

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک

شبیه سازی مستقیم عددی جریان گردابه ای به روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی

دانشجو: بابک حقیقی

استاد راهنما:

دکتر محمد جواد مغربی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اردیبهشت ۸۹

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده :

گروه :

پایان نامه کارشناسی ارشد (رساله دکتری) آقای / خانم

تحت عنوان:

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
(مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نمایندة تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

نردبان این جهان ما تهی است

عاقبت این نردبان افتادنی است

لاجرم هرکس که بالاتر نشست

استخوانش سخت تر خواهد شکست

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که در تمام لحظات زندگی حامی و راهنمای من بودند.

تقدیر و تشکر

خدای یکتا را سپاسگزارم که در دو سال اخیر، فرصت شاگردی در کلاس علم و ادب استادان فرهیخته ای را داشته ام. به ویژه از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مغربی تشکر می کنم که در جوار ایشان نه تنها علم بلکه اخلاق نیز آموختم. بی شک بدون وجود کمک و راهنمایی استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر مغربی، که در تمامی مراحل پایان نامه حامی و راهنمای صبور من بودند، اتمام پروژه از محالات بود. همچنین در این قسمت لازم می دانم از راهنمایی های مهندس حمید رضا سنندجی، مهندس احد ضرغامی، و به ویژه از هم فکری دوست عزیزم مهندس امیر محمدی ویسرودی قدردانی نمایم. در طول انجام پروژه مشکلاتی بوجود می آید که توسط مجموعه ای از انسانها برطرف می شود، لذا از خداوند متعال برای کلیه کسانی که مرا در انجام این پروژه یاری نمودند ، موفقیت و سربلندی همراه با آرامش در تمام مراحل زندگی خواستارم.

بابک حقیقی

b.haghighi@mech.tus.ac.ir

اردیبهشت ماه ۱۳۸۹

پیوست شماره ۳

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

ماه و سال

چکیده

با پیشرفت علم کامپیوتر و بوجود آمدن کامپیوترهایی با سرعت بالا استفاده از حل‌های عددی در مسائل مختلف علوم از جمله مهندسی فراگیر شده است. حل‌های عددی نه تنها هزینه روش‌های آزمایشگاهی و تجربی را ندارند، بلکه در مدت زمان کمتری نیز می‌توانند نتایج مفید با جزئیات زیادی را بدست آورند. مزیت شبیه سازی عددی مستقیم نسبت به سایر روش‌های عددی این است که نیاز به مدل خاصی برای مدلسازی توربولانس ندارد ولی یکی از معایب آن این است که حجم محاسبات بالا بوده و در نتیجه حل با استفاده از این روش زمان‌بر خواهد بود. جریان‌های برشی حالت‌هایی از جریان هستند که استفاده صنعتی زیادی دارند و همچنین در مدلسازی مسائل پیچیده نیز به کار می‌روند؛ لیکن حل دقیق این جریان‌ها می‌تواند در موارد فوق مشکل‌گشا باشد. در این تحقیق فرم چرخشی معادلات ناویر-استوکس برای جریان‌های برشی با استفاده از روش‌های عددی و تفاضلات محدود فشرده¹ در جهت اصلی جریان (X) و تفاضلات فشرده تطبیقی در جهت عمود بر جریان Y حل شده‌اند. دامنه حل مسئله در جهت جریان دارای طول محدود و در جهت عمود بر جریان به سمت $\pm\infty$ میل می‌نماید. از نگاشت² یک به یک کتانژانت $y = -\beta \cot(\pi\xi)$ برای مرتبط نمودن شبکه فیزیکی (Y) با شبکه محاسباتی (ξ) به طول واحد استفاده شده است. در مرز ورودی شرط مرزی دیریشله برای سرعت و در مرز خروجی این شرط با استفاده از مدل انتقالی تولید و اعمال شده است. در این مرزها علاوه بر شرط فوق، شرط نیومن که از معادله پیوستگی بوجود می‌آید بر روی $\frac{\partial u}{\partial x}$ اعمال شده است. محاسبات در دامنه زمان با استفاده از روش فشرده رانجه کوتای مرتبه سوم انجام شده است. ضمناً تحلیل جوابها در دستگاه مختصات خودمشابه، خود تشابهی ترمهای سرعت و گردابه را بخوبی نمایان می‌نماید.

کلمات کلیدی: روش مستقیم عددی، جریان برشی، روش تفاضلات محدود فشرده، تفاضلات محدود فشرده

تطبیقی، خود تشابهی

¹ Compact finite difference

² Mapping

فهرست مطالب

صفحه	موضوع
و	تقدیر و تشکر
ح	چکیده
۱	فصل اول _ جریانهای برشی آزاد و مروری بر تحقیقات انجام شده
۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ جریانهای برشی آزاد
۴	۳-۱ تحقیقات انجام شده در زمینه جریانهای گردابه ای
۱۰	فصل دوم _ بررسی معادلات حاکم بر جریان و فرمول بندی ریاضی مسئله
۱۱	۱-۲ مقدمه
۱۲	۲-۲ معادله حاکم بر جریان
۱۵	۳-۲ شرایط مرزی جریان
۱۶	۴-۲ شرایط اولیه
۱۸	فصل سوم _ روش تفاضلات محدود فشرده و نحوه بدست آوردن مشتقات
۱۹	۱-۳ مقدمه
۲۰	۲-۳-۱ محاسبه مشتقات به روش تفاضلات محدود فشرده
۲۴	۳-۲-۲ ارزیابی مشتقات در جهت جریان
۲۶	۳-۳-۱ تحلیل نگاشت اعمال شده برای محدود کردن دامنه در راستای عمود بر جریان
۲۸	۳-۳-۲ ارزیابی مشتقات در جهت عمود بر جریان
۳۰	۴-۳-۱ الگوی پیشرفت زمانی معادلات
۳۳	فصل چهارم _ الگوریتم حل و بررسی صحت جواب
۳۴	۱-۴ مقدمه
۳۵	۲-۴ چگونگی روش حل
۳۸	۳-۴-۱ ارزیابی صحت کد و شبیه سازی عددی
۳۹	۴-۳-۲ گردابه استوارت
۴۱	۴-۳-۳ معادله نفوذ وابسته به زمان
۴۴	فصل پنجم _ بررسی نتایج بدست آمده از تحلیل جریان گردابه ای دو بعدی
۴۵	۱-۵ مقدمه
۴۶	۲-۵ جریان گردابه ای آرام دو بعدی
۵۵	۳-۵ جریان گردابه ای اغتشاشی دو بعدی
۶۶	۴-۵ نتیجه گیری
۶۷	۵-۵ پیشنهادات برای تحقیقات آینده
۶۸	ضمیمه
۸۸	مراجع

فهرست اشکال:

موضوع	صفحه
شکل ۱-۱: نمایی از جریان جت، لایهٔ اختلاطی و گردابه و نوع پروفیل سرعت در آنها	۳
شکل ۲-۱: جریان دنباله پشت صفحه تخت	۵
شکل ۱-۲: نمای شماتیک پروفیل سرعت اولیه جریان گردابه ای	۱۶
شکل ۱-۳: مقایسه مشتق مرتبه اول تحلیلی و عددی تابع $f(x) = x^3 \cos x + 2x \sin(4x)$	۲۵
شکل ۲-۳: مقایسه مشتق مرتبه دوم تحلیلی و عددی تابع $f(x) = x^3 \cos x + 2x \sin(4x)$	۲۵
شکل ۳-۳: مقایسه مشتق اول همراه با نگاشت کتانژانتی اعمال شده بر تابع $f(y) = \exp(-y^2)$	۲۸
شکل ۴-۳: مقایسه مشتق دوم همراه با نگاشت کتانژانتی اعمال شده بر تابع $f(y) = \exp(-y^2)$	۲۹
شکل ۵-۳: مرتبه خطای رانج کوتای مرتبه سوم فشرده برای معادله (۲۱-۳)	۳۲
شکل ۱-۴: ماکزیمم خطا بر حسب زمان برای گردابه استوارت	۴۰
شکل ۲-۴: جواب دقیق گردابه استوارت و مقایسه با نتیجه حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم	۴۱
شکل ۳-۴: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان	۴۲
شکل ۴-۴: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت x	۴۲
شکل ۵-۴: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y	۴۳
شکل ۱-۵: گذر زمانی u در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بدون اغتشاش ورودی	۴۷
شکل ۲-۵: گذر زمانی v در ۵ فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بدون اغتشاش ورودی	۴۸
شکل ۳-۵: چگونگی توسعه یافتن پروفیل سرعت جریان گردابه ای	۴۹
شکل ۴-۵: پروفیل سرعت نقصان u در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دو بعدی بدون اغتشاش ورودی	۵۱
شکل ۵-۵: پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بدون اغتشاش ورودی	۵۱
شکل ۶-۵: پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بر اساس تمام نقاط دامنه	۵۲

- شکل ۷-۵: نمودار نقصان سرعت خط مرکزی $U_{center\ deficit}$ در جهت x ۵۳
- شکل ۸-۵: نمودار ضخامت نیم عرض دنباله b_n در جهت x ۵۳
- شکل ۹-۵: پروفیل سرعت u برای نگاشت $y = -\beta \cot(\pi\xi)$ در شبیه سازی عددی مستقیم ۵۴
- شکل ۱۰-۵: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=50$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۷
- شکل ۱۱-۵: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=100$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۷
- شکل ۱۲-۵: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=150$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۸
- شکل ۱۳-۵: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=200$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۸
- شکل ۱۴-۵: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=50$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۹
- شکل ۱۵-۵: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=100$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۵۹
- شکل ۱۶-۵: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=150$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۶۰
- شکل ۱۷-۵: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=200$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان ۶۰
- شکل ۱۸-۵: پروفیل سرعت متوسط در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۱
- شکل ۱۹-۵: پروفیل گردابه ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی همراه با اغتشاش ورودی در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۲
- شکل ۲۰-۵: نمودار تنش رینولدزی $\sqrt{(\overline{u'})^2}/U_{average}$ بر حسب y در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۳
- شکل ۲۱-۵: نمودار تنش رینولدزی $\sqrt{(\overline{u'})^2}/U_{average}$ بر حسب $y/b_{1/2}$ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۴
- شکل ۲۲-۵: نمودار تنش رینولدزی $u'v'_{rms}/U_{average}$ بر حسب $y/b_{1/2}$ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۴
- شکل ۲۳-۵: نمودار تنش رینولدزی $\sqrt{(\overline{v'})^2}/U_{average}$ بر حسب $y/b_{1/2}$ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$ ۶۵

فصل اول

جریانهای برشی آزاد و مروری بر تحقیقات

انجام شده

۱-۱) مقدمه

در این فصل ابتدا انواع جریانهای برشی آزاد معرفی می گردند و اهمیت و نیز کاربردهای آنها در حوزه های گوناگون علوم مهندسی بیان می شود. در ادامه جریان گردابه ای و پارامترهای موثر بر آن و نیز چگونگی پروفیل سرعت آن مورد بررسی قرار می گیرد. در پایان نیز برخی از تحقیقات انجام شده در زمینه جریانهای گردابه ای ارائه می گردد.

۱-۲) جریانهای برشی آزاد

در جریانهای برشی آزاد سیال هیچ تماس فیزیکی مرزی با محیط خود ندارد. به همین علت به آن جریانهای برش آزاد می گویند. از انواع جریانهای برشی آزاد می توان دنباله^۱، جت^۲، لایه های اختلاطی^۳ و را نام برد در شکل ۱-۱ می توان آنها را دید. جریانهای برشی حالتی از جریان هستند که استفاده صنعتی زیادی دارند و همچنین در مدلسازی مسائل پیچیده نیز به کار می روند؛ لیکن حل دقیق این جریانها می تواند در موارد فوق مشکل گشا باشد. در اینگونه جریان ها با پیشروی برش آزاد در محیط، سیال محیط را با خود حمل می کند و محیط گردابه ای تولید می کند. با بی بعد کردن ابعاد با یک طول مشخصه خاص و سرعت با مشخصه سرعت، پروفیل های سرعت و توزیع تنش های رینولدز در ایستگاههای مختلف در دامنه وسیعی به خوبی به روی هم منطبق می شوند. به این پدیده خودتشابهی می گویند [۵].

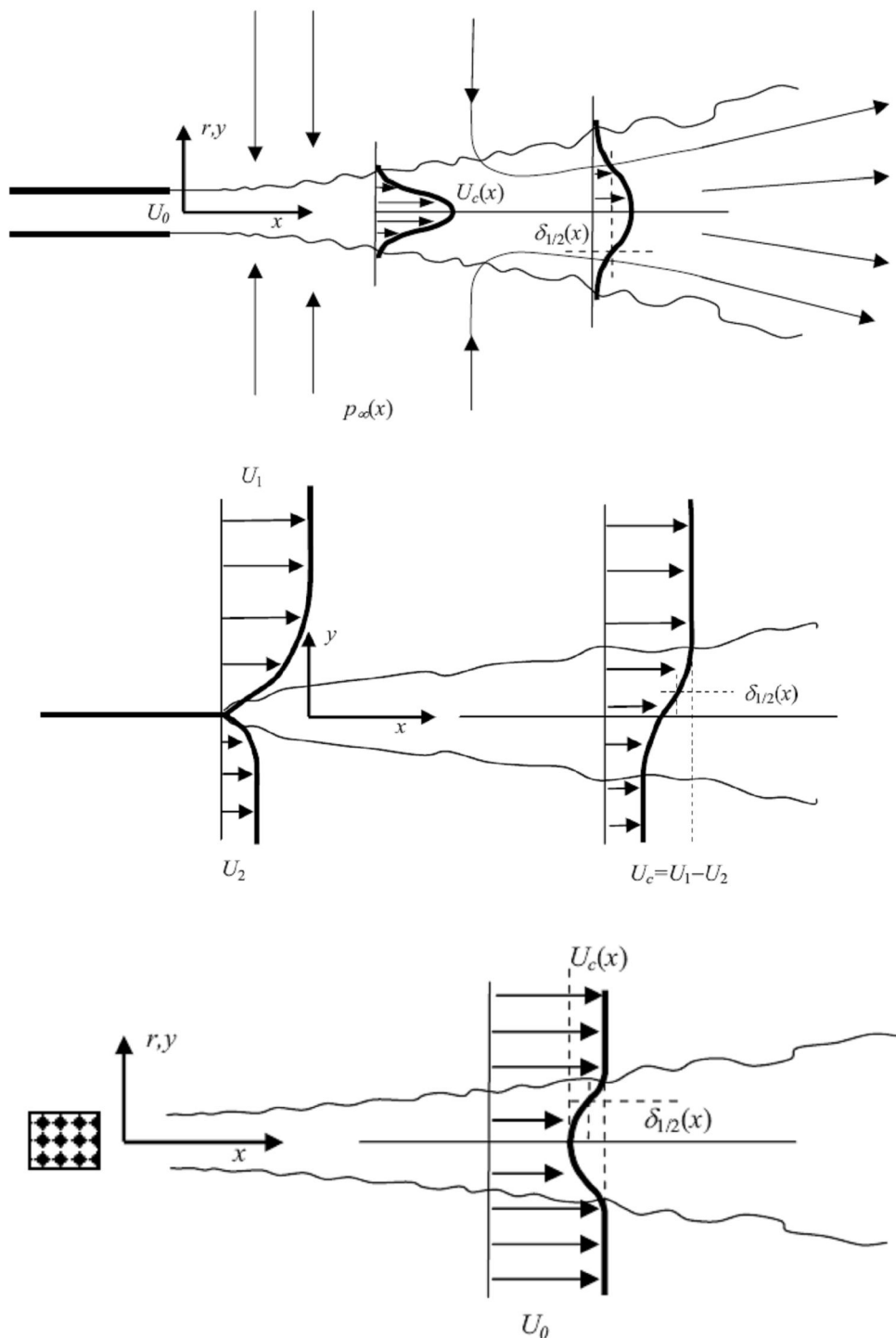
هر یک از این جریانها کاربردهای متفاوت و گسترده ای در زمینه های مهندسی و به طور کلی علوم مختلف دارند که بررسی و تحلیل آنها را ضروری می سازد. جریانهای برشی آزاد دارای پارامترهای مختلفی می باشند که برای بررسی و تحلیل هر یک از آنها توجه به این متغیرها و نحوه تاثیرات هر یک بر جریانات باید مورد توجه قرار گیرد. به عنوان مثال در جریان لایه اختلاطی رشد ضخامت ورتیسیتته و اختلاف سرعت دو جریان و در جریان گردابه ای نصف عرض پروفیل نقصان دنباله در بی بعد سازی و ارزیابی و تحلیل نقش دارند و در نتیجه در تحلیل هر کدام از

¹Wake

² Jet

³ Mixing Layer

این جریانها، توجه به رفتار پارامترهای حاکم و ارزیابی درست اهمیت هر یک از آنها می تواند تاثیر زیادی بر نتایج داشته باشد.



شکل ۱-۱: نمایی از جریان جت، لایه اختلاطی و گردابه و نوع پروفیل سرعت در آنها [۱۸]

جریانهای برشی دارای کاربردهای عملی بسیاری می باشند. به عنوان مثال جریان جت درمحفظه پاشش سوخت، جلوبندی در موتور جت و ... به کار برده می شود. یکی از مهمترین بررسی های انجام شده برای جریان جت فرآیند اختلاط و حمل سیال محیط یک جت با توجه به محیط خودش است [۵]. به عنوان مثال پاشش سوخت باعث اختلاط یکنواخت تر شده و در نتیجه بازده افزایش می یابد و کارکرد موتور بهتر می شود. از کاربردهای جریان گردابه می توان در طراحی زیردریایی و کشتیها و ایرفویل ها اشاره کرد. لایه های اختلاطی در طراحی توربین های گازی و محاسبات لبه فرار پره توربین ها و یا واکنش های شیمیایی استفاده گسترده ای دارد.

۱-۳) تحقیقات انجام شده در زمینه جریانهای گردابه ای

بخش عمده ای از مطالعات به جریانهای دارای مرز مشخص جامد اختصاص یافته است ولی همان گونه که قبلا ذکر شد جریانهای برشی آزاد نیز دارای اهمیت زیادی در بررسی و تحلیل جریانهای مختلف می باشند. شیلیختینگ [۸] جریانی را که به دیواره جامدی محدود نباشد را جریان آزاد نامید و سه نوع جریان برشی مهم شامل جریان اختلاطی، جریان جت آزاد و جریان گردابه ای و شرایط مرزی هر یک را مورد بررسی قرار داده است که ما در اینجا توجه خود را به جریان گردابه ای معطوف می سازیم.

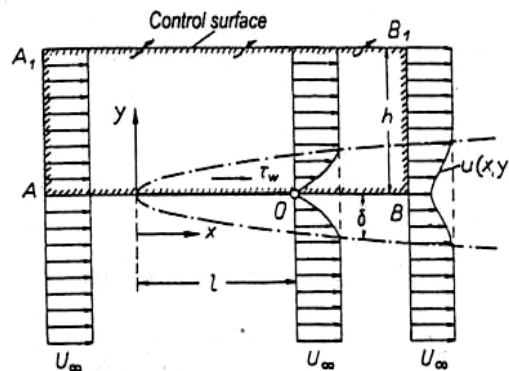
جریان گردابه ای پشت یک جسم جامد که تحت درگ ناشی از سیال قرار گرفته است یا به عبارت دیگر در پشت جسمی جامد که در مسیر جریان سیال قرار دارد تشکیل می گردد. سرعت در جریان گردابه ای از سرعت جریان اصلی آزاد کمتر است و با پیشروی هرچه بیشتر پروفیل سرعت کامل تر شده و از مقدار نقصان^۱ آن کاسته می شود به عبارت دیگر گسترش پروفیل سرعت گردابه با افزایش فاصله از جسم افزایش می یابد و تفاوت سرعت گردابه با جریان آزاد نیز کاهش می یابد.

شیلیختینگ بیان می کند که جریانهای برشی آزاد نیز دارای طبیعت لایه مرزی هستند بنابراین مجاز هستیم که از معادلات لایه مرزی برای بررسی چنین جریاناتی استفاده نماییم.

¹ Wake deficit

در نتیجه استفاده از معادلات لایه مرزی الزاماً برای جریان روی دیواره ثابت محدود نشده است. شکل (۲-۱) جریان دنباله پشت یک صفحه تخت را نشان می دهد. پروفیل سرعت دنباله با افزایش x کامل تر شده و مقدار نقصان آن کمتر می شود در این قسمت فرض می شود که اندازه نقصان سرعت یعنی:

$$u_1(x, y) = U_\infty - u(x, y) \quad (1-1)$$



شکل ۲-۱: جریان دنباله پشت صفحه تخت [۵]

وقتی $x \rightarrow \infty$ میل می کند u_1 در مقایسه با U_∞ مقدار ناچیزی دارد. بنابراین می توان از عبارتهای مرتبه دوم u_1 و v_1 صرف نظر کرد. با توجه به اینکه در پائین دست جریان فشار کم است، می توان معادلات لایه مرزی را با صرف نظر از عبارتهای مرتبه دوم به صورت زیر نوشت:

$$U_\infty \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (2-1)$$

که شرایط مرزی آن به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(y=0) = 0, \quad y \rightarrow \infty \Rightarrow u_1 \rightarrow 0 \quad (3-1)$$

این معادله یک معادله خطی با مشتقات جزئی است. این خطی سازی بوسیله فرضیاتی در ترم u_1 یعنی اغتشاشات انجام شده است. حال اگر متغیر تشابهی η را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$u_1 = U_\infty C \left(\frac{x}{l} \right)^{-m} F(\eta), \eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (4-1)$$

آنگاه به معادله دیفرانسیل زیر خواهیم رسید:

$$F'' + 2\eta F' + 4mF = 0 \quad (5-1)$$

که شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\eta = 0 : F' = 0; \eta \rightarrow \infty : F = 0 \quad (6-1)$$

بالانس نرخ حجم و مومنتوم در جهت X برای سطح کنترل در جدول (۱-۱) نشان داده شده است:

جدول ۱-۱: بالانس نرخ حجم و مومنتوم در جهت X برای سطح کنترل شکل ۲-۱

cross - section	Volume flux	x momentum
AB	0	0
AA ₁	$b \int_0^h U_\infty dy$	$\rho b \int_0^h U_\infty^2 dy$
BB ₁	$-b \int_0^h u dy$	$-\rho b \int_0^h u^2 dy$
A ₁ B ₁	$-b \int_0^h (U_\infty - u) dy$	$-\rho b \int_0^h U_\infty (U_\infty - u) dy$
$\Sigma =$ control surface	$\Sigma =$ volume flux=0	Σ Momentum flux= Drag

مقدار پارامتر مجهول m را می توان از بالانس مومنتوم حول جسم در شکل (۲-۱) بدست آورد. سطح کنترل مستطیلی AA₁BB₁ به اندازه کافی دور از جسم در نظر گرفته شده است به طوری که اغتشاشات فشار نداشته باشیم، در نتیجه فشار در کل سطح کنترل ثابت بوده و در نتیجه نیروی حاصل از فشار در بالانس مومنتوم اثری ندارد. به این دلیل که باید معادلات پیوستگی ارضا شوند در نتیجه سیال باید از بالا و پائین سطح کنترل خارج شود. مقدار کمیت سیال خارج شده از A₁B₁ باید با اختلاف سیال ورودی از AA₁ و سیال خارج شده از BB₁ برابر باشد. همانطور

که در جدول (۱-۱) نشان داده شده است، نرخ حجم ورودی مثبت و نرخ حجم خروجی منفی در نظر گرفته شده است. حال می‌توانیم نیروی دراگ را بوسیله نرخ کل مومنتوم حساب کنیم:

$$D = b\rho \int_{-\infty}^{+\infty} u(U_{\infty} - u) dy \quad (۷-۱)$$

که حدود انتگرال بجای $y = \pm h$ باید با $y = \pm\infty$ جاگذاری شود با فرضیات قبلی می‌توان معادله (۷-۱) را به صورت زیر نوشت

$$D \approx be \int_{-\infty}^{+\infty} U_{\infty} u_1 dy = 2b\rho U_{\infty}^2 C \left(\frac{x}{l}\right)^{-m} \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) d\eta \quad (۸-۱)$$

با توجه به اینکه بالانس مستقل از x است می‌توان مقدار پارامتر m را بدست آورد که برابر $m=0.5$ است. در نتیجه رابطه (۴-۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$F'' + 2\eta F' + 2F = 0 \quad (۹-۱)$$

با یک بار انتگرال گیری به رابطه زیر می‌رسیم:

$$F' + 2\eta F = 0 \quad (۱۰-۱)$$

حل نهایی به صورت زیر است:

$$F(\eta) = e^{-\eta^2} \quad (۱۱-۱)$$

با توجه به رابطه انتگرالی زیر

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi} \quad (۱۲-۱)$$

می‌توان ضریب دراگ را به صورت زیر استخراج کرد:

$$c_D = \frac{D}{\frac{\rho}{2} U_{\infty}^2 b l} = \frac{4\sqrt{\pi} C}{\sqrt{\frac{U_{\infty} l}{\nu}}} \quad (۱۳-۱)$$

در نتیجه حل نهایی برای ترم u_1 برای جریان دنباله از رابطه زیر استخراج می‌شود که C_D ضریب دراگ است.

$$\frac{u_1(x, y)}{U_\infty} = \frac{c_D}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{U_\infty l}{\nu}} \left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{y^2 U_\infty}{4x\nu}\right) \quad (14-1)$$

از رابطه (15-1) می توان نیم ضخامت دنباله را به صورت زیر استخراج کرد:

$$y_{0.5} = 1.7 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (15-1)$$

حل بالا از نوع حل های تشابهی می باشد. امروزه الگوریتم های عددی متنوع و گسترده ای برای حل های انواع جریانهای برشی با کارایی بالا موجود می باشد که استفاده از هر کدام بستگی به نوع مسئله و پارامترهای موثر بر آن از قبیل دقت و سرعت مورد نیاز بستگی دارد.

برای بررسی جریان گردابه ای از دو الگوریتم استفاده شده است که انتخاب هر یک از آنها به نوع هندسه مسئله و پارامترهای معلوم بکار گرفته شده بستگی دارد.

✓ بکار گرفتن معادلات ناویر استوکس بدست آمده ناشی از حذف ترم فشار

✓ حل معادلات ناویر استوکس با تعریف معادله برای میدان فشار

منصور و میاکاوا¹ در سال ۱۹۹۲ جریان گردابه ای را توسط روش طیفی و با استفاده از معادلات ناویر استوکس بدست آمده با حذف ترم فشار و با استفاده از شبیه سازی مستقیم عددی تحلیل کردند و تاثیرات ناپایداری فازی^۲ را بررسی نمودند. همچنین در سال ۱۹۹۹ دکتر مغربی جریان گردابه ای سه بعدی را با تلفیقی از روش طیفی و تفاضلات محدود فشرده و همچنین حل کننده اورسامرفیلد با استفاده تفاضل محدود را برای جریان گردابه ای مورد بررسی قرار دادند.

در سال ۲۰۰۳ رویت و چن^۳ شکست گردابه های سه بعدی^۴ در جریان گردابه ای و جت چرخشی را با استفاده از شبیه سازی عددی مستقیم مورد بررسی و تحلیل قرار دادند.

¹ Mansour and Maekawa

² Phase jittering

³ Ruith and Chen

⁴ Three-dimensional vortex breakdown

در سال ۲۰۰۵ نامورا^۱ و همکاران تولید گردابه^۲ در جریان تحریک شده گردابه ای را بررسی کردند.

در سال ۲۰۰۶ وینکلمنس و کاکل^۳ جریان گردابه ای را با استفاده از شبیه سازی گردابه های بزرگ^۴ بررسی و با نتایج تجربی مقایسه کردند.

در سال ۲۰۰۴ شوویلر^۵ و همکاران برهمکنش جریانهای گردابه ای ناشی از قرار گرفتن دو کره در کنار یکدیگر را بررسی کردند.

در سال ۲۰۰۴ واتانابه و میاکاوا^۶ تکامل سه بعدی ساختار و تولید گردابه در جریان گردابه ای دوبعدی تراکم پذیر را مورد تحلیل قرار دادند.

در سال ۲۰۰۵ دانگ^۷ جریان گردابه ای در پشت یک استوانه ثابت و نوسانی^۸ را در رینولدز ۱۰۰۰۰ با استفاده از شبیه سازی عددی مستقیم بررسی کرد.

در سال ۲۰۰۸ آفانسیف و کورابل^۹ دنباله و خیابان گردابه ای^{۱۰} ناشی از نیروی محلی اعمال شده را بررسی و تحلیل کردند.

در سال ۲۰۰۹ فون ترزی و همکاران^{۱۱} مشخصات ساختارهای بزرگ به هم پیوسته^{۱۲} در جریان گردابه ای سوپرسونیک نامتقارن را بررسی کردند.

همان طور که مشخص است بررسی جریان گردابه ای در زمینه های گوناگون به خصوص در سالهای اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است که این امر به خوبی بیانگر اهمیت و کاربردهای مختلف این جریان می باشد. در سالهای اخیر تحقیقات در این زمینه به سمت روش شبیه سازی گردابه ای بزرگ و نیز جریانهای واکنش دهنده سوق پیدا کرده است.

¹ Nonomura

² Vortex Generation

³ Winckelmans and Cocle

⁴ Large Eddy Simulation

⁵ Schouveiler

⁶ Watanabe and Maekawa

⁷ Dong

⁸ Oscillating cylinder

⁹ Afanasyev and Korabel

¹⁰ Vortex Street

¹¹ Von Terzi

¹² Large coherent structures

فصل دوم

بررسی معادلات حاکم بر جریان و فرمول بندی

ریاضی مسئله

۲-۱) مقدمه

در این فصل ابتدا معادلات حاکم بر جریان بیان می گردند سپس شرط مرزی و شرط اولیه برای شبیه سازی عددی مستقیم جریان گردابه ای دوبعدی توضیح داده می شوند. معادلات حاکم از معادلات ناویر - استوکس غیر قابل تراکم بدست می آیند. این معادلات در یک دامنه محاسباتی^۱ که در جهت x محدود و در جهت y نامحدود می باشد، باشد، در نظر گرفته شده و سپس حل می گردند. برای اینکه تاثیرات مرزها به حداقل برسد از نگاشت استفاده می کنیم. در جهت x از روش تفاضل محدود فشرده مرتبه بالا و در جهت y از روش تفاضل محدود فشرده تطبیقی^۲ استفاده شده است. تمام پارامترها بوسیله مقیاس طولی و سرعت مناسب بی بعد شده اند. از پروفیل نقصان دنباله و نیز نصف عرض پروفیل نقصان دنباله برای بی بعد سازی پارامترهای جریان مانند سرعت و ورتیسیته استفاده می کنیم.

¹ Computational Domain

² High Order Compact Finite Difference

۲-۲) معادلات حاکم بر جریان

ابتدا به ساده سازی معادلات ناویر استوکس می پردازیم زیرا معادلات ناویر استوکس دارای پیچیدگی و متغیر های زیادی می باشد که حل هم زمان آنها بسیار مشکل و گاهی غیر ممکن است. در روش شبیه سازی عددی مستقیم^۱ معادلات ناویر استوکس به صورت مستقیم و بدون هیچ گونه مدل سازی مورد بررسی قرار می گیرند به عبارتی تمام ساختارهای بزرگ و کوچک^۲ جریان در نظر گرفته می شود و از هیچ مقیاسی صرف نظر نمی گردد. در نتیجه این روش دارای دقت زیادی می باشد. در واقع هدف اصلی شبیه سازی عددی مستقیم حل معادلات برای جریان توربولانس بدون استفاده از هیچگونه مدل توربولانسی می باشد و برای این منظور می بایستی معادلات ناویر استوکس بدون هیچگونه مدل سازی مورد استفاده قرار گیرند. در حال حاضر با ظهور ابر کامپیوترها می توان جریانهای توربولانس کاملاً توسعه یافته را به کمک روشهای شبیه سازی عددی مستقیم بطور دقیق تحلیل کنیم و خواص آنرا بدست آوریم. جهت گسسته سازی یک شبکه بندی دقیق و کامل مورد احتیاج است. بنابراین، اجرای هر برنامه عددی مستقیم احتیاج به مدت زمان طولانی دارد. تا امروز محاسبات مربوط به این روش تا رینولدزهای متوسط امکان پذیر بوده است و به دلیل محدودیتهای موجود در توان محاسباتی کامپیوترهای امروزی، محاسبات به روش مستقیم عددی تنها منحصر به بعضی جریانهای با هندسه ساده و اعداد رینولدز پایین است و استفاده از روش مستقیم عددی در جریان آشفته منحصر به مطالعه بنیادی و کاربرد در مدلسازی می باشد. در واقع برای استفاده از این روش باید بین دقت مورد نیاز و سرعت و هزینه اقتصادی محاسبات تعادل ایجاد نمود.

شبیه سازی مستقیم عددی در حال حاضر یکی از کاربردهای ابر کامپیوترها می باشد. مشکلات موجود در انجام این محاسبه به دلیل وجود محدوده بسیار وسیع مقیاسهای طولی و زمانی در جریان آشفته است که باید در محاسبات در نظر گرفته شوند.

دامنه مسئله در راستای جریان X محدود و در راستای عمود بر جریان Y نامحدود می باشد که همان گونه که ذکر شد برای به حداقل رساندن تاثیرات مرزها دامنه فیزیکی در راستای Y را توسط نگاشت به یک دامنه محاسباتی

¹ Direct Numerical Simulation

² Large scale and Small scale

تبدیل می کنیم. پروفیل سرعت اولیه $U_0(y)$ به صورت یک پروفیل گوسی در نظر گرفته می شود. جریان گردابه ای اجازه می یابد تا در جهت X در دامنه محاسباتی توسعه یابد. در جهت Y ها مجموعه از هر دو طرف نامحدود است.

فرم کلی بی بعد معادله ناویر استوکس به صورت زیر است.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (1-2)$$

بررسی ترم فشار در معادلات ناویر استوکس دارای مشکلات خاص خود می باشد چون برای حل معادلات ناویر استوکس نیاز به دانستن شرایط در مرزها داریم، و در صورتیکه هیچ گونه اطلاعاتی از فشار در مرزها موجود نباشد یا باید ترم فشار را به گونه ای از معادلات حذف کنیم و یا از شبکه بندی بسیار ریز و فشرده برای گسسته سازی استفاده کنیم که هزینه محاسبات را بالا می برد. در نتیجه همان گونه که قبلا ذکر شد یا از معادلات ناویر استوکس ناشی از حذف ترم فشار استفاده می کنیم و یا معادلات ناویر استوکس را با در نظر گرفتن معادله ای برای میدان فشار حل می کنیم که ما در اینجا راهبرد اول را مورد بررسی قرار می دهیم.

با توجه به رابطه زیر :

$$\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B) \quad (2-2)$$

برای حالتی که $A = B = \vec{U} = (U, V, W)$ معادله فوق به صورت زیر در می آید.

$$(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{U} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) \quad (3-2)$$

که $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ است. اگر معادله (3-2) را در (1-2) جایگزین کنیم معادله زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{H} - \nabla(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (4-2)$$

که در آن $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3) = \vec{U} \times \vec{\omega}$. اگر از معادله (4-2) کرل بگیریم، در این صورت داریم:

$$\frac{\partial(\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}(p + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\nabla \times \vec{U}) \quad (5-2)$$

با توجه به اینکه عبارت $\nabla \times \nabla(\text{Scaler}) = 0$ برابر با صفر می باشد داریم:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (۶-۲)$$

با گرفتن کرل از معادله (۶-۲) داریم:

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \vec{U})) \quad (۷-۲)$$

با توجه به رابطه پیوستگی و با به کار بردن رابطه زیر:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U} \quad (۸-۲)$$

معادله (۷-۲) به معادله (۹-۲) تبدیل می گردد.

$$\frac{\partial \nabla^2 \vec{U}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 \vec{U} \quad (۹-۲)$$

همچنین از پیوستگی داریم:

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (۱۰-۲)$$

همان گونه که از محاسبات فوق پیدا است ترم فشار از معادلات ناویر استوکس حذف شده و در نتیجه مشکلات ناشی از آن مرتفع می گردد. همچنین با استفاده از محاسبات فوق از تعداد متغیرهای مستقل کاسته می شود که این امر به نوبه خود باعث افزایش سرعت محاسبات می گردد. در مقابل اما این محاسبات موجب افزایش درجه معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان شده و دقت جوابها پایین می آید همچنین در این حالت اعمال شرایط مرزی دشوارتر می گردد.

برای حالت دو بعدی که در این تحقیق به آن پرداخته شده است معادله حاکم بر جریان به صورت زیر است.

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 U \quad (۱۱-۲)$$

لازم به ذکر است که در معادله (۱۱ - ۲) مقادیر سرعت به صورت زیر است.

$$U(x, y, t) = u(x, y, t) + U_0(y) \quad (۱۲-۲)$$

$$V(x, y, t) = v(x, y, t) \quad (۱۳-۲)$$

که در معادله آورده شده در صفحه قبل U بیانگر سرعت در جریان است و u نیز نشان دهنده سرعت محاسباتی^۱ است. یعنی در واقع سرعت لحظه ای در حالت دو بعدی به صورت ترکیبی از سرعت جریان اصلی و سرعت محاسباتی در نظر گرفته می شود که باعث سهولت در انجام محاسبات مربوط به سرعت می گردد.

۲-۳) شرایط مرزی جریان

از قسمت قبل به یاد داریم که سرعت را به دو قسمت سرعت جریان اصلی و سرعت محاسباتی تقسیم کردیم که موجب سهولت در محاسبات می گردد. معادلات ناویر استوکس و پیوستگی برای متغیر های محاسباتی حل می شوند و در نتیجه شرایط مرزی نیز بر روی متغیر های محاسباتی اعمال می شوند. معادله حاکم بر دامنه محاسباتی در جهت عمود بر جریان از درجه دوم می باشد بنابراین نیاز به دو شرط مرزی در بالا و پایین دامنه محاسباتی در راستای y داریم. با توجه به اینکه سرعت در بالا و پایین دامنه محاسباتی در راستای عمود بر جریان مشخص است بنابراین شرایط مرزی در راستای y نیز مشخص می باشد. معادله (۲-۱۱) در راستای جریان یک معادله دیفرانسیل درجه چهار نسبت به مکان و درجه یک نسبت به زمان می باشد، در نتیجه نیاز به اعمال چهار شرط مرزی و یک شرط اولیه داریم .

شرط اولیه در قسمت های بعدی مورد بحث قرار خواهد گرفت اما در مورد شرط مرزی، ما نیاز به چهار مقدار مشخص مکانی در مرزها داریم. مقادیر u در مرز ورودی و مرز خروجی مجموعه محاسباتی مشخص می باشد و نیز با توجه به معادله پیوستگی، $\frac{\partial u}{\partial x}$ هم در مرزهای ورودی و خروجی مجموعه محاسباتی معلوم می باشند. این شرایط مرزی به شرایط مرزی درینچلت^۲ و نیومن^۳ معروف می باشند.

در مرز خروجی می توانیم از انواع شرایط مرزی انتقالی، لزجی، خطی و یا غیر خطی استفاده کنیم که استفاده از هریک به نوع و چگونگی تحلیل ما از مسئله بستگی دارد. این تحلیل در مرز خروجی از یک شرط مرزی انتقالی خطی استفاده شده است. در مرز خروجی نباید هیچگونه برگشت جریان داشته باشیم به عبارت دیگر اغتشاشات

¹ Computational velocity

² Dirichlet boundary condition

³ Neumann boundary condition

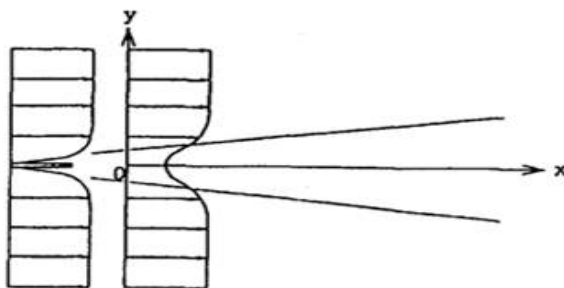
ایجاد شده در دامنه محاسباتی پس از برخورد با مرز خروجی باید به صورت طبیعی از آن عبور کنند و دوباره به داخل دامنه محاسباتی منعکس نشوند که در غیر این صورت به اصطلاح جریان به داخل دامنه محاسباتی^۱ بر می گردد و موجب خطا در محاسبات می گردد. در این مرز از معادله جابه جایی برای تولید شرط مرزی دریچلت برای هر دو مولفه سرعت استفاده می کنیم که معادله آن به صورت زیر می باشد :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -c \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (۱۴-۲)$$

در این معادله ، مولفه های سرعت u و v جایگزین θ می گردند. ضریب c برابر با سرعت کلی انتقال موج و یا سرعت متوسط جریان در جهت اصلی در مرز خروجی است . به عبارت دیگر c سرعت جابجایی ساختار است که توسط سعی و خطا بدست می آید و در عمل c باید با سرعت حرکت امواج در دامنه محاسباتی یکسان گردد. البته مقدار دقیق این پارامتر مشخص نیست و باید با تخمین مناسبی جریان را حل کرد. استفاده از سرعت انتقال موج که از تحلیلی پایداری خطی بدست می آید نیز جهت تعیین c مناسب می باشد [۶].

۴-۲) شرایط اولیه

پروفیل سرعت در نظر گرفته شده برای شرط اولیه جریان گردابه ای دو بعدی در شکل (۱-۲) نشان داده شده است.



شکل ۱-۲: نمای شماتیک پروفیل سرعت اولیه جریان گردابه ای [۱۴]

¹ Computational Domain

پروفیل گوسی برای شرط جریان ورودی در نظر گرفته می شود. در واقع پروفیل سرعت گوسی بطور یکنواخت در تمام ایستگاههای x ، شرط اولیه برای جریان گردابه ای دو بعدی می باشد. معادله این پروفیل به صورت زیر می باشد:

$$U_0(y) = 1 - 0.692(1 - 0.69315y^2) \quad (15-2)$$

ضریب 0.692 در معادله (15-2) به این دلیل استفاده شده است که سرعت خط مرکزی پروفیل نقصان دنباله منطبق بر این خط در آزمایشات تجربی باشد [10] و همچنین پروفیل در نظر گرفته شده به صورت توسعه یافته در نظر گرفته می شود [12]. بر مبنای مطالعات آماری، این شرط اولیه برای شبیه سازی جریان اجباری و غیراجباری جریان گردابه ای مناسب می باشد [16]. به بیان دیگر، هر ذره در ورودی ($x=0$)، باید مجاز به خروج از مرزها ($x=L_x$)، باشد. جریان گردابه ای همچنین بایستی به حالت ایستای آماری هنگامیکه مولفه های سرعت متوسط، مستقل از زمان می باشند، برسد.

فصل سوم

روش تفاضلات محدود فشرده و نحوه بدست

آوردن مشتقات

۳-۱) مقدمه

با انجام محاسباتی که در قسمتهای پیشین بیان شد به فرم چرخشی معادلات ناویر استوکس رسیدیم که در ادامه باید بدون هیچ گونه مدل سازی خاصی به حل این فرم از معادله ناویر استوکس با استفاده از روش شبیه سازی عددی مستقیم پردازیم. واضح است که ابتدا باید به گسسته سازی توابع و مشتقات بکار گرفته شده در معادله دیفرانسیل پردازیم. برای تقریب زدن و گسسته سازی مشتقات بکار رفته در هر معادله دیفرانسیل روشهای گوناگونی مانند اجزای محدود، حجم محدود و یا تفاضل محدود وجود دارد که بکارگیری هر یک از این روشها بستگی به نوع معادله و نیز هندسه مسئله مورد نظر دارد. ما در این تحلیل از روش تفاضل محدود فشرده^۱ استفاده می کنیم که دارای دقت بسیار خوبی در تقریب مشتقات می باشد. در جهت عمود بر جریان از نگاشت^۲ برای به حداقل رساندن تاثیرات مرزها استفاده می کنیم که در نتیجه به درستی می توان روش مذکور را تفاضلات محدود فشرده تطبیقی نامید. در این فصل ابتدا این روش مورد بحث قرار می گیرد. سپس چند تابع ریاضی به روش تفاضلات محدود فشرده محاسبه شده و نتایج آن با روش تحلیلی مقایسه می گردند. در ادامه بررسی نگاشت و چگونگی تاثیر آن بر روابط مشتقات در راستای عمود بر جریان می پردازیم و در پایان نیز به چگونگی توسعه زمانی معادلات و روش بکار گرفته شده یعنی روش رانج- کوتا فشرده درجه سوم می پردازیم.

¹ Compact Finite Difference Method

² Mapping

۳-۲-۱) محاسبه مشتقات به روش تفاضلات محدود فشرده

روش تفاضلات محدود مدت‌های زیادی است که برای تقریب زدن جواب معادلات دیفرانسیل جزئی مورد استفاده قرار گرفته است. این روش شامل گسسته‌سازی دامنه موردنظر به شبکه‌ای از نقاط می‌باشد که مشتقات از طریق مقادیر تابع در این نقاط تقریب زده می‌شود. در هر نقطه شبکه موردنظر، مقدار تابع یا توابع موردنظر به صورت مجهول در نظر گرفته می‌شود و معادلات دیفرانسیل حاکم به صورت سیستمی از معادلات جبری تقریب زده می‌شوند که این معادلات توسط الگوریتم حل ماتریسی مناسب حل می‌شوند. این فرآیند تقریب‌زدن و مشخصات سیستمهای ماتریسی حاصل است که انواع روشهای تفاضلات محدود از یکدیگر را مشخص می‌کند. به طور کل تفاضلات محدود یک روش پیشرو^۱ برای توسعه تقریبات عددی مسائل مقدار مرزی می‌باشد. ولی استفاده از آن باید شبکه‌ای ساختاریافته از نقاط ایجاد کرد که می‌تواند یکی از معایب این روش باشد. که این امر در تضاد با روش اجزاء محدود می‌باشد که برای تطبیق با شبکه‌های غیرساختار یافته و داده‌های غیرمنظم مسئله طراحی شده است. ولی در عوض در روش تفاضلات محدود می‌توان به راحتی از تحلیل سری تیلور برای بررسی خطای مسئله موردنظر استفاده نمود. همچنین تفاضلات محدود که نیاز به شبکه‌های ساختار یافته ندارد توسط تورزیدلو^۲ ارائه شده است ولی به هر حال این امر مستلزم فرمول‌بندی پیچیده‌ای است و هزینه حمل مسئله را بالا می‌برد. ساده‌ترین و البته آشناترین روش تفاضل محدود فشرده برای معادلات مشتقات جزئی بیضوی روش تفاضل محدود مرکزی با شبکه ساختار یافته می‌باشد.

در این روش مشتقات اول و دوم در هر نقطه توسط ترکیبات خطی از سه مقدار تابع در آن نقطه و نقاط مجاور آن بیان می‌شود. مشتقات بالاتر نیاز به نقاط بیشتری دارد. به طور کلی مشتقات از درجه P می‌تواند توسط $P+1$ نقطه که به صورت متقارن واقع شده‌اند، در روش تفاضل محدود مرکزی تقریب زده شوند. البته P باید زوج باشد. ضرایب نیز متقارن هستند. اگر P فرد باشد در این صورت $P+2$ گره نیاز است و همچنین ضرایب نیز نامتقارن می‌باشند که

¹ Straight forward

² Tworzidlo

در عمل بدین معنی می‌باشد که ضریب مرکزی برای مشتقات فرد همیشه صفر می‌باشد. خطای این روش از درجه دوم می‌باشد [۱۴].

روشهای با دقت‌های مراتب بالاتر از درجه دو، روشهای با دقت مراتب بالاتر نامیده می‌شدند. به دلیل دقت‌های بالاتر می‌توانیم از شبکه‌های درشت‌تری استفاده کنیم و در نتیجه هزینه‌های محاسباتی کاهش می‌یابند. برای بدست آوردن دقت‌های بالاتر می‌توانیم نقاط اضافی به تقریب‌هایی که مشتقات را بیان می‌کنند اضافه کنیم. به طور کلی در شبکه‌های ساختار یافته می‌توانیم مشتق از درجه P با خطای از درجه m می‌تواند با $P+m-1$ نقطه تقریب زده شود که البته P زوج است. اگر P فرد باشد در این صورت $P+m$ نقطه موردنیاز است. تئوری عمومی روش تفاضل محدود توسط پترسون برای تقریب‌زدن مشتقات اول و دوم تا $o(h^{N-1})$ برای N گره ارائه شده است [۱۵]. روشهای دقت بالا که با این روش محاسبه می‌گردند، عمدتاً دارای ساختارهای غیرفشرده هستند که باعث می‌شود از گره‌هایی که به طور مستقیم مجاور گره موردنظر نیز نیستند برای تقریب مشتق در آن گره استفاده کنند که این امر باعث پیچیدگی فرمولها در نزدیکی مرزها و افزایش باند ماتریس‌ها و در نتیجه افزایش زمان محاسباتی برای حل مسئله می‌شوند.

هنوز روشهای با دقت بالاتر غیرفشرده مورد استفاده است و می‌توان به عنوان مثال به لئونارد و بردلی^۱ اشاره کرد. همچنین برای مشتقات مراتب بالاتر روشهایی توسط هارتن و جین^۲ ارائه شده است. بنابراین به دلایل ذکر شده مطلوب است که از روشی استفاده شود که دارای مزیت‌های روش‌های فشرده باشد و نیز در عمل دارای دقت بالایی باشد. روش تفاضل محدود فشرده یکی از روشهایی است که با دقت بالایی مشتقات در هر گره را بدست می‌دهد که توسط لیل^۳ [۱۲] ارائه شده است.

مشتقات جزئی هم در جهت جریان و هم عمود بر جهت جریان از روش تفاضلات محدود فشرده محاسبه شده است این روش توسط لیل ارائه شده است. در این روش مشتق اول تابعی دلخواه مانند $f(x)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

¹ Leonard and Bradley

² Harten and Jain

³ Lele

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha + 2}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (1-3)$$

که در رابطه بالا علامت پریم نمایانگر مشتق مرتبه اول می باشد و J نشان دهنده شماره شبکه مورد نظر می باشد که در رابطه بالا علامت پریم نمایانگر مشتق مرتبه اول می باشد و J نشان دهنده شماره شبکه مورد نظر می باشد $(1 \leq j \leq J)$ و $\Delta x = L_x / (J - 1)$. با جاگذاری $\alpha = 1/3$ و $\alpha = 1/4$ به ترتیب دقت مرتبه شش و چهاربه دست می آید [۱۶]. هنگامی که $\alpha = 1/4$ و یا $\alpha = 1/3$ باشد قطر اصلی در طرف راست معادله بالا چهار یا سه برابر کوچکتر از دو قسمت دیگر هستند، که این موضوع بیانگر این است که معادله بالا شرایط ناهنجاری دارد [۱۳]. یک راه حل برای رفع این مشکل این است که دو طرف رابطه (۱-۳) را در $1/\alpha$ ضرب کنیم. این کار باعث می شود رابطه (۱-۳) به صورت رابطه (۲-۳) تغییر یابد:

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4 - \frac{1}{\alpha}}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (2-3)$$

در مرزهای جریان (یعنی در جاییکه $j=1$ و $j=J$) باشد، روش ضمنی یک طرفه درجه سه برای تقریب مشتق اول به کار برده می شود که به صورت زیر است:

$$f'_1 + 2f'_2 = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (3-3)$$

و

$$f'_j + 2f'_{j-1} = \frac{1}{2\Delta x} (5f_j - 4f_{j-1} - f_{j-2}) \quad (4-3)$$

در نزدیکی مرزها (یعنی $j=2$ و $j=J-1$) شکل کلی معادله به کار برده می شود با این تفاوت که $\alpha = 1/4$. ليله پیشنهادی مطرح می کند مبنی بر اینکه در $j=3$ و $j=J-3$ تغییراتی را انجام دهیم به طوری که α را با α' جاگذاری کنیم که α' به صورت زیر تعریف می شود.

$$\alpha' = (16\alpha + 32) / (40\alpha - 1) \quad (5-3)$$

این عمل به این دلیل است که این جاگذاری پایداری حل عددی را در مواردی که معادله به صورت $(\partial/\partial t)u = (\partial/\partial x)f(u)$ است، بیشتر می کند.

معادله زیر نمایانگر مشتق مرتبه دوم تابعی دلخواه مانند $f(x)$ است که در آن از مرتبه چهارم شکل تفاضلات محدود فشرده استفاده شده است:

$$\alpha f_{j-1}'' + f_j'' + \alpha f_{j+1}'' = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10\alpha-1}{12\Delta x^2}(f_{j-2} - 2f_j + f_{j+2}) \quad (6-3)$$

که در آن $\alpha = \frac{1}{4}$. در اینجا نیز برای غلبه بر شرایط ناهنجار هر دو طرف رابطه (6-3) را در $1/\alpha$ ضرب می‌کنیم که در نتیجه رابطه (7-3) حاصل خواهد شد.

$$f_{j-1}'' + \frac{1}{\alpha} f_j'' + f_{j+1}'' = \frac{4(\frac{1}{\alpha}-1)}{3\Delta x^2}(f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10-\frac{1}{\alpha}}{12\Delta x^2}(f_{j-2} - 2f_j + f_{j+2}) \quad (7-3)$$

در مرزهای جریان، حالت مرتبه سوم یک طرفه به کار برده می‌شود که به صورت زیر است:

$$f_1'' + 11f_2'' = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_1 - 27f_2 + 15f_3 - f_4) \quad (8-3)$$

و

$$f_j'' + 11f_{j-1}'' = \frac{1}{\Delta x^2}(13f_j - 27f_{j-1} + 15f_{j-2} - f_{j-3}) \quad (9-3)$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه (3-3) داریم:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{1}{2\Delta x}(-5f_1' + 4f_2' + f_3') \quad (10-3)$$

که به راحتی می‌توان نشان داد معادل رابطه زیر است:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{-3}{\Delta x} f_1' + \frac{1}{2\Delta x}(f_1' + 4f_2' + f_3') \quad (11-3)$$

با جاگذاری طرف چپ رابطه (3-3) (با فرض $\alpha = 1/4$) برای ترمهای داخل پرانتز در رابطه (11-3) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$f_1'' + 2f_2'' = \frac{-3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=0)} - \frac{3}{2\Delta x^2}(f_1 - f_3) \quad (12-3)$$

معادله (۳-۱۲) زمانی در داخل مرزها به کار برده می‌شود که مقادیر تابع و مشتق آنها موجود باشند. مشابه این روابط را می‌توان برای جریان خروجی از مرز، هنگامی که تابع و مشتق آن در دسترس است به کار برد یعنی:

$$f_J'' + 2f_{J-1}'' = \frac{3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=L_x)} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_J - f_{J-2}) \quad (۳-۱۳)$$

در نزدیکی مرزهای جریان (در جهت جریان) (در $j=2$ و $j=J-1$) مرتبه دوم از معادلات تفاضلات محدود فشرده استفاده می‌شود یعنی رابطه (۳-۷) با $\alpha = 1/10$. برای ارزیابی مشتق مرتبه چهار، با استفاده از روابط فوق مشتقات مرتبه دوم را دوبار بر روی معادلات اعمال کنیم.

۳-۲-۲) ارزیابی مشتقات در جهت جریان

برای ارزیابی و بررسی صحت کدهای نوشته شده باید مشتقات عددی حاصل از روش تفاضلات محدود فشرده تطبیقی با مشتقات تحلیلی برای تابعی دلخواه با دقت قابل قبولی یکسان باشد. برای این منظور تابعی دلخواه را در نظر می‌گیریم و اپراتور مشتق اول و دوم بر روی آن اعمال می‌گیرد و سپس نتایج حاصله را با مشتقات تحلیلی آن مقایسه می‌کنیم و نتایج را به صورت نمودار رسم می‌کنیم. بدیهی است که برای بدست آوردن مشتقات از درجه بالاتر می‌توانیم اپراتورهای مشتق اول و یا دوم را چندین بار بر روی تابع مذکور اعمال نماییم.

تابع بکار گرفته شده برای بررسی مشتق اول و دوم به صورت زیر می‌باشد:

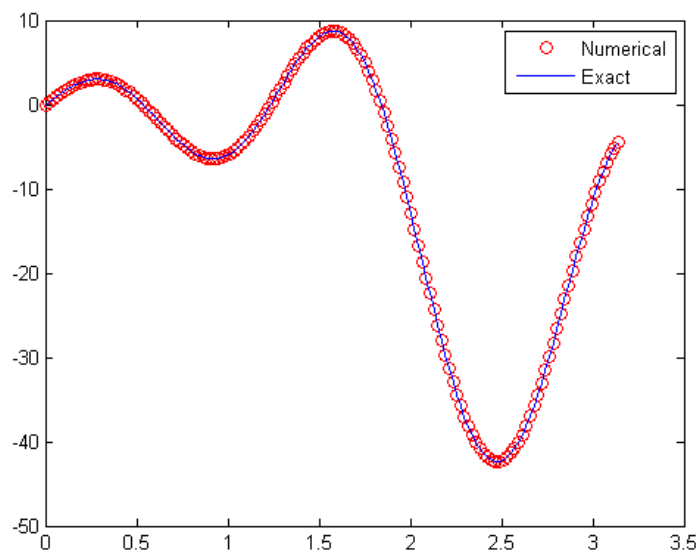
$$f(x) = x^3 \cos x + 2x \sin(4x)$$

از مشتق گیری به روش تحلیلی از معادله فوق به معادلات زیر می‌رسیم:

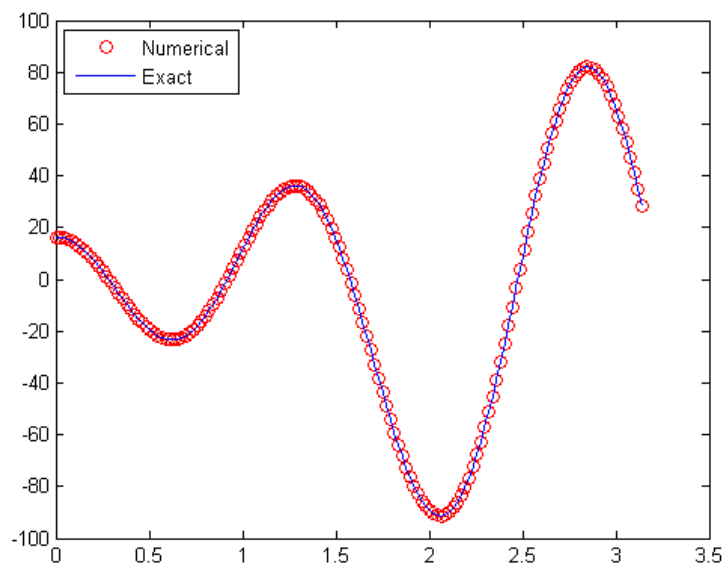
$$f'(x) = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x + 2 \sin(4x) + 8x \cos(4x)$$

$$f''(x) = 6x \cos x - 6x^2 \sin x - x^3 \cos x + 16 \cos(4x) - 32x \sin(4x)$$

نتایج مشتق گیری به روش عددی و تحلیلی هر دو در شکل ۳-۱ و ۳-۲ نشان داده شده است. محاسبات در ۱۵۰ گره انجام شده است.



شکل ۳-۱: مقایسه مشتق مرتبه اول تحلیلی و عددی تابع $f(x)$



شکل ۳-۲: مقایسه مشتق مرتبه دوم تحلیلی و عددی تابع $f(x)$

۳-۳-۱) تحلیل نگاهت اعمال شده برای محدود کردن دامنه در راستای عمود بر جریان

همان گونه که در معرفی جریان های برشی آزاد بیان شد این گونه جریانهها، جریانهایی آزاد و بدون مرز^۱ هستند. در جریان گردابه ای در جهت عمود بر جریان هیچ گونه مرزی وجود ندارد یعنی، $-\infty \leq y \leq +\infty$ می باشد. واضح است که برای تحلیل جریان نیاز داریم که دامنه فیزیکی در راستای عمود بر جریان را به دامنه محاسباتی تبدیل نماییم به دلیل اینکه تمام دامنه محاسباتی را نمی توانیم شبکه بندی نماییم. به عبارت دیگر در روش عددی برای حل مسائل جریانهای برشی آزاد و نیز لایه مرزی، باید این توانایی را داشته باشیم که یک ساختار در جریان به گونه ای شبیه سازی کنیم که یک مقیاس فاصله بندی شده خاصی نزدیک دیواره و یا محور داشته باشیم. در واقع با این عمل تاثیرات مرز در بی نهایت در شبیه سازی جریان به حداقل میرسد. از مزایای دیگر این روش این است که باعث صرفه جویی قابل توجهی در هزینه محاسبات خواهد شد. موضوع مهم دیگر آن است که تمرکز و یا به عبارت دیگر گرادیان پارامترهای موثر در شبیه سازی جریان در تمام نقاط دامنه به صورت یکسان توزیع نشده اند. گرادیان پارامترهای موثر در نزدیکی محور مختصاتی جریان یعنی $y=0$ دارای شدت و تمرکز بیشتری هستند و در نیازی نیست که تمام گره های محاسباتی به صورت یکنواخت در دامنه توزیع شوند بلکه به دلیل اهمیت بیشتر گرادیان پارامترها در نزدیکی محور مختصات می توانیم گره های محاسباتی را با نسبت خاصی در نزدیکی محور متمرکز نماییم. در واقع فاصله گره ها را در نزدیکی محور را خیلی نزدیکتر از فاصله گره ها در نقاط دیگر دامنه محاسباتی در نظر می گیریم. این امر علاوه بر صرفه جویی در هزینه و وقت محاسبات باعث دقت بیشتر نیز می گردد.

لازم به ذکر است که نگاهت بکار گرفته شده باید یک به یک باشد و نیز نوع نگاهتی که در حل مسئله بکار می رود تابع نوع مسئله و یا چگونگی اهمیت گرادیان پارامترهای موثر بر جریان در ناحیه مورد نظر می باشد.

برای تحلیل جریان گردابه ای از یک تابع کوتانژانتی جهت نگاهت یک به یک استفاده شد. با اعمال این نگاهت دامنه فیزیکی $y \in (-\infty, +\infty)$ را به دامنه محاسباتی $\xi \in (0, 1)$ انتقال می دهیم. فرم کلی نگاهت کوتانژانتی اعمال شده به صورت زیر می باشد:

¹ Unbounded

$$y = -\beta \cot(\pi\xi) \quad (14-3)$$

β پارامتر مربوط به کشیدگی^۱ و یا انقباض ساختار جریان است. به عبارت دیگر با پارامتر β می توانیم مشخص سازیم کدام ناحیه از دامنه و به چه میزانی دارای تراکم گره های محاسباتی باشد. در واقع می توانیم از طریق این پارامتر توزیع گره ها را در دامنه محاسباتی مشخص سازیم. β مناسب برای هر جریان از طریق آزمایشات تجربی و یا از روش حدس و خطا بدست می آید.

برای مشتق گیری تابع f نسبت به y به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{d}{dy} f = \frac{d}{d\xi} f \times \frac{d}{dy} \xi = \frac{1}{\pi\beta} \sin^2(\pi\xi) \times \frac{d}{d\xi} f \quad (15-3)$$

با در نظر گرفتن $\lambda_1 = \frac{1}{\pi\xi} \sin^2(\pi\xi)$ داریم:

$$\frac{d}{d\xi} f = \lambda_1 \frac{d}{d\xi} f \quad (16-3)$$

فرم فوق به شکل برداری می باشد و در λ_1 باید در تک تک درایه های ماتریس $\frac{d}{d\xi} f$ ضرب شود.

همچنین برای محاسبه مشتق دوم یک بار از معادله (۱۵-۳) مشتق می گیریم. که نتیجه به صورت معادله (۱۷-۳) است:

$$\frac{d^2}{dy^2} f = \lambda_2 \frac{d^2}{d\xi^2} f + \lambda_3 \frac{d}{d\xi} f \quad (17-3)$$

که در آن مقادیر λ_2 و λ_3 به صورت معادلات آورده شده در زیر است.

$$\lambda_2 = \lambda_1^2 \quad (18-3)$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{\pi\beta} \sin^3(\pi\xi) \cdot \cos(\pi\xi) \quad (19-3)$$

با اعمال این تغییرات می توانیم تابع نگاشت فوق را مورد هر تابع و یا به عبارتی دامنه محاسباتی بکار ببریم.

¹ Stretching Factor

۳-۳-۲) ارزیابی مشتقات در جهت عمود بر جریان

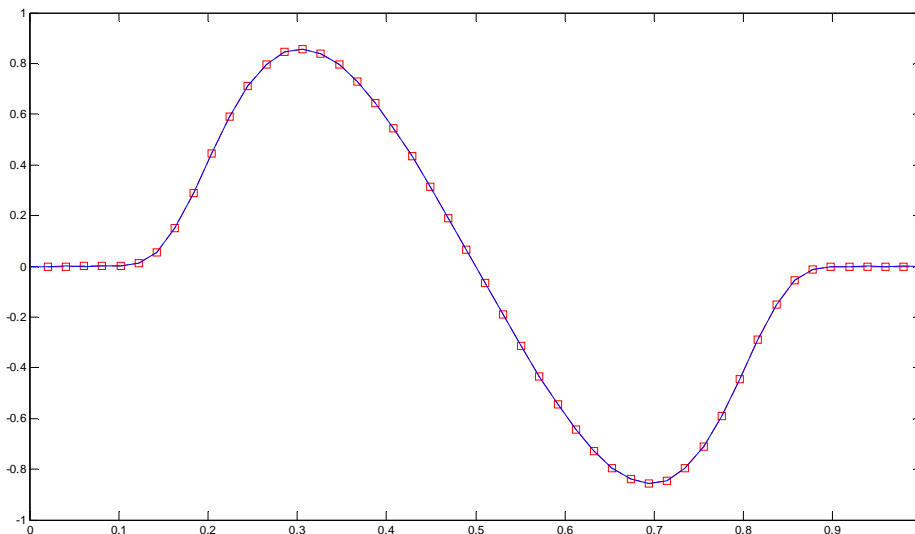
همان طور که در بخشهای قبل بیان شد باید دامنه فیزیکی در راستای عمود بر جریان را به دامنه محاسباتی تبدیل کنیم. همانند ارزیابی مشتقات در جهت جریان، برای بررسی فرمولهای مشتق ارائه شده در جهت y ها یک تابع دلخواه به صورت زیر در نظر گرفته شده است. اوپراتور مشتق اول و دوم بر روی آن اعمال گردیده و نتایج حاصل با نتایج حل دقیق در یک نمودار ترسیم شده است. لازم به یاد آوری است که در جهت y ها از نگاشت کتانژانت استفاده شده است.

$$f_{(y)} = \exp(-y^2)$$

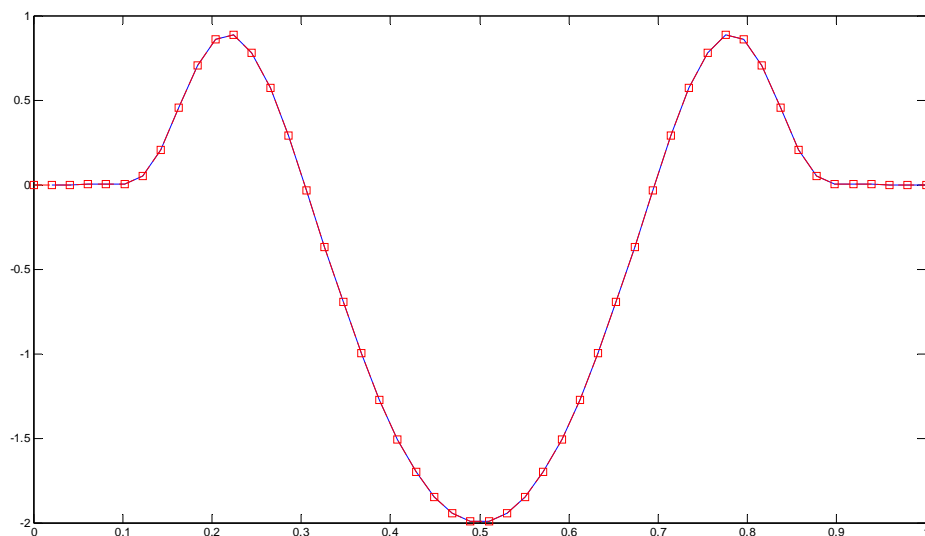
$$f'_{(y)} = -2y \cdot \exp(-y^2)$$

$$f''_{(y)} = 4 \cdot y^2 \cdot \exp(-y^2) - 2 \cdot \exp(-y^2)$$

$$y = -\beta \cdot \cot(\pi\xi)$$



شکل ۳-۳: مقایسه مشتق اول همراه با نگاشت کتانژانتی اعمال شده بر تابع $f_{(y)} = \exp(-y^2)$



شکل ۳-۴: مقایسه مشتق دوم همراه با نگاشت کتانژانتی اعمال شده بر تابع $f_{(y)} = \exp(-y^2)$

همان طور که از شکل ها مشخص می باشد تابع مورد نظر به دامنه خاصی نگاشته شده است، در نتیجه تاثیر مرزها را می توان به حداقل رساند. از انواع متفاوتی از نگاشت ها می توان استفاده نمود که بستگی به نوع هندسه مسئله و یا نوع تابعی که نگاشت بر روی آن اعمال می شود بستگی خواهد داشت.

۳-۴) الگوی پیشرفت زمانی معادلات

الگوهای زیادی برای پیشرفت زمانی معادلات می توان در نظر گرفت و معادله را از نظر زمانی پیش برد. ولی لازم است ملاحظاتی در مورد روشی که برای پیشرفت زمانی معادله اعمال می کنیم رعایت شود. معادله هر گام زمانی که پیش می رود، مقدار قبلی برای به روز شدن در حافظه رایانه ذخیره می گردد و اگر حجم حافظه اختصاص یافته زیاد باشد باعث کندی اجرای کد می گردد. بنابر این در انتخاب روش برای پیشروی زمانی باید به این نکته توجه لازم را داشت.

طرح اختلاف زمانی رانج کوتای مرتبه سوم فشرده به وسیله رای [۹]^۱ بیان شده است که برای پیشرفت زمانی به کار برده می شود. برای پیشروی زمانی معادله ای به صورت معادله (۳-۲۰)، مطابق با جدول ۳-۱ می توان فرآیند را انجام داد.

جدول ۳-۱: طرح پیشروی زمانی رانج کوتای مرتبه سوم.

زمان	اولین موقعیت	دومین موقعیت
t^n	u^n	$R(u^n)$
$t' = t^n + c_1 \Delta t$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$R' = R(u')$
$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$R'' = R(u'')$
$t^{n+1} = t^n + \Delta t$	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	

$$\frac{\partial u}{\partial t} = R(u) \quad (۳-۲۰)$$

برای پیشروی زمانی معادله مدل فوق به اندازه Δt ، طرف راست معادله باید در سه مرحله زمانی محاسبه گردد. در هر یک از این مراحل زمانی، زمان به اندازه $(c_i + d_i) \Delta t$ جلو می رود و u به وسیله یک ترکیب خطی از

^۱ A. Wray

R در مرحله زمانی حال و R در مرحله زمانی گذشته محاسبه می‌گردد. بعد از گذشت مرحله سوم، زمان به اندازه Δt و مقدار u محاسبه شده برابر مقدار u بعد از گذر از یک Δt زمانی است. همان طور که مشاهده می‌شود در هر گام زمانی نیاز به ذخیره سازی سه مقدار است که باعث سرعت اجرای بهتر برنامه می‌گردد. ضرایب بکار رفته در این روش را می‌توان با بسط سری تیلور و معادل قرار دادن ضرایب حاصل از آنها بدست آورد. در این صورت داریم:

$$c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 = 1$$

$$c_1^2 c_2 + c_3 (c_1 + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2}))^2 + c_1^2 d_3 = 1/3$$

$$c_1 c_2 + c_3 (\frac{d_2}{c_2} (1 + \frac{d_3}{c_3}) + c_2 (1 + \frac{d_2}{c_2})) = 1/2$$

$$c_1 c_2 c_3 = 1/6$$

در روابط بالا مقدار دو پارامتر باید پیش بینی شود تا حل کامل شود. در شروع حل واضح است که باید $d_1 = 0$ قرار دهیم. سپس بقیه پارامترها به صورت تابعی از یک پارامتر بدست می‌آیند. نتیجه به صورت زیر است:

$$c_1 = 8/15 \quad d_1 = 0$$

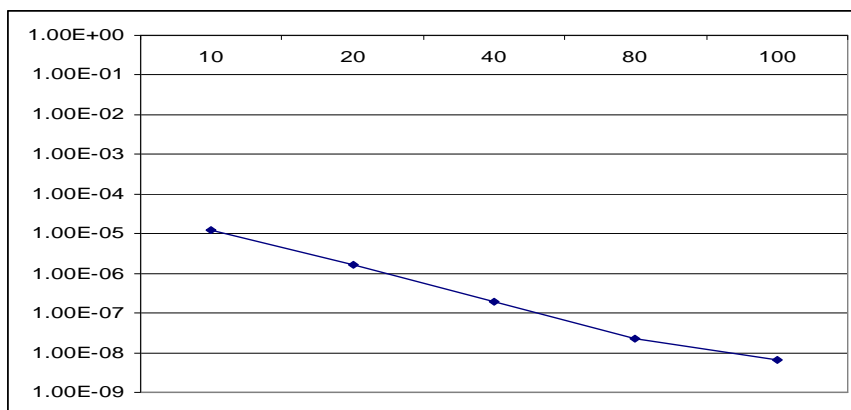
$$c_2 = 5/12 \quad d_2 = -17/60$$

$$c_3 = 3/4 \quad d_3 = -5/12$$

برای تعیین دقت طرح مذکور تست زیر انجام شده است. تابع $u(t) = e^{-t}$ همراه با شرط اولیه $u(0) = 1$ یک حل تحلیلی برای معادله (۳-۲۱) است.

$$\frac{du}{dt} = -u(t) \quad (۳-۲۱)$$

ماکزیمم خطا بین نتایج عددی و حل واقعی در شکل (۳-۸) رسم شده است که به روشنی نشان دهنده صحیح بودن دقت مرتبه سوم این طرح می‌باشد [۱۶].



شکل شماره ۳-۵: مرتبه خطای رانج کوتای مرتبه سوم فشرده برای معادله (۳-۲۱)

فصل چہارم

الگوریتم حل و بررسی صحت جوابها

۴-۱) مقدمه

در این فصل ابتدا چگونگی روش حل مسئله توضیح داده می شود. همانطور که قبلا اشاره شد معادله حاکم بر دامنه محاسباتی فرم چرخشی معادله ناویر استوکس است. به عبارت دیگر ابتدا چگونگی کاربرد این فرم از معادله ناویر استوکس در جریان گردابه ای و نیز نحوه پیشرفت عددی بیان می شود. سپس الگوریتم بکار رفته برای کد نویسی مسئله و نیز محاسباتی که در مرحله اجرا می گردند توضیح داده می شود و در انتها به منظور اطمینان از صحت کد نوشته شده، نتایج بدست آمده را با بعضی از نتایج دقیق معادله ناویر استوکس که در حالت خاص بدست آمده است مقایسه می کنیم.

۲-۴ چگونگی روش حل

در فصل دوم بیان شد که بعد از اعمال تغییراتی بر معادله ناویر استوکس، آن را به فرم چرخشی تبدیل می کنیم تا محاسبات راحت تر انجام گیرد. در حالت دو بعدی معادله حاکم بر دامنه محاسباتی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \frac{\partial H_2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^4 U \quad (1-4)$$

برای حل معادله فوق، سرعت را به دو مولفه تفکیک می کنیم که این دو مولفه به صورت زیر می باشند:

$$U(x, y, t) = u(x, y, t) + U_0(y) \quad (2-4)$$

$$V(x, y, t) = v(x, y, t) \quad (3-4)$$

در رابطه بالا $U_0(y)$ سرعت مبنا است. این سرعت فقط تابعی از y است. u و v سرعت محاسباتی است که باید به روش عددی محاسبه شود و U و V سرعت لحظه ای و یا به عبارتی سرعت کلی جریان است. مزیت تفکیک کردن سرعت به دو مولفه در معادله (۲-۴) و (۳-۴) در این است که از این طریق مقدار سرعت در مرزهای جریان آزاد برابر صفر خواهد بود زیرا مقدار سرعت در مرزهای آزاد برابر سرعت مبنا می باشد. در نتیجه بررسی سرعت در مرزها و یا به عبارتی ارزیابی شرایط مرزی سرعت آسان تر خواهد شد. روش حل بدین صورت است که ابتدا طرف راست معادله را که شامل مشتقات جزئی می باشد را گسسته سازی می نماییم و سپس مشتقات موجود در آن را توسط روش تفاضلات محدود فشرده تقریب می زنیم. در نتیجه محاسبات فوق و نوشتن معادلات به فرم ماتریسی، سمت راست معادله چرخشی ناویر استوکس یک ماتریس از مرتبه N_{y+1}, N_{x+1} خواهد بود. که این ماتریس را با RHS^1 نمایش می دهیم. در نتیجه محاسبات فوق و نیز گسسته سازی طرف چپ معادله (۱-۴) به معادله زیر می رسیم .

$$\frac{\nabla^2 u^{n+1} - \nabla^2 u^n}{\Delta t} = RHS^n \quad (4-4)$$

با ساده سازی معادله بالا، از معادله زیر می توانیم سرعت را در لحظه $n+1$ بدست آوریم.

$$\nabla^2 u^{n+1} = \Delta t (RHS^n + \nabla^2 u^n) \quad (5-4)$$

¹ Right Hand Side

همان گونه که در قبل بیان شد برای پیشرفت زمانی و یا به عبارت دیگر گام زمانی معادله از روش رانج کوتای فشرده مرتبه سه می شود. پس از توسعه زمانی معادله، طرف راست معادله (۴-۵) مشخص می گردد. در نتیجه در

لحظه $n+1$ میزان $\nabla^2 u$ را داریم

$$\nabla^2 u = const \quad (۴-۶)$$

فرم کلی معادله بالا به معادله پواسون مشهور است که معادله (۴-۶) فرم دو بعدی آن می باشد. روشهای گوناگونی برای حل آن موجود می باشد که ما از روش زیر برای حل آن استفاده می کنیم.

اگر معادله بالا را بسط دهیم داریم:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = const \quad (۴-۷)$$

و اگر اوپراتور مشتق اول و دوم را در جهت جریان X و در جهت عمود بر جریان Y در معادله فوق جایگذاری کنیم به معادله زیر می رسیم:

$$(D2X \times u^t)^t + D2Y \times u = const \quad (۴-۸)$$

در عبارات فوق $D2X$ و $D2Y$ به ترتیب ماتریسهای $N_{x+1} \times N_{x+1}$ و $N_{y+1} \times N_{y+1}$ هستند که همان طور که قبلا بیان شد برای محاسبه مشتقات مکانی در جهت X و Y با استفاده از روش تفاضلات محدود فشرده ارائه گردیدند. با توجه به قوانین حاکم بر ماتریس ترانسپوز داریم [۲]:

$$(S \times T)^t = T^t \times S^t \quad (۴-۹)$$

با استفاده از معادله بالا معادله (۴-۸) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$u \times D2X^t + D2Y \times u^t = const \quad (۴-۱۰)$$

با در نظر گرفتن $A = D2Y, B = D2X^t, X = u$ معادله (۴-۱۰) به معادله زیر تبدیل می گردد.

$$AX + XB = const \quad (۴-۱۱)$$

بارتلز^۱ [۷] چگونگی حل معادله بالا را بیان کرده است. همچنین در نرم افزار MATLAB نیز دستور Lyap برای حل این گونه از معادلات اختصاص یافته است [۲۰].

مراحل زیر چگونگی الگوریتم لازم برای کدهای نوشته شده برای محاسبه متغیرها در دامنه محاسباتی را نشان می دهد.

- با توجه به شرط اولیه برای u مقدار v محاسبه شده است.
 - با توجه به اینکه $\omega = \nabla \times U$ و برای حالت دو بعدی $\omega_1 = 0$ و $\omega_2 = 0$ است. مقدار $\omega_3 = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$ حساب می شود.
 - مقدار $H = U \times \omega$ می باشد. که برای حالت دو بعدی $H_3 = 0$ است مقادیر $H_1 = V \cdot \omega$ و $H_2 = -U \cdot \omega$ محاسبه می شود.
 - محاسبه ترمهای غیر خطی در معادله که به صورت $\frac{\partial^2 H_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial y}$ است.
 - بدست آوردن ترمهای لزج در معادله که به فرم $\frac{1}{Re} \nabla^4 U$ است.
 - پس از به دست آوردن طرف راست معادله دیفرانسیل مقدار $\nabla^2(\Delta u)$ با استفاده از روش رانج کوتای محاسبه می شود.
 - شرط مرزی برای V و Δu برای مرحله زمانی جدید محاسبه می شود.
 - با مشخص شدن $\nabla^2(\Delta u)$ مقدار Δu و پس از آن u در مرحله جدید استخراج می شود.
- مراحل بالا را برای گامهای زمانی دیگر مجدداً تکرار می شود.

طبق الگوریتم بالا برای محاسبه معادله (۴-۱) باید بتوانیم محاسبات زیر را انجام دهیم:

۱. محاسبه مشتقات مادی

۲. انتگرال گیری از معادله پیوستگی به منظور محاسبه v .

¹ Burtlez

۳. محاسبه ترمهای غیر خطی

۴. حل معادله پواسون برای حالت دو بعدی

۵. پیشرفت زمانی (به دست آوردن داده های جدید که در اصل آنها به صورت یک شرط اولیه برای زمان بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت).

۴-۳-۱) ارزیابی صحت کد و شبیه سازی عددی

بدیهی است که هر کد نوشته شده برای بررسی مسئله نیاز به ارزیابی صحت و درستی آن دارد. نحوه بررسی درستی کدهای نوشته شده بدین صورت است که ابتدا از طریق الگوریتم، کد را به قسمتهای کوچکتر تقسیم می کنیم و سپس به تست هر کدام از این قسمتها به طور مجزا می پردازیم. مانند همان کاری که ما در قسمتهای قبلی برای ارزیابی مشتقات بکار رفته انجام دادیم. بعد از اینکه از درستی هر قسمت اطمینان پیدا کردیم با به هم پیوستن قسمتهای مختلف کد، برنامه اصلی شکل می گیرد. حال باید به بررسی و ارزیابی درستی کل برنامه نوشته شده پردازیم. بدین معنی که باید کد را برای برخی از مسائل مرتبط که جواب تحلیلی آن موجود است اجرا کرده و نتایج عددی و نتایج تحلیلی را با هم مقایسه می کنیم و اگر نتایج با دقت خوبی همراه بود، در این صورت می توانیم کد را با اطمینان در مورد مسئله مورد نظر بکار گیریم. این همان کاری است که در این قسمت قصد بیان و توضیح آن را داریم. به عبارت دیگر در این قسمت کد نوشته شده را بعضی از حالات خاص معادله ناویر استوکس که حل تحلیلی آن موجود است اجرا می کنیم و نتایج عددی حاصله را با نتایج تحلیلی مقایسه کرده تا از صحت کد مطمئن شویم.

۴-۳-۲) گردابه های استوارت

استوارت^۱ تابع جریان وابسته به زمان معادله ناویر استوکس غیر لزج^۲ را برای گروه لایه های اختلاطی معرفی کرد. این تابع جریان به صورت زیر است.

$$\psi_{(x,y,t)} = c.y + \ln(a.\cosh(y - y_0) + b.\cos(x - ct)) \quad (۱۲-۴)$$

که در معادله فوق $b = \sqrt{a^2 - 1}$ است.

با توجه به رابطه (۱۲-۴) و با استفاده از تعریف تابع جریان، مولفه های u و v به صورت زیر بدست می آیند:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = c + \frac{a \sinh(y - y_0)}{a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)} \quad (۱۳-۴)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{b \sin(x - ct)}{a \cosh(y - y_0) + b \cos(x - ct)} \quad (۱۴-۴)$$

همچنین برای بدست آوردن ثابت انتقال در شرط مرزی خروجی به صورت زیر عمل می کنیم.

از شرط مرزی خروجی انتقالی خطی داریم:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -C \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (۱۵-۴)$$

با جای گذاری تابع جریان استوارت در معادله فوق داریم:

$$C = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{-b.c.\sin(x - ct)}{\frac{a.\cosh(y - y_0) + b.\cos(x - ct)}{b.\sin(x - ct)}} = c \quad (۱۶-۴)$$

بنا بر این مقدار c در معادله (۱۲-۴) برابر مقدار C در شرط مرزی خروجی خطی است. بنابر این از حل استوارت به خوبی می توان برای بررسی صحت شرط مرزی خروجی انتقالی خطی استفاده کرد. با استفاده از حل گردابه های

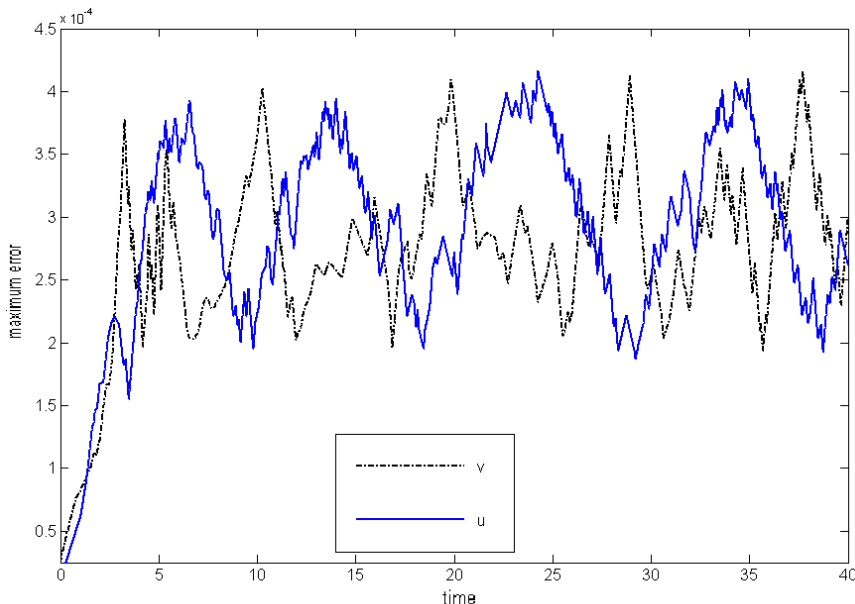
¹ Stewart

² In viscid

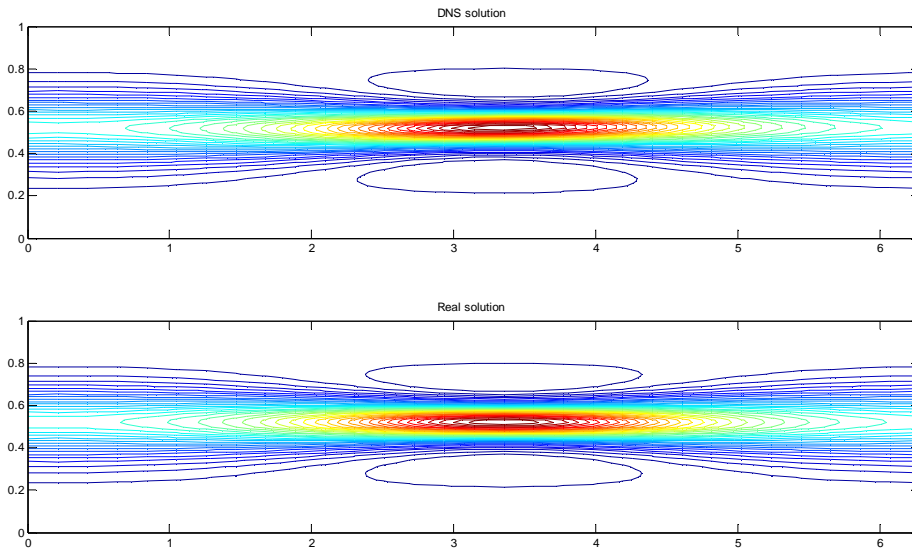
استوارت می توان صحت تمامی بخشهای کد نوشته شده را بررسی کرد، به غیر از ترمهای لزج که به خاطر بالا بودن عدد رینولدز این ترمها به سمت صفر میل می کنند. به این نکته باید توجه کرد که مولفه سرعت در جهت جریان نمی تواند حل پایداری داشته باشد. برای رفع این مشکل $\tanh(y - y_0)$ را به آن اضافه و از آن کسر می کنیم. قسمت پایدار آن یعنی $\tanh(y - y_0) - \frac{a \cdot \sinh(y - y_0)}{a \cdot \cosh(y - y_0) + b \cdot \cos(x - ct)}$ را به عنوان شرط اولیه و مرزی ورودی در نظر می گیریم. و باقی مانده را یعنی $C + \tanh(y - y_0)$ را به عنوان جریان اولیه که فقط تابعی از y است محسوب می شود [۱۷ و ۱۸].

پارامترهای به صورت $L_x = 2\pi$ و $\beta = 3$ و $Re = 10^9$ در نظر گرفته شده است. تا جریان به صورت موثر ایده آل باقی بماند.

در شکل (۴-۱) بیشترین مقدار خطا بر حسب زمان سپری شده برای گردابه های استوارت رسم شده است. همچنین در شکل (۴-۲) حل دقیق گردابه های استوارت با حل عددی حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم با استفاده از روش تفاضلات محدود فشرده مقایسه شده است.



شکل ۴-۱: ماکزیمم خطا بر حسب زمان برای گردابه استوارت



شکل ۴-۲: شکل اول از بالا جواب دقیق گردابه استوارت و شکل پایین نتیجه حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم

۴-۳-۳ معادله نفوذ وابسته به زمان

شکل کلی معادله ناویر استوکس به صورت زیر می باشد:

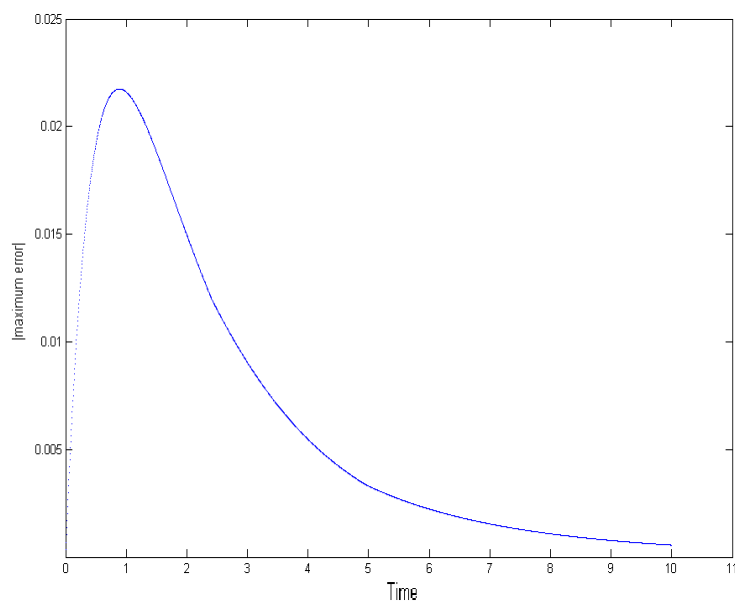
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{H} - \nabla \left(p + \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{U} \quad (۱۷-۴)$$

در این قسمت معادله ناویر استوکس که در قسمتهای قبل توضیح داده شد با توجه به پیشرفت زمانی در برنامه عددی با حل واقعی معادله نفوذ تست شده است. معادله نفوذ مربوط به حالتی در معادله ناویر استوکس است که $H = 0$ باشد. یک حل خاص برای معادله نفوذ به صورت زیر است [۴].

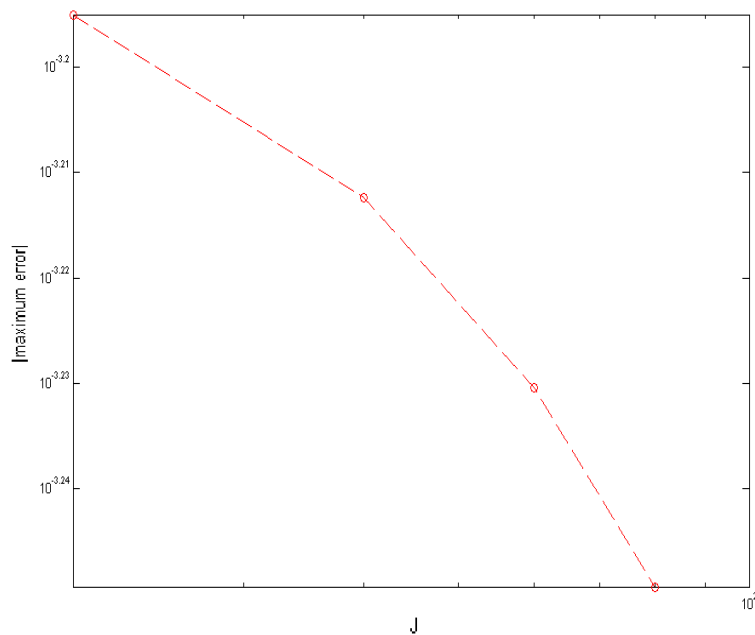
$$u(x, y, t) = \cos(x) \times \frac{y-1}{\left(1 + \frac{4t}{\text{Re}}\right)^{1.5}} \times \exp(-2t / \text{Re}) \times \exp\left(-\frac{(y-1)^2}{\left(1 + \frac{4t}{\text{Re}}\right)}\right) \quad (۱۸-۴)$$

برای انجام این ارزیابی بایستی از معادله بالا برای تولید شرط مرزی و شرط اولیه استفاده نمود. در نتیجه شرط مرزی خروجی جابجایی و تشکیل جمله‌های غیر خطی در این تست نمی‌توانند ارزیابی شوند. ولی حل معادله پواسون و چگونگی توسعه زمانی معادله ارزیابی می‌شوند. توجه کنید که u شرط پایداری را ارضاء می‌کند و حل می‌تواند برای شبیه سازی جریان گردابه ای کاملاً لزج مورد استفاده قرار گیرد. پارامترها در این تست به صورت

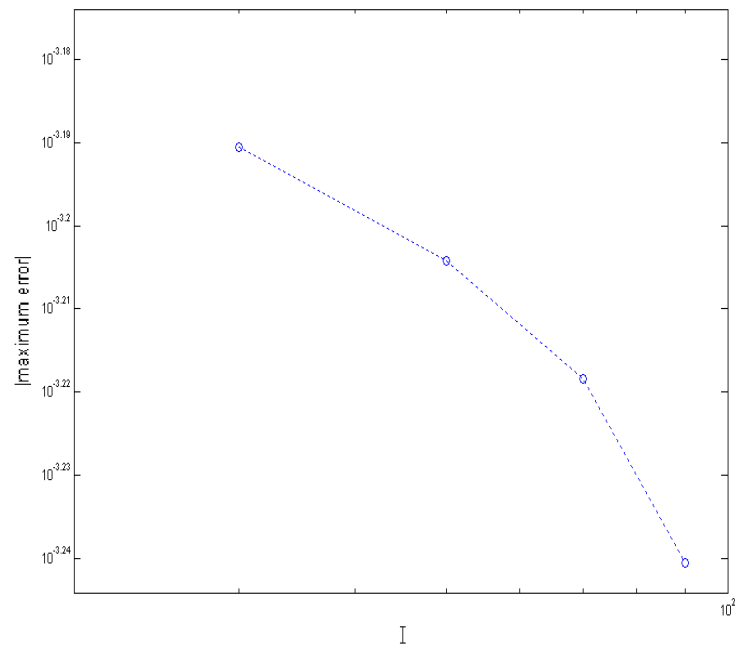
به زمان برای u را نشان می‌دهد. شکل‌های (۴-۴) و (۵-۴) هم مقدار ماکزیمم خطا به صورت تابعی از تعداد گره‌ها در جهات x و y را ترسیم کرده است [۴].



شکل ۳-۴: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از زمان



شکل ۴-۴: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت X



شکل ۴-۵: ماکزیمم خطا در u برای حل دو بعدی معادله نفوذ به صورت تابعی از تعداد گره در جهت y

فصل پنجم

بررسی نتایج بدست آمده از تحلیل جریان

گردابه ای دو بعدی

۵-۱) مقدمه

در این فصل ابتدا جریان گردابه ای آرام دو بعدی مورد بررسی قرار می گیرد. پروفیل های سرعت در جهت جریان و نیز عمود بر جهت جریان رسم می شوند و چگونگی توسعه آنها در دامنه محاسباتی مورد تحلیل قرار می گیرند. همچنین پروفیل ورتیسیتته ω رسم شده و نیز خود تشابهی^۱ جریان در ناحیه آرام بررسی می گردد. تغییر رژیم جریان از آرام به درهم به عدد رینولدز جریان بستگی دارد. در قسمت بعد عدد رینولدز جریان را بالا می بریم تا جریان مغشوش شود و سپس در این حالت نیز به بررسی و تحلیل چگونگی پارامترهای موثر بر جریان و نیز تنش های رینولدز به وجود آمده در جریان می پردازیم. در پایان این فصل نیز به نتیجه گیری کلی از این پروژه و اهداف آن و نیز پیشنهادات برای تحقیقات آینده خواهیم پرداخت.

¹ Self similarity

۵-۲) جریان گردابه ای دو بعدی آرام

در این قسمت به بررسی و تحلیل جریان گردابه ای آرام می پردازیم. در این حالت هیچ گونه اغتشاش ورودی نداریم. شرایط اولیه جریان به صورت پروفیل گوسی در نظر گرفته می شود که شرایط جریان گردابه ای را ارضا می کند. همان طور که در قسمتهای قبل بیان شد فرم این پروفیل به صورت زیر می باشد:

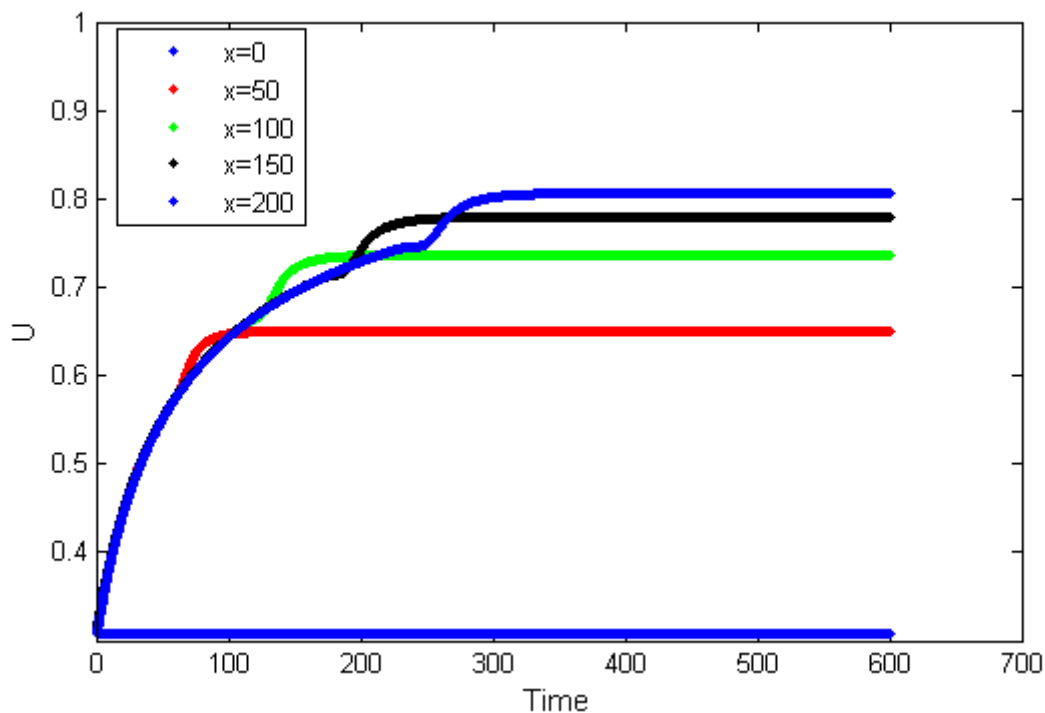
$$U_0(y) = 1 - 0.692(1 - 0.69315y^2) \quad (1-5)$$

برای شبیه سازی جریان گردابه ای بدون اغتشاش ورودی دامنه محاسباتی به صورت $-\infty < y < +\infty, 0 \leq x \leq 200$ در نظر گرفته شده است.

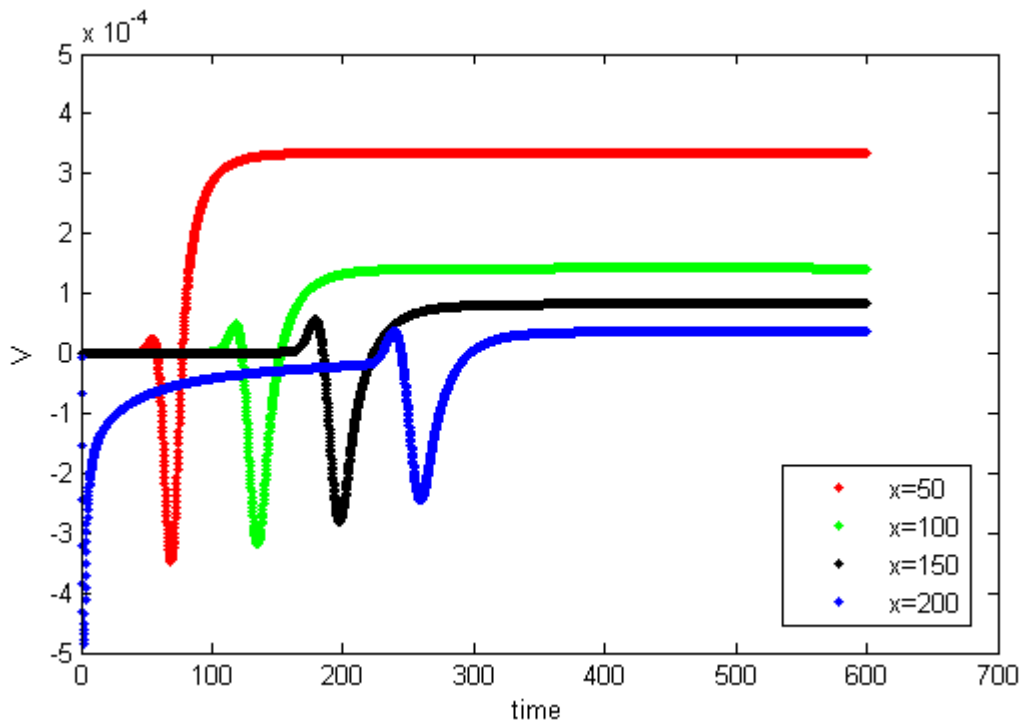
سرعت جریان آزاد، $C = 1$ در نظر گرفته شده است. پارامترهای دیگر مورد استفاده در این شبیه سازی عبارتند از: $Re = 100, \beta = 4, N_x = 240, N_y = 100, dt = 0.25dx$. در این محاسبات dt گام زمانی می باشد که نسبت خاصی با گام مکانی dx دارد. این نسبت در واقع به نوعی تعیین کننده پارامتر CFL حاکم بر جریان می باشد به طوری که ممکن است با کاهش و یا افزایش این نسبت محاسبات واگرا شوند [۱۹]. بنابراین تعیین مقدار این پارامتر دارای اهمیت زیادی در محاسبات می باشد. مقدار تقریبی این پارامتر را می توان از طریق حدس و خطا بدست آورد. نحوه مشخص کردن این پارامتر نیز بدین گونه است که با توجه به محاسبات قبلی و یا آزمایشات تجربی پیشین تقریبی بالا برای آن حدس زده می شود و سپس بر اساس آن محاسبات انجام می گیرد اگر نتایج واگرا شد بر اساس تقریب پایین حدس زده می گردد و نیز اگر باز نیز نتایج واگرا شد می توانیم از میانگین این دو حدس استفاده کرده و مقدار بعدی را امتحان می کنیم و این روند را ادامه داده تا جایی که نتایج همگرا شوند که در این صورت مقدار مناسب این پارامتر مشخص می گردد.

β نیز فاکتور انبساطی و یا انقباضی می باشد که مقدار تراکم گره های محاسباتی را در ناحیه خاصی از دامنه مشخص می سازد به طوری که در نزدیکی محور مختصات باید برای دقت بیشتر از تراکم بالاتری از گره های محاسباتی استفاده نمود زیرا همان طور که در قسمتهای پیشین بیان گردید در ناحیه نزدیک به محور مختصات گرادیان پارامترهای موثر بر جریان دارای شدت بیشتری هستند.

اکنون به بررسی نتایج حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم جریان گردابه ای دو بعدی آرام می پردازیم. همانطور که انتظار داریم باید جریان بعد از گذشت زمانی به حالت آرام و یکنواخت در مکان در آید و در نتیجه آن پروفیل سرعت در جهت جریان x و در جهت عمود بر جریان y نیز بعد از مدتی به حالت پایدار می رسند [۱۷]. این امر در نمودار شماره (۱-۵) و (۲-۵) به خوبی نشان داده شده اند. در این نمودارها نقاط در فواصل مساوی بر روی محور y ها تعریف شده اند. همان گونه که در نمودارهای (۱-۵) و (۲-۵) مشخص شده است، پس از گذشت زمانی مشخص سرعت در گره های مورد نظر به مقدار خاصی میل کرده و در آن ثابت باقی می ماند.



شکل ۱-۵: گذر زمانی u در پنج فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بدون اغتشاش ورودی



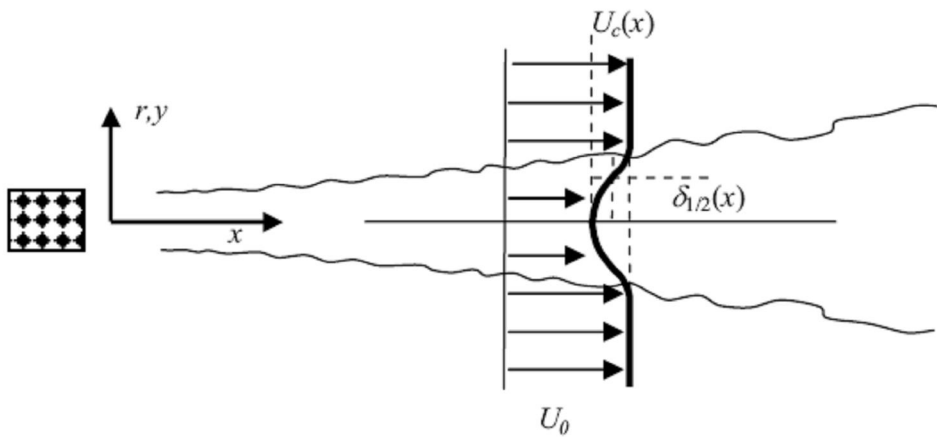
شکل ۵-۲: گذر زمانی ۷ در چهار فاصله مساوی در طول L_x برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بدون اغتشاش ورودی

قبل از بررسی پارامترهای موثر بر شبیه سازی و همچنین پدیده خود تشابهی در جریان گردابه ای آرام، لازم است به معرفی بیشتر برخی از پارامترهای جریان که برای بی بعد سازی مورد استفاده قرار می گیرند بپردازیم. زیرا برای درک بهتر پدیده خودتشابهی، بررسی و تحلیل چگونگی توسعه پارامترهای لازم برای بی بعد سازی ضروری است. لازم به ذکر است که در جریانهای مختلف برشی آزاد از پارامترهای مختلفی برای بی بعد سازی مسئله و متغیرهای موثر استفاده می کنیم. مثلا در جریان اختلاطی از ضخامت ورتیسپته و یا در جریان گردابه ای از پروفیل نقصان دنباله^۱ و ضخامت نیم عرض دنباله^۲ استفاده می نماییم.

همان گونه که در فصل اول نیز بیان گردید، شکل زیر چگونگی توسعه پروفیل سرعت جریان گردابه ای دو بعدی را نشان می دهد. همان طور که مشخص است پروفیل سرعت با جلوتر رفتن و یا هرچه بیشتر توسعه یافتن جریان، به اصطلاح بازتر شده و به سرعت جریان آزاد بیشتر میل می کند.

^۱ Wake deficit

^۲ Wake half width



شکل ۵-۳: چگونگی توسعه یافتن پروفیل سرعت جریان گردابه ای [۱۸]

در شکل بالا $\delta_{1/2}(x)$ نصف عرض ضخامت یا نیم عرض دنباله نامیده می شود و بیانگر فاصله ای از محور مختصات (مرکز دنباله) می باشد که در آن فاصله سرعت جریان برابر با نصف سرعت مرکز^۱ دنباله در آن مقطع می گردد [۸]. همانطور که انتظار می رود و از شکل بالا نیز مشخص است، نیم عرض دنباله تابعی از مختصات در راستای جریان یعنی X می باشد و یا به عبارت دیگر با پیشرفت جریان نیم عرض دنباله نیز افزایش می یابد. پارامتر دیگری که دارای اهمیت زیادی هم در تحلیل جریان گردابه ای و نیز در بی بعد سازی این جریان است، نقصان دنباله می باشد. این متغیر از اختلاف بین پروفیل سرعت جریان در هر مقطع و سرعت جریان آزاد بدست می آید. پروفیل نقصان دنباله در مرکز آن به ویژه از اهمیت زیادی برخوردار می باشد و در بی بعد سازی پروفیل های سرعت جریان و نیز ورتیسیتته ω بکار می رود.

همان گونه که در فصول پیشین بیان شد، معادله لایه مرزی بدون مولفه فشار برای جریان گردابه ای معتبر خواهد بود. بنابراین با بی بعد سازی متغیرها، یک حل تشابهی برای این جریان وجود دارد. در ادامه به بررسی پدیده خود تشابهی در این جریان می پردازیم.

¹ Center line velocity

پارامترهای بی بعد شده زیر برای رسم نمودارهای خود تشابهی مورد استفاده قرار می گیرند:

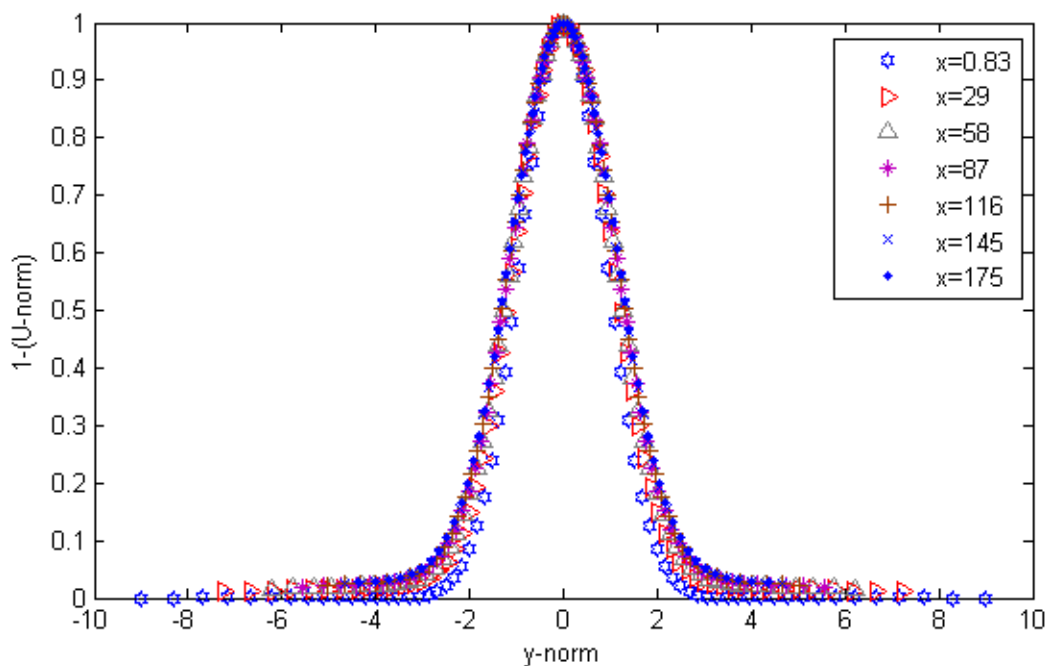
$$y_{norm} = \frac{y}{b_{1/2}(x)} \quad (۲-۵)$$

$$U_{norm} = \frac{U}{U_c}, U_{norm-deficit} = 1 - U_{norm} = \frac{1-U}{1-U_c} \quad (۳-۵)$$

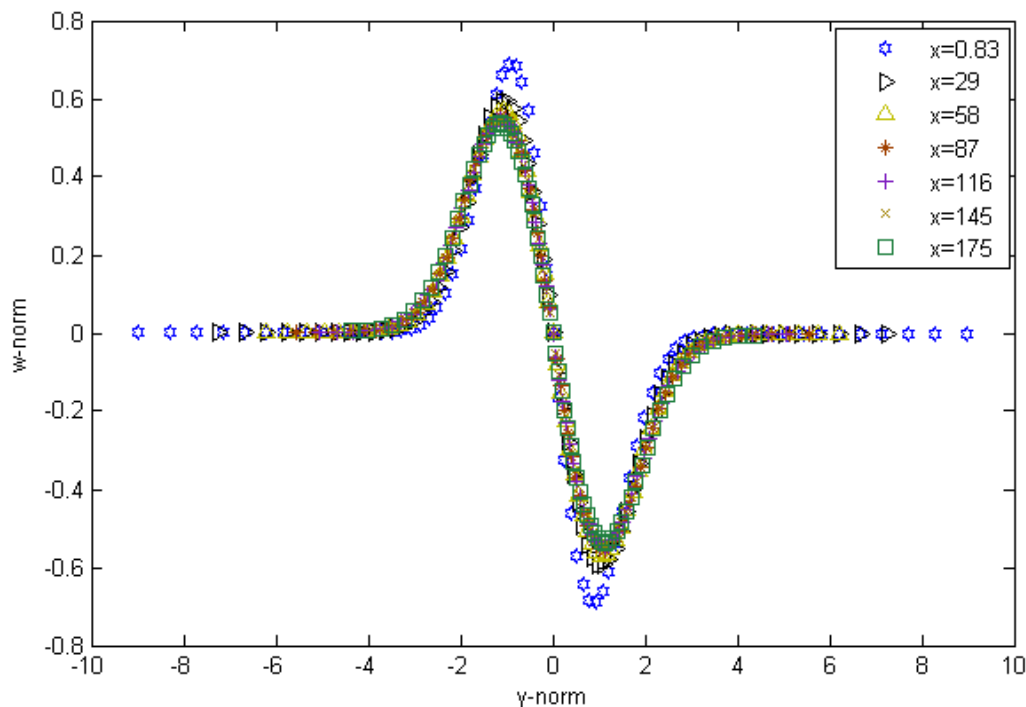
$$w_{norm} = \frac{(w.b_{1/2})}{1-U_c} \quad (۴-۵)$$

در معادلات بالا $b_{1/2}$ همان ضخامت نیم عرض دنباله می باشد که تابعی از X است. U_c سرعت در مرکز دنباله در هر مقطع می باشد و $1-U_c$ نیز پروفیل نقصان سرعت خط مرکزی دنباله و یا به عبارت دیگر سرعت در جریان در نقاط روی محور مختصات و در راستای جریان می باشد. $U_{norm-deficit}$ بدین معنی است که پروفیل نقصان سرعت دنباله با استفاده از پروفیل نقصان سرعت مرکز دنباله بی بعد شده است. البته می توانیم بی بعد سازی سرعت جریان را بر حسب سرعت مرکزی گردابه نیز انجام دهیم و هیچ گونه تفاوتی در اصل نتیجه گیری ایجاد نمی کند. فرم استاندارد استفاده شده در تحقیقات و نیز آزمایشات تجربی پیشین براساس بی بعد سازی سرعت با استفاده از پروفیل نقصان دنباله استوار است.

نتایج زیر نشان می دهد که نقصان دنباله در ناحیه مرکزی نزدیک دنباله دارای خود تشابهی می باشد. همچنین خود تشابهی تنها محدود به ناحیه مرکزی پایین دست جریان محدود نمی شود.

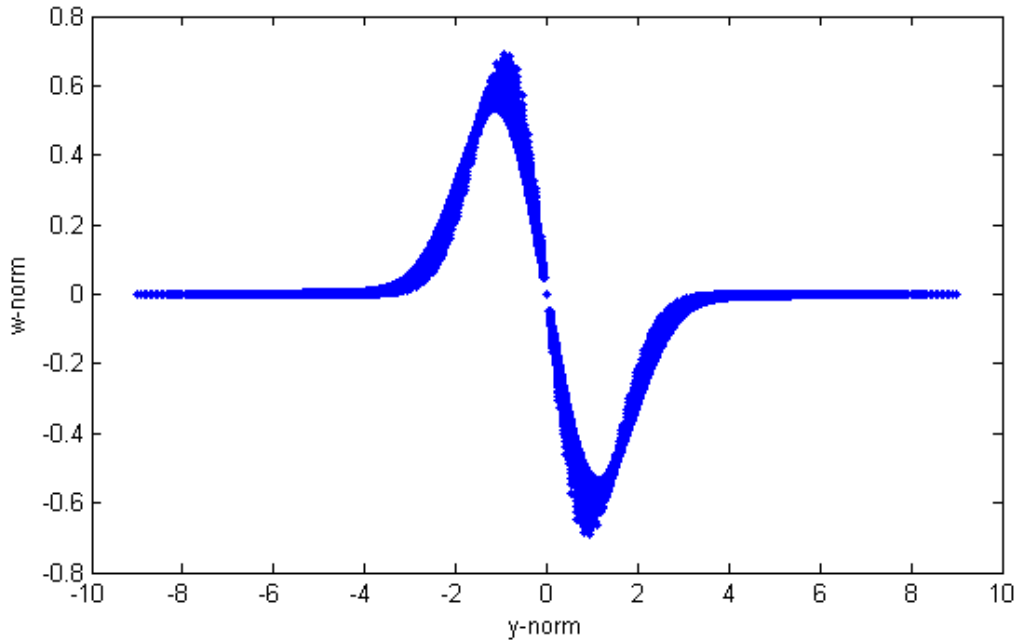


شکل ۴-۵: پروفیل سرعت نقصان u در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دو بعدی بدون اغتشاش ورودی



شکل ۵-۵: پروفیل گردابه w در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بدون اغتشاش ورودی

در شکل (۵-۵) چندین نقطه از دامنه محاسباتی به طور تصادفی انتخاب شده اند تا پدیده خود تشابهی در جریان نشان داده شود. می توانیم این نمودار را برای تمام دامنه محاسباتی نیز رسم نماییم. نمودار (۶-۵) نشان دهنده پدیده خود تشابهی جریان در تمام نقاط دامنه است.



شکل ۶-۵: پروفیل گردابه Ω در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دوبعدی بر اساس تمام نقاط دامنه

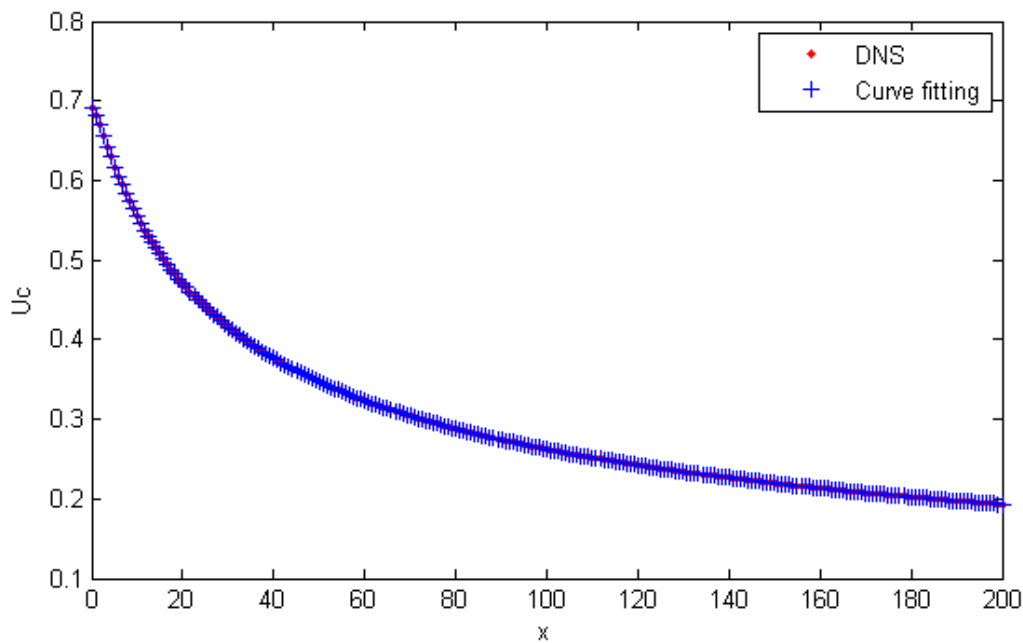
شکل (۷-۵) نشان دهنده نقصان سرعت مرکز دنباله می باشد. طبق نتایج تئوری نقصان سرعت خط مرکزی در جریان گردابه ای آرام دو بعدی متناسب با $x^{-1/2}$ است که با برازش منحنی بر نتایج بدست آمده از شبیه سازی عددی مستقیم تابع زیر بدست می آید:

$$U_{center\ deficit} = 4.01(x + 53.645)^{-1/2} \quad (۵-۵)$$

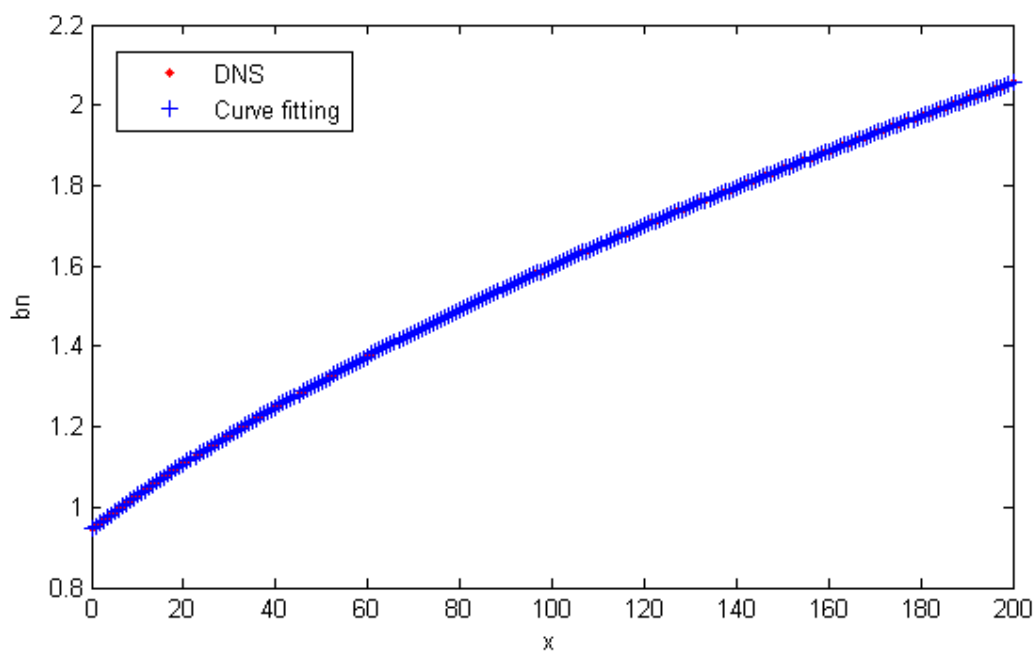
همچنین شکل (۸-۵) نشان دهنده ضخامت نیم عرض دنباله می باشد. طبق نتایج تئوری این نمودار باید متناسب با $x^{1/2}$ باشد که با برازش منحنی بر نتایج عددی تابع زیر بدست می آید:

$$b_n = 0.128(x + 53.645)^{1/2} \quad (6-5)$$

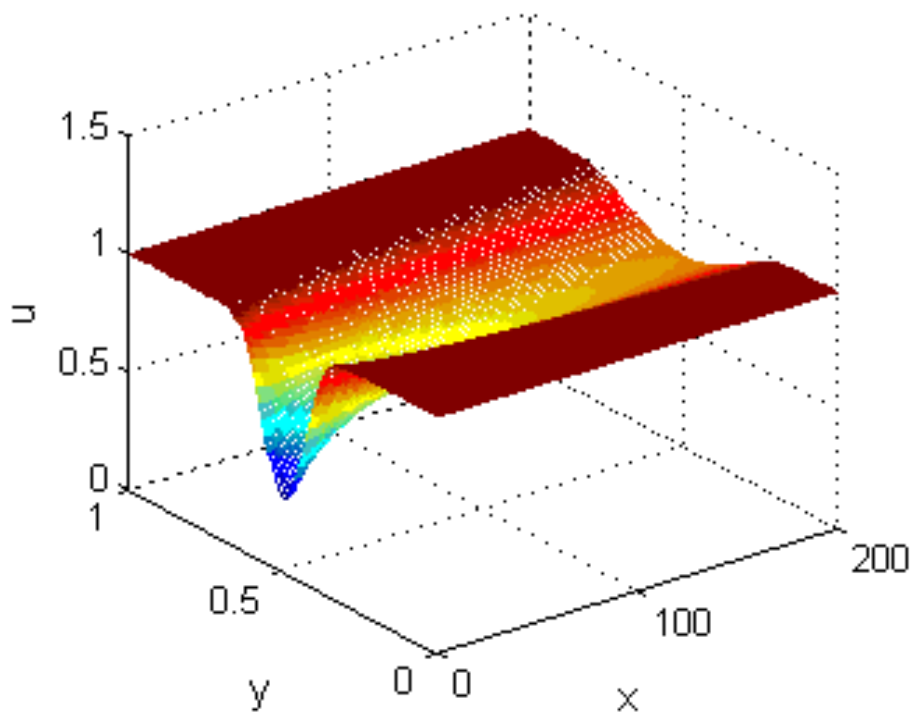
(6-5)



شکل ۷-۵: نمودار نقصان سرعت خط مرکزی $U_{center\ deficit}$ در جهت x



شکل ۸-۵: نمودار ضخامت نیم عرض دنباله b_n در جهت x



شکل ۹-۵: پروفیل سرعت u برای نگاشت $y = -\beta \cot(\pi\xi)$ در شبیه سازی عددی مستقیم

در شکل (۹-۵) پروفیل سرعت در جهت جریان با استفاده از نگاشت کتانژانتی با استفاده از شبیه سازی عددی مستقیم نشان داده شده است.

۵-۳) جریان گردابه ای دو بعدی مغشوش

در این قسمت به تحلیل جریان گردابه ای دو بعدی مغشوش می پردازیم. همان طور که می دانیم جریان آرام، جریانی است که در آن لایه های سیال به صورت منظم و هموار، حرکت می کنند. این رژیم از جریان شدیداً به مقادیر معینی از یک پارامتر بحرانی مانند عدد رینولدز، عدد گراشف، عدد تیلور و عدد ریچاردسون محدود است [۱]. علاوه بر آن، جریان لایه ای، ناپایدار می باشد و در حالتی که پارامتر موثر بر انتقال از حالت آرام به مغشوش به مقدار بحرانی برسد، در این صورت به رژیم جدیدی از جریان تبدیل می شود. ساختار این رژیم جدید توسط تئوری پایداری پیش بینی نمی شود، اما با این حال بدون شک یک حرکت نوسانی و بدون نظم است که اغتشاش نامیده می شود. از آنجا که اغتشاش پدیده بسیار پیچیده ای است، تحلیل و شناسایی دقیق آن هیچگاه امکان پذیر نخواهد شد [۳]. در این قسمت با افزایش عدد رینولدز و قرار دادن یک اغتشاش در ورودی، جریان لایه ای منظم را به جریان مغشوش تبدیل می کنیم. در شبیه سازیهای مستقیم عددی جریان گردابه ای می توانیم از مولفه سرعت متقاطع جریان (v) به عنوان نیرو استفاده کنیم. زیرا v در شرط مرزی ورودی در حالت متقارن، نامتقارن و یا ترکیبی از این دو، شرایط حل پذیری را ارضاء می کند [۴].

این اغتشاش که بر روی سرعت v اعمال می گردد و به صورت زیر است.

$$f_x = A \times y \times e^{(-y^2)} \times \sin(\omega.t) \quad (7-5)$$

در فرمول فوق ω فرکانس نوسانات و A دامنه نوسانات است و برابر 10^{-4} در نظر گرفته شده است. به دلیل اینکه فرکانس اغتشاشات قرار داده شده در ورودی جریان ثابت است، با گذشت زمان \bar{u} و \bar{v} به مقدار ثابتی می رسند. بنابر این می توان نتیجه گرفت که سرعت لحظه ای در شبیه سازی همراه با اغتشاشات به صورت آماری ساکن است.

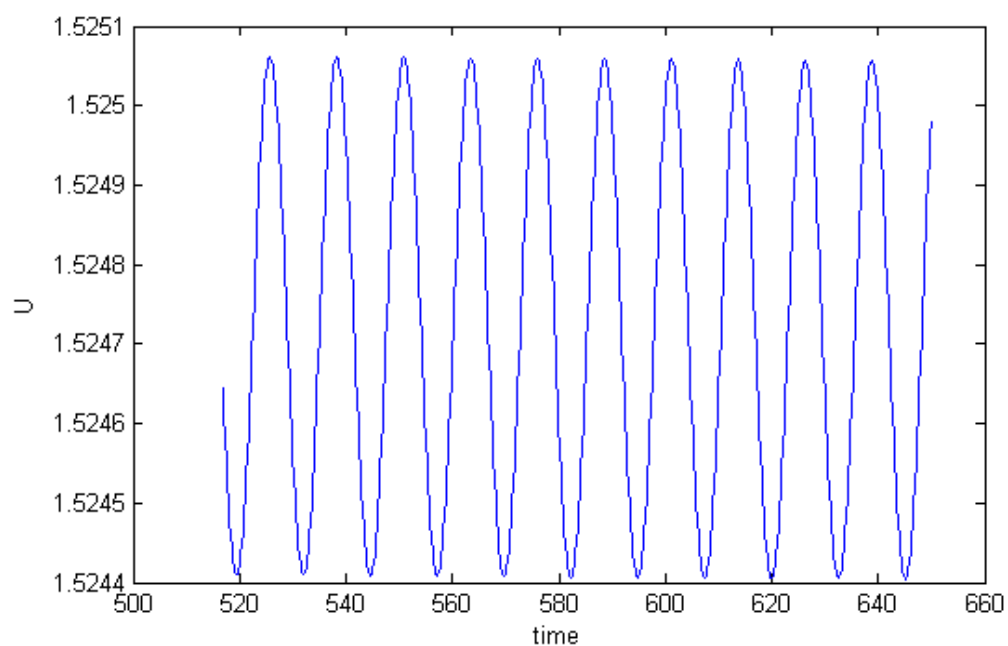
این شبیه سازی با $Re = 300$ را تا زمان $t = 650$ انجام شده است. همان طور که می دانیم برای بدست آوردن متغیرهای اغتشاشی باید سرعت متوسط جریان را بدست آوریم. برای بررسی این موضوع سرعت متوسط جریان را با انتگرال گیری از سرعت نسبت به زمان از لحظه $t = 510$ تا لحظه $t = 650$ مطابق فرمول (۵-۸) بدست آورده

سپس سرعت در هر لحظه را از آن کم می کنیم. به عبارت دیگر متوسط گیری زمانی را از زمان $t = 510$ تا زمان $t = 650$ انجام می دهیم.

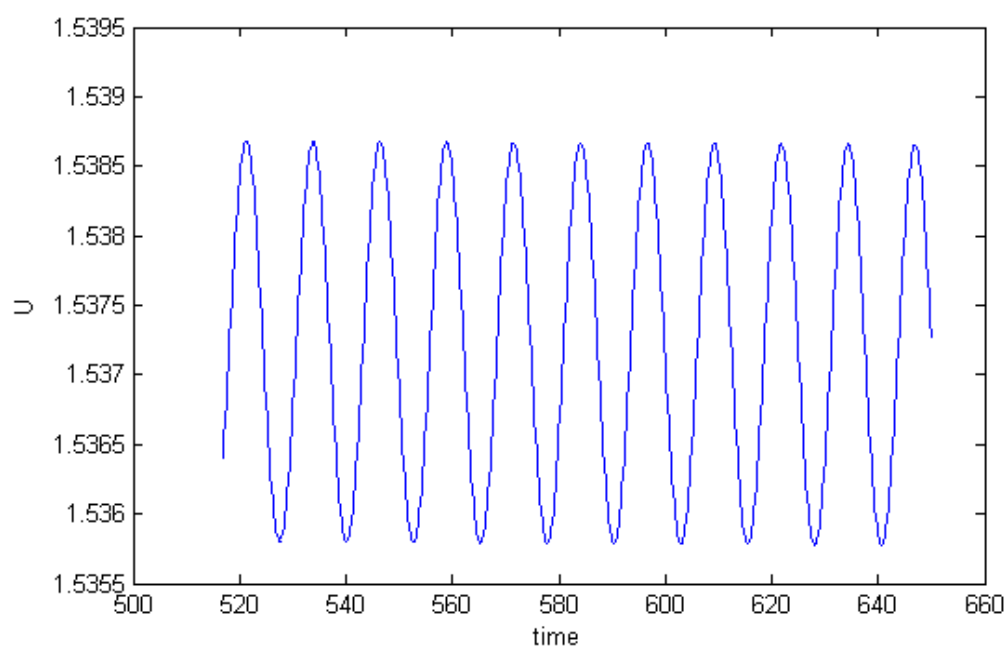
نتایج برای چهار ایستگاه مختلف بر روی دامنه محاسباتی که بر روی محور مرکزی مختصات یعنی $y = 0$ قرار داشتند، برای سرعت در جهت جریان u و نیز عمود بر جریان v رسم گردید. همانطور که در شکل های (۵-۱۰)، (۵-۱۱)، (۵-۱۲) و (۵-۱۳) نشان داده شده است، مولفه های سرعت در جهت جریان حول محور $y = 0$ به حالت نوسانی و پایدار رسیده اند. همچنین نمودارهای (۵-۱۴)، (۵-۱۵)، (۵-۱۶) و (۵-۱۷) مولفه های سرعت در جهت عمود بر جریان حول محور $y = 0$ را نشان می دهند. از نمودارهای فوق می توان نتیجه گرفت که مولفه های سرعت در جهت جریان u و در جهت عمود بر جریان v به یک حالت پایدار ایستایی رسیده اند.

معادله (۵-۸) چگونگی متوسط گیری زمانی را نشان می دهد. متوسط گیری زمانی را از ابتدای شبیه سازی انجام نمی شود بلکه از زمانی شروع به متوسط گیری می نماییم که سرعت به حالت پایدار خود رسیده باشد. این نکته را نیز باید خاطر نشان نمود که شرط اولیه ای را که برای شبیه سازی جریان گردابه ای دو بعدی مغشوش در نظر می گیریم، برابر با حالت نهایی است که از شبیه سازی جریان گردابه ای آرام بدست آمده است. در واقع تابع اغتشاش را بر حالت نهایی جریان آرام که به حالت پایدار در آمده است اعمال می کنیم و شبیه سازی جریان اغتشاشی را از این حالت شروع می نماییم.

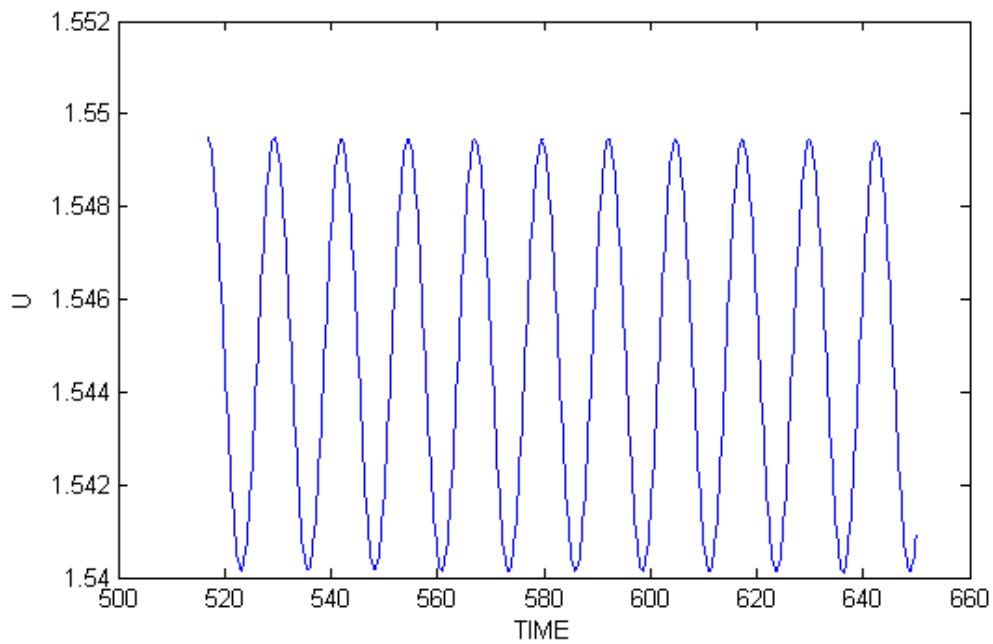
$$U_{average} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} U dt \quad (۵-۸)$$



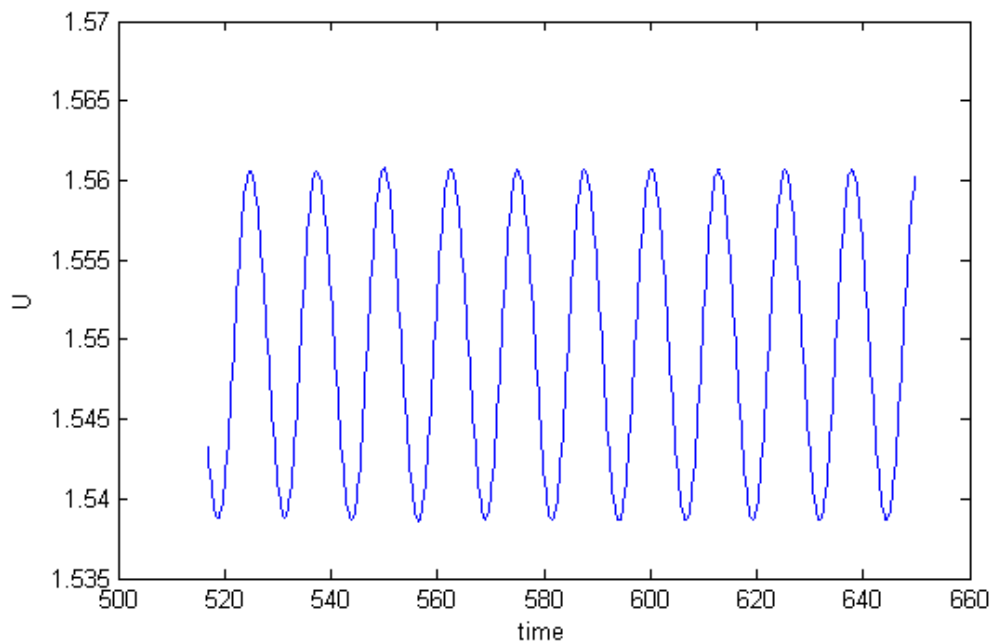
شکل ۵-۱۰: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=50$ روی محور $y=0$ بر حسب زمان



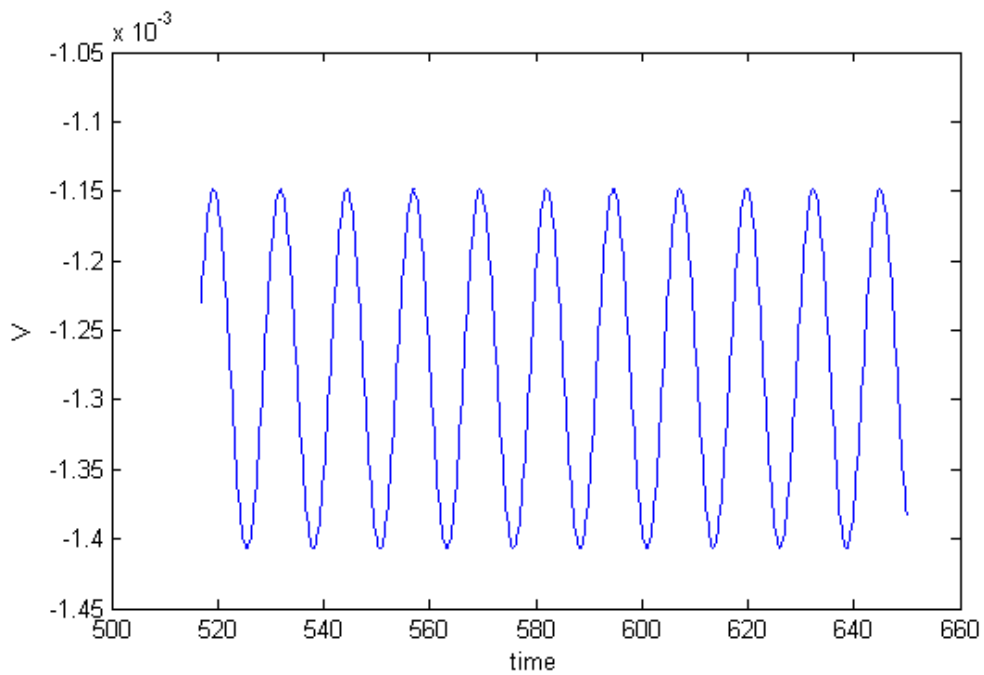
شکل ۵-۱۱: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=100$ روی محور $y=0$ بر حسب زمان



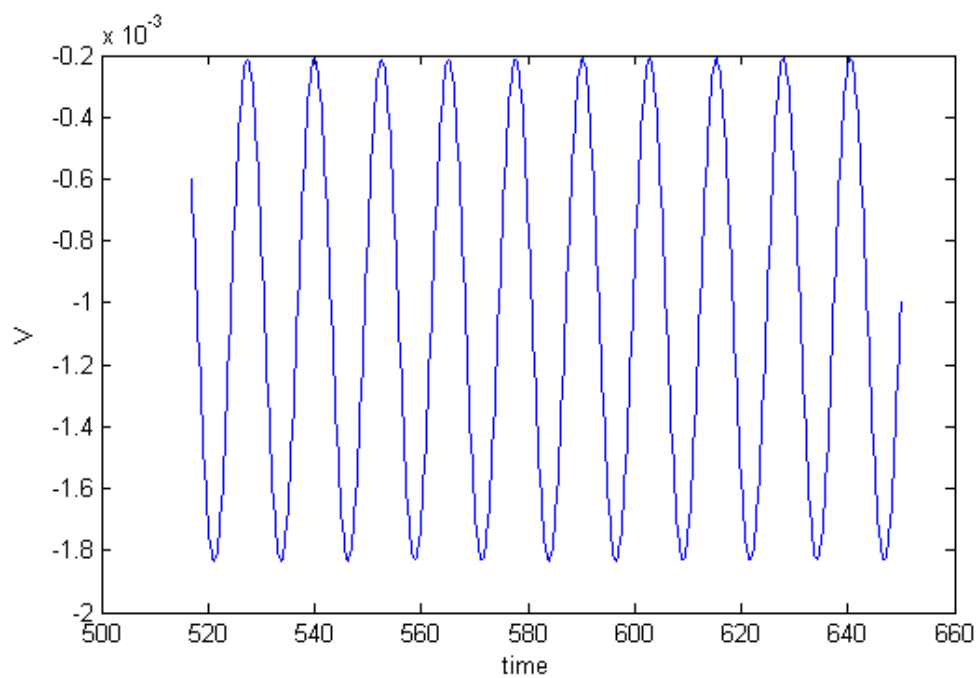
شکل ۵-۱۲: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=150$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان



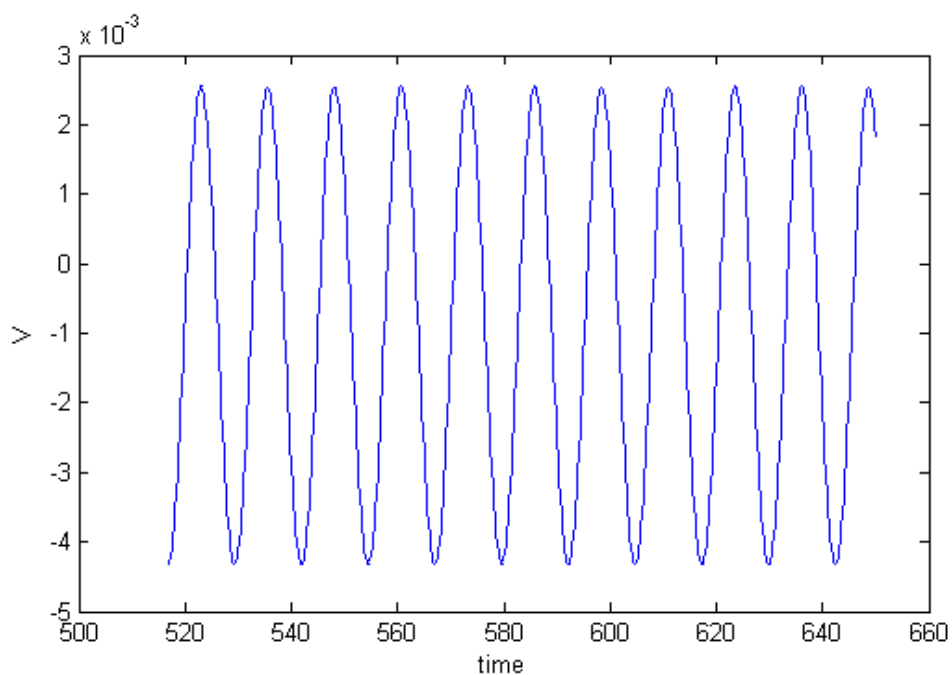
شکل ۵-۱۳: نمودار گذر زمانی U در نقطه $x=200$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان



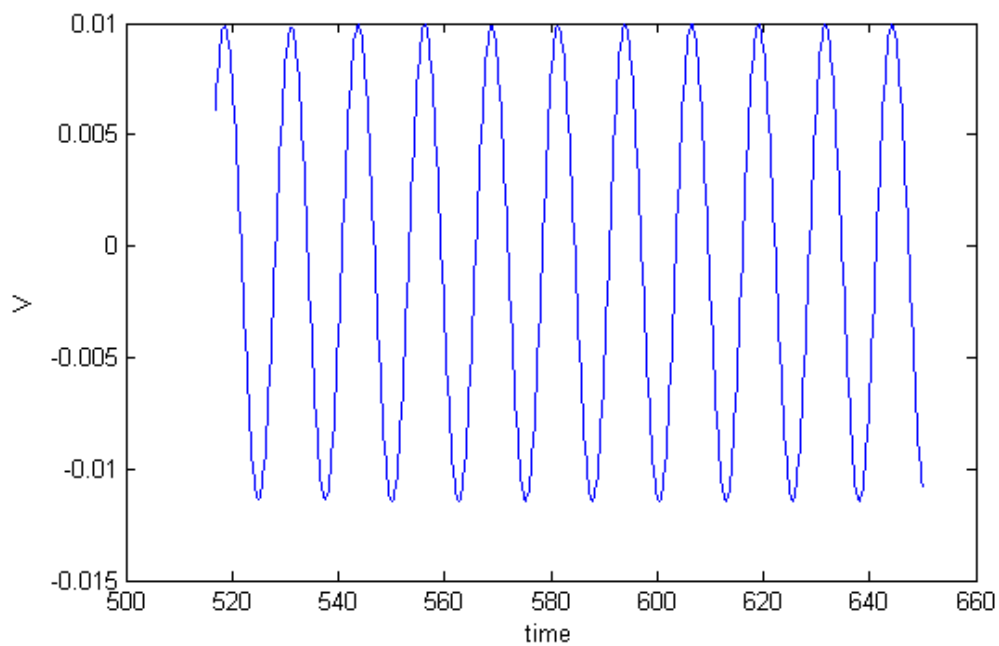
شکل ۵-۱۴: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=50$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان



شکل ۵-۱۵: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=100$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان



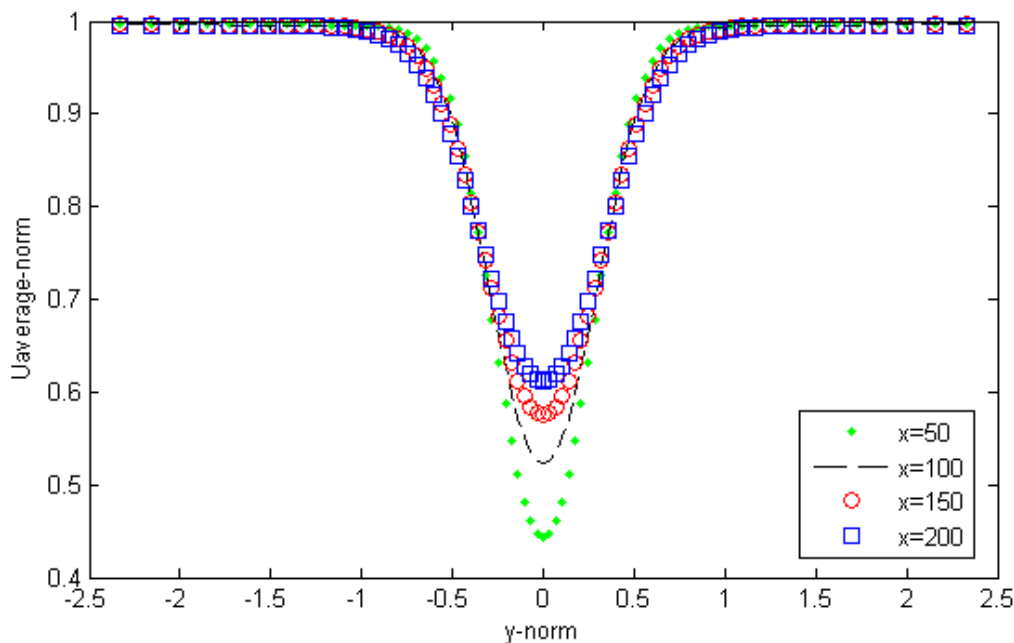
شکل ۵-۱۶: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=150$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان



شکل ۵-۱۷: نمودار گذر زمانی V در نقطه $x=200$ روی محور $y = 0$ بر حسب زمان

می توان چگونگی جابجایی ساختارهای لایه را نیز بررسی نمود. فاصله زمانی اوج تا اوج^۱ در این منحنی ها بیانگر چگونگی حرکت ساختارهای لایه می باشند. با این فاصله زمانی و سرعت جابجایی فرضی ساختارها $c = \bar{U}$ می توانیم اندازه و ساختار مقیاس را تخمین بزنیم [۴]. همان گونه که ذکر شد، با توجه این شکل ها می توان ملاحظه کرد که مولفه های سرعت u و v به یک حالت پایدار ایستایی رسیده اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد. همچنین می توان مشاهده نمود که لایه کاملاً پررودیک می باشد که این بخاطر نیروی خارجی اعمالی در ابتدای لایه می باشد.

شکل (۵-۱۸) و (۵-۱۹) نتایج شبیه سازی را به ترتیب برای سرعت متوسط در جهت x و ورتیسیته ω در جهت جریان اصلی در مختصات خود تشابهی برای ایستگاههای مختلف نشان می دهد. در این شکل به خوبی می توان رفتار خود تشابهی را برای سرعت متوسط مشاهده کرد. همانطور که مشاهده می شود، جریان گردابه ای بطور کامل دارای رفتار خود تشابهی نمی باشد، که این بدلیل نیروی خارجی اعمالی در ورودی جریان می باشد.

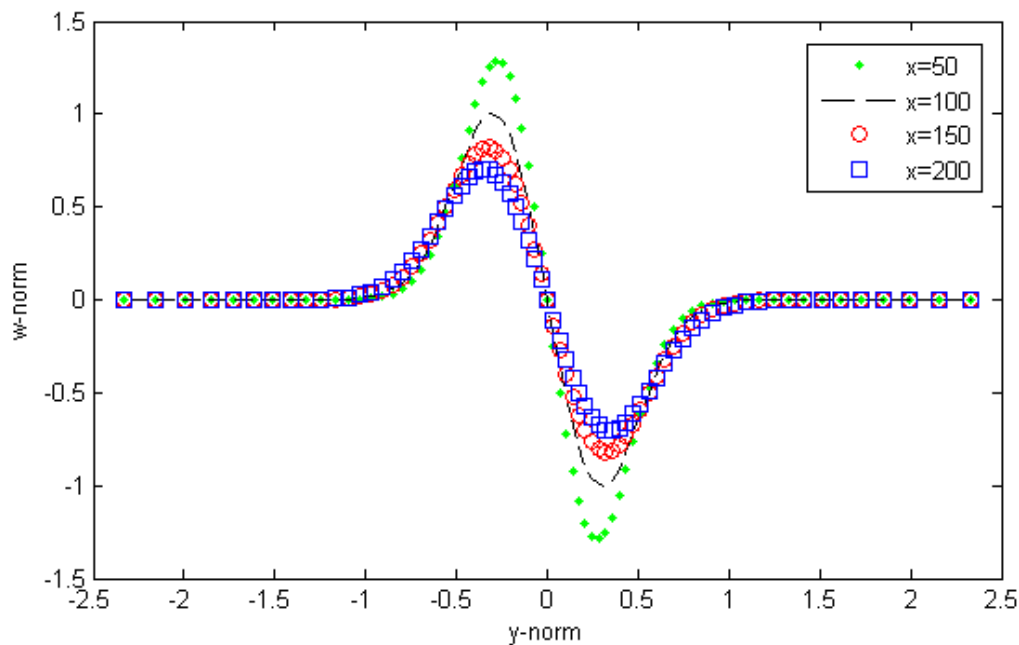


شکل ۵-۱۸: پروفیل سرعت متوسط در مختصات خود تشابهی برای شبیه سازی جریان گردابه ای دو بعدی همراه با اغتشاش ورودی در

نقاط $x = 50, 100, 150, 200$

¹ Peak-to- Peak

لازم به ذکر است که پارامترهایی که برای بی بعد سازی بکار رفته است، مشابه متغیرهای بکار رفته برای جریان گردابه ای آرام می باشد. همان طور که قبلا بیان شد جریان گردابه ای مغشوش به طور کامل مانند جریان حالت آرام آن دارای خاصیت خود تشابهی نمی باشد بدین دلیل که ورودی جریان دارای اغتشاش می باشد.



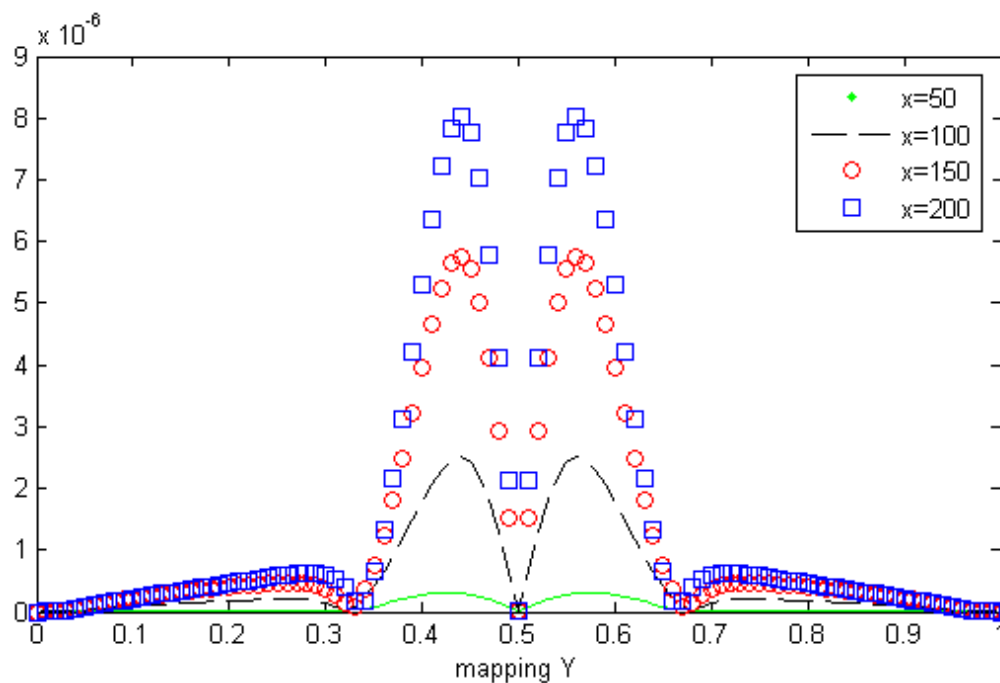
شکل ۵-۱۹: پروفیل گردابه w در مختصات خود تشابه برای شبیه سازی جریان گردابه ای دو بعدی همراه با اغتشاش ورودی در نقاط

$$x = 50, 100, 150, 200$$

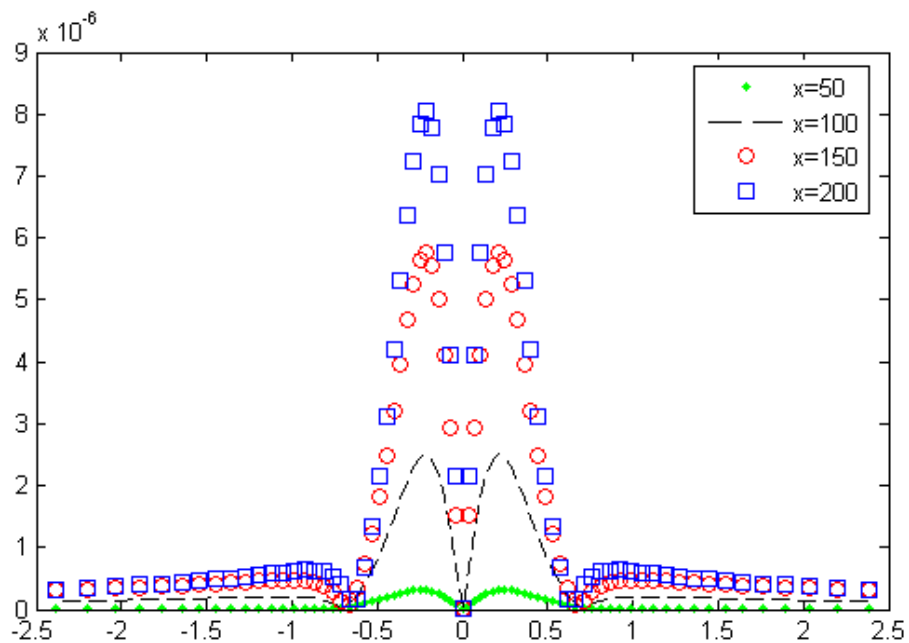
در شکل (۵-۲۰) تنش رینولدز u'_{rms} در دامنه نگاشت y نمایش داده شده است. همان گونه که از شکل (۵-۲۰) مشخص است با دور شدن از ورودی بازه محاسباتی رشد این تنشها بیشتر می شوند.

در شکل (۵-۲۱)، (۵-۲۲) و (۵-۲۳) تنشهای رینولدز در مختصات خود تشابه نشان داده شده است. بر خلاف سرعت متوسط که در آن تا حدی و نه به طور کامل خاصیت خود تشابهی دیده می شود، در تنشهای رینولدز این خاصیت دیده نمی شود. البته شایان ذکر است که با افزایش طول بازه محاسباتی خطوط تنشهای رینولدز در ایستگاههای مختلف نزدیک انتهای دامنه محاسباتی به هم نزدیکتر شده که این امر احتمالاً بیانگر این نکته است در

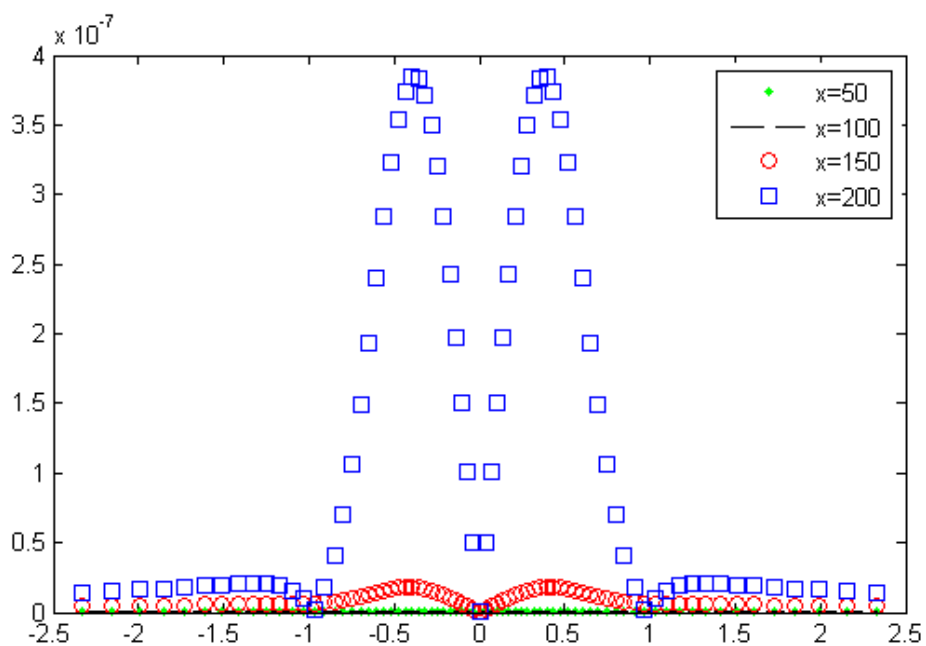
فواصل زیاد دامنه محاسباتی در راستای جریان X این تنشها بر روی یکدیگر قرار می گیرند و خاصیت خود تشابهی در آنها دیده می شود.



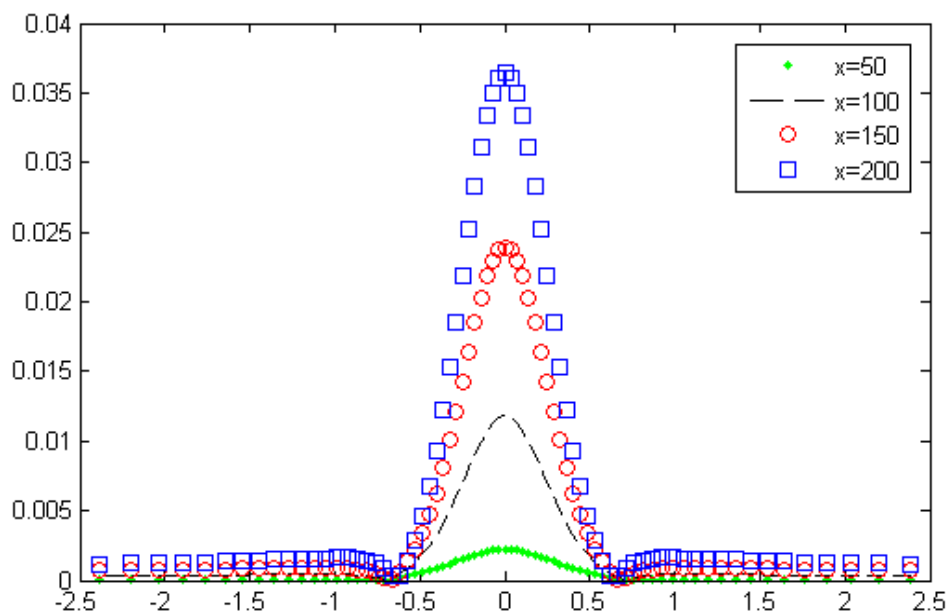
شکل ۵-۲۰: نمودار تنش رینولدزی $\sqrt{(\bar{u}')^2} / U_{average}$ بر حسب ζ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$



شکل ۵-۲۱: نمودار تنش رینولدزی $\sqrt{(\bar{u}')^2} / U_{average}$ بر حسب $y/b_{1/2}$ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$



شکل ۵-۲۲: نمودار تنش رینولدزی $u'v'_{rms} / U_{average}$ بر حسب $y/b_{1/2}$ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$



شکل ۵-۲۳: نمودار تنش رینولدزی $\sqrt{(\overline{v'})^2}/U_{average}$ بر حسب $y/b_{1/2}$ در نقاط $x = 50, 100, 150, 200$

متغیرهای بی بعد سازی در جریان گردابه ای مغشوش همانند جریان آرام می باشد ولی باید توجه نمود که در این حالت سرعت متوسط \bar{u} به عنوان پارامتر موثر در بی بعد سازی بکار می رود.

۵-۴) نتیجه گیری

در این تحقیق شبیه سازی مستقیم عددی، دوبعدی، تراکم ناپذیر و توسعه یافته مکانی جریان گردابه ای انجام شد. از روش عددی تفاضلات محدود فشرده برای بدست آوردن نتایج شبیه سازی استفاده شده است. برای شبیه سازی جریان گردابه ای توسعه یافته مکانی، از روش تفاضلات محدود فشرده در جهت اصلی جریان و از روش تفاضلات محدود فشرده تطبیقی در جهت عرضی جریان استفاده شده است. در بررسی حالت مغشوش جریان از شرط مرزی ورودی، به عنوان تولیدکننده جریان گردابه ای اجباری استفاده شد. شرط اولیه جریان به صورت پروفیل گوسی که شرایط جریان گردابه ای را ارضا می کند، در نظر گرفته شد. با توجه به گذر زمانی مولفه های سرعت u و v ، ملاحظه می شود که این مولفه ها به یک حالت پایدار ایستایی رسیده اند و مقادیر متوسط آنها به لحاظ آماری نسبت به زمان تغییراتی ندارد. همچنین می توان مشاهده نمود که لایه کاملاً پرپودیک می باشد که این بخاطر نیروی خارجی اعمالی در ابتدای لایه می باشد.

نتایج خودتشابهی مولفه های سرعت و گردابه و همچنین تنشهای رینولدز بدست آمدند. با توجه به این نتایج می توان فهمید که رفتارهای مولفه های سرعت و گردابه (0) در جریان گردابه ای بطور کامل خود مشابه نمی باشند، که این بدلیل نیروی خارجی اعمالی در ورودی جریان می باشد.

۵-۵) پیشنهادات برای تحقیقات آینده

- ✓ می توان شبیه سازی عددی جریان گردابه ای را از روشهای که نیاز به مدل سازی توربولانس دارند مانند شبیه سازی گردابه های بزرگ انجام داد.
- ✓ در این تحقیق از شرط مرزی خروجی انتقالی خطی برای شبیه سازی استفاده شد. می توان از شرایط مرزی دیگر خروجی مانند انتقالی خطی، انتقالی غیر خطی، انتقالی لزجی خطی و انتقالی لزجی غیر خطی استفاده نمود و مزیت و معایب هر کدام نسبت به دیگری در شبیه سازی بررسی گردد.
- ✓ در این تحقیق از نگاشت کتانژانتی استفاده شد که دامنه فیزیکی در راستای عمود بر جهت جریان را به دامنه [۰ و ۱] محدود می کند. می توانیم از نگاشت های دیگر که دامنه فیزیکی را به بازه های متفاوت تطبیق می دهند استفاده نمود.
- ✓ می توان از روش تفاضلات محدود با دقت بالاتر استفاده نمود. هرچند تاثیر افزایش هزینه را نیز در این کار باید مورد بررسی قرار داد.
- ✓ می توان روش عددی فوق را گسترش داد و از آن برای تحلیل مسائل پیچیده تر مانند جریانهای واکنش دهنده و یا جریان همراه با ذرات استفاده نمود.

کد پایان نامه

در این قسمت کد نوشته شده برای جریان گردابه ای آورده شده است:

کد شماره ۱:

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DNS of 2D Plane Wake Flow%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc;
clear all;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
digits(128);
LX=200;
LY=1;
eps=1e-50;
GAMA=1;
GAMA2=1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
NX=240; %Number of nodes in x direction.
NY=100; %Number of nodes in y direction.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
BETA=4; %Stretching factor.
RE=100; %Reynolds number.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DX=LX/NX;
DY=LY/NY;
I=NY+1;
J=NX+1;
speed=1; %Freestream velocity (velocity of large scale structures in flow).
DT=0.25*DX;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t0=0; % Start time of simulation.
time=600; % Final time of simulation.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DIRECTX=0:DX:LX;
DIRECTY=0:DY:LY;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Rung-Kutta coefficients.
c=[8/15,5/12,3/4];

```

```

d=[0,-17/60,-5/12];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Weight value.
W1=5/12;
W2=43/54;
W3=28/27;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Pade finite difference scheme
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% A1X=matrix A for 1st derivative in X direction
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% A *F=B *F'
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A1X=zeros(J);
A1X(1,1)=-W1*5/2;A1X(1,2)=W1*2;A1X(1,3)=W1*.5;A1X(1,4)=0;
A1X(J,J)=W1*5/2;A1X(J,J-1)=W1*-2;A1X(J,J-2)=-W1*.5;A1X(J,J-3)=0;
A1X(2,1)=-W2*3/4;A1X(2,2)=0;A1X(2,3)=W2*3/4;
A1X(J-1,J)=W2*3/4;A1X(J-1,J-1)=0;A1X(J-1,J-2)=-W2*3/4;
A1X(3,1)=-W3*3/112;A1X(3,2)=-
W3*87/112;A1X(3,3)=0;A1X(3,4)=W3*87/112;A1X(3,5)=W3*3/112;
A1X(J-2,J)=W3*3/112;A1X(J-2,J-1)=W3*87/112;A1X(J-2,J-2)=0;A1X(J-2,J-3)=-
W3*87/112;A1X(J-2,J-4)=-W3*3/112;
for j=4:J-3
    A1X(j,j)=0;A1X(j,j-1)=-7/9;A1X(j,j+1)=7/9;A1X(j,j-2)=-1/36;A1X(j,j+2)=1/36;
end;
A1X=(1/(DX)).*A1X;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% B1X=matrix B for 1st derivative in X
direction%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
B1X=zeros(J);
B1X(1,1)=W1*1;B1X(1,2)=W1*2;
B1X(J,J)=W1*1;B1X(J,J-1)=W1*2;
B1X(2,1)=W2*1/4;B1X(2,2)=W2*1;B1X(2,3)=W2*1/4;
B1X(J-1,J)=W2*1/4;B1X(J-1,J-1)=W2*1;B1X(J-1,J-2)=W2*1/4;
B1X(3,2)=W3*37/112;B1X(3,3)=W3*1;B1X(3,4)=W3*37/112;
B1X(J-2,J-1)=W3*37/112;B1X(J-2,J-2)=W3*1;B1X(J-2,J-3)=W3*37/112;
for j=4:J-3
    B1X(j,j)=1;B1X(j,j-1)=1/3;B1X(j,j+1)=1/3;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```



```

%%%%%%%%%%%%%%A1Y=matrix A for 1st derivative in Y
direction%%%%%%%%%%%%%%
A1Y=zeros(I);
A1Y(1,1)=-W1*5/2;A1Y(1,2)=W1*2;A1Y(1,3)=W1*.5;A1Y(1,4)=0;
A1Y(I,I)=W1*5/2;A1Y(I,I-1)=W1*-2;A1Y(I,I-2)=-W1*.5;A1Y(I,I-3)=0;
A1Y(2,1)=-W2*3/4;A1Y(2,2)=0;A1Y(2,3)=W2*3/4;
A1Y(I-1,I)=W2*3/4;A1Y(I-1,I-1)=0;A1Y(I-1,I-2)=-W2*3/4;
A1Y(3,1)=-W3*3/112;A1Y(3,2)=-
W3*87/112;A1Y(3,3)=0;A1Y(3,4)=W3*87/112;A1Y(3,5)=W3*3/112;
A1Y(I-2,I)=W3*3/112;A1Y(I-2,I-1)=W3*87/112;A1Y(I-2,I-2)=0;A1Y(I-2,I-3)=-
W3*87/112;A1Y(I-2,I-4)=-W3*3/112;
for i=4:I-3
    A1Y(i,i)=0;A1Y(i,i-1)=-7/9;A1Y(i,i+1)=7/9;A1Y(i,i-2)=-1/36;A1Y(i,i+2)=1/36;
end;
A1Y=(1/(DY)).*A1Y;
%%%%%%%%%%%%%%B1Y=matrix B for 1st derivative in Y
direction%%%%%%%%%%%%%%
B1Y=zeros(I);
B1Y(1,1)=W1*1;B1Y(1,2)=W1*2;
B1Y(I,I)=W1*1;B1Y(I,I-1)=W1*2;
B1Y(2,1)=W2*1/4;B1Y(2,2)=W2*1;B1Y(2,3)=W2*1/4;
B1Y(I-1,I)=W2*1/4;B1Y(I-1,I-1)=W2*1;B1Y(I-1,I-2)=W2*1/4;
B1Y(3,2)=W3*37/112;B1Y(3,3)=W3*1;B1Y(3,4)=W3*37/112;
B1Y(I-2,I-1)=W3*37/112;B1Y(I-2,I-2)=W3*1;B1Y(I-2,I-3)=W3*37/112;
for i=4:I-3
    B1Y(i,i)=1;B1Y(i,i-1)=1/3;B1Y(i,i+1)=1/3;
end;
%%%%%%%%%%%%%%A2X=matrix A for 2nd derivative in X direction
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%% A*F=B*F"
%%%%%%%%%%%%%%
A2X=zeros(J);
A2X(1,1)=13;A2X(1,2)=-27;A2X(1,3)=15;A2X(1,4)=-1;A2X(J,J)=13;A2X(J,J-1)=-27;A2X(J,J-
2)=15;A2X(J,J-3)=-1;
A2X(2,1)=12;A2X(2,2)=-24;A2X(2,3)=12;A2X(J-1,J)=12;A2X(J-1,J-1)=-24;A2X(J-1,J-2)=12;
for j=3:J-2
    A2X(j,j)=-9;A2X(j,j-1)=4;A2X(j,j+1)=4;A2X(j,j-2)=1/2;A2X(j,j+2)=1/2;
end;
A2Xu=A2X;
A2Xu(1,1)=-3/2;

```

```

A2Xu(1,2)=0;
A2Xu(1,3)=3/2;
A2Xu(1,4)=0;
%
A2Xu(J,J)=-3/2;
A2Xu(J,J-1)=0;
A2Xu(J,J-2)=3/2;
A2Xu(J,J-3)=0;
%
A2Xu=((1/DX)^2).*A2Xu;
%
A2X=((1/DX)^2).*A2X;
%%%%%%%%%%%%%%B2X=matrix B for 2nd derivative in X direction
%%%%%%%%%%%%%%
B2X=zeros(J);
B2X(1,1)=1;B2X(1,2)=11;B2X(J,J)=1;B2X(J,J-1)=11;
B2X(2,1)=1;B2X(2,2)=10;B2X(2,3)=1;B2X(J-1,J)=1;B2X(J-1,J-1)=10;B2X(J-1,J-2)=1;
for j=3:J-2
    B2X(j,j)=4;B2X(j,j-1)=1;B2X(j,j+1)=1;
end;
%
B2Xu=B2X;
B2Xu(1,2)=2;
B2Xu(J,J-1)=2;
%%%%%%%%%%%%%%A2Y=matrix A for 2nd derivative in Y direction
%%%%%%%%%%%%%%
A2Y=zeros(I);
A2Y(1,1)=13;A2Y(1,2)=-27;A2Y(1,3)=15;A2Y(1,4)=-1;A2Y(I,I)=13;A2Y(I,I-1)=-27;A2Y(I,I-
2)=15;A2Y(I,I-3)=-1;
A2Y(2,1)=12;A2Y(2,2)=-24;A2Y(2,3)=12;o=.65;A2Y(I-1,I)=12;A2Y(I-1,I-1)=-24;A2Y(I-1,I-
2)=12;
for i=3:I-2
    A2Y(i,i)=-9;A2Y(i,i-1)=4;A2Y(i,i+1)=4;A2Y(i,i-2)=1/2;A2Y(i,i+2)=1/2;
end;
A2Y=((1/DY)^2).*A2Y;
%%%%%%%%%%%%%%B2Y=matrix B for 2nd derivative in Y direction
%%%%%%%%%%%%%%
B2Y=zeros(I);
B2Y(1,1)=1;B2Y(1,2)=11;B2Y(I,I)=1;B2Y(I,I-1)=11;
B2Y(2,1)=1;B2Y(2,2)=10;B2Y(2,3)=1;B2Y(I-1,I)=1;B2Y(I-1,I-1)=10;B2Y(I-1,I-2)=1;
for i=3:I-2
    B2Y(i,i)=4;B2Y(i,i-1)=1;B2Y(i,i+1)=1;

```

```

end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% LAN=Diagonal matrices for the 1st and 2nd derivatives
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% approximations in the cross stream direction
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% LAN1
LAN1=zeros(I);
for i=1:I

    % for mapping y=-BETA.Cot(pi.kisi):
    LAN1(i,i)=(1/(pi*BETA))*((sin(pi*(i-1)*DY))^2);

    % for mapping y=BETA.Tan(pi.kisi/2):
    %LAN1(i,i)=(2/(pi*BETA))*((cos(pi*(i-1)*DY/2))^2);
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% LAN2
LAN2=LAN1.^2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% LAN3
LAN3=zeros(I);
for i=1:I

    % for mapping y=-BETA.Cot(pi.kisi):
    LAN3(i,i)=(2/(pi*(BETA^2)))*((sin(pi*(i-1)*DY))^3)*cos(pi*(i-1)*DY);

    % for mapping y=BETA.Tan(pi.kisi/2):
    %LAN3(i,i)=(-4/(pi*BETA))*((sin(pi*(i-1)*DY/2))*((cos(pi*(i-1)*DY/2))^3));
end;LAN3;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% D1Y=1st derivative operator in the cross-stream (y)direction%%
D1Y=LAN1*(B1Y^-1)*A1Y;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% D2Y=2nd derivative operator in the cross-stream (y)direction%%
D2Y=(LAN2*(B2Y^-1)*A2Y)+(LAN3*(B1Y^-1)*A1Y);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% D1X=1st derivative operator in the cross-stream (x)direction%%
D1X=(B1X^-1)*A1X;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% D2X=2nd derivative operator in the cross-stream (x)direction%%
D2X=(B2X^-1)*A2X;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% introduce mean velocity profile in the streamwise direction
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% NOTE: U=U0+u where U0=base flow, U=instantaneous
velocity,
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% u=computational velocity
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U0=zeros(I,J);
for i=1:I
    for j=1:J
        % for mixing layer:
        %     U0=1/2{(1/landa)+tanh(2z)}=(Reynolds profile);
        %     landa=[(U1-U2)/(U1+U2)]=3-->U1=2,U2=1.
        %     U0(i,j)=0.5*(3+tanh(2.*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))));
        %     U0(i,j)=0.5*(1+tanh(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps)))(Michalke profile);

        % for jet flow:
        %     U0(i,j)=GAMA*(1-(tanh(GAMA2*(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))))^2);

        % for wake flow:
        %     U0(i,j)=1-(0.692*exp(-ln2*((-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps)^2)));
        %     U0(i,j)=1-0.692*(exp(-log(2)*((-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))^2)));
    end;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% mean velocity (base flow) derivatives
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U01Y=D1Y*U0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U01X=zeros(I,J);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U02X=zeros(I,J);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U04X=zeros(I,J);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U02Y=D2Y*U0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U04Y=D2Y*U02Y;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U042X2Y=zeros(I,J);

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
introduce instantaneous velocity in the streamwise direction
for i=1:I
    for j=1:J
        U(i,j)=0.5*(1+tanh(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps)));
        U(i,j)=1-0.692*(exp(-log(2)*((-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))^2)));
    end;
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
computational velocity
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u=U-U0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
initial boundary values of u
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
inflowu(:,1,1)=u(:,1);
outflowu(:,1,1)=u(:,J);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
NOTE: V=v where V=V_bc=instantaneous
velocity,
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
v=v_bc=computational velocity
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
introduce instantaneous velocity in the cross-stram direction
for i=1:I
    for j=1:J
        V_bc(i,j)=0;
    end;
end;
v_bc=V_bc;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
initial boundary values of v
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
inflowv(:,1,1)=v_bc(:,1);
outflowv(:,1,1)=v_bc(:,J);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
initial boundary values of
du/dx
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
inflowv1Y=D1Y*inflowv(:,1,1);
inflowdu(:,1,1)=-inflowv1Y;
%
outflowv1Y=D1Y*outflowv(:,1,1);
outflowdu(:,1,1)=-outflowv1Y;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% grad2U=Laplace equation
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u2X=(D2X*u)';
u2Y=D2Y*u;
gradu(:,1)=u2X+u2Y;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Time Advancement
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% using 3rd order Runge-Kutta method
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t(1)=t0;
NT=0;
while t(1)<time
%
for sub=1:3
%
t(sub+1)=t(sub)+(c(sub)+d(sub)).*DT;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% du/dx:
u1X=(D1X*u)';
u1X(:,1)=inflowdu(:,1,sub);
u1X(:,J)=outflowdu(:,1,sub);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% v:
Q2=-D1Y*(u1X);
Q2(1,:)=[];
Q2(I-1,:)=[];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DD2Y=D2Y;
DD2Y(:,1)=[];
DD2Y(:,I-1)=[];
DD2Y(1,:)=[];
DD2Y(I-1,:)=[];
v_int=DD2Y^-1*Q2;
v=[zeros(J,1),v_int,zeros(J,1)]';
v(:,1)=inflowv(:,1,sub);
v(:,J)=outflowv(:,1,sub);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% U & V
U=u+U0;
V=v;
% U=u+U0+xUE;
% V=v+VE;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% w

```

```

V1X=(D1X*V)';
U1Y=D1Y*U;
% U1Y=u1Y+U01Y;
%
w=(V1X-U1Y);
%
H1=V.*w;
H2=(-U).*w;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
H11Y=D1Y*H1;
H12Y=D2Y*H1;H12Y=0*H12Y;
H21X=(D1X*H2)';
H22XY=D1Y*((D1X*H2)');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% viscous term
u2X=zeros(I,J);u2X=u2X';
%
AA2Xu=zeros(I,J);
ZER=zeros(I,J-2);
AA2Xu=[(-3/DX).*inflowdu(:,1,sub),ZER,(3/DX).*outflowdu(:,1,sub)]];
u2X=(B2Xu^-1)*(AA2Xu+(A2Xu*u'));
u2X=u2X';
%
D2Xu=(B2Xu^-1)*A2Xu;
%
U2X=U02X+u2X;
% U2X=U02X+u2X+xUE2X;
%
U2Y=D2Y*U;
%
U4X=(D2X*U2X)';
%
U4Y=D2Y*U2Y;
%
U4X2Y2=(D2X*U2Y)';
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% RHS
RHS=H12Y-H22XY+(1/RE).*(U4Y+U4X+(2.*U4X2Y2));
%
RHSu(:,:,sub)=RHS;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% set bc,s
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% boundary condition u
for i=1:I

```

```

for j=1:J
% U_bc(i,j)=0.5*(1+tanh(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps)));
U_bc(i,j)=1-0.692*(exp(-log(2)*((-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY+eps))^2)));
end;
end;
u_bc=U_bc-U0;
% u_bc=U_bc-U0-xUE;
%
inflowu(:,1,sub+1)=u_bc(:,1);
%%%%%%%% boundary condition v
for i=1:I
for j=1:J
V_bc(i,j)=0;
end;
end;
v_bc=V_bc;
% v_bc=V_bc-VE;
inflowv(:,1,sub+1)=v_bc(:,1);
%%%%%%%% Boundary condition in outflow (convection
equation)%%%%%%%%
tt(1)=t(sub);
dtt=t(sub+1)-t(sub);
u_1=u;
%
u_11X=zeros(I,J);u_11X=u_11X';
u_11X=D1X*u_1';
u_11X=u_11X';
%
RR1=-speed*u_11X;
tt(2)=tt(1)+dtt*(c(1)+d(1));
u_2=u_1+c(1)*dtt*RR1;
%
u_21X=zeros(I,J);u_21X=u_21X';
u_21X=D1X*u_2';
u_21X=u_21X';
%
RR2=-speed*u_21X;
tt(3)=tt(2)+dtt*(c(2)+d(2));
u_3=u_2+(c(2)*RR2+d(2)*RR1).*dtt;
%
u_31X=zeros(I,J);u_31X=u_31X';

```



```

u_31X=D1X*u_3';
u_31X=u_31X';
%
RR3=-speed*u_31X;
tt(4)=tt(3)+dtt.*(c(3)+d(3));
u_4=u_3+(c(3)*RR3+d(3)*RR2). *dtt;
%
outflowu(:,1,sub+1)=u_4(:,J);
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%Boundary condition of v in outflow (convection equation)%%%%%%%%%%%%%%
ttt(1)=t(sub);
dttt=t(sub+1)-t(sub);
v_1=v;
%
v_11X=zeros(I,J);v_11X=v_11X';
v_11X=D1X*v_1';
v_11X=v_11X';
%
RRR1=-speed*v_11X;
ttt(2)=ttt(1)+dttt*(c(1)+d(1));
v_2=v_1+c(1)*dttt*RRR1;
%
v_21X=zeros(I,J);v_21X=v_21X';
v_21X=D1X*v_2';
v_21X=v_21X';
%
RRR2=-speed*v_21X;
ttt(3)=ttt(2)+dttt*(c(2)+d(2));
v_3=v_2+(c(2)*RRR2+d(2)*RRR1)*dttt;
%
v_31X=zeros(I,J);v_31X=v_31X';
v_31X=D1X*v_3';
v_31X=v_31X';
%
RRR3=-speed*v_31X;
ttt(4)=ttt(3)+dttt*(c(3)+d(3));
v_4=v_3+(c(3)*RRR3+d(3)*RRR2)*dttt;
%
outflowv(:,1,sub+1)=v_4(:,J);
%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%boundary condition du/dx

```



```

u(I,:)=0;
end;% (end of for continue while)
%%%%%%%%%%
TIME=t(sub+1)%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%% updating
t(1)=t(sub+1);
gradu(:,1)=gradu(:,sub+1);
inflowu(:,1,1)=inflowu(:,1,sub+1);
inflowv(:,1,1)=inflowv(:,1,sub+1);
outflowu(:,1,1)=outflowu(:,1,sub+1);
outflowv(:,1,1)=outflowv(:,1,sub+1);
inflowdu(:,1,1)=inflowdu(:,1,sub+1);
outflowdu(:,1,1)=outflowdu(:,1,sub+1);
%
NT=NT+1;
T(NT,1)=t(1);
%%%%%%%%%%
UX0(NT,1)=U((I-1)/2+1,1);
UX60(NT,1)=U((I-1)/2+1,60);
UX120(NT,1)=U((I-1)/2+1,120);
UX180(NT,1)=U((I-1)/2+1,180);
UX241(NT,1)=U((I-1)/2+1,241);
% UX151(NT,1)=U((I-1)/2+1,151);
%%%%%%%%%%
VX0(NT,1)=V((I-1)/2,1);
VX60(NT,1)=V((I-1)/2,60);
VX120(NT,1)=V((I-1)/2,120);
VX180(NT,1)=V((I-1)/2,180);
VX241(NT,1)=V((I-1)/2,241);
% VX151(NT,1)=V((I-1)/2,151);
%%%%%%%%%%
uX0(NT,1)=u((I-1)/2+1,1);
uX60(NT,1)=u((I-1)/2+1,60);
uX120(NT,1)=u((I-1)/2+1,120);
uX180(NT,1)=u((I-1)/2+1,180);
uX241(NT,1)=u((I-1)/2+1,241);
% *****
subplot(2,3,1),plot(DIRECTX,U((I-1)/2+1,:))
% subplot(2,3,6),plot(DIRECTX,V((I-1)/2+1,:))
subplot(2,3,2),plot(T,UX0,'*b',T,UX60,'R',T,UX120,'G',T,UX180,'K',T,UX241,'B')% ,T,UX151,'
K');% ,T,UX600,'R',T,UX700,'b'),T,VX301,'B',T,UX301,'B'

```



```

Um(j)=U(((I-1)/2)+1,j);
m=15;
%reynolds(delta_w0)=rdw0=100;vis=0.01;(U2-U1)=2-1=1;
%(delta_w0)=del12=vis*reynolds(delta_w0)/(U2-U1);
vis=0.01;% viscosity
rdw0=100;
delu=1;
del12=vis*rdw0/delu;
for i=m:I-(m-1)
    y_norm(i-(m-1),j)=(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY))/(del12);
    U_norm(i-(m-1),j)=U(i,j)/Um(j);
    w_norm(i-(m-1),j)=w(i,j)*del12/Um(j);
end;
end;
% %
figure
plot(DIRECTX,Um,'r');
figure
for j=1:1:J
    plot(y_norm(:,j),U_norm(:,j),'b');
    hold on
end;
hold off
figure
for j=1:1:J
    plot(y_norm(:,j),w_norm(:,j),'b');
    hold on
end;

```

کد شماره ۲:

این کد برای رسم نمودارهای جریان آرام و بررسی خود تشابهی مورد استفاده قرار می گیرد.

```

clc
clear all;
load laminarworkspace

for j=1
    Um(j)=U(((I-1)/2)+1,j);
    Ucdeficit(j)=1-Um(j);
    for i=1:I
        Udeficit(i)=1-U(i,j);
    end;
end;

```

```

% if Ucddeficit(j)-(2*Udeficit(i,j))<=0.0000000;
% k(i)=i
% end;
end
end;
for j=1:60:J

    for i=1:I
        Udeficit(i,j)=1-U(i,j);

    end;
    plot(Udeficit(:,j),DIRECTY)
    hold on;
end;

```

کد شماره ۳:

این کد برای رسم نمودارهای جریان آشفته مورد استفاده قرار می گیرد.

```

clc
load a
bn=0.129*(DIRECTX+53.738).^(0.5);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for j=1:10:J
    bn(j)=bn(1,j);
    Um(j)=U(((I-1)/2)+1,j);
    Vm(j)=V(((I-1)/2)+1,j);
    Uavrm(j)=Uavr(((I-1)/2)+1,j);
    Uvibm(j)=Uvib(((I-1)/2)+1,j);
    Vvibm(j)=Vvib(((I-1)/2)+1,j);
    UVvibm(j)=UVvib(((I-1)/2)+1,j);
    m=15;
    for i=m:I-(m-1)
        Uavr_norm(i-(m-1),j)=Uavr(i,j)/(1-Um(j));
        y_norm(i-(m-1),j)=(-BETA.*cot(pi.*(i-1).*DY))/(bn(j));
        U_norm(i-(m-1),j)=(U(i,j))/(1-Um(j));
        V_norm(i-(m-1),j)=V(i,j)/(1-Um(j));
        w_norm(i-(m-1),j)=w(i,j)/(1-Um(j));
        Uvib_norm(i-(m-1),j)=Uvib(i,j)/(1-Um(j));
        Vvib_norm(i-(m-1),j)=Vvib(i,j)/(1-Um(j));
        UVvib_norm(i-(m-1),j)=UVvib(i,j)/(1-Um(j));
    end
end

```

```

end;
end;
figure
plot(DIRECTX,Um,'*b');
title('(2) U in y=LY/2 and time= end ');
figure
for j=1:20:J
    plot(y_norm(:,j),U_norm(:,j),'b');
    title('(3) U_norm versus y_norm')
    hold on
end;
hold off
figure
for j=1:20:J
    plot(y_norm(:,j),w_norm(:,j),'b');
    title('(4) w_norm versus y_norm')
    hold on
end;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
U-Uavr%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure;
plot(timeUvibNX,UvibNX4);
title('(7)U-Uaverage in x=LX/4 ');
figure;
plot(timeUvibNX,Uvib3NX4);
title('(8)U-Uaverage in x=3LX/4 ');
figure;
plot(timeUvibNX,UvibNX2);
title('(9)U-Uaverage in x=LX/2 ');
figure;
plot(timeUvibNX,UvibNX);
title('(10)U-Uaverage in x=LX ');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Reyno
lds
stresses%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
plot(DIRECTY,Uvib(:,round(NX/4+1)),'g',DIRECTY,Uvib(:,round(NX/2+1)),'-k',DIRECTY,Uvib(:,round(3*NX/4+1)),'ro',DIRECTY,Uvib(:,round(NX+1)),'bs');
title('(11)Uvib in X=LX/4,LX/2,3LX/4,LX')
figure

```

```

plot(DIRECTY,Vvib(:,round(NX/4+1)), 'g',DIRECTY,Vvib(:,round(NX/2+1)), '--
k',DIRECTY,Vvib(:,round(3*NX/4+1)), 'ro',DIRECTY,Vvib(:,round(NX+1)), 'bs');
title('(12)Vvib in X=LX/4,LX/2,3LX/4,LX')
figure
plot(DIRECTY,UVvib(:,round(NX/4+1)), 'g',DIRECTY,UVvib(:,round(NX/2+1)), '--
k',DIRECTY,UVvib(:,round(3*NX/4+1)), 'ro',DIRECTY,UVvib(:,round(NX+1)), 'bs');
title('(13)UVvib in X=LX/4,LX/2,3LX/4,LX')
figure
plot(DIRECTY,Uvib(:,round(NX/4+1)), 'bs',DIRECTY,Vvib(:,round(NX/4+1)), 'ro',DIRECTY,1000
0*UVvib(:,round(NX/4+1)), '*g')
title('(14)Uvib, Vvib and 10000*UVvib in X=LX/4')
figure
plot(DIRECTY,Uvib(:,round(3*NX/4+1)), 'bs',DIRECTY,Vvib(:,round(3*NX/4+1)), 'ro',DIRECTY,
500*UVvib(:,round(3*NX/4+1)), '*g')
title('(15)Uvib, Vvib and 500*UVvib in X=3LX/4');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
normalized
Reynolds
stresses%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
plot(y_norm,Uvib_norm(:,round(NX/4+1)), 'g',y_norm,Uvib_norm(:,round(NX/2+1)), '--
k',y_norm,Uvib_norm(:,round(3*NX/4+1)), 'ro',y_norm,Uvib_norm(:,round(NX+1)), 'bs');
title('(16)Uvibnorm versus ynorm in X=LX/4,LX/2,3LX/4,LX')
figure
plot(y_norm,Vvib_norm(:,round(NX/4+1)), 'g',y_norm,Vvib_norm(:,round(NX/2+1)), '--
k',y_norm,Vvib_norm(:,round(3*NX/4+1)), 'ro',y_norm,Vvib_norm(:,round(NX+1)), 'bs');
title('(17)Vvibnorm versus ynorm in X=LX/4,LX/2,3LX/4,LX')
figure
plot(y_norm,UVvib_norm(:,round(NX/4+1)), 'g',y_norm,UVvib_norm(:,round(NX/2+1)), '--
k',y_norm,UVvib_norm(:,round(3*NX/4+1)), 'ro',y_norm,UVvib_norm(:,round(NX+1)), 'bs');
title('(18)UVvibnorm versus ynorm in X=LX/4,LX/2,3LX/4,LX')
figure
plot(y_norm,Uvib_norm(:,round(NX/4+1)), 'bs',y_norm,Vvib_norm(:,round(NX/4+1)), 'ro',y_norm,1
0000*UVvib_norm(:,round(NX/4+1)), '*g');
title('(19)Uvibnorm, Vvibnorm and 10000*UVvibnorm in X=LX/4');
figure
plot(y_norm,Uvib_norm(:,round(3*NX/4+1)), 'bs',y_norm,Vvib_norm(:,round(3*NX/4+1)), 'ro',y_n
orm,500*UVvib_norm(:,round(3*NX/4+1)), '*g');
title('(20)Uvibnorm, Vvibnorm and 500*UVvibnorm in X=3LX/4');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
self-

```



```

title('(30)V versus time in X=LX/4')
figure
plot(timeUvibNX,V_X100)
title('(31)V versus time in X=LX/2')
figure
plot(timeUvibNX,V_X150)
title('(32)V versus time in X=3LX/4')
figure
plot(timeUvibNX,V_X200)
title('(34)V versus time in X=LX')
figure;
plot(timeUvibNX,Voutlayer1,'b',timeUvibNX,Voutlayer2,'r--')
title('(35)V in 4LY/5 and X=LX/4,LX')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure
Uavr0=Uavr((I-1)/2+1,:);
plot(DIRECTX,Uavr0,'*b')
title('(36)Uavr in y=LY/2 ')

```

مراجع:

- ۱- شیمز، ا. ۱۳۸۲. مکانیک سیالات. ترجمه علیرضا انتطاری چاپ هشتم. ناشر: نورپردازان. تهران.
 - ۲- ویتلی، جerald. ۱۳۸۲. محاسبات عددی، ترجمه محمد علی پورپاک. چاپ سوم، تهران.
 - ۳- وایت. ۱۳۸۴. مکانیک سیالات پیشرفته، ترجمه محمد رضایی نیا، موسسه انتشاراتی فرهنگی فکرخلاق نوین.
 - ۴- زرغامی، ا. ۱۳۸۵. حل مستقیم عددی جریان اختلاطی آزاد. دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود.
 - ۵- دیبائی بناب، م.ج. ۱۳۸۵. تدوین نرم افزار جهت تحلیل جریان بررشی، دو بعدی، گذرا و غیر قابل تراکم.
 - ۶- حمید رضا سنندجی. ۱۳۸۷. بررسی شرط مرزی خروجی در جریان اختلاطی آزاد غیر قابل تراکم. دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود.
7. Bartlez.R.H, Stewar .G.W. *Solution of the Matrix Equation $AX+XB=C$* . [F4], Communications of the ACM, Vol 15, Number 9, 1972.
 8. Schlichting.H. 1979. *Boundary Layer Theory*. Mc Graw Hill.
 9. Wray.A & Hussaini. M.Y. *Numerical Experiments in Boundary Layer Stability*. Proc. R. Soc. Lond. A, vol. 392, pp 373-389. 1984.
 10. Kim, J., Moin, P. and Moser, R., J. Fluid Mech, Vol. 177(1987).
 11. Moin.P, Mohesh.K. Fluid Mech.1989. *Direct Numerical Simulation: A Toolin Turbulence Research*.
 12. Liu.J.T.C.Mech.1989. *Coherent Structures in Transitional and Turbulence Free Shear Flows*. Ann.Rew.
 13. Lele.k, 1991, *Compact finite difference schemes with spectral_like Resolution*.
 14. Maekawa and Mansour, 1992. *Direct Numerical Simulations of Spatially Developing wake*, JSME International Journal.
 15. F.Spotz. 1995. *High order compact finite difference schemes for computational mechanics*. PhD thesis, university of Austin.

16. Maghrebi.M.J. 1999. *A Study of Evolution of Intense Focal Structures in Spatially-Developing Three-Dimensional Planer Wake*. PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia.
17. Modi.A. April 26.1999. *Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow*.
18. Mathieu.J, Scott.J. 2000. *An Introduction to Turbulent Flow*.Cambridge University Press.
19. Ferziger, J. Peric, M. 2000. *Computational Methods for Fluid Dynamics. Third, rev edition*.
20. Brian R. Hunt 2004. *Differential Equations with MATLAB*.

Abstract

Direct numerical simulation method to simulate spatially developing plane wake flow is described and the numerical results are presented. The incompressible time-dependent Navier-Stokes equations were solved using compact finite difference approximations in the streamwise direction, a mapped compact finite difference scheme in the cross-stream direction, and a third-order compact Runge-Kutta scheme for time advancement. The length scale and the velocity scale are used as two characteristics to normalize the results of simulation. These two characteristics are the wake half width and wake deficit. A cotangent mapped of $y = -\beta \cot(\pi\zeta)$ is used to relate the physical domain in the double infinity of $-\infty < y < \infty$ to the computational domain of ζ ($0 \leq \zeta \leq 1$). The compact third order of Runge-Kutta method is used for the time-advancement purpose. The convective outflow boundary condition is employed to create a non-reflective type boundary condition at the outlet. An inviscid (Stuart flow) and a completely viscous solution of the Navier-Stokes equations are used for verification of the numerical simulation. The vorticity and velocity profile and self similarity in flow are investigated. The numerical results show a very good accuracy and agreement with exact solution of the Navier-Stokes equation.

Key words

Direct numerical simulation, Wake flow, Compact finite difference, Mapped compact finite difference, Self similarity.



**Shahrood University
of Technology**

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

**Direct numerical simulation of plane wake flow using mapped
compact finite difference scheme**

Babak Haghghi

**Supervisor:
Dr. Mohammad Javad Maghrebi**

Date: May 2010