

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه طراحی کاربردی

بررسی ارتعاشات غیرخطی تیر متحرک محوری با در نظر گرفتن

چندین چاه غیرخطی انرژی

دانشجو: سیده اشرف تیموری

استاد راهنما: دکتر امیر جلالی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۹۶

شماره: ۳۹۶/۱۴۹
تاریخ: ۹۶/۸/۷

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سیده اشرف تیموری با شماره دانشجویی ۹۳۰۵۱۰۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان بررسی ارتعاشات غیر خطی تیر متحرک محوری با در نظر گرفتن چندین چاه غیر خطی انرژی که در تاریخ ۹۶/۰۶/۲۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

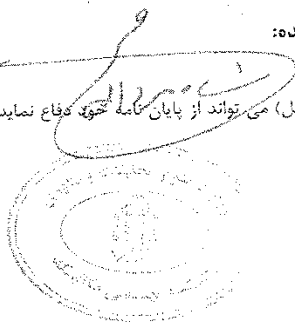
قبول (ب امتیاز ۳۵/۳۵ درجه متوسط) مردود
نوع تحقیق: نظری عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر امیر جلالی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	-----	-----	-
۳- استاد مشاور	-----	-----	-
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی وحدتی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر اردشیر کریمی محمدی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر حمیدرضا ابیک چی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر محمد محسن شاه مردان

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تیمبره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).



تقدیم بہ:

بی بی فاطمہ

9

پسر نازینش مہدی

با سپاس از استاد مهربان دکتر امیر جلالی

از این که صبورانه مراد برداشتن قدم های کوچک طی این مسیر همراهی نمود.

تعمیرنامه

اینجانب سیده اشرف تیموری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه بررسی ارتعاشات غیرخطی تیر متحرک محوری با در نظرگرفتن چندین چاه غیرخطی انرژی تحت راهنمایی دکتر امیر جلالی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- ❖ در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- ❖ تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته‌شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این تحقیق به بررسی ارتعاشات تیر دارای سرعت محوری پرداخته شده است که این سرعت موجب می‌شود دامنه‌ی ارتعاشات عرضی سازه به‌طور موثری افزایش پیدا کند. برای کنترل ارتعاشات تیر متحرک محوری از چاه غیرخطی انرژی که یکی از روش‌های انتقال انرژی هدف‌مند است، استفاده می‌شود. تحقیق - های انجام شده نشان داده است که استفاده از یک چاه غیرخطی انرژی دامنه‌ی ارتعاشات را به‌طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد به همین منظور، در این تحقیق دو چاه غیرخطی انرژی مجزا از هم بر روی یک تیر متحرک محوری نصب شده و تأثیر هر کدام از چاه‌های غیرخطی در جذب ارتعاشات سیستم بررسی شده است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از اصل همپلتون توسعه یافته استخراج شده است و با استفاده از حل عددی پاسخ فرکانسی سیستم در دو رزونانس اول و سوم به‌دست آمده است و تأثیر پارامترهای مختلف دو چاه غیرخطی انرژی بر پاسخ فرکانسی سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: تیر متحرک محوری، چاه غیرخطی انرژی موازی مجزا، ارتعاشات غیرخطی

..انتقال انرژی هدف‌مند

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه.....	۱.....
۱-۱ تعریف.....	۲
۲-۱ معرفی جاذب.....	۶
۱-۲-۱ انواع جاذبها.....	۷.....
۳-۱ بررسی مواد الاستیک و ویسکوالاستیک.....	۸.....
۴-۱ تاریخچه.....	۹.....
فصل دوم: استخراج معادلات.....	۲۱.....
۱-۲-۱ مدلسازی.....	۱۹.....
۱-۲-۱-۱ استخراج معادلات تیر متحرک محوری با سرعت ثابت.....	۱۹.....
۲-۱-۲ بی بعدسازی.....	۲۵.....
۲-۲ بررسی رفتار ارتعاشی تیر متحرک محوری متصل به دو چاه غیرخطی مجزا تحت بار خارجی با در نظر گرفتن رزونانس ۱:۱.....	۲۶.....
۱-۲-۲ مدل سازی.....	۲۶.....
۳-۲ بررسی رفتار ارتعاشی تیر متحرک محوری متصل به دو چاه غیرخطی مجزا تحت بار خارجی در حالت رزونانس ۱:۱ و ۱:۳.....	۳۸.....
۱-۳-۲ بی بعدسازی.....	۳۸.....
۲-۳-۲ مدل سازی.....	۴۰.....
فصل سوم: حل عددی.....	۵۵.....
۱-۳ مقدمه.....	۵۶.....
۲-۳ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی.....	۵۶.....
۱-۲-۳ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف دو چاه غیرخطی انرژی بر پاسخ فرکانسی در حالت رزونانس ۱:۱.....	۵۶.....
۱-۲-۳-۱ تأثیر مکان قرار گیری دو چاه غیرخطی در فواصل مختلف از تکیهگاه ها بر پاسخ فرکانسی.....	۵۶.....
۲-۲-۳ تأثیر تغییر جرم دو چاه غیرخطی انرژی بر پاسخ فرکانسی.....	۶۲.....
۳-۲-۳ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف دو چاه غیرخطی بر پاسخ فرکانسی در حالت رزونانس ۱:۱ و ۱:۳.....	۶۷.....
۱-۳-۳-۱ تأثیر مکان قرار گیری دو چاه غیرخطی در فواصل مختلف از تکیه گاه ها بر پاسخ فرکانسی.....	۶۷.....
۴-۲-۳ تأثیر تغییر جرم دو چاه غیرخطی انرژی بر پاسخ فرکانسی.....	۷۴.....

۳-۲-۱ تأثیر جرم متفاوت دو چاه غیر خطی انرژی بر پاسخ فرکانسی ۷۴

فصل چهارم: نتیجه گیری و پیشنهادات ۸۱

۴-۱ مقدمه ۸۲

۴-۲ نتیجه گیری ۸۲

۴-۳ پیشنهادها ۸۳

منابع ۸۷

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ پل تاکومار قبل از تخریب [۱] ۳
- شکل ۱-۲ پل تاکومار بعد تخریب [۱] ۳
- شکل ۱-۳ فضاپیمای ونوس تحت آزمایش دینامیک و ارتعاشات [۲] ۴
- شکل ۱-۴ پدهای پلاستیکی نصب شده بر ساختمان [۳] ۵
- شکل ۱-۵ جاذب پاندولی واقع در ساختمان تاپیه ۱۰۱ تایلند [۴] ۶
- شکل ۲-۱ تیر متحرک محوری با چاه‌های غیرخطی انرژی مجزا از هم ۱۹
- شکل ۲-۲ نمایی از یک تیر برش خورده ۲۳
- شکل ۲-۳ تیر متحرک محوری تحت تحریک هارمونیک ۲۷
- شکل ۳-۱ تغییرات دامنه ی تیر به ازای رزونانس ۱:۱ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲ ۵۸
- شکل ۳-۲ تغییرات دامنه ی چاه غیرخطی انرژی اول به ازای رزونانس ۱:۱ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲ ۵۹
- شکل ۳-۳ تغییرات دامنه ی چاه غیرخطی انرژی دوم به ازای رزونانس ۱:۱ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲ ۶۰
- شکل ۳-۴ تغییرات دامنه ی تیر بر حسب دامنه ی چاه غیرخطی انرژی دوم به ازای رزونانس ۱:۱ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲ ۶۱
- شکل ۳-۵ تغییرات دامنه ی تیر به ازای رزونانس ۱:۱ (a) برای دو جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان ۶۳
- شکل ۳-۶ تغییرات دامنه ی چاه غیر خطی انرژی اول به ازای رزونانس ۱:۱ (a) برای دو جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان ۶۴
- شکل ۳-۷ تغییرات دامنه ی چاه غیر خطی انرژی دوم به ازای رزونانس ۱:۱ (a) برای دو جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان ۶۵
- شکل ۳-۸ تغییرات دامنه ی تیر بر حسب چاه غیر خطی انرژی اول به ازای رزونانس ۱:۱ (a) برای دو جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان ۶۶
- شکل ۳-۹ تغییرات دامنه ی تیر در رزونانس اولیه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲ ۶۹
- شکل ۳-۱۰ تغییرات دامنه ی تیر در رزونانس ثانویه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲ ۷۰
- شکل ۳-۱۱ تغییرات دامنه ی چاه غیر خطی انرژی اول در رزونانس ثانویه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲ ۷۱
- شکل ۳-۱۲ تغییرات دامنه ی چاه غیر خطی انرژی دوم در رزونانس ثانویه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲ ۷۲
- شکل ۳-۱۳ تغییرات دامنه ی تیر بر حسب چاه غیرخطی انرژی اول در رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲ ۷۳
- شکل ۳-۱۴ تغییرات دامنه ی تیر در رزونانس اولیه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) برای دو جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان ۷۵
- شکل ۳-۱۵ تغییرات دامنه ی تیر در رزونانس ثانویه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) برای دو جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان ۷۶
- شکل ۳-۱۷ تغییرات دامنه ی چاه غیرخطی انرژی اول در رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) برای دو جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان ۷۶

یکسان
۷۸
شکل ۳-۱۸ تغییرات دامنه ی تیر بر اساس چاه غیرخطی انرژی اول در رزونانس ۱:۱ به همراه ۳:۱ (a) برای دو جرم متفاوت (b)
برای دو جرم یکسان ۷۹

فهرست جداول

جدول ۱-۳	مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی انرژی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱	۵۷
جدول ۲-۳	مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی انرژی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱	۵۷
جدول ۳-۳	مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱	۶۲
جدول ۴-۳	مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱	۶۳
جدول ۵-۳	مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱ و ۱:۳	۶۸
جدول ۶-۳	مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱ و ۱:۳	۶۸
جدول ۷-۳	مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱ و ۱:۳	۷۴
جدول ۸-۳	مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱ و ۱:۳	۷۴

فهرست علائم

L	طول تیر، m
V	سرعت محوری تیر، $\frac{m}{s}$
$U(x, t)$	جابه‌جایی تیر در راستای عرضی
m_{NES1}	جرم چاه غیرخطی انرژی اول، kg
m_{NES2}	جرم چاه غیرخطی انرژی دوم، kg
T	انرژی جنبشی تیر، J
U	انرژی پتانسیل تیر، J
W	کار انجام شده ناشی از نیروهای خارجی، J
m	جرم تیر، kg
ρ	دانشیته ی تیر، $\frac{kg}{m^3}$
A	سطح مقطع عمودی تیر، m^2
D	حجم تیر، m^3
E	مدول الاستیک، $\frac{N}{m^2}$
t	زمان، s
I	ممان اینرسی تیر، m^4
dS	طول منحنی تیر
dx	تغییرات تیر در راستای افقی
dU	تغییرات تیر در راستای عمودی
$P(x)$	نیروی کشش داخلی تیر، N
$f_1(t)$	نیروی بین چاه غیرخطی اول و تیر، N
$f_2(t)$	نیروی بین چاه غیرخطی دوم و تیر، N
d_1	مکان اتصال چاه غیرخطی اول به تیر، m
d_2	مکان اتصال چاه غیرخطی دوم به تیر، m
K_1	ضریب سختی مکعبی دمپر اول، $\frac{N}{m^3}$
K_2	ضریب سختی مکعبی دمپر دوم، $\frac{N}{m^3}$
D_1	ضریب میرایی دمپر اول، $\frac{Ns}{m}$
D_2	ضریب میرایی دمپر دوم، $\frac{Ns}{m}$
x	مختصات در راستای محوری، m

z	مختصات در راستای ارتفاع، m
v_{cri}	سرعت بحرانی تیر $\frac{m}{s}$
$z(t)$	جابه‌جایی چاه غیرخطی اول، m
$y(t)$	جابه‌جایی چاه غیرخطی دوم، m
$f(x, t)$	نیروی خارجی گسترده اعمالی، N
t_0	مقیاس زمانی سریع s
t_1	مقیاس زمانی آرام s
t_2	مقیاس زمانی بسیار آرام s

علایم یونانی

ω_r	فرکانس طبیعی تیر $\frac{rad}{s}$
σ_x	تنش تیر، pa
ϵ_x	کرنش تیر، $\frac{1}{m}$
η	ضریب ویسکوالاستیک، $\frac{Ns}{m^2}$
σ	پارامتر تنظیم
$\Phi_r(x)$	تابع مقایسه ای تیر
$\delta(x)$	تابع دلتای دیراک
δ_{sr}	دلتای کرونگر

فصل اول

مقدمه

۱-۱ تعریف

ارتعاشات پدیده ای است که در تمامی اجسامی که دارای جرم و خاصیت کشسانی هستند، رخ می‌دهد. ارتعاشات هم می‌توانند مفید بوده و هم مضر باشند. از جمله فواید ارتعاشات در صنعت می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: استفاده از کاوش فراصوت ارتعاشات برای استفاده‌ی پزشکی و آزمایشات بدون آسیب‌دیدگی در داخل بدن و همچنین برای شناسایی ترک در هواپیما و سازه‌ها. ابزار موسیقی و بلندگو-های صدا نیز سیستم‌هایی هستند که ارتعاشات در آن‌ها به‌خوبی مورد استفاده قرار گرفته شده‌است. اما اندکی از این ارتعاشات در ماشین‌ها و سازه‌های صنعتی به دلایل زیر باعث مشکلات جزئی یا جدی در عملکرد و ایمنی سیستم‌ها می‌شود:

- حرکت نوسانی که در حین ارتعاشات ایجاد شده، منجر به ایجاد نیروی نوسانی می‌شود که برای مواد تشکیل دهنده‌ی سازه مضر بوده و به مرور زمان در سازه ایجاد خستگی می‌کند و باعث ازهم‌پاشیدگی آن می‌شود.
- نوسانات منجر به ازدست‌دادن دقت در کنترل ماشین آلات می‌شود.
- مقدار کمی از ارتعاشات می‌تواند منجر به تشدید معایبی که در سازه وجود دارد، شود.

از مضرات ارتعاشات که در زندگی امروزه می‌توان به آن اشاره کرد ارتعاشات ناخواسته در بال و بدنه‌ی هواپیما است. زمانی که بال هواپیما ارتعاش بیش از حد داشته باشد، به ویژه هنگامی که فرکانس ارتعاش با فرکانس‌های ارتعاش طبیعی در بدن انسان مطابقت داشته باشد، در پروازهای طولانی مدت منجر به از دست رفتن راحتی مسافران در حین پرواز می‌شود. اگر بال هواپیما ارتعاشی با دامنه‌ی بزرگ برای مدت زمان طولانی داشته باشد، در نهایت منجر به تجربه یک شکست خستگی دربال شده و در اثر صدمات ناشی از این امر هواپیما سقوط می‌کند.

از معروف‌ترین فاجعه‌های مهندسی، فاجعه پل باریک تاکوما در سال ۱۹۴۰ بود شکل (۱-۱) و (۲-۱)

[۱]. دلیل شکسته شدن این پل در اثر ارتعاشات خودتحریک است که مشابه همین امر در بال هواپیما نیز رخ می‌دهد به همین دلیل افزایش آگاهی در زمینه‌ی خواص ارتعاش سیستم‌های مکانیکی برای انواع ارتعاشات، امری ضروری است.



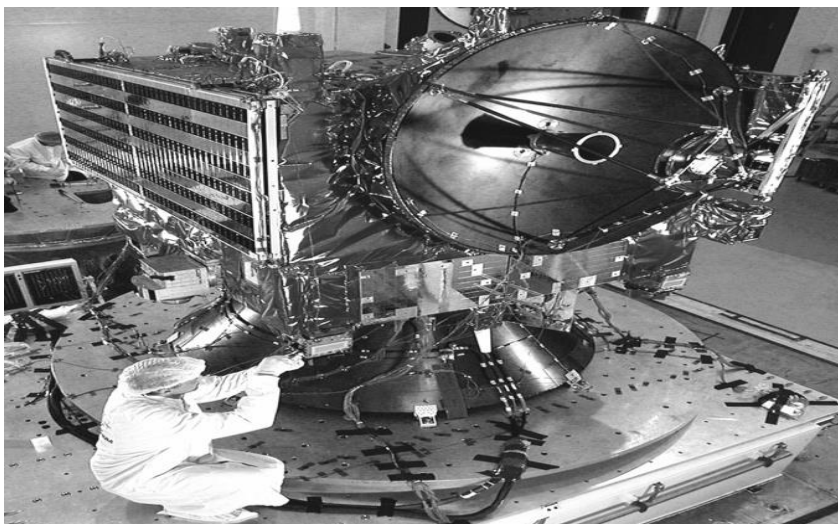
شکل ۱-۱ پل تاکومار قبل از تخریب [۱].



شکل ۱-۲ پل تاکومار بعد تخریب [۱].

پاسخ ارتعاشی غیر منتظره ممکن است عملکرد ماموریت حیاتی و یا سلامت ساختار را به خطر اندازد. به عنوان نمونه، همه‌ی فضاپیماها قبل از پرتاب، برای آزمایش دینامیک و ارتعاشات مورد بررسی قرار

می‌گیرند. شکل (۳-۱) فضاپیماي ونوس اکسپرس^۱ که برای آزمایشات تجزیه و تحلیل دینامیک ارتعاشات تجربی در حال آماده‌سازی می‌باشد را نشان می‌دهد. بدنه‌ی این فضاپیما مجهز به شتاب سنج بوده و اختلال از بیرون به بدنه از طریق یک میز لرزاننده وارد می‌شود تا دستگاه از نظر سلامت مورد بررسی قرارگیرد [۲].



شکل ۱-۳ فضاپیماي ونوس تحت آزمایش دینامیک و ارتعاشات [۲].

همچنین برای مقابله با زمین لرزه، ساختمان را در هنگام ساخت بر روی پدهای لاستیکی بنا می‌کنند تا ارتعاشات وارد بر آن کاهش پیدا کند. شکل (۴-۱) نمونه‌ای از پدهای لاستیکی را در حین نصب نشان می‌دهد [۳].

^۱ Venus Express



شکل ۱-۴ پدهای پلاستیکی نصب شده بر ساختمان [۳]

همانطور که گفته شد به دلیل وجود ارتعاشات مضر در سازه، صنعت نیازمند به روش‌هایی برای کاهش ارتعاشات در سازه‌ها می‌باشد که تعدادی از این روش‌ها برای کنترل ارتعاشات ذکر می‌شود:

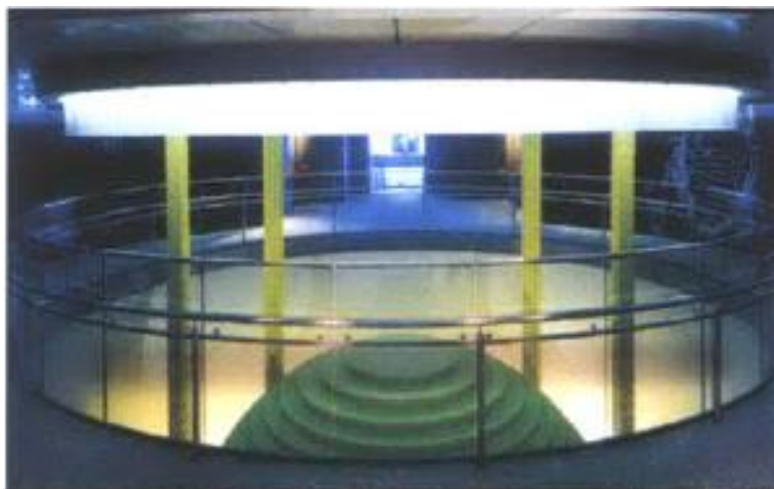
- **کنترل تحریک خارجی:** نیروی خارجی که اغلب باعث ارتعاش می‌شود می‌تواند محدود شده و یا اندازه‌ی آن کاهش پیدا کرده و یا به صورت نوسانی دربیاید.
- **کنترل پارامترهای سیستم:** دامنه‌ی حرکت پایا تابعی از پارامترهای سیستم از قبیل جرم میرایی و ضریب فنریت است و به طور کلی پاسخ سیستم نیز تابعی از ممان اینرسی سیستم و فنریت و میرایی است و تغییر در هر کدام از این پارامترها منجر به تغییر در اندازه‌ی دامنه‌ی حرکت پایا می‌شود.
- **کنترل نیرو اعمالی و دامنه‌ی حرکت ناشی از آن:** به کارگیری ایزولاتور^۱ بین دو عضو از سیستم مکانیکی قادر به کاهش ارتعاشات سیستم است. اگر ایزولاتور به درستی طراحی شود می‌تواند نیروی انتقالی از ماشین به تکیه‌گاهش را هنگامی که ماشین تحت تحریک خارجی قرار می‌گیرد کاهش

^۱ Isolator

دهد. علاوه بر ایزولاتورها با نصب جاذب به سیستم اصلی نیز، نیروی اعمالی از سیستم به جاذبها منتقل گشته و از این رو منجر به کنترل و کاهش دامنه‌ی ارتعاشات می‌شود.

۲-۱ معرفی جاذب

عملکرد دینامیکی سازه‌ها در شرایط مختلف کاری، از پارامترهای مهم در طراحی سازه‌های مهندسی است. استفاده از سیستم جرم، فنر و دمپر که تحت عنوان جاذب ارتعاشات شناخته می‌شود، یکی از ساده‌ترین و مهم‌ترین وسایلی است که می‌تواند کارایی دینامیکی سازه را بهبود بخشد. این جاذبها در کنترل پدیده‌های تشدید نقش مهمی ایفا می‌کنند. آنها همچنین با وجود عدم استفاده از منبع خارجی، کارایی بالایی دارند این دلایل روی هم رفته، آنها را به یکی از محبوب‌ترین راه‌های کنترل ارتعاشات در صنایع مختلف تبدیل کرده است. به عنوان نمونه در کشورهای پیشرفته جهت مقابله با نیروهای جانبی از جرم، فنر و دمپر برای کنترل ارتعاشات بر روی سازه‌های بلند استفاده می‌شود. شکل (۱-۵) یک نمونه جاذب که به شکل پاندول است در ساختمان تایپه ۱۰۱ تایلند نصب شده است را نشان می‌دهد [۴].



شکل ۱-۵ جاذب پاندولی واقع در ساختمان تایپه ۱۰۱ تایلند [۴].

از دیگر کاربرد این جاذبها در زندگی امروز می‌توان به نصب این جاذبها در بسیاری از دودکشها و دکل‌های آنتن اشاره کرد. یکی از نمونه‌های معروف در این زمینه آنتن ۱۰۲ متری نصب شده بر فراز برج

۵۵۳ متری CN در تورنتوی کانادا می‌باشد. همچنین برج ۳۰۵ متری سیدنی که یک سازه‌ی کابلی با یک رستوران در بالای برج است نیز از این جاذب‌ها بهره می‌برد. با در نظر گرفتن این‌که در این تحقیق برای کاهش ارتعاشات از جاذب‌ها استفاده شده است در ادامه به بررسی انواع جاذب‌ها پرداخته می‌شود.

۱-۲-۱ انواع جاذب‌ها

جاذب‌ها بسته به نوع کاربرد به دو دسته جاذب‌های خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند. جاذب ارتعاش دینامیکی خطی، یک عضو اینرسی می‌باشد که به یک سیستم ارتعاشی متصل شده و در اثر ارتعاش سیستم اصلی، یک نیرو برهم کنش بین سیستم و جاذب ارتعاش ایجاد می‌شود که این نیرو از ارتعاش جلوگیری می‌کند. استفاده از جاذب ارتعاش دینامیکی خطی فاقد دمپر، در هیچ موردی مناسب نمی‌باشد به خصوص در مواردی که فرکانس نیروی محرک ثابت نیست و در یک محدوده‌ی معین در شرایط کاری معمولی، تغییر می‌کند در این موارد جاذب با دمپر خطی برای غلبه بر این محدودیت‌ها به کار می‌رود ولی استفاده از آن مشکلاتی مانند نصب و... را به همراه دارد. هنگامی که فرکانس نیروی تحریک از یک مقدار مشخص تغییر پیدا می‌کند مسأله‌ی عملکرد این جاذب‌های ارتعاشی تحت شرایط خاص از اهمیت قابل توجهی برخوردار می‌شود. وقتی سیستم اصلی در فرکانس طبیعی خود تحریک نشود، یک تغییر کوچک می‌تواند جاذب ارتعاش را به تقویت کننده‌ی ارتعاش تبدیل کند در این موارد استفاده از جاذب‌های ارتعاش غیرخطی در جذب ارتعاش موثرتر از جاذب‌های خطی عمل می‌کنند از نمونه جاذب‌های غیرخطی که قابلیت‌های شگفت‌انگیزی را در جذب و کاهش ارتعاشات به اثبات رسانیده، چاه غیرخطی انرژی است. منظور از چاه غیرخطی انرژی، جرمی کوچک (نسبت به جرم کل سیستم) است که از طریق یک دمپر خطی یا غیرخطی و یک فنر غیرخطی به سیستم اولیه متصل شده‌است. سیستم‌های اصلی که چاه‌های غیرخطی انرژی به آن متصل شده می‌توانند کابل، تیر، صفحه و... باشند که می‌توان از مواد مختلفی که به جذب ارتعاشات کمک می‌کند در ساخت آن‌ها استفاده کرد. در ادامه برخی از آن‌ها ذکر شده است.

۳-۱ بررسی مواد الاستیک^۱ و ویسکوالاستیک^۲

مواد الاستیک به دسته ای از مواد جامد گفته می‌شود که بعد از برداشتن نیروی اعمالی، تمایل به برگشتن به حالت اولیه‌ی خود را دارند. یعنی پس از برداشتن نیرو، ماده به حالت اولیه از نظر شکل و اندازه برمی‌گردد. خاصیت ویسکوز یک ماده مقاومت آن را در برابر جاری شدن نشان می‌دهد. یک ماده با لزجت بالا مقاومت بیشتری در برابر حرکت نسبت به یک ماده با لزجت کمتر نشان می‌دهد.

به عنوان نمونه آب لزجت پایین تری نسبت عسل دارد و بنابراین سریع‌تر حرکت می‌کند. مواد ویسکوز چسبناک بوده و لزجت آن‌ها در برابر دمای بالا کاهش می‌یابد. مثلاً عسل در برابر سرما بسیار کندتر نسبت به گرما حرکت می‌کند.

به دسته ای از مواد که دارای دو خاصیت الاستیک و ویسکوزی در هنگام تغییر شکل دادن هستند، ویسکوالاستیک می‌گویند. پلیمرهای مصنوعی، چوب، بافت انسان‌ها و... اثرات ویسکوالاستیک قابل توجهی نشان می‌دهند.

تفاوت مواد الاستیک و ویسکوالاستیک در وجود خاصیت لزجت است و به دلیل دارا بودن این خاصیت، کرنش در این مواد تابع زمان است از این مواد برای جذب ارتعاشات، صدا و ضربه استفاده می‌شود. آن‌ها انرژی جذب شده را به شکل گرما بیرون می‌دهند از جمله مواد ویسکوالاستیک معروفی که به طور گسترده در بسیاری از کاربردهای جذب انرژی استفاده شده است ماده‌ی سوربوتان است^۳. زیرا نه تنها می‌تواند لرزش را به عنوان هدف مورد نظر کاهش دهد، بلکه می‌تواند بدون ایجاد تغییرات در دماهای شدید تأثیر بگذارد. همچنین به تعدادی از مواد شیمیایی مضر مقاوم است. سوربوتان دارای طیف گسترده ای از خواص مواد دمپر بوده و این اجازه را می‌دهد تا صدا و گرما پیش از رسیدن به انسان از بین رود.

^۱ Elastic

^۲ Viscoelastic

^۳ Sorbothane

۱- ۴ تاریخچه

چاه غیرخطی انرژی (NES)^۱، اساساً یک نوسان ساز غیرخطی میرا است که به سیستم اولیه متصل شده تا ارتعاشات سیستم را جذب نموده و کاهش دهد. چاه غیرخطی انرژی می‌تواند مزایای ضروری برای کاربردهای مهندسی با توجه به طیف گسترده‌ی فرکانس در صنعت داشته باشد از جمله این کاربردها می‌توان به کاهش ارتعاشات در ماشین آلات [۵] و تأثیر آن در پایداری ائرولاستیک [۶] اشاره کرد و همچنین کاهش ارتعاشات در پل‌ها، که برای دستیابی به این هدف، پل را به صورت تیر مدل کرده و وسایل نقلیه بار متحرک یا جرم متحرک در نظر گرفته می‌شود در طراحی چنین پل‌هایی معیارهایی از قبیل طول دهانه‌ی پل، سطح مقطع آن و نیروی وارد بر پل از سوی وسیله‌ی نقلیه و... باید برای مدل سازی در نظر گرفته شوند [۷]. همچنین برای کاهش ارتعاشات ساختمان‌ها نیز از جاذب‌ها استفاده می‌شود [۸]. مطالعه‌ی تجربی چاه غیرخطی انرژی نصب شده بر ریل، برای کاهش پاسخ دینامیکی سیستم توسط وانگ و همکاران انجام شد که توانایی چاه غیرخطی انرژی را در کاهش پاسخ سیستم نشان می‌دهد در این تحقیق چاه غیرخطی انرژی بین دو ریل موازی فولادی با استفاده از یاتاقان فولادی نصب شده است. برای نشان دادن درستی تحقیق، نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شد. همچنین نحوه‌ی بهینه سازی پارامترهای چاه غیرخطی انرژی متوالی و طراحی آن در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفت [۹]. برگمن و همکاران به بررسی چگونگی به کارگیری از انرژی منتقل شده با استفاده از انتقال انرژی هدفمند (TET)^۲ برای پایداری مته حفاری پرداختند علاوه بر آن با اتصال چاه غیر خطی انرژی به مته حفاری، رفتار دینامیکی سیستم به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشیده شده و محدوده‌ی عملکرد سیستم وسیع تر می‌شود [۱۰]. طبقه بندی چاه غیرخطی انرژی می‌تواند به صورت متصل به زمین یا غیر

^۱ Nonlinear energy sink

^۲ Targeted energy transfers

متصل به زمین، یک درجه آزادی [۱۲،۱۱] یا چند درجه آزادی [۶] و با پیکربندی‌های کاملاً مختلف باشد. دردل و همکاران به بررسی دینامیک حالت پایا و نیرومندی تحریک هارمونیک یک نوسان ساز غیر-خطی که متصل به چاه غیرخطی انرژی دو درجه آزادی بوده، پرداختند. نتایج عددی این تحقیق نشان داد که سیستم با یک چاه غیرخطی انرژی، قدرت کمتری در تغییر پارامترها و دامنه‌ی نیروی خارجی دارد همچنین با اضافه کردن یک درجه آزادی به سیستم اولیه و بررسی نتایج نشان داده شد که افزایش درجه آزادی سیستم منجر به افزایش نیرومندی سیستم در تغییر پارامترها و دامنه‌ی نیروی خارجی می‌شود [۱۳]. سیستم‌های اصلی که چاه غیرخطی انرژی به آن متصل شده خود می‌توانند درجه آزادی مختلفی داشته باشند به عنوان نمونه برگمن و همکاران با استفاده از نتایج آزمایشگاهی به بررسی چگونگی انتقال انرژی هدفمند در یک سیستم دو درجه آزادی که متصل به چاه غیرخطی انرژی بوده، پرداختند. در این تحقیق نشان داده شد که چاه غیرخطی انرژی با دریافت انرژی خالص از هر دو مد سیستم اولیه قادر به ارتعاش است و با تسهیل این انتقال به‌ویژه از طریق تحریک پریودیک و شبه پریودیک بخش عمده‌ای از انرژی منتقل می‌شود [۱۴]. بررسی رفتار دینامیکی و انتقال انرژی هدفمند در نوسان ساز خطی کوپل شده با سیستم چند درجه آزادی غیرخطی توسط جندلمن و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت [۱۵]. خلیفی و همکارانش در تحقیقی به مطالعه رفتار پارامتریک یک سیستم چند درجه آزادی متصل به چندین چاه غیرخطی انرژی پرداختند در ابتدا با استفاده از نتایج عددی، پهنای باند انتقال انرژی هدفمند از یک سیستم خطی تحت تحریک متمرکز نشان داده شد و در مرحله‌ی بعدی نشان داده شد که با استفاده از چندین جاذب، انرژی به صورت یک طرفه و بدون بازگشت و انتشار در سیستم اولیه دمپ می‌شود. نتایج عددی تیر خطی با چندین جاذب انرژی (MDA)^۱ با تیر با جاذب‌های (TMD)^۲ نیز مقایسه شد [۱۶]. در سال‌های اخیر کاهش ارتعاشات سازه‌های مختلف مانند کابل [۱۸،۱۷] تیر [۱۹] و صفحه

^۱ Multiple Dynamic Absorbers

^۲ Tuned mass damper

[۲۱،۲۰] با کمک چاه غیرخطی انرژی مورد مطالعه قرار گرفته است. به عنوان مثال یک کابل الاستیک با روش‌های مقیاس‌های چندتایی و توازن هارمونیک توسط زولی ولانگو بررسی شد [۱۷] که آن‌ها در تحقیقات خود در دو مقاله کابل را با رزونانس داخلی [۱۷] و در دیگری با حالت غیررزونانسی بررسی کردند [۱۸]. مقاله‌ای که در آن کابل با رزونانس داخلی مورد بررسی قرار گرفته، یکی از تکیه گاه‌ها در راستای افق آزادانه حرکت کرده و دیگری ثابت است و با استفاده از روش ترکیبی، پاسخ مسأله با در نظر گرفتن دو فرکانس اولیه و ثانویه به دست آمده است. در تحقیق غیر رزونانسی، یک سر کابل ثابت و سر دیگر آن به جرم و فنر متصل است، و پاسخ مسأله تنها با در نظر گرفتن فرکانس اولیه به دست آمده است. ارتعاشات غیرخطی کابل متحرک محوری با تکیه گاه‌های فنی توسط کسیمی بررسی شد که معادلات حرکت با استفاده از روش همیلتون توسعه یافته به دست آورده شده و از روش مقیاس‌های چند تایی برای حل استفاده شد [۲۲]. در سازه‌هایی همانند تیر یک‌سرگردار کنترل ارتعاش غیرخطی تیر با کمک چاه غیرخطی انرژی توسط احمدآبادی و خادم بررسی شد که در آن تیر تحت تحریک بار متمرکز قرار گرفته و چیدمان مختلف چاه غیرخطی انرژی در آن بررسی شده است و همچنین بهینه کردن پارامترهای سیستم به منظور دستیابی به بهترین حالت از جذب انرژی در آن به دست آمده است [۱۹].

یک طراحی از تیر که دو انتهای آن توسط فنرهای غیرخطی نگه‌داشته شده است، دارای اتصال چاه غیر خطی انرژی بوده و با پیکربندی‌های مختلف چاه غیرخطی بر روی تیر مانند اتصال زمینی و غیرزمینی به- همراه پیزوالکتریک توسط احمدآبادی و خادم بررسی شد. نقش المان پیزوالکتریک این است که انرژی اتلافی جذب شده توسط چاه غیرخطی را ذخیره کرده تا برای مصارف دیگر از آن استفاده کرد در این تحقیق سیستم به گونه‌ای طراحی شده که بیشترین جذب انرژی اتلافی توسط چاه غیرخطی انرژی صورت بگیرد، تا هم ارتعاشات مضر سیستم کاهش یافته و هم انرژی برداشت شده توسط پیزوالکتریک‌ها افزایش یابد [۱۱]. بررسی رفتار دینامیکی یک تیر خطی متصل به دو چاه غیرخطی انرژی توسط واکاکیس و

جورجیدس انجام شد که از نتایج عددی برای نشان دادن پهنای باند انتقال انرژی از یک تیر خطی انعطاف پذیر تحت تحریک بار متمرکز، به چاه غیرخطی انرژی محلی استفاده شد. همچنین نشان داده شد که طراحی دقیق و مکان قرارگیری چاه غیرخطی انرژی سهم به سزایی در جذب انرژی ارتعاشی دارد [۲۳].

دینامیک یک تیر خطی با در نظر گرفتن چاه غیرخطی انرژی توسط جورجیدس و واکاکیس بررسی شد. کاهش ارتعاشات تیر دارای بار محوری متصل به جاذب‌های خطی و غیرخطی توسط سمانی و همکارش مورد بررسی قرار گرفت. هدف این تحقیق مقایسه‌ی دمپر غیرخطی با دمپر خطی بوده که به یک تیر اویلر برنولی متصل هستند و نتایج نشان داده که دمپ‌های دینامیکی توانایی مناسبی در جذب ارتعاش دارند، به‌خصوص این‌که این دمپ‌ها اگر از نوع غیرخطی مکعبی باشند. دمپ‌های خطی نیز هنگامی بهتر عمل می‌کنند که هدف خارج کردن حداکثر انرژی ارتعاشی از سیستم باشد [۲۴]. در تحقیق دیگری توسط خادم و همکاران، طراحی و عملکرد چاه غیرخطی انرژی متصل به تیر با تکیه‌گاه‌های مختلف بررسی شد. خواص مختلف تیر و بار متمرکز اعمالی بر تیر مورد مطالعه قرار گرفت و معادلات حرکت با استفاده از روش لاگرانژ استخراج گردید و پارامترهای چاه غیرخطی انرژی بهینه سازی شد. نتایج نشان می‌دهد که افزایش سفتی سیستم اولیه منجر به افزایش فنریت غیرخطی سیستم شده که این امر نیازمند بهینه سازی فرایند انتقال انرژی هدفمند می‌باشد [۲۵]. در تحقیقی دیگر دردل و همکاران به بررسی نیرومندی چاه غیرخطی انرژی در دینامیک حالت پایای تیر خطی با شرایط مرزی مختلف پرداختند. آن‌ها با تغییر مقادیر مختلف جمله‌های غیرخطی مسأله پارامترهای بهینه را به دست آوردند. نیرومندی پارامتر-های بهینه شده چاه غیرخطی انرژی در مقابل تغییرات دامنه‌ی نیروی تحریک مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این تحقیق کاهش قابل توجهی از دامنه‌ی ارتعاشات تیر را برای هر دو مقدار دامنه‌ی نیروی کوچک و نیروی بزرگ نشان داد [۲۶]. کنترل ارتعاشات تیر غیرخطی با استفاده از چاه غیرخطی انرژی توسط پاشایی و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت در این تحقیق انتقال انرژی هدفمند از یک سیستم پیوسته‌ی

غیرخطی به چاه غیرخطی انرژی مورد مطالعه قرار گرفت. معادلات حرکت یک تیر دو سر مفصل با روش رایلی ریتز و لاگرانژ استخراج شد. پارامترهای چاه غیرخطی انرژی با استفاده از آنالیز حساسیت و (PSO) ^۱ بهینه‌سازی شده و نتایج نشان داد که سیستم اولیه تمایل به افزایش فنریت غیرخطی دارد که نیازمند بهینه‌سازی فرآیند اتلاف انرژی است [۲۷]. همچنین نتایج عددی انتقال انرژی هدفمند ارتعاشات عرضی بین تیر اولیر برنولی و چاه غیرخطی انرژی توسط رحمت الهی مورد بررسی قرار گرفت. در این تحقیق هدف چگونگی انتقال انرژی هدفمند با تغییر مکان تحریک مورد نظر بر روی تیر بوده است [۲۸].

در سازه‌های مانند صفحه نیز توسط واکاکیس و جورجیدس با به‌کارگیری روش انتقال انرژی هدفمند، انتقال انرژی از یک منبع اهداکننده به یک منبع گیرنده به‌صورت یک‌طرفه، تحقیقاتی صورت گرفته است در این تحقیق انتقال انرژی هدفمند را در یک صفحه که تحت تحریک نیروی متمرکز بوده و بر روی پایه‌ای الاستیک قرار گرفته با اتصالات مختلف خطی و غیرخطی، مورد بررسی قرار دادند [۲۰].

سازه‌های ذکر شده می‌توانند سرعت محوری داشته باشند و هنگامی که سرعت محوری سازه زیاده‌تر شود، دامنه‌ی ارتعاش عرضی نیز بزرگ‌تر خواهد شد و از آن‌جا که رفتار محوری در بسیاری از ابزارهای مهندسی رخ می‌دهد به همین دلیل تحقیقات بر روی حرکت محوری توسط محققان متعددی بر روی سازه‌های مانند کابل [۲۹، ۲۲] صفحه [۲۱] و تیر [۱۱] و [۳۰-۳۲] مورد توجه و بررسی قرار گرفته است.

روش‌های به کار گرفته شده برای حل این نوع مسائل نیز متنوع می‌باشد به عنوان نمونه تحقیق بر روی ارتعاش آزاد غیرخطی عرضی تیر محوری توسط چن و یانگ با روش‌های مقیاس‌های چندتایی انجام شده است [۳۰]. در مقاله‌ی دیگری از این نویسندگان پاسخ حالت پایای یک تیر متحرک محوری ویسکو الاستیک با سرعت نوسانی با روش مقیاس‌های چندتایی مورد مطالعه قرار گرفت [۳۱]. ارتعاشات غیر فعال تیر با حرکت محوری با روش تبدیل فوریه برای یافتن فرکانس طبیعی توسط دین وچن مورد بررسی

^۱Particle swarm optimization

قرارگرفت [۳۲]. کاهش ارتعاشات صفحه ی ویسکوالاستیک در حال حرکت محوری با ضخامت‌های مختلف با روش مربعات دیفانسیلی^۱ توسط فنگ و زونگ مورد بررسی قرارگرفت [۲۱]. رفتار دینامیکی غیرخطی تیر متحرک محوری ویسکوالاستیک با تحریک عرضی توسط قایش و همکارش مورد بررسی قرار گرفت. معادلات حرکت با استفاده از قانون دوم نیوتون به‌دست آمده و با روش گالرکین گسسته‌سازی شد و تأثیر پارامترهای مختلف بر روی رفتار دینامیکی سیستم بررسی شد [۳۳]. کاهش ارتعاشات تیر متحرک محوری با دو چاه غیرخطی انرژی موازی و متصل به هم با استفاده از روش گالرکین توسط ژانگ و چن بررسی شد. معادلات حرکت با استفاده از قانون دوم نیوتون به‌دست آمده است و با روش گالرکین گسسته‌سازی شده و با استفاده از نتایج عددی به مقایسه‌ی نقش چاه‌های غیرخطی انرژی در جذب ارتعاشات سیستم پرداخته شد [۳۴]. از چاه غیرخطی انرژی در کاهش ارتعاشات سیستم‌های مختلف خطی و غیرخطی نیز با به‌کارگیری روش‌های گوناگون استفاده می‌شود. ناپایداری اثروالاستیک سیستم دارای چاه غیرخطی انرژی با استفاده از روش ترکیبی مقیاس‌های چندتایی و هارمونیک بالانس نیز توسط زولی مورد مطالعه قرار گرفته است [۳۵]. رفتار تحلیلی سیستم با در نظر گرفتن تأثیر ارتعاشات چاه غیر-خطی انرژی توسط جندلمن مورد بررسی قرار گرفت که در این تحقیق از روش تحلیلی برای آنالیز پاسخ گذرای دمپ شده در یک سیستم در مقایسه با نوسان ساز غیرخطی خطی و تأثیر ارتعاشات چاه غیرخطی انرژی استفاده شد [۳۶]. کرمر و همکاران به بررسی چاه غیرخطی انرژی متصل به برداشت کننده انرژی با روش تجربی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که می‌توان با عناصر دارای خطی ضعیف به چاه غیرخطی انرژی دارای فنریت قوی دست یافت. همچنین آن‌ها نشان دادند که چاه غیرخطی انرژی دارای دمپینگ مکانیکی ضعیف بوده ولی در حالت کلی عملکرد سیستم مناسب بوده و توانایی قابل قبولی را در برداشت انرژی و دمپ انرژی با استفاده از چاه غیرخطی انرژی دارد [۳۷]. همچنین آنالیز ارتعاشات یک سیستم غیر

^۱ Differential quadrature

خطی متصل به جاذب‌های غیرخطی برای رزونانس اولیه و سوپرهارمونیک، توسط صابری و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت. بررسی تأثیرهای جاذب غیرخطی در مقایسه با جاذب خطی برای رزونانس‌های مورد نظر، مورد مطالعه قرار گرفت. فنریت سیستم اصلی و جاذب‌ها و میرایی به‌ترتیب غیرخطی مکعبی و خطی در نظر گرفته شد و با استفاده از روش زمانی مقیاس‌های چندتایی، حل تقریبی از معادلات حرکت به-دست آمده است. نتایج نشان داد که رزونانس اولیه سیستم به‌همراه جاذب‌های خطی به‌صورت مؤثرتری در مقایسه با جاذب غیرخطی، قادر به کاهش پیک نمودار دامنه‌ی سیستم است. اما در رزونانس سوپرهارمونیک، جاذب غیرخطی بر کاهش دامنه‌ی ارتعاشات سیستم تأثیر به‌سزایی دارد [۳۸]. کاهش ارتعاشات سیستم با رزونانس اولیه تحت تحریک اجباری با استفاده از جاذب ارتعاشات دینامیکی توسط ژانگ و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت که در آن جرم جاذب کوچک بوده و فنر و دمپر سیستم به-صورت خطی در نظر گرفته شده‌اند معادلات حرکت با استفاده از قانون دوم نیوتون به‌دست آمده‌اند و از طریق اغتشاشات حل شده‌اند [۳۹].

برای مطالعه‌ی رفتار دینامیکی حاکم بر سیستم‌های دارای جریان دینامیکی آرام، محققان اغلب از روش میانگین‌گیری پیچیده^۱ که توسط منویج^۲ انجام شده و روش مقیاس‌های چندتایی که توسط نایفه^۳ مورد بررسی قرار گرفته، استفاده می‌کنند اما الگوریتم جدید، روش ترکیبی مقیاس‌های چندتایی و هارمونیک-بالانس که توسط لانگو^۴ و زولی^۵ برای کنترل کردن تحریک خارجی سیستم‌های دینامیکی چنددرجه آزادی استفاده شده است، مورد توجه و بررسی قرار گرفته است. از مزایای این روش نسبت به روش‌های قبلی می‌توان گفت که در این روش نیازی به استفاده از روش میانگین‌گیری پیچیده نیست و تجزیه و

^۱ complexification-averaging

^۲ Manevitch

^۳ Nayfeh

^۴ Luongo

^۵ Zulli

تحلیل در قالب روش اغتشاشات انجام می‌شود و این روش با متغیرهای مسأله به صورت شفاف‌تر در ارتباط بوده که همین امر تفسیر فیزیکی آن‌ها را ملموس‌تر می‌کند [۱۷، ۱۸].

۱-۶ معرفی طرح و نوآوری آن

در این تحقیق یک تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری، متصل به دو چاه غیرخطی انرژی مجزا از هم، مدل‌سازی شده است و تأثیر مکان قرارگیری چاه‌های غیرخطی و پیکربندی آن‌ها و تغییر پارامترهای مختلف از جمله فنریت میرایی و... بر کاهش رفتار ارتعاشی سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد همچنین با استفاده از روش ترکیبی مقیاس‌های چند تایی و هارمونیک بالانس، پاسخ فرکانسی سیستم به دست می‌آید.

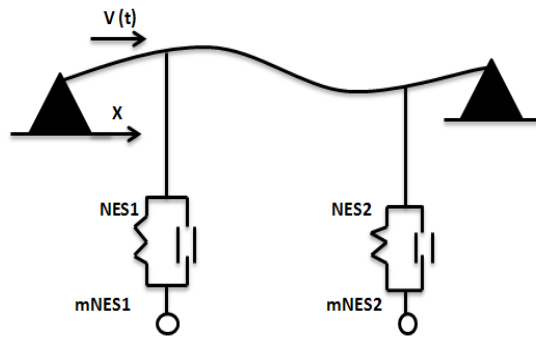
فصل دوم

استخراج معادلات

۱-۲ مدل سازی

در این فصل ارتعاشات یک تیر ویسکوالاستیک مدل کلونین که دارای سرعت متحرک محوری است، مورد بررسی قرار می‌گیرد و دو سر تیر به زمین متصل بوده و دو چاه غیرخطی انرژی مجزا از هم به آن متصل است. معادلات حرکت سیستم با استفاده از روش انرژی استخراج شده است و به منظور یافتن پاسخ فرکانسی سیستم از روش‌های عددی استفاده شده است و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله تغییر مکان چاه‌های غیرخطی انرژی تغییر میرایی و تغییر فنریت و.. در جذب و کاهش ارتعاشات سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

برای درک بهتر مدل، نمایی از سیستم در شکل (۱-۲) ارائه شده است.



شکل ۱-۲ تیر متحرک محوری با چاه‌های غیرخطی انرژی مجزا از هم.

تیر دارای طول L بوده و V مولفه‌ی سرعت در راستای محور X است. جابه‌جایی تیر در راستای عرضی با $U(x, t)$ نشان داده می‌شود. m_{NES1} و m_{NES2} به ترتیب جرم چاه غیرخطی انرژی اول و دوم است.

۱-۱-۲ استخراج معادلات تیر متحرک محوری با سرعت ثابت

به منظور دستیابی به معادلات حاکم بر حرکت از روش انرژی و اصل همپلتون استفاده شده است. بر این اساس می‌توان تابع لاگرانژ را برای سیستم به صورت زیر نوشت:

$$L = \bar{T} - \bar{U} + \bar{W} \quad (1-2)$$

که \bar{T} انرژی جنبشی تیر، \bar{U} انرژی پتانسیل تیر و \bar{W} کار انجام شده ناشی از نیروهای خارجی بر روی

تیر است.

با استفاده از روش تغییرات^۱ تابع لاگرانژ در یک دوره از زمان صفر خواهد بود بنابراین می‌توان نوشت:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\bar{T} - \bar{U} + \bar{W}) dt = 0 \quad (2-2)$$

با توجه به رابطه‌ی بالا برای رسیدن به معادلات حاکم بر حرکت نیاز است که انرژی جنبشی و انرژی

پتانسیل و همچنین کار انجام شده ناشی از نیروهای خارجی را در صورت وجود به‌دست آورد.

برای به‌دست آوردن انرژی جنبشی سیستم در ابتدا لازم است سرعت تیر محاسبه شود و لذا بعد از

مشتق‌گیری نسبت به تابع جابه‌جایی تیر در راستای عرضی $U(x, t)$ رابطه‌ی (۳-۲) به‌دست می‌آید:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt \quad (3-2)$$

که برای به‌دست آوردن سرعت تیر در راستای عرضی طرفین رابطه‌ی (۳-۲) بر dt تقسیم کرده

و رابطه‌ی (۴-۲) به‌دست می‌آید

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4-2)$$

و با جایگذاری $\frac{\partial U}{\partial x} = \dot{U}$ و $\frac{dx}{dt} = V$ در رابطه‌ی (۴-۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{dU}{dt} = \left(V \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \right) \quad (5-2)$$

که رابطه‌ی (۵-۲) بیانگر سرعت تیر در راستای عرضی می‌باشد. انرژی جنبشی تیر \hat{T} به‌صورت رابطه‌ی

(۶-۲) به‌دست می‌آید که در آن m جرم تیر، ρ دانسیته‌ی تیر و A سطح مقطع عمودی تیر می‌باشد.

$$\bar{T} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dU}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A [\dot{U} + V\dot{U}]^2 dx \quad (6-2)$$

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A [\dot{U}^2 + 2\dot{U}V\dot{U} + V^2\dot{U}^2] dx \quad (7-2)$$

با اعمال تغییرات بر انرژی جنبشی تیر رابطه‌ی (۷-۲) به‌صورت رابطه‌ی (۸-۲) به‌دست می‌آید:

¹ Variation

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{T} = \frac{1}{2} \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [2\dot{U} \delta U + 2\delta U \dot{V} + 2V\dot{U} \delta U + 2V^2 \dot{U} \delta U] dx dt \quad (8-2)$$

$$\delta \int_{T_1}^{T_2} \bar{T} = \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L [(\dot{U} \delta U + V\dot{U})\delta U + (V\dot{U} + V^2\dot{U})\delta U] dx dt \quad (9-2)$$

$$= \rho A \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} (\dot{U} + V\dot{U}) \frac{\partial}{\partial t} (\delta U) dx dt + \rho A \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} (V\dot{U} + V^2\dot{U}) \frac{\partial}{\partial x} (\delta U) dx dt \quad (10-2)$$

$$= \rho A \int_0^L [(\dot{U} + V\dot{U})(\delta U)|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{U} + V\dot{U})(\delta U) dt] dx + \rho A \int_{t_1}^{t_2} [(\dot{V}U$$

$$+ V^2\dot{U})(\delta U)|_{t_1}^{t_2} - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (V\dot{U} + V^2\dot{U}) dx] dt$$

$$= -\rho A \int_0^L \int_{t_1}^{t_1} (\ddot{U} + V\dot{U} + \dot{V}U) \delta U dt dx - \rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (V\dot{U} + V^2U'') \delta U dx dt \quad (12-2)$$

$$= -\rho A \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\ddot{U} + 2V\dot{U} + \dot{V}U + V^2U'') \delta U dx dt \quad (13-2)$$

که $U'' = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ و $\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial t}$ و $\ddot{U} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ و $V = \frac{dx}{dt}$ می باشد.

برای به دست آوردن انرژی پتانسیل، ابتدا تغییرات را اعمال کرده و سپس انتگرال گرفته می شود.

جنس تیر از مدل ویسکوالاستیک کلوین ویت انتخاب شده است، بنابراین تنش تیر σ_x به صورت

(15-2) و کرنش تیر ϵ_x ، به صورت (16-2) تعریف می شود:

$$\delta \bar{U} = \int \sigma_x \delta \epsilon_x dD \quad (14-2)$$

$$\sigma_x = E \epsilon_x + \eta \frac{\partial \epsilon_x}{\partial T} \quad (15-2)$$

$$\epsilon_x = -Z \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (16-2)$$

که D حجم تیر بوده و E مدول الاستیک، η ضریب ویسکوالاستیک ماده ی تشکیل دهنده ی تیر و Z

فاصله از صفحه میانی تیر است.

باجایگذاری (15-2) و (16-2) در (14-2) انرژی پتانسیل به صورت رابطه ی (17-2) نوشته می شود:

$$\delta \bar{U} = \int \sigma_x \delta \varepsilon_x dD = \int E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x dD + \int \eta \delta \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial T} dD \quad (17-2)$$

بخش اول محاسبه‌ی اعمال تغییرات در انرژی پتانسیل با δU_1 و بخش دوم با δU_2 نشان داده می‌شود.

$$\delta \bar{U}_1 = \int E \varepsilon_x \delta \varepsilon_x = \int E \left[-Z \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] \left[-Z \frac{\partial^2 (\delta U)}{\partial x^2} \right] dD \quad (18-2)$$

$$\delta \bar{U}_1 = \int E \left[Z^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 (\delta U)}{\partial x^2} \right] dD \quad (19-2)$$

$$\delta \bar{U}_1 = \int \eta \delta \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} dD = \int \eta \left[Z^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right] \left[\frac{\partial^2 (\delta U)}{\partial x^2} \right] dD \quad (20-2)$$

$$\delta \bar{U}_1 = \int \left(EI \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 (\delta U)}{\partial x^2} dx \quad (21-2)$$

$$\delta \bar{U}_1 = \int \eta \left[I \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \frac{\partial^2 (\delta U)}{\partial x^2} \right] dx \quad (22-2)$$

$$\delta \bar{U}_1 = EI \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta U) \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (\delta U) \Big|_0^L + \int EI \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \delta U dx \quad (23-2)$$

$$\delta \bar{U}_2 = I \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial T} \frac{\partial}{\partial x} (\delta U) \Big|_0^L - \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial T} \right) (\delta U) + \int \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(I \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} \right) (\delta U) dx \quad (24-2)$$

$$\delta \bar{U}_1 + \delta \bar{U}_2 = \int EI \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \delta U dx + \int \eta I \frac{\partial^5 U}{\partial x^4 \partial t} \delta U dx \quad (25-2)$$

که I ممان اینرسی تیر است.

برای اعمال انتگرال بعد از اعمال تغییرات بر جمله انرژی پتانسیل، معادله‌ی (25-2) در (26-2)

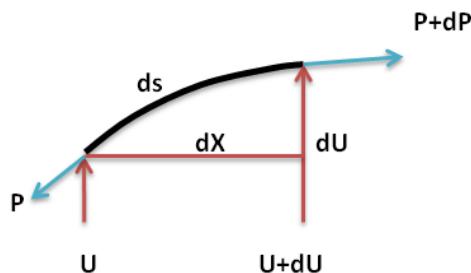
جایگذاری می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{U} dT = \int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{U}_1 + \delta \bar{U}_2 = 0 \quad (26-2)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{U} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(EI \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \eta I \frac{\partial^5 U}{\partial x^4 \partial t} \right) \delta U dx dt \quad (27-2)$$

همچنین به دلیل وجود نیروی کششی موجود در تیر، انرژی الاستیک ناشی از آن به صورت زیر به دست

می‌آید. برای درک بهتر، نمایی از تیر برش خورده به صورت شکل (۲-۲) در نظر گرفته شده است:



شکل ۲-۲ نمایی از یک تیر برش خورده.

$$dS = (dx^2 + dU^2)^{\frac{1}{2}} = ((dx)^2 + (\frac{\partial U}{\partial x} dx)^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + (\frac{\partial U}{\partial x})^2)^{\frac{1}{2}} dx \approx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right) dx \quad (28-2)$$

که dS المان کوچکی از طول تیر S و dx المان تیر در راستای افقی x و dU المان تیر در راستای عمودی U است.

با جایگذاری معادله‌ی (۲۸-۲) در (۲۹-۲) انرژی الاستیک ناشی از کشش داخلی تیر به دست می‌آید.

$$\bar{U} = \int_0^L P(x) dU = \int_0^L P(x)(dS - dx) = P(x) \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx \quad (29-2)$$

$P(x)$ نیروی کشش داخلی تیر است. با اعمال تغییرات بر معادله‌ی (۳۱-۲) در نهایت جمله انرژی

پتانسیل ناشی از کشش داخلی تیر به صورت رابطه‌ی (۳۰-۲) به دست می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{U} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L P(x) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta U) dx \quad (30-2)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (P(x) \frac{\partial U}{\partial x} (\delta U))|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (P(x) \frac{\partial U}{\partial x}) (\delta U) dx dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (P(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}) \delta U dx dt$$

و همچنین کار ناشی از نیروی خارجی $f(x, t)$ به صورت رابطه‌ی (۳۱-۲) تعریف می‌شود:

$$\bar{W} = \int_0^L f(x, t) U(x, t) dx \quad (۳۱-۲)$$

و با اعمال تغییرات بر معادله‌ی (۳۱-۲) جمله ناشی از کار نیروی خارجی $f(x, t)$ به صورت رابطه‌ی

(۳۲-۲) به دست می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{W} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f(x, t) \delta U(x, t) dx dt = 0 \quad (۳۲-۲)$$

با قرار دادن معادلات (۳۲-۲)، (۳۰-۲)، (۲۷-۲) و (۱۳-۲) در (۲-۲) معادله‌ی حرکت حاکم بر تیر به-

صورت رابطه‌ی (۳۳-۲) به دست می‌آید. لازم به ذکر است که از جمله $\dot{V}U$ در رابطه‌ی (۱۳-۲) به دلیل در

نظر گرفتن اندازه‌ی سرعت به صورت ثابت، صرف نظر شده است.

$$\rho A \left(\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (۳۳-۲)$$

$$- P \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^4} + \eta I \frac{\partial^5 U(x, t)}{\partial x^4 \partial t} = f$$

$$\rho A \left(\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (۳۴-۲)$$

$$- P \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 U(x, t)}{\partial x^4} + \eta I \frac{\partial^5 U(x, t)}{\partial x^4 \partial t} = f_1(t) \delta(x - d_1) + f_2(t) \delta(x - d_2)$$

که در معادله‌ی (۳۳-۲) نیروی خارجی f نیروی متقابل بین فنر و دمپر با تیر در نظر گرفته شده است.

که در (۳۴-۲) f_1 نیروی بین چاه غیرخطی اول و تیر و f_2 نیروی بین چاه غیرخطی دوم و تیر است. d_1

مکان اتصال چاه غیرخطی اول به تیر و d_2 مکان اتصال چاه غیرخطی دوم به تیر است.

و تابع دلتای دیراک $\delta(x)$ نشان دهنده‌ی نیروی متمرکز وارد بر تیر از جانب چاه غیرخطی انرژی است.

معادلات حرکت برای دو چاه غیرخطی انرژی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$m_{NES1} \frac{\partial^2 U_1(x, t)}{\partial t^2} + f(t)_1 = 0 \quad (35-2)$$

$$m_{NES2} \frac{\partial^2 U_2(x, t)}{\partial t^2} + f(t)_2 = 0 \quad (36-2)$$

$$f(t)_1 = K_1 [U_1(t) - U(d_1, t)]^3 + D_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\partial U(d_1, t)}{\partial t} - V \frac{\partial U(d_1, t)}{\partial x} \right) \quad (37-2)$$

$$f(t)_2 = K_2 [U_2(t) - U(d_2, t)]^3 + D_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial U(d_2, t)}{\partial t} - V \frac{\partial U(d_2, t)}{\partial x} \right) \quad (38-2)$$

که K_1 و K_2 به ترتیب ضریب سختی مکعبی چاه غیرخطی انرژی اول و دوم و D_1 و D_2 به ترتیب ضریب

میرایی چاه غیرخطی انرژی اول و دوم می‌باشد و m_{NES1} جرم چاه غیرخطی اول و m_{NES2} جرم چاه

غیرخطی دوم است. $U_1(t)$ جابه‌جایی چاه غیرخطی اول و $U_2(t)$ جابه‌جایی چاه غیرخطی دوم است.

۲-۱-۲ بی‌بعدسازی

برای بی‌بعدسازی مسأله، پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^* = \frac{x}{L} \quad u = \frac{U}{L} \quad t^* = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{P}{\rho A}}$$

$$\sigma_1 = \frac{D_1 L}{\sqrt{\rho A P}} \quad \varepsilon_1 = \frac{m_{NES1}}{\rho A L} \quad k_1 = \frac{K_1 L^4}{P}$$

$$\sigma_2 = \frac{D_2 L}{\sqrt{\rho A P}} \quad \varepsilon_2 = \frac{m_{NES2}}{\rho A L} \quad k_2 = \frac{K_2 L^4}{P}$$

$$\alpha = \frac{I \eta}{L^3 \sqrt{\rho A P}} \quad v = V \sqrt{\frac{\rho A}{P}} \quad v f^2 = \frac{E I}{P L^2} \quad (39-2)$$

که α ضریب ویسکوالاستیک و νf^2 مقاومت خمشی تیر است. σ_1 و σ_2 به ترتیب میرایی چاه غیرخطی

اول و دوم و ϵ_1 و ϵ_2 جرم چاه‌های غیرخطی اول و دوم است.

با جایگذاری (۲-۳۹) در معادلات (۲-۳۴) تا (۲-۳۶) معادلات بی‌بعد شده‌ی حرکت به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 u(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + 2\nu \frac{\partial^2 u(x^*, t^*)}{\partial x^* \partial t^*} + (\nu^2 - 1) \frac{\partial^2 u(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} + \nu f^2 \frac{\partial^4 u(x^*, t^*)}{\partial x^{*4}} \quad (۲-۴۰)$$

$$+ \alpha \frac{\partial^5 u(x^*, t^*)}{\partial x^{*4} \partial t^*} + [k_1 [u(d_1, t^*) - u_1(t^*)]^3 + \sigma_1 \left(\frac{\partial u(d_1, t^*)}{\partial t^*} + \nu \frac{\partial u(d_1, t^*)}{\partial x^*} - \frac{\partial u_1(t^*)}{\partial t^*} \right)] \delta(x^* - d_1)$$

$$+ [k_2 [u(d_2, t^*) - u_2(t^*)]^3 + \sigma_2 \left(\frac{\partial u(d_2, t^*)}{\partial t^*} - \nu \frac{\partial u(d_2, t^*)}{\partial x^*} - \frac{\partial u_2(t^*)}{\partial t^*} \right)] \delta(x^* - d_2) = 0$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial^2 u_1(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + [k_1 [u_1(t^*) - u(d_1, t^*)]^3 \quad (۲-۴۱)$$

$$+ \sigma_1 \left(\frac{\partial u_1(t^*)}{\partial t^*} - \frac{\partial u(d_1, t^*)}{\partial t^*} - \nu \frac{\partial u(d_1, t^*)}{\partial x^*} \right) = 0$$

$$\epsilon_2 \frac{\partial^2 u_2(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + [k_2 [u_2(t^*) - u(d_2, t^*)]^3 \quad (۲-۴۲)$$

$$+ \sigma_2 \left(\frac{\partial u_2(t^*)}{\partial t^*} - \frac{\partial u(d_2, t^*)}{\partial t^*} - \nu \frac{\partial u(d_2, t^*)}{\partial x^*} \right) = 0$$

در ادامه بالانویس ‘*’ به منظور ساده‌سازی حذف شده است.

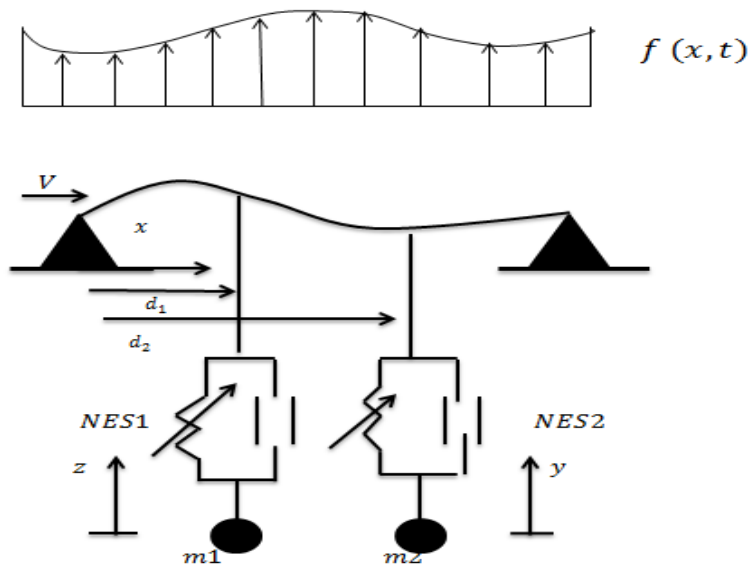
۲-۲ بررسی رفتار ارتعاشی تیر متحرک محوری متصل به دو چاه غیرخطی مجزا

تحت بار خارجی با در نظر گرفتن رزونانس ۱:۱

۲-۲-۱ مدل‌سازی

در این قسمت یک تیر متحرک که دارای سرعت محوری ثابت V بوده و دو سر آن به زمین متصل

است، در نظر گرفته شده است. تیر تحت نیروی تحریک هارمونیک $f(x, t)$ قرار گرفته و دو چاه غیرخطی انرژی موازی و مجزا از هم به آن متصل است. جابه‌جایی عرضی تیر با $u(x, t)$ و مکان قرارگیری دو چاه غیرخطی انرژی با d_1 و d_2 و جابه‌جایی چاه غیرخطی اول و دوم به ترتیب با $z(t)$ و $y(t)$ نشان داده شده است. شکل (۲-۳) نمایی از تیر را تحت تحریک خارجی نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳ تیر متحرک محوری تحت تحریک هارمونیک.

معادلات بی بعد شده‌ی حرکت تیر (۲-۴۰) و دو چاه غیرخطی انرژی (۲-۴۱) و (۲-۴۲) با در نظر-

گرفتن نیروی خارجی $f(x, t) = p \cos(\Omega t)$ و تغییر متغیر (۲-۴۳) و (۲-۴۴) به صورت (۲-۴۵)،

(۲-۴۶) و (۲-۴۷) بازنویسی می‌شوند:

$$u(d_1, t) - u_1(t) = z(t) \quad (۲-۴۳)$$

$$u(d_2, t) - u_2(t) = y(t) \quad (۲-۴۴)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + v f^2 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \quad (۲-۴۵)$$

$$+ \alpha \frac{\partial^5 u(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + k_1 [z(t)]^3 + \sigma_1 [\dot{z}(t) + v \frac{du(d_1, t)}{dx}] \delta(x - d_1)$$

$$+k_2[y(t)]^3 + \sigma_2[\dot{y}(t) + v \frac{du(d_2, t)}{dx}] \delta(x - d_2) = f(x, t)$$

$$m_1(\ddot{z}(t) - \ddot{u}(d_1, t)) + k_1(z(t))^3 + \sigma_1\left(\dot{z}(t) + v \frac{du(d_1, t)}{dx}\right) = 0 \quad (46-2)$$

$$m_2(\ddot{y}(t) - \ddot{u}(d_2, t)) + k_2(y(t))^3 + \sigma_2\left(\dot{y}(t) + v \frac{du(d_2, t)}{dx}\right) = 0 \quad (47-2)$$

و تیر متحرک محوری از هر دو طرف توسط پین به زمین متصل بوده بنابراین شرایط مرزی مسأله به-

صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (48-2)$$

$$u''(0, t) = u''(1, t) = 0$$

با استفاده از پارامتر بی‌بعد ϵ متغیرهای وابسته‌ی مسأله به صورت زیر بازنویسی می‌شود که

$0 < \epsilon \ll 1$ در نظر گرفته شده است. بر مبنای این که جمله‌های میرایی و غیرخطی و تحریک خارجی در

یک مرتبه از ϵ باید ظاهر شوند برای پارامترهای جرم و میرایی دوچاه غیر خطی انرژی و تحریک خارجی

توان‌های ϵ به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۱۸، ۱۷]:

$$(u, z, y) = \epsilon^{\frac{1}{2}}(\tilde{u}, \tilde{z}, \tilde{y}) \quad (49-2)$$

$$(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2) = \epsilon^{\frac{1}{2}}(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) \quad (50-2)$$

$$v = \epsilon \tilde{v}$$

$$\alpha = \epsilon \tilde{\alpha}$$

$$f(x, t) = p(x) \cos(\Omega t) \quad (51-2)$$

$$p = \epsilon^{\frac{3}{2}} \tilde{p}$$

با توجه به این که رزونانس تحریک خارجی به صورت ۱:۱ در نظر گرفته شده است، پارامتر تنظیم σ

برای تحریک خارجی به صورت زیر لحاظ شده است:

$$\Omega = \omega + \epsilon \tilde{\sigma} \quad (52-2)$$

بعد از بازنویسی معادلات (۷۱-۲) و (۷۲-۲) و (۷۳-۲) و حذف $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ از طرفین، معادلات ذکر شده به-

شکل زیر ظاهر می‌شوند:

$$\ddot{u} + 2\epsilon v \dot{u} + \epsilon^2 v^2 u'' - u'' + v f^2 u^{(4)} + \epsilon \alpha \dot{u}^{(4)} \quad (53-2)$$

$$+ (\epsilon k_1 z^3 + \epsilon \sigma_1 [\dot{z} + v \dot{u}(d_1, t)]) \delta(x - d_1) \\ + (\epsilon k_2 y^3 + \epsilon \sigma_2 [\dot{y} + v \dot{u}(d_2, t)]) \delta(x - d_2) = p \cos(\Omega t)$$

$$\epsilon m_1 (\ddot{z}(t) - \ddot{u}(d_1, t) + \epsilon k_1 (z(t))^3 + \epsilon \sigma_1 \left(\dot{z}(t) + v \frac{du(d_1, t)}{dx} \right)) = 0 \quad (54-2)$$

$$\epsilon m_2 (\ddot{y}(t) - \ddot{u}(d_2, t) + \epsilon k_2 (y(t))^3 + \epsilon \sigma_2 \left(\dot{y}(t) + v \frac{du(d_1, t)}{dx} \right)) = 0 \quad (55-2)$$

بر اساس روش مقیاس‌های چندتایی، پارامترهای مستقل زمانی و مشتقات آنها به صورت رابطه‌ی

(۸۲-۲) و (۸۳-۲) تعریف می‌شوند که t_0 مقیاس زمانی سریع، t_1 مقیاس زمانی آرام و t_2 مقیاس زمانی

$$d_j = \frac{\partial}{\partial t_j} \quad j=0,1,\dots \quad \text{بسیار آرام می‌باشد که در آن}$$

$$t = t_0 \quad (56-2)$$

$$t_1 = \epsilon t_0$$

$$t_2 = \epsilon^2 t_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = d_0 + \epsilon d_1 + \epsilon^2 d_2 + \dots \quad (57-2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = d_0^2 + 2\epsilon d_0 d_1 + \epsilon^2 (d_1^2 + 2d_0 d_2) + \dots$$

و بسط پارامترهای وابسته‌ی مسأله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} u \\ z \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ z_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} + \epsilon \begin{Bmatrix} u_1 \\ z_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \epsilon^2 \begin{Bmatrix} u_2 \\ z_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \dots \quad (58-2)$$

با جایگذاری (۵۶-۲)، (۵۷-۲)، (۵۸-۲)، (۵۳-۲)، (۵۴-۲) و (۵۵-۲) و طبقه‌بندی معادلات بر

اساس مرتبه‌های مختلف ϵ معادلات پرتوربیشن به صورت زیر به دست می‌آید:

مرتبه‌ی صفر ϵ

$$\epsilon^0: \quad (59-2)$$

$$d_0^2 u_0 + v f^2 \frac{du_0^4}{dx^4} - \frac{du_0^2}{dx^2} = 0$$

مرتبه‌ی اول ϵ

$$\epsilon^1 \quad (60-2)$$

$$d_0^2 u_1 + v f^2 \frac{du_1^4}{dx^4} - \frac{du_1^2}{dx^2} = -2d_0 d_1 u_0 - 2v d_0 \frac{du_0}{dx} - \alpha d_0 \frac{du_0^4}{dx^4} -$$

$$(k_1 z_0^3 + \sigma_1 d_0 z_0) \delta(x - d_1) - (k_2 y_0^3 + \sigma_2 d_0 y_0) \delta(x - d_2) + \frac{p(x)}{2} e^{i\sigma t_1}$$

$$m_1 (d_0^2 z_0 - d_0^2 u_0(d_1, t) + k_1 z_0^3 + \sigma_1 d_0 z_0) = 0 \quad (61-2)$$

$$m_2 (d_0^2 y_0 - d_0^2 u_0(d_2, t) + k_1 y_0^3 + \sigma_2 d_0 y_0) = 0 \quad (62-2)$$

مرتبه ی دوم ϵ

$$\epsilon^2: \quad (63-2)$$

$$d_0^2 u_2 + v f^2 \frac{du_2^4}{dx^4} - \frac{du_2^2}{dx^2} = -2v_0 d_0 \frac{du_1}{dx} - 2v d_1 \frac{du_0}{dx} - 2d_0 d_1 u_1 - v^2 \frac{du_0^2}{dx^2} -$$

$$(2d_0 d_1 + d_1^2) u_0 - \alpha d_0 \frac{du_1^4}{dx^4} - \alpha d_1 \frac{du_0^4}{dx^4} - [3k_1 z_0^2 z_1 + \sigma_1 (v_0 \frac{du_0(d_1, t)}{dx}$$

$$+ d_0 z_1 + d_1 z_0) \delta(x - d_1) - [3k_2 y_0^2 y_1$$

$$- 2v d_0 \frac{du_0}{dx} + \sigma_2 \left(v \frac{du_0(d_2, t)}{dx} + d_0 y_1 + d_1 y_0 \right) \delta(x - d_2)$$

$$m_1 (d_0^2 z_1 - d_0^2 u_1(d_1, t) + \sigma_1 d_0 z_1 + 3k_1 z_0^2 z_1) \quad (64-2)$$

$$= -2m_1 (d_0 d_1 z_0 - d_0 d_1 u_0(d_1, t)) - \sigma_1 d_1 z_0 - \sigma_1 \left(v \frac{du_0(d_1, t)}{dx} \right)$$

$$m_2 (d_0^2 y_1 - d_0^2 u_1(d_2, t) + \sigma_2 d_0 y_1 + 3k_2 y_0^2 y_1) \quad (65-2)$$

$$= -2m_2 (d_0 d_1 y_0 - d_0 d_1 u_0(d_2, t)) - \sigma_2 d_1 y_0 - \sigma_2 \left(v \frac{du_0(d_2, t)}{dx} \right)$$

و شرایط مرزی مورد نظر برای هر مرتبه از ϵ ، به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

مرتبه ی صفر ϵ

$$\epsilon^0: \quad (66-2)$$

$$u_0(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_0(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_0''(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_0''(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

مرتبه‌ی اول ϵ
(۶۷-۲)

$$\epsilon^1$$

$$u_1(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_1(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_1''(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_1''(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

مرتبه‌ی دوم ϵ
(۶۸-۲)

$$\epsilon^2:$$

$$u_2(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_2(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_2''(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_2''(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

حل کلی معادله‌ی (۲-۵۹) و (۲-۶۶) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_0(x, t_0, t_1, \dots) = A(t_1, \dots) \varphi(x) e^{i\omega t_0} + cc \quad (۶۹-۲)$$

که در آن $A(t_1, \dots)$ دامنه‌ی حرکت مختلط وابسته به مقیاس زمانی آرام است و cc مزدوج مختلط عبارت مورد نظر است. و $\varphi(x)$ شکل مود مسأله بوده که برای یک تیر دو سر مفصل به صورت $\varphi(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x)$ در نظر گرفته شده است. معادلات مرتبط با دو چاه غیرخطی انرژی در مرتبه‌ی

اول ϵ ظاهر می‌شود که برای حل آن از روش هارمونیک بالانس استفاده می‌شود:

$$z_0(t_0, t_1, \dots) = \sum_{k_1=1}^{+\infty} B_{0k_1}(t_1, \dots) e^{ik_1 \omega t_0} + cc \quad (۷۰-۲)$$

$$y_0(t_0, t_1, \dots) = \sum_{k_2=1}^{+\infty} C_{0k_2}(t_1, \dots) e^{ik_2 \omega t_0} + cc \quad (۷۱-۲)$$

که $B_{0k_1} = (t_1, \dots)$ و $C_{0k_2} = (t_1, \dots)$ دامنه‌ی حرکت مختلط وابسته به زمان می‌باشند. که

$$B_{0k_1}(t_1, \dots) = B_0 \quad \text{و} \quad C_{0k_2}(t_1, \dots) = C_0 \quad \text{می‌باشد.}$$

بعد از جایگذاری (۶۹-۲) و (۷۰-۲) در (۶۱-۲) و (۶۹-۲) و (۷۱-۲) در (۶۲-۲) معادلات جبری زیر

برای دو چاه غیرخطی انرژی به دست می آید:

$$m_1 \omega^2 (B_0 - A \varphi(d_1)) + \sigma_1 i \omega B_0 + 3k_1 B_0^2 \overline{B_0} = 0 \quad (۷۲-۲)$$

$$m_2 \omega^2 (C_0 - A \varphi(d_2)) + \sigma_2 i \omega C_0 + 3k_2 C_0^2 \overline{C_0} = 0 \quad (۷۳-۲)$$

که این روابط بیانگر ارتباط جبری بین دامنه‌ی نوسانات سیستم اصلی A و دامنه‌ی نوسانات دو چاه غیرخطی انرژی B_0 و C_0 است که شکل قطبی این روابط به شکل زیر نوشته می شود که با کمک آن می توان a را بر اساس b و c رسم کرد.

$$m_1^2 \omega^4 \varphi(d_1)^2 a^2 = (m_1 \omega^2 b - \frac{3}{4} k_1 b^3)^2 + \sigma_1^2 b^2 \omega^2 \quad (۷۴-۲)$$

$$m_2^2 \omega^4 \varphi(d_2)^2 a^2 = (m_2 \omega^2 c - \frac{3}{4} k_2 c^3)^2 + \sigma_2^2 c^2 \omega^2 \quad (۷۵-۲)$$

برای بررسی دینامیک خارج از محدوده‌ی (۷۴-۲) و (۷۵-۲) معادله‌ی (۶۰-۲) و (۶۷-۲) باید مورد بررسی قرار گرفته شوند. حل معادله‌ی (۶۰-۲) به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$u_1(x, t_1, t_2) = \Psi(x, t_1, t_2) e^{i\omega t_0} + cc \quad (۷۶-۲)$$

که برای حل آن تابع مختلط $\Psi(x, t_1, t_2)$ باید محاسبه شود. با جایگذاری (۷۶-۲) در (۶۰-۲) و (۶۷-۲) و جدا کردن جمله‌هایی با توان $e^{i\omega t_0}$ معادله دیفرانسیل معمولی با شرایط مرزی مورد نظر به شکل زیر به دست می آید:

$$v f^2 \Psi^{(4)} - \Psi^{(2)} - \omega^2 \Psi = F(x, t_1, t_2) \quad (۷۷-۲)$$

$$\Psi(0, t_0, t_1, \dots) = 0 \quad (۷۸-۲)$$

$$\Psi(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$\dot{\Psi}(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$\dot{\Psi}(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

که در آن تابع $F(x, t_1, t_2)$ به صورت رابطه‌ی (۷۹-۲) در نظر گرفته می شود.

$$F(x, t_1, t_2) = -2i\omega\varphi(x)d_1A - 2vi\omega\dot{\varphi}(x)A - \alpha i\omega\varphi(x)^{(4)}A \quad (79-2)$$

$$-(3k_1B_0^2\overline{B_0}\sigma_1i\omega B_0)\delta(x - d_1) - (\sigma_2i\omega C_0 + 3k_2C_0^2\overline{C_0})\delta(x - d_2)$$

$$+ \frac{p(x)}{2} e^{i\sigma t_1}$$

$$\int_0^1 F(x, t_1, t_2)\varphi(x)dx = 0 \quad (80-2)$$

برای حل معادله‌ی (۷۷-۲) ابتدا شرط حل‌پذیری مسأله باید برقرار باشد، با اعمال شرط حل‌پذیری،

جایگذاری (۷۹-۲) در (۸۰-۲) رابطه‌ی (۸۱-۲) به دست می‌آید:

$$d_1A = \frac{-\alpha A\omega^4}{2} + \frac{(3k_1B_0^2\overline{B_0} + \sigma_1i\omega B_0)}{-2i\omega} \varphi(d_1) \quad (81-2)$$

$$+ \frac{\sigma_2i\omega C_0 + 3k_2C_0^2\overline{C_0}}{-2i\omega} \varphi(d_2) + \frac{p_r}{2} e^{i\sigma t_1}$$

که در آن $p_r = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx$. با جایگذاری (۸۱-۲) در (۷۹-۲) و جایگذاری (۷۷-۲) و

حل این معادله، پاسخ آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Psi(x, t_1, t_2) = w_1(x)e^{i\sigma t_1} + w_2(x)iA + w_3(x)iB_0 + w_4(x)iC_0 + w_5(x)B_0^2\overline{B_0} \quad (82-2)$$

$$+ w_6(x)C_0^2\overline{C_0}$$

ضرایب $w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x), w_5(x), w_6(x)$ در پیوست آمده است. که $w_{ni}(x)$ بیانگر

قسمت موهومی و $w_{nr}(x)$ بیانگر قسمت حقیقی است. که $n = 1, \dots, 6$.

همچنین برای حل معادله‌ی (۶۱-۲) و (۶۲-۲) با استفاده از روش هارمونیک بالانس، پاسخ این معادلات

به صورت (۸۳-۲) و (۸۴-۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$z_1(t_0, t_1, \dots) = \sum_{k_1=1}^{+\infty} B_{1k_1}(t_1, \dots) e^{ik_1\omega t_0} + cc \quad (83-2)$$

$$y_1(t_0, t_1, \dots) = \sum_{k_2=1}^{+\infty} c_{1k_2}(t_1, \dots) e^{ik_2\omega t_0} + cc \quad (84-2)$$

که در روابط بالا، $B_{1k_1} = B_1$ و $C_{1k_2} = C_1$ در نظر گرفته شده است.

با جایگذاری روابط (۶۹-۲)، (۷۰-۲)، (۸۴-۲) در (۶۴-۲) و روابط (۶۹-۲)، (۷۱-۲)، و (۸۴-۲) در (۶۵-۲) و معادلات (۸۵-۲) و (۸۶-۲) به دست می‌آید.

$$-m_1\omega^2 B_1 + \sigma_1 i\omega B_1 + 3k_1 B_0^2 \overline{B_1} + 6k_1 B_0 \overline{B_0} B_1 + (2i\omega + \sigma_1) d_1 B_0 \quad (۸۵-۲)$$

$$-2m_1 i\omega \varphi(d_1) d_1 A + \sigma_1 v \dot{\varphi}(d_1) A + m_1 \omega^2 (w_1(x) e^{i\sigma t_1} + w_2(x) iA + w_3(x) iB_0 + w_4(x) iC_0 + w_5(x) B_0^2 \overline{B_0} + w_6(x) C_0^2 \overline{C_0}) = 0$$

$$-m_2\omega^2 C_1 + \sigma_2 i\omega C_1 + 3k_1 C_0^2 \overline{C_1} + 6k_2 C_0 \overline{C_0} C_1 + (2i\omega + \sigma_2) d_1 C_0 \quad (۸۶-۲)$$

$$-2m_2 i\omega \varphi(d_2) d_1 A + \sigma_2 v \dot{\varphi}(d_2) A + m_2 \omega^2 (w_1(x) e^{i\sigma t_1} + w_2(x) iA + w_3(x) iB_0 + w_4(x) iC_0 + w_5(x) B_0^2 \overline{B_0} + w_6(x) C_0^2 \overline{C_0}) = 0$$

برای دستیابی به معادلات مدولاسیون دامنه، باید معادله‌ی (۷۲-۲) با (۸۵-۲) و معادله‌ی (۷۳-۲) با (۸۶-۲) ترکیب شوند. لذا برای رسیدن به این هدف، باید معادله‌ی (۷۲-۲) و (۷۳-۲) را در $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ و

معادله‌ی (۸۵-۲) و (۸۶-۲) را در $\epsilon^{\frac{3}{2}}$ ضرب شوند. و در نهایت با تعریف $B = B_0 + \epsilon B_1$ و $C = C_0 + \epsilon C_1$

معادلات دو به دو با هم ترکیب می‌شوند [۱۸، ۱۷].

$$\epsilon d_1 = \frac{d}{dt} \quad \epsilon^{\frac{1}{2}} A = A \quad \epsilon m_1 = m_1 \quad \epsilon^{\frac{1}{2}} B = B \quad \epsilon \sigma_2 = \sigma_2$$

$$\epsilon v_0 = v_0 \quad \epsilon^{\frac{1}{2}} C = C \quad \epsilon m_2 = m_2 \quad \epsilon \sigma_1 = \sigma_1 \quad (۸۷-۲)$$

برای دستیابی به مقیاس زمانی صحیح t در معادلات باز نویسی شده و با جذب مجدد ϵ از معادلات بر طبق روابط (۸۷-۲) معادلات زیر در نهایت به دست می‌آید.

$$(2i\omega m_1 + \sigma_1) \dot{B} - 2m_1 i\omega \varphi(d_1) \dot{A} = (m_1 \omega^2 - i\sigma_1 \omega - m_1 \omega^2 w_3(d_1) i) B \quad (۸۸-۲)$$

$$-(3k_1 + m_1 \omega^2 w_5(d_1)) B^2 \overline{B} - m_1 \omega^2 A \varphi(d_1)$$

$$-\sigma_1 v \dot{\varphi}(d_1) A - m_1 \omega^2 w_4(d_1) i C - m_1 \omega^2 w_6(d_1) C^2 \overline{C} - m_1 \omega^2 w_1(d_1) e^{i\sigma t_1}$$

$$-m_1 \omega^2 w_2(d_1) i A$$

$$(2i\omega m_2 + \sigma_2) \dot{C} - 2m_2 i\omega \varphi(d_2) \dot{A} = (m_2 \omega^2 - i\sigma_2 \omega - m_2 \omega^2 w_4(d_2) i) C \quad (۸۹-۲)$$

$$\begin{aligned}
& -(3k_2 + m_2\omega^2 w_6(d_2))C^2\bar{C} - m_2\omega^2 A\varphi(d_2) - \sigma_2 v\dot{\varphi}(d_2)A \\
& -m_2\omega^2 w_3(d_2)iB - m_2\omega^2 w_5(d_2)B^2\bar{B} \\
& -m_2\omega^2 w_2(d_2)iA - m_2\omega^2 w_1(d_2)e^{i\sigma t_1}
\end{aligned}$$

معادلات (۸۸-۲) و (۸۹-۲) بیانگر رفتار دینامیکی دامنه‌ی B و C است که هر سه متغیر A، B و C در آن قادر به بررسی رفتار دینامیکی در نواحی جدا از نواحی بررسی شده در معادلات (۷۴-۲) و (۷۵-۲) می‌باشند.

به همین ترتیب برای دستیابی به مقیاس زمانی صحیح در شرط حل‌پذیری، با به‌کارگیری روابط

(۸۷-۲)، رابطه‌ی (۸۱-۲) با جذب مجدد ϵ به صورت (۹۰-۲) باز نویسی می‌شود:

$$\dot{A} = c_1 A + ic_2 B^2 \bar{B} + c_3 B + ic_4 C^2 \bar{C} + c_5 C - ic_6 p_r e^{i\sigma t_1} \quad (۹۰-۲)$$

که در آن ضرایب c_1 تا c_6 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{-\alpha\omega^4}{2} & c_3 &= \frac{\sigma_1\varphi(d_1)}{-2} & c_5 &= \frac{\sigma_2\varphi(d_2)}{-2} \\
c_2 &= \frac{3k_1\varphi(d_1)}{2\omega} & c_4 &= \frac{3k_2\varphi(d_2)}{2\omega} & c_6 &= \frac{-1}{4\omega}
\end{aligned} \quad (۹۱-۲)$$

معادلات (۸۸-۲)، (۸۹-۲) و (۹۰-۲) معادلات مدولاسیون دامنه‌ی مختلط (AME) بر طبق دینامیک آرام تیر و چاه‌های غیرخطی انرژی هستند با نوشتن شکل قطبی متغیرها به صورت (۹۲-۲) و (۹۳-۲) و (۹۴-۲) که در آن‌ها $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ و $y(t)$ فاز متغیر با زمان و a و b و c دامنه‌ی متغیر با زمان هستند با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی آن‌ها و در نظر گرفتن اختلاف فازها به صورت

$$\alpha - \beta = y_2 - y_1 \quad \text{و} \quad y - \alpha = y_1 - y_3 \quad \text{و} \quad y - \beta = y_2 - y_3$$

در نهایت معادلات (AME) به صورت

زیر به دست می‌آید. برای حل پایداری سیستم پارامترهای $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3$ باید در معادلات (۹۵-۲)

صفر در نظر گرفته شوند تا نقاط پایدار سیستم به دست آید.

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\alpha(t)} \quad (92-2)$$

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\beta(t)} \quad (93-2)$$

$$C = \frac{1}{2} c e^{iy(t)} \quad (94-2)$$

$$\dot{a} = F_1(a, b, c, y_1, y_2, y_3) \quad (95-2)$$

$$a\dot{y}_1 = F_2(a, b, c, y_1, y_2, y_3)$$

$$2m_1\omega b\dot{y}_1 + \sigma_1\dot{b} + 2m_1\omega\varphi(d_1)\sin(\alpha - \beta)\dot{a} - 2m_1\omega\varphi(d_1)\cos(\alpha - \beta) \\ = F_3(a, b, c, y_1, y_2, y_3)$$

$$2m_1\omega\dot{b} - \sigma_1 b\dot{y}_2 - 2m_1\omega\varphi(d_1)\dot{a}\cos(\alpha - \beta) - 2m_1\omega\varphi(d_1)\sin(\alpha - \beta) \\ = F_4(a, b, c, y_1, y_2, y_3)$$

$$2m_2\omega b c\dot{y}_3 + \sigma_2\dot{c} + 2m_2\omega\varphi(d_2)\sin(\alpha - y)\dot{a} - 2m_2\omega\varphi(d_2)\cos(\alpha - \beta) \\ = F_5(a, b, c, y_1, y_2, y_3)$$

$$2m_1\omega\dot{c} - \sigma_2 c\dot{y}_3 - 2m_2\omega\varphi(d_2)\dot{a}\cos(\alpha - y) - 2m_2\omega\varphi(d_2)\sin(\alpha - y) \\ = F_6(a, b, c, y_1, y_2, y_3)$$

$$F_1 = c_1 a - \frac{c_2 b^3 \sin(y_1 - y_2)}{4} + c_3 \frac{b}{2} + \frac{c_4 c^3 \sin(y_1 - y_3)}{4} \quad (96-2)$$

$$+ c c_5 \cos(y_1 - y_3) + 2c_6 p r \sin(y_1)$$

$$F_2 = \frac{c_2 b^3 \cos(y_1 - y_2)}{4} + \frac{c_4 c^3 \cos(y_1 - y_3)}{4} + c c_5 \sin(y_1 - y_3)$$

$$- 2c_6 p r \cos(y_1) - a\sigma$$

$$F_3 = 2m_1\omega b\sigma - 2m_1\omega\varphi(d_1)\cos(y_2 - y_1)a\sigma + m_1\omega^2 b + m_1\omega^2 b w_{3i}(d_1)$$

$$- \frac{3k_1 b^3}{4} - \frac{m_1\omega^2 b^3 w_{5r}(d_1)}{4} - m_1\omega^2\varphi(d_1)a\cos(y_2 - y_1)$$

$$- 2m_1\omega^2 \cos(y_2) w_{1r}(d_1) - \sigma_1 v\dot{\varphi}(d_1)a\cos(y_2 - y_1)$$

$$2m_1\omega^2 w_{1r}(d_1)\sin(y_2) + m_1\omega^2 w_{4r}(d_1)c\sin(y_2 - y_3)$$

$$+ m_1\omega^2 c w_{4i}(d_1)\cos(y_2 - y_3) - \frac{m_1\omega^2 c^3 w_{6i}(d_1)\cos(y_1 - y_3)}{4}$$

$$\cos(y_2 - y_1) + m_1\omega^2 a w_{2i}(d_1)$$

$$\begin{aligned}
F_4 = & -\sigma_1 b \sigma - 2m_1 \omega \varphi(d_1) \sin(y_2 - y_1) a \sigma - \sigma_1 \omega b - m_1 \omega^2 b w_{3r}(d_1) \\
& - \frac{m_1 \omega^2 b^3 w_{5i}(d_1)}{4} \\
& - m_1 \omega^2 \varphi(d_1) a \sin(y_2 - y_1) - 2m_1 \omega^2 w_{1r}(d_1) \sin(y_2) \\
& - 2m_1 \omega^2 w_{1i}(d_1) \cos(y_2) \\
& - \sigma_1 v \dot{\varphi}(d_1) a \sin(y_2 - y_1) - m_1 \omega^2 c w_{4r}(d_1) \cos(y_2 - y_3) \\
& + m_1 \omega^2 c \sin(y_2 - y_3) w_{4i}(d_1) \\
& - \frac{m_1 \omega^2 \sin(y_1 - y_3) c^3 w_{6r}(d_1)}{4} - \frac{m_1 \omega^2 c^3 \cos(y_1 - y_3) w_{6i}(d_1)}{4} \\
& - m_1 \omega^2 a w_{2r}(d_1) \cos(y_2 - y_1) + m_1 \omega^2 a \sin(y_2 - y_1) w_{2i}(d_1) \\
F_5 = & 2m_2 \omega c \sigma - 2m_2 \omega \varphi(d_2) \cos(y_3 - y_1) a \sigma + m_2 \omega^2 c + m_2 \omega^2 c w_{4i}(d_2) \\
& - \frac{m_2 \omega^2 c^3 w_{6r}(d_2)}{4} - m_1 \omega^2 \varphi(d_1) a \cos(y_2 - y_1) - 2m_2 \omega^2 \cos(y_3) w_{1r}(d_1) \\
& + 2m_2 \omega^2 w_{1r}(d_2) \sin(y_3) - \sigma_2 v_0 \dot{\varphi}(d_2) a \cos(y_3 - y_1) + m_2 \omega^2 w_{3r}(d_2) b \sin(y_3 \\
& - y_2) - \frac{3k_2 c^3}{4} \\
& + m_2 \omega^2 b w_{3i}(d_2) \cos(y_3 - y_2) - \frac{m_2 \omega^2 b^3 w_{5i}(d_2) \cos(y_3 - y_2)}{4} \\
& + \frac{m_2 \omega^2 w_{5i}(d_2) b^3 \sin(y_3 - y_2)}{4} + m_2 \omega^2 a w_{2r}(d_2) \sin(y_3 - y_1) \\
& + m_2 \omega^2 a w_{2i}(d_2) \cos(y_3 - y_1) \\
F_6 = & -\sigma_2 c \sigma - 2m_2 \omega \varphi(d_2) \sin(y_3 - y_1) a \sigma - \sigma_2 \omega c - m_2 \omega^2 c w_{4r}(d_2) \\
& - \frac{m_2 \omega^2 c^3 w_{6i}(d_2)}{4} - m_2 \omega^2 \varphi(d_2) a \sin(y_3 - y_1) - 2m_2 \omega^2 w_{1r}(d_2) \sin(y_3) \\
& - 2m_2 \omega^2 w_{1i}(d_2) \cos(y_3) \\
& - \sigma_2 v_0 \dot{\varphi}(d_2) a \sin(y_3 - y_1) - m_2 \omega^2 b w_{3r}(d_2) \cos(y_3 - y_2) \\
& + m_2 \omega^2 b \sin(y_3 - y_2) w_{3i}(d_1) \\
& - \frac{m_2 \omega^2 \sin(y_3 - y_2) b^3 w_{5r}(d_2)}{4} - \frac{m_2 \omega^2 b^3 \cos(y_3 - y_2) w_{5i}(d_2)}{4} \\
& - m_2 \omega^2 a w_{2r}(d_2) \cos(y_3 - y_1) + m_2 \omega^2 a \sin(y_3 - y_1) w_{2i}(d_2)
\end{aligned}$$

۳-۲ بررسی رفتار ارتعاشی تیر متحرک محوری متصل به دو چاه غیرخطی مجزا

تحت بار خارجی در حالت رزونانس ۱:۱ و ۱:۳

برای بررسی رفتار ارتعاشی تیر متحرک محوری در دو حالت رزونانس اولیه و سوپر هارمونیک با در نظر گرفتن دو چاه غیر خطی مجزا در این بخش، مشابه حالت قبل عمل کرده با این تفاوت که رزونانس سوپرهارمونیک نیز در محاسبات لحاظ می‌شود. در این قسمت معادلات تیر متحرک محوری با سرعت ثابت با استفاده از مرجع [۳۴] استخراج می‌شود:

$$\begin{aligned} & \rho A \left(\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x \partial t} + V^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \right) - P \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 U(x,t)}{\partial x^4} \quad (97-2) \\ & + \eta I \frac{\partial^5 U(x,t)}{\partial x^4 \partial t} - \frac{A}{L} \int_0^L \left[\frac{E}{2} \left(\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \right)^2 + \eta \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x \partial t} \right] dx \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \\ & = f_1(t) \delta(x - d_1) + f_2(t) \delta(x - d_2) \end{aligned}$$

و معادلات دو چاه خطی همانند رابطه‌ی (۳۷-۲) و (۳۸-۲) می‌باشد.

۱-۳-۲ بی‌بعدسازی

برای بی‌بعد سازی مسأله، پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} & u &= \frac{U}{L} & t^* &= \frac{t}{L} \sqrt{\frac{P}{\rho A}} \\ \sigma_1 &= \frac{D_1 L}{\sqrt{\rho A P}} & \varepsilon_1 &= \frac{m_{NES1}}{\rho A L} & k_1 &= \frac{K_1 L^4}{P} \\ \sigma_2 &= \frac{D_2 L}{\sqrt{\rho A P}} & \varepsilon_2 &= \frac{m_{NES2}}{\rho A L} & k_2 &= \frac{K_2 L^4}{P} \\ \alpha &= \frac{I \eta}{L^3 \sqrt{\rho A P}} & v &= V \sqrt{\frac{\rho A}{P}} & v f^2 &= \frac{EI}{P L^2} \end{aligned}$$

$$k_{11} = \sqrt{\frac{EA}{P}} \quad k_{22} = \frac{A\eta}{L\sqrt{\rho AP}} \quad (98-2)$$

که α ضریب ویسکوالاستیک و vf^2 مقاومت خمشی تیر است. σ_1 و σ_2 به ترتیب میرایی چاه غیرخطی اول و دوم و ε_1 و ε_2 جرم چاه‌های غیرخطی اول و دوم است. k_{11} و k_{22} ضرایب ترم‌های غیرخطی تیر متحرک محوری می‌باشند.

با جایگذاری (98-2) در معادلات (97-2)، همچنین معادلات (37-2) و (38-2) معادلات بی‌بعد شده‌ی حرکت به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 u(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + 2v \frac{\partial^2 u(x^*, t^*)}{\partial x^* \partial t^*} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 u(x^*, t^*)}{\partial x^{*2}} + vf^2 \frac{\partial^4 u(x^*, t^*)}{\partial x^{*4}} \quad (99-2)$$

$$+ \alpha \frac{\partial^5 u(x^*, t^*)}{\partial x^{*4} \partial t^*} + [k_1 [u(d_1, t^*) - u_1(t^*)]^3 + \sigma_1 \left(\frac{\partial u(d_1, t^*)}{\partial t^*} + v \frac{\partial u(d_1, t^*)}{\partial x^*} - \frac{\partial u_1(t^*)}{\partial t^*} \right)] \delta(x^* - d_1)$$

$$+ [k_2 [u(d_2, t^*) - u_2(t^*)]^3 + \sigma_2 \left(\frac{\partial u(d_2, t^*)}{\partial t^*} - v \frac{\partial u(d_2, t^*)}{\partial x^*} - \frac{\partial u_2(t^*)}{\partial t^*} \right)] \delta(x^* - d_2) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \int_0^1 [k_{11} \left(\frac{\partial u(x^*, t^*)}{\partial x} \right)^2 + \alpha$$

$$k_{22} \frac{\partial u(x^*, t^*)}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x^*, t^*)}{\partial x \partial t}] dx = 0$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial^2 u_1(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + [k_1 [u_1(t^*) - u(d_1, t^*)]^3 \quad (100-2)$$

$$+ \sigma_1 \left(\frac{\partial u_1(t^*)}{\partial t^*} - \frac{\partial u(d_1, t^*)}{\partial t^*} - v \frac{\partial u(d_1, t^*)}{\partial x^*} \right) = 0$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial^2 u_2(x^*, t^*)}{\partial t^{*2}} + [k_2 [u_2(t^*) - u(d_2, t^*)]^3 \quad (101-2)$$

$$+ \sigma_2 \left(\frac{\partial u_2(t^*)}{\partial t^*} - \frac{\partial u(d_2, t^*)}{\partial t^*} - v \frac{\partial u(d_2, t^*)}{\partial x^*} \right) = 0$$

در ادامه بالانویس ‘*’ به منظور ساده‌سازی حذف شده است.

۲-۳-۲ مدل سازی

در این قسمت مشابه حالت قبل تیر متحرک که دارای سرعت محوری ثابت v بوده و دو سر آن به زمین متصل است. تیر تحت نیروی تحریک هارمونیک $f(x, t)$ قرار گرفته و دو چاه غیرخطی انرژی موازی و مجزا از هم به آن متصل است. جابه‌جایی عرضی تیر با $u(x, t)$ و مکان قرار گیری دو چاه غیرخطی انرژی با d_1 و d_2 و جابه‌جایی چاه غیرخطی اول و دوم به ترتیب با $z(t)$ و $y(t)$ نشان داده شده است. معادلات بی بعد شده‌ی حرکت تیر (۲-۹۹) و دو چاه غیرخطی انرژی (۲-۱۰۰) و (۲-۱۰۱) با در نظر گرفتن نیروی خارجی $f(x, t) = p(x)\cos(\Omega t)$ و تغییر متغیر (۲-۱۰۲) و (۲-۱۰۳) به صورت (۲-۱۰۴)

(۲-۱۰۵) و (۲-۱۰۶) بازنویسی می‌شوند:

$$u(d_1, t) - u_1(t) = z(t) \quad (۲-۱۰۲)$$

$$u(d_2, t) - u_2(t) = y(t) \quad (۲-۱۰۳)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + (v^2 - 1) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + vf^2 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \quad (۲-۱۰۴)$$

$$+ \alpha \frac{\partial^5 u(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + k_1 [z(t)]^3 + \sigma_1 \left[\dot{z}(t) + v \frac{du(d_1, t)}{dx} \right] \delta(x - d_1)$$

$$+ k_2 [y(t)]^3 + \sigma_2 \left[\dot{y}(t) + v \frac{du(d_2, t)}{dx} \right] \delta(x - d_2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \int_0^1 \left[k_{11}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \alpha k_{22} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \right] dx = f(x, t)$$

$$m_1 (\ddot{z}(t) - \ddot{u}(d_1, t)) + k_1 (z(t))^3 + \sigma_1 \left(\dot{z}(t) + v \frac{du(d_1, t)}{dx} \right) = 0 \quad (۲-۱۰۵)$$

$$m_2 (\ddot{y}(t) - \ddot{u}(d_2, t)) + k_2 (y(t))^3 + \sigma_2 \left(\dot{y}(t) + v \frac{du(d_2, t)}{dx} \right) = 0 \quad (۲-۱۰۶)$$

وتیر متحرک محوری از هر دو طرف توسط پین به زمین متصل بوده بنابراین شرایط مرزی مسأله به-

صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (107-2)$$

$$u''(0, t) = u''(1, t) = 0$$

با استفاده از پارامتر بی‌بعد ϵ متغیرهای وابسته‌ی مسأله به صورت زیر بازنویسی می‌شود که $0 < \epsilon \ll 1$ در نظر گرفته شده است و بر مبنای این که جمله‌های میرایی و غیرخطی و تحریک خارجی در یک مرتبه از ϵ باید ظاهر شوند برای پارامترهای جرم و میرایی دوچاه غیر خطی انرژی و تحریک خارجی توان‌های ϵ به صورت زیر در نظر گرفته شده است [17, 18]:

$$(u, z, y) = \epsilon^{\frac{1}{2}}(\tilde{u}, \tilde{z}, \tilde{y}) \quad (108-2)$$

$$(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2) = \epsilon^{\frac{1}{2}}(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) \quad (109-2)$$

$$v = \epsilon \tilde{v}$$

$$\alpha = \epsilon \tilde{\alpha}$$

$$\sigma = \epsilon \tilde{\sigma}$$

$$k_{22} = \epsilon \tilde{k}_{22}$$

$$f(x, t) = p(x) \cos(\Omega t) \quad (110-2)$$

$$p = \epsilon^{\frac{3}{2}}$$

رزونانس تحریک خارجی به صورت ۱:۱ و ۱:۳ در نظر گرفته شده است و پارامتر تنظیم σ برای تحریک خارجی به صورت زیر لحاظ شده است:

$$\Omega = \omega_r + \epsilon \tilde{\sigma} \quad (111-2)$$

در ادامه بازنویسی $\tilde{\cdot}$ به منظور ساده‌سازی حذف شده است

بعد از بازنویسی معادلات (2-104) و (2-105) و (2-106) و حذف $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ از طرفین، معادلات ذکر شده

به شکل زیر ظاهر می‌شوند:

$$\ddot{u} + 2\epsilon v \dot{u} + \epsilon^2 v^2 u'' - u'' + v f^2 u^{(4)} + \epsilon \alpha \dot{u}^{(4)} - \epsilon u'' \int_0^1 k_{11}^2 \dot{u}^2 dx \quad (112-2)$$

$$-\epsilon^3 k_{22} \alpha u'' \int_0^1 \dot{u} \dot{u} dx + (\epsilon k_1 z^3 + \epsilon \sigma_1 [\dot{z} + v \dot{u}(d_1, t)]) \delta(x - d_1)$$

$$+ (\epsilon k_2 y^3 + \epsilon \sigma_2 [\dot{y} + v \dot{u}(d_2, t)]) \delta(x - d_2) = p(x) \cos(\Omega t)$$

$$\epsilon m_1 (\ddot{z}(t) - \ddot{u}(d_1, t) + \epsilon k_1 (z(t))^3 + \epsilon \sigma_1 \left(\dot{z}(t) + v \frac{du(d_1, t)}{dx} \right)) = 0 \quad (113-2)$$

$$\epsilon m_2 (\ddot{y}(t) - \ddot{u}(d_2, t) + \epsilon k_2 (y(t))^3 + \epsilon \sigma_2 \left(\dot{y}(t) + v \frac{du(d_1, t)}{dx} \right)) = 0 \quad (114-2)$$

بر اساس روش مقیاس‌های چندتایی، پارامترهای مستقل زمانی و مشتقات آنها به صورت رابطه‌ی

(115-2) و (116-2) تعریف می‌شوند که t_0 مقیاس زمانی سریع، t_1 مقیاس زمانی آرام و t_2 مقیاس

$$d_j = \frac{\partial}{\partial t_j} \quad j=0,1,\dots \quad \text{زمانی بسیار آرام می‌باشد که در آن}$$

$$t = t_0 \quad (115-2)$$

$$t_1 = \epsilon t_0$$

$$t_2 = \epsilon^2 t_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = d_0 + \epsilon d_1 + \epsilon^2 d_2 + \dots \quad (116-2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = d_0^2 + 2\epsilon d_0 d_1 + \epsilon^2 (d_1^2 + 2d_0 d_2) + \dots$$

و بسط پارامترهای وابسته‌ی مسأله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} u \\ z \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ z_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} + \epsilon \begin{Bmatrix} u_1 \\ z_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + \epsilon^2 \begin{Bmatrix} u_2 \\ z_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \dots \quad (117-2)$$

با جایگذاری (115-2)، (116-2)، (117-2) در (112-2)، (113-2) و (114-2) و طبقه‌بندی

معادلات بر اساس مرتبه‌های مختلف ϵ معادلات پرتوریشن به صورت زیر به دست می‌آید:

مرتبه‌ی صفر ϵ

$$\epsilon^0: \quad (118-2)$$

$$d_0^2 u_0 + v f^2 \frac{du_0^4}{dx^4} - \frac{du_0^2}{dx^2} = 0$$

مرتبه‌ی اول ϵ

$$\epsilon^1 \quad (119-2)$$

$$d_0^2 u_1 + v f^2 \frac{du_1^4}{dx^4} - \frac{du_1^2}{dx^2} = -2d_0 d_1 u_0 - 2v d_0 \frac{du_0}{dx} - \alpha d_0 \frac{du_0^4}{dx^4} -$$

$$(k_1 z_0^3 + \sigma_1 d_0 z_0) \delta(x - d_1) - (k_2 y_0^3 + \sigma_2 d_0 y_0) \delta(x - d_2)$$

$$+ \frac{1}{2} u_0'' \int_0^1 k_{11}^2 u_0^2 dx + \frac{p(x)}{2} e^{i\sigma t_1}$$

$$m_1(d_0^2 z_0 - d_0^2 u_0(d_1, t) + k_1 z_0^3 + \sigma_1 d_0 z_0 = 0 \quad (120-2)$$

$$m_2(d_0^2 y_0 - d_0^2 u_0(d_2, t) + k_1 y_0^3 + \sigma_2 d_0 y_0 = 0 \quad (121-2)$$

مرتبه‌ی دوم ϵ

$$\epsilon^2: \quad (122-2)$$

$$d_0^2 u_2 + v f^2 \frac{du_2^4}{dx^4} - \frac{du_2^2}{dx^2} = -2v d_0 \frac{du_1}{dx} - 2v d_1 \frac{du_0}{dx} - 2d_0 d_1 u_1 - v_0^2 \frac{du_0^2}{dx^2} -$$

$$(2d_0 d_1 + d_1^2) u_0 - \alpha d_0 \frac{du_1^4}{dx^4} - \alpha d_1 \frac{du_0^4}{dx^4} - [3k_1 z_0^2 z_1 + \sigma_1 (v \frac{du_0(d_1, t)}{dx}$$

$$+ d_0 z_1 + d_1 z_0) \delta(x - d_1) - [3k_2 y_0^2 y_1$$

$$- 2v_0 d_0 \frac{du_0}{dx} + \sigma_2 (v \frac{du_0(d_2, t)}{dx} + d_0 y_1 + d_1 y_0)] \delta(x - d_2)$$

$$m_1(d_0^2 z_1 - d_0^2 u_1(d_1, t) + \sigma_1 d_0 z_1 + 3k_1 z_0^2 z_1 \quad (123-2)$$

$$= -2m_1(d_0 d_1 z_0 - d_0 d_1 u_0(d_1, t)) - \sigma_1 d_1 z_0 - \sigma_1 (v \frac{du_0(d_1, t)}{dx})$$

$$m_2(d_0^2 y_1 - d_0^2 u_1(d_2, t) + \sigma_2 d_0 y_1 + 3k_2 y_0^2 y_1 \quad (124-2)$$

$$= -2m_2(d_0 d_1 y_0 - d_0 d_1 u_0(d_2, t)) - \sigma_2 d_1 y_0 - \sigma_2 (v \frac{du_0(d_2, t)}{dx})$$

و شرایط مرزی مورد نظر برای هر مرتبه از ϵ ، به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

مرتبه‌ی صفر ϵ

$$\epsilon^0: \quad (125-2)$$

$$u_0(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_0(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_0''(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_0''(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

مرتبه‌ی اول ϵ

$$\epsilon^1$$

(۱۲۶-۲)

$$u_1(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_1(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_1''(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_1''(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

مرتبه‌ی دوم ϵ

$$\epsilon^2:$$

(۱۲۷-۲)

$$u_2(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_2(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_2''(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$u_2''(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

حل کلی معادله‌ی (۱۱۸-۲) و (۱۲۵-۲) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_0(x, t_0, t_1, \dots) = A_r(t_1, \dots) \varphi_r(x) e^{i\omega_r t_0} + A_s(t_1, \dots) \varphi_s(x) e^{i\omega_s t_0} + cc \quad (۱۲۸-۲)$$

که در آن $A_j(t_1, \dots)$ دامنه‌ی حرکت مختلط وابسته به مقیاس زمانی آرام است و cc مزدوج مختلط

عبارت مورد نظر است و $\varphi_j(x)$ شکل مود مسأله بوده که برای یک تیر دو سر مفصل به صورت

$$\varphi_j(x) = \sqrt{2} \sin(\omega_j x) \quad \text{در نظر گرفته شده است. که در آن } j = 3r \text{ و } j = r \text{ در نظر گرفته شده است.}$$

معادلات مرتبط با دو چاه غیرخطی انرژی در مرتبه‌ی اول ϵ ظاهر می‌شود که برای حل آن از روش

هارمونیک بالانس استفاده می‌شود

$$z_0(t_0, t_1, \dots) = \sum_{k_1=1}^{+\infty} B_{0k_1}(t_1, \dots) e^{ik_1 \omega_r t_0} + cc \quad (۱۲۹-۲)$$

$$y_0(t_0, t_1, \dots) = \sum_{k_2=1}^{+\infty} c_{0k_2}(t_1, \dots) e^{ik_2 \omega_r t_0} + cc \quad (۱۳۰-۲)$$

که $B_{0k_1} = (t_1, \dots)$ و $C_{0k_2} = (t_1, \dots)$ دامنه‌ی حرکت مختلط وابسته به زمان می‌باشند. که
 $B_{0k_1}(t_1, \dots) = B_0$ و $C_{0k_2}(t_1, \dots) = C_0$ می‌باشد.

بعد از جایگذاری (۱۲۸-۲) و (۱۲۹-۲) در (۱۲۰-۲) و (۱۲۸-۲) و (۱۲۹-۲) در (۱۲۱-۲) معادلات

جبری زیر برای دو چاه غیرخطی انرژی به دست می‌آید:

$$m_1 \omega_r^2 (B_0 - \omega_r \varphi_r(d_1)) + \sigma_1 i \omega_r B_0 + 3k_1 B_0^2 \overline{B_0} = 0 \quad (131-2)$$

$$m_2 \omega_r^2 (C_0 - A_r \varphi_r(d_2)) + \sigma_2 i \omega_r C_0 + 3k_2 C_0^2 \overline{C_0} = 0 \quad (132-2)$$

که این روابط بیانگر ارتباط جبری بین دامنه‌ی نوسانات سیستم اصلی A_r و دامنه‌ی نوسانات دوچاه

غیرخطی انرژی B_0 و C_0 است که شکل قطبی این روابط به شکل زیر نوشته می‌شود که با کمک آن می‌-

توان a را بر اساس b و c رسم کرد.

$$m_1^2 \omega_r^4 \varphi_r(d_1)^2 a_r^2 = (m_1 \omega_r^2 b - \frac{3}{4} k_1 b^3)^2 + \sigma_1^2 b^2 \omega_r^2 \quad (133-2)$$

$$m_2^2 \omega_r^4 \varphi_r(d_2)^2 a_r^2 = (m_2 \omega_r^2 c - \frac{3}{4} k_2 c^3)^2 + \sigma_2^2 c^2 \omega_r^2 \quad (134-2)$$

برای بررسی دینامیک خارج از محدوده‌ی (۱۳۳-۲) و (۱۳۴-۲) معادله‌ی (۱۱۹-۲) و (۱۲۶-۲) باید

مورد بررسی قرار گرفته شوند. حل معادله‌ی (۱۱۹-۲) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_1(x, t_1, t_2) = \Psi_r(x, t_1, t_2) e^{i\omega_r t_0} + \Psi_s(x, t_1, t_2) e^{i\omega_s t_0} + cc \quad (135-2)$$

که برای حل آن تابع مختلط $\Psi_r(x, t_1, t_2)$ و $\Psi_s(x, t_1, t_2)$ باید محاسبه شود با جایگذاری (۱۳۵-۲) در

(۱۱۹-۲) و (۱۲۶-۲) و جدا کردن جمله‌هایی با توان $e^{i\omega_r t_0}$ و $e^{i\omega_s t_0}$ معادله دیفرانسیل معمولی با شرایط

مرزی مورد نظر به شکل زیر به دست می‌آید:

$$v f^2 \Psi_j^{(4)} - \Psi_j^{(2)} - \omega_j^2 \Psi_j = F_j(x, t_1, t_2) \quad (136-2)$$

$$\Psi(0, t_0, t_1, \dots) = 0 \quad (137-2)$$

$$\Psi(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$\dot{\Psi}_j(0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$\dot{\Psi}_j(1, t_0, t_1, \dots) = 0$$

که در آن تابع $F_j(x, t_1, t_2)$ به صورت رابطه‌ی (۱۳۸-۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$F_j(x, t_1, t_2) = -2i\omega_j\varphi_j(x)d_1A_j - 2vi\omega_j\varphi'_j(x)A_j - \alpha i\omega_j\varphi_j(x)^{(4)}A_j \quad (138-2)$$

$$-[(3k_1B_0^2\overline{B_0}\sigma_1i\omega_jB_0)\Delta_{j,r} + k_1B_0^3\Delta_{j,s}]\delta(x - d_1)$$

$$-[(\sigma_2i\omega_jC_0 + 3k_2C_0^2\overline{C_0})\Delta_{j,r} + k_2C_0^3\Delta_{j,s}]\delta(x - d_2)$$

$$+k_{11}^2[A_r\varphi_r''(x) \sum_{h=r,s} A_h \overline{A}_h \int_0^1 \varphi_h'^2 dx] + (\frac{A_r^2\overline{A}_r}{2} \varphi_r''(x)$$

$$+ \frac{\overline{A}_r^2A_s}{2} \varphi_s''(x)) \int_0^1 \varphi_r'^2 dx] \Delta_{j,r} + k_{11}^2 [(\frac{A_r^3\varphi_r''(x)}{2}$$

$$+ A_s A_r \overline{A}_r \varphi_s''(x)) \int_0^1 \varphi_r'^2 dx + (\frac{A_s^2\overline{A}_s\varphi_s''(x)}{2}$$

$$+ A_s^2\overline{A}_s\varphi_s''(x)) \int_0^1 \varphi_s'^2 dx] \Delta_{j,s} + \frac{p(x)}{2} e^{i\sigma t_1} \Delta_{j,r}$$

$$\Delta_{j,h} = \begin{cases} 1 & j = h \\ 0 & j \neq h \end{cases}$$

$$j = r, s$$

$$\int_0^1 F_j(x, t_1, t_2) \varphi_j(x) dx = 0 \quad (139-2)$$

برای حل معادله‌ی (۱۱۹-۲) ابتدا شرط حل‌پذیری مسأله باید برقرار باشد، با اعمال شرط حل‌پذیری،

جایگذاری (۱۳۸-۲) در (۱۳۹-۲) رابطه‌ی (۱۴۰-۲) به دست می‌آید:

$$d_1A_r = \frac{-\alpha A_r \omega_r^4}{2} - \frac{(3k_1B_0^2\overline{B_0} + \sigma_1i\omega_rB_0)}{-2i\omega_r} \varphi_r(d_1) \quad (140-2)$$

$$+ \frac{\sigma_2i\omega_rC_0 + 3k_2C_0^2\overline{C_0}}{-2i\omega_r} \varphi_r(d_2) - \frac{3k_{11}^2A_r^2\overline{A}_r\omega_r^4}{4i\omega_r} - \frac{k_{11}^2A_sA_r\overline{A}_r\omega_r^2\omega_s^2}{2i\omega_r}$$

$$+ \frac{p_r}{2} e^{i\sigma t_1}$$

$$d_1A_s = \frac{-\alpha A_s \omega_s^4}{2} - \frac{k_1B_0^3\varphi_s(d_1)}{2i\omega_s} - \frac{k_2C_0^3\varphi_s(d_2)}{2i\omega_s} - \frac{k_{11}^2A_sA_r\overline{A}_r\omega_r^2\omega_s}{2i}$$

$$-\frac{3k_{11}^2 A_s^2 \bar{A}_s \omega_s^3}{4i}$$

که در آن $p_r = \int_0^1 p(x) \varphi_r(x) dx$ با جایگذاری (۲-۱۴۰) در (۲-۱۳۸) و جایگذاری (۲-۱۳۸) در

(۲-۱۳۶) و حل این معادله، پاسخ آن به صورت زیر به دست می آید:

$$\Psi_r(x, t_1, t_2) = Q_1(x)e^{i\sigma t_1} + Q_2(x)iA_r + Q_3(x)iB_0 + Q_4(x)iC_0 + Q_5(x)B_0^2 \bar{B}_0 \quad (2-141)$$

$$+ Q_6(x)C_0^2 \bar{C}_0 + Q_7(x)A_s \bar{A}_r^2$$

$$\Psi_s(x, t_1, t_2) = G_1(x)B_0^3 + G_2(x)C_0^3 + G_3(x)A_s A_r \bar{A}_r^2 + G_4(x)A_s^2 \bar{A}_s \quad (2-142)$$

$$+ G_5(x)A_r + G_6(x)A_r^3 + G_7(x)A_s A_r \bar{A}_r + G_8(x)A_r^2 \bar{A}_r + G_9(x)A_r A_s \bar{A}_s$$

ضرایب $Q_1(x)$ تا $Q_7(x)$ ، $G_1(x)$ تا $G_9(x)$ در پیوست آمده است. که $Q_{ni}(x)$ بیانگر قسمت موهومی و

$Q_{nr}(x)$ بیانگر قسمت حقیقی است. که $n = 1, \dots, 7$.

همچنین برای حل معادله‌ی (۲-۱۲۰) و (۲-۱۲۱) با استفاده از روش هارمونیک بالانس، پاسخ این

معادلات به صورت (۲-۱۴۳) و (۲-۱۴۴) در نظر گرفته می شود.

$$z_1(t_0, t_1, \dots) = \sum_{k_1=1}^{+\infty} B_{1k_1}(t_1, \dots) e^{ik_1 \omega_r t_0} + cc \quad (2-143)$$

$$y_1(t_0, t_1, \dots) = \sum_{k_2=1}^{+\infty} c_{1k_2}(t_1, \dots) e^{ik_2 \omega_r t_0} + cc \quad (2-144)$$

که در روابط بالا، $B_{1k_1} = B_1$ و $C_{1k_2} = C_1$ در نظر گرفته شده است.

با جایگذاری روابط (۲-۱۲۸)، (۲-۱۲۹)، (۲-۱۳۵) در (۲-۱۲۳) و روابط (۲-۱۲۸)، (۲-۱۳۰)، (۲-۱۳۵)

در (۲-۱۲۴) و معادلات (۲-۱۴۵) و (۲-۱۴۶) به دست می آید.

$$-m_1 \omega_r^2 B_1 + \sigma_1 i \omega_r B_1 + 3k_1 B_0^2 \bar{B}_1 + 6k_1 B_0 \bar{B}_0 B_1 + (2i\omega_r + \sigma_1) d_1 B_0 \quad (2-145)$$

$$-2m_1 i \omega_r \varphi_r(d_1) d_1 A_r + \sigma_1 v \varphi_r(d_1) A_r + m_1 \omega_r^2 (Q_1(d_1) e^{i\sigma t_1} +$$

$$Q_2(d_1) i A_r + Q_3(d_1) i B_0 + Q_4(d_1) i C_0 + Q_5(d_1) B_0^2 \bar{B}_0 +$$

$$Q_6(d_1) C_0^2 \bar{C}_0 + Q_7(d_1) A_s \bar{A}_r^2) = 0$$

$$\begin{aligned}
& -m_2\omega_r^2 C_1 + \sigma_2 i\omega_r C_1 + 3k_1 C_0^2 \overline{C_1} + 6k_2 C_0 \overline{C_0} C_1 + (2i\omega_r + \sigma_2) d_1 C_0 \quad (146-2) \\
& -2m_2 i\omega_r \varphi_r(d_2) d_1 A_r + \sigma_2 v \dot{\varphi}_r(d_2) A_r + m_2 \omega_r^2 (Q_1(d_2) e^{i\sigma t_1} \\
& + Q_2(d_2) i A_r + Q_3(d_2) i B_0 + Q_4(d_2) i C_0 + Q_5(d_2) B_0^2 \overline{B_0} \\
& + Q_6(d_2) C_0^2 \overline{C_0} + Q_7(d_2) A_s \overline{A_r}^2) = 0
\end{aligned}$$

برای دستیابی به معادلات مدولاسیون دامنه، باید معادله‌ی (۲-۱۳۱) با (۲-۱۴۵) و معادله‌ی (۲-۱۳۲) با (۲-۱۴۶) با هم ترکیب شوند. لذا برای رسیدن به این هدف، باید معادله‌ی (۲-۱۳۱) و (۲-۱۳۲) را در $\epsilon^{\frac{1}{2}}$ و معادله‌ی (۲-۱۴۵) و (۲-۱۴۶) را در $\epsilon^{\frac{3}{2}}$ ضرب شوند و در نهایت با تعریف $B = B_0 + \epsilon B_1$ و $C = C_0 + \epsilon C_1$ [۱۷، ۱۸].

$$\begin{aligned}
\epsilon d_1 = \frac{d}{dt} \quad \epsilon^{\frac{1}{2}} A = A \quad \epsilon m_1 = m_1 \quad \epsilon^{\frac{1}{2}} B = B \quad \epsilon \sigma_2 = \sigma_2 \\
\epsilon v_0 = v_0 \quad \epsilon^{\frac{1}{2}} C = C \quad \epsilon m_2 = m_2 \quad \epsilon \sigma_1 = \sigma_1 \quad (147-2)
\end{aligned}$$

برای دستیابی به مقیاس زمانی صحیح t در معادلات باز نویسی شده و با جذب مجدد ϵ از معادلات بر طبق روابط (۲-۱۴۷) معادلات زیر در نهایت به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
& (2i\omega_r m_1 + \sigma_1) \dot{B} - 2m_1 i\omega_r \varphi_r(d_1) \dot{A} \quad (148-2) \\
& = (m_1 \omega_r^2 - i\sigma_1 \omega - m_1 \omega_r^2 Q_3(d_1) i) B \\
& - (3k_1 + m_1 \omega_r^2 Q_5(d_1)) B^2 \overline{B} - m_1 \omega_r^2 A \varphi_r(d_1) \\
& - \sigma_1 v \dot{\varphi}_r(d_1) A - m_1 \omega_r^2 Q_4(d_1) i C - m_1 \omega_r^2 Q_6(d_1) C^2 \overline{C} \\
& - m_1 \omega_r^2 Q_1(d_1) e^{i\sigma t_1} \\
& - m_1 \omega_r^2 Q_2(d_1) i A - m_1 \omega_r^2 Q_7(d_1) \overline{A_r}^2 A_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2i\omega_r m_2 + \sigma_2)\dot{C} - 2m_2 i\omega_r \varphi(d_2)\dot{A} & (149-2) \\
& = (m_2\omega_r^2 - i\sigma_2\omega_r - m_2\omega_r^2 Q_4(d_2)i)C \\
& - (3k_2 + m_2\omega_r^2 Q_6(d_2))C^2\bar{C} - m_2\omega_r^2 A\varphi_r(d_2) - \sigma_2 v\varphi_r(d_2)A \\
& - m_2\omega_r^2 Q_3(d_2)iB - m_2\omega_r^2 Q_5(d_2)B^2\bar{B} \\
& - m_2\omega_r^2 Q_2(d_2)iA - m_2\omega_r^2 Q_1(d_2)e^{i\sigma t_1} - m_2\omega_r^2 Q_7(d_2)\bar{A}_r^2 A_s
\end{aligned}$$

معادلات (۱۴۸-۲) و (۱۴۹-۲) بیانگر رفتار دینامیکی دامنه‌ی B و C است که هر سه متغیر A, B و C

در آن قادر به بررسی رفتار دینامیکی در نواحی جدا از نواحی بررسی شده در معادلات (۱۳۳-۲) و (۱۳۴-۲) می‌باشند.

به همین ترتیب برای دستیابی به مقیاس زمانی صحیح در شرط حل‌پذیری، با به‌کارگیری روابط

(۱۴۷-۲)، رابطه‌ی (۱۴۰-۲) با جذب مجدد ϵ به صورت (۱۵۰-۲) باز نویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_r &= \frac{-\alpha A_r \omega_r^4}{2} - \frac{(3k_1 B^2 \bar{B} + \sigma_1 i \omega_r B)}{-2i\omega_r} \varphi_r(d_1) & (150-2) \\
&+ \frac{\sigma_2 i \omega_r C + 3k_2 C^2 \bar{C}}{-2i\omega_r} \varphi_r(d_2) - \frac{3k_{11}^2 A_r^2 \bar{A}_r \omega_r^4}{4i\omega_r} - \frac{k_{11}^2 A_s A_r \bar{A}_r \omega_r^2 \omega_s^2}{2i\omega_r} \\
&+ \frac{p_r}{2} e^{i\sigma t_1} \\
\dot{A}_s &= \frac{-\alpha A_s \omega_s^4}{2} - \frac{k_1 B^3 \varphi_s(d_1)}{2i\omega_s} - \frac{k_2 C^3 \varphi_s(d_2)}{2i\omega_s} - \frac{k_{11}^2 A_s A_r \bar{A}_s \omega_r^2 \omega_s}{2i} \\
&- \frac{3k_{11}^2 A_s^2 \bar{A}_s \omega_s^3}{4i}
\end{aligned}$$

معادلات (۱۴۸-۲)، (۱۴۹-۲) و (۱۵۰-۲) معادلات مدولاسیون دامنه‌ی مختلط (AME) بر طبق

دینامیک آرام تیر و چاه‌های غیرخطی انرژی هستند با نوشتن شکل قطبی متغیرها به صورت (۱۵۰-۲) و

(۱۵۲-۲) و (۱۵۳-۲) که در آن‌ها $\alpha_r(t)$ و $\alpha_s(t)$ و $\beta(t)$ و $y(t)$ فاز متغیر با زمان و a_r و a_s و b و c

دامنه‌ی متغیر با زمان هستند و با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی آن‌ها و در نظر گرفتن اختلاف

فازها به صورت $\sigma t - \alpha_r(t) = y_1$ ، $\sigma t - y(t) = v_2$ و $\sigma t - \beta(t) = v_1$

$$x_1(t) = \alpha_s(t) + 3y_1(t) - 3\sigma \quad \text{و}$$

در نهایت معادلات (AME) به صورت زیر به دست می‌آید. برای حل پایداری سیستم پارامترهای

$a_r, a_s, b, c, y_1, y_3, v_1, v_2, x_1$ باید در معادلات (۲-۱۵۵) صفر در نظر گرفته شوند تا نقاط پایدار سیستم

به دست آید.

$$A_r = \frac{1}{2} a_r e^{i\alpha_r(t)} \quad (۲-۱۵۱)$$

$$A_s = \frac{1}{2} a_s e^{i\alpha_s(t)} \quad (۲-۱۵۲)$$

$$B = \frac{1}{2} b e^{i\beta(t)} \quad (۲-۱۵۳)$$

$$C = \frac{1}{2} c e^{iy(t)} \quad (۲-۱۵۴)$$

$$a_r = F_1(a_r, a_s, b, c, v_1, v_2, y_1, x_1) \quad (۲-۱۵۵)$$

$$a_r \dot{y}_1 = F_2(a_r, a_s, b, c, v_1, v_2, y_1, x_1)$$

$$a_s = F_3(a_r, a_s, b, c, v_1, v_2, y_1, x_1)$$

$$a_s (\dot{x}_1 - 3\dot{y}_1) = F_4(a_r, a_s, b, c, v_1, v_2, y_1, x_1)$$

$$2m_1 \omega_r b \dot{v}_1 + \sigma_1 \dot{b} + 2m_1 \omega_r \varphi_r(d_1) \sin(v_1 - y_1) \dot{a}_r -$$

$$2m_1 \omega_r \varphi_r(d_1) a_r \dot{y}_1 \cos(v_1 - y_1) = F_5(a_r, a_s, b, c, v_1, v_2, y_1, x_1)$$

$$2m_1 \omega_r \dot{b} - \sigma_1 b \dot{y}_1 - 2m_1 \omega_r \varphi_r(d_1) \dot{a}_r \cos(v_1 - y_1) -$$

$$2m_1 \omega_r \varphi_r(d_1) a_r \dot{y}_1 \sin(v_1 - y_1) = F_6(a_r, a_s, b, c, v_1, v_2, y_1, x_1)$$

$$2m_2 \omega_r c \dot{v}_2 + \sigma_2 \dot{c} + 2m_2 \omega_r \varphi_r(d_2) \sin(v_2 - y_1) \dot{a}_r -$$

$$2m_2 \omega_r \varphi_r(d_2) a_r \dot{y}_1 \cos(v_2 - y_1) = F_7(a_r, a_s, b, c, v_1, v_2, y_1, x_1)$$

$$-2m_1 \omega_r \dot{c} - \sigma_2 c \dot{v}_2 - 2m_2 \omega_r \varphi_r(d_2) \dot{a}_r \cos(v_2 - y_1) -$$

$$2m_2 \omega_r \varphi_r(d_2) a_r \dot{y}_1 \sin(v_2 - y_1) = F_8(a_r, a_s, b, c, v_1, v_2, y_1, x_1)$$

$$F_1 = \frac{-\alpha A_r \omega_r^4}{2} - \frac{(3k_1 b^3 \varphi_r(d_1) \sin(-v_1 + y_1))}{8\omega_r} \quad (156-2)$$

$$- \frac{\sigma_1 b \varphi_r(d_1) \cos(-v_1 + y_1)}{2} - \frac{(3k_2 c^3 \varphi_r(d_2) \sin(-v_2 + y_1))}{8\omega_r}$$

$$- \frac{\sigma_2 c \varphi_r(d_2) \cos(-v_2 + y_1)}{2} + \frac{p_r}{2\omega_r} \sin(y_1)$$

$$F_2 = - \frac{(3k_1 b^3 \varphi_r(d_1) \cos(-v_1 + y_1))}{8\omega_r} + \frac{\sigma_1 b \varphi_r(d_1) \sin(-v_1 + y_1)}{2}$$

$$- \frac{(3k_2 c^3 \varphi_r(d_2) \cos(-v_2 + y_1))}{8\omega_r} - \frac{\sigma_2 c \varphi_r(d_2) \sin(-v_2 + y_1)}{2} + \frac{p_r}{2\omega_r} \cos(y_1)$$

$$- \frac{3k_{11}^2 a_r^3 \omega_r^3}{16} - \frac{k_{11}^2 a_s^2 a_r \omega_r \omega_s^2}{8} + a_r \sigma$$

$$F_3 = \frac{-\alpha a_s \omega_s^4}{2} - \frac{k_1 b^3 \varphi_s(d_1)}{8\omega_s} \sin(3y_1 - 3v_1 - x_1) - \frac{3k_{11}^2 A_s^2 \bar{A}_s \omega_s^3}{4i}$$

$$- \frac{k_2 c^3 \varphi_s(d_2)}{8\omega_s} \sin(3y_1 - 3v_2 - x_1) - \frac{k_{11}^2 A_s A_r \bar{A}_s \omega_r^2 \omega_s}{2i}$$

$$F_4 = \frac{k_1 b^3 \varphi_s(d_1)}{8\omega_s} \cos(3y_1 - 3v_1 - x_1) + \frac{k_2 c^3 \varphi_s(d_2)}{8\omega_s} \cos(3y_1 - 3v_2 - x_1)$$

$$+ \frac{k_{11}^2 a_s a_r^2 \omega_r^2 \omega_s}{8} + \frac{3k_{11}^2 a_s^3 \omega_s^3}{16} - 3a_s \sigma$$

$$F_5 = 2m_1 \omega_r b \sigma - 2m_1 \omega_r \varphi_r(d_1) \cos(v_2 - y_1) a_r \sigma + m_1 \omega_r^2 b$$

$$+ m_1 \omega_r^2 b Q_{3i}(d_1) - \frac{3k_1 b^3}{4} - \frac{m_1 \omega_r^2 b^3 Q_{5r}(d_1)}{4}$$

$$- m_1 \omega_r^2 \varphi_r(d_1) a_r \cos(v_1 - y_1) - 2m_1 \omega_r^2 \cos(v_1) Q_{1r}(d_1)$$

$$- 2m_1 \omega_r^2 Q_{1i}(d_1) \sin(v_1) - \sigma_1 v \varphi_r(d_1) a_r \cos(v_1 - y_1)$$

$$+ m_1 \omega_r^2 Q_{4r}(d_1) c \sin(v_1 - v_2) + m_1 \omega_r^2 c Q_{4i}(d_1) \cos(v_1 - v_2)$$

$$- \frac{m_1 \omega_r^2 c^3 Q_{6r}(d_1) \cos(y_1 - v_2)}{4} + \frac{m_1 \omega_r^2 Q_{6i}(d_1) c^3 \sin(y_1 - v_2)}{4}$$

$$+ m_1 \omega_r^2 a_r Q_{2r}(d_1) \sin(v_1 - y_1)$$

$$+ m_1 \omega_r^2 a_r Q_{2i}(d_1) \cos(v_1 - y_1) - \frac{m_1 \omega_r^2 a_s a_r^2 Q_{7r}(d_1) \cos(v_1 - y_1 + x_1)}{4}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_1 \omega_r^2 a_s a_r^2 Q_{7i}(d_1) \sin(v_1 - y_1 + x_1)}{4} \\
F_6 = & -\sigma_1 b \sigma - 2m_1 a_r \sigma - \sigma_1 \omega_r b - m_1 \omega_r^2 b Q_{3r}(d_1) \\
& - \frac{m_1 \omega_r^2 b^3 Q_{5i}(d_1)}{4} \omega_r \varphi_r(d_1) \sin(v_1 - y_1) \\
& - m_1 \omega_r^2 \varphi(d_1) a_r \sin(v_1 - y_1) - 2m_1 \omega_r^2 Q_{1r}(d_1) \sin(v_1) \\
& - 2m_1 \omega_r^2 Q_{1i}(d_1) \cos(v_1) \\
& - \sigma_1 v \dot{\varphi}(d_1) a_r \sin(v_1 - y_1) - m_1 \omega_r^2 c Q_{4r}(d_1) \cos(v_1 - v_2) \\
& + m_1 \omega_r^2 c \sin(v_1 - v_2) Q_{4i}(d_1) \\
& - \frac{m_1 \omega_r^2 \sin(y_1 - v_2) c^3 Q_{6r}(d_1)}{4} - \frac{m_1 \omega_r^2 c^3 \cos(y_1 - v_2) Q_{6i}(d_1)}{4} \\
& - m_1 \omega_r^2 a_r Q_{2r}(d_1) \cos(v_1 - y_1) + m_1 \omega_r^2 a_r \sin(v_1 - y_1) Q_{2i}(d_1) \\
& - \frac{m_1 \omega_r^2 a_s a_r^2 Q_{7r}(d_1) \sin(v_1 - y_1 + x_1)}{4} \\
& - \frac{m_1 \omega_r^2 a_s a_r^2 Q_{7i}(d_1) \cos(v_1 - y_1 + x_1)}{4} \\
F_7 = & 2m_2 \omega_r c \sigma - 2m_2 \omega_r \varphi_r(d_2) \cos(v_2 - y_1) a_r \sigma + m_2 \omega_r^2 c + m_2 \omega^2 c Q_{4i}(d_2) \\
& - \frac{3k_2 c^3}{4} - \frac{m_2 \omega_r^2 c^3 Q_{6r}(d_2)}{4} - m_1 \omega_r^2 \varphi_r(d_2) a_r \cos(v_2 - y_1) \\
& - 2m_2 \omega_r^2 \cos(v_2) Q_{1r}(d_2) + 2m_2 \omega_r^2 Q_{1r}(d_2) \sin(v_2) \\
& - \sigma_2 v \dot{\varphi}_r(d_2) a_r \cos(v_2 - y_1) + m_2 \omega_r^2 Q_{3r}(d_2) b \sin(v_2 - v_1) \\
& + m_2 \omega_r^2 b Q_{3i}(d_2) \cos(v_2 - v_1) - \frac{m_2 \omega_r^2 b^3 Q_{5i}(d_2) \cos(v_2 - v_1)}{4} \\
& + \frac{m_2 \omega_r^2 Q_{5i}(d_2) b^3 \sin(v_2 - v_1)}{4} + m_2 \omega_r^2 a_r Q_{2r}(d_2) \sin(v_2 - y_1) \\
& + m_2 \omega_r^2 a_r Q_{2i}(d_2) \cos(v_2 - y_1) - \frac{m_2 \omega_r^2 a_s a_r^2 Q_{7r}(d_1) \cos(v_2 - y_1 + x_1)}{4} \\
& + \frac{m_2 \omega_r^2 a_s a_r^2 Q_{7i}(d_1) \sin(v_1 - y_1 + x_1)}{4} \\
F_8 = & -\sigma_2 c \sigma - 2m_2 \omega_r \varphi_r(d_2) \sin(v_2 - y_1) a_r \sigma - \sigma_2 \omega_r c - m_2 \omega_r^2 c Q_{4r}(d_2) \\
& - \frac{m_2 \omega_r^2 c^3 Q_{6i}(d_2)}{4} - m_2 \omega_r^2 \varphi_r(d_2) a_r \sin(v_2 - y_1) - 2m_2 \omega_r^2 Q_{1r}(d_2) \sin(v_2) \\
& - 2m_2 \omega_r^2 Q_{1i}(d_2) \cos(v_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sigma_2 v \phi_r(d_2) a_r \sin(v_2 - y_1) - m_2 \omega_r^2 b Q_{3r}(d_2) \cos(v_2 - v_1) \\
& + m_2 \omega_r^2 b \sin(v_2 - v_1) Q_{3i}(d_1) \\
& - \frac{m_2 \omega_r^2 \sin(v_2 - v_1) b^3 Q_{5r}(d_2)}{4} - \frac{m_2 \omega_r^2 b^3 \cos(v_2 - v_1) Q_{5i}(d_2)}{4} \\
& - m_2 \omega_r^2 a_r Q_{2r}(d_2) \cos(v_2 - y_1) + m_2 \omega_r^2 a_r \sin(v_2 - y_1) Q_{2i}(d_2) \\
& - \frac{m_2 \omega_r^2 a_s a_r^2 Q_{7r}(d_1) \sin(v_1 - y_1 + x_1)}{4} \\
& - \frac{m_2 \omega_r^2 a_s a_r^2 Q_{7i}(d_1) \cos(v_1 - y_1 + x_1)}{4}
\end{aligned}$$

فصل سوم

حل عددی

۱-۳ مقدمه

در این فصل تأثیر تغییر پارامترهای مختلف سیستم در جذب ارتعاشات تیر، مانند پارامتر جرم دو چاه غیرخطی انرژی، فاصله دو چاه غیرخطی انرژی از یکدیگر در جذب و ارتعاشات تیر، مورد بررسی قرار گرفته است.

۲-۳ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی

۱-۲-۳ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف دو چاه غیرخطی انرژی بر پاسخ فرکانسی در حالت

رزونانس ۱:۱

برای به دست آوردن تغییرات دامنه‌ی تیر متحرک محوری و چاه‌های غیرخطی انرژی بر اساس تغییرات پارامتر تنظیم در رزونانس ۱:۱ پارامترهای تیر و دو چاه غیرخطی انرژی به صورت (۱-۳) انتخاب شده و با حل عددی معادلات (۲-۹۶) با استفاده از نرم افزار متلب و میپل نتایج زیر حاصل می‌شود.

۱-۱-۲-۳ تأثیر مکان قرار گیری دو چاه غیرخطی در فواصل مختلف از تکیه‌گاه‌ها بر پاسخ

فرکانسی

در این مرحله پارامترهای تیر و دو چاه غیرخطی انرژی از جدول (۱-۳) انتخاب شده فنریت دو چاه غیرخطی مشابه و میرایی و جرم متفاوت در نظر گرفته شده است. دو چاه غیر خطی انرژی هر کدام به فاصله ۰.۳ از تکیه‌گاه‌ها انتخاب شده است

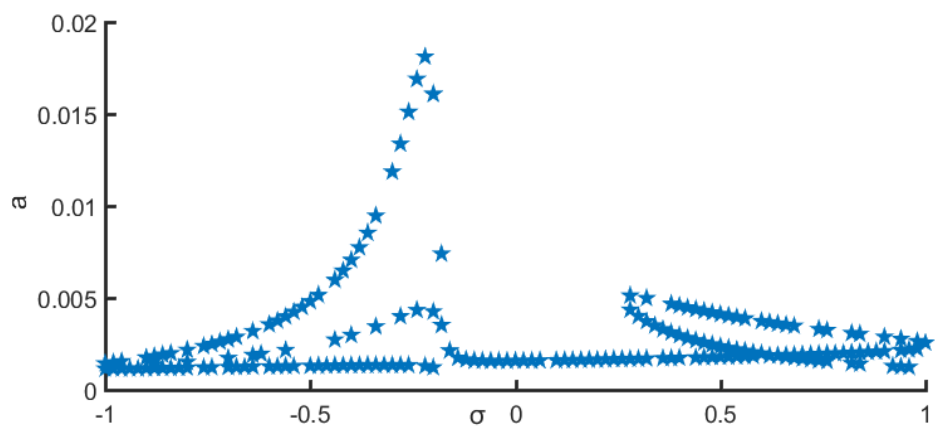
جدول ۱-۳ مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی انرژی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱

$\sigma_1 = 0.04$	$\sigma_2 = 0.01$	$k_1 = 2000$	
$k_2 = 2000$	$\varepsilon_1 = 0.01$	$\varepsilon_2 = 0.04$	
$\alpha = 0.001$	$vf = 0.8$	$v = 0.5$	
$k_{11} = 0.3$	$d_1 = 0.3$	$d_2 = 0.6$	(۱-۳)

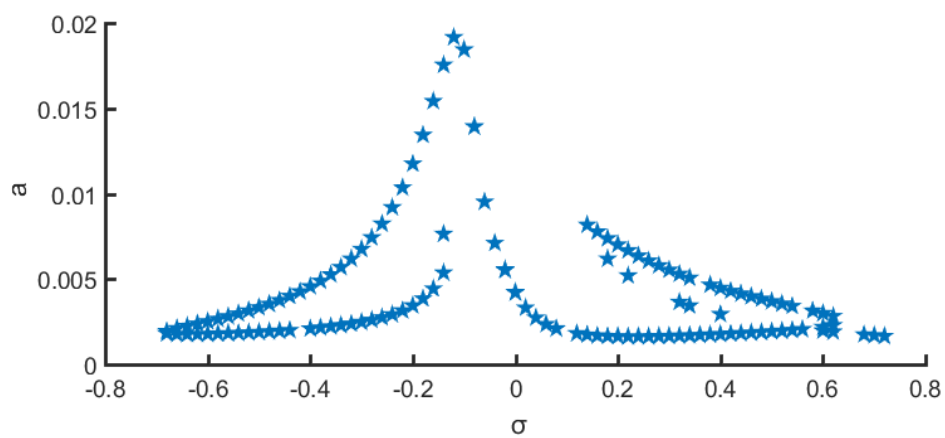
و در قسمت بعد پارامترهای تیر و دو چاه غیر خطی انرژی از جدول (۲-۳) انتخاب شده فنریت دو چاه غیرخطی مشابه و میرایی و جرم متفاوت در نظر گرفته شده است. دو چاه غیر خطی انرژی هر کدام به فاصله ۰.۲ از تکیه‌گاه‌ها انتخاب شده است

جدول ۲-۳ مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی انرژی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱

$\sigma_1 = 0.04$	$\sigma_2 = 0.01$	$k_1 = 2000$	
$k_2 = 2000$	$\varepsilon_1 = 0.01$	$\varepsilon_2 = 0.04$	
$\alpha = 0.001$	$vf = 0.8$	$v = 0.5$	
$k_{11} = 0.3$	$d_1 = 0.2$	$d_2 = 0.8$	(۲-۳)



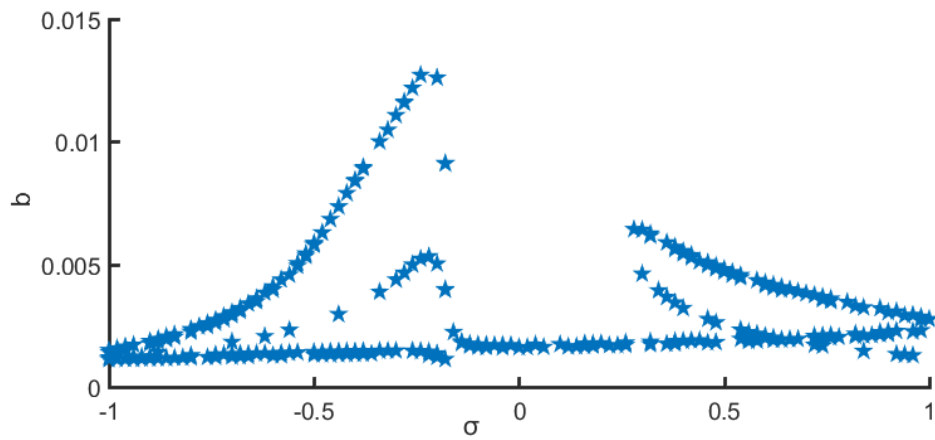
(a)



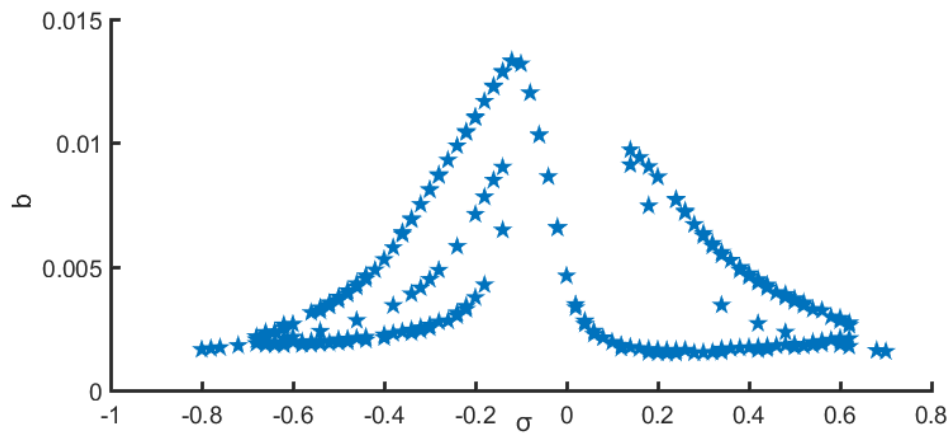
(b)

شکل ۱-۳ تغییرات دامنه‌ی تیر به ازای رزونانس ۱:۱ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به

فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲



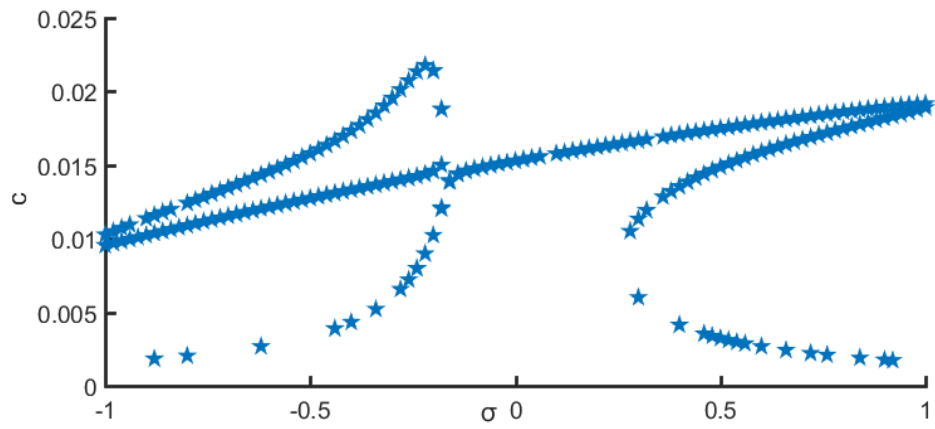
(a)



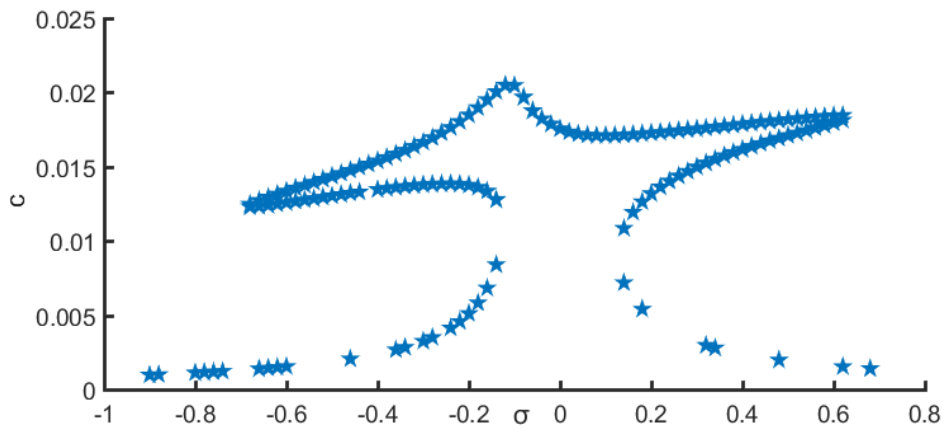
(b)

شکل ۳-۲ تغییرات دامنه‌ی چاه غیرخطی انرژی اول به ازای رزونانس ۱:۱ (a) مکان قرار گیری دو چاه

غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲



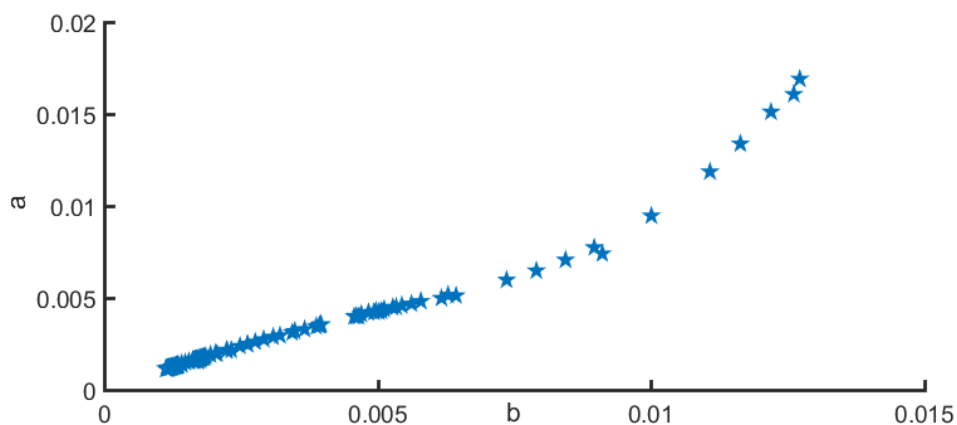
(a)



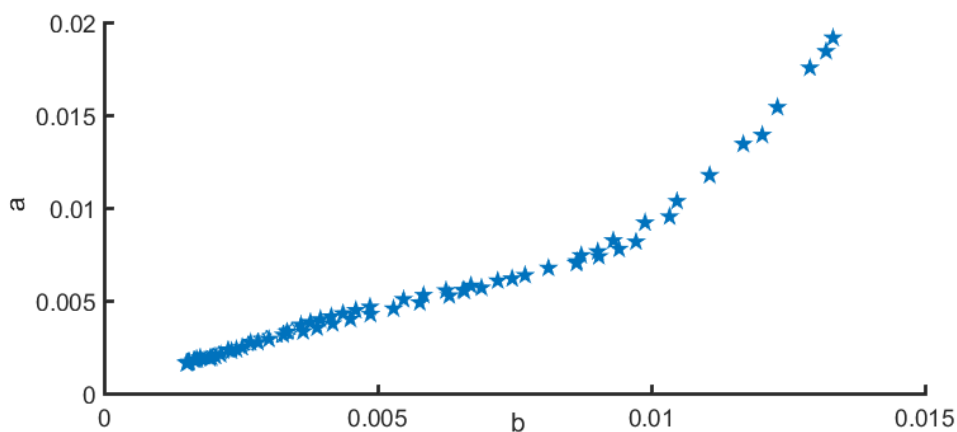
(b)

شکل ۳-۳ تغییرات دامنه‌ی چاه غیرخطی انرژی دوم به ازای رزونانس ۱:۱ (a) مکان قرار گیری دو چاه

غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲



(a)



(b)

شکل ۳-۴ تغییرات دامنه‌ی تیر بر حسب دامنه‌ی چاه غیرخطی انرژی دوم به ازای رزونانس ۱:۱ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲

هنگامی که فاصله‌ی دو چاه غیر خطی از تکیه‌گاه‌ها کمتر شود دامنه‌ی ارتعاشات تیر متحرک محوری افزایش پیدا می‌کند و نمودار به سمت راست حرکت می‌کند در حالت اول نمودار $\sigma = -1$ تا $\sigma = -0.18$ و از $\sigma = 0.28$ تا $\sigma = 0.96$ دارای است ناحیه‌ی سه مقداری است و در حالت دوم از $\sigma = -0.68$ تا $\sigma = -0.14$ و از $\sigma = 0.14$ تا $\sigma = 0.62$ دارای ناحیه سه مقداری است و همچنین

دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیرخطی اول نیز با نزدیک شدن به تکیه‌گاه‌ها افزایش پیدا کرده و به سمت راست حرکت می‌کند. در حالت اول از $\sigma = -1$ تا $\sigma = -0.16$ و از $\sigma = 0.28$ تا $\sigma = 0.96$ دارای ناحیه‌ی سه مقداری است. برای نمودار پاسخ فرکانسی چاه غیرخطی دوم در حالت اول قسمتی از نمودار دارای پاسخ گسسته بوده که در سمت چپ نمودار قرار می‌گیرد ولی هنگامی که چاه‌های غیر خطی انرژی به تکیه‌گاه‌ها نزدیک تر شوند این قسمت گسسته تشکیل نخواهد شد و دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیرخطی دوم نیز اندکی کاهش می‌یابد. در حالت اول از $\sigma = -1$ تا $\sigma = -0.18$ و از $\sigma = 0.28$ تا $\sigma = 1$ نمودار دارای ناحیه‌ی سه مقداری می‌باشد و در حالت دوم از $\sigma = -0.68$ تا $\sigma = -0.14$ و از $\sigma = 0.12$ تا $\sigma = 0.62$ دارای ناحیه‌ی سه مقداری می‌باشد.

۳-۲-۲ تأثیر تغییر جرم دو چاه غیرخطی انرژی بر پاسخ فرکانسی

در این مرحله پارامترهای تیر همانند قبل و میرایی و فنریت دو چاه غیرخطی انرژی همانند یکدیگر انتخاب شده و مکان دو چاه غیر خطی انرژی هر کدام به فاصله‌ی ۰.۳ از تکیه‌گاه‌ها و جرم دو چاه غیر-خطی متفاوت از یکدیگر در نظر گرفته شده است .

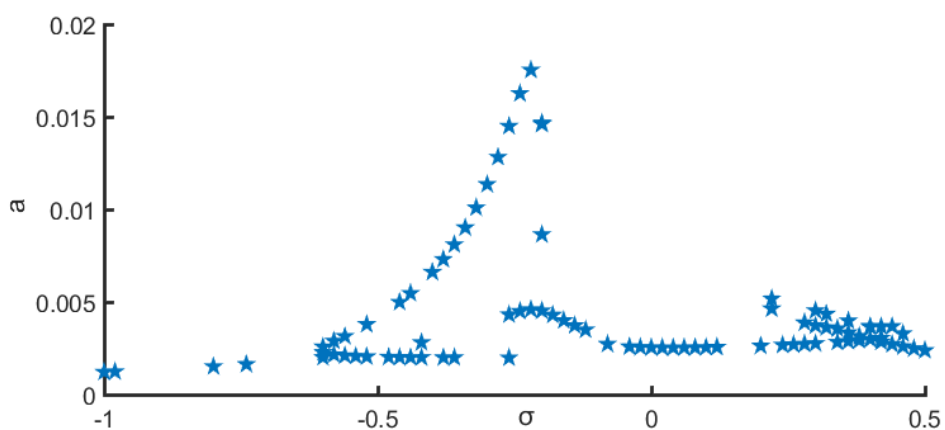
جدول ۳-۳ مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:

$\sigma_1 = 0.02$	$\sigma_2 = 0.02$	$k_1 = 2000$	
$k_2 = 2000$	$\varepsilon_1 = 0.01$	$\varepsilon_2 = 0.04$	
$\alpha = 0.001$	$\nu f = 0.8$	$\nu = 0.5$	
$k_{11} = 0.3$	$d_1 = 0.3$	$d_2 = 0.6$	(۳-۳)

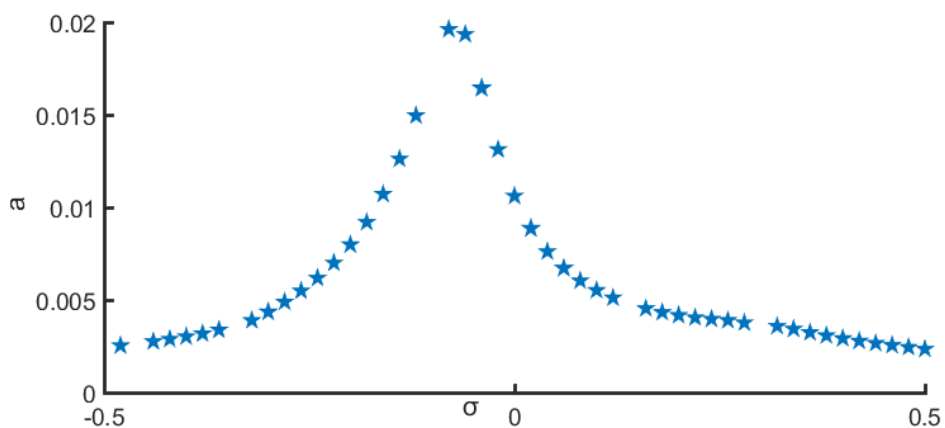
در این مرحله پارامترهای تیر همانند قبل و میرایی و فنریت دو چاه غیرخطی انرژی همانند یکدیگر انتخاب شده و جرم دو چاه غیرخطی همانند یکدیگر در نظر گرفته شده است .

جدول ۳-۴ مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱

$\sigma_1 = 0.02$	$\sigma_2 = 0.02$	$k_1 = 2000$	
$k_2 = 2000$	$\varepsilon_1 = 0.01$	$\varepsilon_2 = 0.01$	
$\alpha = 0.001$	$\nu f = 0.8$	$\nu = 0.5$	
$k_{11} = 0.3$	$d_1 = 0.3$	$d_2 = 0.6$	(۴-۳)



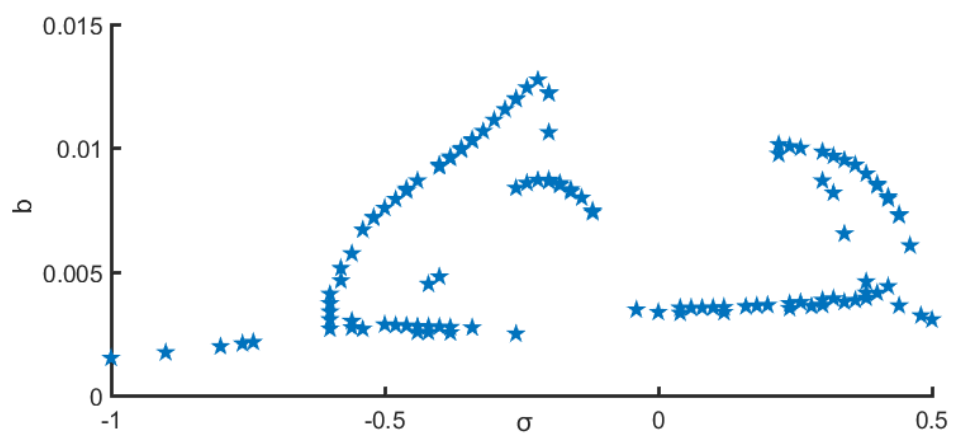
(a)



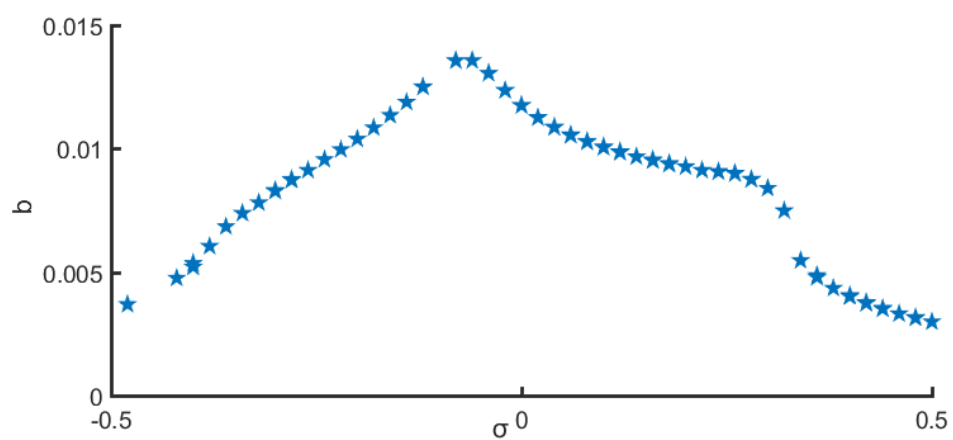
(b)

شکل ۳-۵ تغییرات دامنه‌ی تیر به ازای رزونانس ۱:۱ (a) برای دو جرم متفاوت (b) برای دو جرم

یکسان



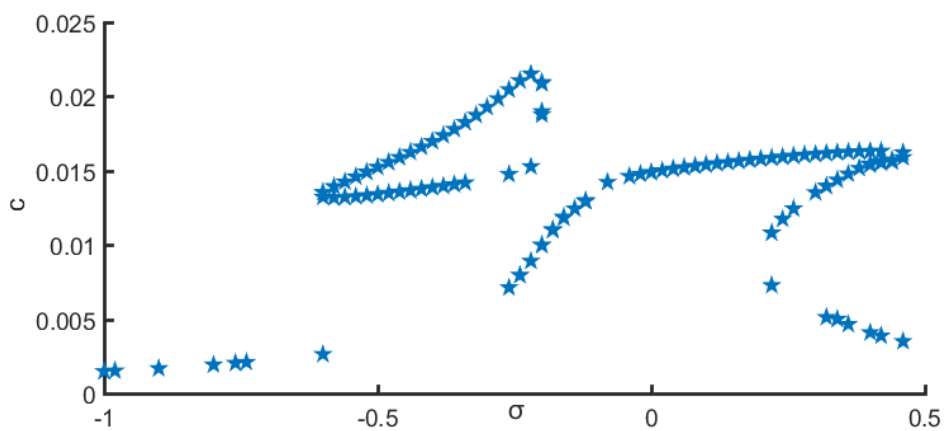
(a)



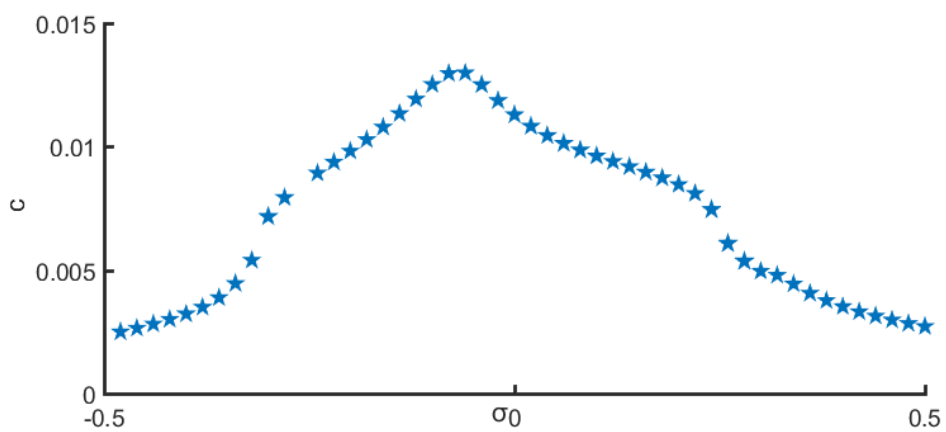
(b)

شکل ۳-۶ تغییرات دامنه‌ی چاه غیر خطی انرژی اول به ازای رزونانس ۱:۱ (a) برای دو جرم متفاوت

(b) برای دو جرم یکسان



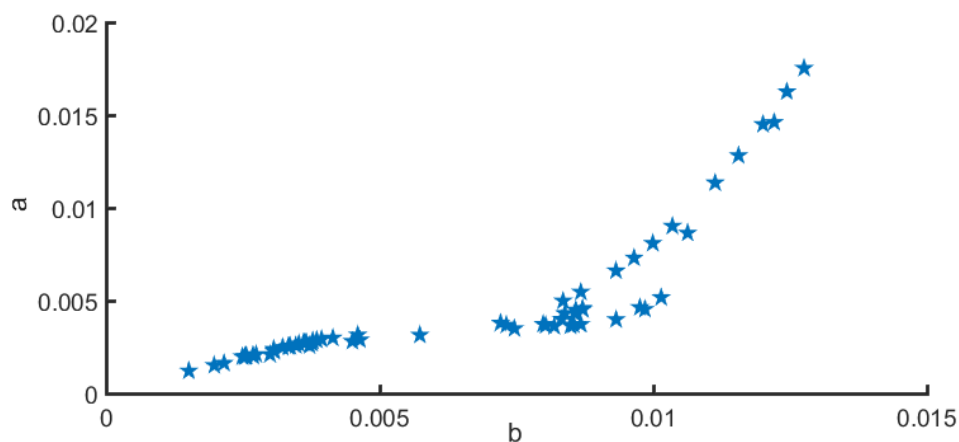
(a)



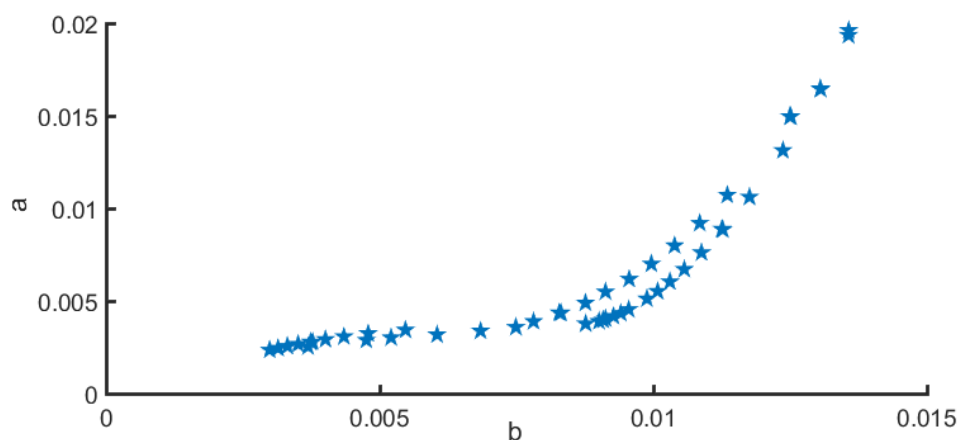
(b)

شکل ۳-۷ تغییرات دامنه‌ی چاه غیر خطی انرژی دوم به ازای رزونانس ۱:۱ (a) برای دو جرم متفاوت

(b) برای دو جرم یکسان



(a)



(b)

شکل ۳-۸ تغییرات دامنه‌ی تیر بر حسب چاه غیر خطی انرژی اول به ازای رزونانس ۱:۱ (a) برای دو

جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان

هرچه جرم دو چاه غیرخطی کاهش یابد دامنه‌ی ارتعاشات تیر متحرک محوری افزایش می‌یابد.

در حالت اول نمودار از $\sigma = -0.6$ تا $\sigma = -0.24$ و از $\sigma = -0.22$ تا $\sigma = 0.44$ دارای نواحی سه

مقداری است ولی در حالت دوم هیچ ناحیه‌ی سه مقداری و دو مقداری وجود ندارد.

دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیر خطی اول با کاهش جرم افزایش یافته و دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیرخطی

دوم کاهش یافته و در حالت اول نمودار از $\sigma = -0.6$ تا $\sigma = -0.2$ و از $\sigma = 0.22$ تا $\sigma = 0.4$ دارای

ناحیه‌ی سه مقداری می‌باشد. همچنین نمودار تغییرات دامنه‌ی تیر بر حسب چاه غیر خطی اول در حالت دوم از $\sigma = 0.008$ دارای شاخه‌ی جدید خواهد بود.

۳-۲-۳ بررسی تأثیر پارامترهای مختلف دو چاه غیرخطی بر پاسخ فرکانسی در حالت

رزونانس ۱:۱ و ۱:۳

برای به دست آوردن تغییرات دامنه‌ی تیر متحرک محوری و چاه‌های غیرخطی انرژی بر اساس تغییرات پارامتر تنظیم در رزونانس ۱:۱ پارامترهای تیر و دو چاه غیرخطی انرژی به صورت زیر انتخاب شده و با حل معادلات (۲-۱۵۵) با استفاده از حل عددی با کمک نرم افزار متلب و میپل نتایج زیر حاصل می‌شود.

۳-۲-۳-۱ تأثیر مکان قرار گیری دو چاه غیرخطی در فواصل مختلف از تکیه‌گاه‌ها

بر پاسخ فرکانسی

در این مرحله پارامترهای تیر و دو چاه غیرخطی انرژی از (۳-۵) انتخاب شده فنریت دو چاه غیرخطی مشابه و میرایی و جرم متفاوت در نظر گرفته شده است. دو چاه غیر خطی انرژی هر کدام به فاصله ۰.۳ از تکیه‌گاه‌ها انتخاب شده است. مناطق پایدار بر روی شکل با حرف (a) و ناپایدار با حرف (b) مشخص شده‌اند.

لازم به ذکر است به دلیل شباهت نمودارهای این بخش نتایج با بخش قبل، از تعیین کردن مناطق پایدار و ناپایدار بر روی همه‌ی نمودارها خودداری شده و تنها در همین قسمت به تحلیل پایداری بعضی از نمودارها پرداخته شده است.

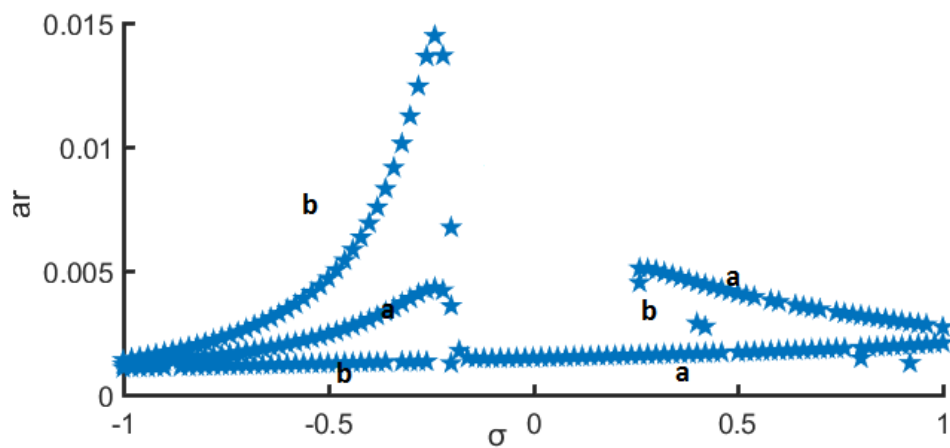
جدول ۳-۵ مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱ و ۱:۳:

$\sigma_1 = 0.04$	$\sigma_2 = 0.01$	$k_1 = 2000$	
$k_2 = 2000$	$\varepsilon_1 = 0.01$	$\varepsilon_2 = 0.04$	
$\alpha = 0.001$	$vf = 0.8$	$v = 0.5$	
$k_{11} = 0.3$	$d_1 = 0.3$	$d_2 = 0.6$	(۵-۳)

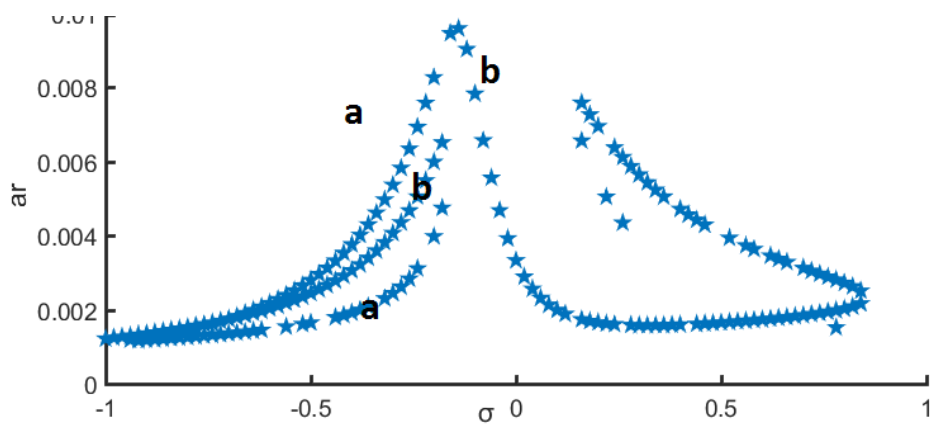
در این مرحله پارامترهای تیر و دو چاه غیرخطی انرژی همانند مرحله ی قبل انتخاب شده و فقط مکان دو چاه غیر خطی انرژی هر کدام از تکیه گاه ها دورتر انتخاب شده است.

جدول ۳-۶ مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱ و ۱:۳:

$\sigma_1 = 0.04$	$\sigma_2 = 0.01$	$k_1 = 2000$	
$k_2 = 2000$	$\varepsilon_1 = 0.01$	$\varepsilon_2 = 0.04$	
$\alpha = 0.001$	$vf = 0.8$	$v = 0.5$	
$k_{11} = 0.3$	$d_1 = 0.2$	$d_2 = 0.8$	(۶-۳)

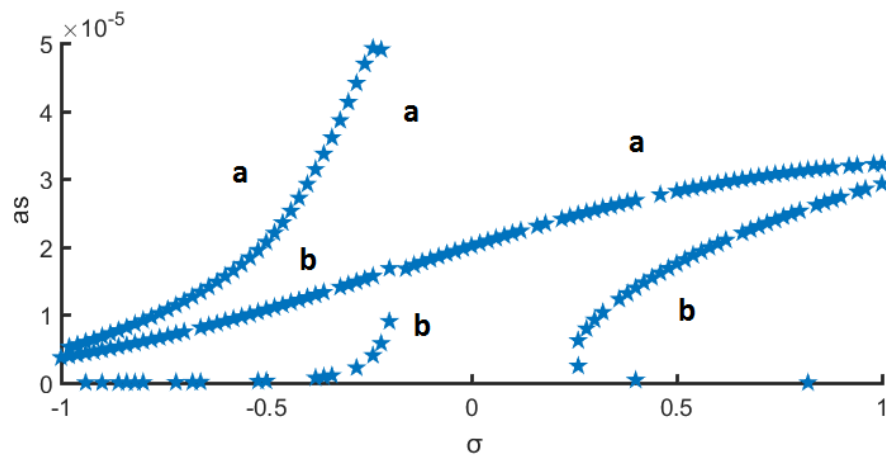


(a)

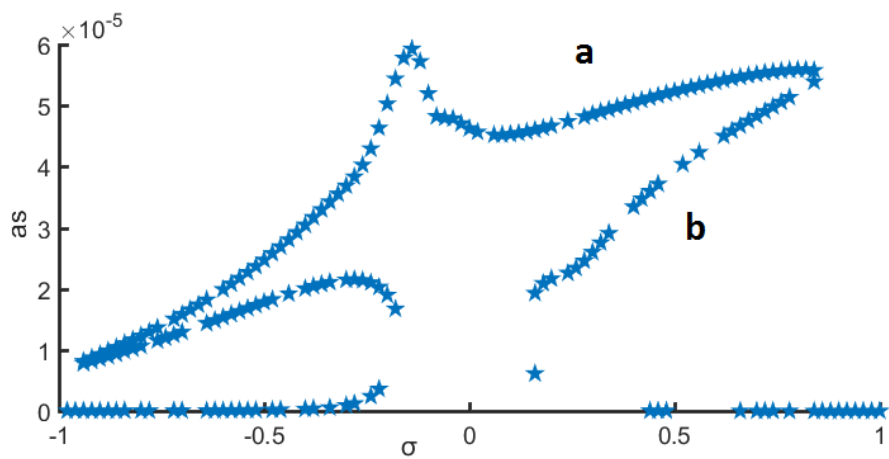


(b)

شکل ۳-۹ تغییرات دامنه‌ی تیر در رزونانس اولیه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲

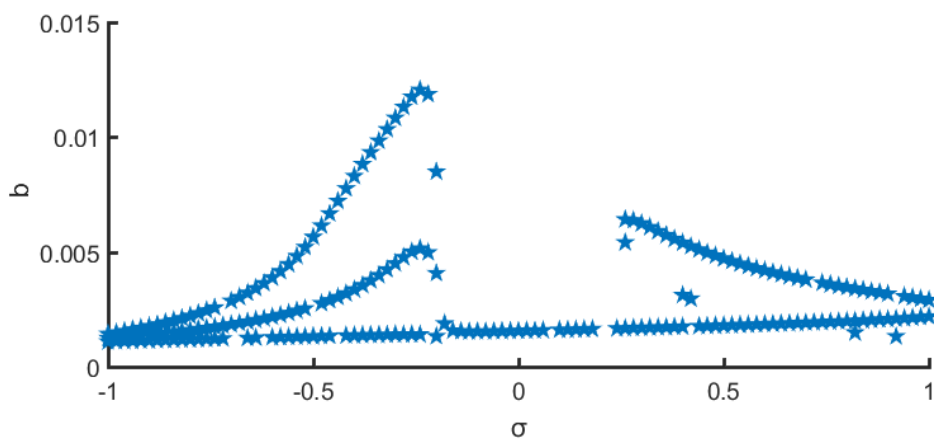


(a)

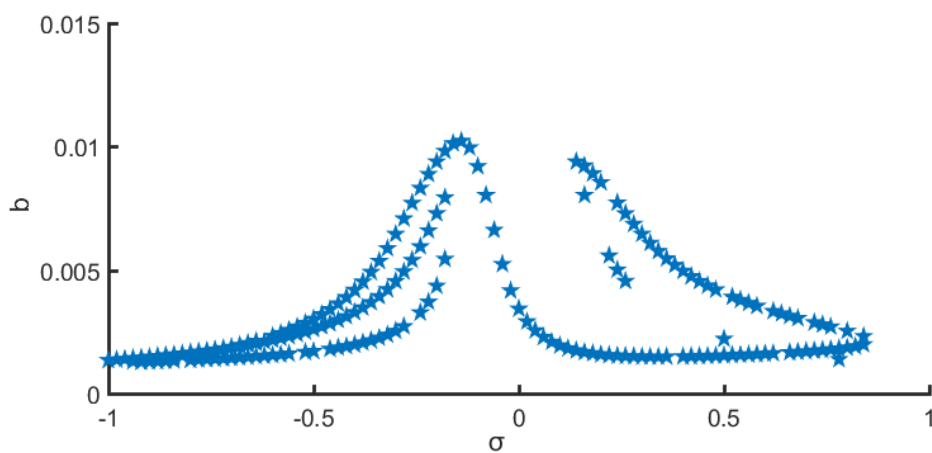


(b)

شکل ۳-۱۰ تغییرات دامنه‌ی تیر در رزونانس ثانویه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲



(a)

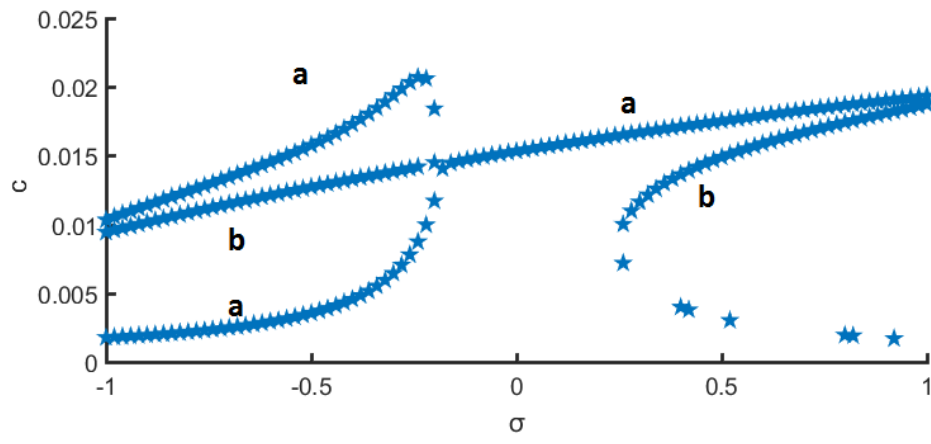


(b)

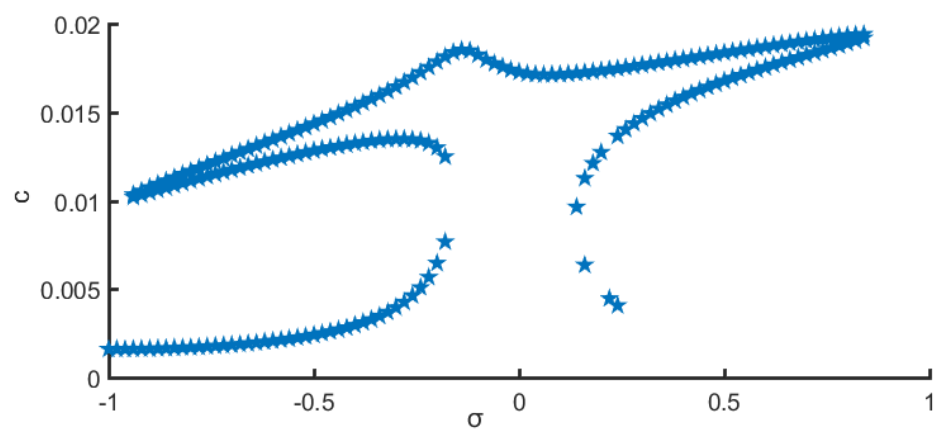
شکل ۳-۱۱ تغییرات دامنه‌ی چاه غیر خطی انرژی اول در رزونانس ثانویه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه

۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی

به فاصله ۰.۲

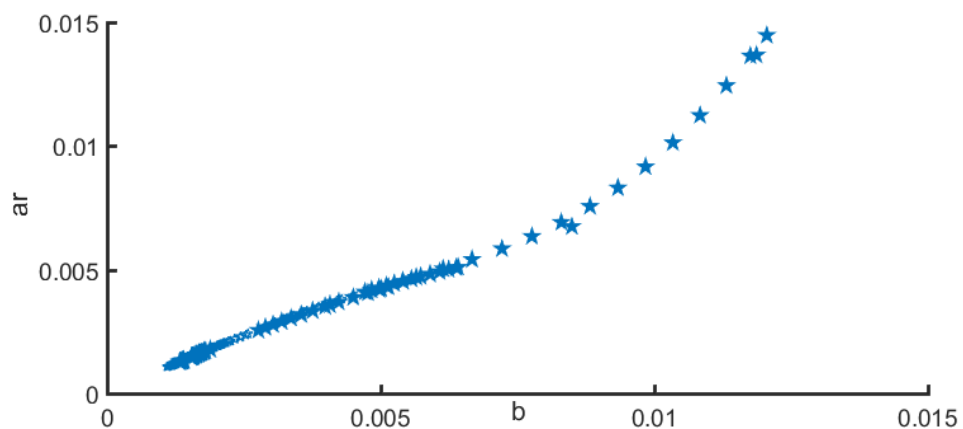


(a)

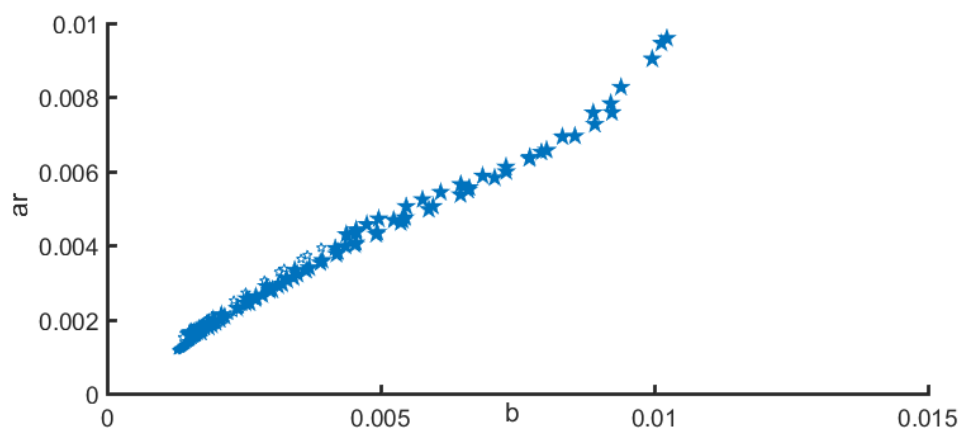


(b)

شکل ۳-۱۲ تغییرات دامنه‌ی چاه غیر خطی انرژی دوم در رزونانس ثانویه در حالت رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲



(a)



(b)

شکل ۳-۱۳ تغییرات دامنه‌ی تیر بر حسب چاه غیرخطی انرژی اول در رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۳ و (b) مکان قرار گیری دو چاه غیر خطی انرژی به فاصله ۰.۲

در این حالت نمودار پاسخ فرکانسی تیر در حالت رزونانس اولیه در مقایسه با حالت دوم که چاه‌های غیر خطی به تکیه‌گاه‌ها نزدیک‌تر شده‌اند دارای دامنه‌ی ارتعاشاتی کوچک‌تر است در حالت اول نمودار از $\sigma = -1$ تا $\sigma = -0.16$ دارای ناحیه‌ی سه مقداری و از $\sigma = -0.16$ تا $\sigma = -0.0016$ دارای ناحیه‌ی تک مقداری و از $\sigma = 0.0016$ تا $\sigma = 1$ دارای ناحیه‌ی دو مقداری است. دامنه‌ی ارتعاشات تیر در رزونانس

در رزونانس ثانویه افزایش پیدا کرده و در حالت اول بخش گسته در سمت چپ نمودار تشکیل می‌شود. دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیر خطی اول افزایش پیدا کرده و در هر دو حالت نمودار دارای بخش گسسته در سمت چپ خود می‌باشد. دامنه‌ی ارتعاشاتی چاه غیرخطی دوم کاهش یافته و در حالت اول دارای بخش گسسته در سمت چپ نمودار می‌باشد. همچنین دامنه‌ی تغییرات نمودار تیر در حالت رزونانس اولیه نسبت به دامنه‌ی تغییرات چاه غیرخطی اول در قسمت اول دارای دامنه‌ی بزرگتری می‌باشد.

همچنین بخش‌های پایدار با حرف a و بخش‌های ناپایدار با حرف b بر روی نمودارها مشخص شده‌اند و به دلیل شباهت نمودارها در این فصل تعیین پایداری و ناپایداری برای همه‌ی نمودارها انجام نشده است.

۳-۲-۴ تأثیر تغییر جرم دو چاه غیرخطی انرژی بر پاسخ فرکانسی

۳-۲-۴-۱ تأثیر جرم متفاوت دو چاه غیر خطی انرژی بر پاسخ فرکانسی

در این مرحله پارامترهای تیر همانند قبل و میرایی و فنریت دو چاه غیرخطی انرژی همانند یکدیگر انتخاب شده و مکان دو چاه غیر خطی انرژی هر کدام به فاصله‌ی 0.3 از تکیه‌گاه‌ها و جرم دو چاه غیر-خطی متفاوت از یکدیگر در نظر گرفته شده است.

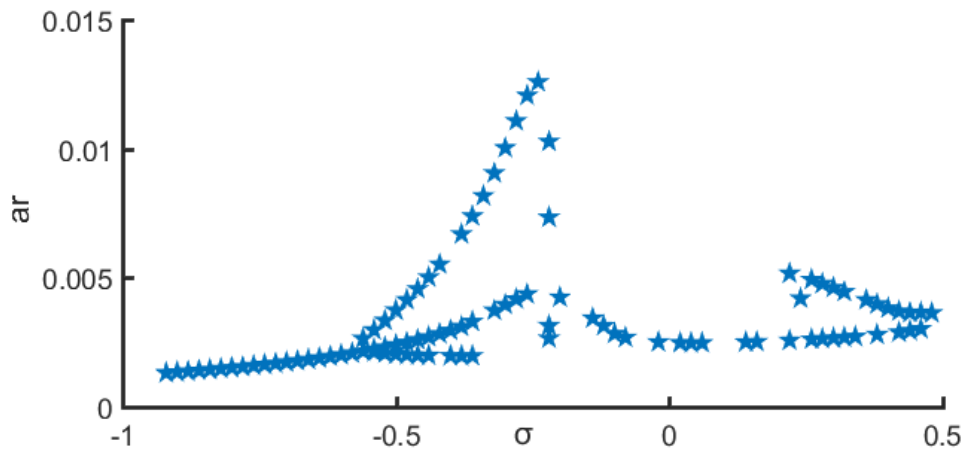
جدول ۳-۷ مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱ و ۱:۳

$\sigma_1 = 0.02$	$\sigma_2 = 0.02$	$k_1 = 2000$	
$k_2 = 2000$	$\varepsilon_1 = 0.01$	$\varepsilon_2 = 0.04$	
$\alpha = 0.001$	$\nu f = 0.8$	$\nu = 0.5$	
$k_{11} = 0.3$	$d_1 = 0.3$	$d_2 = 0.6$	(۳-۷)

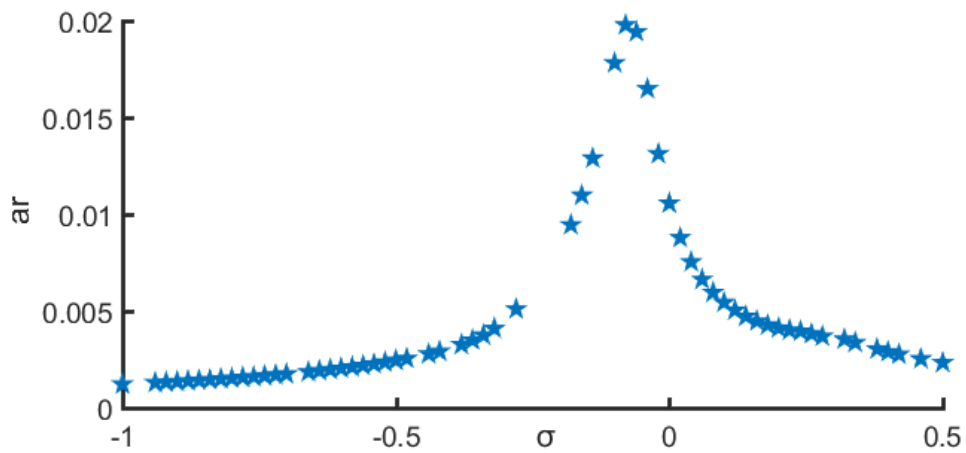
و در مرحله ی بعدی پارامترهای تیر همانند قبل و میرایی و فنریت دو چاه غیرخطی انرژی همانند یکدیگر انتخاب شده و جرم دو چاه غیرخطی همانند یکدیگر در نظر گرفته شده است.

جدول ۳-۸ مقادیر پارامترهای دو چاه غیرخطی برای تعیین پاسخ فرکانسی در رزونانس ۱:۱ و ۱:۳

$\sigma_1 = 0.02$	$\sigma_2 = 0.02$	$k_1 = 2000$	
$k_2 = 2000$	$\varepsilon_1 = 0.01$	$\varepsilon_2 = 0.01$	
$\alpha = 0.001$	$\nu f = 0.8$	$\nu = 0.5$	
$k_{11} = 0.3$	$d_1 = 0.3$	$d_2 = 0.6$	($\lambda-3$)



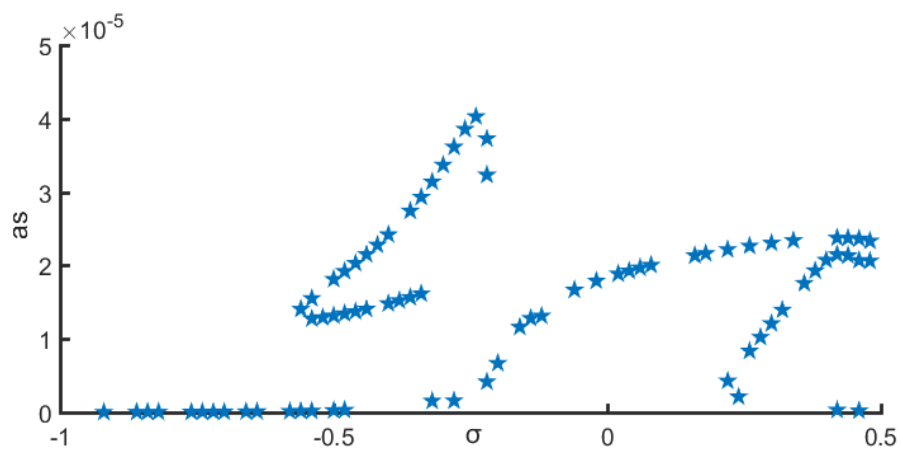
(a)



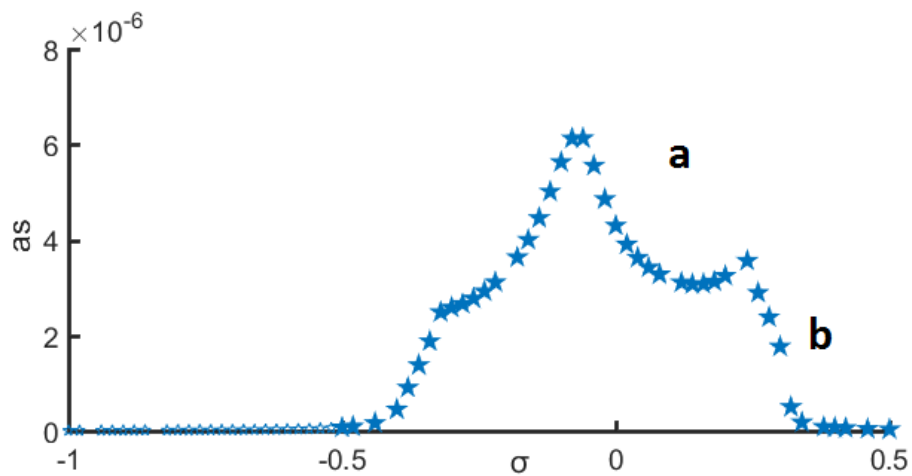
(b)

شکل ۳-۱۴ تغییرات دامنه‌ی تیر در رزونانس اولیه در حالت در رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) برای دو جرم

متفاوت (b) برای دو جرم یکسان



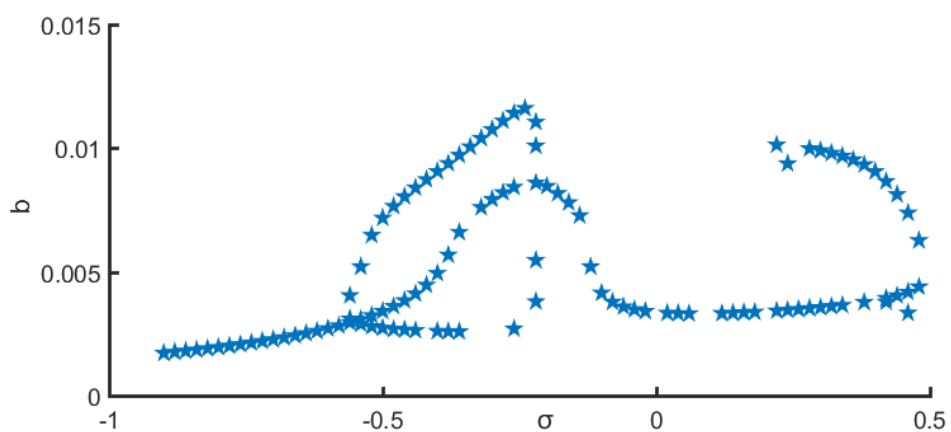
(a)



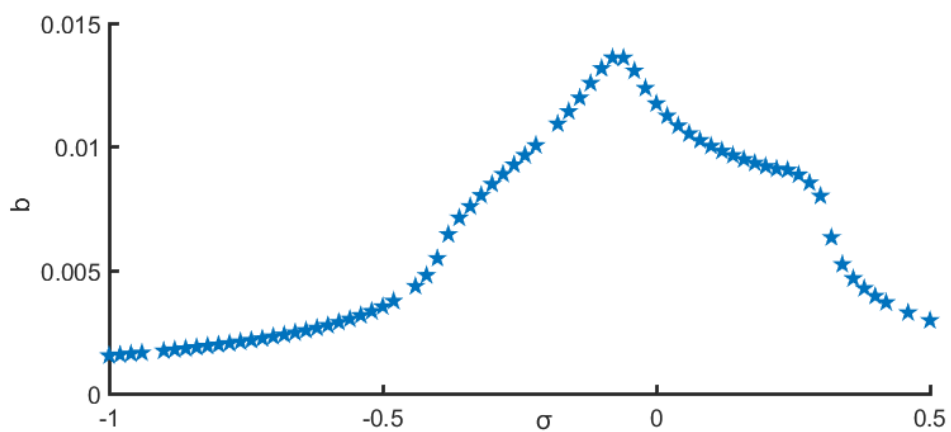
(b)

شکل ۳-۱۵ تغییرات دامنه‌ی تیردر رزونانس ثانویه در حالت رزونانس ۱:۱:۱ به همراه ۱:۳ برای دو

جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان ۱:۳



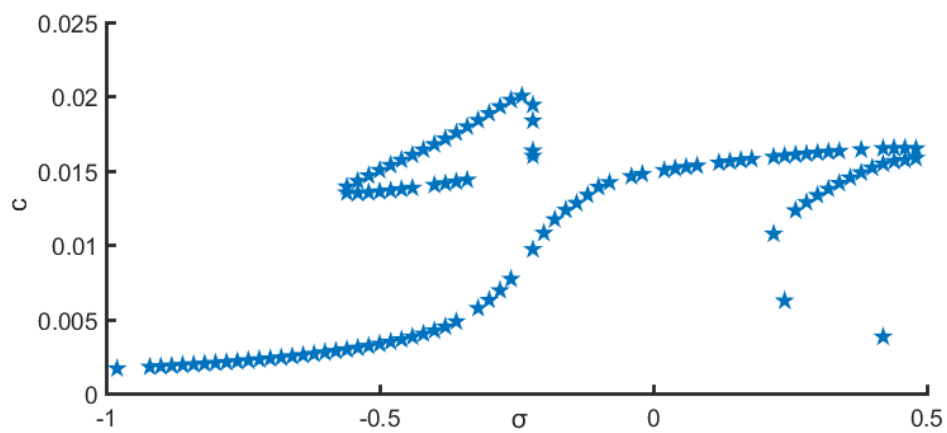
(a)



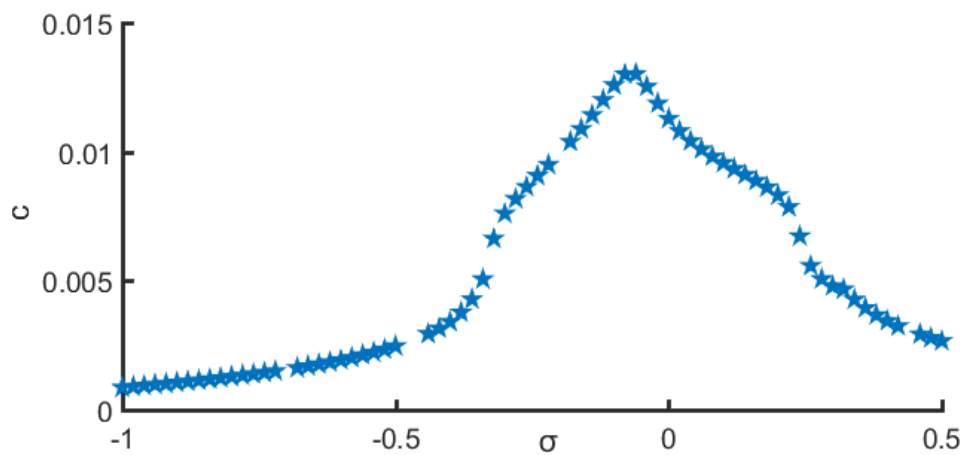
(b)

شکل ۳-۱۶ تغییرات دامنه‌ی چاه غیرخطی انرژی اول در رزونانس ۱:۱ به همراه ۳:۱ (a) برای دو جرم متفاوت

(b) برای دو جرم یکسان



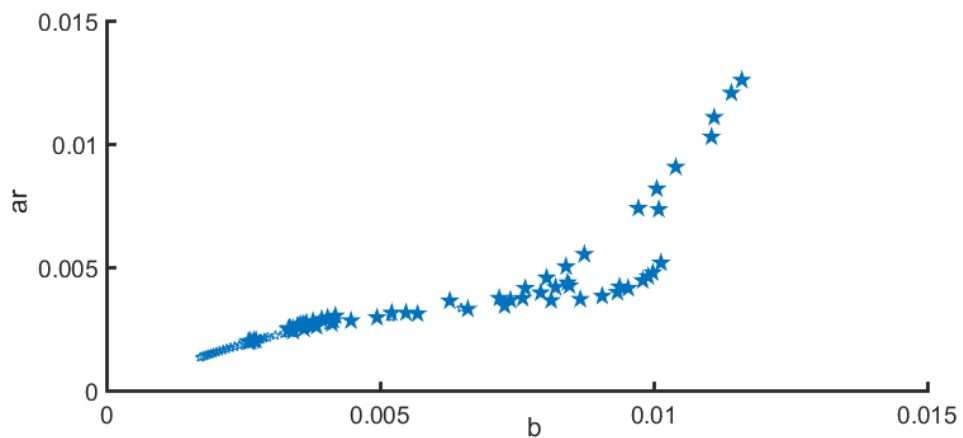
(a)



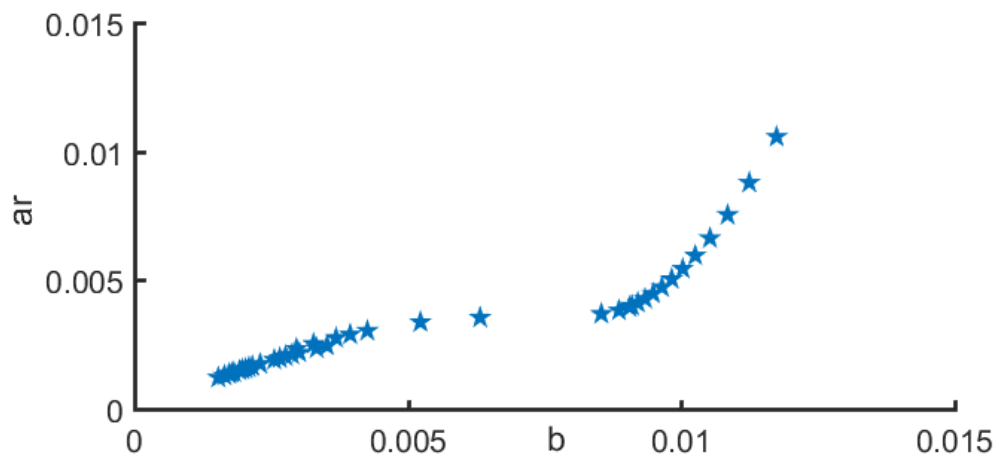
(b)

شکل ۳-۱۷ تغییرات دامنه‌ی چاه غیرخطی انرژی اول در رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) برای دو جرم متفاوت

(b) برای دو جرم یکسان



(a)



(b)

شکل ۳-۱۸ تغییرات دامنه‌ی تیر بر اساس چاه غیرخطی انرژی اول در رزونانس ۱:۱ به همراه ۱:۳ (a) برای دو

جرم متفاوت (b) برای دو جرم یکسان

در این قسمت دامنه‌ی ارتعاشات تیر در حالت رزونانس اولیه نسبت به حالت دوم که جرم کاهش یافته افزایش می‌یابد. از $\sigma = -0.56$ تا $\sigma = -0.22$ تیر دامنه‌ی ارتعاشات تیر دارای ناحیه‌ی سه مقداری و از $\sigma = -0.22$ تا $\sigma = 0.21$ دارای ناحیه‌ی تک مقداری و از $\sigma = 0.22$ تا $\sigma = 0.5$ دارای ناحیه‌ی دو مقداری است.

دامنه‌ی ارتعاشات تیر در حالت رزونانس ثانویه با کاهش جرم کاهش می‌یابد و تیر در حالت اول در $\sigma = -0.58$ تا $\sigma = -0.22$ دارای ناحیه‌ی سه قسمتی بوده و از $\sigma = 0.22$ تا $\sigma = 0.5$ دارای ناحیه -ی دو قسمتی می‌باشد ولی برای نمودار ارتعاشات تیر در رزونانس ثانویه در حالت دوم بخش دو مقداری و سه مقداری وجود ندارد.

دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیر خطی انرژی اول با کاهش جرم افزایش می‌یابد. نمودار دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیرخطی انرژی اول نیز در $\sigma = -0.56$ تا $\sigma = -0.22$ دارای ناحیه‌ی سه مقداری و از $\sigma = 0.22$ تا $\sigma = 0.56$ دارای ناحیه‌ی دو مقداری بوده ولی در حالت دوم با کاهش جرم یکی از چاه‌های غیر خطی انرژی، نواحی دو مقداری و سه مقداری وجود نخواهد داشت.

دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیرخطی انرژی دوم در حالت اول در مقایسه با کاهش جرم در حالت دوم کاهش پیدا کرده از $\sigma = -0.56$ تا $\sigma = -0.22$ دارای ناحیه سه مقداری و از $\sigma = 0.22$ تا $\sigma = 0.5$ دارای ناحیه‌ی دو مقداری بوده ولی در حالت دوم با کاهش جرم بخش دو مقداری و سه مقداری تشکیل نمی‌شود.

فصل چهارم

نتیجه گیری

و

پیشنهادات

۴-۱ مقدمه

در این پژوهش ارتعاشات غیرخطی تیر متحرک محوری متصل به دوچاه غیرخطی مجزا از هم مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات ارتعاشی سیستم با استفاده از روش انرژی به دست آمده و با استفاده از روش ترکیبی مقیاس‌های چندگانه و هارمونیک بالانس حل شده است. سپس پاسخ فرکانسی سیستم تحت تحریک هارمونیک مورد بررسی قرار گرفته و نتایج زیر به دست آمده است.

۴-۲ نتیجه‌گیری

نشان داده شد که:

- در حالت رزونانس ۱:۱ هنگامی که فاصله‌ی دو چاه غیرخطی انرژی از تکیه‌گاه‌ها کمتر شود، دامنه‌ی ارتعاشات تیر متحرک محوری و چاه غیر خطی انرژی اول افزایش یافته و دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیرخطی انرژی دوم کاهش می‌یابد.
- هر چه جرم دو چاه غیرخطی انرژی کاهش یابد، دامنه‌ی ارتعاشات تیر متحرک محوری و چاه غیرخطی انرژی اول افزایش یافته و دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیرخطی انرژی دوم کاهش می‌یابد.
- در حالت رزونانس ۱:۱ و ۱:۳ و هنگامی که فاصله‌ی دو چاه غیرخطی انرژی از تکیه‌گاه‌ها کمتر شود، دامنه‌ی ارتعاشات تیر متحرک محوری در حالت رزونانس اولیه کاهش یافته و در حالت رزونانس ثانویه افزایش می‌یابد و چاه غیر خطی انرژی اول افزایش یافته و دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیرخطی انرژی دوم کاهش می‌یابد.
- هر چه جرم دو چاه غیرخطی انرژی کاهش یابد، دامنه‌ی ارتعاشات تیر متحرک محوری در حالت رزونانس اولیه افزایش یافته و در حالت رزونانس ثانویه کاهش می‌یابد دامنه‌ی و چاه غیرخطی انرژی اول افزایش یافته و دامنه‌ی ارتعاشات چاه غیرخطی انرژی دوم کاهش می‌یابد.

۳-۴ پیشنهادها

برای مطالعه جامع تر مسأله بررسی موارد زیر پیشنهاد می‌شود:

۱- استفاده از سرعت به عنوان تحریک خارجی تیر ویسکوالاستیک و بررسی دامنه‌ی حرکت تیر و چاه-

های غیرخطی بر اساس فرکانس

۲- تغییر دادن شرایط مرزی تیر متحرک محوری به عنوان نمونه در نظر گرفتن یکی از تکیه‌گاه‌ها به

صورت متحرک

۳- در نظر گرفتن تئوری متفاوت برای تیر به عنوان نمونه تئوری تیر تیموشنکو

پیوست

ضرایب $w_1(x)$ ، $w_2(x)$ ، $w_3(x)$ ، $w_4(x)$ ، $w_5(x)$ ، $w_6(x)$ و $Q_1(x)$ ، $Q_2(x)$ ، $Q_3(x)$ ، $Q_4(x)$ ، $Q_5(x)$

و $Q_6(x)$ تا $G_1(x)$ تا $G_9(x)$ از رابطه‌ی (۲-۸۲) و (۲-۱۴۱) و (۲-۱۴۲) به صورت زیر به دست آمده اند.

$$w_1(x) = -zaribA \left(\frac{\sqrt{2} pr}{2} \right) + zaribD2 \frac{p(x)}{2}$$

$$w_2(x) = zaribB_0(-2v_0\omega^2\sqrt{2})$$

$$w_3(x) = zaribA \left(\sqrt{2} \sigma_1 \omega \varphi(d_1) \right) - zaribB2(\sigma_1 \omega)$$

$$w_4(x) = zaribA \left(\sqrt{2} \sigma_4 \omega \varphi(d_2) \right) - zaribC2(\sigma_2 \omega)$$

$$w_5(x) = zaribA(3\sqrt{2}\varphi(d_1)k_1) - zaribB2(3k_1)$$

$$w_6(x) = zaribA(3\sqrt{2}\varphi(d_2)k_2) - zaribC2(3k_2)$$

$$Q_1(x) = \int_0^x \frac{(-p_r(v)\varphi_r(v) + p(v))}{2} [p_2 \sinh(p_1(x-v))$$

$$+ p_4 \sinh(p_3(x-v))] dv$$

$$Q_2(x) = -2v_0\omega_r^2 \int_0^x \varphi_{rr}(v) [p_2 \sinh(p_1(x-v)) + p_4 \sinh(p_3(x-v))] dv$$

$$Q_3(x) = -\sigma_1\omega_r [[p_2 \sinh(p_1(x-d_1)) + p_4 \sinh(p_3(x-d_1))] H(x-d_1) -$$

$$\varphi_r(d_1) \int_0^x \varphi_r(x-v) [p_2 \sinh(p_1v) + p_4 \sinh(p_3v)] dv$$

$$Q_4(x) = -\sigma_2\omega_r [[p_2 \sinh(p_1(x-d_2)) + p_4 \sinh(p_3(x-d_2))] H(x-d_2) -$$

$$\varphi_r(d_2) \int_0^x \varphi_r(x-v) [p_2 \sinh(p_1v) + p_4 \sinh(p_3v)] dv$$

$$Q_5(x) = -3k_1 [[p_2 \sinh(p_1(x-d_1)) + p_4 \sinh(p_3(x-d_1))] H(x-d_1) -$$

$$\varphi_r(d_1) \int_0^x \varphi_r(x-v) [p_2 \sinh(p_1v) + p_4 \sinh(p_3v)] dv$$

$$Q_6(x) = 3k_2[[p_2 \sinh(p_1(x - d_2)) + p_4 \sinh(p_3(x - d_2))] H(x - d_2) -$$

$$\varphi_r(d_2) \int_0^x \varphi_r(x - v)[p_2 \sinh(p_1 v) + p_4 \sinh(p_3 v)] dv$$

$$p_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{vf^2(1 + \sqrt{4vf^2wr^2 + 1})}}{vf^2}$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{vf^2(1 + \sqrt{4vf^2wr^2 + 1})}}{(1 + \sqrt{4vf^2wr^2 + 1}) \sqrt{4vf^2wr^2 + 1}}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{vf^2(1 - \sqrt{4vf^2wr^2 + 1})}}{vf^2}$$

$$p_4 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{vf^2(1 - \sqrt{4vf^2wr^2 + 1})}}{(-1 + \sqrt{4vf^2wr^2 + 1}) \sqrt{4vf^2wr^2 + 1}}$$

$$\varphi_{rr}(v) = \sqrt{2} \cos(\omega_r v)$$

$$\varphi_{ss}(v) = \sqrt{2} \cos(\omega_s v)$$

$$zaribA = \frac{\sin(wx)}{vf^2 w^4}$$

$$zaribB_0 = \frac{\cos(wx)}{vf^2 w^4}$$

$$zaribD2 = \frac{-1}{w^2}$$

$$zaribB2 =$$

$$-\frac{1}{2} \left(vf \text{Heaviside}(-x + dl) \left(\sqrt{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} (-x + dl)}{vf}} \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} e^{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} (-x + dl)}{vf}} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} (-x + dl)}{vf}} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} e^{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} (-x + dl)}{vf}} \right) \right) / \\ \left(\sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} \sqrt{4vf^2w^2 + 1} \sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} \right)$$

zaribC2 =

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \left(v f \text{Heaviside}(-x \right. \\
 & + d2) \left(\sqrt{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} (-x + d2)}{vf}} \right. \\
 & - \sqrt{2} \sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} e^{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} (-x + d2)}{vf}} \\
 & - 2\sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} (-x + d2)}{vf}} \\
 & \left. \left. + 2\sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} e^{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} (-x + d2)}{vf}} \right) \right) / \\
 & \left(\sqrt{2 - 2\sqrt{4vf^2w^2 + 1}} \sqrt{4vf^2w^2 + 1} \sqrt{1 + \sqrt{4vf^2w^2 + 1}} \right)
 \end{aligned}$$

- [1] K. Y. Billah and R. H. Scanlan, "Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks," *American Journal of Physics*, vol. 59, pp. 118-124, 1991.
- [2] G. Takács, "Basics of Vibration Dynamics," in *Model Predictive Vibration Control*, ed: Springer, 2012, pp. 25-64.
- [3] J. H. Kramer, "Vibration isolation pad," ed: Google Patents, 1984.
- [4] I. Kourakis, "Structural systems and tuned mass dampers of super-tall buildings: case study of Taipei 101," Massachusetts Institute of Technology, 2007.
- [5] D. Mingori, "Effects of energy dissipation on the attitude stability of dual-spin satellites," *AIAA Journal*, vol. 7, pp. 20-27, 1969.
- [6] Y. S. Lee, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, D. M. McFarland, and G. Kerschen, "Enhancing the robustness of aeroelastic instability suppression using multi-degree-of-freedom nonlinear energy sinks," *AIAA journal*, vol. 46, p. 1371, 2008.
- [7] D. Younesian, A. Nankali, and M. E. Motieyan, "Application of the Nonlinear Energy Sink Systems in Vibration Suppression of Railway Bridges," in *Proc. ASME 10th Biennial Conf. on Eng. Sys. Design and Analysis*, pp. 12-14, 2010.
- [8] P. Zhang, G. Song, H.-N. Li, and Y.-X. Lin, "Seismic control of power transmission tower using pounding TMD," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 139, pp. 1395-1406, 2012.
- [9] J. Wang, N. Wierschem, B. F. Spencer, and X. Lu, "Experimental study of track nonlinear energy sinks for dynamic response reduction," *Engineering Structures*, vol. 94, pp. 9-15, 2015.
- [10] R. Vigué, G. Kerschen, J.-C. Golinval, D. McFarland, L. Bergman, A. Vakakis, *et al.*, "Using passive nonlinear targeted energy transfer to stabilize drill-string systems," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 23, pp. 148-169, 2009.
- [11] Z. N. Ahmadabadi and S. Khadem, "Nonlinear vibration control and energy harvesting of a beam using a nonlinear energy sink and a piezoelectric device," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, pp. 4444-4457, 2014.
- [12] O. V. Gendelman, T. Sapsis, A. F. Vakakis, and L. A. Bergman, "Enhanced passive targeted energy transfer in strongly nonlinear mechanical oscillators," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 330, pp. 1-8, 2011.

- [13] J. Taghipour and M. Dardel, "Steady state dynamics and robustness of a harmonically excited essentially nonlinear oscillator coupled with a two-DOF nonlinear energy sink," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 62, pp. 164-182, 2015.
- [14] G. Kerschen, J. J. Kowtko, D. M. McFarland, L. A. Bergman, and A. F. Vakakis, "Theoretical and experimental study of multimodal targeted energy transfer in a system of coupled oscillators," *Nonlinear Dynamics*, vol. 47, pp. 285-309, 2007.
- [15] S. Tsakirtzis, P. N. Panagopoulos, G. Kerschen, O. Gendelman, A. F. Vakakis, and L. A. Bergman, "Complex dynamics and targeted energy transfer in linear oscillators coupled to multi-degree-of-freedom essentially nonlinear attachments," *Nonlinear Dynamics*, vol. 48, pp. 285-318, 2007.
- [16] K. Khélifi, M.-L. Bouazizi, E. Sadoulet, R. Nasri, and N. Bouhaddi, "Parametric Study on Energy Pumping of M dof System Using Multiple Dynamic Absorbers," *Condition Monitoring of Machinery in Non-Stationary Operations*, pp. 599-605, 2012.
- [17] A. Luongo and D. Zulli, "Nonlinear energy sink to control elastic strings: the internal resonance case," *Nonlinear Dynamics*, vol. 81, pp. 425-435, 2015.
- [18] D. Zulli and A. Luongo, "Control of primary and subharmonic resonances of a Duffing oscillator via non-linear energy sink," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 80, pp. 170-182, 2016.
- [19] Z. N. Ahmadabadi and S. Khadem, "Nonlinear vibration control of a cantilever beam by a nonlinear energy sink," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 50, pp. 134-149, 2012.
- [20] F. Georgiades and A. Vakakis, "Passive targeted energy transfers and strong modal interactions in a thin plate with strongly nonlinear end attachments of different configurations," in *ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pp. 1355-1370, 2007.
- [21] Z. Yin-Feng and W. Zhong-Min, "Vibrations of axially moving viscoelastic plate with parabolically varying thickness," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 316, pp. 198-210, 2008.
- [22] A. Kesimli, E. Özkaya, and S. Bağdatli, "Nonlinear vibrations of spring-supported axially moving string," *Nonlinear Dynamics*, vol. 81, pp. 1523-1534, 2015.
- [23] F. Georgiades and A. Vakakis, "Dynamics of a linear beam with an attached local

- nonlinear energy sink," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 12, pp. 643-651, 2007.
- [24] F. S. Samani and F. Pellicano, "Vibration reduction on beams subjected to moving loads using linear and nonlinear dynamic absorbers," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 325, pp. 742-754, 2009.
- [25] M. Kani, S. E. Khadem, M. H. Pashaei, and M. Dardel, "Design and performance analysis of a nonlinear energy sink attached to a beam with different support conditions," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 230, pp. 527-542, 2016.
- [26] M. Parseh, M. Dardel, and M. H. Ghasemi, "Investigating the robustness of nonlinear energy sink in steady state dynamics of linear beams with different boundary conditions," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 29, pp. 50-71, 2015.
- [27] M. Kani, S. Khadem, M. Pashaei, and M. Dardel, "Vibration control of a nonlinear beam with a nonlinear energy sink," *Nonlinear Dynamics*, vol. 83, pp. 1-22, 2016.
- [28] M. U. R. Ullah, "Numerical Study Of The Targeted Energy Transfer Between The Euler-Bernoulli Beam And A Nonlinear Energy Sink," 2013.
- [29] F. Archibald and A. Emslie, "The vibration of a string having a uniform motion along its length," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 25, pp. 347-348, 1958.
- [30] L.-Q. Chen and X.-D. Yang, "Nonlinear free transverse vibration of an axially moving beam: Comparison of two models," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, pp. 348-354, 2007.
- [31] L.-Q. Chen and X.-D. Yang, "Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: comparison of two nonlinear models," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 37-50, 2005.
- [32] H. Ding and L.-Q. Chen, "Natural frequencies of nonlinear transverse vibration of axially moving beams in the supercritical regime," *Advances in Vibration Engineering*, vol. 10, pp. 261-272, 2011.
- [33] M. H. Ghayesh, "Nonlinear forced dynamics of an axially moving viscoelastic beam with an internal resonance," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, pp. 1022-1037, 2011.
- [34] L.-Q. Chen and X.-D. Yang, "Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: comparison of two nonlinear models," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 37-50, 2005.

- [35] A. Luongo and D. Zulli, "Aeroelastic instability analysis of NES-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance method," *Journal of Vibration and Control*, vol. 20, pp. 1985-1998, 2014.
- [36] O. Gendelman, "Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, pp. 4599-4608, 2012.
- [37] D. Kremer and K. Liu, "A nonlinear energy sink with an energy harvester: transient responses," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 333, pp. 4859-4880, 2014.
- [38] L. Saberi and H. Nahvi, "Vibration analysis of a nonlinear system with a nonlinear absorber under the primary and super-harmonic resonance," *International Journal of Engineering-Transactions C: Aspects*, vol. 27, p. 499, 2013.
- [39] J. Ji and N. Zhang, "Suppression of the primary resonance vibrations of a forced nonlinear system using a dynamic vibration absorber," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, pp. 2044-2056, 2010.

Abstract

In this study excessive vibration of the axially moving beam was investigated. The axial speed of the beam causes the transvers amplitude of the structure to be excessive larger. The theory of nonlinear target energy transfer was applied to suppress the excessive vibration of axially moving beam by using an essentially nonlinear attachment, which is called a nonlinear energy sink. Studies shows that using a nonlinear energy sink could effectively suppress the vibration. So, in this study two separated parallel nonlinear energy sinks were attached to a beam and the effects of this combination on the absorption and vibration of the system was investigated. The equations of motion were derived from Hamilton's principle and then, using numerical methods, frequency response of the system was obtained for primary resonance and superharmonic resonance cases. Finally, the effect of different parameters of nonlinear energy sinks on frequency response of the system were investigated.

Keywords

Axially moving beam, separated nonlinear energy sink, nonlinear vibration, nonlinear target energy transfer



Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

**Nonlinear vibration of axially moving beam with multi
nonlinear energy sinks**

Seyede ashraf teimouri

Supervisor:

Amir Jalali Dr.

September 2017