

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکترونیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

مطالعه‌ی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های منتظم واقع در مرکز صفحات
ناهمسانگرد محدود تحت بار درون صفحه‌ای

نگارنده: حبیب الله پولادی

استاد راهنما:

دکتر محمد جعفری

شهریور ۱۳۹۷

شماره: ۱۷۸ / ۲۸۷ / ۲۰۲۰
تاریخ: ۱۰ / ۷ / ۹۷

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حبیب الله پولادی با شماره دانشجویی ۹۳۰۴۶۵۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان مطالعه توزیع تنش اطراف گشودگی های منظم واقع در مرکز صفحات ناهمسانگرد محدود تحت بار درون صفحه ای که در تاریخ ۹۷/۶/۱۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با امتیاز ۱۸.۱۵۰ درجه خیلی خوب) مردود
نوع تحقیق: نظری عملی

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	دکتر محمد جعفری	۱- استاد راهنمای اول
_____	_____	_____	۲- استاد راهنمای دوم
_____	_____	_____	۳- استاد مشاور
	استادیار	دکتر هادی پروز	۴- نماینده تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر سیدمهدی حسینی فراش	۵- استاد ممتحن اول
	استادیار	دکتر محمدباقر نظری	۶- استاد ممتحن دوم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).



تقدیم

تقدیم به پدر و مادر عزیز و مهربانم

که در دشواری های زندگی همواره یوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده اند.

تشکر و قدردانی

خداوند بزرگ و مهربان را شاکرم که توفیق کسب علم و دانش را به من عطا فرمود، تا بتوانم این مرحله از علم آموزی را با موفقیت به پایان برسانم.

از خانواده‌ی عزیزم به خاطر محبت‌های بی‌منت و حمایت‌های بی‌دریغشان در تمامی مراحل زندگی‌ام، کمال تشکر و سپاس را دارم.

از استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر محمد جعفری به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان در کلیه‌ی مراحل انجام پایان‌نامه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

تعهد نامه

اینجانب حبیب الله پولادی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه توزیع تنش اطراف گشودگی‌های منتظم واقع در مرکز

صفحات ناهمسانگرد محدود تحت بار درون صفحه‌ای تحت راهنمایی دکتر محمد جعفری متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد

چکیده

در این پایان نامه، توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف منتظم واقع در مرکز ورق ناهمسانگرد محدود مطالعه شده است. روش به کار گرفته شده بر پایه‌ی بسط حل تحلیلی متغیر مختلط لخنیتسکی و نگاشت همنوا، با فرض تنش صفحه‌ای می‌باشد. ورق تحت بار کششی تک‌محوری، دوماحوری و برش خالص قرار گرفته و همچنین، محدود (نسبت قطر دایره‌ی محیط بر گشودگی چندضلعی به بزرگ‌ترین ضلع ورق، بزرگ‌تر از $0/2$)، ناهمسانگرد و الاستیک خطی در نظر گرفته شده است. در این روش حل، با استفاده از تابع نگاشت همنوا، ناحیه‌ی محدود خارج گشودگی‌ها در صفحه‌ی Z به ناحیه‌ی محدود خارج گشودگی دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه‌ی ξ نگاشت می‌شود. برای محاسبه‌ی تابع تنش مربوط به صفحه‌ی محدود حاوی گشودگی‌های منتظم، از جمع تابع تنش یک ورق نامحدود حاوی همان گشودگی منتظم و تابع تنش یک ورق محدود بدون گشودگی استفاده شده است. ضرایب مجهول در تابع تنش، با استفاده از روش حداقل مربعات مرزی و اعمال شرایط مرزی مناسب به دست می‌آیند. در این تحقیق تأثیر پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش نظیر نوع هندسه‌ی گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی، جهت‌گیری گشودگی (زاویه‌ی چرخش گشودگی)، زاویه‌ی الیاف ورق، نوع بارگذاری و نسبت اضلاع ورق بررسی شده است. نتایج به دست آمده از حل تحلیلی، به وسیله‌ی نتایج به دست آمده از سایر مقالات برای ورق‌های محدود و نامحدود کاملاً تأیید می‌گردد. مقایسه‌ی نتایج نشان می‌دهند که در بررسی توزیع تنش ورق‌هایی که در آن‌ها نسبت قطر دایره‌ی محیط بر گشودگی به بزرگ‌ترین ضلع ورق بزرگ‌تر از $0/2$ است، استفاده از حل مربوط به ورق نامحدود با خطای زیادی همراه خواهد بود. همچنین با انتخاب صحیح پارامترهای بررسی شده، می‌توان از میزان تنش ایجاد شده حول گشودگی کاست و طرحی بهینه را ایجاد نمود.

واژگان کلیدی: ورق محدود، ماده ناهمسانگرد، گشودگی منتظم، بارگذاری درون صفحه‌ای، نگاشت همنوا، حل تحلیلی، روش متغیر مختلط، روش حداقل مربعات.

فهرست مطالب

فصل ۱ : مقدمه	۱
۱-۱ مقدمه	۲
۲-۱ انگیزه	۴
۳-۱ تعریف مسئله	۴
۴-۱ اهداف تحقیق	۶
۵-۱ نوآوری	۷
۶-۱ طرح کلی فصول پایان نامه	۸
فصل ۲ : مروری بر مطالعات پیشین	۹
۱-۲ مقدمه	۱۰
۲-۲ کامپوزیت‌ها	۱۰
۱-۲-۲ آشنایی با کامپوزیت‌ها	۱۰
۲-۲-۲ تعریف کامپوزیت	۱۲
۳-۲-۲ انواع کامپوزیت‌ها	۱۲
۴-۲-۲ کاربردهای مواد کامپوزیت	۱۳
۱-۴-۲-۲ صنایع هوافضا	۱۴
۲-۴-۲-۲ صنایع دریایی	۱۵
۳-۴-۲-۲ صنایع خودروسازی	۱۵

- ۱۶-۲-۴-۴ صنایع نفت و گاز..... ۱۶
- ۱۶-۲-۴-۵ ساختمان سازی..... ۱۶
- ۱۷-۲-۵ کاربردهای مواد کامپوزیت در صنایع ایران..... ۱۷
- ۱۷-۲-۶ رفتار مکانیکی کامپوزیت‌ها..... ۱۷
- ۱۸-۲-۷ مزایا و معایب کامپوزیت‌ها..... ۱۸
- ۱۹-۲-۳ مروری بر مطالعات پیشین..... ۱۹
- ۲۰-۲-۳-۱ ورق همسانگرد نامحدود..... ۲۰
- ۲۱-۲-۳-۲ ورق ناهمسانگرد نامحدود..... ۲۱
- ۲۳-۲-۳-۳ ورقهای همسانگرد و ناهمسانگرد حاوی چندگشودگی..... ۲۳
- ۲۴-۲-۳-۴ ورق همسانگرد محدود..... ۲۴
- ۲۴-۲-۳-۵ ورق ناهمسانگرد محدود..... ۲۴

فصل ۳ : روش حل تحلیلی..... ۲۷

- ۲۸-۳-۱ مقدمه..... ۲۸
- ۲۸-۳-۲ فرضیات مورد استفاده..... ۲۸
- ۲۸-۳-۳ نگاهت همنا..... ۲۸
- ۳۲-۳-۴ روش حل و به دست آوردن معادلات حاکم..... ۳۲
- ۴۳-۳-۵ محاسبه‌ی ضرایب مجهول..... ۴۳
- ۴۳-۳-۵-۱ تعیین نقاط منتخب..... ۴۳
- ۴۵-۳-۵-۲ تعیین شرایط مرزی..... ۴۵

۴۷ ۳-۵-۳ محاسبه‌ی مجذور باقیمانده‌ی مرزی
۴۸ ۴-۵-۳ حل معادلات
۴۹ ۶-۳ الگوریتم حل تحلیلی
۴۹ ۷-۳ جمع‌بندی
۵۱ فصل ۴ : نتایج
۵۲ ۱-۴ مقدمه
۵۲ ۲-۴ بررسی همگرایی نتایج
۵۳ ۳-۴ بررسی درستی جواب‌ها
۵۵ ۴-۴ تأثیر پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش
۵۸ ۱-۴-۴ تأثیر شرایط بارگذاری مختلف
۶۴ ۲-۴-۴ تأثیر اندازه‌ی ورق
۶۷ ۳-۴-۴ تأثیر تعداد اضلاع گشودگی چندضلعی (تعداد رئوس)
۶۹ ۴-۴-۴ تأثیر مکان رئوس گشودگی (چرخش گشودگی)
۷۲ ۵-۴-۴ تأثیر شکل رئوس گشودگی (شعاع گوشه‌ها)
۷۳ ۶-۴-۴ تأثیر ناهمسانگردی مواد (زاویه‌ی الیاف)
۷۶ ۷-۴-۴ تأثیر جنس‌های مختلف ماده
۷۷ فصل ۵ : نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۷۸ ۱-۵ نتیجه‌گیری

۲-۵ پیشنهادها ۸۰

پیوست‌ها ۸۱

پیوست الف ۸۲

پیوست ب ۸۴

مراجع ۸۸

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه‌ی هواپیما ۳
- شکل ۲-۱ ورق محدود حاوی گشودگی مربعی تحت کشش دوماحوری ۵
- شکل ۱-۳ نگاشت گشودگی مثلثی به گشودگی دایروی ۲۹
- شکل ۲-۳ تأثیر پارامتر m بر گشودگی شش ضلعی [۴۶] ۲۹
- شکل ۳-۳ نحوه‌ی چرخش گشودگی ۳۱
- شکل ۴-۳ شماتیک کانتور L ۳۳
- شکل ۵-۳ مختصات منحنی الخط ۳۸
- شکل ۶-۳ انتقال بین مختصات کارتیزین و منحنی الخط و بالعکس ۳۹
- شکل ۷-۳ موقعیت نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در صفحه‌ی \bar{x} و مرز خارجی در صفحه‌ی \bar{z} ۴۳
- شکل ۱-۴ همگرایی حل تحلیلی با بررسی بیشینه‌ی تنش بی‌بعد نسبت به افزایش تعداد جملات سری لورنت ۵۳
- شکل ۲-۴ مقایسه‌ی نتایج توزیع تنش بی‌بعد حل حاضر و مرجع [۵۲]، پیرامون گشودگی مثلثی ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۵۴
- شکل ۳-۴ مقایسه‌ی نتایج توزیع تنش بی‌بعد حل حاضر و مرجع [۵۲]، پیرامون گشودگی مربعی ورق محدود همسانگرد تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۵۴
- شکل ۴-۴ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مثلثی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[0]، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۵۵
- شکل ۵-۴ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مربعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[0]، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در

جهت y ۵۶

شکل ۴-۶ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی پنج‌ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [0]Glass/Epoxy، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۵۶

شکل ۴-۷ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی شش‌ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [0]Glass/Epoxy، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۵۷

شکل ۴-۸ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی هفت‌ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [0]Glass/Epoxy، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۵۷

شکل ۴-۹ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی هشت‌ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [0]Glass/Epoxy، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۵۸

شکل ۴-۱۰ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90]Glass/Epoxy، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۶۰

شکل ۴-۱۱ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90]Glass/Epoxy، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت x ۶۰

شکل ۴-۱۲ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90]Glass/Epoxy، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری دومحوری در جهت‌های x و y ۶۱

شکل ۴-۱۳ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90]Glass/Epoxy، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری برشی ۶۱

شکل ۴-۱۴ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود همسانگرد با زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۶۲

شکل ۴-۱۵ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود همسانگرد با زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت x ۶۲

شکل ۴-۱۶ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود همسانگرد با زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری دو‌محوری در جهت‌های x و y ۶۳

شکل ۴-۱۷ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود همسانگرد با زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری برشی ۶۳

شکل ۴-۱۸ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد برای گشودگی‌های چندضلعی مختلف در ورق محدود همسانگرد و ناهمسانگرد [90]Glass/Epoxy تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۶۸

شکل ۴-۱۹ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد برای گشودگی‌های چندضلعی مختلف در ورق محدود همسانگرد و ناهمسانگرد [90]Glass/Epoxy تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت x ۶۸

شکل ۴-۲۰ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مثلثی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90]Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۶۹

شکل ۴-۲۱ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مربعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90]Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۷۰

شکل ۴-۲۲ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی پنج‌ضلعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90]Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۷۰

شکل ۴-۲۳ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی شش‌ضلعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90] Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۷۱

شکل ۴-۲۴ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی هفت‌ضلعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90] Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۷۱

شکل ۴-۲۵ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی هشت‌ضلعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90] Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۷۱

شکل ۴-۲۶ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی‌های مختلف برحسب شعاع گوشه‌های مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90] Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ۷۲

شکل ۴-۲۷ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مثلثی برای ورق محدود ناهمسانگرد Glass/Epoxy ($L=H=10$) با زاویه‌های الیاف [0] و [90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y . ۷۳

شکل ۴-۲۸ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مربعی برای ورق محدود ناهمسانگرد Glass/Epoxy ($L=H=10$) با زاویه‌های الیاف [0] و [90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y . ۷۴

شکل ۴-۲۹ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی پنج‌ضلعی برای ورق محدود ناهمسانگرد Glass/Epoxy ($L=H=10$) با زاویه‌های الیاف [0] و [90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y . ۷۴

شکل ۴-۳۰ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی شش‌ضلعی برای ورق محدود ناهمسانگرد Glass/Epoxy ($L=H=10$) با زاویه‌های الیاف [0] و [90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y . ۷۵

شکل ۴-۳۱ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی‌های مختلف برای ورق محدود ($L=H=10$) با جنس‌های مختلف تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت x ۷۶

فهرست جداول

جدول ۱-۴ خواص مکانیکی مواد مختلف ۵۲

جدول ۲-۴ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مثلثی، برای ورق با جنس، ابعاد و

شرایط بارگذاری مختلف ۶۵

جدول ۳-۴ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مربعی، برای ورق با جنس، ابعاد و

شرایط بارگذاری مختلف ۶۵

جدول ۴-۴ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی پنج‌ضلعی، برای ورق با جنس، ابعاد و

شرایط بارگذاری مختلف ۶۶

جدول ۵-۴ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی شش‌ضلعی، برای ورق با جنس، ابعاد و

شرایط بارگذاری مختلف ۶۶

جدول ۶-۴ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی هفت‌ضلعی، برای ورق با جنس، ابعاد و

شرایط بارگذاری مختلف ۶۷

علائم

x, y	مؤلفه های مختصات کارترین
ρ, θ	مؤلفه های مختصات منحنی الخط
z_j	متغیر مختلط
μ_j	ثابت مختلط مربوط به ریشه های معادله ی مشخصه
ζ	متغیر مختلط صفحه نگاشت
$w(\zeta)$	تابع نگاشت
n	تعداد اضلاع گشودگی منتظم
R	پارامتر تعیین کننده ی اندازه ی گشودگی
m	معیار انحنای گوشه های گشودگی (تیزی یا نرمی گوشه های گشودگی)
p	پارامتر تعیین کننده نوع هندسه گشودگی
β	زاویه ی چرخش گشودگی
α	زاویه ی الیاف
σ_x, σ_y	تنش نرمال
τ_{xy}	تنش برشی
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	کرنش های نرمال
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	کرنش های برشی
S_{ij}	ماتریس نرمی ماده
\bar{S}_{ij}	ماتریس نرمی کاهش یافته
C_{ij}	ماتریس سفتی ماده
$[T]$	ماتریس تبدیل
a_{ij}	ضرایب ثابت معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم
E_1, E_2	مدول الاستیسیته
G_{12}	مدول برشی
ϑ_{12} و ϑ_{21}	ضریب پواسون
$U(x, y)$	تابع بای هارمونیک (ریشه معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم)
X_n	برآیند نیروهای خارجی وارد بر مرزهای خارجی ورق در جهت X
Y_n	برآیند نیروهای خارجی وارد بر مرزهای خارجی ورق در جهت Y
A	مساحت

جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای در جهت X	u
جابه‌جایی درون‌صفحه‌ای در جهت Y	v
جابه‌جایی معلوم نقاط	u^*
جابه‌جایی معلوم نقاط	v^*
ثابت دلخواه مربوط به جابجایی صلب گونه ورق در جهت X	u_0
ثابت دلخواه مربوط به جابجایی صلب گونه ورق در جهت Y	v_0
ثابت دلخواه مربوط به حرکت چرخشی صلب گونه ورق	w
تابع تحلیلی دلخواه	$F_1(z_1)$
تابع تحلیلی دلخواه	$F_2(z_2)$
مشتق تابع تحلیلی $F_1(z_1)$	$\phi_1(z_1)$
مشتق تابع تحلیلی $F_2(z_2)$	$\phi_2(z_2)$
زاویه‌ی بین افق و بردار عمود بر مرز گشودگی	χ
شمارنده‌ی تعداد جملات سری لورنت	k
تعداد جملات سری لورنت	M
ضرایب مجهول مسئله (ضرایب ثابت سری لورنت)	A_k, B_k, C_k, D_k
طول ورق	L
ارتفاع ورق	H
تعداد کل نقاط منتخب	N
تعداد نقاط در هر یک از ۴ لبه خارجی ورق	N_1
تعداد نقاط روی گشودگی	N_2
شمارنده تعداد نقاط منتخب	s
تنش کشش وارد شده بر مرز خارجی ورق	σ_0
تنش برشی وارد شده بر مرز خارجی ورق	τ_0
ضریب بارگذاری دو محوری	λ
زاویه‌ی بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و محور X	γ
مجذور باقی‌مانده مرزی	Δ^2
متغیر انتگرال‌گیری روی مرز خارجی و داخلی	Γ
اختلاف تنش نرمال حاصل از شرایط مرزی و حل تحلیلی	r_1
اختلاف تنش برشی حاصل از شرایط مرزی و حل تحلیلی	r_2

فصل ١ : مقدمه

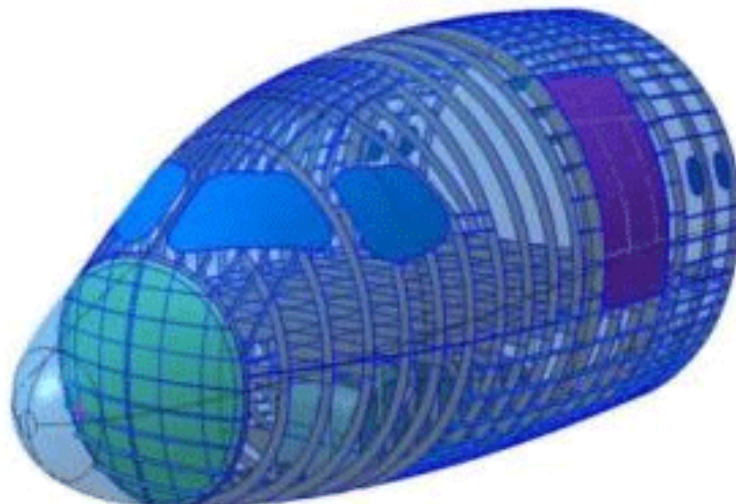
۱-۱ مقدمه

طراحی، تدوین نقشه‌ای برای ارضای نیازی معین و یا حل یک مشکل است. اگر این برنامه منجر به خلق چیزی با واقعیت فیزیکی شود، فرآورده‌ی آن باید وظیفه‌مند، ایمن، اعتمادپذیر، رقابت‌پذیر، قابل ساخت و مشتری‌پسند باشد [۱]. بنابراین در روند طراحی همواره توجه و رعایت موارد ذکر شده ضروری می‌باشد. ورق‌های کامپوزیتی^۱ اغلب در سازه‌های فضایی، دریایی، ماشین‌آلات صنعتی و غیرصنعتی، صنعت ساختمان‌سازی و ... به کار می‌روند. در ساختارهای عملی مهندسی، بنا به کاربردهای گوناگون، اغلب انواع مختلفی از گشودگی‌ها و بریدگی‌ها با ابعاد و اشکال گوناگون در سازه‌ها ایجاد می‌گردند. از جمله این موارد در کاربردهای عملی، می‌توان به گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه‌ی هواپیماها و زیردریایی‌ها، محل اتصال فشارسنج‌ها و دماسنج‌ها در بدنه‌ی کوره‌ها، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و پرچ‌ها، گشودگی‌هایی در پره‌های توربین‌ها جهت جریان یافتن سیال خنک‌کننده در آن‌ها و گشودگی‌هایی که در مواردی برای عبور کابل‌های برق و شلنگ‌های هیدرولیک یا تسهیل در امر جریان سوخت در بال هواپیما ایجاد می‌گردند، اشاره کرد. به‌طور کلی کاهش وزن سیستم، ایجاد قابلیت اتصال تجهیزات به سیستم‌ها و ایجاد راه‌های خروجی و ورودی در سازه از عوامل ایجاد گشودگی^۲ در ورق‌ها می‌باشد. در همه‌ی این موارد وجود گشودگی‌ها در جسم، باعث به‌وجود آمدن تنش‌های موضعی شدیدی (تمرکز تنش) در اطراف گشودگی می‌شود. آنچه مهم است بررسی تأثیر این گشودگی‌ها در تنش‌های ایجاد شده در سازه می‌باشد. بنابراین در طراحی سازه‌ها دانستن مقدار تنش بیشینه در اطراف گشودگی، همچنین نقطه‌ای که این تنش بیشینه رخ می‌دهد، برای ارائه‌ی طرحی مناسب بسیار مؤثر است. بقای بسیاری از فرآورده‌ها به طرز تنظیم درست بار-تنش توسط طراحی بستگی دارد که در محل موردنظر از مقاومت سازه کمتر باشد. روابط مقدماتی طراحی بر اساس اعضای است که سطح مقطع آن‌ها ثابت و یا تغییرات تدریجی دارد و همچنین ورق‌ها همسانگرد

¹ Composite

² Hole

و نامحدود در نظر گرفته شده‌اند، ولی اجزای مکانیکی همیشه به این شکل نیستند. وجود پله‌ها، شیارها، رزوه‌ها، جاخارها و گشودگی‌های مختلف، اندازه ورق‌ها و ناهمسانگرد بودن آن‌ها، تأثیر زیادی در تنش‌های موضعی ایجاد شده در اطراف گشودگی دارند.



شکل ۱-۱ گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه‌ی هواپیما

مشخصه‌های تأثیرگذار در توزیع تنش ایجاد شده برای ورق‌ها را می‌توان به چند عامل مهم زیر تقسیم کرد:

الف: همسانگرد^۱ یا ناهمسانگرد^۲ بودن ورق

با توجه به ناهمسانگرد بودن، تنش‌های موضعی ایجاد شده بر اثر بارهای مکانیکی به‌طور غیریکنواخت در اجزای مختلف و در جهات مختلف به‌وجود می‌آید.

ب: محدود^۳ یا نامحدود^۴ بودن ورق‌ها

در ورق‌های محدود علاوه بر هندسه‌ی گشودگی، شرایط مرز خارجی تأثیر بسزایی در توزیع تنش ورق دارد. محدود یا نامحدود در نظر گرفتن ورق‌ها به نسبت اندازه گشودگی به اندازه ورق بستگی دارد [۲].

¹ Isotropic

² Anisotropic

³ Finite

⁴ Infinite

ج: پارامترهای مربوط به گشودگی و بارگذاری

نوع گشودگی، شعاع انحنای گشودگی، جهت‌گیری (زاویه چرخش) گشودگی، زاویه‌ی الیاف در ورق، نوع بارگذاری و نسبت اضلاع ورق پارامترهایی هستند که بر توزیع تنش در ورق‌ها مؤثر بوده و انتخاب صحیح آن‌ها در دستیابی به طرح موفق کاملاً مفید است.

۱-۲ انگیزه

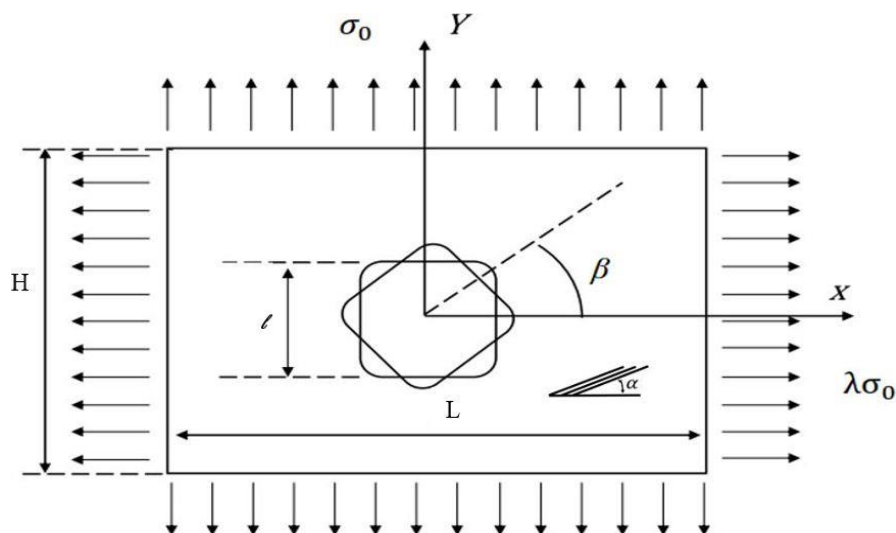
در مطالعات زیادی به مسأله‌ی توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها در صفحات نامحدود پرداخته شده است، اما کارهای انجام‌شده بر روی صفحات محدود با توجه به ناهمسانگرد بودن ورق و همچنین بررسی تمامی پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش بسیار اندک بوده است. بنابراین همان‌طور که اشاره گردید به منظور ارائه‌ی طرحی بهینه و دارای استانداردهای فوق، بررسی این تأثیرات لازم به‌نظر می‌رسد. با عنایت به این موضوع در این پایان‌نامه سعی شده است حل تحلیلی^۱ توزیع تنش و همچنین بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش اطراف گشودگی‌های منظم مختلف واقع در مرکز یک صفحه‌ی محدود ناهمسانگرد، تحت بار درون‌صفحه‌ای مورد مطالعه قرار گیرد. پارامترهای مهم مورد بحث در این پایان‌نامه، نوع هندسه‌ی گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی، جهت‌گیری گشودگی (زاویه‌ی چرخش گشودگی)، زاویه‌ی الیاف، نوع بارگذاری و نسبت اضلاع ورق می‌باشند.

۱-۳ تعریف مسأله

هدف اصلی در این پایان‌نامه تحلیل تنش و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر توزیع تنش ورق ناهمسانگرد محدود حاوی گشودگی‌های منظم مطابق شکل ۱-۲ می‌باشد. نسبت قطر دایره‌ی محیط بر گشودگی به بزرگ‌ترین ضلع ورق بزرگ‌تر از 0.2 [۲] است، بنابراین با اطمینان می‌توان ورق را محدود در نظر گرفت. مسأله با فرض استاتیکی، حالت تنش صفحه‌ای، تغییر شکل‌ها کوچک و در غیاب

¹ Analytical solution

نیروهای حجمی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین صفحه‌ی مورد نظر همگن^۱ و در ناحیه‌ی الاستیک خطی بررسی می‌شود. فرض می‌شود گشودگی در مرکز صفحه قرار گرفته و گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است. در شکل ۲-۱ زاویه‌ی چرخش گشودگی که نحوه‌ی قرارگیری آن نسبت به محور افق می‌باشد؛ با β نمایش داده شده است. زاویه‌ی الیاف دلخواه بوده و با α نمایش داده می‌شود. در حالت کلی، شکل گشودگی می‌تواند مثلث، مربع، پنج‌ضلعی و به‌طور کلی n ضلعی باشد. ورق تحت بار کششی تک محوری، دومحوری و برش خالص قرار می‌گیرد. شکل گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، ابعاد ورق و گشودگی، نوع بارگذاری درون صفحه‌ای و زاویه‌ی الیاف از پارامترهایی هستند که تأثیر آنها در این پایان‌نامه بر توزیع تنش مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۲-۱ ورق محدود حاوی گشودگی مربعی تحت کشش دومحوری

برای حل مسأله از روش متغیر مختلط^۲ بر پایه‌ی روش تحلیلی لخنیتسکی^۳ [۲۶] و نگاشت همنوا^۴ استفاده شده است. این روش ابزار قدرتمندی جهت حل مسائل تمرکز تنش حول گشودگی ورق‌ها ارائه می‌دهد. این روش با ارائه‌ی مسائل مقدار مرزی الاستیسیته و استفاده از توابع پتانسیل مختلط، حل مسائل را ممکن می‌سازد. روش متغیر مختلط، جهت استفاده از تابع نگاشت به کار گرفته

¹ Homogenous

² Complex Variable Method

³ Lekhnitskii

⁴ Conformal Mapping

شده است و با انتخاب تابع نگاشتی مناسب، توانایی تحلیل ورق‌های محدود با گشودگی‌های مختلف را دارد. همچنین این تابع امکان بررسی پارامترهای مختلف مانند زاویه‌ی چرخش و انحنای گوشه‌های گشودگی را به راحتی فراهم می‌آورد. در این فرمول‌بندی، بسیاری از روش‌های پر قدرت و معتبر ریاضی موجود در نظریه‌ی متغیرهای مختلط به کار گرفته می‌شوند. برای محاسبه‌ی تابع تنش مربوط به صفحه‌ی محدود حاوی گشودگی‌های منتظم، از روش جمع آثار، بصورتی که از جمع تابع تنش یک ورق نامحدود حاوی همان گشودگی منتظم و تابع تنش یک ورق محدود بدون گشودگی استفاده شده است. ضرایب مجهول در تابع تنش، با استفاده از روش حداقل مربعات مرزی^۱ و اعمال شرایط مرزی مناسب به دست می‌آیند.

۱-۴ اهداف تحقیق

به منظور ارائه‌ی طرحی بهینه، بررسی تمامی تأثیرات و رسیدن به رابطه‌ای جامع برای تحلیل تنش در ورق‌ها لازم به نظر می‌رسد. غالب روش‌های تحلیلی به کار رفته شده در مطالعات پیشین، برای بررسی توزیع تنش ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی مناسب می‌باشند اما در موارد زیادی از کاربردهای عملی مهندسی، ورق‌ها را نمی‌توان نامحدود در نظر گرفت. از راه حل ارائه شده برای ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی، نمی‌توان برای ورق‌های محدود استفاده نمود؛ بنابراین مطالعه بر روی توزیع تنش ورق محدود دارای گشودگی مرکزی، نیازمند به کارگیری روابط جداگانه‌ای است.

همچنین مطالعاتی در زمینه‌ی ورق‌های همسانگرد محدود انجام گرفته است اما در اکثر موارد استفاده از کامپوزیت‌ها (مواد ناهمسانگرد) با توجه به ویژگی‌های آن‌ها نسبت به مواد فلزی همسانگرد ترجیح داده می‌شود. از راه حل ارائه شده برای ورق‌های همسانگرد، نمی‌توان برای ورق‌های ناهمسانگرد استفاده نمود، زیرا با توجه به ناهمسانگرد بودن، تنش‌های موضعی ایجاد شده بر اثر بارهای مکانیکی به‌طور غیریکنواخت در اجزای مختلف و در جهات مختلف به وجود می‌آید.

¹ Least square boundary collocation method

با عنایت به موضوعات مطرح شده، در این پایان‌نامه سعی شده است تا یک حل تحلیلی برای ورق ناهمسانگرد محدود و دارای انواع گشودگی‌ها و بارگذاری‌ها، به‌دست آید و تأثیر پارامترهای مختلف بر مقدار و نحوه‌ی توزیع تنش مورد مطالعه قرار گیرد.

۱-۵ نوآوری

نوآوری‌های این تحقیق را در سه محور می‌توان خلاصه کرد:

الف: حل تحلیلی

استفاده از حل تحلیلی جامع به‌منظور به‌دست آوردن توزیع تنش با استفاده از روش متغیر مختلط لخنیتسکی و نگاشت همنوا برای انواع هندسه‌های گشودگی و همچنین تأثیر تمامی پارامترهای مؤثر در توزیع تنش بررسی شود.

ب: محدود و ناهمسانگرد بودن ورق

با توجه به محدود در نظر گرفتن ورق، علاوه بر هندسه‌ی گشودگی، شرایط مرز خارجی ورق نیز در نظر گرفته شده و توزیع تنش دقیق‌تری حول گشودگی‌ها به‌دست خواهد آمد. همچنین با توجه به ناهمسانگرد بودن، تنش‌های موضعی ایجاد شده بر اثر بارهای مکانیکی به‌طور غیریکنواخت در اجزاء و جهات مختلف به‌وجود می‌آید.

ج: پارامترهای مربوط به گشودگی و بارگذاری

نوع هندسه‌ی گشودگی، شعاع انحنای گشودگی، جهت‌گیری (زاویه چرخش) گشودگی، نوع بارگذاری، نسبت اضلاع ورق و زاویه الیاف ورق ناهمسانگرد، پارامترهایی هستند که بر توزیع تنش در ورق‌ها مؤثر می‌باشند.

۱-۶ طرح کلی فصول پایان نامه

در فصل اول مقدمه‌ای از تحقیق حاضر شده است.

در فصل دوم، ابتدا به‌طور مختصر به معرفی کامپوزیت‌ها، کاربردها و رفتار مکانیکی آن‌ها پرداخته می‌شود. پس مروری بر مطالعات پیشین در زمینه‌ی توزیع تنش صورت گرفته و مسأله‌ی مورد نظر معرفی شده است.

در فصل سوم اساس روش تحلیلی حاضر، معادلات حاکم و نحوه‌ی پیاده‌سازی آن‌ها توضیح داده می‌شود.

در فصل چهارم در ابتدا مقایسه‌ی حلّ تحلیلی حاضر با نتایج به‌دست آمده از سایر مقالات آورده شده است. سپس به توزیع تنش حول گشودگی مربعی، مثلثی و n ضلعی‌های منتظم و همچنین به بررسی تأثیر پارامترهای گوناگون همچون انحنای گوشه‌های گشودگی، نسبت ابعاد ورق و گشودگی، نوع بارگذاری درون صفحه‌ای و زاویه‌ی چرخش گشودگی بر نحوه‌ی توزیع تنش اطراف این گشودگی‌ها پرداخته شده است و نتایج حاصله مورد مطالعه و بحث قرار گرفته است.

در نهایت در فصل پنجم به جمع‌بندی فعالیت‌های انجام شده در این مطالعه و بیان کلی نتایج به‌دست آمده پرداخته شده و برخی از پیشنهادها نیز برای پیشبرد فعالیت‌های آتی در زمینه‌ی این مسأله ارائه می‌شود.

فصل ۲ : مروری بر مطالعات پیشین

۱-۲ مقدمه

در این فصل ابتدا به معرفی کامپوزیت‌ها پرداخته شده است و تاریخچه‌ی استفاده از مواد کامپوزیت به اختصار مرور شده است. انواع کامپوزیت‌ها معرفی شده‌اند، رفتار مکانیکی مواد کامپوزیت توضیح داده شده و مزایا و معایب این دسته از مواد ذکر شده است. در ادامه مروری بر مطالعات انجام شده در زمینه‌ی توزیع تنش در ورق‌های حاوی نقص هندسی انجام شده است و سپس مسأله‌ی مورد نظر معرفی شده است.

۲-۲ کامپوزیت‌ها

از آنجا که مسأله‌ی مورد نظر، تحلیل تنش در صفحه‌ی کامپوزیتی حاوی گشودگی است، مروری مختصر بر مواد کامپوزیت لازم به نظر می‌رسد. در این قسمت، ابتدا ماده‌ی کامپوزیت تعریف شده و انواع آن ذکر می‌شود. سپس کاربردهای کامپوزیت‌ها در صنایع مختلف و مزایا و معایب این دسته از مواد آمده است و در نهایت مروری بر روابط مربوط به مواد کامپوزیت صورت گرفته است.

۱-۲-۲ آشنایی با کامپوزیت‌ها

پارامترهای مختلفی از قبیل وزن کمتر، استحکام بیشتر و هزینه‌های تولید کمتر در فرآیند بهینه‌سازی عملکرد فرآورده‌ها مورد نظر هستند. تقاضای روزافزون برای بهبود عملکرد فرآورده‌ها و تداوم این نیاز، باعث شده است که مواد مورد استفاده‌ی کنونی دیگر جواب‌گو نباشند. بنابراین دانشمندان و نیز محققان و صاحب‌نظران علم مواد همیشه در تلاش هستند که با خواص و ویژگی‌های مواد موجود و متداول را بهینه سازند و یا مواد جدیدتری تولید کنند. ایده‌ی ساخت مواد کامپوزیت توسط بشر، با کشف موادی که در طبیعت وجود داشتند آغاز شد. کامپوزیت‌ها تماماً جدیدی نیستند، بلکه از دو یا چند جزء مجزا یا فاز تشکیل شده‌اند که هر جزء ماده‌ای با خواص مشخص است. به‌عنوان نمونه، آجرها و خشت‌های گلی تقویت‌شده با کاه که در تمدن‌های قدیم مورد استفاده قرار می‌گرفتند را می‌توان در دسته‌ی مواد کامپوزیت قرار داد. ارگ بم، شاهکار معماری

ایرانیان، نمونه‌ی بارزی از استفاده از تکنولوژی کامپوزیت‌ها در قرون گذشته است. همچنین قایق‌هایی که سرخپوست‌ها با قیر و بامبو می‌ساختند و یا تنورهایی که از گل، پودر شیشه و پشم بز ساخته می‌شدند و در نواحی مختلف کشورمان نیز یافت شده است را می‌توان در دسته‌ی کامپوزیت‌های نخستین قرار داد. یکی دیگر از نمونه‌های مواد کامپوزیت، بتن است که کاربردهای متنوعی در ساختمان‌سازی دارد. بتن از مجموعه‌ای از سنگ‌ریزه‌ها تشکیل شده که توسط سیمان به هم چسبیده و محکم شده است. در بتن مسلح یا تقویت‌شده، میله‌های فلزی استحکام کششی لازم را ایجاد می‌نمایند؛ چرا که بتن ماده‌ای ترد بوده و مقاومت اندکی در برابر بارهای کششی دارد. بنابراین بتن وظیفه‌ی تحمل بارهای فشاری و میله‌های فولادی وظیفه‌ی تحمل بارهای کششی را بر عهده دارند. بعد از نتایج موفقیت‌آمیز در آزمایش چسباندن کامپوزیت‌ها در تیرهای بتنی و عرشه‌ی پل‌ها، محققان و مهندسان ژاپنی به‌سرعت دریافتند که این شیوه، روش مناسبی برای مقاوم‌سازی سازه‌ها در برابر زلزله‌های شدید است و به همین دلیل آن‌ها نخستین بار کامپوزیت‌ها را در تعمیر و تقویت سازه‌ها وارد کردند. علاوه بر مواد مرکب مصنوعی، مواد مرکب طبیعی نیز وجود دارند که از نمونه‌های شناخته‌شده‌ی آن می‌توان به استخوان، صدف و چوب اشاره کرد. به‌عنوان مثال، چوب مجموعه‌ای از الیاف سلولزی است که در فاز چسبی به نام لیگنین^۱ قرار دارد. بعضی از صدف‌ها، از کامپوزیت‌های پیشرفته‌ی ساخته‌ی دست بشر هم سخت‌تر و محکم‌تر هستند.

یکی از عوامل بسیار مهمی که موجب افزایش و توسعه‌ی استفاده از کامپوزیت‌ها شده است، نسبت استحکام به وزن خیلی بالایی است که این مواد دارا می‌باشند. به‌کارگیری اولیه‌ی این مواد در صنایع هوایی منجر به استفاده‌ی گسترده از این مواد در بسیاری از صنایع امروزی شده است. منشأ بیشتر تقاضاهای جدید برای مواد کامپوزیت پلیمری، فلزی و سرامیکی، تولید رشته‌های کاربید سیلیسیوم^۲ و اکسید آلومینیوم^۳ است که خواص خود را در دماهای بالا حفظ می‌کنند [۳].

^۱ Lignin

^۲ Silicon Carbide (SiC)

^۳ Aluminium oxide (Al₂O₃)

۲-۲-۲ تعریف کامپوزیت

کامپوزیت، ترکیب حداقل دو ماده در مقیاس ماکروسکوپی است که یکی فاز تقویت کننده نامیده می شود و به صورت الیاف، صفحات و یا ذرات است و در فاز دیگر که ماتریس یا زمینه نامیده می شود، محصور است. این ترکیب به شکلی صورت می گیرد که ماده‌ی حاصل نسبت به هر یک از اجزای تشکیل دهنده‌ی آن به تنهایی، خواص و ویژگی‌های متفاوت و مطلوب تری داشته باشد.

معیارهای مختلفی باید در نظر گرفته شود تا بتوان ماده‌ای را در زمره‌ی مواد کامپوزیت قرار داد. اول این که نسبت قابل ملاحظه‌ای از هر دو ماده وجود داشته باشد [۳]. دوم این که فازهای تشکیل دهنده، خواص متفاوتی داشته باشند. به این ترتیب ممکن است خواص ماده‌ی کامپوزیت به طور قابل ملاحظه‌ای با خواص مواد تشکیل دهنده‌ی آن متفاوت باشد که در این شرایط می توان ماده را به عنوان کامپوزیت معرفی نمود. سوم این که به طور معمول مواد کامپوزیت مصنوعی توسط مخلوط و ترکیب کردن مناسب اجزای تشکیل دهنده توسط وسایل مکانیکی مختلف تولید می شوند؛ از این رو یک آلیاژ ریختگی با ریزساختار دوفازی که حاصل فرایند انجماد یک مذاب یکنواخت است را نمی توان یک کامپوزیت تلقی کرد. البته اگر ذرات سرامیک با نسبت مناسب با یک فلز مخلوط شده و ماده‌ای تولید کنند که از ذرات سرامیکی توزیع شده در داخل یک فلز تشکیل شده باشد، می توان این ماده را کامپوزیت نامید. پلاستیک‌ها اگرچه معمولاً دارای مقدار بسیار کمی روان ساز، مواد جاذب پرتوهای ماورای بنفش و برخی افزودنی‌های دیگر هستند، باز هم در دسته‌ی کامپوزیت‌ها قرار نمی گیرند؛ چرا که هیچ کدام از این معیارها را دارا نیستند.

۲-۲-۳ انواع کامپوزیت‌ها

در کامپوزیت‌ها، نگهداری الیاف در کنار هم و در جهت مربوطه و انتقال بار به آن‌ها به عهده‌ی فاز زمینه می باشد. یکی از روش‌های دسته بندی مواد کامپوزیت، دسته بندی آن‌ها با توجه به نوع ماده‌ی مورد استفاده در زمینه‌ی کامپوزیت است. کامپوزیت‌های مهندسی از لحاظ فاز زمینه به سه دسته‌ی

اصلی کامپوزیت‌ها با زمینه‌ی پلیمری^۱، کامپوزیت‌ها با زمینه‌ی فلزی^۲ و کامپوزیت‌ها با زمینه‌ی سرامیکی^۳ تقسیم می‌شوند. کامپوزیت‌ها با زمینه‌ی پلیمری از متداول‌ترین کامپوزیت‌ها می‌باشند که در گذشته به نام فایبرگلاس مصطلح بوده‌اند. در ساخت این مواد از یک رزین^۴ پایه به‌عنوان زمینه و از تقویت‌کننده‌های متنوعی مانند الیاف شیشه، الیاف کربن و الیاف آرامید^۵، استفاده می‌شود. از کامپوزیت‌ها با زمینه‌ی فلزی در صنایع خودروسازی به‌طور گسترده استفاده می‌شود. در فرآیند ساخت این مواد از یک فلز مانند آلومینیوم به‌عنوان زمینه استفاده می‌شود که با الیاف کاربرد سیلیسیوم و یا ذرات سرامیکی تقویت می‌گردد. کامپوزیت‌ها با زمینه‌ی سرامیکی در محیط‌هایی با دمای بسیار بالا استفاده می‌شوند. این مواد از سرامیک به‌عنوان زمینه استفاده نموده و با الیاف یا تار موهای کوتاه از جنسی مانند کاربرد سیلیسیوم و یا نیتريد بور^۶ تقویت می‌گردند.

کامپوزیت‌ها را بر اساس نوع تقویت‌کننده می‌توان به دو دسته‌ی کلی کامپوزیت‌های تقویت‌شده با فیبر^۷ (الیاف) و کامپوزیت‌های تقویت‌شده با ذرات^۸ تقسیم‌بندی کرد. در این تحقیق از کامپوزیت‌های الیافی استفاده شده است. کامپوزیت‌های الیافی آن دسته از کامپوزیت‌ها هستند که زمینه‌ی آن‌ها به‌وسیله‌ی الیافی تقویت می‌شود که تحمل‌کننده‌ی اصلی بارها هستند. الیاف از جنس‌های مختلفی از جمله کربن، شیشه، آرامید و برون ساخته می‌شوند.

۴-۲-۲ کاربردهای مواد کامپوزیت

کامپوزیت‌ها به دلیل خواص منحصر به فردی مانند استحکام بالا، وزن کم، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، قابلیت طراحی و عمر بالاتر نسبت به مواد دیگر، به شدت مورد توجه مهندسان و صنعت‌گران قرار گرفته‌اند. با توجه به افزایش روزافزون تقاضا و نیاز به مواد کامپوزیت، در طی دهه‌های

¹ Polymer Matrix Composites (PMC)

² Metal Matrix Composites (MMC)

³ Ceramic Matrix Composites (CMC)

⁴ Resin

⁵ Aramid

⁶ Boron nitride

⁷ Fiber-reinforced Composite (FRC)

⁸ Particulate Reinforced Composites (PRC)

گذشته روش‌های ساخت و سیستم‌ها و دستگاه‌های مربوط به کامپوزیت‌ها رشد چشم‌گیری داشته‌اند. با توجه به مزایای مواد کامپوزیت و سوددهی صنعت کامپوزیت، بسیاری از صنایع بر روی کامپوزیت‌ها سرمایه‌گذاری کرده‌اند. با توسعه‌ی روش‌های ساخت خودکار و تولید انبوه مواد کامپوزیت و با توجه به کاهش هزینه‌های تولید الیاف، استفاده از مواد کامپوزیت با استقبال زیادی روبه‌رو شده است. به‌عنوان نمونه، قیمت الیاف کربن که از دهه‌ی ۱۹۶۰ در صنایع تجاری مورد استفاده قرار می‌گیرد، از ۱۵۰ دلار بر پوند در سال ۱۹۷۰، به ۵ دلار بر پوند در سال ۲۰۰۸ رسیده بود [۴]. هرچند برخلاف پیش‌بینی‌ها مبنی بر ۲ دلار بر پوند تا سال ۲۰۱۹، سیاست‌گذاری‌های تجاری تولیدکنندگان سبب توقف این روند و ثبات نسبی قیمت این الیاف شده است. این افت قیمت به‌دلیل توسعه‌ی روش‌های تولید کم‌هزینه و افزایش مصرف این مواد در صنایع مختلف است. از موارد استفاده از مواد کامپوزیت می‌توان صنایع هوافضا، صنایع خودروسازی، صنایع راه‌آهن و ریل‌سازی، ساختمان‌سازی، صنایع دریایی، صنایع مقاوم در برابر خوردگی و صنایع کالاهای مصرفی، تجهیزات تجاری و کاربردی را نام برد.

۲-۲-۴-۱ صنایع هوافضا

صنعت هوافضا از نخستین صنایعی بود که مزایای استفاده از مواد کامپوزیت در فرآورده‌ها را درک کرد. به کمک تکنولوژی کامپوزیت‌ها، هواپیماها و موشک‌ها توانستند با سرعت بیشتر مسافت بیشتری را طی کنند. کامپوزیت‌ها به‌دلیل دارا بودن برخی ویژگی‌ها مانند وزن کم و پایداری گرمایی، امکان بهبود صنایع هوافضا را فراهم کردند. استحکام ویژه‌ی کامپوزیت‌ها بیشتر از آلیاژهای فلزی به‌کاررفته در این صنعت است. این ویژگی‌ها سبب حداکثر شدن کارایی و قابلیت تحمل بارهای بیشتر و مصرف سوخت کمتر می‌شود [۵]. با توجه به این‌که کاهش وزن یکی از اصلی‌ترین اولویت‌های تولیدکنندگان صنایع هوایی محسوب می‌شود، انتظار می‌رود که در این صنعت، آلومینیوم عرصه را به مواد کامپوزیت واگذار کند. کامپوزیت‌های به‌کاررفته در صنعت هوافضا با توجه به جنس زمینه‌ی

آن‌ها می‌توانند از نوع کامپوزیت‌هایی با زمینه‌ی ارگانیک^۱، کامپوزیت‌های با زمینه‌ی فلزی و یا کامپوزیت‌های با زمینه‌ی سرامیکی باشند که به منظور ساخت موتور جت و قطعات بدنه‌ی هواپیما به کار گرفته می‌شوند. به‌عنوان نمونه در موتور جت، قسمت‌های سرد موتور ترکیبی از کامپوزیت‌های زمینه‌ی فلزی و زمینه‌ی ارگانیک است. در حالی که در قسمت‌های گرم موتور مثل محفظه احتراق و اگزوز که نیاز به تحمل دمایی بالا دارند، از کامپوزیت‌های با زمینه‌ی سرامیکی استفاده می‌شود. در صنعت هوافضا قطعاتی مانند بال، قاب‌ها، گیره‌ها، درها، دم، ستون‌ها و قسمت‌هایی از بدنه، اجزایی هستند که در ساخت آن‌ها از مواد کامپوزیت استفاده می‌شود [۵].

۲-۲-۴-۲ صنایع دریایی

یکی از ویژگی‌های مهم و کارآمد مواد کامپوزیت، مقاومت بالاتر آن‌ها در برابر انواع خوردگی است. این ویژگی و نیز وزن کم این مواد که سبب کاهش مصرف سوخت، افزایش سرعت و افزایش ظرفیت حمل بار می‌شود، باعث شده است که در صنایع دریایی از کامپوزیت‌ها در ساخت انواع قطعات استفاده شود. بیش از نیمی از اجزای قایق‌های تفریحی از مواد کامپوزیت ساخته شده است. در ساخت لوله‌های استخراج گاز و نفت در دریا نیز از مواد کامپوزیت استفاده می‌شود. استفاده از کامپوزیت‌ها در این صنعت موجب کاهش هزینه‌های نصب و نگهداری نیز می‌شود [۳].

۲-۲-۴-۳ صنایع خودروسازی

مواد کامپوزیت طی دهه‌های اخیر جایگزین بسیاری مواد مورد استفاده در صنعت خودروسازی شده‌اند. خودروسازان با استفاده از مواد کامپوزیت قادرند ظاهر، قیمت و کارایی قطعات اتومبیل را به شکل مطلوب‌تر تغییر دهند. امروزه استفاده از مواد کامپوزیت در ساخت بدنه‌ی انواع اتومبیل‌ها موفقیت‌آمیز بوده است [۳].

¹ Organic Matrix Composites (OMC)

۲-۲-۴ صنایع نفت و گاز

استحکام بالا، مقاومت نسبت به خوردگی و وزن کم فرآورده‌های کامپوزیت، باعث شده‌اند که این مواد جایگزین بسیار مناسبی برای لوله‌های فلزی و بتونی باشند. از عمده‌ترین کاربردهای مواد کامپوزیت، تولید لوله‌های با ابعاد مختلف برای انتقال محصولات نفتی و گازی است. این لوله‌ها از دیدگاه نحوه‌ی انتقال سیال به دو گروه عمده‌ی گرانشی و فشاری تقسیم می‌شوند.

در لوله‌های گرانشی، نیروی گرانش و یا فشار خیلی پایین سبب جابجایی و تداوم حرکت می‌شود. به همین دلیل ویژگی سفتی عامل مهمی در طراحی این لوله‌ها محسوب می‌شود. در این لوله‌ها، جهت‌گیری الیاف به گونه‌ای انتخاب می‌شود که سفتی لوله در جهت‌های محیطی و محوری باعث کاهش تغییر شکل‌های خمشی در مسیر شود و لوله در برابر نیروهای ناشی از بار مرده و رفت و آمد روی آن مقاوم باشد. لوله‌های فاضلاب نمونه‌ای از لوله‌های گرانشی می‌باشند که معمولاً در عمق زیاد نسبت به سطح زمین قرار می‌گیرند.

لوله‌های فشاری در انتقال آب و صنایع نفت و گاز استفاده می‌شوند و الیاف آنها بسته به میزان فشار طراحی، جهت‌گیری‌های مختلفی دارند. هزینه‌های سنگین تعمیر و نگهداری لوله‌های آسیب‌دیده در اثر خوردگی و خسارات ناشی از قطع سرویس به مراکز صنعتی، از مهمترین عوامل استفاده از مواد کامپوزیت در این صنعت است [۳].

۲-۲-۴-۵ ساختمان‌سازی

از مواد کامپوزیت به عنوان لوازم بهداشتی داخل ساختمان مانند وان، دست‌شویی و همچنین در و پنجره برای جلوگیری از انتقال گرما استفاده می‌شود. همچنین مواد کامپوزیتی را می‌توان به جای تیرآهن یا میلگرد در سازه‌ی ساختمان نیز به کار برد. در صنعت ساختمان‌سازی به‌طور گسترده از کامپوزیت‌ها برای تقویت خارجی ستون‌های موجود جهت افزایش ظرفیت‌های برشی، فشاری، خمشی و مقاومت در برابر ضربه استفاده می‌شود. این روش در کشورهای گوناگون از جمله ژاپن، آمریکا و

کانادا، برای اصلاح مقاومت لرزه‌ای ستون‌های پل و ساختمان‌ها به کار می‌رود. همچنین از این روش برای افزایش ظرفیت باربری ستون‌های پارکینگ‌ها استفاده شده است. مواد کامپوزیت به‌طور خاص در ساخت پل‌های ماشین‌رو و عابر پیاده به کار می‌روند. در حال حاضر نمونه‌های زیادی از پل‌های تمام کامپوزیتی در سراسر جهان موجود است. از مواد کامپوزیت در ساخت ابرسازه‌هایی مانند سقف مساجد و برج‌های مسکونی و تجاری جهت کاهش وزن سازه بدون کاهش استحکام آن استفاده می‌شود. توانایی کامپوزیت‌ها در بازسازی شکل‌ها و قطعات پیچیده در هر اندازه‌ای، طراحان را قادر می‌سازد که به راحتی ظاهر بناهای قدیمی را با همان رنگ و شکل، مرمت یا بازآفرینی کنند [۳].

۲-۲-۵ کاربردهای مواد کامپوزیت در صنایع ایران

در حال حاضر صنعت کامپوزیت علی‌رغم جوان بودن در کشورمان، اکثر روش‌های پیشرفته‌ی تولید محصولات مختلفی مانند لوله، قطعات خودرو، پره‌ی توربین بادی و غیره را شامل می‌شود. توسعه‌ی این صنعت نیازمند تلاش متخصصان و مسئولان مرتبط با این صنعت می‌باشد. متأسفانه در کشور ما به دلیل عدم شناخت کامل خصوصیات مواد کامپوزیت، که خود ضعف در طراحی، تولید و مصرف را به دنبال دارد، میزان استفاده از این مواد نسبت به سایر کشورها بسیار کم است. با برنامه‌ریزی‌های درازمدت و سرمایه‌گذاری‌های مناسب در راستای شناساندن این مواد به شرکت‌ها و مؤسسات صنعتی کشور، می‌توان ضعف‌های موجود در این زمینه را تا حد زیادی جبران کرد.

۲-۲-۶ رفتار مکانیکی کامپوزیت‌ها

اغلب مواد مهندسی همسانگرد می‌باشند؛ به این معنی که در هر نقطه دارای خصوصیات یکسان در همه‌ی جهات هستند. مواد کامپوزیت در حالت کلی غیرهمسانگرد هستند. جسم غیرهمسانگرد دارای خواص مختلف در جهات متفاوت است. در صورتی که جسم غیرهمسانگرد دارای دو یا سه صفحه‌ی تقارن عمود بر هم باشد، ارتوتروپ^۱ نامیده می‌شود. به عبارت دیگر جسم ارتوتروپ یک حالت

¹ Orthotropic

خاص از ناهمسانگردی است که در حالت کلی دارای خواص مختلف در سه جهت عمود بر هم در یک نقطه از جسم می‌باشد. مواد کامپوزیت عموماً در دسته‌ی مواد ارتوتروپیک قرار می‌گیرند. در مواد همسانگرد، تنش‌های کششی نرمال باعث افزایش طول در جهت اعمال تنش و کاهش طول در جهت عمود بر راستای اعمال تنش می‌شوند. اعمال تنش‌های فشاری نیز نتیجه‌ی عکس خواهد داشت. همچنین تنش‌های برشی باعث تغییر شکل برشی می‌گردند. در مواد ارتوتروپیک، اگر تنش‌های نرمال در جهت محورهای اصلی ماده اعمال شوند، رفتاری همانند مواد همسانگرد از خود نشان می‌دهند، اما کم و زیاد شدن طول در جهت عمود بر هم می‌تواند با مواد همسانگرد تحت بار مشابه و مدول الاستیسیته‌ی برابر در جهت اعمال نیرو متفاوت باشد. محور اصلی در ماده‌ی ارتوتروپیک، در امتداد الیاف قرار دارد. در مواد غیرهمسانگرد، اعمال تنش نرمال نه تنها باعث ازدیاد طول در جهت اعمال نیرو و کاهش طول در جهت عمود بر آن می‌شود، بلکه تغییر شکل برشی نیز ایجاد می‌کند. همچنین اعمال تنش برشی نه تنها تغییر شکل برشی ایجاد می‌کند، بلکه در کم و زیاد شدن طول نیز تأثیر دارد. در مواد ارتوتروپیک نیز اگر جهت اعمال نیرو در راستای محورهای اصلی ماده نباشد، هر دو تغییر شکل طولی و برشی تحت یک نوع تنش به وجود می‌آید [۳].

۲-۲-۷ مزایا و معایب کامپوزیت‌ها

وجود روش‌های مختلف برای تولید قطعات کامپوزیت با هر هندسه‌ای موجب می‌شود که شکل نهایی قطعات را بتوان با این مواد ایجاد کرد. این ویژگی سبب کاهش و یا حذف عملیات ماشین‌کاری می‌شود. قابلیت یکپارچه‌سازی اجزای ساخته‌شده از مواد کامپوزیت و کاهش هزینه‌های سرهم‌بندی، منجر به کاهش چشم‌گیر تعداد بست‌ها و اتصالات نسبت به حالت استفاده از فلزات می‌شود [۳]. استحکام ویژه و مدول ویژه که به ترتیب به صورت نسبت استحکام به چگالی و نسبت مدول به چگالی تعریف می‌شوند، برای مواد کامپوزیت به مراتب بالاتر از آلیاژهای فلزی است. به عنوان نمونه، این ویژگی در صنعت هوافضا سبب کاهش وزن شده و بهبود عملکرد و صرفه‌جویی در مصرف سوخت را

در پی دارد [۳]. فرایندهای تعمیر و عیب‌یابی در اجزای ساخته‌شده از مواد کامپوزیت به مراتب آسان‌تر است. کامپوزیت‌ها علی‌رغم مزایای ذکرشده، در برخی کاربردها معایبی دارند. این مواد رطوبت را جذب می‌کنند. این موضوع خواص کامپوزیت‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد. همچنین به دلیل پیچیده‌تر بودن مشخصات مکانیکی کامپوزیت‌ها نسبت به ساختار فلزات، تحلیل رفتار آن‌ها دشوارتر است [۳]. در ادامه، پس از مروری بر مطالعات انجام‌شده در زمینه‌ی توزیع تنش در صفحات حاوی گشودگی، مسأله‌ی مورد نظر تعریف می‌شود.

۳-۲ مروری بر مطالعات پیشین

در زمینه‌ی تمرکز تنش ورق همسانگرد و ناهمسانگرد نامحدود دارای گشودگی، تحقیقات بسیاری انجام شده است. ابتدا اینگلیس^۱ [۶] در سال ۱۹۱۳ با استفاده از دستگاه مختصات بیضوی و تابع پتانسیل حقیقی ایری^۲ توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی را به‌دست آورد. راه حل^۳ او دقیق و مناسب بود اما به‌کارگیری آن به‌ویژه برای اشکال نوک‌تیز دشوار بود. حل^۴ او نشان می‌داد که تمرکز تنش با کوچک شدن شعاع انحنا در یک گوشه از گشودگی در مقایسه با دیگر نقاط گشودگی می‌تواند بسیار بزرگ شود. این نتایج باعث حساس شدن مهندسان در امکان خطر تمرکز تنش به‌طور مثال در گوشه‌های نوک تیز، شکاف‌ها، گشودگی‌ها، شیار پیچ‌ها و مشابه آن‌ها در سازه‌ها گردید. پس از او محققان زیادی مقالات و کتاب‌های مرجع متعددی در این زمینه منتشر کردند. هوولند^۵ [۷] روابطی برای ورق‌های بلند با گشودگی دایره‌ای و عرض محدود ارائه کرد. وسترگارد^۴ [۸] تابع تنشی با جمله‌هایی از توابع همساز برای تحلیل تنش اطراف گشودگی‌های تیز به‌دست آورد. تنش‌های به‌دست آمده از تابع تنش او معادلات تعادل، معادلات سازگاری و قانون هوک تعمیم یافته را ارضا می‌کرد. هیوود^۵ [۹] روابطی برای تصحیح ضریب تمرکز تنش در عرض محدود با استفاده از مقادیر ضریب تمرکز تنش

¹ Inglis

² Airy

³ Howland

⁴ Westergaard

⁵ Heywood

ورق‌های نامحدود استخراج کرد. هیوود این روابط را با استفاده از برآیند نیروهای تعادل برای ورق‌های دارای گشودگی تحت بار کششی ارائه کرد که در آن تأثیر عرض محدود به تنهایی اعمال شد. در کتاب های استرنبرگ^۱ [۱۰]، نیوبر^۲ [۱۱]، پیترسون^۳ [۱۲] و پیلکی^۴ [۱۳]، برای محدوده وسیعی از گشودگی‌ها با اندازه های مختلف، ضرایب تمرکز تنش مناسبی برای مواد همسانگرد ارائه شده است. در بعضی از این مراجع معادلاتی نیز با استفاده از نتایج آزمایشگاهی ارائه شده است. برای نمونه پیترسون روابطی برای ورق‌های حاوی گشودگی‌های مختلف، هم برای ابعاد نامحدود و هم برای عرض محدود ارائه کرد. نتایجی که در این مراجع موجود است، معمولاً از آزمایش‌های تجربی به عنوان مثال فتوالاستیک به دست آمده است. بسیاری از طراحان در محاسبه‌ی ضریب تمرکز تنش از این کتاب‌ها و استانداردهای مرجع استفاده می‌کنند.

۲-۳-۱ ورق همسانگرد نامحدود

موشخلیشویلی^۵ [۱۴] برپایه‌ی تئوری الاستیک دوبعدی، روش متغیر مختلط را معرفی کرد. با استفاده از این روش مسأله‌ی تعیین توزیع تنش ورق حاوی گشودگی، به محاسبه‌ی دو تابع تحلیلی هولومورفیک^۶ محدود می‌شد. او این روش را با نداشت هم‌نوا ترکیب کرد تا بتواند به صورت تحلیلی مسأله‌ی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های غیر دایروی را در جسم الاستیک دوبعدی حل کند. ساوین^۷ [۱۵] با استفاده از روش متغیر مختلط موشخلیشویلی، توزیع تنش اطراف انواع مختلفی از گشودگی‌ها را در ورق نامحدود همسانگرد به دست آورد. او ناحیه‌ی نامحدود اطراف گشودگی در صفحه‌ی z را با استفاده از تابع نگاشت شوارتز-کرسفل^۸ به ناحیه‌ی داخل دایره‌ی واحد نگاشت داد و با استفاده از انتگرال کوشی^۹ تابع تنش را به دست آورد. او همچنین تمرکز تنش گشودگی مثلثی با گوشه‌های گرد

¹ Sternberg

² Neuber

³ Peterson

⁴ Pilky

⁵ Muskhelishvili

⁶ Holomorphic

⁷ Savin

⁸ Schwartz-chirstoffel

⁹ Cauchy integral

را نیز در ورق نامحدود بررسی نمود. تئوکاریس و پترو^۱ [۱۶] از روش متغیر مختلط موشخلیشویلی و نگاشت همنوا، توزیع تنش اطراف گشودگی مثلی را در ورق همسانگرد نامحدود بررسی و نتایج را با نتایج تجربی مقایسه کردند. گائو^۲ [۱۷] به منظور اجتناب از به کارگیری دو نگاشت همنوا، از دستگاه مختصات بیضوی هذلولی برای به دست آوردن صریح مؤلفه‌های تنش و جابجایی ورق نامحدود همسانگرد تحت بار دومحوری دلخواه استفاده کرد. موتوک^۳ [۱۸] به بررسی تأثیر شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی‌های مختلف در ورق همسانگرد نامحدود تحت کشش پرداخت. سیمها و موهاپاترا^۴ [۱۹] از یک تابع نگاشت کلی برای یافتن توزیع تنش در اطراف انواع گشودگی‌ها در یک ورق همسانگرد نامحدود استفاده کردند. لی^۵ و همکارانش [۲۰] با اعمال ضرایب تصحیح در تابع نگاشت همنوا، توانستند توزیع تنش و جابجایی حول گشودگی مستطیلی شکل با ابعاد دلخواه در ورق نامحدود همسانگرد و تحت بار تک‌محوری را به دست آورند. رضایی پزند و جعفری [۲۱] از روش ساوین برای مطالعه‌ی تمرکز تنش حول گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود فلزی استفاده کردند و تأثیر پارامترهایی مانند شکل گشودگی، انحنای گوشه و زاویه‌ی چرخش گشودگی را بر روی ضریب تمرکز تنش مطالعه کردند. باتیستا^۶ [۲۲] با اصلاح روش متغیر مختلط موشخلیشویلی، توزیع تنش حول گشودگی‌های چندضلعی با هندسه‌های پیچیده در ورق نامحدود تحت بارگذاری کششی را محاسبه کرد. شارما^۷ [۲۳] راه حلی عمومی برای توزیع تنش اطراف گشودگی‌های چندضلعی در ورق همسانگرد نامحدود را تحت بارگذاری دومحوری به دست آورد. او همچنین تأثیر هندسه‌ی گشودگی و الگوی بارگذاری بر توزیع تنش ورق را بررسی نمود.

۲-۳-۲ ورق ناهمسانگرد نامحدود

توسعه‌ی کامل روش موشخلیشویلی به مسائل الاستیسیته دوبعدی برای مواد ناهمسانگرد توسط

¹ Theocaris and Petrou

² Gao

³ Motok

⁴ Simha and Mohapatra

⁵ Lei

⁶ Batista

⁷ Sharma

اشلبی^۱ [۲۴]، اشترو^۲ [۲۵] و لخنیتسکی^۳ [۲۶] انجام شد. لخنیتسکی روش متغیر مختلط موشخلیشویلی را برای مواد الاستیک ناهمسانگرد بسط داد و حلی عمومی برای محاسبه‌ی مؤلفه‌های تنش و جابجایی در حالت تنش صفحه‌ای به‌دست آورد. او از روش سری‌ها برای به‌دست آوردن ضرایب تابع تنش استفاده کرد و راه حل بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها با اشکال مختلف را در ورق نامحدود ناهمسانگرد ارائه نمود. بعدها پژوهشگران متعددی با استفاده از روابط ارائه شده توسط آن‌ها به مطالعه‌ی ورق‌های ناهمسانگرد حاوی گشودگی پرداختند. تان^۴ [۲۷] بررسی‌های متعددی بر روی ضریب تمرکز تنش در مواد ناهمسانگرد انجام داد. تان با اطلاعات مربوط به تمرکز تنش ورق ناهمسانگرد نامحدود حاوی گشودگی دایروی و بیضوی و با معرفی ضرایب تصحیح مناسب، تمرکز تنش ورق حاوی این گشودگی‌ها را با عرض محدود به‌دست آورد. دائوست و هووا^۵ [۲۸] گشودگی مثلثی در ورق همسانگرد و ناهمسانگرد نامحدود را تحت بار کششی تک محوری، تحلیل کردند. آن‌ها با تعریف نسبت اضلاع به عنوان یک پارامتر، توانستند علاوه بر مثلث متساوی‌الاضلاع سایر مثلث‌ها با نسبت اضلاع مختلف را بررسی کنند. همچنین آن‌ها به بررسی پارامتر شعاع انحنای گشودگی نیز پرداختند. ابوالفتوح^۶ [۲۹] رابطه‌ی واحدی را برای مؤلفه‌ی تنش مماس بر مرز گشودگی برای هندسه‌های دایروی، بیضوی، مثلثی و مربعی در ورق نامحدود از ماده‌ی ناهمسانگرد خاص، تحت بار کششی بیان نمود. یوکادگائونکر و رائو^۷ [۳۰] توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در ورق ناهمسانگرد نامحدود را تحت بارگذاری درون صفحه‌ای با استفاده از روش گائو و بدون استفاده از جمع آثار به‌دست آوردند. آن‌ها همچنین به بررسی تأثیر زاویه‌ی الیاف بر توزیع تنش پرداختند و این روش را برای چندلایه‌های کامپوزیتی متقارن بسط دادند. رضایی پزند و جعفری [۳۱، ۳۲]، در ورق ناهمسانگرد نامحدود توزیع تنش در اطراف گشودگی‌های مختلف و تأثیر پارامترهایی مانند انحنای گوشه و زاویه‌ی چرخش گشودگی را بررسی نمودند. اسمر و

¹ Eshelby

² Stroh

³ Lekhnitskii

⁴ Tan

⁵ Daoust and Hoa

⁶ Abuelfoutouh

⁷ Ukadgaonker and Rao

جَبور^۱ [۳۳] توزیع تنش اطراف گشودگی مربّعی در یک ورق ناهمسانگرد نامحدود تحت بار کششی را به دست آوردند. آن‌ها همچنین به بررسی تأثیر انحنای گشودگی و زاویه‌ی بار در این مقاله پرداختند. شارما و همکارانش [۳۴] در مورد ورق ناهمسانگرد نیز به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی مثلی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای پرداختند و پارامترهای زاویه‌ی بار، زاویه‌ی الیاف، جنس و انحنای گوشه‌ی گشودگی را نیز در نظر گرفتند.

۲-۳-۳ ورق‌های همسانگرد و ناهمسانگرد حاوی چندگشودگی

در مورد ورق‌هایی که بیش از یک گشودگی دارند نیز تحقیقات زیادی صورت گرفته است. راه حلّ کلی برای گروهی از گشودگی‌های واقع در یک ورق نامحدود و ورق با عرض محدود اولین بار توسط هوولند و نایت^۲ [۳۵]، گرین^۳ [۳۶]، لینگ و ونگ^۴ [۳۷] به دست آمده است. آن‌ها به این منظور راه حلّ سری‌ها را گسترش دادند. در این روش، محاسبه‌ی ضرایب پارامتری سری‌ها برای ارضای شرایط مرزی، ساده اما نسبتاً طولانی است. تانگ^۵ [۳۸] با استفاده از روش متغیرهای مختلط، موفق به حلّ مسأله‌ی صفحات دارای چند گشودگی شد. برای حلّ این مشکل هالبرت^۶ [۳۹]، همدا^۷ و همکارانش [۴۰] و واه^۸ [۴۱]، تعدادی از مسائل صفحه‌ای چند گشودگی را به وسیله‌ی روش عددی نقطه-نظیر^۹ حل کردند. نتایج، کارایی و انعطاف پذیری این روش را نشان داد. ایسادا و ایگوا^{۱۰} [۴۲] این روش را برای مسأله‌ی آرایش زیگ‌زاگی گشودگی‌های دایروی گسترش دادند. همچنین تحقیقاتی به وسیله‌ی ژانگ^{۱۱} و همکارانش [۴۳] و یوکادگائونکر [۴۴] بر روی حلّ تحلیلی ورق‌های حاوی دو گشودگی با اشکال مختلف انجام شده است.

¹ Asmar and Jabbour

² Howland and Knight

³ Green

⁴ Ling and Wang

⁵ Tang

⁶ Hulbert

⁷ Hamada

⁸ Wah

⁹ Point-matching

¹⁰ Isida and Igawa

¹¹ Zhang

۲-۳-۴ ورق همسانگرد محدود

غالب روش‌های تحلیلی به‌کاررفته شده در مطالعات فوق، برای بررسی توزیع تنش ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی مناسب می‌باشند اما در موارد زیادی از کاربردهای عملی مهندسی، ورق‌ها را نمی‌توان نامحدود در نظر گرفت. از راه حلّ ارائه شده برای ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی، نمی‌توان برای ورق‌های محدود استفاده نمود. زیرا در این حالت تأثیر شرایط مرزی خارجی بر توزیع تنش در نظر گرفته نمی‌شود. بنابراین مطالعه بر روی توزیع تنش ورق محدود دارای گشودگی مرکزی، نیازمند به‌کارگیری روابط جداگانه‌ای است.

وو و چن^۱ [۴۵] به منظور حلّ مسأله‌ی ورق همسانگرد محدود با تعداد و موقعیت دلخواه از گشودگی‌های دایروی، تابع تنشی را بر اساس روش متغیّر مختلط موشخلیشویلی و روش حدّاقل مربّعات مرزی پیشنهاد کردند. در سال ۲۰۱۳ پن^۲ و همکارانش [۲] با استفاده از روش متغیّر مختلط و حدّاقل مربّعات مرزی و با اصلاح تابع تنش ارائه شده توسط موشخلیشویلی، به بررسی توزیع تنش ورق محدود حاوی گشودگی مربّعی تحت بار کششی تک‌محوری پرداختند. آن‌ها از تابع نگاشتی که توسط شارما بر اساس نگاشت شوارتز- کرسفل به‌دست آمده بود، استفاده کردند و یک گشودگی مربّعی و دو گشودگی مستطیلی با نسبت ابعادی $3/2$ به 1 و 5 به 1 را بدون در نظر گرفتن پارامتر انحنا، تحت بار کششی تک‌محوری بررسی نمودند. آن‌ها همچنین پارامتر چرخش گشودگی را برای گشودگی مربّعی در زوایای بسیار خاصی بررسی کردند. جعفری و اردلانی [۴۶] با ارائه‌ی تابع نگاشتی مناسب، توانستند گشودگی‌های مختلف را در صفحات محدود همسانگرد تحلیل کنند و تأثیر پارامترهای مختلف نظیر زاویه‌ی چرخش گشودگی و شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی را بررسی نمودند.

۲-۳-۵ ورق ناهمسانگرد محدود

اگونوسکی^۳ [۴۷] با استفاده از متغیّرهای مختلط و روش حدّاقل مربّعات مرزی توزیع تنش حول

¹ Woo and Chan

² Pan

³ Ogonowski

گشودگی دایروی را در چندلایه‌های کامپوزیتی محدود به دست آورد. لین و کو^۱ [۴۸] با استفاده از تئوری مواد ناهمسانگرد لخنیتسکی به تحلیل چندلایه‌های کامپوزیتی محدود با گشودگی بیضوی پرداختند. برای این منظور آن‌ها از تابع تنش ایری و روش حداقل مربعات مرزی استفاده کردند. بریت^۲ [۴۹] توزیع تنش اطراف گشودگی‌های دایروی و بیضوی را در صفحات محدود ناهمسانگرد به دست آورد. زو^۳ و همکاران [۵۰] با استفاده از بسط سری فابر^۴ و روش حداقل مربعات مرزی، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی در چندلایه‌ی کامپوزیتی محدود را به دست آوردند. چوچان^۵ و شارما [۵۱] توزیع تنش اطراف گشودگی مستطیلی را در صفحات محدود ناهمسانگرد به دست آوردند. همچنین چوچان و شارما [۵۲] توانستند گشودگی‌های مختلف را در صفحات محدود ناهمسانگرد تحلیل کنند و تأثیر پارامترهای مختلف نظیر زاویه‌ی چرخش گشودگی و شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی را بررسی نمودند. بیشتر مطالعاتی که تاکنون بر روی ورق‌های محدود ناهمسانگرد حاوی گشودگی انجام شده است؛ محدود به گشودگی دایروی و بیضی شکل می‌شود.

در این پایان‌نامه سعی می‌شود تا با استفاده از روش متغیر مختلط لخنیتسکی و با استفاده از نگاشت همنوا، توزیع تنش اطراف گشودگی‌های منتظم واقع در مرکز ورق محدود ناهمسانگرد بررسی شود. روش ارائه شده در این پایان‌نامه با معرفی تابع نگاشتی مناسب، توانایی تحلیل ورق‌های محدود ناهمسانگرد با گشودگی‌های مختلف را دارد. پارامترهای مورد بررسی در این پایان‌نامه شامل نوع هندسه‌ی گشودگی، انحنای گوشه‌های گشودگی، نسبت ابعاد ورق، نوع بارگذاری درون صفحه‌ای، زاویه-ی چرخش گشودگی و زاویه‌ی الیاف ورق ناهمسانگرد می‌باشد.

¹ Lin and Ko

² Britt

³ Xu

⁴ Faber series

⁵ Chauhan

فصل ۳ : روش حل تحلیلی

۳-۱ مقدمه

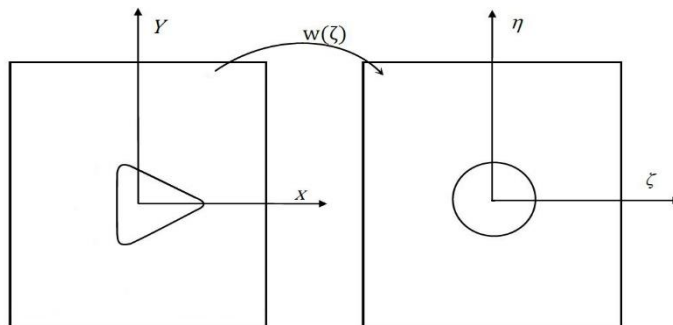
در این فصل، ابتدا پس از بیان فرضیات مسأله‌ی پیش‌رو تابع نگاشت مورد استفاده در روند حل تحلیلی معرفی می‌شود. پس از آن معادلات حاکم بر ورق محدود ناهمسانگرد، با استفاده از تئوری متغیر مختلط لخنیتسکی استخراج می‌شود. سپس با توجه به شرایط مرزی ورق و با کمک روش حداقل مربعات مرزی، معادلات مربوط به شرایط مرزی ورق مشخص و روند حل با استفاده از این روش بیان می‌گردد.

۳-۲ فرضیات مورد استفاده

- ۱- اندازه‌ی گشودگی در مقابل ابعاد ورق بزرگ می‌باشد (نسبت قطر دایره محیط بر گشودگی به بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از $0/2$ است)، بنابراین ورق محدود است.
- ۲- ورق ناهمسانگرد در نظر گرفته می‌شود و زاویه‌ی الیاف دلخواه می‌باشد.
- ۳- ورق همگن و دارای رفتار الاستیک خطی می‌باشد و از قانون عمومی هوک تبعیت می‌کند.
- ۴- مسأله، تنش صفحه‌ای و در غیاب نیروهای حجمی فرض شده است.
- ۵- ورق تحت بارگذاری درون صفحه‌ای به صورت‌های کششی دومحوری، تک‌محوری و برش خالص قرار می‌گیرد.
- ۶- گشودگی در مرکز صفحه و مرز گشودگی آزاد از بار است.
- ۷- شکل گشودگی n ضلعی منتظم و با هر جهت‌گیری دلخواهی است.

۳-۳ نگاشت هم‌نوا

به منظور تحلیل تنش گشودگی‌های غیر دایروی، ابتدا می‌بایست گشودگی‌های مختلف در صفحه‌ی مختلط z به گشودگی دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه‌ی نگاشت ξ تبدیل شود. شکل ۳-۱ این تبدیل را برای گشودگی مربعی نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳ نگاشت گشودگی مثلثی به گشودگی دایروی

رابطه‌ی زیر، تابع نگاشتی است که شکل هندسه چند ضلعی منتظم را به یک گشودگی دایره‌ای

تبدیل می‌کند.

$$z = x + iy = w(\xi) = R\left(\xi + \frac{m}{\xi^p}\right) \quad (1-3)$$

$$\xi = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

برای دایره به شعاع واحد $\rho = 1$ می‌باشد و x و y به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x = R[\cos\theta + m\cos(p\theta)] \quad (2-3)$$

$$y = R[\sin\theta - m\sin(p\theta)]$$

در رابطه‌ی (۲-۳)، R پارامتر تعیین‌کننده‌ی اندازه‌ی گشودگی می‌باشد و در این پایان‌نامه $R = 1$

در نظر گرفته می‌شود. پارامتر $p = n - 1$ تعیین‌کننده‌ی نوع هندسه‌ی گشودگی می‌باشد. به عنوان

نمونه برای مثلث با تعداد اضلاع $n = 3$ ، p برابر ۲ می‌باشد. پارامتر m تعیین‌کننده‌ی انحنای

گوشه‌های گشودگی و به عبارتی معیار تیزی یا نرمی گوشه‌های گشودگی می‌باشد و می‌تواند مقادیر

مختلفی داشته باشد. برای نمونه به منظور مقایسه نتایج با مرجع [۵۲] برای رسم گشودگی‌های منتظم

از رابطه‌ی زیر برای این معیار استفاده می‌شود.

$$m = \frac{2}{n(n-1)} \quad (3-3)$$

شکل ۲-۳ تأثیر پارامتر m بر انحنای گوشه‌های گشودگی را نشان می‌دهد.



$m = 0$

$m = 0.05$

$m = 0.1$

$m = 0.15$

$m = 0.2$

شکل ۲-۳ تأثیر پارامتر m بر گشودگی شش ضلعی [۴۶]

هندسه‌ی یک ورق همسانگرد در صفحه‌ی مختلط z به وسیله‌ی رابطه‌ی $z = x + iy$ و هندسه‌ی ورق ناهمسانگرد در صفحه‌ی z_j به وسیله‌ی رابطه‌ی $z_j = x + \mu_j y$ به دست می‌آید. μ_j ریشه‌های معادله‌ی مشخصه هستند که به تفصیل در بخش بعد معرفی خواهند شد.

با استفاده از روابط اوپلر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} e^{ip\theta} &= \cos(p\theta) + i\sin(p\theta) \\ e^{-ip\theta} &= \cos(p\theta) - i\sin(p\theta) \end{aligned} \quad (۴-۳)$$

با استفاده از روابط $\xi = e^{i\theta}$ و رابطه‌ی (۴-۳)، رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \cos(p\theta) &= \frac{1}{2} \left(\xi^p + \frac{1}{\xi^p} \right) \\ \sin(p\theta) &= \frac{-i}{2} \left(\xi^p - \frac{1}{\xi^p} \right) \end{aligned} \quad (۵-۳)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۲-۳) می‌توان x و y را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} + m\xi^p + \frac{m}{\xi^p} \right) \\ y &= -\frac{Ri}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi} - m\xi^p + \frac{m}{\xi^p} \right) \end{aligned} \quad (۶-۳)$$

برای مدل کردن زاویه‌ی چرخش گشودگی از ماتریس انتقال زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (۷-۳)$$

که در آن β زاویه‌ی چرخش گشودگی است (شکل ۳-۳) و بیان‌گر نحوه‌ی قرارگیری گشودگی نسبت به افق می‌باشد. X و Y نیز مختصات نقاط روی مرز گشودگی بعد از اعمال زاویه‌ی چرخش گشودگی می‌باشند. با جای‌گذاری رابطه‌های (۶-۳) در رابطه‌ی (۷-۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} X &= \frac{R}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} + m\xi^p + \frac{m}{\xi^p} \right) \cos \beta + \frac{Ri}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi} - m\xi^p + \frac{m}{\xi^p} \right) \sin \beta \\ Y &= \frac{R}{2} \left(\xi + \frac{1}{\xi} + m\xi^p + \frac{m}{\xi^p} \right) \sin \beta - \frac{Ri}{2} \left(\xi - \frac{1}{\xi} - m\xi^p + \frac{m}{\xi^p} \right) \cos \beta \end{aligned} \quad (۸-۳)$$

در نهایت با جایگذاری Y و X در رابطه‌ی (۳-۸)، تابع نگاشت به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$z_j = x + \mu_j y = \frac{R}{2} \left\{ [(1 - i\mu_j) \cos \beta + (i + \mu_j) \sin \beta] \xi \right. \\ \left. + [(1 + i\mu_j) \cos \beta + (-i + \mu_j) \sin \beta] \frac{1}{\xi} \right. \\ \left. + [(1 + i\mu_j) \cos \beta + (-i + \mu_j) \sin \beta] m \xi^P \right. \\ \left. + [(1 - i\mu_j) \cos \beta + (i + \mu_j) \sin \beta] \frac{m}{\xi^P} \right\} \quad (9-3)$$

می‌توان تابع نگاشت (۳-۹) را به صورت زیر مرتب کرد:

$$z_j = \frac{R}{2} \left(a_j \xi + \frac{b_j}{\xi} + m b_j \xi^P + \frac{m a_j}{\xi^P} \right) \quad (10-3)$$

$$a_j = (1 - i\mu_j) \cos \beta + (i + \mu_j) \sin \beta$$

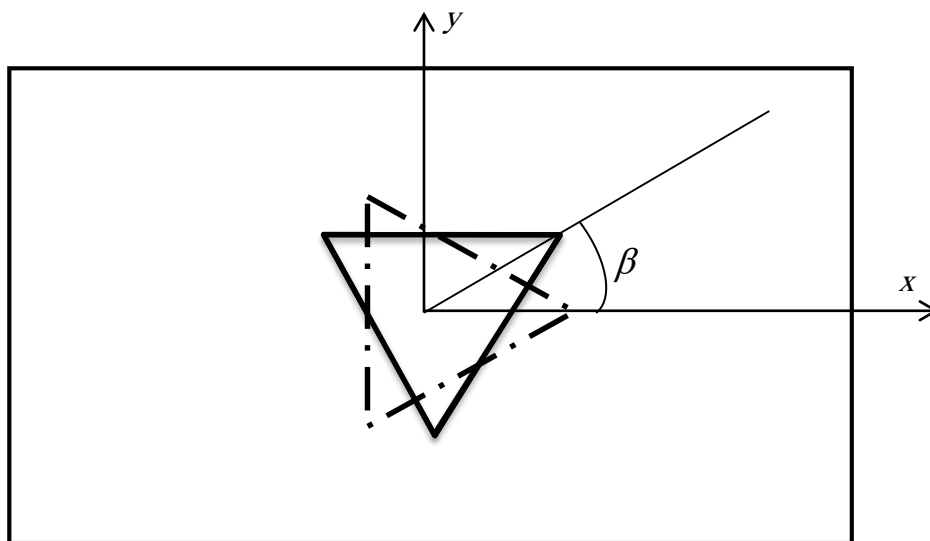
$$b_j = (1 + i\mu_j) \cos \beta + (-i + \mu_j) \sin \beta$$

با ضرب ξ^P در رابطه‌ی (۳-۱۰) و بازنویسی آن، معادله به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$R m b_j \xi^{2P} + R a_j \xi^{P+1} - 2 z_j \xi^P + R b_j \xi^{P-1} + R m a_j = 0 \quad (11-3)$$

رابطه‌ی (۳-۱۱) یک معادله‌ی چندجمله‌ای بر حسب ξ می‌باشد که تمام نقاط موجود در صفحه‌ی

z را به نقاط متناظرشان در صفحه‌ی ξ تبدیل می‌کند.



شکل ۳-۳ نحوه‌ی چرخش گشودگی

۳-۴ روش حل و به دست آوردن معادلات حاکم

مسأله‌ی حاضر بر پایه‌ی تئوری الاستیسیته صفحه‌ای، تحلیل و بررسی می‌شود. در مسائل دوبعدی تحت بار درون صفحه‌ای، ماتریس تنش در هر نقطه از ماده‌ی الاستیک، دارای سه تنش σ_x ، σ_y و τ_{xy} می‌باشد. این تنش‌ها، در غیاب نیروهای خارجی معادلات تعادل را به صورت زیر ارضا می‌کنند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (۱۲-۳)$$

مطابق تعمیم قانون هوک، می‌توان هر مؤلفه تنش را به تمام مؤلفه‌های تغییر شکل نسبی و هر مؤلفه تغییر شکل نسبی را به تمام مؤلفه‌های تنش مربوط ساخت:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (۱۳-۳)$$

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (۱۴-۳)$$

که $[C]$ و $[S]$ به ترتیب تانسورهای سفتی و نرمی (انعطاف پذیری) ماده هستند:

$$[C] = [S]^{-1} \quad (۱۵-۳)$$

در ادامه کار دو حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم. برای حالت کرنش صفحه‌ای $(\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0)$ ، بصورت زیر به دست می‌آید:

$$a_{ij} = \bar{S}_{ij} - \frac{\bar{S}_{i3} \bar{S}_{j3}}{\bar{S}_{33}} \quad , \quad i, j = (1, 2, 6) \quad (۱۶-۳)$$

و برای حالت تنش صفحه‌ای $(\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0)$

$$a_{ij} = \bar{S}_{ij} \quad , \quad i, j = (1, 2, 6) \quad (۱۷-۳)$$

که در این روابط a_{ij} اعضاء ماتریس نرمی کاهش یافته هستند و $[\bar{S}]$ به ثوابت مهندسی و جهت‌گیری الیاف بستگی دارد و روابط آن در پیوست الف آورده شده است.

در حالت دو بعدی رابطه‌ی سازگاری به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (18-3)$$

همچنین روابط کرنش-جابجایی نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (19-3)$$

رابطه‌ی تنش-کرنش برای ماتریس نرمی کاهش یافته به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (20-3)$$

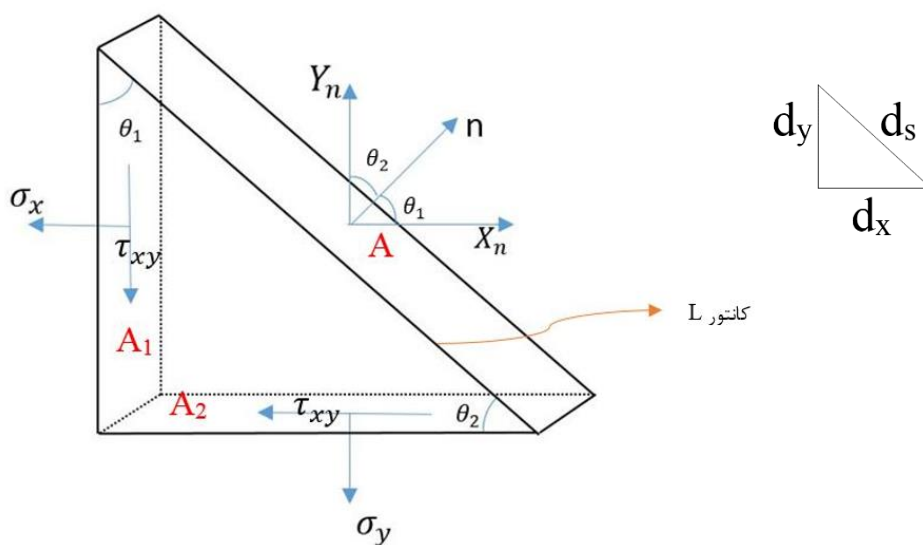
تابع تنش $U(x,y)$ به طوری که در معادلات تعادل صدق کند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (21-3)$$

مطابق شکل ۳-۴ ناحیه S که توسط کانتور L از جسم محدود شده است، به صورت دو مسأله‌ی

اساسی و تفکیک شده از هم تجزیه می‌شود. این دو مسأله‌ی اساسی به ترتیب ارضای شرط مرزی

نیرویی و جابه‌جایی می‌باشند.



شکل ۳-۴ شمانیک کانتور L

با توجه به شکل ۳-۴ روابط زیر استخراج می‌شود:

$$\begin{cases} A_1 = A \cos(\theta_1) = A \cos(n, x) \\ A_2 = A \cos(\theta_2) = A \cos(n, y) \end{cases} \quad (۲۲-۳)$$

$$\begin{cases} \cos(n, x) = \cos(\theta_1) = \pm \frac{dy}{ds} \\ \cos(n, y) = \cos(\theta_2) = -\left(\pm \frac{dx}{ds}\right) \end{cases} \quad (۲۳-۳)$$

روابط تعادل نیرویی در جهت x و y به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} \sigma_x A_1 + \tau_{xy} A_2 = X_n A \\ \sigma_y A_2 + \tau_{xy} A_1 = Y_n A \end{cases} \quad (۲۴-۳)$$

برای مسأله‌ی اساسی نوع اول، هنگامی که نیروهای خارجی X_n و Y_n به مرزهای خارجی جسم

وارد می‌شوند، شرایط مرزی با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲۲-۳) در رابطه‌ی (۲۴-۳) به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = X_n \\ \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{xy} \cos(n, x) = Y_n \end{cases} \quad (۲۵-۳)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۲۳-۳) و روابط تابع تنش (۲۱-۳) در روابط (۲۵-۳)، روابط زیر به دست

می‌آید:

$$\begin{aligned} X_n &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) \left(\pm \frac{dy}{ds}\right) + \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right) \left(-\left(\pm \frac{dx}{ds}\right)\right) = \pm \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \\ Y_n &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) \left(-\left(\pm \frac{dx}{ds}\right)\right) + \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right) \left(\pm \frac{dy}{ds}\right) = \mp \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (۲۶-۳)$$

در نهایت انتگرال‌گیری از روابط بالا نسبت به ds انجام می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \pm \int_0^s X_n ds + c_1 \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \mp \int_0^s Y_n ds + c_2 \end{aligned} \quad (۲۷-۳)$$

برای مسأله‌ی اساسی نوع دوم، در حالتی که جابه‌جایی برای کانتور L در نظر گرفته شده باشد،

شرایط مرزی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} u = u^* \\ v = v^* \end{cases} \quad (۲۸-۳)$$

که در آن توابع u^* و v^* ، جابه‌جایی معلوم نقاط واقع بر کانتور L می‌باشند.

با ادغام روابط تابع تنش (۳-۲۱) و روابط قانون هوک (۳-۲۰) در معادله‌ی سازگاری (۳-۱۸)، برای مواد ناهمسانگرد، معادله‌ی سازگاری بر حسب تابع تنش U به شکل یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی چهارم به‌دست خواهد آمد. با حل این معادله و اعمال شرایط مرزی در آن، ۵ مجهول مسئله $(u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ به‌دست خواهند آمد.

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (۳-۲۹)$$

و برای مواد ارتوتروپیک^۱ در حالت تنش صفحه‌ای، طبق رابطه‌ی (۳-۱۷) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (۳-۳۰)$$

همچنین برای مواد همسانگرد به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (۳-۳۱)$$

بنابراین حل مسائل تنش صفحه‌ای تئوری الاستیسیته، به تعیین تابع تنش $U(x,y)$ که شرایط مرزی و معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه چهارم را ارضا می‌کند، خلاصه می‌شود. معادلات مرتبه‌ی چهارم فوق، به کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه اول به‌صورت زیر بیان می‌شود [۲۶]:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 U = 0$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (۳۲-۳)$$

که در آن μ_i ها ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی زیر می‌باشند.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (۳۳-۳)$$

¹ Orthotropic

به این منظور لخنیتسکی [۲۶] با حل معادله‌ی مرتبه‌ی چهارم (۳-۲۹) که مراحل حل آن در پیوست ب توضیح داده شده است، حل زیر را برای تابع تنش U در ماده‌ی ناهمسانگرد پیشنهاد نمود:

$$U(x, y) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (۳-۳۴)$$

که در آن Re نشان‌دهنده‌ی قسمت حقیقی یک عبارت مختلط و F_1 و F_2 توابع تحلیلی دلخواه هستند و متغیرهای مختلط z_1 و z_2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} z_1 &= x + \mu_1 y \\ z_2 &= x + \mu_2 y \end{aligned} \quad (۳-۳۵)$$

با تعریف مقادیر زیر

$$\begin{aligned} \phi_1(z_1) &= \frac{dF_1}{dz_1}, \quad \phi_2(z_2) = \frac{dF_2}{dz_2} \\ \phi'_1(z_1) &= \frac{d\phi_1}{dz_1}, \quad \phi'_2(z_2) = \frac{d\phi_2}{dz_2} \end{aligned} \quad (۳-۳۶)$$

حل مسائل تنش صفحه‌ای به تعیین دو تابع تحلیلی $\phi_1(z_1)$ و $\phi_2(z_2)$ که بر روی کانتور L شرایط مرزی تعیین شده را ارضا می‌کنند، محدود می‌شود. با مشخص شدن تابع تنش $U(x, y)$ برحسب توابع $\phi_1(z_1)$ و $\phi_2(z_2)$ ، مؤلفه‌های تنش در حالت دوبعدی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\text{Re}[\mu_1^2 \phi'_1(z_1) + \mu_2^2 \phi'_2(z_2)] \\ \sigma_y &= 2\text{Re}[\phi'_1(z_1) + \phi'_2(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2\text{Re}[\mu_1 \phi'_1(z_1) + \mu_2 \phi'_2(z_2)] \end{aligned} \quad (۳-۳۷)$$

با توجه به رابطه‌های (۳-۳۴) و (۳-۳۷)، بسط شرایط مرزی برحسب دو تابع $\phi_1(z_1)$ و $\phi_2(z_2)$

امکان‌پذیر است. برای مسأله‌ی اساسی نوع اول، شرایط مرزی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= 2\text{Re}[\mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2)] = \pm \int_0^s X_n ds + c_1 \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= 2\text{Re}[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] = \mp \int_0^s Y_n ds + c_2 \end{aligned} \quad (۳-۳۸)$$

بادغام روابط کرنش-جابجایی (۳-۱۹) و روابط قانون هوک (۳-۲۰):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (39-3)$$

و با انتگرال گیری از روابط فوق و با توجه به روابط (37-3):

$$\begin{aligned} u &= 2Re \left[a_{11}\mu_1^2 \int \frac{d\phi_1}{dz_1} dx + a_{11}\mu_2^2 \int \frac{d\phi_2}{dz_2} dx + a_{12} \int \frac{d\phi_1}{dz_1} dx \right. \\ &\quad \left. + a_{12} \int \frac{d\phi_2}{dz_2} dx - a_{16}\mu_1 \int \frac{d\phi_1}{dz_1} dx - a_{16}\mu_1 \int \frac{d\phi_2}{dz_2} dx \right] \\ v &= 2Re \left[a_{12}\mu_1^2 \int \frac{d\phi_1}{dz_1} dy + a_{12}\mu_2^2 \int \frac{d\phi_2}{dz_2} dy + a_{22} \int \frac{d\phi_1}{dz_1} dy \right. \\ &\quad \left. + a_{22} \int \frac{d\phi_2}{dz_2} dy - a_{26}\mu_1 \int \frac{d\phi_1}{dz_1} dy - a_{26}\mu_1 \int \frac{d\phi_2}{dz_2} dy \right] \end{aligned} \quad (40-3)$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} z_1 &= x + \mu_1 y \\ z_2 &= x + \mu_2 y \\ \frac{dz_1}{dx} &= \frac{dz_2}{dx} = 1 \\ \frac{dz_1}{dy} &= \mu_1 ; \frac{dz_2}{dy} = \mu_2 \end{aligned} \quad (41-3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d\phi_1}{dz_1} dx &= \int \frac{d\phi_1}{dz_1} \frac{dx}{dz_1} dz_1 = \phi_1 \\ \int \frac{d\phi_1}{dz_1} dy &= \int \frac{d\phi_1}{dz_1} \frac{dy}{dz_1} dz_1 = \frac{1}{\mu_1} \phi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= 2Re[(a_{11}\mu_1^2 + a_{12} - a_{16}\mu_1)\phi_1(z_1) \\ &\quad + (a_{11}\mu_2^2 + a_{12} - a_{16}\mu_2)\phi_2(z_2)] - \omega y + u_0 \end{aligned} \quad (42-3)$$

$$\begin{aligned} v &= 2Re \left[\left(a_{12}\mu_1 + \frac{a_{22}}{\mu_1} - a_{26} \right) \phi_1(z_1) \right. \\ &\quad \left. + \left(a_{12}\mu_2 + \frac{a_{22}}{\mu_2} - a_{26} \right) \phi_2(z_2) \right] + \omega x + v_0 \end{aligned}$$

در نهایت برای مسأله‌ی اساسی نوع دوم، شرایط مرزی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} 2Re[(a_{11}\mu_1^2 + a_{12} - a_{16}\mu_1)\phi_1(z_1) + (a_{11}\mu_2^2 + a_{12} - a_{16}\mu_2)\phi_2(z_2)] &= u^* + \omega y - u_0 \\ 2Re \left[\left(a_{12}\mu_1 + \frac{a_{22}}{\mu_1} - a_{26} \right) \phi_1(z_1) + \left(a_{12}\mu_2 + \frac{a_{22}}{\mu_2} - a_{26} \right) \phi_2(z_2) \right] &= v^* - \omega x - v_0 \end{aligned} \quad (43-3)$$

v_0, u_0, ω ثابت‌های دلخواهی هستند که طی انتگرال‌گیری ایجاد می‌شوند و حرکت صلب‌گونه ورق و جابجایی بدون تغییر شکل را مشخص می‌کنند؛ ω نشان‌دهنده چرخش و v_0, u_0 هم نشان‌دهنده‌ی جابجایی می‌باشند.

برای این‌که بتوان از σ_x و σ_y و τ_{xy} مقادیر σ_ρ و σ_θ و $\tau_{\rho\theta}$ را در مختصات منحنی‌الخط (ρ, θ) به دست آورد، از رابطه‌ی انتقال زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\rho \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\rho\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -CS & CS & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (44-3)$$

که در آن داریم:

$$\begin{cases} \cos \chi = C \\ \sin \chi = S \end{cases} \quad (45-3)$$

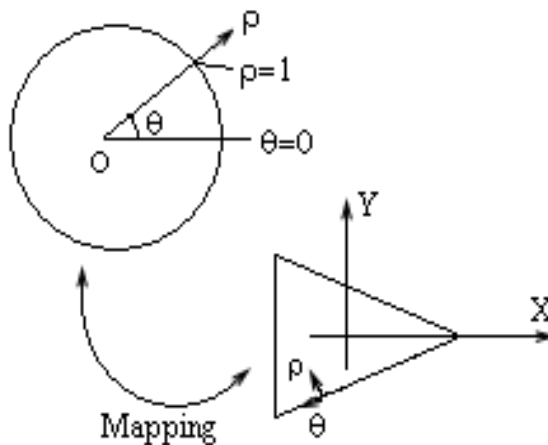
زاویه χ ، زاویه بین محور x ها و محور منحنی‌الخط ρ می‌باشد و جهت ρ عمود بر سطح گشودگی است.

با توجه به روابط فوق و روابط (3-37)، مقادیر σ_ρ و σ_θ و $\tau_{\rho\theta}$ بصورت زیر به دست خواهند آمد.

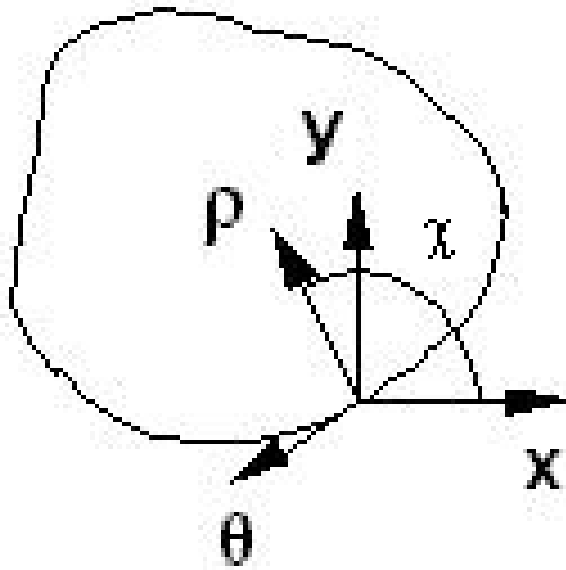
$$\sigma_\rho = 2\text{Re}[(C^2\mu_1^2 + S^2 - 2CS\mu_1)\phi_1'(z_1) + (C^2\mu_2^2 + S^2 - 2CS\mu_2)\phi_2'(z_2)] \quad (46-3)$$

$$\sigma_\theta = 2\text{Re}[(S^2\mu_1^2 + C^2 + 2CS\mu_1)\phi_1'(z_1) + (S^2\mu_2^2 + C^2 + 2CS\mu_2)\phi_2'(z_2)]$$

$$\tau_{\rho\theta} = 2\text{Re}[(-CS\mu_1^2 + CS - (C^2 - S^2)\mu_1)\phi_1'(z_1) + (-CS\mu_2^2 + CS - (C^2 - S^2)\mu_2)\phi_2'(z_2)]$$



شکل ۳-۵ مختصات منحنی‌الخط



شکل ۳-۶ انتقال بین مختصات کارتزین و منحنی الخط و بالعکس

برای محاسبه‌ی مؤلفه‌های تنش بر حسب متغیر مختلط ξ ، ابتدا بایستی مشتق $\phi'_j(z_j)$ به دست

آید:

$$\phi'_1(z_1) = \frac{d\phi_1(z_1)}{dz_1} = \frac{d\phi_1(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dz_1} = \frac{\phi'_1(\xi)}{z'_1(\xi)} \quad (47-3)$$

$$\phi'_2(z_2) = \frac{d\phi_2(z_2)}{dz_2} = \frac{d\phi_2(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dz_2} = \frac{\phi'_2(\xi)}{z'_2(\xi)}$$

با محاسبه‌ی مشتق $\frac{dz_j}{d\xi}$ به صورت زیر

$$z'_1(\xi) = \frac{dz_1}{d\xi} = \frac{R}{2} \left(a_1 - \frac{b_1}{\xi^2} + mpb_1 \xi^{p-1} - \frac{mpa_1}{\xi^{p+1}} \right) \quad (48-3)$$

$$z'_2(\xi) = \frac{dz_2}{d\xi} = \frac{R}{2} \left(a_2 - \frac{b_2}{\xi^2} + mpb_2 \xi^{p-1} - \frac{mpa_2}{\xi^{p+1}} \right)$$

$$a_j = (1 - i\mu_j) \cos \beta + (i + \mu_j) \sin \beta$$

$$b_j = (1 + i\mu_j) \cos \beta + (-i + \mu_j) \sin \beta$$

مؤلفه‌های تنش بر حسب متغیر مختلط ξ بصورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_x = 2Re \left[\mu_1^2 \frac{\phi_1'(\xi_1)}{z_1'(\xi_1)} + \mu_2^2 \frac{\phi_2'(\xi_2)}{z_2'(\xi_2)} \right] \quad (49-3)$$

$$\sigma_y = 2Re \left[\frac{\phi_1'(\xi_1)}{z_1'(\xi_1)} + \frac{\phi_2'(\xi_2)}{z_2'(\xi_2)} \right] \quad (50-3)$$

$$\tau_{xy} = -2Re \left[\mu_1 \frac{\phi_1'(\xi_1)}{z_1'(\xi_1)} + \mu_2 \frac{\phi_2'(\xi_2)}{z_2'(\xi_2)} \right] \quad (51-3)$$

$$\sigma_\rho = 2Re \left[(C^2\mu_1^2 + S^2 - 2CS\mu_1) \frac{\phi_1'(\xi_1)}{z_1'(\xi_1)} + (C^2\mu_2^2 + S^2 - 2CS\mu_2) \frac{\phi_2'(\xi_2)}{z_2'(\xi_2)} \right] \quad (52-3)$$

$$\sigma_\theta = 2Re \left[(S^2\mu_1^2 + C^2 + 2CS\mu_1) \frac{\phi_1'(\xi_1)}{z_1'(\xi_1)} + (S^2\mu_2^2 + C^2 + 2CS\mu_2) \frac{\phi_2'(\xi_2)}{z_2'(\xi_2)} \right] \quad (53-3)$$

$$\tau_{\rho\theta} = 2Re \left[(-CS\mu_1^2 + CS - (C^2 - S^2)\mu_1) \frac{\phi_1'(\xi_1)}{z_1'(\xi_1)} + (-CS\mu_2^2 + CS - (C^2 - S^2)\mu_2) \frac{\phi_2'(\xi_2)}{z_2'(\xi_2)} \right] \quad (54-3)$$

با مشخص شدن توابع $\phi_1(\xi)$ و $\phi_2(\xi)$ و با جای‌گذاری آن‌ها در معادلات فوق، مؤلفه‌های تنش

محاسبه و مسأله‌ی تنش صفحه‌ای حل می‌گردد.

در ورق‌های محدود علاوه بر هندسه‌ی گشودگی، شرایط مرز خارجی تأثیر بسزایی در توزیع تنش ورق دارد. تابع تنش ورق محدود حاوی گشودگی دایروی در صفحه، از جمع تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی در صفحه‌ی ξ با تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی در صفحه‌ی ξ به دست می‌آید. برای تحلیل تنش صفحه‌ی محدود دارای گشودگی، می‌توان توابع $\phi_1(\xi)$ و $\phi_2(\xi)$ را به صورت سری لورنت با توان بی‌نهایت شامل توان‌های مثبت و منفی در صفحه ξ [۲] در نظر گرفت.

$$\Phi_j(\xi_j) = \alpha_j \ln \xi_j + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{jk} \xi_j^{-k} + B_{jk} \xi_j^k) \quad (55-3)$$

که در آن α_j ، A_{jk} و B_{jk} ضرایب مجهول مسئله می‌باشند. جمله‌ی لگاریتمی رابطه فوق ناشی از نیروهای خارجی وارد بر مرز گشودگی می‌باشند و در غیاب این نیروها، جمله‌ی لگاریتمی حذف می‌گردد. در این رابطه، سری لورنت شامل جملاتی با توان‌های منفی که بر روی مرز گشودگی دایروی و ناحیه‌ی خارج آن تحلیلی می‌باشد، تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی را تشکیل می‌دهد. همچنین سری لورنت شامل جملاتی با توان‌های مثبت، که بر روی مرز خارجی ورق تحلیلی می‌باشد، تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی را تشکیل می‌دهد. برای این که بتوان همگرایی جواب‌ها بررسی شود، مقادیر تنش در ورق بایستی دارای مقادیر متناهی باشد، به همین جهت از سری لورنتی با تعداد جملات محدود استفاده می‌شود:

$$\Phi_1(\xi_1) = \sum_{k=1}^M (A_k \xi_1^{-k} + B_k \xi_1^k) \quad (56-3)$$

$$\Phi_2(\xi_2) = \sum_{k=1}^M (C_k \xi_2^{-k} + D_k \xi_2^k)$$

که M در آن تعداد جملات مربوط به بخش‌های مختلف سری لورنت می‌باشد. همچنین به خاطر در

نظر گرفتن حالت کلی برای ضرایب مجهول، آن‌ها مختلط در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} A_k = a_{1k} + ia_{2k} \\ B_k = b_{1k} + ib_{2k} \\ C_k = c_{1k} + ic_{2k} \\ D_k = d_{1k} + id_{2k} \end{cases} \quad (57-3)$$

با محاسبه‌ی مشتقات $\Phi_1'(\xi)$ و $\Phi_2'(\xi)$ به صورت زیر:

$$\Phi_1'(\xi) = \frac{d\Phi_1(\xi)}{d\xi} = \sum_{k=1}^M (-A_k \cdot k \cdot \xi^{-k-1} + B_k \cdot k \cdot \xi^{k-1}) \quad (58-3)$$

$$\Phi_2'(\xi) = \frac{d\Phi_2(\xi)}{d\xi} = \sum_{k=1}^M (-C_k \cdot k \cdot \xi^{-k-1} + D_k \cdot k \cdot \xi^{k-1})$$

و با جای گذاری روابط (۵۸-۳) در روابط (۴۹-۳) تا (۵۴-۳)، مؤلفه‌های تنش به شکل نهایی زیر

به دست می‌آیند:

$$\sigma_x = 2Re \sum_{k=1}^M \left[\frac{\mu_1^2}{Z_1'(\xi_1)} (-A_k \cdot k \cdot \xi_1^{-k-1} + B_k \cdot k \cdot \xi_1^{k-1}) + \frac{\mu_2^2}{Z_2'(\xi_2)} (-C_k \cdot k \cdot \xi_2^{-k-1} + D_k \cdot k \cdot \xi_2^{k-1}) \right] \quad (۵۹-۳)$$

$$\sigma_y = 2Re \sum_{k=1}^M \left[\frac{1}{Z_1'(\xi_1)} (-A_k \cdot k \cdot \xi_1^{-k-1} + B_k \cdot k \cdot \xi_1^{k-1}) + \frac{1}{Z_2'(\xi_2)} (-C_k \cdot k \cdot \xi_2^{-k-1} + D_k \cdot k \cdot \xi_2^{k-1}) \right] \quad (۶۰-۳)$$

$$\tau_{xy} = -2Re \sum_{k=1}^M \left[\frac{\mu_1}{Z_1'(\xi_1)} (-A_k \cdot k \cdot \xi_1^{-k-1} + B_k \cdot k \cdot \xi_1^{k-1}) + \frac{\mu_2}{Z_2'(\xi_2)} (-C_k \cdot k \cdot \xi_2^{-k-1} + D_k \cdot k \cdot \xi_2^{k-1}) \right] \quad (۶۱-۳)$$

$$\sigma_\rho = 2Re \sum_{k=1}^M \left[\frac{C^2 \mu_1^2 + S^2 - 2SC\mu_1}{z_1'(\xi)} (-A_k \cdot k \cdot \xi^{-k-1} + B_k \cdot k \cdot \xi^{k-1}) + \frac{C^2 \mu_2^2 + S^2 - 2SC\mu_2}{z_2'(\xi)} (-C_k \cdot k \cdot \xi^{-k-1} + D_k \cdot k \cdot \xi^{k-1}) \right] \quad (۶۲-۳)$$

$$\sigma_\theta = 2Re \sum_{k=1}^M \left[\frac{s^2 \mu_1^2 + C^2 + 2SC\mu_1}{z_1'(\xi)} (-A_k \cdot k \cdot \xi^{-k-1} + B_k \cdot k \cdot \xi^{k-1}) + \frac{s^2 \mu_2^2 + C^2 + 2SC\mu_2}{z_2'(\xi)} (-C_k \cdot k \cdot \xi^{-k-1} + D_k \cdot k \cdot \xi^{k-1}) \right] \quad (۶۳-۳)$$

$$\tau_{\rho\theta} = 2Re \sum_{k=1}^M \left[\frac{-CS\mu_1^2 + CS - (C^2 - S^2)\mu_1}{z_1'(\xi)} (-A_k \cdot k \cdot \xi^{-k-1} + B_k \cdot k \cdot \xi^{k-1}) + \frac{-CS\mu_2^2 + CS - (C^2 - S^2)\mu_2}{z_2'(\xi)} (-C_k \cdot k \cdot \xi^{-k-1} + D_k \cdot k \cdot \xi^{k-1}) \right] \quad (۶۴-۳)$$

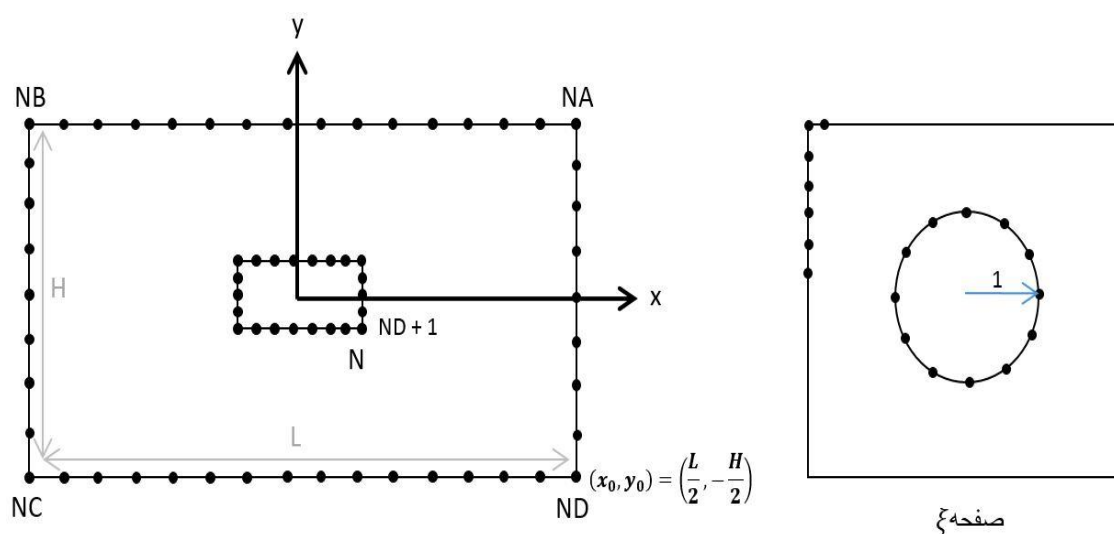
۳-۵ محاسبه‌ی ضرایب مجهول

با توجه به روابط ذکر شده برای بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی، نیاز به محاسبه‌ی ضرایب مجهول می‌باشد.

نیروها و جابجایی‌های وارد شده بر مرزها از طریق شرایط مرزی نیرویی و جابجایی با توابع تحلیلی ϕ_1 و ϕ_2 رابطه دارند. در هر نقطه از مرز خارجی و داخلی، دو شرط مرزی نیرویی رابطه (۳-۳۸) تأثیر می‌گذارد و با توجه به رابطه $\{F\}_{(2N*1)} = \{X\}_{(4M*1)} = [P]_{(2N*4M)}$ تعداد معادلات بیشتر از تعداد مجهولات ($2N \gg 8M$) می‌باشد و برای حل این نوع معادلات و بهبود همگرایی حل از روش حداقل مربعات مرزی استفاده شده است که روند حل در ادامه تشریح می‌گردد.

۳-۵-۱ تعیین نقاط منتخب

یک صفحه‌ی نازک (ورق) مستطیلی غیرهمسانگرد با طول L و ارتفاع H ، با یک گشودگی چندضلعی منظم که در مرکز ورق (و در مرکز مختصات ورق) قرار دارد، در نظر گرفته می‌شود. برای استفاده از روش حل مسئله (روش حداقل مربعات مرزی)، به نقاط منتخب بر روی مرز داخلی و خارجی در صفحه ξ نیاز می‌باشد.



شکل ۳-۷ موقعیت نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در صفحه‌ی ξ و مرز خارجی در صفحه‌ی ζ

N_1 تعداد نقاط منتخب بر روی هر یک از لبه های مرز خارجی ورق، N_2 تعداد نقاط منتخب بر روی مرز گشودگی، N تعداد کل نقاط منتخب و اندیس s شماره نقاط منتخب می باشد. تعداد نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در این پایان نامه پس از همگرا شدن جوابها 80 و بر روی مرز خارجی 120 می باشد.

$$\begin{aligned} NA &= N_1 \\ NB &= NA + N_1 \\ NC &= NB + N_1 \\ ND &= NC + N_1 \\ N &= ND + N_2 \end{aligned} \quad (65-3)$$

نقاط با فاصله ی مساوی روی مرز انتخاب شده اند و برای تولید شماره های نقاط و طول و عرض آنها روی مرز خارجی و روی گشودگی، از روابط زیر استفاده می شود:

$$\left\{ \begin{aligned} (x_s, y_s) &= \left(\frac{L}{2}, -\frac{H}{2} \right) & ; & \quad s = 0 \\ (x_s, y_s) &= \left(x_{s-1}, y_{s-1} + \frac{H}{N_1} \right) & ; & \quad 1 \leq s \leq NA \\ (x_s, y_s) &= \left(x_{s-1} - \frac{L}{N_1}, y_{s-1} \right) & ; & \quad NA + 1 \leq s \leq NB \\ (x_s, y_s) &= \left(x_{s-1}, y_{s-1} - \frac{H}{N_1} \right) & ; & \quad NB + 1 \leq s \leq NC \\ (x_s, y_s) &= \left(x_{s-1} + \frac{L}{N_1}, y_{s-1} \right) & ; & \quad NC + 1 \leq s \leq ND \\ (x_s, y_s) &= (Re(z_s), Im(z_s)) & ; & \quad ND + 1 \leq s \leq N \end{aligned} \right. \quad (66-3)$$

که در آن s شمارنده ی نقاط منتخب می باشد. برای نقاط روی مرز خارجی ورق با استفاده از رابطه ی (۱۱-۳)، رابطه ی (۶۷-۳) را به صورت زیر تعریف می کنیم تا از طریق آن تمام نقاط تعریف شده در لبه های ورق در صفحه ی z به نقاط متناظر آنها در صفحه ی ξ تبدیل شوند.

$$\begin{cases} Re[Rmb_j \xi^{2P} + Ra_j \xi^{p+1} - 2z_j \xi^P + Rb_j \xi^{p-1} + Rma_j] = 0 \\ Im[Rmb_j \xi^{2P} + Ra_j \xi^{p+1} - 2z_j \xi^P + Rb_j \xi^{p-1} + Rma_j] = 0 \end{cases} \quad (67-3)$$

به این صورت که تمام نقاط منتخب لبه‌های خارجی ورق را بصورت (x_s, y_s) وارد رابطه‌ی دومعادله-
دومجهول (۶۷-۳) کرده و جواب‌های معادله را که به صورت (ρ_s, θ_s) می‌باشند، در معادله‌ی (۶۸-۳)
قرار داده می‌شود.

$$\xi_s = \rho_s e^{i\theta_s} \quad (۶۸-۳)$$

همچنین نقاط روی مرز گشودگی نیز به صورت نقاط دور دایره‌ی واحد در صفحه‌ی ξ تعریف
می‌شوند.

$$\theta_s = (s - ND - 1) \frac{2\pi}{N_2} ; \quad ND + 1 \leq s \leq N \quad (۶۹-۳)$$

و نقاط تعریف‌شده از آن که به صورت θ_s می‌باشند، در رابطه‌ی زیر قرار می‌گیرد.

$$\xi_s = e^{i\theta_s} \quad (۷۰-۳)$$

۳-۵-۲ تعیین شرایط مرزی

در استفاده از روش حداقل مربعات مرزی، برای شرایط مرزی داخلی از شرایط مرزی دایره‌ی واحد
در صفحه‌ی ξ و در مختصات قطبی استفاده شده است. شرایط مرزی بر روی مرز گشودگی، به صورت
زیر است:

$$\sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0 \quad \text{on} \quad |\xi| = \rho = 1 \quad (۷۱-۳)$$

در حالی که برای شرایط مرزی خارجی ورق (لبه‌های ورق)، از شرایط مرزی ورق در صفحه‌ی z و
مختصات کارتیزین استفاده می‌شود. شرایط مرزی خارجی ورق محدود حاوی گشودگی به صورت زیر
است:

$$\sigma_x \cos^2 \gamma + \sigma_y \sin^2 \gamma + 2\tau_{xy} \sin \gamma \cos \gamma = \sigma_n \quad (۷۲-۳)$$

$$(\sigma_y - \sigma_x) \sin \gamma \cos \gamma + \tau_{xy} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = \tau_n$$

در معادلات (۷۲-۳) γ زاویه‌ی بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و محور x می‌باشد. همچنین

σ_n و τ_n به ترتیب تنش نرمال و تنش برشی در مرز خارجی می‌باشند.

با استفاده از معادلات فوق، با توجه به شکل ۱-۲ شرایط مرزی برای هر سه نوع بارگذاری مورد بحث در پایان نامه به شرح زیر خواهد بود.

(۱) بارگذاری کششی تک محوری (در جهت y)

$$\sigma_\rho = 0, \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad \text{روی مرز داخلی} \quad (۷۳-۳)$$

$$\sigma_x = \sigma_n = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_n = 0 \quad \text{روی ضلع‌های عمودی AB و CD}$$

$$\sigma_y = \sigma_n = \sigma_0, \quad \tau_{xy} = \tau_n = 0 \quad \text{روی ضلع‌های افقی BC و DA}$$

(۲) بارگذاری کششی دومحوری

$$\sigma_\rho = 0, \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad \text{روی مرز داخلی} \quad (۷۴-۳)$$

$$\sigma_x = \sigma_n = \lambda\sigma_0, \quad \tau_{xy} = \tau_n = 0 \quad \text{روی ضلع‌های عمودی AB و CD}$$

$$\sigma_y = \sigma_n = \sigma_0, \quad \tau_{xy} = \tau_n = 0 \quad \text{روی ضلع‌های افقی BC و DA}$$

(۳) بارگذاری برشی

$$\sigma_\rho = 0, \quad \tau_{\rho\theta} = 0 \quad \text{روی مرز داخلی} \quad (۷۵-۳)$$

$$\sigma_x = \sigma_n = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_n = \tau_0 \quad \text{روی ضلع‌های عمودی AB و CD}$$

$$\sigma_y = \sigma_n = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_n = \tau_0 \quad \text{روی ضلع‌های افقی BC و DA}$$

σ_0 تنش کششی وارد شده بر مرز خارجی ورق می‌باشد و در این پایان نامه 1MPa در نظر گرفته

شده است. همچنین در بارگذاری کششی دومحوری $\lambda = 1$ و در بارگذاری برشی τ_0 برابر 1MPa

می‌باشد.

۳-۵-۳ محاسبه‌ی مجذور باقی‌مانده‌ی مرزی

براساس روش حداقل مربعات مرزی، مجذور باقی‌مانده‌ی مرزی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta^2 = \int_{\Gamma} r^2 dr \quad (76-3)$$

که در آن Γ مرز خارجی و داخلی کانتور می‌باشد. شکل گسسته‌ی مجذور باقی‌مانده‌ی مرزی به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta^2 = \sum_{s=1}^N [r_1^2(\xi_s) + r_2^2(\xi_s)] \quad ; \quad (N = 4N_1 + N_2) \quad (77-3)$$

$r_2(\xi_s), r_1(\xi_s)$ باقی‌مانده‌ی دو شرایط مرزی در نقاط منتخب روی مرزهای کانتور می‌باشند. به این صورت که r_1 و r_2 اختلاف دو تنش، یکی تنش حاصل از شرایط مرزی و دیگری تنش حاصل از حل تحلیلی ارائه شده در نقاط منتخب بر روی مرزها می‌باشند. با استفاده از معادلات فوق، محاسبه‌ی Δ^2 برای هر سه نوع بارگذاری مورد بحث در پایان‌نامه به شرح زیر خواهد بود.

(۱) بارگذاری کششی تک محوری

$$\begin{cases} r_1(\xi_s) = \sigma_\rho(\xi_s) \\ r_2(\xi_s) = \tau_{\rho\theta}(\xi_s) \end{cases} \quad \begin{matrix} ND + 1 \ll s \ll N \\ \text{روی مرز داخلی} \end{matrix} \quad (78-3)$$

$$\begin{cases} r_1(\xi_s) = \sigma_x(\xi_s) \\ r_2(\xi_s) = \tau_{xy}(\xi_s) \end{cases} \quad \begin{matrix} \{ 1 \ll s \ll NA \\ NB + 1 \ll s \ll NC \end{matrix} \quad \text{روی ضلع‌های عمودی}$$

$$\begin{cases} r_1(\xi_s) = \sigma_y(\xi_s) - \sigma_0 \\ r_2(\xi_s) = \tau_{xy}(\xi_s) \end{cases} \quad \begin{matrix} \{ NA + 1 \ll s \ll NB \\ NC + 1 \ll s \ll ND \end{matrix} \quad \text{روی ضلع‌های افقی}$$

(۲) بارگذاری کششی دوماحوری

$$\begin{cases} r_1(\xi_s) = \sigma_\rho(\xi_s) \\ r_2(\xi_s) = \tau_{\rho\theta}(\xi_s) \end{cases} \quad \begin{matrix} ND + 1 \ll s \ll N \\ \text{روی مرز داخلی} \end{matrix} \quad (79-3)$$

$$\begin{cases} r_1(\xi_s) = \sigma_x(\xi_s) - \lambda\sigma_0 \\ r_2(\xi_s) = \tau_{xy}(\xi_s) \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \ll s \ll NA \\ NB + 1 \ll s \ll NC \end{cases} \quad \text{روی ضلع‌های عمودی}$$

$$\begin{cases} r_1(\xi_s) = \sigma_y(\xi_s) - \sigma_0 \\ r_2(\xi_s) = \tau_{xy}(\xi_s) \end{cases} \quad \begin{cases} NA + 1 \ll s \ll NB \\ NC + 1 \ll s \ll ND \end{cases} \quad \text{روی ضلع‌های افقی}$$

۳) بارگذاری برشی

$$\begin{cases} r_1(\xi_s) = \sigma_\rho(\xi_s) \\ r_2(\xi_s) = \tau_{\rho\theta}(\xi_s) \end{cases} \quad ND + 1 \ll s \ll N \quad \text{روی مرز داخلی (۸۰-۳)}$$

$$\begin{cases} r_1(\xi_s) = \sigma_x(\xi_s) \\ r_2(\xi_s) = \tau_{xy}(\xi_s) - \tau_0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \ll s \ll NA \\ NB + 1 \ll s \ll NC \end{cases} \quad \text{روی ضلع‌های عمودی}$$

$$\begin{cases} r_1(\xi_s) = \sigma_y(\xi_s) \\ r_2(\xi_s) = \tau_{xy}(\xi_s) - \tau_0 \end{cases} \quad \begin{cases} NA + 1 \ll s \ll NB \\ NC + 1 \ll s \ll ND \end{cases} \quad \text{روی ضلع‌های افقی}$$

۳-۵-۴ حل معادلات

پس از به‌دست آوردن Δ^2 برای هر نوع بارگذاری، به منظور کمینه کردن تابع اختلاف به‌دست‌آمده،

از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{1k}} = 0 ; \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{2k}} = 0 ; \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{1k}} = 0 ; \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{2k}} = 0 \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{1k}} = 0 ; \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{2k}} = 0 ; \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{1k}} = 0 ; \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{2k}} = 0 \end{aligned} \quad (۸۱-۳)$$

در نتیجه از روابط فوق، دستگاه معادلاتی خطی تشکیل می‌شود که از حل آن، ثوابت مجهول

به‌دست می‌آیند. با جای‌گذاری این ثوابت در معادلات تنش نهایی (۳-۵۹) تا (۳-۶۴)، مؤلفه‌های تنش

به‌دست‌آمده و مسأله‌ی موردنظر حل می‌گردد.

۳-۶ الگوریتم حل تحلیلی

الگوریتم حل تحلیلی مسأله‌ی مورد نظر به ترتیب به شرح زیر است:

- ۱- تعیین فرم تابع نگاشت با توجه به تعریف پارامترهای β و n و m و R .
- ۲- تعیین ماتریس نرمی با توجه به نوع ماده و زاویه‌ی الیاف.
- ۳- تعیین ریشه‌های معادله‌ی مشخصه در رابطه‌ی (۳-۳۳).
- ۴- تعریف نقاط منتخب روی مرز خارجی با استفاده از روابط (۳-۶۶) و تبدیل نقاط تعریف شده در صفحه z به نقاط متناظر آن‌ها در صفحه ξ با استفاده از روابط (۳-۶۷).
- ۵- تعریف نقاط منتخب روی مرز گشودگی در صفحه ξ با استفاده از رابطه‌ی (۳-۶۹).
- ۶- تعیین نوع بارگذاری و شرایط مرزی مربوط به آن به وسیله‌ی روابط (۳-۷۳) تا (۳-۷۵).
- ۷- محاسبه‌ی مجذور باقی‌مانده‌ی مرزی به وسیله‌ی روابط (۳-۷۸) تا (۳-۸۰).
- ۸- حل معادلات (۳-۸۱)، به منظور کمینه کردن تابع اختلاف به دست آمده.
- ۹- بدست آوردن ثابت‌های مجهول به وسیله‌ی حل دستگاه معادلات خطی تشکیل شده.
- ۱۰- محاسبه‌ی مؤلفه‌های تنش با جای‌گذاری این ثوابت در روابط (۳-۵۹) تا (۳-۶۴).

۳-۷ جمع‌بندی

در این فصل معادلات حاکم بر مسأله‌ی مورد بررسی، استخراج شد. در فصل آینده، با استفاده از روابط ارائه‌شده در این فصل، توزیع تنش در اطراف انواع گشودگی‌های منتظم به دست می‌آید و تأثیر پارامترهای اثرگذار بر توزیع تنش، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فصل ۴ : نتایج

۱-۴ مقدمه

محاسبات ریاضی برای به دست آوردن تنش‌های پیرامون گشودگی چندضلعی در یک صفحه‌ی ناهمسانگرد محدود، در فصل قبلی نشان داده شد.

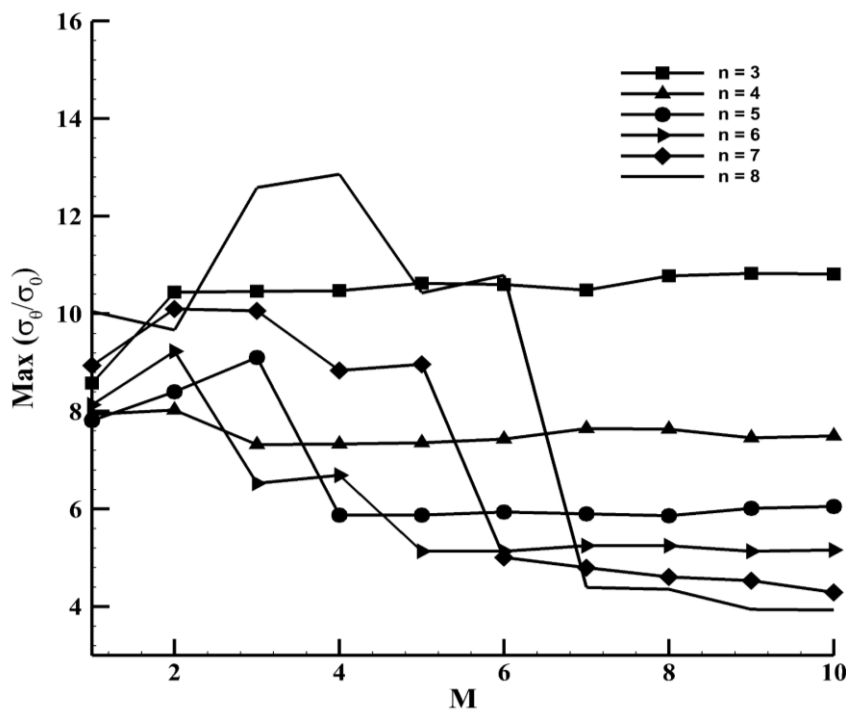
یک برنامه بر طبق فرمول‌ها جهت محاسبه‌ی تنش‌ها در صفحه‌ی محدود نوشته شده است. ورودی‌های این برنامه عبارتند از: پارامترهای بارگذاری λ و γ ، پارامترهای تابع نگاشت، اندازه‌ی ورق محدود L و H ، تعداد اضلاع چندضلعی، زاویه‌ی چرخش گشودگی β ، خواص مواد و زاویه‌ی الیاف. مقدار و نحوه‌ی توزیع تنش در صفحات ناهمسانگرد حاوی گشودگی، وابسته به جنس ماده و خواص مکانیکی آن می‌باشد. خواص مکانیکی برای مواد مختلف به ترتیب در جدول ۱-۴ آمده است.

جدول ۱-۴ خواص مکانیکی مواد مختلف

ν_{12}	G_{12} (GPa)	E_2 (GPa)	E_1 (GPa)	
۰,۲۸	۷,۱۷	۱۰,۳	۱۸۲	Graphite/Epoxy
۰,۲۶	۷	۱۶,۲	۴۷,۴	Glass/Epoxy
۰,۰۷۱	۰,۶۹	۵,۸۹	۱۱,۷۹	Plywood
۰,۲۷	۱۰,۳۵	۲۳,۷۹	۲۸۲,۷۷	Boron/Epoxy
۰,۲۶	۸۰	۲۰,۵	۲۰,۵	همسانگرد

۲-۴ بررسی همگرایی نتایج

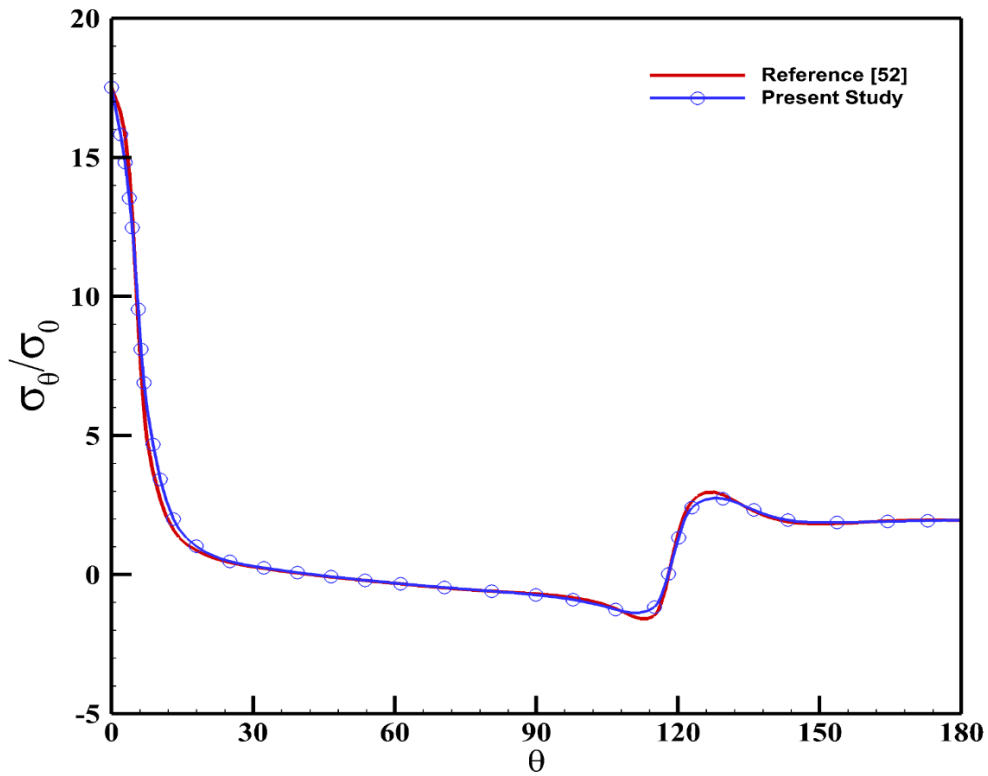
در طول حل سیستم معادلات تا زمان همگرایی نتایج، فرآیند تکراری افزایش تعداد جملات سری لورنت (M)، اعمال می‌شود. راه‌حل همگرا برای محاسبه‌ی توزیع تنش پیرامون گشودگی استفاده می‌شود. شکل ۱-۴ همگرایی خوبی از عامل بیشینه‌ی تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی‌های چندضلعی مختلف را برای ورق Glass/Epoxy[0] با $L=H=10$ که تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y قرار گرفته، نشان می‌دهد.



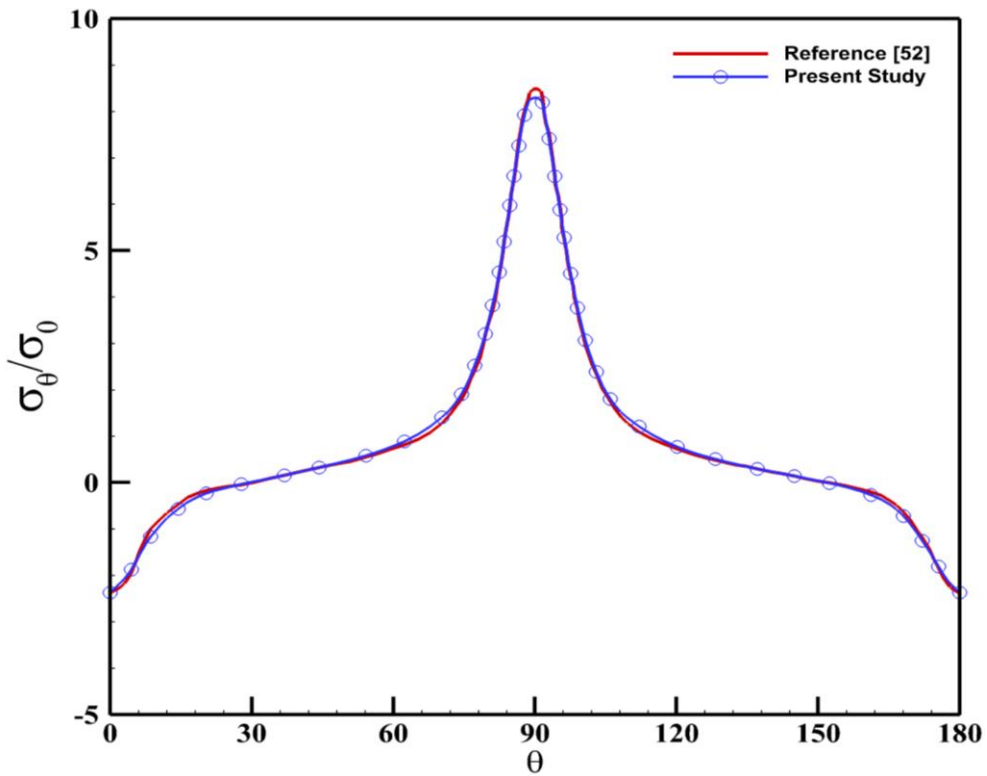
شکل ۱-۴ همگرایی حل تحلیلی با بررسی بیشینه‌ی تنش بی‌بعد نسبت به افزایش تعداد جملات سری لورنت

۳-۴ بررسی درستی جواب‌ها

می‌توان نتایج به‌دست آمده‌ی ورق نامحدود در تحقیق حاضر (جدول ۲-۴ تا جدول ۴-۶) را با نتایج روش ارائه شده توسط یوکادگانونکر و رائو [۳۰] مقایسه کرد. در این مرجع [۳۰] توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در ورق ناهمسانگرد نامحدود را تحت بارگذاری درون صفحه‌ای با استفاده از روش گائو و بدون استفاده از جمع آثار به‌دست آوردند. نتایج مشابه به‌دست آمده از طریق روش حاضر برای ورق بزرگ ($L=100$)، با نتایج ورقه‌ی نامحدود، نشانگر توانایی روش حاضر برای ایجاد راه‌حل‌های رضایت‌بخش برای ورقه‌ی نامحدود نیز می‌باشد. همچنین توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی ورقه‌ی تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y را با نتایج ارائه شده توسط شارما [۵۲]، در شکل ۲-۴ برای گشودگی مثلثی در ورق ناهمسانگرد محدود با خواص Glass/Epoxy[90] و شکل ۳-۴ برای ورق همسانگرد محدود با گشودگی مربعی، مقایسه شده است و برای هر دو نوع ماده‌ی همسانگرد و ناهمسانگرد نتایجی مشابه با نتایج مرجع [۵۲] به‌دست می‌دهد؛ درحالی‌که با توجه به روش‌های به‌کار رفته شده در کد در برخی رئوس گشودگی‌ها، بیشترین خطا برابر با ۴ درصد است.



شکل ۲-۴ مقایسه‌ی نتایج توزیع تنش بی‌بعد حل حاضر و مرجع [۵۲]، پیرامون گشودگی مثلثی ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y

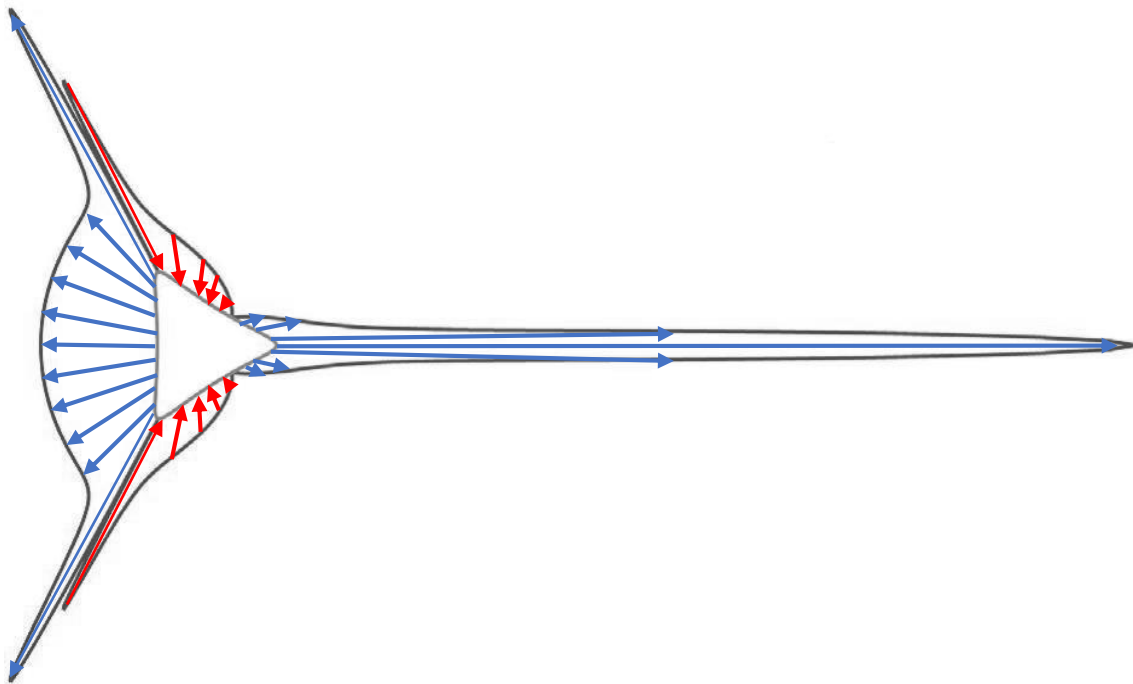


شکل ۳-۴ مقایسه‌ی نتایج توزیع تنش بی‌بعد حل حاضر و مرجع [۵۲]، پیرامون گشودگی مربعی ورق محدود همسانگرد تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y

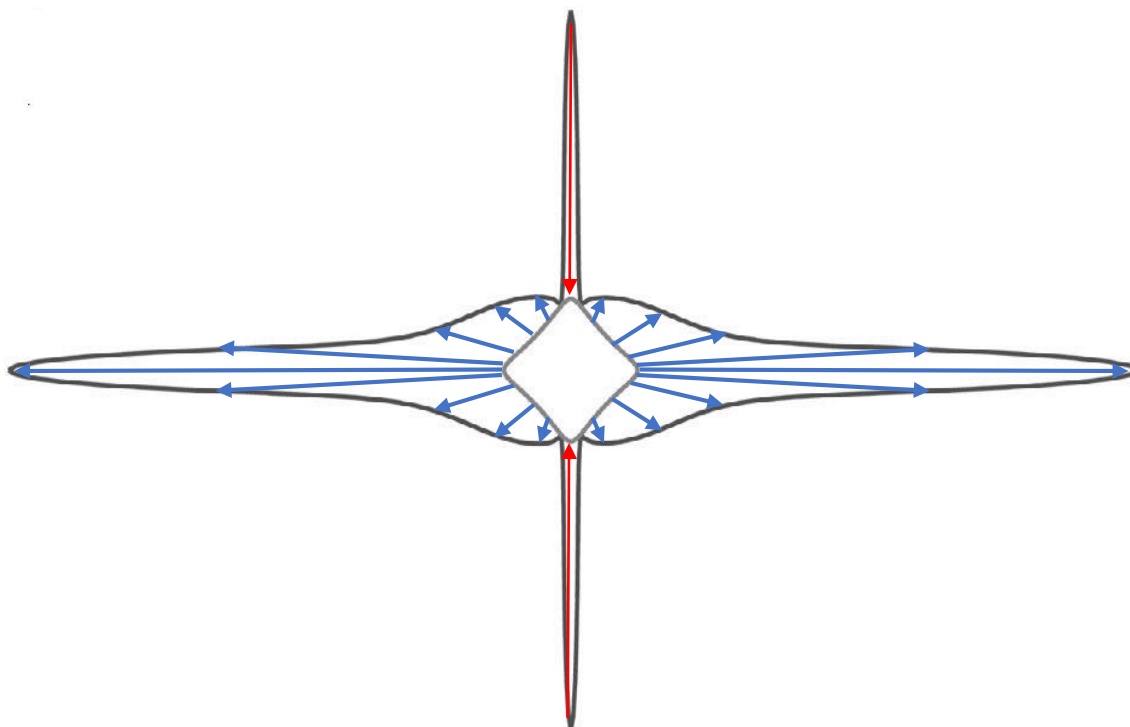
۴-۴ تأثیر پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش

در این بخش سعی می‌شود تأثیر پارامترهایی همچون نوع بارگذاری، اندازه‌ی ورق، نوع هندسه‌ی گشودگی (تعداد اضلاع)، مکان گوشه‌ها (چرخش گشودگی)، شکل گوشه‌ها (شعاع انحنا‌ی گوشه‌ها)، ناهمسانگردی (زاویه‌ی الیاف) و جنس‌های مختلف ماده بر توزیع تنش اطراف گشودگی‌های چندضلعی مورد بررسی قرار گیرد. در این بخش و بخش‌های دیگر به‌منظور بررسی تأثیر هر پارامتر بر توزیع تنش و مقادیر بیشینه‌ی آن‌ها، سایر پارامترها ثابت در نظر گرفته می‌شوند.

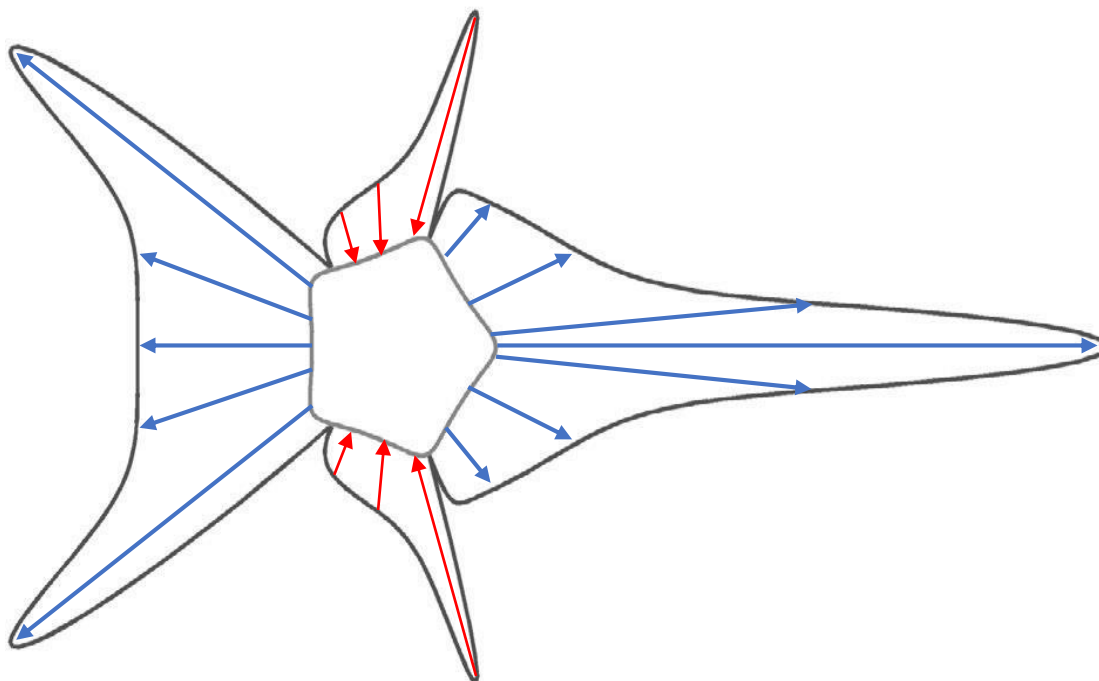
در شکل ۴-۴ تا شکل ۹-۴ نمایشی از توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی‌های مختلف چندضلعی برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص $Glass/Epoxy[0]$ ، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ که تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y قرار گرفته، نشان داده شده است. تفاوت نحوه‌ی توزیع تنش بی‌بعد اطراف گشودگی‌های مختلف با توجه به تعداد رئوس چندضلعی و مکان رئوس در زاویه‌های مختلف در این شکل‌ها مشاهده می‌شود. درحالی‌که در شرایط بارگذاری مختلف، توزیع تنش متفاوتی پیرامون گشودگی‌ها ایجاد می‌شود.



شکل ۴-۴ توزیع المان تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مثلثی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص $Glass/Epoxy[0]$ ، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y

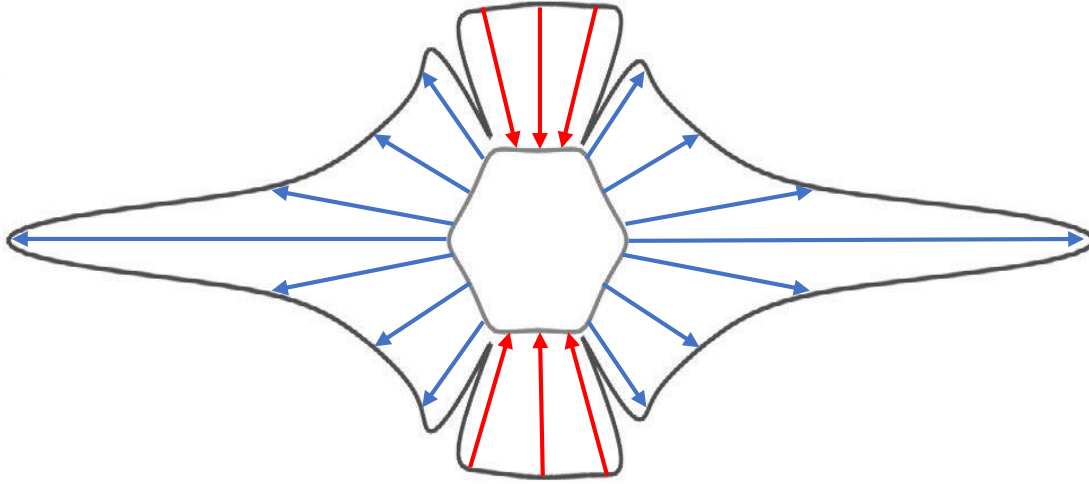


شکل ۴-۵ توزیع المان تنش بی بعد پیرامون گشودگی مربعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[0]، زاویه چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک محوری در جهت y

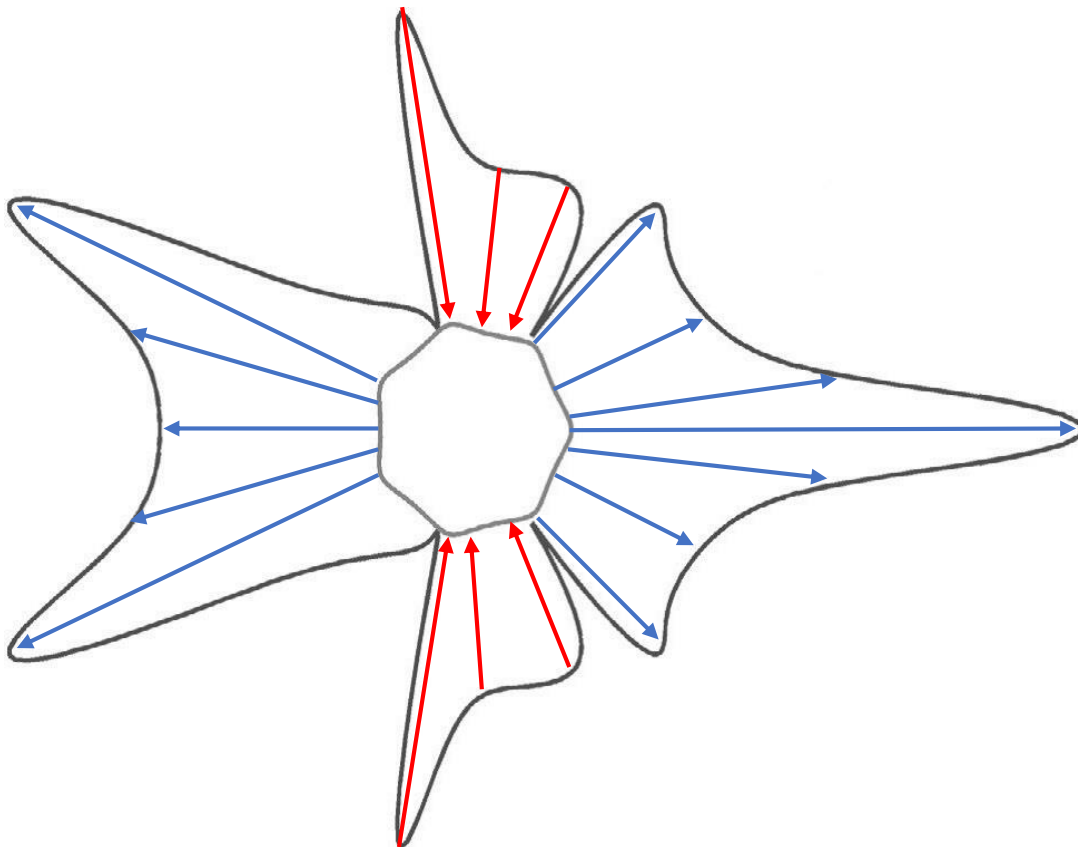


شکل ۴-۶ توزیع المان تنش بی بعد پیرامون گشودگی پنج ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص

Glass/Epoxy[0]، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y

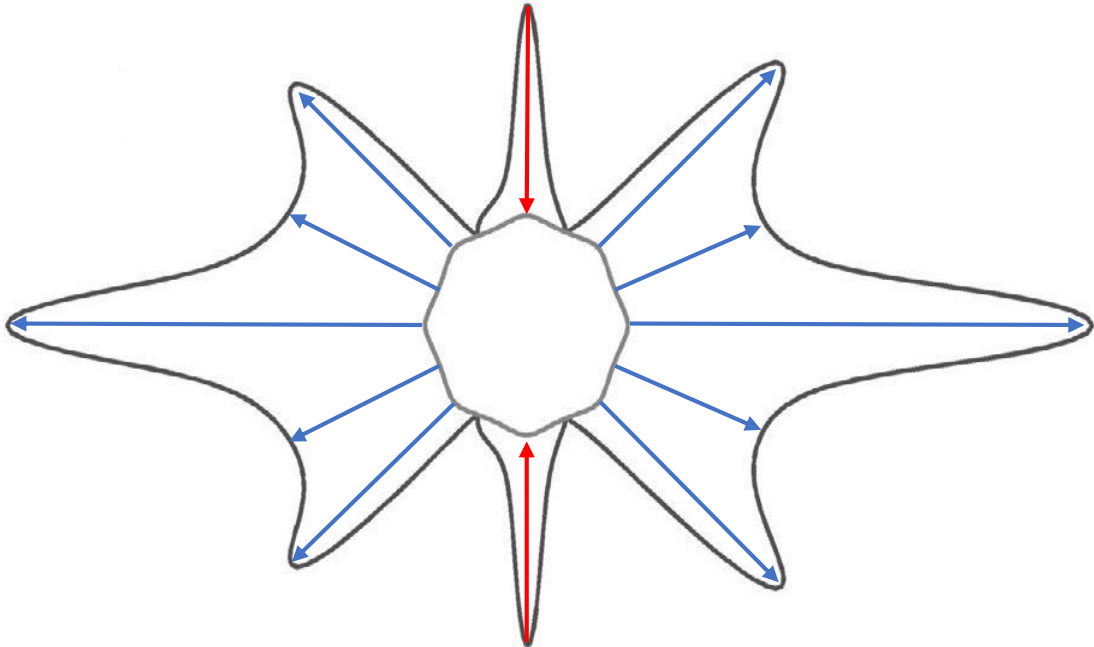


شکل ۴-۷ توزیع المان تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی شش ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[0]، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



شکل ۴-۸ توزیع المان تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی هفت ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص

Glass/Epoxy[0]، زاویه چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک محوری در جهت y



شکل ۹-۴ توزیع المان تنش بی بعد پیرامون گشودگی هشت ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[0]، زاویه چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک محوری در جهت y

۱-۴-۴ تأثیر شرایط بارگذاری مختلف

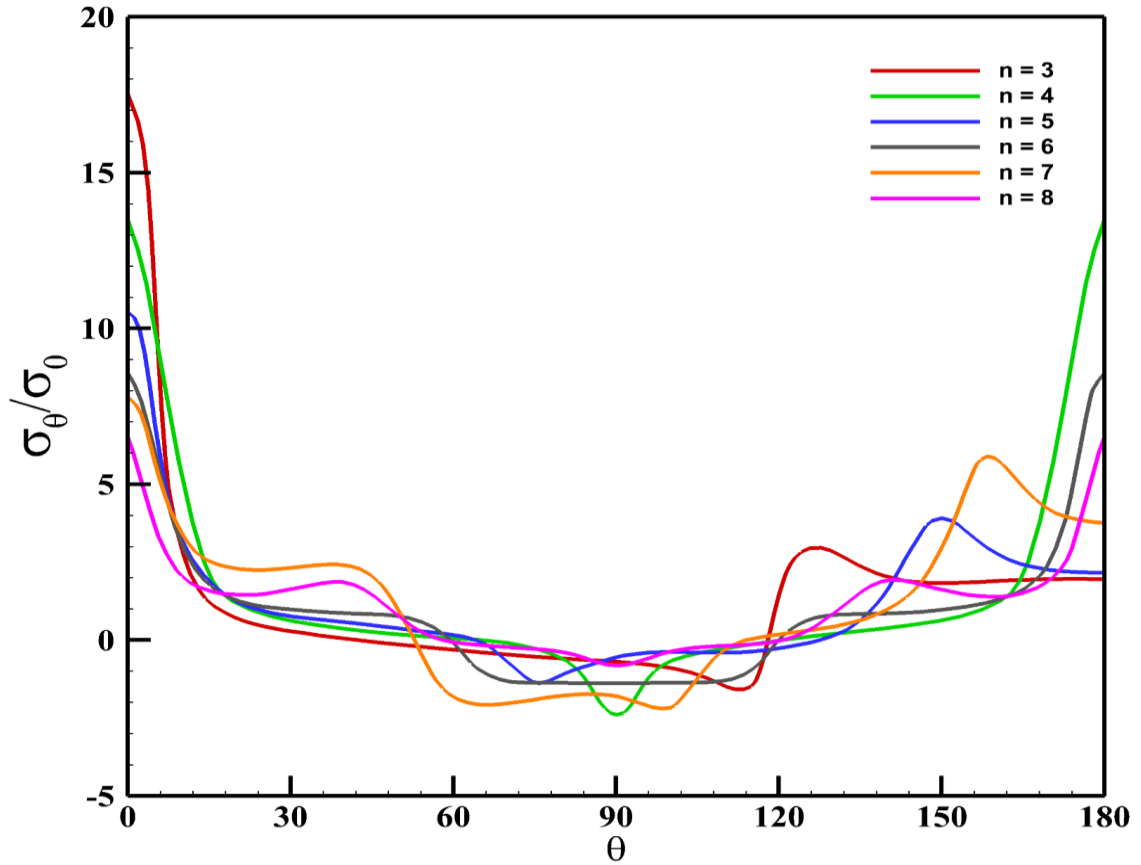
توزیع تنش بی بعد پیرامون گشودگی‌های چندضلعی مختلف در ورقه‌ی محدود تحت شرایط بارگذاری درون صفحه‌ای مختلف، در شکل ۱۰-۴ تا شکل ۱۳-۴ برای ورق ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[90] و شکل ۱۴-۴ تا شکل ۱۷-۴ برای ورق همسانگرد نشان داده شده است. برای این نتایج، در همه‌ی بارگذاری‌ها رفتار متناوب پس از زاویه‌ی 180° مشاهده می‌شود؛ به همین دلیل نتایج تا زاویه‌ی 180° گزارش شده است.

مشاهده می‌شود که تمرکز تنش در رئوس مختلف گشودگی چندضلعی با توجه به مکان آن و با توجه به جهت بارگذاری، مختلف است. برای بارگذاری یک محوری در جهت y ، تمرکز تنش در رئوس 0° و 180° ایجاد می‌شود. در حالی که بارگذاری تک محوری در جهت x ، رئوس در 0° و 180° ،

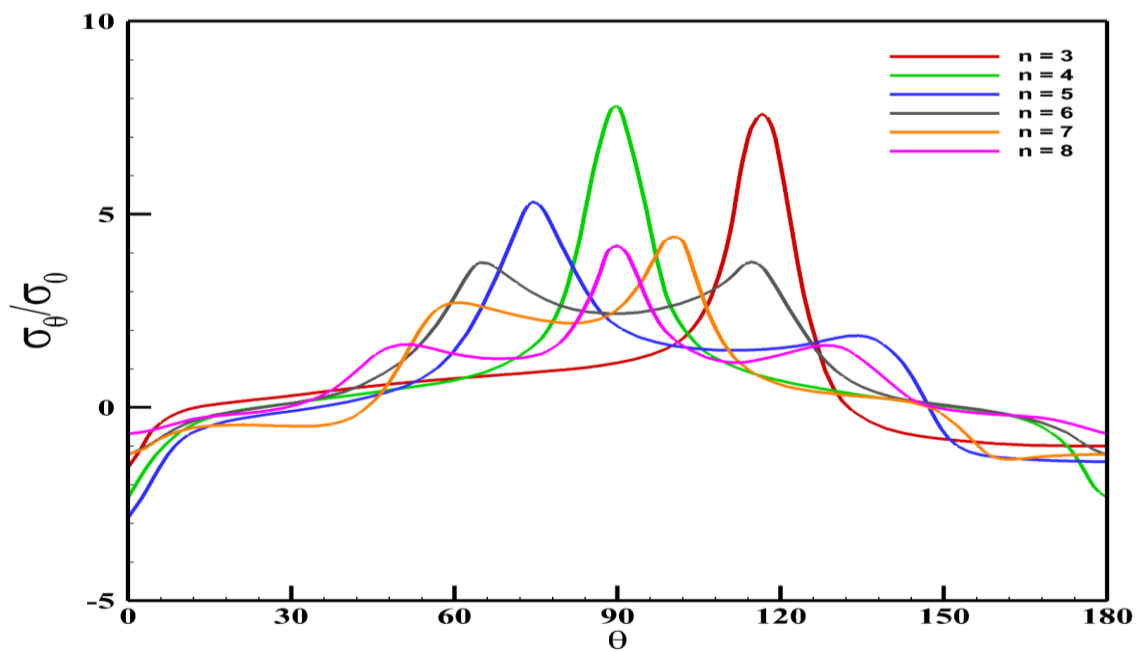
کمترین تمرکز تنش را در مقایسه با دیگر گوشه‌ها نشان می‌دهند. در بارگذاری دوماحوری، تنش‌ها در تمام گوشه‌های گشودگی چندضلعی در مواد همسانگرد، مساوی هستند (شکل ۴-۱۶) اما این شرایط با توجه به ناهمسانگردی مواد در ورق [90]Glass/Epoxy، به جز در گشودگی مربعی، بدین صورت نیست (شکل ۴-۱۲). دلیل این رفتار گشودگی مربعی ممکن است به این دلیل باشد که مکان تمام رئوس گشودگی مربعی روی محورهای مختصات می‌باشد، درحالی‌که مکان رئوس گشودگی‌های دیگر، در دیگر جاهای محور نیز وجود دارد.

برای بارگذاری یک‌محوری در جهت y ، رأس در 0° (روی محور x)، نشان‌گر بالاترین تنش‌ها در تمام گشودگی‌های چندضلعی می‌باشد. درحالی‌که در بارگذاری یک‌محوری در جهت x ، رأسی که بالاترین تنش روی آن صورت می‌گیرد، لزوماً روی محور x یا y قرار ندارد. اما ممکن است در یک صفحه‌ای باشد که به شکل هندسی چندضلعی بستگی دارد. به‌عنوان یک نمونه‌ی خاص، گشودگی مربعی که تمامی رئوس آن فقط روی محورهای اصلی قرار دارند، تمرکز تنش مشابهی برای بارگذاری یک‌محوری در جهت‌های x و y می‌باشد.

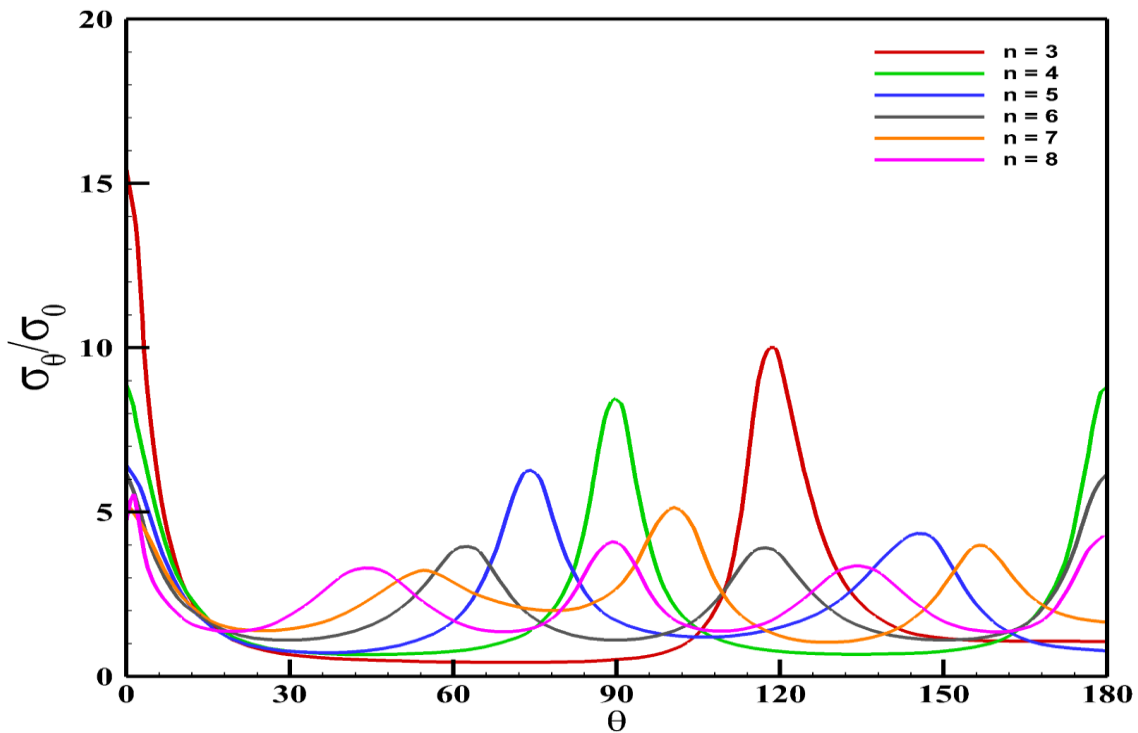
مشاهده می‌شود که رئوس گشودگی، نقاطی با تمرکز تنش بالا در یک ورق می‌باشند، بنابراین تعداد رئوس، مکان و شکل آن‌ها بر میدان تنش در ورق محدود تأثیر می‌گذارد.



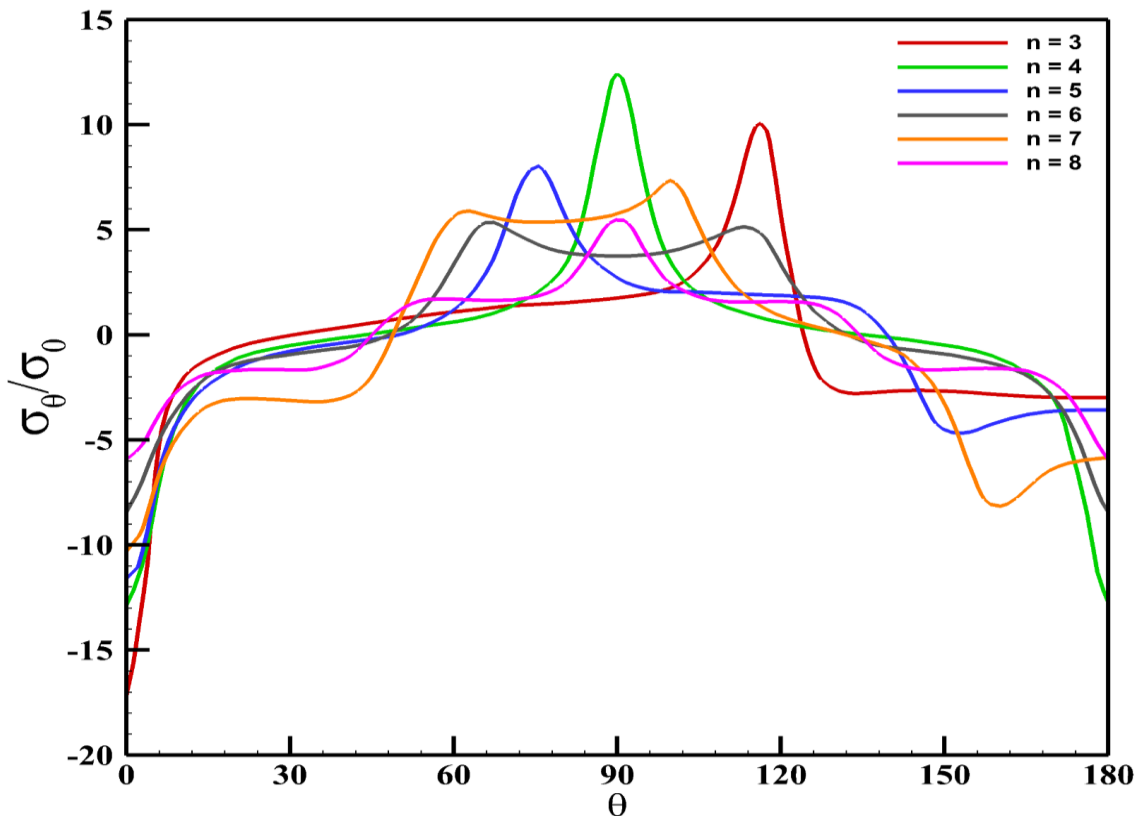
شکل ۴-۱۰ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[90]، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



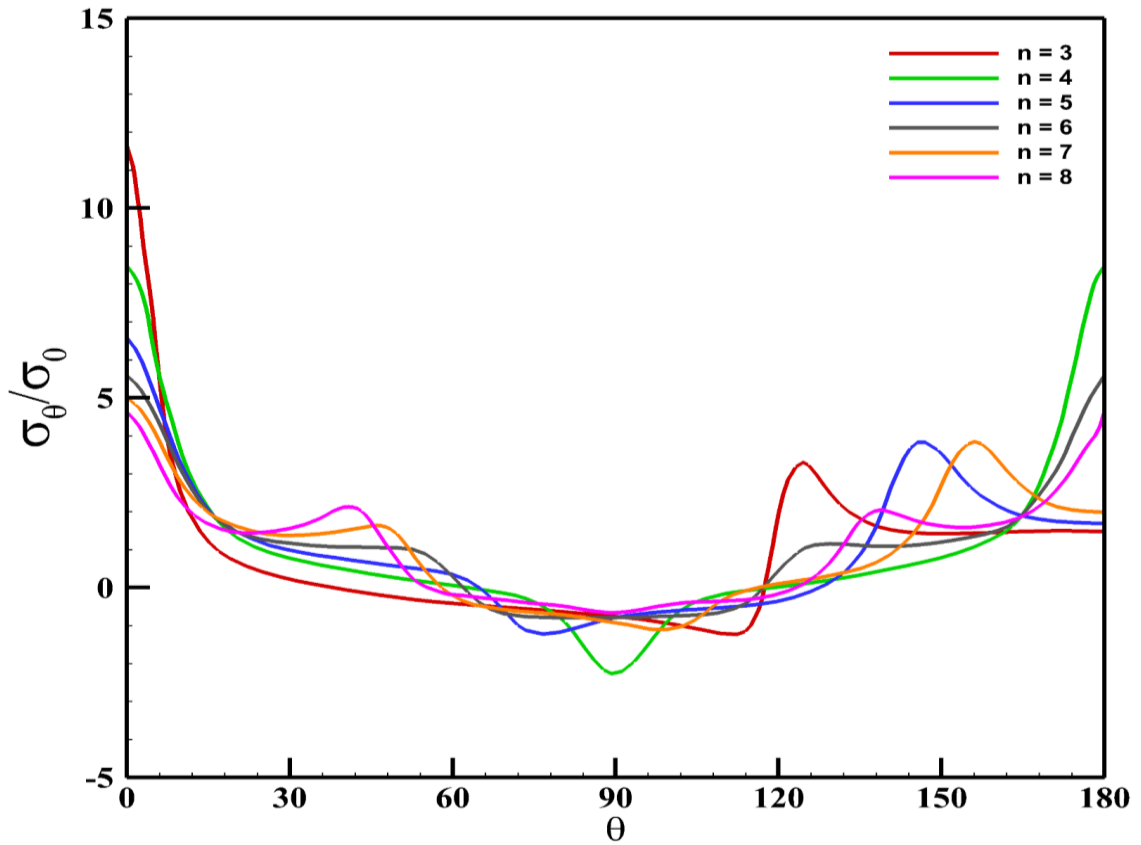
شکل ۴-۱۱ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[90]، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت x



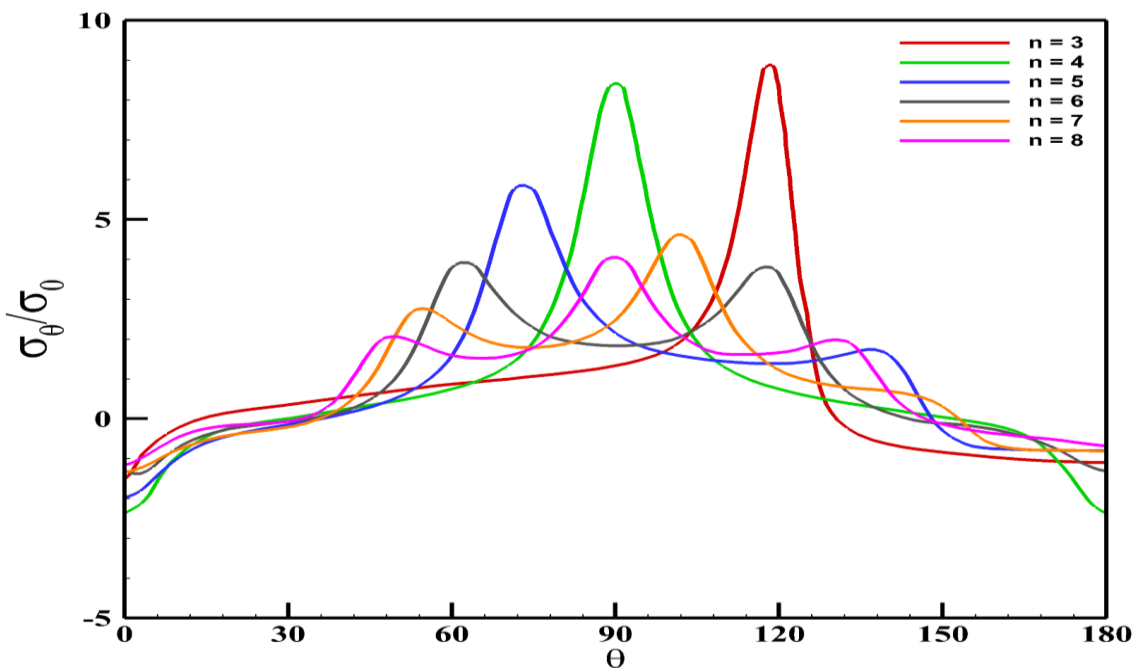
شکل ۴-۱۲ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[90]، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری دومحوری در جهت‌های x و y



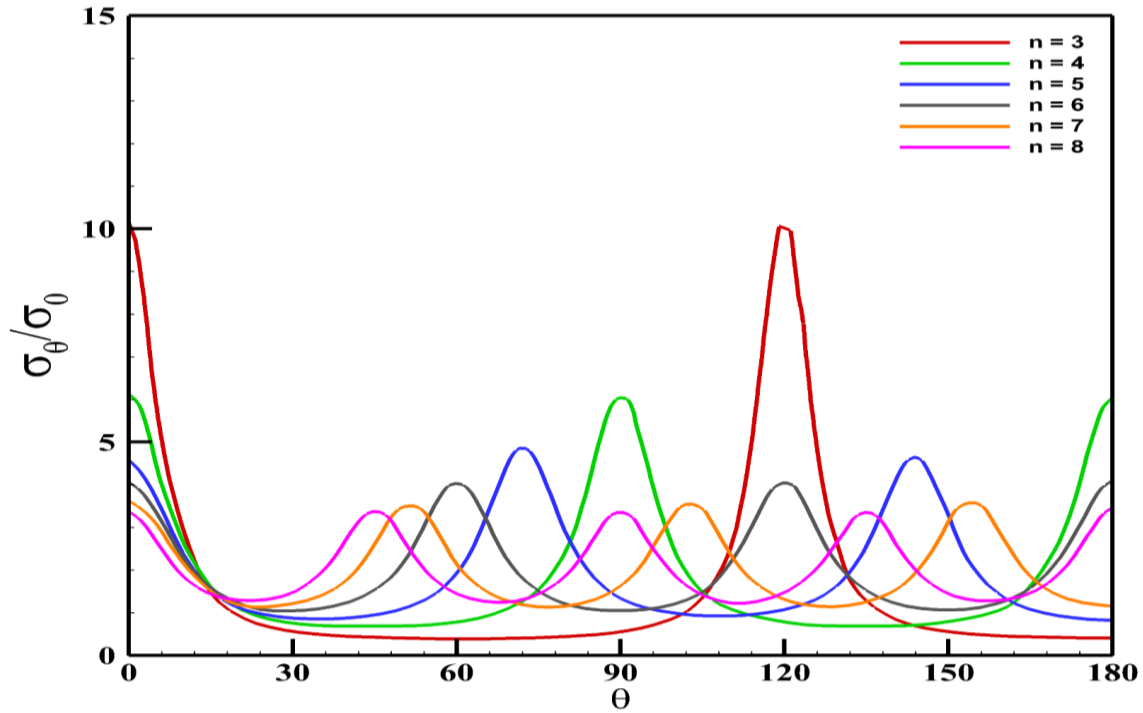
شکل ۴-۱۳ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[90]، زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری برشی



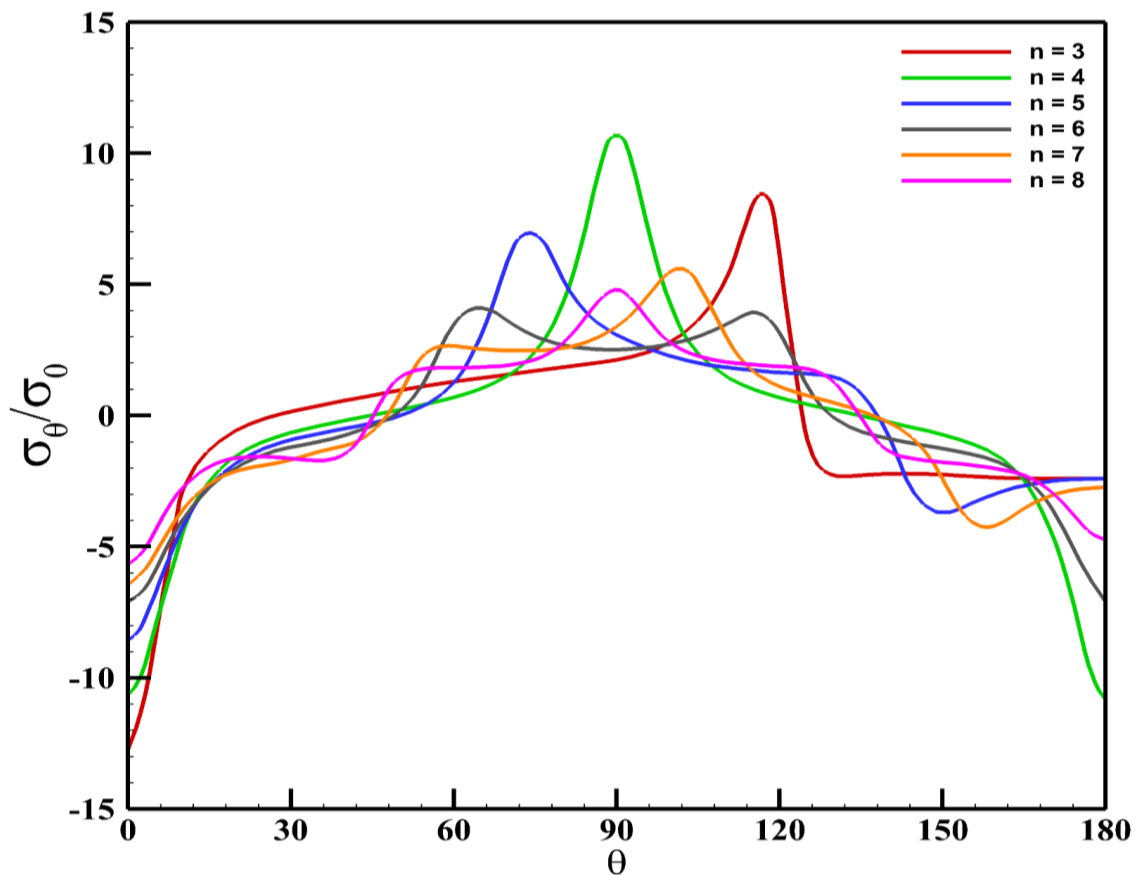
شکل ۴-۱۴ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود همسانگرد با زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



شکل ۴-۱۵ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود همسانگرد با زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت x



شکل ۴-۱۶ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود همسانگرد با زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری دومحوری در جهت‌های x و y



شکل ۴-۱۷ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون انواع گشودگی‌های n ضلعی، برای ورق محدود همسانگرد با زاویه‌ی چرخش $\beta = 0$ و ابعاد ورق $L=H=10$ تحت بارگذاری برشی

۴-۲-۴ تأثیر اندازه‌ی ورق

جدول ۴-۲ تا جدول ۴-۶ مقادیر بیشینه‌ی تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی چندضلعی با تعداد اضلاع ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ در یک ورق با ابعاد مختلف و تشکیل شده از [0]Glass/Epoxy، [90]Glass/Epoxy و ماده‌ی همسانگرد را تحت بارگذاری‌های یک‌محوری در جهت x ، یک‌محوری در جهت y و دوماحوری نشان می‌دهد.

در این جدول مشاهده می‌شود که با کاهش اندازه‌ی ورق در تمام بارگذاری‌ها، مقدار بیشینه تنش بی‌بعد افزایش می‌یابد. با مقایسه‌ی مقدار بیشینه تنش بی‌بعد در نسبت‌های مختلف با مقدار بیشینه تنش بی‌بعد در ورق نامحدود در اشکال گوناگون، مشخص می‌شود که از حل ورق نامحدود نمی‌توان برای حل ورق‌هایی با نسبت قطر دایره محیط بر گشودگی π ضلعی به بزرگ‌ترین ضلع ورق، بزرگ‌تر از 0.2 می‌باشد، استفاده نمود.

این جداول نشان می‌دهند که با توجه به مکان قرارگیری رئوس گشودگی‌ها، تمرکز تنش در ورق همسانگرد در بارگذاری یک‌محوری در جهت y ، بیش‌تر از دیگر شرایط بارگذاری می‌باشد و این موضوع در تمام اشکال چندضلعی صدق می‌کند. اما با توجه به ناهمسانگردی، این موضوع برای [0]Glass/Epoxy و [90]Glass/Epoxy بوجود نمی‌آید. تمرکز تنش در [0]Glass/Epoxy در بارگذاری یک‌محوری در جهت x ، بالاتر است؛ درحالی‌که در [90]Glass/Epoxy در بارگذاری یک‌محوری در جهت y ، بالاتر می‌باشد.

همچنین مشاهده می‌شود که تمرکز تنش‌ها در ورق ناهمسانگرد با خواص [90]Glass/Epoxy، برای شرایط بارگذاری تک‌محوری در جهت y و دوماحوری، بیش‌تر از ورق همسانگرد و برای شرایط بارگذاری تک‌محوری در جهت x ، کم‌تر از ورق همسانگرد می‌باشد؛ در حالی‌که با توجه به زاویه‌ی الیاف متفاوت، تمرکز تنش‌ها در ورق ناهمسانگرد با خواص [0]Glass/Epoxy، برای شرایط بارگذاری تک‌محوری در جهت y ، کم‌تر از ورق همسانگرد و برای شرایط بارگذاری تک‌محوری در جهت x و دوماحوری، بیش‌تر از ورق همسانگرد می‌باشد.

نتایج

جدول ۲-۴ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مثلثی، برای ورق با جنس، ابعاد و شرایط بارگذاری مختلف

Inf.	۱۰۰	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	L	
۱۰,۷۸	۱۰,۹۰	۱۱,۷۵	۱۱,۸۲	۱۲,۰۲	۱۲,۴۷	۱۳,۲۷	۱۴,۳۸	Uni-X	Glass/Epoxy[0]
۱۰,۰۷	۱۰,۰۸	۱۰,۴۳	۱۰,۹۲	۱۱,۰۶	۱۱,۱۸	۱۱,۳۵	۱۱,۸۵	Uni-Y	
۱۱,۲۵	۱۱,۳۴	۱۱,۵۵	۱۱,۸۴	۱۱,۸۹	۱۲,۲۸	۱۲,۶۹	۱۳,۴۷	Equi-bi	
۷,۸۱	۷,۸۴	۷,۸۵	۸,۰۹	۸,۳۳	۸,۴۱	۸,۷۵	۹,۳۲	Uni-X	Glass/Epoxy[90]
۱۶,۵۳	۱۶,۴۴	۱۷,۳۹	۱۸,۰۰	۱۸,۵۲	۱۹,۵۵	۲۰,۹۳	۲۲,۵۴	Uni-Y	
۱۴,۸۵	۱۴,۷۷	۱۵,۱۱	۱۵,۶۰	۱۶,۰۰	۱۶,۵۵	۱۷,۳۲	۱۸,۵۴	Equi-bi	
۸,۵۴	۸,۵۲	۸,۹۹	۹,۱۲	۹,۲۷	۹,۵۰	۹,۸۸	۱۰,۵۲	Uni-X	همسانگرد
۱۰,۹۰	۱۰,۹۸	۱۱,۵۵	۱۱,۷۱	۱۱,۹۲	۱۲,۲۳	۱۲,۶۶	۱۳,۴۵	Uni-Y	
۱۰,۰۴	۱۰,۰۰	۱۰,۳۰	۱۰,۳۷	۱۰,۵۰	۱۰,۶۸	۱۰,۹۶	۱۱,۵۰	Equi-bi	

جدول ۳-۴ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مربعی، برای ورق با جنس، ابعاد و شرایط بارگذاری مختلف

Inf.	۱۰۰	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	L	
۱۰,۳۶	۱۰,۷۷	۱۲,۸۸	۱۳,۱۸	۱۳,۵۹	۱۴,۰۵	۱۴,۹۲	۱۶,۴۰	Uni-X	Glass/Epoxy[0]
۶,۴۰	۶,۶۵	۷,۵۵	۷,۶۳	۷,۷۰	۷,۹۱	۸,۳۵	۸,۹۰	Uni-Y	
۸,۶۳	۸,۶۵	۸,۹۹	۹,۰۱	۹,۲۰	۹,۴۴	۹,۸۲	۱۰,۶۱	Equi-bi	
۶,۴۱	۶,۷۰	۷,۵۱	۷,۶۶	۷,۸۲	۷,۹۶	۸,۳۵	۹,۰۰	Uni-X	Glass/Epoxy[90]
۱۰,۳۳	۱۰,۷۶	۱۳,۴۲	۱۳,۷۶	۱۴,۰۱	۱۴,۴۲	۱۵,۵۰	۱۷,۳۵	Uni-Y	
۸,۶۹	۸,۶۵	۸,۹۹	۹,۰۷	۹,۱۰	۹,۳۵	۹,۴۷	۹,۷۵	Equi-bi	
۷,۰۹	۷,۴۱	۸,۴۴	۸,۷۵	۸,۹۲	۹,۳۵	۹,۹۲	۱۰,۹۵	Uni-X	همسانگرد
۶,۹۶	۷,۳۶	۸,۰۸	۸,۶۲	۸,۸۷	۹,۱۸	۹,۶۶	۱۰,۶۲	Uni-Y	
۶,۰۶	۶,۰۱	۶,۲۱	۶,۳۰	۶,۳۸	۶,۴۷	۶,۶۵	۷,۰۰	Equi-bi	

نتایج

جدول ۴-۴ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی پنج‌ضلعی، برای ورق با جنس، ابعاد و شرایط بارگذاری مختلف

Inf.	۱۰۰	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	L	
۷,۰۰	۷,۱۹	۸,۲۱	۸,۳۲	۸,۴۹	۸,۶۵	۹,۱۱	۹,۷۵	Uni-X	Glass/Epoxy[0]
۵,۲۶	۵,۳۵	۶,۰۰	۶,۰۹	۶,۱۲	۶,۲۵	۶,۴۵	۶,۶۹	Uni-Y	
۵,۷۹	۵,۹۱	۶,۵۸	۶,۷۲	۶,۸۸	۷,۰۶	۷,۴۱	۷,۹۵	Equi-bi	
۴,۷۵	۴,۸۰	۵,۴۷	۵,۵۲	۵,۶۶	۵,۷۵	۵,۹۹	۶,۸۵	Uni-X	Glass/Epoxy[90]
۸,۲۵	۸,۵۰	۱۰,۸۴	۱۱,۰۱	۱۱,۴۲	۱۱,۸۸	۱۲,۵۲	۱۳,۵۵	Uni-Y	
۶,۵۵	۵,۵۶	۶,۵۳	۶,۵۱	۶,۵۱	۶,۵۳	۶,۵۵	۶,۶۹	Equi-bi	
۵,۲۱	۵,۲۵	۶,۰۰	۶,۱۵	۶,۳۱	۶,۵۵	۷,۰۰	۷,۸۲	Uni-X	همسانگرد
۵,۶۱	۵,۸۲	۶,۶۸	۶,۷۴	۶,۹۵	۷,۲۵	۷,۸۰	۸,۶۵	Uni-Y	
۴,۶۳	۴,۶۶	۴,۹۲	۴,۹۹	۵,۰۲	۵,۱۰	۵,۲۱	۵,۴۵	Equi-bi	

جدول ۵-۴ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی شش‌ضلعی، برای ورق با جنس، ابعاد و شرایط بارگذاری مختلف

Inf.	۱۰۰	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	L	
۴,۴۹	۴,۸۰	۴,۸۱	۴,۹۸	۵,۰۵	۵,۲۱	۵,۴۸	۵,۹۶	Uni-X	Glass/Epoxy[0]
۴,۶۲	۴,۷۵	۵,۱۶	۵,۳۱	۵,۴۰	۵,۵۱	۵,۷۷	۶,۱۵	Uni-Y	
۴,۱۵	۴,۲۱	۴,۴۴	۴,۵۰	۴,۵۲	۴,۶۸	۴,۷۵	۴,۸۸	Equi-bi	
۳,۵۵	۳,۶۲	۳,۹۵	۳,۹۶	۴,۰۰	۴,۱۲	۴,۱۵	۴,۳۱	Uni-X	Glass/Epoxy[90]
۷,۲۰	۷,۵۲	۹,۰۳	۹,۲۲	۹,۴۵	۹,۸۵	۱۰,۴۱	۱۱,۰۰	Uni-Y	
۵,۵۲	۵,۴۴	۶,۱۶	۶,۲۳	۶,۳۱	۶,۵۵	۶,۹۰	۷,۲۹	Equi-bi	
۳,۸۱	۹,۷۹	۴,۰۰	۴,۰۶	۴,۱۰	۴,۱۹	۴,۲۰	۴,۴۵	Uni-X	همسانگرد
۴,۹۹	۵,۱۸	۵,۵۲	۵,۶۶	۵,۷۱	۵,۸۵	۶,۰۹	۶,۳۹	Uni-Y	
۴,۰۰	۴,۰۰	۴,۱۵	۴,۱۹	۴,۲۲	۴,۳۵	۴,۴۲	۴,۵۱	Equi-bi	

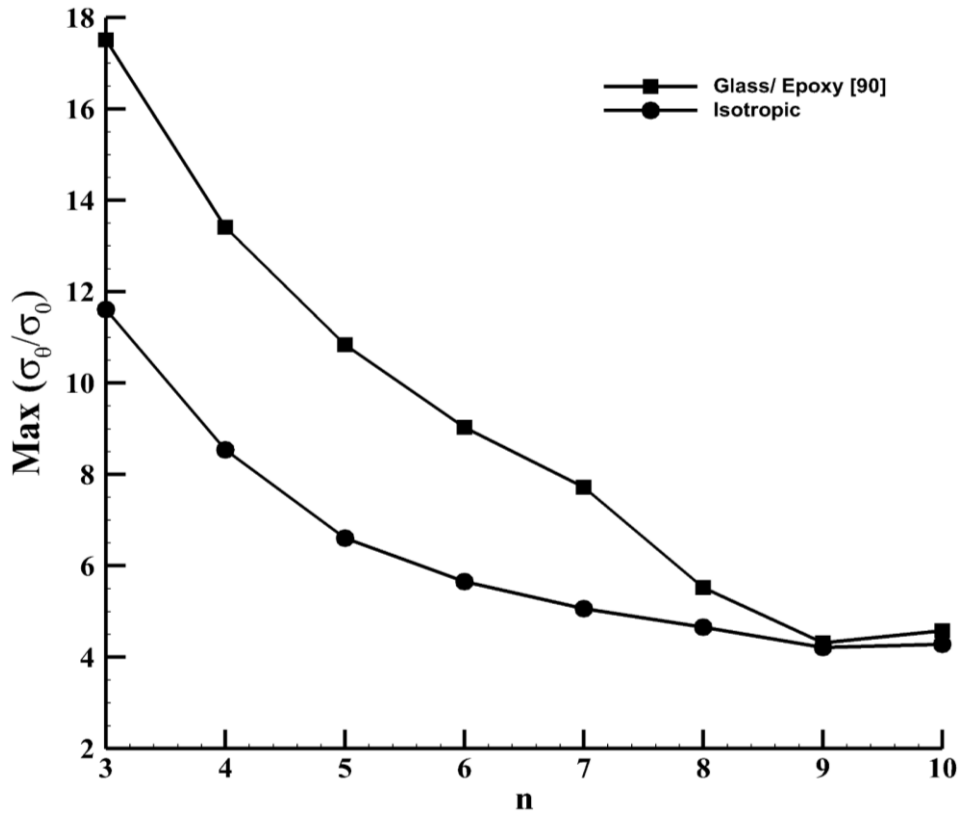
نتایج

جدول ۴-۶ مقادیر بیشینه تنش بی بعد پیرامون گشودگی هفت ضلعی، برای ورق با جنس، ابعاد و شرایط بارگذاری مختلف

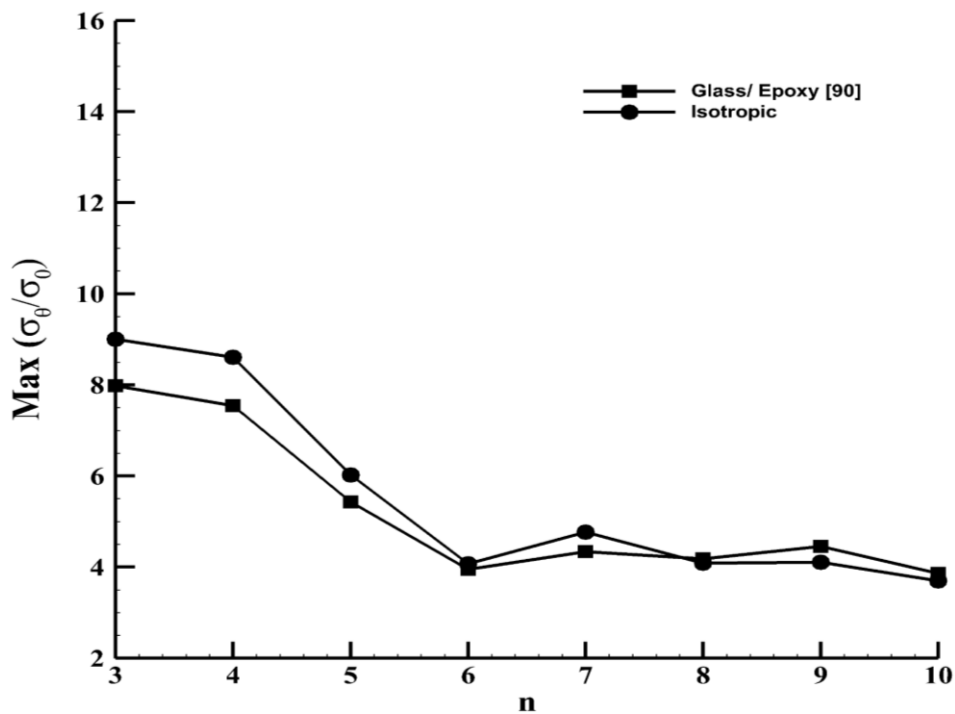
Inf.	۱۰۰	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	L	
۶,۰۱	۶,۰۹	۶,۱۵	۶,۱۸	۶,۲۰	۶,۲۴	۶,۴۵	۶,۸۵	Uni-X	Glass/Epoxy[0]
۴,۲۲	۴,۲۲	۴,۲۹	۴,۳۵	۴,۴۱	۴,۵۱	۴,۷۸	۵,۱۶	Uni-Y	
۴,۶۸	۴,۵۲	۴,۹۱	۵,۱۱	۵,۲۸	۵,۵۲	۶,۰۵	۶,۸۰	Equi-bi	
۴,۰۰	۴,۰۱	۴,۳۲	۴,۴۰	۴,۴۵	۴,۵۵	۴,۷۱	۵,۰۰	Uni-X	Glass/Epoxy[90]
۶,۶۶	۶,۵۹	۷,۷۱	۷,۹۱	۸,۱۹	۸,۵۸	۹,۱۸	۱۰,۲۰	Uni-Y	
۴,۹۰	۴,۸۸	۵,۲۵	۵,۲۸	۵,۳۹	۵,۶۱	۵,۸۵	۶,۴۱	Equi-bi	
۴,۴۱	۴,۴۴	۴,۷۵	۴,۸۰	۴,۸۸	۴,۹۹	۵,۰۶	۵,۱۹	Uni-X	همسانگرد
۴,۵۷	۴,۶۶	۵,۰۷	۵,۱۶	۵,۲۹	۵,۳۲	۵,۵۵	۵,۸۸	Uni-Y	
۳,۶۵	۳,۶۰	۳,۶۹	۳,۷۷	۳,۸۰	۳,۸۱	۳,۹۶	۴,۲۵	Equi-bi	

۴-۴-۳ تأثیر تعداد اضلاع گشودگی چندضلعی (تعداد رئوس)

جدول ۴-۲ تا جدول ۴-۶ نشان می دهد با افزایش تعداد اضلاع گشودگی چندضلعی، تمرکز تنش در یک ورق برای بارگذاری یک محوری در جهت y ، نهایتاً کاهش می یابد، اما این موضوع برای بارگذاری یک محوری در جهت x ، مشاهده نمی شود. این موضوع را می توان به وضوح از شکل ۴-۱۸ و شکل ۴-۱۹ متوجه شد. این شکل ها به ترتیب نشان گر بیشینه تنش بی بعد برای گشودگی های چندضلعی مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد [90] Glass/Epoxy و همسانگرد تحت بارگذاری یک محوری در جهت های x و y می باشد.



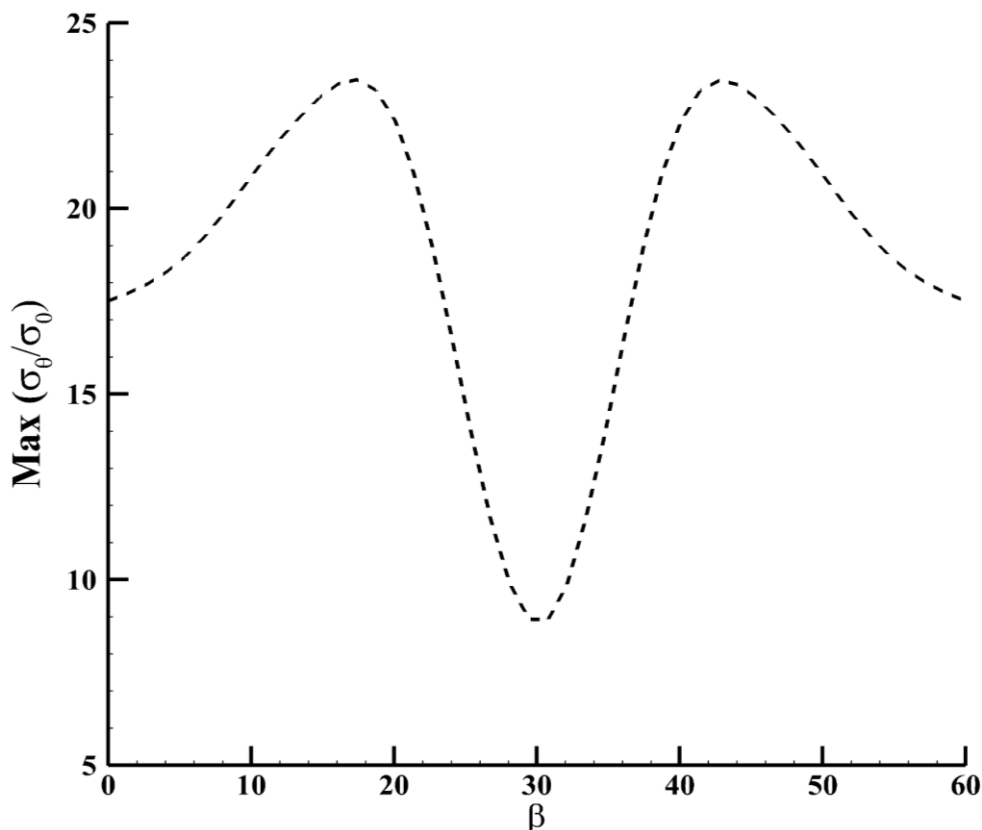
شکل ۴-۱۸ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد برای گشودگی‌های چندضلعی مختلف در ورق محدود همسانگرد و ناهمسانگرد Glass/Epoxy[90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



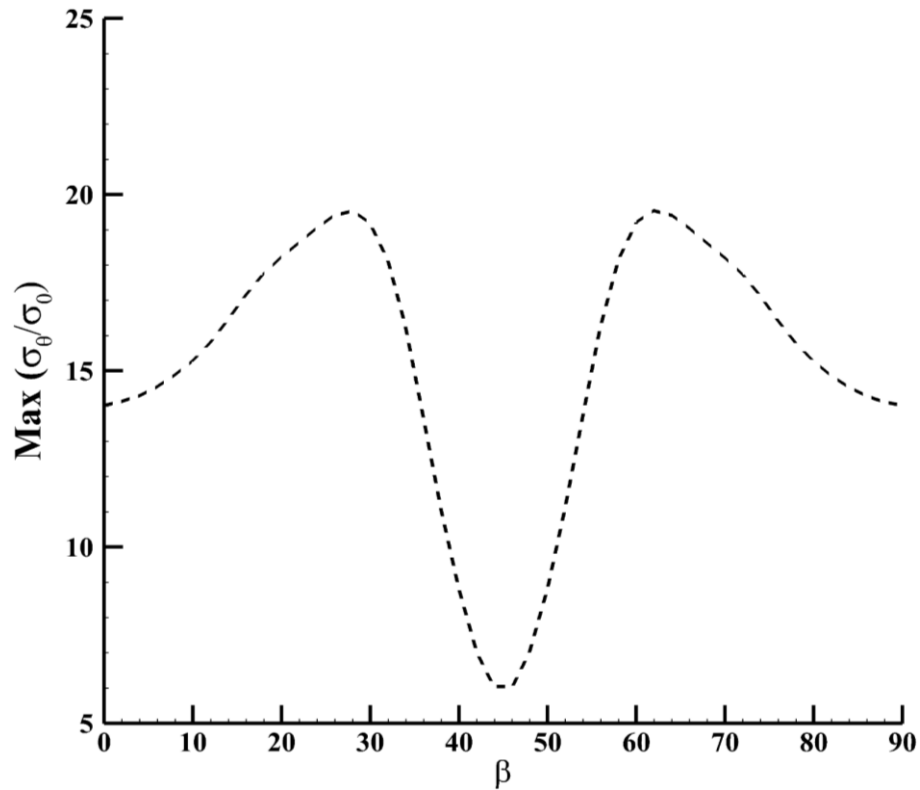
شکل ۴-۱۹ مقادیر بیشینه تنش بی‌بعد برای گشودگی‌های چندضلعی مختلف در ورق محدود همسانگرد و ناهمسانگرد Glass/Epoxy[90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت x

۴-۴-۴ تأثیر مکان رئوس گشودگی (چرخش گشودگی)

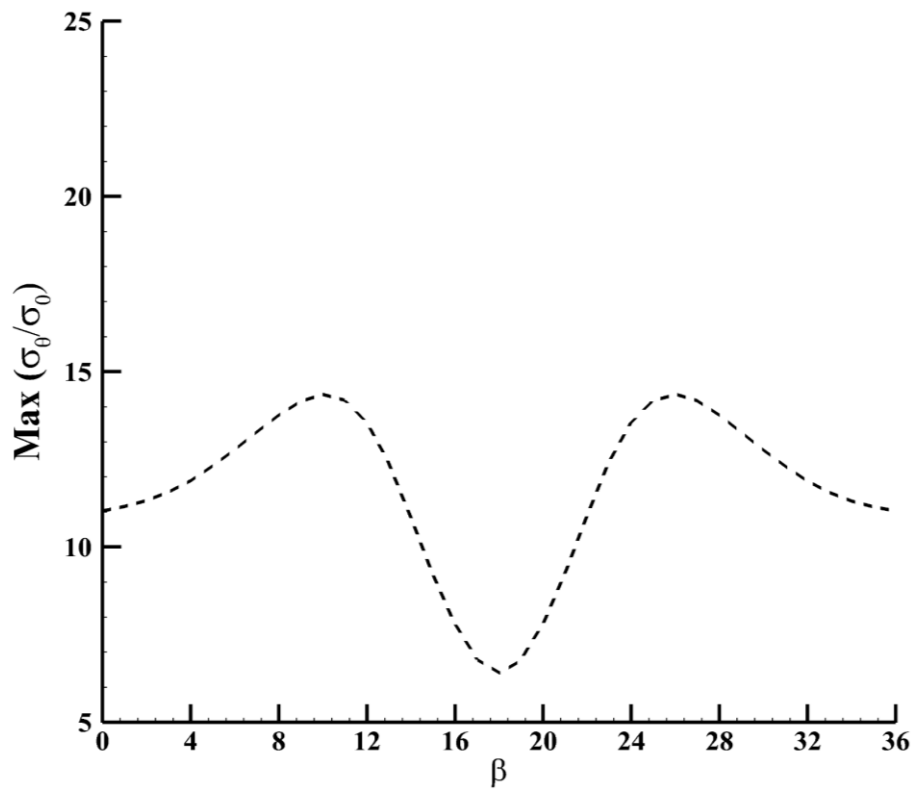
تغییر در تعداد اضلاع، مکان رئوس در یک ورق را با توجه به جهت بارگذاری تغییر می‌دهد و این کار، میدان تنش را تغییر می‌دهد. برای مطالعه‌ی تأثیر مکان رئوس روی تمرکز تنش، مکان رئوس در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص $[90] \text{Glass/Epoxy}$ ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y از طریق چرخش گشودگی با زاویه‌ی β از 0° تا 180° تغییر داده می‌شود. بیشینه تنش بی‌بعد برای اشکال مختلف چندضلعی‌ها، همان‌گونه که در شکل ۴-۲۰ تا شکل ۴-۲۵ نشان داده شده به دست می‌آید. مشاهده می‌شود که منحنی‌ها به صورت تکرار شونده و در بازه‌ی 60° ، 36° ، 90° ، 60° ، 25.7° و 45° به ترتیب برای مثلث، مربع، پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، هفت‌ضلعی و هشت‌ضلعی تکرار می‌شود و این بخاطر شکل هندسی گشودگی می‌باشد. همچنین مشخص می‌شود که بیشینه‌ی تنش بی‌بعد، در جهت‌هایی که یکی از رئوس با محور x منطبق می‌شود و بار در راستای جهت y است، ماکزیمم می‌شود. مکان بیشینه تنش بی‌بعد برای اشکال مختلف به غیر از زاویه چرخش به انحنای گوشه‌ها نیز ارتباط دارد.



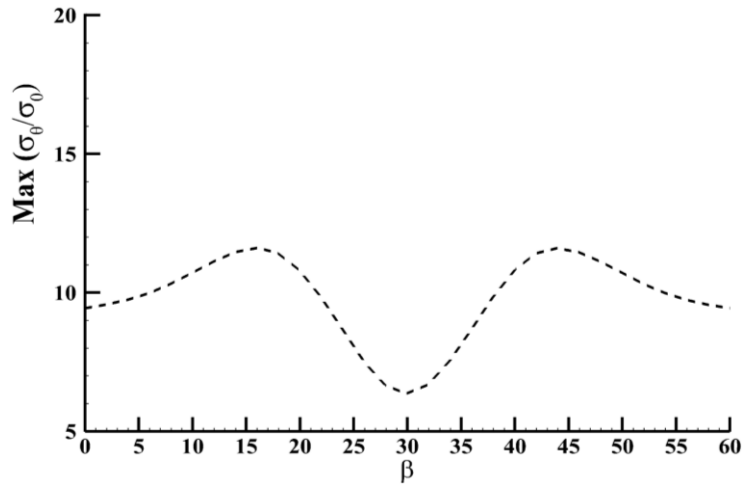
شکل ۴-۲۰ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مثلثی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص $[90] \text{Glass/Epoxy}$ ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



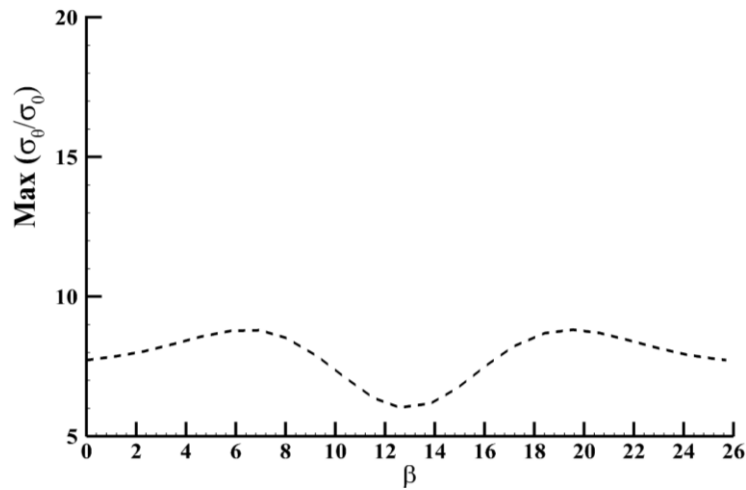
شکل ۲۱-۴ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مربعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90] Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



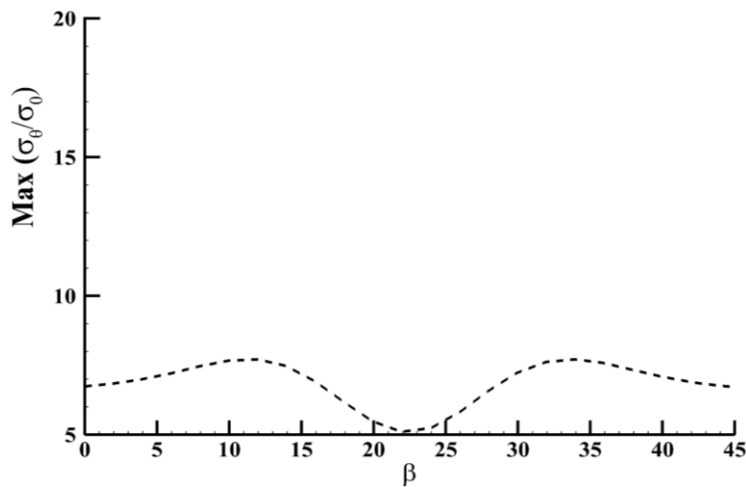
شکل ۲۲-۴ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی پنج‌ضلعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90] Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



شکل ۲۳-۴ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی شش‌ضلعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90] Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



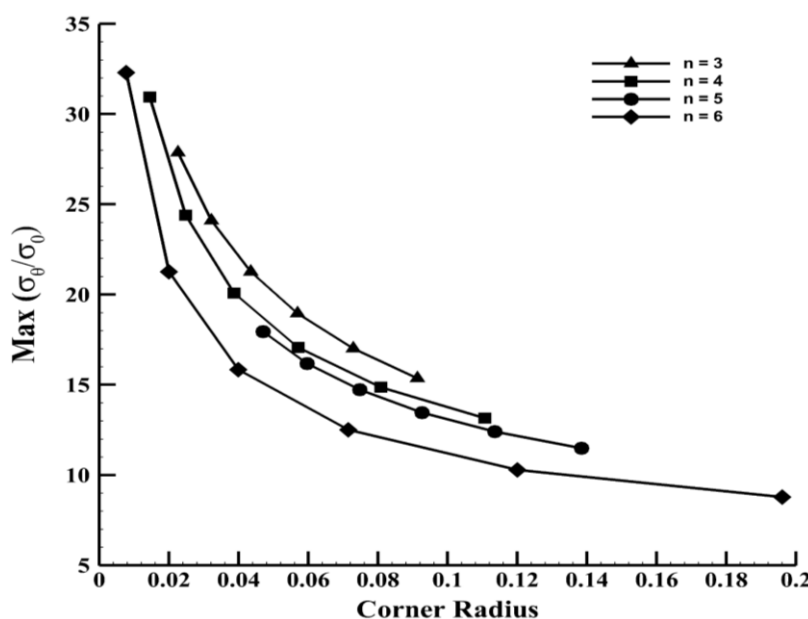
شکل ۲۴-۴ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی هفت‌ضلعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90] Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



شکل ۲۵-۴ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی هشت‌ضلعی برحسب زوایای چرخش مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص [90] Glass/Epoxy ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y

۴-۴-۵ تأثیر شکل رئوس گشودگی (شعاع گوشه‌ها)

شکل ۴-۲۶ نشان‌دهنده‌ی تأثیر شعاع گوشه‌ها بر تمرکز تنش پیرامون گشودگی چندضلعی در تعداد اضلاع مختلف، برای ورق محدود Glass/Epoxy[90]، تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y می‌باشد. شعاع گوشه‌ی گشودگی چندضلعی با تغییر پارامتر تابع نگاشت m تغییر می‌کند. مشاهده می‌شود که با کاهش شعاع گوشه، گوشه‌ها تیزتر شده و تمرکز تنش افزایش می‌یابد. برای شعاع گوشه‌های مشابه، بیشینه تنش بی‌بعد برای گشودگی‌های چندضلعی مختلف، با توجه به تعداد رئوس، متفاوت می‌باشد. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع فرد افزایش انحنا (کاهش شعاع گوشه‌ها)، افزایش مقدار تنش را در هر سه حالت بارگذاری در پی دارد؛ بنابراین در این گونه اشکال کم‌ترین تنش بیشینه حول گشودگی در حالت $m=0$ (گشودگی دایروی) ایجاد می‌گردد؛ درحالی‌که برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع زوج همواره با افزایش انحنا گوشه‌های گشودگی، تنش حول گشودگی لزوماً افزایش نمی‌یابد بلکه در مواردی بسته به زاویه‌ی چرخش انتخاب شده این مقدار کاهش می‌یابد. بنابراین در این نوع گشودگی‌ها با انتخاب زاویه‌ی چرخش و انحنا مناسب می‌توان بیشینه تنشی کمتر از حالت دایروی حول گشودگی داشت.

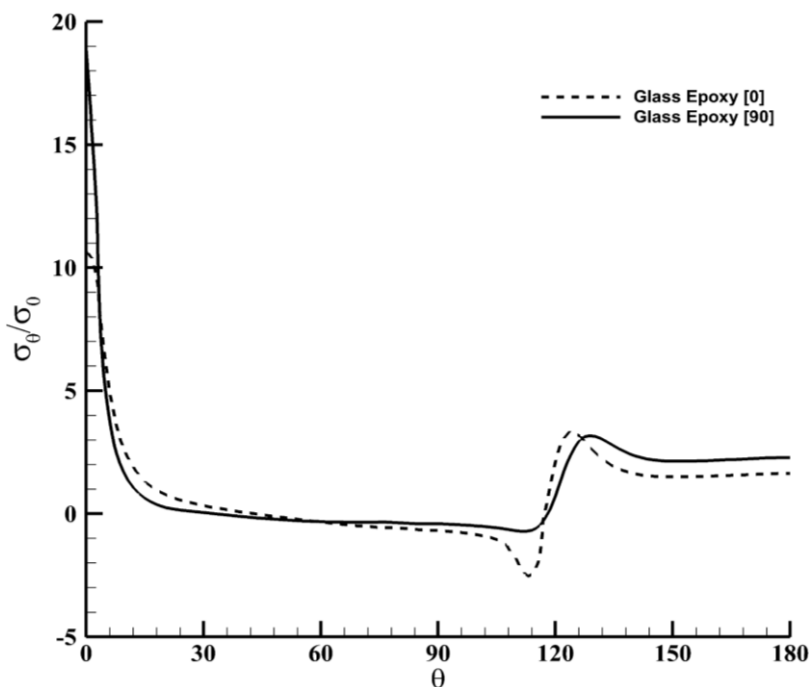


شکل ۴-۲۶ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی‌های مختلف برحسب شعاع گوشه‌های مختلف در ورق محدود ناهمسانگرد با خواص Glass/Epoxy[90] ($L=H=10$) تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y

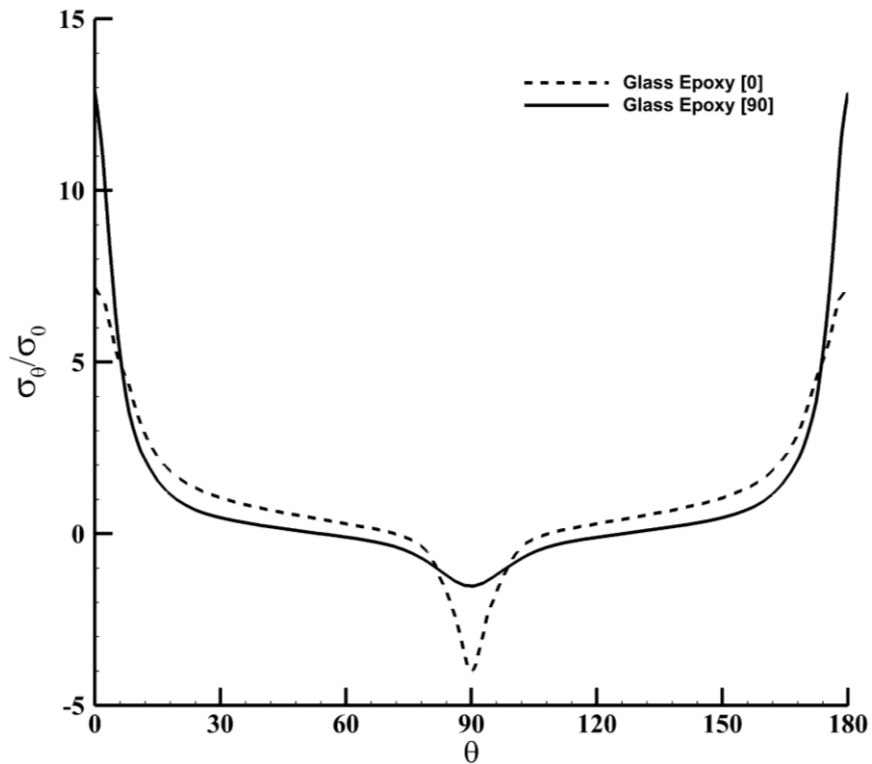
۴-۴-۶ تأثیر ناهمسانگردی مواد (زاویه‌ی الیاف)

جدای از شکل هندسی گشودگی، مکان رئوس و شکل گوشه‌ها، ناهمسانگردی مواد نیز بر توزیع تنش پیرامون گشودگی مؤثر است. برای بررسی این تأثیر، مطابق شکل ۴-۲۷ تا شکل ۴-۳۰ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی‌های چندضلعی متفاوت برای ورق Glass/Epoxy، با زاویه‌های الیاف [0] و [90] که تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y قرار گرفته‌اند، محاسبه گردید. در این نوع بارگذاری، تمرکز تنش در ورق با زاویه‌ی الیاف [90]، بیش‌تر از زاویه‌ی الیاف [0] می‌باشد.

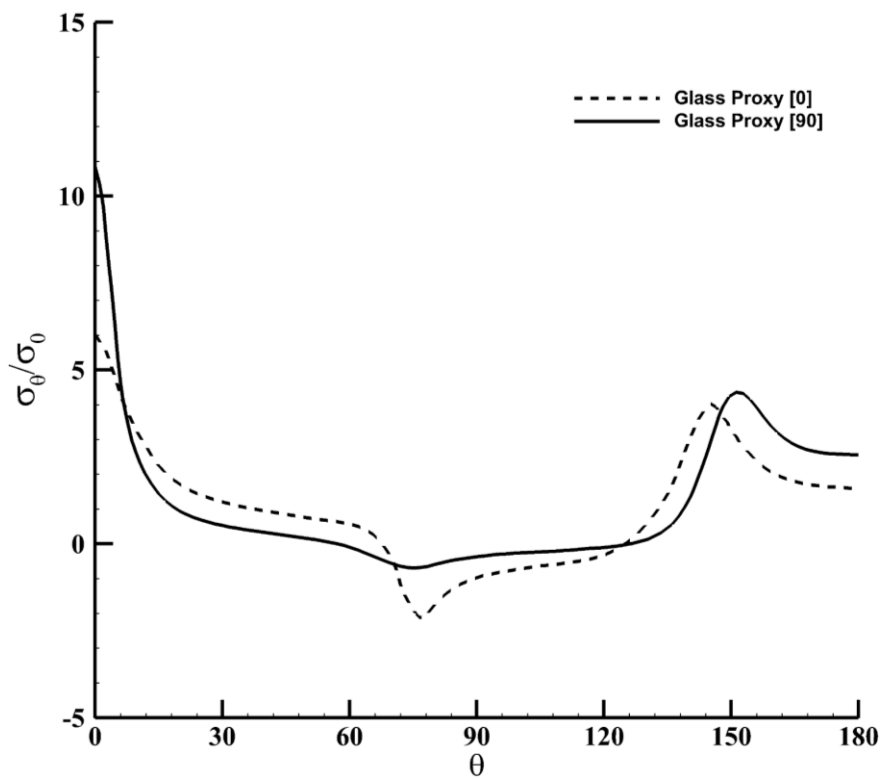
همچنین جدول ۴-۲ تا جدول ۴-۶ نشان می‌دهد که تمرکز تنش در ورق همسانگرد در بارگذاری یک‌محوری در جهت y ، بیش‌تر از دیگر شرایط بارگذاری و در بارگذاری یک‌محوری در جهت x ، کمتر می‌باشد و این موضوع در تمام اشکال چندضلعی صدق می‌کند. اما با توجه به ناهمسانگردی، این موضوع برای Glass/Epoxy[0] و Glass/Epoxy[90] بوجود نمی‌آید. تمرکز تنش در Glass/Epoxy[0] در بارگذاری یک‌محوری در جهت x ، بالاتر است؛ در حالی که در Glass/Epoxy[90] در بارگذاری یک‌محوری در جهت y ، بالاتر می‌باشد.



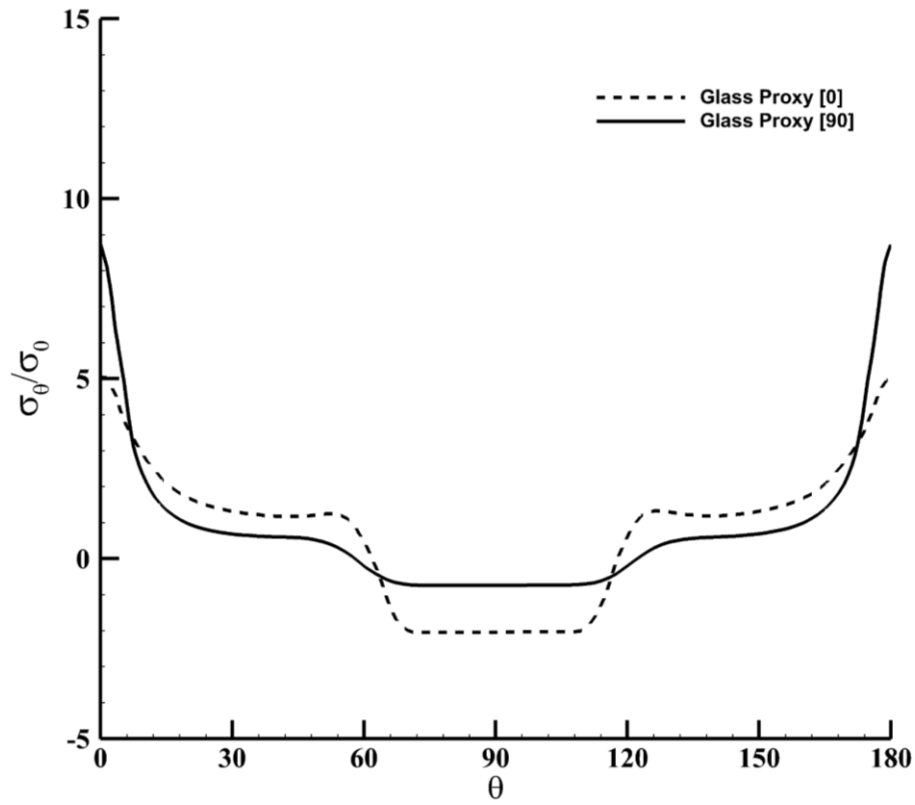
شکل ۴-۲۷ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مثلی برای ورق محدود ناهمسانگرد Glass/Epoxy. ($L=H=10$) با زاویه‌های الیاف [0] و [90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



شکل ۴-۲۸ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی مربعی برای ورق محدود ناهمسانگرد Glass/Epoxy ($L=H=10$) با زاویه‌های الیاف [0] و [90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



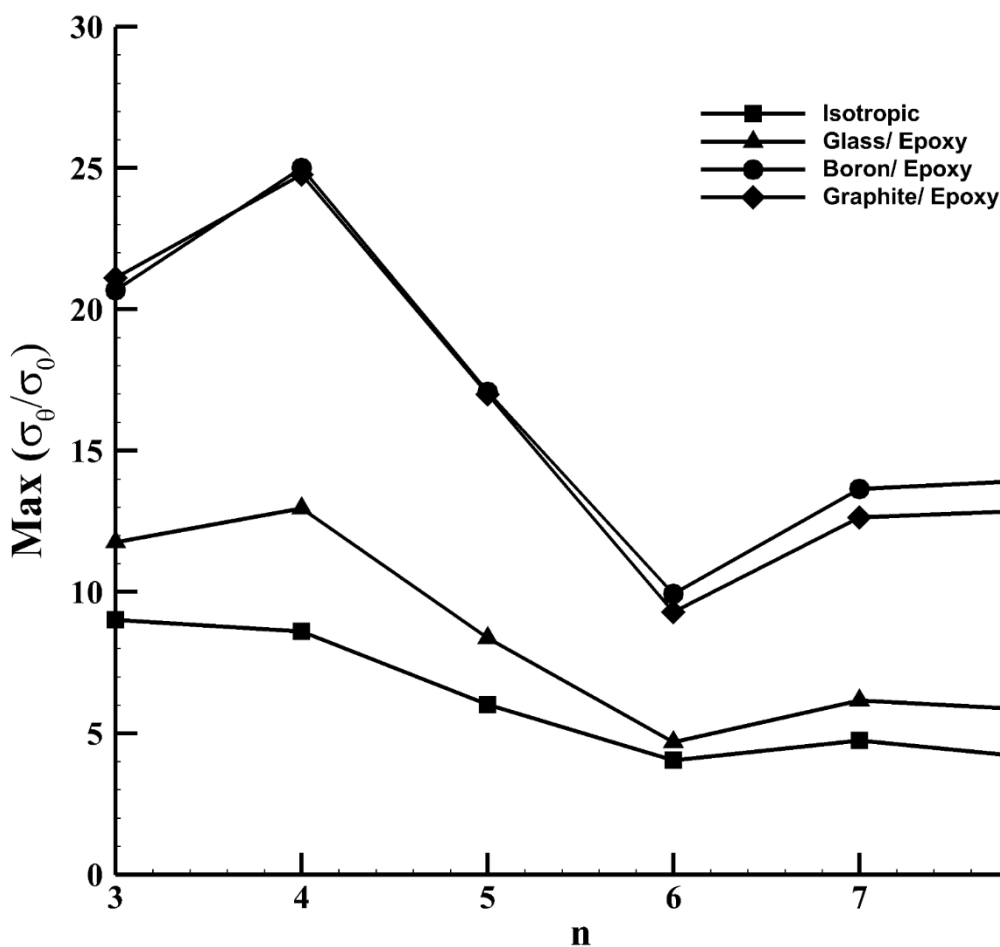
شکل ۴-۲۹ توزیع تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی پنج‌ضلعی برای ورق محدود ناهمسانگرد Glass/Epoxy ($L=H=10$) با زاویه‌های الیاف [0] و [90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y



شکل ۳۰-۴ توزیع تنش بی بعد پیرامون گشودگی شش ضلعی برای ورق محدود ناهمسانگرد Glass/Epoxy،
 با زاویه‌های الیاف [0] و [90] تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت y ($L=H=10$)

۷-۴-۴ تأثیر جنس‌های مختلف ماده

تأثیر جنس‌های مختلف ورق روی بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی چندضلعی، در شکل ۳۱-۴ نشان داده شده است. با تغییر جنس ماده‌ی ورق در شرایط بارگذاری مشخص شده و ویژگی‌های دیگر مواد، بیشینه تنش بی‌بعد تغییر می‌کند.



شکل ۳۱-۴ بیشینه تنش بی‌بعد پیرامون گشودگی‌های مختلف برای ورق محدود ($L=H=10$) با جنس‌های مختلف تحت بارگذاری یک‌محوری در جهت x

در این فصل تأثیر پارامترهایی همچون نوع بارگذاری، اندازه‌ی ورق، هندسه‌ی گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌ها، ناهمسانگردی و جنس‌های مختلف ماده به عنوان پارامترهای مهم در توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور که مشاهده شد، با تغییر این پارامترها و کنترل مناسب آن‌ها می‌توان تمرکز تنش را به میزان قابل‌توجهی کاهش داد.

فصل ۵ : نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵-۱ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه با ارائه‌ی حلی تحلیلی بر پایه‌ی روش متغیر مختلط لحنیتسکی و با استفاده از تابع نگاشت همنوا به بررسی توزیع تنش پیرامون گشودگی‌های چندضلعی واقع در مرکز ورق محدود ناهمسانگرد تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای پرداخته شد. تأثیر پارامترهایی همچون نوع بارگذاری، اندازه‌ی ورق، هندسه‌ی گشودگی (تعداد اضلاع)، مکان گوشه‌ها (چرخش گشودگی)، شکل گوشه‌ها (شعاع انحنای گوشه‌ها)، ناهمسانگردی (زاویه‌ی الیاف) و جنس‌های مختلف ماده به عنوان پارامترهای مهم در توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها مورد بررسی قرار گرفت. دستیابی به نتایج جامع به روشی کارآمد در بررسی و مطالعه‌ی پارامتری، موجب شد تا روش حاضر تبدیل به روشی مناسب برای حل موضوع حاضر شود. نتایج به‌دست آمده از این روش، بسیار نزدیک به نتایج حاصل از مطالعات پیشین می‌باشد.

نتایج حاصل از این تحقیق نشان داد برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع فرد، افزایش انحنا (کاهش شعاع انحنای گوشه‌ها)، افزایش مقدار تنش را در هر سه حالت بارگذاری کششی تک‌محوری، دو‌محوری و برشی خالص در پی دارد. برای گشودگی‌هایی با تعداد اضلاع زوج همواره با افزایش انحنای گوشه‌های گشودگی، تنش حول گشودگی لزوماً افزایش نمی‌یابد بلکه در مواردی بسته به زاویه‌ی چرخش انتخاب شده این مقدار کاهش می‌یابد. بنابراین در این نوع گشودگی‌ها با انتخاب زاویه‌ی چرخش و انحنای مناسب می‌توان بیشینه تنشی کم‌تر از حالت دایروی حول گشودگی داشت.

مشاهده شد که پارامتر زاویه‌ی چرخش گشودگی یکی از پارامترهای بسیار تأثیرگذار در تمام گشودگی‌ها و بارگذاری‌ها می‌باشد. برای هر گشودگی و بارگذاری زاویه‌ی چرخش مطلوبی وجود دارد که در آن کم‌ترین مقدار تنش بیشینه حول گشودگی اتفاق می‌افتد و بهتر است به هنگام طراحی همواره این نکته مورد توجه قرار گیرد و اشکال در زاویه‌ی چرخش مطلوب خود ایجاد گردند.

همچنین با افزایش تعداد اضلاع گشودگی، تمرکز تنش در یک ورق برای بارگذاری یک‌محوری در

جهت y ، نهایتاً کاهش می‌یابد، اما این موضوع برای بارگذاری یک‌محوری در جهت x مشاهده نمی‌شود. تأثیر نسبت ابعاد گشودگی به ابعاد ورق بر توزیع تنش اطراف گشودگی مورد بررسی قرار گرفت. مشاهده گردید که با کاهش اندازه‌ی ورق در تمام بارگذاری‌ها، مقدار بیشینه تنش افزایش می‌یابد. با مقایسه‌ی مقدار بیشینه تنش بی‌بعد در نسبت‌های مختلف با مقدار بیشینه تنش بی‌بعد در ورق نامحدود در اشکال گوناگون نشان داده شد که از حل ورق نامحدود، نمی‌توان برای حل ورق‌هایی که دارای نسبت قطر دایره محیط بر گشودگی π ضلعی به بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از 0.2 ، استفاده نمود. در تمام قسمت‌ها مشاهده شد که در ورق محدود به علت کوچک شدن ابعاد ورق، مقدار تنش حول گشودگی به مقدار زیادی بیشتر از حالت نامحدود آن است به همین جهت در این حالت ضروری است تا حتماً از حل محدود ورق برای به‌دست آوردن مقادیر صحیح بیشینه تنش حول گشودگی‌ها استفاده شود. همچنین توزیع تنش در شرایط بارگذاری یکسان، برای ورق همسانگرد، ورق ناهمسانگرد با زاویه‌ی الیاف مختلف و ورق با جنس‌های مختلف، متفاوت می‌باشد. راه‌حل تعمیم‌یافته و جامع حاضر، علاوه بر مواد محدود ناهمسانگرد، قادر به ایجاد نتایج رضایت‌بخش برای ورق نامحدود، از طریق در نظر گرفتن اندازه‌ی ورق بزرگ و نیز برای ورق همسانگرد از طریق در نظر گرفتن ویژگی‌های مناسب ماده می‌باشد.

۲-۵ پیشنهادها

موارد زیر جهت ادامه‌ی تحقیقات بر روی توزیع تنش حول گشودگی در ورق‌های محدود پیشنهاد می‌گردد.

۱- بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف غیرمنتظم در ورق محدود ناهمسانگرد تحت

بارگذاری درون‌صفحه‌ای

۲- بهینه‌سازی حل تحلیلی حاضر با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی و یافتن بهترین

گشودگی در شرایط پارامترهای بهینه

۳- بررسی توزیع تنش اطراف چند گشودگی در ورق محدود ناهمسانگرد تحت بارگذاری

درون‌صفحه‌ای

۴- بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف منتظم با وجود بار داخلی در گشودگی و

دخالت نیروهای حجمی، در ورق محدود ناهمسانگرد تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای

۵- بررسی ارتعاشات ورق محدود ناهمسانگرد حاوی گشودگی‌های منتظم

پیوست‌ها

پیوست الف

مؤلفه‌های ناهمسانگردی ماده

ماتریس نرمی کاهش یافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

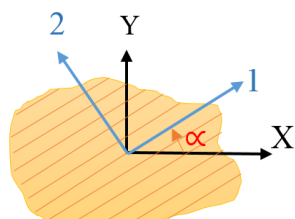
$$[\bar{S}] = [T]^T [S] [T] = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & 0 & 0 & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & 0 & 0 & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{13} & \bar{S}_{23} & \bar{S}_{33} & 0 & 0 & \bar{S}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{S}_{45} & \bar{S}_{55} & 0 \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{36} & 0 & 0 & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱})$$

که در آن S و T به ترتیب ماتریس نرمی و تابع تبدیل می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j}, \quad [S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{v_{21}}{E_2} & -\frac{v_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{v_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{13}}{E_1} & -\frac{v_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۲})$$

$$[T] = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 0 & 0 & 0 & 2CS \\ S^2 & C^2 & 0 & 0 & 0 & -2CS \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & C & 0 \\ -CS & CS & 0 & 0 & 0 & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۳})$$

و مؤلفه‌های موجود در آن از روابط زیر بدست می‌آیند، به طوری که $(X - Y)$ مختصات گلوبال و



$(1 - 2)$ مختصات اصلی ماده و α زاویه‌ی الیاف ماده می‌باشد.

$$\begin{cases} \sin \alpha = S \\ \cos \alpha = C \end{cases} \quad (\text{الف-۴})$$

ماتریس نرمی در حالت دوبعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

حالت تنش صفحه‌ای:

$$a_{ij} = \bar{S}_{ij} \quad , \quad i, j = (1, 2, 6) \quad (\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0) \quad (\text{الف-۵})$$

حالت کرنش صفحه‌ای:

$$a_{ij} = \bar{S}_{ij} - \frac{\bar{S}_{i3}\bar{S}_{j3}}{\bar{S}_{33}} \quad , \quad i, j = (1, 2, 6) \quad (\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0) \quad (\text{الف-۶})$$

مؤلفه‌های ماتریس نرمی کاهش یافته در حالت دوبعدی به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= S_{11}\cos^4\alpha + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + S_{22}\sin^4\alpha \\ \bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + S_{12}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) \\ \bar{S}_{22} &= S_{11}\sin^4\alpha + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + S_{22}\cos^4\alpha \\ \bar{S}_{16} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})\sin\alpha\cos^3\alpha - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})\sin^3\alpha\cos\alpha \\ \bar{S}_{26} &= (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})\sin^3\alpha\cos\alpha - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})\sin\alpha\cos^3\alpha \\ \bar{S}_{66} &= 2(2S_{11} + 2S_{22} - S_{66} - 4S_{12})\sin^2\alpha\cos^2\alpha + S_{66}(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) \end{aligned} \quad (\text{الف-۷})$$

در روابط فوق، α زاویه‌ی الیاف است و S_{11} ، S_{12} ، S_{22} و S_{66} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_2} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (\text{الف-۸})$$

پیوست ب

تعیین تابع بای‌هارمونیک $U(x,y)$

معادله‌ی سازگاری بر حسب تابع تنش U به شکل یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی چهارم به دست خواهد آمد.

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (1-ب)$$

و برای مواد ارتروپیک در حالت تنش صفحه‌ای، طبق رابطه‌ی (۱۷-۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (2-ب)$$

همچنین برای مواد همسانگرد به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (3-ب)$$

بنابراین حل مسائل تنش صفحه‌ای تئوری الاستیسیته، به تعیین تابع بای‌هارمونیک $U(x,y)$ که شرایط مرزی و معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم را ارضا می‌کند، خلاصه می‌شود.

معادله مرتبه چهارم بالا، به کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه اول بصورت زیر بیان می‌شود:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 U = 0 \quad (4-ب)$$

که در آن تعریف می‌شود:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5-ب)$$

با بازنویسی معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned} & (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} \\ & + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 + \mu_3 \mu_4) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \end{aligned} \quad (6-ب)$$

که در آن μ_i ها ریشه‌های معادله مشخصه زیر می‌باشند.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (\text{ب-۷})$$

و برای ماده همسانگرد داریم:

$$\mu^4 + 2\mu^2 + 1 = 0 \quad (\text{ب-۸})$$

جواب‌های معادله‌ی مشخصه:

برای هر ماده الاستیک ایده‌آلی، ثابت‌های a_{11} ، a_{12} ، a_{66} و a_{22} محدود (*finite*) هستند. همچنین

معادله مشخصه غیر صفر (ب-۷)، دارای جواب‌های مختلط یا کاملاً موهومی می‌باشد و جواب‌های حقیقی نخواهند داشت.

تنها موارد محدودکننده منجر به حذف به شرح زیر می‌باشد:

$$1) a_{22} = a_{26} = 0 \Rightarrow \mu^2(a_{11}\mu^2 - 2a_{16}\mu + 2a_{12} + a_{66}) = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = 0 \quad (\text{ب-۹})$$

که دارای دو جواب صفر می‌باشد.

$$2) a_{22} = a_{26} = 2a_{12} + a_{66} = a_{16} = 0 \Rightarrow a_{11}\mu^4 = 0 \Rightarrow \mu_{1,2,3,4} = 0 \quad (\text{ب-۱۰})$$

که تمام چهار جواب صفر خواهند بود.

$$3) a_{11} = a_{16} = 0 \Rightarrow (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (\text{ب-۱۱})$$

که دو جواب بی‌نهایت دارد.

$$4) a_{11} = a_{16} = 2a_{12} + a_{66} = a_{26} = 0 \Rightarrow a_{22} = 0 \quad (\text{ب-۱۲})$$

که چهار جواب بی‌نهایت دارد.

اگر شرط خاصی وجود نداشته باشد، موارد محدودکننده‌ی بالا را در نظر نگرفته و ریشه‌ها مختلط

یا موهومی در نظر گرفته می‌شود.

برای این نوع جواب‌ها، از نمادگذاری $\mu_1, \mu_2, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ استفاده می‌شود.

دو حالتی که برای جواب‌های معادله مشخصه (پارامترهای مختلط μ_1, μ_2) امکان آن وجود دارد:

(۱) در حالت کلی، تمام جواب‌های معادله مشخصه متفاوت خواهند بود.

$$\mu_1 = \alpha + \beta i, \quad \mu_2 = \gamma + \eta i, \quad \mu_3 = \bar{\mu}_1 = \alpha - \beta i, \quad \mu_4 = \bar{\mu}_2 = \gamma - \eta i \quad (13-ب)$$

(۲) جواب‌های معادله مشخصه، دو به دو باهم برابرند.

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha + \beta i, \quad \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = \alpha - \beta i \quad (14-ب)$$

و برای ماده‌ی همسانگرد به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu_1 = \mu_2 = i, \quad \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = -i \quad (15-ب)$$

لختی‌سکی با حل معادله‌ی $D_1 D_2 D_3 D_4 U = 0$ ، حل زیر را پیشنهاد نمود:

برای حالت جواب‌ها متفاوت (حالت کلی):

$$U = F_1(x + \mu_1 y) + F_2(x + \mu_2 y) + F_3(x + \bar{\mu}_1 y) + F_4(x + \bar{\mu}_2 y) \quad (16-ب)$$

برای حالت‌های دوبه‌دو برابر:

$$U = F_1(x + \mu_1 y) + (x + \bar{\mu}_1 y)F_2(x + \mu_1 y) + F_3(x + \bar{\mu}_1 y) + (x + \mu_1 y)F_4(x + \bar{\mu}_1 y) \quad (17-ب)$$

برای حالت کلی با توجه به مزدوج بودن μ_i ها با $\bar{\mu}_i$ ها:

$$U = F_1(x + \mu_1 y) + F_2(x + \mu_2 y) + \overline{F_1(x + \mu_1 y)} + \overline{F_2(x + \mu_2 y)} \quad (18-ب)$$

F_1 و F_2 و F_3 و F_4 توابعی دلخواه هستند، همچنین در نظر می‌گیریم:

$$Z_1 = x + \mu_1 y, \quad Z_2 = x + \mu_2 y, \quad \bar{Z}_1 = x + \bar{\mu}_1 y, \quad \bar{Z}_2 = x + \bar{\mu}_2 y \quad (19-ب)$$

تابع تنش باید یک تابع حقیقی از متغیرهای x و y باشد، پس با توجه به رابطه‌ی زیر:

$$Z = \bar{Z} = 2\text{Re}[Z] \quad (\text{ب-۲۰})$$

روابط تابع تنش را در فرم دیگرشان می‌نویسیم:

برای حالت جواب‌ها متفاوت (حالت کلی):

$$U = 2\text{Re}[F_1(Z_1) + F_2(Z_2)] \quad (\text{ب-۲۱})$$

برای حالت جواب‌های دو به دو برابر:

$$U = 2\text{Re}[F_1(Z_1) + \bar{Z}_1 F_2(Z_1)] \quad (\text{ب-۲۲})$$

و برای ماده همسانگرد:

$$U = \text{Re}[\bar{Z}\phi(z) + \theta(z)] \quad (\text{ب-۲۳})$$

در حالتی که نیروهای حجمی اثرکنند، تابع تنش نهایی حاصل جمع رابطه‌ی اخیر و یک جواب

خصوصی معادله غیرهمگن خواهد بود.

با تعریف مقادیر زیر:

$$\phi_1(Z_1) = \frac{dF_1}{dZ_1}; \phi_2(Z_2) = \frac{dF_2}{dZ_2}; \phi'_1(Z_1) = \frac{d\phi_1}{dZ_1}; \phi'_2(Z_2) = \frac{d\phi_2}{dZ_2} \quad (\text{ب-۲۴})$$

حل نهایی زیر را برای این مسئله در نظر می‌گیریم:

$$U = 2\text{Re}[F_1(x + \mu_1 y) + F_2(x + \mu_2 y)] \quad (\text{ب-۲۵})$$

مراجع

- [۱] شیگلی ج.، میشکه چ.، بادیناس ر.، (۱۳۸۷)، "طراحی اجزای ماشین"، ویرایش هفتم، چاپ سوم، انتشارات نوپردازان، مترجم ایرج شادروان، تهران، ص ۵.
- [2] Pan Z., Cheng Y., Liu J. (2013), "Stress analysis of a finite plate with a rectangular hole subjected to uniaxial tension using modified stress functions", **Int. J. Mech. Sci.**, 75, pp. 265-277.
- [3] Campbell F. C. (2010), "**Structural composite materials**".
- [4] Lucintel (2010), "Growth Opportunities in Carbon Fiber Market 2010-2015".
[Online]. Available: http://www.lucintel.com/carbon_fiber_market.aspx.
[Accessed: 08-Jun-2017].
- [5] Campbell F. C. (2006), "**Manufacturing technology for aerospace structural materials**", Elsevier.
- [6] Inglis C. E. (1913), "Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners", **Trans. Inst. Nav. Archit.**, 55, pp. 219-230.
- [7] Howland R. C. J. (1929), "On the stresses in the neighborhood of circular hole in a strip under tension", **Phil. Trans. Roy. Soc.**, 229, pp. 49-86.
- [8] Westergaard H. M. (1939), "Bearing pressures and cracks" **J. App. Mech.**, 6, pp. 49-53.
- [9] Heywood R. B. (1952), "**Designing by Photoelasticity**", Chapman and Hall, London.
- [10] Sternberg, E. (1958), "**Couple-stresses and singular stress concentrations in elastic solids**", Springer, verlag Berlin.
- [11] Neuber H. (1968), "**On the effect of stress concentration in cosserat continua**", Springer, verlag Berlin Heidelberg.
- [12] Peterson R.E. (1974), "**Stress concentration factors**", John Wiley & Sons Inc, New York.
- [13] Pilkey W. D. (1997), "**Peterson's stress concentration factors**", John Wiley & Sons Inc, Second Edition, New York.
- [14] Muskhelishvili N. I. (1953), "**Some basic problems of mathematical theory of elasticity**", Netherlands: Noordhoff, Groningen, Holland, pp. 56-104.
- [15] Savin G. N. (1961), "**Stress concentration around holes**", Pergamon Press, New York.

- [16] Theocaris P. S. and Petrou L. (1986), "Stress distributions and intensities at corners of equilateral triangular holes", **Int. J. Fracture**, 31, pp. 271-289.
- [17] Gao X. L. (1996), "A general solution of an infinite elastic plate with an elliptic hole under biaxial loading", **Int. J. Pressure Vessels Piping**, 67, pp. 95-104.
- [18] Motok M. D. (1997), "Stress concentration on the contour of a plate opening of an arbitrary cornerradius of curvature", **Mar. Struct.**, 10, pp. 1-12.
- [19] Simha K. R. Y. and Mohapatra S. S. (1998), "Stress concentration around irregular holes using complex variable method", **Sadhna (India)**, 23, pp. 394-412.
- [20] Lei G. H., Ng C. W. W., Rigby D. B. (2001), "Stress and displacement around an elastic artificial rectangular hole", **J. Eng. Mech.**, 127, pp. 880-890.
- [21] Rezaeepazhand J. and Jafari M. (2010), "Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout", **Int. J. Mech. Sci.**, 52, pp. 96-102.
- [22] Batista M. (2011), "On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to a uniform load at infinity", **Int. J. Mech. Sci.**, 53, pp. 254-261.
- [23] Sharma D. S. (2012), "Stress distribution around polygonal holes", **Int. J. Mech. Sci.**, 65, pp. 115-124.
- [24] Eshelby J. D. , Read W. T., Shockley W. (1953), "Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory", **Acta Metallurgica.**, 3, 1, pp. 251-259.
- [25] Stroh A. N. (1958), "Dislocations and cracks in anisotropic elasticity", **Philosophical Magazine**, 30, 3, pp. 625-646.
- [26] Lekhnitskii S. G. (1968), "**Anisotropic plates**", Second Edittion, NewYork.
- [27] Tan S. C. (1988), "Finite-Width Correction Factors for Anisotropic Plate Containing a Central Opening", **J. Compos. Mat.**, 11, 22, pp. 1080.
- [28] Daoust J. and Hoa S. V. (1991), "An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes", **Compos. Struct.**, 2, 19, pp. 107-130.
- [29] Abuelfoutouh N. M. (1993), "Preliminary design of unstiffend composite shells", **Symposium of 7th technical Conference of ASC**, pp. 693-786, NewYork.
- [30] Ukadgaonker V. G. and Rao D. K. N. (1999), "Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates", **Compos. Struct.**, 45, pp.171-183.
- [31] Rezaeepazhand J. and Jafari M. (2005), "Stress analysis of perforated composite plates", **Compos. Struct.**, 71, pp. 463-486.
- [32] Rezaeepazhand J. and Jafari M. (2008), "Stress analysis of composite plates with non circular cut out", **key Eng. Mater.**, 385, pp. 365-368.

- [33] Asmar G. H., Jabbour T. G. (2007), "Stress analysis of anisotropic plates containing rectangular holes", **Int. J. Mech. & Solid**, 1, 2, pp. 59-84.
- [34] Sharma D. S., Patel Nirav P., Panchal Khushbu C. (2010), "Stress distribution around triangular holes in orthotropic plate", **N. U. J. Engin. tech.**, 1, pp. 59-63.
- [35] Howland R. C. J and . Knight R. C. (1939), "Stress functions for a plate containing groups of circular holes", **Phil. Trans. R. Sec. Lond.**, 238, pp. 357-392.
- [36] Green A. E. (1940), "General bi-harmonic analysis for a plate containing circular holes", **Proc. R. Sot. Lond. A.**, 176, pp. 121-139.
- [37] Ling C. B. and Wang P. S. (1943), Technical Report, "**Stresses in perforated plate containing a ring of circular holes**", Chinese Bureau of Aeronautical Research, 6.
- [38] Tang Li-min (1959), "Analysis of stress concentration for several adjacent circular holes on elastical plate", **Sci. Record**, pp. 366-375.
- [39] Hulbert L. E. (1963), PhD. Thesis, "**The numerical solution of two-dimension problems of the theory of elasticity**", Mech. Depart., Ohio State University.
- [40] Hamada M., Mizushima I., Hamamoto M. and Masuda T. (1974), "A numerical method for stress concentration problems of infinite plates with many circular holes subjected to uniaxial tension", **J. Eng. Mater. Tech.**, 96, pp. 65-79.
- [41] Wah T. (1986), "Stresses in polygonal plates with circular holes", **Eng. Fract. Mech.**, 23, pp. 489-493.
- [42] Isida M. and Igawa H. (1991), "Analysis of zig-zag array of circular holes in an infinite solid under uniaxial tension", **int. J. Solids Struct.**, 27, pp. 849-864.
- [43] Zhang L., Yang Z., Lu A. (2001), "Analytics study on the problem of two holes having arbitrary shapes and arrangements in plane elastostatics", 2, 44, pp. 146-158.
- [44] Ukadgaonker V. G. and Patil D. B. (2008), "Stress Analysis of a Plate Containing Two Elliptical Holes Subjected to Uniform Pressures and Tangential Stresses on Hole Boundaries", **J. Manuf. Sci. Eng.**, 115, pp. 93-101.
- [45] Woo C. W. and Chan L. W. (1992), "Boundary collocation method for analyzing perforated plate problems", **Eng. Fract. Mech.**, 5, 43, pp. 757-768.
- [46] Jafari M., Ardalani E. (2016), "Stress concentration in finite metallic plates with regular holes", **Int. J. Mech. Sci.**, 106, pp. 220-230.
- [47] Ogonowski I. M. (1980), "Analytical study of finite geometry plate with stress concentration", **AfAA/ASME/ AHS 21s SDM Conference.**, pp. 694-698.

- [48] Lin C. C. and Ko C. C. (1988), "Stress and strength analysis of finite composite laminates with elliptical holes", **J. Compos. Mater.**, 4, 22, pp. 373-385.
- [49] Britt V. O. (1992), "Analysis of stresses in finite anisotropic panels with centrally located cutouts", **Structural Mechanics Division NASA Langley Research Center**, pp. 1485-1505.
- [50] Xu X., Sun L., Fan X. (1995), "Stress concentration of finite composite laminates with elliptical hole", **Comput. Struct.**, 1, 57, pp. 29-34.
- [51] Chauhan M. M., Sharma D. S. (2015), "Stresses in finite anisotropic plate weakened by rectangular hole", **Int. J. Mech. Sci.**, 101-102, pp. 272-279.
- [52] Chauhan M. M., Sharma D. S. (2016), "Stress concentration at the corners of polygonal hole in finite plate", **Aerospace Science and Technology**, 101-102, pp. 272-279.

Abstract

In this thesis, stress distribution around different regular hole in finite anisotropic plate under uniaxial loading is studied. The method employed is based on the analytical solution of Lekhnitskii's complex variable method and conformal mapping. With the assumption of plane stress conditions, also the finite plate (the ratio of the diameter of circumscribed circle of Polygon holes to biggest side of the plate is greater than 0.2) can be considered as anisotropic and linearly elastic. For solving the problem, the finite area with different shape of holes in z plan is mapped onto finite area outside a unite circle in ζ plan using the conformal mapping function. The stress function in finite plate with different hole shapes is presented by superposition of the stress function for an infinite plate with different shape of holes and ones for a finite plate without a hole. The unknown coefficients in stress function are obtained by using the least square boundary collocation method and applying the appropriate boundary conditions. The effects of hole geometry, hole curvature, hole orientation, angle of plate fiber, type of loading and plate's aspect ratio as the effective parameters on the stress distribution have been investigated. The results based on analytical solution are in a good agreement with the results obtained from other paper in finite and infinite plates. The results show that the analysis of the stress distribution in perforated plates that the ratio of the length of the biggest side of the hole to the smallest side of the plate is greater than 0.2, by using the infinite plate theory has a great error. Also by choosing the appropriate parameters can be reduced the amount of tension around holes and create the optimal plan.

Keywords

Finite plate, anisotropic material, regular hole, inplane loading, conformal mapping, analytical solution, complex variable method, least square method.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Applied Mechanics Engineering

**Study of stress distribution around regular holes in finite
anisotropic plates under in-plane loading**

By: Habibollah Pooladi

Supervisor:
Dr. Mohammad Jafari

September 2018