

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مکانیک

گروه طراحی کاربردی

تحلیل رفتار دینامیکی و ارتعاشاتی ناشی از گالوپینگ یک رشته آویخته با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف

دانشجو: سمن صدری پور

استاد راهنما: دکتر امیر جلالی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۹۵

فرم شماره ۷: صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سمن صدری پور به شماره دانشجویی ۹۲۰۹۰۵۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل رفتار دینامیکی و ارتعاشاتی ناشی از گالوپینگ یک رشته آویخته با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف در تاریخ ۱۳۹۵/۶/۱۶ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: عالی) امتیاز (۱۹/۴۳) <input checked="" type="checkbox"/>	دفاع مجدد <input type="checkbox"/>	مردود <input type="checkbox"/>
نوع تحقیق: نظری <input checked="" type="checkbox"/>	عملی <input type="checkbox"/>	

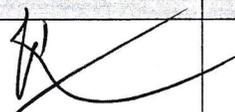
۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)

۱- عالی (۱۹ - ۲۰)

۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استادیار	امیر جلالی	۱- استاد راهنمای اول
—	—	—	۲- استاد راهنمای دوم
—	—	—	۳- استاد مشاور
	استادیار	سید وحید حسینی	۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	دانشیار	حمیدرضا ایپکچی	۵- استاد ممتحن اول
	دانشیار	اردشیر کرمی محمدی	۶- استاد ممتحن دوم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تقدیم به:

روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم

و به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

و به همسر، پناه حکیم و امید بودم.

ضمن سپاس و ستایش به درگاه ایزد منان که به من توانایی داد که با استعانت از او بتوانم این پژوهش را انجام دهم، بر خود لازم می بینم از

دکتر می و تشویق جناب آقای دکتر امیر جلالی، استاد راهنما، که در طول نگارش این مجموعه با راهنمایی های عالمانه خود، سکندار شایسته ای در

هدایت این پایان نامه بوده اند، قدردانی و تشکر نمایم.

تعهد نامه

اینجانب سمن صدری پور دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه تحلیل رفتار دینامیکی و ارتعاشاتی ناشی از گالوپینگ یک رشته آویخته با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف تحت راهنمایی دکتر امیر جلالی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

گالوپینگ کابل‌ها یکی از انواع ارتعاشات خودتحریک است که دارای دامنه‌ی بالا و فرکانس پایین می‌باشد. گالوپینگ زمانی اتفاق می‌افتد که پوشش یخ بر روی هادی، سطح مقطع دایروی کابل را تغییر می‌دهد و باعث می‌شود که از نظر آیرودینامیکی یک پروفیل ناپایدار به وجود آید. در این پژوهش، به منظور بررسی گالوپینگ غیرخطی کابل‌ها با در نظر گرفتن سختی‌های خمشی و پیچشی آن، از مدل تیر منحنی شکل استفاده شده است. در این پژوهش دو شرط مرزی مختلف برای کابل در نظر گرفته شده است. در حالت اول کابل دارای دو تکیه‌گاه مفصلی است، در این حالت کابل افقی بوده و تحت نیروهای جریان باد مدل-ساز می‌شود. در حالت دوم یک کابل شیب‌دار تحت جریان باد مورد بررسی قرار گرفته است که دارای یک تکیه‌گاه مفصلی است و به تکیه‌گاه دیگر آن یک حرکت سینوسی با دامنه‌ی مشخص اعمال می‌شود. در هر دو حالت کابل در شرایط یخ‌زدگی مقطع آن فرمول‌بندی شده است. با فرض نسبت شکم به دهانه‌ی کوچک و براساس مقادیر پارامترهای کابل در واقعیت، می‌توان به یک مدل کاهش یافته دست یافت که شامل معادلات کلاسیک، مانند آنچه برای کابل انعطاف‌پذیر به دست می‌آید و یک معادله‌ی اضافه حاکم بر پیچش کابل، می‌باشد. این سیستم دو درجه آزادی با به کارگیری روش گلرکین با استفاده از یک مُد درون صفحه و یک مُد خارج از صفحه به عنوان توابع ویژه گسسته شده است و شامل عبارتهای غیرخطی مرتبه دو و مرتبه سه می‌باشد. با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در اغتشاشات با در نظر گرفتن تشدید داخلی ۱:۱ و ۲:۱ برای کابل دو سر ثابت و تشدید داخلی ۱:۱ به همراه تشدید خارجی و پارامتریک ۱:۱ برای کابل شیب‌دار با تحریک پایه، معادلات مدولاسیون دامنه-فاز به دست آمده‌اند. در این پژوهش سرعت باد، خروج از مرکزی مقطع و دامنه‌ی تحریک پایه به عنوان پارامترهای کنترلی در نظر گرفته شده‌اند و تأثیر خروج از مرکزی سطح مقطع بر روی دامنه‌ی گالوپینگ مورد بررسی قرار گرفته است. از نتایج چنین برمی‌آید که دامنه‌ی ارتعاشات در سرعت‌های بالا با در نظر گرفتن خروج از مرکزی

رفتاری کاملاً متفاوت از خود نشان می‌دهد. بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی دامنه‌ی ارتعاشات با افزایش سرعت، افزایش می‌یابد در حالی که با در نظر گرفتن خروج از مرکزی، دامنه در سرعت‌های پایین افزایش ولی در سرعت‌های بالا کاهش می‌یابد.

کلمات کلیدی: گالوپینگ، کابل، ارتعاشات القایی باد، روش مقیاس‌های چندگانه در اغتشاشات،

شرایط تشدید

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- صدری پور س. جلالی ا، (۱۳۹۵) "تأثیر خروج از مرکزی بر گالوپینگ غیرخطی کابل‌ها تحت جریان باد و تحریک پایه در شرایط تشدید داخلی ۱:۱"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۱۶، دوره ۱۱: صص ۳۷۸-۳۸۸
- جلالی ا، صدری پور س، (۱۳۹۴)، "بررسی گالوپینگ غیرخطی یک کابل آویخته تحت جریان باد با در نظر گرفتن سختی خمشی و پیچشی در حالت تشدید داخلی ۱:۱"، سومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین المللی پژوهش‌های کاربردی در مهندسی برق، مکانیک و مکاترونیک، تهران، دانشگاه صنعتی مالک اشتر.
- صدری پور س، جلالی ا، (۱۳۹۴)، "تأثیر خروج از مرکزی سطح مقطع بر روی گالوپینگ غیرخطی یک کابل آویخته با در نظر گرفتن سختی های خمشی و پیچشی در شرایط رزونانسی ۱:۱"، سومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین المللی پژوهش‌های کاربردی در مهندسی برق، مکانیک و مکاترونیک، تهران، دانشگاه صنعتی مالک اشتر.

فهرست

صفحه

۲- مقدمه	۲
۱-۱ تعریف	۲
۲-۱ مکانیزم‌های تحریک کابل‌ها توسط باد	۲
۱-۲-۱ ارتعاشات تحریک شده با باد-باران	۲
۲-۲-۱ تحریک با گردابه‌ی سرعت بالا	۳
۳-۲-۱ ارتعاشات گالوپینگ خشک	۴
۴-۲-۱ گالوپینگ با پوشش یخ	۴
۳-۱ اثرات گالوپینگ	۶
۴-۱ روش‌های جلوگیری از گالوپینگ	۸
۲- مروری بر کارهای پیشین	۱۲
۳- مدل‌سازی	۱۸
۱-۳ مقدمه	۱۸
۲-۳ مدل‌سازی مکانیکی	۱۸
۱-۲-۳ تئوری کابل-تیر	۱۸
۲-۲-۳ معادلات حرکت	۲۹
۳-۳ مدل‌سازی آیرودینامیکی	۴۴
۱-۴ مقدمه	۴۸
۲-۴ بی‌بعدسازی	۴۸
۳-۴ گسسته‌سازی	۵۰

۴-۴ حل پرتوربیشن	۵۲
۴-۴-۱ کابل افقی دو سر ثابت تحت نیروی باد	۵۴
۴-۴-۲ کابل شیبدار با یک پایه‌ی متحرک تحت نیروی باد	۶۳
۵- پارامترهای عددی و نتایج	۷۴
۵-۱ حل پایداری	۸۱
۶- نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات	۹۲
۶-۱ نتیجه‌گیری	۹۲
۶-۲ پیشنهادات	۹۲
۷- پیوست	۹۶
۷-۱ پیوست الف	۹۶
۷-۲ پیوست ب	۱۰۱
۷-۳ پیوست ج	۱۱۰
مراجع	۱۲۹

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱) خطوط انتقال پوشیده از یخ و برف [۱۲] ۵
- شکل (۲-۱) مثالی از پوشش یخ بر روی هادی‌ها [۱۲] ۵
- شکل (۳-۱) هادی‌های آسیب‌دیده در اثر گالوپینگ ۷
- شکل (۴-۱) هادی‌های آسیب‌دیده در اثر گالوپینگ ۷
- شکل (۱-۳) تیر منحنی شکل در پیکربندی مرجع ۱۹
- شکل (۲-۳) جابه‌جایی و دوران پیکربندی جاری نسبت به پیکربندی مرجع ۲۲
- شکل (۳-۳) ترکیب دوران‌های اولیه ۲۳
- شکل (۴-۳) زاویه دوران پیکربندی مرجع نسبت به پیکربندی اولیه ناشی از نیروی استاتیکی باد ۳۰
- شکل (۵-۳) نمایش پیکربندی‌های مختلف بر روی سطح مقطع کابل ۳۰
- شکل (۶-۳) کابل شیب‌دار با تحریک پایه در پیکربندی مرجع و جاری ۳۸
- شکل (۷-۳) سطح مقطع کابل الف) بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی ب) با در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع ۳۸
- شکل (۸-۳) کابل شیب‌دار با شیب α و زاویه انحراف β در معرض باد ۴۵

فهرست جداول

- جدول (۱-۴) خواص کابل [۴۳] ۷۴

فهرست علائم و اختصارات

A	مساحت سطح مقطع کابل (m^2)
A_1	دامنه‌ی مرکب وابسته به زمان آرام در جهت عمود بر کابل
A_2	دامنه‌ی مرکب وابسته به زمان آرام در جهت عمود بر صفحه‌ی کابل
a_1	دامنه‌ی متغیر با زمان t در جهت عمود بر کابل
a_2	دامنه‌ی متغیر با زمان t در جهت عمود بر صفحه کابل
b_2	نیروی آیرودینامیکی لیفت (Nm^{-1})
b_3	نیروی آیرودینامیکی درگ (Nm^{-1})
c_1	مومنتم آیرودینامیکی (N)
C_d	ضریب آیرودینامیکی درگ
C_l	ضریب آیرودینامیکی لیفت
c_i	ضرایب میرایی ساختاری برای $i = u, v, w, \vartheta$
d	شکم کابل (m)
EA	سختی محوری کابل (N)
EI_i	سختی خمشی (Nm^2)

f_i	تابع ویژه
GJ	سختی پیچشی (Nm^2)
k_1	کرنش پیچشی (m)
k_2	کرنش خمشی (m)
k_3	کرنش خمشی (m)
l	طول اولیه کابل (m)
m	جرم واحد طول کابل (kgm^{-1})
M_1	خمش اولیه کابل حول محور a_1 (Nm)
M_2	خمش اولیه کابل حول محور a_2 (Nm)
M_3	پیچش اولیه کابل (Nm)
q_i	مقدار ویژه
s	پارامتر طول منحنی کابل (m)
S_2	ممان اول سطح در جهت ۲ (m^3)
S_3	ممان اول سطح در جهت ۳ (m^3)
t	زمان (s)

کشش اولیه کابل (N)	\bar{T}
مقیاس زمانی سریع (s)	T_0
مقیاس زمانی آرام (s)	T_1
مقیاس زمانی بسیار آرام (s)	T_2
بردار جابه‌جایی	\mathbf{u}
مولفه بردار جابه‌جایی در جهت $\bar{\mathbf{a}}_3$	u
مولفه بردار جابه‌جایی در جهت $\bar{\mathbf{a}}_1$	v
مولفه شبه پایای v	\hat{v}
مولفه دینامیکی v	\tilde{v}
مولفه بردار جابه‌جایی در جهت $\bar{\mathbf{a}}_2$	w

علائم یونانی

زاویه‌ی آویز کابل (rad)	α
زاویه انحراف باد نسبت به کابل (rad)	β
زاویه حمله باد نسبت به کابل (rad)	γ

ε	کرنش کششی (m)
η	دامنه‌ی حرکت پایه (m)
κ	انحنای کابل در جهت \bar{a}_2 در زمان $t = 0$
ϑ	زاویه پیچش سطح مقطع (rad)
ρ	چگالی کابل (kgm^{-3})
φ	دوران سطح مقطع در اثر وزش باد (rad)
φ_0	دوران سطح مقطع در اثر وجود یخ (rad)
ω_1	فرکانس دایروی در جهت عمود بر کابل (rads^{-1})
ω_2	فرکانس دایروی در جهت عمود بر صفحه‌ی کابل (rads^{-1})

زیرنویس‌ها

air هوا

فصل اول

مقدمه

۱- مقدمه

۱-۱ تعریف

کابل‌ها سازه‌های سبک و انعطاف‌پذیری هستند که به‌طور گسترده در مهندسی کاربرد دارند. کاربرد کابل‌ها را در خطوط انتقال نیرو، پل‌های کابلی، سازه‌های دریایی و ... می‌توان مشاهده کرد. از آن‌جا که کابل‌ها دارای میرایی کمی می‌باشند، به‌شدت در معرض ارتعاشات تحریک شده به‌وسیله‌ی جریان باد هستند. در این فصل به بررسی مکانیزم‌های مختلف تحریک ارتعاشات کابل‌ها ناشی از جریان باد پرداخته می‌شود.

۱-۲ مکانیزم‌های تحریک کابل‌ها توسط باد

مکانیزم ارتعاشات کابل‌ها با تحریک جریان باد می‌تواند به انواع مختلفی تقسیم‌بندی شود. جدا از خواص دینامیکی کابل، این مکانیزم‌ها را می‌توان با توجه به دامنه‌ی ارتعاشات، سرعت باد بحرانی که در آن ارتعاشات رخ می‌دهد، جهت‌گیری کابل (یعنی زاویه‌ی بین جهت وزش باد و محور کابل) و شرایط بارش تقسیم‌بندی کرد. در حالت کلی می‌توان این پدیده‌ها را به گروه کلی زیر دسته‌بندی کرد. الف) ارتعاشات در شرایط باد و باران همزمان که به ارتعاشات تحریک شده با باد-باران^۱ معروف است، ب) ارتعاشات با دامنه‌ی بالا اما محدود در سرعت‌های بالای باد که به نام ارتعاشات تحریک شده با گردابه‌های سرعت بالا^۲ شناخته می‌شود. ج) گالوپینگ خشک. د) گالوپینگ در شرایط یخ‌زدگی مقطع.

۱-۲-۱ ارتعاشات تحریک شده با باد-باران

ارتعاشات تحریک شده با باد-باران علیرغم پیچیدگی‌هایی که دارد توسط پژوهشگران زیادی مورد بررسی قرار گرفته است. اولین مطالعه بر روی ارتعاشات تحریک شده با باد-باران توسط هیگمی^۳ [۱] انجام شد

¹ Rain-Wind Induced Vibration

² High-Speed Vortex Induced Vibration

³ Hikami

که درباره‌ی ارتعاشاتی است که در پل میکو-نیشی^۱ در ژاپن مشاهده شده بود. مطالعات بیشتر توسط مین و جونز^۲ [۲ و ۳]، ماتسوموتو و همکاران^۳ [۴] نشان دادند که این نوع از ارتعاشات به شرایط زیر بستگی دارد، الف) کابل‌های نگه‌دار زاویه‌ی آویزی بین ۲۰ تا ۴۵ درجه داشته باشند که این زاویه با وزش باد هم کاهش پیدا کند، ب) قطر کابل بین ۱۴ تا ۲۰ سانتی‌متر باشد، ج) دامنه‌ی ارتعاشات تا چندین متر بالا رود، د) زاویه‌ی پیچش باد نسبت به صفحه‌ی کابل بین ۲۰ تا ۶۰ درجه باشد، ه) سرعت باد بحرانی بین ۸ تا ۱۲ متر بر ثانیه و در نتیجه عدد رینولدز بین ۶۰ هزار تا ۲۰۰ هزار باشد که در نتیجه در رژیم بحرانی قرار می‌گیرد. اعتقاد بر این است که مکانیزم ارتعاشات تحریک شده توسط باد-باران به شدت به تشکیل جریان آب بر روی سطح بالایی کابل وابسته است [۶]. شکل سطح مقطع کابل با توجه به وجود جریان آب بر روی آن نامتقارن می‌شود و در نتیجه این پدیده نیروهای آیرودینامیکی بر روی کابل را تغییر می‌دهد و این باعث ارتعاشات بیشتر شود.

۲-۲-۱ تحریک با گردابه‌ی سرعت بالا

در شرایط نبود بارش نیز ارتعاشات مشابه با آن چه در ارتعاشات تحریک شده با باد-باران اتفاق می‌افتد، در مکان واقعی و در تونل باد مشاهده شده است. مشاهده‌ی این پدیده‌ی ناخواسته، در طول یک طوفان با سرعت ۴۰ متر بر ثانیه توسط ماتسوموتو [۵] مستند شده است. از آن جایی که این پاسخ مشاهده شده، در مقایسه با ارتعاشات متداول کارمن، در سرعت بالاتری اتفاق افتاد، به این پدیده ارتعاشات تحریک شده با گردابه‌ی سرعت بالا گفته می‌شود.

اعتقاد بر این است که مکانیزم ارتعاشات تحریک شده با گردابه‌ی سرعت بالا، با وجود جریان محوری در ناحیه وجود کابل در ارتباط است [۵ و ۷]. وقتی که جریان نسبت به کابل مورب می‌وزد، یک مولفه‌ی

¹ Meiko nishi Bridge

² Main and Jones

³ Matsumoto et al

محوری نیز دارا می‌باشد که در طول کابل است و در تعامل با گردابه‌های کارمن می‌باشد. نقش جریان محوری ایجاد اختلال در تقابل میان دو لایه‌ی برشی جدا شده در دنباله‌ی کابل است.

۳-۲-۱ ارتعاشات گالوپینگ خشک

ارتعاشات گالوپینگ خشک یکی از انواع ناپایداری کابل‌هاست که در مطالعات زیادی مانند سایتو^۱ و همکاران [۸]، میاتا^۲ و همکاران [۹]، چنگ^۳ و همکاران [۱۰] و نیکیتاس^۴ و همکاران [۱۱] به آن پرداخته شده است. مشاهده شده است که این نوع ارتعاش بدون وجود بارش اتفاق می‌افتد و پاسخی مشابه با آنچه در ارتعاشات گالوپینگ کابل‌های پوشیده از یخ اتفاق می‌افتد، دارا می‌باشد.

زمانی که میرایی آیرودینامیکی منفی به اندازه‌ای بزرگ باشد که بر میرایی سازه‌ای مثبت غلبه کند به طوری که میرایی موثر سازه منفی شود، دامنه‌ی ارتعاشات سازه به‌طور چشم‌گیری افزایش پیدا می‌کند که منجر به حرکت از نوع واگرا می‌شود. بنابراین مطالعه بر روی میرایی آیرودینامیکی یک سازه‌ی کابلی یک راه مؤثر برای مطالعه‌ی مکانیزم‌هایی است که به آن ارتعاشات ناشی از باد گفته می‌شود.

۴-۲-۱ گالوپینگ با پوشش یخ

گالوپینگ کابل‌ها یک نوع تحریک با جنبش است و زمانی اتفاق می‌افتد که پوشش یخ بر روی کابل، سطح مقطع دایروی آن را تغییر می‌دهد و باعث می‌شود که پروفیل سطح مقطع از نظر آیرودینامیکی ناپایدار شود. شکل (۱-۱) و (۲-۱) کابل‌های پوشیده از یخ را در هادی‌های خطوط انتقال نشان می‌دهد.

¹ Saito

² Miyata

³ cheng

⁴ Nikitas



شکل (۱-۱) خطوط انتقال پوشیده از یخ و برف [۱۲]



شکل (۲-۱) مثالی از پوشش یخ بر روی هادی‌ها [۱۲]

۱-۳ اثرات گالوپینگ

- تخلیه الکتریکی

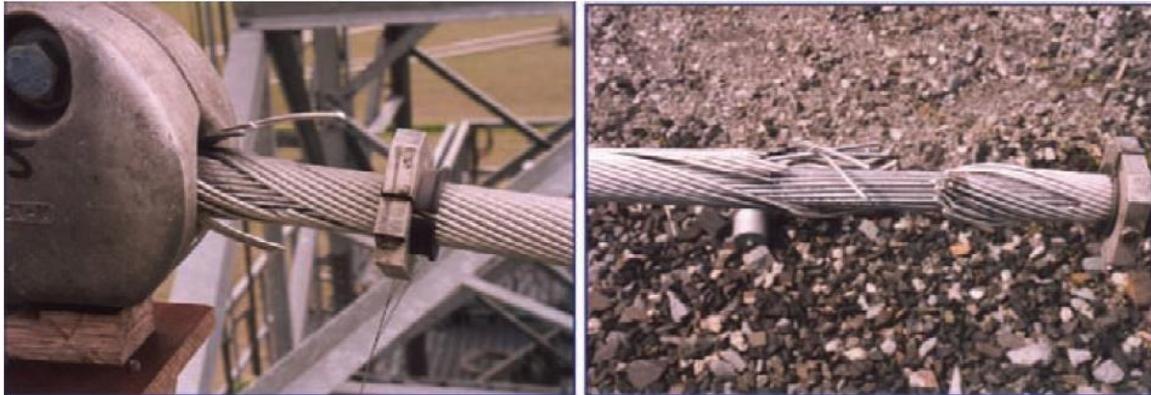
تخلیه الکتریکی هادی‌ها یکی از متداول‌ترین مشکلاتی است که توسط گالوپینگ به وجود می‌آید. وقتی که تخلیه‌های پی‌درپی اتفاق می‌افتد، سیستم اتوماتیک حفاظتی، مدار را باز می‌کند تا علت قطعی شناخته و برطرف شود. اگر خط جایگزینی برای انتقال انرژی وجود نداشته باشد، جریان به مصرف‌کننده نمی‌رسد.

- بارهای دینامیکی

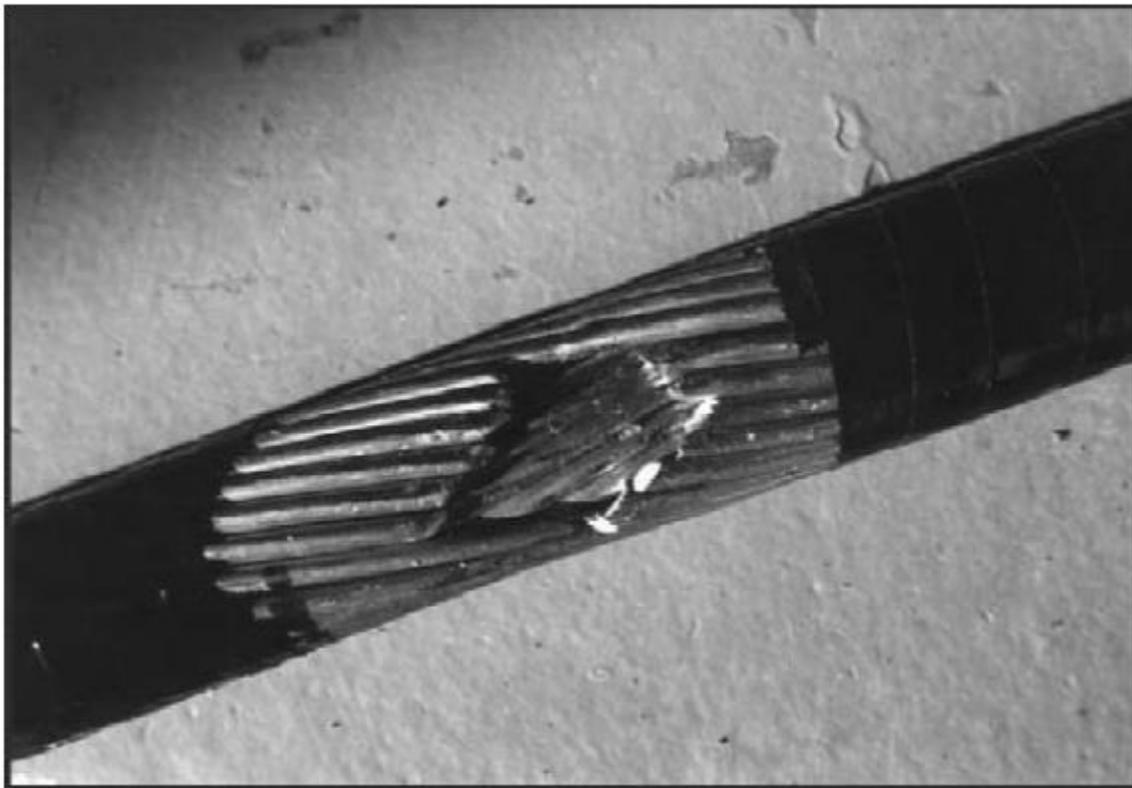
در کنار تخلیه‌ی الکتریکی هادی‌ها، گالوپینگ بارهای دینامیکی را در هادی القا می‌کند که از طریق سخت‌افزارهای معلق به برج‌ها می‌رسد. این بارهای دینامیکی در طول هر پدیده گالوپینگ به‌طور پی‌درپی به سازه‌های نگه‌دارنده‌ی کابل‌ها می‌رسد. متداول‌ترین اثر این بارهای دینامیکی شل شدن پیچ‌های برج و ایجاد خستگی در دیگر سازه‌ها می‌باشد.

- خستگی هادی‌ها

رشته‌های کابل‌ها در اثر بارهای دینامیکی که به آن‌ها وارد می‌شود به مرور زمان دچار خستگی می‌شوند. اثر خستگی گالوپینگ بر روی هادی در شکل (۱-۳) و (۱-۴) مشاهده می‌شود.



شکل (۳-۱) هادی‌های آسیب‌دیده در اثر گالوپینگ



شکل (۴-۱) هادی‌های آسیب‌دیده در اثر گالوپینگ

۴-۱ روش‌های جلوگیری از گالوپینگ

در این قسمت نتایج مختلف پژوهش انجام شده بر روی روش‌های مهار گالوپینگ که توسط لیلین^۱ [۱۳] انجام شده است، مرور می‌شود.

- پیچیدگی گالوپینگ به‌گونه‌ای است که تکنیک‌های کنترلی نمی‌تواند به اندازه‌ی کافی در آزمایشگاه تست شود و باید در واقعیت و بر روی کابل‌های واقعی مورد بررسی قرار گیرد. مشاهده‌ی این نتایج در مکان واقعی ممکن است سال‌ها طول بکشد و در نهایت بی‌نتیجه بماند
- ابزارهای تحلیلی و آزمایش‌های میدانی بر روی کابل‌های واقعی با ین مصنوعی بر روی آن در ارزیابی گالوپینگ و طراحی روش‌های مقتضی مفید است.
- هیچ روشی را نمی‌توان ضمانت کرد که به‌طور حتم در تمامی شرایط از گالوپینگ جلوگیری کند.
- جداکننده‌های بین فازی این اطمینان را می‌دهند که در صورت وقوع گالوپینگ مشکلی به‌وجود نمی‌آید.
- میراکننده‌های مکانیکی هنوز هم به‌منظور متوقف کردن حرکت عمودی، مورد استفاده قرار می‌گیرند اما گستره بسیار محدودی را تحت پوشش قرار می‌دهند.
- وسایل پیچشی که میرایی پیچشی را تنظیم می‌کنند و یا آن را افزایش می‌دهند و یا هردو، می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

¹ Lilien

- روش‌های جلوگیری از یخ‌زدگی و یا یخ‌زدایی به‌عنوان روش‌های ضد گالوپینگ به‌طور گسترده استفاده نمی‌شوند.

- تکنیک‌هایی که با ارائه‌ی هادی‌هایی با سطح مقطع متغیر از یکنواختی پوشش یخ جلوگیری می‌کنند و یا با القای یک حرکت دورانی به هادی از یکنواختی آیرودینامیکی جلوگیری می‌کنند، به‌طور گسترده استفاده نمی‌شوند.

در نتیجه انواع روش‌ها برای کاهش اثرات گالوپینگ در ادامه آمده است.

- جلوگیری از یخ‌زدگی و یا ذوب کردن آن

- افزایش فواصل هوایی

- جداکننده میان فازها

- دمپرهای آیرودینامیکی کششی

- دمپرهای حرکت عمودی

- وسایل کنترل حرکت پیچشی

فصل دوم

مروری بر کارهای پیشین

۲- مروری بر کارهای پیشین

گالوپینگ یک پدیده‌ی ناپایداری الاستیک است که با ارتعاشات با فرکانس پایین و دامنه‌ی بالای اجسام بلافاصله^۱ لاغر با وزن کم و یا میرایی کم شناخته می‌شود. از مطالعات انجام شده مشخص شده است که گالوپینگ با ارتعاشات آیرودینامیکی خودتحریک همراه است. وقتی که یک جسم در محیط سیال قرار می‌گیرد نیروهای آیرودینامیکی وارد بر آن متغیر است و با حرکت جسم تغییر می‌کند. این می‌تواند باعث آغاز ارتعاشات خود تحریک شود و باعث شود تا دامنه‌ی ارتعاشات به صورت نمایی افزایش پیدا کند. وابستگی پاسخ گالوپینگ به حرکت جسم خود یکی از پیچیدگی‌های تقابل سیال-سازه در حوزه‌ی غیر-خطی می‌باشد.

گالوپینگ بیشتر در سازه‌های لاغری که نسبت دهانه به سطح مقطع بالایی دارند اتفاق می‌افتد و چندین دهه است که بر روی آن مطالعه می‌شود به عنوان مثال نواک^۲ [۱۴] و پارکینسون^۳ [۱۵] بر روی این موضوع تحقیق کرده‌اند. گالوپینگ در کابل‌های یخ‌زده‌ی خطوط انتقال [۱۶ و ۱۷]، کابل‌های نگه‌دار مایل در پل-های کابل‌نگه‌دار [۸، ۱۰ و ۱۸] و سازه‌های منشوری بلند که سطح مقطع مثلثی [۱۹]، مربعی [۲۰] و بیضی‌شکل [۲۱] دارند، مورد مطالعه قرار گرفته است.

وقتی که گوشه‌های تیز در اجسام لاغر وجود دارند، به عنوان مثال در سطح مقطع‌های مربعی و مثلثی، نیروهای آیرودینامیکی به تغییرات زاویه‌ی حمله‌ی باد حساس هستند و به تغییرات عدد رینولدز بی تفاوت می‌باشند. برای اجسامی با سطح مقطع دارای عیوب هندسی، مانند کابل‌هایی با پوشش یخ و با کابل‌های مایل پل‌های کابل‌نگه‌دار که جریان آب ناشی از بارش بر روی آن شکل گرفته است [۷ و ۲۲]، نیروهای آیرودینامیکی به شدت بیشتر از آن‌چه به تغییرات عدد رینولدز حساس هستند به تغییرات زاویه‌ی حمله

¹ Bluff Body

² Novak

³ Parkinson

حساس می‌باشند. از طرف دیگر، در مورد استوانه‌های دایروی، به خاطر تقارن سطح مقطع، نیروهای آیرودینامیکی مستقل از زاویه‌ی حمله هستند و گالوپینگ ممکن است به علت قرارگرفتن در طیف عدد رینولدز بحرانی اتفاق بیفتد که به اصطلاح، پدیده‌ی بحران درگ گفته می‌شود [۱۰ و ۲۳] همچنین گالوپینگ می‌تواند در سطح مقطع بیضی‌شکل اتفاق بیفتد که در آن نیروهای آیرودینامیکی به عدد رینولدز و زاویه‌ی حمله هر دو وابسته است [۲۱].

در طول دهه‌های گذشته، رویکردهای مختلفی به منظور مهار کردن پدیده‌ی گالوپینگ، مورد بررسی قرار گرفت. یک مرور جامع بر روی این پدیده اخیراً توسط پیکاردو^۱ و همکارانش [۲۴] انجام شده است و مشخص شده است که بیشترین مدل‌های موجود برای گالوپینگ، برای تخمین نیروهای آیرودینامیکی براساس تئوری شبه-پایا می‌باشند. ایشان فرض می‌کنند که نیروهای آیرودینامیکی که بر روی یک جسم در حال حرکت عمل می‌کند را می‌توان با نیرویی جایگزین کرد که بر روی یک جسم بدون حرکت اما با سرعتی برابر با سرعت نسبی بین جریان و جسم عمل می‌کند. به این شرط که فرکانس ارتعاشات به‌طور قابل توجهی کمتر از فرکانس دنباله‌ی گردابه باشد [۲۵]. برخی محدودیت‌های استفاده از این تئوری توسط همون و سانتی^۲ مورد بررسی قرار گرفته است [۲۶].

مدل‌های گالوپینگ زیادی براساس تئوری شبه-پایا توسعه پیدا کرده‌اند که اکثریت آن‌ها مدل‌های خطی شده می‌باشند. این مدل‌های خطی شده براساس خطی کردن ترم‌های غیرخطی معادلات حرکت جسم هستند که در معرض جریان قرار گرفته است. خطی کردن ترم‌های نیروهای آیرودینامیکی غیرخطی را می‌توان با فرض جابه‌جایی یا دوران کوچک حول موقعیت تعادل آن انجام داد که منجر به اصطلاحاً، میرایی آیرودینامیکی می‌شود که مقادیر منفی آن می‌تواند نشانه‌ی شروع ناپایداری آیرودینامیکی باشد.

¹ Piccardo

² Hemon and Santi

معیار معروف دن هارتوگ^۱ [۲۷] برای گالوپینگ عرضی خطوط انتقال پوشیده از یخ یک مثال معروف از آن است. با استفاده از یک رویکرد مشترک، مک دونالد و لاروس^۲ [۲۸] یک عبارت را برای میرایی آیرودینامیکی یک استوانه‌ی یک درجه آزادی، با سطح مقطع اختیاری و ارتعاشات در جهت اختیاری نسبت به جریان پیشنهاد دادند که یک مدل خاص از معیار دن هارتوگ است که با این مدل توصیف شده است. علاوه بر این، این مدل با موفقیت، میرایی آیرودینامیکی منفی را برای گالوپینگ خشک کابل مایل پیش‌بینی کرد که توسط چنگ^۳ و همکاران [۱۰] در تونل باد مشاهده شده بود. سپس این مدل یک درجه آزادی به یک مدل دو درجه آزادی توسعه پیدا کرد و نتیجه‌ی آن یک ماتریس میرایی آیرودینامیکی، از ارتعاشات یک استوانه‌ی مرتعش بود. سپس یک مدل سه درجه آزادی، به‌منظور پیش‌بینی شرایط شروع گالوپینگ یک جسم استوانه‌ای با سطح مقطع اختیاری توسط جلیستراپ و جورجاکیس^۴ [۲۹] استخراج شد که شامل درجه آزادی پیش‌براساس مدل دو درجه آزادی بود.

در مطالعات اخیر، نیروهای آیرودینامیکی که بر روی یک جسم لاغر با لبه‌های تیز عمل می‌کنند، با توابع چندجمله‌ای و یا سری تیلور ضرایب نیروهای آیرودینامیکی در برابر زاویه‌ی حمله، با فرض ارتعاشات با دامنه‌ی کوچک، تخمین زده می‌شوند. همچنین معادلات حرکت غیرخطی با استفاده از روش‌های عددی یا تقریبی تحلیلی حل می‌شوند [۳۰] با این حال چنان‌چه با استفاده از فرض ارتعاشات با دامنه‌ی کوچک بتوان از عبارات غیرخطی صرف‌نظر کرد، ماتریس آیرودینامیکی را مشابه با آن‌چه در مرجع [۳۱ و ۳۲] آمده است می‌توان فرض کرد.

از مشاهدات تجربی [۱۰] چنین برمی‌آید که پاسخ ناپایدار ارتعاشات گالوپینگ کابل یک مسیر بیضی‌شکل را طی می‌کند و این بدین معنی است که پاسخ بیشتر از یک درجه آزادی دارا می‌باشد. مک دونالد و

¹ Den Hartog

² Macdonald and Larose

³ Cheng

⁴ Gjelstrup and Georgakis

لاروس مدل یک درجه آزادی خود را [۲۸] به یک مدل دو درجه آزادی بسط دادند [۳۲] تا بتوانند اثر درجه آزادی اضافه را بر روی ناپایداری گالوپینگ اعمال کنند. ایشان دریافتند که تنظیم فرکانس‌های درجات آزادی کوپل با یکدیگر می‌تواند احتمال وقوع گالوپینگ را به‌طور چشم‌گیری کاهش دهد. با در- نظر گرفتن جریانی که از اجسام غیردایروی عبور کرده بود جورجاکیس و جلیستراپ [۲۹] پیشنهاد دادند تا پیچش نیز به درجات آزادی اضافه گردد. یو و همکاران^۱ [۳۳] تأثیر دوران بر گالوپینگ را بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که دوران در شروع گالوپینگ نقش مهمی را ایفا می‌کند. سپس ایشان [۳۴] و [۳۵] یک مدل گالوپینگ سه درجه آزادی را ارائه کردند که در آن حرکت عمودی، افقی و دوران را به همراه تأثیر خروج از مرکزی ناشی از وجود یخ در نظر گرفته اند. لانگو و رگا^۲ [۳۶] گالوپینگ غیرخطی کابل‌ها را با استفاده از یک مدل کابل کاملاً انعطاف‌پذیر مورد مطالعه قرار دادند و لی^۳ [۳۷] این مدل را در شرایط تشدید ۲:۱ مورد بررسی قرار داده و تنها دوران استاتیکی سطح مقطع آن را در نظر گرفته است. در کار بعدی لانگو و پیکاردو [۳۸] به منظور تصحیح مدل کلاسیک کابل برای به‌حساب آوردن پیچش، یک مدل نسبتاً ساده را ارائه دادند. یو و همکاران [۳۴ و ۳۵]، مک‌کانل و چنگ^۴ [۳۹] و وایت^۵ و همکاران [۴۰] در کارشان از مدل کابل-تیر استفاده کردند، مزیت این مدل نسبت به مدل‌های قبلی در- نظر گرفتن پیچش است، اما در این پژوهش‌ها خمش مورد بررسی قرار نگرفته است و از انحنای اولیه‌ی کابل در تعریف کرنش پیچشی^۶ صرف‌نظر شده است. لانگو و همکاران [۴۱] یک مدل خطی از کابل-تیر ارائه کردند که در آن، علاوه بر در نظر گرفتن انحنای کابل، سختی‌های خمشی و پیچشی نیز در نظر گرفته شده‌اند. در این مدل با حفظ عبارت‌های مهم در معادلات حرکت، معادلات خطی کاهش‌یافته‌ی حرکت استخراج شده است که مشابه معادلات حرکت کابل کاملاً انعطاف‌پذیر به‌همراه یک معادله‌ی اضافه حاکم

¹ Yu et al

² Luongo and Rega

³ Lee

⁴ McConnell and Chang

⁵ White

⁶ Torsion strain

بر پیچش کابل است که در آن ممان‌های خمشی و پیچشی هر دو در نظر گرفته شده‌اند. سپس ایشان به بررسی تأثیر زاویه‌ی پیچش بر روی شروع گالوپینگ [۴۲] پرداختند و به این نتیجه رسیدند که در نظر گرفتن پیچش شرایط پایداری را تحت تأثیر قرار می‌دهد. پس از آن یان^۱ و همکاران [۴۳] تأثیر خروج از مرکزی بر روی گالوپینگ کابل خطوط انتقال دو سر ثابت را مورد بررسی قرار دادند و از مدل کابل-تیر برای بررسی شرایط تشدید ۱:۱ استفاده کردند.

در این پژوهش، یک مدل غیرخطی کابل-تیر به منظور بررسی کابل‌های یخ‌زده که تحت تأثیر جریان باد قرار گرفته‌اند، معرفی شده است. کابل مورد نظر قادر به جابه‌جایی در سه جهت (مماس بر کابل، عمود بر کابل و عمود بر صفحه‌ی کابل) و دوران در یک جهت می‌باشد، گستره‌ی مورد نظر در این مقاله غیرخطی است. مدل بررسی شده در این مقاله، یک مدل غیرخطی از یک کابل شیب‌دار است که در معرض وزش باد و حرکت پایه‌ی سمت راست آن می‌باشد. معادلات حرکت و شرایط مرزی مسأله را می‌توان با استفاده از قانون همیلتون توسعه‌یافته استخراج نمود. معادلات به دست آمده، با استفاده از روش گلرکین با در نظر گرفتن یک مُد درون صفحه و یک مُد خارج از صفحه گسسته‌سازی می‌شوند، دو معادله‌ی به دست آمده، مرتبه دوم، ناهمگن، کوپله، متغیر با زمان و از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشند. این معادلات شامل عبارات غیرخطی مرتبه‌ی دو و مرتبه‌ی سه، هم در جابه‌جایی و هم در سرعت هستند. این عبارات غیرخطی را می‌توان با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات، مهار کرد. برای کابل دو سر ثابت با شرایط تشدید داخلی ۱:۱ و ۲:۱ و برای کابل مایل با تحریک پایه، در شرایط تشدید داخلی، تشدید خارجی و تشدید پارامتریک ۱:۱، معادلات مدولاسیون دامنه-فاز به دست می‌آیند که بر دینامیک آرام کابل حاکم است. سرعت باد، خروج از مرکزی کابل و دامنه‌ی تحریک پایه به عنوان پارامتر کنترلی انتخاب شده است.

¹ Yan

فصل سوم

مدل سازی

۳- مدل سازی

۳-۱ مقدمه

در این فصل هدف مدل سازی یک کابل است که دارای سختی های خمشی و پیچشی می باشد. در مورد کابل انعطاف پذیر، کابل را به عنوان یک کانتینیوم کوشی^۱ [۴۴] یک بعدی که در فضای سه بعدی قرار گرفته است مدل سازی می کنند. این مدل در شرایطی صدق می کند که کابل به شدت لاغر باشد و یا نسبت طول به قطر آن به سمت بی نهایت میل کند. همچنین این مدل مستلزم آن است که شعاع انحنای آن در پیکربندی جاری برای خمش و پیچش، نسبت به قطر کابل، به اندازه کافی بزرگ باشد. چنانچه این شرایط برقرار نباشد، مدل کوشی برای توصیف رفتار مکانیکی کابل مناسب نیست. در چنین مواردی مدل مجهزتری از کابل که دارای سختی های خمشی و پیچشی باشد، باید در نظر گرفته شود. این مدل را "کابل سخت"^۲ و یا "کابل-تیر" می نامند که بر رفتار دوگانه ی کابل تأکید دارد. معادلات مربوط به کابل-تیر توسط لانگو و همکاران [۴۴] به دست آمده است.

در بخش پیش رو، ابتدا روند به دست آوردن روابط کرنش-جابجایی ارائه می شود، با قرار دادن این روابط در قانون همیلتون و بسط آن معادلات حرکت برای هردو کابل افقی با پایه های ثابت و کابل شیب دار با تحریک پایه به دست می آید

۳-۲ مدل سازی مکانیکی

۳-۲-۱ تئوری کابل-تیر

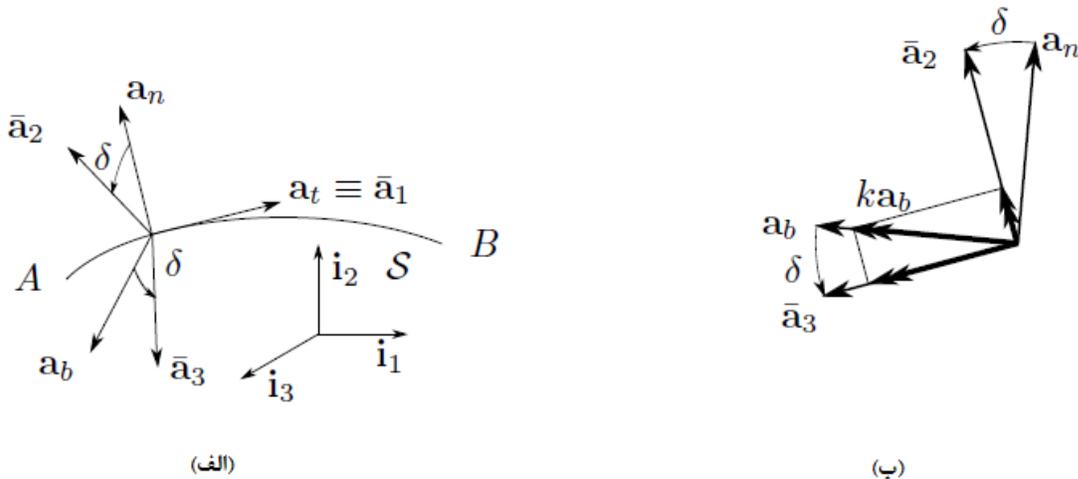
یک تیر منحنی شکل را در نظر بگیرید که از یک خط مرکزی انعطاف پذیر و یک سطح مقطع صلب ساخته شده است. برای این تیر دو پیکربندی در نظر گرفته می شود.

¹ Cauchy cotinuum

² Stiff cable

الف) پیکربندی مرجع

در این پیکربندی که در آن تیر به صورت یک کانتینیوم قطبی یک بعدی در نظر گرفته می شود. خط مرکزی در پیکربندی مرجع با منحنی S و با معادله‌ی پارامتریک $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}(s)$ که در آن s پارامتر طول منحنی است و $\bar{\mathbf{X}}$ برداری است که موقعیت نقطه مادی P را نسبت به رأس اختیاری O مشخص می کند (شکل (۱-۳) الف)) و با مختصات سه گانه راست گرد $\beta_e = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ مشخص می شود به طوری که بردار موقعیت به صورت $\bar{\mathbf{X}} = \sum_{j=1}^3 \bar{x}_j \mathbf{i}_j$ تعریف می شود.



شکل (۱-۳) تیر منحنی شکل در پیکربندی مرجع، الف) سه گانه‌ی خارجی $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ ، سه گانه‌ی $(\mathbf{a}_t, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_b)$

چسبیده به خط مرکزی و سه گانه‌ی $(\bar{\mathbf{a}}_1(s), \bar{\mathbf{a}}_2(s), \bar{\mathbf{a}}_3(s))$ منطبق بر سطح مقطع. ب) زاویه انحراف δ

همچنین سطح مقطع را می توان به صورت تابعی از s توصیف کرد، در نتیجه موقعیت سطح مقطع با سه گانه ذاتی $\bar{\beta} = (\bar{\mathbf{a}}_1(s), \bar{\mathbf{a}}_2(s), \bar{\mathbf{a}}_3(s))$ و موقعیت خط مرکزی با مختصات $\beta_f = (\mathbf{a}_t, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_b)$ توصیف می شود که فرض می شود بر سه گانه فرنت^۱ منطبق است در نتیجه فرمول های فرنت بر آن حاکم است و

^۱ Ferenet

می‌توان با بردارهای مختصات خط مرکزی به همراه بردارهای مختصات سطح مقطع آن و یا زاویه‌ی انحراف مقطع $\delta(s) := \arccos(\mathbf{a}_n \cdot \bar{\mathbf{a}}_2) \equiv \arccos(\mathbf{a}_b \cdot \bar{\mathbf{a}}_3)$ توصیف کرد. از آنجایی که بر سه‌گانه‌ی ذاتی β_f روابط فرنت حاکم است داریم:

$$\mathbf{a}_t = \bar{\mathbf{X}}' \quad \mathbf{a}_n = \frac{1}{\bar{\kappa}} \bar{\mathbf{X}}'' \quad \mathbf{a}_b = \frac{1}{\bar{\kappa}} (\bar{\mathbf{X}}' \times \bar{\mathbf{X}}'') \quad (1-3)$$

$$\mathbf{a}_t' = \bar{\kappa} \mathbf{a}_n \quad \mathbf{a}_b' = -\tau \mathbf{a}_n \quad \mathbf{a}_n' = \tau \mathbf{a}_b - \bar{\kappa} \mathbf{a}_t \quad (2-3)$$

که در $\bar{\kappa}$ انحنای کابل و τ پیچش منحنی $\bar{\mathbf{X}}(s)$ است و به‌صورت (3-3) و (4-3) و فرم بسط داده شده‌ی آن به‌صورت (3-5) و (3-6) تعریف می‌شود.

$$k := \|\bar{\mathbf{X}}''\| \quad (3-3)$$

$$\tau := \frac{\bar{\mathbf{X}}' \times \bar{\mathbf{X}}'' \cdot \bar{\mathbf{X}}'''}{\|\bar{\mathbf{X}}''\|^2} \quad (4-3)$$

$$k = \sqrt{\bar{x}_1''^2 + \bar{x}_2''^2 + \bar{x}_3''^2} \quad (5-3)$$

$$\tau = \frac{1}{\bar{x}_1''^2 + \bar{x}_2''^2 + \bar{x}_3''^2} \begin{vmatrix} \bar{x}_1' & \bar{x}_1' & \bar{x}_1' \\ \bar{x}_1'' & \bar{x}_1'' & \bar{x}_1'' \\ \bar{x}_1''' & \bar{x}_1''' & \bar{x}_1''' \end{vmatrix} \quad (6-3)$$

همچنین با استفاده از زاویه انحراف δ داریم:

$$\bar{a}_1 = a_t \quad \bar{a}_2 = a_n \cos \delta + a_b \sin \delta \quad \bar{a}_3 = -a_n \sin \delta + a_b \cos \delta \quad (7-3)$$

با مشتق‌گیری از روابط (7-3) و استفاده از روابط (2-3) و (7-3) داریم:

$$\bar{a}_1' = \bar{a}_2 \bar{\kappa} \cos \delta - \bar{a}_3 \bar{\kappa} \sin \delta \quad (8-3)$$

$$\bar{a}_2' = -\bar{a}_1 \bar{\kappa} \cos \delta + \bar{a}_3 (\tau + \delta') \quad (9-3)$$

$$\bar{a}_3' = \bar{a}_1 \bar{\kappa} \sin \delta - \bar{a}_2 (\tau + \delta') \quad (10-3)$$

معادلات فوق را می‌توان با استفاده از شکل برداری زیر توصیف کرد.

$$\bar{a}_j' = \bar{K} \bar{a}_j \quad (11-3)$$

که بیان اسکالر آن در مبنای $\bar{\beta}$ به صورت (۱۲-۳) است

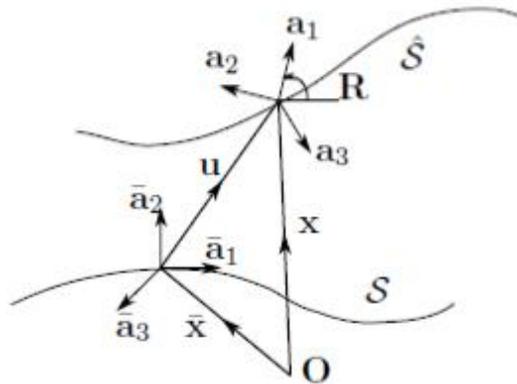
$$\bar{K} = \bar{\kappa}_1 \bar{a}_1 + \bar{\kappa}_2 \bar{a}_2 + \bar{\kappa}_3 \bar{a}_3 \quad (12-3)$$

با قرار دادن معادله (۱۲-۳) در معادله (۱۱-۳) و مقایسه آن با معادلات (۸-۳) تا (۱۰-۳) روابط زیر به دست می‌آید.

$$\bar{\kappa}_1 := (\tau + \delta') \quad \bar{\kappa}_2 = \bar{\kappa} \sin \delta \quad \bar{\kappa}_3 = \bar{\kappa} \cos \delta \quad (13-3)$$

ب) پیکربندی جاری

در زمان t تیر در فضای سه‌بعدی بر روی منحنی \hat{S} قرار گرفته است (شکل (۲-۳)). چنانچه \mathbf{X} مکان نقطه‌ی مادی P را نشان دهد.. جابه‌جایی و دوران نقطه P را نسبت به پیکربندی مرجع، با استفاده از بردار جابه‌جایی \mathbf{u} و تانسور دوران \mathbf{R} می‌توان نمایش داد.



شکل (۳-۲) جابه‌جایی و دوران پیکربندی جاری نسبت به پیکربندی مرجع

$$\mathbf{u} := \mathbf{x}(s, t) - \bar{\mathbf{x}}(s) \quad (۱۴-۳)$$

با تصویر کردن بردار \mathbf{u} بر روی مختصات β مؤلفه‌های اسکالر بردار جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

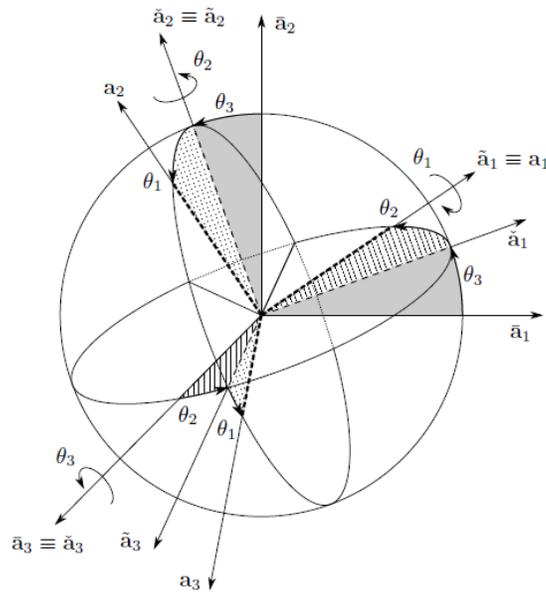
$$\mathbf{u} = u_1(s, t)\bar{\mathbf{a}}_1(s) + u_2(s, t)\bar{\mathbf{a}}_2(s) + u_3(s, t)\bar{\mathbf{a}}_3(s) \quad (۱۵-۳)$$

$$\mathbf{a}_j(s, t) = \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_j(s, t) \quad (۱۶-۳)$$

\mathbf{R} تانسور متعامد^۱ دوران است که در آن $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ و $\det \mathbf{R} = 1$ این تانسور از سه دوران اولیه $\theta_j(s, t)$; $j = 1, 2, 3$ مطابق با شکل (۳-۳) تشکیل شده است. برای به‌دست آوردن تانسور دوران به-

صورت زیر عمل می‌کنیم:

^۱ Orthogonal



شکل (۳-۳) ترکیب دوران‌های اولیه

الف) دوران R_3 با زاویه‌ی دوران θ_3 حول محور \bar{a}_3 که با این دوران مختصات $(\bar{a}_j) := \bar{\beta}$ به مختصات $(\check{a}_j) := \check{\beta}$ تبدیل می‌شود، در این دوران $\bar{a}_3 = \check{a}_3$ باقی می‌ماند.

ب) دوران R_2 با زاویه‌ی دوران θ_2 حول محور \check{a}_2 که با این دوران مختصات $(\check{a}_j) := \check{\beta}$ به مختصات $(\tilde{a}_j) := \tilde{\beta}$ تبدیل می‌شود، در این دوران $\check{a}_2 = \tilde{a}_2$ باقی می‌ماند.

ج) دوران R_1 با زاویه‌ی دوران θ_1 حول محور \tilde{a}_1 که با این دوران مختصات $(\tilde{a}_j) := \tilde{\beta}$ به مختصات $(a_j) := \beta$ تبدیل می‌شود، در این دوران $\tilde{a}_1 = a_1$ باقی می‌ماند.

در نتیجه داریم [۴۴]:

$$R = R_1 R_2 R_3$$

$$\Rightarrow \mathbf{R} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_3 \\ \cos \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_3 \\ -\sin \theta_2 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (17-3)$$

کرنش به صورت اختلاف میان \mathbf{x}' و $\bar{\mathbf{x}}'$ تعریف می شود مانند رابطه‌ی (3-18)، با بیان آن در مبنای مرجع و جاری به ترتیب رابطه‌های (3-19) و (3-20) به دست می آید [44].

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}' \quad (18-3)$$

$$\mathbf{e}_c = \mathbf{x}' - \mathbf{R}\bar{\mathbf{a}}_1 \quad (19-3)$$

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{R}^T \mathbf{x}' - \bar{\mathbf{a}}_1 \quad (20-3)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی (3-19) و (3-20)، رابطه‌ی (3-21) به دست می آید.

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{R}^T \mathbf{e}_c \quad (21-3)$$

همان طور که مشاهده می شود، کرنش در مبنای مرجع و در مبنای جاری دارای مولفه‌های یکسان می باشد و قابل تبدیل به یکدیگر است. در نتیجه داریم:

$$\mathbf{e}_c = \epsilon \mathbf{a}_1 + \gamma_1 \mathbf{a}_2 + \gamma_3 \mathbf{a}_3 \quad (22-3)$$

$$\mathbf{e}_R = \epsilon \bar{\mathbf{a}}_1 + \gamma_1 \bar{\mathbf{a}}_2 + \gamma_3 \bar{\mathbf{a}}_3 \quad (23-3)$$

از آن جا که $\mathbf{x}' = \bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{u}'$ و با استفاده از رابطه‌ی (۳-۱) و (۳-۷ الف) رابطه‌ی (۳-۱۸) به صورت زیر در می‌آید [۴۴]:

$$\mathbf{e} = \mathbf{R}^T(\bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{u}') - \bar{\mathbf{a}}_1 \quad (۳-۲۴)$$

چنان چه رابطه (۳-۲۴) را به شکل اسکالر آن بنویسیم داریم [۴۴]:

$$\begin{bmatrix} \epsilon \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \left(\begin{bmatrix} 1 + u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\bar{k}_3 & \bar{k}_2 \\ \bar{k}_2 & 0 & \bar{k}_1 \\ -\bar{k}_3 & \bar{k}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳-۲۵)$$

• انحنا

در روابط زیر \mathbf{k}_c تانسور انحنا در مبنای جاری و \mathbf{k}_R تانسور انحنا در مبنای مرجع می‌باشد که با استفاده از تبدیل \mathbf{R} به دست آمده است. تانسورها و بردارهای انحنا را مانند آنچه در فرمول (۳-۲۶) و (۳-۲۷) آمده است، تعریف می‌کنیم [۴۴]:

$$\mathbf{a}_j' = \mathbf{K}_c \mathbf{a}_j \quad (۳-۲۶)$$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{a}_j' = \mathbf{K}_R \bar{\mathbf{a}}_j \quad (۳-۲۷)$$

با مشتق گرفتن از رابطه‌ی (۳-۱۶) نسبت به s و با استفاده از فرمول (۳-۱۱) داریم:

$$\mathbf{a}_j' = \mathbf{R}' \bar{\mathbf{a}}_j + \mathbf{R} \bar{\mathbf{a}}_j' \quad (۳-۲۸)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}_j' = (\mathbf{R}' + \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \bar{\mathbf{a}}_j \quad (۳-۲۹)$$

با مقایسه رابطه‌ی (۳-۲۶) و (۳-۲۷) با رابطه‌ی (۳-۲۹) روابط (۳-۳۰) و (۳-۳۱) به دست می‌آید.

$$\mathbf{K}_c = (\mathbf{R}' + \mathbf{R} \bar{\mathbf{K}}) \mathbf{R}^T \quad (۳-۳۰)$$

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{R}^T \mathbf{R}' + \bar{\mathbf{K}} \quad (31-3)$$

این دو تانسور، انحنای تیر در زمان t را نشان می‌دهد. برای به‌دست آوردن تغییرات انحنای از رابطه‌ی (۳-۳۲) می‌توان استفاده کرد.

$$\mathbf{k} := \mathbf{K}_r - \bar{\mathbf{K}} \quad (32-3)$$

با مقایسه‌ی (۳۲-۳) با رابطه‌ی (۳۱-۳) داریم:

$$\mathbf{k} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}' \quad (33-3)$$

برای بیان مؤلفه‌های \mathbf{R}' می‌توان از رابطه‌ی (۳۴-۳) استفاده نمود، در نتیجه با قرار دادن رابطه‌ی (۳۴-۳) در رابطه‌ی (۳۳-۳) رابطه‌ی (۳۵-۳) به‌دست می‌آید.

$$[\mathbf{R}']_{\bar{\beta}} = [\mathbf{R}]'_{\bar{\beta}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{R} - \mathbf{R}\bar{\mathbf{K}} \quad (34-3)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}' + \mathbf{R}^T \bar{\mathbf{K}}\mathbf{R} + \bar{\mathbf{K}} \quad (35-3)$$

با استفاده از [۴۴] داریم:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ \theta_3' \end{bmatrix} \quad (36-3)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳۶-۳) در (۳۵-۳) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ \theta_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 - 1 & \cos \theta_2 \sin \theta_3 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3 & \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_1 \cos \theta_3 - 1 & \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_3 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_3 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_1 \\ \bar{k}_2 \\ \bar{k}_3 \end{bmatrix} \quad (37-3)$$

تا اینجا تمامی معادلات مربوط به کرنش‌ها را به دست آوردیم، به منظور به دست آوردن این روابط براساس جابه‌جایی‌ها و یا روابط کرنش-جابه‌جایی باید رابطه‌ای بین کرنش‌ها با u_1, u_2, u_3 و θ_1 به‌عنوان پارامترهای مستقل تعریف شود.

با استفاده از رابطه‌ی (۳-۱۸) اندازه‌ی کشش محوری به‌صورت (۳-۳۸) تعریف می‌شود. با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳۹) و (۳-۴۰) و استفاده از روابط فرنت (۳-۲) می‌توان رابطه‌ی (۳-۴۱) را به دست آورد

[۴۴].

$$\epsilon := \|x'\| - 1 \quad (3-38)$$

$$x' = \bar{a}_1 + u' \quad (3-39)$$

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i a_i \quad (3-40)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{(1 + u_1' - \bar{\kappa}u_2)^2 + (u_2' + \bar{\kappa}u_1)^2 + (u_3')^2} - 1 \\ &\approx u_1' - \bar{\kappa}u_2 + \frac{1}{2}[(u_2' + \bar{\kappa}u_1)^2 + (u_3')^2] \end{aligned} \quad (3-41)$$

که با استفاده از بسط تیلور ساده شده است. قید غیرقابل تغییر شکل بودن با برش موجب می‌شود تا در هر لحظه عمود بر سطح مقطع یعنی $a_1 = R\bar{a}_1$ منطبق بر مماس بر خط مرکزی یعنی $\frac{x'}{\|x'\|}$ باشد، در

نتیجه روابط (۳-۴۲) تا (۳-۴۴) به دست می‌آید [۴۴].

$$\frac{\bar{a}_1 + u'}{1 + \epsilon} = R\bar{a}_1 \quad (3-42)$$

$$\Rightarrow \bar{a}_1 + u' = (1 + \epsilon)R\bar{a}_1 \quad (3-43)$$

$$\begin{bmatrix} 1 + u_1' - \bar{\kappa}u_2 \\ u_2' + \bar{\kappa}u_1 \\ u_3' \end{bmatrix} = (1 + \epsilon) \begin{bmatrix} \cos \theta_2 \cos \theta_3 \\ \cos \theta_2 \sin \theta_3 \\ -\sin \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

با تقسیم سطرهای دو طرف ماتریس (۴۴-۳) روابط (۴۵-۳) و (۴۶-۳) به دست می‌آید [۴۴].

$$\tan \theta_2 = \frac{-u_3'}{\sqrt{(1 + u_1' - \bar{\kappa}u_2)^2 + (u_2' + \bar{\kappa}u_1)^2}} \quad (۴۵-۳)$$

$$\tan \theta_3 = \frac{u_2' + \bar{\kappa}u_1}{1 + u_1' - \bar{\kappa}u_2} \quad (۴۶-۳)$$

با استفاده از بسط تیلور $\arctan x \approx x$ و با قرار دادن روابط (۴۵-۳) و (۴۶-۳) در معادلات (۳۷-۳) و

در نظر گرفتن $\delta = 0$ و $\vartheta = \theta_3$ داریم [۴۴]:

$$\epsilon = u_1' - \bar{\kappa}u_2 + \frac{1}{2}[(u_2' + \bar{\kappa}u_1)^2 + (u_3')^2] \quad (۴۷-۳)$$

$$k_1 = \vartheta' + \bar{\kappa}u_3' + \bar{\kappa}^2 u_2 u_3' + u_3' u_2'' + \bar{\kappa}' u_2 u_3' \quad (۴۸-۳)$$

$$k_2 = -u_3'' + \bar{\kappa}\vartheta + [(u_1' - \bar{\kappa}u_2)u_3']' + \vartheta[(\bar{\kappa}u_1)' + u_2''] \quad (۴۹-۳)$$

$$k_3 = u_2'' + (\bar{\kappa}u_1)' + \vartheta u_2'' - \frac{1}{2}\bar{\kappa}(\vartheta^2 + u_3'^2) - [(\bar{\kappa}u_1 + u_2')(u_1' - \bar{\kappa}u_2)]' \quad (۵۰-۳)$$

برای راحتی کار در ادامه جهت مماسی u را معادل u_1 جهت v را معادل جهت u_2 و جهت w را معادل با

جهت u_3 در نظر می‌گیریم در نتیجه داریم:

$$\epsilon = u' - \bar{\kappa}v + \frac{1}{2}[(v' + \bar{\kappa}u)^2 + w'^2] \quad (۵۱-۳)$$

$$k_1 = \vartheta' + \bar{\kappa}w' + \bar{\kappa}^2vw' + w'v'' + \bar{\kappa}'vw' \quad (52-3)$$

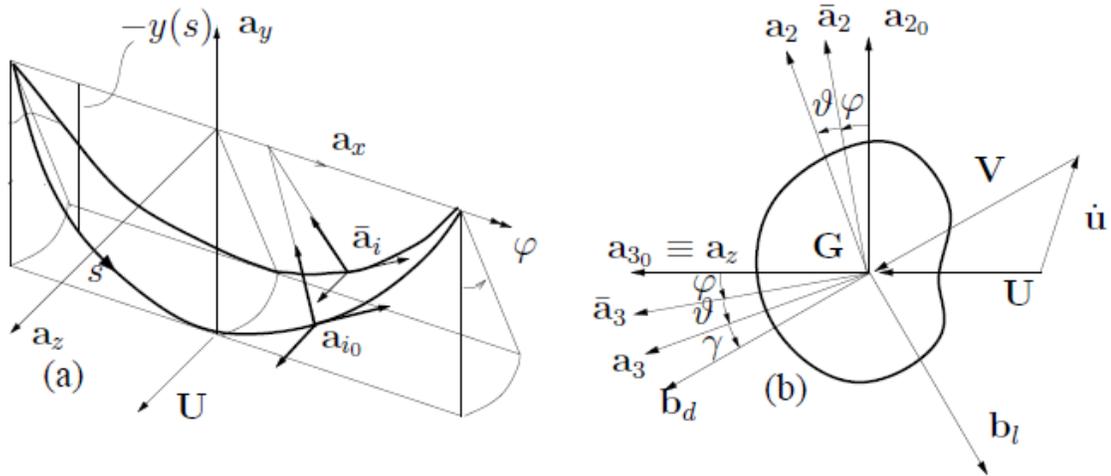
$$k_2 = -w'' + \bar{\kappa}\vartheta + [(u' - \bar{\kappa}v)w']' + \vartheta[(\bar{\kappa}u)' + v''] \quad (53-3)$$

$$k_3 = v'' + (\bar{\kappa}u)' + \vartheta v'' - \frac{1}{2}\bar{\kappa}(\vartheta^2 + w'^2) - [(\bar{\kappa}u + v')(u' - \bar{\kappa}v)]' \quad (54-3)$$

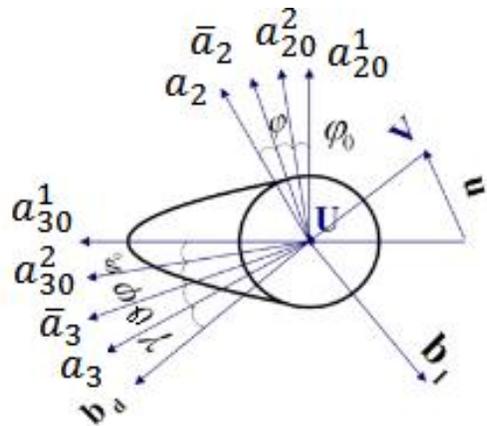
۲-۲-۳ معادلات حرکت

۱-۲-۲-۳ کابل افقی دو سر ثابت

در این قسمت کابل به صورت یک محور انعطاف پذیر با سطح مقطع صلب و صفحه‌ای مدل می‌شود که در آن سطح مقطع عمود بر محور باقی می‌ماند (یعنی سطح مقطع غیرقابل تغییر شکل با برش است)، فرض می‌شود که لایه‌ی یخ به‌طور یکنواخت طول کابل را پوشانده است و جریان باد به‌صورت افقی $\mathbf{U} = U\mathbf{a}_z$ به کابل می‌وزد. به‌منظور توصیف بهتر مدل کابل-تیر دستگاه مختصات به‌گونه‌ای تعریف می‌گردد که در آن جهت‌های ۱، ۲ و ۳، به ترتیب جهت‌های مماس بر کابل، عمود بر کابل و عمود بر صفحه‌ی کابل می‌باشند. برای توصیف کابل چهار پیکربندی در نظر گرفته می‌شود، الف- پیکربندی Γ_0^1 که در آن کابل فقط تحت نیروی وزن خود (شامل وزن لایه‌ی یخ)، $-mg\mathbf{a}_y$ است و کابل در صفحه‌ی عمودی $(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y)$ و در نتیجه سطح مقطع آن در صفحه‌ی $(\mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z)$ واقع شده است و داریم $\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_{20}$ و $\mathbf{a}_z = \mathbf{a}_{30}$. ب- پیکربندی Γ_0^2 که در آن خروج از مرکزی کابل در نظر گرفته شده است، در این حالت ممان‌های اول سطح S_2 و S_3 به‌منظور در نظر گرفتن خروج از مرکزی تعریف شده‌اند و این پیکربندی نسبت به پیکربندی Γ_0^1 به اندازه‌ی φ_0 دوران می‌کند. ج- پیکربندی مرجع $\bar{\Gamma}$ که در آن کابل در زمان $t = 0^+$ قرار دارد و فقط بخش استاتیکی نیروهای آیرودینامیکی باد، \bar{b}_i ، به آن وارد می‌شود. با این فرض که \bar{b}_i در طول کابل یکنواخت باشد، $\bar{\Gamma}$ همچنان صفحه‌ای باقی می‌ماند و این صفحه با پیکربندی اولیه زاویه‌ی φ را می‌سازد (شکل (۳-۴)).



شکل (۳-۴) زاویه دوران پیکربندی مرجع نسبت به پیکربندی اولیه ناشی از نیروی استاتیکی باد



شکل (۳-۵) نمایش پیکربندی‌های مختلف بر روی سطح مقطع کابل

برای این که کابل صفحه‌ای باقی بماند، تعادل نیازمند این است که برآیند نیروها، $\bar{\mathbf{b}} := \bar{\mathbf{b}}_i - m g \mathbf{a}_y$ ، در این صفحه قرار گیرد یعنی نیروی برآیند هیچ مؤلفه‌ای در جهت عمود بر این صفحه یعنی $\bar{\mathbf{a}}_3$ نداشته باشد [۴۲] در نتیجه:

$$\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a}_3 = (\bar{\mathbf{b}}_i - m g \mathbf{a}_y) \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \quad (۵۵-۳)$$

از آن جا که داریم:

$$\bar{\mathbf{b}}_i \cdot \mathbf{a}_3 = \bar{b}_3 \quad (۵۶-۳)$$

$$\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_3 = -\sin \varphi \quad (۵۷-۳)$$

بنابراین

$$\bar{b}_3(\varphi, U) + m g \sin \varphi = 0 \quad (۵۸-۳)$$

از آن جا که \bar{b}_3 خود تابعی از زاویه φ و سرعت باد U است در نتیجه رابطه‌ی (۵۸-۳) یک رابطه‌ی ضمنی برای زاویه‌ی φ است. همان‌طور که گفته شد، در این پیکربندی موقعیت هر نقطه از کابل با بردار $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}(s)$ مشخص می‌شود که در آن s پارامتر طول منحنی است و $s \in [0, l]$ و l طول اولیه‌ی کابل است و موقعیت سطح مقطع را می‌توان با استفاده از مختصات اینرسی $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \{\bar{\mathbf{a}}_1(s, t), \bar{\mathbf{a}}_2(s, t), \bar{\mathbf{a}}_3(s, t)\}$ تعیین نمود.

د- پیکربندی واقعی با Γ نمایش داده می‌شود و فرض می‌شود که کابل در زمان $t > 0$ در آن قرار دارد و بارهای ناشی از بخش دینامیکی نیروهای آیرودینامیکی باد، $\mathbf{b}_i - \bar{\mathbf{b}}_i$ ، به آن وارد می‌شوند، در این حالت کابل در حالت کلی صفحه‌ای نیست و موقعیت هر نقطه از آن را می‌توان با استفاده از بردار $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s, t)$ و موقعیت سطح مقطع را با مختصات اینرسی $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{a}_1(s, t), \mathbf{a}_2(s, t), \mathbf{a}_3(s, t)\}$ نمایش داد. انتقال از

پیکربندی مرجع به پیکربندی واقعی با استفاده از بردار جابه‌جایی \mathbf{u} و ماتریس دوران \mathbf{R} به صورت رابطه-
 ی (۱۴-۳) و (۱۶-۳) تعریف شد.

براساس تئوری همیلتون، ترم‌های انرژی باید معادله‌ی (۵۹-۳) را ارضا کنند.

$$\int_0^t \delta(T_k - V_s) dt + \int_0^t \delta W_{nc} dt = 0 \quad (۵۹-۳)$$

که در آن T_k ، V_s انرژی جنبشی، انرژی کرنشی کل می‌باشند و W_{nc} نشان‌دهنده‌ی کار نیروهای ناپایستار است. داریم [۴۶ و ۴۹]:

$$T_k = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho A [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] + \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 + \dot{v} S_2 \dot{\vartheta} + \dot{w} S_3 \dot{\vartheta} \right\} ds \quad (۶۰-۳)$$

$$V_s = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} (EA \epsilon^2 + EI_2 k_2^2 + EI_3 k_3^2 + GJ k_1^2) + T_0 \epsilon^N + M_1 k_1^N + M_2 k_2^N + M_3 k_3^N \right\} ds \quad (۶۱-۳)$$

$$\delta W_{nc} = \int_0^t \int_0^l \left\{ (b_1 - C_u \dot{u}) \delta u + (b_2 - C_v \dot{v}) \delta v + (b_3 - C_w \dot{w}) \delta w + (c_1 - C_\vartheta \dot{\vartheta}) \delta \vartheta \right\} ds dt \quad (۶۲-۳)$$

که در آن l طول کابل، ρ چگالی کابل، A مساحت سطح مقطع کابل، EA ، GJ ، EI_2 و EI_3 به ترتیب سختی محوری، سختی پیچشی و سختی‌های خمشی، C_u ، C_v ، C_w و C_ϑ ضرایب میرایی ساختاری، b_1 ، b_2 و b_3 دانسیته‌ی نیروها و کوپل خارجی و بالانویس N نشان‌دهنده‌ی قسمت غیرخطی می‌باشد. همچنین $S_2 = -e_y A$ و $S_3 = e_x A$ به ترتیب ممان اول سطح حول محور \mathbf{a}_2 و \mathbf{a}_3 ، $\bar{T} = \frac{\rho A g l^2}{8d}$ نیروی

کششی، $M_2 = 0$ و $M_3 = EI_2\kappa$ ممان‌های خمشی و $M_1 = (s - l/2)\rho Ag(e_y \cos(\varphi) + e_x \sin(\varphi))$ را در زمان $t = 0$ بیان می‌کنند [۴۳] و e_x و e_y خروج از مرکزی مقطع کابل نسبت به محور a_2 و a_3 می‌باشد. با قرار دادن معادلات (۶۰-۳) تا (۶۲-۳) در معادله‌ی (۵۹-۳) معادله‌ی (۶۳-۳) به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \delta H = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \{ & \rho A(\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{v}\delta\dot{v} + \dot{w}\delta\dot{w}) + J\dot{\vartheta}\delta\dot{\vartheta} \\ & + (b_1 - C_u\dot{u})\delta u + (b_2 - C_v\dot{v})\delta v + (b_3 - C_w\dot{w})\delta w \\ & + (c_1 - C_\vartheta\dot{\vartheta})\delta\vartheta + EA\epsilon\delta\epsilon + GJk_1\delta k_1 + EI_2k_2\delta k_2 \\ & + EI_3k_3\delta k_3 + T\delta\epsilon^N + M_1\delta k_1^N + M_2\delta k_2^N + M_3\delta k_3^N\} ds dt = 0 \end{aligned} \quad (63-3)$$

با بسط معادله (۶۳-۳) معادلات حرکت را می‌توان به صورت (۶۴-۳) تا (۶۷-۳) همراه با شرایط مرزی (۶۸-۳) تا (۷۱-۳) به دست آورد.

$$EA\epsilon' - \rho A\ddot{u} - C_u\dot{u} + b_1 = 0 \quad (64-3)$$

$$EA(\epsilon v')' + EA\bar{\kappa}\epsilon + \bar{T}v'' - \rho A\ddot{v} - C_v\dot{v} - \rho s_2\dot{\vartheta} + b_2 = 0 \quad (65-3)$$

$$EA(\epsilon w')' + \bar{T}w'' - \rho A\ddot{w} - C_w\dot{w} - \rho s_3\dot{\vartheta} + b_3 = 0 \quad (66-3)$$

$$\begin{aligned} GJk_1' - EI_1\bar{\kappa}k_2 - \rho J\dot{\vartheta} - C_\vartheta\dot{\vartheta} + c_1 - M_2(v'' + \bar{\kappa}) - M_3w'' - M_1\bar{\kappa}v' - \rho s_1\ddot{v} \\ - \rho s_2\ddot{w} = 0 \end{aligned} \quad (67-3)$$

$$u(0) = 0 \quad , \quad u(l) = 0 \quad (68-3)$$

$$v(0) = 0 \quad , \quad v(l) = 0 \quad (69-3)$$

$$w(0) = 0 \quad , \quad w(l) = 0 \quad (70-3)$$

$$GJk_1(0) = 0 \quad , \quad GJk_1(l) = 0 \quad (71-3)$$

که در آن مولفه‌های کرنش مربوط به آن به صورت ساده شده‌ی (۷۲-۳) تا (۷۵-۳) استفاده شده است و بر مبنای لاغری کابل و از آن جایی که $\frac{T}{A}$ در مقایسه با مدول الاستیک E کوچک است، آنالیز مرتبه‌ی (۳-۳) (۷۶) نیز در آن اعمال شده است.

$$\epsilon = u' - \kappa v + \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] \quad (72-3)$$

$$k_1 = \vartheta' + \kappa w' + w' v'' \quad (73-3)$$

$$k_2 = -w'' + \kappa \vartheta + \vartheta v'' \quad (74-3)$$

$$k_3 = v'' + (\kappa u)' + \vartheta v'' \quad (75-3)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{l}\right)^2 \ll 1 & \quad \frac{EI_{2,3}}{EAL^2} = O\left(\frac{r^2}{l^2}\right) \ll 1 & \quad O(EI_2) = O(EI_3) = O(GJ) \\ \frac{T}{EA} \ll 1 & \quad \frac{EI_{2,3}}{TL^2} \ll 1 & \quad (76-3) \end{aligned}$$

از آن جایی که مربع نسبت فرکانس عرضی به فرکانس طولی، و فرکانس عرضی به فرکانس پیچشی کوچک می‌باشد پیچش و کشش را می‌توان شبه‌پایا در نظر گرفت، در نتیجه عبارت‌های اینرسی در جهت طولی و پیچشی برابر با صفر می‌باشند، برای ساده‌سازی، $b_1 = 0$ و $c_1 = 0$ نیز فرض می‌شود در نتیجه داریم:

$$EA\epsilon' = 0 \quad (77-3)$$

$$EA = \text{constant} \Rightarrow \epsilon'(s, t) = 0 \Rightarrow \epsilon(s, t) = \epsilon_0(t) \quad (78-3)$$

از آن جایی که مشتق نسبت به مکان ϵ صفر شده است، می توان نتیجه گرفت که کرنش واحد در طول کابل ثابت است و فقط با زمان تغییر می کند، داریم:

$$\epsilon = u' - \bar{\kappa}v + \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] \quad (79-3)$$

$$\Rightarrow u' - \bar{\kappa}v + \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] = \epsilon_0(t) \quad (80-3)$$

$$\Rightarrow u = u_A(t) + \epsilon_0(t)(s - s_A) + \bar{\kappa} \int_{s_A}^s v ds - \frac{1}{2} \int_{s_A}^s (v'^2 + w'^2) ds \quad (81-3)$$

برای به دست آوردن $\epsilon_0(t)$ نیز باید از شرایط مرزی استفاده کرد.

$$\epsilon = u' - \kappa v + \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] = \epsilon_0(t) \quad (82-3)$$

$$u' = \epsilon_0(t) + \kappa v - \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] \quad (83-3)$$

$$\int_0^s u' ds = \int_0^s \epsilon_0(t) ds + \int_0^s \kappa v ds - \int_0^s \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] ds \quad (84-3)$$

$$u(s) = \epsilon_0(t)s + \int_0^s \bar{\kappa} v ds - \int_0^s \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] ds \quad (85-3)$$

برای شرایط مرزی دو سر ثابت داریم:

$$u(l) = 0 \quad (86-3)$$

$$u(l) = \epsilon_0(t)l + \int_0^l \bar{\kappa} v ds - \int_0^l \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] ds = 0 \quad (87-3)$$

$$\Rightarrow \epsilon_0(t) = -\frac{1}{l} \int_0^l (\bar{\kappa} v - \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2]) ds \quad (88-3)$$

$$u = u_A(t) + \epsilon_0(t)(s - s_A) + \bar{\kappa} \int_{s_A}^s v ds - \frac{1}{2} \int_{s_A}^s (v'^2 + w'^2) ds \quad (89-3)$$

$$\epsilon_0(t) = -\frac{1}{l} \int_0^l \left(\bar{\kappa}v - \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] \right) ds \quad (90-3)$$

$$\Rightarrow u = -\frac{s}{l} \int_0^l \left(\bar{\kappa}v - \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] \right) ds + \bar{\kappa} \int_0^s v(\xi, t) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^s (v'(\xi, t)^2 + w'(\xi, t)^2) d\xi \quad (91-3)$$

همان طور که گفته شد پیچش را نیز می توان شبه پایا فرض کرد اما از آن جایی که پیچش به راحتی ساده نمی شود، راحت تر است که از آن به عنوان معادله ی کمکی برای معادلات باقی مانده استفاده کنیم، در نتیجه با استفاده از (91-3) معادلات حرکت به صورت (92-3) تا (94-3) خلاصه می شوند.

$$\begin{aligned} -EA \left\{ \frac{\bar{\kappa}}{l} \int_0^l \left(\bar{\kappa}v - \frac{1}{2}v'^2 - \frac{1}{2}w'^2 \right) ds + \frac{v''}{l} \int_0^l \left(\bar{\kappa}v - \frac{1}{2}v'^2 - \frac{1}{2}w'^2 \right) ds \right\} + Tv'' \\ - \rho A \ddot{v} + (b_2 - c_v \dot{v}) = 0 \end{aligned} \quad (92-3)$$

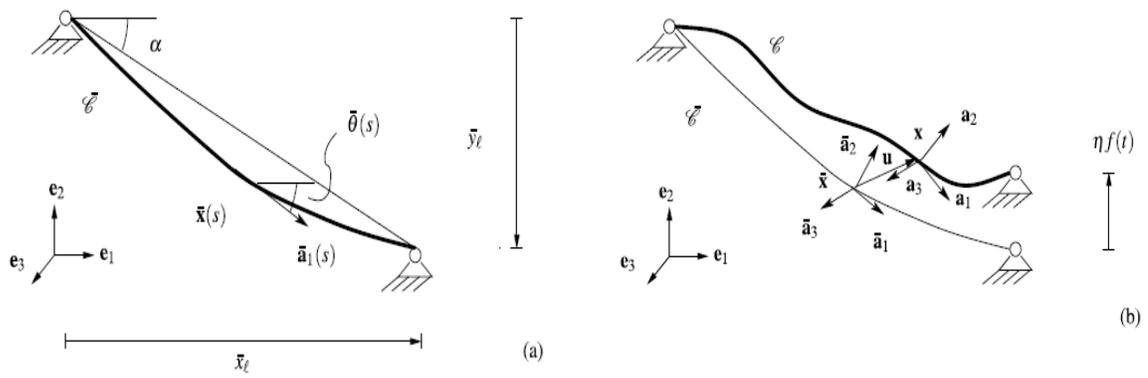
$$-EA \left\{ \frac{w''}{l} \int_0^l \left(\bar{\kappa}v - \frac{1}{2}v'^2 - \frac{1}{2}w'^2 \right) ds \right\} + Tw'' - \rho A \ddot{w} + (b_3 - c_w \dot{w}) = 0 \quad (93-3)$$

$$\begin{aligned} GJ\vartheta'' + (GJ + EI_1)\bar{\kappa}w'' - EI_1\bar{\kappa}^2\vartheta - M_1(v'' + \bar{\kappa}) - M_2w'' - M_3\bar{\kappa}v' - \rho s_2\ddot{v} \\ - \rho s_3\ddot{w} = 0 \end{aligned} \quad (94-3)$$

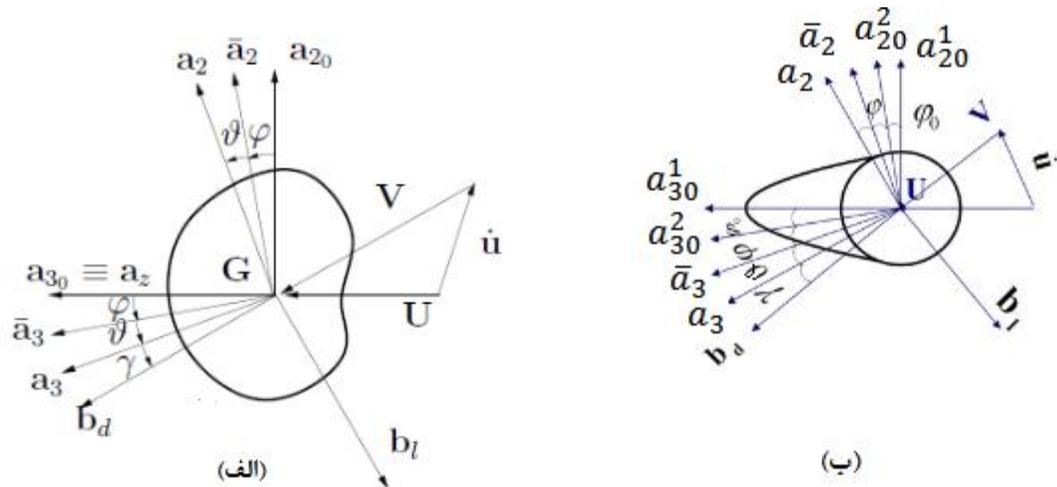
که در آن از آن جا که S_2 و S_3 در مقایسه با A خیلی کوچک هستند از عبارت های $\rho s_2\ddot{v}$ و $\rho s_3\ddot{w}$ در معادلات (94-3) و (95-3) صرف نظر شده است.

۲-۲-۲-۳ کابل شیب‌دار با یک پایه‌ی متحرک

در این حالت نیز مانند حالتی که در آن کابل افقی با دو تکیه‌گاه ثابت در نظر گرفته شد، از یک مدل کابل-تیر که تشکیل شده از یک محور انعطاف‌پذیر به همراه یک سطح مقطع صلب و صفحه‌ای است، استفاده شده است. در این حالت چهار پیکربندی برای کابل تعریف می‌شود، الف- پیکربندی Γ_0^1 که در آن کابل فقط تحت جاذبه است و کابل در صفحه‌ی عمودی (x, y) و در نتیجه سطح مقطع آن در صفحه-ی (y, z) واقع شده است. ب- پیکربندی Γ_0^2 که در آن خروج از مرکزی کابل در نظر گرفته شده است، در این حالت ممان‌های اول سطح S_2 و S_3 به‌منظور در نظر گرفتن خروج از مرکزی تعریف شده‌اند و این پیکربندی نسبت به پیکربندی Γ_0^1 به اندازه‌ی φ_0 دوران می‌کند. ج- پیکربندی مرجع $\bar{\Gamma}$ که در آن کابل در زمان $t = 0^+$ قرار دارد و فقط بخش استاتیکی نیروهای آیرودینامیکی باد به آن وارد می‌شود و کابل را نسبت به پیکربندی قبلی‌اش یعنی Γ_0^2 ، به اندازه‌ی φ دوران می‌دهد، در این حالت موقعیت هر نقطه از کابل با بردار $\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}(s)$ مشخص می‌شود که در آن s پارامتر طول منحنی است و $s \in [0, l]$ و l طول اولیه‌ی کابل است و موقعیت سطح مقطع را می‌توان با استفاده از مختصات اینرسی $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \{\bar{\mathbf{a}}_1(s, t), \bar{\mathbf{a}}_2(s, t), \bar{\mathbf{a}}_3(s, t)\}$ تعیین نمود. د- پیکربندی واقعی با Γ نمایش داده می‌شود و فرض می‌شود که کابل در زمان $t > 0$ در آن قرار دارد و بارهای ناشی از بخش دینامیکی نیروهای آیرودینامیکی باد و تحریک پایه‌ی سمت راست به آن وارد می‌شوند، در این حالت کابل در حالت کلی صفحه‌ای نیست و موقعیت هر نقطه از آن را می‌توان با استفاده از بردار $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s, t)$ و موقعیت سطح مقطع را با مختصات اینرسی $\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{a}_1(s, t), \mathbf{a}_2(s, t), \mathbf{a}_3(s, t)\}$ نمایش داد. انتقال از پیکربندی مرجع به پیکربندی واقعی را می‌توان با استفاده از بردار جابه‌جایی \mathbf{u} و تانسور دوران \mathbf{R} همان‌طور که در رابطه‌ی (۱۴-۳) و (۱۶-۳) آمده است، تعریف کرد. پیکربندی مرجع و واقعی و زاویه‌ی آویز کابل در شکل (۷-۳) و مختصات سطح مقطع کابل برای پیکربندی‌های در نظر گرفته شده در شکل (۸-۳) نشان داده شده است.



شکل (۳-۶) کابل شیب‌دار با تحریک پایه در پیکربندی مرجع و جاری



شکل (۳-۷) سطح مقطع کابل الف) بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی ب) با در نظر گرفتن خروج از مرکزی

با استفاده از قانون همیلتون توسعه یافته (۳-۶۳) معادلات حرکت و شرایط مرزی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$EA\epsilon' - \rho A\ddot{u} - C_u\dot{u} + b_1 = 0 \quad (۳-۹۵)$$

$$EA(\epsilon v')' + EA\bar{\kappa}\epsilon + \bar{T}v'' - \rho A\ddot{v} - C_v\dot{v} - \rho s_2\ddot{\vartheta} + b_2 = 0 \quad (96-3)$$

$$EA(\epsilon w')' + \bar{T}w'' - \rho A\ddot{w} - C_w\dot{w} - \rho s_3\ddot{\vartheta} + b_3 = 0 \quad (97-3)$$

$$GJk_1' - EI_1\bar{\kappa}k_2 - \rho J\ddot{\vartheta} - C_\vartheta\dot{\vartheta} + c_1 - M_2(v'' + \bar{\kappa}) - M_3w'' - M_1\bar{\kappa}v' - \rho s_1\ddot{v} - \rho s_2\ddot{w} = 0 \quad (98-3)$$

$$u(0) = 0 \quad , \quad u(l) = \eta f(t) \sin \alpha \quad (99-3)$$

$$v(0) = 0 \quad , \quad v(l) = \eta f(t) \cos \alpha \quad (100-3)$$

$$w(0) = 0 \quad , \quad w(l) = 0 \quad (101-3)$$

$$GJk_1(0) = 0 \quad , \quad GJk_1(l) = 0 \quad (102-3)$$

همان طور که گفته شد، از آن جا که مربع نسبت فرکانس عرضی به فرکانس طولی، و فرکانس عرضی به فرکانس پیچشی کوچک می باشد پیچش و کشش را می توان شبه پایا در نظر گرفت، در نتیجه عبارتهای اینرسی در جهت طولی و پیچشی برابر با صفر می باشند، برای ساده سازی، $b_1 = 0$ و $c_1 = 0$ نیز صفر فرض می کنیم در نتیجه داریم:

$$EA\epsilon' = 0 \quad (103-3)$$

$$EA = constant \Rightarrow \epsilon'(s, t) = 0 \Rightarrow \epsilon(s, t) = \epsilon_0(t) \quad (104-3)$$

یعنی از آن جایی که مشتق نسبت به مکان ϵ صفر شده است، می توان نتیجه گرفت که کرنش واحد در طول کابل ثابت است و فقط با زمان تغییر می کند، داریم:

$$\epsilon(s, t) = \epsilon_0(t) \quad (105-3)$$

$$\epsilon = u' - \bar{\kappa}v + \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2]$$

$$\Rightarrow u' - \bar{\kappa}v + \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] = \epsilon_0(t) \quad (106-3)$$

$$\Rightarrow u = u_A(t) + \epsilon_0(t)(s - s_A) + \bar{\kappa} \int_{s_A}^s v ds - \frac{1}{2} \int_{s_A}^s (v'^2 + w'^2) ds \quad (107-3)$$

برای به دست آوردن $\epsilon_0(t)$ نیز باید از شرایط مرزی استفاده کرد.

$$\epsilon = u' - \bar{\kappa}v + \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] = \epsilon_0(t) \quad (108-3)$$

$$u' = \epsilon_0(t) + \bar{\kappa}v - \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] \quad (109-3)$$

$$\int_0^s u' ds = \int_0^s \epsilon_0(t) ds + \int_0^s \bar{\kappa}v ds - \int_0^s \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] ds \quad (110-3)$$

$$u(s) = \epsilon_0(t)s + \int_0^s \bar{\kappa}v ds - \int_0^s \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] ds \quad (111-3)$$

برای شرایط مرزی پایه‌ی سمت راست متحرک داریم:

$$u(l) = \eta f(t) \sin \alpha \quad (112-3)$$

$$u(l) = \epsilon_0(t)l + \int_0^l \bar{\kappa}v ds - \int_0^l \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2] ds = \eta f(t) \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 = \frac{\eta f(t) \sin \alpha}{l} - \frac{1}{l} \int_0^l (\bar{\kappa}v - \frac{1}{2}[v'^2 + w'^2]) ds \quad (113-3)$$

$$u = u_A(t) + \epsilon_0(t)(s - s_A) + \bar{\kappa} \int_{s_A}^s v ds - \frac{1}{2} \int_{s_A}^s (v'^2 + w'^2) ds \quad (114-3)$$

$$\epsilon_0(t) = \frac{\eta f(t) \sin \alpha}{l} - \frac{1}{l} \int_0^l (\bar{\kappa} v - \frac{1}{2} [v'^2 + w'^2]) ds \quad (115-3)$$

$$\Rightarrow u = \left(\frac{\eta f(t) \sin \alpha}{l} - \frac{1}{l} \int_0^l (\bar{\kappa} v - \frac{1}{2} [v'^2 + w'^2]) ds \right) (s) + \bar{\kappa} \int_0^s v(\xi, t) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^s (v'(\xi, t)^2 + w'(\xi, t)^2) d\xi \quad (116-3)$$

در نتیجه به طور خلاصه

$$u(s, t) = (\eta f(t) \sin \alpha) \frac{s}{l} - \frac{s}{l} \int_0^l (\bar{\kappa} v - \frac{1}{2} [v'^2 + w'^2]) ds + \bar{\kappa} \int_0^s v(\xi, t) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^s (v'(\xi, t)^2 + w'(\xi, t)^2) d\xi \quad (117-3)$$

همان طور که گفته شد پیچش را نیز می توان شبه پایا فرض کرد اما از آن جایی که پیچش به راحتی ساده نمی شود، راحت تر است که از آن به عنوان معادله ی کمکی برای معادلات باقی مانده استفاده کنیم، در نتیجه معادلات حرکت به صورت (۱۲۱-۳) تا (۱۲۳-۳) خلاصه می شوند

$$\frac{EA}{l} (\bar{\kappa} + v'') \left[\eta f(t) \sin \alpha - \int_0^l \left(\bar{\kappa} v - \frac{1}{2} v'^2 - w'^2 \right) ds \right] + \bar{T} v'' - \rho A \ddot{v} - \rho s_2 \dot{v} - C_v \dot{v} + b_2 = 0 \quad (118-3)$$

$$\frac{EA}{l} w'' \left[\eta f(t) \sin \alpha - \int_0^l \left(\bar{\kappa} v - \frac{1}{2} v'^2 - w'^2 \right) ds \right] + \bar{T} w'' - \rho A \ddot{w} - \rho s_3 \dot{w} - C_w \dot{w} + b_3 = 0 \quad (119-3)$$

$$GJ \vartheta'' + (GJ + EI_1) \bar{\kappa} w'' - EI_1 \bar{\kappa}^2 \vartheta - M_2 (v'' + \bar{\kappa}) - M_3 w'' - M_1 \bar{\kappa} v' - \rho s_2 \dot{v}$$

$$-\rho s_3 \ddot{w} = 0 \quad (۱۲۰-۳)$$

از آن جا که براساس پارامترهای کابل در واقعیت S_2 و S_3 در مقایسه با A خیلی کوچک هستند بنابراین می توان از $\rho s_2 \ddot{v}$ و $\rho s_3 \ddot{v}$ در معادلات (۳-۱۱۸) و (۳-۱۱۹) صرف نظر کرد. سیستم مورد بررسی دارای شرایط مرزی ناهمگن می باشد، لذا به منظور به دست آوردن سیستم معادل با شرایط مرزی همگن، در ابتدا تبدیل (۳-۱۲۱) فرض می شود.

$$v(s, t) = \hat{v}(s)\eta f(t) + \tilde{v}(s, t) \quad (۳-۱۲۱)$$

که در آن $\hat{v}(s)$ مولفه ی شبه پایا و $\tilde{v}(s, t)$ مولفه ی دینامیکی حل می باشد. مولفه ی شبه پایا $\hat{v}(s)$ را از حل سیستم ناهمگن خطی شده ی (۳-۱۲۲) به همراه شرایط مرزی (۳-۱۲۳) می توان به دست آورد، که استاتیک صفحه ای و خطی شده ی کابل را توصیف می کند و حرکت پایه با دامنه ی واحد و مستقل از زمان به آن اعمال می شود.

$$\frac{EA}{l} \bar{\kappa} \sin \alpha - \frac{EA}{l} \bar{\kappa}^2 \int_0^l \hat{v} ds + T \hat{v}'' = 0 \quad (۳-۱۲۲)$$

$$\hat{v}(0) = 0 \quad , \quad \hat{v}(l) = \cos \alpha \quad (۳-۱۲۳)$$

حل خصوصی این سیستم به صورت رابطه (۳-۱۲۴) به دست می آید که در آن C_1 و C_2 با رابطه ی (۳-۱۲۵) تعریف شده است.

$$\hat{v}(s) = C_1 s^2 + C_2 s \quad (۳-۱۲۴)$$

$$C_1 = \frac{-3EAmg\cos^2(\alpha)(2\sin(\alpha)\bar{T} - mgl\cos^2(\alpha))}{EA m^2 g^2 \cos^3(\alpha) l^3 + 12\bar{T}^3 l}$$

$$C_2 = \frac{6EAmg\cos(\alpha)l\sin(\alpha)\bar{T} - 2EA m^2 g^2 \cos^3(\alpha) l^2 + 12\bar{T}^3}{EA m^2 g^2 \cos^3(\alpha) l^3 + 12\bar{T}^3 l} \quad (125-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{EA}{l}(\hat{v}''\eta f + v'' + \bar{\kappa})[\eta f \sin \alpha - \int_0^l [\bar{\kappa}(\hat{v}\eta f + v) - \frac{1}{2}(\hat{v}'\eta f + v')^2 - \frac{1}{2}w'^2]ds] \\ + \bar{T}(\hat{v}''\eta f + v'') + b_2 - \rho A(\hat{v}\eta \ddot{f} + \ddot{v}) - c_v(\hat{v}\eta \dot{f} + \dot{v}) = 0 \end{aligned} \quad (126-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{EA}{l}w''[\eta f \sin \alpha - \int_0^l [\bar{\kappa}(\hat{v}\eta f + v) - \frac{1}{2}(\hat{v}'\eta f + v')^2 - \frac{1}{2}w'^2]ds] + \bar{T}w'' + b_3 \\ - \rho A\ddot{w} - c_w\dot{w} = 0 \end{aligned} \quad (127-3)$$

$$\begin{aligned} GJ\vartheta'' + (GJ + EI_1)\bar{\kappa}w'' - EI_1\bar{\kappa}^2\vartheta - M_2(v'' + \bar{\kappa}) - M_3w'' - M_1\bar{\kappa}v' - \rho s_2\ddot{v} \\ - \rho s_3\ddot{w} = 0 \end{aligned} \quad (128-3)$$

$$v(0) = 0 \quad , \quad v(l) = 0 \quad (129-3)$$

$$w(0) = 0 \quad , \quad w(l) = 0 \quad (130-3)$$

$$GJk_1(0) = 0 \quad , \quad GJk_1(l) = 0 \quad (131-3)$$

۳-۳ مدل سازی آیرودینامیکی

با استفاده از یک مدل آیرودینامیکی ساده نیروهای آیرودینامیکی b_2 و b_3 را با استفاده از فرضیات زیر می توان به دست آورد: الف- تئوری شبه پایا در نظر گرفته شده است [۲۵]؛ ب- از انحنای کابل صرف نظر شده است؛ ج- یخ به طور یکنواخت طول کابل را پوشانده؛ د- از کوپل های آیرودینامیکی صرف نظر شده؛ ه- بارها با در نظر گرفتن دوران پیچشی به دست آمده اند و از دوران های خمشی صرف نظر شده است. مانند آنچه در شکل (۸-۳) نشان داده شده است، باد با سرعت U به صفحه ی کابل می وزد. با تصویر کردن سرعت باد بر روی سطح مقطع کابل با استفاده از رابطه ی (۳-۱۳۲) مولفه ی \tilde{U} که بر روی مقطع کابل اثر می گذارد به دست می آید که در آن β زاویه ی انحراف کابل نسبت به باد و α زاویه ی آویز کابل می باشد. زاویه ی حمله ی γ به صورت زاویه ی بین سرعت باد وزیده شده به مقطع و یک محور مرجع تعریف می شود که در این مقاله محور \mathbf{a}_3 به عنوان محور مرجع در نظر گرفته شده است. زاویه ی حمله ی γ را می توان با استفاده از رابطه ی (۳-۱۳۳) به دست آورد که در آن $\tilde{U} = \|\tilde{U}\|$ می باشد.

$$\tilde{U} = U\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(a)\sin^2(\beta)} \quad (۳-۱۳۲)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= -\arcsin\left(\frac{\tilde{U}}{\tilde{U}} \cdot \mathbf{a}_2\right) \\ &= -\arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(a)\sin^2(\beta)}}\right) \end{aligned} \quad (۳-۱۳۳)$$

نیروهای آیرودینامیکی b_2 و b_3 را با استفاده از رابطه (۳-۱۳۴) می توان به دست آورد.

$$b_i = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} V r (C_d[\gamma] \mathbf{V} + C_l[\gamma] \mathbf{a}_3 \times \mathbf{V}) \quad (۳-۱۳۴)$$

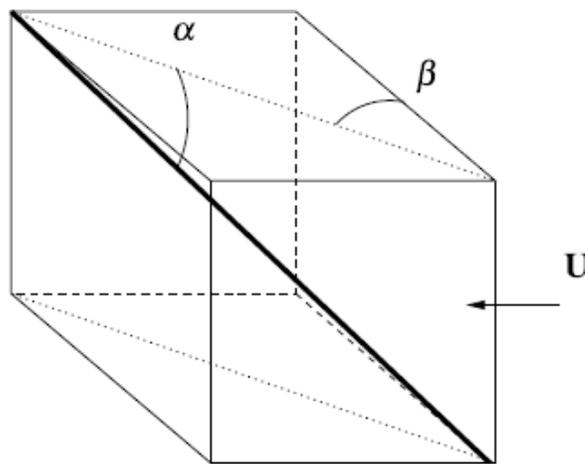
که در آن γ زاویه‌ی حمله، V سرعت نسبی باد نسبت به مقطع، ρ_{air} چگالی هوا، r شعاع مشخصه‌ی کابل و $V = \|V\|$ و اندازه‌ی سرعت نسبی است، همچنین C_d و C_l ضرایب آیرودینامیکی لیفت و درگ هستند که به شکل مقطع و زاویه‌ی حمله بستگی دارند و با روابط (۳-۱۳۵) و (۳-۱۳۶) تعریف می‌شوند.

$$C_l[\gamma] = aa_{1,0} + aa_{1,1}\chi + \frac{1}{2}aa_{1,2}\chi^2 + \frac{1}{6}aa_{1,3}\chi^3 \quad (۳-۱۳۵)$$

$$C_d[\gamma] = aa_{2,0} + aa_{2,1}\chi + \frac{1}{2}aa_{2,2}\chi^2 + \frac{1}{6}aa_{2,3}\chi^3 \quad (۳-۱۳۶)$$

که در آن χ به صورت (۳-۱۳۷) تعریف می‌شود و ضرایب $aa_{i,j}$ ضرایب آیرودینامیکی در پیکربندی مرجع می‌باشند که با استفاده از نتایج تجربی به دست می‌آیند و به صورت رابطه‌ی (۳-۱۳۸) تعریف می‌شود.

$$\chi = -\vartheta + \frac{\dot{v}}{U} \cos(\varphi) - \frac{\dot{w}}{U} \sin(\varphi) \quad (۳-۱۳۷)$$



شکل (۳-۸) کابل شیب‌دار با شیب α و زاویه انحراف β در معرض باد

$$aa_{1,0} = \overline{c_l[\gamma]} \quad , \quad aa_{1,1} = (\overline{c_l[\gamma]})' \quad , \quad aa_{1,2} = (\overline{c_l[\gamma]})'' \quad , \quad aa_{1,3} = (\overline{c_l[\gamma]})'''$$

$$aa_{2,0} = \overline{c_d[\gamma]} \quad , \quad aa_{2,1} = (\overline{c_d[\gamma]})' \quad aa_{2,2} = (\overline{c_d[\gamma]})'' \quad , \quad aa_{2,3} = (\overline{c_d[\gamma]})''' \quad (138-3)$$

با قرار دادن معادلات (3-132) و (3-133) و معادلات (3-135) تا (3-138) در معادله (3-134)، بسط آن تا مرتبه سوم و سپس تصویر کردن آن بر روی محورهای \mathbf{a}_2 و \mathbf{a}_3 ، مؤلفه‌های نیرو به صورت رابطه‌ی (3-139) به دست می‌آیند.

$$b_i = \bar{b}_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij}(\varphi)\xi_j + \sum_{j,k=1}^3 c_{ijk}(\varphi)\xi_j\xi_k + \sum_{j,k,l=1}^3 c_{ijkl}\xi_j\xi_k\xi_l \quad (139-3)$$

که برای $i = 2, 3$ برقرار است و $\xi = (\vartheta, \dot{v}, \dot{w})^T$ برداری است که در آن تمامی متغیرهای مستقل قرار دارند. c_{ij} ، c_{ijk} و c_{ijkl} ضرایبی هستند که به C_d و C_l و مشتق آن‌ها نسبت به φ بستگی دارند و تمامی این متغیرها در پیکربندی اولیه محاسبه شده است. ضرایب آیرودینامیکی در پیوست ذکر شده است.

فصل چہارم

حل معادلات

۴- حل معادلات

۴-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا با تعریف پارامترهای بی‌بعد و قرار دادن این پارامترها در معادلات حرکت به‌دست آمده در فصل سوم، شکل بی‌بعد معادلات به‌دست می‌آید. سپس این معادلات بی‌بعد با استفاده از روش گلرکین با تعریف توابع ویژه و مقادیر ویژه و قرار دادن آن در معادلات بی‌بعد، گسسته می‌شود. معادلات به‌دست آمده دارای غیرخطی‌های مرتبه دو و مرتبه سه هم در جابه‌جایی و هم در سرعت می‌باشند. این معادلات در زیربخش (۴-۴) با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه در اغتشاشات مهار می‌شود.

۴-۲ بی‌بعدسازی

با تعریف مقادیر زیر می‌توان به شکل بی‌بعد معادلات دست یافت.

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{s}{l} & u^* &= \frac{u}{l} & t^* &= \omega t \\ v^* &= \frac{v}{l} & w^* &= \frac{w}{l} & \vartheta^* &= \vartheta \end{aligned} \quad (۱-۴)$$

با جای‌گذاری روابط بالا در معادلات حرکت شکل بی‌بعد معادلات به‌دست می‌آید که در آن روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} c_n^* &= \frac{\omega l^2}{EA} c_n & \omega &= \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\bar{T}}{m}} & I_1^* &= \frac{\omega^2}{EA} I_1 & b_{a_i}^* &= \frac{l}{EA} b_{a_i} & c_{a_1}^* &= \frac{l}{EA} c_{a_1} \\ c_{\vartheta}^* &= \frac{\omega}{EA} c_{\vartheta} & m^* &= \frac{\omega^2 l^2}{EA} m & \chi &= \frac{GJ}{EI} & \kappa^* &= \frac{\bar{\kappa}}{l} & \tau &= \frac{\bar{T}}{EA} \end{aligned}$$

(۲-۴)

و زیرنویس n نشان دهنده‌ی پارامترهای u, v, w می‌باشد. برای کابل افقی با دو پایه‌ی ثابت معادلات بی- بعد شده در معادلات (۳-۴) تا (۵-۴) و برای کابل شیب‌دار با تحریک پایه در معادلات (۶-۴) تا (۸-۴) آمده است.

$$-(\kappa^* + v^{*''}) \left[\int_0^1 \left(\kappa^* v^* - \frac{1}{2} v^{*'}{}^2 - \frac{1}{2} w^{*'}{}^2 \right) ds^* \right] + \tau v^{*''} - m^* \ddot{v}^* - C_v^* \dot{v}^* + b_2^* = 0 \quad (۳-۴)$$

$$-w^{*''} \left[\int_0^1 \left(\kappa^* v^* - \frac{1}{2} v^{*'}{}^2 - \frac{1}{2} w^{*'}{}^2 \right) ds^* \right] + \tau w^{*''} - m^* \ddot{w}^* - C_w^* \dot{w}^* + b_3^* = 0 \quad (۴-۴)$$

$$X\vartheta^{*''} + (X+1)\kappa^* w^{*''} - \kappa^{*2}\vartheta^* - \kappa^*\vartheta^* v^{*''} + X(v^{*''} w^{*'})' - \frac{M_1 L}{EI} (v^{*''} + \kappa) - \frac{M_2 L}{EI} w^{*''} - \frac{M_3 L}{EI} \kappa v' - \frac{\rho s_2 L^3 \omega^2}{EI} \ddot{v} - \frac{\rho s_3 L^3 \omega^2}{EI} \ddot{w} = 0 \quad (۵-۴)$$

$$(\hat{v}^{*''} \eta f + v^{*''} + \kappa^*) [\eta f \sin \alpha - \int_0^1 [\kappa^* (\hat{v} \eta f + v^*) - \frac{1}{2} (\hat{v}' \eta f + v^{*'})^2 - \frac{1}{2} w^{*'}{}^2] ds^*] + \tau (\hat{v}^{*''} \eta f + v^{*''}) + b_2^* - m^* (\hat{v} \eta \dot{f} + \dot{v}^*) - c_v^* (\hat{v} \eta \dot{f} + \dot{v}^*) = 0 \quad (۶-۴)$$

$$w^{*''} [\eta f \sin \alpha - \int_0^1 [\kappa^* (\hat{v} \eta f + v^*) - \frac{1}{2} (\hat{v}' \eta f + v^{*'})^2 - \frac{1}{2} w^{*'}{}^2] ds^*] + \tau w^{*''} + b_3^* - m^* \ddot{w}^* - c_w^* \dot{w}^* = 0 \quad (۷-۴)$$

$$\begin{aligned}
& X\vartheta^{*''} + (X + 1)\kappa^*w^{*''} - \kappa^{*2}\vartheta^* - \kappa^*\vartheta^*(\hat{v}^{*''}\eta f + v^{*''}) \\
& + X\left((\hat{v}^{*''}\eta f + v^{*''})w^{*'}\right)' - \frac{M_1L}{EI}(\hat{v}^{*''}\eta f + v^{*''} + \kappa) - \frac{M_2L}{EI}w^{*''} \\
& - \frac{M_3L}{EI}\kappa(\hat{v}^{*'}\eta f + v^{*'}) - \frac{\rho S_2L^3\omega^2}{EI}(\hat{v}^*\eta \dot{f} + \dot{v}^*) - \frac{\rho S_3L^3\omega^2}{EI}\ddot{w}^* = 0
\end{aligned} \tag{۸-۴}$$

در ادامه بالانویس ‘*’ به منظور ساده سازی حذف شده است.

۴-۳ گسسته سازی

به منظور گسسته کردن معادلات حرکت به دست آمده در قسمت های قبل از روش گلرکین استفاده می شود. با در نظر گرفتن توابع $w = f_2[s]q_2[t]$ ، $v = f_1[s]q_1[t]$ و $\vartheta = f_3[s]q_3[t]$ که در آن $f_1[s]$ ، $f_2[s]$ و $f_3[s]$ شکل مُد در جهت عمود بر کابل، عمود بر صفحه ی کابل و در جهت پیچش و $q_1[t]$ ، $q_2[t]$ و $q_3[t]$ دامنه ی آن می باشد. با قرار دادن این توابع در معادله (۴-۵) و (۴-۸) رابطه ی (۴-۹) به دست می آید. با استفاده از این رابطه و با جای گذاری این توابع در معادلات حرکت و مرتب کردن آن ها بر اساس ضرایب q_1 و q_2 می توان به شکل گسسته ی هر یک از معادلات حرکت دست پیدا کرد.

$$q_3 = \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 + \beta_3 \tag{۹-۴}$$

معادلات گسسته شده برای کابل دو سر ثابت در معادلات (۴-۱۰) و (۴-۱۱) و برای کابل با تحریک پایه در معادلات (۴-۱۲) و (۴-۱۳) آمده است.

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 - (m_5 q_1^2 + m_{15} q_1^3 + m_4 q_2 + m_6 q_1 q_2 + m_{16} q_1^2 q_2 + m_7 q_2^2 \\
& + m_{17} q_1 q_2^2 + m_{18} q_2^3 + m_1 \dot{q}_1 + m_8 q_1 \dot{q}_1 + m_{19} q_1^2 \dot{q}_1 + m_9 q_2 \dot{q}_1 \\
& + m_{20} q_1 q_2 \dot{q}_1 + m_{21} q_2^2 \dot{q}_1 + m_{10} \dot{q}_1^2 + m_{22} q_1 \dot{q}_1^2 + m_{23} q_2 \dot{q}_1^2 + m_{24} \dot{q}_1^3 \\
& + m_2 \dot{q}_2 + m_{11} q_1 \dot{q}_2 + m_{25} q_1^2 \dot{q}_2 + m_{12} q_2 \dot{q}_2 + m_{26} q_1 q_2 \dot{q}_2 + m_{27} q_2^2 \dot{q}_2 \\
& + m_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{28} q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{29} q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{30} \dot{q}_1^2 \dot{q}_2 + m_{14} \dot{q}_2^2 \\
& + m_{31} q_1 \dot{q}_2^2 + m_{32} q_2 \dot{q}_2^2 + m_{33} \dot{q}_1 \dot{q}_2^2 + m_{34} \dot{q}_2^3) = 0
\end{aligned} \tag{10-4}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 - (n_5 q_1^2 + n_{15} q_1^3 + n_3 q_1 + n_6 q_1 q_2 + n_{16} q_1^2 q_2 + n_7 q_2^2 \\
& + n_{17} q_1 q_2^2 + n_{18} q_2^3 + n_1 \dot{q}_1 + n_8 q_1 \dot{q}_1 + n_{19} q_1^2 \dot{q}_1 + n_9 q_2 \dot{q}_1 + n_{20} q_1 q_2 \dot{q}_1 \\
& + n_{21} q_2^2 \dot{q}_1 + n_{10} \dot{q}_1^2 + n_{22} q_1 \dot{q}_1^2 + n_{23} q_2 \dot{q}_1^2 + n_{24} \dot{q}_1^3 + n_2 \dot{q}_2 + n_{11} q_1 \dot{q}_2 \\
& + n_{25} q_1^2 \dot{q}_2 + n_{12} q_2 \dot{q}_2 + n_{26} q_1 q_2 \dot{q}_2 + n_{27} q_2^2 \dot{q}_2 + n_{13} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + n_{28} q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& + n_{29} q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + n_{30} \dot{q}_1^2 \dot{q}_2 + n_{14} \dot{q}_2^2 + n_{31} q_1 \dot{q}_2^2 + n_{32} q_2 \dot{q}_2^2 + n_{33} \dot{q}_1 \dot{q}_2^2 \\
& + n_{34} \dot{q}_2^3) = 0
\end{aligned} \tag{11-4}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 - \{(h_1 \eta \dot{f} + h_2 \eta^2 \dot{f}^2 + h_3 \eta \dot{f} + h_4 \eta^2 \dot{f}^2) q_1 \\
& + (m_4 + h_{4,1} \eta \dot{f} + h_{4,2} \eta^2 \dot{f}^2) q_2 + (m_5 + h_{5,1} \eta \dot{f} + h_{5,2} \eta \dot{f}) q_1^2 \\
& + (m_7 + h_{7,1} \eta \dot{f} + h_{7,2} \eta \dot{f}) q_2^2 + m_{15} q_1^3 + m_{18} q_2^3 + (m_6 + h_{6,1} \eta \dot{f}) q_1 q_2 \\
& + (m_8 + h_{8,1} \eta \dot{f}) q_1 \dot{q}_1 + (m_9 + h_{9,1} \eta \dot{f}) q_2 \dot{q}_1 + (m_{11} + h_{11,1} \eta \dot{f}) q_1 \dot{q}_2 \\
& + (m_{12} + h_{12,1} \eta \dot{f}) q_2 \dot{q}_2 + m_{16} q_1^2 q_2 + m_{17} q_1 q_2^2 + m_{19} \dot{q}_1 q_1^2 + m_{21} \dot{q}_1 q_2^2 \\
& + m_{25} \dot{q}_2 q_1^2 + m_{27} \dot{q}_2 q_2^2 + m_{22} \dot{q}_1^2 q_1 + m_{23} \dot{q}_1^2 q_2 + m_{31} \dot{q}_2^2 q_1 \\
& + m_{32} \dot{q}_2^2 q_2 + m_{20} q_1 q_2 \dot{q}_1 + m_{26} q_1 q_2 \dot{q}_2 + m_{28} q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{29} q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\
& + m_{34} \dot{q}_2^3 + (m_{14} + h_{14,1} \eta \dot{f}) \dot{q}_2^2 + (m_2 + h_{2,1} \eta \dot{f} + h_{2,2} \eta^2 \dot{f}^2) \dot{q}_2 + m_{24} \dot{q}_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (m_{10} + h_{10,1}\eta\dot{f})\dot{q}_1^2 + (m_1 + h_{1,1}\eta\dot{f} + h_{1,2}\eta^2\dot{f}^2)\dot{q}_1 \\
& + (m_{13} + h_{13,1}\eta\dot{f})\dot{q}_1\dot{q}_2 + m_{30}\dot{q}_1^2\dot{q}_2 + m_{33}\dot{q}_1\dot{q}_2^2 + m_{35} + h_{35,1}\eta\dot{f} \\
& + \{h_{35,2}\eta^2\dot{f}^2 + h_{35,3}\eta^3\dot{f}^3 + h_{35,4}\eta\dot{f} + h_{35,5}\eta^2\dot{f}^2 + h_{35,6}\eta^3\dot{f}^3 + h_{35,7}\eta\ddot{f}\} \\
& = 0
\end{aligned} \tag{۱۲-۴}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 - \{(n_3 + g_{3,1}\eta\dot{f} + g_{3,2}\eta^2\dot{f}^2)q_1 \\
& + (g_1\eta\dot{f} + g_2\eta^2\dot{f}^2 + g_3\eta\dot{f} + g_4\eta^2\dot{f}^2)q_2 + (n_5 + g_{5,1}\eta\dot{f})q_1^2 \\
& + (n_7 + g_{7,1}\eta\dot{f})q_2^2 + n_{15}q_1^3 + n_{18}q_2^3 + (n_6 + g_{6,1}\eta\dot{f} + g_{6,2}\eta\dot{f})q_1q_2 \\
& + (n_8 + g_{8,1}\eta\dot{f})q_1\dot{q}_1 + (n_9 + g_{9,1}\eta\dot{f})q_2\dot{q}_1 + (n_{11} + g_{11,1}\eta\dot{f})q_1\dot{q}_2 \\
& + (n_{12} + g_{12,1}\eta\dot{f})q_2\dot{q}_2 + n_{16}q_1^2q_2 + n_{17}q_1q_2^2 + n_{19}q_1q_1^2 + n_{21}q_1q_2^2 \\
& + n_{25}q_2q_1^2 + n_{27}q_2q_2^2 + n_{22}q_1^2q_1 + n_{23}q_1^2q_2 + n_{31}q_2^2q_1 + n_{32}q_2^2q_2 \\
& + n_{20}q_1q_2\dot{q}_1 + n_{26}q_1q_2\dot{q}_2 + n_{28}q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 + n_{29}q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + n_{34}\dot{q}_2^3 \\
& + (n_{14} + g_{14,1}\eta\dot{f})\dot{q}_2^2 + (n_2 + g_{2,1}\eta\dot{f} + g_{2,2}\eta^2\dot{f}^2)\dot{q}_2 + n_{24}\dot{q}_1^3 \\
& + (n_{10} + g_{10,1}\eta\dot{f})\dot{q}_1^2 + (n_1 + g_{1,1}\eta\dot{f} + g_{1,2}\eta^2\dot{f}^2)\dot{q}_1 \\
& + (n_{13} + g_{13,1}\eta\dot{f})\dot{q}_1\dot{q}_2 + n_{30}\dot{q}_1^2\dot{q}_2 + n_{33}\dot{q}_1\dot{q}_2^2 + n_{35} + g_{35,1}\eta\dot{f} \\
& + \{g_{35,2}\eta^2\dot{f}^2 + h_{35,3}\eta^3\dot{f}^3\} = 0
\end{aligned} \tag{۱۳-۴}$$

که ضرایب آن در پیوست بیان شده است.

۴-۴ حل پرتوربیشن

در این پژوهش روش مقیاس‌های چندگانه (MSM) در اغتشاشات، به منظور توصیف دینامیک آرام سیستم به کار می‌رود. از آن جا که در معادلات حرکت ترم‌های غیرخطی مرتبه دو و مرتبه سه وجود دارند، معادلات پرتوربیشن تا مرتبه‌ی سه مورد نیاز است. برای کابل دو سر ثابت فرض می‌شود که الف) فرکانس طبیعی درون صفحه و خارج از صفحه تقریباً باهم برابرند یعنی کابل در حالت تشدید داخلی ۱:۱ قرار دارد

و داریم $\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma$ و ب) فرکانس درون صفحه تقریباً دو برابر فرکانس خارج از صفحه است و داریم $\omega_2 = \frac{1}{2} \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma$. برای کابل با تحریک پایه، حرکت پایه از نوع سینوسی انتخاب می‌شود و داریم $f(t) = \sin(\Omega t)$ و فرض می‌شود که فرکانس اجباری در آن نزدیک به فرکانس طبیعی باشد یعنی داریم $\Omega = \omega_1 + \varepsilon^2 \rho$ و فرکانس طبیعی درون صفحه و خارج از صفحه تقریباً باهم برابر باشند یعنی $\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma$ یعنی کابل دارای شرایط تشدید داخلی، خارجی و پارامتریک ۱:۱ است. در این معادلات ε پارامتر بی‌بعد پرتوربیشن می‌باشد $\varepsilon \ll 1$ و σ و ρ به ترتیب پارامتر تنظیم^۱ داخلی و خارجی می‌باشند.

متغیرهای زمانی جدید به صورت (۴-۱۴) تعریف می‌شوند که در آن T_0 مقیاس زمانی سریع و T_1 و T_2 مقیاس‌های زمانی آرام می‌باشند.

$$T_n = \varepsilon^n t, \quad n = 0, 1, 2 \quad (۴-۱۴)$$

فرض می‌شود که ضرایب $(m_1, m_2, m_4, m_1, n_2, n_3)$ از مرتبه‌ی ε باشند یعنی:

$$m_i = \varepsilon m m_i, \quad n_i = \varepsilon n n_i, \quad \text{for } i = 1 - 4, 3, 5 \quad (۴-۱۵)$$

براساس روش مقیاس‌های چندگانه، متغیرهای q_1 و q_2 براساس توان‌های ε به صورت (۴-۱۶) بسط داده می‌شود.

$$q_i(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^3 \varepsilon^j q_{i,j-1}(T_0, T_1, T_2), \quad i = 1, 2 \quad (۴-۱۶)$$

مشتق زمانی اول و دوم نیز به صورت رابطه‌ی (۴-۱۷) و (۴-۱۸) تعریف می‌شوند که در آن $D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}$ می‌باشد.

^۱ Detuning parameter

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (17-4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (18-4)$$

۱-۴-۴ کابل افقی دو سر ثابت تحت نیروی باد

۱-۱-۴-۴ تشدید داخلی ۱:۱

با قرار دادن معادلات (۱۵-۴) تا (۱۸-۴) در معادلات (۱۰-۴) و (۱۱-۴) مرتب کردن آن براساس توان ε معادلات پرتوریشن برای مرتبه‌های مختلف ε به دست می‌آید. معادلات $O(\varepsilon)$ به صورت (۱۹-۴) و (۲۰-۴) می‌باشد.

$o(\varepsilon)$

$$D_0^2 q_{1,0} + \omega_1^2 q_{1,0} = 0 \quad (19-4)$$

$$D_0^2 q_{2,0} + \omega_2^2 q_{2,0} = 0 \quad (20-4)$$

با حل این معادلات پاسخ به شکل (۲۱-۴) و (۲۲-۴) به دست می‌آید، که در آن \bar{A}_1 و \bar{A}_2 به ترتیب مزدوج مختلط A_1 و A_2 هستند و هر دو تابعی از (T_1, T_2) می‌باشند و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد.

$$q_{1,0} = A_1(T_1, T_2)e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1(T_1, T_2)e^{-i\omega_1 T_0} \quad (21-4)$$

$$q_{2,0} = A_2(T_1, T_2)e^{i\omega_2 T_0} + \bar{A}_2(T_1, T_2)e^{-i\omega_2 T_0} \quad (22-4)$$

معادلات $O(\varepsilon^2)$ به صورت (۲۳-۴) و (۲۴-۴) به دست می آید.

$O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned}
 D_0^2 q_{1,1} + \omega_1^2 q_{1,1} = & -2D_0 D_1 q_{1,0} + m_{12} q_{2,0} D_0 q_{2,0} + m_7 q_{2,0}^2 \\
 & + m_8 q_{1,0} D_0 q_{1,0} + m_{14} (D_0 q_{2,0})^2 + m_{13} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + m_6 q_{1,0} q_{2,0} \\
 & + m_{11} q_{1,0} D_0 q_{2,0} + m m_1 D_0 q_{1,0} + m_{10} (D_0 q_{1,0})^2 + m_9 q_{2,0} D_0 q_{1,0} \\
 & + m m_4 q_{2,0} + m m_2 D_0 q_{2,0} + m_5 q_{1,0}^2
 \end{aligned} \tag{۲۳-۴}$$

$$\begin{aligned}
 D_0^2 q_{2,1} + \omega_2^2 q_{2,1} = & -2D_0 D_1 q_{2,0} + n_{10} (D_0 q_{1,0})^2 + n_{11} q_{1,0} D_0 q_{2,0} \\
 & + n_6 q_{1,0} q_{2,0} + n n_3 q_{1,0} + n_7 q_{2,0}^2 + n_{13} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + n_5 q_{1,0}^2 \\
 & + n n_1 D_0 q_{1,0} + n_{12} q_{2,0} D_0 q_{2,0} + n_9 q_{2,0} D_0 q_{1,0} + n n_2 D_0 q_{2,0} + n_8 q_{1,0} D_0 q_{1,0} \\
 & + n_{14} (D_0 q_{2,0})^2
 \end{aligned} \tag{۲۴-۴}$$

با جای گذاری مقادیر $q_{1,0}$ و $q_{2,0}$ که در رابطه‌ی (۲۱-۴) و (۲۲-۴) آمده است و برابر با صفر قرار دادن عباراتی که منجر به عبارات سکولار^۱ می شود، $D_1 A_1$ و $D_1 A_2$ به صورت زیر به دست می آیند.

$$D_1 A_1 = \frac{i m m_1 \omega_1 A_1 + (m m_4 A_2 + i m m_2 \omega_2 A_2) e^{i \sigma T_2}}{2i \omega_1} \tag{۲۵-۴}$$

$$D_1 A_2 = \frac{i n n_2 \omega_2 A_2 + (n n_3 A_1 + i n n_1 \omega_1 A_1) e^{-i \sigma T_2}}{2i \omega_2} \tag{۲۶-۴}$$

^۱ Secular Terms

حل خصوصی معادلات (۲۳-۴) و (۲۴-۴) نیز به صورت زیر به دست می آید.

$$q_{1,1} = P_1 e^{-2i\omega_1 T_0} + P_2 e^{-2i\omega_2 T_0} + P_3 e^{-iT_0(\omega_1 - \omega_2)} + P_4 e^{-iT_0(\omega_1 + \omega_2)} \\ + P_5 e^{iT_0(\omega_1 - \omega_2)} + P_6 e^{iT_0(\omega_1 + \omega_2)} + P_7 e^{2i\omega_1 T_0} + P_8 e^{2i\omega_2 T_0} + P_9 \quad (27-4)$$

$$q_{2,1} = K_1 e^{-2i\omega_1 T_0} + K_2 e^{-2i\omega_2 T_0} + K_3 e^{-iT_0(\omega_1 - \omega_2)} + K_4 e^{-iT_0(\omega_1 + \omega_2)} \\ + K_5 e^{iT_0(\omega_1 - \omega_2)} + K_6 e^{iT_0(\omega_1 + \omega_2)} + K_7 e^{2i\omega_1 T_0} + K_8 e^{2i\omega_2 T_0} + K_9 \quad (28-4)$$

که در آن ثابت‌های P_i و K_i برای $i = 1, \dots, 9$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P_1 = \frac{-1}{3\omega_1^2} (m_5 - m_{10}\omega_1^2 - im_8\omega_1) \bar{A}_1^2 \quad (29-4)$$

$$P_2 = \frac{1}{\omega_1^2 - 4\omega_2^2} (m_7 - m_{14}\omega_2^2 - im_{12}\omega_2) \bar{A}_2^2 \quad (30-4)$$

$$P_3 = \frac{1}{-\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2} (m_{13}\omega_1\omega_2 + im_{11}\omega_2 - im_9\omega_1 + m_6) A_2 \bar{A}_1 \quad (31-4)$$

$$P_4 = \frac{1}{-\omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2} (-m_{13}\omega_1\omega_2 - im_{11}\omega_2 - im_9\omega_1 + m_6) \bar{A}_1 \bar{A}_2 \quad (32-4)$$

$$P_5 = \frac{1}{-\omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2} (+m_{13}\omega_1\omega_2 - im_{11}\omega_2 + im_9\omega_1 + m_6) A_1 \bar{A}_2 \quad (33-4)$$

$$P_6 = \frac{1}{-\omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2} (-m_{13}\omega_1\omega_2 + im_{11}\omega_2 + im_9\omega_1 + m_6) A_1 A_2 \quad (34-4)$$

$$P_7 = \frac{-1}{3\omega_1^2} (m_5 - m_{10}\omega_1^2 + im_8\omega_1) A_1^2 \quad (35-4)$$

$$P_8 = \frac{1}{\omega_1^2 - 4\omega_2^2} (m_7 - m_{14}\omega_2^2 + im_{12}\omega_2) A_2^2 \quad (36-4)$$

$$P_9 = \frac{1}{\omega_1^2} (2m_{14}\omega_2^2 A_2 \bar{A}_2 + 2m_{10}\omega_1^2 A_1 \bar{A}_1 + 2m_5 A_1 \bar{A}_1 + 2m_7 A_2 \bar{A}_2) \quad (37-4)$$

$$K_1 = \frac{1}{\omega_2^2 - 4\omega_1^2} (n_5 - n_{10}\omega_1^2 - in_8\omega_1)\bar{A}_1^2 \quad (38-4)$$

$$K_2 = \frac{1}{-3\omega_2^2} (n_7 - n_{14}\omega_2^2 - in_{12}\omega_2)\bar{A}_2^2 \quad (39-4)$$

$$K_3 = \frac{1}{-\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2} (n_{13}\omega_1\omega_2 + in_{11}\omega_2 - in_9\omega_1 + n_6)A_2\bar{A}_1 \quad (40-4)$$

$$K_4 = \frac{1}{-\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2} (-n_{13}\omega_1\omega_2 - in_{11}\omega_2 - in_9\omega_1 + n_6)\bar{A}_1\bar{A}_2 \quad (41-4)$$

$$K_5 = \frac{1}{-\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2} (n_{13}\omega_1\omega_2 - in_{11}\omega_2 + in_9\omega_1 + n_6)A_1\bar{A}_2 \quad (42-4)$$

$$K_6 = \frac{1}{-\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2} (-n_{13}\omega_1\omega_2 + in_{11}\omega_2 + in_9\omega_1 + n_6)A_1A_2 \quad (43-4)$$

$$K_7 = \frac{1}{-4\omega_1^2 + \omega_2^2} (n_5 - n_{10}\omega_1^2 + in_8\omega_1)A_1^2 \quad (44-4)$$

$$K_8 = \frac{1}{-3\omega_2^2} (n_7 - n_{14}\omega_2^2 + in_{12}\omega_2)A_2^2 \quad (45-4)$$

$$K_9 = \frac{1}{\omega_2^2} (2n_{14}\omega_2^2 A_2\bar{A}_2 + 2n_{10}\omega_1^2 A_1\bar{A}_1 + 2n_5 A_1\bar{A}_1 + 2n_7 A_2\bar{A}_2) \quad (46-4)$$

معادلات $O(\varepsilon^3)$ به صورت (47-4) و (48-4) می باشد.

$O(\varepsilon^3)$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{1,2} + \omega_1^2 q_{1,2} = & -2D_0 D_2 q_{1,0} - D_1^2 q_{1,0} - 2D_0 D_1 q_{1,1} + m_{23} q_{2,0} (D_0 q_{1,0})^2 \\ & + m_9 q_{2,0} D_0 q_{1,1} + m_9 q_{2,0} D_1 q_{1,0} + m_{21} q_{2,0}^2 D_0 q_{1,0} + m_{20} q_{1,0} q_{2,0} D_0 q_{1,0} \\ & + m_9 q_{2,1} D_0 q_{1,0} + m_{29} q_{2,0} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + m_{28} q_{1,0} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_{13}D_0q_{1,0}D_0q_{2,1} + m_{13}D_0q_{1,0}D_1q_{2,0} + m_{13}D_0q_{1,1}D_0q_{2,0} \\
& +m_{13}D_1q_{1,0}D_0q_{2,0} + m_{30}(D_0q_{1,0})^2D_0q_{2,0} + m_{33}D_0q_{1,0}(D_0q_{2,0})^2 \\
& +m_{19}q_{1,0}^2D_0q_{1,0} + m_{22}q_{1,0}(D_0q_{1,0})^2 + m_8q_{1,0}D_1q_{1,0} + m_{34}(D_0q_{2,0})^3 \\
& +m_6q_{1,0}q_{2,1} + m_6q_{1,1}q_{2,0} + m_{32}q_{2,0}(D_0q_{2,0})^2 + m_{17}q_{1,0}q_{2,0}^2 \\
& +m_{27}q_{2,0}^2D_0q_{2,0} + 2m_7q_{2,0}q_{2,1} + 2m_5q_{1,0}q_{1,1} + m_{24}(D_0q_{1,0})^3 \\
& +m_{16}q_{1,0}^2q_{2,0} + m_{12}q_{2,0}D_1q_{2,0} + mm_4q_{2,1} + m_{18}q_{2,0}^3 + m_{15}q_{1,0}^3 \\
& +m_{11}q_{1,0}D_0q_{2,1} + m_{11}q_{1,0}D_1q_{2,0} + m_{11}q_{1,1}D_0q_{2,0} + m_{25}q_{1,0}^2D_0q_{2,0} \\
& +m_{26}q_{1,0}q_{2,0}D_0q_{2,0} + m_{31}q_{1,0}(D_0q_{2,0})^2 + m_{12}q_{2,0}D_0q_{2,1} + m_{12}q_{2,1}D_0q_{2,0} \\
& +2m_{14}D_0q_{2,0}D_0q_{2,1} + 2m_{14}D_0q_{2,0}D_1q_{2,0} + m_8q_{1,0}D_0q_{1,1} + m_8q_{1,1}D_0q_{1,0} \\
& +2m_{10}D_0q_{1,0}D_0q_{1,1} + 2m_{10}D_0q_{1,0}D_1q_{1,0} + mm_2D_0q_{2,1} + mm_2D_1q_{2,0} \\
& +mm_1D_0q_{1,1} + mm_1D_1q_{1,0}
\end{aligned} \tag{FY-4}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 q_{2,2} + \omega_2^2 q_{2,2} = & -2D_0 D_2 q_{2,0} - D_1^2 q_{2,0} - 2D_0 D_1 q_{2,1} \\
& + n_{29} q_{2,0} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + n_{28} q_{1,0} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + n_{13} D_1 q_{1,0} D_0 q_{2,0} \\
& + n_{13} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,1} + n_{13} D_0 q_{1,0} D_1 q_{2,0} + n_{13} D_0 q_{1,1} D_0 q_{2,0} \\
& + n_{30} (D_0 q_{1,0})^2 D_0 q_{2,0} + n_{33} D_0 q_{1,0} (D_0 q_{2,0})^2 + n_{32} q_{2,0} (D_0 q_{2,0})^2 q_{2,0}^2 \\
& + n_{27} q_{2,0}^2 D_0 q_{2,0} + n_6 q_{1,0} q_{2,1} + n_6 q_{1,1} q_{2,0} + n_{17} q_{1,0} + n_{16} q_{1,0}^2 q_{2,0} \\
& + n_{19} q_{1,0}^2 D_0 q_{1,0} + 2n_7 q_{2,0} q_{2,1} + 2n_5 q_{1,0} q_{1,1} + n_{22} q_{1,0} (D_0 q_{1,0})^2 \\
& + n_{34} (D_0 q_{2,0})^3 + n_{12} q_{2,0} D_1 q_{2,0} + n_{24} (D_0 q_{1,0})^3 + n_8 q_{1,0} D_1 q_{1,0} + n_{15} q_{1,0}^3 \\
& + n_{18} q_{2,0}^3 + 2n_{14} D_0 q_{2,0} D_1 q_{2,0} + n_{12} q_{2,0} D_0 q_{2,1} + n_{12} q_{2,1} D_0 q_{2,0} \\
& + 2n_{10} D_0 q_{1,0} D_1 q_{1,0} + n_8 q_{1,0} D_0 q_{1,1} + n_8 q_{1,1} D_0 q_{1,0} + 2n_{10} D_0 q_{1,0} D_0 q_{1,1} \\
& + n_{23} q_{2,0} (D_0 q_{1,0})^2 + n_{20} q_{1,0} q_{2,0} D_0 q_{1,0} + n_9 q_{2,0} D_0 q_{1,1} + n_9 q_{2,0} D_1 q_{1,0} \\
& + n_9 q_{2,1} D_0 q_{1,0} + n_{31} q_{1,0} (D_0 q_{2,0})^2 + n_{25} q_{1,0}^2 D_0 q_{2,0} + n_{26} q_{1,0} q_{2,0} D_0 q_{2,0} \\
& + n_{11} q_{1,0} D_0 q_{2,1} + n_{11} q_{1,0} D_1 q_{2,0} + n_{11} q_{1,1} D_0 q_{2,0} + n_{21} q_{2,0}^2 D_0 q_{1,0} \\
& + nn_1 D_0 q_{1,1} + nn_1 D_1 q_{1,0} + nn_2 D_0 q_{2,1} + nn_2 D_1 q_{2,0} + nn_3 q_{1,1}
\end{aligned} \tag{۴۸-۴}$$

با قرار دادن $q_{1,0}$ ، $q_{2,0}$ ، $q_{1,1}$ ، $q_{2,1}$ و $D_1 A_1$ و $D_1 A_2$ در معادلات $O(\varepsilon^3)$ و حذف عباراتی که منجر به عبارات سکولار می‌شود، می‌توان $D_2 A_1$ و $D_2 A_2$ را به دست آورد.

مشتق زمانی A_1 و A_2 را با استفاده از روابط زیر می‌توان به دست آورد.

$$\dot{A}_1 = \varepsilon D_1 A_1 + \varepsilon^2 D_2 A_1 \tag{۴۹-۴}$$

$$\dot{A}_2 = \varepsilon D_1 A_2 + \varepsilon^2 D_2 A_2 \quad (50-4)$$

با جای‌گذاری $D_2 A_2$ و $D_2 A_1$ ، $D_1 A_2$ ، $D_1 A_1$ در این معادلات روابط زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 = & A_1 (PP_{1,1} + iPP_{1,2}) + e^{i\sigma T_2} A_2 (PP_{2,1} + iPP_{2,2}) \\ & + A_1^2 \bar{A}_1 (PP_{3,1} + iPP_{3,2}) + e^{i\sigma T_2} A_1 A_2 \bar{A}_1 (PP_{4,1} + iPP_{4,2}) \\ & + e^{2i\sigma T_2} A_2^2 \bar{A}_1 (PP_{5,1} + iPP_{5,2}) + e^{-i\sigma T_2} A_1^2 \bar{A}_2 (PP_{6,1} + iPP_{6,2}) \\ & + A_1 A_2 \bar{A}_2 (PP_{7,1} + iPP_{7,2}) + e^{i\sigma T_2} A_2^2 \bar{A}_2 (PP_{8,1} + iPP_{8,2}) \end{aligned} \quad (51-4)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_2 = & e^{-i\sigma T_2} A_1 (qq_{1,1} + iqq_{1,2}) + A_2 (qq_{2,1} + iqq_{2,2}) \\ & + e^{-i\sigma T_2} A_1^2 \bar{A}_1 (qq_{3,1} + iqq_{3,2}) + A_1 A_2 \bar{A}_1 (qq_{4,1} + iqq_{4,2}) \\ & + e^{i\sigma T_2} A_2^2 \bar{A}_1 (qq_{5,1} + iqq_{5,2}) + e^{-2i\sigma T_2} A_1^2 \bar{A}_2 (qq_{6,1} + iqq_{6,2}) \\ & + e^{-i\sigma T_2} A_1 A_2 \bar{A}_2 (qq_{7,1} + iqq_{7,2}) + A_2^2 \bar{A}_2 (qq_{8,1} + iqq_{8,2}) \end{aligned} \quad (52-4)$$

ضرایب $PP_{i,j}$ و $qq_{i,j}$ در پیوست آمده است.

با استفاده از شکل قطبی برای دامنه‌ی مرکب A_1 و A_2 به صورت (53-4) که در آن a_j و β_j دامنه و فاز متغیر با زمان t هستند، جای‌گذاری آن در معادلات (51-4) و (52-4) معادلات (54-4) و (55-4) به دست می‌آید.

$$A_j = \frac{1}{2} a_j e^{i\beta_j}; \quad j = 1, 2 \quad (53-4)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + ia_1 \dot{\beta}_1 = & a_1 (PP_{1,1} + iPP_{1,2}) + e^{i(\sigma T_2 + \beta_2 - \beta_1)} a_2 (PP_{2,1} + iPP_{2,2}) \\ & + \frac{1}{4} a_1^3 (PP_{3,1} + iPP_{3,2}) + \frac{1}{4} e^{i(\sigma T_2 + \beta_2 - \beta_1)} a_1^2 a_2 (PP_{4,1} + iPP_{4,2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} e^{2i(\sigma T_2 + \beta_2 - \beta_1)} a_2^2 a_1 (PP_{5,1} + iPP_{5,2}) \\
& + \frac{1}{4} e^{i(-\sigma T_2 - \beta_2 + \beta_1)} a_1^2 a_2 (PP_{6,1} + iPP_{6,2}) + \frac{1}{4} a_1 a_2^2 (PP_{7,1} + iPP_{7,2}) \\
& + \frac{1}{4} e^{i(\sigma T_2 + \beta_2 - \beta_1)} a_2^3 (PP_{8,1} + iPP_{8,2})
\end{aligned}$$

(۵۴-۴)

$$\begin{aligned}
\dot{a}_2 + ia_2 \dot{\beta}_2 &= a_1 e^{i(-\sigma T_2 - \beta_2 + \beta_1)} (qq_{1,1} + iqq_{1,2}) + a_2 (qq_{2,1} + iqq_{2,2}) \\
& + \frac{1}{4} a_1^3 e^{i(-\sigma T_2 - \beta_2 + \beta_1)} (qq_{3,1} + iqq_{3,2}) + \frac{1}{4} a_1^2 a_2 (qq_{4,1} + iqq_{4,2}) \\
& + \frac{1}{4} a_2^2 a_1 e^{i(\sigma T_2 + \beta_2 - \beta_1)} (qq_{5,1} + iqq_{5,2}) \\
& + \frac{1}{4} a_1^2 a_2 e^{2i(-\sigma T_2 - \beta_2 + \beta_1)} (qq_{6,1} + iqq_{6,2}) \\
& + \frac{1}{4} a_1 a_2^2 e^{i(-\sigma T_2 - \beta_2 + \beta_1)} (qq_{7,1} + iqq_{7,2}) + \frac{1}{4} a_2^3 (qq_{8,1} + iqq_{8,2})
\end{aligned}$$

(۵۵-۴)

با قرار دادن عبارت (۵۶-۴) در معادلات (۵۴-۴) و (۵۵-۴) و جدا کردن بخش حقیقی و موهومی از یک-دیگر معادلات مدولاسیون-فاز کاهش یافته زیر به دست می آید.

$$\Psi[t] = \beta_2[t] - \beta_1[t] + \varepsilon^2 \sigma t \tag{۵۶-۴}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 &= PP_{1,1} a_1 + \frac{1}{4} PP_{3,1} a_1^3 + (\cos(\Psi) PP_{2,1} - \sin(\Psi) PP_{2,2}) a_2 \\
& + \frac{1}{4} (\cos(\Psi) PP_{4,1} - \sin(\Psi) PP_{4,2} + \cos(\Psi) PP_{6,1} + \sin(\Psi) PP_{6,2}) a_1^2 a_2 \\
& + \frac{1}{4} (\cos(2\Psi) PP_{5,1} - \sin(2\Psi) PP_{5,2} + PP_{7,1}) a_1 a_2^2 + \frac{1}{4} (\cos(\Psi) PP_{8,1}
\end{aligned}$$

$$- \sin(\Psi) PP_{8,2} a_2^3 \quad (\Delta 7-4)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 = & (\cos(\Psi) qq_{1,1} + \sin(\Psi) qq_{1,2}) a_1 + \frac{1}{4} (\cos(\Psi) qq_{3,1} + \sin(\Psi) qq_{3,2}) a_1^3 \\ & + qq_{2,1} a_2 + \frac{1}{4} (qq_{4,1} + \cos(2\Psi) qq_{6,1} + \sin(2\Psi) qq_{6,2}) a_1^2 a_2 \\ & + \frac{1}{4} (\cos(\Psi) qq_{5,1} - \sin(\Psi) qq_{5,2} + \cos(\Psi) qq_{7,1} + \sin(\Psi) qq_{7,2}) a_1 a_2^2 \\ & + \frac{1}{4} qq_{8,1} a_2^3 \end{aligned} \quad (\Delta 8-4)$$

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \dot{\Psi} = & (-\sin(\Psi) qq_{1,1} + \cos(\Psi) qq_{1,2}) a_1^2 \\ & + \frac{1}{4} (-\sin(\Psi) qq_{3,1} + \cos(\Psi) qq_{3,2}) a_1^4 + (\varepsilon\sigma - PP_{1,2} + qq_{2,2}) a_1 a_2 \\ & - \frac{1}{4} PP_{3,2} a_1^2 a_2 + \frac{1}{4} (qq_{4,2} - \sin(2\Psi) qq_{6,1} + \cos(2\Psi) qq_{6,2}) a_1^3 a_2 \\ & + (-\sin(\Psi) PP_{2,1} - \cos(\Psi) PP_{2,2}) a_2 + \frac{1}{4} (-\sin(\Psi) PP_{4,1} - \cos(\Psi) PP_{4,2}) \\ & + \sin(2\Psi) PP_{6,1} - \cos(2\Psi) PP_{6,2} + \sin(\Psi) qq_{5,1} + \cos(\Psi) qq_{5,2} \\ & - \sin(\Psi) qq_{7,1} + \cos(\Psi) qq_{7,2}) a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{4} (-\sin(2\Psi) PP_{5,1} \\ & - \cos(2\Psi) PP_{5,2} - PP_{7,2} + qq_{8,2}) a_1 a_2^3 + \frac{1}{4} (-\sin(\Psi) PP_{8,1} \\ & - \cos(\Psi) PP_{8,2}) a_2^4 \end{aligned} \quad (\Delta 9-4)$$

۲-۱-۴-۴ تشدید داخلی ۲:۱

با انجام مراحل بالا برای حالتی که در آن $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 + \varepsilon^2\sigma$ معادلات مدولاسیون دامنه-فاز کاهش یافته با در نظر گرفتن تغییر متغیر (۶۰-۴) به صورت (۶۱-۴) تا (۶۳-۴) به دست می‌آید.

$$\Phi[t] = \beta_1[t] - 2(\beta_1[t] + \varepsilon^2\sigma t) \quad (۶۰-۴)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 = & pp_{20,1}a_1 + \frac{1}{4}pp_{22,1}a_1^3 + \frac{1}{2}(\cos(\Phi)pp_{21,1} + \sin(\Phi)pp_{21,2})a_2^2 \\ & + \frac{1}{4}pp_{23,1}a_1a_2^2 \end{aligned} \quad (۶۱-۴)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 = & qq_{20,1}a_2 + \frac{1}{4}qq_{22,1}a_2a_1^2 + \frac{1}{2}(\cos(\Phi)qq_{21,1} - \sin(\Phi)qq_{21,2})a_1a_2 \\ & + \frac{1}{4}qq_{23,1}a_2^3 \end{aligned} \quad (۶۲-۴)$$

$$\begin{aligned} a_1a_2\dot{\Phi} = & (-2\varepsilon^2\sigma t + pp_{20,2} - 2qq_{20,2})a_1a_2 \\ & + (-\sin(\Phi)qq_{21,1} - \cos(\Phi)qq_{21,2})a_1^2a_2 + \frac{1}{4}(pp_{22,2} - 2qq_{22,2})a_1^3a_2 \\ & + \frac{1}{2}(-\sin(\Phi)pp_{21,1} + \cos(\Phi)pp_{21,2})a_2^3 + \frac{1}{4}(pp_{23,2} - 2qq_{23,2})a_1a_2^3 \end{aligned} \quad (۶۳-۴)$$

۲-۴-۴ کابل شیب‌دار با یک پایه‌ی متحرک تحت نیروی باد

برای کابل با پایه‌ی متحرک نیز مانند کابل با پایه‌ی ثابت همان روند قبلی طی می‌شود. با قرار دادن معادلات (۱۵-۴) تا (۱۸-۴) در معادلات (۱۲-۴) و (۱۳-۴) و مرتب کردن آن براساس توان ε معادلات پرتوریشن برای مرتبه‌های مختلف ε به دست می‌آید. فرض می‌شود η از $O(\varepsilon)$ باشد و تمامی ترم‌های

تحریک خارجی و تحریک پارامتریک در مرتبه‌ی سوم معادلات پرتوربیشن ظاهر شود در نتیجه معادلات

$O(\epsilon)$ ، $O(\epsilon^2)$ و $O(\epsilon^3)$ به صورت (۴-۶۴) تا (۴-۶۹) به دست می‌آید

$o(\epsilon)$

$$D_0^2 q_{1,0} + \omega_1^2 q_{1,0} = 0 \quad (۴-۶۴)$$

$$D_0^2 q_{2,0} + \omega_2^2 q_{2,0} = 0 \quad (۴-۶۵)$$

$o(\epsilon^2)$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{1,1} + \omega_1^2 q_{1,1} = & -2D_0 D_1 q_{1,0} + m_{12} q_{2,0} D_0 q_{2,0} + m_7 q_{2,0}^2 + m_8 q_{1,0} D_0 q_{1,0} \\ & + m_{14} (D_0 q_{2,0})^2 + m_{13} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + m_6 q_{1,0} q_{2,0} + m_{11} q_{1,0} D_0 q_{2,0} \\ & + m m_1 D_0 q_{1,0} + m_{10} (D_0 q_{1,0})^2 + m_9 q_{2,0} D_0 q_{1,0} + m m_4 q_{2,0} + m m_2 D_0 q_{2,0} \\ & + m_5 q_{1,0}^2 \end{aligned} \quad (۴-۶۶)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{2,1} + \omega_2^2 q_{2,1} = & -2D_0 D_1 q_{2,0} + n_{10} (D_0 q_{1,0})^2 + n_{11} q_{1,0} D_0 q_{2,0} + n_6 q_{1,0} q_{2,0} \\ & + n n_3 q_{1,0} + n_7 q_{2,0}^2 + n_{13} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + n_5 q_{1,0}^2 + n n_1 D_0 q_{1,0} \\ & + n_{12} q_{2,0} D_0 q_{2,0} + n_9 q_{2,0} D_0 q_{1,0} + n n_2 D_0 q_{2,0} + n_8 q_{1,0} D_0 q_{1,0} + n_{14} (D_0 q_{2,0})^2 \end{aligned} \quad (۴-۶۷)$$

$o(\epsilon^3)$

$$\begin{aligned}
D_0^2 q_{1,2} + \omega_1^2 q_{1,2} = & -2D_0 D_2 q_{1,0} - D_1^2 q_{1,0} - 2D_0 D_1 q_{1,1} + m_{23} q_{2,0} (D_0 q_{1,0})^2 \\
& + m_9 q_{2,0} D_0 q_{1,1} + m_9 q_{2,0} D_1 q_{1,0} + m_{21} q_{2,0}^2 D_0 q_{1,0} + m_{20} q_{1,0} q_{2,0} D_0 q_{1,0} \\
& + m_9 q_{2,1} D_0 q_{1,0} + m_{29} q_{2,0} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + m_{28} q_{1,0} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} \\
& + m_{13} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,1} + m_{13} D_0 q_{1,0} D_1 q_{2,0} + m_{13} D_0 q_{1,1} D_0 q_{2,0} \\
& + m_{13} D_1 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + m_{30} (D_0 q_{1,0})^2 D_0 q_{2,0} + m_{33} D_0 q_{1,0} (D_0 q_{2,0})^2 \\
& + m_{19} q_{1,0}^2 D_0 q_{1,0} + m_{22} q_{1,0} (D_0 q_{1,0})^2 + m_8 q_{1,0} D_1 q_{1,0} + m_{34} (D_0 q_{2,0})^3 \\
& + m_6 q_{1,0} q_{2,1} + m_6 q_{1,1} q_{2,0} + m_{32} q_{2,0} (D_0 q_{2,0})^2 + m_{17} q_{1,0} q_{2,0}^2 \\
& + m_{27} q_{2,0}^2 D_0 q_{2,0} + 2m_7 q_{2,0} q_{2,1} + 2m_5 q_{1,0} q_{1,1} + m_{24} (D_0 q_{1,0})^3 \\
& + m_{16} q_{1,0}^2 q_{2,0} + m_{12} q_{2,0} D_1 q_{2,0} + m m_4 q_{2,1} + m_{18} q_{2,0}^3 + m_{15} q_{1,0}^3 \\
& + m_{11} q_{1,0} D_0 q_{2,1} + m_{11} q_{1,0} D_1 q_{2,0} + m_{11} q_{1,1} D_0 q_{2,0} + m_{25} q_{1,0}^2 D_0 q_{2,0} \\
& + m_{26} q_{1,0} q_{2,0} D_0 q_{2,0} + m_{31} q_{1,0} (D_0 q_{2,0})^2 + m_{12} q_{2,0} D_0 q_{2,1} + m_{12} q_{2,1} D_0 q_{2,0} \\
& + 2m_{14} D_0 q_{2,0} D_0 q_{2,1} + 2m_{14} D_0 q_{2,0} D_1 q_{2,0} + m_8 q_{1,0} D_0 q_{1,1} + m_8 q_{1,1} D_0 q_{1,0} \\
& + 2m_{10} D_0 q_{1,0} D_0 q_{1,1} + 2m_{10} D_0 q_{1,0} D_1 q_{1,0} + m m_2 D_0 q_{2,1} + m m_2 D_1 q_{2,0} \\
& + m m_1 D_0 q_{1,1} + m m_1 D_1 q_{1,0} + h_{35,6} \eta^3 \dot{f}^3 + h_{35,3} \eta^3 f^3 + h_{12,1} \eta \dot{f} q_{2,0} D_0 q_{2,0} \\
& + h_{2,1} \eta \dot{f} D_0 q_{2,0} + h_{2,2} \eta^2 \dot{f}^2 D_0 q_{2,0} + h_{14,1} \eta \dot{f} (D_0 q_{2,0})^2 + h_{6,1} \eta \dot{f} q_{1,0} q_{2,0} \\
& + h_{8,1} \eta \dot{f} q_{1,0} D_0 q_{1,0} + h_{10,1} \eta \dot{f} (D_0 q_{1,0})^2 + h_{11,1} \eta \dot{f} D_0 q_{1,0} + h_{1,2} \eta^2 \dot{f}^2 D_0 q_{1,0} \\
& + h_{9,1} \eta \dot{f} q_{2,0} D_0 q_{1,0} + h_{11,1} \eta \dot{f} q_{1,0} D_0 q_{2,0} + h_{13,1} \eta \dot{f} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + h_{35,5} \eta^2 \dot{f}^2 \\
& + h_{35,4} \eta \dot{f} + h_{35,1} \eta f + h_{35,2} \eta^2 f^2 + h_{35,7} \eta \ddot{f} + h_{4,1} \eta \dot{f} q_{2,0} + h_{4,2} \eta^2 \dot{f}^2 q_{2,0} \\
& + h_{7,1} \eta \dot{f} q_{2,0}^2 + h_{7,2} \eta f q_{2,0}^2 + h_1 \eta \dot{f} q_{1,0} + h_2 \eta^2 \dot{f}^2 q_{1,0} + h_3 \eta f q_{1,0} \\
& + h_4 \eta^2 f^2 q_{1,0} + h_{5,1} \eta \dot{f} q_{1,0}^2 + h_{5,2} \eta f q_{1,0}^2
\end{aligned} \tag{68-4}$$

$$\begin{aligned}
D_0^2 q_{2,2} + \omega_2^2 q_{2,2} = & -2D_0 D_2 q_{2,0} - D_1^2 q_{2,0} - 2D_0 D_1 q_{2,1} \\
& + n_{29} q_{2,0} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + n_{28} q_{1,0} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + n_{13} D_1 q_{1,0} D_0 q_{2,0} \\
& + n_{13} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,1} + n_{13} D_0 q_{1,0} D_1 q_{2,0} + n_{13} D_0 q_{1,1} D_0 q_{2,0} \\
& + n_{30} (D_0 q_{1,0})^2 D_0 q_{2,0} + n_{33} D_0 q_{1,0} (D_0 q_{2,0})^2 + n_{32} q_{2,0} (D_0 q_{2,0})^2 \\
& + n_{27} q_{2,0}^2 D_0 q_{2,0} + n_6 q_{1,0} q_{2,1} + n_6 q_{1,1} q_{2,0} + n_{17} q_{1,0} q_{2,0}^2 \\
& + n_{16} q_{1,0}^2 q_{2,0} + n_{19} q_{1,0}^2 D_0 q_{1,0} + 2n_7 q_{2,0} q_{2,1} + 2n_5 q_{1,0} q_{1,1} \\
& + n_{22} q_{1,0} (D_0 q_{1,0})^2 + n_{34} (D_0 q_{2,0})^3 + n_{12} q_{2,0} D_1 q_{2,0} + n_{24} (D_0 q_{1,0})^3 \\
& + n_8 q_{1,0} D_1 q_{1,0} + n_{15} q_{1,0}^3 + n_{18} q_{2,0}^3 + 2n_{14} D_0 q_{2,0} D_1 q_{2,0} + n_{12} q_{2,0} D_0 q_{2,1} \\
& + n_{12} q_{2,1} D_0 q_{2,0} + 2n_{10} D_0 q_{1,0} D_1 q_{1,0} + n_8 q_{1,0} D_0 q_{1,1} + n_8 q_{1,1} D_0 q_{1,0} \\
& + 2n_{10} D_0 q_{1,0} D_0 q_{1,1} + n_{23} q_{2,0} (D_0 q_{1,0})^2 + n_{20} q_{1,0} q_{2,0} D_0 q_{1,0} + n_9 q_{2,0} D_0 q_{1,1} \\
& + n_9 q_{2,0} D_1 q_{1,0} + n_9 q_{2,1} D_0 q_{1,0} + n_{31} q_{1,0} (D_0 q_{2,0})^2 + n_{25} q_{1,0}^2 D_0 q_{2,0} \\
& + n_{26} q_{1,0} q_{2,0} D_0 q_{2,0} + n_{11} q_{1,0} D_0 q_{2,1} + n_{11} q_{1,0} D_1 q_{2,0} + n_{11} q_{1,1} D_0 q_{2,0} \\
& + n_{21} q_{2,0}^2 D_0 q_{1,0} + n n_1 D_0 q_{1,1} + n n_1 D_1 q_{1,0} + n n_2 D_0 q_{2,1} + n n_2 D_1 q_{2,0} \\
& + n n_3 q_{1,1} + g_{35,3} \eta^3 \dot{f}^3 + g_{10,1} \eta \dot{f} (D_0 q_{1,0})^2 + g_{1,1} \eta \dot{f} D_0 q_{1,0} + g_{1,2} \eta^2 \dot{f}^2 D_0 q_{1,0} \\
& + g_{8,1} \eta \dot{f} q_{1,0} D_0 q_{1,0} + g_{6,2} \eta \dot{f} q_{1,0} q_{2,0} + g_{14,1} \eta \dot{f} (D_0 q_{2,0})^2 + g_{2,1} \eta \dot{f} D_0 q_{2,0} \\
& + g_{2,2} \eta^2 \dot{f}^2 D_0 q_{2,0} + g_{6,1} \eta \dot{f} q_{1,0} q_{2,0} + g_{12,1} \eta \dot{f} q_{2,0} D_0 q_{2,0} + g_{9,1} \eta \dot{f} q_{2,0} D_0 q_{1,0} \\
& + g_{11,1} \eta \dot{f} q_{1,0} D_0 q_{2,0} + g_{13,1} \eta \dot{f} D_0 q_{1,0} D_0 q_{2,0} + g_{35,1} \eta \dot{f} + g_{35,2} \eta^2 \dot{f}^2 \\
& + g_4 \eta^2 \dot{f}^2 q_{2,0} + g_{7,1} \eta \dot{f} q_{2,0}^2 + g_{5,1} \eta \dot{f} q_{1,0}^2 + g_{3,1} \eta \dot{f} q_{1,0} + g_{3,2} \eta^2 \dot{f}^2 q_{1,0} \\
& + g_1 \eta \dot{f} q_{2,0} + g_2 \eta^2 \dot{f}^2 q_{2,0} + g_3 \eta \dot{f} q_{2,0}
\end{aligned}$$

(69-4)

با قرار دادن معادلات $q_{1,0}$, $q_{2,0}$, $q_{1,1}$, $q_{2,1}$, D_1A_1 و D_1A_2 که در قسمت قبل به دست آمد، در معادله (۶۸-۴) و (۶۹-۴) نتایج زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
\dot{A}_1 = & A_1 (PP_{1,1} + iPP_{1,2}) + e^{i\sigma T_2} A_2 (PP_{2,1} + iPP_{2,2}) + A_1^2 \bar{A}_1 (PP_{3,1} + iPP_{3,2}) \\
& + e^{i\sigma T_2} A_1 A_2 \bar{A}_1 (PP_{4,1} + iPP_{4,2}) + e^{2i\sigma T_2} A_2^2 \bar{A}_1 (PP_{5,1} + iPP_{5,2}) \\
& + e^{-i\sigma T_2} A_1^2 \bar{A}_2 (PP_{6,1} + iPP_{6,2}) + A_1 A_2 \bar{A}_2 (PP_{7,1} + iPP_{7,2}) \\
& + e^{i\sigma T_2} A_2^2 \bar{A}_2 (PP_{8,1} + iPP_{8,2}) + A_1 A_2 (PP_{9,1} + iPP_{9,2}) e^{-iT_2(\rho-\sigma)} \\
& + A_2 \bar{A}_1 (PP_{10,1} + iPP_{10,2}) e^{iT_2(\rho+\sigma)} + A_1 \bar{A}_2 (PP_{11,1} + iPP_{11,2}) e^{iT_2(\rho-\sigma)} \\
& + \bar{A}_2 (PP_{12,1} + iPP_{12,2}) e^{iT_2(2\rho-\sigma)} + \bar{A}_1 (PP_{13,1} + iPP_{13,2}) e^{iT_2(2\rho)} \\
& + (PP_{14,1} + iPP_{14,2}) e^{iT_2(\rho)} + A_2 \bar{A}_2 (PP_{15,1} + iPP_{15,2}) e^{iT_2(\rho)} \\
& + A_1 \bar{A}_1 (PP_{16,1} + iPP_{16,2}) e^{iT_2(\rho)} + A_2^2 (PP_{17,1} + iPP_{17,2}) e^{-iT_2(\rho-2\sigma)} \\
& + A_1^2 (PP_{18,1} + iPP_{18,2}) e^{-iT_2(\rho)} + A_1 (PP_{19,1} + iPP_{19,2})
\end{aligned} \tag{۷۰-۴}$$

$$\begin{aligned}
\dot{A}_2 = & e^{-i\sigma T_2} A_1 (qq_{1,1} + iqq_{1,2}) + A_2 (qq_{2,1} + iqq_{2,2}) \\
& + e^{-i\sigma T_2} A_1^2 \bar{A}_1 (qq_{3,1} + iqq_{3,2}) + A_1 A_2 \bar{A}_1 (qq_{4,1} + iqq_{4,2}) \\
& + e^{i\sigma T_2} A_2^2 \bar{A}_1 (qq_{5,1} + iqq_{5,2}) + e^{-2i\sigma T_2} A_1^2 \bar{A}_2 (qq_{6,1} + iqq_{6,2}) \\
& + e^{-i\sigma T_2} A_1 A_2 \bar{A}_2 (qq_{7,1} + iqq_{7,2}) + A_2^2 \bar{A}_2 (qq_{8,1} + iqq_{8,2}) \\
& + A_1 A_2 (qq_{9,1} + iqq_{9,2}) e^{-iT_2(\rho)} + (qq_{10,1} + iqq_{10,2}) e^{iT_2(\rho-\sigma)} \\
& + A_2 \bar{A}_1 (qq_{11,1} + iqq_{11,2}) e^{iT_2(\rho)} + A_1 \bar{A}_2 (qq_{12,1} + iqq_{12,2}) e^{iT_2(\rho-2\sigma)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{A}_1(qq_{13,1} + iqq_{13,2})e^{iT_2(2\rho-\sigma)} + \bar{A}_2(qq_{14,1} + iqq_{14,2})e^{iT_2(2\rho-2\sigma)} \\
& +A_1\bar{A}_1(qq_{15,1} + iqq_{15,2})e^{iT_2(\rho-\sigma)} + A_2\bar{A}_2(qq_{16,1} + iqq_{16,2})e^{iT_2(\rho-\sigma)} \\
& +A_1^2(qq_{17,1} + iqq_{17,2})e^{-iT_2(\rho+\sigma)} + A_2^2(qq_{18,1} + iqq_{18,2})e^{-iT_2(\rho-\sigma)} \\
& +A_2(qq_{19,1} + iqq_{19,2})
\end{aligned}
\tag{۷۱-۴}$$

ضرایب $PP_{i,j}$ و $qq_{i,j}$ در پیوست آمده است.

با استفاده از شکل قطبی برای دامنه‌ی مرکب A_1 و A_2 به صورت (۷۲-۴) که در آن a_j و β_j دامنه و فاز متغیر با زمان t هستند، جای‌گذاری آن در معادلات (۷۰-۴) و (۷۱-۴) و با استفاده از تعریف پارامترهای γ_1 و γ_2 که در معادلات (۷۳-۴) و (۷۴-۴) آمده است، معادلات مدولاسیون فاز به صورت روابط (۷۵-۴) تا (۷۸-۴) به دست می‌آید.

$$A_j = \frac{1}{2}a_j e^{i\beta_j}; \quad j = 1,2 \tag{۷۲-۴}$$

$$\gamma_1[t] = \beta_2[t] - \beta_1[t] + \epsilon^2 \sigma t \tag{۷۳-۴}$$

$$\gamma_2[t] = -\beta_1[t] + \epsilon^2 \rho t \tag{۷۴-۴}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_1 = & pp_{1,1}a_1 + \frac{1}{4}pp_{3,1}a_1^3 + (\cos(\gamma_1)pp_{3,1}a_1^3 - \sin(\gamma_1)pp_{2,2})a_2 \\
& + \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1)pp_{4,1} - \sin(\gamma_1)pp_{4,2} + \cos(\gamma_1)pp_{6,1} + \sin(\gamma_1)pp_{6,2})a_1^2a_2 \\
& + \frac{1}{4}(\cos(2\gamma_1)pp_{5,1} - \sin(2\gamma_1)pp_{5,2} + pp_{7,1})a_1a_2^2 \\
& + \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1)pp_{8,1} - \sin(\gamma_1)pp_{8,2})a_2^3 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_1 - \gamma_2)pp_{9,1} - \sin(\gamma_1 - \gamma_2)pp_{9,2})a_1a_2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_1 + \gamma_2)pp_{10,1} - \sin(\gamma_1 + \gamma_2)pp_{10,2})a_1a_2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2 - \gamma_1)pp_{11,1} - \sin(\gamma_2 - \gamma_1)pp_{11,2})a_1a_2 \\
& + (\cos(2\gamma_2 - \gamma_1)pp_{12,1} - \sin(2\gamma_2 - \gamma_1)pp_{12,2})a_2 \\
& + (\cos(2\gamma_2)pp_{13,1} - \sin(2\gamma_2)pp_{13,2})a_1 \\
& + 2(\cos(\gamma_2)pp_{14,1} - \sin(\gamma_2)pp_{14,2}) \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2)pp_{15,1} - \sin(\gamma_2)pp_{15,2})a_2^2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2)pp_{16,1} - \sin(\gamma_2)pp_{16,2})a_1^2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(2\gamma_1 - \gamma_2)pp_{17,1} - \sin(2\gamma_1 - \gamma_2)pp_{17,2})a_2^2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(-\gamma_2)pp_{18,1} - \sin(-\gamma_2)pp_{18,2})a_1^2 + (pp_{19,1})a_1
\end{aligned} \tag{V\delta-4}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_2 = & (\cos(\gamma_1)qq_{1,1} + \sin(\gamma_1)qq_{1,2})a_1 + \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1)qq_{3,1} + \sin(\gamma_1)qq_{3,2})a_1^3 \\
& + qq_{2,1}a_2 + \frac{1}{4}(qq_{4,1} + \cos(2\gamma_1)qq_{6,1} + \sin(2\gamma_1)qq_{6,2})a_1^2a_2 \\
& + \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1)qq_{5,1} - \sin(\gamma_1)qq_{5,2} + \cos(\gamma_1)qq_{7,1} + \sin(\gamma_1)qq_{7,2})a_1a_2^2 \\
& + \frac{1}{4}qq_{8,1}a_2^3 + \frac{1}{2}(\cos(-\gamma_2)qq_{9,1} - \sin(-\gamma_2)qq_{9,2})a_1a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(\cos(\gamma_2 - \gamma_1) qq_{10,1} - \sin(\gamma_2 - \gamma_1) qq_{10,2}) \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2) qq_{11,1} - \sin(\gamma_2) qq_{11,2})a_1 a_2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2 - 2\gamma_1) qq_{12,1} - \sin(\gamma_2 - 2\gamma_1) qq_{12,2})a_1 a_2 \\
& + (\cos(2\gamma_2 - \gamma_1) qq_{13,1} - \sin(2\gamma_2 - \gamma_1) qq_{13,2})a_1 \\
& + (\cos(2\gamma_2 - 2\gamma_1) qq_{14,1} - \sin(2\gamma_2 - 2\gamma_1) qq_{14,2})a_2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2 - \gamma_1) qq_{15,1} - \sin(\gamma_2 - \gamma_1) qq_{15,2})a_1^2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2 - \gamma_1) qq_{16,1} - \sin(\gamma_2 - \gamma_1) qq_{16,2})a_2^2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(-\gamma_2 - \gamma_1) qq_{17,1} - \sin(-\gamma_2 - \gamma_1) qq_{17,2})a_1^2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_1 - \gamma_2) qq_{18,1} - \sin(\gamma_1 - \gamma_2) qq_{18,2})a_2^2 + (qq_{19,1})a_2
\end{aligned} \tag{Vf-4}$$

$$\begin{aligned}
a_1 \dot{\gamma}_2 = & -a_1(pp_{1,2}) - (\cos(\gamma_1) pp_{2,2} + \sin(\gamma_1) pp_{2,1})a_2 - \frac{1}{4}(pp_{3,2})a_1^3 \\
& - \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1) pp_{4,2} - \sin(\gamma_1) pp_{4,1})a_1^2 a_2 \\
& - \frac{1}{4}(\cos(2\gamma_1) pp_{5,2} + \sin(2\gamma_1) pp_{5,1})a_1 a_2^2 \\
& - \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1) pp_{6,2} - \sin(\gamma_1) pp_{6,1})a_1^2 a_2 + \frac{1}{4}(pp_{7,2})a_1 a_2^2 \\
& - \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1) pp_{8,2} + \sin(\gamma_1) pp_{8,1})a_2^3 \\
& - \frac{1}{2}(\cos(\gamma_1 - \gamma_2) pp_{9,2} + \sin(\gamma_1 - \gamma_2) pp_{9,1})a_1 a_2 \\
& - \frac{1}{2}(\cos(\gamma_1 + \gamma_2) pp_{10,2} + \sin(\gamma_1 + \gamma_2) pp_{10,1})a_1 a_2 \\
& - \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2 - \gamma_1) pp_{11,2} + \sin(\gamma_2 - \gamma_1) pp_{11,1})a_1 a_2 \\
& - (\cos(2\gamma_2 - \gamma_1) pp_{12,2} + \sin(2\gamma_2 - \gamma_1) pp_{12,1})a_2 \\
& - (\cos(2\gamma_2) pp_{13,2} + \sin(2\gamma_2) pp_{13,1})a_1 \\
& + 2(\cos(\gamma_2) pp_{14,2} + \sin(\gamma_2) pp_{14,1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}a_2^2(\cos(\gamma_2)pp_{15,2} + \sin(\gamma_2)pp_{15,1}) \\
& -\frac{1}{2}a_1^2(\cos(\gamma_2)pp_{16,2} + \sin(\gamma_2)pp_{16,1}) \\
& -\frac{1}{2}a_2^2(\cos(2\gamma_1 - \gamma_2)pp_{17,2} + \sin(2\gamma_1 - \gamma_2)pp_{17,1}) \\
& -\frac{1}{2}a_1^2(\cos(-\gamma_2)pp_{18,2} + \sin(-\gamma_2)pp_{18,1}) - a_1(pp_{19,2}) + a_1\varepsilon^2\rho
\end{aligned}$$

(YY-4)

$$\begin{aligned}
a_1a_2\dot{\gamma}_1 = & (\cos(\gamma_1)qq_{1,2} - \sin(\gamma_1)qq_{1,1})a_1^2 + qq_{2,2}a_1a_2 \\
& + \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1)qq_{3,2} - \sin(\gamma_1)qq_{3,1})a_1^4 + \frac{1}{4}(qq_{4,2})a_1^3a_2 \\
& + \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1)qq_{5,2} + \sin(\gamma_1)qq_{5,1})a_1^2a_2^2 \\
& + \frac{1}{4}(\cos(2\gamma_1)qq_{6,2} - \sin(2\gamma_1)qq_{6,1})a_1^3a_2 \\
& + \frac{1}{4}(\cos(\gamma_1)qq_{7,2} - \sin(\gamma_1)qq_{7,1})a_1^2a_2^2 + \frac{1}{4}(qq_{8,2})a_1a_2^3 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(-\gamma_2)qq_{9,2} + \sin(-\gamma_2)qq_{9,1})a_1^2a_2 \\
& + 2(\cos(\gamma_2 - \gamma_1)qq_{10,2} + \sin(\gamma_2 - \gamma_1)qq_{10,1})a_1^2a_2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2)qq_{11,2} + \sin(\gamma_2)qq_{11,1})a_1^2a_2 \\
& + \frac{1}{2}(\cos(\gamma_2 - 2\gamma_1)qq_{12,2} + \sin(\gamma_2 - 2\gamma_1)qq_{12,1})a_1^2a_2 \\
& + (\cos(2\gamma_2 - \gamma_1)qq_{13,2} + \sin(2\gamma_2 - \gamma_1)qq_{13,1})a_1^2 \\
& + (\cos(2\gamma_2 - 2\gamma_1)qq_{14,2} + \sin(2\gamma_2 - 2\gamma_1)qq_{14,1})a_1a_2 \\
& + \frac{1}{2}a_1^3(\cos(\gamma_2 - \gamma_1)qq_{15,2} + \sin(\gamma_2 - \gamma_1)qq_{15,1}) \\
& + \frac{1}{2}a_1a_2^2(\cos(\gamma_2 - \gamma_1)qq_{16,2} + \sin(\gamma_2 - \gamma_1)qq_{16,1}) \\
& + \frac{1}{2}a_1^3(\cos(-\gamma_2 - \gamma_1)qq_{17,2} + \sin(-\gamma_2 - \gamma_1)qq_{17,1}) \\
& + \frac{1}{2}a_1a_2^2(\cos(\gamma_1 - \gamma_2)qq_{18,2} + \sin(\gamma_1 - \gamma_2)qq_{18,1}) + a_1^2(qq_{19,2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_1 a_2 (pp_{1,2}) - (\cos(\gamma_1) pp_{2,2} + \sin(\gamma_1) pp_{2,1}) a_2^2 - \frac{1}{4} (pp_{3,2}) a_1^3 a_2 \\
& - \frac{1}{4} (\cos(\gamma_1) pp_{4,2} - \sin(\gamma_1) pp_{4,1}) a_1^2 a_2^2 \\
& - \frac{1}{4} (\cos(2\gamma_1) pp_{5,2} + \sin(2\gamma_1) pp_{5,1}) a_1 a_2^3 \\
& - \frac{1}{4} (\cos(\gamma_1) pp_{6,2} - \sin(\gamma_1) pp_{6,1}) a_1^2 a_2^2 + \frac{1}{4} (pp_{7,2}) a_1 a_2^3 \\
& - \frac{1}{4} (\cos(\gamma_1) pp_{8,2} + \sin(\gamma_1) pp_{8,1}) a_2^4 \\
& - \frac{1}{2} (\cos(\gamma_1 - \gamma_2) pp_{9,2} + \sin(\gamma_1 - \gamma_2) pp_{9,1}) a_1 a_2^2 \\
& - \frac{1}{2} (\cos(\gamma_1 + \gamma_2) pp_{10,2} + \sin(\gamma_1 + \gamma_2) pp_{10,1}) a_1 a_2^2 \\
& - \frac{1}{2} (\cos(\gamma_2 - \gamma_1) pp_{11,2} + \sin(\gamma_2 - \gamma_1) pp_{11,1}) a_1 a_2^2 \\
& - (\cos(2\gamma_2 - \gamma_1) pp_{12,2} + \sin(2\gamma_2 - \gamma_1) pp_{12,1}) a_2^2 \\
& - (\cos(2\gamma_2) pp_{13,2} + \sin(2\gamma_2) pp_{13,1}) a_1 a_2 \\
& + 2(\cos(\gamma_2) pp_{14,2} + \sin(\gamma_2) pp_{14,1}) a_2 \\
& - \frac{1}{2} a_2^3 (\cos(\gamma_2) pp_{15,2} + \sin(\gamma_2) pp_{15,1}) \\
& - \frac{1}{2} a_1^2 a_2 (\cos(\gamma_2) pp_{16,2} + \sin(\gamma_2) pp_{16,1}) \\
& - \frac{1}{2} a_2^3 (\cos(2\gamma_1 - \gamma_2) pp_{17,2} + \sin(2\gamma_1 - \gamma_2) pp_{17,1}) \\
& - \frac{1}{2} a_1^2 a_2 (\cos(-\gamma_2) pp_{18,2} + \sin(-\gamma_2) pp_{18,1}) - a_1 a_2 (pp_{19,2}) + a_1 a_2 \varepsilon^2 \sigma \quad (\text{V}\lambda\text{-}\text{f})
\end{aligned}$$

فصل پنجم

پارامترهای عددی و نتایج

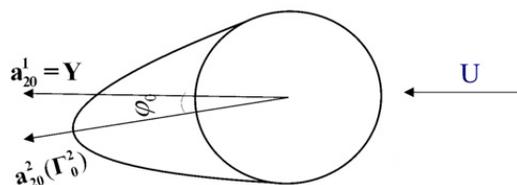
۵- پارامترهای عددی و نتایج

به منظور به دست آوردن نتایج عددی مطالعات انجام شده، کابل 4XLGJ-400/50 با سطح مقطع U شکل مانند شکل (۱-۵)، مورد بررسی قرار می‌گیرد [۴۳]. مقادیر پارامترهای این مدل در جدول (۱-۵) آمده است.

جدول (۱-۵) خواص کابل [۴۳]

نماد	مقدار	پارامتر
EA	$31.3 \times 10^6 \text{N}$	سختی محوری
GJ	393 Nm^2	سختی پیچشی
EI	1965 Nm^2	سختی خمشی
ξ_s	0.45%	ضریب میرایی سازه‌ای
m	1.82 kg/m	جرم واحد طول
x_l	99.6 m	موقعیت x پایه
y_l	-70.3 m	موقعیت y پایه
α	-35.2°	زاویه‌ی آویز کابل
\bar{T}	107.19 KN	کشش اولیه

β	0°	زاویه‌ی انحراف باد
ε	0.1	ضریب پرتوربیشن
e_y^0	0.00326 m	خروج از مرکزی اولیه
φ_0	0.395	دوران اولیه
l	250 m	طول کابل
d	1.3 m	شکم کابل برای حالت تشدید ۱:۱ داخلی
d	5.6 m	شکم کابل برای حالت تشدید ۲:۱ داخلی
r	27 mm	شعاع کابل



شکل (۱-۵) جهت‌گیری اولیه‌ی کابل U شکل در برابر جریان باد ($\gamma=0$) [۴۳]

با استفاده از مرجع [۵۰] فرکانس‌های طبیعی به صورت (۱-۵) برای هر شکل مُد تعریف می‌شوند که در آن زیرنویس s نشان‌دهنده‌ی مُد متقارن، a مُد پادمتقارن، i مُد درون صفحه و o مُد خارج از صفحه است و γ_m ، λ و L_e در روابط (۲-۵) تا (۴-۵) آمده است.

$$\omega_{so} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}}$$

$$\omega_{ao} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}}$$

$$\omega_{ai} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{H}{m}} \quad \omega_{si} = \gamma_m \sqrt{\frac{H}{m}} \quad (1-5)$$

$$\tan\left(\frac{\gamma_m}{2}\right) = \left(\frac{\gamma_m}{2}\right) - \frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{\gamma_m}{2}\right)^3 \quad (2-5)$$

$$\lambda^2 = \frac{(8d)^2 EA}{l HL_e} \quad (3-5)$$

$$L_e = l\left(1 + 8\left(\frac{d}{l}\right)^2\right) \quad (4-5)$$

با این مشخصات برای کابل با شکم برابر 1.3 m داریم:

$$\omega_{si} = 3.11 \quad \omega_{ai} = 6.1$$

$$\omega_{so} = 3.05 \quad \omega_{ao} = 6.1 \quad (5-5)$$

از آن جا که $\lambda^2 \ll 4\pi^2$ در نتیجه کابل به اولین نقطه‌ی تقاطع خود نزدیک است در نتیجه از توابع ویژه‌ی

زیر برای گسسته‌سازی می‌توان استفاده کرد [۳۴].

$$v(s, t) = \sum_m f_{1m}(s) q_{1m}(t) \quad (6-5)$$

$$w(s, t) = \sum_m f_{2m}(s) q_{2m}(t) \quad (7-5)$$

$$\vartheta(s, t) = \sum_m f_{3m}(s) q_{3m}(t) \quad (8-5)$$

برای $m = 1, 3, 5, \dots$ رابطه‌ی (۹-۵) برقرار است و K_0 از حل $f_{1m}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ به دست می‌آید.

$$f_{1m} = K_0 \left(1 - \tan\left(\frac{\gamma_m}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma_m S}{l}\right) - \cos\left(\frac{\gamma_m S}{l}\right) \right) \quad (9-5)$$

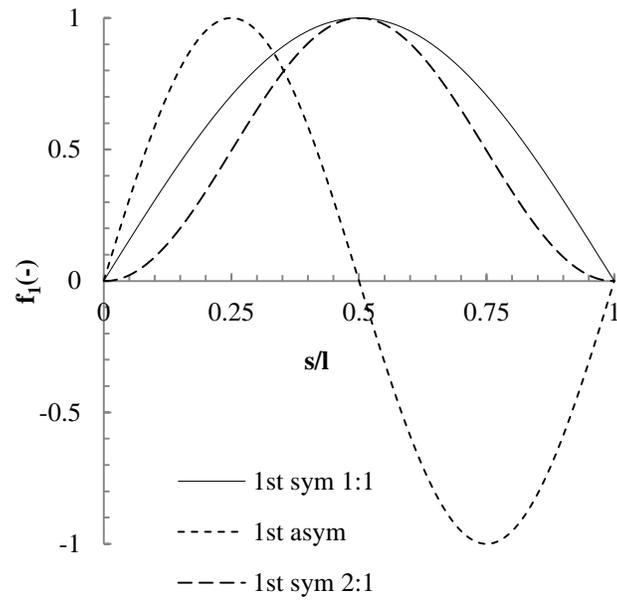
برای $m = 2, 4, 6, \dots$ داریم:

$$f_{1m} = \sin\left(\frac{m\pi S}{l}\right) \quad (10-5)$$

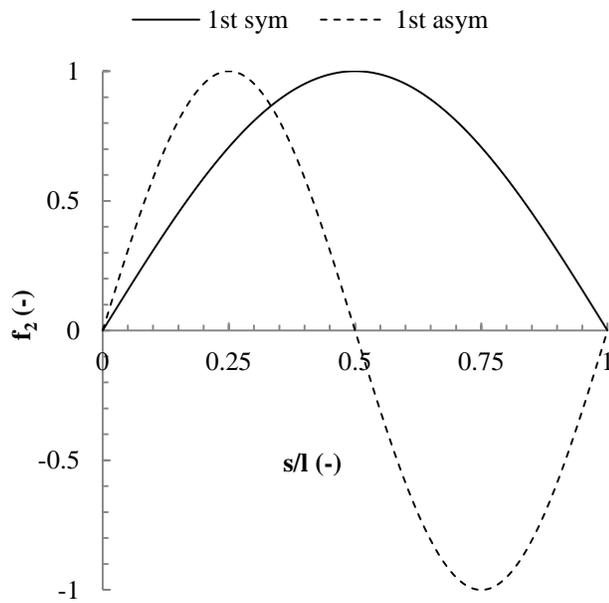
همچنین برای تمامی مقادیر m ، f_{2m} و f_{3m} به صورت زیر می باشد.

$$f_{2m} = f_{3m} = \sin\left(\frac{m\pi S}{l}\right) \quad (11-5)$$

قابل مشاهده است که اولین مُد درون صفحه‌ی متقارن با اولین مُد خارج از صفحه‌ی متقارن دارای شرایط تشدید داخلی ۱:۱ و مدهای متقارن با مدهای پادمتقارن دارای شرایط تشدید داخلی ۱:۲ می باشد. توابع ویژه مربوط به این مدها در شکل (۲-۵) و شکل (۳-۵) آورده شده است.



شکل (۲-۵) تابع ویژه مُد درون صفحه برای شرایط رزونانسی مختلف



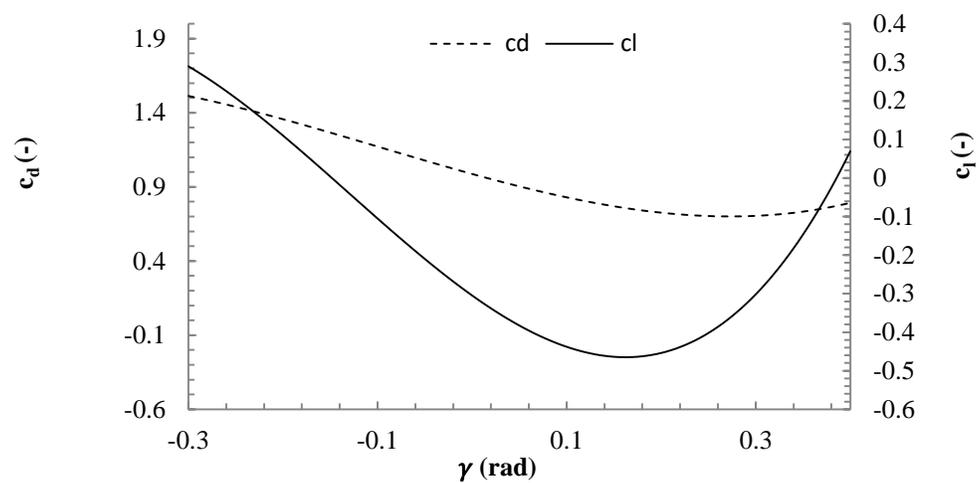
شکل (۳-۵) تابع ویژه مؤلفه‌ی w مُد خارج از صفحه

با توجه به مشخصات آیرودینامیکی، ضرایب آیرودینامیکی این نوع از مقطع به صورت تجربی به دست آمده است [۴۳] در این مقاله با توجه به شکل (۱-۵) $\gamma = 0$ در پیکربندی مرجع در نظر گرفته شده است. چند جمله‌ای برازش شده با این داده‌های تجربی در رابطه‌ی (۱۴-۵) و (۱۵-۵) آمده است و تغییرات آن با زاویه‌ی حمله در شکل (۴-۵) رسم شده است.

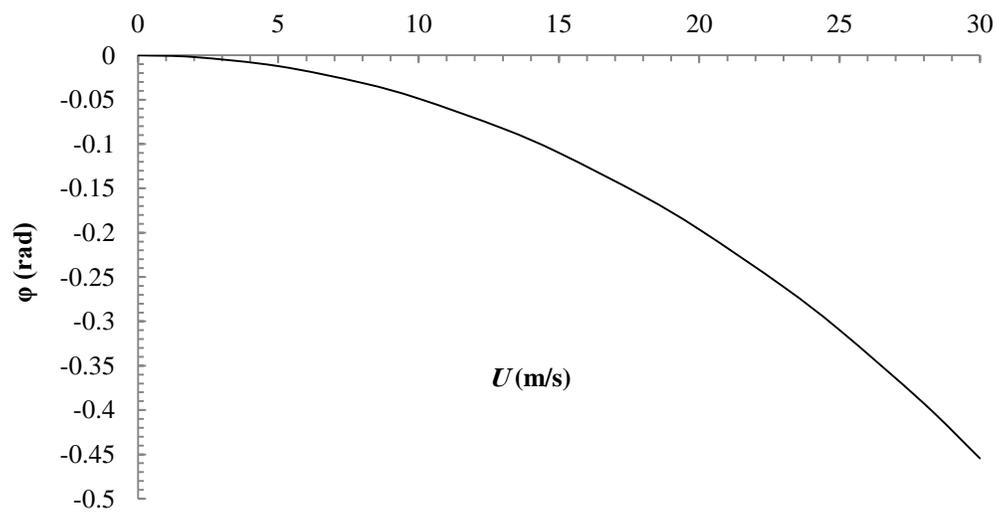
$$\overline{c_d}[\gamma] = 4.5712\gamma^3 + 1.3518\gamma^2 - 1.7591\gamma + 0.9874 \quad (۱۲-۵)$$

$$\overline{c_l}[\gamma] = 8.483\gamma^3 + 3.3187\gamma^2 - 1.4791\gamma - 0.3046 \quad (۱۳-۵)$$

زاویه‌ی حمله خود تابعی از زاویه‌ی دوران می‌باشد، شکل (۵-۵) تغییرات زاویه‌ی دوران را با سرعت باد نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود زاویه حمله در ابتدا با شیب ملایم‌تری تغییر می‌کند اما با بالاتر رفتن سرعت تغییرات سریع‌تر اتفاق می‌افتد.



شکل (۴-۵) ضرایب آیرودینامیکی لیفت و درگ

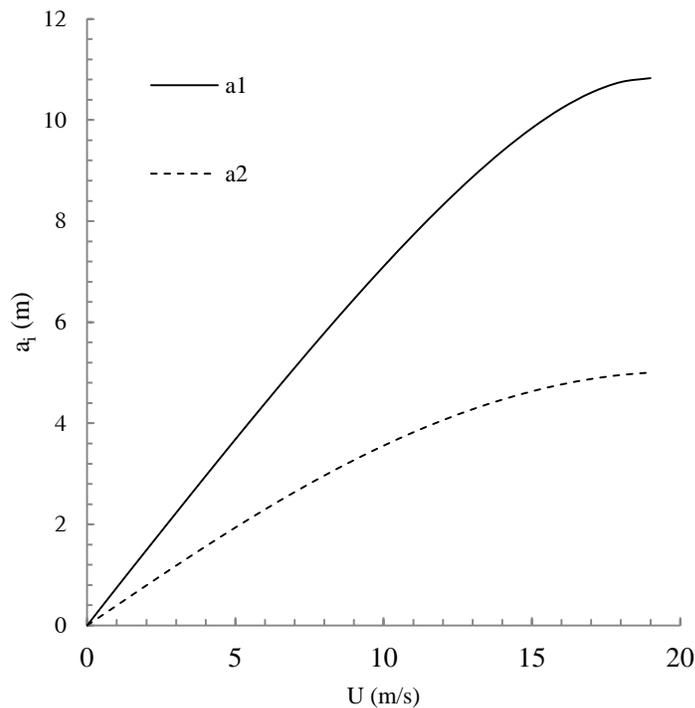


شکل (۵-۵) تغییر زاویه دوران با سرعت

۵-۱ حل پایداری

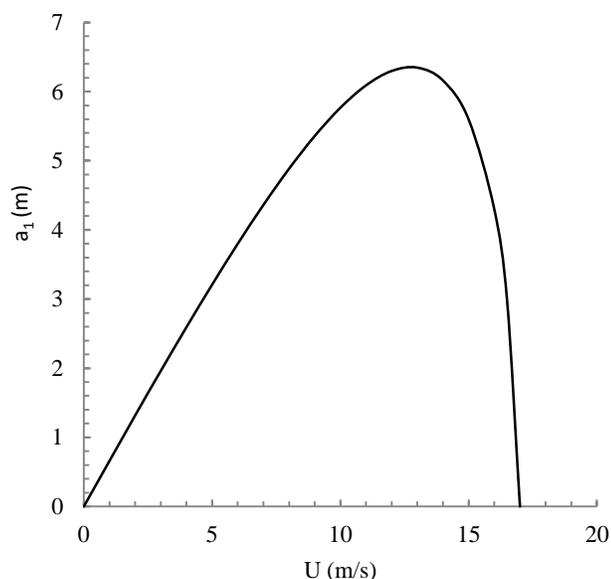
به منظور بررسی پایداری سیستم کابل دو سر ثابت در حالت رزونانس داخلی ۱:۱، با قرار دادن $\dot{a}_1 = 0$ و $\dot{a}_2 = 0$ در معادلات مدولاسیون- فاز کاهش یافته‌ی (۴-۵۸) تا (۴-۵۹) می‌توان نقاط تعادل سیستم را به دست آورد.

شکل (۵-۶) تغییرات دامنه‌ی a_1 و a_2 را با سرعت باد نشان می‌دهد در این حالت خروج از مرکزی سطح مقطع نادیده گرفته شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود تغییرات دامنه در محدوده‌ی سرعت مورد بررسی با افزایش سرعت افزایش پیدا می‌کند همچنین دامنه‌ی a_1 نسبت به دامنه‌ی a_2 تغییرات محسوس‌تری با سرعت باد دارد.

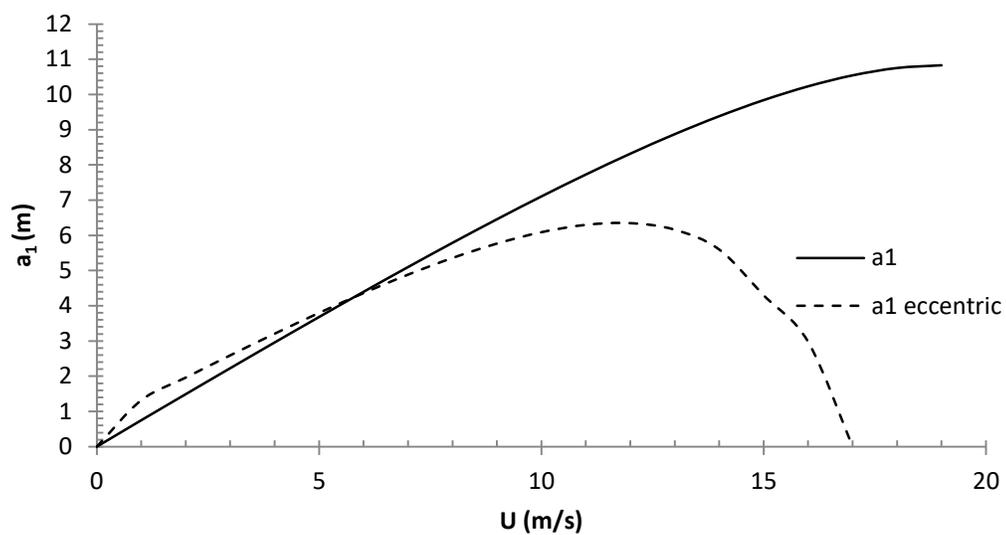


شکل (۵-۶) تغییرات دامنه با سرعت در حالت تشدید ۱:۱ بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی

شکل (۷-۵) تغییرات دامنه a_1 با سرعت باد، با در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت دامنه‌ی a_1 مانند حالت بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی، افزایش می‌یابد، اما با افزایش سرعت دامنه شروع به کاهش می‌کند که کاملاً برخلاف رفتاری است که در شکل (۶-۵) آمده است مقایسه‌ی بین این دو حالت در شکل (۸-۵) آورده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، در این محدوده‌ی سرعت، حداکثر دامنه در شرایط بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی ۱۱ متر است اما حداکثر دامنه با در نظر گرفتن خروج از مرکزی در حدود ۶ متر می‌باشد.



شکل (۷-۵) تغییرات دامنه با سرعت برای حالت تشدید ۱:۱ با در نظر گرفتن خروج از مرکزی

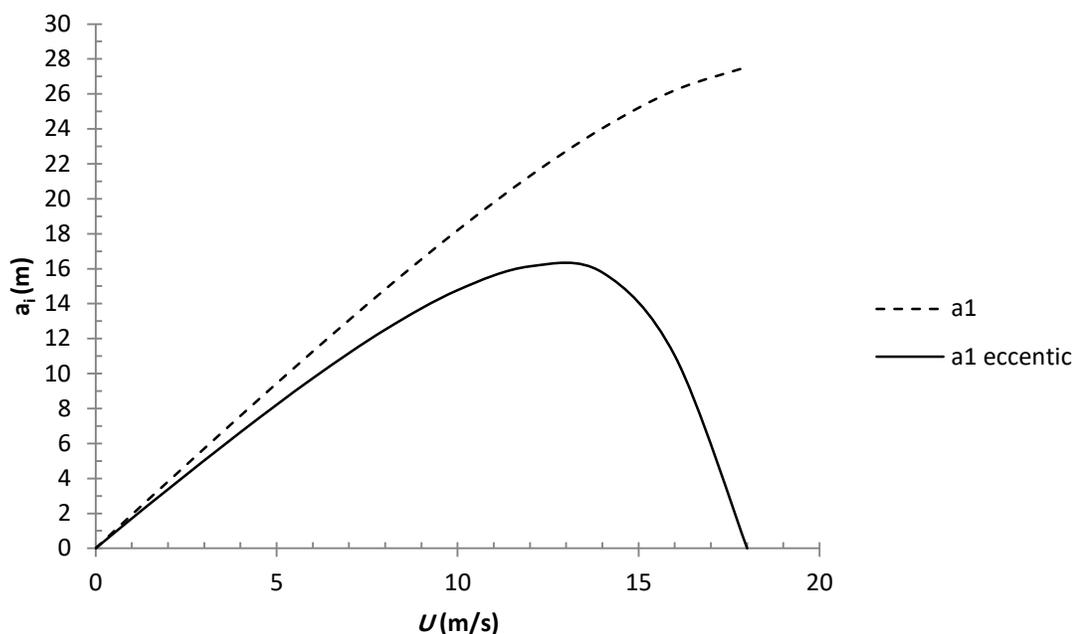


شکل (۸-۵) مقایسه تغییرات دامنه با سرعت باد، بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع و با در نظر گرفتن خروج از

مرکزی مقطع

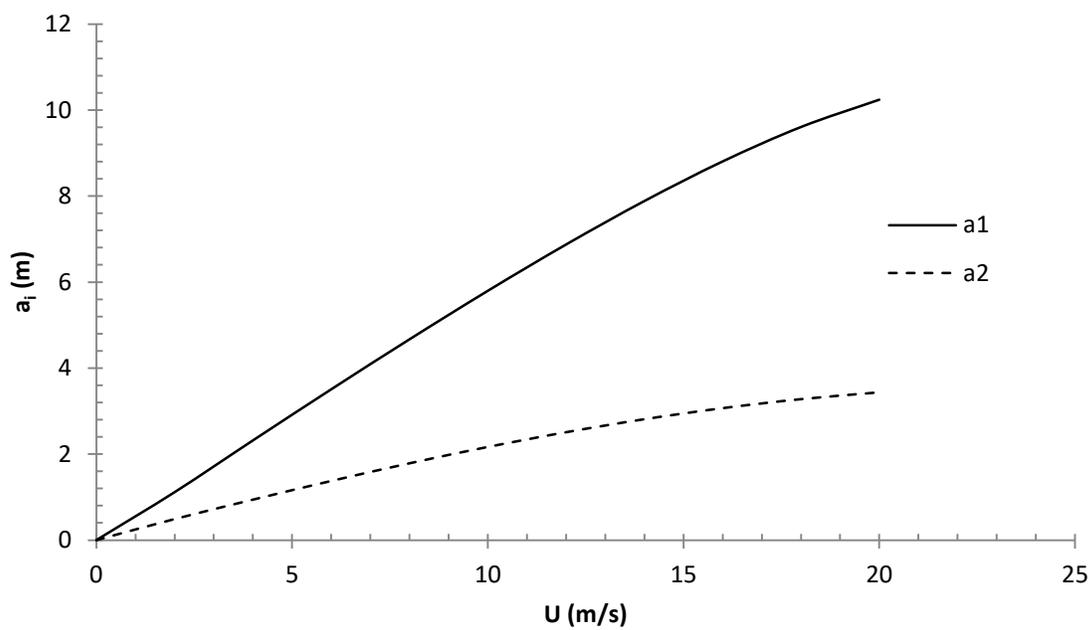
برای شرایط تشدید داخلی ۲:۱ تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد در دو حالت با در نظر گرفتن خروج از

مرکزی مقطع و بدون آن در شکل (۹-۵) رسم شده است.

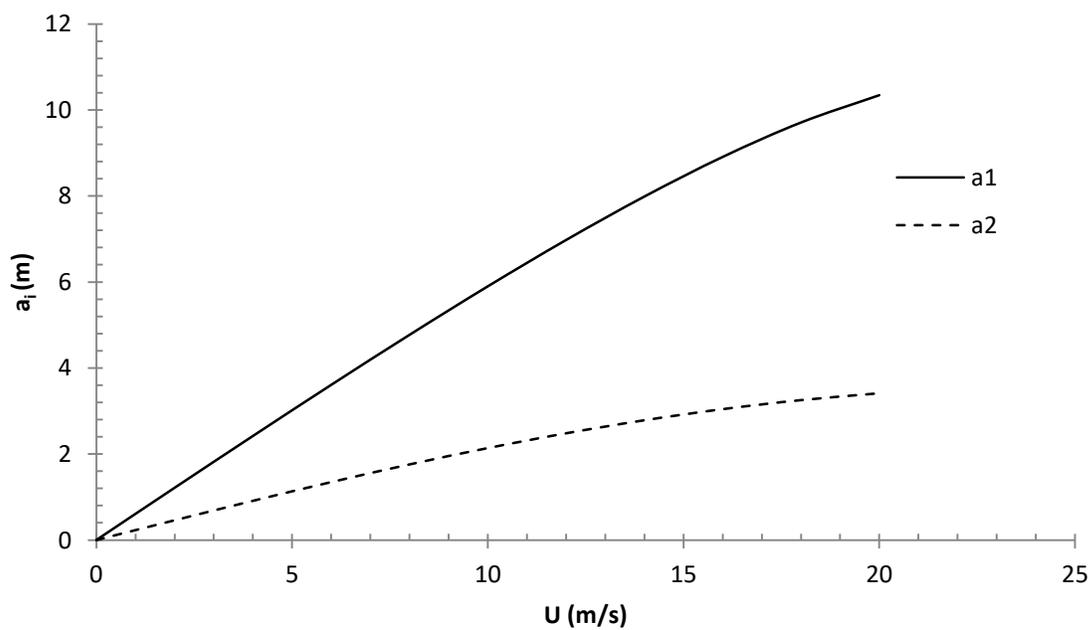


شکل (۹-۵) مقایسه‌ی تغییرات دامنه‌ی a_1 در حالت تشدید ۲:۱ با در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع و بدون آن

در فصل قبل برای کابل شیب‌دار با شرط تحریک پایه، معادلات مدولاسیون-فاز در شرایط تشدید داخلی ۱:۱، تشدید خارجی ۱:۱ و تشدید پارامتریک ۱:۱، به دست آمد. به منظور حل پایداری سیستم $\dot{\gamma}_1$ ، \dot{a}_2 ، \dot{a}_1 و $\dot{\gamma}_2$ در معادلات (۷۵-۴) تا (۷۸-۴) را برابر با صفر قرار داده و نقاط پایداری سیستم به دست آمده است. شکل (۱۰-۵) تغییرات دامنه‌ی a_1 و a_2 را با سرعت باد با دامنه‌ی تحریک پایه‌ی $\eta = 0.5$ بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع نشان می‌دهد. در شکل (۱۱-۵) این تغییرات در شرایط $\eta = 0.1$ بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی رسم شده است.

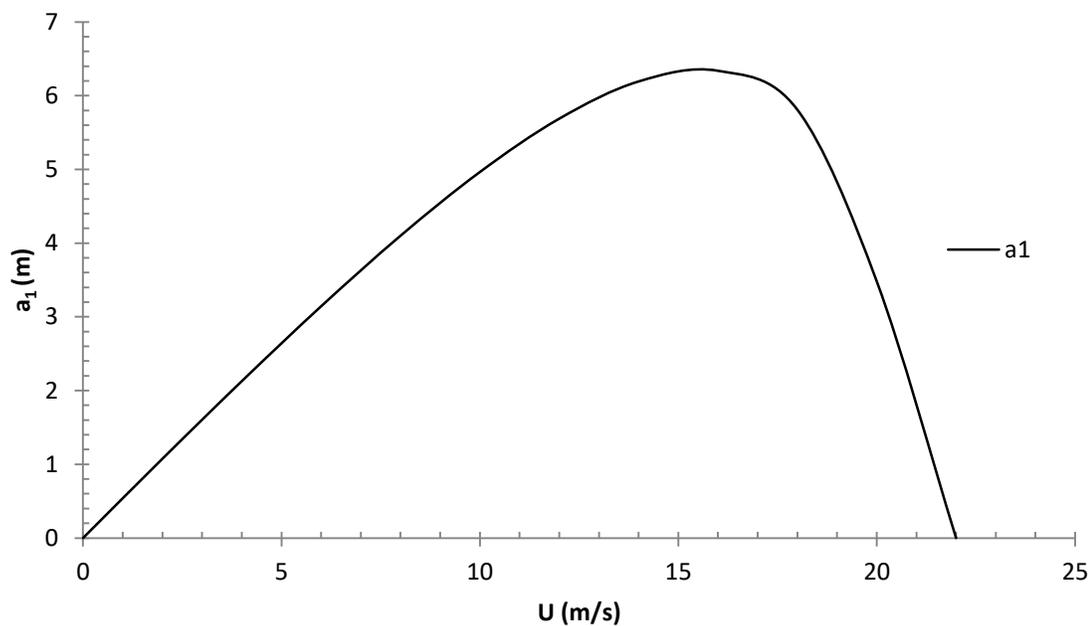


شکل (۵-۱۰) تغییرات دامنه با سرعت باد، $\eta = 0.5$

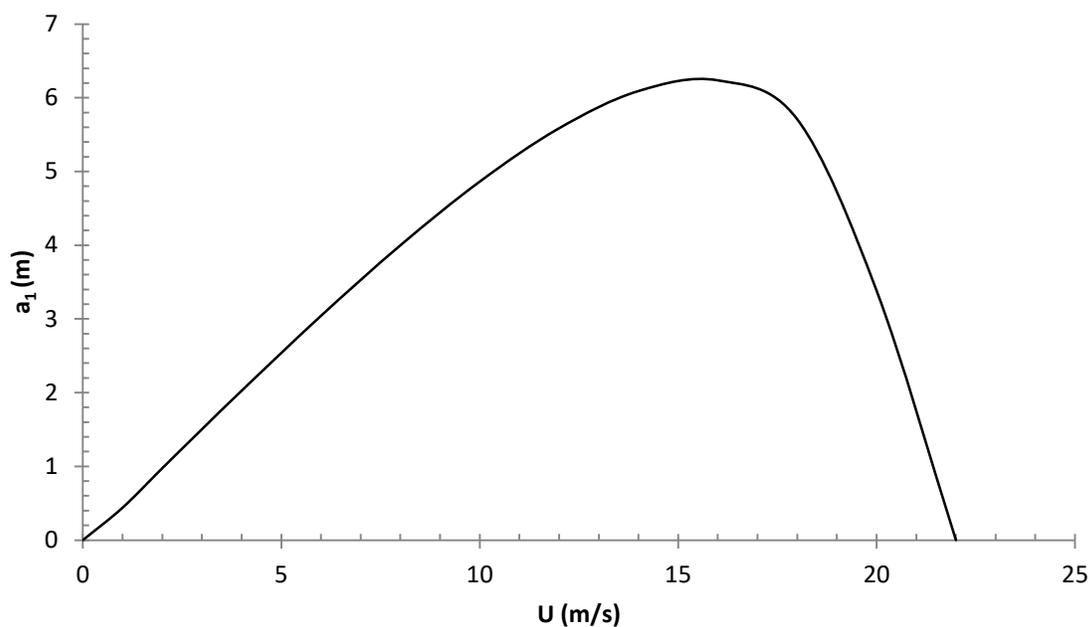


شکل (۵-۱۱) تغییرات دامنه با سرعت باد، $\eta = 0.1$

شکل (۱۲-۵) و (۱۳-۵) تغییرات دامنه‌ی a_1 را با سرعت باد به ترتیب با دامنه‌ی تحریک پایه‌ی $\eta = 0.1$ و $\eta = 0.5$ با در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع نشان می‌دهد.

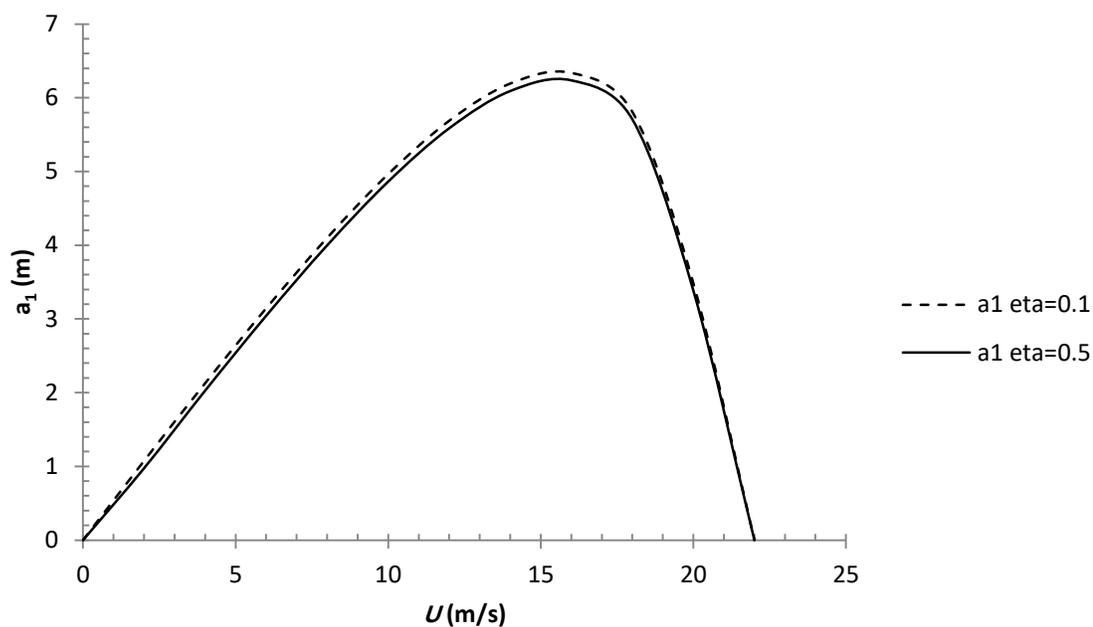


شکل (۱۲-۵) تغییرات دامنه با سرعت باد، $\eta = 0.1$ با در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع

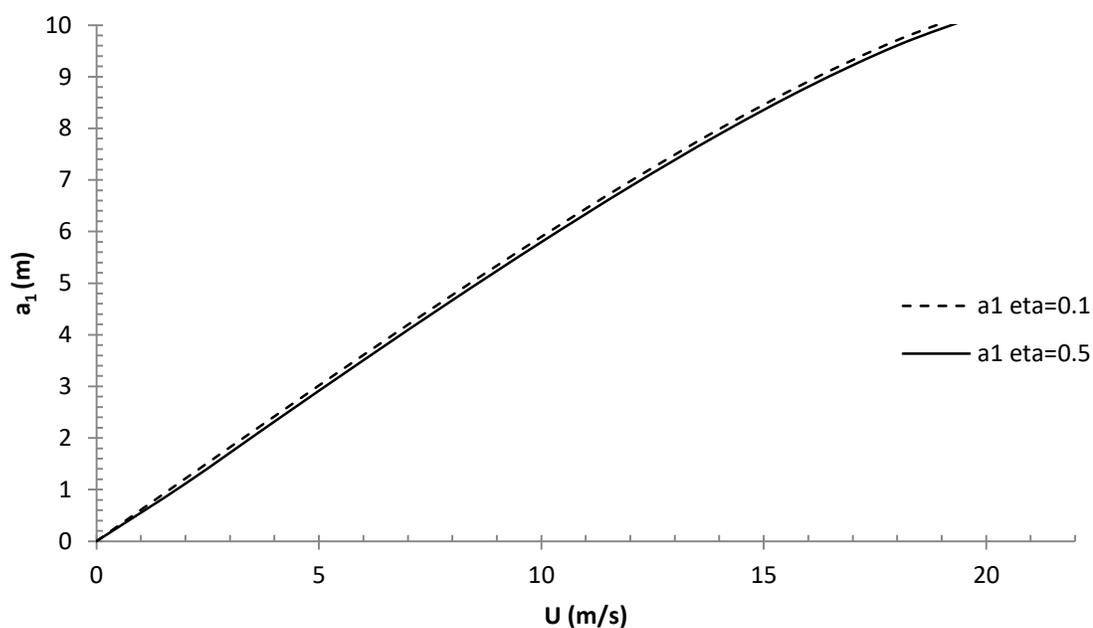


شکل (۵-۱۳) تغییرات دامنه با سرعت باد، $\eta = 0.5$ با در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع

در شکل (۵-۱۴) تغییرات دامنه‌ی a_1 با سرعت باد برای دو η مختلف با در نظر گرفتن خروج از مرکزی، مورد مقایسه قرار گرفته است. این مقایسه در شکل (۵-۱۵) برای حالتی که در آن خروج از مرکزی مقطع نادیده گرفته شده است نیز رسم شده است. همان‌طور که دیده می‌شود حرکت پایه در این مرتبه که در نظر گرفته شده است، بر روی پاسخ پایداری معادلات پرتوربیشن تاثیر چندانی ندارد.



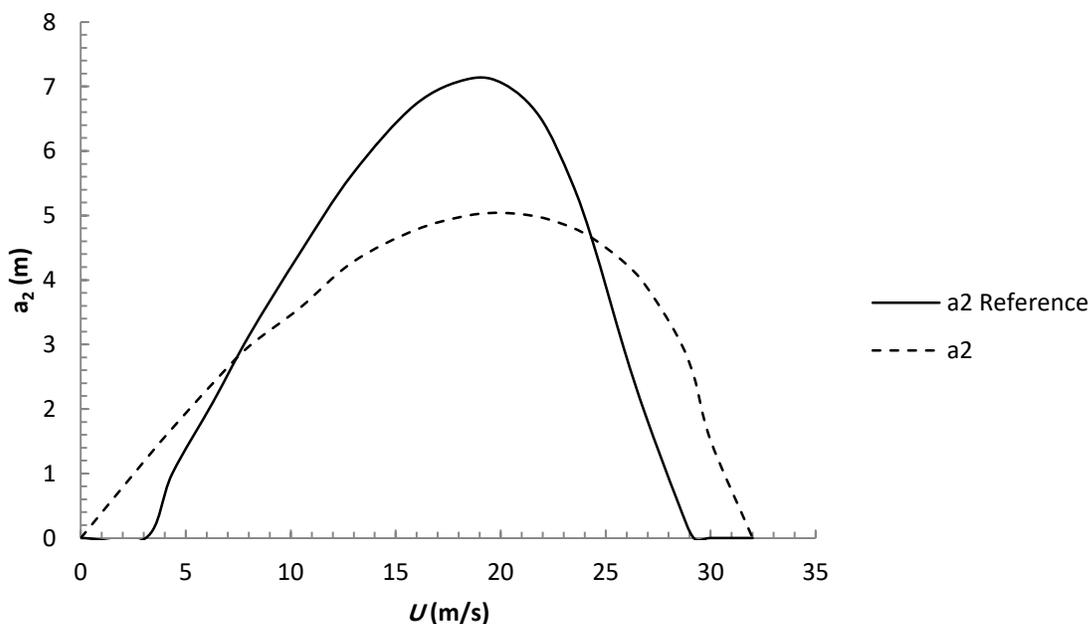
شکل (۵-۱۴) مقایسه تغییرات دامنه با سرعت باد در دو $\eta = 0.1$ و $\eta = 0.5$ با در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع



شکل (۵-۱۵) مقایسه تغییرات دامنه با سرعت باد، بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی

مقطع

به منظور اعتبار سنجی شکل (۷-۵) با شکل (۳-۳) مرجع [۴۳] در شکل (۵-۱۶) مورد مقایسه قرار گرفته است. همان طور که مشاهده می شود رفتار دو منحنی کاملاً با یکدیگر همخوانی دارد و تفاوت های موجود به علت اختلاف در زاویه ی حمله ی محاسبه شده و عدم دسترس داشتن تمامی اطلاعات مربوط در مرجع [۴۳] می باشد. نمودارهای به دست آمده به شدت به زاویه ی حمله حساس بوده و تغییر اندک در آن سبب تغییرات بسیاری در مقادیر به دست آمده می شود همچنین برای حل پایداری دسته جواب های زیادی وجود دارد و این اطلاعات که از کدام دسته برای به دست آوردن نتایج مرجع [۴۳] استفاده شده است نیز در دسترس نمی باشد.



شکل (۵-۱۶) مقایسه شکل (۵-۶) با شکل (۳-۳) مرجع [۴۳]

فصل پنجم

نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات

۶- نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات

۶-۱ نتیجه‌گیری

نتایج ارائه شده در فصل پنجم نشان می‌دهد که در نظر گرفتن خروج از مرکزی بر روی جواب‌ها تأثیر بسیاری دارد. به گونه‌ای که رفتار با در نظر گرفتن خروج از مرکزی کاملاً متفاوت با حالتی است که در آن از خروج از مرکزی مقطع چشم‌پوشی شده است. به طوری که دامنه در حالتی که در آن از خروج از مرکزی مقطع صرف‌نظر شده است در محدوده‌ی سرعت مورد بررسی کاملاً صعودی بوده، اما با در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقطع دامنه در ابتدا صعودی بوده و سپس شروع به کم شدن می‌نماید همچنین در این حالت بزرگ‌ترین دامنه‌ای که کابل تجربه می‌کند نسبت به بزرگ‌ترین دامنه در حالت بدون در نظر گرفتن خروج از مرکزی مقدار کوچک‌تری دارد.

برای حالت کابل شیب‌دار با در نظر گرفتن تحریک پایه نیز تأثیر خروج از مرکزی مشابه با حالت کابل افقی با پایه‌های ثابت است. دامنه‌ی تحریک پایه از آن‌جا که نسبت به طول کابل کوچک می‌باشد، تأثیر قابل توجهی بر روی حل پایداری سیستم مورد بررسی ندارد که کاملاً با نتایج مرجع [۴۵] هم‌خوانی دارد.

۶-۲ پیشنهادات

پیشنهاد می‌شود که تحقیق حاضر در آینده در زمینه‌های زیر انجام شود.

- در حوزه‌ی انرژی‌های نو می‌توان استفاده از انرژی ناشی از ارتعاشات کابل‌ها با استفاده از سیستم‌های برداشت انرژی را مورد مطالعه قرار داد. این برداشت انرژی می‌تواند با استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک و یا الکترومغناطیس باشد.
- جریان سیال شبیه‌سازی شده می‌تواند در حوزه‌ی ناپایا مورد بررسی قرار گیرد و اثرات جریان آشفته بر روی گالوپینگ کابل‌ها بررسی شود.

- اثر جرم متحرک بر روی گالوپینگ کابل‌ها می‌تواند از موضوعات مورد بررسی در آینده باشد.
- تحلیل اقتصادی سیستم‌های برداشت انرژی از ارتعاشات و میزان انرژی برداشت شده مورد بررسی قرار گیرد.

فصل ششم

پیوست

۷- پیوست

۷-۱ پیوست الف

ضرایب آیرودینامیکی در ادامه آمده است.

$$b_{a_2} = -kU^2(-\sin(\varphi) aa_{2,0} + \cos(\varphi) aa_{1,0})$$

$$c_{21} = -kU^2(\sin(\varphi) aa_{2,1} - \cos(\varphi) aa_{1,1})$$

$$c_{22} = -kU(2aa_{2,0} - \cos(\varphi) \sin(\varphi) aa_{2,1} - \cos^2(\varphi) aa_{2,0} + \cos^2(\varphi) aa_{1,1} \\ - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,0})$$

$$c_{23} = kU(\cos^2(\varphi) aa_{2,1} - aa_{21} + aa_{10} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,0} + \cos^2(\varphi) aa_{1,0} \\ + \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,1})$$

$$c_{211} = -\frac{1}{2}kU^2(-\sin(\varphi) aa_{2,2} + \cos(\varphi) aa_{1,2})$$

$$c_{212} = kU(-\cos^2(\varphi) aa_{2,1} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,2} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,1} \\ + 2aa_{2,1} + \cos^2(\varphi) aa_{1,2})$$

$$c_{213} = -kU(-aa_{2,2} + \cos^2(\varphi) aa_{2,2} + \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,2} + aa_{1,1} \\ + \cos^2(\varphi) aa_{1,1} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,1})$$

$$c_{222} = k(\sin(\varphi) aa_{2,0} + \frac{1}{2}\cos^2(\varphi) \sin(\varphi) aa_{2,2} - \frac{1}{2}\cos^3(\varphi) aa_{1,2} \\ - 2\cos(\varphi) aa_{2,1} + \cos^3(\varphi) aa_{2,1} + \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,1})$$

$$\begin{aligned}
c_{223} &= k(\cos^3(\varphi) aa_{2,2} + \cos(\varphi) aa_{2,0} - \cos(\varphi) aa_{2,2} + 2 \sin(\varphi) aa_{2,1} \\
&\quad + \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,2} - 2 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,1} + 2 \cos^3(\varphi) aa_{1,1} \\
&\quad - \sin(\varphi) aa_{1,0})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{233} &= k\left(\frac{1}{2} \sin(\varphi) aa_{2,2} - \cos^3(\varphi) aa_{2,1} - \frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \cos^3(\varphi) aa_{1,2} - \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,1} - \cos(\varphi) aa_{1,0} - \sin(\varphi) aa_{1,1}\right. \\
&\quad \left. + \cos(\varphi) aa_{2,1} - \frac{1}{2} \cos(\varphi) aa_{1,2}\right)
\end{aligned}$$

$$c_{2111} = \frac{1}{6} kU^2 (-\sin(\varphi) aa_{2,3} + \cos(\varphi) aa_{1,3})$$

$$\begin{aligned}
c_{2112} &= \frac{1}{2} kU (-\cos^2(\varphi) aa_{1,3} + \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,2} - 2aa_{2,2} \\
&\quad + \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,3} + \cos^2(\varphi) aa_{2,2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2113} &= \frac{1}{2} kU (-aa_{2,3} + \cos^2(\varphi) aa_{2,3} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,2} + \cos^2(\varphi) aa_{1,2} \\
&\quad + aa_{1,2} + \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2123} &= k(-2 \cos^3(\varphi) aa_{1,2} - \cos^3(\varphi) aa_{2,3} + \cos(\varphi) aa_{2,3} - \cos(\varphi) aa_{2,1} \\
&\quad - \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,3} - 2 \sin(\varphi) aa_{2,2} + \sin(\varphi) aa_{1,1} \\
&\quad + 2 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2122} &= k\left(\frac{1}{2} \cos^3(\varphi) aa_{1,3} + 2 \cos(\varphi) aa_{2,2} - \frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,3}\right. \\
&\quad \left. - \cos^3(\varphi) aa_{2,2} - \sin(\varphi) aa_{2,1} - \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2133} &= k(-\cos(\varphi) aa_{2,2} - \frac{1}{2} \cos^3(\varphi) aa_{1,3} + \frac{1}{2} \cos(\varphi) aa_{1,3}) \\
&\quad + \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,2} + \cos(\varphi) aa_{1,1} + \sin(\varphi) aa_{1,2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,3} - \frac{1}{2} \sin(\varphi) aa_{2,3} + \cos^3(\varphi) aa_{2,2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2222} &= \frac{-k}{6U} (\cos(\varphi)(-3 \cos^3(\varphi) aa_{2,2} + 6 \cos(\varphi) aa_{2,2} - 6 \sin(\varphi) aa_{2,1}) \\
&\quad - 3 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,2} - \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,3} + \cos^3(\varphi) aa_{1,3}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2223} &= \frac{k}{2U} (-\cos^2(\varphi) aa_{2,3} - 2aa_{2,1} - 3 \cos^3(\varphi) aa_{1,3} \sin(\varphi) aa_{2,2} \\
&\quad - \cos^2(\varphi) aa_{1,2} + 4 \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,2} + \cos^4(\varphi) aa_{2,3} \\
&\quad - 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,1} + 4 \cos^2(\varphi) aa_{2,1} + \cos^3(\varphi) \sin(\varphi) aa_{1,3} \\
&\quad + 3 \cos^4(\varphi) aa_{1,2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2233} &= \frac{k}{2U} (2aa_{1,1} - 2aa_{2,2} - 3 \cos^4(\varphi) aa_{2,2} + 5 \cos^2(\varphi) aa_{2,2} \\
&\quad - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,2} - 4 \cos^2(\varphi) aa_{1,1} - \cos^2(\varphi) aa_{1,3} + \cos^4(\varphi) aa_{1,3} \\
&\quad - 3 \sin(\varphi) \cos^3(\varphi) aa_{1,2} + \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,3} - 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,1} \\
&\quad - \sin(\varphi) \cos^3(\varphi) aa_{2,3})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{2333} &= \frac{-k}{6U} (\sin(\varphi)(-3 \cos^3(\varphi) aa_{2,2} + \cos^3(\varphi) aa_{1,3} - \cos(\varphi) aa_{1,3}) \\
&\quad + 3 \cos(\varphi) aa_{2,2} - 6 \cos(\varphi) aa_{1,1} - 3 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,2} \\
&\quad - \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,3} - 3 \sin(\varphi) aa_{1,2} + \sin(\varphi) aa_{2,3}))
\end{aligned}$$

$$b_{a_3} = kU^2(\cos(\varphi) aa_{2,0} + \sin(\varphi) aa_{1,0})$$

$$c_{31} = -kU^2(\sin(\varphi) aa_{1,1} + \cos(\varphi) aa_{2,1})$$

$$c_{32} = kU(\cos^2(\varphi) aa_{2,1} + \cos^2(\varphi) aa_{1,0} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,0} - 2aa_{1,0} + \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,1})$$

$$c_{33} = kU(-aa_{1,1} + \cos^2(\varphi) aa_{1,1} - \cos^2(\varphi) aa_{2,0} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,1} - aa_{2,0} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,0})$$

$$c_{311} = \frac{1}{2}kU^2(\cos(\varphi) aa_{2,2} + \sin(\varphi) aa_{1,2})$$

$$c_{312} = -kU(\sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,2} + \cos^2(\varphi) aa_{1,1} + \cos^2(\varphi) aa_{2,2} - 2aa_{1,1} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,1})$$

$$c_{313} = -kU(-\cos^2(\varphi) aa_{2,1} - aa_{1,2} + \cos^2(\varphi) aa_{1,2} - \cos(\varphi) \sin(\varphi) aa_{1,1} - aa_{2,1} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,2})$$

$$c_{322} = k(\cos^2(\varphi) aa_{1,1} + \sin(\varphi) aa_{1,0} + \frac{1}{2}\cos^2(\varphi) \sin(\varphi) aa_{1,2} - 2\cos(\varphi) aa_{1,1})$$

$$c_{323} = k(-2\cos^2(\varphi) aa_{2,1} + \cos^3(\varphi) aa_{1,2} + 2\sin(\varphi) aa_{1,1} - \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,2} - \cos(\varphi) aa_{1,2} + \cos(\varphi) aa_{1,0} - 2\cos^2(\varphi) \sin(\varphi) aa_{1,1} + \sin(\varphi) aa_{2,0})$$

$$c_{333} = \frac{k}{6U} (\sin(\varphi)(3 \cos^2(\varphi) aa_{1,2} + \cos^3(\varphi) aa_{2,3} - \cos(\varphi) aa_{2,3} \\ - 3 \cos(\varphi) aa_{1,2} - 6 \cos(\varphi) aa_{2,1} + \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,3} \\ - 3 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,2} - \sin(\varphi) aa_{1,3} - 3 \sin(\varphi) aa_{2,2}))$$

$$c_{3111} = -\frac{kU^2}{6} (\sin(\varphi) aa_{1,3} + \cos(\varphi) aa_{2,3})$$

$$c_{3112} = \frac{kU}{2} (\cos^2(\varphi) aa_{1,2} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,2} + \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,3} \\ - 2aa_{1,2} + \cos^2(\varphi) aa_{2,3})$$

$$c_{3113} = \frac{1}{2} kU (-\cos^2(\varphi) aa_{2,2} - aa_{1,3} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,3} + \cos^2(\varphi) aa_{1,3} \\ - aa_{2,2} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,2})$$

$$c_{3122} = k(-\frac{1}{2} \cos^3(\varphi) aa_{2,3} - \cos^3(\varphi) aa_{1,2} - \sin(\varphi) aa_{1,1} + 2 \cos(\varphi) aa_{1,2} \\ + \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,2} - \frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,3})$$

$$c_{3123} = k(-\sin(\varphi) aa_{2,1} + \cos(\varphi) aa_{1,3} - \cos^3(\varphi) aa_{1,3} - 2 \sin(\varphi) aa_{1,2} \\ + 2 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,2} + \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,3} + 2 \cos^3(\varphi) aa_{2,2} \\ - \cos(\varphi) aa_{1,1})$$

$$c_{3133} = k(-\frac{1}{2} \sin(\varphi) aa_{1,3} - \frac{1}{2} \cos(\varphi) aa_{2,3} - \cos(\varphi) aa_{2,1} + \frac{1}{2} \cos^3(\varphi) aa_{2,3} \\ + \frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,3} + \cos^3(\varphi) aa_{1,2} - \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,2} \\ - \sin(\varphi) aa_{2,2} - \cos(\varphi) aa_{1,2})$$

$$c_{3222} = \frac{k}{6U} (\cos(\varphi)(6 \sin(\varphi) aa_{1,1} + 3 \cos^3(\varphi) aa_{1,2} - 3 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,2} \\ - 6 \cos(\varphi) aa_{1,2} + \cos^3(\varphi) aa_{2,3} + \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,3}))$$

$$c_{3223} = \frac{k}{2U} (4 \cos^2(\varphi) aa_{1,1} + \cos^4(\varphi) aa_{1,3} - \cos^2(\varphi) aa_{1,3} - 2aa_{1,1} \\ - \sin(\varphi) \cos^3(\varphi) aa_{2,3} + \cos^2(\varphi) aa_{2,2} - 3 \cos^4(\varphi) aa_{2,2} \\ + 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{2,1} + 4 \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,2} - 3 \sin(\varphi) \cos^3(\varphi) aa_{1,2})$$

$$c_{3233} = \frac{-k}{2U} (\sin(\varphi) \cos^3(\varphi) aa_{1,3} - 4 \cos^2(\varphi) aa_{2,1} + 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,1} \\ + 3 \cos^4(\varphi) aa_{1,2} - \cos^2(\varphi) aa_{2,3} - \sin(\varphi) \cos(\varphi) aa_{1,3} + \cos^4(\varphi) aa_{2,3} \\ - aa_{2,2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) + 2aa_{1,2} - 3 \sin(\varphi) \cos^3(\varphi) aa_{2,2} + 2aa_{2,1} \\ - 5 \cos^2(\varphi) aa_{1,2})$$

$$c_{3333} = \frac{k}{6U} (\sin(\varphi)(3 \cos^3(\varphi) aa_{1,2} + \cos^3(\varphi) aa_{2,3} - \cos(\varphi) aa_{2,3} \\ - 3 \cos(\varphi) aa_{1,2} - 6 \cos(\varphi) aa_{2,1} + \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{1,3} \\ - 3 \sin(\varphi) \cos^2(\varphi) aa_{2,2} - \sin(\varphi) aa_{1,3} - 3 \sin(\varphi) aa_{2,2}))$$

۲-۷ پیوست ب

$$\omega_1^2 = -z_m \int_0^1 f_1 (c_{21} f_3 \beta_1 - \bar{\kappa}^2 \int_0^1 f_1 ds + \tau f_1'' + 3 \beta_1^2 \beta_3 f_3^3 c_{2111} \\ + 2 \beta_1 \beta_3 f_3^2 c_{211}) ds$$

$$h_1 = z_m \int_0^1 f_1(c_{212}f_3\beta_1\hat{v})ds$$

$$h_2 = z_m \int_0^1 f_1(c_{2122}f_3\beta_1\hat{v}^2)ds$$

$$h_3 = z_m \int_0^1 f_1 \left(-\hat{v}''\bar{\kappa} \int_0^1 f_1 ds + \bar{\kappa} \int_0^1 \hat{v}'f_1' ds + f_1'' \sin \alpha - f_1'' \int_0^1 \bar{\kappa}\hat{v} ds \right) ds$$

$$h_4 = z_m \int_0^1 f_1 \left(\hat{v}'' \int_0^1 \hat{v}'f_1' ds + f_1'' \int_0^1 \frac{1}{2} \hat{v}'^2 ds \right) ds$$

$$m_4 = z_m \int_0^1 f_1(c_{21}f_3\beta_2 + 3\beta_2\beta_3^2 f_3^3 c_{2111} + 2\beta_2\beta_3 f_3^2 c_{211})ds$$

$$h_{4,1} = z_m \int_0^1 f_1(c_{212}f_3\beta_2\hat{v})ds$$

$$h_{4,2} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2122}f_3\beta_2\hat{v}^2)ds$$

$$m_5 = z_m \int_0^1 f_1 \left(c_{211}f_3^2\beta_1^2 + \bar{\kappa} \int_0^1 \frac{1}{2} f_1'^2 ds - f_1'' \int_0^1 \bar{\kappa}f_1 ds + 3\beta_3\beta_1^2 f_3^3 c_{2111} \right) ds$$

$$h_{5,1} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2112}f_3^2\beta_1^2\hat{v})ds$$

$$h_{5,2} = z_m \int_0^1 f_1 \left(\hat{v}'' \int_0^1 \frac{1}{2} f_1'^2 ds + f_1'' \int_0^1 \hat{v}'f_1' ds \right) ds$$

$$m_7 = z_m \int_0^1 f_1 \left(c_{211}f_3^2\beta_2^2 + 3\beta_3\beta_2^2 f_3^3 c_{2111} + \bar{\kappa} \int_0^1 \frac{1}{2} f_2'^2 ds \right) ds$$

$$h_{7,1} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2112}f_3^2\beta_2^2\hat{v})ds$$

$$h_{7,2} = z_m \int_0^1 f_1 \left(\hat{v}'' \int_0^1 \frac{1}{2} f_2'^2 ds \right) ds$$

$$m_{15} = z_m \int_0^1 f_1 \left(c_{2111} f_3^3 \beta_1^3 + f_1'' \int_0^1 \frac{1}{2} f_1'^2 ds \right) ds$$

$$m_{18} = z_m \int_0^1 f_1 (c_{2111} f_3^3 \beta_2^3) ds$$

$$m_6 = z_m \int_0^1 f_1 (2c_{211} f_3^2 \beta_1 \beta_2 + 6\beta_1 \beta_2 \beta_3 f_3^3 c_{2111}) ds$$

$$h_{6,1} = z_m \int_0^1 f_1 (2c_{2112} f_3^2 \beta_1 \beta_2 \hat{v}) ds$$

$$m_8 = z_m \int_0^1 f_1 (c_{212} f_3 f_1 \beta_1 + 2\beta_1 \beta_3 f_3^2 f_1 c_{2112}) ds$$

$$h_{8,1} = z_m \int_0^1 f_1 (2c_{2122} f_3 f_1 \beta_1 \hat{v}) ds$$

$$m_9 = z_m \int_0^1 f_1 (c_{212} f_3 \beta_2 f_1 + 2\beta_2 \beta_3 f_3^2 f_1 c_{2112}) ds$$

$$h_{9,1} = z_m \int_0^1 f_1 (2c_{2122} f_3 \beta_2 f_1 \hat{v}) ds$$

$$m_{11} = z_m \int_0^1 f_1 (c_{213} f_3 f_2 \beta_1 + 2\beta_1 \beta_3 f_3^2 f_2 c_{2113}) ds$$

$$h_{11,1} = z_m \int_0^1 f_1 (c_{2123} f_3 f_2 \beta_1 \hat{v}) ds$$

$$m_{12} = z_m \int_0^1 f_1 (c_{213} f_3 f_2 \beta_2 + 2\beta_2 \beta_3 f_3^2 f_2 c_{2113}) ds$$

$$h_{12,1} = z_m \int_0^1 f_1 (c_{2123} f_3 f_2 \beta_2 \hat{v}) ds$$

$$m_{16} = z_m \int_0^1 f_1 (3c_{2111} f_3^3 \beta_1^2 \beta_2) ds$$

$$m_{17} = z_m \int_0^1 f_1 \left(3c_{2111} f_3^3 \beta_1 \beta_2^2 + f_1'' \int_0^1 \frac{1}{2} f_2'^2 ds \right) ds$$

$$m_{19} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2112}f_3^2\beta_1^2f_1)ds$$

$$m_{21} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2112}f_3^2\beta_2^2f_1)ds$$

$$m_{25} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2113}f_3^2f_2\beta_1^2)ds$$

$$m_{27} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2113}f_3^2f_2\beta_2^2)ds$$

$$m_{22} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2122}f_3\beta_1f_1^2)ds$$

$$m_{23} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2122}f_3\beta_2f_1^2)ds$$

$$m_{31} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2133}f_3\beta_1f_2^2)ds$$

$$m_{32} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2133}f_3\beta_2f_2^2)ds$$

$$m_{20} = z_m \int_0^1 f_1(2c_{2112}f_3^2\beta_1\beta_2f_1)ds$$

$$m_{26} = z_m \int_0^1 f_1(2c_{2113}f_3^2\beta_1\beta_2f_2)ds$$

$$m_{28} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2123}f_3f_2f_1\beta_1)ds$$

$$m_{29} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2123}f_3f_2f_1\beta_2)ds$$

$$m_{34} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2333}f_2^3)ds$$

$$m_{14} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2333}f_2^2 + \beta_3f_2^2f_3c_{2133})ds$$

$$h_{14,1} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2233}f_2^2\hat{v})ds$$

$$m_2 = z_m \int_0^1 f_1(c_{23}f_2 + \beta_3f_2f_3c_{213} + \beta_3^2f_2f_3^2c_{2113})ds$$

$$h_{2,1} = z_m \int_0^1 f_1(c_{223}f_2\hat{v})ds$$

$$h_{2,2} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2223}f_2\hat{v}^2)ds$$

$$m_{24} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2222}f_1^3)ds$$

$$m_{10} = z_m \int_0^1 f_1(c_{222}f_1^2 + \beta_3f_1^2f_3c_{2122})ds$$

$$h_{10,1} = z_m \int_0^1 f_1(3c_{2222}f_1^2\hat{v})ds$$

$$m_1 = z_m \int_0^1 f_1(c_{22}f_1 - c_vf_1 + \beta_3f_1f_3c_{212} + \beta_3^2f_1f_3^2c_{2112})ds$$

$$h_{1,1} = z_m \int_0^1 f_1(2c_{222}f_1\hat{v})ds$$

$$h_{1,2} = z_m \int_0^1 f_1(3c_{2222}f_1\hat{v}^2)ds$$

$$m_{13} = z_m \int_0^1 f_1(c_{223}f_1f_2 + \beta_3f_1f_2f_3c_{2123})ds$$

$$h_{13,1} = z_m \int_0^1 f_1(2c_{2223}f_2f_1\hat{v})ds$$

$$m_{30} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2223}f_2f_1^2)ds$$

$$m_{33} = z_m \int_0^1 f_1(c_{2233}f_1f_2^2)ds$$

$$m_{35} = z_m \int_0^1 f_1 (c_{2111} f_3^3 \beta_3^3 + \beta_3 f_3 c_{21}) ds$$

$$h_{35,1} = z_m \int_0^1 f_1 \left(\bar{\kappa} \sin \alpha - \bar{\kappa}^2 \int_0^1 \hat{v} ds \right) ds$$

$$h_{35,2} = z_m \int_0^1 f_1 \left(\hat{v}'' \sin \alpha - \hat{v}'' \int_0^1 \bar{\kappa} \hat{v} ds + \bar{\kappa} \int_0^1 \frac{1}{2} \hat{v}'^2 \right) ds$$

$$h_{35,3} = z_m \int_0^1 f_1 \left(\hat{v}'' \int_0^1 \frac{1}{2} \hat{v}'^2 \right) ds$$

$$h_{35,4} = z_m \int_0^1 f_1 (c_{22} \hat{v} - c_v \hat{v}) ds$$

$$h_{35,5} = z_m \int_0^1 f_1 (c_{222} \hat{v}^2) ds$$

$$h_{35,6} = z_m \int_0^1 f_1 (c_{2222} \hat{v}^3) ds$$

$$h_{35,7} = -z_m \int_0^1 f_1 (m \hat{v}) ds$$

$$z_m = \frac{1}{m \int_0^1 f_1^2 ds}$$

$$\omega_2^2 = -z_n \int_0^1 f_2 (c_{31} f_3 \beta_2 + \tau f_2'' + 3\beta_2 \beta_3^2 f_3^3 c_{3111} + 2\beta_2 \beta_3 f_3^2 c_{311}) ds$$

$$g_1 = z_n \int_0^1 f_2 (c_{312} f_3 \beta_2 \hat{v}) ds$$

$$g_2 = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3122} f_3 \beta_2 \hat{v}^2) ds$$

$$g_3 = z_n \int_0^1 f_2 \left(f_2'' \sin \alpha - f_2'' \int_0^1 \bar{\kappa} \hat{v} ds \right) ds$$

$$g_4 = z_n \int_0^1 f_2 \left(f_2'' \int_0^1 \frac{1}{2} \hat{v}'^2 ds \right) ds$$

$$n_5 = z_n \int_0^1 f_2 (c_{311} f_3^2 \beta_1^2 + 3\beta_3 \beta_1^2 f_3^3 c_{3111}) ds$$

$$g_{5,1} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3112} f_3^2 \beta_1^2 \hat{v}) ds$$

$$n_7 = z_n \int_0^1 f_2 (c_{311} f_3^2 \beta_2^2 + 3\beta_3 \beta_2^2 f_3^3 c_{3111}) ds$$

$$g_{7,1} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3112} f_3^2 \beta_2^2 \hat{v}) ds$$

$$n_{15} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3111} f_3^3 \beta_1^3) ds$$

$$n_{18} = z_n \int_0^1 f_2 \left(c_{3111} f_3^3 \beta_2^3 + f_2'' \int_0^1 \frac{1}{2} f_2'^2 ds \right) ds$$

$$n_6 = z_n \int_0^1 f_2 \left(2c_{311} f_3^2 \beta_1 \beta_2 - f_2'' \int_0^1 \bar{\kappa} f_1 ds + 6\beta_1 \beta_2 \beta_3 f_3^3 c_{3111} \right) ds$$

$$g_{6,1} = z_n \int_0^1 f_2 (2c_{3112} f_3^2 \beta_1 \beta_2 \hat{v}) ds$$

$$g_{6,2} = z_n \int_0^1 f_2 \left(f_2'' \int_0^1 \hat{v}' f_1' ds \right) ds$$

$$n_8 = z_n \int_0^1 f_2 (c_{312} f_3 f_1 \beta_1 + 2\beta_1 \beta_3 f_3^2 f_1 c_{3112}) ds$$

$$g_{8,1} = z_n \int_0^1 f_2 (2c_{3122} f_3 f_1 \beta_1 \hat{v}) ds$$

$$n_9 = z_n \int_0^1 f_2 (c_{312} f_3 \beta_2 f_1 + 2\beta_2 \beta_3 f_3^2 f_1 c_{3112}) ds$$

$$g_{9,1} = z_n \int_0^1 f_2 (2c_{3122} f_3 \beta_2 f_1 \hat{v}) ds$$

$$n_{11} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{313} f_3 f_2 \beta_1 + 2\beta_1 \beta_3 f_3^2 f_2 c_{3113}) ds$$

$$g_{11,1} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3123} f_3 f_2 \beta_1 \hat{v}) ds$$

$$n_{12} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{313} f_3 f_2 \beta_2 + 2\beta_2 \beta_3 f_3^2 f_2 c_{3113}) ds$$

$$g_{12,1} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3123} f_3 f_2 \beta_2 \hat{v}) ds$$

$$n_{16} = z_n \int_0^1 f_2 \left(3c_{3111} f_3^3 \beta_1^2 \beta_2 + f_2'' \int_0^1 \frac{1}{2} f_1'^2 \right) ds$$

$$n_{17} = z_n \int_0^1 f_2 (3c_{3111} f_3^3 \beta_1 \beta_2^2) ds$$

$$n_{19} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3112} f_3^2 \beta_1^2 f_1) ds$$

$$n_{21} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3112} f_3^2 \beta_2^2 f_1) ds$$

$$n_{25} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3113} f_3^2 f_2 \beta_1^2) ds$$

$$n_{27} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3113} f_3^2 f_2 \beta_2^2) ds$$

$$n_{22} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3122} f_3 \beta_1 f_1^2) ds$$

$$n_{23} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3122} f_3 \beta_2 f_1^2) ds$$

$$n_{31} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3133} f_3 \beta_1 f_2^2) ds$$

$$n_{32} = z_n \int_0^1 f_2 (c_{3133} f_3 \beta_2 f_2^2) ds$$

$$n_{20} = z_n \int_0^1 f_2(2c_{3112}f_3^2\beta_1\beta_2f_1)ds$$

$$n_{26} = z_n \int_0^1 f_2(2c_{3113}f_3^2\beta_1\beta_2f_2)ds$$

$$n_{28} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3123}f_3f_2f_1\beta_1)ds$$

$$n_{29} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3123}f_3f_2f_1\beta_2)ds$$

$$n_{34} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3333}f_2^3)ds$$

$$n_{14} = z_n \int_0^1 f_2(c_{333}f_2^2 + \beta_3f_2^2f_3c_{3133})ds$$

$$g_{14,1} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3233}f_2^2\hat{v})ds$$

$$n_2 = z_n \int_0^1 f_2(c_{33}f_2 - c_w f_2 + \beta_3f_2f_3c_{313} + \beta_3^2f_2f_3^2c_{3113})ds$$

$$g_{2,1} = z_n \int_0^1 f_2(c_{323}f_2\hat{v})ds$$

$$g_{2,2} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3223}f_2\hat{v}^2)ds$$

$$n_{24} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3222}f_1^3)ds$$

$$n_{10} = z_n \int_0^1 f_2(c_{322}f_1^2 + \beta_3f_1^2f_3c_{3122})ds$$

$$g_{10,1} = z_n \int_0^1 f_2(3c_{3222}f_1^2\hat{v})ds$$

$$n_1 = z_n \int_0^1 f_2(c_{32}f_1 + \beta_3f_1f_3c_{312} + \beta_3^2f_1f_3^2c_{3112})ds$$

$$g_{1,1} = z_n \int_0^1 f_2(2c_{322}f_1\hat{v})ds$$

$$g_{1,2} = z_n \int_0^1 f_2(3c_{3222}f_1\hat{v}^2)ds$$

$$n_{13} = z_n \int_0^1 f_2(c_{323}f_1f_2 + \beta_3f_1f_2f_3c_{3123})ds$$

$$g_{13,1} = z_n \int_0^1 f_2(2c_{3223}f_2f_1\hat{v})ds$$

$$n_{30} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3223}f_2f_1^2)ds$$

$$n_{33} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3233}f_1f_2^2)ds$$

$$n_{35} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3111}f_3^3\beta_3^3 + \beta_3f_3c_{31})ds$$

$$g_{35,1} = z_n \int_0^1 f_2(c_{32}\hat{v})ds$$

$$g_{35,2} = z_n \int_0^1 f_2(c_{322}\hat{v}^2)ds$$

$$g_{35,3} = z_n \int_0^1 f_2(c_{3222}\hat{v}^3)ds$$

$$z_n = \frac{1}{m \int_0^1 f_2^2 ds}$$

۳-۷ پیوست ج

$$PP_{9,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(2\Omega h_{9,1}\omega_1 + 2\Omega h_{11,1}\omega_2)$$

$$PP_{9,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(2\Omega h_{6,1} - 2\Omega h_{13,1} \omega_1 \omega_2)$$

$$PP_{10,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-2\Omega h_{9,1} \omega_1 + 2\Omega h_{11,1} \omega_2)$$

$$PP_{10,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(2\Omega h_{6,1} + 2\Omega h_{13,1} \omega_1 \omega_2)$$

$$PP_{11,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-2\Omega h_{11,1} \omega_2 + 2\Omega h_{9,1} \omega_1)$$

$$PP_{11,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(2\Omega h_{6,1} + 2\Omega h_{13,1} \omega_1 \omega_2)$$

$$PP_{12,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-3\Omega^2 \eta h_{2,2} \omega_2)$$

$$PP_{12,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(3\Omega^2 \eta h_{4,2})$$

$$PP_{13,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-3\Omega^2 \eta h_{1,2} \omega_1)$$

$$PP_{13,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(\eta h_4 + 3\Omega^2 \eta h_2)$$

$$PP_{14,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-2h_{35,1} - 2\Omega^2 h_{35,7} - \frac{3}{2} h_{35,3} \eta^2)$$

$$PP_{14,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(\frac{3}{2} \Omega^3 \eta^2 h_{35,6} + 2\Omega h_{35,4})$$

$$PP_{15,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-4h_{7,2})$$

$$PP_{15,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(4\Omega h_{14,1} \omega_2^2 + 4\Omega h_{7,1})$$

$$PP_{16,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-4h_{5,2})$$

$$PP_{16,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(4\Omega h_{10,1} \omega_1^2 + 4\Omega h_{5,1})$$

$$PP_{17,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(2\Omega h_{12,1} \omega_2 + 2h_{7,2})$$

$$PP_{17,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(2\Omega h_{17,1} - 2\Omega h_{14,1} \omega_2^2)$$

$$PP_{18,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(2\Omega h_{8,1} \omega_1 + 2h_{5,2})$$

$$PP_{18,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(2\Omega h_{5,1} - 2\Omega h_{10,1} \omega_1^2)$$

$$PP_{19,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(0)$$

$$PP_{19,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(2\eta h_4)$$

$$qq_{9,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(2\Omega g_{9,1} \omega_1 + 2\Omega g_{11,1} \omega_2 + 2g_{6,2})$$

$$qq_{9,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(-2\Omega g_{13,1} \omega_1 \omega_2 + 2\Omega g_{6,1})$$

$$qq_{10,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(0)$$

$$qq_{10,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(2\Omega g_{35,1} + \frac{3}{2} \Omega^3 \eta^2 g_{35,3})$$

$$qq_{11,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-2\Omega g_{9,1} \omega_1 + 2\Omega g_{11,1} \omega_2 - 2g_{6,2})$$

$$qq_{11,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(2\Omega g_{13,1} \omega_1 \omega_2 + 2\Omega g_{6,1})$$

$$qq_{12,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(2\Omega g_{9,1} \omega_1 - 2\Omega g_{11,1} \omega_2 - 2g_{6,2})$$

$$qq_{12,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(2\Omega g_{13,1} \omega_1 \omega_2 + 2\Omega g_{6,1})$$

$$qq_{13,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-3\eta\Omega^2 g_{1,2} \omega_1)$$

$$qq_{13,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(3\eta\Omega^2 g_{3,2})$$

$$qq_{14,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(-3\eta\Omega^2 g_{2,2} \omega_2)$$

$$qq_{14,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(3\eta\Omega^2 g_2 - \eta g_4)$$

$$qq_{15,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(0)$$

$$qq_{15,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(4\Omega g_{10,1} \omega_1^2 + 4\Omega g_{5,1})$$

$$qq_{16,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(0)$$

$$qq_{16,2} = \frac{-1}{8\omega_1} \eta(4\Omega g_{14,1} \omega_2^2 + 4\Omega g_{7,1})$$

$$qq_{17,1} = \frac{1}{8\omega_1} \eta(2\Omega g_{8,1} \omega_1)$$

$$pp11 := \left(\left(\frac{(-20 \cdot I) \cdot \epsilon^2}{((4wI^2 - w^2)w^2(wI^2 - 4w^2))} \cdot (-12Imm4nn1wI^6w2 \right. \right. \\ \left. \left. - 12Imm2nn3wIw2^6 - 24Imm2nn3wI^6w2 - 12Imm2nn3wI^5w2^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 24Imm2nn3wI^2w2^5 + 51Imm4nn1wI^4w2^3 + 51Imm2nn3wI^3w2^4 \right. \right. \\ \left. \left. - 12Imm4nn1wI^2w2^5 + 102Imm2nn3wI^4w2^3) - \epsilon \cdot 240IwI^2 \cdot (Imm1wI) \right)$$

$$\begin{aligned}
pp12 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{\left((4wI^2 - w2^2) w2^2 (wI^2 - 4w2^2) \right)} \cdot \left(+12 mm2 nn1 wI^6 w2^2 \right. \right. \\
& - 51 mm2 nn1 wI^4 w2^4 + 12 mm2 nn1 wI^2 w2^6 - 12 mm4 nn3 wI w2^5 \\
& - 12 mm4 nn3 wI^5 w2 + 51 mm4 nn3 wI^3 w2^3 + 24 mm2 nn1 wI^3 w2^5 \\
& + 24 mm2 nn1 wI^7 w2 - 102 mm2 nn1 wI^5 w2^3 + 36 mmI^2 wI^6 w2^2 - 153 mmI^2 wI^4 w2^4 \\
& \left. \left. + 36 mmI^2 wI^2 w2^6 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp21 := & \left(\left(\frac{(-20 \cdot I) \cdot \epsilon^2}{\left((4wI^2 - w2^2) w2^2 (wI^2 - 4w2^2) \right)} \cdot \left(-12 Imm4 nn2 wI^5 w2^2 \right. \right. \right. \\
& + 153 Imm1 mm4 wI^3 w2^4 - 36 Imm1 mm4 wI^5 w2^2 - 12 Imm4 nn2 wI w2^6 \\
& \left. \left. - 36 Imm1 mm4 wI w2^6 + 51 Imm4 nn2 wI^3 w2^4 \right) \right) - \epsilon \cdot 240 wI^2 \cdot (I \cdot mm2 w2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp22 := & \left(\left(\frac{(-20 \cdot I) \cdot \epsilon^2}{\left((4wI^2 - w2^2) w2^2 (wI^2 - 4w2^2) \right)} \cdot \left(+24 mm2 nn2 wI^2 w2^6 \right. \right. \right. \\
& + 36 mm1 mm2 wI^5 w2^3 - 153 mm1 mm2 wI^3 w2^5 + 36 mm1 mm2 wI w2^7 \\
& + 12 mm2 nn2 wI w2^7 + 12 mm2 nn2 wI^5 w2^3 - 51 mm2 nn2 wI^3 w2^5 \\
& \left. \left. + 24 mm2 nn2 wI^6 w2^2 - 102 mm2 nn2 wI^4 w2^4 \right) \right) - \epsilon \cdot 240 \cdot wI^2 \cdot (mm4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp31 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{\left((4wI^2 - w2^2) w2^2 (wI^2 - 4w2^2) \right)} \cdot \left(+96 Im9 n10 wI^3 w2^6 \right. \right. \\
& + 96 Im11 n5 wI^3 w2^4 + 48 Im10 m8 wI^3 w2^6 - 456 Im9 n5 wI^3 w2^4 \\
& - 204 Im5 m8 wI^3 w2^4 - 360 Im9 n10 wI^5 w2^4 - 24 Im11 n5 wI^5 w2^2 \\
& - 24 Im13 n8 wI^7 w2^2 - 204 Im10 m8 wI^5 w2^4 - 96 Im11 n10 wI^5 w2^4 \\
& - 12 Im6 n8 wI^5 w2^2 + 96 Im9 n5 wI w2^6 + 24 Im11 n10 wI^7 w2^2 + 96 Im13 n8 wI^5 w2^4 \\
& + 108 Im9 n5 wI^5 w2^2 + 48 Im5 m8 wI^5 w2^2 + 48 Im10 m8 wI^7 w2^2 \\
& + 48 Im6 n8 wI^3 w2^4 + 84 Im9 n10 wI^7 w2^2 + 48 Im5 m8 wI w2^6 + 144 Im24 wI^5 w2^6 \\
& + 48 Im19 wI^3 w2^6 + 48 Im19 wI^7 w2^2 + 144 Im24 wI^9 w2^2 - 204 Im19 wI^5 w2^4 \\
& \left. \left. - 612 Im24 wI^7 w2^4 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp32 := & \epsilon^2 \cdot \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w^2)w^2(wI^2 - 4w^2))} \cdot (160m^5w^2w^6 + 144m15wI^2w^2w^6 \right. \\
& + 48m22wI^8w^2w^2 - 204m22wI^6w^4w^4 + 48m22wI^4w^6w^6 + 64m10^2wI^8w^2w^2 \\
& - 272m10^2wI^6w^4w^4 + 64m10^2wI^4w^6w^6 + 16m8^2wI^6w^2w^2 - 68m8^2wI^4w^4w^4 \\
& - 612m15wI^4w^4w^4 + 144m15wI^6w^2w^2 - 680m5^2wI^2w^2w^4 + 96m6n5w^2w^6 \\
& + 16m8^2wI^2w^2w^6 + 160m5^2wI^4w^2w^2 - 96m11n8wI^4w^4w^4 + 24m11n8wI^6w^2w^2 \\
& - 456m6n10wI^4w^4w^4 + 108m6n10wI^6w^2w^2 + 160m10m5wI^2w^2w^6 \\
& + 96m6n10wI^2w^2w^6 + 96m13n5wI^4w^4w^4 - 360m6n5wI^2w^2w^4 + 84m6n5wI^4w^2w^2 \\
& + 160m10m5wI^6w^2w^2 - 12m9n8wI^6w^2w^2 - 680m10m5wI^4w^4w^4 + 48m9n8wI^4w^2w^2 \\
& \left. - 96m13n10wI^6w^4w^4 + 24m13n10wI^8w^2w^2 - 24m13n5wI^6w^2w^2) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp41 := & \epsilon^2 \cdot \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w^2)w^2(wI^2 - 4w^2))} \cdot (-408Im12n10wI^4w^2w^5 \right. \\
& - 216Im11n13wI^4w^2w^5 - 96Im6n11wI^4w^2w^3 + 432Im10m9wI^6w^2w^3 \\
& + 48Im11n13wI^2w^2w^7 + 48Im13m8wI^6w^2w^3 + 216Im13n11wI^4w^2w^5 \\
& + 384Im5m9wI^4w^2w^3 + 96Im11n13wI^6w^2w^3 - 192Im10m9wI^4w^2w^5 \\
& - 192Im9n6wI^4w^2w^3 - 96Im6m8wI^2w^2w^5 - 192Im13m8wI^4w^2w^5 \\
& - 216Im10m11wI^4w^2w^5 + 96Im13n9wI^6w^2w^3 + 144Im11m5wI^4w^2w^3 \\
& + 24Im6n11wI^2w^2w^5 + 24Im9n13wI^4w^2w^5 + 192Im6n9wI^4w^2w^3 \\
& + 24Im6m8wI^4w^2w^3 + 96Im12n10wI^6w^2w^3 + 96Im12n10wI^2w^2w^7 \\
& + 96Im12n5wI^4w^2w^3 + 48Im10m11wI^6w^2w^3 + 96Im10m11wI^2w^2w^7 \\
& + 96Im11n6wI^4w^2w^3 + 48Im9n6wI^2w^2w^5 - 600Im11m5wI^2w^2w^5 \\
& - 408Im12n5wI^2w^2w^5 - 96Im9n13wI^6w^2w^3 - 24Im13n9wI^4w^2w^5 \\
& - 96Im13n11wI^6w^2w^3 - 48Im13n11wI^2w^2w^7 - 48Im6n9wI^2w^2w^5 \\
& - 24Im11n6wI^2w^2w^5 - 96Im5m9wI^6w^2w^2 - 96Im10m9wI^8w^2w^2 - 408Im25wI^4w^2w^5 \\
& - 408Im30wI^6w^2w^5 + 96Im12n5w^2w^7 + 96Im25wI^6w^2w^3 + 96Im25wI^2w^2w^7 \\
& \left. + 96Im11m5w^2w^7 + 96Im30wI^8w^2w^3 + 96Im30wI^4w^2w^7) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp42 := & \epsilon^2 \cdot \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w^2)w^2(wI^2 - 4w^2))} \cdot (+ 24m9n9wI^4w^2w^4 \right. \\
& - 96m9n9wI^6w^2w^2 - 192m8m9wI^4w^2w^4 - 432m10m13wI^6w^2w^4 - 48m13n6wI^2w^2w^6 \\
& - 216m10m6wI^4w^2w^4 + 192m7n10wI^2w^2w^6 + 24m6n6wI^2w^2w^4 + 216m13n6wI^4w^2w^4 \\
& - 816m7n5wI^2w^2w^4 - 48m9n11wI^2w^2w^6 + 96m11m8wI^2w^2w^6 + 48m8m9wI^6w^2w^2 \\
& + 192m10m13wI^4w^2w^6 + 48m11n9wI^2w^2w^6 + 192m7n10wI^6w^2w^2 \\
& + 96m10m6wI^2w^2w^6 - 24m11m8wI^4w^2w^4 - 816m7n10wI^4w^2w^4 + 192m7n5wI^4w^2w^2 \\
& - 96m6n6wI^4w^2w^2 - 216m11n9wI^4w^2w^4 + 48m10m6wI^6w^2w^2 - 96m13n6wI^6w^2w^2 \\
& + 24m11n11wI^2w^2w^6 - 600m5m6wI^2w^2w^4 + 144m5m6wI^4w^2w^2 \\
& - 384m13m5wI^4w^2w^4 + 96m13m5wI^6w^2w^2 + 48m6n13wI^2w^2w^6 \\
& - 192m6n13wI^4w^2w^4 + 192m9n11wI^4w^2w^4 + 96m11n9wI^6w^2w^2 \\
& - 96m11n11wI^4w^2w^4 - 96m13n13wI^6w^2w^4 + 24m13n13wI^4w^2w^6 \\
& + 96m10m13wI^8w^2w^2 + 192m7n5w^2w^6 + 96m5m6w^2w^6 + 96m23wI^4w^2w^6 \\
& - 408m23wI^6w^2w^4 + 96m23wI^8w^2w^2 + 96m16wI^2w^2w^6 - 408m16wI^4w^2w^4 \\
& \left. + 96m16wI^6w^2w^2) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp51 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w^2)w^2(wI^2 - 4w^2))} \cdot (12Im7m8wI^3w^2^4 \right. \\
& + 96Im7m8wI^4w^2^3 + 48Im11m6wI^5w^2^2 + 16Im9n7wI^3w^2^4 \\
& + 48Im12n13wI^6w^2^3 + 68Im9n14wI^5w^2^4 + 48Im12n13wI^2w^2^7 \\
& - 24Im7m8wI^2w^2^5 - 32Im13n12wI^7w^2^2 - 48Im10m12wI^3w^2^6 \\
& - 48Im6m9wI^6w^2 - 192Im7n11wI^3w^2^4 + 32Im11n14wI^2w^2^7 \\
& + 32Im11n14wI^6w^2^3 + 136Im11n7wI^4w^2^3 + 68Im6n12wI^4w^2^3 \\
& - 192Im11m6wI^3w^2^4 + 96Im14n9wI^6w^2^3 - 96Im11m6wI^2w^2^5 \\
& - 48Im6m9wI^2w^2^5 - 96Im7n11wI^4w^2^3 - 204Im12n6wI^3w^2^4 \\
& - 32Im13n12wI^3w^2^6 - 96Im14n11wI^5w^2^4 - 24Im7n9wI^3w^2^4 \\
& - 96Im14m8wI^4w^2^5 - 16Im9n14wI^7w^2^2 - 12Im14m8wI^3w^2^6 \\
& - 204Im12n13wI^4w^2^5 - 16Im9n14wI^3w^2^6 - 48Im7n9wI^2w^2^5 \\
& - 48Im14n11wIw^2^8 - 24Im14n9wI^3w^2^6 + 204Im6m9wI^4w^2^3 \\
& + 48Im12n6wI^5w^2^2 + 48Im7n11wIw^2^6 + 96Im7n9wI^5w^2^2 + 192Im7n9wI^4w^2^3 \\
& + 24Im7n11wI^2w^2^5 + 24Im11m6wI^4w^2^3 + 48Im11m13wI^2w^2^7 \\
& + 136Im13n12wI^5w^2^4 + 24Im14n11wI^2w^2^7 + 216Im14n11wI^3w^2^6 \\
& + 96Im14n9wI^5w^2^4 + 96Im12m5wI^4w^2^3 - 96Im13m9wI^3w^2^6 \\
& - 96Im13m9wI^4w^2^5 - 48Im13m9wI^7w^2^2 - 204Im11m13wI^4w^2^5 \\
& - 136Im11n14wI^4w^2^5 - 32Im11n7wI^2w^2^5 - 32Im11n7wI^6w^2 \\
& - 24Im12m5wI^2w^2^5 - 16Im6n12wI^2w^2^5 - 16Im6n12wI^6w^2 \\
& - 48Im7m8wI^5w^2^2 - 68Im9n7wI^5w^2^2 + 192Im10m12wI^5w^2^4 \\
& + 24Im14m8wI^2w^2^7 - 216Im14n9wI^4w^2^5 - 96Im14n11wI^4w^2^5 \\
& + 48Im14n9wI^2w^2^7 + 48Im11m13wI^6w^2^3 + 216Im13m9wI^5w^2^4 \\
& + 24Im13m9wI^6w^2^3 + 48Im12n6wIw^2^6 + 48Im14m8wI^5w^2^4 - 48Im21wI^3w^2^6 \\
& - 204Im26wI^4w^2^5 - 48Im21wI^7w^2^2 - 204Im33wI^5w^2^6 + 48Im33wI^3w^2^8 \\
& + 16Im9n7wI^7 + 48Im26wI^6w^2^3 + 204Im21wI^5w^2^4 + 48Im26wI^2w^2^7 \\
& \left. + 48Im33wI^7w^2^4) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp52 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w2^2)w2^2(wI^2 - 4w2^2))} \cdot (+ 32m11n12wI^2w2^6 \right. \\
& - 136m11n12wI^4w2^4 - 16m9n12wI^3w2^5 + 48m11m9wI^6w2^2 + 68m9n12wI^5w2^3 \\
& - 32m13n7wI^3w2^5 - 16m9n12wI^7w2 + 136m13n7wI^5w2^3 + 48m12n9wI^6w2^2 \\
& + 96m5m7wI^4w2^2 + 48m10m14wI^3w2^7 - 192m10m14wI^5w2^5 \\
& + 216m14n13wI^4w2^6 - 96m14n13wI^5w2^5 - 192m7n13wI^4w2^4 \\
& + 24m7n13wI^3w2^5 + 48m7n13wI^2w2^6 - 96m14m5wI^4w2^4 + 24m14m5wI^2w2^6 \\
& + 16m6n14wI^6w2^2 - 96m14n13wI^6w2^4 + 32m13n14wI^3w2^7 - 16m6n7wI^2w2^4 \\
& - 68m6n14wI^4w2^4 + 16m6n14wI^2w2^6 - 96m7n6wI^4w2^2 - 192m7n6wI^3w2^3 \\
& - 48m14n13wI^2w2^8 + 24m14n13wI^3w2^7 - 32m13n7wI^7w2 - 48m12n11wI^5w2^3 \\
& + 204m12n11wI^3w2^5 - 48m12n11wIw2^7 - 96m14n6wI^5w2^3 \\
& - 204m11m9wI^4w2^4 - 96m12m8wI^4w2^4 - 96m7n13wI^5w2^3 - 12m12m8wI^3w2^5 \\
& + 24m12m8wI^2w2^6 + 48m12n9wI^2w2^6 + 48m13m6wI^6w2^2 - 204m13m6wI^4w2^4 \\
& + 48m13m6wI^2w2^6 + 24m14n6wI^2w2^6 + 216m14n6wI^3w2^5 + 68m6n7wI^4w2^2 \\
& - 24m5m7wI^2w2^4 - 136m13n14wI^5w2^5 + 32m13n14wI^7w2^3 \\
& + 48m11m9wI^2w2^6 - 204m12n9wI^4w2^4 + 48m7n6wIw2^5 + 24m7n6wI^2w2^4 \\
& - 48m14n6wIw2^7 - 48m10m7wI^3w2^5 + 32m11n12wI^6w2^2 + 192m10m7wI^5w2^3 \\
& - 96m14n6wI^4w2^4 + 48m12m8wI^5w2^3 - 12m1I^2wI^4w2^4 - 24m1I^2wI^5w2^3 \\
& - 48m9^2wI^3w2^5 + 96m1I^2wI^3w2^5 - 48m6^2wI^2w2^4 + 48m17wI^6w2^2 \\
& + 24m6^2wI^5w2 + 12m6^2wI^4w2^2 - 96m6^2wI^3w2^3 - 16m6n7wI^6 - 48m9^2wI^4w2^4 \\
& + 108m9^2wI^5w2^3 + 12m9^2wI^6w2^2 - 24m9^2wI^7w2 + 48m1I^2wI^2w2^6 \\
& + 48m29wI^3w2^7 - 48m31wI^6w2^4 - 204m29wI^5w2^5 + 48m29wI^7w2^3 \\
& + 48m13^2wI^4w2^6 + 48m13^2wI^3w2^7 - 108m13^2wI^5w2^5 + 24m13^2wI^7w2^3 \\
& - 12m13^2wI^6w2^4 + 204m31wI^4w2^6 - 48m31wI^2w2^8 - 204m17wI^4w2^4 \\
& \left. + 48m17wI^2w2^6) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp61 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wl^2 - w^2)w^2(wl^2 - 4w^2))} \cdot (+48Im20wl^7w^2 \right. \\
& + 48Im30wl^4w^27 + 48Im30wl^8w^23 + 48Im20wl^3w^26 - 48Im25wl^2w^27 \\
& - 204Im30wl^6w^25 - 48Im25wl^6w^23 - 204Im20wl^5w^24 + 204Im25wl^4w^25 \\
& + 16Im11m5w^27 + 48m28wl^3w^27 - 204m28wl^5w^25 + 204m23wl^6w^24 \\
& - 48m23wl^4w^26 - 48m23wl^8w^22 - 204m16wl^4w^24 + 48m16wl^6w^22 \\
& + 48m28wl^7w^23 - 16m5m6w^26 + 48m16wl^2w^26 - 96Im6n9wl^4w^23 \\
& - 48Im11n6wl^4w^23 + 48Im13n9wl^6w^23 + 12Im11n6wl^2w^25 \\
& + 32Im10m9wl^3w^26 + 192Im11m5wl^3w^24 + 48Im6m8wl^2w^25 \\
& + 48Im6m8wl^6w^2 + 164Im10m11wl^4w^25 + 192Im14n8wl^4w^25 \\
& + 24Im13n9wl^3w^26 + 48Im13n9wl^7w^22 + 12Im12n5wl^4w^23 \\
& - 48Im11m5wl^5w^22 - 192Im5m9wl^4w^23 - 24Im11n6wlw^26 \\
& - 204Im6m8wl^4w^23 - 48Im11n13wl^5w^24 - 48Im13n11wl^5w^24 \\
& - 204Im13m8wl^5w^24 - 48Im11n6wl^5w^22 - 24Im7n8wl^5w^22 \\
& - 16Im6m8wlw^26 - 108Im13n9wl^5w^24 - 16Im6m8wl^5w^22 \\
& + 48Im13m8wl^3w^26 + 24Im9n13wl^3w^26 + 12Im9n13wl^4w^25 \\
& + 12Im13n11wl^3w^26 + 48Im13m8wl^7w^22 + 96Im10m11wl^3w^26 \\
& - 96Im9n6wl^4w^23 - 48Im10m9wl^8w^2 - 32Im5m9wlw^26 - 24Im12n5wl^5w^22 \\
& - 40Im10m11wl^6w^23 - 12Im12n10wl^6w^23 - 48Im13n11wl^6w^23 \\
& - 24Im13n11wl^2w^27 - 48Im12n5wl^2w^25 - 48Im9n6wl^5w^22 \\
& - 16Im10m11wl^2w^27 - 232Im10m9wl^5w^24 - 12Im6n11wl^2w^25 \\
& - 96Im10m9wl^4w^25 - 24Im6n11wlw^26 - 12Im13n9wl^4w^25 \\
& - 32Im13m8wl^2w^27 - 24Im11n13wl^2w^27 - 48Im6n9wl^5w^22 \\
& - 96Im12n10wl^5w^24 - 48Im11n13wl^6w^23 - 8Im11m5wl^4w^23 \\
& + 136Im13m8wl^4w^25 + 216Im10m9wl^6w^23 + 96Im7n8wl^3w^24 \\
& + 96Im12n5wl^3w^24 + 40Im5m9wl^3w^24 + 24Im9n6wl^2w^25 \\
& + 12Im11n13wl^3w^26 + 48Im6n11wl^4w^23 + 24Im6n9wl^2w^25 \\
& + 96Im6n11wl^3w^24 + 48Im10m11wl^7w^22 + 28Im11m5wl^2w^25 \\
& + 24Im12n10wl^7w^22 + 48Im5m9wl^6w^2 + 12Im9n6wl^3w^24 \\
& + 108Im11n6wl^3w^24 + 12Im6n9wl^3w^24 + 48Im12n10wl^4w^25 \\
& + 108Im11n13wl^4w^25 + 56Im10m9wl^7w^22 + 68Im6m8wl^3w^24 \\
& - 48Im14n8wl^6w^23 - 8Im5m9wl^5w^22 - 48Im9n13wl^6w^23 - 96Im9n13wl^5w^24 \\
& \left. - 32Im13m8wl^6w^23 - 216Im10m11wl^5w^24 + 108Im13n11wl^4w^25 \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp62 := & \epsilon^2 \cdot \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w^2)w^2(wI^2 - 4w^2))} \cdot (-136m8m9wI^4w^2^4 \right. \\
& - 24m11n11wIw^2^7 + 24m11n9wI^2w^2^6 + 24m9n11wI^2w^2^6 + 48m11n9wI^6w^2^2 \\
& + 48m9n9wI^6w^2^2 + 96m9n9wI^5w^2^3 + 32m10m13wI^3w^2^7 + 192m14n5wI^3w^2^5 \\
& - 108m13n13wI^5w^2^5 + 48m13n6wI^5w^2^3 + 48m13n13wI^7w^2^3 \\
& - 96m9n11wI^4w^2^4 - 192m14n10wI^5w^2^5 + 108m11n11wI^3w^2^5 \\
& + 12m11n11wI^2w^2^6 - 192m13m5wI^4w^2^4 - 192m5m6wI^3w^2^3 \\
& + 48m13n13wI^6w^2^4 - 48m6n13wI^5w^2^3 + 48m13m5wI^6w^2^2 + 48m14n10wI^7w^2^2 \\
& + 32m8m9wI^6w^2^2 + 16m10m6wI^2w^2^6 + 24m7n10wI^6w^2^2 + 40m10m6wI^6w^2^2 \\
& + 24m6n6wIw^2^5 + 12m6n6wI^2w^2^4 + 96m7n5wI^2w^2^4 - 24m7n5wI^4w^2^2 \\
& - 96m7n10wI^4w^2^4 + 48m11m8wI^2w^2^6 - 204m11m8wI^4w^2^4 - 96m10m6wI^3w^2^5 \\
& + 68m11m8wI^3w^2^5 - 16m11m8wI^5w^2^3 - 96m10m13wI^4w^2^6 \\
& + 40m13m5wI^3w^2^5 - 96m12n8wI^4w^2^4 + 24m6n13wI^2w^2^6 - 12m13n13wI^4w^2^6 \\
& - 16m11m8wIw^2^7 - 48m8m9wI^7w^2 + 216m10m13wI^6w^2^4 - 48m11n11wI^4w^2^4 \\
& + 48m11m8wI^6w^2^2 - 48m11n11wI^5w^2^3 + 24m13n13wI^3w^2^7 + 8m5m6wI^4w^2^2 \\
& - 48m8m9wI^3w^2^5 - 96m6n6wI^3w^2^3 + 48m13n6wI^6w^2^2 - 8m13m5wI^5w^2^3 \\
& + 48m5m6wI^5w^2 - 48m10m6wI^7w^2 - 48m6n6wI^4w^2^2 - 12m12n8wI^5w^2^3 \\
& + 216m10m6wI^5w^2^3 - 164m10m6wI^4w^2^4 + 48m12n8wI^3w^2^5 \\
& - 96m6n13wI^4w^2^4 - 48m9n11wI^5w^2^3 + 56m10m13wI^7w^2^3 \\
& - 232m10m13wI^5w^2^5 - 32m13m5wIw^2^7 + 12m6n13wI^3w^2^5 - 48m14n5wI^5w^2^3 \\
& - 12m11n9wI^3w^2^5 - 48m10m13wI^8w^2^2 + 204m8m9wI^5w^2^3 + 48m11n9wI^5w^2^3 \\
& - 12m9n9wI^4w^2^4 - 108m13n6wI^4w^2^4 - 108m11n9wI^4w^2^4 + 32m8m9wI^2w^2^6 \\
& + 12m9n11wI^3w^2^5 - 12m13n6wI^3w^2^5 - 28m5m6wI^2w^2^4 + 24m13n6wI^2w^2^6 \\
& \left. - 24m9n9wI^3w^2^5 + 24m12n8wI^6w^2^2) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp42 := & \epsilon^2 \cdot \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w^2)w^2(wI^2 - 4w^2))} \cdot (+ 24m9n9wI^4w^2^4 \right. \\
& - 96m9n9wI^6w^2^2 - 192m8m9wI^4w^2^4 - 432m10m13wI^6w^2^4 - 48m13n6wI^2w^2^6 \\
& - 216m10m6wI^4w^2^4 + 192m7n10wI^2w^2^6 + 24m6n6wI^2w^2^4 + 216m13n6wI^4w^2^4 \\
& - 816m7n5wI^2w^2^4 - 48m9n11wI^2w^2^6 + 96m11m8wI^2w^2^6 + 48m8m9wI^6w^2^2 \\
& + 192m10m13wI^4w^2^6 + 48m11n9wI^2w^2^6 + 192m7n10wI^6w^2^2 \\
& + 96m10m6wI^2w^2^6 - 24m11m8wI^4w^2^4 - 816m7n10wI^4w^2^4 + 192m7n5wI^4w^2^2 \\
& - 96m6n6wI^4w^2^2 - 216m11n9wI^4w^2^4 + 48m10m6wI^6w^2^2 - 96m13n6wI^6w^2^2 \\
& + 24m11n11wI^2w^2^6 - 600m5m6wI^2w^2^4 + 144m5m6wI^4w^2^2 \\
& - 384m13m5wI^4w^2^4 + 96m13m5wI^6w^2^2 + 48m6n13wI^2w^2^6 \\
& - 192m6n13wI^4w^2^4 + 192m9n11wI^4w^2^4 + 96m11n9wI^6w^2^2 \\
& - 96m11n11wI^4w^2^4 - 96m13n13wI^6w^2^4 + 24m13n13wI^4w^2^6 \\
& + 96m10m13wI^8w^2^2 + 192m7n5w^2^6 + 96m5m6w^2^6 + 96m23wI^4w^2^6 \\
& - 408m23wI^6w^2^4 + 96m23wI^8w^2^2 + 96m16wI^2w^2^6 - 408m16wI^4w^2^4 \\
& \left. + 96m16wI^6w^2^2) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp51 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w^2)w^2(wI^2 - 4w^2))} \cdot (12Im7m8wI^3w^2^4 \right. \\
& + 96Im7m8wI^4w^2^3 + 48Im11m6wI^5w^2^2 + 16Im9n7wI^3w^2^4 \\
& + 48Im12n13wI^6w^2^3 + 68Im9n14wI^5w^2^4 + 48Im12n13wI^2w^2^7 \\
& - 24Im7m8wI^2w^2^5 - 32Im13n12wI^7w^2^2 - 48Im10m12wI^3w^2^6 \\
& - 48Im6m9wI^6w^2 - 192Im7n11wI^3w^2^4 + 32Im11n14wI^2w^2^7 \\
& + 32Im11n14wI^6w^2^3 + 136Im11n7wI^4w^2^3 + 68Im6n12wI^4w^2^3 \\
& - 192Im11m6wI^3w^2^4 + 96Im14n9wI^6w^2^3 - 96Im11m6wI^2w^2^5 \\
& - 48Im6m9wI^2w^2^5 - 96Im7n11wI^4w^2^3 - 204Im12n6wI^3w^2^4 \\
& - 32Im13n12wI^3w^2^6 - 96Im14n11wI^5w^2^4 - 24Im7n9wI^3w^2^4 \\
& - 96Im14m8wI^4w^2^5 - 16Im9n14wI^7w^2^2 - 12Im14m8wI^3w^2^6 \\
& - 204Im12n13wI^4w^2^5 - 16Im9n14wI^3w^2^6 - 48Im7n9wI^2w^2^5 \\
& - 48Im14n11wIw^2^8 - 24Im14n9wI^3w^2^6 + 204Im6m9wI^4w^2^3 \\
& + 48Im12n6wI^5w^2^2 + 48Im7n11wIw^2^6 + 96Im7n9wI^5w^2^2 + 192Im7n9wI^4w^2^3 \\
& + 24Im7n11wI^2w^2^5 + 24Im11m6wI^4w^2^3 + 48Im11m13wI^2w^2^7 \\
& + 136Im13n12wI^5w^2^4 + 24Im14n11wI^2w^2^7 + 216Im14n11wI^3w^2^6 \\
& + 96Im14n9wI^5w^2^4 + 96Im12m5wI^4w^2^3 - 96Im13m9wI^3w^2^6 \\
& - 96Im13m9wI^4w^2^5 - 48Im13m9wI^7w^2^2 - 204Im11m13wI^4w^2^5 \\
& - 136Im11n14wI^4w^2^5 - 32Im11n7wI^2w^2^5 - 32Im11n7wI^6w^2 \\
& - 24Im12m5wI^2w^2^5 - 16Im6n12wI^2w^2^5 - 16Im6n12wI^6w^2 \\
& - 48Im7m8wI^5w^2^2 - 68Im9n7wI^5w^2^2 + 192Im10m12wI^5w^2^4 \\
& + 24Im14m8wI^2w^2^7 - 216Im14n9wI^4w^2^5 - 96Im14n11wI^4w^2^5 \\
& + 48Im14n9wI^2w^2^7 + 48Im11m13wI^6w^2^3 + 216Im13m9wI^5w^2^4 \\
& + 24Im13m9wI^6w^2^3 + 48Im12n6wIw^2^6 + 48Im14m8wI^5w^2^4 - 48Im21wI^3w^2^6 \\
& - 204Im26wI^4w^2^5 - 48Im21wI^7w^2^2 - 204Im33wI^5w^2^6 + 48Im33wI^3w^2^8 \\
& + 16Im9n7wI^7 + 48Im26wI^6w^2^3 + 204Im21wI^5w^2^4 + 48Im26wI^2w^2^7 \\
& \left. + 48Im33wI^7w^2^4) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp52 := & \epsilon^2 \cdot \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w2^2)w2^2(wI^2 - 4w2^2))} \cdot (+ 32m11n12wI^2w2^6 \right. \\
& - 136m11n12wI^4w2^4 - 16m9n12wI^3w2^5 + 48m11m9wI^6w2^2 + 68m9n12wI^5w2^3 \\
& - 32m13n7wI^3w2^5 - 16m9n12wI^7w2 + 136m13n7wI^5w2^3 + 48m12n9wI^6w2^2 \\
& + 96m5m7wI^4w2^2 + 48m10m14wI^3w2^7 - 192m10m14wI^5w2^5 \\
& + 216m14n13wI^4w2^6 - 96m14n13wI^5w2^5 - 192m7n13wI^4w2^4 \\
& + 24m7n13wI^3w2^5 + 48m7n13wI^2w2^6 - 96m14m5wI^4w2^4 + 24m14m5wI^2w2^6 \\
& + 16m6n14wI^6w2^2 - 96m14n13wI^6w2^4 + 32m13n14wI^3w2^7 - 16m6n7wI^2w2^4 \\
& - 68m6n14wI^4w2^4 + 16m6n14wI^2w2^6 - 96m7n6wI^4w2^2 - 192m7n6wI^3w2^3 \\
& - 48m14n13wI^2w2^8 + 24m14n13wI^3w2^7 - 32m13n7wI^7w2 - 48m12n11wI^5w2^3 \\
& + 204m12n11wI^3w2^5 - 48m12n11wIw2^7 - 96m14n6wI^5w2^3 \\
& - 204m11m9wI^4w2^4 - 96m12m8wI^4w2^4 - 96m7n13wI^5w2^3 - 12m12m8wI^3w2^5 \\
& + 24m12m8wI^2w2^6 + 48m12n9wI^2w2^6 + 48m13m6wI^6w2^2 - 204m13m6wI^4w2^4 \\
& + 48m13m6wI^2w2^6 + 24m14n6wI^2w2^6 + 216m14n6wI^3w2^5 + 68m6n7wI^4w2^2 \\
& - 24m5m7wI^2w2^4 - 136m13n14wI^5w2^5 + 32m13n14wI^7w2^3 \\
& + 48m11m9wI^2w2^6 - 204m12n9wI^4w2^4 + 48m7n6wIw2^5 + 24m7n6wI^2w2^4 \\
& - 48m14n6wIw2^7 - 48m10m7wI^3w2^5 + 32m11n12wI^6w2^2 + 192m10m7wI^5w2^3 \\
& - 96m14n6wI^4w2^4 + 48m12m8wI^5w2^3 - 12m1I^2wI^4w2^4 - 24m1I^2wI^5w2^3 \\
& - 48m9^2wI^3w2^5 + 96m1I^2wI^3w2^5 - 48m6^2wI^2w2^4 + 48m17wI^6w2^2 \\
& + 24m6^2wI^5w2 + 12m6^2wI^4w2^2 - 96m6^2wI^3w2^3 - 16m6n7wI^6 - 48m9^2wI^4w2^4 \\
& + 108m9^2wI^5w2^3 + 12m9^2wI^6w2^2 - 24m9^2wI^7w2 + 48m1I^2wI^2w2^6 \\
& + 48m29wI^3w2^7 - 48m31wI^6w2^4 - 204m29wI^5w2^5 + 48m29wI^7w2^3 \\
& + 48m13^2wI^4w2^6 + 48m13^2wI^3w2^7 - 108m13^2wI^5w2^5 + 24m13^2wI^7w2^3 \\
& - 12m13^2wI^6w2^4 + 204m31wI^4w2^6 - 48m31wI^2w2^8 - 204m17wI^4w2^4 \\
& \left. + 48m17wI^2w2^6) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp61 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wl^2 - w^2)w^2(wl^2 - 4w^2))} \cdot (+48Im20wl^7w^2 \right. \\
& + 48Im30wl^4w^7 + 48Im30wl^8w^3 + 48Im20wl^3w^6 - 48Im25wl^2w^7 \\
& - 204Im30wl^6w^5 - 48Im25wl^6w^3 - 204Im20wl^5w^4 + 204Im25wl^4w^5 \\
& + 16Im11m5w^7 + 48m28wl^3w^7 - 204m28wl^5w^5 + 204m23wl^6w^4 \\
& - 48m23wl^4w^6 - 48m23wl^8w^2 - 204m16wl^4w^4 + 48m16wl^6w^2 \\
& + 48m28wl^7w^3 - 16m5m6w^6 + 48m16wl^2w^6 - 96Im6n9wl^4w^3 \\
& - 48Im11n6wl^4w^3 + 48Im13n9wl^6w^3 + 12Im11n6wl^2w^5 \\
& + 32Im10m9wl^3w^6 + 192Im11m5wl^3w^4 + 48Im6m8wl^2w^5 \\
& + 48Im6m8wl^6w^2 + 164Im10m11wl^4w^5 + 192Im14n8wl^4w^5 \\
& + 24Im13n9wl^3w^6 + 48Im13n9wl^7w^2 + 12Im12n5wl^4w^3 \\
& - 48Im11m5wl^5w^2 - 192Im5m9wl^4w^3 - 24Im11n6wlw^6 \\
& - 204Im6m8wl^4w^3 - 48Im11n13wl^5w^4 - 48Im13n11wl^5w^4 \\
& - 204Im13m8wl^5w^4 - 48Im11n6wl^5w^2 - 24Im7n8wl^5w^2 \\
& - 16Im6m8wlw^6 - 108Im13n9wl^5w^4 - 16Im6m8wl^5w^2 \\
& + 48Im13m8wl^3w^6 + 24Im9n13wl^3w^6 + 12Im9n13wl^4w^5 \\
& + 12Im13n11wl^3w^6 + 48Im13m8wl^7w^2 + 96Im10m11wl^3w^6 \\
& - 96Im9n6wl^4w^3 - 48Im10m9wl^8w^2 - 32Im5m9wlw^6 - 24Im12n5wl^5w^2 \\
& - 40Im10m11wl^6w^3 - 12Im12n10wl^6w^3 - 48Im13n11wl^6w^3 \\
& - 24Im13n11wl^2w^7 - 48Im12n5wl^2w^5 - 48Im9n6wl^5w^2 \\
& - 16Im10m11wl^2w^7 - 232Im10m9wl^5w^4 - 12Im6n11wl^2w^5 \\
& - 96Im10m9wl^4w^5 - 24Im6n11wlw^6 - 12Im13n9wl^4w^5 \\
& - 32Im13m8wl^2w^7 - 24Im11n13wl^2w^7 - 48Im6n9wl^5w^2 \\
& - 96Im12n10wl^5w^4 - 48Im11n13wl^6w^3 - 8Im11m5wl^4w^3 \\
& + 136Im13m8wl^4w^5 + 216Im10m9wl^6w^3 + 96Im7n8wl^3w^4 \\
& + 96Im12n5wl^3w^4 + 40Im5m9wl^3w^4 + 24Im9n6wl^2w^5 \\
& + 12Im11n13wl^3w^6 + 48Im6n11wl^4w^3 + 24Im6n9wl^2w^5 \\
& + 96Im6n11wl^3w^4 + 48Im10m11wl^7w^2 + 28Im11m5wl^2w^5 \\
& + 24Im12n10wl^7w^2 + 48Im5m9wl^6w^2 + 12Im9n6wl^3w^4 \\
& + 108Im11n6wl^3w^4 + 12Im6n9wl^3w^4 + 48Im12n10wl^4w^5 \\
& + 108Im11n13wl^4w^5 + 56Im10m9wl^7w^2 + 68Im6m8wl^3w^4 \\
& - 48Im14n8wl^6w^3 - 8Im5m9wl^5w^2 - 48Im9n13wl^6w^3 - 96Im9n13wl^5w^4 \\
& \left. - 32Im13m8wl^6w^3 - 216Im10m11wl^5w^4 + 108Im13n11wl^4w^5) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pp62 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{((4wI^2 - w^2)w^2(wI^2 - 4w^2))} \cdot (-136m8m9wI^4w^2^4 \right. \\
& - 24m11n11wIw^2^7 + 24m11n9wI^2w^2^6 + 24m9n11wI^2w^2^6 + 48m11n9wI^6w^2^2 \\
& + 48m9n9wI^6w^2^2 + 96m9n9wI^5w^2^3 + 32m10m13wI^3w^2^7 + 192m14n5wI^3w^2^5 \\
& - 108m13n13wI^5w^2^5 + 48m13n6wI^5w^2^3 + 48m13n13wI^7w^2^3 \\
& - 96m9n11wI^4w^2^4 - 192m14n10wI^5w^2^5 + 108m11n11wI^3w^2^5 \\
& + 12m11n11wI^2w^2^6 - 192m13m5wI^4w^2^4 - 192m5m6wI^3w^2^3 \\
& + 48m13n13wI^6w^2^4 - 48m6n13wI^5w^2^3 + 48m13m5wI^6w^2^2 + 48m14n10wI^7w^2^3 \\
& + 32m8m9wI^6w^2^2 + 16m10m6wI^2w^2^6 + 24m7n10wI^6w^2^2 + 40m10m6wI^6w^2^2 \\
& + 24m6n6wIw^2^5 + 12m6n6wI^2w^2^4 + 96m7n5wI^2w^2^4 - 24m7n5wI^4w^2^2 \\
& - 96m7n10wI^4w^2^4 + 48m11m8wI^2w^2^6 - 204m11m8wI^4w^2^4 - 96m10m6wI^3w^2^5 \\
& + 68m11m8wI^3w^2^5 - 16m11m8wI^5w^2^3 - 96m10m13wI^4w^2^6 \\
& + 40m13m5wI^3w^2^5 - 96m12n8wI^4w^2^4 + 24m6n13wI^2w^2^6 - 12m13n13wI^4w^2^6 \\
& - 16m11m8wIw^2^7 - 48m8m9wI^7w^2 + 216m10m13wI^6w^2^4 - 48m11n11wI^4w^2^4 \\
& + 48m11m8wI^6w^2^2 - 48m11n11wI^5w^2^3 + 24m13n13wI^3w^2^7 + 8m5m6wI^4w^2^2 \\
& - 48m8m9wI^3w^2^5 - 96m6n6wI^3w^2^3 + 48m13n6wI^6w^2^2 - 8m13m5wI^5w^2^3 \\
& + 48m5m6wI^5w^2 - 48m10m6wI^7w^2 - 48m6n6wI^4w^2^2 - 12m12n8wI^5w^2^3 \\
& + 216m10m6wI^5w^2^3 - 164m10m6wI^4w^2^4 + 48m12n8wI^3w^2^5 \\
& - 96m6n13wI^4w^2^4 - 48m9n11wI^5w^2^3 + 56m10m13wI^7w^2^3 \\
& - 232m10m13wI^5w^2^5 - 32m13m5wIw^2^7 + 12m6n13wI^3w^2^5 - 48m14n5wI^5w^2^3 \\
& - 12m11n9wI^3w^2^5 - 48m10m13wI^8w^2^2 + 204m8m9wI^5w^2^3 + 48m11n9wI^5w^2^3 \\
& - 12m9n9wI^4w^2^4 - 108m13n6wI^4w^2^4 - 108m11n9wI^4w^2^4 + 32m8m9wI^2w^2^6 \\
& + 12m9n11wI^3w^2^5 - 12m13n6wI^3w^2^5 - 28m5m6wI^2w^2^4 + 24m13n6wI^2w^2^6 \\
& \left. - 24m9n9wI^3w^2^5 + 24m12n8wI^6w^2^2) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qq51 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{(w2^2 (w1^2 - 4w2^2) (4w1^2 - w2^2))} \cdot (68 \operatorname{In}12n6 w1^4 w2^3 \right. \\
& + 48 \operatorname{In}12n6 w1^5 w2^2 - 192 \operatorname{In}11n7 w1^3 w2^4 - 96 \operatorname{Im}6n11 w1^3 w2^4 \\
& - 48 \operatorname{Im}13n9 w1^4 w2^5 - 48 \operatorname{Im}9n13 w1^4 w2^5 - 48 \operatorname{Im}9n13 w1^3 w2^6 \\
& - 96 \operatorname{In}11n14 w1^5 w2^4 + 24 \operatorname{Im}11n13 w1^6 w2^3 + 48 \operatorname{In}14n9 w1^2 w2^7 \\
& + 48 \operatorname{In}12n13 w1^2 w2^7 + 216 \operatorname{In}11n14 w1^3 w2^6 + 24 \operatorname{Im}14n8 w1^2 w2^7 \\
& + 48 \operatorname{In}12n6 w1 w2^6 + 108 \operatorname{Im}9n13 w1^5 w2^4 - 8 \operatorname{In}11n7 w1^2 w2^5 \\
& - 48 \operatorname{Im}13n11 w1^3 w2^6 - 24 \operatorname{Im}13n9 w1^7 w2^2 - 96 \operatorname{Im}11n6 w1^3 w2^4 \\
& - 48 \operatorname{Im}6n11 w1^2 w2^5 + 12 \operatorname{Im}13n11 w1^5 w2^4 + 48 \operatorname{In}11n7 w1 w2^6 \\
& + 12 \operatorname{Im}9n13 w1^6 w2^3 + 48 \operatorname{Im}11n13 w1^2 w2^7 + 12 \operatorname{Im}6n9 w1^5 w2^2 \\
& + 192 \operatorname{In}7n9 w1^4 w2^3 - 12 \operatorname{Im}9n6 w1^5 w2^2 - 8 \operatorname{In}7n9 w1^3 w2^4 - 232 \operatorname{In}11n14 w1^4 w2^5 \\
& - 40 \operatorname{In}14n9 w1^3 w2^6 - 48 \operatorname{Im}12n10 w1^3 w2^6 - 24 \operatorname{Im}6n9 w1^6 w2 \\
& - 48 \operatorname{Im}11n6 w1^2 w2^5 - 48 \operatorname{In}11n14 w1 w2^8 - 12 \operatorname{Im}11n13 w1^5 w2^4 \\
& - 16 \operatorname{In}14n9 w1^7 w2^2 - 12 \operatorname{Im}14n8 w1^3 w2^6 - 48 \operatorname{In}7n9 w1^2 w2^5 \\
& + 108 \operatorname{Im}13n9 w1^5 w2^4 + 136 \operatorname{In}12n13 w1^5 w2^4 + 32 \operatorname{In}11n14 w1^6 w2^3 \\
& - 24 \operatorname{Im}12n5 w1^2 w2^5 - 48 \operatorname{Im}7n8 w1^5 w2^2 - 24 \operatorname{Im}7n8 w1^2 w2^5 - 32 \operatorname{In}11n7 w1^6 w2 \\
& - 48 \operatorname{Im}6n9 w1^2 w2^5 - 24 \operatorname{Im}9n6 w1^6 w2 - 96 \operatorname{Im}14n8 w1^4 w2^5 - 24 \operatorname{Im}9n13 w1^7 w2^2 \\
& - 204 \operatorname{In}12n13 w1^4 w2^5 - 32 \operatorname{In}12n13 w1^3 w2^6 - 32 \operatorname{In}12n13 w1^7 w2^2 \\
& + 24 \operatorname{Im}13n11 w1^6 w2^3 + 96 \operatorname{Im}7n8 w1^4 w2^3 + 12 \operatorname{Im}7n8 w1^3 w2^4 + 96 \operatorname{Im}9n6 w1^4 w2^3 \\
& + 24 \operatorname{Im}11n6 w1^5 w2^2 + 12 \operatorname{Im}11n6 w1^4 w2^3 + 28 \operatorname{In}7n9 w1^5 w2^2 + 48 \operatorname{Im}14n8 w1^5 w2^4 \\
& + 48 \operatorname{Im}9n6 w1^3 w2^4 + 48 \operatorname{In}12n13 w1^6 w2^3 + 192 \operatorname{Im}12n10 w1^5 w2^4 \\
& + 96 \operatorname{Im}12n5 w1^4 w2^3 + 12 \operatorname{Im}13n9 w1^6 w2^3 + 108 \operatorname{Im}6n9 w1^4 w2^3 \\
& + 24 \operatorname{Im}6n11 w1^5 w2^2 + 12 \operatorname{Im}6n11 w1^4 w2^3 + 56 \operatorname{In}11n14 w1^2 w2^7 \\
& + 164 \operatorname{In}14n9 w1^5 w2^4 + 40 \operatorname{In}11n7 w1^4 w2^3 + 48 \operatorname{Im}11n13 w1^3 w2^6 \\
& - 16 \operatorname{In}12n6 w1^2 w2^5 - 108 \operatorname{Im}11n13 w1^4 w2^5 - 48 \operatorname{Im}6n9 w1^3 w2^4 \\
& - 48 \operatorname{Im}13n9 w1^3 w2^6 - 96 \operatorname{Im}13n11 w1^4 w2^5 - 216 \operatorname{In}14n9 w1^4 w2^5 \\
& \left. - 16 \operatorname{In}12n6 w1^6 w2 - 204 \operatorname{In}12n6 w1^3 w2^4 + 96 \operatorname{In}14n9 w1^6 w2^3 \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qq52 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{(w^2 (wI^2 - 4w^2) (4wI^2 - w^2))} \cdot (+ 48 m12 n8 wI^5 w^2^3 \right. \\
& - 164 n14 n6 wI^4 w^2^4 - 96 n14 n6 wI^5 w^2^3 + 48 n12 n9 wI^2 w^2^6 - 204 n12 n9 wI^4 w^2^4 \\
& + 48 n12 n9 wI^6 w^2^2 - 48 n11 n12 wI w^2^7 + 204 n11 n12 wI^3 w^2^5 - 48 n11 n12 wI^5 w^2^3 \\
& - 48 m9 n9 wI^3 w^2^5 + 24 m11 n9 wI^6 w^2^2 + 216 n13 n14 wI^4 w^2^6 - 48 n13 n14 wI^2 w^2^8 \\
& + 56 n13 n14 wI^3 w^2^7 - 24 m11 n11 wI^5 w^2^3 + 32 n11 n12 wI^6 w^2^2 \\
& + 32 n11 n12 wI^2 w^2^6 + 48 m11 n11 wI^2 w^2^6 - 16 n12 n9 wI^7 w^2 + 108 m9 n9 wI^5 w^2^3 \\
& - 136 n11 n12 wI^4 w^2^4 + 68 n12 n9 wI^5 w^2^3 - 16 n12 n9 wI^3 w^2^5 - 24 m9 n9 wI^7 w^2 \\
& + 12 m9 n9 wI^6 w^2^2 + 12 m9 n11 wI^5 w^2^3 - 96 m9 n11 wI^4 w^2^4 - 48 m9 n11 wI^3 w^2^5 \\
& + 24 m13 n6 wI^6 w^2^2 + 12 m13 n6 wI^5 w^2^3 - 48 m9 n9 wI^4 w^2^4 + 216 n14 n6 wI^3 w^2^5 \\
& - 48 n14 n6 wI w^2^7 - 96 n13 n14 wI^6 w^2^4 - 232 n13 n14 wI^5 w^2^5 - 108 m11 n9 wI^4 w^2^4 \\
& - 12 m11 n9 wI^5 w^2^3 + 48 m13 n13 wI^4 w^2^6 + 8 n6 n7 wI^2 w^2^4 - 12 m11 n11 wI^4 w^2^4 \\
& + 96 m7 n5 wI^4 w^2^2 + 48 n6 n7 wI w^2^5 + 96 m11 n11 wI^3 w^2^5 + 32 n13 n14 wI^7 w^2^3 \\
& + 48 m13 n13 wI^3 w^2^7 + 48 m14 n10 wI^3 w^2^7 + 40 n14 n6 wI^2 w^2^6 \\
& - 192 m14 n10 wI^5 w^2^5 - 32 n13 n7 wI^7 w^2 - 96 m6 n6 wI^3 w^2^3 + 12 m6 n6 wI^4 w^2^2 \\
& + 48 In33 wI^3 w^2^8 - 204 In33 wI^5 w^2^6 - 48 In21 wI^7 w^2^2 - 48 In21 wI^3 w^2^6 \\
& + 24 m6 n6 wI^5 w^2 + 16 n14 n6 wI^6 w^2^2 + 24 m14 n5 wI^2 w^2^6 - 96 m14 n5 wI^4 w^2^4 \\
& + 48 n13 n7 wI^2 w^2^6 - 192 n13 n7 wI^4 w^2^4 - 192 n6 n7 wI^3 w^2^3 - 28 n6 n7 wI^4 w^2^2 \\
& - 24 m7 n5 wI^2 w^2^4 - 96 m13 n6 wI^4 w^2^4 - 48 m13 n6 wI^3 w^2^5 + 40 n13 n7 wI^5 w^2^3 \\
& - 8 n13 n7 wI^3 w^2^5 - 48 m7 n10 wI^3 w^2^5 + 192 m7 n10 wI^5 w^2^3 + 24 m12 n8 wI^2 w^2^6 \\
& - 12 m12 n8 wI^3 w^2^5 - 96 m12 n8 wI^4 w^2^4 + 24 m9 n11 wI^6 w^2^2 + 48 m6 n13 wI^2 w^2^6 \\
& + 48 m6 n13 wI^3 w^2^5 - 108 m6 n13 wI^4 w^2^4 - 12 m6 n13 wI^5 w^2^3 + 24 m6 n13 wI^6 w^2^2 \\
& + 48 m11 n9 wI^2 w^2^6 + 48 m11 n9 wI^3 w^2^5 - 108 m13 n13 wI^5 w^2^5 \\
& - 12 m13 n13 wI^6 w^2^4 + 24 m13 n13 wI^7 w^2^3 - 48 m6 n6 wI^2 w^2^4 - 204 In26 wI^4 w^2^5 \\
& + 16 In7 n9 wI^7 + 204 In21 wI^5 w^2^4 + 48 In26 wI^6 w^2^3 + 48 In33 wI^7 w^2^4 \\
& + 48 In26 wI^2 w^2^7 - 204 n29 wI^5 w^2^5 + 48 n29 wI^3 w^2^7 - 48 n31 wI^6 w^2^4 \\
& + 48 n17 wI^6 w^2^2 + 204 n31 wI^4 w^2^6 - 48 n31 wI^2 w^2^8 - 16 n6 n7 wI^6 \\
& \left. - 204 n17 wI^4 w^2^4 + 48 n17 wI^2 w^2^6 + 48 n29 wI^7 w^2^3 \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qq61 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{(w^2 (w^2 - 4w^2) (4w^2 - w^2))} \cdot (136 \operatorname{Im}8 n13 w^4 w^2^5 \right. \\
& - 48 \operatorname{In}11 n6 w^1 w^2^6 - 96 \operatorname{In}6 n9 w^1 w^5 w^2^2 - 192 \operatorname{In}6 n9 w^1 w^4 w^2^3 - 24 \operatorname{Im}11 n5 w^1 w^4 w^2^3 \\
& + 48 \operatorname{Im}6 n8 w^1 w^6 w^2 + 96 \operatorname{Im}11 n10 w^1 w^3 w^2^6 + 48 \operatorname{Im}11 n10 w^1 w^7 w^2^2 \\
& + 192 \operatorname{In}14 n8 w^1 w^4 w^2^5 + 24 \operatorname{In}10 n12 w^1 w^7 w^2^2 + 68 \operatorname{Im}8 n6 w^1 w^3 w^2^4 \\
& + 12 \operatorname{In}12 n5 w^1 w^4 w^2^3 + 96 \operatorname{In}12 n5 w^1 w^3 w^2^4 + 204 \operatorname{In}11 n6 w^1 w^3 w^2^4 \\
& + 48 \operatorname{Im}6 n8 w^1 w^2 w^5 + 48 \operatorname{Im}9 n5 w^1 w^6 w^2 + 24 \operatorname{Im}9 n5 w^1 w^5 w^2^2 + 24 \operatorname{Im}9 n10 w^1 w^7 w^2^2 \\
& + 32 \operatorname{Im}10 n9 w^1 w^7 w^2^2 - 16 \operatorname{Im}8 n6 w^1 w^2 w^6 - 24 \operatorname{In}12 n5 w^1 w^5 w^2^2 - 32 \operatorname{Im}5 n9 w^1 w^5 w^2^2 \\
& - 216 \operatorname{Im}11 n10 w^1 w^5 w^2^4 - 32 \operatorname{Im}8 n13 w^1 w^2 w^7 - 24 \operatorname{Im}11 n10 w^1 w^6 w^2^3 \\
& - 48 \operatorname{In}14 n8 w^1 w^6 w^2^3 - 16 \operatorname{Im}10 n11 w^1 w^2 w^7 - 32 \operatorname{Im}8 n13 w^1 w^6 w^2^3 \\
& - 96 \operatorname{In}10 n12 w^1 w^5 w^2^4 - 48 \operatorname{In}12 n5 w^1 w^2 w^5 - 136 \operatorname{Im}10 n9 w^1 w^5 w^2^4 \\
& - 24 \operatorname{In}7 n8 w^1 w^5 w^2^2 - 48 \operatorname{In}11 n6 w^1 w^5 w^2^2 - 96 \operatorname{Im}9 n5 w^1 w^3 w^2^4 - 16 \operatorname{Im}10 n11 w^1 w^6 w^2^3 \\
& - 48 \operatorname{In}11 n13 w^1 w^2 w^7 - 204 \operatorname{Im}13 n8 w^1 w^5 w^2^4 - 96 \operatorname{In}11 n13 w^1 w^6 w^2^3 \\
& - 32 \operatorname{Im}5 n9 w^1 w^2 w^6 - 96 \operatorname{Im}9 n10 w^1 w^5 w^2^4 - 192 \operatorname{Im}9 n5 w^1 w^4 w^2^3 \\
& + 68 \operatorname{Im}10 n11 w^1 w^4 w^2^5 + 96 \operatorname{In}7 n8 w^1 w^3 w^2^4 + 16 \operatorname{Im}5 n11 w^1 w^4 w^2^3 \\
& + 48 \operatorname{In}13 n9 w^1 w^7 w^2^2 - 68 \operatorname{Im}5 n11 w^1 w^2 w^5 - 96 \operatorname{Im}9 n10 w^1 w^4 w^2^5 \\
& - 204 \operatorname{Im}6 n8 w^1 w^4 w^2^3 + 24 \operatorname{In}6 n9 w^1 w^3 w^2^4 + 48 \operatorname{In}6 n9 w^1 w^2 w^5 - 48 \operatorname{Im}9 n10 w^1 w^8 w^2 \\
& - 204 \operatorname{In}13 n9 w^1 w^5 w^2^4 - 96 \operatorname{In}11 n13 w^1 w^5 w^2^4 - 48 \operatorname{Im}11 n5 w^1 w^5 w^2^2 \\
& - 16 \operatorname{Im}8 n6 w^1 w^5 w^2^2 + 48 \operatorname{Im}13 n8 w^1 w^3 w^2^6 + 48 \operatorname{In}13 n9 w^1 w^3 w^2^6 + 32 \operatorname{Im}10 n9 w^1 w^3 w^2^6 \\
& + 48 \operatorname{Im}13 n8 w^1 w^7 w^2^2 + 192 \operatorname{Im}11 n5 w^1 w^3 w^2^4 + 136 \operatorname{Im}5 n9 w^1 w^3 w^2^4 \\
& + 24 \operatorname{In}11 n13 w^1 w^3 w^2^6 + 216 \operatorname{Im}9 n10 w^1 w^6 w^2^3 + 96 \operatorname{Im}11 n10 w^1 w^4 w^2^5 \\
& + 96 \operatorname{Im}11 n5 w^1 w^2 w^5 + 48 \operatorname{In}10 n12 w^1 w^4 w^2^5 + 216 \operatorname{In}11 n13 w^1 w^4 w^2^5 \\
& - 12 \operatorname{In}10 n12 w^1 w^6 w^2^3 + 48 \operatorname{In}20 w^1 w^3 w^2^6 + 48 \operatorname{In}20 w^1 w^7 w^2^2 - 204 \operatorname{In}30 w^1 w^6 w^2^5 \\
& - 48 \operatorname{In}25 w^1 w^2 w^7 - 48 \operatorname{In}25 w^1 w^6 w^2^3 - 204 \operatorname{In}20 w^1 w^5 w^2^4 + 48 \operatorname{In}30 w^1 w^8 w^2^3 \\
& \left. + 16 \operatorname{Im}5 n11 w^2^7 + 204 \operatorname{In}25 w^1 w^4 w^2^5 + 48 \operatorname{In}30 w^1 w^4 w^2^7) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qq62 := & \epsilon^2 \cdot \left(\frac{(-20 \cdot I)}{(w^2 (wl^2 - 4w^2) (4wl^2 - w^2))} \cdot (+ 24 m13 n10 wl^7 w^2^3 \right. \\
& + 216 m6 n10 wl^5 w^2^3 + 24 m6 n10 wl^6 w^2^2 + 48 m6 n5 wl^5 w^2 + 24 m6 n5 wl^4 w^2^2 \\
& - 192 m6 n5 wl^3 w^2^3 + 16 m10 n6 wl^2 w^2^6 + 48 n13 n6 wl^2 w^2^6 + 16 m10 n6 wl^6 w^2^2 \\
& - 68 m10 n6 wl^4 w^2^4 + 32 m8 n9 wl^2 w^2^6 - 96 n10 n7 wl^4 w^2^4 + 48 n10 n14 wl^7 w^2^3 \\
& - 192 n10 n14 wl^5 w^2^5 + 24 n12 n8 wl^6 w^2^2 - 12 n12 n8 wl^5 w^2^3 - 136 m8 n9 wl^4 w^2^4 \\
& + 48 n11 n9 wl^6 w^2^2 - 136 m10 n13 wl^5 w^2^5 + 32 m10 n13 wl^3 w^2^7 - 48 m9 n8 wl^3 w^2^5 \\
& + 48 n13 n6 wl^6 w^2^2 + 48 n11 n9 wl^2 w^2^6 + 204 m9 n8 wl^5 w^2^3 - 48 m13 n10 wl^8 w^2^2 \\
& + 48 m13 n5 wl^6 w^2^2 - 204 n13 n6 wl^4 w^2^4 - 96 m13 n5 wl^3 w^2^5 - 192 m13 n5 wl^4 w^2^4 \\
& + 24 m13 n5 wl^5 w^2^3 - 32 m5 n13 wl w^2^7 + 136 m5 n13 wl^3 w^2^5 - 32 m5 n13 wl^5 w^2^3 \\
& + 24 n10 n7 wl^6 w^2^2 - 48 n14 n5 wl^5 w^2^3 - 96 n12 n8 wl^4 w^2^4 - 96 m6 n10 wl^4 w^2^4 \\
& + 192 n14 n5 wl^3 w^2^5 - 48 m6 n10 wl^7 w^2 + 48 m11 n8 wl^2 w^2^6 - 204 m11 n8 wl^4 w^2^4 \\
& + 48 m11 n8 wl^6 w^2^2 - 204 n11 n9 wl^4 w^2^4 + 32 m8 n9 wl^6 w^2^2 - 16 m8 n11 wl w^2^7 \\
& + 68 m8 n11 wl^3 w^2^5 - 16 m8 n11 wl^5 w^2^3 - 16 m5 n6 wl^4 w^2^2 - 96 m6 n5 wl^2 w^2^4 \\
& + 48 n12 n8 wl^3 w^2^5 - 48 m9 n8 wl^7 w^2 - 96 m6 n10 wl^3 w^2^5 + 96 n5 n7 wl^2 w^2^4 \\
& - 24 n5 n7 wl^4 w^2^2 + 68 m5 n6 wl^2 w^2^4 + 32 m10 n13 wl^7 w^2^3 - 96 m13 n10 wl^4 w^2^6 \\
& - 96 m13 n10 wl^5 w^2^5 + 216 m13 n10 wl^6 w^2^4 - 48 n11^2 wl^5 w^2^3 + 48 n16 wl^6 w^2^2 \\
& - 204 n16 wl^4 w^2^4 + 48 n16 wl^2 w^2^6 + 24 n6^2 wl w^2^5 - 16 m5 n6 w^2^6 - 48 n6^2 wl^4 w^2^2 \\
& - 96 n6^2 wl^3 w^2^3 + 12 n6^2 wl^2 w^2^4 + 48 n13^2 wl^7 w^2^3 + 48 n13^2 wl^6 w^2^4 \\
& - 108 n13^2 wl^5 w^2^5 - 12 n13^2 wl^4 w^2^6 + 24 n13^2 wl^3 w^2^7 - 48 n23 wl^8 w^2^2 \\
& + 204 n23 wl^6 w^2^4 + 12 n11^2 wl^2 w^2^6 + 108 n11^2 wl^3 w^2^5 - 48 n11^2 wl^4 w^2^4 \\
& - 24 n9^2 wl^3 w^2^5 - 12 n9^2 wl^4 w^2^4 + 48 n28 wl^3 w^2^7 - 204 n28 wl^5 w^2^5 \\
& + 48 n28 wl^7 w^2^3 - 48 n23 wl^4 w^2^6 - 24 n11^2 wl w^2^7 + 48 n9^2 wl^6 w^2^2 \\
& \left. + 96 n9^2 wl^5 w^2^3 \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qq71 := & \epsilon^2 \cdot \left(\frac{(-20 \cdot I)}{(w^2 (wl^2 - 4w^2) (4wl^2 - w^2))} \cdot (- 96 In11 n7 wl w^2^6 \right. \\
& - 456 In14 n9 wl^3 w^2^6 - 96 Im9 n6 wl^3 w^2^4 - 216 Im13 n9 wl^5 w^2^4 \\
& - 192 In12 n13 wl^5 w^2^4 - 24 Im11 n13 wl^5 w^2^4 - 96 In12 n6 wl^5 w^2^2 \\
& - 96 Im9 n13 wl^3 w^2^6 - 24 Im6 n9 wl^5 w^2^2 - 96 Im13 n11 wl^3 w^2^6 \\
& - 408 Im14 n8 wl^3 w^2^6 - 96 In7 n9 wl^5 w^2^2 - 48 Im9 n13 wl^7 w^2^2 \\
& - 192 In11 n14 wl^5 w^2^4 + 24 Im13 n11 wl^5 w^2^4 + 96 Im6 n9 wl^3 w^2^4 \\
& + 96 Im14 n8 wl^5 w^2^4 + 48 In12 n13 wl^3 w^2^6 + 192 Im11 n6 wl^3 w^2^4 \\
& + 96 In7 n9 wl w^2^6 + 96 Im7 n8 wl w^2^6 + 96 Im13 n9 wl^3 w^2^6 + 96 In14 n9 wl w^2^8 \\
& + 96 Im14 n8 wl w^2^8 + 216 Im9 n13 wl^5 w^2^4 + 48 Im13 n9 wl^7 w^2^2 \\
& + 288 In14 n9 wl^5 w^2^4 + 24 In12 n6 wl^3 w^2^4 + 96 Im7 n8 wl^5 w^2^2 \\
& + 384 In11 n7 wl^3 w^2^4 - 48 Im11 n6 wl^5 w^2^2 - 192 Im6 n11 wl^3 w^2^4 \\
& - 96 In11 n14 wl w^2^8 + 48 Im6 n11 wl^5 w^2^2 + 432 In11 n14 wl^3 w^2^6 \\
& + 96 Im11 n13 wl^3 w^2^6 - 360 In7 n9 wl^3 w^2^4 + 24 Im9 n6 wl^5 w^2^2 \\
& - 408 Im7 n8 wl^3 w^2^4 + 96 In33 wl^3 w^2^8 + 96 In33 wl^7 w^2^4 + 96 In21 wl^7 w^2^2 \\
& \left. + 96 In21 wl^3 w^2^6 - 408 In33 wl^5 w^2^6 - 408 In21 wl^5 w^2^4 \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qq72 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{(w^2 (w^2 - 4w^2) (4w^2 - w^2))} \cdot (-408 n17 w^4 w^2^4 + 192 m7 n5 w^2^6 \right. \\
& + 96 n31 w^2 w^2^8 - 408 n31 w^4 w^2^6 + 96 n31 w^6 w^2^4 + 96 n6 n7 w^2^6 \\
& + 96 n17 w^2 w^2^6 + 96 n14 n6 w^2^8 + 192 m14 n5 w^2^8 + 96 n17 w^6 w^2^2 \\
& - 96 m11 n11 w^2 w^2^6 + 24 m11 n11 w^4 w^2^4 + 96 n13 n14 w^2 w^2^8 - 48 m6 n13 w^6 w^2^2 \\
& - 96 m6 n6 w^2 w^2^4 - 24 n12 n9 w^4 w^2^4 + 48 n11 n12 w^2 w^2^6 + 96 n13 n7 w^2 w^2^6 \\
& - 816 m14 n5 w^2 w^2^6 - 48 m9 n11 w^6 w^2^2 + 192 m9 n11 w^4 w^2^4 \\
& - 216 m11 n9 w^4 w^2^4 + 288 n14 n6 w^4 w^2^4 + 192 m14 n5 w^4 w^2^4 + 192 m7 n5 w^4 w^2^2 \\
& + 24 m9 n9 w^6 w^2^2 - 432 n13 n14 w^4 w^2^6 - 96 m13 n13 w^4 w^2^6 \\
& - 192 n11 n12 w^4 w^2^4 + 96 n12 n9 w^6 w^2^2 - 96 m9 n9 w^4 w^2^4 - 192 m13 n6 w^4 w^2^4 \\
& - 456 n14 n6 w^2 w^2^6 + 24 m13 n13 w^6 w^2^4 - 360 n6 n7 w^2 w^2^4 + 24 m6 n6 w^4 w^2^2 \\
& + 216 m6 n13 w^4 w^2^4 + 48 m13 n6 w^6 w^2^2 - 384 n13 n7 w^4 w^2^4 - 96 m6 n13 w^2 w^2^6 \\
& \left. + 96 m11 n9 w^2 w^2^6 - 816 m7 n5 w^2 w^2^4 + 192 n13 n14 w^6 w^2^4 - 96 n6 n7 w^4 w^2^2 \right. \\
& \left. + 48 m11 n9 w^6 w^2^2) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qq81 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{(w^2 (w^2 - 4w^2) (4w^2 - w^2))} \cdot (-24 I m7 n9 w^2 w^2^5 \right. \\
& - 24 I m12 n13 w^2 w^2^7 + 96 I m7 n9 w^4 w^2^3 + 96 I m12 n13 w^4 w^2^5 \\
& + 48 I m12 n6 w^4 w^2^3 + 300 I n12 n7 w^4 w^2^3 + 48 I m7 n11 w^4 w^2^3 \\
& + 300 I n12 n14 w^4 w^2^5 + 144 I m14 n11 w^4 w^2^5 + 24 I m14 n9 w^2 w^2^7 \\
& - 48 I n12 n14 w^6 w^2^3 - 420 I m14 n11 w^2 w^2^7 - 96 I m14 n9 w^4 w^2^5 \\
& - 12 I m12 n6 w^2 w^2^5 - 396 I m7 n11 w^2 w^2^5 - 456 I n12 n7 w^2 w^2^5 \\
& - 456 I n12 n14 w^2 w^2^7 - 48 I n12 n7 w^6 w^2 - 204 I n27 w^4 w^2^5 - 612 I n34 w^4 w^2^7 \\
& + 144 I n34 w^2 w^2^9 + 144 I n34 w^6 w^2^5 + 96 I n12 n14 w^2^9 + 96 I m14 n11 w^2^9 \\
& \left. + 48 I n27 w^6 w^2^3 + 96 I n12 n7 w^2^7 + 96 I m7 n11 w^2^7 + 48 I n27 w^2 w^2^7) \right) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
qq82 := \epsilon^2 \cdot & \left(\frac{(-20 \cdot I)}{(w^2 (w^2 - 4w^2) (4w^2 - w^2))} \cdot (-24 m7 n13 w^2 w^2^6 \right. \\
& + 48 m14 n6 w^4 w^2^4 - 396 m14 n6 w^2 w^2^6 + 328 n14 n7 w^4 w^2^4 - 848 n14 n7 w^2 w^2^6 \\
& + 24 m14 n13 w^2 w^2^8 - 96 m14 n13 w^4 w^2^6 - 32 n14 n7 w^6 w^2^2 + 144 m7 n6 w^4 w^2^2 \\
& - 420 m7 n6 w^2 w^2^4 + 48 m12 n11 w^4 w^2^4 - 12 m12 n11 w^2 w^2^6 - 96 m12 n9 w^4 w^2^4 \\
& + 24 m12 n9 w^2 w^2^6 + 96 m7 n13 w^4 w^2^4 + 192 n7^2 w^2^6 - 32 n7^2 w^6 \\
& - 848 n7^2 w^2 w^2^4 + 48 n32 w^6 w^2^4 + 144 n18 w^2 w^2^6 - 612 n18 w^4 w^2^4 \\
& + 144 n18 w^6 w^2^2 - 204 n32 w^4 w^2^6 + 48 n32 w^2 w^2^8 + 64 n14^2 w^6 w^2^4 \\
& - 272 n14^2 w^4 w^2^6 + 64 n14^2 w^2 w^2^8 + 16 n12^2 w^6 w^2^2 - 68 n12^2 w^4 w^2^4 \\
& + 16 n12^2 w^2 w^2^6 + 96 m14 n6 w^2^8 + 192 n14 n7 w^2^8 + 96 m7 n6 w^2^6 \\
& \left. + 328 n7^2 w^4 w^2^2) \right) :
\end{aligned}$$

- [1] Y. Hikami, Rain vibrations of cables of cable stayed bridge, *Journal of Wind Engineering*, Vol. 27, No. 3, pp. 23-34, 1986.
- [2] J. A. Main, N. P. Jones, A comparison of full-scale measurements of stay cable vibration, in *Proceeding of*.
- [3] J. Main, N. Jones, H. Yamaguchi, Characterization of rain-wind-induced stay-cable vibrations from full-scale measurements, in *Proceeding of*, 235-242.
- [4] M. Matsumoto, Observed behavior of prototype cable vibration and its generation mechanism, *Bridge Aerodynamics*, pp. 189-211, 1998.
- [5] M. Matsumoto, Y. Daito, T. Kanamura, Y. Shigemura, S. Sakuma, H. Ishizaki, Wind-induced vibration of cables of cable-stayed bridges, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 74, pp. 1015-1027, 1998.
- [6] Y. Hikami, N. Shiraishi, Rain-wind induced vibrations of cables stayed bridges, *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics*, Vol. 29, No. 1, pp. 409-418, 1988.
- [7] D. Zuo, N. P. Jones, Interpretation of field observations of wind-and rain-wind-induced stay cable vibrations, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 98, No. 2, pp. 73-87, 2010.
- [8] T. Saito, M. Matsumoto, M. Kitazawa, Rain-wind excitation of cables on cable-stayed Higashi-Kobe Bridge and cable vibration control, in *Proceeding of*, 507-510.
- [9] T. Miyata, H. Yamada, T. Hojo, Aerodynamic response of PE stay cables with pattern-indentured surface, in *Proceeding of*, 515-522.
- [10] S. Cheng, G. L. Larose, M. G. Savage, H. Tanaka, Aerodynamic behaviour of an inclined circular cylinder, *Wind and Structures*, Vol. 6, No. 3, pp. 197-208, 2003.
- [11] N. Nikitas, J. Macdonald, T. Andersen, J. Jakobsen, M. Savage, B. R. McAuliffe, Wind tunnel testing of an inclined aeroelastic cable model-Pressure and motion characteristics, Part I, *Proceedings of EACWE*, Vol. 5, pp. 477-480, 2009.
- [12] M. Farzaneh, *Atmospheric icing of power networks*: Springer Science & Business Media, 2008.

- [13] J.-L. Lilien, Review of galloping control methods, *Electra*, Vol. 191, pp. 45-61, 2000.
- [14] M. Novak, Galloping and vortex induced oscillations of structures, in *Proceeding of*, Shuppan Co. Ltd, pp. 799-809.
- [15] G. Parkinson, Aeroelastic galloping in one degree of freedom, in *Proceeding of*, 582-609.
- [16] C. Gurung, H. Yamaguchi, T. Yukino, Identification of large amplitude wind-induced vibration of ice-accreted transmission lines based on field observed data, *Engineering structures*, Vol. 24, No. 2, pp. 179-188, 2002.
- [17] J. Wang, J.-L. Lilien, Overhead electrical transmission line galloping. A full multi-span 3-DOF model, some applications and design recommendations, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 13, No. 3, pp. 909-916, 1998.
- [18] J. Jakobsen, T. Andersen, J. Macdonald, N. Nikitas, G. Larose, M. Savage, B. McAuliffe, Wind-induced response and excitation characteristics of an inclined cable model in the critical Reynolds number range, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 110, pp. 100-112, 2012.
- [19] G. Alonso, J. Meseguer, I. Pérez-Grande, Galloping stability of triangular cross-sectional bodies: a systematic approach, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 95, No. 9, pp. 928-940, 2007.
- [20] G. Piccardo, L. Carassale, A. Freda, Critical conditions of galloping for inclined square cylinders, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 99, No. 6, pp. 748-756, 2011.
- [21] G. Alonso, J. Meseguer, A. Sanz-Andrés, E. Valero, On the galloping instability of two-dimensional bodies having elliptical cross-sections, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 98, No. 8, pp. 438-448, 2010.
- [22] D. Zuo, N. Jones, J. Main, Field observation of vortex-and rain-wind-induced stay-cable vibrations in a three-dimensional environment, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 96, No. 6, pp. 1124-1133, 2008.
- [23] S. Cheng, G. L. Larose, M. G. Savage, H. Tanaka, P. A. Irwin, Experimental study on the wind-induced vibration of a dry inclined cable—Part I: Phenomena, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 96, No. 12, pp. 2231-2253, 2008.

- [24] G. Piccardo, L. C. Pagnini, F. Tubino, Some research perspectives in galloping phenomena: critical conditions and post-critical behavior, *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 27, No. 1-2, pp. 261-285, 2015.
- [25] R. D. Blevins, *Flow-induced vibration*, 1990.
- [26] P. Hemon, F. Santi, On the aeroelastic behaviour of rectangular cylinders in cross-flow, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 16, No. 7, pp. 855-889, 2002.
- [27] J. Den Hartog, *Mechanical Vibration*, edition, McGraw-Hill, New York, 1956.
- [28] J. H. Macdonald, G. L. Larose, A unified approach to aerodynamic damping and drag/lift instabilities, and its application to dry inclined cable galloping, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 22, No. 2, pp. 229-252, 2006.
- [29] H. Gjelstrup, C. Georgakis, A quasi-steady 3 degree-of-freedom model for the determination of the onset of bluff body galloping instability, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 27, No. 7, pp. 1021-1034, 2011.
- [30] A. Barrero-Gil, A. Sanz-Andrés, G. Alonso, Hysteresis in transverse galloping: the role of the inflection points, *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 25, No. 6, pp. 1007-1020, 2009.
- [31] J. H. Macdonald, G. L. Larose, Two-degree-of-freedom inclined cable galloping—Part 1: General formulation and solution for perfectly tuned system, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 96, No. 3, pp. 291-307, 2008.
- [32] J. H. Macdonald, G. L. Larose, Two-degree-of-freedom inclined cable galloping—Part 2: Analysis and prevention for arbitrary frequency ratio, *Journal of Wind Engineering and industrial Aerodynamics*, Vol. 96, No. 3, pp. 308-326, 2008.
- [33] P. Yu, A. Shah, N. Popplewell, Inertially coupled galloping of iced conductors, *Journal of applied mechanics*, Vol. 59, No. 1, pp. 140-145, 1992.
- [34] P. Yu, Y. Desai, A. Shah, N. Popplewell, Three-degree-of-freedom model for galloping. Part I: Formulation, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, No. 12, pp. 2404-2425, 1993.
- [35] P. Yu, Y. Desai, N. Popplewell, A. Shah, Three-degree-of-freedom model for galloping. Part II: Solutions, *Journal of engineering mechanics*, Vol. 119, No. 12, pp. 2426-2448, 1993.
- [36] A. Luongo, G. Rega, F. Vestroni, Planar non-linear free vibrations of an elastic cable, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 19, No. 1, pp. 39-52, 1984.

- [37] C. L. Lee, N. C. Perkins, Nonlinear oscillations of suspended cables containing a two-to-one internal resonance, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 3, No. 6, pp. 465-490, 1992.
- [38] A. Luongo, G. Piccardo, On the Influence of the Torsional Stiffness of Non-linear Galloping of Suspended Cables, in *Proceeding of*.
- [39] K. McConnell, C.-N. Chang, A study of the axial-torsional coupling effect on a sagged transmission line, *Experimental Mechanics*, Vol. 26, No. 4, pp. 324-329, 1986.
- [40] W. N. White, S. Venkatasubramanian, P. M. Lynch, C.-L. D. Huang, The equations of motion for the torsional and bending vibrations of a stranded cable, *Journal of applied mechanics*, Vol. 59, No. 2S, pp. S224-S229, 1992.
- [41] A. Luongo, D. Zulli, G. Piccardo, A linear curved-beam model for the analysis of galloping in suspended cables, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 2, No. 4, pp. 675-694, 2007.
- [42] A. Luongo, D. Zulli, G. Piccardo, On the effect of twist angle on nonlinear galloping of suspended cables, *Computers & Structures*, Vol. 87, No. 15, pp. 1003-1014, 2009.
- [43] Z. Yan, Z. Yan, Z. Li, T. Tan, Nonlinear galloping of internally resonant iced transmission lines considering eccentricity, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 15, pp. 3599-3616, 2012.
- [44] A. Luongo, D. Zulli, *Mathematical models of beams and cables*: John Wiley & Sons, 2013.
- [45] A. Luongo, D. Zulli, Dynamic instability of inclined cables under combined wind flow and support motion, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 67, No. 1, pp. 71-87, 2012.
- [46] Z. Yan, Z. Li, E. Savory, W. E. Lin, Galloping of a single iced conductor based on curved-beam theory, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 123, pp. 77-87, 2013.
- [47] Z. Yan, E. Savory, Z. Li, W. E. Lin, Galloping of iced quad-conductors bundles based on curved beam theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, No. 6, pp. 1657-1670, 2014.
- [48] H. Irvine, Max. Cable Structure, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1981.

Abstract

Galloping of cables is a kind of self-excited vibration and characterized with high amplitude and low frequency. When ice, modify the cable circular cross section and causes an aerodynamically unstable profile, Galloping occurs. In this research for investigating the nonlinear galloping of cables, considering flexural and torsional stiffness, a cable-beam model is used. In this research two different boundary conditions are considered for cable. The first is a horizontal cable with simply supports, and the second is an inclined cable with one simply support and another is subjected to a sinusoidal type of motion with known amplitude, both of them are formulated with the iced cross section. Assuming low sag to span ratio and using physical parameter values of the cable, the governing equation of motion is obtained as a classical equations of the perfectly flexible cable, plus a further equation governing the twist motion. These two degrees of freedom system is discretized via the Galerkin method, by taking one in-plane and one out-of-plane modes as trial function. Two resulting non-homogeneous ordinary differential equations are coupled and contain quadratic and cubic nonlinearities in both velocity and displacement terms. By using Multiple Scale method in Perturbation for 1:1 internal resonance for simply support cable and 1:1 internal, external and parametric Resonance for cable with support motion, first order amplitude-phase modulation equations, governing the slow dynamic of the cable, are obtained. In this paper the wind speed and the eccentricity of the iced section are set as control parameters. Without consideration the eccentricity, the value of amplitude is increased as the wind speed is increase. But considering the eccentricity reduced to firstly increasing and then decreasing the amplitude.

Keywords: Galloping, Cable, Wind-induced Vibration, Multiple Scale Perturbation Method, Resonance condition



Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

**Analysis of the dynamic behavior and vibrations caused
by galloping of a hanging cable with consideration
different boundary condition**

Saman Sadripour

Supervisors:

Dr. Amir Jalali

September 2016