بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد مهندسی طراحی کاربردی

بررسی ارتعاشات غیرخطی و پاسخ فرکانسی نانولوله‌ی کربنی خمیده‌ی انتقال‌دهنده‌ی سیال پوشیده شده با لایه‌های پیزوالکتریک

نگارنده: وحید محمدهاشمی

اساتید راهنما

دکتر امیر جلالی

دکتر حبیب احمدی

دی ۱۳۹۵

سپاس از:

دکتر جلالی و **دکتر احمدی** به خاطر یاری‌ها و راهنمایی‌های بی چشم‌داشت ایشان که بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان‌تر نمودند.

تقدیم به :

پدر و **مادر** دلسوز و مهربانم و به تمام آزاد مردانی که نیک می‌اندیشند و عقل و منطق را پیشه خود نموده و جز رضای الهی و پیشرفت و سعادت جامعه، هدفی ندارند. دانشمندان، بزرگان، و جوانمردانی که جان و مال خود را در حفظ و اعتلای این مرز و بوم فدا نموده و می‌نمایند.

تعهد نامه

اینجانب، **وحید محمدهاشمی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه **ارتعاشات غیرخطی و پاسخ فرکانسی نانولوله‌ی خمیده‌ی انتقال‌دهنده‌ی سیال پوشیده شده با لایه‌های پیزوالکتریک**

تحت راهنمایی **دکتر امیر جلالی** و **حبیب احمدی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «**Shahrood University of Technology**» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پژوهش، ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌ی کربنی خمیده‌ی انتقال‌دهنده‌ی سیال پوشیده شده با لایه‌های پیزوالکتریک، مورد مطالعه قرار گرفته است. از تئوری تیر اولر-برنولی به منظور دستیابی به معادله حرکت برای رفتار ارتعاشی سیستم استفاده شده است. شرط مرزی لغزشی نانولوله‌ی کربنی انتقال‌دهنده‌ی سیال بر اساس عدد نادسن فرض شده است و مدل ریاضی سازه با استفاده از اصل همیلتون توسعه یافته است. سپس از روش گلرکین برای گسسته‌سازی معادله حرکت استفاده شده و پاسخ فرکانسی سیستم با استفاده از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه برای تحریکاولیه و پارامتریک بر اساس پیزوالکتریک استخراج شده است. در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف از جمله ضخامت و ولتاژ لایه‌ی پیزوالکتریک، میزان خمیدگی نانولوله، عدد نادسن و پارامتر غیرمحلی بر فرکانس طبیعی و پاسخ فرکانسی سیستم بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی:

نانولوله‌ی کربنی خمیده، نانولوله‌ی انتقال‌دهنده‌ی سیال، نانوسیستم‌های مبتنی بر پیزوالکتریک، عدد نادسن.

فهرست

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

فصل اول

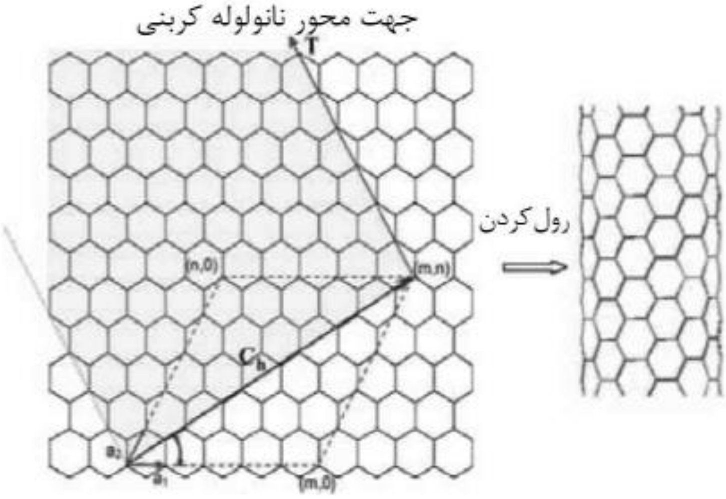
(مقدمه)

## ۱-۱.	خواص و کاربرد نانولوله‌های کربنی

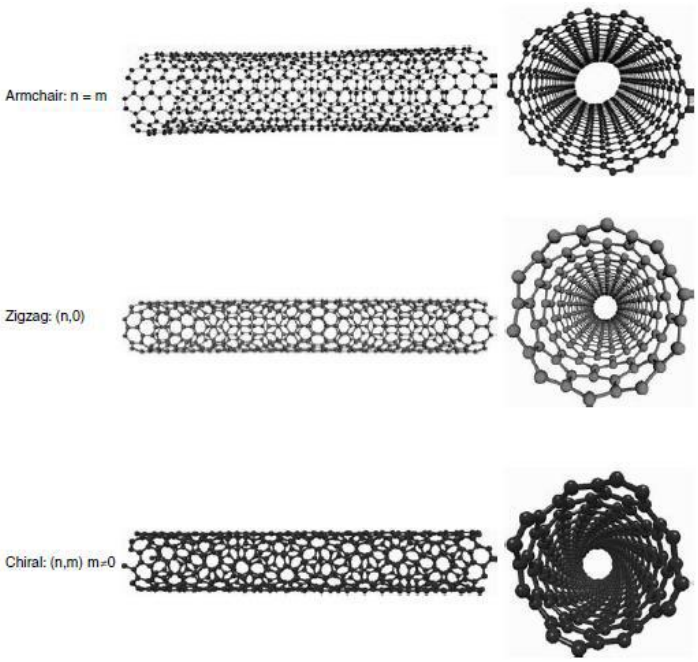
نانولوله‌های کربنی (CNTs) یکی از آلوتروپ‌های اصلی کربن با شکل استوانه‌ای است که ابتدا توسط ایجیما در سال ۱۹۹۱ کشف شدند [۱]. در واقع با توجه به خواص منحصر به‌فرد کربن، فرم‌های مختلفی مانند الماس، گرافیت، فولرین، گرافن و ... برای این عنصر یافت شده است [۲] . دو مورد اول ذکر شده، فرم‌های شناخته شده‌تری نسبت به سایر آلوتروپ‌ها هستند. در الماس هر اتم کربن به چهار اتم کربن دیگر پیوند می‌خورد در حالی که در گرافیت اتم‌های کربن تنها در دو جهت پیوند دارند [۲]. CNTها به عنوان یکی از اعضای خانواده‌ی فولرین شناخته می‌شوند که با رول کردن ورق گرافن ساخته می‌شوند. شکل اتمی این ورق‌ها به صورت شبکه‌ی شش‌ضلعی از اتم های کربن است و خواص استثنایی آنها به طریقه‌ی رول کردن ورق بستگی دارد. قطر این سازه می تواند از ۱ تا ۱۰۰ نانومتر متفاوت باشد و طول آنها می‌تواند تا ۱ میلی‌متر برسد [۳]. CNTها همچنین دارای مدول یانگ بیش از TPa ۱، چگالی حدود ۱/۳ g/cm^3 و نسبت طول به قطر ۱۳۰۰۰۰۰۰ هستند [۴,۵]

به طور کلی، دو نوع نانولوله وجود دارد، نانولوله‌ی تک‌جداره (SWNT) و نانولوله‌های چندجداره (MWNT). SWNTها از رول کردن تنها یک ورق گرافن و MWNTها از رول کردن چند لایه‌ی گرافن به صورت استوانه‌های متحدالمرکز به وجود می‌آیند [۶]. SWNT دارای سه شکل ساختاری ازجمله کایرال، زیگزاک و آرمچیر[۱] است [۷]. به منظور تعیین نوع SWNT بردار کایرال مطابق رابطه‌ی $C_h = na_1 + ma_2$ تعریف می‌شود که در آن (n,m) تعداد مراحل گذر از طول پیوند کربن هستند. چنانچه ورق گرافن با شاخص (n,0) رول شود CNT از نوع زیگزاک و اگر با شاخص (n,n) رول شود از نوع آرمچیرتولید می‌شود و نیز سایر موارد با شاخص (n,m) مشخص می‌شوند. شماتیک سه ساختار SWNT در شکل ۱ نشان داده شده است[۸,۹].

[۱] Chiral, Zigzag and Armchair



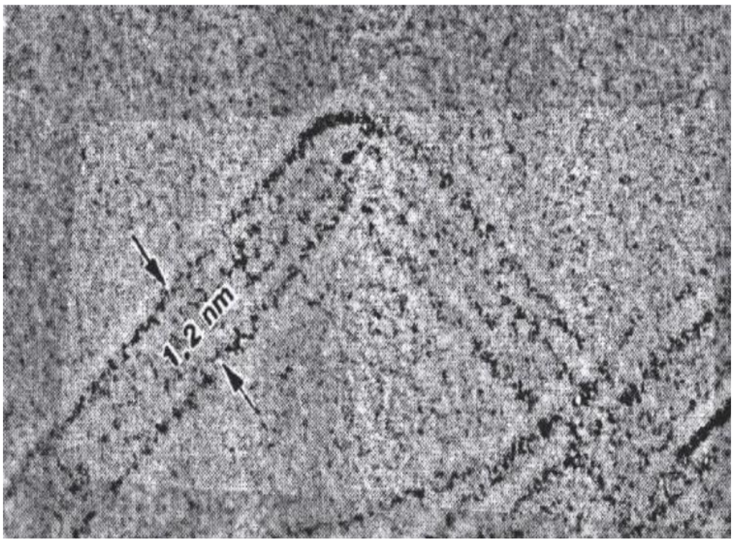
شکل ۱-۱. شماتیک ورق گرافن



شکل ۱-۲. شماتیک سه نوع اصلی نانولوله‌ی کربنی

در بیان خواص مکانیکی CNTها این نکته قابل ذکر است که CNTها به دلیل داشتن مدول الاستیسیته‌ی بالا دارای سفتی[1] و استحکام کششی[2] بسیار زیادی می‌باشند به همین دلیل از این مواد می‌توان درمکانیزم‌های چرخشی، پیچشی و خمشی استفاده کرد [۷,۱۰] شکل ۲ تصویری از یک CNT خمیده که توسط میکروسکوپ الکترونی با وضوح بالا گرفته شده است را نشان می‌دهد. مشاهده شده است وقتی که CNT به حالت اولیه‌ی خود باز می‌گردد، هیچ گونه تغییر شکل پلاستیکی ناشی از خمش، در آن دیده نمی‌شود [۱۱].

[1] Stiffness
[2] Tensile strength



شکل ۱-۳. تصویر با وضوح بالا میکروسکوپ الکترونی از یک CNT خمیده [۱۱]

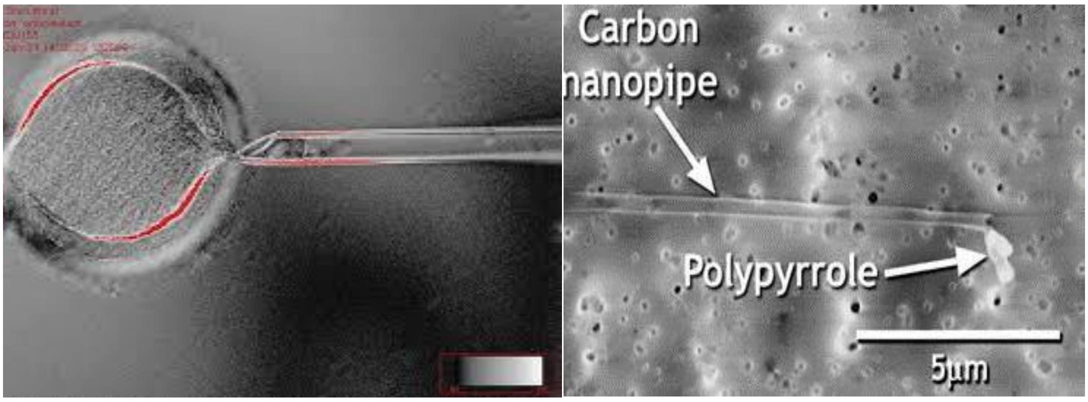
برخی از CNTها با توجه به ساختار ریزشان حتی در دمای اتاق نیز رسانایی الکتریکی بالایی را نشان می‌دهند در نتیجه این مواد قادر خواهند بود که جربان الکتریکی زیادی را از خود عبور دهند. این خاصیت باعث شده است که استفاده از این مواد در دستگاه‌های الکترونیکی، بسیار مورد توجه قرار گیرند [۷,۱۲]. تحقیقات در این زمینه نشان می‌دهد که مقاومت الکتریکی SWNT تنها در حدود 10^{-4} ohm در دمای ۲۷ درجه سانتیگراد است [۱۳].

خواص منحصر به‌فرد CNT، این سازه‌ها را برای بسیاری از کاربردهای مهندسی مناسب کرده است. با توجه به خاصیت فوق العاده جذب و بازکشت[۱] بسیار زیاد هیدروژن توسط CNT، از این سازه برای مخازن هیروژن با ظرفیت بالا استفاده می‌شود [۱۴]. همچنین از این مواد به عنوان الکترودهای باتری به دلیل ظرفیت غیر قابل برگشت[۲] و پسماند ولتاژ[۳] استفاده می‌شود [۱۵]. یکی از کاربردهای اساسی CNTها استفاده از این سازه‌ها به عنوان مواد پرکننده‌ی[۴] ایده آل برای سازه های کامپوزیتی است [۱۶,۱۷]. در واقع، وزن سبک، استحکام بالا، و خواص حرارتی فوق العاده‌ی CNTها، آنها را به مواد بسیار جذاب برای ساخت سازه‌های کامپوزیتی با چقرمگی بالا، استحکام بالا، و رسانایی الکتریکی و حرارتی بالا تبدیل کرده است [۱۸]. علاوه بر این، از CNTها، می توان برای ساخت نوسانگرهای مکانیکی با فرکانس طبیعی بسیار بالا به دلیل مدول الاستیسیته زیاد آنها استفاده کرد [۱۹].

یکی دیگر از کاربردهای مهم CNTها استفاده از آنها درکاوش سلول‌ها و یا انتقال دارو و پروتئین به سلول با حداقل نفوذ و آسیب دیدگی است [۲۰]. همچنین خاصیت بدون اصطکاک بودن دیواره‌ی

۱ Reversible and adsorption
۲ Irreversible capacities
۳ Voltage hysteresis
۴ Filler

داخلی CNT، باعث شده است از این مواد به عنوان نانولوله برای انتقال سیال با سرعت زیاد در کانال‌های بیولوژیکی استفاده شود [۲۱]. تصاویر زیر نمایی از یک CNT انتقال دهنده‌ی سیال را نشان می‌دهند.



شکل ۱-۴. تصاویر میکروسکوپ الکترونی از یک CNT انتقال دهنده سیال [۲۱]

علاوه بر این، کاربردهای دیگری از CNT را می‌توان در سیستم‌های نانوالکترومکانیکی از قبیل نانویاتاقان‌ها [۲۲]، نانوروبات‌ها [۲۳]، نانوکلیدها [۲۴] و بسیاری از کاربردهای دیگر دید [۲۵].

۱-۲. مواد پیزوالکتریک

پیزوالکتریک به مواد کریستالی گفته می‌شود که دارای خواص الکتریکی و مکانیکی می‌باشند. نخستین بار رونه ژوست آئوئی، کانی‌شناس فرانسوی، در سال ۱۸۱۷ م، خاصیت پیزوالکتریک را معرفی کرد. اما نخستین اثبات آزمایشگاهی ارتباط موجود میان پدیده‌های پیزوالکتریک ماکروسکوپی و ساختارکریستالوگرافی آنها در سال ۱۸۸۰ م توسط پیئر کوری انجام شد. از میان مواد مورد بررسی آنها، کوارتز و نمک راشل بیشترین خاصیت پیزوالکتریسیته را از خود نشان می-دادند [۲,۲۶]. دسته‌بندی‌های مختلفی برای مواد پیزوالکتریک تعریف شده است. برخی از مواد پیزو به عنوان مواد پیزوالکتریک طبیعی مانند کوارتز، نمک پتاسیم، فسفات آمونیوم و پارافین و برخی دیگر به عنوان مواد پیزوالکتریک مصنوعی مانند زیرکونات تیتانات (PbZrTiO3–PbTiO3)، باریم تیتانات استرانسیوم (BaSTO) و لید لانتانیم زیرکونات تیتانات (PLZT) شناخته می‌شوند [۲۷]. زمانی که میدان الکتریکی به این مواد اعمال می شود، تنش و یا کرنش مکانیکی در رفتار آنها مشاهده می‌شود که به آن اثر مستقیم می‌گویند و از سوی دیگر، اعمال یک نیروی مکانیکی مانند فشار، موجب ایجاد ولتاژ در مواد پیزوالکتریک می‌شود که به آن اثر معکوس می‌گویند. از اثر مستقیم در ساخت حسگرها مانند شتاب‌سنج‌ها و مبدل‌های فشار و از اثر معکوس در مبدل الکترومکانیکی مانند ژنراتورها و عملگرهای پنوماتیکی و هیدرولیکی استفاده می‌شود [۲۸].

چند مقاله در سال ۱۹۶۰ منتشر شد که آغازگر حل عددی مسائل مربوط به مواد جامد پیزوالکتریک بودند. برای توصیف رفتار مواد پیزوالکتریک، پنج رابطه‌ی مکانیکی-الکترومغناطیسی وجود دارد [۲۹]:

۱- روابط تنش در حرکت/تعادل؛

۲- روابط کرنش-جابه‌جایی؛

۳- معادله‌ی شارژ الکترواستاتیک؛

۴- روابط میدان الکتریکی-پتانسیل الکتریکی؛

۵- معادلات ساختاری.

که این روابط به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\tau_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j \qquad (f_j = 0) \tag{۱-۱}$$

که در این رابطه τ_{ij} مولفه‌های تنش، ρ دانسیته‌ی ماده، $\ddot{u}_j$ مولفه‌های شتاب و f_j نیروهای خارجی می‌باشند.

$$S_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{۲-۱}$$

در این رابطه $S_{i,j}$ مولفه‌های کرنش و u_i مولفه‌های جابجایی هستند.

$$D_{i,j} = 0 \tag{۳-۱}$$

که D_i مولفه‌های جابجایی الکتریکی یا چگالی شار الکتریکی در جهت i می‌باشند.

$$E_k = -\phi_{,k} \tag{۴-۱}$$

که در اینجا E_k مولفه‌ی میدان الکتریکی در جهت k و ϕ پتانسیل الکتریکی است.

معادلات ساختاری پیزوالکتریک مطابق روابط زیر تعریف می‌شوند:

(a میدان تنش، میدان کرنش و میدان الکتریکی؛
(b جابجایی الکتریکی، میدان کرنش، و میدان الکتریکی.
که آنها را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tau_{i,j} = C_{ijkl}S_{kl} - e_{kij}E_k \tag{۱-۵-۱}$$

$$D_i = e_{jkl}S_{kl} + \varepsilon_{ik}E_k \tag{۲-۵-۱}$$

که در این روابط C_{ijkl} ثابت‌های الاستیک، e_{kij} ضرایب پیزوالکتریک و ε_{ik} ثابت‌های دی الکتریک هستند. با توجه به نوع ماده و برخی ساده‌سازی‌های هندسی این روابط را می‌توان به فرم ساده‌تری برای مدل‌سازی ریاضی نوشت [۲۷].

در سال‌های اخیر استفاده از پیزوالکتریک‌ها در سازه‌های کوچک (نانو و میکرو)، با توجه به ویژگی-های منحصر به‌فرد آنها به موضوع جالبی برای محققان تبدیل شده است. در برخی از پژوهش‌ها از این مواد به عنوان حسگرهای موقعیت‌سنج و عملگرها در کنترل نانوسازه‌ها استفاده کرده‌اند [۲۷]. علاوه بر موارد ذکر شده از پیزوالکتریک ها در تولید انرژی در برداشتگرهای انرژی در ابعاد کوچک نیز استفاده می‌شود. به عنوان مثال پژوهشگران در آزمایشگاه سملب دانشگاه PFL موفق به ساخت یک برداشت‌گر انرژی در ابعاد ۱۴/۸۷ mm^3 با چگالی توانی ۱۱/۸ $\mu w/g^2cm^2$ شده اند که این کار توانایی بالای برداشت‌گرهای انرژی پیزوالکتریکی را نشان می‌دهد [۳۰].

۱-۳.   تئوری غیرمحلی

در سال‌های اخیر استفاده از نانوسازه‌ها در صنعت بسیار مورد توجه قرار گرفته است. بر این اساس مدل‌سازی دینامیکی و آنالیز ارتعاشات این سازه‌ها به موضوعی جالب برای محققان تبدیل شده است. ، مدل‌سازی دینامیکی نانوسازه‌ها همواره به خاطر اندازه‌ی کوچک آنها، با اختلاف‌هایی همراه است. بر این اساس برای بررسی رفتار مکانیکی این سازه‌ها، تکنیک‌های مختلفی از قبیل روشهای آزمایشگاهی، دینامیک مولکولی و مکانیک محیط پیوسته ارائه شده است [۳۱].

در این میان روش‌های آزمایشگاهی با توجه به محدودیت‌های آن بسیار دشوار و محدود هستند و روش دینامیک ملکولی با توجه به روابط طولانی و دشوار بسیار چالش برانگیز است، بر این اساس کاربرد مکانیک محیط پیوسته به روشی جالب برای تجزیه و تحلیل این سازه‌ها تبدیل شده است. لازم به ذکر است که در مقیاس‌های کوچک نیروهای بین مولکولی و پیکربندی اتمی، نقش بسیار مهمی را بازی می‌کنند که این عوامل در تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط پیوسته در نظر گرفته نمی‌شوند. بنابر این، تئوری‌های غیرکلاسیک به منظور درج این اثرات توسعه یافته اند. یکی از مهمترین تئوری‌های غیرکلاسیک، تئوری ارینگن است. مطابق با این تئوری، برخلاف تئوری‌های محلی که فرض می‌کنند تنش در یک نقطه تابعی است از کرنش در آن نقطه، تئوری‌های الاستیسیته‌ی غیرمحلی فرض می‌کنند که تنش در یک نقطه تابعی از کرنش در تمام نقاط محیط پیوسته است [۳۲].

مطابق با نظریه‌ی الاستیسیته‌ی غیرمحلی ارینگن، تانسور تنش غیرمحلی σ در هر نقطه‌ی دلخواه y را می‌توان با انتگرال زیر توضیح داد.

$$\sigma = \int_V K(|\acute{y} - y|, \eta) z(\acute{y}) d\acute{y} \qquad (۱-۶)$$

که در آن $K(|\acute{y} - y|, \eta)$ تابع کرنل است که نشان دهنده‌ی مدول غیرمحلی و η ثابت ماده است که به مشخصه‌ی طول داخلی و خارجی بستگی دارد. $|\acute{y} - y|$ فاصله و $z(\acute{y})$ ماتریس تنش ماکروسکوپی کلاسیک در نقطه y است. مطابق قانون هوک می‌توان نوشت

$$z(y) = c(y) : \varepsilon(y) \qquad (۱-۷)$$

که C ماتریس الاستیک مرتبه چهار است.

روابط (۱-۶) و (۱-۷) معادلات ساختاری رفتار غیر محلی یک جسم را بیان می‌کنند. رابطه‌ی (۱-۶) بیان می‌کند که در مقدار تنش در یک نقطه از جسم هریک از نقاط موجود در میدان کرنش چه سهمی دارند.

رابطه‌ی انتگرالی (۶-۱) مشکلات فراوانی را برای حل به وجود می‌آورد از این رو این رابطه را می‌توان به فرم زیر نوشت.

$$(1 - \eta^2 l_e^2 \Delta^2)\sigma = z \quad , \quad \eta = \frac{e_0 l_i}{l_e} \qquad (۱-۸)$$

که در آن e_0 ثابت ماده، l_i و l_e مشخصه‌های طول داخلی و خارجی هستند.

تنش در تئوری غیر محلی:

با استفاده از رابطه‌ی (۱-۸) می‌توان تنش در هر نوع تئوری تیر را برحسب کرنش به دست آورد. برخلاف تئوری محلی که بین تنش و کرنش رابطه‌ی خطی وجود دارد، در تئوری غیرمحلی روابط ساختاری منجر به ایجاد یک رابطه‌ی دیفرانسیلی بین تنش و کرنش می‌شوند.

با استفاده از روبط ساختاری در معادله‌ی (۱-۸) می‌توان روابط زیر را برای یک تیر نوشت

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} &= E\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xz} - \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} &= 2G\varepsilon_{xz} \end{aligned} \qquad \mu = e_0^2 l_i^2 \qquad (۱-۹)$$

در این روابط E مدول یانگ و G مدول برشی است.

در تئوری غیرمحلی اکثر مدل‌های ارئه‌شده برای تئوری‌های تیر اولر-برنولی، تیموشنکو و تئوری‌های تیر با تغییر شکل برشی مرتبه بالا می‌باشد. براساس تئوری تیر اولر-برنولی رابطه‌ی خمش غیرمحلی را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$M - \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = EIk \qquad , \qquad k = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \qquad (۱۰-۱)$$

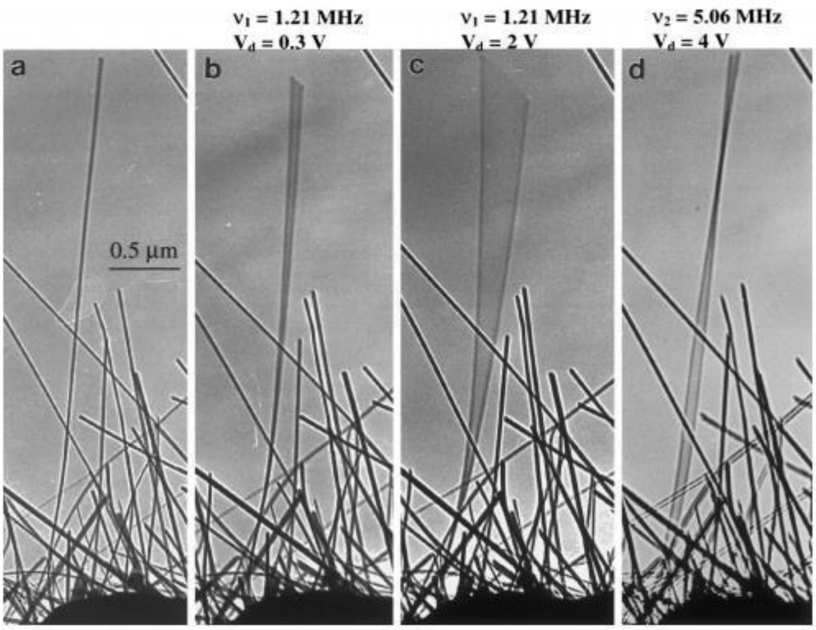
از رابطه‌ی بالا می‌توان تاثیر تئوری غیرمحلی را در معادلات اعمال کرد.

۱-۴. مروری بر کارهای پیشین

۱-۴-۱. مدل‌سازی دینامیکی و ارتعاشات نانولوله‌ها

درک درست رفتار ارتعاشی نانولوله‌ها، نقش بسیار مهمی در توسعه‌ی کاربرد آنها در صنایع مختلف دارد. از این رو، بسیاری از مقالات پژوهشی به بررسی دینامیک و ارتعاشات سازه‌های مبتنی بر نانولوله، با توجه به خواص منحصر به‌فرد این سیستم‌ها پرداخته اند. استفاده از ساختارهای ریز، به طور خاص، CNTها در سنسورها و محرک‌ها، مهندسان در حوضه ارتعاشات را وادار به مطالعه تجربی و نظری در خصوص خواص ارتعاشی این ساختارها کرده است .

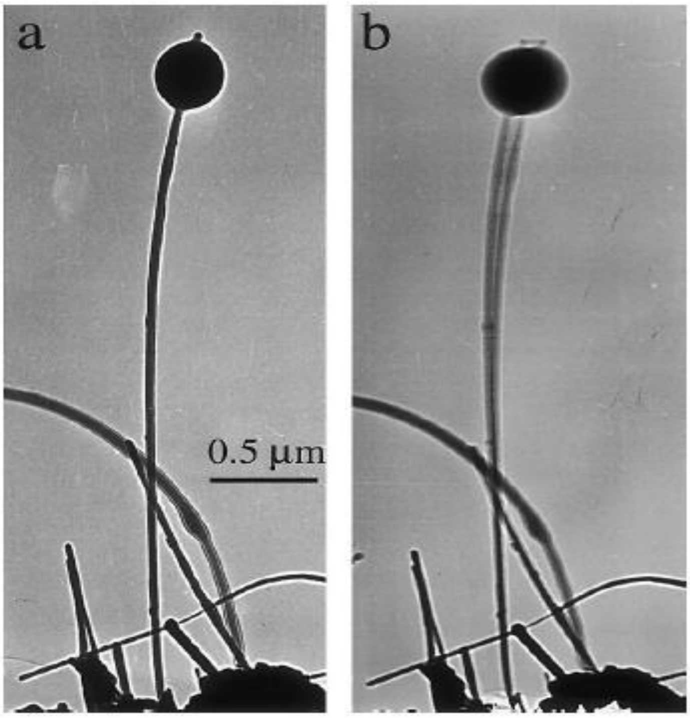
به عنوان مثال به منظور اندازه‌گیری خواص مکانیکی و الکتریکی یک CNT، در آزمایشگاه از یک میکروسکوپ انتقال الکترون استفاده شد [۳۲]. در این آزمایش، فرکانس تشدید یک CNT با استفاده از ولتاژ هارمونیک اعمالی به‌دست آمد [۳۲]. شکل زیر نمایی از یک CNT را در حالت پایا[۱] و در حالت نوسانی نشان می‌دهد.



شکل ۱-۵. نمای CNT در حالت پایا و نوسانی تحت تحریک ولتاژهای مختلف [۳۲].

[۱] Stationary

همچنین به منظور اندازه‌گیری جرم متصل به انتهای آزاد یک CNT از قوانین ارتعاشات استفاده شد. در این کار جرم تخمین‌زده‌شده برای توده fg ۲۲ به‌دست آمد [۳۲]. شکل زیر تصویر میکروسکوپی گرفته‌شده از این کار را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۶. جرم متصل به انتهای آزاد CNT در حالت پایا و نوسانی [۳۲].

لی و چو فرکانس تشدید یک CNT نوسانگر توسط مکانیک سازه مولکولی[۱] مورد بررسی قرار دادند. در این کار، رابطه‌ی بین جرم متصل شده به CNT و فرکانس تشدید به‌دست آمد و تاثیر آن بر فرکانس طبیعی سیستم مورد بررسی قرار گرفت [۳۳].

کیم و همکارانش، با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، خواص الاستیک نانوسازه‌های سیلیکونی مانند مدول یانگ را به‌دست آوردند [۳۴]. آنها با مقایسه تاثیر مقیاس ابعادی[۲] بر روی مدول الاستیسیته‌ی به‌دست آمده، با یافته‌های آزمایشگاهی و مدل‌سازی مکانیک محیط‌های پیوسته نشان دادند که این پارامتر چگونه به مقیاس ابعاد وابسته است [۳۴]. در پژوهش دیگری که بر روی CNTها انجام شده بود نشان داده شد که مدول یانگ به طور قابل ملاحظه‌ای با قطر سازه تغییر می‌کند ، بر این اساس تئوری کلاسیک خطی نمی‌تواند مدول یانگ و به تبع آن فرکانس تشدید CNTها را به دقت پیش بینی کند [۳۵].

[۱] Molecular structural mechanics
[۲] Dimensional scaling

در بررسی رفتار و خواص الاستیک نوسانگرهای نانومکانیکی ساخته‌شده از CNT ، مشاهده شده که میرایی این سیستم ها از نوع غیرخطی است. همچنین مشخص شده که میرایی به شدت بر میزان دامنه حرکت تاثیر گذار است و می‌توان از ترم میرایی غیرخطی به جای خطی استفاده کرد [۳۶]. درکار دیگری راجوریا و جلیلی از CNT به عنوان افزاینده میرایی سیستم استفاده کردند. در این کار مشاهده شدکه افزایش میرایی نسبت به افزایش سفتی در به‌کارگیری CNT به عنوان تقویت کننده در سیستم‌های نانومکانیکی بسیار موثرتر است. همچنین نشان داده شد که افزایش نانوتیوب اپوکسی چندجداره در مقایسه با نانوتیوب اپوکسی تک جداره حدود ۷۰۰ برابر میرایی را افزایش می‌دهد[۳۷].

با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی غیرمحلی مورمو و همکارانش ارتعاشات CNT به عنوان نانوحسگر زیستی را مورد بررسی قرار دادند [۳۸]. در این پژوهش از اصل انرژی برای به‌دست آوردن رابطه‌ی جدید فرکانس غیرمحلی سنسور استفاده شد. در این پژوهش برای پی بردن به درستی نتایج از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی نیز استفاده شد و تنایج هر دو تئوری با هم مقایسه شدند.

در پژوهش دیگری با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی غیرمحلی ژانگ و همکارانش ، به بررسی ارتعاشات آزاد یک نانولوله‌ی کربنی دوجداره (DWNT) پرداختند. نتایج این کار نشان می‌دهد که پارامتر غیرمحلی به شدت بر فرکانس طبیعی سیستم تاثیرگذار است [۳۹]. مشابه به این کار، ارتعاشات MWNT مورد بررسی قرار گرفت. در این کار، لی و همکارانش ثابت کردند که فرکانس طبیعی DWNT، تقریبا ٪ ۱۰ کمتر از SWNT با قطر خارجی مشابه است. آنها همچنین نشان دادند که ارتعاشاتDWNT غیرمحوری[۱] از فرکانس سوم تشدید شروع می‌شود [۴۰].

فرکانس طبیعی و شکل مودهای DWNT حامی جرم باکتری در نوک آن با استفاده از تئوری محیط‌های پیوسته مورد بررسی قرار گرفت. سیستم مورد نظر توسط روش تفاضل محدود حل و برای باکتری با جرم‌های مختلف امتحان شد. نتایج این پژوهش نشان میدهد که از جابجایی فرکانس این سیستم می‌توان برای تشخیص توده‌های بسیار کوچک استفاده کرد [۴۱].

تجزیه و تحلیل ارتعاشات اجباری سیستم‌های نانو الکترومکانیکی تحت تحریک نیرو الکترواستاتیکی یک الکترود توسط قاسم و همکارانش مورد مطالعه قرار گرفت. سیستم پیشنهادی با استفاده از روش گالرکین و میانگین[۲] برای شرط مرزی دو سر گیردار توسعه داده و با در نظر گرفتن منابع غیرخطی مختلف به صورت تحلیلی حل شد. در این پژوهش بیشتر بر روی تاثیر میدان الکتریکی بر پاسخ ارتعاشی تمرکز شده بود [۴۲].

---

[۲] Non-coaxial
[۱] Averaging

ارتعاشات خمشی نانو-نوار[۱] و نانولوله‌ی کربنی تحت میدان الکترومغناطیسی توسط نوردن‌فلت مورد بررسی قرار گرفت. در این مطالعه امکان وجود خودتحریکی[۲] در مودهای ارتعاشی بالاتر سیستم مورد بررسی قرار گرفت. همچنین از یک میدان مغناطیسی ثابت در مدل به منظور دستیابی به دامنه مورد نظر، استفاده شد [۴۳].

۱-۴-۲. ارتعاشات نانوسازه‌های انتقال‌دهنده‌ی سیال

همان طور که از قبل بیان شد، خاصیت منحصر به‌فرد بدون اصطکاک بودن سطح داخلی CNTها، موجب شده است که از این سازه‌ها در بسیاری از نانوسیستم‌ها به عنوان نانولوله‌ی انتقال‌دهنده‌ی سیال استفاده شود. به عنوان مثال از CNTها به طور قابل توجهی درسیستم‌های ذخیره سازی گاز، ذخیره سازی مایع، حمل و نقل مایع و در دستگاه‌های پزشکی برای مکانیزم‌های انتقال دارو استفاده می‌شود [۴۴]. بنابر این شناخت رفتار مکانیکی، به خصوص پاسخ ارتعاشی و تجزیه و تحلیل فرکانس این سیستم‌ها مورد توجه بسیاری از محققان قرارگرفته است.

تاثیر حرکت سیال در داخل نانولوله، بر روی ارتعاشات آزاد و پایداری CNTها با استفاده از تئوری کلاسیک تیر اولر-برنولی توسط یون و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت. نتایج آنها نشان می‌دهد که حرکت سیال به شدت برروی فرکانس تشدید تاثیر گذار است. همچنین نشان داده شد که این تاثیر بر روی CNT با طول زیاد بیشتر از CNT با قطر زیاد است [۴۵].

عبارت فرکانس و سرعت بحرانی برای یک MWNT حاوی سیال با استفاده از روش‌های کلاسیک توسط خسرویان و رفیعی‌تبار به‌دست آمد. در این پژوهش، سیستم با استفاده از تئوری تیر اولر-برنولی و معادله‌ی خطی نویر-استوک مدل شد و پایداری سیستم مورد برسی قرار گرفت. هدف اصلی این پژوهش مقایسه بین مدل‌سازی تیر به روش اولر-برنولی و تیموشنکو و بررسی تاثیر هرکدام بر روی پایداری سیستم در سرعت‌های پایین بود [۴۶]. در کار دیگری که از روش‌های کلاسیک استفاده شده بود، ارتعاشات نانولوله‌ی انتقال سیال تحت بارگذاری محوری مورد بررسی قرار گرفت. پاسخ غیرخطی فرکانس-دامنه برای این سیستم و تاثیر بستر خطی و سرعت سیال بر روی پاسخ فرکانسی به‌دست آمد. نسبت ابعاد سیستم و مقدار بار محوری از جمله پارامترهای مهمی بودند که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفتند و حساسیت پایداری سیستم نسبت به این دو پارامتر سنجیده شد [۴۷].

---
[۲] nano-ribbon
[۳] Self-excitation

بر اساس مدل کلاسیک پوسته، یان و همکارانش به بررسی پایداری DWNT حاوی سیال پرداختند. آنها در نتایج خود به این نکته اشاره کردند که سرعت بحرانی و پایداری سیستم به شدت به نیروی واندروالس مابین سیال و سازه و همچنین نسبت ابعاد سیستم بستگی دارد [۴۸].

همان طور که از قبل اشاره شد، تئوری‌های کلاسیک نمی‌توانند به درستی گویای رفتار سیستم باشند بر این اساس استفاده از تئوری‌های غیرکلاسیک به سرعت در پژوهش‌های محققان جای گرفت. به عنوان مثال می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

در پژوهشی، با درنظرگرفتن تاثیر اندازه کوچک، ارتعاشات غیرخطی و پایداری DWNT حاوی سیال با استفاده از تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که در نظرگرفتن تاثیر اندازه‌ی کوچک در این سیستم به شدت بر فرکانس طبیعی سیستم تاثیرگذار است ولی تاثیر چندانی بر سرعت بحرانی سیال ندارد [۴۹].

لی و چانگ با استفاده از تئوری الاستیک غیرمحلی ارتعاشات SWNT انتقال‌دهنده‌ی سیال را مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که در نظر گرفتن اندازه کوچک سازه بر روی فرکانس و شکل مودها تاثیر گذار است و این تاثیر در کاهش سرعت بحرانی سیال بیشتر احساس می‌شود مخصوصا در مودهای مرتبه بالاتر [۵۰].

با استفاده از تئوری تیر اولر-برنولی، قوانلو و همکارانش به بررسی ارتعاشات SWNT حاوی سیال غیرلزج قرارگرفته بر روی بستر الاستیک پرداختند. در این پژوهش خواص ساختار پی و سرعت حرکت سیال از جمله پارامترهایی بودند که تاثیر آنها بر روی پاسخ فرکانسی سیستم بحث شد [۵۱]. در کار دیگری سلطانی و فرشیدیان‌فر، از روش تعادل انرژی به منظور دست‌یابی به فرکانس طبیعی غیرخطی برای نانولوله‌ی حاوی سیال غیر لزج استفاده کردند. آنها با استفاده از تئوری غیرمحلی عبارت فرکانس و راه حل‌های تناوبی[۱] را برای این سیستم به صورت تحلیلی به‌دست آوردند وبا روش های عددی مقایسه کردند. همچنین تاثیر شرایط اولیه، تنش محوری، پارامتر غیر محلی، سرعت سیال و پی الاستیک وینکلر-پاسترناک بر تغییر فرکانس طبیعی غیرخطی را مورد ارزیابی قرار دادند [۵۲].

ارتعاشات SWNT تحت تحریک حرکت سیال لزج توسط سلطانی و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت. در این مدل که نانولوله، در داخل پی الاستیک کلوین-ویت جای گرفته بود، حساسیت پایداری سیستم و پاسخ فرکانسی به پارامترهای پی الاستیک سنجیده شد [۵۳].

[۱] Periodic solution

درکار متفاوت دیگری ارتعاشات SWNT حاوی سیال لزج تحت تحریک حرکت ضربانی سیال توسط لیانگ و سو بررسی شد. این فرض آنها در بسیاری از سیستم‌های نانو الکترومکانیکی دیده می‌شود. در این کار آنها با استفاده از روش میانگین پایداری سیستم را بررسی و با نتایج مدل‌های کلاسیک مقایسه کردند [۵۴].

۱-۴-۳. دینامیک نانولوله‌های خمیده

در مطالعات ذکر شده فوق، نانولوله‌ها به صورت کاملا مستقیم (بدون خمیدگی) در نظر گرفته شده اند اما تصاویر گرفته‌شده توسط میکروسکوپ الکترونی، نشان می‌دهد که CNTها همیشه مستقیم نیستند بلکه دارای انحنای خاصی هستند [۵۵]. این انحنا می‌توانید نقش مهمی در رفتار مکانیکی سیستم بازی کند. بنابر این بررسی تاثیر انحنا بر رفتار مکانیکی سیستم یک امر مهم در توسعه کاربرد این سیستم‌ها به‌شمار می‌آید.

تاثیر خمیدگی بر رفتار مکانیکی CNT توسط آرتان و تپ مورد بررسی قرار گرفت. در این پژوهش یک مدل ساده در قالب تئوری الاستیسیته غیرمحلی به منظور بررسی اثر خمیدگی ارائه شد [۵۶].

بررسی خمیدگی اولیه بر فرکانس طبیعی و شکل مود عملگرهای مبتنی بر نانولوله، توسط اوآکاد و یونس انجام شد. تاثیر پارامترهای مختلف سیستم بر روی فرکانس طبیعی و همچنین تاثیر شکل سازه بر پایداری سیستم از جمله مباحث مورد بررسی در این پژوهش بود [۵۷].

عسگری و همکارانش ارتعاشات غیرخطی CNT با خمیدگی دایره‌ای شکل را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با استفاده از روش هموتوپی-پرتوربیشن فرکانس طبیعی سیستم را به‌دست آوردند و تاثیر پارامترهای مختلف از قبیل ضخامت CNT، شعاع انحنا و شرایط اولیه بر رفتار ارتعاشی نانولوله را بررسی کردند [۵۸].

مایوف و حوا ارتعاشات غیرخطی و حرکت آشفته[۱] CNT منحنی شکل را مورد بررسی قرار دادند. معادله حاکم بر اساس تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته‌ی الاستیک به‌دست آمد، همچنین یک نیروی هارمونیک برای سیستم در نظر گرفته شد. در این کار آنها دریافتند که ترم‌های غیرخطی برخواسته از شکل منحنی نانولوله، باعث دوبرابر شدن دوره‌ی تناوب و به تبع آن ایجاد حرکت آشفته درسیستم می‌شود [۵۹].

[۱] Chaotic motion

در کار دیگری عسگری روشی جدیدی با عنوان NURBS [1] برای مدل سازی ارتعاشات نانولوله‌های خمیده با شکل نامعین ارائه داد. در این مطالعه انواع خمیدگی که ممکن است در ساختار نانولوله دیده شود در نظر گرفته شد و اثر شکل خمیدگی بر پاسخ فرکانسی مورد مطالعه قرار گرفت [۶۰].

بر اساس مدل ارائه شده توسط عسگری، سعادت نیا و همکارانش، ارتعاشات نانولوله‌ی حاوی سیال با خمیدگی درجه دو را بررسی کردند. آنها دریافتند که رفتار غیرخطی سیستم از قبیل نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی به شدت به انحنای نانولوله وابسته است [۶۱].

بررسی نقش CNTهای خمیده در جذب هیدروکربن‌های آروماتیک پلی‌سیکلیک، نمونه‌ای از پژوهش‌هایی است که در زمینه‌ی کاربرد ناونولوله‌های خمیده انجام شده است [۶۲].

۱-۴-۴. ارتعاشات سازه‌های میکرو و نانو مبتنی بر لایه‌های پیزوالکتریک:

مواد هوشمند از قبیل پیزوالکتریک‌ها از جمله موادی هستند که در نانوسازه‌ها به طور گسترده برای کنترل پایداری سیستم استفاده می‌شوند. خواص فوق العاده‌ی مواد پیزوالکتریک و کاربردهای مهم آنها در نانوسازه‌های الکترومکانیکی، توجه دانشمندان را به بررسی دینامیک و رفتار ارتعاشی نانوسازه‌های مبتنی بر پیزوالکتریک جلب کرده است.

در پژوهشی تاثیر اثرات سطحی و مواد سازنده نانوتیر مانند آلومینیوم و سیلیکون بر فرکانس طبیعی سیستم مورد آزمایش قرار گرفت. در این کار ارتعاشات آزاد نانو تیر مورد بررسی قرار گرفت و مشخص شد که آلومینیوم نسبت به سیلیکون به اثرات سطح حساس‌تر است [۶۳].

یان و جیانگ ارتعاشات و رفتار کمانشی نانوتیر ساخته شده از مواد پیزوالکتریک را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با درنظر گرفتن اثرات سطحی [2] برای سیستم دریافتند که پایداری و فرکانس تشدید سیستم به شدت به این اثرات بستگی دارد. همچنین آنها توانستند با تغییر در ولتاژ، فرکانس تشدید را تنظیم کنند [۶۴].

رفتار پیچشی و کمانش نانولوله‌ی ساخته شده از بورون نیترات دو جداره با استفاده از تئوری‌های غیرمحلی و پیزوالکتریک بررسی شد. در این پژوهش، سازه به صورت پوسته‌ی استوانه‌ای قرار گرفته بر روی پی وینکلر و پسترناک مدل شد و معادله حرکت سیستم با استفاده از روش انرژی به‌دست

[1] Non-Uniform Rational B-Spline
[2] Surfaces effects

آمد. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که بار کمانش به پارامترهای غیرمحلی، تغییر درجه حرارت و مشخصه‌های پی بسیار حساس است [۶۵].

ارتعاشات غیرخطی نانوتیر ساخته شده از مواد پیزو با درنظر گرفتن تئوری‌های غیرمحلی و تیر تیموشنکو توسط کی و همکارانش مورد بررسی قرار گرفت. ارتعاشات آزاد این مدل به منظور دست‌یابی به شکل مود و فرکانس طبیعی سیستم با استفاده از روش دیفرانسیل مربعی حل شد. در این پژوهش تاثیر پارامترهای ولتاژ، دما و غیرمحلی بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که تغییر دامنه ولتاژ از مقادیر مثبت به مقادیر منفی، نسبت فرکانس را کاهش می‌دهد همچنین پاسخ سیستم بسیار حساس به دما و پارامتر غیرمحلی است [۶۶].

در کار دیگری ارتعاشات نانولوله‌ی بورون- نیترات تحت تاثیر حرکت سیال مورد بررسی قرار گرفت. در این کار از تئوری پوسته‌ی دونل[۱] غیرخطی و همچنین روش انرژی، برای دست‌یابی به معادلات حاکم بر حرکت استفاده شد. نتایج این پژوهش حاکی از آن است که افزایش سرعت سیال منجر به ناپایداری سیستم می‌شود [۶۷]. همچنین نشان داده شد که جهت نانولوله‌های بورون-نیترات به عنوان الیاف پیزوالکتریک در داخل سازه‌های کامپوزیتیی تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار ارتعاشات مدل دارد [۶۷].

در یکی از جدیدترین پژوهش ها که توسط سعادت‌نیا انجام شد، ارتعاشات نانولوله‌ی پیزوالکتریک انتقال‌دهنده‌ی سیال مورد بررسی قرار گرفت. در این کار سازه به صورت دوجداره فرض شده است که لایه‌ی داخلی از جنس کربن و لایه‌ی خارجی از جنس پیزوالکتریک است. تشدیدهای مختلف از سیستم با توجه شرایط مرزی مختلف به‌دست آمد و تاثیر پارامتر های مختلف از سیستم بر روی آنها به طور مفصل تشریح شد [۶۸].

[۱] Donnell's shell theory

۱-۵ معرفی طرح

در این پژوهش، ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌ی کربنی خمیده‌ی انتقال‌دهنده‌ی سیال پوشیده شده با لایه‌های پیزوالکتریک، مورد مطالعه قرار گرفته است. از تئوری تیر اولر-برنولی به منظور دستیابی به معادله حرکت برای رفتار ارتعاشی سیستم استفاده شده است. شرط مرزی لغزشی نانولوله‌ی کربنی انتقال‌دهنده‌ی سیال بر اساس عدد نادسن فرض شده است. با استفاده از اصل انرژی و همیلتون رابطه‌ی حاکم بر ارتعاشات سیستم با درنظر گرفتن تاثیر خمیدگی نانولوله بر سرعت سیال به دست آمده است. در این پژوهش ولتاژ لایه پیزوالکتریک به دو صورت هارمونیک و ثابت در نظر گرفته شده است. تاثیر پارامترهای مختلف از سیستم بر روی فرکانس طبیعی و تشدید اولیه و پارامتریک مورد بررسی قرار گرفته است.

۱-۶ نوآوری طرح

همان طور که اشاره شد، بررسی نانولوله‌های خمیده، بسیار مورد توجه محققان بوده است و در پژوهش‌های زیادی به بررسی رفتار دینامیکی این سازه‌ها پرداخته شده است. بررسی‌ها نشان می دهد تعداد محدودی از محققان به بررسی رفتار دینامیکی نانولوله‌های خمیده انتقال‌دهنده‌ی سیال پرداخته اند. در بسیاری از این مطالعات از تاثیر ترم‌های سیال مرتبه بالا صرفه نظر کرده اند. همچنین در اکثر مطالعات از تاثیر خمیدگی نانولوله بر سرعت سیال صرفه نظر شده و این گونه فرض کرده‌اند که سیال از داخل نانولوله‌ی بدون خمیدگی عبور می‌کند.

در این پژوهش ارتعاشات نانولوله‌ی خمیده‌ی انتقال دهنده‌ی سیال با هدف بررسی تاثیر پارامترهای مختلف از سیستم با درنظر گرفتن تاثیر خمیدگی بر سرعت سیال و همچنین تاثیر ترم‌های سیال مرتبه بالا بر رفتار سیستم مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل دوم

(استخراج معادلات)

۲-۱. مدل‌سازی ریاضی

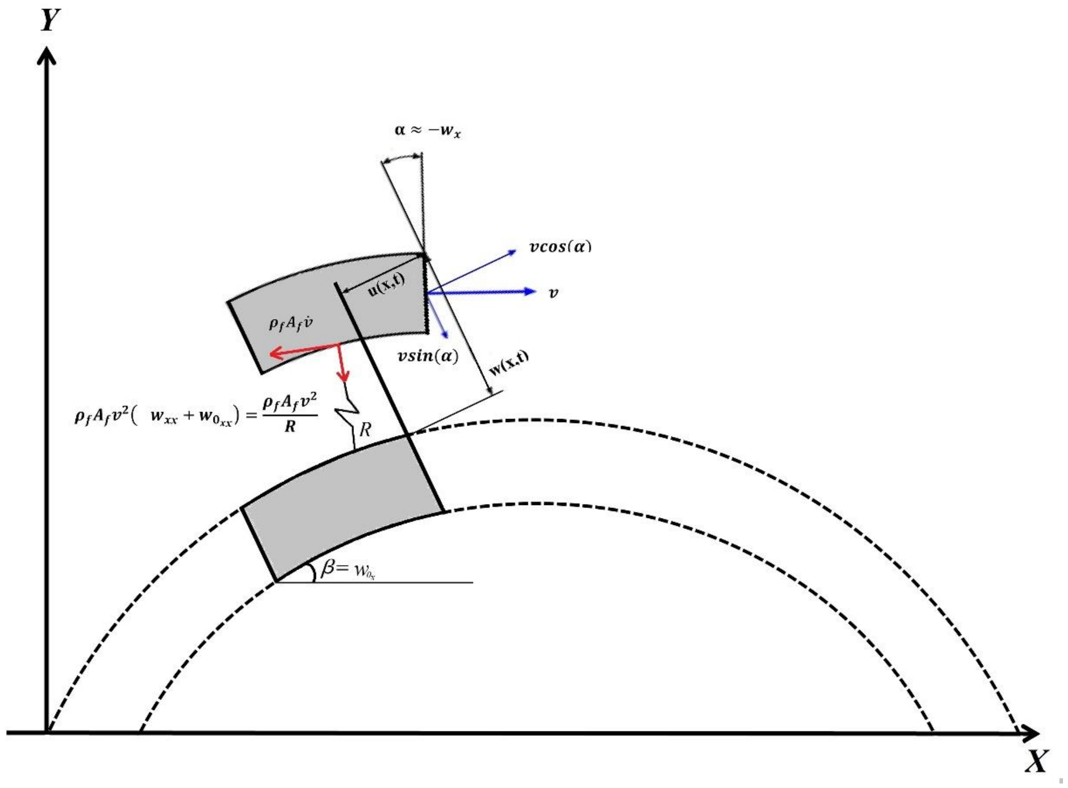
در این فصل ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌ی کربنی خمیده‌ی انتقال‌دهنده‌ی سیال که با لایه‌های پیزوالکتریک پوشیده شده است مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور با استفاده از تئوری تیر اولر-برنولی، روش انرژی و تئوری غیرمحلی، معادله‌ی ارتعاشات این سیستم به‌دست آمده، سپس به منظور یافتن پاسخ سیستم، از روش گلرکین برای گسسته‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل مربوطه با مشتقات جزئی استفاده شده است. در نهایت برای حل معادله دیفرانسیل از تکنیک مقایس زمانی چندگانه[۱] استفاده شده است. در این پژوهش ولتاژ لایه‌ی پیزوالکتریک به دو صورت ثابت و متغیر با زمان در نظر گرفته شده است که شرایط متفاوتی از جمله تشدید اولیه و تشدید پارامتریک را در سیستم به وجود می‌آورد.

تاثیر پارامترهای مختلف از جمله تاثیر ولتاژ اعمالی، ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک، پارامتر غیرمحلی، عدد نادسن[۲] و سرعت سیال بر فرکانس طبیعی و پاسخ فرکانسی سیستم، از جمله مواردی است که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است.

برای درک بهتر مدل، نمایی از سیستم در شکل زیر ارائه شده است.

(آ)

[۱] Multiple time scale method
[۲] Knudsen number



(ب)

شکل ۲-۱. (آ) نمایی از مدل نانولوله‌ی انتقال‌دهنده‌ی سیال. (ب) المانی از تیر انتقال‌دهنده‌ی سیال تحت تغییر شکل

مطابق با شکل ۱-۲.(آ)، نانولوله به صورت دوجداره مدل شده است که لایه‌ی داخلی، نانولوله‌ی کربنی و لایه‌ی بیرونی از جنس مواد پیزوالکتریک است و فرض شده است که دو جداره به یکدیگر چسبیده اند وهیچ گونه اصطکاکی بین آنها وجود ندارد.

در این پژوهش، نانولوله به صورت تیر اولر-برنولی مدل شده است. بر این اساس، میدان‌های جابه‌جایی در دو راستا عمودی و مماسی برای تیر خمیده را می‌توان به صورت زیر نوشت [۶۹].

$$w(x,z,t) = w(x,t)$$
$$u(x,z,t) = u(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \qquad (۱-۱-۲)$$

که در این روابط w بردار جابه‌جایی در راستای عمود بر تیر، u بردار جابه‌جایی در راستای مماس بر تیر و y فاصله از تار خنثی است.

در این پژوهش نانولوله به صورت باریک و بلند فرض شده است. با توجه به این فرض برای لایه‌ی پیزوالکتریک، روابط ساختاری ارائه شده در فصل قبل را می‌توان به فرم خلاصه شده زیر نوشت:

$$s_{xx} = d_1\varepsilon_{xx} - e_1 E_x$$
$$D_x = e_1\varepsilon_{xx} + \epsilon_1 E_x \qquad (۲-۱-۲)$$

در روابط بالا s_{xx} , ε_{xx} تنش و کرنش ون‌کارمن و E_x میدان مغناطیسی در راستای مماسی است و می‌توان آنرا به صورت $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\varphi_x$ نوشت که $\varphi(x,t)$ پتانسیل الکتریکی است [۶۸]. همچنین در این رابطه D_x بیانگر جابه‌جایی الکتریکی در راستای مماسی، e_1 بیانگر ثابت پیزوالکتریک و ϵ_1 بیانگر ثابت دی‌الکتریک می‌باشد. این نکته قابل ذکر است که با توجه به فرض باریک وبلند بودن لایه‌ی پیزوالکتریک تاثیر میدان الکتریکی در راستاهای دیگر در معادلات ساختاری ظاهر نشده است.

روابط کرنش، خمش و نیروی محوری برای تیر اولر-برنولی خمیده برای هر لایه را می‌توان به صورت زیر نوشت [۶۹].

$$\varepsilon_{xx,i} = u_{x,i}(x,t) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w_0(x)}{\partial x}\left(\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial x}\right) \tag{۲-۱-۳}$$

$$\begin{aligned} \overline{M_i} &= \int_{A_i} \left(y.s_{xx,i}\right) dA_i \\ \overline{N_i} &= \int_{A_i} s_{xx.i}\, dA_i \qquad i = 1,2 \end{aligned} \tag{۲-۱-۴}$$

که در اینجا w_0 خمیدگی اولیه‌ی تیر و$i=1$ و $i=2$ به ترتیب متناظر با لایه‌ی داخلی و بیرونی و A سطح مقطع هر لایه است.

به منظور دست‌یابی به معادلات حاکم بر حرکت، از روش انرژی و اصل هامیلتون استفاده شده است. بر این اساس تابع لاگرانژ برای سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L = T - U - W \tag{۲-۱-۵}$$

در این رابطه T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل و w کار نیروهای خارجی برای همه اجزای سیستم است. با استفاده از روش تغییرات[۱]، تغییر تابع لاگرانژ در یک دوره از زمان صفر خواهد بود و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(T - U - W\right) dt = 0 \tag{۲-۱-۶}$$

با توجه به رابطه‌ی بالا برای رسیدن به معادله‌ی حاکم بر ارتعاشات سیستم نیاز است که انرژی جنبشی و پتانسیل تک تک اجزای سیستم و همچنین کار نیروهای خارجی را در صورت وجود به‌دست آورد.

انرژی پتانسیل برای نانولوله‌ی دوجداره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

[۱] Variational

$$U=\int_0^L\int_{A_1}(s_{xx,1}.\varepsilon_{xx,1}-D_xE_x)dA_1dx+\int_0^L\int_{A_2}(s_{xx,2}.\varepsilon_{xx,2})dA_2dx \qquad (۲-۱-۷)$$

در این رابطه اولین انتگرال بیانگر انرژی پتانسیل برای لایه‌ی پیزوالکتریک و دومین انتگرال بیانگر انرژی پتانسیل برای CNT است. لازم به ذکر است طبق رابطه هوک $s_{xx}=E.\,\varepsilon_{xx}$ که E مدول الاستیسیته‌ی برای هر لایه است.

با جایگذاری روابط (۲-۱-۲) و (۲-۱-۳) در رابطه‌ی (۲-۱-۷) می‌توان انرژی پتانسیل نانولوله را به صورت زیر نوشت:

$$U=\frac{1}{2}\left(\int_0^L\left(\begin{array}{l}\overline{EA}\left(u_x^2+u_xw_x^2+\frac{1}{4}w_x^4+w_x^2w_{0_x}^2+2u_xw_xw_{0_x}+w_x^3w_{0_x}\right)\\+\overline{EI}w_{xx}^2+e_1A_1\left(2\varphi_xu_x+\varphi_xw_x^2+\varphi_xw_xw_{0_x}\right)-\epsilon_1A_1\varphi_x^2\end{array}\right)dx\right) \qquad (۲-۱-۸)$$

با توجه به این فرض که دو جداره به یک‌دیگر چسبیده اند، جابه‌جایی جداره‌ها با یکدیگر برابر است. بر این اساس می‌توان رابطه‌ی بالا را به صورت زیر نوشت:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L\left(\begin{array}{l}\overline{EA}\left(u_x^2+u_xw_x^2+\frac{1}{4}w_x^4+w_x^2w_{0_x}^2+2u_xw_xw_{0_x}+w_x^3w_{0_x}\right)\\+\overline{EI}w_{xx}^2+e_1A_1\left(2\varphi_xu_x+\varphi_xw_x^2+\varphi_xw_xw_{0_x}\right)-\epsilon_1A_1\varphi_x^2\end{array}\right)dx \qquad (۲-۱-۹)$$

که در این رابطه $\overline{EA}=E_1A_1+E_2A_2$ و $\overline{EI}=E_1I_1+E_2I_2$.

با توجه به جرم نانولوله و همچنین سرعت جابه‌جایی آنها در دو راستا، می‌توان انرژی جنبشی برای هر جداره را به صورت زیر نوشت:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L\rho_1A_1\left(w_t^2+u_t^2\right)dx+\frac{1}{2}\int_0^L\rho_2A_2\left(w_t^2+u_t^2\right)dx \qquad (۲-۱-۱۰)$$

مطابق با رابطه (۲-۱-۹)، رابطه (۲-۱-۱۰) را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L\overline{\rho A}\left(w_t^2+u_t^2\right)dx \qquad (۲-۱-۱۱)$$

در این رابطه $\overline{\rho A}=\rho_1A_1+\rho_2A_2$ که ρ_1 چگالی پیزوالکتریک و ρ_2 چگالی CNT است. این نکته قابل ذکر است که با توجه به اندازه‌ی کوچک نانولوله از اینرسی چرخشی صرفه نظر شده است [۶۸].

انرژی جنبشی سیال با توجه به بردار سرعت سیال در داخل نانولوله را می‌توان از رابطه‌ی زیر به‌دست آورد:

$$T_f = \int_0^L \int_{A_f} \rho_f \vec{V}.\vec{V}\, dA_f\, dx \qquad (۲-۱-۱۲)$$

که ρ_f و A_f به ترتیب چگالی و سطح مقطع سیال و $\vec{V}$ بردار سرعت سیال است.

مطابق با شکل ۲-۱.(ب) بردار سرعت سیال عبوری از داخل نانولوله، با در نظر گرفتن تاثیر خمیدگی بر سرعت سیال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{V} = \left(vcos(\theta) + u_t\right)\vec{i} + \left(w_t - vsin(\theta)\right)\vec{j} \qquad , \quad \theta = \beta + \alpha \qquad (۲-۱-۱۳)$$

که در این رابطه v سرعت متوسط سیال بدون درنظر گرفتن شرط لغزش و i و j بردارهای یکه در جهت‌های مماسی و عمودی هستند.

این نکته قابل ذکر است که عدد نادسن برای نانولوله‌ها بزرگتر از $۱۰^{-۲}$ است. بنابر این شرط عدم لغزش برای سیال در داخل نانولوه دیگر صادق نیست و باید از یک مدل اصلاح شده استفاده شود. بر این اساس بهادینی و حسینی [۷۰] مطابق رابطه‌ی زیر از یک ضریب تصحیح برای سرعت سیال استفاده کرده اند.

$$v^* = \gamma.v \qquad (۲-۱-۱۴)$$

که v^* سرعت متوسط سیال با در نظر گرفتن شرط لغزش و γ ضریب تصحیح است که طبق رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

$$\gamma = \left(1 + a_k Kn\right)\left(4\left(\frac{2-\sigma_v}{\sigma_v}\right)\left(\frac{Kn}{1+Kn}\right) + 1\right) \qquad (۲-۱-۱۵)$$

در اینجا Kn عدد نادسن و σ_v ضریب تطابق ممان است که برابر ۰/۷ در نظر گرفته می‌شود [۷۰]. ضریب a_k مطابق زیر به‌دست می‌آید:

$$a_k = a_0 \frac{2}{\pi}\left(tan^{-1}\left(a_1 kn^{\beta}\right)\right) \qquad (۲-۱-۱۶)$$

که a_1 و β اعدادی تجربی هستد که به ترتیب برابر ۴ و ۰/۴ در نظر گرفته می‌شوند. ضریب a_0 نیز به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$a_0 = \frac{64}{3\left(1 - \frac{4}{b}\right)} \qquad (۲-۱-۱۷)$$

که $b=1$ است [۷۰].

بنابر روابط (۲-۱-۱۴) تا (۲-۱-۱۷) شکل تصحیح شده‌ی رابطه‌ی (۲-۱-۱۳) به صورت زیر است:

$$\vec{V}=\left(v^{*}cos\left(\theta\right)+u_{t}\right)\vec{i}+\left(w_{t}-v^{*}sin\left(\theta\right)\right)\vec{j} \qquad (۱۸-۱-۲)$$

مطابق شکل ۲-۱.(ب) دو نیروی اصلی از طرف سیال به سیستم وارد می‌شود: نیروی گریز از مرکز و نیروی مماسی. با توجه به ثابت بودن سرعت سیال نیروی مماسی برابر صفر خواهد بود. بنابر این تنها نیروی گریز از مرکز به سیستم وارد می‌شود. این نکته قابل ذکر است که در این پژوهش از ویسکوزیته سیال و مطابق با آن از کار نیروهای حاصل از آن صرفه نظر شده است [۶۹].

با استفاده از تعریف بردار جابه‌جایی $\vec{u}_i+\vec{w}_j$، بردار نیرو و مطابق با آن کار نیروی خارجی حاصل از حرکت سیال درون نانولوله به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$F_{c}=-\rho_{f}A_{f}v^{*2}\left(w_{xx}+w_{0_{xx}}\right)\left(\sin\left(\theta\right)\vec{i}+\cos\left(\theta\right)\vec{j}\right) \qquad (۱۹-۱-۲)$$

$$W_{F_{c}}=\int_{0}^{L}\left(\left[-\rho_{f}A_{f}v^{*2}\left(w_{xx}+w_{0_{xx}}\right)\left(\sin\left(\theta\right)\vec{i}+\cos\left(\theta\right)\vec{j}\right)\right].\left[\vec{u}_{i}+\vec{w}_{j}\right]\right)dx \qquad (۲۰-۱-۲)$$

با جایگذاری معادله‌های به‌دست آمده برای انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی در معادله‌ی (۲-۱-۶) داریم:

$$\begin{aligned}
&\delta w\left[\int_{0}^{L}\begin{pmatrix}-\overline{\rho A}w_{tt}+\overline{EA}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_{x}w_{x}+\dfrac{1}{2}w_{x}^{3}+w_{x}w_{0_{x}}^{2}+u_{x}w_{0_{x}}+\dfrac{3}{2}w_{x}^{2}w_{0_{x}}\right)\\ -\rho_{f}A_{f}\begin{pmatrix}v^{*}sin\left(\theta\right)u_{xt}-v^{*}cos\left(\theta\right)w_{xx}u_{t}+w_{tt}+2v^{*}cos\left(\theta\right)w_{xt}\\ +v^{*}sin\left(\theta\right)w_{xx}w_{t}+v^{*2}\cos\left(\theta\right)\left(w_{xx}+w_{0_{xx}}\right)\end{pmatrix}\\ +\dfrac{1}{2}A_{1}e_{1}\dfrac{\partial\left(\varphi_{x}\left(w_{x}+w_{0_{x}}\right)\right)}{\partial x}-\overline{EI}w_{xxxx}\end{pmatrix}dx\right]\\
&+\delta u\left[\int_{0}^{L}\begin{pmatrix}-\overline{\rho A}u_{tt}+\overline{EA}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_{x}+\dfrac{1}{2}w_{x}^{2}+w_{x}w_{0_{x}}\right)+\dfrac{1}{2}A_{1}e_{1}\varphi_{xx}\\ -\rho_{f}A_{f}v^{*}sin\left(\theta\right)w_{xt}-\rho_{f}A_{f}u_{tt}-\rho_{f}A_{f}v^{*2}\sin\left(\theta\right)\left(w_{xx}+w_{0_{xx}}\right)\end{pmatrix}dx\right]\\
&+\delta\varphi\left[\int_{0}^{L}A_{1}e_{1}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{x}+\frac{w_{x}^{2}}{2}+w_{x}w_{0_{x}}\right)-A_{1}\epsilon_{1}\varphi_{xx}\,dx\right]=0
\end{aligned} \qquad (۲۱-۱-۲)$$

با برابر صفر قرار دادن ضرایب δw و $\delta\varphi$ به صورت جداگانه و اعمال رابطه‌ی (۲-۱-۴) روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\bar{M}_{xx}=\overline{\rho A}w_{tt}-\overline{EA}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x w_x+\frac{1}{2}w_x^3+w_x w_{0_x}^2+u_x w_{0_x}+\frac{3}{2}w_x^2 w_{0_x}\right)$$
$$+\rho_f A_f\begin{pmatrix}v^* sin(\theta)u_{xt}-v^* cos(\theta)w_{xx}u_t+w_{tt}+2v^* cos(\theta)w_{xt}\\ +v^* sin(\theta)w_{xx}w_t+v^{*2}\cos(\theta)\left(w_{xx}+w_{0_{xx}}\right)\end{pmatrix} \tag{۲۲-۱-۲}$$
$$-\frac{1}{2}A_1 e_1\frac{\partial\left(\varphi_x\left(w_x+w_{0_x}\right)\right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial \mathrm{x}}=\frac{e_1}{\epsilon_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x+\frac{w_x^2}{2}+w_x w_{0_x}\right)=0 \tag{۲۳-۱-۲}$$

در این پژوهش به منظور اعمال تاثیر اندازه‌ی کوچک، از تئوری غیرمحلی ارینگن استفاده شده است. بدین منظور برای تیر اوالر-برنولی، رابطه‌ی زیر برای ممان خمشی تیر نوشته می‌شود [۶۸]:

$$M-(e_0 a)^2 M_{xx}=\overline{EI}w_{xx} \tag{۲۴-۱-۲}$$

که در این رابطه I ممان سطح و (e_0a) پارامتر غیرمحلی است که به منظور اثر اندازه‌ی کوچک درج شده است.

با دو بار مشتق گرفتن از رابطه‌ی (۲-۱-۲۴) و جایگذاری رابطه‌ی (۲-۱-۲۲) در آن به معادله زیر می‌رسیم:

$$\overline{EI}w_{xxxx}+\overline{\rho A}w_{tt}-\overline{EA}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x w_x+\frac{1}{2}w_x^3+w_x w_{0_x}^2+u_x w_{0_x}+\frac{3}{2}w_x^2 w_{0_x}\right)$$
$$+\rho_f A_f\begin{pmatrix}v^* sin(\theta)u_{xt}-v^* cos(\theta)w_{xx}u_t+w_{tt}+2v^* cos(\theta)w_{xt}\\ +v^* sin(\theta)w_{xx}w_t+v^{*2}\cos(\theta)\left(w_{xx}+w_{0_{xx}}\right)\end{pmatrix}$$
$$-\frac{1}{2}A_1 e_1\frac{\partial\left(\varphi_x\left(w_x+w_{0_x}\right)\right)}{\partial x}$$
$$-(e_0 a)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix}\overline{\rho A}w_{tt}-\overline{EA}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x w_x+\frac{1}{2}w_x^3+w_x w_{0_x}^2+u_x w_{0_x}+\frac{3}{2}w_x^2 w_{0_x}\right)\\ +\rho_f A_f\begin{pmatrix}v^* sin(\theta)u_{xt}-v^* cos(\theta)w_{xx}u_t+w_{tt}+2v^* cos(\theta)w_{xt}\\ +v^* sin(\theta)w_{xx}w_t+v^{*2}\cos(\theta)\left(w_{xx}+w_{0_{xx}}\right)\end{pmatrix}\\ -\frac{1}{2}A_1 e_1\frac{\partial\left(\varphi_x\left(w_x+w_{0_x}\right)\right)}{\partial x}\end{pmatrix}=0 \tag{۲۵-۱-۲}$$

رابطه‌ی بالا، معادله‌ی حرکت سیستم با درنظر گرفتن تاثیر اندازه کوچک است. در این رابطه $E_x=\varphi_x=\frac{V}{L}$.

برای نانولوله با طول زیاد و شرایط مرزی غیرقابل حرکت ($u(0,t) = u(L,t) = 0$) تغییرات نیروی محوری قابل صرف نظر کردن خواهد بود [۶۹]. بنابر این داریم:

$$\frac{\partial N}{\partial x} \approx 0 \qquad (۲-۱-۲۶)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۲-۱-۱) و (۲-۱-۴) در رابطه‌ی (۲-۱-۲۶)، رابطه‌ی بین جابه‌جایی در راستای مماسی و عمودی سیستم برای تیر خمیده‌ی با ابتدا و انتهای غیر قابل حرکت به صورت زیر بیان می‌شود [۶۹]:

$$u = -\int_0^x \left(\frac{1}{2} w_x^2 + w_{0_x} w_x \right) dx + \frac{x}{L} \int_0^x \left(\frac{1}{2} w_x^2 + w_{0_x} w_x \right) dx \qquad (۲-۱-۲۷)$$

پارامتر های بی‌بعد برای معادله‌ی اصلی سیستم به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$x = L\hat{x} \qquad t = \tau\hat{t} \qquad w = L\hat{w} \qquad \tau = \sqrt{\frac{\left(\overline{\rho A} + \rho_f A_f\right) L^4}{\overline{EI}}}$$

$$\mu_0 = \frac{e_0 a}{L} \qquad \hat{V}_0 = \frac{A_1 e_1 V_0 L}{\overline{EI}} \qquad V_1 = \frac{A_1 e_1 V_1 L}{\overline{EI}} \qquad \hat{U} = \frac{v^*}{\frac{L}{\tau}}$$

$$w_0 = L\hat{w}_0 \qquad \eta = \frac{\rho_f A_f v^* L^3}{\tau \overline{EI}}$$

که V_0 دامنه ولتاژ ثابت، V_1 دامنه ولتاژ هارمونیک با فرکانس Ω_1 و U سرعت متوسط بی بعد سیال است.

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۱-۲۷) در رابطه‌ی (۲-۱-۲۵) و استفاده از پارامترهای بی‌بعد معادله‌ی حرکت بی‌بعد سیستم به صورت زیر نوشته می‌شود. این نکته قابل ذکر است که به دلیل کوچک فرض شدن اندازه θ، $\sin(\theta) \approx \theta \approx w_x + w_{0_x}$ و $\cos(\theta) \approx 1$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4}+\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2}-\frac{1}{2}\frac{\overline{EA}L^2}{\overline{EI}}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\int_0^1\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}^2+2\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)d\hat{x}-2\eta\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\\
&-\eta\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}^2+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}^2\right)\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}+\eta\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)\int_0^1\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)\right)d\hat{x}+\\
&\eta\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\int_0^{\hat{x}}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)\right)d\hat{x}-\eta\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\hat{x}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)\right)dx\\
&+2\eta\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}+\eta\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}\right)\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)+\eta\hat{U}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\\
&-\hat{V}_0\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)-\hat{V}_1\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\cos\left(\Omega_1\hat{t}\right)\\
&-\mu_0^2\frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2}\left(\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\overline{EA}L^2}{\overline{EI}}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\int_0^1\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}^2+2\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)d\hat{x}-2\eta\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\\
&-\eta\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}^2+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}^2\right)\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}+\eta\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)\int_0^1\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)\right)d\hat{x}\\
&+\eta\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\int_0^{\hat{x}}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)\right)d\hat{x}\\
&-\eta\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\hat{x}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}\right)\right)dx+2\eta\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}\partial \hat{t}}\\
&+\eta\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial \hat{w}_0}{\partial \hat{x}}+\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}}\right)\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)+\eta\hat{U}\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\\
&-\hat{V}_0\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)-\hat{V}_1\left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2}+\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial \hat{x}^2}\right)\cos\left(\Omega_1\hat{t}\right)
\end{aligned}\right)=0
\end{aligned}
\tag{۲-۱-۲۸}
$$

۲-۲ روش حل

در این پژوهش برای به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل معمولی وابسته به زمان، از روش گالرکین استفاده شده است. بر این اساس جابه‌جایی در راستای مماسی به صورت زیر فرض می‌شود:

$$
\hat{w}\left(\hat{x},\hat{t}\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)
\tag{۲-۲-۱}
$$

در این رابطه n تعداد درجه‌های آزادی، q_i تابع پاسخ زمانی و X_i تابع اورتوگونالی است که باید شرایط مرزی سیستم را ارضا نماید. برای شرایط مرزی یک سر گیردار و یک سر مفصل می‌توان X_i را به صورت زیر نوشت [۶۸]:

$$X_i\left(\hat{x}\right)=\sin\left(z_m\hat{x}\right)-\sinh\left(z_m\hat{x}\right)+\beta\left(\cosh\left(z_m\hat{x}\right)-\cos\left(z_m\hat{x}\right)\right) \qquad (۲-۲-۲)$$

$$,\beta=\frac{\sin\left(z_m\right)-\sinh\left(z_m\right)}{\cos\left(z_m\right)-cosh\left(z_m\right)},z_m=3.926602$$

با جایگذاری روابط (۲-۲-۱) و (۲-۲-۲) در رابطه‌ی (۲-۱-۲۸) داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4}{\partial\hat{x}^4}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\hat{t}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)-\frac{1}{2}\frac{\overline{EA}L^2}{\overline{EI}}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{pmatrix}\int_0^1\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right))^2\\+2\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{pmatrix}d\hat{x}\\
&-2\eta\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}-\eta\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}(\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right))^2\\+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}^2\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\
&+\eta\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{pmatrix}\int_0^1\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{pmatrix}\right)d\hat{x}\\
&+\eta\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{pmatrix}\int_0^{\hat{x}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{pmatrix}\right)d\hat{x}\\
&-\eta\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{pmatrix}\hat{x}\int_0^1\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{pmatrix}\right)dx\\
&+2\eta\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\\+\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{pmatrix}\\
&+\eta\hat{U}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{pmatrix}-\hat{V}_0\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{pmatrix}-\hat{V}_1\begin{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{pmatrix}\cos\left(\Omega_1\hat{t}\right)
\end{aligned} \qquad (۳-۲-۲)$$

$$
-\mu_0^2\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\left(\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial\hat{t}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)-\frac{1}{2}\frac{\overline{EAL}^2}{\overline{EI}}\left(\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{aligned}\right)\int_0^1\left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\Big)^2\\&+2\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{aligned}\right)d\hat{x}\\
&-2\eta\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}-\eta\left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\Big)^2\\&+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}^2\end{aligned}\right)\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\
&+\eta\left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{aligned}\right)\int_0^1\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{aligned}\right)\right)d\hat{x}\\
&+\eta\left(\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{aligned}\right)\int_0^{\hat{x}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{aligned}\right)\right)d\hat{x}\\
&-\eta\left(\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{aligned}\right)\hat{x}\int_0^1\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\left(\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\end{aligned}\right)\right)dx\\
&+2\eta\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)+\eta\frac{\partial}{\partial\hat{t}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\left(\begin{aligned}&\frac{\partial\hat{w}_0}{\partial\hat{x}}\\&+\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\end{aligned}\right)\left(\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{aligned}\right)\\
&+\eta\hat{U}\left(\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{aligned}\right)-\hat{V}_0\left(\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{aligned}\right)-\hat{V}_1\left(\begin{aligned}&\frac{\partial^2}{\partial\hat{x}^2}\sum_{i=1}^{n}X_i(\hat{x})q_i\left(\hat{t}\right)\\&+\frac{\partial^2\hat{w}_0}{\partial\hat{x}^2}\end{aligned}\right)\cos\left(\Omega_1\hat{t}\right)
\end{aligned}\right)=0
$$

توابع متعامد:

اعضای یک دنباله از توابع $\{f_i: i=1,2,3,..\}$ متعامد هستند اگر:

$$
\left\langle f_i\cdot f_j\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f_i(x)f_j(x)w(x)=\delta_{i,j}
\qquad
\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}
\tag{۴-۲-۲}
$$

در این رابطه $w(x)$ تابع وزن نامیده می‌شود.

با نوشتن تنها یک مود برای رابطه‌ی (۲-۲-۳) و اعمال شرط اورتوگونال برای مدل یک درجه آزادی معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی سیستم به صورت زیر به دست می‌آید

$$
\ddot{q}+\omega_0^2q+C_1\cos\left(\Omega_1\hat{t}\right)q+2\mu\dot{q}+d_1q^2\dot{q}+d_2q\dot{q}+d_3q^2+d_4q^3=F_0+F_1\cos\left(\Omega_1\hat{t}\right)
\tag{۵-۲-۲}
$$

که ضرایب این رابطه به صورت زیر است:

$$a_0 = \int_0^1 \left(X - \mu_0^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \hat{x}^2} \right) X d\hat{x} \qquad (۲-۲-۶)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{a_0} \int_0^1 \begin{pmatrix} X'''' - \dfrac{\overline{EA}L^2}{2\overline{EI}} w_0'' \int_0^1 \left(2\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} + \eta \hat{U} X'' - \hat{V}_0 X'' \\ -\mu_0^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(-\dfrac{\overline{EA}L^2}{2\overline{EI}} \hat{w}_0'' \int_0^1 \left(2\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} + \eta \hat{U} X'' - \hat{V}_0 X'' \right) \end{pmatrix} X d\hat{x} \qquad (۲-۲-۷)$$

$$C_1 = \frac{1}{a_0} \int_0^1 \left(-\hat{V}_1 \frac{\partial^2 X}{\partial \hat{x}^2} + \mu_0^2 \hat{V}_1 \frac{\partial^4 X}{\partial \hat{x}^4} \right) X d\hat{x} \qquad (۲-۲-۸)$$

$$\mu = \frac{\eta}{a_0} \int_0^1 \begin{pmatrix} \hat{w}_0'^2 X' - \hat{w}_0' \int_0^1 \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} + \hat{w}_0'' \int_0^{\hat{x}} \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} - \hat{w}_0'' \hat{x} \int_0^1 \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} + 2X' - \hat{w}_0' \hat{w}_0'' X \\ -\mu_0^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \begin{pmatrix} \hat{w}_0'^2 X' - \hat{w}_0' \int_0^1 \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} + \hat{w}_0'' \int_0^{\hat{x}} \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} - \hat{w}_0'' \hat{x} \int_0^1 \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} \\ +2X' - \hat{w}_0' \hat{w}_0'' X \end{pmatrix} \end{pmatrix} X\, d\hat{x} \qquad (۲-۲-۹)$$

$$d_1 = \frac{\eta}{a_0} \int_0^1 \begin{pmatrix} X'^3 - X' \int_0^1 \left(X'^2 \right) d\hat{x} + X'' \int_0^{\hat{x}} \left(X'^2 \right) d\hat{x} - X''\hat{x} \int_0^1 (X'^2) d\hat{x} - XX'X'' \\ -\mu_0^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \begin{pmatrix} X'^3 - X' \int_0^1 \left(X'^2 \right) d\hat{x} + X'' \int_0^{\hat{x}} \left(X'^2 \right) d\hat{x} \\ -X''\hat{x} \int_0^1 (X'^2) d\hat{x} - XX'X'' \end{pmatrix} \end{pmatrix} X\, d\hat{x} \qquad (۲-۲-۱۰)$$

$$d_2 = \frac{\eta}{a_0} \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\hat{w}_0' X' - \hat{w}_0' \int_0^1 \left(X'^2 \right) d\hat{x} - X' \int_0^1 \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} + \hat{w}_0'' \int_0^{\hat{x}} \left(x'^2 \right) d\hat{x} - \hat{w}_0'' \hat{x} \int_0^1 \left(x'^2 \right) d\hat{x} \\ +X'' \int_0^{\hat{x}} \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} - X''\hat{x} \int_0^1 \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} - XX''\hat{w}_0' - XX'\hat{w}_0'' \\ -\mu_0^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \begin{pmatrix} 2\hat{w}_0' X' - \hat{w}_0' \int_0^1 \left(X'^2 \right) d\hat{x} - X' \int_0^1 \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} + \hat{w}_0'' \int_0^{\hat{x}} \left(x'^2 \right) d\hat{x} \\ -\hat{w}_0'' \hat{x} \int_0^1 \left(x'^2 \right) d\hat{x} + X'' \int_0^{\hat{x}} \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} - X''\hat{x} \int_0^1 \left(\hat{w}_0' X' \right) d\hat{x} \\ -XX''\hat{w}_0' - XX'\hat{w}_0'' \end{pmatrix} \end{pmatrix} X d\hat{x} \qquad (۲-۲-۱۱)$$

$$d_3 = \frac{\overline{EA}L^2}{2\overline{EI}} \int_0^1 \begin{pmatrix} -X'' \int_0^1 \left(2X'\hat{w}_0' \right) d\hat{x} - \hat{w}_0'' \int_0^1 \left(X'^2 \right) d\hat{x} \\ -\mu_0^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(-X'' \int_0^1 \left(2X'\hat{w}_0' \right) d\hat{x} - \hat{w}_0'' \int_0^1 \left(X'^2 \right) d\hat{x} \right) \end{pmatrix} X d\hat{x} \qquad (۲-۲-۱۲)$$

$$d_4 = \frac{\overline{EA}L^2}{2\overline{EI}} \int_0^1 \left(X'' \int_0^1 \left(X'^2 \right) d\hat{x} - \mu_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(X'' \int_0^1 \left(X'^2 \right) d\hat{x} \right) \right) X d\hat{x} \qquad (۲-۲-۱۳)$$

$$F_0 = \frac{1}{a_0} \int_0^1 \left(-\eta \hat{U} \hat{w}_0'' + \mu_0^2 \eta \hat{U} \hat{w}_0'''' \right) X d\hat{x} \qquad (۲-۲-۱۴)$$

$$F_1 = \frac{1}{a_0} \int_0^1 \left(-\hat{V}_1 \hat{w}_0'' + \mu_0^2 \hat{V}_1 \hat{w}_0'''' \right) X d\hat{x} \qquad (۲-۲-۱۵)$$

در رابطه‌ی (۲-۲-۵)، F_0 عدد ثابت است که همانند تحریک استاتیکی به سیستم اعمال می‌شود، لذا می‌توان پاسخ زمانی سیستم را به دو قسمت ثابت و متغیر با زمان تقسیم کرد. به عبارتی:

$$q = q_s + q_d\left(t\right) \qquad (۲-۲-۱۶)$$

که در این رابطه q_s پاسخ استاتیکی و q_d پاسخ دینامیکی سیستم نامگذاری می‌شود.

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۲-۱۶) در رابطه‌ی (۲-۲-۵) داریم:

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_d + \omega_0^2\left(q_s + q_d\right) + C_1\cos\left(\Omega_1 t\right)\left(q_s + q_d\right) + 2\mu\dot{q}_d + d_1\left(q_s + q_d\right)^2\dot{q}_d \\ &+ d_2\left(q_s + q_d\right)\dot{q}_d + d_3\left(q_s + q_d\right)^2 + d_4\left(q_s + q_d\right)^3 = F_0 + F_1\cos\left(\Omega_1 \hat{t}\right) \end{aligned} \qquad (۲-۲-۱۷)$$

برای محاسبه پاسخ استاتیکی، با برابر صفر قرار دادن ترم‌های وابسته به زمان و نیز مشتقات زمانی در رابطه‌ی (۲-۲-۱۷) داریم:

$$\omega_0^2 q_s + d_3 q_s^2 + d_4 q_s^3 = F_0 \qquad (۲-۲-۱۸)$$

که از حل رابطه‌ی بالا مقدار q_s بر حسب F_0 به دست می‌آید. با جایگذاری مقدار q_s در رابطه‌ی (۲-۲-۱۶)، ساده سازی رابطه‌ی (۲-۲-۱۷) و حذف جملات رابطه‌ی (۲-۲-۱۸) از طرفین آن، معادله‌ی غیرخطی حاکم بر پاسخ دینامیکی سیستم بصورت زیر به‌دست می آید:

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_d + \left(\omega_0^2 + 2d_3 q_s + 3d_4 q_s^2\right) q_d + C_1\cos\left(\Omega_1 t\right) q_d + \left(2\mu + d_1 q_s^2 + d_2 q_s\right)\dot{q}_d \\ &+ d_1 q_d^2 \dot{q}_d + \left(2d_1 q_s + d_2\right) q_d \dot{q}_d + \left(d_3 + 3d_4 q_s\right) q_d^2 + d_4 {q_d}^3 = \left(F_1 + C_1 q_s\right)\cos\left(\Omega_1 \hat{t}\right) \end{aligned} \qquad (۲-۲-۱۹)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{q}_d + \omega^2 q_d + C_1\cos\left(\Omega_1 t\right) q_d + 2\xi\dot{q}_d + k_1 q_d^2 \dot{q}_d + k_2 q_d \dot{q}_d + k_3 q_d^2 + k_4 {q_d}^3 = f\cos\left(\Omega_1 \hat{t}\right) \qquad (۲-۲-۲۰)$$

که ضرایب این رابطه به صورت زیر هستند:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2d_3q_s + 3d_4q_s^2 \qquad (۲-۲-۲۱)$$

$$2\xi = 2\mu + d_1q_s^2 + d_2q_s \qquad (۲-۲-۲۲)$$

$$k_1 = d_1 \qquad (۲-۲-۲۳)$$

$$k_2 = 2d_1q_s + d_2 \qquad (۲-۲-۲۴)$$

$$k_3 = d_3 + 3d_4q_s \qquad (۲-۲-۲۵)$$

$$k_4 = d_4 \qquad (۲-۲-۲۶)$$

$$f = F_1 + C_1q_s \qquad (۲-۲-۲۷)$$

برای به‌دست آوردن حل این معادله از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه استفاده شده است. بدین منظور برای متعادل سازی تاثیر ترم‌های میرایی، غیرخطی و تحریک، در رابطه‌ی (۲-۲-۲۰) ضریب C_1 به صورت ε^2C_1، ضریب ξ به صورت $2\varepsilon^2\xi$، ضریب k_1 به صورت ε^2k_1، ضریب k_2 به صورت εk_2، ضریب k_3 به صورت εk_3، ضریب k_4 به صورت ε^2k_4 و ضریب f به صورت ε^2f نوشته می‌شود [۷۱]. بنابر این داریم:

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_d + \omega^2q_d + \varepsilon^2C_1\cos\left(\Omega_1t\right)q_d + 2\varepsilon^2\xi\dot{q}_d + \varepsilon^2k_1q_d^2\dot{q}_d \\ &+\varepsilon k_2q_d\dot{q}_d + \varepsilon k_3q_d^2 + \varepsilon^2k_4{q_d}^3 = \varepsilon^2 f\cos\left(\Omega_1\hat{t}\right)\end{aligned} \qquad (۲-۲-۲۸)$$

که در این رابطه ε پارامتر بی‌بعد اغتشاش[۱] کوچک است. بر اساس روش مقیاس‌های زمانی چندگانه برای حل معادله دیفرانسیل رابطه‌ی (۲-۲-۲۸)، مقیاس‌های زمانی و مشتقات زمانی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T_0 = \hat{t} \quad , \; T_1 = \varepsilon\hat{t} \quad , \; T_2 = \varepsilon^2\hat{t} \qquad (۲-۲-۲۹)$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt}\frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt}\frac{\partial}{\partial T_1} + \ldots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2D_2 \\ &\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0D_1 + \varepsilon^2\left(D_0^2 + 2D_0D_1\right) + \ldots\end{aligned} \qquad (۲-۲-۳۰)$$

با توجه به روش حل، در ابتدا جواب را به صورت سری زیر تخمین می‌زنیم (خاطر نشان می‌شود از این پس در این متن برای ساده نوشتن روابط و جلوگیری از اشتباه به جای علامت q_dاز علامت q استفاده شده است):

[۱] Perturbation

$$q(t)=q_0\left(T_0,T_1,T_2\right)+\varepsilon q_1\left(T_0,T_1,T_2\right)+\varepsilon^2 q_2\left(T_0,T_1,T_2\right)+\ldots \qquad (۲-۲-۳۱)$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (۲-۲-۲۸) و جداسازی ضرایب مرتبه‌های مختلف از ε داریم:

$$\varepsilon^0: \quad D_0^2 q_0+\omega^2 q_0=0 \qquad (۲-۲-۳۲)$$

$$\varepsilon^1: \quad D_0^2 q_1+\omega^2 q_1=-2D_0D_1q_0-k_3{q_0}^2-k_2q_0D_0q_0 \qquad (۲-۲-۳۳)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2: \quad & D_0^2 q_2+\omega^2 q_2=-2D_0D_2q_0-2\xi D_0q_0-D_1^2q_0-2D_0D_1q_1\\ & -k_1q_0^2D_0q_0-k_2q_0D_1q_0-2k_3q_0q_1-k_2q_0D_1q_0-k_2q_0D_0q_1\\ & -k_4q_0^3-C_1q_0\cos\left(\Omega_1\hat{t}\right)+f\cos\left(\Omega_1\hat{t}\right)\end{aligned} \qquad (۲-۲-۳۴)$$

حل عمومی رابطه‌ی (۲-۲-۳۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$q_0=A_1\left(T_1,T_2\right)\exp\left(i\omega T_0\right)+c.c. \qquad (۲-۲-۳۵)$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (۲-۲-۳۳) داریم:

$$\begin{aligned}& D_0^2q_1+\omega^2q_1=-2i\omega D_1A\exp\left(i\omega T_0\right)-k_3\left(A^2\exp\left(2i\omega T_0\right)+2A\bar{A}\right)\\ & -k_2A^2i\omega\exp\left(2i\omega T_0\right)+c.c\end{aligned} \qquad (۲-۲-۳۶)$$

با برابر صفر قرار دادن سکولار ترم‌های رابطه‌ی بالا داریم:

$$D_1A=0 \qquad (۲-۲-۳۷)$$

که این به بدین معناست که A تابعی از T_1 نیست. بنابر این با توجه به حل بخش خصوصی رابطه‌ی (۲-۲-۳۶) داریم:

$$q_1=\frac{1}{\omega^2}\begin{pmatrix}-2k_3A\bar{A}+\frac{(-k_3A^2-k_2i\omega A^2)}{-3}exp(2i\omega T_0)\\ +\frac{(-k_3\bar{A}^2+k_2i\omega\bar{A}^2)}{-3}exp(-2i\omega T_0)\end{pmatrix} \qquad (۲-۲-۳۸)$$

حال با جایگذاری روابط (۲-۲-۳۵) و (۲-۲-۳۸) در رابطه‌ی (۲-۲-۳۴) داریم:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2: \quad D_0^2 q_2+\omega^2 q_2=-2i\omega\left(A'+\xi A+\frac{1}{2}k_1A^2\bar{A}-\frac{7}{6}k_2A^2\bar{A}\right)\exp\left(i\omega T_0\right)\\
&-\left(\frac{2k_3^2}{3\omega^2}A^3\right)\exp\left(3i\omega T_0\right)-k_4\left(3A^2\bar{A}exp\left(i\omega T_0\right)+A^3\exp\left(3i\omega T_0\right)\right)\\
&-\left(k_1A^3i\omega\right)\exp\left(3i\omega T_0\right)-(k_2A^2i\omega)\exp\left(2i\omega T_0\right)+\left(\frac{14}{3\omega^2}k_3^2A^2\bar{A}\right)\exp\left(i\omega T_0\right)\\
&+\frac{5}{3\omega}\left(k_3d_2A^3i\right)\exp\left(3i\omega T_0\right)-\left(k_2^2A^3\right)\exp\left(3i\omega T_0\right)-\frac{1}{3}\left(k_2{}^2\bar{A}A^2\right)\exp\left(i\omega T_0\right)\\
&-\frac{1}{2}C_1\left(A\exp\left(i\left(\Omega_1+\omega\right)T_0\right)+\bar{A}\exp\left(i\left(\Omega_1-\omega\right)T_0\right)\right)+k_2A\bar{A}i\omega+\frac{f}{2}\exp\left(i\Omega_1T_0\right)+C.C
\end{aligned}
\qquad (۲-۲-۳۹)
$$

با توجه به رابطه‌ی بالا تشدیدهای اولیه و پارامتریک در سیستم رخ می‌دهد که این تشدیدها به واسطه‌ی وجود ولتاژ هارمونیک لایه‌ی پیزوالکتریک به وجود می‌آیند.

۲-۲-۱. تشدید اولیه

در اینجا این گونه فرض شده است که فرکانس طبیعی سیستم نزدیک به فرکانس ولتاژ هارمونیک پیزوالکتریک باشد. بنابر این رابطه‌ی بین این دو فرکانس به صورت زیر است"

$$\Omega_1=\omega+\varepsilon\sigma \qquad (۲-۲-۴۰)$$

در این رابطه σ پارامتر تنظیم است که میزان انحراف فرکانس تحریک از فرکانس طبیعی سیستم را نشان می‌دهد.

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۲-۴۰) در رابطه‌ی (۲-۲-۳۹)، سکولارترم‌ها مطابق زیر تعیین می‌شوند:

$$2i\omega\left(A'+\xi A+\frac{1}{2}k_1A^2\bar{A}-\frac{7}{8}k_2k_3A^2\bar{A}\right)+\left(3k_4+\frac{1}{3}k_2^2-\frac{14k_3^2}{3\omega^2}\right)A^2\bar{A}-\frac{1}{2}f\exp\left(i\sigma T_1\right)=0 \qquad (۲-۲-۴۱)$$

حال با استفاده از فرم قطبی $A=\frac{1}{2}a\ exp(i\theta)$ و جایگذاری در رابطه‌ی بالا و جداسازی قسمت-های حقیقی و موهومی آن به دو رابطه‌ی کوپل شده زیر می‌رسیم:

$$\left(\gamma'-\sigma\right)\omega a+\frac{1}{8}\left(3k_4+\frac{1}{3}k_2^2-\frac{14k_3^2}{3\omega^2}\right)a^3-\frac{1}{2}f\cos\left(\gamma\right)=0 \qquad (۲-۲-۴۲)$$

$$a'\omega-\xi\omega a+\frac{1}{8}k_1a^3\omega-\frac{7}{32}a^3\omega k_2k_3-\frac{1}{2}f\sin\left(\gamma\right)=0 \qquad (۲-۲-۴۳)$$

که $\gamma = \sigma T_0 + \theta$

برای رسیدن به پاسخ حالت پایا $\acute{a}$ و $\acute{\gamma}$ باید صفر باشند. بنابر این بعد از کمی ساده‌سازی ریاضیاتی می‌توان روابط بالا را به صورت زیر نوشت:

$$\left(-\xi\omega a+\frac{1}{8}k_1a^3\omega-\frac{7}{32}a^3\omega k_2k_3\right)^2+\left(-\sigma\omega a+\frac{1}{8}\left(3k_4+\frac{1}{3}k_2^2-\frac{14k_3^2}{3\omega^2}\right)a^3\right)^2=\frac{1}{4}f^2 \qquad (۲-۲-۴۴)$$

که این رابطه، معادله‌ی پاسخ فرکانسی سیستم برای حالت تشدید اولیه است.

۲-۲-۲. تشدید پارامتریک

در این قسمت فرض شده است که فرکانس ولتاژ هارمونیک لایه‌ی پیزوالکتریک، دو برابر فرکانس طبیعی سیستم باشد. بنابر این این رابطه‌ی بین این دو فرکانس به صورت زیر است

$$\Omega_1 = 2\omega+\varepsilon\sigma \qquad (۲-۲-۴۵)$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا در رابطه‌ی (۲-۲-۳۸) سکولار ترم‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$2i\omega\left(A'+\xi A+\frac{1}{2}k_1A^2\bar{A}-\frac{7}{8}k_2k_3A^2\bar{A}\right)+\left(3k_4+\frac{1}{3}k_2^2-\frac{14k_3^2}{3\omega^2}\right)A^2\bar{A}+\frac{1}{2}C_1\bar{A}\exp\left(i\sigma T_1\right)=0 \qquad (۲-۲-۴۶)$$

مطابق با حالت قبل با استفاده فرم قطبی $A=\frac{1}{2}a\,exp(i\theta)$ رابطه‌ی پاسخ فرکانسی برای تحریک پارامتریک به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(-\xi\omega a+\frac{1}{8}k_1a^3\omega-\frac{7}{32}a^3\omega k_2k_3\right)^2+\left(-\sigma\omega a+\frac{1}{8}\left(3k_4+\frac{1}{3}k_2^2-\frac{14k_3^2}{3\omega^2}\right)a^3\right)^2=\frac{1}{16}C_1^2a^2 \qquad (۲-۲-۴۷)$$

فصل سوم

(نتایج وبحث)

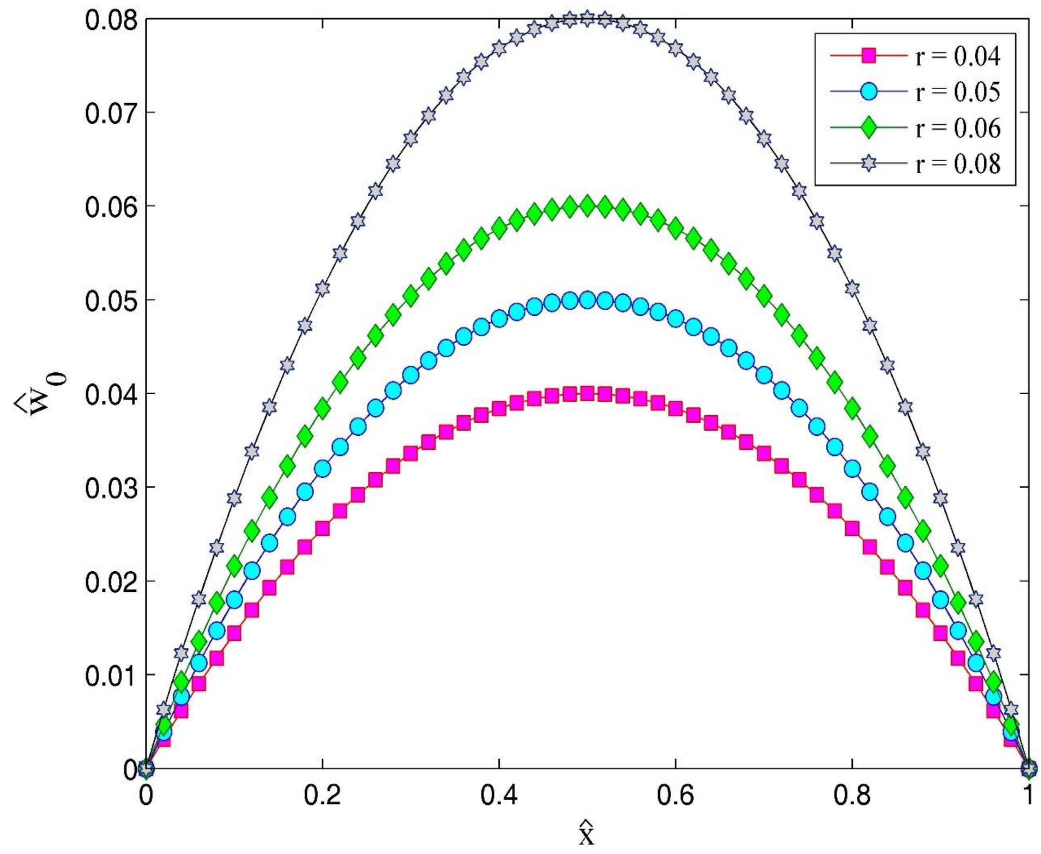
در این فصل تاثیر پارامترهای مختلف سیستم از جمله ضخامت و ولتاژ لایه‌ی پیزوالکتریک، عدد نادسن، سرعت سیال، مقیاس خمیدگی و پارامتر غیرمحلی بر پاسخ فرکانسی سیستم مورد بررسی قرار خواهد گرفت. ابعاد هندسی و ویژگی‌های مواد در جدول زیر آورده شده اند:

جدول ۱. پارامترهای فیزیکی و هندسی سیستم [۶۱,۷۲]

پارامتر	مقدار
مدول الاستیسیته‌ی پیزوالکتریک E_1 (GPa)	۱۲۹
مدول الاستیسیته‌ی CNT E_2 (TPa)	۱-۱/۲
چگالی پیزوالکتریک ρ_1 (kg/m^3)	۷۵۰۰
چگالی CNT ρ_2 (kg/m^3)	۱۲۰۰-۲۳۰۰
شعاع پیزوالکتریک R_1 (nm)	۱-۲۰
شعاع CNT R_2 (nm)	۰/۵-۶
ضخامت پیزوالکتریک t_1 (nm)	۵-۲۰
ضخامت CNT R_2 (nm)	۰/۲-۰/۶
طول L (nm)	۱۰-۱۰۰
چگالی سیال ρ_f (kg/m^3)	۱۰۰۰
ضریب پیزوالکتریک e_1 (Cm^{-2})	۱/۲۲

برای مدل سازی خمیدگی اولیه‌ی نانولوله از تابع درجه دو استفاده شده است. شکل ۳-۱ نمایی از میزان خمیدگی نانولوله را نشان می‌دهد. در این شکل r نسبت ارتفاع نانولوله در نقطه‌ی میانی به فاصله‌ی دو انتهای تیر است. در واقع تغییر در اندازه‌ی r منجر به تغییر میزان خمیدگی نانولوله می‌شود.

تابع در نظر گرفته شده برای خمیدگی اولیه به صورت $w_0(x) = 4r(x^2 - x)$ است.



شکل ۳-۱. خمیدگی اولیه‌ی نانولوله با توجه به مقادیر مختلف r

۳-۱. بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی

شکل‌های ۳-۲ تا ۳-۶، تغییرات فرکانس طبیعی سیستم نسبت به سرعت جریان سیال با توجه به پارامترهای مختلف از سیستم را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل‌ها با افزایش سرعت جریان فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. در فرکانس صفر و در سرعت جریان مشخصی، سیستم وارد منطقه‌ی ناپایداری می‌شود که به این سرعت جریان، سرعت بحرانی می‌گویند. از طرف دیگر می‌توان گفت که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی سیستم زمانی اتفاق می‌افتد که سیال در داخل نانولوله ساکن باشد.

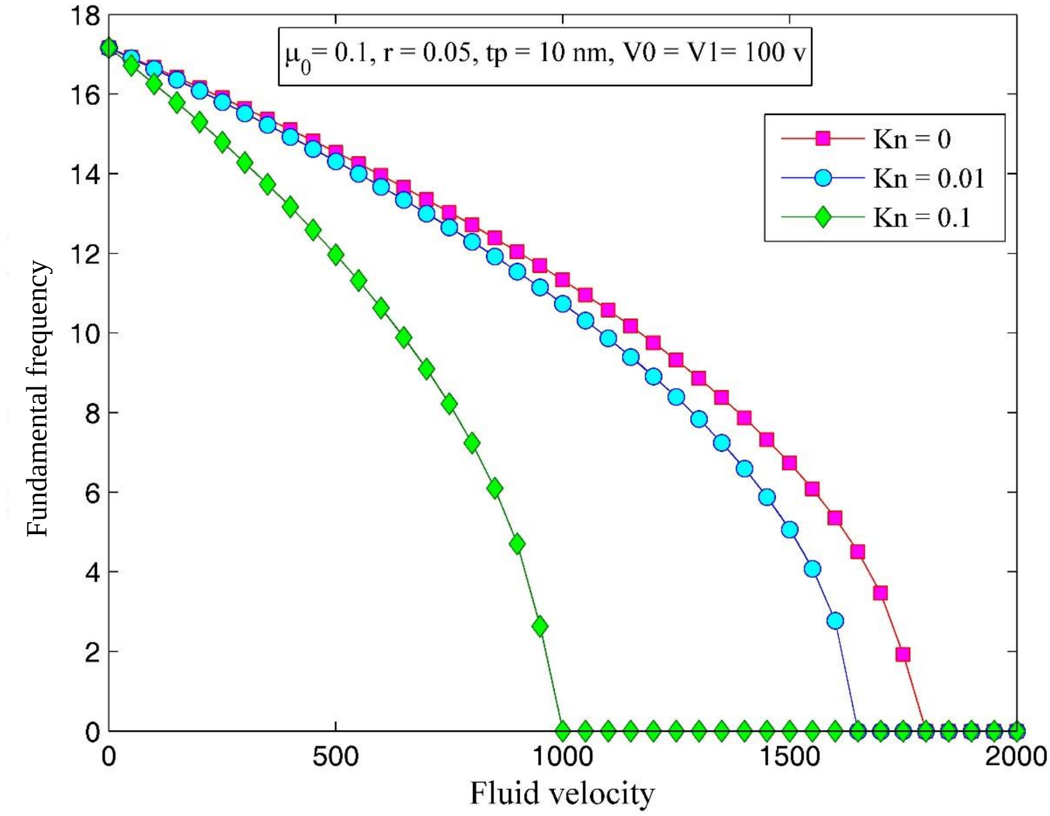
تاثیر عدد نادسن بر فرکانس طبیعی سیستم در شکل ۳-۲ نشان داده شده است. مطابق با این شکل، در سرعت جریان برابر صفر، تغییر عدد نادسن تاثیری بر فرکانس طبیعی ندارد. ولی در سرعت‌های غیر صفر با افزایش عدد نادسن فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی کاهش می‌یابند. مطابق با روابط (۲-۱-۱۴) تا (۲-۱-۱۷) افزایش عدد نادسن باعث افزایش ضریب تصحیح و مطابق با آن باعث افزایش سرعت سیال می‌شود. سرعت سیال به دو صورت مثبت و منفی در رابطه‌ی (۲-۲-۵) ظاهر شده است. اما با

افزایش عدد نادسن (افزایش سرعت سیال) فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. این موضوع نشان می‌دهد که ترم‌هایی که در پارامتر غیرمحلی ضرب شده‌اند تاثیر بیشتری در رفتار سیستم دارند.

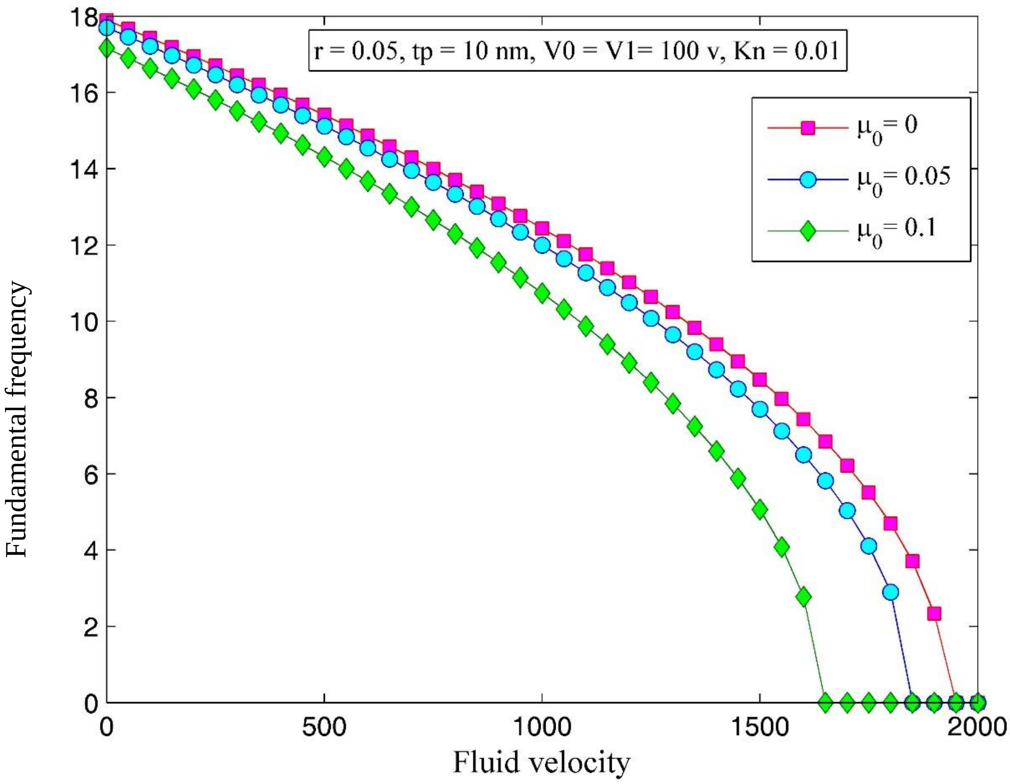
شکل ۳-۳ تاثیر پارامتر غیرمحلی بر فرکانس طبیعی سیستم را نشان می‌دهد. همان طور که نشان داده شده است، افزایش پارامتر غیرمحلی منجر به کاهش سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی سیستم می‌شود. مطابق با روابط(۲-۲-۴) تا (۲-۲-۱۳)، پارمتر غیرمحلی بر تمامی ضرایب معادله‌ی ارتعاشات سیستم تاثیرگذار است. تغییر در مقدار این پارامتر منجر به تغییر در تمامی ضرایب از جمله میرایی و ترم‌های غیرخطی سیستم می‌شود که این حاکی از نقش مهم پارامتر غیرمحلی در سیستم است. بنابر این در نظر گرفتن این پارامتر در مقایسه با تئوری‌های کلاسیک امری ضروری است.

شکل ۳-۴ بیانگر تاثیر ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی سیستم است. همان طور که مشاهده می‌شود در سرعت‌های حدودا کمتر از ۴۰۰، با افزایش ضخامت، فرکانس کاهش می‌یابد و برای مقادیر بیشتر از ۴۰۰ رفتار سیستم تغییر می‌کند و با افزایش ضخامت فرکانس افزایش می‌یابد. بنابر این ضخامت پیزوالکتریک هم می‌تواند باعث سخت‌شوندگی و هم نرم‌شوندگی سیستم شود. این نکته قابل ذکر است که این مقدار خاص به مقادیر پارامترهای سیستم بستگی دارد. بنابر این انتخاب پارامترهای هندسی و فیزیکی سیستم بسیار حائز اهمیت است.

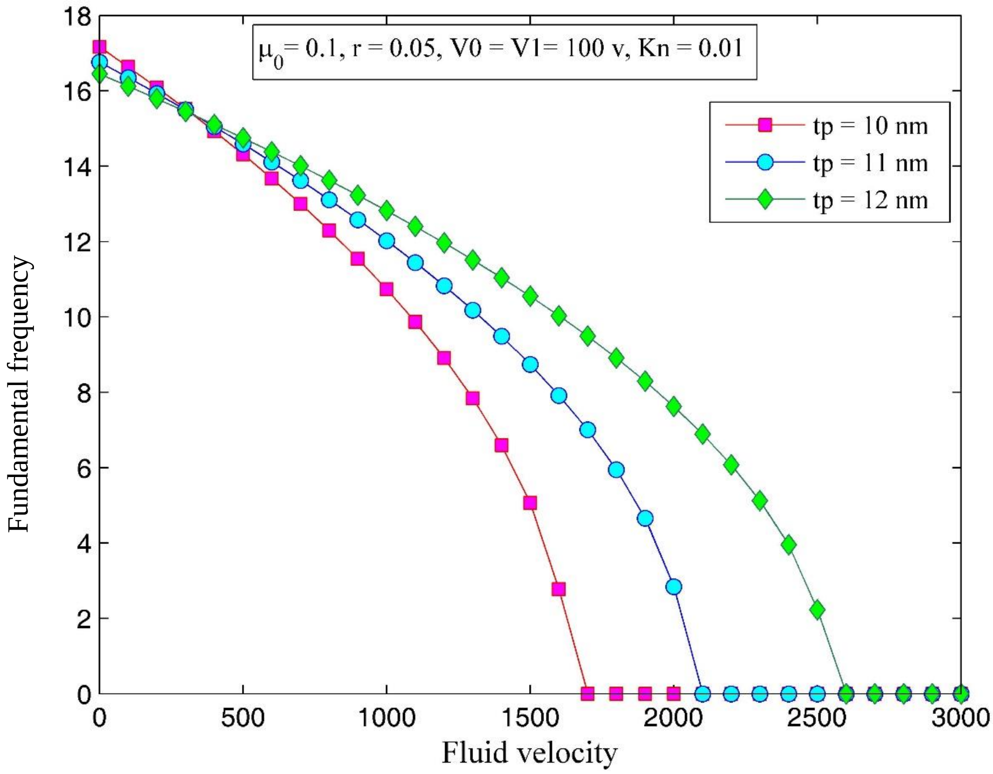
تاثیر ولتاژ ثابت لایه‌ی پیزوالکتریک و خمیدگی اولیه‌ی نانولوله بر فرکانس طبیعی سیستم در شکل‌های ۳-۵ و ۳-۶ نشان داده شده است. مطابق با این شکل‌ها افزایش این دو پارامتر باعث افزایش فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی می‌شود. ولتاژ ثابت لایه‌ی پیزوالکتریک نیز همانند سرعت سیال در رابطه‌ی (۲-۲-۵) به شکل ترم‌های مثبت و منفی ظاهر شده است ولی افزایش ولتاژ منجر به افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.



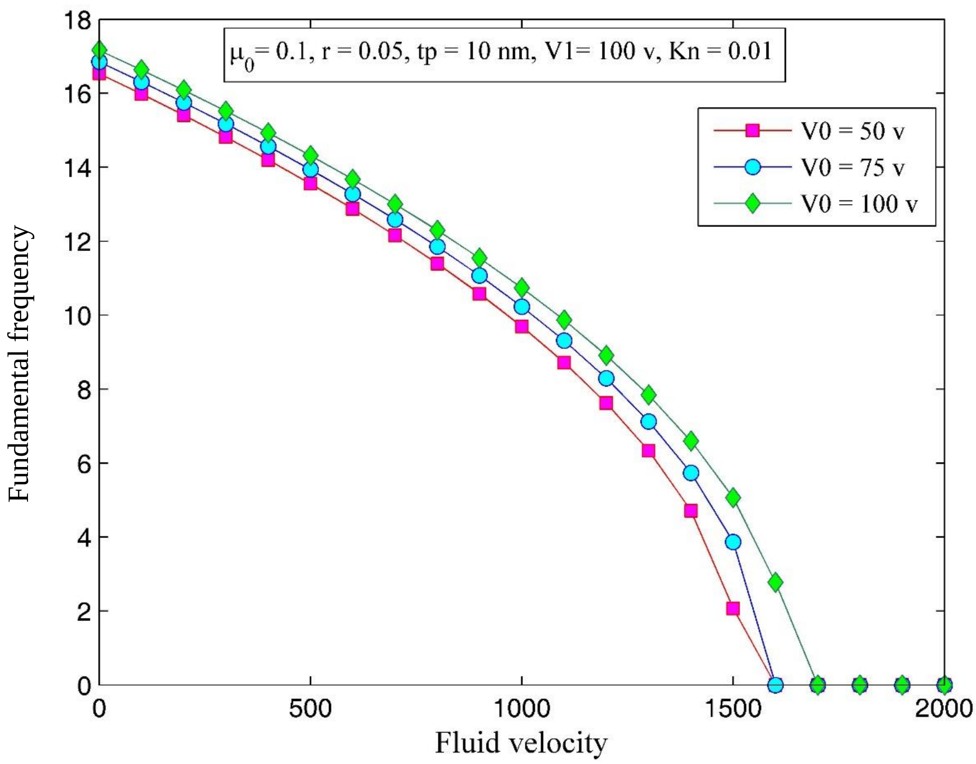
شکل ۳-۲. تاثیر عدد نادسن بر فرکانس طبیعی سیستم



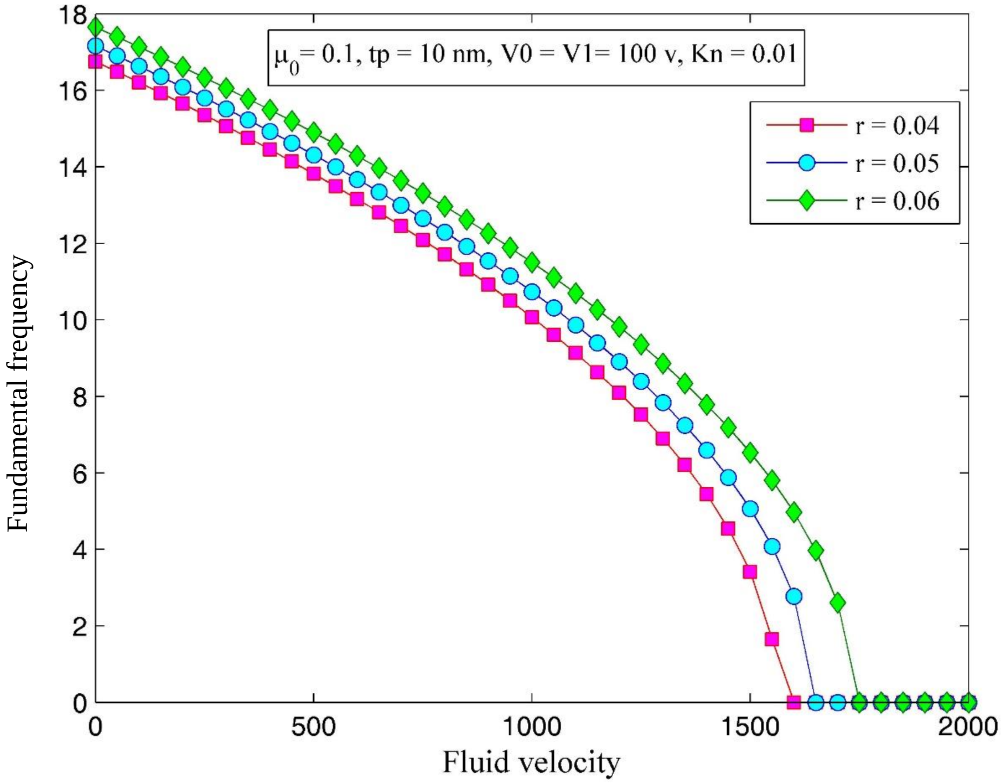
شکل ۳-۳. تاثیر پارامتر غیرمحلی بر فرکانس طبیعی سیستم



شکل ۳-۴. تاثیر ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی سیستم



شکل ۳-۵. تاثیر ولتاژ ثابت لایه‌ی پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی سیستم



شکل ۳-۶. تاثیر مقدار خمیدگی اولیه تیر (r) بر فرکانس طبیعی سیستم

۳-۲. بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی سیستم در تشدید اولیه

شکل‌های ۳-۷ تا ۳-۱۲ تاثیر پارمترهای مختلف از سیستم بر پاسخ فرکانسی در حالت تشدید اولیه را نشان می‌دهند.

تاثیر عدد نادسن بر پاسخ فرکانسی سیستم در شکل ۳-۷ نشان داده شده است. مطابق با شکل ۳-۷ افزایش عدد نادسن منجر به کاهش دامنه‌ی نوسانات شده است. این نکته قابل ذکر است که مقادیر مختلف عدد نادسن بیانگر رژیم‌های مختلف سیال است. در واقع می‌توان گفت ۰< Kn <۰/۰۱ بیانگر رژیم جریان پیوسته‌ی[۱] سیال، ۰/۰۱<Kn<۰/۱ بیانگر رژیم جریان لغزشی[۲] سیال، ۰/۱< Kn<۱۰ بیانگر رژیم جریان انتقالی[۳] سیال و Kn>۱۰ بیانگر رژیم جریان ملکول آزاد[۴] سیال است. مطابق با شکل ۳-۷ افزایش این پارامتر باعث کاهش سخت‌شوندگی سیستم شده است به طوری که در Kn برابر ۰/۱ (رژیم جریان انتقالی) سیستم به کلی در ناحیه نرم‌شونده قرار گرفته است. بنابر این، این شکل نشان

[۱] Continuum flow regime
[۲] Slip flow regime
[۳] Transition flow regime
[۴] Free molecular flow regime

می‌دهد که در نظر نگرفتن ضریب تصحیح تفاوت فاحشی را بین مدل‌سازی ریاضی و واقعیت به وجود می‌آورد.

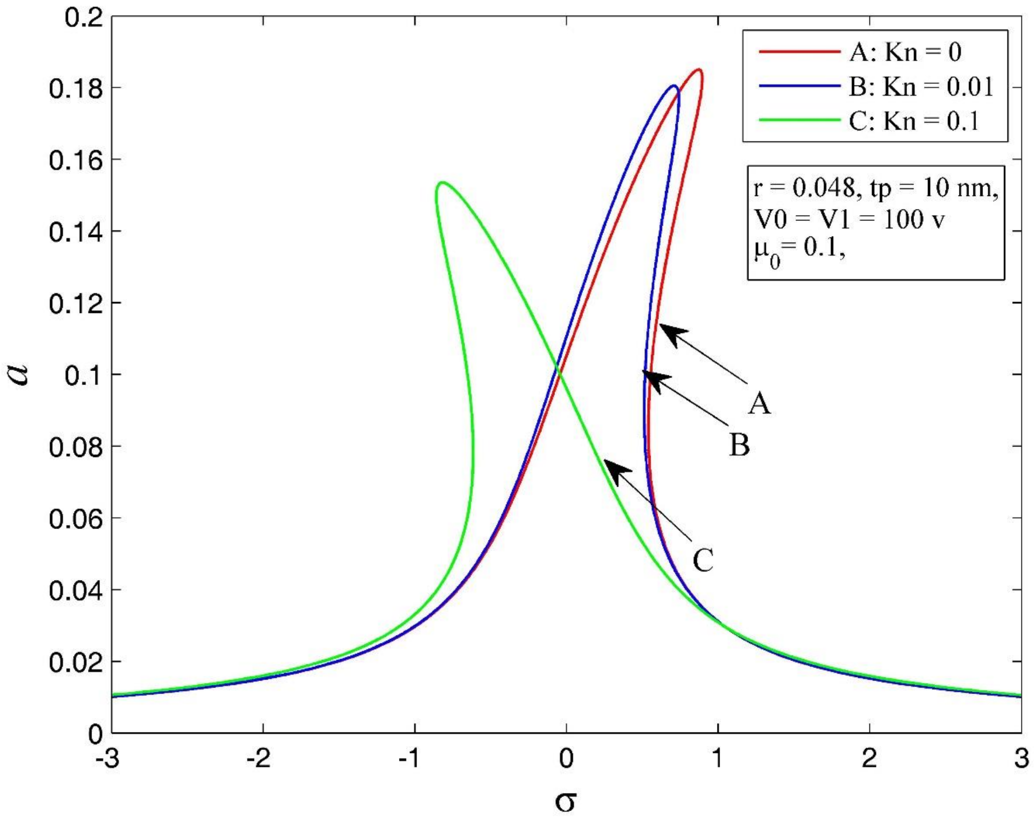
شکل ۳-۸ تاثیر پارامتر غیرمحلی بر پاسخ فرکانسی سیستم را نشان می‌دهد. همانند شکل ۳-۷ افزایش پارامتر غیرمحلی منجر به کاهش دامنه و کاهش سخت‌شوندگی سیستم می‌شود. مقایسه حالت μ=۰ و μ=۰/۱ دو نتیجه کاملا متفاوت را نشان می‌دهد. در حالت اول سیستم سخت‌شونده و در حالت دوم سیستم نرم‌شونده است که این خود دلیلی بر تفاوت فاحش بین تئوری کلاسیک و تئوری غیرمحلی است.

شکل ۳-۹ تاثیر میزان خمیدگی اولیه بر پاسخ فرکانسی سیستم را نشان می‌دهد در این شکل سه نوع رفتار متفاوت از سیستم وجود دارد. برای مقادیر کوچک از r سیستم به شدت رفتار سخت‌شوندگی دارد. با افزایش مقدار r از مقدار سختی کاسته می‌شود به طوری که در مقدار بحرانی r=۰/۰۴۹ سیستم خطی شده و با ادامه روند افزایش، رفتار سیستم نرم‌شونده می‌شود. همراه با این تغییرات دامنه نیز کاهش می‌یابد. نتایج حاصل از این شکل در تطابق کامل با نتایج ارائه شده در پژوهش‌های عسگری [۶۱] (شکل ۳-۹ (ب)) و سعادت‌نیا [۶۸] (شکل ۳-۹ (ج)) است.

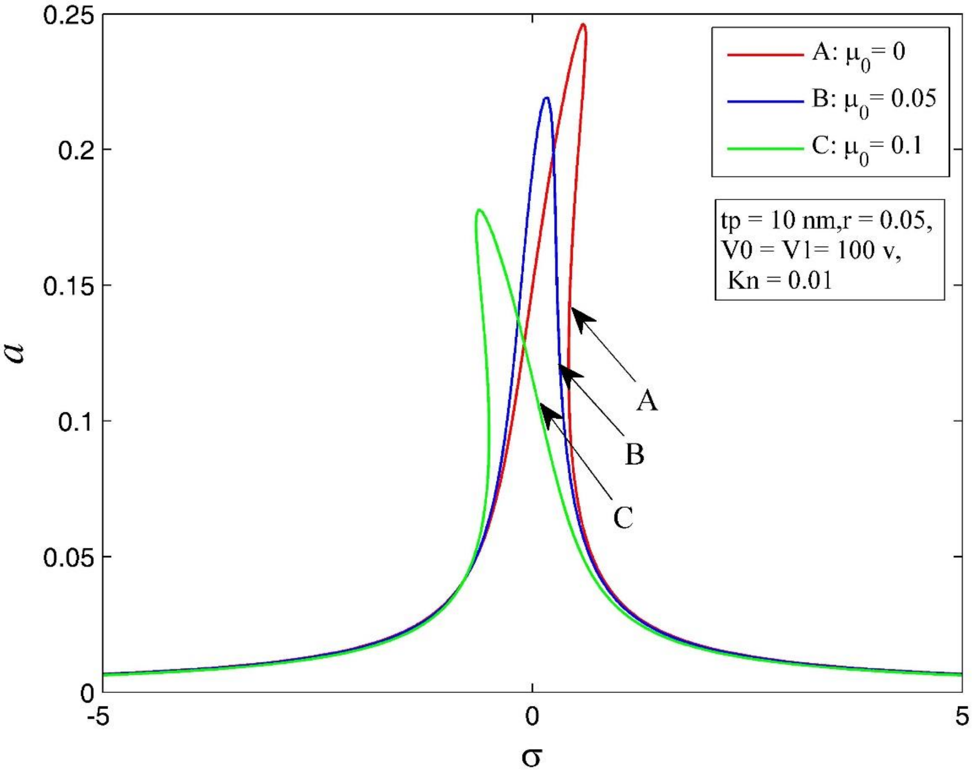
تاثیر ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم در شکل ۳-۱۰ نشان داده شده است. در این شکل همانند حالت قبل سه نوع رفتار متفاوت از سیستم وجود دارد. برای مقادیر کوچک ضخامت، سیستم رفتار نرم‌شوندگی دارد با افزایش ضخامت، رفتار سیستم سخت‌شونده می‌شود. همراه با این تغییرات دامنه نیز افزایش می‌یابد. با توجه به شکل ۳-۴ همان طور که توضیح داده شده بود تغییر در ضخامت پیزوالکتریک هم می‌تواند منجر به افزایش و هم کاهش فرکانس طبیعی شود. ولی با توجه به مقادیر انتخاب شده برای پارامترهای سیستم، سرعت بی‌بعد سیال کمتر از ۴۰۰ است (حدود ۷۵). بنابر این افزایش ضخامت منجر به کاهش فرکانس می‌شود از طرفی افزایش ضخامت منجر به افزایش جرم سیستم نیز می‌شود. مطابق با شکل ۳-۱۰ افزایش ضخامت پیزوالکتریک باعث افزایش سخت‌شوندگی سیستم شده است که این نشان می‌دهد تاثیر افزایش جرم سیستم از تاثیر کاهش فرکانس بیشتر بوده است.

شکل ۳-۱۱ تاثیر ولتاژ ثابت لایه‌ی پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم را نشان می‌دهد. در اینجا نیز همانند دو حالت قبل تغییر در اندازه‌ی ولتاژ ثابت باعث به وجود آمدن سه حالت سخت‌شوندگی، نرم‌شوندگی و یا خطی در سیستم می‌شود. با توجه به نتایج حاصل از شکل‌های ۳-۹، ۳-۱۰ و ۳-۱۱ می‌توان از سه پارامتر r، ضخامت و ولتاژ ثابت پیزوالکتریک به عنوان سه پارامتر اساسی در کنترل، طراحی و مدل‌سازی نانو سیستم‌های مبتنی بر پیزوالکتریک برای رسیدن به حالت مطلوب نرم، سخت و یا خطی استفاده کرد.

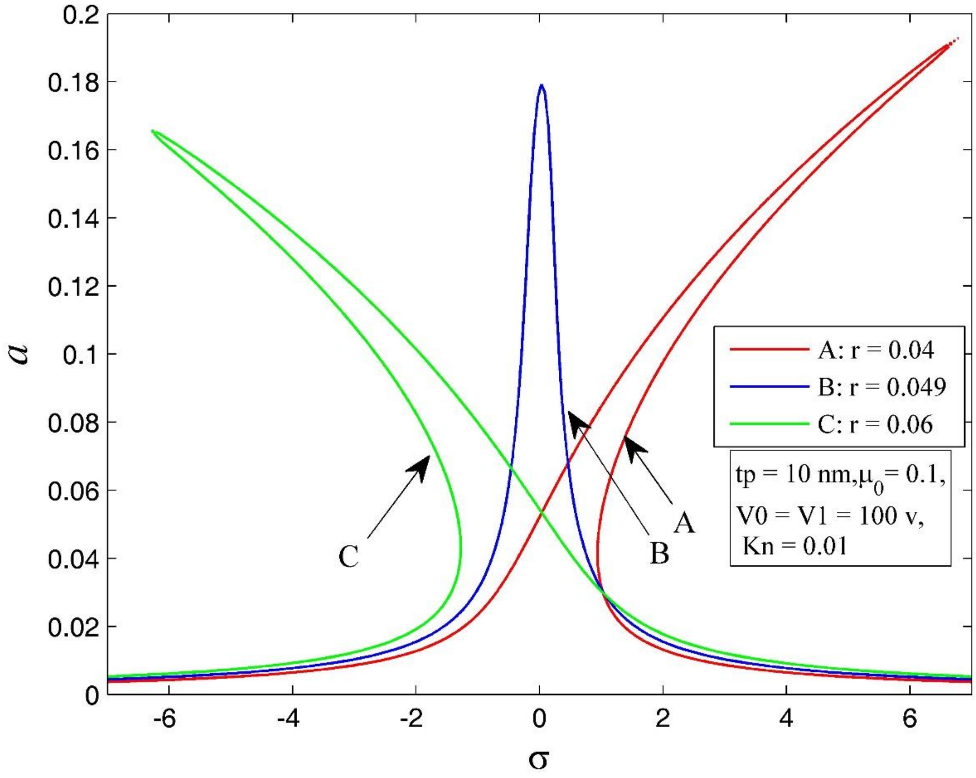
شکل ۳-۱۲ تاثیر ولتاژ هارمونیک لایه‌ی پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم را نشان می‌دهد. در رابطه‌ی (۲-۲-۱۳) ولتاژ هارمونیک به دو صورت مثبت و منفی ظاهر شده است که افزایش مقدار ولتاژ باعث افزایش ضریب F_1 می‌شود. با توجه به رابطه‌ی (۲-۲-۴۳) ضریب F_1 دامنه‌ی تحریک در حالت تشدید اولیه است. بنابر این افزایش ولتاژ هارمونیک باعث افزایش دامنه تحریک می‌شود. بر این اساس در شکل ۴-۱۲ افزایش ولتاژ هارمونیک تنها باعث افزایش دامنه نوسانات شده است.



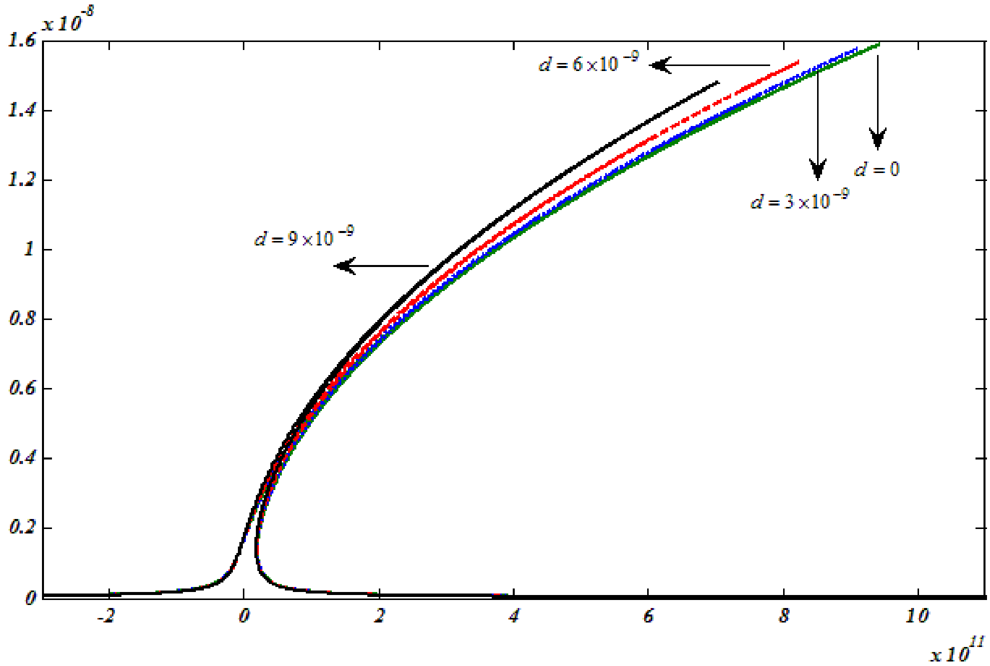
شکل ۳-۷. تاثیر عدد نادسن بر پاسخ فرکانسی سیستم در تشدید اولیه



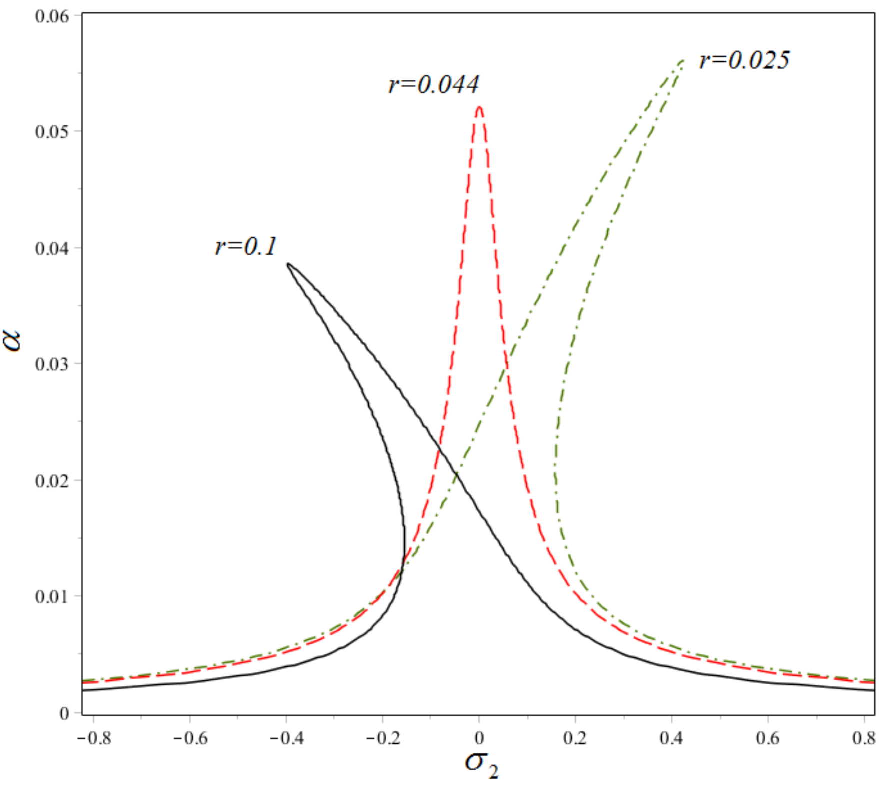
شکل ۳-۸. تاثیر پارامتر غیرمحلی بر پاسخ فرکانسی سیستم در تشدید اولیه



(الف)

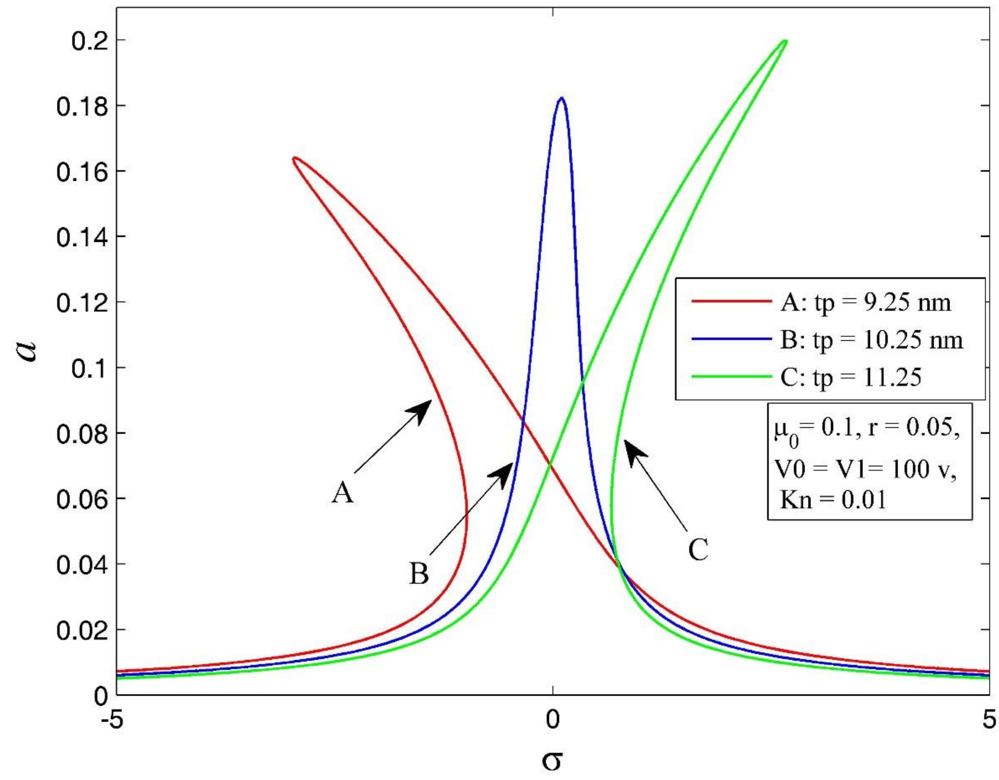


(ب)

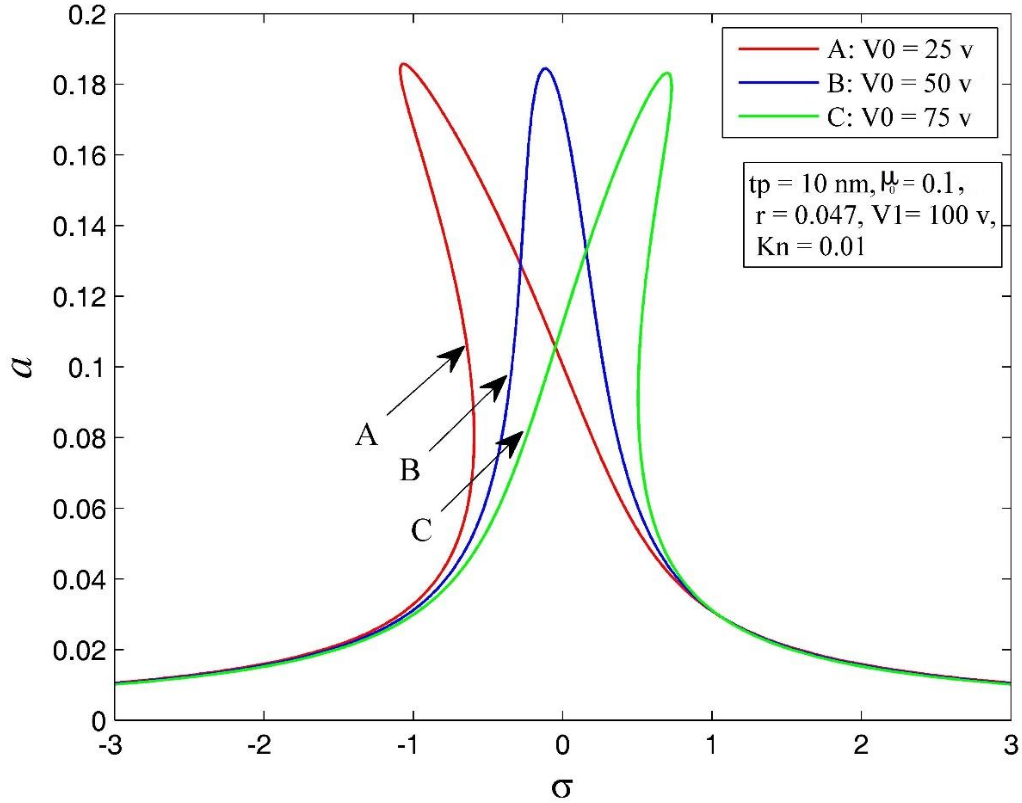


(ج)

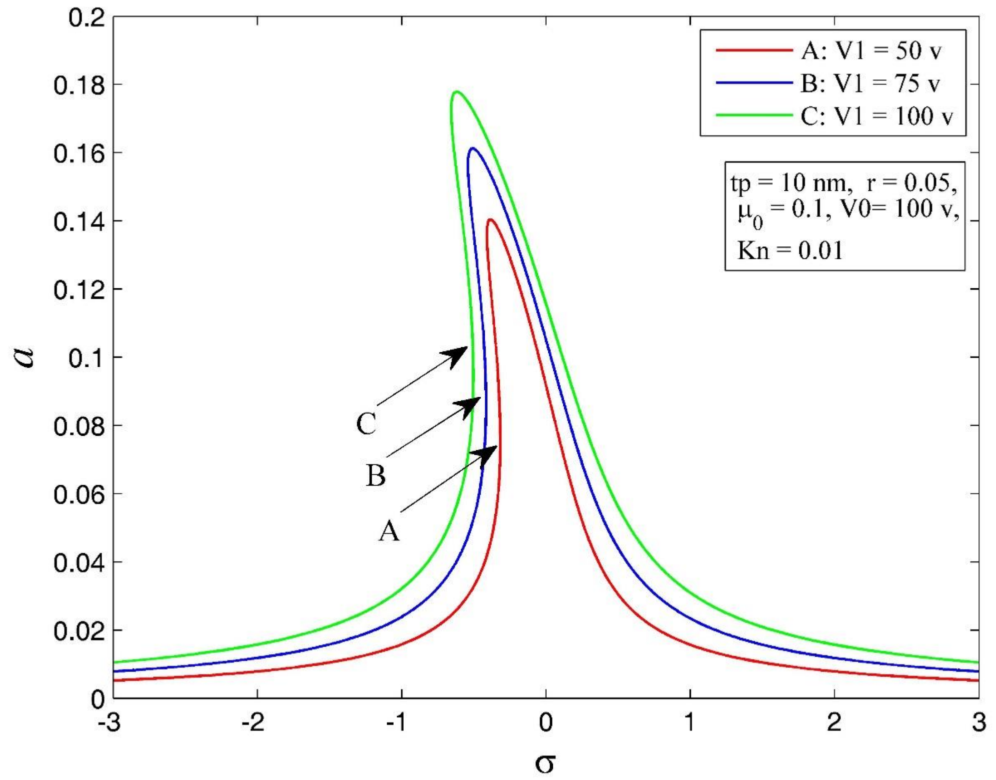
شکل ۳-۹. تاثیر مقدار خمیدگی اولیه تیر (r) بر پاسخ فرکانسی سیستم در تشدید اولیه
(الف) پژوهش حاضر، (ب) عسگری [۶۱]، (ج) سعادت‌نیا [۶۸]



شکل ۳-۱۰. تاثیر ضخامت لایه‌ی پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم در تشدید اولیه



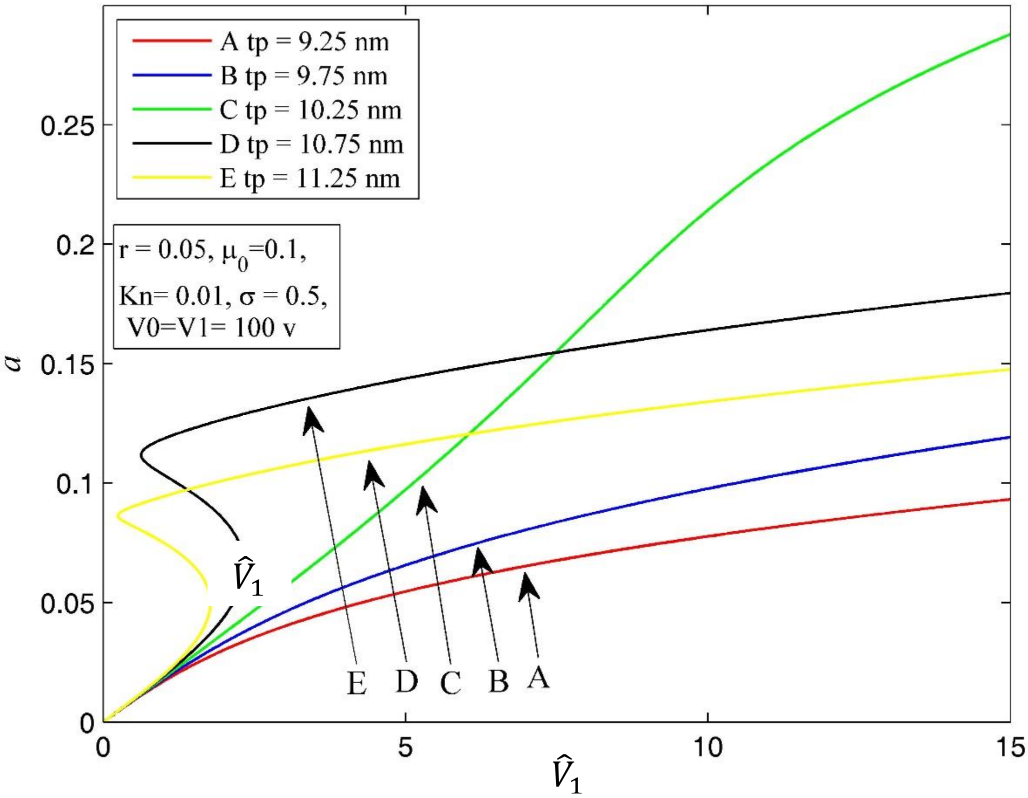
شکل ۳-۱۱. تاثیر ولتاژ ثابت لایه‌ی پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم در تشدید اولیه



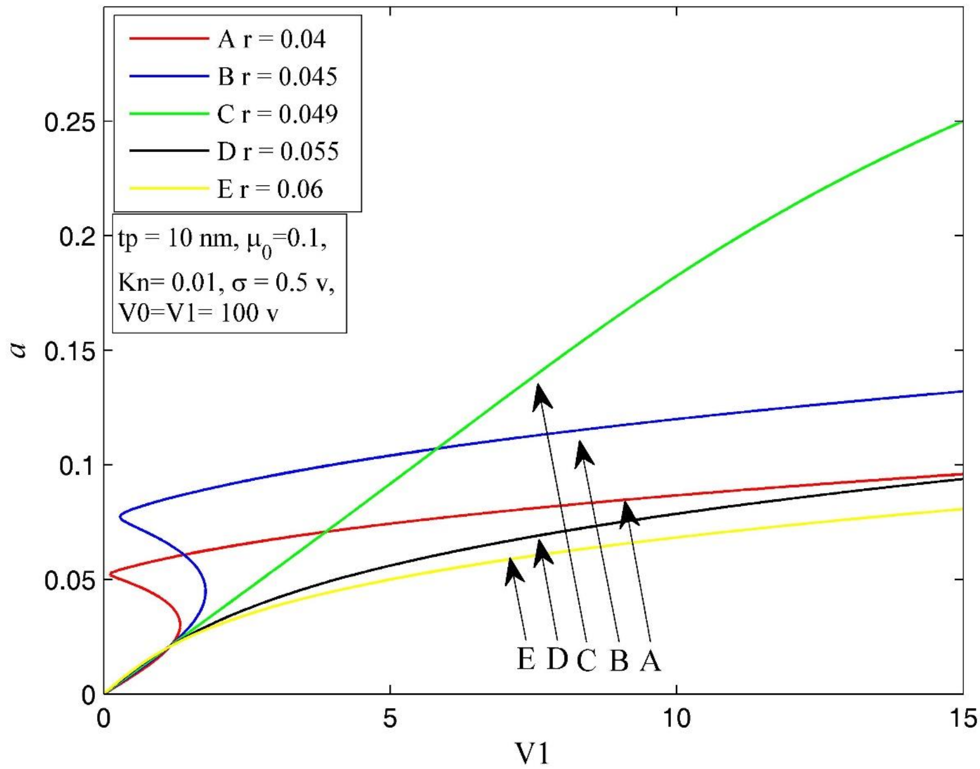
شکل ۳-۱۲. تاثیر ولتاژ هارمونیک پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم در تشدید اولیه

شکل‌های ۳-۱۳ و ۳-۱۴ دو نمونه از منحنی پاسخ برای تشدید اولیه را نشان می‌دهند. شکل ۳-۱۳ تاثیر ضخامت پیزوالکتریک بر منحنی پاسخ را نشان می‌دهد. مطابق با این شکل برای مقادیری از ضخامت که سیستم حالت نرم‌شوندگی دارد (باتوجه به شکل ۳-۱۰) منحنی پاسخ به صورت تک‌مقداره و در حالتی که سیستم به صورت سخت‌شونده است منحنی پاسخ به صورت چندمقداره در می‌آید. با توجه به شکل به ازای مقادیری که که پاسخ به صورت تک مقداره است، با افزایش مقدار ضخامت، منحنی پاسخ به سمت بالا جابه‌جا می‌شود (دامنه افزایش می‌یابد). سپس با ادامه روند افزایش مقدار ضخامت، زمانی که رفتار سیستم به صورت خطی است دامنه‌ی نوسانات به شدت افزایش یافته است. در نهایت زمانی که سیستم در به حالت سخت‌شونده است رفتار سیستم تغییر پیدا کرده و با افزایش مقدار ضخامت منحنی پاسخ به سمت پایین جابه‌جا می‌شود. در اینجا این نکته قابل توجه است که با توجه به شکل ۳-۱۰ در ضخامتی که سیستم به صورت خطی است (tp=۱۰/۲۵ nm) دامنه‌ی نوسانات به طور ناگهانی افزایش پیدا می‌کند. بنابر این این ضخامت می‌تواند به عنوان یک نقطه بحرانی برای سیستم باشد.

مطابق با شکل ۳-۱۳ تاثیر خمیدگی اولیه بر منحنی پاسخ در شکل ۳-۱۴ نشان داده شده است. در این شکل نیز در r=۰/۰۴۹ (نقطه بحرانی) افزایش ناگهانی در دامنه دیده می‌شود.



شکل ۳-۱۳. تاثیر ضخامت پیزوالکتریک بر منحنی پاسخ سیستم در تشدید اولیه



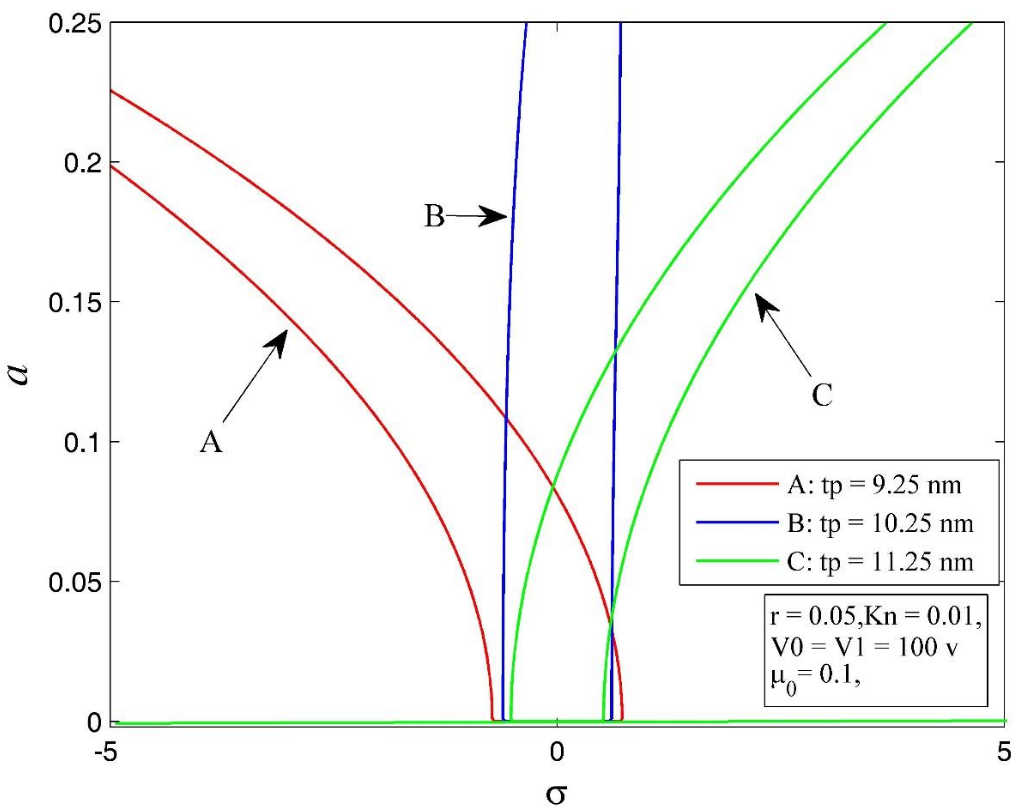
شکل ۳-۱۴. تاثیر خمیدگی اولیه تیر (r) بر منحنی پاسخ سیستم در تشدید اولیه

با توجه به شکل‌های مربوط به پاسخ فرکانسی و منحنی‌های پاسخ، می‌توان نحوه تاثیر پارامترهای دیگر را بر منحنی پاسخ سیتم در حالت تشدید اولیه پیش‌بینی کرد.

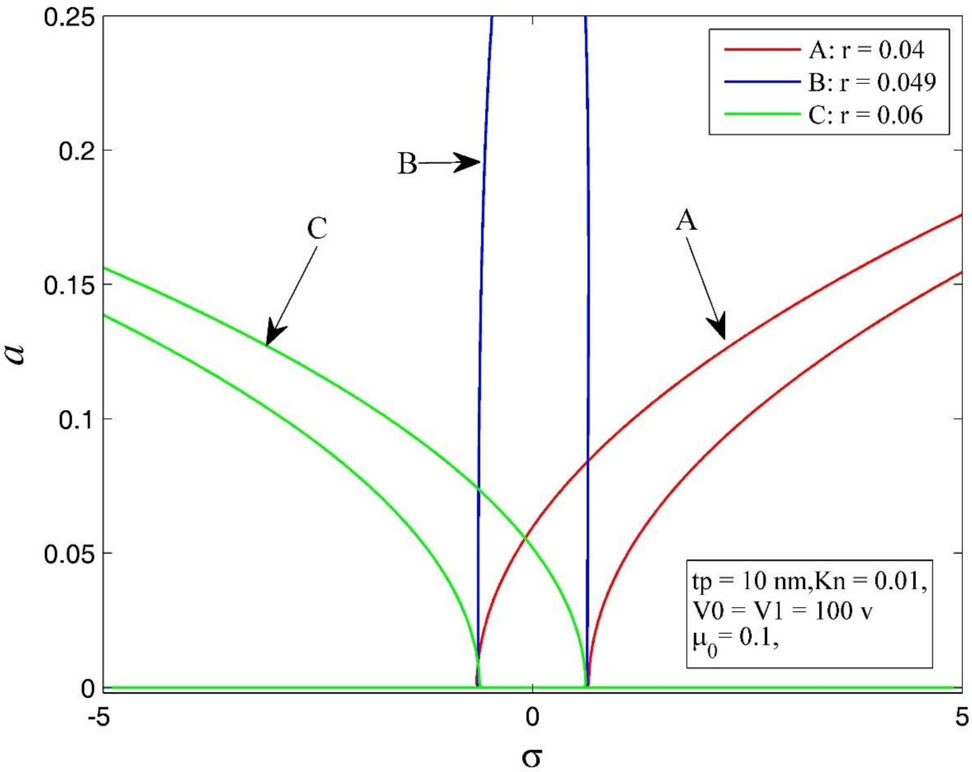
۳-۳. بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر پاسخ فرکانسی سیستم در تشدید پارامتریک

شکل ۴-۱۵ تاثیر ضخامت پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالت تحریک پارامتریک را نشان می‌دهد. مطابق با این شکل افزایش مقدار ضخامت باعث می‌شود پدیده پرش در فرکانس‌های بالاتری اتفاق بیافتد. همچنین افزایش مقدار ضخامت باعث کاهش ناحیه‌ی میانی می‌شود.

تاثیر خمیدگی اولیه بر پاسخ فرکانسی سیستم در حالت تحریک پارامتریک در شکل ۴-۱۶ نشان داده شده است. مطابق با این شکل تغییر در مقدار r تاثیر چندانی بر ناحیه میانی ندارد ولی پدیده پرش در فرکانس‌های پایین‌تر اتفاق می‌افتد. نحوه تاثیر ضخامت پیزوالکتریک و خمیدگی اولیه بر سخت‌شوندگی ویا نرم‌شوندگی در حالت تحریک پارامتریک همانند تشدید اولیه است.

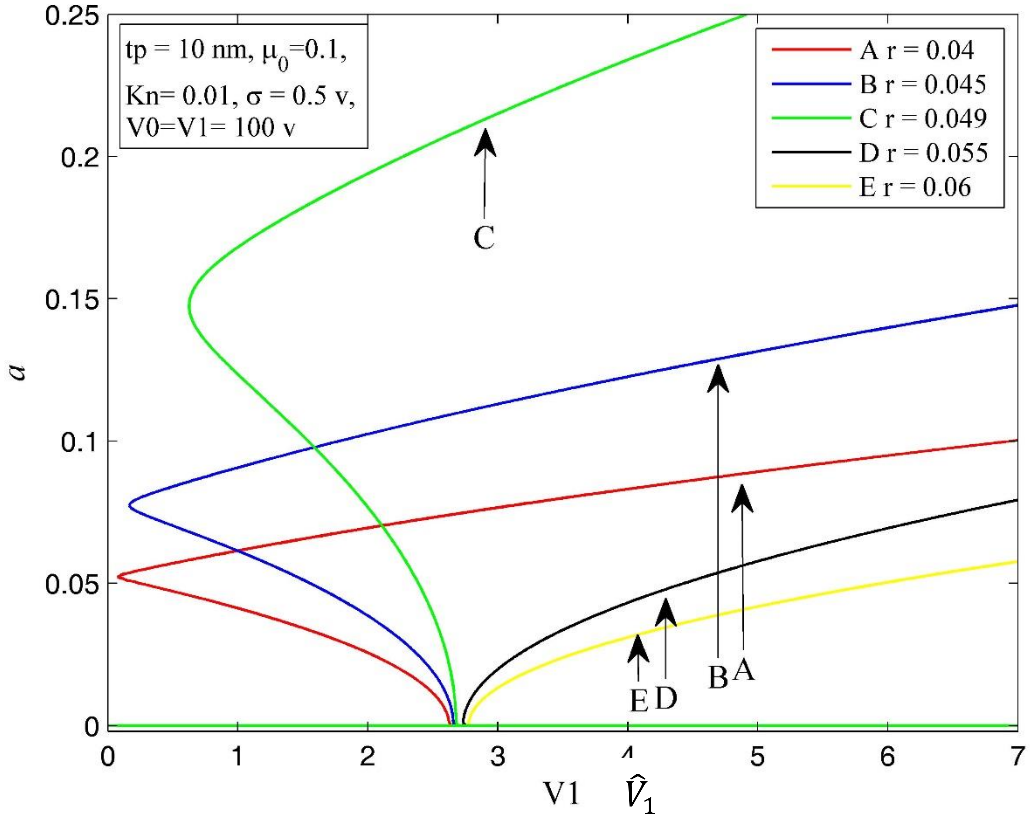


شکل ۳-۱۵. تاثیر ضخامت پیزوالکتریک بر پاسخ فرکانسی سیستم درتحریک پارامتریک



شکل ۳-۱۶. تاثیر خمیدگی اولیه تیر (r) بر پاسخ فرکانسی سیستم درتحریک پارامتریک

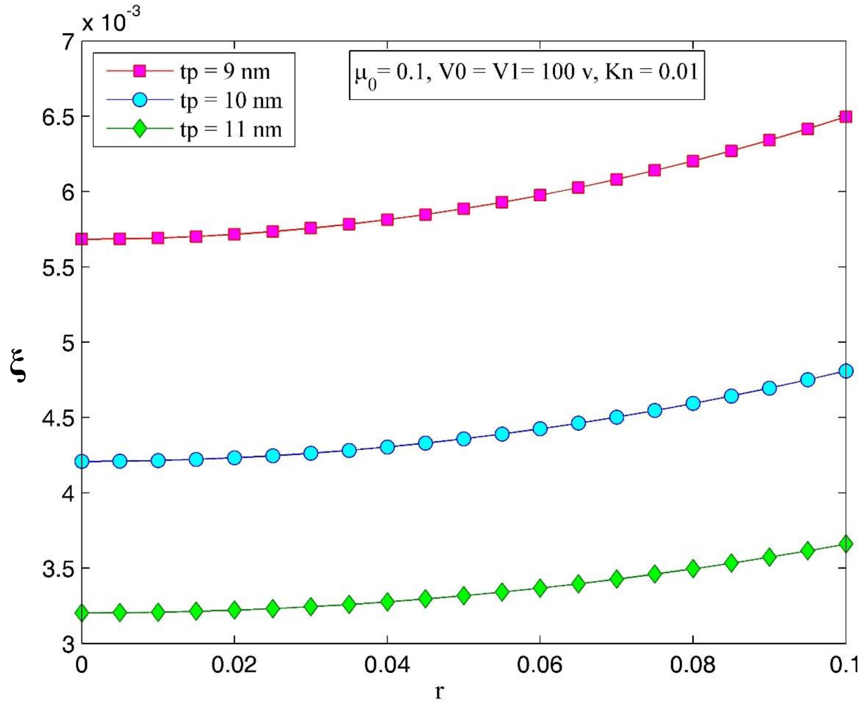
شکل ۴-۱۷ نمونه‌ای از منحنی پاسخ در تحریک پارامتریک را نشان می‌دهد. در اینجا نیز در همانند حالت تشدید اولیه در مقدارr بحرانی، افزایش ناگهانی در دامنه‌ی نوسانات دیده می‌شود. در تحریک پارامتریک بر خلاف تشدید اولیه، پدیده پرش در ولتاژهای بالاتر اتفاق می‌افتد.



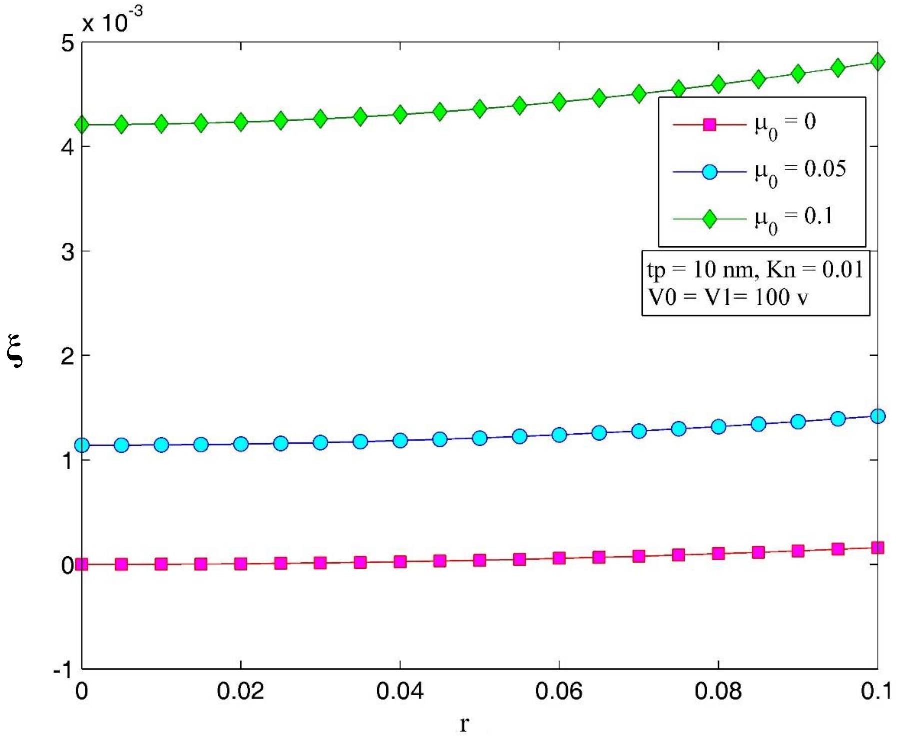
$\hat{V}_1$

شکل ۳-۱۷. تاثیر خمیدگی اولیه تیر (r) بر منحنی پاسخ فرکانسی در تحریک پارامتریک.

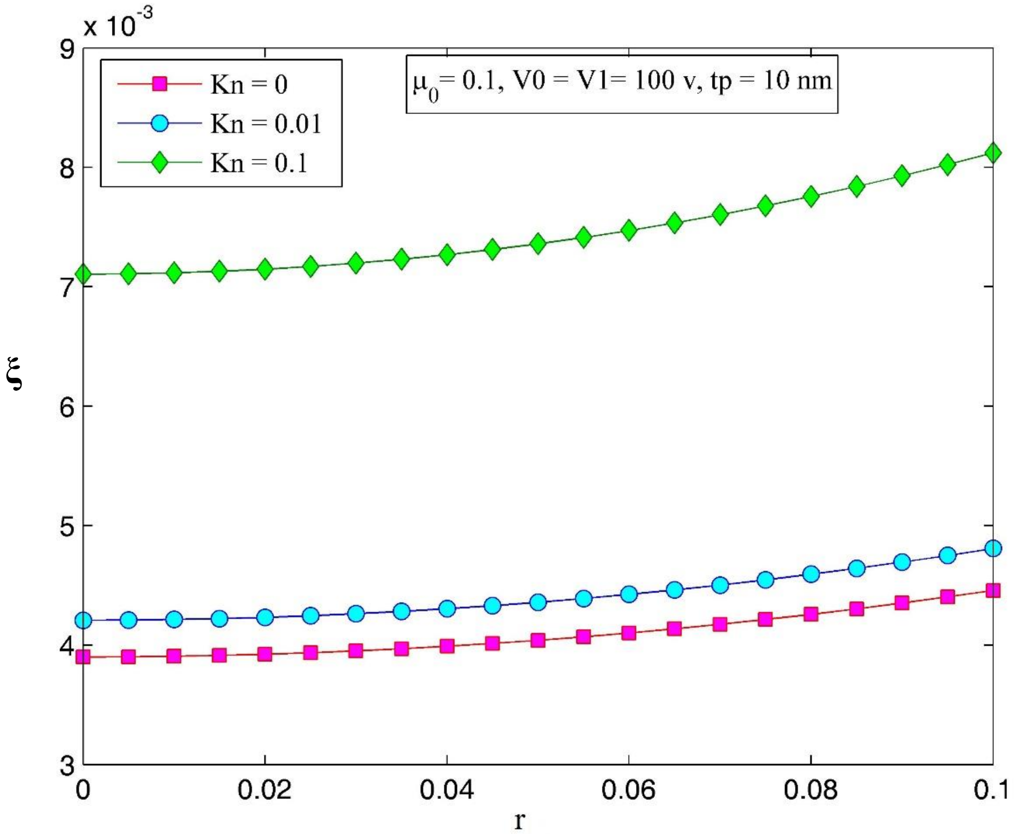
همان طور که در قسمت نوآوری طرح گفته شد، در بسیاری از پژوهش‌ها از تاثیر خمیدگی بر سرعت سیال صرفه نظر شده است. در این مطالعه سعی شده است که تاثیر خمیدگی بر سرعت سیال لحاظ گردد. در نظر گرفتن این فرض باعث ظاهر شدن ضریب d_2 و میرایی در سیستم می‌شود. با توجه به رابطه‌ی(۳-۷) چهار پارامتر: ضخامت پیزوالکتریک، پارامتر غیرمحلی، عدد نادسن و خمیدگی اولیه بر میرایی سیستم تاثیر گذارند. در شکل‌های ۳-۱۸، ۳-۱۹ و ۳-۲۰ به ترتیب تاثیر ضخامت پیزوالکتریک، پارامتر غیرمحلی و عدد نادسن بر میرایی نشان داده شده است. مطابق با این شکل‌ها به ازای یک r ثابت، افزایش ضخامت پیزوالکتریک منجر به کاهش میرایی و افزایش پارامتر غیرمحلی و عدد نادسن منجر به افزایش میرایی می‌شوند. بر این اساس تاثیر کلی این پارامترها بر میرایی سیستم و به تبع آن تاثیر فرض تاثیر خمیدگی بر سرعت سیال، قابل تشخیص نیست. از این رو برای درک درست از این که این فرض چه مقدار بر رفتار سیستم تاثیر گذار است شکل ۳-۲۱ ارئه شده است. در این شکل نمودار پاسخ فرکانسی سیستم در حالت تشدید اولیه یک بار با در نظر گرفتن تاثیر خمیدگی بر سرعت سیال و یک بار بدون در نظر گرفتن این فرض رسم شده است. مطابق با این شکل در نظر گرفتن این فرض، تنها منجر به کاهش دامنه‌ی نوسانات شده و تاثیری بر سخت‌شوندگی ویا نرم‌شوندگی ندارد.



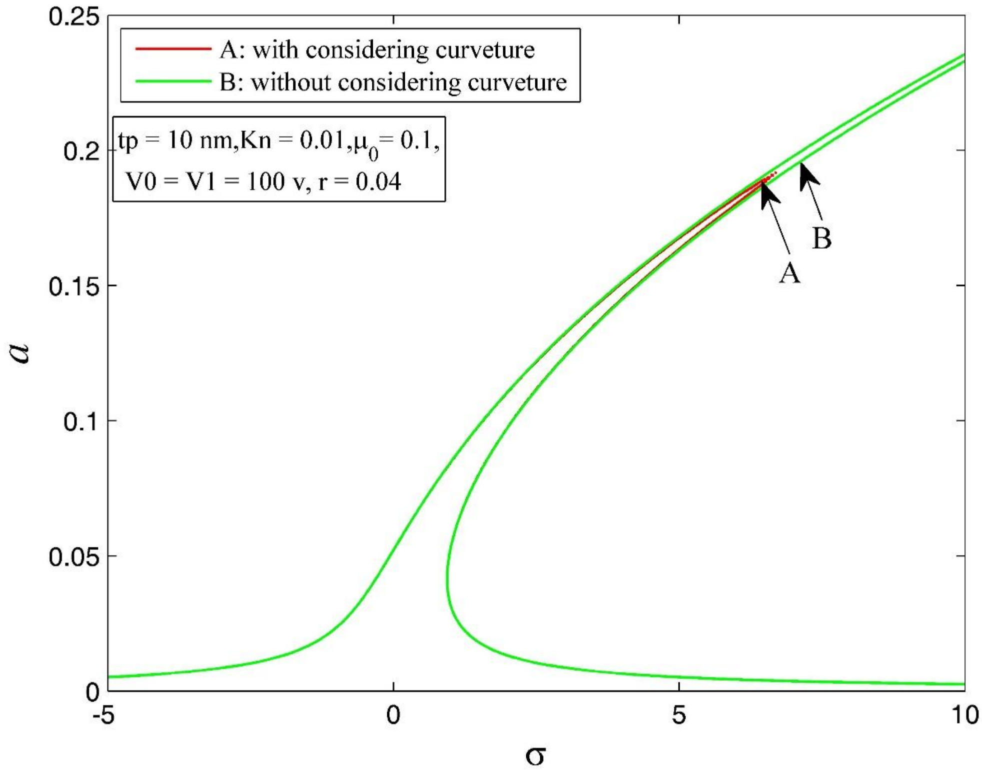
شکل ۳-۱۸. تاثیر ضخامت پیزوالکتریک بر میرایی سیستم



شکل ۳-۱۹. تاثیر پارامتر غیرمحلی بر میرایی سیستم



شکل ۳-۲۰. تاثیر عدد نادسن بر میرایی سیستم



شکل ۳-۲۱. تاثیر فرض تاثیر خمیدگی بر سرعت سیال در تشدید اولیه

جمع بندی

در این پژوهش ارتعاشات غیرخطی نانولوله‌های کربنی انتقال دهنده‌ی سیال پوشیده شده با لایه‌های پیزوالکتریک تحت تاثیر میدان مغناطیسی مورد برسی قرار گرفته است. معادله‌ی ارتعاشات سیستم با استفاده از روش انرژی به‌دست آمده و با استفاده از روش گلرکین و روش مقیاس‌های زمانی چندگانه حل شده است. سپس پاسخ فرکانسی سیستم تحت تحریک پارامتریک مورد بررسی قرار گرفته و نتایج زیر به‌دست آمده است.

- فرکانس طبیعی سیستم و سرعت بحرانی سیال به شدت تحت تاثیر ترم‌های غیرمحلی و عدد نادسن قرار دارند بنابر این در نظر نگرفتن این پارامترها برای سیستم می‌تواند مدل‌سازی را به طور چشم‌گیری از واقعیت دور سازد.
- ضخامت و ولتاژ لایه‌ی پیزوالکتریک تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر فرکانس طبیعی سیستم دارند از این رو می‌توان از این دو پارامتر به عنوان پارامترهای اساسی در طراحی و کنترل نانوسازه‌ها استفاده کرد.
- در مقادیر بالا ولتاژ هارمونیک پیزوالکتریک، وقتی سیستم رفتار خطی از خود نشان می‌دهد دامنه نوسانات به شدت افزایش می‌یابد.

نتایج حاصل از این پژوهش می‌تواند در طراحی، مدل‌سازی و کنترل سیستم‌های مبتنی بر نانولوله‌های انتقال سیال به کارگرفته شود.

منابع

[1] Iijima, S.,(1991), "Helical microtubules of graphitic carbon". **nature.** Vol. 354, pp. 56-8.

[2] O'connell, M.J.,(2006), "**Carbon nanotubes: properties and applications**", CRC press.

[3] Hata, K., Futaba, D.N., Mizuno, K., Namai, T., Yumura, M., Iijima, S.,(2004), "Water-assisted highly efficient synthesis of impurity-free single-walled carbon nanotubes". **Science**. Vol. 306, pp. 1362-4.

[4] Wong, E.W., Sheehan, P.E., Lieber, C.M.,(1997), "Nanobeam mechanics: elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes". **Science**. Vol. 277, pp. 1971-5.

[5] Wang, X., Li, Q., Xie, J., Jin, Z., Wang, J., Li, Y., et al.,(2009), "Fabrication of ultralong and electrically uniform single-walled carbon nanotubes on clean substrates". **Nano letters**. Vol. 9, pp. 3137-41.

[6] Ren, Z., Lan, Y., Wang, Y.,(2012), "**Aligned carbon nanotubes: physics, concepts, fabrication and devices**", Springer Science & Business Media.

[7] Baughman, R.H., Zakhidov, A.A., de Heer, W.A.,(2002), "Carbon nanotubes--the route toward applications". **science**. Vol. 297, pp. 787-92.

[8] Georgantzinos, S., Giannopoulos, G., Anifantis, N.,(2009), "An efficient numerical model for vibration analysis of single-walled carbon nanotubes". **Computational Mechanics**. Vol. 43, pp. 731-41.

[9] Dresselhaus, M., Dresselhaus, G., Saito, R.,(1995), "Physics of carbon nanotubes". **Carbon**. Vol. 33, pp. 883-91.

[10] Cao, J., Wang, Q., Dai, H.,(2003), "Electromechanical properties of metallic, quasimetallic, and semiconducting carbon nanotubes under stretching". **Physical review letters**. Vol. 90, pp. 157601.

[11] Yakobson, B.I., Brabec, C., Bernholc, J.,(1996), "Nanomechanics of carbon tubes: instabilities beyond linear response". **Physical review letters**. Vol. 76, pp. 2511.

[12] Yang, L., Han, J.,(2000), "Electronic structure of deformed carbon nanotubes". **Physical Review Letters**. Vol. 85, pp. 154.

[13] Klingeler, R., Sim, R.B.,(2011), "**Carbon nanotubes for biomedical applications**", Springer.

[14] Jones, A., Bekkedahl, T., Kiang, C.,(1997), "Storage of hydrogen in single-walled carbon nanotubes". **Nature**. Vol. 386, pp. 377.

[15] Popov, V.N.,(2004), "Carbon nanotubes: properties and application". **Materials Science and Engineering: R: Reports**. Vol. 43, pp. 61-102.

[16] Coleman, J.N., Khan, U., Blau, W.J., Gun'ko, Y.K.,(2006), "Small but strong: a review of the mechanical properties of carbon nanotube–polymer composites". **Carbon**. Vol. 44, pp. 1624-52.

[17] Meincke, O., Kaempfer, D., Weickmann, H., Friedrich, C., Vathauer, M., Warth, H.,(2004), "Mechanical properties and electrical conductivity of carbon-nanotube filled polyamide-6 and its blends with acrylonitrile/butadiene/styrene". **Polymer**. Vol. 45, pp. 739-48.

[18] Sinnott, S.B., Andrews, R.,(2001), "Carbon nanotubes: synthesis, properties, and applications". **Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences**. Vol. 26, pp. 145-249.

[19] Wang, Q., Varadan, V.,(2006), "Wave characteristics of carbon nanotubes". **International Journal of Solids and Structures**. Vol. 43, pp. 254-65.

[20] Babu, S., Ndungu, P., Bradley, J.-C., Rossi, M.P., Gogotsi, Y.,(2005), "Guiding water into carbon nanopipes with the aid of bipolar electrochemistry". **Microfluidics and Nanofluidics**. Vol. 1, pp. 284-8.
[21] Majumder, M., Chopra, N., Andrews, R., Hinds, B.J.,(2005), "Nanoscale hydrodynamics: enhanced flow in carbon nanotubes". **Nature**. Vol. 438, pp. 44-.
[22] Bourlon, B., Glattli, D.C., Miko, C., Forró, L., Bachtold, A.,(2004), "Carbon nanotube based bearing for rotational motions". **Nano Letters**. Vol. 4, pp. 709-12.
[23] Dong, L., Subramanian, A., Nelson, B.J.,(2007), "Carbon nanotubes for nanorobotics". **Nano Today**. Vol. 2, pp. 12-21.
[24] Fujita, S., Nomura, K., Abe, K., Lee, T.H.,(2007), "3-d nanoarchitectures with carbon nanotube mechanical switches for future on-chip network beyond cmos architecture". **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**. Vol. 54, pp. 2472-9.
[25] Regan, B., Aloni, S., Ritchie, R., Dahmen, U., Zettl, A.,(2004), "Carbon nanotubes as nanoscale mass conveyors". **Nature**. Vol. 428, pp. 924-7.
[26] Piefort, V.,(2001),"Finite element modelling of piezoelectric active structures"Université Libre de Bruxelles.
[27] Guo, F.,(2013), "Thermo-elastic dissipation of microbeam resonators in the framework of generalized thermo-elasticity theory". **Journal of Thermal Stresses**. Vol. 36, pp. 1156-68.
[28] sedighi, H., Hagnayeb, A., Foruzandeh, H., Kaghazian, A,(٢٠١٦), "nonlinear free vibrations analysis of a piezoelectric bimorph nanoactuator using nonlocal elasticity theory". **MEE**. Vol. 16, pp. 55-66.
[29] Heyliger, P., Ramirez, G., Pei, K.,(1994), "Discrete-layer piezoelectric plate and shell models for active tip-clearance control". **NASA STI/Recon Technical Report N**. Vol. 95, pp. 14417.
[30] Isarakorn, D., Briand, D., Janphuang, P., Sambri, A., Gariglio, S., Triscone, J., et al.,(2011), "The realization and performance of vibration energy harvesting MEMS devices based on an epitaxial piezoelectric thin film". **Smart Materials and Structures**. Vol. 20, pp. 025015.
[31] Sudak, L.,(2003), "Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics". **Journal of Applied Physics**. Vol. 94, pp. 7281-7.
[32] Wang, Z., Poncharal, P., De Heer, W.,(2000), "Measuring physical and mechanical properties of individual carbon nanotubes by in situ TEM". **Journal of Physics and Chemistry of Solids**. Vol. 61, pp. 1025-30.
[33] Li, C., Chou, T.-W.,(2004), "Mass detection using carbon nanotube-based nanomechanical resonators". **Applied Physics Letters**. Vol. 84, pp. 5246-8.
[34] Kim, J., Park, S., Park, J., Lee, J.,(2006), "Molecular dynamics simulation of elastic properties of silicon nanocantilevers". **Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering.** Vol. 10, pp. 55-65.
[35] Liu, J.Z., Zheng, Q., Jiang, Q.,(2001), "Effect of a rippling mode on resonances of carbon nanotubes". **Physical Review Letters**. Vol. 86, pp. 4843.
[36] Fu, Y., Zhang, J., Jiang, Y.,(2010), "Influences of the surface energies on the nonlinear static and dynamic behaviors of nanobeams". **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**. Vol. 42, pp. 2268-73.
[37] Murmu, T., Adhikari, S.,(2011), "Nonlocal vibration of carbon nanotubes with attached buckyballs at tip". **Mechanics Research Communications**. Vol. 38, pp. 62-7.

[38] Murmu, T., Adhikari, S.,(2012), “Nonlocal frequency analysis of nanoscale biosensors”. **Sensors and Actuators A: Physical**. Vol. 173, pp. 41-8.

[39] Khan, A., Edberg, J., Nur, O., Willander, M.,(2014), “A novel investigation on carbon nanotube/ZnO, Ag/ZnO and Ag/carbon nanotube/ZnO nanowires junctions for harvesting piezoelectric potential on textile”. **Journal of Applied Physics**. Vol. 116, pp. 034505.

[40] Li, C., Chou, T.-W.,(2004), “Vibrational behaviors of multiwalled-carbon-nanotube-based nanomechanical resonators”. **Applied Physics Letters**. Vol. 84, pp. 121-3.

[41] Miandoab, E.M., Yousefi-Koma, A., Pishkenari, H.N., Fathi, M.,(2014), “Nano-resonator frequency response based on strain gradient theory”. **Journal of Physics D: Applied Physics**. Vol. 47, pp. 365303

[42] Kacem, N., Baguet, S., Hentz, S., Dufour, R.,(2011), “Computational and quasi-analytical models for non-linear vibrations of resonant MEMS and NEMS sensors”. **International Journal of Non-Linear Mechanics.** Vol. 46, pp. 532-42.

[43] Nordenfelt, A.,(2013), “Selective self-excitation of higher vibrational modes of graphene nano-ribbons and carbon nanotubes through magnetomotive instability”. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**. Vol. 8, pp. 011011.

[44] Wang, B., Deng, Z., Ouyang, H., Xu, X.,(2015), “Free vibration of wavy single-walled fluid-conveying carbon nanotubes in multi-physics fields”. **Applied Mathematical Modelling**. Vol. 39, pp. 6780-92.

[45] Yoon, J., Ru, C., Mioduchowski, A.,(2006), “Flow-induced flutter instability of cantilever carbon nanotubes”. **International Journal of Solids and Structures**. Vol. 43, pp. 3337-49.

[46] Khosravian, N., Rafii-Tabar, H.,(2007), “Computational modelling of the flow of viscous fluids in carbon nanotubes”. **Journal of Physics D: Applied Physics**. Vol. 40, pp. 7046.

[47] Rasekh, M., Khadem, S.,(2009), “Nonlinear vibration and stability analysis of axially loaded embedded carbon nanotubes conveying fluid”. **Journal of Physics D: Applied Physics**. Vol. 42, pp. 135112.

[48] Yan, Y., He, X., Zhang, L., Wang, Q.,(2007), “Flow-induced instability of double-walled carbon nanotubes based on an elastic shell model”. **Journal of Applied physics**. Vol. 102, pp. 044307.

[49] Wang, L.,(2009), “Dynamical behaviors of double-walled carbon nanotubes conveying fluid accounting for the role of small length scale”. **Computational Materials Science**. Vol. 45, pp. 584-8.

[50] Lee, H.-L., Chang, W.-J.,(2008), “Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory”. **Journal of Applied Physics**. Vol. 103, pp. 024302.

[51] Ghavanloo, E., Daneshmand, F., Rafiei, M.,(2010), “Vibration and instability analysis of carbon nanotubes conveying fluid and resting on a linear viscoelastic Winkler foundation”. **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**. Vol. 42, pp. 2218-24.

[52] Soltani, P., Farshidianfar, A.,(2012), “Periodic solution for nonlinear vibration of a fluid-conveying carbon nanotube, based on the nonlocal continuum theory by energy balance method”. **Applied Mathematical Modelling**. Vol. 36, pp. 3712-24.

[53] Soltani, P., Taherian, M., Farshidianfar, A.,(2010), “Vibration and instability of a viscous-fluid-conveying single-walled carbon nanotube embedded in a visco-elastic medium”. **Journal of Physics D: Applied Physic**s. Vol. 43, pp. 425401

[54] Liang, F., Su, Y.,(2013), "Stability analysis of a single-walled carbon nanotube conveying pulsating and viscous fluid with nonlocal effect". **Applied Mathematical Modelling**. Vol. 37, pp. 6821-8.
[55] Karami, H., Farid, M.,(2015), "A new formulation to study in-plane vibration of curved carbon nanotubes conveying viscous fluid". **Journal of Vibration and Control**. Vol. 21, pp. 2360-71.
[56] Artan, R., Tepe, A.,(2011), "Nonlocal effects in curved single-walled carbon nanotubes". **Mechanics of Advanced Materials and Structures**. Vol. 18, pp. 347-51.
[57] Ouakad, H.M., Younis, M.I.,(2011), "Natural frequencies and mode shapes of initially curved carbon nanotube resonators under electric excitation". **Journal of Sound and Vibration**. Vol. 330, pp. 3182-95.
[58] Askari, H., Barari, A., Esmailzadeh, E. Analysis of nonlinear oscillation of circular curved carbon nanotube. In: Nanotechnology (IEEE-NANO), 2013 13th IEEE Conference on, IEEE, 2013, pp. 374-8.
[59] Mayoof, F.N., Hawwa, M.A.,(2009), "Chaotic behavior of a curved carbon nanotube under harmonic excitation". **Chaos, Solitons & Fractals**. Vol. 42, pp. 1860-7.
[60] Askari, H.,(2014),"Nonlinear vibration and chaotic motion of uniform and non-uniform carbon nanotube resonators"University of Ontario Institute of Technology.
[61] Saadatnia, Z., Barari, A., Esmailzadeh, E. Nonlinear forced vibration analysis of free-form nanotube conveying fluid. In: **14th IEEE International Conference on Nanotechnology, IEEE**, 2014, pp. 689-92.
[62] Gotovac, S., Honda, H., Hattori, Y., Takahashi, K., Kanoh, H., Kaneko, K.,(2007), "Effect of nanoscale curvature of single-walled carbon nanotubes on adsorption of polycyclic aromatic hydrocarbons". **Nano letters**. Vol. **7**, pp. 583-7.
[63] Hosseini-Hashemi, S., Nahas, I., Fakher, M., Nazemnezhad, R.,(2014), "Nonlinear free vibration of piezoelectric nanobeams incorporating surface effects"**. Smart Materials and Structures**. Vol. 23, pp. 035012.
[64] Yan, Z., Jiang, L.,(2011), "The vibrational and buckling behaviors of piezoelectric nanobeams with surface effects". **Nanotechnology**. Vol. 22, pp. 245703.
[65] Arani, A.G., Abdollahian, M., Kolahchi, R., Rahmati, A.,(2013), "Electro-thermo-torsional buckling of an embedded armchair DWBNNT using nonlocal shear deformable shell model". **Composites Part B: Engineering**. Vol. 51, pp. 291-9.
[66] Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Wang, Z.-D.,(2012), "Nonlinear vibration of the piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory". **Composite Structures**. Vol. 94, pp. 2038-47.
[1] Iijima, S.,(1991), "Helical microtubules of graphitic carbon". **nature**. Vol. 354, pp. 56-8.
[2] O'connell, M.J.,(2006), "**Carbon nanotubes: properties and applications**", CRC press.
[3] Hata, K., Futaba, D.N., Mizuno, K., Namai, T., Yumura, M., Iijima, S.,(2004), "Water-assisted highly efficient synthesis of impurity-free single-walled carbon nanotubes". **Science.** Vol. 306, pp. 1362-4.
[4] Wong, E.W., Sheehan, P.E., Lieber, C.M.,(1997), "Nanobeam mechanics: elasticity, strength, and toughness of nanorods and nanotubes". **Science.** Vol. 277, pp. 1971-5.
[5] Wang, X., Li, Q., Xie, J., Jin, Z., Wang, J., Li, Y., et al.,(2009), "Fabrication of ultralong and electrically uniform single-walled carbon nanotubes on clean substrates". **Nano letters**. Vol. 9, pp. 3137-41.

[6] Ren, Z., Lan, Y., Wang, Y.,(2012), “**Aligned carbon nanotubes: physics, concepts, fabrication and devices**”, Springer Science & Business Media.
[7] Baughman, R.H., Zakhidov, A.A., de Heer, W.A.,(2002), “Carbon nanotubes--the route toward applications”. **science**. Vol. 297, pp. 787-92.
[8] Georgantzinos, S., Giannopoulos, G., Anifantis, N.,(2009), “An efficient numerical model for vibration analysis of single-walled carbon nanotubes”. **Computational Mechanics**. Vol. 43, pp. 731-41.
[9] Dresselhaus, M., Dresselhaus, G., Saito, R.,(1995), “Physics of carbon nanotubes”. **Carbon. Vol.** 33, pp. 883-91.
[10] Cao, J., Wang, Q., Dai, H.,(2003), “Electromechanical properties of metallic, quasimetallic, and semiconducting carbon nanotubes under stretching”. **Physical review letters**. Vol. 90, pp. 157601.
[11] Yakobson, B.I., Brabec, C., Bernholc, J.,(1996), “Nanomechanics of carbon tubes: instabilities beyond linear response”. **Physical review letters**. Vol. 76, pp. 2511.
[12] Yang, L., Han, J.,(2000), “Electronic structure of deformed carbon nanotubes”. **Physical Review Letters**. Vol. 85, pp. 154.
[13] Klingeler, R., Sim, R.B.,(**2011**), “**Carbon nanotubes for biomedical applications**”, Springer.
[14] Jones, A., Bekkedahl, T., Kiang, C.,(1997), “Storage of hydrogen in single-walled carbon nanotubes”. **Nature**. Vol. 386, pp. 377.
[15] Popov, V.N.,(2004), “Carbon nanotubes: properties and application”. **Materials Science and Engineering: R: Reports**. Vol. 43, pp. 61-102.
[16] Coleman, J.N., Khan, U., Blau, W.J., Gun’ko, Y.K.,(2006), “Small but strong: a review of the mechanical properties of carbon nanotube–polymer composites”. **Carbon**. Vol. 44, pp. 1624-52.
[17] Meincke, O., Kaempfer, D., Weickmann, H., Friedrich, C., Vathauer, M., Warth, H.,(2004), “Mechanical properties and electrical conductivity of carbon-nanotube filled polyamide-6 and its blends with acrylonitrile/butadiene/styrene”. **Polymer**. Vol. 45, pp. 739-48.
[18] Sinnott, S.B., Andrews, R.,(2001), “Carbon nanotubes: synthesis, properties, and applications”. **Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences**. Vol. 26, pp. 145-249.
[19] Wang, Q., Varadan, V.,(2006), “Wave characteristics of carbon nanotubes”. **International Journal of Solids and Structures**. Vol. 43, pp. 254-65.
[20] Babu, S., Ndungu, P., Bradley, J.-C., Rossi, M.P., Gogotsi, Y.,(2005), “Guiding water into carbon nanopipes with the aid of bipolar electrochemistry”. **Microfluidics and Nanofluidics**. Vol. 1, pp. 284-8.
[21] Majumder, M., Chopra, N., Andrews, R., Hinds, B.J.,(2005), “Nanoscale hydrodynamics: enhanced flow in carbon nanotubes”. **Nature.** Vol. 438, pp. 44-.
[22] Bourlon, B., Glattli, D.C., Miko, C., Forró, L., Bachtold, A.,(2004), “Carbon nanotube based bearing for rotational motions”. **Nano Letters**. Vol. 4, pp. 709-12.
[23] Dong, L., Subramanian, A., Nelson, B.J.,(2007), “Carbon nanotubes for nanorobotics”. **Nano Today**. Vol. 2, pp. 12-21.
[24] Fujita, S., Nomura, K., Abe, K., Lee, T.H.,(2007), “3-d nanoarchitectures with carbon nanotube mechanical switches for future on-chip network beyond cmos architecture”. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**. Vol. 54, pp. 2472-9.
[25] Regan, B., Aloni, S., Ritchie, R., Dahmen, U., Zettl, A.,(2004), “Carbon nanotubes as nanoscale mass conveyors”. **Nature**. Vol. 428, pp. 924-7.

[26] Piefort, V.,(2001),“Finite element modelling of piezoelectric active structures”Université Libre de Bruxelles.
[27] Guo, F.,(2013), “Thermo-elastic dissipation of microbeam resonators in the framework of generalized thermo-elasticity theory”. Journal of Thermal Stresses. Vol. **36**, **pp**. **1156-68**.
[28] Sedighi M.H., Hajnayeb A., Foruzandeh A., kaghazian A.,(٢٠١٦), “nonlinear free vibrations analysis of a piezoelectric bimorph nanoactuator using nonlocal elasticity theory”. **MEE**. Vol. 16, pp. 55-66.
[29] Heyliger, P., Ramirez, G., Pei, K.,(1994), “Discrete-layer piezoelectric plate and shell models for active tip-clearance control”. **NASA STI/Recon Technical Report N**. Vol. 95, pp. 14417.
[30] Isarakorn, D., Briand, D., Janphuang, P., Sambri, A., Gariglio, S., Triscone, J., et al.,(2011), “The realization and performance of vibration energy harvesting MEMS devices based on an epitaxial piezoelectric thin film”. **Smart Materials and Structures**. Vol. 20, pp. 025015.
[31] Sudak, L.,(2003), “Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics”. **Journal of Applied Physics**. Vol. 94, pp. 7281-7.
[32] Wang, Z., Poncharal, P., De Heer, W.,(2000), “Measuring physical and mechanical properties of individual carbon nanotubes by in situ TEM”. **Journal of Physics and Chemistry of Solids.** Vol. 61, pp. 1025-30.
[33] Li, C., Chou, T.-W.,(2004), “Mass detection using carbon nanotube-based nanomechanical resonators”. **Applied Physics Letters**. Vol. 84, pp. 5246-8.
[34] Kim, J., Park, S., Park, J., Lee, J.,(2006), “Molecular dynamics simulation of elastic properties of silicon nanocantilevers”. **Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering**. Vol. 10, pp. 55-65.
[35] Liu, J.Z., Zheng, Q., Jiang, Q.,(2001), “Effect of a rippling mode on resonances of carbon nanotubes”. **Physical Review Letters**. Vol. 86, pp. 4843.
[36] Fu, Y., Zhang, J., Jiang, Y.,(2010), “Influences of the surface energies on the nonlinear static and dynamic behaviors of nanobeams”. **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**. Vol. 42, pp. 2268-73.
[37] Murmu, T., Adhikari, S.,(2011), “Nonlocal vibration of carbon nanotubes with attached buckyballs at tip”. **Mechanics Research Communications**. Vol. 38, pp. 62-7.
[38] Khan, A., Edberg, J., Nur, O., Willander, M.,(2014), “A novel investigation on carbon nanotube/ZnO, Ag/ZnO and Ag/carbon nanotube/ZnO nanowires junctions for harvesting piezoelectric potential on textile”. **Journal of Applied Physics**. Vol. 116, pp. 034505.
[39] Li, C., Chou, T.-W.,(2004), “Vibrational behaviors of multiwalled-carbon-nanotube-based nanomechanical resonators”. **Applied Physics Letters.** Vol. 84, pp. 121-3.
[40] Murmu, T., Adhikari, S.,(2012), “Nonlocal frequency analysis of nanoscale biosensors”. **Sensors and Actuators A: Physica**l. Vol. 173, pp. 41-8.
[41] Kacem, N., Baguet, S., Hentz, S., Dufour, R.,(2011), “Computational and quasi-analytical models for non-linear vibrations of resonant MEMS and NEMS sensors”. **International Journal of Non-Linear Mechanics**. Vol. 46, pp. 532-42.
[42] Miandoab, E.M., Yousefi-Koma, A., Pishkenari, H.N., Fathi, M.,(2014), “Nano-resonator frequency response based on strain gradient theory”. **Journal of Physics D: Applied Physics**. Vol. 47, pp. 365303.

[43] Nordenfelt, A.,(2013), "Selective self-excitation of higher vibrational modes of graphene nano-ribbons and carbon nanotubes through magnetomotive instability". **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**. Vol. 8, pp. 011011.
[44] Wang, B., Deng, Z., Ouyang, H., Xu, X.,(2015), "Free vibration of wavy single-walled fluid-conveying carbon nanotubes in multi-physics fields". **Applied Mathematical Modelling**. Vol. 39, pp. 6780-92.
[45] Yoon, J., Ru, C., Mioduchowski, A.,(2006), "Flow-induced flutter instability of cantilever carbon nanotubes". **International Journal of Solids and Structures**. Vol. 43, pp. 3337-49.
[46] Khosravian, N., Rafii-Tabar, H.,(2007), "Computational modelling of the flow of viscous fluids in carbon nanotubes". **Journal of Physics D: Applied Physics**. Vol. 40, pp. 7046.
[47] Rasekh, M., Khadem, S.,(2009), "Nonlinear vibration and stability analysis of axially loaded embedded carbon nanotubes conveying fluid". **Journal of Physics D: Applied Physics.** Vol. 42, pp. 135112.
[48] Yan, Y., He, X., Zhang, L., Wang, Q.,(2007), "Flow-induced instability of double-walled carbon nanotubes based on an elastic shell model". **Journal of Applied physics**. Vol. 102, pp. 044307.
[49] Wang, L.,(2009), "Dynamical behaviors of double-walled carbon nanotubes conveying fluid accounting for the role of small length scale". **Computational Materials Science**. Vol. 45, pp. 584-8.
[50] Lee, H.-L., Chang, W.-J.,(2008), "Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory". **Journal of Applied Physics**. Vol. 103, pp. 024302.
[51] Ghavanloo, E., Daneshmand, F., Rafiei, M.,(2010), "Vibration and instability analysis of carbon nanotubes conveying fluid and resting on a linear viscoelastic Winkler foundation". **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**. Vol. 42, pp. 2218-24.
[52] Soltani, P., Taherian, M., Farshidianfar, A.,(2010), "Vibration and instability of a viscous-fluid-conveying single-walled carbon nanotube embedded in a visco-elastic medium". Jou**rnal of Physics D: Applied Physics**. Vol. 43, pp. 425401.
[53] Soltani, P., Farshidianfar, A.,(2012), "Periodic solution for nonlinear vibration of a fluid-conveying carbon nanotube, based on the nonlocal continuum theory by energy balance method". **Applied Mathematical Modelling**. Vol. 36, pp. 3712-24.
[54] Liang, F., Su, Y.,(2013), "Stability analysis of a single-walled carbon nanotube conveying pulsating and viscous fluid with nonlocal effect". **Applied Mathematical Modelling**. Vol. 37, pp. 6821-8.
[55] Karami, H., Farid, M.,(2015), "A new formulation to study in-plane vibration of curved carbon nanotubes conveying viscous fluid". **Journal of Vibration and Control**. Vol. 21, pp. 2360-71.
[56] Artan, R., Tepe, A.,(2011), "Nonlocal effects in curved single-walled carbon nanotubes". **Mechanics of Advanced Materials and Structures**. Vol. 18, pp. 347-51.
[57] Mayoof, F.N., Hawwa, M.A.,(2009), "Chaotic behavior of a curved carbon nanotube under harmonic excitation". **Chaos, Solitons & Fractals**. Vol. 42, pp. 1860-7.
[58] Gotovac, S., Honda, H., Hattori, Y., Takahashi, K., Kanoh, H., Kaneko, K.,(2007), "Effect of nanoscale curvature of single-walled carbon nanotubes on adsorption of polycyclic aromatic hydrocarbons". **Nano letters.** Vol. 7, pp. 583-7.

[59] Ouakad, H.M., Younis, M.I.,(2011), "Natural frequencies and mode shapes of initially curved carbon nanotube resonators under electric excitation". **Journal of Sound and Vibration**. Vol. 330, pp. 3182-95.
[60] Askari, H., Barari, A., Esmailzadeh, E. Analysis of nonlinear oscillation of circular curved carbon nanotube. In: Nanotechnology (IEEE-NANO), 2013 **13th IEEE Conference on, IEEE**, 2013, pp. 374-8.
[61] Askari, H.,(2014),"Nonlinear vibration and chaotic motion of uniform and non-uniform carbon nanotube resonators"**University of Ontario Institute of Technology**.
[62] Saadatnia, Z., Barari, A., Esmailzadeh, E. Nonlinear forced vibration analysis of free-form nanotube conveying fluid. In: 14th **IEEE International Conference on Nanotechnology, IEEE**, 2014, pp. 689-92.
[63] Yan, Z., Jiang, L.,(2011), "The vibrational and buckling behaviors of piezoelectric nanobeams with surface effects". **Nanotechnology**. Vol. 22, pp. 245703.
[64] Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Wang, Z.-D.,(2012), "Nonlinear vibration of the piezoelectric nanobeams based on the nonlocal theory". **Composite Structures**. Vol. 94, pp. 2038-47.
[65] Arani, A.G., Abdollahian, M., Kolahchi, R., Rahmati, A.,(2013), "Electro-thermo-torsional buckling of an embedded armchair DWBNNT using nonlocal shear deformable shell model". **Composites Part B: Engineering.** Vol. 51, pp. 291-9.
[66] Hosseini-Hashemi, S., Nahas, I., Fakher, M., Nazemnezhad, R.,(2014), "Nonlinear free vibration of piezoelectric nanobeams incorporating surface effects". **Smart Materials and Structures**. Vol. 23, pp. 035012.
[67] Arani, A.G., Shajari, A., Amir, S., Loghman, A.,(2012), "Electro-thermo-mechanical nonlinear nonlocal vibration and instability of embedded micro-tube reinforced by BNNT, conveying fluid". **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**. Vol. 45, pp. 109-21.
[68] Saadatnia, Z.,(2015),"Nonlinear vibration and frequency response analysis of piezoelectric-based nanotube resonators"**University of Ontario Institute of Technology**.
[69] Farshidianfar, A., Soltani, P.,(2012), "Nonlinear flow-induced vibration of a SWCNT with a geometrical imperfection". **Computational Materials Science**. Vol. 53, pp. 105-16.
[70] Bahaadini, R., Hosseini, M.,(2016), "Effects of nonlocal elasticity and slip condition on vibration and stability analysis of viscoelastic cantilever carbon nanotubes conveying fluid". **Computational Materials Science**. Vol. 114, pp. 151-9.
[71] Nayfeh, A.H., Mook, D.T.,(2008), "**Nonlinear oscillations**", John Wiley & Sons.
[72] Zhang, J., Wang, R., Wang, C.,(2012), "Piezoelectric ZnO-CNT nanotubes under axial strain and electrical voltage". **Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures.** Vol. 46, pp. 105-12.

Abstract

In this study, nonlinear vibration of a curved carbon nanotube conveying fluid is investigated which is covered by a piezoelectric layer. The Euler–Bernoulli beam theory is employed to establish the governing equations of motion for the vibration behavior of the system. The slip boundary conditions of CNT conveying fluid is considered based on Knudsen number and the mathematical modeling of the structure is developed by means of Hamilton's principle. Then, the Galerkin method is employed to discretize the equation of motion and the frequency response of the system is extracted by applying the multiple scale method for piezoelectric based primary and parametric excitation. Finally effect of various parameters such as applied voltage, piezoelectric thickness, initial curvature Knudsen number and small scale parameter on the frequency responses of the system is investigated.

Keywords: Curved CNT conveying fluid**,** Piezoelectric-based nanotube**,** Knudsen umber

Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering
M.Cs. Thesis in Applied Mechanics Engineering

Nonlinear Vibration and Frequency Response of Curved CNT Conveying Fluid Covered by Piezoelectric Layers

By: Vahid Mohammadhashemi

Supervisors:

Dr. A. Jalali

Dr. H. Ahmadi

January 2017