
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

گروه تبدیل انرژی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

توسعه سه‌بعدی شبیه‌سازی عددی جریان آرام با روش مرز غوطه‌ور-شبکه بلتزمن

نگارنده:

محمدجواد گرگانی

اساتید راهنما:

دکتر محسن نظری

دکتر محمدمحسن شاه‌مردان

شهریور ۱۳۹۷

شماره: ۱۲۸/ ۳/ ۲۸۷
تاریخ: ۹۷/۷/۲

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **محمدجواد گرگانی** با شماره دانشجویی **۹۴۱۵۲۰۴** رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان **توسعه سه‌بعدی شبیه‌سازی عددی جریان آرام با روش مرز غوطه‌ور-شبکه بلتزمن** که در تاریخ **۱۳۹۷/۰۶/۱۴** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: ۱۸/۷۱۸) ☑ **مردود** ☐

نوع تحقیق: **نظری** ■ **عملی** ☐

عضو هیات داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر محسن نظری	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	دکتر محمدمحسن شاهمردان	دانشیار	شاهمردان
۳- استاد مشاور	-	-	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر علی جباری مقدم	دانشیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر پوریا اکبرزاده	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر علی خالقی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمدمحسن شاهمردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: شاهمردان

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۳ ماه برگزار شود).

۶

هر چند نوشته‌ای قابل تقدیم نیست ولی اگر جایی اندک برای تقدیم کردن باشد، تقدیم به هر کس که در راهی درست قدم بر می‌دارد.

تشکر و قدردانی:

بالاترین تشکر از خداوندی که همیشه همراه من بوده است.

ودر ادامه از تمامی افرادی که در پایان یافتن این پایان نامه نقشی داشته اند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم به ویژه از پدر، مادر و خواهرم که سعی بر یاری من داشته اند. همچنین از اساتید راهنمای محترم، جناب آقای دکتر محسن نظری، دکتر محمد محسن شاه مردان و در پایان از همه دوستانی که در این مدت این جانب را یاری نموده اند، تشکر می نمایم.

تعهدنامه

این‌جانب **محمد جواد گرگانی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **تبدیل انرژی** دانشکده **مهندسی مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **توسعه سه‌بعدی شبیه‌سازی عددی جریان آرام با روش مرز غوطه‌ور-شبکه بلتزمن** تحت راهنمایی **دکتر محسن نظری-دکتر محمد محسن شاه‌مردان** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط این‌جانب انجام‌شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورداستفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود است و مقالات مستخرج بانام "دانشگاه صنعتی شاهرود" و یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده‌شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده‌شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

چکیده

نحوه رفتار سیال نقش بسزایی در زندگی روزمره و همینطور کاربردهای صنعتی دارد. هنگامی که ساخت هزینه‌بر یا سخت باشد شبیه‌سازی اهمیت بیشتری پیدا می‌کند. شبیه‌سازی دارای بعضی محدودیت‌ها است. از جمله محدودیت ها می‌توان امکان‌پذیری شبیه‌سازی، حجم محاسباتی بالا و محدودیت در میزان حافظه نام برد. بنابراین روش‌های از دینامیک سیالات اهمیت بیشتری پیدا می‌کنند که بتوانند در زمان، هزینه و محدودیت‌های سیستمی به‌طور مناسبی عمل کنند همچنین، نتایج با دقت قابل قبولی را نیز ارائه دهند. یکی از این روش‌ها، روش مرز غوطه‌ور-شبکه بولتزمن است. این روش با ترکیب دو روش شبکه بولتزمن و مرز غوطه‌ور قادر است جریان حاوی ذرات را با دقت خوبی شبیه‌سازی کند. در جریان‌هایی که این ذرات تعداد بالاتری داشته باشند، روش‌های مانند روش ذکر شده نتایج بهتری ارائه می‌دهند. در این روش از یک سری نقاط لاگرانژی و اویلری استفاده شده است. نقاط لاگرانژی نقاط روی جسم (اجسام) مورد بررسی هستند و نقاط اویلری، نقاط روی گره‌های شبکه می‌باشند. روش مرز غوطه‌ور با استفاده از اختلاف سرعت و نیرو، تغییراتی را به روی سرعت و فشار نقاط لاگرانژی ایجاد می‌کند که سیال، حرکت جسم را تشخیص دهد. علاوه بر آن شرط مرزی موجود یا همان شرط عدم لغزش به روی مرزها ارضا می‌کند. با توسعه برنامه دوبعدی به سه‌بعدی روش شبکه بولتزمن-مرز غوطه‌ور می‌توان جریان حاوی ذرات را نیز تحلیل نمود. برای توسعه این برنامه برای مسئله‌ای سه‌بعدی باید بر مشکلاتی از قبیل شرایط مرزی و واگرایی فائق آمد. شرایط مرزی در شبکه بولتزمن سه‌بعدی به مراتب پیچیده‌تر از مسئله دو بعدی آن است و نحوه استفاده آن در برنامه نیز پیچیده‌تر است. اعمال حرکت جریان سه‌بعدی در برنامه با توجه به آزادی بیشتر جریان نیز از جمله مشکلات دیگر استفاده از آن است. از جمله مسائل سه‌بعدی، جریان درون مکعب تو خالی و جریان حول کره ثابت است. در این تحقیق، در شبیه‌سازی مکعب میزان تغییرات سرعت خط مرکزی، جهت اعتبارسنجی و نمایه جریان نشان داده شده است. سپس یک کره ثابت تحت اثر جریان آرام نیوتونی بررسی شده است. برای اعتبارسنجی این بخش از عدد استروهال و ضریب پسا حول کره استفاده شده است، همچنین تاثیر افزایش عدد رینولدز

بر میزان ضریب برا و پسا مورد بحث قرار گرفته است. نحوه تغییرات خطوط جریان و گردابه‌ها نیز نشان داده شده است. جریان روی کره ثابت در حالت پایا و گذرا، تا رینولدز ۳۰۰ مورد بررسی واقع شده است. در رینولدز ۳۰۰ به‌دلیل گذرا بودن جریان و گردابه‌های متحرک، ضریب برا و پسا رفتاری گذرا به خود می‌گیرند با این حال در یک محدوده زمانی شروع به تکرار نیز می‌کنند.

کلید واژگان: روش شبکه بولتزمن، روش مرز غوطه‌ورجریان، مطالعه سه‌بعدی

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست علائم

علائم لاتین

مساحت	$A(\text{m}^2)$
سرعت شبکه بولتزمن	$c(\text{m/s})$
ضریب پسا	C_D
ضریب برا	C_L
سرعت صوت در شبکه بولتزمن	C_s
قطر	D(m)
سرعت گسسته بولتزمن	e_α
تابع توزیع	f
نیرو کلی خارجی	$F(\text{N})$

نیروی گسسته‌شده بر روی نقاط اویلری	F_i(N)
تابع توزیع بعد از برخورد	f'
تابع توزیع بعد از اعمال نیروی ثانویه	f''
تابع توزیع ماکسول	g
فاصله شبکه‌ای	h
ماتریس گردیان فشار، عملگر برخورد	J
عرض کانال	H(m)
طول گردابه	L(m)
جرم ذره	M(Kg)
فشار	p(N/m^3)
شعاع	R(m)
عدد بی بعد رینولدز	Re
سطح	s(m^2)
دوره تناوب، ترانهاده	$T(s)$
زمان	t(s)
سرعت نقاط اویلری	u(m/s)
سرعت نقاط لاگرانژی	U(m/s)
سرعت دیواره	U_w(m/s)
سرعت سیال ورودی به کانال	U_∞(m/s)

حجم	V (m^3)
عرض کانال	W(m)
تابع وزنی	w_α
عدد استروهال	St

- **علائم یونانی**

طول منحنی روی مرز	Δs_b(m)
سرعت میکروسکوپیک	ξ(m/s)
ضریب لامه	μ
ضریب لامه	λ
لزجت دینامیکی	μ(Kg/(m*s))
لزجت سینماتیکی	ν(m^2/s)
چگالی	ρ(Kg/m^3)
زمان آسایش منفرد	τ

- **زیرنویس‌ها**

مرزی	b
مختصات اویلری	ijk
جامد	s
ذره	p
سیال	f

- **بالانویس‌ها**

گام زمانی	n
مطلوب	d
بدون اعمال نیرو	nof
حالت تعادلی	eq
تعادلی	0
خارجی	ext

۱- فصل اول: مقدمه

۱-۱- مقدمه

جریان سیال نقش مهمی در زندگی روزمره ما بازی می‌کند. این بدان معنی است که شناخت نحوه رفتار آن بر زندگی انسان‌ها تأثیرگذار است. جریان آب رودخانه، حرکت هوا در اتمسفر، جریان آب در اقیانوس‌ها و حرکت خون در رگ‌ها، همه جزو پدیده‌های رایج جریان سیال در محیط اطراف ما هستند. در دهه‌های اخیر پژوهشگران زیادی در تلاش برای یافتن راه‌حلی مناسب برای شبیه‌سازی این رفتار سیالات بوده‌اند.

سیال از قوانین مربوط به بقای جرم و بقای مومنتوم پیروی می‌کند و بر اساس این قوانین روابطی برای تعیین رفتار آن استخراج شد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان از معادله ناویر-استوکس[1] نام برد که در میانه قرن ۱۹ بیان گردید. بااین‌حال برای این معادله حل تحلیلی جز در حالاتی ساده از سیال وجود ندارد. در حدود سال ۱۹۴۰ که کامپیوترهای مدرن کم‌کم شروع و توسعه داده شدند، حل عددی معادلات نیز شروع شد. در این دوره روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی[2] نیز نقش پررنگ‌تری پیدا کرد و با گذشت زمان روش‌های مختلفی برای حل عددی معادلات ارائه شد که بعضی از این روش‌ها در مقایسه با دیگر روش‌های موجود دارای مزیت یا معایبی بودند برای مثال برخی روش‌ها مانند روش مشتق جزئی[3] در مقایسه با روش حجم محدود[4] سرعت حل بالاتری داشتند که این موضوع در مسائل سه‌بعدی مشهودتر نیز می‌شد [۱]. در این مقطع حل مسائل دارای ذرات که به‌طور گسترده مورداستفاده قرار می‌گرفت به‌عنوان یک چالش مطرح گردید زیرا که وجود محدودیت در زمان و حافظه، نیاز به دستگاه‌های قدرتمندتر را واجب می‌ساخت که یا امکان ساخت نداشت یا اینکه هزینه‌های بالایی را شامل می‌شد. این‌گونه مسائل برای مثال در پزشکی مانند حرکت گلبول‌های قرمز در خون [۲–۵] و یا در مقیاس صنعتی شامل کنترل آلودگی ناشی از ذرات با استفاده از پالایه، درزمینه احتراق، محیط‌زیست

[1] Navier–Stokes equations

[2] Computational Fluid Dynamic (CFD)

[3] Finite Diffrence Method (FDM)

[4] Finite Element Method (FEM)

و به‌طورکلی جریان حاوی ذرات [۶–۸] دارای کاربرد فراوانی هستند. مشکل زیادی در شبیه‌سازی این نوع جریان‌ها به روش‌های قدیمی وجود داشت، وجود تعداد زیادی از ذرات و اعمال بار سنگین محاسباتی از جمله این مشکلات بودند. در این‌گونه مسائل خصوصاً در مسائل ناپایا که نیاز به شبکه‌بندی مجدد در بازه‌های زمانی وجود داشت، مشکلات زیادی ازجمله ناپایداری در حل یا کندی دررسیدن به پاسخ ایجاد می‌کرد که ورود روش‌هایی که نیاز به شبکه‌بندی مجدد را در ناحیه محاسباتی رفع می‌کرد، باعث تغییرات مثبتی درزمینه زمان رسیدن به حل و حافظه موردنیاز شد. در این‌گونه روش‌ها به‌جای آن‌که برای تشخیص ذرات، گره‌ها بر ذرات منطبق شوند، اثرات مربوط به ذرات به سیال انتقال پیدا می‌کرد. ازجمله این روش‌ها که از یک شبکه‌بندی برای تعیین رفتار سیال استفاده می‌کند، روش شبکه بولتزمن[۱] و یا یک روش واسط برای انتقال اثرات وجود جسم در سیال، روش مرز غوطه‌ور[۲] است.

۱-۲- روش شبکه بولتزمن

روش شبکه بولتزمن یک روش برای شبیه‌سازی فاز پیوسته سیال است و ذرات سیال را به‌صورت جدا در نظر می‌گیرد. این روش نسبت به روش ناویر-استوکس، روشی بسیار راحت‌تر برای شبیه‌سازی جریان سیال است زیرا که نیاز به حل جداگانه بخش‌های فشار و سرعت ندارد و از طرفی دیگر امکان پردازش موازی حل معادلات را دارا می‌باشد که باعث افزایش سرعت حل می‌گردد.

از دیگر مزیت‌های این روش امکان حل بخش انرژی به‌منظور محاسبه ناسلت و دما و ... هست که در معادله ناویر-استکوس باید به‌صورت دو معادله پیوندیافته با یکدیگر حل شود که مشکلات حل موردنظر ما را چند برابر می‌کند درحالی‌که در روش شبکه بولتزمن این ترکیب به‌راحتی در برنامه اعمال می‌شود.

معادله شبکه بولتزمن همراه با زمان آسایش یگانه[۳] [۹،۱۰] مورداستفاده قرار می‌گیرد که این مدل

---

[1] Lattice Boltzmann Method (LBM)

[2] Immersed Boundary Method (IBM)

[3] Single Relaxtion Time

توسعه‌یافته روش شبکه گاز [1] [۱۱،۱۲] است که مشکلاتی از قبیل محدودیت اندازه پارامترهای فیزیکی، سختی‌ها و مشکلات در به‌کارگیری در مسائل سه‌بعدی را برطرف کرده است . معادله ناویر–استوکس بنابر برفرض پیوستگی ماکروسکوپیک [2] است درحالی‌که روش شبکه بولتزمن بر اساس معادله جنبشی مزوسکوپیک [3] است که رفتار جمعی ذرات برای شبیه‌سازی پیوستگی سیستم مورداستفاده، قرارگرفته است [۱۳]. یکی دیگر از مزیت‌های روش شبکه بولتزمن محاسبه پارامترها به‌صورت محلی است که باعث سهولت و دقت بیشتر در محاسبات می‌گردد.

آغازکننده این روش برای شبیه‌سازی‌ها مک نامارا و زانتی [۱۴] بودند که از معادله بولتزمن به‌منظور شبیه‌سازی شبکه اتم گاز [4] استفاده کردند. هیگوار و همکاران [۱۵] از یک عبارت خطی که محدودیت روش شبکه بولتزمن به پارامترهای فیزیکی را از بین می‌برد، استفاده کردند.

۱-۲-۱- شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن

اعمال شرایط مرزی در معادلات جریان مربوط به سیال، یکی از مهم‌ترین موارد در حل عددی و حل تحلیلی مسائل است و اشتباه در این بخش تمامی جواب‌ها را زیر سؤال خواهد برد. به همین دلیل در این بخش به بیان روندی از اعمال شرایط مرزی و برخی روش‌های اعمال شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن پرداخته شده است.

معادله شبکه بولتزمن در سال‌های اخیر در شبیه‌سازی پدیده‌های گذرا به‌خوبی عمل کرده است. با وجود روش‌های مختلف برای معادله شبکه بولتزمن، شبکه بولتزمن مدل BGK [5] کاربرد و قدرت بیشتری در این زمینه داشته است [۱۶]. برای مثال مدل مثلثی LBGK [6] دوبعدی با شرایط مرزی

---

[1] Lattice gas automata (LGA)

[2] Macroscopic continuum theory

[3] Mesoscopic kinetic equations

[4] Lattice gas automata

[5] Bhatnagar–Gross–Krook

[6] Lattice Bhatnagar–Gross–Krook

ارائه‌شده در [۱۷] توانست مسئله جریان سیال بین صفحات ناشی از یک نیروی خارجی را حل کند. در عمل اگرچه اغلب ایجاد جریان ناشی از اختلاف فشار است، اختلاف فشار نمی‌تواند در مدل شبکه بولتزمن مدل BGK با نیروی خارجی جایگزین شود. در این شرایط برای ایجاد جریان از شرایط مرزی سرعت و چگالی به‌منظور ایجاد جریان استفاده کرد. در معادله شبکه بولتزمن تعیین میزان تغییر فشار با تغییر میزان چگالی در ارتباط است. مدتی قبل برای ارضای شرایط مرزی از توابع توزیع با استفاده از سرعت و چگالی در مرزها استفاده می‌شد که خطای زیادی را در حل ایجاد می‌کردند [۱۸]. اسکردوس[1] [۱۹] به‌وسیله بسط چپمن-انسکوگ[2] با دقت مرتبه اول برای توابع توزیع تعادلی ارائه داد، در این روش به تغییرات چگالی و سرعت نیاز بود که با رابطه اختلاف محدود تعیین می‌شد. اینامرو[3] و همکاران [۲۰] و مائیر[4] و همکاران [۲۱] پیشنهاد یک روش جدید برای شرایط مرزی ارائه دادند که در روش آن‌ها چگالی (فشار) به‌طور جداگانه از شرایط مرزی دیوار بررسی می‌شد. چن و همکاران [۲۲] نیز یک روش کلی برای ارضای شرایط مرزی پیشنهاد دادند. تمامی روش‌های پیشنهادی ذکرشده به‌منظور افزایش دقت در ارضای شرایط مرزی انجام شدند، با این‌حال در هندسه‌های کلی اعمال این شرایط مرزی نسبتاً سخت است. علت این امر به دلیل نیاز به جهت‌یابی دیوارها و تشخیص توابع توزیع است و حالت اضافه یا مختلفی در مورد گره گوشه‌ها وجود دارد. با این‌حال روش بازگشت به عقب میانی[5] از دقت مرتبه دو بهره می‌برد که در [۲۳] و [۲۴] به کار برده شد.

۱-۳- روش مرز غوطه‌ور

در روش‌های قدیمی‌تر، شبکه‌بندی منطبق بر مرزهای جسم بود که باعث می‌شد در شبکه‌بندی‌های اجسام پیچیده‌تر مشکل حتی بیشتر شود. در روش مرز غوطه‌ور لزوماً مرز و نقاط شبکه

---

[1] P. A. Skordos

[2] Chapman–Enskog expansion

[3] Inamuro

[4] Maier

[5] Half-way bounce-back

روی‌هم قرار ندارند که یک مزیت بزرگ برای این روش محسوب می‌شود. این روش برای انتقال اثر وجود اجسام به سیال می‌تواند از عبارت نیرویی استفاده کند که هم به‌صورت صریح و هم به‌صورت ضمنی قابل‌محاسبه است. یک از مشکلات اولیه‌ای که همیشه در زمینه دینامیک سیالات محاسباتی وجود دارد، وجود مرزهای متحرک در ناحیه محاسباتی بوده است که برای حل این مشکل راه‌حل‌های مختلفی به‌وسیله توسعه‌دهندگان ارائه شد. از جمله این راه‌حل‌ها استفاده از روش مرز غوطه‌ور بوده است.

به‌طورکلی دو روش به‌منظور محاسبه چگالی نیروی مرزی وجود دارد که شامل نیروی بازگشت به عقب[1] و اعمال نیروی مستقیم[2] است. در روش نیروی بازگشت به عقب [۲۵–۳۰] در یک روند بازگشتی چگالی نیروی مرزی محاسبه می‌گردد[۳۱–۳۹]. روش مرز غوطه‌ور برای بهبود استفاده در محاسبات، نیازمند الگوریتمی واسط به‌منظور انتقال اثرات خود به سیال می‌باشد زیرا که لزوماً نقاط روی مرزهای جسم موردنظر بر روی نقاط یا شبکه‌های سیال قرار ندارند به همین دلیل الگوریتم‌هایی برای انتقال این اثرات ارائه شدند که به‌طور عمده به دو صورت طرح مرز دیفیوز[3] و طرح مرز شارپ[4] مورداستفاده قرار می‌گیرند.

تفاوت این دو روش در نحوه انتقال اثرات نقاط لاگرانژی به نقاط اویلری است؛ به این نحو که در طرح دیفیوز از یک تابع توزیع گسسته[5] که بر اساس فاصله نقاط لاگرانژی و اویلری از یکدیگر عمل می‌کند، میزان اثر تغییرات سرعت و نیرو را محاسبه می‌کند. البته این مورد نیازمند انتخابی دقیق است تا به‌درستی این انتقال انجام شود.

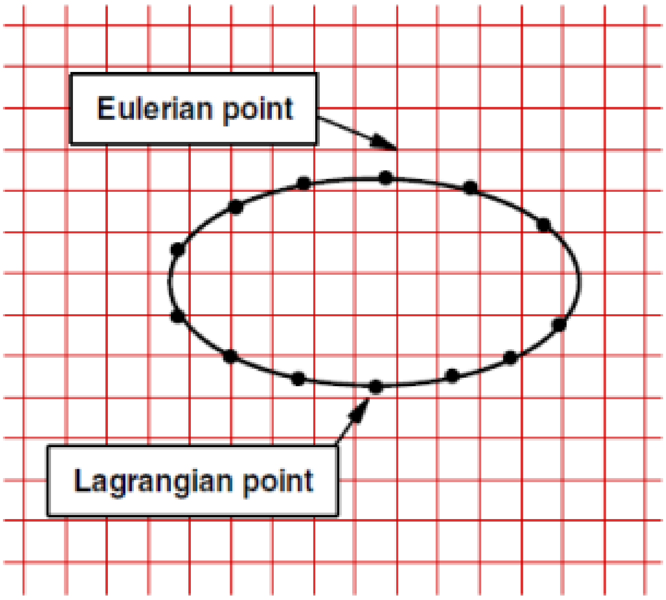
[1] Feed-back forcing method

[2] Direct-forcing method

[3] Diffuse interface scheme

[4] Sharp interface scheme

[5] Discrete delta function



شکل ۱-۱: موقعیت نقاط اویلری و لاگرانژی [۴۰]

در طرح شارپ به‌جای استفاده از یک تابع به‌منظور محاسبه میزان این اثرات از یک درون‌یابی به‌منظور ارضای شرایط مرزی استفاده می‌گردد. این بدان معنا است که با یک درون‌یابی بین نقاط سعی بر آن دارد تا شرط عدم لغزش بر روی نقاط لاگرانژی را اعمال کند.

۱-۳-۱- روش مرز غوطه‌ور بازگشتی

آغازگر این روش پسکین [۲۸] بود که از این روش برای شبیه‌سازی جریان خون در قلب استفاده کرد. نیروی مرزی به‌وسیله قانون هوگ محاسبه شد که این نیرو تابعی از تغییر شکل همراه با تعیین یک ضریب فنریت برای سطح موردنظر بود. البته روش مورداستفاده پسکین در اینجا با مشکلی همراه بود که روش او برای حالت انعطاف‌پذیر مورداستفاده قرارگرفته بود و هر چه این تغییر شکل کمتر و به شکل صلب نزدیک‌تر می‌شد، دیگر پاسخگوی شبیه‌سازی نبود و تنش‌های برشی بزرگی ایجاد می‌کرد. لای و پسکین [۴۱] این روش را برای شبیه‌سازی جریان حول یک استوانه دوبعدی صلب استفاده کردند. گلدستین و همکاران[۴۲]، سایکی و بیرجین [۲۹] از مرز مجازی استفاده کردند که نیاز به تغییرات با توجه به شرایط جریان داشته و باعث محدودیت‌هایی در گام زمانی و کاهش دقت حل می‌گردد. در این روش از تغییرات سرعت به‌صورت مستقیم به‌منظور محاسبه نیروی موردنظر استفاده می‌شود. دو پارامتر

آزاد بسته به شرایط جریان در فرمول‌های مربوطه آن قرار می‌گیرد.

۱-۳-۲- روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم

به طور کلی دو روش عمده برای اعمال نیرو و الگوریتم واسط آن وجود دارد که در ادامه بحث به آن‌ها می‌پردازیم. روش اول، روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم و استفاده از طرح مرز شارپ و روش دوم، روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم با طرح مرز دیفیوز است که در هر بخش از آن‌ها به طور مفصل‌تری بیان شده است.

۱-۳-۲-۱- روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم و استفاده از طرح مرز شارپ

روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم و استفاده از طرح شارپ اولین بار توسط موحد یوسف [۳۱] مورداستفاده قرار گرفت. فالدون و همکاران [۳۲] با ترکیب این روش با اعمال نیروی مستقیم و در قالب روش اختلاف محدود برای مسائل مختلف جریان سیال به کار بردند. نقاط نیرویی در نزدیک‌ترین فاصله بین شبکه سیال و مرز موردنظر قرار می‌گیرند و با استفاده از یک درون‌یابی خطی بین این دو محاسبه می‌شوند. کیم و همکاران [۳۳] این روش را در چارچوب روش حجم محدود مورداستفاده قراردادند. در این روش نقاط نیرویی بیرون از گره‌ها (گره‌های جسم صلب) در نزدیکی مرز جسم قرار دارند. به‌منظور انتخاب دلخواه مسیر درون‌یابی فالدون و همکاران در [۳۲] آن‌ها از یک درون‌یابی با دقت مرتبه دو استفاده کردند که از یک نقطه دیگر نیز برای درون‌یابی بهره می‌برد.

در روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم، بخش چگالی نیرویی (شتاب) در یک روند محاسباتی تعیین می‌شود. به‌عبارت دیگر معادله ناویر-استوکس می‌تواند به‌صورت زیر بیان گردد:

$$\frac{u^{n+1}-u^{n}}{\Delta t}=RHS^{n}+F^{n} \qquad (۱-۱)$$

که در آن Δt گام زمانی، n و $n+1$ به ترتیب زمان حاضر و گام زمانی بعدی و R^{n} شامل عبارت جابه‌جایی، لزج و فشار معادله ناویر-استوکس است. اگر سرعت موردنظر در گام زمانی بعدی برابر U^{d}

فرض شود، معادله (۱-۱) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود [۴۳] :

$$\frac{U^d - u^n}{\Delta t} = RHS^n + F^n \quad (۲-۱)$$

که سرعت در مرحله بعد می‌تواند بدون نیروی خارجی موجود بازنویسی شده و به شکل معادله زیر است:

$$U^d = u^{nof} + F^n \Delta t \quad (۳-۱)$$

در معادله (۱-۳)، u^{nof} برابر است با:

$$u^{nof} = RHS^n \Delta t + u^n \quad (۴-۱)$$

با توجه به معادلات (۱-۲) و (۱-۴)، بخش چگالی نیرو به‌طور مستقیم از معادله زیر استخراج می‌شود:

$$F^n = \frac{U^d - u^{nof}}{\Delta t} \quad (۵-۱)$$

بخش چگالی نیرویی در روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم و طرح شارپ، بسته به آن‌که به چه صورت در زمان پیشروی می‌کنیم، می‌تواند به‌صورت صریح یا ضمنی حل گردد. در روش صریح [۳۱،۳۲] چگالی نیرویی به‌صورت صریح به دست نمی‌آید و در عوض سرعت در گره‌های نیرویی به‌صورت مستقیم جای سرعت مطلوب قرار می‌گیرد. در روش شبه ضمنی[۱] محاسبه زمانی، بخش چگالی نیرویی در گام زمانی بعدی محاسبه می‌شود. این مورد باعث ایجاد خطای زیادی نمی‌گردد، چراکه تغییرات نیرو در مرحله بعدی به‌اندازه کافی کوچک است و سپس به‌صورت صریح در معادله سیال وارد می‌گردد. برای

[1] Semi-Implicit

مسائل مختلف، نویسندگان [۳۴،۳۹،۴۴،۴۵] الگوریتم درون‌یابی خود را برای مسائل مختلف سیالاتی اعمال کردند و حتی در حالات آشفته نیز موفق به استفاده از آن شدند.

در مقایسه با روش مرز غوطه‌ور بازگشتی در این روش، نیرو اثری روی پایداری ندارد و همچنین نیاز به روان‌سازی نیرو وجود دارد. همچنین نیاز به پارامترهای آزاد نیز ندارد، با این‌حال در مرزهای متحرک امکان ایجاد نوسان‌های کاذب، به خاطر ناپیوستگی نقاط درون‌یابی شده وجود دارد.

۱-۳-۲-۲- روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم طرح مرز دیفیوز

اولین بار توسط سیلوا و همکاران [۴۶] این روش مورداستفاده قرار گرفت. آن‌ها از یک تقریب چندجمله‌ای لاگرانژی مرتبه دوم برای محاسبه سرعت و فشار استفاده کردند که نیازمند تخمین نیرو در مرزها بود. نیروی مرزی[۱] از طریق یک تابع توزیع گسسته به نقاط نیرویی[۲] توزیع می‌شود که در روش مرز غوطه‌ور بازگشتی مورداستفاده قرارگرفته بود. آهلمن [۴۷] از این روش برای سیال حاوی ذرات در مسئله سه‌بعدی استفاده کرد. در روشی که آهلمن [۴۷] مورداستفاده قرار داد، از تابع توزیع گسسته همان‌طوری که در توزیع نیروی مرزی مورداستفاده قرارگرفته بود در نقاط نیرویی لاگرانژی برای درون‌یابی سرعت نیز مورداستفاده قرار گرفت. به‌عبارت‌دیگر، به‌جای درون‌یابی هر بخش معادله ناویر-استکوس به روی نقاط نیروی لاگرانژی و به‌منظور محاسبه نیروی مرزی، آهلمن [۴۷] از سرعت بدون نیرو در نقاط همسایگی استفاده کرد که نیرو ساده‌تر از روش سیلوا و همکارانش [۴۶] به دست می‌آید. او همچنین نشان داد که حل او از روان بودن بیشتری در جریان حاوی ذرات متحرک نسبت به طرح مرز شارپ درجایی که نوسانات رخ می‌داد، برخوردار است.

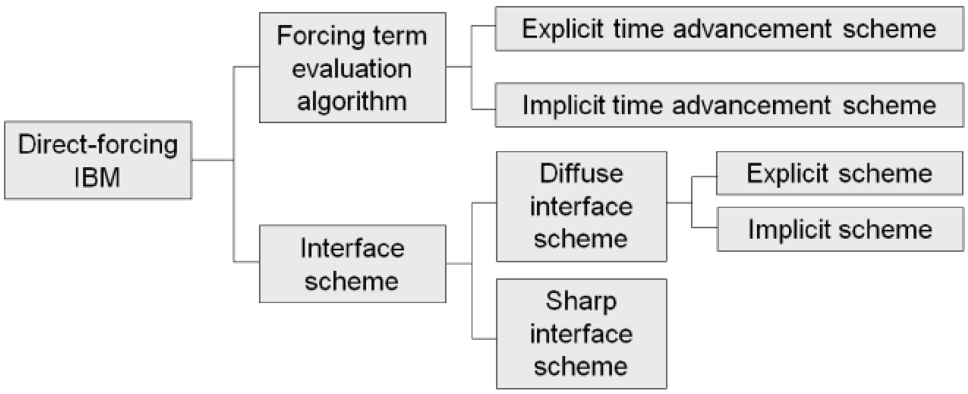
در این روش بخش سرعت به‌منظور محاسبه نیروی مرزی استفاده‌شده است و پس از به‌روز شدن نیرو دوباره برای سرعت به کار برده می‌شود؛ بنابراین سرعت درون‌یابی شده از سرعت به‌روزرسانی شده

---

[1] Boundary force

[2] Forcing points

ممکن است شرط عدم لغزش را دقیقاً ارضا نکند. به‌منظور رفع این مسئله چندین روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم با طرح ضمنی دیفیوز ارائه شد. طرح‌های قبلی که ضمنی نبودند را طرح دیفیوز صریح نامیده می‌شود. سو و همکاران [۴۸] و لی و همکاران [۴۹] پیشنهاد یک روش نیرویی ضمنی برای حل معادلات ماتریس نیرویی ضمنی[1] دادند. برای جلوگیری از پیچیدگی حل این ماتریس، لو و همکاران [۵۰] و وانگ و همکاران [۵۱] پیشنهاد یک روش اعمال نیروی مستقیم چندگانه که روشی تکراری برای تنظیم نیرو است را دادند که برای مرز متحرک و ثابت به کار برده شد.



شکل ۱-۲: زیرشاخه‌های کلی روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم [۵۲]

به‌طورکلی همان‌طور که در شکل ۱-۲ نشان داده‌شده، روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم برای محاسبه نیرو با توجه به نوع محاسبات زمان به دو دسته کلی صریح و ضمنی تقسیم‌بندی شده است. همچنین مرزهای موجود در دو طرح کلی دیفیوز و شارپ قرار می‌گیرند که طرح دیفیوز خود نیز می‌تواند به دو روش صریح و ضمنی برای ارضای شرایط مرزی به کار برده شود.

۱-۴- پیشینه روش مرز غوطه‌ور-شبکه بولتزمن

این روش ترکیبی از روش مرز غوطه‌ور و روش شبکه بولتزمن است که برای جریان حاوی ذرات کاربرد بسیاری دارد [۵۳–۵۶]. همان‌طور که در توضیحات هر یک از روش‌ها گفته شد ترکیب این دو

[1] Implicit banded force matrix equations

روش، روشی کاربردی باقدرت و کارایی خوب در شبیه‌سازی جریان حاوی ذرات محسوب می‌شود.

فنگ و میخائلیدز [۳۰] اولین بار از ترکیب این دو روش استفاده کردند. روشی که آن‌ها استفاده کردند اساساً همان روش مرز غوطه‌ور بازگشتی استفاده‌شده به‌وسیله لای و پسکین [۴۱] بود با این تفاوت که به‌جای استفاده از معادله ناویر-استوکس از معادله شبکه بولتزمن استفاده کردند. بعد از این مرحله آن‌ها پیشنهاد یک روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم و طرح مرز دیفیوز صریح را دادند [۵۷] که برای حل جریان حاوی ذرات سه‌بعدی به کار برده شد. با این‌حال آن‌ها از معادله ناویر-استوکس برای تخمین نیروی مرزی استفاده کردند. نیو و همکاران [۵۸] پیشنهاد استفاده از روش مرز غوطه‌ور-شبکه بولتزمن همراه با یک طرح مرزی دیفیوز را دادند که به‌جای آنکه از معادله ناویر-استوکس برای حل نیروی مرزی استفاده کند از قانون بازگشت انعکاسی[1] استفاده کردند که از دقت مرتبه اول روی مرزها برخوردار بود. دیوپیوس و همکاران [۵۹] نیز به‌جای حل معادله ناویر-استوکس از معادله شبکه بولتزمن برای شبیه‌سازی استفاده کردند. آن‌ها از طرح دیفیوز صریح و طرح شارپ برای شبیه‌سازی جریان روی استوانه استفاده کردند.

به‌طورکلی استفاده از این روش ترکیبی برای طرح مرزی شارپ برای هندسه‌های پیچیده و ثابت دارای دقت و کارایی بیشتری در شبیه‌سازی‌ها است و از طرفی برای شبیه‌سازی مرزهای دارای حرکت استفاده از طرح مرزی دیفیوز بهتر و کاراتر است ولی از دقت کمتری بهره می‌برد.

این روش همان‌طور که گفته شد برای مسائل دوبعدی زیادی مورداستفاده قرارگرفته است و استفاده از آن در مسائل سه‌بعدی در حال توسعه است. با توجه به اینکه بیشتر مسائل ما در واقعیت سه‌بعدی هستند، تحقیقات زیادی در آن برای این‌گونه مسائل انجام شد. روش شبکه بولتزمن در مسائل سه‌بعدی با افزایش توابع خود در جهات مختلف می‌تواند میزان سرعت و فشار را در جهات و نقاط

[1] Bounce-back rule

مختلف محاسبه کند. هرچند روش‌های مختلفی برای بهبود این روش و شبیه‌سازی ذرات انجام‌شده است [۶۰–۶۲] ولی بازهم ترکیب این روش با روش مرز غوطه‌ور دارای کارایی زیادی در بحث جریان حاوی ذرات است.

۱-۵- تعریف مسئله

در این تحقیق به بررسی مکعب تو خالی سه‌بعدی و جریان حول کره از طریق توسعه برنامه دو بعدی به سه‌بعدی پرداخته شده است. روابط مورد نیاز برای مرزها و ارضای شرایط مرزی استخراج شده‌اند و صحت روابط و برنامه ترکیبی شبکه بولتزمن-مرز غوطه‌ور مورد بررسی قرار گرفته است. مکعب تو خالی [1] سه‌بعدی با صفحه‌ای متحرک در بالای آن بررسی شده است. این مکعب دارای صفحاتی با یک اندازه مشخص و برابر است که بر اثر حرکت صفحه در بخش بالای آن جریان سیال ایجاد و شروع به حرکت می‌کند. نوع سیال در این شبیه‌سازی نیوتونی است. جریان به صورت آرام در نظر گرفته شده است و برای رینولدز ۱۰۰، ۴۰۰ و ۱۰۰۰ مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط مرزی انتخاب شده برای دیواره‌های این مکعب، شرط عدم لغزش است. این مسئله به صورت سه‌بعدی مورد بحث واقع شده است.

در ادامه بعد از بررسی مکعب به بررسی یک کره در درون یک ناحیه محاسباتی که به شکل مکعب مستطیل است، پرداخته شده است. این مورد به ازای رینولدزهای ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰ و ۲۰۰ برای حالت پایا بررسی شده است. برای حالت پایا با توجه به تغییرات ایجاده شده در ینولدز ۲۵۰، این رینولدز به صورت جداگانه بررسی شده است. برای حالت گذرا عدد رینولدز ۳۰۰ انتخاب شده است. در ورودی این ناحیه محاسباتی، سیال با حالت یکنواخت وارد می‌گردد. شرایط مرزی انتخاب شده برای دیواره‌های اطراف به جز ورودی و خروجی سیال، شرط تقارن است و برای خروجی شرط فشار خروجی (پیوست الف) انتخاب شده است.

[1] Cavity

۱-۶- نوآوری

تاکنون بحث‌ها و توسعه زیادی روی روش شبکه بولتزمن و همین‌طور بحث مرز غوطه‌ور به‌صورت جدا صورت گرفته است. همچنین ترکیب این دو نیز در مسائل به‌وفور به گرفته‌شده است ولی بااین‌حال در مورد این دو روش در بخش سه‌بعدی در ایران و جهان کمتر نسبت به مسائل دوبعدی نگاه شده است.

در این پایان‌نامه برای هر دو روش به حیطه سه‌بعدی واردشده و از ترکیب آن‌ها نیز برای حل مسئله سیالاتی استفاده خواهیم کرد. اعمال شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن سه‌بعدی بسیار سخت‌تر از دوبعدی آن است. در این تحقیق این روابط استخراج و در برنامه اعمال شده‌اند.

ابتدا برای محفظه‌ای بسته که صفحه بالا آن متحرک است به صحت‌سنجی روش شبکه بولتزمن پرداخته شده است و سپس به بررسی جریان حول کره و وضعیت گردابه‌ها، ضریب برا و پسای آن اشاره خواهد شد.

در دو حالت پایا و گذرا برای کره ثابت، بررسی جریان صورت گرفته است. در حالت پایا، ضرایب برا، پسا و شکل گردابه‌ها نشان داده شده است. در حالت گذرا نیز نمودار مربوط به اندازه ضرایب اعلام شده نیز نشان داده شده است و همینطور تغییرات شکل خطوط جریان که وابسته به زمان نیز می‌باشد. به منظور بررسی وضعیت سرعت تکرار گردابه‌ها، دوره تناوب و فرکانس تکرار بیان شده است و با توجه به این اعداد، عدد استروهال نیز بدست آمده است.

۱-۷- ساختار و فصل‌بندی پایان‌نامه

این پایان‌نامه از پنج فصل کلی تشکیل شده است که در فصل اول آن مقدمه‌ای از روش شبکه بولتزمن و روند پیدایش و پیشرفت آن بیان گردید. چالش‌هایی که این روش با آن روبرو بوده است و بیانی کلی از نحوه استفاده از این روش در این بخش ارائه گردید. سپس به بیان روش مرز غوطه‌ور پرداختیم و اینکه چگونه عمل می‌کند و علت آن‌که چرا این روش ترجیح داده شده است. بعد از بیان

کلی این روش، به انواع روش مرز غوطه‌ور که مورد استفاده قرارگرفته اشاره‌شده و سپس شاخه‌های مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم معرفی گردید.

در شاخه‌های روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم به طرح‌های موجود استفاده‌شده آن برای نیروی مرزی و سرعت اشاره شد که شامل طرح مرزی شارپ و طرح مرزی دیفیوز بود. در بخش بعدی آن به بیان مختصری در مورد طرح شارپ و روند توسعه آن پرداخته شد. سپس در مورد طرح دیفیوز و مشکلاتی که با آن روبرو بود، اشاره شد.

در فصل دوم به بیان روابط و جزئیات روش شبکه بولتزمن پرداخته شده است. ابتدا روابط استفاده شده در مدل مورد استفاده بیان شده و سپس روابط گسسته شده و کاربردی در برنامه‌نویسی بیان شده است. ساختار مورد استفاده در سه‌بعد نیز در این فصل نشان داده شده است. در مورد شرایط مرزی در سه حالت مختلف رایج مورد استفاده در مقالات نیز در این فصل صحبت شده و نحوه بدست آوردن آن به طور مفصل توضیح داده شده است.

در فصل سوم ابتدا روش مرز غوطه‌ور و معادلات حاکم بر آن به تفصیل بیان گردیده است و پس از آن روابط گسسته شده مورد استفاده نوشته شده است. بعد از بیان روش مرز غوطه‌ور، بحث ترکیب این روش با روش شبکه بولتزمن ارائه شده است و نحوه استفاده و ترکیب این دو روش بیان شده است.

در فصل چهارم به بیان نتایج حاصل از به‌کارگیری روابط سیالاتی حاکم، پرداخته شده است و برای یک مسئله اولیه نتایج را جهت صحت‌سنجی بیان شده و سپس ترکیب سیال و ذره در آن مورد بحث واقع شده است . در این فصل نمایه‌های خطوط جریان، نمودار سرعت در برخی خطوط و ضرایب برا و پسا، عمده مطالبی است که به آن توجه شده است.

در فصل پنجم به بیان نتیجه‌گیری‌ها و پیشنهادات برای آینده پرداخته شده است و پس از بیان منابع پیوست مربوط به شرایط مرزی سه‌بعدی ارائه شده است.

۲- فصل دوم: روش شبکه بولتزمن

۲-۱- روش شبکه بولتزمن برای سیال تراکم‌ناپذیر

به‌منظور ارضای مرتبه دوم متغیرها در حالت ماکروسکوپیک در سیال تراکم‌ناپذیر شبکه بولتزمن روش بهاتنگر، گروس و کروک[1] (BGK) مورد استفاده قرار گرفت [۶۳].

۲-۲- معادلات حاکم بر شبکه بولتزمن BGK

در این مدل، x به‌عنوان فاصله فیزیکی شبکه کارتزین، ξ به‌عنوان سرعت مولکولی و $f(\vec{x},\xi,t)$ نشان‌دهنده توابع توزیع در معادله بولتزمن پیوسته است.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi.\nabla f=J(f) \qquad (۲\text{-}۱)$$

در این معادله $J(f)$ عملگر برخورد است و میزان تغییرات تابع توزیع f ناشی از برخورد مولکولی می‌باشد. عملگر J خود یک فرم انتگرالی پیچیده است. بنابراین معادله (۲-۱) یک معادله انتگرالی-دیفرانسیلی غیرخطی محسوب می‌شود.

مدل زمان آسایش یگانه ساده به‌کاربرده شده در تئوری جنبشی، BGK نیز خوانده می‌شود که در قبل نیز اشاره شد. در این مدل $J(f)$ در معادله بولتزمن به‌صورت ساده زیر بیان می‌گردد:

$$J(f)=\frac{-1}{\lambda}(f-f^0) \qquad (۲\text{-}۲)$$

تابع توزیع مکسولین[2] f^0 که به‌صورت میانگین سرعت و دمای محلی بیان می‌گردد و λ، زمان آسایش متوسط است که ممکن است به دما وابسته باشد ولی به‌سرعت مولکولی وابسته نیست. معادله بولتزمن BGK می‌تواند به فرم زیر تعریف گردد:

---

[1] Bhatnagar–Gross–Krook

[2] Maxwellian distribution function

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\xi.\nabla f=\frac{-1}{\lambda}(f-f^0) \qquad (۳-۲)$$

تابع توزیع مکسولین در معادله (۲-۲) و (۲-۳) نیز به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$f^0=\frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}}\exp[\frac{-(\xi-u)^2}{2RT}] \qquad (۴-۲)$$

که در آن به ترتیب R ضریب گاز ایده‌آل، T دمای میکروسکوپیک و u سرعت میکروسکوپیک می‌باشد. معادله شبکه بولتزمن با زمان آسایش یگانه می‌تواند به‌صورت مستقیم از معادله بولتزمن BGK به دست بیاید. باانتگرال‌گیری از متغیرهای معادله (۲-۳) و نوشتن بسط سری تیلور برای گسسته‌سازی زمان مرتبه اول داریم:

$$f(x+\xi\delta t,\xi,t+\delta t)-f(x,\xi,t)=\frac{-1}{\tau}[f(x,\xi,t)-f_M(x,\xi,t)] \qquad (۵-۲)$$

در این فرمول τ که بیان‌کننده زمان آسایش بی‌بعد است برابر با عبارت زیر می‌باشد:

$$\tau=\frac{\lambda}{\delta t} \qquad (۶-۲)$$

که در آن δt، مقدار گام زمانی گسسته شده است. با گسسته‌سازی معادله (۲-۵) در فضای سرعت، می‌توانیم عبارتی برای جریان تراکم ناپذیر همراه با زمان آسایش یگانه معادله شبکه بولتزمن بیان کنیم.

$$f_\alpha(x+e_\alpha\Delta t,t+\Delta t)-f_\alpha(x,t)=-\frac{1}{\tau}[f_\alpha(x,t)-{f_\alpha}^{eq}(x,t)] \qquad (۷-۲)$$

که $f_\alpha(x,t)\equiv f(x,e_\alpha,t)$، گسسته شده تابع توزیع ذرات[1] (PDF) است. ${f_\alpha}^{eq}(x,t)$ در این معادله گسسته شده تعادلی PDF است و e_α گسسته دستگاه سرعت موردنظر می‌باشد که این دو مورد

[1] Discretized particle distribution function

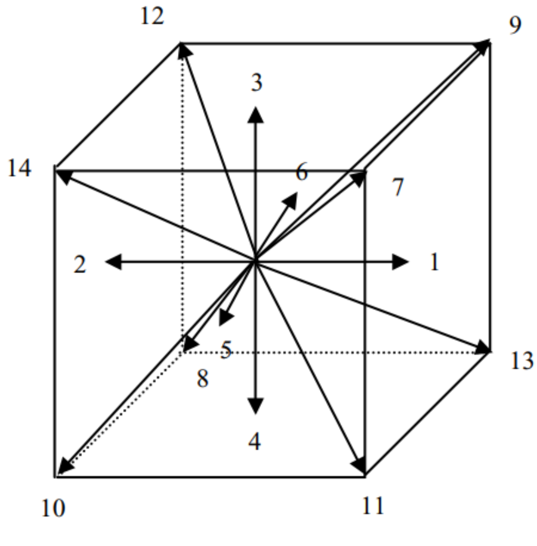
بر اساس مدل شبکه انتخاب می‌شوند. ${f_\alpha}^{eq}$ در آن با استفاده بسط سری تیلور برای تابع توزیع بولتزمن-مکسول بیان می‌گردد.

پس از اعمال روابط ریاضی و انتگرال‌گیری از روابط و نوشتن بسط چاپمن-اینسکاک [۳۳]، فرم‌های ساده زیر برای اعمال در جریان وجود دارد:

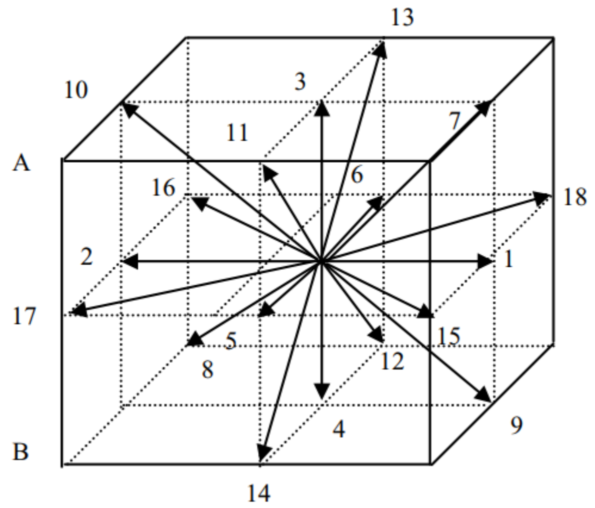
$$f_\alpha^{eq} = w_\alpha \rho \left\{1 + \frac{3(e_\alpha . u)}{c^2} + \frac{(e_\alpha . u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2}\right\} \qquad (۸-۲)$$

که در این معادله w_α ضریب وزنی و c برابر با نسبت تغییرات مکانی به تغییرات زمانی است که در هر بازه زمانی تعیین می‌گردد. ضریب وزنی اعلام‌شده در این رابطه به نحوه گسسته کردن سرعت وابستگی دارد و باید بر این اساس و تأثیر هرکدام تعیین گردد. برای این موضوع شکل‌های متفاوتی از توابع جهت‌دار وجود دارند که از مسائل یک‌بعدی تا سه‌بعدی را شامل می‌شوند. برای حل مسائل سه‌بعدی اغلب نویسندگان از D3Q15 و D3Q19 برای شبیه‌سازی‌ها استفاده کرده‌اند [۶۴–۶۷] .

در هرکدام از مدل‌ها تفاوت در نحوه پوشش و جهت‌های توابع توزیع وجود دارد که در ادامه چند مورد از شکل‌هایی که برای توابع توزیع استفاده می‌شود، نمایش داده شده است:



شکل ۲-۱:جهات توابع توزیع در مدل D3Q15 [۶۸]



شکل ۲-۲:جهات توابع توزیع در مدل D3Q19 [۶۸]

در جدول زیر به ضریب وزنی بعضی از انواع مدل توابع توزیع اشاره شده است.

جدول ۲-۱: برخی از گسسته سازی‌های توابع در مدل LBGK

تابع وزنی w_i	$C_s{}^2$	نوع شبکه
$16/72$ $8/72$ $1/72$	$1/3$	D_3Q_{15}
$12/36$ $2/36$ $1/36$	$1/3$	D_3Q_{19}

هرچند انتخاب‌های بیشتری نیز در بخش سه‌بعدی وجود دارد بااین‌حال D3Q19 از عملکرد نسبتاً بهتری در این بخش برخوردار است [۶۹].

با توجه به رابطه ضریب وزنی و e_α به بیان وضعیت این متغیر پرداخته می‌شود، برای D2Q9 داریم:

$$e_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ c(\pm 1,0), c(0,\pm 1) & \alpha = 1,2,3,4 \\ c(\pm 1,\pm 1) & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \tag{۲-۹}$$

و برای D3Q19:

$$e_\alpha = \begin{cases} (0,0,0) & \alpha = 0 \\ c(\pm 1,0,0), c(0,\pm 1,0), c(0,0,\pm 1) & \alpha = 1,2,..,6 \\ c(\pm 1,\pm 1,0), c(\pm 1,0,\pm 1), c(0,\pm 1,\pm 1) & \alpha = 7,8,\dots,18 \end{cases} \tag{۲-۱۰}$$

با اعمال آنالیز چند فاکتوره چپمن-انسکوگ [۷۰] نشان داده می‌شود که معادله شبکه بولتزمن با زمان آسایش یگانه معادله ناویر-استکوس را پوشش می‌دهد؛ که چگالی سیال به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha^{eq} \tag{۲-۱۱}$$

در معادله بالا به دلیل آنکه در پایان حل مقادیر تابع توزیع با تابع توزیع تعادلی برابر می‌گردد، می‌توان از هر دو به‌عنوان مرجعی برای محاسبه چگالی استفاده کرد. این موضوع برای محاسبه سرعت و به‌روزرسانی آن‌هم صدق می‌کند. برای محاسبه سرعت نیز از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\rho u = \sum_\alpha e_\alpha . f_\alpha = \sum_\alpha e_\alpha . f_\alpha^{eq} \tag{۲-۱۲}$$

محاسبه فشار در شبکه بولتزمن BGK، بسیار ساده است و با چگالی محاسبه‌شده رابطه‌ای مستقیم دارد که برای محاسبه آن از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$P = c_s^2 \rho \tag{۲-۱۳}$$

در این رابطه c_s، سرعت صوت است که با سرعت شبکه مرتبط است.

$$c_s = {}^{c}\!/_{\sqrt{3}} \qquad (۱۴-۲)$$

به‌منظور دقت مرتبه دوم در محاسبات از رابطه زیر برای لزجت استفاده می‌شود:

$$\nu = \frac{(\tau - \frac{1}{2})}{c_s^2 \delta t} \qquad (۱۵-۲)$$

۲-۳- شرایط مرزی در روش شبکه بولتزمن

یکی از مشکلات روش شبکه بولتزمن نحوه اعمال شرایط مرزی آن می‌باشد. برای مثال در روش‌های معمول حل معادلات جریان به‌سادگی می‌توان سرعت و فشار ورودی را به‌عنوان متغیرهای ماکروسکوپیک به روش‌هایی که از گسسته‌سازی ناویر-استوکس استفاده می‌شوند مانند روش سیمپل[1] اعمال کنند ولی در روش شبکه بولتزمن این‌گونه نیست. به دلیل آن‌که در روش شبکه بولتزمن توابع توزیع و چگالی (فشار) نقش بسیار مهمی در روند حل بازی می‌کنند باید مقادیر آن‌ها در مرزها به‌گونه‌ای وارد گردد که بعد از قرارگیری در روابط سرعت و چگالی (فشار)، مقادیر شرایط مرزی به دست آید. مشکلی که در این مورد وجود دارد این است که روی نقاط مرزی برخی توابع توزیع نامشخص هستند که موجب می‌گردند که برای جبران این کاستی باید مقداری را برای این مقادیر حدس زده شود. این حدس باید به‌گونه‌ای باشد که بتواند در هر تکرار شرایط مرزی را به‌درستی ارضا کند.

برای شبیه‌سازی‌ها به روش شبکه بولتزمن تاکنون روش‌هایی برای ارضای شرایط مرزی بیان گردیده است که برخی از دقت مرتبه اول و بعضی دیگر دارای دقت مرتبه دوم هستند. در ادامه به بیان بعضی از این روش‌ها خواهیم پرداخت.

۲-۳-۱- روش بازگشت به عقب

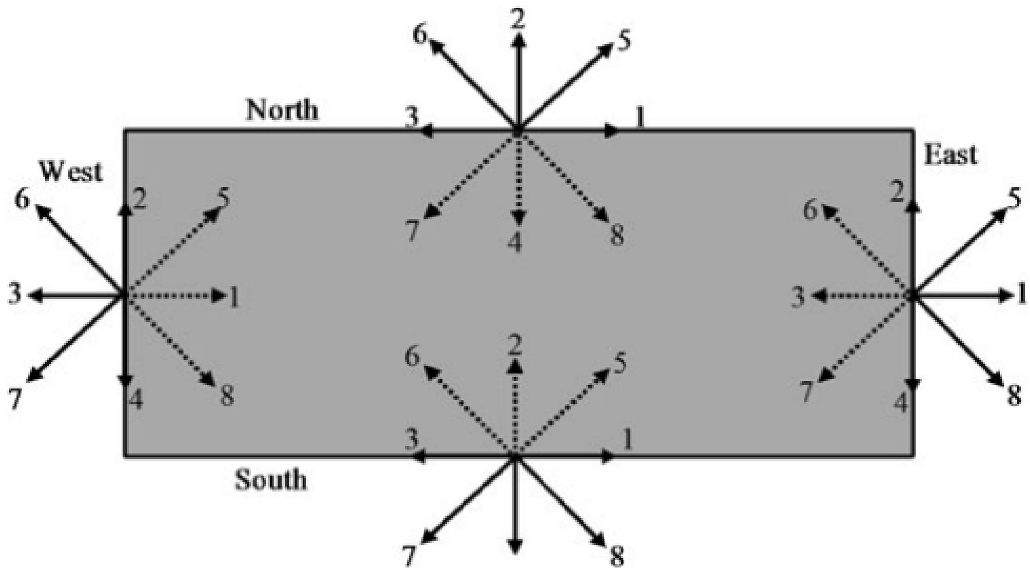
این روش جزو ساده‌ترین روش‌ها برای شرایط مرزی محسوب می‌شود و برای ارضای شرط عدم

[1] Simple

لغزش دقیقاً در خلاف جهت تابع توزیع مقداری برابر را به‌عنوان خروجی وارد می‌کند. در این نوع شرایط مرزی، نقاط مرزی به روی دیواره‌ها قرار می‌گیرند و با ورود تابع توزیع به سمت دیواره در جهت e_α، مقدار تابع توزیع ورودی به سیال را برابر با همان میزان و در جهت $-e_\alpha$ قرار می‌دهد. به عبارتی روی مرزها در شرط مرزی عدم لغزش داریم:

$$f(x, e_\alpha, t) = f(x, -e_\alpha, t) \quad (۱۶-۲)$$

باوجود آن‌که این حالت برای اعمال در برنامه بسیار ساده است ولی از دقت مرتبه اول برخوردار است که باعث ایجاد خطا در حل می‌گردد.



شکل ۲-۳: بازگشت به عقب در حالت دوبعدی [۷۱]

در شکل ۲-۳ وضعیت توابع توزیع روی مرزها مشخص شده است که به‌منظور درک بهتر، موضوع را در دو بعد، مورد بحث قرار می‌دهد و سپس در حالت سه‌بعدی به بیان این شرایط مرزی پرداخته می‌شود.

برای بخش شمالی شکل ۲-۳ مشاهده می‌شود که سه تابع توزیع از بیرون به داخل دامنه محاسباتی وارد می‌گردند که مقادیر آن‌ها مجهول است، با ارائه شرط مرزی عدم لغزش بازگشت به عقب به صورت

زیر است:

جدول ۲-۲: توابع توزیع مجهول در حالت عدم لغزش D2Q9 و بخش شمالی مدل بازگشت کامل

$f_8 = f_6$	$f_4 = f_2$	$f_7 = f_5$

همان‌طور که می‌بینیم مقادیر f_2،f_5 و f_6 مشخص است چون این توابع از داخل دامنه محاسباتی به بیرون حرکت می‌کنند ولی از طرف دیگر مقادیر f_4،f_7 و f_8 مشخص نیستند چون این توابع از بیرون از دامنه محاسباتی وارد می‌گردند که مقادیر مشخصی ندارند، با جایگزینی آن‌ها بر اساس روابط بالا، ارضای شرط عدم لغزش از دقت مرتبه یک را خواهیم داشت. به همین شکل برای حالت سه‌بعدی D3Q15 برای بخش بالایی دامنه و برای شرط عدم لغزش به صورت زیر است:

جدول ۲-۳: توابع توزیع در حالت عدم لغزش D3Q15 و بخش شمالی مدل بازگشت کامل

$f_8 = f_7$	$f_4 = f_3$
$f_{11} = f_{12}$	$f_{10} = f_9$
$f_{13} = f_{14}$	

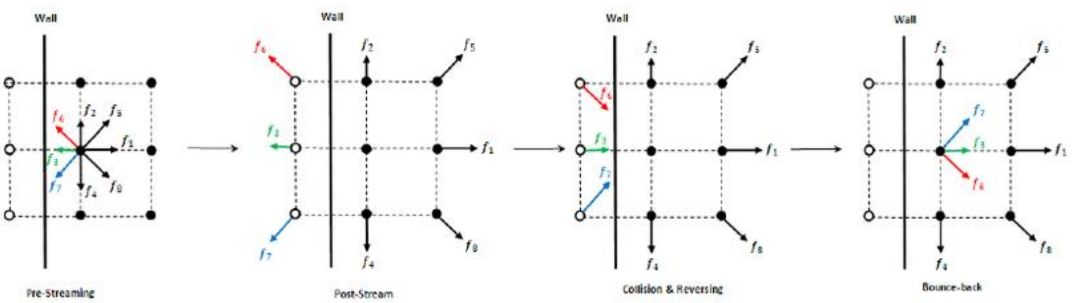
۲-۳-۲- روش بازگشت به عقب نیم راه[1]

این روش نسبت به روش قبلی برای شرایط مرزی بیشتر تحت توجه بوده و در موارد بیشتری از مقالات نیز به‌کاربرده شده است. یکی از مهم‌ترین دلایل استفاده از این روش دقت مرتبه دوم آن در ارضای شرایط مرزی است. در این روش مانند روش بازگشت به عقب، تابع‌های توزیع به‌صورت مستقیم برای ارضای شرایط مرزی اعمال نمی‌گردند. در این روش تابع‌های توزیع در چند مرحله اعمال شده و

[1] Half-way bounce-back

برای ارضای شرایط مرزی به گره‌هایی مجازی اضافه شده و سپس به دامنه محاسباتی بازمی‌گردند. در این روش مرز دقیقاً روی گره‌های سیال قرار نمی‌گیرد و ما بین دو گره درون سیال و بخش خارج از دامنه (جسم) قرار می‌گیرد. برای درک بهتر موضوع شکل ۲-۴ مشاهده کنید.

در مرحله اول و قبل از مرحله جاری شدن تابع‌های توزیع، مقادیر تابع در نزدیکی مرز مشخص است سپس جاری شدن و حرکت به گره‌های همسایه صورت می‌گیرد ولی در این شکل مشاهده می‌شود که سه تابع توزیع به بیرون از دامنه حرکت کردند ولی برعکس شرایط مرزی بازگشت به عقب، این مقادیر در هر گره بیرون دامنه نگهداری می‌شود، مرحله برخورد[1] صورت می‌گیرد و جهت تابع توزیعی که به بیرون از دامنه بود به سمت داخل تغییر داده‌شده و در مرحله بعدی این تابع توزیع وارد دامنه محاسباتی می‌گردد.



شکل ۲-۴: نحوه حرکت توابع توزیع در روش بازگشت به عقب نیم‌راه [۷۲]

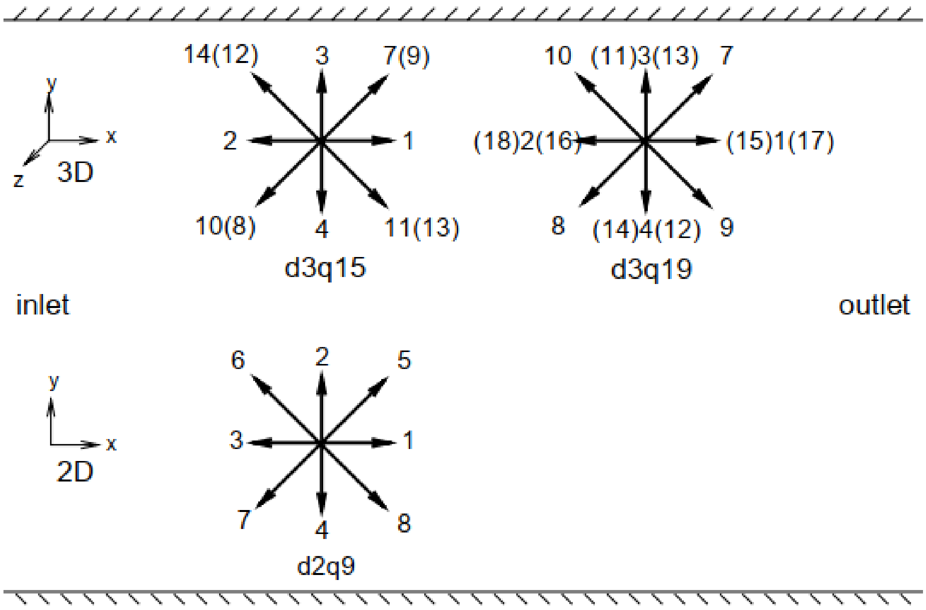
۲-۳-۳- شرایط مرزی پیشنهادشده توسط چنگ و همکاران [۷۳]

این روش پیشنهادشده که از دو مورد قبلی روشی به‌روزتر محسوب می‌شود نیز از دقت مرتبه دو در ارضای شرایط مرزی بهره می‌برد و نحوه اعمال آن نیز به‌صورت تک‌مرحله‌ای خواهد بود. در این روش بسط چگالی و سرعت‌ها را برحسب توابع توزیع نوشته می‌شود. همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد روی

[1] Collision

مرزها، برخی از توابع توزیع[1] دارای مقداری مجهول هستند که برای محاسبه آن‌ها نیاز به حل یک دستگاه وجود خواهد داشت. برای سادگی درک این مورد وضعیت یک مرز در سمت چپ دامنه محاسباتی برای یک مسئله دوبعدی را بررسی کرده، سپس به بیان آن در سه بعد پرداخته شده است.

در شکل ۲-۵، توابع توزیع در حالت D2Q9 نمایش داده‌شده‌اند. با توجه به این شکل در سمت چپ یا همان ورودی تابع‌های توزیع f_1، f_5 و f_8 مقداری مجهول دارند.



شکل ۲-۵: وضعیت توابع توزیع D2Q9،D3Q15،D3Q19 در صفحه [۷۴]

مقادیر توابع مجهول در معادلات را با عبارت زیر جایگزین خواهیم کرد:

$$f_i(\vec{x},t) = f_i^*(\vec{x},t) + \frac{\omega_i}{C} e_i.\vec{Q} \qquad (۱۷\text{-}۲)$$

که در آن $\vec{Q}$، اصلاح‌کننده‌ای برای مومنتوم محسوب می‌شود و باید محاسبه گردد و $f_i^*(\vec{x},t)$ می‌تواند با تابع توزیع $f(x,-e_\alpha,t)$ یا تابع توزیع تعادلی خود جایگزین شود.

[1] Distribution function

برای محاسبه مقادیر $\vec{Q}$، معادلات مربوطه را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\rho = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 \qquad (۲-۱۸)$$

$$\rho u = f_1 + f_5 + f_8 - f_3 - f_6 - f_7 \qquad (۲-۱۹)$$

$$\rho v = f_2 + f_5 + f_6 - f_4 - f_7 - f_8 \qquad (۲-۲۰)$$

که در روابط (۲-۱۸)، (۲-۱۹) و (۲-۲۰)، مقادیر تابع‌های f_1، f_5 و f_8 مجهول است که با جایگذاری این مقادیر با رابطه (۲-۱۷) خواهیم داشت:

$$\rho = f_0 + \left[f_1^*(\vec{x},t) + \omega_1 Q_x\right] + f_2 + f_3 + f_4 + [f_5^*(\vec{x},t) + \omega_5(Q_x + Q_y)] + f_6 + f_7 + [f_8^*(\vec{x},t) + \omega_8(Q_x - Q_y)] \qquad (۲-۲۱)$$

$$\rho u = \left[f_1^*(\vec{x},t) + \omega_1 Q_x\right] + [f_5^*(\vec{x},t) + \omega_5(Q_x + Q_y)] + [f_8^*(\vec{x},t) + \omega_8(Q_x - Q_y)] - f_3 - f_6 - f_7 \qquad (۲-۲۲)$$

$$\rho v = f_2 + [f_5^*(\vec{x},t) + \omega_5(Q_x + Q_y)] + f_6 - f_4 - f_7 - [f_8^*(\vec{x},t) + \omega_8(Q_x - Q_y)] \qquad (۲-۲۳)$$

این معادلات باید به ازای متغیرهای مجهول حل گردد، که شامل سه معادله، سه مجهول است.

پس از حل برای مقادیر مجهول و جایگذاری در معادله (۲-۱۷) موارد زیر بدست می‌آید:

$$\rho = \frac{1}{1+u}[f_0 + f_2 + f_4 + 2\left(f_3 + f_6 + f_7\right)] \qquad (۲-۲۴)$$

$$f_1 = f_1^* + \frac{2}{3}\rho u + \frac{2}{3}(f_3 - f_1^* + f_7 - f_5^* + f_6 - f_8^*) \qquad (۲-۲۵)$$

$$f_5 = f_5^* + \frac{1}{6}\rho\mathrm{u} + \frac{1}{2}\rho v - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}(f_3 - f_1^*) + \frac{2}{3}(f_7 - f_5^*) - \frac{1}{3}(f_6 - f_8^*) \qquad (۲-۲۶)$$

$$f_8 = f_8^* + \frac{1}{6}\rho u - \frac{1}{2}\rho v + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}(f_3 - f_1^*) - \frac{1}{3}(f_7 - f_5^*) + \frac{2}{3}(f_6 - f_8^*) \qquad (۲-۲۷)$$

و درنهایت با جایگذاری $f(x, -e_\alpha, t)$ به‌جای f^* و با این فرض که برای جریان ورودی سرعت افقی صفر است، خواهیم داشت:

$$\rho = \frac{1}{1+u}[f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \qquad (۲-۲۸)$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3}\rho u \qquad (۲-۲۹)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho u \qquad (۲-۳۰)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6}\rho u \qquad (۲-۳۱)$$

همان‌طور که دیده می‌شود با جایگذاری سرعت افقی و عمودی برابر با صفر در این معادلات شرایط مرزی برای شرط عدم لغزش زو و همکاران [۷۵] نیز یکسان خواهد شد.

با توجه به اینکه روندی مشابه برای بقیه مرزها وجود دارد، بقیه نیز به‌طور مشابه به دست می‌آیند و این روند حل برای D3Q15 و D3Q19 نیز صدق می‌کند. در ادامه نتیجه حل این معادلات را برای حالت D3Q15 نیز بیان شده است. معادلات برای مرز بالایی یک کانال مستطیلی با شرط عدم لغزش بیان گردیده است.

$$\rho = \frac{1}{1+v}[f_0 + f_1 + f_2 + f_5 + f_6 + 2(f_3 + f_7 + f_9 + f_{12} + f_{14})] \tag{۳۲-۲}$$

$$f_4 = f_4^* - \frac{2}{3}\rho v + \frac{2}{3}(f_3 - f_4^* + f_7 - f_8^* + f_9 - f_{10}^* + f_9 - f_{12}^* + f_{14} - f_{13}^*) \tag{۳۳-۲}$$

$$\begin{aligned} f_8 = f_8^* - \frac{1}{4}\rho u - \frac{1}{12}\rho v - \frac{1}{4}\rho w + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \\ + \frac{1}{12}(f_3 - f_4^*) + \frac{7}{12}(f_7 - f_8^*) + \frac{1}{12}(f_9 - f_{10}^*) - \frac{5}{12}(f_{12} \\ - f_{11}^*) + \frac{1}{12}(f_{14} - f_{13}^*) \end{aligned} \tag{۳۴-۲}$$

$$\begin{aligned} f_{10} = f_{10}^* - \frac{1}{4}\rho u - \frac{1}{12}\rho v + \frac{1}{4}\rho w + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \\ + \frac{1}{12}(f_3 - f_4^*) + \frac{1}{12}(f_7 - f_8^*) + \frac{7}{12}(f_9 - f_{10}^*) \\ + \frac{1}{12}(f_{12} - f_{11}^*) - \frac{5}{12}(f_{14} - f_{13}^*) \end{aligned} \tag{۳۵-۲}$$

$$\begin{aligned} f_{11} = f_{11}^* + \frac{1}{4}\rho u - \frac{1}{12}\rho v + \frac{1}{4}\rho w - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \\ + \frac{1}{12}(f_3 - f_4^*) - \frac{5}{12}(f_7 - f_8^*) + \frac{1}{12}(f_9 - f_{10}^*) \\ + \frac{7}{12}(f_{12} - f_{11}^*) + \frac{1}{12}(f_{14} - f_{13}^*) \end{aligned} \tag{۳۶-۲}$$

$$\begin{aligned} f_{13} = f_{13}^* + \frac{1}{4}\rho u - \frac{1}{12}\rho v - \frac{1}{4}\rho w - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \\ + \frac{1}{12}(f_3 - f_4^*) + \frac{1}{12}(f_7 - f_8^*) - \frac{5}{12}(f_9 - f_{10}^*) \\ + \frac{1}{12}(f_{12} - f_{11}^*) + \frac{7}{12}(f_{14} - f_{13}^*) \end{aligned} \tag{۳۷-۲}$$

که با انتخاب f^* می‌توان شرایط مرزی دلخواه بر مسئله اعمال شود. باقی شرایط مرزی برای صفحات، خطوط و نقاط مرزی با جایگذاری f^* در روابط در پیوست الف ارائه شده است.

۲-۴- روند اعمال حل عددی روش شبکه بولتزمن

حال با بیان تمامی مقدمات موردنیاز برای حل عددی این معادله، روند اجرای مراحل آن برای استفاده در یک برنامه کامپیوتری بیان می‌شود. معادله شبکه بولتزمن با زمان آسایش یگانه در دو مرحله کلی خلاصه گردد.

- ✓ مرحله برخورد[1]

$$f_i'(x, t+\delta t) - f_i(x,t) = -\frac{1}{\tau}[f_i(x,t) - f_i^{eq}(x,t)] \tag{۲-۳۸}$$

- ✓ مرحله جاری شدن[2]

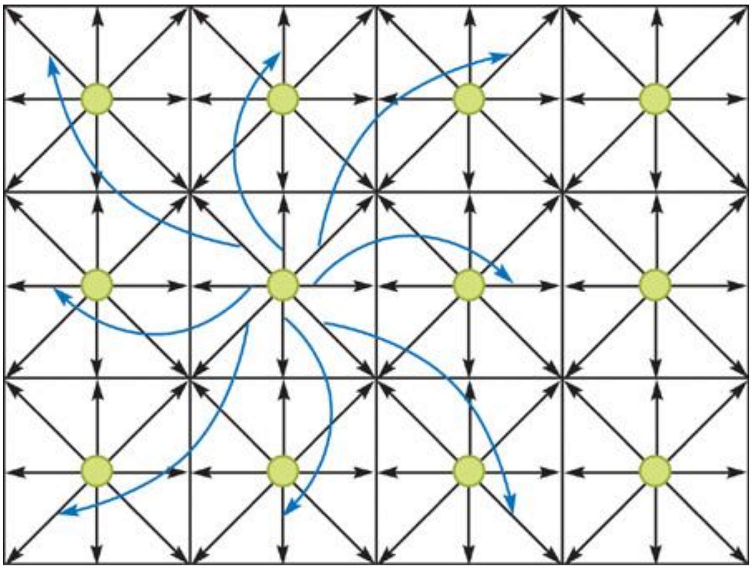
$$f_i(x + e_i\delta t, t+\delta t) = f_i'(x, t+\delta t) \tag{۲-۳۹}$$

در معادله (۲-۳۹)، $f_i'(x, t+\delta t)$ تابع توزیع بعد از برخورد است. به‌منظور سادگی در درک حرکت توابع در شکل ۲-۶ تصویری از حالت جاری شدن در دو بعد نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود توابع توزیع موجود برای یک گره پس از مرحله جاری شدن در راستای خود به گره کناری خود رفته و در آن گره ذخیره می‌شوند. این مورد برای کل دامنه محاسباتی باید انجام گردد و تمام توابع در راستای خود به سمت گره همسایه خود حرکت می‌کنند. در مسئله سه‌بعدی نیز همین اتفاق در سه جهت کارتزین موجود خواهد افتاد و توابع در سه جهت به گره‌های همسایه حرکت کرده و در آن ذخیره خواهند شد.

---

[1] Collision

[2] Streaming



شکل ۲-۶: مرحله جاری شدن [۷۶]

۲-۴-۱- الگوریتم روش شبکه بولتزمن

در این بخش به بیان خلاصه مراحل[1] استفاده از روش شبکه بولتزمن پرداخته می‌شود. مراحل حل شامل:

(۱) حدس اولیه برای توابع توزیع، چگالی و سرعت

(۲) مرحله برخورد

(۳) اعمال شرایط مرزی

(۴) مرحله جاری شدن

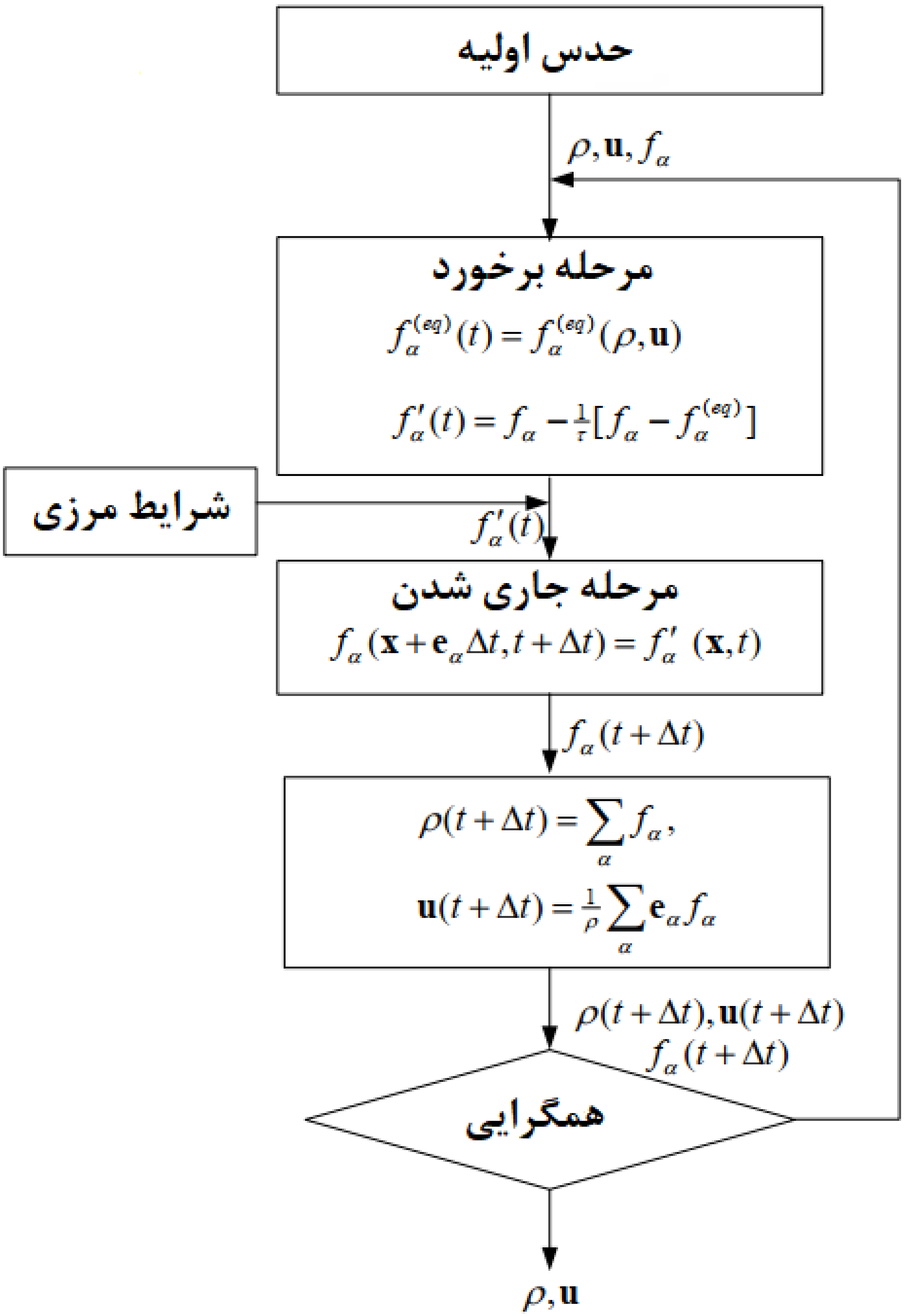
(۵) به‌روزرسانی چگالی و سرعت

(۶) بررسی همگرایی و تکرار مراحل ۲ تا ۶

در شکل ۲-۷ این روند به‌صورت تصویری بیان‌شده که می‌توان مراحل بالا به ترتیب در آن مشاهده کرد.

---

[1] Flow chart



شکل ۲-۷: الگوریتم روش شبکه بولتزمن

۳- فصل سوم: روش مرز غوطه‌ور

۳-۱- مقدمه

به‌منظور ترکیب روش شبکه بولتزمن را با روش مرز غوطه‌ور، باید یک عبارت نیرویی به معادله شبکه بولتزمن اضافه شود. در این بخش هدف، اضافه کردن این عبارت نیرویی به معادله شبکه بولتزمن است که باعث دقت مرتبه دو در حل مسائل نیز می‌گردد.

بیشتر روش‌های ترکیبی مرز غوطه‌ور-شبکه بولتزمن، معادله شبکه بولتزمن تک نیرویی[1] است که به معادله (۲-۷) بدون ایجاد تغییر در آن اضافه می‌گردند [۳۰،۵۷،۷۷]. این معادله شبکه بولتزمن تک نیرویی به‌سادگی به روش نیروی مستقیم اعمال می‌گردد. اگرچه نشان داده شده است که معادله شبکه بولتزمن تک نیرویی قادر نیست با یک تقریب مرتبه دوم، معادله ناویر-استوکس را برای مسائل گذرا و یا در مسائلی که نیروی غیرمنظم در روش مرز غوطه‌ور وجود دارد، ارضا کند [۷۰]. از طرفی دیگر معادله شبکه بولتزمن با نیروی دوبخشی[2] که در آن مومنتوم مورد نیاز است، ابتدا با افزایش نصف نیرو در تابع توزیع تعادلی و سپس یک عبارت نیرویی صریح به معادله شبکه بولتزمن اضافه می‌گردد، قادر است کاستی‌های معادله شبکه بولتزمن تک نیرویی را رفع کند.

در این بخش به بحث در مورد تفاوت بین این اعمال نیرو که به صورت‌های تک نیرویی و نیروی دوبخشی است، پرداخته خواهد شد و نشان داده می‌شود که نیروی دوبخشی در معادله شبکه بولتزمن از دقت بالاتری برخوردار است. همچنین به بیان رابطه اعمال نیروی مستقیم بر اساس معادله شبکه بولتزمن با نیروی دوبخشی و طرح‌های مرزی مختلف نیز پرداخته می‌شود.

۳-۲- معادله شبکه بولتزمن با زمان آسایش یگانه با عبارت نیرویی

معادله شبکه بولتزمن با زمان آسایش یگانه تک نیرویی به شکل صریح زیر بیان می‌گردد [۲۴،۷۸]:

[1] Lumped-forcing LBE

[2] Split-forcing LBE

$$f_i(x+e_i\delta t+\delta t)=f_i(x,t)-\frac{1}{\tau}\left[f_i(x,t)-f_i^{(eq)}(x,t)\right]+F_i(x,t)\delta t \tag{۱-۳}$$

که در این معادله بخش نیرویی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$F_i(x,t)=\frac{w_i}{{c_s}^2}e_i\,.F(x,t) \tag{۲-۳}$$

یا می‌توان آن را به‌صورت زیر هم استفاده کرد:

$$F_i(x,t)=w_i\left[3\frac{e_i-u(x,t)}{c^2}+9\frac{e_i\,.u(x,t)}{c^4}e_i\right].F(x,t) \tag{۳-۳}$$

که این دو شرط زیر را ارضا می‌کنند:

$$\sum_i F_i(x,t)=0 \tag{۴-۳}$$

$$\sum_i e_iF_i(x,t)=F(x,t) \tag{۵-۳}$$

به‌منظور حذف بخش‌های اضافی برای حالت گذرا و همچنین در حالتی که نیروی ناهمگون وجود داشته باشد، گو و همکاران [۷۰] یک معادله شبکه بولتزمن با نیروی دوبخشی را پیشنهاد دادند که می‌توانست معادله ناویر-استوکس را در بخش پیوستگی و مومنتوم با دقت مرتبه دوم ارضا نماید. به این منظور اثر یک نیروی خارجی به معادله مومنتوم اضافه شد و شکل معادله سرعت به‌صورت زیر تغییر یافت:

$$\rho u=\sum_i e_if_i+\frac{\delta t}{2}F \tag{۶-۳}$$

که به‌جای استفاده از معادلات اعلام‌شده قبلی برای بخش نیروی خارجی از رابطه زیر استفاده می‌کرد:

$$F_i(x,t) = \left(1-\frac{1}{2\tau}\right) w_i \left[3\frac{e_i - u(x,t)}{c^2} + 9\frac{e_i \,.\, u(x,t)}{c^4} e_i\right] . F(x,t) \tag{۳-۷}$$

این معادله شرایط زیر را برای نیروی ارضا می‌کند:

$$\sum_i F_i(x,t) = 0 \tag{۳-۸}$$

$$\sum_i e_i F_i\,(x,t) = \left(1-\frac{1}{2\tau}\right) F(x,t) \tag{۳-۹}$$

بعد از اعمال این روابط بر معادله شبکه بولتزمن، بخش نیرویی ذکر شده به معادله اضافه شده و به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$f_i(x+e_i\delta t, t+\delta t) = f_i(x,t) - \frac{1}{\tau}\left[f_i(x,t) - {f_i}^{(eq)}(x,t)\right] + \left(1-\frac{1}{2\tau}\right) F_i(x,t)\delta t \tag{۳-۱۰}$$

بعد از این پیشنهاد برای اعمال نیروی خارجی، چنگ و لی [۷۹] برای معادله شبکه بولتزمن با نیروی دوبخشی پیشنهاد یک حالت شبه ضمنی[1] را دادند:

$$f_i(x+e_i\Delta t, t+\Delta t) = f_i(x,t) - \frac{1}{\tau}\left[f_i(x,t) - {f_i}^{(eq)}(x,t)\right] + \frac{\Delta t}{2}\left(F_i(x,t) + \ f_i(x+e_i\Delta t, t+\Delta t)\right) \tag{۳-۱۱}$$

تفاوت این دو روش اعمال نیرو که یکی به‌صورت تک نیرویی و بعدی به‌صورت اعمال نیروی دوبخشی است از طریق حرکت جنبشی ذرات به‌راحتی قابل توضیح است. در روش شبکه بولتزمن تک نیرویی ذره تحت اثر نیرو از نقطه اول به نقطه دوم حرکت می‌کند و برای این انتقال نیرو به‌صورت

[1] Semi-implicit

مستقیم به آن وارد می‌گردد درحالی‌که در روش اعمال نیروی دوبخشی به‌جای آن‌که همانند روش تک نیرویی، در یک گام زمانی حرکت ایجاد گردد، در دو نیم گام زمانی این حرکت صورت می‌گیرد. نصف نیرو در نیم گام زمانی اعمال‌شده و پس از به‌روزرسانی در این نقطه میانی، بخش ثانویه نیرو وارد گشته و در نیم گام زمانی بعدی باقی‌مانده نیرو به ذره وارد می‌گردد و ذره به نقطه دوم انتقال پیدا می‌کند.

۳-۳- روش عددی حل معادله شبکه بولتزمن با نیروی خارجی

در این بخش روند حل هنگام اضافه شدن نیروی خارجی را در دو روش پیشنهادشده توسط گو و همکاران [۷۰] و چنگ و لی [۷۹] بیان می‌گردد.

۳-۳-۱- روش گو و همکاران [۷۰] برای اعمال نیرو

- ✓ مرحله اعمال نیروی مرحله اول[1]

$$\rho(x,t)u(x,t) = \sum_i e_i . f_i(x,t) + \frac{\delta t}{2} F(x,t) \tag{۱۲-۳}$$

- ✓ مرحله برخورد

$$f'_i(x,t) = f_i(x,t) - \frac{1}{\tau}\left[f_i(x,t) - f^{(eq)}{}_i(x,t)\right] \tag{۱۳-۳}$$

- ✓ مرحله اعمال نیروی مرحله دوم[2]

$$f''_i(x,t) = f_i{}'(x,t) + \delta t F_i(x,t) \tag{۱۴-۳}$$

- ✓ جاری شدن

---

[1] First-forcing

[2] Seccond-forcing

$$f_i(x + e_i\delta t, t + \delta t) = f_i''(x,t) \quad (۱۵\text{-}۳)$$

در این روش، $f'_i(x,t)$ و $f''_i(x,t)$ به ترتیب بعد برخورد[1] و بعد از نیرو[2] هستند.

۳-۳-۲- روش چنگ و لی [۷۹] برای اعمال نیرو

روش چنگ و لی [۷۹] یک روش نیمه ضمنی در اعمال نیروی خارجی است. روند عددی حل در این روش به این‌گونه است:

- ✓ مرحله اعمال نیروی مرحله اول

$$f'_i(x,t) = f_i(x,t) + \frac{\delta t}{2} F(x,t) \quad (۱۶\text{-}۳)$$

- ✓ مرحله برخورد

$$f''_i(x,t) = f'_i(x,t) - \frac{1}{\tau}\left[f'_i(x,t) - f'^{(eq)}_i(x,t)\right] \quad (۱۷\text{-}۳)$$

- ✓ مرحله اعمال نیروی مرحله دوم

$$f'''_i(x,t) = f_i''(x,t) + \frac{\delta t}{2} F_i(x,t) \quad (۱۸\text{-}۳)$$

- ✓ جاری شدن

$$f_i(x + e_i\delta t, t + \delta t) = f_i'''(x,t) \quad (۱۹\text{-}۳)$$

۳-۴- روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم-شبکه بولتزمن

تا اینجا ترکیبی از دو روش را بیان گردید و نشان داده شد که نیروی خارجی چگونه باید به

---

[1] Post-collision

[2] Post-forcing

معادلات شبکه بولتزمن اضافه گردد در ادامه نحوه محاسبه این نیروها، اثرات آن بر سرعت نقاط لاگرانژی، همچنین اثرات نقاط و سرعت نقاط لاگرانژی بر نیروها بیان می‌شود.

برای محاسبه مقدار این نیرو از روش اعمال نیروی مستقیم استفاده می‌شود و سپس به بیان طرح اثر مرزی برای انتقال این موارد به نقاط اویلری پرداخته خواهد شد.

۳-۴-۱- روابط اعمال نیروی مستقیم

در مطالعات پیشین غالباً [۸۰] از روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم به‌منظور محاسبه نیروی مرزی استفاده کرده‌اند که بر اساس روش معادله ناویر-استوکس بیان گردیده شده است:

$$F(x_b,t)=\rho\frac{U^d-u^{noF}(x_b,t+\delta t)}{\delta t} \tag{۳-۲۰}$$

که در معادله (۳-۲۰)، U^d سرعت موردنظر و u^{noF} سرعت بدون نیرو در نقطه مرزی و همچنین در گام زمانی بعد است. این سرعت بدون نیرو با استفاده از مقادیر موجود در گام زمانی فعلی قابل‌محاسبه است. برای محاسبه آن باید از معادله ناویر-استوکس بدون اعمال نیرو استفاده شده یا اینکه از معادله شبکه بولتزمن بدون بخش نیروی استفاده شود. معادله (۳-۲۰) در معادله شبکه بولتزمن زیر قابل‌استفاده است:

$$f_i(x,t+\delta t)=f_i(x,t)-\frac{1}{\tau}\left[f_i(x,t)-{f_i}^{(eq)}(x,t)\right]+F_i(x,t)\delta t \tag{۳-۲۱}$$

برای به دست آوردن بخش نیرویی در معادله شبکه بولتزمن می‌توان از رابطه زیر که برای نیروی دوبخشی است، استفاده کرد:

$$F(x_b,t+\delta t)=2\rho(x,t+\delta t)\frac{U^d-u^{noF}(x_b,t+\delta t)}{\delta t} \tag{۳-۲۲}$$

برای محاسبه نیروی کل وارد بر کره در سه راستا از رابطه (۳-۲۲) استفاده می‌شود. در این رابطه با

جایگذاری سرعت های اصلاح شده و سرعت‌های نقاط لاگرانژی در راستای مورد نظر، نیروی کل وارد بر نقاط لاگرانژی بدست می‌آید و با جمع آن‌ها نیروی کل وارد بر کره بدست خواهد آمد، در نتیجه ضریب‌های پسا و برا قابل محاسبه خواهد بود.

که برای محاسبه سرعت بدون نیرو از رابطه زیر استفاده می‌گردد:

$$u^{noF}(x_b, t + \delta t) = \sum_{ijk} u_{ijk}^{nof} D\left(x_{ij} - x_b\right) h^3 \qquad (۳-۲۳)$$

D در اینجا تابع دیفیوز است که برای انتقال اثرات سرعت بدون نیرو به نقاط لاگرانژی مورد استفاده قرار می‌گیرد این تابع در بخش بعدی به‌طور کامل توضیح داده می‌شود. سرعت بدون نیرو باید با توجه به سه‌بعدی بودن مسئله در سه جهت مورد بررسی قرارگرفته و در معادله محاسبه شود.

۳-۴-۲- طرح مرزی دیفیوز

در بخش قبلی بیان شد که می‌توان برای اعمال اثرات وجود نقاط لاگرانژی از یک الگوریتم واسط استفاده کرد. این الگوریتم واسط، نقش مهمی در ارضای شرایط مرزی و هم در انتقال ذره بازی می‌کند. طرح مرزی دیفیوز هرچند در حالت ساکن ذرات دارای دقت کمتری است ولی برای جریان ذرات و یا حرکت تک ذره پاسخگویی بهتری در حین حل عددی دارد.

تابع دیفیوز، یک تابع چندبخشی است که بر اساس فاصله ضریبی را به روند حل عددی برمی‌گرداند که هر چه فاصله نقاط نزدیک‌تر باشد این عدد نیز بزرگ‌تر خواهد بود. تابع دیفیوز برای محاسبه تغییرات سرعت لاگرانژی به این صورت عمل می‌کند که با توجه به دستگاه مورد نظر که در اینجا کارتزین می‌باشد مختصات هر جهت را از یکدیگر کم کرده و بر اساس نوع تابع دیفیوز و بر اساس این فاصله مقداری را محاسبه می‌کند، این مقادیر در هر جهت در یکدیگر ضرب شده و درنهایت مقدار تابع برای آن نقطه اویلری نسبت به نقطه لاگرانژی موردنظر به دست می‌آید و در اندازه سرعت ضرب می‌شود.

این تابع به فرم کلی زیر است:

$$D\left(x_{ijk}-x_b\right)=\frac{1}{h^3}d_h\left(\frac{x_i-x_b}{h}\right)d_h\left(\frac{y_j-y_b}{h}\right)d_h\left(\frac{z_k-z_b}{h}\right) \qquad (۲۴-۳)$$

که در این معادله i,j,k، مختصات نقطه اویلری در فضای سه‌بعدی و b، مربوط به هرکدام از نقاط لاگرانژی است که دارای مختصاتی در فضای سه‌بعدی هستند که لزوماً بر نقاط اویلری منطبق نیست.

در معادله (۳-۲۴) تابع d از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$d_h(r)=\begin{cases}\frac{1}{8}\left(3-2|r|+\sqrt{1+4|r|-4r^2}\right), & 0\le |r|<1\\ \frac{1}{8}\left(5-2|r|-\sqrt{-7+12|r|-4r^2}\right) & 1\le |r|<2\\ 0 & |r|\ge 2\end{cases} \qquad (۲۵-۳)$$

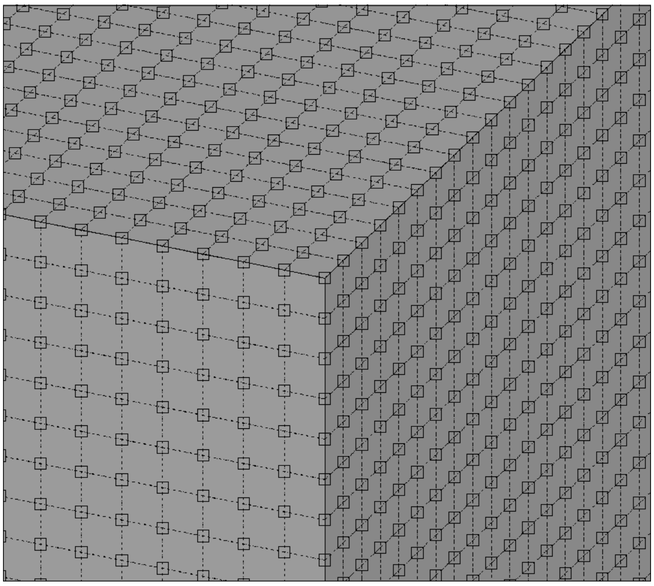
که در آن r، پارامتری بی‌بعد از که از فاصله نقاط بر طول هر المان اویلری یا همان h، به دست می‌آید. معادله (۳-۲۵) توسط پسکین [۸۱] معرفی شد. این تابع دارای دقت مرتبه دوم است.

استفاده از تابع دیفیوز همانطور که بیان شد اهمیت بالایی در حل مسائل دارد و برای انتخاب آن باید دقت زیادی به خرج داد زیرا که علاوه بر دقت و صحت جواب بدست آمده و نقش مهمی در ارضای شرایط مرزی و همچنین همگرایی یا واگرایی مسئله مورد بررسی دارد. به وضوح روشن است که در مسائل شامل ذرات بیشتر، دقت عملکرد این تابع در برخورد و رفتار سیال در اطراف ذرات، نقش اساسی ایفا می‌کند.

۳-۵- شبکه لاگرانژی و اویلری

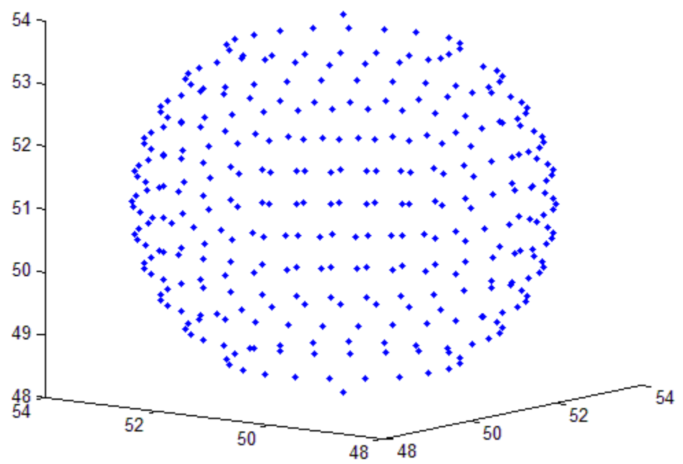
برای حل دامنه محاسباتی برای جریان حول کره ابتدا نیاز به یک شبکه منظم روی تمام دامنه محاسباتی است. منظور از تمام شبکه محاسباتی این است که محل قرارگیری کره بدون در نظر گرفتن آن نیز شبکه‌بندی می‌شود. بدلیل تراکم بالا بخشی از شبکه نشان داده شده است. هر چه میزان تراکم

اندازه شبکه مورد نظر بیشتر باشد دقت افزایش پیدا می‌کند ولی هزینه محاسباتی را بالا خواهد برد.



شکل ۳-۱: گره‌های شبکه محاسباتی برای جریان حول کره (نقاط اویلری)

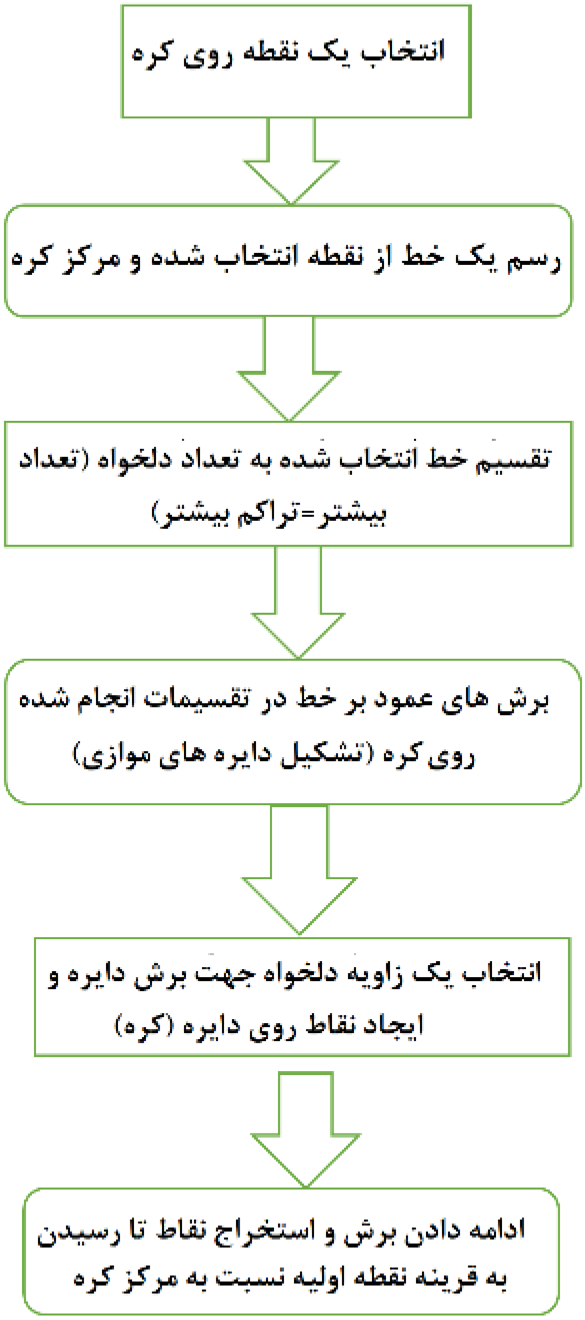
از طرفی دیگر باید برای شبیه‌سازی جریان حول کره مختصات نقاط اویلری نیز به حل اضافه شود. با استفاده از توسعه برنامه میتوان تعداد دلخواهی از نقاط روی کره را بدست آورده و به حل اضافه کرد. با توجه به قطر تعیین شده برای کره و فاصله ۰/۵ واحدی در مقیاس شبکه بولتزمن برای صفحاتی که نقاط روی آن‌ها قرار دارند، شکل ذیل بوجود خواهد آمد. در این شکل با توجه به رابطه‌های بیان شده در بخش ۳-۴ می‌توان اثرات مربوط به وجود کره را شبیه‌سازی کرد. تعداد نقاطی که برای کره انتخاب شده است برابر با ۴۰۰ است.



شکل ۳-۲: نقاط کره (لاگرانژی) برای شبیه‌سازی جریان حول کره

نحوه حل عددی در ترکیب این دو روش یعنی شبکه بولتزمن و مرز غوطه‌ور به اینگونه است که حل عددی روی شبکه بولتزمن صورت می‌گیرد و سپس وارد الگوریتم مرز غوطه‌ور شده و نیروی وارد شده را محاسبه می‌کند، اثر این نیرو به طور مجدد به سرعت‌های نقاط اویلری وارد می‌شود و این سرعت‌ها بروزرسانی می‌شود. رابطه‌های (۳-۲۱)، (۳-۲۲) و (۳-۲۳) برای محاسبه سرعت بروزرسانی شده مورد استفاده قرار می‌گیرند و رابطه‌های (۳-۲۴) و (۳-۲۵) برای بدست آوردن میزان تاثیر فاصله نقاط اویلری بر نقاط لاگرانژی و برعکس، مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر چه فاصله نقطه اویلری با نقطه‌ای لاگرانژی بیشتر باشد، اثرگذاری کمتری نیز بر روی هم خواهند داشت.

نحوه استخراج نقاط قرار گرفته بر رویه کره به اینگونه است که ابتدا نقطه‌ای با مشخصات معلوم روی رویه انتخاب می‌شود. سپس با تعیین مقداری ثابت بر حسب مقیاس شبکه بولتزمن روی قطر کره، برشی از آن زده می‌شود. این برش تشکیل دایره‌ای می‌دهد که می‌تواند با زاویه‌های برابر روی آن حرکت کرده و نقاط آن استخراج شود، مشخصاً این نقاط روی کره هم خواهند بود. در ادامه روی قطر کره با مقیاس شبکه بولتزمن صفحه بعدی زده می‌شود و نقاط بعدی استخراج می‌شوند. این روند ادامه پیدا خواهد کرد تا جایی که قطر کره جاروب شود.



شکل ۳-۳: فلوچارت استخراج نقاط روی کره

۴- فصل چهارم: نتایج

۴-۱- مقدمه

در این بخش به بیان نتایج گرفته‌شده و بررسی آن‌ها پرداخته شده است. همان‌طور که می‌دانیم برای آغاز یک روش و بررسی دقت آن از اعتبارسنجی استفاده می‌شود. در این فصل ابتدا به اعتبارسنجی یک مسئله با روش شبکه بولتزمن پرداخته می‌شود و در بخش بعدی به بررسی روش مرز غوطه‌ور-شبکه بولتزمن اشاره خواهد کرد.

۴-۲- اعتبارسنجی

به‌منظور اعتبارسنجی روش شبکه بولتزمن از یک محفظه با یک صفحه متحرک در بالای آن[1](کویتی) پرداخته می‌شود. در این اعتبارسنجی، مسئله به ازای سه رینولدز مختلف بررسی می‌گردد که در ادامه مشخصات این کویتی بیان می‌شود. در این مسئله از شبکه‌بندی یکنواخت استفاده شده است که در آن تعریف عدد بی‌بعد رینولدز به‌صورت زیر است:

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} \qquad (۴\text{-}۱)$$

در این فرمول ρ چگالی سیال در مقیاس شبکه بولتزمن است که برابر با عدد یک فرض شده، U_0 سرعت صفحه متحرک است که در اینجا برابر با ۰/۱ قرار داده شده، L طول مشخصه کویتی است و در مقیاس شبکه بولتزمن برابر یک در نظر گرفته شده است. لزجت نیز با توجه به عدد رینولدز تعیین شده است.

مسئله به ازای سه رینولدز ۱۰۰، ۴۰۰ و ۱۰۰۰ بررسی شده است که در ادامه به ترتیب به بیان نتایج هر یک از این رینولدزها پرداخته می‌شود. قبل از ورود به نتایج اعتبارسنجی ابتدا کمیت‌های مورد استفاده در این بخش بیان می‌شود.در مسئله کویتی، i، j و k به ترتیب بردارهای یکه در جهت x، y و z هستند که مؤلفه‌های سرعت در هرکدام u، v و w است. طول کویتی در سه جهت برابر یک فرض شده است و اعتبارسنجی با مقاله وو و سو [۵۴] انجام شده است.

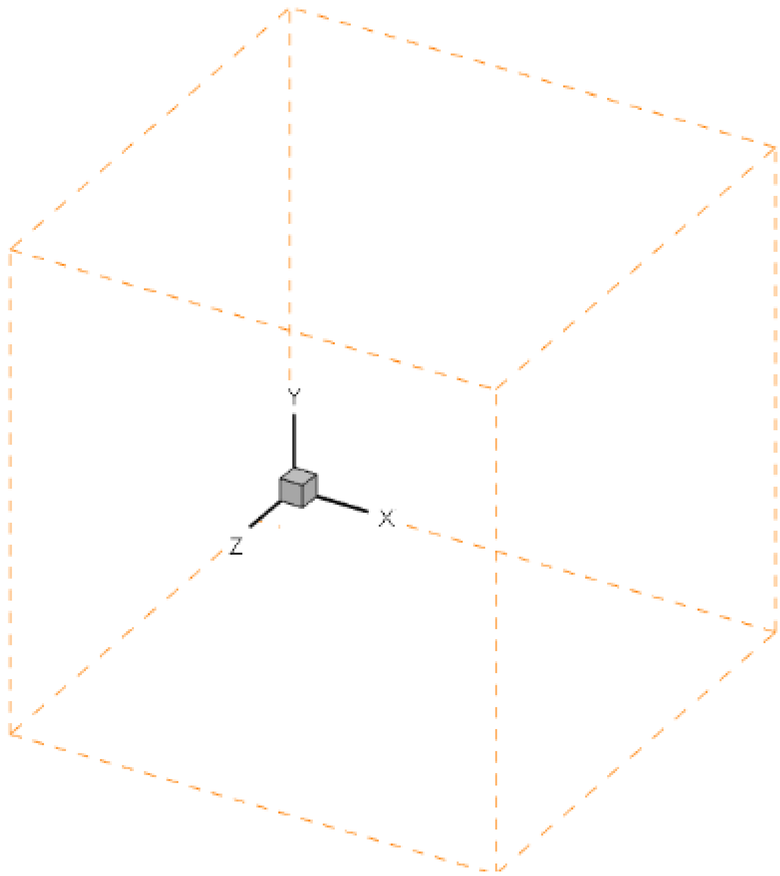
---

[1] Cavity

۴-۲-۱- هندسه مساله و شرط مرزی

برای اعتبارسنجی از یک مکعب مربع با طول، عرض و ارتفاع برابر استفاده شده است که یکی از صفحات آن متحرک است. صفحه متحرک در مسئله‌ای که در ادامه حل شده است، بخش بالایی صفحه Z-X است. سرعت در این صفحه برابر با ۰/۱ در مقیاس شبکه بولتزمن در نظر گرفته شده و همچنین طول واحد برای اضلاع این مکعب مربع انتخاب شده است البته این مورد قابل تبدیل به حالت واقعی نیز هست. مرکز مختصات در شکل ۴-۱ نمایش داده شده است که به عنوان نقطه (اندیس در برنامه) (۱،۱،۱) فرض شده است.

در مسئله کویتی شرط دیواره متحرک و شرط عدم لغزش برای دیواره‌ها وجود دارد که بنابر رابطه (۲-۳۲)، (۲-۳۳)، (۲-۳۴)، (۲-۳۵)، (۲-۳۶)، (۲-۳۷) و رابطه‌های بیان شده در پیوست الف انتخاب شده است. برای اعمال شرط عدم لغزش با قرار دادن سرعت برابر صفر می‌توان به شرایط مرزی دلخواه رسید و برای صفحه متحرک نیز کافی است به جای سرعت موجود در رابطه‌های بیان شده، مقدار سرعت در مقیاس شبکه بولتزمن استفاده شود.



شکل ۴-۱: هندسه مکعب تو خالی با صفحه متحرک در بخش بالایی صفحه Z-X

۴-۲-۲- استقلال حل از شبکه

بررسی مسئله استقلال شبکه از دیدگاه محاسباتی یک امر لازم و ضروری است. هرچند با افزایش تعداد گره‌های محاسباتی به سمت دقت بالاتر می‌رود، حجم محاسبات افزایش می‌یابد. از این‌رو باید به‌دنبال تعداد گره محاسباتی برای استفاده در شبیه‌سازی بود تا در عین حفظ دقت بالا، مسئله هزینه محاسباتی را افزایش ندهد.

بدین منظور در این بخش به بررسی این موضوع مهم پرداخته شده است. در جدول زیر در تعداد شبکه مختلف مقدار سرعت متوسط روی خط گزارش شده است. از نتایج مشخص است که تعداد گره ۱۲۱ × ۱۲۱ × ۱۲۱ انتخاب مناسبی برای شبیه‌سازی مسئله حاضر می‌باشد.

جدول ۴-۱: بررسی استقلال از شبکه بر اساس میانیگن سرعت u در در راستای Z خط مرکز صفحه $y=0.5$

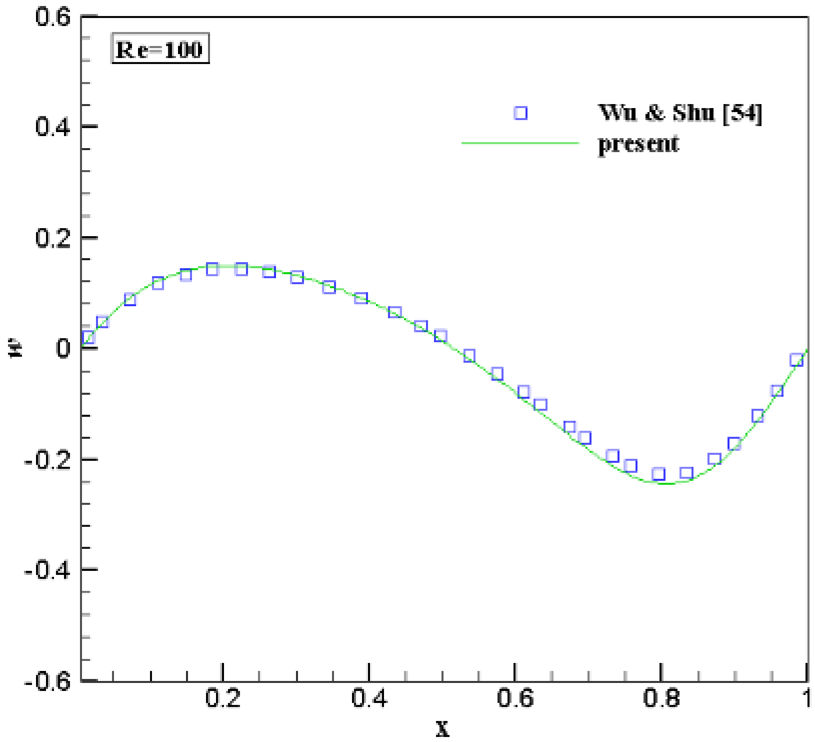
شبکه	سرعت متوسط u
۸۱ × ۸۱ × ۸۱	-7.10E-04
۹۱ × ۹۱ × ۹۱	-7.28E-04
۱۰۱ × ۱۰۱ × ۱۰۱	-7.56E-04
۱۱۱ × ۱۱۱ × ۱۱۱	-7.60E-04
۱۲۱ × ۱۲۱ × ۱۲۱	-7.63E-04
۱۳۱ × ۱۳۱ × ۱۳۱	-7.62E-04
۱۴۱ × ۱۴۱ × ۱۴۱	-7.62E-04

۴-۲-۳- رینولدز ۱۰۰

با توجه به رابطه بیان‌شده برای رینولدز، با قرار دادن عدد رینولدز و مقادیر ثابت در معادله (۴-۱)، مقدار لزجت بدست خواهد آمد. در عدد رینولدز ۱۰۰، جریان مورد نظر از نوع جریان آرام است و در ادامه نمودارهای سرعت در صفحه میانی آن ارائه می‌شود.

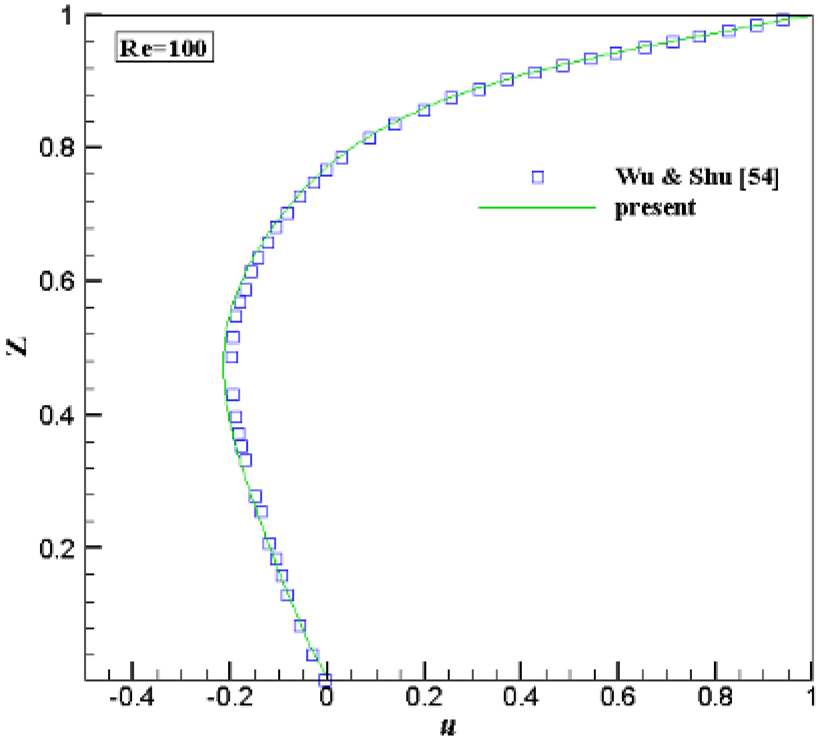
همان‌طوری که از شکل ۴-۲ پیداست در صفحه میانی محور y که از دو طرف به دیواره کویتی می‌رسد سرعت صفر شده است که نشان‌دهنده ارضای شرایط مرزی است و از طرفی انتظار می‌رود که سیالی که بر اثر شرط عدم لغزش روی دیواره، به‌وسیله لزجت و تنش برشی ایجادشده، صفحات سیال پایین‌تر خود را به سمت جلو حرکت بدهد و پس از برخورد به دیواره‌ها به سمت پایین حرکت کند که

در نمودارها نیز این مورد مشخص است و در نیمه دوم نمودار شکل ۴-۲ سرعت منفی شده سپس دوباره جریان سیال به سمت بالا حرکت کرده و مقدار آن نیز مثبت شده است.



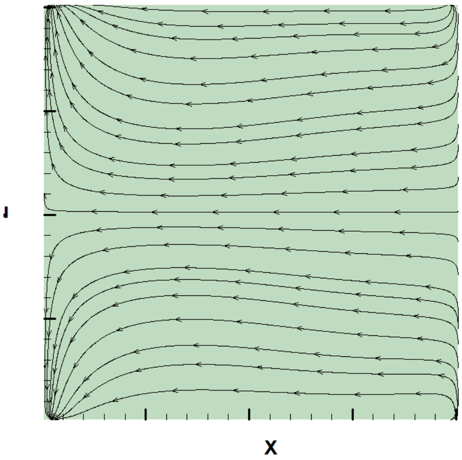
شکل ۴-۲: نمودار w-x در راستای X در خط مرکز صفحه $y=0.5$ در مقایسه با وو و سو [۵۴]

در شکل ۴-۳ نیز مشاهده می‌شود که شرایط مرزی در مرزها مقدار صحیحی گرفته‌اند و روی دیواره پایینی، سرعت صفر و دیواره متحرک بالای سرعت برابر یک شده است. در نقاط نزدیک‌تر به صفحه متحرک سرعت به صورت صعودی به یک نزدیک‌تر می‌شود درحالی‌که نقاط پایین‌تر براثر ایجاد شدن گردابه سرعت منفی دارند. در بخش بعدی نمای خطوط جریان را در صفحات وسط نشان خواهیم داد.

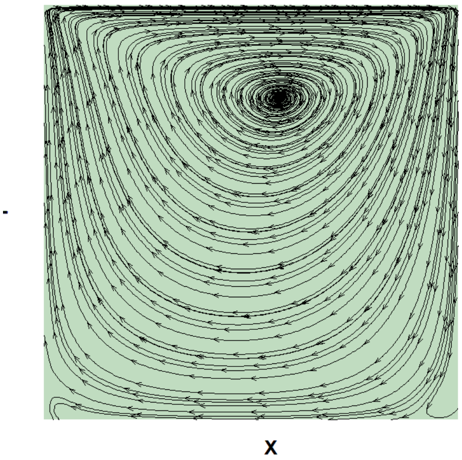


شکل ۴-۳: نمودار Z-u در در راستای Z خط مرکز صفحه $y=0.5$ در مقایسه با وو سو [۵۴]

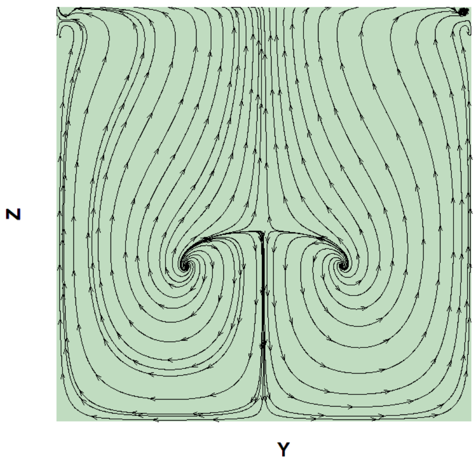
در شکل ۴-۴ نمای خطوط جریان در هر یک از صفحات مشاهده می‌شود، در بخش الف این شکل دیده می‌شود که خطوط جریان به سمت دیواره در حال حرکت هستند که دلیل آن وجود صفحه متحرک است که با توجه به میزان تنش برشی، صفحات پایین‌تر را به سمت جلو حرکت می‌دهد. زمانی که جریان به دیواره برخورد می‌کند با توجه به اینکه عدد رینولدز پایینی نیز وجود دارد، در جهت دیواره‌ها به حرکت خود ادامه می‌دهد. در بخش ب شکل ۴-۴ مشاهده می‌شود که گردابه‌ای در نیمه بالایی صفحه ایجادشده که این مورد ناشی از برخورد جریان ناشی از حرکت جریان در زیر صفحه متحرک و برخورد آن با صفحه روبرو است که هر چه به سمت پایین حرکت می‌شود شاهد کاهش سرعت آن به دلیل لزجت سیال است.



الف



ب



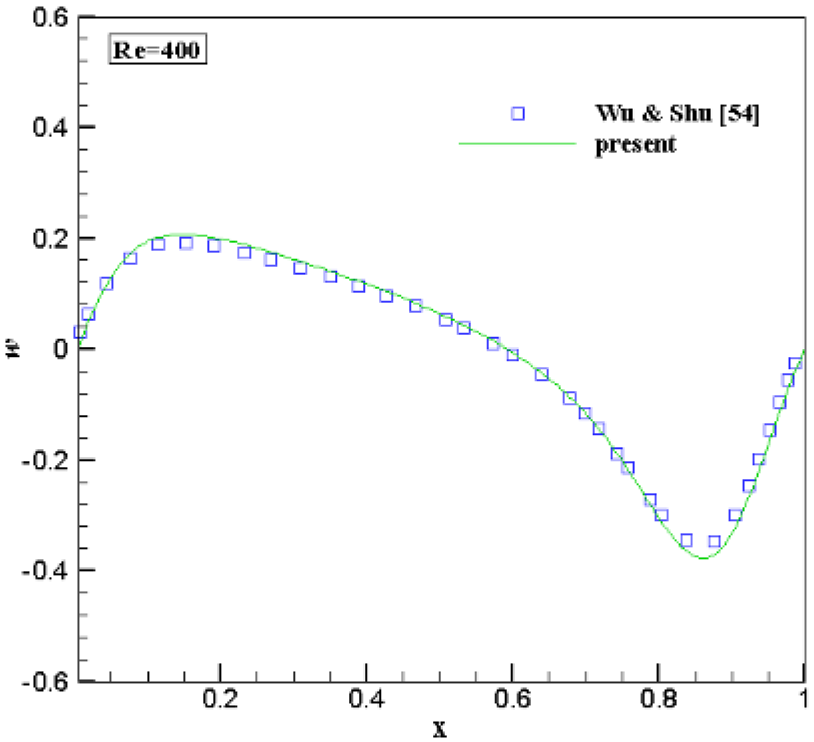
ج

شکل ۴-۴: (الف) نمای خطوط جریان در صفحه $y=0.5$ (ب) نمای خطوط جریان در صفحه $z=0.5$
(ج) نمای خطوط جریان در صفحه $x=0.5$

در بخش آخر این شکل جریان روی صفحه Y و Z مشخص گردیده که جریان در بخش مرکزی آن به سمت پایین است که ناشی از وجود لزجت و تنش واردشده از سمت سیال اطراف و همچنین دیواره متحرک است ولی برای برگشت جریان و حفظ پیوستگی انتظار بازگشت سیال نیز وجود دارد که به دلیل وجود دیواره در کناره‌ها، این جریان برگشتی از این ناحیه‌ها صورت می‌گیرد.

۴-۲-۴- رینولدز ۴۰۰

در رینولدز ۴۰۰ با توجه به ثابت بودن متغیرهای اصلی باید لزجت سینماتیکی کاهش پیدا کند. البته کاهش رینولدز در روش شبکه بولتزمن باعث ایجاد واگرایی نیز می‌شود که با افزایش تعداد گره‌ها تا اندازه‌ای که میزان زمان آسایش یگانه به ۰/۶ برسد، این مشکل قابل‌حل است. در ادامه همانند بخش قبل به بیان نتایج به ازای این رینولدز پرداخته شده است.

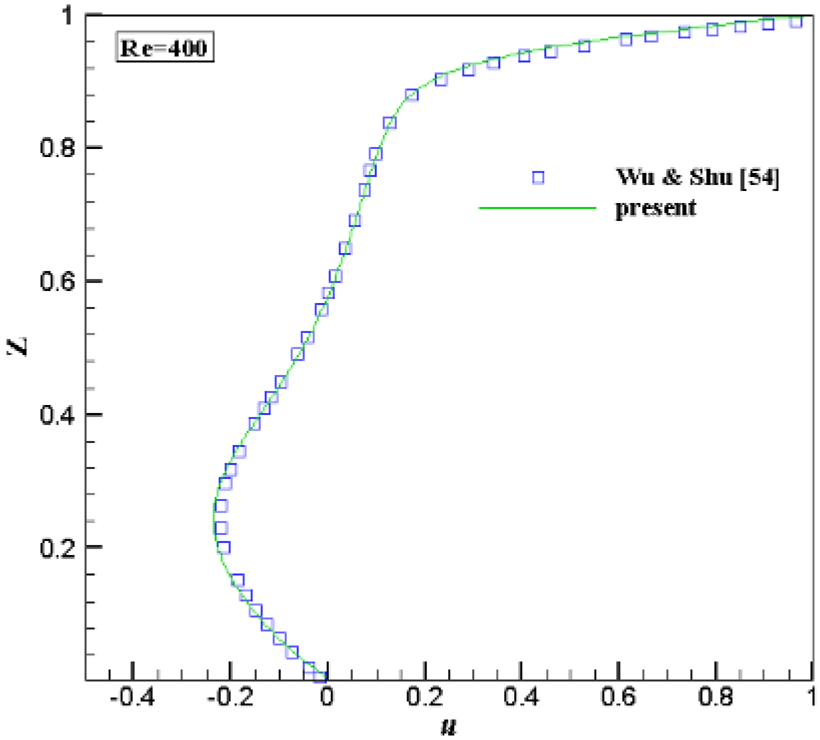


شکل ۴-۵: نمودار w-x در راستای X در خط مرکز صفحه $y=0.5$ در مقایسه با وو و سو [۵۴]

در این رینولدز نیز در دیواره، سرعت برابر صفر و ارضای شرایط مرزی دیده می‌شود و همان‌طور که مشاهده می‌شود نسبت به رینولدز ۱۰۰ تغییرات، بیشتر به چشم می‌خورد و نقاط ماکزیمم در سرعت سیال نیز وجود دارد که اثرات بخش جابجایی معادلات بیشتر دیده می‌شود. سرعت ماکزیمم بی‌بعد شده در اینجا از ۰/۲ نیز عبور کرده که در رینولدز ۱۰۰ این مقدار عددی کمتر از ۰/۲ بود که در شکل ۴-۵

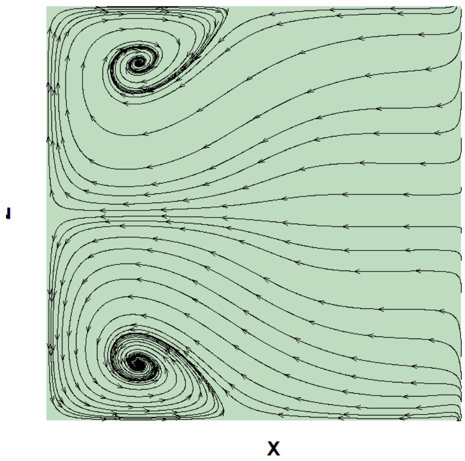
به‌وضوح اثر کاهش لزجت مشاهده می‌شود.

در شکل ۴-۶ نیز در پایین سرعت برابر با صفر در دیواره و سرعت برابر یک در بالا و در زیر صفحه متحرک است، که شرایط مرزی را ارضا نموده و همان‌طور که در بخش‌های قبلی توضیح داده شد مقدار دقت این سرعت از مرتبه دوم است. در بخش بالایی افزایش سرعت با شیب کمتری نسبت به رینولدز ۱۰۰ مشاهده می‌شود که ناشی از همین کاهش لزجت است که درنتیجه آن تنش برشی کمتری به سیال‌های پایین‌تر وارد شده است. کاهش تنش برشی در اینجا موجب کاهش شیب این افزایش سرعت در بخش u آن است. بااین‌حال در بخش پایینی، اندازه سرعت بازگشتی (سرعت منفی) بیشتری نسبت به رینولدز ۱۰۰ وجود دارد که اثر بخش جابجایی در معادله ناویر-استوکس را نشان می‌دهد که در مقابل بخش‌های دیگر آن اثرگذاری بیشتری در حل داشته است.

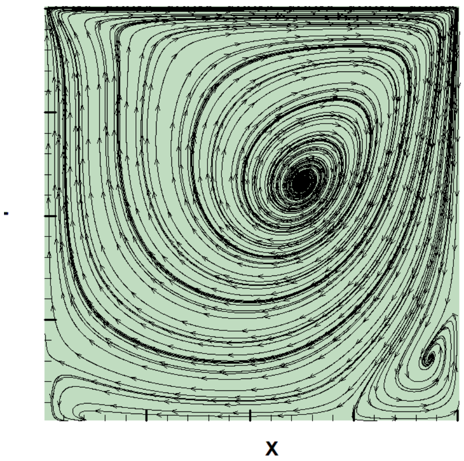


شکل ۴-۶: نمودار Z-u در راستای Z خط مرکز صفحه $y=0.5$ در مقایسه با وو و سو [۵۴]

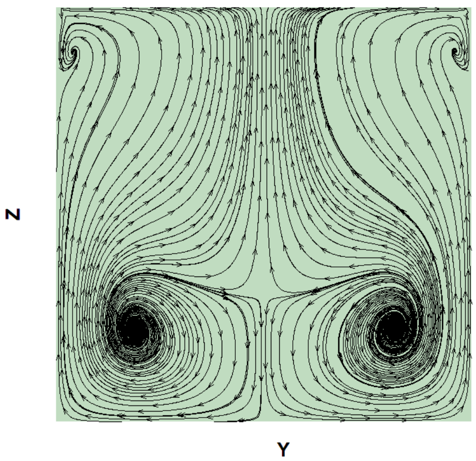
حال به بررسی نمایه‌های خطوط جریان در رینولدز ۴۰۰ می‌پردازیم. در شکل ۴-۷ نمای خطوط جریان در رینولدز ۴۰۰ مشاهده می‌شود که در آن گردابه‌های بیشتری نسبت به رینولدز ۱۰۰ تشکیل شده است. در بخش الف این شکل، جریانی که براثر حرکت صفحه متحرک ایجاد شده دارای قدرت بیشتری در بخش جابجایی معادله ناویر-استوکس است که پس از برخورد به دیواره روبرو و جریانی که از نزدیکی دیواره می‌گذرد و تغییر جهت در برخورد بعدی به دیواره، به تشکیل گردابه‌ای در نزدیکی صفحات منجر شده است. با توجه به تقارن که در این صفحات وجود دارد، گردابه‌ای در نیمه پایینی آن نیز تشکیل شده است.



الف



ب



ج

شکل ۴-۷: رینولدز ۴۰۰ (الف) نمای خطوط جریان در صفحه $y=0.5$ (ب) نمای خطوط جریان در صفحه $z=0.5$ (ج) نمای خطوط جریان در صفحه $x=0.5$

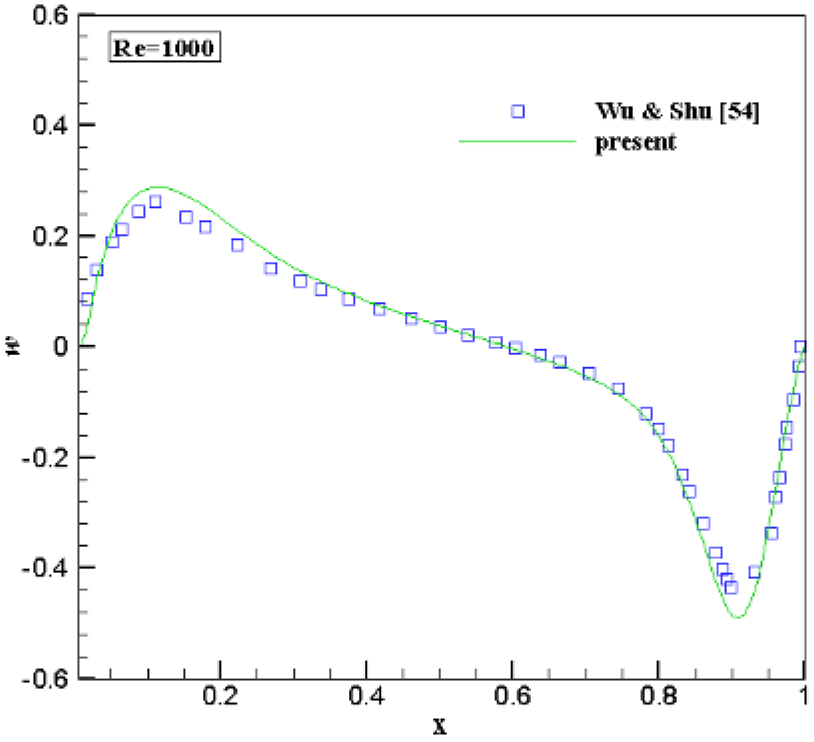
در بخش ب این شکل همانند شکل معادل با آن در رینولدز ۱۰۰ گردابه بزرگ‌تر در بخش مرکزی کویتی مشاهده می‌شود ولی یک گردابه کوچک‌تر هم براثر برخورد سیال در کنج نیز ایجاد شده است، وجود این گردابه باعث شده گردابه بزرگ‌تر، مقداری به سمت چپ حرکت کند و مرکز آن نسبت به رینولدز ۱۰۰ تغییر داشته باشد.

در بخش ج در اثر تعادل ایجاد شده بین جریانی که به در مرکز به سمت پایین و در نیمه بالایی آن در خلاف جهت نیمه دیگر است، باعث گردیده گردابه‌هایی در طرفین ایجاد شود و کاهش لزجت همان‌طور که در قبل نیز توضیح داده شد باعث شده گردابه‌های کوچکی در کنج‌های بالا نیز تشکیل شود.

۴-۲-۵- رینولدز ۱۰۰۰

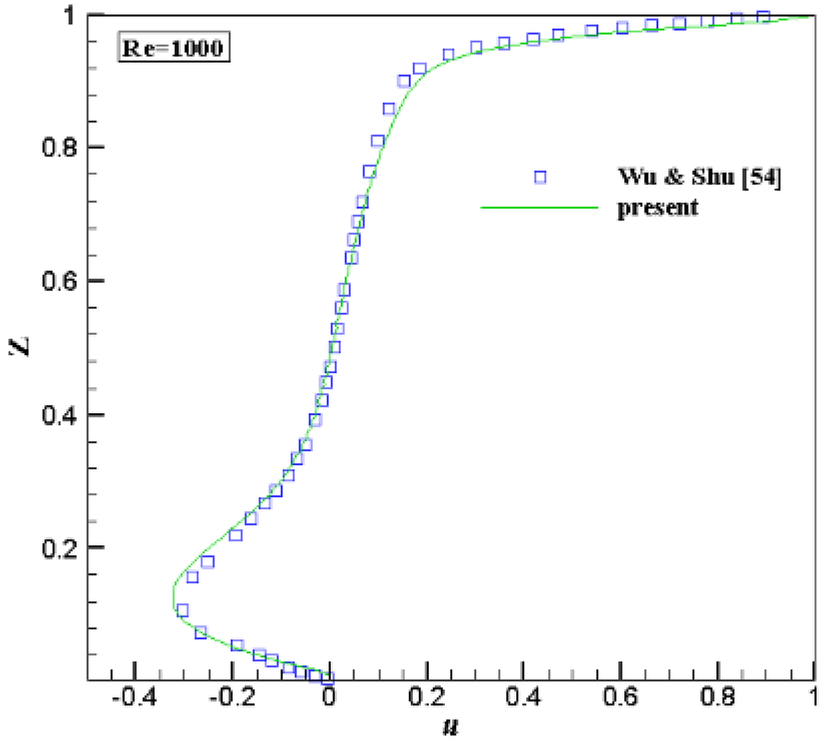
در رینولدز ۱۰۰۰ که با توجه به افزایش و تأثیر زیاد آن به روی لزجت و همچنین وجود محدودیت در افزایش سرعت به دلیل خروج جریان از حالت تراکم ناپذیر، اعمال شرایط مرزی دقیق اهمیت بیشتری پیدا می‌کند تا بتوان از ناپایداری‌های در حل جلوگیری کرد.

سرعت در کنار دیواره شکل ۴-۸ شیب بیشتری در نقاط بیشینه و کمینه دارد. علت میل بیشتر نقاط کمینه و بیشینه به کناره‌ها، برخورد جریان در دو سمت با آن‌ها است که باعث افزایش ناگهانی سرعت می‌گردد. همان‌طور که در بخش قبلی هم توضیح داده شد کاهش لزجت، اثر بخش جابجایی را بیشتر می‌کند که در این شکل نیز نسبت به دو رینولدز پایین‌تر از آن شاهد تغییرات محسوس‌تر در کناره‌ها و تغییرات سرعت در خط وسط این نمودار شده است.



شکل ۴-۸: رینولدز ۱۰۰۰، نمودار w-x در راستای X در خط مرکز صفحه $y=0.5$ در مقایسه با وو و سو [۵۴]

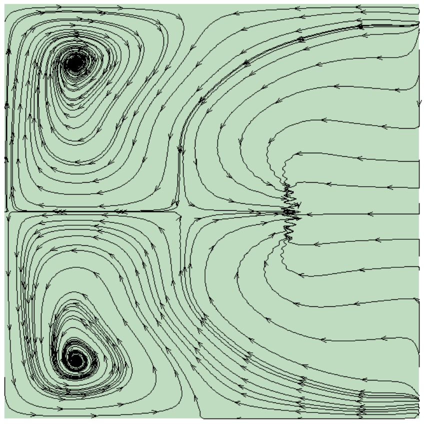
با توجه به رابطه بیان‌شده برای رینولدز، با قرار دادن عدد رینولدز و مقادیر ثابت در معادله (۴-۱)، مقدار لزجت بدست خواهد آمد. در عدد رینولدز ۱۰۰، جریان مورد نظر از نوع جریان آرام است و در ادامه نمودارهای سرعت در صفحه میانی آن ارائه می‌شود. ادامه بحث‌های گذشته در مورد کاهش تنش برشی ناشی از لزجت، در این رینولدز کمتر شدن شیب افزایش سرعت در بخش بالایی کویتی به‌وضوح مشاهده شده که نشان‌دهنده این موضوع است که با کاهش تنش برشی افزایش سرعت در لایه‌های سیال شیب کمتری به خود خواهد گرفت ولی از طرف دیگر وجود اثر بیشتر سرعت سیال باعث افزایش بیشینه اندازه سرعت منفی شده است و دلیل منفی بودن سرعت در این بخش بازگشت سیال پس از برخورد با صفحات پایین می‌باشد.



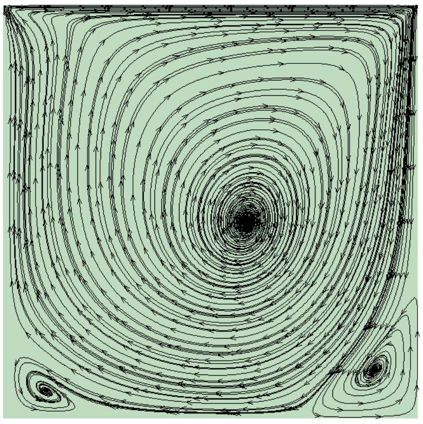
شکل ۴-۹: نمودار Z-u در در راستای Z خط مرکز صفحه $y=0.5$ در مقایسه با وو و سو [۵۴]

در شکل ۴-۱۰ و در رینولدز ۱۰۰۰ وضعیت خطوط جریان و تفاوت‌های آن نسبت به رینولدزهای پایین‌تر از آن مشاهده می‌شود. در شکل ۴-۱۰ بخش الف دو گردابه در کنج‌های محل برخورد جریان ایجاد شده است ولی این گردابه‌ها از گردابه‌های جریان با رینولدز ۴۰۰ بزرگ‌تر هستند و دارای اثر بیشتری در جریان نیز می‌باشند به این صورت جریانی که از سمت راست حرکت کرده را در بخشی از مسیر برمی‌گردانند.

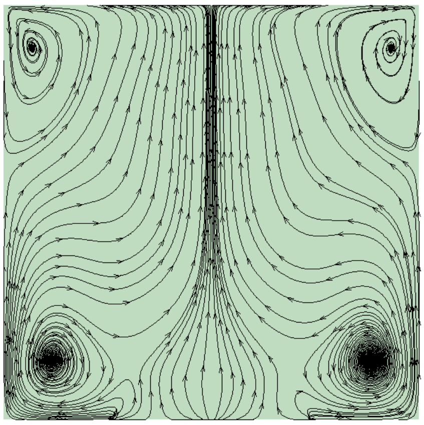
این جریان برگشتی نیز پس از برخورد با دیواره بازگشته و باعث ایجاد برخورد دو جریان با یکدیگر شده که خط برخورد در نیمه راستی شکل الف تشکیل داده است.



الف



ب



ج

شکل ۴-۱۰: رینولدز ۱۰۰۰ (الف) نمای خطوط جریان در صفحه $y=0.5$ (ب) نمای خطوط جریان در صفحه $z=0.5$ (ج) نمای خطوط جریان در صفحه $x=0.5$

در بخش ب این شکل گردابه مرکزی بزرگ‌تر تقریباً در مرکز قرار گرفته است ولی شاهد ایجاد گردابه بزرگ‌تری نسبت به رینولدز ۴۰۰ در کنج راست، شده است که در ادامه حرکت خود باعث ایجاد گردابه کوچک‌تری در کنج چپ نیز گشته است.

در بخش ج، شکل ۴-۱۰ دو گردابه به خاطر اثر بیشتر بخش جابجایی نسبت به رینولدز ۱۰۰ و ۴۰۰ بیشتر به کناره‌ها مایل شده‌اند که درنهایت پس از برخورد با دیواره‌ها بالایی دو گردابه کوچک‌تر نیز

تشکیل داده‌اند.

پس از بررسی این سه رینولدز در کنار هم شاهد آن هستیم که رینولدز بالا در کنج‌ها اثر خود را بیشتر به نمایش می‌گذارد و گردابه‌های بزرگ‌تر را نیز تشکیل می‌دهد تا جایی که به روی جریان کلی نیز اثرگذار خواهد بود.

۴-۳- جریان به روی یک کره ثابت

در این بخش جریان حول یک کره ثابت را مورد بررسی قرار داده شده است. جریان از ورودی به‌صورت یکنواخت به ناحیه محاسباتی موردنظر وارد می‌شود که در زمان برخورد به بررسی ضریب پسا آن، شکل و اندازه گردابه‌های ایجاد شده پرداخته می‌شود. قبل از آن ورود به بحث نتایج، هندسه و روابط مورد نیاز آن بیان می‌شود.

۴-۳-۱- هندسه، مشخصات مسئله و شرایط مرزی

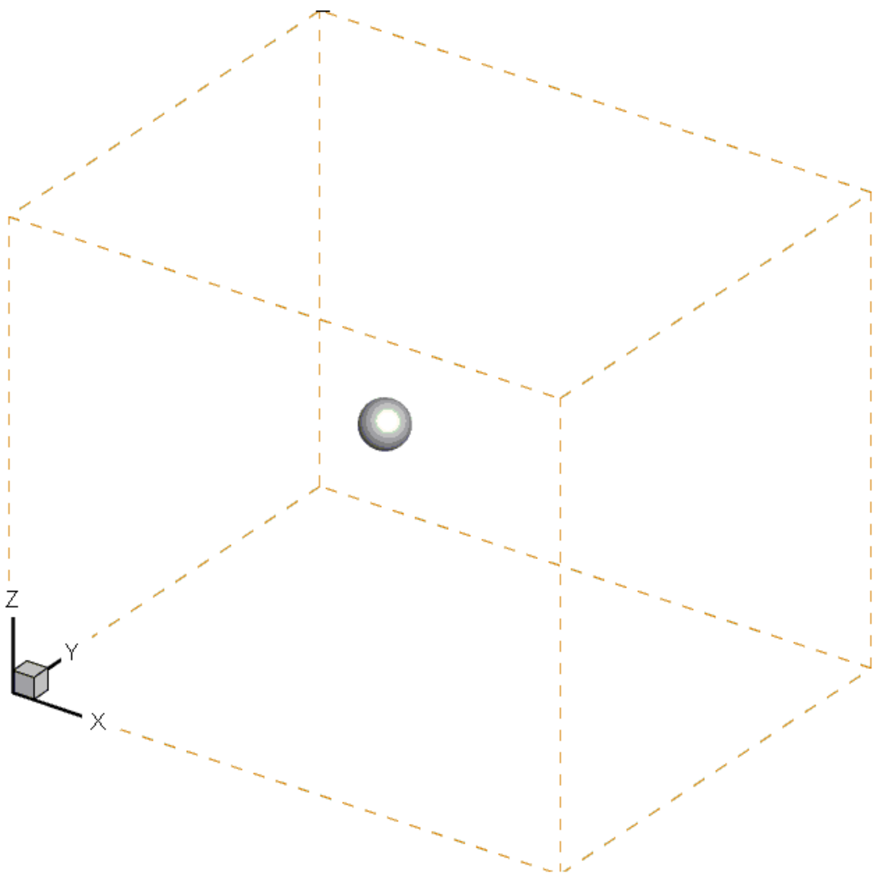
ناحیه محاسباتی یک مستطیل $25D \times 20D \times 20D$ است که به ترتیب در جهت x، y و z قرار می‌گیرند و مرکز کره در مختصات $10D \times 10D \times 10D$ قرار دارد. در این مسئله چگالی سیال مقیاس شبکه بولتزمن برابر با یک در نظر گرفته شده و سرعت در ورودی یکنواخت و برابر با ۰/۱ در مقیاس شبکه بولتزمن فرض شده است. تمامی شرایط مرزی برای این مسئله استخراج شده است. شرط تقارن برای اطراف ناحیه محاسباتی یا شرط عدم لغزش شرط سرعت ثابت برای ورودی و شرط فشار خروجی برای ناحیه انتهایی دامنه محاسباتی بنابر رابطه (۲-۳۲)، (۲-۳۳)، (۲-۳۴)، (۲-۳۵)، (۲-۳۶)، (۲-۳۷) و رابطه‌های بیان شده در پیوست الف انتخاب شده است. در این رابطه‌ها با جایگذاری مقادیر معلوم می‌توان مقادیر مجهول را با روش عددی محاسبه کرد، برای شرط عدم لغزش سرعت برابر صفر، برای شرط خروجی فشار، انتخاب چگالی برابر یک و برای ورودی انتخاب سرعت ورودی با مقیاس شبکه بولتزمن انتخاب شده است. رابطه‌های استخراج شده در پیوست الف بیان شده است. در این مسئله با تعیین چگالی می‌توان فشار خروجی را تعیین کرد.

برای محاسبه رینولدز از رابطه زیر استفاده شده است:

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu} \tag{۲-۴}$$

که در آن D، قطر کره وU_∞، سرعت ورودی در بالادست و ν لزجت سینماتیکی است. L_s طول گردابه شروع‌شده از کره است که برای بی‌بعد سازی آن از قطر کره استفاده شده است به عبارتی طول گردابه بی‌بعد از نسبت طول گردابه به قطر کره محاسبه می‌شود.

مرکز مختصات بنابر شکل ۴-۱۱ نمایش داده شده است و به عنوان نقطه (اندیس در برنامه) (۱،۱،۱) فرض شده است. هندسه کلی به‌صورت زیر است:



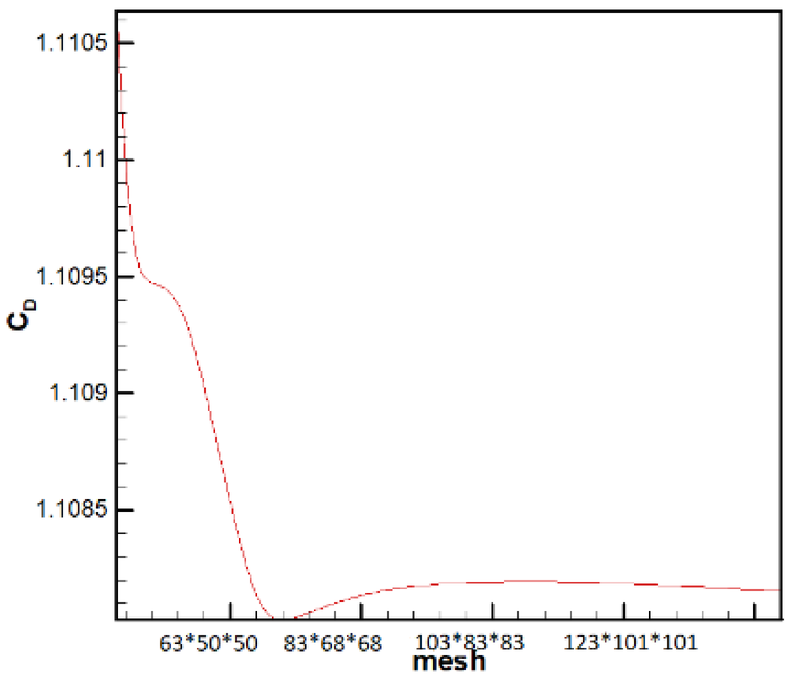
شکل ۴-۱۱: هندسه ناحیه محاسباتی جریان حول کره با دستگاه مختصات ارائه شده به عنوان نقطه (۱،۱،۱)

شرط مرزی عدم لغزش با استفاده از رابطه مربوط به مرز غوطه‌ور ارضا می‌شود که شامل رابطه‌های

(۳-۲۰)، (۳-۲۱)، (۳-۲۲) و (۳-۲۳) است. برای شرط عدم لغزش برای دیواره‌ها نیز از رابطه‌های (۲-۳۲)، (۲-۳۳)، (۲-۳۴)، (۲-۳۵)، (۲-۳۶)، (۲-۳۷) و رابطه‌های بیان شده در پیوست الف استفاده شده است. تعداد گره‌های لاگرانژی برای کره، ۴۰۰ انتخاب شده است هر چند که می‌توان تعداد آن را بیشتر نیز کرد ولی باعث افزایش هزینه محاسباتی می‌شود. برای چیدمان نقاط روی کره از این مدل استفاده شده است که از بالاترین نقطه به صورت لایه‌لایه با یک ضخامت دلخواه برای مثال ۰/۵، به سمت لایه پایین‌تر رفته و توزیع نقاط روی دایره انجام داده می‌شود که در شکل ۳-۱ به نمایش در آمده است. برای نقاط اویلری شبکه ۱۰۱ × ۱۰۱ × ۱۲۳ انتخاب شده است.

۴-۳-۲- استقلال حل از شبکه

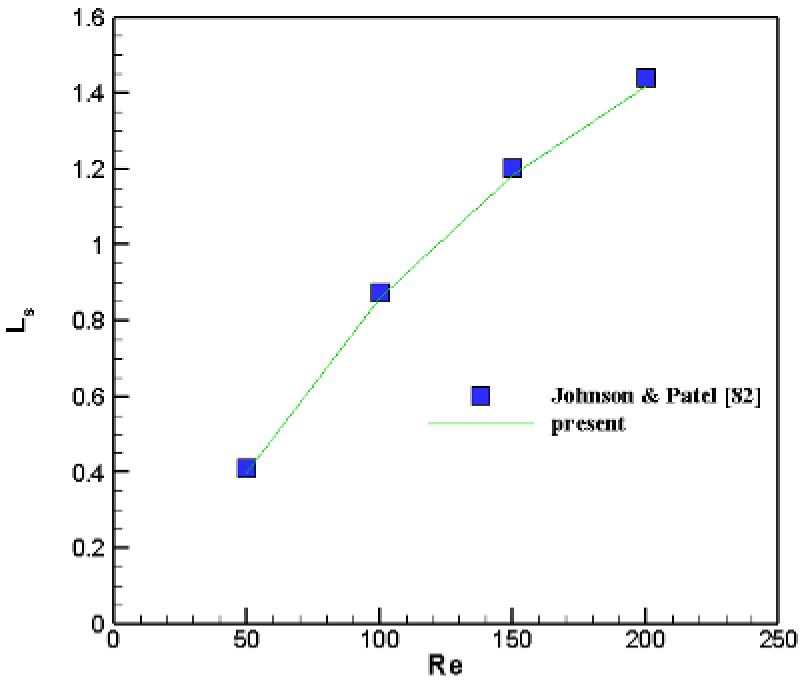
هر چند برای بررسی جریان حول کره می‌توان از تراکم شبکه بالا نیز استفاده کرد ولی هزینه محاسباتی آن بالاتر رفته و همچنین زمان بیشتری برای حل می‌طلبد. در این بخش با بررسی متغیر ضریب پسا، وضعیت استقلال از شبکه انجام شده است. مشاهده می‌شود که با تراکم بیشتر، ضریب پسا با دقت بهتری بدست می‌آید.



شکل ۴-۱۲: استقلال از شبکه جریان حول کره

۴-۳-۳- طول گردابه بی‌بعد و ضریب پسا

طول گردابه به ازای رینولدزهای ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰ و ۲۰۰ در نمودار زیر نشان داده شده است، ملاحظه می‌شود که با افزایش رینولدز طول گردابه در حال افزایش است و تطابق خوبی نیز با کارهای قبلی دارد.



شکل ۴-۱۳: نمودار طول گردابه بی‌بعد برحسب رینولدز در مقایسه با جانسون و پاتل [۸۲]

ضریب پسا که ناشی از نیروهای ناشی از لزجت و فشار وارد بر جسم مورد نظر است نیز در جدول زیر بیان گردیده که مشاهده می‌شود که خطا در رینولدز ۱۰۰ برابر با ۰/۵ درصد و در رینولدز ۲۰۰ برابر با ۱ درصد، با کار جانسون و پاتل [۸۲] است. با توجه به اینکه نیروهای لزج نقش مهمی در ایجاد این ضریب و نیرو دارند، مشاهده می‌شود که افزایش رینولدز، با ثابت در نظر گرفتن بقیه متغیرها باعث کاهش لزجت می‌گردد. در نتیجه این موضوع نیروی حاصل از این بخش از ضریب پسا کاهش می‌یابد که در جمع نهایی آن خود را به‌طور واضح نشان می‌دهد. در اینجا نیز مشاهده می‌شود، با افزایش رینولدز

اندازه ضریب پسا کاهش یافته است.

جدول ۴-۲: ضریب پسا در رینولدزهای ۱۰۰ و ۲۰۰ حول کره ثابت در جریان پایا

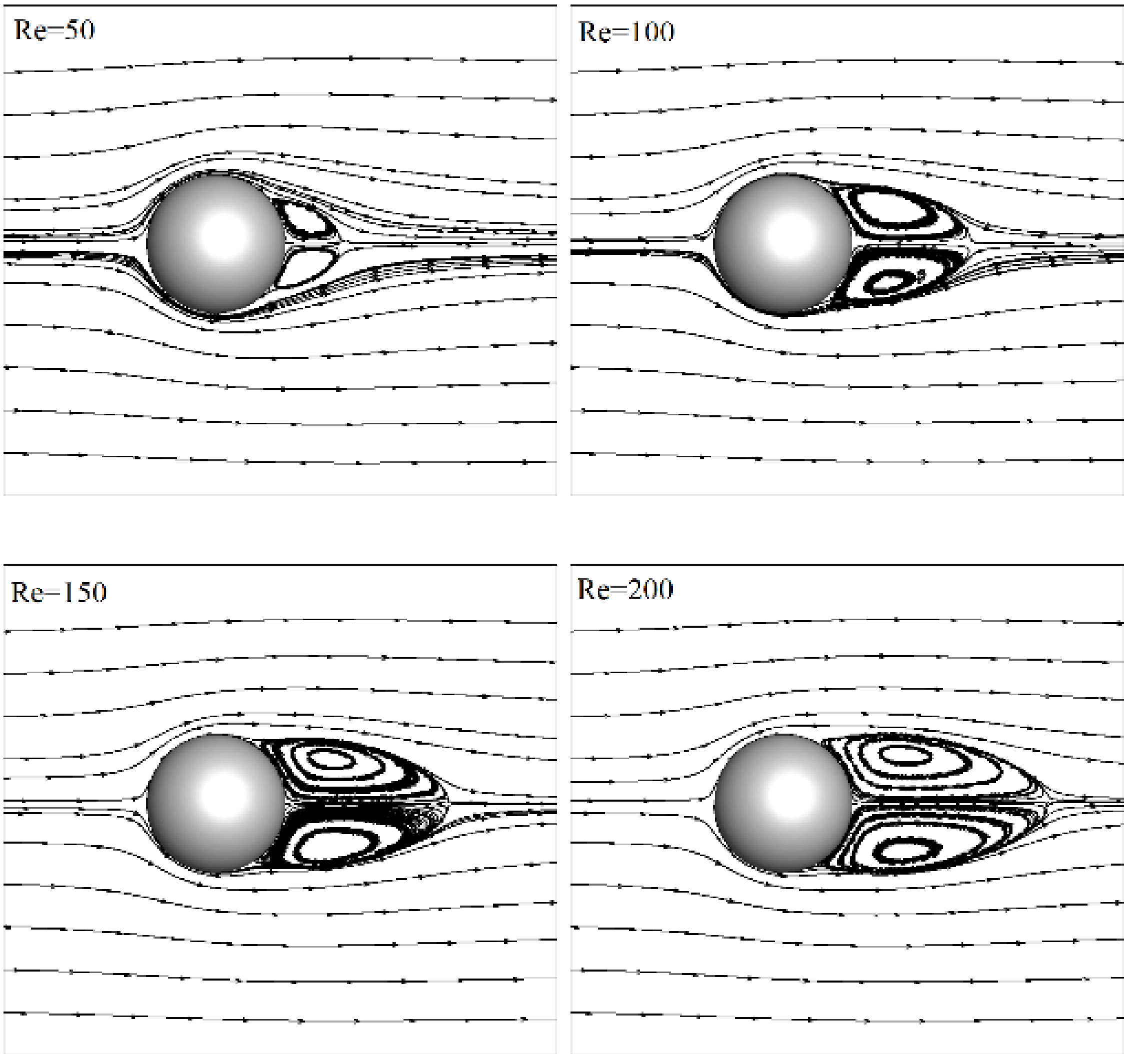
مطالعه حاضر	وو و سو[۵۴]	گیلمانو و همکاران[۳۵]	جانسون و پاتل[۸۲]	پژوهش / رینولدز
۱/۱۱	۱/۱۲۸	۱/۱۵۳	۱/۱۱۲	۱۰۰
۰/۷۸	۰/۸	–	۰/۷۹	۲۰۰

۴-۳-۴- نمایه‌های خطوط جریان

در رینولدزهای پایین‌تر خطوط جریان در صفحات به‌صورت متقارن قرار می‌گیرد. نمایه‌ها در شکل ۴-۱۴ مشاهده می‌شود. همان‌طور که در شکل‌ها مشاهده می‌شود با افزایش عدد رینولدز طول گردابه‌ها افزایش یافته است که این موضوع در نمودار طول گردابه بی‌بعد نیز نشان داده شد.

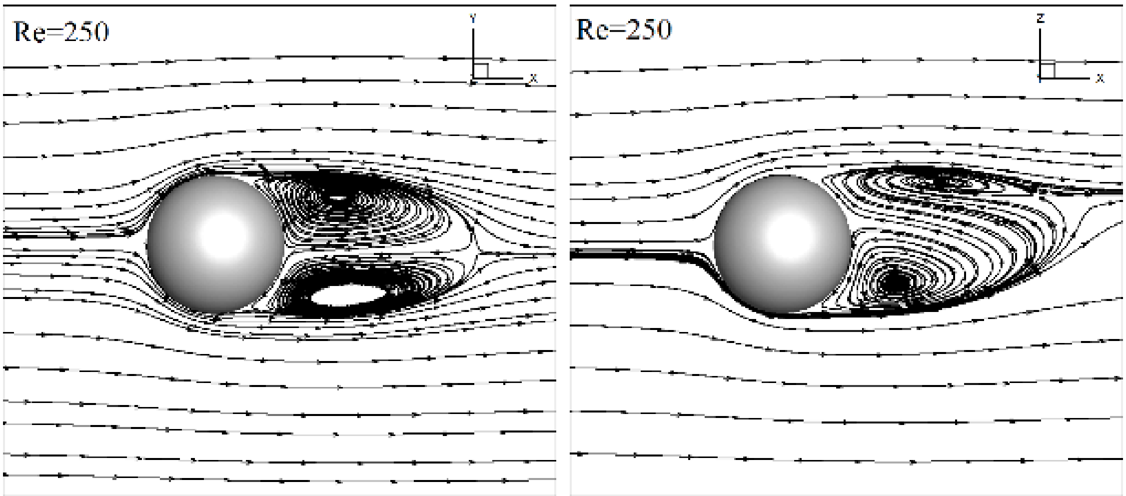
با افزایش عدد رینولدز شاهد تغییراتی در نحوه ایجاد شدن گردابه‌ها خواهیم بود، در رینولدزهای قبلی گردابه‌ها در هر یک از صفحات به‌صورت متقارن بودند و همچنین در برش‌های مختلف از صفحات نیز تغییری در این شکل از گردابه‌ها ایجاد نمی‌شد ولی با افزایش عدد رینولدز و قبل از اینکه حل نسبت به زمان وابستگی پیدا کند، این تقارن هم در یکی از صفحات برش خورده، از بین می‌رود که شروع این عدم تقارن از رینولدز ۲۵۰ خواهد بود بااین‌حال این گردابه در طول زمان شکل خود را حفظ می‌کند.

در ادامه برای چهار عدد رینولدز، خطوط جریان نشان داده شده است که با مقایسه آن‌ها با هم می‌توان فهمید که طول گردابه رابطه مستقیمی با عدد رینولدز دارد. پس از برخورد نقطه سکونی در محل برخورد جریان با کره پدید خواهد آمد که سرعت سیال صفر خواهد شد. همانطور که در قبل نیز گفته شده بود با روش مرز غوطه‌ور، سرعت روی کره با دقت مرتبه دوم صفر خواهد شد.



شکل ۴-۱۴: نمایه خطوط جریان در رینولدز ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰و ۲۰۰ در صفحه y-x و z=0.5 و در صفحه z-x و y=0.5

در شکل ۴-۱۵ مشاهده می‌شود که جریان همانند رینولدزهای پایین‌تر به‌صورت کاملاً متقارن قرار نگرفته است و کم‌کم وارد مرحله‌ای می‌شود که نسبت به زمان تغییرات صورت بگیرد. گردابه در یکی از صفحات متقارن و در دیگری به‌صورت نامتقارن قرار می‌گیرد.



شکل ۴-۱۵: نمایه خطوط جریان در رینولدز ۲۵۰ در صفحه y-x و z=0.5 و در صفحه z-x و y=0.5

با افزایش رینولدز به ۳۰۰ این پایداری نسبت به زمان نیز از بین می‌رود و گردابه‌ها در بازه‌های زمانی کوتاه شروع به تکرار و تناوب می‌کنند که آن را با عدد استروهال[1] بیان می‌کنند که در بخش بعدی به‌صورت دقیق‌تر به آن می‌پردازیم.

۴-۳-۵- نمایه جریان در حالت گذرای سه‌بعدی

در رینولدز ۳۰۰ گردابه علاوه بر اینکه دیگر از حالت متقارن خود خارج می‌شود شروع به حرکت می‌کند و در زمان این گردابه‌ها شروع به تکرار و تناوب می‌کنند. با توجه به تناوب این گردابه ها، تناوب به چهار بخش تقسیم شده و در بخش‌های بعدی بیان شده است.

برای نمایش دوره تناوب در حل از T استفاده شده است. این عدد با استفاده از ضریب پسا محاسبه شده است به این نحو که زمان تکرار شدن مقدار ضریب پسا، نمایش دهنده دوره تناوب در شبیه‌سازی نیز می‌باشد. عدد استروهال، عددی بی‌بعد می‌باشد که در دینامیک سیالات برای توصیف رفتار جریان نوسانی سیال مورد استفاده قرار می‌گیرد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

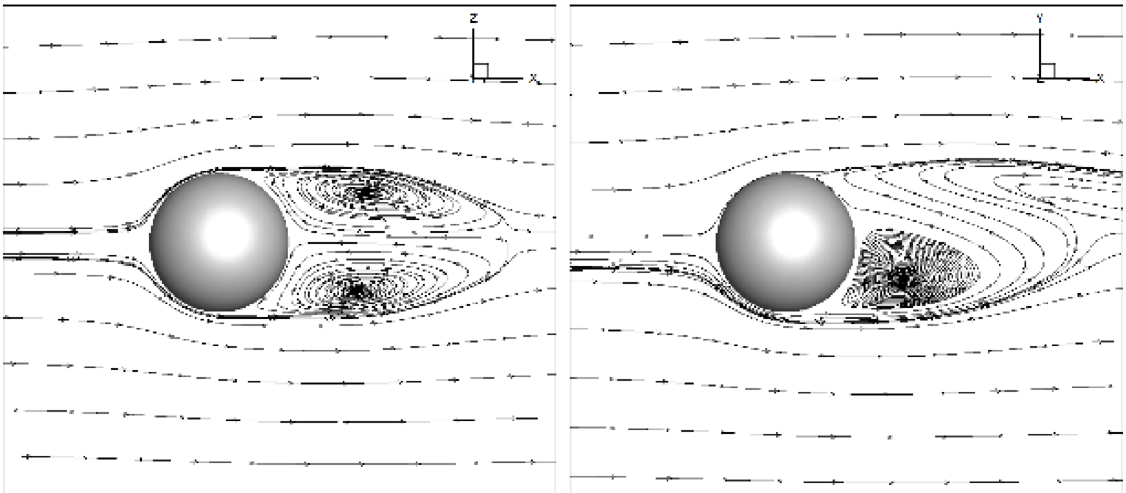
$$St = \frac{fL}{V} \tag{۳-۴}$$

[1] Strouhal number

که در آن f فرکانس نوسانات، L طول مشخصه و V سرعت سیال است. برای محاسبه فرکانس نوسانات می‌توان از ضرایب برا و پسا کمک گرفت زیرا آن‌ها نیز رفتاری متناوب در طول زمان تغییرات در جریان دارند. طول مشخصه نیز در این مسئله، قطر کره در نظر گرفته می‌شود که مقداری معلوم دارد. سرعت سیال در این رابطه نیز همان سرعت ورودی یا سرعت در دور دست محسوب می‌شود که با جایگذاری در رابطه مربوطه عدد استروهال بدست می‌آید. در مورد اندازه این عدد و همچنین ضرایب برا و پسا در بخش بعدی به طور مفصل‌تر مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

جریان در ابتدای حل، روندی تکراری به خود نمی‌گیرد و با گذشت زمان شروع به تکرار یک الگو خواهد کرد که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

پس از آغاز حل و رسیدن به حالت تکرار شده آن، در بخش اول آن گردابه متقارنی در صفحه z-x تشکیل می‌شود و در صفحه y-x نیز گردابه در بخش پایینی آن ایجاد می‌شود. با توجه به گذرا بودن این حالت، گردابه‌ها در هر دو صفحه شروع به تغییر می‌کنند.

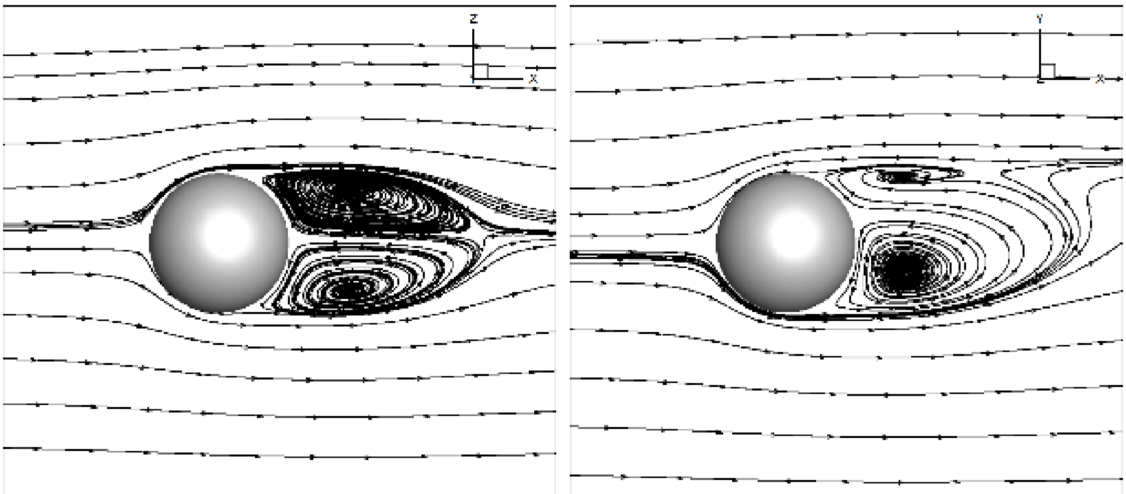


شکل ۴-۱۶: نمایه خطوط جریان در رینولدز ۳۰۰ و زمان T/4 در صفحه y-x و z=0.5 و در صفحه z-x و y=0.5

در بخش بعدی و در نیمه زمان تکرار شدن و تناوب گردابه‌ها، گردابه در صفحه z-x، طول کمتری به خود می‌گیرد و کمی نسبت به مرحله قبلی جمع‌تر می‌شود و در صفحه y-z، مرکز گردابه قبلی کمی

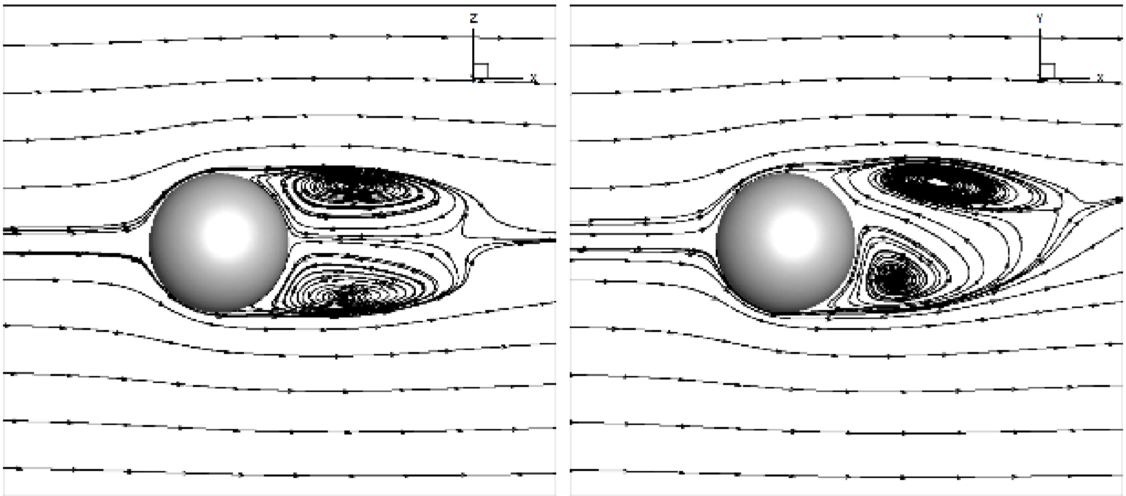
حرکت کرده و تغییر شکل جزئی نیز روی آن شاهد هستیم. علاوه بر این در بخش بالای آن نیز گردابه‌ای کوچک‌تر تشکیل شده است.

در نگاه کلی آن‌چه مشاهده می‌شود، این است که در هر دو صفحه گردابه تشکیل شده است. در یکی از صفحات گردابه به صورت متقارن و در صفحه دیگر گردابه نامتقارن ایجاد شده است که وضعیت مشابهی با مسئله پایا و در رینولدزهای نزدیک به حالت گذرا وجود دارد. شکل تقارن گردابه‌ها نیز در روند گذرا در صفحه z-x حفظ شده و از آن طرف رفتاری گذرا نیز ادامه می‌دهد. هر چند جریان از حالت پایا به گذرا تبدیل شده است ولی در حل این گردابه‌های نامتقارن در یک صفحه و متقارن در صفحه دیگر به اندازه‌ای پایداری دارند که بتوانند در رینولدز بالاتر که در اینجا ۳۰۰ است، شکل کلی خود را حفظ کنند.



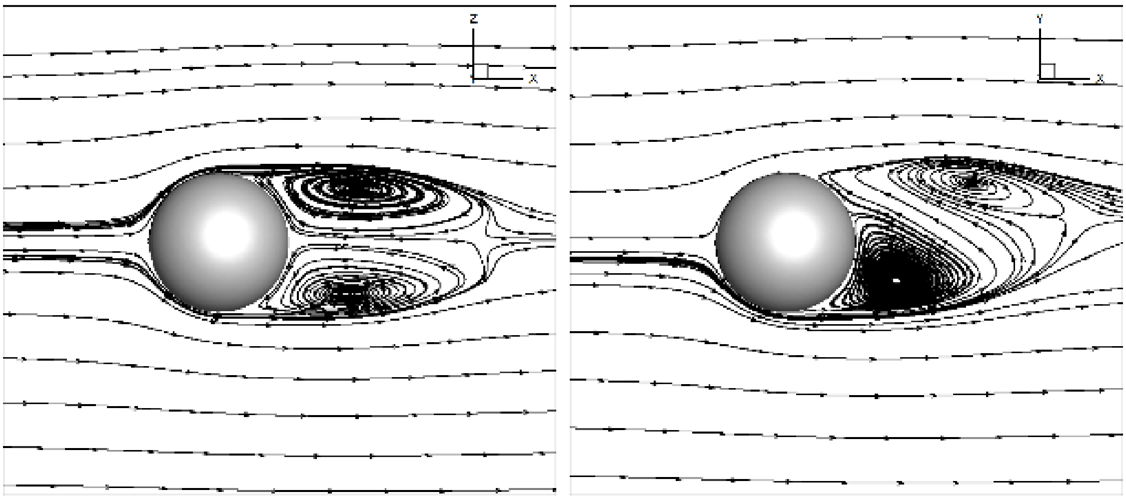
شکل ۴-۱۷: نمایه خطوط جریان در رینولدز ۳۰۰ و زمان 2T/4 در صفحه y-x و z=0.5 و در صفحه z-x و y=0.5

در مرحله بعد گردابه در صفحه z-x، انتها گردابه کمی به سمت بالا متمایل می‌شود و در صفحه y-z گردابه کوچک‌تر، دارای طول و قطر بیشتر شده و باعث می‌شود گردابه پایینی طول کمتری به خود بگیرد. انتهای گردابه بالایی در این صفحه کمی به سمت پایین متمایل شده است.



شکل ۴-۱۸: نمایه خطوط جریان در رینولدز ۳۰۰ و زمان 3T/4 در صفحه y-x و z=0.5 و در صفحه z-x و y=0.5

در انتهای بخش‌های زمانی، گردابه در صفحه z-x ازنظر اندازه شروع به رشد کرده و کم‌کم به حالت اولیه خود نزدیک می‌شود و انتهای گردابه نیز به سمت پایین متمایل شده است. در صفحه y-x نیز گردابه بالا هم به سمت جلو حرکت می‌کند و تا شروع بعدی تناوب این گردابه از بین می‌رود.



شکل ۴-۱۹: نمایه خطوط جریان در رینولدز ۳۰۰ و زمان T در صفحه y-x و z=0.5 و در صفحه z-x و y=0.5

۴-۳-۶- ضریب برا و پسا در جریان غیر پایا

با توجه به نتایج بخش قبل می‌توان به این نتیجه رسید که ضرایب برا و پسا در طول زمان متغیر

باشند و علت آن نیز حرکت گردابه‌ها در جریان است که با اعمال نیرو به کره باعث تغییراتی در نیروهای لزج و نیروهای فشاری در اطراف کره می‌شوند. این گردابه‌ها در طول زمان الگوی ثابتی را دنبال می‌کنند که باعث رفتاری مشابه در نمودار مربوطه به ضرایب برا و پسا در کره می‌گردد.

عدد استروهال با توجه به یکی بودن فرکانس تکرار در هر یک از ضرایب برا و پسا، مقداری یکسان خواهد داشت. باقی متغیرهای تشکیل دهنده عدد استروهال نیز ثابت هستند که شامل سرعت در ورودی و طول مشخصه یا همان قطر کره مورد بررسی است.

برای محاسبه ضریب پسا از رابطه زیر استفاده شده است:

$$C_D = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho {U_\infty}^2 A} \tag{۴-۴}$$

و برای محاسبه ضریب برا نیز از رابطه مشابه بالا استفاده شده که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$C_L = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho {U_\infty}^2 A} \tag{۴-۵}$$

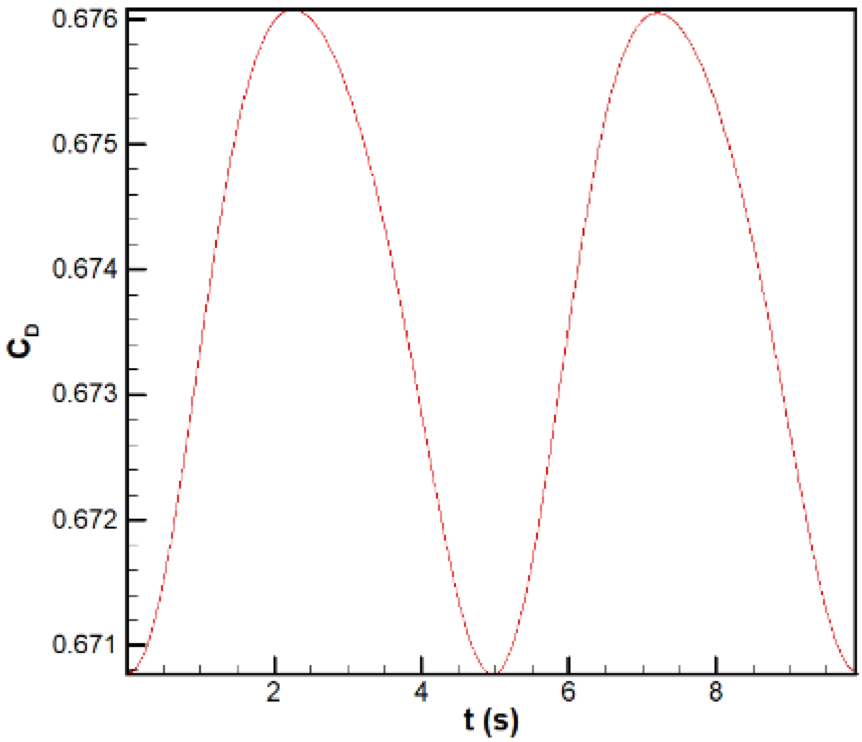
ضریب برا در راستای z نیز با استفاده از نیرو در همان راستا محاسبه می‌شود:

$$C_{Lz} = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho {U_\infty}^2 A} \tag{۴-۶}$$

که در آن‌ها F نیروی وارده در جهت مورد نظر می‌باشد. در این مسئله نیروی پسا در جهت x و نیروی برا در جهت y قرار دارد. ρ چگالی سیال است که در مسئله ما برابر با یک فرض شده است. U_∞ سرعت در دور دست یا همان سرعت ورودی است که در مسئله گذرا برابر با ۰/۳ در مقیاس شبکه بولتزمن فرض شده است و A مساحت تصویر شده در جهت مورد بررسی است که در حالتی که کره باشد برابر با مساحت دایره‌ای به قطر D است که در اینجا برابر ۰/۲ در مقیاس شبکه بولتزمن فرض

شده است.لازم به ذکر مجدد است که این مقادیر در مقیاس شبکه بولتزمن بیان شده است.

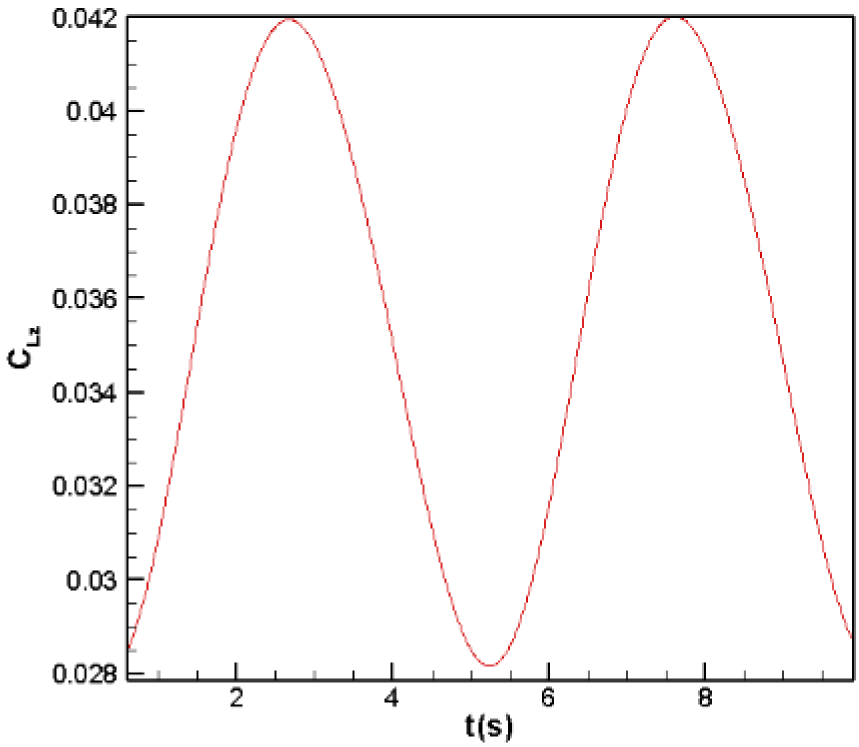
نمودار ضریب پسا برای رینولدز ۳۰۰ و برای زمانی که تناوب گردابه‌ها آغاز شود به صورت زیر است:



شکل ۴-۲۰: ضریب پسا در جریان حول کره برای رینولدز ۳۰۰

در شکل ۴-۲۰ مشاهده می‌شود که ضریب پسا به دلیل وجود گردابه‌های متغیر در جهت x، دارای تغییرات است. هنگامی که گردابه‌ها هر دو شکل کامل خود را دارند به کمترین میزان ممکن می‌رسد بدلیل آن‌که اختلاف فشار در دو طرف کمترین حالت ممکن می‌شود و در نتیجه آن نیرو نیز به کمترین حالت خود می‌رسد. با از بین رفتن گردابه بالایی و کوچک‌تر شدن گردابه پایینی میزان اختلاف فشار دوباره افزایش پیدا کرده و در نتیجه آن میزان نیروی وارده افزایش می‌یابد که باعث افزایش ضریب پسا می‌شود.

مطابق شکل ۴-۲۱، با استفاده از نیروی وارد بر کره در راستای z و با استفاده از رابطه (۴-۶) محاسبه می‌شود.

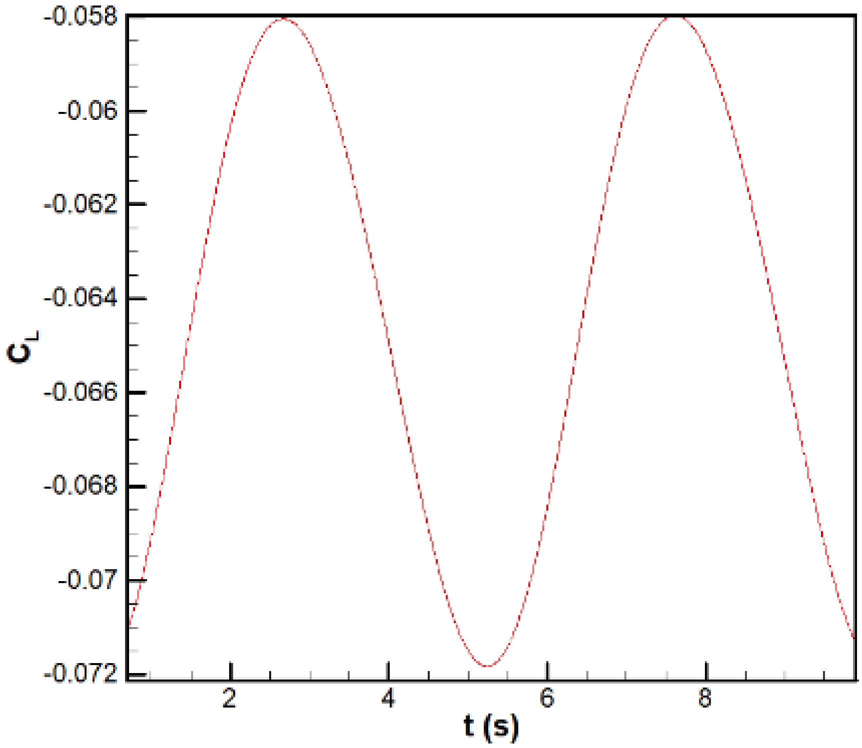


شکل ۴-۲۱: ضریب برا در راستای z جریان حول کره برای رینولدز ۳۰۰

ضریب برا نموداری به صورت شکل ۴-۲۲ خواهد داشت که از نظر رفتار مشابه با نمودار پسا است. میزان تغییرات در ضریب برا در نمودار نشان داده شده بسیار کمتر است زیرا که تغییرات سرعت کمتری در جهت y وجود دارد و از طرفی دیگر اختلاف فشار اندکی توسط گردابه‌ها در این راستا بوجود می‌آید و چون مانند ضریب پسا برخورد شدیدی نسبت به راستای x با کره از این جهت وجود ندارد در نتیجه مقدار آن کمتر است با این حال در این جهت بدلیل تکرار شدن گردابه‌ها، رفتاری تکرار گونه وجود دارد که با بررسی فرکانس آن مشاهده می‌شود که مقداری تقریبا برابر با فرکانس در جهت x دارد.

ضریب برا در راستای z و y از نظر جهت و اندازه تفاوت دارند که علت این امر وجود گردابه‌هاست.

گردابه در راستای y تقارن بیشتری نسبت به محور z دارند که همین امر باعث شده است که مقدار ضریب برا در این راستا نزدیک به صفر باشد. علت منفی بودن این عدد، نامتقارن بودن گردابه‌ها در این صفحه است (گردابه بزرگ‌تر خلاف راستا، نیرو وارد می‌کند) ولی بدلیل کم بودن این عدم تقارن، مقدار آن زیاد نیست. گردابه‌ها در راستای z به طور کامل از حالت تقارن خارج شده‌اند که این موضوع باعث بیشتر بودن ضریب برا در این راستا شده است.



شکل ۴-۲۲: ضریب برا در راستای y جریان حول کره برای رینولدز ۳۰۰

برای محاسبه عدد استروهال ابتدا از دوره تناوب تکرار شدن رفتار سیال استفاده می‌شود که می‌توان هم از طریق شکل گردابه‌ها و هم از طریق ضریب پسا آن را بدست آورد. با استفاده از این ضریب پسا، دوره تناوب ۴/۹۵۲ محاسبه شد که مقداری تقریبا برابر با دوره تناوب در ضریب برا دارد. با استفاده از رابطه تبدیل دوره تناوب به فرکانس عددی برابر با ۰/۲۰۱۹ خواهد داشت و با جایگذاری در رابطه مربوط به عدد استروهال، عددی برابر با ۰/۱۳۴ بدست خواهد آمد که با مقایسه با کارهای مشابه، دقت

خوبی مشاهده می‌شود.

همانطور که مشاهده می‌شود در جدول ۴-۳ عدد استروهال، ضریب پسا و برا میانگین در رینولدز ۳۰۰ با کارهای قبلی انجام شده تقریبا مقداری یکسان شده است.

جدول مقایسه اعداد بدست آمده با کارهای گذشته به صورت ذیل است:

جدول ۴-۳: عدد استروهال، ضریب پسا و برا میانگین در رینولدز ۳۰۰

	عدد استروهال	ضریب پسا میانگین	ضریب برا میانگین
روس و ویلمارف[۸۳]	-	۰/۶۲۹	—
جانسون و پاتل[۸۲]	۰/۱۳۷	۰/۶۵۶	-۰/۰۶۹
کنستانسکیو و اسکیورس[۸۴]	۰/۱۳۶	۰/۶۵۵	-۰/۰۶۵
کیم و چوی[۸۵]	۰/۱۳۴	۰/۶۵۷	-۰/۰۶۷
پلومهانس و وینچلمنس[۸۶]	۰/۱۳۵	۰/۶۸۳	-۰/۰۶۱
مطالعه حاضر	۰/۱۳۴	۰/۶۷۳	-۰/۰۶۴

هر چند در محاسبات ما از مقادیری مشخص برای قطر کره و لزجت یا سرعت ورودی و دیگر موارد مؤثر استفاده شده است ولی با توجه به مقالات نام برده شده و نتایج حاصل از آن‌ها مشاهده می‌شود که آنچه نقش مهم در حل مورد نظر بازی می‌کند عدد رینولدز است و هرچه این مقدار بیشتر باشد مسئله پتانسیل بیشتری برای واگرایی دارد.

طول گردابه[1] مانند دیگر پارامترها مانند طول گردابه بی‌بعد[2] یا عدد استروهال نیست چرا که به قطر کره وابستگی دارد و برای آن که بتوان آن را کارهای پیشین مقایسه کرد باید نسبت به قطر کره بی‌بعد کرد. این مورد برای سرعت‌ها نیز برقرار است به عبارتی چون سرعت صفحه متحرک در مسئله کویتی می‌تواند دلخواه باشد در نتیجه باید سرعت در راستاهای دیگر برای مقایسه نسبت به این سرعت بی‌بعد شوند.

۴-۴- گردابه‌های سه‌بعدی

خطوط جریان در مسئله حول کره در بخش‌های قبلی نشان داده شد و در این بخش گردابه سه‌بعدی در دو رینولدز ۲۵۰ و ۳۰۰ نمایش داده می‌شود.

روش لامبدا۲[3] یک روش برای تشخیص گردابه‌های سه‌بعدی در درون میدان سرعت سیال است. با توجه به اینکه سرعت در سیال برای نمایش در سه‌بعد از سه پارامتر آزاد استفاده می‌کند و در زمان نیز می‌تواند متغیر باشد، تغییرات آن نیز در سه‌بعد قابل محاسبه می‌باشد. در این روش هر نقطه‌ای در ناحیه محاسباتی که بخشی از یک گردابه سه‌بعدی باشد را تشخیص می‌دهد. این گردابه از مجموعه نقاطی با مقداری برابر از حل را شامل می‌شود.

۴-۴-۱- نحوه محاسبه گردابه سه‌بعدی به روش لامبدا۲

این روش از چند بخش کلی تشکیل می‌شود. در مرحله اول از یک تانسور تعریف می‌شود که از تغییرات سرعت تشکیل می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J \equiv \nabla\vec{u} = \begin{bmatrix} \partial_x u_x & \partial_y u_x & \partial_z u_x \\ \partial_x u_y & \partial_y u_y & \partial_z u_y \\ \partial_x u_z & \partial_y u_z & \partial_z u_z \end{bmatrix} \qquad (۴-۷)$$

[1] L

[2] L_s

[3] Lambda2 method

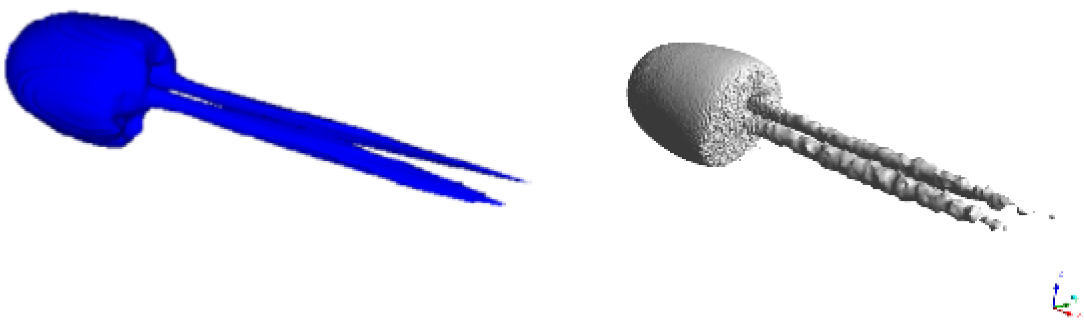
که در این معادله u_x, u_y, u_z، سرعت در هر یک از جهت‌های مثلثاتی است. ∂_x مشتق در جهت x، ∂_y مشتق در جهت y و ∂_z مشتق در جهت z است. در ادامه ماتریس تغییرات سرعت را به دو بخش ماتریس متقارن و ماتریس نامتقارن بخش‌بندی می‌شود. برای این مورد از رابطه‌های زیر استفاده می‌شود.

$$S = \frac{J + J^T}{2} \tag{۴-۸}$$

$$\Omega = \frac{J - J^T}{2} \tag{۴-۹}$$

که در آن T، عملگر ترانهادن است. در مرحله بعدی باید مقادیر ویژه ماتریس $S^2 + \Omega^2$ محاسبه شده و سه مقدار ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ از آن استخراج شود که در آن $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ است. یک نقطه در ناحیه محاسباتی جزو گردابه محسوب می‌شود اگر که حداقل دو عدد از این مقادیر ویژه منفی باشند و اگر λ_2 منفی باشد، به آن روش لامبدا۲ می‌گویند.

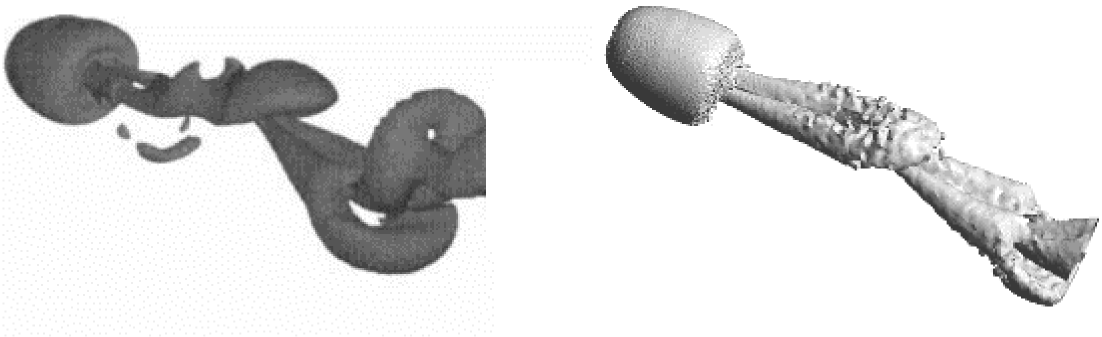
که در ادامه شکل این گردابه‌ها نمایش داده شده است.



مطالعه حاضر　　　　　　　　　　مقاله وو و سو [۵۴]

شکل ۴-۲۳: گردابه سه‌بعدی جریان در رینولدز ۲۵۰

به ازای رینولدز ۲۵۰ سطحی یکنواخت[1] برای گردابه مشاهده می‌شود.با استفاده از مقداری ثابت برای لامبدا می‌تواند این صفحه با مقدار ثابت نمایش داده شود.



مطالعه حاضر　　　　پلمهنس و همکاران [۸۶]

شکل ۴-۲۴: گردابه سه‌بعدی جریان در رینولدز ۳۰۰

در رینولدز ۳۰۰ نیز این گردابه سه‌بعدی قابل نمایش است. به طور مشابه با رینلودز ۲۵۰ بعد از محاسبه مقدار ویژه برای سرعت به صورت محلی و با رسم یک صفحه یکنواخت به ازای آن، گردابه سه‌بعدی مطابق شکل ۴-۲۴ خواهد شد.

---

[1] Iso-surface

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهاد

۵-۱- نتیجه‌گیری

در این مطالعه از روش‌های شبکه بولتزمن و ترکیب این روش با روش مرز غوطه‌ور استفاده شد. با استفاده از روش شبکه بولتزمن در شبیه‌سازی جریان بدون ذره استفاده شد و یک مسئله تک فاز مورد بررسی قرار گرفت.

در مسئله تک فاز جریان درون یک مکعب تو خالی صورت گرفت و نتایج آن به تفصیل بیان شد. در بحث بعدی جریان حول کره ثابت مورد بررسی قرار گفت. به طور خلاصه در زیر به این صورت بیان گردید:

- بررسی جریان درون مکعب خالی با صفحه متحرک در بالا به ازای رینولدز ۱۰۰، ۵۰۰،۱۰۰۰
- خطوط جریان درون سه صفحه در مکعب تو خالی به ازای سه رینولدز
- نمایش نمودار سرعت در خطوط عبوری از مرکز مکعب تو خالی

در مسئله تک فاز در مکعب تو خالی تاثیر میزان تغییر عدد رینولدز و دلیل تغییرات به صورت جزئی‌تر مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که عدد رینولدز چگونه بر شکل خطوط جریان و گردابه‌های آن تاثیرگذار است و این تغییرات خود را در کاهش و یا افزایش سرعت نشان می‌دهد.

در مسئله جریان حاوی ذره یک کره در درون یک کانال مورد بررسی قرار گرفت که برای دو حالت پایا و ناپایا نحوه حرکت جریان، نحوه تشکیل گردابه‌ها و همچنین ضرایب برا و پسا مورد بررسی قرار گرفت که به طور خلاصه می‌توان موارد زیر را می‌توان نام برد:

- بررسی جریان پایا در حول کره برای رینولدز ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۰۰
- بررسی طول گردابه در حالت پایا در رینولدزهای نام برده شده
- خطوط جریان در دو صفحه بررسی شده در رینولدز ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰، ۲۰۰
- ضریب پسا برای جریان پایا در رینولدز ۱۰۰، ۲۰۰

- بررسی جریان ناپایا برای رینولدز ۳۰۰
- بررسی خطوط جریان برای حالت گذارا جریان در رینولدز ۳۰۰
- بررسی ضرایب پسا، برا برای حالت گذرا در رینولدز ۳۰۰
- محاسبه فرکانس، دوره تناوب و عدد استروهال برای رینولدز ۳۰۰

در بخش جریان حاوی کره ثابت برای دو حالت پایا و گذرا مورد بررسی قرار گرفت در بخش پایا آن اثر افزایش رینولدز برای طول گردابه‌ها نشان داده شد و در بخش بعدی آن نمایه خطوط جریان نیز برای این رینولدزها در شکل‌ها بیان شد. تحلیل افزایش طول گردابه‌ها نیز به صورت کلی در این نوشتار بررسی شد که در فصل مربوطه آن بیان گردید.

در بخش گذرا به مطالعه جزئی‌تر جریان در رینولدز ۳۰۰، تغییرات خطوط جریان و ضرایب مورد استفاده سیالاتی پرداخته شد. در بخش خطوط جریان، تغییرات آن در زمان نشان داده شد و در ادامه آن نیز ضرایب برا و پسا محاسبه شد و نحوه ارتباط آن نیز با عدد استروهال بیان گردید و بعد از محاسبه عدد استروهال با کارهای قبلی مورد مقایسه قرار گرفت.

۵-۲- پیشنهاد برای کارهای آینده

به تفصیل به بیان دلایل کاربردی بودن روش ترکیبی مورد استفاده در این نوشتار پرداخته شد. قطعاً برای توسعه این روش و بهبود آن راه‌های بسیاری وجود دارد. ترکیب روش شبکه بولتزمن با روش مرز غوطه‌ور می‌تواند برای تعداد بالایی از ذرات نیز کاربرد خواهد داشت و با ترکیب با روش‌های برخورد می‌توان آن را به سمت بهبود و کاربرد بیشتر سوق داد.

از کارهایی که می‌توان برای ادامه کار بیان شد که می‌توان از موارد زیر نام برد:

- استفاده از روش شبکه بولتزمن با زمان آسایش چندگانه
- استفاده از روش‌های بهبود یافته شبکه بولتزمن مانند TiLBM

- استفاده از روش‌های بهبود روش مرز غوطه‌ور
- استفاده از روش شبکه بولتزمن-مرز غوطه‌ور برای کره در حال حرکت
- استفاده از روش شبکه بولتزمن برای جریان حاوی ذرات
- استفاده از روش شبکه بولتزمن-مرز غوطه‌ور برای جریان حاوی ذرات
- استفاده روش شبکه بولتزمن برای جریان دو فازی
- استفاده در شبیه‌سازی ذرات در حال سقوط روی سطوح تیز [1]

[1] Sharp

۶- مراجع

[1] T. E. Tezduyar, S. Sathe, M. Schwaab, and B. S. Conklin, “Arterial fluid mechanics modeling with the stabilized space – time fluid – structure interaction technique,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 66, no. October 2007, pp. 601–629, 2008.

[2] M. Navidbakhsh and M. Rezazadeh, “An immersed boundary-lattice Boltzmann model for simulation of malaria-infected red blood cell in micro-channel,” *Sci. Iran.*, vol. 19, no. 5, pp. 1329–1336, 2012.

[3] K. Perktold and G. Rappitsch, “Computer simulation of local blood flow and vessel mechanics in a compliant carotid artery bifurcation model,” *J. Biomech.*, vol. 28, no. 7, pp. 845–856, 1995.

[4] K. ichi Tsubota, S. Wada, and T. Yamaguchi, “Particle method for computer simulation of red blood cell motion in blood flow,” *Comput. Methods Programs Biomed.*, vol. 83, no. 2, pp. 139–146, 2006.

[5] M. M. Bhatti, A. Zeeshan, and N. Ijaz, “Slip effects and endoscopy analysis on blood flow of particle-fluid suspension induced by peristaltic wave,” *J. Mol. Liq.*, vol. 218, pp. 240–245, 2016.

[6] A. H. De Boer *et al.*, “A critical evaluation of the relevant parameters for drug redispersion from adhesive mixtures during inhalation,” *Int. J. Pharm.*, vol. 294, no. 1–2, pp. 173–184, 2005.

[7] A. D’Orazio, M. Corcione, and G. P. Celata, “Application to natural convection enclosed flows of a lattice Boltzmann BGK model coupled with a general purpose thermal boundary condition,” *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 43, no. 6, pp. 575–586, 2004.

[8] S. U. S. Choi, Z. G. Zhang, W. Yu, F. E. Lockwood, and E. A. Grulke, “Anomalous thermal conductivity enhancement in nanotube suspensions,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 79, no. 14, pp. 2252–2254, 2001.

[9] S. Chen, Z. Wang, X. Shan, and G. D. Doolen, “Lattice Boltzmann computational fluid dynamics in three dimensions,” *J. Stat. Phys.*, vol. 68, no. 3–4, pp. 379–400,

1992.

[10] Y. H. Qian, D. D’Humières, and P. Lallemand, “Lattice bgk models for navier-stokes equation,” *Epl*, vol. 17, no. 6, pp. 479–484, 1992.

[11] U. Frisch, B. Hasslacher, and Y. Pomeau, “Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, no. 14, pp. 1505–1508, 1986.

[12] S. Wolfram, “Cellular automaton fluids 1: Basic theory,” *J. Stat. Phys.*, vol. 45, no. 3–4, pp. 471–526, 1986.

[13] P. Yuan and L. Schaefer, “A Thermal Lattice Boltzmann Two-Phase Flow Model and Its Application to Heat Transfer Problems—Part 1. Theoretical Foundation,” *J. Fluids Eng.*, vol. 128, no. 1, p. 142, 2006.

[14] G. R. McNamara and G. Zanetti, “Use of the boltzmann equation to simulate lattice-gas automata,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, no. 20, pp. 2332–2335, 1988.

[15] F. J. Higuera, S. Succi, and R. Benzi, “Lattice gas-dynamics with enhanced collisions,” *Eur. Lett.*, vol. 9, no. 4, pp. 345–349, 1989.

[16] S. Succi, D. d’Humieres, Y. H. Qian, and S. A. Orszag, “On the small-scale dynamical behavior of lattice BGK and lattice Boltzmann schemes,” *J. Sci. Comput.*, vol. 8, no. 3, pp. 219–230, 1993.

[17] D. R. Noble, S. Chen, J. G. Georgiadis, and R. O. Buckius, “A consistent hydrodynamic boundary condition for the lattice Boltzmann method,” *Phys. Fluids*, vol. 7, no. 1, pp. 203–209, 1995.

[18] D. W. Grunau, “Lattice methods for modeling hydrodynamics,” Colorado State University, 1993.

[19] P. A. Skordos, “Initial and boundary conditions for the lattice Boltzmann method,” *Phys. Rev. E*, vol. 48, no. 6, p. 4823, 1993.

[20] T. Inamuro, M. Yoshino, and F. Ogino, “A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations,” *Phys. Fluids*, vol. 7, no. 12, pp. 2928–2930, 1995.

[21] R. S. Maier, R. S. Bernard, and D. W. Grunau, “Boundary conditions for the lattice

Boltzmann method," *Phys. Fluids*, vol. 8, no. 7, pp. 1788–1801, 1996.

[22] S. Chen, D. Martínez, and R. Mei, "On boundary conditions in lattice Boltzmann methods," *Phys. Fluids*, vol. 8, no. 9, pp. 2527–2536, 1996.

[23] Q. Zou, S. Hou, and G. D. Doolen, "Analytical solutions of the lattice Boltzmann BGK model," *J. Stat. Phys.*, vol. 81, no. 1–2, pp. 319–334, 1995.

[24] X. He, Q. Zou, L.-S. Luo, and M. Dembo, "Analytic solutions of simple flows and analysis of nonslip boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model," *J. Stat. Phys.*, vol. 87, no. 1–2, pp. 115–136, 1997.

[25] C. S. Peskin, "Flow patterns around heart valves: A numerical method," *J. Comput. Phys.*, vol. 10, no. 2, pp. 252–271, 1972.

[26] D. M. McQueen and C. S. Peskin, "Heart simulation by an immersed boundary method with formal second accuracy and reduced numerical viscosity," in *Mechanics for a New Mellennium*, Elsevier, 2001, pp. 429–444.

[27] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich, "Modeling a no-slip boundary with an external force field," *J. Comput Phys.*, vol. 105, no. 2, pp. 354–366, 1993.

[28] C. S. Peskin, "Numerical analysis of blood flow in the heart," *J. Comput. Phys.*, vol. 25, no. 3, p. 220, 1977.

[29] E. M. Saiki and S. Biringen, "Numerical simulation of a cylinder in uniform flow: application of a virtual boundary method," *J. Comput. Phys.*, vol. 123, no. 2, pp. 450–465, 1996.

[30] Z. G. Feng and E. E. Michaelides, "The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems," *J. Comput. Phys.*, vol. 195, no. 2, pp. 602–628, 2004.

[31] J. Mohd-Yusof, "Combined immersed boundaries/B-spline methods for simulations of flows in complex geometries," *Annu. Res. Briefs*, vol. 317, pp. 317–327, 1997.

[32] E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yusof, "Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow

simulations," *J. Comput. Phys.*, vol. 161, no. 1, pp. 35–60, 2000.

[33] J. Kim, D. Kim, and H. Choi, "An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries," *J. Comput. Phys.*, vol. 171, no. 1, pp. 132–150, 2001.

[34] E. Balaras, "Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large-eddy simulations," *Comput. Fluids*, vol. 33, no. 3, pp. 375–404, 2004.

[35] A. Gilmanov, F. Sotiropoulos, and E. Balaras, "A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3D immersed boundaries on Cartesian grids," *J. Comput. Phys.*, vol. 191, no. 2, pp. 660–669, 2003.

[36] J. Il Choi, R. C. Oberoi, J. R. Edwards, and J. A. Rosati, "An immersed boundary method for complex incompressible flows," *J. Comput. Phys.*, vol. 224, no. 2, pp. 757–784, 2007.

[37] T. Ikeno and T. Kajishima, "Finite-difference immersed boundary method consistent with wall conditions for incompressible turbulent flow simulations," *J. Comput. Phys.*, vol. 226, no. 2, pp. 1485–1508, 2007.

[38] S. Majumdar, G. Iaccarino, and P. Durbin, "RANS solvers with adaptive structured boundary non-conforming grids," *Annu. Res. Briefs, Cent. Turbul. Res. Stanford Univ.*, pp. 353–466, 2001.

[39] R. Ghias, R. Mittal, and H. Dong, "A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows," *J. Comput. Phys.*, vol. 225, no. 1, pp. 528–553, 2007.

[40] W. Zuo, "IBM-LBM Modelling of Two-Phase Flow in Porous Media," pp. 1–126, 2015.

[41] M.-C. Lai and C. S. Peskin, "An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity," *J. Comput. Phys.*, vol. 160, no. 2, pp. 705–719, 2000.

[42] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich, "Modeling a no-slip flow boundary with

an external force field," *J. Comput. Phys.*, vol. 105, no. 2, pp. 354–366, 1993.

[43] S. Kang, "Immersed boundary methods in the lattice boltzmann equation for flow simulation," no. December. Texas A & M University, p. 186, 2010.

[44] A. Gilmanov, F. Sotiropoulos, and E. Balaras, "Short Note A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3D immersed boundaries on Cartesian grids," vol. 191, pp. 660–669, 2003.

[45] T. W. H. Sheu, H. F. Ting, and R. K. Lin, "An immersed boundary method for the incompressible Navier-Stokes equations in complex geometry," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 56, no. 7, pp. 877–898, 2008.

[46] A. L. F. L. E. Silva, A. Silveira-Neto, and J. J. R. Damasceno, "Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method," *J. Comput. Phys.*, vol. 189, no. 2, pp. 351–370, 2003.

[47] M. Uhlmann, "An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows," *J. Comput. Phys.*, vol. 209, no. 2, pp. 448–476, 2005.

[48] S. W. Su, M. C. Lai, and C. A. Lin, "An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary," *Comput. Fluids*, vol. 36, no. 2, pp. 313–324, 2007.

[49] D. V Le, B. C. Khoo, and K. M. Lim, "An implicit-forcing immersed boundary method for simulating viscous flows in irregular domains," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 197, no. 25–28, pp. 2119–2130, 2008.

[50] K. Luo, Z. Wang, J. Fan, and K. Cen, "Full-scale solutions to particle-laden flows: Multidirect forcing and immersed boundary method," *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.*, vol. 76, no. 6, p. 66709, 2007.

[51] Z. Wang, J. Fan, and K. Luo, "Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles," *Int. J. Multiph. Flow*, vol. 34, no. 3, pp. 283–302, 2008.

[52] S. K. Kang and Y. A. Hassan, "Immersed boundary methods in the lattice

Boltzmann equation for flow simulation," vol. 3446733, no. December, p. 205, 2010.

[53] S. Karimnejad, A. Amiri Delouei, M. Nazari, M. M. Shahmardan, and A. A. Mohamad, "Sedimentation of elliptical particles using Immersed Boundary – Lattice Boltzmann Method: A complementary repulsive force model," *J. Mol. Liq.*, vol. 262, pp. 180–193, 2018.

[54] J. Wu and C. Shu, "An improved immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating three-dimensional incompressible flows," *J. Comput. Phys.*, vol. 229, no. 13, pp. 5022–5042, 2010.

[55] Q. Wei, Y.-Q. Xu, F. Tian, T. Gao, X. Tang, and W.-H. Zu, "IB-LBM simulation on blood cell sorting with a micro-fence structure," *Biomed. Mater. Eng.*, vol. 24, no. 1, pp. 475–481, 2014.

[56] J. Wu and C. Shu, "Implicit Velocity Correction-Based Immersed Boundary Lattice-Boltzmann Method and its Applications," *J. Comput. Phys.*, vol. 228, no. 6, pp. 1963–1979, 2009.

[57] Z. G. Feng and E. E. Michaelides, "Proteus: A direct forcing method in the simulations of particulate flows," *J. Comput. Phys.*, vol. 202, no. 1, pp. 20–51, 2005.

[58] X. D. Niu, C. Shu, Y. T. Chew, and Y. Peng, "A Momentum Exchange Based Immersed Boundary Lattice Boltzmann Method for Simulating Incompressible Viscous Flows," *Phys Lett A*, vol. 354, no. 3, pp. 173–182, 2006.

[59] A. Dupuis, P. Chatelain, and P. Koumoutsakos, "An immersed boundary–lattice-Boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder," *J. Comput. Phys.*, vol. 227, no. 9, pp. 4486–4498, 2008.

[60] T. E. Tezduyar, S. Sathe, M. Schwaab, and B. S. Conklin, "Arterial fluid mechanics modeling with the stabilized space – time fluid – structure interaction technique," *Int. J. Numer. Methods Fluids*, no. October 2007, pp. 601–629, 2008.

[61] D. Jamshideasli, A. Abbassi, and J. Ghazanfarian, "Thermal Lattice Boltzmann Method for Curved Boundaries in the Transition Regime," *Amirkabir Mech. Eng.*

J., no. 2, pp. 12–15, 2016.

[62] Z. Hashemi, O. Abouali, and R. Kamali, “Three dimensional thermal Lattice Boltzmann simulation of heating/cooling spheres falling in a Newtonian liquid,” *Int. J. Therm. Sci.*, vol. 82, no. 1, pp. 23–33, 2014.

[63] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook, “A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems,” *Phys. Rev.*, vol. 94, no. 3, pp. 511–525, 1954.

[64] D. Chen, K. Lin, and C. Lin, “I m m e r s e d b o u n d a r y m e t h o d b a s e d lattice boltzmann m e t h o d to simulate 2d a n d 3d complex geometry flows,” vol. 18, no. 4, pp. 585–594, 2007.

[65] L. Zhu, D. Tretheway, L. Petzold, and C. Meinhart, “Simulation of fluid slip at 3D hydrophobic microchannel walls by the lattice Boltzmann method,” *J. Comput. Phys.*, vol. 202, no. 1, pp. 181–195, 2005.

[66] C. H. Liu, K. H. Lin, H. C. Mai, and C. A. Lin, “Thermal boundary conditions for thermal lattice Boltzmann simulations,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 59, no. 7, pp. 2178–2193, 2010.

[67] R. W. Nash *et al.*, “Choice of boundary condition for lattice-Boltzmann simulation of moderate-Reynolds-number flow in complex domains,” *Phys. Rev. E - Stat. Nonlinear, Soft Matter Phys.*, vol. 89, no. 2, pp. 1–13, 2014.

[68] Y. Peng, C. Shu, and Y. T. Chew, “A 3D incompressible thermal lattice Boltzmann model and its application to simulate natural convection in a cubic cavity,” *J. Comput. Phys.*, vol. 193, no. 1, pp. 260–274, 2004.

[69] D. Kandhai, A. Koponen, A. Hoekstra, M. Kataja, J. Timonen, and P. M. A. Sloot, “Implementation aspects of 3D lattice-BGK: boundaries, accuracy, and a new fast relaxation method,” *J. Comput. Phys.*, vol. 150, no. 2, pp. 482–501, 1999.

[70] Z. Guo, C. Zheng, and B. Shi, “Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method,” *Phys. Rev. E*, vol. 65, no. 4, p. 46308, 2002.

[71] A. A. Mohamad, *Lattice Boltzmann method: fundamentals and engineering*

applications with computer codes. Springer Science & Business Media, 2011.

[72] Y. B. Bao and J. Meskas, “Lattice Boltzmann method for fluid simulations,” *Dep. Math. Courant Inst. Math. Sci. New York Univ.*, 2011.

[73] C. Chang, C. H. Liu, and C. A. Lin, “Boundary conditions for lattice Boltzmann simulations with complex geometry flows,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 58, no. 5, pp. 940–949, 2009.

[74] C. Ho, C. Chang, K. Lin, and C. Lin, “Consistent Boundary Conditions for 2D and 3D Lattice Boltzmann Simulations,” vol. 44, no. 2, pp. 137–155, 2009.

[75] Q. Zou and X. He, “On pressure and velocity flow boundary conditions and bounceback for the lattice Boltzmann BGK model,” *Phys. Fluids*, vol. 9, no. 6, pp. 1591–1598, 1996.

[76] “https://developer.nvidia.com/gpugems/GPUGems2/gpugems2_chapter47.html.” .

[77] A. Dupuis, P. Chatelain, and P. Koumoutsakos, “An immersed boundary-lattice-Boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder,” *J. Comput. Phys.*, vol. 227, no. 9, pp. 4486–4498, 2008.

[78] L.-S. Luo, “Theory of the lattice Boltzmann method: Lattice Boltzmann models for nonideal gases,” *Phys. Rev. E*, vol. 62, no. 4, p. 4982, 2000.

[79] Y. Cheng and J. Li, “Introducing unsteady non-uniform source terms into the lattice Boltzmann model,” *Int. J. Numer. methods fluids*, vol. 56, no. 6, pp. 629–641, 2008.

[80] Y. Sui, Y. Chew, P. Roy, and H. Low, “A hybrid immersed-boundary and multi-block lattice Boltzmann method for simulating fluid and moving-boundaries interactions,” *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 53, no. 11, pp. 1727–1754, 2007.

[81] C. S. Peskin, “The immersed boundary method,” *Acta Numer.*, vol. 11, pp. 479–517, 2002.

[82] T. A. Johnson and V. C. Patel, *Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300*, vol. 378, no. September 2000. 1999.

[83] F. W. Roos and W. W. Willmarth, “Some experimental results on sphere and disk drag,” *AIAA J.*, vol. 9, no. 2, pp. 285–291, 1971.

[84] G. Constantinescu and K. Squires, “LES and DES investigations of turbulent flow over a sphere,” in *38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 1999, p. 540.

[85] D. Kim and H. Choi, “Laminar flow past a sphere rotating in the streamwise direction,” *J. Fluid Mech.*, vol. 461, pp. 365–386, 2002.

[86] P. Ploumhans, G. S. Winckelmans, J. K. Salmon, A. Leonard, and M. S. Warren, “Vortex methods for direct numerical simulation of three-dimensional bluff body flows: Application to the sphere at Re = 300, 500, and 1000,” *J. Comput. Phys.*, vol. 178, no. 2, pp. 427–463, 2002.

۷- پیوست الف

پیوست الف

در فصل دوم و بیان روش شبکه بولتزمن، شرایط مرزی مورد استفاده و روش استخراج آن بیان شد. در این پیوست نتایج نهایی مورد استفاده در این روش برای باقی صفحات می‌گردد. در ادامه شرایط مرزی استفاده شده با جایگذاری $f(x, -e_\alpha, t)$ به‌جای f^* بر اساس شکل ۴-۱ به صورت زیر بیان می‌شود.

۷-۱- بخش بالایی صفحه Z-X در شکل ۴-۱

$$\rho = \frac{1}{1+0}[f_0 + f_1 + f_2 + f_5 + f_6 + 2(f_3 + f_7 + f_9 + f_{12} + f_{14})] \quad (۱-۷)$$

$$f_4 = f_3 \quad (۲-۷)$$

$$f_8 = f_7 - \frac{1}{4}\rho u + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۳-۷)$$

$$f_{10} = f_9 - \frac{1}{4}\rho u + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۴-۷)$$

$$f_{11} = f_{12} + \frac{1}{4}\rho u - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۵-۷)$$

$$f_{13} = f_{14} + \frac{1}{4}\rho u - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۶-۷)$$

۷-۲- بخش پایینی صفحه Z-X در شکل ۴-۱

$$\rho = \frac{1}{1+0}[f_0 + f_1 + f_2 + f_5 + f_6 + 2(f_4 + f_8 + f_{10} + f_{11} + f_{13})] \quad (۷-۷)$$

$$f_3 = f_4 \quad (۸-۷)$$

$$f_7 = f_8 - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۹\text{-}۷)$$

$$f_9 = f_{10} - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۱۰\text{-}۷)$$

$$f_{12} = f_{11} + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۱۱\text{-}۷)$$

$$f_{14} = f_{13} + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۱۲\text{-}۷)$$

۷-۳- بخش چپی در صفحه Z-Y در شکل ۴-۱

$$\rho = \frac{1}{1+0}[f_0 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + 2(f_2 + f_8 + f_{10} + f_{12} + f_{14})] \quad (۱۳\text{-}۷)$$

$$f_1 = f_2 \quad (۱۴\text{-}۷)$$

$$f_7 = f_8 - \frac{1}{4}(f_3 - f_4) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۱۵\text{-}۷)$$

$$f_9 = f_{10} - \frac{1}{4}(f_3 - f_4) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۱۶\text{-}۷)$$

$$f_{11} = f_{12} + \frac{1}{4}(f_3 - f_4) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۱۷\text{-}۷)$$

$$f_{13} = f_{14} + \frac{1}{4}(f_3 - f_4) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۱۸\text{-}۷)$$

۷-۴- بخش راستی در صفحه Z-Y در شکل ۴-۱

$$\rho = \frac{1}{1+0}[f_0 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + 2(f_1 + f_7 + f_9 + f_{11} + f_{13})] \quad (۱۹\text{-}۷)$$

$$f_2 = f_1 \quad (۲۰\text{-}۷)$$

$$f_8 = f_7 + \frac{1}{4}(f_3 - f_4) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۲۱\text{-}۷)$$

$$f_{10} = f_9 + \frac{1}{4}(f_3 - f_4) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۲۲\text{-}۷)$$

$$f_{12} = f_{11} - \frac{1}{4}(f_3 - f_4) + \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۲۳\text{-}۷)$$

$$f_{14} = f_{13} - \frac{1}{4}(f_3 - f_4) - \frac{1}{4}(f_5 - f_6) \quad (۲۴\text{-}۷)$$

۷-۵- بخش بیرونی (به سمت خارج صفحه) صفحه Y-X در شکل ۴-۱

$$\rho = \frac{1}{1+0}[f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + 2\left(f_6 + f_8 + f_9 + f_{12} + f_{13}\right)] \quad (۲۵\text{-}۷)$$

$$f_5 = f_6 \quad (۲۶\text{-}۷)$$

$$f_7 = f_8 - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_3 - f_4) \quad (۲۷\text{-}۷)$$

$$f_{10} = f_9 + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_3 - f_4) \quad (۲۸\text{-}۷)$$

$$f_{11} = f_{12} - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_3 - f_4) \quad (۲۹\text{-}۷)$$

$$f_{14} = f_{13} + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_3 - f_4) \quad (۳۰\text{-}۷)$$

۷-۶- بخش درونی (به سمت درون صفحه) صفحه Y-X در شکل ۴-۱

$$\rho = \frac{1}{1+0}[f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + 2\left(f_5 + f_7 + f_{10} + f_{11} + f_{14}\right)] \quad (۳۱\text{-}۷)$$

$$f_6 = f_5 \quad (۳۲\text{-}۷)$$

$$f_8 = f_7 + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_3 - f_4) \qquad (۷-۳۳)$$

$$f_9 = f_{10} - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_3 - f_4) \qquad (۷-۳۴)$$

$$f_{12} = f_{11} + \frac{1}{4}(f_1 - f_2) - \frac{1}{4}(f_3 - f_4) \qquad (۷-۳۵)$$

$$f_{13} = f_{14} - \frac{1}{4}(f_1 - f_2) + \frac{1}{4}(f_3 - f_4) \qquad (۷-۳۶)$$

در ادامه i,j,k به ترتیب بردار یکه و m,n,p به ترتیب انتهای خطوط در راستای X,Y,Z هستند. تمامی خطوط و صفحات از یک آغاز شده‌اند.

۷-۷- خطوط در جهت X

۷-۷-۱- خط $(\boldsymbol{i,m,1})$

$$f_{4(i,m,1)} = f_{3(i,m,1)} \qquad (۷-۳۷)$$

$$f_{5(i,m,1)} = f_{6(i,m,1)} \qquad (۷-۳۸)$$

$$f_{10(i,m,1)} = f_{9(i,m,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,m,1)} - f_{2(i,m,1)}\right) \qquad (۷-۳۹)$$

$$f_{11(i,m,1)} = f_{12(i,m,1)} - \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,m,1)} - f_{2(i,m,1)}\right) \qquad (۷-۴۰)$$

$$f_{8(i,m,1)} = f_{7(i,m,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,m,1)} - f_{2(i,m,1)}\right) \qquad (۷-۴۱)$$

$$f_{14(i,m,1)} = f_{13(i,m,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,m,1)} - f_{2(i,m,1)}\right) \qquad (۷-۴۲)$$

۷-۷-۲- خط $(\boldsymbol{i,m,p})$

$$f_{4(i,m,p)} = f_{3(i,m,p)} \qquad (۷-۴۳)$$

$$f_{6(i,m,p)} = f_{5(i,m,p)} \quad (۴۴\text{-}۷)$$

$$f_{8(i,m,p)} = f_{7(i,m,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,m,p)} - f_{2(i,m,p)}\right) \quad (۴۵\text{-}۷)$$

$$f_{13(i,m,p)} = f_{14(i,m,p)} - \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,m,p)} - f_{2(i,m,p)}\right) \quad (۴۶\text{-}۷)$$

$$f_{10(i,m,p)} = f_{9(i,m,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,m,p)} - f_{2(i,m,p)}\right) \quad (۴۷\text{-}۷)$$

$$f_{12(i,m,p)} = f_{11(i,m,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,m,p)} - f_{2(i,m,p)}\right) \quad (۴۸\text{-}۷)$$

۷-۷-۳- خط $(\boldsymbol{i}, \mathbf{1}, \boldsymbol{p})$

$$f_{3(i,1,p)} = f_{4(i,1,p)} \quad (۴۹\text{-}۷)$$

$$f_{6(i,1,p)} = f_{5(i,1,p)} \quad (۵۰\text{-}۷)$$

$$f_{9(i,1,p)} = f_{10(i,1,p)} - \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,1,p)} - f_{2(i,1,p)}\right) \quad (۵۱\text{-}۷)$$

$$f_{12(i,1,p)} = f_{11(i,1,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,1,p)} - f_{2(i,1,p)}\right) \quad (۵۲\text{-}۷)$$

$$f_{8(i,1,p)} = f_{7(i,1,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,1,p)} - f_{2(i,1,p)}\right) \quad (۵۳\text{-}۷)$$

$$f_{14(i,1,p)} = f_{13(i,1,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,1,p)} - f_{2(i,1,p)}\right) \quad (۵۴\text{-}۷)$$

۷-۷-۴- خط $(\boldsymbol{i}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

$$f_{3(i,1,1)} = f_{4(i,1,1)} \quad (۵۵\text{-}۷)$$

$$f_{5(i,1,1)} = f_{6(i,1,1)} \quad (۵۶\text{-}۷)$$

$$f_{7(i,1,1)} = f_{8(i,1,1)} - \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,1,1)} - f_{2(i,1,1)}\right) \tag{۵۷-۷}$$

$$f_{14(i,1,1)} = f_{13(i,1,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,1,1)} - f_{2(i,1,1)}\right) \tag{۵۸-۷}$$

$$f_{10(i,1,1)} = f_{9(i,1,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,1,1)} - f_{2(i,1,1)}\right) \tag{۵۹-۷}$$

$$f_{12(i,1,1)} = f_{11(i,1,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{1(i,1,1)} - f_{2(i,1,1)}\right) \tag{۶۰-۷}$$

۷-۸- خطوط در جهت Y

۷-۸-۱- خط $(\mathbf{1}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{p})$

$$f_{1(1,j,p)} = f_{2(1,j,p)} \tag{۶۱-۷}$$

$$f_{6(1,j,p)} = f_{5(1,j,p)} \tag{۶۲-۷}$$

$$f_{9(1,j,p)} = f_{10(1,j,p)} - \frac{1}{4} * \left(f_{3(1,j,p)} - f_{4(1,j,p)}\right) \tag{۶۳-۷}$$

$$f_{13(1,j,p)} = f_{14(1,j,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{3(1,j,p)} - f_{4(1,j,p)}\right) \tag{۶۴-۷}$$

$$f_{8(1,j,p)} = f_{7(1,j,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{3(1,j,p)} - f_{4(1,j,p)}\right) \tag{۶۵-۷}$$

$$f_{12(1,j,p)} = f_{11(1,j,p)} - \frac{1}{4} * \left(f_{3(1,j,p)} - f_{4(1,j,p)}\right) \tag{۶۶-۷}$$

۷-۸-۲- خط $(\mathbf{1}, \boldsymbol{j}, \mathbf{1})$

$$f_{1(1,j,1)} = f_{2(1,j,1)} \tag{۶۷-۷}$$

$$f_{5(1,j,1)} = f_{6(1,j,1)} \tag{۶۸-۷}$$

$$f_{7(1,j,1)} = f_{8(1,j,1)} - \frac{1}{4} * \left(f_{3(1,j,1)} - f_{4(1,j,1)}\right) \quad (۶۹\text{-}۷)$$

$$f_{11(1,j,1)} = f_{12(1,j,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{3(1,j,1)} - f_{4(1,j,1)}\right) \quad (۷۰\text{-}۷)$$

$$f_{10(1,j,1)} = f_{9(1,j,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{3(1,j,1)} - f_{4(1,j,1)}\right) \quad (۷۱\text{-}۷)$$

$$f_{14(1,j,1)} = f_{13(1,j,1)} - \frac{1}{4} * \left(f_{3(1,j,1)} - f_{4(1,j,1)}\right) \quad (۷۲\text{-}۷)$$

۷-۸-۳- خط $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}, \mathbf{1})$

$$f_{2(n,j,1)} = f_{1(n,j,1)} \quad (۷۳\text{-}۷)$$

$$f_{5(n,j,1)} = f_{6(n,j,1)} \quad (۷۴\text{-}۷)$$

$$f_{10(n,j,1)} = f_{9(n,j,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{3(n,j,1)} - f_{4(n,j,1)}\right) \quad (۷۵\text{-}۷)$$

$$f_{14(n,j,1)} = f_{13(n,j,1)} - \frac{1}{4} * \left(f_{3(n,j,1)} - f_{4(n,j,1)}\right) \quad (۷۶\text{-}۷)$$

$$f_{8(n,j,1)} = f_{7(n,j,1)} + \frac{1}{4} * \left(f_{3(n,j,1)} - f_{4(n,j,1)}\right) \quad (۷۷\text{-}۷)$$

$$f_{12(n,j,1)} = f_{11(n,j,1)} - \frac{1}{4} * \left(f_{3(n,j,1)} - f_{4(n,j,1)}\right) \quad (۷۸\text{-}۷)$$

۷-۸-۴- خط $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{p})$

$$f_{2(n,j,p)} = f_{1(n,j,p)} \quad (۷۹\text{-}۷)$$

$$f_{6(n,j,p)} = f_{5(n,j,p)} \quad (۸۰\text{-}۷)$$

$$f_{8(n,j,p)} = f_{7(n,j,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{3(n,j,p)} - f_{4(n,j,p)}\right) \quad (۸۱\text{-}۷)$$

$$f_{12(n,j,p)} = f_{11(n,j,p)} - \frac{1}{4} * \left(f_{3(n,j,p)} - f_{4(n,j,p)}\right) \quad (۸۲\text{-}۷)$$

$$f_{10(n,j,p)} = f_{9(n,j,p)} + \frac{1}{4} * \left(f_{3(n,j,p)} - f_{4(n,j,p)}\right) \quad (۸۳\text{-}۷)$$

$$f_{14(n,j,p)} = f_{13(n,j,p)} - \frac{1}{4} * \left(f_{3(n,j,p)} - f_{4(n,j,p)}\right) \quad (۸۴\text{-}۷)$$

۷-۹- خطوط در جهت Z

۷-۹-۱- خط $(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{k})$

$$f_{1(1,1,k)} = f_{2(1,1,k)} \quad (۸۵\text{-}۷)$$

$$f_{3(1,1,k)} = f_{4(1,1,k)} \quad (۸۶\text{-}۷)$$

$$f_{7(1,1,k)} = f_{8(1,1,k)} - \frac{1}{4} * \left(f_{5(1,1,k)} - f_{6(1,1,k)}\right) \quad (۸۷\text{-}۷)$$

$$f_{9(1,1,k)} = f_{10(1,1,k)} + \frac{1}{4} * \left(f_{5(1,1,k)} - f_{6(1,1,k)}\right) \quad (۸۸\text{-}۷)$$

$$f_{12(1,1,k)} = f_{11(1,1,k)} + \frac{1}{4} * \left(f_{5(1,1,k)} - f_{6(1,1,k)}\right) \quad (۸۹\text{-}۷)$$

$$f_{14(1,1,k)} = f_{13(1,1,k)} - \frac{1}{4} * \left(f_{5(1,1,k)} - f_{6(1,1,k)}\right) \quad (۹۰\text{-}۷)$$

۷-۹-۲- خط $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{k})$

$$f_{2(n,1,k)} = f_{1(n,1,k)} \quad (۹۱\text{-}۷)$$

$$f_{3(n,1,k)} = f_{4(n,1,k)} \quad (۹۲\text{-}۷)$$

$$f_{12(n,1,k)} = f_{11(n,1,k)} + \frac{1}{4} * \left(f_{5(n,1,k)} - f_{6(n,1,k)}\right) \quad (۹۳\text{-}۷)$$

$$f_{14(n,1,k)} = f_{13(n,1,k)} - \frac{1}{4} * \left(f_{5(n,1,k)} - f_{6(n,1,k)}\right) \quad (۹۴\text{-}۷)$$

$$f_{8(n,1,k)} = f_{7(n,1,k)} + \frac{1}{4} * \left(f_{5(n,1,k)} - f_{6(n,1,k)}\right) \quad (۹۵\text{-}۷)$$

$$f_{10(n,1,k)} = f_{9(n,1,k)} - \frac{1}{4} * \left(f_{5(n,1,k)} - f_{6(n,1,k)}\right) \quad (۹۶\text{-}۷)$$

۷-۹-۳- خط $(\mathbf{1}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k})$

$$f_{1(1,m,k)} = f_{2(1,m,k)} \quad (۹۷\text{-}۷)$$

$$f_{4(1,m,k)} = f_{3(1,m,k)} \quad (۹۸\text{-}۷)$$

$$f_{11(1,m,k)} = f_{12(1,m,k)} - \frac{1}{4} * \left(f_{5(1,m,k)} - f_{6(1,m,k)}\right) \quad (۹۹\text{-}۷)$$

$$f_{13(1,m,k)} = f_{14(1,m,k)} + \frac{1}{4} * \left(f_{5(1,m,k)} - f_{6(1,m,k)}\right) \quad (۱۰۰\text{-}۷)$$

$$f_{8(1,m,k)} = f_{7(1,m,k)} + \frac{1}{4} * \left(f_{5(1,m,k)} - f_{6(1,m,k)}\right) \quad (۱۰۱\text{-}۷)$$

$$f_{10(1,m,k)} = f_{9(1,m,k)} - \frac{1}{4} * \left(f_{5(1,m,k)} - f_{6(1,m,k)}\right) \quad (۱۰۲\text{-}۷)$$

۷-۹-۴- خط $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{k})$

$$f_{2(n,m,k)} = f_{1(n,m,k)} \quad (۱۰۳\text{-}۷)$$

$$f_{4(n,m,k)} = f_{3(n,m,k)} \quad (۱۰۴\text{-}۷)$$

$$f_{8(n,m,k)} = f_{7(n,m,k)} + \frac{1}{4} * \left(f_{5(n,m,k)} - f_{6(n,m,k)}\right) \quad (۱۰۵\text{-}۷)$$

$$f_{10(n,m,k)} = f_{9(n,m,k)} - \frac{1}{4} * \left(f_{5(n,m,k)} - f_{6(n,m,k)}\right) \quad (۱۰۶\text{-}۷)$$

$$f_{12(n,m,k)} = f_{11(n,m,k)} + \frac{1}{4} * \left(f_{5(n,m,k)} - f_{6(n,m,k)}\right)$$ (۷-۱۰۷)

$$f_{14(n,m,k)} = f_{13(n,m,k)} - \frac{1}{4} * \left(f_{5(n,m,k)} - f_{6(n,m,k)}\right)$$ (۷-۱۰۸)

۷-۱۰- نقاط گوشه

$$f_{1(1,m,p)} = f_{2(1,m,p)}$$ (۷-۱۰۹)

$$f_{4(1,m,p)} = f_{3(1,m,p)}$$ (۷-۱۱۰)

$$f_{6(1,m,p)} = f_{5(1,m,p)}$$ (۷-۱۱۱)

$$f_{13(1,m,p)} = f_{14(1,m,p)}$$ (۷-۱۱۲)

$$f_{8(1,m,p)} = f_{7(1,m,p)}$$ (۷-۱۱۳)

$$f_{10(1,m,p)} = f_{9(1,m,p)}$$ (۷-۱۱۴)

$$f_{1(1,m,1)} = f_{2(1,m,1)}$$ (۷-۱۱۵)

$$f_{4(1,m,1)} = f_{3(1,m,1)}$$ (۷-۱۱۶)

$$f_{5(1,m,1)} = f_{6(1,m,1)}$$ (۷-۱۱۷)

$$f_{11(1,m,1)} = f_{12(1,m,1)}$$ (۷-۱۱۸)

$$f_{8(1,m,1)} = f_{7(1,m,1)}$$ (۷-۱۱۹)

$$f_{10(1,m,1)} = f_{9(1,m,1)}$$ (۷-۱۲۰)

$$f_{14(1,m,1)} = f_{13(1,m,1)}$$ (۱۲۱-۷)

$$f_{1(1,1,1)} = f_{2(1,1,1)}$$ (۱۲۲-۷)

$$f_{3(1,1,1)} = f_{4(1,1,1)}$$ (۱۲۳-۷)

$$f_{5(1,1,1)} = f_{6(1,1,1)}$$ (۱۲۴-۷)

$$f_{7(1,1,1)} = f_{8(1,1,1)}$$ (۱۲۵-۷)

$$f_{10(1,1,1)} = f_{9(1,1,1)}$$ (۱۲۶-۷)

$$f_{12(1,1,1)} = f_{11(1,1,1)}$$ (۱۲۷-۷)

$$f_{14(1,1,1)} = f_{13(1,1,1)}$$ (۱۲۸-۷)

$$f_{1(1,1,p)} = f_{2(1,1,p)}$$ (۱۲۹-۷)

$$f_{3(1,1,p)} = f_{4(1,1,p)}$$ (۱۳۰-۷)

$$f_{6(1,1,p)} = f_{5(1,1,p)}$$ (۱۳۱-۷)

$$f_{9(1,1,p)} = f_{10(1,1,p)}$$ (۱۳۲-۷)

$$f_{8(1,1,p)} = f_{7(1,1,p)}$$ (۱۳۳-۷)

$$f_{12(1,1,p)} = f_{11(1,1,p)}$$ (۱۳۴-۷)

$$f_{14(1,1,p)} = f_{13(1,1,p)} \quad (۱۳۵\text{-}۷)$$

$$f_{2(n,m,p)} = f_{1(n,m,p)} \quad (۱۳۶\text{-}۷)$$

$$f_{4(n,m,p)} = f_{3(n,m,p)} \quad (۱۳۷\text{-}۷)$$

$$f_{6(n,m,p)} = f_{5(n,m,p)} \quad (۱۳۸\text{-}۷)$$

$$f_{8(n,m,p)} = f_{7(n,m,p)} \quad (۱۳۹\text{-}۷)$$

$$f_{10(n,m,p)} = f_{9(n,m,p)} \quad (۱۴۰\text{-}۷)$$

$$f_{12(n,m,p)} = f_{11(n,m,p)} \quad (۱۴۱\text{-}۷)$$

$$f_{14(n,m,p)} = f_{13(n,m,p)} \quad (۱۴۲\text{-}۷)$$

$$f_{2(n,m,1)} = f_{1(n,m,1)} \quad (۱۴۳\text{-}۷)$$

$$f_{4(n,m,1)} = f_{3(n,m,1)} \quad (۱۴۴\text{-}۷)$$

$$f_{5(n,m,1)} = f_{6(n,m,1)} \quad (۱۴۵\text{-}۷)$$

$$f_{10(n,m,1)} = f_{9(n,m,1)} \quad (۱۴۶\text{-}۷)$$

$$f_{8(n,m,1)} = f_{7(n,m,1)} \quad (۱۴۷\text{-}۷)$$

$$f_{12(n,m,1)} = f_{11(n,m,1)} \quad (۱۴۸\text{-}۷)$$

$$f_{14(n,m,1)} = f_{13(n,m,1)} \quad (۱۴۹\text{-}۷)$$

$$f_{2(n,1,1)} = f_{1(n,1,1)} \quad (۱۵۰\text{-}۷)$$

$$f_{3(n,1,1)} = f_{4(n,1,1)} \quad (۱۵۱\text{-}۷)$$

$$f_{5(n,1,1)} = f_{6(n,1,1)} \quad (۱۵۲\text{-}۷)$$

$$f_{14(n,1,1)} = f_{13(n,1,1)} \quad (۱۵۳\text{-}۷)$$

$$f_{8(n,1,1)} = f_{7(n,1,1)} \quad (۱۵۴\text{-}۷)$$

$$f_{10(n,1,1)} = f_{9(n,1,1)} \quad (۱۵۵\text{-}۷)$$

$$f_{12(n,1,1)} = f_{11(n,1,1)} \quad (۱۵۶\text{-}۷)$$

$$f_{2(n,1,p)} = f_{1(n,1,p)} \quad (۱۵۷\text{-}۷)$$

$$f_{3(n,1,p)} = f_{4(n,1,p)} \quad (۱۵۸\text{-}۷)$$

$$f_{6(n,1,p)} = f_{5(n,1,p)} \quad (۱۵۹\text{-}۷)$$

$$f_{12(n,1,p)} = f_{11(n,1,p)} \quad (۱۶۰\text{-}۷)$$

$$f_{8(n,1,p)} = f_{7(n,1,p)} \quad (۱۶۱\text{-}۷)$$

$$f_{10(n,1,p)} = f_{9(n,1,p)} \quad (۱۶۲\text{-}۷)$$

$$f_{14(n,1,p)} = f_{13(n,1,p)} \tag{۱۶۳-۷}$$

Abstract

The fluid behavior has a significant role in daily life as well as industrial applications. When construction is costly or difficult, the importance of simulation will be enhanced. Simulation suffers from some shortcomings. The feasibility of the construction, high computational cost, and restriction in RAM are some of the aforementioned shortcomings. Thus, methods in the simulation which are able to act in appropriate computational costs and systematic restrictions moreover, are capable of presenting results with suitable accuracy. One of these methods is immersed boundary-lattice Boltzmann method. The method with combining the lattice Boltzmann method with immersed boundary method is able to simulate particulate flow with worthy accuracy. In flows when the number of particles is high, the methods such as the one mentioned above, show better results. The model uses to sets of computational nodes which are Lagrangian and Eulerian. The Lagrangian nodes are the one which are on the considered particle and Eulerian nodes are the lattice nodes. The immersed boundary method using the velocity and force differences will change the velocity and pressure on the Lagrangian nodes, thus fluid is able to recognize the particle movement. Furthermore, the existed boundary condition or the no-slip condition will be satisfied. In the current study, the flow in a cavity and over a fixed sphere is assessed with developing 2D code to 3D. the particule flows analysis is applicable With developing the 2D Ib-Lbm code to 3D. To develope the code for 3D problems the boundary conditions and divergence must be overcome. Boundary conditions in 3D lbm are considerably more complex than 2D situation as well as their imposition. Imposing the moving fluid in 3d condition due the flows more freedom is other aspect of complexity in terms of 3D simulation. In the 3D state the relations for boundary condition are more complex which are derived and noted. In the cavity variations of velocity at the centerline is shown to validate the simulation. Then, a stationary is subjected to a Newtonian fluid under the laminar flow condition. To validate this part, the Strouhal number and drag coefficient around the sphere is used. Also, the effects of enhancing the Reynolds number on the lift and drag coefficient is investigated. The variations of streamline and vortices are also displayed. Flow passed the fixed sphere at the steady and unsteady situation to the Reynolds number equal to 300 is studied. At Re=300 due to transient fluid condition and mobile vortices, lift and drag coefficient will have a transient behavior also they will start repetition at a certain time period.

Keywords: lattice Boltzmann method, immersed boundary method, 3D

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

M.Sc. Thesis in Energy Conversion Engineering

3d development of numerical simulation of laminar fluid flow using Immersed Boundary Lattice Boltzmann method

By:

Mohammad Javad Gorgani

Supervisor(s):

Dr. Mohsen Nazari,

Dr. Mohammad Mohsen Shahmardan

September 2018