بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه تبدیل انرژی

حل عددی لایه‌های مرزی جابجایی آزاد روی یک سطح مایل در یک محیط متخلخل در حضور تولید گرما

دانشجو : اسماعیل خواجه

استاد راهنما :

دکتر محمد حسن کیهانی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

آبان ۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای اسماعیل خواجه

تحت عنوان:

حل عددی لایه‌های مرزی جابجایی آزاد روی یک سطح مایل در یک محیط متخلخل در حضور تولید گرما

در تاریخ **۱۳۸۹/۰۸/۱۰** توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه **عالی** مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : محمد حسن کیهانی		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : محمد حسن شاه‌مردان		نام و نام خانوادگی : مجتبی قطعی	
نام و نام خانوادگی : محمود فرزانه گرد			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم به والدینم

تقدیر و تشکر:

پس از حمد و ستایش خداوند یکتا وظیفه خود می‌دانم که تشکر و قدرانی خود را از جناب آقای دکتر محمد حسن کیهانی که راهنمایی‌ها و حمایت‌های ارزنده‌شان همواره راهگشا در پیشبرد اهداف این پایان نامه بود، ابراز نمایم.

دانشجو تأیید می‌نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

آبان ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه، لایه مرزی جابجایی طبیعی از سطوح مایل در محیط متخلخل اشباع در حضور تولید گرما مورد بررسی قرار می‌گیرد. دمای صفحه متغیر بوده و بالاتر از دمای محیط قرار دارد. مسئله برای دو نوع تولید حرارت حل می‌شود. در حالت اول، تولید حرارت به صورت تابع نمایی تغییر کرده و در حالت دوم تابعی توانی از دمای بی بعد فرض می‌شود. تخمین دارسی-بوزینسک برای محاسبه نیروی شناوری لحاظ گردیده است. یک پارامتر انحراف مورد استفاده قرار گرفته تا همه موارد صفحات افقی، عمودی و مایل با یک دستگاه از معادلات لایه مرزی تبدیل یافته توصیف شود. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی کوپل شده غیر خطی، به صورت عددی با استفاده از یک روش تفاضل محدود ضمنی موسوم به روش جعبه‌ای کلر برای هر دو حالت انحراف مثبت و منفی صفحه حل می-گردد. در ضمن، معادلات تشابهی برای موارد حدی صفحات افقی و عمودی به ترتیب با مقدار دهی صفر و یک به پارامتر انحراف در معادلات انتقالی پوشش داده می‌شوند. در حالت انحراف مثبت حل تمام زوایای صفر تا ۹۰ درجه را شامل می‌شود، اما در حالت انحراف منفی، حل تا نقطه‌ای که در آن جدایش روی می‌دهد، ادامه می‌یابد. نتایج جزئی برای ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت و نیز پروفایل‌های سرعت بی بعد و دمای بی بعد برای انحرافات مثبت و منفی صفحه بیان می‌گردد. مشاهده می‌شود که تولید گرما در محیط متخلخل باعث تغییر در شیب پروفایل‌های دما و سرعت، و در نتیجه مقادیر ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت می‌شود. طوری که در بعضی موارد حتی جهت انتقال حرارت نیز تغییر می‌کند. از سویی دیگر مطابقت شگفت انگیزی بین حل عددی حاصل و حل‌های تشابهی برای سطوح افقی و قائم هر یک از مسائل مشاهده می‌گردد.

کلمات کلیدی: محیط متخلخل، لایه مرزی، جابجایی طبیعی، صفحه مایل، پارامتر انحراف

لیست مقالات مستخرج

1. **Free convection boundary layer in a saturated porous medium adjacent to impermeable inclined surfaces with power variation in wall temperature. Accepted**
2. **Natural convection boundary layer along impermeable inclined surfaces embedded in porous medium. Revised paper**
3. **Free convection boundary layer on an impermeable inclined surface in a heat-generating porous medium. Submitted**
4. **Effect of heat generation on natural convection from an impermeable inclined surface embedded in a porous medium. Submitted**

فهرست مطالب

فهرست اشکال

عنوان.....صفحه

فهرست جداول

عنوان.....صفحه

فهرست علائم و اختصارات

A	ضریب رابطه دمای دیواره
Br	عدد برینکمن
c	گرمای ویژه
c_F	ضریب فورچهیمر
c_p	گرمای ویژه در فشار ثابت
C_f	ضریب اصطکاک پوسته‌ای
Da	عدد دارسی
Ec	عدد اکرت
f	تابع جریان بی‌بعد
g	شتاب گرانش
Ge	عدد گبهارت
h	ضریب انتقال حرارت جابجایی
k	ضریب هدایت حرارتی
k_A	میانگین حسابی هدایت حرارتی سیال و جامد
k_G	میانگین هندسی هدایت حرارتی سیال و جامد
k_H	میانگین همساز وزنی هدایت حرارتی سیال و جامد
k_m	ضریب هدایت حرارتی محیط متخلخل
K	نفوذ پذیری
L	مقیاس طول
Nu	عدد ناسلت
Nu_{fs}	عدد ناسلت مایع به جامد
p	توان دما در رابطه تولید حرارت نوع دوم
P	فشار
Pe	عدد پکلت
Pr	عدد پرانتل
q_w	شار حرارتی بر روی دیواره
q'''	تولید حرارت حجمی
r	توان رابطه دمای دیواره
$r.e.v$	حجم بنیادی نمونه
Ra	عدد رایلی
Re	عدد رینولدز

t	زمان
T	دما
T_w	دمای دیواره
$T*$	انحنای محیط متخلخل
u	سرعت طولی
U_c	سرعت مشخصه
v	سرعت نرمال
$\vec{v}$	سرعت دارسی
$\overline{V}$	سرعت میانگین
V_m	عنصر حجمی محیط متخلخل
w	سرعت عرضی
x	مختصه طولی سطح
y	مختصه عمود بر سطح

حروف یونانی

α_m	پخش حرارتی محیط متخلخل
β	ضریب انبساط حجمی
δ_m	ضخامت لایه مرزی مومنتوم
δ_T	ضخامت لایه مرزی حرارتی
ε	تخلخل
ζ	پارامتر تعریف شده در معادله (۴-۱۳)
λ	پارامتر تعریف شده در معادله (۴-۱۶)
μ	ویسکوزیته دینامیکی
$\tilde{\mu}$	ویسکوزیته مؤثر
υ	ویسکوزیته جنبشی
θ	دمای بی بعد
η	پارامتر تشابهی
ϕ	زاویه انحراف
ρ	چگالی
ξ	پارامتر انحراف
$(\xi_s)_{approx}$	نقطه تخمینی جدایش

ψ	تابع جریان
τ_w	اصطکاک پوسته‌ای

زیر نویس‌ها

f	خواص مربوط به سیال
m	خواص مربوط به محیط متخلخل
s	خواص مربوط به جامد
w	شرایط روی دیواره
∞	شرایط در بینهایت

۱

مقدمه

۱-۱ جریان سیال در محیط متخلخل

انتقال حرارت در محیط‌های متخلخل یکی از موضوعاتی است که در میان تحقیقات مربوط به انتقال حرارت رشد ناگهانی داشته است. مکانیک حرکت سیال در یک محیط متخلخل برای بیش از یک قرن محققان را به خود مشغول کرده و در چند دهه گذشته مطالعات مربوط به انتقال حرارت در این محیط‌ها خود به شاخه‌ای جدید تبدیل شده است. از این میان مسئله جابجایی طبیعی بر روی سطوح افقی، عمودی و مایل در مجاورت محیط متخلخل، به دلیل کاربردهای گسترده آن، یک مسئله کلاسیک و با اهمیت انتقال حرارت به شمار می‌رود و تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام شده است.

مقصود از محیط متخلخل ماده‌ای است که از یک قالب جامد با حفره‌های خالی به هم متصل تشکیل شده است. همچنین فرض می‌شود قالب جامد ساختار محکمی داشته باشد و به عبارت دیگر این ساختار تغییر شکل کمی را تحمل می‌کند. حفره‌های خالی که از داخل به هم متصل هستند، مسیر عبور جریان یک یا چند سیال را از داخل ماده، ایجاد می‌کنند.

در ساده‌ترین حالت (جریان تک فازی) فضای خالی توسط یک جریان اشباع می‌شود. در جریان دو فازی گاز و مایع در فضای خالی با هم سهیم می‌شوند. در یک محیط متخلخل طبیعی توزیع حفره‌ها از لحاظ شکل و اندازه نامنظم می‌باشند. مثال‌هایی از محیط متخلخل طبیعی شن‌های ساحلی، سنگ‌های شنی، سنگ‌های آهکی، نان گندم، چوب و شش انسان می‌باشد (شکل ۱-۱).

روش معمول برای بدست آوردن قوانین حاکم بر متغیرهای ماکروسکوپی این است که با معادلات استانداردی که جریان از آنها پیروی می‌کند، شروع کرده و معادلات ماکروسکوپی را به وسیله میانگین گیری بر روی حجم‌ها یا سطوحی که فضای خالی زیادی را شامل می‌شوند، به دست آورد.

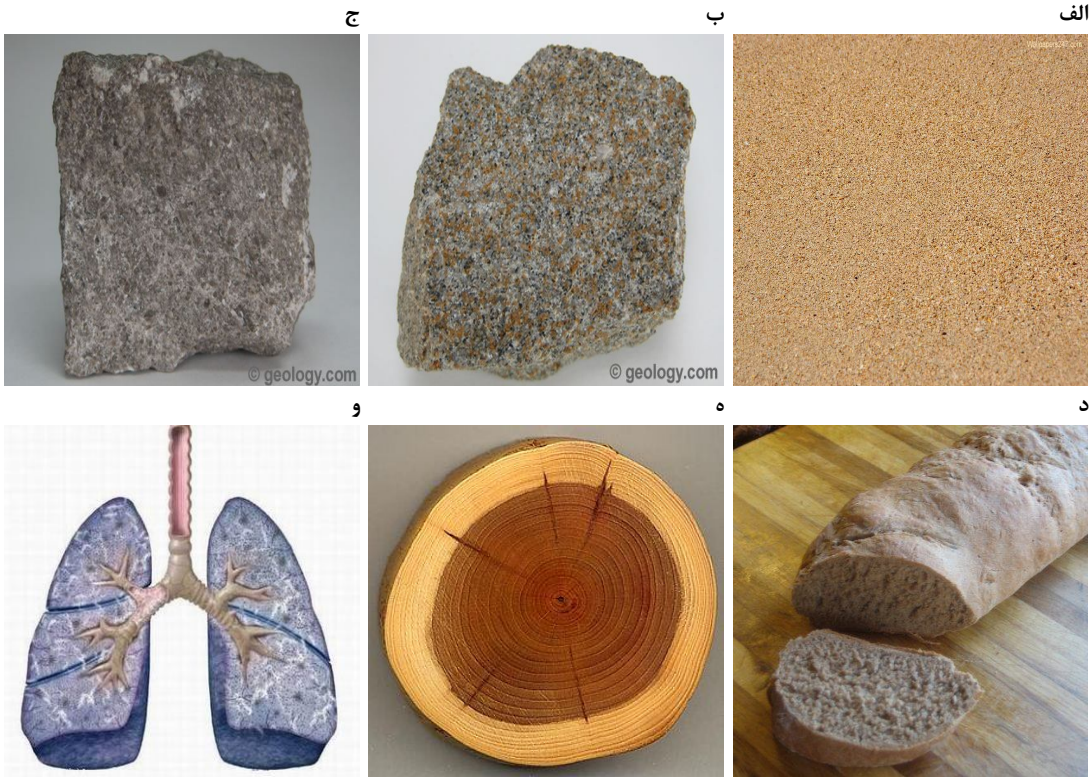
دو روش برای میانگین گیری وجود دارد: فضایی (سه بعدی) و آماری. در روش فضایی یک متغیر ماکروسکوپی، به صورت میانگین مناسب در سراسر یک حجم بنیادی نمونه (**r.e.v**)[1] که به اندازه‌ی

[1] **Representative Elementary Volume**

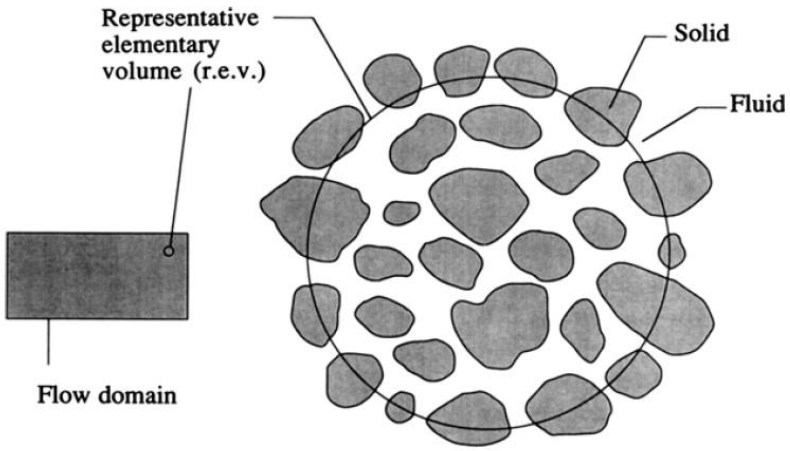
کافی بزرگ باشد، در مرکز ثقل این حجم بیان می‌شود. مقیاس طولی حجم کنترل از مقیاس طولی حفره‌ها به مراتب بزرگتر و از مقیاس طولی حجم مورد بررسی بصورت قابل ملاحظه‌ای کوچکتر است (شکل ۱–۲).

در روش آماری میانگین گیری در سراسر یک مجموعه از ساختارهای دقیق که به صورت ماکروسکوپی معادل باشند، انجام می‌شود. مسئله اینجاست که معمولا اطلاعات آماری درباره یک مجموعه باید بر اساس یک مثال منفرد باشد و این تنها در صورتی ممکن است که یکسان سازی آماری فرض شده باشد.

اگر فقط به دست آوردن رابطه‌ای بین کمیت‌های فضایی مد نظر بوده و نوسانات آنها مهم نباشد نتایج به دست آمده از هر دو روش مشابه هستند. بنابراین می‌توان از روش ساده‌تر، روشی که بر پایه r.e.v می‌باشد، استفاده نمود. اما در سال‌های اخیر مسائل زیادی پیش آمده‌اند که برای تحلیل آنها به روش‌های آماری نیاز داریم. در این پایان نامه از مدل جریان دارسی در محیط‌های متخلخل استفاده شده است. دارسی با آزمایشاتی که بر روی جریان پایدار یک بعدی انجام داد، تناسبی را مابین سرعت سیال و اختلاف فشار اعمال شده به دست آورد. این تناسب مبنای معادله مومنتوم دارسی را تشکیل می‌دهد. معادلات بدست آمده توسط دارسی بر اساس مدل حجم بنیادی نمونه بدست آمده‌اند. فرض شده که محیط متخلخل مورد بررسی همسانگرد و همگن بوده و از اثرات اینرسی نیز در معادلات صرف نظر شده است. ضمناً خواص سیال به جز چگالی، طی بررسی ثابت در نظر گرفته شده‌اند و از ترم اتلاف اصطکاکی نیز صرف نظر نموده‌ایم. در فصل دوم تئوری محیط‌های متخلخل به تفصیل آورده شده و معادلات دیگری نیز علاوه بر معادله دارسی بیان می‌گردند. در به دست آوردن این معادلات فرضیات محدود کننده کمتری نسبت به مدل دارسی اعمال شده است.



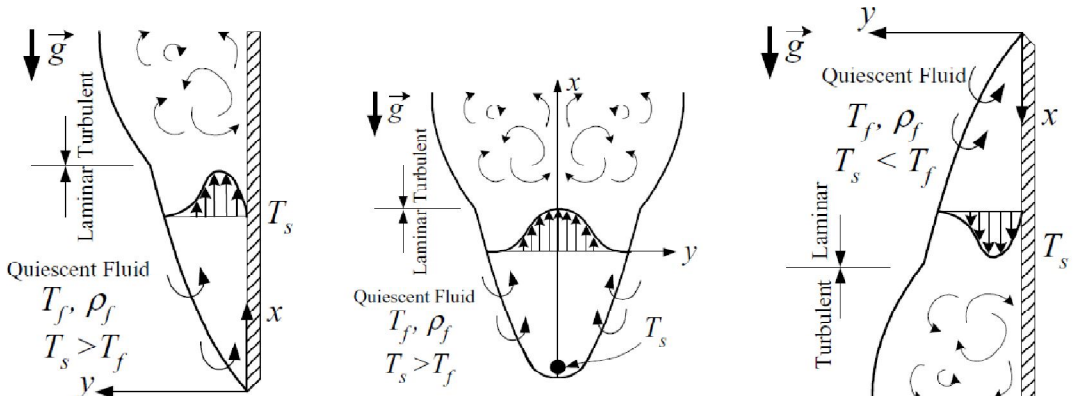
شکل ۱-۱. مثال‌هایی از محیط متخلخل طبیعی، الف) شن‌های ساحلی، ب) سنگ ماسه، ج) سنگ آهک، د) نان گندم، ه) چوب، و) شش انسان



شکل ۱-۲. حجم بنیادی نمونه

۱-۲ جابجایی طبیعی

انتقال حرارت جابجایی آزاد یا طبیعی، انتقال حرارت بین یک سطح و یک سیال متحرک روی آن است که حرکت سیال، کاملا توسط نیروهای شناوری ناشی از تغییرات چگالی که نتیجه تغییرات دما در جریان است، می‌باشد. جریان‌های جابجایی طبیعی مثل همه جریان‌های ویسکوز می‌تواند آرام یا متلاطم باشد(شکل ۱-۳). با این حال با توجه به سرعت‌های کم که معمولا در جریان‌های جابجایی طبیعی وجود دارد، جریان‌های جابجایی طبیعی آرام در عمل بیشتر از جریان‌های جابجایی اجباری آرام روی می‌دهند.



شکل ۱-۳. لایه‌های مرزی جابجایی طبیعی آرام و متلاطم بر روی یک سطح قائم

اغلب جریان‌های جابجایی آزاد بر اثر تغییرات چگالی در حضور میدان نیروی گرانشی شکل می-گیرند. با این حال، جریان‌های مشابه می‌توانند در میدان‌های نیروی دیگر نیز شکل بگیرند. گاهی اوقات یک تفاوت بین جابجایی طبیعی و آزاد قائل می‌شوند، عنوان جابجایی طبیعی به جریان‌های ناشی از میدان نیروی گرانشی و عنوان جابجایی آزاد به جریان‌های ناشی از حضور هر میدان نیرو اطلاق می‌گردد. با این حال، امروزه، هر دو عنوان معمولا برای توصیف هر جریان ناشی از تغییرات چگالی وابسته به تغییرات دما در یک میدان نیرو بکار می‌روند [۱]. در این پایان نامه نیز به تناوب از هر دو عنوان استفاده می‌گردد.

۱-۳ مروری بر تحقیقات گذشته

انتقال حرارت جابجایی در محیط متخلخل در سال‌های اخیر به دلیل اهمیتش در کاربردهای ژئوفیزیکی و سیستم‌های انرژی مورد توجه زیادی قرار گرفته است. این کاربردها شامل سیستم‌های ژئوترمال، آنالیز آلودگی آب زیر زمینی، گرم کردن آب زمینی با فرورونده عمودی، اکتشاف میدان‌های نفتی و گازی، مبدل‌های حرارتی فشرده جامد-ماتریس، استفاده از مواد فیبری در عایق کاری ساختمان‌ها و تجهیزات، ذخیره مواد زائد هسته‌ای رادیواکتیو، ذخیره‌سازی حبوبات و ریخته‌گری فلزات(استحکام آلیاژ) و ... هستند. این موارد به صورت جزئی و گسترده، توسط نیلد و بیجن[۱] [۲]، اینگهام و پاپ[۲] [۳]، پاپ و اینگهام[۳] [۴]، ناکایاما[۴] [۵]، وفایی[۵] [۶]، اینگهام و همکاران[۶] [۷] و بیجن و همکاران[۷] [۸] مرور و مورد بحث قرار گرفته است.

حل مسئله جابجایی طبیعی بر روی سطوح عمودی، افقی و مایل در مجاورت محیط متخلخل از مسائل کلاسیکی است که مقالات زیادی را به خود اختصاص داده است. هر چند سهم سطوح مایل از دو مورد دیگر کمتر می‌باشد. از طرفی حل عددی معادلات دیفرانسیل کامل برای جابجایی در یک ناحیه بی مرز هزینه بر بوده، و بنابراین حل‌های تخمینی مهم هستند. برای مقادیر کوچک عدد رایلی، روش‌های پرتوربیشن مناسب می‌باشند، این در حالی است که در رایلی‌های بزرگ، لایه مرزی حرارتی تشکیل شده، و تئوری لایه مرزی روش آشکار برای بررسی و تحقیق است. مورد دوم بیشترین سهم از مطالب این بخش را به خود اختصاص می‌دهد. این بخش به سه قسمت کلی تقسیم شده است که به طور جداگانه به بررسی کارهای انجام شده در زمینه جابجایی آزاد بر سطوح عمودی، افقی و مایل می‌پردازد.

---

[1] **Nield and Bejan**
[2] **Ingham and Pop**
[3] **Pop and Ingham**
[4] **Nakayama**
[5] **Vafai**
[6] **Ingham *et al.***
[7] **Bejan *et al.***

۱-۳-۱ سطوح قائم

مسئله کلاسیک جابجایی آزاد بر روی سطح قائم در مجاورت محیط متخلخل توسط چنگ و مینکوویکز[1] [۹] ارائه شد. آن‌ها دمای محیط را یکنواخت و دمای سطح را یک تابع توانی از فاصله از لبه پیشرو در نظر گرفتند، مسئله را به صورت تشابهی حل کرده و عباراتی را برای ضخامت لایه مرزی و عدد ناسلت به دست آوردند. پس از حل فوق نویسندگان دیگر به حل مسائل پیچیده‌تر با تغییر شرایط سطح و نیز محیط متخلخل پرداختند که تعدادی از مقالات آن‌ها در زیر آمده است.

چنگ[2] [۱۰] مسئله فوق را در حالتی که شار جرمی عرضی نیز وجود داشت، به صورت تحلیلی حل کرد و عبارتی برای ضخامت لایه مرزی گرمایی به دست آورد. این مسئله در زمینه تزریق آب گرم در مخازن زمین گرمایی کاربرد دارد.

یک مطالعه بر روی مسئله گذرا در حالتی که دمای دیواره به صورت x^{λ} تغییر می‌کرد، توسط اینگهام و برون[3] [۱۱] انجام شد. آن‌ها دریافتند که برای $\lambda < -۱/۲$ هیچ حلی برای معادلات لایه مرزی ناپایدار ممکن نیست، و برای $-۱/۲ < \lambda < ۱$ معادله دیفرانسیل حاکم بر جریان تکین می‌شود. برای $-۱/۲ < \lambda < -۱/۳$ سرعت به مقدار ماکزیمم خود درون لایه مرزی (به جای روی مرز) می‌رسد.

برای حالت $\lambda = ۰$ هاک و مولیگان[4] [۱۲] مسئله معادلات لایه مرزی ناپایدار را به صورت عددی انتگرال گیری کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که در یک سیال دارسی عدد ناسلت محلی با زمان به صورت یکنواخت کاهش می‌یابد تا به مقدار حالت پایدارش برسد.

---

[1] **Cheng and Minkowycz**
[2] **Cheng**
[3] **Ingham and Brown**
[4] **Haq and Mulligan**

محمد و مرکین[1] [۱۳] جریان لایه مرزی جابجایی طبیعی روی یک سطح قائم غیر قابل نفوذ را که از حرارت آزاد شده توسط یک فرآیند شیمیایی بر روی سطح ناشی می‌شود، بررسی کردند. حل‌های عددی آن‌ها نشان داد که انرژی‌های فعال سازی بالا، تغییرات سریع محلی در دمای دیواره و واکنش محلی با شدت بالا در فاصله کم از لبه پیشرو را به همراه دارد.

پوستلنیکو و پاپ[2] [۱۴] حل تشابهی را برای مسئله لایه مرزی جابجایی آزاد روی سطوح قائم و افقی در محیط متخلخل ارائه دادند. در مسئله آن‌ها تولید حرارت داخلی به صورت نمایی محو می‌شد و توزیع دمای دیواره متناسب با x^{λ} بود. در هر دو مورد حل آن‌ها یک جهش را در پروفایل‌های سرعت و دما برای $\lambda \leq ۰$ نشان می‌داد. همچنین در حالت قائم مقدار عدد ناسلت بزرگتری را نسبت به حالت عدم حضور تولید حرارت محاسبه کردند.

پوستلنیکو و همکاران[3] [۱۵] تاثیر شار جرمی عرضی بر روی لایه مرزی جابجایی آزاد روی یک سطح قائم در حضور تولید حرارت داخلی را بررسی کردند. در مسئله آن‌ها سرعت عرضی بر روی سطح و دمای دیواره به ترتیب متناسب با x^{n} و x^{λ} هستند، که برای دستیابی به حل تشابهی $n = (\lambda - ۱)/۲$ در نظر گرفتند. این در حالی است که تولید حرارت داخلی را مانند پوستلنیکو و پاپ [۱۴] در نظر گرفتند. حل آن‌ها نشان داد که به ازای $\lambda = ۰$ (دمای سطح یکنواخت) و $\lambda = ۱/۳$ (شار حرارتی سطح یکنواخت) مقدار عدد ناسلت با افزایش پارامتر شار جرمی ابتدا افزایش یافته و سپس به سمت یک مقدار ثابت کاهش می‌یابد. این در حالی است که برای $\lambda = ۱$ مقدار ناسلت به طور یکنواخت با افزایش پارامتر شار جرمی افزایش می‌یابد.

ریس و همکاران[4] [۱۶] تاثیر اتلاف ویسکوز روی گسترش جریان لایه مرزی از یک سطح قائم در یک محیط متخلخل دارسی را بررسی کردند و دریافتند که جریان به تدریج از فرم چنگ-مینکوویکز کلاسیک به فرم پروفایل اتلاف مجانبی که یک جریان موازی است، میل می‌کند.

---

[1] **Mahmood and Merkin**
[2] **Postelnicu and Pop**
[3] **Postelnicu et al.**
[4] **Rees *et al.***

اندرو و همکارانش[1] [۱۷] به بررسی جریان لایه مرزی القا شده توسط یک سطح قائم، هنگامی که شتاب گرانش به صورت پریودیک با زمان تغییر می‌کند، پرداختند. آن‌ها فرض کردند که دامنه این تغییرات با شتاب گرانش متوسط قابل مقایسه است. نتایج حاصل از حل معادلات غیر تشابهی نشان داد که تاثیر عمده بی ثباتی شتاب گرانش بیشتر به ناحیه نزدیک لبه پیشرو محدود شده ودر نواحی دورتر از لبه پیشرو ضعیف می‌گردد.

سعید و محمد[2] [۱۸] جابجایی آزاد از یک سطح قائم در یک محیط متخلخل در حالت عدم تعادل حرارتی، در حالی که دمای دیواره به صورت سینوسی تغییر می‌کرد، را مطالعه کردند.

بدرودین و همکاران[3] [۱۹] به بررسی جابجایی طبیعی با حضور و عدم حضور تشعشع بر روی یک سطح قائم که دمای آن به صورت توانی تغییر می‌کند، پرداختند. آن‌ها دریافتند که برای یک سطح دما ثابت عدد ناسلت محلی در نزدیکی لبه پیشرو به تندی با ارتفاع صفحه کاهش می‌یابد. برای تغییر خطی دمای دیواره عدد ناسلت محلی نزدیک لبه پیشرو افزایش یافته و برای حالت شار ثابت عدد ناسلت برای ۹۰٪ ارتفاع صفحه ثابت می‌ماند.

مگیاری و ریس[4] [۲۰] به مطالعه تاثیر اتلاف ویسکوز روی جریان لایه مرزی جابجایی طبیعی دارسی از یک سطح قائم با توزیع توانی دمای دیواره پرداختند. مطالعه آن‌ها شامل جریان رو به بالا بر روی سطح داغ و جریان رو به پایین بر روی سطح سرد معطوف بود. آن‌ها دریافتند که اگر اتلاف ویسکوز قابل اغماض باشد، دو حالت از لحاظ فیزیکی هم ارز هستند، اما حرارت ایجاد شده توسط اصطکاک ویسکوز هم ارزی مذکور را از بین می‌برد.

---

[1] **Andrew *et al.***
[2] **Saeid and Mohamad**
[3] **Badruddin *et al.***
[4] **Magyari and Rees**

مگیاری و همکاران[1] [۲۱] تاثیر ترم تولید حرارت، در حالی که تابعی تحلیلی اما دلخواه از اختلاف دمای محلی بود، را روی جریان‌های لایه مرزی جابجایی آزاد پایدار از یک سطح قائم در محیط متخلخل مورد بررسی قرار دادند. مطالعات آن‌ها نشان داد که وجود ترم تولید حرارت هم ارزی بین جریان رو به بالا بر روی سطح داغ و جریان رو به پایین بر روی سطح سرد را از بین می‌برد.

جاینتای و کوماری[2] [۲۲] تاثیر تغییر ویسکوزیته روی جابجایی آزاد یا ترکیبی غیر دارسی روی یک سطح قائم در یک محیط متخلخل حاوی سیال غیر نیوتنی را بررسی کردند. آن‌ها فرض کردند که ویسکوزیته سیال با معکوس دما متناسب است و پی بردند که برای مایعات، انتقال حرارت از حالت ویسکوزیته ثابت بیشتر است، در حالی که برای گازها عکس این رفتار را مشاهده کردند.

میلی و مرکین[3] [۲۳] جریان لایه مرزی جابجایی طبیعی روی یک سطح جامد در حالتی که تولید حرارت داخلی به صورت توانی با دمای محلی تغییر می‌کرد $\left(q''' \propto \theta^p\right)$، را حل کردند. در مسئله آن‌ها دمای سطح در نزدیک لبه پیشرو بالاتر از دمای محیط و پس از آن در دمای محیط قرار دارد. با بررسی رفتار جریان سیال توسعه یافته از لبه پیشرو به این نتیجه رسیدند که این جریان از تولید حرارت اولیه مستقل بوده، اما شدیداً به توان p وابسته است.

مرکین[4] [۲۴] به بررسی مسئله قبل در حالتی که تغییرات قانون توانی در دما یا شار حرارتی دیواره وجود دارد، پرداخت. او این شرط مرزی را طوری تعیین کرد که مسئله به صورت تشابهی حل شود. در حالتی که دمای دیواره معلوم بود، برای $p \leq ۲$ و $p \geq p_c$ حل‌هایی برای مسئله یافت. اما در حالت شار حرارتی معلوم تنها توانست برای $p < ۲$ مسئله را حل کند.

---

[1] **Magyari *et al.***
[2] **Jayanthi and Kumari**
[3] **Mealey and Merkin**
[4] **Merkin**

کازنتسو و نیلد[1] [۲۵] مسئله چنگ-مینکویکز را برای مواد متخلخل بافت سلولی حل و تاثیر هدایت وابسته به دمای ناشی از حرارت تشعشعی را بررسی کردند. در مسئله آن‌ها ترکیبی از هدایت، جابجایی و تشعشع در نظر گرفته شده بود.

۱-۳-۲ سطوح افقی

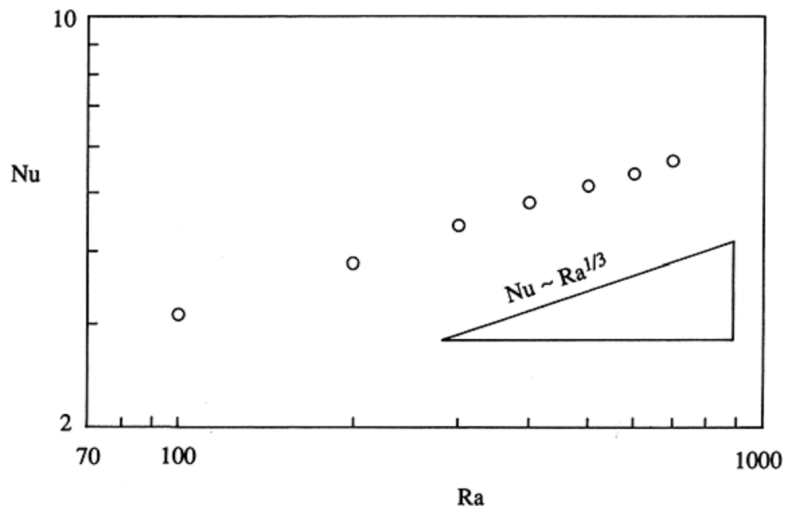
برای جریان جابجایی طبیعی در اعداد رایلی بالا روی سطح بالایی یک صفحه گرم یا سطح پایینی یک صفحه سرد یک حل تشابهی توسط چنگ و چانگ[2] [۲۶] برای مورد توزیع دمای دیواره به صورت قانون توانی $\left(x^{\lambda}\right)$ به دست آمد. آن‌ها عباراتی را برای ضخامت‌های لایه مرزی و عدد ناسلت به دست آوردند. جدول ۱-۱ نتایج آن‌ها را برای شیب دما بر روی دیواره $\left(\left[-\theta'(\cdot)\right]\right)$، ضخامت لایه مرزی دمایی $\left(\eta_T\right)$ و ضخامت لایه مرزی سرعت $\left(\eta_m\right)$ به ازای مقادیر انتخابی λ نشان می‌دهد.

جدول ۱-۱. مقادیر $\left(\left[-\theta'(\cdot)\right]\right)$، η_T، و η_m برای مقادیر انتخابی λ (چنگ و چانگ [۲۶])

λ	$\left(\left[-\theta'(\cdot)\right]\right)$	η_T	η_m
۰/۵	۰/۸۱۶۴	۵/۰	۶/۴
۱/۰	۱/۰۹۹	۴/۵	۵/۴
۱/۵	۱/۳۵۱	۴/۰	۴/۴
۲/۰	۱/۵۷۱	۳/۷	۳/۸

می‌توان تشکیل یک لایه مرزی جابجایی طبیعی روی سطح بالایی یک صفحه سرد، یا روی سطح پایینی یک صفحه گرم را انتظار داشت. این موقعیت توسط کیمورا و همکاران[3] [۲۷] آنالیز شد. آنها معادلات لایه مرزی را به صورت تخمینی به روش انتگرالی حل کردند، که نتایج عددی آنها در شکل (۱-۴) آمده است.

[1] **Kuznetsov and Nield**
[2] **Cheng and Chang**
[3] **Kimura *et al.***



شکل ۱-۴. عدد ناسلت بر حسب عدد رایلی برای جابجایی روی یک سطح سرد افقی (کیمورا و همکاران [۲۷])

حسین و ریس[1] [۲۸] تاثیر حضور اینرسی روی جریان لایه مرزی جابجایی آزاد از یک سطح افقی در حالی که دمای سطح یک تابع توانی از فاصله از لبه پیشرو، x^n، است را بررسی کردند. حل آن‌ها سه وضعیت جداگانه را تبیین کرد:

۱) $n < ۰/۵$: در این حالت اینرسی بر جریان نزدیک لبه پیشرو حاکم بوده، اما از تاثیر آن در پایین دست جریان کاسته می‌شود.

۲) $n = ۰/۵$: لایه مرزی حالت تشابهی داشته و پروفایل‌های منتج به تاثیر نیروی اینرسی وابسته هستند.

۳) $۰/۵ < n \leq ۲$: تاثیرات اینرسی با فاصله از لبه پیشرو رشد کرده و ضخامت لایه مرزی بزرگ‌تر از حالتی می‌شود که اینرسی وجود ندارد.

[1] **Hossain and Rees**

کوماری[1] [۲۹] تاثیرات ویسکوزیته متغیر روی جابجایی آزاد و ترکیبی از یک صفحه افقی، که تحت شار متغیر قرار داشت، در یک محیط متخلخل را بررسی کرد. در مقاله‌ای دیگر [۳۰] او این تاثیر را در یک محیط متخلخل اشباع غیر دارسی مورد مطالعه قرار داد. او لزجت سیال را تابع معکوسی از دما در نظر گرفت و در هر دو محیط نشان داد که انتقال حرارت در حالت ویسکوزیته متغیر نسبت به حالت ویسکوزیته ثابت در مورد مایعات بیشتر و در مورد گازها کمتر است.

ایلیو و همکاران[2] [۳۱] به مطالعه تاثیر نفوذپذیری متغیر، اینرسی و شار جرمی سطح روی ناپایداری گردابه‌ای جریان جابجایی طبیعی روی سطوح قابل نفوذ افقی در محیط متخلخل پرداختند. آن‌ها از مدل فورچهیمر استفاده کرده و در ضمن تغییرات نفوذپذیری در نزدیکی سطح را با یک تابع نمایی مدل کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که الف) ضریب اینرسی شدت انتقال حرارت را کاهش داده و جریان را به سمت حالت گردابه‌ای بی ثبات می‌کند، ب) نفوذپذیری متغیر تمایل به افزایش شدت انتقال حرارت و ایجاد گردابه دارد، ج) در حالت دمیدن جریان (تزریق) عدد ناسلت کمتر از یک سطح قابل نفوذ بوده و جریان بیشتر برای ناپایداری گردابه‌ای مستعد است، در حالی که تمایل متضادی در حالت مکش مشاهده می‌شود.

جانگ و هسو[3] [۳۲] ناپایداری گردابه‌ای جریان لایه مرزی جابجایی طبیعی مگنوهیدرودینامیک[4] از یک سطح افقی در محیط متخلخل با حضور تشعشع را بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که با افزایش چگالی شار مغناطیسی یا کاهش تشعشع، شدت انتقال حرارت کاهش می‌یابد. به علاوه تاثیر مغناطیس، جریان را به سمت حالت گردابه‌ای ناپایدار می‌کند، در حالی که تشعشع آن را پایدار می‌کند.

---

[1] **Kumari**
[2] **Elaiw *et al.***
[3] **Jang and Hsu**
[4] **MHD**

بنسود و جادهاو[1] [۳۳] یک روش انتگرالی را برای بررسی ترکیب انتقال حرارت و جرم توسط جابجایی طبیعی در طول یک سطح افقی با دما و غلظت $T_w = T_\infty + ax^n$ و $C_w = C_\infty + bx^n$ به کار بستند. نتیجه محاسبات آن‌ها نشان داد که میدان‌های دما و غلظت نزدیک سطح با توان n افزایش می‌یابد.

۱-۳-۳ سطوح مایل

جانگ و چانگ[2] [۳۴] محاسبات عددی را برای جابجایی آزاد بر سطح مایل با یک توزیع توانی دمای دیواره انجام دادند. آن‌ها دریافتند که با افزایش انحراف از حالت افق، ضخامت‌های لایه مرزی سرعت و دما کاهش یافته و شدت انتقال حرارت سطح افزایش می‌یابد.

استفاده از یک پارامتر انحراف جدید، پاپ و نا[3] [۳۵] را قادر ساخت تا همه موارد افقی، مایل و عمودی را با یک دستگاه یگانه از معادلات لایه مرزی انتقالی توصیف کنند. آن‌ها جابجایی طبیعی از یک سطح مایل هم دما در یک محیط متخلخل با دمای ثابت را بررسی کردند. حل آن‌ها تمام انحرافات مثبت از ۰ تا ۹۰ درجه و نیز انحرافات منفی تا نقطه جدایش را پوشش می‌داد.

حسین و پاپ[4] [۳۶] به مطاله تاثیر تشعشع روی جریان القایی شناوری از یک سیال غیر قابل تراکم لزج چگال نوری در طول یک سطح تخت مایل گرم با دمای یکنواخت پرداختند. سطح در یک محیط متخلخل اشباع قرار داشت و تخمین پخش روزلند[5] را اعمال کردند. نتایج عددی آن‌ها نشان داد که عدد ناسلت محلی با افزایش $\theta_w = \frac{T_w}{T_\infty}$ و کاهش $R_d = \frac{\kappa a_r}{۴\sigma^۲ T^۳}$ (پارامتر هدایت-تشعشع) در یک ξ (پارامتر شناوری) معین، افزایش می‌یابد، در حالی که در هر مقدار R_d و θ_w بر مقدار عدد ناسلت محلی با افزایش ξ افزوده می‌شود.

---

[1] **Bansod and Jadhav**
[2] **Jang and Chang**
[3] **Pop and Na**
[4] **Hossain and Pop**
[5] **Rosseland diffusion approximation**

جابجایی مگنوهیدرودینامیک با لایه بندی دمایی توسط چمخا[1] [۳۷] و تخار و همکاران[2] [۳۸] مطالعه شد. چمخا [۳۷] نشان داد که حضور میدان مغناطیسی عرضی غیر یکنواخت باعث افزایش ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت محلی در طول صفحه می‌شود، در حالی که حضور تاثیرات اینرسی محیط متخلخل کاهش این خصوصیات را به همراه دارد. تخار و همکاران [۳۸] به بررسی تاثیرات گرمایش/سرمایش مقاطع معین از سطح یا شکاف‌های مکش/تزریق روی جابجایی طبیعی مگنوهیدرودینامیک از یک صفحه مایل در محیط متخلخل با پروسیتی بالا پرداختند. آن‌ها نشان دادند که الف) اگر سطح در شکاف‌ها سرد شود، جهت انتقال حرارت تغییر می‌کند، ب) انتقال حرارت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای با مکش افزایش و با تزریق کاهش می‌یابد.

تاثیرات شار جرمی عرضی و نفوذپذیری متغیر توسط ربادی و همدان[3] [۳۹] آنالیز شد. مطالعات آن‌ها نشان داد که تغییر نفوذپذیری (فرض کردند که نزدیک دیواره بالاتر است.) و علاوه بر آن، هدایت محیط متخلخل باعث افزایش شدت انقال حرارت برای تزریق و کاهش شدت انتقال حرارت برای مکش سیال می‌شود. تاثیر نفوذپذیری متغیر روی پروفایل‌های سرعت، با افزایش تیز سرعت جریان نزدیک دیواره نسبت به شرایط نفوذپذیری یکنواخت مشخص شد.

لی و همکاران[4] [۴۰] جریان انتقال حرارت جابجایی طبیعی از یک سطح مایل در یک محیط متخلخل اشباع در حضور تشعشع را آنالیز کردند. نتایج عددی آن‌ها نشان داد که ضخامت لایه مرزی دمایی و سرعت با افزایش پارامتر تشعشع افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش پارامتر شناوری و پارامتر تخلخل سرعت افزایش و دما کاهش می‌یابد.

---

[1] **Chamkha**
[2] **Takhar *et al.***
[3] **Rabadi and Hamdan**
[4] **Lee *et al.***

۱-۴ معرفی پروژه و جایگاه آن

در ادامه تحقیقات فوق پروژه حاضر معرفی گردیده است. این پروژه در سه بخش به بررسی جریان لایه مرزی انتقال حرارت بر روی سطوح درون محیط متخلخل می‌پردازد. در بخش اول جریان لایه مرزی جابجایی طبیعی روی یک صفحه مایل دلخواه در یک محیط متخلخل اشباع در حالی که دمای دیواره یک تابع توانی از فاصله از لبه پیشرو است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. تخمین دارسی-بوزینسک برای محاسبه نیروی شناوری لحاظ شده است. این بخش از پروژه در ادامه پژوهش‌های انجام شده در مراجع [۹]، [۲۶] و [۳۵] مطرح شده است. در این بخش تاثیر پارامتر انحراف بر روی ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عد ناسلت و نیز پروفایل‌های سرعت بی بعد و دمای بی بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطابقت شگفت‌انگیزی از مقایسه حل عددی حاصل و حل‌های تشابهی موجود مشاهده می‌گردد. این مسئله دارای کاربردهایی در سیستم انرژی زمین‌گرمایی، آنالیز آلودگی آب زیر زمینی، عایق سازی ساختمان‌ها، تولید کاغذ و منابع ذخیره نفتی است.

در بخش دیگری از پایان نامه به ارائه حل های تشابهی برای جریان لایه مرزی روی سطوح عمودی و افقی در یک محیط متخلخل با تولید حرارت محلی پرداخته می‌شود. تولید حرارت محلی متناسب با دمای بی بعد به صورت توانی است. چنین فرمی یک تخمین غیر واقعی برای انتقال حرارت تابشی یا برای حرارت تولید شده بوسیله یک واکنش شیمیایی حرارت زا نیست [۲۳]. مانند مقالات کلاسیک ارائه شده توسط چنگ و مینکوویکز [۹] و چنگ و چانگ [۲۶]، فرض می‌شود که دمای صفحه متناسب با x^r بوده که x فاصله در طول صفحه از لبه پیشرو و r یک ثابت است.

بررسی جریان لایه مرزی انتقال حرارت جابجایی آزاد بر روی سطح مایل در حضور تولید حرارت داخلی، آخرین بخش پروژه حاضر را تشکیل می‌دهد. تولید حرارت داخلی در کاربردهای گوناگونی مانند آنالیز اطمینان راکتور، ضایعات ناشی از سوخت هسته‌ای مصرف شده، مطالعات آتش و احتراق، و ذخیره مواد رادیواکتیو مهم است [۱۴]. حداقل به نظر نگارنده، تاثیر تولید حرارت داخلی بر جابجایی طبیعی بر روی سطوح مایل تاکنون مورد توجه خاصی قرار نگرفته است. بنابر تعریف ترم تولید

حرارت، دو مسئله در این بخش از پایان نامه حل می‌شود. در مسئله اول، تولید گرمای داخلی به صورت نمایی تغییر می‌کند. این در حالی است که جابجایی آزاد بر روی صفحات افقی و عمودی با شرایط مسئله قبلا توسط پوستلنیکو و پاپ [۱۴] حل شده است. تولید حرارت در مسئله دوم با دمای بی بعد به صورت توانی متناسب است که حالات حدی (سطوح قائم و افقی) آن در بخش دوم حل می‌شود.

در ادامه این فصل، به منظور آشنایی با معادلات حاکم بر محیط متخلخل، در فصل دوم تئوری محیط‌های متخلخل به صورت مختصر آورده شده است.

۲

تئوری محیط‌های متخلخل

۲-۱ تخلخل[1]

در فصل قبل ماده متخلخل، ماده‌ای متشکل از یک قالب جامد با حفره‌های خالی معرفی شد. تخلخل، ε یک ماده متخلخل به صورت بخشی از حجم ماده بیان می‌گردد که توسط فضای خالی اشغال شده است. بنابراین در این محیط بخش جامد، $1-\varepsilon$ از حجم کل را اشغال نموده است. برای یک ماده همگن تخلخل سطحی (یعنی نسبت سطح حفره‌ها به سطح کل بخش برش خورده نمونه) برابر با ε خواهد بود. با تعریف ε به صورت بالا، فضاهای خالی به هم متصل فرض می‌شوند. در واقع هنگامی که با ماده‌ای سروکار داشته باشید که مقداری ازفضاهای خالی آن با سایر فضاهای خالی‌اش به هم پیوسته نباشد، باید یک ضریب اثر تخلخل بصورت نسبت فضاهای خالی به هم متصل، به کل فضاهای خالی معرفی شود. ضریب تخلخل ε برای یک محیط طبیعی به صورت معمول از ۰/۶ تجاوز نمی‌کند. برای بستری از ذرات کروی جامد با قطر ثابت، ε می‌تواند در محدوده ۰/۲۵۹۵ تا ۰/۴۷۶۴ تغییر نماید. در بسترهایی که از ذرات کروی با قطرهای مختلف تشکیل شده باشد، یکسان نبودن اندازه ذرات باعث ایجاد تخلخل‌های کوچکتر نسبت به بسترهای با ذرات یکسان می‌گردد، زیرا در این حالت ذرات کوچکتر فضای خالی ایجاد شده توسط ذرات بزرگتر را پر می‌کنند. برای مواد ساخته دست انسان مانند اسفنج‌های فلزی ε می‌تواند به مقدار ۱ نیز نزدیک شود. جدول ۲-۱ ضریب تخلخل و برخی دیگر از خصوصیات مواد متخلخل متداول را نشان می‌دهد[۲].

۲-۲ سرعت دارسی و معادله پیوستگی

همانطور که در مقدمه بیان شد، برای استخراج معادلات حاکم بر محیط متخلخل، یک مدل پیوسته بر اساس r.e.v مورد استفاده قرار می‌گیرد. حال در دستگاه مرجع دکارتی عنصر حجمی V_m از محیط (شامل جامد و سیال) به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که این حجم به حد کافی نسبت

[1] **porosity**

به حجم‌های میکروسکوپی بزرگ باشد. در این شرایط می‌توان میانگین‌های حجمی معتبری به دست آورد. میانگین سرعت سیال در سراسر V_m با بردار $\vec{v} = (u, v, w)$ نشان داده می‌شود.

جدول ۲-۱. برخی از خصوصیات مواد متخلخل متداول [۲]

Material	porosity ε	Permability K[cm^2]	Surface per unit volume $\left[cm^{-1}\right]$
Agar-agar		$2\times10^{-10} - 4.4\times10^{-9}$	
Black slate powder	$0.57 - 0.66$	$4.9\times10^{-10} - 1.2\times10^{-9}$	$7\times10^{3} - 8.9\times10^{3}$
Brick	$0.12 - 0.34$	$4.8\times10^{-10} - 2.2\times10^{-9}$	
Catalyst(fischer – tropsch,granules only)	0.45		5.6×10^{5}
cigarette		1.1×10^{-5}	
Cigarette filters	$0.17 - 0.49$		
coal	$0.02 - 0.12$		
Concrete (ordinary mixes)	~ 0.1		
Concrete (bituminous)		$1\times10^{-9} - 2.3\times10^{-7}$	
Copper powder(hot compacted)	$0.09 - 0.34$	$3.3\times10^{-6} - 1.5\times10^{-5}$	
Cork board		$2.4\times10^{-7} - 5.1\times10^{-7}$	
Fiberglass	$0.88 - 0.93$		$560 - 770$
Granular crushed rock	0.45		
Hair (on mammals)	$0.95 - 0.99$		
Hair left		$8.3\times10^{-6} - 1.2\times10^{-5}$	
leather	$0.56 - 0.59$	$9.5\times10^{-10} - 1.2\times10^{-9}$	$1.2\times10^{4} - 1.6\times10^{4}$
Limestone (dolomite)	$0.04 - 0.1$	$2\times10^{-11} - 4.5\times10^{-10}$	
sand	$0.37 - 0.5$	$2\times10^{-7} - 1.8\times10^{-6}$	$150 - 220$
Sandstone ("oil sand")	$0.08 - 0.38$	$5\times10^{-12} - 3\times10^{-8}$	
Silica grains	0.65		
Silica powder	$0.37 - 0.49$	$1.3\times10^{-10} - 5.1\times10^{-10}$	$6.8\times10^{3} - 8.9\times10^{3}$
Soil	$0.43 - 0.54$	$2.9\times10^{-9} - 1.4\times10^{-7}$	
Spherical packings(well shaken)	$0.36 - 0.43$		
Wire crimps	$0.68 - 0.76$	$3.8\times10^{-5} - 1\times10^{-4}$	$29 - 43$

این کمیت توسط افراد مختلف نام‌های متفاوتی گرفته است مانند سرعت نفوذ، سرعت ظاهری، سرعت دارسی و .... که در اینجا از سرعت دارسی استفاده می‌گردد. اگر میانگین سرعت سیال در

المانی از محیط متخلخل که تنها شامل سیال است، با $\vec{V}$ نمایش داده شود با استفاده از رابطه دوپویت – فورچهیمر[1]، $\vec{v}=\varepsilon\vec{V}$، می‌توان رابطه‌ای مابین سرعت دارسی و سرعت میانگین درون المان حجمی از سیال بدست آورد[۲]. زمانی که پیوستگی بررسی می‌شود می‌توان بحث‌های معمول را به کار برده و عبارت‌های معادلات دیفرانسیل قوانین بقا را به دست آورد. به عنوان مثال بقای جرم یا معادله پیوستگی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\varepsilon\frac{\partial\rho_f}{\partial t}+\vec{\nabla}.(\rho_f\vec{v})=0 \qquad (۱-۲)$$

که در آن ρ_f چگالی سیال می‌باشد.

این معادله با توجه به یک حجم بنیادی از ماده و معادله نرخ افزایش جرم سیال در آن حجم، $\frac{\partial(\varepsilon\rho_f)}{\partial t}$، و شار خالص جرم به درون حجم کنترل، $-\vec{\nabla}\cdot(\rho_f\vec{v})$، و توجه به این موضوع که ε از t مستقل است به دست می‌آید.

۲-۳ معادله مومنتوم

اکنون شکل‌های مختلفی از معادله مومنتوم در محیط متخلخل مورد بحث قرار می‌گیرد. فعلا از نیروهای حجمی مانند نیروی جاذبه صرف نظر شده، اما این ترم‌ها را به راحتی می‌توان در مراحل بعدی اضافه نمود.

۲-۳-۱ قانون دارسی

هنری دارسی[2] در تحقیقات بر روی جریان یک بعدی پایدار در یک محیط یکنواخت، تناسبی میان سرعت سیال و اختلاف فشار اعمال شده به دست آورد که به صورت زیر می‌باشد[۲]:

[1] **Dupuit-Forchheimer**
[2] **Henry Dracy**

$$u = -\frac{K}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (۲-۲)$$

در این معادله $\frac{\partial P}{\partial x}$ گرادیان فشار و μ ویسکوزیته دینامیکی سیال می‌باشد. ضریب K مستقل از طبیعت سیال، اما وابسته به هندسه محیط است. دیمانسیون K به صورت $L^۲$ بوده و نفوذ پذیری ویژه یا ذاتی محیط[1] نامیده می‌شود. برای جریان تک فازی به اختصار آن را نفوذ پذیری می‌نامند. مقدار K برای مواد طبیعی در بازه وسیعی تغییر می‌کند. به عنوان مثال مقدار ضریب K برای شن تمیز $۱۰^{-۹}$ تا $۱۰^{-۷}$، ماسه تمیز $۱۰^{-۱۲}$ تا $۱۰^{-۹}$ و زغال سنگ $۱۰^{-۱۳}$ تا $۱۰^{-۱۱}$ با واحد $m^۲$ می‌باشد. نفوذ پذیری مواد متخلخل متداول در جدول ۲-۱ آورده شده است.

معادله (۲-۲) در حالت سه بعدی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{v} = -\mu^{-1}[K]\cdot\vec{\nabla}P \qquad (۳-۲)$$

که در این حالت $[K]$ یک تانسور درجه دوم می‌باشد. در یک محیط همسانگرد K اسکالر بوده و بنابراین معادله (۲-۳) بصورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{K}\vec{v} \qquad (۴-۲)$$

۲-۳-۲ مدل‌های ضریب نفوذپذیری

اگر K در واقع توسط هندسه ماده تعریف شود، باید بین پارامترهای هندسی ماده و K رابطه‌ای برقرار باشد. تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است. بیجن در سال ۱۹۹۵ حفره‌های ماده متخلخل را به صورت لوله‌های موئین با شعاع r_0 در نظر گرفت و رابطه زیر را برای نفوذ پذیری پیشنهاد نمود[۲]:

$$K = \frac{\pi r_0^4}{8}\frac{N}{A} \qquad (۵-۲)$$

[1] **intrinsic permeability**

در این رابطه N تعداد لوله‌های موئین در یک برش عرضی با سطح مقطع A می‌باشد. اگر حفره-ها به صورت توده‌ای از ترک‌های موئی به عرض b در نظر گرفته شوند و فاصله مابین ترک‌ها نیز $a+b$ در نظر گرفته شود به رابطه زیر برای نفوذپذیری منجر خواهد شد:

$$K = \frac{b^3}{12(a+b)} \tag{۶-۲}$$

معادله دیگری که دارای کاربرد بیشتری می‌باشد با مدل کردن محیط متخلخل با بستری از ذرات کروی با قطر مؤثر D_p بدست آمده است. این رابطه که به تئوری شعاع هیدرولیک کارمن-کازنی[1] [۴۱] معروف است، نفوذ پذیری را به صورت زیر بیان می‌کند:

$$K = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{180(1-\varepsilon)^2} \tag{۷-۲}$$

که D_p توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$D_p^2 = \int_0^\infty D_p^3 h(D_p) dD_p \Big/ \int_0^\infty D_p^2 h(D_p) dD_p \tag{۸-۲}$$

و $h(D_p)$ تابع چگالی برای توزیع قطرهای متفاوت D_p می‌باشد. ثابت ۱۸۰ در معادله (۲-۷) توسط تحقیقات تجربی بدست آمده است. معادله کارمن-کازنی نتایج رضایت بخشی را برای محیطی که شامل ذرات کروی شکل بوده و قطر ذرات آن در یک رنج محدود قرار دارد، ارائه می‌دهد. این معادله برای مواردی که شکل ذرات از شکل کروی فاصله پیدا می‌کند، اختلاف اندازه ذرات زیاد می-شود و نیز محیط‌های فشرده معتبر نمی‌باشد.

۲-۴ توسعه قانون دارسی

در بخش قبل مدل دارسی در محیط‌های متخلخل ارائه شد. در برخی از موارد نتایج حاصل از مدل دارسی از دقت کافی برخوردار نبوده، لذا برای رفع این نارسایی مدل‌های دیگری نیز در زمینه جریان

[1] **Carman-Kozeny**

در محیط‌های متخلخل ارائه شده‌اند. در این قسمت دو نمونه از معروفترین این مدل‌ها به اجمال بیان می‌شود.

۲-۴-۱ معادله فورچهیمر[1]

معادله دارسی (۲-۳) نسبت به سرعت نفوذ $\vec{v}$ خطی می‌باشد، البته تا زمانی که $\vec{v}$ به اندازه کافی کوچک باشد. در عمل "به اندازه کافی کوچک" به این معنا است که رینولدز جریان Re_p کمتر از یک یا حداکثر یک باشد (بر مبنای قطر ذره یا یک منفذ الگو).

با افزایش $\vec{v}$ گذار به درگ غیر خطی کاملا آرام می‌باشد و با افزایش Re_p در محدوده ۱ تا ۱۰ هیچ مرحله گذار ناگهانی به وجود نخواهد آمد. بنابراین در این محدوده از Re_p جریان همچنان آرام باقی خواهد ماند. بلکه گذار از جریان آرام هنگامی ایجاد می‌شود که نیروی درگ شکلی بر اساس موانع جامد در مسیر سیال، قابل مقایسه با نیروی درگ پوسته‌ای بر اساس اصطکاک باشد. در این حالت باید ترم دیگری به سمت راست معادله (۲– ۳) اضافه شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu}\vec{\nabla}P - b\left|\vec{v}\right|\vec{v} \qquad (۹-۲)$$

در این رابطه b به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$b = K^{1/2} c_F \rho_f \qquad (۱۰-۲)$$

که c_F به ضریب فورچهیمر معروف است. برای سادگی معادله (۲-۹) را معادله فورچهیمر و آخرین جمله این معادله را جمله فورچهیمر می‌نامیم. وارد[2] [۴۲] بر این تصور بود که c_F می‌بایست یک ثابت جهانی با مقداری در حدود ۰/۵۵باشد. اما مشخص شده است که c_F با طبیعت محیط متخلخل تغییر می‌کند و می‌تواند به عنوان مثال برای فیبرهای فلزی به کوچکی ۰/۱ برسد[۲].

[1] **Forchheimer's Equation**
[2] **Ward**

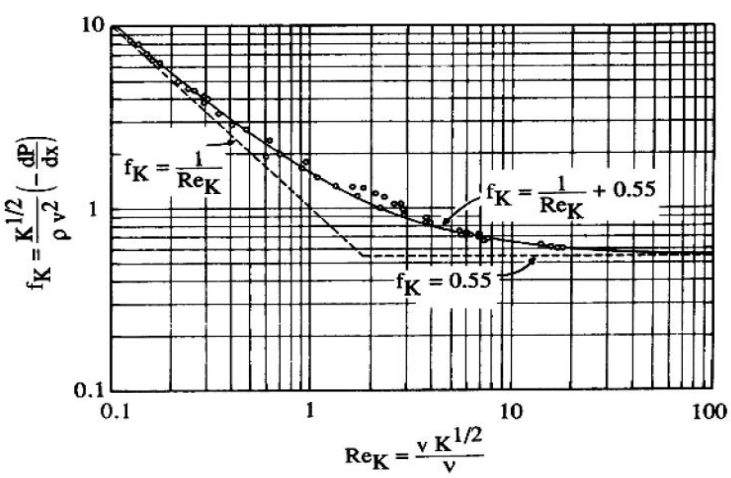
بیورز و همکاران[1] [۴۳] نشان دادند که دیوارهای اطراف جریان می‌توانند اثرات مهمی روی مقدار c_F داشته باشند، سپس رابطه زیر را که با داده‌هایشان انطباق خوبی داشت ارائه دادند.

$$c_F = 0.55\left(1 - 5.5\frac{d}{D_e}\right) \qquad (۱۱-۲)$$

که d قطر ذرات کروی و D_e قطر معادل بستر است. D_e با توجه به ارتفاع h و عرض w مربوط به یک بستر بدین صورت تعریف می‌گردد:

$$D_e = \frac{۲wh}{w+h} \qquad (۱۲-۲)$$

گذار از رژیم دارسی به رژیم فورچهیمر در شکل ۲-۱ نمایش داده شده است. این اطلاعات از بررسی جریان ایزوترمال یک بعدی با سرعت نفوذ v در جهت x به دست آمده است. محور عرض‌ها ضریب اصطکاک f_k با مقیاس طولی $K^{۱/۲}$ و محور طول‌ها متعلق به اعداد رینولدز بر مبنای $K^{۱/۲}$ می‌باشد. این شکل نشان می‌دهد که گذار در محدوده ۱ تا ۱۰ اتفاق می‌افتد.



شکل ۲-۱. گذار از جریان دارسی به جریان فورچهیمر در جریان یک بعدی سیال ایزوترمال[۲]

[1] **Beavers *et al.***

۲-۴-۲ معادله برینکمن[1]

یک پیشنهاد دیگر در مقابل معادله دارسی معادله‌ای است که معمولا به عنوان برینکمن شناخته می‌شود. با حذف ترم‌های اینرسی این معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K}\vec{v} + \tilde{\mu}\nabla^2\vec{v} \qquad (۱۳-۲)$$

حال دو ترم برای ویسکوزیته وجود دارد، ترم اول، ترم ویسکوزیته معمولی دارسی و دیگری همانند ترم لاپلاسینی است که در معادلات ناویر استوکس ظاهر می‌شود. ضریب $\tilde{\mu}$ یک ویسکوزیته مؤثر است، برینکمن μ و $\tilde{\mu}$ را برابر قرار داد که در حالت معمولی صحیح نمی‌باشد. در مقالات جدید به معادله (۲-۱۳) بسط برینکمن معادله دارسی می‌گویند. برینکمن یک رابطه بین K (نفوذ پذیری) و ε(تخلخل) با عنوان خودسازگاری، تنها برای وقتی که تخلخل به اندازه کافی بزرگ باشد، $\varepsilon > ۰/۶$، بدست آورد.

وقتی معادله برینکمن به عنوان تنها معادله مومنتوم عمومی بکار برده شود، وضعیت پیچیده‌تر خواهد شد. در معادله (۲-۱۳) P فشار ذاتی سیال است، بنابراین هر ترم در این معادله نماینده یک نیرو بر واحد حجم از سیال می‌باشد. یک فرآیند میانگین گیری جزیی نشان خواهد داد که برای یک محیط متخلخل ایزو تروپیک $\tilde{\mu}/\mu = 1/\varepsilon T^*$ می‌باشد که T^* ضریبی است وابسته به هندسه شکل که از روی پیچ و خم مسیر جریان تعریف شده و انحنای محیط[2] نامیده می‌شود. بنابراین $\tilde{\mu}/\mu$ وابسته به هندسه شکل است. مطالعات جدیدی که توسط وفائی و همکارانش[3] انجام شد، منجر به معادلات کلی زیر گردید[۲]:

$$\rho_f\left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{v}.\vec{v}}{\varepsilon}\right)\right] = -\frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}(\varepsilon P) + \frac{\mu}{\varepsilon\rho_f}\nabla^2\vec{v} - \frac{\mu}{K}\vec{v} - \frac{c_F\rho_f}{K^{1/2}}|\vec{v}|\vec{v} \qquad (۱۴-۲)$$

---

[1] **Brinkman's Equation**
[2] **tortuosity**
[3] **Vafai *et al.***

برای یک جریان غیر قابل تراکم $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$ و همچنین $\varepsilon^{-1}\vec{\nabla}(\varepsilon^{-1}\vec{v}\cdot\vec{v})$ به $\varepsilon^{-1}\vec{v}.\vec{\nabla}(\vec{v}/\varepsilon)$ کاهش می‌یابد.

همانطور که در مقدمه آمد، در این پایان نامه از مدل دارسی، معادله (۲ – ۳)، استفاده شده است. به این دلیل که سرعت سیال کم است، این مدل نتایج مناسبی به دست می‌دهد.

۲-۵ شرایط مرزی هیدرودینامیکی

برای حالت خاص، شرایطی را در نظر می‌گیریم که $y<0$ توسط محیط متخلخل پر شده و بنابراین با توجه به مختصات دکارتی (x,y,z) در $y=0$ یک مرز وجود دارد. اگر مرز نفوذ ناپذیر باشد، فرض معمول این است که مؤلفه عمودی سرعت نفوذ $\vec{v}=(u,v,w)$ صفر شود یعنی:

$$v\big|_{y=0}=0 \qquad (۱۵-۲)$$

اگر از قانون دارسی استفاده شود، از آنجا که نسبت به مختصات مکانی از مرتبه اول مشتقات جزئی می‌باشد تنها یک شرط مرزی را می‌توان بکار برد. بنابراین سایر مؤلفه‌های سرعت در $y=0$ می‌توانند مقادیر اختیاری داشته باشند، و لذا در مرز لغزش وجود دارد.

اگر به جای نفوذ ناپذیری مرز را آزاد در نظر بگیریم، شرط مناسب این است که فشار را در طول مرز ثابت فرض کنیم. در نتیجه با بکار بردن قانون دارسی برای سیال غیرقابل تراکم نتیجه می‌شود:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \qquad (۱۶-۲)$$

این استنتاج از آنجا حاصل می‌شود که در $y=0$، فشار برای تمامی xها و zها ثابت بوده، بنابراین $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=0$، و لذا برای همه xها و zها داریم $u=w=0$. پس در $y=0$، $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}=0$ و با توجه به معادله پیوستگی

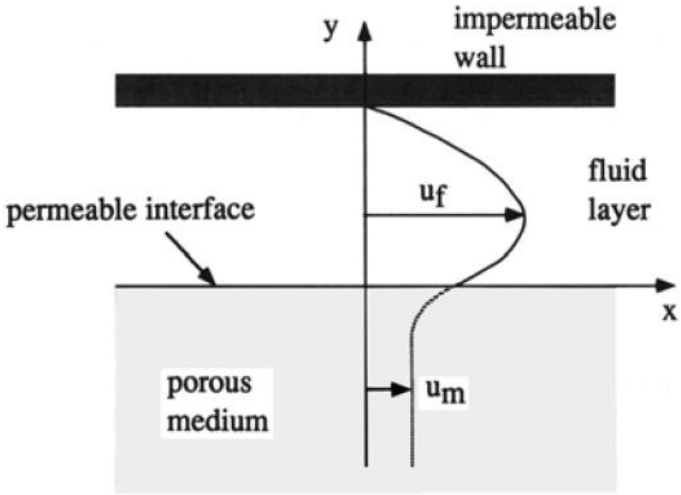
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (۱۷-۲)$$

که برای $y=0$ صادق است، به شرط مرزی (۲-۱۶) می‌رسیم.

حال شرایطی را در نظر بگیرید که محیط متخلخل در مجاورت سیالی تنها و یکسان با سیال اشباع کننده محیط بوده، و نیز جریان یک جهته در راستای x به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۲، برقرار باشد. طبق تحقیقات بیورز و جوزف[1] شرایط مرزی مناسب در این حالت با رابطه تجربی زیر تعریف می‌شود[۲]:

$$\frac{\partial u_f}{\partial y} = \frac{\alpha_{BJ}}{K^{1/2}}(u_f - u_m) \qquad (۱۸-۲)$$

که در آن u_f سرعت سیال و u_m سرعت دارسی در محیط متخلخل است. کمیت α_{BJ} بدون بعد و مستقل از ویسکوزیته سیال بوده اما به پارامترهای ماده که ساختار ماده نفوذناپذیر را در ناحیه مرزی مشخص می‌کند، وابسته است.



شکل ۲-۲. پروفایل سرعت در داخل یک کانال پر شده از محیط متخلخل

۲-۶ اثرات تغییر تخلخل

در یک بستر متخلخل با دیوارهای نفوذ ناپذیر با نزدیک شدن به دیواره‌ها تخلخل افزایش پیدا می‌کند. زیرا ذرات جامد به علت وجود دیواره قادر نخواهند بود که به میزان بقیه نقاط بستر متراکم

[1] **Beavers and Joseph**

شوند. آزمایشات نشان داده است که تخلخل با یک تابع میرا نسبت به فاصله از دیوار تغییر می‌کند. بنابراین نظریه میانگین گیری حجمی روی یک r.e.v در نزدیکی دیواره غیر قابل قبول خواهد بود. تحقیقات اخیر نشان داده است که ε به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \left[1 + C\, exp(-N \frac{y}{d_P}) \right] \qquad (۱۹-۲)$$

که در آن y فاصله از دیوار، d_P قطر ذرات و C و N ثابت‌های تجربی می‌باشند. آزمایشات مشخص کرده‌اند که مقادیر مناسب ثابت‌ها، $C = ۱/۴$ و $N = ۵$ یا ۶، برای یک محیط متخلخل با $\varepsilon_\infty = ۰/۴$ می‌باشد.

۲-۷ انتقال حرارت در محیط متخلخل

در قسمت‌های قبل معادلات پیوستگی و مومنتوم در محیط متخلخل مورد بررسی قرار گرفت. در این قسمت به معادله انرژی پرداخته می‌شود. ابتدا ساده‌ترین حالت که اثرات ناهمگن بودن محیط، تغییرات فشار و اثر لزجت در نظر گرفته نشده است، بیان می‌گردد. در ادامه با تأثیرات این موارد به صورت مختصر آشنا می‌شویم.

۲-۷-۱ ساده‌ترین حالت انتقال حرارت

در این قسمت بر روی معادله‌ای تمرکز می‌شود که قانون اول ترمودینامیک در محیط متخلخل را بیان می‌کند. با حالت ساده‌ای که ماده، ایزوتروپیک بوده و اثرات تابشی، تلفات لزجی و کار انجام شده توسط تغییرات فشار قابل چشم پوشی باشد، آغاز می‌شود. به طور خلاصه فرض شده که برابری حرارتی موضعی بین جامد و سیال وجود دارد. بنابراین

$$T_f = T_s = T \qquad (۲۰-۲)$$

که در آن T_f و T_s به ترتیب دمای فاز سیال و جامد می‌باشد. همچنین فرض شده که هدایت حرارت بین فازهای جامد و مایع به صورت موازی صورت می‌گیرد. بنابراین انتقال حرارت از یک فاز به فاز دیگر وجود نخواهد داشت. با میانگین گیری بر روی یک حجم ماده برای فاز جامد خواهیم داشت:

$$(1-\varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1-\varepsilon)\vec{\nabla}.\left(k_s \vec{\nabla} T_s\right) + (1-\varepsilon) q_s''' \qquad (۲-۲۱)$$

و برای فاز سیال نیز به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$\varepsilon\left(\rho c_p\right)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \left(\rho c_P\right)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_f = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \left(k_f \vec{\nabla} T_f\right) + \varepsilon q_f''' \qquad (۲-۲۲)$$

در این معادلات زیرنویس‌های s و f مربوط به فازهای جامد و سیال بوده، c ظرفیت حرارتی ویژه جامد و c_p ظرفیت حرارتی ویژه سیال در فشار ثابت می‌باشند. همچنین k ضریب هدایت حرارتی و q''' انرژی تولید شده در واحد حجم هستند.

در نوشتن معادلات (۲-۲۱) و (۲-۲۲) فرض بر این بوده است که تخلخل سطحی برابر با تخلخل می‌باشد. این مطلب وابسته به ترم‌های هدایت است. برای مثال، $-k_s \vec{\nabla} T_s$ شار حرارتی هدایت در جامد بوده و بنابراین $\vec{\nabla}.\left(k_s \vec{\nabla} T_s\right)$ نرخ خالص هدایت حرارتی در حجم واحد جامد می‌باشد. در معادله (۲-۲۱)، معادله در عامل $(۱-\varepsilon)$ که نسبت سطح پرشده توسط جامد به سطح کل در برش عرضی می‌باشد، ضرب شده است. زیرا این عامل نسبت حجم پر شده توسط فاز جامد به حجم کل را نیز نشان می‌دهد. در معادله (۲-۲۲) همچنین نشان داده شده است که ترم‌های جابجایی مربوط به سرعت نفوذ می‌باشند. قابل تشخیص است که $\vec{V}.\vec{\nabla} T_f$ نرخ تغییرات دمایی در حجم مورد بررسی، به علت جابجایی سیال داخل آن بوده و بنابراین حاصلضرب این ترم در $\left(\rho c_p\right)_f$ نرخ انرژی حرارتی بر واحد حجم سیال به علت جابجایی می‌باشد. همچنین به این نکته توجه شود که در نوشتن معادله (۲-۲۲) از رابطه دوپویت فورچهیمر $\vec{v} = \varepsilon \vec{V}$ استفاده شده است.

با جایگذاری $T_f = T_s = T$ و جمع دو معادله (۲-۲۱) و (۲-۲۲) نتیجه می‌شود:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (k_m \vec{\nabla} T) + q'''_m \quad (۲۳-۲)$$

$$(\rho c)_m = (1-\varepsilon)(\rho c)_s + \varepsilon (\rho c)_f \quad (۲۴-۲)$$

$$k_m = (1-\varepsilon) k_s + \varepsilon k_f \quad (۲۵-۲)$$

$$q'''_m = (1-\varepsilon) q'''_s + \varepsilon q'''_f \quad (۲۶-۲)$$

۲-۷-۲ ضریب هدایت حرارتی کلی یک محیط متخلخل

بطور معمول هدایت حرارتی کلی از یک محیط متخلخل بستگی به پیچیدگی شکل هندسی ماده دارد. اگر هدایت حرارتی در فازهای جامد و سیال به صورت موازی اتفاق بیفتد، هدایت حرارتی کلی k_A برابر میانگین حسابی وزنی k_s و k_f خواهد بود، یعنی:

$$k_A = (1-\varepsilon) k_s + \varepsilon k_f \quad (۲۷-۲)$$

در حالت دیگر اگر ساختار محیط متخلخل به صورتی باشد که هدایت حرارتی در دو فاز به صورت سری انجام شود، یعنی تمام شار حرارت از هر دو فاز سیال و جامد عبور کند، هدایت حرارتی کلی میانگین همساز وزنی k_s و k_f خواهد بود، یعنی:

$$\frac{1}{k_H} = \frac{1-\varepsilon}{k_s} + \frac{\varepsilon}{k_f} \quad (۲۸-۲)$$

در حالت عمومی k_A و k_H مرزهای بالایی و پائینی هدایت حرارتی واقعی k_m را مشخص می‌کنند. علاوه بر فرضیات فوق برای حالت‌های ویژه یک تخمین برای k_m می‌تواند k_G که میانگین هندسی وزنی k_s و k_f است، نیز مورد استفاده قرار گیرد. بر اساس این تقریب:

$$k_G = k_s^{1-\varepsilon} k_f^{\varepsilon} \quad (۲۹-۲)$$

این تقریب زمانی مناسب است که میزان k_s و k_f خیلی با یکدیگر فاصله نداشته باشد.

۲-۷-۳ اثر تغییر فشار، اتلاف اصطکاکی و در نظر نگرفتن تعادل دمایی محلی

همانطور که در قسمت ۲-۷-۱ آمد در ساده‌ترین حالت معادله زیر به عنوان معادلـه انـرژی برقـرار است:

$$(\rho c)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \vec{\nabla} \cdot (k_m \vec{\nabla} T) + q_m''' \qquad (۲۳-۲)$$

اگر اثرات تغییر فشار ناچیز نباشد ترم $-\beta T\left(\partial P/\partial t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P\right)$ را باید به سمت چـپ معادلـه (۲-۲۳) اضافه نمود. که β ضریب انبساط حجمی حرارتی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \qquad (۳۰-۲)$$

اگر $\left(g\beta / c_{pf}\right) L \ll ۱$، آنگاه اتلاف اصطکاکی قابل صرف نظر کردن می‌باشد. که غالباً در جابجایی طبیعی چنین شرایطی برقرار است. در غیر این صورت باید ترم دیگری به سمت راست معادله (۲-۲۳) اضافه شود. این موضوع اولین بار توسط انی و سانچز-پالنشه[1] در سال۱۹۸۲ مطرح شد [۲]. اگر مدل جریان دارسی در نظر گرفته شود در حالت محیط ایزوتروپیک (همسانگرد) $(\mu/K)\vec{v} \cdot \vec{v}$ و در حالت محیط غیر ایزوتروپیک $\mu \vec{v} \cdot [K]^{-۱} \cdot \vec{v}$ ترم اتلاف مورد نظر خواهد بود.

نیلد[2] [۴۴] خاطر نشان کرد که آنالیز ابعادی، شامل مقایسه بزرگـی تـرم اتـلاف اصـطکاکی و تـرم پخش حرارت، نشان می‌دهد در صورتی که $N << ۱$ باشد ترم اتلاف ناچیز است. که در این رابطـه N به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N = \mu U^2 L^2 / (K c_p k_m \Delta T) = Br / Da \qquad (۳۱-۲)$$

که Br، عدد برینکمن[3] است و به صورت

$$Br = \mu U^2 / c_p k_m \Delta T \qquad (۳۲-۲)$$

---

[1] **Ene and Sanchez-Palencia**
[2] **Nield**
[3] **Brinkman number**

تعریف می‌شود. در اغلب موقعیت‌ها عدد دارسی K/L^2 کوچک است، بنابراین اتلاف ویسکوزیته حتی در اعداد برینکمن نسبتا کم نیز مهم است. برای جابجایی اجباری انتخاب سرعت مشخصه، U، آسان است. در مورد جابجایی طبیعی آنالیز ابعادی به قرار دادن سرعت مشخصه $U \sim (k_m / \rho c_p L) Ra^{1/2}$ منجر می‌شود. در این حالت اتلاف ویسکوزیته زمانی ناچیز است که $Ge \ll 1$ باشد. Ge، عدد گبهارت[1] است که به صورت $Ge = g\beta L / c_p$ تعریف می‌شود. این موضوع زمانی که جابجایی طبیعی در محفظه متخلخل با گرمایش یکنواخت جانبی رخ می‌دهد، اعتبار ندارد. در این حالت انرژی جنبشی کلی آزاد شده توسط نیروی شناوری صفر است و اتلاف اصطکاکی با کار فشار بالانس می‌شود. ابعاد سرعت مشخصه به صورت $k_m / \rho c_p L$ بوده و نسبت اتلاف اصطکاکی به ترم هدایت از مرتبه $Ec\,Pr/Da$ بوده که $Ec = (k_m / \rho c_p L)^2 / c_p \Delta T$ عدد اکرت[2] می‌باشد.

موارد بالا در مورد جابجایی اجباری با این فرض ذکر شد که عدد پکلت[3]، $Pe = \rho c_p U L / k_m$ بزرگ نباشد. اگر Pe بزرگ باشد، نسبت بزرگی اتلاف اصطکاکی و ترم انتقال جابجایی از مرتبه $Ec / Da\,Re$ می‌باشد که رینولدز به صورت $Re = \rho U L / \mu$ تعریف می‌گردد.

ایده‌ی دیگری که در محیط متخلخل وجود دارد در نظر گرفتن انتقال حرارت بین فاز جامد و مایع است. با در نظر گرفتن این انتقال حرارت معادلات (۲-۲۱) و (۲-۲۲) مربوط به فاز جامد و مایع به صورت زیر در خواهند آمد:

$$(1-\varepsilon)(\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1-\varepsilon)\vec{\nabla}.\left(k_s \vec{\nabla} T_s\right) + (1-\varepsilon) q_s''' + h\left(T_f - T_s\right) \qquad (۲-۳۳)$$

$$\varepsilon\left(\rho c_p\right)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \left(\rho c_P\right)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_f = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \left(k_f \vec{\nabla} T_f\right) + \varepsilon q_f''' + h\left(T_s - T_f\right) \qquad (۲-۳۴)$$

نیلد در سال ۲۰۰۲ خاطر نشان کرد که معادلات بالا بر اساس یک فرضیه ضمنی که مقاومت حرارتی فازهای سیال و جامد را به صورت سری در نظر می‌گیرد، استوار است [۲]. در این روابط h ضریب انتقال حرارت جابجایی است. مهمترین جنبه استفاده از این معادلات در تعیین مقدار مناسب

[1] **Gebhart number**
[2] **Eckert number**
[3] **Peclet number**

h نهفته است. مقادیر تجربی h با استفاده از روش‌های غیر مستقیم برای مثال توسط پولائیو و همکاران[1] [۴۵] در سال۱۹۹۶ بدست آمده است. بر اساس رابطه به دست آمده توسط دیکسون و کرسول[2]، این ضریب برای بستر متخلخلی از ذرات به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$h = a_{fs} h^* \qquad (۳۵-۲)$$

که در این رابطه a_{fs} سطح مخصوص، سطح در واحد حجم، بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a_{fs} = 6(1-\varepsilon)/d_p \qquad (۳۶-۲)$$

و h^* نیز بدین صورت است:

$$\frac{1}{h^*} = \frac{d_p}{Nu_{fs} k_f} + \frac{d_p}{\beta k_s} \qquad (۳۷-۲)$$

که d_p قطر ذره، و برای بستری از ذرات کروی $\beta = ۱۰$ خواهد بود. عدد ناسلت مایع به جامد، Nu_{fs}، برای رینولدزهای بیشتر از ۱۰۰ (رینولدز بر اساس قطر ذره)، با رابطه اصلاح شده هندلی و هگز[3] بیان می‌گردد [۲]:

$$Nu_{fs} = (0.255/\varepsilon) Pr^{1/3} Re_p^{2/3} \qquad (۳۸-۲)$$

برای مقادیر پایین Re_p، Nu_{fs} بین ۰/۱ و ۱۲/۴ متغیر است. بعضی از محققان نیز یک رابطه تناوبی بین h^* و a_{fs} در نظر گرفته‌اند [۲].

---

[1] **Polyaev *et al.***
[2] **Dixon and Cresswell**
[3] **Handley and Heggs**

۳

روش‌های عددی

۳-۱ مقدمه

معادلات مربوط به جریان لایه مرزی جریان طبیعی بر روی سطوح مایل، همانطور که بعدا مشاهده می‌شود، به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی و غیر خطی هستند. یک روش کاملا کارا برای حل این گونه معادلات روش جعبه‌ای کلر[1] بوده، که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد. اما ابتدا روش کرنک-نیکولسون[2] که روشی ساده‌تر برای حل معادلات جزئی سهموی محسوب می-گردد، با ذکر یک مثال به اجمال توضیح داده می‌شود.

از طرفی معادلات حاکم بر لایه مرزی جریان آزاد بر روی صفحات عمودی و افقی به ترتیب معادله و دستگاه معادلات با شرایط مرزی بوده که به روش پرتابی[3] و به کمک روش رانج-کوتا[4] حل می-گردند. به همین دلیل در ادامه فصل به تشریح این روش هم پرداخته می‌شود.

۳-۲ روش عددی کرنک-نیکولسون

کرنک-نیکولسون روشی ضمنی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی است. روش‌های ضمنی در مقایسه با روش‌های صریح، بدون هیچ شرطی پایدار بوده، اجازه استفاده از گام‌های زمانی بزرگ‌تر را امکانپذیر ساخته و لذا با صرفه‌تر هستند. در این بخش، این روش با حل معادله زیر توضیح داده می‌شود.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$
$$B.C: \begin{cases} at\ x = 0 : T = T_l \\ at\ x = L : T = T_r \end{cases} \qquad I.C: at\ t = 0 : T = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le L/2 \\ 2(1-x) & L/2 \le x \le L \end{cases} \tag{۱-۳}$$

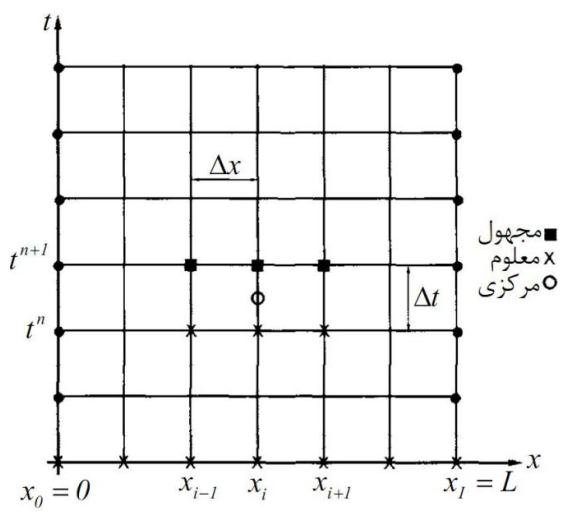
[1] **Keller's Box Method**
[2] **Crank-Nicolson**
[3] **Shooting method**
[4] **Runge-Kutta**

این روش از شبکه بندی نشان داده شده در شکل ۳-۱ استفاده می‌کند، که $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ در $\left(t^{n+1/2}, x_i\right)$ با متوسط گیری آن در زمان قبل t^n و زمان جاری t^{n+1} به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\left(t^{n+1/2}, x_i\right) = \frac{\alpha}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n}\right] \tag{۳-۲}$$

از طرفی $\frac{\partial T}{\partial t}$ نیز به فرم دیفرانسیلی زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{\partial T}{\partial t}\left(t^{n+1/2}, x_i\right) = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \tag{۳-۳}$$



شکل ۳-۱. شبکه بندی تفاضل محدود برای روش کرنک-نیکولسون. Δx یکنواخت است، اما Δt می‌تواند غیر یکنواخت باشد.

قبل از حل معادله (۳-۱) باید از تخمین تفاضل محدود فوق استفاده کرد، اما تخمین کلی‌تر تفاضل محدود این معادله به صورت زیر است:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha\left[\theta\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + (1-\theta)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{n}\right] \tag{۳-۴}$$

که در عمل $۰ \le \theta \le ۱$. $\theta = ۰$ فرم صریح، $\theta = ۱/۲$ روش کرنک-نیکولسون، و $\theta = ۱$ یک روش تفاضل پسرو کاملا ضمنی را نمایش می‌دهد. معادلات تحت هر شرایطی برای $۱/۲ \le \theta \le ۱$ پایدار و همگرا هستند، اما برای $۰ \le \theta < ۱/۲$

$$\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \le \frac{1}{2(1-2\theta)} \qquad (۵-۳)$$

برای $\theta = ۱/۲$ معادله (۳-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(T_i^{n+1} - T_i^n\right) = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{\Delta x^2}\left[\left(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}\right) + \left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right)\right]$$

یا به صورت

$$a_i T_{i-1}^{n+1} + b_i T_i^{n+1} + c_i T_{i+1}^{n+1} = r_i\,, \qquad 1 \le i \le I-1 \qquad (۶-۳)$$

که

$$\begin{aligned} &a_i = 1, \quad b_i = -(2+\lambda), \quad c_i = 1 \\ &r_i = -\lambda T_i^n - \left(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n\right), \quad 1 \le i \le I-1, \\ &\lambda = \frac{2}{\alpha}\frac{\Delta x^2}{\Delta t} \end{aligned} \qquad (۷-۳)$$

توجه کنید که r_i تنها شامل مقادیر T^n است، نه T^{n+1}. در $i=0$ و $i=I$ ، شرایط مرزی T_0^{n+1} و T_I^{n+1} توسط رابطه (۳-۱) داده شده است. به عنوان یک نتیجه برای $i=۱$ و $i=I-۱$ معادله (۳-۶) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$b_1 T_1^{n+1} + c_1 T_2^{n+1} = r_1 - a_1 T_0^{n+1} \equiv r_1^*\,, \qquad for \quad i=1 \qquad (۳-۸-الف)$$

و

$$a_{I-1} T_{I-2}^{n+1} + b_{I-1} T_{I-1}^{n+1} = r_{I-1} - c_{I-1} T_I^{n+1} \equiv r_{I-1}^*\,, \qquad for \quad i=I-1 \qquad (۳-۸-ب)$$

خطاها در این روش از اوردر $\Delta x^۲ + \Delta t^۲$ هستند، اما برای اهداف پایداری نیازی نیست که Δt به Δx وابسته باشد. روش تحت هر شرایطی پایدار بوده و دقت مرتبه دوم با Δxهای مساوی حاصل می‌شود.

در روش برداری معادلات (۳-۶) و (۳-۸)، به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$[A]\vec{T} = \vec{r} \qquad (۳-۹)$$

که بردارها $I-۱$ عضوی هستند.

$$\vec{T}=\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{I-2} \\ T_{I-1} \end{bmatrix} \qquad \vec{r}=\begin{bmatrix} r_1^* \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{I-2} \\ r_{I-1}^* \end{bmatrix} \tag{۱۰-۳}$$

و ماتریس $[A]$ با اوردر $I-$۱ که تمام مؤلفه‌های آن به جز مؤلفه‌های روی سه قطر صفر هستند (ماتریس سه قطری[1] نامیده می‌شود.) عبارتست از:

$$[A]=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & . & . & . & & \\ & & . & . & . & \\ & & & a_{I-2} & b_{I-2} & c_{I-2} \\ 0 & & & & a_{I-1} & b_{I-1} \end{bmatrix} \tag{۱۱-۳}$$

معادله فوق را می‌توان با استفاده از الگوریتم توماس[2] حل کرد.

۳-۳ الگوریتم توماس

این الگوریتم برای حل دستگاه‌هایی که ماتریس ضرایب آن‌ها سه قطری است به کار می‌رود. برای مثال در حل معادله فوق با روش به اصطلاح روبیدن پیشرو[3] داریم:

$$\begin{aligned} &\beta_1 = b_1 , \qquad s_1 = r_1^* \\ &m_i = \frac{a_i}{\beta_{i-1}} \\ &\beta_i = b_i - m_i c_{i-1} , \qquad i = 2,3,...,I-1 \\ &s_i = r_i - m_i s_{i-1} \end{aligned} \tag{۱۲-۳}$$

در روبیدن پسرو[4] داریم:

---

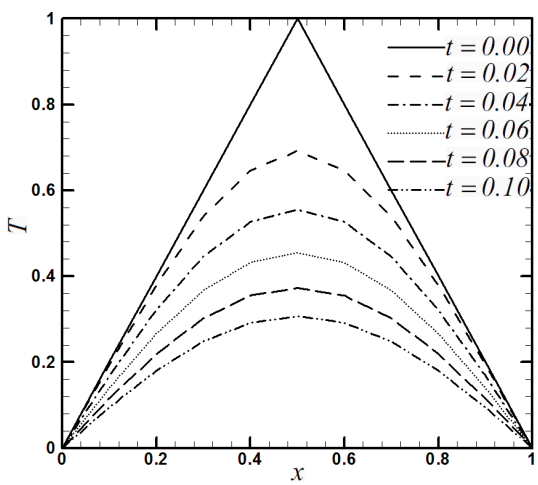
[1] **tridiagonal matrix**
[2] **Thomas algorithm**
[3] **forward sweep**
[4] **Backward sweep**

$$T_{I-1}^{n+1} = \frac{s_{I-1}}{\beta_{I-1}}, \qquad T_i^{n+1} = \frac{s_i - c_i T_{i+1}^{n+1}}{\beta_i}, \qquad i = I-2, I-3, \ldots, 1 \tag{۱۲-۳}$$

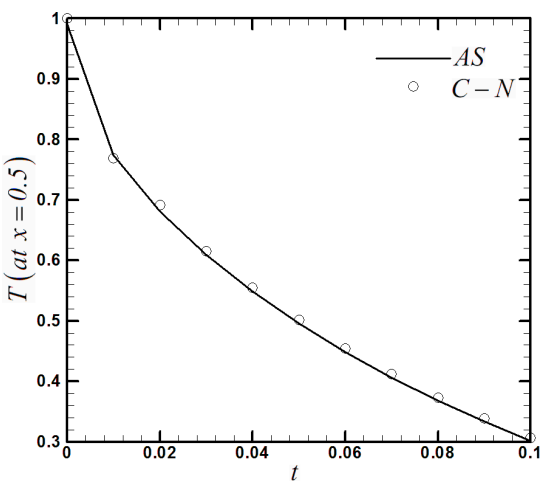
حال مسئله فوق با ورودی‌های زیر به روش کرنک-نیکولسون حل شده و نتایج با جواب تحلیلی مقایسه می‌گردد.

$$L = 1$$
$$\alpha = 1$$
$$T_l = T_r = 0$$
$$\Delta x = 0.1$$
$$\Delta t = 0.01$$
$$total\ time = 0.1$$

شکل ۳-۲ حل معادله (۳-۱) را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. با توجه به شرایط مرزی و اولیه، انتظار می‌رفت جواب حاصل نسبت به $x = ۰/۵$ متقارن باشد، که چنین است. شکل ۳-۳ نیز نشان می‌دهد که حل حاصل از روش کرنک-نیکولسون با حل تحلیلی تطابق قابل ملاحظه‌ای دارد.



شکل ۳-۲. نتایج حاصل از حل معادله (۳-۱) به روش کرنک-نیکولسون



شکل ۳-۳. مقایسه نتایج حاصل از حل عددی و حل تحلیلی معادله (۳-۱) در $x = ۰/۵$

۳-۴ روش جعبه‌ای کلر

روش کلر یک روش ضمنی بوده و دارای مشخصات زیادی است که آن را برای حل همه معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی مناسب می‌سازد. خصوصیات اصلی روش عبارتند از:

- ✓ محاسبات آن برای حل کردن کمی بیشتر از روش کرنک-نیکولسون است.
- ✓ دارای دقتی از مرتبه دوم با Δx و Δt دلخواه (غیر یکنواخت) است.
- ✓ اجازه تغییرات سریع به t را می‌دهد.
- ✓ برنامه نویسی حل تعداد زیادی از معادلات کوپل شده را آسان می‌سازد.

حل یک معادله با این روش نیازمند انجام مراحل زیر است:

۱. معادله یا معادلات را به یک سیستم مرتبه اول کاهش دهید.

۲. معادلات دیفرانسیلی را با استفاده از تفاضلات مرکزی بنویسید.

۳. معادلات جبری حاصل را به صورت خطی درآورید (اگر غیر خطی هستند) و آن ها را در فرم ماتریس- بردار بنویسید.

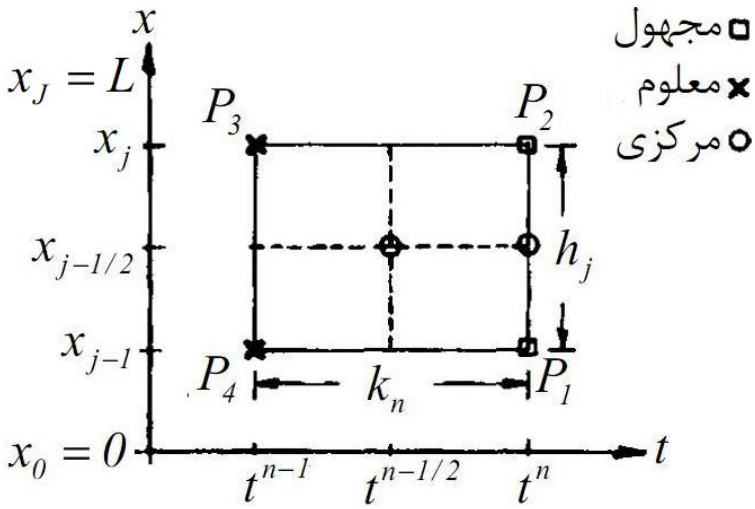
۴. سیستم خطی را با روش حذف سه قطری بلوکی[1] حل کنید.

در ادامه معادله (۳-۱) به روش کلر حل می‌شود. نحوه مش بندی مسئله در این روش مطابق شکل ۳-۴ است.

برای حل معادله (۳-۱) ابتدا مطابق گام اول باید آن را در ترم‌هایی از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول بیان کرد.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T' = p \qquad \text{(۳-۱۳-الف)}$$

[1] **block-tridiagonal-elimination method**



شکل ۳-۴. شبکه تفاضل محدود برای روش جعبه‌ای کلر. k و h می‌توانند غیر یکنواخت باشند. در اینجا $t_{n-1/2} = 1/2\left(t_n + t_{n-1}\right)$ و $x_{j-1/2} = 1/2\left(x_j + x_{j-1}\right)$

و معادله (۳-۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p' = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{(۳-۱۳-ب)}$$

پرایم‌ها مشتق نسبت به x را نمایش می‌دهند. در گام دوم فرم تفاضل محدود معادله دیفرانسیل (۳-۱۳-الف) برای نقطه میانی $\left(t^n, x_{j-1/2}\right)$ از قطعه P_1P_2 و فرم تفاضل محدود معادله دیفرانسیل پاره‌ای (۳-۱۳-ب) برای نقطه میانی $\left(t^{n-1/2}, x_{j-1/2}\right)$ مربع $P_1P_2P_3P_4$ نوشته می‌شود. در نتیجه:

$$\frac{T_j^n - T_{j-1}^n}{h_j} = \frac{p_j^n + p_{j-1}^n}{2} = p_{j-1/2}^n \qquad \text{(۳-۱۴-الف)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{h_j} + \frac{p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}}{h_j}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{T_{j-1/2}^n - T_{j-1/2}^{n-1}}{k_n} \qquad \text{(۳-۱۴-ب)}$$

با بازآرایی معادلات فوق می‌توان آن‌ها را به فرم زیر نوشت:

$$T_j^n - T_{j-1}^n - \frac{h_j}{2}\left(p_j^n + p_{j-1}^n\right) = 0 \qquad \text{(۳-۱۵-الف)}$$

$$\left(s_1\right)_j p_j^n + \left(s_2\right)_j p_{j-1}^n + \left(s_3\right)_j \left(T_j^n + T_{j-1}^n\right) = R_{j-1/2}^{n-1}$$ (۳-۱۵-ب)

در اینجا

$$\left(s_1\right)_j = 1, \quad \left(s_2\right)_j = -1, \quad \left(s_3\right)_j = -\lambda_j$$ (۳-۱۶-الف)

$$R_{j-1/2}^{n-1} = -2\lambda_j T_{j-1/2}^{n-1} + p_{j-1}^{n-1} - p_j^{n-1}$$ (۳-۱۶-ب)

$$\lambda_j = \frac{1}{\alpha}\frac{h_j}{k_n}$$ (۳-۱۶-ج)

معادلات (۳-۱۵) برای $j = ۱,۲,...,J-۱$ حل می‌شوند. در $j = ۰$ و $j = J$ داریم:

$$T_0 = T_l, \quad T_J = T_r$$ (۳-۱۷)

چون معادلات (۳-۱۴) و شرایط مرزی مربوطه خطی هستند، می‌توان دستگاه معادلات را در فرم ماتریس- برداری زیر نوشت.

$$[A][\delta] = [r]$$ (۳-۱۸)

که

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_0] & [C_0] & & & & & \\ [B_1] & [A_1] & [C_1] & & & & \\ & . & . & . & & & \\ & & [B_j] & [A_j] & [C_j] & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & & [B_{J-1}] & [A_{J-1}] & [C_{J-1}] \\ & & & & & [B_J] & [A_J] \end{bmatrix}$$ (۳-۱۹-الف)

$$[\delta]=\begin{bmatrix}\overrightarrow{\delta_0}\\ \overrightarrow{\delta_1}\\ .\\ \overrightarrow{\delta_j}\\ .\\ \overrightarrow{\delta_{J-1}}\\ \overrightarrow{\delta_J}\end{bmatrix},\quad [r]=\begin{bmatrix}\overrightarrow{r_0}\\ \overrightarrow{r_1}\\ .\\ \overrightarrow{r_j}\\ .\\ \overrightarrow{r_{J-1}}\\ \overrightarrow{r_J}\end{bmatrix} \qquad (۳-۱۹-ب)$$

و

$$\overrightarrow{\delta_j}=\begin{bmatrix}T_j\\ p_j\end{bmatrix},\quad r_j=\begin{bmatrix}(r_1)_j\\ (r_2)_j\end{bmatrix} \qquad (۳-۲۰-الف)$$

که A_j، B_j و C_j ماتریس‌های ۲×۲ بوده که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[A_0]\equiv\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -\frac{h_1}{2}\end{bmatrix},[A_j]\equiv\begin{bmatrix}(s_3)_j & (s_1)_j\\ -1 & -\frac{h_{j+1}}{2}\end{bmatrix},\quad 1\le j\le J-1$$

$$[A_J]\equiv\begin{bmatrix}(s_3)_J & (s_1)_J\\ 1 & 0\end{bmatrix},[B_j]\equiv\begin{bmatrix}(s_3)_j & (s_2)_j\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad 1\le j\le J \qquad (۳-۲۰-ب)$$

$$[C_j]\equiv\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -\frac{h_{j+1}}{2}\end{bmatrix},\quad 0\le j\le J-1$$

همچنین در معادله (۳-۲۰-الف) با توجه به معادلات (۳-۱۵) مقادیر زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&(r_1)_0=T_1,\quad (r_1)_j=R^{n-1}_{j-1/2},\quad 1\le j\le J\\ &(r_2)_j=0,\quad 0\le j\le J-1,\quad (r_2)_J=T_r\end{aligned} \qquad (۳-۲۱)$$

۳-۵ روش حذف سه قطری بلوکی

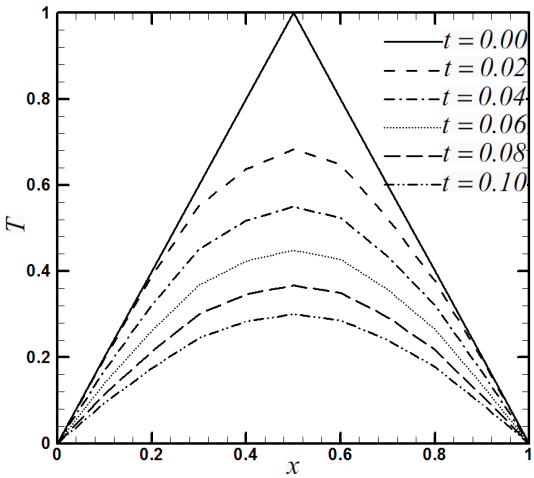
این الگوریتم برای حل دستگاه‌هایی که ماتریس ضرایب آن‌ها سه قطری است و هر عضو ماتریس نیز از یک ماتریس مربعی تشکیل شده، به کار می‌رود. برای حل معادله (۳-۱۸) با روبیدن پیشرو داریم:

$$
\begin{aligned}
&[C_0]_{New} = [A_0]^{-1}[C_0], \quad \vec{r_0}_{New} = [A_0]^{-1}\vec{r_0} \\
&[C_j]_{New} = \left[[A_j]-[B_j][C_{j-1}]_{New}\right]^{-1}[C_j], \quad j = 1,2,..,J-1 \\
&\vec{r_j}_{New} = \left[[A_j]-[B_j][C_{j-1}]_{New}\right]^{-1}\left[\vec{r_j}-[B_j]\overrightarrow{r_{j-1}}_{New}\right], \quad j = 1,2,..,J-1 \\
&\vec{r_J}_{New} = \vec{r_J}-[B_J]\overrightarrow{r_{J-1}}_{New}
\end{aligned}
\tag{۳-۲۲}
$$

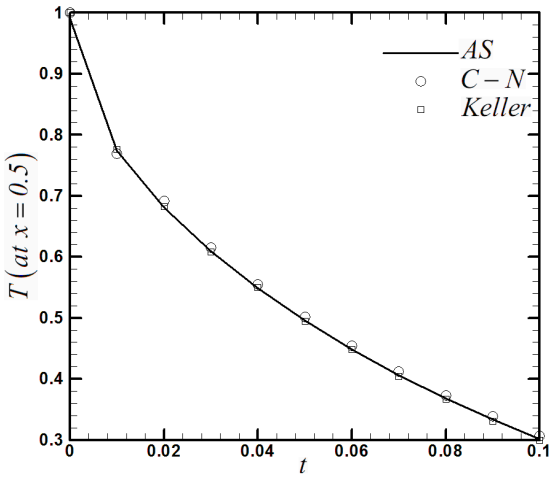
حال در روبیدن پسرو داریم:

$$
\begin{aligned}
&\vec{\delta_J} = \left[[A_J]-[B_J][C_{J-1}]_{New}\right]^{-1}\vec{r_J}_{New} \\
&\vec{\delta_j} = \vec{r_j}_{New} - [C_j]_{New}\overrightarrow{\delta_{j+1}}, \quad j = J-1, J-2, ..., 0
\end{aligned}
\tag{۳-۲۲}
$$

شکل ۳-۵ حل حاصل از معادله (۳-۱) را به ازای مقادیر معلوم داده شده در قسمت ۳-۳ با روش جعبه‌ای کلر نمایش می‌دهد. شکل ۳-۶ نیز حل‌های این معادله را که از روش‌های کرنک-نیکولسون، جعبه‌ای کلر و تحلیلی در $x = ۰/۵$ به دست آمده‌اند با هم مقایسه می‌کند. همانطور که از این شکل پیداست حل حاصل از روش کلر مطابقت بیشتری با حل تحلیلی دارد. برای آشنایی بیشتر با این روش مراجع [۴۶] و [۴۷] را ببینید.



شکل ۳-۵. نتایج حاصل از حل معادله (۳-۱) به روش کلر



شکل ۳-۶. مقایسه نتایج حاصل از روش‌های کرنک-نیکولسون و کلر و حل تحلیلی معادله (۳-۱) در $x = ۰/۵$

۳-۶ استفاده از روش پرتابی در حل یک معادله مقدار مرزی

برای توضیح این روش از معادله زیر استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} & y'' + y' + y = f(x,y) \\ & B.C: \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(L) = \beta \end{cases} \end{aligned} \tag{۲۳-۳}$$

برای حل معادله فوق ابتدا باید آن را به یک سیستم از معادلات مرتبه اول کاهش داد.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y' = z \\ z' + z + y = f(x,y) \end{cases} \\ & B.C: \begin{cases} y(0) = \alpha \\ z(L) = \beta \end{cases} \end{aligned} \tag{۲۴-۳}$$

پس برای حل معادلات (۳-۲۴) به کمک روش‌های گام به گام یک شرط اولیه دیگر مورد نیاز است. لذا شرط اولیه $z(۰) = \gamma$ حدس زده شده و دستگاه معادلات زیر به یکی از روش‌های گام به گام حل می‌گردد.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' + z + y = f(x,y) \end{cases}$$
$$B.C: \begin{cases} y(0) = \alpha \\ z(0) = \gamma \end{cases} \qquad (۲۵-۳)$$

با حل معادلات فوق مقداری برای $z(L) = y'(L)$ به دست می‌آید که با مقدار شرط مرزی داده شده در معادله (۳-۲۳) متفاوت است. لذا حدسی دیگر در نقطه $x = ۰$ برای z نیاز می‌باشد. اما مبنای حدس بعدی چیست؟ یکی از روش‌های موجود برای اینکه این حدس‌ها سیتماتیک باشند، استفاده از بسط تیلور است، بدین گونه که تابع ϕ را به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$\phi(\gamma) = z(L,\gamma) - \beta \qquad (۲۶-۳)$$

همانطور که از رابطه بالا پیداست، باید مقدار تابع ϕ صفر باشد. پس بسط تیلور آن را برابر صفر قرار داده تا تصحیح γ به گونه‌ای صورت گیرد که مقدار z در نقطه پایانی برابر با شرط مرزی گردد.

$$\phi(\underset{\Delta\gamma \to 0}{\gamma + \Delta\gamma}) = \phi(\gamma) + \frac{\partial \phi}{\partial \gamma}\Delta\gamma + \cdots = 0$$
$$\Delta\gamma = -\frac{\phi(\gamma)}{\frac{\partial \phi}{\partial \gamma}} = -\frac{z(L,\gamma) - \beta}{\frac{\partial z(L,\gamma)}{\partial \gamma}} \qquad (۲۷-۳)$$

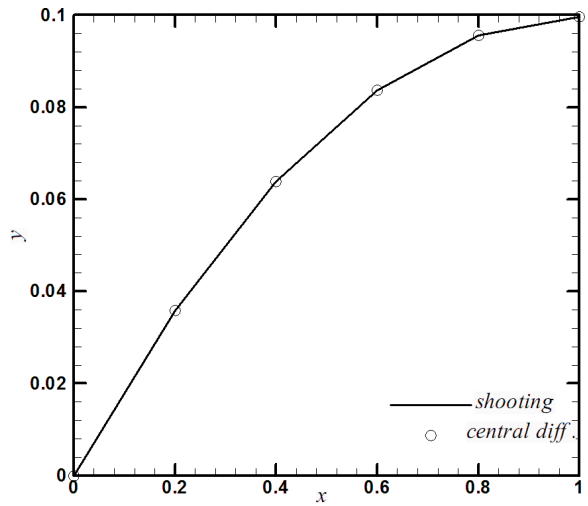
و در نهایت فرم تصحیح به صورت زیر است:

$$\gamma_{New} = \gamma_{Old} + \rho\Delta\gamma\ , \qquad 0 < \rho \le 1 \qquad (۲۸-۳)$$

حل تا آنجا ادامه می‌یابد که شرط مرزی $y'(L) = \beta$ ارضا شود.

به عنوان مثال معادله حاکم بر خیز یک تیر، معادله (۳-۲۹)، را درنظر بگیرید. در شکل ۳-۷ حل این معادله به دو روش پرتابی و تفاضل مرکزی مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد مطابقت شگفت انگیزی بین دو حل وجود دارد.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+0.2*Cosy=0.$$
$$B.C.:\begin{cases} y(0)=0 \\ \frac{dy}{dx}(x=1)=0 \end{cases} \qquad (۲۹-۳)$$



شکل ۳-۷. مقایسه حل معادله (۳-۲۷) به روش‌های پرتابی و تفاضل مرکزی

۳-۷ استفاده از روش پرتابی در حل دستگاه معادلات مقدار مرزی

در این قسمت حالت کلی روش پرتابی، که در حل دستگاه معادلات کاربرد دارد، تشریح می‌گردد. دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy_j}{dx}=f_j\left(x,y_1,y_2,\ldots,y_N\right),\quad x_0\le x\le x_f\,,\quad j=1,2,\ldots,N$$
$$B.C.:\begin{cases} y_j\left(x_0\right)=y_{j,0}\,,\quad j=1,2,\ldots,r \\ y_j\left(x_f\right)=y_{j,f}\,,\quad j=r+1,r+2,\ldots,N \end{cases} \qquad (۳۰-۳)$$

اگر $(n-r)$ شرط مرزی که وجود ندارند، حدس زده شود، می‌توان دستگاه را با یکی از روش‌های پیشرو (گام به گام) حل کرد. پس:

$$y_j\left(x_0\right)=\gamma_j\,,\quad j=r+1,r+2,\ldots,N \tag{۳۱-۳}$$

با استفاده از این شرایط اولیه و شرایط اولیه داده شده در معادله (۳-۳۰) دستگاه حل شده و بنابراین مقادیری برای $y_j\left(x_f\right),\quad j=r+۱,r+۲,\ldots,N$ به دست می‌آید که مسلما با مقادیر داده شده در معادله (۳-۳۰) متفاوت است. این بار برای اینکه بتوان حدس‌های بعدی را سیستماتیک کرد، استفاده از ماتریس ژاکوبین پیشنهاد می‌گردد:

$$\left[J\left(x_f,\vec{\gamma}\right)\right]=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_{r+1}}{\partial\gamma_{r+1}} & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial\gamma_{r+2}} & \cdots & \frac{\partial y_{r+1}}{\partial\gamma_N}\\ \frac{\partial y_{r+2}}{\partial\gamma_{r+1}} & \frac{\partial y_{r+2}}{\partial\gamma_{r+2}} & \cdots & \frac{\partial y_{r+2}}{\partial\gamma_N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_N}{\partial\gamma_{r+1}} & \frac{\partial y_N}{\partial\gamma_{r+2}} & \cdots & \frac{\partial y_N}{\partial\gamma_N}\end{bmatrix}_{x_f} \tag{۳۲-۳}$$

از آنجا بردار تغییرات حدس اولیه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\Delta\vec{\gamma}=\left[J\left(x_f,\vec{\gamma}\right)\right]^{-1}\delta\vec{y} \tag{۳۳-الف-۳}$$

$$\delta\vec{y}=-\begin{bmatrix}y_{r+1}\left(x_f,\gamma\right)-y_{r+1,f}\\ y_{r+2}\left(x_f,\gamma\right)-y_{r+2,f}\\ \vdots\\ y_N\left(x_f,\gamma\right)-y_{N,f}\end{bmatrix} \tag{۳۳-ب-۳}$$

و در پایان رابطه زیر برای به دست آوردن حدس جدید به کار می‌رود.

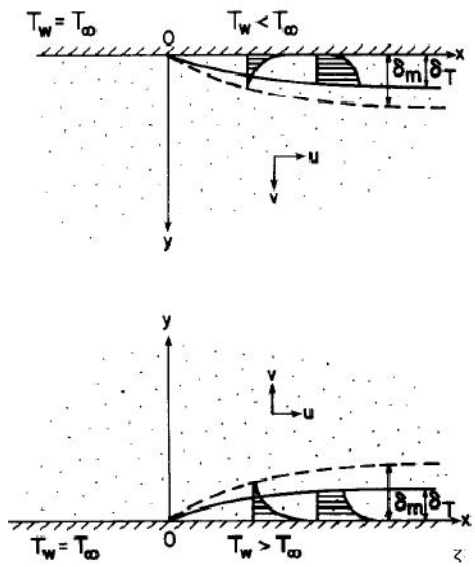
$$\vec{\gamma}_{New}=\vec{\gamma}_{Old}+\rho\Delta\vec{\gamma} \tag{۳۴-۳}$$

حل فوق تا آنجا ادامه پیدا می‌کند که $y_j\left(x_f\right),\quad j=r+۱,r+۲,\ldots,N$ برابر مقدارشان در معادله (۳-۳۰) شود.

در اینجا برای توضیح بیشتر این روش، حل معادلات حاکم بر لایه مرزی جابجایی آزاد در یک محیط متخلخل اشباع، بالای یک سطح غیر قابل نفوذ گرم یا پایین یک سطح سرد مورد نظر است (شکل ۳- ۸). پس از استفاده از متغیرهای تشابهی مناسب معادلات حاکم در این حالت مطابق زیر هستند [۲۶].

$$f''+\lambda\theta+\frac{\lambda-2}{3}\eta\theta'=0$$ (۳-۳۵-الف)

$$\theta''-\lambda\theta f'+\frac{\lambda+1}{3}f\theta'=0$$ (۳-۳۵-ب)



شکل ۳-۸. فیزیک مسئله و سیستم مختصات [۲۶]

در معادلات (۳-۳۵) η متغیر تشابهی، f و θ توابع جریان و دمای بی بعد، و λ توانی است که دمای صفحه با آن نسبت به فاصله از مبدأ تغییر می‌کند. این معادلات باید شرایط مرزی زیر را ارضا کنند.

$$\theta(0)=1 \quad \& \quad f(0)=0$$ (۳-۳۶-الف)

$$\theta(\infty)=0 \quad \& \quad f'(\infty)=0$$ (۳-۳۶-ب)

معادلات (۳-۳۵) دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپل شده برای f و θ با شرایط مرزی داده شده توسط معادلات (۳-۳۶) هستند. برای حل عددی با یک حدس سیتماتیک شیب‌ها در $\eta = ۰$ و روش پرتابی، مسئله به یک مسئله مقدار اولیه تبدیل شده و به کمک روش رانج-کوتا مرتبه ۴ مسئله مقدار اولیه حل می‌گردد.

برای این کار با تعریف $f' = g$ و $\theta' = \varphi$ دستگاه معادلات به سیستمی از معادلات مرتبه اول تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} f' = g \\ g' = -\lambda\theta - \dfrac{\lambda - 2}{3}\eta\varphi \\ \theta' = \varphi \\ \varphi' = \lambda\theta g - \dfrac{1+\lambda}{3} f\varphi \end{cases} \qquad (۳-۳۷)$$

حال اگر فاصله دور از صفحه $\eta_\infty = ۸$ درنظر گرفته شود، معادلات فوق باید شرایط مرزی زیر را ارضا کنند:

$$\theta(0) = 1 \quad \& \quad f(0) = 0 \qquad (۳-۳۸-الف)$$

$$\theta(8) = 0 \quad \& \quad g(8) = 0 \qquad (۳-۳۸-ب)$$

پس برای معادلات اول و سوم از دستگاه معادلات (۳-۳۷) مقدار تابع در نقطه اولیه داده شده، در حالی که این شرایط برای معادلات دوم و چهارم وجود ندارند و باید حدس زده شوند. برای حل بدین گونه عمل می‌گردد که ابتدا ۲ شرط اولیه برای g و دو شرط اولیه برای φ حدس می‌زنند. فرض کنید حدس‌ها به صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} g_0 &= \left[g_{0,1} \quad g_{0,2} \right] \\ \varphi_0 &= \left[\varphi_{0,1} \quad \varphi_{0,2} \right] \end{aligned} \qquad (۳-۳۹)$$

معادلات مذکور بار اول با شرط اولیه $g_{0,1}$ و بار دوم با شرط اولیه $g_{0,2}$ برای g و در حالی که در هر بار شرط اولیه $\varphi_{0,2}$ برای φ لحاظ گردیده، با استفاده از روش رانج-کوتا حل شده و تغییرات مقادیر g و θ در نقطه انتهایی بر حسب مقدار اولیه g به دست می‌آید.

$$\begin{cases} g_0 = g_{0,1} \;\&\; \varphi_0 = \varphi_{0,2} \xrightarrow{RK4} \theta(8) = \theta(8, g_{0,1}, \varphi_{0,2}) \\ g_0 = g_{0,2} \;\&\; \varphi_0 = \varphi_{0,2} \xrightarrow{RK4} \theta(8) = \theta(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \theta(8)}{\partial g_0} = \frac{\theta(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}) - \theta(8, g_{0,1}, \varphi_{0,2})}{g_{0,2} - g_{0,1}} \qquad (۳-۴۰-الف)$$

به همین ترتیب

$$\begin{cases} g_0 = g_{0,1} \;\&\; \varphi_0 = \varphi_{0,2} \xrightarrow{RK4} g(8) = g(8, g_{0,1}, \varphi_{0,2}) \\ g_0 = g_{0,2} \;\&\; \varphi_0 = \varphi_{0,2} \xrightarrow{RK4} g(8) = g(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial g(8)}{\partial g_0} = \frac{g(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}) - g(8, g_{0,1}, \varphi_{0,2})}{g_{0,2} - g_{0,1}} \qquad (۳-۴۰-ب)$$

و

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi_{0,1} \;\&\; g_0 = g_{0,2} \xrightarrow{RK4} \theta(8) = \theta(8, g_{0,2}, \varphi_{0,1}) \\ \varphi_0 = \varphi_{0,2} \;\&\; g_0 = g_{0,2} \xrightarrow{RK4} \theta(8) = \theta(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \theta(8)}{\partial \varphi_0} = \frac{\theta(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}) - \theta(8, g_{0,2}, \varphi_{0,1})}{\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}} \qquad (۳-۴۰-ج)$$

و نیز

$$\begin{cases} \varphi_0 = \varphi_{0,1} \;\&\; g_0 = g_{0,2} \xrightarrow{RK4} g(8) = g(8, g_{0,2}, \varphi_{0,1}) \\ \varphi_0 = \varphi_{0,2} \;\&\; g_0 = g_{0,2} \xrightarrow{RK4} g(8) = g(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial g(8)}{\partial \varphi_0} = \frac{g(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}) - g(8, g_{0,2}, \varphi_{0,1})}{\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1}} \qquad (۳-۴۰-د)$$

ماتریس ژاکوبین طبق تعریف معادله (۳-۳۲) به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$[J]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g(8)}{\partial g_0} & \dfrac{\partial g(8)}{\partial \varphi_0} \\ \dfrac{\partial \theta(8)}{\partial g_0} & \dfrac{\partial \theta(8)}{\partial \varphi_0} \end{bmatrix} \tag{۴۱-۳}$$

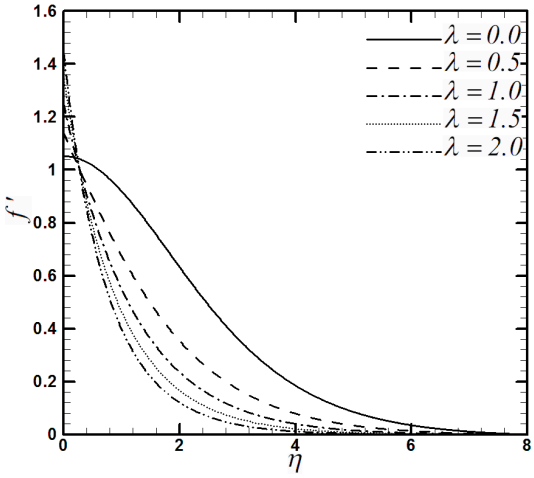
سپس تغییر مقدار تخمینی شیب‌ها طبق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \Delta g_0 \\ \Delta \phi_0 \end{bmatrix}=[J]^{-1}\begin{bmatrix} -g\left(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}\right) \\ -\theta\left(8, g_{0,2}, \varphi_{0,2}\right) \end{bmatrix} \tag{۴۲-۳}$$

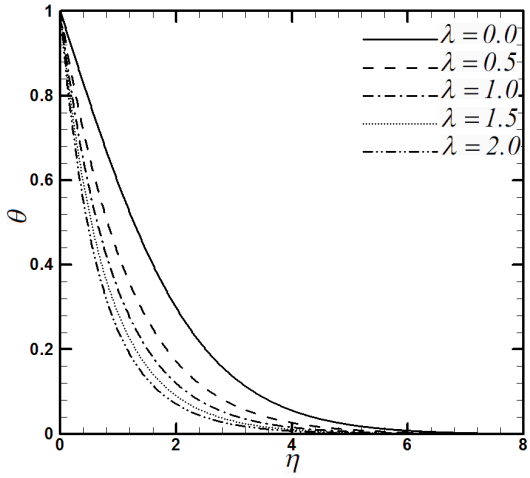
در نهایت فرم تصحیح زیر به کار می‌رود.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} g_{0,1} \\ \varphi_{0,1} \end{bmatrix}_{New}=\begin{bmatrix} g_{0,2} \\ \varphi_{0,2} \end{bmatrix}_{Old} \\ &\begin{bmatrix} g_{0,2} \\ \varphi_{0,2} \end{bmatrix}_{New}=\begin{bmatrix} g_{0,2} \\ \varphi_{0,2} \end{bmatrix}_{Old}+\rho\begin{bmatrix} \Delta g_0 \\ \Delta \varphi_0 \end{bmatrix} \qquad \& \qquad 0<\rho\le 1 \end{aligned} \tag{۴۳-۳}$$

حل تا آنجا ادامه پیدا می‌کند که هر دو مقدار $g\left(۸, g_{۰,۲}, \varphi_{۰,۲}\right)$ و $\theta\left(۸, g_{۰,۲}, \varphi_{۰,۲}\right)$ از مقدار خطا کمتر شود. شکل‌های ۳-۹ و ۳-۱۰ تغییرات سرعت و دمای بی بعد را با η نمایش می‌دهند.



شکل ۳-۹. توزیع سرعت بی بعد بر حسب η برای مقادیر انتخابی λ



شکل ۳-۱۰. توزیع دمای بی بعد بر حسب η برای مقادیر انتخابی λ

۴

لایه مرزی جابجایی آزاد در یک محیط متخلخل اشباع در مجاورت سطوح مایل غیر قابل نفوذ

۴-۱ مقدمه

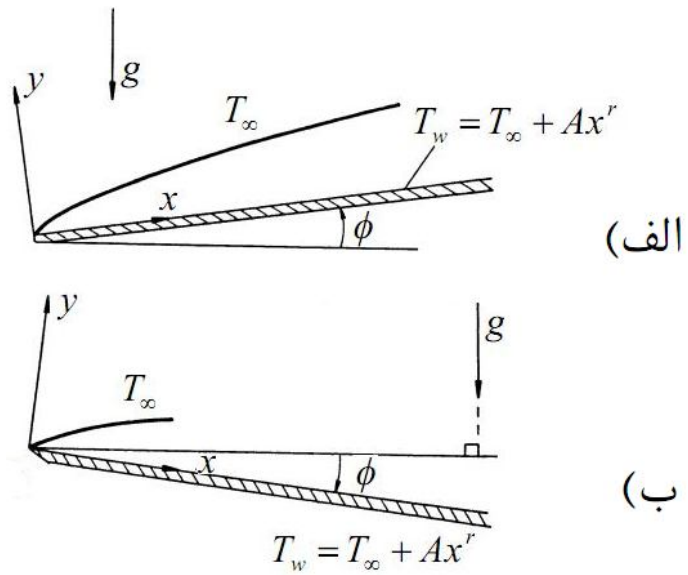
انتقال حرارت همرفتی در یک محیط متخلخل اشباع به خاطر کاربردهای زیاد در سیستم‌های ژئوفیزیک و انرژی، مورد توجه زیادی قرار گرفته است. از قبیل این کاربردها می‌توان به سیستم انرژی زمین‌گرمایی، آنالیز آلودگی آب زیر زمینی، عایق سازی ساختمان‌ها، تولید کاغذ و منابع ذخیره نفتی اشاره کرد. برخلاف جابجایی آزاد از سطوح افقی و عمودی در یک محیط متخلخل، حالت صفحه مایل کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

هدف این فصل مطالعه جابجایی آزاد حول یک صفحه تخت مایل دلخواه با دمای متغیر در یک محیط متخلخل اشباع است. دمای صفحه به صورت توانی نسبت به فاصله از لبه پیشرو تغییر می‌کند. در حل مسئله از سیستم مختصاتی که توسط پاپ و نا [۳۵] معرفی شده، استفاده می‌گردد. سپس دستگاه دو معادله‌ای حاصل به کمک روش تفاضل محدود پیشنهاد شده توسط کلر [۴۷] برای حالات انحراف مثبت صفحه $\left(۰^\circ \le \phi \le ۹۰^\circ\right)$ و انحرافات منفی $\left(\phi \le ۰^\circ\right)$ حل می‌گردد. تاثیر پارامتر انحراف بر روی ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عد ناسلت و نیز پروفایل‌های سرعت بی بعد و دمای بی بعد مورد بررسی قرار گرفته است. این در حالی است که جابجایی آزاد بر روی صفحات افقی و عمودی قبلا به ترتیب توسط چنگ و چانگ [۲۶]، و چنگ و مینکوویکز [۹] حل شده که برای معتبر سازی داده‌های حاضر به کار می‌رود.

۴-۲ معادلات حاکم

مسئله لایه مرزی جابجایی آزاد پایدار از یک سطح مایل دلخواه در مجاورت یک محیط متخلخل با دمای یکنواخت T_∞ را در نظر بگیرید. فرض می‌شود که توزیع دمای سطح به صورت توانی باشد. زاویه انحراف، مثبت $\left(۰^\circ \le \phi \le ۹۰^\circ\right)$ یا اندکی منفی $\left(\phi \le ۰^\circ\right)$ است. مدل فیزیکی و سیستم مختصات در

شکل ۴-۱ آورده شده که x و y دستگاه مختصات کارتزین در طول صفحه و عمود بر آن بوده و جهت مثبت y به طرف داخل محیط متخلخل است.



شکل ۴-۱. هندسه مسئله و دستگاه مختصات، الف) انحراف مثبت، ب) انحراف منفی

اگر فرض شود که الف) جریان به اندازه کافی آرام است طوری که سیال همرفتی و محیط متخلخل در هر نقطه در تعادل ترمودینامیکی هستند، ب) دمای سیال در هر نقطه پایین‌تر از نقطه جوش است، ج) به جز تغییر چگالی سیال با دما، دیگر خواص سیال و محیط متخلخل ثابت هستند، د) تخمین دارسی-بوزینسک لحاظ می‌شود، معادلات حاکم به صورت زیر هستند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (۱-۴)$$

$$u = -\frac{K}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x} \pm \rho g Sin\,\phi\right) \qquad (۲-۴)$$

$$v = -\frac{K}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g Cos\,\phi\right) \qquad (۳-۴)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha_m\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \qquad (۴-۴)$$

$$\rho=\rho_\infty\left[1-\beta\left(T-T_\infty\right)\right] \qquad (۵-۴)$$

که علامت "+" و "-" در معادله (۴-۲) به ترتیب بر انحرافات مثبت و منفی سطح دلالت دارند. در معادلات (۴-۱) تا (۴-۵) u و v به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت طولی و نرمال، ρ، μ، β، چگالی، ویسکوزیته و ضریب انبساط دمایی سیال همرفتی، K نفوذ پذیری محیط متخلخل، $\alpha_m \equiv k_m/\left(\rho c\right)_f$ پخش گرمایی معادل با $k_m = k_A$، ضریب هدایت حرارتی محیط متخلخل بر طبق معادله (۲-۲۷) و $(\rho c)_f$، حاصلضرب چگالی و گرمای مخصوص سیال همرفتی است. T، P، و g نیز دما، فشار و شتاب گرانش هستند. زیر نویس "∞" نیز به شرایط در فاصله بینهایت اشاره دارد. شرایط مرزی مسئله عبارتند از

$$v=0,\quad T=T_w=T_\infty+Ax^r \quad on\ y=0 \qquad (۶-۴)$$

$$u=0,\quad T=T_\infty \qquad as\ y\to\infty \qquad (۷-۴)$$

با مشتق گیری از معادلات (۴-۲) و (۴-۳) به ترتیب نسبت به y و x معادلات زیر حاصل می-گردد.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{K}{\mu}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}\pm\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)gSin\phi\right) \qquad (۸-۴)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{K}{\mu}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)gCos\phi\right) \qquad (۹-۴)$$

بدین ترتیب با کم کردن معادله (۴-۹) از معادله (۴-۸) ترم فشار از معادلات مومنتوم حذف می-شود:

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{K}{\mu}\left(\pm\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)gSin\phi-\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)gCos\phi\right) \qquad (۱۰-۴)$$

حال با اعمال معیار بوزینسک بر معادله (۴-۱۰) و سپس لحاظ کردن تخمین‌های لایه مرزی، معادلات زیر حاصل شده که با معادله پیوستگی سه معادله اصلی مسئله را تشکیل می‌دهند.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{gK\beta}{\upsilon}\left(\pm\frac{\partial T}{\partial y}Sin\phi-\frac{\partial T}{\partial x}Cos\phi\right) \qquad (۱۱-۴)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha_m\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (۱۲-۴)$$

برای تبدیل معادلات (۴-۱)، (۴-۱۱) و (۴-۱۲) به معادلاتی که جریان جابجایی طبیعی را از صفحه مایل دلخواه در محیط متخلخل توصیف کنند، از پارامتر بی بعدی که به وسیله پاپ و نا [۳۵] معرفی شد، استفاده می‌گردد.

$$\zeta=\frac{\left(Ra\left|Sin\phi\right|\right)^{1/2}}{\left(Ra\,Cos\phi\right)^{1/3}} \qquad (۱۳-۴)$$

که

$$Ra=gK\beta\left(T_w-T_\infty\right)x/\alpha_m\upsilon \qquad (۱۴-۴)$$

عدد رایلی[1] محلی است. ζ، مقاومت نسبی مؤلفه‌های طولی به عمودی نیروی شناوری را که به طور همزمان به لایه مرزی اعمال می‌شوند، توصیف می‌کند. همچنین به عنوان مؤلفه طولی برای یک زاویه انحراف ثابت بکار می‌رود. بعلاوه متغیرهای پیش رو مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\xi=\frac{\zeta}{1+\zeta},\quad \eta=\left(\frac{y}{x}\right)\lambda \qquad (۱۵-۴)$$

که

$$\lambda=\left(Ra\,Cos\phi\right)^{1/3}+\left(Ra\left|Sin\phi\right|\right)^{1/2} \qquad (۱۶-۴)$$

با توجه به معادلات (۴-۱۳) تا (۴-۱۵) می‌توان نشان داد که در یک ϕ معین،

[1] **Rayleigh number**

$$\xi = \frac{1}{1 + constant.x^{-(r+1)/6}}$$ (۴-۱۷-الف)

$$constant = \frac{(Cos\,\phi)^{1/3}}{|Sin\,\phi|^{1/2}} \left(\frac{gK\beta A}{\upsilon \alpha_m} \right)^{-1/6}$$ (۴-۱۷-ب)

لذا ξ فاصله از لبه پیشرو را برای یک زاویه انحراف بخصوص نمایش می‌دهد. در ضمن ξ به عنوان پارامتر انحراف در یک رایلی ثابت، با تغییر زاویه از $\phi = ۰^\circ$ تا $\phi = ۹۰^\circ$ ، از $\xi = ۰$ تا $\xi = ۱$ تغییر می‌کند. حال می‌توان تابع جریان و دمای بی بعد را به صورت زیر تعریف کرد.

$$f(\xi,\eta) = \frac{\psi}{\alpha_m \lambda}, \quad \theta(\xi,\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$ (۴-۱۸)

که ψ تابع جریان بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$ (۴-۱۹)

با مشتق گیری از معادلات فوق مؤلفه‌های سرعت به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$u = \frac{\alpha_m \lambda^2}{x} f'$$ (۴-۲۰-الف)

$$v = -\frac{\alpha_m}{x} \left\{ \left(\frac{r+1}{6} \right) \left(2\lambda + \left(Ra|Sin\,\phi| \right)^{1/2} \right) \left(f + \eta f' \right) - \lambda \eta f' + \left(\frac{r+1}{6} \right) \left(RaCos\,\phi \right)^{1/3} \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right\}$$ (۴-۲۰-ب)

و در نهایت بر اساس متغیرهای جدید، معادلات تغییر شکل یافته به صورت زیر می‌باشند. (اثبات کامل معادلات در پیوست الف آمده است.)

$$f'' + (1-\xi)^3 \left\{ r\theta + \eta\theta' \left[\frac{r+1}{6}(2+\xi) - 1 \right] \right\} = \pm \xi^2 \theta' - \left(\frac{r+1}{6} \right) \xi (1-\xi)^4 \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$$ (۴-۲۱)

$$\theta'' + \frac{r+1}{6}(2+\xi) f\theta' - rf'\theta = \left(\frac{r+1}{6} \right) \xi (1-\xi) \left(f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)$$ (۴-۲۲)

که باید شرایط مرزی زیر را ارضا کنند.

$$f=0,\quad \theta=1 \quad on\,\eta=0 \tag{۲۳-۴}$$

$$f'=0,\quad \theta=0 \quad as\,\eta\to\infty \tag{۲۴-۴}$$

پرایم‌ها مشتق نسبت به η را نمایش می‌دهند. همانطور که پیداست برای حل معادلات (۴-۲۱) و (۴-۲۲) یک شرط اولیه در راستای ξ مورد نیاز است، این شرط از حل معادلات صفحه افقی $\left(\phi=۰^\circ, \xi=۰\right)$ به دست می‌آید.

از سوی دیگر معادلات (۴-۲۱) و (۴-۲۲) با $\xi=۰$ $\left(\phi=۰^\circ\right)$ به معادلات حاکم بر صفحه افقی در یک محیط متخلخل که توسط چنگ و چانگ [۲۶] ارائه شده‌اند، کاهش می‌یابد.

$$f''+r\theta+\frac{r-2}{3}\eta\theta'=0 \tag{۲۵-۴}$$

$$\theta''+\frac{r+1}{3}f\theta'-rf'\theta=0 \tag{۲۶-۴}$$

برای مورد حدی دیگر یعنی $\xi=۱$ $\left(\phi=۹۰^\circ\right)$ معادلات (۴-۲۱) و (۴-۲۲) به معادلات بیان شده توسط چنگ و مینکوویکز [۹] برای صفحه قائم تقلیل می‌یابند.

$$f''=\theta' \tag{۲۷-۴}$$

$$\theta''+\frac{r+1}{2}f\theta'-rf'\theta=0 \tag{۲۸-۴}$$

حال می‌توان کمیت‌های ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت را که به صورت زیر تعریف می‌شوند مورد بررسی قرار داد.

$$C_f=\frac{\tau_w}{\rho U_c^{\,2}},\quad Nu=\frac{xq_w}{k_m\left(T_w-T_\infty\right)} \tag{۲۹-۴}$$

در معادله فوق U_c سرعت مشخصه، τ_w اصطکاک پوسته‌ای و q_w شار حرارتی بر روی دیواره است، که به صورت زیر داده می‌شوند.

$$U_c = \left(\alpha_m \upsilon / x^2\right)^{1/2}$$ (۴-۳۰-الف)

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$ (۴-۳۰-ب)

$$q_w = -k_m \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$ (۴-۳۰-ج)

بعلاوه با توجه به معادله (۴-۱۱) رابطه زیر بین شیب پروفایل‌های سرعت مماسی و دما بر روی سطح برقرار است.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{gK\beta}{\upsilon}\left(\pm\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} Sin\phi - \left\{Ar\, x^{r-1}\right\} Cos\phi\right)$$ (۴-۳۱)

با ترکیب معادلات (۴-۱۵)، (۴-۱۸)، (۴-۲۹) و (۴-۳۰) روابط نهایی زیر برای ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت بر حسب متغیرهای جدید به دست می‌آید.

$$\frac{C_f}{\left(Ra\, Cos\phi\right)} = \left(1+\zeta\right)^3 f''\left(\xi,0\right)$$ (۴-۳۲)

$$\frac{Nu}{\left(Ra\, Cos\phi\right)^{1/3}} = \left(1+\zeta\right)\left[-\theta'\left(\xi,0\right)\right]$$ (۴-۳۳)

اثبات معادلات (۴-۳۲) و (۴-۳۳) نیز در پیوست الف آمده است.

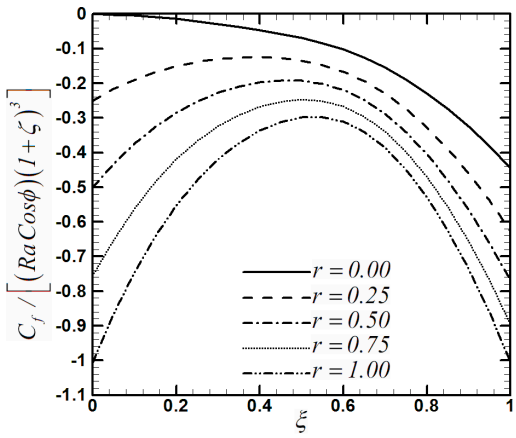
۴-۳ نتایج و بحث

معادلات دیفرانسیل کوپل شده (۴-۲۱) و (۴-۲۲) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی و غیر خطی تشکیل می‌دهند که باید شرایط مرزی معادلات (۴-۲۳) و (۴-۲۴) را ارضا کنند. همانطور که در فصل ۳ ذکر گردید، این معادلات به صورت عددی به کمک روش عددی کلر [۴۷] حل می-شوند. گسسته سازی معادلات فوق در پیوست ب آمده است. با توجه به تعریف ξ، حل عددی در

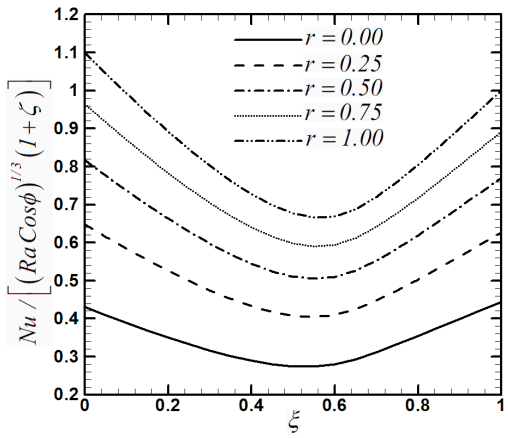
$\xi = ۰$ شروع شده و به صورت گام به گام تا $\xi = ۱$ ادامه می‌یابد. برای شروع حل عددی، از حل تشابهی جابجایی آزاد بر روی صفحه افقی که در معادلات (۴-۲۵) و (۴-۲۶) آمده، استفاده می‌گردد. حل معادلات برای $۰ \leq r \leq ۱$ که در هر دو حالت افقی و عمودی، به ترتیب توسط چنگ و چانگ [۲۶] و چنگ و مینکوویکز [۹] ارائه شده، صورت می‌گیرد. برای اثبات درستی محاسبات نیز از نتایج چنگ و مینکوویکز [۹] استفاده می‌گردد.

۴-۳-۱ انحرافات زاویه‌ای مثبت

نتایج عددی برای ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت بر حسب ξ برای rهای مختلف در شکل‌های ۴-۲ و ۴-۳ آمده است. جدول ۴-۱ مقادیر حاصل از حل تشابهی معادلات (۴-۲۷) و (۴-۲۸) و نتایج حاصل از حل عددی را ارائه می‌دهد. تشابه شگفت انگیزی بین حل عددی حاصل و حل موجود دیده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌گردد، در حالت دما ثابت قدر مطلق ضریب اصطکاک پوسته‌ای با افزایش زاویه به علت افزایش نیروی شناوری در جهت مماس بر صفحه، اکیدا صعودی است. اما در حالات دیگر، همانطور که معادله (۴-۳۱) نشان می‌دهد، تغییرات دما بر روی صفحه نیز اثر گذار بوده و باعث تغییر الگوی نمودار می‌شود. مختصات نقطه اکسترمم این منحنی‌ها در جدول ۴-۲ آورده می‌شود. همچنین با افزایش r قدر مطلق ضریب اصطکاک پوسته‌ای در زاویه انحراف ثابت، افزایش می‌یابد. دلیل این امر افزایش نیروی شناوری حاصل از اختلاف دما است. در ضمن بر مقدار عدد ناسلت نیز با افزایش r افزوده می‌شود. بعلاوه در تمام موارد عدد ناسلت با افزایش ξ ابتدا کاهش یافته و در $\xi \approx ۰/۵۵$ که مؤلفه‌های مماسی و نرمال با هم قابل قیاس هستند، به مینیمم می‌رسد، سپس دوباره با سیر صعودی همراه است.



شکل ۴-۲. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ برای انحراف مثبت



شکل ۴-۳. تغییرات عدد ناسلت با ξ برای انحراف مثبت

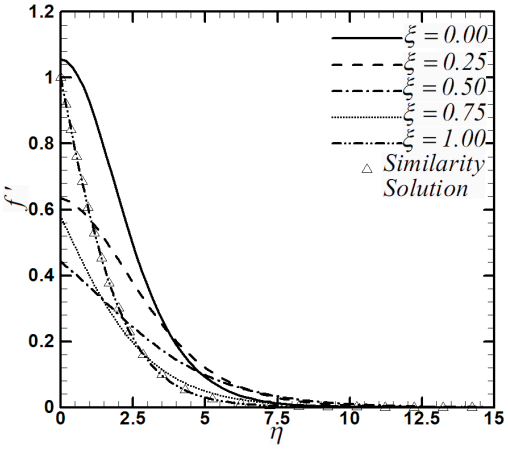
جدول ۴-۱. مقایسه مقادیر $-\theta'(0)$ ارائه شده توسط چنگ و مینکوویکز [۹] و نتایج حاضر در $\xi = ۱$

r	$-\theta'(0)$ [۹]	$-\theta'(0)$ (نتایج حاضر)
۰/۰۰	۰/۴۴۴	۰/۴۴۴
۰/۲۵	۰/۶۳۰	۰/۶۲۷
۰/۵۰	۰/۷۶۱	۰/۷۶۴
۰/۷۵	۰/۸۹۲	۰/۸۹۲
۱/۰۰	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰

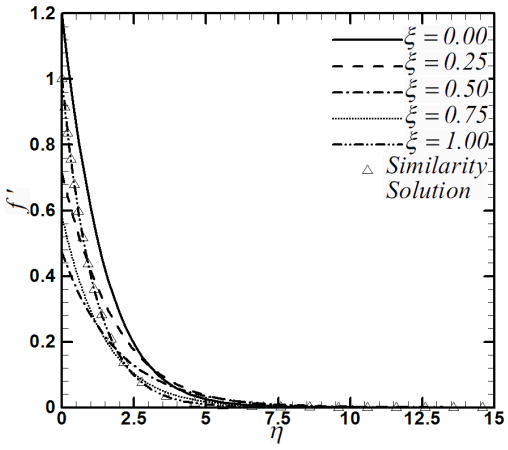
جدول ۴-۲. مختصات نقاط اکسترمم شکل ۴-۲

r	$\xi_{ext}\big\|_{C_f}$	$C_{f,ext}$
۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰۰۰
۰/۲۵	۰/۳۹	-۰/۱۲۴۳
۰/۵۰	۰/۴۷	-۰/۱۹۱۳
۰/۷۵	۰/۵۰	-۰/۲۴۶۶
۱/۰۰	۰/۵۲	-۰/۲۹۶۷

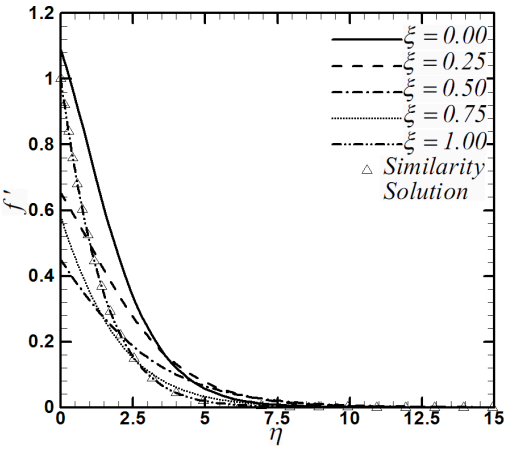
پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد به ازای مقادیر گوناگون r و ξ در شکل‌های ۴-۴ تا ۴-۱۳ آمده است. پروفایل‌های مربوط به صفحات افقی و عمودی نیز آورده شده که با حل تشابهی مطابقت دارد.



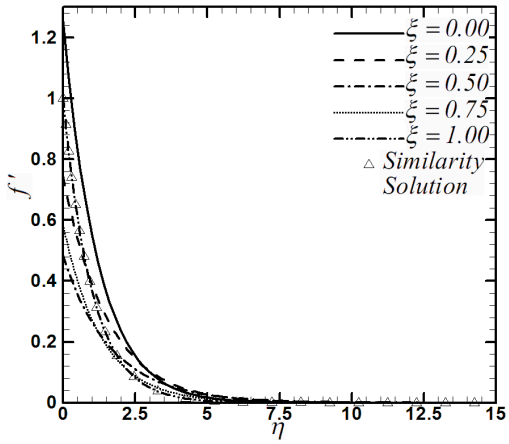
شکل ۴-۴. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۰/۰۰$ در حالت انحراف مثبت



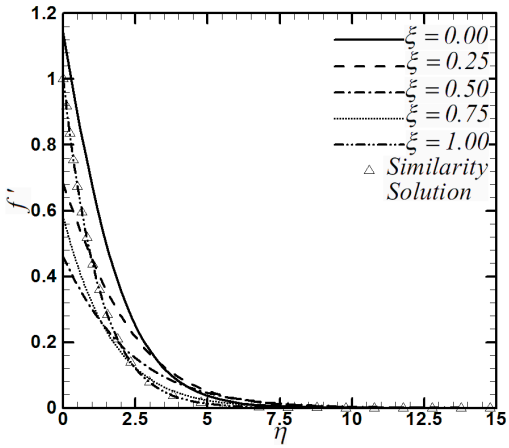
شکل ۴-۷. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۰/۷۵$ در حالت انحراف مثبت



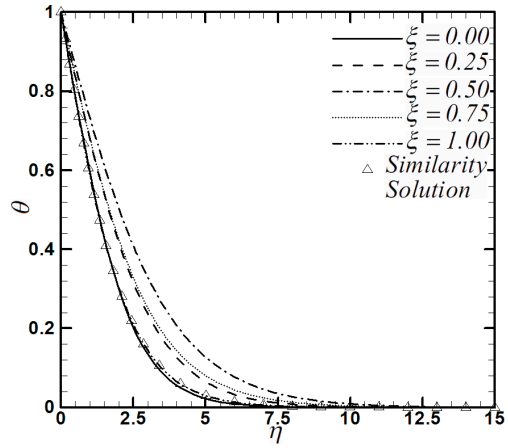
شکل ۴-۵. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۰/۲۵$ در حالت انحراف مثبت



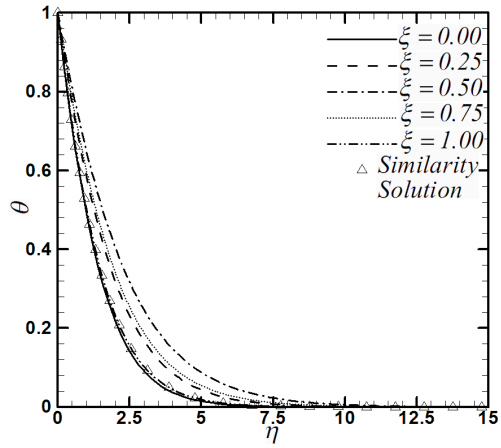
شکل ۴-۸. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۱/۰۰$ در حالت انحراف مثبت



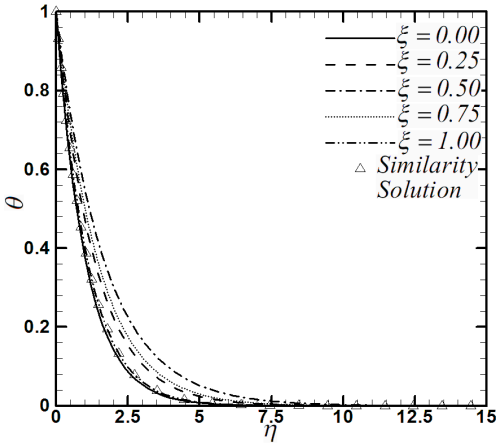
شکل ۴-۶. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۰/۵۰$ در حالت انحراف مثبت



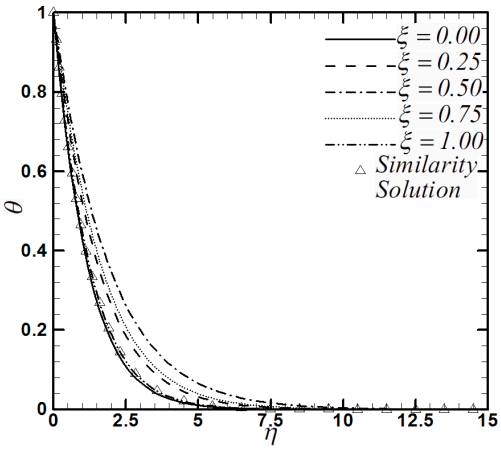
شکل ۴-۹. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۰/۰۰$ در حالت انحراف مثبت



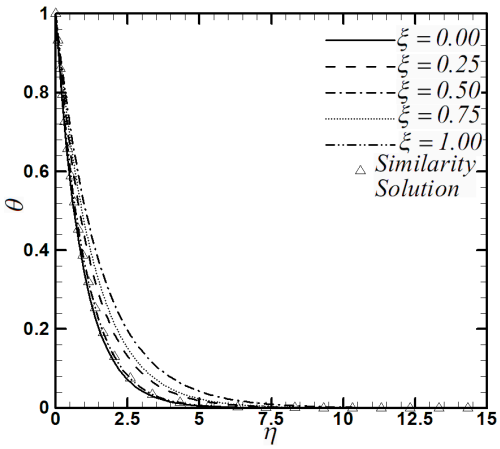
شکل ۴-۱۰. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۰/۲۵$ در حالت انحراف مثبت



شکل ۴-۱۲. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۰/۷۵$ در حالت انحراف مثبت



شکل ۴-۱۱. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۰/۵۰$ در حالت انحراف مثبت



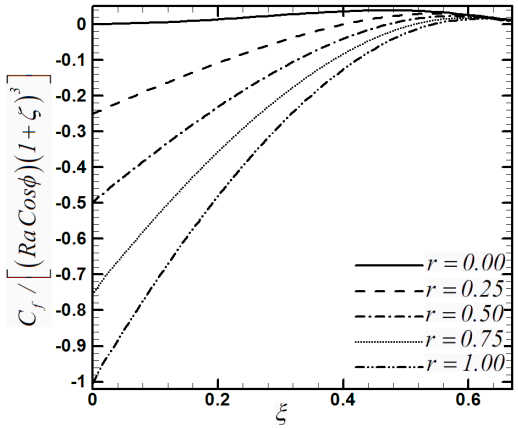
شکل ۴-۱۳. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰۰$ در حالت انحراف مثبت

همانطور که از شکل‌های ۴-۴ تا ۴-۸ پیداست به ازای یک ξ معین، با افزایش r شیب پروفایل-های سرعت بی بعد افزایش یافته است. این موضوع نشان دهنده افزایش ضریب اصطکاک پوسته‌ای نیز بوده و شکل ۴-۲ نیز این مسئله را تأیید می‌کند. همچنین از این شکل‌ها مشاهده می‌گردد که در تمام ξها به جز $\xi = ۱$ با افزایش قدر مطلق r، $f'(۰)$ افزایش می‌یابد که دلیل آن افزایش نیروی شناوری است. دلیل ثابت ماندن $f'(۰)$ با تغییر r در $\xi = ۱$، منطبق بودن پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد در $\phi = ۹۰^\circ$ بوده که منجر به $f'(۰) = ۱$ به ازای rهای گوناگون می‌گردد.

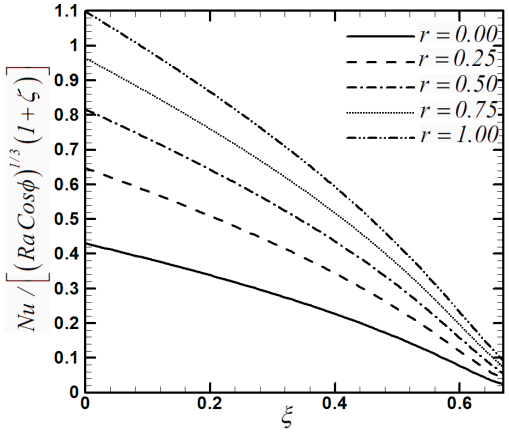
بعلاوه شکل‌های ۴-۹ تا ۴-۱۳ نشان می‌دهند که با افزایش r در یک ξ معین شیب پروفایل‌های دمای بی بعد نیز افزایش یافته که افزایش عدد ناسلت با r را تأیید می‌کند. علاوه بر این به ازای تمام ξها با افزایش r، کاهش در ضخامت لایه مرزی مومنتوم و گرمایی مشاهده می‌شود.

۴-۳-۲ انحرافات زاویه‌ای منفی

برای انحرافات منفی انتظار می‌رود با پیشروی در طول صفحه، لایه مرزی جدا شود، زیرا نیروی شناوری به سمت بالای سطح وارد شده و باعث ایجاد جریان برگشتی می‌گردد. هنگامی که سرعت صفحه به مقادیر منفی می‌رسد، سیال شروع به حرکت به سمت بالای شیب کرده، باعث جدایش لایه مرزی می‌شود. بنابراین معادلات لایه مرزی قبل از نقطه جدایش شکسته شده و به طور کلی یک مقیاس گذاری جدید در ناحیه جدایش لازم است. بنابراین ξای که معادلات لایه مرزی در آن شکسته می‌شوند، تنها تخمینی از نقطه جدایش بوده و بنابراین با $(\xi_s)_{approx}$ مشخص می‌گردد. از حل معادلات این مقدار $(\xi_s)_{approx} \approx ۰/۶۷$ بوده ، که حل به ازای مقادیر بعد از آن همگرا نمی‌شود.



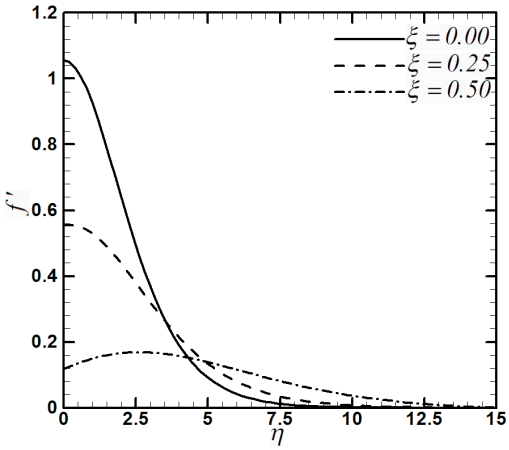
شکل ۴-۱۴. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ برای انحراف منفی



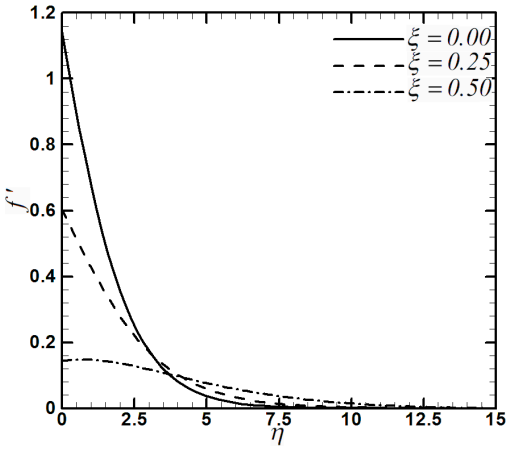
شکل ۴-۱۵. تغییرات عدد ناسلت با ξ برای انحراف منفی

نمودار تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت برای زوایای انحراف منفی به ترتیب در شکل‌های ۴-۱۴ و ۴-۱۵ آمده است. در این حالت نیز در یک ξ معین با افزایش r ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت افزایش می‌یابند.

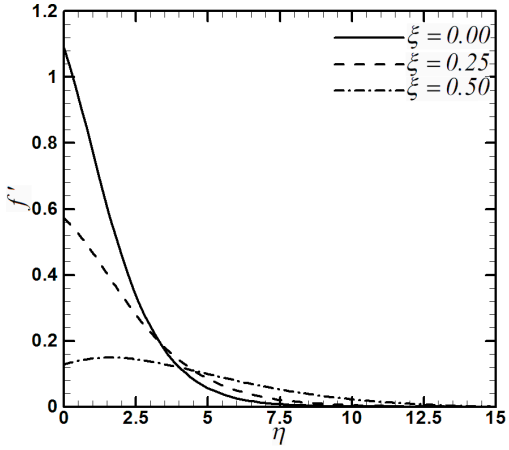
در پایان پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد به ازای rهای مختلف و $\xi =$ ۰,۰/۲۵,۰/۵۰ در شکل‌های ۴-۱۶ تا ۴-۲۵ آمده است.



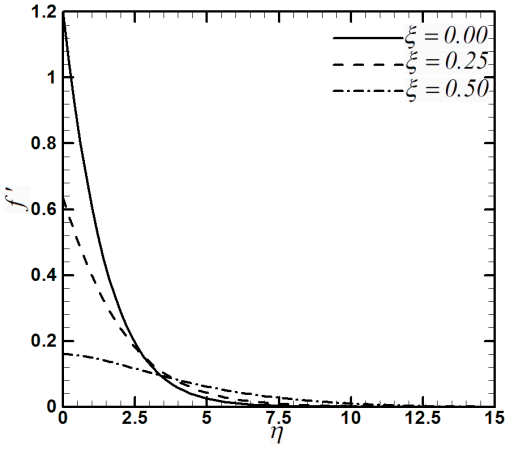
شکل ۴-۱۶. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r =$ ۰/۰۰ در حالت انحراف منفی



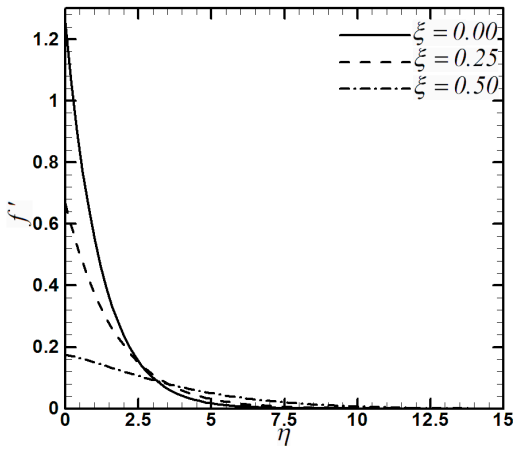
شکل ۴-۱۸. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r =$ ۰/۵۰ در حالت انحراف منفی



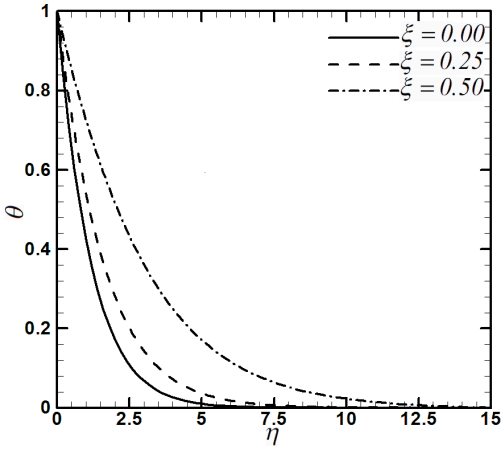
شکل ۴-۱۷. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r =$ ۰/۲۵ در حالت انحراف منفی



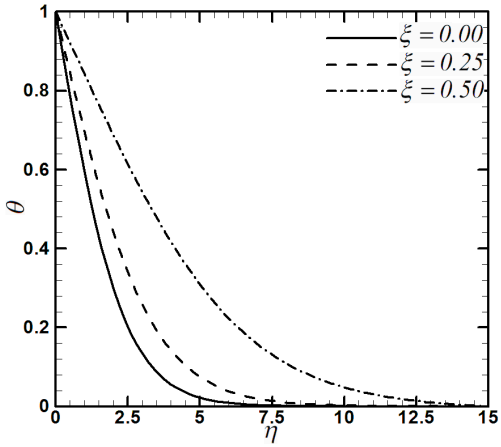
شکل ۴-۱۹. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r =$ ۰/۷۵ در حالت انحراف منفی



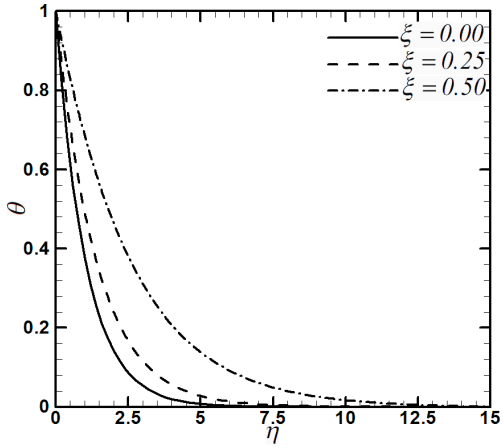
شکل ۴-۲۰. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۱/۰۰$ در حالت انحراف منفی



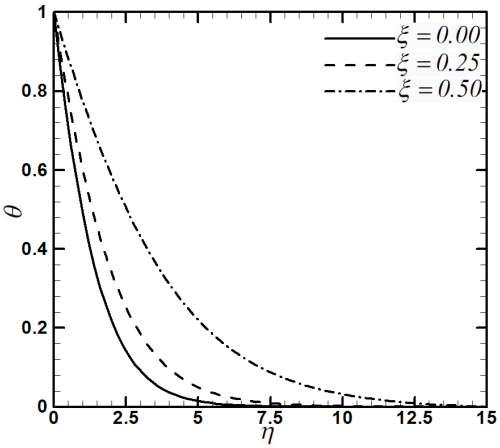
شکل ۴-۲۳. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۰/۵۰$ در حالت انحراف منفی



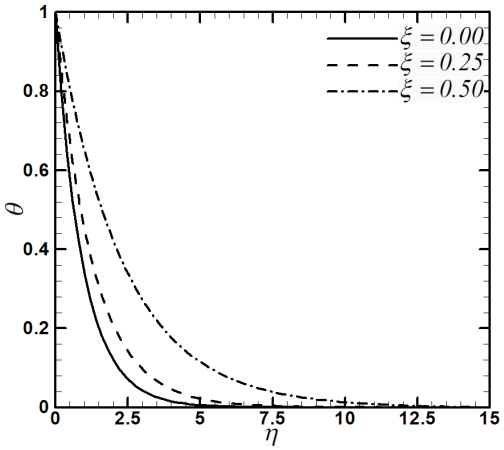
شکل ۴-۲۱. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۰/۰۰$ در حالت انحراف منفی



شکل ۴-۲۴. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۰/۷۵$ در حالت انحراف منفی



شکل ۴-۲۲. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۰/۲۵$ در حالت انحراف منفی



شکل ۴-۲۵. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰۰$ در حالت انحراف منفی

همانطور که از شکل‌های ۴-۱۶ تا ۴-۲۵ مشاهده می‌شود، در یک r معین به ازای ξهای کوچکتر پروفایل‌های سرعت بی بعد دارای شیب تندتری بوده، از طرفی با افزایش r در یک ξ معین شیب پروفایل‌ها افزایش می‌یابد. موضوعی که نمودار تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای نیز آن را تأیید می‌کند. همچنین ضخامت لایه مرزی مومنتوم به ازای $\xi = ۰/۵$ از دو حالت دیگر بیشتر بوده، که این به علت نزدیکی به نقطه جدایش است. شکل‌های ۴-۲۱ تا ۴-۲۵ نشان می‌دهند که با افزایش ξ در r معین شیب پروفایل‌های دما کاهش می‌یابد، که نشان دهنده کاهش عدد ناسلت بوده و توسط شکل ۴-۱۵ نیز مورد تأیید است. از طرفی پروفایل‌های دمای بی بعد با افزایش ξ در r معین به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد.

۴-۴ نتیجه گیری

در این فصل معادلات لایه مرزی انتقال حرارت جابجایی آزاد از صفحه مایل دلخواه با دمای متغیر در یک محیط متخلخل اشباع ارائه و حل گردید. دمای صفحه به صورت توانی نسبت به فاصله از لبه پیشرو تغییر می‌کند. حل با استفاده از پارامتر انحراف تعریف شده توسط پاپ و نا [۳۵] و تعریف دستگاه مختصات جدید برای هر دو حالت زاویه انحراف مثبت $\left(۰^\circ \le \phi \le ۹۰^\circ\right)$ یا اندکی منفی $\left(\phi \le ۰^\circ\right)$ حاصل شد. برای حل معادلات حاصل از روش کلر استفاده و ضریب اصطکاک پوسته‌ای، عدد ناسلت، پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد به ازای rها و ξهای مختلف رسم گردید.

مشاهده شد که در هر دو حالت با افزایش r در زوایای انحراف معین ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت افزایش می‌یابد. برای حالت انحراف مثبت عدد ناسلت در $\xi \approx ۰/۵۵$، جایی که مؤلفه‌های طولی و نرمال نیروی شناوری قابل مقایسه هستند، دارای یک نقطه مینیمم است. برای انحراف منفی

نیز نقطه‌ای که جدایش صورت می‌گیرد به صورت تخمینی مشخص گردید. در این حالت عدد ناسلت در r معین به طور یکنواخت با افزایش ξ، کاهش می‌یابد.

از سویی دیگر مطابقت شگفت انگیزی بین حل عددی حاصل و حل‌های تشابهی به ازای $\xi = ۰$ (صفحه افقی) و $\xi = ۱$ (صفحه عمودی) که به ترتیب توسط چنگ و چانگ [۲۶] و چنگ و مینکوویکز [۹] ارائه شده، وجود دارد.

۵

حل‌های تشابهی جریان لایه‌های مرزی جابجایی طبیعی روی سطوح عمودی و افقی در یک محیط متخلخل در حضور تولید گرما

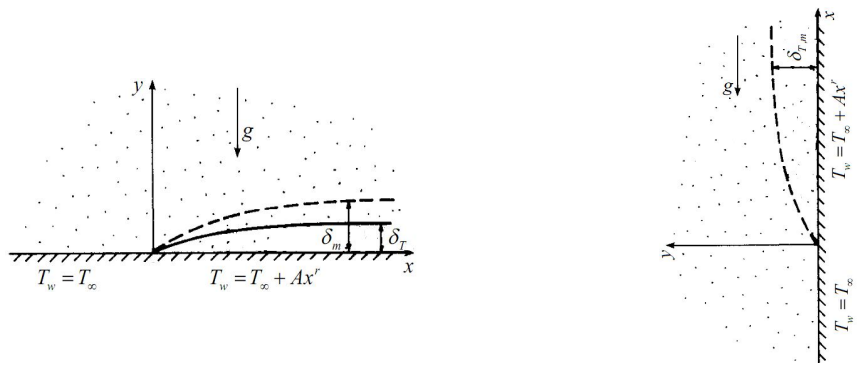
۵-۱ مقدمه

هدف این فصل، ارائه حل‌های تشابهی برای جریان لایه مرزی روی سطوح عمودی و افقی یک محیط متخلخل با تولید حرارت محلی است. تولید حرارت محلی متناسب با دمای بی بعد به صورت توانی در نظر گرفته می‌شود. چنین فرمی یک تخمین غیر واقعی برای انتقال حرارت تابشی یا برای حرارت تولید شده بوسیله یک واکنش شیمیایی حرارت زا نیست [۲۳]. مانند مقالات کلاسیک ارائه شده توسط چنگ و مینکوویکز [۹] و چنگ و چانگ [۲۶]، فرض می‌شود که دمای صفحه متناسب با x^r بوده که x فاصله در طول صفحه از لبه پیشرو و r یک ثابت است.

۵-۲ بیان مسئله و فرضیات

مسئله لایه مرزی جابجایی طبیعی پایدار از یک سطح عمودی یا افقی گرم در مجاورت یک محیط متخلخل با دمای یکنواخت T_∞ و تولید حرارت داخلی q''' را در نظر بگیرید. فرض می‌شود که دمای سطح به صورت توانی نسبت به فاصله از لبه پیشرو تغییر کند. هندسه مسئله در دو حالت در شکل ۵-۱ آورده شده که x و y محورهای مختصات کارتزین در طول صفحه و عمود بر آن بوده و جهت مثبت y به طرف داخل محیط است. در هر حالت با در نظر گرفتن فرضیات زیر مسئله حل می‌گردد.

۱. سیال همرفتی و محیط متخلخل در همه جا در تعادل ترمودینامیکی هستند.
۲. دمای سیال در تمام نقاط پایین‌تر از دمای جوش است.
۳. به جز تغییر چگالی سیال با دما، بقیه خواص سیال و محیط متخلخل ثابت هستند.
۴. تخمین دارسی-بوزینسک بر مسئله حاکم است.



شکل ۵-۱. هندسه مساله در دو حالت عمودی و افقی

۵-۳ معادلات حاکم بر صفحه عمودی

با توجه به فرضیات فوق معادلات لایه مرزی حاکم بر یک سطح عمودی در یک محیط متخلخل در حضور تولید گرما به صورت زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{۵-۱}$$

$$u=-\frac{K}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\rho g\right) \tag{۵-۲}$$

$$v=-\frac{K}{\mu}\frac{\partial P}{\partial y} \tag{۵-۳}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha_m\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\frac{q'''}{(\rho c)_f} \tag{۵-۴}$$

$$\rho=\rho_\infty\left[1-\beta\left(T-T_\infty\right)\right] \tag{۵-۵}$$

شرایط مرزی مسئله مانند فصل ۴ عبارتند از

$$v=0,\quad T=T_w=T_\infty+Ax^r \quad on\ y=0 \tag{۵-۶}$$

$$u=0,\quad T=T_\infty \qquad as\ y\to\infty \tag{۵-۷}$$

که $T_w(x)$ دمای روی سطح و u و v به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در راستاهای x و y هستند. K، υ، β، g و α_m به ترتیب نفوذپذیری محیط متخلخل، ویسکوزیته جنبشی، ضریب انبساط حرارتی، شتاب وابسته به گرانش و پخش حرارتی مؤثر هستند. با مشتق گیری از معادلات (۵-۲) و (۵-۳) به ترتیب نسبت به y و x، و کم کردن تفاضل آن‌ها از هم و در نهایت اعمال معادله (۵-۵)، معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{Kg\beta}{\upsilon}\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (۵-۸)$$

حال با درنظر گرفتن تخمین‌های لایه مرزی، معادلات نهایی حاکم بر مسئله به قرار زیرند.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۵-۱)$$

$$u=\frac{gK\beta}{\upsilon}\left(T-T_\infty\right) \qquad (۵-۹)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha_m\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q'''}{\left(\rho c\right)_f} \qquad (۵-۱۰)$$

معادله (۵-۹) با انتگرال گیری از معادله (۵-۸) بین y و $y=\infty$ و اعمال معادله مرزی (۵-۷) حاصل گردیده است. در اینجا اگر q''' به فرم

$$q'''=\frac{k_m\left(T_w-T_\infty\right)}{x^2}Ra\left(\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}\right)^p \qquad (۵-۱۱)$$

در نظر گرفته شود، مسئله را می‌توان با تعریف کمیت‌های بی بعد زیر بر طبق چنگ و مینکوویکز [۹] به صورت تشابهی حل کرد.

$$\eta=\left(Ra\right)^{1/2}\frac{y}{x} \qquad (۵-۱۲\text{-الف})$$

$$\psi=\alpha_m\left(Ra\right)^{1/2}f\left(\eta\right) \qquad (۵-۱۲\text{-ب})$$

$$\theta(\eta)=\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty} \qquad (۵-۱۲-ج)$$

که $Ra=gK\beta\left(T_w-T_\infty\right)x/\alpha\upsilon$ عدد رایلی محلی و ψ تابع جریان بوده و مطابق معادله (۴-۱۹) تعریف می‌گردد. می‌توان نشان داد که مؤلفه‌های سرعت بر اساس متغیرهای جدید به صورت زیر در می‌آیند:

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\alpha_m Ra}{x}f' \qquad (۵-۱۳)$$

$$v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\alpha_m\left(Ra\right)^{1/2}}{2x}\left[\left(r+1\right)f+\left(r-1\right)\eta f'\right] \qquad (۵-۱۴)$$

در ضمن مشتقاتی که در معادلات حاکم ظاهر می‌شوند، به قرار زیرند.

$$\frac{\partial T}{\partial x}=Ax^{r-1}\left(r\theta+\frac{r-1}{2}\eta\theta'\right) \qquad (۵-۱۵-الف)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=Ax^{r-1}\left(Ra\right)^{1/2}\theta' \qquad (۵-۱۵-ب)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=Ax^{r-2}Ra\,\theta'' \qquad (۵-۱۵-ج)$$

با جایگذاری معادلات (۵-۱۳) تا (۵-۱۵) در معادلات حاکم، معادلات زیر حاصل می‌شود.

$$f''-\theta'=0 \qquad (۵-۱۳)$$

$$\theta''+\frac{\left(1+r\right)}{2}f\theta'-rf'\theta+\theta^p=0 \qquad (۵-۱۴)$$

که باید شرایط مرزی زیر را ارضا کنند.

$$f=0,\quad \theta=1\quad on\,\eta=0 \qquad (۵-۱۵)$$

$$f'=0,\quad \theta=0\quad as\,\eta\to\infty \qquad (۵-۱۶)$$

با انتگرال گیری از معادله (۵-۱۳) بین η و $\eta=\infty$ و اعمال معادله (۵-۱۶)، رابطه $f'=\theta$ حاصل می‌گردد، که منجر به خلاصه نویسی معادلات (۵-۱۳) تا (۵-۱۶) به صورت زیر می‌شود.

$$f'''+\frac{(r+1)}{2}ff''-r(f')^2+(f')^p=0 \qquad (۱۷-۵)$$

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1, f'(\infty)=0 \qquad (۱۸-۵)$$

باید توجه کرد که بدون در نظر گرفتن ترم تولید حرارت معادلات (۵-۱۷) و (۵-۱۸) به معادلات ارائه شده توسط چنگ و مینکوویکز [۹] تقلیل می‌یابند. رابطه $f'=\theta$ نشان می‌دهد که پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد تابع یکسانی از η هستند. همچنین از معادله (۵-۱۲-الف) مشاهده می‌گردد که ضخامت لایه مرزی δ به صورت زیر داده می‌شود.

$$\frac{\delta_{T,m}}{x}=\frac{\eta_{T,m}}{(Ra)^{1/2}} \qquad (۱۹-۵)$$

که η_m و η_T مقدار η در لبه‌های لایه مرزی هستند. عدد ناسلت محلی مطابق معادله (۴-۲۹) تعریف شده، و در نهایت به فرم زیر در می‌آید.

$$\frac{Nu}{(Ra)^{1/2}}=-\theta'(0)=-f''(0) \qquad (۲۰-۵)$$

۵-۴ معادلات حاکم بر صفحه افقی

در این حالت معادلات پیوستگی و انرژی مطابق حالت قبل بوده، اما معادلات دارسی به فرم زیر هستند.

$$u=-\frac{K}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (۲۱-۵)$$

$$v=-\frac{K}{\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\rho g\right) \qquad (۲۲-۵)$$

که پس از ساده سازی‌های مشابه قسمت قبل معادله زیر جایگزین معادله (۵-۹) شده و با معادلات (۵-۱) و (۵-۱۰) معادلات حاکم بر لایه مرزی روی سطح افقی را تشکیل می‌دهد.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{gK\beta}{\upsilon}\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (۲۰-۵)$$

شرایط مرزی نیز همانند معادلات (۵-۶) و (۵-۷) می‌باشد. در این حالت تولید حرارت به فرم زیر تعریف می‌گردد.

$$q''' = \frac{k_m\left(T_w - T_\infty\right)}{x^2}\left(Ra\right)^{2/3}\left(\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}\right)^p \qquad (۲۱-۵)$$

پارامترهای تشابهی برای صفحه افقی طبق حل چنگ و چانگ [۲۶] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\eta = \left(Ra\right)^{1/3}\frac{y}{x} \qquad (۲۲-۵-الف)$$

$$\psi = \alpha_m\left(Ra\right)^{1/3} f\left(\eta\right) \qquad (۲۲-۵-ب)$$

$$\theta\left(\eta\right) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \qquad (۲۲-۵-ج)$$

مؤلفه‌های سرعت و دیگر ترم‌های معادلات حاکم بر حسب متغیرهای تشابهی با مشتق گیری‌های ساده به دست می‌آید.

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\alpha_m\left(Ra\right)^{2/3}}{x} f' \qquad (۲۳-۵-الف)$$

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\alpha_m\left(Ra\right)^{1/3}}{3x}\left[\left(r+1\right)f + \left(r-2\right)\eta f'\right] \qquad (۲۳-۵-ب)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\alpha_m Ra}{x^2} f'' \qquad (۲۳-۵-ج)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = Ax^{r-1}\left(r\theta + \frac{r-2}{3}\eta\theta'\right) \qquad (۲۳-۵-د)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = Ax^{r-1}\left(Ra\right)^{1/3}\theta' \qquad (۲۳-۵-ه)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = Ax^{r-2}\left(Ra\right)^{2/3}\theta'' \qquad (۲۳-۵-ی)$$

با جایگذاری معادلات (۵-۲۳) در معادلات (۵-۱)، (۵-۹) و (۵-۱۰) معادلات حاکم به صورت زیر در می‌آیند:

$$f''+r\theta+\frac{(r-2)}{3}\eta\theta'=0 \qquad (۵-۲۴)$$

$$\theta''+\frac{(r+1)}{3}f\theta'-rf'\theta+\theta^{p}=0 \qquad (۵-۲۵)$$

که باید شرایط مرزی معادلات (۵-۱۵) و (۵-۱۶) را ارضا کنند. بدون در نظر گرفتن ترم تولید حرارت، معادلات (۵-۲۴) و (۵-۲۵) به معادلات ارائه شده توسط چنگ و چانگ [۲۶] کاهش می‌یابند. در این حالت پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد متفاوت بوده و ضخامت لایه‌های مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{\delta_m}{x}=\frac{\eta_m}{(Ra)^{1/3}} \qquad (۵-۲۶-الف)$$

$$\frac{\delta_T}{x}=\frac{\eta_T}{(Ra)^{1/3}} \qquad (۵-۲۶-ب)$$

عدد ناسلت توسط (۴-۲۹) تعریف شده و در این حالت مطابق زیر است.

$$\frac{Nu}{(Ra)^{1/3}}=-\theta'(0) \qquad (۵-۲۷)$$

۵-۵ نتایج و بحث

معادلات حاکم بر سطح در هر دو حالت به صورت عددی با یک حدس سیستماتیک شیب‌ها در $\eta=۰$ و روش پرتابی به کمک روش رانج-کوتا مرتبه ۴ به ازای $۱\le p\le ۴$ و $۱\le r\le ۲$ حل می‌شوند. در مورد سطوح قائم، معادله تشابهی حاکم، معادله‌ای غیر خطی از مرتبه ۳ بوده که با استفاده از روش پرتابی ارائه شده در قسمت ۳-۶ قابل حل است. از طرفی، معادلات تشابهی حاکم بر سطوح افقی، یک

دستگاه معادلات غیر خطی مرتبه دوم را تشکیل می‌دهند. برای حل این معادلات، از روش پرتابی ارائه شده در قسمت ۳-۷ استفاده می‌گردد.

۵-۵-۱ سطوح قائم

در این حالت معادلات (۵-۱۷) و (۵-۱۸) حل شده و ضخامت لایه مرزی و عدد ناسلت به ازای r ها و p های مختلف به ترتیب در جداول ۵-۱ و ۵-۲ آمده است. r و p با گام ۰/۵ تغییر می‌کنند. جدول ۵-۱ نشان می‌دهد که ضخامت لایه مرزی در p معین با افزایش r به صورت یکنواخت کاهش می‌یابد. اما نحوه تغییرات ضخامت لایه مرزی با p به گونه دیگری است. با افزایش p تا ۲/۵، ضخامت لایه مرزی کاهش یافته تا به مقدار مینیمم خود برسد و سپس با افزایش p تا ۴ بر مقدار آن افزوده می‌شود. در ضمن شدت تغییرات ضخامت لایه مرزی با p در مرحله دوم بسیار کندتر از مرحله اول است.

جدول ۵-۱. مقادیر $\delta_{T,m}$ برای سطوح قائم

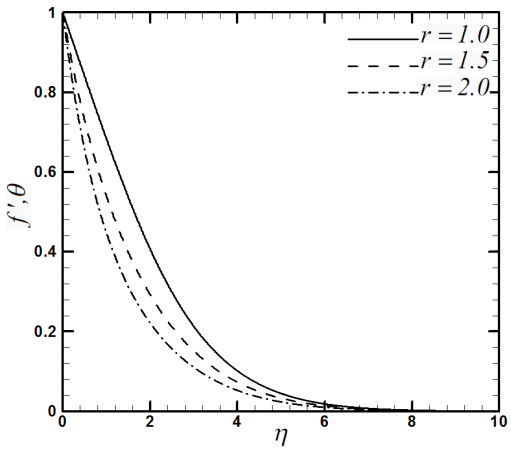
$p\downarrow$ $r\rightarrow$	۱/۰	۱/۵	۲/۰
۱/۰	۶/۶۸	۶/۳۸	۶/۰۱
۱/۵	۴/۶۶	۴/۲۲	۳/۸۷
۲/۰	۴/۵۱	۴/۰۸	۳/۷۵
۲/۵	۴/۵۰	۴/۰۷	۳/۷۳
۳/۰	۴/۵۲	۴/۰۸	۳/۷۴
۳/۵	۴/۵۴	۴/۰۹	۳/۷۵
۴/۰	۴/۵۵	۴/۱۰	۳/۷۵

جدول ۵-۲ نشان می‌دهد که با افزایش r در p معین، عدد ناسلت به صورت یکنواخت افزایش یافته که دلیل این موضوع افزایش نیروی شناوری است. همچنین با افزایش p در r معلوم بر مقدار

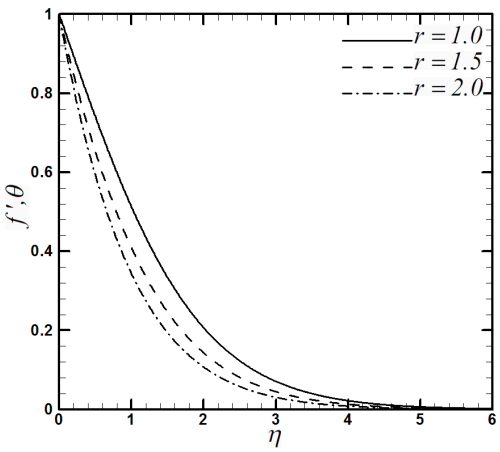
عدد ناسلت افزوده می‌شود. این موضوع به این صورت قابل توجیه است که بنابر معادله (۵-۱۱) با توجه به $(T-T_\infty)/(T_w-T_\infty)\leq ۱$، با افزایش p نرخ حرارت تولید شده در محیط تقلیل می‌یابد، در نتیجه افزایش دمای ناشی از این تولید حرارت کمتر بوده و در نهایت باعث شیب بیشتری در دمای سیال می‌گردد.

جدول ۵-۲. مقادیر $Nu/(Ra)^{۱/۲}$ برای سطوح قائم

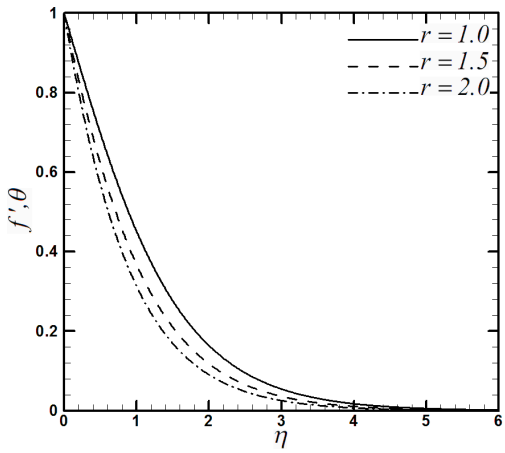
$p\downarrow$ $r\rightarrow$	۱/۰	۱/۵	۲/۰
۱/۰	۰/۳۲۰۷۱	۰/۶۴۶۷۶	۰/۸۹۱۵۷
۱/۵	۰/۵۲۸۱۶	۰/۸۱۰۲۳	۱/۰۲۶۴۰
۲/۰	۰/۶۲۷۵۵	۰/۸۸۶۰۸	۱/۰۸۹۵۰
۲/۵	۰/۶۹۰۳۰	۰/۹۳۴۷۶	۱/۱۳۰۵۰
۳/۰	۰/۷۳۴۱۲	۰/۹۶۹۲۴	۱/۱۵۹۷۰
۳/۵	۰/۷۶۶۶۸	۰/۹۹۵۱۲	۱/۱۸۱۸۰
۴/۰	۰/۷۹۱۹۲	۱/۰۱۵۳۰	۱/۱۹۹۲۰



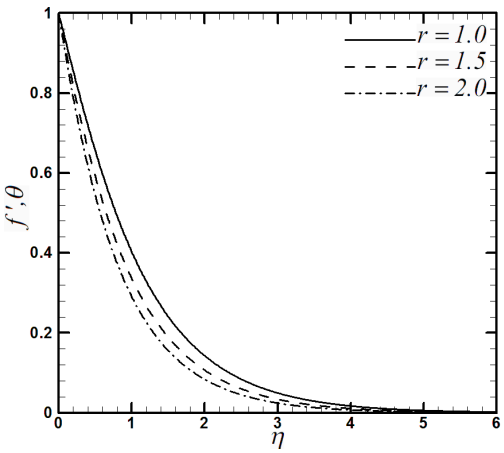
شکل ۵-۲. پروفایل دما یا سرعت بی بعد برای سطح عمودی و $p=۱/۰$



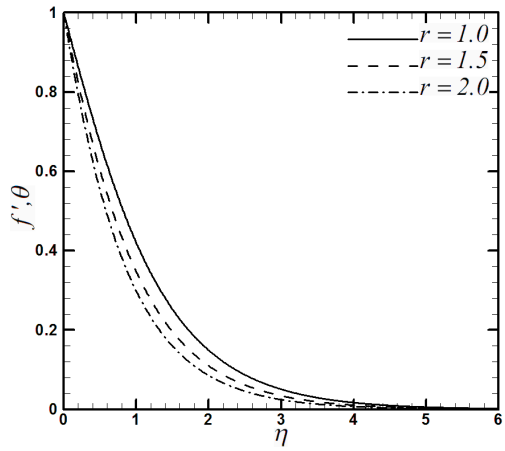
شکل ۵-۳. پروفایل دما یا سرعت بی بعد برای سطح عمودی و $p=۱/۵$



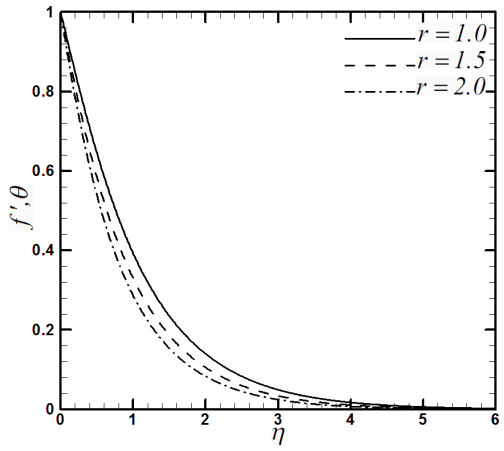
شکل ۵-۴. پروفایل دما یا سرعت بی بعد برای سطح عمودی و $p = ۲/۰$



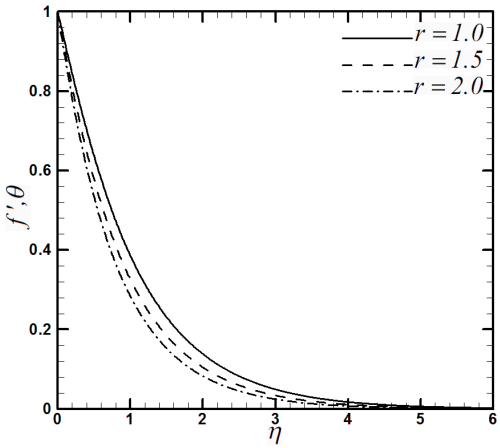
شکل ۵-۶. پروفایل دما یا سرعت بی بعد برای سطح عمودی و $p = ۳/۰$



شکل ۵-۵. پروفایل دما یا سرعت بی بعد برای سطح عمودی و $p = ۲/۵$



شکل ۵-۷. پروفایل دما یا سرعت بی بعد برای سطح عمودی و $p = ۳/۵$



شکل ۵-۸. پروفایل دما یا سرعت بی بعد برای سطح عمودی و $p = ۴/۰$

پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد به ازای مقادیر مختلف r و p در شکل‌های ۵-۲ تا ۵-۸ آمده است. شکل‌های مذکور افزایش شیب پروفایل‌های دما را با افزایش r و p متذکر می‌شوند، موضوعی که توسط جدول ۵-۲ نیز تأیید گردید.

۵-۵-۲ سطوح افقی

در این قسمت معادلات (۵-۲۴) و (۵-۲۵) تحت شرایط مرزی (۵-۱۵) و (۵-۱۶) حل می‌گردد. جداول ۵-۳، ۵-۴ و ۵-۵ به ترتیب ضخامت لایه مرزی سرعت، دما و عدد ناسلت را به ازای مقادیر مختلف r و p نمایش می‌دهند.

جداول ۵-۳ و ۵-۴ نشان می‌دهند که افزایش r با کاهش ضخامت لایه مرزی سرعت و دما همراه است، در حالی که این کمیت‌ها با افزایش p در r معین ابتدا کاهش، سپس افزایش یافته یا ثابت می‌ماند. همچنین ضخامت لایه مرزی سرعت همواره بیش از ضخامت لایه مرزی دما است.

جدول ۵-۳. مقادیر δ_m برای سطوح افقی

$p\downarrow$ $r\rightarrow$	۱/۰	۱/۵	۲/۰
۱/۰	۷/۵۷	۶/۹۸	۶/۲۶
۱/۵	۵/۳۷	۴/۷۱	۴/۱۲
۲/۰	۵/۳۸	۴/۶۸	۴/۰۹
۲/۵	۵/۴۴	۴/۷۲	۴/۱۱
۳/۰	۵/۴۹	۴/۷۵	۴/۱۳
۳/۵	۵/۵۲	۴/۷۷	۴/۱۴
۴/۰	۵/۵۵	۴/۷۸	۴/۱۵

جدول ۵-۴. مقادیر δ_T برای سطوح افقی

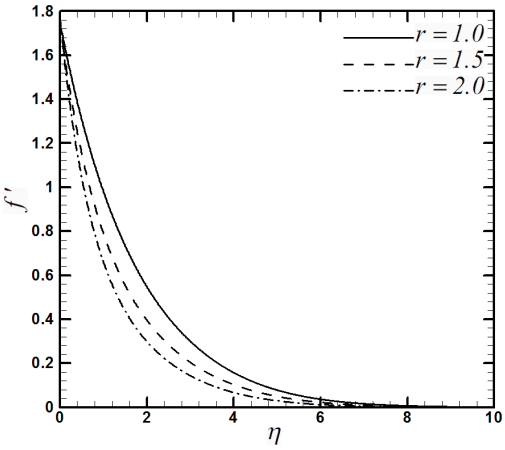
$p\downarrow$ $r\rightarrow$	۱/۰	۱/۵	۲/۰
۱/۰	۶/۰۸	۵/۷۲	۵/۳۰
۱/۵	۴/۴۹	۴/۰۹	۳/۷۶
۲/۰	۴/۳۹	۳/۹۹	۳/۶۷
۲/۵	۴/۴	۳/۹۹	۳/۶۷
۳/۰	۴/۴۱	۴/۰۰	۳/۶۷
۳/۵	۴/۴۲	۴/۰۰	۳/۶۸
۴/۰	۴/۴۳	۴/۰۱	۳/۶۸

جدول ۵-۵. مقادیر $Nu/(Ra)^{۱/۳}$ برای سطوح افقی

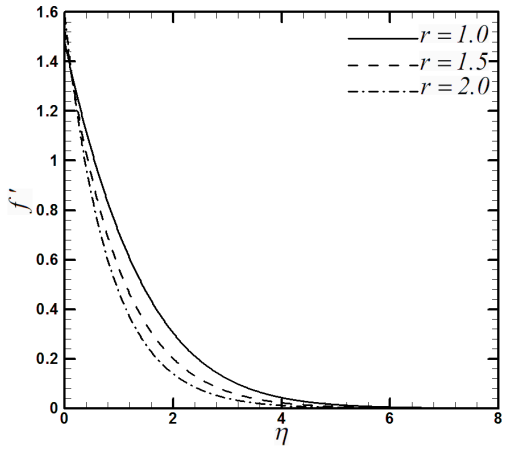
$p\downarrow$ $r\rightarrow$	۱/۰	۱/۵	۲/۰
۱/۰	۰/۸۲۹۰۱	۱/۱۷۴۹	۱/۴۵۰۲
۱/۵	۰/۷۷۶۸۷	۱/۰۹۹۷	۱/۳۶۹۴
۲/۰	۰/۸۰۹۲۸	۱/۱۱۸۷	۱/۳۸۱۴
۲/۵	۰/۸۴۳۴۱	۱/۱۴۳۱	۱/۴۰۰۴
۳/۰	۰/۸۷۲۴۹	۱/۱۶۵۰	۱/۴۱۸۱
۳/۵	۰/۸۹۶۴۲	۱/۱۸۳۳	۱/۴۳۳۳
۴/۰	۰/۹۱۶۱۳	۱/۱۹۸۷	۱/۴۴۶۱

جدول ۵-۵ نشان می‌دهد که مانند حالت قائم، با افزایش r مقدار ناسلت افزایش می‌یابد. اما روند تغییرات عدد ناسلت با p نسبت به حالت افقی متفاوت به نظر می‌رسد. در واقع به ازای $p>۱/۰$، همانطور که در حالت عمودی نیز مشاهده گردید، مطابق انتظار با افزایش p عدد ناسلت افزایش می‌یابد. اما مقدار ناسلت در $p=۱/۰$ به طور غیر منتظره‌ای از مقدار آن در $p=۱/۵$ بیشتر است.

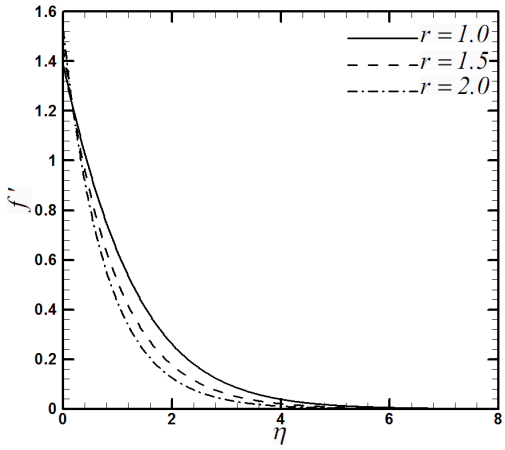
شکل‌های ۵-۹ تا ۵-۱۵ پروفایل‌های سرعت بی بعد و شکل‌های ۵-۱۶ تا ۵-۲۲ پروفایل‌های دمای بی بعد را به ازای مقادیر گوناگون r و p بر روی سطوح افقی نمایش می‌دهند.



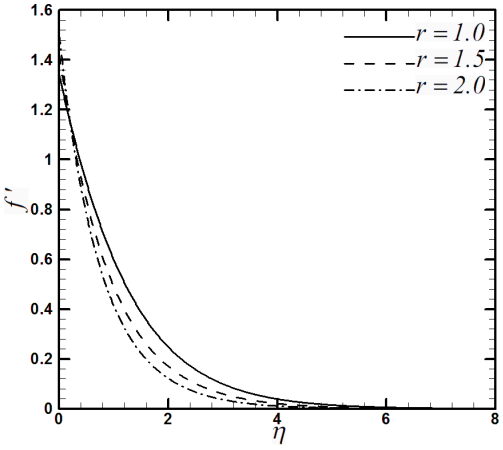
شکل ۵-۹. پروفایل سرعت بی بعد برای سطح افقی و $p=۱/۰$



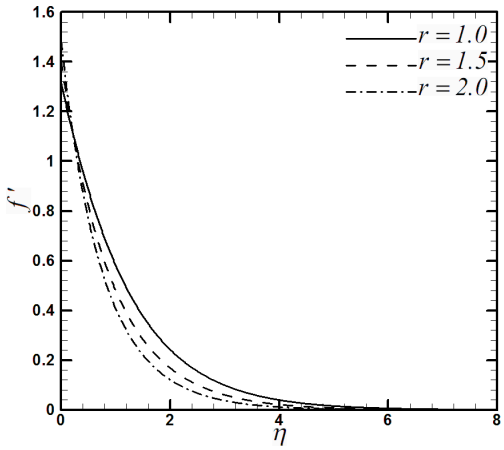
شکل ۵-۱۰. پروفایل سرعت بی بعد برای سطح افقی و $p=۱/۵$



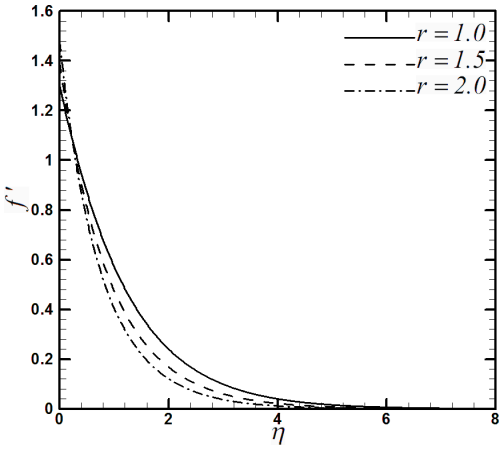
شکل ۵-۱۱. پروفایل سرعت بی بعد برای سطح افقی و $p=۲/۰$



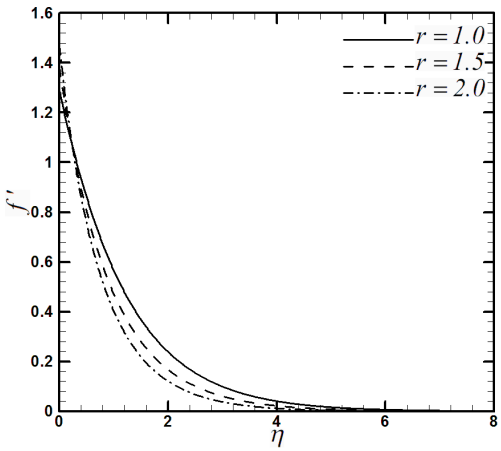
شکل ۵-۱۲. پروفایل سرعت بی بعد برای سطح افقی و $p=۲/۵$



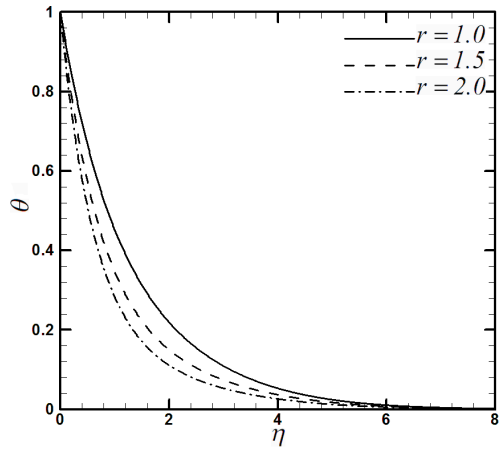
شکل ۵-۱۳. پروفایل سرعت بی بعد برای سطح افقی و $p=۳/۰$



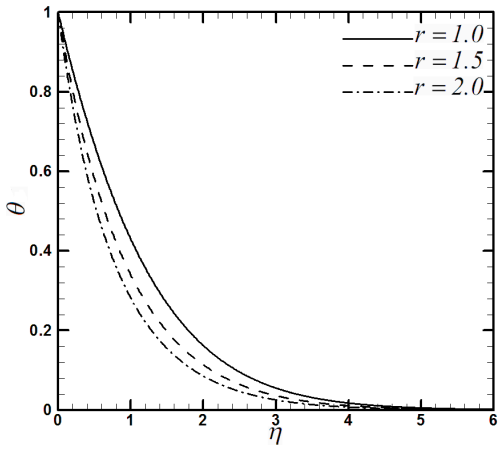
شکل ۵-۱۴. پروفایل سرعت بی بعد برای سطح افقی و $p=۳/۵$



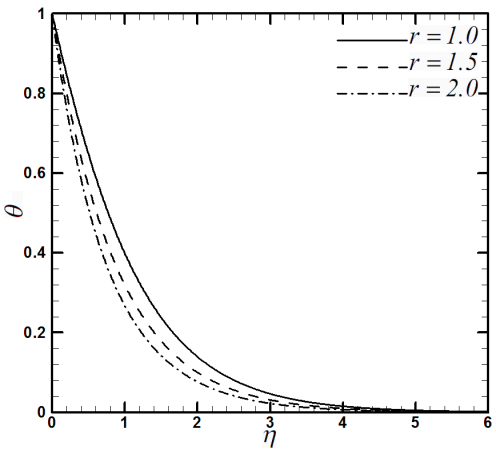
شکل ۵-۱۵. پروفایل سرعت بی بعد برای سطح افقی و $p = ۴/۰$



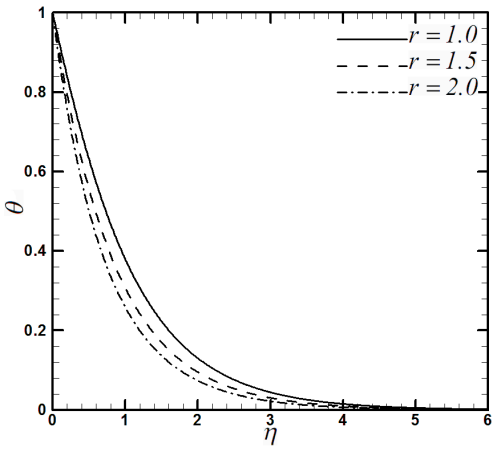
شکل ۵-۱۶. پروفایل دمای بی بعد برای سطح افقی و $p = ۱/۰$



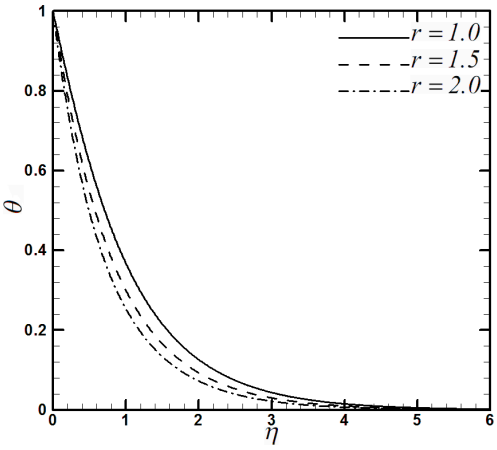
شکل ۵-۱۷. پروفایل دمای بی بعد برای سطح افقی و $p = ۱/۵$



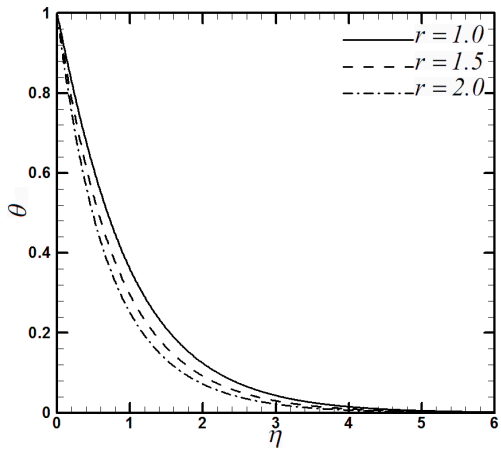
شکل ۵-۱۸. پروفایل دمای بی بعد برای سطح افقی و $p = ۲/۰$



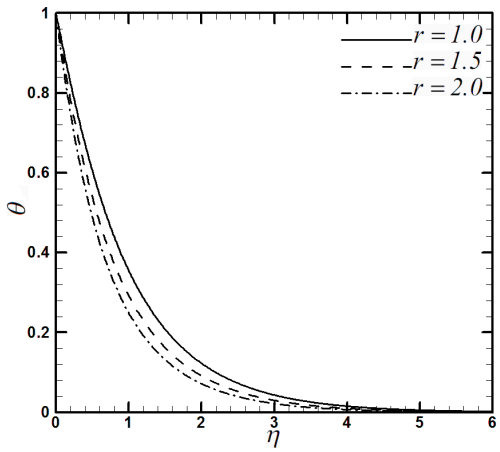
شکل ۵-۱۹. پروفایل دمای بی بعد برای سطح افقی و $p = ۲/۵$



شکل ۵-۲۰. پروفایل دمای بی بعد برای سطح افقی و $p = ۳/۰$



شکل ۵-۲۱. پروفایل دمای بی بعد برای سطح افقی و $p = ۳/۵$



شکل ۵-۲۲. پروفایل دمای بی بعد برای سطح افقی و $p = ۴/۰$

از شکل‌های ۵-۹ تا ۵-۱۵ مشاهده می‌گردد که با افزایش p، مقدار سرعت بر روی سطح کاهش می‌یابد. دلیل این موضوع را می‌توان کاهش نیروی شناوری ناشی از تولید حرارت داخلی دانست.

شکل‌های ۵-۱۶ تا ۵-۲۲ افزایش شیب پروفایل‌های دما با افزایش r را یادآور می‌شوند، موضوعی که داده‌های جدول ۵-۵ بر آن صحه می‌گذارد. همچنین از مقایسه شکل‌های ۵-۱۷ تا ۵-۲۲ افزایش شیب پروفایل‌های دما با افزایش p، به ازای $p > ۱/۰$ مشاهده می‌شود، پدیده‌ای که جدول ۵-۵ آن را تصدیق می‌کند.

۵-۶ نتیجه گیری

حل لایه مرزی انتقال حرارت جابجایی آزاد از سطوح عمودی و افقی با دمای متغیر در یک محیط متخلخل اشباع در حضور تولید گرما ارائه شد. دمای صفحه به صورت توانی نسبت به فاصله از لبه پیشرو تغییر می‌کند و تولید حرارت متناسب با دمای بی بعد به صورت توانی است. برای حل از روش

پرتابی و رانج-کوتا مرتبه ۴ استفاده و در هر حالت پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد رسم و مقادیر ناسلت، ضخامت لایه مرزی مومنتوم و حرارت به ازای $۱ \leq p \leq ۴$ و $۱ \leq r \leq ۲$ تعیین گردید.

مشاهده شد که در هر دو حالت با افزایش r، ضخامت لایه‌های مرزی کاهش و مقادیر ناسلت افزایش یافت. همچنین ضخامت‌های لایه مرزی با افزایش p در r معین ابتدا کاهش یافته، سپس با افزایش همراه است، هرچند این نرخ افزایش به قدری کند بوده که گاهی اوقات به ثابت ماندن ضخامت‌ها منجر می‌گردد.

در حالت افقی با افزایش p در r معلوم بر مقدار عدد ناسلت افزوده می‌شود. اما این افزایش در حالت عمودی به ازای $p > ۱/۰$ مشاهده می‌گردد و عدد ناسلت در $p = ۱/۰$ از مقدار آن در $p = ۱/۵$ بیشتر است. همچنین در حالت افقی ضخامت لایه مرزی سرعت همواره بیش از ضخامت لایه مرزی دما می‌باشد، در حالی که لایه‌های مرزی سرعت و دما در حالت قائم بر هم منطبقند.

۶

لایه مرزی جابجایی آزاد از سطوح مایل غیر قابل نفوذ در یک محیط متخلخل اشباع در حضور تولید گرما

۶-۱ مقدمه

همانطور که در ذیل قسمت ۱-۳-۱ آمد، جریان لایه مرزی جابجایی آزاد بر روی سطوح مایل در مجاورت محیط متخلخل، نسبت به سطوح افقی و قائم کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. در این میان، در کارهای گذشته، مطالعه‌ای در مورد اثر تولید گرما بر جابجایی آزاد بر روی سطوح مایل مشاهده نمی‌شود. هدف از فصل حاضر مطالعه جابجایی آزاد حول یک صفحه تخت مایل دلخواه با دمای متغیر در یک محیط متخلخل اشباع در حضور تولید گرما است. تولید حرارت داخلی در کاربردهای گوناگونی مانند آنالیز اطمینان راکتور، ضایعات ناشی از سوخت هسته‌ای مصرف شده، مطالعات آتش و احتراق، و ذخیره مواد رادیواکتیو مهم است [۱۴]. همچون سایر مسائل این پایان نامه، دمای صفحه به صورت توانی نسبت به فاصله از لبه پیشرو تغییر می‌کند. بنابر تعریف ترم تولید حرارت، دو مسئله در این فصل حل می‌شود.

در مسئله اول این فصل، تولید گرما به صورت نمایی تغییر می‌کند. این در حالی است که جابجایی آزاد بر روی صفحات افقی و عمودی با شرایط این مسئله قبلا توسط پوستلنیکو و پاپ [۱۴] حل شده است.

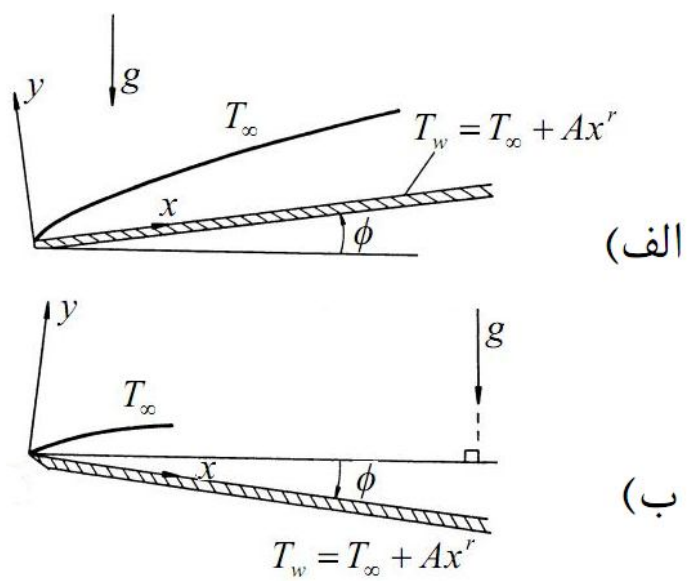
تولید حرارت در مسئله دوم با دمای بی بعد به صورت توانی متناسب است. چنین فرمی یک تخمین غیر واقعی برای انتقال حرارت تابشی یا برای حرارت تولید شده بوسیله یک واکنش شیمیایی حرارت زا نیست [۲۳]. حالات حدی (سطوح قائم و افقی) با شرایط مسئله حاضر در فصل قبل حل شد.

همانند فصل ۴ در حل مسائل، سیستم مختصات ارائه شده توسط پاپ و نا [۳۵] مورد استفاده قرار می‌گیرد. سپس دستگاه دو معادله‌ای حاصل به کمک روش تفاضل محدود پیشنهاد شده توسط کلر [۴۷] برای حالات انحراف مثبت صفحه $\left(۰^\circ \le \phi \le ۹۰^\circ\right)$ و انحرافات منفی $\left(\phi \le ۰^\circ\right)$ حل شده و تاثیر

پارامترهای مختلف بر روی ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عد ناسلت و نیز پروفایل‌های سرعت بی بعد و دمای بی بعد بررسی می‌گردد.

۶-۲ معادلات حاکم

یک صفحه تخت مایل غیر قابل نفوذ جاسازی شده در یک محیط متخلخل اشباع با دمای محیط ثابت T_∞ و تولید حرارت محلی را در نظر بگیرید. فرض کنید که دمای صفحه بالاتر از دمای محیط قرار داشته و با قانون توانی نسبت به فاصله از لبه پیشرو تغییر می‌کند. مانند فصل ۴ زاویه انحراف می‌تواند مثبت $\left(0^\circ \le \phi \le 90^\circ\right)$ یا اندکی منفی $\left(\phi \le 0^\circ\right)$ باشد. مدل فیزیکی و سیستم مختصات در شکل ۶-۱ آورده شده که x و y دستگاه مختصات کارتزین در طول صفحه و عمود بر آن بوده و جهت مثبت y به طرف داخل محیط متخلخل است.



شکل ۶-۱. هندسه مسئله و دستگاه مختصات، الف) انحراف مثبت، ب) انحراف منفی

اگر فرض شود که الف) جریان به اندازه کافی آرام است که سیال همرفتی و محیط متخلخل در هر نقطه در تعادل ترمودینامیکی هستند، ب) دمای سیال در هر نقطه پایین‌تر از نقطه جوش است، ج) به جز تغییر چگالی سیال با دما، سایر خواص سیال و محیط متخلخل ثابت هستند، د) تخمین دارسی-بوزینسک و نیز تخمین‌های لایه مرزی لحاظ می‌شود، معادلات حاکم به صورت زیر هستند.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۱-۶)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{gK\beta}{\upsilon}\left(\pm\frac{\partial T}{\partial y}Sin\phi-\frac{\partial T}{\partial x}Cos\phi\right) \qquad (۲-۶)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha_m\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q'''}{(\rho c)_f} \qquad (۳-۶)$$

که علامت‌های "+" و "-" در معادله (۶-۲) به ترتیب بر انحرافات مثبت و منفی سطح دلالت دارند. در معادلات (۶-۱) تا (۶-۳) u و v به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در جهت x و y بوده، T دما، g شتاب گرانش، K نفوذ پذیری، υ، β و α_m به ترتیب ویسکوزیته جنبشی، ضریب انبساط دمایی و پخش گرمایی هستند. شرایط مرزی مسئله همانند فصل ۴ عبارتند از:

$$v=0,\quad T=T_w=T_\infty+Ax^r \quad on\ y=0 \qquad (۴-۶)$$

$$u=0,\quad T=T_\infty \qquad as\ y\to\infty \qquad (۵-۶)$$

که زیر نویس "∞" به شرایط در فاصله بینهایت اشاره دارد. به علاوه ترم شدت گرما در معادله (۶-۳) به یکی از دو صورت زیر تعریف می‌شود.

$$q'''=\frac{k_m\left(T_w-T_\infty\right)\lambda^2}{x^2}e^{-\eta} \qquad (۶-۶-الف)$$

$$q'''=\frac{k_m\left(T_w-T_\infty\right)\lambda^2}{x^2}\left(\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}\right)^p \qquad (۶-۶-ب)$$

معادلات (۶-۶-الف) و (۶-۶-ب) تولید حرارت را به ترتیب در مسائل اول و دوم این فصل بیان می‌کنند. λ و η در فصل ۴ تعریف شده است. به علاوه معادلات (۴-۱۳) تا (۴-۲۰) و نیز (۴-۲۹) تا (۴-۳۳) در اینجا صادق بوده و به کار می‌روند.

۶-۲-۱ معادلات تغییر شکل یافته مسئله اول

در این حالت با اعمال معادلات (۴-۱۳) تا (۴-۲۰) بر معادلات (۶-۱) تا (۶-۵) و نیز (۶-۶-الف) معادلات تغییر شکل یافته به صورت زیر به دست می‌آیند. (اثبات کامل معادلات در پیوست الف آمده است.)

$$f''+(1-\xi)^3\left\{r\theta+\eta\theta'\left[\frac{r+1}{6}(2+\xi)-1\right]\right\}=\pm\xi^2\theta'-\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)^4\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \qquad (۶-۷)$$

$$\theta''+\frac{r+1}{6}(2+\xi)f\theta'-rf'\theta+e^{-\eta}=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)\left(f'\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta'\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) \qquad (۶-۸)$$

که باید شرایط مرزی زیر را ارضا کنند.

$$f=0,\quad \theta=1 \quad on\ \eta=0 \qquad (۶-۹)$$

$$f'=0,\quad \theta=0 \quad as\ \eta\to\infty \qquad (۶-۱۰)$$

پرایم‌ها مشتق نسبت به η را نمایش می‌دهند. برای حل معادلات (۴-۲۱) و (۴-۲۲) یک شرط اولیه در راستای ξ مورد نیاز است، این شرط از حل معادلات صفحه افقی $(\phi=۰^\circ, \xi=۰)$ به دست می‌آید.

از طرفی معادلات (۶-۷) و (۶-۸) با $\xi=۰$ $(\phi=۰^\circ)$ به معادلات حاکم بر صفحه افقی در یک محیط متخلخل که توسط پوستلنیکو و پاپ [۱۴] ارائه شده‌اند، تقلیل می‌یابند.

$$f''+r\theta+\frac{r-2}{3}\eta\theta'=0 \qquad (۱۱-۶)$$

$$\theta''+\frac{r+1}{3}f\theta'-rf'\theta+e^{-\eta}=0 \qquad (۱۲-۶)$$

به علاوه برای مورد حدی دیگر یعنی $\xi=۱$ $\left(\phi=۹۰^\circ\right)$ معادلات به معادلات بیان شده توسط پوستلنیکو و پاپ [۱۴] برای صفحه قائم کاهش می‌یابند.

$$f''=\theta' \qquad (۱۳-۶)$$

$$\theta''+\frac{r+1}{2}f\theta'-rf'\theta+e^{-\eta}=0 \qquad (۱۴-۶)$$

۶-۲-۲ معادلات تغییر شکل یافته مسئله دوم

با اعمال معادلات (۴-۱۳) تا (۴-۲۰) بر معادلات (۶-۱) تا (۶-۵) و نیز (۶-۶-ب) معادلات تغییر شکل یافته این مسئله هم به دست می‌آید، که تنها در ترم تولید حرارت با معادلات مسئله اول متفاوت است.

$$f''+\left(1-\xi\right)^3\left\{r\theta+\eta\theta'\left[\frac{r+1}{6}\left(2+\xi\right)-1\right]\right\}=\pm\xi^2\theta'-\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi\left(1-\xi\right)^4\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \qquad (۱۵-۶)$$

$$\theta''+\frac{r+1}{6}\left(2+\xi\right)f\theta'-rf'\theta+\theta^p=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi\left(1-\xi\right)\left(f'\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta'\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) \qquad (۱۶-۶)$$

شرایط مرزی مطابق مسئله قبل می‌باشد. معادلات (۶-۱۵) و (۶-۱۶) با $\xi=۰$ به معادلات حاکم بر سطوح افقی در یک محیط متخلخل (معادلات (۵-۲۴) و (۵-۲۵))، تبدیل می‌شوند. همچنین معادلات فوق، با $\xi=۱$ به معادلات حاکم بر سطوح قائم در یک محیط متخلخل (معادلات (۵-۱۳) و (۵-۱۴))، تقلیل می‌یابند.

۶-۳ نتایج و بحث

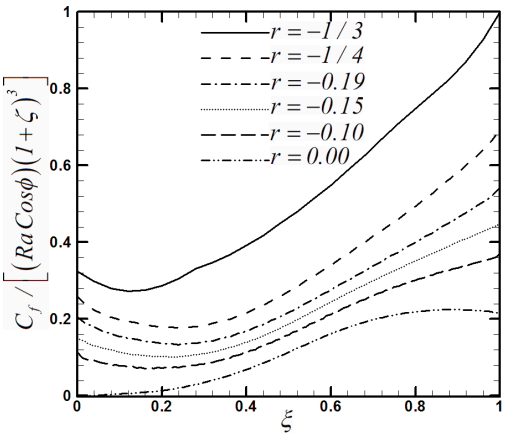
معادلات دیفرانسیل تبدیل یافته هر یک از مسائل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی و غیر خطی تشکیل می‌دهند که باید شرایط مرزی معادلات (۶-۹) و (۶-۱۰) را ارضا کنند. مانند معادلات فصل ۴، این معادلات به صورت عددی به کمک روش عددی کلر [۴۷] حل می‌شوند. گسسته سازی معادلات مذکور در پیوست ب آمده است.

در هر مسئله با توجه به تعریف ξ، حل عددی در $\xi=0$ شروع شده و به صورت گام به گام تا $\xi=1$ ادامه می‌یابد. برای شروع حل عددی، از حل تشابهی جابجایی آزاد بر روی صفحه افقی مربوط به هر یک از مسائل، استفاده می‌گردد. مسئله اول برای $-1/3 \le r \le 1$ که در هر دو حالت افقی و عمودی، توسط پوستلنیکو و پاپ [۱۴] ارائه شده، صورت می‌گیرد. مسئله دوم نیز به ازای $1 \le r \le 2$ حل می‌گردد. برای اثبات درستی محاسبات نیز، حل تشابهی مربوط به سطوح قائم که قبلا انجام گرفته، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

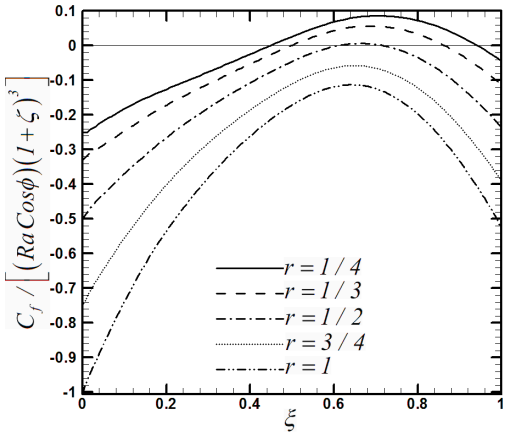
۶-۳-۱ مسئله اول: انحراف زاویه‌ای مثبت

تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای بر حسب ξ برای $r \le 0$ و $r > 0$ به ترتیب در شکل‌های ۶-۲ و ۶-۳ آورده شده است. همانطور که از شکل ۶-۲ پیداست در حالت $r \le 0$ ضریب اصطکاک پوسته‌ای در تمام زوایا دارای مقدار مثبت است. بعلاوه در حالت دما ثابت $(r=0)$ مقدار ضریب اصطکاک پوسته‌ای با افزایش میزان انحراف افزایش می‌یابد، اما در حالات دیگر رفتار متفاوتی را شاهد هستیم. با این حال، به ازای $r > 0$ نمودارهای ضریب اصطکاک پوسته‌ای بر خلاف حالت $r \le 0$ دارای تقعر رو به پایین بوده و با افزایش ξ افزایش یافته تا در $\xi_{ext}\big|_{C_f}$ به ماکزیمم خود رسیده و سپس به مقدارش

در $\xi=۱$ کاهش می‌یابد. همچنین این کمیت به ازای $r=۱/۴$، $r=۱/۳$ و $r=۱/۲$ دو بار تغییر علامت داده که موقعیت آن‌ها با $\xi_1|_{C_f=0}$ و $\xi_2|_{C_f=0}$ نمایش داده شده و در جدول ۶-۱ آمده است.



شکل ۶-۲. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ برای انحراف مثبت و $r \le ۰$



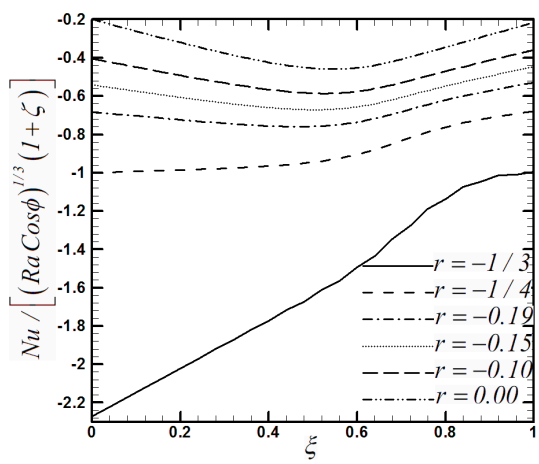
شکل ۶-۳. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ برای انحراف مثبت و $r > ۰$

جدول ۶-۱. مقادیر $\xi_{0,1}$، $\xi_{0,2}$، ξ_{ext} و $C_{f,ext}$ به ازای $r > ۰$ و انحراف مثبت

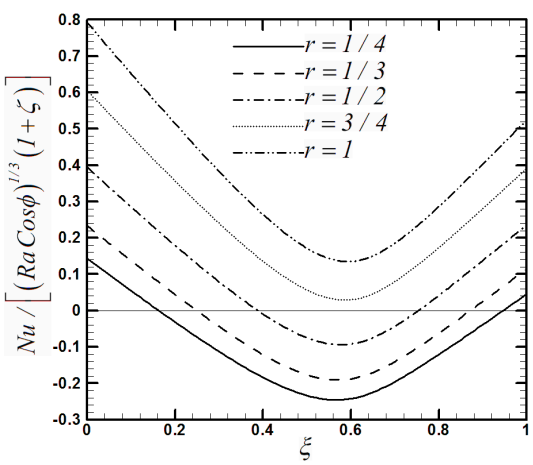
r	$\xi_1\|_{C_f=0}$	$\xi_2\|_{C_f=0}$	$\xi_{ext}\|_{C_f}$	$C_{f,ext}$
۱/۴	۰/۴۵	۰/۹۴	۰/۷۱	$۸/۶۳۶۷\times۱۰^{-۲}$
۱/۳	۰/۵۰	۰/۸۶	۰/۶۹	$۵/۷۰۰۰\times۱۰^{-۲}$
۱/۲	۰/۶۱	۰/۷۲	۰/۶۶	$۶/۴۶۶۷\times۱۰^{-۳}$
۳/۴	–	–	۰/۶۵	$-۵/۷۴۰۰\times۱۰^{-۲}$
۱	–	–	۰/۶۴	$-۱/۱۲۳۷\times۱۰^{-۱}$

شکل ۶-۴ تغییرات عدد ناسلت با ξ را به ازای $r \le ۰$ نمایش می‌دهد. همانطور که از نمودار پیداست، عدد ناسلت در این حالت در کل بازه $۰ \le \xi \le ۱$ منفی است. این امر بدان معناست که در این مورد جهت انتقال حرارت در تمام زوایا از سیال به طرف سطح بوده و دلیل آن غلبه میزان تولید حرارت داخلی بر شرط مرزی دمایی بر روی سطح است. از طرفی دیگر، با تغییر r از $r=-۱/۳$ به سمت صفر، روند تغییرات عدد ناسلت دگرگون شده و شکلی سهمی‌گون با نقطه مینیمم در $\xi_{ext}|_{Nu}$

می‌گیرد. با مراجعه دوباره به این نمودار افزایش قدر مطلق عدد ناسلت با افزایش قدر مطلق r در یک زاویه انحراف معین مشاهده می‌گردد. شکل ۶-۵ نیز نمودار تغییرات عدد ناسلت بر حسب ξ را به ازای $r>۰$ نمایش می‌دهد. در این حالت به ازای تمام rها نمودار شکل سهمی‌گون داشته، و عدد ناسلت از مقدارش در $\xi=۰$ کاهش یافته تا به مقدار مینیمم خود در $\xi_{ext}\big|_{Nu}$ رسیده و دوباره با افزایش مقدار همراه است. از سویی دیگر، به ازای $r=۳/۴$ و $r=۱$ عدد ناسلت به ازای تمام مقادیر ξ مثبت بوده که نشان دهنده انتقال حرارت از صفحه به سیال می‌باشد و دلیل آن غلبه شرط مرزی دمایی بر روی صفحه بر میزان تولید حرارت در محیط متخلخل است. در عین حال با کاهش r عدد ناسلت در بازه‌ای از ξ منفی می‌شود. جدول ۶-۲ نقاط $\xi_1\big|_{Nu=0}$ و $\xi_2\big|_{Nu=0}$ که در آن عدد ناسلت تغییر علامت داده و نیز نقطه $\xi_{ext}\big|_{Nu}$ به ازای rهای مختلف را نمایش می‌دهد. جدول ۶-۳ مقادیر حاصل از حل تشابهی معادلات (۶-۱۳) و (۶-۱۴) و نتایج حاصل از حل عددی معادلات (۶-۷) و (۶-۸) در $\xi=۱$ $\left(\phi=۹۰^\circ\right)$ را ارائه می‌دهد. تشابه شگفت انگیزی بین حل عددی حاصل و حل موجود مشاهده می‌گردد.



شکل ۶-۴. تغییرات عدد ناسلت با ξ برای انحراف مثبت و $r\le ۰$



شکل ۶-۵. تغییرات عدد ناسلت با ξ برای انحراف مثبت و $r>۰$

جدول۶-۲. مقادیر $\xi_{0,1}$، $\xi_{0,2}$، ξ_{ext} و Nu_{ext} برای انحراف مثبت

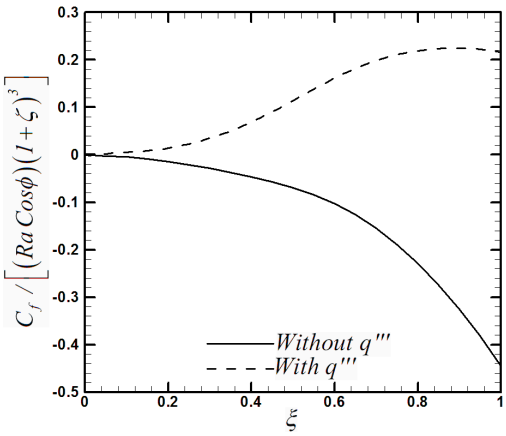
r	$\xi_1\|_{Nu=0}$	$\xi_2\|_{Nu=0}$	$\xi_{ext}\|_{Nu}$	Nu_{ext}
−۰/۱۹	–	–	۰/۴۶	−۷/۵۸۳۷×۱۰$^{-۱}$
−۰/۱۵	–	–	۰/۵۱	−۶/۷۰۶۷×۱۰$^{-۱}$
−۰/۱۰	–	–	۰/۵۲	−۵/۸۵۸۹×۱۰$^{-۱}$
−۰/۰۰	–	–	۰/۵۵	−۴/۵۸۸۴×۱۰$^{-۱}$
۱/۴	۰/۱۶	۰/۹۵	۰/۵۷	−۲/۴۵۶۳×۱۰$^{-۱}$
۱/۳	۰/۲۵	۰/۸۷	۰/۵۷	−۱/۹۰۶۹×۱۰$^{-۱}$
۱/۲	۰/۳۹	۰/۷۵	۰/۵۸	−۹/۳۹۵۱×۱۰$^{-۲}$
۳/۴	–	–	۰/۵۹	۲/۹۰۵۲×۱۰$^{-۲}$
۱	–	–	۰/۵۹	۱/۳۴۸۷×۱۰$^{-۱}$

جدول ۶-۳. مقایسه مقادیر $-\theta'(۰)$ ارائه شده توسط پوستلنیکو و پاپ [۱۴] و نتایج حاضر در $\xi=۱$

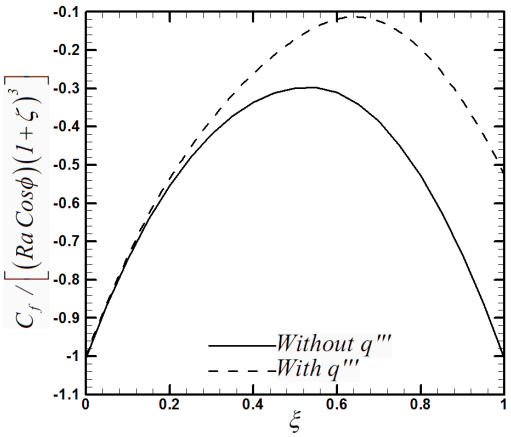
r	$-\theta'(۰)$ [۹]	$-\theta'(۰)$ (نتایج حاضر)
−۱/۳	−۰/۹۹۹۶۱	−۰/۹۹۴۹۴
−۱/۴	−۰/۶۷۹۱۷	−۰/۶۷۹۴۰
−۰/۱۹	−۰/۵۲۸۲۲	−۰/۵۲۸۲۶
−۰/۱۵	−۰/۴۴۶۶۶	−۰/۴۴۶۵۶
−۰/۱۰	−۰/۳۵۸۹۵	−۰/۳۵۹۰۴
۰/۰۰	−۰/۲۱۵۲۴	−۰/۲۱۵۲۴
۱/۴	۰/۰۴۵۱۵	۰/۰۴۵۱۵
۱/۳	۰/۱۱۴۱۵	۰/۱۱۴۱۶
۱/۲	۰/۲۳۶۱۰	۰/۲۳۶۱۰
۳/۴	۰/۳۹۱۲۱	۰/۳۹۱۲۱
۱	۰/۵۲۴۰۹	۰/۵۲۴۰۹

در اینجا می‌توان تأثیر تولید حرارت را بر ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت بررسی کرد. شکل‌های ۶-۶ تا ۶-۸ مقادیر ضریب اصطکاک پوسته‌ای به ازای $r=۰$، $r=۱/۲$ و $r=۱$ در دو حالت تولید و عدم تولید حرارت را با هم مقایسه می‌کنند. به ازای $r=۰$، در حالت عدم حضور تولید حرارت، ضریب اصطکاک پوسته‌ای از مقدار صفر در $\xi=۰$ شروع به کاهش می‌کند، تا به مقدار خود در $\xi=۱$ برسد. اما در حضور تولید حرارت این کمیت از مقدار صفر در $\xi=۰$ شروع به افزایش کرده و با روندی

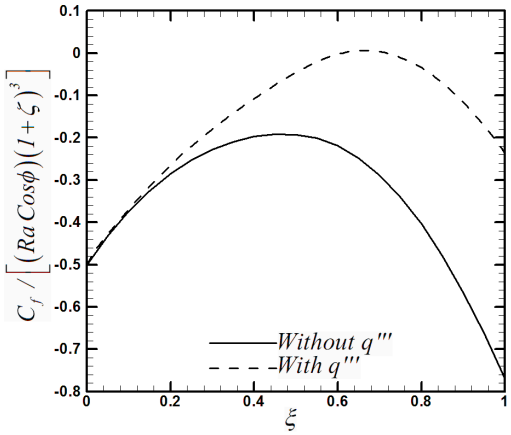
کندتر از حالت قبل تغییر می‌کند. به عبارت دیگر در حالت عدم تولید حرارت شیب پروفایل سرعت منفی بوده، که دلیل آن بیشتر بودن نیروی شناوری در نزدیکی سطح است، اما با تولید حرارت نیروی شناوری در محیط متخلخل شروع به افزایش کرده و در نتیجه شیب پروفایل سرعت مثبت می‌شود. در حالت $r=۱/۲$ و $r=۱$ نیز به دلیلی مشابه شیب پروفایل‌های سرعت و در نتیجه مقادیر ضریب اصطکاک پوسته‌ای از مقادیر منفی به سمت صفر و حتی مقادیر مثبت میل می‌کند.



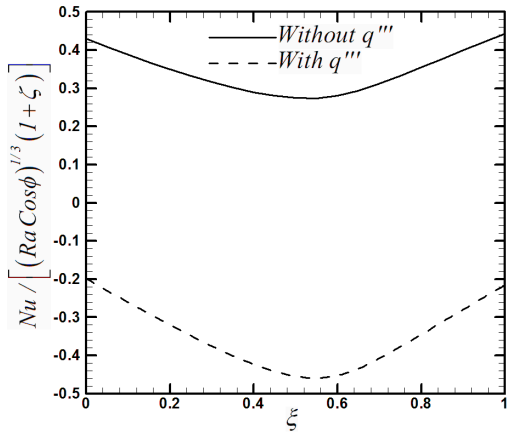
شکل ۶-۶. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ در حالات تولید و عدم تولید حرارت برای انحراف مثبت به ازای $r=۰$



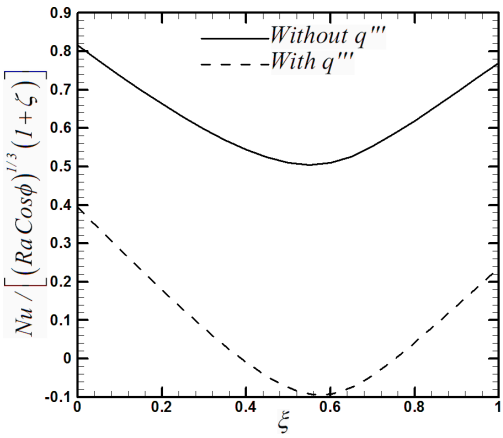
شکل ۶-۸. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ در حالات تولید و عدم تولید حرارت برای انحراف مثبت به ازای $r=۱$



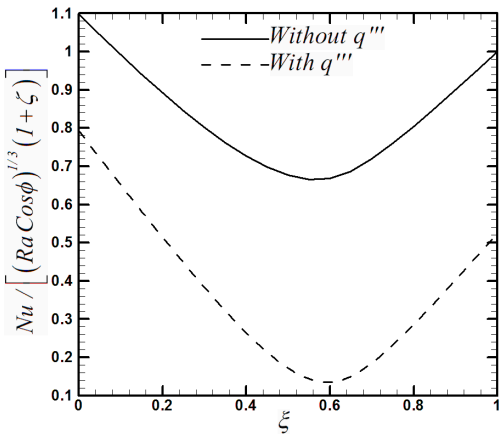
شکل ۶-۷. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ در حالات تولید و عدم تولید حرارت برای انحراف مثبت به ازای $r=۱/۲$



شکل ۶-۹. تغییرات عدد ناسلت با ξ در حالات تولید و عدم تولید حرارت برای انحراف مثبت به ازای $r=۰$



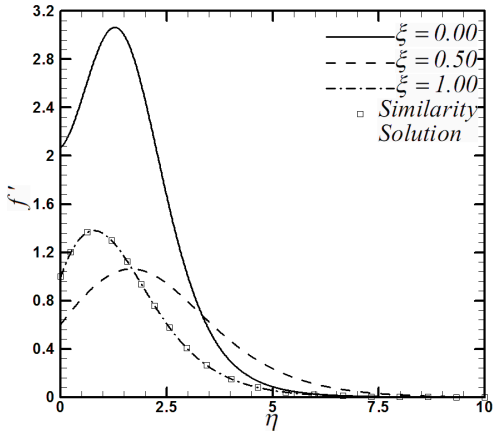
شکل ۶-۱۰. تغییرات عدد ناسلت با ξ در حالات تولید و عدم تولید حرارت برای انحراف مثبت به ازای $r=۱/۲$



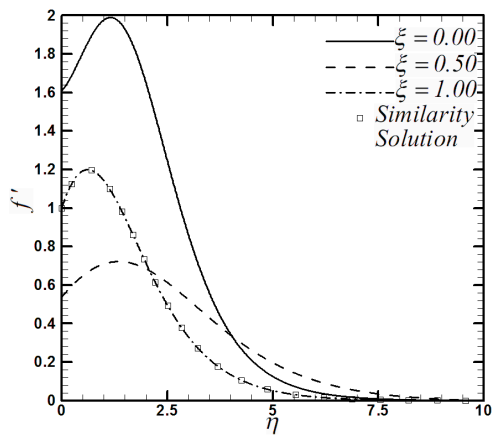
شکل ۶-۱۱. تغییرات عدد ناسلت با ξ در حالات تولید و عدم تولید حرارت برای انحراف مثبت به ازای $r=۱$

شکل‌های ۶-۹ تا ۶-۱۱ مقادیر عدد ناسلت را به ازای توان‌های مذکور در دو حالت تولید و عدم تولید حرارت با هم مقایسه می‌کنند. همانطور که در فصل ۴ مشاهده گردید به ازای کلیه مقادیر r، عدد ناسلت در سراسر زوایای انحرافی مثبت در حالت عدم تولید گرما، مقداری مثبت اختیار می‌کرد، که نشان دهنده انتقال حرارت از سطح به محیط متخلخل بود. در حضور تولید گرما و به ازای $r=۰$، عدد ناسلت با حفظ روند کلی تغییرات خود با ξ، در تمام زوایا منفی است، موضوعی که نمایانگر غلبه تولید حرارت در محیط متخلخل بر شرط مرزی اعمالی بر روی سطح است. به ازای $r=۱/۲$ تنها در بازه‌ای از ξ جهت انتقال حرارت از محیط به سطح بوده و به ازای $r=۱$ شرط مرزی اعمالی بر سطح همچنان غالب بوده، اما از شدت انتقال حرارت از سوی سطح به محیط کاسته شده است.

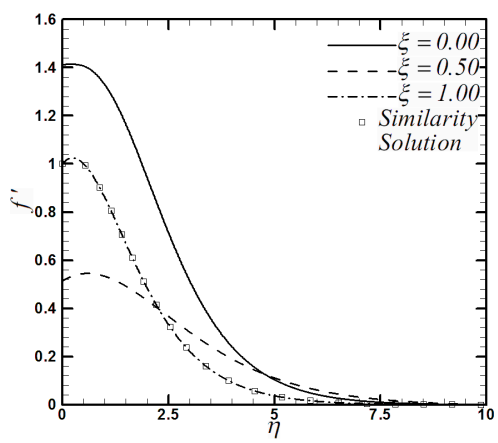
پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد به ازای مقادیر مختلف r و ξ در شکل‌های ۶-۱۲ تا ۶-۲۵ آمده است. پروفایل‌های مربوط به صفحات افقی و عمودی نیز آورده شده که با حل تشابهی مطابقت دارد.



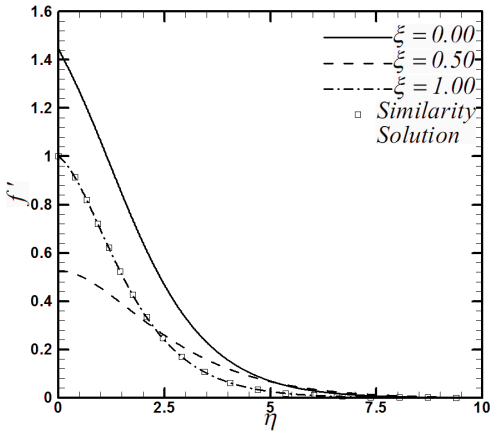
شکل ۶-۱۲. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف مثبت و $r = -۱/۳$



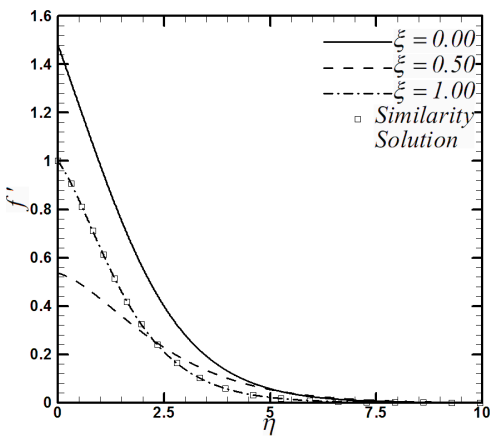
شکل ۶-۱۳. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف مثبت و $r = -۱/۴$



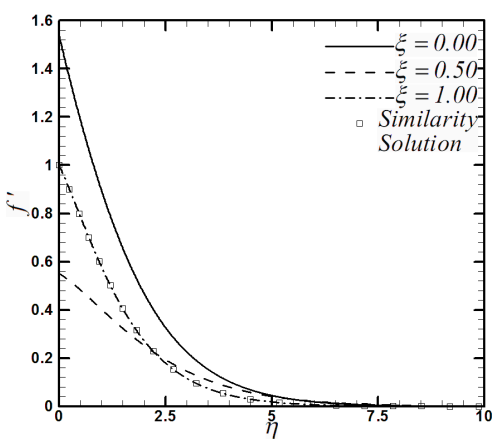
شکل ۶-۱۴. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۰$



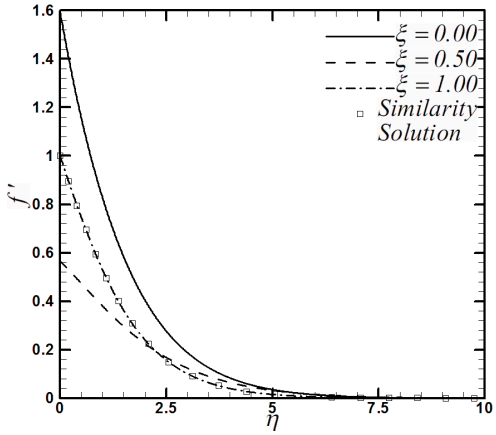
شکل ۶-۱۵. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۱/۳$



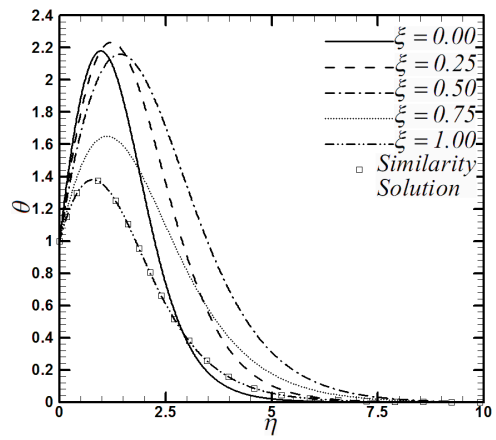
شکل ۶-۱۶. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۱/۲$



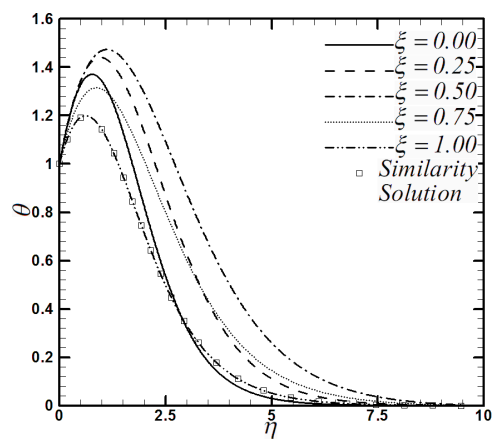
شکل ۶-۱۷. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۳/۴$



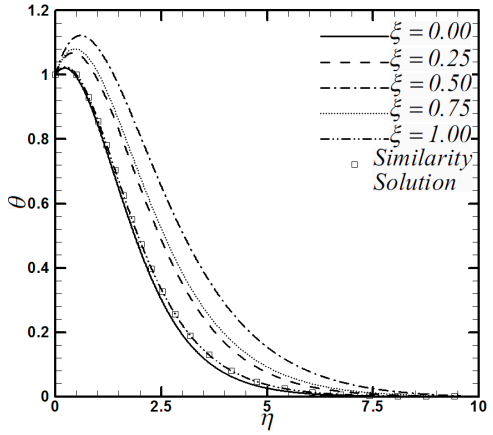
شکل ۶-۱۸. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۱$



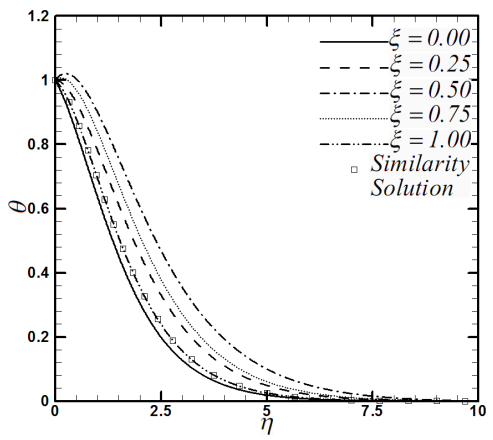
شکل ۶-۱۹. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف مثبت و $r = -۱/۳$



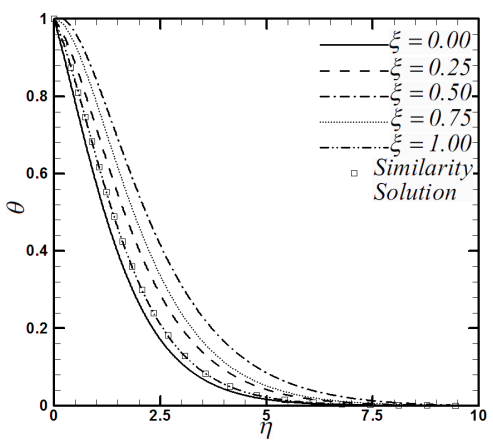
شکل ۶-۲۰. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف مثبت و $r = -۱/۴$



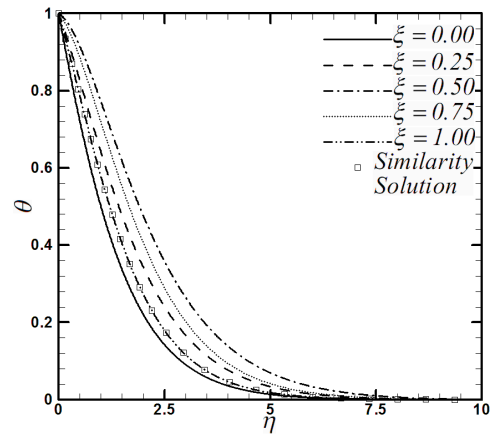
شکل ۶-۲۱. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۰$



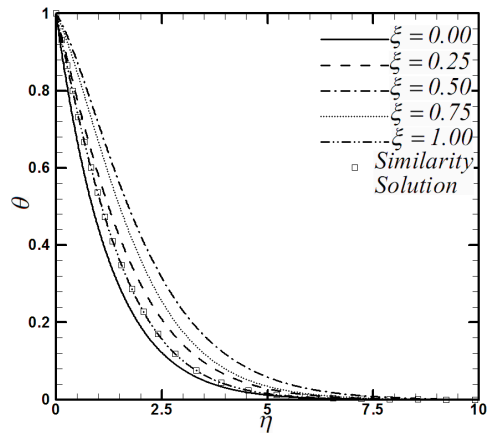
شکل ۶-۲۲. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۱/۳$



شکل ۶-۲۳. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۱/۲$



شکل ۶-۲۴. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۳/۴$



شکل ۶-۲۵. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف مثبت و $r = ۱$

به ازای $r \leq ۰$ در نمودارهای سرعت و دمای بی بعد به ازای ξهای گوناگون جهشی دیده می‌شود که دلیل آن غلبه میزان تولید حرارت داخلی در محیط متخلخل بر شرط مرزی دمایی روی سطح است. از شکل‌های ۶-۱۲ تا ۶-۱۸ مشاهده می‌گردد که در تمام ξها به جز $\xi = ۱$ با افزایش قدر مطلق r، $f'(۰)$ افزایش می‌یابد که دلیل آن افزایش نیروی شناوری است. دلیل ثابت ماندن $f'(۰)$ با تغییر r در $\xi = ۱$، منطبق بودن پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد در $\phi = 90°$ بوده که منجر به $f'(۰) = ۱$ به ازای rهای گوناگون می‌گردد. از طرفی در $\xi = ۰$ و $\xi = ۱$، هم برای $r \leq ۰$ و هم برای $r > ۰$ با افزایش قدر مطلق r بر شیب پروفایل‌های سرعت افزوده می‌شود، که قبلا توسط نمودارهای تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای نیز قابل رؤیت بود. اما در مورد $\xi = ۰/۵$ تنها به ازای $r \leq ۰$ این مطلب قابل استنتاج می‌باشد. زیرا همانطور که از شکل ۶-۳ هم پیداست ضریب اصطکاک پوسته‌ای به ازای بعضی از مقادیر مثبت r تغییر علامت می‌دهد. هرچند که به ازای $r \geq ۱/۳$ رابطه $C_f \leq ۰$ برقرار بوده و بنابراین می‌توان گفت که با افزایش r شیب پروفایل‌های سرعت زیاد می‌شود.

نمودارهای ۶-۱۹ تا ۶-۲۱ نشان می‌دهند که برای $r \leq ۰$، با افزایش قدر مطلق r شیب پروفایل-های دما در ξ معین افزایش یافته است، موضوعی که شکل ۶-۴ نیز آن را تایید می‌کند. این پدیده

در مورد $r > ۰$ صادق نیست، زیرا همانطور که شکل ۶-۵ نیز بر آن صحه می‌گذارد، شیب پروفایل‌های دما در این مورد تغییر علامت می‌دهند.

۶-۳-۲ مسئله اول: انحراف زاویه‌ای منفی

برای انحرافات منفی بر طبق توضیحات بخش ۴-۳-۲ جدایش رخ می‌دهد. $(\xi_s)_{approx}$ که معادلات لایه مرزی در آن شکسته شده و لذا تخمینی از نقطه جدایش محسوب می‌گردد، در جدول ۶-۴ آمده است.

جدول ۶-۴. مقادیر $(\xi_s)_{approx}$ بر حسب r

r	$(\xi_s)_{approx}$
−۱/۳	۰/۶۰
−۱/۴	۰/۶۰
−۰/۱۹	۰/۶۶
−۰/۱۵	۰/۶۰
−۰/۱۰	۰/۶۰
۰/۰۰	۰/۶۴
۱/۴	۰/۶۴
۱/۳	۰/۶۵
۱/۲	۰/۶۵
۳/۴	۰/۶۴
۱	۰/۶۶

جدول ۶-۵. مقادیر $\xi|_{C_f=0}$ در حالت انحراف منفی به ازای $r < ۰$

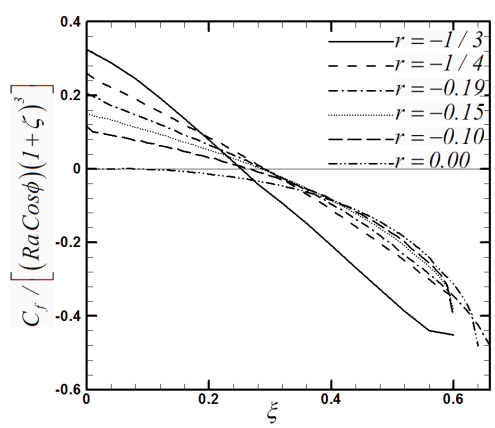
r	$\xi|_{C_f=0}$
−۱/۳	۰/۲۵
−۱/۴	۰/۳۰
−۰/۱۹	۰/۲۹
−۰/۱۵	۰/۲۹
−۰/۱۰	۰/۲۷

جدول ۶-۶. مختصات نقطه اکسترمم منحنی تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای در حالت انحراف منفی به ازای $r > ۰$

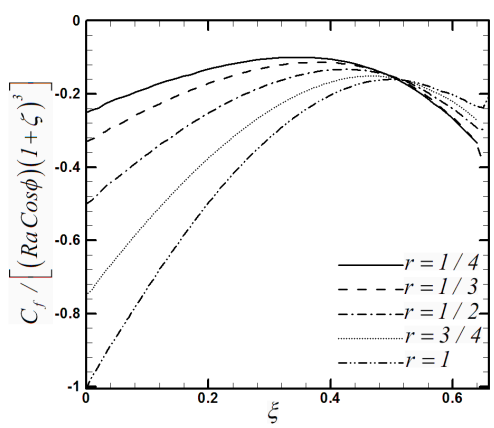
r	$\xi_{ext}\|_{C_f}$	$C_{f,ext}$
۱/۴	۰/۳۵	$-۹/۹۸۳۳\times۱۰^{-۲}$
۱/۳	۰/۳۷	$-۱/۱۳۳۷\times۱۰^{-۱}$
۱/۲	۰/۴۳	$-۱/۳۲۸۰\times۱۰^{-۱}$
۳/۴	۰/۴۷	$-۱/۵۰۷۷\times۱۰^{-۱}$
۱	۰/۵۰	$-۱/۶۰۲۰\times۱۰^{-۱}$

نمودار تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای برای زوایای انحراف منفی به ازای $r \leq ۰$ و $r > ۰$ به ترتیب در شکل‌های ۶-۲۶ و ۶-۲۷ آمده است. در $r \leq ۰$ این کمیت با افزایش ξ از مقدار مثبتش در حالت افقی شروع به کاهش کرده، در $\xi|_{C_f=0}$ تغییر علامت داده و نهایتا به مقدارش در $(\xi_s)_{approx}$ می‌رسد. مقادیر $\xi|_{C_f=0}$ در جدول ۶-۵ آمده است. در $r > ۰$ این کمیت همواره منفی بوده و دارای نقطه اکسترمم است، که مختصات آن در جدول ۶-۶ آورده شده است. اغتشاشات یا تغییرات ناگهانی در حوالی $(\xi_s)_{approx}$ به دلیل نزدیکی به نقطه جدایش و در نتیجه شکسته شدن معادلات لایه مرزی است.

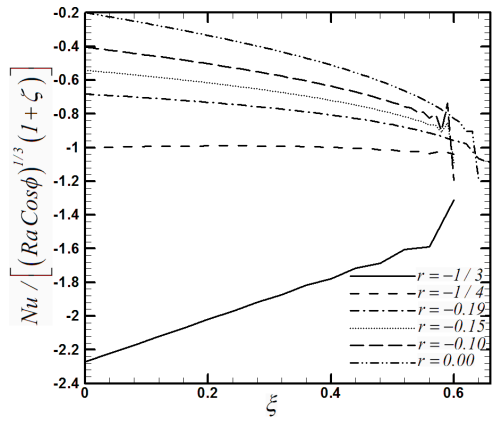
شکل ۶-۲۸ تغییرات یکنواختی را برای عدد ناسلت در $r \leq ۰$ به جز در نقاط انتهایی نمایش می‌دهد. البته نحوه تغییر به ازای $r = -۱/۳$ با بقیه موارد متفاوت است. شکل ۶-۲۹ نیز نشان می‌دهد که در $r > ۰$ عدد ناسلت با افزایش ξ تغییر علامت داده، به این ترتیب که ابتدا جهت انتقال حرارت از صفحه به سیال است، در نقطه $\xi|_{Nu=0}$ صفر شده و سپس جهت انتقال حرارت از سیال به سمت به صفحه است. جدول ۶-۷ مقادیر $\xi|_{Nu=0}$ را به ازای $r > ۰$ نشان می‌دهد.



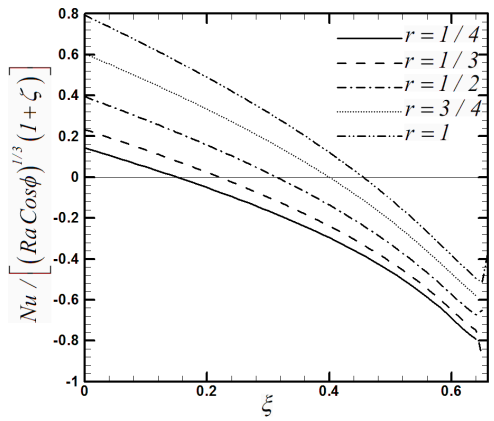
شکل ۶-۲۶. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ برای انحراف منفی و $r \leq ۰$



شکل ۶-۲۷. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ برای انحراف منفی و $r > ۰$



شکل ۶-۲۸. تغییرات عدد ناسلت با ξ برای انحراف منفی و $r \leq ۰$

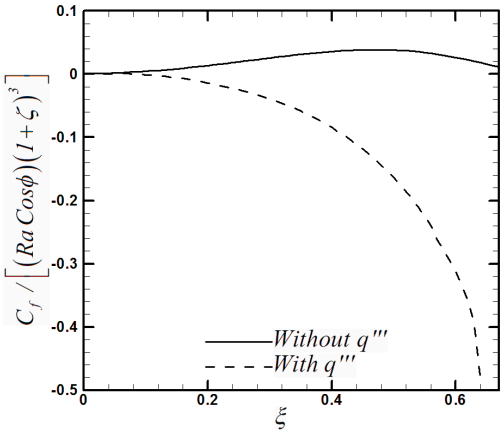


شکل ۶-۲۹. تغییرات عدد ناسلت با ξ برای انحراف منفی و $r > ۰$

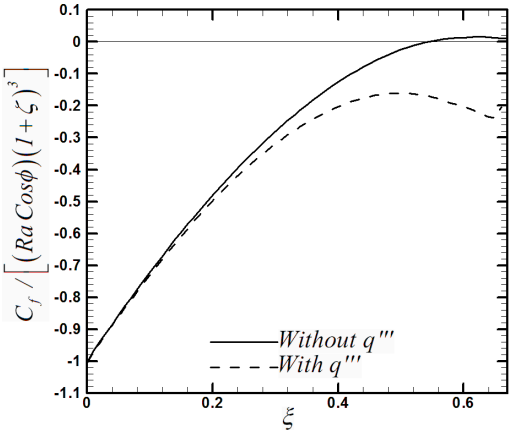
جدول ۶-۷. مقادیر $\xi|_{Nu=0}$ در $r > ۰$ برای انحراف منفی

r	$\xi\|_{Nu=0}$
۱/۴	۰/۱۵
۱/۳	۰/۲۲
۱/۲	۰/۳۱
۳/۴	۰/۴۰
۱	۰/۴۶

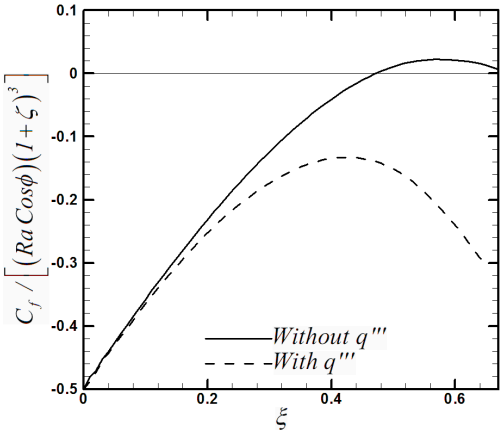
شکل‌های ۶-۳۰ تا ۶-۳۲ تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای را برای انحراف منفی به ازای $r = ۰$، $r = ۱/۲$ و $r = ۱$ در دو حالت تولید و عدم تولید حرارت در محیط متخلخل با هم مقایسه می‌کنند. به ازای $r = ۰$، مانند انحراف مثبت علامت ضریب اصطکاک پوسته‌ای تغییر کرده، و با شیبی تندتر بر قدر مطلق آن افزوده می‌شود. به ازای $r = ۱/۲$ و $r = ۱$ به علت تولید حرارت در محیط متخلخل و افزایش نیروی شناوری در محیط، شیب پروفایل‌های سرعت و در نتیجه مقدار ضریب ضریب اصطکاک پوسته-ای افزایش می‌یابد، هر چند این افزایش در نقاط اولیه ناچیز است.



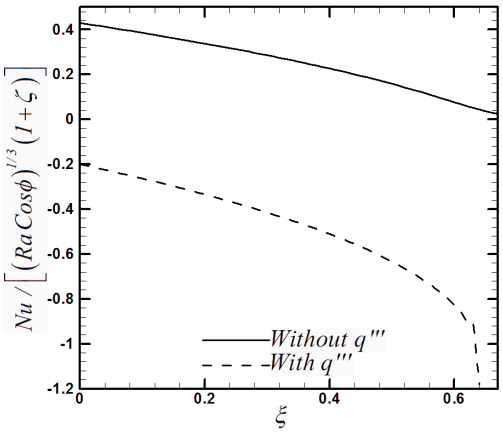
شکل ۶-۳۰. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ در حضور و عدم حضور تولید حرارت برای انحراف منفی به ازای $r=۰$



شکل ۶-۳۲. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ در حضور و عدم حضور تولید حرارت برای انحراف منفی به ازای $r=۱$



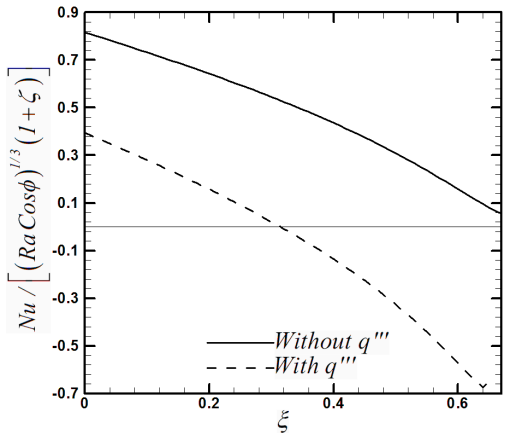
شکل ۶-۳۱. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ در حضور و عدم حضور تولید حرارت برای انحراف منفی به ازای $r=۱/۲$



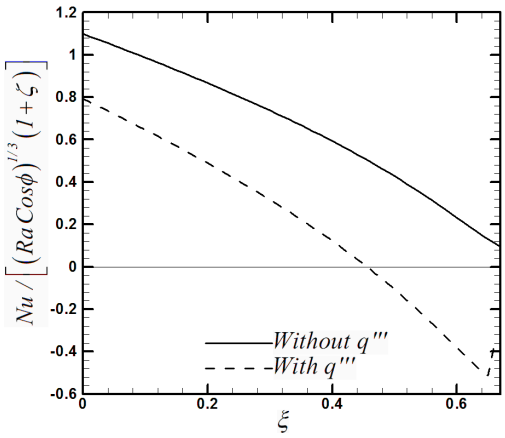
شکل ۶-۳۳. تغییرات عدد ناسلت با ξ در حضور و عدم حضور تولید حرارت برای انحراف منفی به ازای $r=۰$

شکل‌های ۶-۳۳ تا ۶-۳۵ به بررسی تاثیر تولید حرارت بر نحوه تغییرات عدد ناسلت با ξ در انحرافات منفی می‌پردازد. شکل کلی تغییرات عدد ناسلت در دو حالت یکسان بوده، اما به دلیل تولید گرما در محیط متخلخل جهت انتقال حرارت در تمام بازه یا بخشی از آن تغییر کرده است. برای مثال به ازای $r=۰$، در حالت عدم تولید گرما، انتقال حرارت از سطح به سیال روی می‌داد و مقدار آن با

پیشروی در ξ کاهش می‌یافت. اما در حالت تولید گرما، انتقال حرارت از سیال به سطح روی داده و با پیشروی در جهت ξ بر مقدار آن افزوده می‌گردد.

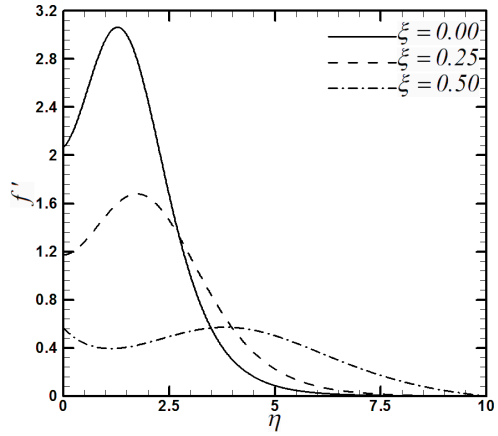


شکل ۶-۳۴. تغییرات عدد ناسلت با ξ در حضور و عدم حضور تولید حرارت برای انحراف منفی به ازای $r=۱/۲$

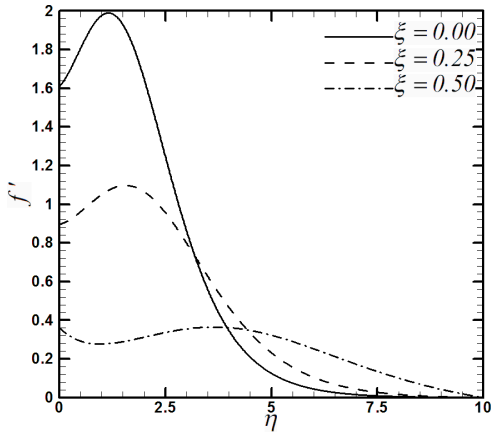


شکل ۶-۳۵. تغییرات عدد ناسلت با ξ در حضور و عدم حضور تولید حرارت برای انحراف منفی به ازای $r=۱$

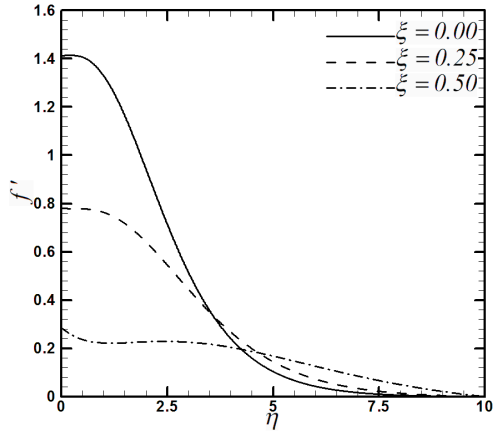
در پایان پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد برای انحراف منفی به ازای rهای انتخابی و $\xi=۰/۰۰$، $\xi=۰/۲۵$ و $\xi=۰/۵۰$ در شکل های ۶-۳۶ تا ۶-۴۹ آمده است.



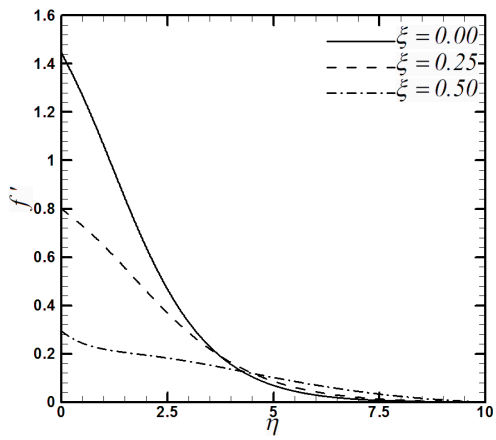
شکل ۶-۳۶. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف منفی و $r=-۱/۳$



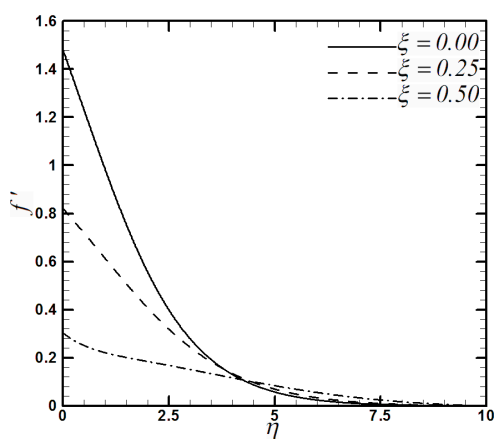
شکل ۶-۳۷. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف منفی و $r=-۱/۴$



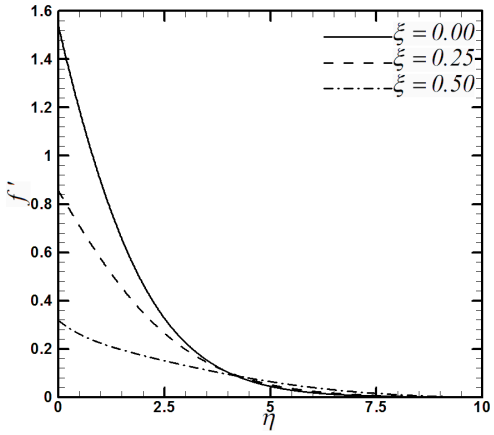
شکل ۶-۳۸. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۰$



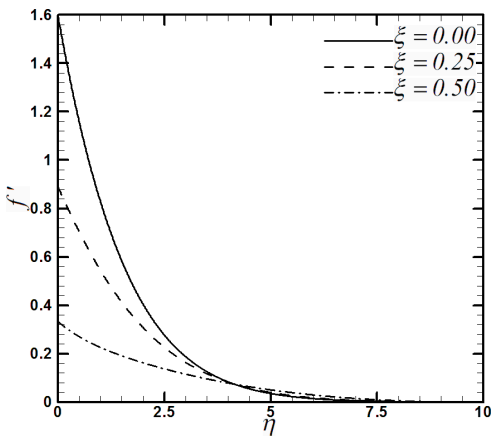
شکل ۶-۳۹. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۱/۳$



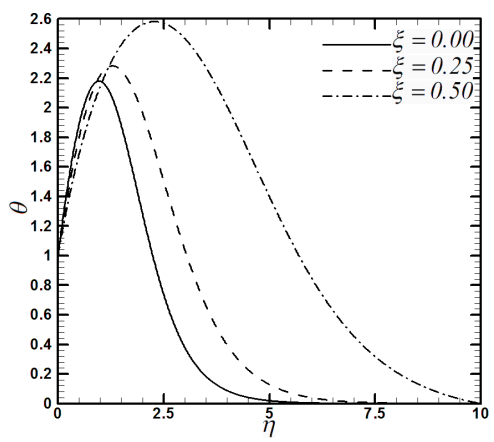
شکل ۶-۴۰. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۱/۲$



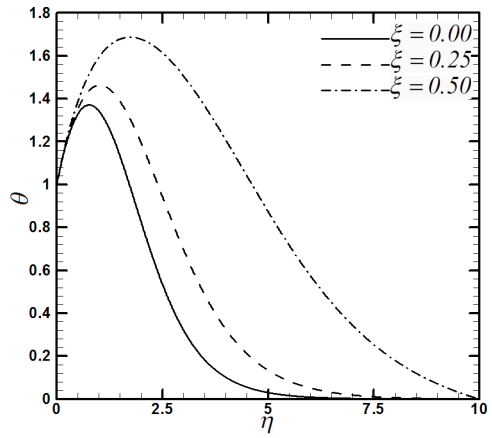
شکل ۶-۴۱. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۳/۴$



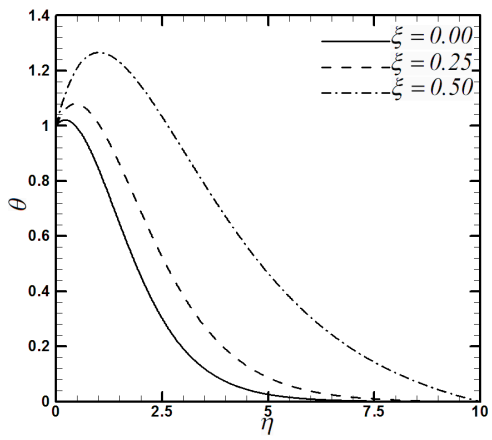
شکل ۶-۴۲. پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۱$



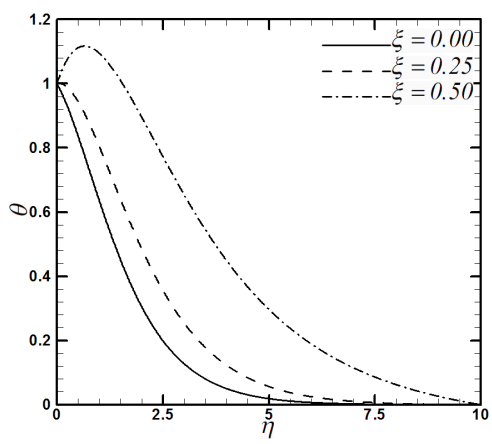
شکل ۶-۴۳. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف منفی و $r = -۱/۳$



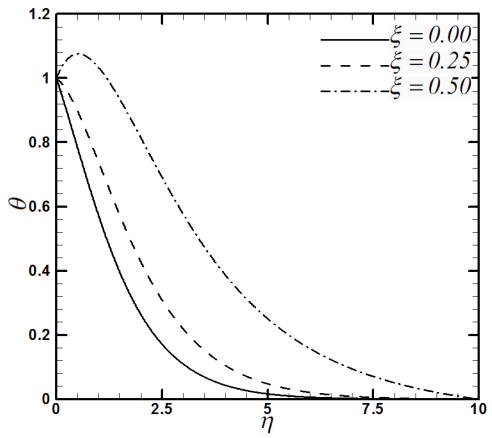
شکل ۶-۴۴. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف منفی و $r = -۱/۴$



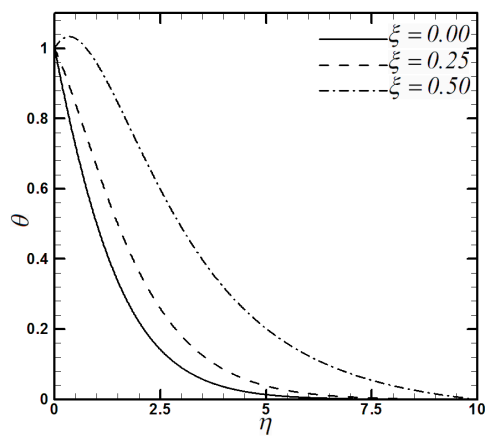
شکل ۶-۴۵. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۰$



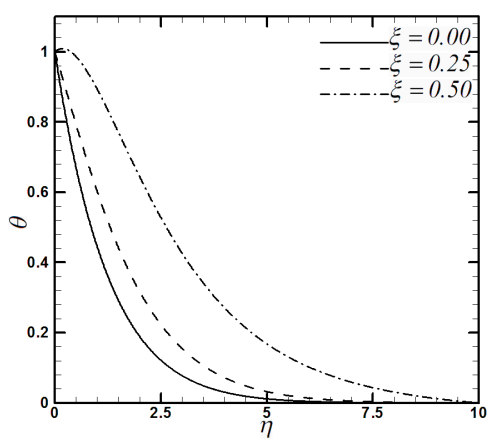
شکل ۶-۴۶. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۱/۳$



شکل ۶-۴۷. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۱/۲$



شکل ۶-۴۸. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۳/۴$



شکل ۶-۴۹. پروفایل‌های دمای بی بعد برای انحراف منفی و $r = ۱$

از شکل‌های فوق مشاهده می‌شود، در یک r معین به ازای ξهای کوچکتر پروفایل‌های سرعت بی بعد به طور کلی دارای شیب تندتری هستند. همچنین ضخامت لایه مرزی مومنتوم به ازای $\xi = ۰/۵۰$ از دو حالت دیگر بیشتر بوده، که این به علت نزدیکی به نقطه جدایش است. از طرفی پروفایل‌های دمای بی بعد با افزایش ξ در r معین به جز $r = -۱/۳$ به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد.

۶-۳-۳ مسئله دوم: انحراف زاویه‌ای مثبت

شکل‌های ۶-۵۰ تا ۶-۵۲ تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ را به ازای $r = ۱/۰$، $r = ۱/۵$ و $r = ۲/۰$ نشان می‌دهد. در تمام موارد، این تغییرات شکلی سهمی‌گون داشته و دارای نقطه اکسترمم در $\xi_{ext}\big|_{C_f}$ بوده که مختصات آن در جدول ۶-۸ آمده است. همچنین در ξهای کوچکتر تغییرات p تاثیر چندانی بر مقدار ضریب اصطکاک پوسته‌ای نمی‌گذارد. در کل با کاهش p از قدر مطلق ضریب اصطکاک پوسته‌ای کاسته شده، طوری که در $r = ۱/۰$، این رویه باعث تغییر علامت ضریب اصطکاک پوسته‌ای در $p = ۱/۰$ و $p = ۱/۵$ می‌گردد.

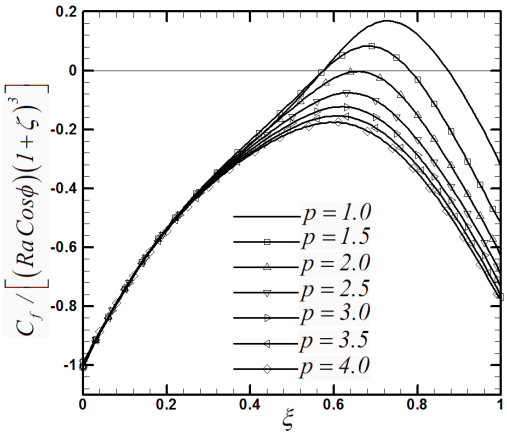
تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای pهای انتخابی در شکل‌های ۶-۵۳ تا ۶-۵۶ آمده، که نشان دهنده کاهش مقدار ضریب اصطکاک پوسته‌ای با کاهش r به دلیل کم شدن نیروی شناوری است.

منحنی تغییرات عدد ناسلت بر حسب ξ به ازای مقادیر گوناگون r و p در شکل‌های ۶-۵۷ تا ۶-۶۳ آورده شده است. همانطور که از این شکل‌ها پیداست، عدد ناسلت از مقدارش در حالت افقی شروع به کاهش کرده و در $\xi_{ext}\big|_{Nu}$، جایی که مؤلفه‌های عمودی و مماسی نیروی شناوری با هم قابل مقایسه هستند، به کمترین میزان خود رسیده، دوباره با افزایش ξ بر میزان آن افزوده شده تا به

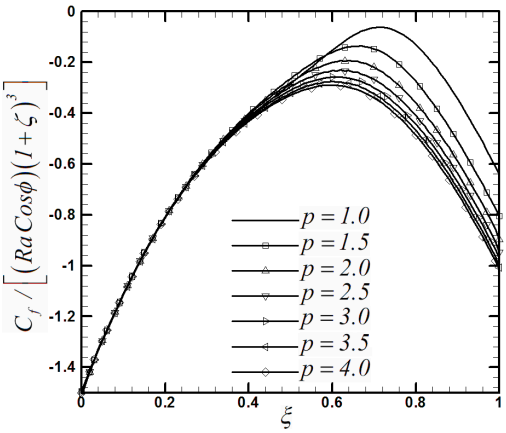
مقدار خود در حالت عمودی برسد. مختصات نقطه اکسترمم به ازای rها و pهای گوناگون در جدول ۶-۹ آمده است. شکل‌های ۶-۵۸ و ۶-۵۹ نشان می‌دهند که به ازای $r=۱/۵$ و $r=۲/۰$ به طور کلی با کاهش p مقدار عدد ناسلت نیز کاهش می‌یابد. این موضوع به دلیل افزایش تولید حرارت در محیط متخلخل با کاهش توان p است. زیرا بنابر تعریف دمای بی بعد مقدار θ بین صفر و یک تغییر می‌کند، لذا با کاهش p بر طبق معادله (۶-۶-ب) بر میزان تولید حرارت افزوده می‌شود که خود باعث افزایش دمای سیال در محیط متخلخل و در نتیجه کاهش شیب دما بر روی سطح می‌گردد. اما این افزایش دمای سیال در محیط متخلخل به ازای $r=۱/۰$ به حدی است که در $p=۱/۰$، $p=۱/۵$ و $p=۲/۰$ در بازه‌ای از ξ انتقال حرارت از سیال به سطح صورت می‌گیرد. شکل‌های ۶-۶۰ تا ۶-۶۳ نیز نشان می‌دهند که با کاهش r از میزان عدد ناسلت کاسته شده که دلیل آن نیز کاهش قدر مطلق شیب پروفایل دما است، تا حدی که در $r=۱/۰$ و به ازای $p=۱/۰$، $p=۱/۵$ و $p=۲/۰$ در بازه‌ای از ξ شیب پروفایل دما مثبت می‌شود. جدول ۶-۱۰ عدد ناسلت محاسبه شده از حل معادلات مربوط به صفحه مایل در $\xi=۱$ $(\phi=۹۰^\circ)$ را با عدد ناسلت محاسبه شده از حل معادلات مربوط به صفحه قائم مقایسه می‌کند که تطابق خوبی با هم دارند.

جدول۶-۸. مختصات نقاط اکسترمم منحنی تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای برای انحراف مثبت

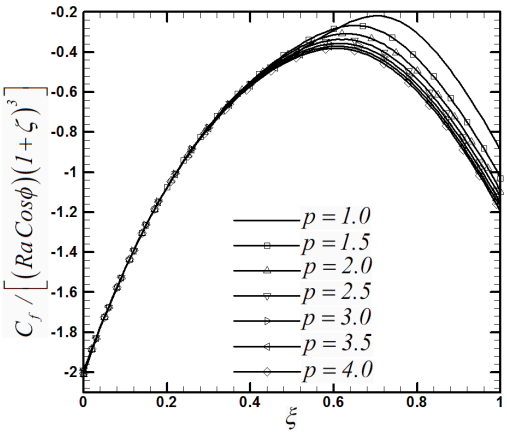
$p\downarrow$ $r\rightarrow$	۱/۰	۱/۵	۲/۰
۱/۰	[۰/۷۳ , ۰/۱۶۸۲]	[۰/۷۱ , -۰/۰۶۱۷]	[۰/۷۰ , -۰/۲۱۸۰]
۱/۵	[۰/۶۹ , ۰/۰۸۳۵]	[۰/۶۷ , -۰/۱۳۵۷]	[۰/۶۶ , -۰/۲۶۷۹]
۲/۰	[۰/۶۶ , -۰/۰۰۲۹]	[۰/۶۴ , -۰/۱۹۲۳]	[۰/۶۴ , -۰/۳۰۸۴]
۲/۵	[۰/۶۴ , -۰/۰۷۴۸]	[۰/۶۲ , -۰/۲۳۰۵]	[۰/۶۳ , -۰/۳۳۶۲]
۳/۰	[۰/۶۲ , -۰/۱۲۲۳]	[۰/۶۱ , -۰/۲۵۷۴]	[۰/۶۲ , -۰/۳۵۶۱]
۳/۵	[۰/۶۰ , -۰/۱۵۳۷]	[۰/۶۰ , -۰/۲۷۵۱]	[۰/۶۱ , -۰/۳۶۹۹]
۴/۰	[۰/۵۹ , -۰/۱۷۴۹]	[۰/۶۰ , -۰/۲۸۹۲]	[۰/۶۰ , -۰/۳۸۱۰]



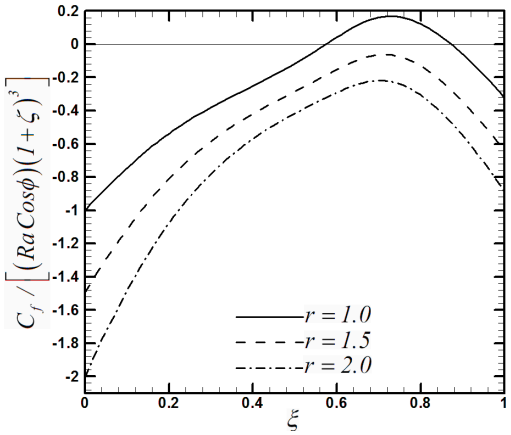
شکل ۶-۵۰. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $r = ۱/۰$ برای انحراف مثبت



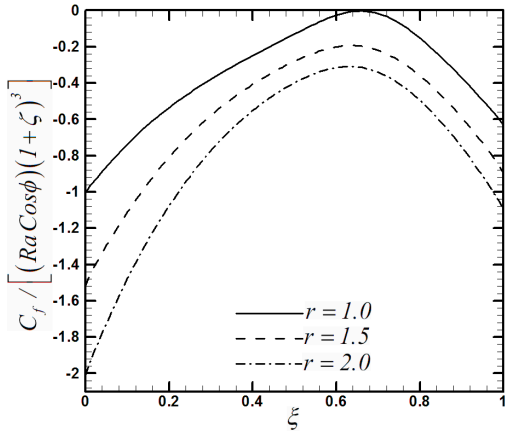
شکل ۶-۵۱. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $r = ۱/۵$ برای انحراف مثبت



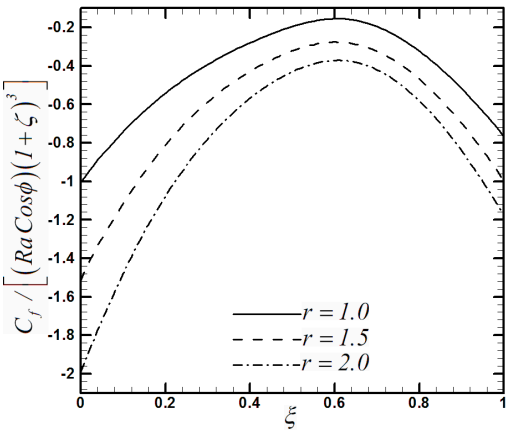
شکل ۶-۵۲. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $r = ۲/۰$ برای انحراف مثبت



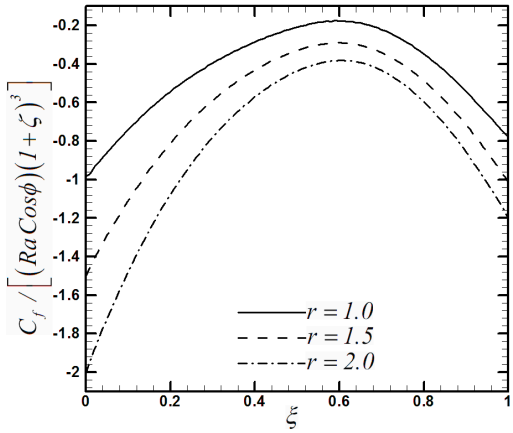
شکل ۶-۵۳. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $p = ۱/۰$ برای انحراف مثبت



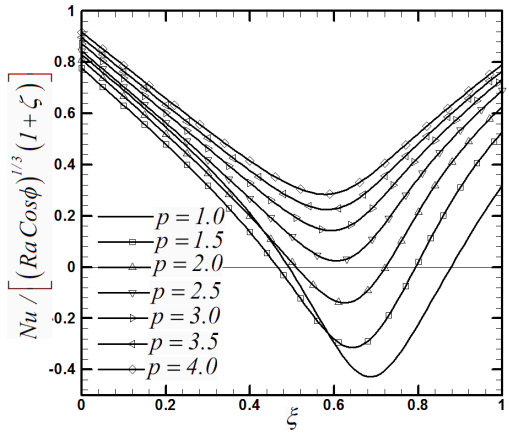
شکل ۶-۵۴. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $p = ۲/۰$ برای انحراف مثبت



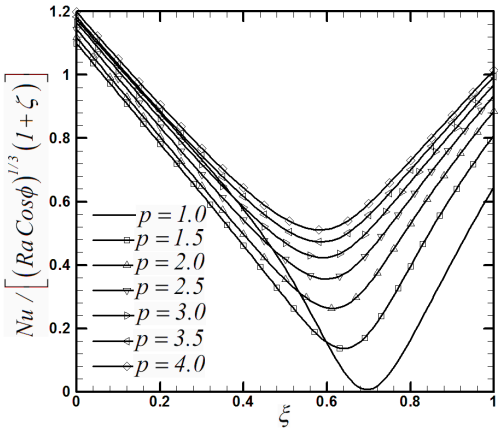
شکل ۶-۵۵. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $p = ۳/۵$ برای انحراف مثبت



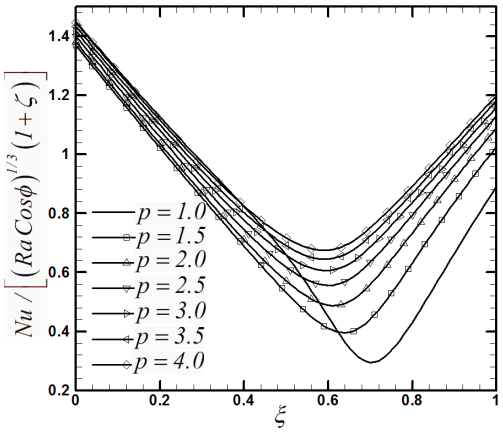
شکل ۶-۵۶. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $p = ۴/۰$ برای انحراف مثبت



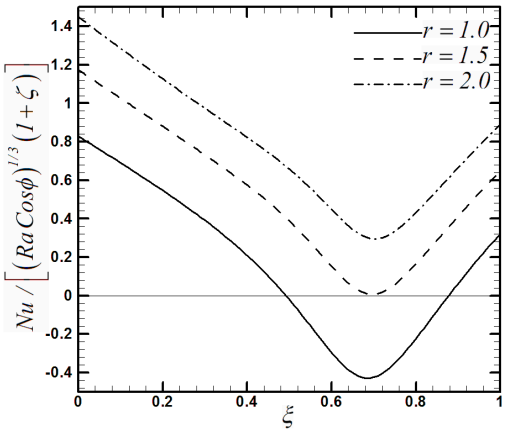
شکل ۶-۵۷. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $r = ۱/۰$ برای انحراف مثبت



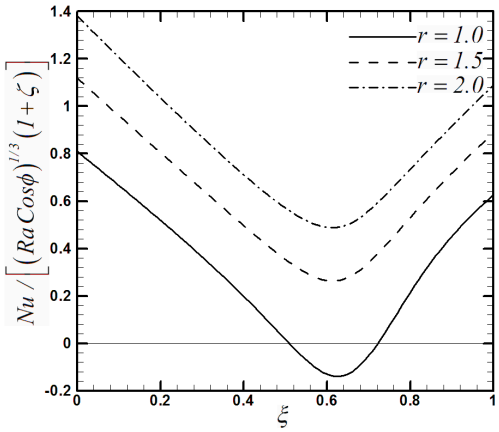
شکل ۶-۵۸. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $r = ۱/۵$ برای انحراف مثبت



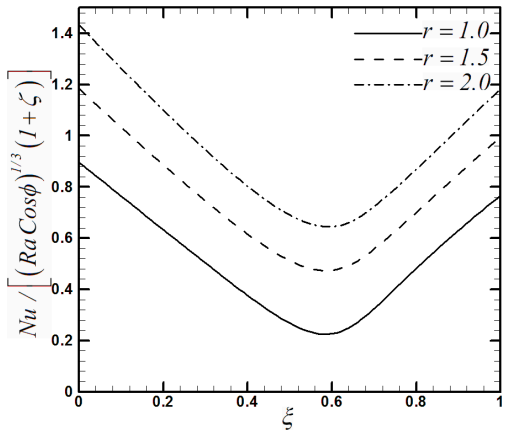
شکل ۶-۵۹. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $r = ۲/۰$ برای انحراف مثبت



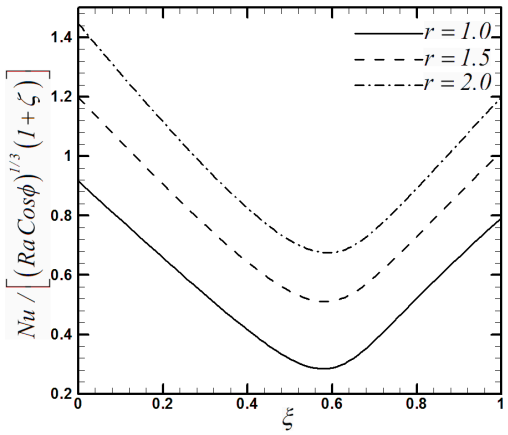
شکل ۶-۶۰. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $p = ۱/۰$ برای انحراف مثبت



شکل ۶-۶۱. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $p = ۲/۰$ برای انحراف مثبت



شکل ۶-۶۲. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $p = ۳/۵$ برای انحراف مثبت



شکل ۶-۶۳. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $p = ۴/۰$ برای انحراف مثبت

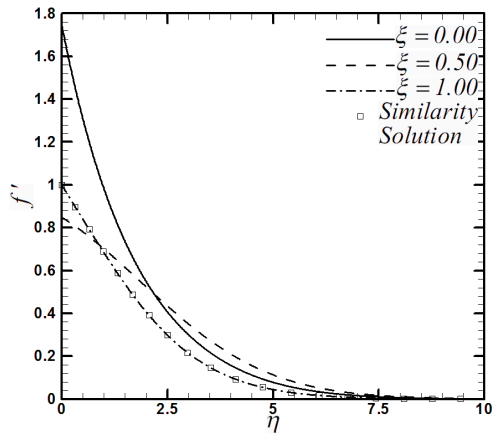
جدول۶-۹. مختصات نقاط اکسترمم منحنی تغییرات عدد ناسلت برای انحراف مثبت

$p \downarrow$ $r \rightarrow$	۱/۰	۱/۵	۲/۰
۱/۰	[۰/۶۹ , -۰/۴۲۸۳]	[۰/۷۰ , ۰/۰۰۷۲]	[۰/۷۰ , ۰/۲۹۵۴]
۱/۵	[۰/۶۴ , -۰/۳۱۳۹]	[۰/۶۴ , ۰/۱۳۶۶]	[۰/۶۴ , ۰/۳۹۵۷]
۲/۰	[۰/۶۲ , -۰/۱۳۹۱]	[۰/۶۱ , ۰/۲۶۳۰]	[۰/۶۱ , ۰/۴۸۷۸]
۲/۵	[۰/۶۱ , ۰/۰۲۴۲]	[۰/۶۰ , ۰/۳۵۶۰]	[۰/۶۰ , ۰/۵۵۶۰]
۳/۰	[۰/۵۹ , ۰/۱۴۲۴]	[۰/۵۹ , ۰/۴۲۳۱]	[۰/۶۰ , ۰/۶۰۶۸]
۳/۵	[۰/۵۸ , ۰/۲۲۴۹]	[۰/۵۹ , ۰/۴۷۳۱]	[۰/۵۹ , ۰/۶۴۵۱]
۴/۰	[۰/۵۸ , ۰/۲۸۴۴]	[۰/۵۸ , ۰/۵۱۱۲]	[۰/۵۹ , ۰/۶۷۵۰]

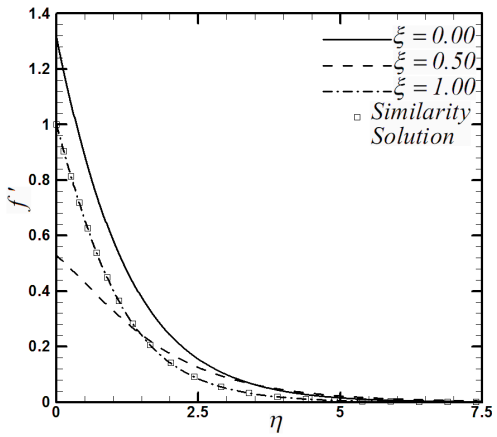
جدول ۶-۱۰. مقایسه مقادیر $-\theta'(\cdot)$ محاسبه شده از حل معادلات تشابهی سطح قائم با مقدار محاسبه شده از معادلات سطح مایل در $\xi = ۱$ (مؤلفه اول از معادلات سطح قائم و مؤلفه دوم از معادلات سطح مایل)

$p \downarrow$ $r \rightarrow$	۱/۰	۱/۵	۲/۰
۱/۰	[۰/۳۲۰۷ , ۰/۳۲۰۸]	[۰/۶۴۶۸ , ۰/۶۴۶۸]	[۰/۸۹۱۶ , ۰/۸۹۱۶]
۱/۵	[۰/۵۲۸۲ , ۰/۵۲۸۲]	[۰/۸۱۰۲ , ۰/۸۱۰۲]	[۱/۰۲۶۴ , ۱/۰۲۶۴]
۲/۰	[۰/۶۲۷۶ , ۰/۶۲۷۶]	[۰/۸۸۶۱ , ۰/۸۸۶۱]	[۱/۰۸۹۵ , ۱/۰۸۹۵]
۲/۵	[۰/۶۹۰۳ , ۰/۶۹۰۳]	[۰/۹۳۴۸ , ۰/۹۳۴۸]	[۱/۱۳۰۵ , ۱/۱۳۰۵]
۳/۰	[۰/۷۳۴۱ , ۰/۷۳۴۱]	[۰/۹۶۹۲ , ۰/۹۶۹۳]	[۱/۱۵۹۷ , ۱/۱۵۹۷]
۳/۵	[۰/۷۶۶۷ , ۰/۷۶۶۷]	[۰/۹۹۵۱ , ۰/۹۹۵۱]	[۱/۱۸۱۸ , ۱/۱۸۱۸]
۴/۰	[۰/۷۹۱۹ , ۰/۷۹۱۹]	[۱/۰۱۵۳ , ۱/۰۱۵۴]	[۱/۱۹۹۲ , ۱/۱۹۹۲]

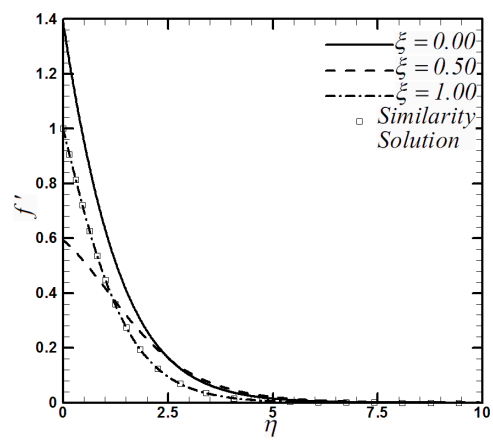
پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای rها و pهای اختیاری در شکل‌های ۶-۶۴ تا ۶-۷۴ آمده است. همچنین حل تشابهی سطوح قائم هم در شکل‌ها آمده که مطابقت شگفت انگیزی را نشان می‌دهد. این شکل‌ها نشان می‌دهند که با افزایش p در ξ مقدار سرعت بی بعد بر روی سطح کاهش می‌یابد. دلیل این امر کاهش نیروی شناوری در نزدیکی سطح به علت کاسته شدن از شدت ترم تولید حرارت با افزایش p است. البته همانطور که در قسمت ۶-۳-۱ آمد، این کاهش $\xi=1$ را شامل نمی‌شود. همچنین شکل‌های مذکور افزایش شیب پروفایل‌های سرعت را با افزایش p و r نشان می‌دهند، موضوعی که نمودارهای تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای نیز آن را تصدیق می‌کند.



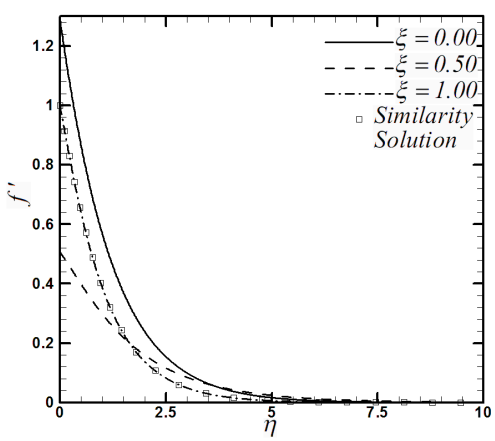
شکل ۶-۶۴. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۱/۰$ و $p=۱/۰$ برای انحراف مثبت



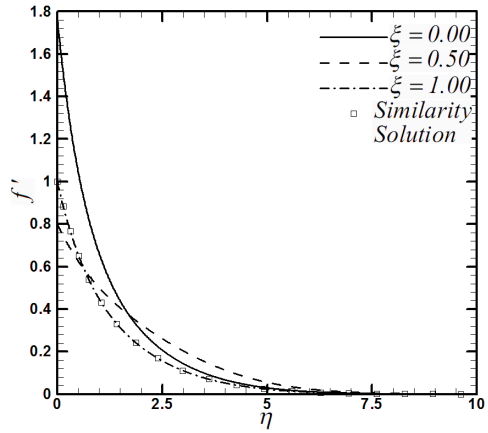
شکل ۶-۶۶. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۱/۰$ و $p=۳/۰$ برای انحراف مثبت



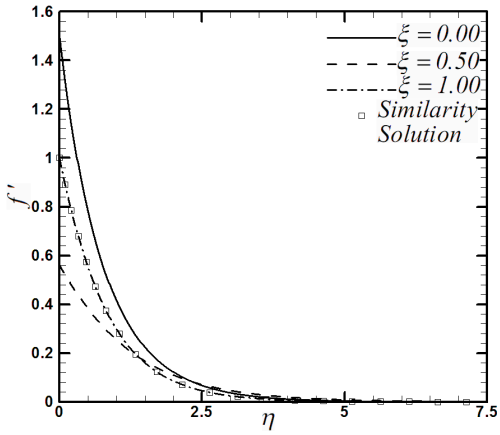
شکل ۶-۶۵. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۱/۰$ و $p=۲/۰$ برای انحراف مثبت



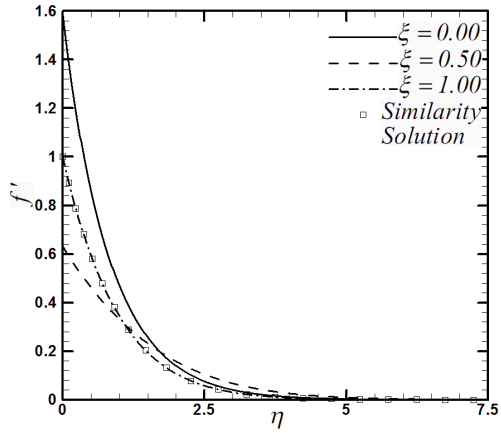
شکل ۶-۶۷. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۱/۰$ و $p=۴/۰$ برای انحراف مثبت



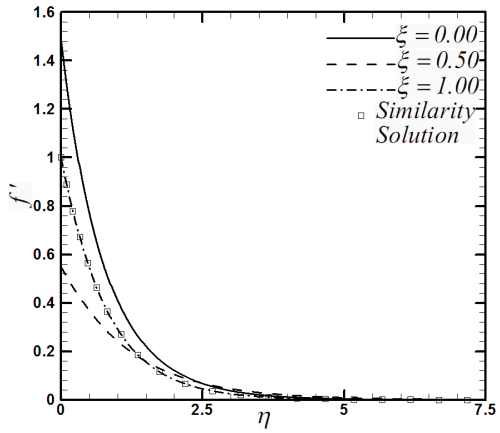
شکل ۶-۶۸. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۲/۰$ و $p=۱/۰$ برای انحراف مثبت



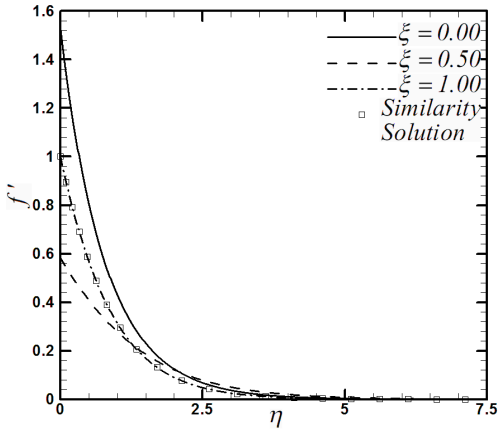
شکل ۶-۷۱. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۲/۰$ و $p=۲/۵$ برای انحراف مثبت



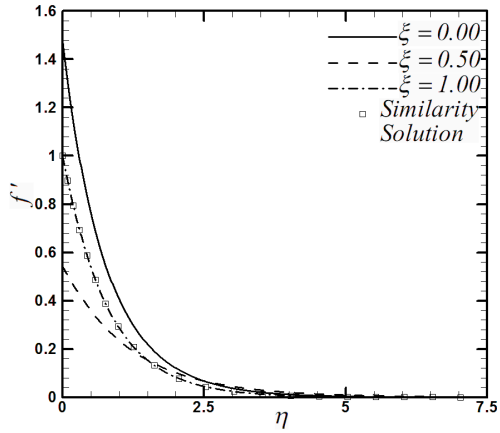
شکل ۶-۶۹. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۲/۰$ و $p=۱/۵$ برای انحراف مثبت



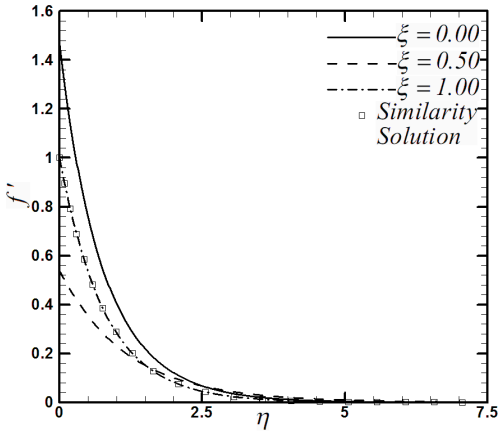
شکل ۶-۷۲. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۲/۰$ و $p=۳/۰$ برای انحراف مثبت



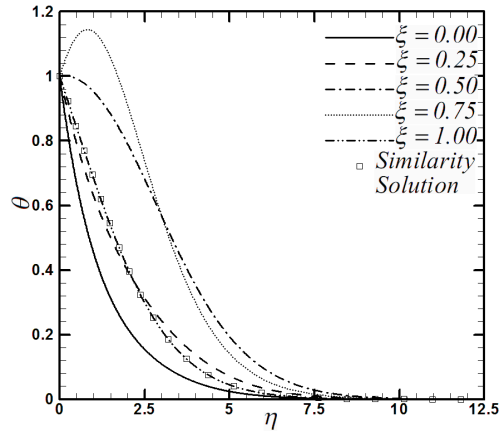
شکل ۶-۷۰. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۲/۰$ و $p=۲/۰$ برای انحراف مثبت



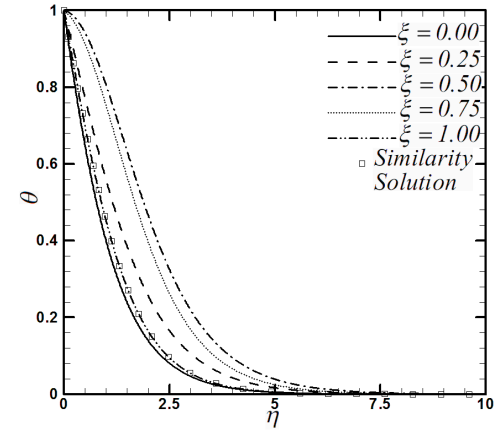
شکل ۶-۷۳. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۲/۰$ و $p=۳/۵$ برای انحراف مثبت



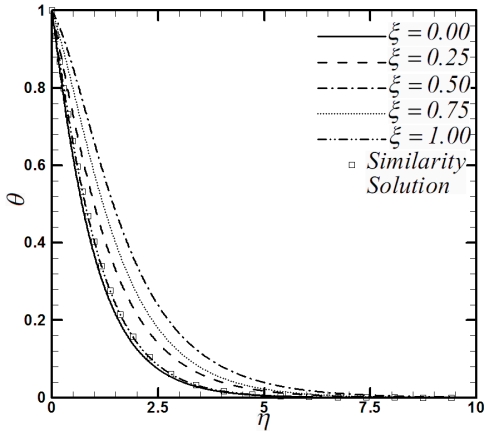
شکل ۶-۷۴. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۴/۰$ برای انحراف مثبت



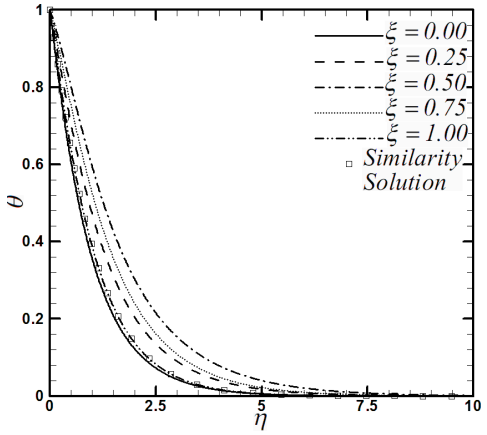
شکل ۶-۷۵. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰$ و $p = ۱/۰$ برای انحراف مثبت



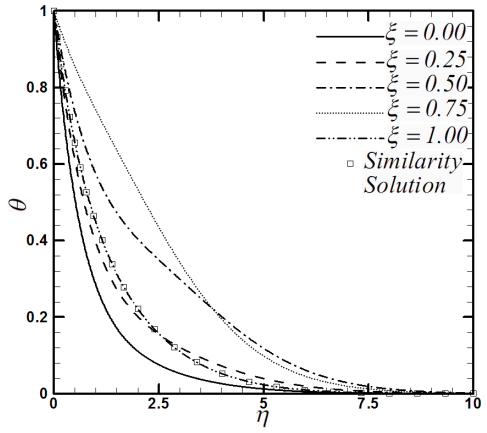
شکل ۶-۷۶. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰$ و $p = ۲/۰$ برای انحراف مثبت



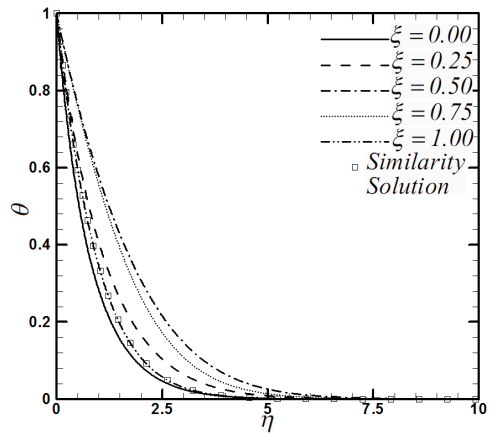
شکل ۶-۷۷. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰$ و $p = ۳/۰$ برای انحراف مثبت



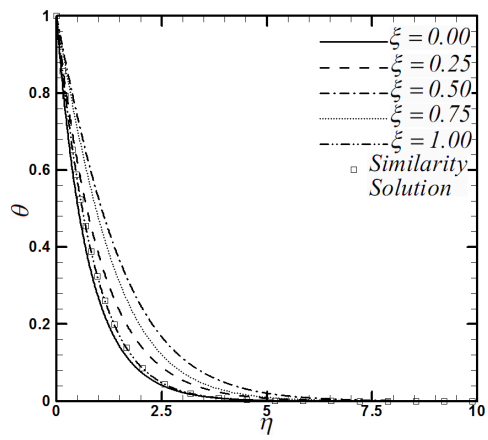
شکل ۶-۷۸. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰$ و $p = ۴/۰$ برای انحراف مثبت



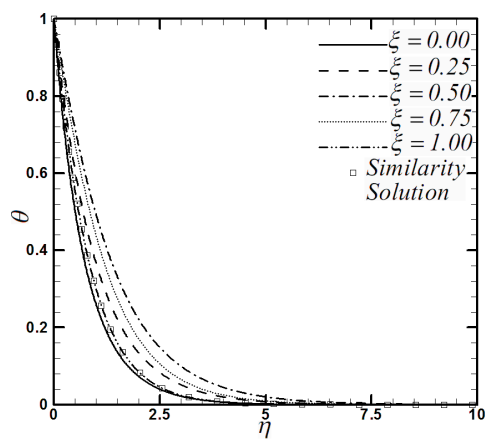
شکل ۶-۷۹. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۱/۰$ برای انحراف مثبت



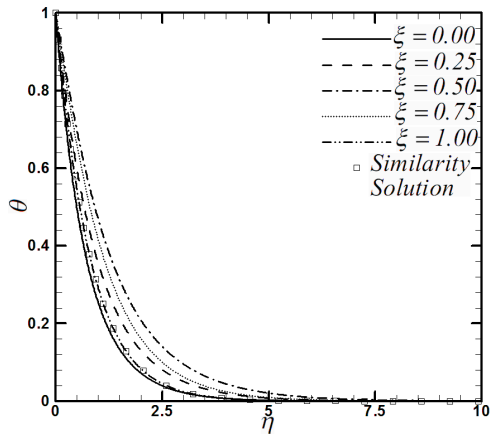
شکل ۶-۸۰. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۱/۵$ برای انحراف مثبت



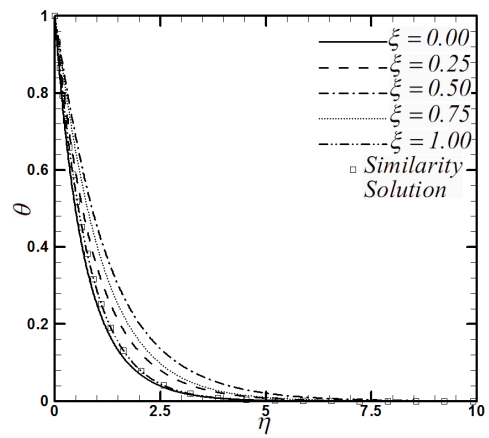
شکل ۶-۸۱. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۲/۰$ برای انحراف مثبت



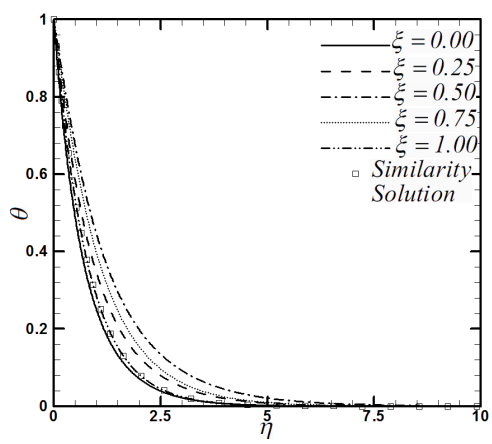
شکل ۶-۸۲. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۲/۵$ برای انحراف مثبت



شکل ۶-۸۳. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۳/۰$ برای انحراف مثبت



شکل ۶-۸۴. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۳/۵$ برای انحراف مثبت



شکل ۶-۸۵. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۴/۰$ برای انحراف مثبت

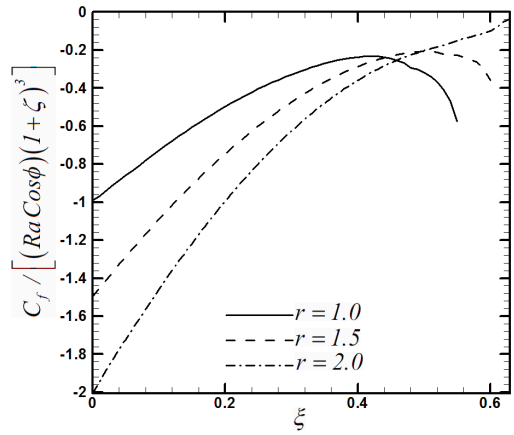
شکل‌های ۶-۷۵ تا ۶-۸۵ نیز پروفایل‌های دمای بی بعد را به ازای rها و pهای انتخابی نشان می‌دهند. حل تشابهی سطوح قائم هم در شکل‌ها آمده که مطابقت خوبی را نشان می‌دهد. از نمودارهای مذکور پیداست که در اکثر حالات شیب پروفایل‌های دما منفی بوده که نشان دهنده انتقال حرارت از صفحه به محیط می‌باشد. از طرفی با کاهش p و r از این مقدار منفی کاسته شده، تا حدی که در بعضی زوایا انتقال حرارت از محیط به صفحه صورت می‌پذیرد، پدیده‌ای که نمودار تغییرات عدد ناسلت نیز بر آن صحه گذاشت.

۶-۳-۴ مسئله دوم: انحراف زاویه‌ای منفی

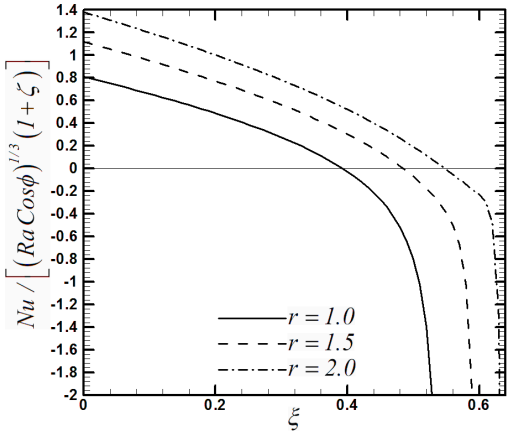
جدول ۶-۱۱ مقدار $(\xi_s)_{approx}$ را به ازای مقادیر مختلف r و p ارائه می‌دهد. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت با ξ برای pهای انتخابی در شکل‌های ۶-۸۶ تا ۶-۹۱ رسم شده که نشان دهنده افزایش قدر مطلق ضریب اصطکاک پوسته‌ای و نیز نرخ انتقال حرارت از سطح به محیط با افزایش r می‌باشد.

جدول ۶-۱۱. مقادیر $(\xi_s)_{approx}$ بر حسب r و p

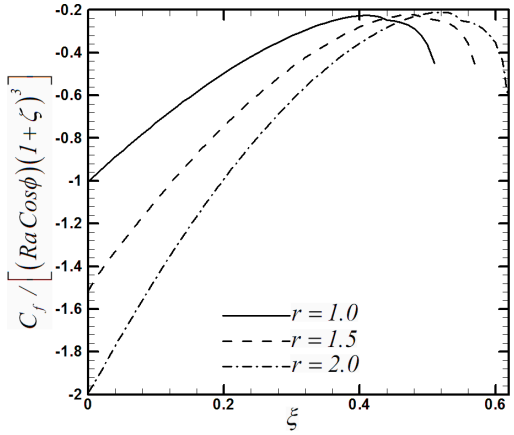
$p\downarrow$ $r\rightarrow$	۱/۰	۱/۵	۲/۰
۱/۰	۰/۶۹	۰/۶۲	۰/۶۱
۱/۵	۰/۵۵	۰/۶۰	۰/۶۳
۲/۰	۰/۵۵	۰/۶۱	۰/۶۴
۲/۵	۰/۵۱	۰/۵۷	۰/۶۲
۳/۰	۰/۵۲	۰/۵۷	۰/۶۲
۳/۵	۰/۵۱	۰/۵۷	۰/۶۰
۴/۰	۰/۵۱	۰/۵۶	۰/۶۰



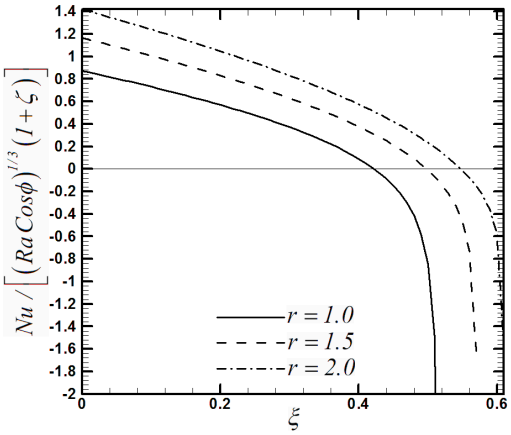
شکل ۶-۸۶. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $p = ۱/۵$ برای انحراف منفی



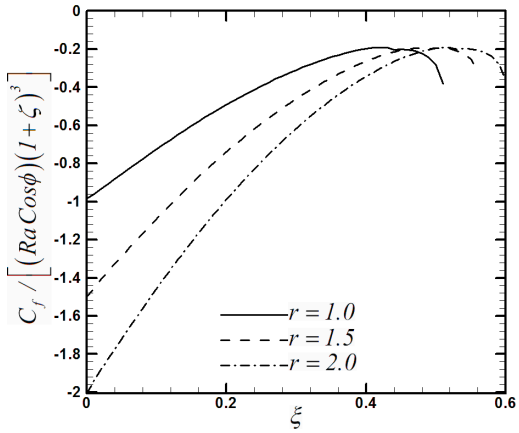
شکل ۶-۸۹. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $p = ۲/۰$ برای انحراف منفی



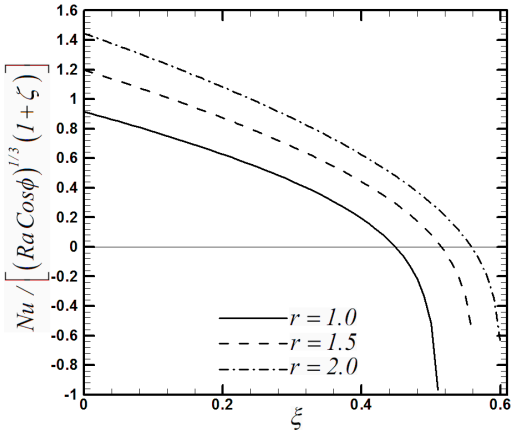
شکل ۶-۸۷. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $p = ۲/۵$ برای انحراف منفی



شکل ۶-۹۰. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $p = ۳/۰$ برای انحراف منفی



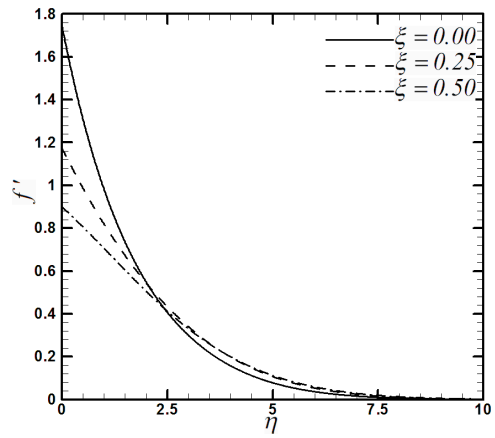
شکل ۶-۸۸. تغییرات ضریب اصطکاک پوسته‌ای با ξ به ازای $p = ۴/۰$ برای انحراف منفی



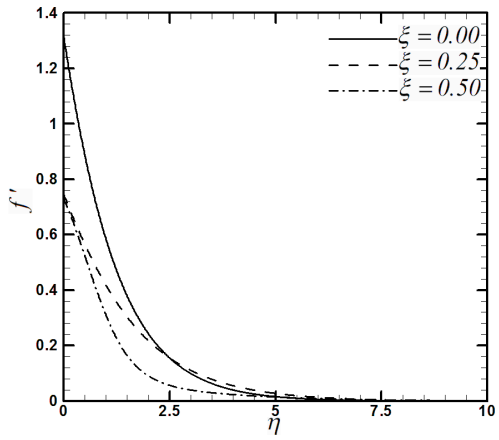
شکل ۶-۹۱. تغییرات عدد ناسلت با ξ به ازای $p = ۴/۰$ برای انحراف منفی

پروفایل‌های سرعت بی بعد برای انحراف منفی به ازای rها و pهای انتخابی و $\xi=۰/۰۰$، $\xi=۰/۲۵$ و $\xi=۰/۵۰$ در شکل‌های ۶-۹۲ تا ۶-۱۰۲ آمده است. در این حالت نیز با افزایش p سرعت بی بعد بر روی سطح کاهش می‌یابد.

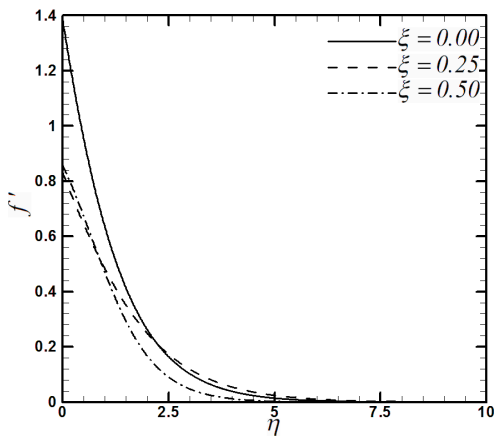
شکل‌های ۶-۱۰۳ تا ۶-۱۱۳ نیز پروفایل‌های دمای بی بعد را برای انحراف منفی به ازای مقادیر انتخابی r و p و $\xi=۰/۰۰$، $\xi=۰/۲۵$ و $\xi=۰/۵۰$ نمایش می‌دهند.



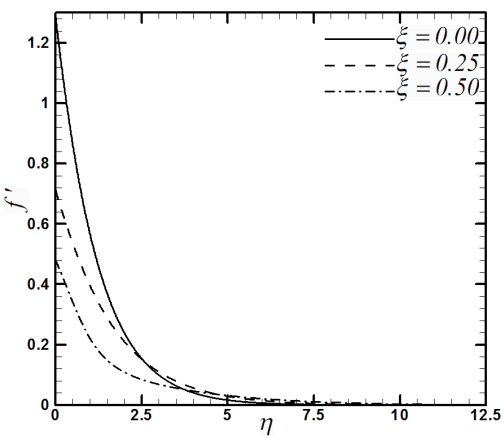
شکل ۶-۹۲. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۱/۰$ و $p=۱/۰$ برای انحراف منفی



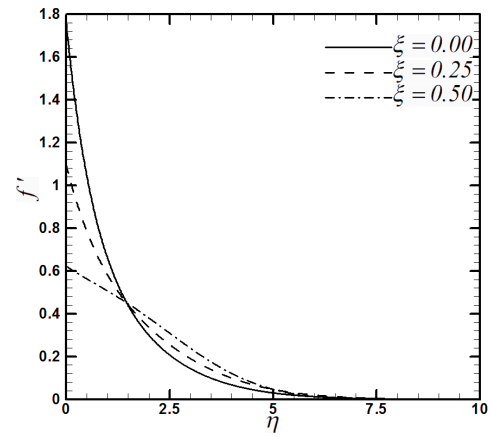
شکل ۶-۹۴. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۱/۰$ و $p=۳/۰$ برای انحراف منفی



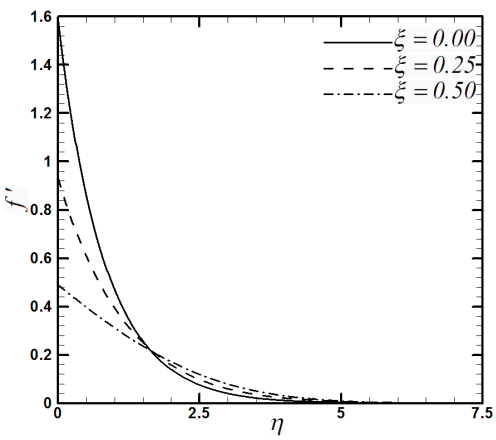
شکل ۶-۹۳. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۱/۰$ و $p=۲/۰$ برای انحراف منفی



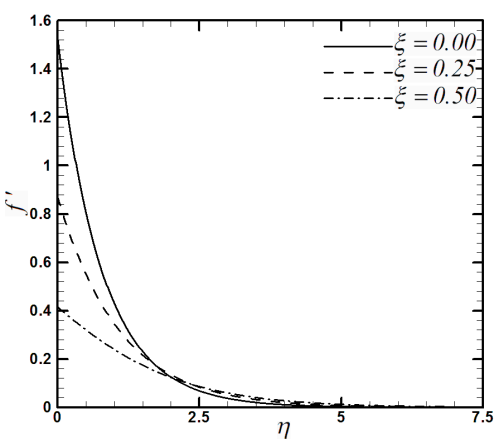
شکل ۶-۹۵. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r=۱/۰$ و $p=۴/۰$ برای انحراف منفی



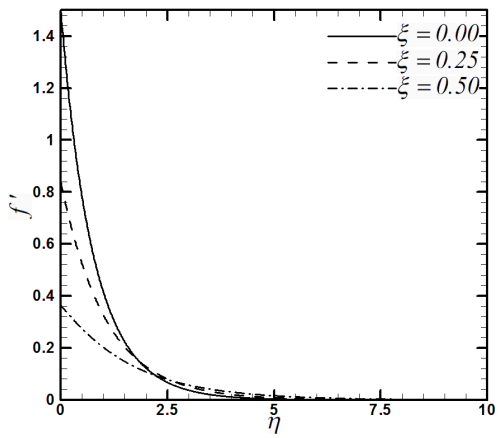
شکل ۶-۹۶. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۱/۰$ برای انحراف منفی



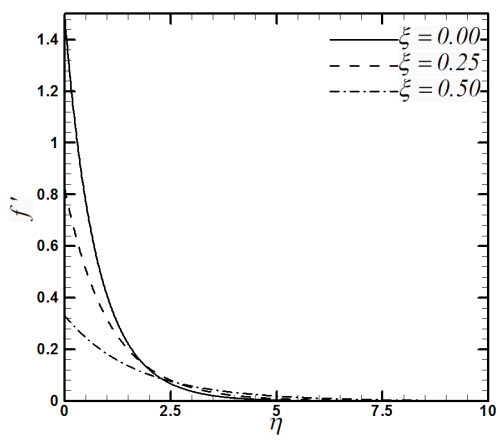
شکل ۶-۹۷. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۱/۵$ برای انحراف منفی



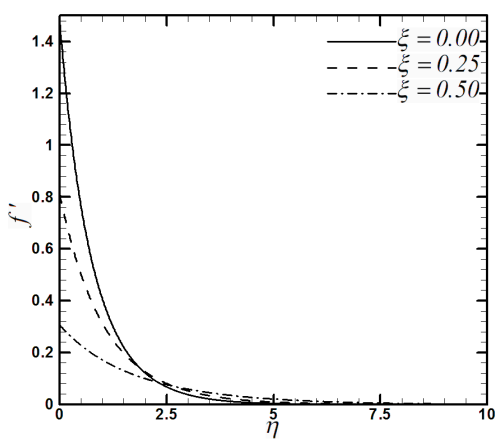
شکل ۶-۹۸. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۲/۰$ برای انحراف منفی



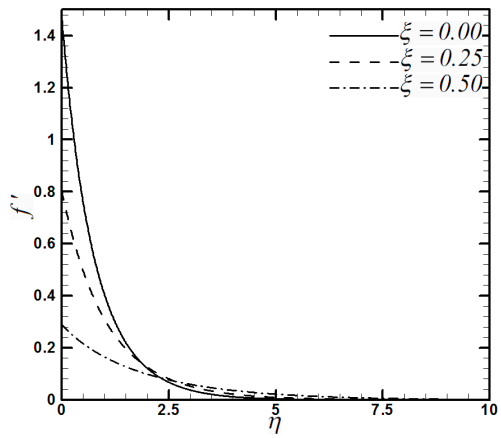
شکل ۶-۹۹. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۲/۵$ برای انحراف منفی



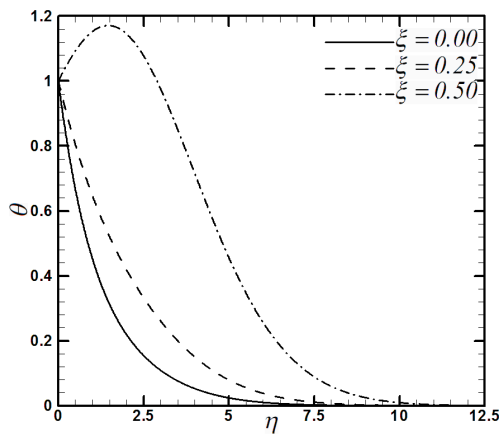
شکل ۶-۱۰۰. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۳/۰$ برای انحراف منفی



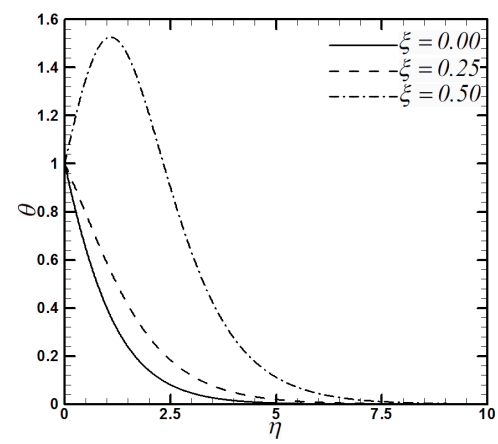
شکل ۶-۱۰۱. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۳/۵$ برای انحراف منفی



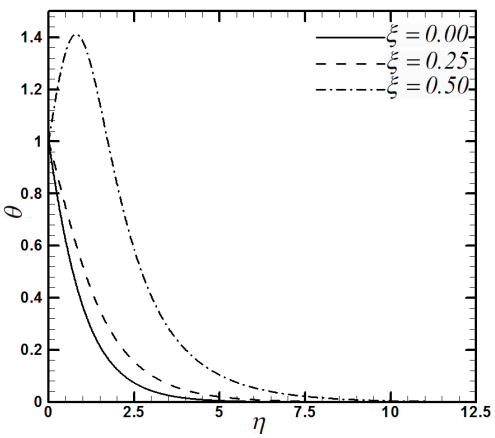
شکل ۶-۱۰۲. پروفایل‌های سرعت بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۴/۰$ برای انحراف منفی



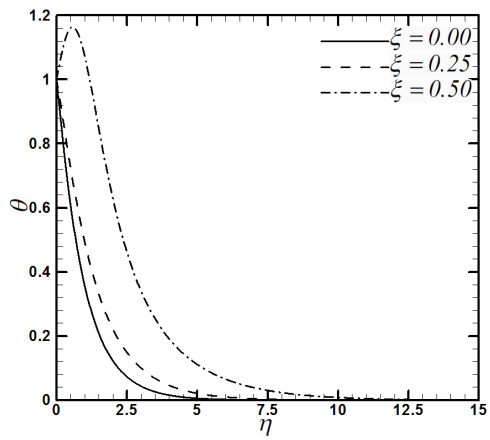
شکل ۶-۱۰۳. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰$ و $p = ۱/۰$ برای انحراف منفی



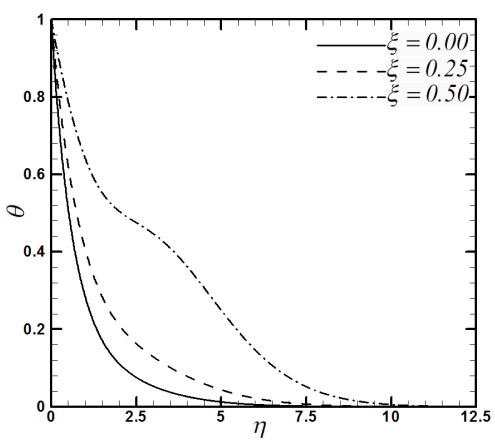
شکل ۶-۱۰۴. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰$ و $p = ۲/۰$ برای انحراف منفی



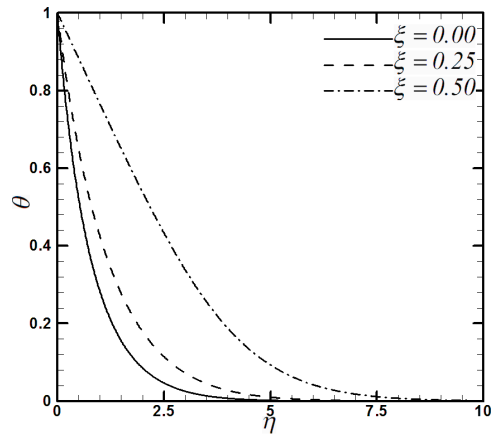
شکل ۶-۱۰۵. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰$ و $p = ۳/۰$ برای انحراف منفی



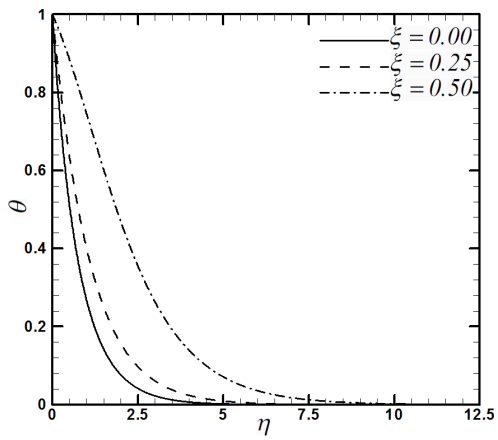
شکل ۶-۱۰۶. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۱/۰$ و $p = ۴/۰$ برای انحراف منفی



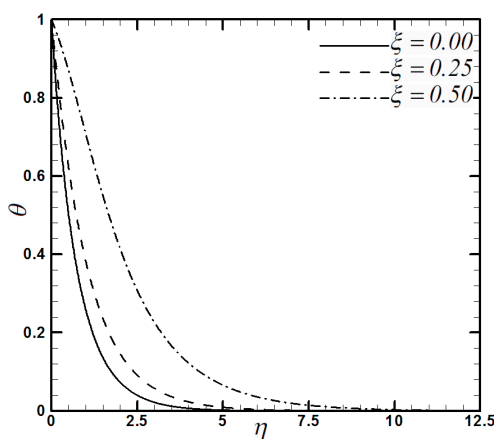
شکل ۶-۱۰۷. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۱/۰$ برای انحراف منفی



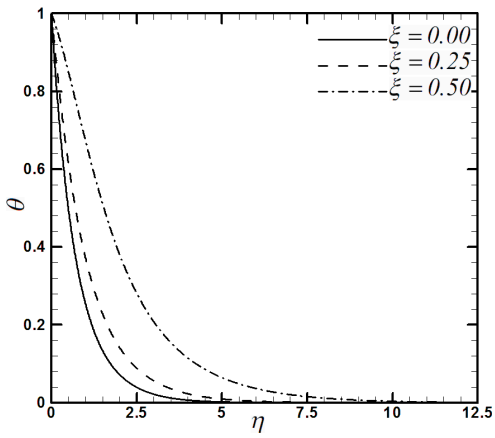
شکل ۶-۱۰۸. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۱/۵$ برای انحراف منفی



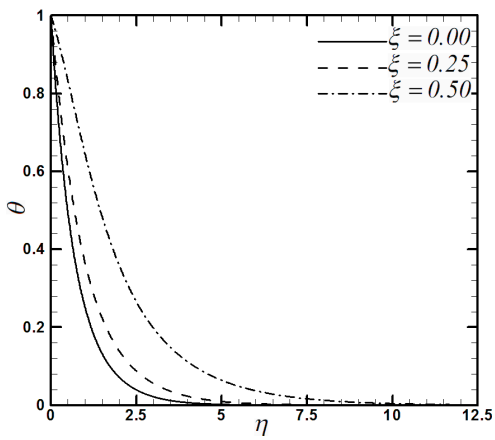
شکل ۶-۱۰۹. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۲/۰$ برای انحراف منفی



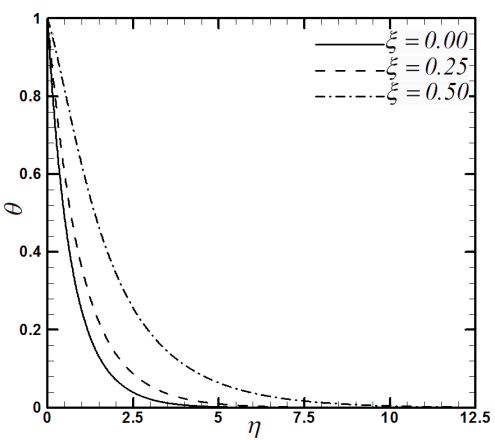
شکل ۶-۱۱۰. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۲/۵$ برای انحراف منفی



شکل ۶-۱۱۱. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۳/۰$ برای انحراف منفی



شکل ۶-۱۱۲. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۳/۵$ برای انحراف منفی



شکل ۶-۱۱۳. پروفایل‌های دمای بی بعد به ازای $r = ۲/۰$ و $p = ۴/۰$ برای انحراف منفی

از شکل‌های ۶-۱۰۳ تا ۶-۱۱۳ مشاهده می‌گردد که با کاهش ξ شیب پروفایل‌های دما به سمت مقادیر منفی‌تر پیش رفته و این همان چیزی است که نمودارهای تغییرات عدد ناسلت هم آن را تأیید می‌کنند. همچنین با افزایش ξ افزایش یکنواخت پروفایل‌ها و نیز افزایش ضخامت لایه مرزی قابل رؤیت است. در ضمن به ازای $r=۱/۰$ و در $\xi=۰/۵۰$ جهشی در پروفایل‌های دما مشاهده می‌گردد، که دلیل آن غلبه نرخ تولید حرارت داخلی بر شرط مرزی دمایی روی سطح است.

۶-۴ نتیجه گیری

حل لایه مرزی انتقال حرارت جابجایی آزاد روی یک صفحه تخت مایل دلخواه با دمای متغیر در یک محیط متخلخل اشباع در حضور تولید گرما ارائه گردید. دمای سطح تابع توانی از فاصله نسبت به لبه پیشرو در نظر گرفته شد. بنابر تعریف ترم تولید حرارت، دو مسئله در این فصل حل گردید. در مسئله اول تولید حرارت با $e^{-\eta}$ و در مسئله دوم با θ^{p} متناسب است. حل با استفاده از پارامتر انحراف تعریف شده توسط پاپ و نا [۳۵] و تعریف دستگاه مختصات جدید برای هر دو حالت زاویه انحراف مثبت $\left(۰^{\circ}\leq\phi\leq۹۰^{\circ}\right)$ یا اندکی منفی $\left(\phi\leq۰^{\circ}\right)$ حاصل شد. برای حل معادلات حاصل از روش کلر استفاده و ضریب اصطکاک پوسته‌ای، عدد ناسلت، پروفایل‌های سرعت و دمای بی بعد به ازای پارامترهای مختلف رسم گردید.

مشاهده شد که تولید گرما در محیط متخلخل باعث تغییر در شیب پروفایل‌های دما و در نتیجه مقادیر ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت می‌شود. طوری که در بعضی موارد حتی جهت انتقال حرارت نیز تغییر می‌کند.

در مسئله اول در حالت انحراف مثبت ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت به ازای $r \leq ۰$ در تمام ξها به ترتیب دارای مقادیر مثبت و منفی هستند، اما به ازای تعدادی از $r > ۰$ این کمیت‌ها در نقاطی تغییر علامت می‌دادند. همچنین به ازای $r \leq ۰$ در نمودارهای سرعت و دمای بی بعد به ازای ξ های گوناگون جهشی مشاهده می‌گردد که دلیل آن غلبه میزان تولید حرارت داخلی در محیط متخلخل بر شرط مرزی دمایی روی سطح است.

در مسئله دوم در حالت انحراف مثبت از مقدار ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت با کاهش r کاسته شد. همچنین به ازای $r = ۱/۵$ و $r = ۲/۰$ کاهش p با کاهش مقادیر این کمیت‌ها همراه است. این در حالی است که به ازای $r = ۱/۰$ منحنی تغییرات عدد ناسلت و ضریب اصطکاک پوسته-ای تغییر علامت می‌دهد.

برای هر دو مسئله در حالت انحراف منفی نقطه‌ای که جدایش صورت می‌گیرد به صورت تخمینی مشخص گردید. همچنین در این حالت با افزایش ξ ضخامت لایه‌های مرزی افزایش یافت. از سویی دیگر مطابقت شگفت انگیزی بین حل عددی حاصل و حل‌های تشابهی به ازای $\xi = 0$ (سطح افقی) و $\xi = ۰$ (سطح قائم) هر یک از مسائل مشاهده گردید.

۶-۵ پیشنهادات

به منظور ادامه تحقیق و پژوهش در این زمینه، پیشنهادات زیر ارئه می‌گردد.

- حل مسأله فوق برای صفحات قابل نفوذ
- حل مسأله در حالت گذرا
- بررسی تأثیر لایه بندی دمای محیط بر نتایج مسئله
- از معادلات فورچهیمر یا برینکمن به جای معادله دارسی استفاده شود.

- حل مسأله در حالتی که تخلخل، نفوذپذیری یا هر دو متغیر باشند.

پیوست الف

اثبات معادلات حاکم بر سطوح مایل

الف-۱ مقدمه

در این پیوست چگونگی به دست آوردن معادلات تغییر شکل یافته از معادلات اولیه حاکم بر سطح مایل دلخواه بیان می‌شود. همانطور که در فصل‌های ۴ و ۶ مشاهده گردید، معادلات دارسی حاکم بر این صفحات در هر دو حالت حضور و عدم حضور ترم تولید گرما یکسان بوده و تنها تفاوت آن‌ها در معادله انرژی است. در واقع، در حضور تولید حرارت داخلی ترمی متناسب با نرخ تولید حرارت به معادله انرژی اضافه می‌شود. لذا در این پیوست معالات تغییر شکل یافته حاکم بر سطح مایل در حضور ترم تولید حرارت داخلی متناسب با θ^p اثبات می‌گردد. معادلات حاکم بر سطح مایل در حالت عدم حضور تولید حرارت با حذف این ترم و معادلات حاکم بر سطح مایل با حضور دیگر ترم تولید حرارت با جایگذاری ترم مذکور با $e^{-\eta}$ قابل دستیابی است.

الف-۲ معادلات اولیه

همانطور که در فصل ۶ ذکر شد، معادلات حاکم بر لایه مرزی جابجایی آزاد بر روی صفحه مایل در حضور تولید حرارت داخلی به صورت زیر هستند.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \text{(الف-۱)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{gK\beta}{\upsilon}\left(\pm\frac{\partial T}{\partial y}\,Sin\,\phi-\frac{\partial T}{\partial x}\,Cos\,\phi\right) \qquad \text{(الف-۲)}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha_m\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q'''}{(\rho c)_f} \qquad \text{(الف-۳)}$$

که ترم تولید گرما به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$q''' = \frac{k_m \left(T_w - T_\infty\right) \lambda^2}{x^2} \theta^p$$ (الف-۴)

در ضمن معادلات (الف-۱) تا (الف-۳) باید شرایط مرزی زیر را ارضا کنند.

$$v = 0, \quad T = T_w = T_\infty + Ax^r \quad on\ y = 0$$ (الف-۵)

$$u = 0, \quad T = T_\infty \qquad\qquad as\ y \to \infty$$ (الف-۶)

الف-۳ پارامترهای جدید

پارامترهای زیر توسط پاپ و نا [۳۵] معرفی شده و در اینجا مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$\zeta = \frac{\left(Ra\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}}{\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3}}$$ (الف-۷)

$$\xi = \frac{\zeta}{1+\zeta}, \quad \eta = \left(\frac{y}{x}\right)\lambda$$ (الف-۸)

$$\lambda = \left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3} + \left(Ra\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}$$ (الف-۹)

$$f\left(\xi,\eta\right) = \frac{\psi}{\alpha_m \lambda}, \quad \theta\left(\xi,\eta\right) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$ (الف-۱۰)

که Ra، عدد رایلی و ψ، تابع جریان می‌باشد.

$$Ra = gK\beta\left(T_w - T_\infty\right)x / \alpha_m \upsilon$$ (الف-۱۱)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$ (الف-۱۲)

الف-۴ به دست آوردن معادلات تغییر شکل یافته

برای تبدیل معادلات، مشتقات مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم.

$$Ra = Ra_x = \frac{gK\beta\left(T_w - T_\infty\right)x}{\upsilon\alpha_m} = \frac{gK\beta Ax^{r+1}}{\upsilon\alpha_m} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial Ra}{\partial x} = \dfrac{gK\beta A\left(r+1\right)x^r}{\upsilon\alpha_m} \\ \dfrac{\partial Ra}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \left(\frac{gK\beta A}{\upsilon\alpha_m}Cos\,\phi\right)^{1/3}\left(\frac{r+1}{3}\right)x^{(r-2)/3} + \left(\frac{gK\beta A}{\upsilon\alpha_m}\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}\left(\frac{r+1}{2}\right)x^{(r-1)/2} =$$

$$\left(\frac{gK\beta Ax^{r+1}}{\upsilon\alpha_m}Cos\,\phi\right)^{1/3}\left(\frac{r+1}{3x}\right) + \left(\frac{gK\beta Ax^{r+1}}{\upsilon\alpha_m}\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}\left(\frac{r+1}{2x}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \left(\frac{r+1}{x}\right)\left[\frac{1}{3}\left(RaCos\,\phi\right)^{1/3} + \frac{1}{2}\left(Ra\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}\right] \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0 \qquad \text{(الف-۱۵)}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = y\left\{-\frac{\lambda}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right\} = y\left\{-\frac{1}{x^2}\left[\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3} + \left(Ra\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}\right] + \left(\frac{r+1}{x^2}\right)\times\right.$$

$$\left[\frac{1}{3}\left(RaCos\,\phi\right)^{1/3} + \frac{1}{2}\left(Ra\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{y}{x^2}\left\{\left(r+1\right)\left[\frac{1}{3}\left(RaCos\,\phi\right)^{1/3} + \frac{1}{2}\left(Ra\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}\right] - \lambda\right\} \qquad \text{(الف-۱۶)}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\lambda}{x} \qquad \text{(الف-۱۷)}$$

$$\xi = \frac{\zeta}{\zeta+1} = \frac{(Ra\left|Sin\,\phi\right|)^{1/2}}{(Ra\,Cos\,\phi)^{1/3} + (Ra\left|Sin\,\phi\right|)^{1/2}} = \frac{(Ra\left|Sin\,\phi\right|)^{1/2}}{\lambda} \qquad \text{(الف-۱۸)}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \xi\left(\frac{r+1}{6x\lambda}\right)\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3} \qquad \text{(الف-۱۹)}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0 \qquad \text{(الف-۲۰)}$$

در ضمن معادله (الف-۱۰) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت.

$$\psi = \alpha_m\lambda f\left(\xi,\eta\right) \quad , \quad T = Ax^r\theta\left(\xi,\eta\right) + T_\infty \qquad \text{(الف-۲۱)}$$

با توجه به معادلات فوق، ترم‌های موجود در معادلات اولیه را می‌توان بر اساس پارامترهای جدید به دست آورد.

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\alpha_m\lambda^2}{x}\frac{\partial f}{\partial\eta}=\frac{\alpha_m\lambda^2}{x}f' \qquad \text{(الف-۲۲)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\alpha_m\lambda^3}{x^2}f'' \qquad \text{(الف-۲۳)}$$

$$v=-\frac{\alpha_m}{x}\left\{\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2\lambda+\left(Ra\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}\right)\left(f+\eta f'\right)-\lambda\eta f'+\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(RaCos\,\phi\right)^{1/3}\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}\right\} \qquad \text{(الف-۲۴)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=Ax^{r-1}\left\{r\theta+\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi\left(1-\xi\right)\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\eta\theta'\left(\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2+\xi\right)-1\right)\right\} \qquad \text{(الف-۲۵)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=Ax^{r-1}\lambda\theta' \qquad \text{(الف-۲۶)}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=Ax^{r-2}\lambda^2\theta'' \qquad \text{(الف-۲۷)}$$

که پرایم‌ها مشتق نسبت به η را نشان می‌دهند. با استفاده از تعریف تابع جریان معادله (الف-۱) منتج به $0=0$ می‌شود، اما با جایگذاری معادلات فوق در معادلات (الف-۲) و (الف-۳) معادلات جدید به دست می‌آید.

$$\frac{\alpha_m\lambda^3}{x^2}f''=\frac{gK\beta}{\upsilon}\left[\pm Ax^{r-1}\lambda\theta'Sin\,\phi-Ax^{r-1}\left\{r\theta+\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi\left(1-\xi\right)\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\eta\theta'\left(\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2+\xi\right)-1\right)\right\}Cos\,\phi\right]\Rightarrow$$
$$f''+\left(1-\xi\right)^3\left\{r\theta+\eta\theta'\left[\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2+\xi\right)-1\right]\right\}=\pm\xi^2\theta'-\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi\left(1-\xi\right)^4\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \qquad \text{(الف-۲۸)}$$

$$\frac{\alpha_m\lambda^2}{x}f'\times Ax^{r-1}\left\{r\theta+\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi\left(1-\xi\right)\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\eta\theta'\left(\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2+\xi\right)-1\right)\right\}-$$
$$\frac{\alpha_m}{x}\left\{\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2\lambda+\left(Ra\left|Sin\phi\right|\right)^{1/2}\right)\left(f+\eta f'\right)-\lambda\eta f'+\right.$$
$$\left.\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(RaCos\,\phi\right)^{1/3}\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}\right\}Ax^{r-1}\lambda\theta'=\alpha_m Ax^{r-2}\lambda^2\theta''+\alpha_m\lambda^2Ax^{r-2}\theta^p$$
$$\theta''+\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2+\xi\right)f\theta'-rf'\theta+\theta^p=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi\left(1-\xi\right)\left(f'\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta'\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) \qquad \text{(الف-۲۹)}$$

که این معادلات با توجه به تعریف f و θ باید شرایط مرزی زیر را ارضا کنند.

$$f=0,\quad \theta=1\quad on\,\eta=0 \qquad \text{(الف-۳۰)}$$

$$f'=0,\quad \theta=0\quad as\,\eta\to\infty \qquad \text{(الف-۳۱)}$$

همانطور که قبلا ذکر گردید، معادله (ب-۲۸) برای هر سه مسئله یکسان می‌باشد. معادله (ب-۲۹) با حذف ترم تولید حرارت داخلی به معادله انرژی حاکم بر مسئله فصل ۴ تبدیل می‌شود، در حالی که با قرار دادن $e^{-\eta}$ به جای θ^p معادله انرژی در حضور تولید حرارت مربوطه را نتیجه می‌دهد.

الف-۵ تعریف ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت بر حسب پارامترهای جدید

همانطور که در فصل ۴ آمد، کمیت‌های ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$C_f=\frac{\tau_w}{\rho U_c^{\,2}},\quad Nu=\frac{xq_w}{k_m\left(T_w-T_\infty\right)} \qquad \text{(الف-۳۲)}$$

که در معادله فوق U_c سرعت مشخصه، τ_w اصطکاک پوسته‌ای و q_w شار حرارتی در دمای دیواره است، که به صورت زیر داده می‌شوند.

$$U_c = \left(\alpha_m \upsilon / x^2\right)^{1/2} \tag{الف-۳۳}$$

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu \frac{\alpha_m \lambda^3}{x^2} f''(\xi,0) \tag{الف-۳۴}$$

$$q_w = -k_m \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = -k_m A x^{r-1} \lambda \theta'(\xi,0) \tag{الف-۳۵}$$

با جایگذاری معادلات فوق در معادله (الف-۳۲) ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت بر حسب متغیرهای جدید به دست می‌آیند.

$$C_f = \frac{\mu \frac{\alpha_m \lambda^3}{x^2} f''(\xi,0)}{\rho\left(\alpha \upsilon / x^2\right)} = \lambda^3 f''(\xi,0) \Rightarrow$$

$$\frac{C_f}{Ra\,Cos\,\phi} = \left(\frac{\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3}}{\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3}} + \frac{\left(Ra\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}}{\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3}}\right)^3 f''(\xi,0) \Rightarrow$$

$$\frac{C_f}{Ra\,Cos\,\phi} = \left(1+\zeta\right)^3 f''(\xi,0) \tag{الف-۳۶}$$

$$Nu = -\frac{x k_m A x^{r-1} \lambda \theta'(\xi,0)}{k_m A x^r} = -\lambda \theta'(\xi,0) \Rightarrow$$

$$\frac{Nu}{\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3}} = \frac{\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3} + \left(Ra\left|Sin\,\phi\right|\right)^{1/2}}{\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3}} \left[-\theta'(\xi,0)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{Nu}{\left(Ra\,Cos\,\phi\right)^{1/3}} = \left(1+\zeta\right)\left[-\theta'(\xi,0)\right] \tag{الف-۳۷}$$

پیوست ب

گسسته سازی معادلات به روش

عددی کلر

ب-۱ مقدمه

معادلات تغییر شکل یافته حاکم بر لایه مرزی جایجایی آزاد روی سطوح مایل، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی و غیر خطی را تشکیل می‌دهند. این معادلات به صورت عددی به کمک روش جعبه‌ای کلر [۴۷] حل می‌شوند. حل آن‌ها با شرایط اولیه حاصل از حل صفحه افقی در $\xi=0$ شروع می‌گردد. سپس در جهت مثبت ξ با محاسبه متغیرهای وابسته در جهت عمود بر جریان پیشروی می‌کند، طوری که در هر مقطع ξ شرایط مرزی در راستای η ارضا شود. از دو معادله موجود، معادله اول برای هر سه مسئله یکسان است. اما معادله دوم در یک ترم بین سه مسئله تفاوت دارد.

- ✓ معادله اول

$$f''+(1-\xi)^3\left\{r\theta+\eta\theta'\left[\frac{r+1}{6}(2+\xi)-1\right]\right\}=\pm\xi^2\theta'-\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)^4\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \qquad \text{(ب-۱)}$$

- ✓ معادله دوم در حالت عدم حضور تولید گرما

$$\theta''+\left(\frac{r+1}{6}\right)(2+\xi)f\theta'-rf'\theta=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)\left(f'\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta'\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) \qquad \text{(ب-۲)}$$

- ✓ معادله دوم در حالت حضور تولید گرما متناسب با θ^p

$$\theta''+\left(\frac{r+1}{6}\right)(2+\xi)f\theta'-rf'\theta+\theta^p=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)\left(f'\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta'\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) \qquad \text{(ب-۳)}$$

- ✓ معادله دوم در حالت حضور تولید گرما متناسب با $e^{-\eta}$

$$\theta''+\left(\frac{r+1}{6}\right)(2+\xi)f\theta'-rf'\theta+e^{-\eta}=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)\left(f'\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta'\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) \qquad \text{(ب-۴)}$$

در واقع معادله (ب-۱) در کنار هر یک از معادلات (ب-۲) تا (ب-۴) معادلات حاکم بر یکی از مسائل سه گانه را تشکیل می‌دهد. این پیوست ابتدا به گسسته سازی دستگاه معادلات متشکل از (ب-۱) و (ب-۳) پرداخته، سپس به تفاوت معادلات سایر مسائل هم اشاره می‌کند.

ب-۲ مرحله اول: کاهش دستگاه معادلات به یک دستگاه معادلات مرتبه اول

مطابق بخش ۳-۴ اولین گام در گسسته سازی معادلات به روش جعبه‌ای کلر، کاهش دستگاه معادلات موجود به دستگاه معادلات مرتبه اول است. پس

$$\begin{aligned} &f''+(1-\xi)^3\left\{r\theta+\eta\theta'\left[\frac{r+1}{6}(2+\xi)-1\right]\right\}=\pm\xi^2\theta'-\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)^4\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \\ &\theta''+\left(\frac{r+1}{6}\right)(2+\xi)f\theta'-rf'\theta+\theta^p=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)\left(f'\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta'\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) \end{aligned} \quad \text{(ب-۵)}$$

به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$f'=g \quad \text{(ب-۶)}$$

$$\theta'=w \quad \text{(ب-۷)}$$

$$g'+(1-\xi)^3\left\{r\theta+\eta w\left[\frac{r+1}{6}(2+\xi)-1\right]\right\}=\pm\xi^2 w-\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)^4\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \quad \text{(ب-۸)}$$

$$w'+\left(\frac{r+1}{6}\right)(2+\xi)fw-rg\theta+\theta^p=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)\left(g\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-w\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) \quad \text{(ب-۹)}$$

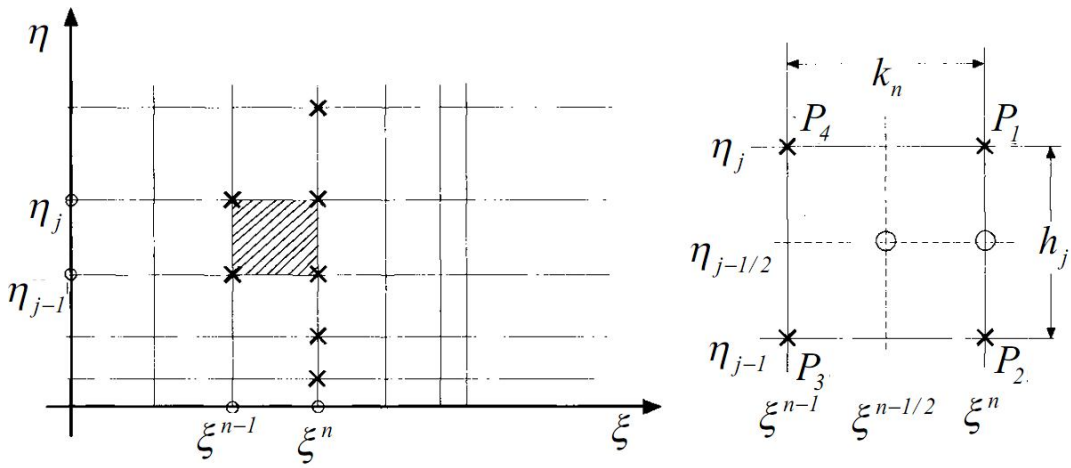
شرایط مرزی دستگاه معادلات جدید به صورت زیر هستند.

$$f=0,\quad \theta=1 \quad on\ \eta=0 \quad \text{(ب-۱۰)}$$

$$g=0,\quad \theta=0 \quad as\ \eta\to\infty \quad \text{(ب-۱۱)}$$

ب-۳ مرحله دوم: نوشتن معادلات دیفرانسیلی با استفاده از تفاضلات مرکزی

شبکه تفاضل محدود برای حل در شکل ب-۱ نشان داده شده است.



شکل ب-۱. شبکه تفاضل محدود برای روش جعبه‌ای کلر

به صورت اندیسی تغییرات متغیرهای مستقل را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^n = \xi^{n-1} + k_n, \quad n = 1,2,\ldots,N \qquad \text{(ب-۱۲)}$$

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_j = \eta_{j-1} + h_j, \quad j = 1,2,\ldots,J \qquad \text{(ب-۱۳)}$$

حال معادلات (ب-۶) تا (ب-۹) با توجه به شبکه مستطیل شکل ب-۱ و به روش تفاضل مرکزی تخمین زده می‌شوند. این کار با نوشتن تخمین‌های تفاضل محدود معادلات دیفرانسیل معمولی (ب-۶) و (ب-۷) برای نقطه میانی $\left(\xi^n, \eta_{j-1/2}\right)$ از قطعه P_1P_2 با استفاده از مشتقات دیفرانسیل مرکزی شروع می‌گردد.

$$\frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} = \frac{g_j + g_{j-1}}{2} = g_{j-1/2} \qquad \text{(ب-۱۴)}$$

$$\frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{h_j}=\frac{w_j-w_{j-1}}{2}=w_{j-1/2} \qquad \text{(ب-۱۵)}$$

به طور مشابه، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای (ب-۸) و (ب-۹) حول نقطه مرکزی $\left(\xi^{n-1/2},\eta_{j-1/2}\right)$ از مستطیل $P_1P_2P_3P_4$ گسسته می‌شوند. این عمل در دو گام صورت می‌گیرد. در مرحله اول، این معادلات را در $\left(\xi^{n-1/2},\eta\right)$ بدون در نظر گرفتن η مشخصی به صورت تفاضل مرکزی و در مرحله دوم آن‌ها را در نقطه $\left(\xi^{n-1/2},\eta_{j-1/2}\right)$ با انتخاب $\eta=\eta_{j-1/2}$ گسسته می‌کنند. این دو مرحله به تفصیل در زیر آورده شده است.

✓ **گسسته سازی معادله (ب-۸) در نقطه $\left(\xi^{n-1/2},\eta\right)$**

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[\left(g'\right)^{n-1}+\left(g'\right)^{n}\right]+\left(1-\xi^{n-1/2}\right)^3\left\{\frac{r}{2}\left(\theta^n+\theta^{n-1}\right)+\frac{1}{2}\eta\times\right.\\&\left.\left(w^n+w^{n-1}\right)\left[\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2+\xi^{n-1/2}\right)-1\right]\right\}=\\&\pm\frac{1}{2}\left(\xi^{n-1/2}\right)^2\left(w^n+w^{n-1}\right)-\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)^4\frac{\theta^n-\theta^{n-1}}{k_n}\end{aligned} \qquad \text{(ب-۱۶)}$$

جهت اختصار در نوشتن معادله فوق ضرایب زیر تعریف می‌گردد.

$$\alpha^n=\frac{r}{2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)^3 \qquad \text{(ب-۱۷-الف)}$$

$$\beta^n=\frac{1}{2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)^3\left[\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2+\xi^{n-1/2}\right)-1\right] \qquad \text{(ب-۱۷-ب)}$$

$$\gamma^n=\pm\frac{1}{2}\left(\xi^{n-1/2}\right)^2 \qquad \text{(ب-۱۷-ج)}$$

$$\sigma^n=\left(\frac{r+1}{6k_n}\right)\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)^4 \qquad \text{(ب-۱۷-د)}$$

با استفاده از ضرایب فوق معادله (ب-۱۶) به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\frac{1}{2}\left[(g')^{n-1}+(g')^{n}\right]+\alpha^{n}\left(\theta^{n}+\theta^{n-1}\right)+\beta^{n}\eta\left(w^{n}+w^{n-1}\right)$$
$$=\gamma^{n}\left(w^{n}+w^{n-1}\right)-\sigma^{n}\left(\theta^{n}-\theta^{n-1}\right) \qquad \text{(ب-۱۸)}$$

در اینجا عباراتی که شامل مقدار توابع در گام nام هستند، به سمت چپ و بقیه عبارات به سمت راست منتقل می‌گردد.

$$\frac{1}{2}(g')^{n}+\left(\alpha^{n}+\sigma^{n}\right)\theta^{n}+\left(\beta^{n}\eta-\gamma^{n}\right)w^{n}=R^{n-1} \qquad \text{(ب-۱۹)}$$

$$R^{n-1}=\left(\gamma^{n}-\beta^{n}\eta\right)w^{n-1}+\left(\sigma^{n}-\alpha^{n}\right)\theta^{n-1}-\frac{1}{2}(g')^{n-1} \qquad \text{(ب-۲۰)}$$

✓ **گسسته سازی معادله (ب-۱۹) در نقطه** $\left(\xi^{n-1/2},\eta_{j-1/2}\right)$

$$\frac{1}{2}h_{j}^{-1}\left(g_{j}-g_{j-1}\right)^{n}+\left(\alpha^{n}+\sigma^{n}\right)\theta_{j-1/2}^{n}+\left(\beta^{n}\eta_{j-1/2}-\gamma^{n}\right)w_{j-1/2}^{n}=R_{j-1/2}^{n-1} \qquad \text{(ب-۲۱)}$$

که سمت راست معادله فوق به صورت زیر است.

$$R_{j-1/2}^{n-1}=\left(\gamma^{n}-\beta^{n}\eta_{j-1/2}\right)w_{j-1/2}^{n-1}+\left(\sigma^{n}-\alpha^{n}\right)\theta_{j-1/2}^{n-1}-\frac{1}{2}h_{j}^{-1}\left(g_{j}-g_{j-1}\right)^{n-1} \qquad \text{(ب-۲۲)}$$

✓ **گسسته سازی معادله (ب-۹) در نقطه** $\left(\xi^{n-1/2},\eta\right)$

$$\frac{1}{2}\left[(w')^{n}+(w')^{n-1}\right]+\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2+\xi^{n-1/2}\right)\frac{(fw)^{n}+(fw)^{n-1}}{2}-$$
$$\frac{r}{2}\left[(g\theta)^{n}+(g\theta)^{n-1}\right]+\left(\frac{\theta^{n}+\theta^{n-1}}{2}\right)^{p}=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi^{n-1/2}\times \qquad \text{(ب-۲۳)}$$
$$\left(1-\xi^{n-1/2}\right)\left[\frac{g^{n}+g^{n-1}}{2}\times\frac{\theta^{n}-\theta^{n-1}}{k_{n}}-\frac{w^{n}+w^{n-1}}{2}\times\frac{f^{n}-f^{n-1}}{k_{n}}\right]$$

از طرفی اگر p اعشاری باشد، جمله آخر سمت چپ معادله فوق یک بسط با بینهایت جمله خواهد بود.

$$\left(\theta^{n-1}+\theta^{n}\right)^{p}=\left(\theta^{n-1}\right)^{p}+p\theta^{n}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-1}+\frac{p\left(p-1\right)}{2!}\left(\theta^{n}\right)^{2}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-2}+$$
$$\frac{p\left(p-1\right)\left(p-2\right)}{3!}\left(\theta^{n}\right)^{3}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-3}+\ldots \qquad \text{(ب-۲۴)}$$

با در نظر گرفتن M جمله اول بسط،

$$\left(\theta^{n-1}+\theta^{n}\right)^{p}=\left(\theta^{n-1}\right)^{p}+p\theta^{n}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-1}+\frac{p\left(p-1\right)}{2!}\left(\theta^{n}\right)^{2}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-2}+$$
$$\ldots+\frac{p\left(p-1\right)\ldots\left(p-m+1\right)}{m!}\left(\theta^{n}\right)^{m}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-m}+ \qquad \text{(ب-۲۵)}$$
$$\ldots+\frac{p\left(p-1\right)\ldots\left(p-M+2\right)}{\left(M-1\right)!}\left(\theta^{n}\right)^{M-1}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-M+1}$$

معادله (ب-۲۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{1}{2}\left(w'\right)^{n}+\left\{\left(\frac{r+1}{12}\right)\left(2+\xi^{n-1/2}\right)+\left(\frac{r+1}{12k_{n}}\right)\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)\right\}\left(fw\right)^{n}-$$
$$\left\{\frac{r}{2}+\left(\frac{r+1}{12k_{n}}\right)\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)\right\}\left(g\theta\right)^{n}-\left(\frac{r+1}{12k_{n}}\right)\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)\times$$
$$\left[g^{n-1}\theta^{n}-g^{n}\theta^{n-1}-w^{n-1}f^{n}+w^{n}f^{n-1}\right]+\frac{p}{2^{p}}\theta^{n}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-1}+\frac{p\left(p-1\right)}{2^{p}\times 2!}\times$$
$$\left(\theta^{n}\right)^{2}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-2}+\ldots+\frac{p\left(p-1\right)\ldots\left(p-m+1\right)}{2^{p}\times m!}\left(\theta^{n}\right)^{m}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-m}+ \qquad \text{(ب-۲۶)}$$
$$\ldots+\frac{p\left(p-1\right)\ldots\left(p-M+2\right)}{2^{p}\times\left(M-1\right)!}\left(\theta^{n}\right)^{M-1}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-M+1}=$$
$$\left\{\left(\frac{r+1}{12k_{n}}\right)\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)-\left(\frac{r+1}{12}\right)\left(2+\xi^{n-1/2}\right)\right\}\left(fw\right)^{n-1}+$$
$$\left\{\frac{r}{2}-\left(\frac{r+1}{12k_{n}}\right)\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)\right\}\left(g\theta\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\left(w'\right)^{n-1}-\frac{1}{2^{p}}\left(\theta^{n-1}\right)^{p}$$

جهت اختصار در نوشتن معادلات، ضرایب زیر تعریف می‌شود.

$$\alpha^{nn}=\left(\frac{r+1}{12}\right)\left[2+\xi^{n-1/2}+\frac{1}{k_{n}}\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)\right] \qquad \text{(ب-۲۷)}$$

$$\beta^{nn} = -\left(\frac{r+1}{12k_n}\right)\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right) \qquad (ب-۲۸)$$

$$\gamma^{nn} = -\frac{r}{2} + \beta^{nn} \qquad (ب-۲۹)$$

$$\sigma^{nn} = \left(\frac{r+1}{12}\right)\left[\frac{1}{k_n}\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right) - \left(2+\xi^{n-1/2}\right)\right] \qquad (ب-۳۰)$$

$$\omega^{nn} = \frac{r}{2} + \beta^{nn} \qquad (ب-۳۱)$$

$$c_1 = \frac{p}{2^p} \qquad (ب-۳۲)$$

$$c_m = \frac{p(p-1)\ldots(p-m+1)}{2^p \times m!} \qquad m = 2,3,\ldots,M-1 \qquad (ب-۳۳)$$

و در نهایت معادله (ب-۲۶) به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(w')^n + \alpha^{nn}(fw)^n + \gamma^{nn}(g\theta)^n + \beta^{nn}\left[g^{n-1}\theta^n - g^n\theta^{n-1} - w^{n-1}f^n + w^n f^{n-1}\right] + \\ &c_1\theta^n\left(\theta^{n-1}\right)^{p-1} + c_2\left(\theta^n\right)^2\left(\theta^{n-1}\right)^{p-2} + \ldots + c_m\left(\theta^n\right)^m\left(\theta^{n-1}\right)^{p-m} + \\ &\ldots + c_{M-1}\left(\theta^n\right)^{M-1}\left(\theta^{n-1}\right)^{p-M+1} = RR^{n-1}\end{aligned} \qquad (ب-۳۴)$$

که RR^{n-1} تنها شامل مقادیر کمیت‌ها در گام $n-1$ام است.

$$RR^{n-1} = \sigma^{nn}(fw)^{n-1} + \omega^{nn}(g\theta)^{n-1} - \frac{1}{2}(w')^{n-1} - \frac{1}{2^p}\left(\theta^{n-1}\right)^p \qquad (ب-۳۵)$$

✓ **گسسته سازی معادله (ب-۳۴) در نقطه** $\left(\xi^{n-1/2}, \eta_{j-1/2}\right)$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w_j - w_{j-1}\right)^n + \alpha^{nn}(fw)^n_{j-1/2} + \gamma^{nn}(g\theta)^n_{j-1/2} + \beta^{nn}\left[g^{n-1}_{j-1/2}\theta^n_{j-1/2} - \right. \\ &\left. g^n_{j-1/2}\theta^{n-1}_{j-1/2} - w^{n-1}_{j-1/2}f^n_{j-1/2} + w^n_{j-1/2}f^{n-1}_{j-1/2}\right] + c_1\theta^n_{j-1/2}\left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^{p-1} + \\ &c_2\left(\theta^n_{j-1/2}\right)^2\left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^{p-2} + \ldots + c_m\left(\theta^n_{j-1/2}\right)^m\left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^{p-m} + \ldots + \\ &c_{M-1}\left(\theta^n_{j-1/2}\right)^{M-1}\left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^{p-M+1} = RR^{n-1}_{j-1/2}\end{aligned} \qquad (ب-۳۶)$$

که $RR^{n-1}_{j-1/2}$، در واقع فرم گسسته RR^{n-1} در نقطه $\left(\xi^{n-1/2}, \eta_{j-1/2}\right)$ است.

$$RR_{j-1/2}^{n-1} = \sigma^{nn}\left(fw\right)_{j-1/2}^{n-1} + \omega^{nn}\left(g\theta\right)_{j-1/2}^{n-1} - \frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w_j - w_{j-1}\right)^{n-1} - \frac{1}{2^p}\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^p \qquad \text{(ب-۳۷)}$$

شرایط مرزی (ب-۱۰) و (ب-۱۱) در $\xi = \xi^n$ اعمال می‌گردند.

$$f_0^n = 0 \quad , \quad \theta_0^n = 1 \quad , \quad g_J^n = 0 \quad \& \quad \theta_J^n = 0 \qquad \text{(ب-۳۸)}$$

ب-۴ مرحله سوم: خطی سازی معادلات- روش نیوتن

در این مرحله روش نیوتن جهت خطی سازی معادلات (ب-۱۴)، (ب-۱۵)، (ب-۲۱)، (ب-۳۶) و (ب-۳۸) مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این فرض که f_j^{n-1}، g_j^{n-1}، θ_j^{n-1} و w_j^{n-1} برای $0 \le j \le J$ معلوم هستند، معادلات مذکور یک دستگاه معادلات با $۴J+۴$ معادله برای $۴J+۴$ مجهول (f_j^n، g_j^n، θ_j^n و w_j^n) و $j = ۰,۱,...,J$ را تشکیل می‌دهند. برای حل این دستگاه معادلات غیر خطی، روش نیوتن بکار گرفته شده و تکرارهای (f_j^v، g_j^v، θ_j^v و w_j^v) به ازای $v = ۰,۱,۲,...$ تعریف می‌گردد. مقدار اولیه ($v = ۰$) برابر با مقدار توابع در گام قبلی در جهت ξ، (ξ^{n-1})، که بهترین حدس اولیه موجود است، در نظر گرفته می‌شود. در تکرارهای بالاتر روابط زیر حاکم هستند:

$$f_j^{v+1} = f_j^v + \delta f_j^v \qquad \text{(ب-۳۹-الف)}$$

$$g_j^{v+1} = g_j^v + \delta g_j^v \qquad \text{(ب-۳۹-ب)}$$

$$\theta_j^{v+1} = \theta_j^v + \delta\theta_j^v \qquad \text{(ب-۳۹-ج)}$$

$$w_j^{v+1} = w_j^v + \delta w_j^v \qquad \text{(ب-۳۹-د)}$$

حال طرف راست عبارات بالا جایگزین f_j^n، g_j^n، θ_j^n و w_j^n در معادلات (ب-۱۴)، (ب-۱۵)، (ب-۲۱)، (ب-۳۶) و (ب-۳۸) شده و ترم‌های شامل توان‌های بالای δf_j^v، δg_j^v، $\delta\theta_j^v$ و δw_j^v حذف می‌گردد.

✓ **اعمال روش نیوتن بر معادله (ب-۱۴)**

$$h_j^{-1}\left(f_j^v+\delta f_j^v-f_{j-1}^v-\delta f_{j-1}^v\right)=\frac{g_j^v+\delta g_j^v+g_{j-1}^v+\delta g_{j-1}^v}{2}\Rightarrow$$

$$\delta f_j^v-\delta f_{j-1}^v-\frac{h_j}{2}\left(\delta g_j^v+\delta g_{j-1}^v\right)=\left(r_1\right)_j \qquad \text{(ب-۴۰-الف)}$$

✓ **اعمال روش نیوتن بر معادله (ب-۱۵)**

$$\delta\theta_j^v-\delta\theta_{j-1}^v-\frac{h_j}{2}\left(\delta w_j^v+\delta w_{j-1}^v\right)=\left(r_3\right)_{j-1} \qquad \text{(ب-۴۰-ب)}$$

✓ **اعمال روش نیوتن بر معادله (ب-۲۱)**

$$\frac{1}{2}h_j^{-1}\left(g_j^v+\delta g_j^v-g_{j-1}^v-\delta g_{j-1}^v\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha^n+\sigma^n\right)\left(\theta_j^v+\delta\theta_j^v+\theta_{j-1}^v+\delta\theta_{j-1}^v\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\beta^n\eta_{j-1/2}-\gamma^n\right)\left(w_j^v+\delta w_j^v+w_{j-1}^v+\delta w_{j-1}^v\right)=R_{j-1/2}^{n-1}$$

$$\frac{1}{2}h_j^{-1}\left(\delta g_j^v-\delta g_{j-1}^v\right)+\left(s_1\right)_j\left(\delta\theta_j^v+\delta\theta_{j-1}^v\right)+\left(s_2\right)_j\left(\delta w_j^v+\delta w_{j-1}^v\right)=\left(r_2\right)_j \qquad \text{(ب-۴۰-ج)}$$

✓ **اعمال روش نیوتن بر معادله (ب-۳۶)**

جهت اعمال روش نیوتن بر معادله (ب-۳۶)، ابتدا باید جمله $\left(\theta_{j-1/2}^n\right)^m$ را به ازای $m=۱,۲,...,M-۱$ خطی کرد.

$$m=1\rightarrow\theta_{j-1/2}^{n}\equiv\theta_{j-1/2}^{v}+\frac{1}{2}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)$$
$$m=2\rightarrow\left(\theta_{j-1/2}^{n}\right)^{2}\equiv\theta_{j-1/2}^{n}\times\theta_{j-1/2}^{n}\equiv\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{2}+\theta_{j-1/2}^{v}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)$$
$$m=3\rightarrow\left(\theta_{j-1/2}^{n}\right)^{3}\equiv\left(\theta_{j-1/2}^{n}\right)^{2}\times\theta_{j-1/2}^{n}\equiv\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{3}+\frac{3}{2}\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{2}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)$$
$$\Rightarrow\left(\theta_{j-1/2}^{n}\right)^{m}\equiv\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{m}+\frac{m}{2}\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{m-1}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)$$
(ب-۴۱)

در نتیجه معادله (ب-۳۶) به صورت زیر خطی می‌شود.

$$\frac{1}{2}h_{j}^{-1}\left(w_{j}^{v}+\delta w_{j}^{v}-w_{j-1}^{v}-\delta w_{j-1}^{v}\right)+\alpha^{nn}\left[f_{j-1/2}^{v}w_{j-1/2}^{v}+\frac{1}{2}f_{j-1/2}^{v}\left(\delta w_{j}^{v}+\delta w_{j-1}^{v}\right)+\frac{1}{2}w_{j-1/2}^{v}\left(\delta f_{j}^{v}+\delta f_{j-1}^{v}\right)\right]+$$
$$\gamma^{nn}\left[g_{j-1/2}^{v}\theta_{j-1/2}^{v}+\frac{1}{2}g_{j-1/2}^{v}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)+\frac{1}{2}\theta_{j-1/2}^{v}\left(\delta g_{j}^{v}+\delta g_{j-1}^{v}\right)\right]+\beta^{nn}\left[g_{j-1/2}^{n-1}\theta_{j-1/2}^{v}+\frac{1}{2}g_{j-1/2}^{n-1}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\right.\right.$$
$$\left.\delta\theta_{j-1}^{v}\right)-\theta_{j-1/2}^{n-1}g_{j-1/2}^{v}-\frac{1}{2}\theta_{j-1/2}^{n-1}\left(\delta g_{j}^{v}+\delta g_{j-1}^{v}\right)-w_{j-1/2}^{n-1}f_{j-1/2}^{v}-\frac{1}{2}w_{j-1/2}^{n-1}\left(\delta f_{j}^{v}+\delta f_{j-1}^{v}\right)+f_{j-1/2}^{n-1}w_{j-1/2}^{v}+$$
$$\left.\frac{1}{2}f_{j-1/2}^{n-1}\left(\delta w_{j}^{v}+\delta w_{j-1}^{v}\right)\right]+c_{1}\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-1}\left[\theta_{j-1/2}^{v}+\frac{1}{2}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)\right]+c_{2}\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-2}\left[\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{2}+\theta_{j-1/2}^{v}\times\right.$$
$$\left.\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)\right]+\cdots+c_{m}\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-m}\left[\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{m}+\frac{m}{2}\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{m-1}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)\right]+\cdots+c_{M-1}\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-M+1}\times$$
$$\left[\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{M-1}+\frac{M-1}{2}\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{M-2}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)\right]=RR_{j-1/2}^{n-1}$$

که نتیجه نهایی را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\left(s_{3}\right)_{j}\left(\delta f_{j}^{v}+\delta f_{j-1}^{v}\right)+\left(s_{4}\right)_{j}\left(\delta g_{j}^{v}+\delta g_{j-1}^{v}\right)+$$
$$\left(s_{5}\right)_{j}\left(\delta\theta_{j}^{v}+\delta\theta_{j-1}^{v}\right)+\left(s_{6}\right)_{j}\delta w_{j}^{v}+\left(s_{7}\right)_{j}\delta w_{j-1}^{v}=\left(r_{4}\right)_{j-1}$$
(ب-۴۰-د)

طرف راست معادلات (ب-۴۰) به صورت زیر هستند.

$$\left(r_{1}\right)_{j}=f_{j-1}^{v}-f_{j}^{v}+h_{j}g_{j-1/2}^{v}$$
(ب-۴۲-الف)

$$\left(r_{3}\right)_{j-1}=\theta_{j-1}^{v}-\theta_{j}^{v}+h_{j}w_{j-1/2}^{v}$$
(ب-۴۲-ب)

$$\left(r_{2}\right)_{j}=R_{j-1/2}^{n-1}-\left\{\frac{1}{2}h_{j}^{-1}\left(g_{j}^{v}-g_{j-1}^{v}\right)+\left(\alpha^{n}+\sigma^{n}\right)\theta_{j-1/2}^{v}+\left(\beta^{n}\eta_{j-1/2}-\gamma^{n}\right)w_{j-1/2}^{v}\right\}$$
(ب-۴۲-ج)

$$\left(r_4\right)_{j-1}=RR_{j-1/2}^{n-1}-\left\{\frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w_j^v-w_{j-1}^v\right)+\alpha^{nn}f_{j-1/2}^v w_{j-1/2}^v+\gamma^{nn}g_{j-1/2}^v\theta_{j-1/2}^v\right.$$
$$+\beta^{nn}\left(g_{j-1/2}^{n-1}\theta_{j-1/2}^v-\theta_{j-1/2}^{n-1}g_{j-1/2}^v-w_{j-1/2}^{n-1}f_{j-1/2}^v+f_{j-1/2}^{n-1}w_{j-1/2}^v\right)+$$
$$c_1\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-1}\theta_{j-1/2}^v+c_2\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-2}\left(\theta_{j-1/2}^v\right)^2+\cdots+c_m\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-m}\left(\theta_{j-1/2}^v\right)^m+$$
$$\left.\cdots+c_{M-1}\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-M+1}\left(\theta_{j-1/2}^v\right)^{M-1}\right\}$$ (ب-۴۲-د)

ضرایب معادلات (ب-۴۰) نیز به فرم زیر بیان می‌شوند.

$$\left(s_1\right)_j=\frac{1}{2}\left(\alpha^n+\sigma^n\right)$$ (ب-۴۳-الف)

$$\left(s_2\right)_j=\frac{1}{2}\left(\beta^n\eta_{j-1/2}-\gamma^n\right)$$ (ب-۴۳-ب)

$$\left(s_3\right)_j=\frac{1}{2}\left(\alpha^{nn}w_{j-1/2}^v-\beta^{nn}w_{j-1/2}^{n-1}\right)$$ (ب-۴۳-ج)

$$\left(s_4\right)_j=\frac{1}{2}\left(\gamma^{nn}\theta_{j-1/2}^v-\beta^{nn}\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)$$ (ب-۴۳-د)

$$\left(s_5\right)_j=\frac{1}{2}\left(\gamma^{nn}g_{j-1/2}^v+\beta^{nn}g_{j-1/2}^{n-1}+c_1\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-1}+2c_2\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-2}\theta_{j-1/2}^v+\right.$$
$$\left.\cdots+mc_m\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-m}\left(\theta_{j-1/2}^v\right)^{m-1}+\cdots+\left(M-1\right)c_{M-1}\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{p-M+1}\left(\theta_{j-1/2}^v\right)^{M-2}\right)$$ (ب-۴۳-ه)

$$\left(s_6\right)_j=\frac{1}{2}\left(h_j^{-1}+\alpha^{nn}f_{j-1/2}^v+\beta^{nn}f_{j-1/2}^{n-1}\right)$$ (ب-۴۳-و)

$$\left(s_7\right)_j=\frac{1}{2}\left(-h_j^{-1}+\alpha^{nn}f_{j-1/2}^v+\beta^{nn}f_{j-1/2}^{n-1}\right)$$ (ب-۴۳-ز)

شرایط مرزی معادله (ب-۳۸) نیز به صورت زیر در می‌آیند.

$$\delta f_0=0,\quad \delta\theta_0=0,\quad \delta g_J=0,\quad \delta\theta_J=0$$ (ب-۴۴)

ب-۴-۱ نوشتن معادلات به فرم ماتریس-بردار

سیستم خطی داده شده توسط معادلات (ب-۴۰) و (ب-۴۴)، ساختار سه قطری بلوکی داشته و می‌توان آن را به فرم ماتریس-برداری زیر نوشت.

$$[A][\delta]=[r] \tag{ب-۴۵}$$

که

$$[A]=\begin{bmatrix} [A_0] & [C_0] & & & & & \\ [B_1] & [A_1] & [C_1] & & & & \\ & . & . & . & & & \\ & & [B_j] & [A_j] & [C_j] & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & & [B_{J-1}] & [A_{J-1}] & [C_{J-1}] \\ & & & & & [B_J] & [A_J] \end{bmatrix},$$

$$[\delta]=\begin{bmatrix} \overrightarrow{\delta_0} \\ \overrightarrow{\delta_1} \\ . \\ \overrightarrow{\delta_j} \\ . \\ \overrightarrow{\delta_{J-1}} \\ \overrightarrow{\delta_J} \end{bmatrix}, \quad [r]=\begin{bmatrix} \overrightarrow{r_0} \\ \overrightarrow{r_1} \\ . \\ \overrightarrow{r_j} \\ . \\ \overrightarrow{r_{J-1}} \\ \overrightarrow{r_J} \end{bmatrix} \tag{ب-۴۶}$$

و

$$\overrightarrow{\delta_j}=\begin{bmatrix} \delta f_j \\ \delta g_j \\ \delta\theta_j \\ \delta w_j \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{r_j}=\begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_3)_j \\ (r_4)_j \end{bmatrix} \tag{ب-۴۷}$$

در ضمن $[A_j]$، $[B_j]$ و $[C_j]$ ها ماتریس‌هایی از مرتبه ۴×۴ هستند:

$$[A_0]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -h_1/2 \\ (s_3)_1 & (s_4)_1 & (s_5)_1 & (s_7)_1 \end{bmatrix}$$ (ب-۴۸-الف)

$$[A_j]=\begin{bmatrix} 1 & -h_j/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(2h_j) & (s_1)_j & (s_2)_j \\ 0 & 0 & -1 & -h_{j+1}/2 \\ (s_3)_{j+1} & (s_4)_{j+1} & (s_5)_{j+1} & (s_7)_{j+1} \end{bmatrix}, \quad 1 \le j \le J-1$$ (ب-۴۸-ب)

$$[A_J]=\begin{bmatrix} 1 & -h_J/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(2h_J) & (s_1)_J & (s_2)_J \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ (ب-۴۸-ج)

$$[B_j]=\begin{bmatrix} -1 & -h_j/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/(2h_j) & (s_1)_j & (s_2)_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \le j \le J$$ (ب-۴۸-د)

$$[C_j]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h_{j+1}/2 \\ (s_3)_{j+1} & (s_4)_{j+1} & (s_5)_{j+1} & (s_6)_{j+1} \end{bmatrix}, \quad 0 \le j \le J-1$$ (ب-۴۸-ه)

باید توجه کرد که دو ردیف اول $[A_0]$ و $[C_0]$ و نیز دو ردیف آخر $[A_J]$ و $[B_J]$ مربوط به شرایط مرزی هستند. در ضمن اولین و آخرین بردار تشکیل دهنده ماتریس $[r]$ به صورت زیر خواهند بود.

$$\vec{r_0}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (r_3)_0 \\ (r_4)_0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r_J}=\begin{bmatrix} (r_1)_J \\ (r_2)_J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (ب-۴۹)

ب-۵ گسسته سازی معادله (ب-۹) به ازای مقادیر صحیح p

در این حالت، جمله $\left(\theta^{n-1}+\theta^{n}\right)^{p}$ دارای بسطی متناهی به نام بسط خیام است. گسسته سازی معادله (ب-۹) در این حالت ساده‌تر بوده و در کل، تعدادی از معادلات تغییر کرده و تعدادی نیز حذف می‌شوند. در اینجا از گسسته کردن دوباره این معادله به ازای pهای صحیح چشم پوشی کرده و تنها عباراتی که در نوشتن کد ظاهر می‌شوند، بیان می‌گردد.

ب-۵-۱ حالت $p=$ ۱

$$RR_{j-1/2}^{n-1}=\sigma^{nn}\left(fw\right)_{j-1/2}^{n-1}+\omega^{nn}\left(g\theta\right)_{j-1/2}^{n-1}-\frac{1}{2}h_{j}^{-1}\left(w_{j}-w_{j-1}\right)^{n-1}-\frac{1}{2}\theta_{j-1/2}^{n-1} \qquad \text{(ب-۵۰-الف)}$$

$$\begin{aligned}\left(r_{4}\right)_{j-1}=RR_{j-1/2}^{n-1}-\Bigg\{&\frac{1}{2}h_{j}^{-1}\left(w_{j}^{v}-w_{j-1}^{v}\right)+\alpha^{nn}f_{j-1/2}^{v}w_{j-1/2}^{v}+\gamma^{nn}g_{j-1/2}^{v}\theta_{j-1/2}^{v}+\\&\beta^{nn}\left(g_{j-1/2}^{n-1}\theta_{j-1/2}^{v}-\theta_{j-1/2}^{n-1}g_{j-1/2}^{v}-w_{j-1/2}^{n-1}f_{j-1/2}^{v}+f_{j-1/2}^{n-1}w_{j-1/2}^{v}\right)+\frac{1}{2}\theta_{j-1/2}^{v}\Bigg\}\end{aligned} \qquad \text{(ب-۵۰-ب)}$$

$$\left(s_{5}\right)_{j}=\frac{1}{2}\left(\gamma^{nn}g_{j-1/2}^{v}+\beta^{nn}g_{j-1/2}^{n-1}+\frac{1}{2}\right) \qquad \text{(ب-۵۰-ج)}$$

ب-۵-۲ حالت $p=$ ۲

$$RR_{j-1/2}^{n-1}=\sigma^{nn}\left(fw\right)_{j-1/2}^{n-1}+\omega^{nn}\left(g\theta\right)_{j-1/2}^{n-1}-\frac{1}{2}h_{j}^{-1}\left(w_{j}-w_{j-1}\right)^{n-1}-\frac{1}{4}\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)^{2} \qquad \text{(ب-۵۱-الف)}$$

$$\begin{aligned}\left(r_{4}\right)_{j-1}=RR_{j-1/2}^{n-1}-\Bigg\{&\frac{1}{2}h_{j}^{-1}\left(w_{j}^{v}-w_{j-1}^{v}\right)+\alpha^{nn}f_{j-1/2}^{v}w_{j-1/2}^{v}+\gamma^{nn}g_{j-1/2}^{v}\theta_{j-1/2}^{v}+\\&\beta^{nn}\left(g_{j-1/2}^{n-1}\theta_{j-1/2}^{v}-\theta_{j-1/2}^{n-1}g_{j-1/2}^{v}-w_{j-1/2}^{n-1}f_{j-1/2}^{v}+f_{j-1/2}^{n-1}w_{j-1/2}^{v}\right)+\\&\frac{1}{4}\left(\theta_{j-1/2}^{v}\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\theta_{j-1/2}^{n-1}\right)\theta_{j-1/2}^{v}\Bigg\}\end{aligned} \qquad \text{(ب-۵۱-ب)}$$

$$\left(s_5\right)_j = \frac{1}{2}\left(\gamma^{nn} g^{v}_{j-1/2} + \beta^{nn} g^{n-1}_{j-1/2} + \frac{1}{2}\left(\theta^{v}_{j-1/2} + \theta^{n-1}_{j-1/2}\right)\right) \qquad \text{(ب-۵۱-ج)}$$

ب-۵-۳ حالت $p = ۳$

$$RR^{n-1}_{j-1/2} = \sigma^{nn}\left(fw\right)^{n-1}_{j-1/2} + \omega^{nn}\left(g\theta\right)^{n-1}_{j-1/2} - \frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w_j - w_{j-1}\right)^{n-1} - \frac{1}{8}\left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^3 \qquad \text{(ب-۵۲-الف)}$$

$$\begin{aligned}\left(r_4\right)_{j-1} = {} & RR^{n-1}_{j-1/2} - \Big\{\frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w^{v}_{j} - w^{v}_{j-1}\right) + \alpha^{nn} f^{v}_{j-1/2} w^{v}_{j-1/2} + \gamma^{nn} g^{v}_{j-1/2}\theta^{v}_{j-1/2} + \\ & \beta^{nn}\left(g^{n-1}_{j-1/2}\theta^{v}_{j-1/2} - \theta^{n-1}_{j-1/2} g^{v}_{j-1/2} - w^{n-1}_{j-1/2} f^{v}_{j-1/2} + f^{n-1}_{j-1/2} w^{v}_{j-1/2}\right) + \\ & \frac{1}{8}\left(\theta^{v}_{j-1/2}\right)^3 + \frac{3}{8}\left[\left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)\left(\theta^{v}_{j-1/2}\right)^2 + \left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^2\left(\theta^{v}_{j-1/2}\right)\right]\Big\}\end{aligned} \qquad \text{(ب-۵۲-ب)}$$

$$\left(s_5\right)_j = \frac{1}{2}\left(\gamma^{nn} g^{v}_{j-1/2} + \beta^{nn} g^{n-1}_{j-1/2} + \frac{3}{8}\left(\theta^{v}_{j-1/2} + \theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^2\right) \qquad \text{(ب-۵۲-ج)}$$

ب-۵-۴ حالت $p = ۴$

$$RR^{n-1}_{j-1/2} = \sigma^{nn}\left(fw\right)^{n-1}_{j-1/2} + \omega^{nn}\left(g\theta\right)^{n-1}_{j-1/2} - \frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w_j - w_{j-1}\right)^{n-1} - \frac{1}{16}\left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^4 \qquad \text{(ب-۵۳-الف)}$$

$$\begin{aligned}\left(r_4\right)_{j-1} = {} & RR^{n-1}_{j-1/2} - \Big\{\frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w^{v}_{j} - w^{v}_{j-1}\right) + \alpha^{nn} f^{v}_{j-1/2} w^{v}_{j-1/2} + \gamma^{nn} g^{v}_{j-1/2}\theta^{v}_{j-1/2} + \\ & \beta^{nn}\left(g^{n-1}_{j-1/2}\theta^{v}_{j-1/2} - \theta^{n-1}_{j-1/2} g^{v}_{j-1/2} - w^{n-1}_{j-1/2} f^{v}_{j-1/2} + f^{n-1}_{j-1/2} w^{v}_{j-1/2}\right) + \frac{1}{16}\left(\theta^{v}_{j-1/2}\right)^4 + \\ & + \frac{1}{8}\left[2\left(\left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)\left(\theta^{v}_{j-1/2}\right)^3 + \left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^3\left(\theta^{v}_{j-1/2}\right)\right) + 3\left(\theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^2\left(\theta^{v}_{j-1/2}\right)^2\right]\Big\}\end{aligned} \qquad \text{(ب-۵۳-ب)}$$

$$\left(s_5\right)_j = \frac{1}{2}\left(\gamma^{nn} g^{v}_{j-1/2} + \beta^{nn} g^{n-1}_{j-1/2} + \frac{1}{4}\left(\theta^{v}_{j-1/2} + \theta^{n-1}_{j-1/2}\right)^3\right) \qquad \text{(ب-۵۳-ج)}$$

ب-۶ فرم گسسته معادله انرژی در حضور تولید حرارت نمایی

در این حالت معادله (ب-۴)، معادله انرژی حاکم بر لایه مرزی را بیان می‌کند. گسسته کردن این معادله بسیار راحت‌تر از معادله (ب-۳) می‌باشد. پس از کاهش مرتبه دستگاه معادلات، معادله زیر جایگزین معادله (ب-۹) می‌گردد.

$$w'+\left(\frac{r+1}{6}\right)(2+\xi)fw-rg\theta+e^{-\eta}=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi(1-\xi)\left(g\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-w\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) \qquad (ب-۵۴)$$

مانند قبل ابتدا باید معادله فوق را در $\left(\xi^{n-1/2},\eta\right)$ گسسته کرد.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[(w')^n+(w')^{n-1}\right]+\left(\frac{r+1}{6}\right)\left(2+\xi^{n-1/2}\right)\frac{(fw)^n+(fw)^{n-1}}{2}-\\&\frac{r}{2}\left[(g\theta)^n+(g\theta)^{n-1}\right]+e^{-\eta}=\left(\frac{r+1}{6}\right)\xi^{n-1/2}\left(1-\xi^{n-1/2}\right)\times\\&\left[\frac{g^n+g^{n-1}}{2}\times\frac{\theta^n-\theta^{n-1}}{k_n}-\frac{w^n+w^{n-1}}{2}\times\frac{f^n-f^{n-1}}{k_n}\right]\end{aligned} \qquad (ب-۵۵)$$

با انتقال جملات شامل مقادیر توابع در گام ξ^n به سمت چپ، و انتقال بقیه جملات به سمت راست، عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(w')^n+\alpha^{nn}(fw)^n+\gamma^{nn}(g\theta)^n+\beta^{nn}\left[g^{n-1}\theta^n-g^n\theta^{n-1}-w^{n-1}f^n+w^nf^{n-1}\right]=\\&RR^{n-1}\end{aligned} \qquad (ب-۵۶)$$

که ضرایب مطابق معادلات (ب-۲۷) تا (ب-۳۱) بیان گردیده و RR^{n-1} نیز توسط رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$RR^{n-1}=\sigma^{nn}(fw)^{n-1}+\omega^{nn}(g\theta)^{n-1}-\frac{1}{2}(w')^{n-1}-e^{-\eta} \qquad (ب-۵۷)$$

حال باید معادله (ب-۵۶) را در $\left(\xi^{n-1/2},\eta_{j-1/2}\right)$ گسسته کرد:

$$\frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w_j - w_{j-1}\right)^n + \alpha^{nn}\left(fw\right)_{j-1/2}^n + \gamma^{nn}\left(g\theta\right)_{j-1/2}^n + \beta^{nn}\left[g_{j-1/2}^{n-1}\theta_{j-1/2}^n - g_{j-1/2}^n\theta_{j-1/2}^{n-1} - w_{j-1/2}^{n-1}f_{j-1/2}^n + w_{j-1/2}^n f_{j-1/2}^{n-1}\right] = RR_{j-1/2}^{n-1} \quad \text{(ب-۵۸)}$$

با

$$RR_{j-1/2}^{n-1} = \sigma^{nn}\left(fw\right)_{j-1/2}^{n-1} + \omega^{nn}\left(g\theta\right)_{j-1/2}^{n-1} - \frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w_j - w_{j-1}\right)^{n-1} - e^{\eta_{j-1/2}} \quad \text{(ب-۵۹)}$$

خطی سازی معادله (ب-۵۸) منجر به معادله (ب-۴۰-د) می‌گردد، با این تفاوت که $\left(r_4\right)_{j-1}$ و ضریب $\left(s_5\right)_j$ به صورت زیر می‌باشد.

$$\left(r_4\right)_{j-1} = RR_{j-1/2}^{n-1} - \left\{\frac{1}{2}h_j^{-1}\left(w_j^v - w_{j-1}^v\right) + \alpha^{nn}f_{j-1/2}^v w_{j-1/2}^v + \gamma^{nn}g_{j-1/2}^v\theta_{j-1/2}^v + \beta^{nn}\left(g_{j-1/2}^{n-1}\theta_{j-1/2}^v - \theta_{j-1/2}^{n-1}g_{j-1/2}^v - w_{j-1/2}^{n-1}f_{j-1/2}^v + f_{j-1/2}^{n-1}w_{j-1/2}^v\right)\right\} \quad \text{(ب-۶۰-الف)}$$

$$\left(s_5\right)_j = \frac{1}{2}\left(\gamma^{nn}g_{j-1/2}^v + \beta^{nn}g_{j-1/2}^{n-1}\right) \quad \text{(ب-۶۰-ب)}$$

سایر معادلات همانند حالتی است که نرخ تولید حرارت با θ^p متناسب است.

ب-۷ فرم گسسته معادله انرژی در حالت عدم تولید حرارت

معادله انرژی در این حالت، معادله (ب-۲) می‌باشد. گسسته کردن این معادله همانند معادله (ب-۴) بوده و تنها باید جملات شامل تابع نمایی را از معادلات بخش (ب-۶) حذف کرد. لذا از دوباره نویسی این معادلات خودداری می‌شود.

منابع و مراجع

[1] Oosthuizen P. H. and Naylor D. (1999), "An Introduction to Convective Heat Transfer Analysis", McGraw-Hill, New York.

[2] Nield D. A. and Bejan A. (2006), "Convection in Porous Media", 3rd edn. Springer, New York.

[3] Ingham D. B. and Pop I. (2005), "Transport Phenomena in Porous Media", Vol. III, Elsevier Science, Oxford.

[4] Pop I. and Ingham D. B. (2001), "Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media", Pergamon, Oxford.

[5] Nakayama A. (1995), "PC-aided Numerical Heat Transfer and Convective Flow", CRC Press, Tokyo.

[6] Vafai K. (2005), "Handbook of Porous Media", 2nd edn, Taylor and Francis, New York.

[7] Ingham D. B., Bejan A., Mamut E. and Pop I. (2004), "Emerging Technologies and Techniques in Porous media", Kluwer, Dordrecht.

[8] Bejan A., Dancer I., Lorente S., Miguel A. F. and Reis A. H. (2004), "Porous and Complex Flow Structures in Modern Technologies", Springer-Verlag, New York.

[9] Cheng P. and Minkowycz W. J. (1977) "Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike" *J. Geophys. Res*, 82, pp 2040-2044.

[10] Cheng P. (1977) "The influence of lateral mass flux on free convection boundary layers in a saturated porous medium" *Int. J. Heat Mass Transfer,* 20, pp 201–206.

[11] Ingham D. B. and Brown S. N. (1986) "Flow past a suddenly heated vertical plate in a porous medium" *Proc. Roy. Soc. London Ser. A,* 403, pp 51–80.

[12] Haq S. and Mulligan J. C. (1990) "Transient free convection about a vertical flat plate embedded in a saturated porous medium" ***Numer. Heat Transfer A,*** **18, pp 227–242.**

[13] Mahmood T. and Merkin J. H. (1998) "The convective boundary-layer flow on a reacting surface in a porous medium" ***Transp. Porous Media,*** **32, pp 285–298.**

[14] Postelnicu A. and Pop I. (1999) "Similarity solutions of free convection boundary-layers over vertical and horizontal surfaces in porous media with internal heat generation" ***Int. Commun. Heat Mass Transfer*****, 26, pp 1183–1191.**

[15] Postelnicu A., Grosan T. and Pop I. (2000) "Free convection boundary-layer flow over a vertical permeable flat plate in a porous medium with internal heat generation" ***Int. Commun. Heat Mass Transfer*****, 27, pp 729–738.**

[16] Rees D. A. S., Magyari E. and Keller B. (2003) "The Development of the Asymptotic Viscous Dissipation Profile in a Vertical Free Convective Boundary Layer Flow in a Porous Medium" ***Transp. in Porous Media,*** **53, pp 347–355.**

[17] Andrew D., Rees S. and Pop I. (2003) "The effect of large-amplitude g-jitter vertical free convection boundary-layer flow in porous media" ***Int. J. Heat Mass Transfer,*** **46, pp 1097-1102.**

[18] Saeid N. H. and Mohamad A. A. (2005) "Periodic free convection from a vertical plate in a saturated porous medium, non-equilibrium model" ***Int. J. Heat Mass Transfer,*** **48, pp 3855-3863.**

[19] Badruddin I. A., Zainal Z. A., Aswatha Narayana P. A., Seetharamu K. N. and Siew L. W. (2006) "Free convection and radiation for a vertical wall with varying temperature embedded in a porous medium" ***Int. J. Thermal Sciences,*** **45, pp 487-493.**

[20] Magyari E. and Rees D. A. S. (2006) "Effect of viscous dissipation on the Darcy free convection boundary-layer flow over a vertical plate with exponential temperature distribution in a porous medium" ***Fluid Dynamics Research,*** **38, pp 405-429.**

[21] Magyari E., Pop I. and Postelnicu A. (2007) "Effect of the Source Term on Steady Free Convection Boundary Layer Flows over an Vertical Plate in a Porous Medium. Part I" ***Transport Porous Media,*** **67, pp 49-67.**

[22] Jayanthi S. and Kumari M. (2007) "Effect of variable viscosity on non-Darcy free or mixed convection flow on a vertical surface in a non-Newtonian fluid saturated porous medium" ***Applied Mathematics and Computation,*** **186, pp 1643-1659.**

[23] Mealey L. and Merkin J. H. (2008) "Free convection boundary layers on a vertical surface in a heat-generating porous medium" ***IMA Journal of applied Mathematics*****, 73, pp 231-253.**

[24] Merkin J. H. (2008) "FREE CONVECTIVE BOUNDARY-LAYER FLOW IN A HEAT-GENERATING POROUS MEDIUM: SIMILARITY SOLUTIONS" ***Q. Jl Mech. Appl. Math,*** **61, pp 205-218.**

[25] Kuznetsov A. V. and Nield D. A. (2010) "The Cheng–Minkowycz problem for cellular porous materials: Effect of temperature-dependent conductivity arising from radiative transfer" ***Int. J. Heat Mass Transfer,*** **53, pp 2676-2679.**

[26] Cheng, P and Chang I.D. (1976) "Buoyancy induced flows in a saturated porous medium adjacent to impermeable horizontal surfaces" ***Int. J. Heat Mass Transfer,*** **11, pp 1267-1272.**

[27] Kimura S., Bejan A. and Pop, I. (1985) "Natural convection near a cold plate facing upward in a porous medium" ***ASME J. Heat Transfer,*** **107, pp 819–825.**

[28] Hossain M. A. and Rees D. A. S. (1997) "Non-Darcy Free Convection Along a Horizontal Heated Surface" ***Transport Porous Media,*** **29, pp 309-321.**

[29] Kumari M. (2001) "Variable viscosity effects on free and mixed convection boundary layer flow from a horizontal surface in a saturated porous medium–variable heat flux" ***Mech. Res. Commun*****., 28, pp 339–348.**

[30] Kumari M. (2001) "Effect of variable viscosity on non-Darcy free or mixed convection flow on the horizontal surface in a saturated porous medium" *Int. Comm. Heat Mass Transfer,* 28, pp 723–732.

[31] Elaiw A. M., Ibrahim F. S. and Bakr A. A. (2009) "Variable permeability and inertia effect on vortex instability of natural convection flow over horizontal permeable plates in porous media" *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,* 14, pp 2190-2201.

[32] Jang J. Y. and Hsu C. T. (2009) "Vortex instability of MHD natural convection flow over a horizontal plate in a porous medium" *Computers & Fluids*, 32, pp 333-339.

[33] Bansod V. J. and Jadhav R. K. (2009) "An integral treatment for combined heat and mass transfer by natural convection along a horizontal surface in a porous medium" *Int. J. Heat Mass Transfer,* 52, pp 2802-2806.

[34] Jang J. Y. and Chang W. J. (1988) "Buoyancy-induced inclined boundary layer flow in a saturated porous medium" *Comput. Methods Appl. Mech*., 68, pp 333–344.

[35] Pop I. and Na T. Y. (1997) "Free convection from an arbitrarily inclined plate in a porous medium" *Heat Mass Transfer,* 32, pp 55–59.

[36] Hossain M. A. and Pop I. (1997) "Radiation effect on Darcy free convection flow along an inclined surface placed in porous media" *Heat Mass Transfer,* 32, pp 223–227.

[37] Chamkha A. J. (1997) "Hydromagnetic natural convection from an isothermal inclined surface adjacent to a thermally stratified porous medium" *Int. J. Engng. Sci.,* 35, pp 975-986.

[38] Takhar H. S., Chamkha A. J. and Nath G. (2003) "Effects of non-uniform temperature or mass transfer in finite sections of an inclined plate on the MHD natural convection flow in a temperature stratified high-porosity porous medium" *Int. J. Thermal Sci.,* 42, pp 829–836.

[39] Rabadi N. J. and Hamdan, E. M. (2000) "Free convection from inclined permeable walls embedded in variable permeability porous media with lateral mass flux" ***J. Petrol. Sci. Engng.,*** **26, pp 241-251.**

[40] Lee J., Kandaswamy P., Bhuvaneswari M. and Sivasankaran S. (2008) "Lie group analysis of radiation natural convection heat transfer past an inclined porous surface" ***Journal of Mechanical Science and Technology*****, 22, pp 1779-1784.**

[41] Rahli O. and Santini R. (1998) "Fluid flow through randomly packed monodisperse fibers: the Kozeny-Carman parameter analysis II" ***J. of Fluids Engng.,*** **121, pp 216–222.**

[42] Ward, J. C. (1964) "Turbulent flow in porous media" ***ASCE J. Hydraul.,*** **90, pp 1–12.**

[43] Beavers G. S., Sparrow E. M. and Rodenz D. E. (1973) "Influence of bed size on the flow characteristics and porosity of randomly packed beds of spheres" ***J. Appl. Mech.,*** **40, pp 655–660.**

[44] Nield D. A. (2000) "Resolution of aparadox involving viscous dissipation and nonlinear drag in a porous medium" ***Transport Porous Media*****, 41, pp 349–357.**

[45] Polyaev V. M., Mozhaev A. P., Galitseysky B. A. and Lozhkin A. L. (1996) "A study of internal heat transfer in nonuniform porous structures" ***Expt. Therm. Fluid Sci.*****, 12, pp 426–432.**

[46] Cebeci T., Shao J. P., Kafyeke F. and Laurendeau E. (2005) "Computational Fluid Dynamics for Engineers", Horizons Publishing: Springer.

[47] Keller H. B. (1978) "Numerical methods in boundary layer theory" ***Ann. Rev. Fluid Mech.*****, 10, pp 417-433.**

Abstract

In this thesis, the natural convection boundary layer flow over an arbitrarily inclined flat plate in a saturated porous medium is studied in the presence of heat generation. The wall temperature is kept at a higher value with the power-law variation. Problem is solved for two kind of heat generation. In first case, heat generation varies exponentially, and in the other case, it is proportional to dimensionless temperature with a power function. Darcy-Boussinesq approximation is adopted to account for buoyancy force. An inclination parameter is used such that all cases of the horizontal, Inclined and vertical plates can be described by a single set of transformed boundary layer equations. The non-linear coupled parabolic equations have been solved numerically by using an implicit finite-difference scheme, called Keller Box Method, for both positive and negative inclinations of the plate. Also, the similarity equations for the limiting cases of the horizontal and vertical plates are recovered by setting the inclination parameter 0 and 1, respectively. In case of positive inclination, the solution covers all angles of inclination, whilst for negative inclination; the solution exists only for point at which separation occurs there. It is observed that heat generation causes the change in the slope of dimensionless temperature and velocity profiles, and therefore in quantity of Nusselt number and skin friction coefficient. In some cases, these changes also reverse direction of heat transfer. Moreover there is a wonderful match between the numerical solution and similarity solutions for horizontal and vertical plates of each problem.

Keywords: porous medium, boundary layer, natural convection, inclined plate, inclination parameter.