بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

حلّ کامل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییر شکل‌های بزرگ به‌کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی

دانشجو:

نوید بهادرانی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد

بهمن ۹۶

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای نوید بهادرانی

تحت عنوان:

حلّ کامل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییر شکل‌های بزرگ به‌کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	**امضاء**	**اساتید مشاور**	**امضاء**
دکتر مهدی قنّاد			

اساتید داور	**امضاء**	**نماینده تحصیلات تکمیلی**	**امضاء**
دکتر محمد جعفری		دکتر مهدی وحدتی	
دکتر علی‌رضا شاطرزاده			

تشکر و قدردانی

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نسیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار ، مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

از استاد گرامیم جناب آقای دکتر مهدی قنّاد بسیار سپاسگزارم چرا که در این مدت توانستم از سواد و تجربه ایشان نهایت استفاده را بکنم، همچنین از ایشان بابت اینکه فرصت آشنایی من با جناب آقای مهندس محمدحسین سوهانی را فراهم کردند متشکرم.

از جناب آقای مهندس محمدحسین سوهانی به دلیل یاری‌ها و راهنمایی‌های بی‌چشم‌داشت ایشان که بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان‌تر نمودند کمال تشکر را دارم.

از خواهر دلبندم که سختی‌های این راه را با هم‌فکری‌ها، هم‌زبانی‌ها و هم‌دلی‌های صمیمانه‌اش به امید و روشنایی راه تبدیل کرده تشکر میکنم. همچنین از برادران گرامیم علی‌الخصوص برادر عزیزم جناب آقای مهندس وحید بهادرانی که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بود و تکیه‌گاه من در مواجهه با مشکلات، و وجودش مایه دلگرمی من بود سپاسگذارم و امیدوارم در آینده‌ی نزدیک جوابگوی این همه محبت آنها باشم.

در پایان، از همکاری‌ها و کمک‌های دوستان عزیزم کمال تشکر را دارم.

تعهد نامه

اینجانب نوید بهادرانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک، گرایش طراحی کاربردی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه **" حلّ کامل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییر شکل‌های بزرگ به‌کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی"** تحت راهنمایی دکتر مهدی قناد متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود هست و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافته‌ای آن‌ها) استفاده‌شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده‌شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در پژوهش حاضر، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تحت فشار، ساخته‌شده از مواد ناهمگن و همسانگرد با تغییر شکل‌های بزرگ به‌کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی (NPET) استخراج شده است. به‌دلیل وجود تغییر شکل‌های بزرگ در جهت شعاعی و در نتیجه وجود جملات غیرخطی در معادلات سینماتیک ، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم از نوع مرتبه‌ی دو غیرخطی با ضرایب متغیّر می‌باشد که به‌کمک تئوری اغتشاشات در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای حل شده است. با توجه به معادلات تعادل، شرایط مرزی و همچنین شرایط انتهایی متفاوت استوانه: دو سر آزاد و دو سر بسته؛ تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده است. با توجه به نتایج حاصل از حل تحلیلی، تأثیر پارامترهای ضخامت، جنس، شرایط مرزی و ناهمگنی بر مقادیر تنش‌ها و جابه‌جایی در پوسته‌ی استوانه‌ای، بررسی شده است. مدل‌سازی اجزای محدود استوانه‌ی مذکور به‌کمک نرم‌افزار آباکوس براساس تئوری الاستیسیته‌ی غیرخطی انجام و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده‌اند. این پژوهش نشان می‌دهد که روند حل تحلیلی ارائه شده برای پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری از دقّت خوبی برخوردار است.

کلیدواژگان

استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار، تغییر شکل‌های بزرگ، نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی، تئوری اغتشاشات، مواد ناهمگن تابعی.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست نمادها

بارهای حجمی	b
ثابت‌های حل	C_i
مدول الاستیسیته در پوسته‌ی ناهمگن تابعی	$E(r)$
مدول الاستیسیته در شعاع داخلی	E_i
گرادیان تغییرشکل	F
ضخامت پوسته	h
تغییرات انحنای پوسته	$k_x, k_\theta, k_{x\theta}, k_{xy}$
طول پوسته	L
ثابت ناهمگنی	n
بارهای سطحی	P
فشار داخلی	P_i
فشار داخلی بی‌بعد	P_i^*
فشار خارجی	P_o
فشار خارجی بی‌بعد	P_o^*
مختصه‌ی شعاعی	r
شعاع داخلی	r_i
شعاع خارجی	r_o
شعاع میانگین	R
بردار جابه‌جایی	u
تابع جابه‌جایی در تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول	$u(x)$
جابه‌جایی شعاعی	$u(r)$
جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد	$u(r)^*$
جابه‌جایی محوری سطح میانی پوسته‌ی استوانه‌ای	$u(x,\theta)$
جابه‌جایی نقطه‌ای دلخواه پوسته‌ی استوانه‌ای	$u_i(x,\theta)$
مؤلفه‌های فیزیکی جابه‌جایی	U_x, U_θ, U_z
جابه‌جایی محیطی سطح میانی پوسته‌ی استوانه‌ای	$v(x,\theta)$
کسر حجمی	$V_f(x_g)$

$w(x)$	تابع جابه‌جایی در تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول
$w(x,\theta)$	خیز شعاعی سطح میانی پوسته استوانه‌ای
x	مختصه‌ی طولی
y	مختصه‌ی عرضی
z	مختصه‌ی ضخامت
$\gamma_{x\theta}$،γ_{xz}،γ_{yz}،$\gamma_{z\theta}$،	کرنش‌های برشی
$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_r$	کرنش‌های نرمال
$\gamma_{x\theta,0}$	کرنش برشی صفحه‌ی میانی
ϵ	پارامتر اغتشاشی
ρ	چگالی
θ	مختصه‌ی محیطی
υ	نسبت پواسون
$\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_x,\sigma_z$	تنش‌های نرمال
$\sigma_r{}^*,\sigma_\theta{}^*$	تنش‌های نرمال بی‌بعد
$\psi(x,\theta)$	تابع استفاده شده در تئوری غیرخطی نووژیلوف

فصل۱

مروری بر پژوهش‌های پیشین

۱-۱- مقدمه

در این فصل ابتدا در مورد مفاهیم بنیادین پژوهش حاضر، شامل پوسته‌ها و طبقه‌بندی‌های آن، مروری بر تئوری‌های خطی و غیرخطی تحلیل پوسته‌ها، مواد ناهمگن و شیوه‌ی مدل‌سازی ریاضی آن‌ها و در نهایت تئوری اغتشاشات[۱] مطالبی بیان می‌شود. سپس سایر پژوهش‌های انجام گرفته‌ی مرتبط، به‌طور مختصر مرور می‌گردد.

سیستم‌های خطی بیش از آن‌که یک قاعده در طبیعت به شمار روند، یک استثنا هستند و محدود کردن مطالعات به سیستم‌های خطی عمدتاً به‌خاطر محدودیت در دانش ریاضی است. هرچند مسائل خطی تا حد زیادی نیازهای مهندسی را مرتفع می‌سازند، اما مواجهه با مسائل غیرخطی جدید از یک طرف و پیشرفت دانش در جهت حل معادلات غیرخطی از طرف دیگر، سبب شده تا دستیابی به حل‌های تحلیلی برای مسائل غیرخطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار گردد. همان‌طور که می‌دانیم امروزه دیگر مسأله، تبدیل مدل‌های تئوری موجود به کدهای عددی نیست، بلکه هدف افزایش دقت مدل‌های موجود در زمینه‌های مختلف (مدل‌سازی مواد، تحلیل کرنش‌های بزرگ، مکانیک ضربه، بهینه‌سازی سازه‌های غیرخطی و ...) به‌منظور دستیابی به شبیه‌سازی دقیق‌تر واقعیت خصوصاً در مسائل غیرخطی است [۱].

در مهندسی مکانیک با توجه به هندسه و بارگذاری، اجزای سازه‌ای به سه گروه کلی تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها تقسیم می‌شوند. تیرها سازه‌هایی هستند که یک بعد آن‌ها نسبت به دو بعد دیگر به‌مراتب بزرگ‌تر است و قادرند بارگذاری‌های خمشی، محوری، پیچشی و برش عرضی را تحمل کنند. سازه‌هایی ماند کابل‌ها، رشته‌ها، اجزای خرپا و ستون‌ها حالت‌های خاص تیر به شمار می‌روند. ورق‌ها سازه‌هایی مسطح هستند که یک بعد آن‌ها (بعد ضخامت) نسبت به دو بعد دیگر کوچک باشد. معمولاً انتظار می‌رود ورق‌ها بتوانند انواع بارگذاری خمشی، محوری، پیچشی، برش عرضی و برش درون صفحه‌ای را تحمل کنند. غشاها حالت خاصی از ورق‌ها هستند که به‌دلیل ضخامت ناچیز تنها قادرند بارهای درون

۱ Perturbation Theory

صفحه‌ای شامل کشش و برش را تحمل نمایند. پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که ضخامت آن‌ها نسبت به شعاع انحنا و ابعاد طولی کوچک است. درواقع پوسته‌ها از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها در مهندسی به شمار می‌روند و دارای کاربردهای وسیعی همانند ساخت مخازن نگه‌داری و انتقال سیال، لوله‌ها، موشک‌ها، فضاپیماها، رآکتورهای اتمی و ... هستند.

۱-۲- پوسته‌ها

پوسته‌ها به‌طورکلی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به‌دلیل کاربرد فراوان، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این‌گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه‌چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان، وزن آن‌ها را کاهش دهند.

۱-۲-۱- دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

الف) از دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل از انتقال[1]: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران[2]: از دوران یک سطح مادی یا منحنی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس،

[1] Shells of Translation

[2] Shells of Revolution

حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کوچک‌تر از ۱/۲۰ باشد.

پوسته‌ی جدار ضخیم: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگ‌تر از ۱/۲۰ باشد.

ب) از دیدگاه مادی

پوسته‌ی همگن[۱]: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن[۲]: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

پوسته‌ی همسانگرد: خواص مکانیکی (υ,E) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد: خواص مکانیکی(υ,E) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

ج) از دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک[۳]: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و بدون

---

۱ Homogeneous

۲ Heterogeneous

۳ Small Deformations

بارگذاری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ[۱]: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و بدون بارگذاری، کوچک نیست (رفتار غیرخطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان[۲]: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و معادله تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کند (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان[۳]: تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و معادله تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کند (رفتار غیرخطی از نظر مادی).

۱-۳- تئوری‌های خطی پوسته‌های استوانه‌ای [۲]

در این قسمت تئوری الاستیسیته‌ی خطی و تئوری تغییرشکل برشی معرفی می‌شوند.

۱-۳-۱- تئوری الاستیسیته‌ی مستوی[۴]

تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی هر چند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به‌طور کامل توصیف می‌کند و منجربه حل دقیق می‌شود، ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده بوده و عملاً به‌کارگیری آن‌ها امکان-ناپذیر است. به‌طورکلی در تئوری الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را به‌دست آورد. این معادلات عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی را برای

[۱] Large Deformations

[۲] Elastic Behavior

[۳] Plastic Behavior

[۴] Plane Elasticity Theory

تحلیل استوانه‌ها به‌کار برد. در تئوری الاستیسیته مستوی، فرض می‌شود مقاطع مستوی و عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شوند؛ اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه[۱] برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به‌کار برد و توزیع تنش در استوانه‌ها را به‌دست آورد. تئوری لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است.

معادله دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌ی ضخیم جدار ثابت عبارت است از:

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{1}{r^2}u_r=0 \quad \text{یا} \quad r^2u_r''+ru_r'-u_r=0 \tag{۱-۱}$$

و جابه‌جایی شعاعی استوانه (u_r) برابر است با:

$$u_r=C_1r+\frac{C_2}{r} \tag{۱-۲}$$

r شعاع استوانه، C_1 و C_2 ثابت‌های معادله هستند که با استفاده از شرایط مرزی به‌دست می‌آیند.

۱-۳-۲- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[۲]

در این تئوری، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌گردد. به‌طور کلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (r) برابر است با شعاع سطح میانی (R) به‌علاوه فاصله‌ی آن

[۱] Lame

[۲] First-order Shear Deformation Theory

نقطه از سطح میانی (Z)، یعنی:

$$r = R + z \quad , \quad \left|\frac{z}{h}\right| < 1 \tag{۱-۳}$$

بر اساس تئوری لامه، جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی توخالی به‌صورت زیر است.

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1(R+z) + \frac{C_2}{(R+z)} \tag{۱-۴}$$

به‌کمک بسط تیلور می‌توان معادله‌ی (۱-۴) را به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$u_r = C_1(R+z) + \frac{C_2}{(R+z)} \quad \Rightarrow \quad u_r = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots \tag{۱-۵}$$

بر اساس معادله‌ی بالا، جابه‌جایی شعاعی را به‌صورت یک چندجمله‌ای برحسب z می‌توان نوشت. اگر $z = 0$ باشد، نشانگر جابه‌جایی سطح میانی است. اگر فقط جمله‌ی اول در نظر گرفته شود $u_r = u_0$ تحلیل با تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های ضخیم می‌شود که مشابه تئوری خمشی (تئوری مرتبه‌ی یک در پوسته‌های نازک) و اگر دو جمله در نظر گرفته شود $u_r = u_0 + u_1 z$ تحلیل با تقریب مرتبه‌ی یک پوسته‌های ضخیم می‌شود که مشابه تئوری فلوگه[۱] (تئوری مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) می‌باشد.

در این تئوری، علاوه بر اثر نیروهای محوری، آثار برش، خمش، پیچش و نیز آثار اینرسی دورانی و میدان حرارتی را می‌توان در نظر گرفت. تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک به تئوری تغییر شکل مرتبه اول میرسکی-هرمان[۲] شهرت دارد که تعمیم تئوری تیموشینکو[۳] در تیرها و همچنین تئوری میندلین[۴] در ورق‌ها می‌باشد. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از

---

۱ Flugge

۲ Mirsky-Hermann

۳ Timoshenko

۴ Mindlin

تغییر شکل، همچنان مستوی باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود نیستند. یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند.

میدان جابه‌جایی در این تئوری عبارت است از:

$$\begin{cases} U_x = u + \phi z \\ U_\theta = v + \Theta z \\ U_z = w + \psi z \end{cases} \Rightarrow \quad \{U\} = \{u_0\} + \{u_1\} z \qquad (۱-۶)$$

که ϕ و u بیانگر مؤلفه‌های جابه‌جایی محوری، ψ وw معرف مؤلفه‌های جابه‌جایی شعاعی و Θ و v نشان‌دهنده مؤلفه‌های جابه‌جایی محیطی هستند. همچنین z نشان‌دهنده فاصله هر نقطه‌ی استوانه از صفحه‌ی میانی استوانه است.

۱-۴- تئوری‌های غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای

در این قسمت تئوری‌های غیرخطی معروف که درباره پوسته‌های استوانه‌ای وجود دارند معرفی می‌گردند. تفاوت عمده‌ی این تئوری‌ها در لحاظ کردن آثار ضخامت پوسته و نیز بزرگ یا کوچک در نظر گرفتن جابه‌جایی در راستاهای مماسی است. در این قسمت تئوری‌های دانل[۱]، فلوگه-لور-بایرن[۲]، نووژیلوف[۳]، سندرز-کویتر[۴] و تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرخطی[۵] مختصراً معرفی می‌شود.

۱-۴-۱- تئوری غیرخطی دانل

یک پوسته‌ی استوانه‌ای با شعاع میانگین R، ضخامت h و طول l مفروض است (شکل ۱-۱).

تئوری دانل برای تغییر شکل‌های بزرگ w (درجهت شعاعی) یک پوسته‌ی استوانه‌ای ارائه شده است.

---

[۱] Donnel’s Nonlinear Theory

[۲] The Flügge-Lur’e-Byrne Nonlinear Shell Theory

[۳] The Novozholov Nonlinear Shell Theory

[۴] The Sanders-Koiter Nonlinear Shell Theory

[۵] Nonlinear First-order Shear Deformation Theory

در این تئوری فرضیات زیر برقرارند.

۱. پوسته نازک است؛ $h \ll R,L$

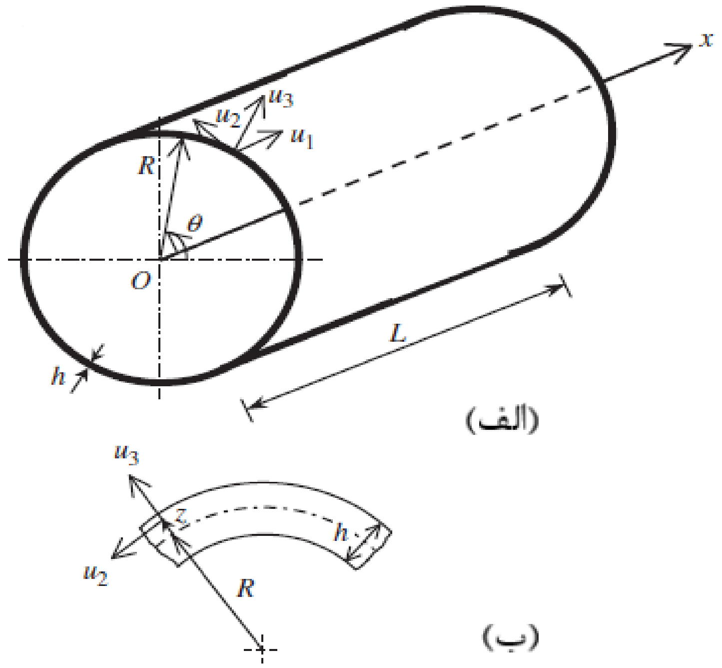
۲. مرتبه‌ی بزرگی خیز ω با مرتبه‌ی بزرگی ضخامت h برابر است. بنابراین با توجه به فرض اول، خیز نسبت به ابعاد R و L کوچک است؛ یعنی، $w \ll R,L$

۳. شیب در هر نقطه کوچک است؛ $|\partial w / \partial x| \ll 1$ و $|\partial w / (R \partial \theta)| \ll 1$

۴. تمام مؤلفه‌های کرنش کوچک هستند. بنابراین الاستیسیته‌ی خطی معتبر است.

۵. فرضیات لوو-کیرشهف[۱] برقرار است؛ یعنی، تنش‌ها در جهت عمود بر رویه‌ی میانی پوسته قابل صرف‌نظر هستند و کرنش‌ها به‌صورت خطی با ضخامت تغییر می‌کنند. این فرضیات تقریب‌های خوبی برای پوسته‌های نازک هستند. هرچند، در حضور بارهای خارجی عمود بر سطح پوسته، تنش‌ها در جهت نرمال نیز به وجود می‌آیند، حتی اگر اندازه‌ی آن‌ها (به جز در همسایگی بارهای متمرکز) از سایر تنش‌ها کوچک‌تر باشد.

[۱] Love-Kirchhoff Hypotheses



شکل ۱-۱ پوسته‌ی استوانه‌ای؛ (الف) ابعاد و جابه‌جایی‌ها، (ب) نمای بزرگ‌شده‌ی سطح مقطع پوسته [۲].

۶. جابه‌جایی‌های مماسی u و v بسیار کوچک هستند و در معادله‌ی کرنش–جابه‌جایی تنها جملات غیرخطی شامل w دیده می‌شود. از سایر جملات غیرخطی صرف‌نظر می‌شود.

جابه‌جایی نقطه‌ای دلخواه از پوسته در جهت‌های محوری، محیطی و شعاعی به ترتیب با u_1، u_2 و u_3 نشان داده می‌شود، که u، v و w جابه‌جایی نقطه‌ای روی رویه‌ی میانی پوسته است (شکل ۱-۱). u_3 و w به سمت بیرون مثبت فرض می‌شوند. با توجه به فرض شماره ۵، میدان جابه‌جایی زیر برای پوسته در نظر گرفته می‌شود.

$$u_1 = u(x,\theta) - z\frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{۱-۷ الف})$$

$$u_2 = v(x,\theta) - \frac{z}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{۱-۷ ب})$$

$$u_3 = w(x,\theta) \quad (\text{۱-۷ پ})$$

با در نظر گرفتن معادلات سینماتیک غیرخطی، مؤلفه‌های کرنش به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,0} + zk_x$$ (۱-۸ الف)

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta,0} + zk_\theta$$ (۱-۸ ب)

$$\gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta,0} + zk_{x\theta}$$ (۱-۸پ)

اگر پوسته نازک فرض شود، یعنی از z در برابر R چشم‌پوشی شود، کرنش‌های رویه‌ی میانی و تغییرات انحنا از معادله‌ی زیر به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$ (۱-۹ الف)

$$\varepsilon_{\theta,0} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$ (۱-۹ ب)

$$\gamma_{x\theta,0} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$ (۱-۹ پ)

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$ (۱-۹ ت)

$$k_\theta = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$ (۱-۹ ث)

$$k_{x\theta} = -\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$$ (۱-۹ ج)

از معادله‌های اخیر می‌توان برای تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای کامل و یا پانل‌های استوانه‌ای (پوسته‌های ناقص) استفاده کرد.

نقص‌های هندسی اولیه برای پوسته‌های استوانه‌ای متناظر با تنش صفر اولیه با جابه‌جایی شعاعی w_0 نشان داده می‌شود، نقص هندسی اولیه‌ی درون‌صفحه‌ای نادیده گرفته می‌شود. بنابراین (۱-۷پ) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود.

$$u_3 = w(x,\theta) + w_0(x,\theta) \tag{۱-۱۰}$$

با جای‌گذاری (۱-۱۰) در معادله‌ی سینماتیک غیرخطی و صرف‌نظر از جملاتی که تنها تابع w_0 هستند (چرا که متناظر با حالت اولیه و تنش صفر هستند)، معادلات زیر جای معادلات (۱-۹ الف) تا (۱-۹ پ) را می‌گیرند.

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{۱-۱۱ الف}$$

$$\varepsilon_{\theta,0} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w_0}{\partial \theta} \tag{۱-۱۱ ب}$$

$$\gamma_{x\theta,0} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial \theta} \tag{۱-۱۱ پ}$$

۱-۴-۲- تئوری فلوگه-لور-بایرن

در این تئوری از فرض نازکی پوسته صرف‌نظر می‌شود. همچنین فرض ۶ تئوری دانل نیز معتبر نخواهد بود. بنابراین میدان جابه‌جایی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_1 = u - z\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x} \tag{۱-۱۲ الف}$$

$$u_2 = v - \frac{z}{R}\left(\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \theta} - v\right) \tag{۱-۱۲ ب}$$

$$u_3 = w + w_0 \tag{۱-۱۲ پ}$$

میدان جابه‌جایی اخیر به‌راحتی با توجه به شکل ۱-۲ توجیه می‌گردد.

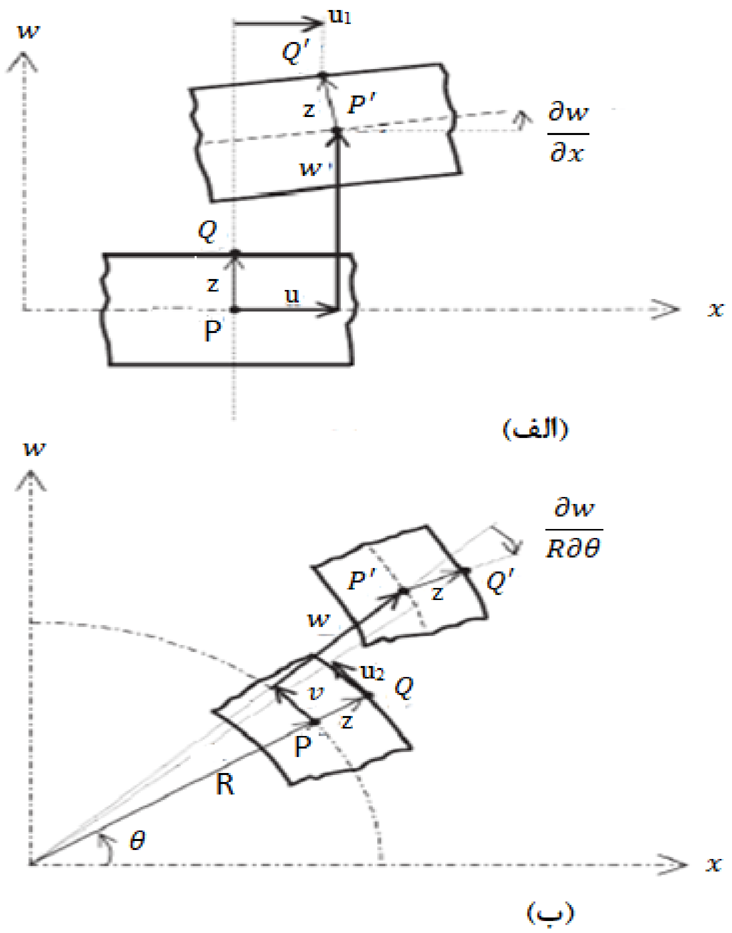
در این تئوری از ضخامت در برابر شعاع استوانه و طول چشم‌پوشی نمی‌شود و برای در نظر گرفتن آثار ضخامت از تقریب‌های زیر استفاده می‌شود.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+z} = \frac{1}{R}\left[1 - \frac{z}{R} + O(z/R)^2\right] \tag{۱-۱۳ الف}$$

(۱-۱۳ ب)

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+z)^2} = \frac{1}{R^2}\left[1 - \frac{2z}{R} + O(z/R)^2\right]$$

که $O(z/R)^2$ عددی کوچک هم‌مرتبه با $(z/R)^2$ است که از آن صرف‌نظر می‌شود. با در نظر گرفتن این دو تقریب، کرنش‌ها و انحناها نسبت به تئوری دانل به شکل زیر تغییر می‌کنند.



شکل ۱-۲ جابه‌جایی نقطه‌ی دلخواه P و نقطه‌ی دلخواه Q واقع بر سطح میانی.

(الف) مقطع طولی، (ب) مقطع عرضی [۲].

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad \text{(۱-۱۴ الف)}$$

$$\varepsilon_{\theta,0} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right)^2\right] + \frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) + w_0\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)\right] \tag{۱-۱۴ ب}$$

$$\gamma_{x\theta,0} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) + \frac{\partial w_0}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}w_0\right] \tag{۱-۱۴ پ}$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)^2 \tag{۱-۱۴ ت}$$

$$k_\theta = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{R^2} - \frac{w+w_0}{R^3}\left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) - \frac{w}{R^3}\left(w_0 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}\right) - \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial \theta}\right) - \frac{1}{R^3}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2} \tag{۱-۱۴ ث}$$

$$k_{x\theta} = -\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial \theta}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}\right) - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial \theta}\left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) - \frac{w_0}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}\frac{\partial V}{\partial x} \tag{۱-۱۴ ج}$$

معادله‌ی فوق با صرف‌نظر از جملات مرتبه بالای z به‌دست می‌آید.

۱-۴-۳- تئوری غیرخطی نووژیلوف

بر اساس تئوری غیرخطی پوسته‌ی نووژیلوف (۱۹۵۳)، میدان جابه‌جایی به شکل پیچیده‌تر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_1 = u + z\theta \tag{۱-۱۵ الف}$$

$$u_2 = v + z\psi \tag{۱-۱۵ ب}$$

$$u_3 = w + w_0 + zX_i \tag{۱-۱۵ پ}$$

که

$$\theta = -\frac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\left(1+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{w}{R}\right)+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial(w+w_0)}{\partial \theta}-v\right)\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{w_0}{R} \quad \text{(۱-۱۶ الف)}$$

$$\psi = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial(w+w_0)}{\partial \theta}-v\right)\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{(۱-۱۶ ب)}$$

$$X_i \cong \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{w+w_0}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}+w+w_0\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{(۱-۱۶ ت)}$$

نووژیلوف معادله (۱-۱۵) و (۱-۱۶) را با فرض این‌که تارهای مستقیم و عمود بر سطح میانی پوسته پس از تغییر شکل همچنان مستقیم و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند و دچار درازش[1] نمی‌شوند، به‌دست آورد. این فرض جای بخش دوم در فرض شماره ۵ تئوری دانل (تغییرات خطی کرنش‌ها در راستای ضخامت) را می‌گیرد. همچنین فرض ۶ نیز برقرار نیست.

با جای‌گذاری میدان جابه‌جایی (۱-۱۵) و (۱-۱۶) در معادله سینماتیک غیرخطی، عبارت‌های زیر برای تغییرات انحنای پوسته به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} k_x = &-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x\partial \theta}\right)+\frac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ &+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \theta}\left(-v+\frac{\partial(w+w_0)}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\\ &-\frac{\partial^2(w+w_0)}{\partial x^2}\left(\frac{w}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{w_0}{R} \end{aligned} \quad \text{(۱-۱۷ الف)}$$

[1] Elongation

$$
\begin{aligned}
k_\theta = &-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{w+w_0}{R}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{2}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&-\frac{w}{R^3}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial \theta}\right)\\
&+\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}\right)+\frac{1}{R^3}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \theta}-v\right)\\
&+\frac{1}{R^3}\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}-v\right)-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R^3}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\\
&+\frac{1}{R}\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x \partial \theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial \theta}
\end{aligned}
\qquad (۱۷-۱\ ب)
$$

$$
\begin{aligned}
k_{x\theta} = &-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\\
&+\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{v}{R^2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}+\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\right)\\
&+\frac{1}{R^2}\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w_0}{\partial x}\\
&+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{w+w_0}{R}+\frac{2}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&+\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x \partial \theta}\left(\frac{w}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&-\frac{2w_0}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}
\end{aligned}
\qquad (۱۷-۱پ)
$$

در تئوری نووژیلوف، معادله کرنش-جابه‌جایی رویه‌ی میانی پوسته با معادله تئوری فلوگه-لور-بایرن مطابقت دارد. بنابراین تنها تفاوت ایجاد شده ناشی از استفاده از این معادله پیچیده، تغییر در انحناها و پیچش است.

۱-۴-۴- تئوری غیرخطی سندرز-کویتر

سندرز در سال ۱۹۶۳ تئوری بهبود یافته‌ی غیرخطی پوسته را در شکل تانسوری ارائه داد [۳]. تقریباً همزمان با او، همین معادلات توسط کویتر در سال ۱۹۶۶ نیز به‌دست آمد، که منجر به معادلات سندرز کویتر گردید. این معادلات با در نظر گرفتن فرضیات مشابه با تئوری‌های قبل به‌منظور یافتن عبارت‌های ریاضی منطبق با مکانیک پوسته و نیز نگه داشتن جملات هم‌مرتبه به‌دست آمدند و برای تغییر شکل‌های محدود با کرنش کوچک و دوران‌های کوچک مناسب هستند. بنابراین فرض شماره ۶

تئوری دانل برقرار نخواهد بود. همچنین از برش‌های عرضی چشم‌پوشی می‌گردد. کرنش‌های رویه‌ی میانی و نیز تغییرات انحناها از معادله زیر به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_{x,0}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}$$ (۱-۱۸ الف)

$$\varepsilon_{\theta,0}=\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{w}{R}+\frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}-v\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}-v\right)$$ (۱-۱۸ ب)

$$\gamma_{x\theta,0}=\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}-v\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}-v\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}$$ (۱-۱۸پ)

$$k_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$ (۱-۱۸ ت)

$$k_\theta=-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)$$ (۱-۱۸ث)

$$k_{x\theta}=-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial \theta}+\frac{1}{2R}\left(3\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$ (۱-۱۸ ج)

تغییرات انحنا و پیچش با توجه به تئوری غیرخطی سندرز-کویتر، خطی هستند.

۱-۴-۵- تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول غیرخطی

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرخطی پوسته‌ها نخستین بار توسط ردی[۱] و چاندراشخار[۲] در سال ۱۹۸۵ معرفی شد. از پنج متغیر وابسته، سه جابه‌جایی u، v، w و دو دوران ϕ_1 و ϕ_2 برای توصیف تغییر شکل پوسته استفاده می‌شود. این تئوری را می‌توان نسخه‌ی جدارضخیم تئوری سندرز برای جملات خطی و تئوری غیرخطی دانل برای جملات غیرخطی دانست.

در این بخش این تئوری برای یک پوسته‌ی با انحنا در دو راستای x و y معرفی می‌گردد. در استخراج معادلات این بخش فرض بر این است که انحناها در تمام نقاط ثابت باشند.

فرضیات این تئوری عبارتند از: (۱) ضخامت پوسته در مقایسه با شعاع‌های انحنای اصلی کوچک

[۱] Reddy

[۲] Chandrashekhara

است؛ بنابراین این تئوری تنها برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم مناسب است. (۲) تنش نرمال عرضی σ_z قابل چشم‌پوشی است. در حالت کلی، می‌توان نشان داد که σ_z در مقایسه با τ_{xz} و τ_{yz} به جز در نزدیکی لبه‌های پوسته، کوچک است. بنابراین، این تئوری تقریب خوبی از رفتار پوسته‌های نسبتاً ضخیم به‌شمار می‌رود. (۳) خطوط عمود بر رویه‌ی میانی پوسته پس از تغییر شکل همچنان مستقیم باقی می‌مانند، اما لزوماً عمود بر رویه‌ی میانی نیستند. یعنی فرضیات لوو-کیرشهف در این تئوری برقرار نیست.

میدان جابه‌جایی نقطه‌ی دلخواهی از پوسته به‌کمک معادله زیر توصیف می‌شود.

$$u_1 = (1 + z/R_x)u + z\phi_1 \qquad \text{(۱-۱۹ الف)}$$

$$u_2 = \left(1 + z/R_y\right)v + z\phi_2 \qquad \text{(۱-۱۹ ب)}$$

$$u_3 = w + w_0 \qquad \text{(۱-۱۹ پ)}$$

می‌توان با اضافه کردن جملات مشابه به میدان برداری فوق، به تئوری‌های مراتب بالاتر (برحسبz) نیز دست یافت.

از آن‌جا که کرنش‌های برشی عرضی کوچک فرض شده‌اند، با صرف‌نظر از جملات غیرخطی، معادلات سینماتیک زیر برای برش عرضی به‌دست می‌آید.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{R_x(1 + z/R_x)}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \psi} - u_1\right) \qquad \text{(۱-۲۰ الف)}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{R_y\left(1 + z/R_y\right)}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_2\right) \qquad \text{(۱-۲۰ ب)}$$

در معادله‌ی فوق، ψ و θ مختصات زاویه‌ای هستند. با صرف‌نظر از جملات شامل z/R_x و z/R_y معادله کرنش-جابه‌جایی زیر برای تغییر شکل برشی مرتبه اول به‌دست می‌آید.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,0} + zk_x \qquad \text{(۱-۲۱ الف)}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y,0} + zk_y \tag{۱-۲۱ ب}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy,0} + zk_{xy} \tag{۱-۲۱ پ}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz,0} \tag{۱-۲۱ ت}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz,0} \tag{۱-۲۱ ث}$$

که

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{1}{R_x}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + w\right) + \frac{1}{2R_x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{1}{R_x^2}\frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial w_0}{\partial \psi} \tag{۱-۲۲ الف}$$

$$\varepsilon_{y,0} = \frac{1}{R_y}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2R_y^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{R_y^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w_0}{\partial \theta} \tag{۱-۲۲ ب}$$

$$\gamma_{xy,0} = \frac{1}{R_y}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R_x}\frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{1}{R_x R_y}\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w_0}{\partial \psi}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\right) \tag{۱-۲۲ پ}$$

$$\gamma_{xz,0} = \phi_1 + \left(\frac{1}{R_x}\frac{\partial w}{\partial \psi} - u\right) \tag{۱-۲۲ ت}$$

$$\gamma_{yz,0} = \phi_2 + \left(\frac{1}{R_y}\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) \tag{۱-۲۲ ث}$$

$$k_x = \frac{1}{R_x}\frac{\partial \phi_1}{\partial \psi} \tag{۱-۲۲ ج}$$

$$k_y = \frac{1}{R_y}\frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \tag{۱-۲۲ چ}$$

$$k_{xy} = \frac{1}{R_y}\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{R_x}\frac{\partial \phi_2}{\partial \psi} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_y} - \frac{1}{R_x}\right)\left(\frac{1}{R_x}\frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{1}{R_y}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \tag{۱-۲۲ ح}$$

با توجه به معادلات بالا، توزیع کرنش عرضی در ضخامت ثابت است که منجر به تنش برشی ثابت می‌شود. سطوح بالایی و پایینی پوسته به‌وضوح برشی را تحمل نمی‌کنند؛ بنابراین نتیجه تنها یک تقریب اولیه است. توزیع واقعی تنش برشی در ضخامت شبیه به سهمی است و در سطوح بالا و پایین دارای مقدار صفر است. به همین دلیل، برای ملاحظات تعادل، ضروری است که یک ضریب تصحیح برشی عرضی در معادلات وارد شود تا تنش‌ها بیش از آن‌چه که هستند، محاسبه نشوند.

۱-۴-۶- تئوری الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی

. در این تئوری همانند تئوری الاســتیســیته مســتوی، فرض می‌شــود مقاطع مســتوی و عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شوند؛ با این تفاوت که در این تئوری تغییر شکل‌های بزرگ نیز در نظر گرفته می‌شوند. در ا ستخراج معادلات این بخش، این تئوری برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای در حالت تقارن محوری کامل و تغییر شکل‌های بزرگ در راستای شعاعی معرفی می‌گردد. بنابراین معادلات کرنش-جابه‌جایی به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = u_{r,r} + \frac{1}{2}\left(u_{r,r}\right)^2 \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_r}{r}\right)^2 \\ \varepsilon_x = u_{x,x} \end{cases} \tag{۲۳-۱}$$

در پژوهش حاضر، از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی استفاده شده است؛ و از فرض مربوطه به تغییرشکل‌های بزرگ در راستای شعاعی و تقارن محوری کامل استوانه استفاده می‌شود؛ بنابراین با توجه به تقارن محوری موجود در مسأله از جابه‌جایی محیطی و مشتق نسبت به مؤلفه‌ی محیطی مختصات صرف‌نظر می‌شود.

۱-۵- مواد ناهمگن تابعی

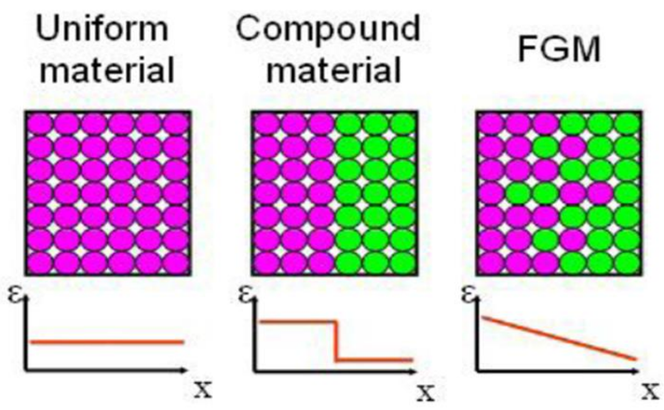
مواد همگن و همسانگرد به‌دلیل یکنواختی خواص از قبیل مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوا فضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. ازین‌رو دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکّب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از دو یا چند ماده‌ی ناهمساز به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها

از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند. اما از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

لخنیتسکی (۱۹۵۰) تئوری الاستیسیته‌ی اجسام مرکب را فرمول‌بندی کرد [۴] و پس از وی دیگران، تئوری‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی را ارائه نمودند. وینسون (۱۹۷۴) تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی را در تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی به‌کار برد و بین نتایج دو روش مقایسه‌ای انجام داد [۵].

مواد مرکب با دارا بودن نسبت استحکام به وزن و سفتی به وزن بالا، تاکنون در کاربردهای مهندسی مختلف با موفقیت به کار گرفته شده‌اند. اما مواد مرکب سنتی قادر به تحلیل دماهای بالا نیستند. فلزات نیز سالیان طولانی به خاطر استحکام و شکل‌پذیری بالای خود مورد استفاده قرار گرفته‌اند؛ اما آن‌ها نیز در دماهای بالا استحکام خود را از دست می‌دهند. سرامیک‌ها در برابر گرما مقاومت خوبی از خود نشان می‌دهند، ولی استفاده از آن‌ها به خاطر شکل‌پذیری پایین تحت‌الشعاع قرار می‌گیرد.

در دهه‌های اخیر گروهی از مواد مرکب تحت عنوان FGM توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. یک ماده‌ی FG نوعی ماده‌ی مرکب است که از فازهای مختلفی از مواد (معمولاً فلز و سرامیک) تشکیل شده است. با تغییر تدریجی نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهنده، خواص ماده‌ی FG تغییرات پیوسته و نرمی را تجربه می‌کنند که منجر به از بین رفتن مشکلات مربوط به سطوح مشترک دو ماده و تمرکز تنش می‌گردد. در این نوع از مواد مجموعه‌ای از خواص فلزات مانند استحکام و شکل‌پذیری و سرامیک‌ها مانند مقاومت حرارتی بالا توأماً قابل حصول هستند، شکل ۱-۳، به‌صورت شماتیک تفاوت بین ماده‌ی همگن، ماده‌ی مرکب و ماده‌ی ناهمگن تابعی را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳ تفاوت تغییر در خواص بین مواد همگن، مرکب و ناهمگن تابعی [۶].

۱-۵-۱- تاریخچه‌ی مواد FG

مفهوم اولیه‌ی مواد ناهمگن تابعی توسط نینو و همکاران در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوایی ژاپن مطرح گردید و از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید آن در این کشور شروع شد [۷]. مرحله‌ی اول پروژه‌ی ملی «فناوری گسترش مواد ناهمگن تابعی» طی سال‌های ۱۹۸۷ تا ۱۹۸۹ در ژاپن انجام شد. در این پروژه سه گروه ساخت، پردازش و ارزیابی حضور داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضا شود. پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ کلوین بودند؛ دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند. مرحله‌ی دوم پژوهش ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلی‌متر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلی‌متر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم مواد ناهمگن تابعی در ۱۹۹۲ برگزار شد و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به

ویژه سازه‌هایی از این جنس فراگیر شد.

تاکنون منابع مختلفی در مورد جنبه‌های مختلف مواد FG نگاشته و منتشر شده است. بر اساس آن‌ها می‌توان نتیجه گرفت که نخستین تحقیقات بر روی این مواد بیش‌تر بر روی تحلیل تنش حرارتی و مکانیک شکست متمرکز بوده است. اما بعدها جنبه‌های دیگری مانند خمش، کمانش، ارتعاشات و پایداری انواع سازه‌ها مانند ورق‌ها و پوسته‌ها نیز مورد توجه قرار گرفت.

۱-۵-۲- مدل‌سازی ریاضی مواد ناهمگن تابعی

مواد FG زیادی با دو فاز مختلف از مواد همگن و با خواص مختلف ساخته می‌شود. معمولاً توصیف دقیقی از ریزساختار این مواد، به جز احتمالاً اطلاعاتی در مورد توزیع درصد حجمی در دسترس نیست.

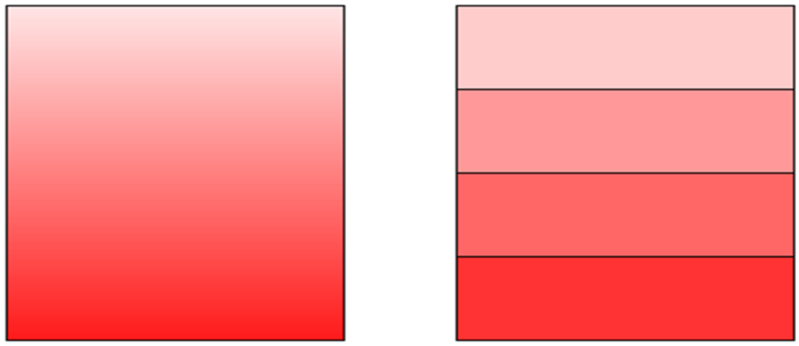
چون درصد حجمی هر فاز تدریجاً در جهت گرادیان خواص تغییر می‌کند، خواص مؤثر FGMها نیز در این راستا متغیر است. عمدتاً دو راه برای مدل کردن مواد ناهمگن تابعی وجود دارد: مدل‌سازی نیمه‌همگن و مدل تغییر پیوسته، شکل ۱-۴. در روش اول فرض می‌شود درصد حجمی، تغییرات ناپیوسته‌ای دارد و ماده‌ی FG به‌صورت لایه‌لایه است که در هر لایه درصد حجمی مواد تشکیل‌دهنده ثابت است. در پژوهش حاضر مدل‌سازی عددی با این روش صورت گرفته است.

در روش دوم، توزیع پیوسته‌ی خواص با توابع ریاضی مدل می‌شود. سه مدل مهم ریاضی که برای توزیع خواص در نظر گرفته می‌شوند عبارتند از: (الف) توزیع توانی، (ب) توزیع نمایی و (پ) توزیع کسر حجمی. در پژوهش حاضر حل تحلیلی با توزیع خواص به‌صورت توانی در نظر گرفته است.

(الف) توزیع توانی

از این توزیع در مختصات قطبی (استوانه‌ای) استفاده می‌شود. در این روش توزیع، فرض می‌شود خواص به نسبت شعاعی $\frac{r}{r_i}$ وابسته باشد.

$$P(r,T) = P_i(T)\left(\frac{r}{r_i}\right)^n \quad (۲۴-۱)$$



شکل ۱-۴ مدل تحلیلی یک لایه‌ی FGM (الف) مدل نیمه همگن، (ب) مدل تغییر پیوسته.

در معادله‌ی (۱-۲۳)، P خاصیت مکانیکی یا حرارتی مورد نظر است و P_i مقدار این فشار را در شعاع داخلی r_i را نشان می‌دهد. همچنین، T بیانگر دماست و نشان می‌دهد که خواص مواد مستقل از دما نیستند. عدد بی‌بعد n ثابت ناهمگنی است و مشخص‌کننده‌ی شکل توزیع خاصیت است.

(ب) توزیع نمایی

در این توزیع، وابستگی خواص به موقعیت به‌کمک تابع نمایی توصیف می‌شود. این شکل از توزیع نیز تنها در مختصات قطبی کاربرد دارد.

$$P(r,T) = P_i(T)exp\left(n\left(\frac{r}{r_i} - 1\right)\right) \quad (۲۵-۱)$$

(پ) توزیع کسر حجمی

در این روش توزیع خواص به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$P(x_g,T) = \left(P_f(T) - P_i(T)\right) V_f(x_g) + P_i(T) \tag{۲۶-۱}$$

برخلاف دو روش قبل، در این روش خاصیت ماده در هر نقطه به دو ماده وابسته است: یکی در ابتدای گرادیان خواص (P_i) و دیگری در انتهای آن (P_f). در معادله‌ی (۱-۲۵)، V_f کسر حجمی است و به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$V_f(x_g) = \left(\frac{x_g - (x_g)_i}{(x_g)_f - (x_g)_i}\right)^n \tag{۲۷-۱}$$

در معادله بالا، x_g مختصه‌ی طولی یا زاویه‌ای در جهت گرادیان خواص است. $(x_g)_i$ موقعیت در ابتدای گرادیان و $(x_g)_f$ موقعیت در انتهای گرادیان است.

۱-۶- تحلیل مجانبی

تحلیل مجانبی[۱] ابزاری قدرتمند برای یافتن تقریب‌های تحلیلی مسائل پیچیده است. در سال ۱۸۸۶، پوانکاره و استیلتیس در مقالاتی جداگانه بسط‌های مجانبی[۲] را پایه‌گذاری کردند. بعدها پرانتل در سال ۱۹۰۵، مقاله‌ای درباره‌ی حرکت سیال در اطراف یک جسم، در مورد حرکت یک ایرفول در هوا نوشت که این مسأله به‌کمک معادلات ناویر-استوکس با عدد رینولز بالا توصیف می‌شود. حل این مسأله سبب به وجود آمدن روش اغتشاشات تکین (نامنظم)[۳] گردید. بر اساس تئوری اغتشاشات، حل یک مسأله به‌صورت چندجمله‌ای نخست یک بسط مجانبی یا بسط اغتشاشی بیان می‌شود. تئوری اغتشاشات شامل روش‌های ریاضی است که برای یافتن پاسخ تقریبی برای مسئله‌ای که پاسخ دقیق آن قابل دسترسی نیست، به کار می‌رود. یافتن این جواب تقریبی با یک پاسخ دقیق در یک مسأله مرتبط آغاز می‌شود. تئوری اغتشاشات را زمانی می‌توان به کاربرد که بتوان مسئله را با افزودن یک عبارت

[۱] Asymptotic Analysis

[۲] Asymptotic Expansions

[۳] Singular Perturbation Method

کوچک به توصیف ریاضی مسئله‌ای که قابل حل دقیق است، فرمول‌بندی نمود.

تئوری اغتشاشات به عبارتی به‌صورت یک سری توانی از یک پارامتر کوچک ϵ که با نام پارامتر اغتشاشی شناخته می‌شود، برای پاسخ مورد نظر منجر می‌شود که انحرافات از مسئله قابل حل کامل را به‌صورت کمی بیان می‌کند. اولین جمله از این سری توانی پاسخ مسئله قابل حل دقیق است و جملات بعدی انحراف از این پاسخ به‌دلیل انحراف از مسئله اصلی را توصیف می‌کنند. یک مسأله اغتشاشی تکین زمانی اتفاق می‌افتد که اگر $\epsilon \to 0$ در دوحالت $\epsilon = 0$ و $0 < \epsilon < 1$ راه حل کاملاً متفاوت باشد، همچنین اگر بین این دوحالت راه حل مشابه باشد یک مسأله اغتشاشی غیرتکین (منظم)[1] اتفاق می‌افتد.

۱-۷- مروری بر مقالات

در این بخش، مطالعات انجام شده بر روی استوانه‌های همگن و ناهمگن در ارتباط با موضوع این پروژه گزارش می‌شود.

نخستین بار لامه در سال ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی حل دقیق استوانه‌ی جدار ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت و ساخته شده از مواد همگن و همسانگرد را تحت فشار یکنواخت ارائه کرد [۸]. نقدی در سال ۱۹۵۶ با لحاظ کردن اثر برش عرضی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود [۹]. گرینسپن در سال ۱۹۶۰ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم، محاسبه و با یکدیگر مقایسه کرد [۱۰]. زیو و پرل در سال ۱۹۷۳ با به‌کارگیری تئوری میرسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، پاسخ ارتعاشی استوانه‌های نیمه بلند را به‌دست آوردند [۱۱]. سوزوکی و تاکاهاشی در سال ۱۹۸۱ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر استوانه‌های همگن جدار متغیر را استخراج و آن‌ها را به‌کمک سری فریبینیوس، با لحاظ ۵۰ جمله از سری برای همگرایی حل کردند [۱۲]. میرسکی و هرمان

[1] Nonsingular (Regular) Pertubation Method

در سال ۱۹۵۸ با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم را ارائه کردند [۱۳]. توماس و همکاران در سال ۱۹۸۱ روش المان محدود غیرخطی را برای آنالیز شبه‌استاتیکی سه‌بعدی در پوسته‌هایی که تغییر شکل‌های بزرگ و آثار چرخش را همراه دارند ارائه دادند [۱۴]. سوزوکی و همکاران در سال ۱۹۸۲ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر مخروط‌های همگن جدار متغیر را به‌دست آورده و آن‌ها را به‌کمک سری فریبینیوس با لحاظ ۱۰۰ جمله از سری، حل کردند [۱۵]. الیور و انات در سال۱۹۸۶، با استفاده از روش لاگرانژی کامل، رفتار غیرخطی هندسی پوسته‌های با تقارن محوری را با روش اجزای محدود بررسی نمودند [۱۶]. فوکویی و یاماناکا در ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را به‌کمک معادلات لامه استخراج و آن‌ها را به روش عددی رانگ-کوتا حل کردند [۱۷]. اباتا و نوادا در سال ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره‌ی توخالی FGM استخراج و ماده‌ی بهینه را به‌دست آوردند [۱۸]. لوی و ردی در سال ۱۹۹۹ ارتعاشات پوسته‌های نازک استوانه‌ای FGM را با استفاده از تئوری لوو-کیرشهف استخراج و آن‌ها را به‌کمک روش ریلی-ریتز حل کردند [۱۹]. کامبسکور و گاسیک در سال ۲۰۰۱، آثار نقص در ضخامت را بر کمانش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار یکنواخت خارجی بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از المان COMI به مطالعه‌ی پارامتری پرداختند که به آن‌ها اجازه می‌داد تا هرگونه نقص نامتقارن محوری در ضخامت را بتوانند مورد مطالعه قرار دهند [۲۰]. جباری و همکاران در سال ۲۰۰۲ تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی توخالی FGM تحت بارهای متقارن [۲۱] و در سال ۲۰۰۳ تحت بارهای نامتقارن حرارتی را به‌دست آوردند [۲۲]. ایپک‌چی و همکاران در ۲۰۰۳ معادلات استوانه‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل، استخراج و به‌کمک تئوری اغتشاشات حل کردند [۲۳]. ژیفای و همکاران در ۲۰۰۷ حل دقیق استوانه‌های توخالی از مادّه‌ی ناهمگن FG را با روش چندلایه‌ای کردن استوانه که هر لایه به‌صورت مادّه‌ی همگن با خواص مکانیکی ثابت در نظر گرفته شده، ارائه کردند [۲۴]. در سال ۲۰۰۷

توتونچو تحلیل استوانه‌ی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای[1] با توزیع نمایی مدول یانگ، ارائه کرد [۲۵]. آرسینیگا و ردی در سال ۲۰۰۷ ، فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی پوسته‌ها را در مختصات خمیده‌خط به‌کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای مواد ناهمگن بر اساس حساب تانسوری توسعه دادند. آن‌ها از توابع میانیابی لاگرانژی مرتبه بالا برای تقریب میدان‌ها استفاده کردند تا از قفل-شدگی غشایی، برشی و ضخامت جلوگیری شود. در نهایت نتایج حاصل از تحلیل بر اساس این المان را برای چند مطالعه‌ی موردی بیان کرده‌اند [۲۶]. ایپک‌چی و همکاران در سال ۲۰۰۸ معادلات مخروط‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی دوم، استخراج و به‌کمک تئوری اغتشاشات حل کردند [۲۷]. در سال ۲۰۰۹، توتونچو و تمل جابه‌جایی‌ها و تنش‌های متقارن محوری را در استوانه‌ها، دیسک‌ها و کره‌های FGM تحت فشار یکنواخت داخلی به‌کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش توابع تکمیلی تعیین کردند [۲۸]. در سال ۲۰۰۹ سرفراز خباز و همکاران با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم خیز بزرگ و تنش در جهت ضخامت ورق‌های FGM را محاسبه کردند [۲۹]. زمانی‌نژاد و قنّاد در سال ۲۰۰۹ با ارائه‌ی دستگاه معادلات سه‌بعدی بر اساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدار ضخیم FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر در راستای نصف‌النّهاری را بررسی کردند [۳۰]. عارفی و رحیمی در سال ۲۰۱۰ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدارضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را تحت فشار داخلی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در حالت کرنش صفحه‌ای انجام دادند [۳۱]. قنّاد و زمانی‌نژاد در ۲۰۱۲ حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد FG را بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی برای شرایط مرزی تنش صفحه‌ای[2] و کرنش صفحه‌ای ارائه نمودند [۳۲]. ایشان در ۲۰۱۲ بر مبنای نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اوّل (FSDT)، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم FGM را در حالت کلّی استخراج و سپس برای استوانه با دو سر بسته (کرنش

[1] Plane Strain

[2] Plane Stress

صفحه‌ای) به‌صورت تحلیلی به‌دست آوردند و با نتایج حل تئوری الاستیسیته‌ی مستوی مقایسه کردند [۳۳]. در سال ۲۰۱۱ کلس و کانکر حل گذرای هدایت حرارتی به‌صورت هذلولی برای استوانه و کره‌ی توخالی ناهمگن تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص را ارائه نمودند [۳۴]. قربان‌پور و همکاران در سال ۲۰۱۱ اثر ناهمگنی را بر روی رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی یک استوانه‌ی چرخان جدارضخیم FGPM با تغییرات توانی خواص تحت فشار داخلی و خارجی بررسی و معادلات حاصل را برای این استوانه حل کردند [۳۵]. تانگ و بیچ در سال ۲۰۱۱ با ارائه حل تحلیلی، رفتار غیرخطی پوسته‌های کروی متقارن محوری کم‌عمق تحت بارگذاری فشاری خارجی یکنواخت و تحت تأثیر دما را بررسی کردند [۳۶]. در سال ۲۰۱۲ قنّاد و قارونی، تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها را برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ناهمگن با توزیع توانی خواص در راستای ضخامت، به‌کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا به‌دست آوردند. آن‌ها از معادله سینماتیک خطی استفاده کردند و نتایج کار خود را با نتایج حاصل از تئوری‌ها الاستیسیته‌ی مستوی و تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش المان محدود مقایسه کردند [۳۷]. قنّاد و همکاران در ۲۰۱۲ حل تحلیلی استوانه‌های جدار متغیر ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد را به‌کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی و تئوری اغتشاشات ارائه و با نتایج حاصل از حل عددی اجزای محدود مقایسه کردند [۳۸]؛ سپس ایشان در ۲۰۱۳ معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار متغیر ساخته‌شده از مواد ناهمگن FGM استخراج و آن‌ها را به‌کمک روش مجانب‌های همتا (MAM)[1] برگرفته از تئوری اغتشاشات حل ریاضی نمودند [۳۹]. در سال ۲۰۱۳ استروزی و پلیکانو ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک را بررسی کردند. آن‌ها از تئوری سندرز-کویتر برای مدل‌سازی ارتعاشات غیرخطی با دامنه‌ی محدود استفاده کردند [۴۰]. تونگ در سال ۲۰۱۴ ، یک راه تحلیلی را برای پایداری پوسته‌های کروی نازک و ورق‌های دایروی گیردار FGM بر بستر الاستیک، تحت فشار یکنواخت خارجی و در معرض تغییرات دمایی محیط ارائه کرد [۴۱]. در سال ۲۰۱۴ زنکور و عباس

[1] Matched Asymptotic Method (MAM)

مسأله‌ی ترموالاستیسیته‌ی عمومی با یک زمان رهایش را برای استوانه‌ی بی‌نهایت بلند و توخالی با خواص فیزیکی وابسته به دما بررسی کردند [۴۲]. دوک و همکاران در سال ۲۰۱۴ ، بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها با احتساب غیرخطی هندسی، نقص هندسی اولیه و بستر الاستیک از نوع Pasternak، پاسخ غیرخطی متقارن محوری پوسته‌های کم‌عمق کروی FGM تحت بار مکانیکی-حرارتی و شرایط مرزی گوناگون بررسی کردند. نتایج پژوهش آن‌ها با استفاده از روش بابناف-گلرکین و تابع تنش، تأثیرات بستر الاستیک، فشار خارجی، دما، مادّه و خصوصیات هندسی بر کمانش و پس‌کمانش غیرخطی پوسته‌ها را نشان می‌دهد. در نهایت آن‌ها برخی از نتایج کار خود را با نتایج نویسندگان دیگر مقایسه کردند [۴۳].

۱-۸- جمع‌بندی

ابتدا در فصل اوّل این پژوهش، ضمن مرور تئوری‌ها خطی و غیرخطی پوسته‌های نازک و ضخیم، مطالعات انجام شده در خصوص پوسته‌های استوانه‌ای ارائه شده است. همچنین مواد با تغییرات تابعی خواص تعریف و ضمن بیان تاریخچه و ویژگی‌های آن‌ها، فرآیندهای تولید و مدل‌سازی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته و پیشینه‌ی پژوهش مواد FG ارائه شده است. فصل دوم شامل استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدارضخیم برای ماده‌ی همگن و همسانگرد تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. سپس روش حلّ معادلات نهایی با استفاده از بسط اغتشاشی مستقیم بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی استوانه‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. در فصل سوم برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه جدارضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی، ضمن ارائه‌ی حلّ عمومی پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری، توزیع تنش و جابه‌جایی به‌صورت مطالعه‌ی موردی برای استوانه مورد نظر برای سه حالت بارگذاری فشاری داخلی، خارجی، همزمان داخلی و خارجی و شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. نهایتاً نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی با نتایج حاصل

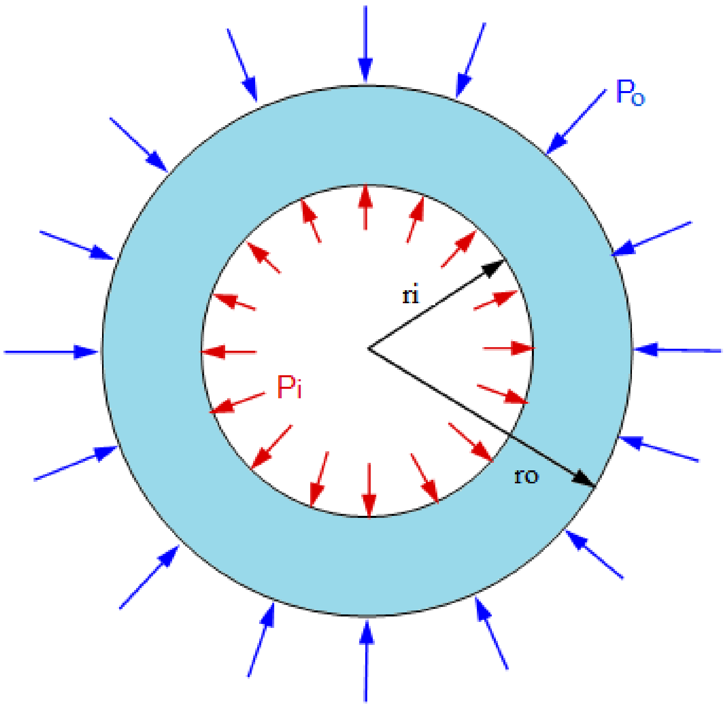
از حلّ عددی مقایسه شده‌اند. نتیجه‌گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه‌ی پیشنهادها در فصل چهارم انجام شده است.

فصل ۲

تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای همگن

۲-۱- تعریف مسأله

در این فصل، هدف تحلیل الاستیک تغییرشکل‌های بزرگ پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار در حالت تعادل استاتیکی، با فرض برقراری روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی است. در استخراج کلی معادلات از روابط ساختاری خطی (قانون هوک) استفاده شده است و جنس پوسته به‌صورت همگن و همسانگرد فرض می‌شود. ضخامت h استوانه ثابت در نظر گرفته می‌شود و استوانه فشارهای یکنواخت را در شعاع‌های داخلی و خارجی خود تحمل می‌کند. مسأله در حالت تقارن محوری کامل بررسی می‌گردد. شکل ۲-۱ مقطع عرضی استوانه‌ی مورد بررسی را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱ شماتیک مسأله

با توجه به شکل ۲-۱ محدوده تغییرات کمیت‌های مستقل $r_i \le r \le r_o$ و $0 \le \theta \le 2\pi$ هندسه-ی پوسته‌ی استوانه‌ای را تعریف می‌کنند.

۲-۲- معادلات حاکم

در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر لایه‌ی میانی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر آن باقی می‌مانند. معنای آن نادیده گرفتن اثر برش و درنتیجه قطری شدن تانسور تنش و تانسور کرنش می‌باشد. به عبارتی دیگر جابه‌جایی‌های شعاعی و طولی به‌صورت $u_r(r)$ و $u_x(x)$ می‌باشند.

معادلات تعادل تنش در حالت کلی به‌صورت زیر هستند.

$$div\tilde{\sigma} + \rho\vec{b} = \vec{0} \tag{۱-۲}$$

در مختصات استوانه‌ای و در غیاب نیروهای حجمی معادلات تعادل تنش به‌صورت زیر ساده می‌شوند.

$$\begin{cases} \sigma_{r,r} + \dfrac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \\ \sigma_{x,x} = 0 \end{cases} \tag{۲-۲}$$

معادلات سینماتیک غیرخطی در حالت کلی به‌صورت زیر هستند.

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[(\vec{\nabla}\vec{u}) + (\vec{\nabla}\vec{u})^T + (\vec{\nabla}\vec{u})^T(\vec{\nabla}\vec{u})\right] \tag{۳-۲}$$

با توجه به تقارن محوری بودن استوانه (هندسه، جنس و بارگذاری) و تغییر شکل‌های بزرگ در راستای شعاعی، روابط کرنش - جابه‌جایی عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = u_{r,r} + \dfrac{1}{2}\left(u_{r,r}\right)^2 \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{1}{2}(\dfrac{u_r}{r})^2 \\ \varepsilon_x = u_{x,x} \end{cases} \tag{۴-۲}$$

معادلات ساختاری[۱] (روابط تنش - کرنش) را می‌توان در حالت‌های مختلف شرایط مرزی برای

[۱] Constitutive Equations

مواد همگن و همسانگرد به‌صورت زیر فرمول‌بندی کرد.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} = E\begin{bmatrix}A & B\\ B & A\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{Bmatrix} \tag{۵-۲}$$

E مدول یانگ، خواص مکانیکی ثابت مادّه‌ی استوانه است. A و B عبارت‌هایی هستندکه با توجه به شرایط انتهایی استوانه به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

الف) تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز)

$$\sigma_x = 0 \quad \text{و} \quad \varepsilon_x \neq 0$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{1-\upsilon^2} \quad \text{و} \quad B = \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon^2} \\ \upsilon^* = \dfrac{B}{A} = \upsilon \end{cases} \tag{۶-۲}$$

ب) کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته)

$$\sigma_x \neq 0 \quad \text{و} \quad \varepsilon_x = 0$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{1-\upsilon}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} \quad \text{و} \quad B = \dfrac{\upsilon}{(1-2\upsilon)(1+\upsilon)} \\ \upsilon^* = \dfrac{B}{A} = \dfrac{\upsilon}{1-\upsilon} \end{cases} \tag{۷-۲}$$

υ نسبت پواسون، همانند مدول یانگ خواص مکانیکی ثابت ماده‌ی استوانه است.

با جای‌گذاری معادله‌ی (۲-۵) در معادله‌ی (۲-۲) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$[E(A\varepsilon_r + B\varepsilon_\theta)]_{,r} + \frac{1}{r}[E(A-B)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)] = 0 \tag{۸-۲}$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۲-۴) در معادله‌ی (۲-۸) و از آنجایی‌که E مقداری ثابت است.

$$\left[A\left(u_{r,r}+\frac{1}{2}(u_{r,r})^2\right)+B\left(\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_r\right)^2\right)\right]_{,r}+\frac{(A-B)}{r}\left[u_{r,r}+\frac{1}{2}(u_{r,r})^2+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_r\right)^2\right]=0 \qquad (۲-۹)$$

پس از مشتق‌گیری و ساده کردن، رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$A(1+u_{r,r})u_{r,rr}+\left(A+\frac{B}{r}u_r+\frac{(A-B)}{2}u_{r,r}\right)\frac{u_{r,r}}{r}-\left(A+\frac{(A+B)}{2r}u_r\right)\frac{u_r}{r^2}=0 \qquad (۲-۱۰)$$

۲-۳- محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی خطی و غیرخطی

معادله‌ی (۲-۱۰)، معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دو غیرخطی با ضرایب متغیر می‌باشد که برای حل آن از روش بسط اغتشاشی مستقیم[1] استفاده می‌شود. ابتدا باید معادله‌ی دیفرانسیل را به‌کمک پارامترهای معرفی شده در معادله‌ی (۲-۱۱)، بی‌بعدسازی کرد.

$$r^*=\frac{r}{R}\quad,\quad u_r^*=\frac{u_r}{h}\quad,\quad \frac{B}{A}=\nu^*\quad,\quad \frac{h}{R}=\epsilon\ll 1\quad,\quad \sigma_r^*=\frac{\sigma_r}{E\epsilon}$$
$$\sigma_\theta^*=\frac{\sigma_\theta}{E\epsilon}\quad,\quad p^*=\frac{p}{E\epsilon}\quad,\quad k=\frac{r_o}{r_i}=\frac{r_o^*}{r_i^*} \qquad (۲-۱۱)$$

بنابراین شکل بی‌بعد معادله‌ی (۲-۱۰) به‌صورت زیر می‌شود.

$$\left(1+\frac{h}{R}u_{r,r^*}^*\right)\frac{h}{R^2}u_{r,r^*r^*}^*+\left(1+\frac{\upsilon^*h}{Rr^*}u_r^*+\frac{(1-\upsilon^*)}{2}\frac{h}{R}u_{r,r^*}^*\right)\frac{h}{R^2r^*}u_{r,r^*}^*-\left(1+\frac{(1+\upsilon^*)}{2}\frac{h}{Rr^*}u_r^*\right)\frac{h}{R^2{r^*}^2}u_r^*=0 \qquad (۲-۱۲)$$

با جایگزینی $\epsilon=\frac{h}{R}$ در معادله‌ی (۲-۱۲) به‌صورت زیر ساده می‌شود.

[1] Straightforward Perturbed Expansion Method

$$\left(1+\epsilon u^*_{r,r^*}\right)\frac{\epsilon}{R}u^*_{r,r^*r^*}+\left(1+\frac{\upsilon^*\epsilon}{r^*}u^*_r+\frac{(1-\upsilon^*)}{2}\epsilon u^*_{r,r^*}\right)\frac{\epsilon}{Rr^*}u^*_{r,r^*} - \left(1+\frac{(1+\upsilon^*)}{2}\frac{\epsilon}{r^*}u^*_r\right)\frac{\epsilon}{Rr^{*2}}u^*_r=0 \tag{۱۳-۲}$$

از آنجا که $\frac{\epsilon}{R}\neq 0$ بنابراین معادله‌ی بالا به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$\left(1+\epsilon u^*_{r,r^*}\right)u^*_{r,r^*r^*}+\left(1+\frac{\upsilon^*\epsilon}{r^*}u^*_r+\frac{(1-\upsilon^*)}{2}\epsilon u^*_{r,r^*}\right)\frac{1}{r^*}u^*_{r,r^*} - \left(1+\frac{(1+\upsilon^*)}{2}\frac{\epsilon}{r^*}u^*_r\right)\frac{1}{r^{*2}}u^*_r=0 \tag{۱۴-۲}$$

معادله‌ی (۲-۱۴) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\left[u^*_{r,r^*r^*}+\frac{1}{r^*}u^*_{r,r^*}-\frac{1}{r^{*2}}u^*_r\right]\epsilon^0 + \left[\left(\left(u^*_{r,r^*}\right)u^*_{r,r^*r^*}+\left(\frac{\upsilon^*}{r^*}u^*_r+\frac{(1-\upsilon^*)}{2}u^*_{r,r^*}\right)\frac{1}{r^*}u^*_{r,r^*}\right) - \left(\frac{(1+\upsilon^*)}{2r^*}u^*_r\right)\frac{1}{r^{*2}}u^*_r\right]\epsilon^1=0 \tag{۱۵-۲}$$

با توجه به این‌که مشتقات مراتب بالاتر نسبت به مشتقات مراتب پایین‌تر، غالب نیستند؛ بنابراین معادله‌ی (۲-۱۵) معرف یک مسأله‌ی اغتشاشی غیرتکین (منظم) است. بنابراین جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به شکل بسط اغتشاشی زیر قابل بازنویسی است.

$$u^*_r=u_0+\epsilon u_1+O(\epsilon^2) \tag{۱۶-۲}$$

با استفاده از جای‌گذاری بسط اغتشاشی (۲-۱۶) در معادله‌ی (۲-۱۵) معادله زیر حاصل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&\left(u_{0,r^*r^*}+\epsilon u_{1,r^*r^*}\right)+\frac{1}{r^*}\left(u_{0,r^*}+\epsilon u_{1,r^*}\right)-\frac{1}{r^{*2}}\left(u_0+\epsilon u_1\right)\\
&\quad+\epsilon\left[\left(u_{0,r^*}+\epsilon u_{1,r^*}\right)\left(u_{0,r^*r^*}+\epsilon u_{1,r^*r^*}\right)\right.\\
&\quad+\left(\frac{\upsilon^*}{r^*}\left(u_0+\epsilon u_1\right)+\frac{(1-\upsilon^*)}{2}\left(u_{0,r^*}+\epsilon u_{1,r^*}\right)\frac{1}{r^*}\left(u_{0,r^*}+\epsilon u_{1,r^*}\right)\right)\\
&\quad\left.-\left(\frac{(1+\upsilon^*)}{2r^*}\left(u_0+\epsilon u_1\right)\right)\frac{1}{r^{*2}}\left(u_0+\epsilon u_1\right)\right]=0
\end{aligned}
\tag{۱۷-۲}
$$

با مرتب کردن معادله‌ی (۲-۱۷) براساس توان‌های مختلف پارامتر اغتشاشی، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(u_{0,r^*r^*}+\frac{1}{r^*}u_{0,r^*}-\frac{1}{r^{*2}}u_0\right)\right]\\
&\quad+\epsilon\left[\left(u_{1,r^*r^*}+\frac{1}{r^*}u_{1,r^*}-\frac{1}{r^{*2}}u_1\right)+\left(u_{0,r^*}\right)u_{0,r^*r^*}\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{\upsilon^*}{r^*}u_0+\frac{(1-\upsilon^*)}{2}u_{0,r^*}\right)\frac{1}{r^*}u_{0,r^*}-\left(\frac{(1+\upsilon^*)}{2r^*}u_0\right)\frac{1}{r^{*2}}u_0\right]\\
&\quad+O(\epsilon^2)=0
\end{aligned}
\tag{۱۸-۲}
$$

از آن‌جا که ϵ عدد بسیار کوچکی است، معادله‌ی (۲-۱۸) زمانی برقرار است که ضرایب توان‌های مختلف اپسیلون، برابر صفر باشند. بنابراین می‌توان یک معادله‌ی پیچیده‌ی غیرخطی را تبدیل به بی‌نهایت معادله‌ی خطی ساده‌تر نمود که از نظر مرتبه‌ی بزرگی با یکدیگر متفاوت هستند.

۲-۳-۱- معادله از مرتبه‌ی (ϵ^0)

معادله (ضریب ϵ^0) عبارت است از:

$$
u_{0,r^*r^*}+\frac{1}{r^*}u_{0,r^*}-\frac{1}{r^{*2}}u_0=0
\tag{۱۹-۲}
$$

که یک معادله دیفرانسیل اویلر-کوشی است بنابراین می‌توان آن را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left(\frac{1}{r^*}(r^* u_0)_{,r^*}\right)_{,r^*} = 0 \tag{۲-۲۰}$$

اگر در معادله‌ی (۲-۲۰) مقدار $u_0(r^*) = r^{*m}$ گذاشته شود، پاسخ معادله به‌صورت زیر خواهد شد:

$$u_0 = C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} \tag{۲-۲۱}$$

که $u_r^* = u_0$ حل خطی (PET) مسأله می‌باشد.

۲-۳-۲- معادله از مرتبه‌ی (ϵ^1)

معادله‌ی بعدی ضریب ϵ^1 می‌باشد:

$$\begin{aligned}\left(u_{1,r^*r^*} + \frac{1}{r^*}u_{1,r^*} - \frac{1}{r^{*2}}u_1\right) &= -\left[\left(u_{0,r^*}\right)u_{0,r^*r^*} + \left(\frac{\upsilon^*}{r^*}u_0 + \frac{(1-\upsilon^*)}{2}u_{0,r^*}\right)\frac{1}{r^*}u_{0,r^*}\right.\\ &\left. - \left(\frac{(1+\upsilon^*)}{2r^*}u_0\right)\frac{1}{r^{*2}}u_0\right]\end{aligned} \tag{۲-۲۲}$$

پس از آن‌که حل تقریب صفر به‌دست آمد، با جای‌گذاری (۲-۲۱) در معادله‌ی (۲-۲۲)، به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\left(u_{1,r^*r^*} + \frac{1}{r^*}u_{1,r^*} - \frac{1}{r^{*2}}u_1\right) &= -\left[\left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}}\right)\left(\frac{2C_2}{r^{*3}}\right) + \frac{(1-\upsilon^*)}{2r^*}\left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}}\right)^2\right.\\ &\left. + \frac{\upsilon^*}{r^{*2}}\left(C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*}\right)\left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}}\right) - \frac{(1+\upsilon^*)}{2r^{*3}}\left(C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{۲-۲۳}$$

پس از ساده‌سازی معادله‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\left(\frac{1}{r^*}(r^*u_1)_{,r^*}\right)_{,r^*} = \frac{2(1+\upsilon^*)C_2^2}{r^{*5}} \tag{۲-۲۴}$$

با حل معادله‌ی (۲-۲۴) مقدار u_1 به‌دست می‌آید:

$$u_1 = C_3 r^* + \frac{C_4}{r^*} + \frac{(1+\upsilon^*)}{4}\frac{C_2^2}{r^{*3}} \tag{۲-۲۵}$$

بنابراین جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به‌صورت زیر است:

$$u_r^* = C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} + \epsilon\left(C_3 r^* + \frac{C_4}{r^*} + \frac{(1+\upsilon^*)}{4}\frac{C_2^2}{r^{*3}}\right) + O(\epsilon\text{^}2) \tag{۲-۲۶}$$

که معادله‌ی (۲-۲۶)، حل غیرخطی (NPET) مسأله می‌باشد.

۲-۴- محاسبه‌ی کرنش‌ها و تنش‌های شعاعی و محیطی

۲-۴-۱- محاسبه‌ی کرنش و تنش خطی

برای محاسبه‌ی معادلات کرنش خطی ابتدا باید روابط سینماتیک خطی را با کمک معادلات (۲-۱۱) بی‌بعد کرد:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = u_{r,r} = \epsilon u^*_{r,r^*} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} = \dfrac{\epsilon}{r^*}u_r^* \end{cases} \tag{۲-۲۷}$$

اکنون با جای‌گذاری معادله‌ی (۲-۲۱) در معادله‌ی (۲-۲۷) :

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \epsilon\left(C_1 - \dfrac{C_2}{r^{*2}}\right) \\ \varepsilon_\theta = \epsilon\left(C_1 + \dfrac{C_2}{r^{*2}}\right) \end{cases} \tag{۲-۲۸}$$

پس از محاسبه‌ی کرنش‌های شعاعی و محیطی، می‌توان به‌کمک معادلات ساختاری (۲-۵)، مقادیر تنش نرمال شعاعی و محیطی را محاسبه کرد:

با جای‌گذاری معادلات (۲-۲۸) در معادلات (۲-۵)، تنش شعاعی و محیطی برای حل خطی مسأله نتیجه می‌شوند:

$$\begin{cases}\sigma_r = E\epsilon\left[(A+B)C_1 - (A-B)\dfrac{C_2}{r^{*2}}\right] \\ \sigma_\theta = E\epsilon\left[(A+B)C_1 + (A-B)\dfrac{C_2}{r^{*2}}\right]\end{cases} \tag{۲-۲۹}$$

که با جای‌گذاری معادلات (۲-۱۱) در معادلات (۲-۲۹)، تنش شعاعی و محیطی به‌صورت زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\begin{cases}\sigma_r^* = \left((A+B)C_1 - (A-B)\dfrac{C_2}{r^{*2}}\right) \\ \sigma_\theta^* = \left((A+B)C_1 + (A-B)\dfrac{C_2}{r^{*2}}\right)\end{cases} \tag{۲-۳۰}$$

۲-۴-۲- محاسبه‌ی کرنش و تنش غیرخطی

پس از محاسبه‌ی جابه‌جایی غیرخطی، می‌توان به‌کمک معادلات سینماتیک (۲-۴)، با جای‌گذاری معادلات (۲-۱۱) در (۲-۴)، کرنش‌های شعاعی و محیطی به‌صورت زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\begin{cases}\varepsilon_r = u_{r,r} + \dfrac{1}{2}(u_{r,r})^2 = \epsilon u^*_{r,r^*} + \dfrac{\epsilon^2}{2}\left(u^*_{r,r^*}\right)^2 \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{1}{2}(\dfrac{u_r}{r})^2 = \dfrac{\epsilon}{r^*}u_r^* + \dfrac{\epsilon^2}{2r^{*2}}(u_r^*)^2\end{cases} \tag{۲-۳۱}$$

اکنون با جای‌گذاری معادله‌ی (۲-۲۶) در (۲-۲۷):

$$\begin{cases}\varepsilon_r = \epsilon\left(C_1 - \dfrac{C_2}{r^{*2}}\right) + \epsilon^2\left(\dfrac{\left(C_1 - \dfrac{C_2}{r^{*2}}\right)^2}{2} + C_3 - \dfrac{C_4}{r^{*2}} - \dfrac{3(1+\nu^*)}{4}\dfrac{C_2^2}{r^{*4}}\right) + O(\epsilon^3) \\ \varepsilon_\theta = \epsilon\left(C_1 + \dfrac{C_2}{r^{*2}}\right) + \epsilon^2\left(\dfrac{\left(C_1 + \dfrac{C_2}{r^{*2}}\right)^2}{2} + C_3 + \dfrac{C_4}{r^{*2}} + \dfrac{(1+\nu^*)}{4}\dfrac{C_2^2}{r^{*4}}\right) + O(\epsilon^3)\end{cases} \tag{۲-۳۲}$$

پس از محاسبه‌ی کرنش‌های شعاعی و محیطی، می‌توان به‌کمک مقادیر تنش نرمال شعاعی و محیطی گفته شده در معادله‌ی (۲-۵)، با جای‌گذاری معادلات (۲-۳۲) در (۲-۵)، تنش شعاعی و محیطی را محاسبه کرد:

$$\sigma_r = E\epsilon\left[\left[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r^{*2}}\right] + \epsilon\left[(A+B)\left(C_3 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2r^{*4}}\right) - (A-B)\left(\frac{C_1C_2 + C_4}{r^{*2}}\right) - (3A - B)\frac{(1+\upsilon^*)C_2^2}{4r^{*4}}\right]\right] \quad \text{(۲-۳۳ الف)}$$

$$\sigma_\theta = E\epsilon\left[\left[(A+B)C_1 + (A-B)\frac{C_2}{r^{*2}}\right] + \epsilon\left[(A+B)\left(C_3 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2r^{*4}}\right) + (A-B)\left(\frac{C_1C_2 + C_4}{r^{*2}}\right) + (A - 3B)\frac{(1+\upsilon^*)C_2^2}{4r^{*4}}\right]\right] \quad \text{(۲-۳۳ ب)}$$

با جای‌گذاری معادلات (۲-۱۱) در (۲-۳۳)، تنش نرمال شعاعی و محیطی به‌صورت زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\sigma_r^* = \left[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{r^{*2}}\right] + \epsilon\left[(A+B)\left(C_3 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2r^{*4}}\right) - (A-B)\left(\frac{C_1C_2 + C_4}{r^{*2}}\right) - (3A - B)\frac{(1+\upsilon^*)C_2^2}{4r^{*4}}\right] \quad \text{(۲-۳۴ الف)}$$

$$\sigma_\theta^* = \left[(A+B)C_1 + (A-B)\frac{C_2}{r^{*2}}\right] + \epsilon\left[(A+B)\left(C_3 + \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_2^2}{2r^{*4}}\right) + (A-B)\left(\frac{C_1C_2 + C_4}{r^{*2}}\right) + (A - 3B)\frac{(1+\upsilon^*)C_2^2}{4r^{*4}}\right] \quad \text{(۲-۳۴ ب)}$$

۲-۵- محاسبه‌ی ثابت‌ها

پس از انجام مراحل حل که در بخش‌های قبل توضیح داده شد، نوبت به محاسبه‌ی ثابت‌ها می‌رسد.

برای به‌دست آوردن ثابت‌های C_1 و C_2 در معادله‌ی (۲-۲۱) باید شرایط مرزی استوانه را اعمال کنیم. از آن‌جا که بارگذاری به‌صورت فشار داخلی و خارجی است، بنابراین شرایط مرزی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \sigma_r \big|_{r=r_i} = -p_i \\ \sigma_r \big|_{r=r_o} = -p_o \end{cases} \tag{۲-۳۵}$$

برای اعمال شرایط مرزی ابتدا باید آن را با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده، بی‌بعد کرد.

$$\begin{cases} \sigma_r^* \big|_{r^*=r_i^*} = -p_i^* \\ \sigma_r^* \big|_{r^*=r_o^*} = -p_o^* \end{cases} \tag{۲-۳۶}$$

با جای‌گذاری روابط تنش در شرایط مرزی (۲-۳۶) دو معادله به‌صورت توان‌های مختلفی از ϵ به‌دست می‌آید که اگر توان‌های مختلف ϵ در دوطرف تساوی باهم برابر قرار داده شوند، شرایط مرزی مربوط به هر معادله به‌دست می‌آید. بنابراین برای به‌دست آوردن ثابت‌های معادلات (۲-۲۱) و (۲-۲۵) از شرایط مرزی زیر استفاده می‌شود:

الف) شرایط مرزی بی‌بعد شده‌ی معادله‌ی (۲-۱۹)

$$\begin{cases} (A+B)C_1 - (A-B)\dfrac{C_2}{r_i^{*2}} = -p_i^* \\ (A+B)C_1 - (A-B)\dfrac{C_2}{r_o^{*2}} = -p_o^* \end{cases} \tag{۲-۳۷}$$

الف) شرایط مرزی بی‌بعد شده‌ی معادله‌ی (۲-۲۲)

$$\begin{cases} (A+B)C_3 - (A-B)\dfrac{C_4}{r_i^{*2}} = \dfrac{(3A-B)(1+\nu^*)}{4}\dfrac{C_2^2}{r_i^{*4}} - \dfrac{A\left(C_1 - \dfrac{C_2}{r_i^{*2}}\right)^2}{2} - \dfrac{B\left(C_1 + \dfrac{C_2}{r_i^{*2}}\right)^2}{2} \\ (A+B)C_3 - (A-B)\dfrac{C_4}{r_o^{*2}} = \dfrac{(3A-B)(1+\nu^*)}{4}\dfrac{C_2^2}{r_o^{*4}} - \dfrac{A\left(C_1 - \dfrac{C_2}{r_o^{*2}}\right)^2}{2} - \dfrac{B\left(C_1 + \dfrac{C_2}{r_o^{*2}}\right)^2}{2} \end{cases} \tag{۲-۳۸}$$

با حل دستگاه معادلات (۲-۳۷) ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{p_i^* - k^2 p_o^*}{(A+B)(k^2-1)} \\ C_2 = \dfrac{(p_i^* - p_o^*) r_o^{*^2}}{(A-B)(k^2-1)} \end{cases} \tag{۲-۳۹}$$

همچنین با حل دستگاه معادلات (۲-۳۸) ثابت‌های C_3 و C_4 به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} C_3 = \left[\dfrac{(\upsilon^* - 1) C_2^2}{4 r_o^{*^2} r_i^{*^2}} - \dfrac{C_1^2}{2}\right] \\ C_4 = \left[-C_1 C_2 - \dfrac{(1+\upsilon^*)(k^2+1) C_2^2}{4 r_o^{*^2}}\right] \end{cases} \tag{۲-۴۰}$$

۲-۶- نتایج

در بخش‌های قبل، روند استخراج و حل تحلیلی معادلات حاکم بر مسأله‌ی مورد بررسی، معرفی شد. در این بخش، ابتدا در یک مطالعه‌ی موردی، توزیع تنش و جابه‌جایی در پوسته نشان داده شده است و سپس آثار تغییر دو پارامتر، ضخامت و جنس بر حل غیرخطی بررسی شده و در نهایت حل غیرخطی با نتایج حاصل از مدل‌سازی المان محدود مقایسه می‌شود.

۲-۶-۱- مطالعه موردی

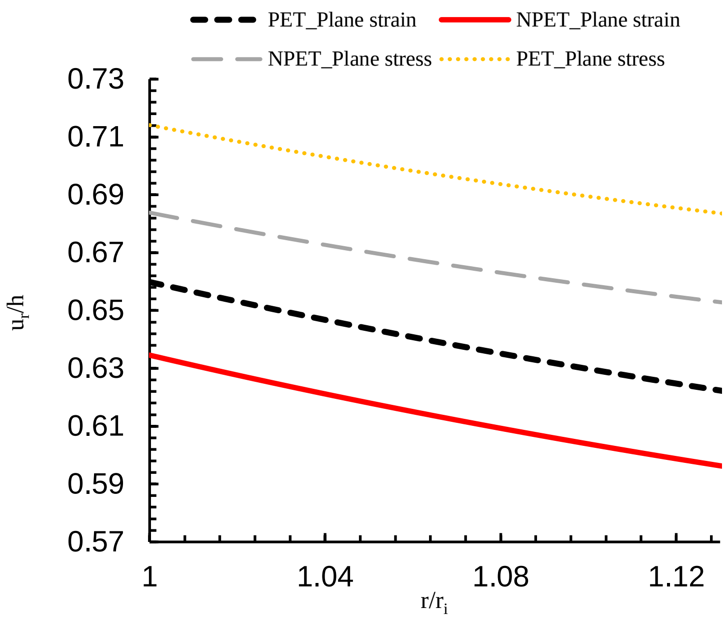
در این بخش، نتایج حاصل از حل تحلیلی، شامل توزیع جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در پوسته، در قالب یک مطالعه موردی ارائه گردیده است. در این بخش، خواص مکانیکی و مشخصات پوسته‌ی تحت فشار داخلی در جدول ۲-۱ آورده شده است.

جدول ۲-۱ مقدار کمیت‌های مختلف در مطالعه‌ی موردی

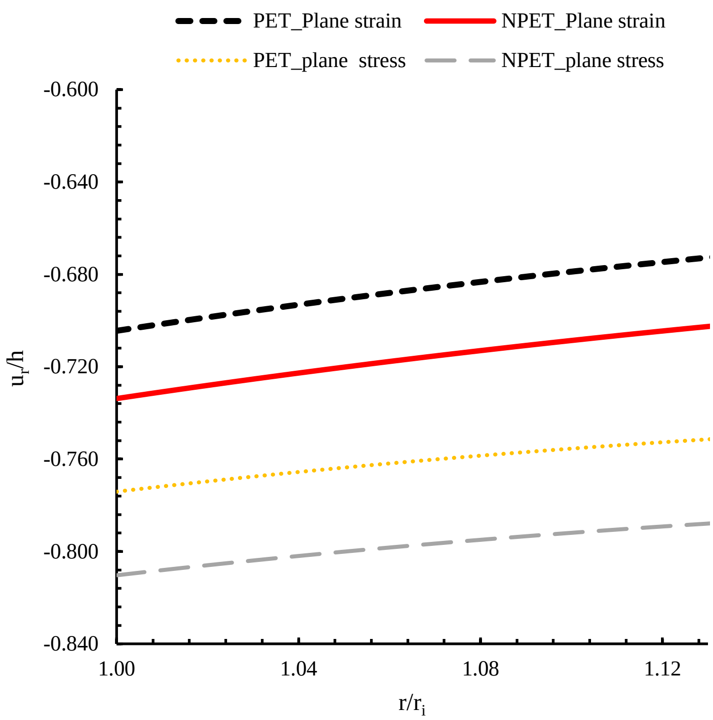
کمیت	r_i	r_o	p_i	p_o	E	R	υ
مقدار	۳۰mm	۳۴mm	۸MPa	۸MPa	۰,۷Gpa	۳۲mm	۰,۳

در شکل‌های ۲-۲ تا ۲-۱۰، توزیع میدان جابه‌جایی و میدان تنش در راستای جداره پوسته، برای سه حالت بارگذاری، برحسب حل خطی و غیرخطی رسم شده است. همانطور که مشخص است روش حل خطی و غیرخطی و همچنین تغییر شرایط انتهایی استوانه بر روی جابه‌جایی شعاعی اثر می‌گذارد

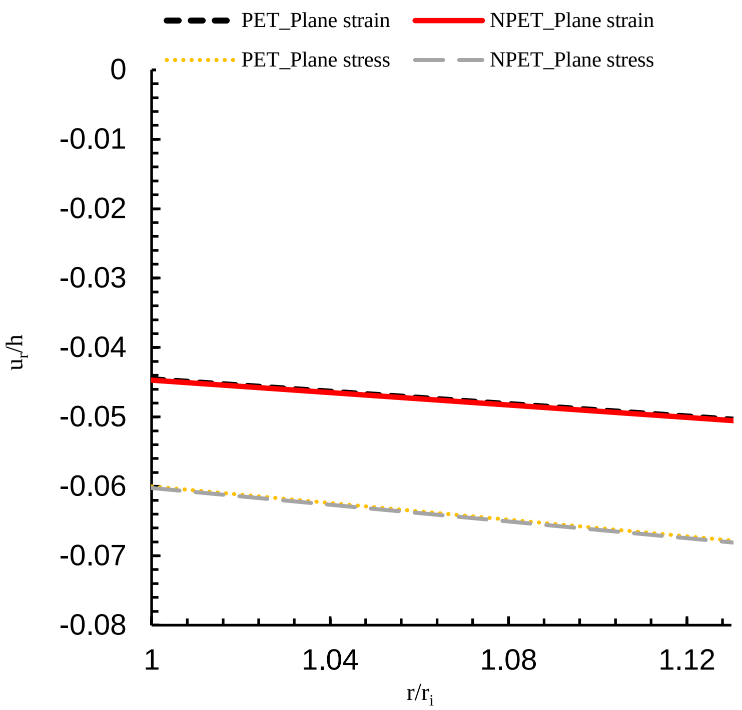
اما بر روی تنش شعاعی و تنش محیطی اثر چندانی ندارد.



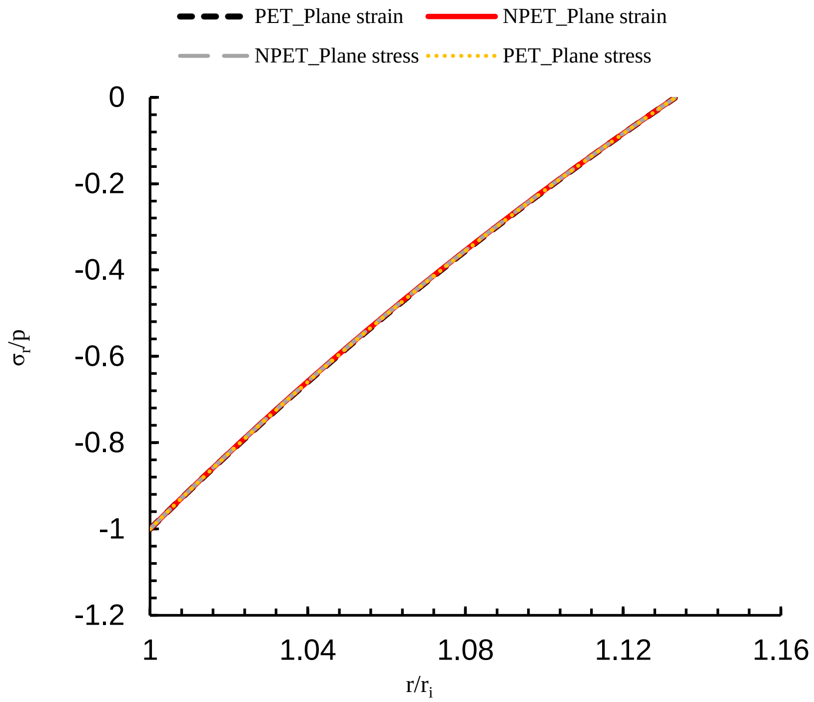
شکل ۲-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی



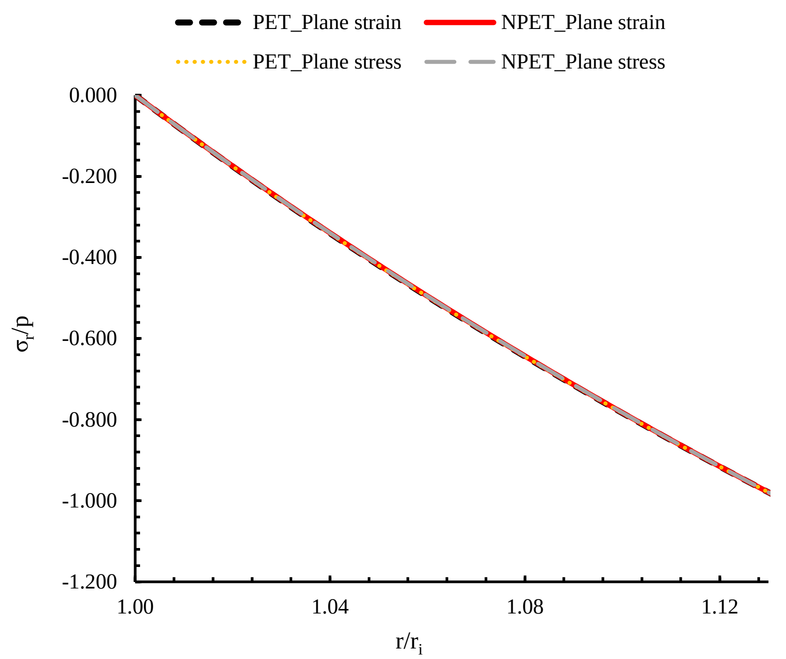
شکل ۲-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار خارجی



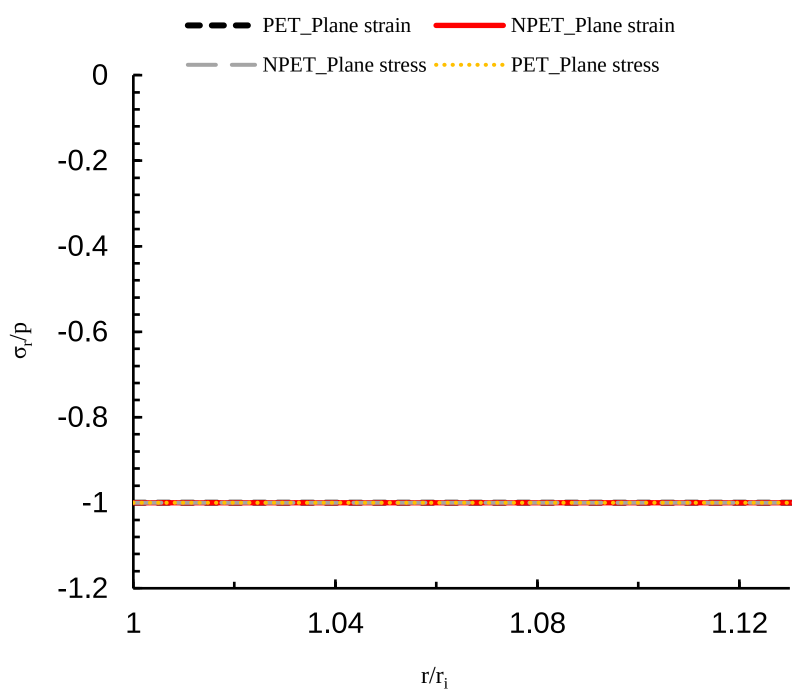
شکل ۲-۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی و خارجی



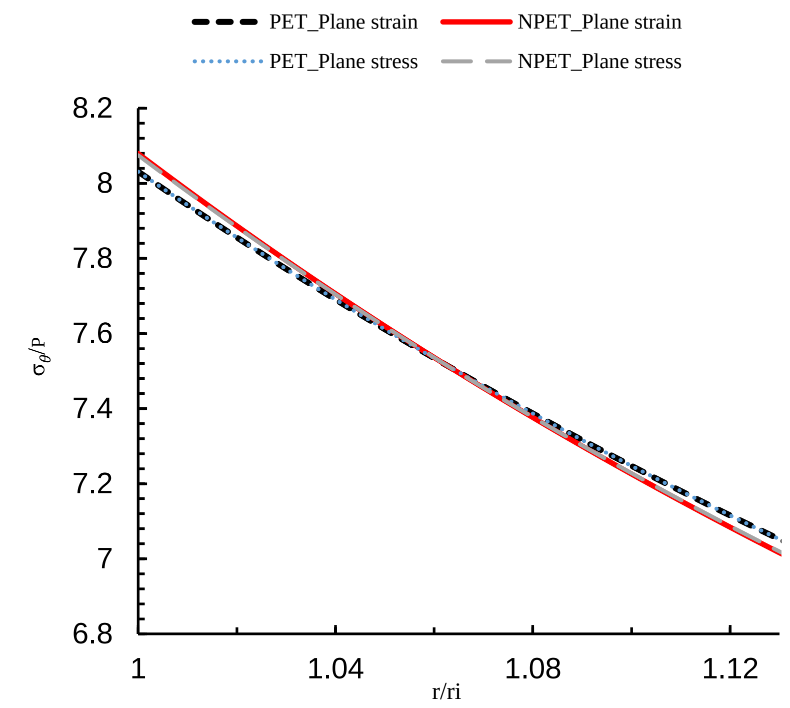
شکل ۲-۵ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی



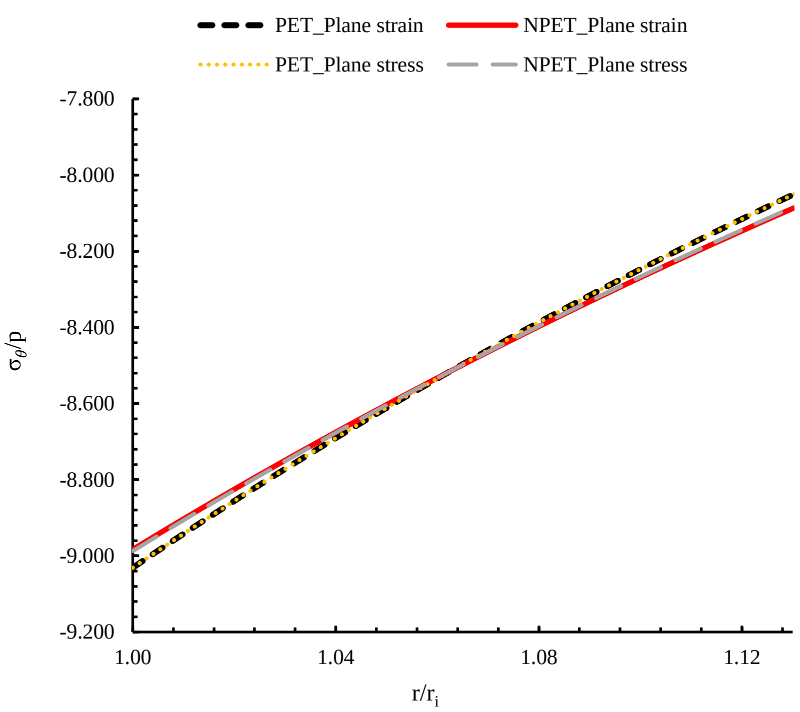
شکل ۲-۶ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار خارجی



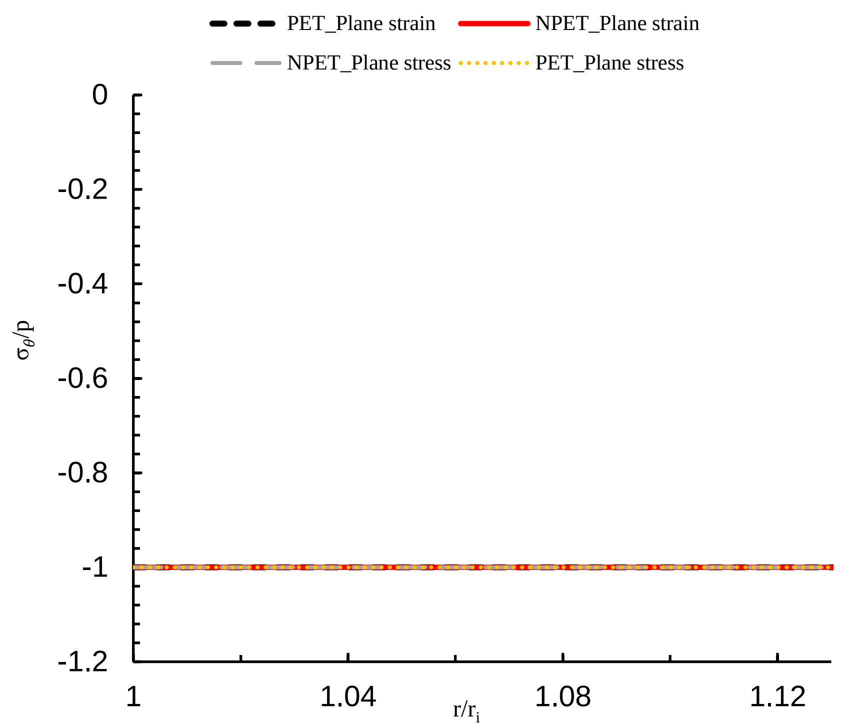
شکل ۲-۷ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی و خارجی



شکل ۲-۸ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی



شکل ۲-۹ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار خارجی



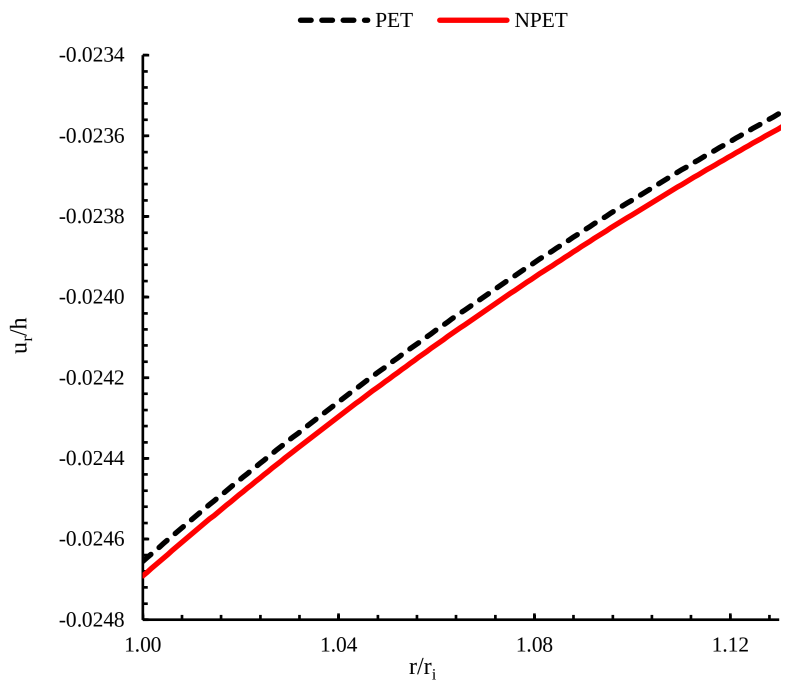
شکل ۲-۱۰ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی و خارجی

۲-۶-۲- پارامترهای مؤثر بر رفتار غیرخطی

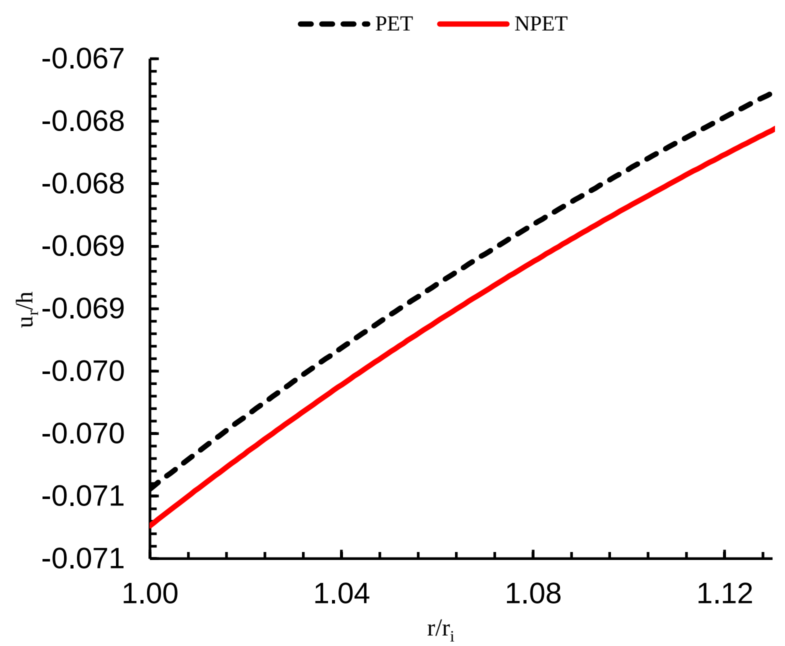
در این بخش، مقایسه‌های دیگری بین دو حل خطی و غیرخطی صورت گرفته که در آن اثر دو پارامتر، سفتی و ضخامت بر پاسخ غیرخطی بررسی شده است. برای بررسی جنبه‌های مختلف رفتار غیرخطی، نمودارهایی در این بخش رسم شده است.

۲-۶-۲-۱- اثر سفتی بر پاسخ غیرخطی

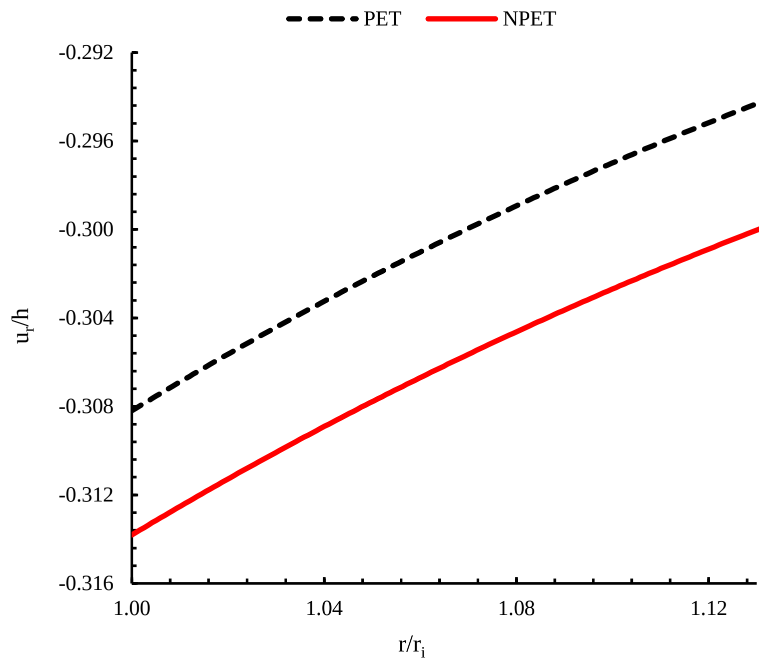
به‌منظور ارائه‌ی اثر پارامتر سفتی بر پاسخ غیرخطی مسأله، جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای برای چهار مقدار $p_o^* = 0.00914, 0.0032, 0.0914, 0.04$ در شکل‌های ۲-۱۱ تا ۲-۱۴ رسم شده است. برای تمام نمودارهای این بخش $r_i = 30mm$، $r_o = 34mm$ و $\upsilon = 0.3$ در نظر گرفته شده است. با توجه به این شکل‌ها می‌توان نتیجه گرفت که رفتار پوسته‌های بسیار سفت (مانند پوسته‌های فولادی) کاملاً خطی است. بنابراین در کاربردهای صنعتی و در فشارهای کاری متعارف چشم‌پوشی از رفتار غیرخطی سازه، به‌شرط آن‌که پوسته نازک نباشد، خطای بسیار کمی را ایجاد می‌کند.



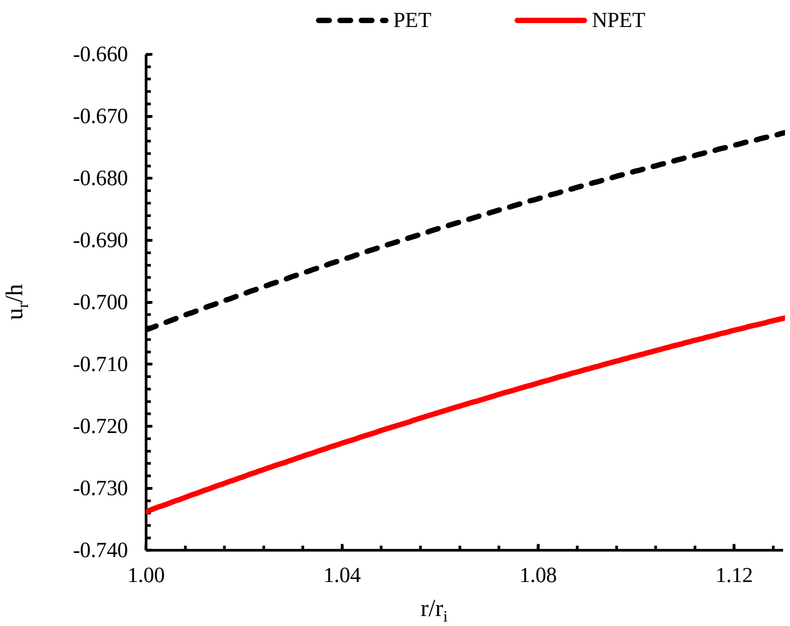
شکل ۲-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار $p_o^* = 0.0032$



شکل ۲-۱۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار $p_o^* = 0.00914$



شکل ۲-۱۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار $p_o^* = 0.04$

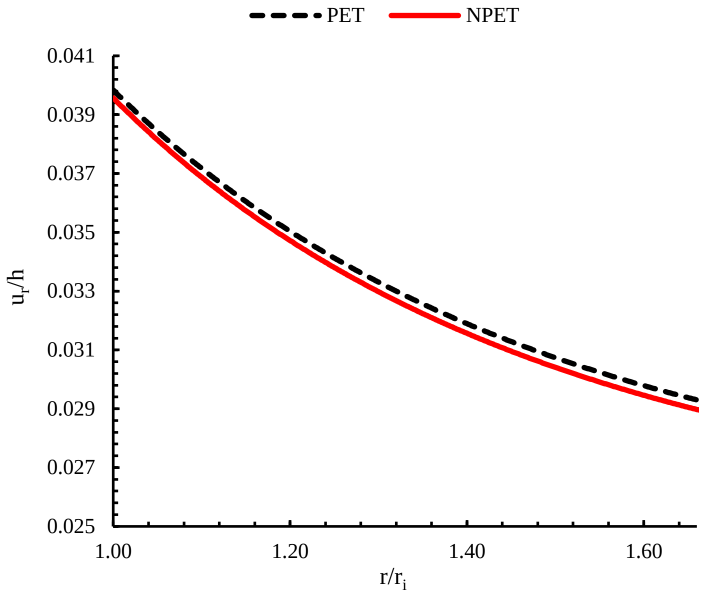


شکل ۲-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار $p_o^* = 0.0914$

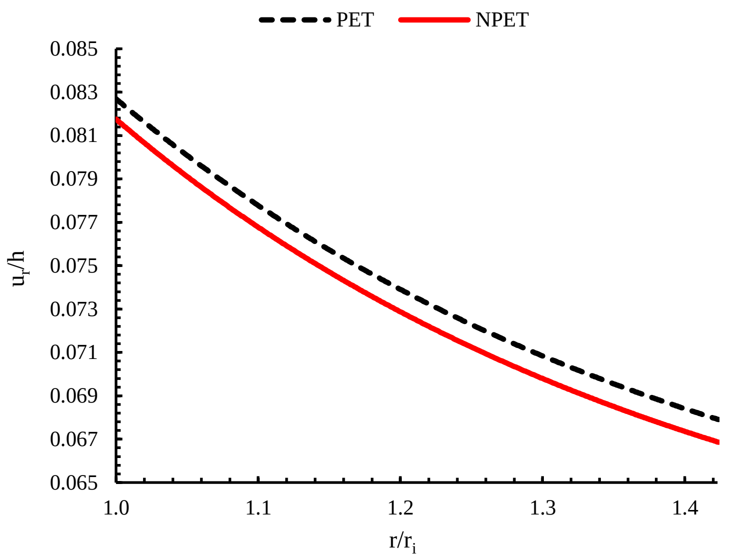
۲-۶-۲-۲- اثر ضخامت بر پاسخ غیرخطی

ضخامت استوانه دومین پارامتری است که در این فصل تغییرات آن بر پاسخ غیرخطی اثر می‌گذارد.

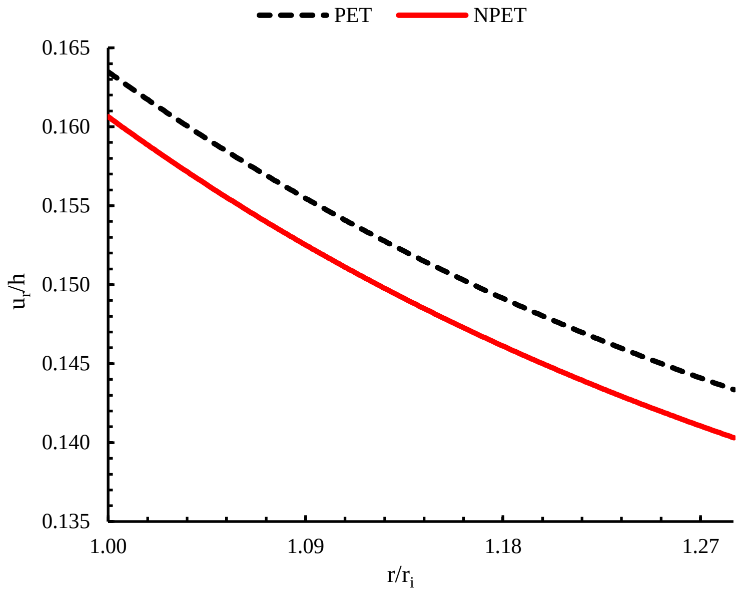
بدین منظور جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت فشار داخلی ثابت و یکنواخت $p_i^* = 0.0286$ همراه با ضخامت‌های مختلف بررسی شد که نتایج آن در شکل‌های ۲-۱۵ تا ۲-۱۸ آورده شده است. برای تمامی نمودارها شعاع صفحه‌ی میانی $R = 40\text{mm}$ در نظر گرفته شده است. همانطور که مشخص است، هرچه ضخامت استوانه کمتر می‌شود اختلاف حل خطی و غیرخطی بیشتر می‌شود.



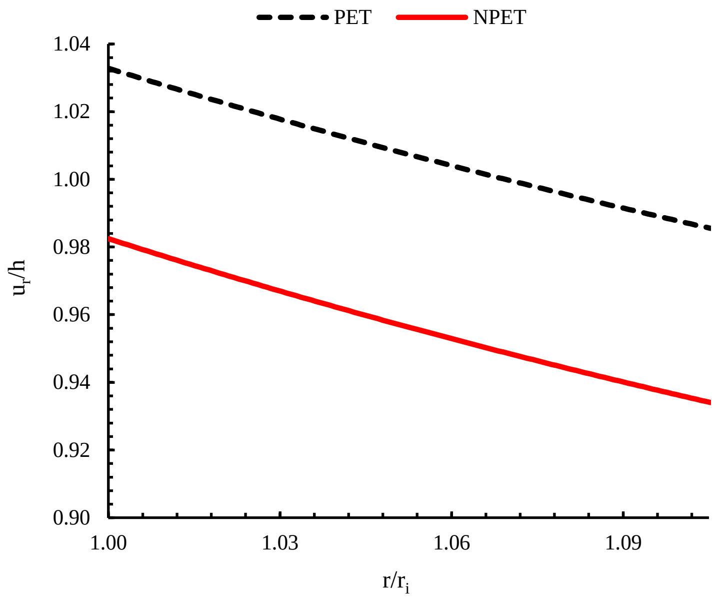
شکل ۲-۱۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن به ازای $\epsilon = 0.5$



شکل ۲-۱۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن به ازای $\epsilon = 0.35$



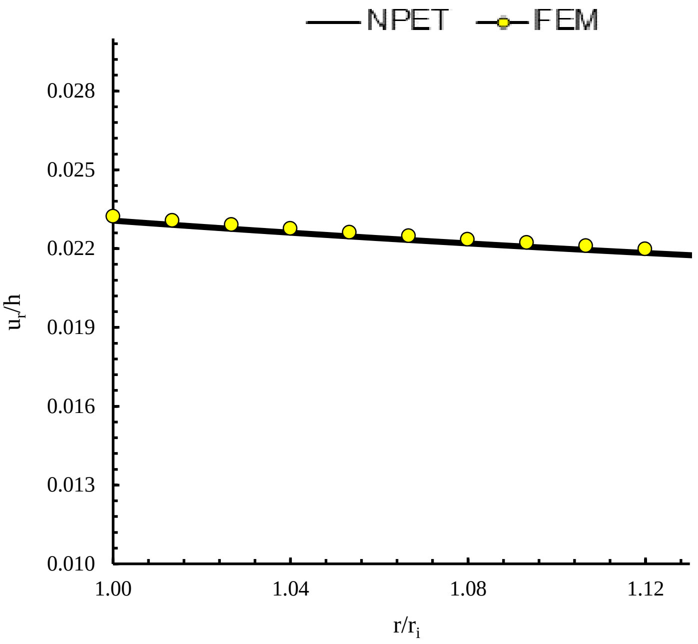
شکل ۲-۱۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن به ازای $\epsilon = 0.25$



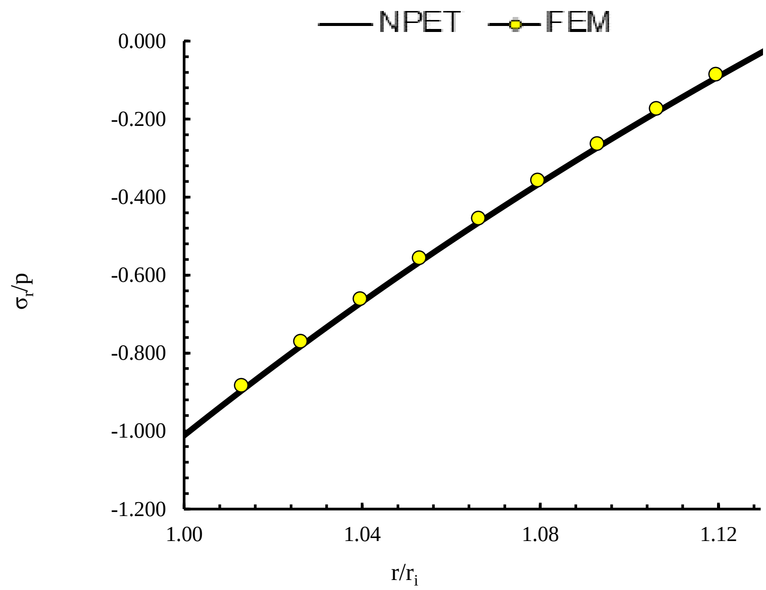
شکل ۲-۱۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن به ازای $\epsilon = 0.1$

۲-۶-۳- مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی

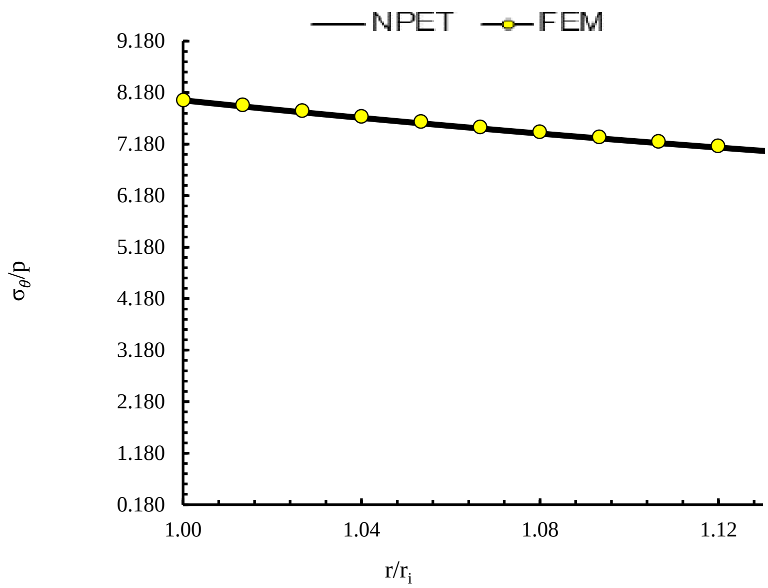
به‌منظور ارائه‌ی حل اجزای محدود، استوانه‌ای جدار ضخیم با مشخصات هندسی ذکرشده در جدول ۲-۱ تحت فشار داخلی $p_i^* = 0.0032$ با استفاده از نرم‌افزار آباکوس مورد تحلیل قرار گرفت.



شکل ۲-۱۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی



شکل ۲-۲۰ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی



شکل ۲-۲۱ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی

جدول ۲-۲ حاوی نتایج جابه‌جایی شعاعی، تنش نرمال شعاعی و محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و NPET در لایه‌های داخلی، میانی و خارجی استوانه تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد. همانطور که مشخص است؛ اختلاف بین مقادیر جابه‌جایی و تنش شعاعی محاسبه‌شده با روش‌های FE و NPET در لایه‌ی خارجی استوانه کمتر و در لایه‌ی داخلی استوانه بیشتر می‌باشد. همچنین اختلاف بین مقادیر تنش محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و NPET در لایه‌ی خارجی استوانه بیشتر و در لایه‌ی داخلی استوانه کمتر می‌باشد.

جدول۲- ۲ جابه‌جایی شعاعی و تنش نرمال شعاعی و محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و NPET در استوانه‌ی تحت فشار داخلی برای حالت کرنش صفحه‌ای

$\sigma_\theta{}^*$	$\sigma_r{}^*$	$u_r{}^*$		
۸,۰۳۶۱۸۲	-۰,۹۷۰۱۲	۰,۰۲۳۲۲۶	FEM	لایه‌ی داخلی $r=r_i$
۸,۰۳۱۱۷۹	-۱,۰۱۵۷۳۰	۰,۰۲۳۰۶۵	NPET	
۷,۵۱۷۹۸۴	-۰,۴۵۳۵۵۲	۰,۰۲۲۴۸۹	FEM	لایه‌ی میانی $r=R$
۷,۴۸۳۷۹۰	-۰,۴۶۶۰۹۰	۰,۰۲۲۳۳۰	NPET	
۷,۰۸۴۰۳۸	-۰,۰۲۰۸۲۰۲	۰,۰۲۱۸۸۲	FEM	لایه‌ی خارجی $r=r_o$
۷,۰۳۰۲۱۱	-۰,۰۱۰۸۶۵	۰,۰۲۱۷۲۵	NPET	

۲-۶-۴- جمع‌بندی

همان‌طور که در طول این فصل مشاهده شد، در استوانه‌های همگن شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای نسبت به کرنش صفحه‌ای در هر سه حالت بارگذاری (فشار داخلی، خارجی، داخلی و خارجی) از مقادیر جابه‌جایی شعاعی بالاتری برخوردار است، اما در مورد تنش شعاعی و محیطی تأثیر بسیار اندکی بر نتایج حاصل می‌گذارد. همچنین مشاهده شد که هرچه جنس ماده نرم‌تر (سفت) و ضخامت استوانه نازک‌تر(ضخیم‌تر) می‌شود اختلاف بین حل خطی و غیرخطی بیشتر (کم‌تر) می‌شود.

فصل ۳

تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن

۳-۱- تعریف مسأله

یک پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی همانند شکل ۲-۱ در نظر می‌گیریم. در این فصل جنس استوانه به‌صورت ناهمگن فرض می‌شود.

۳-۲- معادلات حاکم

برای مواد ناهمگن معادلات تعادل تنش و همچنین معادلات سینماتیک غیرخطی به‌صورت معادلات (۲-۲) و (۲-۴) گفته شده در فصل قبل می‌باشند اما معادلات ساختاری (روابط تنش-کرنش) به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{Bmatrix} = E(r)\begin{bmatrix}A & B\\ B & A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{bmatrix} \tag{۳-۱}$$

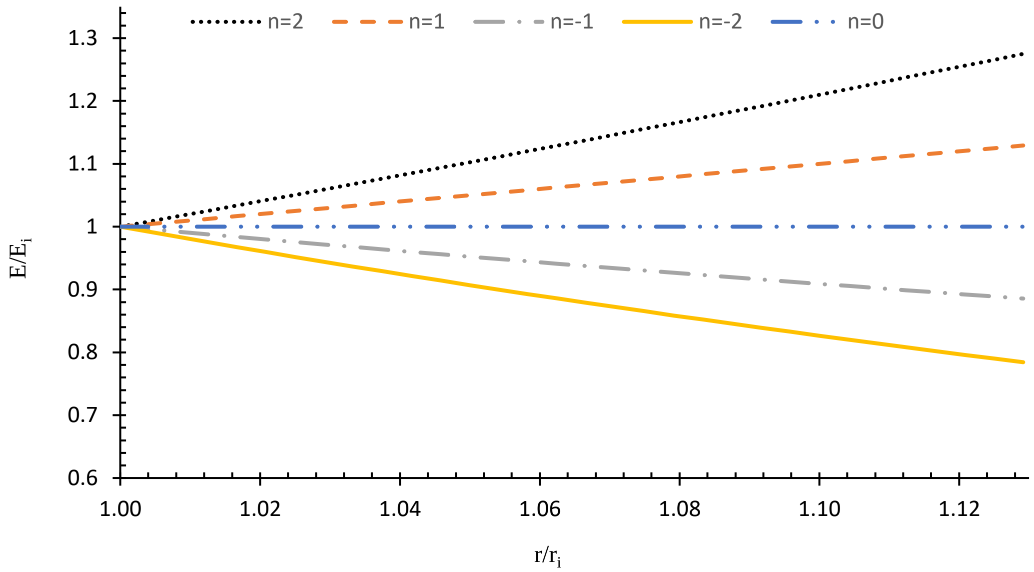
۳-۲-۱- توزیع ناهمگنی مدول الاستیسیته

در استوانه تشکیل شده از مواد ناهمگن (FGM)، همان‌طور که در معادله‌ی (۳-۱) مشاهده می‌شود مدول الاستیسیته $E(r)$ و ضریب پواسون υ توابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد r̄ می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالأخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع توانی برای مدول الاستیسیته در طول جداره‌ی استوانه به‌صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد r̄ به‌صورت معادله‌ی (۳-۲) خواهیم داشت:

$$E(r) = E_i(\bar{r})^n \tag{۳-۲}$$

که در این معادله $\bar{r} = \frac{r}{r_i}$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین E_i مدول الاستیسیته‌ی شعاع داخلی استوانه و n نیز ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که n=0 متناظر با ماده‌ی همگن است.

شکل ۳-۱ توزیع مدول الاستیسیته‌ی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن و همسانگرد به‌ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱ توزیع بی‌بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاعی

با جای‌گذاری معادله‌ی (۳-۲) در معادله‌ی (۲-۲):

$$[E(r)(A\varepsilon_r + B\varepsilon_\theta)]_{,r} + \frac{1}{r}[E(r)(A-B)(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)] = 0 \tag{۳-۳}$$

با جای‌گذاری معادله‌ی سینماتیک غیرخطی(۲-۴) و معادله‌ی (۳-۲) در معادله‌ی (۳-۳) خواهیم داشت:

$$\left[A(E_i(\bar{r})^n)\left(u_{r,r} + \frac{1}{2}(u_{r,r})^2\right) + BE_i(\bar{r})^n\left(\frac{1}{r}u_r + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_r\right)^2\right)\right]_{,r} + \frac{(A-B)}{r}E_i(\bar{r})^n\left[u_{r,r} + \frac{1}{2}(u_{r,r})^2 + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_r\right)^2\right] = 0 \tag{۴-۳}$$

با توجه به ثابت بودن E_i، پس از مشتق‌گیری و ساده کردن، نتیجه می‌شود.

$$Au_{r,rr} + \frac{A(n+1)}{r}u_{r,r} + \frac{(Bn-A)}{r^2}u_r + Au_{r,r}u_{r,rr} + \frac{B}{r^2}u_r u_{r,r} + \frac{(An+A-B)}{2r}{u_{r,r}}^2 + \frac{(Bn-B-A)}{2r^3}u_r^2 = 0 \tag{۵-۳}$$

۳-۳- محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی خطی و غیرخطی

در این بخش برای حل معادله‌ی (۳-۵) با استفاده از روش بسط اغتشاشی مستقیم، ابتدا باید آن را به‌کمک پارامترهای بی‌بعد معرفی شده در معادله‌ی (۲-۱۱)، بی‌بعد کرد.

$$\left[u^*_{r,r^*r^*}+\frac{(n+1)}{r^*}u^*_{r,r^*}+\frac{(\upsilon^*n-1)}{r^{*2}}u^*_r\right]\frac{\epsilon}{R} + \left[\left(u^*_{r,r^*}u^*_{r,r^*r^*}\right)+\left(\upsilon^*u^*_r\frac{u^*_{r,r^*}}{r^{*2}}\right)+\frac{(n+1-\upsilon^*)}{2r^*}\left(u^*_{r,r^*}\right)^2 + \frac{(\upsilon^*n-\upsilon^*-1)}{2r^{*3}}{u^*_r}^2\right]\frac{\epsilon^2}{R}=0 \tag{۳-۶}$$

از آنجا که $\frac{\epsilon}{R}\neq 0$ بنابراین:

$$\left[u^*_{r,r^*r^*}+\frac{(n+1)}{r^*}u^*_{r,r^*}+\frac{(\upsilon^*n-1)}{r^{*2}}u^*_r\right] + \left[\left(u^*_{r,r^*}u^*_{r,r^*r^*}\right)+\left(\upsilon^*u^*_r\frac{u^*_{r,r^*}}{r^{*2}}\right)+\frac{(n+1-\upsilon^*)}{2r^*}\left(u^*_{r,r^*}\right)^2 + \frac{(\upsilon^*n-\upsilon^*-1)}{2r^{*3}}{u^*_r}^2\right]\epsilon=0 \tag{۳-۷}$$

با توجه به این‌که مشتقات مراتب بالاتر نسبت به مشتقات مراتب پایین‌تر، غالب نیستند؛ بنابراین معادله‌ی (۳-۷) معرف یک مسأله‌ی اغتشاشی غیرتکین (منظم) است. بنابراین جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به شکل بسط اغتشاشی زیر قابل بازنویسی است:

$$u^*_r=u_0+\epsilon u_1+O(\epsilon^2) \tag{۳-۸}$$

با استفاده از جای‌گذاری بسط اغتشاشی (۳-۸) در معادله‌ی (۳-۷) و سپس مرتب کردن معادله‌ی حاصل براساس توان‌های مختلف پارامتر اغتشاشی، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\left(\left(u_{0,r^*r^*}\right)+(n+1)\frac{u_{0,r^*}}{r^*}+(\upsilon^*n-1)\frac{u_0}{r^{*2}}\right)\frac{\epsilon^0}{R} + \left(\left(u_{1,r^*r^*}+\frac{(n+1)u_{1,r^*}}{r^*}+\frac{(\upsilon^*n-1)u_1}{r^{*2}}\right)+\left(u_{0,r^*}\,u_{0,r^*r^*}\right) + \left(\upsilon^*\frac{u_0u_{0,r^*}}{r^{*2}}\right)+\frac{(n+1-\upsilon^*)}{2r^*}\left(u_{0,r^*}\right)^2+\frac{(\upsilon^*n-\upsilon^*-1)}{2r^{*3}}u_0^2\right)\frac{\epsilon^1}{R} + O(\epsilon^2)=0 \quad (۹-۳)$$

از آن‌جا که ϵ عدد بسیار کوچکی است، معادله‌ی (۳-۹) زمانی برقرار است که ضرایب توان‌های مختلف اپسیلون، برابر صفر باشند.

۳-۳-۱- معادله از مرتبه‌ی(ϵ^0)

معادله (ضریب ϵ^0) عبارت است از:

$$\left(\left(u_{0,r^*r^*}\right)+(n+1)\frac{u_{0,r^*}}{r^*}+(\upsilon^*n-1)\frac{u_0}{r^{*2}}\right)=0 \quad (۱۰-۳)$$

معادله‌ی (۳-۱۰) یک معادله اویلر-کوشی است. اگر در معادله‌ی (۳-۱۰) مقدار $u_0(r^*)=r^{*t}$ گذاشته شود، معادله‌ی مشخصه زیر به‌دست می‌آید:

$$t^2+(n)t+(\upsilon^*n-1)=0 \quad (۱۱-۳)$$

و ریشه‌های معادله‌ی مشخصه به‌صورت زیر می‌باشند:

$$t_{1,2}=\frac{(-n\pm\sqrt{\Delta})}{2} \quad (۳-۱۲ \text{ الف})$$

$$\Delta=(n)^2-4(\upsilon^*n-1) \quad (۳-۱۲ \text{ ب})$$

از آنجایی که $\Delta> 0$ معادله دارای ریشه‌های حقیقی است و پاسخ معادله‌ی (۳-۱۰) در این حالت برابر است با:

$$u_0 = C_1 r^{*t_1} + C_2 r^{*t_2} \tag{۱۳-۳}$$

۳-۳-۲- معادله از مرتبه‌ی (ϵ^1)

معادله‌ی بعدی ضریب ϵ^1 می‌باشد:

$$\left(\left(u_{1,r^*r^*} + \frac{(n+1)u_{1,r^*}}{r^*} + \frac{(\upsilon^* n - 1)u_1}{r^{*2}}\right) + \left(u_{0,r^*}\, u_{0,r^*r^*}\right) + \left(\upsilon^* \frac{u_0 u_{0,r^*}}{r^{*2}}\right) + \frac{(n+1-\upsilon^*)}{2r^*}\left(u_{0,r^*}\right)^2 + \frac{(\upsilon^* n - \upsilon^* - 1)}{2r^{*3}} u_0^2\right) = 0 \tag{۱۴-۳}$$

پس از آن‌که حل مرتبه‌ی صفر به‌دست آمد، با جای‌گذاری آن در معادله‌ی (۳-۱۴) و ساده‌سازی داریم:

$$\begin{aligned} u_{1,r^*r^*} r^{*2} + (n+1)u_{1,r^*}\, r^* + (\upsilon^* n - 1)u_1 &= -\left[t_1^3 + \upsilon^* t_1 + \frac{n-1-\upsilon^*}{2} t_1^2 + \frac{\upsilon^* n - \upsilon^* - 1}{2}\right] C_1^2 r^{*(2t_1-1)} \\ &- \left[t_2^3 + \upsilon^* t_2 + \frac{n-1-\upsilon^*}{2} t_2^2 + \frac{\upsilon^* n - \upsilon^* - 1}{2}\right] C_2^2 r^{*(2t_2-1)} \\ &- [(t_1+t_2)t_1 t_2 + \upsilon^*(t_1+t_2) + (n-1-\upsilon^*)t_1 t_2 \\ &+ (\upsilon^* n - \upsilon^* - 1)] C_1 C_2 r^{*(t_1+t_2-1)} \end{aligned} \tag{۱۵-۳}$$

معادله‌ی (۳-۱۵) یک معادله دیفرانسیل خطی درجه دو ناهمگن است که دارای یک حل عمومی و یک حل خصوصی است. اکنون برای حل عمومی، معادله دیفرانسیل همگن نظیر این معادله را در نظر می‌گیریم.

$$u_{1,r^*r^*} r^{*2} + (n+1)u_{1,r^*}\, r^* + (\upsilon^* n - 1)u_1 = 0 \tag{۱۶-۳}$$

بنابراین حل عمومی به‌صورت زیر است:

$$u_h = C_3 r^{*t_1} + C_4 r^{*t_2} \tag{۱۷-۳}$$

با استفاده از روش رونسکین می‌توان نشان داد که پاسخ خصوصی دارای ساختاری به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} u_p = &\left(\frac{1}{(2t_1 - t_2 + 1)} - \frac{1}{(t_1 + 1)}\right)\frac{K_1}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_1+1)} \\ &+ \left(\frac{1}{(t_2 + 1)} - \frac{1}{(2t_2 - t_1 + 1)}\right)\frac{K_2}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_2+1)} \\ &+ \left(\frac{1}{(t_1 + 1)} - \frac{1}{(t_2 + 1)}\right)\frac{K_3}{(t_2 - t_1)} r^{*(t_1+t_2+1)} \end{aligned} \tag{۳-۱۸}$$

در حل خصوصی (۳-۱۸)، عبارت‌های K_1 ، K_2 و K_3 به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} K_1 &= -\left[t_1^3 + \upsilon^* t_1 + \frac{n - 1 - \upsilon^*}{2} t_1^2 + \frac{\upsilon^* n - \upsilon^* - 1}{2}\right] C_1^2 \\ K_2 &= -\left[t_2^3 + \upsilon^* t_2 + \frac{n - 1 - \upsilon^*}{2} t_2^2 + \frac{\upsilon^* n - \upsilon^* - 1}{2}\right] C_2^2 \\ K_3 &= -[(t_1 + t_2)t_1 t_2 + \upsilon^*(t_1 + t_2) + (n - 1 - \upsilon^*)t_1 t_2 + (\upsilon^* n - \upsilon^* - 1)]C_1 C_2 \end{aligned} \tag{۳-۱۹}$$

بنابراین حل کلی معادله‌ی (۳-۱۵) به‌صورت زیر برابر جمع جواب عمومی و خصوصی خواهد بود:

$$\begin{aligned} u_1 = u_h + u_p = &\, C_3 r^{*t_1} + C_4 r^{*t_2} \\ &+ \left(\frac{1}{(2t_1 - t_2 + 1)} - \frac{1}{(t_1 + 1)}\right)\frac{K_1}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_1+1)} \\ &+ \left(\frac{1}{(t_2 + 1)} - \frac{1}{(2t_2 - t_1 + 1)}\right)\frac{K_2}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_2+1)} \\ &+ \left(\frac{1}{(t_1 + 1)} - \frac{1}{(t_2 + 1)}\right)\frac{K_3}{(t_2 - t_1)} r^{*(t_1+t_2+1)} \end{aligned} \tag{۳-۲۰}$$

بنابراین جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} u_r^* = u_0 + \epsilon u_1 = &\, C_1 r^{*t_1} + C_2 r^{*t_2} \\ &+ \epsilon \Bigg[C_3 r^{*t_1} + C_4 r^{*t_2} \\ &+ \left(\frac{1}{(2t_1 - t_2 + 1)} - \frac{1}{(t_1 + 1)}\right)\frac{K_1}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_1+1)} \\ &+ \left(\frac{1}{(t_2 + 1)} - \frac{1}{(2t_2 - t_1 + 1)}\right)\frac{K_2}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_2+1)} \\ &+ \left(\frac{1}{(t_1 + 1)} - \frac{1}{(t_2 + 1)}\right)\frac{K_3}{(t_2 - t_1)} r^{*(t_1+t_2+1)}\Bigg] \end{aligned} \tag{۳-۲۱}$$

۳-۴- محاسبه‌ی کرنش و تنش‌های شعاعی و محیطی

۳-۴-۱- محاسبه‌ی کرنش و تنش خطی

برای محاسبه‌ی معادلات کرنش خطی باید معادله‌ی (۳-۱۳) را در معادله‌ی (۲-۲۷) جای‌گذاری کرد:

$$\begin{cases}\varepsilon_r = \epsilon\left(C_1 t_1 r^{*(t_1-1)} + C_2 t_2 r^{*(t_2-1)}\right)\\ \varepsilon_\theta = \epsilon\left(C_1 r^{*(t_1-1)} + C_2 r^{*(t_2-1)}\right)\end{cases} \tag{۳-۲۲}$$

پس از محاسبه‌ی کرنش‌های شعاعی و محیطی، می‌توان به‌کمک معادلات ساختاری (۳-۱)، مقادیر تنش نرمال شعاعی و محیطی را محاسبه کرد: بنابراین با جای‌گذاری معادلات (۳-۲۲) در (۳-۱)، تنش شعاعی و محیطی برای حل خطی مسأله نتیجه می‌شوند:

$$\begin{cases}\sigma_r = E(r)\epsilon\left[\left((At_1 + B)C_1 r^{*(t_1-1)} + (At_2 + B)C_2 r^{*(t_2-1)}\right)\right]\\ \sigma_\theta = E(r)\epsilon\left[\left((Bt_1 + A)C_1 r^{*(t_1-1)} + (Bt_2 + A)C_2 r^{*(t_2-1)}\right)\right]\end{cases} \tag{۳-۲۳}$$

که با جای‌گذاری معادلات (۲-۱۲) در معادلات (۳-۲۳)، تنش شعاعی و محیطی به‌صورت زیر بی‌بعد می‌شوند:

$$\begin{cases}\sigma_r^* = (\bar{r})^n\left((At_1 + B)C_1 r^{*(t_1-1)} + (At_2 + B)C_2 r^{*(t_2-1)}\right)\\ \sigma_\theta^* = (\bar{r})^n\left((Bt_1 + A)C_1 r^{*(t_1-1)} + (Bt_2 + A)C_2 r^{*(t_2-1)}\right)\end{cases} \tag{۳-۲۴}$$

۳-۴-۲- محاسبه‌ی کرنش و تنش غیرخطی

برای محاسبه‌ی معادلات کرنش ابتدا باید معادله‌ی (۳-۲۱) را در روابط سینماتیک بی‌بعد شده‌ی (۲-۳۱) جای‌گذاری کرد:

$$\varepsilon_r = \epsilon\left(C_1 t_1 r^{*(t_1-1)} + C_2 t_2 r^{*(t_2-1)}\right) + \epsilon^2 \Bigg[C_3 t_1 r^{*(t_1-1)} + C_4 t_2 r^{*(t_2-1)} + \left(\frac{1}{(2t_1 - t_2 + 1)} - \frac{1}{(t_1+1)}\right)\frac{(2t_1+1)K_1}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_1)} + \left(\frac{1}{(t_2+1)} - \frac{1}{(2t_2 - t_1 + 1)}\right)\frac{(2t_2+1)K_2}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_2)} + \left(\frac{1}{(t_1+1)} - \frac{1}{(t_2+1)}\right)\frac{(t_1+t_2+1)K_3}{(t_2-t_1)} r^{*(t_1+t_2)} + \frac{\left(C_1 t_1 r^{*(t_1-1)} + C_2 t_2 r^{*(t_2-1)}\right)^2}{2} \Bigg] \quad \text{(۳-۲۵ الف)}$$

$$\varepsilon_\theta = \epsilon\left(C_1 r^{*(t_1-1)} + C_2 r^{*(t_2-1)}\right) + \epsilon^2 \Bigg[C_3 r^{*(t_1-1)} + C_4 r^{*(t_2-1)} + \left(\frac{1}{(2t_1 - t_2 + 1)} - \frac{1}{(t_1+1)}\right)\frac{K_1}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_1)} + \left(\frac{1}{(t_2+1)} - \frac{1}{(2t_2 - t_1 + 1)}\right)\frac{K_2}{(t_2 - t_1)} r^{*(2t_2)} + \left(\frac{1}{(t_1+1)} - \frac{1}{(t_2+1)}\right)\frac{K_3}{(t_2-t_1)} r^{*(t_1+t_2)} + \frac{\left(C_1 r^{*(t_1-1)} + C_2 r^{*(t_2-1)}\right)^2}{2} \Bigg] \quad \text{(۳-۲۵ ب)}$$

پس از محاسبه‌ی کرنش‌های شعاعی و محیطی، می‌توان با جایگذاری معادلات (۳-۲۵) در معادلات (۳-۱)، تنش شعاعی و محیطی را برای حل غیرخطی به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}\sigma_r = E(r)\epsilon\Bigg[&\Big((At_1+B)C_1 r^{*(t_1-1)} + (At_2+B)C_2 r^{*(t_2-1)}\Big)\\
&+\epsilon\Bigg(\big((At_1+B)C_3\big)r^{*(t_1-1)} + \big((At_2+B)C_4\big)r^{*(t_2-1)}\\
&+\left(\left(\frac{1}{(2t_1-t_2+1)}-\frac{1}{(t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_1+1)+B)K_1}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(2t_1)}\\
&+\left(\left(\frac{1}{(t_2+1)}-\frac{1}{(2t_2-t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_2+1)+B)K_2}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(2t_2)}\\
&+\left(\left(\frac{1}{(t_1+1)}-\frac{1}{(t_2+1)}\right)\frac{(A(t_1+t_2+1)+B)K_3}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(t_1+t_2)}\\
&+\left(\frac{(A{t_1}^2+B)}{2}C_1^2\right)r^{*2(t_1-1)} + \left(\frac{(A{t_2}^2+B)}{2}C_2^2\right)r^{*2(t_2-1)}\\
&+\big((At_1t_2+B)C_1C_2\big)r^{*(t_1+t_2-2)}\Bigg)\Bigg]\end{aligned} \tag{۳-۲۶ الف}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta = E(r)\epsilon\Bigg[&\Big((Bt_1+A)C_1 r^{*(t_1-1)} + (Bt_2+A)C_2 r^{*(t_2-1)}\Big)\\
&+\epsilon\Bigg(\big((Bt_1+A)C_3\big)r^{*(t_1-1)} + \big((Bt_2+A)C_4\big)r^{*(t_2-1)}\\
&+\left(\left(\frac{1}{(2t_1-t_2+1)}-\frac{1}{(t_1+1)}\right)\frac{(B(2t_1+1)+A)K_1}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(2t_1)}\\
&+\left(\left(\left(\frac{1}{(t_2+1)}-\frac{1}{(2t_2-t_1+1)}\right)\frac{(B(2t_2+1)+A)K_2}{(t_2-t_1)}\right)\right)r^{*(2t_2)}\\
&+\left(\left(\frac{1}{(t_1+1)}-\frac{1}{(t_2+1)}\right)\frac{(B(t_1+t_2+1)+A)K_3}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(t_1+t_2)}\\
&+\left(\frac{(B{t_1}^2+A)}{2}C_1^2\right)r^{*2(t_1-1)} + \left(\frac{(B{t_2}^2+A)}{2}C_2^2\right)r^{*2(t_2-1)}\\
&+\big((Bt_1t_2+A)C_1C_2\big)r^{*(t_1+t_2-2)}\Bigg)\Bigg]\end{aligned} \tag{۳-۲۶ ب}$$

بنابراین با جای‌گذاری معادلات (۲-۱۱) در (۳-۲۶)، تنش شعاعی و محیطی به‌صورت زیر بی‌بعد

می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\sigma_r^* = (\bar{r})^n \Bigg[& \left((At_1 + B)C_1 r^{*(t_1-1)} + (At_2 + B)C_2 r^{*(t_2-1)}\right) \\
& + \epsilon \Bigg[\left((At_1 + B)C_3\right) r^{*(t_1-1)} + \left((At_2 + B)C_4\right) r^{*(t_2-1)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{(2t_1 - t_2 + 1)} - \frac{1}{(t_1 + 1)}\right)\frac{(A(2t_1 + 1) + B)K_1}{(t_2 - t_1)}\right) r^{*(2t_1)} \\
& + \left(\left(\left(\frac{1}{(t_2 + 1)} - \frac{1}{(2t_2 - t_1 + 1)}\right)\frac{(A(2t_2 + 1) + B)K_2}{(t_2 - t_1)}\right)\right) r^{*(2t_2)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{(t_1 + 1)} - \frac{1}{(t_2 + 1)}\right)\frac{(A(t_1 + t_2 + 1) + B)K_3}{(t_2 - t_1)}\right) r^{*(t_1+t_2)} \\
& + \left(\frac{(A{t_1}^2 + B)}{2} C_1^2\right) r^{*2(t_1-1)} + \left(\frac{(A{t_2}^2 + B)}{2} C_2^2\right) r^{*2(t_2-1)} \\
& + \left((At_1 t_2 + B)C_1 C_2\right) r^{*(t_1+t_2-2)} \Bigg]\Bigg]
\end{aligned}
\qquad (۳\text{-}۲۷\ \text{الف})
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_\theta^* = (\bar{r})^n \Bigg[& \left((Bt_1 + A)C_1 r^{*(t_1-1)} + (Bt_2 + A)C_2 r^{*(t_2-1)}\right) \\
& + \epsilon \Bigg[\left((Bt_1 + A)C_3\right) r^{*(t_1-1)} + \left((Bt_2 + A)C_4\right) r^{*(t_2-1)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{(2t_1 - t_2 + 1)} - \frac{1}{(t_1 + 1)}\right)\frac{(B(2t_1 + 1) + A)K_1}{(t_2 - t_1)}\right) r^{*(2t_1)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{(t_2 + 1)} - \frac{1}{(2t_2 - t_1 + 1)}\right)\frac{(B(2t_2 + 1) + A)K_2}{(t_2 - t_1)}\right) r^{*(2t_2)} \\
& + \left(\left(\frac{1}{(t_1 + 1)} - \frac{1}{(t_2 + 1)}\right)\frac{(B(t_1 + t_2 + 1) + A)K_3}{(t_2 - t_1)}\right) r^{*(t_1+t_2)} \\
& + \left(\frac{(B{t_1}^2 + A)}{2} C_1^2\right) r^{*2(t_1-1)} + \left(\frac{(B{t_2}^2 + A)}{2} C_2^2\right) r^{*2(t_2-1)} \\
& + \left((Bt_1 t_2 + A)C_1 C_2\right) r^{*(t_1+t_2-2)} \Bigg]\Bigg]
\end{aligned}
\qquad (۳\text{-}۲۷\ \text{ب})
$$

۳-۵- محاسبه‌ی ثابت‌ها

پس از انجام مراحل حل، که در بخش‌های قبل توضیح داده شد، نوبت به محاسبه‌ی ثابت‌ها می‌رسد. برای به‌دست آوردن ثابت‌های C_1 و C_2 در معادله‌ی (۳-۱۳) باید شرایط مرزی استوانه را اعمال کنیم. از آن‌جا که بارگذاری به‌صورت فشار داخلی و خارجی است، بنابراین شرایط مرزی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_r \big|_{r=r_i} = -p_i \tag{۳-۲۸ الف}$$

$$\sigma_r \big|_{r=r_o} = -p_o \tag{۳-۲۸ ب}$$

برای اعمال شرایط مرزی ابتدا باید آن را با استفاده از پارامترهای بی‌بعد تعریف شده در پیوست، بی‌بعد کرد.

$$\sigma_r^* \big|_{r^*=r_i^*} = -p_i^* \tag{۳-۲۹ الف}$$

$$\sigma_r^* \big|_{r^*=r_o^*} = -p_o^* \tag{۳-۲۹ ب}$$

با جای‌گذاری روابط تنش در شرایط مرزی (۳-۲۹) دو معادله به‌صورت توان‌های مختلفی از ϵ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_r^*\big|_{r=r_i} = \Bigg[\Big((At_1+B)C_1 r^{*(t_1-1)} + (At_2+B)C_2 r^{*(t_2-1)}\Big)$$
$$+\epsilon\Bigg[\Big((At_1+B)C_3\Big)r^{*(t_1-1)} + \Big((At_2+B)C_4\Big)r^{*(t_2-1)}$$
$$+\left(\left(\frac{1}{(2t_1-t_2+1)}-\frac{1}{(t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_1+1)+B)K_1}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(2t_1)}$$
$$+\left(\left(\left(\frac{1}{(t_2+1)}-\frac{1}{(2t_2-t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_2+1)+B)K_2}{(t_2-t_1)}\right)\right)r^{*(2t_2)}$$
$$+\left(\left(\frac{1}{(t_1+1)}-\frac{1}{(t_2+1)}\right)\frac{(A(t_1+t_2+1)+B)K_3}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(t_1+t_2)}$$
$$+\left(\frac{(A{t_1}^2+B)}{2}C_1^2\right)r^{*2(t_1-1)} + \left(\frac{(A{t_2}^2+B)}{2}C_2^2\right)r^{*2(t_2-1)}$$
$$+\Big((At_1t_2+B)C_1C_2\Big)r^{*(t_1+t_2-2)}\Bigg]\Bigg] = -\frac{p_i^*}{(\bar{r})^n}$$

(۳-۳۰ الف)

$$\sigma_r^*\big|_{r=r_o} = \Bigg[\Big((At_1+B)C_1 r^{*(t_1-1)} + (At_2+B)C_2 r^{*(t_2-1)}\Big)$$
$$+\epsilon\Bigg[\Big((At_1+B)C_3\Big)r^{*(t_1-1)} + \Big((At_2+B)C_4\Big)r^{*(t_2-1)}$$
$$+\left(\left(\frac{1}{(2t_1-t_2+1)}-\frac{1}{(t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_1+1)+B)K_1}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(2t_1)}$$
$$+\left(\left(\left(\frac{1}{(t_2+1)}-\frac{1}{(2t_2-t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_2+1)+B)K_2}{(t_2-t_1)}\right)\right)r^{*(2t_2)}$$
$$+\left(\left(\frac{1}{(t_1+1)}-\frac{1}{(t_2+1)}\right)\frac{(A(t_1+t_2+1)+B)K_3}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(t_1+t_2)}$$
$$+\left(\frac{(A{t_1}^2+B)}{2}C_1^2\right)r^{*2(t_1-1)} + \left(\frac{(A{t_2}^2+B)}{2}C_2^2\right)r^{*2(t_2-1)}$$
$$+\Big((At_1t_2+B)C_1C_2\Big)r^{*(t_1+t_2-2)}\Bigg]\Bigg] = -\frac{p_o^*}{(\bar{r})^n}$$

(۳-۳۰ ب)

در مرز شعاع داخلی استوانه $\bar{r}=1$ و مرز خارجی استوانه $\bar{r}=k$، (که $k=\frac{r_o^*}{r_i^*}$) می‌باشد. بنابراین اگر توان‌های مختلف ϵ در دوطرف تساوی با هم برابر قرار داده شوند، شرایط مرزی مربوط به هر معادله به‌دست می‌آید.

الف) شرایط مرزی بی‌بعد شده‌ی معادله‌ی (۳-۱۰)

$$\sigma_r^*\,\big|_{r^*=r_i^*}=\left((At_1+B)C_1r^{*(t_1-1)}+(At_2+B)C_2r^{*(t_2-1)}\right)=-p_i^* \tag{۳-۳۱ الف}$$

$$\sigma_r^*\,\big|_{r^*=r_o^*}=\left((At_1+B)C_1r^{*(t_1-1)}+(At_2+B)C_2r^{*(t_2-1)}\right)=-\frac{p_o^*}{k^n} \tag{۳-۳۱ ب}$$

ب) شرایط مرزی بی‌بعد شده‌ی معادله‌ی (۳-۱۴)

$$\begin{aligned}\sigma_r^*\,\big|_{r^*=r_i^*}=\Bigg[&\left((At_1+B)C_3\right)r^{*(t_1-1)}+\left((At_2+B)C_4\right)r^{*(t_2-1)}\\&+\left(\left(\frac{1}{(2t_1-t_2+1)}-\frac{1}{(t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_1+1)+B)K_1}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(2t_1)}\\&+\left(\left(\left(\frac{1}{(t_2+1)}-\frac{1}{(2t_2-t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_2+1)+B)K_2}{(t_2-t_1)}\right)\right)r^{*(2t_2)}\\&+\left(\left(\frac{1}{(t_1+1)}-\frac{1}{(t_2+1)}\right)\frac{(A(t_1+t_2+1)+B)K_3}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(t_1+t_2)}\\&+\left(\frac{(A{t_1}^2+B)}{2}C_1^2\right)r^{*2(t_1-1)}+\left(\frac{(A{t_2}^2+B)}{2}C_2^2\right)r^{*2(t_2-1)}\\&+\left((At_1t_2+B)C_1C_2\right)r^{*(t_1+t_2-2)}\Bigg]=0\end{aligned} \tag{۳-۳۲ الف}$$

$$\sigma_r^*\Big|_{r^*=r_o^*} = \Bigg[\left((At_1+B)C_3\right)r^{*(t_1-1)} + \left((At_2+B)C_4\right)r^{*(t_2-1)} + \left(\left(\frac{1}{(2t_1-t_2+1)}-\frac{1}{(t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_1+1)+B)K_1}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(2t_1)} + \left(\left(\left(\frac{1}{(t_2+1)}-\frac{1}{(2t_2-t_1+1)}\right)\frac{(A(2t_2+1)+B)K_2}{(t_2-t_1)}\right)\right)r^{*(2t_2)} + \left(\left(\frac{1}{(t_1+1)}-\frac{1}{(t_2+1)}\right)\frac{(A(t_1+t_2+1)+B)K_3}{(t_2-t_1)}\right)r^{*(t_1+t_2)} + \left(\frac{(A{t_1}^2+B)}{2}C_1^2\right)r^{*2(t_1-1)} + \left(\frac{(A{t_2}^2+B)}{2}C_2^2\right)r^{*2(t_2-1)} + \left((At_1t_2+B)C_1C_2\right)r^{*(t_1+t_2-2)}\Bigg] = 0 \qquad (۳-۳۲\ ب)$$

که برای به‌دست آوردن ثابت‌های معادلات (۳-۱۳) و (۳-۲۰) از شرایط مرزی بالا استفاده می‌شود،

بنابراین با حل دو معادله و دو مجهول (۳-۳۱) ثابت‌های C_1 و C_2 به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_1 = \frac{\left(\frac{p_o^*}{k^n} - p_i^* k^{(t_2-1)}\right)}{(At_1+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{*(t_1-1)}} \qquad (۳-۳۳\ الف)$$

$$C_2 = \frac{\left(p_i^* k^{(t_1-1)} - \frac{p_o^*}{k^n}\right)}{(At_2+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{*(t_2-1)}} \qquad (۳-۳۳\ ب)$$

همچنین با قرار دادن ثابت‌های (۳-۳۳) در معادله‌ی (۳-۱۳) مقدار u_0 به‌دست می‌آید.

$$u_0 = \frac{\left(p_o^* - p_i^* k^{(t_2-1)}\right)}{(At_1+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{*(t_1-1)}} r^{*t_1} + \frac{\left(p_i^* k^{(t_1-1)} - p_o^*\right)}{(At_2+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{*(t_2-1)}} r^{*t_2} \qquad (۳-۳۴)$$

همچنین با جای‌گذاری (۳-۲۰) در شرایط مرزی (۳-۳۲)، ثابت‌های C_3 و C_4 به‌دست می‌آیند:

$$C_3 =$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{-(A(2t_1+1)+B)\left(\frac{1}{(2t_1-t_2+1)}-\frac{1}{(t_1+1)}\right)K_1\left(k^{(t_2-1)}r_i^{*2t_1}-r_o^{*2t_1}\right)}{(At_1+B)(t_2-t_1)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_1-1)}}\\
&+\frac{-(A(2t_2+1)+B)\left(\frac{1}{(t_2+1)}-\frac{1}{(2t_2-t_1+1)}\right)K_2\left(k^{(t_2-1)}r_i^{*2t_2}-r_o^{*2t_2}\right)}{(At_1+B)(t_2-t_1)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_1-1)}}\\
&+\frac{-(A(t_1+t_2+1)+B)\left(\frac{1}{(t_1+1)}-\frac{1}{(t_2+1)}\right)K_3\left(k^{(t_2-1)}r_i^{*(t_1+t_2)}-r_o^{*(t_1+t_2)}\right)}{(At_1+B)(t_2-t_1)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_1-1)}}\\
&+\frac{-\frac{1}{2}(At_1^2+B)\left(k^{(t_2-1)}r_i^{*2(t_1-1)}-r_o^{*2(t_1-1)}\right)}{(At_1+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_1-1)}}C_1^2\\
&+\frac{-\frac{1}{2}(At_2^2+B)\left(k^{(t_2-1)}r_i^{*2(t_2-1)}-r_o^{*2(t_2-1)}\right)}{(At_1+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_1-1)}}C_2^2\\
&+\frac{-(At_1t_2+B)\left(k^{(t_2-1)}r_i^{*(t_1+t_2-2)}-r_o^{*(t_1+t_2-2)}\right)}{(At_1+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_1-1)}}C_1C_2
\end{aligned}
$$

(۳۵-۳)

$$
\begin{aligned}
&C_4=\\
&\frac{(A(2t_1+1)+B)\left(\frac{1}{(2t_1-t_2+1)}-\frac{1}{(t_1+1)}\right)K_1\left(k^{(t_1-1)}r_i^{*2t_1}-r_o^{*2t_1}\right)}{(At_2+B)(t_2-t_1)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_2-1)}}\\
&+\frac{(A(2t_2+1)+B)\left(\frac{1}{(t_2+1)}-\frac{1}{(2t_2-t_1+1)}\right)K_2\left(k^{(t_1-1)}r_i^{*2t_2}-r_o^{*2t_2}\right)}{(At_2+B)(t_2-t_1)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_2-1)}}\\
&+\frac{(A(t_1+t_2+1)+B)\left(\frac{1}{(t_1+1)}-\frac{1}{(t_2+1)}\right)K_3\left(k^{(t_1-1)}r_i^{*(t_1+t_2)}-r_o^{*(t_1+t_2)}\right)}{(At_2+B)(t_2-t_1)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_2-1)}}\\
&+\frac{\frac{1}{2}(At_1^2+B)\left(k^{(t_1-1)}r_i^{*2(t_1-1)}-r_o^{*2(t_1-1)}\right)}{(At_2+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_2-1)}}C_1^2\\
&+\frac{\frac{1}{2}(At_2^2+B)\left(k^{(t_1-1)}r_i^{*2(t_2-1)}-r_o^{*2(t_2-1)}\right)}{(At_2+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_2-1)}}C_2^2\\
&+\frac{(At_1t_2+B)\left(k^{(t_1-1)}r_i^{*(t_1+t_2-2)}-r_o^{*(t_1+t_2-2)}\right)}{(At_2+B)(k^{(t_2-1)}-k^{(t_1-1)})r_i^{(t_2-1)}}C_1C_2
\end{aligned}
$$

(۳۶-۳)

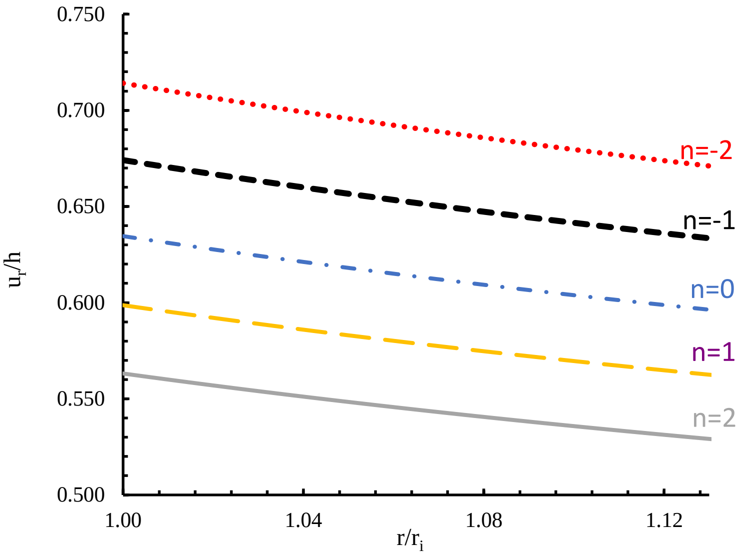
۳-۶- نتایج

در این بخش ابتدا در یک مطالعه‌ی موردی، اثر ثابت ناهمگنی بر پاسخ غیرخطی نشان داده شده است. در ادامه به‌منظور بررسی صحت روش حلّ تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل از روش NPET و نتایج

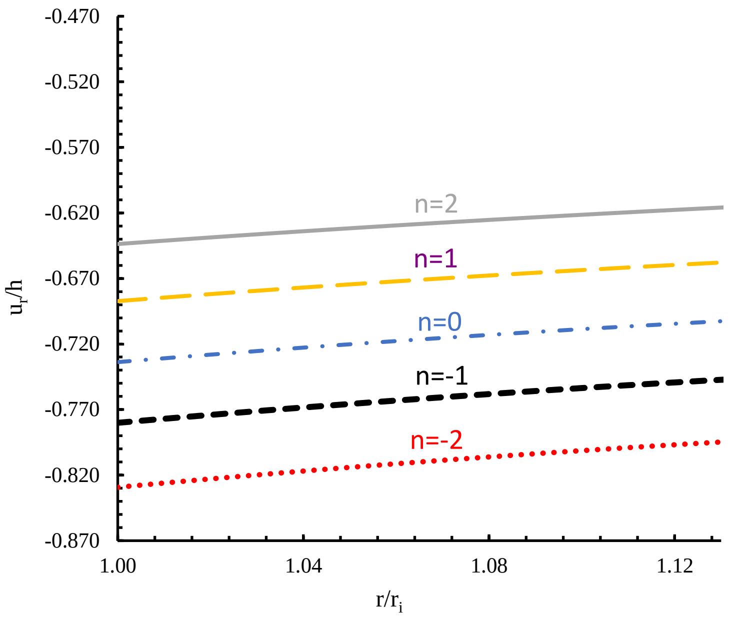
حاصل از روش FE آورده شده است.

۳-۶-۱- مطالعه‌ی موردی

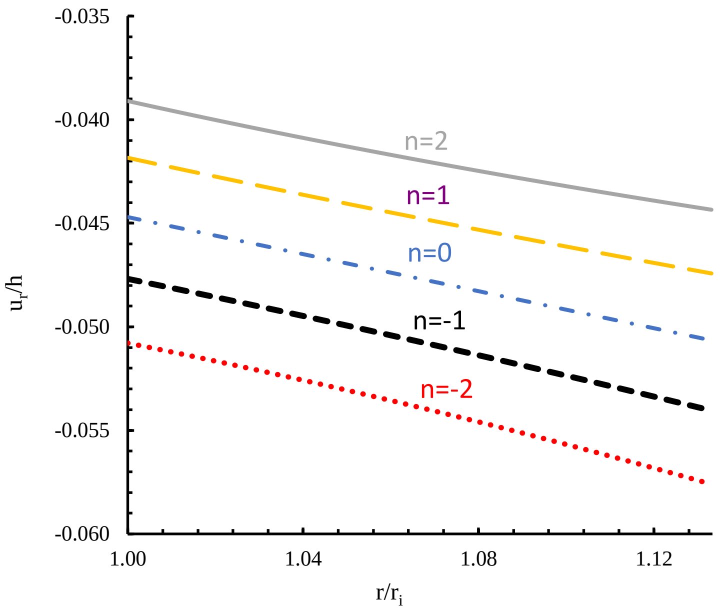
برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج حلّ تحلیلی، یک استوانه جدار ضخیم ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت مطابق شکل ۲-۱ به شعاع داخلی $r_i = 30\text{mm}$ و شعاع خارجی $r_o = 34\text{mm}$، طول $L = 400\text{mm}$ و توزیع توانی مدول الاستیسیته را در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته در سطح داخلی استوانه برابر $E_i = 0.7\text{GPa}$ و نسبت پواسون $\upsilon = 0.3$ را تحت سه حالت بارگذاری فشار یکنواخت داخلی $p_i = 8\text{MPa}$ ، فشار یکنواخت خارجی $p_o = 8\text{MPa}$، فشار یکنواخت داخلی $p_i = 8\text{MPa}$ و خارجی $p_o = 8\text{MPa}$ همراه با شرایط انتهایی در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته می‌شود. در شکل‌های ۳-۲ تا ۳-۱۸، توزیع میدان جابه‌جایی و میدان تنش در راستای جداره پوسته، برای سه حالت بارگذاری و شرایط انتهایی متفاوت (کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای)، برای ثابت ناهمگنی مختلف رسم شده است.



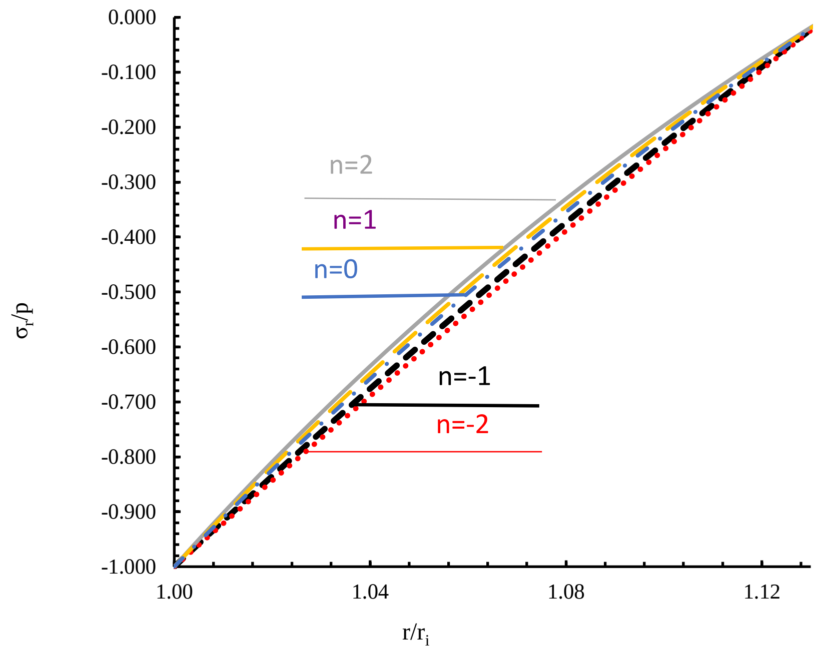
شکل ۳-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای



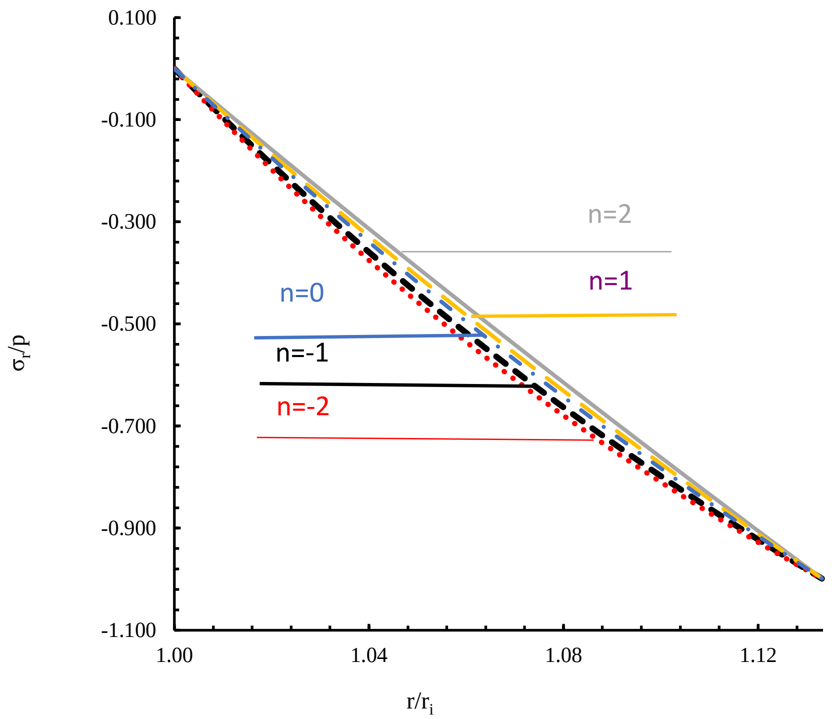
شکل ۳-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



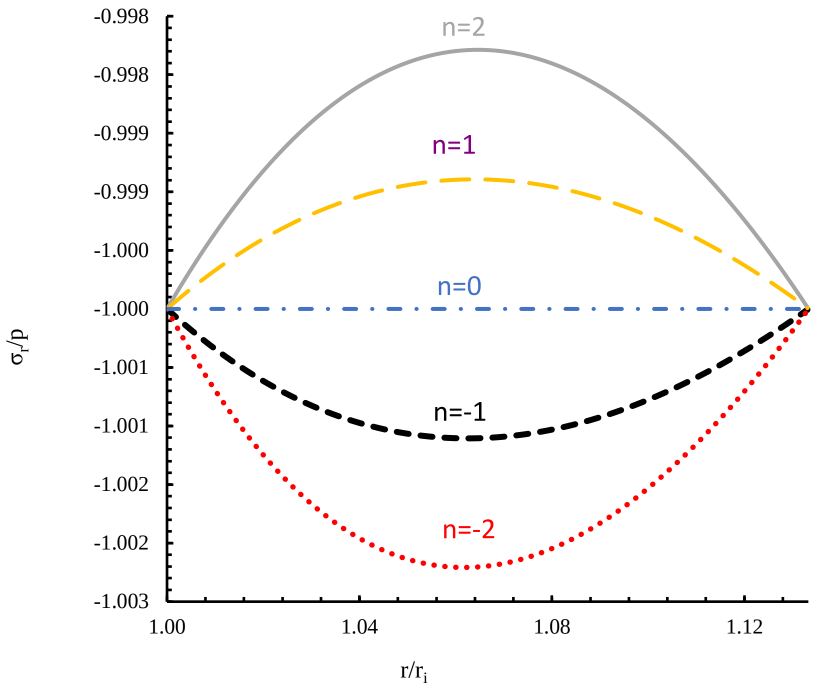
شکل ۳-۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



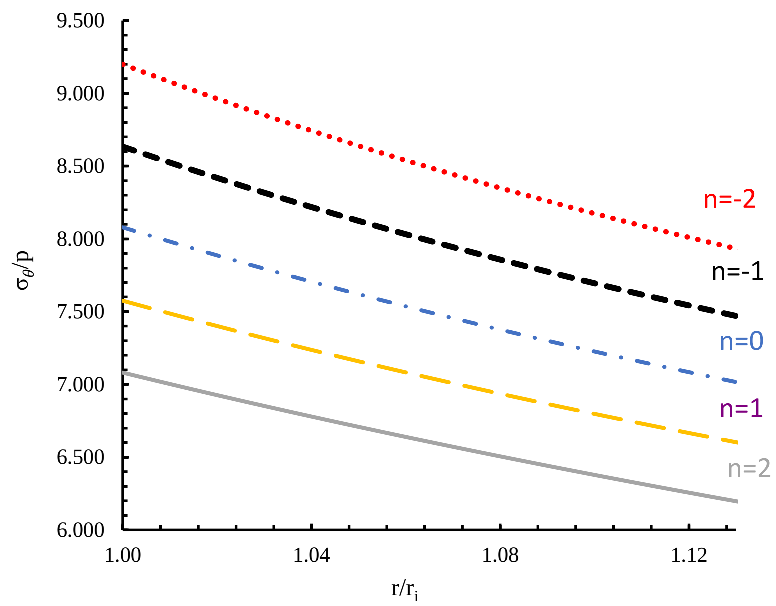
شکل ۳-۵ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای



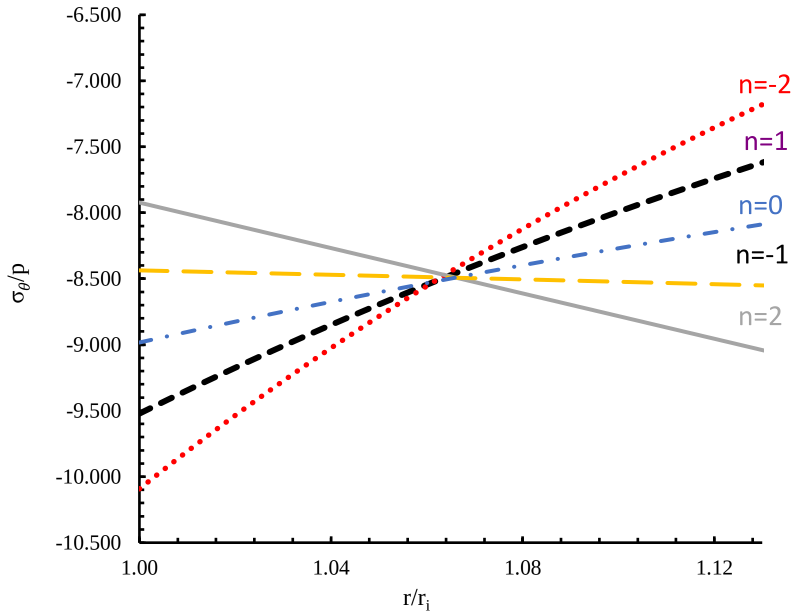
شکل ۳-۶ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



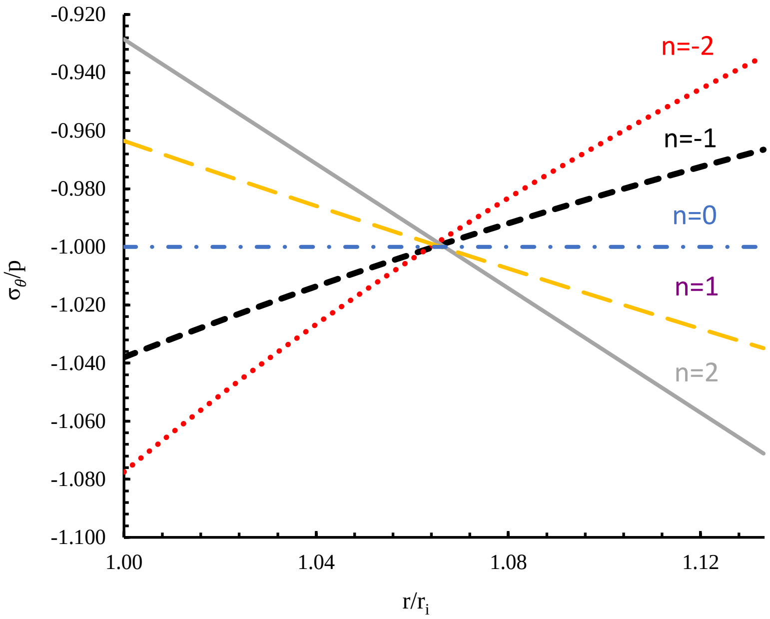
شکل ۳-۷ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



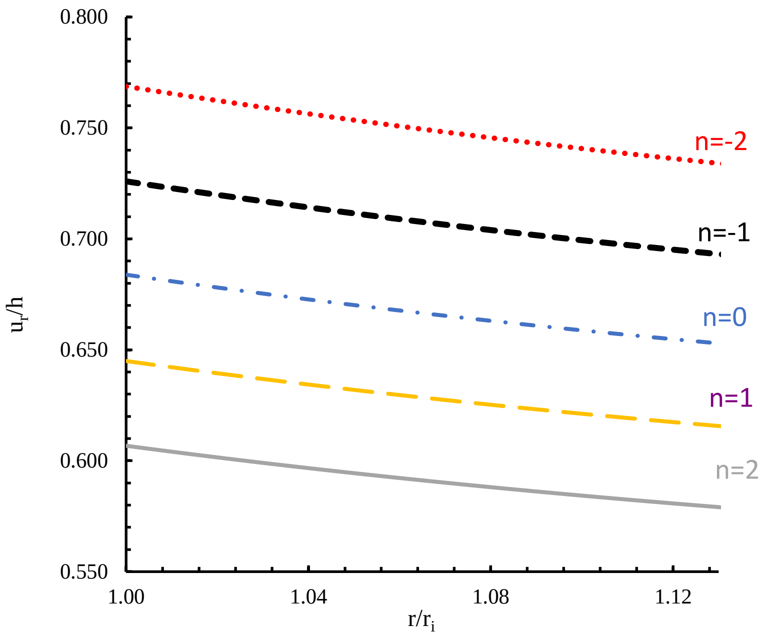
شکل ۳-۸ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای



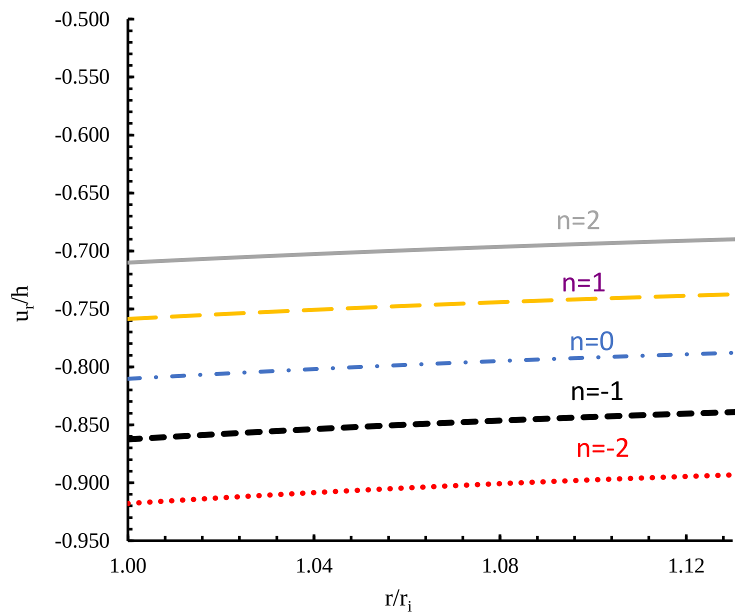
شکل ۳-۹ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



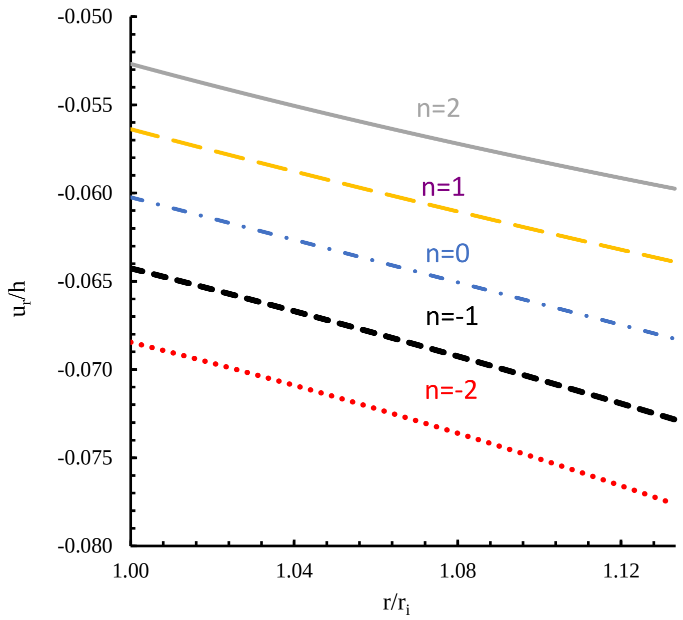
شکل ۳-۱۰ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



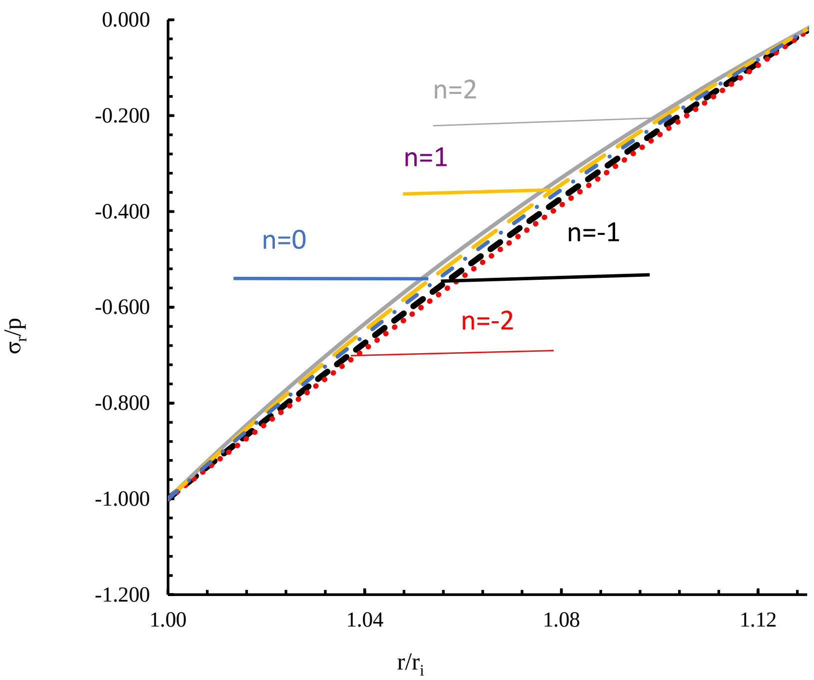
شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای



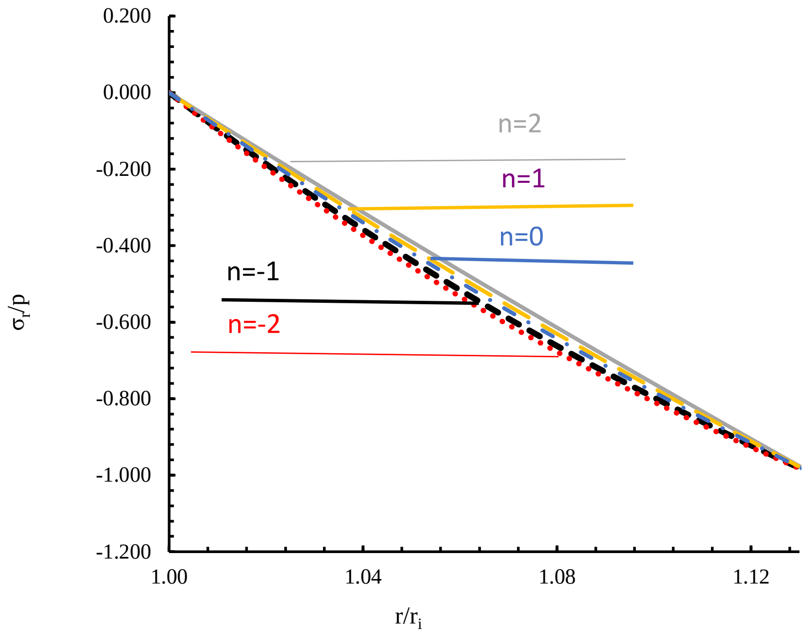
شکل ۳-۱۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت تنش صفحه‌ای



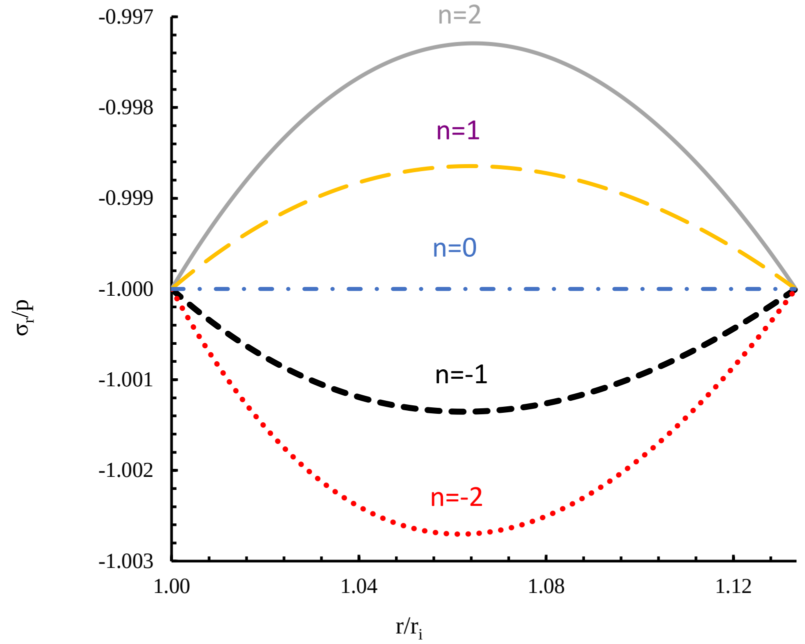
شکل ۳-۱۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای



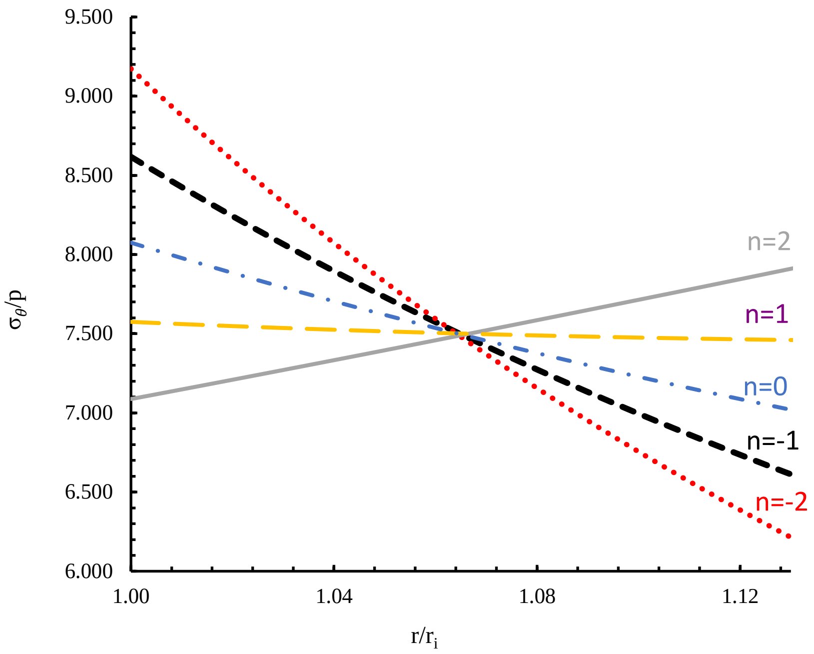
شکل ۳-۱۴ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای



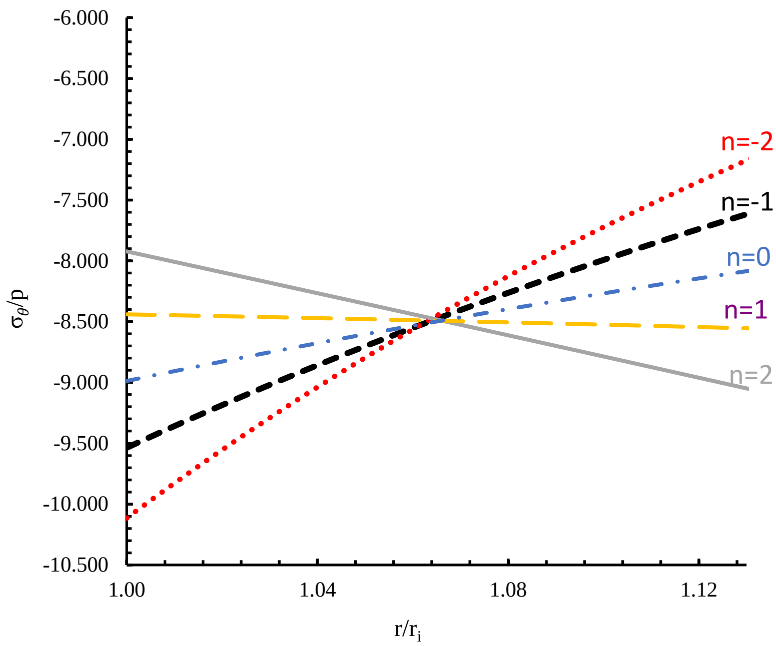
شکل ۳-۱۵ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت تنش صفحه‌ای



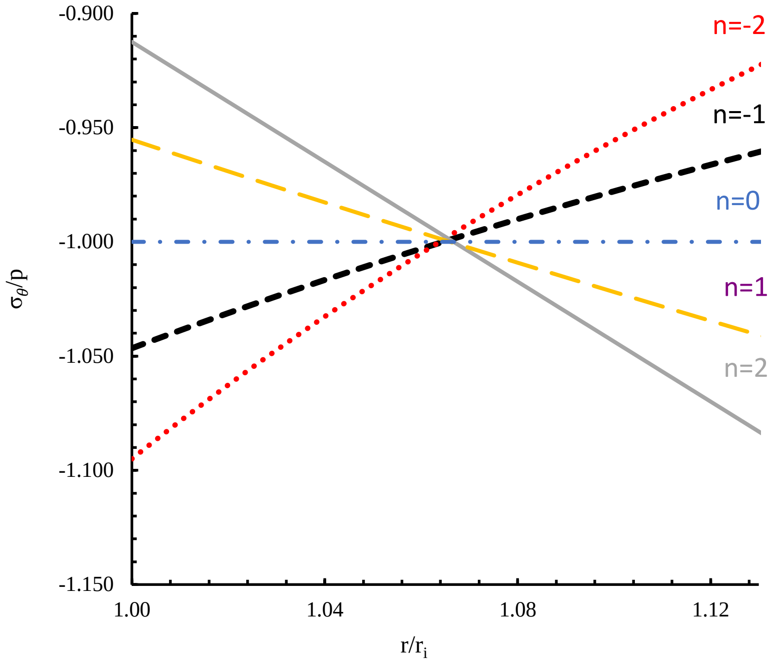
شکل ۳-۱۶ توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۳-۱۷ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۳-۱۸ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۳-۱۹ توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای

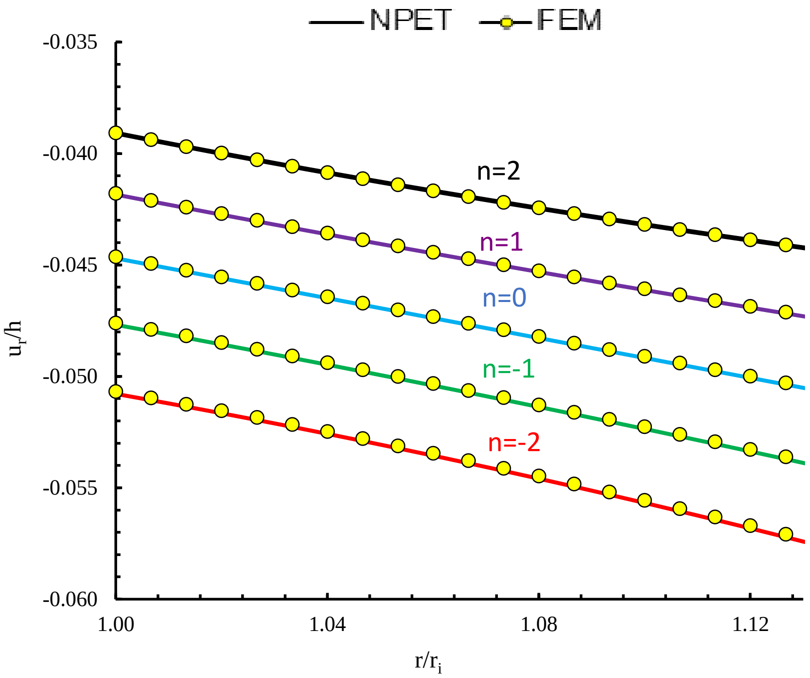
۳-۶-۲- حلّ عددی استوانه‌های ناهمگن تحت بارگذاری فشاری

در این پایان‌نامه از نرم‌افزار Abaqus 6.14-1 استفاده شده است. در این بخش نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی FGM توضیح داده شده است. همچنین نتایج مربوط به حل تحلیلی با نتایج حل عددی حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه‌های ناهمگن مقایسه شده است.

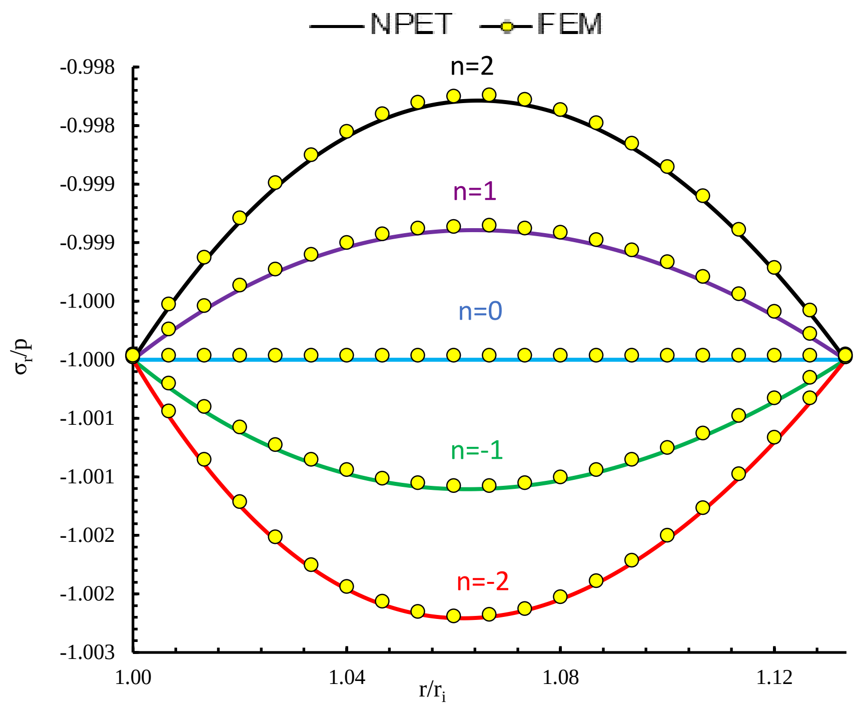
برای المان‌بندی استوانه، المان solid از نوع CAX8R انتخاب شده است، مقطع این المان ۴ ضلعی با اضلاع خمیده و دارای ۸ گره است که درجه آزادی هر گره ۲ می‌باشد و دارای فرمول‌بندی کاهش‌یافته است، بنابراین ماتریس سفتی این المان ۱۶ در ۱۶ می‌باشد. استوانه به شعاع داخلی ۳۰ میلی‌متر و شعاع خارجی ۳۴ میلی‌متر با جداره‌ی ثابت به طول ۴۰۰ میلی‌متر به‌صورت یک مستطیل که نشان‌دهنده‌ی یک مقطع از استوانه در حالت متقارن محوری می‌باشد، مدل‌سازی شده است. برای ایجاد خواص ناهمگنی که به‌صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است، با تقسیم جداره‌ی استوانه

به ۳۲ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مول الاستیسیته در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی به‌صورت تابع توانی طبق معادله‌ی (۳-۲)، در نهایت پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۳۲ استوانه‌ی همگن به هم چسبیده تشکیل می‌شود.

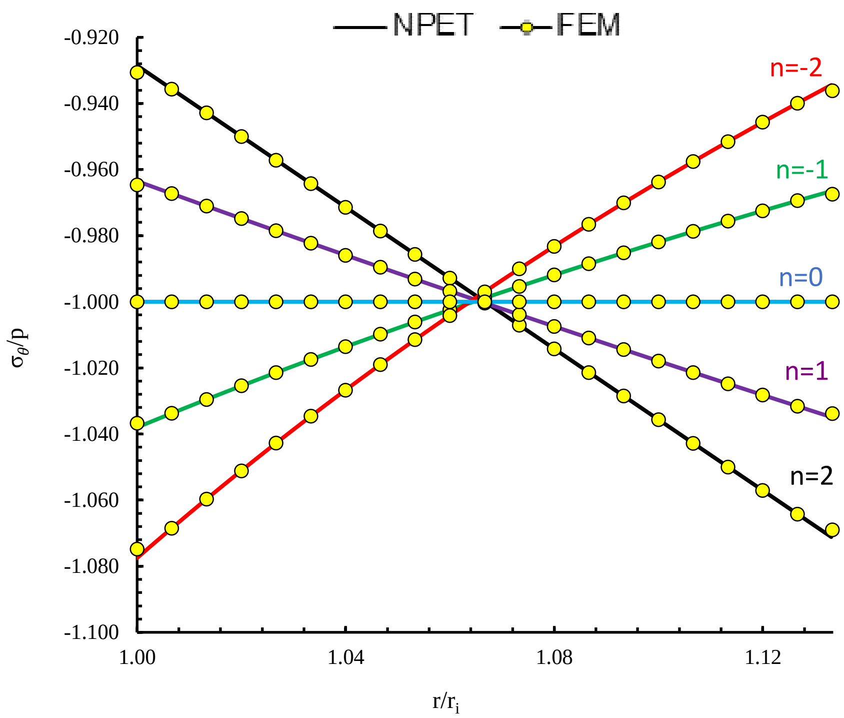
در ادامه به‌منظور بررسی صحت نتایج تحلیلی، نتایج حاصل از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی و نتایج حاصل از حل عددی به‌کمک نرم‌افزار Abaqus آورده شده است.



شکل ۳-۲۰ جابه‌جایی بی‌بعد شعاعی محاسبه‌شده با روش‌های NPET و FE در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی



شکل ۳-۲۱ تنش بی‌بعد شعاعی محاسبه‌شده با روش‌های NPET و FE در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی



شکل ۳-۲۲ تنش بی‌بعد محیطی محاسبه‌شده با روش‌های NPET و FE در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

جدول ۳- ۱ تا ۳-۳ حاوی نتایج بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی و تنش محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و NPET به‌ازای ثابت‌های ناهمگنی مختلف در سه لایه‌ی داخلی، میانی و خارجی برای بارگذاری فشار داخلی و خارجی می‌باشد. همانطور که مشخص است بیشترین جابه‌جایی شعاعی در سطح خارجی استوانه می‌باشد و بیشترین تنش شعاعی برای ضریب ناهمگنی منفی در حدود لایه‌ی میانی می‌باشد. همچنین بیشترین تنش محیطی برای ضریب ناهمگنی مثبت در لایه‌ی خارجی و برای ضریب ناهمگنی منفی در لایه‌ی داخلی می‌باشد.

جدول ۳- ۱ جابه‌جایی شعاعی محاسبه‌شده با روش‌های FE و NPET در استوانه‌ی تحت فشار داخلی و خارجی برای حالت کرنش صفحه‌ای

	u_r^*	n=-۲	n=-۱	n=۰	n=۱	n=۲
لایه‌ی داخلی $r=r_i$	FEM	-۰,۰۵۰۶۸	-۰,۰۴۷۶۰	-۰,۰۴۴۶۳۸	-۰,۰۴۱۷۹۳	-۰,۰۳۹۰۷
	NPET	-۰,۰۵۰۷۹	-۰,۰۴۷۶۹	-۰,۰۴۴۷۰۴	-۰,۰۴۱۸۴۱	-۰,۰۳۹۱۰
لایه‌ی میانی $r=R$	FEM	-۰,۰۵۳۷۸	-۰,۰۵۰۶۴	-۰,۰۴۷۶۱۲	-۰,۰۴۴۷۱	-۰,۰۴۱۹۳
	NPET	-۰,۰۵۳۸۹	-۰,۰۵۰۷۲	-۰,۰۴۷۶۸۰	-۰,۰۴۴۷۶	-۰,۰۴۱۹۶
لایه‌ی خارجی $r=r_o$	FEM	-۰,۰۵۷۴۹	-۰,۰۵۳۹۶	-۰,۰۵۰۵۸۸	-۰,۰۴۷۳۷۸	-۰,۰۴۴۳۲
	NPET	-۰,۰۵۷۶۰	-۰,۰۵۴۰۴	-۰,۰۵۰۶۵	-۰,۰۴۷۴۲	-۰,۰۴۴۳۵

جدول ۳- ۲ تنش شعاعی محاسبه‌شده با روش‌های FE و NPET در استوانه‌ی تحت فشار داخلی و خارجی برای حالت کرنش صفحه‌ای

	σ_r^*	n=-۲	n=-۱	n=۰	n=۱	n=۲
لایه‌ی داخلی $r=r_i$	FEM	-۰,۹۹۹۹۵	-۰,۹۹۹۹۶	-۰,۹۹۹۹۶	-۱	-۰,۹۹۹۹۷
	NPET	-۱	-۱	-۱	-۱	-۱
لایه‌ی میانی $r=R$	FEM	-۱,۰۰۲۱۸	-۱,۰۰۱۰۸	-۰,۹۹۹۹۶۳	-۰,۹۹۸۸۵	-۰,۹۹۷۷۴
	NPET	-۱,۰۰۲۲۰	-۱,۰۰۱۱۰	-۱	-۰,۹۹۸۸۹۵	-۰,۹۹۷۷۹
لایه‌ی خارجی $r=r_o$	FEM	-۰,۹۹۹۹۵	-۰,۹۹۹۹۶	-۰,۹۹۹۹۶	-۰,۹۹۹۹۷۵	-۰,۹۹۹۹۸
	NPET	-۱,۰۰۰۰۱	-۱,۰۰۰۰۱	-۱	-۰,۹۹۹۹۹	-۰,۹۹۹۹۹

جدول ۳- ۳ تنش محیطی محاسبه‌شده با روش‌های FE و NPET در استوانه‌ی تحت فشار داخلی و خارجی برای حالت کرنش صفحه‌ای

	$\sigma_\theta{}^*$	n=-۲	n=-۱	n=۰	n=۱	n=۲
لایه‌ی داخلی $r=r_i$	FEM	-۱,۰۷۴۸	-۱,۰۳۶۷	-۰,۹۹۹۹۶	-۰,۹۶۴۶	-۰,۹۳۰۶۳
	NPET	-۱,۰۷۷۵۰	-۱,۰۳۸۰۰	-۱	-۰,۹۶۳۵۰۷	-۰,۹۲۸۵۴
لایه‌ی میانی $r=R$	FEM	-۰,۹۹۶۹۸	-۰,۹۹۸۸۴	-۰,۹۹۹۹۶۳	-۱,۰۰۰۳۳۸	-۰,۹۹۹۹۵
	NPET	-۰,۹۹۷۰۸	-۰,۹۹۸۹۲	-۱	-۱,۰۰۰۳۰۶	-۰,۹۹۹۸۵
لایه‌ی خارجی $r=r_o$	FEM	-۰,۹۳۶۱۳	-۰,۹۶۷۳۹	-۰,۹۹۹۹۶	-۱,۰۳۳۸۳۸	-۱,۰۶۹۰۰
	NPET	-۰,۹۳۴۴۵	-۰,۹۶۶۵۳	-۱	-۱,۰۳۴۸۷	-۱,۰۷۱۱۴

۳-۶-۳- جمع‌بندی

همان‌طور که در این فصل مشاهده شد، در استوانه‌ی جدار ضخیم، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی شعاعی منفی در استوانه می‌شود. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت از برآیند دو بارگذاری شامل فشار داخلی و فشار خارجی حاصل می‌شود؛ بنابراین با توجه به بزرگ‌تر بودن مقادیر جابه‌جایی و تنش ناشی از فشار خارجی نسبت به فشار داخلی، فشار خارجی اثر غالب را داشته و سبب ایجاد جابه‌جایی منفی می‌شود. مواد ناهمگن با مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش جابه‌جایی در استوانه نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود، در حالی‌که مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش جابه‌جایی نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود. در استوانه تحت فشار داخلی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش شعاعی و جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد. در مورد استوانه تحت فشار خارجی جابه‌جایی شعاعی رفتار مشابهی دارد، اما مقادیر تنش شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد. در مورد استوانه تحت فشار داخلی و خارجی جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد و مقادیر تنش شعاعی تقریباً در راستای ضخامت مقادیر ثابتی باقی می‌مانند. شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای نسبت به کرنش صفحه‌ای در هر سه حالت بارگذاری از مقادیر جابه‌جایی شعاعی بالاتری برخوردار است، اما در مورد تنش شعاعی و محیطی تأثیر بسیار اندکی بر نتایج حاصل می‌گذارد.

فصل ۴

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۴-۱- مقدمه

در فصل‌های ۲ و ۳ تحلیل مسأله و نتایج حاصل از تحلیل در قالب نمودارهایی ارائه شد. در این فصل ابتدا به تفسیر نتایج پرداخته و سپس برای ادامه‌ی پژوهش حاضر پیشنهادهایی مطرح می‌گردد.

۴-۲- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

با دقّت به نمودارهای فصل دوم مشاهده می‌شود که در استوانه‌ی جدار ضخیم، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی منفی در استوانه می‌شود. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت که از برآیند دو بارگذاری شامل فشار داخلی و فشار خارجی حاصل می‌شود؛ با توجه به بزرگ‌تر بودن مقادیر جابه‌جایی و تنش ناشی از فشار خارجی نسبت به فشار داخلی، دارای جابه‌جایی و تنش منفی می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که تنش محیطی و شعاعی در استوانه‌ی تحت فشار داخلی و فشار خارجی یکنواخت در راستای ضخامت دارای مقدار ثابتی است. همچنین ملاحظه می‌شود که شرایط انتهایی تنش صفحه‌ای نسبت به کرنش صفحه‌ای در هر سه حالت بارگذاری از مقادیر جابه‌جایی شعاعی بالاتری برخوردار است، اما در مورد تنش شعاعی و محیطی تأثیر بسیار اندکی بر نتایج حاصل می‌گذارد.

همچنین مشاهده می‌شود که منشأ رفتار غیرخطی در پوسته، اندازه نسبی ضخامت پوسته است. یعنی، تغییرات ضخامت، در میزان اختلاف حل‌های خطی و غیرخطی اثر دارد. به عبارت دیگر، هرچه پوسته نازک‌تر باشد، اختلاف حل‌های خطی و غیرخطی افزایش می‌یابد و هر چه ضخیم‌تر گردد این دو حل به‌یک‌دیگر نزدیک‌تر می‌شوند. بنابراین میزان ضخامت پوسته، تنها عامل هندسی مؤثر بر میزان اختلاف حل خطی و غیرخطی است.

همچنین مشاهده می‌شود که هرچه نسبت بار فشاری اعمالی بر پوسته به مدول الاستیسیته آن بیش‌تر باشد، اختلاف حل‌های خطی و غیرخطی بیش‌تر می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، برای کاربردهای صنعتی که در آن‌ها از مواد با مدول الاستیسیته‌ی بسیار بالا استفاده می‌شود، به‌شرط آن‌که پوسته نازک

نباشد، رفتار پوسته به‌شدت خطی است و نیازی به بررسی رفتار غیرخطی وجود ندارد. بنابراین، در پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار، رفتار غیرخطی در مواد بسیار نرم دیده می‌شود.

با دقّت به نمودارهای فصل سوم مشاهده می‌شود که ثابت ناهمگنی منفی (مثبت) باعث نرم‌تر (سفت‌تر) شدن کلی پوسته می‌شود. بنابراین مطابق انتظار جابه‌جایی در پوسته‌های ناهمگن با ثابت ناهمگنی منفی (مثبت)، بیش‌تر (کم‌تر) از پوسته‌های همگن است.

۴-۳- پیشنهادها

با توجه به کاربرد وسیع و متنوع پوسته‌های استوانه‌ای، جهت توسعه‌ی پژوهش حاضر، موارد زیر قابل بررسی و مطالعه هستند.

۱- بررسی حل مراتب بالاتر در بسط تئوری اغتشاشات.

۲- متغیر در نظر گرفتن ضخامت جداره‌ی پوسته

۳- حل برای سایر پوسته‌های پرکاربرد

۴- در نظر گرفتن خواص وابسته به دما برای مسائل دارای بارگذاری حرارتی

۵- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای در حالت نامتقارن محوری از نظر هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی غیرخطی

۶- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری، خمشی، پیچشی و برشی

۷- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار متغیر در طول استوانه

۸- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای برای مواد ناهمسانگرد

۹- استفاده از توابع دیگر برای مدل‌سازی مواد ناهمگن تابعی

مراجع

[1] Basar Y. and Weichert D. (1999), **"Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts ",** Springer, Berlin, 1st ed.

[2] Amabili M. (2008), **"Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates"**, Cambridge University Press, Cambridge.

[3] Sanders Jr J. L. (1963), "Nonlinear Theories for Thin Shells", **Quarterly of Applied Mathematics**, Vol. 21, No. 1, pp. 21-36.

[4] Lekhnitskii S. G. (1981), **"Theory of Elasticity of an Anisotropic Body"**, Mir Publishers, Moscow.

[5] Vinson, J. R. (1974), **"Structural mechanics: the behavior of plates and shells"**, Wiley-Interscience, New York.

[6] Suresh S. & Mortensen A.(1998), **"*Fundamentals of Functionally Graded Materials*",** Cambridge Pub, Cambridge.

[7] Koizumi M. (1997), "FGM Activities in Japan", **Composites: Part B (Engineering)**, Vol. 28, pp. 1-4.

[8] Truesdell C. (1984), **"Mechanics of Solids**, **Vol. II: Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity"**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[9] Naghdi P. (1956), "Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Shells, Including the Effects of Transverse Shear and Rotatory Inertia" **J. of. Acoustical Society of America**, Vol. 28, pp. 56-63.

[10] Greenspon J. E. (1960), "Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell Comparison of the Exact Theory with Approximate Theories", **J. of. Acoustical Society of America**, Vol. 32, No. 5, pp. 571-578.

[11] Ziv M. and Perl M. (1973), "Impulsive Deformation of Mirsky-Herrmann's Thick Cylindrical Shells by a Numerical Method", **J. of. Applied Mechanics**, Vol. 40, No. 4, pp. 1009-1016.

[12] Suzuki K., Konnooo M. and Takahashi S. (1981), "Axisymmetric Vibrations of a Cylindrical Shell with Varying Thickness", **Bulletin of JSME**, Vol. 24, No. 198, pp. 2122-2132.

[13] Mirsky I. and Hermann G. (1958), "Axially Symmetric Motions of Thick Cylindrical Shells", **J. of. Applied Mechanics**, Vol. 25, pp. 97-102.

[14] Hughes T. J. and Liu W. K. (1981), "Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part I. Three-Dimensional Shells", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 26, No. 3, pp. 331-362.

[15] Takahashi S., Suzuki K., Anzai E. and Kosawada T. (1982), "Vibrations of Conical Shells with Variable Thickness", **Bulletin of JSME**, Vol. 25, No. 207, pp. 1435-1442.

[16] Oliver J. and Onate E. (1986), "A Total Lagrangian Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures Using Finite Elements. Part II: Arches, Frames and Axisymmetric Shells", **J. of. Numerical Methods in**

Engineering, Vol. 23, No. 2, pp. 253-274.

[17] Fukui Y. and Yamanaka N. (1992), "Elastic Analysis for Thick-Walled Tubes of FGM Subjected to Internal Pressure", **J. of. JSME. Ser. 1**, **Solid Mechanics**, **Strength of Materials**, Vol. 35, No. 4, pp. 379-385.

[18] Obata Y. and Noda N. (1994), "Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material", **J. of. Thermal stresses**, Vol. 17, No. 3, pp. 471-487.

[19] Loy C., Lam K. and Reddy J. (1999), "Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells", **Mechanical Sciences**, Vol. 41, No. 3, pp. 309-324.

[20] Combescure A. and Gusic G. (2001), "Nonlinear Buckling of Cylinders under External Pressure with Nonaxisymmetric Thickness Imperfections Using the Comi Axisymmetric Shell Element", **I. J. of. Solids and Structures**, Vol. 38, No. 34, pp. 6207-6226.

[21] Jabbari M., Sohrabpour S. and Eslami M. (2002), "Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Radially Symmetric Loads", **I. J. of. Pressure Vessels and Piping**, Vol. 79, No. 7, pp. 493-497.

[22] Jabbari M., Sohrabpour S. and Eslami M. (2003), "General Solution for Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder Due to Nonaxisymmetric Steady-State Loads" **J. of. Applied Mechanics**, Vol. 70, No. 1, pp. 111-118.

[23] Eipakchi H., Rahimi G. and Esmaeilzadeh K. (2003), "Closed Form Solution for Displacements of Thick Cylinders with Varying Thickness Subjected to Non-Uniform Internal Pressure", **Structural Engineering and Mechanics**, Vol. 16, No. 6, pp. 731-748.

[24] Shi Z., Zhang T. and Xiang H. (2007), "Exact Solutions of Heterogeneous Elastic Hollow Cylinders", **Composite structures**, Vol. 79, No. 1, pp. 140-147.

[25] Tutuncu N. (2007), "Stresses in Thick-Walled FGM Cylinders with Exponentially-Varying Properties", **Engineering Structures**, Vol. 29, No. 9, pp. 2032-203.

[26] Arciniega R. and Reddy J. (2007), "Large Deformation Analysis of Functionally Graded Shells", **I. J. of. Solids and Structures**, Vol. 44, No. 6, pp. 2036-2052.

[27] Eipakchi H. R., Khadem S. and Rahimi S G. (2008), "Axisymmetric Stress Analysis of a Thick Conical Shell with Varying Thickness under Nonuniform Internal Pressure", **J. of. Engineering Mechanics**, Vol. 134, No. 8, pp. 601-610.

[28] Tutuncu N. and Temel B. (2009), "A Novel Approach to Stress Analysis of Pressurized FGM Cylinders, Disks and Spheres", **Composite Structures**, Vol. 91, No. 3, pp. 385-390.

[29] Khabbaz R. S., Manshadi B. D. and Abedian A. (2009), "Nonlinear Analysis of FGM Plates under Pressure Loads Using the Higher-Order Shear Deformation Theories", **Composite Structures**, Vol. 89, No. 3, pp. 333-344.

[30] Zamaninejad M. Z., Rahimi G.R. and Ghannad M. (2009), "Set of Field Equations for Thick Shell of Revolution Made of FGMs in Curvilinear Coordinate System",

Mechanics, Vol. 77, No. 3, pp. 18-26.

[31] Arefi M. and Rahimi G.R. (2013), "Thermo Elastic Analysis of a Functionally Graded Cylinder under Internal Pressure Using First Order Shear Deformation Theory", **Scientific Research and Essays**, Vol. 5, No. 12, pp. 1442-1454.

[32] Ghannad M. and Zamaninejad M. (2012), "Complete Elastic Solution of Pressurized Thick Cylindrical Shells Made of Heterogeneous FGM", **Mechanics**, Vol. 18, No. 6, pp. 640-649.

[33] Ghannad M. and Zamaninejad M. (2012), "Elastic Analysis of Heterogeneous Thick Cylinders Subjected to Internal or External Pressure Using Shear Deformation Theory", **Acta Polytechnica Hungarica**, Vol. 9, No. 6, pp. 117-136.

[34] Keles I. and Conker C. (2011), "Transient Hyperbolic Heat Conduction in Thick-Walled FGM Cylinders and Spheres with Exponentially-Varying Properties", **E. J. of. Mechanics-A/Solids**, Vol. 30, No. 3, pp. 449-455.

[35] Arani A. G., Kolahchi R. and Barzoki A. M. (2011), "Effect of Material Inhomogeneity on Electro-Thermo-Mechanical Behaviors of Functionally Graded Piezoelectric Rotating Shaft", **Applied Mathematical Modelling**, Vol. 35, No. 6, pp. 2771-2789.

[36] Bich D. H. and Van Tung H. (2011), "Non-Linear Axisymmetric Response of Functionally Graded Shallow Spherical Shells under Uniform External Pressure Including Temperature Effects", **I, J. of. Non-Linear Mechanics**, Vol. 46, No. 9, pp. 1195-1204.

[37] Ghannad M. and Gharooni H. (2012), "Displacements and Stresses in Pressurized Thick FGM Cylinders with Varying Properties of Power Function Based on HSDT", **J. of. Solid Mechanics**, Vol. 4, No. 3, pp. 237-251.

[38] Ghannad M., Rahimi G. H. and Nejad M. Z. (2012), "Determination of Displacements and Stresses in Pressurized Thick Cylindrical Shells with Variable Thickness Using Perturbation Technique", **Mechanics**, Vol. 18, No. 1, pp. 14-21.

[39] Ghannad M., Rahimi G. H. and Nejad M. Z. (2013), "Elastic Analysis of Pressurized Thick Cylindrical Shells with Variable Thickness Made of FGMs", **Composites Part B: Engineering**, Vol. 45, No. 1, pp. 388-396.

[40] Strozzi M. and Pellicano F. (2013), "Nonlinear Vibrations of Functionally Graded Cylindrical Shells", **Thin-Walled Structures**, Vol. 67, pp. 63-77.

[41] Van Tung H. (2014), "Nonlinear Thermomechanical Stability of Shear Deformable FGM Shallow Spherical Shells Resting on Elastic Foundations with Temperature Dependent Properties", **Composite Structures**, Vol. 114, pp. 107-116.

[42] Zenkour A. M. and Abbas I. A. (2014), "A Generalized Thermoelasticity Problem of an Annular Cylinder with Temperature-Dependent Density and Material Properties", I. **J. of. Mechanical Sciences**, Vol. 84, pp. 54-60.

[43] Duc N. D., Anh V. T. T. and Cong P. H. (2014), "Nonlinear Axisymmetric Response of FGM Shallow Spherical Shells on Elastic Foundations under Uniform External Pressure and Temperature", **J. of. Mechanics-A/Solids**, Vol. 45, pp. 80-89.

Abstract

In present study, governing equation of pressurized thick axisymmetric cylinders made of heterogeneous and isotropic materials with large deformations is derived by using the nonlinear plane elasticity theory. Because of large deformations along the radial direction and hence existence of nonlinear terms in kinematic equations, the governing equation is a nonlinear second-order equation with variable coefficients, which is solved in plane stress and plane stress states using perturbation theory. According to the equilibrium equation, boundary conditions and different end conditions of the cylinder: two free ends and two fixed ends; radial and circumferential normal stresses and radial displacement in cylindrical shells are analytically calculated. For investigating the accuracy of the results obtained from the analytical solution, the numerical finite element modeling of mentioned cylinder with Abaqus software on the basis of the nonlinear elasticity theory is done and the results of the two methods are compared. This research reveals that the obtained results by using the mentioned analytical solution procedure have good accuracy for cylindrical shells under pressure load.

Keywords

Pressurized thick cylinder, Large deformation, Nonlinear Plane Elasticity Theory, Perturbation theory, Functionally Graded Materials.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

General Elastic Solution of Pressurized Thick Cylinders with Large Deformation Using Nonlinear Plane Elasticity Theory

Navid Bahadorani

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

January 2018