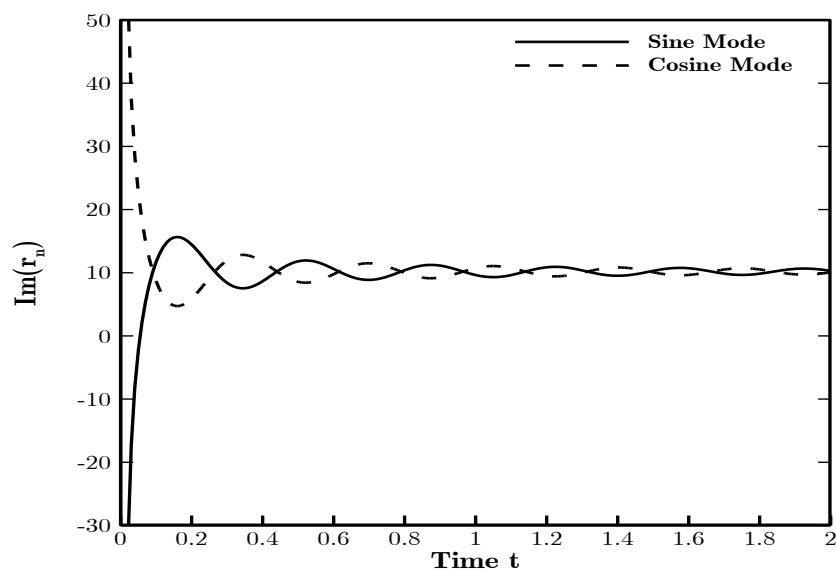
سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای

به ازای $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ و مقدار صحیح $2n/N$ ، فقدان تقارن دوره‌ای در این حالت نیز باعث از بین

رفتن پدیده افتراق مودها شده و در گذر زمان فرکانس موده‌های سینوسی و کسینوسی به مقادیر ثابتی

همگرا می‌شوند. با از بین رفتن افتراق و با تکراری شدن موده‌های سینوسی و کسینوسی بخش حقیقی

مقادیر ویژه نیز در همه سرعت‌ها به مقدار صفر نزدیک می‌شوند.



$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4.99$$

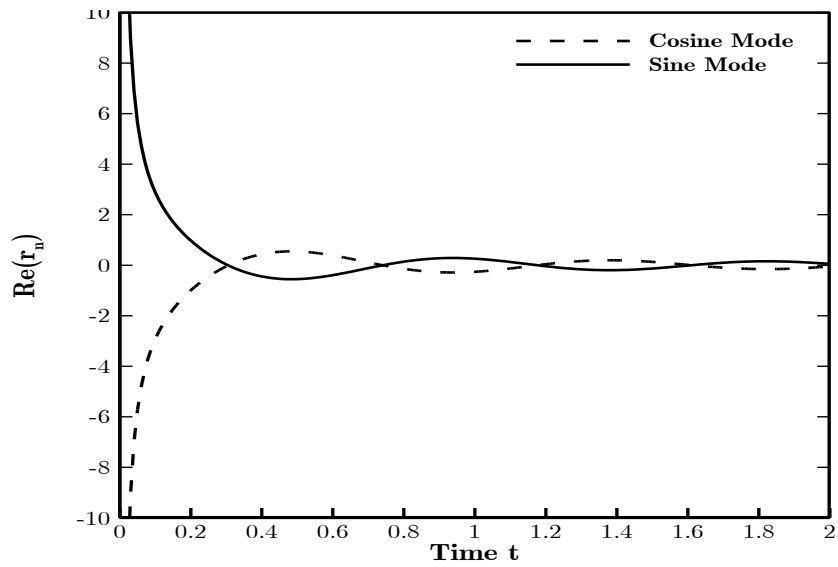
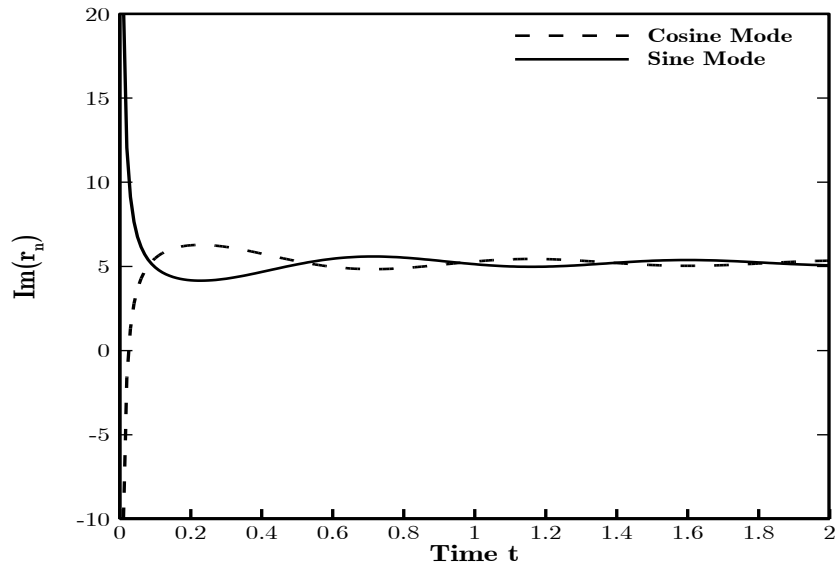
شکل (۳۰-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای

شکل‌های (۳۱-۴) و (۳۲-۴) به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با

شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ و

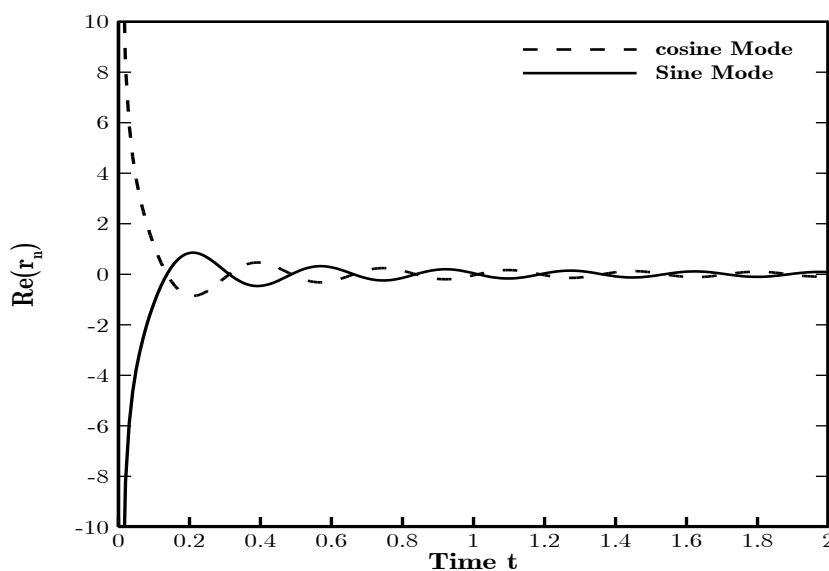
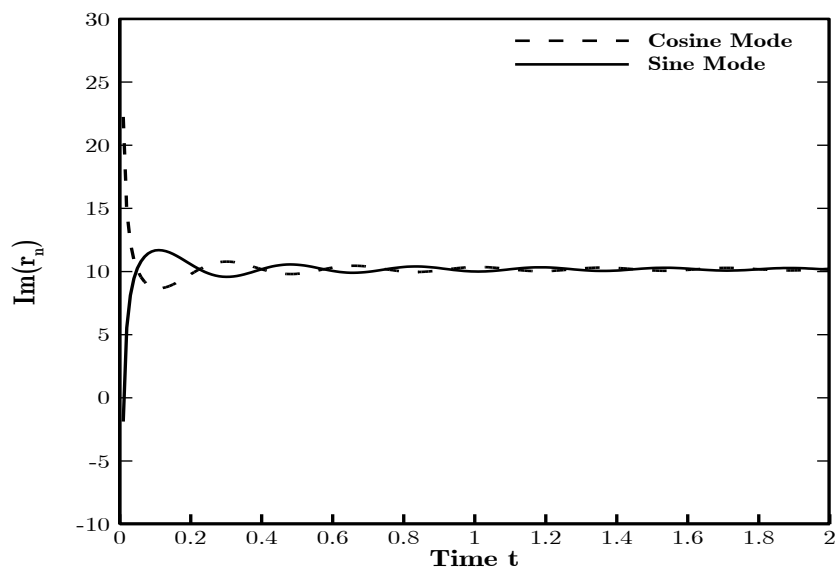
$\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ و براساس حل رابطه (۵۶-۳) نشان می‌دهد. به ازای $\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$ و مقدار

صحیح $2n/N$ ، پدیده تکرار مودها مشاهده می‌شود.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4$$

شکل (۴-۳۱) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای



$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 5.1$$

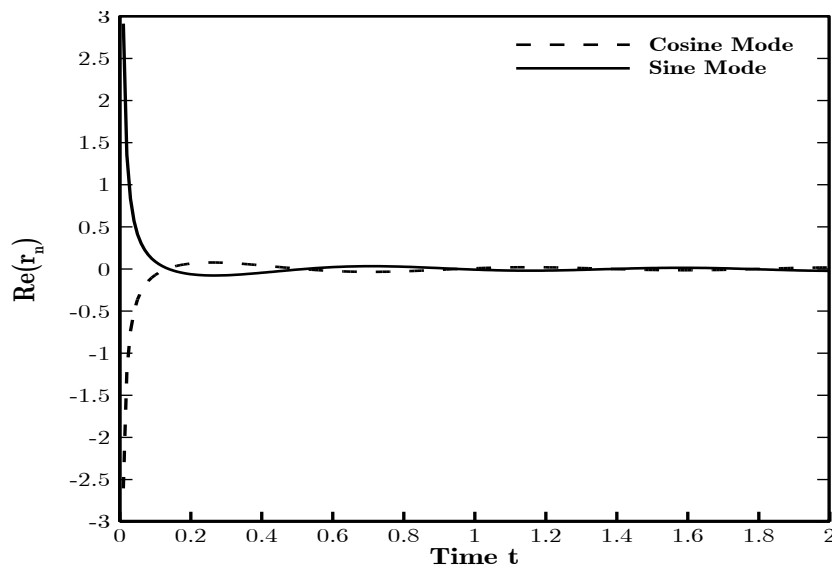
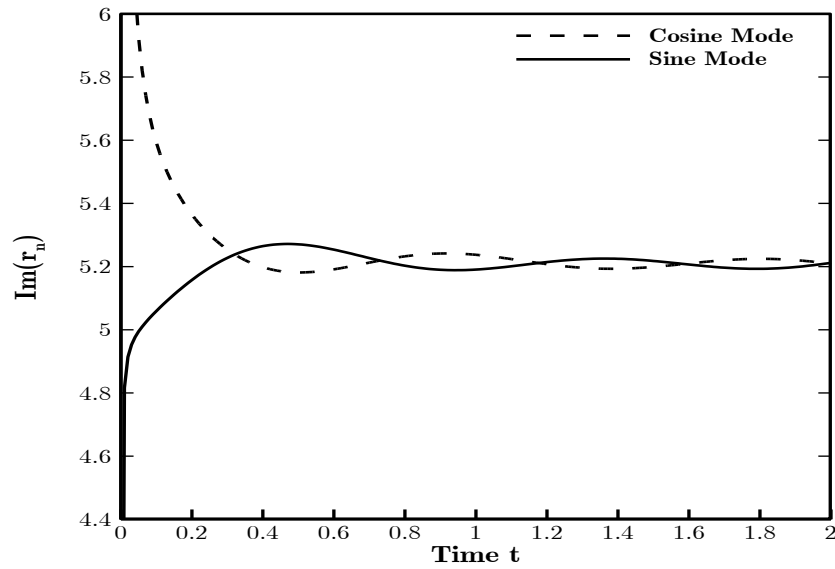
شکل (۴-۳۲) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β متغیر با زمان بدون تقارن دوره‌ای

۴-۸- سیستم رینگ و فنر با سختی هارمونیک و زاویه β متغیر با زمان بدون

تقارن دوره‌ای

در این بخش اثر هم‌زمانی متغیر بودن سختی فنر و متغیر بودن زاویه β در یک مثال عددی نشان

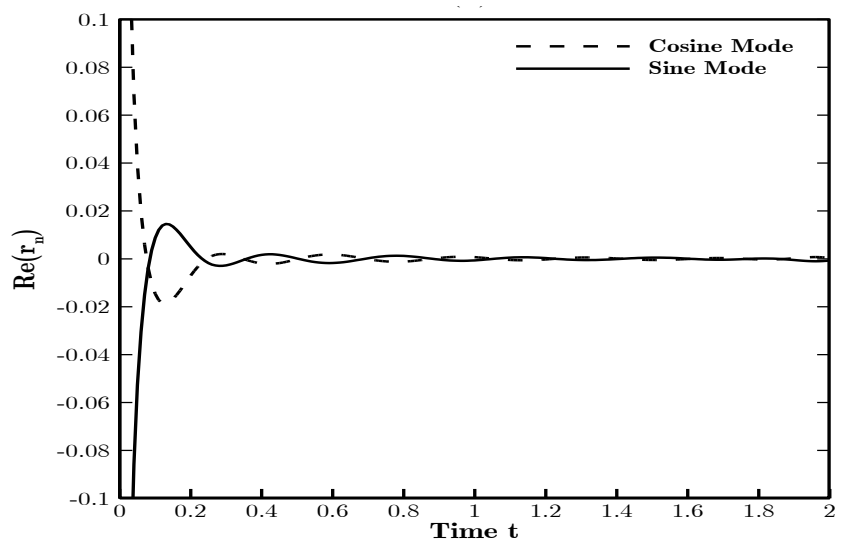
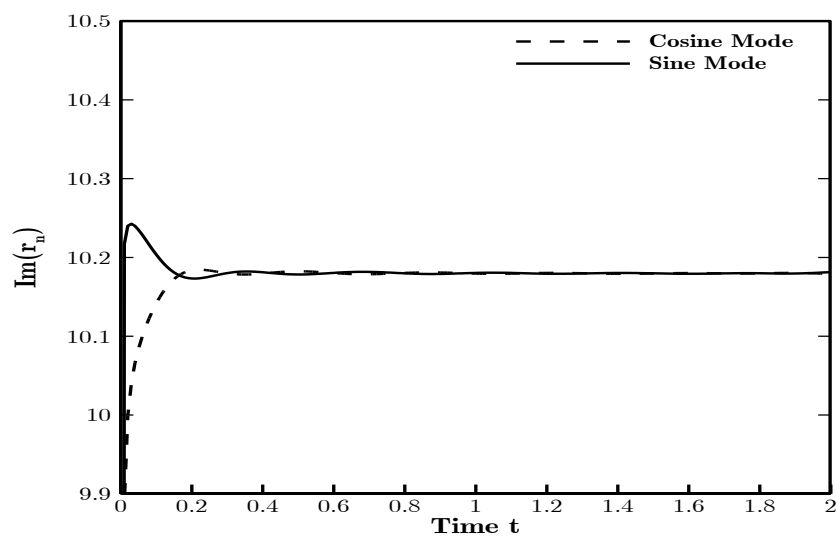
داده شده است. شکل‌های (۳۳-۴) و (۳۴-۴) به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ و $\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ و مقدار صحیح $\Omega_{rel} = \Gamma/n$ نشان می‌دهد.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4$$

شکل (۳۳-۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β و سختی متغیر هارمونیک با زمان بدون تقارن دوره‌ای

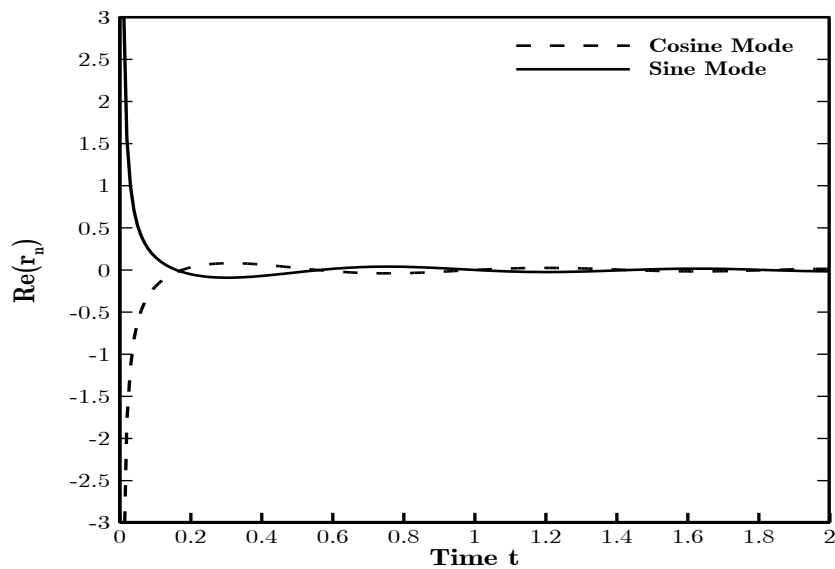
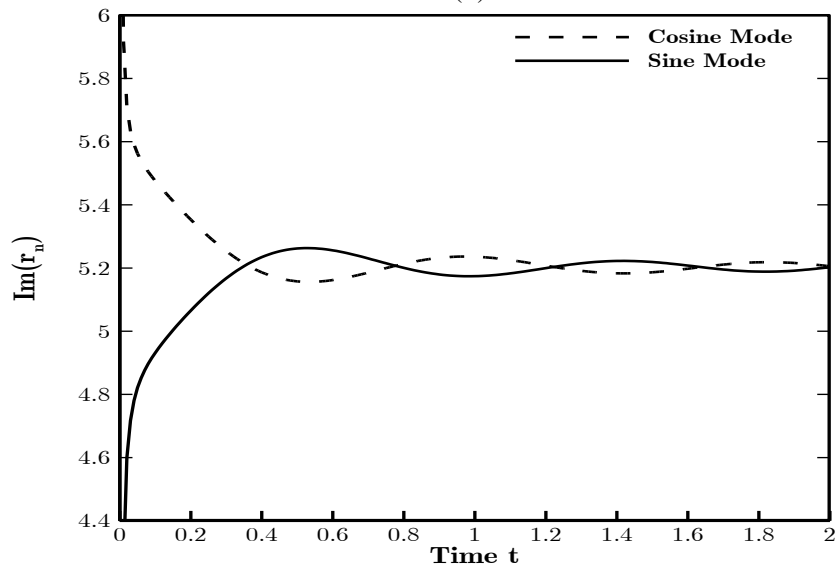
همانطور که ملاحظه می‌شود، فقدان تقارن دوره‌ای در این حالت نیز باعث از بین رفتن پدیده افتراق مودها شده و در گذر زمان فرکانس مودهای سینوسی و کسینوسی به مقادیر ثابتی همگرا می‌شوند. از این‌رو، مقادیر حقیقی نیز در همه سرعت‌ها به مقدار صفر نزدیک می‌شوند. مقایسه نتایج این بخش با نتایج بخش‌های ۴-۶ و ۴-۷ نشان می‌دهد که پایداری طبیعت مسئله در این حالت بیشتر است و فرضیات ذکر شده در این بخش فرضیاتی هستند که به پایداری سیستم کمک می‌کنند.



$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4.99$$

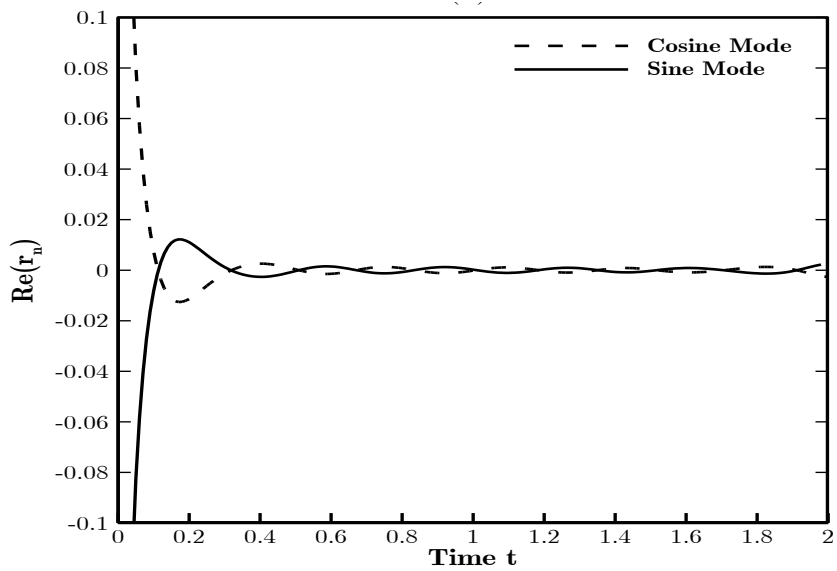
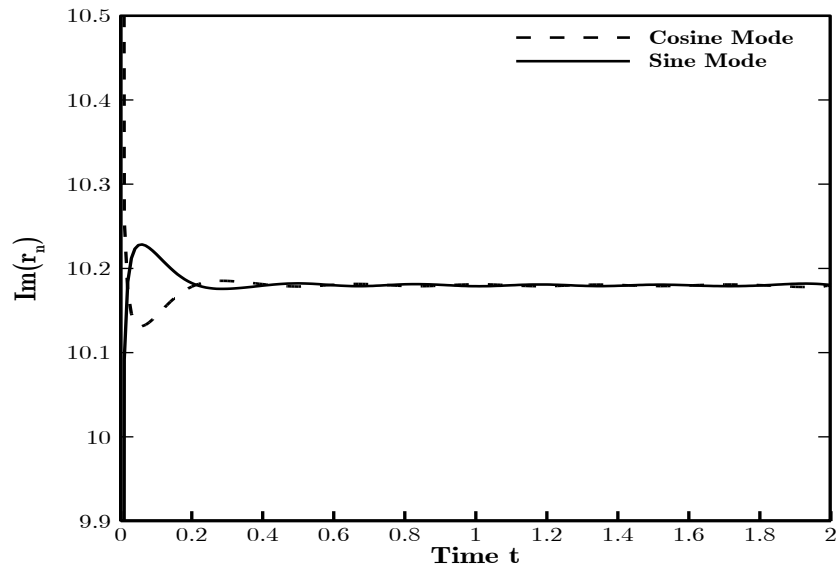
شکل (۴-۳۴) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β و سختی متغیر هارمونیک با زمان بدون تقارن دوره‌ای

شکل‌های (۴-۳۵) و (۴-۳۶) به ترتیب تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و کسینوسی سیستم را به ترتیب به ازای مقادیر $\{n, N, \varepsilon\} = \{2, 4, 0.1\}$ و $\{n, N, \varepsilon\} = \{3, 6, 0.1\}$ به ازای $\Omega_{rel} \neq \Gamma/n$ و مقدار صحیح $2n/N$ نشان می‌دهد. پدیده تکرار مودها مشاهده می‌شود.



$$n = 2, N = 4, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 4$$

شکل (۴-۳۵) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل موده‌های سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β و سختی متغیر هارمونیک با زمان بدون تقارن دوره‌ای



$$n = 3, N = 6, \varepsilon = 0.1, \Omega_p = 2, \Omega_v = 5.1$$

شکل (۴-۳۶) تغییرات بخش‌های موهومی و حقیقی مقادیر ویژه متناظر با شکل مودهای سینوسی و کسینوسی سیستم رینگ و فنر، بر حسب زمان در سیستم رینگ و فنر با زاویه β و سختی متغیر هارمونیک با زمان بدون تقارن دوره‌ای

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۵-۱- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، به بررسی ارتعاشات استاتور در ماشین‌های الکتریکی جریان متناوب با استفاده از مدل رینگ و فنر با در نظر گرفتن اثر تقان دوره‌ای پرداخته شده است. اندرکنش سازه و نیروی الکترومغناطیس با استفاده از فنرهای گسسته مدل‌سازی شده‌اند. بر اساس حضور و یا عدم حضور ضرایب متغیر با زمان در معادلات حرکت سیستم، سیستم‌های پایا و یا ناپایای مربوطه تحلیل فرکانسی شده‌اند. برای بدست آوردن معادلات در زمان، جداسازی ترم-های زمانی و مکانی در معادلات حرکت و استفاده از فرضیات حرکت تک مودی در مکان به کار رفته است. مقادیر ویژه سیستم با استفاده از حل اغتشاشی به صورت نیمه تحلیلی به دست آمده است. نتایج حل بیانگر ظهور ناپایداری به ازای نسبت‌های مشخصی از سرعت دورانی رینگ و تکیه‌گاه و مرتبه تقارن دوره‌ای در سیستم در مدهای مختلف سیستم است. مطالعه در خصوص اثرات متغیر بودن سختی فنرهای گسسته با زمان و زاویه اتصال این فنرها به رینگ در خواص فرکانسی ارتعاشات داخل صفحه رینگ به تفصیل انجام شده است.

نشان داده شد که اثر دوران در رینگ منجر به ظهور مدهای پسر و پیشرو در سیستم می‌شود. وجود تقارن در رینگ منجر به ظهور شکل مدهای سینوسی و کسینوسی به ازای هر فرکانس در رینگ می‌شود. فنرهای گسسته متصل به وجه داخلی رینگ امکان بروز نوعی از ناپایداری را ایجاد می‌کند. مکانیزم ایجاد این ناپایداری بر این مبنا است که فرکانس یکسان شکل مدهای سینوسی و کسینوسی به واسطه وجود فنرها تغییر می‌کند و فرکانس مود سینوسی با فرکانس مود کسینوسی متناظر آن یکسان نمی‌شود. در این رساله از این پدیده به عنوان افتراق یاد می‌شود. بررسی اثر تقارن دوره‌ای رینگ بر این ناپایداری ارائه شده است. مهم‌ترین نکاتی که از بررسی مسئله بدست آمده است در موارد زیر اشاره شده است.

- پدیده افتراق مودها همراه با ناپایداری در سیستم است.
- پدیده تکرار مودها بیانگر پایداری سیستم است.

- وجود یا عدم وجود پدیده افتراق مودها وابسته به صحیح بودن نسبت $2n/N$ است که در ماشین‌های الکتریکی همواره این نسبت صحیح است.
- شرط لازم دیگر برای پدیده افتراق مودها در حالت پایا $\sin^2 \beta - n^2 \cos \beta \neq 0$ است.
- افزایش سختی فنر باعث افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.
- ظهور پدیده افتراق مودها در حالت ناپایا وابسته به سرعت دورانی نسبی است.
- مدلسازی اندرکنش نیروی الکترومغناطیسی و رینگ با استفاده از فرضیات فنر متغیر با زمان در مقایسه با فرضیات فنر با سختی ثابت، منجر به ظهور پدیده افتراق مودها با قدرت کمتر می‌شود.
- تغییرات سختی فنر به صورت هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای می‌تواند موجب از بین رفتن پدیده افتراق مودها و پایداری سازه شود.
- تغییرات زاویه فنر با جهت شعاعی به صورت هارمونیک و بدون تقارن دوره‌ای می‌تواند موجب از بین رفتن پدیده افتراق مودها شود.
- با استفاده از مدل جرم و فنر اثرات متقابل یوغ و دندان‌ها بر یکدیگر مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان دهنده اهمیت نحوه حرکت یوغ و دندان‌ها نسبت به هم در فرکانس‌های طبیعی استاتور است. توضیح آن که به ازای نظام‌های حرکتی مختلف یوغ و دندان‌ها نسبت به هم در عین حفظ شدن تقارن دوره‌ای فرکانس‌های طبیعی مختلف ظاهر می‌شوند. این پدیده از نقطه نظر عملی دارای اهمیت است.

۵-۲- پیشنهادات

برای گسترش پژوهش حاضر موارد زیر پیشنهاد می‌شود:

- مدل‌سازی اثر سیم رسانا در استاتور با استفاده از مدل جرم نقطه‌ای
- در نظر گرفتن اثر حرکت چند مودی
- مطالعه اندرکنش بین موها در ارتعاشات آزاد و بررسی پایداری مربوطه

پیوست

تشریح روند حل رینگ با تقارن دوره‌ای:

به با حذف اثر دوران تکیه‌گاه از معادله (۲-۱۶) و اضافه کردن فنرها و با جایگزینی رابطه (۳-۹) در آن، معادله حاکم در رینگ متقارن دوره‌ای به دست می‌آید. ترکیبی از مقادیر ویژه r'_{n0} و اغتشاشی r'_{n1} در معادله ملاحظه می‌شود [۴۱].

$$M r'_{n0}{}^2 u_{n0} + K^{(0)} u_{n0} + 2M \varepsilon r'_{n0} r'_{n1} u_{n0} + K^{(1)} \varepsilon u_{n0} + M (\varepsilon r'_{n1})^2 u_{n0} = 0. \quad (\text{الف-۱})$$

برای حل معادله فوق، ابتدا از ترم‌های شامل ε صرف‌نظر می‌شود. بنابراین [۴۰]

$$M r'_{n0}{}^2 u_{n0} + K^{(0)} u_{n0} = 0. \quad (\text{الف-۲})$$

که حل این رابطه قبلاً ارائه شده است. معادله مربوط به مرتبه اول ε به صورت زیر است [۴۰].

$$2\varepsilon r'_{n0} r'_{n1} M u_{n0} = -K^{(1)} u_{n0}. \quad (\text{الف-۳})$$

با ضرب داخلی معادله (الف-۳) در $e^{in\theta}$ خواهیم داشت: (تعریف ضرب داخلی $\langle y_1, y_2 \rangle = \int_0^{2\pi} y_1 \overline{y_2} d\theta$)

با ساده‌سازی و انجام ضرب داخلی عبارت سمت چپ معادله (الف-۳) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\langle 2if_{n0} r'_{n1} (1+n^2)(A_n e^{in\theta} + \tilde{A}_n e^{-in\theta}), e^{in\theta} \rangle = 4\pi if_{n0} r'_{n1} (1+n^2) A_n, \quad (\text{الف-۴})$$

قسمت راست معادله،

$$-\left[(k^* \sin \beta + k^* \cos \beta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial k^*}{\partial \theta} \cos \beta) \times (\sin \beta - \cos \beta \frac{\partial}{\partial \theta})(A_n e^{in\theta} + \tilde{A}_n e^{-in\theta}) \right], \quad (\text{الف-۵})$$

با ساده‌سازی معادله (الف-۵) به صورت زیر

$$-\left[\begin{aligned} & (k^* \sin^2 \beta - k^* \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial \theta} + k^* \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & - k^* \cos^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial k^*}{\partial \theta} \sin \beta \cos \beta - \frac{\partial k^*}{\partial \theta} \cos^2 \beta)(A_n e^{in\theta} + \tilde{A}_n e^{-in\theta}) \end{aligned} \right], \quad (\text{الف-۶})$$

که

$$\left\langle -(\mathbf{k}^* \sin^2 \beta - \mathbf{k}^* \cos^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2})(A_n e^{in\theta} + \tilde{A}_n e^{-in\theta}), e^{in\theta} \right\rangle = \quad (\text{الف-7})$$

$$- \left[\mathbf{N}(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) A_n + \tilde{A}_n (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \right].$$

در نتیجه مقادیر ویژه r'_{n1} به صورت زیر حاصل می شود.

$$r'_{n1} = i \frac{1}{4\pi f_{n0}(1+n^2)} \left[\mathbf{N}(\sin^2 \beta + n^2 \cos^2 \beta) \right. \quad (\text{الف-8})$$

$$\left. + \frac{\tilde{A}_n}{A_n} (\sin^2 \beta - n^2 \cos^2 \beta) \sum_{j_1=1}^N e^{-2in\theta_{j_1}} \right].$$

- [1] <https://teslauniverse.com/nikola-tesla/patents/us-patent-390721-dynamo-electric-machine>.
- [2] Rao S. S., Sundararajan V.; "In-plane flexural vibrations of circular rings", Journal of Applied Mechanics, Vol. 36, No. 3, pp. 620-625, 1969.
- [3] Kirkhope J.; "Simple frequency expression for the in-plane vibration of thick circular rings", The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 59, No. 1, pp. 86-89, 1976.
- [4] Evensen D. A.; "Nonlinear flexural vibrations of thin circular rings", Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, No. 3, pp. 553-560, 1966.
- [5] Carrier G. F.; "On the vibrations of the rotating ring", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 3, No. 3, pp. 235-245, 1945.
- [6] Huang S. C., Soedel W.; "Effects of coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 115, No. 2, pp. 253-274, 1987 .
- [7] Natsiavas S.; "Dynamics and stability of non-linear free vibration of thin rotating rings", International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 29, No. 1, pp. 31-48, 1994.
- [8] Bickford W. B., Reddy E. S.; "On the in-plane vibrations of rotating rings", Journal of Sound and Vibration, Vol. 101, No. 1, pp. 13-22, 1985.
- [9] Kim W., J Chung.; "Free non-linear vibration of a rotating thin ring with the in-plane and out-of-plane motions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 258, No. 1, pp. 167-178, 2002.
- [10] Ellison A. J., Yang S. J.; "Natural frequencies of stators of small electric machines", In Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Vol. 118, No. 1, pp. 185-190, 1971.
- [11] Girgis R. S., Verma S. P.; "Method for accurate determination of resonant frequencies and vibration behaviour of stators of electrical machines", In IEEE

Proceedings B-Electric Power Applications, Vol. 128, No. 1, 1981.

[12] Wang H., Williams K.; "The vibrational analysis and experimental verification of a plane electrical machine stator model", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 9, No. 4, pp. 429-438, 1995.

[13] Khawly Z. E., Schramm D.; "Analytical modal analysis for the stator system of a permanent magnet synchronous motor for hybrid vehicles and calculation of its natural frequencies", in *Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering ISMA2010*, pp. 4535-4548.

[14] Witczak P.; "Analytical approach calculating eigenfrequencies and modes of stator cores in AC machines", *Archives of Electrical Engineering*, Vol. 61, No. 1, pp. 47-56, 2012.

[15] Rourke A. K., McWilliam S., Fox C. H. J.; "Frequency trimming of a vibrating ring-based multi-axis rate sensor", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 280, No. 3, pp. 495-530, 2005.

[16] Gallacher B. J., Hedley J., Burdess J. S., Harris A. J., Rickard A., King, D. O.; "Electrostatic correction of structural imperfections present in a microring gyroscope", *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 14, No. 2, pp. 221-234, 2005.

[17] Esmaeili M., Durali M., Jalili N.; "Ring microgyroscope modeling and performance evaluation", *Journal of Vibration and Control*, Vol. 12, No. 5, pp. 537-553, 2006.

[18] Tang J., Wang K. W.; "Vibration delocalization of nearly periodic structures using coupled piezoelectric networks", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 125, No. 1, pp. 95-108, 2003.

[19] Fang X., Tang J., Jordan E., Murphy K. D.; "Crack induced vibration localization in simplified bladed-disk structures", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 291, No. 1, pp. 395-418, 2006.

[20] Li Z., Xue S., Ding Q.; "Preparation and Performance test of soldered stators of ultrasonic motor", *Journal of Testing and Evaluation*. Vol. 45, No. 3, pp. 980-986, 2016.

[21] Yu R. C., Mote Jr C. D.; "Vibration and parametric excitation in asymmetric

circular plates under moving loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 119, No. 3, pp. 409-427, 1987.

[22] Wang S., Xiu J., Cao S., Liu J.; "Analytical treatment with rigid-elastic vibration of permanent magnet motors with expanding application to cyclically symmetric power-transmission systems", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 136, No. 2, 2014.

[23] Rourke A. K., McWilliam S., Fox C. H. J.; "Multi-mode trimming of imperfect thin rings using masses at pre-selected locations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, No. 2, pp. 319-345, 2002.

[24] Yu R. C., Mote C. D.; "Vibration of circular saws containing slots", *Holz als Roh- und Werkstoff*, Vol. 45, No. 4, pp. 155-160, 1987.

[25] Kim M., Moon, J., Wickert J. A.; "Spatial modulation of repeated vibration modes in rotationally periodic structures", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, No. 1, pp. 62-6, 2000.

[26] Chang J. Y., Wickert J. A.; "Response of modulated doublet modes to travelling wave excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242, No. 1, pp. 69-83, 2001.

[27] Chang J. Y., Wickert J. A.; "Measurement and analysis of modulated doublet mode response in mock bladed disks", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 250, No. 3, pp. 379-400, 2002.

[28] Wu X., Parker R. G.; "Vibration of rings on a general elastic foundation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, No. 1, pp. 194-213, 2006.

[29] Bisegna P., Caruso G.; "Frequency split and vibration localization in imperfect rings", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 306, No. 3, pp. 691-711, 2007.

[30] Huang S. C., Soedel W.; "Response of rotating rings to harmonic and periodic loading and comparison with the inverted problem", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 118, No. 2, pp. 253-270, 1987.

[31] Metrikine A. V., Tochilin M. V.; "Steady-state vibrations of an elastic ring under a moving load", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 232, No. 3, pp. 511-524, 2000.

- [32] Mote Jr C. D.; "Stability of circular plates subjected to moving loads", Journal of the Franklin Institute, Vol. 290, No. 4, pp. 329-344, 1970.
- [33] Iwan W. D., Stahl K. J.; "The response of an elastic disk with a moving mass system", Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, No. 2, pp. 445-451, 1973.
- [34] Iwan W. D., Moeller T. L.; "The stability of a spinning elastic disk with a transverse load system", Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, No. 3, pp. 485-490, 1976.
- [35] Shen I. Y., Mote Jr C. D.; "On the mechanisms of instability of a circular plate under a rotating spring-mass-dashpot system"; Journal of Sound and Vibration, Vol. 148, No. 2, pp. 307-318, 1991.
- [36] Shen I. Y., Mote C. D.; "Parametric resonances of a circular plate with inclusions subjected to a rotating spring", Journal of Sound and Vibration, Vol. 149, No. 1, pp. 164-169, 1991.
- [37] Shen I. Y., Mote Jr C. D.; "Parametric excitation under multiple excitation parameters: Asymmetric plates under a rotating spring", International Journal of Solids and Structures, Vol.29, No. 8, pp. 1019-1032, 1992.
- [38] Canchi S. V., Parker R. G; "Parametric instability of a circular ring subjected to moving springs", Journal of Sound and Vibration, Vol. 293, No. 1, pp. 360-379 , 2006.
- [39] Canchi S. V., Parker R. G; "Parametric instability of a rotating circular ring with moving, time-varying springs", Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 128, No. 2, pp. 231-243, 2006.
- [40] Zhao Z., Wang S., Yang J., Chen W.; "Parametric instability induced by traveling magnetic load within permanent magnet motors", Nonlinear Dynamics, Vol. 80, No. 1, pp. 827-843, 2015.
- [41] Sun W., Wang S., Xia Y., Zhang P.; "Natural frequency splitting and principal instability of rotating cyclic ring structures", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 232, No. 1, pp. 66-78, 2018.
- [42] Xia Y., Wang S., Sun W., Xiu J.; "Analytical estimation on divergence and flutter

vibrations of symmetrical three-phase induction stator via field-synchronous coordinates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 386, pp. 407-420, 2017.

[43] Zhang D., Wang S., Liu, J.; "Analytical prediction for free response of rotationally ring-shaped periodic structures", Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 136, No. 4, 2014.

[44] Meirovitch, L.; Elements of vibration analysis, McGraw-Hill Companies, 1975.

[45] <http://lpsa.swarthmore.edu/Fourier/Series/ExFS.html>.

[46] Mubarak, Rana Noman.; "Dynamic response of rotationally periodic structures: thesis submitted in fulfillment of the degree of Doctor of Philosophy in Engineering", Massey University, School of Engineering and Technology, Diss. Massey University, 2014.

Abstract

Free in-plane vibrations of AC electric machine's stator have been studied. A coupled elastic-electromagnetic model has been utilized, while stator structure modeled as a rotating ring and electromagnetic force modeled with equally spaced rotating springs attached to the interior wall of the ring. Governing equations of motion have been extracted using Hamilton's principle in conjunction with the classical curved beam theories. The problem cast to the rotating cyclic symmetric ring with moving load. According to the perturbation theory, the general solution assumed to consist of the solution of the corresponding rotating ring problem with a perturbed term arosed from the cyclic symmetry. Vibration problem has been solved analytically and the corresponding natural frequencies and dampings expressed via closed-form expressions. Interestingly, cyclic symmetry effect leads to mode splitting phenomenon. The phenomena have been investigated in detail using different spring's stiffness models, including constant, harmonic time variable and saw tooth models. The results are expected to offer better predictions of the vibrational behavior of the cyclic symmetric ring-shaped structures in general, and in the design of stator of AC electric machines, in particular.

Key Words: AC electric machine's stator, in-plane vibration, rotating cyclic symmetric ring, mode splitting, perturbation theory



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.s.c Thesis in Aerospace – Space Structures Engineering

**In-Plane free vibration analysis of AC electric machines
stator core considering cyclic symmetry effects**

Saber Sheikh Khoshkar

Supervisors:

Dr. Alireza Shaterzadeh

Dr. Seyedali Sina

January 2019