بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده: مهندسی مکانیک و مکاترونیک
گروه: طراحی کاربردی

بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشی اعضای مکانیکی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی ساخته شده از مواد الاستیک غیرخطی با استفاده از مدل‌های هایپرالاستیک

دانشجو: سعید دانایی بارفروشی

استاد راهنما:

دکتر اردشیر کرمی محمدی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

شهریور 1396

شماره: ۱۵۳/۲۹۶/د.م
تاریخ: ۹۶/۸/۲۲
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای/خانم سعید دانایی بارفروشی دانشجوی دکتری رشته مکانیک طراحی کاربردی به شماره دانشجویی ۹۰۲۲۳۶۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۰ در تاریخ ۱۳۹۶/۶/۲۱ از رساله **نظری**☑ / **عملی**☐ خود با عنوان بررسی رفتار دینامیکی و ارتعاشی اعضای مکانیکی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی ساخته شده از مواد الاستیک غیرخطی با استفاده از مدل‌های هایپرالاستیک

دفاع و با اخذ نمره ۱۸/۴۷ به درجه بسیار خوب نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷☑
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹– ۱۵☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر اردشیر کرمی محمدی	استاد/ اساتید راهنما	دانشیار	
۲	دکتر —	مشاور/ مشاورین	—	
۳	دکتر حمیدرضا ایپک چی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۴	دکتر امیر جلالی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۵	دکتر محمدرضا آشوری	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۶	دکتر حبیب احمدی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای سعید دانایی بارفروشی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده :

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

شاه مرادی

تقدیم به پدر، مادر و برادران مهربانم مسعود و سیاوش.

سپاسگزاری

در این جا لازم می‌دانم از راهنمایی‌های استاد گرانقدر، آقای دکتر اردشیر کرمی محمدی و احساس مسئولیت وافر ایشان در قبال اینجانب تشکر و قدردانی نمایم که اگر حمایت‌های ایشان نبود، این کار پژوهشی به ثمر نمی‌رسید.

ضمناً از دوست عزیزم جناب آقای بهرام سرابی جهت ارائه نظرهای علمی و نیز از سرکار خانوم فاطمه قریب، آقایان یدالله رضوانی و مسعود دانایی جهت حمایت‌های معنوی ایشان که موجب پایداری اینجانب در این راه گردید سپاسگزارم.

و در انتها از تمامی کسانی که در انجام این رساله به هر نحو اینجانب را راهنمایی و کمک نمودند کمال تشکر و امتنان را دارم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

شهریور 1396

چکیده

سیستم‌های میکروالکترومکانیکی در سال‌های اخیر به سوی استفاده از مواد پلیمری و لاستیکی گرایش یافته‌اند. از بین مواد پلیمری، الاستومرها به دلیل ویژگی‌های منحصر به فردشان به عنوان مواد مورد بررسی در این رساله مدنظر می‌باشند. این ویژگی به همراه دیگر خصوصیات همچون کرنش بالا، انعطاف-پذیری، تطابق با محیط، پاسخ‌دهی سریع و ... الاستومرها را به عنوان ماده‌ای کاملا مطلوب در کاربردهای متنوعی از جمله ماهیچه‌های مصنوعی، گیره‌ها، حسگرها، رزوناتورها و ... معرفی نموده است. در این رساله رفتار دینامیکی و ارتعاشی اعضای مکانیکی سیستم‌های میکروالکترومکانیکی ساخته‌شده از این مواد با استفاده از مدل‌های هایپرالاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. این مدل‌ها به خوبی رفتار لاستیکی و رابطه غیرخطی تنش و کرنش در این نوع مواد را پیش‌بینی کرده و می‌توان توسط آن‌ها، عامل غیرخطی ماده را در کنار دیگر عوامل در بررسی رفتار ماده دخیل نمود. برای این منظور ارتعاش آزاد و اجباری میکروتیر و میکروورق دایره‌ای بر اساس تئوری‌های کلاسیک اویلر برنولی و برشی با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار با در نظر گرفتن مدل‌های هایپرالاستیک یئو و بیدرمن بررسی می‌گردد. اثر پارامترهای مختلف همچون شماره مود، طول، ضخامت و نسبت لاغری بر فرکانس غیرخطی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در حل معادلات غیرخطی حاکم از روش‌های نیمه تحلیلی پوانکاره و مقیاس‌های چندگانه استفاده و برای اعتبارسنجی پاسخ‌های زمانی از روش رانج-کوتای مرتبه چهارم بهره گرفته می‌شود. همچنین تئوری تنش کوپل اصلاح شده شامل چگالی انرژی کرنشی تقویت شده بیدرمن جهت درنظرگرفتن اثر اندازه پیشنهاد و نتایج آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت. وضعیت پایداری pull-in نیز در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی برای دو مدل یئو و بیدرمن مطالعه و مقادیر بحرانی برای ولتاژ، میدان الکتریکی اسمی و نسبت کشیدگی محاسبه می‌گردد. علاوه بر موارد یادشده، ترکیب‌بندی متفاوتی برای میکروتیر با یک الکترود بر روی سطح تیر و الکترود ثابت دیگری با فاصله از سطح زیرین تیر که تحت نیروی

الکتروستاتیکی می‌باشد، بررسی می‌گردد. در این قسمت، ولتاژ و خیز pull-in محاسبه و بررسی رفتار دینامیکی نیز برای دو ولتاژ مختلف با تحلیل یک مود انجام می‌گیرد.

کلمات کلیدی

مدل‌های هایپرالاستیک، تئوری اویلر برنولی، تئوری برشی، تئوری تنش کوپل اصلاح شده، pull-in

لیست مقالات مستخرج از رساله

مجلات ISI:

1. Study Neo-Hookean and Yeoh Hyper-elastic Models In Dielectric Elastomer-based Micro-beam Resonators (Latin American Journal of Solids and Structures, Vol 13, No 10,2016).

2. Nonlinear forced vibration analysis of dielectric-elastomer based micro-beam with considering Yeoh hyper-elastic model . (Latin American Journal of Solids and Structures, Vol 14, No 4. 2017).

3. Impressive frequency behavior of Rayleigh hyper-elastic micro-beam in comparison with Euler-Bernoulli theory (Scientefic Bulletin-University Polytechnica of Bucharest.,Series D, Vol ۷۹, Iss ۳, ۲۰۱۷)

4. Free vibration of hyper-elastic micro-beam, using a novel augmented Biderman model inducted from the modified couple stress theory (Submitted to Acta Mechanica)

کنفرانس های بین المللی:

5. Comparison of the accuracy of two different hyperelastic models for vibration of dielectric elastomer-based micro-beam resonators (ISAV 2015)

6. Influence of different parameters on nonlinear frequency of hyper-elastic micro-resonators (ISME 2016)

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فهرست شکل ها

فهرست جداول

لیست علائم و اختصارات

توضیحات	پارامترها
تانسور راست کوشی - گرین	C
تانسور گرادیان تغییر شکل	F
تانسور چپ کوشی - گرین	B
کرنش لاگرانژی	E
تابع دلتای کرانکر	δ
نسبت های کشیدگی	λ_i
ثوابت کرنش	I_i
ثوابت مدل یئو	c_1, c_2, c_3
ثوابت مدل بیدرمن	$c_{10}, c_{20}, c_{30}, c_{01}$
چگالی انرژی کرنشی	W
انرژی جنبشی	T
انرژی پتانسیل	Π
مولفه های جابجایی در راستای محورهای **x**، **Y** و **Z**	u, v, w
مولفه های کرنش	ε_i
فرکانس طبیعی بابعد خطی	$\omega_{\dim}$
پارامتر کوچک اغتشاشی	ε
دامنه بیشینه	$A_{\max}$
طول میکروتیر	l
عرض میکروتیر	b
ضخامت میکروتیر	d
سطح مقطع	A
فرکانس خطی بی بعد	ω_0
چگالی	ρ
فرکانس تحریک	Ω
دامنه نیروی تحریک هارمونیک	f_0
تانسور تنش	σ
ثوابت معادلات سازگاری	λ, μ
پارامتر مقیاس طول	l_0
تانسور انحناء	θ

χ	بخش متقارن گرادیان چرخش
m	بخش دویاتوریک تانسور تنش کوپل
ω_c	فرکانس مدل کلاسیک
G	انرژی آزاد سیستم
E	میدان الکتریکی حقیقی
$\tilde{E}$	میدان الکتریکی اسمی
D	جابجایی الکتریکی حقیقی
$\tilde{D}$	جابجایی الکتریکی اسمی
Q	بار الکتریکی
H	ماتریس هسین
a	شعاع میکروورق
h	ضخامت میکروورق
V_b	ولتاژ مستقیم
$v(t)$	ولتاژ متناوب
V_{ac}	دامنه ولتاژ متناوب
g_0	شکاف اولیه سطح زیرین میکروتیر تا الکترود ثابت
$w_s(x)$	خیز استاتیکی میکروتیر
$u(x,t)$	مولفه دینامیکی خیز میکروتیر

فصل اول:

مقدمه

فصل اول: مقدمه

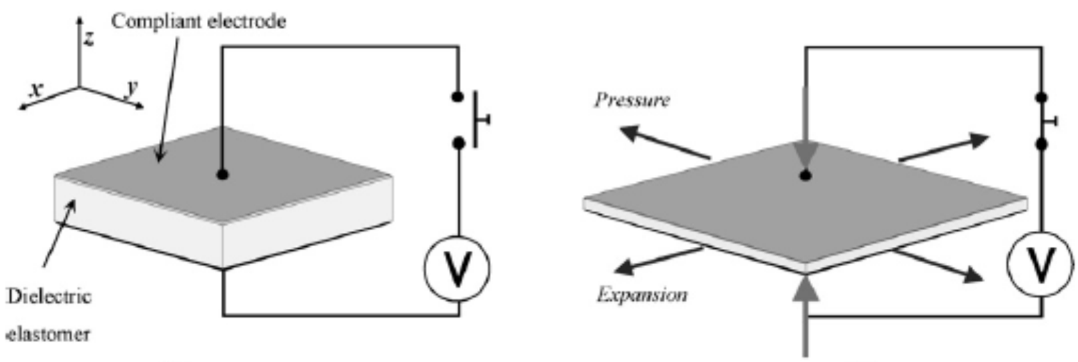
1-1 معرفی سیستم‌های الکترومکانیکی و ماده موردنظر

اعضایی که متشکل از اجزا الکتریکی و مکانیکی هستند سیستم های الکترومکانیکی نامیده شده و با استفاده از تکنیک‌های ساخت تا اندازه میکرو و نانو تولید می‌شوند[1]. منشا اولیه ظهور این سیستم‌ها به ریچارد فینمن[1] برمی‌گردد که احتمال ساخت ابعاد کوچک را مطرح نمود[2]. از آن پس پیشرفت-های بسیاری در زمینه فهم تکنولوژی سیستم‌های میکرو صورت گرفت. جنس اکثر سیستم‌های میکروالکترومکانیکی مبتنی بر سیلیکون و مشتقاتش می‌باشند، اما در سال‌های اخیر به دلایلی که در ادامه ذکر می‌شود گرایش به سمت استفاده از مواد دیگر همچون مواد پلیمری و لاستیکی شکل گرفته است. در این تحقیق نیز، مبنای ماده استفاده‌شده در میکروسیستم از نوع الاستومر دی‌الکتریک است. ابتدا مختصری از کاربردهای الاستومرها در عملگرها، حسگرها و رزوناتورها بیان می‌شود. قابل ذکر است که الاستومر دی‌الکتریک، مبدلی با تحریک الکتریکی است که در آن پلیمر لاستیکی (الاستومر) استفاده شده و دارای ساختار بسیار ساده‌ای متشکل از غشاء پلیمری نازک (الاستومر) است که بین دو الکترود انعطاف‌پذیر و الاستیک قرار می‌گیرد، لذا به صورت یک خازن عمل می‌کند.

اصول عملکرد الاستومر دی‌الکتریک طبق شکل (1-1) بوده و همان‌طور که پیداست وقتی ولتاژ به الکترودها اعمال می‌گردد، ضخامت غشاء فشرده و مساحت آن زیاد شده و به این ترتیب دارای تغییر شکل می‌شود. علت این امر این است که الاستومرها از مواد تراکم‌ناپذیر هستند، لذا هرگونه کاهش ضخامت منجر به افزایش مساحت شده تا حجم ماده ثابت بماند. شایان ذکر است که میزان ولتاژ

[1] Richard feynman

اعمالی برای الاستومرها با ضخامت 10 تا 100 میکرومتر در محدوده 500 ولت تا 10 کیلوولت می-باشد[3].



شکل (1-1): نحوه عملکرد الاستومر دی الکتریک[4]

1- 2 کاربردهای الاستومر

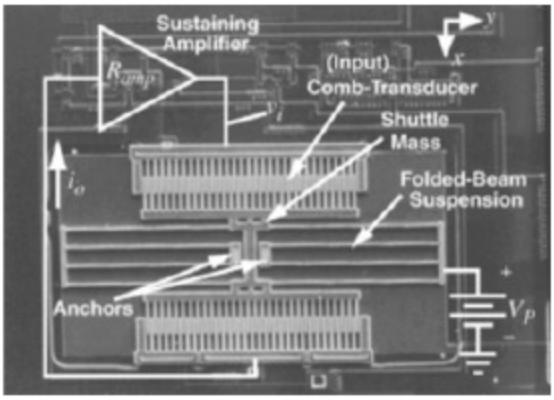
1-2-1 رزوناتورها

رزوناتورهای ارتعاشی که با استفاده از فرآیند میکروماشینکاری تولید می‌شوند در سال‌های اخیر به دلیل مزیت‌هایشان از جمله اندازه کوچک، وزن سبک، عملکرد خوب، قابلیت اعتماد بالا و هزینه پایین مورد استفاده گسترده قرار گرفته اند. رزوناتورهای ساخته‌شده از الاستومر نسبت به رزوناتورهای پیشین دارای این مزیت هستند که فرکانس طبیعی آن‌ها با پارامترهای ساختاری در مرحله ساخت قابل تنظیم است. رزوناتورهای الاستومر در ترکیب‌بندی‌های مختلفی طراحی می‌شوند. غشاءهای الاستومری در کرنش و فرکانس بالا تحت ارتعاش غیرخطی قرار می‌گیرند.

اولین گزارش‌ها راجع به میکرورزوناتورها در کتاب جانسون در سال 1983 ارائه شد[5]. در آن کتاب، طراحی، مدل‌سازی رزوناتورهای مکانیکی و ارتباط آن‌ها با مدارهای الکتریکی معرفی شد. در سال 1997 اولین میکرورزوناتور که رزوناتوری با تحریک الکتروستاتیکی شانه ای[1] بود، ساخته و توسط

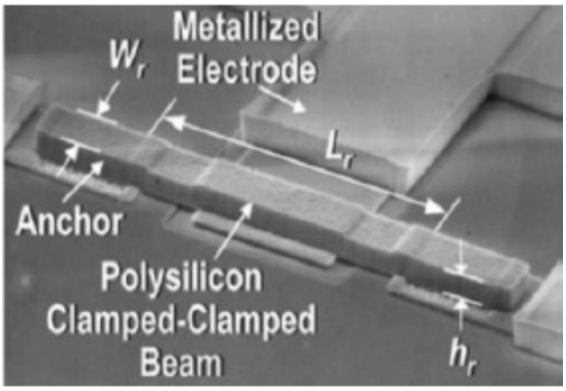
[1] Comb-drive

کائو و همکارش در دانشگاه میشیگان تست شد[6]. رزوناتور سیلیکونی با تحریک الکتروستاتیکی در شکل (1-2) مشاهده می‌شود:



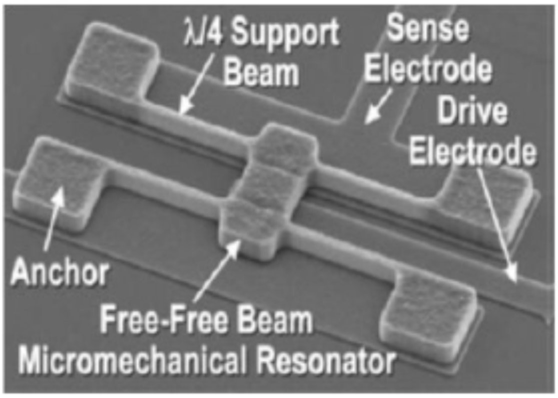
شکل (1-2):تیر میکرورزوناتور با تحریک الکتروستاتیکی شانه ای[6]

بانن و همکاران در سال 2000 فیلتر میکروالکترومکانیکی فرکانس بالا، متشکل از رزوناتورهای تیر دوسرگیردار که توسط تیری نرم به هم متصل بودند را ساختند[7]. رزوناتور در هر دو انتها درگیر بوده و تا 54/2 مگاهرتز و فاکتور کیفیت 840 در خلا تست شدند.



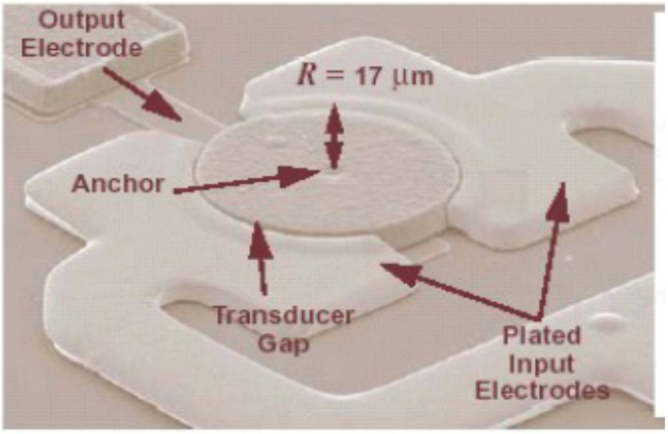
شکل (1-3): میکرورزوناتور تیر دوسرگیردار [7]

در سال 2000 میکرورزوناتور تیر دوسر آزاد با مود خمشی ساخته شد تا به فاکتور کیفیت 8000 در فرکانس بین 30 و 90 مگاهرتز برسد[8]. شکل (1-4)، شماتیک تیر دو سر آزاد را با فرکانس 50/35 مگاهرتز نشان می‌دهد.



شکل (1-4): میکرورزوناتور پلی سیلیکونی تیر دوسر آزاد [8]

در سال 2003 رزوناتور دیسکی در فرکانس 156 مگاهرتز با فاکتور کیفیت 9400 ساخته شد[9]. این رزوناتور دارای دو الکترود حول دیسک ارتعاشی می‌باشد.

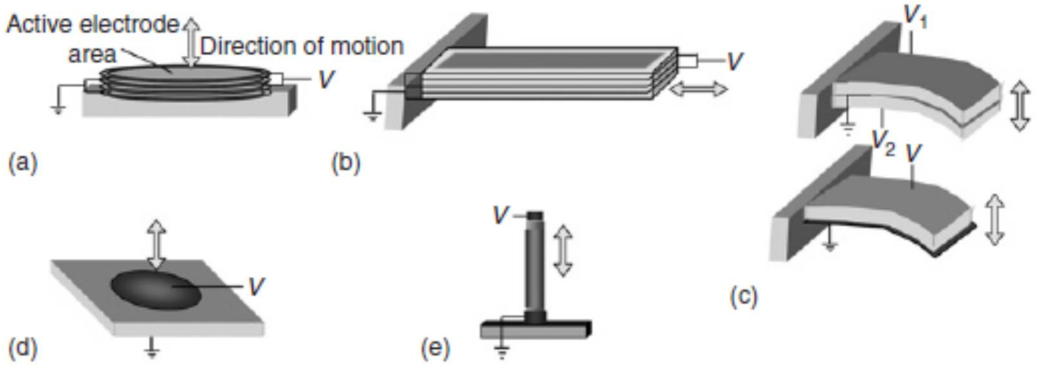


شکل (1-5): میکرورزوناتور دیسکی[9]

1-2-2 عملگرها

چون الاستومرها موادی شکل پذیر هستند می‌توانند به بسیاری از اشکال و ترکیبات با ابعاد متنوع موجود باشند. اکثر عملگرهایی که امروزه استفاده می‌شوند توسط انستیتو تحقیقاتی استنفورد در دهه 1990 تا 2000 توسعه داده شد. این ترکیبات شامل اشکال نورد ماهیچه‌ای شکل، لوله‌ای، تک ماده، دو ماده‌ای، دیافراگم، عملگرهای به شکل قاب برای کاربرد اپتیکی، بالون‌های کروی برای کاربرد در هوافضا و آکوستیک، تیر خمشی و ... می‌باشد. ویژگی‌های منحصربه‌فرد الاستومر دی‌الکتریک چالش-هایی را در طراحی و انتخاب ترکیب بندی عملگر ایجاد می‌کند. طراحی و ساخت این عملگرها به دلیل ساختمان آن که صرفا متشکل از الاستومر دی‌الکتریک بین دو الکترود است در مقایسه با

عملگرهایی همچون الکترومغناطیسی که نیاز به دقت در بیرینگ ها و فاصله دقیق شکاف دارد ساده تر است و در مقایسه با عملگرهای پیزوالکتریک فراگیرتر می‌باشند، هرچند خصوصیات ویژه آن همچون کرنش بالا، برخی چالش‌های تکنیکی را ایجاد می‌کند. به عنوان مثال الاستومری همچون اکریلیک، توانایی ایجاد کرنشی بیش از 300درصد را به‌همراه 1تا 5 مگاپاسگال مدول الاستیسیته دارد درحالی که PZT که نوعی سرامیک پیزوالکتریک می‌باشد تنها کرنش 0,1 درصدی به همراه مدول الاستیسیته 65 گیگاپاسکال دارد. ترکیب‌بندی‌های اصلی عملگرها در شکل (1-6) آمده است[10]:



شکل (1-6): ترکیب‌بندی‌های مختلف عملگرها [10]

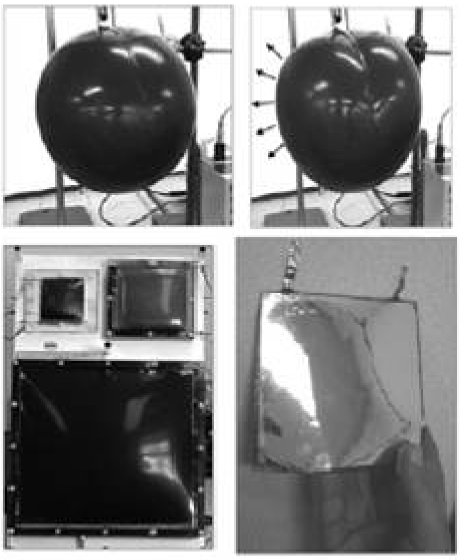
جنبه‌های مطلوبی که الاستومر را گزینه مناسبی برای کاربرد در عملگرها می‌نماید به طور خلاصه به قرار زیر است:

- ساختار یکپارچه[1]: پلیمرها می‌توانند به‌راحتی به صفحات با مساحت زیاد یا هرشکل دیگری بدل شوند.
- انعطاف پذیری و مطابقت: عملگرها به دلیل نرم بودن پلیمرها انعطاف پذیر بوده و می‌توانند تغییر شکل داده و یا سطوح مختلف را دنبال کنند.
- شفافیت: اکثر الاستومرها شفاف بوده و این امر کاربرد در موارد اپتیکی را ممکن نموده و نیز دیدن داخل عملگر را امکان پذیر می‌نمایند.

[1] Monolithic

- چندوظیفه‌ای: پلیمرها می‌توانند به‌راحتی در سازه‌ها علاوه بر نقش عملگری، وظایف محافظتی یا ساختاری را انجام دهند.

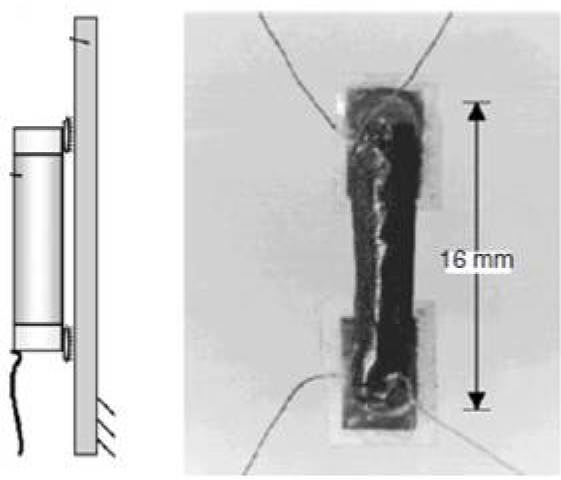
کاربرد الاستومرهای دی‌الکتریک در عملگرها بسیار گسترده می‌باشد، به عنوان مثال از عملگرهای با مساحت زیاد یا چند وظیفه ای می توان، بلندگوها (عملگر آکوستیک)، آینه انعطاف پذیر و عملگر بالون را نام برد (شکل 1-7). بلندگوهای الاستومری در مقایسه با بلندگوهای قدیمی بسیار ساده‌تر و سبک‌تر بوده و به راحتی قابلیت تبدیل به سطح را دارند. همچنین آینه انعطاف پذیر، نشان از قابلیت بالای کنترل شکل الاستومرها در اجسام با اندازه بزرگ همچون تلسکوپ های فضایی دارد. در بالون نیز تنش توسط جدار داخلی حفظ شده و نیازی به قاب یا هرگونه سازه اضافی ندارد. این ترکیب‌بندی می‌تواند برای پمپ کردن یا بلندگو استفاده شود.



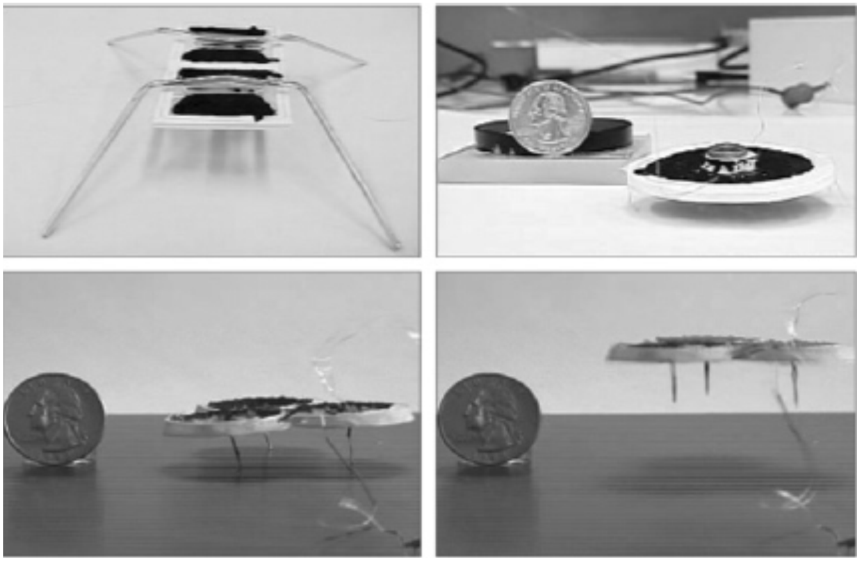
شکل (1-7): عملگر بالون، عملگر آکوستیک و آینه الاستومری [10]

از دیگر کاربردهای الاستومرها می‌توان به استفاده در ربات‌ها چه در اندازه بزرگ و چه میکرو برای ماهیچه‌های مصنوعی اشاره نمود. مزیت استفاده از الاستومرها در میکرو-روبات‌ها نسبت به اندازه بزرگ، دسترسی این ربات‌ها به مکان‌های غیرقابل دسترس برای ربات‌های بزرگ و نیز عملکرد به نسبت سریع‌تر آن‌ها می‌باشد. الاستومرهای دی‌الکتریک نشان دادند که توانایی انجام جنبه‌های کاری

مهمی از ماهیچه های مصنوعی را دارند. در این راه، عملگرهای نوردشده که از مواد سیلیکونی و اکریلیک ساخته شده‌اند می‌توانند گزینه مناسبی برای شبیه‌سازی ماهیچه‌های طبیعی باشند، به عنوان مثال عملگر نوردشده با وزن 0,25 گرم، طول 15 میلی متر و قطر 2 میلی متر، توانایی ایجاد g 15 شتاب دارد. میکروربات‌ها در اندازه کوچک‌تر از حشرات ساخته نمی‌شوند زیرا باید مواردی همچون پردازش اطلاعات، حسگر، منبع توان و ... را در یک ساختار داشته باشند. عملگرهای نورد که برای ربات‌ها استفاده می‌شوند دارای کرنش و انعطاف‌پذیری بالایی بوده و قابلیت حرکت در سطوح سخت یا لوله‌ها را فراهم می‌کند و در عین حال از گیره‌های الکتروستاتیکی بهره می‌برد تا توانایی حرکت در هر دو سوی افقی و عمودی را داشته باشد. این روبات‌ها همچنین در مقابل شوک و استفاده‌های نامناسب مقاوم هستند به‌طوری‌که این ربات در اثر له شدن، کاملا صاف شده و نمی‌شکند. ربات‌ها همچنین می‌توانند از عملگرها به شکل قاب ساخته شوند که هر یک از این موارد یاد شده در شکل‌های (1-8) و (1-9) نشان داده شده اند[10].



شکل (1-8): عملگر نوردشده به عنوان ربات با پاهای الکتروستاتیکی[10]



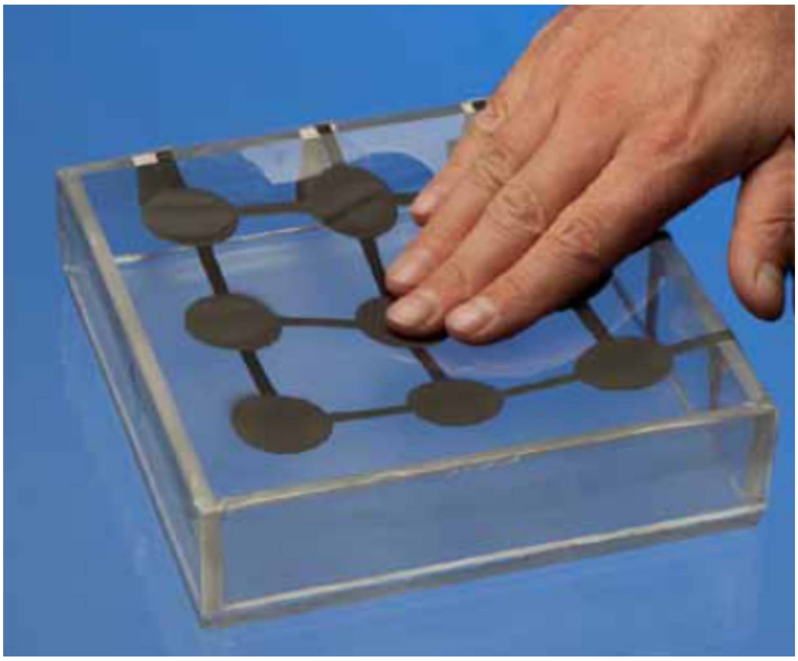
شکل (1-9): ربات‌های کوچک با عملگر به شکل قاب[10]

3-2-1 حسگرها

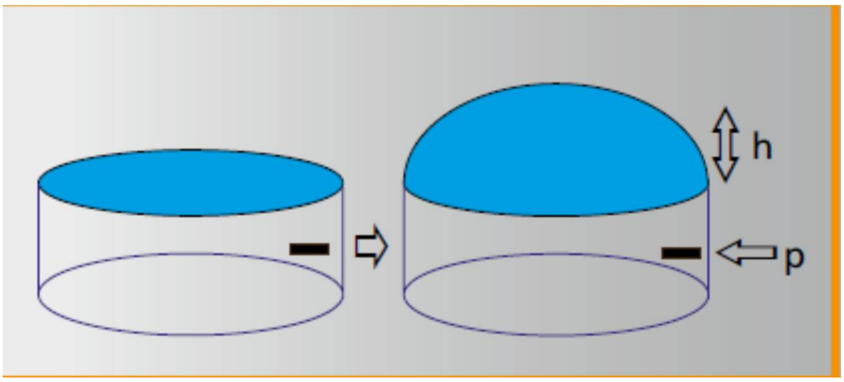
حسگرهای الاستومر، دسته جدیدی از حسگرهای مکانیکی بوده که برای اندازه‌گیری تغییر شکل، نیروها و فشار استفاده می‌شود. این حسگرها دارای الاستیسیته بالا بوده و لذا می‌توانند در سازه‌هایی که تحت تغییر شکل بزرگ هستند تجمیع شوند. کاربرد بالقوه دیگری که در این حسگرها موجود است در تکنولوژی پزشکی برای مانیتور کردن فعالیت‌های بدن و نیز تکنولوژی اتوماسیون می‌باشد. ماده الاستومری در حسگر می‌تواند آکریلات[1] یا پلی اریتان[2] و یا لاستیک سیلیکونی باشد که مورد آخر برتری دارد. صرف نظر از طراحی و هندسه ابعاد، سختی الاستومر تعیین کننده حساسیت حسگر می‌باشد. برای جلوگیری از سایش می‌توان حسگر را در محفظه‌ای قرار داد. حسگر، عمل اندازه‌گیری پارامتر موردنظر را از طریق مقدار تغییر در ظرفیت خازن مشخص می‌کند. به عنوان مثال طبق شکل (1-10) یک حسگر کرنش می‌تواند با کشیده شدن غشاء و به دنبال آن تغییر خطی ظرفیت با کرنش،

[1] Acrylate
[2] Polyurethane

مقدار کرنش را تعیین کند و یا در حسگر فشار طبق شکل (1-11) با متورم شدن غشاء توسط فشار اعمالی ظرفیت خازن تغییر کند[11].



شکل (1-10): حسگر کرنش [11]

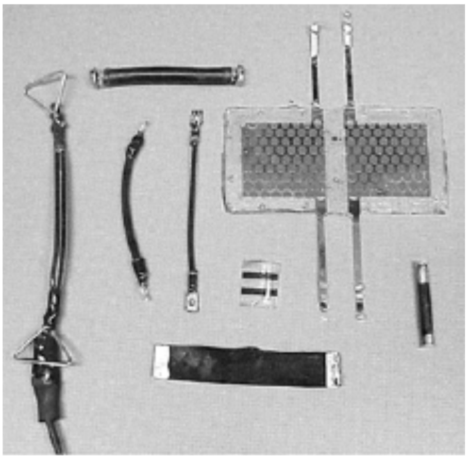


شکل (1-11): طرز عملکرد حسگر فشار [11]

اندازه‌گیری تغییر در ظرفیت الاستومرهای دی‌الکتریک می‌تواند در کاربردهای زیر نیز استفاده گردد:

- حسگرهای ردپا
- اندازه گیری فشار در گازها و مایعات
- مانیتورینگ وظایف بدن همچون تنفس، ضربان یا فشار خون
- تعیین توزیع فشار (به عنوان مثال برای جلوگیری از زخم بستر)

کاربردهای مختلف، نیازمند ویژگی‌های مختلف در الاستومرهاست. این امر از طریق تغییر در ترکیب مواد، هندسه غشاء و طراحی حسگر قابل دستیابی است. در شکل (1-12) انواع مختلف ترکیب‌بندی-های این حسگرها آمده است:



شکل (1-12): ترکیب بندی‌های مختلف حسگرها [11]

1-2-4 مزیت ها

- ساخت ساده حتی در مقیاس کوچک
- انعطاف‌پذیری
- تطابق محیطی
- کرنش بالا
- چگالی انرژی بالا
- راندمان بالا
- پاسخ‌دهی سریع
- نبود محدودیت‌های ابزار الکتروستاتیکی با دی‌الکتریک هوا
- توانایی ایجاد میدان الکتریکی بیش از $100\frac{MV}{m}$ در مقایسه با ایجاد $40\frac{MV}{m}$ توسط دی-الکتریک هوا
- داشتن ثابت دی‌الکتریک 3 تا 10 در مقایسه با ثابت دی‌الکتریک 1 برای هوا

3-1 لاستیک[1]

1-3-1 مرور تاریخی

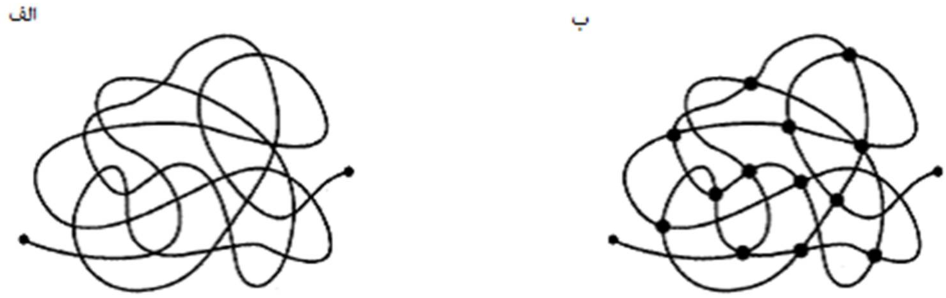
لاستیک طبیعی در حقیقت از ترشحات درخت مو که در ظاهر شیری رنگ است می‌باشد. این مواد در حالت بکر، بیشتر شامل هیدروکربن (در حد 92 تا 98 درصد) بوده و به فرم‌های شیره گیاهی، صمغ، مواد معدنی، پروتئین‌ها و آب می‌باشند.

گفته می‌شود که مصریان اولین افرادی بودند که از لاستیک طبیعی استفاده نمودند. قبیله‌های آفریقایی و آمریکایی از مواد انعطاف‌پذیر برای ساخت کفه کفش استفاده نموده و در ورزش‌ها نیز از ضربه زدن به توپ لاستیکی با زانو و شانه‌هایشان بهره می‌بردند. اما تا کشف روش ولکانیزاسیون[2]، لاستیک به دلیل حساسیت بالا به محیط، دارای کاربرد صنعتی چندانی نبود. لاستیک طبیعی در اثر حرارت‌دهی اندک، نرم و چسبنده، سپس سخت و در اثر سردشدن شکننده می‌گردد. ولکانیزاسیون خواص فیزیکی لاستیک را طوری تغییر می‌دهد که قابلیت حل شدنش کاهش یافته، مقاومت کششی و مقاومتش به حرارت افزایش یافته و ضمنا حالت الاستیک خود را در دماهای پایین‌تر حفظ می‌کند.

لاستیک طبیعی در یک سطح معمولی متشکل از مولکول‌ها با زنجیره بلند است که در شکل (1-13) نشان داده شده است. ولکانیزاسیون فرآیندی است که با اتصالات شیمیایی، زنجیره‌ها را به هم وصل می‌کند تا یک شبکه سه‌بعدی الاستیک تشکیل دهد[12]. اتصال عرضی مولکول‌ها با زنجیره بلند در شکل (1-13) آمده است.

[1] Rubber

[2] در طی این روش، لاستیک اکسیده می‌شود و سولفور کاهیده به سولفید تبدیل می‌شود که توسط گودیر و هانکوک در سال 1839 ارائه شد.



شکل (1-13): بیان شماتیک تئوری مولکول‌ها با زنجیره بلند: الف) مولکول‌های لاستیک طبیعی ب) اتصال عرضی تقویت شده مولکول‌های لاستیک طبیعی[12]

ترکیبات لاستیک عموما متشکل از لاستیک پایه (مثل لاستیک طبیعی)، یک پرکننده (مثل کربن سیاه) و سخت کننده (مثل سولفور) می‌باشد. ویژگی‌های فیزیکی معمول که در ترکیبات اندازه‌گیری-شده، شامل سختی، مقاومت کششی نهایی، کشیدگی[1] نهایی و ... می‌باشد. هر عامل و ذره‌ای می‌تواند مستقلا بر این ویژگی‌های فیزیکی اثرگذار باشد. بهبود دادن هر ویژگی، همواره منجر به تغییر دیگر ویژگی‌ها، چه بهتر و چه بدتر شدن، خواهد شد[13].

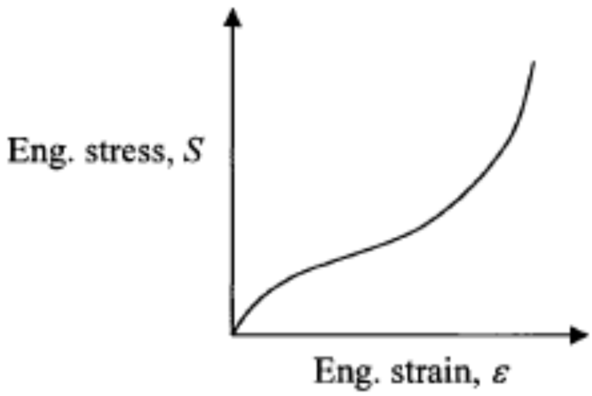
اجزاء لاستیکی در کنار کاربرد در لاستیک اتوموبیل در چندین نوع کاربرد استفاده می‌شوند. آن‌ها به دلیل هدایت حرارتی و الکتریکی پایین در روکش سیم، ارینگ‌ها و آب بند وسایل الکتریکی، به دلیل ظرفیت جذب صدا و ارتعاش در ایزوله کردن یاتاقان‌ها[14]، بوش‌ها و اتصالات و نیز به علت نفوذناپذیری در بارانی‌ها، آب بندها و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. برخی مواد لاستیکی قابلیت کشیدگی 5 تا 6 برابری نسبت به طول اولیه خود را دارند.

رفتار غیرخطی تنش-کرنش در مواد لاستیکی با نرم شوندگی آنی مدول الاستیسیته در کرنش‌های کم و متوسط و سپس سخت شوندگی در نزدیکی بیشینه کرنش ماده مشخص می‌شود که این امر در شکل (1-14) نشان داده شده است. اولین تلاش‌ها برای بیان رفتارالاستیک در لاستیک نیازمند درنظر گرفتن تئوری تغییر شکل محدود بوده و منجر به قوانین سازگاری ماده از طریق توابع انرژی

---

۱ elongation

کرنشی گردیده و با عنوان هایپرالاستیسیته شناخته می‌شود[15]. کارهای اولیه ترلوآر[1] [16] توسعه بیشتری را در مدل‌های هایپرالاستیک به راه انداخت که نشان از سخت‌شدگی مواد لاستیکی در نزدیکی حد کشیدگی[2] آنها داشت.



شکل (1-14): بیان کیفی رابطه غیرخطی تنش-کرنش در مواد لاستیکی که نشان از نرم شوندگی اولیه و سخت شوندگی در محدوده کشیدگی ماده دارد. [15]

1-3-2 ویژگی‌های مکانیکی لاستیک

از رفتار تنش- کرنش لاستیک موارد متعددی قابل استخراج است. یکی از مهمترین پدیده‌های مشاهده شده رفتار الاستیک غیرخطی است که در این قسمت بررسی می‌شود. در ابتدا مفاهیم پایه مربوطه، سپس مواد هایپرالاستیسیته، مدل‌های در دسترس و در نهایت معرفی تست‌های موجود برای دستیابی به پارامترهای مدل و تکمیل آن‌ها ارائه می‌شود[16].

1-3-2-1 تغییر شکل و کرنش

نقطه شروع مکانیک کوانتوم، اندازه‌گیری جابجایی و تغییر شکل می‌باشد. نقطه p در یک جسم طبق شکل دارای بردار مکان مرجع $X = X_i e_i$ است. مکان جدید نقطه p در طی تغییر شکل و یا حرکت به نقطه p' بدل می‌شود که دارای بردار مکان $x = x_i e_i$ است.رابطه بردار مکان قبلی و بردار مکان جدید توسط بردار جابجایی u طبق معادله (1) است:

---
[1] Treloar
[2] Elongation limit

$$x_i = X_i + u_i \tag{1-1}$$

فرم دیفرانسیلی معادله بالا به این صورت است:

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = F_{ij} dX_j \tag{1-2}$$

که F_{ij} تانسور گرادیان تغییر شکل است که به فرم ماتریسی با F نشان داده می‌شود.

تانسور راست کوشی-گرین از گرادیان تغییر شکل بدست می‌آید:

$$C_{ij} = F_{mi} F_{mj} \tag{1-3}$$

یا به فرم ماتریسی زیر می‌باشد:

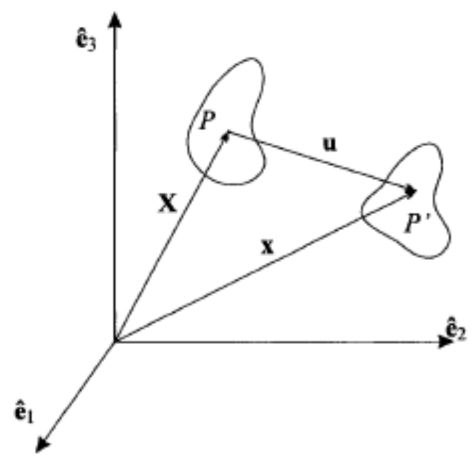
$$C = F^T.F \tag{1-4}$$

به همین ترتیب تانسور چپ کوشی-گرین برابر است با:

$$B_{ij} = F_{im} F_{jm} \tag{1-5}$$

یا به فرم ماتریسی عبارتست از:

$$B = F.F^T \tag{1-6}$$



شکل (1-15): بردارهای موقعیت اولیه و ثانویه [16]

تعریف این تانسورها منجر به تعریف کرنش می‌شود. از تانسور راست کوشی-گرین (C) برای یافتن تانسور کرنش لاگرانژین (تانسوری که کرنش را بر اساس حالت مرجع را بیان می‌کند) معادل است با:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(C_{ij} - \delta_{ij}\right) \tag{1-7}$$

که δ_{ij} تابع دلتای کرانکر می‌باشد.

تانسور کرنش اویلری که شکلی از کرنش نسبت به موقعیت تغییر شکل یافته را بیان می‌کند برابر است با:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - B_{ij}^{-1}\right) \tag{1-8}$$

همچنین نسبت کشیدگی[1] برای المان یک بعدی با طول اولیه L_0 و طول ثانویه L برابر است با:

$$\lambda = \frac{L}{L_0} \tag{1-9}$$

آشناترین تعریف برای کرنش، کرنش مهندسی یا اسمی می‌باشد که بر اساس تغییر طول نسبت به طول اولیه بیان شده و مستقیما از نسبت کشیدگی تعیین می‌شود:

$$\varepsilon_i = \lambda_i - 1 \tag{1-10}$$

گرادیان تغییر شکل F ، بر اساس دو تانسور یعنی تانسور دوران متعامد R و تانسور راست کشیدگی متقارن مثبت معین U یا تانسور چپ کشیدگی V به صورت زیر قابل بیان است:

$$F = R.U = V.R \tag{1-11}$$

مقادیر ویژه تانسور راست کشیدگی، نسبت‌های کشیدگی اصلی[2] می‌باشند:

$$\det\left[U_{ij} - \lambda_n \delta_{ij}\right] = 0 \tag{1-12}$$

این نسبت کشیدگی با مقادیر ویژه تانسور راست کوشی گرین از طریق معادلات مشخصه مرتبط است:

$$\det\left[C_{ij} - \lambda_n^2 \delta_{ij}\right] = 0 \tag{1-13}$$

یعنی مقادیر ویژه تانسور راست کوشی-گرین λ_i^2 است که این مقدار برای تانسور چپ کوشی-گرین برابر λ_i^{-2} می‌باشد.

---

۱ Stretch ratio

۲ Principle stretch ratios

1-3-2-2 ثوابت کرنش

ثوابت کرنش از طریق تانسور راست کوشی- گرین و بدون توجه به جهت مختصات قابل تعریف می-باشد:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = tr(\mathrm{C}) \tag{1-14}$$

$$I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - tr(\mathrm{C}^2)\right) \tag{1-15}$$

$$I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 = J^2 = \det(\mathrm{C}) \tag{1-16}$$

ثوابت کشیدگی $\lambda_i (i=1,2,3)$ ریشه مربعی مقادیر ویژه تانسور چپ یا راست کوشی-گرین می-باشند.

به همین ترتیب، دترمینان تانسور راست کشیدگی برابر با J است :

$$J = \det(\mathrm{U}) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{1-17}$$

اگر همچون مساله مورد بررسی ما، ماده غیر قابل فشرده باشد آنگاه J همواره برابر یک بوده و رابطه سودمندی را بین نسبت‌های کشیدگی اصلی برقرار می‌سازد:

$$J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \tag{1-18}$$

به همین ترتیب می‌توان ثوابت کرنش را از طریق تانسور تغییر شکل چپ کوشی- گرین تعریف کرد:

$$I_1 = tr(B) = B_{kk} \tag{1-19}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - B..B\right) = \frac{1}{2}\left(I_1^2 - B_{ik}B_{ki}\right) \tag{1-20}$$

$$I_3 = \det(B) = J^2 \tag{1-21}$$

برای مواد غیر قابل فشردگی، می‌توان مجموعه ثوابت زیر را نیز برای تانسور تغییر شکل چپ کوشی-گرین به‌کار برد:

$$\overline{I}_1 = \frac{I_1}{J^{2/3}} = \frac{B_{kk}}{J^{2/3}} \tag{1-22}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{I_2}{J^{4/3}} = \frac{1}{2}\left(\bar{I}_1^{\,2} - \frac{B.B}{J^{4/3}}\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{I}_1^{\,2} - \frac{B_{ik}B_{ki}}{J^{4/3}}\right) \quad (1\text{-}23)$$

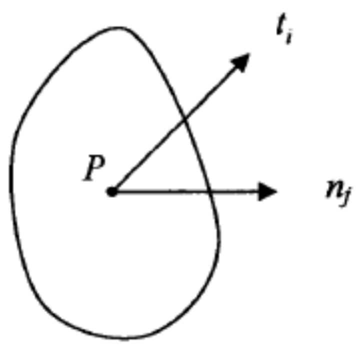
$$J = \sqrt{\det B} \quad (1\text{-}24)$$

3-2-3-1 تنش‌های اصلی

با درنظر گرفتن نقطه P در صفحه المان با بردار نرمال n_j و بردار ترکشن[1] t_i طبق شکل (16)، تنش کوشی با رابطه (1-25) تعریف می‌شود:

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (1\text{-}25)$$

این تعریف ایجاب می‌کند که تنش در حالت تغییر شکل یافته یک نقطه بیان شود و لذا به تنش حقیقی[2] نیز معروف است.



شکل (1-16): بردار ترکشن و نرمال روی نقطه P [15]

گاهی راحت‌تر است که تنش مهندسی (که به تنش اسمی، لاگرانژین یا پیولا-کرشهف اول نیز معروف است) را به فرم اندیسی نوشت:

$$S_{ij} = JF_{ij}^{-1}\sigma_{ij} \quad (1\text{-}26)$$

[1] Traction vector
[2] True stress

4-1 الاستیسیته غیرخطی

1-4-1 هایپرالاستیسیته

قوانین سازگاری هایپرالاستیک برای مدل‌کردن موادی استفاده می‌شوند که حین مواجهه با کرنش-های خیلی بزرگ، از خود رفتار الاستیک نشان می‌دهند. آنها رفتار غیرخطی ماده و تغییر شکل‌های بزرگ را در خود جای می‌دهند. کاربرد این تئوری در دو مورد می‌باشد: (1) مدل کردن رفتار لاستیکی در مواد پلیمری (2) مدل کردن فوم‌های پلیمری در معرض تغییر شکل‌های بزرگ برگشت پذیر[44].

پاسخ مواد پلیمری شدیدا به دما، نرخ بارگذاری و کرنش‌های پیشین وابسته است. پلیمرها دارای محدوده‌های مختلف رفتاری همچون حالت شیشه ای[1]، ویسکوالاستیک و لاستیکی می‌باشند. در دمای بحرانی که به نام دمای گذار شیشه ای[2] شناخته می‌شود، ماده پلیمری تحت تغییرات قابل توجه مکانیکی قرار می‌گیرد. در زیر این دما همچون حالت شیشه‌ای با رفتار نرم عمل کرده و در نزدیکی دمای گذار، تنش شدیدا به نرخ کرنش وابسته است. در خود دمای گذار افت قابل توجهی در مدول الاستیسیته رخ می‌دهد و در بالای این دما رفتار لاستیکی از ماده مشاهده می‌شود به‌طوری که رفتار الاستیک بوده، تنش وابستگی قابل توجهی به نرخ کرنش نداشته و مدول نیز با دما افزایش می‌یابد. تمام پلیمرها این رفتار کلی را دارند اما محدوده هر رفتار و جزییات آن به ساختار مولکولی ماده بستگی دارد. در بین پلیمرها، پلیمرها با اتصال عرضی[3] یا همان الاستومرها دارای ایده‌آل ترین رفتار الاستیک بوده که ماده مورد نظر ما در این پژوهش نیز می‌باشد. مواد هایپر الاستیک چنین رفتار الاستیکی را تقریب می‌زنند.

رفتار ماده لاستیکی دارای جنبه‌های زیر می‌باشد:

---

۱ glassy

۲ Glass transition temperature

۳ Cross-linked polymers

(1): ماده الاستیک ایده‌آل می‌باشد یعنی الف) وقتی ماده در دمای ثابت یا آدیاباتیک تغییر شکل می-یابد، تنش صرفا به کرنش آن لحظه وابسته بوده و مستقل از نرخ بارگذاری می‌باشد. ب) رفتار برگشت‌پذیر دارد یعنی در طی یک سیکل بسته از کرنش در شرایط هم دما یا آدیاباتیک، هیچ کار خالصی روی ماده انجام نمی‌شود.

(2): ماده شدیدا در مقابل تغییرات حجمی مقاومت می‌کند.

(3): مدول برشی آن در حدود 10^{-5} برابر اکثر مواد است.

(4): ماده ایزوتروپیک است یعنی پاسخ تنش-کرنش مستقل از جهت‌گیری ماده است.

(5) مدول برشی وابسته به دما بوده و ماده در اثر حرارت دهی سفت‌تر می‌شود.

(6): وقتی ماده کشیده می‌شود از خود حرارت آزاد می‌کند.

تمامی مواد هایپرالاستیک از قوانین زیر پیروی می‌کنند:

(1): رابطه تنش وکرنش برای ماده از طریق چگالی انرژی کرنشی W که تابعی از تانسور گرادیان تغییر شکل است بیان می‌شود: $W = W(\mathrm{F})$. این امر نشان می‌دهد که ماده کاملا الاستیک بوده و نیز بدین معنی است که صرفا نیازمند کار با یک تابع اسکالر می باشیم. شکل کلی تابع چگالی انرژی کرنشی با آزمایشات مشخص شده و فرمول استخراجی شامل ثوابتی است که برای هر ماده خاص قابل حصول است.

(2): ماده تغییر شکل نیافته، ایزوتروپیک فرض می‌شود یعنی رفتار ماده مستقل از جهت‌گیری اولیه ماده نسبت به بارگذاری است. اگر تابع چگالی انرژی کرنشی تابعی از تانسور تغییرشکل چپ کوشی باشد معادله سازگاری حاصل به طور خودکار ایزوتروپیک است.

(3): رابطه تنش-کرنش از طریق مشتق‌گیری نسبت به چگالی انرژی کرنشی حاصل می‌شود.

2-4-1 محاسبه رابطه تنش-کرنش از چگالی انرژی تغییر شکل[17]

قانون سازگاری برای ماده هایپرالاستیک ایزوتروپیک از طریق معادله‌ای بیان می‌شود که چگالی انرژی کرنشی را به گرادیان تغییر شکل یا سه ثابت تانسور کرنش برای ماده ایزوتروپیک مرتبط می‌کند:

$$W(F)=U(\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2,\mathrm{I}_3)=\bar{\mathrm{U}}(\bar{\mathrm{I}}_1,\bar{\mathrm{I}}_2,\mathrm{J})=\tilde{\mathrm{U}}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \tag{1-27}$$

آنگاه رابطه تنش- کرنش باید از مشتق‌گیری چگالی انرژی کرنشی حاصل شود. در ادامه، رابطه تنش-کرنش بر حسب انتخاب ثوابت آمده است:

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب گرادیان تغییر شکل:

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{j}F_{ik}\frac{\partial W}{\partial F_{jk}} \tag{1-28}$$

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب I_1,I_2,I_3 :

$$\sigma_{ij}=\frac{2}{\sqrt{I_3}}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial I_1}+I_1\frac{\partial U}{\partial I_2}\right)B_{ij}-\frac{\partial U}{\partial I_2}B_{ik}B_{kj}\right]+2\sqrt{I_3}\frac{\partial U}{\partial I_3}\delta_{ij} \tag{1-29}$$

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب $\bar{I}_1,\bar{I}_2,\mathrm{J}$:

$$\sigma_{ij}=\frac{2}{J}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{J^{2/3}}\left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_1}+\bar{I}_1\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_2}\right)B_{ij}-\left(\bar{I}_1\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_1}+2\bar{I}_2\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_2}\right)\frac{\delta_{ij}}{3}\\-\frac{1}{J^{4/3}}\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{I}_2}B_{ik}B_{kj}\end{array}\right]+\frac{\partial\bar{U}}{\partial J}\delta_{ij} \tag{1-30}$$

- چگالی انرژی کرنشی بر حسب $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$:

$$\sigma_{ij}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\lambda_1}b_i^{(1)}b_j^{(1)}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\lambda_2}b_i^{(2)}b_j^{(2)}+\frac{\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\lambda_3}b_i^{(3)}b_j^{(3)} \tag{1-31}$$

اکثر مواد لاستیکی شدیدا در مقابل تغییر حجم مقاومت می‌کنند و لذا به صورت مواد غیر قابل فشرده[1] تقریب زده می‌شوند. مدل‌های مختص به مواد هایپرالاستیک دارای این ویژگی‌ها می‌باشند:

(1): برای حفظ حجم باید $J=1$ باشد.

(2): چگالی انرژی کرنشی صرفا تابعی از دو ثابت کرنش می‌باشد.

---

[1] incompressible

5-1 مدل‌های سازگاری

مدل‌های هایپرالاستیک بسته به کاربردهای محققین از تابع انرژی کرنشی، به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند[18]:

- دسته اول ناشی از مفهوم ریاضی تابع انرژی کرنشی می‌باشند مانند سری ریولین[1] یا اگدن[2]، به این دسته مدل‌های پدیدارشناختی[3] می‌گویند. تعیین پارامترهای ماده در این مدل‌ها مشکل بوده و در خارج از محدوده تغییر شکلشان ممکن است منجر به خطا شوند.
- دومین نوع از مدل‌هایی هستند که از مفاهیم فیزیکی قابل استخراج‌اند. این مدل‌ها بر اساس فیزیک شبکه زنجیره‌ای پلیمر و روشهای آماری می‌باشند. این امر بسته به پدیده‌های میکروسکوپیک، منجر به توابع انرژی کرنشی متفاوتی می‌گردد و در اکثر موارد فرمول‌بندی ریاضی آنها کمی پیچیده است.

در این بخش تعدادی از مدل‌های حاکم بررسی می‌شوند.

1-5-1 مدل‌های پدیدارشناختی[18]

1-1-5-1 مدل مونی[4] (مدل مونی-ریولین مرتبه اول)

مونی مشاهده کرد که رفتار لاستیکی تحت بارگذاری ساده برشی، خطی می‌باشد. وی تابع چگالی انرژی کرنشی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$W = C_1(I_1-3) + C_2(I_2-3) \tag{1-32}$$

که C_1 و C_2 دو پارامتر ماده هستند. این مدل به طور گسترده برای مواد لاستیکی با کرنش متوسط (زیر 200٪) استفاده می‌شود.

[1] Rivlin
[2] Ogden
[3] Phenomenological models
[4] Mooney model

2-1-5-1 مدل مونی-ریولین[1]

ریولین مدل پیشین را از طریق بسط W به سری‌های چندجمله ای از (I_1-3) و (I_2-3) توسعه داد:

$$W=\sum_{i=0,j=0}^{\infty} C_{ij}(\mathrm{I}_1-3)^i(\mathrm{I}_2-3)^j \tag{1-33}$$

که C_{ij} پارامترهای ماده بوده و $C_{00}=0$ می‌باشد. معمولا جملات سری مورد نظر به جملات مرتبه دوم و سوم ختم می‌شود، به عنوان مثال، نیازمند تعیین 9 پارامتر برای جملات تا مرتبه سوم است. مدل بیان‌شده ریولین قابل توسعه از طریق شکل‌های دیگر ثوابت کرنش می‌باشد. در هر صورت، این شکل از کرنش انرژی به صورت کلاسیک برای کرنش‌های خیلی بزرگ استفاده می‌شود.

طبق رابطه اخیر، مدل سه پارامتری و پنج پارامتری مونی- ریولین به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W=C_{10}(\mathrm{I}_1-3)+C_{01}(\mathrm{I}_2-3)+C_{11}(\mathrm{I}_1-3)(\mathrm{I}_2-3) \tag{1-34}$$

$$W=C_{10}(\mathrm{I}_1-3)+C_{01}(\mathrm{I}_2-3)+C_{11}(\mathrm{I}_1-3)(\mathrm{I}_2-3)+C_{20}(\mathrm{I}_1-3)^2+C_{02}(\mathrm{I}_2-3)^2 \tag{1-35}$$

در مقالات، اثبات شده که مدل مونی- ریولین برای ترکیبات لاستیک پرنشده[2] - به مواد لاستیکی خالی از مواد غیرآلی می‌گویند- مناسب است[19].

3-1-5-1 مدل یئو[3]

یئو در سال 1990 مدل دیگری را پیشنهاد داد که در آن ثابت کرنش دوم (I_2) دارای مقدار ثابت کشیدگی بوده و در تابع انرژی کرنشی دخیل نمی‌شود:

$$W=\sum_{i=1}^{3} c_i\left(I_1-3\right)^i \tag{1-36}$$

این مدل دقت خوبی را برای لاستیک پرشده[4] به همراه داشته و تنها نیازمند تست کشش دومحوره متقارن برای تطابق با داده هاست.

---

۱ The Mooney-Rivlin model

۲ Unfilled rubber

۳ Yeoh model

۴ Filled rubber

4-1-5-1 مدل بیدرمن[1]

بیدرمن از معادله مونی- ریولین تنها جملات با $i = 0$ یا $j = 0$ را حفظ نمود و به این ترتیب سه جمله اول از I_1 و جمله اول از I_2 را مدنظر قرار داد:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \tag{1-37}$$

این مدل به صورت موفقیت آمیز توسط الکساندر[2] استفاده شد.

5-1-5-1 مدل هینس- ویلسون[3]

جیمز و همکاران از مقایسه توصیف چگالی انرژی کرنشی بر حسب ثوابت کرنش و ثوابت کشیدگی تصمیم به حفظ شش جمله اول از سری گرفتند:

$$\begin{aligned} W = {} & C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) \\ & + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \end{aligned} \tag{1-38}$$

6-1-5-1 مدل اگدن[4]

در سال 1972 اگدن، چگالی انرژی کرنشی را بر حسب ثوابت کشیدگی بیان نمود. او چگالی انرژی کرنشی را به صورت یک سری از توان‌های حقیقی $(\lambda_i)_{i=1,2,3}$ ارائه داد:

$$W = \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left(\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3 \right) \tag{1-39}$$

به طوری که پارامترهای ماده باید شرط زیر را ارضاء کنند:

$$\mu_n \alpha_n > 0 \quad \forall n = 1, N \tag{1-40}$$

---

۱ The Biderman model
۲ Alexander
۳ The Haines-Wilson model
٤ Ogden model

1-5-2 مدل‌های فیزیکی[18]

مدل‌های فیزیکی بر اساس پاسخ میکروسکوپیک زنجیره‌های پلیمری در شبکه می‌باشند. این مدل‌ها بر اساس فرض‌های انجام شده در رسیدن به پاسخ با هم تفاوت دارند.

1-5-2-1 مدل نئو-هوکین[1]

این مدل، ساده‌ترین مدل فیزیکی موجود برای مواد لاستیکی است. این مدل در تطابق با مدل مونی-ریولین اما با یک پارامتر ($C_2 = 0$) بوده و در عین حال از ارتباط زنجیره مولکولی بدست می‌آید. مواد لاستیکی از طریق شبکه‌ای از زنجیره های انعطاف پذیر بلند که با اتصالات شیمیایی به هم متصلند حاصل می‌شود. الاستیسیته این شبکه عمدتا به سبب تغییرات آنتروپی در طی تغییر شکل بوده که آنتروپی ماده نیز توسط تعداد ترکیب‌های ممکن از زنجیره‌های ماکرومولکولی تعریف می‌گردد. ترلوآر[2] از توزیع آماری گوسین[3] استفاده و فرم انرژی کرنشی زیر را ارائه نمود:

$$W = \frac{1}{2} nkT(\mathrm{I}_1 - 3) \tag{1-41}$$

که در آن n چگالی زنجیره در واحد حجم، k ثابت بولتزمن و T دمای مطلق است. ترلوآر برای کربن طبیعی سیاه[4] مقدار $\frac{1}{2}nkT$ را برابر 0,2 مگاپاسکال بدست آورد. مدل وی در تطابق مناسبی با تست-های کشش، برش ساده و تست‌های دومحوره در تغییر شکل‌های کمتر از 50٪ بوده است.

1-5-2-2 مدل ایشیهارا[5]

ایشیهارا تئوری غیرگوسین را بکار برده و با استفاده از خطی‌سازی معادلات مربوطه، سری ریولین را برای چگالی انرژی کرنشی بدست آورد:

$$W = C_{10}(\mathrm{I}_1 - 3) + C_{20}(\mathrm{I}_1 - 3)^2 C_{01}(\mathrm{I}_2 - 3) \tag{1-42}$$

---

[1] Neo-hookean
[2] Treloar
[3] Gaussian statistical distribution
[4] Carbon black-filled natural rubber
[5] Ishihara model

باید خاطرنشان ساخت که مدل مولکولی حاضر، شامل ثابت کرنش I_2 بوده که تا پیش از آن در مدل‌های فیزیکی ظاهر نشده بود. به این ترتیب مدل ایشیهارا نزدیک به روابط حاکم بر مدل بیدرمن یا مونی- ریولین می باشد.

در جدول (1-1) تعدادی از مدل‌ها به همراه تعداد پارامترهای مجهول نشان داده می‌شود.

جدول(1-1): لیست برخی مدل‌ها به همراه تعداد پارامترهای مجهول [18]

Model	Year	N.m.p
Mooney	1940	2
Neo-Hookean	1943	1
3-chain	1943	2
Ishihara	1951	3
Biderman	1958	4
Gent and Thomas	1958	2
Hart-Smith	1966	3
Valanis and Landel	1967	1
Ogden	1972	6
Haines-Wilson	1975	6
Slip-link	1981	3
Constrained junctions	1982	3
van der Waals	1986	4
8-chain	1993	2
Gent	1996	2
Yeoh and Fleming	1997	4
Tube	1997	3
Extended-tube	1999	4
Shariff	2000	5
Micro-sphere	2004	5

6-1 تست‌های تعیین پارامترهای ماده

برای استفاده از مدل‌های ارائه شده در مواردی همچون طراحی، ضروری است تا ویژگی‌های مواد در شرایط مناسب تست، تعیین شود. زمانی که از ترکیبی از تست‌ها برای استخراج ضرایب مدل استفاده می‌شود، این داده ها باید در دما و نرخ کرنش یکسان تعیین گردند. این تست‌ها عبارتند از[20] :

(1): تست کشش تک‌محوره[1]

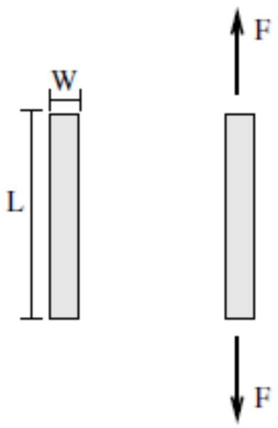
(2): تست برش صفحه ای[1]

[1] Uniaxial tension test

(3): تست کشش دومحوره[2]

1-6-1تست کشش تک‌محوره

تست کشش تک‌محوره ویژگی‌های ماده را تحت تنش صفحه‌ای تعیین می‌کند. برای انجام این تست و برای بدست آوردن کرنش خالص کششی، نمونه مورد آزمایش باید در جهت کششی نسبت به عرض و ضخامت دارای طول بیشتری باشد. قابل ذکر است که از تحلیل المان محدود می‌توان به این امر دست یافت که نیاز است تا طول نمونه حداقل ده برابر عرض باشد.



شکل (1-17): تست کشش تک‌محوره [20]

کرنش ناشی از کشش برابر خواهد بود با:

$$\lambda_1 = \frac{L}{L_0} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1^{-1/2} \tag{1-43}$$

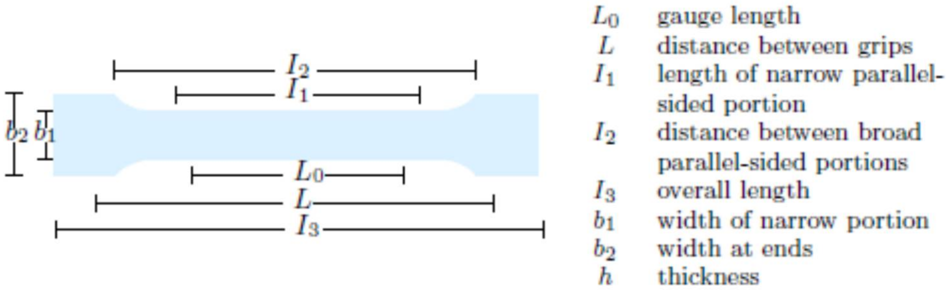
تنش ناشی از کشش با روابط زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_1 = \sigma = \frac{F}{A_0},\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \tag{1-44}$$

که σ تنش، F بار اعمالی و A_0 سطح اولیه گونه می‌باشد.

---
۱ Planar Shear test
۲ Equibiaxial tension test

استانداردهای مختلف برای تست کشش تک‌محوره برای پلاستیک[21] و لاستیک [22] موجود است. تفاوت اصلی بین روش‌ها برای پلاستیک و لاستیک، در هندسه نمونه و سرعت بارگذاری می‌باشد. تست‌های مربوطه بر روی نمونه استخوانی طبق شکل (1-18) انجام می‌گردد.



شکل (1-18): اندازه‌های مورد نظر نمونه تست [20]

جدول (1-2) تفاوت‌های مذکور را برای هر نوع ماده نشان می‌دهد.

جدول (1-2): مشخصه‌های استاندارد برای تست کشش[20]

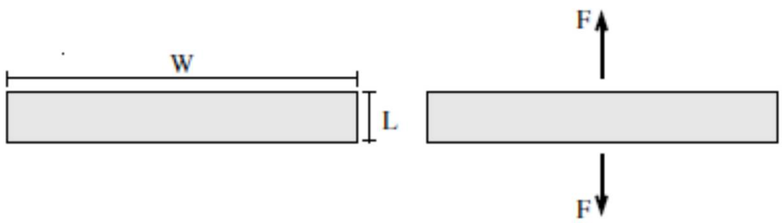
Thermoplastic and thermosetting plastics									
ISO527-2	1A	≥ 150	104 − 113	80 ± 2	20 ± 0.2	10 ± 0.2	4 ± 0.2	50 ± 0.5	115 ± 1
ISO527-2	1B	≥ 150	106 − 120	60 ± 2	20 ± 0.2	10 ± 0.2	4 ± 0.2	50 ± 0.5	$l_2 + 5$
ISO527-2	1BA	≥ 75	58 ± 2	30 ± 0.5	10 ± 0.5	5 ± 0.5	≥ 2	25 ± 0.5	$58 + 2$
ISO527-2	1BA	≥ 75	23 ± 2	12 ± 0.5	4 ± 0.2	2 ± 0.2	≥ 2	10 ± 0.2	$23 + 2$
Rubbers and Elastomers									
ISO37	1	≥ 115	-	33 ± 2	25 ± 1	6 ± 0.4	2 ± 0.2	25 ± 0.5	≥ 115
ISO37	2	≥ 75	-	25 ± 1	12.5 ± 1	4 ± 0.1	2 ± 0.2	20 ± 0.5	≥ 75
ISO37	3	≥ 50	-	16 ± 1	8.5 ± 1	4 ± 0.1	2 ± 0.2	10 ± 0.5	≥ 50
ISO37	4	≥ 35	-	12 ± 0.5	6 ± 0.5	2 ± 0.1	1 ± 0.1	10 ± 0.5	≥ 35
ASTM 412	C	≥ 115	-	33 ± 2	25 ± 1	6 ± 0.05	$1, 3 \ldots 3, 3$	25 ± 0.25	≥ 115
ASTM 412	A	≥ 140	-	59 ± 2	25 ± 1	12 ± 0.05	$1, 3 \ldots 3, 3$	50 ± 0.5	≥ 140
Thin sheetings and films									
ISO527-3	2	≥ 150	-	-	-	10	≤ 1	50 ± 0.5	100 ± 0.5

1-6-2تست برش صفحه ای

تنش در تست برش صفحه‌ای ، همچون تست برش خالص است. مهم‌ترین جنبه در نمونه مورد آزمایش این است که بعد نمونه در راستای کشش بسیار کوتاه‌تر نسبت به عرضش می‌باشد، یعنی:

$$W \geq 10L \quad (1\text{-}45)$$

که طبق شکل (1-19) L طول و W عرض نمونه می‌باشد. توصیه می‌شود که کمینه نسبت عرض به طول معیار، برابر چهار باشد. مطالعات آزمایشگاهی روی نمونه با عرض 200 میلی متر و طول 60 میلی متر و با درگیر کردن طول‌های مختلف نشان داد که نسبت عرض به طول[1] 4 تا 10 بر منحنی تنش- کرنش بی‌تاثیر است[23]. پس در اینجا به جای تنش صفحه‌ای که در تست کشش تک‌محوره انجام می‌شود، گونه در حالت کرنش صفحه‌ای مورد آزمایش قرار می‌گیرد.



شکل (1-19): تست برش صفحه‌ای[20]

کرنش صفحه‌ای: با توجه به تست، کرنش صفحه ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\lambda_1 = \frac{L}{L_0} \qquad \lambda_2 = \lambda_1^{-1} \qquad \lambda_3 = 1 \quad (1\text{-}46)$$

که $\lambda_i \, (i = 1,2,3)$ نسبت‌های کشیدگی در جهت اعمال بار، L_0 طول اولیه و L طول ثانویه است.

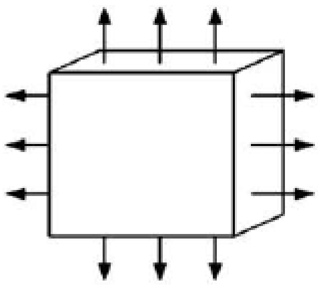
تنش صفحه‌ای: تنش صفحه‌ای نیز دارای روابط نشان داده شده در زیر می‌باشد.

$$\sigma_1 = \sigma \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 \neq 0 \quad (1\text{-}47)$$

1-6-3تست کشش دو محوره

این تست نیازمند اعمال تنش‌های کششی در دو راستای متعامد است که طرح واره آن در شکل (1-20) نشان داده شده است.

---
۱ Aspect ratio



شکل (1-20): نمونه تست برای کشش دو محوره [20]

کرنش برابر است با:

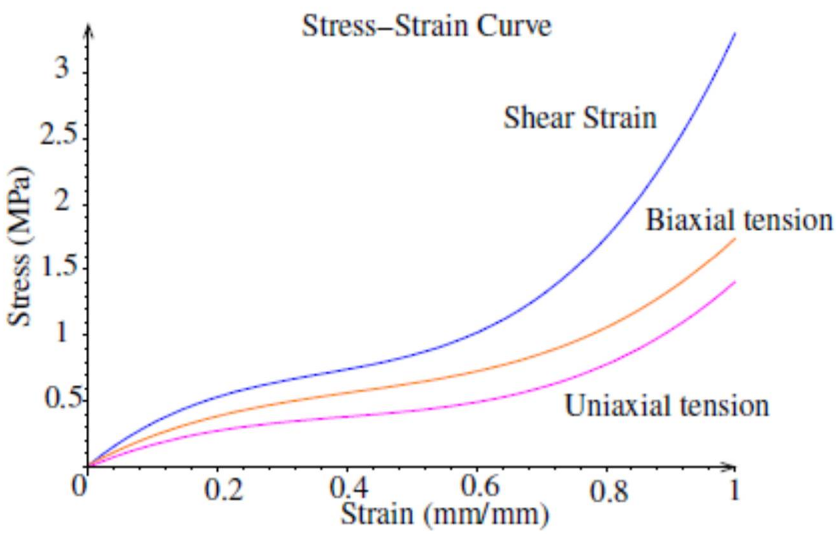
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{L}{L_0} \qquad \lambda_3 = \lambda^{-2} \tag{1-48}$$

که λ کشیدگی در دو راستای عمود بر هم است.

تنش به صورت زیر است:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \qquad \sigma_3 = 0 \tag{1-49}$$

مدل‌سازی و طراحی موفقیت آمیز مواد هایپرالاستیک بستگی به انتخاب مناسب تابع انرژی کرنشی و تعیین صحیح ضرایب در تابع دارد. در ادامه توضیح مختصری در ارتباط با کمترین تعداد تست‌ها برای یافتن مشخصه‌های ماده هایپرالاستیک ارائه می‌شود. برخی از تست‌ها در شکل (1-21) آمده است.



شکل (1-21): منحنی تنش- کرنش آزمایشگاهی برای الاستومر [20]

معمولا تمامی تست‌های لازم برای تعیین مشخصه‌های ماده هایپرالاستیک در دسترس نمی‌باشد. تنها تست کشش تک‌محوره به طور معمول موجود است. هزینه بالای انجام تست‌هایی همچون کشش دومحوره و برشی، استفاده از آنها را محدود کرده است. برای مثال، تست دومحوره نیازمند ماشین تست گران قیمت یا یک چفت و بست خاص می‌باشد.

اگرچه در ظاهر به نظر می‌رسد استفاده همزمان از چندین تست، پاسخ‌های درست‌تر و منطبق-تری را با مدل‌های مختلف به دست می‌دهد که البته اینگونه نیز هست اما قابل اثبات است که تفاوت استفاده از چندین تست و یا صرفا یک تست (تست کشش تک‌محوره) تنها منجر به خطای اندکی می‌گردد که قابل اغماض می‌باشد. این امر را مانوئل و همکارانش در سال 2005 نشان دادند[20]. آن‌ها یک کره صلب را در تماس با ماده هایپرالاستیک قرار داده و دو حالت مختلف را در نظر گرفتند و برای هریک تطابق مدل‌های مختلف و نیز ضرایب را بدست آوردند: (1) تست کشش تک محوری (2): تست‌های برشی، کششی تک‌محوره و دو محوره.

حالت دوم　　　　حالت اول

شکل (1-22): تعیین ضرایب مدل از طریق دو مجوعه تست[20]

آن‌ها مقدار خطای قابل قبول در تطابق دادههای آزمایشگاهی با مدل‌های مختلف را با استفاده از روش حداقل مربعات[1] به میزان 30 درصد تعیین کردند.

[1] Least square method

$$E^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\sigma_i^{TH}}{\sigma_i^{EXP}} \right)^2 \qquad (1\text{-}50)$$

که σ_i^{EXP} تنش های تجربی، σ_i^{TH}مقادیر تنش تئوریک و E مقدار خطاست.

نتایج تطبیق داده‌های آزمایشگاهی در استفاده از تست کشش تک‌محوره طبق جدول (1-3) می-باشد.

جدول (1-3): نتایج انطباق با تست کشش تک‌محوره[20]

مدل های هایپرالاستیک		میزان تطابق تست	درصد خطا
Mooney–Rivlin	2 Parameters	-	60
	3 Parameters	acceptable	15
	5 Parameters	good	1
	9 Parameters	best	0.01
Ogden	Order 1	-	50
	Order 2	-	54
	Order 3	-	54
Neo-Hookean		-	65
Arruda–Boyce		acceptable	30
Gent		-	880
Yeoh	Order 1	-	60
	Order 2	-	40
	Order 3	good	5
Blatz–Ko		-	200

نتایج تطبیق داده‌های آزمایشگاهی در استفاده از چندین تست نیز طبق جدول (1-4) ارائه شد.

جدول (1-4): نتایج انطباق با سه تست[20]

مدل های هایپرالاستیک		میزان تطابق تست	درصد خطا
Mooney–Rivlin	2 Parameters	-	96
	3 Parameters	-	95
	5 Parameters	acceptable	30
	9 Parameters	good	18
Ogden	Order 1	-	180
	Order 2	-	-
	Order 3		-
Neo-Hookean		-	180
Arruda–Boyce		-	130
Gent		-	880
Yeoh	Order 1	-	180
	Order 2	-	140
	Order 3	-	100
Blatz-Ko		-	270

آن‌ها پس از تطابق مدل‌ها و یافتن مدل‌های متناسب با خطای مطلوب، مقدار خطای نرمال‌شده e که نشان از درصد تفاوت بین دو مجموعه تست بود را با این رابطه بدست آوردند:

$$e = 100\frac{\max_{1\le i\le n}\left|\sigma_i^B - \sigma_i^A\right|}{\max_{1\le i\le n}\left|\sigma_i^A\right|} \quad (1\text{-}51)$$

در این رابطه A و B به ترتیب بیانگر حالت اول و حالت دوم تست بوده، n تعداد نودها در دامنه (به دلیل استفاده از تحلیل المان محدود) و σ نیز بیانگر تنش می‌باشد.

به این ترتیب خطای استفاده از صرفا تست کشش تک‌محوره در کار آن‌ها برابر 15٪ بدست آمد و لذا برای سادگی کار می‌توان بدون وارد آمدن ایرادی به اصل کار، تست‌های دیگر از جمله کشش دو محوره و برشی را حذف نمود.

باید ذکر کرد که انجام تنها یک آزمایش برای تعیین پارامترهای ماده لاستیکی کفایت نمی‌کند. حتی اگر فرایند تطبیق برای یک تست مکانیکی همگرا شود هیچ اطمینانی از ارائه همان مقدار

پارامترها در شرایط دیگر بارگذاری نخواهد بود. مثال مناسبی از این امر در کار سیبرت و شوچه[1] موجود است[10]. لذا این مساله باید خاطرنشان شود که در مواردی که تست‌های دیگر در مواد مورد نظر در دسترس باشد، منطقی است که برای بالا بردن دقت انتخاب مدل‌ها و پارامترهای مربوطه از آن‌ها استفاده نمود.

برای استخراج پارامترهای مجهول در معادلات سازگاری همانطور که در بالا ذکر شد باید به یک سری از اطلاعات آزمایشگاهی دسترسی داشت و سپس از طریق تطبیق مدل‌های تئوریک با آنها به مقادیر مجهول دست یافت. در مجموع تعداد کارهای آزمایشگاهی قابل اعتماد اندک بوده که از بین آنها دادههای مربوط به کار ترلوآر[2] بیشترین استفاده را در بین محققین داشته است[16] . کار تطبیق با مدل‌های هایپرالاستیک توسط افراد مختلف با توجه به نوع تست انجام‌شده که در اینجا از نتایج آن‌ها به عنوان مقادیر عددی پارامترهای مجهول در معادله استفاده می‌شود و صرفا برای اطلاع از چگونگی کلیت استخراج این پارامترها، مروری مختصر بر آن می‌شود.

داده‌های ترلوآر برای لاستیک طبیعی پرنشده همراه با 8٪ سولفور برای کشش تک و چند محوره و نیز برش خالص انجام شده است[16]. در کنار کار وی، خروجی کار کاواباتا[3] و همکاران را نیز که به صورت تست کشش دومحوره بر روی گونه پلی سوپرین پرنشده انجام شده نیز بیان می‌شود. دلیل انتخاب این کارهای آزمایشگاهی، در دسترس و قابل اعتماد بودن دادههای بارهای کششی تک محوره و چندمحوره در آن است که علاوه بر آن به خوبی توسط مدل‌های هایپرالاستیک مدل شده است و از خروجی هر یک از آن‌ها به دلیل مشابهت دو ماده می‌توان بهره برد.

برای تعیین پارامترهای ماده باید حل‌های تئوریک ($\hat{Y}$) با نتایج آزمایشگاهی (Y) تطبیق داده شوند. نتایج آزمایشگاهی با n نقطه Y_i مرتبط با n مقدار تئوری $\hat{Y}_i$ تشکیل می شوند. تفاوت بین نتایج تئوریک و آزمایشگاهی به صورت کلاسیک بر حسب خطای حداقل مربعات بیان می‌گردد:

---

[1] Seibert & Schoche
[2] Treloar
[3] Kawabata

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_{i} - \hat{Y}_{i} \right)^{2} \qquad (1\text{-}52)$$

گاهی در عبارت بالا، برای تعدیل اثر برخی داده‌ها، فاکتورهای وزنی اضافه می شوند. اگر $\phi = 0$ گردد مقادیر تئوریک و آزمایشگاهی منطبق می‌شوند، با این حال نتایج آزمایشگاهی همواره از خود عدم قطعیت نشان داده و مدل‌ها نیز به فرض‌های مختلفی وابسته اند، لذا هدف الگوریتم‌ها در کمینه‌سازی ϕ می‌باشد که در این راه از الگوریتم‌های کمینه‌سازی مختلفی همچون روش گرادیان کلاسیک، الگوریتم ژنتیک و ... استفاده شده است. چون هدف در اینجا استخراج مجدد پارامترهای ماده نبوده و صرفا قرار است از مقادیر موجود، در این رساله استفاده شود، لذا از ذکر جزییات و تکرار کارهای دیگران خودداری و برای مطالعه بیشتر به منابع [24-25] ارجاع داده می‌شود.

نتایج حاصل از تطبیق مدل‌های هایپرالاستیک با این دو کار آزمایشگاهی طبق جدول زیر است:

جدول (1-5): پارامترهای سه مدل حاصل از تطبیق با داده‌های آزمایشگاهی [18]

پارامترهای تطبیق داده شده	دادهی آزمایشگاهی ترلوآر(T) و کاواباتا (K)	نام مدل
$c_{10} = 0.208$ $c_{01} = 2.33\times10^{-2}$ $c_{20} = -2.40\times10^{-3}$ $c_{30} = 5\times10^{-4}$	T	بیدرمن
$c_{10} = 0.185$ $c_{01} = 1.27\times10^{-2}$ $c_{20} = -2.9\times10^{-3}$ $c_{30} = 1.77\times10^{-5}$	K	

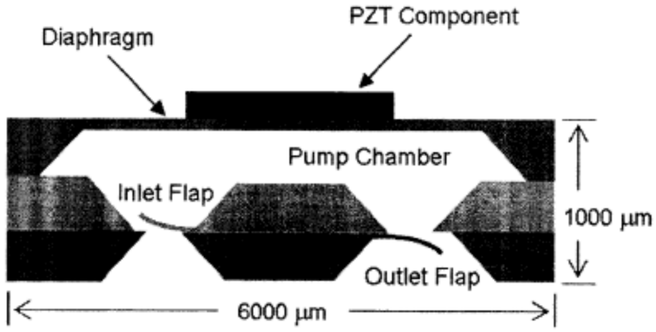
$c_{10}=0.173$ $c_{01}=6.68\times10^{-3}$ $c_{11}=-1.18\times10^{-4}$ $c_{20}=-1.19\times10^{-3}$ $c_{02}=2.3\times10^{-6}$ $c_{30}=3.85\times10^{-5}$	T	هاینس-ویلسون
$c_{10}=0.176$ $c_{01}=2.34\times10^{-2}$ $c_{11}=-1.17\times10^{-3}$ $c_{20}=-4.64\times10^{-3}$ $c_{02}=1.59\times10^{-5}$ $c_{30}=2.47\times10^{-4}$	K	
$c_{10}=0.171$ $c_{01}=4.89\times10^{-3}$ $c_{20}=-2.40\times10^{-4}$	T	ایشیهارا
$c_{10}=0.186$ $c_{01}=1.04\times10^{-2}$ $c_{20}=2.52\times10^{-2}$	K	

7-1 انواع تحریک در سیستم‌های الکترومکانیکی

تحریک می‌تواند به صورت تغییر در حالت مکانیکی سیستم، توسط تغییر موثر سطح انرژی سیستم با اطرافش تعریف گردد. تا کنون انواع مختلف تحریک در سازه‌های میکروالکترومکانیکی استفاده شده که هر یک مزایا و معایب مربوط به خود را دارد. برخی از این انواع عبارتند از: روش‌های الکتروستاتیکی، پیزوالکتریک، مغناطیسی، حرارتی و پنوماتیک/ هیدرولیک. گرچه تمامی روش‌های تحریک مذکور، تا بحال به کار رفته‌اند اما پرکاربردترین آن‌ها روش‌های الکتروستاتیکی، پیزوالکتریک، مغناطیسی و حرارتی بوده اند[26].

1-7-1 تحریک پیزوالکتریک

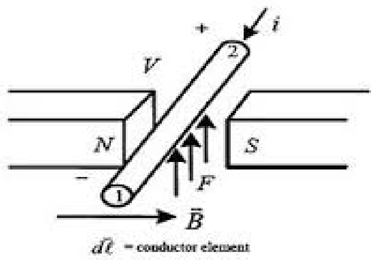
وقتی موادی مانند کوارتز و سرامیک سنتز شده در معرض نیروی مکانیکی قرار می‌گیرند، میدانی الکتریکی در نتیجه قطبی‌شدگی این مواد ایجاد می‌شود ونیز بالعکس اگر میدانی الکتریکی به این مواد وارد شود، تنش مکانیکی ظاهر می‌گردد که به این پدیده، اثر پیزوالکتریک می‌گویند. کاربردهای این نوع تحریک در میکروولوها یا میکروپمپ‌ها می‌باشد که شماتیکی از آن در شکل (1-23) آمده است.



شکل (1-23): نمای مقطع خورده میکروپمپ با تحریک پیزوالکتریک[26]

2-7-1 تحریک مغناطیسی

تحریک مغناطیسی زمانی انجام می‌شود که یک ماده مغناطیسی با روکش فلزی در معرض میدان مغناطیسی خارجی قرار گیرد.



شکل (1-24): تحریک مغناطیسی[26]

3-7-1 تحریک حرارتی

تحریک حرارتی بر این اصل استوار است که وقتی جریان الکتریکی درون عملگری اعمال می‌شود، افزایش حرارت عملگر و در نتیجه تغییر انبساط حرارتی موجب حرکت مکانیکی می‌گردد. عملگرهای

دوبلوره[1] به دلیل استفاده از تفاوت در ضریب انبساط حرارتی دو ماده برای حرکت، متداول‌تر می‌باشند.

تحریک هیدرولیکی نیز امروزه به دلیل توانایی در تولید نیروی تحریک بالا استفاده می‌شود هرچند در انتخاب پارامترهای طراحی سختی هایی وجود دارد.

همچنین ترکیب دو یا چند عامل تحریک در سیستم‌های پیچیده‌تر میکرو که در آن یکی از عوامل برجسته‌تر است بکار می‌رود. عملگرهای الکترو- ترمو- مکانیکی یکی از این موارد می‌باشد.

هر یک از تکنیک‌های یاد شده به طور موفقیت‌آمیزی در صنعت و بر اساس کاربرد و تناسب استفاده شدند[27].

پدیده تحریک الکتروستاتیکی یکی از پرکاربردترین روش‌ها می‌باشد که در ادامه به همراه مزایا، معایب و کاربردها مورد بحث قرار می‌گیرد.

1-7-4 تحریک الکتروستاتیکی [26]

تحریک الکتروستاتیکی می‌تواند در دو حالت کلی از طریق صفحات موازی و تحریک شانه‌ای[2] رخ دهد. تحریک نوع اول از طریق خازن با صفحات موازی است که در آن یکی از صفحات آزادانه قابلیت حرکت دارد. از بین تمامی روش‌های تحریک ، تحریک الکتروستاتیکی به دلایل زیر، بیشترین استفاده را دارد:

(1): سادگی در عملکرد: تحریک صرفا با دو الکترود و شکاف موجود انجام می‌پذیرد.

(2): وزن پایین‌تر

(3): مصرف توان کمتر

---

[1] Bimorph

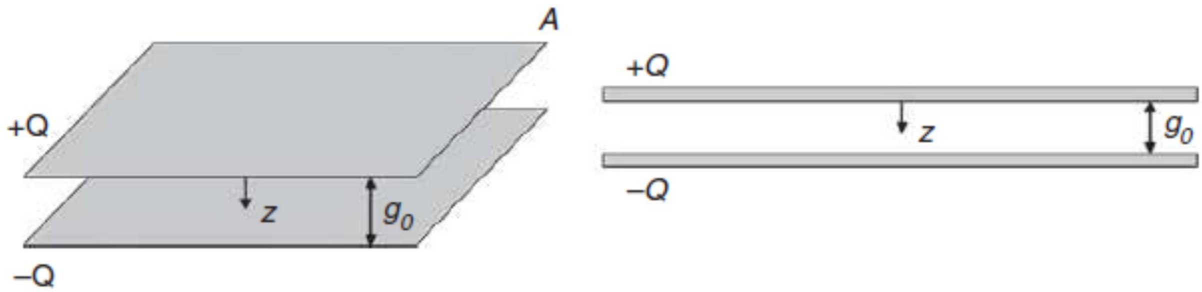
[2] Comb-drive

(4): تحریک با اعمال ولتاژ انجام می‌شود و تغییر ولتاژ در مقایسه با تحریک الکترومغناطیسی که پارامتر تحریک آن جریان است، آسان‌تر می‌باشد. همچنین تحریک الکتروستاتیکی در مقایسه با تحریک الکترومغناطیسی نیاز به ولتاژ تحریک کمتری دارد.

(5): امکان کوچک سازی آنها بالاست و سازگاری آنها در مدارات مجتمع[1] بسیار خوب است.

گرچه تحریک الکتروستاتیکی مزیت‌های مهمی در مقایسه با دیگر روش‌ها دارد اما محدودیت‌هایی نیز دارد. به عنوان مثال وقتی ولتاژ اعمالی به سازه افزایش می‌یابد، نیروی الکتروستاتیکی نیز افزایش یافته و در یک مقدار خاص ولتاژ، سازه دچار نقصان می‌شود، این ولتاژ را ولتاژ کشیدگی[2] می‌نامند. بنابراین تحریک الکتروستاتیکی برای محدوده بزرگی از کاربرد نمی‌تواند استفاده شود و باید جهت جلوگیری از این پدیده، در مبحث طراحی مدنظر قرار گیرد.

دیگر محدودیت استفاده از این روش در سازه‌های میکرو، آلودگی شکاف بین الکترودهای بالا و پایین می‌باشد زیرا بسیار به گرد و خاک و رطوبت حساسند [28]. تا کنون نیز تلاش‌های متعددی برای جلوگیری از این آلودگی انجام شده است[29].



شکل (1-25): خازن با صفحات موازی[26]

همانطور که در شکل (1-24) مشخص است این صفحات موازی به مساحت A ، بار Q و شکاف اولیه g_0 می‌باشند. زمانی که به منبع ولتاژ متصل می‌شوند یکی از این صفحات دارای بار $-Q$ و دیگری دارای بار $+Q$ گشته و این امر منجر به نیروی جاذبه بین صفحات می‌گردد. به این ترتیب صفحه آزاد حرکت کرده و از شکاف اولیه کاسته می‌گردد.

---
[1] IC
[2] Pull-in voltage

ارتباط بین ظرفیت C ، ولتاژ V و بار Q برای خازن با صفحات موازی به صورت زیر است[26]:

$$C = \frac{Q}{V} \tag{1-53}$$

که ظرفیت خازن برابراست با:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{g} = \varepsilon_0 \frac{A}{g - z} \tag{1-54}$$

و در آن ε_0 ثابت دی‌الکتریک خلا و برابر با $8.85\times10^{-12}\,{F}/{m}$ ، g فاصله بین صفحات بر حسب متر و A مساحت صفحات می‌باشد.

کار انجام شده در شارژ خازن از طریق انتقال بار dQ از صفحه‌ای به صفحه دیگر با ولتاژ V معادل است با:

$$dU = VdQ \tag{1-55}$$

از جایگذاری V در معادله (1-55) خواهیم داشت:

$$dU = VdQ = \frac{QdQ}{C} \tag{1-56}$$

با انتگرال گیری، کار نهایی برابر است با:

$$U = \int \frac{QdQ}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 \tag{1-57}$$

برای یافتن نیرو در صفحات موازی، می‌توان از اصل کار مجازی در جابجایی کوچک Δz در زمان اعمال ولتاژ V توسط باتری استفاده کرد. تغییر در شکاف موجب ایجاد بار $\Delta Q = V\Delta C$ می‌شود که تحت پتانسیل V از باتری به خازن منتقل شده و انرژی پتانسیل ذخیره شده را تغییر می‌دهد. سپس می‌توان تغییر در انرژی پتانسیل خازن را با کار مکانیکی انجام شده برای انتقال صفحات و کار الکتریکی انجام شده توسط باتری در انتقال بار بالانس کرد تا پتانسیل در مقدار V حفظ شود:

$$\Delta U_{Capacitor} = \Delta W_{Mechanical} + \Delta U_{Battery} \tag{1-58}$$

$$\frac{1}{2}V^2\Delta C = F\Delta z + V\Delta Q \tag{1-59}$$

از طرفی داریم:

$$Q = CV \rightarrow \Delta Q = V\Delta C\big|_V \rightarrow V\,\Delta Q = V^2\Delta C \qquad (1\text{-}60)$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}V^2\Delta C = F\Delta z + V^2\Delta C \qquad (1\text{-}61)$$

$$F\Delta z = -\frac{1}{2}V^2\Delta C \qquad (1\text{-}62)$$

$$F = -\frac{1}{2}V^2\frac{\Delta C}{\Delta z} \qquad (1\text{-}63)$$

برای محاسبه نیرو، مشتق ظرفیت را نسبت به فاصله بین دو صفحه بدست آورده و از آنجا نیرو حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial C}{\partial z}\Big|_V = \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_0\frac{A}{g_0 - z}\right) = -\varepsilon_0\frac{A}{\left(g_0 - z\right)^2} \qquad (1\text{-}64)$$

$$F_e = -\frac{1}{2}V^2\frac{\Delta C}{\Delta z} = \frac{\varepsilon_0 A}{2}\frac{V^2}{\left(g_0 - z\right)^2} \qquad (1\text{-}65)$$

فصل 2:

مرور مقالات

فصل دوم: مرور مقالات

دراین فصل تلاش می شود تا تحقیقات صورت گرفته در زمینه مواد هایپرالاستیک، دی الکتریک های الاستومر در ترکیب بندی های مختلف و دیگر کارهای مرتبط به ترتیب موضوع و سال بیان گردد.

در ابتدا مقالات مهم انجام شده در زمینه میکروتیر و میکروورق شامل عوامل غیرخطی، روش های حل، ترکیب بندی های مختلف، پایداری، تحریک الکتروستاتیک و شرایط مرزی مختلف ارائه می گردد و سپس کارهای انجام شده مرتبط با مدل های هایپرالاستیک مورد بررسی قرار می گیرد.

Chaterjee و Pohit در سال 2009 مدلی جامع از میکروتیر یکسرگیردار را با عوامل غیرخطی ناشی از نیروی الکتریکی، هندسی و جملات اینرسی ارائه کردند. مطالعات آن‌ها نشان داد که گرچه نیروی الکتروستاتیک موجب خصوصیات نرم‌شوندگی می‌شود اما عوامل هندسی غیرخطی موجب اثر سفت-شوندگی بر میکروسازه می‌شود. عوامل غیر خطی هندسی در نزدیکی وضعیت کششی، اثر قابل توجهی بر مشخصه‌های پاسخ سیستم در نسبت فاصله به طول بالای 0,3 دارد. برای تحریک با ولتاژ پایین‌تر از ولتاژ ناپایداری دینامیکی، عوامل غیرخطی هندسی نقش مهمی را ایفا نمی‌کنند[30].

Hasanpour و همکاران در سال 2010، دینامیک غیرخطی رزوناتور تیر را در اثر کشیدگی تیر بررسی نمودند. تیر رزونانسی در اثر عملگر الکتروستاتیکی شانه‌ای[1] متصل به تیر تحریک می‌شود. سازه به صورت تیری با جرم متصل و با نیروی محوری اولیه مدل شد. ضمنا رزوناتور مربوطه غیرمتقارن بوده یعنی عملگر(جرم) به یک انتها نزدیک‌تر بوده است. اثرات نیروی محوری اولیه، مکان جرم و اینرسی دورانی آن بر ارتعاش آزاد و اجباری تیر مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که ترکیب خاصی از پارامترهای

---

[1] Electrostatic comb-drive actuators

مذکور، موجب ایجاد رزونانس‌های داخلی بین مودهای مختلف می‌گردد. همچنین بیان شد که نیروی محوری اولیه کششی موجب کاهش حالت غیرخطی و بالعکس نیروی فشاری موجب تقویت حالت غیرخطی می‌گردد[31].

Mojahedi و همکاران در سال 2010 ناپایداری کشیدگی استاتیکی را در میکروتیرهای دوسرگیردار و یکسرگیردار بررسی نمودند. از روش گالرکین برای تبدیل به معادلات جبری استفاده شد و سپس حل تحلیلی با استفاده از روش هوموتوپی بدست آمد. عوامل درنظر گرفته شده در استخراج معادله، کشیدگی صفحه میانی، نیروی الکتروستاتیک و بارگذاری محوری بوده است. مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج عددی نشان می‌دهد که روش هوموتوپی می‌تواند ناپایداری کشیدگی را حتی در حضور کشیدگی صفحه میانی به درستی پیش‌بینی نماید[32].

Mestrom و همکاران در سال 2010 از روش ترکیبی عددی- تحلیلی و آزمایشگاهی، دینامیک غیرخطی میکروتیر رزوناتور را بررسی نمودند. این مدل شامل عوامل غیرخطی هندسی، الکتروستاتیکی به همراه میرایی ترموالاستیک بوده است. نتایج شبیه‌سازی و آزمایشگاهی، هر دو بستگی به پارامترهای تحریک داشته و نشان از رفتار دینامیکی سخت و نرم شوندگی دارند. نتایج شبیه سازی، تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد و تمام معادلات به پارامترهای فیزیکی مرتبط هستند[33]

Rasekh و khadem رفتار غیرخطی نانولوله کربنی را بر اساس مدلی جامع شامل اینرسی، نیروی الکتروستاتیک و انحناء در سال 2011 بررسی نمودند. هدف از این مقاله نشان دادن این امر است که چه زمانی فرمول بندی غیرخطی نیاز است و چه وقت مدل خطی کفایت می‌کند. مدل از یک نانولوله کربنی یکسرگیردار معلق روی صفحه ثابت الکترود تشکیل شده است. فاصله نسبتا بزرگی بین الکترود و نانولوله درنظر گرفته شده است. از روش گالرکین برای کاهش مرتبه معادله و در نهایت از روش انتگرال‌گیری مستقیم برای حل معادله حاصل استفاده شد. در این تحقیق نشان داده شد که در نسبت‌های بزرگ شکاف

به طول و وقتی که ولتاژ اعمالی به ولتاژ کشیدگی نزدیک است، جملات غیرخطی نقشی مهم در رفتار دینامیکی سیستم ایفا می‌کنند. همچنین بیان شد که عوامل اینرسی و انحنای غیرخطی به ترتیب اثرات نرم کنندگی و سخت کنندگی دارند به طوری که اثر سخت کنندگی بیشتر است[34].

Feng و همکاران در سال 2011 عملکرد دینامیکی رزوناتور را با استفاده از مدل اویلر برنولی و تئوری فشردگی غشاء مورد بررسی قرار دادند و حل‌های تقریبی برای بررسی عملکرد رزوناتور مانند فاکتور کیفیت و تغییر فرکانسی را ارائه دادند. بر پایه مقایسه با موارد آزمایشگاهی موجود نشان داده شد که مدل تحلیلی ارائه شده برای محدوده خاصی از فشار محیط مناسب می‌باشد. همچنین مشخص شد که افزایش ولتاژ الکتریکی اعمالی به رزوناتور، پارامتری مهم و موثر بر بهبود حساسیت رزوناتور می‌باشد هرچند برای جلوگیری از رخداد ناپایداری باید ولتاژ اعمالی در محدوده مشخصی کنترل شود[35].

Fu و همکاران روش بالانس انرژی را در سال 2011 برای مطالعه ارتعاش غیرخطی ناشی از میکروتیرها با کشیدگی صفحه میانی و نیروی الکتروستاتیکی توزیع شده استفاده کردند. در بررسی ارتعاش آزاد تیر با تئوری اویلر برنولی، از ساده‌سازی معادلات توسط روش گالرکین بهره برده و سپس معادله حاصل را با روش بالانس انرژی حل کردند. نتایج حاصله را نیز با رانج - کوتای مرتبه چهارم حل نمودند که نشان از دقت بسیار بالای این روش داشت [36].

Qian و همکاران در سال 2012 ارتعاش دامنه بزرگ میکروتیرها با تحریک الکتروستاتیکی را بررسی کرده و برای استخراج حل تحلیلی از روش تحلیل هوموتوپی استفاده نمودند. مدل استفاده شده برای تیر از نوع اویلر برنولی بوده و در عین حال، کشش صفحه میانی و نیروی الکتروستاتیکی توزیع شده را درنظر گرفتند. آنها از روابط ارائه شده توسط Fu در سال 2011 استفاده نمودند. آنها دریافتند که برای افزایش دقت روش هوموتوپی، باید پارامتر هوموتوپی موجود را بهینه سازی کنند و به پاسخ مناسبی نیز دست یافتند[37].

Pratihar در سال 2012 پایداری میکروتیرهای یکسرگیردار تحت نیروی الکتروستاتیکی را بررسی نمود. وی از مدل جرم- فنر – دمپر با در نظر گرفتن دو نوع فنر و میرایی خطی و غیرخطی استفاده نمود. تیر مذکور با ولتاژ هارمونیک تحریک می‌شود. مشاهده شد که با کاهش شکاف، دامنه پاسخ بزرگ می‌شود، همچنین با افزایش دامنه ولتاژ اعمالی و جرم سیستم، دامنه پاسخ افزایش می‌یابد. علاوه بر این مشاهده شد که حل‌های غیر بدیهی پایدار و ناپایدار در منحنی پاسخ فرکانسی به ازای برخی پارامترها وجود دارد[38].

Qian و همکاران در سال 2012 روش آنالیز هوموتوپی را برای استخراج حل‌های تقریبی مساله غیرخطی با عوامل غیرخطی مرتبه بالا به کار بردند. در این مساله، میکروتیر با تحریک الکتروستاتیکی و دامنه ارتعاش بزرگ مدنظر است. بهینه سازی این روش نیز برای همگرایی پاسخ های تقریبی انجام شد. محدوده کاربرد این روش به سیستم‌های نانو نیز از طریق تئوری تنش غیرموضعی بسط داده شد. آنها نتیجه گرفتند که تئوری کلاسیک تیر برای تحلیل و طراحی میکروسازه‌ها مناسب است[39].

Yang و همکاران در سال 2012 تحلیل الکترودینامیکی هندسی غیرخطی میکروتیر خمیده را بر اساس مدل تیر خمیده و معادلات غیرخطی که از مختصات خمیده استخراج شد انجام دادند. این تیر دارای خمیدگی اولیه بوده و نیروی الکتریکی غیرخطی و نیز تغییر شکل خطی در آن مدنظر بود. این تحقیق بر خلاف موارد پیشین که صرفا بر اساس فون کارمن و کشیدگی صفحه میانی بود، شامل هیچ فرضی در تغییر شکل غیرخطی نبود. روش دیفرانسیل مربعی[1] برای تبدیل معادلات با مشتق جزیی به مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب زمان استفاده شد و سپس روش Petzold-Gear BDF برای حل معادلات و یافتن ویژگی‌های دینامیکی غیرخطی میکروتیر خمیده بکار برده شد. برخی نتایج عددی حاصل عبارتند از:

[1] Differential quadratue method

(1): تغییر شکل هندسی غیرخطی با افزایش طول تیر اهمیت بیشتری یافته و در تیرهای بلند باید مدنظر قرار گیرد. تحلیل خطی، مقدار ولتاژ کششی دینامیکی را بسیار پایین‌تر از مقدارش تخمین زده و منجر به مود فروپاشی[1] اشتباه می‌شود.

(2): برای میکروتیرهای کوتاه، ولتاژ کشیدگی دینامیکی اندکی پایین‌تر از ولتاژ کششی استاتیک بوده اما در میکروتیرهای بلند بسیار پایین تر می‌باشد.

(3): میکروتیرهای خمیده با شکاف اولیه بزرگتر، دارای ولتاژ کششی دینامیکی و نیز فرکانس پایه غیرخطی

بزرگ‌تر می‌باشد.

(4): با افزایش طول تیر، ولتاژ کششی دینامیکی افزایش یافته و فرکانس پایه غیرخطی کاهش می-یابد[40].

Rezazadeh و همکاران در سال 2012 مطالعه‌ای را بر روی میکروتیر با تحریک الکتروستاتیکی و نوسان پارامتریک با استفاده از روش تکرار تغییرات[2] انجام دادند. تنها عامل غیرخطی موجود در کار آن‌ها ناشی از نیروی الکتروستاتیکی بوده است. معادله غیرخطی حاکم بر مساله حول نقطه تعادل استاتیک، با استفاده از تئوری تغییرات و سری تیلور خطی‌سازی شد و توسط روش گالرکین، معادله از نوع متئو[3] حاصل شد. آن-ها مناطق پایدار را از ناپایدار جدا کرده و نتایج نشان داد که منحنی‌های گذرا[4] و نتایج حاصل از روش اغتشاشات یکسان هستند. آن‌ها همچنین نشان دادند که برای یک میکروتیر تحت ولتاژ DC که برابر یا بزرگتر از مقدار ولتاژ کشیدگی است، با اعمال ولتاژ AC در شرایط ناپایدار قرار گرفته و با تنظیم فرکانس میکروتیر می‌تواند پایدار گردد[41].

[1] Collapse mode
[2] Variational iteration method
[3] Mathieu
[4] Transition curves

Ghayesh و همکاران در سال 2013 رفتار رزونانسی میکروتیر با تحریک الکتروستاتیکی را با تئوری تنش کوپل اصلاح شده بررسی نمودند. عامل غیرخطی به کار رفته در میکروتیر، کشش صفحه میانی و از نوع عامل هندسی بوده است. از روش گالرکین برای کاهش مرتبه مدل و در نهایت از روش pseudo-archlength برای مطالعه رفتار استاتیکی و دینامیکی بهره گرفته شد. آن‌ها در تحلیل استاتیکی مقدار ولتاژ استاتیکی که در آن ناپایداری کششی رخ می‌دهد را بدست آوردند. رفتار دینامیکی تیر نیز در دو تحریک اولیه و سوپرهارمونیک مطالعه شد. یکی از نتایج تحریک اولیه، رفتار از نوع سخت‌شوندگی در سازه بود. نتایج تحریک سوپرهارمونیک مشابه نتایج تحریک اولیه بود با این تفاوت که برای رسیدن به دامنه با تحریک اولیه نیاز به دامنه بزرگتری در ولتاژ AC می‌باشد[42].

Kaneria و همکاران در سال 2013 تحلیل استاتیکی میکروتیر یکسرگیردار تحت نیروی الکتروستاتیکی را با روش گالرکین بررسی نمودند و نتایج کار را با مقالات دیگر و نیز نرم افزار المان محدود COMSOL مقایسه نمودند. ولتاژ و جابجایی کشیدگی از معادلات حاکم و با استفاده از روش گالرکین و سری تیلور به دست آمد[43].

Cai و همکاران در سال 2013 روش ترکیب شده‌ای از المان محدود را برای حل مساله پس-کمانش تیر هایپرالاستیک با خیز بزرگ استفاده نمودند. آن‌ها با استفاده از توابع شکل مستقل برای خیز و میدان تنش، تابع انرژی را به طور صریح برای فضای بعد محدود ارائه کردند. نتایج عددی آن‌ها نشان داد که حل ناپایدار پس- کمانش شدیدا به تعداد مش‌ها و بارهای خارجی حساس می‌باشد[44].

Ansari و همکاران در سال 2013 رفتار پس کمانشی نانوتیر را با در نظر گرفتن اثر سطحی بررسی کردند. آنها با تئوری Gurtin-Murduch اثر تنش سطحی را وارد تئوری کلاسیک اویلر برنولی نمودند. آنها از اصل کار مجازی برای استخراج معادلات استفاده نمودند. پس از گسسته‌سازی معادلات توسط

GDQ[1] از روش عددی نیوتن برای حل استفاده شد به طوری که پاسخ خطی به عنوان مقدار اولیه قرار داده شد. آن‌ها نشان دادند که اثر سطحی با توجه به علامت و مقدار ثوابت الاستیک سطحی می‌تواند موجب نرم تر یا سخت تر شدن نانوتیر شود. همچنین ثابت شد که برای مود اول، افزایش ضخامت منجر به سختی بیشتر نانوتیر در همه شرایط مرزی می‌شود، البته در مود دوم و سوم، این امر بستگی به شرایط تکیه گاهی دارد. در تمامی مودها و شرایط مرزی، افزایش ضخامت منجر به کاهش نقش اثر تنش سطحی بر رفتار کمانشی نانوتیر می‌شود[45].

Baghani و همکاران در سال 2013 روش تکرار تغییرات[2] را برای یافتن عبارت تحلیلی ساده برای فرکانس طبیعی غیرخطی و رابطه خیز- بارگذاری در تیر مخروطی روی پایه الاستیک غیرخطی به کار بستند. عبارت استخراج شده برای تحلیل غیرخطی تیرهای مخروطی کفایت کرده و از سادگی لازم برخوردار است. علاوه بر این، مدل حاضر برای محدوده وسیعی از دامنه ارتعاشی معتبر است درحالی که روش‌های تحلیلی دیگر همچون روش اغتشاشات برای دامنه کوچک معتبر است. اثرات پارامترهای مختلف همچون دامنه ارتعاش، ضریب الاستیک پایه و شکل مودهای مختلف بر فرکانس طبیعی و پاسخ جابجایی تیرها مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که در مود اول تحریک، افزایش ضریب مخروط موج کاهش فرکانس طبیعی تیر می‌شود. رفتار تیر در شکل مود دوم و سوم کاملا متفاوت است [46].

Gaonkar و Kulkarni در سال 2013 قابلیت کاربرد یک روش کاهش مرتبه را برای شبیه‌سازی دینامیکی تیرها با عوامل غیرخطی نیرو و هندسی مورد بررسی قرار دادند. تیرهای یکسرگیردار و دوسرگیردار در این کار مورد نظر بوده‌اند. معادلات حاکم بر آن‌ها با روش گالرکین گسسته‌سازی شده‌اند. نتیجه شبیه‌سازی نشان داد که استفاده از این روش منجر به بروز خطای فاز در مدل‌های ناشی از شبیه-

[1] Generalized differential quadrature

[2] Variational iteration method

سازی دینامیکی بلندمدت می‌شود. برای بهبود پاسخ دینامیکی، اصلاح روش بر اساس مینیمم‌سازی مانده در نقطه خطی‌سازی ارائه شد. این روش با مدل المان محدود غیرخطی مقایسه شد و نشان از کارآیی آن داشت. مزیت این روش به خصوص در مسائل با عوامل غیرخطی هندسی و الکتروستاتیک بیشتر جلوه می‌کند[47].

Stoykov و Ribeiro در سال 2013 مدلی را برای تیر ایزوتروپیک با سطح مقطع دلخواه ارائه نمودند. میدان جابجایی بر اساس تئوری تیموشنکو برای خمش و تئوری سنت- ونانت برای پیچش درنظر گرفته شد. یافتن تابع پیچش[1] که به صورت تحلیلی برای مقاطع پیچیده ممکن نیست، با استفاده از روش المان مرزی و با حل معادله لاپلاس به صورت عددی بدست آمد. مقطع غیرمتقارن جملات دیگری را در معادله و کوپلینگ بین جابجایی عرضی و پیچش موجود در تحلیل خطی وارد می‌کند، جملات اضافه شده نیز به صورت جملات مرتبه دوم و سوم می‌باشد. فرکانس طبیعی خطی و مودهای ارتعاشی مربوطه بدست آمد و مودهای نرمال غیرخطی مورد بررسی قرار گرفت[48].

Liu و Wang در سال 2014 تحقیقی عددی را برای مطالعه رفتار دینامیکی میکروتیر دوسرگیردار با تحریک AC/DC و با در نظر گرفتن اثر میرایی فشردگی غشاء[2] به کار بستند. خیز میکروتیر تحت شرایط تحریک مختلف و حل مدل تحلیلی توسط روش عددی هیبریدی و روش تقریب تفاضل محدود مورد بررسی قرار گرفت. نشان داده شد که نتایج عددی ولتاژ کششی دینامیک میکروتیر دوسرگیردار اختلافی بیش از 2,04% از روش‌های قدیمی تفاضل محدود ندارد. همچنین شرایط تحریکی که پایداری میکروتیر را تضمین می‌کند با پرتره[3] فازی مشخص شد. در نهایت نتایج ارائه شده در این مطالعه تایید

[1] Warping function

[2] Squeeze-film damping

[3] Portrait

می‌کند که روش عددی هیبریدی ابزاری مناسب در تحلیل رفتار غیرخطی میکروسازه ها با تحریک الکترواستاتیکی می‌باشد[49].

Bhushan و همکاران در سال2014 اثرات غیرخطی هندسی و الکترواستاتیکی را برای ارتعاش صفحه‌ای آزاد و اجباری نانوسیم سیلیکونی بررسی نمودند. آنها مشاهده نمودند که منحنی‌های رزونانسی ارتعاش اجباری و منحنی‌های دامنه- فرکانس ارتعاش آزاد برای ولتاژ کوچک DC رفتار سخت شوندگی دارند به طوری که با افزایش ولتاژ DC به مقدار مشخصی، این رفتار به سوی نرم شوندگی یا ترکیبی از سخت و نرم شوندگی سوق پیدا می‌کند. ارتعاش آزاد نیز به صورت تحلیلی و با روش بالانس هارمونیک مرتبه اول مورد بررسی قرار گرفت و بیان شد که جملات غیرخطی مرتبه دوم و سوم تعیین کننده طبیعت منحنی-های دامنه- فرکانس هستند. هرچند نتایج این کار برای ارتعاش نانوسیم ارائه شد اما قابل استفاده برای دیگر سیستم‌های غیرخطی با عوامل غیرخطی به شکل سری‌های توانی نیز می‌باشند[50].

Feng و همکاران در سال 2014 برای مطالعه دینامیک غیرخطی رزوناتور میکروتیر الاستومر دی-الکتریک، ارتعاش غیرخطی را با درنظر گرفتن دامنه بزرگ، میرایی گاز و تحریک بررسی کردند. برای یافتن حل تقریبی از روش اغتشاشات استفاده شد. آنها مشاهده کردند که افزایش دامنه موجب افزایش فرکانس طبیعی و کاهش فاکتور کیفیت رزوناتور می‌شود. همچنین مشخص شد که تنش اولیه و فشار محیطی به شدت فرکانس رزونانسی رزوناتور تغییر می‌دهد[51].

Peng و همکاران در سال 2014 تحلیل دینامیک غیرخطی میکروعملگر ساخته شده از ماده غیرخطی را بررسی نمودند. استخراج معادلات بر اساس تئوری اویلر برنولی و اثر غیرخطی کشیدگی صفحه میانی و عامل غیرخطی ناشی از ماده انجام شد. از نتایج عددی نشان داده می‌شود که رابطه سازگاری خطی، صرفا برای تغییر شکل کوچک یا ولتاژ پایین معتبر است. در میکروتیر با فاصله شکاف کوچک، طول زیاد و ولتاژ اعمالی بالا، رابطه سازگاری خطی، سختی تیر و فرکانس طبیعی آن را بیش از حد تخمین زده در حالی

که خیز تیر را کمتر تخمین می‌زند. لذا در این موارد باید از معادلات سازگاری غیرخطی برای تحلیل صحیح استفاده شود[52].

در کار Azimloo و همکاران در سال 2014 تحلیل شاخه‌شدگی یک میکروتیر دوسرگیردار با تحریک الکتروستاتیکی بین دو زیرسازه رسانا و در حضور نیروی گریز از مرکز مورد مطالعه قرار گرفت. مدل در نظر گرفته شده از نوع اویلر برنولی بوده و ولتاژ کششی استاتیک برای مقادیر مختلف سرعت زاویه‌ای اولیه و نیز سرعت زاویه‌ای کششی برای مقادیر مختلف ولتاژ DC مورد محاسبه قرار گرفت. نتایج کار نشان داد که ولتاژ کششی استاتیک با افزایش مقدار سرعت زاویه‌ای کاهش یافته و سرعت زاویه‌ای کششی با افزایش ولتاژ DC کاهش می‌یابد. موقعیت تعادل سیستم برای مقادیر مختلف سرعت زاویه ای و ولتاژ DC با استفاده از مدل جرم و فنر معادل یافت شد. از دیگر نتایج این بود که با افزایش مقدار سرعت زاویه‌ای، پرتره فازی متقارن به غیرمتقارن تغییر کرده و محدوده پایداری کاهش می‌یابد[53].

Han و همکاران در سال 2014 مباحثی را در زمینه ملاحظات طراحی در میکرورزوناتورهای دوسرگیردار با دو الکترود متقارن و دارای دامنه ارتعاش بزرگ مورد بررسی قرار دادند. آنها نقاط تعادل سیستم همیلتونین را تعیین نموده و ارتعاش دامنه بزرگ و پدیده کشیدگی دینامیکی را از منظر انرژی بررسی کردند. سپس فرض مود اول با تئوری کلاسیک تیر برای مطالعه اثر پارامترهای فیزیکی بر ارتعاش رزوناتور معرفی شد. آن‌ها برای جلوگیری از ارتعاشات پیچیده و اخذ عملکرد بهتر روش ملنیکف[1] را برای پیش‌بینی وجود بی‌نظمی به‌کار بستند. آنها در نهایت چهار ابزار فیزیکی را طراحی نموده تا اثربخشی روش‌های شبیه‌سازی را امتحان کنند. یکی از نتایج مهم این کار در تحلیل دینامیکی بود، به طوری که طبق نتایج پیش‌بینی ملنیکوف، افزایش نسبی میرایی، ولتاژ DC و یا کاهش مناسب شکاف تا الکترود، در کاهش احتمالی بی‌نظمی موثر است. همچنین دیاگرام شاخه‌شدگی نشان داد که ارتعاش رزوناتور مذکور

[1] Melnikov method

پیچیده بوده و تنها در صورت انتخاب مناسب شکاف اولیه و ولتاژ DC یا AC ارتعاش بزرگ پایدار می‌تواند رخ دهد[54].

Zhu و Chang در سال 2014 ارتعاش جانبی غیرخطی تیر چرخان داخل شیار را بررسی نمودند. بخشی از این تیر داخل شیار، دارای جابجایی محوری و بخشی دیگر نیز در بیرون شیار بوده که دارای جابجایی عرضی در کنار جابجایی محوری بوده‌اند. اثر کوپلینگ غیرخطی جابجایی محوری و عرضی به طور کامل مدنظر قرار گرفت. آن‌ها برای استخراج معادله غیرخطی از تئوری اویلر برنولی و تئوری فون کارمن استفاده کردند و پاسخ دینامیک غیرخطی را با مدل‌های پیشین مقایسه نمودند. برخی نتایج حاصل از این تحقیق عبارتند از:

(1): مدل غیرخطی حاضر مطمئن‌تر از مدل‌های خطی موجود بوده و رفتار دینامیکی متفاوتی با حالت خطی دارد.

(2): با کاهش مدول یانگ و افزایش شتاب ناشی از نیروی محوری اعمالی، تفاوت بین پاسخ دینامیکی مدل‌های خطی و غیرخطی بیشتر می‌شود[55].

Cui و Hu در سال 2014 رزونانس اولیه ارتعاش جانبی تیر اویلر برنولی با انتهای متحرک و نیز در معرض نیروهای حرارتی و هارمونیک را بررسی نمودند. انتهای تیر که در ابتدا حالت ساکن دارد در اثر حرارت اندکی جابجا شده تا به دیواره ثابت برسد. علاوه براین، اگر دامنه ارتعاش بیش از حد بحرانی باشد، انتهای متحرک ممکن است دچار لغزش شود. آنها بر اساس اصل همیلتون معادلات مشتق جزیی را با درنظر گرفتن رابطه غیرخطی بین کرنش و جابجایی و نیز درنظر گرفتن نیروی اصطکاکی و وابسته به حرارت را استخراج نمودند و سپس از روش گالرکین برای تبدیل به معادلات دیفرانسیلی بهره بردند. به دنبال آن از روش میانگین برای تعیین رزونانس اولیه حالت پایدار بهره برده و در نهایت پاسخ تحلیلی با شبیه سازی عددی تطبیق داده شد و اثرات پارامترهایی همچون ازدیاد حرارت و نیروی نرمال بر رزونانس

اولیه ارتعاش جانبی تیر مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین نشان داده شد که رزونانس اولیه ارتعاش جانبی تیر را می توان با یک مرز چسبیده- لغزشی- متوقف[1] از طریق حل تحلیلی تنظیم نمود. همچنین این تحقیق نشان داد که چهار نوع رزونانس اولیه در ارتعاش جانبی مذکور بسته به اندازه نیروی نرمال و حالت اولیه انتهای متحرک موجود است. تیر دارای ارتعاش جانبی بزرگ بوده و در صورت بسیار بزرگ بودن نیروی نرمال، تنها رفتار غیرخطی نرم از خود نشان می‌دهد. اگر نیروی نرمال کوچک باشد، رزونانس اولیه بسیار پیچیده شده و تیر هر دو رفتار غیرخطی سخت و نرم شوندگی را ابراز می‌دارد[56].

Oukad در سال 2014 رفتار استاتیکی میکروتیر دوسرگیردار تحریک شده با نیروی الکتروستاتیکی خارج صفحه‌ای را بررسی نمود. این امر از طریق عدم تقارن تیر و دو الکترود مربوطه انجام شد. نیروی الکتروستاتیکی از طریق تطبیق حل عددی مساله الکتروستاتیکی با استفاده از المان محدود، تخمین زده شد. سپس از طریق روش گالرکین، مدل مرتبه کاهش‌یافته‌ای استخراج شد. عوامل غیرخطی موجود در معادله ناشی از اثر میدان لبه و کشیدگی صفحه میانی بوده است. در نهایت نیز معادلات استخراجی برای اخذ پاسخ استاتیکی با روش عددی و با تحریک DC حل شد. نتایج، نشان از سه محدوده مختلف برای این ابزار میکرو داشت: محدوده خمشی، محدوده کاتناری[2](زنجیری) و محدوده الاستیک. وی همچنین حالت‌های مختلف ضربه بزرگ عملگر را با احتمال جابجایی بزرگ و بدون ناپایداری کششی بررسی نمود. نتایج نشان از امکان کاربرد این ابزار به عنوان سازه‌های میکرو با قابلیت تنظیم وسیع[3] داشت[57].

Gunda در سال 2014 ارتعاش آزاد با دامنه بزرگ و پس‌کمانش حرارتی تیر منشوری تیموشنکو را بررسی نمود. وی موارد مذکور را با حل دقیق ساده و با استفاده از روش رایلی ریتز همراه ساخت. متغیر میدان دوران سطح مقطع تیر به صورت تابعی از میدان جابجایی عرضی بیان شد و وی در این راه از

[1] Stick-slip-stop

[2] Catenary

[3] Wide-band tunable MEMS structures

معادلات دیفرانسیل استاتیک تیر تیموشنکو بهره برد. مقایسه دقت عددی حل بسته ارائه شده از روش ریلی ریتز با دیگر مقادیر موجود در مقالات، نشان از سادگی، دقت و مقاوم بودن روش ارائه شده داشت. برای تیرهای نسبتا لاغرتر نیز افزایش نسبت بار پس‌کمانشی به بار کمانشی خطی مشاهده شد که این امر در نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تیر نیز وجود داشت و با افزایش ضریب لاغری از اهمیت این رخداد کاسته می‌شد. همچنین نشان داده شد که افزایش فاکتور اصلاح برشی برای تیرهای نسبتا لاغر منجر به کاهش نسبت بار پس‌کمانشی به بار کمانشی خطی و نیز کاهش نسبت فرکانس غیرخطی به خطی می‌شود. مهمترین مزیت فرمول‌بندی این تحقیق این است که تنها متغیر میدان جابجایی عرضی برای ارتعاش آزاد و مساله پس‌کمانش مدنظر قرار می‌گیرد و رفتار ارتعاشی آزاد با دامنه بزرگ را می‌توان بر حسب تابعی از فاکتور برش اصلاحی، ضریب لاغری و نسبت دامنه بیان نمود[58].

Hosseini و همکاران در سال 2014 ارتعاش آزاد و رزونانس اولیه تیر چرخان را مورد بررسی قرار دادند. تیر چرخان دارای عوامل غیرخطی در انحنا و اینرسی بوده، اینرسی دورانی و اثرات ژیروسکوپیک مدنظر قرار گرفته و در مقابل از تغییر شکل برشی صرف نظر شد. برای یافتن پاسخ‌های تحلیلی، از روش مقیاس‌های چندگانه استفاده شد و عباراتی برای ارتعاش آزاد غیرخطی و رزونانس اولیه بدست آمد. نتایج عددی نیز برای شرایط مرزی دو سر مفصل و یکسردرگیر ارائه شد. برخی نتایج این کار به شرح زیر است[59]:

(1): در اثرات ژیروسکوپیک وقتی که یک صفحه نوسان می‌کند صفحه دیگر نیز به واسطه این اثر نوسات دارد.

(2): در رزونانس اولیه تیر چرخان، تنها مودهای پیشرو[1] تحریک می‌شوند.

(3): در مود اول، حالت غیرخطی تیر چرخان از نوع سخت شونده بوده است.

[1] Forward modes

(4): منحنی پاسخ فرکانسی در زمان افزایش خروج از مرکز، اثرات غیرخطی قوی‌تری از خود نشان می-دهد.

Marckmann و Verron در سال 2005، 20 مدل هایپرالاستیک را برای مواد لاستیکی مورد مقایسه قرار دادند. توانایی این مدل‌ها در انواع مختلف بارگذاری‌ها و در قالب دو مجموعه کار آزمایشگاهی مورد بررسی قرار گرفت. پارامترهای ماده و محدوده اعتبار هر مدل با یک فرآیند تطبیق تعیین شد. آنها به این نتیجه رسیدند که مدل‌های با دو یا سه پارامتر نمی‌توانند تمامی محدوده‌های کرنش را پیش بینی کنند. ناتوانی مدل‌ها زمانی آشکار می‌شود که در صورت تعیین پارامترهای آنها با تست تک محوره[1] دیگر قادر به پیش‌بینی پاسخ دو محوره[2] مواد لاستیکی نیستند. همچنین نشان دادند که برای کرنش‌های متوسط در حد 200 تا 250 درصد مدل قدیمی مونی[3] با دو پارامتر کفایت می‌کند. برای کرنش‌های کوچک نیز مدل نئو- هوکین پیشنهاد شده است[18].

Martins و همکاران در سال 2006 مطالعه‌ای مبنی بر مقایسه بین مدل‌های مختلف برای پیش‌بینی خصوصیات مواد هایپرالاستیک انجام دادند که در لاستیک‌های سیلیکونی و بافت‌های نرم کاربرد داشته است. محققین در این مقاله از روش محاسباتی/ تجربی برای مطالعه رفتار مکانیکی بافت نرم بیولوژیکی تحت کشش تک محوره استفاده نموده و برای تطبیق بر داده‌های آزمایشگاهی برای اولین بار مدل مارتین[4] را ارائه نمودند. آنها برای یافتن مقادیر بهینه در هر پارامتر از الگوریتم لونبرگ-مارکوارت[5] بهره بردند. این فرآیند برای نمونه لاستیک سیلیکونی نیز با تست کشش تک محور به کار برده شد. برخی نتایج حاصل شده از کار جامع آنها به قرار زیر است: (1): ازبین هفت مدل ماده استفاده شده، شش مدل

---

[1] uniaxial
[2] biaxial
[3] Mooney
[4] Martin
[5] Levenberg-Marquardt

تطابق خوبی رابین دادههای آزمایشگاهی و تئوریک بیان نمودند. (2): بهترین نتایج برای مدل‌های اگدن[1]، یئو[2] و مارتین بوده است. (3): بدترین نتیجه مربوط به مدل نئو- هوکین بوده که در هر دو ماده قابلیت بیان ویژگی‌های غیرخطی را ندارد[60].

Selvadorai در سال 2006 مساله خیز عرضی غشاء لاستیکی طبیعی را که در یک سمت درگیر است بررسی نمود. تست کشش تک محوره برای تعیین رفتار ماده لاستیکی بر حسب مدل‌های مختلف در مقالات به انجام رسید. خیز نامتقارن و متقارن محوری مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج نشان می‌دهد که گرچه خیز بزرگ است اما کرنش غشاء همچنان در حد متوسط یعنی زیر 70% بوده و لذا در این حالت استفاده از مدل‌های ساده‌تر همچون مونی-ریولین و بلاتز-کو[3] تطابق بهتری را با نتایج آزمایشگاهی می‌دهد[61].

Wissler و همکاران در سال 2007 کار آزمایشگاهی گسترده‌ای را برای کاربرد الاستومرهای دی‌الکتریک در عملگرهای پلیمری فعال ارائه نمودند. الاستومر استفاده شده از نوع VHB 4910 و تحت آزمایشات با کرنش بالا شامل تغییر شکل تک و دو محوره بوده است. آنها بیش از 40 عملگر را با پیش- تنش‌های متفاوت تحت ولتاژ 2000 تا 3500 ولت قرار دادند. سه مدل یئو، اگدن و آرودا- بویس بکار رفتند که به دلیل تطابق خوب، می‌توانند در طراحی عملگر و فرآیند بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گیرند. قابل ذکر است که این مدل‌ها در بیان رفتار وابسته به زمان در تغییر شکل‌های تک و دو محوره پاسخ مناسبی را ارائه نکردند[62].

Batra و همکاران در سال 2008 ارتعاش میکروتیر لاغر تحت میدان الکتریکی با ولتاژ DC را بررسی نمودند. آن‌ها نشان دادند که مدل ارائه شده پیش بینی مناسبی از رفتار ارتعاشی میکروتیر انجام می‌دهد.

---

۱ Ogden
۲ Yeoh
۳ Blatz-Ko

برای شکاف نسبتا بزرگ بین میکروتیر و کنداکتور پایه، هم درنظر گرفتن اثر میدان لبه و هم کشیدگی غشاء مهم است و لذا در نظر نگرفتن هر یک از آن‌ها موجب تقریب ناصحیح از پارامترهای کششی و فرکانس رزونانسی می‌گردد[63].

Kim و همکاران سه مدل مختلف از جمله مدل اگدن[1]، مونی ریولین[2] و نئوهوکین[3] را در سال 2011 برای لاستیک های کلروپرین مورد مقایسه قرار دادند. آنها به این نتیجه رسیدند که گرچه مدل‌های مونی ریولین و نئوهوکین برای استفاده در تحلیل مناسب می‌باشند اما برای تغییر شکل‌های بزرگ، محدودیت-هایی دارند. لذا جهت دستیابی به نتایج بهتر در تغییر شکل بزرگ مواد لاستیکی، مدل‌های هایپرالاستیک پیشرفته‌تری نیاز می‌باشد و آنها در این مورد خاص، مدل اگدن مرتبه سوم را پیشنهاد نمودند. همچنین اشاره شده است که دو مدل مونی ریولین و نئوهوکین می‌توانند برای تطابق‌های ساده در محدوده کرنش-های کوچک در مواد هایپرالاستیک استفاد شوند[64].

Soares و Goncalves در سال 2014 ارتعاش خطی و غیرخطی و پایداری غشاء مستطیلی هایپرالاستیک با کشیدگی اولیه را تحت فشار جانبی هارمونیک و تغییر شکل اولیه محدود بررسی نمودند. آنها ماده را از نوع ایزوتروپیک، همگن و غیرقابل فشردگی و از نوع مونی- ریولین انتخاب نمودند. نتایج را برای حالت خاص نئو- هوکین بدست آورده و با مدل اصلی مقایسه نمودند. آنها پس از استخراج معادله، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای غشاء را به صورت تحلیلی برای هر دو نوع ماده بدست آوردند. جزییات تحلیل پارامتریک نشان از تاثیر نسبت کشیدگی و پارامترهای ماده بر نوسان خطی و غیرخطی ماده دارد[65].

---

[1] Ogden
[2] Mooney-Rivlin
[3] Neo-Hookean

Breslavsky و همکارانش در سال 2014 خیز استاتیکی، ارتعاش آزاد و اجباری صفحات نازک مستطیلی لاستیکی را تحت توزیع فشار یکنواخت بررسی نمودند. آنها عامل غیرخطی هندسی را از طریق رابطه فون-کارمن در صفحه و عامل فیزیکی را با درنظر گرفتن ساده‌ترین مدل یعنی نئو- هوکین مورد بررسی قرار دادند. آنها روشی برای مدل موضعی که رفتار صفحه را حول حالت تغییر شکل یافته تقریب می‌زند ارائه کردند. این مدل موضعی که دارای عوامل غیرخطی مربعی و مرتبه سوم است از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. آن‌ها نشان دادند که حساسیت خیز به عوامل غیرخطی فیزیکی در کرنش-های متوسط قابل توجه می‌باشد. هچنین خیز تحت فشار اولیه در زمانی که عامل غیرخطی ماده حذف شود، تخمینی کمتر از حد معمول را می‌دهد[66].

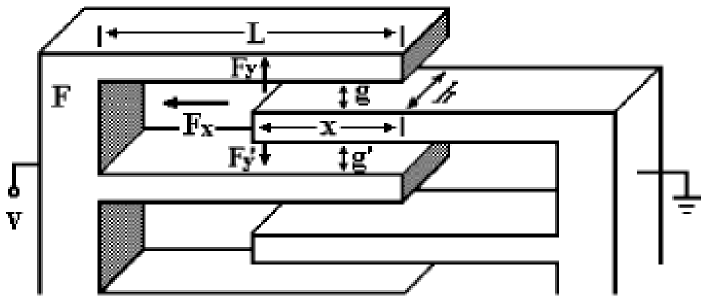
فصل 3:

معادلات حاکم، حل‌های مربوطه و مطالعه پاسخ‌ها

فصل سوم: معادلات حاکم، حل های مربوطه و مطالعه پاسخ ها

3-1: مقدمه

تا کنون اکثر سیستم‌های الکترومکانیکی از مواد بر پایه سیلیکون ساخته شده اند[67] اما مواد پلیمری که می‌توانند عایق‌های الکتریکی، نیمه رسانا یا رسانا باشند برای کاربرد در ابزار الکترونیکی گزینه بسیار مناسبی هستند، زیرا هزینه نسبتا پایین و روند ساخت ساده‌ای دارند[70-68] . پلیمرها سبک، نرم، انعطاف پذیر و دارای سازگاری شیمیایی و بیولوژیکی بوده و ساختار آن‌ها را می‌توان متناسب با وظایف کاری مختلف اصلاح کرده و با تغییر در پارامترهای فیزیکی و شیمیایی، ویژگی‌های مکانیکی آنها را تنظیم کرد. اکثر پلیمرها در مقایسه با مواد سیلیکونی شکننده بوده و قابلیت مقاومت بدون شکست در برابر تغییر طول زیاد را دارند. به دلایل مذکور، ساختارهای پلیمری از موارد مورد علاقه در کاربردهای میکروالکترومکانیکی می‌باشند[77-71]، که طرح نمونه ای از این کاربردها در شکل (3-1) نشان داده شده است.



شکل (3-1): نمونه ای از کاربرد پلیمرها (عملگر شانه ای) [73]

به طور ویژه باید اشاره کرد که مقدار پایین مدول الاستیسیته در این مواد منجر به خیز بیشتر در ولتاژ اعمالی می‌گردد[78]. شایان ذکر است که مدول الاستیسیته میکروسازه‌های پلیمری، از طریق کنترل ارتباط عرضی بین زنجیره‌های پلیمری تا حدود زیادی قابل تنظیم می‌باشد.

تا پیش از این در عملگرها یا رزوناتورهای پلیمری از پلیمرهای نارسانا به عنوان زیرسازه استفاده شده و برای افزایش قابلیت هدایت الکتریکی این میکروسازه‌ها، لایه ای فلزی بر سطح آنها نصب می‌شد[79-80].

به هر صورت، از پلیمرها به مدت زیادی در ابزارهای الکترونیکی به عنوان عایق استفاده می‌شد. در سال 1977 ساخت اولین پلیمر با رسانایی بالا به نام پلی استیلن[1] [81]گزارش شد و از آن پس مواد پلیمری مزدوج متعددی به عنوان مواد نیمه‌هادی در میکروابزارها استفاده شدند [82-85].

Zhang و همکاران در سال 2005 و 2007 [86-87] میکروتیر دوسرگیردار تمام پلیمری را با پلیمر رسانا بر روی زیرسازه شیشه ای با استفاده از تکنولوژی میکروالکترونیکی ساختند. این میکرورزوناتورهای پلیمری، ابزاری مناسب برای کاربرد به عنوان حسگرهای تنش، شیمیایی و بیولوژیکی می‌باشند، زیرا ویژگی‌های سطحی و حجمی قابل تنظیم[2] و صلبیت ذاتی پایینی دارند.

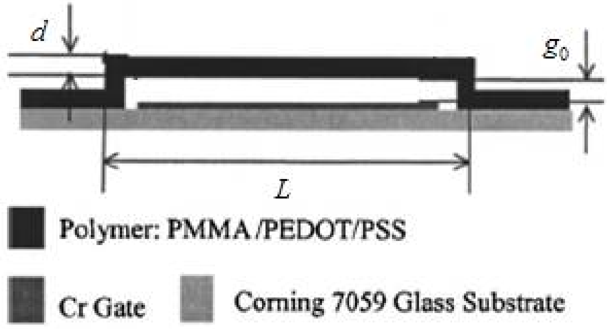
برای یک رزوناتور الکترواستاتیکی باید هم قسمت پل و هم الکترود به اندازه کافی رسانا باشند تا از بیشتر بودن فرکانس شارژ/ دشارژ خازن تشکیل شده ($\frac{1}{RC}$) از فرکانس رزونانسی اطمینان حاصل شود[88].

مقاومت میکرورزوناتورهای دوسرگیردار معمول 30 مگا اهم، طول آن‌ها بین 10 تا 40 میکرومتر و ضخامت لایه 0,65 میکرومتر می‌باشد. در رزوناتور با تحریک الکترواستاتیکی، ولتاژ بین پل پلیمری و الکترود اعمال شده و موجب نوسان در اثر نیروی الکترواستاتیکی ایجاد شده می‌گردد. اسکن میکروسکوپ

[1] polyacetylene

[2] Tunable

الکترونی[1] از رزوناتور پلیمری ساخته شده توسط آنها به طول 40 میکرومتر و نیز نمای شماتیکی از آن در شکل (3-2) آمده است.



شکل (3-2): عکسی از میکرورزوناتور تمام پلیمری معلق روی الکترود کرومیوم و شماتیک نمای جانبی [86]

همان‌طور که در ابتدای این فصل ذکر شد پلیمرها با اتصال عرضی یا همان الاستومرها رفتار الاستیک ایده آلی از خود نشان می‌دهند و این رفتار الاستیک را می‌توان توسط مدل‌های هایپرالاستیک بیان نمود. کلیت رزوناتور پلیمری ساخته شده توسط آنها، اما با ابعاد و شرایط مرزی متفاوت، مبنای کار مدل‌سازی ما در این پژوهش قرار خواهد گرفت.

در کارهای ارائه شده در فصل دوم مشخص است که در کنار اندک بودن تحقیقات انجام شده در زمینه مواد هایپرالاستیک و بالاخص الاستومر دی الکتریک، اکثریت پژوهش ها به صورت تجربی انجام شده اند که متاسفانه جز تعداد اندکی از آن ها قابل اتکا نمی باشند. همچنین عامل غیرخطی ماده که مستقیما دربرگیرنده مدل‌های چندجمله ای هایپرالاستیک باشد و بتواند ارتباط بین تئوری‌های تیر و این مدل‌ها را مشخص کند انجام نشده است. در این پژوهش تلاش می شود تا این ارتباط کاملا با جزییات مورد مطالعه قرار گیرد و در عین حال خلا موجود در زمینه تئوری‌های غیرکلاسیک نیز با معرفی مدلی تقویت شده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده تا حد امکان پر شود. علاوه بر آن، تا بحال بحث پایداری صرفا در

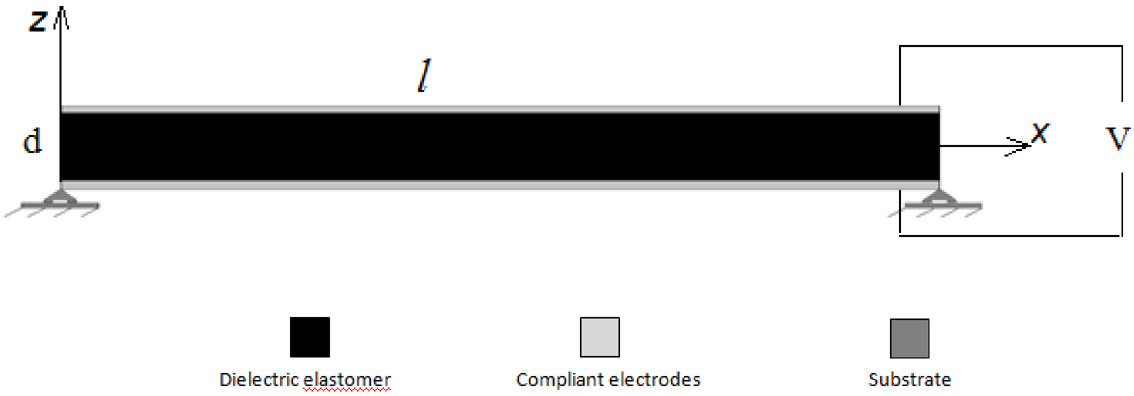
[1] Scanning electron microscope (SEM)

میکروتیرهای معمولی انجام شده و در ارتباط با پایداری میکروتیرها با استفاده از مدل های هایپرالاستیک کار قابل توجهی انجام نگردید که در این رساله برای مدل های چندجمله ای هایپرالاستیک مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. برای تحریک الکتروستاتیکی همانطور که در مراجع مشخص است پژوهش‌ها صرفا مرتبط با تیرهای معمولی بوده است که سعی برآن است تا همان روند برای میکروتیرهای هایپرالاستیک مورد بررسی قرار گیرد.

در ادامه، مدل تیر درنظر گرفته شده به همراه فرضیات، رابطه کرنش- جابجایی در خیز بزرگ و مدل‌های مد نظر هایپرالاستیک ارائه شدند که هر یک به تناسب پارامترهای موجود در آن‌ها و نیز دقت بیان رفتار حاکم، می‌توانند در استخراج معادلات ارتعاشی حاکم بر مساله به کار روند. در اینجا از مدل‌های چندجمله‌ای همچون بیدرمن و یئو استفاده خواهد شد. این مدل‌ها هر یک دارای پارامترهای نامعلومی هستند که طبق روند ارائه شده در فصل اول باید از طریق تطبیق روابط تئوریک با نتایج حاصل از کارهای آزمایشگاهی بدست آید. در این راه باید از کارهای آزمایشگاهی مورد اعتماد در مقالات بهره برد که پس از استخراج معادلات مربوطه درباره آن بحث می‌شود.

2-3 مدل سازی میکروتیر

مدل‌سازی کار ما بر اساس رزوناتور ساخته شده توسط Zhang و همکاران می‌باشد اما طبق کار Feng و همکاران [56] به جای رسانای پلیمری از الاستومر که نارساناست استفاده می شود تا دی الکتریک الاستومر تشکیل شود. لذا میکروتیری با تکیه گاه ساده را با زیرسازه، الکترود برای اعمال نیروی هارمونیک و نیز بخش اصلی تیر که تماما پلیمری و از جنس الاستومر با رفتار ایده‌آل لاستیکی می‌باشد را مدنظر قرار می‌دهیم. علاوه بر شرایط مرزی مفصلی، برای نمونه در ارتعاش آزاد مدل یئو از شرط مرزی تکیه گاه گیردار نیز استفاده می کنیم. شماتیک رزوناتور برای شرط مرزی تکیه گاه ساده در شکل (3-3) ارائه شده است:



شکل (3-3): مدل‌سازی شماتیک میکروتیر با تکیه‌گاه ساده

رزوناتور مذکور تحت نیروی خارجی ناشی از تحریک الکتروستاتیکی قرار داشته و به این ترتیب به صورت عرضی ارتعاش می کند. این تیر دارای طول L ، ضخامت d و عرض b می‌باشد.

از آنجا که ماده مدنظر برای رزوناتور از نوع الاستومر می‌باشد لذا می‌توان آن را با قوانین سازگاری هایپرالاستیک بیان نمود. فرضیات زیر در مدل‌سازی به کارگرفته می‌شود:

(1): ماده دارای خاصیت تراکم ناپذیر است.

(2): تغییر شکل دارای اثرات تغییر نرخ کرنش نیست.

(3): تولید حرارت داخلی قابل صرف نظر است (isothermal).

(4): رفتار مکانیکی ماده کاملا الاستیک است.

(5): رفتار تیر تحت تاثیر عامل غیرخطی هندسی است یعنی خیز نسبتا بزرگ می‌باشد.

3-2-1 رابطه کرنش – جابجایی در تغییر شکل بزرگ

همان‌طور که ذکر شد در خیز بزرگ باید ازتانسورکرنش لاگرانژی استفاده نمود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \frac{(C - I)}{2} \tag{3-1}$$

که در آن C تانسور راست کوشی- گرین می‌باشد که بیان آن برحسب گرادیان تغییر شکل در بخش مقدمه آمده است.

مولفه‌های کرنش لاگرانژی می‌تواند بر حسب گرادیان جابجایی نیز بیان گردد:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{3-2}$$

طبق موارد ذکر شده در فرضیات، پارامتر $\frac{\partial u}{\partial x}$ و نیز شیب تیر ($\frac{\partial w}{\partial x}$) کوچک فرض می‌شوند.

3-2-2 اصل همیلتون

برای استخراج معادله، از اصل همیلتون استفاده می‌شود. اصل همیلتون بیان می‌کند که از بین تمامی حالت‌های جابجایی وابسته به زمان که معادلات سازگاری، قیود و نیز شرایط مرزی در زمان‌های ابتدایی و انتهایی را ارضا می‌کند، پاسخی حقیقی است که تابع لاگرانژ را کمینه می‌کند. بنابراین اصل همیلتون به شکل کلی زیر بیان می‌شود:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

L در اصل همیلتون با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$L = T - \Pi + W \qquad (3\text{-}4)$$

T در این رابطه انرژی جنبشی، Π انرژی کرنشی و W کار نیروهای غیرپتانسیلی اعمالی به سیستم است.

این سه پارامتر در ادامه محاسبه و در نهایت در اصل همیلتون جایگذاری می‌شود تا معادله حاکم استخراج گردد.

بررسی رفتار ارتعاشی میکروتیر در سه بخش ارتعاشات آزاد، ارتعاشات اجباری و تئوری غیرکلاسیک انجام خواهد شد.

در بخش ارتعاش آزاد از مدل یئو و تئوری اویلر برنولی و نیز از مدل بیدرمن و تئوری برشی استفاده می-شود، البته در ابتدای این بخش به موضوع عدم کارایی مدل‌هایی همچون نئو-هوکین، نیز پرداخته خواهد شد. در این بخش به عنوان نمونه، شرط مرزی گیردار نیز برای مدل یئو بررسی خواهد شد. در بخش ارتعاش اجباری نیز از مدل یئو و تئوری اویلر برنولی استفاده می‌گردد و در بخش تئوری غیرکلاسیک، از تئوری تنش کوپل اصلاح شده جهت در نظر گرفتن اثر اندازه بهره گرفته شده و مدل هایپرالاستیک بیدرمن به نوعی برای در نظر گرفتن اثر اندازه، ترمیم شده است.

3-3 ارتعاش آزاد میکروتیر با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، تئوری اویلر برنولی و مدل‌های چندجمله‌ای هایپرالاستیک نئوهوکین و یئو

با توجه به رزوناتور مورد نظر برای مدل‌سازی که به صورت تیر لاغر می‌باشد، از مدل اویلر- برنولی برای این رزوناتور استفاده شده که در اینجا به مقدمات کوتاهی از این تئوری اشاره می‌شود. تیر مذکور یکنواخت، همگن و مستقیم در راستای x بوده و سطوح بالا و پایین عمود بر محور z می‌باشد.

فرضیات مورد اعمال در این تئوری به شرح زیر می‌باشند:

(1): سطح مقطع در صفحه خود کاملا صلب بوده و لذا هیچ تغییر شکلی در صفحه سطح مقطع رخ نمی-دهد.

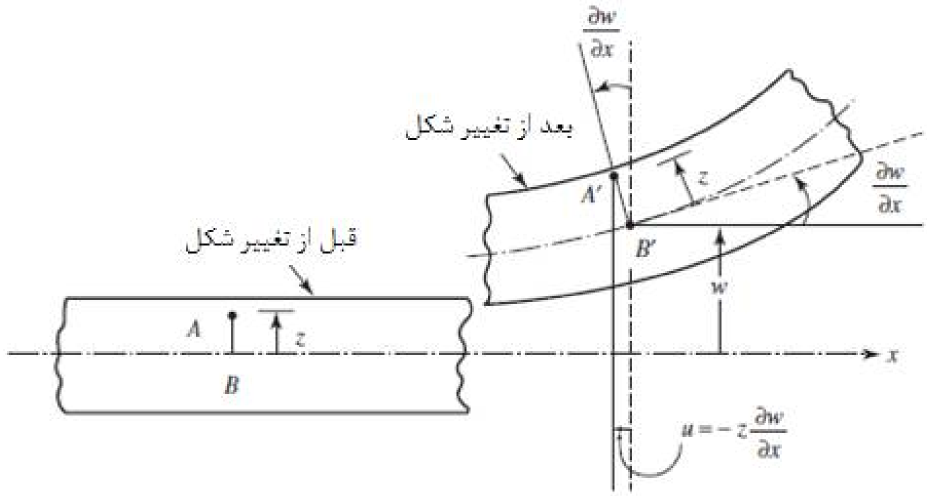
(2): سطح مقطع در طی تغییر شکل به صورت صفحه باقی می‌ماند.

(3): سطح مقطع پس از اعمال خیز نیز همچنان بر تار خنثی عمود می‌باشد.

با در نظر گرفتن این فرض‌ها و با توجه به شکل (3-4)، اگر جابجایی عرضی تیر برابر w باشد، آنگاه مولفه-های جابجایی هرنقطه از سطح مقطع برابر خواهد بود با:

$$u=-z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x},\quad v=0,\quad w=w(x,t) \tag{3-5}$$

که در آن u ، v و w به ترتیب مولفه‌های جابجایی در راستای x ، y و z می‌باشند[89].



شکل (3-4): تیر اویلر برنولی تحت خمش [89]

از آنجا که رزوناتور مذکور در کار ما تحت خیز بزرگ می‌باشد نمی‌توان از رابطه کلاسیک بیان کرنش بر حسب جابجایی یعنی رابطه $\varepsilon_{ij} = \frac{\left(u_{ij} + u_{ji}\right)}{2}$ استفاده نمود بلکه به جای آن باید از مفهوم کرنش لاگرانژی بهره برد. جزییات این امر در ادامه می آید.

پس از اعمال تعریف کرنش لاگرانژی در خیز بزرگ برای هر مولفه از تانسور کرنش و صرف نظر از جملات کوچک و نیز جابجایی طولی، درنهایت مولفه‌های کرنش را نتیجه می‌دهد:

$$\varepsilon_{11} \approx -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{3-6}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{33} \approx 0 \tag{3-7}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0 \tag{3-8}$$

که مولفه باقیمانده همان مولفه محوری فون کارمن است.

از آنجا که می‌توان ثوابت کرنش را بر اساس ثوابت کشیدگی بیان نمود و خود ثوابت کشیدگی از تانسور کوشی- گرین راست بدست می‌آیند، تانسور کرنش لاگرانژی و به دنبال آن تانسور کوشی- گرین راست را می‌توان یافت.

تانسور کرنش لاگرانژی با محاسبات ارائه شده برابر است با:

$$E=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\varepsilon_{xx} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3-9}$$

تانسور کوشی-گرین راست نیز با تعریف قسمت پیشین عبارتست از:

$$C=2E+I=\begin{bmatrix}2\varepsilon_{xx}+1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3-10}$$

از طرفی ثوابت کشیدگی λ_i ریشه مربعی مقادیر ویژه تانسور چپ یا راست کوشی- گرین می‌باشند. بنابراین توسط تانسور راست کوشی- گرین تعریف شده در معادله (3-10) و یافتن ریشه مربعی مقادیر ویژه آن، مقادیر λ_i برابر خواهد بود با:

$$\lambda_1=1,\qquad \lambda_2=1,\qquad \lambda_3=\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}} \tag{3-11}$$

ثوابت کرنش عبارتند از:

$$\mathrm{I}_1=2\varepsilon_{xx}+3 \tag{3-12}$$

$$\mathrm{I}_2=4\varepsilon_{xx}+3 \tag{3-13}$$

از آن‌جا که ماده مورد نظر در مدل، غیرقابل فشرده در نظر گرفته می‌شود و با در نظر گرفتن رابطه $I_3=\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2=J^2=\det(C)$ و اینکه طبق مطالب ارائه شده در فصل اول باید برای ثابت ماندن حجم $J=1$ باشد بنابراین چگالی انرژی کرنشی در مواد هایپرالاستیسیته صرفا بر اساس دو ثابت کرنش اولیه بیان می‌گردد.

3-3-1 مدل نئوهوکین و بررسی عدم کارایی آن

معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکرورزوناتور دی‌الکتریک الاستومر بر اساس مدل نئوهوکین نیازمند محاسبه انرژی جنبشی، کرنشی و اعمال اصل همیلتون است:

انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A (\frac{\partial w}{\partial t})^2 dx \tag{3-14}$$

انرژی کرنشی در واحد حجم مربوط به مدل نئوهوکین و انتگرال حجمی آن که انرژی کرنشی کل را می‌دهد:

$$W = \frac{1}{2} nkT(I_1 - 3) \tag{3-15}$$

$$W = \frac{1}{2} nkT(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \tag{3-16}$$

$$\Pi = \int_V W dV = \frac{1}{2} nkT \times A\int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \tag{3-17}$$

پارامترهای معادله (3-15) در فصل اول (بخش 1-2-5-1) معرفی شدند.

اصل همیلتون و انجام مشتق‌گیری‌های مربوطه، می‌دهد:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \tag{3-18}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^l \rho A\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial(\delta w)}{\partial t}dx - \frac{1}{2}nkT\int_0^l 2A\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial(\delta w)}{\partial x}dx\right]dt = 0 \tag{3-19}$$

دو بار انتگرال جزء به جزء از معادله (3-19) معادله نهایی زیر را می‌دهد:

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - nkTA\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{3-20}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود معادله استخراجی، معادله حاکم بر رشته بوده و نمی‌تواند به عنوان معادله تیر مورد پذیرش قرار گیرد. از این امر می‌توان نتیجه گرفت که مدل نئوهوکین، مدل مناسبی برای بیان

رفتار میکروتیر مورد نظر ما نمی‌باشد. دلیل این امر را می توان به عدم کافی بودن تعداد جملات در چگالی انرژی کرنشی آن نسبت داد.

3-3-2 استخراج معادله حاکم بر مدل یئو

برای استخراج معادلات تحت تئوری اویلر برنولی و مدل یئو، انرژی‌های جنبشی و کرنشی به ترتیب زیر در اصل همیلتون جایگزین می‌شود.

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l \rho A(\frac{\partial w}{\partial t})^2 dx \tag{3-21}$$

چگالی انرژی کرنشی مدل یئو معادل است با:

$$W=c_1\left(I_1-3\right)+c_2\left(I_1-3\right)^2+c_3\left(I_1-3\right)^3 \tag{3-22}$$

انرژی کرنشی که انتگرال حجمی چگالی انرژی کرنشی است رابطه زیر را خواهد داشت:

$$\begin{aligned}\Pi=&c_1A\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx+c_2A\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4 dx-4c_2I\int_0^l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx\\&+c_3A\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^6 dx+12c_3I\int_0^l\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx\end{aligned} \tag{3-23}$$

با استفاده از معادلات (3-5) تا (3-8) و به‌کارگیری رابطه کرنش لاگرانژی فون-کارمن، معادله نهایی مدل یئو عبارتست از:

$$\begin{aligned}&\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2c_1A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+8c_2I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-12c_2A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-30c_3A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\\&+24c_3I\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3+96c_3I\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}+24c_3I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=0\end{aligned} \tag{3-24}$$

شرایط مرزی قابل استخراج از روش همیلتون عبارتند از:

$$\begin{aligned} at\, x=0,l:\quad & 2c_1A\frac{\partial w}{\partial x}+4c_2A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3+6c_3A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^5 \\ & +24c_3I\left[\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2-2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\right]=0 \\ & OR\quad \delta w=0 \end{aligned} \tag{3-25}$$

$$at\, x=0,l:\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[8c_2I+24c_3I\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]=0\quad OR\quad \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \tag{3-26}$$

از بین شرایط مرزی بدست آمده، $w(0)=0,\ w(l)=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0)=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l)=0$ معرف شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده می‌باشند.

3-3-3 حل معادله حاکم و بررسی پاسخ فرکانسی

ابتدا معادله با تعریف پارامترهای زیر، بی بعدسازی می‌شود:

$$x^*=\frac{x}{l},\quad w^*=\frac{w}{d},\quad t^*=t\omega_{\dim} \tag{3-27}$$

در رابطه (3-27) پارامتر $\omega_{\dim}$ فرکانس طبیعی بابعد در حالت خطی شده معادله (3-24) می‌باشد.

این پارامتر ابتدا محاسبه می‌شود و سپس بی‌بعدسازی انجام می‌گیرد.

خطی شده معادله (3-24) عبارتست از:

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2c_1A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+8c_2I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \tag{3-28}$$

حل پیشنهادی زیر که شرایط مرزی تکیه گاه ساده را ارضاء می‌کند در نظر گرفته می‌شود [89]:

$$w(x,t)=C\, sin(\frac{\pi}{l}x)cos(\omega_{dim}t) \tag{3-29}$$

از اعمال معادله (3-29) در (3-28) و مرتب‌سازی، می‌توان به مربع فرکانس طبیعی با بعد ($\omega_{\dim}^2$) دست یافت:

$$\omega_{\dim}^2=\frac{2c_1Al^2\pi^2+8c_2I\pi^4}{\rho Al^4} \tag{3-30}$$

که مقدار عددی آن برابر $2.1963\times10^{6}\ rad/s$ به ازای مقادیر جدول (3-1) می‌باشد.

از جایگذاری (3-27) در (3-24) معادله بی بعدشده حاکم بر مدل یئو بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}-\beta_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+\beta_2\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}-\beta_3\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2-\beta_4\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^4\\&+\beta_5\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)^3+4\beta_5\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+\beta_5\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2=0\end{aligned}\tag{3-31}$$

که:

$$\beta_1=\frac{2c_1}{\rho l^2\omega_{\dim}^2},\ \beta_2=\frac{8c_2 I}{\rho A l^4\omega_{\dim}^2},\ \beta_3=\frac{12c_2 d^2}{\rho l^4\omega_{\dim}^2},\ \beta_4=\frac{30c_3 d^4}{\rho l^6\omega_{\dim}^2},\ \beta_5=\frac{24c_3 I d^2}{\rho A l^6\omega_{\dim}^2}$$

و شرایط مرزی بی‌بعد عبارتند از: $w^*(0)=0,\ w^*(1)=0,\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}(0)=0, \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}(1)=0$.

برای حل این معادله از روش اغتشاشات پوانکاره استفاده می‌گردد.

در این روش حل که یکی از روش‌های بسیار پرکاربرد در زمینه معادلات غیرخطی است ابتدا با تغییر متغیر $w^*=\varepsilon\eta$ پارامتر کوچک اغتشاش را معرفی کرده و سپس با تغییر متغیر زمان $\tau=\omega t^*$، معادله (97) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\omega^2\varepsilon\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}-\beta_1\varepsilon\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\beta_2\varepsilon\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}-\beta_3\varepsilon^3\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2-\beta_4\varepsilon^5\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^4\\&+\beta_5\varepsilon^3\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^3+4\beta_5\varepsilon^3\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\beta_5\varepsilon^3\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2=0\end{aligned}\tag{3-32}$$

برای سادگی، علامت ستاره بر روی متغیرها برداشته شده است.

حل پیشنهادی برای جابجایی و فرکانس، طبق روش پوانکاره عبارتست از:

$$\begin{aligned}&\eta=\eta_0(x,\tau)+\varepsilon\eta_1(x,\tau)+\varepsilon^2\eta_2(x,\tau)+\dots\\&\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\dots\end{aligned}\tag{3-33}$$

از جایگذاری (3-33) در (3-31) ضرایب توان های مختلف ε را به‌دست آورده، به حل معادلات آن‌ها پرداخته و در نهایت در معادله (3-33) جایگزین می‌شود.

ضرایب بدست آمده به قرار زیر می‌باشند:

$$O(\varepsilon^1):\omega_0^2\frac{\partial^2\eta_0}{\partial\tau^2}+\beta_2\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^4}-\beta_1\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}=0 \tag{3-34}$$

$$O(\varepsilon^2):\ \omega_0^2\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\tau^2}+2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2\eta_0}{\partial\tau^2}+\beta_2\frac{\partial^4\eta_1}{\partial x^4}-\beta_1\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}=0 \tag{3-35}$$

$$\begin{aligned}O(\varepsilon^3):&\ \omega_0^2\frac{\partial^2\eta_2}{\partial\tau^2}+2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\tau^2}+(2\omega_0\omega_2+\omega_1{}^2)\frac{\partial^2\eta_0}{\partial\tau^2}\\&+\beta_2\left(\frac{\partial^4\eta_2}{\partial x^4}\right)-\beta_1\left(\frac{\partial^2\eta_2}{\partial x^2}\right)-\beta_3\left(\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2\\&+\beta_5\left(\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}\right)^3+\beta_5\left(\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2+4\beta_5\left(\frac{\partial^3\eta_0}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)=0\end{aligned} \tag{3-36}$$

این معادلات توسط روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و حل می‌شوند. در این راستا، خیز عرضی در هر معادله بر حسب حاصل ضرب دو تابع مجزای زمانی و مکانی نوشته می‌شود:

$$\eta_{im}(\mathrm{x,t})=\mathrm{T}_{im}(\tau)\,\mathrm{X}_{im}(\mathrm{x})\quad i=0,1,2\qquad X_{im}(\mathrm{x})=\sqrt{2}\sin(\mathrm{m}\pi\,\mathrm{x}) \tag{3-37}$$

که $X_{im}(\mathrm{x})$ تابع شکل مود ارضاء کننده شرایط مرزی و m شماره مود می باشد.

شرایط اولیه در حل ارتعاش آزاد به فرم $\dot{T}(0)=0$,$T(0)=\tilde{A}_{\max}$ بوده که $\tilde{A}_{\max}$ بیشینه دامنه نرمال شده می‌باشد و $\tilde{A}_{\max}=\dfrac{A_{\max}}{d}$.

حل معادلات این ضرایب به ترتیب عبارتست از:

$$\eta_{0\mathrm{m}}=\sqrt{2}\,\tilde{\mathrm{A}}_{\max}\cos(\sqrt{\alpha_1}\,\tau)\sin(\mathrm{m}\pi\,\mathrm{x}) \tag{3-38}$$

که $\alpha_1=\dfrac{\beta_1m^2\pi^2+\beta_2m^4\pi^4}{\omega_0^2}$.

$$\eta_{1\mathrm{m}}=0 \tag{3-39}$$

$$\eta_{2\mathrm{m}}=\sqrt{2}\frac{\gamma_1}{8\alpha_1}\left[\cos\left(3\sqrt{\alpha_1}\,\tau\right)-\cos\left(\sqrt{\alpha_1}\,\tau\right)\right] \tag{3-40}$$

که $\gamma_1=\tilde{A}_{\max}^3\dfrac{\left(4\beta_5\,m^6\pi^6+\beta_3\,m^4\pi^4\right)}{8\omega_0^2}$.

برای یافتن فرکانس غیرخطی سیستم تا مرتبه ε^2 نیاز به یافتن سه پارامتر فرکانسی ω_0 ، ω_1 و ω_2 است که ω_0 فرکانس خطی سیستم در حالت بی‌بعد بوده و ω_1 و ω_2 از حذف جملات سکولار در حل معادلات (3-35) و (3-36) حاصل می‌شوند.

در حل معادله (3-35) عبارت $2\omega_0\omega_1\alpha_1\tilde{A}_{\max}\cos(\sqrt{\alpha_1}\,\tau)$ که منجر به ترم سکولار می‌شود، موجود است که از صفر قرار دادن آن مقدار ω_1 بدست می‌آید:

$$\omega_1 = 0 \tag{3-41}$$

در حل معادله (3-36) نیز با صفر قرار دادن عبارت منجر به ترم سکولار، ω_2 حاصل می‌شود:

$$\omega_2 = \frac{-6\beta_5\tilde{A}_{\max}^2 m^6\pi^6 + 3\beta_3\tilde{A}_{\max}^2 m^4\pi^4}{16\omega_0\alpha_1} \tag{3-42}$$

فرکانس بی بعد خطی (ω_0)

معادله بی‌بعد شده (3-31) در حالت خطی عبارتست از:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}} - \beta_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \beta_2\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}} = 0 \tag{3-43}$$

حل پیشنهادی زیر که ارضاکننده شرایط مرزی بی‌بعد است در معادله اعمال می‌شود:

$$w(x,t) = C\,sin(m\pi\, x)cos(\,\omega_0 t\,) \tag{3-44}$$

بدین ترتیب مربع فرکانس خطی بی بعد بدست می‌آید:

$$\omega_0^2 = \frac{2c_1 A l^2 m^2\pi^2 + 8c_2 I\, \mathrm{m}^4\,\pi^4}{\rho A l^4\omega_{\dim}^2} \tag{3-45}$$

از جایگذاری معادلات (3-41)، (3-42) و (3-45) در رابطه (3-33) فرکانس غیرخطی تیر حاصل می‌شود.

3-3-4 نتایج عددی

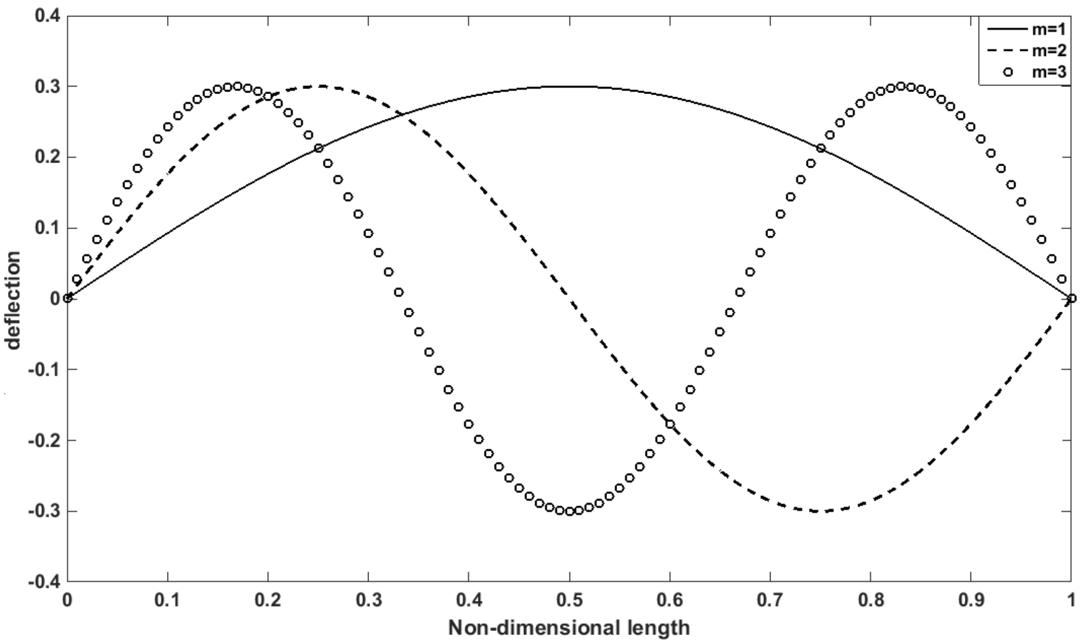
برای یافتن شکل مودهای پاسخ سیستم در مودهای مختلف، از پارامترهای هندسی و ماده طبق جدول زیر استفاده می‌شود. ضمنا بیشینه دامنه وسط تیر $\tilde{A}_{\max} = 0.3$ فرض می‌شود.

جدول (3-1): پارامترهای هندسی و ماده مدل یئو

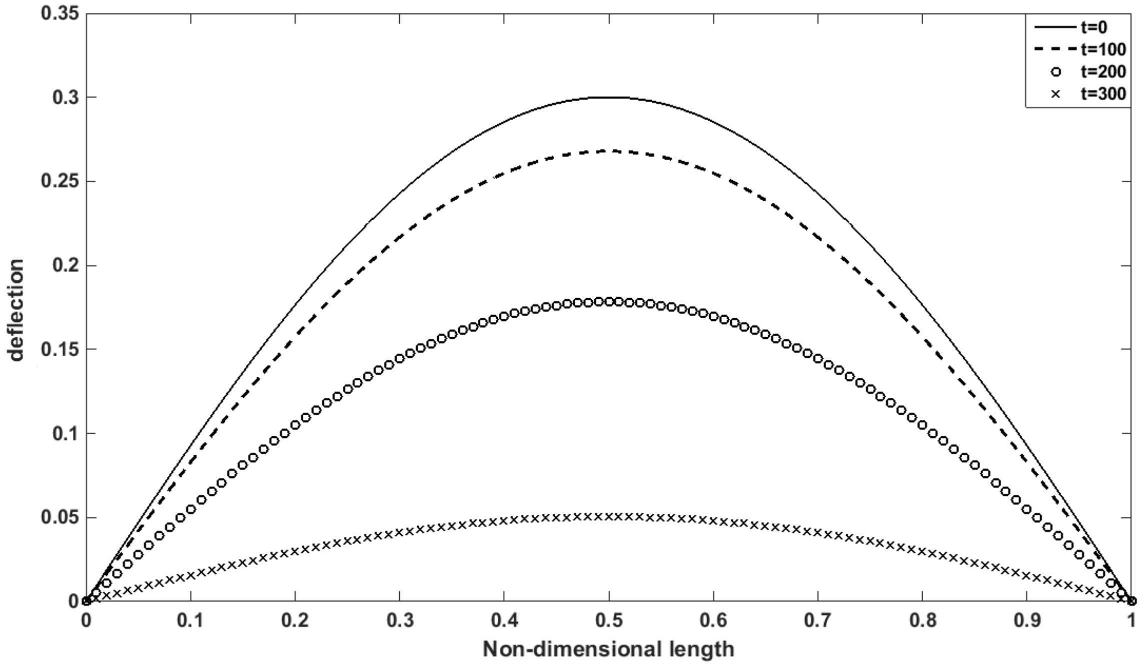
مقدار	پارامتر [87]
$30\,\mu m$	l
$10\,\mu m$	b
$0.65\,\mu m$	d

پارامتر[30]	مقدار
c_1	$0.24162\,MPa$
c_2	$0.19977\,MPa$
c_3	$-0.00541\,MPa$

خیزها برای سه مود اول و نیز به طور جداگانه برای مود اول در زمان‌های مختلف رسم شده است که مطابق با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده می‌باشد.



شکل (3-5): شکل مود میکروتیر تکیه گاه ساده برای سه مود اول

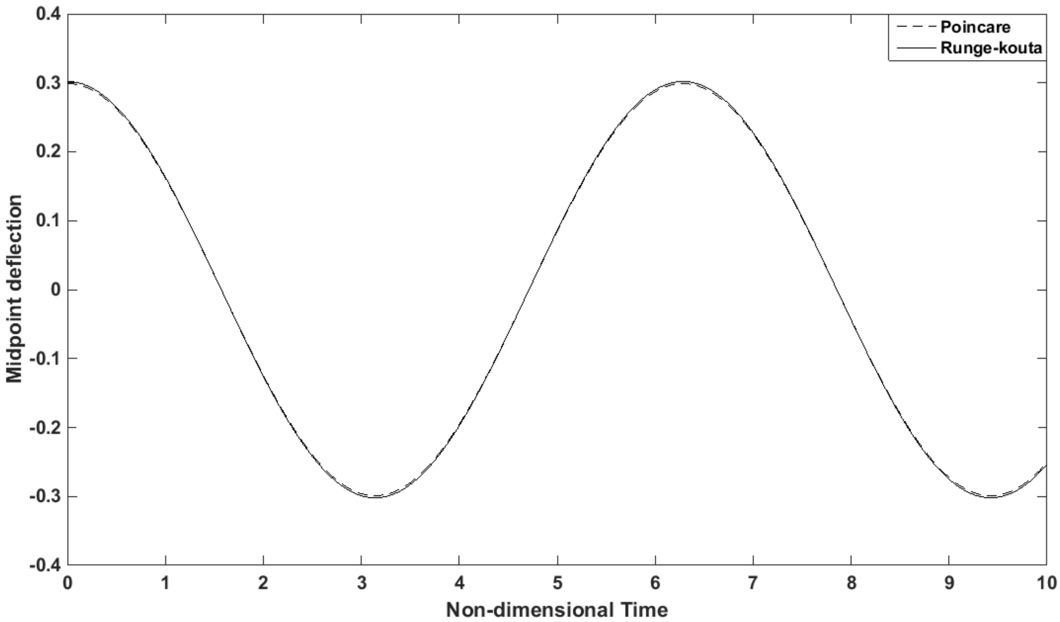


شکل (3-6): خیز میکروتیر تکیه گاه ساده برای مود اول در زمان های مختلف

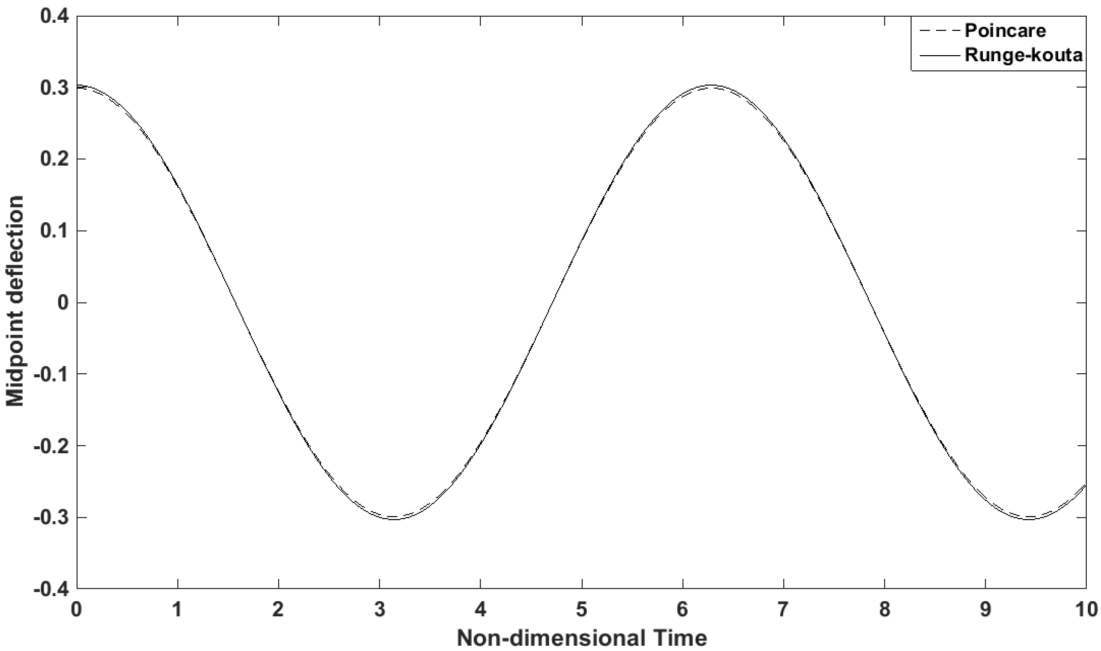
برای اعتبارسنجی پاسخ بدست آمده توسط روش تحلیلی، از روش عددی رانجه- کوتا[1]ی مرتبه چهارم در این بخش و بخش‌های بعدی استفاده شده است.

پاسخ زمانی میانه تیر برای مودهای مختلف در شکل های (3-7)، (3-8) و (3-9) رسم شده و همانطور که مشخص است تطابق بسیار خوبی بین روش تحلیلی و عددی وجود دارد. این امر بیانگر این است که بسط سه جمله ای در روش تحلیلی برای اخذ پاسخ دقیق در این مساله کفایت می‌کند.

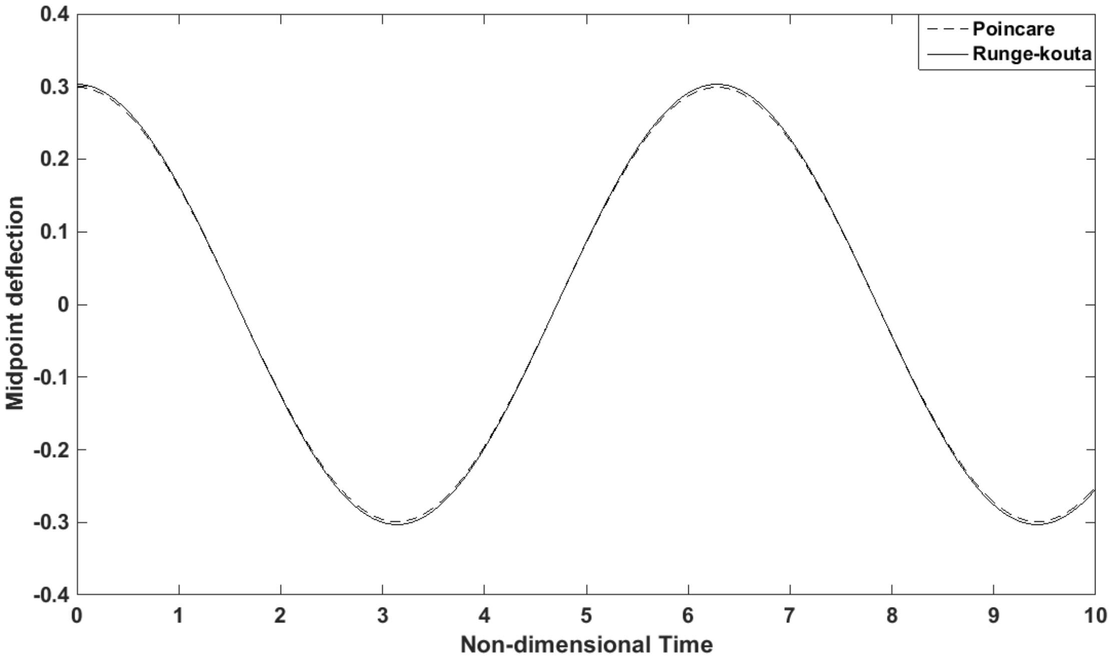
[1] Runge-Kouta



شکل(3-7): پاسخ زمانی میکروتیر تکیه گاه ساده در مود اول



شکل (3-8): پاسخ زمانی میکروتیر تکیه گاه ساده در مود سوم



شکل (3-9): پاسخ زمانی میکروتیر تکیه گاه ساده در مود پنجم

بررسی پارامترهای موثر بر فرکانس

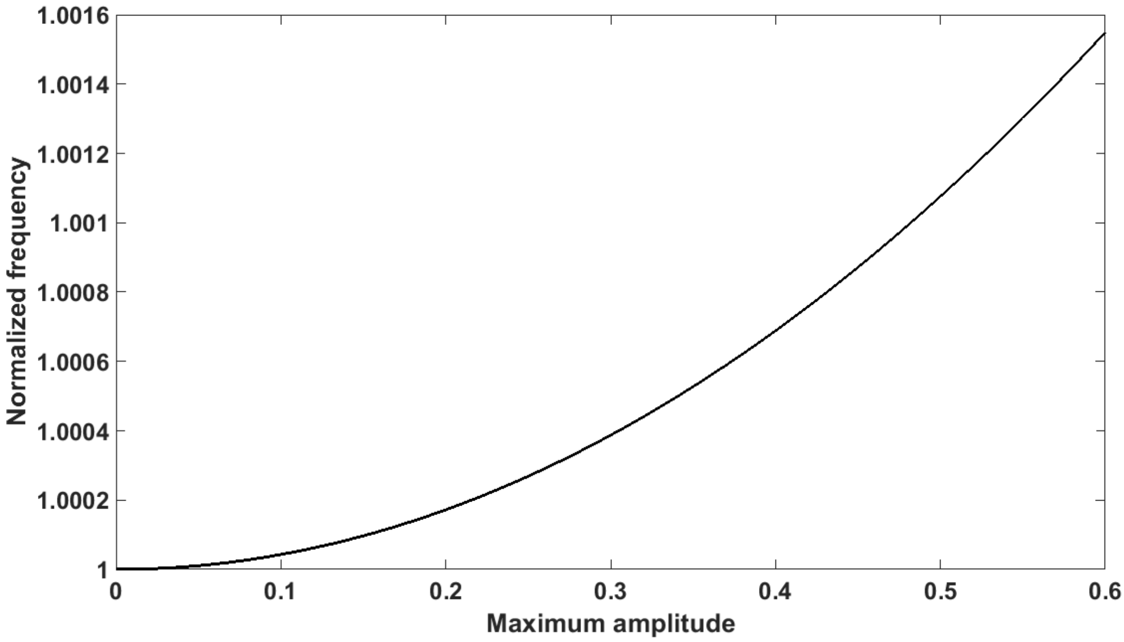
همانطور که در بخش حل اغتشاشات بیان شد، فرکانس غیرخطی سیستم پس از حذف جملات سکولار بدست آمده که مطابق با معادله (3-31) است.

در این بخش اثر پارامترهای مختلف زیر، بر فرکانس میکرورزوناتور مورد بحث، رسم و بررسی می‌شوند:

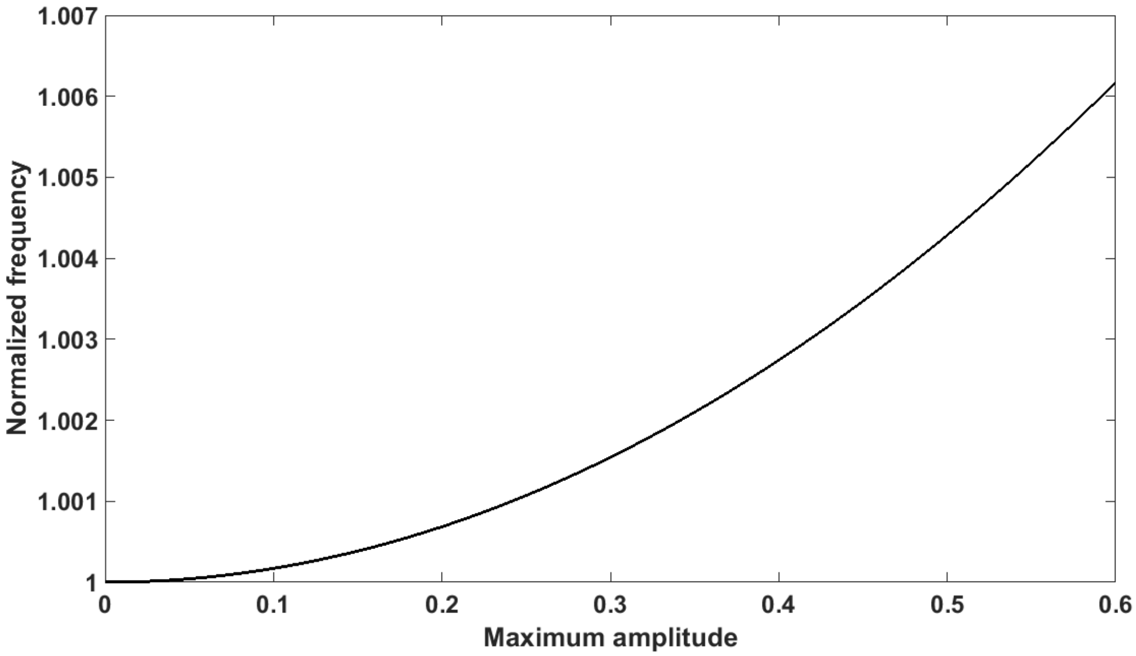
- اثر بیشینه دامنه در مودهای مختلف
- اثر بیشینه دامنه در ضخامت‌های مختلف برای مود اول و سوم
- اثر نسبت طول به ضخامت (Aspect ratio) در مودهای مختلف

در نمودار شکل‌های (3-10) تا (3-12) وابستگی فرکانس نرمال شده ($\frac{\omega}{\omega_0}$نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس بی بعد خطی در همان مود) به بیشینه دامنه در سه مود اول نشان داده شده است. همانطور که

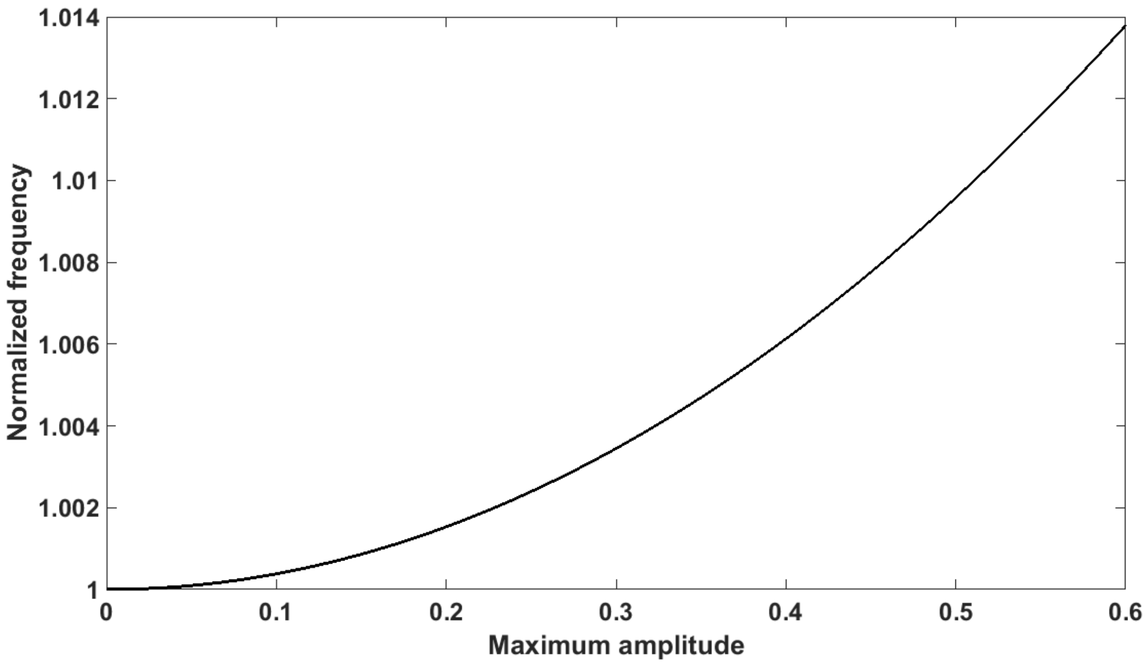
مشخص است در هر مود با افزایش بیشینه دامنه، میزان فرکانس افزایش می‌یابد. این میزان افزایش در مودهای بالاتر دارای نرخ بیشتری نسبت به مودهای پایین‌تر است.



شکل (3-10): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس غیرخطی میکروتیر تکیه‌گاه ساده در مود اول

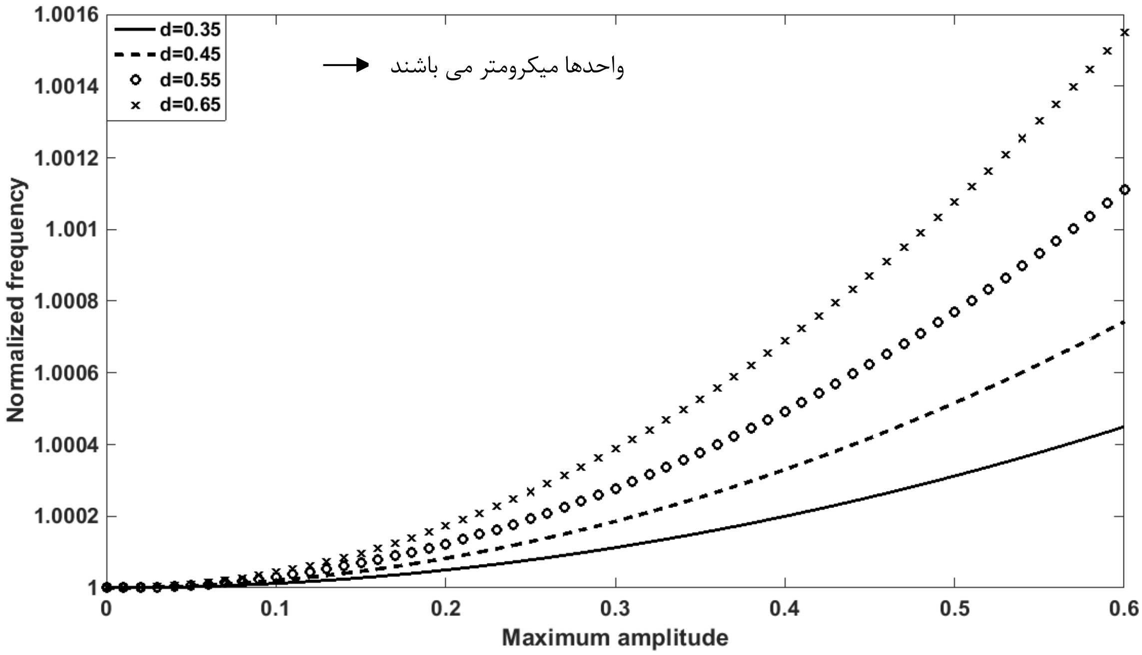


شکل (3-11): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس غیرخطی میکروتیر تکیه‌گاه ساده در مود دوم

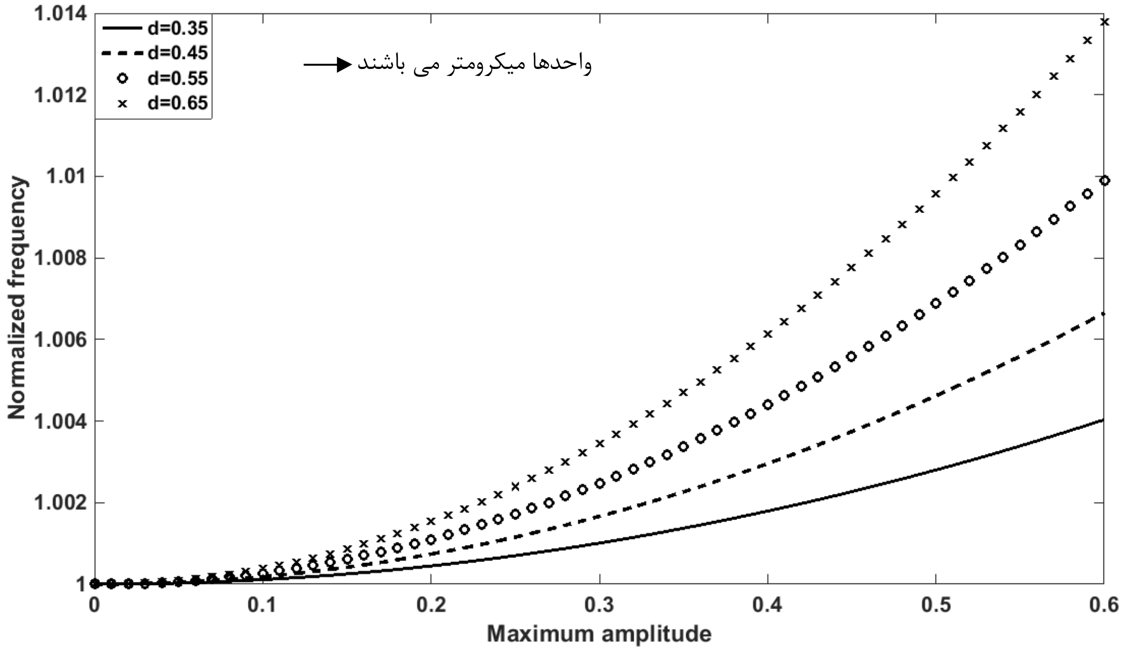


شکل (3-12): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس غیرخطی میکروتیر تکیه‌گاه ساده در مود سوم

در نمودار شکل (3-13) و (3-14) اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال شده $(\frac{\omega}{\omega_0})$ در ضخامت‌های مختلف و به ترتیب برای مود اول و سوم نشان داده شده است. از مقایسه دو مود در یک ضخامت مشخص می‌توان به این امر دست یافت که میزان افزایش فرکانس با تغییر بیشینه دامنه در یک ضخامت مشخص در مودهای بالاتر بیشتر است که موید نمودارهای (3-10) تا (3-12) می‌باشد.

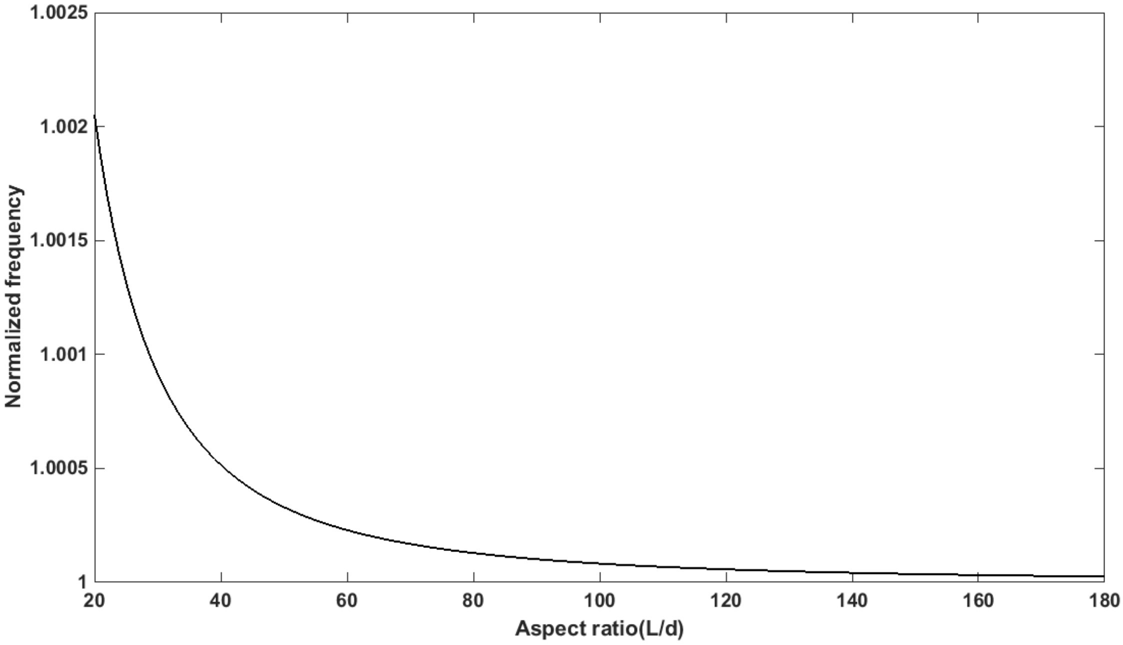


شکل (3-13): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس غیرخطی میکروتیر تکیه‌گاه ساده در ضخامت های مختلف برای مود اول

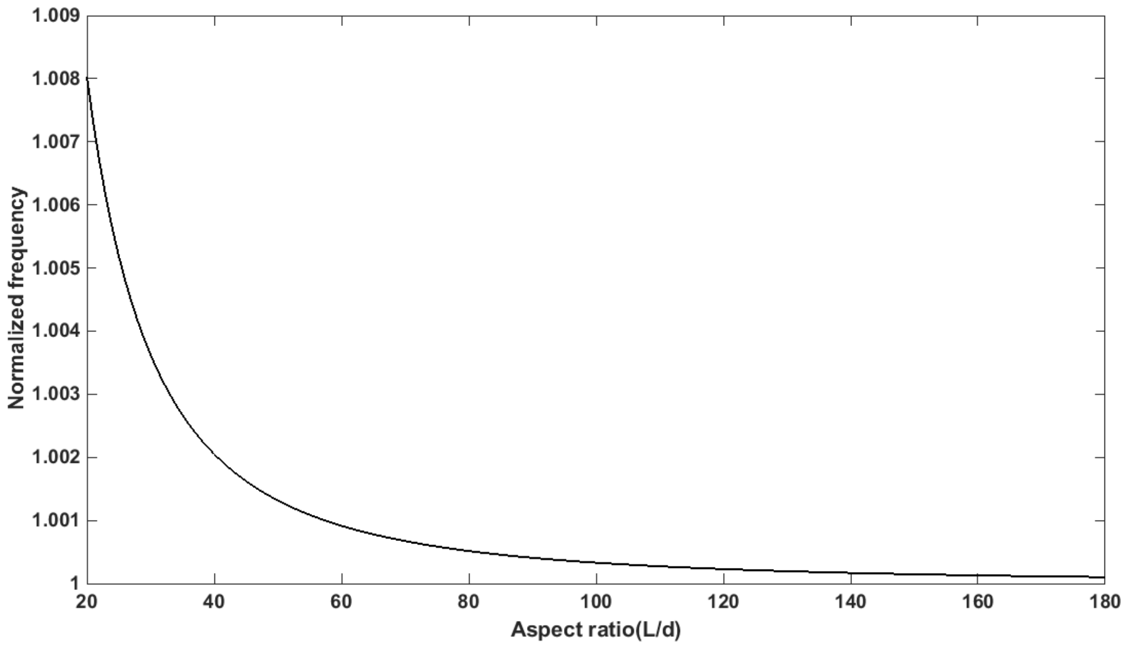


شکل (3-14): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس غیرخطی میکروتیر تکیه‌گاه ساده در ضخامت های مختلف برای مود سوم

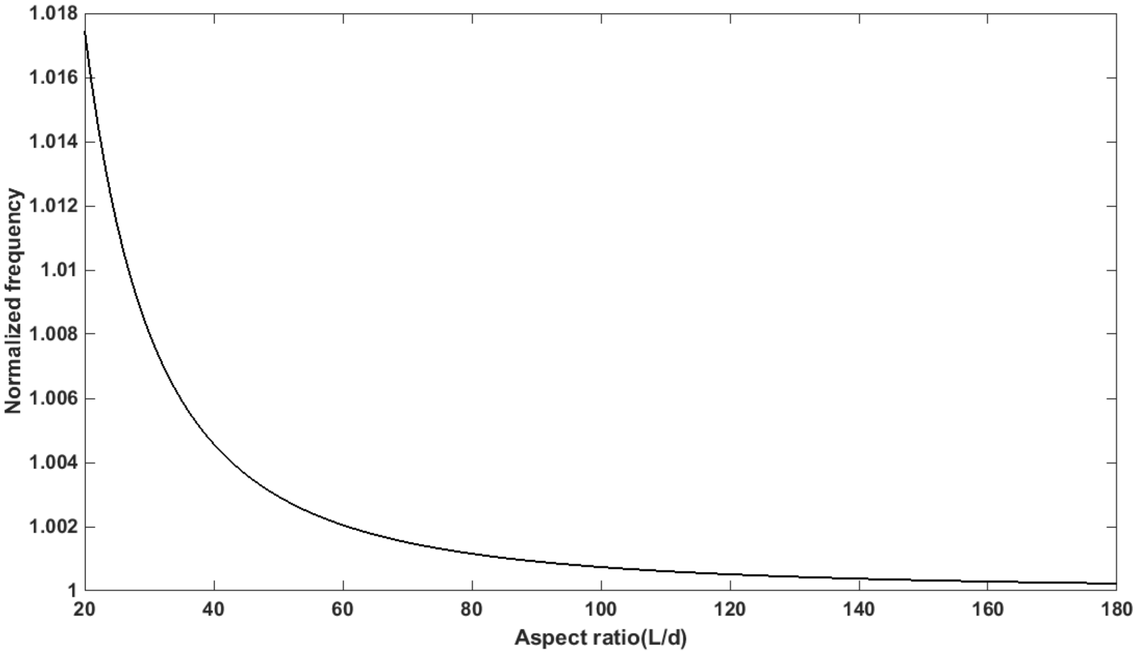
در انتها نیز اثر نسبت منظر (طول به ضخامت) بر فرکانس نرمال ($\frac{\omega}{\omega_0}$نسبت فرکانس غیرخطی و خطی بی بعد در همان شماره مود) ارائه شده است. محدوده درنظر گرفته شده با توجه به تئوری اویلر برنولی 20- 180 می‌باشد. این نمودار برای هر سه مود اول رسم شده است. همانطور که در شکل های(3-15)، (3-16) و (3-17) مشخص است با افزایش طول تیر در ضخامت ثابت، فرکانس نرمال تیر تا مقدار مشخصی کاهش می‌یابد و سپس تقریبا ثابت می‌شود به طوری که این نسبت به مقدار 1 یعنی به مقدار فرکانس خطی بی‌بعد میل می‌کند. از طرفی با مقایسه نمودار در هر مود واضح است که اثر این پارامتر در مودهای بالاتر بیشتر می‌باشد.



شکل (3-15): اثر نسبت منظر بر فرکانس نرمال میکروتیر تکیه‌گاه ساده در مود اول



شکل (3-16): اثر نسبت منظر بر فرکانس نرمال میکروتیر تکیه‌گاه ساده در مود دوم

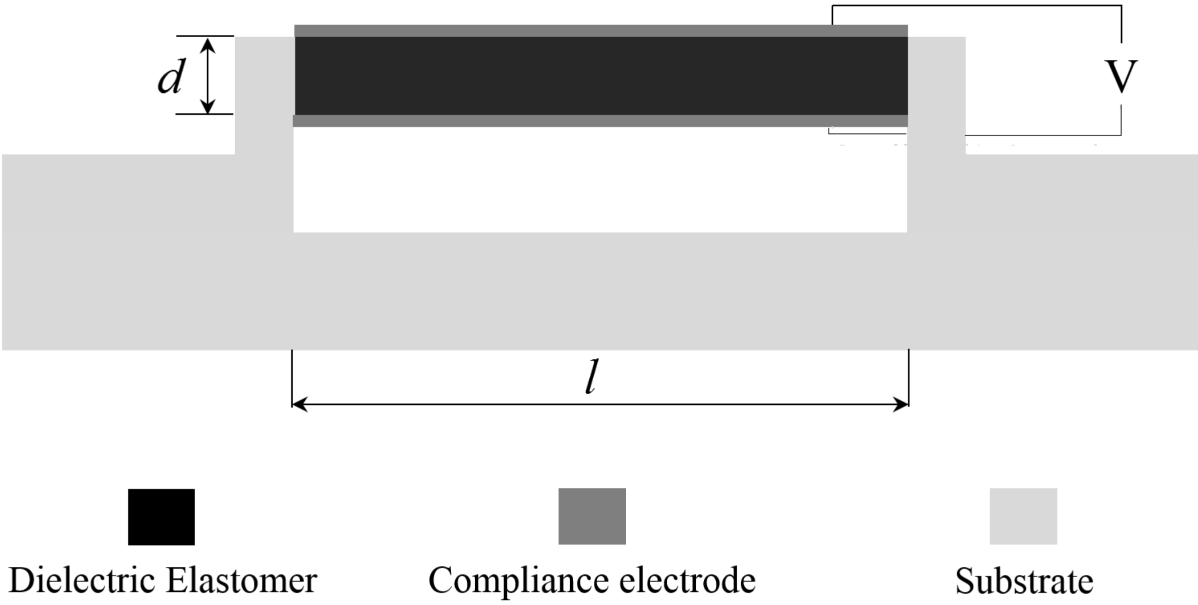


شکل (3-17): اثر نسبت منظر بر فرکانس نرمال میکروتیر تکیه‌گاه ساده در مود سوم

3-4 ارتعاش آزاد میکروتیر با شرط مرزی دوسر گیردار، تئوری اویلر برنولی و مدل هایپرالاستیک یئو

3-4-1 حل معادله حاکم و بررسی پاسخ فرکانسی

در این قسمت، به عنوان نمونه، مدل‌سازی بر اساس شرط مرزی دوسر گیردار انجام داده می‌شود. همان-طور که در شکل (3-18) نشان داده شده است میکروتیر دارای ضخامت d ، طول l، عرض b و چگالی ρ می باشد. الاستومر بین دو الکترود انعطاف پذیر فشرده شده و ولتاژ به هر یک از طرفین الکترود اعمال می‌گردد.



شکل (3-18): شماتیک میکروتیر دوسر گیردار

وارد کردن انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در اصل همیلتون همانند بخش 3-3-2 منجر به معادله حاکم (3-24) می‌گردد.

شرایط مرزی استخراج شده از بکارگیری اصل همیلتون نیز مطابق معادله های (3-25) و (3-26) می‌باشد که از بین آن ها شرایط مرزی مناسب یعنی $w(0)=0,\ w(l)=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}(0)=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}(l)=0$ را باید انتخاب نمود.

معادله (3-24) با استفاده از پارامترهای بی بعدسازی زیر، بی بعد می‌گردد:

$$x^*=\frac{x}{l},\quad w^*=\frac{w}{d},\quad t^*=t\sqrt{\frac{c_1 I}{\rho A l^4}},\quad \omega^*=\omega\sqrt{\frac{\rho A l^4}{c_1 I}} \tag{3-46}$$

فرکانس طبیعی با بعد معرفی شده در معادله (3-46) دارای مقدار عددی $3.0899\times10^3\ rad/s$ به ازای مقادیر جدول (3-1) می‌باشد.

از اعمال پارامترهای (3-46) در معادله (3-24) ، معادله بی‌بعد زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*^2}}+\frac{8c_2}{c_1}\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*^4}}+\frac{24c_3d^2}{c_1l^2}\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*^4}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2+\frac{96c_3d^2}{c_1l^2}\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*^3}}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*^2}}\frac{\partial w^*}{\partial x^*}$$
$$-\frac{2Al^2}{I}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*^2}}-\frac{12c_2Ad^2}{c_1I}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*^2}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2-\frac{30c_3Ad^4}{c_1l^2I}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*^2}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^4 \quad (3\text{-}47)$$
$$+\frac{24c_3d^2}{c_1l^2}\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*^2}}\right)^3=0$$

شرایط مرزی مربوطه نیز عبارتند از: $w(0)=0,\ w(1)=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}(0)=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}(1)=0$.

برای حل معادله (3-47) از روش پوانکاره با معرفی متغیرهای جدید $w^*=\varepsilon\eta$ و $\tau=\omega^*t^*$ می توان بهره برد. در نتیجه معادله (3-47) تبدیل می‌شود به:

$$\omega^2\varepsilon\frac{\partial^2\eta}{\partial\tau^2}+\frac{8c_2}{c_1}\varepsilon\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}+\frac{24c_3d^2}{c_1l^2}\varepsilon^3\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+\frac{96c_3d^2}{c_1l^2}\varepsilon^3\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}$$
$$-\frac{2Al^2}{I}\varepsilon\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\frac{12c_2Ad^2}{c_1I}\varepsilon^3\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2-\frac{30c_3Ad^4}{c_1l^2I}\varepsilon^5\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^4 \quad (3\text{-}48)$$
$$+\frac{24c_3d^2}{c_1l^2}\varepsilon^3\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)^3=0$$

حل های زیر را با توجه به روش حل مورد نظر، می توان پیشنهاد داد:

$$\eta=\eta_0(x,\tau)+\varepsilon\eta_1(x,\tau)+\varepsilon^2\eta_2(x,\tau)+\ldots \quad (3\text{-}49)$$

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\ldots \quad (3\text{-}50)$$

از وارد کردن حل‌های پیشنهادی (3-49) و (3-50) در معادله (3-48) و مرتب کردن بر اساس توان‌های مختلف ε معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\varepsilon^1:\ \frac{\partial^2\eta_0}{\partial\tau^2}+\frac{8c_2}{c_1}\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^4}-\frac{2Al^2}{I}\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}=0 \quad (3\text{-}51)$$

$$\varepsilon^2:\ \frac{\partial^2\eta_1}{\partial\tau^2}+2\omega_1\frac{\partial^2\eta_0}{\partial\tau^2}+\frac{8c_2}{c_1}\frac{\partial^4\eta_1}{\partial x^4}-\frac{2Al^2}{I}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial x^2}=0 \quad (3\text{-}52)$$

$$\varepsilon^3: \begin{aligned} &\frac{\partial^2\eta_2}{\partial\tau^2}+2\omega_1\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\tau^2}+(2\omega_2+\omega_1^2)\frac{\partial^2\eta_0}{\partial\tau^2}+\frac{24c_3d^2}{c_1l^2}\left(\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}\right)^3 \\ &+\frac{24c_3d^2}{c_1l^2}\left(\frac{\partial^4\eta_0}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2+\frac{8c_2}{c_1}\left(\frac{\partial^4\eta_2}{\partial x^4}\right)-\frac{12c_2Ad^2}{c_1I}\left(\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)^2 \\ &+\frac{96c_3d^2}{c_1l^2}\left(\frac{\partial^3\eta_0}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^2\eta_0}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\eta_0}{\partial x}\right)-\frac{2Al^2}{I}\left(\frac{\partial^2\eta_2}{\partial x^2}\right)=0 \end{aligned} \tag{3-53}$$

معادلات (3-51) تا (3-53) را می توان با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد. بدین منظور ابتدا باید تابع ویژه ای که شرایط مرزی دوسردرگیر را ارضا کند معرفی کرد:

$$\begin{aligned} &\eta_{\mathrm{im}}(\mathrm{x},\mathrm{t})=\mathrm{T}_{\mathrm{im}}(\tau)\,\mathrm{X}_{\mathrm{im}}(\mathrm{x}) \quad \mathrm{i}=0,1,2 \\ &\mathrm{X}_{\mathrm{im}}(\mathrm{x})=\left[\cos(\beta_{\mathrm{m}}\mathrm{x})-\cosh(\beta_{\mathrm{m}}\mathrm{x})\right]-\frac{\cos(\beta_{\mathrm{m}})-\cosh(\beta_{\mathrm{m}})}{\sin(\beta_{\mathrm{m}})-\sinh(\beta_{\mathrm{m}})}\left[\sin(\beta_{\mathrm{m}}\mathrm{x})-\sinh(\beta_{\mathrm{m}}\mathrm{x})\right] \\ &\beta_{\mathrm{m}}=(2\mathrm{m}+1)\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{3-54}$$

که در آن X_{im} تابع ویژه بوده و m شماره مود است.

جایگذاری معادله (3-54) در معادلات (3-51) تا (3-53) و انتگرال گیری از طرفین معادله حاصل در فاصله صفر تا یک و توجه به اینکه در مود اول $\beta_1=\frac{3\pi}{2}$ و در مود سوم $\beta_3=\frac{7\pi}{2}$ می باشد، حل‌های نهایی زیر برای مود اول و سوم بدست می آید. شرایط اولیه نیز همانند قبل $T(0)=\tilde{A}_{\max}=\frac{A_{\max}}{d},\ \dot{T}(0)=0$ می باشند.

به ترتیب منجر به پاسخ های زیر می گردد:

$$\eta_{0m}=\tilde{A}_{\max}\cos(\sqrt{\omega_{0m}}\tau)X_{0m}(x) \tag{3-55}$$

$$\eta_{1m}=0 \tag{3-56}$$

$$\eta_{2m} = \frac{g_m \tilde{A}_{\max}^3}{9\omega_{0m} - 1}\left[\cos(3\sqrt{\omega_{0m}}\tau) - \cos(\sqrt{\omega_{0m}}\tau)\right] \tag{3-57}$$

که در این روابط:

مود اول: $\omega_{01} = 792.25,\ g_1 = 2174.7$

مود سوم: $\omega_{03} = 2270,\ g_3 = 158220$

در نتیجه پاسخ میکروتیر با توجه به تغییر متغیر $w^* = \varepsilon\eta$ برابر است با:

$$w^* = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon\eta_{0m}(x^*,\tau) + \varepsilon^2\eta_{1m}(x^*,\tau) + \varepsilon^3\eta_{2m}(x^*,\tau) \tag{3-58}$$

در حل هریک از مودها نیز مطابق با توضیحات پیشین باید جملاتی که منجر به حالت سکولار می شوند برابر صفر قرار داده شوند که نتیجه آن می شود:

$$\omega_{1m} = 0,\ \omega_{2m} = \frac{3\tilde{A}_{\max}^2\left(B_{1m} \times \dfrac{24c_3d^2}{c_1l^2} + B_{2m} \times \dfrac{12c_2Ad^2}{c_1I}\right)}{8B_{3m}\omega_{0m}} \tag{3-59}$$

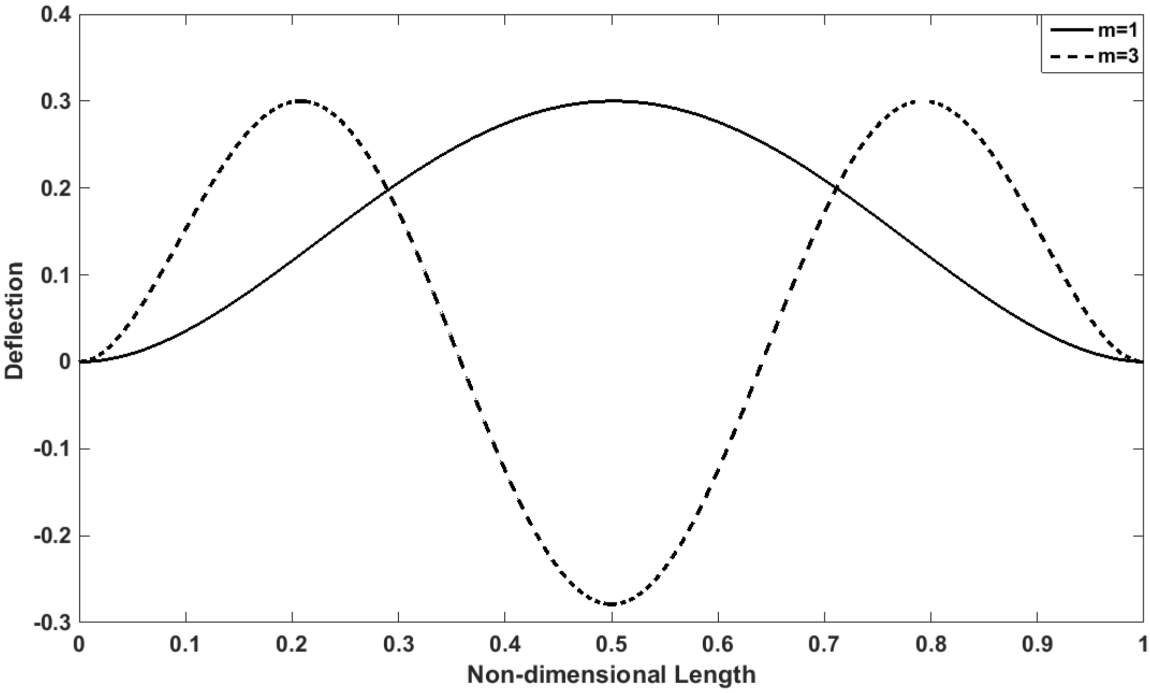
که ثوابت موجود در آن عبارتند از:

مود اول: $B_{11} = 1936.6,\ B_{21} = 73.326,\ B_{31} = 1.0036$

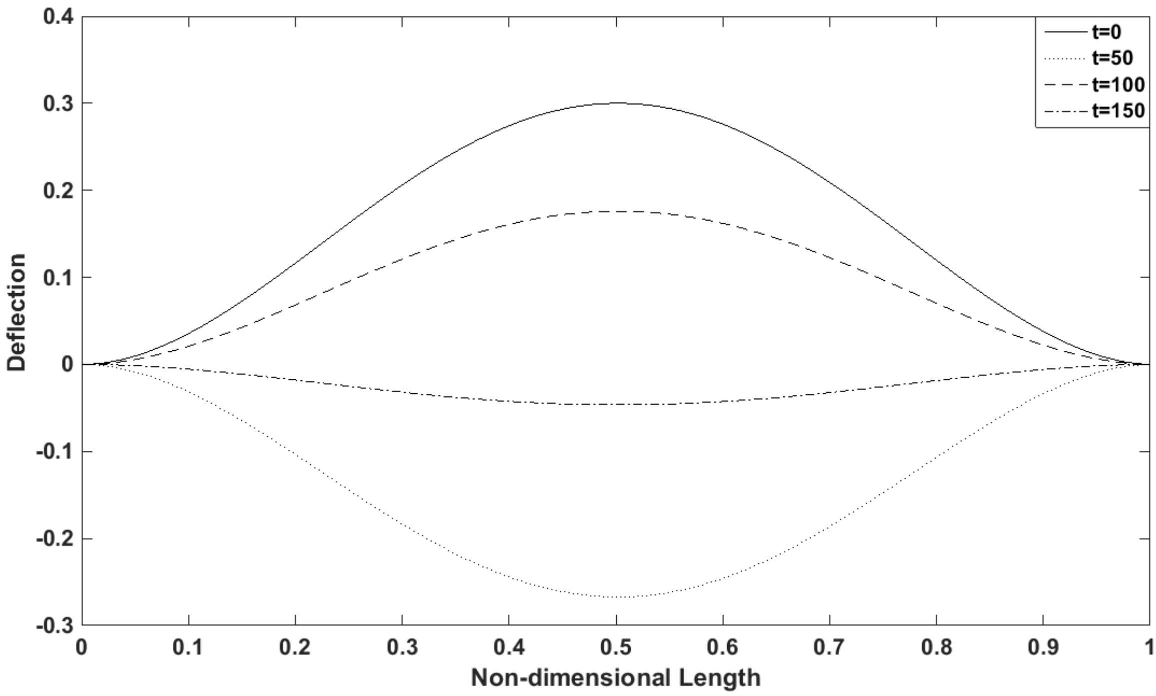
مود سوم: $B_{13} = -1.9083 \times 10^7,\ B_{23} = 5313.381,\ B_{33} = 1.000004$

2-4-3 نتایج عددی

در این بخش، از مقادیر عددی ارائه شده در جدول (3-1) استفاده می‌شود. شکل مودهای اول تا سوم در شکل (3-19) آمده است که مطابق با شرایط مرزی دوسر گیردار است. همچنین شکل مود اول در زمان-های مختلف در شکل (3-20) رسم شده است.

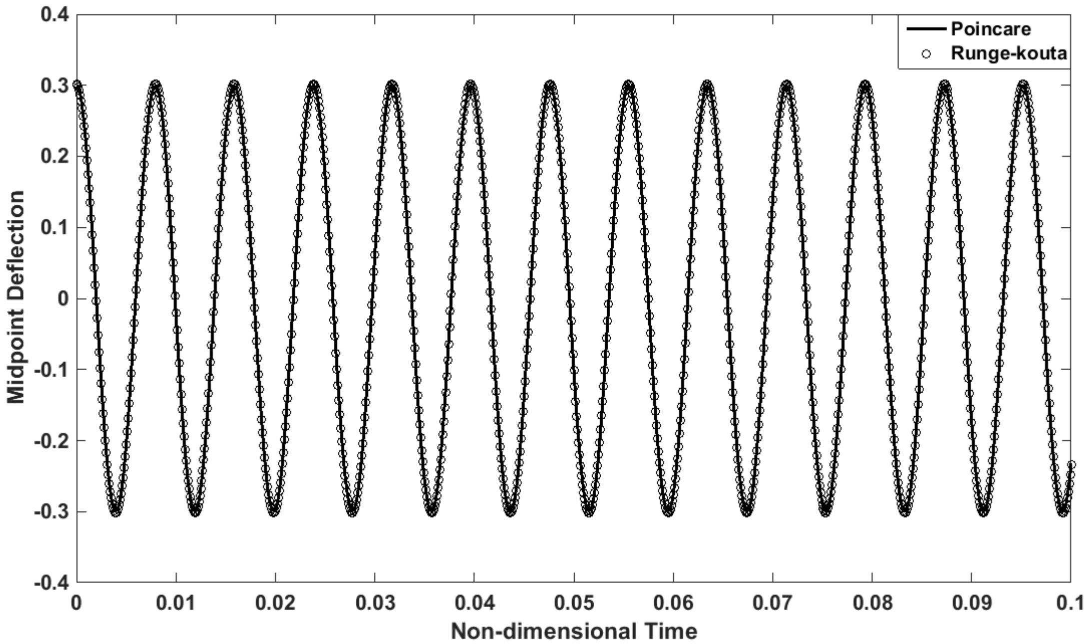


شکل (3-19): شکل مود میکروتیر دوسر گیردار برای مود اول و سوم

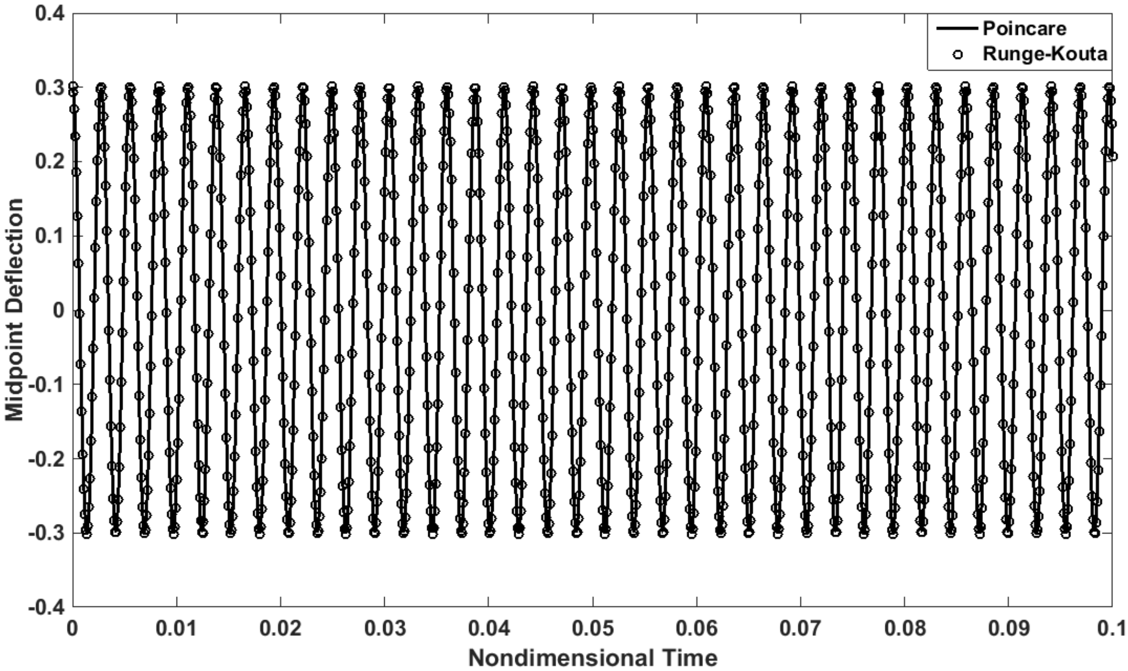


شکل (3-20): خیز میکروتیر دوسر گیردار برای مود اول در زمان های مختلف

پاسخ زمانی برای مودهای اول و سوم به ترتیب در شکل های (3-21) و (3-22) رسم شده است. اعتبارسنجی حل نیمه تحلیلی، همانند بخش قبلی با روش رانجه- کوتای مرتبه چهارم انجام شده است.همان طور که در این شکل ها مشخص است تطابق بسیار مناسبی بین حل نیمه تحلیلی و عددی وجود دارد و این امر بیانگر این مطلب است که به کارگیری حل با سه جمله ابتدایی می تواند منجر به حل دقیقی برای مساله مورد نظر باشد.

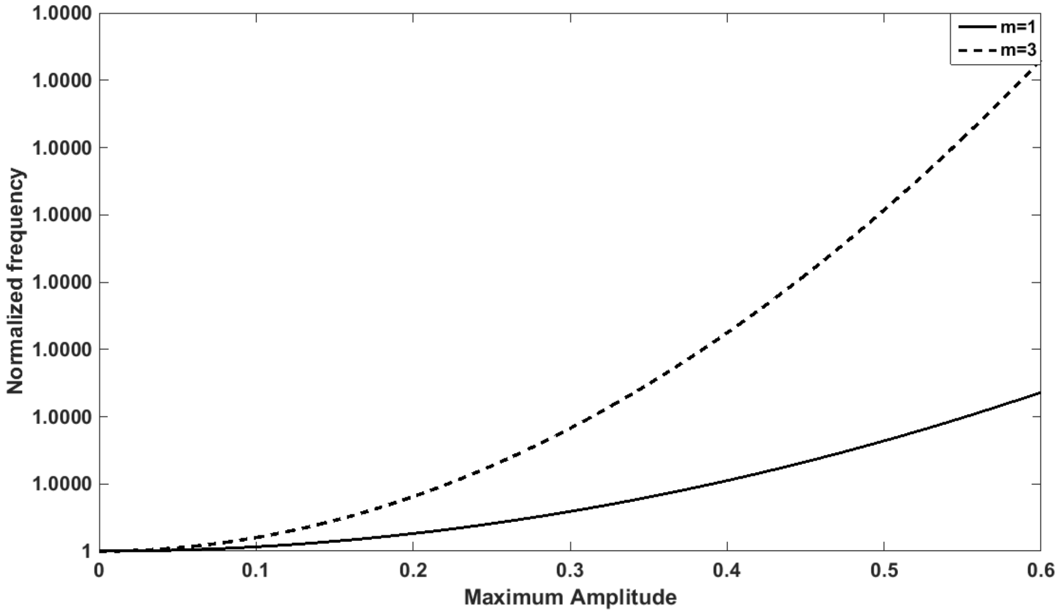


شکل (3-21): پاسخ زمانی میکروتیر دوسر گیردار در مود اول



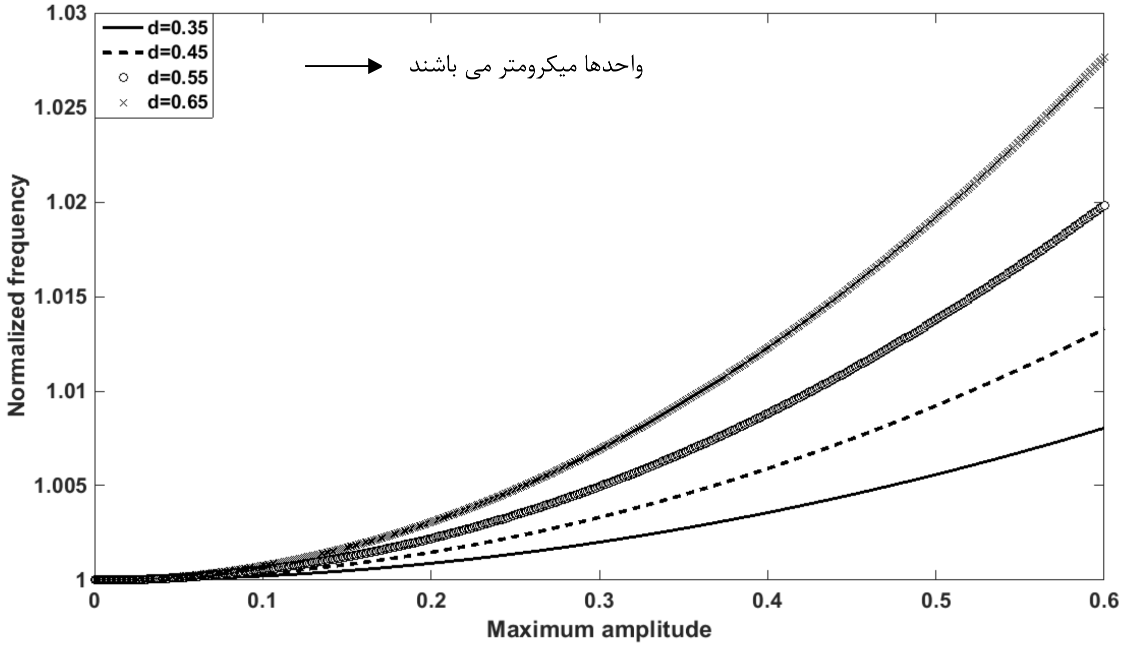
شکل (3-22): پاسخ زمانی میکروتیر دوسر گیردار در مود سوم

وابستگی فرکانس نرمال ($\frac{\omega}{\omega_0}$) به بیشینه دامنه حرکت در مودهای اول و سوم به ترتیب در شکل‌های (3-23) و (3-24) نشان داده شده است. همانطور که در این شکل‌ها مشخص است، با افزایش بیشینه دامنه، مقدار فرکانس نرمال نیز افزایش می‌یابد که نرخ این تغییرات در مودهای بالاتر، به‌خصوص در مود سوم، بیشتر است.

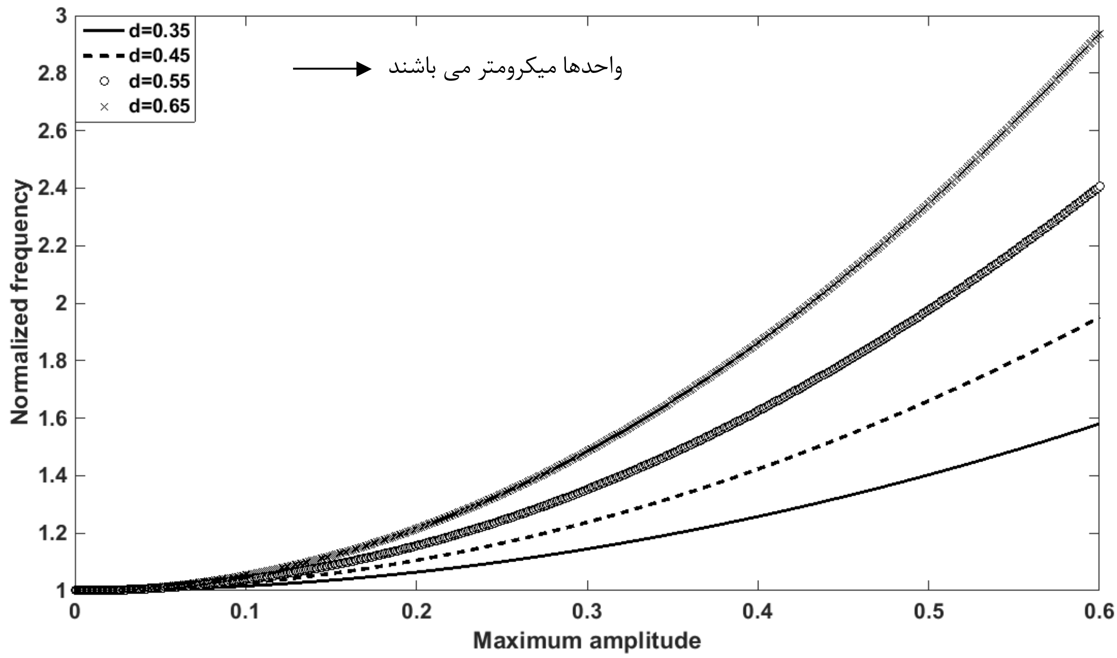


شکل (3- 23): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال میکروتیر دوسر گیردار در مودهای اول و سوم

منحنی فرکانس نرمال در ضخامت های مختلف در شکل‌های (3-24) و (3-25) به ترتیب برای مودهای اول و سوم رسم شده است. در هر دو مود و در تمامی ضخامت‌های مورد نظر، ارتباط مستقیمی بین بیشینه دامنه و فرکانس نرمال وجود دارد. ضمنا میزان این وابستگی در ضخامت های بالاتر بیشتر بوده که در مود سوم نسبت به مود اول دارای مقادیر بزرگتر (نرخ تغییرات بیشتر) می‌باشد.



شکل (3- 24): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال میکروتیر دوسر گیردار در ضخامت های مختلف برای مود اول



شکل (3-25): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال میکروتیر دوسر گیردار در ضخامت های مختلف برای مود سوم

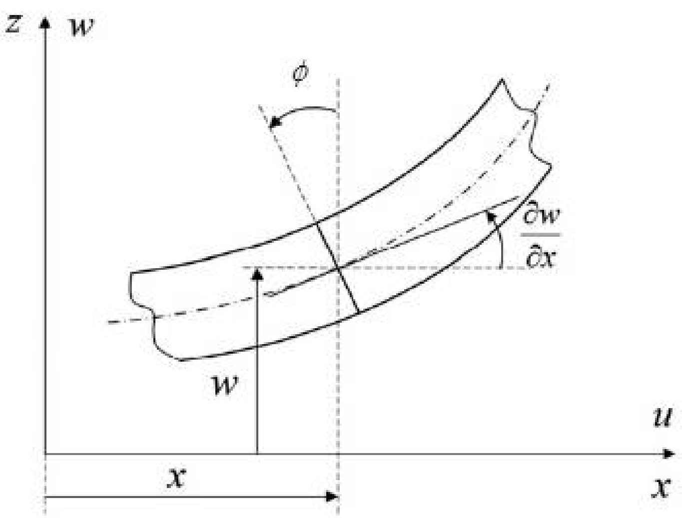
5-3 ارتعاش آزاد میکروتیر با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، درنظر گرفتن عامل برش و مدل هایپرالاستیک بیدرمن

1-5-3 استخراج معادله حاکم بر مدل بیدرمن

در این بخش از رساله، معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی رزوناتور تکیه‌گاه ساده با درنظر گرفتن عامل برش و مدل هایپرالاستیک بیدرمن استخراج می‌شود.

مولفه های جابجایی در این تئوری عبارتند از:

$$\begin{aligned} u &= -z\phi(x,t) \\ v &= 0 \\ w &= w(x,t) \end{aligned} \tag{3-60}$$



شکل (3-26): شماتیک میکروتیر با درنظر گرفتن عامل برش [89]

مولفه‌های کرنش لاگرانژی که تغییر شکل بزرگ را درنظر می‌گیرد عبارتند از:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \tag{3-61}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -z\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi\right) \end{aligned} \tag{3-62}$$

تانسور کوشی گرین راست که مولفه‌های ثوابت کرنش را می‌دهد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = 2E + I = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{xx}+1 & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon_{zx} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-63}$$

مولفه‌های ثوابت کرنش که مقادیر ویژه ماتریس اخیر هستند معادلند با:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= tr(C) = 2\varepsilon_{xx} + 3 \\ \mathrm{I}_2 &= \frac{1}{2}\left[tr(c)^2 - tr(c^2)\right] = 4\varepsilon_{xx} - 4\varepsilon_{xz}{}^2 + 3 \end{aligned} \tag{3-64}$$

معادله حاکم بر رفتار ارتعاشی میکرورزوناتور دی‌الکتریک الاستومر بر اساس مدل بیدرمن با استفاده از جایگذاری انرژی جنبشی و کرنشی در اصل همیلتون حاصل می‌شود.

انرژی جنبشی:

$$T = \frac{\rho}{2}\int_0^l \left[I(\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 + A(\frac{\partial w}{\partial t})^2 \right] dx \tag{3-65}$$

انرژی کرنشی:

همانطور که پیش از این ذکر شد چگالی انرژی کرنشی در مدل بیدرمن عبارتست از:

$$W = c_{10}\left(I_1 - 3\right) + c_{01}\left(I_2 - 3\right) + c_{20}\left(I_1 - 3\right)^2 + c_{30}\left(I_1 - 3\right)^3 \tag{3-66}$$

$$\Pi = \int_V W dV \tag{3-67}$$

با استفاده از اصل همیلتون و انجام مشتق‌گیری‌های مربوطه، معادله نهایی بدست می‌آید:

$$\rho I\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-2c_{01}A\phi+2c_{01}A\frac{\partial w}{\partial x}-8\,c_{20}\,I\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} -24c_{30}I\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]=0 \tag{3-68}$$

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-(2\,c_{10}+2c_{01})A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2c_{01}A\frac{\partial\phi}{\partial x} -12\,c_{20}A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-30c_{30}A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -24c_{30}I\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right]=0 \tag{3-69}$$

مجموعه شرایط مرزی که از اصل همیلتون استخراج می‌گردند شامل موارد زیر است:

$$at\;x=0,l:\quad \frac{\partial\phi}{\partial x}\left(8c_{20}I+24c_{30}I\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right)=0\quad OR\quad \delta\phi=0 \tag{3-70}$$

$$at\;x=0,l:\quad 6c_{01}A\frac{\partial w}{\partial x}+2c_{01}A\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\phi\right)+4c_{20}A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3 +6c_{30}A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^5+24c_{30}I\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2=0 \quad OR\quad \delta w=0 \tag{3-71}$$

که از بین موارد بالا، شرایط مرزی $w(0)=w(l)=0,\ \frac{\partial\phi}{\partial x}(0)=\frac{\partial\phi}{\partial x}(l)=0$ معرف شرط مرزی تکیه‌گاه ساده است.

3-5-2 حل معادله‌های حاکم و بررسی پاسخ فرکانسی

برای حل معادله، ابتدا باید پارامترهای بی‌بعدسازی تعریف شود:

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad w^* = \frac{w}{d}, \quad t^* = t\omega_{\dim}, \ \phi^* = \phi \tag{3-72}$$

در رابطه (3-72) پارامتر $\omega_{\dim}$ فرکانس طبیعی بابعد در حالت خطی می‌باشد. این پارامتر ابتدا محاسبه می‌شود و سپس بی‌بعدسازی انجام می‌گیرد.

معادله خطی مدل بیدرمن با تئوری اویلر- برنولی را می‌توان با استفاده از روابط ارائه شده در بخش مدل یئو و صرفا با چگالی انرژی کرنشی متفاوت که در رابطه (3-66) بیان شده محاسبه کرد. پس از معرفی انرژی‌های جنبشی و پتانسیل، جایگذاری در اصل همیلتون و انتگرال‌گیری‌های لازم، رابطه خطی مدل بیدرمن تحت تئوری اویلر- برنولی حاصل می‌گردد:

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (2c_{10} + 4c_{01}) A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 8 c_{20} I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{3-73}$$

حل پیشنهادی زیر، که شرایط مرزی تکیه گاه ساده را ارضاء می‌کند در نظر گرفته می‌شود [90]:

$$w(x,t) = C \sin(\frac{\pi}{l} x) \cos(\omega_{dim} t) \tag{3-74}$$

از اعمال معادله (3-74) در (3-73) و مرتب‌سازی، مربع فرکانس طبیعی با بعد ($\omega_{\dim}^2$) بدست می‌آید:

$$\omega_{\dim}^2 = \frac{(2c_{10} + 4c_{01}) A l^2 \pi^2 + 8 c_{20} I \pi^4}{\rho A l^4} \tag{3-75}$$

که مقدار عددی آن برابر $2.253 \times 10^6 \ rad/s$ بر مبنای مقادیر جدول (3-2) می‌باشد.

از جایگذاری پارامترهای (3-72) در معادلات (3-70) و (3-71) معادلات بی بعدشده حاکم بر مدل بیدرمن عبارت می‌شود از:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \beta_1 \phi + \beta_2 \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \beta_4 \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = 0 \tag{3-76}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\beta_5\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\beta_6\frac{\partial \phi}{\partial x}-\beta_7\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\beta_8\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&-\beta_9\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right]=0\end{aligned} \tag{3-77}$$

با شرایط مرزی $w(0)=w(1)=0,\ \frac{\partial \phi}{\partial x}(0)=\frac{\partial \phi}{\partial x}(1)=0$ که:

$$\begin{aligned}&\beta_1=\frac{2c_{01}A}{\rho I\omega_{\dim}^2},\ \beta_2=\frac{2c_{01}Ad}{\rho I\, l\omega_{\dim}^2},\ \beta_3=\frac{8c_{20}}{\rho l^2\omega_{\dim}^2},\ \beta_4=\frac{24c_{30}d^2}{\rho l^4\omega_{\dim}^2}\ \beta_5=\frac{2c_{10}+2c_{01}}{\rho l^2\omega_{\dim}^2},\\&\beta_6=\frac{2c_{01}}{\rho ld\omega_{\dim}^2},\ \beta_7=\frac{12\,\mathrm{c}_{20}\,d^2}{\rho l^4\omega_{\dim}^2},\beta_8=\frac{30c_{30}d^4}{\rho l^6\omega_{\dim}^2},\ \beta_9=\frac{24c_{30}I}{\rho Al^4\omega_{\dim}^2},\end{aligned}$$

برای سادگی، علامت ستاره از روی متغیرها برداشته شده است.

برای حل این معادله ابتدا معادلات با مشتق جزیی توسط روش گالرکین به معادلات دیفرنسیل معمولی تبدیل می‌شوند. لذا ابتدا دو متغیر w و ϕ به صورت حاصل‌ضرب توابع جداگانه‌ای از مکان و زمان که ارضاکننده شرایط مرزی هستند معرفی می‌شوند:

$$\phi(x,t)=\sqrt{2}\cos(\mathrm{m}\,\pi\,\mathrm{x})\,q_1(\mathrm{t}) \tag{3-78}$$

$$w(x,t)=\sqrt{2}\sin(\mathrm{m}\,\pi\,\mathrm{x})\,q_2(\mathrm{t}) \tag{3-79}$$

حال روابط (3-78) و (3-79) را در معادلات (3-76) و (3-77) قرار داده، طرفین رابطه (3-76) را در $\sqrt{2}\cos(\mathrm{m}\,\pi\,\mathrm{x})$ و طرفین رابطه (3-77) را در $\sqrt{2}\sin(\mathrm{m}\,\pi\,\mathrm{x})$ ضرب کرده و در فاصله صفر تا یک انتگرال-گیری انجام می‌شود. معادلات دیفرانسیل معمولی که از این مراحل استخراج می شوند عبارتند از:

$$\ddot{q}_1+(\beta_3\,\mathrm{m}^2\,\pi^2-\beta_1)q_1+(\beta_2\,\mathrm{m}\,\pi)q_2+(\frac{\beta_4 m^4\pi^4}{2})q_1q_2^2=0 \tag{3-80}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_2+(\beta_5\,\mathrm{m}^2\,\pi^2)q_2+(\beta_6\,\mathrm{m}\,\pi)q_1+(\frac{\beta_7\,\mathrm{m}^4\,\pi^4}{2})q_2^3\\&+(\frac{\beta_8 m^6\pi^6}{2})q_2^5+(\frac{\beta_9 m^4\pi^4}{2})q_2q_1^2=0\end{aligned} \tag{3-81}$$

طبق روش پوانکاره که در بخش‌های قبلی به مفاهیم اولیه آن پرداخته شد، ابتدا تغییر متغیر $\tau=\omega t$ در معادلات (3-80) و (3-81) جایگزین می‌شوند:

$$\omega^2\frac{\partial^2 q_1}{\partial\tau^2}+(\beta_3\,\mathrm{m}^2\,\pi^2-\beta_1)q_1+(\beta_2\,\mathrm{m}\,\pi)q_2+(\frac{\beta_4 m^4\pi^4}{2})q_1q_2^2=0 \tag{3-82}$$

$$\begin{aligned}&\omega^2\frac{\partial^2 q_2}{\partial\tau^2}+(\beta_5\,\mathrm{m}^2\,\pi^2)q_2+(\beta_6\,\mathrm{m}\,\pi)q_1+(\frac{\beta_7\,\mathrm{m}^4\,\pi^4}{2})q_2^3\\&+(\frac{\beta_8 m^6\pi^6}{2})q_2^5+(\frac{\beta_9 m^4\pi^4}{2})q_2q_1^2=0\end{aligned} \tag{3-83}$$

با توجه به داشتن دو متغیر q_1 و q_2 و نیز فرکانس ω ، حل‌های بسط داده شده به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$q_1=\varepsilon q_{10}+\varepsilon^2 q_{11}+\varepsilon^3 q_{12}+\dots \tag{3-84}$$

$$q_2=\varepsilon q_{20}+\varepsilon^2 q_{21}+\varepsilon^3 q_{22}+\dots \tag{3-85}$$

$$\omega=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\dots \tag{3-86}$$

قرار دادن معادلات (3-84) تا (3-86) در روابط (3-82) و (3-83) و جداسازی ضرایب مختلف پارامتر کوچک اغتشاشی، معادلات زیر بدست می‌آیند:

ضرایب $O(\varepsilon)$:

$$\omega_0^2\frac{d^2 q_{10}}{d\tau^2}+\alpha_2 q_{20}+\alpha_1 q_{10}=0 \tag{3-87}$$

$$\omega_0^2\frac{d^2 q_{20}}{d\tau^2}+\alpha_5 q_{10}+\alpha_4 q_{20}=0 \tag{3-88}$$

ضرایب $O(\varepsilon^2)$:

$$\omega_0^2\frac{d^2 q_{11}}{d\tau^2}+2\omega_0\omega_1\frac{d^2 q_{10}}{d\tau^2}+\alpha_1 q_{11}+\alpha_2 q_{21}=0 \tag{3-89}$$

$$\omega_0^2\frac{d^2 q_{21}}{d\tau^2}+2\omega_0\omega_1\frac{d^2 q_{20}}{d\tau^2}+\alpha_4 q_{21}+\alpha_5 q_{11}=0 \tag{3-90}$$

ضرایب $O(\varepsilon^3)$:

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{12}}{d\tau^2} + 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 q_{11}}{d\tau^2} + (2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2)\frac{d^2 q_{10}}{d\tau^2} + \alpha_1 q_{12} + \alpha_2 q_{22} + \alpha_3 q_{20}^2 q_{10} = 0 \tag{3-91}$$

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{22}}{d\tau^2} + 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 q_{21}}{d\tau^2} + (2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2)\frac{d^2 q_{20}}{d\tau^2} + \alpha_4 q_{22} + \alpha_5 q_{12} + \alpha_6 q_{20}^3 + \alpha_8 q_{10}^2 q_{20} = 0 \tag{3-92}$$

که:

$$\alpha_1 = \beta_3\,\mathrm{m}^2\pi^2 - \beta_1,\ \alpha_2 = \beta_2\,\mathrm{m}\,\pi,\ \alpha_3 = \frac{\beta_4 m^4\pi^4}{2},\ \alpha_4 = \beta_5\,\mathrm{m}^2\pi^2$$
$$\alpha_5 = \beta_6\,\mathrm{m}\,\pi,\ \alpha_6 = \frac{\beta_7}{2}\mathrm{m}^4\pi^4,\ \alpha_7 = \frac{\beta_8 m^6\pi^6}{2},\ \alpha_8 = \frac{\beta_9 m^4\pi^4}{2}$$

برای حل معادلات (3-87) و (3-88) از روش قطری کردن ماتریس استفاده می‌گردد. بدین منظور ابتدا این جفت‌معادلات به صورت ماتریسی زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d^2 q_{10}}{dt^2} \\ \dfrac{d^2 q_{20}}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_5 & \alpha_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3-93}$$

ماتریس ضرایب در معادله (3-93) را A نامیده و با استفاده از رابطه $|A-\lambda I| = 0$ مقادیر ویژه آن پیدا می‌شود.

مقادیر ویژه یافته شده، در قالب رابطه زیر به صورت ماتریس قطری بیان می‌گردد:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{3-94}$$

با استفاده از مقادیر ویژه و رابطه $AV = \lambda V$ بردارهای ویژه را می‌توان یافت. اگر تانسور $q_0 = \begin{bmatrix} q_{10} \\ q_{20} \end{bmatrix}$ تعریف گردد آنگاه معادله (3-94) به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$\frac{d^2 q_0}{dt^2} + A q_0 = 0 \tag{3-95}$$

ضرب معکوس بردار ویژه در سمت راست هر جمله و اضافه کردن عبارت بی تاثیر VV^{-1} پیش از متغیر q می‌دهد:

$$V^{-1}\frac{d^2 q_0}{dt^2} + V^{-1}AVV^{-1}q = 0 \tag{3-96}$$

حال با استفاده از تغییر متغیر جدید $\hat{q} = V^{-1}q$ و این دانسته ریاضی که $V^{-1}AV = \Lambda$ معادلات اخیر تبدیل می‌شود به:

$$\frac{d^2 \hat{q}_0}{dt^2} + \Lambda \hat{q} = 0 \tag{3-97}$$

با استفاده از شرایط اولیه $\hat{q}_1(0) = 0,\ \frac{d\hat{q}_1}{dt}(0) = 0,\ \hat{q}_2(0) = \tilde{w}_{\max} = w/d, \frac{d\hat{q}_2}{dt}(0) = 0$ پاسخ معادله‌های (3-97) برابر است با:

$$q_{10} = V_{12}\tilde{w}_{\max}\cos(\omega_0 \tau) \tag{3-98}$$

$$q_{20} = V_{22}\tilde{w}_{\max}\cos(\omega_0 \tau) \tag{3-99}$$

منظور از V_{12} در رابطه بالا، درایه سطر اول و ستون دوم از ماتریس و منظور از V_{22} درایه سطر دوم و ستون دوم از ماتریس بردارهای ویژه V می‌باشد.

از جایگذاری (3-98) و (3-99) در معادله (3-90) واضح است که جمله دوم منجر به ترم سکولار می‌شود که باید معادل صفر قرار داده شود. لذا:

$$\omega_1 = 0 \tag{3-100}$$

از آنجایی که سیستم دارای جمله غیرخطی از مرتبه سوم ($O(\varepsilon^3)$) است ، بنابراین:

$$q_{21} = 0 \tag{3-101}$$

از جایگذاری معادلات (3-98) تا (3-101) در روابط (3-91) و (3-92)، معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{12}}{d\tau^2} + \alpha_1 q_{12} + \alpha_2 q_{22} = 2\omega_0^3 \omega_2 V_{12} \tilde{w}_{\max} \cos(\omega_0 \tau) \\ -\alpha_3 (V_{22})^2 V_{12} (\tilde{w}_{\max})^3 \cos^3(\omega_0 \tau) \tag{3-102}$$

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{22}}{d\tau^2} + \alpha_5 q_{12} + \alpha_4 q_{22} = 2\omega_0^3 \omega_2 V_{22} \tilde{w}_{\max} \cos(\omega_0 \tau) \\ -\left(\alpha_8 (V_{12})^2 V_{22} + \alpha_6 V_{22}^3\right) (\tilde{w}_{\max})^3 \cos^3(\omega_0 \tau) \tag{3-103}$$

برای یافتن شرط حل‌پذیری معادلات اخیر، حل های زیر پیشنهاد می گردند:

$$q_{12} = A_{11} \cos(\omega_0 \tau) + A_{12} \cos(3\omega_0 \tau) \tag{3-104}$$

$$q_{22} = A_{21} \cos(\omega_0 \tau) + A_{22} \cos(3\omega_0 \tau) \tag{3-105}$$

از جایگذاری (3-104) و (3-105) در روابط (3-102) و (3-103)، دو تساوی زیر بدست می‌آید:

$$\left[-\omega_0^4 A_{11} + \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21}\right] \cos(\omega_0 \tau) + \left[-9\omega_0^4 A_{12} + \alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22}\right] \cos(3\omega_0 \tau) = \\ \left[2\omega_0^3 \omega_2 V_{12} \tilde{w}_{\max} - \frac{3}{4} \alpha_3 (V_{22})^2 V_{12} (\tilde{w}_{\max})^3\right] \cos(\omega_0 \tau) - \\ \left[\frac{1}{4}\left(\alpha_3 (V_{22})^2 V_{12} + \alpha_6 V_{22}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3\right] \cos(3\omega_0 \tau) \tag{3-106}$$

$$\left[-\omega_0^4 A_{21} + \alpha_5 A_{11} + \alpha_4 A_{21}\right] \cos(\omega_0 \tau) + \left[-9\omega_0^4 A_{22} + \alpha_5 A_{12} + \alpha_4 A_{22}\right] \cos(3\omega_0 \tau) = \\ \left[2\omega_0^3 \omega_2 V_{22} \tilde{w}_{\max} - \frac{3}{4}\left(\alpha_8 (V_{12})^2 V_{22} + \alpha_6 V_{22}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3\right] \cos(\omega_0 \tau) - \\ \left[\frac{1}{4}\left(\alpha_8 (V_{12})^2 V_{22} + \alpha_6 V_{22}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3\right] \cos(3\omega_0 \tau) \tag{3-107}$$

از برابر قرار دادن ضرایب $\cos(3\omega_0\tau)$ و $\cos(\omega_0\tau)$ در طرفین معادلات اخیر و بازنویسی آن به شکل ماتریسی، دو رابطه زیر ایجاد می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1-\omega_0^4 & \alpha_2 \\ \alpha_5 & \alpha_4-\omega_0^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\omega_0^3\omega_2 V_{12}\tilde{w}_{\max}-\frac{3}{4}\alpha_3(V_{22})^2V_{12}(\tilde{w}_{\max})^3 \\ 2\omega_0^3\omega_2 V_{22}\tilde{w}_{\max}-\frac{3}{4}\left(\alpha_8(V_{12})^2V_{22}+\alpha_6V_{22}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3 \end{bmatrix} \tag{3-108}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1-9\omega_0^4 & \alpha_2 \\ \alpha_5 & \alpha_4-9\omega_0^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(\alpha_3(V_{22})^2V_{12}+\alpha_6V_{22}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3 \\ -\frac{1}{4}\left(\alpha_8(V_{12})^2V_{22}+\alpha_6V_{22}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3 \end{bmatrix} \tag{3-109}$$

اگر پس از قراردادن بردار سمت راست معادله (3-108) به جای ستون اول ماتریس ضرایب، دترمینان ماتریس حاصل برابر صفر قرار داده شود، آنگاه فرکانس ω_2 برشی پس از ساده‌سازی بدست می‌آید:

$$\omega_2=\frac{3\alpha_2\tilde{w}_{\max}^2(\alpha_8V_{12}^2V_{22}+\alpha_6V_{22}^3)-3\alpha_3\tilde{w}_{\max}^2(\alpha_4-\omega_0^4)V_{22}^2V_{12}}{8\alpha_2\omega_0^3V_{22}-8(\alpha_4-\omega_0^4)\omega_0^3V_{12}} \tag{3-110}$$

همچنین اگر با قراردادن پاسخ سمت راست معادله (3-109) به جای ستون اول ماتریس ضرایب، دترمینان ماتریس حاصل برابر صفر قرار داده شود آنگاه طبق شرط حل‌پذیری، فرکانس خطی ω_0 پس از ساده‌سازی حاصل می‌شود:

$$\omega_0^4=\frac{\alpha_6V_{22}^2(\alpha_4-\alpha_2)+\alpha_4\alpha_3V_{12}V_{22}-\alpha_2\alpha_8V_{12}^2}{9(\alpha_3V_{12}V_{22}+\alpha_6V_{22}^2)} \tag{3-111}$$

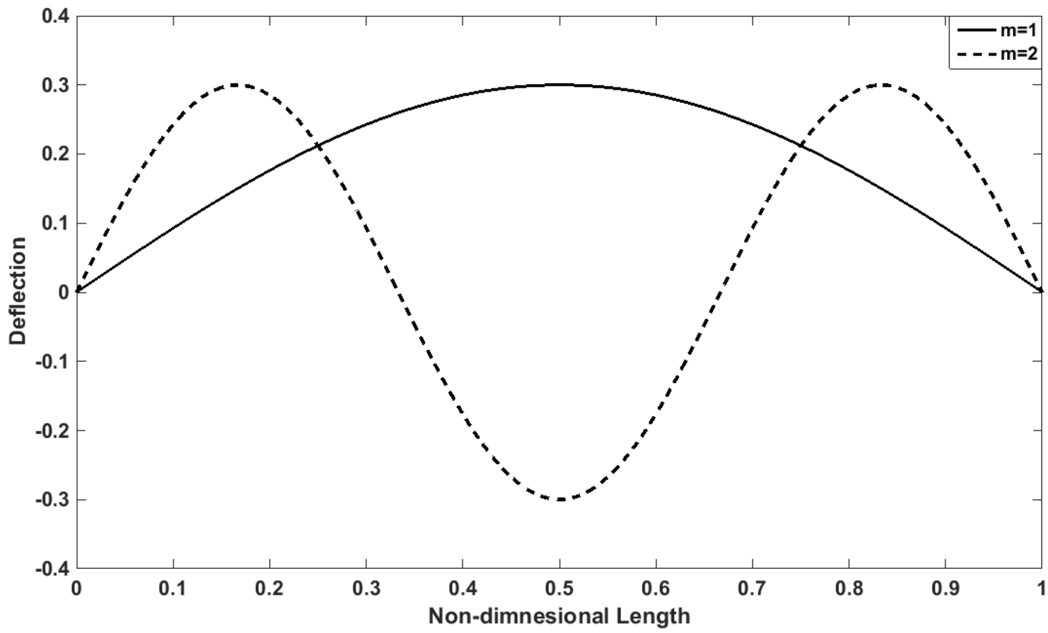
3-5-3 نتایج عددی

در این بخش به بررسی نتایج عددی محاسبات انجام شده پرداخته می شود. بدین منظور برای دسترسی به اطلاعات هندسی و مادی میکروتیر در مدل بیدرمن از جدول (3-2) استفاده می شود:

جدول (3-2): پارامترهای هندسی و ماده مدل بیدرمن

پارامتر[87]	مقدار
l	$30\,\mu m$
b	$10\,\mu m$
d	$10\,\mu m$
پارامتر[18]	**مقدار**
c_{01}	$2.33\times10^{4}\,Pa$
c_{10}	$0.208\times10^{6}\,Pa$
c_{20}	$-2.4\times10^{3}\,Pa$
c_{30}	$5\times10^{2}\,Pa$

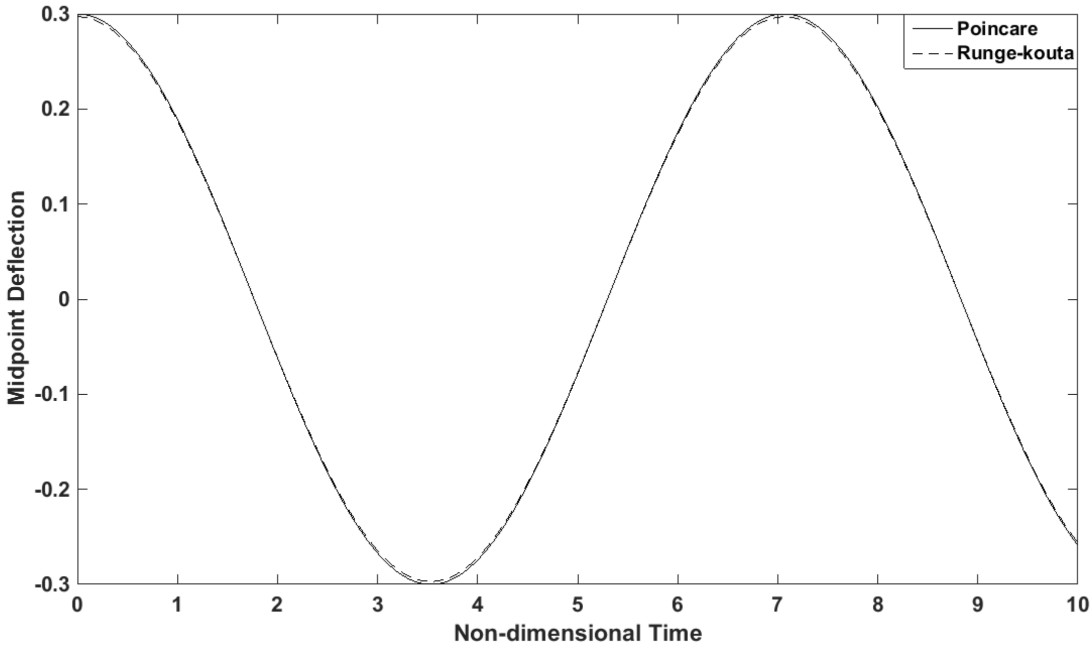
شکل مود میکروتیر برای مودهای اول و سوم در شکل (3-27) رسم شده است و همانطورکه مشاهده می گردد کاملا بر شرایط مرزی منطبق می‌باشد.



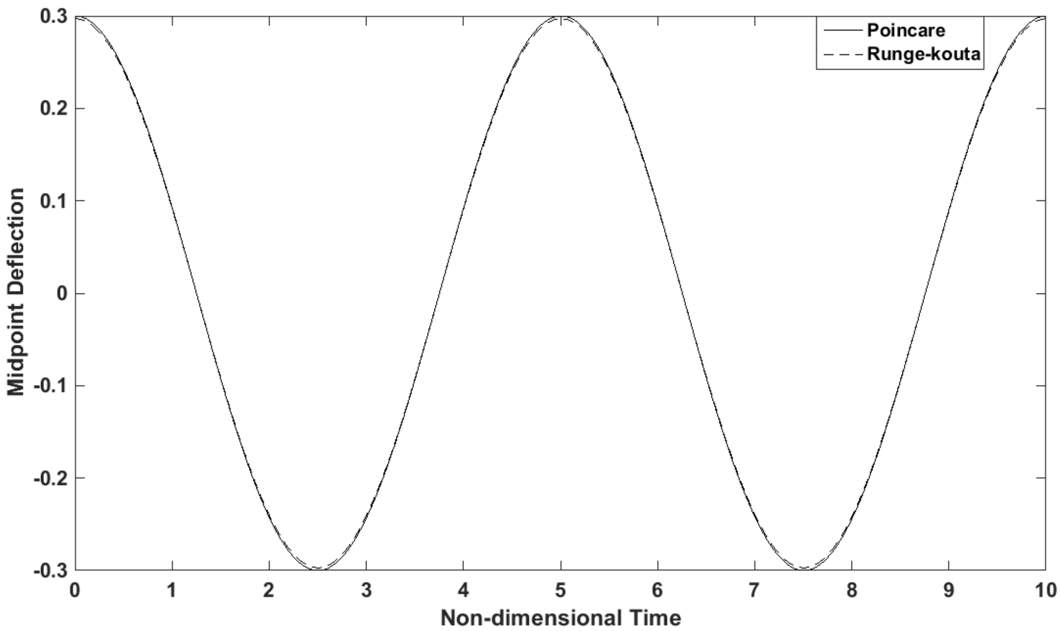
شکل (3-27): شکل مود میکروتیر تکیه گاه ساده برای مود اول و سوم

در شکل های (3-28) و (3-29) پاسخ های زمانی به ترتیب برای مودهای اول و سوم رسم شده و اعتبار سنجی آن توسط روش عددی انجام گرفته است. همانطور که در هر دو شکل مشخص است تطابق بسیار

مناسبی بین روش تحلیلی ارائه شده و روش عددی وجود دارد و افزایش فرکانس در ازای افزایش مود کاملا از مقایسه این دو شکل مشهود است.

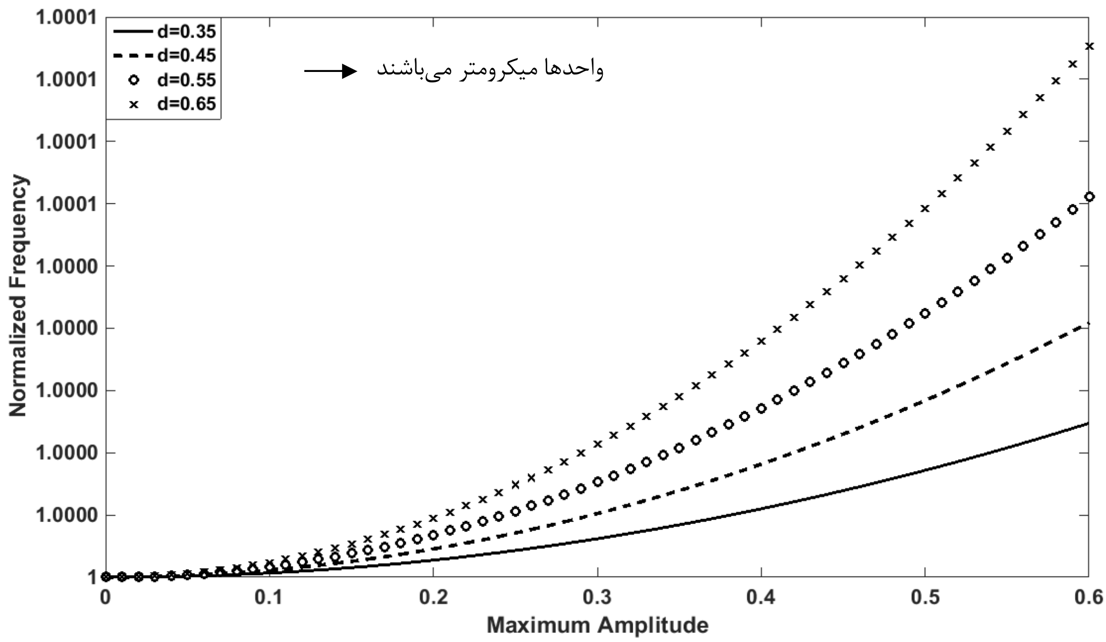


شکل (3-28): پاسخ زمانی میکروتیر تکیه گاه ساده مدل بیدرمن در مود اول

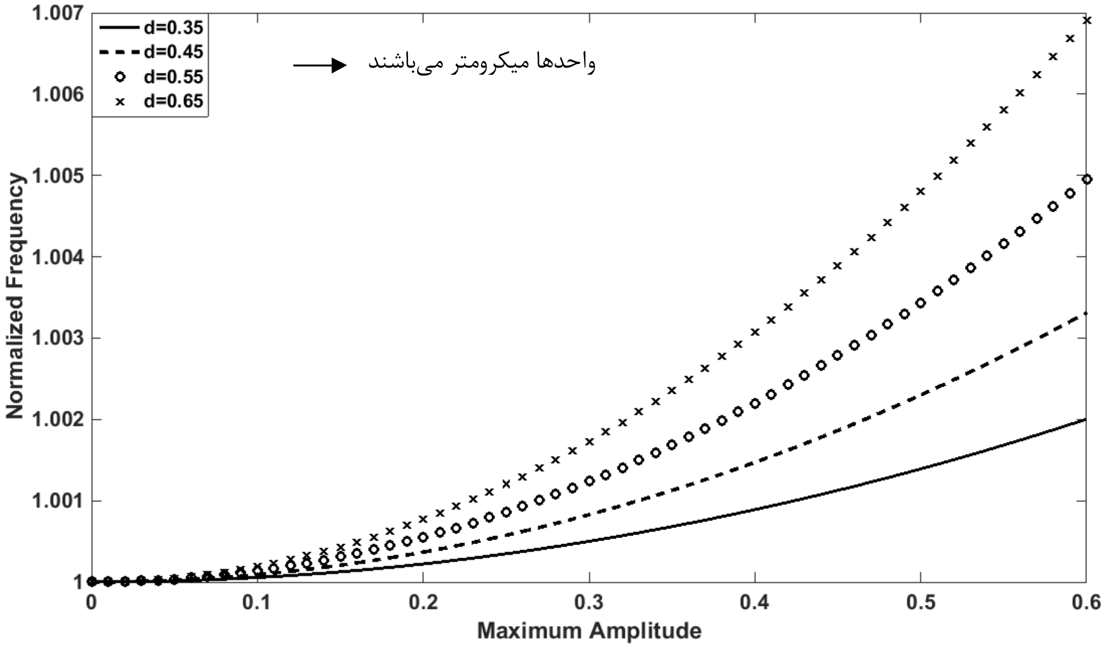


شکل (3-29): پاسخ زمانی میکروتیر تکیه گاه ساده مدل بیدرمن در مود سوم

اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال ($\frac{\omega}{\omega_0}$ نسبت فرکانس‌های غیرخطی و خطی بی‌بعد) برای ضخامت‌های مختلف و در مودهای اول و سوم به ترتیب در شکل های (3-30) و (3-31) ارائه شده است. اثر مستقیم بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال معرفی شده در این اشکال دیده می‌شود و میزان اثرگذاری در مودهای بالاتر بیشتر می‌شود. همچنین در هر مود با افزایش ضخامت میکروتیر، نرخ تغییرات فرکانس نرمال بیشتر می‌گردد.

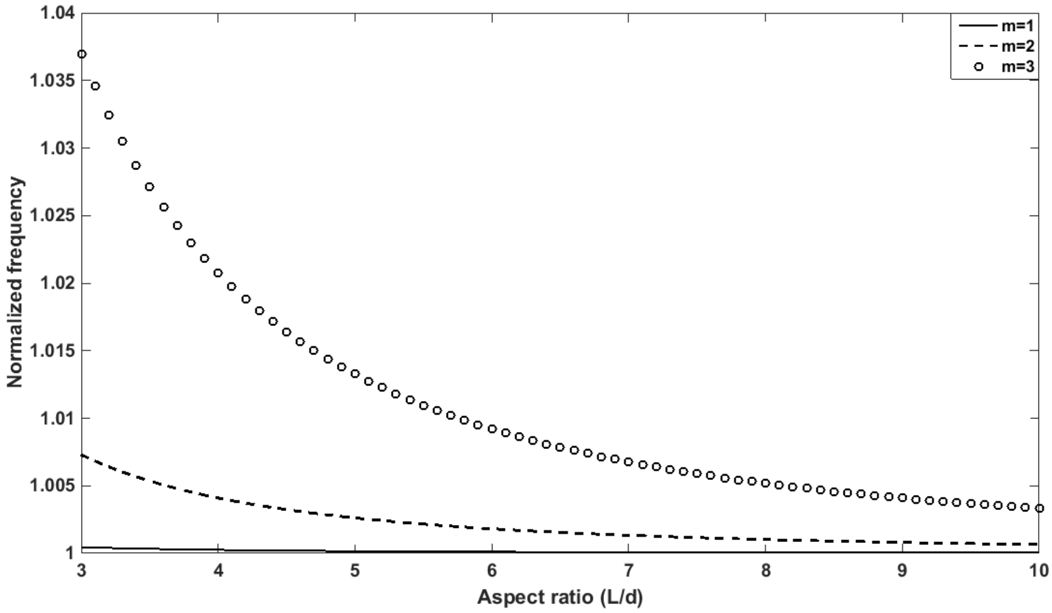


شکل (3- 30): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال میکروتیر تکیه گاه ساده در ضخامت های مختلف برای مود اول



شکل (3- 31): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال میکروتیر دوسر تکیه گاه ساده در ضخامت های مختلف برای مود سوم

نمودار فرکانس نرمال ($\frac{\omega}{\omega_0}$ نسبت فرکانس‌های غیرخطی و خطی بی‌بعد) بر حسب نسبت منظر (l/d) در شکل (3-32) رسم شده است. این نمودارها برای مودهای اول تا سوم نشان داده شده اند. همان طور که مشاهده می‌شود در نسبت منظرهای پایین(تیر ضخیم‌تر) اختلاف فرکانسی در مودهای مختلف مشهود است و هر چه مود بیشتر باشد مقدار فرکانس نیز بیشتر می‌گردد. همزمان با افزایش طول تیر (تیر لاغر) پاسخ فرکانس‌های نرمال در هر سه مود کاهش یافته و به سوی مقدار فرکانس خطی پیش رفته و تقریبا ثابت می‌شود.



شکل (3-32): اثر نسبت منظر بر فرکانس نرمال میکروتیر بیدرمن در مودهای مختلف

3-6 ارتعاش اجباری میکروتیر با شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، تئوری اویلر برنولی و مدل هایپرالاستیک یئو

3-6-1 استخراج معادله حاکم بر مدل یئو

در بررسی ارتعاش اجباری، نیروی هارمونیک $f_0\cos(\Omega t)$ را که از طرف الکترودها به دی‌الکتریک الاستومر وارد می‌گردد درنظر گرفته می‌شود.

معادله حاکم بر رفتار ارتعاش اجباری تیر با توجه به انرژی‌های جنبشی و کرنشی مطرح شده در بخش ارتعاش آزاد به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}&\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+8c_2 I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+24c_3 I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+96c_3 I\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\\&-2c_1 A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-12c_2 A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-30c_3 A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\\&+24c_3 I\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3=f_0\cos(\Omega t)\end{aligned}\tag{3-112}$$

که f_0 دامنه نیروی تحریک و Ω فرکانس تحریک است.

شرایط مرزی نیز از بین معادلات(3-25) و (3-26)، به صورت

$w(0)=0,\ w(l)=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0)=0,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l)=0$ انتخاب می‌شوند.

برای حل معادله (3-112) ابتدا باید پارامترهای بی بعدسازی زیر تعریف شوند:

$$x^*=\frac{x}{l},\quad w^*=\frac{w}{d},\quad t^*=t\omega_{\dim},\ \Omega^*=\frac{\Omega}{\omega_{\dim}}\tag{3-113}$$

در رابطه (3-113) پارامتر $\omega_{\dim}$ فرکانس طبیعی بابعد در حالت خطی می‌باشد که در معادله (3-30) مقدار آن محاسبه شده است.

از جایگذاری (3-113) در (3-112) معادله بی‌بعدشده حاکم بر مدل یئو بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}+\beta_1\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}+\beta_2\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2+4\beta_2\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\\&-\beta_3\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}-\beta_4\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2-\beta_5\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^4\\&+\beta_2\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)^3=F_0\cos(\Omega^* t^*)\end{aligned} \tag{3-114}$$

که:

$$\beta_1=\frac{8c_2 I}{\rho A L^4\omega_{\dim}^2},\ \beta_2=\frac{24c_3 d^2 I}{\rho A L^6\omega_{\dim}^2},\ \beta_3=\frac{2c_1}{\rho L^2\omega_{\dim}^2},$$
$$\beta_4=\frac{12c_2 d^2}{\rho L^4\omega_{\dim}^2},\ \beta_5=\frac{30c_3 d^4}{\rho L^6\omega_{\dim}^2},\ F_0=\frac{f_0}{\rho A d\,\omega_{\dim}^2}$$

و شرایط مرزی بی‌بعد عبارتند از: $w^*(0)=0,\ w^*(1)=0,\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*^2}}(0)=0, \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*^2}}(1)=0$.

3-6-2 حل معادله حاکم و بررسی پاسخ فرکانسی

اعمال روش گالرکین

جداسازی متغیر با استفاده از معادله (3-115) انجام می‌پذیرد به طوری که در معادله (3-114) جایگزین، طرفین را در شکل مود معرفی شده در معادله (3-115) ضرب کرده و در فاصله صفر تا یک انتگرال‌گیری می‌کنیم.

$$w^*(x^*,t^*)=X(x^*)\mathrm{q}(t^*),\quad X(x^*)=\sqrt{2}\sin(m\pi x^*) \tag{3-115}$$

در اثر اعمال گالرکین، معادله دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌گردد:

$$\ddot{q}(t^*)+\alpha_1 q(t^*)+\alpha_2 q^3(t^*)+\alpha_3 q^5(t^*)=F\cos(\Omega^* t^*) \tag{3-116}$$

که $\alpha_1=\beta_1 m^4\pi^4+\beta_3 m^2\pi^2,\quad \alpha_2=\beta_2 m^6\pi^6+\frac{\beta_4}{2}m^4\pi^4,\quad \alpha_3=\frac{\beta_5}{2}m^6\pi^6$.

حل مقیاس های چندگانه[1]

برای اعمال روش مقیاس‌های چندگانه بر روی معادله استخراجی، پارامتر کوچک طبق رابطه زیر اعمال می‌شود:

$$q=\varepsilon u \tag{3-117}$$

حل پیشنهادی زیر طبق روش مقیاس‌های چندگانه معرفی و در معادله جایگذاری می‌شود:

$$u=u_0(\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2)+\varepsilon u_1(\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2)+\varepsilon^2 u_2(\mathrm{T}_0,\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2) \tag{3-118}$$

که $T_0=t,\ T_1=\varepsilon t,\ T_2=\varepsilon^2 t$ می‌باشد.

ضرایب توان‌های مختلف پارامتر کوچک با استفاده از نرم افزار میپل بدست خواهند آمد. جمله نیروی اجباری باید در بزرگترین ضریب پارامتر کوچک اغتشاشی وارد شود.

ضرایب بدست امده عبارتند از:

$$\varepsilon^1:\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0{}^2}+\alpha_1 u_0=0 \tag{3-119}$$

$$\varepsilon^2:\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0{}^2}+\alpha_1 u_1+2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0\partial T_1}=0 \tag{3-120}$$

$$\varepsilon^3:\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_0{}^2}+\alpha_1 u_2+2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0\partial T_1}+\alpha_2 u_0^3+\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1^2}+2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0\partial T_2}=F\cos(\Omega^*\mathrm{T}_0) \tag{3-121}$$

ضریب α_1 در معادلات (3-119) همان مربع فرکانس طبیعی تیر خطی و بی‌بعدشده (ω_0^2) است.

حل معادله (3-119) برابر است با:

[1] Multiple scales method

$$u_0 = A(\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2)\,\mathrm{e}^{i\omega_0 T_0} + cc \tag{3-122}$$

که cc معرف عبارت مزدوج مختلط است.

از جایگذاری (3-122) در (3-120) و حذف جملات سکولار، عدم وابستگی $A(\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2)$ به متغیر T_1 مشخص می‌شود.

$$D_1 A = 0 \rightarrow A = A(\mathrm{T}_2) \tag{3-123}$$

از آنجایی که صرفا اولین حل همگن (معادله 3-122) در معادلات پاسخ دخیل می‌شود، لذا پاسخ معادله (3-120) برابر است با:

$$u_1 = 0 \tag{3-124}$$

جایگذاری معادلات (3-122) و (3-124) در (3-121)، در کنار در نظر گرفتن معادله (3-123)، منجر به رابطه زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} &D_0^{\,2}u_2 + \omega_0^{\,2}u_2 + 2\left(i\omega_0 A'\,\mathrm{e}^{i\omega_0 T_0} + i\omega_0 \bar{A}'\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 T_0}\right) \\ &+\alpha_2\left(A\mathrm{e}^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 T_0}\right)^3 = \frac{F}{2}\left(\mathrm{e}^{i\Omega^* T_0} + \mathrm{e}^{-i\Omega^* T_0}\right) \end{aligned} \tag{3-125}$$

برای بررسی بحث تشدید، رزونانس اولیه درنظر گرفته شده و فرکانس تحریک در نزدیکی فرکانس طبیعی با استفاده از پارامتر تنظیم[1] تعریف می‌گردد:

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon^2\sigma \tag{3-126}$$

از جایگذاری (3-126) در (3-125) و حذف جملات سکولار، تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$3\alpha_2 A^2\bar{A} + 2i\omega_0 A' - \frac{F}{2}e^{i\sigma T_2} = 0 \tag{3-127}$$

فرم قطبی A در عبارت بالا عبارتست از:

[1] detuning parameter

$$A=\frac{1}{2}a\,e^{i\beta} \tag{3-128}$$

رابطه قطبی (3-128) باید در معادله (3-127) جایگزین و طرفین در $e^{-i\beta}$ ضرب شود. سپس از جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی، دو رابطه بدست می‌آید:

$$\frac{3}{8}\alpha_2 a^3-\omega_0 a\beta'-\frac{F}{2}\cos(\sigma \mathrm{T}_2-\beta)=0 \tag{3-129}$$

$$\omega_0 a'-\frac{F}{2}\sin(\sigma \mathrm{T}_2-\beta)=0 \tag{3-130}$$

برای حذف وابستگی مستقیم معادلات به T_2، تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$\sigma \mathrm{T}_2-\beta=\gamma \tag{3-131}$$

با اعمال معادله (3-131) در روابط (3-129) و (3-130) و علم به اینکه در پاسخ حالت پایدار، $a'=\gamma'=0$ است می‌توان با به مربع رساندن طرفین معادلات حاصل و تجمیع آن‌ها، پاسخ فرکانسی را بدست آورد:

$$\left(\frac{3}{8}\alpha_2 a^3-\omega_0\sigma a\right)^2=\frac{F^2}{4} \tag{3-132}$$

پاسخ نهایی معادله نیز برابر است با:

$$q=a\,\varepsilon^2\cos(\omega_0\,\mathrm{T}_0+\beta)+\mathrm{O}(\varepsilon^3) \tag{3-133}$$

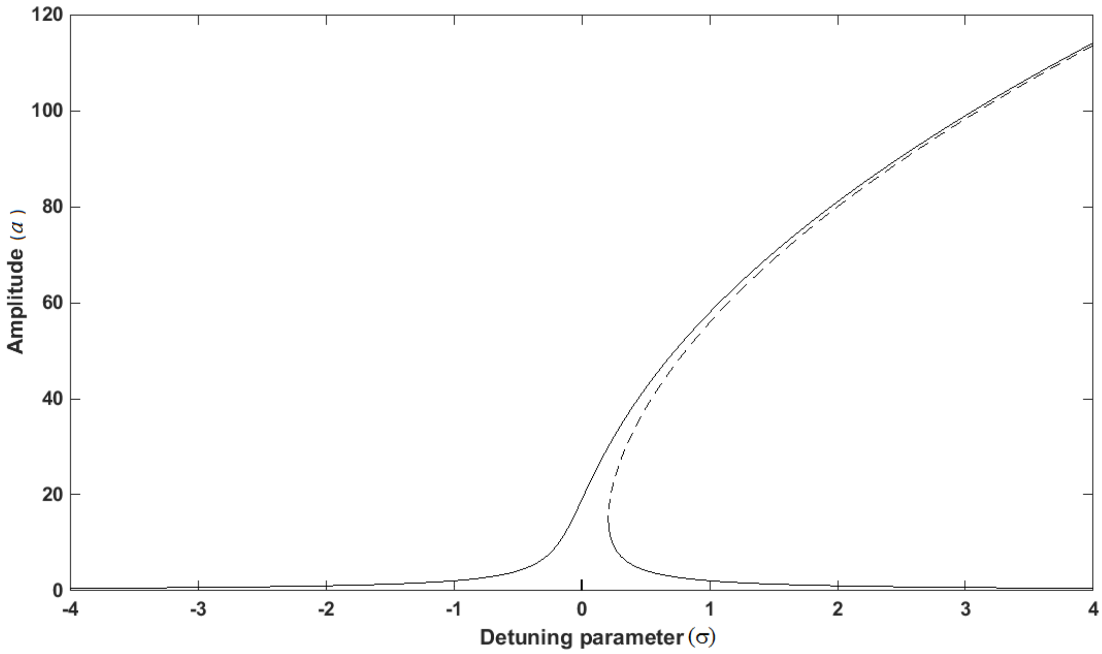
3-6-3 نتایج عددی

در این بخش، نمودارهای شاخه شدگی[1] با توجه به مقادیر عددی ارائه شده در جدول (3-1) رسم و بر روی آن‌ها بحث می‌شود. این نمودارها تغییرات دامنه نوسان بر حسب پارامتر تنظیم معرفی شده در معادله (3-126) می‌باشند. محدوده پارامتر تنظیم از 4- تا 4+ در نظر گرفته شده است. در همه شکل‌های

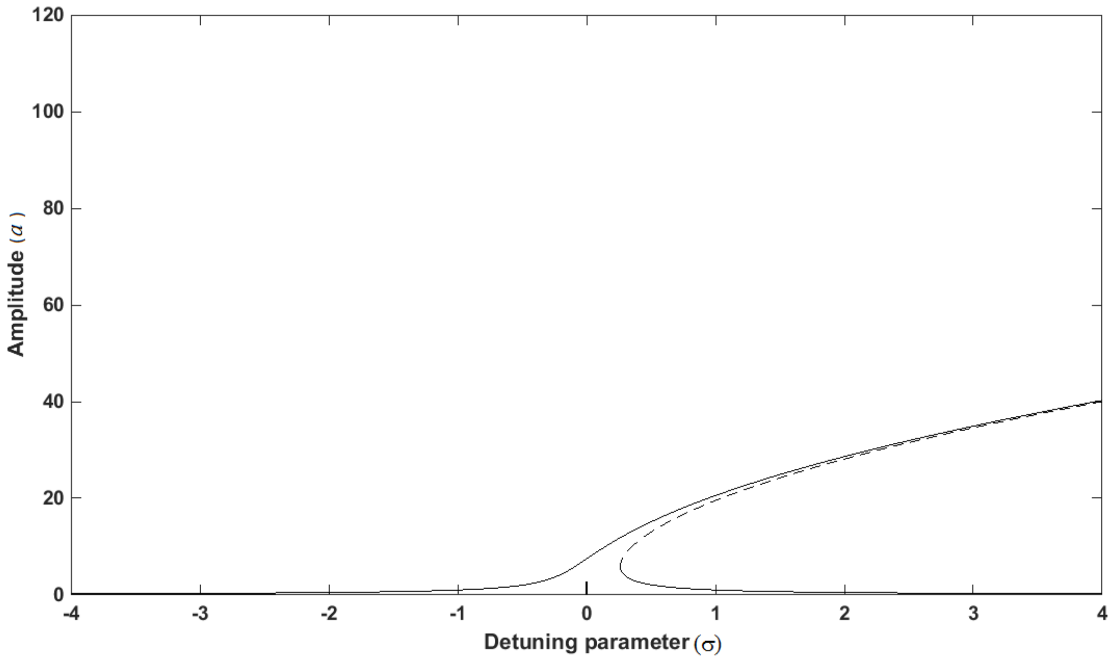
[1] Bifurcation

(3-33) تا (3-35) مشاهده می‌شود که نمودار به سمت راست متمایل است و لذا تیر رفتار سخت‌شوندگی دارد.

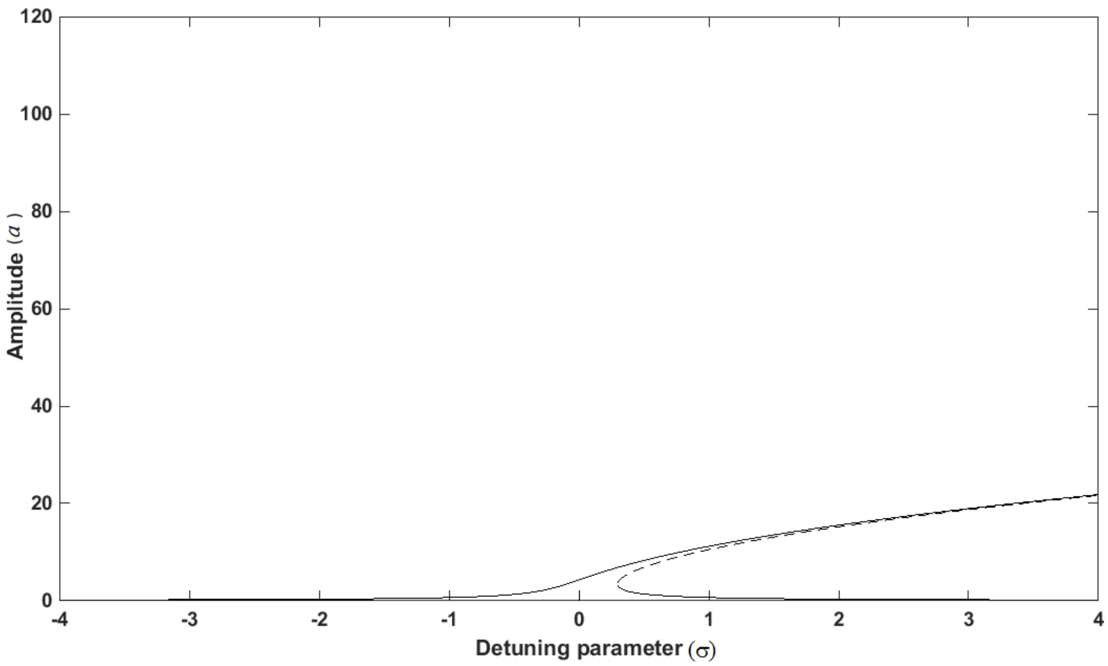
مقایسه نمودارهای(3-33) تا (3-35) بیانگر کاهش دامنه در اثر افزایش شماره مود بالاخص بین مود اول و دوم می‌باشد و میزان سخت‌شوندگی هم به دلیل خمش بیشتر نمودار به سمت راست، با افزایش مود بیشتر می‌گردد.



شکل (3-33): نمودار شاخه‌شدگی میکروتیر در مود اول

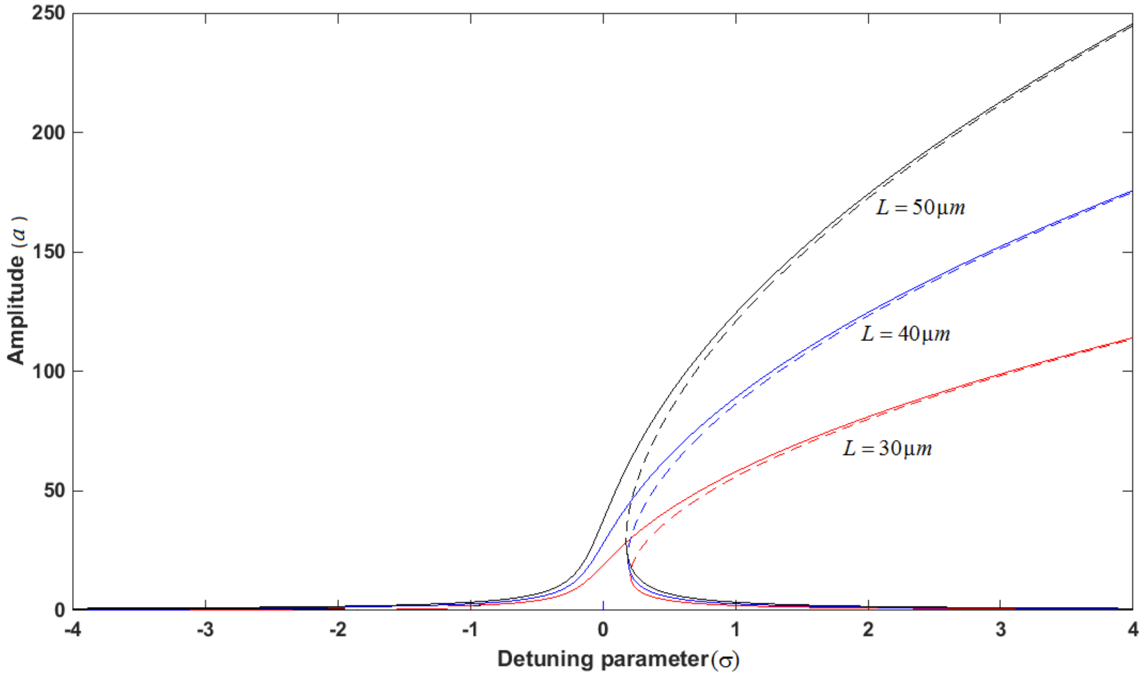


شکل (3-34): نمودار شاخه شدگی میکروتیر در مود دوم

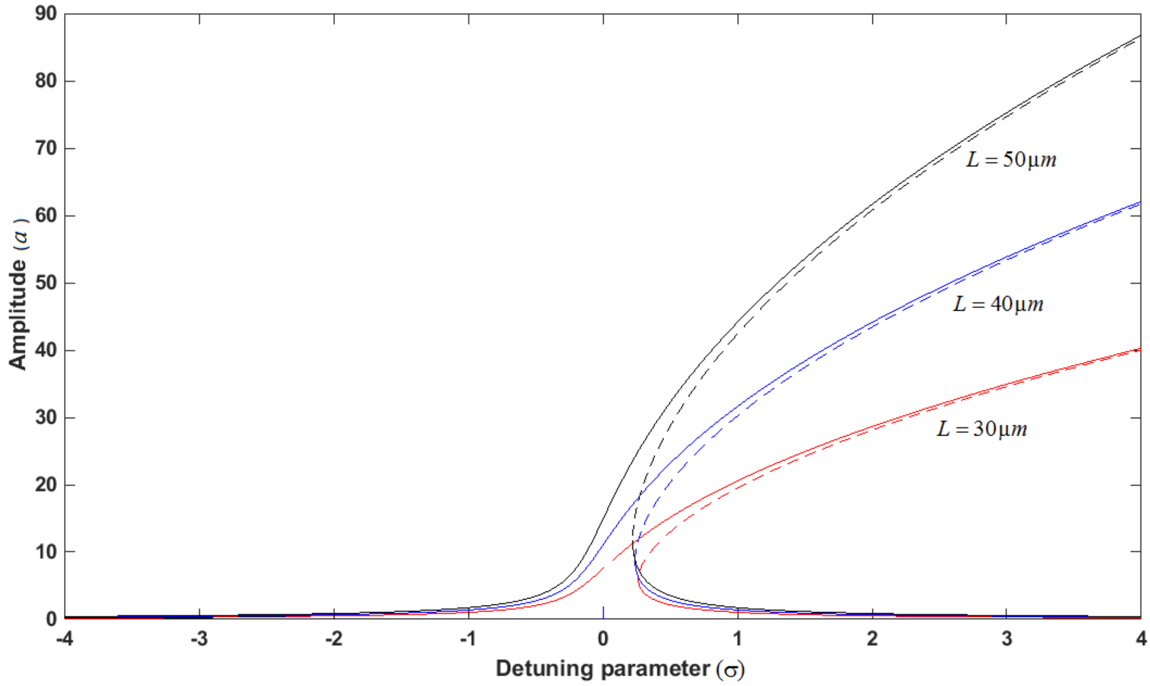


شکل (3-35): نمودار شاخه شدگی میکروتیر در مود سوم

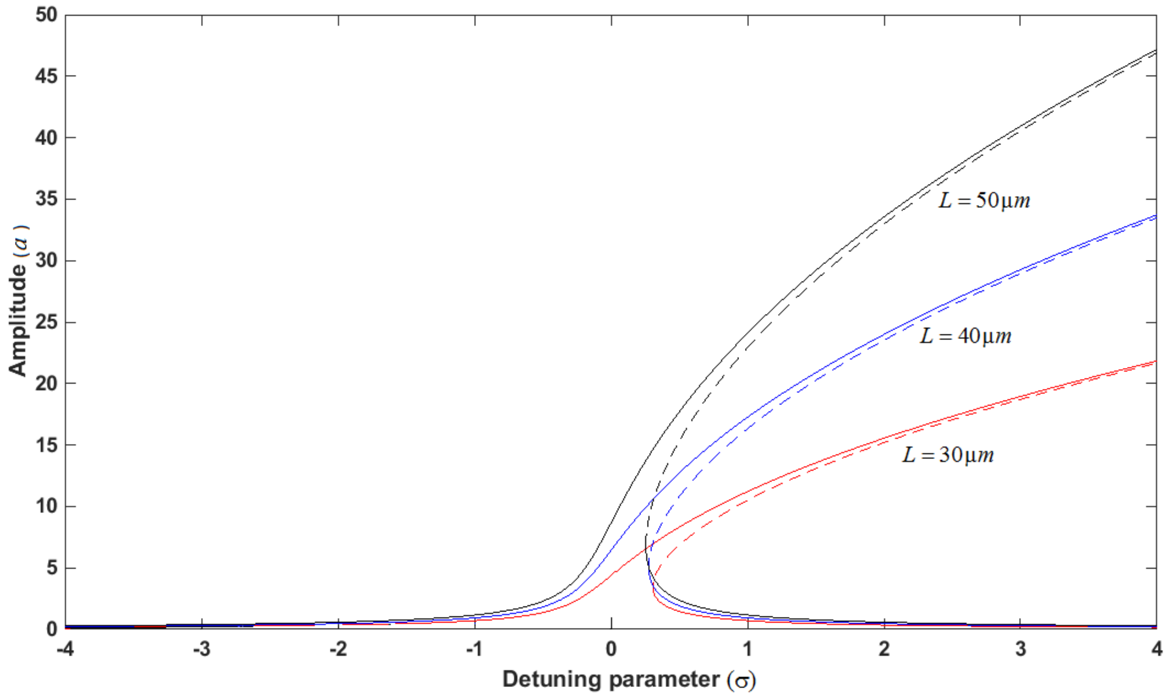
در شکل (3-36) تا (3-38) ، نمودار پاسخ فرکانسی به ترتیب برای مودهای اول تا سوم بر حسب طول-های مختلف در ضخامت ثابت رسم شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش طول یعنی افزایش نسبت منظر ($\frac{l}{d}$)، میزان دامنه افزایش یافته ولی از میزان سخت‌شوندگی کم می‌شود.



شکل (3-36): پاسخ فرکانسی در طول‌های مختلف با ضخامت ثابت برای مود اول ($d = 0.65\ \mu m$)

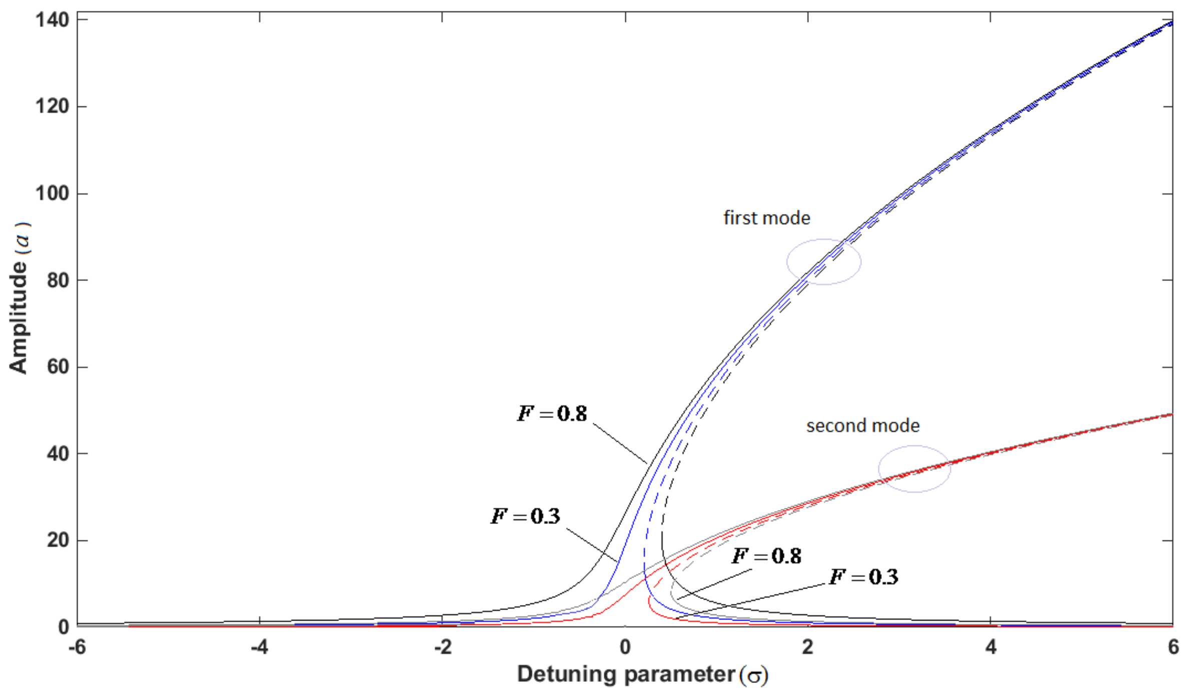


شکل (3-37): پاسخ فرکانسی در طول‌های مختلف با ضخامت ثابت برای مود دوم ($d = 0.65\ \mu m$)



شکل (3-38): پاسخ فرکانسی در طول‌های مختلف با ضخامت ثابت برای مود سوم ($d = 0.65\ \mu m$)

پارامتر دیگری که اثر آن در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد دامنه نیروی هارمونیک خارجی است. دو مقدار متفاوت برای دامنه نیرو در هر مود درنظر گرفته می‌شود. همانطور که در شکل (3-39) مشخص است بخش اول پایدار برای دامنه نیروی بزرگتر در پارامتر تنظیم کوچکتری روند صعودی را آغاز می‌کند و بخش دوم پایدار در پارامتر تنظیم بزرگتری آغاز می‌شود که این امر به معنای ایجاد دامنه ماکزیمم در فرکانس تحریک بزرگتر است. علاوه بر این، دامنه نیرو در مودهای بالاتر منجر به رفتار سخت شونده تری می گردد.



شکل(3-39): اثر دامنه نیرو بر رفتار میکروتیر

7-3 بررسی اثر اندازه در ارتعاش آزاد میکروتیر دوسر ساده، با معرفی و استفاده از یک مدل جدید بیدرمن تقویت شده بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده

1-7-3 روابط اساسی تئوری کلاسیک تنش کوپل اصلاح شده

روابط حاکم بر تئوری تنش کوپل اصلاح شده عبارتند از [90]:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V (\sigma : \varepsilon + m : \chi)\, dV \tag{3-134}$$

$$\sigma = \lambda\, tr(\varepsilon)\, \mathrm{I} + 2\mu\varepsilon \tag{3-135}$$

$$m = 2\mu l_0^{\,2} \chi \tag{3-136}$$

$$\chi = \frac{1}{2}\left(\theta \otimes \nabla + \nabla \otimes \theta\right) \tag{3-137}$$

$$\theta = \frac{1}{2} curl(u) \tag{3-138}$$

که در این روابط σ تانسور تنش، ε تانسور کرنش، λ و μ ثوابت معادلات سازگاری، l_0 پارامتر مقیاس طول، θ تانسور انحنا، χ بخش متقارن گرادیان چرخش و m بخش دویاتوریک تانسور تنش کوپل است.

2-7-3 معرفی مدل جدید بیدرمن تقویت شده بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده و استخراج معادله حاکم

برای یافتن معادله حاکم بر مدل بیدرمن نیاز به تعریف انرژی‌های جنبشی و پتانسیل برای اعمال در اصل همیلتون تعمیم یافته می‌باشد.

انرژی جنبشی برابر است با:

$$T = \frac{\rho}{2}\int_0^l \left[I(\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 + A(\frac{\partial w}{\partial t})^2 \right] dx \qquad (3\text{-}139)$$

برای معرفی انرژی پتانسیل با توجه به تعریف آن توسط انتگرال حجمی چگالی انرژی کرنشی که در معادلات (3-66) و (3-67) بیان شد باید اثر اندازه که دربرگیرنده پارامتر مقیاس کوچک طولی (l_0) است را نیز درنظر گرفت. لذا با استنتاج از تئوری تنش کوپل اصلاح شده، با افزودن جمله آخر معرفی‌شده در رابطه (3-134) به چگالی انرژی کرنشی بیدرمن، رابطه تقویت شده انرژی پتانسیل به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\Pi = \int_V \left(c_{10}(\mathrm{I}_1 - 3) + c_{01}(\mathrm{I}_2 - 3) + c_{20}(\mathrm{I}_1 - 3)^2 + c_{30}(\mathrm{I}_1 - 3)^3 + m_{xy}\chi_{xy} \right) dV \qquad (3\text{-}140)$$

بردار چرخش، بخش متقارن گرادیان چرخش و بخش دویاتوریک تانسور تنش کوپل در معادله (3-140) با توجه به عبارات (3-136) تا (3-138) به ترتیب عبارتند از:

$$\vec{\theta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi \right)\vec{j} \qquad (3\text{-}141)$$

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \qquad (3\text{-}142)$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -\frac{\mu l_0^{\,2}}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \qquad (3\text{-}143)$$

ثوابت کرنش، مولفه‌های کرنش و تانسور راست کوشی-گرین که در معادله (3-140) ظاهر می‌شوند همان معادلات ارائه شده در روابط (3-62) تا (3-64) می‌باشند که برای پرهیز از دوباره‌گویی در این بخش از آن اجتناب می‌گردد.

پارامتر μ در رابطه (3-143)، ثابت مدول برشی است که از طریق معادل‌سازی با رابطه تنش- کرنش در مواد هایپرالاستیک، بر حسب ثوابت مدل بیدرمن محاسبه شده و در نتایج عددی مورد استفاده قرار می-گیرد.

رابطه تنش و کرنش در مواد هایپرالاستیک با رابطه زیر قابل بیان است:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)_{I_1=3} C_{ij} - 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\frac{1}{C_{ij}} \qquad (3\text{-}144)$$

همانطور که پیش از این گفته شد وضعیت تنش‌ها با توجه به تست کشش تک محوره عبارتند از:

$$\sigma_1 = \sigma,\ \ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \qquad (3\text{-}145)$$

و نیز برای کشیدگی‌های اصلی:

$$\lambda_1 = \lambda,\ \ \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \qquad (3\text{-}146)$$

چگالی انرژی کرنشی حاکم بر مدل بیدرمن عبارتست از:

$$W = c_{10}(\mathrm{I}_1 - 3) + c_{01}(\mathrm{I}_2 - 3) + c_{20}(\mathrm{I}_1 - 3)^2 + c_{30}(\mathrm{I}_1 - 3)^3 \qquad (3\text{-}147)$$

که ثوابت کرنش در رابطه (3-64) معرفی شده‌اند.

رابطه تنش- کرنش بیان شده در معادله (3-144)، پس از اعمال شرط (3-145)، برابر می‌شود با:

$$\sigma_{ij} = 2\left(\frac{\partial W}{\partial I_1}\right)_{I_1=3}\left(C_{ij} - \delta_{ij}\right) + 2\frac{\partial W}{\partial I_2}\left(\delta_{ij} - \frac{1}{C_{ij}}\right) \qquad (3\text{-}148)$$

از طرفی در بخش‌های پیشین، ماتریس کوشی- گرین راست در مدل بیدرمن به صورت زیر بدست آمد:

$$C = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{11}+1 & 0 & 2\varepsilon_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\varepsilon_{13} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}149)$$

پس از اعمال پارامترهای مختلف در رابطه تنش- کرنش (3-144)، برای تنش برشی رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\tau_{13} = 4(c_{10} + c_{01})\varepsilon_{13} \qquad (3\text{-}150)$$

که عبارت $4(c_{10} + c_{01})$ نقش مدول برشی را ایفا می‌کند.

وارد کردن انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در اصل همیلتون و انجام انتگرال‌گیری‌های مربوطه، نهایتا منجر به مجموعه معادلات زیر می‌گردد:

$$\rho I\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-2c_{01}A\phi+2c_{01}A\frac{\partial w}{\partial x}-(8\mathrm{c}_{20}\,I+\frac{\mu l_0{}^2A}{4})\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$
$$-24c_{30}I\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]-\frac{\mu l_0{}^2A}{4}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \qquad (3\text{-}151)$$

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-(2\mathrm{c}_{10}+2c_{01})A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2c_{01}A\frac{\partial\phi}{\partial x}-12\mathrm{c}_{20}\,A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-30c_{30}A\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$
$$-24c_{30}I\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\frac{\mu l_0{}^2A}{4}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)=0 \qquad (3\text{-}152)$$

شرایط مرزی استخراج شده از اصل همیلتون عبارتند از:

$$at\;\;x=0,l:\;\;2(c_{10}+c_{01})A\frac{\partial w}{\partial x}+2c_{01}A\phi+4c_{20}A(\frac{\partial w}{\partial x})^3+6c_{30}A(\frac{\partial w}{\partial x})^5$$
$$+24c_{30}I\frac{\partial w}{\partial x}(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2-\frac{\mu Al_0{}^2}{4}(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2})=0 \qquad (3\text{-}153)$$

$$OR\quad \delta w=0$$

$$at\;\;x=0,l:\;\;8c_{20}I\frac{\partial\phi}{\partial x}+24c_{30}I\frac{\partial\phi}{\partial x}(\frac{\partial w}{\partial x})^2+\frac{\mu Al_0{}^2}{4}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi}{\partial x})=0 \qquad (3\text{-}154)$$

$$OR\quad \delta\phi=0$$

از بین شرایط مرزی مذکور، شروط مناسب مساله باید انتخاب شوند:

$$at\;\;x=0,l:\;\;w=0\quad and\quad 8c_{20}I\frac{\partial\phi}{\partial x}+24c_{30}I\frac{\partial\phi}{\partial x}(\frac{\partial w}{\partial x})^2+\frac{\mu Al_0{}^2}{4}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi}{\partial x})=0 \qquad (3\text{-}155)$$

3-7-3 حل معادله‌های حاکم و بررسی پاسخ فرکانسی

ابتدا معادله را با تعریف پارامترهای زیر، بی‌بعدسازی می‌کنیم:

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad w^* = \frac{w}{d}, \quad t^* = t\omega_{\dim}, \; \phi^* = \phi \tag{3-166}$$

در رابطه (3-166) پارامتر $\omega_{\dim}$ فرکانس طبیعی بابعد اویلر- برنولی در حالت خطی می‌باشد.

این پارامتر ابتدا محاسبه و سپس بی‌بعدسازی انجام می‌گردد.

معادله خطی مدل بیدرمن غیرکلاسیک با تئوری اویلر- برنولی با توجه به روابط بخش‌های قبلی و پارامترهای زیر قابل دستیابی است.

بردار چرخش θ با توجه به تعریف آن در معادله (3-138) عبارتست از:

$$\vec{\theta} = -\frac{\partial w}{\partial x}\vec{j} \tag{3-167}$$

مولفه‌های تانسور متقارن انحناء براساس معادله (3-137)، عبارتند از:

$$\chi_{xy} = \chi_{yx} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3-168}$$

باقی مولفه‌ها برابر صفر هستند.

مولفه‌های بخش دویاتوریک تانسور تنش کوپل (m) بر اساس معادله (3-136)، معادلند با:

$$m_{xy} = m_{yx} = -\mu l_0{}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3-169}$$

بقیه مولفه‌ها برابر صفر هستند.

از قرار دادن معادلات سازگاری در روابط انرژی جنبشی و پتانسیل و نهایتا اعمال در اصل همیلتون، رابطه خطی حاکم به دست می‌آید:

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(2c_{10} + 4c_{01}\right)A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(8c_{20}I + \mu l_0{}^2 A\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \tag{3-170}$$

واضح است که از اعمال پاسخ پیشنهادی (3-74) در معادله (3-170)، فرکانس طبیعی بدست می‌آید:

$$\omega_{\dim}=\sqrt{\frac{\left(2c_{10}+4c_{01}\right)A\pi^2l^2+\left(8c_{20}I+\mu Al_0{}^2\right)\pi^4}{\rho Al^4}} \tag{3-171}$$

که دارای مقدار عددی $2.2586\times10^6\ rad/s$ بر مبنای مقادیر عددی جدول (3-2) می‌باشد.

حال با استفاده از پارامترهای (3-166)، حالت بی‌بعد معادلات حاکم حاصل می‌شود: (لازم به ذکر است برای سادگی، علامت ستاره از روی متغیرها برداشته شده است).

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\beta_1\phi+\beta_2\frac{\partial w}{\partial x}-\beta_3\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\beta_4\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]-\beta_5\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \tag{3-172}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\beta_6\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\beta_7\frac{\partial\phi}{\partial x}-\beta_8\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\beta_9\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\&-\beta_{10}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right]+\beta_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\beta_{12}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}=0\end{aligned} \tag{3-173}$$

که:

$$\begin{aligned}&\beta_1=\frac{2c_{01}A}{\rho I\omega_{\dim}^2},\ \beta_2=\frac{2c_{01}Ad}{\rho Il\omega_{\dim}^2},\ \beta_3=\frac{32c_{20}I+\mu Al_0{}^2}{4\rho l^2\omega_{\dim}^2},\ \beta_4=\frac{24c_{30}d^2}{\rho l^4\omega_{\dim}^2},\ \beta_5=\frac{\mu Al_0{}^2d}{4\rho l^3I\omega_{\dim}^2}\\&,\ \beta_6=\frac{2c_{10}+2c_{01}}{\rho l^2\omega_{\dim}^2},\beta_7=\frac{2c_{01}}{\rho ld\omega_{\dim}^2},\ \beta_8=\frac{12\,c_{20}\,d^2}{\rho l^4\omega_{\dim}^2},\beta_9=\frac{30c_{30}d^4}{\rho l^6\omega_{\dim}^2},\ \beta_{10}=\frac{24c_{30}I}{\rho Al^4\omega_{\dim}^2},\\&\beta_{11}=\frac{\mu l_0{}^2}{4\rho l^4\omega_{\dim}^2},\ \beta_{12}=\frac{\mu l_0{}^2}{4\rho l^3d\omega_{\dim}^2}\end{aligned}$$

در پارامترهای معرفی شده، l بیانگر طول میکروتیر و l_0 بیانگر مقیاس طولی در تئوری تنش کوپل اصلاح شده است.

شرایط مرزی بی بعد نیز عبارتند از:

$$at\ x=0,1:\quad w=0\quad and\quad 8c_{20}I\frac{\partial\phi}{\partial x}+24c_{30}I\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu Al_0{}^2}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=0 \tag{3-174}$$

.

روش گالرکین

جداسازی متغیر با استفاده از معادله‌های (3-175) و (3-176) انجام می‌پذیرد به طوری که در معادله-های (3-172) و (3-173) جایگزین، طرفین به‌ترتیب در شکل مودهای مرتبط معرفی شده در معادله-های (3-175) و (3-176) ضرب و در فاصله صفر تا یک انتگرال‌گیری می‌شود.

$$\phi(x,t)=X_1(x)q_1(t),\quad X_1(x)=\sqrt{2}\,cos(m\pi x) \tag{3-175}$$

$$w(x,t)=X_2(x)q_2(t),\quad X_2(x)=\sqrt{2}\,sin(m\pi x) \tag{3-176}$$

نتایج حاصل شامل دو معادله کوپله از q_1 و q_2 می‌باشد:

$$\ddot{q}_1+(\beta_3 m^2\pi^2-\beta_1)q_1+(\beta_2 m\pi+\beta_5 m^3\pi^3)q_2+(\frac{\beta_4 m^4\pi^4}{2})q_1q_2^2=0 \tag{3-177}$$

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_2-(\beta_6\,\mathrm{m}^2\pi^2)q_2+(\beta_7\,\mathrm{m}\,\pi)q_1+(\frac{\beta_8\,\mathrm{m}^4\pi^4}{2})q_2^3+(\frac{\beta_9 m^6\pi^6}{2})q_2^5\\&+(\frac{\beta_{10}m^4\pi^4}{2})q_2q_1^2+(\beta_{11}m^4\pi^4)q_2^4+(\beta_{12}m^3\pi^3)q_1^3=0\end{aligned} \tag{3-178}$$

حل پوانکاره

طبق روش پوانکاره ابتدا تغییر متغیر $\tau=\omega t$ را انجام داده و در معادلات (216) و (217) جایگزین می-کنیم:

$$\omega^2\frac{d^2q_1}{dt^2}+\alpha_1q_1+\alpha_2q_2+\alpha_3q_1q_2^2=0 \tag{3-179}$$

$$\omega^2\frac{d^2q_2}{dt^2}+\alpha_4q_2+\alpha_5q_1+\alpha_6q_2^3+\alpha_7q_2^5+\alpha_8q_2q_1^2+\alpha_9q_2^4+\alpha_{10}q_1^3=0 \tag{3-180}$$

که:

$$\begin{aligned}&\alpha_1=\beta_3m^2\pi^2-\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2m\pi+\beta_5m^3\pi^3,\ \alpha_3=\frac{\beta_4m^4\pi^4}{2},\ \alpha_4=-\beta_6\,\mathrm{m}^2\pi^2,\ \alpha_5=\beta_7\,\mathrm{m}\,\pi,\\&\alpha_6=\frac{\beta_8}{2}\mathrm{m}^4\pi^4,\ \alpha_7=\frac{\beta_9m^6\pi^6}{2},\ \alpha_8=\frac{\beta_{10}m^4\pi^4}{2},\ \alpha_9=\beta_{11}m^4\pi^4,\ \alpha_{10}=\beta_{12}m^3\pi^3\end{aligned}$$

حل‌های بسط داده شده برای q_1، q_2 و ω عبارتند از:

$$q_1 = \varepsilon q_{10} + \varepsilon^2 q_{11} + \varepsilon^3 q_{12} + \ldots \tag{3-181}$$

$$q_2 = \varepsilon q_{20} + \varepsilon^2 q_{21} + \varepsilon^3 q_{22} + \ldots \tag{3-182}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \ldots \tag{3-183}$$

از قرار دادن معادلات (3-181) تا (3-183) در روابط (3-179) و (3-180) و جداسازی ضرایب مختلف پارامتر کوچک اغتشاشی خواهیم داشت:

ضرایب $O(\varepsilon)$:

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{10}}{d\tau^2} + \alpha_1 q_{10} + \alpha_2 q_{20} = 0 \tag{3-184}$$

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{20}}{d\tau^2} + \alpha_5 q_{10} + \alpha_4 q_{20} = 0 \tag{3-185}$$

ضرایب $O(\varepsilon^2)$:

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{11}}{d\tau^2} + 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 q_{10}}{d\tau^2} + \alpha_1 q_{11} + \alpha_2 q_{21} = 0 \tag{3-186}$$

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{21}}{d\tau^2} + 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 q_{20}}{d\tau^2} + \alpha_4 q_{21} + \alpha_5 q_{11} = 0 \tag{3-187}$$

ضرایب $O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned}&\omega_0^2 \frac{d^2 q_{12}}{d\tau^2} + 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 q_{11}}{d\tau^2} + (2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2) \frac{d^2 q_{10}}{d\tau^2} \\ &+ \alpha_1 q_{12} + \alpha_2 q_{22} + \alpha_3 q_{20}^2 q_{10} = 0\end{aligned} \tag{3-188}$$

$$\begin{aligned}&\omega_0^2 \frac{d^2 q_{22}}{d\tau^2} + 2\omega_0\omega_1 \frac{d^2 q_{21}}{d\tau^2} + (2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2) \frac{d^2 q_{20}}{d\tau^2} \\ &+ \alpha_4 q_{22} + \alpha_5 q_{12} + \alpha_6 q_{20}^3 + \alpha_8 q_{10}^2 q_{20} + \alpha_{10} q_{10}^3 = 0\end{aligned} \tag{3-189}$$

برای حل مجموعه معادلات (3-184) تا (3-187) دقیقا همان روند حل در معادلات (3-93) تا (3-101) برقرار است که از دوباره‌گویی آن ها اجتناب می‌شود.

از جایگذاری معادلات (3-98) تا (3-101) در روابط (3-188) و (3-189)، معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{12}}{d\tau^2} + \alpha_1 q_{12} + \alpha_2 q_{22} = 2\omega_0^3 \omega_2 V_{12} \tilde{w}_{\max} \cos(\omega_0 \tau) \\ -\alpha_3 (V_{22})^2 V_{12} (\tilde{w}_{\max})^3 \cos^3(\omega_0 \tau) \tag{3-190}$$

$$\omega_0^2 \frac{d^2 q_{22}}{d\tau^2} + \alpha_5 q_{12} + \alpha_4 q_{22} = 2\omega_0^3 \omega_2 V_{22} \tilde{w}_{\max} \cos(\omega_0 \tau) \\ -\left(\alpha_8 (V_{12})^2 V_{22} + \alpha_6 V_{22}^3 + \alpha_{10} V_{12}^3\right) (\tilde{w}_{\max})^3 \cos^3(\omega_0 \tau) \tag{3-191}$$

از جایگذاری پاسخ های پیشنهادی (3-104) و (3-105) در روابط (3-190) و (3-191)، دو تساوی زیر بدست می‌آید:

$$\left[-\omega_0^4 A_{11} + \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21}\right]\cos(\omega_0 \tau) + \left[-9\omega_0^4 A_{12} + \alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22}\right]\cos(3\omega_0 \tau) = \\ \left[2\omega_0^3 \omega_2 V_{12} \tilde{w}_{\max} - \frac{3}{4}\alpha_3 (V_{22})^2 V_{12} (\tilde{w}_{\max})^3\right]\cos(\omega_0 \tau) - \\ \left[\frac{1}{4}\left(\alpha_3 (V_{22})^2 V_{12} + \alpha_6 V_{22}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3\right]\cos(3\omega_0 \tau) \tag{3-192}$$

$$\left[-\omega_0^4 A_{21} + \alpha_5 A_{11} + \alpha_4 A_{21}\right]\cos(\omega_0 \tau) + \left[-9\omega_0^4 A_{22} + \alpha_5 A_{12} + \alpha_4 A_{22}\right]\cos(3\omega_0 \tau) = \\ \left[2\omega_0^3 \omega_2 V_{22} \tilde{w}_{\max} - \frac{3}{4}\left(\alpha_8 (V_{12})^2 V_{22} + \alpha_6 V_{22}^3 + \alpha_{10} V_{12}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3\right]\cos(\omega_0 \tau) - \\ \left[\frac{1}{4}\left(\alpha_8 (V_{12})^2 V_{22} + \alpha_6 V_{22}^3 + \alpha_{10} V_{12}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3\right]\cos(3\omega_0 \tau) \tag{3-193}$$

از برابر قرار دادن ضرایب $\cos(\omega_0 \tau)$ و $\cos(3\omega_0 \tau)$ در طرفین معادلات اخیر و بازنویسی آن به شکل ماتریسی، دو رابطه زیر ایجاد می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1-\omega_0^4 & \alpha_2 \\ \alpha_5 & \alpha_4-\omega_0^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\omega_0^3\omega_2V_{12}\tilde{w}_{\max}-\frac{3}{4}\alpha_3(V_{22})^2V_{12}(\tilde{w}_{\max})^3 \\ 2\omega_0^3\omega_2V_{22}\tilde{w}_{\max}-\frac{3}{4}\left(\alpha_8(V_{12})^2V_{22}+\alpha_6V_{22}^3+\alpha_{10}V_{12}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3 \end{bmatrix}$$ (3-194)

$$\begin{bmatrix} \alpha_1-9\omega_0^4 & \alpha_2 \\ \alpha_5 & \alpha_4-9\omega_0^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}\left(\alpha_3(V_{22})^2V_{12}+\alpha_6V_{22}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3 \\ -\frac{1}{4}\left(\alpha_8(V_{12})^2V_{22}+\alpha_6V_{22}^3+\alpha_{10}V_{12}^3\right)(\tilde{w}_{\max})^3 \end{bmatrix}$$ (3-195)

اگر پس از قراردادن بردار سمت راست معادله (3-194) به جای ستون اول ماتریس ضرایب، دترمینان ماتریس حاصل برابر صفر قرار داده شود طبق شرط حل‌پذیری، فرکانس برشی ω_2 پس از ساده‌سازی بدست می‌آید:

$$\omega_2=\frac{3\alpha_2\tilde{w}_{\max}^2(\alpha_8V_{12}^2V_{22}+\alpha_6V_{22}^3+\alpha_{10}V_{12}^3)-3\alpha_3\tilde{w}_{\max}^2(\alpha_4-\omega_0^4)V_{22}^2V_{12}}{8\alpha_2\omega_0^3V_{22}-8(\alpha_4-\omega_0^4)\omega_0^3V_{12}}$$ (3-196)

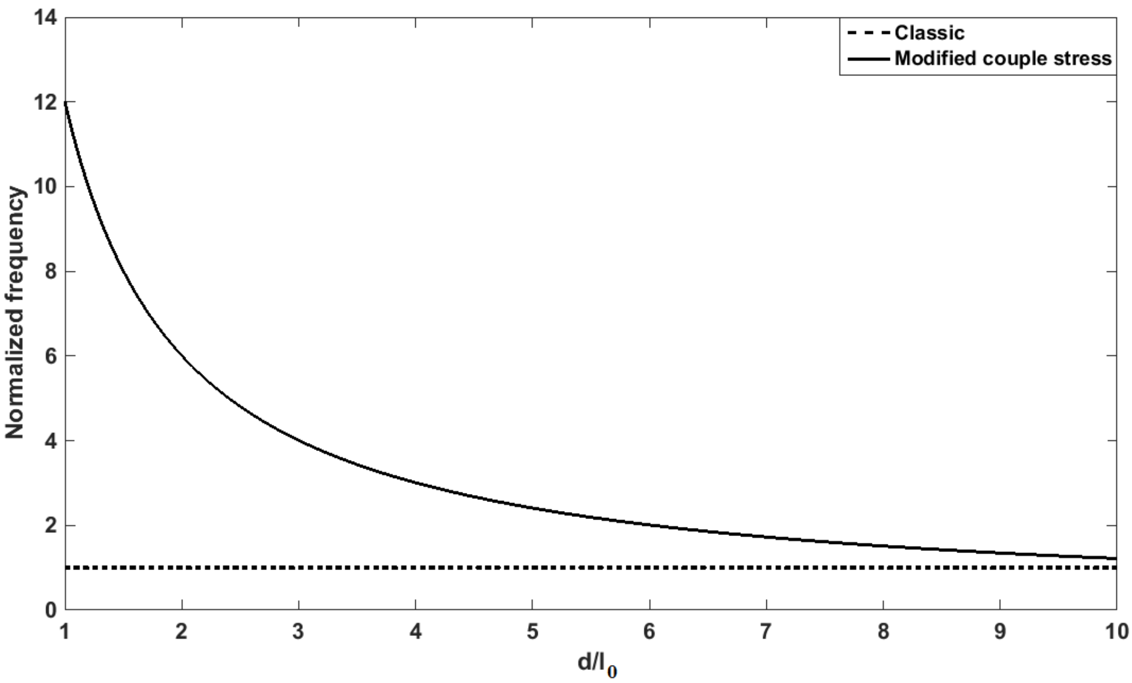
همچنین اگر با قراردادن پاسخ سمت راست معادله (3-195) به جای ستون اول ماتریس ضرایب، دترمینان ماتریس حاصل برابر صفر قرار داده شود، آنگاه فرکانس خطی ω_0 پس از ساده‌سازی حاصل می‌شود:

$$\omega_0^4=\frac{\alpha_6V_{22}^3(\alpha_4-\alpha_2)+\alpha_4\alpha_3V_{12}V_{22}^2-\alpha_2\alpha_8V_{12}^2V_{22}-\alpha_2\alpha_{10}V_{12}^3}{9(\alpha_3V_{12}V_{22}^2+\alpha_6V_{22}^3)}$$ (3-197)

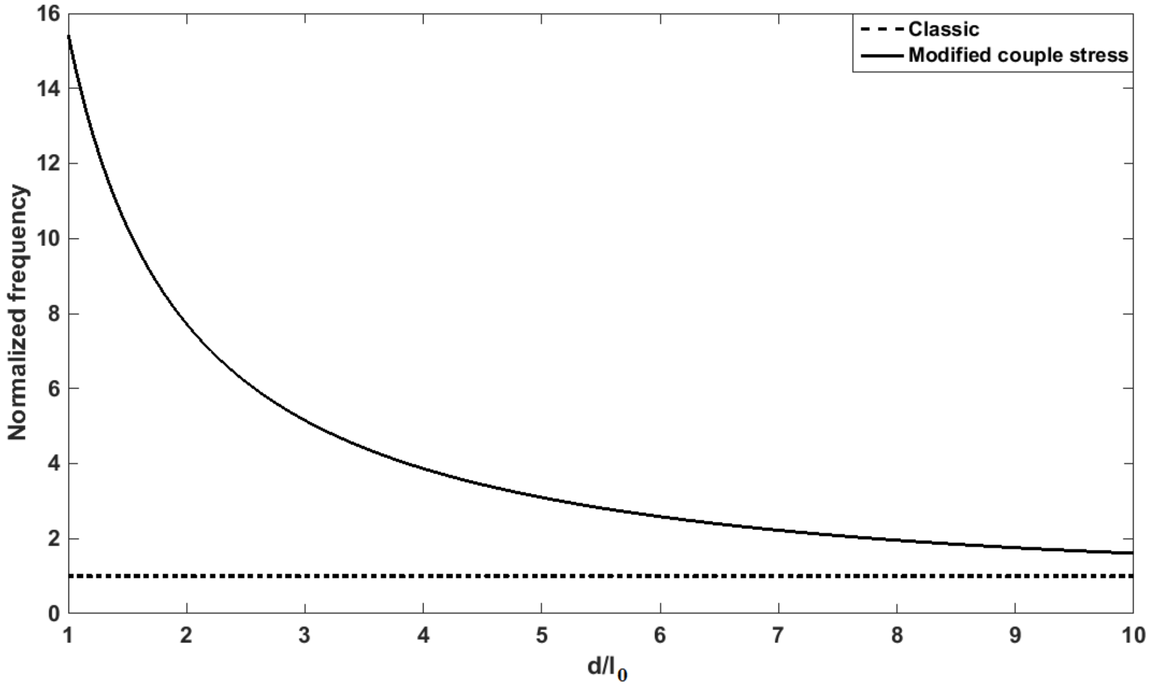
3-7-4 نتایج عددی

در قسمت اول این بخش، اثر پارامتر $\frac{d}{l_0}$ بر رفتار فرکانس نرمال ($\frac{\omega}{\omega_c}$، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس مدل کلاسیک) مورد مطالعه قرار می‌گیرد. انتظار است در صورت افزایش نسبت $\frac{d}{l_0}$، اثر پارامتر کوچک مقیاس طولی (l_0) مرتبا کاهش یافته و به سمت پاسخ ناشی از تئوری کلاسیک سوق پیدا کند.

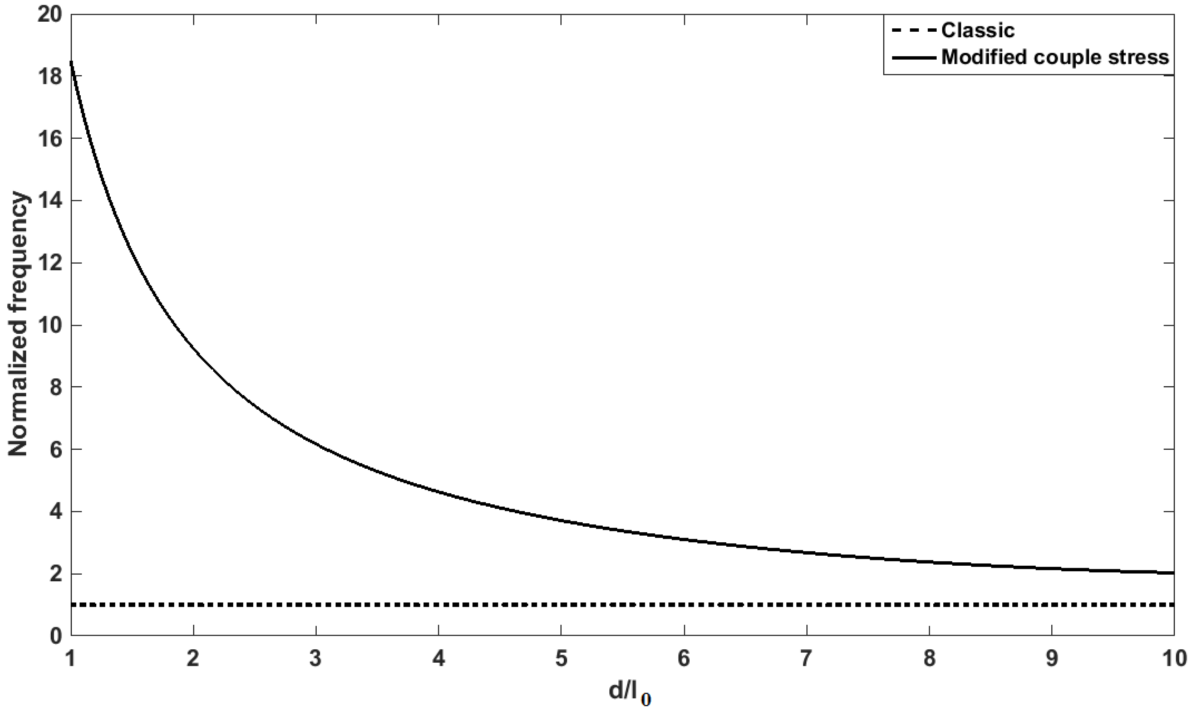
این مساله کاملا در شکل‌های (3-40) تا (3-42) بیانگر صحت پاسخ فرکانسی ناشی از تئوری تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد به طوری که با افزایش نسبت $\frac{d}{l_0}$ که همان کمتر شدن اثر پارامتر کوچک مقیاس طولی (l_0) است پاسخ این تئوری به تدریج به سمت پاسخ تئوری کلاسیک (بدون در نظر گرفتن اثر اندازه) میل می‌کند. این امر نیز خاطر نشان می‌شود که نرخ این کاهش در مودهای بالاتر بیشتر می‌باشد و تفاوت در پیش‌بینی فرکانسی برای تئوری تنش کوپل اصلاح شده و حالت کلاسیک در نسبت‌های پایین‌تر $\frac{d}{l_0}$ ، در مودهای بالاتر بیشتر است.



شکل (3-40): مقایسه فرکانس نرمال مود اول بین تئوری‌های تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک در $\frac{d}{l_0}$ های مختلف



شکل (3-41): مقایسه فرکانس نرمال مود دوم بین تئوری‌های تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک در $\frac{d}{l_0}$ های مختلف



شکل (3-42): مقایسه فرکانس نرمال مود سوم بین تئوری‌های تنش کوپل اصلاح شده و کلاسیک در $\frac{d}{l_0}$ های مختلف

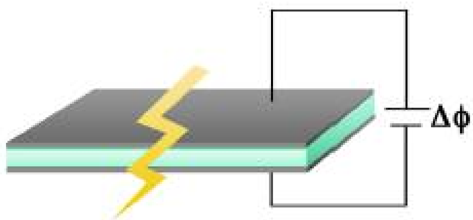
8-3 بررسی پایداری الکترومکانیکی در الاستومرهای دی الکتریک در یک المان عمومی

1-8-3 مقدمه

ولتاژ اعمالی در دی الکتریک های انعطاف پذیر همچون الاستومرها اغلب توسط ناپایداری الکترومکانیکی محدود می شود. استارک و همکاران [91] نشان دادند که حد فروپاشی پلیمر در صورت نرم شدن در دماهای بالا کاهش می یابد و هرچه ولتاژ اعمالی افزایش می یابد، پلیمر لاغرتر شده و لذا میدان الکتریکی بزرگتری توسط همان ولتاژ ایجاد می شود. این بازخورد منجر به وضعیت ناپایداری الکترومکانیکی یا همان کشیدگی[1] می گردد.

به طور خلاصه می توان مودهای ناپایداری ممکن در عضو دی الکتریک تحت تحریک الکتریکی را در موارد زیر عنوان کرد[92]:

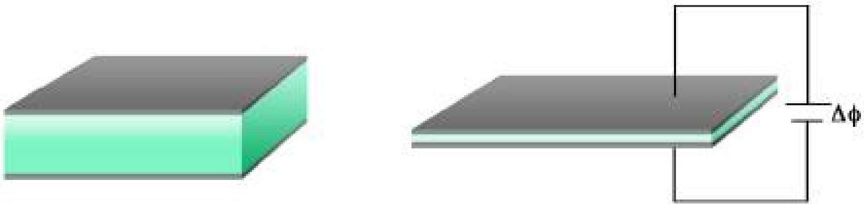
الف- فروپاشی الکتریکی: این مود شکست زمانی رخ می دهد که میدان الکتریکی به بالاترین حد مجاز خود برسد و در بالاتر از آن مقدار، تخلیه بار موجب فروپاشی عملگر می شود.



[1] Pull-in

شکل (3-43): شماتیک فروپاشی الکتریکی یک مبدل [92]

ب- ناپایداریpull-in/ الکترومکانیکی: در این نوع ناپایداری، حد بحرانی برای ولتاژ وجود دارد که در مقادیر بزرگتر از آن، دیگر تعادلی بین نیروهای الاستیک و الکتریکی وجود نداشته و صفحه بالایی بر روی صفحه پایین می افتد.



شکل (3-44): شماتیک ناپایداری الکترومکانیکی یک مبدل [92]

پ- ناپایداری کمانشی: در مبدل های تحت فشار، احتمال این نوع ناپایداری وجود دارد. این نوع ناپایداری در عملگرهایی که در آن ها کشیدگی اولیه ناشی از پیش تنش حذف شده باشد، معمول است.

شکل (3-45): شماتیک مود ناپایداری کمانشی در یک مبدل تحت فشردگی جانبی [92]

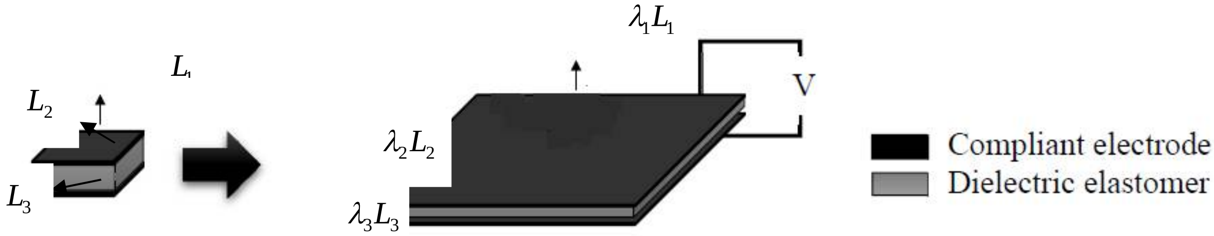
ت- ناپایداری موضعی: این حالت ناپایداری مربوط به شروع یک تغییر شکل موضعی به صورت یک نوار می باشد. از منظر تحلیلی، این ناپایداری مرتبط با از دست دادن حالت معمول کوپله بودن معادلات حاکم می باشد.

شکل (3-46): تغییر شکل موضعی به صورت نوار [92]

3-8-2 تعریف مساله و بیان روابط حاکم

از بین انواع ناپایداری‌های معرفی شده در بخش مقدمه، به بررسی یکی از مهمترین انواع آن یعنی ناپایداری الکترومکانیکی (pull-in) پرداخته می‌شود. بدین منظور، تعریف مساله با استفاده از یک المان عمومی که قابلیت پیاده سازی در انواع ترکیب بندی ها از جمله تیر، صفحه و ... دارد، انجام می گیرد.

طبق شکل (3-50) عملگری با ابعاد اولیه L_1 ، L_2 و L_3 درنظر گرفته می شود که در اثر اعمال ولتاژ بین دو الکترود بالا و پایین ضخامت آن کاهش یافته و برای ثابت ماندن حجم، مساحت آن زیاد می شود. با توجه به نوع تنش های اعمالی که در فصل اول ذکر گردید و ثوابت بر اساس آن ها بیان شد، این عملگر تحت دو نیروی کششی P_1 و P_2 که به ترتیب به سطوح $L_2 \times L_3$ و $L_1 \times L_3$ اعمال می‌شوند، در نظر گرفته می‌شود.



شکل (3-47): شماتیک ابعاد دی الکتریک الاستومر قبل و بعد از اعمال ولتاژ

همان طور که در شکل (3-47) مشخص است، ابعاد عملگر پس از اعمال ولتاژ V به ترتیب به $\lambda_1 L_1$، $\lambda_2 L_2$ و $\lambda_3 L_3$ تبدیل می شوند.

میدان الکتریکی اسمی[1] توسط رابطه $\tilde{E} = \dfrac{V}{L_3}$ و میدان الکتریکی حقیقی[2] توسط رابطه $E = \dfrac{V}{\lambda_3 L_3}$ تعریف می‌شوند. همچنین جابجایی الکتریکی اسمی[3] با رابطه $\tilde{D} = \dfrac{Q}{L_1 L_2}$ و جابجایی الکتریکی حقیقی[4] با رابطه $D = \dfrac{Q}{\lambda_1 L_1 \lambda_2 L_2}$ بیان می‌شوند که Q بار الکتریکی اعمالی است. حالت اسمی از تقسیم به وضعیت اولیه و حالت حقیقی از تقسیم به وضعیت تغییرشکل یافته ایجاد می‌شوند.

به همین ترتیب تنش های اسمی توسط نیروهای P_1 و P_2 به ترتیب عبارتند از $S_1 = \dfrac{P_1}{L_2 L_3}$ و $S_2 = \dfrac{P_2}{L_1 L_3}$.

مختصات عمومی موردنظر در این مساله λ_1 ، λ_2 و $\tilde{D}$ بوده و پارامتر کنترل V می باشد.

از آنجا که کار انجام شده توسط نیروهای خارجی از حاصل ضرب نیرو در مقدار جابجایی و کار باتری نیز از حاصل ضرب ولتاژ در بار اعمالی بدست می‌آید، لذا انرژی آزاد سیستم[5] که مجموع انرژی آزاد نیروها، باتری و عملگر الاستومر است، با در نظر گرفتن چگالی انرژی کرنشی الاستومر به صورت زیر قابل تعریف است [92]:

$$G = L_1 L_2 L_3 W(\lambda_1, \lambda_2, \tilde{D}) - P_1 \lambda_1 L_1 - P_2 \lambda_2 L_2 - VQ \tag{3-198}$$

که در آن $W(\lambda_1, \lambda_2, \tilde{D})$ عبارتست از:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \tilde{D}) = U(\lambda_1, \lambda_2) + \phi(\lambda_1, \lambda_2, \tilde{D}) \tag{3-199}$$

---

[1] Nominal electric field
[2] True electric field
[3] Nominal electric displacement
[4] True electric displacement
[5] Free energy of system

U و ϕ در عبارت اخیر به ترتیب توابع چگالی انرژی کرنشی الاستیک و چگالی انرژی میدان الکتریکی می باشند.

تابع چگالی انرژی میدان الکتریکی برابر است با[93]:

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2, \tilde{D}) = \frac{D^2 \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}}{2\varepsilon} \tag{3-200}$$

در اثر تغییرات کوچک مختصات عمومی معرفی شده به صورت $\delta\lambda_1$، $\delta\lambda_2$ و $\delta\tilde{D}$، تغییرات انرژی آزاد سیستم پس از تقسیم طرفین بر حجم اولیه المان برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned}\frac{\delta G}{L_1 L_2 L_3} &= (\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - S_1)\delta\lambda_1 + (\frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - S_2)\delta\lambda_2 + (\frac{\partial W}{\partial \tilde{D}} - \tilde{E})\delta\tilde{D} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1{}^2}\delta\lambda_1{}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2{}^2}\delta\lambda_2{}^2 \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{D}^2}\delta\tilde{D}^2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \lambda_2}\delta\lambda_1\delta\lambda_2 + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \tilde{D}}\delta\lambda_1\delta\tilde{D} + \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2 \partial \tilde{D}}\delta\lambda_2\delta\tilde{D}\end{aligned} \tag{3-199}$$

حالت تعادل پایدار زمانی ایجاد می‌شود که G کمینه باشد. در حالت تعادل باید ضرایب مرتبه اول یعنی ضرایب سه جمله اول معادله (3-199) برابر صفر باشند:

$$S_1 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1},\ S_2 = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2},\ \tilde{E} = \frac{\partial W}{\partial \tilde{D}} \tag{3-200}$$

برای اطمینان از اینکه این حالت تعادل موجب کمینه شدن Gمی شود، باید تغییرات مرتبه دوم برای ترکیبات دلخواه $\delta\lambda_1$، $\delta\lambda_2$ و $\delta\tilde{D}$مثبت باشد. درنتیجه باید ماتریس هسین[1] در حالت تعادل، مثبت معین باشد:

[1] Hessian

$$H=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \lambda_2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \tilde{D}} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \lambda_2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2{}^2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2 \partial \tilde{D}} \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \tilde{D}} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \lambda_2 \partial \tilde{D}} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial \tilde{D}^2} \end{bmatrix} \tag{3-201}$$

در مقادیر کوچک ولتاژ، ماتریس هسین مثبت معین است ولی در مقدار بحرانی ولتاژ، دیگر مثبت معین نبوده و دترمینان این ماتریس برابر صفر می‌شود.

پایداری سیستم مورد بررسی را با استفاده از دو مدل یئو و بیدرمن که در بخش های قبلی نیز استفاده شدند مورد بررسی قرار می دهیم و در هر یک مقادیر ولتاژ بحرانی و ... که منجر به ناپایداری pull-in می‌شود را بررسی می‌کنیم.

3-8-3 بررسی وضعیت پایداری عملگر با مدل یئو

چگالی انرژی کرنشی مدل یئو با درنظر گرفتن چگالی انرژی میدان الکتریکی عبارتست از:

$$W=c_1(I_1-3)+c_2(I_1-3)^2+c_3(I_1-3)^3+\frac{\tilde{D}^2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}{2\varepsilon} \tag{3-202}$$

با توجه به رابطه‌های $I_1=\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_3{}^2$ و $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} W=&c_1(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)+c_2(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^2 \\ &+c_3(\lambda_1{}^2+\lambda_2{}^2+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^3+\frac{\tilde{D}^2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}{2\varepsilon} \end{aligned} \tag{3-203}$$

و معادلات تعادل (3-200) برابر می‌شوند با:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= c_1(2\lambda_1 - 2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}) + 2c_2(2\lambda_1 - 2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})(\lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} - 3) \\
&\quad + 3c_3(2\lambda_1 - 2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})(\lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} - 3)^2 - \frac{\tilde{D}^2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon} \\
S_2 &= c_1(2\lambda_2 - 2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3}) + 2c_2(2\lambda_2 - 2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})(\lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} - 3) \\
&\quad + 3c_3(2\lambda_2 - 2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})(\lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} - 3)^2 - \frac{\tilde{D}^2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3}}{\varepsilon} \\
\tilde{E} &= \frac{\tilde{D}\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{3-204}
$$

و درایه‌های ماتریس هسین نیز عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
H_{11} &= c_1(2+6\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2}) + 2c_2\begin{bmatrix}(2+6\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)\\ +(2\lambda_1-2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})^2\end{bmatrix}\\
&\quad +3c_3\begin{bmatrix}(2+6\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^2\\ +2(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)(2\lambda_1-2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})^2\end{bmatrix}\\
&\quad +\frac{3\tilde{D}^2\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon};\\
H_{12} &= H_{21} = c_1(4\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-3}) + 2c_2\begin{bmatrix}(4\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-3})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)\\ +(2\lambda_1-2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})(2\lambda_2-2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})\end{bmatrix}\\
&\quad +3c_3\begin{bmatrix}(4\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-3})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^2\\ +2(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)(2\lambda_1-2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})(2\lambda_2-2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})\end{bmatrix}\\
&\quad +\frac{2\tilde{D}^2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-3}}{\varepsilon};\\
H_{13} &= H_{31} = -\frac{2\tilde{D}\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon};\\
H_{22} &= c_1(2+6\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-4}) + 2c_2\begin{bmatrix}(2+6\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-4})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)\\ +(2\lambda_2-2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})^2\end{bmatrix}\\
&\quad +3c_3\begin{bmatrix}(2+6\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-4})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^2\\ +2(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)(2\lambda_2-2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})^2\end{bmatrix}\\
&\quad +\frac{3\tilde{D}^2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-4}}{\varepsilon};\\
H_{23} &= -\frac{2\tilde{D}\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3}}{\varepsilon};\\
H_{33} &= \frac{\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon};
\end{aligned}
\tag{3-205}
$$

با توجه به این که ثوابت مدل یئو از طریق آزمایش هایی همچون تنش یکسان دومحوره[1] بدست آمدند درنتیجه وضعیت پایداری برای این حالت تنش یعنی $S_1 = S_2 = S$ و $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ بررسی می‌گردد. در نتیجه معادله‌های تعادل (3-204) تبدیل می‌شوند به:

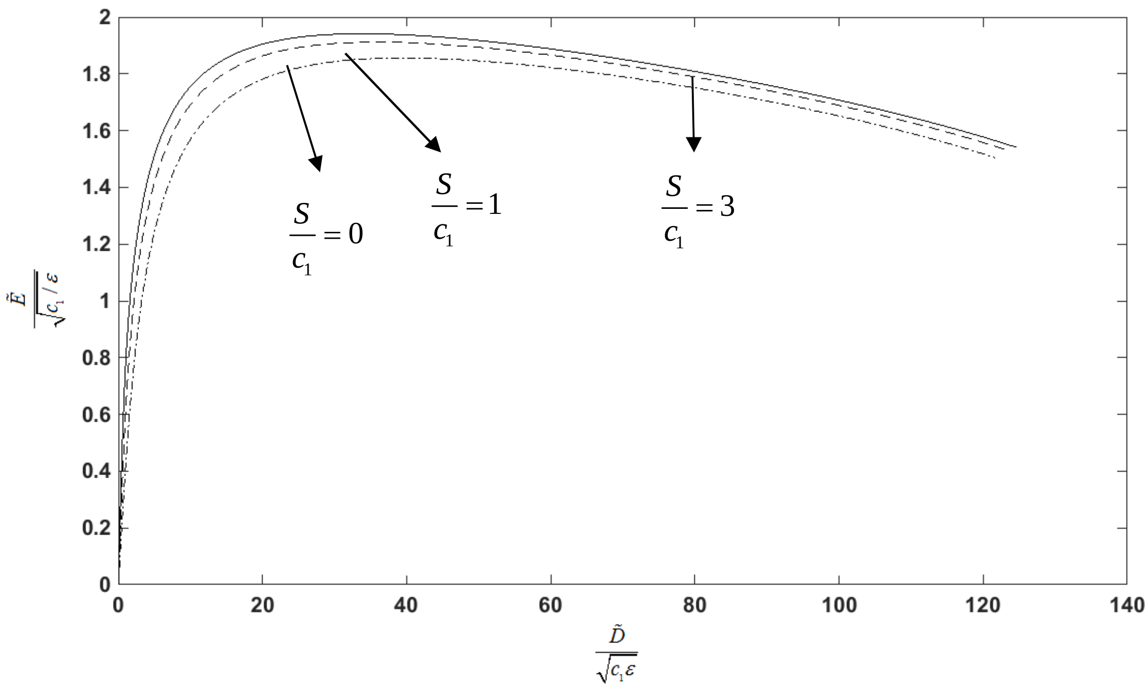
[1] Equal biaxial stress

$$\frac{\tilde{D}}{\sqrt{c_1\varepsilon}}=\sqrt{\left(2\lambda^6-2\right)\left[1+\frac{2c_2}{c_1}(2\lambda^2+\lambda^{-4}-3)+\frac{3c_3}{c_1}(2\lambda^2+\lambda^{-4}-3)^2\right]-\frac{S}{c_1}\lambda^5}$$

$$\frac{\tilde{E}}{\sqrt{c_1/\varepsilon}}=\sqrt{\left(2\lambda^{-2}-2\lambda^{-8}\right)\left[1+\frac{2c_2}{c_1}(2\lambda^2+\lambda^{-4}-3)+\frac{3c_3}{c_1}(2\lambda^2+\lambda^{-4}-3)^2\right]-\frac{S}{c_1}\lambda^{-3}} \tag{3-206}$$

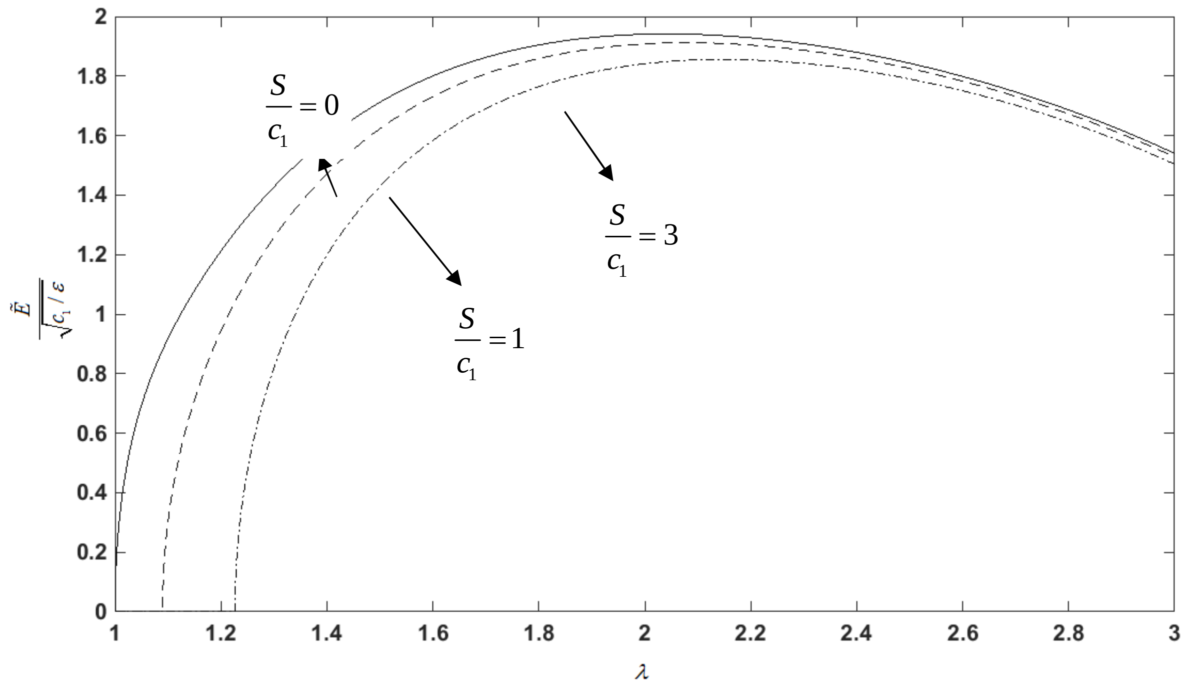
مجموعه معادلات (3-206) بیانگر رابطه بین ولتاژ نرمال شده ($\frac{\tilde{D}}{\sqrt{c_1\varepsilon}}$) و بار نرمال شده ($\frac{\tilde{E}}{\sqrt{c_1/\varepsilon}}$)برای بار مکانیکی $\frac{S}{c_1}$و λ به عنوان پارامتر می باشد.

نمودار بار نرمال شده به ولتاژ نرمال شده در شکل (3-48) برای بارگذاری‌های مختلف رسم شده است. بخش چپ هر نمودار مرتبط با ماتریس هسین مثبت معین، بخش راست آن مرتبط با ماتریس هسین غیر مثبت معین بوده و قله‌ها مربوط به صفر بودن دترمینان ماتریس هسین است.



شکل (3-48): نمودار بار نرمال شده به ولتاژ نرمال شده در بارگذاری‌های مختلف برای مدل یئو

در شکل (3-49) نمودار بار نرمال شده به نسبت کشیدگی نیز رسم شده است که توسط آن می توان هم مقدار میدان الکتریکی بحرانی و هم مقدار نسبت کشیدگی بحرانی را یافت و با مقادیر نسبت کشیدگی بدست آمده از رابطه $\det(H)=0$ مقایسه و اعتبارسنجی کرد.



شکل (3-49): نمودار بار نرمال شده به نسبت کشیدگی در بارگذاری‌های مختلف برای مدل یئو

از شکل (3-48) و (3-49) برای حالت های مختلف تنش های اعمالی می توان مقادیر ولتاژ بحرانی، میدان الکتریکی بحرانی و نسبت کشیدگی بحرانی که پس از آن عملگر دچار ناپایداری الکترومکانیکی می گردد را در جدول (3-3) خلاصه کرد.

همانطور که از نتایج مشاهده می‌شود مقدار بحرانی ولتاژ در تنش های بالاتر، کمتر می باشد و عملگر زودتر به وضعیت ناپایداری pull-in می‌رسد.

جدول (3-3): مقادیر بحرانی میدان الکتریکی، ولتاژ و نسبت کشیدگی در بارگذاری‌های مختلف برای مدل یئو

نسبت کشیدگی (λ)	ولتاژ بحرانی (V)	میدان الکتریکی بحرانی($\frac{V}{m}$)	
2.042365254	192.7661	2.9656×10^{7}	$\frac{S}{c_1}=0$
2.080606855	189.8254	2.9204×10^{7}	$\frac{S}{c_1}=1$
2.148017874	184.2528	2.8347×10^{7}	$\frac{S}{c_1}=3$

3-8-4 بررسی وضعیت پایداری عملگر با مدل بیدرمن

چگالی انرژی کرنشی مدل بیدرمن با درنظر گرفتن چگالی انرژی میدان الکتریکی عبارتست از:

$$W=c_{10}(I_1-3)+c_{01}(I_2-3)+c_{20}(I_1-3)^2+c_{30}(I_1-3)^3+\frac{\tilde{D}^2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}{2\varepsilon} \tag{3-207}$$

با توجه به رابطه‌های $I_1=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$ ، $I_2=\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_2^2\lambda_3^2+\lambda_1^2\lambda_3^2$ و $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$، رابطه بالا تبدیل می‌شود به:

$$\begin{aligned}W&=c_{10}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)+c_{01}(\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_1^{-2}+\lambda_2^{-2}-3)\\&+c_{20}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^2+c_{30}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^3+\frac{\tilde{D}^2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}{2\varepsilon}\end{aligned} \tag{3-208}$$

درنتیجه معادلات تعادل (3-200) برابر می‌شوند با:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= c_{10}(2\lambda_1 - 2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}) + c_{01}(2\lambda_1\lambda_2^{\,2} - 2\lambda_1^{-3}) + 2c_{20}(2\lambda_1 - 2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}) \\
&\quad (\lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} - 3) + 3c_{30}(2\lambda_1 - 2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})(\lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} - 3)^2 \\
&\quad - \frac{\tilde{D}^2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon} \\
S_2 &= c_{10}(2\lambda_2 - 2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3}) + c_{01}(2\lambda_1^{\,2}\lambda_2 - 2\lambda_2^{-3}) + 2c_{20}(2\lambda_2 - 2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3}) \\
&\quad (\lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} - 3) + 3c_{30}(2\lambda_2 - 2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})(\lambda_1^{\,2} + \lambda_2^{\,2} + \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} - 3)^2 \\
&\quad - \frac{\tilde{D}^2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3}}{\varepsilon} \\
\tilde{E} &= \frac{\tilde{D}\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{3-209}
$$

و درایه‌های ماتریس هسین نیز عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
H_{11} &= c_{10}(2+6\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2}) + c_{01}(2\lambda_2^{2}+6\lambda_1^{-4}) \\
&\quad + 2c_{20}\begin{bmatrix}(2+6\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3) \\ +(2\lambda_1-2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})^2\end{bmatrix} \\
&\quad + 3c_{30}\begin{bmatrix}(2+6\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^2 \\ +2(2\lambda_1-2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})^2(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)\end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{3\tilde{D}^2\lambda_1^{-4}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon}; \\
H_{12} &= H_{21} = c_{10}(4\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-3}) + c_{01}(4\lambda_1\lambda_2) \\
&\quad + 2c_{20}\begin{bmatrix}(4\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-3})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3) \\ +(2\lambda_1-2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})(2\lambda_2-2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})\end{bmatrix} \\
&+3c_{30}\begin{bmatrix}(4\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-3})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^2 \\ +2(2\lambda_1-2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2})(2\lambda_2-2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)\end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{2\tilde{D}^2\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-3}}{\varepsilon}; \\
H_{13} &= H_{31} = -\frac{2\tilde{D}\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon}; \\
H_{22} &= c_{10}(2+6\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-4}) + c_{01}(2\lambda_1^{2}+6\lambda_2^{-4}) \\
&\quad + 2c_{20}\begin{bmatrix}(2+6\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-4})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3) \\ +(2\lambda_2-2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})^2\end{bmatrix} \\
&\quad + 3c_{30}\begin{bmatrix}(2+6\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-4})(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)^2 \\ +2(2\lambda_2-2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3})^2(\lambda_1^{2}+\lambda_2^{2}+\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}-3)\end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{3\tilde{D}^2\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-4}}{\varepsilon}; \\
H_{23} &= -\frac{2\tilde{D}\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-3}}{\varepsilon}; \\
H_{33} &= \frac{\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}}{\varepsilon};
\end{aligned}
\tag{3-210}
$$

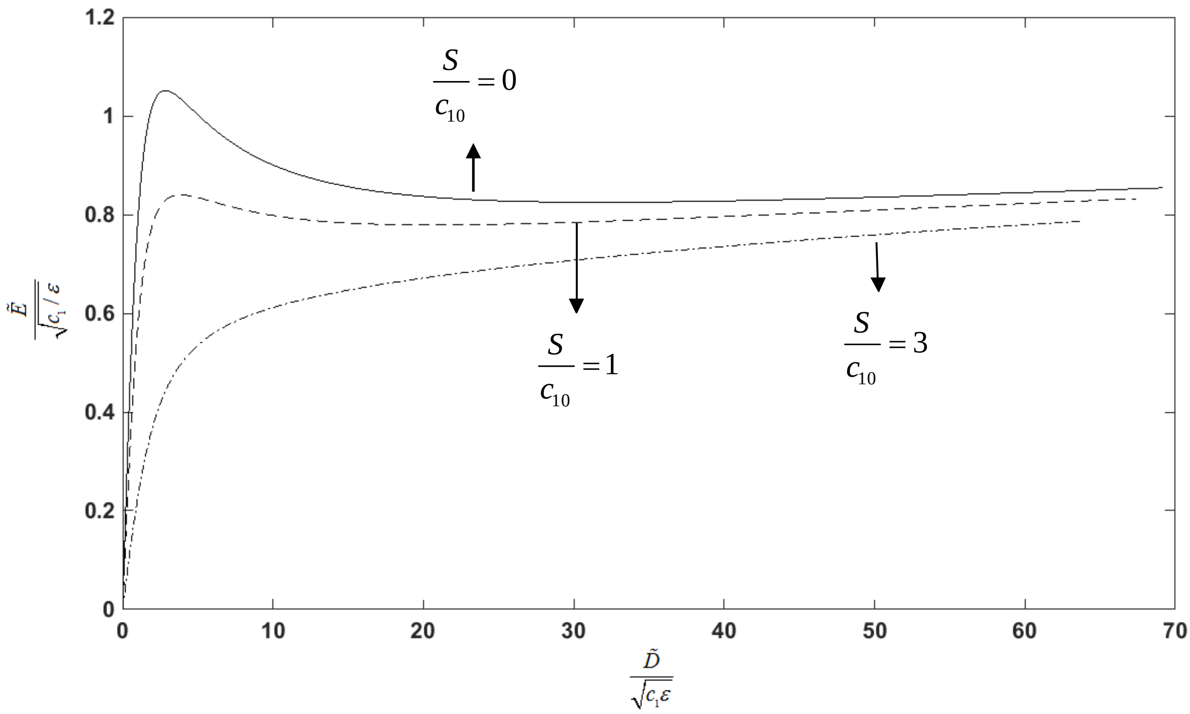
در حالت خاص تنش یکسان دومحوره یعنی $S_1 = S_2 = S$ و $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ معادله‌های تعادل (3-209) تبدیل می‌شوند به:

$$\frac{\tilde{D}}{\sqrt{c_{10}\varepsilon}}=\sqrt{\left(2\lambda^{6}-2\right)\left[\begin{array}{l}1+\frac{c_{01}}{c_{10}}\lambda^{2}+2\frac{c_{20}}{c_{10}}(2\lambda^{2}+\lambda^{-4}-3)\\+\frac{3c_{30}}{c_{10}}(2\lambda^{2}+\lambda^{-4}-3)^{2}\end{array}\right]-\frac{S}{c_{10}}\lambda^{5}}$$

$$\frac{\tilde{E}}{\sqrt{c_{10}/\varepsilon}}=\sqrt{\left(2\lambda^{-2}-2\lambda^{-8}\right)\left[\begin{array}{l}1+\frac{c_{01}}{c_{10}}\lambda^{2}+2\frac{c_{20}}{c_{10}}(2\lambda^{2}+\lambda^{-4}-3)\\+\frac{3c_{30}}{c_{10}}(2\lambda^{2}+\lambda^{-4}-3)^{2}\end{array}\right]-\frac{S}{c_{10}}\lambda^{-3}} \quad (3\text{-}211)$$

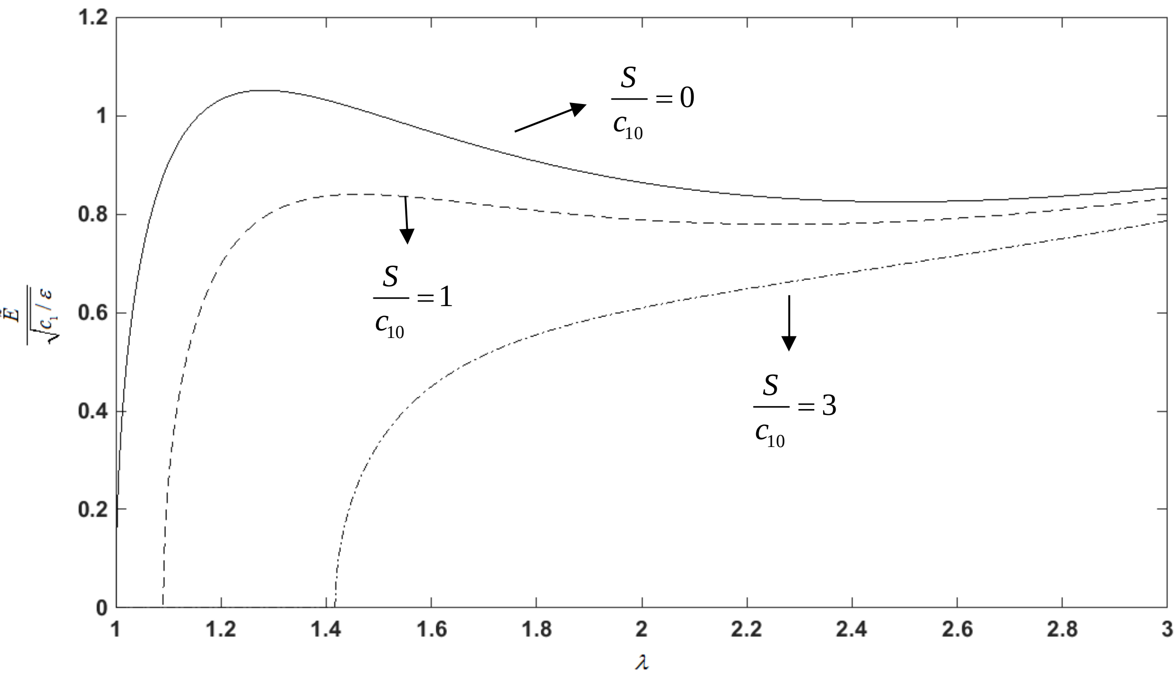
مجموعه معادلات (3-211) رابطه بین ولتاژ نرمال شده ($\frac{\tilde{E}}{\sqrt{c_{10}/\varepsilon}}$) و بار نرمال شده ($\frac{\tilde{D}}{\sqrt{c_{10}\varepsilon}}$) را برای بار مکانیکی $\frac{S}{c_{10}}$ و λ به عنوان پارامتر بیان می‌کنند.

نمودار بار نرمال شده به ولتاژ نرمال شده در شکل (3-50) برای بارگذاری‌های مختلف رسم شده است. همانطور که در مدل یئو بیان شد از طریق این نمودار می توان محدوده ولتاژ و میدان الکتریکی بحرانی را یافت.



شکل (3-50): نمودار بار نرمال شده به ولتاژ نرمال شده در بارگذاری‌های مختلف برای مدل بیدرمن

برای اعتبارسنجی نسبت کشیدگی بدست آمده از $\det(H)=0$ می‌توان نمودار بارنرمال شده به نسبت کشیدگی را در بارگذاری‌های مختلف رسم نمود که در شکل (3-51) نشان داده شده است.



شکل (3-51): نمودار بار نرمال شده به نسبت کشیدگی در بارگذاری‌های مختلف برای مدل بیدرمن

مقادیر بحرانی میدان الکتریکی، ولتاژ و نسبت کشیدگی را می توان با استفاده از نمودارهای (3-50) و (3-51) یافت که نسبت کشیدگی بحرانی از طریق دترمینان ماتریس هسین نیز قابل دستیابی است. این مقادیر در جدول (3-4) ارائه شده اند. همانطور که از این جدول پیداست در مدل بیدرمن نیز در بارگذاری های بزرگتر، ولتاژ بحرانی کوچکتر است در حالی که نسبت کشیدگی افزایش می‌یابد. نکته قابل تامل در مقادیر جدول (3-4) افت قابل توجه ولتاژ و میدان الکتریکی بحرانی در مقادیر بالای بارگذاری است.

جدول (3-4): مقادیر بحرانی میدان الکتریکی، ولتاژ و نسبت کشیدگی در بارگذاری‌های مختلف برای مدل بیدرمن

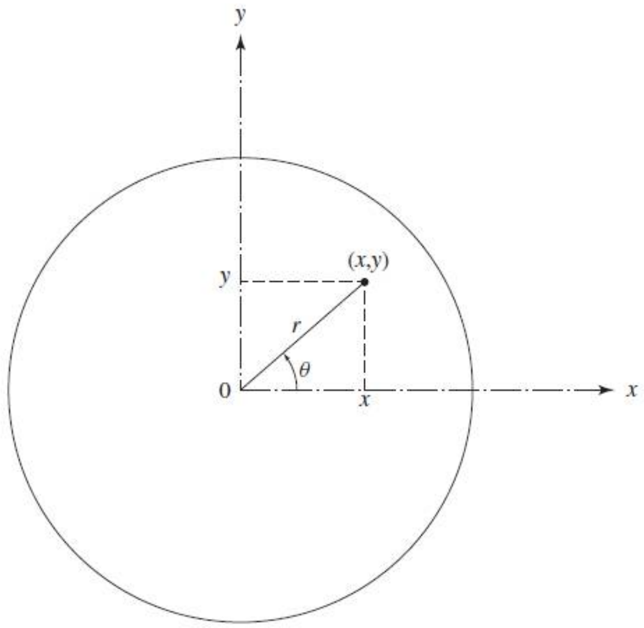
نسبت کشیدگی (λ)	ولتاژ بحرانی (V)	میدان الکتریکی بحرانی($\frac{V}{m}$)	
1.002225774	96.8414	1.4899×10^{7}	$\frac{S}{c_1}=0$
1.088675050	92.1256	1.4173×10^{7}	$\frac{S}{c_1}=1$
1.419064018	4.8827	7.5118×10^{5}	$\frac{S}{c_1}=3$

مقایسه جدول (3-3) و (3-4) نیز نشان می دهد که عملگر با مدل هایپرالاستیک بیدرمن در حالت های مختلف بارگذاری دارای ولتاژ بحرانی و میدان الکتریکی بحرانی کوچکتری بوده و در مقادیر پایین تر ولتاژ، دچار ناپایداری pull-in می گردد.

9-3 ارتعاش آزاد میکروورق متقارن محوری با شرط مرزی گیردار و مدل هایپرالاستیک یئو

1-9-3 استخراج معادله حاکم در مدل یئو

ورق دایره ای گیردار به شعاع a و ضخامت h طبق شکل زیر مدنظر است:



شکل (3-52): شماتیک ورق مورد بررسی

برای بدست آوردن معادله ورق دایره‌ای متقارن محوری، لازم است ابتدا میدان جابجایی معرفی شود:

$$\begin{aligned} u_r &= -z\frac{\partial w}{\partial r} \\ u_\theta &= 0 \\ u_z &= w(\mathrm{r},t) \end{aligned} \tag{3-212}$$

با توجه به تغییر شکل بزرگ، کرنش‌های حاصل با استفاده از رابطه فون- کارمن به صورت زیر معرفی می-شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{z}{r}\frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \tag{3-213}$$

تانسور کوشی گرین راست که مولفه‌های ثوابت کرنش را می‌دهد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = 2E + I = \begin{bmatrix} 2\varepsilon_r+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon_\theta+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-214}$$

مولفه‌های ثوابت کرنش که مقادیر ویژه ماتریس اخیر هستند معادل است با:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= tr(C) = 2(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)+3 \\ \mathrm{J} &= \mathrm{I}_3 = 1 \end{aligned} \tag{3-215}$$

چگالی انرژی کرنشی مدل یئو در ورق از جایگذاری معادلات (3-212) در رابطه (3-22) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} W = {} & 2c_1\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{z}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right] + 4c_2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{z}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right]^2 \\ & + 8c_3\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{z}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right]^3 \end{aligned} \tag{3-216}$$

از جایگذاری انرژی جنبشی:

$$T = \pi\rho h\int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 r\,dr \tag{3-217}$$

و انرژی کرنشی کل در اصل همیلتون، معادله (3-218) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2c_1h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-4c_2h\left(\frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial r})^3+3\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^2\right)\\&+\frac{2}{3}c_2h^3\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-6c_3h\left(\frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial r})^5+5\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^4\right)\\&+c_3h^3\begin{pmatrix}2(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2})^3+2\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}(\frac{\partial w}{\partial r})^2\\+8\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{8}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^2+\frac{6}{r}(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2})^2\frac{\partial w}{\partial r}\end{pmatrix}\\&-4c_3h^3\left(\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^2-\frac{1}{r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^3\right)=0\end{aligned}\tag{3-218}$$

شرایط مرزی استخراج شده از اصل همیلتون عبارتند از:

$$\begin{aligned}&r=a:\ \ c_1hr\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{2c_2h^3}{3}\left(r\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)-c_3h^3r\begin{pmatrix}3\frac{\partial w}{\partial r}(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2})^2+\\2\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^2+4\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\end{pmatrix}=0\\&\qquad OR\ \delta w=0\end{aligned}\tag{3-219}$$

$$\begin{aligned}&r=a:\ \ \frac{c_2h^3}{3}\left(r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)+c_3h^3r\left((\frac{\partial w}{\partial r})^3+r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^2\right)=0\\&\qquad OR\ \delta\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)=0\end{aligned}\tag{3-220}$$

با توجه به مساله موردنظر باید شرایط مرزی $w(a)=0,\ \frac{\partial w}{\partial r}(a)=0$ انتخاب شوند. دو شرط دیگر نیز شامل $w(0)=0,\ \frac{\partial w}{\partial r}(0)=0$ می‌باشند.

3-9-2 حل معادله حاکم و بررسی پاسخ فرکانسی

معادله خطی‌شده حاکم بر ورق عبارتست از:

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2c_1h\nabla^2 w+\frac{2}{3}c_2h^3\nabla^4 w=0 \qquad (3\text{-}221)$$

که $\nabla^2=\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}$.

تفکیک متغیرها را می‌توان به روش زیر انجام داد:

$$w(r,t)=W(r)\,\mathrm{T(t)} \qquad (3\text{-}222)$$

از جایگذاری (3-222) در (3-221) خواهیم داشت:

$$\frac{\ddot{T}}{T}=\frac{2c_1}{\rho}\frac{\nabla^2 W}{W}-\frac{2c_2h^2}{3\rho}\frac{\nabla^4 W}{W}=-\omega_{\dim}^2 \qquad (3\text{-}223)$$

که دو طرف تساوی، برابر مقدار ثابتی قرار داده شدند.

لذا معادلات حاصل عبارتند از:

$$\ddot{T}+\omega^2 T=0 \qquad (3\text{-}224)$$

$$\nabla^4 W+\alpha_1\nabla^2 W+\alpha_2 W=0 \qquad (3\text{-}225)$$

که $\alpha_1=\dfrac{-3c_1}{c_2h^2},\quad \alpha_2=\dfrac{-3\rho\omega_{\dim}^2}{2c_2h^2}$.

معادله (3-225) را می‌توان به صورت دو معادله جدا ازهم نوشت:

$$\begin{aligned}\nabla^2 W_1+\beta_1 W_1=0\\ \nabla^2 W_2+\beta_2 W_2=0\end{aligned} \qquad (3\text{-}226)$$

که $\beta_1+\beta_2=\alpha_1,\quad \beta_1\beta_2=\alpha_2$.

با توجه به مقادیر ثوابت c_1 و c_2 می دانیم که از دو مقدار β_1 و β_2 یکی باید دارای علامت مثبت و دیگری دارای علامت منفی باشد که می‌توان β_1 را کمیتی منفی و β_2 را کمیتی مثبت در نظر گرفت.

به این ترتیب پاسخ معادلات (3-226) شامل توابع بسل می‌شود:

$$\begin{aligned} W_1 &= c_1 I_0(r\sqrt{-\beta_1}) + c_2 K_0(r\sqrt{-\beta_1}) \\ W_2 &= c_3 J_0(r\sqrt{\beta_2}) + c_4 Y_0(r\sqrt{\beta_2}) \end{aligned} \tag{3-227}$$

پاسخ کل، مجموع این دو پاسخ می‌باشد. از طرفی نیز به علت محدود بودن حل در $r=0$ باید ضرایب c_2 و c_4 برابر صفر باشند. پس:

$$W = c_1 I_0(r\sqrt{-\beta_1}) + c_3 J_0(r\sqrt{\beta_2}) \tag{3-228}$$

شرایط مرزی گیردار باید معادله (3-228) را ارضاء کند:

$$W(a) = 0 \tag{3-229}$$

$$\frac{\partial W}{\partial r}(a) = 0 \tag{3-230}$$

از اعمال شرط (3-229) در (3-228) رابطه ضرایب حاصل می‌شود:

$$c_3 = -c_1 \frac{I_0(a\sqrt{-\beta_1})}{J_0(a\sqrt{\beta_2})} \tag{3-231}$$

لذا پاسخ معادله خطی، از جایگذاری (3-231) در (3-230) وسپس در (3-222) بدست می‌آید:

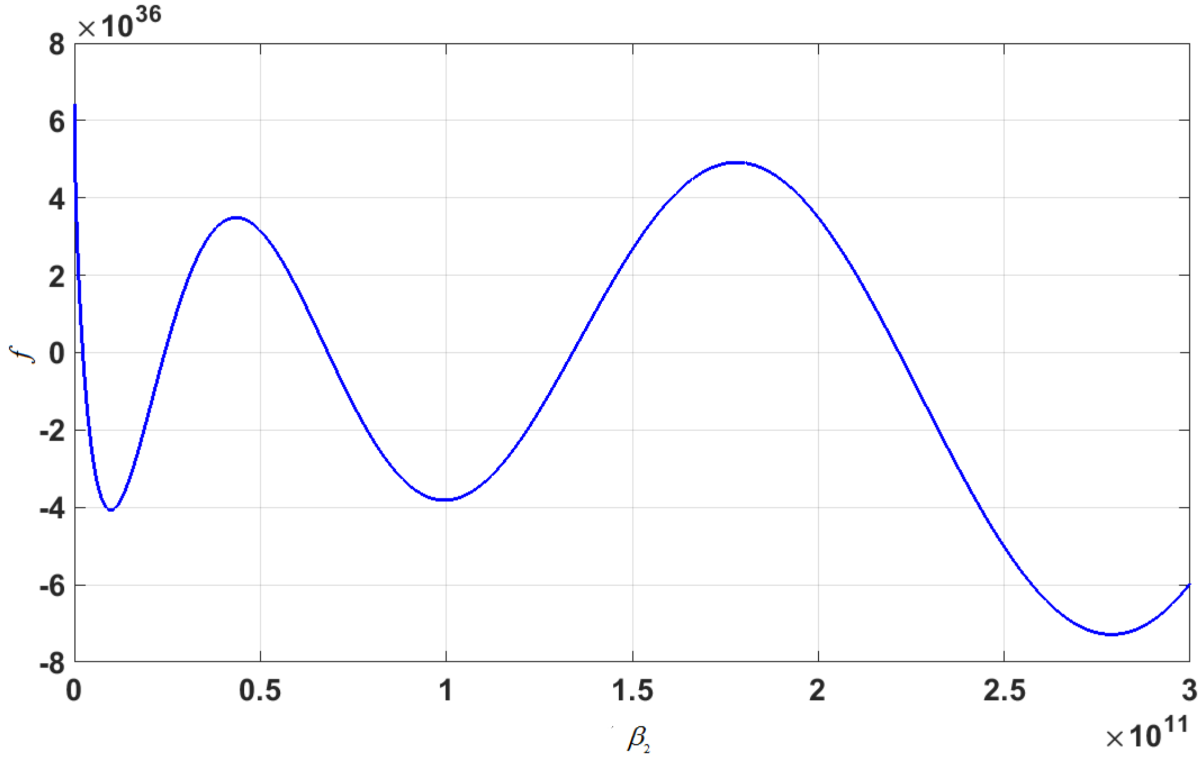
$$\begin{aligned} w(r,t) = &\left[I_0(\mathrm{r}\sqrt{-\beta_1}) - \frac{I_0(a\sqrt{-\beta_1})}{J_0(a\sqrt{\beta_2})} J_0(\mathrm{r}\sqrt{\beta_2}) \right] \\ &\times \left[\mathrm{A}_1 \cos(\omega_{\mathrm{dim}}\, \mathrm{t}) + \mathrm{A}_2 \sin(\omega_{\mathrm{dim}} t) \right] \end{aligned} \tag{3-232}$$

که ضرایب ثابت از شرایط اولیه حاصل می‌شوند.

معادله فرکانسی از اعمال شرط (3-230) بر روی معادله (3-222) حاصل می شود:

$$f = I_0'(\mathrm{a}\sqrt{-\beta_1}) - \frac{I_0(\mathrm{a}\sqrt{-\beta_1})}{J_0(\mathrm{a}\sqrt{\beta_2})} J_0'(\mathrm{a}\sqrt{\beta_2}) = 0 \tag{3-233}$$

رسم معادله (3-233) نمودار (3-53) را به‌دست می دهد:



شکل (3-53): نمودار معادله فرکانسی برای یافتن مقادیر β_2

کمترین مقدار β_2 که منجر به صفر شدن معادله (3-233) می‌شود برابر مقدار دقیق $2.273073530026409\times10^{9}$ می‌باشد. از این مقدار با توجه به روابط (3-252) می‌توان به مقدار فرکانس طبیعی دست یافت. مقدار فرکانس طبیعی بابعد برابر $\omega_{\dim}=9.994229173761758\times10^{5}$ می‌باشد.

پارامترهای بی‌بعدسازی مطابق روابط زیر تعریف می‌شود:

$$w^*=\frac{w}{h},\quad r^*=\frac{r}{a},\quad t^*=t\omega_{\dim} \tag{3-234}$$

$\omega_{\dim}$ فرکانس خطی بابعد است که از طریق پارامترهای β_1 و β_2 قابل تشخیص است.

از اعمال معادله (3-234) در معادله (3-218)، معادله بی‌بعد حاکم به دست می‌آید(علامت ستاره برای سادگی برداشته شده است):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2c_1}{\rho a^2\omega_d^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\\&-\frac{4c_2 h}{\rho a^4\omega_d^2}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial r})^3+3\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^2\\-6\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}-\frac{12}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{6}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{6}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}\end{array}\right)\\&-\frac{6c_3 h^4}{\rho a^6\omega_d^2}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial r})^5+5\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^4-12(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2})^3-\frac{12}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}(\frac{\partial w}{\partial r})^2-\\48\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{8}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^2-\frac{36}{r}(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2})^2\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{48}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^2\\-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^2-\frac{2}{3r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^3\end{array}\right)=0\end{aligned} \qquad (3\text{-}235)$$

فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد

معادله بی‌بعد خطی با توجه به معادله (3-235) برابر است با:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2c_1}{\rho a^2\omega_d^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\\&+\frac{24c_2 h}{\rho a^4\omega_d^2}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=0\end{aligned} \qquad (3\text{-}236)$$

از جایگذاری (3-222) در (3-236) تساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\ddot{T}}{T}=\frac{2c_1}{\rho a^2\omega_d^2}\frac{\nabla^2 W}{W}-\frac{24c_2 h^2}{\rho a^4\omega_d^2}\frac{\nabla^4 W}{W}=-\omega_0^2 \qquad (3\text{-}237)$$

که دو طرف تساوی برابر مقدار ثابتی قرار داده شده‌اند و ω_0 فرکانس طبیعی خطی بی‌بعد می‌باشد.

لذا معادلات حاصل عبارتند از:

$$\ddot{T}+\omega_0^2 T=0 \qquad (3\text{-}238)$$

$$\nabla^4 W+\alpha_1\nabla^2 W+\alpha_2 W=0 \qquad (3\text{-}239)$$

$$\alpha_1=\frac{-c_1 a^2}{12c_2 h^2},\quad \alpha_2=\frac{-\rho a^4\omega_{\dim}^2\omega_0^2}{24c_2 h^2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial r}(1)=0$$

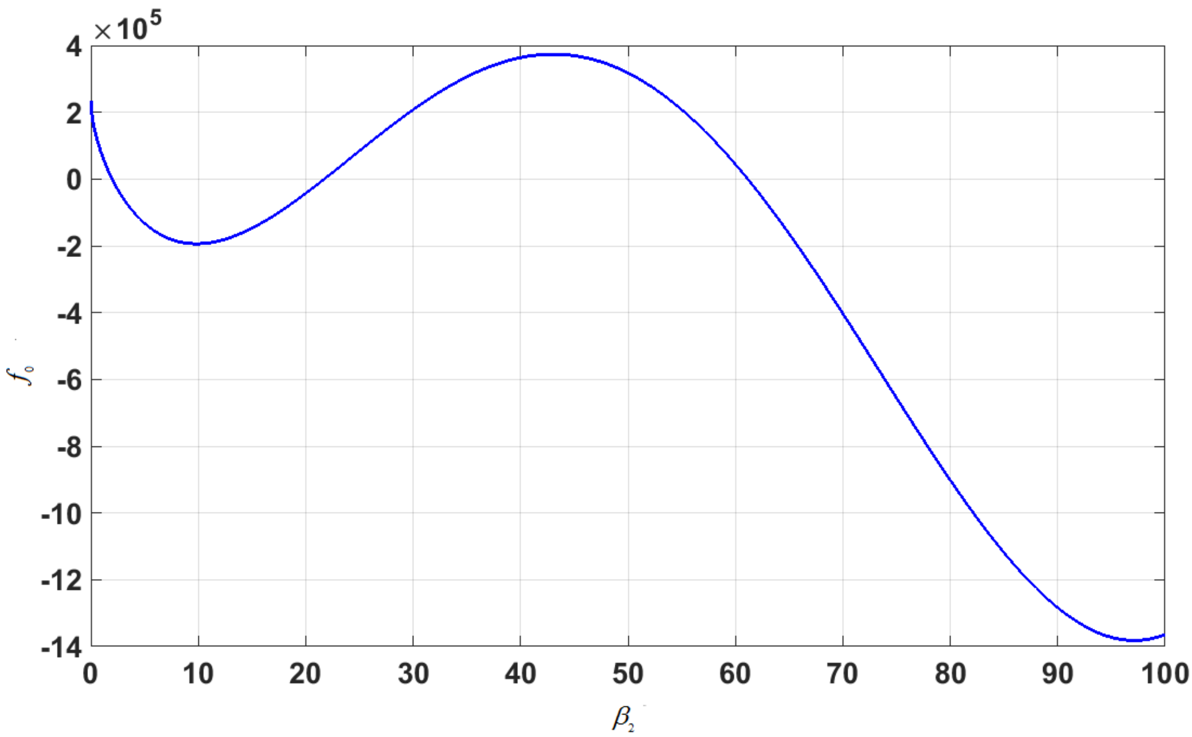
پس از تفکیک معادله (3-239) همانند قسمت قبل، شرایط مرزی $W(1)=0$ و را اعمال کرده و پاسخ معادله خطی بدست می‌آید:

$$w(r,t)=\left[I_0(\mathrm{r}\sqrt{-\beta_1})-\frac{I_0(\sqrt{-\beta_1})}{J_0(\sqrt{\beta_2})}J_0(\mathrm{r}\sqrt{\beta_2})\right]\times \left[\mathrm{A}_1\cos(\omega\,\mathrm{t})+\mathrm{A}_2\sin(\omega t)\right] \tag{3-240}$$

که ضرایب ثابت از شرایط اولیه حاصل می‌شوند.

معادله فرکانسی نیز حاصل اعمال شرط مرزی دوم بر معادله (3-228) است:

$$f_0=I_0'(\mathrm{a}\sqrt{-\beta_1})-\frac{I_0(\sqrt{-\beta_1})}{J_0(\sqrt{\beta_2})}J_0'(\mathrm{a}\sqrt{\beta_2})=0 \tag{3-241}$$



شکل (3-54): نمودار معادله فرکانسی برای یافتن مقادیر β_2

کمترین مقدار β_2 که منجر به صفر شدن معادله (3-241) می‌شود برابر مقدار 1.981197361589570 می‌باشد. از این مقدار با توجه به روابط (3-239) می‌توان به مقدار فرکانس طبیعی دست یافت.

حل معادله بی بعد غیرخطی

ابتدا توسط روش گالرکین تابع ویژه‌ای که شرایط مرزی گیردار را ارضاء کند باید تعریف شود:

$$W(r) = I_0(\mathrm{r}\sqrt{-\beta_1}) - \frac{I_0(\sqrt{-\beta_1})}{J_0(\sqrt{\beta_2})} J_0(\mathrm{r}\sqrt{\beta_2}) \tag{3-242}$$

متغیر در رابطه اخیر همان r^* است که علامت ستاره برای سادگی برداشته است.

ابتدا دو متغیر، در دو تابع جدا از هم بیان می‌شوند:

$$w(r,t) = W(r)\,\mathrm{q(t)} \tag{3-243}$$

حال طرفین معادله (3-235) در تابع ویژه (3-242) ضرب و از صفر تا یک انتگرال گیری می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\ddot{q}\int_0^1 W^2 dr - \frac{2c_1}{\rho a^2\omega_d^2} q\left[\int_0^1\left(W''W + \frac{1}{r}W'W\right)dr\right] \\
&-\frac{4c_2h^2}{\rho a^4\omega_d^2}\left\{\begin{array}{l} q^3\left[\int_0^1\left(3W''(W')^2W + \frac{1}{r}(W')^3W\right)dr\right] \\ -6q\left[\int_0^1\left(W''''W + \frac{2}{r}W'''W - \frac{1}{r^2}W''W + \frac{1}{r^3}W'W\right)dr\right]\end{array}\right\} \\
&-\frac{6c_3h^4}{\rho a^6\omega_d^2}\left\{\begin{array}{l} q^5\left[\int_0^1\left(5W''(W')^4W + \frac{1}{r}(W')^5W\right)dr\right] \\ -12q^3\left[\int_0^1\left(\begin{array}{l}(W'')^3W + 4W'''W''W'W + \frac{1}{r}W''''(W')^2W \\ +\frac{3}{r}(W'')^2W'W + \frac{4}{r}W'''(W')^2W \\ -\frac{1}{6r^2}W''(W')^2W - \frac{1}{18r^3}(W')^3W\end{array}\right)dr\right]\end{array}\right\} = 0
\end{aligned} \tag{3-244}$$

معادله حاصل پس از انتگرال‌گیری، شکل کلی زیر را خواهد داشت:

$$\ddot{q} + B_1 q + B_2 q^3 + B_3 q^5 = 0 \tag{3-245}$$

که B_1 ، B_2 و B_3 به ترتیب، ضرایب متغیرهای q ، q^3 و q^5 پس از انتگرال‌گیری معین در معادله (3-244) می‌باشد.

این معادله از روش‌های مختلف قابل حل است که در اینجا از روش پوانکاره استفاده می‌شود.

اعمال تغییر متغیرهای $q=\varepsilon T$ و $\tau=\omega t$ در معادله (3-245) می‌دهد:

$$\varepsilon\omega^2\ddot{T}+\alpha_1\varepsilon T+\alpha_2\varepsilon^3T^3+\alpha_3\varepsilon^5T^5=0 \tag{3-246}$$

حل‌های پیشنهادی عبارتند از:

$$\begin{aligned}T&=T_0+\varepsilon T_1+\varepsilon^2T_2+\dots\\ \omega&=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\dots\end{aligned} \tag{3-247}$$

از جایگذاری (3-247) در (3-246) و جداسازی ضرایب مختلف پارامتر ε، معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$O(\varepsilon):\omega_0^2\ddot{T}_0+\alpha_1T_0=0 \tag{3-248}$$

$$O(\varepsilon^2):\omega_0^2\ddot{T}_1+2\omega_0\omega_1\ddot{T}_0+\alpha_1T_1=0 \tag{3-249}$$

$$O(\varepsilon^3):\omega_0^2\ddot{T}_2+2\omega_0\omega_1\ddot{T}_1+(2\omega_0\omega_2+\omega_1^2)\ddot{T}_0+\alpha_1T_2+\alpha_2T_0^3=0 \tag{3-250}$$

که در رابطه بالا $\alpha_1=\omega_0^2$ و شرایط اولیه مورد نظر $T(0)=\tilde{A}_{\max}=\dfrac{A_{\max}}{h}$ می باشد.

پاسخ معادله (3-248) پس از اعمال شرایط اولیه عبارتست از:

$$T_0=\tilde{A}_{\max}\cos(\tau) \tag{3-251}$$

جایگذاری این حل در معادله (3-249)، حذف جمله سکولار و عدم تکرار پاسخ همگن منجر می‌شود به:

$$T_1=0 \tag{3-252}$$

$$\omega_1=0 \tag{3-253}$$

جایگذاری (3-251) تا (3-253) در معادله (3-250)، حذف جمله سکولار و یافتن پاسخ خصوصی معادله، می‌دهد:

$$T_2=\frac{\alpha_2\tilde{A}_{\max}^3}{32\omega_0^2}\left(\cos(3\tau)-\cos(\tau)\right) \tag{3-254}$$

$$\omega_2=\frac{3\alpha_2\tilde{A}_{\max}^2}{8\omega_0} \tag{3-255}$$

از قرار دادن معادلات (3-251) تا (3-255) در (3-247) و سپس در (3-243) پاسخ نهایی جابجایی و فرکانس حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} w(r,t)=&\left[I_0(\mathrm{r}\sqrt{-\beta_1})-\frac{I_0(\sqrt{-\beta_1})}{J_0(\sqrt{\beta_2})}J_0(\mathrm{r}\sqrt{\beta_2})\right]\times \\ &\left[\begin{aligned}&\tilde{A}_{\max}\cos(\tau)\\ &+\frac{\alpha_2\tilde{A}_{\max}^3\varepsilon^2}{32\omega_0^2}\left(\cos(3\tau)-\cos(\tau)\right)\end{aligned}\right]\end{aligned} \tag{3-256}$$

$$\omega=\omega_0+\varepsilon^2\,\frac{3\alpha_2\tilde{A}_{\max}^2}{8\omega_0}+\ldots \tag{3-257}$$

3-9-3 نتایج عددی

در این بخش با توجه به حل تحلیلی انجام شده در بخش قبلی، اثر بیشینه دامنه و نسبت منظر بر فرکانس نرمال مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بدین منظور ابتدا مقادیر عددی را برای پارامترهای هندسی و ماده تعریف می‌کنیم که در جدول (3-5) ارائه شده است:

جدول (3-5): پارامترهای هندسی و ماده ورق

پارامترهندسی	مقدار
a	$30\,\mu m$
h	$10\,\mu m$
ثوابت مدل یئو[41]	**مقدار**
c_1	$0.24162\,MPa$
c_2	$0.19977\,MPa$

c_3	$-0.00541MPa$

در گام اول، اثر بیشینه دامنه ($\tilde{A}_{\max}=\frac{A_{\max}}{h}$) را بر فرکانس نرمال شده ($\frac{\omega}{\omega_0}$) مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این کار برای سه مود اول انجام خواهد شد.

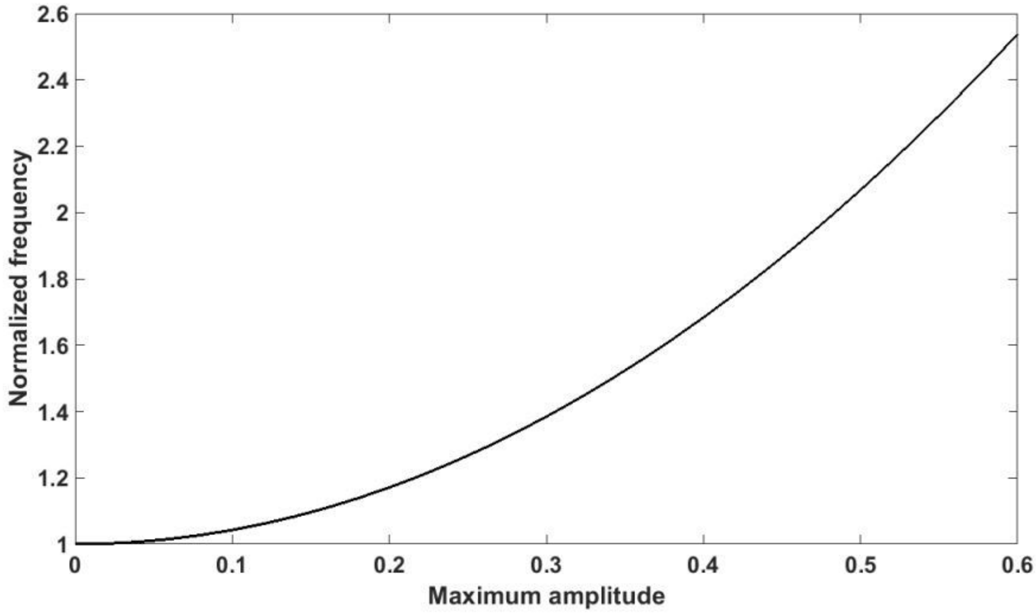
در مود اول با توجه به محاسبات انجام شده از طریق عددی مقدار $\beta_2=1.981197361589570$ بدست آمد که از طریق معادلات (3-238) و (3-239) مقدار فرکانس خطی و از طریق رابطه (3-257) مقدار فرکانس غیرخطی حاصل خواهد شد.

مقادیر نسبت این دو فرکانس در مود اول تا سوم برای بیشینه دامنه بی‌بعد $\tilde{A}_{\max}=0.3$ و $\tilde{A}_{\max}=0.6$ در جدول‌های (3-6) تا (3-8) بیان می‌شود و سپس برای گستره بیشتری از دامنه بیشینه به صورت نموداری ارائه می‌گردد.

جدول (3-6): مقدار فرکانس نرمال در مود اول برای مقادیر مختلف بیشینه دامنه بی‌بعد

فرکانس نرمال ($\frac{\omega}{\omega_0}$)	بیشنه دامنه بی بعد
1.3845	0.3
2.5378	0.6
4.4601	0.9

شکل (3-55) اثر بیشینه دامنه را بر فرکانس نرمال نشان می‌دهد که با افزایش بیشنه دامنه بی‌بعد، مقدار فرکانس نرمال شده نیز رو به افزایش می‌گذارد.



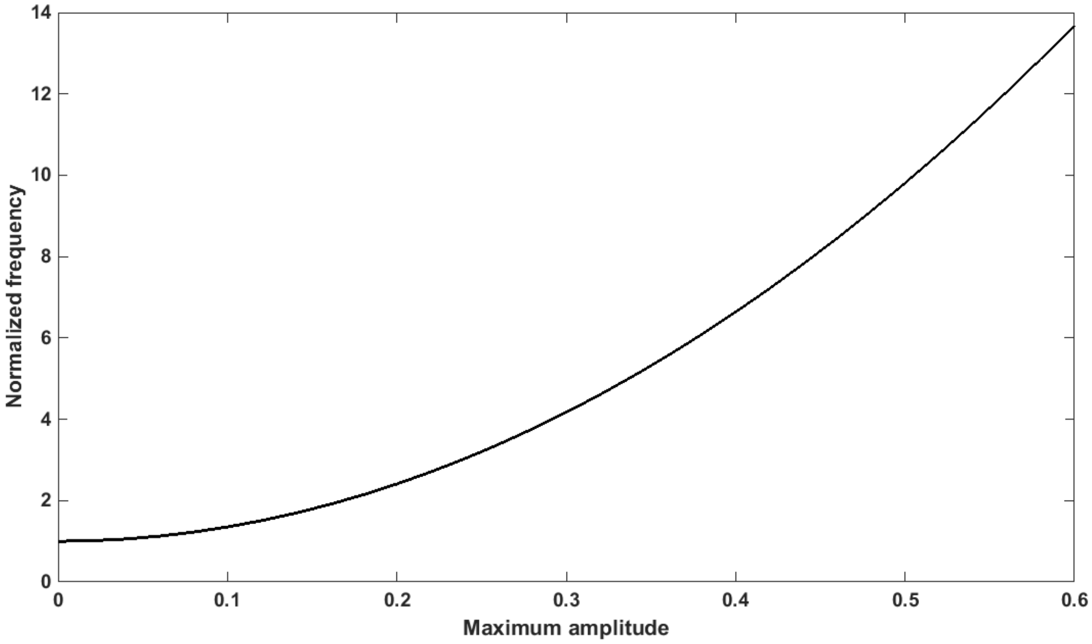
شکل (3-55): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال شده در مود اول

در مود دوم با توجه به محاسبات انجام شده از طریق عددی مقدار $\beta_2 = 21.7274$ بدست آمد و جدول (3-7) بیانگر مقادیر عددی فرکانس نرمال در بیشنه دامنه‌های نشان‌داده‌شده می‌باشد.

جدول (3-7): مقدار فرکانس نرمال در مود دوم برای مقادیر مختلف بیشینه دامنه بی‌بعد

بیشنه دامنه بی بعد	فرکانس نرمال($\frac{\omega}{\omega_0}$)
0.3	1.3523
0.6	2.4094
0.9	4.1711

شکل (3-56) اثر گستره بیشتری از دامنه را بر فرکانس نرمال نشان می‌دهد که در اینجا نیز همچون مود اول با افزایش بیشنه دامنه بی‌بعد، مقدار فرکانس نرمال شده نیز رو به فزونی می‌رود و لذا اثر مستقیم بر آن دارد.

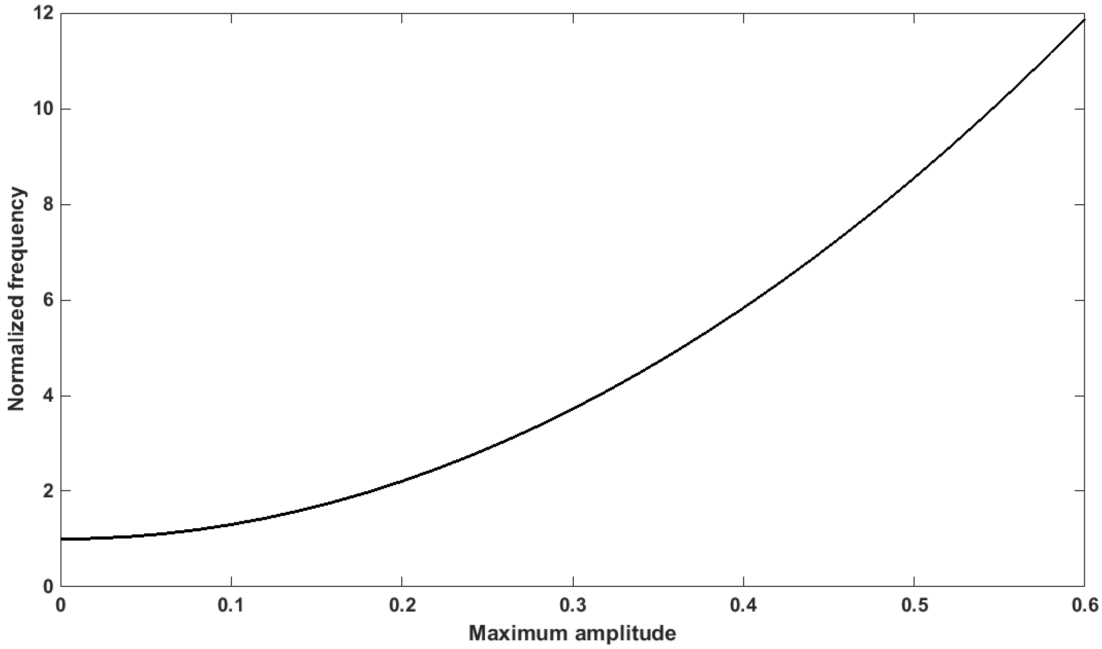


شکل (3-56): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال شده در مود دوم

در مود سوم با توجه به محاسبات انجام شده از طریق عددی مقدار $\beta_2 = 61.1432$ بدست آمد و نسبت فرکانس غیرخطی به خطی در جدول (3-8) و روند تاثیر آن بر فرکانس نرمال در شکل (3-57) نشان-داده‌شده است.

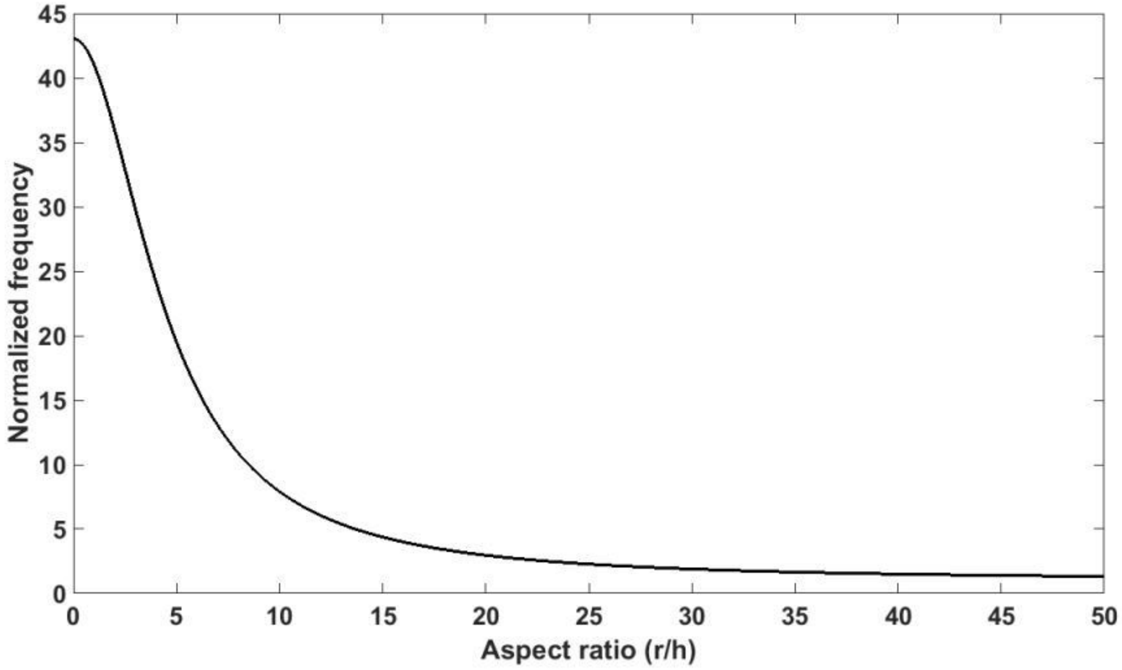
جدول (3-8): مقدار فرکانس نرمال در مود سوم برای مقادیر مختلف بیشینه دامنه بی‌بعد

فرکانس نرمال($\frac{\omega}{\omega_0}$)	بیشنه دامنه بی‌بعد
3.7180	0.3
11.8720	0.6
25.4621	0.9

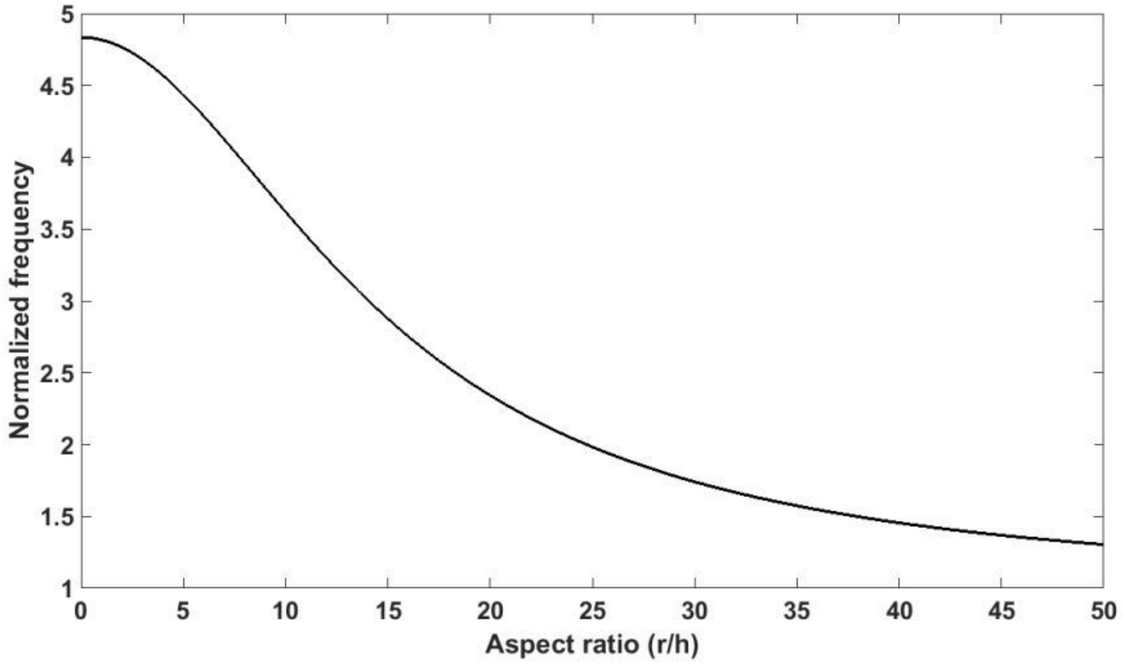


شکل (3-57): اثر بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال‌شده در مود سوم

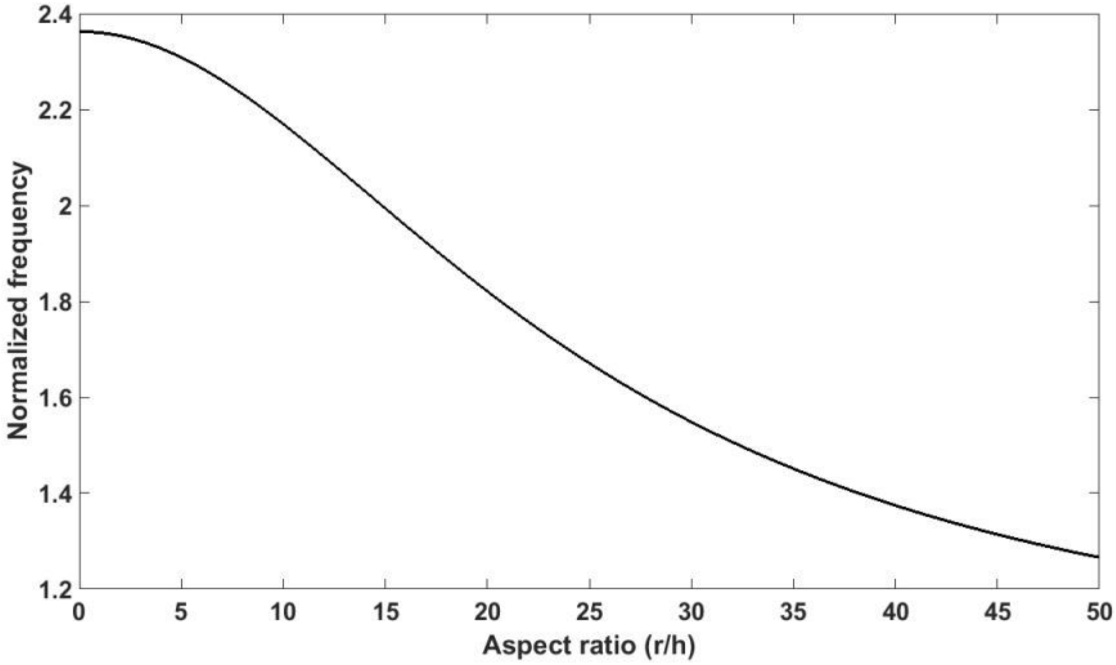
پارامتر دیگری که اثر آن بر فرکانس نرمال مورد بررسی قرار می‌گیرد، نسبت منظر ($\frac{r}{h}$) می‌باشد. این اثر در سه مود اول به ترتیب در شکل‌های (3-58) تا (3-60) نشان داده شده است. همانطور که در همه این موارد مشاهده می‌شود با افزایش نسبت منظر از مقدار فرکانس نرمال تا مقدار معینی کاسته می‌شود که نشان از اثرگذاری قابل توجه تغییر نسبت منظر بر فرکانس نرمال دارد. همچنین همانطور که از مقایسه این سه نمودار پیداست، نرخ این کاهش در مودهای بالاتر کمتر می‌شود.



شکل (3-58): اثر نسبت منظر بر فرکانس نرمال در مود اول



شکل (3-59): اثر نسبت منظر بر فرکانس نرمال در مود دوم



شکل (3-60): اثر نسبت منظر بر فرکانس نرمال در مود سوم

10-3 ارتعاش اجباری میکروورق متقارن محوری با شرط مرزی گیردار و مدل هایپرالاستیک یئو

1-10-3 استخراج معادله حاکم در مدل یئو

طبق شکل (52-3) ورق دایره‌ای درگیر به شعاع a و ضخامت h که تحت نیروی خارجی هارمونیک $f_0\cos(\Omega t)$ باشد درنظر گرفته می‌شود.

معادله حاکم بر ارتعاش اجباری ورق با توجه به انرژی‌های جنبشی و کرنشی مطرح شده در بخش ارتعاش آزاد به صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
&\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2c_1h\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-4c_2h\left(\frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial r})^3+3\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^2\right)\\
&+\frac{2}{3}c_2h^3\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-6c_3h\left(\frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial r})^5+5\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^4\right)\\
&+c_3h^3\left(2(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2})^3+2\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}(\frac{\partial w}{\partial r})^2+8\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{8}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^2+\frac{6}{r}(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2})^2\frac{\partial w}{\partial r}\right)\\
&-4c_3h^3\left(\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^2-\frac{1}{r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^3\right)=f_0\cos(\Omega t)
\end{aligned}
\tag{3-258}
$$

که f_0 دامنه نیروی تحریک و Ω فرکانس تحریک است.

2-10-3 حل معادله حاکم و بررسی پاسخ فرکانسی

ابتدا معادله (258-3) با تعریف پارامترهای زیر، بی‌بعدسازی می‌شود:

$$
r^*=\frac{r}{a},\quad w^*=\frac{w}{d},\quad t^*=t\omega_{\dim},\ \Omega^*=\frac{\Omega}{\omega_{\dim}}
\tag{3-259}
$$

در رابطه (3-259) پارامتر $\omega_{\dim}$ فرکانس طبیعی بابعد در حالت خطی می‌باشد که در بخش ارتعاش آزاد محاسبه شد.

از جایگذاری (3-259) در (3-258) معادله بی‌بعدشده حاکم بر مدل یئو بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{2c_1}{\rho a^2\omega_d^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{4c_2 h}{\rho a^4\omega_d^2}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial r})^3+3\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^2\\ -6\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}-\frac{12}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{6}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{6}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}\end{array}\right)$$
$$-\frac{6c_3 h^4}{\rho a^6\omega_d^2}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{r}(\frac{\partial w}{\partial r})^5+5\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^4-12(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2})^3-\frac{12}{r}\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}(\frac{\partial w}{\partial r})^2-\\ 48\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{8}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^2-\frac{36}{r}(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2})^2\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{48}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^2\\ -\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(\frac{\partial w}{\partial r})^2-\frac{2}{3r^3}(\frac{\partial w}{\partial r})^3\end{array}\right)=F_0\cos(\Omega^* t^*) \tag{3-260}$$

که $F_0=\frac{f_0}{\rho h d\omega_{\dim}^2}$.

شرایط مرزی بی‌بعد نیز عبارتند از: $w^*(1)=0,\ \frac{\partial w^*}{\partial r^*}(1)=0$.

جداسازی متغیر با استفاده از معادله (3-261) انجام می‌پذیرد، به طوری که این معادله در معادله (3-260) جایگزین، طرفین در شکل مود معرفی شده در معادله (3-261) ضرب و در فاصله صفر تا یک انتگرال‌گیری می‌شود.

$$W(r)=I_0(\mathrm{r}\sqrt{-\beta_1})-\frac{I_0(\sqrt{-\beta_1})}{J_0(\sqrt{\beta_2})}J_0(\mathrm{r}\sqrt{\beta_2}) \tag{3-261}$$

در نتیجه اعمال گالرکین، معادله دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌گردد:

$$\ddot{q}(t^*)+B_1 q(t^*)+B_2 q^3(t^*)+B_3 q^5(t^*)=F_0\cos(\Omega^* t^*) \tag{3-262}$$

که B_1 ، B_2 و B_3 به ترتیب، ضرایب متغیرهای q ، q^3 و q^5 پس از انتگرال‌گیری معین در معادله (3-244) می‌باشند.

حل مقیاس‌های چندگانه

برای اعمال روش مقیاس‌های چندگانه بر روی معادله استخراجی (3-262)، پارامتر کوچک طبق رابطه زیر معرفی می‌شود:

$$q = \varepsilon u \tag{3-263}$$

حل پیشنهادی زیر طبق روش مقیاس‌های چندگانه معرفی و در معادله اعمال می‌شود.

$$u = u_0(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon u_1(T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2 u_2(T_0,T_1,T_2) \tag{3-264}$$

که $T_0 = t,\ T_1 = \varepsilon t,\ T_2 = \varepsilon^2 t$ می‌باشد.

ضرایب توان‌های مختلف پارامتر کوچک عبارتند از:

$$O(\varepsilon^1): \frac{\partial^2 u_0}{\partial {T_0}^2} + \alpha_1 u_0 = 0 \tag{3-265}$$

$$O(\varepsilon^2): \frac{\partial^2 u_1}{\partial {T_0}^2} + \alpha_1 u_1 + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} = 0 \tag{3-266}$$

$$O(\varepsilon^3): \frac{\partial^2 u_2}{\partial {T_0}^2} + \alpha_1 u_2 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \alpha_2 u_0^3 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1^2} + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_2} = F_0 \cos(\Omega^* \mathrm{T}_0) \tag{3-267}$$

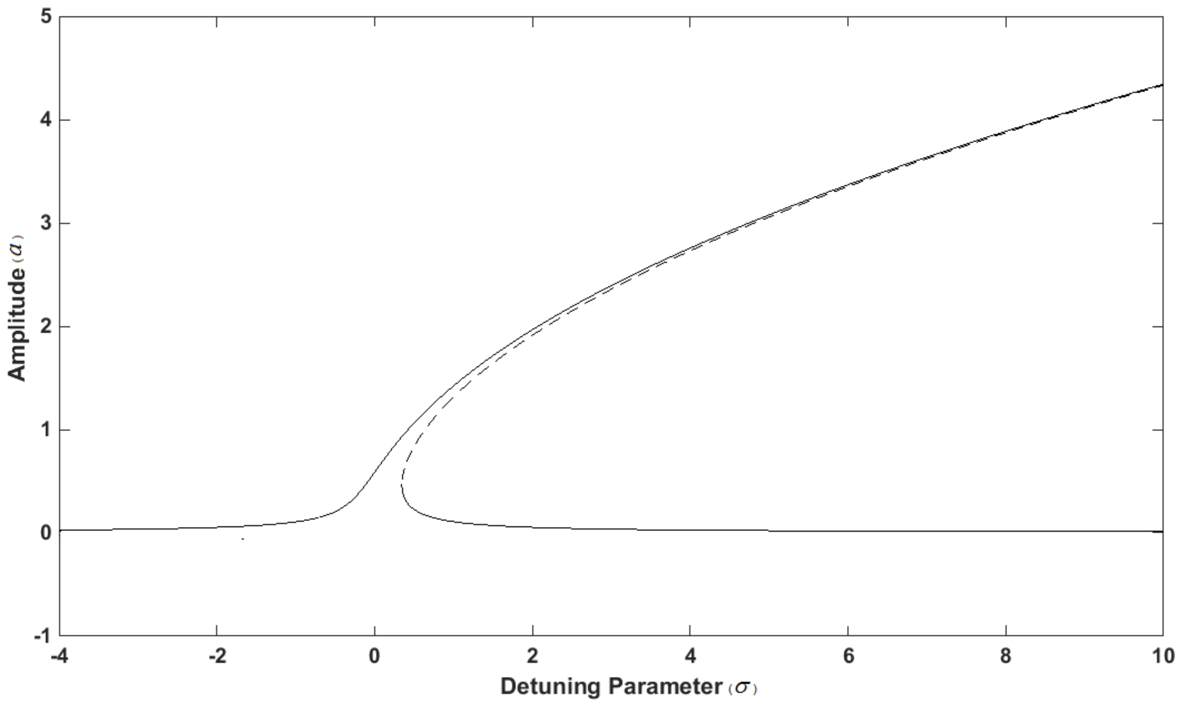
ضریب α_1 در معادلات (3-265) همان مربع فرکانس طبیعی تیر خطی و بی‌بعدشده است.

حل این ضرایب و یافتن پاسخ نهایی معادله حاکم دقیقا همانند معادلات (3-122) تا (3-133) می‌باشد و لذا از دوباره گویی اجتناب می‌شود.

3-10-3 نتایج عددی

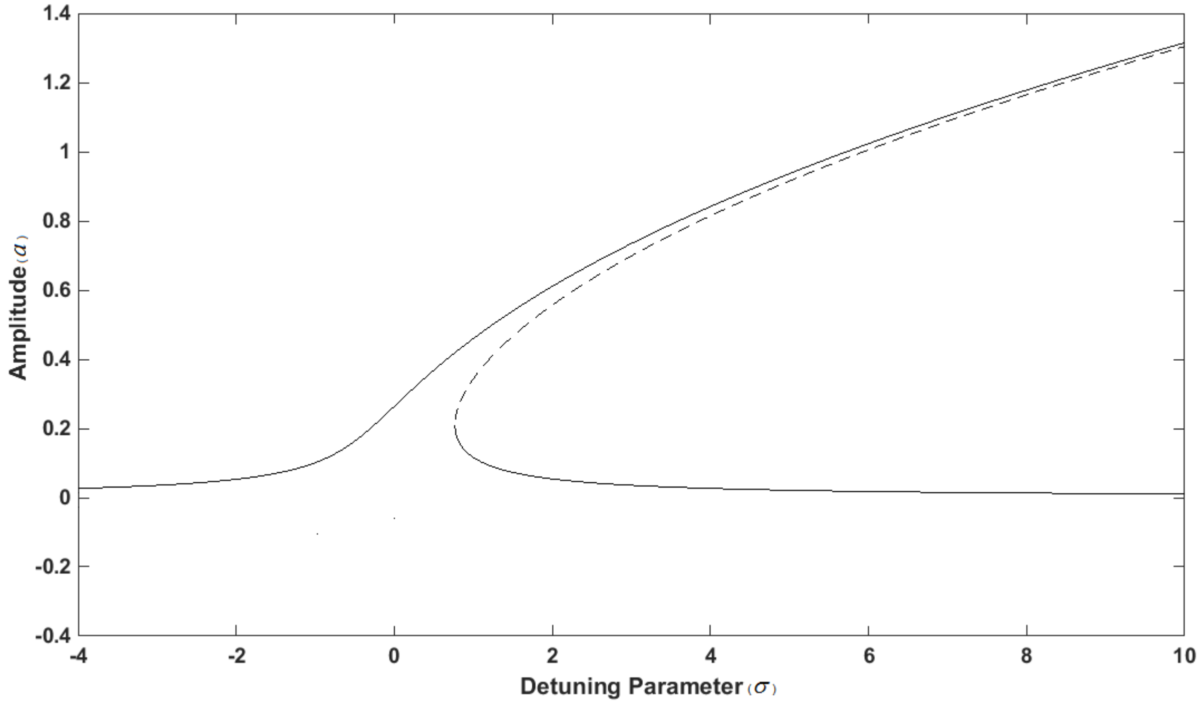
در این بخش، نمودارهای شاخه‌شدگی[1] رسم شده است. این نمودارها بیانگر دامنه بر حسب پارامتر تنظیم می‌باشند. محدوده پارامتر تنظیم از 4- تا 10+ در نظر گرفته شده است. در همه موارد مشاهده می‌شود که ورق رفتار سخت‌شوندگی دارد.

مقایسه نمودارهای(3-61) تا (3-63) بیانگر کاهش دامنه در اثر افزایش شماره مود بالاخص بین مود اول و دوم می‌باشد و میزان سخت‌شوندگی هم به دلیل خمش بیشتر نمودار به سمت راست، با افزایش مود بیشتر می‌شود.

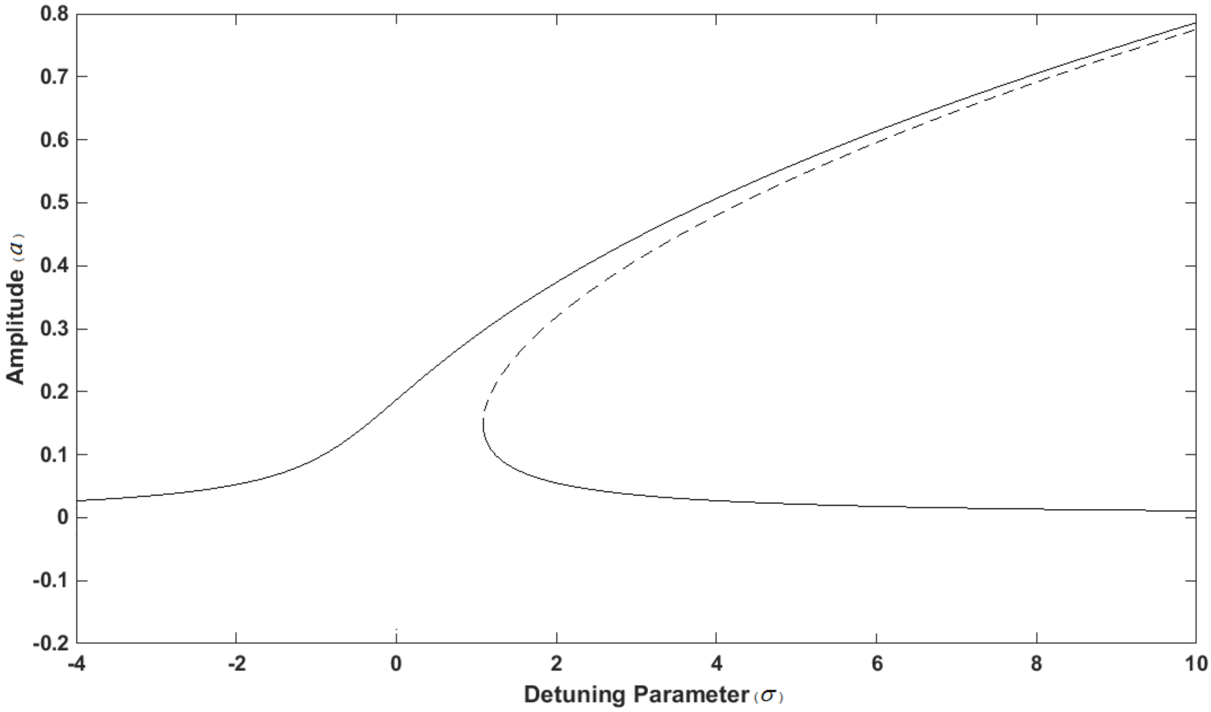


شکل (3-61): نمودار شاخه‌شدگی در مود اول

[1] Bifurcation

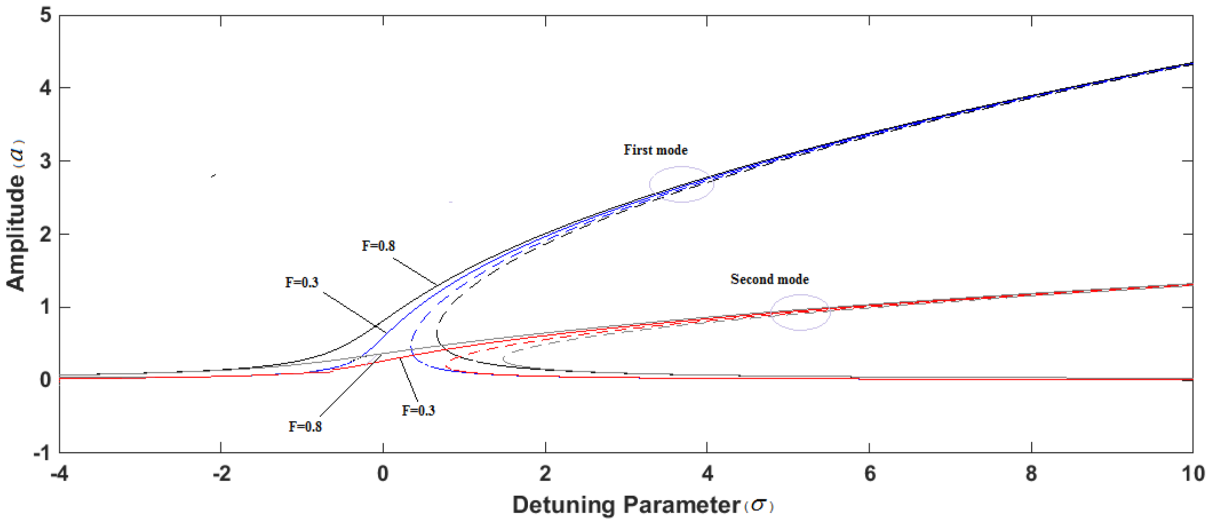


شکل (3-62): نمودار شاخه‌شدگی در مود دوم



شکل (3-63): نمودار شاخه‌شدگی در مود سوم

پارامتر دیگری که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد اثر دامنه نیروی هارمونیک خارجی است. دو مقدار متفاوت برای دامنه نیرو در هر مود درنظر گرفته می‌شود. همانطور که در شکل (3-64) مشخص است بخش اول پایدار برای دامنه نیروی بزرگتر، در پارامتر تنظیم کوچکتری روند صعودی را آغاز می‌کند و بخش دوم پایدار در پارامتر تنظیم بزرگتری آغاز می‌شود که به معنای ایجاد دامنه ماکزیمم در فرکانس تحریک بزرگتر است. علاوه بر این، دامنه نیرو در مودهای بالاتر منجر به رفتار سخت‌شونده‌تری می‌گردد.

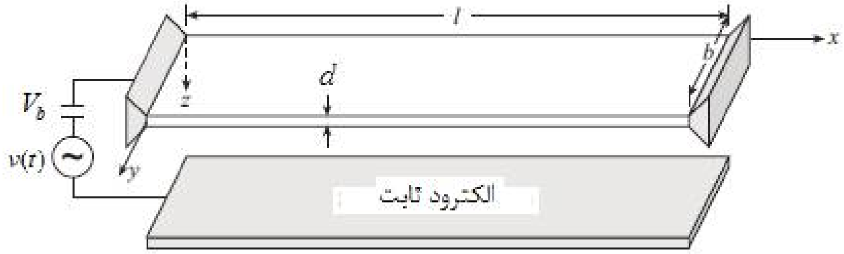


شکل(3-64): اثر دامنه نیرو بر رفتار میکروورق

3-11 مطالعه رفتار میکروتیر دوسردرگیر تحت نیروی الکتروستاتیکی

در این بخش مدل متفاوتی نسبت به مدل‌های پیشین درنظر گرفته می‌شود به طوری‌که الکترود سطح زیرین الاستومر را جدا کرده، با فاصله از سطح زیرین و به صورت ثابت قرار داده و نیروی الکتروستاتیک به این دو الکترود اعمال می‌شود.

میکروتیر هایپرالاستیک که بر روی سطح بالایی آن و نیز با فاصله از سطح زیرین، دو الکترود قرار دارند در شکل (3-65) نشان داده شده است. این تیر دارای طول l، ضخامت d و عرض b می‌باشد. در فاصله شکاف g_0 از سطح پایینی میکروتیر، الکترود دیگری قرار گرفته است و به واسطه اعمال ولتاژ بین دو الکترود موجود، ارتعاش صورت می‌گیرد.



شکل (3-65): میکروتیر تحت نیروی الکتروستاتیکی

مدل هایپرالاستیک در نظر گرفته شده برای این میکروتیر مدل یئو بوده و ترکیبی از ولتاژ مستقیم و متناوب به آن اعمال می‌شود. لذا ابتدا در اثر اعمال ولتاژ مستقیم، میکروتیر دارای خیز شده و سپس در اثر ولتاژ متناوب ارتعاش می‌کند.

معادله حاکم بر میکروتیر تحت نیروی الکتروستاتیکی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}&\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2c_1A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+8c_2I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-12c_2A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-30c_3A\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^4\\&+24c_3I\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3+96c_3I\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}+24c_3I\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2=\frac{\varepsilon_0 bV^2}{2(g_0-w)^2}\end{aligned} \tag{3-268}$$

شرایط مرزی نیز مطابق معادلات (3-25) و (3-26) بوده که از بین آن‌ها $w(0)=0,\ w(l)=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}(0)=0, \frac{\partial w}{\partial x}(l)=0$ را باید انتخاب کرد.

در این رابطه $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\frac{F}{m}$ ثابت گذردهی خلا و $V=V_b+v(t)$ ولتاژ اعمالی بین دو الکترود بوده که در آن V_b ولتاژ مستقیم و $v(t)=V_{ac}\cos(\Omega t)$ ولتاژ متناوب، V_{ac} دامنه ولتاژ اعمالی و Ω فرکانس تحریک است.

پارامترهای بی‌بعدسازی مطابق معادله زیر تعریف می‌شوند:

$$x^*=\frac{x}{l},\quad w^*=\frac{w}{d},\quad t^*=t\sqrt{\frac{c_1I}{\rho Al^4}},\ \Omega^*=\omega\sqrt{\frac{\rho Al^4}{c_1I}},\ V^{*2}=\frac{\varepsilon_0 bl^4V^2}{2c_1Ig_0^3} \tag{3-269}$$

جایگذاری معادله (3-269) در (3-268) منجر به معادله بی‌بعد می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}-\beta_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}+\beta_2\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}-\beta_3\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2-\beta_4\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^4\\&+\beta_5\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\right)^3+4\beta_5\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^{*3}}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}}\frac{\partial w^*}{\partial x^*}+\beta_5\frac{\partial^4 w^*}{\partial x^{*4}}\left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*}\right)^2=\frac{V^{*2}}{(1-w^*)^2}\end{aligned} \tag{3-270}$$

که $\beta_1=\frac{2Al^2}{I},\ \beta_2=\frac{8c_2}{c_1},\ \beta_3=\frac{12c_2Ag_0^2}{c_1I},\ \beta_4=\frac{30c_3Ag_0^4}{l^2c_1I},\ \beta_5=\frac{24c_3g_0^2}{l^2c}$.

و شرایط مرزی بی‌بعد عبارتند از: $w^*(0)=0,\ w^*(1)=0,\ \frac{\partial w^*}{\partial x^*}(0)=0,\frac{\partial w^*}{\partial x^*}(1)=0$.

خیز میکروتیر تحت نیروی الکتریکی متشکل از مولفه استاتیکی $w_s(x)$ و مولفه دینامیکی $u(x,t)$ بوده که به ترتیب نتیجه اعمال ولتاژهای مستقیم و متناوب هستند، بنابراین:

$$w^*(x,t) = w_s(x) + u(x,t) \tag{3-271}$$

برای محاسبه خیز استاتیک، جمله های وابسته به زمان و نیز جمله شامل نیروی متناوب برابر صفر قرار داده می‌شود، بنابراین:

$$\begin{aligned} &-\beta_1 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \beta_2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - \beta_3 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2 - \beta_4 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^4 \\ &+\beta_5 \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)^3 + 4\beta_5 \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\frac{\partial w_s}{\partial x} + \beta_5 \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2 = \frac{\beta_6}{(1-w_s)^2} \end{aligned} \tag{3-272}$$

که $\beta_6 = \dfrac{\varepsilon_0 b l^4 V_b{}^2}{2c_1 I g_0^3}$ و علامت ستاره نیز برای سادگی برداشته شده است.

برای حل معادله اخیر، می توان از بسط جمله سمت راست تساوی استفاده کرد اما برای پاسخ دقیق تر و در نظر گرفتن دقیق عامل غیرخطی مذکور، می توان طرفین را در عبارت مخرج ضرب کرد و سپس اقدام به حل نمود.

برای معادله حاصل، حل پیشنهادی زیر را می توان ارائه کرد:

$$\begin{aligned} &w_s = a\phi(x), \\ &\phi(x) = \left[\cos(\beta_m x) - \cosh(\beta_m x)\right] - \frac{\cos(\beta_m) - \cosh(\beta_m)}{\sin(\beta_m) - \sinh(\beta_m)}\left[\sin(\beta_m x) - \sinh(\beta_m x)\right] \\ &\beta_m = (2m+1)\frac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{3-273}$$

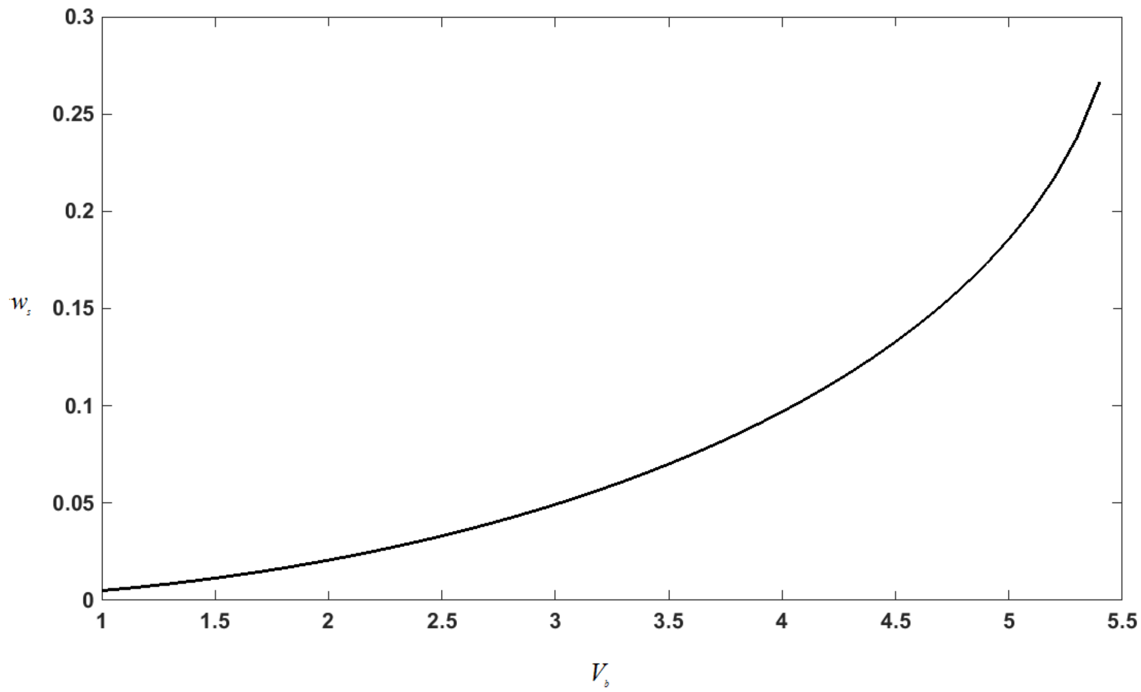
طبق روش گالرکین، حل (3-273) را در معادله (3-272) جایگزین، طرفین در تابع ویژه ضرب و در فاصله صفر تا یک انتگرال گیری می‌شود. محاسبات این بخش از رساله با استفاده از تحلیل یک مود(مود اول) از طریق جایگذاری $\beta_1 = \dfrac{3\pi}{2}$ بدست می‌آید. نتیجه این روش، معادله‌ای بر حسب a از مرتبه 7 می باشد.

حل پیشنهادی برای این معادله عبارتست از:

$$a = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \ldots \tag{3-274}$$

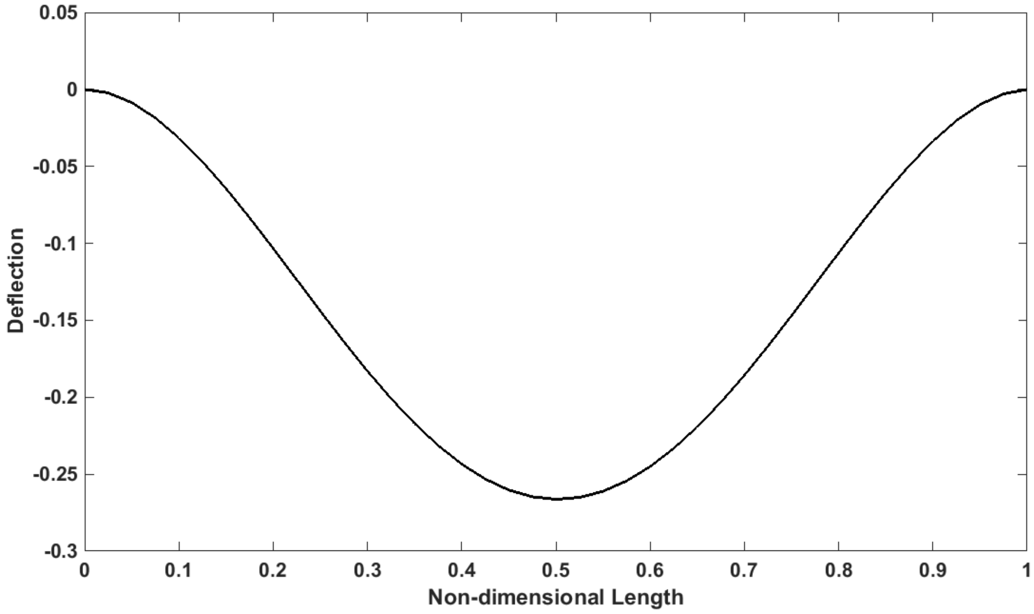
از حل معادله حاکم بر a و جایگذاری در رابطه (3-273) می‌توان خیز استاتیکی را بدست آورد.

خیز استاتیکی را می‌توان بر حسب ولتاژ مستقیم اعمالی رسم نمود و از طریق آن ولتاژ و خیز pull-in را بدست آورد. شرط رخ‌دادن پدیده pull-in این است که شیب نمودار خیز- ولتاژ تقریبا بی‌نهایت شود. همانطور که در شکل (3-66) مشاهده می‌شود این پدیده در $w_{s-pullin} = 0.2663$ و $V_{b-pullin} = 5.4$ اتفاق می‌افتد.



شکل (3-66): تغییرات خیز استاتیک نقطه میانی در ازای ولتاژهای مختلف

وضعیت خیز در صورت اعمال ولتاژ 5,4 ولت نیز در شکل (3-67) رسم شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می شود، مقدار خیز نقطه میانی تیر در ازای این ولتاژ برابر مقدار 0,2663 می باشد. اگر مقدار ولتاژ اعمالی از این مقدار تجاوز کند، خیز نقطه میانی به حدی زیاد می گردد که ناپایداری در تیر رخ داده و روی الکترود ثابت پایینی فرو می‌پاشد.



شکل (3-67): خیز میکروتیر در اثر اعمال ولتاژ 5,4 ولت

برای بررسی رفتار دینامیکی میکروتیر، معادله (3-271) را در (3-270) جایگزین می گردد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\beta_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)+\beta_2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}\right)-\beta_3\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)+\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2\end{array}\right\}$$

$$-\beta_4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^4+\beta_5\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)^3+\\ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2\\ +4\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\right)\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)\end{array}\right\} \qquad (3\text{-}275)$$

$$=\frac{V^2}{(1-u-w_s)^2}$$

حل پیشنهادی برای u به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\phi(x)q(t) \tag{3-276}$$

طبق روش گالرکین با جایگذاری معادله (3-276) در (3-275)، ضرب طرفین در تابع ویژه (3-276) و انتگرال گیری در فاصله صفر تا یک، معادله زمانی بر حسب qنتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \phi^2 \ddot{q}dx-\beta_1\int_0^1 \phi\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(q+a)dx+\beta_2\int_0^1 \phi\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}(q+a)dx\\
&-\beta_3\int_0^1 \phi\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(q+a)\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(q+a)^2\right)\right\}dx\\
&-\beta_4\int_0^1 \phi\left\{\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(q+a)\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(q+a)^4\right)\right\}dx\\
&+\beta_5\int_0^1 \phi\left\{\begin{matrix}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(q+a)^3\right)+\left(\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}(q+a)\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(q+a)^2\right)\\ +4\left((\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial\phi}{\partial x})(q+a)\right)\end{matrix}\right\}dx\\
&=\int_0^1 \phi\frac{V^2}{(1-\phi(q+a))^2}dx
\end{aligned} \tag{3-277}$$

با استفاده از روش نیمه تحلیلی مقیاس های چندگانه، حل پارامتر q معرفی می‌شود:

$$q=\varepsilon q_0+\varepsilon^2 q_1+\varepsilon^3 q_2+\ldots \tag{3-278}$$

پس از اعمال حل پیشنهادی (3-278) در معادله دیفرانسیل معمولی (3-277)، می توان ضرایب مرتبه‌-های مختلف ε را جدا کرد.

$$O(\varepsilon^1):\frac{\partial^2 q_0}{\partial {T_0}^2}+\omega_0^2 q_0=0 \tag{3-279}$$

$$O(\varepsilon^2):\frac{\partial^2 q_1}{\partial {T_0}^2}+\omega_0^2 q_1+B_1\frac{\partial^2 q_0}{\partial T_0\partial T_1}+B_2 q_0^2+B_3\frac{\partial^2 q_0}{\partial {T_0}^2}q_0=0 \tag{3-280}$$

$$O(\varepsilon^3): \frac{\partial^2 q_2}{\partial T_0{}^2} + \omega_0^2 q_2 + B_4 \frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0 \partial T_1} + B_5 \frac{\partial^2 q_0}{\partial T_1^2} + B_6 \frac{\partial^2 q_0}{\partial T_0 \partial T_2} + B_7 \frac{\partial^2 q_0}{\partial T_0{}^2} q_0^2 + B_8 \frac{\partial^2 q_0}{\partial T_0 \partial T_1} q_0$$
$$+ B_9 q_0^3 + B_{10} \frac{\partial^2 q_0}{\partial T_0{}^2} q_1 + B_{11} \frac{\partial^2 q_1}{\partial T_0{}^2} q_0 + B_{12} q_0 q_1 + B_{13} = B_{14} V_{ac} \cos(\Omega T_0) \qquad (3\text{-}281)$$

حل این معادلات برای ولتاژهای مستقیم 2 و 4 ولت انجام شد. ω_0 فرکانس طبیعی و $B_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, 14$ ثوابت بوده که برای این دو ولتاژ در جدول (3-9) ارائه شده اند:

جدول (3-9): مقادیر عددی فرکانس طبیعی و ثوابت ضرایب در ولتاژهای 2 و 4 ولت

پارامتر	$V_b = 2V$	$V_b = 4V$
ω_0	773.37	692.82
B_1	2	1.99
B_2	1.96×10^6	1.99×10^6
B_3	2.70	2.88
B_4	2	2
B_5	1	1
B_6	2	2
B_7	1.91	2.19
B_8	5.41	5.76
B_9	1.49×10^6	1.70×10^6
B_{10}	2.70	2.88
B_{11}	2.70	2.88
B_{12}	3.92×10^6	3.99×10^6
B_{13}	8.12×10^3	3.71×10^4
B_{14}	8.12×10^3	1.86×10^4

حل معادله (3-279) عبارتست از:

$$q_0 = A(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + cc \qquad (3\text{-}282)$$

از جایگذاری (3-282) در معادله (3-280) و حذف عبارت‌های سکولار، حل خصوصی زیر حاصل می‌شود:

$$q_1 = C_1 e^{2i\omega_0 T_0} + \bar{C}_1 e^{-2i\omega_0 T_0} + C_2 \tag{3-283}$$

$$D_1(A) = 0 \Rightarrow A = A(T_2) \tag{3-284}$$

جایگذاری (3-282) تا (3-284) در (3-281) و حذف جملات سکولار منجر می‌شود به:

$$q_2 = C_3 e^{3i\omega_0 T_0} + \bar{C}_3 e^{-3i\omega_0 T_0} + C_4 \tag{3-285}$$

از حذف جملات سکولار در معادله (3-281)، پاسخ فرکانسی حاصل می‌شود:

$$\left(\frac{C_5}{8}a^3 - \frac{C_6}{2}\omega_0 \sigma a\right)^2 = \left(\frac{C_7}{2}V_{ac}\right)^2 \tag{3-286}$$

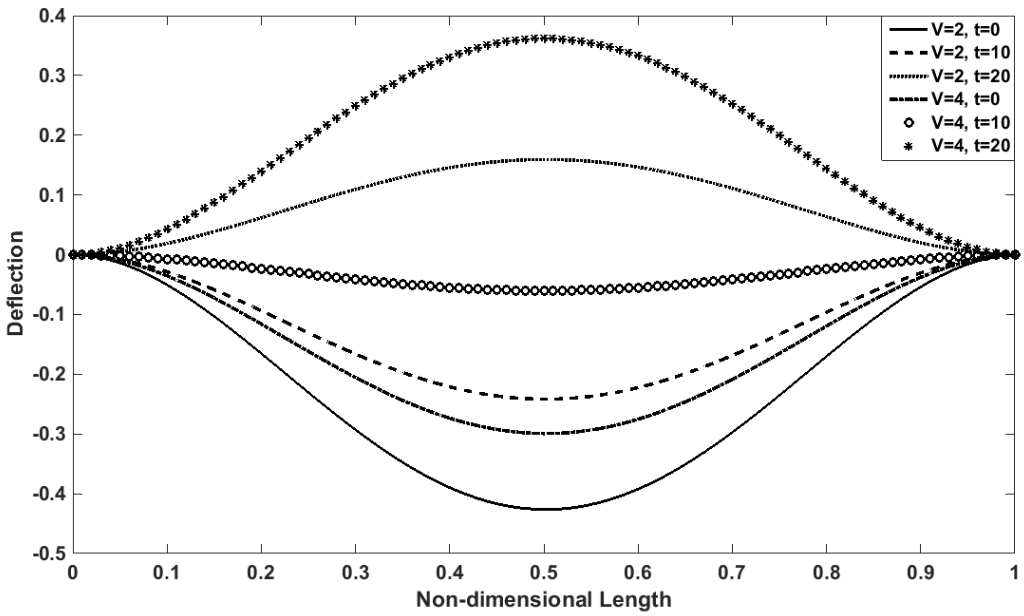
مقادیر ثوابت در معادلات (3-283)، (3-285) و (3-286) برای ولتاژهای 2 و 4 ولت برابر است با:

جدول (3-10): مقادیر عددی ثوابت حل در ولتاژهای 2 و 4 ولت

پارامتر	$V_b = 2V$	$V_b = 4V$
C_1	0.0043	0.0096
$\bar{C}_1$	0.0043	0.0096
C_2	-0.0260	-0.0576
C_3	-3.18×10^{-4}	-5.14×10^{-4}
$\bar{C}_3$	-3.18×10^{-4}	-5.14×10^{-4}
C_4	-0.0136	-0.0774
C_5	-1.74×10^{6}	-50.62×10^{5}
C_6	1.94	1.69
C_7	7873.09	3936.54

3-11-1 نتایج عددی

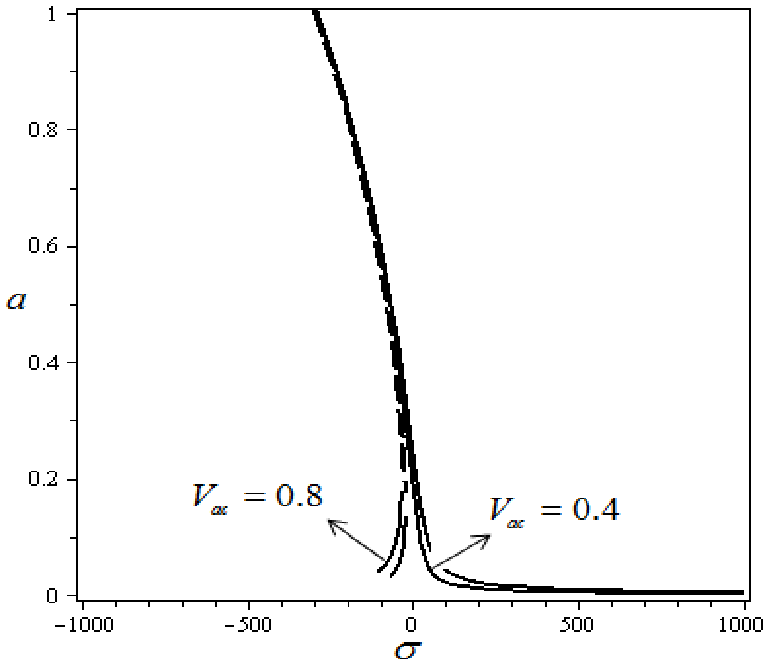
در این بخش همانند قسمت های قبل، نتایج برای ولتاژهای 2 و 4 ولت بدست می‌آید. در شکل (3-68) برای دو ولتاژ یادشده در مود اول و بازه‌های زمانی 10 ثانیه، خیز تیر رسم شده که منطبق بر شرایط مرزی مساله است. از این شکل مشخص است که در ابتدای شروع خیز، میزان جابجایی در ولتاژهای بالاتر کمتر است.

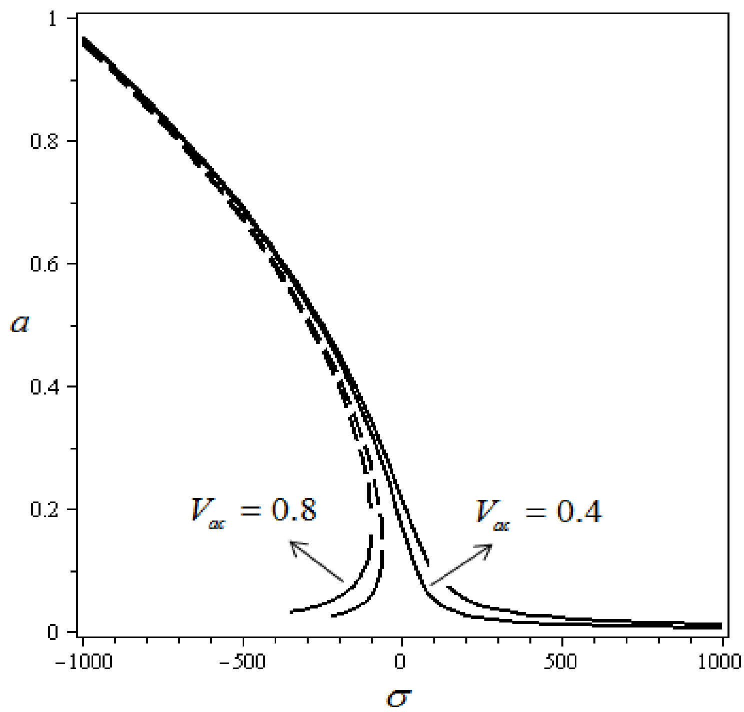


شکل (3-68): خیز تیر برای ولتاژهای 2 و 4 ولت در زمان‌های مختلف

در حالت تشدید اولیه نیز طبق معادله (3-286)، پاسخ فرکانسی برای ولتاژهای 2 و 4 ولت مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای بررسی وضعیت پاسخ فرکانسی در این دو ولتاژ مستقیم، دو ولتاژ متناوب 0,04 و 0,08 نیز در نظر گرفته شد تا اثرگذاری آن بر رفتار میکروتیر مورد بررسی قرار گیرد.

شکل (3-69) نمودار دامنه بر حسب پارامتر تنظیم را برای ولتاژ مستقیم 2 ولت و در ولتاژهای متناوب 0,04 و 0,08 نشان می دهد. از این نمودار پیداست که میکروتیر موردنظر دارای رفتار نرم شونده می باشد. همچنین در ولتاژ متناوب بزرگتر، ایجاد دامنه بیشینه در فرکانس تحریک بزرگتری رخ می‌دهد. همین بررسی برای ولتاژ مستقیم 4 ولت در شکل (3-70) انجام شده که همان نتایج ذکر شده را شامل می‌شود.

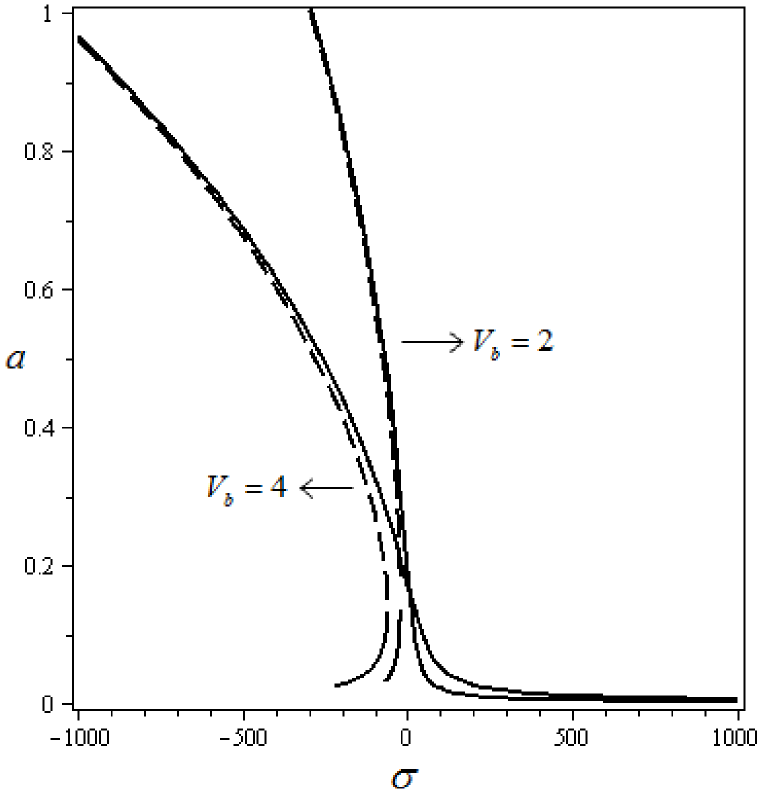




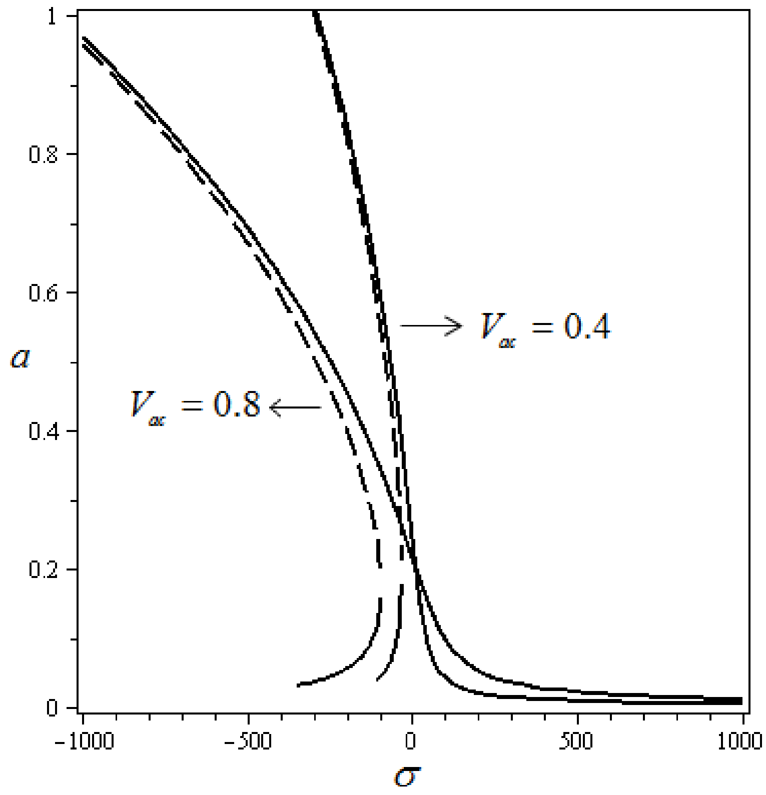
شکل (3-69): پاسخ فرکانسی برای $V_b = 2$ و $V_{ac} = 0.4, 0.8$

شکل (3-70): پاسخ فرکانسی برای $V_b = 4$ و $V_{ac} = 0.4, 0.8$

از مقایسه شکل‌های (3-69) و (3-70) مشخص است که با افزایش مقدار ولتاژ مستقیم، میزان نرم شوندگی افزایش می یابد. این مقایسه به طور جداگانه برای هر یک از ولتاژهای متناوب انجام شده است که در شکل‌های (3-71) و (3-72) نشان داده شده است.



شکل (3-71): مقایسه پاسخ فرکانسی برای $V_b = 2$ و $V_b = 4$ در $V_{ac} = 0.4$



شکل (3-72): مقایسه پاسخ فرکانسی برای $V_b = 2$ و $V_b = 4$ در $V_{ac} = 0.8$

3-12 جمع بندی فصل

در این فصل بر روی مدل‌سازی میکروتیر و میکروورق بر اساس مدل‌های هایپرالاستیک چندجمله‌ای بحث شد. مدل‌سازی اولیه میکروتیر بر اساس کار ژانگ و همکاران انجام و به جای پلیمر رسانا، از الاستومر نارسانا در بین دو الکترود انعطاف پذیر استفاده شد. برای بیان رفتار غیرخطی ماده از مدل‌های هایپرالاستیک نئوهوکین، یئو و بیدرمن بهره گرفته شد که در این بین مدل نئوهوکین به دلیل عدم داشتن تعداد جملات کافی در چگالی انرژی کرنشی توانایی بیان رفتار تیر را نداشت. لذا از دو مدل یئو و بیدرمن به ترتیب در تئوری‌های اویلر- برنولی و برشی استفاده گردید.

شرایط مرزی مورد استفاده در این تحقیق شامل حالت‌های گیردار و تکیه‌گاه ساده بوده که منجر به بروز عامل غیرخطی هندسی در معادلات از طریق اعمال رابطه کرنش- جابجایی فون کارمن شد.

برای حل معادلات حاکم از روش‌های نیمه تحلیلی پوانکاره و مقیاس های چندگانه و برای اعتبارسنجی پاسخ های زمانی از روش عددی رانجه-کوتای مرتبه چهارم استفاده شد که موید حل‌های بدست آمده از طریق روش‌های اغتشاشات بود.

در مطالعه ارتعاشی میکروتیر و میکروورق، هم ارتعاش آزاد و هم ارتعاش اجباری تحت تشدید اولیه مورد بررسی قرار گرفت. در بخش ارتعاش آزاد موارد مختلف همچون پاسخ‌های زمانی در مودهای مختلف، تاثیر عواملی همچون بیشینه دامنه، ضخامت های مختلف، نسبت منظر و ... بر فرکانس نرمال مورد مطالعه قرار گرفت. در بخش ارتعاش اجباری نیز بیشتر بر پاسخ فرکانسی تحت تشدید اولیه در مودهای مختلف، طول و شعاع های مختلف در میکروتیر و میکروورق و نیز اثر دامنه نیرو بررفتار سیستم‌های میکروالکترمکانیکی تمرکز شد.

کار مهم و نوین دیگری که در بحث ارتعاشی انجام پذیرفت معرفی تئوری تقویت شده تنش کوپل اصلاح شده برای مواد هایپرالاستیک بر اساس تئوری غیرکلاسیک تنش کوپل اصلاح شده بوده که می‌تواند راه گشای مطالعات بیشتر در این زمینه هم در کارهای تئوریک و هم آزمایشگاهی باشد. پاسخ‌های اخذ شده از این بخش در دو حالت حضور پارامتر مقیاس طول و نیز بعد از حذف آن مور دمطالعه قرار گرفت که منجر به رفتارهای منطقی و مناسب گردید.

مبحث دیگر در این فصل بررسی پایداری و ناپایداری pull-in در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی بوده است. در این بخش تلاش شد تا با ارائه یک مدل عمومی قابل اعمال در ترکیب‌بندی‌های مختلف محدوده بحرانی این نوع ناپایداری برای ولتاژ اعمالی، میدان الکتریکی اسمی و نسبت‌های کشیدگی مربوطه هم از طریق رسم نمودارهای میدان- ولتاژ و میدان- نسبت کشیدگی و هم با استفاده از ماتریس هسین در حالت‌های بارگذاری مختلف مورد محاسبه قرار گیرد.

علاوه بر مدل دی الکتریک الاستومر، ترکیب بندی دیگری نیز در این رساله مورد بررسی قرار گرفت. به این ترتیب که الکترود متصل به سطح زیرین میکروتیر جدا و با شکافی نسبت به این سطح بر روی زیرسازه ثابت شد. خیز تیر به دو بخش استاتیکی و دینامیکی تقسیم شد. حل استاتیکی برای معادله حاکم انجام شد و ولتاژ و خیز pull-in بدست آمد. سپس با وارد کردن این حل در معادله اولیه، حل دینامیکی انجام شد و رفتار میکروتیر تحت تشدید اولیه مورد بررسی قرار گرفت که بر خلاف دی الکتریک الاستومر دارای رفتار نرم‌شونده بود.

فصل 4:

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

فصل 4: نتیجه گیری و پیشنهادها

1-4: نتیجه گیری

در فصل اول رساله، مقدماتی همچون معرفی سیستم‌های میکرومکانیکی، مواد الاستومری به همراه کاربردها و نیز مزیت استفاده از آن‌ها، مروری بر ویژگی‌های مکانیکی رفتار لاستیکی، مواد هایپرالاستیک (بیان‌کننده رفتار الاستیک غیرخطی) به همراه انواع مدل‌ها و انواع تحریک‌ها که در الاستومرهای دی-الکتریک به کار می‌رود ارائه گردید. در فصل دوم مروری جامع بر کارهای تحقیقاتی در این زمینه انجام شده است. در فصل سوم ارتعاش آزاد و اجباری برای میکروتیر و میکروورق با دو شرط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار برای تئوری کلاسیک و عامل برش با در نظر گرفتن مدل‌های هایپرالاستیک یئو و بیدرمن بررسی و نیز اثر پارامترهای مختلف همچون شماره مود، طول، ضخامت و نسبت لاغری بر فرکانس مورد مطالعه قرار داده شد. علاوه بر تئوری‌های یادشده، تئوری نوین تنش کوپل اصلاح شده بر پایه تنش کوپل غیر کلاسیک نیز معرفی شد تا اثر میکرو بودن تیر لحاظ گردد. در کنار بحث ارتعاشی، ناپایداری pull-in در سیستم‌های الکترومکانیکی توسط یک مدل‌سازی عمومی مورد مطالعه قرار گرفت.

نتایج هر بخش در ادامه به صورت تیتروار ارائه می‌شود:

1- ارتعاش آزاد میکروتیر با تئوری اویلر برنولی و شرایط مرزی تکیه گاه ساده و گیردار

- اثر مستقیم بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال در مودهای مختلف

- افزایش میزان اثرگذاری بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال ($\frac{\omega}{\omega_0}$) در ضخامت‌های بیشتر
- اثر معکوس نسبت منظر ($\frac{L}{d}$) بر فرکانس نرمال در مود اول تا سوم و اثرگذاری بیشتر این پارامتر در مودهای بالاتر

2- ارتعاش آزاد میکروتیر با در نظر گرفتن عامل برش تحت مدل بیدرمن

- برتری استفاده از مدل بیدرمن نسبت به مدل یئو در حالت در نظرگرفتن برش به علت وجود جمله کرنش برشی در چگالی انرژی کرنشی مدل بیدرمن
- اثر معکوس نسبت منظر ($\frac{L}{d}$) بر فرکانس نرمال در مود اول تا سوم و اثرگذاری بیشتر این پارامتر در مودهای بالاتر
- میل کردن فرکانس نرمال به سمت فرکانس خطی در نسبت منظرهای بالاتر (تیر لاغرتر)

3- ارتعاش اجباری میکروتیر تحت مدل یئو

- رفتار سخت‌شونده میکروتیر در مودهای مختلف و افزایش میزان سخت‌شوندگی در مودهای بالاتر
- بیشتر بودن میزان سخت‌شوندگی در تیرهای با طول کوتاه‌تر
- ایجاد دامنه بیشینه در فرکانس تحریک بزرگتر

4- بررسی اثر اندازه در میکروتیر توسط تئوری تنش کوپل اصلاح شده و مدل بیدرمن

- معرفی شکل نوین تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای مواد هایپرالاستیک
- معادل سازی ثوابت تئوری‌های کلاسیک با ثوابت مدل بیدرمن

- میل کردن فرکانس نرمال تئوری تنش کوپل اصلاح شده به فرکانس نرمال تئوری کلاسیک در $d/l > 10$
- افزایش اختلاف فرکانسی تئوری غیرکلاسیک و کلاسیک در مودهای بالاتر

5- مطالعه ناپایداری pull-in در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی

- پیشنهاد یک مدل عمومی برای سیستم‌های الکترومکانیکی در ترکیب‌بندی‌های مختلف
- یافتن ولتاژ بحرانی، میدان الکتریکی بحرانی و نسبت کشیدگی بحرانی در بارگذاری‌های مختلف
- ناپایداری مدل بیدرمن در ولتاژهای پایین‌تر نسبت به مدل یئو

6- ارتعاش آزاد میکروورق متقارن محوری گیردار با مدل یئو

- اثر مستقیم بیشینه دامنه بر فرکانس نرمال در مودهای مختلف
- اثر معکوس نسبت منظر بر فرکانس نرمال در مودهای مختلف

7- ارتعاش اجباری میکروورق متقارن محوری گیردار با مدل یئو

- رفتار سخت‌شونده میکروتیر در مودهای مختلف و افزایش میزان سخت‌شوندگی در مودهای بالاتر
- بیشتر بودن میزان سخت‌شوندگی در تیرهای با طول کوتاه‌تر
- ایجاد دامنه بیشینه در فرکانس تحریک بزرگتر

8- مطالعه رفتار میکروتیر تحت نیروی الکتروستاتیکی

- رفتار نرم شونده میکروتیر در ولتاژهای مختلف
- بالاتر بودن میزان فرکانس تحریک در ولتاژهای متناوب بزرگتر با ولتاژ مستقیم یکسان
- بیشتر بودن میزان نرم شوندگی در ولتاژهای مستقیم بزرگتر با ولتاژ متناوب یکسان

4-2: پیشنهادها

- به‌کارگیری مدل‌های دیگر هایپرالاستیک همچون مدل اگدن، مدل هاینس- ویلسون و ...
- بررسی رفتار ارتعاشی در ورق‌های مستطیلی و نامتقارن
- بررسی رفتار ارتعاشی غشاءهای هایپرالاستیک
- بررسی انواع دیگر ناپایداری در اجزاء میکروالکترومکانیکی هایپرالاستیک
- به کارگیری نتایج در ربات‌های ساخته شده از الاستومرها
- اعمال تحریک‌های متنوع دیگر همچون تحریک مغناطیسی
- مطالعه مدل‌های هایپرالاستیک در تیرهای با سطح مقطع متغیر

منابع

منابع

[1] Liu C. (۲۰۰۵) “**Foundation of MEMS**”, Prentice Hall, pp ۱-۸.

[2] Feynman R. (۱۹٦۰) “There is plenty of room at the bottom” *Caltech’s engineering and science magazine*, ۲۳, ٥, pp ۲۲-۳٦.

[3] Brochu P. and Pei Q. (۲۰۱۰) “Advances in dielectric elastomers for actuators and artificial muscles” *Macromolecular,* ۳۱, pp ۱۰-۳٦.

[4] Mockensturm E.M., Goulbourne N.C., (۲۰۰٦). "Dynamic response of dielectric elastomers". *Int. J. Non-Linear. (Mech*. ٤۱, pp. ۳۸۸–۳۹٥.

[5] Johnson R. A. (۱۹۸۳) “**Mechanical Filters in Electronics**”, New York: Wiley.

[6] Kao H.Y. (۱۹۹۷) “Ultrafast optical logic gate using a semiconductor laser amplifier operating at transparency in a loop mirror”, *Laser and Electro-Optics, Baltimor*, USA.

[7] Bannon F.D. Clark J.R. and Nguyen C.T.C. (۲۰۰۰) “High-Q HF Micromechanical Filters”, *IEEE, Journal of Solid-State Circuits*, ۳٥, ٤, pp. ٥۱۲-٥٥۷.

[8] Wang K. Wong A. and Nguyen C.T.C. (۲۰۰۰) “VHF Free-Free beam High-Q MicromechanicalResonators”, *IEEE Journal of MicroElectroMechanical Systems*, ۹, ۳, pp.۳٤۷-۳٦۰.

[9] Abdelmoneum M. A. Demirci M. U. and Nguyen C.T.C. (۲۰۰۳) “Stemless wine glass-mode disk micromechanical resonators”, *Proceedings of IEEE Int. Conf. Micro-Electro-Mechanical Systems*, Kyoto, Japan, pp.٦۹۸-۷۰۱.

[10] Seibert D.J. and Schoche.N. (۲۰۰۰) “**Direct Comparison of Some Recent Rubber Elasticity Models** ” *Rubber Chemistry and Technology*. ۷۳, ۲, pp. ۳٦٦-۳۸٤.

[11] Senturia S. D. (۲۰۰۱) “**Microsystem design**”. Kluwer Academic Publishers.

[12] Bettinali F. Dusi A. (۲۰۰٤) “Laminated rubber bearings for seismic applications” *Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids*. ٤٥۲, pp. ۲۳۳-۲٥۲.

[13] Johnson, P.S. (۲۰۰۱) “**Rubber Processing: An Introduction**” Hanser Publishers.

[14] Dick J.S. (۲۰۰٤) “**How to Improve Rubber Compounds: ۱٥۰۰ Experimental Ideas for Problem Solving”**.Hanser Publishers.

[15] Treloar L.RG. (۱۹٤۳)" The elasticity of a network of long-chain molecules". *Transactions of the Faraday Society* ۳۹, pp. ۳٦-٤۱.

[16] Treloar L.RG. (۱۹٤٤) "Stress-strain data for a vulcanized rubber under various types of deformation" *Transactions of the Faraday Society* ٤۰ , pp ٥۹-۷۰.

[17] Carpi F. et al. (۲۰۰۷) " **Dielectric elastomers as electromechanical transducers**" Elsevier.

[18] Marckmann G. Verron E. (۲۰۰٦) "Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials" *Rubber chemistry and technology*, ۷۹. ٥. pp ۸۳٥:۸٥۸.

[19] Yeoh O.H. (۱۹۹۰) "Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates" *Rubber Chemistry and Technology*, ٦۳, pp ۷۹۲-۸۰٥.

[20] Manuel J. Garcia R. Oscar E. Ruiz S. Carlos L. (۲۰۰٥) "**Technical report, Hyperelastic material modeling. Laboratorio CAD/CAM/CAE**" Department of mechanical engineering, EAFIT University.

[21] ISO. Iso ٥۲۷. (۱۹۹۷) "**Plastics – determination of tensile properties – part ٥: Test conditions for unidirectional fibre-reinforced plastic composites**". Annual Book of ASTM Standars, pp ۱–۹.

[22] ASTM, International. (۲۰۰۲) "**Astm, Standard test methods for vulcanized rubber and thermoplastic elastomers – tension**" Annual Book of ASTM Standars, pp ۱–۱٤.

[23] Crocker L. Duncan B. Maxwell A and Hunt R. (۱۹۹۹) "Verification of hyperelastic test methods" *CMMT(A)*, ۲۲٦, pp ۱-۲۷.

[24] Holland J.H. (۱۹۷٥) "**Adaption in natural and artificial systems**". University of Michigan Press.

[25] Goldberg D.E. (۱۹۹٤) "**Algorithmes genetiques, exploitation, optimization et apprentissage automatique**". Addison-Wesley eds.

[26] Liu C. Cohen Y.B. (۱۹۹۹) "scaling laws of microactuators and potential applications of electroactive polymers in MEMS" *Proceedings of SPIE's ۷th Annual International Symposium on Smart Structures and Mareials*, ۳۳, No ۳٦٦۹.

[27] Bell D.J. Lu T.J. Fleck N.A. Spearing S.M. (۲۰۰٥) "MEMS actuators and sensors: Observation on their performance and selection for purpose" *Journal of Micromechanical and Microengineering*. ۱٥, pp ۱٥۳-۱٦٤.

[28] Dobbelaere P.D. Falta K. Fan L. Gloeckner S. Patra S. (٢٠٠٢) “Digital MEMS for optical switching” *IEEE Communicatios Magaz*ine, ٢, pp ٨٨-٩٥.

[29] Jin J. Yih T.C. Higuchi T. Jeon J.U. (١٩٩٨) “Direct electrostatic levitation and propulsion of silicon wafer”. *IEEE Transaction on Industry Application*, l ٣٤, ٥.pp ٩٧٥-٩٨٤.

[30] Chaterjee S. Pohit G. (٢٠٠٩) "A large deflection model for the pull-in analysis of electrostatically actuated microcantilever beams" *Journal of Sound and Vibration*, ٣٢٢, pp ٩٦٩–٩٨٦.

[31] Hassanpour Pezhman A., Esmailzadeh Ebrahim, Cleghorn William L., . Mills James K. Nonlinear vibration of micromachined asymmetric resonators. Journal of Sound and Vibration ٣٢٩ (٢٠١٠) ٢٥٤٧–٢٥٦٤.

[32] Mojahedi M. Moghimi Zand M. Ahmadian M.T. (٢٠١٠) "Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method" *Applied Mathematical Modelling*, ٣٤, pp ١٠٣٢–١٠٤١.

[33] Mestrom R.M.C. Fey R.H.B. Phan K.L. Nijmeijer H. (٢٠١٠) “Simulations and experiments of hardening and softening resonances in a clamped–clamped beam MEMS resonator” *Sensors and Actuators A*,١٦٢, pp ٢٢٥–٢٣٤.

[34] Rasekh M. Khadem S.E. (٢٠١١) “Pull-in analysis of an electrostatically actuated nano-cantilever beam with nonlinearity in curvature and inertia” *International Journal of Mechanical Sciences*, ٥٣, pp ١٠٨–١١٥.

[35] Feng C. Jiang L. Lau W. M. (٢٠١١) “Dynamic characteristics of a dielectric elastomer-based microbeam resonator with small vibration amplitude” *J. Micromech. Microeng*. ٢١, pp ١-٨.

[36] Fu Y. Zhang J. Wan L. (٢٠١١) “Application of the energy balance method to a nonlinear oscillator arising in the microelectromechanical system (MEMS)” *Current Applied Physics* ١١, pp ٤٨٢-٤٨٥.

[37] Qian Y.H. Ren D.X. Lai S.K. Chen S.M. (٢٠١٢) "Analytical approximations to nonlinear vibration of an electrostatically actuated microbeam" *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* ١٧ , pp١٩٤٧–١٩٥٥.

[38] Pratiher B. (٢٠١٢) “Tuning the Nonlinear Behaviour of Resonant MEMS Sensors Actuated Electrically” *Procedia Engineering*, ٤٧, pp ٩ – ١٢.

[39] Qian Y.H. Duan C.M. Chen S.M. Chen S.P. (٢٠١٢) “ Asymptotic analytical solutions of the two-degree-of- freedom strongly nonlinear van der Pol oscillators with cubic couple terms using extended homotopy analysis method” *Acta Mechanica*, ٢٢٣, ٢, pp ٢٣٧-٢٥٥.

[40] Yang a J., Hub Y.J., Kitipornchai S.. Electro-dynamic behavior of an electrically actuated micro-beam: Effects of initial curvature and nonlinear deformation. Computers and Structures ٩٦-٩٧ (٢٠١٢) ٢٥–٣٣.

[41] Rezazadeh G. Madinei H. Shabani R. (٢٠١٢) "Study of parametric oscillation of an electrostatically actuated microbeam using variational iteration method" *Applied Mathematical Modelling*, ٣٦, pp ٤٣٠–٤٤٣.

[42] Ghayesh M. H. Farokhi H. Amabili M. (٢٠١٣) “Nonlinear behaviour of electrically actuated MEMS resonators” *International Journal of Engineering Science* ٧١, pp ١٣٧-١٥٥.

[43] Anchit J. Kaneria D. S. Sharma R. Trivedi R. "(٢٠١٣) Static Analysis of Electrostatically Actuated Micro Cantilever Beam", *Procedia Engineering*, ٥١, pp٧٧٦ – ٧٨٠.

[44] Cai K. Gao Y. Qing H. (٢٠١٣) “Post-buckling Solutions of Hyper-elastic Beam by Canonical Dual Finite Element Method” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ٢٣, pp ١-٢٠.

[45] Ansari R. Mohammadi V. Faghih Shojaei M. Gholami R. Sahmani S. (٢٠١٣) “Postbuckling characteristics of nanobeams based on the surface elasticity theory”, *Composites: Part B*, ٥٥, pp ٢٤٠–٢٤٦.

[46] Baghani M. Mazaheri H. Salarieh H. (٢٠١٣) “Analysis of large amplitude free vibrations of clamped tapered beams on a nonlinear elastic foundation” *Appl. Math. Modelling*, ١٣, pp١-١٨.

[47] Gaonkar A.K. Kulkarni S.S. (٢٠١٣)" Model order reduction for dynamic simulation of beams with forcing and geometric nonlinearities" *Finite ElementsinAnalysisandDesign*,٧٦, pp ٥٠–٦٢.

[48] Stoykov S. Ribeiro P. (٢٠١٣) “Non-linear vibrations of beams with non-symmetrical cross sections” *International journal of non-linear* mechanics, ٥٥, pp١٥٣–١٦٩.

[49] Liu C. Wang C. (٢٠١٤) “Numerical investigation into nonlinear dynamic behavior of electrically-actuated clamped-clamped micro-beam with squeeze-film damping effect” *Applied Mathematical Modelling*, ٣٨, pp ٣٢٦٩-٣٢٨٠.

[50] Bhushan A., Inamdar M..M, Pawaskar D.N.. (٢٠١٤), “Simultaneous planar free and forced vibrations analysis of an electrostatically actuated beam oscillator”, *International Journal of Mechanical Sciences*, ٨٢, pp ٩٠–٩٩.

[51] Feng C. Yu L. Zhang W. (٢٠١٤) "Dynamic analysis of a dielectric elastomer-based microbeam resonator with large vibration amplitude" *International Journal of Non-Linear Mechanics*, ١٨, pp ١-٦

[52] Peng J.S. Yang L. Luo G.B. Yang J. (٢٠١٤) “Nonlinear electro-dynamic analysis of micro-actuators: Effect of material nonlinearity” *Applied Mathematical Modelling*, ٣٨, pp ٢٧٨١–٢٧٩٠.

[53] Azimloo H .Rezazadeh G. Shabani R. Sheikhlou M. (٢٠١٤) “Bifurcation analysis of an electro-statically actuated micro-beam in the presence of centrifugal forces” *International JournalofNon-LinearMechanics*, ٦٧, pp٧–١٥.

[54] Han J. Zhang Q. Wang W. (٢٠١٤) “Design considerations on large amplitude vibration of a doubly clamped microresonator with two symmetrically located electrodes” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, ١٤, pp ١-٤٦.

[55] Zhu K. Chung J. (٢٠١٤) “Nonlinear lateral vibrations of a deploying Euler-Bernoulli beam with a spinning motion” *International Journal of Mechanical Sciences*, ١٤, pp ١-٣٨.

[56] Cui D.F. Hu H.Y. (٢٠١٤) “Primary resonance of lateral vibration of a heated beam with anaxialstick–slip–stopboundary” *Journal of Sound and Vibration*, ٣٣٩, ١٧, pp ٢٣٠-٢٤٦.

[57] Ouakad H. M. (٢٠١٤) “Static response and natural frequencies of microbeams actuated byout-of-planeelectrostaticfringing-fields” *International journal of non-linear mechanics*, ٦٣, pp ٣٩–٤٨.

[58] Gunda J. B. (٢٠١٤) “Thermal post-buckling & large amplitude free vibration analysis of Timoshenko beams: Simple closed-form solutions” *Applied Mathematical Modelling*, ٣٨, ١٧, pp ٤٥٤٨- ٤٥٥٨.

[59] Hosseini S.A.A. Zamanian M. Shams Sh. Shooshtari A. (٢٠١٤) “Vibration analysis of geometrically nonlinear spinning beams” *Mechanism and Machine Theory*, ٧٨, pp ١٥–٣٥.

[60] Martins P. A. L. Natal Jorge S. R. M. A. Ferreira J. M. A (٢٠٠٦) “ A Comparative Study of Several Material Models for Prediction of Hyperelastic Properties: Application to Silicone-Rubber and Soft Tissues” *Blackwell Publishing Ltd j Strain*. ٤٢, pp ١٣٥–١٤٧.

[61] Selvadurai A.P.S. (٢٠٠٦) "Deflections of a rubber membrane" *Journal of the Mechanics and Physics of Solids,* ٥٤, pp ١٠٩٣–١١١٩.

[62] Wissler M. Mazza E. (٢٠٠٧) "Mechanical behavior of an acrylic elastomer used in dielectric elastomer actuators" *Sensors and Actuators A*, ١٣٤, pp ٤٩٤–٥٠٤.

[63] Batra R.C. Porfiri M. Spinello D. (٢٠٠٨) "Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field" *Journal of Sound and Vibration*, ٣٠٩, pp ٦٠٠–٦١٢.

[64] Kim B. Lee S. B. Lee J .Cho S. Park H. Yeom S. Park S. H. (٢٠١١) "A Comparison Among Neo-Hookean Model, Mooney Rivlin Model, and Ogden Model for Chloroprene Rubber" *International journal of precision engineering and manufacturing*, ١٣, ٥, pp. ٧٥٩-٧٦٤.

[65] Soares R.M. Gonçalves P. B. (٢٠١٤) "Large-amplitude nonlinear vibrations of a Mooney–Rivlin rectangular membrane" *Journal of Sound and Vibration*, ٣٣٣, pp ٢٩٢٠–٢٩٣٥.

[66] Breslavsky I. D. Amabili M. Legrand M. (٢٠١٤) "Physically and geometrically non-linear vibrations of thin rectangular plates" *International Journal of Non-Linear Mechanics,* ٥٨, pp ٣٠–٤٠.

[67] Maluf N. Williams K. (٢٠٠٠) "**An Introduction to Microelectromechanical Systems Engineering"** Artech House, Boston.

[68] Quake S. R. Scherer A. (٢٠٠٠) "From micro to nanofabrication with soft materials" *Issues in nanotechnology,* ٢٩٠, pp ١٥٣٦-١٥٤٠.

[69] Sirringhaus H. Tessler N., Friend R. H. (١٩٩٨) "Integrated optoelectronic devices based on conjugated polymers" *Science,* ٢٨٠, pp ١٧٤١-٤

[70] Sirringhaus H. Kawase T. Friend R. H. Shimoda T. Inbasekaran M. Wu W. Woo E. P. (٢٠٠٠) "High-resolution inkjet printing of all-polymer transistor circuits" *Science*, ٢٩٠, ٥٤٩٩, pp ٢١٢٣-٦.

[71] Horvath R. Lindvold L. R. Larsen N. B. (٢٠٠٣) "Fabrication of all-polymer freestanding waveguides" *Journal of Micromechanics and Microengineering*. ١٣, pp ٤١٩-٢٤.

[72] Atkinson G. M. Pearson R. Ounaies E. Z. Park C. Harrison J. S. Dogan S. Midkiff J. A. (٢٠٠٣), "Novel piezoelectric polyimide mems" *The ١٢th International Conference on Solid State Sensors, Actuators and Microsystems,* Boston, USA, pp. ٧٨٢-٧٨٥.

[73] Zhao Y. Cui T. (۲۰۰۳) “Fabrication of high-aspect-ratio polymer-based electrostatic comb drives using the hot embossing technique” *Journal of Micromechanics and Microengineering*. ۱۳, pp ٤۳۰-٤۳٥.

[74] Zhang X. R. Xu X. Rubenchik A.M. (۲۰۰٤) “Simulation of microscale densification during femtosecond laser processing of dielectric materials” *Applied Physics A*, ۷۹, ٤, pp ۹٤٥-۹٤۸.

[75] Jagar E. W. H. Smela E. Inganas O. (۲۰۰۰) “Microfabrication conjugated polymer actuators” *Science*,۲۹۰, pp۱٥٤۰-۱٥٤٥.

[76] Chronis N. Lee L. P. (۲۰۰٤) “Polymer MEMS-based microgripper for single cell manipulation ”*Proceedings of the ۱۷th International conference on MEMS*, Maastricht, The Netherlands, p. ۱۷-۲۲.

[77] Nguyen N. T. Ho S. S. Low C. L. N. (۲۰۰٤) “A polymeric microgripper with integrated thermal actuators” *Journal of Micromechanics and Microengineering*. ۱٤, ۷, pp ۹٦۹.

[78] Gaspar J. Chu V. Conde J. P. (۲۰۰۳) “Electrostatic actuation of thin-film microelectromechanical structures” *Journal of Applied Physics*. ۹۳, ۱۰۰۱۸, pp ۱-۱۳.

[79] Gaspar J. Chu V. Conde J. P. (۲۰۰٥) “Electrostatically actuated thin-film amorphous silicon microbridge resonators” *Journal of Applied Physics*. ۹۷, ۰۹٤٥۰۱, pp ۱-۱۲.

[80] Thaysen J. Cinkaya A. D. Y. Vettiger P. Menon A. (۲۰۰۲) “Poly,er-based stress tensor with integrated readout” *Journal of Physics D*, ۳٥, ۲۱, pp ۲٦۹۸-۲۷۰٤.

[81] Chiang C. K. Fincher C. R. Park Y. W. Heeger A. J. Shirakawa H. Louis E. J. Gua S. C. MacDiarmid A. G. (۱۹۷۷) “Electrical conductivity in doped polyacetylene” *Physical Review Letter*. ۳۹, ۲۲, pp ۱٤۷۲.

[82] Koezuka H. Tsumura A. Ando T.(۱۹۸۷) “Field effect transistor utilizing conducting polymers” *Synthic Metals*. ۱۸, ۱, pp ٦۹۹-۷۰٤.

[83] Ohmori Y. Muro K. Onoda M. Yoshino K. (۱۹۹۲) “Fabrication and characteristics of Schottky gated field effect transistors utilizing poly (۱،٤-napthalene vinylene) and poly(p-phenylene vinelene)” *Japanese journal of applied physics*, Part ۲, ۳۱, L٦٤٦.

[84] Kuo C. T. Weng S. Z. Huang R. L. (۱۹۹۷) “Field-effect transistor with polyaniline and poly (۲-alkylaniline) thin film as semiconductor” Synthetic *Metals*, ۸۸, ۲, pp ۱۰۱-۱۰۷.

[85] Yuan R. K. Yang S. C. Yuan H. Jiang R. L. (۱۹۹۱) “Surface field effect of polyaniline film” *Synthetic Metals*. ٤۱, ۱, pp ۷۲۷-۷۳۰.

[86] Zhang G. Gaspar J. Chu V. Conde J. P. (٢٠٠٥) "Electrostatically actuated polymer microresonators" *Applied Physics Letters*, ٨٧, pp ١-٤.

[87] Zhang G. Gaspar J. Chu V. Conde J. P. (٢٠٠٧) "Electrostatically actuated conducting polymer microbridges", *Journal of Applied Physics*, ١٠١, ٠٦٤٥٠٧, pp ١-٩.

[88] Gaspar J. Chu V. Conde J. P. (٢٠٠٤) "Amorphous silicon electrostatic microresonators with high quality factors" *Applied Physics Letters*. ٨٤, ٤, pp ٦٢٢-٦٢٦.

[89] Rao S. S. (٢٠٠٧) "**Vibration of Continuous Systems**" New Jersey, USA, John Wiley & Sons, Inc.

[90] Yang F. Chong A.C.M. Lam D.C.C. Tong P. (٢٠٠٢) "Couple stress based strain gradient theory for elasticity" *International Journal of Solids and Structures*, ٣٩, pp ٢٧٣١-٢٧٤٣.

[91] Stark K.H, Garton C.G. (١٩٩٥) "Electric strength of irradiated polythene", *Nature*, ١٧٦, pp ١٢٢٥-١٢٢٦.

[92] Colonnelli S. (٢٠١٢) "Instability of dielectric elastomer actuators" Phd thesis, university of Trento

[93] Leng J. Liu L. Liu Y. Yu K. Sun S. (٢٠٠٩) "Electromechanical stability of dielectric elastomer" *Applied Physics Letter*, ٩٤, ٢١١٩٠١, pp ١-٤.

Abstract

Micro-electro-mechanical systems mostly made based on silicon and its derivatives tended to other materials such as polymers and rubbers. Elastomers, between polymeric materials, investigated in this study due to their special properties, specially their rubberic behavior. Dielectric elastomers have simple structure consisting of elastomer and parties electrodes, so they have capacity behavior. This feature, along with other features such as high strain, flexibility, compliance with environmental, quick response introduces elastomers as highly desirable material in a variety of applications of artificial muscles, clamps, sensors and resonators. In this thesis, the dynamic behavior and vibrating mechanical member of microelectromechanical systems made of this material will be studied using Hayprelastic models. These models anticipate rubberic behavior and nonlinear relationship of stress and strain in these materials, well and with selecting these models properly, we can involve material nonlinearity in addition to other factors. In the first chapter of the thesis, we present some preliminaries such as micromechanical systems, elastomeric materials with desired applications and advantages of them, an overview of the mechanical properties of rubber, hayperelastic materials (expressing non-linear elastic behavior) as well as models, types of stimulation that is used in the dielectric elastomers. In the second chapter a comprehensive overview is done about the researches being done in this area. Free and forced vibration of micro-beam and micro-plate for classical Euler-Bernouli and shear theories with considering Yeoh and Biderman hyperelastic models will be studied in the third chapter. Meanwhile, the effects of various parameters such as mode number, length, thickness and aspect ratio on frequency will be investigated. In addition, we apply modified couple stress theory to consider size effect and its results with diminishing length scale parameter will be compared with classical theory results. Pull-in stability for Yeoh and Biderman models and critical magnitudes of voltage, nominal electric field and stretche ratio will be achieved. In addition to the proposed model, we consider different configuration with one electrode on top and another fixed electrode with a gap from bottom surface. Dynamic behavior of this microbeam, pull-in voltage and deflection will be investigated with one mode analysis for two different voltages under electrostatic actuation.

Keywords:

Hyper-elastic models, Euler-Bernoulli theory, Shear theory, Modified couple stress theory, Pull-in.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering

Investigation of dynamic and vibrational behavior of mechanical parts of MEMS made of nonlinear elastic materials using hyperelastic models

Saeed Danaee Barforooshi

Supervisor:

Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

September 2017