

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک
پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی تبدیل انرژی

بهینه‌سازی انتقال حرارت نانوسیال در کانال‌ها با دیواره‌های موج‌دار با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات

نگارنده

سمانه صفی جهانشاهی

استاد راهنما

دکتر پوریا اکبرزاده

استاد مشاور

دکتر مرتضی رحیمیان

بهمن ۱۳۹۶

تقدیم بہ

پدر و مادر عزیزم

بہ پاس فداکاری و مہربانیشان

و، مہسر عزیزم

بہ پاس محبت و دلگرمی.

تقدیر و تشکر

از استاد راهنمای بزرگوارم:

جناب آقای دکتر پوریا اکبرزاده

که با صبر و حوصله بسیار در پیشبرد این پژوهش از راهنمایی بی‌دینشان بهره‌مند گشتم،
پاسکزاری می‌نمایم.

و با سپاس بی‌دریغ خدمت آقای حسن پناه دوست

و

خانم سیده زهرا میکانیلی که مرا صمیمانه و مشتاقانه یاری

دادند.

و با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مراد به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند.

سازمان صنفی جهانشاهی

بهمن ۱۳۹۶

تعمیر نامه

اینجانب سمانه صفی جهانشاهی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بهینه‌سازی انتقال حرارت جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره موج‌دار با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات تحت راهنمایی دکتر پوریا اکبرزاده متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه صنعتی شاهرود" و یا "Shahrood University of Technology" به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

علاقه به بهینه‌سازی انتقال حرارت در کانال با دیواره‌های موج‌دار به‌طور قابل ملاحظه‌ای در چند دهه اخیر افزایش یافته است. این امر به‌واسطه اهمیت آشکار این کانال‌ها در صنعت می‌باشد. از این کانال‌ها به‌طور گسترده برای سیستم‌های مهندسی نظیر مبدل‌های حرارتی، دستگاه‌های خنک‌کننده، توربین‌های گازی، راکتورهای هسته‌ای و تراشه‌های الکتریکی و غیره استفاده می‌شود.

در این پایان‌نامه از الگوریتم چندهدفه ازدحام ذرات برای بهینه‌سازی انتقال حرارت جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره‌های موج‌دار استفاده شده است. روش بهینه‌سازی براساس کمترین مقدار ضریب اصطکاک پوسته‌ای و بیشترین مقدار عدد ناسلت متوسط می‌باشد. نتایج برای مقادیر مختلف قطر نانو ذره، عدد رینولدز و طول موج ارائه شده است. همچنین متغیرهای طراحی مسئله شامل کسر حجمی نانوسیال، عدد رینولدز و دامنه موج می‌باشد. در مطالعه حاضر، برای حل عددی معادلات ناویر استوکس تراکم ناپذیر برنامه‌ای با استفاده از روش ضمنی اسپلاین با جهت متغیر (SADI) و روش ضمنی جهت متغیر (ADI) نوشته شده است.

در مطالعه حاضر با استفاده از نتایج به دست آمده از حل عددی، اثر کمیت‌های مختلف نظیر عدد رینولدز ($100 \leq Re \leq 700$)، عدد پرانتل، دامنه‌ی موج دیواره‌ی کانال ($0 \leq a \leq 0.3$)، کسر حجمی نانوسیال ($0 \leq \varphi \leq 5\%$) و قطر نانو ذره ($20 \leq d_p \leq 100 \text{ nm}$) مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج عددی نشان می‌دهد که با افزایش دامنه‌ی موج و کسر حجمی نانوسیال عدد ناسلت متوسط و عدد استانتون افزایش می‌یابد. همچنین در این مطالعه مقادیر بهینه قطر نانو ذره، عدد رینولدز، دامنه‌ی موج و طول موج دیواره‌ی کانال برای بیشینه کردن عدد ناسلت متوسط و کمینه کردن ضریب اصطکاک پوسته‌ای محاسبه شده است.

واژگان کلیدی: کانال با دیواره‌های موج‌دار، نانوسیال، الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه ازدحام ذرات، روش اسپلاین با جهت متغیر.

فصل ۱ مقدمه	۱
۱-۱ مقدمه	۱
۲-۱ نانوسیال	۲
۳-۱ کانال با دیواره‌های موج‌دار	۶
۴-۱ بهینه‌سازی انتقال حرارت در کانال با دیواره‌های موج‌دار	۸
۵-۱ اهداف پایان‌نامه	۱۰
۱-۵-۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه	۱۱
فصل ۲ الگوریتم بهینه‌سازی	۱۳
۱-۲ مقدمه	۱۳
۲-۲ تعریف بهینه‌سازی	۱۴
۳-۲ اصول حل یک مسئله بهینه‌سازی	۱۵
۱-۳-۲ متغیرهای طراحی	۱۵
۲-۳-۲ قیدهای طراحی	۱۶
۴-۲ تابع هدف	۱۹
۱-۴-۲ روش‌های بهینه‌سازی	۱۹
۵-۲ ساختار شبکه‌ای	۲۰
۶-۲ بهینه‌سازی گروه ذرات	۲۱
۱-۶-۲ تاریخچه بهینه‌سازی گروه ذرات	۲۱
۲-۶-۲ مزایای الگوریتم ازدحام ذرات	۲۳
۳-۶-۲ الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات	۲۳
۱-۳-۶-۲ مدل Global Best PSO	۲۵
۲-۳-۶-۲ مدل local Best PSO	۲۷
۴-۶-۲ وزن اینرسی	۲۷
۵-۶-۲ مهار کردن سرعت	۲۷
۶-۶-۲ مراحل الگوریتم ازدحام ذرات	۲۸
۱-۶-۶-۲ مفهوم پرتو	۲۹
۷-۲ الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه ازدحام ذرات	۳۰
۸-۲ مقایسه‌ی الگوریتم ازدحام ذرات با الگوریتم‌های تکاملی	۳۳
فصل ۳ معرفی مسئله، روابط حاکم، الگوریتم حل مسئله، گسسته‌سازی عددی	۳۵

۳۵	۱-۳ تعریف هندسه مسئله
۳۶	۲-۳ فرضیات مسئله و معادلات حاکم
۳۶	۱-۲-۳ معادله پیوستگی
۳۷	۲-۲-۳ معادلات حرکت
۳۷	۳-۲-۳ معادلات تابع جریان و تاوایی
۳۸	۴-۲-۳ معادله انرژی
۴۰	۵-۲-۳ خواص نانوسیال
۴۱	۳-۳- تغییر مختصات معادلات دیفرانسیل حاکم
۴۲	۱-۳-۳ روش جبری شبکه‌سازی
۴۵	۳-۳-۲ روش شبکه‌سازی با معادلات دیفرانسیل
۴۸	۱-۲-۳-۳ روش بیضوی
۴۹	۳-۳-۳ شرایط مرزی
۵۱	۴-۳ الگوریتم حل مسئله
۵۱	۱-۴-۳ روش ضمنی اسپلاین با جهت متغیر
۵۲	۲-۴-۳ روابط اصلی اسپلاین
۵۳	۳-۴-۳ حل معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای با تقریب اسپلاین
۵۸	۳-۴-۴ حل معادله‌های حاکم با روش (SADI)
۶۴	۵-۴-۳ روش ضمنی با جهت متغیر (ADI)
۶۸	۵-۳ مزایای روش (SADI)
۶۹	فصل ۴ نتایج عددی
۷۰	۱-۴ شبکه محاسباتی
۷۰	۲-۴ استقلال حل از شبکه
۷۱	۱-۴ صحت سنجی و اعتبارسنجی
۷۵	۱-۴-۴ صحت سنجی و اعتبار سنجی نتایج بهینه‌سازی
۷۵	۲-۴ نتایج عددی
۷۶	۱-۲-۴ بررسی تأثیر دامنه موج دیواره‌های کانال
۸۲	۲-۲-۴ بررسی تأثیر عدد رینولدز
۸۸	۳-۲-۴ بررسی تأثیر عدد پرانتل
۹۲	۴-۲-۴ بررسی تأثیر کسر حجمی نانوسیال
۱۰۰	۵-۲-۴ بررسی تأثیر قطر نانو ذره
۱۰۲	۳-۴ نتایج بهینه‌سازی

۱۰۳	۱-۳-۴ بهینه‌سازی با یک تابع هدف
۱۰۴	۲-۳-۴ بهینه‌سازی با دو تابع هدف
۱۱۵	فصل ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها
۱۱۵	۱-۵- بحث و نتیجه‌گیری
۱۱۷	۲-۵- پیشنهادها
۱۱۹	مراجع

فهرست شکل‌ها

- شکل ۲-۱: ساختار شبکه الف) ستاره‌ای ب) حلقه‌ای ۲۱
- شکل ۲-۲: به‌روزرسانی سرعت [۳۹] ۲۶
- شکل ۲-۳: به‌روزرسانی موقعیت ذره [۳۹] ۲۶
- شکل ۲-۴: الگوریتم ازدحام ذرات [۴۳] ۲۹
- شکل ۲-۵: مفهوم منحنی پرتو [۴۶] ۳۰
- شکل ۳-۱: شماتیک مدل فیزیکی ۳۶
- شکل ۳-۲: قلمرو فیزیکی مسئله ۴۳
- شکل ۳-۳: قلمرو محاسباتی ۴۳
- شکل ۳-۴: شرایط مرزی مسئله ۵۰
- شکل ۴-۱: مطالعه استقلال حل از شبکه برای ضریب اصطکاک پوسته‌ای در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$ ۷۰
- شکل ۴-۲: مطالعه استقلال حل از شبکه برای عدد ناسلت محلی در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$ ۷۱
- شکل ۴-۳: ضریب اصطکاک پوسته‌ای در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$ ۷۲
- شکل ۴-۴: عدد ناسلت محلی در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$ ۷۲
- شکل ۴-۵: عدد ناسلت متوسط در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$ ۷۳
- شکل ۴-۶: عدد ناسلت متوسط در شرایط: $Pr = 7.02, Re = 250, a = 0.2$ ۷۴
- شکل ۴-۷: مقدار ماکزیمم تابع f ۷۵
- شکل ۴-۸: ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی برای دامنه‌ی موج مختلف در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۷۸
- شکل ۴-۹: عدد ناسلت محلی برای دامنه‌ی موج مختلف در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۷۹

- شکل ۴-۱۰: عدد ناسلت متوسط برای مقادیر مختلف دامنه موج در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۷۹
- شکل ۴-۱۱: عدد استانتون برای دامنه‌ی موج مختلف در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۰
- شکل ۴-۱۲: نمودار خط جریان در (الف)، $a = 0.1$ ، (ب) $a = 0.2$ ، (ج) $a = 0.3$ در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۱
- شکل ۴-۱۳: نمودار خطوط هم‌دما در (الف)، $a = 0.1$ ، (ب) $a = 0.2$ ، (ج) $a = 0.3$ در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۲
- شکل ۴-۱۴: ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی برای مقادیر مختلف رینولدز در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۴
- شکل ۴-۱۵: عدد ناسلت محلی برای مقادیر مختلف رینولدز در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۴
- شکل ۴-۱۶: عدد ناسلت متوسط برای مقادیر مختلف رینولدز در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۵
- شکل ۴-۱۷: عدد استانتون برای مقادیر مختلف رینولدز در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۵
- شکل ۴-۱۸: نمودار عدد ناسلت متوسط برحسب رینولدز برای دامنه موج مختلف در شرایط: $Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۶
- شکل ۴-۱۹: نمودار خط جریان در (الف)، $Re = 100$ ، (ب) $Re = 300$ ، (ج) $Re = 500$ در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۷
- شکل ۴-۲۰: نمودار خط دما در (الف) $Re = 100$ ، (ب) $Re = 300$ ، (ج) $Re = 500$ در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ ۸۸
- شکل ۴-۲۱: عدد ناسلت محلی برای مقادیر مختلف عدد پرانتل در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, \varphi = 0\%$ ۸۹

شکل ۴-۲۲ : عدد ناسلت محلی برای مقادیر مختلف عدد پرانتل در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, \varphi = 0\%$

۹۰.....

شکل ۴-۲۳: عدد استانتون برای مقادیر مختلف اعداد پرانتل در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, \varphi = 0\%$

۹۰.....

شکل ۴-۲۴ : نمودار عدد ناست متوسط برحسب رینولدز برای دامنه موج مختلف در شرایط: $Pr = 0.71, \varphi = 0\%$

۹۱.....

شکل ۴-۲۵: نمودار خط دما در (الف) $Pr = 0.71$ ، (ب) $Pr = 3.97$ ، (ج) $Pr = 6.93$ در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, \varphi = 0\%$

۹۲.....

شکل ۴-۲۶: ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی برای کسر حجمی نانوسیال مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$

۹۴.....

شکل ۴-۲۷ : عدد ناسلت محلی برای کسر حجمی نانوسیال مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$

۹۵.....

شکل ۴-۲۸ : عدد ناسلت متوسط برای کسر حجمی نانوسیال در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$

۹۵.....

شکل ۴-۲۹: عدد استانتون برای کسر حجمی نانوسیال مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$

۹۶.....

شکل ۴-۳۰: تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب رینولدز برای کسر حجمی مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$

۹۶.....

شکل ۴-۳۱ : تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب رینولدز برای دامنه موج مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, \varphi = 5\%$

۹۷.....

شکل ۴-۳۲: عدد ناسلت محلی برای کسر حجمی مختلف نانو ذره TiO_2 در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$

۹۷.....

شکل ۴-۳۳: عدد ناسلت محلی برای کسر حجمی مختلف نانو ذره Al_2O_3 در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$

۹۸.....

- شکل ۴-۳۴: نمودار خط جریان در (الف) $Re = 300$ (ب) $Re = 500$ ، (ج) $Re = 700$ در شرایط:
 ۹۹ $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 5\%$
- شکل ۴-۳۵: نمودار هم‌دما در (الف) $Re = 300$ (ب) $Re = 500$ ، (ج) $Re = 700$ در شرایط: $a =$
 ۱۰۰ $0.2, Pr = 6.93, \varphi = 5\%$
- شکل ۴-۳۶: تغییرات عدد ناسلت محلی در قطر نانو ذره مس مختلف در شرایط: $Re = 300, Pr =$
 ۱۰۱ $6.93, a = 0.1, \varphi = 5\%$
- شکل ۴-۳۷: تغییرات عدد ناسلت محلی در قطر نانو ذره آلومینیوم اکسید مختلف در شرایط: $Re =$
 ۱۰۲ $300, Pr = 6.93, a = 0.1, \varphi = 5\%$
- شکل ۴-۳۸: مینیمم ضریب اصطکاک برای نانوسیال آب-مس در شرایط: $a = 0.2, Pr =$
 ۱۰۴ $6.93, dp = 50$
- شکل ۴-۳۹: منحنی پرتو نانوسیال آب-مس در شرایط: $dp = 20$
 ۱۰۶.....
- شکل ۴-۴۰: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-مس در شرایط: $dp = 100$
 ۱۰۶.....
- شکل ۴-۴۱: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-مس برای سه قطر متفاوت
 ۱۰۷.....
- شکل ۴-۴۲: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید در شرایط: $dp = 50$
 ۱۰۹.....
- شکل ۴-۴۳: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید برای سه قطر متفاوت
 ۱۰۹.....
- شکل ۴-۴۴: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-مس برای سه عدد رینولدز متفاوت
 ۱۱۱.....
- شکل ۴-۴۵: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید برای سه عدد رینولدز متفاوت
 ۱۱۲.....
- شکل ۴-۴۶: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-مس برای سه طول موج متفاوت
 ۱۱۳.....

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۳: خواص ترموفیزیکی سیال و دو نانو ذره.....	۴۱
جدول ۲-۳: مقادیر معلوم $F_{i,j}, S_{i,j}, G_{i,j}$	۶۰
جدول ۳-۳: مقادیر معلوم $F_{i,j}, S_{i,j}, G_{i,j}$	۶۳
جدول ۱-۴: تاثیر دامنه موج روی عدد ناسلت متوسط در شرایط $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$	۷۸
جدول ۲-۴: تاثیر عدد رینولدز روی عدد ناسلت متوسط در شرایط $Pr = 6.93, a = 0.2, \varphi = 0\%$	۸۴
جدول ۳-۴: تاثیر عدد پرائتل روی عدد ناسلت متوسط $a = 0.2, Re = 500, \varphi = 0\%$	۸۹
جدول ۴-۴: تاثیر کسر حجمی نانوسیال آب-مس روی عدد ناسلت متوسط $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$	۹۴
جدول ۵-۴: تاثیر قطر نانو ذره مس روی عدد ناسلت متوسط $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93, \varphi = 5\%$	۱۰۱
جدول ۶-۴: بهینه‌سازی با یک تابع هدف برای نانوسیال آب-مس در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, dp =$	۱۰۳
جدول ۷-۴: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و عدد رینولدز برای قطر نانو ذره ورودی نانوسیال آب-مس با روش MOPSO.....	۱۰۸
جدول ۸-۴: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و عدد رینولدز برای قطر نانو ذره ورودی نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید با روش MOPSO.....	۱۰۹
جدول ۹-۴: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی موج برای عدد رینولدز ورودی نانوسیال آب-مس با روش MOPSO.....	۱۱۱
جدول ۱۰-۴: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی موج برای عدد رینولدز ورودی نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید با روش MOPSO.....	۱۱۲
جدول ۱۱-۴: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی موج برای طول موج ورودی نانوسیال آب-مس با روش MOPSO.....	۱۱۴

فهرست نشانه‌ها

d_p (m)	قطر نانو ذره	\bar{a} (m)	دامنه موج
ρ_f ($\frac{Kg}{m^3}$)	چگالی سیال	a	دامنه موج بی بعد
ρ_{nf} ($\frac{Kg}{m^3}$)	چگالی نانوسیال	L (m)	نصف ارتفاع کانال
C_f ($\frac{J}{Kg K}$)	ضریب اصطکاک	S	تابع هندسی سطح
C_p ($\frac{J}{Kg K}$)	ضریب گرمایی ویژه	x, y (m)	مختصات کارتزین
K_f ($\frac{W}{m K}$)	ضریب هدایتی گرمایی سیال	X, Y	مختصات کارتزین بی بعد
μ_{nf} (Pa. s)	لزجت دینامیکی نانوسیال	ξ, η	مختصات انتقال یافته
T_0 (K)	دمای ورودی	x_s (m)	مختصات شروع موج
T_w (K)	دمای دیوار	x_e (m)	مختصات پایان موج
$M_{i,j}, L_{i,j}$	مشتق دوم	Pr	عدد پراتل
$m_{i,j}, l_{i,j}$	مشتق اول	φ	درصد حجمی نانوسیال
$h_{i,j}, k_{i,j}$	طول بازه	Re	عدد رینولدز
k_{nf} ($\frac{W}{m K}$)	ضریب هدایت گرمایی نانوسیال	Nu	عدد ناسلت
U_m ($\frac{m}{s}$)	سرعت متوسط	Nu_m	عدد ناسلت متوسط
μ_f (Pa. s)	لزجت دینامیکی سیال	θ	دمای بی بعد
		t (s)	زمان
		T (K)	دما
		τ	زمان بی بعد
		u, v ($\frac{m}{s}$)	مولفه‌های سرعت
		U, V	مولفه‌های سرعت بی بعد
		Ψ	تابع جریان
		Ω	تاوایی
		ψ	تابع جریان بی بعد
		ω	تاوایی بی بعد

فصل ۱ مقدمه

۱-۱- مقدمه

روش‌های بهبود میزان انتقال حرارت در سیستم‌های حرارتی به دو دسته کلی فعال^۱ و غیر فعال^۲ تقسیم‌بندی می‌شود. در روش‌های فعال از توان خارجی استفاده می‌شود. در چنین مواردی می‌توان از میدان الکتریکی، صوتی یا ارتعاش سطوح و سطوح مرتعش برای برهم زدن لایه مرزی^۳ و افزایش تلاطم استفاده کرد. در حالی که در روش‌های غیرفعال از هندسه‌های خاص و یا مواد افزودنی برای افزایش انتقال حرارت استفاده می‌شود. روش‌های غیرفعال به دلیل هزینه کمتر معمولاً مورد توجه بیشتری قرار دارند. استفاده از کانال با دیواره‌های موج‌دار^۴ یکی از روش‌های غیرفعال بهبود انتقال حرارت می‌باشد.

¹ Active Technique

² Passive Technique

³ Boundary Layer

⁴ Wavy Channel

این کانال‌ها با افزایش اختلاط سیال به وسیله سطوح موج‌دار، انتقال حرارت را افزایش می‌دهند. یکی دیگر از روش‌های غیرفعال استفاده از نانوسیال^۱ می‌باشد که باعث افزایش خصوصیات حرارتی سیال می‌شود و انتقال حرارت هدایتی سیال را افزایش می‌دهد. برای انتخاب یک نانو ذره کمیت‌های مختلفی باید مورد توجه قرار گیرد. از جمله مهم‌ترین این کمیت‌ها می‌توان به نوع، درصد و قطر نانو ذره اشاره کرد. این کمیت‌ها می‌توانند مقادیر مختلفی داشته باشند بنابراین بهینه‌سازی^۲ این کمیت‌ها ضروری می‌باشد. روش‌های بهینه‌سازی ریاضی و هوشمند می‌توانند برای بهینه‌سازی طراحی و عملکرد سیستم‌های حرارتی مورد استفاده قرار گیرند. با توجه به پیچیدگی‌های این مسئله به کارگیری روش‌های بهینه‌سازی مناسب از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و باید الگوریتمی مورد استفاده قرار گیرد که با مسئله سازگار باشد. چنانچه رابطه توابع هدف در اختیار نباشد روش‌های ریاضی نمی‌توانند جهت بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گیرند. در این شرایط روش‌های بهینه‌سازی هوشمند مانند الگوریتم ژنتیک^۳ و الگوریتم ازدحام ذرات^۴ از عملکرد بهتری برخوردارند.

۱-۲- نانوسیال

امروزه استفاده از نانوسیال به‌عنوان فناوری و دانشی با دامنه تحقیقاتی بسیار گسترده، مورد توجه محققین دنیا قرار گرفته و هر شاخه‌ای از این علم نیازمند مطالعات، آزمایش‌ها و تحقیقات تخصصی و ویژه است. مایعات معمولی مانند آب، روغن، اتیلن گلیکول و غیره انتقال حرارت هدایتی کمی دارند؛ بنابراین یک راه مؤثر برای افزایش انتقال حرارت هدایتی سیال‌ها، افزودن ذرات جامد با ضریب هدایت گرمایی زیاد به سیال پایه می‌باشد. با افزودن ذرات جامد نانو به سیال پایه نانوسیال به دست می‌آید. به بیان دیگر نانوسیال‌ها سوسپانسیون‌هایی هستند که به وسیله معلق ساختن نانو ذرات در سیال پایه به دست می‌آیند. این ذرات در انواع مختلف فلزی، عایق و نیمه‌هادی و در اشکال مختلفی مثل کره، میله

¹ Nano Fluid

² Optimization

³ Genetic Algorithm

⁴ Particle Swarm Algorithm

و فنجان تولید می‌شوند. لازم به ذکر است نانو بلورها نیز زیرمجموعه نانو ذرات به حساب می‌آیند. برای تولید نانو ذرات روش‌های بسیار متنوعی وجود دارد. این روش‌ها اساساً به سه گروه تقسیم می‌شوند که در ذیل به شرح هر یک می‌پردازیم: الف) چگالش بخاری: این روش شامل تبخیر یک فلز جامد و سپس چگالش سریع آن برای تشکیل خوشه‌های نانومتری است که به صورت پودر ته‌نشین می‌شوند. مهم‌ترین مزیت این روش میزان آلودگی کم آن است. در نهایت اندازه ذره با تغییر کمیت‌هایی نظیر دما و محیط گاز و سرعت تبخیر کنترل می‌شود. ب) سنتز شیمیایی: استفاده از روش سنتز شیمیایی شامل رشد نانو ذرات در یک محیط مایع حاوی انواع واکنشگرها است. در روش‌های شیمیایی اندازه نهایی ذره را می‌توان با توقف فرآیند هنگامی که اندازه مطلوب به دست آمد یا با انتخاب مواد شیمیایی تشکیل‌دهنده ذرات پایدار و توقف رشد در یک اندازه خاص کنترل نمود. این روش‌ها معمولاً کم‌هزینه و پرحجم هستند، اما آلودگی حاصل از مواد شیمیایی می‌تواند یک مشکل باشد. ج) فرایندهای حالت جامد: از روش فرایندهای جامد (آسیاب یا پودر کردن) می‌توان برای ایجاد نانو ذرات استفاده نمود. خواص نانو ذرات حاصل تحت تأثیر نوع ماده آسیاب کننده، زمان آسیاب و محیط اتمسفری آن قرار می‌گیرد. از این روش می‌توان برای تولید نانو ذرات از موادی استفاده نمود که در دو روش قبلی به آسانی تولید نمی‌شوند. نانو ذرات رایج در تحقیقات علمی پژوهشی عبارت‌اند از: مس^۱، آلومینیوم اکسید^۲، تیتانیوم اکسید^۳، طلا^۴، نقره^۵، اکسید مس^۶. در سال‌های اخیر افزودن ذرات جامد به سیال‌های انتقال‌دهنده حرارت به‌عنوان یک روش سودمند برای افزایش نرخ انتقال حرارت شناخته شده است [۱، ۲]. اما مشکلات رسوب و سایش سوسپانسیون‌های جامد-مایع باعث شده است که اندازه ذرات را در حد میکرومتر و میلی‌متر در نظر بگیرند. برای حل این مشکل‌ها یک نوع ابتکاری از سیال‌های انتقال‌دهنده حرارت به نام نانوسیال که به‌وسیله پاشش مختلف ذرات نانو در سیال‌های انتقال‌دهنده سنتی توسعه یافتند. در سال ۱۹۹۵ افزودن

¹ Cu

² Al₂O₃

³ TiO₂

⁴ Au

⁵ Ag

⁶ CuO

نانو ذرات به سیال پایه توسط چوبی [۳] توجه زیادی را به خود جلب کرد. در این مطالعه اثر نانوسیال مس مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که افزایش نانو ذره به سیال پایه باعث افزایش انتقال حرارت می‌شود. ری و همکارانش [۴] برای اولین بار تحقیقات عددی را به منظور افزایش انتقال حرارت با استفاده از نانوسیال آلومینیوم اکسید و آب در یک جریان آرام محوری برای یک سیستم خنک‌کننده انجام دادند. آن‌ها نتایج را این‌گونه بیان کردند که با افزایش نانوسیال ضریب هدایت گرمایی سیال پایه افزایش پیدا می‌کند در نتیجه یکی از مؤثرترین روش‌ها برای افزایش انتقال حرارت در لوله‌ها استفاده از نانوسیال می‌باشد. مرشد و همکارانش [۵] در سال ۲۰۰۹ تأثیر کمیت‌های مختلف از قبیل اندازه نانو ذره، نانو لایه^۱ و حرکت براونین^۲ را روی هدایت گرمایی نانوسیال در یک سری از آزمایش‌های عملی بررسی کردند. اغلب کارهای انجام شده در این زمینه روی پتانسیل کاربردها، سنتز نانوسیال، خصوصیات فیزیکی نانوسیال و خواص انتقال حرارت نانوسیال و غیره متمرکز شده است [۶-۹]. در سال ۲۰۱۰ دانکتسوک و وانگویسر [۸] عملکرد انتقال حرارت و کسر حجمی نانوسیال تیتانیوم اکسید را در آب برای غلظت‌های ۰/۲٪ تا ۲٪ در رژیم جریان متلاطم^۳ بررسی کردند. آزمایش‌های آن‌ها نشان داد که ضرایب انتقال حرارت برای غلظت ۱٪ نانوسیال در مقایسه با سیال پایه ۲۶٪ افزایش می‌یابد. عظیمی و همکارانش [۱۰] در سال ۲۰۱۴ به بررسی پدیده جابجایی طبیعی ناپایا بین دو صفحه موازی متحرک پرداختند و در حل معادلات حاکم از روش عددی گالرکین^۴ استفاده کردند. عواملی که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت بدین شرح است: الف) تأثیرات کسر حجمی نانوسیال گرافون اکسید^۵ بر دما و پروفیل سرعت به صورت نموداری و عددی مورد بحث و بررسی قرار گرفت. ب) تأثیرات عوامل حرکتی بر پروفیل سرعت برای حالتی که صفحات به صورت موازی و با یکدیگر در حال حرکت‌اند بررسی شد. ج) عدد ناسلت برای انواع مختلف از نانو ذرات در کسرهای حجمی متفاوت از آن‌ها و در عدد اکرت ثابت

¹ Nano Layer

² Brownian Motion

³ Turbulent Flow Regime

⁴ Galerkin Method

⁵ Graphene Oxide

مورد بررسی گرفت و در نهایت به این نتیجه رسیدند که با تغییر کسر حجمی نانوسیال در یک عدد اکرت ثابت عملیات انتقال حرارت افزایش می‌یابد. در سال ۲۰۱۴ فریدون مهر و همکارانش [۱۱] به بررسی پدیده جابجایی طبیعی ناپایای مغناطیسی روی یک سطح کشیده شده عمودی پرداختند و در حل معادلات حاکم از روش عددی رانچ کوتا^۱ مرتبه چهارم که بر پایه روش شوتینگ^۲ هست، استفاده کردند. نتایجی که به دست آوردند بدین شرح می‌باشند که با کاهش کسر حجمی نانوسیال، عوامل ناپایا و میدان مغناطیسی یا افزایش اثرات شناوری، ضریب اصطکاک پوسته‌ای افزایش می‌یابد. علاوه بر این با افزایش کسر حجمی نانوسیال، عوامل ناپایا و میدان مغناطیسی یا کاهش اثرات شناوری^۳، عدد ناسلت محلی افزایش می‌یابند. نتایج آن‌ها نشان داد که انتخاب نانو ذرات اکسید آلومینیوم و مس باعث ایجاد کمترین و بیشترین ضریب اصطکاک پوسته‌ای و انتخاب نانو ذرات مس و اکسید تیتانیوم باعث ایجاد بیشترین و کمترین عدد ناسلت محلی می‌شوند. اودین و همکارانش [۱۲] در سال ۲۰۱۵ به بررسی جریان در یک میکرو کانال^۴ دوزنقه‌ای شکل به همراه نانو ذره و در حالت خاص گرمای یکنواخت از جداره پایین جسم پرداختند و متوجه شدند که انتقال حرارت و انتقال جرم در این حالت خاص دارای بیشترین مقدار عددی است. پاپ و ترکی مازوگلو [۱۳] در سال ۲۰۱۵ به بررسی انتقال حرارت و جرم و پدیده جابجایی طبیعی ناپایای برخی از نانو ذرات در عبور از یک صفحه تخت عمودی و با اثر تابش پرداختند. آن‌ها با کمک از راه‌حل‌های دقیق تحلیلی به بررسی نرخ انتقال حرارت در دو حالت دمایی ثابت دیوار و گرمای پایای شار حرارتی با نانو ذرات مختلفی چون طلا، اکسید مس، اکسید تیتانیوم، اکسید آلومینیوم و مس پرداختند. در حالت دمایی ثابت دیوار، متوجه شدند که کمترین انتقال حرارت برای اکسید تیتانیوم و بیشترین برای مس هست و نرخ انتقال حرارت در حالت گرمای پایای شار حرارتی از دمایی ثابت دیوار بیشتر است. نتایج نشان داد که در حالت دمایی پایا دیوار کمترین تنش برشی

¹ Runge-Kutta

² Shooting Method

³ Bouncy Effect

⁴ Micro Channel

محاسبه شده برای نانو ذره تیتانیوم اکسید و بیشترین آن برای طلا است، تفسیر در نتایج اثرات تابشی نشان از افزایش اصطکاک و کاهش نرخ انتقال حرارت بود. رحمان و همکارانش [۱۴] در سال ۲۰۱۶ به تحلیل ناپایا جابه‌جایی طبیعی در یک نانو لوله کربنی با سیال پایه آب و یک حفره داخلی به همراه یک گرم‌کن درونی و از روش عددی المان محدود پرداختند و نتایج بدست آمده به این صورت بود که: الف) قدرت جریان با افزایش کسر حجمی نانوسیال و برای تمامی مقادیر از عدد رایلی کاهش می‌یابد. ب) گرادیان دما با افزایش زمان بدون بعد افزایش می‌یابد و بیشینه مقدار گرادیان دما با افزایش عدد رایلی کاهش می‌یابد.

۱-۳- کانال با دیواره‌های موج‌دار

امروزه موضوع افزایش انتقال حرارت در وسایل گرمایی توجه زیادی را به خود جلب کرده است. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین سیستم‌های انتقال حرارت، مبدل‌های گرمایی می‌باشد. افزایش انتقال حرارت می‌تواند به مدیریت و ذخیره انرژی کمک کند. استفاده از کانال‌های پیشرفته به‌عنوان یک تکنیک توسعه‌یافته‌ی انتقال حرارت می‌باشد که در بسیاری از زمینه‌ها از جمله انتقال حرارت، واکنش شیمیایی، سیستم‌های انرژی، تراشه‌های الکترونیکی و هوافضا مورد استفاده قرار می‌گیرد. در کاربردهای عملی این کانال‌ها به دلیل داشتن اندازه کوچک، وزن سبک، قیمت ارزان و غیره عملکرد بالایی دارند. این کانال‌ها اختلاط‌های بالا و پایین، جریان‌های دمایی را بهبود می‌بخشد که این باعث افزایش انتقال حرارت می‌شود. یک نوع از مهم‌ترین کانال‌های پیشرفته، کانال‌ها با دیواره‌های موج‌دار می‌باشند که به‌عنوان یک روش مفید، ارزان و مناسب برای افزایش نرخ انتقال حرارت در مبدل‌های گرمایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. جریان در کانال با دیواره‌های موج‌دار برای اولین بار توسط بورن و پارک [۱۵] در سال ۱۹۶۹ بررسی شد. آن‌ها از سری فوریه^۱ و فرض جریان استوکس^۲ برای تابع جریان استفاده کردند. جریان و

¹ Fourier Serie

² Stokes Flow

انتقال حرارت سیال‌های معمولی در یک کانال با دیواره‌های موج‌دار به‌صورت تئوری و آزمایشگاهی در خیلی از کارها مورد مطالعه قرار گرفته است. اساکو و فقری [۱۶] در سال ۱۹۸۷ انتقال حرارت در کانال‌ها با دیواره‌های موج‌دار و لوله‌های صاف را در شرایط یکسان بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که انتقال حرارت در این کانال‌ها ۴۰٪ نسبت به لوله‌های صاف بیشتر است. در سال ۱۹۹۹ راش و همکارانش [۱۷] به‌صورت آزمایشگاهی عملکرد انتقال حرارت در کانال‌ها با دیواره‌های به شکل موج‌های سینوسی را بررسی کردند. در این مطالعه نشان داده شد عدد رینولدز به‌صورت مستقیم روی عدد ناسلت محلی تأثیر می‌گذارد و همچنین محل شروع مخلوط شدن به مقدار عدد رینولدز و هندسه کانال بستگی دارد. وانگ و همکارانش [۱۸] در سال ۱۹۹۹ رابطه‌ی بین تیغه و لوله‌ها موج‌دار در مبدل‌های حرارتی را محاسبه کردند. نتایج این مطالعه نشان داد عملکرد انتقال حرارت با افزایش تعداد ردیف لوله کاهش می‌یابد و ضریب اصطکاک تقریباً مستقل از شماره ردیف لوله می‌باشد. وانگ و چن [۱۹] در سال ۲۰۰۲ نرخ انتقال حرارت در رژیم جریان آرام و در کانال با دیواره‌های موج‌دار و دما ثابت را مورد مطالعه قرار دادند. در این مطالعه نشان داده شد که با افزایش عدد رینولدز و دامنه دیواره‌ی موج‌دار عدد ناسلت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی افزایش می‌یابد. ویژگی‌های جریان و انتقال حرارت در کانال‌های سه بعدی با دیواره‌های موج‌دار توسط کمینی و همکارانش [۲۰] در سال ۲۰۰۳ مورد مطالعه قرار گرفت. نیلیونگ و وانگویسز [۲۱] در سال ۲۰۰۶ به‌صورت آزمایشگاهی الگوی جریان و افت فشار جریان تک فازی مایع و جریان دو فازی آب و هوا را در کانال‌ها با دیواره‌های به شکل موج‌های سینوسی به دست آوردند. علاوه بر کانال‌های با دیواره‌های موج‌دار، اخیراً تحقیقات روی نانوسیال‌ها به‌عنوان روشی دیگر برای افزایش نرخ انتقال حرارت مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. نرخ انتقال حرارت در جریان نانوسیال مس و آب در کانال با دیواره‌های موج‌دار به‌صورت عددی توسط حیدری و کرمانی [۲۲] در سال ۲۰۱۰ مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج آن‌ها نشان داد که استفاده از نانوسیال در کانال با

دیواره‌های موج‌دار انتقال حرارت را ۵۰٪ افزایش می‌دهد. روش دو بعدی عددی و ویژگی‌های ترموهیدرولیکی^۱ نانوسیال مس و آب در کانال‌ها با دیواره‌های به شکل موج‌های مثلثی، سینوسی و دوزنقه‌ای در سال ۲۰۱۰ توسط احمد و همکارانش [۲۳] مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج این مطالعه نشان داد که با افزایش عدد رینولدز و دامنه موج دیواره‌ی سینوسی عدد ناسلت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش کسر حجمی نانوسیال عدد ناسلت محلی افزایش می‌یابد. مطالعه‌ی آزمایشگاهی تأثیر شکل کانال روی افزایش نرخ انتقال حرارت در مبدل‌های حرارتی توسط خوش وقت علی‌آبادی و همکارانش [۲۴] در سال ۲۰۱۴ انجام شد. نتایج نشان داد که نانوسیال سیلیس^۲ بیشترین ضریب گرمایی-هیدرولیکی را دارد. تأثیر شکل نانو ذرات در جریان جابجایی اجباری نانوسیال و اتیلن گلیکول روی عملکرد کانال‌ها با دیواره‌های موج‌دار توسط وانکی و همکارانش [۲۵] در سال ۲۰۱۴ بررسی شد. آن‌ها مشاهده کردند که نانو ذره به شکل پلاکت (جسم مسطح و کوچک) بهترین انتقال حرارت را دارد.

۱-۴- بهینه‌سازی انتقال حرارت در کانال با دیواره‌های موج‌دار

هر مسئله مهندسی ممکن است دارای چندین جواب مختلف باشد که بعضی از آن‌ها قابل قبول و بعضی غیر قابل قبول باشند. وظیفه طراحان پیدا کردن بهترین جواب ممکن از میان جواب‌های مختلف است که لزوم بحث بهینه‌سازی مطرح می‌شود. اخیراً راهکار بهینه‌سازی‌های چند منظوره در طراحی مکانیکی به‌جای مفهوم بهینه‌سازی تک منظوره که مدت زمان زیادی مورد استفاده بود، بکار می‌رود. تخمین بهینه‌سازی چند منظوره به‌طور وسیعی در مسائل طراحی مکانیکی و فرآیندهایی از این قبیل قابل اجراست. در بعضی موارد، ممکن است عملکرد شرایط با یکدیگر در تضاد باشد، به‌طوری که بهبود در یکی از آن‌ها موجب بدتر شدن تابع یا توابع دیگر شود. این مسائل نمی‌تواند با انتخاب یک بهینه‌سازی

¹ Thermal-Hydraulic

² SiO₂

تک منظوره بهینه شوند، بنابراین بهترین حل بهینه در طراحی فرآیند، بایستی در بین توابع تک و چند منظوره جستجو شود. معمولاً در روش‌های محلی و سنتی امکان بهینه‌سازی هم‌زمان چندین کمیت غیرمستقیم، میسر نیست. همچنین بزرگ‌ترین مشکل در رواج بهینه‌سازی چند منظوره این است که روش بهینه‌سازی مناسبی مخصوصاً برای شرایط متضاد وجود ندارد. در دهه‌های اخیر الگوریتم‌های تکاملی که جزء روش‌های بهینه‌سازی هستند به وجود آمدند. این روش‌ها بر پایه حرکت، ژنتیک، توارث و نظریه تکامل بنا شده‌اند. در فرایند بهینه‌سازی محققین قادر به بهینه‌سازی یک تابع هدف بودند ولی به تدریج به قدرت این روش‌ها نیز افزوده شد. به طوری که امروزه چند تابع هدف را می‌توان به طور هم‌زمان بهینه کرد. در حال حاضر بهینه‌سازی چندهدفه به یک موضوع بسیار محبوب بین محققین درآمده است اما هنوز هم بسیاری از سؤالات بی‌پاسخ در این حوزه وجود دارد. در نهایت راه‌حل این مشکل، معمولاً با تنظیم کمیت‌های مختلف توسط کاربر امکان‌پذیر است. از آنجایی که بهینه‌سازی چند معیار دارد و ممکن است این معیارها با هم فرق داشته باشند معمولاً برای ارائه راه‌حل برای آن‌ها مشکلاتی وجود دارد. معمولاً بهینه‌سازی با تعریف تابع هدف شروع می‌شود که برای مسائل مختلف، متفاوت می‌باشد. توابع هدف به صورت بیشینه یا کمینه کردن یک متغیر خاص تعریف می‌شوند و حتی برای یک مسئله خاص می‌توان چند تابع هدف را منظور کرد. بهینه‌سازی سیستم‌های انتقال حرارت موضوعی بسیار مهم می‌باشد. تحقیقات زیادی در زمینه‌ی بهینه‌سازی انتقال حرارت در کاربردهای گرمایی مختلف وجود دارد [۲۶]. اما تعداد کمی از آن‌ها درباره‌ی بهینه‌سازی انتقال حرارت در کانال‌های موج‌دار می‌باشد. بهینه‌سازی انتقال حرارت در جریان آرام یکسان بین دو کانال با دیواره‌های صاف و موج‌دار توسط فابری [۲۷] مقایسه شده است. در این تحقیق از الگوریتم ژنتیک برای بیشینه کردن انتقال حرارت به وسیله بهینه‌سازی شکل موج استفاده شد. یانگ و همکارانش [۲۸] در سال ۲۰۱۴ بهینه‌سازی انتقال حرارت جریان دو فازی نانوسیال در کانال‌های دو بعدی با دیواره‌های گرم شده موج‌دار را انجام دادند. آن‌ها با استفاده از الگوریتم ژنتیک تأثیر عدد رینولدز، کسر حجمی نانو ذرات، دامن‌های دیواره‌های موج‌دار و عدد موج را روی ضریب عملکرد گرمایی به دست آوردند. نتایج عددی آن‌ها نشان

داد انتقال حرارت در کانال‌ها با دیواره‌های موج‌دار و در جریان نانوسیال مس و آب به کسر حجمی ۳٪ و ۵٪ در مقایسه با جریان سیال خالص به ترتیب ۱۵٪ و ۲۴٪ افزایش می‌یابد. در سال ۲۰۱۵ ولی نتاج و همکارانش [۲۹] بهینه‌سازی انتقال حرارت جریان دو فاز نانوسیال را در کانال با دیواره‌های به شکل موج‌های سینوسی و با استفاده از الگوریتم کلونی زنبور عسل مصنوعی^۱ انجام دادند. آن‌ها تأثیر کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی دیواره‌های موج‌دار را روی عدد ناسلت متوسط و ضریب عملکرد گرمایی-هیدرولیکی بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که با افزایش عدد رینولدز و کسر حجمی نانوسیال نرخ انتقال حرارت به طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. همچنین آن‌ها مشاهده کردند که استفاده از نانوسیال سهم زیادی در بالا بردن ضریب عملکرد گرمایی-هیدرولیکی دارد و افزایش دامنه‌ی دیواره‌های موج‌دار تأثیر معکوس روی افت فشار و عدد ناسلت می‌گذارد.

۱-۵- اهداف پایان‌نامه

در این پایان‌نامه برای نخستین بار از الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه ازدحام ذرات^۲ (MOPSO) برای بهینه‌سازی انتقال حرارت با استفاده از نانوسیال در کانال با دیواره‌های موج‌دار استفاده شده است و تأثیر استفاده از نانوسیال مورد بررسی قرار گرفته است. بهینه‌سازی بدین مفهوم است که در بین کمیت‌های یک تابع هدف مقادیری انتخاب شود که تابع هدف را بیشینه یا کمینه نماید و بهترین جواب برای تابع هدف به دست آید. در این پایان‌نامه توابع هدف، عدد ناسلت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای می‌باشند که به ترتیب باید بیشینه و کمینه شوند. در این مطالعه مقادیر مهم و اساسی شامل نوع، اندازه، کسر حجمی نانوسیال، طول موج و دامنه موج می‌باشد باید به صورتی تغییر کنند تا توابع هدف بهینه شوند. الگوریتم ازدحام ذرات برای این مسئله بسیار مناسب است و نسبت به الگوریتم‌های دیگر عملکرد بهتری دارد. در ادامه به کمک روش تابع جریان معادلات موردنظر حل شده است.

¹ Artificial Bee Colony Algorithm

² Multi Objective Particle Swarm Optimization Algorithm

۱-۵-۱ مروری بر فصل‌های پایان‌نامه

این پایان‌نامه از یک فصل به‌عنوان مقدمه (فصل حاضر) و ۴ فصل اصلی و یک بخش جهت معرفی مراجع مورد استفاده تشکیل شده است. در فصل دوم مفاهیم استفاده شده در این مطالعه به تفصیل توضیح داده شده است. در فصل سوم به معرفی مسئله پرداخته شده است و الگوریتم حل مسئله ارائه شده است و معادلات برای حل عددی گسسته و خطی‌سازی شده‌اند. در فصل چهارم ابتدا اعتبار و صحت سنجی و سپس نتایج حاصل از این مطالعه ارائه می‌گردد. فصل پنجم به معرفی نتایج این پایان‌نامه و ارائه پیشنهادها و توصیه‌هایی برای ارتقای سطح کیفی تحقیق حاضر و انجام مطالعه جامع‌تر در راستای موضوع این پایان‌نامه، می‌پردازد

فصل ۲ الگوریتم بهینه‌سازی

۲-۱- مقدمه

بهینه‌سازی، بهینه‌یابی و یا بهینه‌گزینی، سه واژه با یک‌بار معنایی هستند که تعریف زیر در سال ۱۹۷۹ توسط بایتر، فیلیپس و ویلد در این باره ارائه شده است: «تئوری بهینه‌یابی چگونگی بدست آوردن بهترین را بررسی می‌کند. بدین منظور بایستی چگونگی سنجش بهتر و ارزش‌گذاری میان مطلوب و نامطلوب را تشخیص داد. تئوری بهینه‌یابی، بررسی نقاط بهینه و روش‌های پیدا کردن آنهاست». نقاط بهینه و یا پاسخ‌های یک مسئله بهینه‌سازی، نقاط کمینه یا بیشینه تابعی هستند که تابع هدف^۱ نامیده می‌شود. روش‌های گوناگونی برای بررسی مسائل بهینه‌سازی وجود دارد که هر یک بسته به ویژگی‌های مسئله در جای خود کاربرد دارند. برخی از مسائل بهینه‌سازی پیچیده هستند و به‌دست آوردن جواب‌های بهینه در زمان معقول با روش حل دقیق به راحتی امکان‌پذیر نیست [۳۰]. بنابراین، بایستی به دنبال آن دسته از روش‌های حل مسائل بود که بتوانند در زمان معقول جواب‌های بهینه یا نزدیک به بهینه به

^۱ Objective Function

دست آورند [۳۱]. امروزه تقریباً تمامی علوم استفاده وسیعی از بهینه‌سازی دارند، به‌طوری‌که در ریاضیات، مدیریت، علوم پایه، صنایع و بسیاری از شاخه‌های علوم این مبحث مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. در سال‌های اخیر محققان در بسیاری از مسائل پیچیده‌ی بهینه‌سازی با پیاده‌سازی روش‌های فرا ابتکاری به نتایج مناسبی دست‌یافته‌اند [۳۲]. در این بخش به توضیح یکی از الگوریتم‌های بهینه‌سازی (الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات) پرداخته می‌شود.

۲-۲- تعریف بهینه‌سازی

بدست آوردن بهترین نتیجه ممکن برای یک مسئله با توجه به شرایط حاکم بر آن را بهینه‌سازی گویند. مشخصه ذاتی انسان‌ها و حتی دیگر موجودات، تمایل به انجام کارها و فعالیت‌ها با کمترین زحمت و نائل شدن به بیشترین سود و منفعت می‌باشد؛ که همین مشخصه، دلیل اصلی دغدغه بشر در افزایش بهره‌وری و بازدهی فعالیت‌های خود در برابر منابع نسبتاً محدود طبیعت بوده است. امروزه در طراحی، ساخت و نگهداری هر سیستم مهندسی، مهندسان باید تصمیمات مدیریتی و تکنولوژیکی متعددی را در مراحل مختلف اتخاذ کنند. هدف نهایی چنین تصمیماتی، کمینه کردن انرژی لازم، در عین به دست آوردن بیشترین سود ممکن خواهد بود. میزان تلاش لازم یا سود موردنظر در هر وضعیت عملی را می‌توان به‌صورت تابعی از متغیرهای تصمیم‌گیری^۱ (طراحی) مشخص بیان کرد؛ بنابراین، می‌توان بهینه‌سازی را به‌عنوان فرایند یافتن شرایطی که مقدار بیشینه یا کمینه یک تابع را می‌یابد، تعریف نمود. از آنجایی که برای حل مناسب همه مسائل موجود در بهینه‌سازی روش یکتایی وجود ندارد، روش‌های متنوعی از بهینه‌سازی برای حل مسائل مختلف بهینه‌سازی پدید آمده‌اند [۳۳].

^۱ Design Variables

۲-۳- اصول حل یک مسئله بهینه‌سازی

در این بخش اصول حل یک مسئله بهینه‌سازی ارائه خواهد شد. سپس الگوریتم ازدحام ذرات تک‌هدفه و چندهدفه تعریف خواهند شد.

۲-۳-۱ متغیرهای طراحی

هر سیستم مهندسی با مجموعه از کمیت‌ها بیان می‌شود که برخی از آن‌ها به صورت متغیرهایی در فرآیند تصمیم‌گیری ظاهر می‌شوند. کمیت‌های معینی که در خارج از مسئله، دارای مقادیر ثابت هستند، متغیرهای معلوم نامیده می‌شوند. سایر کمیت‌ها به صورت متغیرهایی در فرآیند طراحی رفتار می‌کنند. چنین کمیت‌های در اصطلاح بهینه‌سازی بردارهای طراحی و یا متغیرهای طراحی نامیده می‌شوند. متغیرهای طراحی، می‌توانند ابعاد سطح مقطع، اندازه اعضا، کمیت‌های کنترل هندسه سازه، خواص مصالح به کار رفته و غیره باشند. متغیرهای طراحی ممکن است مقادیر پیوسته یا گسسته داشته باشند. متغیرهای طراحی پیوسته، یک محدوده تغییرات دارند و می‌توانند هر مقدار از آن محدوده را بگیرند. متغیرهای طراحی گسسته، تنها می‌توانند مقادیر خاصی داشته باشند که معمولاً از بین یک سری از مقادیر مجاز خواهد بود. در واقع منظور از پیوسته بودن دامنه این است که متغیر مربوطه می‌تواند هر مقداری را در یک بازه‌ی مشخص برای مثال (a, b) اخذ کند. اگر دامنه‌های متغیرها برابر با مجموعه اعداد صحیح یا مجموعه دودویی $\{0, 1\}$ و یا هر مجموعه با تعداد عضو متناهی باشد، آنگاه مسئله یک مسئله گسسته می‌باشد [۳۴].

متغیرهای مجزا تنها شامل یک عدد محدود از مقادیر ممکن می‌باشند در حالی که متغیرهای پیوسته دارای اعداد نامحدودی از مقادیر ممکن هستند. اگر ما قصد داشته باشیم که به مجموعه‌ای از اهداف دست پیدا کنیم، بهینه‌سازی مجزا به کار گرفته خواهد شد. در حالی که اگر ما بخواهیم مقدار کمینه $f(x)$ را بر روی دامنه‌ای از اعداد حقیقی بیابیم با یک مسئله پیوسته روبه‌رو هستیم. البته حالت دیگری نیز ممکن است بوجود آید و آن در صورتی است که فضای محاسباتی مسئله مورد نظر به صورت ترکیبی

باشد، یعنی برخی از متغیرها به صورت پیوسته و برخی دیگر گسسته و دودویی باشند. در این حالت، مسئله را یک مسئله بهینه‌سازی مخلوط^۱ می‌نامند [۳۴].

۲-۳-۲ قیدهای طراحی

در بسیاری از مسائل عملی، نمی‌توان متغیرها را به دلخواه انتخاب کرد بلکه این متغیرها، باید ویژگی‌های عملی مشخص و دیگر نیازمندی‌ها را برآورده کند. قیدهایی را که باید به‌منظور تهیه یک طرح قابل قبول برآورده شوند، قیدهای طراحی گویند. قیدهایی که محدودیتی را در رفتار کار سیستم ارائه می‌کند، قیدهای رفتاری یا عملی نامیده می‌شوند. قیدهایی که محدودیت‌های فیزیکی مانند موجودیت، قابلیت، بسته‌بندی و قابلیت حمل را برای متغیرهای طراحی ارائه می‌کنند، قیدهای هندسی نامیده می‌شوند.

در بهینه‌سازی مقید^۲ متغیرها مجاز نیستند که هر مقداری را داشته باشند و تنها مقادیری که منافاتی با قیدها نداشته باشند مجاز هستند؛ اما در بهینه‌سازی غیرمقید هیچ محدودیتی در نظر گرفته نشده، بنابراین متغیرها هر مقداری را می‌توانند داشته باشند. در بهینه‌سازی مقید، بهینه‌سازی یک تابع در حضور مجموعه‌ای از قیدها یا محدودیت‌ها انجام می‌شود؛ که می‌توان یک متغیر مقید را به یک متغیر غیرمقید تبدیل کرد. معمولاً در بیشتر روش‌های بهینه‌سازی عددی^۳ بهترین جواب زمانی حاصل می‌شود که از متغیرهای غیرمقید استفاده شود؛ اما در مقابل، حل بسیاری از مسائل دنیای واقعی در حضور مجموعه‌ای از قیدها و محدودیت‌ها انجام می‌پذیرد. برای حل مسائل مقید با استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری، روش‌های متعددی پیشنهاد شده است که مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

- روش حذف اعضای غیرعملی
- روش ترمیم اعضای غیرعملی
- روش اصلاح عملگرهای وراثتی

¹ Mixed optimization

² Constrained problems

³ Numerical

• روش جریمه

روش‌های حذف اعضای غیرعملی و جریمه کردن از جمله روش‌هایی هستند که چندان به نوع مسئله وابسته نبوده و می‌توان از این روش‌ها در بیشتر مسئله‌ها استفاده نمود. این در حالی است که روش حذف به واسطه نقاط ضعفی که دارد، چندان مورد توجه و استقبال واقع نشده است. نکته دیگری که بایستی مورد توجه قرار گیرد این است که روش‌های ترمیم اعضای غیرعملی و اصلاح عملگرهای وراثتی به مسئله وابسته‌اند و برای هر مسئله باید از یک فرآیند و الگوریتمی خاص استفاده شود.

۲-۳-۱ روش حذف

این روش بر مبنای حذف ذراتی که به جواب‌های غیرعملی منجر می‌شوند، استوار است. در واقع این روش، نوع خاصی از روش جریمه است که در آن به افرادی که به نقاط غیرعملی اشاره می‌کنند، اجازه مشارکت در تکامل داده نمی‌شود. اگرچه این روش در ظاهر روشی منطقی است، اما در عمل با مشکلات زیادی روبرو است. شرایطی را در نظر بگیرید که در حل یک مسئله، اکثر ذرات به جواب‌هایی از مجموعه جواب‌های غیرعملی اشاره کنند. با توجه به اینکه در چنین حالاتی، روش حذف منجر به کاهش تعداد ذرات شرکت‌کننده در حل مسئله می‌شود، بنابراین این موضوع باعث می‌شود که عملیات جستجو به درستی صورت نگیرد و الگوریتم بهینه‌سازی به درستی عمل نکند.

۲-۳-۲ روش ترمیم

بدست آوردن جواب‌های عملی در این روش، با اعمال یک فرآیند مشخص و از پیش تعریف شده به وسیله راه‌حل غیرعملی تولیدشده توسط ذرات امکان‌پذیر می‌باشد. این روش دارای مشکلاتی است که از جمله این مشکلات می‌توان به وابسته بودن این روش به نوع مسئله اشاره کرد، به گونه‌ای که در روش ترمیم تبدیل جواب‌های غیرعملی به جواب‌های عملی از یک مسئله به مسئله دیگر متفاوت است. به عبارتی، بایستی فرآیند ترمیم برای هر مسئله، طراحی و پیشنهاد شود. با این حال، بسیاری از مسائل ترکیباتی با استفاده از این روش حل می‌شوند.

۲-۳-۲-۳ روش اصلاح عملگرهای وراثتی

در این روش، با تعریف یک سری عملگرهای وراثتی خاص، همواره ذرات در محدوده جواب‌های عملی تولید می‌شوند. از معایب این روش می‌توان به وابسته بودن آن به نوع مسئله اشاره کرد؛ اما با تعریف عملگرهای مناسب می‌توان الگوریتم وراثتی کارآمد و خوبی برای حل مسائل خاص طراحی و ارائه کرد. در بعضی از تحقیقات نشان داده شده است که استفاده از این روش، در مسائل خاص، اغلب مفیدتر از روش جریمه است.

۲-۳-۲-۴ روش جریمه

تفاوت عمده این روش با روش‌هایی که تاکنون شرح داده شد، این است که در این روش از تولید جواب‌های غیرعملی جلوگیری به عمل می‌آید و جستجویی در آن فضاها صورت نمی‌گیرد اما در روش جریمه، ناحیه‌هایی که جواب‌های غیرعملی تولید می‌کنند را نیز مورد جستجو قرار می‌دهد. در این روش، با اعمال یک تابع جریمه برای نواحی غیرعملی، یک مسئله بهینه‌سازی مقید به یک مسئله بهینه‌سازی نامقید تبدیل می‌شود. به این ترتیب که برای جواب‌های غیرعملی، یک تابع جریمه به تابع هدف موردنظر افزوده می‌شود. برای مسئله‌هایی که شامل چندین قید هستند، به ازای برآورده نشدن هر قید، یک جریمه در نظر گرفته می‌شود. در این روش این قابلیت وجود دارد که با توجه به درجه اهمیت توابع هدف، وزن‌هایی به تابع جریمه اضافه شود. در نتیجه کار جستجو به خوبی قابل هدایت شود. علیرغم اینکه این روش کارایی زیادی دارد، دارای ایراداتی نیز می‌باشد. مهم‌ترین ایراد این روش در برگرداندن یک مقدار به ازای هر جواب عملی یا غیرعملی است. بنابراین، تمامی اطلاعات مفید مربوط به میزان ارضا قیدها از بین می‌رود [۳۴].

۲-۴- تابع هدف

روش‌های طراحی معمول، ما را در یافتن یک طرح قابل قبول یاری می‌دهند. این نوع طراحی، تنها نیازمندی‌های عملی و دیگر نیازمندی‌های مسئله را برآورده می‌سازد؛ اما در اینجا، تنها قابل قبول بودن یک طرح مورد نظر نیست بلکه، هدف از بهینه‌سازی، انتخاب بهترین طرح از میان طراحی‌های قابل قبول موجود می‌باشد؛ بنابراین باید معیاری برای طرح‌های قابل قبول و انتخاب بهترین آن‌ها تعیین می‌شود. چنین معیاری که طرح، نسبت به آن بهینه می‌شود را به صورت تابعی از متغیرهای طراحی بیان می‌کنند و آن را تابع معیار و یا تابع هدف می‌نامند. انتخاب تابع هدف به طبیعت مسئله بستگی دارد.

۲-۴-۱ روش‌های بهینه‌سازی

فرض کنید هدف این باشد که مقدار کمینه یک تابع پیچیده محاسبه شود. ساده‌ترین و در عین حال ناکارآمدترین راه برای به دست آوردن این مقدار، روش سعی و خطاست؛ یعنی مقدار تابع برای تمام نقطه‌های فضای پاسخ محاسبه گردد. در پایان هم بهترین نقطه به عنوان بهینه پذیرفته می‌گردد. روش‌های دیگر، گزینش نقاطی با فاصله‌های مساوی در فضای پاسخ و بررسی آن‌هاست. این روش‌ها، روش‌های هوشمندانه‌ای نیستند، زیرا در هر مرحله از آن‌ها اطلاعات بدست آمده از مراحل پیشین به کار گرفته نمی‌شود. برای هوشمندانه کردن این فرآیند، می‌توان در هر مرحله به کمک اطلاعاتی چون مشتق یا مقدار تابع در چند نقطه اطراف نقطه‌ی منتخب، از نقطه‌ی منتخب روی سطح تابع گامی به سوی نقطه‌ی بهینه برداشت و با تکرار این روند به نقطه‌ی بهینه رسید. بر اساس چگونگی پیمایش فضای متغیرهای تصمیم‌گیری نیز الگوریتم‌های بهینه‌سازی را می‌توان به دو دسته اصلی تقسیم کرد [۳۵].

۱- روش‌های مبتنی بر مشتق

۲- روش‌های جستجوی مستقیم

برخی از ویژگی‌هایی که در انتخاب روش مناسب بهینه‌سازی مورد توجه قرار می‌گیرند عبارت‌اند از:

- پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع هدف: در صورتیکه تابع و یا توابع هدف مسئله‌ی بهینه‌سازی، پیوسته و یا مشتق‌پذیر نباشد، نمی‌توان از روش‌های مبتنی بر گرادیان و سایر روش‌هایی که به مشتق‌های تابع نیازمندند، بهره گرفت.
- در دست بودن تابع هدف به صورت یک تابع صریح ریاضی: در برخی مسائل ممکن است تابع هدف بصورت یک معادله صریح در دسترس نباشد. برای مثال مقدار تابع با شبیه‌سازی رایانه‌ای به ازای متغیرهای تصمیم‌گیری‌اش بدست بیاید. در این‌گونه موارد نمی‌توان در مورد پیوستگی و یا مشتق‌پذیری بودن تابع نظری داد؛ بنابراین روش‌هایی که نتوانند با مقادیر مستقیم تابع کار کنند مردود می‌باشند.
- قابلیت اعمال قیود: برخی از روش‌های بهینه‌سازی قابلیت اعمال هر نوع قیدی را ندارند؛ بنابراین در بررسی مسئله بایستی قیود مسئله را نیز در نظر گرفت.
- تعداد توابع هدف: مسائل بهینه‌سازی را از لحاظ تعداد توابع هدف به دو دسته تک‌هدفی^۱ و چندهدفی^۲ تقسیم می‌نمایند. همه الگوریتم‌های بهینه‌سازی، قادر به انجام بهینه‌سازی چندهدفی توابع، به صورت هم‌زمان نیستند. گاهی با تبدیل چند تابع هدف به یک تابع هدف، به کمک روش‌های تک‌هدفی به حل این مسئله می‌پردازند. ولی این روش‌های حل، نمی‌توانند پاسخ‌هایی با کارایی پاسخ‌های الگوریتم‌های ویژه بهینه‌سازی چندهدفی را ارائه دهند.

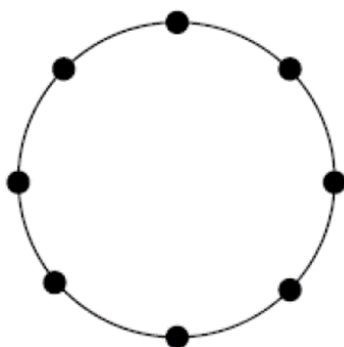
۲-۵- ساختار شبکه‌ای

ساختارهای شبکه‌ای متفاوتی را می‌توان برای همسایه‌های یک ذره در نظر گرفت. رایج‌ترین ساختارهایی که استفاده می‌شود، حلقه‌ای و ستاره‌ای می‌باشد. ساختار حلقه‌ای به این صورت است که ذرات در یک حلقه قرار دارند و هر ذره دارای تعدادی همسایه در سمت چپ و تعدادی همسایه نیز در سمت راست خود می‌باشد. در ساختار ستاره، کلیه ذرات گروه توسط یک ذره که به‌عنوان مرکز در نظر گرفته می‌شود

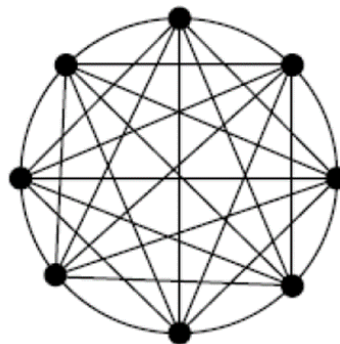
¹ Single Objective

² Multi Objective

به هم اتصال دارند و در واقع کلیه ذرات به مرکز متصل هستند. با توجه به اهمیت شبکه، برای یافتن بهترین راه حل بایستی انتخاب شبکه به درستی صورت گیرد. با انتخاب ساختاری درست در بهینه سازی می توان ذرات را به سمت پاسخی مطلوب هدایت کرد [۳۶].



(ب)



(الف)

شکل ۲-۱: ساختار شبکه (الف) ستاره ای (ب) حلقه ای

۲-۶- بهینه سازی گروه ذرات

در این بخش به تعریف الگوریتم گروه ذرات و مزایایی آن پرداخته می شود. سپس الگوریتم چندهدفه گروه ذرات تعریف می گردد.

۲-۶-۱ تاریخچه بهینه سازی گروه ذرات

الگوریتم بهینه سازی گروه ذرات (PSO) در اواسط دهه ۱۹۹۰ توسط کندی و ابرهارت اختراع گردید. در این روش، حرکت گروه پرندگان به عنوان بخشی از مطالعه اجتماعی شناختی که به پژوهش در مورد تصور هوش جمعی در جوامع زیستی می پردازد، شبیه سازی می گردد. در این روش، مجموعه راه حل های تصادفی انتخاب شده (گروه اولیه) در فضای طراحی در جهت بهینه در میان تعدادی تکرار (حرکت) براساس مقدار زیاد اطلاعات موجود در مورد فضای طراحی منتشر می شود. این الگوریتم از دسته الگوریتم های بهینه سازی است که بر مبنای تولید تصادفی جمعیت اولیه عمل می کنند. این الگوریتم با الگوگیری و شبیه سازی رفتار جمعی برخی از حیوان ها مانند پرواز دسته جمعی (گروهی)

پرنندگان یا حرکت دسته جمعی (گروهی) ماهی‌ها بنا نهاده شده است. هر عضو در این گروه توسط بردار سرعت و بردار موقعیت در فضای جستجو تعریف می‌گردد. در هر تکرار زمانی، موقعیت جدید ذرات با توجه به بردار سرعت و بردار موقعیت در فضای جستجو تعریف می‌گردد. در هر تکرار زمانی، موقعیت جدید ذرات با توجه به بردار سرعت فعلی، بهترین موقعیت یافت شده توسط آن ذره و بهترین موقعیت یافت شده توسط بهترین ذره موجود در گروه، به‌روزرسانی می‌گردد. این الگوریتم در ابتدا برای کمیت‌های پیوسته تعریف شده بود اما با توجه به اینکه در برخی از کاربردها با کمیت‌های گسسته سروکار داریم، این الگوریتم به حالت گسسته نیز بسط داده شده است. رفتار اعضای گروه به دسته‌های زیر تقسیم شدند [۳۷]:

- اجتناب از برخورد^۱: اعضای یک گروه با هم برخوردی ندارند.
 - تنظیم سرعت^۲: هر عضو سرعت خود را متناسب با اعضای همسایه خود تنظیم می‌نمایند.
 - جمع شدن مرکزی^۳: هر عضو در تلاش است که در کنار همسایگان خود حرکت نماید.
- این شبیه‌سازی‌ها در بسیاری از کاربردهای بهینه‌سازی به‌عنوان الگو در نظر گرفته شده است. هدف از الگوریتم ازدحام ذرات این است که اعضای گروه در فضای جستجو حرکت نموده و در یک نقطه‌ی بهینه جمع شوند. به‌منظور توسعه‌ی بیشتر این مدل، مفهوم سردسته پرنندگان^۴ به مدل اضافه گردید که به شکل یک حافظه از بهترین موقعیت‌های هر عضو و همسایگان آن عضو است. بهترین موقعیت قبلی هر عضو، بهترین موقعیتی است که آن عضو از ابتدای حیات خود تا به حال کسب نموده است. بهترین موقعیت همسایگی، بهترین موقعیتی است که توسط همسایگان یک عضو ملاقات شده است. این دو بهترین موقعیت به‌عنوان نقاط جذب عمل می‌نمایند. موقعیت‌های اعضای گروه را با استفاده از

¹ Collision avoidance

² Velocity matching

³ Flock centering

⁴ Rooster

یک مجموعه قوانین ساده می‌توان به‌روز نمود. بدین‌صورت که عضو به یک نسبت به سمت دو موقعیت بهتر حرکت می‌نماید.

۲-۶-۲ مزایای الگوریتم ازدحام ذرات

این الگوریتم مزایای بسیاری نسبت به دیگر روش‌های بهینه‌سازی دارد. از جمله:

- یک روش مرتبه‌ی صفر است و نیازی به عملیات سنگین ریاضی مثل گرادیان‌گیری ندارد.
- یک روش مبتنی بر جمعیت است (استفاده از محاسبات توزیع شده).
- بار محاسباتی قابل قبولی دارد.
- همگرایی نسبتاً سریعی دارد.

۲-۶-۳ الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات

در مسائل پیچیده بهینه‌سازی، با افزایش ابعاد، تعداد متغیرها و تعداد قیدها، امکان حل مسائل با روش‌های مرسوم بهینه‌سازی و با روش‌های صریح محاسباتی موجود کاهش یافته و رسیدن به جواب بهینه مطلق در این شرایط بسیار مشکل است. بنابراین، استفاده از روش‌های کاوشی یا الگوریتم‌های تکاملی به‌عنوان یک روش بهینه‌سازی قدرتمند جهت بهینه‌سازی سیستم‌های تک متغیره و چندمتغیره بسیار مورد توجه قرار گرفته است. همچنین این الگوریتم یک روش سراسری بهینه‌سازی است که در آن فرضیاتی مطرح می‌شود و یک سرعت ابتدایی به ذراتی که در فضای جستجوی تابعی که بهینه می‌شود، پخش شده‌اند، اختصاص داده می‌شود. در این روش کانال‌های ارتباطی بین ذرات در نظر گرفته می‌شود. به‌طوری‌که ذرات با هم در ارتباط بوده و تبادل اطلاعات می‌کنند سپس این ذرات در فضای پاسخ حرکت می‌کنند و مقدار تابع هدف را در موقعیتی از فضا که در آن قرار گرفته‌اند را محاسبه می‌کنند. سپس با استفاده از ترکیب اطلاعات محل فعلی‌اش و بهترین محلی که در گذشته در آن بوده است و همچنین اطلاعات یک یا چند ذره از بهترین ذرات موجود در جمع، جهتی را برای حرکت انتخاب می‌کنند. پس از انجام حرکت، یک مرحله از الگوریتم به پایان می‌رسد. تکرار مراحل آن قدر ادامه پیدا می‌کند تا اینکه

بهترین جواب مورد نظر به دست آید [۳۸]. در هر گام، هر ذره با استفاده از بهترین مقدار به روز می شود. اولین مورد، بهترین موقعیتی است که تاکنون ذره موفق به رسیدن به آن شده است^۱ (pbest). موقعیت هر ذره شناخته و نگهداری می شود. دومین مقدار، بهترین موقعیتی است که تاکنون توسط جمعیت ذرات به دست آمده است^۲ (gbest). این فرآیند تا زمانی که نتیجه مطلوب حاصل گردد و یا این که به حداکثر تعداد تکرار در نظر گرفته شده برسد ادامه می یابد [۳۹]. مختصات ذره در فضای جستجوی چند بعدی موقعیت ذره را مشخص می نماید. با توجه به اینکه با حرکت ذره در طول زمان موقعیت ذره تغییر می نماید، بنابراین $x_i(t)$ موقعیت ذره i ام در زمان t ام را مشخص می نماید. از طرفی هر ذره برای حرکت کردن در فضا به یک سرعت نیاز دارد، $v_i(t)$ سرعت ذره i ام در زمان t ام را مشخص می نماید. با افزودن سرعت به موقعیت هر ذره، می توان موقعیت جدیدی برای ذره در نظر گرفت. با توجه به رابطه (۱-۲) به روز نمودن موقعیت ذره را می توان در هر لحظه به دست آورد.

$$x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1) \quad (۱-۲)$$

ذرات در ابتدا در فضای جستجو پراکنده اند و سپس هر ذره با سرعت خاصی به سمت یک نقطه همگرا می شود. v_{ij} سرعت j امین عنصر از بردار سرعت ذره i را نمایش می دهد. بنابراین به روز رسانی مکان و سرعت ذره i بر اساس رابطه (۲-۲) انجام می شود [۳۵].

$$v_{ij}(t+1) = \tilde{w}v_{ij}(t) + c_1r_{1,j}(t)(y_{i,j}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2r_{2,j}(t)(\hat{y}_j(t) - x_{i,j}(t)) \quad (۲-۲)$$

$$r_{1,j}, r_{2,j} \approx U(0,1) \quad (۳-۲)$$

در این معادلات \tilde{w} وزن اینرسی^۳ می باشد که در ادامه بیان خواهد شد و c_1 و c_2 ثابتها می باشند و $U(0,1)$ عدد تصادفی بین صفر و یک می باشد [۳۵].

دو مدل اصلی برای الگوریتم استاندارد PSO وجود دارد که محاسبه بردار سرعتشان بر اساس دو

^۱ Personal Best Position

^۲ Global Best Position

^۳ Inertia weight

مؤلفه شناختی و اجتماعی می‌باشد. این دو مدل به نام‌های local best PSO و gbest PSO می‌باشند که تفاوت زیادی با هم ندارند و تفاوت آن‌ها در سائز همسایگی است که برای هر ذره در نظر گرفته می‌شود که در ادامه به آن‌ها پرداخته خواهد شد.

۲-۵-۲-۱- مدل Global Best PSO

در این الگوریتم همسایه یک ذره کل ذرات گروه می‌باشد و مدل شبکه‌ای آن ستاره‌ای می‌باشد. \hat{y}_i در این الگوریتم بهترین موقعیت ملاقات شده توسط کل گروه می‌باشد. موقعیت هر ذره توسط فرمول (۴-۲) ارزیابی می‌گردد (f تابع ملاک شایستگی ذرات می‌باشد) [۴۰].

$$(y_i(t+1)) = \begin{cases} y_i(t) & \text{if } f(x_i(t+1)) \geq f(y_i(t)) \\ x_i(t) & \text{if } f(x_i(t+1)) < f(y_i(t)) \end{cases} \quad (۴-۲)$$

بردار \hat{y} به صورت فرمول (۵-۲) محاسبه می‌شود.

$$\hat{y} \in \{y_0, y_1, \dots, y_s\} = \min\{f(y_0(t)), f(y_1(t)), \dots, f(y_n(t))\} \quad (۵-۲)$$

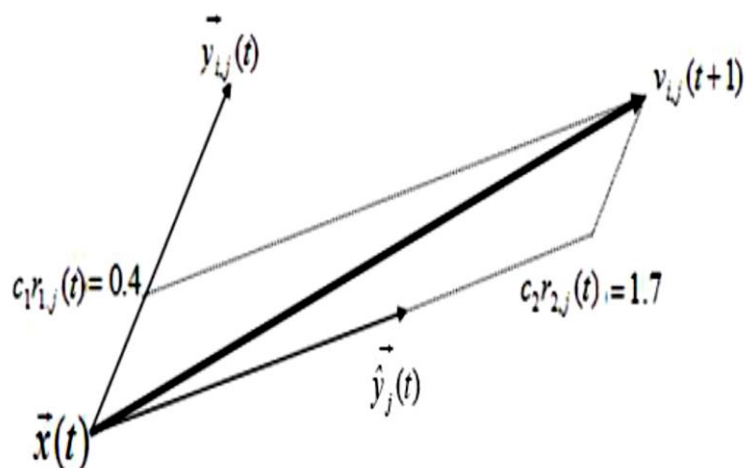
در فرمول بالا n سائز گروه (تعداد ذرات) را مشخص می‌نماید. ذرات در ابتدا در فضای جستجو پراکنده‌اند و سپس هر ذره با سرعت خاصی به سمت یک نقطه همگرا می‌شود. v_{ij} سرعت j امین عنصر از بردار سرعت ذره i را نمایش می‌دهد. بنابراین سرعت ذره i بر اساس فرمول (۶-۲) بروز می‌گردد.

$$v_{ij}(t+1) = \tilde{w}v_{ij}(t) + c_1r_{1,j}(t)(y_{i,j}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2r_{2,j}(t)(\hat{y}_j(t) - x_{i,j}(t)) \quad (۶-۲)$$

$$r_{1,j}, r_{2,j} \approx U(0,1) \quad (۷-۲)$$

\tilde{w} وزن اینرسی^۱ را مشخص می‌نماید که در مورد آن توضیحاتی داده خواهد شد و c_1 و c_2 ثابت‌ها می‌باشند. $U(0,1)$ عدد تصادفی بین صفر و یک می‌باشد. نحوه به‌روز نمودن سرعت ذره نمایش داده شده است (شکل ۲-۲).

^۱ Inertia weight



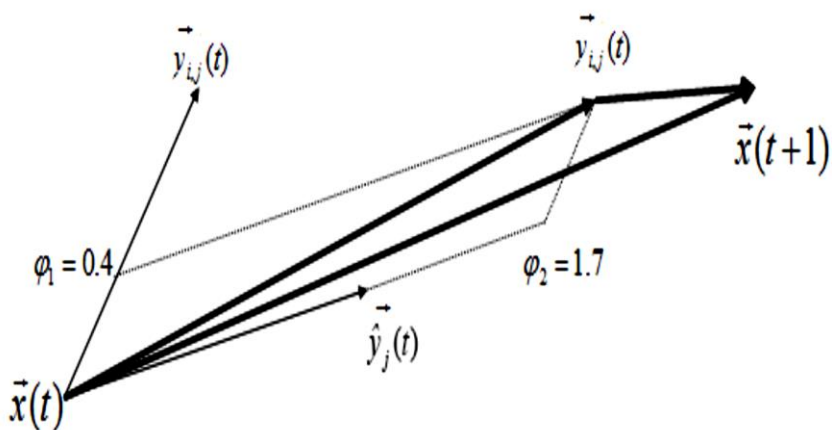
شکل ۲-۲: بهروزرسانی سرعت [۳۹].

باید یک ارتباطی بین مقادیر ثابت و وزن موجود باشد. تا رسیدن به جواب را تضمین نماید. چون در غیر این صورت باعث می شود که ذرات بر اثر یک سری از رفتارها واگرا شوند؛ که این ارتباط به صورت زیر می باشد:

$$\frac{(c_1 + c_2)}{2} - 1 < \tilde{w} \quad (۸-۲)$$

موقعیت ذره i ام توسط معادله (۹-۲) بروز می گردد:

$$x_i(t + 1) = x_i(t) + v_i(t + 1) \quad (۹-۲)$$



شکل ۳-۲: بهروزرسانی موقعیت ذره [۳۹].

سرعت و موقعیت هر ذره توسط معادلات ذکر شده به روز می‌گردد و آن قدر این عمل تکرار می‌گردد تا یا به حداکثر تعداد تکرار برسد و یا سرعت به روز شده به صفر نزدیک شود و عملکرد هر ذره توسط ملاک شایستگی برآورد می‌شود.

۲-۲-۵-۲ مدل local Best PSO

در این مدل یک ذره جهت به روز نمودن سرعت خود فقط توانایی برقراری ارتباط با تعدادی از ذرات که در همسایگی آن هستند را دارد؛ که ساختار شبکه‌ای آن به صورت حلقه می‌باشد. معادله به روزرسانی موقعیت ذره‌ها مانند روش قبل است و تغییری نمی‌نماید. در این روش همسایه‌های یک ذره عملاً مشخص‌کننده رفتارهای اجتماعی یک ذره هستند [۴۱].

۲-۶-۴ وزن اینرسی

در واقع وزن، درصدی از سرعت قبلی ذره را در محاسبه سرعت جدید تأثیر می‌دهد و تأثیر سرعت ذرات در گام قبل را بر سرعت فعلی تعیین می‌نماید. وزن اینرسی برای اولین بار توسط شای و ابرهات در سال ۱۹۹۸ معرفی گردید [۴۲]. با مقادیر بزرگی از وزن اینرسی، قابلیت جستجوی عمومی الگوریتم بهبود یافته و فضای بیشتری مورد بررسی قرار می‌گیرد. این درحالی است که با مقادیر کوچک وزن اینرسی فضای مورد بررسی محدود شده و جستجو در این فضای محدود شده صورت می‌گیرد. رابطه (۱۰-۲) نحوه محاسبه وزن اینرسی را نشان می‌دهد [۴۳].

$$\tilde{w} = \frac{1}{|-2 + \varphi_3 \sqrt{\varphi_3^2 + 4\varphi_3}|}, \quad \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (10-2)$$

در این رابطه φ_1 و φ_2 ثابت‌هایی هستند که معمولاً بین ۲ تا ۲/۵ انتخاب می‌شوند.

۲-۶-۵ مهار کردن سرعت

برای ارزیابی یک الگوریتم، نحوه جستجوی عمومی و جستجوی محلی یک الگوریتم دو عامل مهم به شمار می‌آیند. در جستجوی عمومی مشخص می‌شود که الگوریتم به چه میزان می‌تواند ناحیه‌های

متفاوتی از فضا را مورد جستجو قرار دهد. در مقابل جستجوی محلی به این معنی است که الگوریتم تنها ناحیه‌هایی را جستجو کند که احتمال جواب در آن نقاط وجود دارد. با توجه به این دو موضوع، یک الگوریتم مناسب بایستی یک تعادل مناسب بین این دو جستجو ایجاد نماید. برای ایجاد این تعادل در بیشتر الگوریتم‌ها معادله سرعت ذره کنترل می‌شود؛ زیرا این احتمال وجود دارد که سرعت ذره بسیار زیاد شود و در نتیجه آن، ذرات از فضای جستجو خارج شوند. بنابراین سرعت ذره نباید از حدی فراتر رود. مقداری که برای این حد تعریف می‌شود حد آستانه‌ای سرعت ذره v_{\max} نام دارد [۴۴].

$$v_{ij}(t+1) = \begin{cases} \dot{v}_{ij}(t+1) & \text{if } \dot{v}_{ij}(t+1) < v_{\max,j} \\ v_{\max} & \text{if } \dot{v}_{ij}(t+1) \geq v_{\max,j} \end{cases} \quad (11-2)$$

در این معادله v'_{ij} سرعت به دست آمده از معادله (۶-۲) می‌باشد.

۲-۶-۶ مراحل الگوریتم ازدحام ذرات

نحوه اجرای یک الگوریتم ازدحام ذرات به ترتیب زیر می‌باشد:

۱. مقداردهی اولیه: در ابتدا به جمعیت ذرات که با سرعت و موقعیت‌های تصادفی در فضا وجود دارند، مقادیر اولیه داده می‌شود.
۲. تخمین زدن: در مرحله دوم شایستگی هر ذره در جمعیت برآورد می‌گردد.
۳. به‌روزرسانی: در این مرحله تعیین سرعت هر ذره با استفاده از معادله (۲-۲) و حرکت به موقعیت بعدی ذرات به‌وسیله معادله (۱-۲) تعیین می‌گردد.
۴. خاتمه: با عملی شدن معیار در نظر گرفته شده الگوریتم پایان می‌پذیرد. در غیر این صورت از مرحله ۲ الگوریتم ادامه پیدا می‌کند. شکل ۲-۴ الگوریتم PSO استاندارد را نشان می‌دهد.

```

For each particle  $i \in 1, \dots, s$  do
    Randomly initialize  $x_i$ 
    Randomly initialize  $v_i$  (or just set  $v_i$  to zero)
    Set  $y_i = x_i$ 
endfor
Repeat
    For each particle  $i \in 1, \dots, s$  do
        Evaluate the fitness of particle  $i$ ,  $f(x_i)$ 
        Update  $y_i$  using  $y_i(t+1) = \begin{cases} y_i(t) & \text{if } f(x_i(t+1)) \geq f(y_i(t)) \\ x_i(t+1) & \text{if } f(x_i(t+1)) < f(y_i(t)) \end{cases}$ 
        Update  $\hat{y}$  using  $\hat{y}(t) \in \{y_0, y_1, \dots, y_s\} = \min\{f(y_0(t)), f(y_1(t)), \dots, f(y_s(t))\}$ 
        For each dimension  $j \in 1, \dots, N_d$  do
            Apply velocity update using
            
$$v_{i,j}(t+1) = wv_{i,j}(t) + c_1r_{1,j}(t)(y_{i,j}(t) - x_{i,j}(t)) + c_2r_{2,j}(t)(\hat{y}_j(t) - x_{i,j}(t))$$

            endloop
            Apply position update using  $x_i(t+1) = x_i(t) + v_i(t+1)$ 
        endloop
    Until some convergence criteria is satisfied

```

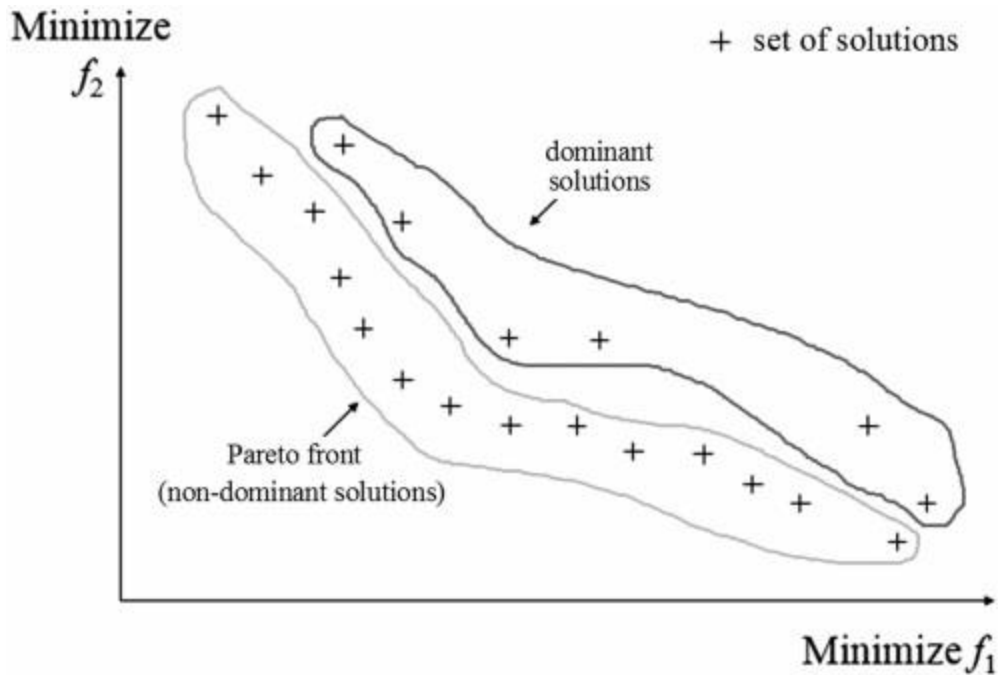
شکل ۲-۴: الگوریتم ازدحام ذرات [۴۳]

۲-۶-۶-۱ مفهوم پرتو

در برخی مواقع توابع هدف قابلیت ترکیب شدن با هم را ندارند. در این مواقع بایستی تعریف جدیدی از نقطه بهینه به گونه‌ای ارائه داد که هم‌زمان بتواند تمامی خواسته‌ها را تأمین نماید. مفهوم بهینه پرتو^۱ بیان می‌دارد اگرچه به دست آوردن یک نقطه بهینه به‌طور هم‌زمان برای تمامی توابع هدف امکان‌پذیر نیست اما این امکان وجود دارد که یک مجموعه از پاسخ‌ها را به گونه‌ای به دست آورد که در فضای جستجو از دیگر پاسخ‌ها بهتر باشد؛ و پاسخ‌های به دست آمده نسبت به هم برتری نداشته باشند [۴۵]. به این مجموعه پاسخ‌ها، مجموعه پاسخ‌های بهینه پرتو گفته می‌شود و نقاط دیگر فضای جستجو را

^۱ Pareto Optimal Set

مجموعه پاسخ‌های مغلوب^۱ می‌نامند (شکل ۲-۵). در این‌گونه مسائل جوابی غالب نامیده می‌شود که یکی از توابع هدف آن از دیگری بهتر باشد و دیگر توابع هدف آن بدتر از بقیه نباشد. در نهایت انتخاب پاسخ بهینه نهایی به عواملی چون میزان آگاهی ما از مسئله، نیاز ما، شرایط مرزی و محیطی مسئله بستگی دارد.



شکل ۲-۵: مفهوم منحنی پرتو [۴۶]

۲-۷- الگوریتم بهینه‌سازی چندهدفه ازدحام ذرات

کوئلو و همکاران در سال ۲۰۰۴ با ایجاد تغییراتی در الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات این الگوریتم را برای مسائل چندهدفه توسعه داده‌اند [۴۵]. تفاوت اصلی در الگوریتم چندهدفه با تک‌هدفه در تعیین بهترین ذره در جمعیت و همچنین تعیین بهترین خاطره‌ی شخصی هر ذره می‌باشد. در الگوریتم چندهدفه ازدحام ذرات یک مفهوم جدید به نام آرشیو یا مخزن نسبت به حالت تک‌هدفه ارائه شده

¹ Dominated Solution Set

است؛ که در واقع محل نگهداری پاسخ‌های نامغلوب است [۴۷]. همچنین، این الگوریتم از عملگری به نام عملگر جهش^۱ استفاده می‌کند که یک عضو از جمعیت را انتخاب کرده و مقدار یک بعد آن ذره را به عددی در محدوده مقادیر معتبر تغییر می‌دهد. یک سیاست نخبه‌گرایی به منظور نگه داشتن نتایج برتر و غالب در تکرارهای الگوریتم تعریف شده است. هنگامی که ذرات می‌خواهند حرکتی انجام دهند یک عضو از مخزن را به‌عنوان رهبر^۲ انتخاب می‌کنند. این عضو حتماً باید عضو مخزن و همچنین نامغلوب باشد. اعضای مخزن بیانگر جنبه پرتو و حاوی ذرات نامغلوب هستند. پس بجای بهترین موقعیت جمعیت ذرات یکی از اعضای مخزن انتخاب می‌شود. در الگوریتم تک‌هدفه مخزن وجود ندارد زیرا در آن تنها یک هدف وجود دارد و یک ذره است که بهترین است؛ اما در الگوریتم چندهدفه چند ذره وجود دارد که نامغلوب هستند و در مجموعه جواب جای دارند. بردار بهترین خاطره شخصی ذرات به‌صورت زیر مقایسه می‌شود [۴۸]:

الف) اگر موقعیت جدید بهترین خاطره ذرات را مغلوب کند، آنگاه موقعیت جدید جای بهترین خاطره را می‌گیرد. به بیان ریاضی:

$$pbest_i^{t+1} = x_i^{t+1} \quad (۱۲-۲)$$

که در فرمول بالا $pbest_i^{t+1}$ بهترین خاطره شخصی جمعیت i ام در تکرار $t + 1$ می‌باشد.

ب) اگر موقعیت جدید توسط بهترین خاطره مغلوب شد، کاری انجام نمی‌گیرد. به بیان ریاضی:

$$pbest_i^{t+1} = pbest_i^{t+1} \quad (۱۳-۲)$$

ج) اگر هیچ‌کدام یکدیگر را مغلوب نکنند، به تصادف یکی به‌عنوان بردار بهترین موقعیت در نظر گرفته می‌شود.

مراحل اصلی الگوریتم چندهدفه ازدحام ذرات به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

^۱ Mutation

^۲ Leader

۱. ایجاد جمعیت اولیه و مقداردهی اولیه بردارهای سرعت و مکان هر ذره (در مقداردهی اولیه بردار مکان به صورت تصادفی و بردار سرعت ذرات برابر با بردار صفر در نظر گرفته می شود).
 ۲. توابع هزینه برای ذرات محاسبه شود.
 ۳. اعضای نامغلوب جمعیت پیدا شود و این ذرات در مخزن ذخیره شود.
 ۴. تولید فوق مکعب‌هایی در فضای هدف و قرار دادن ذرات در این فوق مکعب‌ها.
 ۵. هر یک از ذرات به طور تصادفی از مخزن یک رهبر انتخاب کرده و به سمت آن حرکت خود را انجام می دهد.
 ۶. بهترین خاطره شخصی هر کدام از ذرات به روز می شوند.
 ۷. اعضای نامغلوب جدید به مخزن افزوده می شوند.
 ۸. اعضای مغلوب مخزن حذف می شوند.
 ۹. در صورتی که شرایط خاتمه محقق نشده باشد از شماره ۵ به بعد الگوریتم تکرار می شود.
- همانند الگوریتم تک‌هدفه، حرکت هر ذره نیاز به به روز شدن سرعت و موقعیت ذره دارد. با این تفاوت که مفاهیم بهترین ذره در کل جمعیت و بهترین خاطره شخصی هر ذره متفاوت با حالت تک‌هدفه است. حرکت هر ذره به سوی رهبر انتخاب شده از مخزن را می توان به صورت مراحل زیر در نظر گرفت. برای انتخاب رهبر ابتدا باید فضای جستجو را جدول بندی کرد، سپس برای هر خانه احتمالی در نظر گرفت و به صورت تصادفی خانه‌ای انتخاب می شود و یکی از اعضای آن خانه به عنوان رهبر انتخاب می شود. انتخاب رهبر به گونه‌ای است که احتمال انتخاب شدن خانه‌هایی که جمعیت کمتری دارد بیشتر باشد و دلیل انتخاب شدن خانه‌های کم جمعیت به این گونه است که تنوع حفظ شود و نقاطی که در آن جستجوی کمتری صورت گرفته است مورد جستجو قرار بگیرد.

$$P_i = \frac{\frac{1}{n_i}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j}} \quad (۱۴-۲)$$

p_i احتمال نسبت داده شده به خانه i ام و n_i تعداد جمعیت خانه i ام است. همچنین m تعداد خانه‌های موجود است. پس از پر شدن مخزن باید جمعیت اضافی از مخزن حذف شوند. برای کاهش زمان محاسبات بعد از اضافه شدن اعضای جدید جمعیت مغلوب نشده به مخزن، تعدادی از اعضا حذف می‌شوند. برای حذف اعضا فضای جستجو دوباره جدول‌بندی می‌شود و به هر خانه احتمالی داده می‌شود اما این بار حذف اعضا به‌گونه‌ای است که خانه‌هایی که جمعیت بیشتری دارند احتمال انتخاب شدنشان بیشتر باشد.

$$P_i = \frac{n_i}{\sum_{j=1}^m n_j} \quad (15-2)$$

۲-۸- مقایسه‌ی الگوریتم ازدحام ذرات با الگوریتم‌های تکاملی

برای درک بهتر کارایی الگوریتم بهینه‌سازی، مقایسه‌ای بین این الگوریتم و سایر الگوریتم‌های تکاملی صورت گرفته است که به‌صورت موردی در زیر ذکر گردیده است.

- برخلاف الگوریتم‌های تکاملی در الگوریتم ازدحام ذرات عملیات انتخاب وجود ندارد. این بدان معناست که هیچ یک از ذرات (پاسخ‌ها) حذف نمی‌شوند و تنها مقدار هر ذره تغییر می‌کند.
- الگوریتم ازدحام ذرات از اصل بقای نسل استفاده نمی‌کند.
- عمل ترکیب جواب‌ها^۱ در این الگوریتم وجود ندارد.
- عمل جهش به‌نوعی وجود دارد.
- می‌توان در این الگوریتم نسبت بین جستجوی محلی و سراسری را به کمک وزن‌ها مشخص

^۱ Cross Over

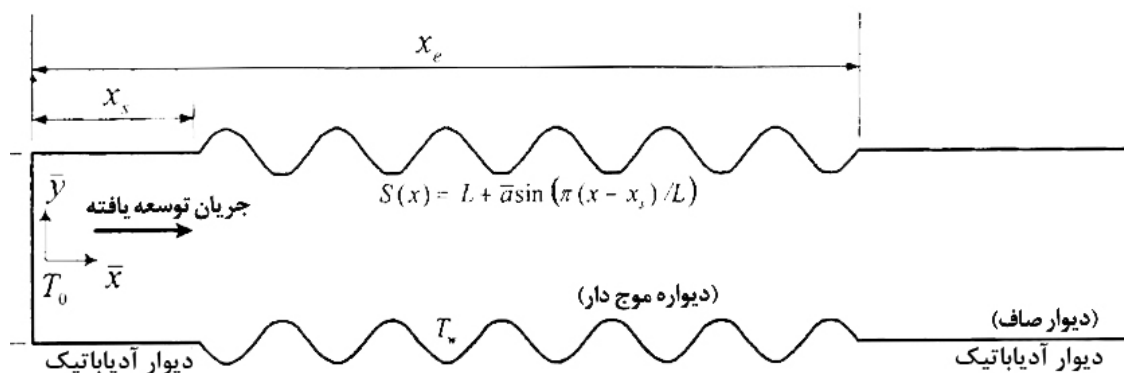
فصل ۳ معرفی مسئله، روابط حاکم، الگوریتم حل مسئله، گسسته‌سازی عددی

۳-۱- تعریف هندسه مسئله

مطابق (شکل ۳-۱) هندسه مسئله شامل کانال دوبعدی با دیواره‌های موج‌دار که با نانوسیال تراکم ناپذیر پر شده است در نظر گرفته می‌شود. هندسه کانال شامل دو بخش صاف و یک بخش موج‌دار سینوسی با دامنه a و ارتفاع $2L$ می‌باشد. طول بخش صاف قبل از قسمت موج‌دار x_s و قسمت موج‌دار شامل شش موج سینوسی با طول $(x_e - x_s)$ در نظر گرفته شده است. معادله قسمت موج‌دار دیواره‌ی پایین به صورت رابطه (۳-۱) بیان می‌شود:

$$s(x) = -L - a \sin[\pi(x - x_s)/L] \quad x_s \leq x \leq x_e \quad (3-1)$$

در این مسئله به دیواره‌های بخش موج‌دار کانال به صورت هم‌دما حرارت داده می‌شود و دیواره‌های بخش صاف کانال عایق هستند.



شکل ۱-۳ شماتیک مدل فیزیکی

۲-۳- فرضیات مسئله و معادلات حاکم

در این مطالعه، جریان دوبعدی، نیوتونی با خواص ثابت، آرام، پایا و تراکم ناپذیر در نظر گرفته شده است. معادله‌های پایداری حرکت سیال در شکل دیفرانسیلی آن از قوانین زیر استخراج می‌شوند:

۱. بقای جرم (پیوستگی)

۲. بقای ممتموم خطی (قانون دوم نیوتن)

۳. بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)

دستگاه معادلات به دست آمده را معادلات ناویر استوکس می‌نامند. در ادامه به بررسی معادلات ناویر استوکس برای یک کانال موج‌دار دوبعدی که با نانوسیال تراکم ناپذیر پر شده است، پرداخته می‌شود.

۱-۲-۳ معادله پیوستگی

با استفاده از تعریف زیر، معادله پیوستگی در مختصات دکارتی و به شکل غیر بقایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۲-۳)$$

۲-۲-۳ معادلات حرکت

با استفاده از تعریف زیر، معادلات حرکت در مختصات دکارتی و به شکل غیر بقایایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} = v_{nf} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (۳-۳)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial y} = v_{nf} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (۴-۳)$$

در روابط بالا زیرنویس nf بیانگر خواص نانوسیال می‌باشد. سروکار داشتن با معادلات (۲-۳) الی (۴-۳) به دلیل حل هم‌زمان با یکدیگر دشواری‌های مخصوص به خود را دارد. ولی در بعضی مسائل می‌توان از تعاریف و ابزارهای قدرتمندی مثل تابع جریان و تاوایی برای ساده‌سازی معادلات ناویر استوکس استفاده کرد. در بخش بعد معادلات تابع جریان و تاوایی ارائه شده است.

۳-۲-۳ معادلات تابع جریان و تاوایی

در حالت کلی تابع جریان طبق معادله (۵-۳) و تاوایی با رابطه (۶-۳) تعریف می‌شوند.

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (۵-۳)$$

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (۶-۳)$$

اگر از معادله (۳-۳) نسبت به y و از معادله (۴-۳) نسبت به x مشتق گرفته شود (معادلات (۷-۳) و (۸-۳)) و این دو معادله از هم کم شوند، پس از ساده‌سازی، معادله (۹-۳) با نام معادله پخشی-انتقالی تاوایی به دست می‌آید.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = v_{nf} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (۷-۳)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \nu_{nf} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (8-3)$$

$$u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \nu_{nf} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) \quad (9-3)$$

همچنین با جایگذاری رابطه (۵-۳) در معادله (۶-۳)، رابطه بین تابع جریان و تاوایی به صورت رابطه (۱۰-۳) به دست می آید.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (10-3)$$

معادلات (۹-۳) و (۱۰-۳)، معادلات اساسی روش تابع جریان - تاوایی هستند. این روش حل برای جریان سیالات تراکم ناپذیر کاربرد دارد و ویژگی آن این است که دو معادله برای تحلیل جریان در اختیار می گذارد و تعداد معادلات را از سه به دو عدد کاهش می دهد؛ زیرا معادله پیوستگی خودبه خود توسط تعریف تابع جریان ارضا می شود. نکته مهم دیگر از بین رفتن عبارت فشار در معادلات است که سهولت بیشتری در انجام محاسبات ایجاد می کند.

۴-۲-۳ معادله انرژی

حالت کلی معادله انرژی در مختصات دکارتی و به شکل غیر بقایی را می توان به صورت رابطه (۱۱-۳) نوشت:

$$(\rho c_p)_{nf} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_{nf} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (11-3)$$

در رابطه (۱۱-۳) کمیت های ρ ، c_p ، T و k به ترتیب بیانگر چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه، دما و ضریب هدایت گرمایی می باشد. برای ساده تر شدن معادلات جریان، تاوایی و انرژی تعریف کمیت های بدون بعد و همچنین فرضیات ساده کننده ضروری می باشد. در این قسمت کمیت های بدون بعد مهم

آورده شده است.

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad U = \frac{u}{U_m}, \quad V = \frac{v}{U_m}, \quad a = \frac{\bar{a}}{L}$$

$$\psi = \frac{\Psi}{LU_m}, \quad \omega = \frac{\Omega L}{U_m}, \quad \tau = \frac{tU_m}{L},$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_f U_m L}{\mu_f}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_f c_{pf}}{K_f} \quad (12-3)$$

در روابط فوق کمیت U_m سرعت متوسط، Re عدد رینولدز، Pr عدد پرانتل، τ زمان بدون بعد، a دامنه‌ی موج دیواره‌های کانال و c_{pf} ، μ_f ، K_f ، ρ_f و ψ و ω به ترتیب بیانگر ظرفیت گرمایی، لزجت دینامیکی، ضریب هدایت گرمایی، چگالی سیال پایه، تابع جریان و تاوایی بدون بعد می‌باشد. معادلات (9-3)، (10-3) و (11-3) پس از بی بعد سازی به ترتیب به صورت روابط (13-3) الی (15-3) نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (13-3)$$

$$U \frac{\partial \omega}{\partial x} + V \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (14-3)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\alpha_{nf}}{\alpha_f} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (15-3)$$

در این روابط کمیت μ_{nf} بیانگر لزجت دینامیکی نانوسیال، کمیت ρ_{nf} بیانگر چگالی نانوسیال و کمیت‌های α_f و α_{nf} به ترتیب بیانگر ضریب نفوذ گرمایی سیال و نانوسیال می‌باشد.

۳-۲-۵ خواص نانوسیال

تقریب‌های زیادی برای مدل‌سازی جریان دوفازی جامد-مایع وجود دارد. در این مسئله از مدلی استفاده می‌شود که در آن تأثیر قطر و نوع نانو ذره مشخص باشد. معادله‌های مدل استفاده شده به صورت زیر نوشته می‌شود [۴۹]:

$$\frac{\rho_{nf}}{\rho_f} = 1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f} \quad (۱۶-۳)$$

$$\frac{Re_{nf}}{Re_f} = \frac{v_f}{v_{nf}} = (1 - \varphi)^{2.5} \left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right) \quad (۱۷-۳)$$

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = \frac{k_p + 2k_f - 2\varphi(k_f - k_p)}{k_p + 2k_f + \varphi(k_f - k_p)} + \frac{k_{Br}}{k_r} \quad (۱۸-۳)$$

$$\frac{Pr_{nf}}{Pr_f} = \left[\frac{1 - \varphi + \varphi \frac{(\rho c)_p}{(\rho c)_f}}{(1 - \varphi)^{2.5} \left(1 - \varphi + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f} \right)} \right] \frac{k_f}{k_{nf}} \quad (۱۹-۳)$$

در روابط بالا φ کسر حجمی نانوسیال، زیرنویس p و f به ترتیب مربوط به خواص نانو ذره و سیال پایه می‌باشد. k_{Br} ضریب حرکت براونین ذرات می‌باشد و از معادله (۳-۲۰) محاسبه می‌شود [۵۰].

$$k_{Br} = 5 \times 10^4 \beta \varphi \rho_f c_f \sqrt{\frac{1.3807 \times 10^{-23} T}{\rho_p d_p}} \quad (۲۰-۳)$$

در رابطه (۳-۲۰)، d_p قطر نانو ذره، T دمای متوسط سیال و β کمیتی متفاوت با نوع نانوسیال می‌باشد. کمیت β و خواص ترموفیزیکی برای نانو ذره مس و آلومینیوم اکسید در جدول ۳-۱ نشان داده شده است.

جدول ۳-۱- خواص ترموفیزیکی سیال و دو نانو ذره

خواص ترموفیزیکی	سیال پایه (آب)	مس	آلومینیوم اکسید
ظرفیت گرمایی	4179	535.6	765
چگالی	997.1	6350	3970
ضریب هدایت گرمایی	0.631	69	46
ویسکوزیته سینماتیکی	1.005×10^{-6}	-	-
β (برای کسر حجمی نانوسیال بیشتر از ۱٪)	-	$0.0011(100\varphi)^{-0.7272}$	$0.0017(100\varphi)^{-0.0841}$

معادله‌های (۳-۱۴) و (۳-۱۵) با در نظر گرفتن خواص نانوسیال (معادله (۳-۱۶) الی (۳-۱۹))

بازنویسی می‌شود:

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (۳-۲۱)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (۳-۲۲)$$

۳-۳- تغییر مختصات معادلات دیفرانسیل حاکم

هندسه فیزیکی مسئله حاضر غیر مستطیلی و با مرزهای نامنظم می‌باشد، بنابراین اعمال قلمرو محاسبات مستطیلی شکل بر چنین قلمروهای فیزیکی به نوعی میانجی‌گری برای اعمال شرایط مرزی به حساب می‌آید. در شبکه‌های غیریکنواخت، در نزدیکی مرزها، پیچیدگی‌های بیشتری در معادلات به وجود می‌آید، زیرا از تقریب‌های با فواصل نامساوی استفاده شده است. برای غلبه بر این مشکل، فضای فیزیکی را به فضای محاسباتی انتقال داده می‌شود. این انتقال با معرفی دستگاه مختصات کلی انجام می‌شود و شبکه‌ی غیر مستطیلی موجود در فضای فیزیکی را به شبکه‌ی یکنواخت مستطیلی در فضای

محاسباتی تصویر می‌کند [۵۱]. برای ایجاد شبکه‌سازی روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارت‌اند از:
 ۱- شبکه‌سازی به روش جبری ۲- شبکه‌سازی با استفاده از معادلات دیفرانسیل ۳- شبکه‌سازی با استفاده از اعداد مختلط و نگاشت هم‌دیس^۱. در این پایان‌نامه روش‌های شبکه‌سازی به کمک روابط جبری و معادلات دیفرانسیل ارائه می‌شود.

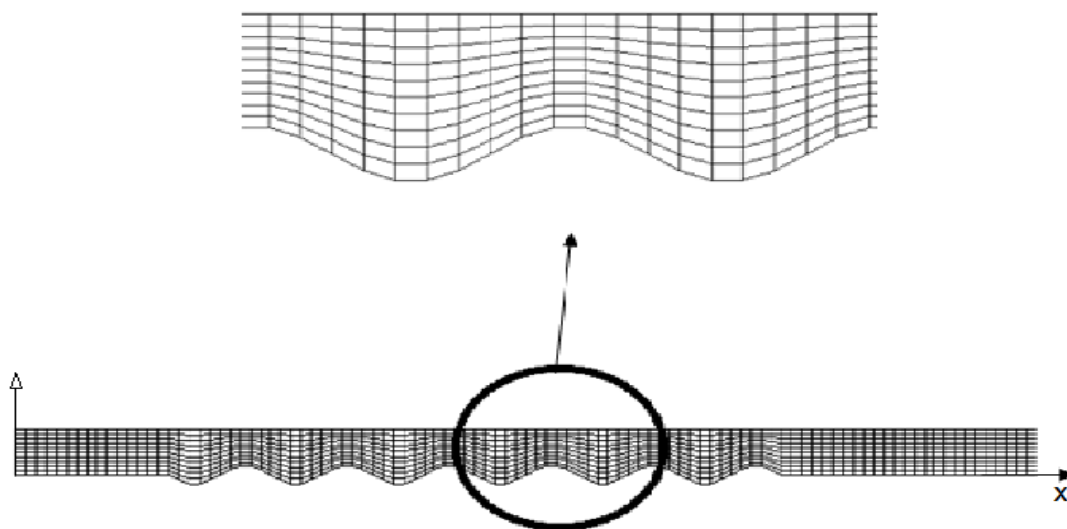
۳-۳-۱ روش جبری شبکه‌سازی

ساده‌ترین روش تولید شبکه روش جبری است. بزرگ‌ترین حسن این روش سرعت بالای شبکه‌سازی است. در این روش از یک معادله جبری برای ایجاد ارتباط بین نقاط شبکه در قلمرو محاسباتی و نقاط نظیر در قلمرو فیزیکی استفاده می‌شود. این هدف با به‌کارگیری یک روش میانمایی برای ایجاد نقاط داخلی شبکه از نقاط مرزی معلوم حاصل می‌شود. بدیهی است که معادلات جبری مختلفی را می‌توان برای این منظور به کار برد. با معرفی روابط جبری زیر، قلمرو غیر مستطیلی فیزیکی به یک قلمرو مستطیلی تبدیل می‌شود [۵۱].

$$\xi = X, \quad \eta = \frac{Y}{S(X)} \quad (۳-۲۳)$$

قلمرو فیزیکی مسئله مطابق شکل ۳-۲ در نظر گرفته می‌شود. در قلمرو فیزیکی و محاسباتی تعداد نقاط شبکه با IM (تعداد ماکزیمم نقاط در امتداد x و ξ) و JM (تعداد ماکزیمم نقاط در امتداد y و η) مشخص می‌شود.

^۱ Conformal Mapping



شکل ۲-۳ قلمرو فیزیکی مسئله

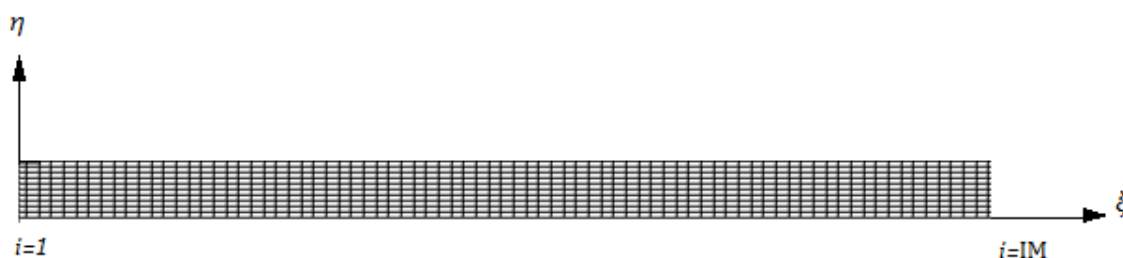
در قلمرو محاسباتی فواصل بین نقاط مساوی و به صورت روابط (۲۴-۳) و (۲۵-۳) تعریف می‌شود.

$$\Delta \xi = \frac{L}{IM - 1} \quad (24-3)$$

$$\Delta \eta = \frac{1}{JM - 1} \quad (25-3)$$

فواصل هندسی با طول مساوی که در معادلات (۲۴-۳) و (۲۵-۳) تعریف شده، قلمرو محاسباتی

یکنواختی را می‌سازد. در شکل ۳-۳ قلمرو محاسباتی نشان داده شده است.



شکل ۳-۳ قلمرو محاسباتی

بنابراین سیستم مختصات ثابت شده^۱ مورد استفاده قرار گرفته و معادلات حاکم که در بالا بیان شد

به مختصات ξ و η انتقال می‌یابد:

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (26-3)$$

$$U \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + V \eta_y \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \nabla^2 \omega \quad (27-3)$$

$$U \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + V \eta_y \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \nabla^2 \theta \quad (28-3)$$

در روابط بالا کمیت‌های سرعت، تاوایی و مشتق‌های انتقال یافته از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$U = \eta_y \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, V = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \quad (29-3)$$

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial V}{\partial \eta} - \eta_y \frac{\partial U}{\partial \eta} \quad (30-3)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (31-3)$$

قبل از حل معادله‌های تبدیل شده، نخست باید متریک‌ها^۲ را محاسبه کرد. در بیشتر مدل‌های

جبری متریک‌ها را می‌توان به صورت تحلیلی محاسبه کرد. بدیهی است که این یکی از فواید روش جبری

است، زیرا محاسبه عددی متریک‌ها خود نیاز به زمان محاسباتی اضافی دارد و ممکن است در دستگاه

معادلات حرکت مورد حل خطا ایجاد کند. متریک‌های موجود در معادلات بالا از رابطه‌های (۳۲-۳) و

(۳۳-۳) محاسبه می‌گردد:

$$\eta_y = \frac{1}{S(X)}, \quad \eta_x = \frac{-YS'(X)}{S^2(X)} \quad (32-3)$$

^۱ Body-fitted

^۲ Metrics

$$\eta_{xx} = \frac{y(2S'^2 - SS'')}{S^3(x)}, \quad \eta_{yy} = 0 \quad (33-3)$$

۲-۳-۳ روش شبکه‌سازی با معادلات دیفرانسیل

روش شبکه‌سازی، روش مبتنی بر معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای است. در این روش یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای حل می‌شود تا نقاط شبکه در فضایی فیزیکی به دست آید. درحالی‌که فضای محاسباتی یک شبکه‌ی مستطیلی با فواصل یکنواخت است. این روش به سه روش معادلات دیفرانسیل بیضوی، سهموی و هذلولوی دسته‌بندی می‌شود. روش بیضوی تولید شبکه، روشی است که بیشتر توسعه یافته و روی آن کار شده است. این روش بیشتر برای مسائل دوبعدی به کار می‌رود. در ادامه معادلات روش بیضوی ارائه خواهد شد. هرگاه مرزهای فیزیکی مشخص باشند، تولید بیضوی شبکه بسیار خوب عمل می‌کند. روابط زیر که بین فضای فیزیکی و فضای محاسباتی تعریف شده است را در نظر بگیرید [۵۱].

$$\xi = \xi(x, y) \quad (34-3)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (35-3)$$

قانون زنجیره‌ای برای مشتق‌های اول پاره‌ای به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (36-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (37-3)$$

تابع f را در نظر بگیرید. برای به دست آوردن مشتق مرتبه‌ی دوم نسبت به x عملیات ریاضی زیر انجام می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} [\xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta] = \left[\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \right] [\xi_x f_\xi + \eta_x f_\eta] \\ &= \xi_x^2 f_{\xi\xi} + \xi_x f_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} [\xi_x] + \xi_x \eta_x f_{\xi\eta} + \xi_x f_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} [\eta_x] \\ &\quad + \eta_x \xi_x f_{\xi\eta} + \eta_x f_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} [\xi_x] + \eta_x^2 f_{\eta\eta} + \eta_x f_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} [\eta_x] \end{aligned} \quad (38-3)$$

در این بخش کمیتی معرفی می‌شود به نام ژاکوبین تبدیل که عبارت است از: نسبت سطح (نسبت حجم در حالت سه بعدی) در فضای فیزیکی به سطح در فضای محاسباتی. ژاکوبین تبدیل از فرمول زیر محاسبه

می‌گردد:

$$J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta} \quad (39-3)$$

همچنین می‌توان متریک‌ها را به صورت زیر نوشت:

$$\xi_x = J y_\eta \quad (40-3)$$

$$\xi_y = -J x_\eta \quad (41-3)$$

$$\eta_x = -J y_\xi \quad (42-3)$$

$$\eta_y = J x_\xi \quad (43-3)$$

با توجه به رابطه (39-3) می‌توان معادله مشتق مرتبه دوم را به برحسب ژاکوبین تبدیل نوشت.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= J^2 (y_\eta^2 f_{\eta\eta} - 2y_\xi y_\eta f_{\xi\eta} + y_\xi^2 f_{\xi\xi}) \\ &\quad + J^3 \{ (y_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2y_\eta y_\xi y_{\xi\eta} + y_\xi^2 y_{\eta\eta}) (x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta) \\ &\quad + (y_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2y_\eta y_\xi x_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta}) (y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi) \} \end{aligned} \quad (44-3)$$

همچنین معادله مشتق مرتبه دوم در جهت y به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = J^2 & (x_\eta^2 f_{\xi\xi} - 2x_\xi x_\eta f_{\xi\eta} + x_\xi^2 f_{\eta\eta}) \\ & + J^3 \{ (x_\eta^2 y_{\xi\xi} - 2x_\eta x_\xi y_{\xi\eta} + x_\xi^2 y_{\eta\eta}) (x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta) \\ & + (x_\eta^2 x_{\xi\xi} - 2x_\eta x_\xi x_{\xi\eta} + x_\xi^2 x_{\eta\eta}) (y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi) \} \end{aligned} \quad (45-3)$$

حال، معادله لاپلاس را در نظر بگیرید.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad (46-3)$$

معادلات (44-3) و (45-3) در معادله (46-3) جایگزین می‌شود. پس از ساده‌سازی معادله (47-3)

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = J^2 & [[x_\eta^2 + y_\eta^2] f_{\xi\xi} - 2[x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta] f_{\xi\eta} + [x_\xi^2 + y_\xi^2] f_{\eta\eta}] \\ & + J^3 \{ [(x_\eta^2 + y_\eta^2) y_{\xi\xi} - 2(x_\xi x_\eta + y_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} \\ & + (x_\xi^2 + y_\xi^2) y_{\eta\eta}] (x_\eta f_\xi - x_\xi f_\eta) \\ & + [(x_\eta^2 + y_\eta^2) x_{\xi\xi} - 2(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) x_{\xi\eta} \\ & + (x_\xi^2 + y_\xi^2) x_{\eta\eta}] (y_\xi f_\eta - y_\eta f_\xi) \} \end{aligned} \quad (47-3)$$

برای ساده‌سازی معادله (47-3) عبارتهای زیر تعریف می‌شود:

$$a = x_\eta^2 + x_\xi^2 \quad (48-3)$$

$$b = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad (49-3)$$

$$c = x_\xi^2 + x_\eta^2 \quad (50-3)$$

$$g = ax_{\xi\xi} - 2bx_{\xi\eta} + cx_{\eta\eta} \quad (51-3)$$

$$h = ay_{\xi\xi} - 2by_{\xi\eta} + cy_{\eta\eta} \quad (52-3)$$

$$d = J(gy_{\xi} - hx_{\xi}) \quad (53-3)$$

$$e = J(hx_{\eta} - gy_{\eta}) \quad (54-3)$$

با جایگذاری عبارت‌های بالا در معادله (47-3) معادله (55-3) به دست می‌آید:

$$\nabla^2 f = J^2(af_{\xi\xi} - 2bf_{\xi\eta} + cf_{\eta\eta} + df_{\eta} + ef_{\xi}) \quad (55-3)$$

۳-۳-۲-۱ روش بیضوی

هرگاه مرزهای فیزیکی مشخص باشند، تولید بیضوی شبکه بسیار خوب عمل می‌کند. دستگاه معادلات دیفرانسیل بیضوی به صورت معادله‌ی لاپلاس یا معادله پواسون معرفی می‌شود؛ که از حل آن‌ها مختصات نقاط شبکه در فضای فیزیکی به دست می‌آید. برای نشان دادن موضوع دستگاه معادلات بیضوی زیر را در نظر بگیرید.

$$\nabla^2 \xi = 0 \quad (56-3)$$

$$\nabla^2 \eta = 0 \quad (57-3)$$

با توجه به معادلات (55-3)، (56-3) و (57-3) روابط زیر محاسبه می‌گردد:

$$ax_{\xi\xi} - 2bx_{\xi\eta} + cx_{\eta\eta} = 0 \quad (58-3)$$

$$ay_{\xi\xi} - 2by_{\xi\eta} + cy_{\eta\eta} = 0 \quad (59-3)$$

با توجه به معادلات (58-3) و (59-3) متریک‌ها محاسبه می‌شوند. با استفاده از معادلات (13-3) و (21-3) می‌توان یک جریان دوبعدی را حل و شبیه‌سازی کرد. پس از حل معادلات (13-3) و (21-3) و به دست آمدن مقادیر تاوایی و تابع جریان روی یک دامنه محاسباتی، می‌توان به راحتی توسط روابط (5-3) مولفه‌های عمودی و افقی سرعت را محاسبه کرد.

۳-۳-۳ شرایط مرزی

برای حل معادله‌های تابع جریان و تاوایی شرایط مرزی را باید تعیین کرد. به دلیل تقارن هندسه فیزیکی دامنه محاسباتی حل نصف در نظر گرفته می‌شود. در مجموع، شرایط مرزی را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم: جریان ورودی، خروجی، شرایط مرزی دیواره و خط تقارن (شکل ۳-۴). در ورودی جریان با توجه به ابعاد کانال و طول توسعه یافتگی مؤلفه افقی سرعت به صورت پروفیل مرتبه دو در نظر گرفته می‌شود و با توجه به رابطه (۳-۵) مقدار تابع جریان در ورودی محاسبه می‌گردد. مقدار تاوایی در ورودی جریان از رابطه (۳-۱۵) محاسبه می‌شود. دما در ورودی جریان ثابت در نظر گرفته می‌شود:

$$\psi = \frac{3}{2} \left(\eta - \frac{\eta^3}{3} \right), \quad \omega = 3\eta, \quad \theta = 0 \quad (۳-۶۰)$$

در مرز خروجی، مقدار تابع جریان و تاوایی و دما از برونمایی جواب داخل میدان به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad (۳-۶۱)$$

دیواره‌ی کانال یک خط جریان است و از این رو مقدار تابع جریان روی آن ثابت است. در دیواره‌ی کانال شرایط مرزی برای تاوایی وجود ندارد و از این رو باید شرایط مرزی را برای آن ساخت. با توجه به شرط عدم لغزش و معادله (۳-۱۵) شرایط مرزی برای تاوایی روی دیواره‌ی کانال از رابطه زیر محاسبه می‌گردد. در قسمت صاف دیواره‌ی کانال شرط مرزی آدیاباتیک و در قسمت موج‌دار کانال شرط مرزی دما ثابت در نظر گرفته شده است:

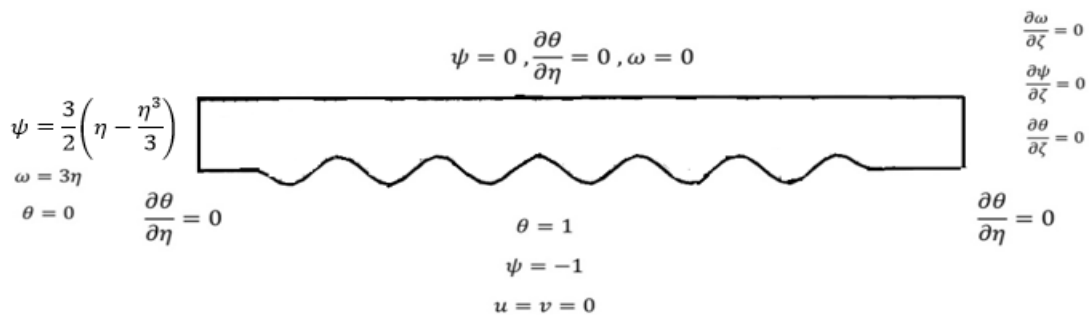
$$\psi = -1, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2},$$

$$\theta = 1 \quad \xi_s \leq \xi \leq \xi_e,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \xi < \xi_s \text{ یا } \xi \geq \xi_e \quad (62-3)$$

اگر مرز تقارن منطبق بر خط تقارن در نظر گرفته شود مرز تقارن را می‌توان به‌عنوان خط جریان فرض کرد. بنابراین، مقدار تابع جریان در امتداد این مرز ثابت در نظر گرفته می‌شود. بدیهی است که مؤلفه‌های سرعت در امتداد عمود بر مرز تقارن صفرند، پس با توجه به ثابت بودن تابع جریان در مرز تقارن و معادله (۱۵-۳) تاوایی صفر می‌شود. در مرز تقارن شرط مرزی آدیاباتیک در نظر گرفته شده است:

$$\psi = \omega = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad (63-3)$$



شکل ۳-۴ شرایط مرزی مسئله

در رابطه (۶۲-۳)، کمیت ξ_s مربوط به طول قسمت صاف قبل از شروع موج و کمیت ξ_e مربوط به طول قسمت صاف قبل از موج به اضافه‌ی قسمت موج‌دار می‌باشد. عدد ناسلت محلی و ناسلت متوسط روی دیواره‌ی پایین از روابط زیر تعریف می‌گردد:

$$Nu_x = \frac{h_x L}{K_{nf}} = - \frac{K_{nf}}{K_f} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{y=0} \quad (64-3)$$

$$Nu_m = \frac{1}{X - X_S} \int_{X_S}^X (1 + S'^2(X))^{1/2} Nu_x dx \quad (65-3)$$

ضریب اصطکاک پوسته‌ای روی دیواره‌ی پایین طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C_{fx} = \frac{\mu_{nf} \rho_f}{\mu_f \rho_{nf}} \frac{1}{\text{Re}} \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_{y=0} \quad (۶۶-۳)$$

و همچنین عدد استانتون روی دیواره‌ی پایین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$St = \frac{Nu_x}{\text{RePr}} \quad (۶۷-۳)$$

۳-۴- الگوریتم حل مسئله

برای حل مسئله باید رابطه‌های (۲۶-۳)، (۲۷-۳) و (۲۸-۳) با توجه به شرایط مرزی ارائه شده، به صورت هم‌زمان حل شوند. الگوریتم عددی حل براساس دو روش ضمنی اسپلاین با جهت متغیر^۱ (SADI) و روش ضمنی با جهت متغیر^۲ (ADI) می‌باشد. در ادامه جزئیات هر یک از روش‌ها ارائه می‌شود.

۳-۴-۱ روش ضمنی اسپلاین با جهت متغیر

تعریف تابع اسپلاین: تابع S تعریف شده بر بازه‌ی $[a, b]$ یک اسپلاین درجه k با گره‌های $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ نامیده می‌شود هرگاه:

الف) بر بازه‌ی $[x_i, x_{i+1}]$ که $i = 0, 1, \dots, n-1$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه k باشد.

ب) $S, S', S'', \dots, S^{(k-1)}$ بر بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته باشند.

اسپلاین مکعبی: اگر درجه اسپلاین سه باشد آنگاه اسپلاین را مکعبی می‌گویند. اسپلاین‌های مکعبی یکی از متداول‌ترین نوع اسپلاین‌ها می‌باشد که به دلیل انعطاف‌پذیری بالایی که دارند در بسیاری از علوم مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵۲].

^۱ Spline Alternating Direction Implicit

^۲ Alternating Direction Implicit

۳-۴-۲ روابط اصلی اسپلاین

بازه $[a, b]$ شامل نقاط گره‌ای x_i را در نظر بگیرید. فاصله بین هر دو نقطه از این بازه را h_i نامیده می‌شود [۵۳].

$$h_i = x_i - x_{i-1} > 0 \quad (۶۸-۳)$$

تابع u در نقاط گره‌ای بازه $[a, b]$ تعریف می‌شود به طوری که:

$$u(x_i) = u_i \quad (۶۹-۳)$$

تابع اسپلاین مکعبی $S_p(x)$ برای دو نقطه x_i و x_{i-1} با توجه به شرایط زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} S_p(x_i) = u_i \\ S_p(x_{i-1}) = u_{i-1} \\ S_p''(x_i) = u_i'' = M_i \\ S_p''(x_{i-1}) = u_{i-1}'' = M_{i-1} \end{cases} \quad (۷۰-۳)$$

با توجه به رابطه (۷۰-۳) مشتق دوم تابع اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$S_p''(x) = M_{i-1} \left(\frac{x_i - x}{h_i} \right) + M_i \left(\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right) \quad (۷۱-۳)$$

برای محاسبه تابع اسپلاین از رابطه (۷۱-۳) دو بار انتگرال گرفته و شرایط معادله (۷۰-۳) در آن جایگذاری می‌شود [۵۴]:

$$S_p(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(u_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i} + (u_i - \frac{M_i h_i^2}{6}) \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad (۷۲-۳)$$

و مشتق اول تابع اسپلاین از رابطه (۷۲-۳) محاسبه می‌شود:

$$S'_p(x) = -M_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \left(u_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6} \right) \frac{-1}{h_i} + \left(u_i - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{1}{h_i} \quad (۷۳-۳)$$

اگر مقدار $S'_p(x_i^-) = m_i^-$ در بازه $[x_{i-1}, x_i]$ و مقدار $S'_p(x_i^+) = m_i^+$ در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ در نظر گرفته شود آنگاه طبق خاصیت اسپلین، برای مشتق در هر نقطه گره‌ای رابطه‌های زیر محاسبه می‌گردد:

$$m_i^- = m_i^+ = m_i \quad (۷۴-۳)$$

$$M_i^- = M_i^+ = M_i \quad (۷۵-۳)$$

$$\frac{1}{h_i} m_{i-1} + 2 \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) m_i + \frac{1}{h_{i+1}} m_{i+1} = \frac{3(u_{i+1} - u_i)}{h_{i+1}^2} + \frac{3(u_i - u_{i-1})}{h_i^2} \quad (۷۶-۳)$$

$$\frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} M_i + \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \quad (۷۷-۳)$$

$$m_{i+1} - m_i = \frac{h_{i+1}}{2} (M_i + M_{i+1}) \quad (۷۸-۳)$$

$$m_i = \frac{h_i}{3} M_i + \frac{h_i}{6} M_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \quad (۷۹-۳)$$

$$M_i = \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i} - \frac{6(u_i - u_{i-1})}{h_i^2} \quad (۸۰-۳)$$

۳-۴-۳ حل معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای با تقریب اسپلین

در حالت کلی معادله دیفرانسیل پاره‌ای مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t = f(u, u_x, u_{xx}) \quad (۸۱-۳)$$

اگر m_i مشتق اول و M_i مشتق دوم تابع u باشد. در این صورت معادله (۸۱-۳) را می‌توان به صورت رابطه (۸۲-۳) بازنویسی کرد:

$$(u_t)_i = f(u_i, m_i, M_i) \quad (82-3)$$

مشتق زمانی معادله (82-3) طبق روش معمول تفاضل محدود نوشته می‌شود:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = (1 - \theta)f^n + \theta f^{n+1} \quad (83-3)$$

در معادله (83-3) اگر مقدار $\theta = 0$ باشد روش حل صریح و اگر $\theta = 1$ باشد کاملاً ضمنی می‌باشد.

همچنین اگر $\theta = \frac{1}{2}$ باشد روش حل کرانک نیکولسون می‌باشد. برای حل معادله (83-3) باید یک

دستگاه ماتریس 3×3 حل شود. برای کاربرد آسان اسپلاین مکعبی، دستگاه ماتریس 3×3 به مجموعه‌ای

از معادله‌های اسکالر تشکیل شده از u_i ، m_i و M_i کاهش می‌یابد. در نتیجه تابع u را می‌توان به صورت

رابطه (84-3) نوشت [56, 57]:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t(1 - \theta)f^n + \Delta t\theta f^{n+1} = F_i + G_i m_i^{n+1} + S_i M_i^{n+1} \quad (84-3)$$

در رابطه (84-3) مقادیر F_i ، G_i و S_i در زمان معلوم هستند. با ترکیب رابطه‌های (80-3) و (84-3)

رابطه بین مشتق‌های اول و تابع u بین دو نقطه گره‌ای محاسبه می‌گردد [58]:

$$m_i + a'_i m_{i+1} = b'_i u_i + c'_i u_{i+1} + d'_i \quad (85-3)$$

$$a'_i = \frac{S_i}{S_{i+1}} \left(\frac{h_{i+1} G_{i+1} + 2S_{i+1}}{\Delta'_i} \right) \quad (86-3)$$

$$b'_i = \frac{h_{i+1}}{\Delta'_i} \quad (87-3)$$

$$c'_i = \frac{h_{i+1}}{\Delta'_i} \frac{S_i}{S_{i+1}} \quad (88-3)$$

$$d'_i = -\frac{h_{i+1} S_i}{\Delta'_i} \left(\frac{F_i}{S_i} + \frac{F_{i+1}}{S_{i+1}} \right) \quad (89-3)$$

$$\Delta'_i = h_{i+1} G_i - 2S_i \quad (90-3)$$

همچنین می‌توان با در نظر گرفتن معادله‌های (۷۸-۳)، (۷۹-۳) و (۸۵-۳) رابطه بین مشتق اول و تابع u را محاسبه کرد:

$$m_i = a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i \quad (۹۱-۳)$$

$$a_i = \frac{h_i}{\Delta_1} - \frac{1}{\Delta_2 h_i} (3S_{i-1} + h_i^2) \quad (۹۲-۳)$$

$$b_i = \frac{h_i S_{i-1}}{\Delta_1 S_i} + \frac{1}{\Delta_2} \left(\frac{3S_{i-1}}{h_i} - \frac{S_{i-1}}{2S_i} h_i \right) \quad (۹۳-۳)$$

$$c_i = -h_i F_{i-1} \left(\frac{1}{\Delta_1} - \frac{1}{\Delta_2} \right) - h_i F_i \frac{S_{i-1}}{S_i} \left(\frac{1}{\Delta_1} - \frac{1}{2\Delta_2} \right) \quad (۹۴-۳)$$

$$\Delta_1 = \frac{S_{i-1}}{S_i} (h_i G_i + 2S_i) - \frac{S_{i-1}}{2S_i} h_i G_i \left(\frac{2S_{i-1} - h_i G_{i-1}}{3S_{i-1} - h_i G_{i-1}} \right) \quad (۹۵-۳)$$

$$\Delta_2 = \frac{S_{i-1}}{S_i} (h_i G_i + 2S_i) \left(\frac{3S_{i-1} - h_i G_{i-1}}{2S_{i-1} - h_i G_{i-1}} \right) - \frac{S_{i-1}}{2S_i} h_i G_i \quad (۹۶-۳)$$

در نتیجه با توجه به معادله‌های (۷۷-۳)، (۸۴-۳) و (۹۱-۳) معادله جبری u_i برای نقاط داخلی محاسبه می‌گردد [۵۸]:

$$A_i u_{i-1} + B_i u_i + C_i u_{i+1} = D_i \quad (۹۷-۳)$$

$$A_i = a_i \left(1 - \frac{G_i h_{i+1}}{3S_i} \right) \quad (۹۸-۳)$$

$$B_i = b_i \left(1 - \frac{G_i h_{i+1}}{3S_i} \right) + \frac{h_{i+1}}{6} \left(\frac{2}{S_i} - a_{i+1} \frac{G_{i+1}}{S_{i+1}} \right) + \frac{1}{h_{i+1}} \quad (۹۹-۳)$$

$$C_i = \frac{h_{i+1}}{6S_{i+1}} (1 - G_{i+1} b_{i+1}) - \frac{1}{h_{i+1}} \quad (۱۰۰-۳)$$

$$D_i = \frac{h_{i+1}}{6} \left[\frac{2F_i}{S_i} + \frac{F_{i+1}}{S_{i+1}} \right] + c_i \left(\frac{h_{i+1} G_i}{3S_i} - 1 \right) + \frac{G_{i+1}}{6S_{i+1}} h_{i+1} c_{i+1} \quad (۱۰۱-۳)$$

در مسائلی که شرایط مرزی آن بر حسب مشتق اول می‌باشد می‌توان از روابط مشتق اول برای نقاط گره‌ای استفاده کرد. این روابط از معادله‌های (۷۶-۳)، (۷۹-۳) و (۸۴-۳) به دست می‌آید [۵۸]:

$$A'_i m_{i-1} + B'_i m_i + C'_i m_{i+1} = D'_i \quad (1.2-3)$$

$$A'_i = \frac{1}{3h_i} - \frac{4S_{i-1} + 2S_i - G_{i-1}h_i}{h_i^3 \Delta_i} \quad (1.3-3)$$

$$B'_i = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) + \frac{G_i h_{i+1} - 4S_i - 2S_{i+1}}{h_{i+1}^3 \Delta_{i+1}} - \frac{G_i h_i + 2S_{i-1} + 4S_i}{h_i^3 \Delta_i} \quad (1.4-3)$$

$$C'_i = \frac{1}{3h_{i+1}} - \frac{G_{i+1}h_{i+1} + 2S_i + 4S_{i+1}}{h_{i+1}^3 \Delta_{i+1}} \quad (1.5-3)$$

$$D'_i = \frac{F_{i+1} - F_i}{h_{i+1}^2 \Delta_{i+1}} + \frac{F_i - F_{i-1}}{h_i^2 \Delta_i} \quad (1.6-3)$$

$$\Delta_i = 1 + \frac{6(S_{i-1} + S_i)}{h_i^2} \quad (1.7-3)$$

همچنین می توان روابط را برای مشتق دوم نقاط گره ای به صورت زیر نوشت [۵۸]:

$$A''_i M_{i-1} + B''_i M_i + C''_i M_{i+1} = D''_i \quad (1.8-3)$$

$$A''_i = \frac{1}{\Delta''_i} \left(-S_{i-1} + \frac{h_i}{6} (2G_{i-1} + G_i + \Delta''_i) \right) \quad (1.9-3)$$

$$B''_i = \frac{1}{\Delta''_i} \left(S_i + \frac{h_i}{6} (G_{i-1} + 2G_i + 2\Delta''_i) \right) - \frac{1}{\Delta''_{i+1}} \left(-S_i + \frac{h_{i+1}}{6} (2G_i + G_{i+1} - 2\Delta''_{i+1}) \right) \quad (1.10-3)$$

$$C''_i = -\frac{1}{\Delta''_{i+1}} \left(S_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{6} (G_i + 2G_{i+1} - \Delta''_{i+1}) \right) \quad (1.11-3)$$

$$D''_i = \frac{(F_{i+1} - F_i)}{\Delta''_{i+1}} - \frac{(F_i - F_{i-1})}{\Delta''_i} \quad (1.12-3)$$

$$\Delta''_i = h_i + G_{i-1} - G_i \quad (1.13-3)$$

رابطه های اسپلاین گفته شده برای حل معادله های یک بعدی استفاده می شود. می توان این رابطه ها

را برای حالت دوبعدی هم نوشت. معادله دیفرانسیل پاره ای دوبعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t = f(u, u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy}) \quad (114-3)$$

اگر $m_{i,j}$ مشتق اول تابع u نسبت به x و $M_{i,j}$ مشتق دوم این تابع نسبت به x باشد. همچنین اگر $l_{i,j}$ مشتق اول تابع u نسبت به y و $L_{i,j}$ مشتق دوم این تابع نسبت به y باشد. در این صورت معادله

$$(114-3) \quad \text{را}$$

می توان به صورت زیر بازنویسی کرد [۵۹]:

$$(u_t)_{i,j} = f(u_{i,j}, m_{i,j}, M_{i,j}, l_{i,j}, L_{i,j}) \quad (115-3)$$

مشتق زمانی معادله (۱۱۵-۳) برای حالت دوبعدی در دو گام زمانی نوشته می شود. در گام اول مشتق

اول و دوم نسبت به x در زمان جدید $(n + \frac{1}{2})$ نوشته می شود (معادله (۱۱۶-۳)). در گام دوم مشتق

اول و دوم نسبت به y در زمان جدید $(n + 1)$ نوشته می شود (معادله (۱۱۷-۳)).

$$u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} f(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, m_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, M_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, l_{i,j}^n, L_{i,j}^n) \quad (116-3)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} f(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, m_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, M_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}, l_{i,j}^{n+1}, L_{i,j}^{n+1}) \quad (117-3)$$

در حالت دوبعدی فاصله بین دو نقطه گره‌ای در جهت x ($h_{i,j}$) و فاصله بین دو نقطه گره‌ای در

جهت y

($k_{i,j}$) به صورت زیر تعریف می شود:

$$h_{i,j} = x_{i,j} - x_{i-1,j} \quad (118-3)$$

$$k_{i,j} = y_{i,j} - y_{i,j-1} \quad (119-3)$$

رابطه‌ی مشتق اول نسبت به x در نقاط گره‌ای و همچنین مشتق دوم نسبت به x به صورت زیر تعریف

می شود:

$$h_{i,j}^{-1}m_{i-1,j} + 2(h_{i,j}^{-1} + h_{i+1,j}^{-1})m_{i,j} + h_{i+1,j}^{-1}m_{i+1,j} \quad (120-3)$$

$$= 3h_{i+1,j}^{-2}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + 3h_{i,j}^{-2}(u_{i,j} - u_{i-1,j})$$

$$h_{i,j}M_{i-1,j} + 2(h_{i,j} + h_{i+1,j})M_{i,j} + h_{i+1,j}M_{i+1,j} \quad (121-3)$$

$$= 6h_{i+1,j}^{-1}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + 6h_{i,j}^{-1}(u_{i,j} - u_{i-1,j})$$

همچنین رابطه‌ی مشتق اول نسبت به y در نقاط گره‌ای و مشتق دوم نسبت به y به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$k_{i,j}^{-1}l_{i,j-1} + 2(k_{i,j}^{-1} + k_{i,j+1}^{-1})l_{i,j} + k_{i,j+1}^{-1}l_{i,j+1} \quad (122-3)$$

$$= 3k_{i,j+1}^{-2}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + 3k_{i,j}^{-2}(u_{i,j} - u_{i,j-1})$$

$$k_{i,j}L_{i,j-1} + 2(k_{i,j} + k_{i,j+1})L_{i,j} + k_{i,j+1}L_{i,j+1} \quad (123-3)$$

$$= 6k_{i,j+1}^{-1}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + 6k_{i,j}^{-1}(u_{i,j} - u_{i,j-1})$$

به همین ترتیب می‌توان تمام رابطه‌های حالت یک بعدی را برای حالت دوبعدی بسط داد.

۳-۴-۴ حل معادله‌های حاکم با روش (SADI)

برای حل معادله‌های حاکم با روش اسپلین با جهت متغیر (SADI)، معادلات (۳-۲۶) الی (۳-۲۸) برحسب مشتق‌های اول و دوم کمیت‌های ψ ، ω و θ بازنویسی می‌شود. برای حل مسائل جریان پایا، سه امکان وجود دارد. الف) معادلات غیرپایا حل شود تا به حالت پایا برسد. در این روش باید به کل زمان محاسبات توجه داشت، زیرا ممکن است بیش از حد زیاد شود. ب) معادلات پایا را می‌توان به صورت دستگاه معادلات، شامل دو معادله بیضوی و با استفاده از روش‌های تکراری حل کرد. ج) معادلات تابع جریان و تلاویی را می‌توان از روش شبه گذرا حل کرد. در این روش از زمان مجازی^۱ استفاده می‌شود. گسسته‌سازی معادله‌ها در جهت t به صورت زیر می‌باشد.

^۱ False Transient

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \psi_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} + \nabla^2 \psi_{i,j} = -\omega_{i,j}^{n+1} \quad (124-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} + U \left(m_{\omega}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_x l_{\omega}^n \right) + V \eta_y l_{\omega}^n \\ = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \nabla^2 \omega_{i,j} \end{aligned} \quad (125-3)$$

$$\frac{\theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \theta_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} + U \left(m_{\theta}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_x l_{\theta}^n \right) + V \eta_y l_{\theta}^n = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \nabla^2 \theta_{i,j} \quad (126-3)$$

که در روابط بالا مؤلفه‌های سرعت و مشتقات به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \eta_y l_{\psi}^n \quad V = - \left(m_{\psi}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_x l_{\psi}^n \right) \quad (127-3)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 = M_{\phi}^{n+\frac{1}{2}} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) L_{\phi}^n + 2\eta_x \frac{(m_{\phi})_{i,j+1}^n - (m_{\phi})_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} \\ + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) l_{\phi}^n \end{aligned} \quad (128-3)$$

$$m_{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad M_{\phi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \quad l_{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad L_{\phi} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \quad (129-3)$$

در رابطه‌های بالا کمیت ϕ می‌تواند هر یک از مقادیر ψ ، ω و θ باشد. با توجه به روش اسپلین

معادله‌های (124-3) الی (126-3) به صورت معادله (130-3) نوشته می‌شود:

$$\phi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = F_{i,j} + G_{i,j} m_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + S_{i,j} M_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (130-3)$$

که در رابطه بالا n زمان معلوم می‌باشد. مقادیر $F_{i,j}$, $S_{i,j}$, $G_{i,j}$ مقادیر معلوم هستند. این مقادیر معلوم در جدول ۳-۲ ارائه شده‌اند. با توجه به روابط (۳-۹۷) الی (۳-۱۰۱) می‌توان معادله (۳-۱۳۰) را به صورت ماتریس سه قطری زیر نوشت:

$$A_{i,j}\phi_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + B_{i,j}\phi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{i,j}\phi_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_{i,j}^n \quad (۳-۱۳۱)$$

معادله (۳-۱۳۱) یک ماتریس سه قطری می‌باشد که این ماتریس سه قطری را می‌توان با روش الگوریتم توماس حل کرد. با حل معادله (۳-۱۳۱) مقادیر ψ ، ω و θ در جهت i و در زمان $n + \frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

جدول ۳-۲: مقادیر معلوم $F_{i,j}$, $S_{i,j}$, $G_{i,j}$

ψ	$F_{i,j}$	$\psi_{i,j}^n - \frac{\Delta\tau}{2} \left[\omega_{i,j}^{n+1} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) L_\psi^n + 2\eta_x \frac{(m_\psi)_{i,j+1}^n - (m_\psi)_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) l_\psi^n \right]$
	$G_{i,j}$	0
	$S_{i,j}$	$-\Delta\tau/2$
ω	$F_{i,j}$	$\omega_{i,j}^n + \frac{\Delta\tau}{2} \left[-\eta_y l_\psi^n \eta_x l_\omega^n + (m_\psi^n + \eta_x l_\psi^n) \eta_y l_\omega^n + \frac{1}{\text{Re } \rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \left((\eta_x^2 + \eta_y^2) L_\omega^n + 2\eta_x \frac{(m_\omega)_{i,j+1}^n - (m_\omega)_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) l_\omega^n \right) \right]$

	$G_{i,j}$	$\frac{-\Delta\tau}{2}\eta_y l_\psi^n$
	$S_{i,j}$	$\frac{\Delta\tau}{2\text{Re}} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}}$
θ	$F_{i,j}$	$\theta_{i,j}^n + \frac{\Delta\tau}{2} \left[-\eta_y l_\psi^n \eta_x l_\theta^n + (m_\psi^n + \eta_x l_\psi^n) \eta_y l_\theta^n \right.$ $+ \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \left((\eta_x^2 + \eta_y^2) L_\theta^n \right.$ $+ 2\eta_x \frac{(m_\theta)_{i,j+1}^n - (m_\theta)_{i,j-1}^n}{2\Delta\eta}$ $\left. \left. + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) l_\theta^n \right) \right]$
	$G_{i,j}$	$\frac{-\Delta\tau}{2}\eta_y l_\psi^n$
	$S_{i,j}$	$\frac{\Delta\tau}{2\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}}$

پس از محاسبه مقادیر ψ ، ω و θ در زمان $n + \frac{1}{2}$ با توجه به روابط (۳-۷۶) الی (۳-۸۰) مقادیر مشتق‌های اول و دوم در زمان $n + \frac{1}{2}$ به دست می‌آید. گسسته‌سازی معادلات در جهت j همانند جهت i می‌باشد. معادلات گسسته شده در جهت j به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau/2} + \nabla^2 \psi_{i,j} = -\omega_{i,j}^{n+1} \quad (۳-۱۲۲)$$

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau/2} + U \left(m_\omega^{n+\frac{1}{2}} + \eta_x l_\omega^{n+1} \right) + V \eta_y l_\omega^{n+1} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \nabla^2 \omega_{i,j} \quad (۳-۱۲۳)$$

$$\frac{\theta_{i,j}^{n+1} - \theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau/2} + U \left(m_{\theta}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_x l_{\theta}^{n+1} \right) + V \eta_y l_{\theta}^{n+1} \quad (134-3)$$

$$= \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \nabla^2 \theta_{i,j}$$

که در روابط بالا مؤلفه‌های سرعت و مشتقات به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \eta_y l_{\psi}^{n+1} \quad V = - \left(m_{\psi}^{n+\frac{1}{2}} + \eta_x l_{\psi}^{n+1} \right) \quad (135-3)$$

$$\nabla^2 = M_{\phi}^{n+\frac{1}{2}} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) L_{\phi}^{n+1} + 2\eta_x \frac{(l_{\phi})_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (l_{\phi})_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\xi} \quad (136-3)$$

$$+ (\eta_{xx} + \eta_{yy}) l_{\phi}^{n+1}$$

$$m_{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \quad M_{\phi} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} \quad l_{\phi} = \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \quad L_{\phi} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} \quad (137-3)$$

با توجه به روش اسپلاین معادلات (۱۳۲-۳) الی (۱۳۴-۳) در جهت j به صورت معادله (۱۳۸-۳) نوشته می‌شود:

$$\phi_{i,j}^{n+1} = F_{i,j} + G_{i,j} l_{i,j}^{n+1} + S_{i,j} L_{i,j}^{n+1} \quad (138-3)$$

که در روابط بالا $n + \frac{1}{2}$ زمان معلوم می‌باشد. مقادیر $F_{i,j}, G_{i,j}, S_{i,j}$ مقادیر معلوم (در زمان $n + \frac{1}{2}$) هستند که در جدول ۳-۳ ارائه شده‌اند. با توجه به روابط (۹۷-۳) الی (۱۰۱-۳) می‌توان معادله (۳-۱۳۹) را به صورت ماتریس سه قطری نوشت:

$$A_{i,j} \phi_{i,j-1}^{n+1} + B_{i,j} \phi_{i,j}^{n+1} + C_{i,j} \phi_{i,j+1}^{n+1} = D_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (139-3)$$

معادله (۳-۱۳۹) یک ماتریس سه قطری می‌باشد که با روش الگوریتم توماس حل می‌گردد. با حل

معادله (۳-۱۳۹) مقادیر ψ, ω و θ در جهت z و در زمان $n + 1$ به دست می‌آید.

جدول ۳-۳: مقادير معلوم $F_{i,j}$, $S_{i,j}$, $G_{i,j}$

ψ	$F_{i,j} \quad \psi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta\tau}{2} \left[\omega_{i,j}^{n+1} + M_{\psi}^{n+\frac{1}{2}} + 2\eta_x \frac{(l_{\psi})_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (l_{\psi})_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\xi} \right]$
	$G_{i,j} \quad 0$
	$S_{i,j} \quad -\Delta\tau/2$
ω	$F_{i,j} \quad \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\tau}{2} \left[-\eta_y l_{\psi}^n \eta_x m_{\omega}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\text{Re } \rho_{nf}} \frac{\rho_f}{(1-\varphi)^{2.5}} \left(M_{\omega}^{n+\frac{1}{2}} + 2\eta_x \frac{(l_{\omega})_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (l_{\omega})_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\xi} \right) \right]$
	$G_{i,j} \quad \frac{-\Delta\tau}{2} \eta_y l_{\psi}^n$
	$S_{i,j} \quad \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\rho_f}{\text{Re } \rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}}$
θ	$F_{i,j} \quad \theta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta\tau}{2} \left[-\eta_y l_{\psi}^n \eta_x m_{\theta}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \left(M_{\theta}^{n+\frac{1}{2}} + 2\eta_x \frac{(l_{\theta})_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - (l_{\theta})_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta\xi} \right) \right]$
	$G_{i,j} \quad \frac{-\Delta\tau}{2} \eta_y l_{\psi}^n$
	$S_{i,j} \quad \frac{\Delta\tau}{2} \frac{k_{nf}}{\text{RePr}} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}}$

پس از محاسبه مقادیر ψ ، ω و θ در زمان $n + 1$ با توجه به روابط (۳-۷۶) الی (۳-۸۰) مقادیر مشتق‌های اول و دوم در زمان $n + 1$ به دست می‌آید. این فرآیند تا رسیدن به حل پایا ادامه می‌یابد. معیار همگرایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left| \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\phi_{i,j}^{n+1}} \right| < 1 \times 10^{-5} \quad (۳-۱۴۰)$$

۳-۴-۵ روش ضمنی با جهت متغیر (ADI)

در این روش معادلات حاکم با روش تفاضل محدود مرکزی گسسته می‌شوند. برای حل معادله‌ی جریان از روش تخفیف پی‌درپی^۱ (SOR) و برای حل معادلات تاوایی و دما از روش ضمنی (ADI) استفاده شده است. گسسته‌سازی معادلات به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} & \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} \\ & + 2\eta_x \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \\ & + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta\eta} = -\omega_{i,j} \end{aligned} \quad (۳-۱۴۱)$$

$$\begin{aligned} & U_{i,j} \frac{(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j})}{2\Delta\xi} + V_{i,j} \frac{(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1})}{2\Delta\eta} \\ & = \left(\frac{1}{\text{Re}} \frac{\rho_f}{\rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \right) \left(\frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} \right. \\ & + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} \\ & + 2\eta_x \frac{\omega_{i+1,j+1} - \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \\ & \left. + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right) \end{aligned} \quad (۳-۱۴۲)$$

^۱ Under Relaxation

$$\begin{aligned}
& U_{i,j} \frac{(\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j})}{2\Delta\xi} + V_{i,j} \frac{(\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1})}{2\Delta\eta} \\
& = \left(\frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \right) \left(\frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} \right) \\
& + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} \\
& + 2\eta_x \frac{\theta_{i+1,j+1} - \theta_{i-1,j+1} - \theta_{i+1,j-1} + \theta_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \\
& + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \tag{۱۴۳-۳}
\end{aligned}$$

که $\beta_1 = \frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}$ و i و j زانديس‌های گره‌های شبکه محاسباتی هستند. با مرتب کردن معادلات، دستگاه سه قطری این معادله به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
& (\beta_1^2) \psi_{i+1,j}^{n+1} - 2 \left((\eta_x^2 + \eta_y^2) + \beta_1^2 \right) \psi_{i,j}^{n+1} + (\beta_1^2) \psi_{i-1,j}^{n+1} \\
& = -\Delta\eta^2 \omega_{i,j}^{n+1} - \left((\eta_x^2 + \eta_y^2) - \frac{(\eta_{xx} + \eta_{yy})\Delta\eta}{2} \right) (\psi_{i,j-1}^n) \\
& - \left((\eta_x^2 + \eta_y^2) + \frac{(\eta_{xx} + \eta_{yy})\Delta\eta}{2} \right) (\psi_{i,j+1}^n) \\
& - 2\eta_x \beta_1 \frac{\psi_{i+1,j+1}^n - \psi_{i-1,j+1}^n - \psi_{i+1,j-1}^n + \psi_{i-1,j-1}^n}{4} \tag{۱۴۴-۳}
\end{aligned}$$

همچنین می‌توان با مرتب کردن معادلات (۱۴۲-۳)، دستگاه سه قطری معادله تاوایی را به دست

آورد. معادلات در جهت i گسسته‌سازی شده‌اند. همچنین در این روش برای حل معادلات تاوایی و دما

از زمان مجازی استفاده شده است:

$$\begin{aligned}
& \omega_{i+1,j}^{n+1} \left(\frac{-U_{i,j}C_\xi}{4} - \frac{D_\xi}{2} \right) + \omega_{i,j}^{n+1}(1 + D_\xi) + \omega_{i-1,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j}C_\xi}{4} - \frac{D_\xi}{2} \right) \\
&= \omega_{i,j+1}^n \left(\frac{-V_{i,j}C_\eta}{4} + \frac{(\eta_x^2 + \eta_y^2)D_\eta}{2} \right. \\
&+ \left. \frac{(\eta_{xx} + \eta_{yy})C_\eta}{4} \frac{1}{\text{Re } \rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \right) \\
&+ \omega_{i,j}^n (1 - (\eta_x^2 + \eta_y^2)D_\eta) \\
&+ \omega_{i,j-1}^n \left(\frac{V_{i,j}C_\eta}{4} + \frac{(\eta_x^2 + \eta_y^2)D_\eta}{2} \right. \\
&- \left. \frac{(\eta_{xx} + \eta_{yy})C_\eta}{4} \frac{1}{\text{Re } \rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \right) \tag{۱۴۵-۳} \\
&+ \frac{2\eta_x D_{\xi\eta}}{4} \frac{\omega_{i+1,j+1}^n - \omega_{i-1,j+1}^n - \omega_{i+1,j-1}^n + \omega_{i-1,j-1}^n}{2}
\end{aligned}$$

در رابطه بالا مقادیر C_ξ ، D_ξ ، C_η ، D_η و $D_{\xi\eta}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$C_\xi = \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi} \qquad D_\xi = \frac{1}{\text{Re } \rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \frac{\Delta\tau}{\Delta\xi^2} \tag{۱۴۶-۳}$$

$$C_\eta = \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta} \qquad D_\eta = \frac{1}{\text{Re } \rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta^2} \tag{۱۴۷-۳}$$

$$D_{\xi\eta} = \frac{1}{\text{Re } \rho_{nf}} \frac{1}{(1-\varphi)^{2.5}} \frac{\Delta\tau}{\Delta\eta\Delta\xi} \tag{۱۴۸-۳}$$

و در نهایت می توان با مرتب کردن معادلات (۳-۱۴۳)، دستگاه سه قطری معادله دما را به دست آورد.

معادلات در جهت i گسسته سازی شده اند.

$$\begin{aligned}
& \theta_{i+1,j}^{n+1} \left(\frac{-U_{i,j} C_{\xi T}}{4} - \frac{D_{\xi T}}{2} \right) + \theta_{i,j}^{n+1} (1 + D_{\xi T}) + \theta_{i-1,j}^{n+1} \left(\frac{U_{i,j} C_{\xi T}}{4} - \frac{D_{\xi T}}{2} \right) \\
&= \theta_{i,j+1}^n \left(\frac{-V_{i,j} C_{\eta T}}{4} + \frac{(\eta_x^2 + \eta_y^2) D_{\eta T}}{2} \right) \\
&+ \frac{(\eta_{xx} + \eta_{yy}) C_{\eta T}}{4} \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \\
&+ \theta_{i,j}^n (1 - (\eta_x^2 + \eta_y^2) D_{\eta T}) \\
&+ \theta_{i,j-1}^n \left(\frac{V_{i,j} C_{\eta T}}{4} + \frac{(\eta_x^2 + \eta_y^2) D_{\eta T}}{2} \right) \\
&- \frac{(\eta_{xx} + \eta_{yy}) C_{\eta T}}{4} \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \\
&+ \frac{2\eta_x D_{\xi \eta T}}{4} \frac{\theta_{i+1,j+1}^n - \theta_{i+1,j-1}^n - \theta_{i-1,j+1}^n + \theta_{i-1,j-1}^n}{2}
\end{aligned} \tag{۱۴۹-۳}$$

در رابطه بالا مقادیر $D_{\xi T}$, $C_{\xi T}$, $D_{\eta T}$, $C_{\eta T}$ و $D_{\xi \eta T}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$C_{\xi T} = \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi} \qquad D_{\xi T} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \frac{\Delta \tau}{\Delta \xi^2} \tag{۱۵۰-۳}$$

$$C_{\eta T} = \frac{\Delta \tau}{\Delta \eta} \qquad D_{\eta T} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \frac{\Delta \tau}{\Delta \eta^2} \tag{۱۵۱-۳}$$

$$D_{\xi \eta T} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{k_{nf}}{k_f} \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_{nf}} \frac{\Delta \tau}{\Delta \eta \Delta \xi} \tag{۱۵۲-۳}$$

به همین ترتیب می توان معادلات را در جهت z گسسته سازی می شوند. با حل معادلات (۱۴۴-۳)،

(۱۴۵-۳) و (۱۴۹-۳) با الگوریتم توماس می توان مقادیر ψ ، ω و θ را با روش (ADI) به دست آورد.

۵-۳ مزایای روش (SADI)

مزایای اصلی استفاده از روش اسپلاین با جهت متغیر نسبت به دیگر روش‌های تفاضل محدود به شرح زیر است:

✓ دستگاه ماتریس معادلات حاکم همیشه سه قطری بوده در نتیجه اجازه استفاده از الگوریتم توماس در این روش همیشه وجود دارد.

✓ دستگاه ماتریس معادلات حاکم به یک مجموعه معادله‌های اسکالر کاهش می‌یابد که معادلات شامل خود تابع هستند. مشتقات اول و دوم برای نقاط گره‌ای در فرمول‌های سه قطری نگهداری می‌شود.

✓ این روش برای هر دو مش‌بندی یکنواخت و غیر یکنواخت به کار می‌رود. با این حال برای مش‌بندی یکنواخت تقریب اسپلاین برای مشتق اول از دقت چهار و برای مش‌بندی غیر یکنواخت از دقت سه می‌باشد. تقریب اسپلاین برای مشتق دوم برای هر دو مش‌بندی از مرتبه دو است.

✓ از آنجایی که مشتقات اول و دوم در این روش مستقیم و از فرمول‌های سه قطری به دست می‌آید نیازی به گسسته‌سازی تفاضل محدود و مشکلات ناشی از آن نیست.

✓ روش (SADI) تمام مزایای روش‌های تفاضل محدود مرسوم را دارد. این روش به شبکه محاسباتی خیلی ریز نیاز ندارد. به همین دلیل این روش زمان حل و هزینه‌ی کامپیوتری کمی را دارد.

در ادامه و در فصل ۴ به بررسی صحت برنامه عددی نوشته شده و ارائه نتایج به دست آمده از این برنامه عددی پرداخته می‌شود. سپس با استفاده از الگوریتم چندهدفه ازدحام ذرات به بهینه‌سازی مسئله پرداخته شده و نتایج حاصل ارائه می‌گردد.

فصل ۴ نتایج عددی

در این فصل نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی عددی و بهینه‌سازی ارائه خواهد شد. در این پایان‌نامه برای شبیه‌سازی انجام شده برنامه‌ای با زبان برنامه‌نویسی ++C نوشته شده است. همان‌طور که در بخش‌های پیشین به تفصیل بیان گردید، در این برنامه عددی الگوریتم بر اساس روش ضمنی^۱ اسپلاین با جهت متغیر (SADI) و روش ضمنی با جهت متغیر (ADI) استفاده شده است. به منظور اعتبارسنجی مطالعه انجام شده، نتایج عددی موجود با نتایج عددی قبل مقایسه می‌شود. پس از بررسی صحت نتایج، تأثیر نانوسیال روی کمیت‌های دیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای بهینه‌سازی از الگوریتم چندهدفه ازدحام ذرات استفاده شده و این الگوریتم در یک برنامه‌ی مجزا با زبان برنامه‌نویسی ++C نوشته شده است. بهینه‌سازی مسئله با در نظر گرفتن عدد ناسلت متوسط و ضریب اصطکاک پوسته‌ای به‌عنوان توابع هدف و کسر حجمی نانوسیال، قطر نانو ذره، دامنه‌ی موج و عدد رینولدز به‌عنوان متغیرهای طراحی انجام می‌شود. در نهایت نتایج بهینه‌سازی ارائه می‌گردد.

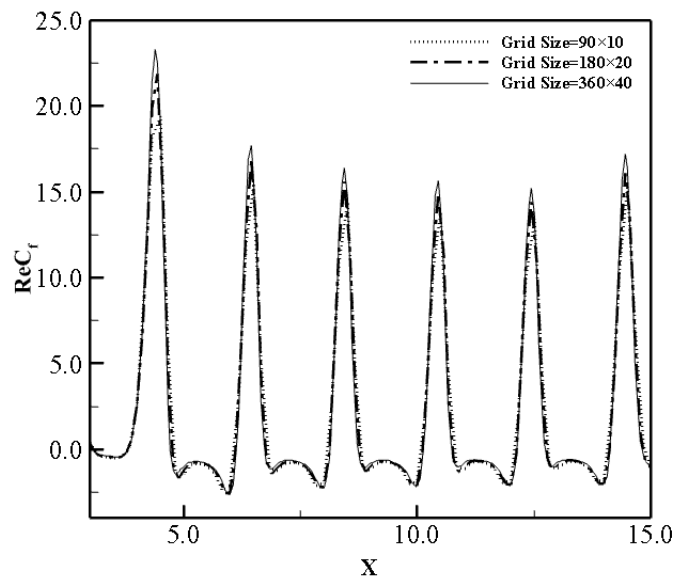
^۱ Implicit

۱-۴- شبکه محاسباتی

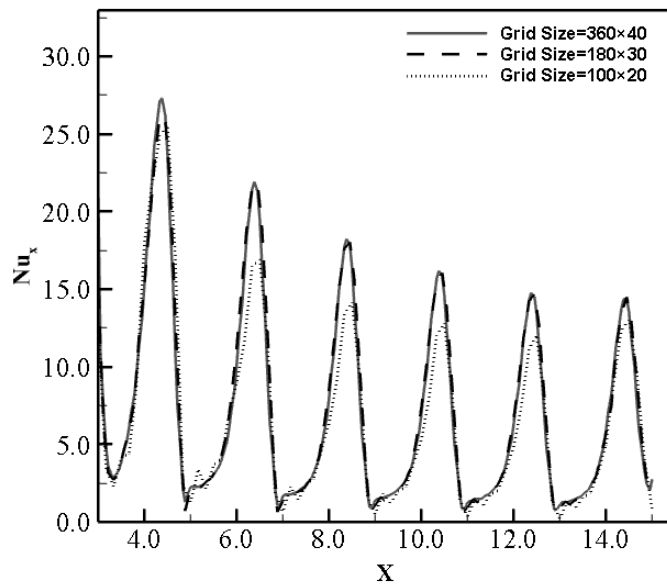
همان‌طور که در فصل قبل گفته شد، دامنه محاسباتی یک مستطیل با اندازه شبکه محاسباتی 180×20 برای روش (SADI) و 40×40 برای روش (ADI) در نظر گرفته شده است.

۲-۴- استقلال حل از شبکه

جهت مطالعه استقلال حل از شبکه محاسباتی در روش (SADI)، سه شبکه با ابعاد 90×10 ، 180×20 و 360×40 در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی و عدد ناسلت محلی در شرایط $a = 0.2$, $Re = 500$, $Pr = 6.93$ در شکل ۱-۴ و شکل ۲-۴ نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج شبکه با ابعاد 180×20 و 360×40 همپوشانی و انطباق خوبی دارند که با عنایت به اعتبارسنجی که در بخش بعد صورت گرفته است دارای دقت کافی هستند. لذا با توجه به نیاز به کاهش زمان محاسباتی، در این مطالعه و شبیه‌سازی‌های بعدی از شبکه 180×20 در روش عددی (SADI) استفاده شده است.



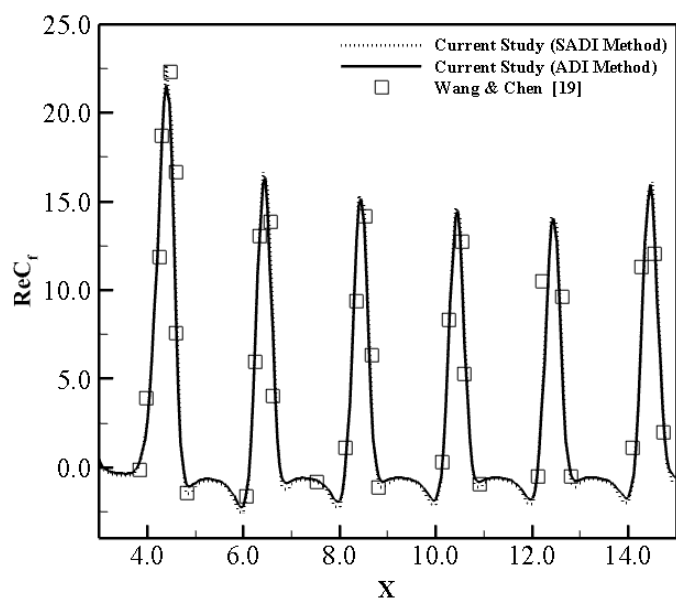
شکل ۱-۴: مطالعه استقلال حل از شبکه برای ضریب اصطکاک پوسته‌ای در شرایط: $a = 0.2$, $Re = 500$, $Pr = 6.93$



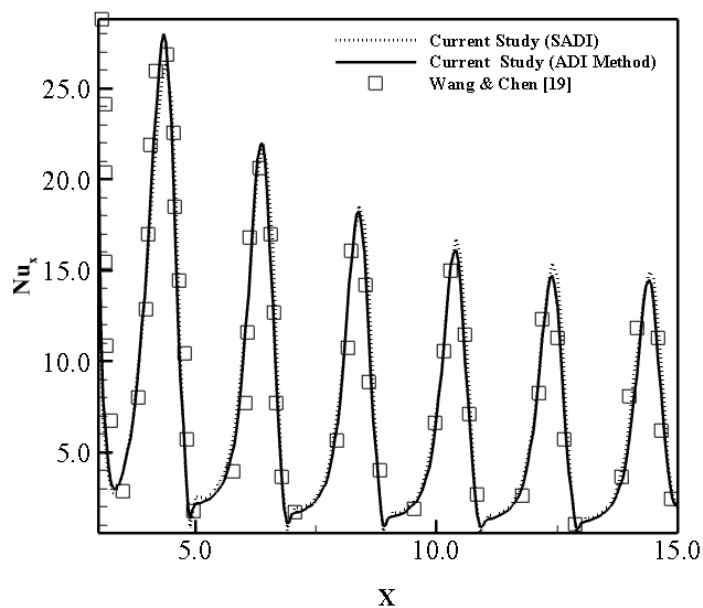
شکل ۴-۲ مطالعه استقلال حل از شبکه برای عدد ناسلت محلی در شرایط: $a = 0.2$, $Re = 500$, $Pr = 6.93$

۴-۱- صحت‌سنجی و اعتبارسنجی

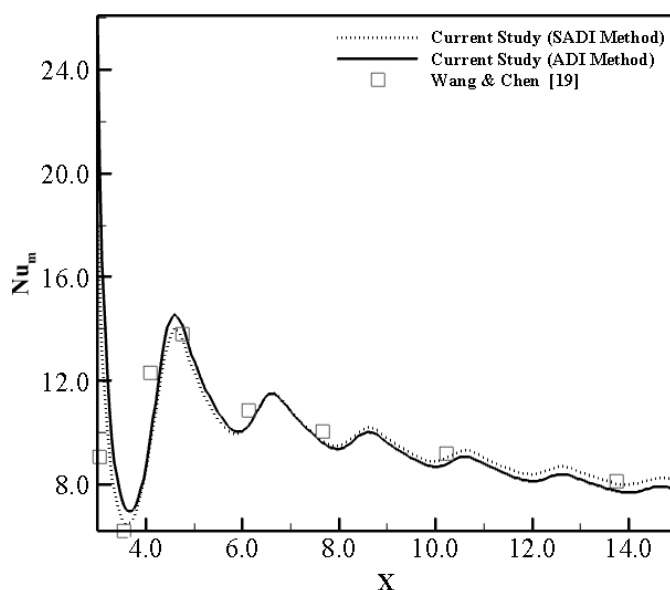
برای مقایسه نتایج به دست آمده از الگوریتم عددی استفاده شده در این پایان‌نامه، از نتایج عددی به دست آمده توسط وانگ و چن [۱۹] برای حالت جریان بدون نانوسیال و نتایج عددی به دست آمده توسط حیدری و کرمانی [۲۲] برای حالت جریان همراه با نانوسیال استفاده شده است. یک کانال موج‌دار دوبعدی همراه با نانوسیال در نظر گرفته می‌شود. کانال از دو بخش صاف و یک بخش موج‌دار که شامل شش موج سینوسی می‌باشد، تشکیل شده است. برای مقایسه نتایج عددی روش (SADI) و (ADI) با نتایج به دست آمده توسط وانگ و چن [۱۹] شرایط مرزی، همان شرایط مرزی گفته شده در فصل قبل در نظر گرفته شده است. در شکل ۴-۳ ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی، در شرایط $a = 0.2$, $Re = 500$, $Pr = 6.93$ مورد مقایسه قرار گرفته است.



شکل ۳-۴: ضریب اصطکاک پوسته‌ای در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$



شکل ۴-۴: عدد ناسلت محلی در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$



شکل ۴-۵: عدد ناسلت متوسط در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$

همان‌طور که از شکل ۳-۴ مشخص است، نتایج حاصل از روش اسپلاین با جهت متغیر (SADI) مطابق با نتایج به دست آمده از همین روش توسط وانگ و چن [۱۹] است و نتایج حاصل از روش (ADI) با این نتایج همخوانی خوبی دارد. در شکل ۴-۴، مقایسه عدد ناسلت محلی و در شکل ۴-۵، مقایسه عدد ناسلت متوسط با نتایج وانگ و چن [۱۹] در شرایط $Pr = 6.93, Re = 500, a = 0.2$ نشان داده شده است. نتایج به دست آمده تطابق مناسبی را بین نتایج عددی موجود و مرجع ذکر شده نشان می‌دهد. در نهایت، با توجه به نتایج به دست آمده، الگوریتم عددی حاضر قابلیت و دقت لازم برای حل جریان در کانال با دیواره‌های موج‌دار را داراست.

برای اعتبارسنجی روش (SADI) در حل جریان در کانال موج‌دار همراه با نانوسیال از نتایج عددی حیدری و کرمانی [۲۲] استفاده شده است. در این مقایسه از شرایط مرزی حیدری و کرمانی [۲۲] و نانو ذره مس استفاده شده است. شرایط مرزی در ورودی و خروجی کانال از رابطه‌های (۴-۱) و (۴-۲) و در دیواره‌های کانال از روابط (۴-۳) محاسبه می‌گردد.

$$U = u_{in}, \quad V = 0, \quad T = T_c \quad (1-4)$$

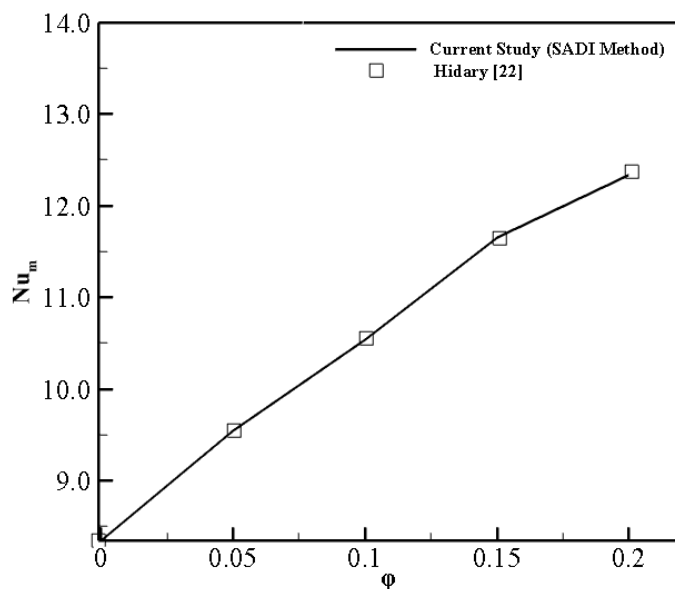
$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial X} = 0 \quad (2-4)$$

$$U = 0, \quad V = 0, \quad T = T_w \quad (3-4)$$

در شکل ۴-۶ نمودار عدد ناسلت متوسط در برابر کسر حجمی نانوسیال در شرایط $a = 0.2, Re = 250$

250,

Pr = 7.02 مورد مقایسه قرار گرفته است.



شکل ۴-۶: عدد ناسلت متوسط در شرایط: $Pr = 7.02, Re = 250, a = 0.2$

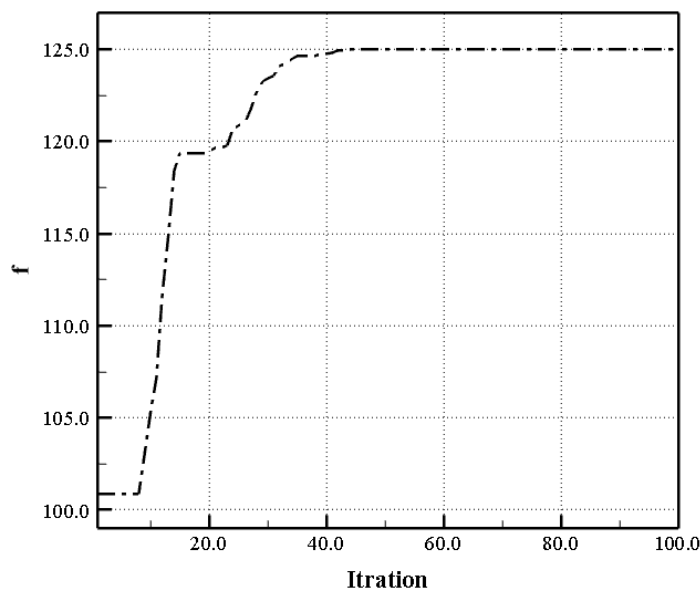
همان‌طور که از شکل ۴-۶ مشخص است، نتیجه حاصل از روش اسپلین با جهت متغیر (SADI) با نتیجه بدست آمده از همین روش توسط حیدری و کرمانی [۲۲] همخوانی خوبی دارد. پس از اعتبارسنجی و بررسی صحت نتایج شبیه‌سازی عددی، تأثیر دامنه‌ی موج، عدد رینولدز، عدد پرانتل، کسر حجمی نانوسیال و قطر نانو ذره در جریان داخل یک کانال با دیواره‌های موج‌دار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴-۴-۱- صحت سنجی و اعتبار سنجی نتایج بهینه‌سازی

برای بررسی صحت الگوریتم بهینه‌سازی استفاده شده در این پایان‌نامه، از توابع تست^۱ استفاده شده است. تابع تست مطابق رابطه (۴-۴) در نظر گرفته شده است. که این تابع باید بیشینه شود.

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 \quad \begin{cases} -10 \leq x_1 \leq 10 \\ -10 \leq x_2 \leq 10 \end{cases} \quad (4-4)$$

که در رابطه بالا x_1 و x_2 ذرات می‌باشد. در شکل ۴-۷ نتیجه بهینه این تابع هدف نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید مقدار بیشینه تابع که همان نقطه بهینه می‌باشد به درستی محاسبه شده است.



شکل ۴-۷: مقدار ماکزیمم تابع f

۴-۲- نتایج عددی

همان‌طور که در قسمت‌های قبل بیان شد، جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره‌های موج‌دار به صورت عددی با روش (SADI) مورد بررسی قرار گرفت. در این قسمت به بررسی اثر دامنه‌ی موج (a) ، عدد

¹ Test Functions

رینولدز (Re)، عدد پرانتل (Pr)، درصد نانوسیال (ϕ)، قطر نانوسیال (d_p) بر روی جریان پرداخته شده است.

۴-۲-۱ بررسی تأثیر دامنه موج دیواره‌های کانال

در این قسمت به بررسی تأثیر دامنه‌ی موج بر ضریب اصطکاک پوسته‌ای، عدد ناسلت محلی، عدد ناسلت متوسط، خطوط جریان و خطوط هم‌دما در شرایط $Re = 300$, $Pr = 6.93$, $\phi = 0\%$ پرداخته شده است.

در شکل ۴-۸ به بررسی تأثیر دامنه موج دیواره‌های کانال روی ضریب اصطکاک پوسته‌ای پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به دلیل وجود شرط ورودی کاملاً توسعه یافته ضریب اصطکاک پوسته‌ای، در دامنه‌ی موج $a = 0$ (کانال با دیواره‌های صاف) در تمام نقاط ثابت می‌ماند. برای دامنه‌ی موج $a = 0.1$ منحنی‌های هارمونیک ضریب اصطکاک محلی دارای فرکانسی همانند سطح موج‌دار می‌باشد و مقادیر بیشینه و کمینه تقریباً در بیشینه و کمینه سطح موج‌دار اتفاق می‌افتد. با افزایش دامنه موج، جریان برگشتی در قسمت واگرا شده اتفاق می‌افتد و اندازه این ناحیه افزایش می‌یابد. جریان برگشتی باعث منفی شدن ضریب اصطکاک در ناحیه‌ی واگرا شده صفحه‌ی موج‌دار می‌شود. باید به این نکته توجه شود که افزایش اندازه‌ی ناحیه‌ی جریان برگشتی سبب می‌شود که منحنی هارمونیک ضریب اصطکاک نسبت به سطح موج‌دار کانال قابل توجیه باشد.

در شکل ۴-۹ به بررسی تأثیر دامنه موج دیواره‌های کانال روی عدد ناسلت محلی پرداخته شده است. برای دامنه‌ی موج $a = 0$ لایه مرزی در ورودی کانال نازک‌تر از هر نقطه‌ی دیگری در امتداد کانال می‌باشد به همین دلیل ناسلت محلی در ورودی کانال بیشترین مقدار را نسبت به هر نقطه‌ای در امتداد کانال دارد. عدد ناسلت محلی در قسمت همگرا شده کانال بیشتر از قسمت واگرا شده کانال است. این پدیده به این علت است که ناحیه‌ی همگرا شده دارای سرعت میانگین و گرادیان سرعت بالایی می‌باشد که باعث افزایش نرخ انتقال حرارت می‌شود. برعکس، جریان برگشتی گرادیان سرعت پایینی در نزدیکی

سطح دیواره در قسمت واگرا شده کانال دارد، که نسبت انتقال حرارت را کاهش می‌دهد. هر چه دامنه موج افزایش می‌یابد اختلاط سیال بیشتر شده و تبادل گرما بین سیال و دیواره بهتر می‌شود در نتیجه عدد ناسلت محلی افزایش می‌یابد.

پس در دامنه‌ی موج $a = 0.1$ عدد ناسلت محلی در بخش همگرا شده افزایش و در بخش واگرا شده کاهش می‌یابد. برای $a = 0.1$ مقدار کمینه عدد ناسلت در فاصله‌ی کمی از نقطه‌ی بیشینه هر موج واقع است و این فاصله با افزایش دامنه‌ی موج به $a = 0.2$ افزایش می‌یابد. این پدیده بدین علت است که وقتی که دامنه‌ی موج به $a = 0.2$ افزایش می‌یابد، قدرت جریان برگشتی نیز افزایش می‌یابد و نقطه‌ی جدایی جریان به نقطه‌ی کمینه کانال موج‌دار نزدیک‌تر می‌شود. نکته‌ی قابل توجه دیگر این است که به دلیل لایه مرزی حرارتی تشکیل شده، بیشترین مقدار عدد ناسلت در موج اول می‌باشد و در امتداد کانال به دلیل کاهش گرادیان دما در دیوار روند ناسلت محلی کاهش می‌یابد، اگرچه توزیع عدد ناسلت دارای الگوی ثابتی در طول کانال می‌باشد.

همان‌طور که در شکل ۴-۱۰ مشاهده می‌شود بالاترین عدد ناسلت متوسط متعلق به اولین موج است و در پایین دست جریان از موج سوم به بعد عدد ناسلت یکنواخت است این نتیجه به دلیل این است که جریان به‌طور کامل توسعه یافته است. عدد ناسلت متوسط در دامنه‌ی موج کم، تغییرات زیادی ندارد. به دلیل این که عدد ناسلت در بخش واگرا شده هر موج تغییرات کمتری دارد ولی در دامنه‌های موج بیشتر عدد ناسلت متوسط تغییرات بیشتری دارد. در شکل ۴-۱۱ به بررسی تأثیر دامنه موج دیواره‌ی کانال روی عدد استانتون پرداخته شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش دامنه موج عدد استانتون افزایش می‌یابد.

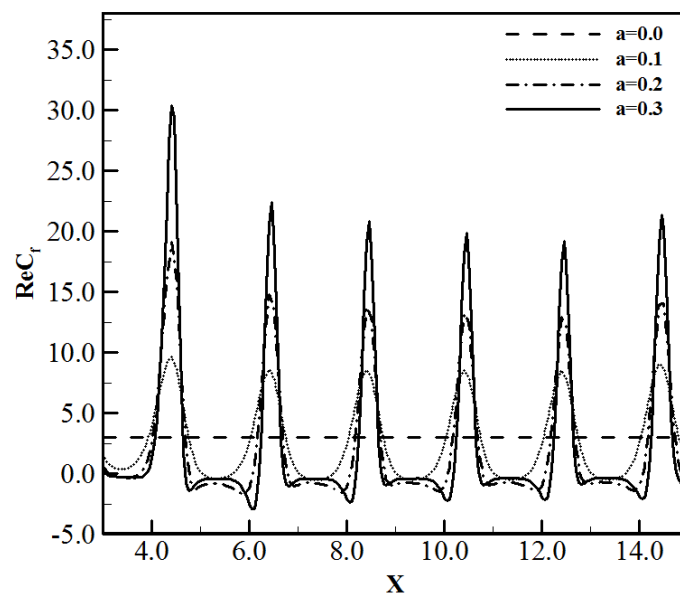
در شکل ۴-۱۲ خطوط جریان برای دامنه‌های مختلف در شرایط $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi =$ 0% مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود به دلیل وجود جریان برگشتی در بازه $4.5 \leq x \leq 6.5$ نقطه جدایش جریان در $x = 5.1$ و نقطه اتصال در $x = 5.67$ اتفاق می‌افتد. با افزایش دامنه‌ی موج فاصله‌ی بین نقاط جدایش و اتصال افزایش می‌یابد. در شکل ۴-۱۳ خطوط

هم‌دما برای دامنه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش دامنه گرادیان دمای نزدیک دیوار افزایش می‌یابد و باعث اختلاط سیال سرد در مرکز با سیال گرم نزدیک دیواره می‌شود.

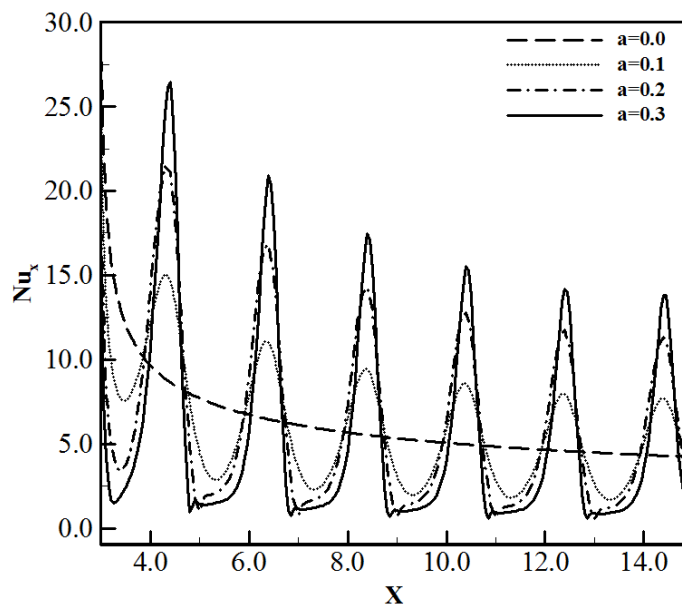
در جدول ۱-۴ تغییرات عدد ناسلت متوسط برای دامنه‌های موج مختلف در شرایط $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در این جدول ملاحظه می‌شود، افزایش دامنه‌ی موج کانال سبب افزایش عدد ناسلت متوسط می‌گردد.

جدول ۱-۴: تأثیر دامنه موج روی عدد ناسلت متوسط در شرایط $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$

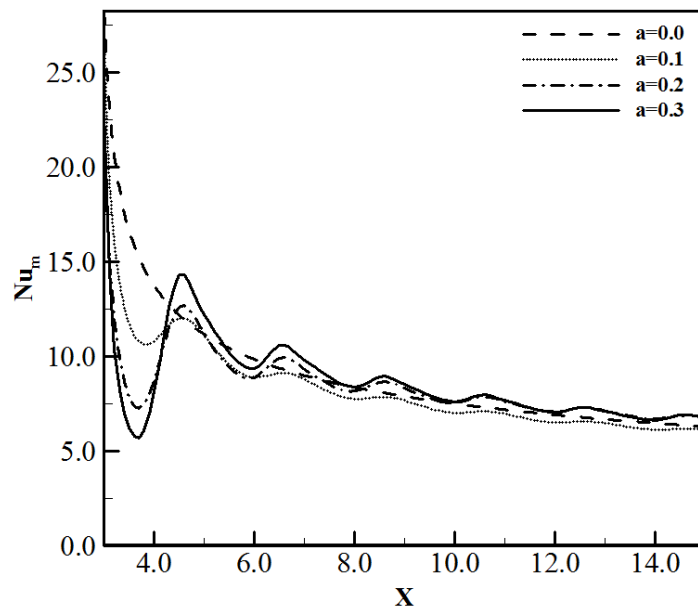
a	۰/۱	۰/۲	۰/۳
Nu_m	۶/۲۸۱۶	۶/۸۱۲۷	۶/۸۴۵۱



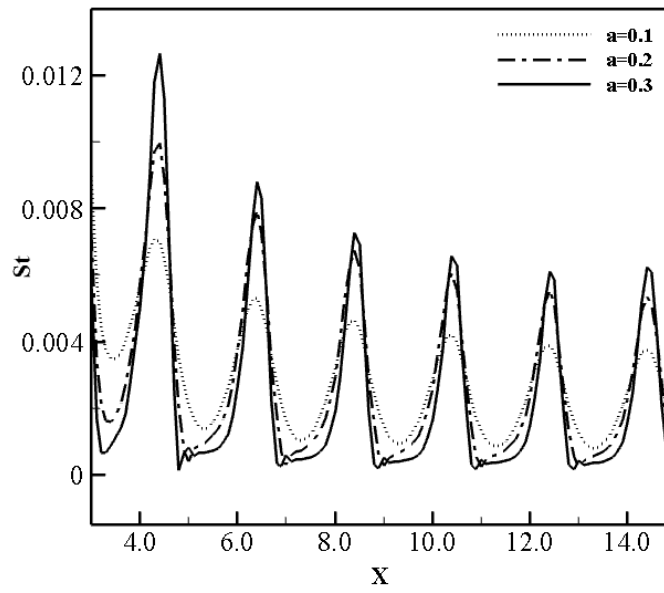
شکل ۱-۴: ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی برای دامنه‌ی موج مختلف در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$



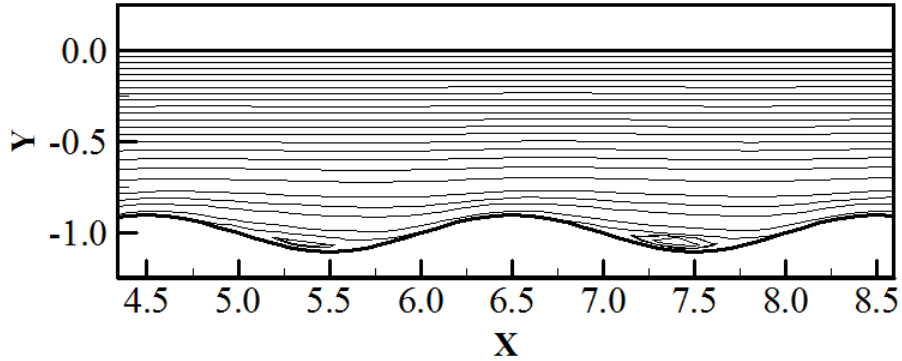
شکل ۴-۹: عدد ناسلت محلی برای دامنه‌ی موج مختلف در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$



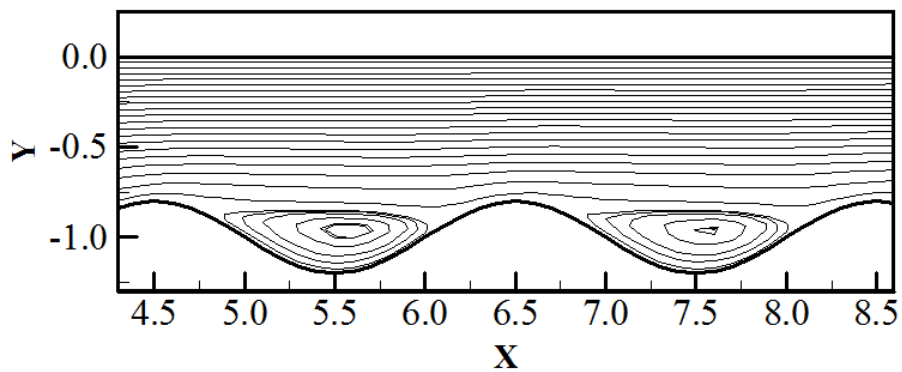
شکل ۴-۱۰: عدد ناسلت متوسط برای مقادیر مختلف دامنه موج در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$



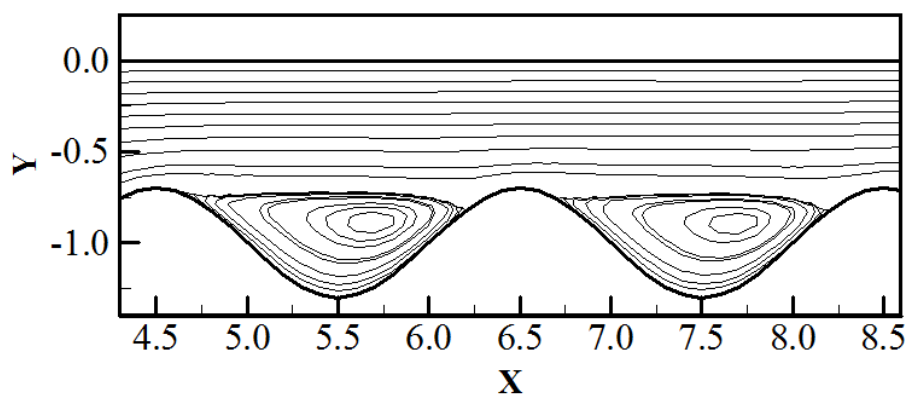
شکل ۴-۱۱: عدد استانتون برای دامنه‌ی موج مختلف در شرایط: $Re = 300$, $Pr = 6.93$, $\phi = 0\%$



الف) $a = 0.1$

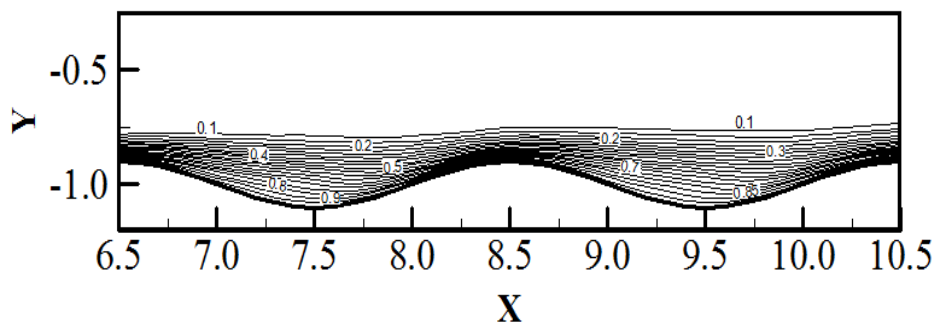


$a = 0.2$ (ب)

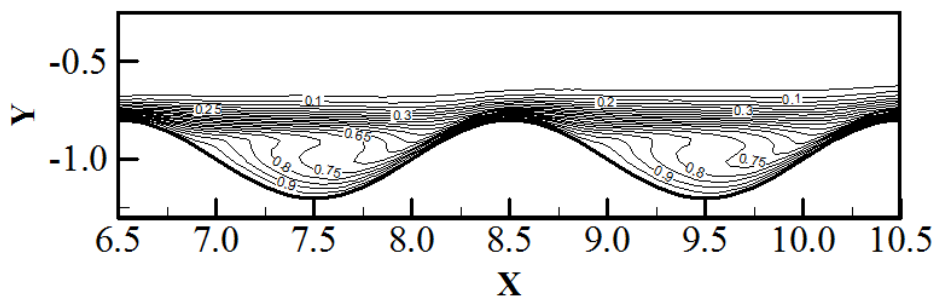


$a = 0.3$ (ج)

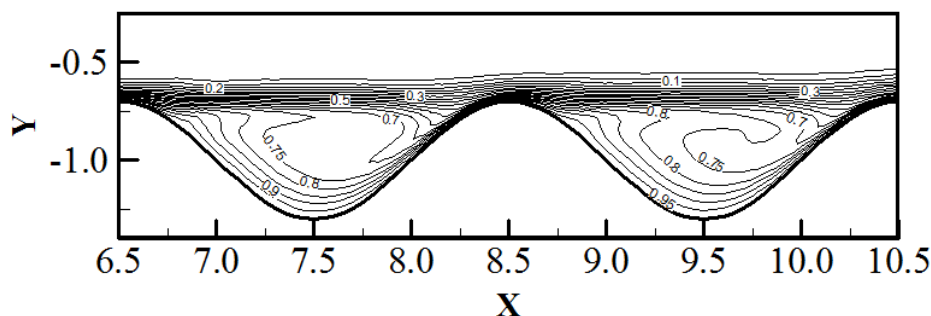
شکل ۴-۱۲: نمودار خط جریان در (الف)، $a = 0.1$ (ب)، $a = 0.2$ (ج)، $a = 0.3$ در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$



$a = 0.1$ (الف)



$$a = 0.2 \text{ (ب)}$$



$$a = 0.3 \text{ (ج)}$$

شکل ۴-۱۳: نمودار خطوط هم‌دما در (الف)، $a = 0.1$ ، (ب)، $a = 0.2$ ، (ج) $a = 0.3$ در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$

۴-۲-۲ بررسی تأثیر عدد رینولدز

در این قسمت به بررسی تأثیر عدد رینولدز بر ضریب اصطکاک پوسته‌ای، عدد ناسلت محلی، عدد ناسلت متوسط، خطوط جریان و خطوط هم‌دما در شرایط $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$ پرداخته شده است. همانند افزایش دامنه‌ی موج با افزایش عدد رینولدز گرادیان سرعت در نزدیکی دیواره افزایش می‌یابد در نتیجه ضریب اصطکاک پوسته‌ای افزایش می‌یابد (شکل ۴-۱۴). همان‌طور که ملاحظه می‌شود در اعداد رینولدز پایین جدایش جریان روی نمی‌دهد. با افزایش عدد رینولدز و رسیدن به عدد رینولدز ۱۰۰ گردابه تشکیل می‌شود. لازم به ذکر است زمانی که عدد رینولدز از ۵۰۰ به ۱۰۰ کاهش می‌یابد مقدار کمینه ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی هر موج افزایش می‌یابد تا به مقدار صفر می‌رسد و دلیل این امر آن است که در عدد رینولدز ۱۰۰ جمله‌ی غیرخطی جابجایی نسبت به جمله‌ی نفوذ کوچک است. همان‌طور که در شکل ۴-۱۵ مشاهده می‌شود با افزایش عدد رینولدز عدد ناسلت افزایش می‌یابد. با افزایش عدد رینولدز مقادیر عدد ناسلت در قسمت همگرا شده افزایش می‌یابد ولی در قسمت واگرا شده تقریباً ثابت می‌ماند. در شکل ۴-۱۶ عدد ناسلت متوسط برای مقادیر مختلف رینولدز رسم شده

است. بالاترین متوسط نرخ انتقال حرارت در موج اول اتفاق می‌افتد. از آنجایی که عدد ناسلت متوسط از توزیع عدد ناسلت محلی در طول کانال به دست می‌آید انتظار می‌رود دامنه‌ی آن در طول کانال کاهش یابد. نقاط بیشینه و کمینه نمودار مربوط به بخش‌های همگرا شده و واگرا شده دیواره کانال می‌باشد. در شکل ۴-۱۷ عدد استانتون برای مقادیر مختلف رینولدز نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش عدد رینولدز عدد استانتون کاهش می‌یابد.

تغییرات عدد ناسلت متوسط در برابر اعداد رینولدز مختلف برای دامنه‌های موج مختلف در شرایط $Pr = 6.93, \phi = 0\%$ در شکل ۴-۱۸ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود برای همه اعداد رینولدز، عدد ناسلت متوسط با افزایش دامنه‌ی موج افزایش می‌یابد. علاوه بر این، در اعداد رینولدز بالا، به‌طور متوسط افزایش عدد ناسلت برای دامنه‌ی موج بالاتر بیشتر از اعداد رینولدز کم می‌باشد.

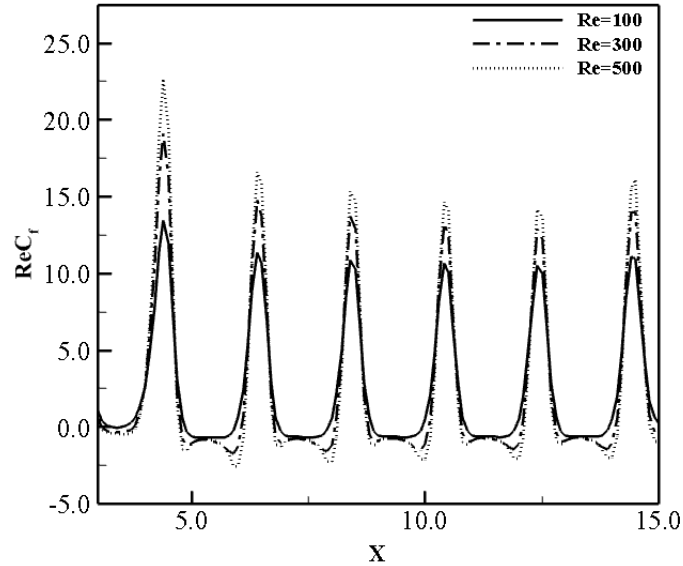
در شکل ۴-۱۹ خطوط جریان برای اعداد رینولدز مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. محل جدایش جریان و محل تشکیل مجدد لایه مرزی در اعداد رینولدز مختلف نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش عدد رینولدز فاصله نقاط جدایش و تشکیل مجدد لایه مرزی بیشتر می‌شود. در این شکل مشاهده می‌شود که با افزایش عدد رینولدز اندازه گردابه بزرگ‌تر می‌شود. علاوه بر این، محل نقاط جدایش و اتصال مجدد به سمت بخش‌های همگرا شده حرکت می‌کند.

در شکل ۴-۲۰ خطوط هم‌دما برای اعداد رینولدز مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود در اعداد رینولدز کم، رشد دمای مخلوط سیال از فاصله دورتری در بالادست جریان آغاز می‌شود. با افزایش عدد رینولدز گرادیان دمای نزدیک دیوار افزایش می‌یابد و باعث اختلاط سیال سرد در مرکز با سیال گرم نزدیک دیواره می‌شود.

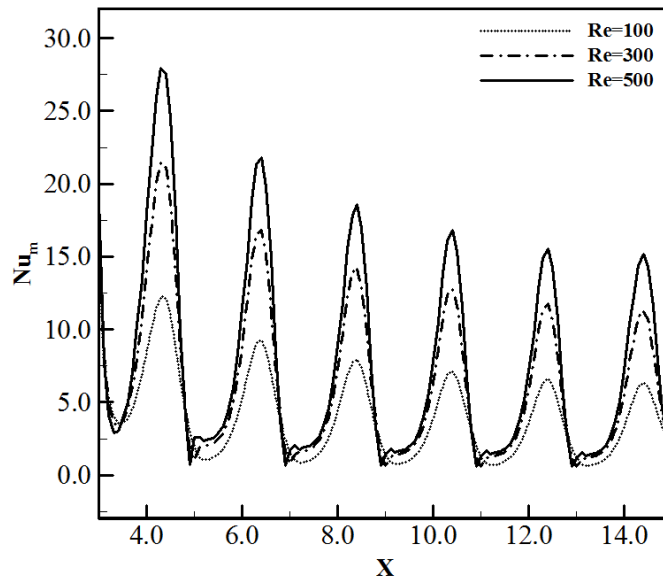
جدول ۴-۲ تغییرات عدد ناسلت متوسط را همراه با تغییرات عدد رینولدز نشان می‌دهد، همان‌طور که از این جدول مشخص می‌باشد، افزایش عدد رینولدز سبب افزایش عدد ناسلت متوسط می‌شود.

جدول ۲-۴: تأثیر عدد رینولدز روی عدد ناسلت متوسط در شرایط: $Pr = 6.93, a = 0.2, \varphi = 0\%$

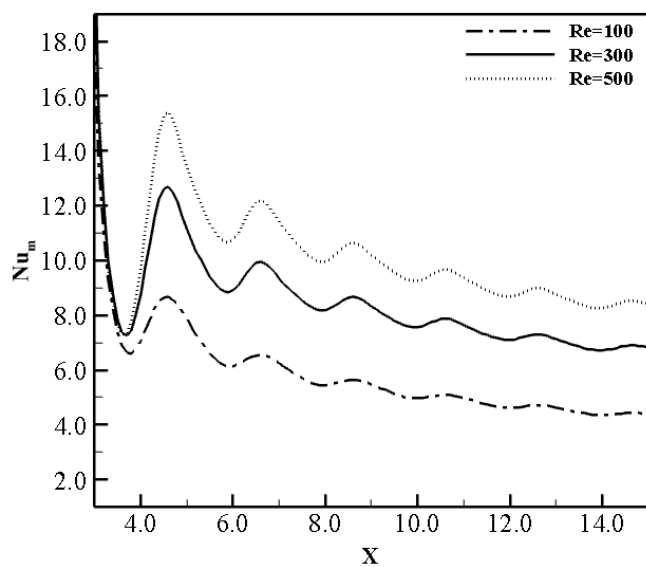
۵۰۰	۳۰۰	۱۰۰	Re
۸/۴۱۹۷	۶/۸۱۲۷	۴/۴۰۱۴	Nu_m



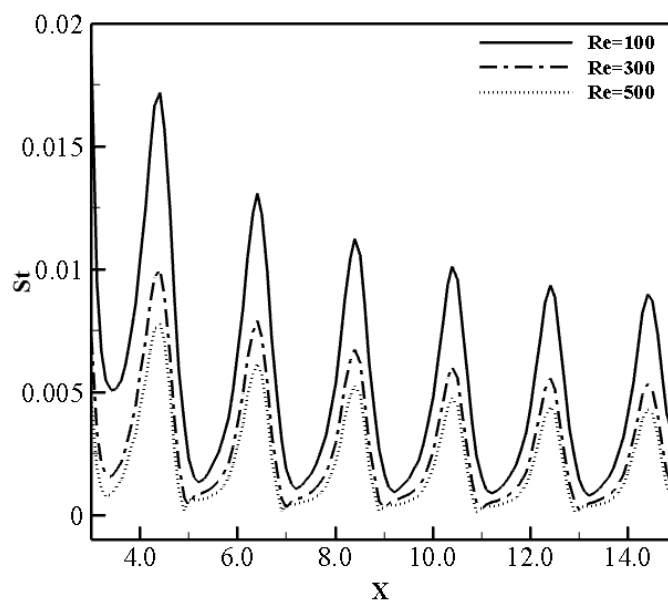
شکل ۴-۱۴: ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی برای مقادیر مختلف رینولدز در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$



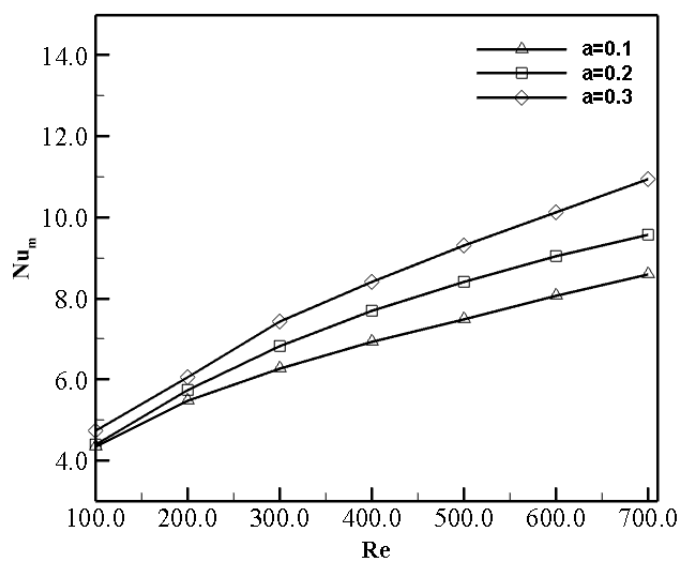
شکل ۴-۱۵: عدد ناسلت محلی برای مقادیر مختلف رینولدز در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$



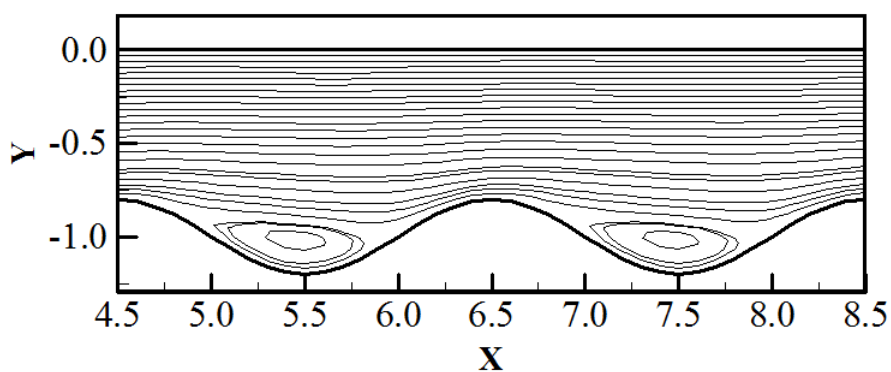
شکل ۴-۱۶: عدد ناسلت متوسط برای مقادیر مختلف رینولدز در شرایط: $\alpha = 0.2$, $Pr = 6.93$, $\varphi = 0\%$



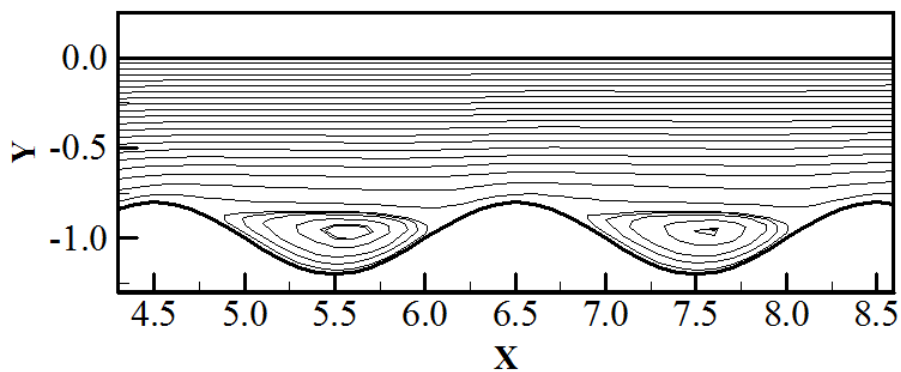
شکل ۴-۱۷: عدد استانتون برای مقادیر مختلف رینولدز در شرایط: $\alpha = 0.2$, $Pr = 6.93$, $\varphi = 0\%$



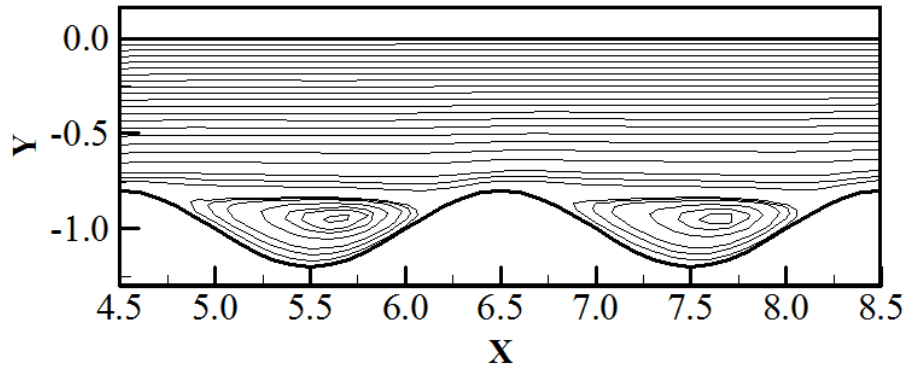
شکل ۴-۱۸: نمودار عدد ناست متوسط برحسب رینولدز برای دامنه موج مختلف در شرایط: $Pr = 6.93$, $\phi = 0\%$



Re = 100 (الف)

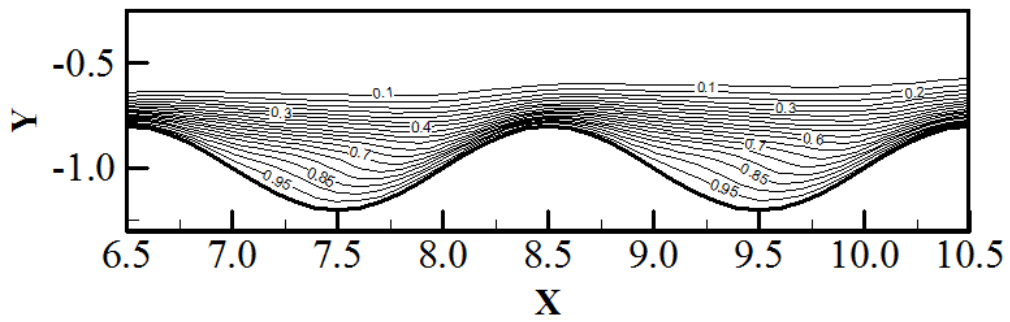


Re = 300(ب)

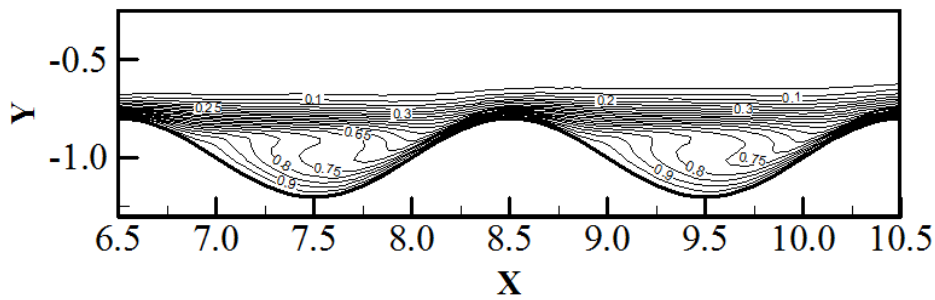


Re = 500(ج)

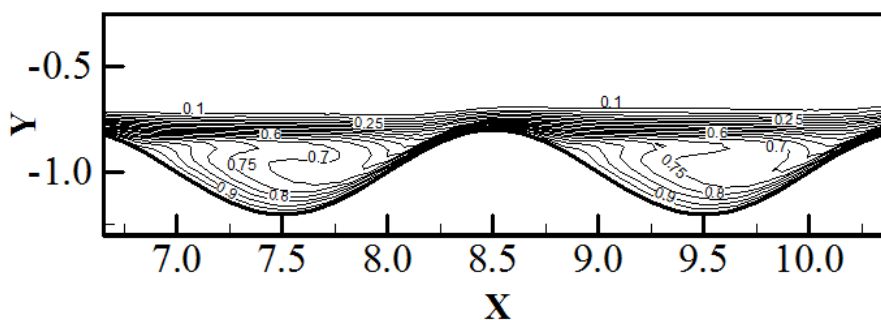
شکل ۴-۱۹: نمودار خط جریان در (الف) $Re = 100$ ، (ب) $Re = 300$ ، (ج) $Re = 500$ در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 0\%$



Re = 100(الف)



Re = 300(ب)



Re = 500 (ج)

شکل ۴-۲۰: نمودار خط دما در (الف) $Re = 100$ ، (ب) $Re = 300$ ، (ج) $Re = 500$ در شرایط: $a = 0.2$, $Pr = 6.93$, $\varphi = 0\%$

۴-۲-۳ بررسی تأثیر عدد پرانتل

در این قسمت به بررسی اثر عدد پرانتل روی مقادیر مختلف جریان در شرایط $a = 0.2$, $Re = 500$, $\varphi = 0\%$ پرداخته شده است. عدد پرانتل بیانگر نسبت نفوذ اندازه حرکت (لزجت سینماتیک) به نفوذ گرمایی است. رابطه جابه‌جایی درون کانال به صورت زیر می‌باشد [۶۰]:

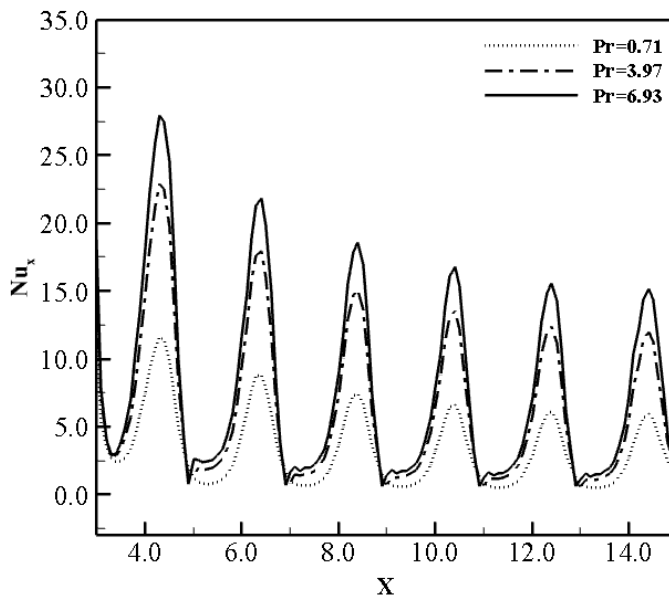
$$Nu = 2 + 0.6 Re^{0.5} Pr^{0.3} \quad (۴-۵)$$

با توجه به رابطه‌ی فوق با افزایش عدد پرانتل، عدد ناسلت محلی افزایش می‌یابد (شکل ۴-۲۱). با توجه به اینکه افزایش عدد پرانتل تأثیری در افزایش و یا کاهش گرادیان فشار ندارد، بنابراین اندازه گردابه‌ها در قسمت موجدار با افزایش عدد پرانتل تغییری نمی‌کنند. از آنجایی که عدد ناسلت متوسط بیانگر توزیع عدد ناسلت محلی در امتداد کانال است، با افزایش عدد ناسلت محلی عدد ناسلت متوسط نیز افزایش می‌یابد (شکل ۴-۲۲). در شکل ۴-۲۳ تغییرات عدد استانتون برای اعداد پرانتل مختلف نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش عدد پرانتل، عدد استانتون کاهش می‌یابد. در شکل ۴-۲۴ تغییرات عدد ناسلت متوسط در برابر عدد رینولدز برای دامنه‌ی موج مختلف در شرایط $Pr = 0.71$ نشان داده شده است. همان‌طور که در بخش‌های قبل هم گفته شد عدد ناسلت متوسط با افزایش دامنه موج و عدد رینولدز افزایش می‌یابد. اختلاف عدد ناسلت متوسط در کانال موجدار

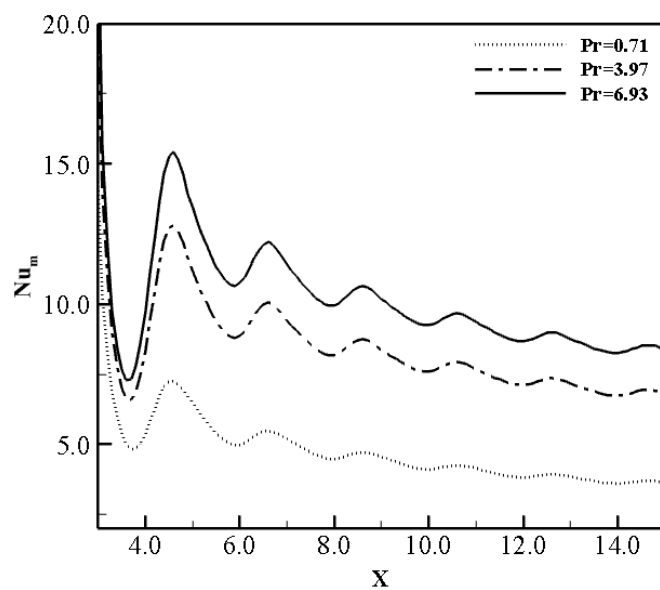
با دامنه‌های موج کم ($a = 0.1$) با کانال صاف کم می‌باشد. ما در دامنه‌های موج بالاتر مخصوصاً در اعداد رینولدز بالا قابل توجه است. با افزایش عدد پرانتل مقادیر عدد ناسلت متوسط افزایش می‌یابد. در شکل ۴-۲۵ خطوط هم‌دما برای اعداد پرانتل مختلف در شرایط $a = 0.2, Re = 500, \varphi = 0\%$ نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر چه عدد پرانتل کمتر باشد نفوذ حرارت به بالادست جریان بیشتر است. به عبارتی هر چه عدد پرانتل کمتر باشد عدد ناسلت کاهش می‌یابد. جدول ۴-۳ تأثیر عدد پرانتل را روی عدد ناسلت متوسط نشان می‌دهد. همان‌طور که از این جدول مشخص می‌باشد افزایش عدد پرانتل سبب افزایش مقدار عدد ناسلت متوسط می‌گردد.

جدول ۴-۳: تأثیر عدد پرانتل روی عدد ناسلت متوسط $a = 0.2, Re = 500, \varphi = 0\%$

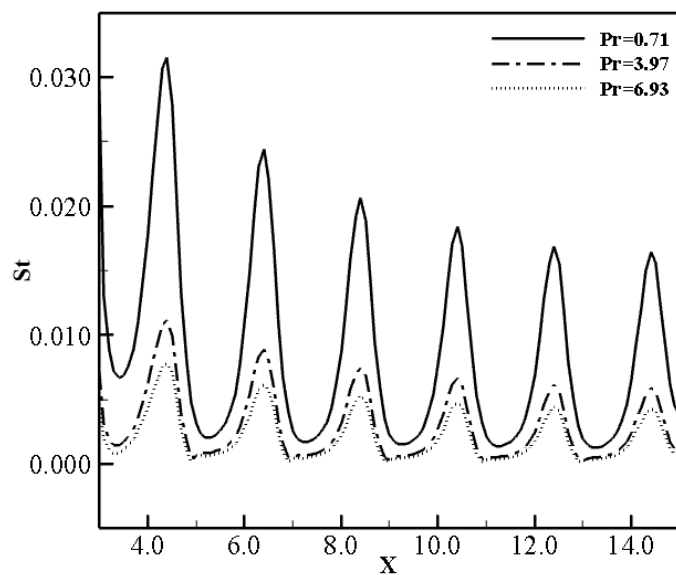
۶/۹۳	۳/۹۷	۰/۷۱	Pr
۸/۴۱۹۷	۶/۸۵۴۹	۳/۶۵۸۳	Num



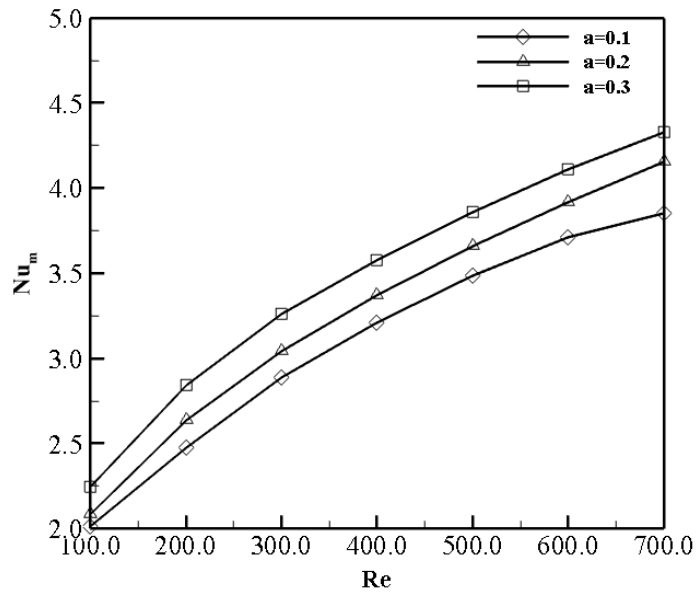
شکل ۴-۲۱: عدد ناسلت محلی برای مقادیر مختلف عدد پرانتل در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, \varphi = 0\%$



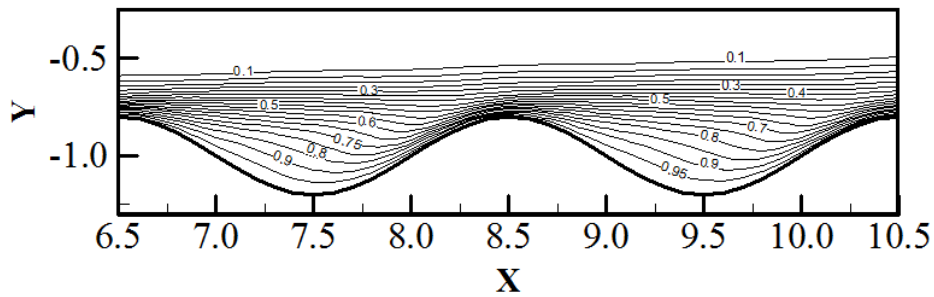
شکل ۲۲-۴: عدد ناسلت محلی برای مقادیر مختلف عدد پرانتل در شرایط: $a = 0.2$, $Re = 500$, $\varphi = 0\%$



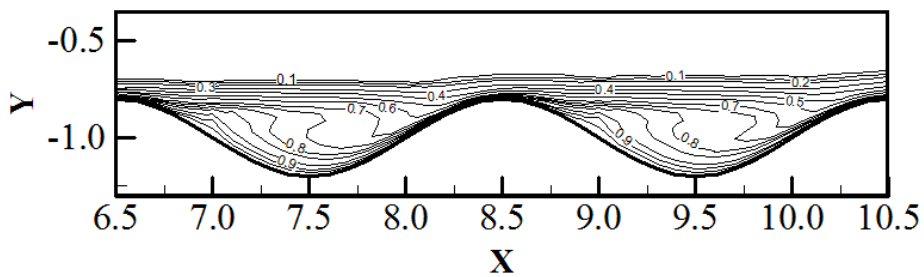
شکل ۲۳-۴: عدد استانتون برای مقادیر مختلف اعداد پرانتل در شرایط: $a = 0.2$, $Re = 500$, $\varphi = 0\%$



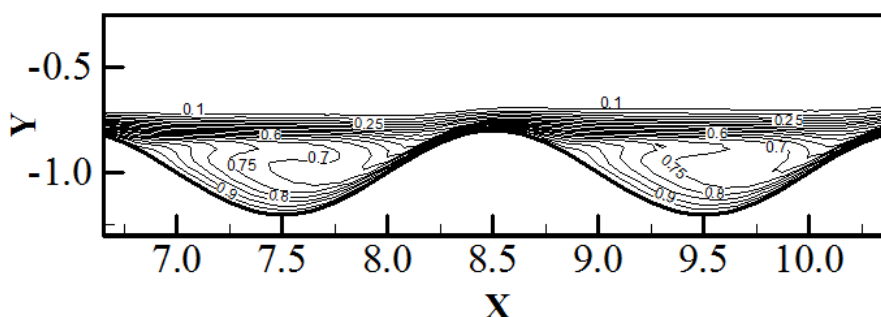
شکل ۴-۲۴: نمودار عدد ناست متوسط برحسب رینولدز برای دامنه موج مختلف در شرایط: $Pr = 0.71, \varphi = 0\%$



Pr = 0.71 (الف)



Pr = 3.97(ب)



Pr = 6.93(ج)

شکل ۴-۲۵: نمودار خط دما در (الف) Pr = 0.71, (ب) Pr = 3.97, (ج) Pr = 6.93 در شرایط: $a = 0.2, Re = 500, \varphi = 0\%$

۴-۲-۴ بررسی تأثیر کسر حجمی نانوسیال

در این قسمت به بررسی تأثیر کسر حجمی نانوسیال آب-مس بر مقادیر مختلف جریان در شرایط $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$ پرداخته شده است. با افزایش کسر حجمی، نانوسیال ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی به اندازه ناچیزی کاهش می‌یابد (شکل ۴-۲۶). کاهش ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی به این دلیل است که اگرچه ویسکوزیته نانوسیال (μ_{nf}) بیشتر از مایع خالص است اما از آنجا که گرادیان سرعت در دیوار به‌طور قابل توجهی کاهش می‌یابد پس اثر افزایش (μ_{nf}) خنثی می‌شود. افزودن نانوذرات به سیال پایه، باعث افزایش میزان انتقال حرارت می‌شود. بنابراین هنگامی که مقدار کسر حجمی نانوسیال افزایش می‌یابد مقادیر بیشینه عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد، زیرا ضریب هدایت حرارتی مؤثر نانوسیال افزایش می‌یابد (شکل ۴-۲۷). به‌طور مشابه می‌توان همین تحلیل را برای عدد ناسلت متوسط نیز به کار برد (شکل ۴-۲۸). در شکل ۴-۲۹ تغییرات عدد استانتون برای کسر حجمی

مختلف ترسیم شده است. همان طور که در شکل مشاهده می‌شود با افزایش کسر حجمی عدد استانتون افزایش می‌یابد.

شکل ۴-۳۰ تغییرات عدد ناسلت متوسط را برای اعداد رینولدز در کسرهای حجمی مختلف نانوسیال نشان می‌دهد. همان طور که قبلاً گفته شد افزایش عدد رینولدز باعث افزایش انتقال حرارت و افزایش عدد ناسلت روی دیوار می‌شود. تغییرات عدد ناسلت متوسط در برابر اعداد رینولدز برای دامنه‌های مختلف در شرایط $Re = 500, Pr = 6.93, \varphi = 5\%$ در شکل ۴-۳۱ نشان داده شده است. عدد ناسلت متوسط با افزودن کسر حجمی نانوسیال افزایش می‌یابد.

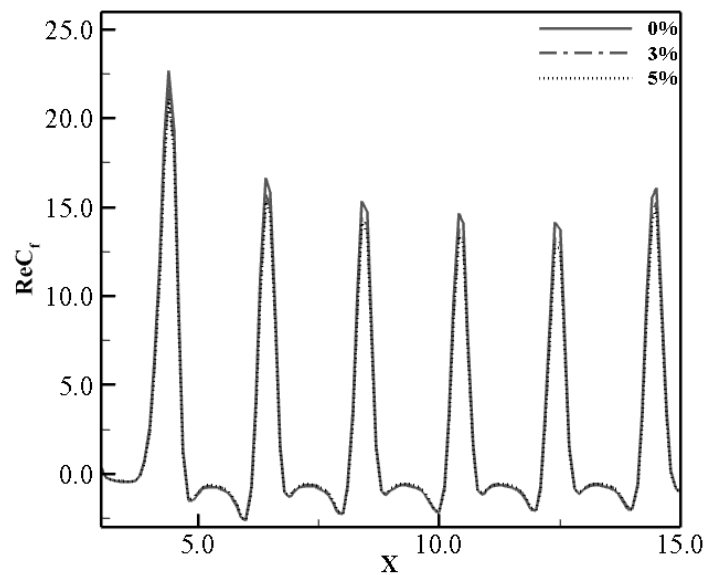
در شکل ۴-۳۲ و شکل ۴-۳۳ عدد ناسلت محلی برای کسرهای حجمی مختلف نانوسیال آب-تیتانیوم اکسید و آب-آلومینیوم اکسید در شرایط $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$ نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌کنید مقادیر بیشینه در نانوسیال آب-مس بیشتر از آب-تیتانیوم اکسید و آب-آلومینیوم اکسید می‌باشد.

در شکل ۴-۳۴ خطوط جریان برای اعداد رینولدز مختلف در شرایط $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 5\%$ نشان داده شده است. همان طور که در شکل مشاهده می‌شود در عدد رینولدز ثابت، افزایش کسر حجمی نانوسیال تغییر قابل توجهی در الگوی جریان ایجاد نمی‌کند. به این دلیل که جریان کاملاً توسعه یافته شده است. در شکل ۴-۳۵ خطوط هم‌دما برای اعداد رینولدز مختلف در شرایط $a = 0.2, Pr = 6.93, \varphi = 5\%$ نشان داده شده است. همان طور که در شکل مشاهده می‌شود در عدد رینولدز ثابت، خطوط هم‌دما به سمت مرکز کانال کشیده می‌شوند، زیرا با افزایش کسر حجمی نانوسیال ضخامت لایه مرزی حرارتی به سرعت افزایش می‌یابد.

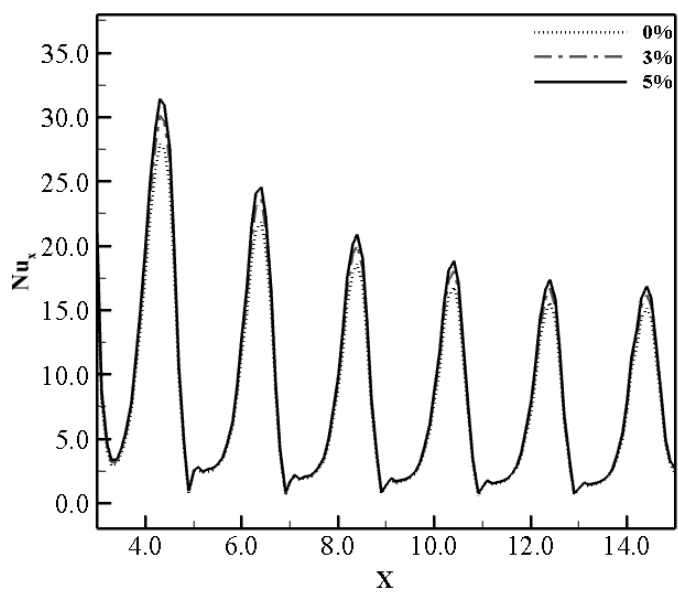
جدول ۴-۴ تأثیر کسر حجمی نانوسیال آب-مس را روی عدد ناسلت متوسط در شرایط $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$ نشان می‌دهد. همان طور که از این جدول مشخص می‌باشد افزایش کسر حجمی نانو ذره سبب افزایش مقدار عدد ناسلت متوسط می‌گردد.

جدول ۴-۴: تأثیر کسر حجمی نانوسیال آب-مس روی عدد ناسلت متوسط $a = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93$

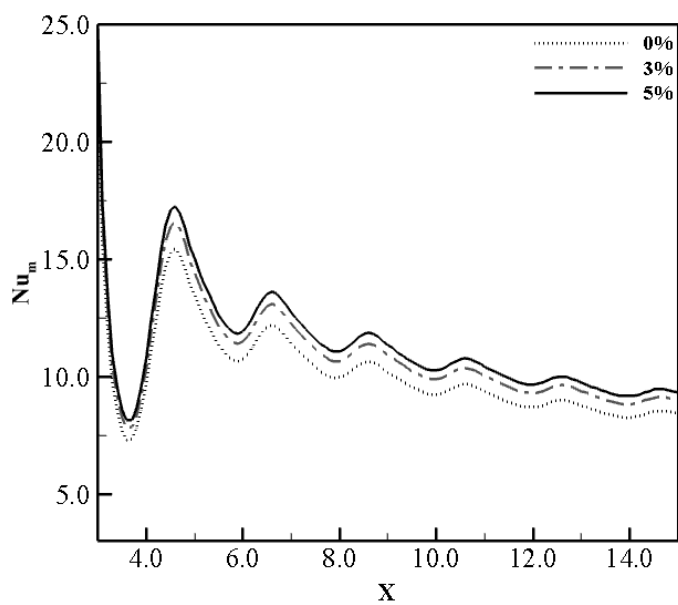
ϕ	۱٪	۳٪	۵٪
Nu_m	۸/۶۵۳۳	۹/۰۰۱۱	۹/۳۴۰۱



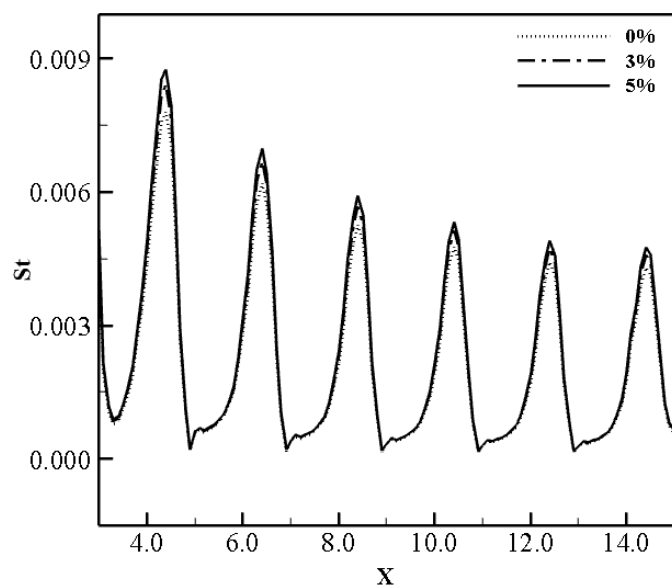
شکل ۴-۲۶: ضریب اصطکاک پوسته‌ای محلی برای کسر حجمی نانوسیال مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$



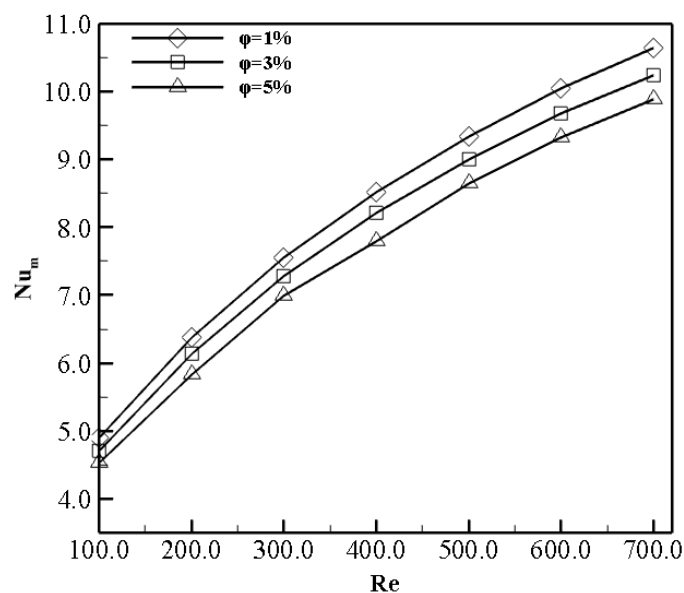
شکل ۴-۲۷: عدد ناسلت محلی برای کسر حجمی نانوسیال مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$



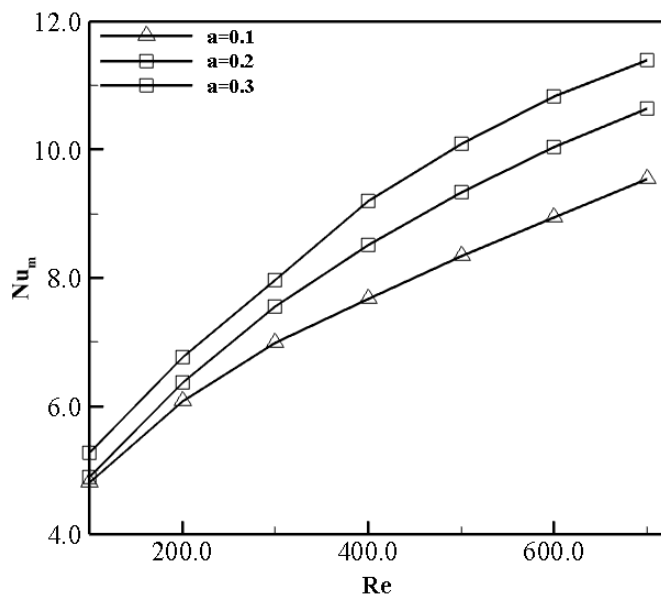
شکل ۴-۲۸: عدد ناسلت متوسط برای کسر حجمی نانوسیال در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$



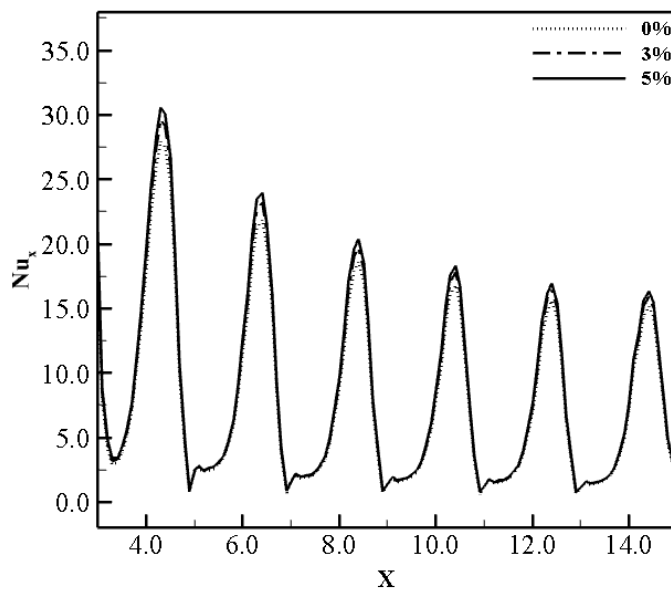
شکل ۴-۲۹: عدد استانتون برای کسر حجمی نانوسیال مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$



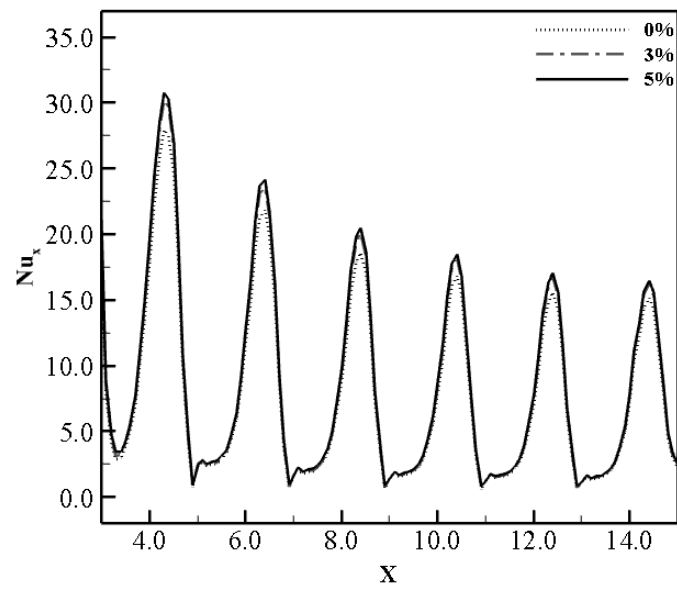
شکل ۴-۳۰: تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب رینولدز برای کسر حجمی مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$



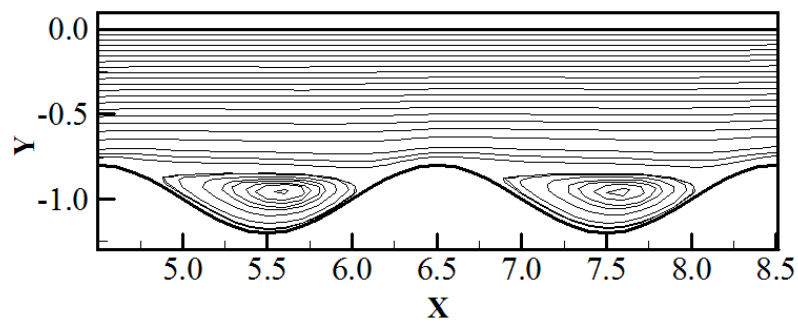
شکل ۳۱-۴: تغییرات عدد ناسلت متوسط برحسب رینولدز برای دامنه موج مختلف در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, \varphi = 5\%$



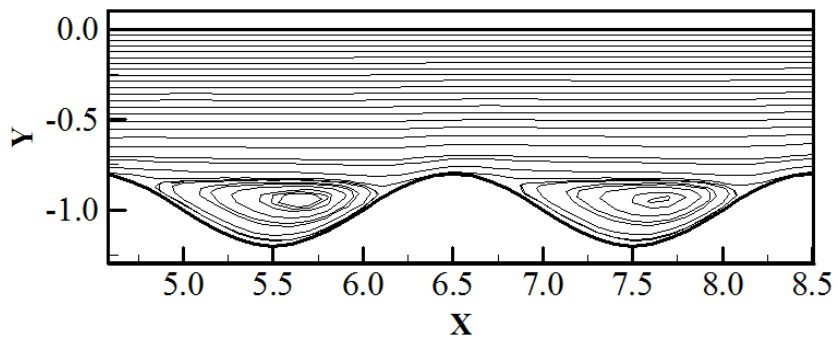
شکل ۳۲-۴: عدد ناسلت محلی برای کسر حجمی مختلف نانو ذره TiO_2 در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$



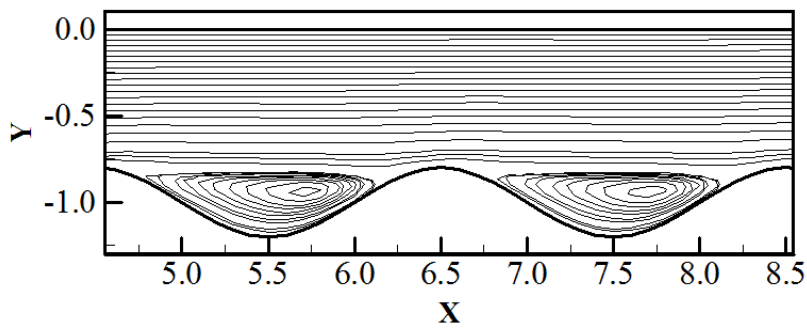
شکل ۴-۳۳: عدد ناسلت محلی برای کسر حجمی مختلف نانو ذره Al_2O_3 در شرایط: $Re = 500, Pr = 6.93, a = 0.2$



(الف) $Re = 300$

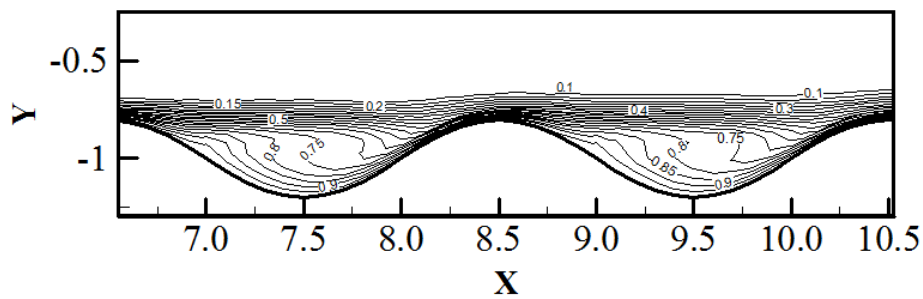


Re = 500(ب)

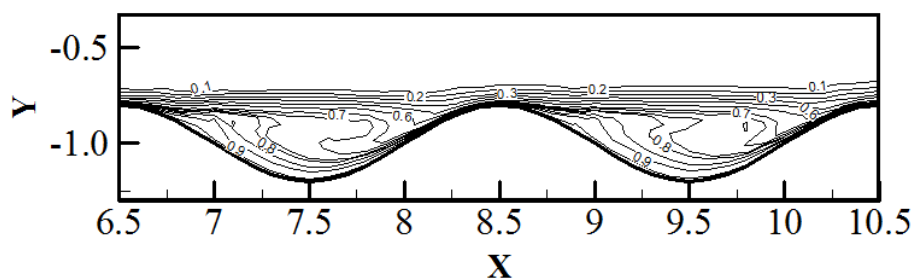


Re = 700(ج)

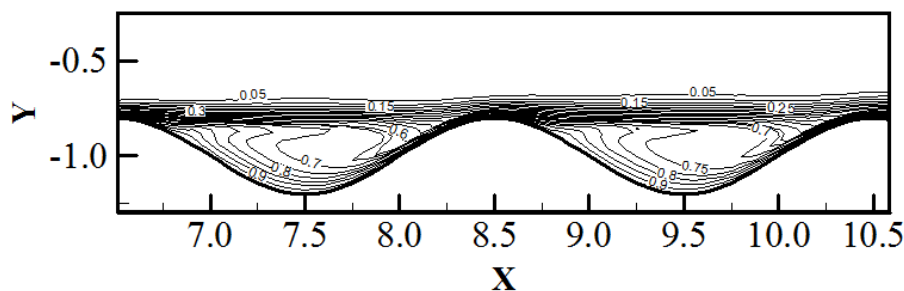
شکل ۴-۳۴: نمودار خط جریان در (الف) $Re = 300$ ، (ب) $Re = 500$ ، (ج) $Re = 700$ در شرایط: $\alpha = 0.2$, $Pr = 6.93$, $\phi = 5\%$



Re = 300(الف)



Re = 500 (ب)



Re = 700 (ج)

شکل ۴-۳۵: نمودار هم‌دما در (الف) $Re = 300$ ، (ب) $Re = 500$ ، (ج) $Re = 700$ در شرایط: $a = 0.2$, $Pr = 6.93$, $\varphi = 5\%$

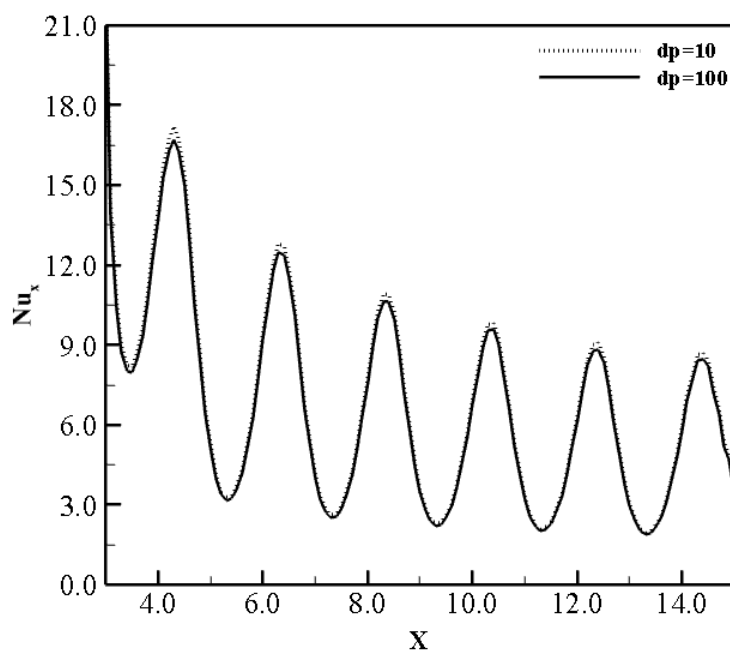
۴-۲-۵ بررسی تأثیر قطر نانو ذره

در این قسمت به بررسی اثر قطر نانو ذره بر مقادیر مختلف جریان در شرایط $Re = 300, Pr = 6.93, a = 0.1, \varphi = 5\%$ پرداخته شده است. برای این منظور دو نانو ذره مس و آلومینیوم اکسید در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در شکل ۴-۳۶، مشاهده می‌شود با کوچک‌تر شدن ذرات نه تنها نسبت سطح به حجم ذرات بیشتر شده، بلکه پایداری مخلوط‌های نانوسیال نیز بیشتر می‌شود، همچنین حرکت براونی نانوذرات به سبب جرم کمترشان بیشتر بوده و باعث افزایش بیشتر ضریب رسانایی می‌شود. ؛ اما این تأثیر بسیار ناچیز است. در شکل ۴-۳۷ تأثیر قطر نانو ذره آلومینیوم اکسید روی عدد ناسلت محلی بررسی شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود افزایش قطر نانو ذره باعث کاهش عدد ناسلت محلی می‌شود. اما تأثیر قطر نانو ذره در افزایش عدد ناسلت بسیار کم است.

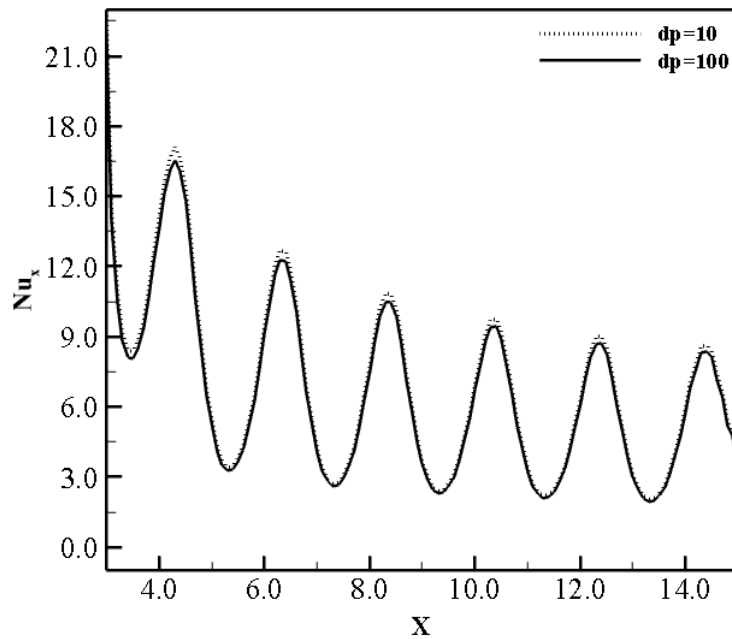
در جدول ۴-۵ تأثیر قطر نانو ذره مس روی عدد ناسلت متوسط نشان داده شده است. با افزایش قطر نانوسیال عدد ناسلت متوسط کاهش می‌یابد.

جدول ۴-۵: تأثیر قطر نانو ذره مس روی عدد ناسلت متوسط $\alpha = 0.2, Re = 500, Pr = 6.93, \varphi = 5\%$

۱۰۰	۵۰	۱۰	dp
۹/۰۰۰۱	۹/۰۰۱	۹/۰۰۱۵	Nu_m



شکل ۴-۴: تغییرات عدد ناسلت محلی در قطر نانو ذره مس مختلف در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, \alpha = 0.1, \varphi = 5\%$



شکل ۴-۳۷: تغییرات عدد ناسلت محلی در قطر نانو ذره آلومینیوم اکسید مختلف در شرایط: $Re = 300, Pr = 6.93, a = 0.1, \phi = 5\%$

۴-۱- نتایج بهینه‌سازی

در این قسمت به بهینه‌سازی انتقال حرارت در کانال موج‌دار با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات پرداخته شده است؛ که مسئله بهینه‌سازی، یک مسئله کمیینه‌سازی می‌باشد. ابتدا این کار با یک تابع هدف سپس با دو تابع هدف انجام شده است. منظور از توابع هدف، توابعی است که قرار است بهینه شوند که توابع هدف در این مسئله، عدد ناسلت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای می‌باشد که باید با این توابع هدف انتقال حرارت بیشینه گردد. همچنین تلفات اصطکاکی باید کمینه گردند. این کمیینه‌سازی باعث می‌گردد که انتقال حرارت بهتری در کانال داشته باشد. متغیرهای تصمیم مسئله، درصد حجمی نانوسیال، قطر نانو ذره، دامنه‌ی موج و عدد رینولدز می‌باشد که این کار با قطر نانو ذره ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ نانومتر، عدد رینولدز ۳۴۲، ۵۵۲ و ۶۷۱ و طول موج ۰/۸، ۲ و ۴ صورت گرفته است. برای قیود مسئله نیز از

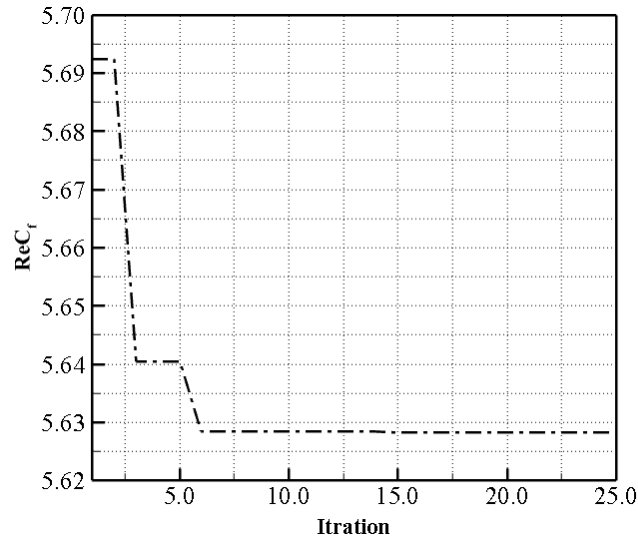
روش ترمیم استفاده شده به گونه‌ای که اگر ذرات خارج از فضای محاسباتی قرار گرفتند مقدار ذرات با مقداری که برای مرزهای فضای محاسباتی در نظر گرفته شده است برابر در نظر گرفته می‌شود. این بهینه‌سازی برای بازه‌ای از کسر حجمی نانوسیال، قطر نانو ذره، دامنه‌ی موج و عدد رینولدز صورت گرفته است؛ که این بازه برای کسر حجمی نانوسیال، قطر نانو ذره، دامنه موج و عدد رینولدز به ترتیب برابر با $0-1$ ، $10-100$ نانومتر، $0-3$ و $100-1000$ می‌باشد.

۱-۱-۴ بهینه‌سازی با یک تابع هدف

در ابتدای امر به‌عنوان نمونه مقادیر بهینه یک تابع هدف در جدول ۴-۶ برای کانال با دیواره‌های موج‌دار با متغیرهای تصمیم عدد رینولدز و کسر حجمی نانوسیال در شرایط $a = 0.2, Pr = 6.93, dp = 50$ و برای نانوسیال آب-مس آورده شده است. در شکل ۴-۳۸ مقدار کمینه شده ضریب اصطکاک پوسته‌ای برای نانوسیال آب-مس در شرایط $a = 0.2, Pr = 6.93, dp = 50$ با استفاده از الگوریتم (PSO) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود این الگوریتم از همگرایی خوبی برخوردار است.

جدول ۴-۶: بهینه‌سازی با یک تابع هدف برای نانوسیال آب-مس در شرایط: $a = 0.2, Pr = 6.93, dp = 50$.

Itration	ReC _f
۲۵	۵/۶۲۸۲



شکل ۴-۳۸: مینیمم ضریب اصطکاک برای نانوسیال آب-مس در شرایط: $a = 0.2$, $Pr = 6.93$, $dp = 50$

۴-۱-۲ بهینه‌سازی با دو تابع هدف

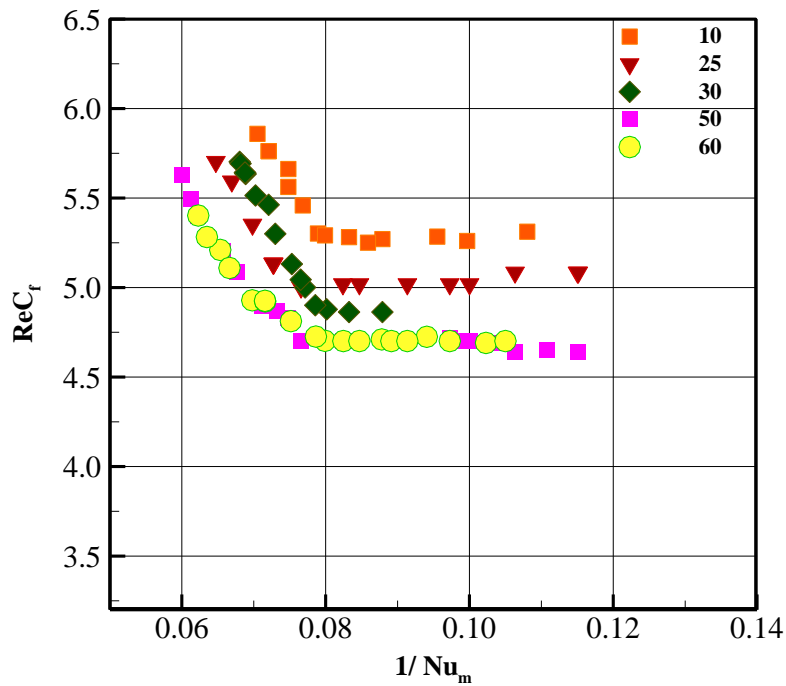
آنچه در این مبحث به آن پرداخته شده است، بهینه‌سازی با دو تابع هدف می‌باشد که این کار برای دو تابع هدف عدد ناسلت متوسط و ضریب اصطکاک پوسته‌ای با متغیرهای تصمیم، کسر حجمی نانوسیال، قطر نانو ذره، دامنه موج و عدد رینولدز می‌باشد که این کار با قطر نانو ذره ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ نانومتر، عدد رینولدز ۳۴۲، ۵۵۲ و ۶۷۱ و طول موج ۰/۸، ۲ و ۴ صورت گرفته است. برای بهینه‌سازی از روش (MOPSO) استفاده شده است. که روش اجرای این الگوریتم قبلاً در فصل دو آورده شده است. یکی از مباحثی که در بهینه‌سازی وجود دارد مفهوم پرتو می‌باشد. اگر مسئله، یک مسئله‌ی کمینه‌سازی باشد، هر چه نمودار به مبدأ نزدیک‌تر باشد، به جواب بهینه نزدیک‌تر می‌شود. در زیر چند نمودار برای نمونه آورده شده است که این مفهوم را توضیح می‌دهد.

در شکل ۴-۳۹ قطر نانو ذره مس ۲۰ نانومتر و دامنه موج ۰/۲ می‌باشد و توابع هدف مسئله نیز ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت متوسط در نظر گرفته شده است. این نمودار بیان می‌کند که از تکرار ۴۸ به بعد تغییری در منحنی پرتو ایجاد نمی‌گردد و ذرات، جبهه پرتو را پیدا کرده‌اند. منظور از جبهه پرتو نموداری است که با افزایش تعداد تکرار، نمودار حرکتی نکند و جابجا نشود. ذرات در تکرار

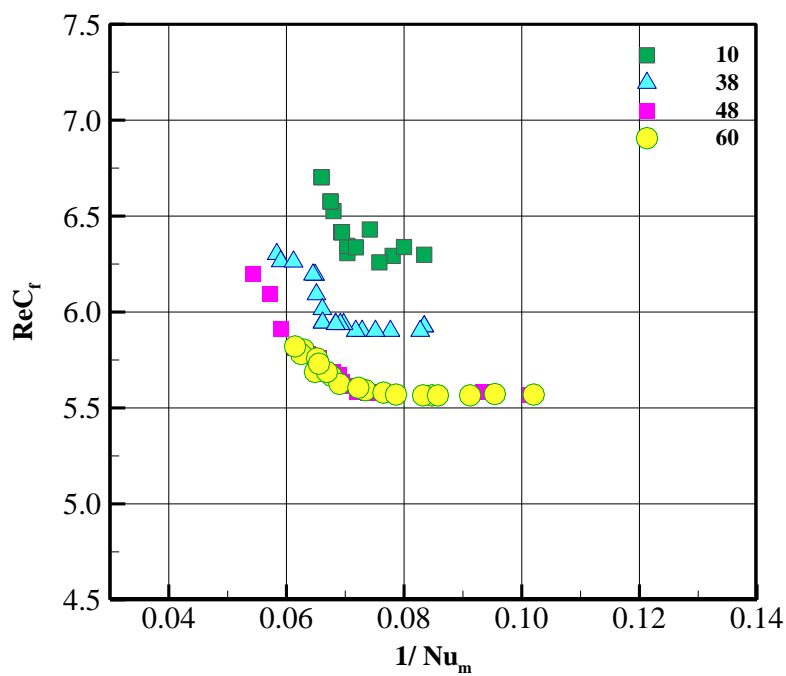
۶۰ به همگرایی رسیدند. منظور از همگرایی این است که با افزایش تکرار تغییری در مقدار ذرات حاصل نشود و ذرات همان مقادیر قبلی را داشته باشند.

اعدادی که نمودار را تشکیل می‌دهند در واقع مقادیری هستند که توسط ذرات نامغلوب بدست آمدند که این ذرات در مخزن قرار گرفتند. ذرات نامغلوب ذراتی هستند که در هیچ حالتی بدتر از ذرات دیگر نیستند و حداقل در یک حالت بهتر از ذرات دیگر می‌باشند؛ که در این نمودار ذرات نامغلوب، ذراتی هستند که عدد ناسلت متوسط آن‌ها بیشترین مقدار است یا کمترین ضریب اصطکاک پوسته‌ای را دارا می‌باشند و یا هم کمترین ضریب اصطکاک پوسته‌ای و بیشترین عدد ناسلت متوسط را دارند. تمام مقادیری که بالای منحنی پرتو قرار می‌گیرند مجموعه ذرات مغلوب می‌باشند که توسط ذرات داخل مخزن مغلوب شدند.

همچنین شکل ۴-۴۰ همگرایی منحنی پرتو با قطر نانو ذره مس ۱۰۰ نانومتر و دامنه‌ی موج ۰/۲ و با همان توابع هدف شکل ۴-۳۹ را نشان می‌دهد. آنچه از این نمودار پیداست ذرات، جبهه پرتو را در تکرار ۴۸ پیدا کردند و در تکرار ۶۰ به همگرایی رسیدند.

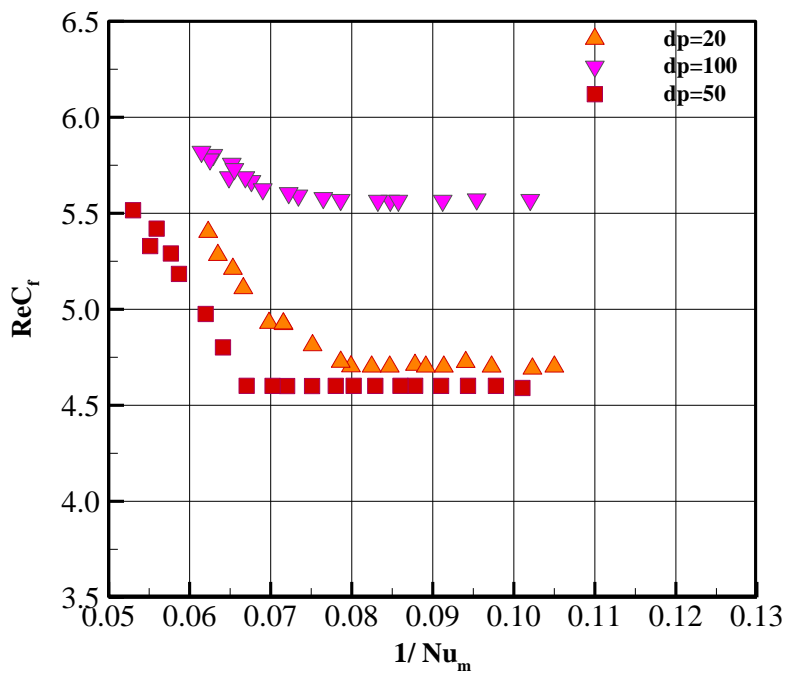


شکل ۴-۳۹: منحنی پرتو نانوسیال آب-مس در شرایط: $d_p = 20$



شکل ۴-۴۰: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-مس در شرایط: $d_p = 100$

برای آن که تأثیر قطر نانو ذره مس بر روی توابع هدف معلوم شود شکل ۴-۴۱ برای توابع هدف در زمان همگرایی رسم شده است. در شکل ۴-۴۱ مشاهده می‌شود که برای توابع هدف بیشترین عدد ناسلت متوسط و کمترین ضریب اصطکاک پوسته‌ای قطر نانو ذره مس ۵۰ نانومتر از عملکرد بهتری برخوردار است و به مبدأ نزدیک‌تر می‌باشد و هر دو تابع هدف در این قطر مقدار کمتری نسبت به قطرهای دیگر ورودی را دارا می‌باشد. در جدول ۴-۷ متغیرهای تصمیم مسئله که مقادیر آن در نمودار بالا بدست آمده است، به صورت نمونه آورده شده است.

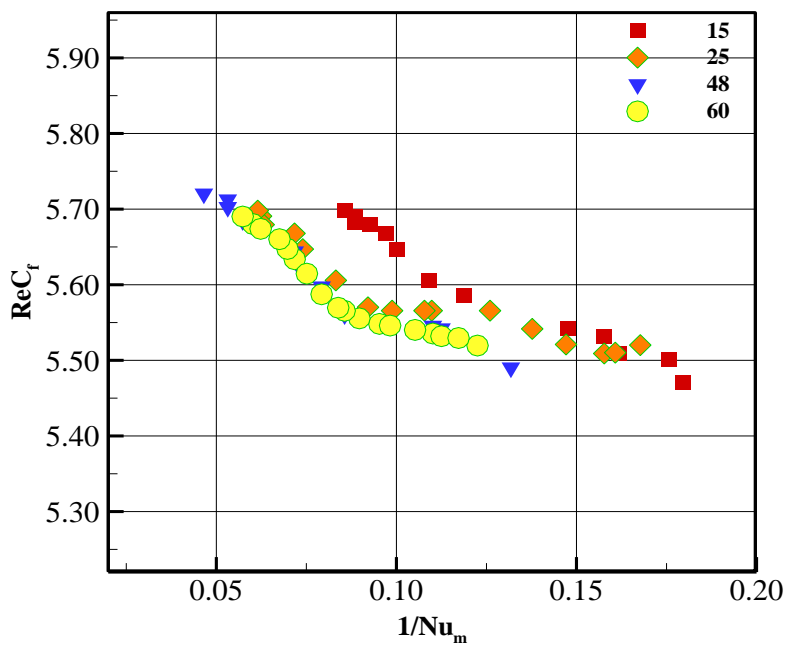


شکل ۴-۴۱: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-مس برای سه قطر متفاوت

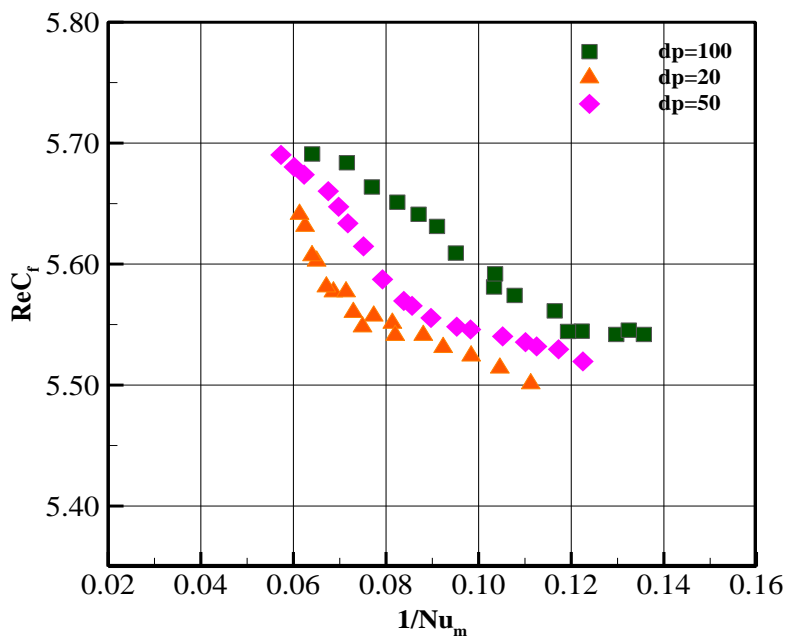
جدول ۴-۷: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و عدد رینولدز برای قطر نانوسیال ورودی نانوسیال آب-مس با روش MOPSO

قطر ورودی نانو ذره	کسر حجمی نانوسیال	عدد رینولدز	معکوس عدد ناسلت متوسط	ضریب اصطکاک پوسته‌ای
۲۰	۰/۰۹۶۶۰	۵۵۲/۵۲۰۱	۰/۱۰۶۳۴	۴/۸۴۰۷
	۰/۰۳۶۸۹	۸۲۳/۲۶۸۳	۰/۰۷۱۵۹	۵/۰۲۶۱
۵۰	۰/۰۶۶۶۲	۹۵۲/۲۳۶۱	۰/۰۸۲۵۰	۴/۹۰۱۲
	۰/۰۶۲۵۰	۵۷۸/۴۹۸۲	۰/۱۰۲۳	۴/۹۰۱۲
۱۰۰	۰/۰۶۵۹	۵۱۵/۸۳۹۷	۰/۰۷۴۳	۵/۵۶۹۸
	۰/۰۶۷۷۹	۷۶۳/۵۱۹۹	۰/۱۰۲۰	۵/۵۶۹۶

در شکل ۴-۴۲ قطر نانو ذره آلومینیوم اکسید ۵۰ نانومتر و دامنه موج ۰/۲ می‌باشد، و توابع هدف مسئله نیز ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت متوسط در نظر گرفته شده است. این نمودار بیان می‌کند که از تکرار ۵۰ به بعد تغییری در منحنی پرتو ایجاد نمی‌گردد و ذرات، جبهه پرتو را پیدا کرده‌اند. ذرات در تکرار ۶۰ به همگرایی رسیدند. شکل ۴-۴۳ نشان می‌دهد که برای توابع هدف بیشترین عدد ناسلت متوسط و کمترین ضریب اصطکاک پوسته‌ای قطر نانو ذره آلومینیوم اکسید ۲۰ نانومتر از عملکرد بهتری برخوردار است و به مبدا نزدیک‌تر می‌باشد و هر دو تابع هدف در این قطر مقدار کمتری نسبت به قطرهای دیگر ورودی را دارا می‌باشد. متغیرهای تصمیم مسئله برای نانوسیال آلومینیوم اکسید به صورت موردی در جدول ۴-۸ ذکر گردیده است.



شکل ۴-۴۲: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید در شرایط: $d_p = 50$

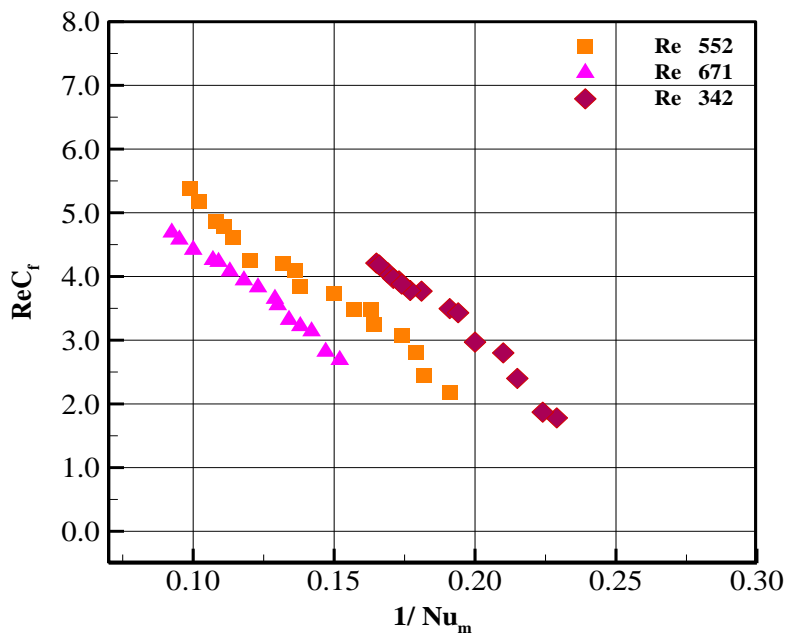


شکل ۴-۴۳: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید برای سه قطر متفاوت

جدول ۴-۸: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و عدد رینولدز برای قطر نانوسیال ورودی نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید با روش *MOPSO*

قطر ورودی نانو ذره	کسر حجمی نانوسیال	عدد رینولدز	معکوس عدد ناست متوسط	ضریب اصطکاک پوسته‌ای
۲۰	۰/۰۴۶۳۰	۴۹۶/۲۹۷۸	۰/۱۰۴۵۸	۵/۵۲۰۲
	۰/۰۴۵۴۴	۵۳۸/۱۴۵۲	۰/۰۹۸۳۳	۵/۵۳۷۳
۵۰	۰/۰۴۵۹۵	۵۰۸/۴۴۰۵	۰/۰۹۵۲۸	۵/۵۴۱۱
	۰/۰۷۵۶۲	۸۰۷/۹۸۱۲	۰/۰۷۱۰۲	۵/۵۶۰۱
۱۰۰	۰/۰۴۵۹۸	۵۳۱/۲۸۳۷	۰/۰۹۸۳۸	۵/۶۰۹۱
	۰/۰۴۶۵۳	۸۹۴/۰۹۸۳	۰/۱۱۶۴۲	۵/۵۶۱۳

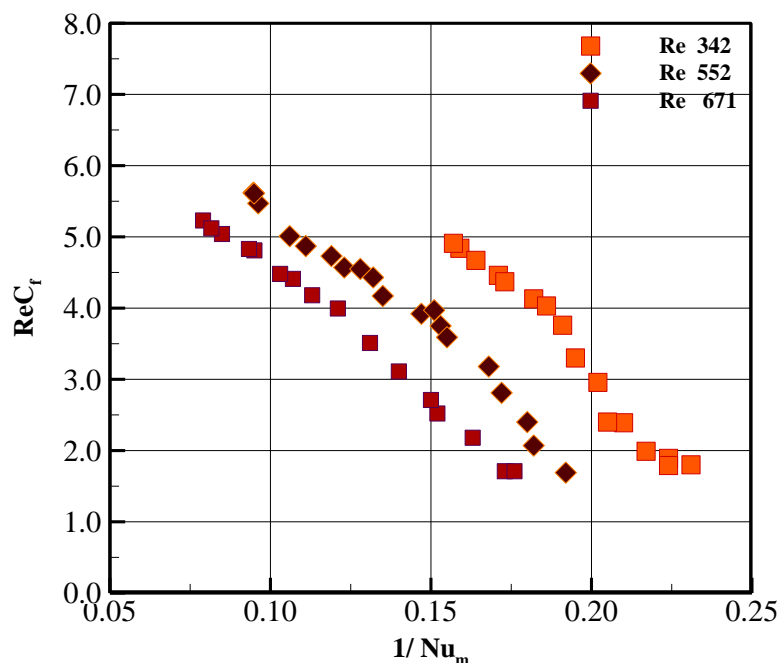
در شکل ۴-۴۴ منحنی پرتو برای سه عدد رینولدز متفاوت و در قطر نانو ذره مس ۵۰ نانومتر ترسیم شده است. توابع هدف مسئله ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناست متوسط و متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی موج در نظر گرفته شده است. متغیرهای تصمیم مسئله برای نانوسیال آب-مس به صورت موردی در جدول ۴-۹ ذکر گردیده است. همان طور که در شکل مشاهده می‌شود عدد رینولدز ۶۷۱ از عملکرد بهتری برخوردار است و به مبدأ نزدیک تر می‌باشد و هر دو تابع هدف در این عدد رینولدز مقدار کمتری نسبت به اعداد رینولدز دیگر ورودی را دارا می‌باشد. شکل ۴-۴۵ نشان می‌دهد که برای توابع هدف بیشترین عدد ناست متوسط و کمترین ضریب اصطکاک پوسته‌ای عدد رینولدز ۶۷۱ برای نانو ذره آلومینیوم اکسید ۲۰ نانو متر از عملکرد بهتری برخوردار است و به مبدأ نزدیک تر می‌باشد و هر دو تابع هدف در این عدد رینولدز مقدار کمتری نسبت به اعداد رینولدز دیگر ورودی را دارا می‌باشد. متغیرهای تصمیم مسئله برای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید به صورت موردی در جدول ۴-۱۰ ذکر گردیده است.



شکل ۴-۴ منحنی پرتو برای نانوسیال آب-مس برای سه عدد رینولدز متفاوت

جدول ۴-۹: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی موج برای عدد رینولدز ورودی نانوسیال آب-مس با روش MOPSO

ضریب اصطکاک پوسته‌ای	معکوس عدد ناست متوسط	دامنه‌ی موج	کسر حجمی نانوسیال	عدد رینولدز ورودی
۴/۰۵۷۶	۰/۱۶۸۷	۰/۱۶۳۰	۰/۰۹۸۴۱	۳۴۲
۳/۴۲۸۳	۰/۱۹۴۱	۰/۰۱۲۳۰	۰/۰۳۸۶۴	
۴/۵۱۳۳	۰/۱۱۷۷	۰/۱۷۷۱	۰/۰۴۵۱۳	۵۵۲
۴/۸۵۹۶	۰/۱۰۸۱۰	۰/۱۵۳۱	۰/۰۴۹۳۵	
۴/۵۷۶۴	۰/۰۹۵۱۲	۰/۱۷۲۳	۰/۰۵۸۳۳	۶۷۱
۴/۱۵۲۳	۰/۱۱۷۷۵	۰/۱۴۲۹	۰/۰۴۶۲۹	

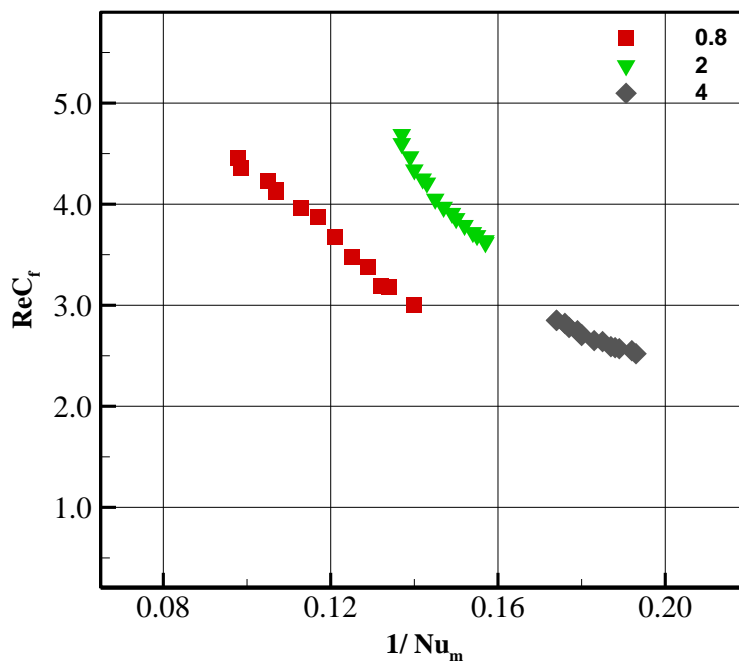


شکل ۴-۴۵ منحنی پرتو برای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید برای سه عدد رینولدز متفاوت

جدول ۴-۱۰: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی موج برای عدد رینولدز ورودی نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید با روش MOPSO

عدد رینولدز ورودی	کسر حجمی نانوسیال	دامنه‌ی موج	معکوس عدد ناست متوسط	ضریب اصطکاک پوسته‌ای
۳۴۲	۰/۰۵۸۲۵	۰/۱۲۷۱	۰/۱۵۷۶	۴/۹۰۵۰
	۰/۰۵۳۷۴	۰/۱۵۹۸	۰/۱۶۴۱	۴/۰۱۸۳
۵۵۲	۰/۰۲۰۶۹	۰/۱۹۸۰	۰/۱۰۵۸	۵/۰۱۲۳
	۰/۰۲۳۵۲	۰/۱۹۲۹	۰/۱۱۷۵	۴/۷۲۵۴
۶۷۱	۰/۰۰۳۸۰	۰/۱۸۲۳	۰/۰۸۱۶	۵/۱۱۹۹
	۰/۰۱۶۸۲	۰/۱۷۵۶۱	۰/۰۷۸۹۷	۵/۲۳۲۱۱

در شکل ۴-۴۶ منحنی پرتو برای سه طول موج متفاوت و در قطر نانو ذره مس ۵۰ نانومتر و عدد رینولدز ۵۵۲ ترسیم شده است. توابع هدف مسئله ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد ناسلت متوسط و متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی موج در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود طول موج ۰/۸ بهتر از طول موج ۲ می‌باشد. زیرا ذرات دارای عدد ناسلت متوسط بیشتری برخوردارند. طول موج ورودی ۴ کمترین مقدار عدد ناسلت متوسط را دارا می‌باشد؛ اما ضریب اصطکاک پوسته‌ای آن کم می‌باشد. متغیرهای تصمیم مسئله برای نانوسیال آب-مس به صورت موردی در جدول ۴-۱۱ ذکر گردیده است.



شکل ۴-۴۶: منحنی پرتو برای نانوسیال آب-مس برای سه طول موج متفاوت

جدول ۱۱-۴: متغیرهای تصمیم کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی موج برای طول موج ورودی نانوسیال آب-مس با روش MOPSO

طول موج ورودی	کسر حجمی نانوسیال	دامنه‌ی موج	معکوس عدد ناست متوسط	ضریب اصطکاک پوسته‌ای
۰/۸	۰/۰۴۸۰۶	۰/۱۴۶۲	۰/۱۰۶۶	۴/۱۴۲۰
	۰/۰۵۳۸۷	۰/۲۸۹۶	۰/۱۲۹۰	۳/۳۷۹۹
۲	۰/۱	۰/۱۷۶۸	۰/۱۳۷۶	۴/۶۹۳۲
	۰/۰۷۳۳۶	۰/۲۰۵۰	۰/۱۱۴۲	۴/۲۱۳۸
۴	۰/۰۹۷۳۰	۰/۲۱۶۸	۰/۱۷۸۶	۲/۷۴۷۷
	۰/۰۹۷۷۸	۲/۲۰۹	۰/۱۸۵۱	۲/۶۴۱۹

فصل ۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این فصل خلاصه‌ای از نتایج به‌دست آمده در این پایان‌نامه ارائه می‌گردد و در نهایت موضوعاتی جدید و مکمل در راستای موضوع پایان‌نامه، پیشنهاد می‌گردد.

۵-۱- بحث و نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه به بهینه‌سازی انتقال حرارت جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره موج‌دار پرداخته شد. معادلات حاکم ابتدا گسسته‌سازی شده و سپس برنامه‌ای با زبان برنامه‌نویسی ++C نوشته شد. سپس اثر کمیت‌های مختلف نظیر دامنه‌ی موج، عدد رینولدز، عدد پرانتل و غیره مورد بررسی قرار گرفت.

از مهم‌ترین نتایج و دستاوردهای این پایان‌نامه می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- با افزایش دامنه موج دیواره‌های کانال، گرادیان سرعت روی دیواره زیاد می‌گردد که عاملی در جهت افزایش انتقال حرارت می‌باشد. همچنین افزایش مقدار دامنه ضریب اصطکاک پوسته‌ای و عدد استانتون را افزایش می‌دهد.

- با توجه به این که عدد رینولدز به صورت نسبت نیروی اینرسی بر لزجت است، بنابراین افزایش این کمیت، موجب افزایش انتقال حرارت و ضریب اصطکاک پوسته‌ای می‌شود. با افزایش عدد رینولدز عدد استانتون کاهش می‌یابد.
- افزایش عدد پرانتل باعث افزایش عدد ناسلت و انتقال حرارت می‌شود ولی بر ضریب اصطکاک پوسته‌ای تأثیری نمی‌گذارد. همچنین با افزایش عدد پرانتل عدد استانتون کاهش می‌یابد. با افزایش کسر حجمی نانوسیال ضریب هدایت گرمایی سیال افزایش می‌یابد در نتیجه انتقال حرارت افزایش می‌یابد. افزایش کسر حجمی نانوسیال باعث کاهش ضریب اصطکاک پوسته‌ای می‌شود. همچنین با افزایش کسر حجمی نانوسیال عدد استانتون افزایش می‌یابد. با افزایش قطر نانو ذره انتقال حرارت کاهش می‌یابد.
- بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم ازدحام ذرات و با توجه به سازگار بودن این روش با نوع مسئله، روش بسیار خوب و کارآمدی می‌باشد. برای بهینه‌سازی تک‌هدفه با تابع هدف عدد ناسلت متوسط و متغیرهای طراحی کسر حجمی نانوسیال و عدد رینولدز مقادیر بهینه به دست آمده برابر است با:
 $Re = 534, \varphi = 3.774\%$ برای مقدار $a = 0.2, \varphi = 3.774\%$ مقدار عدد ناسلت متوسط 19.21% افزایش یافته است.
- در بهینه‌سازی چندهدفه برای نانوسیال آب-مس با توابع هدف بیشترین عدد ناسلت متوسط و کمترین ضریب اصطکاک پوسته‌ای و متغیرهای طراحی عدد رینولدز و کسر حجمی نانوسیال، قطر نانو ذره ورودی 50 نانومتر از عملکرد بهتری برخوردار است. برای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید نیز با این توابع هدف و متغیرهای طراحی با قطر نانو ذره 20 نانومتر، ذرات با قطر ورودی 50 نانومتر را مغلوب می‌کنند.
- همچنین بهینه‌سازی با تابع هدف بیشترین عدد ناسلت متوسط و کمترین ضریب اصطکاک پوسته‌ای با متغیرهای طراحی کسر حجمی نانوسیال و دامنه‌ی موج برای نانوسیال مس-آب و

عدد رینولدز ورودی ۶۷۱ دارای منحنی پرتو بهتری می باشد و از عملکرد مطلوبی برخوردار است. لذا انتخاب عدد رینولدز ۶۷۱ برای زمانی که این دو تابع از اهمیت خاصی برخوردار باشد، مناسب می باشد. برای نانوسیال آب-آلومینیوم اکسید نیز با همین توابع هدف و متغیرهای طراحی عدد رینولدز ورودی ۶۷۱ دارای منحنی پرتو بهتری می باشد.

- همچنین بهینه سازی با تابع هدف بیشترین عدد ناسلت متوسط و کمترین ضریب اصطکاک پوسته ای با متغیرهای طراحی کسر حجمی نانوسیال و دامنه ی موج برای نانوسیال مس-آب و عدد رینولدز ۵۵۲ طول موج ورودی $0/8$ نسبت به طول موج ۲ دارای منحنی پرتو بهتری می باشد و از عملکرد مطلوبی برخوردار است. طول موج ۴ دارای کمترین ضریب اصطکاک پوسته ای می باشد ولی عدد ناسلت آن هم کم می باشد.
- انتخاب پارامترهای مسئله بستگی به نیاز طراح و شرایط مسئله دارد با توجه به اینکه مسئله نسبت به این پارامترها حساسیت بالایی دارد با انتخاب درست و بهینه می توان به بهبود عملکرد کانال با دیواره ی موج دار کمک بزرگی انجام داد.

۵-۲- پیشنهادها

به منظور ارتقای سطح کیفی تحقیق حاضر و انجام مطالعه ی جامع تر در راستای موضوع این پایان نامه،

پیشنهادها و توصیه هایی به شرح زیر مطرح می گردد:

- حل عددی جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره های موج دار به همراه چشمه حرارتی به همراه واکنش شیمیایی
- حل عددی جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره های موج دار به همراه چشمه حرارتی همراه با در نظر گرفتن اثرات تشعشع^۱

^۱ Radiation Effect

- حل عددی جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره‌های موج‌دار با زاویه‌های موج متفاوت
- حل عددی جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره‌های موج‌دار به همراه چشمه حرارتی با در نظر گرفتن ویژگی‌های یک سیال غیرنیوتنی
- حل تحلیلی جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره‌های موج‌دار به همراه چشمه حرارتی
- بهینه‌سازی جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره‌های موج‌دار با الگوریتم‌های تکاملی دیگر
- بهینه‌سازی جریان یک نانوسیال در کانال با دیواره‌های موج‌دار با الگوریتم‌های ازدحام ذرات و انتخاب توابع هدف و متغیرهای طراحی دیگر

مراجع

- [1] Bergles, A.E., *Recent development in convective heat transfer augmentation*. 1973. p. 675-682.
- [2] Singh Ahuja, A., *Augmentation of heat transport in laminar flow of polystyrene suspensions experiments and results*. 1975. p. 3408-3416.
- [3] Choi, S.U.S. and J.A. Eastman, *Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles*. 1995: United States.
- [4] Roy, G., C.T. Nguyen, and P.-R. Lajoie, *Numerical investigation of laminar flow and heat transfer in a radial flow cooling system with the use of nanofluids, Superlattices and Microstructures*. 2004. p. 497-511.
- [5] Murshed, S.M.S., K.C. Leong, and C. Yang, *A combined model for the effective thermal conductivity of nanofluids, Applied Thermal Engineering*. 2009. p. 2477-2483.
- [6] Ebrahimnia-Bajestan, E., Niazmand, H., Duangthongsuk, W., & Wongwises, S., *Numerical investigation of effective parameters in convective heat transfer of nanofluids flowing under a laminar flow regime, International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011. p. 4376-4388.
- [7] Wei, X., Zhu, H., Kong, T., & Wang, L., *Synthesis and thermal conductivity of Cu₂O nanofluids*. 2009. p. 4371-4374.
- [8] Duangthongsuk, W. and S. Wongwises, *An experimental study on the heat transfer performance and pressure drop of TiO₂-water nanofluids flowing under a turbulent flow regime, International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2010. p. 334-344.
- [9] Sajadi, A.R. and M.H. Kazemi, *Investigation of turbulent convective heat transfer and pressure drop of TiO₂/water nanofluid in circular tube, International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2011. p. 1474.
- [10] M.R.Azimi, A.A., M.Mirzaei, *Investigation of the unsteady graphene oxide nanofluid flow between two moving plates, Journal of computational and theoretical nano science*. 2014. p., PP. 2104–2108.

- [11] Freidoonimehr, N., M.M. Rashidi, and S. Mahmud, *Unsteady MHD free convective flow past a permeable stretching vertical surface in a nano-fluid*, *International Journal of Thermal Sciences*. 2015. p. 136-145.
- [12] Uddin, M. B., Rahman, M. M., Khan, M. A. H., Saidur, R., & Ibrahim, T. A., *Hydromagnetic double-diffusive mixed convection in trapezoidal enclosure due to uniform and nonuniform heating at the bottom side: Effect of Lewis number*, *Alexandria Engineering Journal*. 2016. p. 1165-1176.
- [13] Turkyilmazoglu, M. and I. Pop, *Heat and mass transfer of unsteady natural convection flow of some nanofluids past a vertical infinite flat plate with radiation effect*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2013. p. 167-171.
- [14] Rahman, M. M., Öztop, H. F., Joarder, A. H., Saidur, R., Hamzah, N., Al-Salem, K., & Ibrahim, T. A., *Unsteady analysis of natural convection in a carbon nanotube-water filled cavity with an inclined heater*, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 2016, Taylor & Francis. p. 794-809.
- [15] Burns, J., *A Review of Steam Soak Operations in California*. Society of Petroleum Engineers.
- [16] Asako, Y. and M. Faghri, *Finite-Volume Solutions for Laminar Flow and Heat Transfer in a Corrugated Duct*. 1987.
- [17] Rush, T.a., T.a. Newell, and A.m. Jacobi, *An experimental study of flow and heat transfer in sinusoidal wavy passages*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1999. p. 1541-1553.
- [18] Wang, C.-C., J.Y. Jang, and N.F. Chiou, *A Heat Transfer and Friction Correlation for Wavy Fin-and-Tube Heat Exchangers*. 1999. p. 1919-1924.
- [19] Wang, C.C. and C.K. Chen, *Forced convection in a wavy-wall channel*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. p. 2587-2595.
- [20] Comini, G., C. Nonino, and S. Savino, *Effect Of Aspect Ratio On Convection Enhancement In Wavy Channels*, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 2003, Taylor & Francis. p. 21-37.
- [21] Nilpueng, K. and S. Wongwises, *Flow pattern and pressure drop of vertical upward gas-liquid flow in sinusoidal wavy channels*, *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2006. p. 523-534.

- [22] Heidary, H. and M.J. Kermani, *Effect of nano-particles on forced convection in sinusoidal-wall channel*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2010. p. 1520-1527.
- [23] Ahmed, M.A., M.Z. Yusoff, and N.H. Shuaib, *Effects of geometrical parameters on the flow and heat transfer characteristics in trapezoidal-corrugated channel using nanofluid*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2013. p. 69-74.
- [24] Khoshvaght-Aliabadi, M., F. Hormozi, and A. Zamzamian, *Role of channel shape on performance of plate-fin heat exchangers: Experimental assessment*, *International Journal of Thermal Sciences*. 2014. p. 183-193.
- [25] Vanaki, S.M., et al., *Effect of nanoparticle shapes on the heat transfer enhancement in a wavy channel with different phase shifts*, *Journal of Molecular Liquids*. 2014. p. 32-42.
- [26] Feng, H., Chen, L., Xie, Z., & Sun, F., *Constructal entransy dissipation rate minimization for variable cross-section insulation layer of the steel rolling reheating furnace wall*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2014. p. 26-32.
- [27] Fabbri, G., *Heat transfer optimization in corrugated wall channels*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2000. p. 4299-4310.
- [28] Yang, Y.-T., Y.-H. Wang, and P.-K. Tseng, *Numerical optimization of heat transfer enhancement in a wavy channel using nanofluids*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2014. p. 9-17.
- [29] Valinataj-Bahnemiri, P., Ramiar, A., Manavi, S. A., & Mozaffari, A., *Heat transfer optimization of two phase modeling of nanofluid in a sinusoidal wavy channel using Artificial Bee Colony technique*, *Engineering Science and Technology, an International Journal*. 2015. p. 727-737.
- [30] Helbig, M. and A.P. Engelbrecht, *Dynamic Multi-Objective Optimization Using PSO*, *Metaheuristics for Dynamic Optimization*, E. Alba, A. Nakib, and P. Siarry, Editors. 2013, Springer Berlin Heidelberg :Berlin, Heidelberg. p. 147-188.
- [31] Saruhan, H., *Design Optimization Of Mechanical Systems Using Genetic algorithms*. 2003. p. pp.77-84.

- [32] Sobieszczanski-Sobieski, J., *Multidisciplinary Design Optimization: An Emerging New Engineering Discipline*, *Advances in Structural Optimization*, J. Herskovits, Editor. 1995, Springer Netherlands: Dordrecht. p. 483-496.
- [33] Abbattista, F., N. Abbattista, and L. Caponetti, *An evolutionary and cooperative agents model for optimization*, *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. 1995. p. 668-671 vol.2.
- [34] Suganthan, P., *Particle Swarm Optimiser with Neighbourhood Operator*. 1999. p. 1962 Vol. 3.
- [35] میکائیلی, س.ز., پایان نامه ارشد, " بهینه‌سازی پارامترهای طراحی یاتاقان‌های ژورنال", دانشگاه صنعتی شاهرود, دانشکده مکانیک ۱۳۹۴.
- [36] Abido, M.A., *Optimal power flow using particle swarm optimization*, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*. 2002. p. 563-571.
- [37] Abido, M., *Particle swarm optimization for multimachine power system stabilizer design*. 2001. p. 1346-1351 vol.3.
- [38] Bunnag, D. and M. Sun, *Genetic algorithm for constrained global optimization in continuous variables*, *Applied Mathematics and Computation*. 2005. p. 604-636.
- [39] K. Vis, J., *Particle Swarm Optimizer for Finding Robust Optima*. 2009.
- [40] Reynolds, C.W., *Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model*, *Siggraph Comput. Graph*. 1987. p. 25-34.
- [41] Hoorfar, A., *Evolutionary Programming in Electromagnetic Optimization: A Review*, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. 2007. p. 523-537.
- [42] Ab Wahab, M.N., S. Nefti-Meziani, and A. Atyabi, *A Comprehensive Review of Swarm Optimization Algorithms*, *Plos One*. 2015, Public Library of Science: San Francisco, CA USA. p. e0122827.
- [43] Computing, C.I.a.A.E., *Introduction computational intelligence 2007: : an introduction chapter 3*. p. no. Part 2.
- [44] Eberhart, R.C. and Y. Shi, *Comparison between genetic algorithms and particle swarm optimization*, *Evolutionary Programming VII: 7th International Conference, EP98 San Diego, California, USA, March 25–27, 1998 Proceedings*,

- V.W. Porto, et al., Editors. 1998, Springer Berlin Heidelberg: Berlin, Heidelberg. p. 611-616.
- [45] R.C.Eberhat, *Computational Intelligence Pc Tools [Books in Brief , IEEE Transactions on Neural Networks*. 1997. p. 817-817.
- [46] Akbarzadeh, P., S.Z. Mikaeeli, and M. Rahimiyan, *Multiobjective optimization of thermohydrodynamic journal bearing using MOPSO algorithm*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, 2017: p. 1350650117724639.
- [47] Deb, K., *Multi-objective Optimisation Using Evolutionary Algorithms: An Introduction, Multi-objective Evolutionary Optimisation for Product Design and Manufacturing*, L. Wang ,A.H.C. Ng, and K. Deb, Editors. 2011, Springer London: London. p. 3-34.
- [48] Whittaker, E.T. and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*. 1996, Cambridge University Press.
- [49] Koo, J. and C. Kleinstreuer, *A new thermal conductivity model for nanofluids , Journal of Nanoparticle Research*. 2004. p. 577-588.
- [50] Anderson, J., *Computational Fluid Dynamics*. 1995, McGraw-Hill Education.
- [51] Hoffmann, G.H.K.-H., *Numerical Mathematics*. 1991: Springer-Verlag New York. p. XII, 425.
- [52] Napolitano, M., *Efficient ADI and spline ADI methods for the steady-state Navier-Stokes equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 1984, John Wiley & Sons, Ltd. p. 1101-1115.
- [53] Rubin, S.G., *Incompressible flow along a corner, Journal of Fluid Mechanics*. 2006, Cambridge University Press. p. 97-110.
- [54] Rubin, S.G.a.K., P.K, *Higher Order Numerical Methods Derived From Three-Point Polynomial Interpolation, General Applied Science Labs*. p. GASL TR 228, 1976.
- [55] G. Rubin, S. and R. A. Graves, *Viscous flow solutions with a cubic spline approximation*. 1975. p. 1-36.

- [56] G. Rubin, S., *Incompressible Navier-Stokes and parabolized Navier-Stokes solution procedures and computational techniques*. 1982.
- [57] Pu, W., *Spline Method Of Fractional Steps In Numerical Model Of Unsteady Natural Convection Flow At High Rayleigh Number*, *Numerical Heat Transfer*. 1987, Taylor & Francis. p. 95-108.
- [58] Lauriat, G. and I. Altimir, *A new formulation of the SADI method for the prediction of natural convection flows in cavities*, *Computers & Fluids*. 1985. p. 141-155.
- [59] Rubin, S.G. and R.A. Graves, *A Cubic Spline Approximation for Problems in Fluid Mechanics*. 1975, U.S. National Aeronautics and Space Administration.
- [60] Ranz, W. and W.R. Marshall, *Evaporation from drops* .*Chem. Eng. Prog*, 1952. 48(3): p. 141-146.

Abstract

Interest in heat transfer optimization in a channel with wavy walls has increased considerably over the last decades because of obvious importance of these channels in the industry. These channels are widely used for engineering systems such as heat exchangers, cooling devices, gas turbines, nuclear reactors and electrical chips and etc.

In this thesis, Multi Objective Particle Swarm Optimization Algorithm (MOPSO) is used to optimize the heat transfer of a nanofluid flow through the channel with wavy wall. The optimization method is based on the lowest skin- friction coefficient and the highest average Nusselt number. Results are presented for different values of diameter of nanoparticle, wave length and Reynolds number. The design variables of problem are nanoparticle volume fraction, Reynolds number and wave amplitude. In this study, for numerical solution of the incompressible Navier Stokes equations, a program is written using a finite difference approximation algorithm with the Spline Alternating Direction Implicit (SADI) and the Alternating Direction Implicit (ADI).

In the present study, using numerical results, the effect of different quantities such as Reynolds number ($100 \leq Re \leq 700$), Prandtl number, wavy amplitude of the walls of channel ($0 \leq a \leq 0.3$), nanoparticle volume fraction ($0 \leq \varphi \leq 5\%$) and diameter of nanoparticle ($20 \leq d_p \leq 100 \text{ nm}$) has been investigated. The results showed that volume fraction and the wavy wall's amplitude has a direct effect on the average Nusselt number. Furthermore, an optimum values for Reynolds number, diameter of nanoparticle, nanoparticle volume fraction and wave length is found to maximize the average Nusselt number and minimum the skin- friction coefficient.

Keywords: channel with wavy walls, nanofluid, particle swarm algorithm, Spline Alternating Direction Implicit.



Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering
M.Sc. Thesis in Energy Conversion Engineering

Heat transfer optimization of nanofluid in a wavy channel using particle swarm optimization algorithm

by
Samaneh Safijahanshahi

Supervisor
Dr. Pooria Akbarzadeh

Advisor
Dr. Morteza Rahimiyan

January 2018