بسم الله الرّحمن الرّحيم

دانشکده: مکانیک

گروه: طرّاحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مدل‌سازی و کنترل حرکت بازوی رباتیک با محرّکه‌ی کابل تابیده شده با روش ماتریس انتقال گسسته

نگارنده: فرشته خدایی

استاد راهنما:

دکتر مهدی بامداد

شهریور ۹۵

شماره:

باسمه تعالی

تاریخ:

ویرایش:

مدیریت تحصیلات تکمیلی

دانشکده : مکانیک

گروه : طرّاحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم فرشته خدایی به شماره دانشجویی: ۹۳۰۶۹۳۴

تحت عنوان: مدل‌سازی و کنترل حرکت بازوی رباتیک با محرّکه‌ی کابل تابیده شده با روش ماتریس انتقال گسسته

در تاریخ ۱۳۹۵/۰۶/۱۵ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه خوب مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر مهدی بامداد		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی :دکتر امیر جلالی		نام و نام خانوادگی : دکتر سیّد مجتبی واردی کولایی	
نام و نام‌خانوادگی :دکترحبیب احمدی			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم به

پدرم

و

مادرم

خدایا؛

به من زیستنی عطا کن

که در لحظه‌ی مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است،

حسرت نخورم

و مردنی عطا کن

که بر بیهودگی‌اش سوگوار نباشم. (دکتر علی شریعتی)

با سپاس فراوان از راهنمایی‌ها و زحمات استاد محترم و گران‌قدر جناب آقای دکتر مهدی بامداد که از ابتدای راه و در طیّ انجام این پژوهش، با راهنمایی‌های خود مرا در نگارش این اثر یاری نمودند.

تعهد نامه

اینجانب فرشته خدایی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک، گرایش طرّاحی کاربردی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه مدل‌سازی و کنترل حرکت بازوی رباتیک با محرّکه‌ی کابل تابیده شده با روش ماتریس انتقال گسستهتحت راهنمائی دکتر مهدی بامداد متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و« Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

یکی از قدیمی‌ترین ابزارهای انتقال قدرت، ریسمان است. ریسمان تابیده شده به دور خود و یا به صورت بافته شده با چند ریسمان، برای انتقال نیرو به‌کار می‌رود. زمانی‌که یک انتهای ریسمان به موتوری الکتریکی متّصل شود و انتهای دیگر آن به بار مورد نظر وصل باشد، اعمال دوران به ریسمان از طریق موتور، موجب تابیده شدن ریسمان، کاهش طول ریسمان و در نتیجه حرکت انتقالی بار، به علّت نیروی کششی تولید شده، می‌شود. این سیستم انتقال قدرت که سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده نامیده می‌شود، به علّت سبک و ارزان بودن و اصطکاک کم کاربردهای فراوانی در دستگاه‌های رباتیکی دارد.

سیستم دینامیکی انعطاف‌پذیر پیشنهادی برای مدل‌سازی، شامل یک ریسمان است که از یک‌سو به موتور الکتریکی، و از سوی دیگر به جرم متمرکز(بازوی رباتیک) متّصل است. با دوران موتور، ریسمان، تابیده شده و تغییر طول ریسمان موجب حرکت انتقالی جرم متمرکز می‌شود. به‌منظور یافتن پاسخ این مجموعه، استفاده از روش گسسته‌سازی ماتریس انتقال به‌کار گرفته شده‌است. با استفاده از روش ماتریس انتقال با بعد زمانی گسسته، سیستم مورد بررسی در دو حالت مدل شده‌است. در مدل اوّل، المان‌های جرم و فنر پیچشی و در مدل دوّم، المان‌های جرم، فنر پیچشی و خطّی در نظر گرفته شده و نتایج با پژوهش مربوط، مقایسه شده‌است. کنترلر PID به‌منظور کنترل سیستم به‌کار گرفته شده-است. در ادامه با در نظر گرفتن سیستم مورد نظر به صورت تیر تابیده شده، حلّ دقیق مشخّصه‌های دینامیکی تیر تابیده شده با استفاده از روش ماتریس انتقال، در یک حالت خاص از مدل‌سازی با المان‌های جرم و فنر، با رویکرد بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها بررسی شده‌است.

واژه‌های کلیدی:

سیستم محرّکه - سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده – بازوی رباتیکی – گسسته‌سازی – روش ماتریس انتقال – روش ماتریس انتقال با بعد زمانی گسسته – تیر تابیده شده – کنترلر PID .

فهرست مطالب شماره صفحه

۱- فصل اوّل: مقدّمه ۱

۱-۱ مقدّمه ۲

۱-۲ انواع سیستم‌های محرّکه ۲

۱-۲-۱ محرّکه‌ی الکتریکی ۳

۱-۲-۱-۱ موتورجریان مستقیم(DC) ۳

۱-۲-۱-۲ موتورجریان متناوب(AC) ۴

۱-۲-۲ محرّکه‌ی پنوماتیکی ۴

۱-۲-۳ محرّکه‌ی هیدرولیکی ۵

۱-۳ سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده ۶

۱-۴ روش ماتریس انتقال ۱۰

۱-۵ پیشینه‌ی پژوهش‌های انجام شده ۱۳

۱-۵-۱ پژوهش‌های انجام‌شده درزمینه‌ی سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده ۱۳

۱-۵-۲ پژوهش‌های انجامشده درزمینه‌ی ماتریس انتقال ۱۵

۱-۶ اهداف پژوهش و نوآوری‌ها ۱۷

۱-۷ ساختارپایان‌نامه ۱۸

۲- فصل دوّم: مدل‌سازی ۲۱

۲-۱ مقدّمه ۲۲

۲-۲ مدل‌سازی هندسی ریسمان تابیده شده براساس پژوهش‌های انجام‌شده‌ی پیشین ۲۲

۲-۳ معرّفیTMM و DT-TMM ۲۵

۲-۳-۱ معرّفیTMM ۲۵

۲-۳-۲ معرّفیDT-TMM ۲۹

۲-۴ مدل‌سازی اوّل،تحلیلDT-TMMبراساس جرم و فنر پیچشی ۳۲

۲-۵ مدل‌سازی دوّم،تحلیلDT-TMMبراساس جرم،فنرپیچشی و خطّی ۳۵

۲-۶ طرّاحی کنترلر ۴۰

۲-۷ به‌دست‌آوردن حلّ دقیق برای مشخّصات دینامیکی یک تیر یکنواخت تابیده شده با TMM ۴۱

۲-۷-۱ اعمال TMM بر ریسمان تابیده ۴۲

۳- فصل سوّم: نتایج ۴۵

۳-۱ مقدّمه ۴۶

۳-۲ نتایج مدل اوّل ۴۷
۳-۲-۱ نیروی ۱.۵ نیوتن ۴۷
۳-۲-۲ نیروی ۱۱.۵ نیوتن ۴۸
۳-۳ نتایج مدل دوّم ۵۰
۳-۳-۱ نیروی ۱.۵ نیوتن ۵۰
۳-۳-۲ نیروی ۱۱.۵ نیوتن ۵۱
۳-۴ مقایسه‌ی اختلاف دو مدل ۵۲
۳-۵ نتایج طرّاحی کنترلر ۵۵
۳-۶ نتایج فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای تیرتابیده شده ۵۶
۳-۷ نتایج بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ریسمان تابیده شده ۶۲
۳-۷-۱ فرکانس‌های طبیعی ۶۲
۳-۷-۲ شکل مدهای متناظر با فرکانس‌های طبیعی ۶۲
۳-۷-۳ محدوده‌ی مشکل عددی روش ۷۳
۳-۷-۴ تأثیر طول ریسمان بر فرکانس طبیعی ۷۴
۳-۷-۵ تأثیر جنس ریسمان بر فرکانس طبیعی ۷۵
۳-۷-۶ تأثیر شعاع ریسمان بر فرکانس طبیعی ۷۶
۴- فصل چهارم: نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای پژوهش‌های پیش‌رو ۷۹
۴-۱ جمع‌بندی مطالب پایان‌نامه ۸۰
۴-۲ نتایج و دست‌آوردها ۸۱
۴-۳ پیشنهاد برای پژوهش‌های پیش‌رو ۸۱
پیوست ۹۵
منابع ۹۵

فهرست شکل‌ها — شماره صفحه

شکل(۱-۱) تصویری از یک محرّکه‌ی پنوماتیکی ۵
شکل(۱-۲)کاربردهای ریسمان تابیده ۷
شکل(۱-۳) اصول کاری یک محرّکه‌ی ریسمان تابیده[۲۱] ۸
شکل(۱-۴) کمک به حرکت بازو[۲۱] ۹

شکل(۱-۵) ربات مکعّبی در دو حالت مختلف[۳] ۱۰

شکل(۱-۶) نمودار درختی ساختار پایان‌نامه ۲۰

شکل(۲-۱) هندسه‌ی ریسمان در طول پیچش ۲۲

شکل(۲-۲) سیستم دوجرمی برای معرّفی روش ماتریس انتقال ۲۵

شکل(۲-۳) سیستم جرم و فنر برای نشان دادن متغیّرهای حالت ۲۷

شکل(۲-۴) مدل جرم و فنر پیچشی ۳۲

شکل(۲-۵) مدل جرم و فنر پیچشی و خطّی ۳۶

شکل(۲-۶) دیاگرام جعبه‌ای سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده با کنترلر PID ۳۶

شکل(۳-۱) نیروی ۱.۵ نیوتن مدل اوّل ۴۷

شکل(۳-۲) خطای نیروی ۱.۵ نیوتن مدل اوّل ۴۸

شکل(۳-۳) نیروی ۱۱.۵ نیوتن مدل اوّل ۴۹

شکل(۳-۴) خطای نیروی ۱۱.۵ نیوتن مدل اوّل ۴۹

شکل(۳-۵) نیروی ۱.۵ نیوتن مدل دوّم ۵۰

شکل(۳-۶) خطای نیروی ۱.۵ نیوتن مدل دوّم ۵۱

شکل(۳-۷) نیروی ۱۱.۵ نیوتن مدل دوّم ۵۲

شکل(۳-۸) خطای نیروی ۱۱.۵ نیوتن مدل دوّم ۵۲

شکل(۳-۹) مقایسه‌ی دو مدل درنیروی ۱.۵ نیوتن ۵۳

شکل(۳-۱۰) اختلاف دو مدل درنیروی ۱.۵ نیوتن ۵۴

شکل(۳-۱۱) مقایسه‌ی دو مدل در نیروی ۱۱.۵ نیوتن ۵۴

شکل(۳-۱۲) اختلاف دو مدل در نیروی ۱۱.۵ نیوتن ۵۵

شکل(۳-۱۳) پاسخ پلّه‌ی کنترلر PID ۵۶

شکل(۳-۱۴) محدوده‌ی فرکانس طبیعی اوّل برای $\beta = ۰^\circ$ ۵۷

شکل(۳-۱۵) شکل مد اوّل در $\beta = ۰^\circ$ ۵۸

شکل(۳-۱۶) شکل مد دوّم در $\beta = ۰^\circ$ ۵۸

شکل(۳-۱۷) شکل مد اوّل در $\beta = ۱۵^\circ$ ۵۹

شکل(۳-۱۸) شکل مد دوّم در $\beta = ۱۵^\circ$ ۵۹

شکل(۳-۱۹) شکل مد اوّل در $\beta = ۳۰^\circ$ ۶۰

شکل(۳-۲۰) شکل مد دوّم در $\beta = ۳۰^\circ$ ۶۰

شکل(۳-۲۱) شکل مد اوّل در $\beta = ۴۰^\circ$ ۶۱

شکل(۳-۲۲) شکل مد دوّم در $\beta = ۴۰^\circ$ ۶۱

شکل(۳-۲۳) شکل مد اوّل در $\beta = ۴۵^\circ$ ۶۴

شکل(۳-۲۴) شکل مد دوّم در $\beta = ۴۵^\circ$ ۶۴

شکل(۳-۲۵) شکل مد سوّم در $\beta = ۴۵^\circ$ ۶۵

شکل(۳-۲۶) شکل مد چهارم در $\beta = ۴۵^\circ$ ۶۵

شکل(۳-۲۷) شکل مد پنجم در $\beta = ۴۵^\circ$ ۶۶

شکل(۳-۲۸) شکل مد اوّل در $\beta = ۱۰\pi$ ۶۶

شکل(۳-۲۹) شکل مد دوّم در $\beta = ۱۰\pi$ ۶۷

شکل(۳-۳۰) شکل مد سوّم در $\beta = ۱۰\pi$ ۶۷

شکل(۳-۳۱) شکل مد چهارم در $\beta = ۱۰\pi$ ۶۸

شکل(۳-۳۲) شکل مد پنجم در $\beta = ۱۰\pi$ ۶۸

شکل(۳-۳۳) شکل مد اوّل در جهت y در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۶۹

شکل(۳-۳۴) شکل مد دوّم در جهت y در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۶۹

شکل(۳-۳۵) شکل مد سوّم در جهت y در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۷۰

شکل(۳-۳۶) شکل مد چهارم در جهت y در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۷۰

شکل(۳-۳۷) شکل مد پنجم در جهت y در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۷۱

شکل(۳-۳۸) شکل مد اوّل در جهت z در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۷۱

شکل(۳-۳۹) شکل مد دوّم در جهت z در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۷۲

شکل(۳-۴۰) شکل مد سوّم در جهت z در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۷۲

شکل(۳-۴۱) شکل مد چهارم در جهت z در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۷۳

شکل(۳-۴۲) شکل مد پنجم در جهت z در $\beta = ۲۰۰\pi$ ۷۳

شکل(۳-۴۳) محدوده‌ی مشکل عددی در $\beta = ۴۵^\circ$ ۷۴

شکل(۳-۴۴) تأثیر افزایش طول ریسمان بر فرکانس طبیعی........ ۷۵

شکل(۳-۴۵) تأثیر تغییر جنس ریسمان بر فرکانس طبیعی........ ۷۶

شکل(۳-۴۶) تأثیر افزایش شعاع ریسمان بر فرکانس طبیعی........ ۷۷

شکل(A-۱) نشانه‌گذاری برای مختصات‌های محلّی و کلّی........ ۸۷

شکل(A-۲) جابه‌جایی‌ها ونیروهای اعمالی بر المانkام ۸۷

فهرست جدول‌ها شماره صفحه

جدول(۲-۱) ضرایب فاکس-اویلر ۳۰

جدول(۳-۱) مشخّصات فیزیکی ۴۶

جدول(۳-۲) پارامترهای کنترلی ۵۷

جدول(۳-۳) مشخّصات فیزیکی تیر تابیده شده ۵۷

جدول(۳-۴) پنج فرکانس طبیعی اوّل تیر تابیده شده((ω(rad/s)) ۵۷

جدول(۳-۵) پنج فرکانس طبیعی اوّل((ω(rads)) ۶۲

جدول(۳-۶) مقادیر پنج فرکانس طبیعی با افزایش طول ریسمان ۷۴

جدول(۳-۷) مقادیر پنج فرکانس طبیعی با تغییر جنس ریسمان ۷۵

جدول(۳-۸) مقادیر پنج فرکانس طبیعی با افزایش شعاع ریسمان ۷۵

فهرست علائم لاتین

F_t	نیروی مماسی در ریسمان
F_i	نیروی طولی در امتداد ریسمان
F_z	بار خارجی وارد بر ریسمان
L	طول اوّلیه‌ی ریسمان
X	طول منقبض شده‌ی ریسمان
r	شعاع ریسمان
L_c	طول ریسمان تحت بار
K	ضریب سفتی ریسمان نسبت به طول آن
V	حجم استوانه
r_{var}	شعاع متغیّر در حین تابیده شدن
Z	بردار حالت
b	ضریب میرایی
U_{spring}	ماتریس انتقال فنر-دمپر
U_{mass}	ماتریس انتقال جرم

U_{Force}	ماتریس انتقال نیرو
U_{sys}	ماتریس انتقال
A_i، B_i، D_i و E_i	ضرایب فاکس-اویلر
[U]	ماتریس انتقال در نقطه‌ی i
M	گشتاور موتور
T	گشتاور در هر المان
J	ممان اینرسی پیچشی هر المان
n	تعداد المان‌های انتخابی
m_i	جرم المان iام
G	مدول پیچشی
U_{Torque}	ماتریس گشتاور
$U_{spring_{li}}$	ماتریس سفتی فنر خطّی
$U_{spring_{ro}}$	ماتریس سفتی فنر پیچشی
k_I	سفتی فنر خطّی
k_J	سفتی فنر پیچشی
A	سطح مقطع المان
E	مدول یانگ
k	نرخ تابیدگی تیر

v_y	جابه‌جایی در جهت y
w_z	جابه‌جایی در جهتz
U	انرژی کرنشیالمان تیر
I_{zz}	ممان اینرسی هندسی نسبت به محور $\bar{z}$
I_{yy}	ممان اینرسی هندسی نسبت به محور $\bar{y}$
T	انرژی جنبشی تیر تابیده شده
m	جرم در واحد طول
L_k	طول المان kام تیر
V_y	نیروی برشی در جهت y
V_z	نیروی برشی در جهت z
M_y	گشتاور خمشی در جهت y
M_z	گشتاور خمشی در جهت z
[C]	ماتریس انتقال سمت چپ
[H]	ماتریس انتقال سمت راست
[T]	ماتریس انتقال المان kام

فهرست علائم یونانی

τ_L	گشتاور خارجی اعمالی بر ریسمان
θ	زاویه‌ی پیچش ریسمان
α	زاویه‌ی مارپیچ
δ	جابه‌جایی و چرخش انتهای المان
β	زاویه‌ی تابیدگی تیر
ϕ_y	زاویه‌های پیچش نسبت به y
ψ_z	زاویه‌های پیچش نسبت بهz
ε_{xx}	کرنش در جهت x
σ	تنش عمودی
ω	فرکانس زاویه‌ای
ν	ضریب پواسون

۱- فصل اوّل: مقدّمه

۱-۱ مقدّمه

ابتدا انواع سیستم‌های محرّکه به‌صورت مختصر توضیح داده شده‌اند. سپس سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده[۱] معرّفی شده‌است. کاربردهای مهم و وسیع سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده در زمینه‌های مختلف بیان و روش ماتریس انتقال(TMM)[۲] معرّفی شده‌است. پژوهش‌های انجام شده در زمینه‌ی سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده و روش ماتریس انتقال به‌صورت اجمالی مورد بررسی قرار گرفته‌است و در نهایت اهداف پژوهش و نوآوری‌ها و ساختار پایان‌نامه بیان شده‌است.

۱-۲ انواع سیستم‌های محرّکه

محرّکه، یک جزء از ماشین است که مسئول انتقال و یا کنترل یک مکانیزم یا سیستم است. یک محرّکه به یک سیگنال کنترلی و منبع انرژی نیازمند است. سیگنال کنترلی به‌نسبت کم‌انرژی است و ممکن است به‌صورت ولتاژ الکتریکی یا جریان، فشار پنوماتیکی یا هیدرولیکی و یا حتّی قدرت انسان باشد. منبع اصلی انرژی ممکن است به‌صورت جریان الکتریکی، فشار مایع هیدرولیک و یا فشار پنوماتیک باشد. هنگامی‌که سیگنال کنترل دریافت می‌شود، پاسخ محرّکه، تبدیل انرژی به حرکت مکانیکی است.

سیستم‌های محرّکه را می‌توان در سه حالت اصلی از انتقال انرژی به‌صورت زیر طبقه‌بندی کرد:

- الکتریکی
- پنوماتیکی
- هیدرولیکی

[1]Twisted String Actuator
[2]Transfer Matrix Method

۱-۲-۱ محرّکه‌ی الکتریکی

موتور الکتریکی[۱]، نوعی ماشین الکتریکی است که الکتریسیته را به حرکت مکانیکی تبدیل می‌کند. عمل عکس آن که تبدیل حرکت مکانیکی به الکتریسیته‌است، توسّط ژنراتور انجام می‌شود. این دو و سیله به‌جز در عمل‌کرد، مشابه یک‌دیگر هستند. اکثر موتورهای الکتریکی توسّط الکترومغناطیس کار می‌کنند، امّا موتورهایی که بر اساس پدیده‌های دیگری نظیر نیروی الکترواستاتیک و اثر پیزوالکتریک [۲] کار می‌کنند، هم وجود دارند. ایده‌ی کلّی این است که وقتی که یک مادّه‌ی حامل جریان الکتریسیته تحت اثر یک میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد، نیرویی بر روی آن مادّه از سوی میدان اعمال می‌شود. در یک موتور استوانه‌ای، چرخانه(روتور) به‌علّت گشتاور ناشی از نیرویی که به فاصله‌ای معیّن از محور چرخانه به چرخانه اعمال می‌شود، می‌گردد.

محرّکه‌های الکتریکی از موتورهای الکتریکی تشکیل شده‌اند. اصل فیزیکی تمام موتورهای الکتریکی به این صورت است که هنگامی که یک جریان الکتریکی از طریق یک هادی قرار داده شده در یک میدان مغناطیسی عبور می‌کند، یک نیرو بر سیم اعمال می‌شود که باعث حرکت سیم می‌شود. انواع موتور الکتریکی شامل موارد زیر است.

۱-۲-۱-۱ موتور جریان مستقیم (DC[۳])

موتورهای DC برای صد سال برای حرکت‌های با سرعت قابل تنظیم[۴] مورد استفاده قرار می‌گرفتند و کنترل گشتاور متغّیر بر روی این موتورها اجرا می‌شد. مهم‌ترین مشکل این موتورها، هزینه‌ی تعمیر و نگه‌داری آن‌ها و هم‌چنین بازده پایین‌تر نسبت به موتورهای AC[۵] و مهم‌ترین مزیّت این موتورها

[1]Electric motor
[2]Piezoelectric
[3]Direct Current
[4]Adjustable Speed Drive
[5]Alternating Current

کنترل دقیق سرعت آن‌ها می‌باشد. اگرچه با پیشرفت تکنولوژی کنترل موتورهایAC، موتورهای DC از رده خارج شدند؛ امّا هنوز صنایع قدیمی و صنایعی که به کنترل خیلی دقیق نیاز دارند، هم‌چون جرثقیل‌های غول‌پیکر از موتورهایDC استفاده می‌کنند.

موتورهای DC از طریق استفاده از یک سیگنال DC به‌کار گرفته می‌شوند. سرعت موتور DC به‌وسیله‌ی سرعت اعمالی به آرماتور کنترل می‌شود. برای موتورهای با استاتور مارپیچی، کنترل سرعت از طریق تغییر جریان استاتور نیز ممکن است.

۱-۲-۱-۲ موتور جریان متناوب(AC)

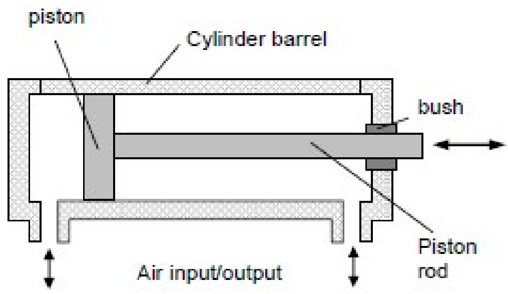
موتور AC یک ماشین الکتریکی است که با جریان متناوب تغذیه شده و توان الکتریکی را تبدیل به توان مکانیکی می‌نماید. موتورAC از دو قسمت اصلی استاتور و روتور تشکیل شده‌است.استاتور، هسته‌ی خارجی و معمولاً ثابت است که با استفاده از جریان متناوب، میدان مغناطیسی دوّار ایجاد می‌کند. روتور، هسته‌ی داخلی و متّحرک است که به محور خروجی متّصل شده و با توجّه به میدان مغناطیسی دوّار تولید شده توسّط استاتور، گشتاور تولید می‌کند.

موتورهای AC توسّط یک منبع جریان متناوب اعمالی به سیم‌پیچ استاتور هدایت می‌شوند. سرعت موتورهای AC با فرکانس سیگنال ورودی تعیین می شود. بنابراین کنترل سرعت از طریق تغییر فرکانس سیگنال به‌دست می‌آید.

۱-۲-۲ محرّکه‌ی پنوماتیکی

محرّکه‌ی پنوماتیکی به‌طور گسترده‌ای در صنعت ساخت مورد استفاده قرار می‌گیرد. این محرّکه به‌طور کلّی از هوای فشرده شده به‌عنوان واسطه‌ی انتقال قدرت، بهره می‌برد. نوع اصلی دستگاه انتقال انرژی موجود در پنوماتیک، سیلندر پنوماتیک است. همان‌طور که در شکل(۱-۱) نشان داده شده‌است، به‌طور کلّی از یک بشکه‌ی استوانه‌ای با دو انتهای بسته به‌همراه یک پیستون که طول سیلندر را

طی می‌کند، تشکیل شده‌است. حرکت سیلندر-پیستون و میله‌ی متّصل به پیستون به‌وسیله‌ی هوای فشرده شده در یکی از دو درگاهی که در دو انتهای سیلندر قرار دارد، رخ می‌دهد. استفاده از هوا به علّت ویسکوزیته‌ی ناچیز و تراکم‌پذیری بالا موجب تولید سرعت‌های به‌نسبت بالا در این محرّکه‌ها می‌شود. اگرچه تراکم‌پذیری هوا در این محرّکه موجب می‌شود که دست‌یابی به دقّت بالا دشوار باشد.



شکل(۱-۱) تصویری از یک محرّکه‌ی پنوماتیکی

۱-۲-۳ محرّکه‌ی هیدرولیکی

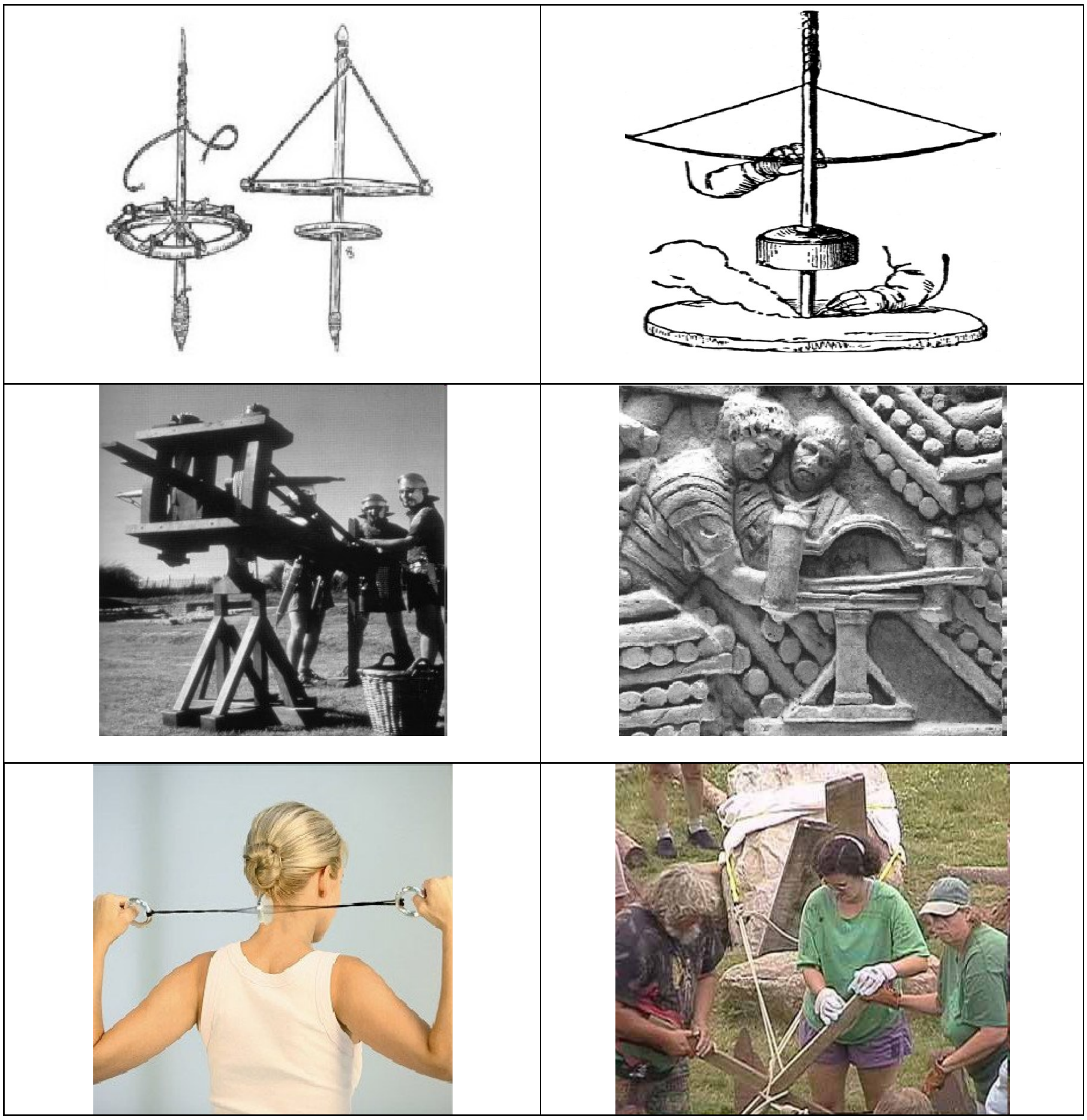
اصول اساسی حاکم بر محرّکه‌ی هیدرولیکی، به‌طور کامل شبیه به محرّکه‌ی پنوماتیکی است. تفاوت در مایع عامل است که از هوا یا گاز در محرّکه‌ی پنوماتیکی به مایع در محرّکه‌ی هیدرولیکی تغییر می‌کند. هرچند نتایج عملکردی در این دو محرّکه به‌طور کامل متفاوت است. استفاده از مایع، موجب دست‌یابی به فشار عملیاتی بالا می‌شود؛ به این معنی که محرّکه‌های هیدرولیکی توان خروجی بسیار بالایی را می‌توانند داشته باشند، در نتیجه این محرّکه‌ها زمانی که نیروها و گشتاورهای بزرگی به‌کار برده می‌شوند، کاربرد دارند.

ویژگی‌های اجرایی محرّکه‌ها انتخاب یک محرّکه را تحت تأثیر قرار می‌دهند. حرکت مورد نیاز، سرعت، قدرت مورد استفاده، دقّت و تکرارپذیری، رفتار دینامیکی و انطباق از جمله‌ی این ویژگی‌ها هستند.

به‌جز ویژگی‌های عمل‌کردی، عوامل دیگری نیز انتخاب محرّکه‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهند. پارامترهای کنترلی، منبع تغذیه‌ی مورد نیاز، روش مورد استفاده برای اندازه‌گیری سرعت، موقعیّت، نیرو و گشتاور، یک‌پارچه‌سازی سیستم، هزینه و امنیت از این دسته‌اند.

۱-۳ سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده

ریسمان به‌عنوان یکی از قدیمی‌ترین ابزارهای انتقال قدرت در طول مسیر شناخته شده‌است. شروع استفاده از ریسمان‌ها توسّط انسان‌ها در سیستم‌های انتقال قدرت به چند هزار سال پیش به ابزار محرّکه‌ی ریسمانی مته که برای اهداف نجّاری و آتش‌افروزی مورد استفاده قرار می‌گرفت، برمی‌گردد. پس از آن انسان‌ها دریافتند که تابیدن یک یا چند ریسمان موازی منجر به کاهش طول آن می‌شود. سیستم‌های انتقال ریسمان تابیده براساس اثر ذکر شده در بالا در کاربردهای نظامی مانند منجنیق، ساخت و ساز مانند چرخ چاه و سایر زمینه‌ها مورد استفاده قرار گرفت. سیستم‌های محرّکه‌ی ریسمان تابیده که از لحاظ مکانیکی ساده و قابل اعتماد هستند، انتقال نیروهای بزرگ با گشتاور ورودی کوچک را ممکن می‌سازند[۱]. با توجّه به شکل(۱-۲) ابزارهای یونانیان باستان و جنگ روم تا دستگاه‌های مدرن، در کشیدن بارهای سنگین، تثبیت سازه و هم‌چنین برای تفریح و سرگرمی استفاده از ریسمان مشهود است.



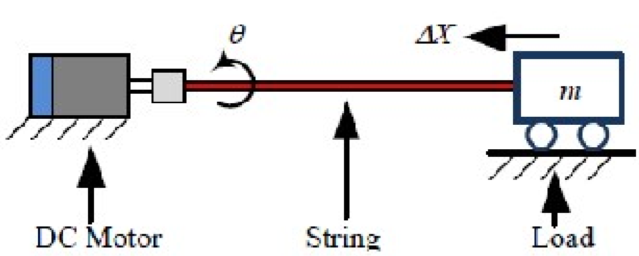
شکل(۱-۲)کاربردهای ریسمان تابیده

با توجّه به پیشرفت‌هایی که در چند سال اخیر در زمینه‌ی رباتیک به‌دست آمده، نیاز به دستگاه‌های محرّکه‌ی خطّی دقیق محسوس است. بسیاری از ابزارهای رباتیکی که در گذشته گسترش یافته‌اند، راه حل‌های متعدّدی برای سیستم‌های محرّکه‌ی خود پیشنهاد داده‌اند که به‌طور عمده در نوع موتور تفاوت دارند. اغلب موتورهای الکتریکی دورانی و گاهی اوقات پنوماتیکی ارائه شده‌است و در سیستم انتقال قدرت از جعبه‌دنده، تاندون و یا شافت‌های انعطاف‌پذیر استفاده شده‌است. توسعه‌ی دست‌های رباتیکی با حرکت تاندون، نیاز جدّی به سیستم‌های محرّکه را نشان می‌دهد. به‌طور مثال در یک

دست رباتیکی، به ۲۰ محرّکه‌ی مستقل برای حرکت کامل دست با وزن کم نیاز است. هم‌چنین توان مصرفی، یکی دیگر از پارامترهای مهم در انتخاب سیستم محرّکه است. در نتیجه، موتورهای خطّی تجاری در دسترس، مشخّصات مورد نیاز از نظر ابعاد و وزن را برآورده نمی‌کنند. به‌عنوان یک حقیقت، با انتخاب مناسب موتور الکتریکی دوّار و برخی پارامترهای طرّاحی محرّکه‌ی ریسمان تابیده، شامل طول و شعاع ریسمان، برآورده شدن همه‌ی شرایط برای پیاده‌سازی دستگاه‌های مکاترونیکی ممکن می‌شود و راه برای نسل بعدی از دست‌های رباتیکی چندانگشتی هموار می‌گردد[۲].

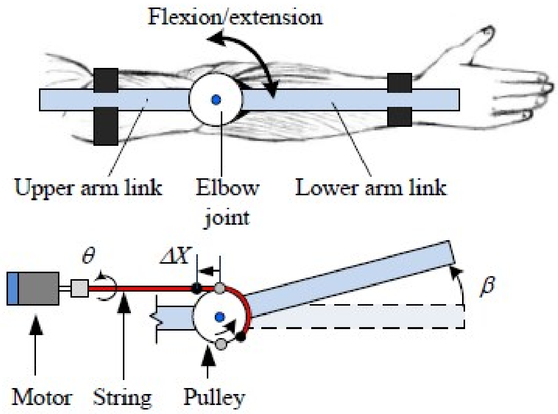
به‌طور کلّی انتظار می‌رود که روبات‌ها در آینده‌ی نزدیک قادر به انجام وظایف پیچیده‌ی مختلف باشند و نه‌تنها در وظایف کارخانه‌ای، بلکه در فعّالیت‌های روزمرّه با انسان‌ها همکاری کنند.

یکی از قدیمی‌ترین ابزارهای انتقال قدرت، ریسمان است. ریسمان تابیده شده به دور خود و یا به‌صورت بافته شده با چند ریسمان، برای انتقال نیرو به‌کار می‌رود. همان‌طور که در شکل(۱-۳) دیده می‌شود، زمانی‌که یک انتهای ریسمان به موتوری الکتریکی متّصل شود و انتهای دیگر آن به بار مورد نظر وصل باشد، اعمال دوران به ریسمان از طریق موتور، موجب تابیده شدن ریسمان، کاهش طول ریسمان و در نتیجه حرکت انتقالی بار، به علّت نیروی کششی تولید شده، می‌شود. یکی از سودمندی‌های اصلی این سیستم انتقال قدرت در مقایسه با سایر سیستم‌ها، اتّصال مستقیم موتور و جرم مورد نظر بدون نیاز به استفاده از مکانیزم‌های واسط انتقال قدرت هم‌چون جعبه‌دنده است.



شکل(۱-۳) اصول کاری یک محرّکه‌ی ریسمان تابیده[۲۱]

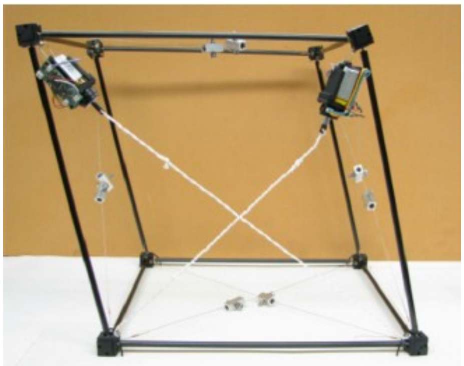
این سیستم بسیار سبک، ارزان، بی‌صدا و با اصطکاک کم است و شبیه به ماهیچه عمل می‌کند. ویژگی‌های منحصربه‌فرد این سیستم محرّکه، کاربردهای گسترده‌ای را برای آن موجب می‌شود. همان‌طور که در شکل(۱-۴) دیده می‌شود، در توان‌بخشی و فیزیوتراپی برای کمک به حرکت اعضای بدن هم‌چون بازو قابل استفاده است.



شکل(۱-۴) کمک به حرکت بازو[۲۱]

یکی دیگر از کاربردهای این سیستم محرّکه، در ربات مکعّبی‌شکل[1] است. این ربات بسیار انعطاف‌پذیر است. محرّکه در قطرهای هر وجه مکعّب و در مجموع، ۱۲ محرّکه در هر مکعّب قرار دارد. مکعّب، قادر به تنظیم خود به بسیاری از راه‌هاست. با تکیه‌گاه شدن محرّکه‌ها، مکعّب از مربّع به متوازی‌الاضلاع تبدیل می‌شود. این جابه‌جایی در شکل(۱-۵) قابل مشاهده است[۳].

[1] Cubical Modular Robot



شکل(۱-۵) ربات مکعّبی در دو حالت مختلف[۳]

در تقویت توان، فعل و انفعالات لامسه‌ای با محیط مجازی، ربات‌های تنسیگریتی[1] و دستگاه‌های رباتیکی مانند انگشت و دست رباتیکی، بازوی رباتیکی و هم‌چنین در استخوان زانو، این سیستم انتقال قدرت قابل استفاده است.

۱-۴ روش ماتریس انتقال

به‌طور کلّی پاسخ دینامیکی یک سازه‌ی چند درجه آزادی با استفاده از انتگرال‌گیری ماتریس معادله‌ی حرکت دیفرانسیل آن سازه قابل دست‌یابی است. ماتریس معادله حرکت از طریق یک جرم متمرکز یا گسسته‌سازی المان‌محدود سازه تشکیل می‌شود. برهم‌نهی کیفیتی[2]، انتگرال‌گیری عددی گام‌به‌گام و روش ماتریس انتقال سه مورد از معمول‌ترین روش‌های انتگرال‌گیری معادله‌های حرکت هستند. در روش برهم‌نهی کیفیتی، ابتدا مقادیر و بردارهای ویژه‌ی ماتریس سیستم محاسبه می‌شود و سپس معادله‌های حرکت از حالت زوجی خارج می‌شوند[3]. پاسخ سیستم به‌عنوان ترکیب خطّی شکل مدها[4] فرمول‌بندی می‌شود. این روش براساس فرض رفتار خطّی و میرایی تناسبی است. این محدودیت‌های ذاتی روش و هم‌چنین زمان محاسباتی بزرگ برای دست‌یابی به مقادیر و بردارهای ویژه‌ی سیستم،

[1]Tensegrity Robot
[2]Modal Superposition
[3]Uncouple
[4]Mode Shapes

سودمندی این روش را محدود به کاربردهای کمی می‌کند. روش دوّم یعنی روش انتگرال‌گیری عددی از بعضی تقریب‌های گام‌به‌گام زمانی برای پیش‌برد این روش بهره می‌گیرد. اویلر کلاسیک، رانگ گوتا، ویلسون تتا و انواع دیگر روش‌های پیش‌بینی اصلاح کننده به‌طور گسترده در کدهای رایانه‌ای فعلی مورد استفاده قرار می‌گیرند. انتخاب هر روشی، وابسته به کاربرد و دقّت خاص مورد نیاز است. ارزیابی مزیّت‌های نسبی این روش‌ها، مضمون بسیاری از آثار منتشر شده‌است. این روش‌ها به طور کلّی با مسائل خطّی ثابت با زمان، مسائل خطّی متغیّر با زمان و مسائل غیرخطّی سازگار هستند. هم‌چنین این روش‌ها به هیچ‌گونه فرض محدودکننده‌ی مشخّصه‌های میرایی سیستم و یک محاسبه‌ی پیشین برای مقادیر و بردارهای ویژه، نیازی ندارند. با این‌حال، هنگامی‌که اندازه‌ی سیستم و تعداد درجات آزادی سیستم افزایش می‌یابد، ابعاد ماتریس نیز بزرگ می‌شود و به‌همین نسبت فضای رایانه‌ای مورد نیاز و زمان محاسباتی، که خود نیازمند سیستم‌های محاسباتی بزرگ‌تر است، افزایش می‌یابد. روش دیگر، روش ماتریس انتقال است که می‌تواند برای کاهش ابعاد ماتریس مورد استفاده قرار گیرد. TMM به‌طرز فوق‌العاده‌ای برای سیستم‌های بزرگی که از چند زیرسیستم ساخته شده و هر زیرسیستم از المان‌های ساده‌ی الاستیک و دینامیک ساخته شده باشد، مناسب است. معادله‌ی حرکت برای هر زیرسیستم در ترم‌هایی از بردارهای حالت که شامل جابه‌جایی‌ها و نیروهای داخلی است، فرمول‌بندی می‌شود. ابعاد ماتریس براساس بزرگ‌ترین تعداد درجه‌ی زیرسیستم و معمولاً بسیار کوچک‌تر از سایر روش‌ها تعیین می‌شود. علاوه بر کوچک‌تر بودن ابعاد ماتریس و نیاز کمتر به فضای رایانه‌ای، TMM، هم‌چنین انعطاف‌پذیری بیشتری در مدل‌سازی ارائه می‌دهد. این روش به‌طور گسترده در دینامیک‌های گردان، تحلیل‌های جعبه‌دنده و سایر کاربردهای زنجیره‌ای‌مانند و سیستم‌های انشعاب‌دار استفاده می‌شود؛ با این حال، کاربرد این روش به سیستم‌های خطّی و برای تخمین فرکانس‌های طبیعی و تحلیل پاسخ حالت ماندگار که تنها تحت تحریک هارمونیک قرار دارند، محدود می‌شود. روش ماتریس انتقال با بعد زمانی گسسته (DT-TMM)[1]، مزایای هر دو روش TMM و

[1]Discrete Time Transfer Matrix Method

انتگرال‌گیری عددی را دارد. به این صورت که ابعاد ماتریس‌ها کوچک است و برای طیف وسیعی از مسائل شامل سیستم‌های خطّی متغیّر با زمان و غیرخطّی به‌کار گرفته می‌شود. این روش ساده و سرراست است و یک ابزار باقدرت برای تحلیل پاسخ دینامیکی هر سیستم دینامیکی عمومی‌ای را ارائه می‌دهد[۴]. روش ماتریس انتقال، روشی ساده و با دقّت است که برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی، گشتاور خمشی، نیروی برشی، شکل مدهای ارتعاشی و ... در سازه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد[۵-۷].

روش ماتریس انتقال، محدودیت‌هایی نیز دارد و همین محدودیت‌ها موجب شد تا این روش برخلاف روش اجزاء محدود، چندان گسترش نیابد و عموماً همراه با روش اجزاء محدود به‌کار برده‌شود[۸-۱۰]. این روش اساساً برای سیستم‌های یک یا دوبعدی ارائه گردید و لذا در تحلیل سیستم‌های پیچیده، استفاده از آن به‌تنهایی چندان مناسب نخواهد بود. از طرفی، روش ماتریس انتقال در مدهای بالا، دچار مشکلات عددی شده[۱۱] و این موضوع موجب تشخیص نادرست فرکانس‌های طبیعی در مدهای بالا خواهد شد و بنابراین این روش، برای سیستم‌هایی مناسب خواهد بود که مدهای پایین ارتعاشی در طرّاحی مورد توجّه باشد. هم‌چنین در بسیاری از موارد هنگامی‌که یک فنر با سفتی بسیار بالا در سازه وجود دارد و یا مفصلی با انعطاف‌پذیری بالا در سازه وجود دارد، تعیین فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش ماتریس انتقال مشکل خواهد بود[۱۲].

در روش ماتریس انتقال، مرتبه‌ی ماتریس مورد نیاز برای تعیین معادله مشخّصه نسبت به روش اجزاء محدود بسیار کوچک‌تر است[۱۳]. هم‌چنین در این روش با افزایش تعداد المان‌ها، دقّت نتایج افزایش یافته و برخلاف روش اجزاء محدود، مقدار دترمینان معادله مشخّصه به تعداد المان‌ها بستگی ندارد[۱۴]. در نتیجه، استفاده از این روش موجب کاهش حجم محاسبات و افزایش سرعت تحلیل خواهد شد. هم‌چنین ابعاد ماتریس انتقال، مستقل از تعداد المان‌ها، همواره مقداری ثابت دارد و نوشتن برنامه‌های رایانه‌ای مورد نظر برای این روش، نسبت به روش اجزاء محدود، بسیار ساده‌تر است[۱۵]. از طرفی روش ماتریس انتقال به‌عنوان یک روش تحلیلی مورد استفاده قرار می‌گیرد،

بنابراین، این روش منابع خطاهای دیگر روش اجزاء محدود به‌غیر از گسسته‌سازی را شامل نمی‌شود. در نتیجه نسبت به روش اجزاء محدود از دقّت بالاتری برخوردار خواهد بود[۱۶].

به‌منظور یافتن پاسخ دینامیکی سیستم چند درجه آزادی، استفاده از روش تحلیلی ماتریس انتقال پیشنهاد می‌شود. استفاده از روش‌های گسسته‌سازی در چارچوب روش مذکور، روش ماتریس انتقال با بعد زمانی گسسته به‌علّت کوچک بودن مرتبه‌ی ماتریس مورد نظر، افزایش دقّت نتیجه‌ها در مقایسه با روش اجزاء محدود، مستقل بودن بعد ماتریس از تعداد المان‌های انتخابی و در نتیجه ساده شدن برنامه‌های رایانه‌ای مورد نظر، مناسب است. در این روش، یک سازه‌ی پیوسته، به چند زیرسازه‌ی معّین، تقسیم می‌شود. هر زیرسازه با توجه به نوع المان در سیستم، می‌تواند المان جرم، سفتی و یا نیرویی باشد.

۱-۵ پیشینه‌ی پژوهش‌های انجام شده

۱-۵-۱ پژوهش‌های انجام شده در زمینه‌ی سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده

گادلر و سونادا[۱۷]، یک انگشت رباتیکی تحریک شده با محرّکه‌ی ریسمان تابیده شده را ارائه کردند. در این کار قواعد محرّکه‌ی تابیده شده، توصیف و داده‌های آزمایشگاهی که مدل ارائه شده را تحت پوشش قرار می‌دهد، نشان داده شده‌است. قابل ذکر است که حدّاقل دو ریسمان از یک سمت به میله-ی موتور و از سمت دیگر به انگشت رباتیکی وصل شده‌اند. در این مدل فرض شده‌است که ریسمان‌ها هیچ‌گونه مقاومتی در برابر پیچش و خمش ندارند. هم‌چنین فاقد هر نوع اصطکاک داخلی و سطحی هستند. ریسمان‌ها دارای سطح مقطع دایره‌ای و غیرقابل انبساط نیز می‌باشند. آن‌ها هم‌چنین کنترل موقعیّت و نیرو را برای انگشت رباتیکی با محرّکه‌ی ریسمان تابیده ارائه کردند[۱۸].

پالی و همکاران[۱۹] مدل‌سازی و کنترل سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده شده را برای دست رباتیکی ارائه کردند. قواعد پایه‌ای این سیستم محرّکه‌ی جدید تعریف شده‌است. معادله‌های اصلی این سیستم به همراه اعتبارسنجی آزمایشگاهی آن ارائه شده‌است. به‌منظور کنترل نیرو در دست رباتیکی، مسأله‌ی ردگیری منحنی نیروی مطلوب انجام شده‌است. دو یا تعداد بیشتری ریسمان به صورت موازی از یک سمت به موتور الکتریکی دورانی و از سمت دیگر به بار مورد نظر وصل شده‌اند. چرخش ریسمان‌ها از یک سمت به‌وسیله‌ی موتور الکتریکی موجب کاهش طول و در نتیجه یک حرکت خطّی در سمت دیگر می‌شود. به‌منظور ساده‌سازی طرّاحی الگوریتم کنترل نیرو، فرض شده‌است که مدل دینامیکی به صورت جسم صلب است. هم‌چنین فرض شده‌است که ریسمان‌هایی که به صورت هسته-ی سایر ریسمان‌های مارپیچ قرار گرفته‌اند، در بار محوری کلّی حضور ندارند. رشته‌های تشکیل شده از ریسمان‌ها، به صورت ایده‌آل در نظر گرفته شده‌اند؛ به این صورت که دارای شعاع ثابت در حین اعمال گشتاور از سوی موتور هستند. هم‌چنین فرض شده‌است که بار به صورت برابر بین رشته‌ها توزیع شده‌است. به‌منظور در نظر گرفتن سفتی ریسمان، رشته‌ها به صورت فنرهای خطّی با قابلیت تحمّل نیروهای کششی و نه نیروهای فشاری فرض شده‌اند. آن‌ها هم‌چنین[۲۰] خطّی‌سازی بازخوری برای مفصل‌های با سفتی متغیّر بر اساس محرّکه‌ی ریسمان تابیده را ارائه کردند.

دیمیتری پوپو و همکاران[۱]، مطالعه‌ای بر روی سیستم‌های محرّکه‌ی ریسمان تابیده به‌همراه نتایج آزمایشگاهی آن انجام دادند. هم‌چنین آن‌ها[۲۱] مدل سینماتیکی به همراه نتایج آزمایشگاهی محرّکه‌ی ریسمان تابیده برای بازوی رباتیکی را ارائه کردند. سیستم اسکلتی بازو از دو عضو مکانیکی بازوی بالایی و پایینی تشکیل شده‌است، این دو عضو به وسیله‌ی یک مفصل پیچشی، هم‌محور با مفصل بازوی انسان به هم متّصل شده‌اند. هم‌چنین یک پولی به‌صورت جسم صلب هم‌محور با مفصل پیچشی به بازوی پایینی متّصل شده‌است. آن‌ها بر خلاف کارهای قبلی فرض کردند که حجم ریسمان در این سیستم ثابت است، در نتیجه، با کاهش طول ریسمان، شعاع سطح مقطع آن افزایش می‌یابد.

لی و همکاران[۲۲]، کنترل تطبیقی را بر روی حرکت بازوی رباتیکی با سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده به‌همراه نتایج آزمایشگاهی آن ارائه کردند.

پارک و سان‌اسپیرال[۲۳]، کاربرد جدیدی از محرّکه‌های ریسمان تابیده ارائه کردند. آن‌ها از این سیستم، به‌عنوان محرّکه، برای ربات‌های تنسیگریتی استفاده کردند. در این کار کنترل امپدانس محرّکه‌ی ریسمان تابیده برای استفاده در ربات‌های تنسگریتی به‌جای محرّکه‌های کابل قرقره‌ای سنّتی بسط داده شده‌است.

موللر و همکاران نیز[۲۴] از این سیستم محرّکه در کاربردی جدید بهره بردند. آن‌ها سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده را برای استخوان زانو استفاده کردند. آن‌ها از دو ریسمان موازی به‌عنوان محرّکه استفاده کردند.

۱-۵-۲ پژوهش‌های انجام شده در زمینه‌ی ماتریس انتقال

روش ماتریس انتقال، در واقع تکمیل روشی است که هولزر در سال ۱۹۲۱ برای بررسی ارتعاش پیچشی محورها ارائه داد[۲۵]. پس از آن، مایکل‌استد، روش هولزر را با کمی تغییر برای ارتعاش عرضی تیرها به‌کار برد[۲۶]. پستل و همکارانش روش مایکل‌استد را گسترش داده و به‌جای استفاده از المان متمرکز، از المان پیوسته برای بررسی ارتعاش عرضی تیر استفاده کردند[۱۵]. دای و همکارانش با استفاده از این روش، به بررسی ارتعاش دو بعدی و سه بعدی در شبکه‌های انتقال پرداختند[۲۷]. اراسانیو و همکارانش فرکانس‌های طبیعی یک تیر با سطح مقطع ثابت و جرم متمرکز نقطه‌ای را به‌دست آوردند و نتایج حاصل از روش ماتریس انتقال را با داده‌های تجربی و روش اجزاء محدود مقایسه کردند و نشان دادند که برای تیر با جرم متمرکز، روش ماتریس انتقال نسبت به روش اجزاء محدود از دقّت بالاتری برخوردار است[۲۸].

هورنر و پیلکی[۲۹] روش ماتریس انتقال ریکاتی را به عنوان یک روش جدید برای تحلیل عضوهای سازه‌ای ارائه کردند. کومار و سانکار[۴] یک روش ماتریس انتقال برای تحلیل پاسخ دینامیکی سیستم-های دینامیکی بزرگ ارائه کردند. این روش، که روش ماتریس انتقال با بعد زمانی گسسته نامیده می-شود، بر اساس روش ماتریس انتقال سنّتی و رویّه‌ی حلّ عددی معادلات دیفرانسیل است. کراوس[۳۰] رساله‌ی دکترای خود را با عنوان یک روش بهبودیافته برای مدل‌سازی و کنترل سازه‌های انعطاف‌پذیر براساس روش ماتریس انتقال ارائه کرد. بین هی و همکاران[۳۱] از روش ماتریس انتقال ریکاتی برای شبیه‌سازی دینامیکی تیر الاستیک با تغییر شکل بزرگ استفاده کردند. آن‌ها تیر مورد نظر را به بخش‌های کوچک صلبی تقسیم کردند که با فنرهای پیچشی به‌هم متّصل شده‌اند. ماتریس انتقال با بعد زمانی گسسته برای اجسام صلب و فنرهای پیچشی، به‌منظور تحلیل دینامیکی تیر، و ریکاتی به‌منظور بهبود پایداری عددی سیستم دینامیکی، اعمال شده‌است. کراوس[۳۲] مدل‌سازی کارآمد محاسباتی براساس روش ماتریس انتقال برای اعضای ربات‌های انعطاف‌پذیر ارائه کرد. تحلیل مورد نظر بر روی یک ربات یک‌لینکی که هم لینک ربات و هم مفصل آن منعطف هستند، اعمال شده‌است. وانگ و همکاران[۳۳] از روش ماتریس انتقال ریکاتی برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی دینامیکی کابل یک یدک‌کش زیرآبی استفاده کردند. کراوس و اوکاشا[۳۴] به بررسی مقایسه‌ای نتایج تحلیلی و تجربی کنترل یک ربات انعطاف‌پذیر پرداختند. آن‌ها از روش ماتریس انتقال با بعد زمانی گسسته برای تحلیل استفاده کردند. هم‌چنین نتایج برای چهار مورد کنترلی مورد بحث قرار گرفته است. جی‌دبلیو لی و جی‌وای لی[۳۵] با توسعه‌ی روش ماتریس انتقال، حلّ دقیق برای مشخّصه‌های دینامیکی یک تیر تابیده شده‌ی یکنواخت را ارائه کردند.

۱-۶ اهداف پژوهش و نوآوری‌ها

هدف این پایان‌نامه، مدل‌سازی محرّکه‌ی ریسمان تابیده شده با استفاده از روش ماتریس انتقال که یک روش گسسته‌سازی است، می‌باشد. پژوهش‌های مرتبط با مدل کردن ریسمان تابیده شده، به صورت هندسی صورت گرفته و رابطه‌های مربوط به تغییر طول ریسمان ناشی از تابیدگی آن، با استفاده از هندسه‌ی ریسمان به صورت مارپیچ در نظر گرفته شده‌است. هم‌چنین، دینامیک آن بررسی نشده است. هم‌چنین در هیچ‌کدام از پژوهش‌های انجام‌شده، از روش‌های گسسته‌سازی برای مدل کردن این سیستم استفاده نشده‌است. به‌منظور بررسی دینامیکی این سیستم، با استفاده از روش DT-TMM، در بخش اوّل مدل‌سازی، سیستم مورد نظر به‌صورت مجموعه‌ای از المان‌های جرم و فنر در نظر گرفته خواهد شد. با اعمال گشتاور اوّلیه به سیستم در طیّ زمان مورد نظر، میزان تابیدگی مطلوب حاصل می‌شود و کنترل میزان تغییر طول بر حسب زاویه‌ی ورودی صورت می‌گیرد. در بخش دوّم با رویکرد بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای متناظر با آن فرکانس‌ها در یک لحظه‌ی خاص از سیستم که در بخش اوّل مورد بررسی قرار می‌گیرد، مدل‌سازی ریسمان تابیده شده، با تیر تابیده شده با TMM در دستور کار قرار گرفته است.روش ماتریس انتقال وگسسته‌سازی، کمک می‌کند تا پاسخ برخطّ این سیستم به‌نسبت پیچیده، با هزینه‌ی محاسباتی کمتر و دقّت بیشتر به‌دست آید.در ادامه نوآوری‌های پژوهش حاضر به شرح زیر عنوان می‌گردد:

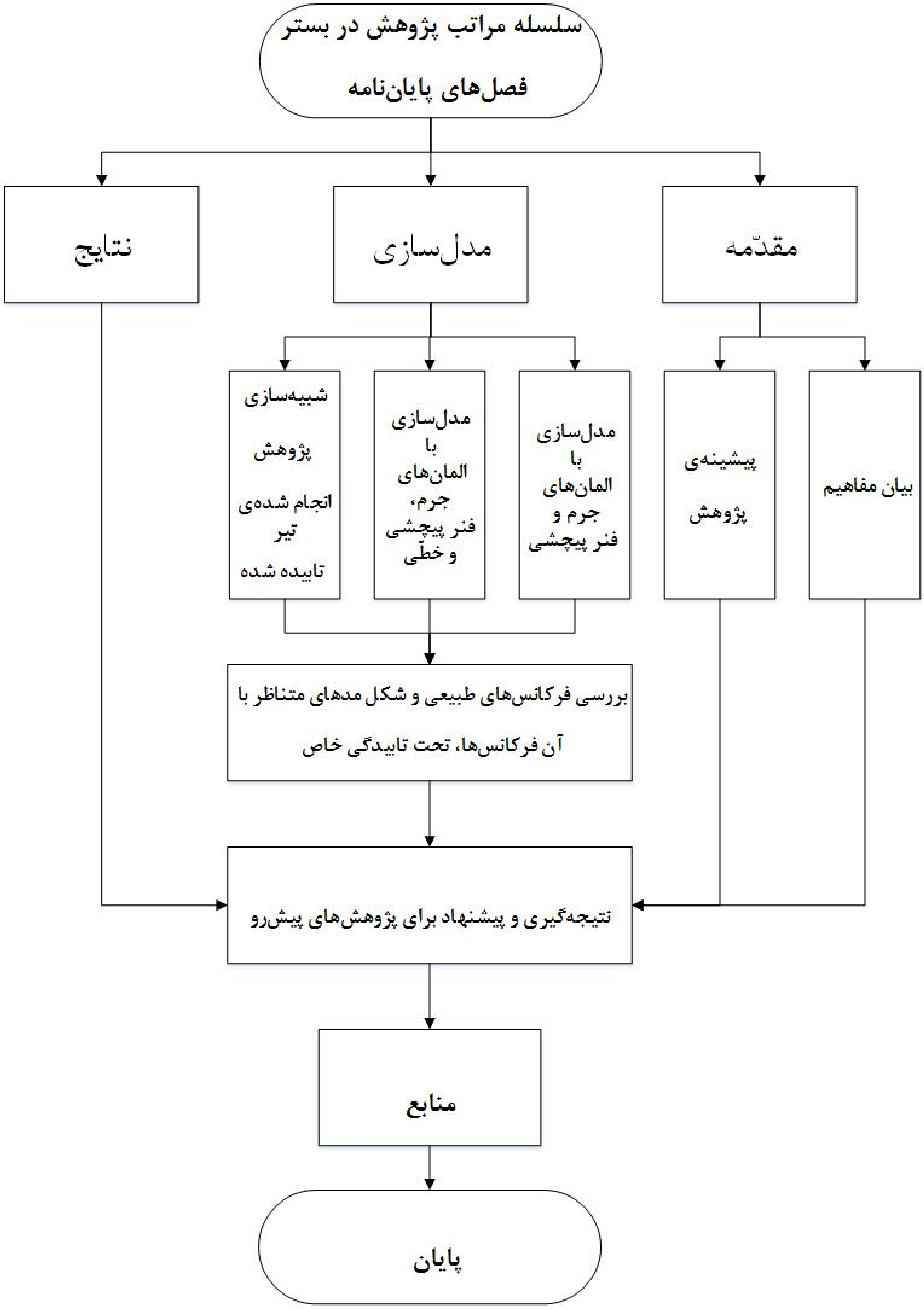
- ارائه‌ی رابطه‌هایی برای مدل کردن سیستم مورد بررسی با المان‌های جرم و فنر پیچشی
- ارائه‌ی رابطه‌هایی برای مدل کردن سیستم مورد بررسی با المان‌های جرم، فنر پیچشی و خطّی
- بررسی دینامیکی سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده شده با ورود مشخّصات فیزیکی سیستم مورد بررسی در رابطه‌ی مربوط به میزان تابیدگی

- بررسی سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده در یک تابیدگی خاص با استفاده از مدل تیر تابیده شده
- کنترل سیستم مورد بررسی
- به‌دست آوردن فرکانس‌های طبیعی سیستم
- به‌دست آوردن شکل مدهای متناظر با فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده برای تابیدگی خاص

۱-۷ ساختار پایان‌نامه

ساختار پایان‌نامه در نمودار درختی شکل(۱-۶) به‌طور خلاصه نشان داده شده است. فصل اوّل مقدّمه-ای در ارتباط با انواع سیستم محرّکه، سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده شده و روش ماتریس انتقال مطرح کرده‌است. سپس پیشینه‌ی پژوهش‌های مرتبط با سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده شده و روش ماتریس انتقال بیان شده‌است و در ادامه اهداف و نوآوری‌های پژوهش آمده است. در فصل دوّم، ابتدا مدل هندسی پژوهش‌های قبلی ارائه خواهد شد. پس از بیان مقدّمات مربوط به روش ماتریس انتقال، با استفاده از DT-TMM، سیستم مورد بررسی در دو حالت مدل می‌شود، در مدل اوّل، المان‌های جرم و فنر پیچشی و در مدل دوّم، المان‌های جرم، فنر پیچشی و خطّی در نظر گرفته و نتایج با پژوهش مربوط، مقایسه خواهد شد. هم‌چنین کنترلر PID به‌منظور کنترل میزان تغییر طول به سیستم اعمال خواهد شد. در ادامه روند حلّ دقیق مشخّصه‌های دینامیکی تیر تابیده شده با TMM که در [۳۵] انجام شده‌است، شبیه‌سازی و نتایج آن پژوهش به‌دست خواهد آمد. سپس با استفاده از مدل تیر تابیده شده، در یک حالت خاص از مدل‌سازی با المان‌های جرم و فنر، سیستم مورد نظر در این پژوهش با رویکرد بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها بررسی می‌شود. در فصل سوّم، نتایج حاصل از روش DT-TMM برای بارگذاری‌های مختلف و هم‌چنین نتایج پژوهش تیر تابیده شده و در

نهایت نتایج سیستم با رویکرد تیر تابیده شده ارائه می‌گردد. نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای پژوهش‌های پیش‌رو در فصل چهارم و منابع در فصل پنجم آمده‌است.



شکل(۱-۶) نمودار درختی ساختار پایان‌نامه

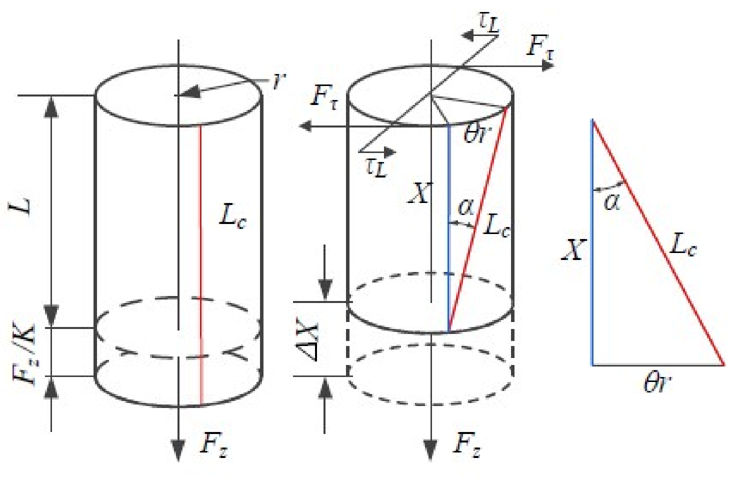
۲- فصل دوّم: مدل‌سازی

۲-۱ مقدّمه

در این فصل، ابتدا براساس پژوهش‌های قبلی انجام شده در ارتباط با محرّکه‌ی ریسمان تابیده، مدل-سازی براساس روش هندسی ارائه می‌شود. سپس مدل‌سازی سیستم براساس DT-TMM صورت می-گیرد. در حالت اوّل، مجموعه با المان‌های جرم و فنر پیچشی مدل می‌شود. در حالت دوّم، مجموعه با المان‌های جرم، فنر پیچشی و خطّی مدل می‌شود. هم‌چنین کنترلر PID به‌منظور کنترل میزان تغییر طول به سیستم اعمال می‌شود. در ادامه، پژوهش[۳۵] انجام شده در ارتباط با اعمال TMM بر تیر تابیده شده بررسی می‌شود و سپس ریسمان با تیر تابیده شده مدل‌سازی و فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای آن در یک تابیدگی خاص، محاسبه می‌شود.

۲-۲ مدل‌سازی هندسی ریسمان تابیده شده براساس پژوهش‌های انجام شده‌ی پیشین

در این بخش، مدل ریاضی متعارف از یک سیستم انتقال ریسمان تابیده شده شرح داده می‌شود[۱]. مدل ریاضی متعارف سیستم انتقال ریسمان تابیده همان‌طور که در شکل(۲-۱) مشاهده می‌شود، براساس هندسه‌ی ریسمان تابیده شده صورت می‌گیرد.



شکل(۲-۱) هندسه‌ی ریسمان در طول پیچش

اگر یک ریسمان را در نظر بگیریم، با اعمال گشتاور خارجی τ_L، ریسمان به‌دور خود تابیده شده و نیروی مماسی F_τ حاصل می‌شود. پس از اینکه ریسمان به‌اندازه‌ی زاویه‌ی θ تابیده شد، تغییر طول ریسمان نسبت به حالت تابیده نشده با توجّه به هندسه‌ی استوانه، محاسبه می‌شود:

$$X = \sqrt{L^2 - \theta^2 r^2} = L\cos\alpha \qquad (۲-۱)$$

L: طول اوّلیه‌ی ریسمان

X: طول منقبض شده‌ی ریسمان

r: شعاع ریسمان

θ: زاویه‌ی تابیده شده

α: زاویه‌ی پیچ

بنابراین تغییر طول به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\Delta X = L - \sqrt{L^2 - \theta^2 r^2} \qquad (۲-۲)$$

از آن‌جایی‌که همه‌ی ریسمان‌ها سفتی محدودی را نشان می‌دهند، ازدیاد طول ریسمان تحت بار خارجی F_Z، قابل چشم‌پوشی نیست. پس از اعمال بار F_Z، طول ریسمان به این صورت محاسبه می-شود:

$$L_c = \frac{F_i}{K} + L = \sqrt{\theta^2 r^2 + X^2} \qquad (۲-۳)$$

L: طول ریسمان بارگذاری نشده

L_c : طول ریسمان تحت بار

K: ضریب سفتی ریسمان نسبت به طول آن

F_i: نیروی طولی در امتداد ریسمان

F_i به این صورت محاسبه می‌شود:

$$F_i = \sqrt{F_\tau^2 + F_z^2}\ , \qquad F_\tau = \frac{\tau_L}{r} \tag{۲-۴}$$

τ_L: گشتاور پیچشی

F_τ: نیروی مقاوم در برابر گشتاور پیچشی

هنگامی‌که بارگذاری خارجی برابر صفر باشد، $L_c = L$.

بنابراین با توجّه به ریسمان منبسط شده، معادله‌ی(۲-۲) به این صورت نوشته می‌شود:

$$\Delta X = \left(\frac{F_i}{K} + L\right) - \sqrt{\left(\frac{F_i}{K} + L\right)^2 - \theta^2 r^2} \tag{۲-۵}$$

که $K = ۲۰۰۰۰$ در واحد طول است که با آزمایش بر روی ریسمان به‌دست آمده است[۱]. با فرض ثابت در نظر گرفتن حجم استوانه، یعنی $V_1 = V_0$، که زیروند ۰، برای حالت تابیده نشده و زیروند ۱، برای حالت تابیده شده‌است و با توجّه به رابطه‌ی حجم یک استوانه که برابر $V = \pi r_i^2 X_i\ ,\ i = ۰$ و ۱ است، افزایش طول ریسمان تحت بار منجر به کاهش شعاع آن می‌شود. در نتیجه رابطه‌ی شعاع ریسمان به این صورت است:

$$r_1 = r_0 \sqrt{\frac{X_0}{X_1}} \tag{۲-۶}$$

در این حالت، معادله‌ی(۲-۵)، به این صورت تغییر می‌کند:

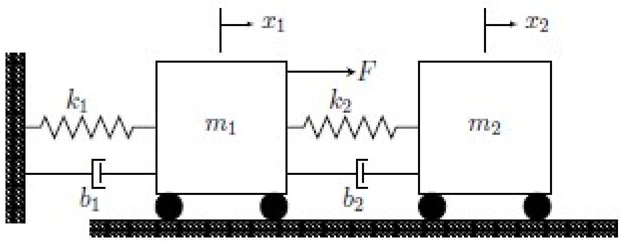
$$\Delta X = \left(\frac{F_i}{K} + L\right) - \sqrt{\left(\frac{F_i}{K} + L\right)^2 - \theta^2 r_{var}^2} \tag{۲-۷}$$

که r_{var}، شعاع متغیّر در حین تابیده شدن است.

۲-۳ معرّفی TMM و DT-TMM

۲-۳-۱ معرّفی TMM

TMM در مدل کردن سیستم‌های پیوسته‌ی خطّی، بدون گسسته‌سازی، تواناست. در ادامه برای روشن شدن روند این روش، مثال دو ارّابه[۳۴] بیان شده‌است.



شکل(۲-۲) سیستم دو جرمی برای معرّفی روش ماتریس انتقال

سیستم دوجرمی نشان داده شده در شکل(۲-۲) برای معرّفی TMM مورد استفاده قرار می‌گیرد. بردار حالت برای مدل کردن این سیستم به این صورت خواهد بود[۳۰]:

$$z = \begin{Bmatrix} x \\ F \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (۸-۲)$$

x: جابه‌جایی عرضی

F: نیرو

1: به‌منظور مدل کردن ورودی‌های خارجی

ماتریس انتقال برای یک فنر-دمپر بدون جرم باید به‌صورتی در نظر گرفته شود که جابه‌جایی در طول فنر-دمپر افزایش یابد و نیرو در هر انتها برابر است با:

$$F = K\delta \tag{۹-۲}$$

K: سفتی دینامیکی

F: نیروی انتهای المان

δ: جابه‌جایی و چرخش انتهای المان

$$x_{i+1} - x_i = \delta \tag{۱۰-۲}$$

$$K = b_i s + K_i \tag{۱۱-۲}$$

b: ضریب میرایی

با جای‌گذاری معادله‌های (۲-۱۰) و (۲-۱۱) در معادله‌ی (۲-۹) خواهیم داشت :

$$F_i = (b_i s + k_i)(x_{i+1} - x_i) \rightarrow x_{i+1} = x_i + \frac{F_i}{(b_i s + k_i)} \tag{۱۲-۲}$$

و از آن‌جا که نیرو در دو طرف المان برابر است، داریم:

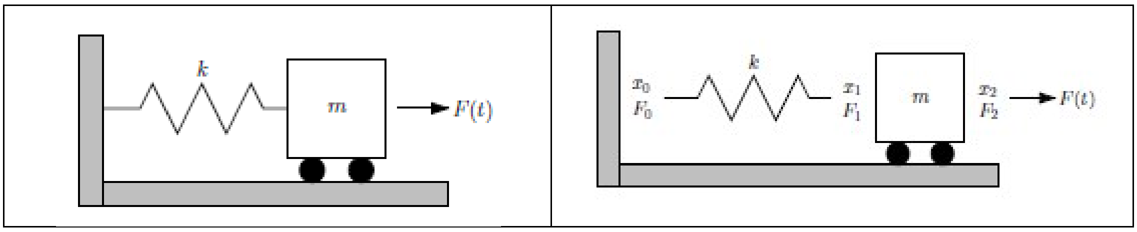
$$F_{i+1} = F_i \tag{۱۳-۲}$$

در نتیجه ماتریس انتقال فنر-دمپر(U_{spring})، به‌صورت زیر، خواهد بود:

$$U_{spring} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{b_i s + k_i} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۱۴-۲}$$

برای تشکیل ماتریس انتقال جرمی، شکل(۲-۳) را به عنوان یک سیستم جرم و فنر ساده در نظر می-

گیریم:



شکل(۲-۳) سیستم جرم و فنر برای نشان دادن متغیّرهای حالت

از آن‌جا که جسم، صلب است، داریم:

$$x_2 = x_1 \tag{۲-۱۵}$$

و با توجّه به قانون دوّم نیوتن:

$$F_2 = F_1 + ms^2 x_1 \tag{۲-۱۶}$$

معادله‌های(۲-۱۵) و (۲-۱۶) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ms^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ F_1 \end{Bmatrix} \tag{۲-۱۷}$$

در نتیجه با اضافه کردن سطر سوّم به ماتریس بالا، ماتریس انتقال جرم(U_{mass})، حاصل می‌شود:

$$U_{mass} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_i s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۱۸}$$

ماتریس انتقال نیرو(U_{Force})، نیز به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$U_{Force} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۱۹}$$

ماتریس انتقال نشان داده شده در شکل(۲-۲) به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$U_{sys} = U_{mass_2} U_{spring_2} U_{Force} U_{mass_1} U_{spring_1} \tag{۲-۲۰}$$

با جای‌گذاری شرایط مرزی یک‌سر گیر و یک‌سر آزاد سیستم داریم:

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = U_{sys} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{wall} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{۲-۲۱}$$

که x_2 جابه‌جایی جرم m_2 و F_{wall} ، نیرویی است که k_1 و b_1 را به دیوار می‌چسباند. ابتدا سطر دوّم معادله‌ی(۲-۲۱) را برای به‌دست آوردن F_{wall} حل می‌کنیم:

$$U_{sys}=$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_2 s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{b_2 s+k_2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_1 s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{b_1 s+k_1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۲-۲)$$

با ضرب ماتریس‌های بالا، ماتریس کلّی سیستم(U_{sys})، ایجاد می‌شود، با توجّه به سطر دوّم معادله-ی(۲-۲۱)، F_{wall} را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(\frac{m_2 s^2 + m_1 s^2\left(\frac{m_2 s^2}{k_2 + b_2 s} + 1\right) + 1}{k_1 + b_1 s} + \frac{m_2 s^2}{k_2 + b_2 s} + 1\right)F_{wall} - F\left(\frac{m_2 s^2}{k_2 + b_2 s} + 1\right) = 0 \qquad (۲۳-۲)$$

در نتیجه بردار حالت z_{wall} ، مشخّص می‌شود.

با ضرب بردار حالت z_{wall}، در ماتریس انتقال مناسب، بردار حالت در هر موقعیّت فیزیکی در سیستم قابل محاسبه است. برای مثال بردار حالت جرم m_1، برابر است با:

$$Z_1=U_{mass_1}U_{spring_1}Z_{wall} \qquad (۲۴-۲)$$

$$Z_1=\begin{Bmatrix} x_1 \\ F_1 \\ 1 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_1 s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{b_1 s+k_1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ F_{wall} \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (۲۵-۲)$$

با جای‌گذاری F_{wall} ، از معادله‌ی(۲-۲۵) و محاسبه‌ی x_1، مقدار $\frac{x_1}{F}$ محاسبه می‌شود:

$$\frac{x_1}{F}= \frac{m_2 s^2+b_2 s+k_2}{m_1 m_2 s^4+(b_1 m_2+b_2 m_1+b_2 m_2)s^3+(b_1 b_2+k_1 m_2+k_2 m_1+k_2 m_2)s^2+(b_1 k_2+b_2 k_1)s+k_1 k_2} \qquad (۲۶-۲)$$

تحلیل TMM به‌طور اساسی، شامل گام‌های پیش‌رو است:

۱. پیدا کردن ماتریس انتقال برای هر المان
۲. ضرب ماتریس‌های انتقال در یکدیگر به‌جهت پیدا کردن ماتریس انتقال سیستم
۳. اعمال شرایط مرزی به‌جهت حلّ بردار حالت در یک انتهای سیستم
۴. استفاده از بردار حالت در یک انتهای سیستم برای تعیین بردار حالت در موقعیّت خواسته شده

۲-۳-۲ معرّفی DT-TMM

DT-TMM قابلیّت‌های TMM سنّتی را با دو روش بسط می‌دهد، یکی تحلیل سیستم‌های غیرخطّی و دیگری آسان کردن شبیه‌سازی حوزه‌ی زمانی.

برای هر المان i در روش DT-TMM، سرعت و شتاب می‌تواند به صورت عددی با عبارت‌های زیر، تقریب زده شود:

$$\ddot{x}_i = A_i x_i + B_i \qquad (۲-۲۷)$$

$$\dot{x}_i = D_i x_i + E_i \qquad (۲-۲۸)$$

که ضرایب A_i، B_i، D_i و E_i به حالت‌های جاری و قبلی المان و طرح انتگرال عددی مورد استفاده وابسته است[۴]. در این‌جا از ضرایب فاکس-اویلر برای حل استفاده شده‌است.

جدول(۲-۱) ضرایب فاکس-اویلر

	Fox-Euler
$A_n(t_i)$	$\frac{2}{\Delta T^2}$
$B_n(t_i)$	$-\frac{2}{\Delta T^2}\,[x(t_{i-1}) + \Delta T\dot{x}(t_{i-1})\,]$
$D_n(t_i)$	$\frac{2}{\Delta T}$
$E_n(t_i)$	$-[\frac{2}{\Delta T}\,x(t_{i-1}) + \dot{x}(t_{i-1})\,]$

جای‌گذاری $\ddot{x}$ از معادله‌ی(۲-۲۷) در معادله‌ی(۲-۱۸)، ماتریس انتقال جرمی DT-TMM حاصل می‌شود.

با توجّه به معادله‌های(۲-۱۶) و (۲-۲۷)، داریم:

$$F_2=m(A_1x_1+B_1)+F_1 \qquad (۲\text{-}۲۹)$$

در نتیجه، ماتریس انتقال جرم($U_{mass_{DT\text{-}TMM}}$)، به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$U_{mass_{DT\text{-}TMM}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ mA_i & 1 & mB_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲\text{-}۳۰)$$

ماتریس انتقال DT-TMM برای فنر با نوشتن معادله‌ی نیروی فنر-دمپر و جای‌گذاری $\dot{x}_i$ و $\dot{x}_{i-1}$ از معادله‌ی(۲-۲۸) حاصل می‌شود.

$$F_i=k_i(x_i-x_{i-1})+ b(\dot{x}_i-\dot{x}_{i-1}) \qquad (۲\text{-}۳۱)$$

$$F_i=k_i(x_i-x_{i-1})+ b[(D_ix_i+ E_i)- (D_{i-1}\,x_{i-1}+ E_{i-1})] \qquad (۲\text{-}۳۲)$$

x_i را از معادله‌ی(۲-۳۲) محاسبه می‌کنیم:

$$x_i=\left(\frac{k_i+ bD_{i-1}}{k_i+bD_i}\right)x_{i-1}+ \left(\frac{1}{k_i+ bD_i}\right)F_i- \frac{b(E_i-E_{i-1})}{k_i+ bD_i} \qquad (۲\text{-}۳۳)$$

در نتیجه ماتریس انتقال فنر($U_{spring_{DT\text{-}TMM}}$)، به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$U_{spring_{DT\text{-}TMM}}=\begin{bmatrix} \frac{k_i+bD_{i-1}}{k_i+bD_i} & \frac{1}{k_i+bD_i} & \frac{-b(E_i-E_{i-1})}{k_i+bD_i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲-۳۴)$$

ماتریس انتقال را می‌توان به فرم زیر نمایش داد:

$$\{Z\}_{i+1}=[U]_i\{Z\}_i \quad (۲-۳۵)$$

{Z}: بردار حالت

[U]:ماتریس انتقال در نقطه‌ی i

حال با در نظر گرفتن مجموعه‌ی المان‌ها با شروع از نقطه‌ی ۱، می‌توان رابطه‌های زیر را نوشت:

$$\{Z\}_{i+1}=[U]_i\{Z\}_i \quad (۲-۳۶)$$

$$\{Z\}_2=[U]_1\{Z\}_1$$

$$\{Z\}_3=[U]_2\{Z\}_2=[U]_2[U]_1\{Z\}_1$$

$$\{Z\}_4=[U]_3\{Z\}_3=[U]_3[U]_2[U]_1\{Z\}_1$$

.

.

.

$$\{Z\}_n=[U]_{n-1}[U]_{n-2}\ldots[U]_2[U]_1\{Z\}_1=[P]\{Z\}_1 \quad (۲-۳۷)$$

ماتریس [P] ، ماتریس انتقال کلّ سازه نام دارد و از ضرب تمام ماتریس‌های انتقال در یکدیگر به‌دست می‌آید.

تحلیلDT-TMM از الگوریتمی شبیه TMM امّا با چند گام بیشتر پیروی می‌کند. به‌علاوه تحلیل DT-TMM باید برای هر گام زمانی اجرا شود، درحالی‌که تحلیل TMM فقط یک‌بار انجام می‌شود.

برای هر گام زمانی:

۱. پیدا کردن ضریب‌های A_i،D_i، B_i، و E_i برای هر المان

۲. جای‌گذاری این ضریب‌ها در ماتریس‌های انتقال DT-TMM برای هر المان

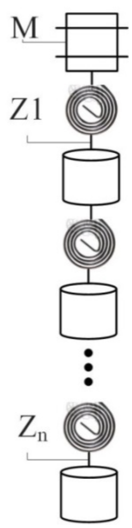
۳. اجرای تحلیل TMM دقیقاً شبیه روش سنّتی

۴. پیدا کردن سرعت‌ها و شتاب‌ها برای هر المان بر پایه‌ی بردار حالت برای هر المان

این روند تا رسیدن به انتهای شبیه‌سازی زمانی خواسته شده تکرار می‌شود.

۲-۴ مدل‌سازی اوّل، تحلیل DT-TMM براساس جرم و فنر پیچشی

برای مدل‌سازی ریسمان تابیده شده در حالت اوّل، همان‌طور که در شکل(۲-۴) مشاهده می‌شود، ریسمان را به‌صورت مجموع المان‌های جرم و فنر پیچشی در نظر می‌گیریم. با این مدل ، صرفاً پیچش بررسی شده و اثرهای ناشی از کشیدگی لحاظ نشده است. برای لحاظ کردن اثر کشیدگی، پس از محاسبه‌ی زاویه‌ی پیچش، از رابطه‌ی هندسی(۲-۵) که در آن این اثر ملاحظه شده‌است، برای تغییر طول استفاده می‌شود. ورودی این سیستم، گشتاورM است که همانند[۱] در نظر گرفته شده استو خروجی هم زاویه است که پس از به‌دست آمدن، در رابطه‌ی هندسی(۲-۵) قرار داده می‌شود تا تغییر طول به دست بیاید.



شکل(۲-۴) مدل جرم و فنر پیچشی

در نقطه‌ی ابتدایی، گشتاور M به مجموعه اعمال می‌شود. موقعیّت فنر پیچشی اوّل با z_1 و موقعیّت المان جرم در آخر با z_n مشخّص شده‌است.

بردار حالت در این مدل به این صورت است:

$$Z=\begin{Bmatrix}\theta\\ T\\ 1\end{Bmatrix} \tag{۲-۳۸}$$

θ: زاویه‌ی پیچش هر المان

T: گشتاور در هر المان

1: به‌منظور مدل کردن ورودی‌های خارجی

به‌جهت تشکیل ماتریس جرم با DT-TMM، المان جرم را در نظر گرفته و معادله‌های گشتاور و زاویه را برای دو انتهای المان، می‌نویسیم.

$$T_{i+1}-T_i=J\,\ddot{\theta}=J(A\theta+B) \tag{۲-۳۹}$$

T: گشتاور در دو انتهای المان جرم

θ: زاویه‌ی دوران

J: ممان اینرسی پیچشی هر المان

A , B: ضرایب فاکس اویلر

و از آن‌جایی‌که زاویه‌ی دو انتهای المان با هم برابرند، داریم:

$$\theta_{i+1}=\theta_i \tag{۲-۴۰}$$

در نتیجه ماتریس جرم(U_{mass})، تشکیل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_{i+1} = U_{mass} * \begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_{i} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\JA & 1 & JB\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_{i} \qquad (۲-۴۱)$$

به‌جهت تشکیل ماتریس سفتی با DT-TMM، المان فنر مورد نظر را در نظر گرفته و معادله‌های گشتاور و زاویه را برای دو انتهای المان، می‌نویسیم.

$$T_{i+1}= T_i$$

$$(۲-۴۲)$$

$$\theta_{i+1} = \frac{T_i}{k} + \theta_i$$

k: سفتی المان فنر

در نتیجه ماتریس سفتی(U_{spring})، تشکیل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_{i+1} = U_{spring} * \begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_{i} = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{k} & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_{i} \qquad (۲-۴۳)$$

برای المان فنر، ، ثابت فنر را بر اساس مشخّصات فیزیکی سیستم مورد بررسی درنظر می‌گیریم. نحوه-ی به‌دست آوردن ثابت‌های مربوط به فنر پیچشی در [۳۶] آمده‌است.

$$k_1 = \frac{2JG}{L} \quad , \quad k_i = \frac{JG}{L}\ i=2, \ldots, n \qquad (۲-۴۴)$$

n: تعداد المان‌های انتخابی

G: مدول پیچشی

حال ماتریس گشتاور اعمالی را محاسبه می‌کنیم. در صورتی‌که گشتاور اعمالی هم‌جهت با T_i باشد، داریم:

$$T_{i+1} - T_i - M = 0 \qquad (۲-۴۵)$$

M: گشتاور اعمالی

ماتریس گشتاور(U_{Torque})، به این صورت تشکیل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_{i+1} = U_{Torque} * \begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & M\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_i \qquad (۲-۴۶)$$

با ضرب ماتریس‌های جرم و سفتی المان‌ها به تعداد مورد نظر و ضرب حاصل در ماتریس گشتاور اعمالی، ماتریس کلّی سیستم(U_{sys})، تشکیل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_n = U_{sys} * \begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_1 = \begin{bmatrix}U_{sys}(1,1) & U_{sys}(1,2) & U_{sys}(1,3)\\U_{sys}(2,1) & U_{sys}(2,2) & U_{sys}(2,3)\\U_{sys}(3,1) & U_{sys}(3,2) & U_{sys}(3,3)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\T\\1\end{Bmatrix}_1 \qquad (۲-۴۷)$$

پس از به‌دست آمدن ماتریس سیستم، شرایط مرزی را مطابق معادله‌ی(۲-۴۸) اعمال می‌کنیم.

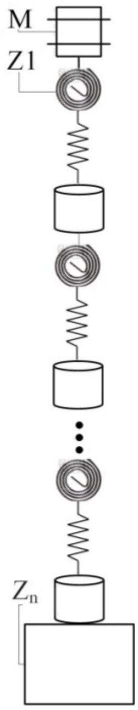
$$T_1=0 \quad , \ \theta_n=0 \qquad (۲-۴۸)$$

با توجّه به شرایط مرزی سیستم مورد بررسی، مقادیر معلوم بردار حالت در مرزها را جای‌گذاری می-کنیم. مجهول‌های موجود در بردار حالت در مرزها، به‌دست می‌آیند. حال با داشتن تمام مقادیر بردار حالت در انتهای ریسمان، با ضرب ماتریس سیستم در هر موقعیّتی، بردار حالت در آن موقعیّت‌ها به-دست می‌آیند.

در این حالت، با استفاده از DT-TMM، زاویه‌ی دوران در هر لحظه به‌دست می‌آید. حال با استفاده از معادله‌ی(۲-۵)، تغییر طول ریسمان قابل دست‌یابی است.

۲-۵ مدل‌سازی دوّم، تحلیل DT-TMM براساس جرم، فنر پیچشی و خطّی

برای مدل‌سازی ریسمان تابیده شده در حالت دوّم، همان‌طور که در شکل(۲-۵) مشاهده می‌شود، ریسمان را به‌صورت مجموع المان‌های جرم، فنر پیچشی و فنر خطّی در نظر می‌گیریم. استفاده از فنرهای خطّی به‌منظور نشان دادن اثر ازدیاد طول ایجاد شده در فنر ناشی از بارگذاری است.



شکل(۲-۵) مدل جرم و فنر پیچشی و خطّی

در نقطه‌ی ابتدایی، گشتاور M به مجموعه اعمال می‌شود. موقعیّت فنر پیچشی اوّل با z_1 و موقعیّت جسم متّصل به مجموعه در آخر با z_n مشخّص شده‌است.

بردار حالت در این مدل به این صورت است:

$$Z=\begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (۲-۴۹)$$

x: جابه‌جایی در جهت طولی

θ: زاویه‌ی پیچش هر المان

T: گشتاور در هر المان

F: نیرو در هر المان

1: به‌منظور مدل کردن ورودی‌های خارجی

به‌جهت تشکیل ماتریس جرمی با DT-TMM، المان جرم را در نظر گرفته و معادله‌های گشتاور و زاویه را برای دو انتهای المان، می‌نویسیم.

$$F_{i+1} - F_i = m\ddot{x} = m(A_1 x + B_1)$$

$$T_{i+1} - T_i = J\ddot{\theta} = J(A_2\theta + B_2) \qquad (۵۰-۲)$$

m: جرم هر المان

J: ممان اینرسی پیچشی هر المان

A , B: ضرایب فاکس اویلر

در نتیجه ماتریس جرم(U_{mass})، تشکیل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = U_{mass} * \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & JA_2 & 1 & 0 & JB_2 \\ mA_1 & 0 & 0 & 1 & mB_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_i \qquad (۵۱-۲)$$

به‌جهت تشکیل ماتریس سفتی پیچشی و خطّی با DT-TMM ، المان فنر مورد نظر را در نظر گرفته و معادله‌های گشتاور و زاویه را برای دو انتهای المان، می‌نویسیم.

$$T_{i+1} = T_i$$

$$\theta_{i+1} = \frac{T_i}{k} + \theta_i \qquad (۵۲-۲)$$

k: سفتی المان فنر

در نتیجه ماتریس سفتی فنر خطّی($U_{spring_{li}}$)، تشکیل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = U_{spring_{li}} * \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k_I} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_i \qquad (۵۳-۲)$$

k_I: سفتی فنر خطّی

و ماتریس سفتی فنر پیچشی($U_{spring_{ro}}$)، به‌صورت معادله‌ی(۲-۵۴) تشکیل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = U_{spring_{ro}} * \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{k_J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_i \qquad (۵۴-۲)$$

k_J: سفتی فنر پیچشی

برای المان فنر، ، ثابت فنر خطّی و پیچشی را بر اساس مشخّصات فیزیکی سیستم مورد بررسی درنظر می‌گیریم[۳۶].

$$k_{iI} = \frac{AE}{l} \quad , \quad i= 1 , 2 , \ldots, n$$

(۵۵-۲)

$$k_{1J} = \frac{2JG}{L} \quad , \quad k_{iJ} = \frac{JG}{L} , \quad i=2 , \ldots, n$$

n: تعداد المان‌های انتخابی

k_{iI}: سفتی فنر خطّی برای المان iام

k_{iJ} : سفتی فنر پیچشی برای المان iام

A: سطح مقطع المان

E: مدول یانگ

G: مدول پیچشی

حال ماتریس گشتاور اعمالی را محاسبه می‌کنیم. در صورتی‌که گشتاور اعمالی هم‌جهت با T_i باشد، داریم:

$$T_{i+1} - T_i - M = 0 \tag{۲-۵۶}$$

M: گشتاور اعمالی

ماتریس گشتاور(U_{Torque})، به این صورت تشکیل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = U_{Torque} * \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & M \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_i \tag{۲-۵۷}$$

با ضرب ماتریس‌های جرمی و سفتی المان‌ها به تعداد مورد نظر و ضرب حاصل در ماتریس گشتاور اعمالی، ماتریس کلّی سیستم(U_{sys})، تشکیل می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_n = U_{sys} * \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_1$$

$$= \begin{bmatrix} U_{sys}(1,1) & U_{sys}(1,2) & U_{sys}(1,3) & U_{sys}(1,4) & U_{sys}(1,5) \\ U_{sys}(2,1) & U_{sys}(2,2) & U_{sys}(2,3) & U_{sys}(2,4) & U_{sys}(2,5) \\ U_{sys}(3,1) & U_{sys}(3,2) & U_{sys}(3,3) & U_{sys}(3,4) & U_{sys}(3,5) \\ U_{sys}(4,1) & U_{sys}(4,2) & U_{sys}(4,3) & U_{sys}(4,4) & U_{sys}(4,5) \\ U_{sys}(5,1) & U_{sys}(5,2) & U_{sys}(5,3) & U_{sys}(5,4) & U_{sys}(5,5) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \\ T \\ F \\ 1 \end{Bmatrix}_1 \tag{۲-۵۸}$$

پس از به‌دست آمدن ماتریس سیستم، شرایط مرزی را مطابق معادله‌ی(۲-۵۹) اعمال می‌کنیم:

$$x_1=0,\ \ T_1=0\ ,\ \ \theta_n=0,\quad F_n=0 \tag{۲-۵۹}$$

با توجّه به شرایط مرزی سیستم مورد بررسی، مقادیر معلوم بردار حالت در مرزها را جای‌گذاری می‌-کنیم. مجهول‌های موجود در بردار حالت در مرزها، به‌دست می‌آیند. حال با داشتن تمام مقادیر بردار

حالت در انتهای ریسمان، با ضرب ماتریس سیستم در هر موقعیّتی، بردار حالت در آن موقعیّت‌ها به‌دست می‌آیند.

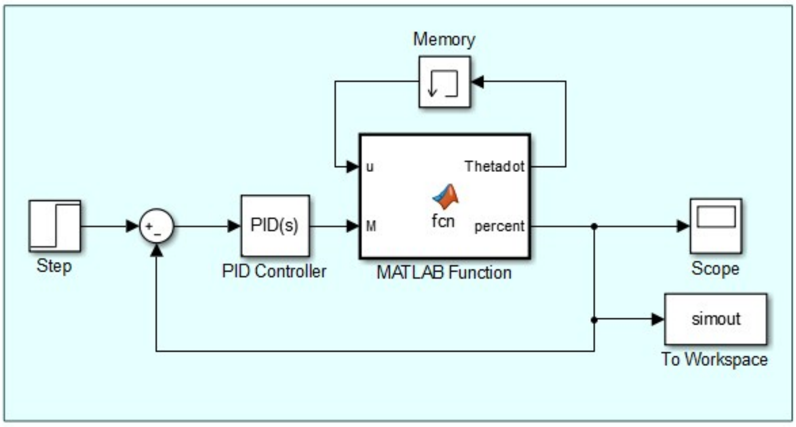
در این حالت، با استفاده از DT-TMM، زاویه‌ی دوران در هر لحظه به‌دست می‌آید. حال با استفاده از رابطه‌ی هندسی(۲-۵)، تغییر طول ریسمان قابل دست‌یابی است. در این مدل، میزان کشیدگی ریسمان با جای‌گذاری فنر خطّی در ماتریس سفتی، در نظر گرفته شده‌است و در نتیجه، عبارت $\frac{F_i}{K}$، از رابطه‌ی هندسی(۲-۵) حذف شده‌است.

۲-۶ طرّاحی کنترلر

هنگامی‌که یک انتهای ریسمان به موتور الکتریکی و انتهای دیگر آن به بار مورد نظر متّصل باشد، اعمال دوران به ریسمان از طریق موتور؛ موجب تابیده شدن ریسمان، کاهش طول ریسمان و متعاقباً جابه‌جایی بار متّصل به ریسمان از طریق نیروی کششی تولید شده، می‌شود.

برای طرّاحی یک کنترلر مناسب برای سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده، رابطه‌ی بین تغییر طول ریسمان و میزان پیچش موتور باید محاسبه شود. در این پژوهش با اعمال کنترلر PID به سیستم و تنظیم ضرایب آن، پاسخ پلّه‌ی مطلوب حاصل شد.

ورودی کنترلی در این سیستم، زاویه‌ی دورانی موتور و خروجی آن، درصد تغییر طول ریسمان است. شکل(۲-۶) دیاگرام جعبه‌ای سیستم کنترل را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۶) دیاگرام جعبه‌ای سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده با کنترلر **PID**

۲-۷ به‌دست آوردن حلّ دقیق برای مشخّصات دینامیکی یک تیر یکنواخت تابیده شده با TMM

جی دبلیو لی و جی وای لی[۳۵] حلّ دقیق فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ارتعاشات آزاد برای تیر تابیده شده را با استفاده از روش ماتریس انتقال ارائه کردند. روش پیشنهاد شده برای تیر تابیده شده، مستقل از تعداد المان‌های انتخابی است. آن‌ها به نتایج یکسانی از اعمال روش بر روی یک المان و صد المان دست یافتند. در این قسمت، نحوه‌ی عملکرد کار آن‌ها آورده شده‌است.

هدف پژوهش[۳۵]، توسعه‌ی روش ماتریس انتقال برای تحلیل مشخّصه‌های ارتعاشات آزاد یک تیر اویلر-برنولی تابیده شده است. با به‌کارگیری این روش، فرکانس‌های طبیعی دقیق و شکل مدهای یک تیر یکنواخت تابیده شده تعیین می‌شوند.

روابط مربوط به تیر تابیده شده، در پیوست آمده‌است.

۲-۷-۱ اعمال TMM بر ریسمان تابیده

از آن‌جایی که سیستم مورد بررسی در این پژوهش، ریسمانی است که از یک سو به موتور و از سوی دیگر به جرم مورد نظر متّصل است، شرایط مرزی این سیستم نیز، مانند بخش قبل، یک‌سر گیردار و یک‌سر آزاد است. با این تفاوت که سر آزاد سیستم در ابتدای ریسمان، محلّ اتّصال به موتور و سر گیردار در محلّ اتّصال به جرم است. در نتیجه، معادله‌های(A-۷۱) و (A-۷۲)، به فرم زیر تغییر می‌کنند:

$$V_{y,k-1}(x),\ V_{z,k-1}(x),\ M_{y,k-1}(x),\ M_{z,k-1}(x) = 0 \qquad (۲-۶۰)$$

$$v_{y,k}(x),\ w_{z,k}(x),\ \phi_{y,k}(x),\ \psi_{z,k}(x)=0 \qquad (۲-۶۱)$$

با جای‌گذاری معادله‌های(۲-۶۰) و (۲-۶۱)در (A-۷۰) ماتریس زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_y(x) \\ w_z(x) \\ \phi_y(x) \\ \psi_z(x) \end{Bmatrix}_{k-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۲-۶۲)$$

برای حل‌های غیربدیهی، دترمینان ماتریس ضرایب معادله‌ی(۲-۶۲)، باید برابر صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad (۲-۶۳)$$

مقادیری از ω که منجر به برقراری معادله‌ی(۲-۶۳)می‌شوند، فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند. برای تعیین شکل مدهای ارتعاشی، نیاز به داشتن مقادیر ثابت معادله‌ی(A-۲۷) است. این مقادیر ثابت، از طریق بردار حالت معادله‌ی(A-۷۰)، قابل محاسبه است. می‌دانیم که در سرآزاد، چهار مقدار نیرویی$\left(V_{y,k-1}(x),\ V_{z,k-1}(x),\ M_{y,k-1}(x),\ M_{z,k-1}(x)\right)$ برابر صفر هستند. امّا، چهار مقدار جابه‌جایی$\left(v_{y,k-1}(x),\ w_{z,k-1}(x),\ \phi_{y,k-1}(x),\ \psi_{z,k-1}(x)\right)$، نامشخّص‌اند. برای تعیین این جابه‌جایی‌ها،

$w_{z\,,\,k\text{-}1}(x)$ را برابر مقدار یک، فرض می‌کنیم. در نتیجه، معادله‌ی(۲-۶۲)، به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{Bmatrix} v_y(x) \\ \phi_y(x) \\ \psi_z(x) \end{Bmatrix}_{k\text{-}1} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{33} & T_{34} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -T_{12} \\ -T_{22} \\ -T_{32} \end{Bmatrix} \qquad (۲\text{-}۶۴)$$

بردار حالت $\{Z\}_{k\text{-}1}$ در سر گیردار با استفاده از معادله‌ی(۲-۶۴)، به این صورت تشکیل می‌شود:

$$\{Z\}_{k-1} = \left[v_y\,(\,x\,)\,, w_z\,(\,x\,)\,, \phi_y\,(\,x\,)\,, \psi_z\,(\,x\,)\,, 0\,, 0\,, 0\,, 0\,\right]^T \qquad (۲\text{-}۶۵)$$

حال، مقادیر ثابت A_j، با جای‌گذاری معادله‌ی(۲-۶۵) در معادله‌ی(A-۵۷)، محاسبه می‌شوند.

جابه‌جایی‌های $w_z(x)$ و $v_y(x)$ با جای‌گذاری مقادیر ثابت A_j در معادله‌های(A-۲۷) و(A-۳۱)، به‌دست می‌آیند. در نتیجه در هر x دلخواهی می‌توان شکل مدهای سیستم را با توّجه به فرکانس‌های طبیعی به‌دست آورد.

۳- فصل سوّم: نتایج

۳-۱ مقدّمه

در این فصل ابتدا نتایج حاصل از مدل اوّل، با نتایج حاصل از پژوهش‌های پیشین آزمایشگاهی مقایسه می‌شود. همین مقایسه بر روی مدل دوّم نیز ارائه و سپس نتایج دو مدل با هم مقایسه می‌شوند. هم‌چنین پاسخ پلّه‌ی سیستم کنترلی مورد بررسی ارائه می‌شود.

نتایج حاصل از بررسی تیر تابیده شده برای اعتبارسنجی کد نوشته شده در نرم‌افزار متلب با پژوهش انجام شده‌ی مرتبط مقایسه می‌شود. سپس روش مذکور بر روی ریسمان تابیده شده اعمال شده و فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای آن به‌دست می‌آید. در ادامه تأثیر طول، شعاع و جنس ریسمان بر فرکانس‌های طبیعی بررسی شده‌است.

مشخّصات فیزیکی ریسمان مورد بحث، به‌جهت مقایسه با نتایج آزمایشگاهی پژوهش انجام شده در سال ۲۰۱۲[۱]، مانند آن در نظر گرفته شده‌است. در جدول(۳-۱) این مشخّصات آورده شده‌است.

جدول(۳-۱) مشخّصات فیزیکی

جنس	پلی‌اتین با مدول بالا
مدول یانگ (E)	
ضریب پواسون (ν)	0.3
طول ریسمان (L)	0.260 m
شعاع ریسمان (r)	$0.19*10^{-3}$m
گشتاور اعمال(τ_L)	$3.94*10^{-3}$Nm

۳-۲ نتایج مدل اوّل

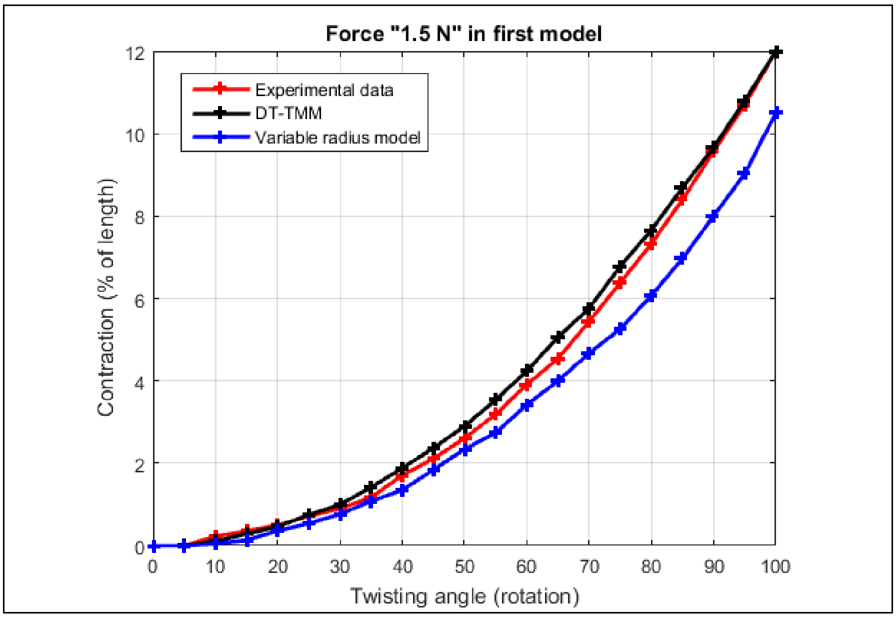
۳-۲-۱ نیروی ۱.۵N

مقایسه‌ی مدل اوّل با نتایج آزمایشگاهی و هم‌چنین مدل شعاع متغیّر در شکل(۳-۱) ارائه شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، منحنی حاصل از DT-TMM، به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر است. با مقایسه‌ی خطای حاصل از DT-TMM و مدل شعاع متغیّر در شکل(۳-۲) نیز، به روشنی مشهود است که DT-TMM به‌جز در دو نقطه، در تمامی نقاط، دارای خطای کمتری است. خطای بررسی شده، به صورت معادله‌ی است.

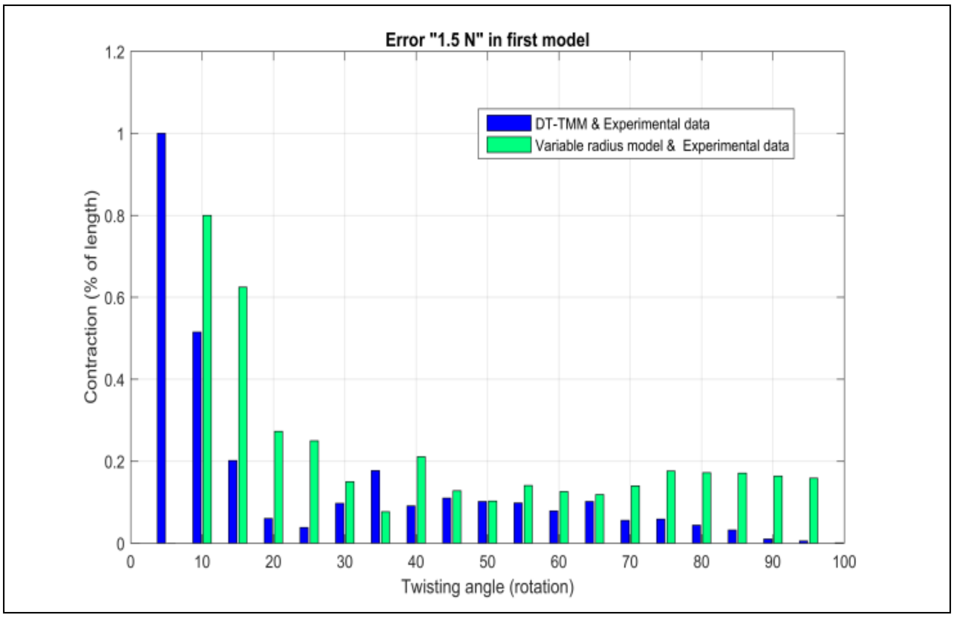
$$E = \frac{|\%X - \%\bar{X}|}{\max(\%X\,,\,\%\bar{X})} \qquad (۳-۱)$$

$\%\bar{X}$: درصد تغییر طول حاصل از پژوهش آزمایشگاهی

$\%X$: درصد تغییر طول حاصل از روش ماتریس انتقال و یا روش شعاع متغیّر



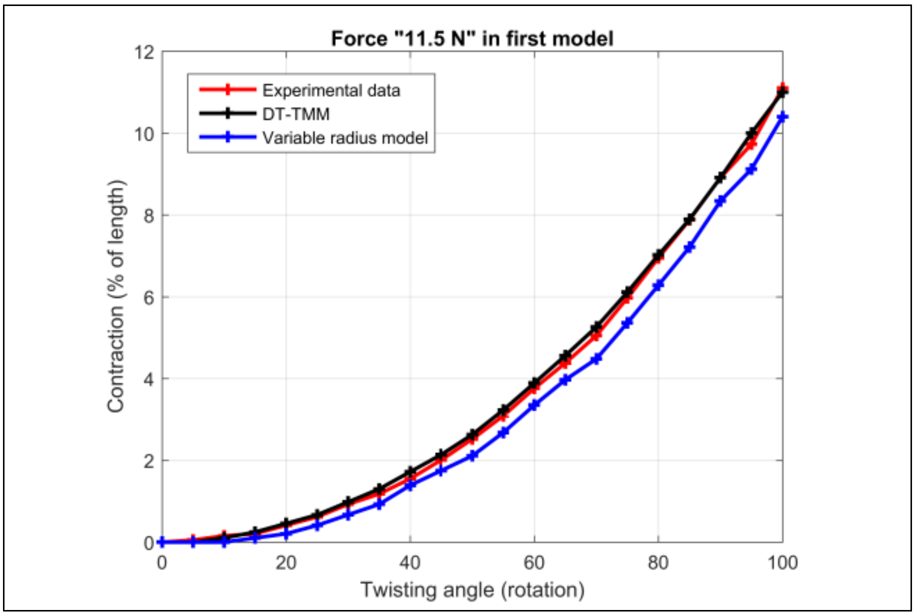
شکل(۳-۱) نیروی N ۱.۵ مدل اوّل



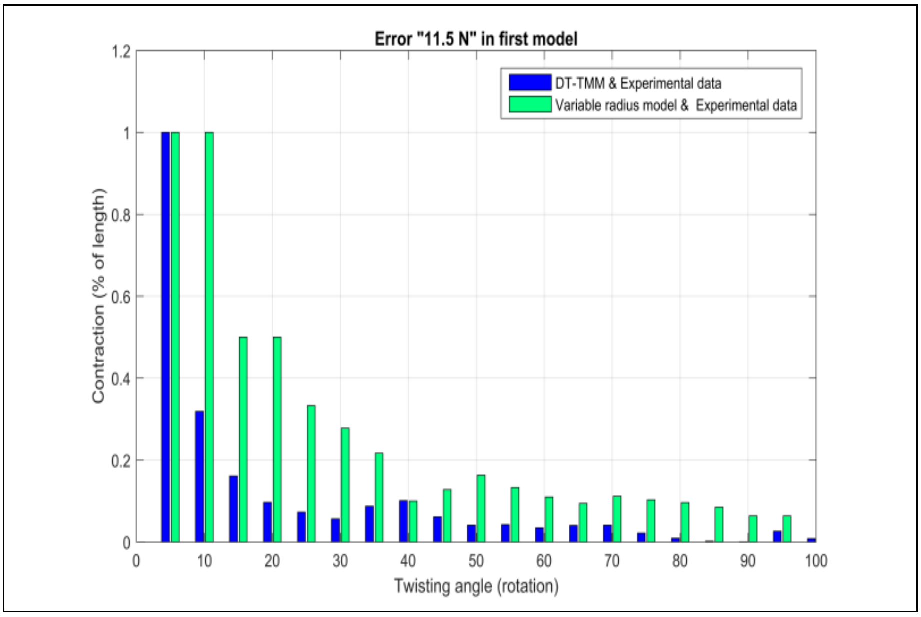
شکل(۳-۲) خطای نیروی N ۱.۵ مدل اوّل

۳-۲-۲ نیروی N ۱۱.۵

مقایسه‌ی مدل اوّل با نتایج آزمایشگاهی و هم‌چنین مدل شعاع متغیّر در شکل(۳-۳) ارائه شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، منحنی حاصل از DT-TMM، به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر است. با مقایسه‌ی خطای حاصل از DT-TMM و مدل شعاع متغیّر در شکل(۳-۴) نیز، به روشنی مشهود است که DT-TMM در تمامی نقاط، دارای خطای کمتری است. با مقایسه‌ی نتایج حاصل از اعمال دو نیروی مختلف، مشاهده می‌شود که با افزایش نیروی اعمالی، DT-TMM به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر شده‌است.



شکل(۳-۳) نیروی N ۱۱.۵ مدل اوّل

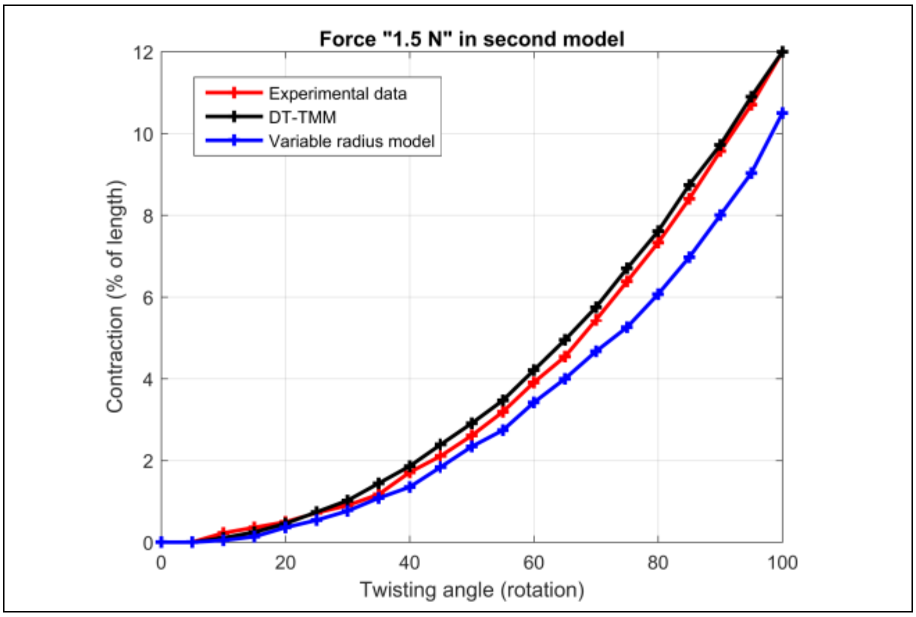


شکل(۳-۴) خطای نیروی N ۱۱.۵ مدل اوّل

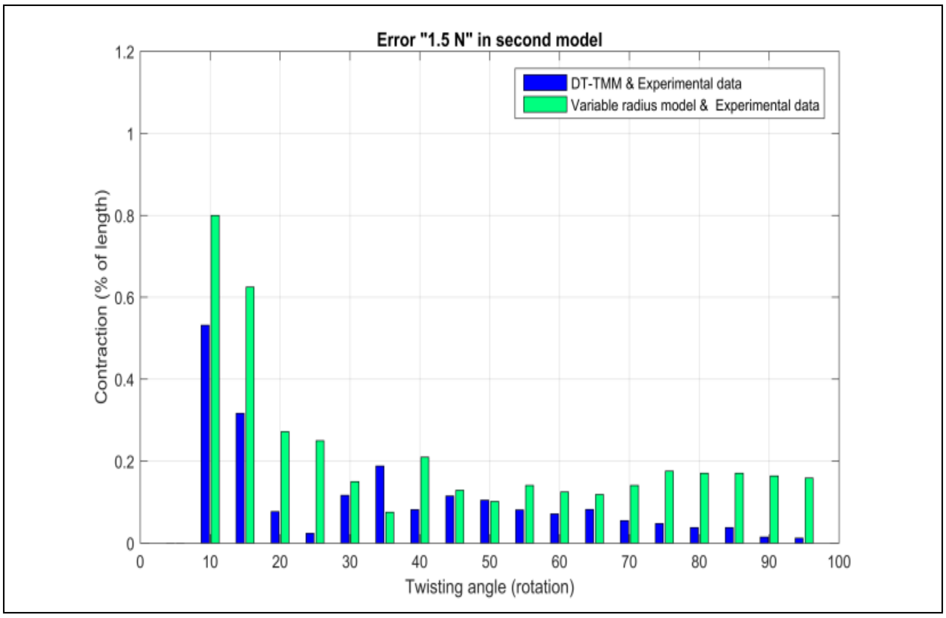
۳-۳ نتایج مدل دوّم

۳-۳-۱ نیروی 1.5 N

مقایسه‌ی مدل دوّم با نتایج آزمایشگاهی و هم‌چنین مدل شعاع متغیّر در شکل(۳-۵) ارائه شده‌است. منحنی حاصل از DT-TMM، به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر است. با توجّه به شکل(۳-۶)، مشاهده می‌شود که اعمال DT-TMMبه‌جز در یک نقطه، در تمامی نقاط، خطای کمتری نسبت به مدل شعاع متغیّر دارد.



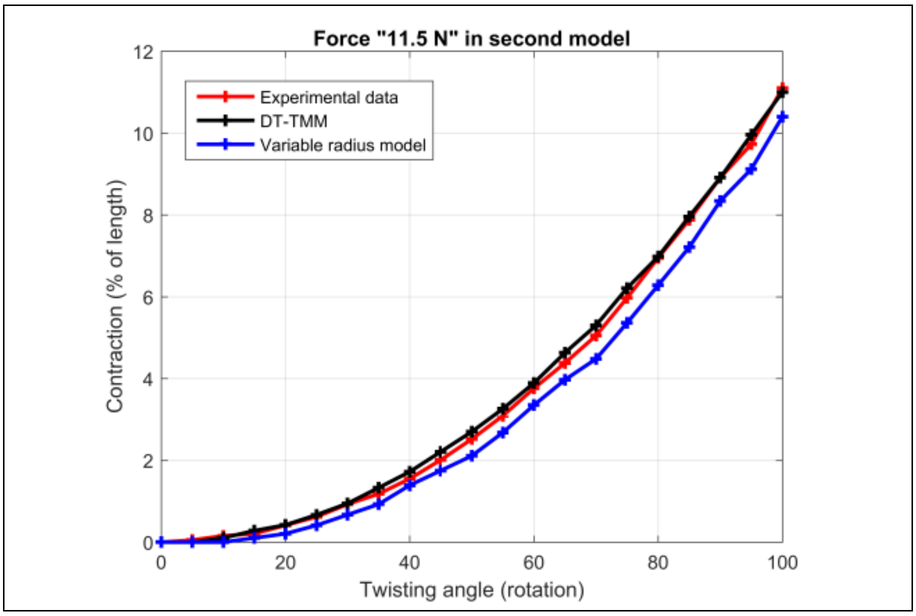
شکل(۳-۵) نیروی 1.5 N مدل دوّم



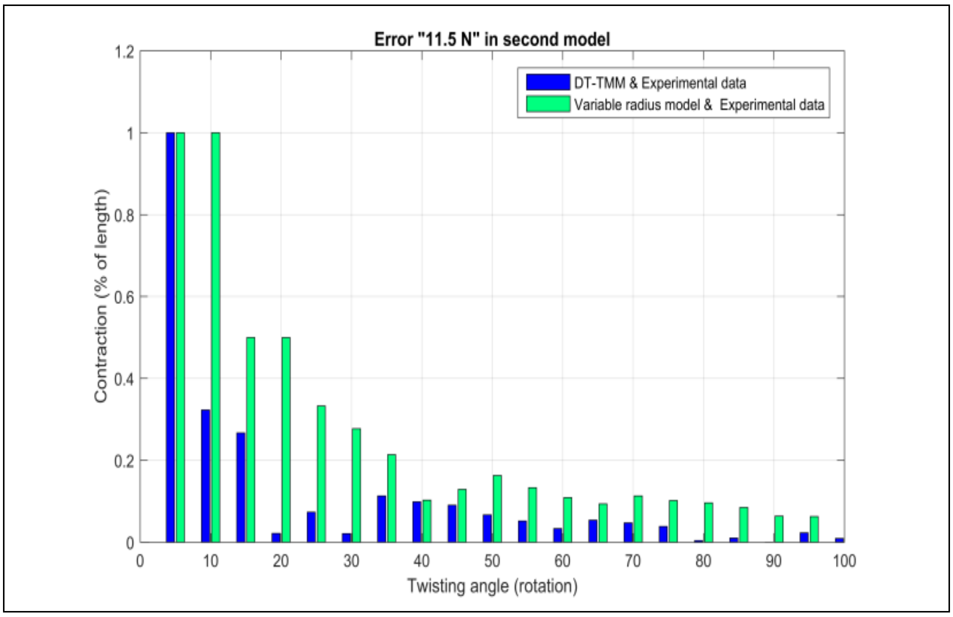
شکل(۳-۶) خطای نیروی N ۱.۵ مدل دوّم

۳-۳-۲ نیروی N ۱۱.۵

مقایسه‌ی مدل دوّم با نتایج آزمایشگاهی و هم‌چنین مدل شعاع متغیّر در شکل(۳-۷) ارائه شده‌است. مشاهده می‌شود که با تغییر میزان نیروی اعمالی بر ریسمان، هم‌چنان منحنی حاصل از DT-TMM، به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر است. افزایش نیرو موجب شده است تا نمودار به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر شود. مقایسه‌ی خطای حاصل از DT-TMM و مدل شعاع متغیّر در شکل(۳-۸) نشان می‌دهد که DT-TMM در تمامی نقاط، دارای خطای کمتری است.



شکل(۳-۷) نیروی N ۱۱.۵ مدل دوّم



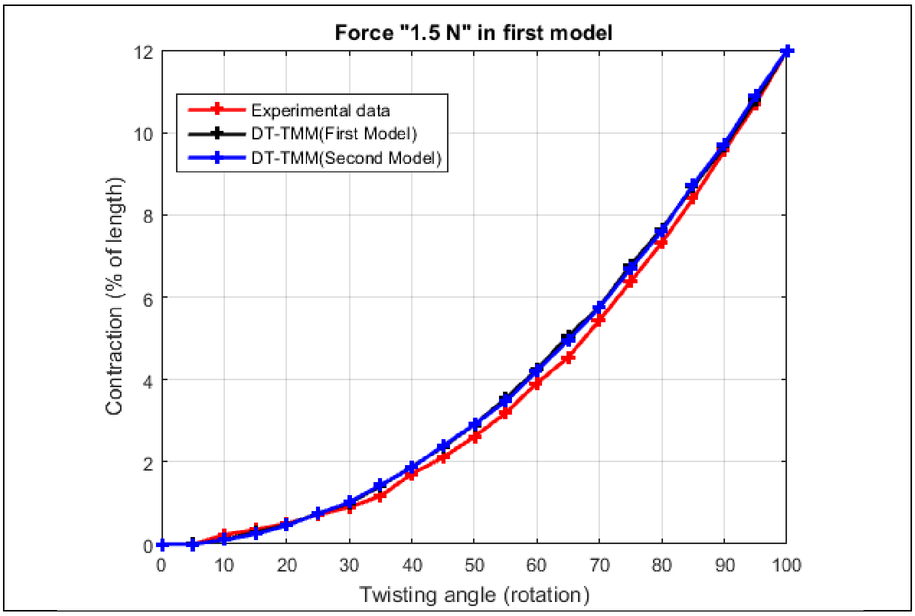
شکل(۳-۸) خطای نیروی N ۱۱.۵ مدل دوّم

۳-۴ مقایسه‌ی اختلاف دو مدل

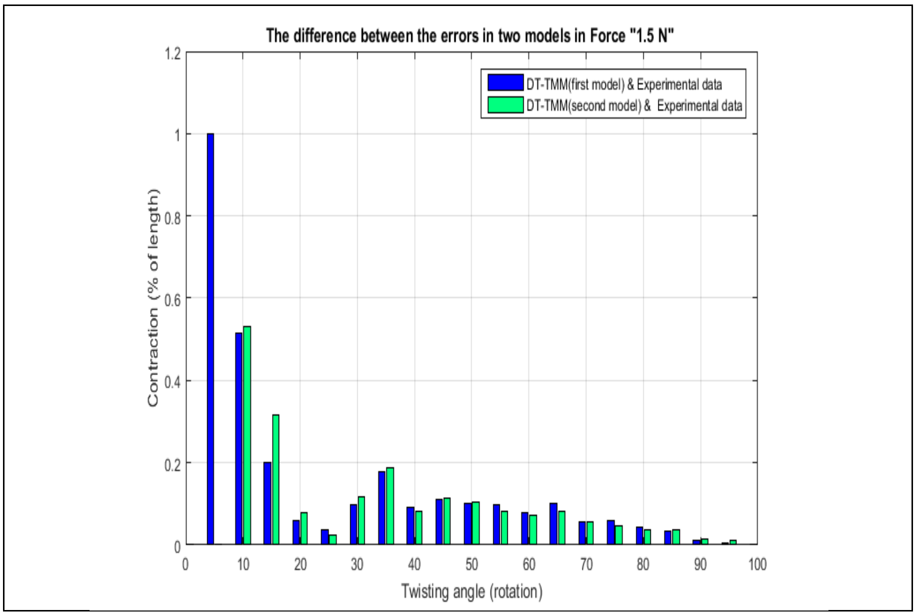
در شکل(۳-۹)، مقایسه‌ای بین دو مدل برای نیروی ۱.۵ نیوتن و در شکل(۳-۱۱)، برای نیروی ۱۱.۵ نیوتن با نتایج آزمایشگاهی صورت گرفته‌است. همچنین مقایسه‌ی خطاهای این دو مدل برای دو نیروی مورد نظر در شکل(۳-۱۰) و شکل(۳-۱۲) آمده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج دو

مدل بسیار به هم نزدیکند. از مقایسه‌ی دو مدل، می‌توان دریافت که اعمال اثر کشیدگی با استفاده از ضریب سفتی حاصل از نتایج آزمایشگاهی و هم‌چنین با استفاده از المان‌های فنر خطّی متناسب با جنس ریسمان اثر تقریباً یکسانی دارند.

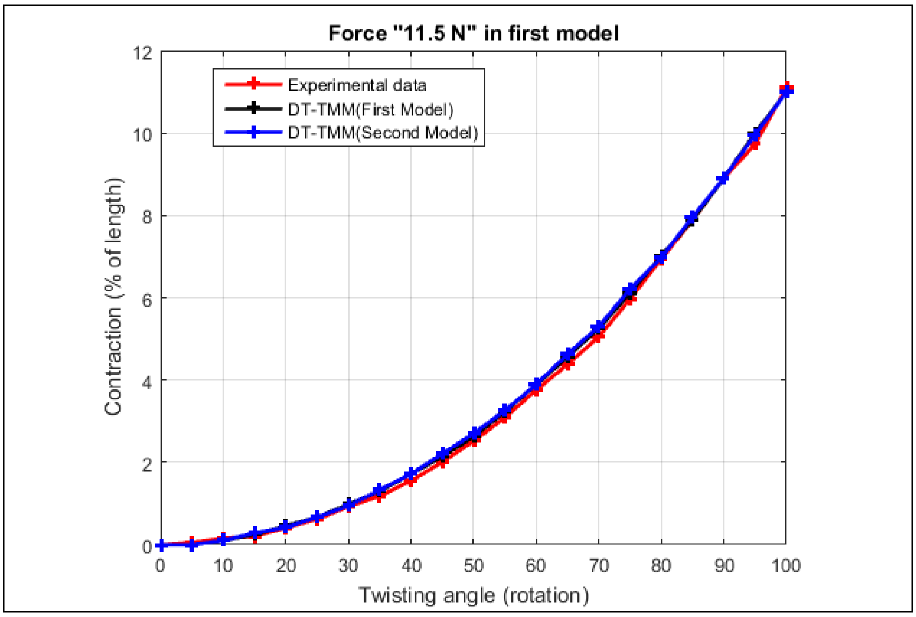
از آن‌جا که در مدل اوّل، برای اعمال اثر کشیدگی، میزان سفتی با انجام آزمایش بر روی ریسمان محاسبه شده‌است و در مدل دوّم این اثر با استفاده از فنرهای خطّی اعمال شده‌است که سفتی این فنرها با توجّه به جنس ریسمان انتخاب شده‌اند، روش دوّم هزینه‌های ناشی از آزمایش به‌جهت محاسبه‌ی سفتی را ندارد.



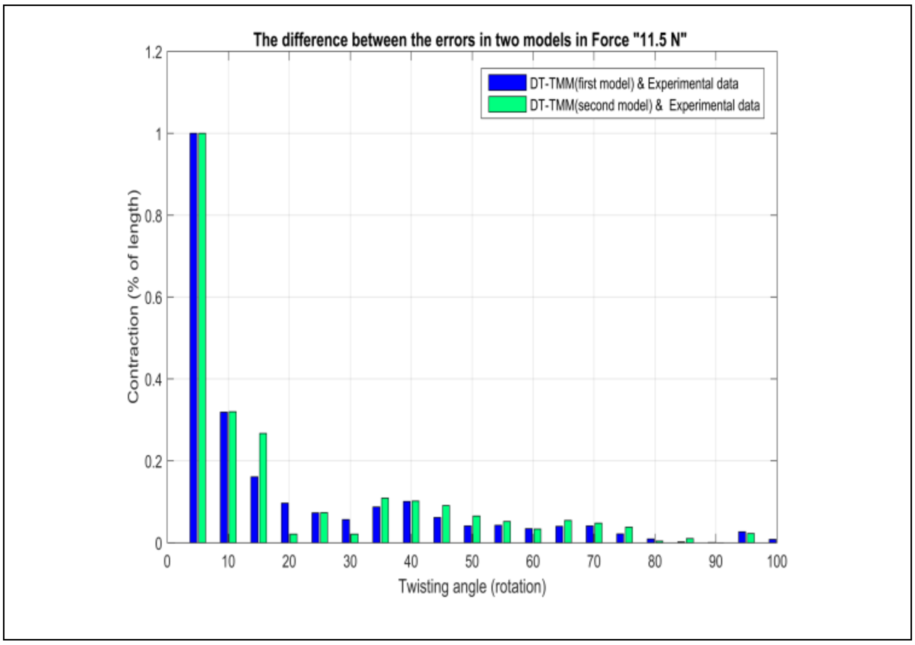
شکل(۳-۹) مقایسه‌ی دو مدل در نیروی N ۱.۵



شکل(۳-۱۰) اختلاف دو مدل در نیروی N ۱.۵



شکل(۳-۱۱) مقایسه‌ی دو مدل در نیروی N ۱۱.۵



شکل(۳-۱۲) اختلاف دو مدل در نیروی N ۱۱.۵

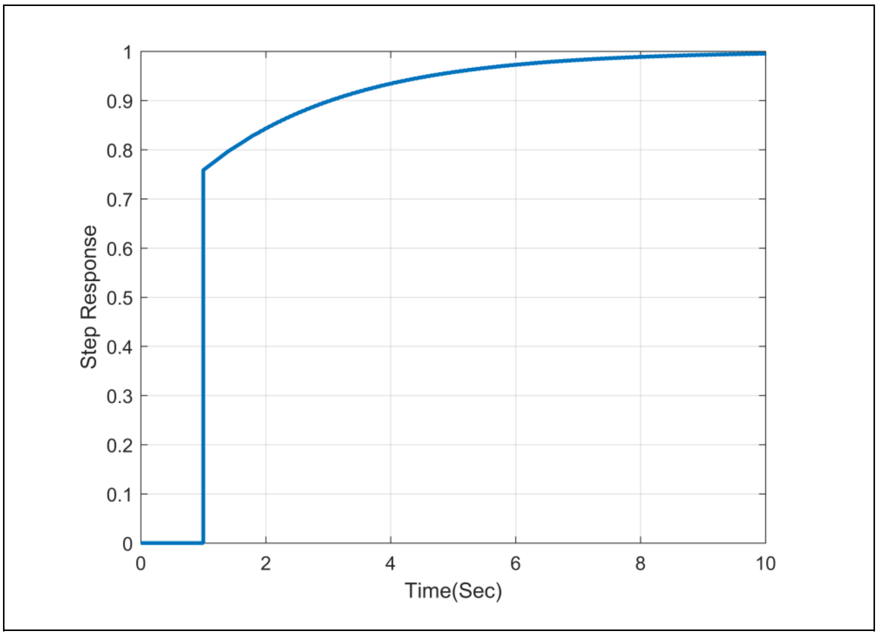
۳-۵ نتایج طرّاحی کنترلر

پس از طرّاحی کنترلر، پارامترهای کنترلی به‌صورت جدول(۳-۲) حاصل شد.

جدول(۳-۲) پارامترهای کنترلی

Proportional (P)	0.1
Integral (I)	0.5
Derivative (D)	0
Filter coefficient	100

پاسخ پلّه‌ی سیستم کنترلی نیز به‌صورت شکل(۳-۱۳) به‌دست آمد.



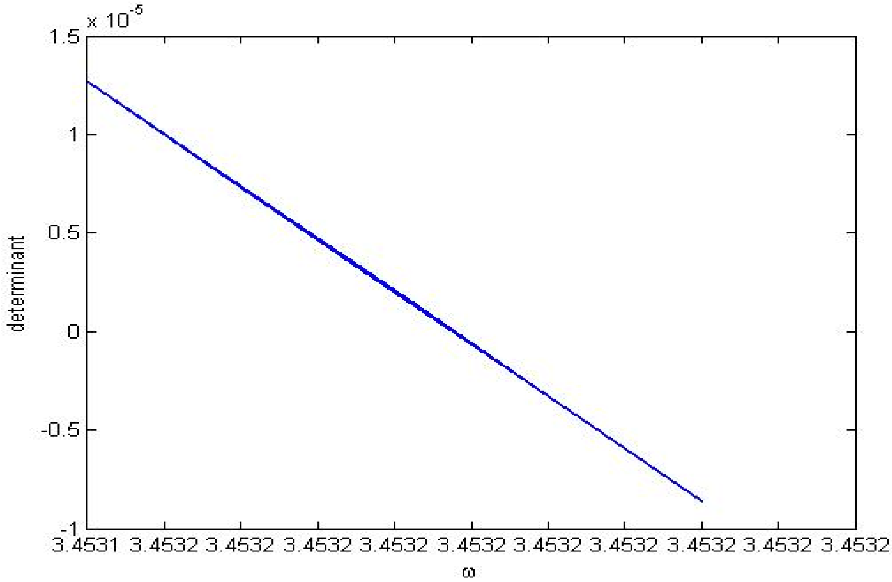
شکل(۳-۱۳) پاسخ پلّه‌ی کنترلر PID

۳-۶ نتایج فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای تیر تابیده شده

به‌منظور اعتبارسنجی نتایج حاصل از نرم‌افزار متلب با پژوهش انجام شده‌ی مرتبط، فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده در متلب با آن پژوهش مقایسه شده‌است. نمودار تغییر دترمینان نسبت به فرکانس ورودی برای دو زاویه‌ی بررسی شده در آن پژوهش به‌جهت به‌دست آوردن فرکانس طبیعی آورده شده‌است. فرکانس‌های متناظر با نقاطی از نمودار که در آن نقاط، دترمینان برابر صفر شده، فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند. این بررسی برای دو زاویه‌ی $\beta = ۰°, ۴۰°$ انجام شده‌است. پنج فرکانس طبیعی اوّل برای این دو زاویه به‌دست آمده‌است. برای نمونه شکل(۳-۱۴)، محدوده‌ی فرکانس طبیعی اوّل برای $\beta = ۰°$ را نشان می‌دهد. جدول(۳-۳) مشخّصات فیزیکی تیر مورد بررسی و جدول(۳-۴) مقادیر پنج فرکانس طبیعی اوّل تحت این دو زاویه را نشان می‌دهند که دقیقاً با نتایج[۳۵] مطابقت دارند.

جدول(۳-۳) مشخّصات فیزیکی تیر تابیده شده

طول تیر(L)	
جرم تیر(m)	۳۴.۴۷ kg/m
سفتی خمشی در صفحه‌ی $(EI_{yy})xy$	۲۸۶۹.۷ Nm^2
سفتی خمشی در صفحه‌ی $(EI_{zz})yz$	۵۷۳۹۳ Nm^2

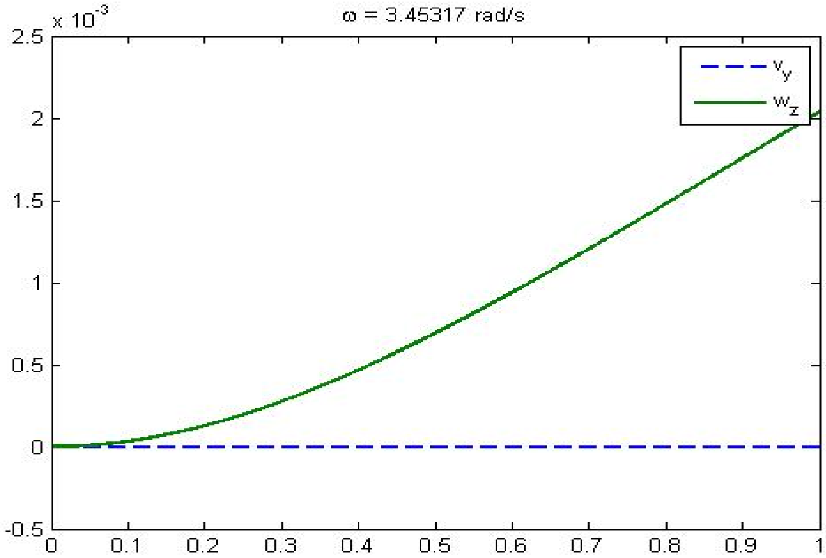


شکل(۳-۱۴) محدوده‌ی فرکانس طبیعی اوّل برای $\beta = ۰°$

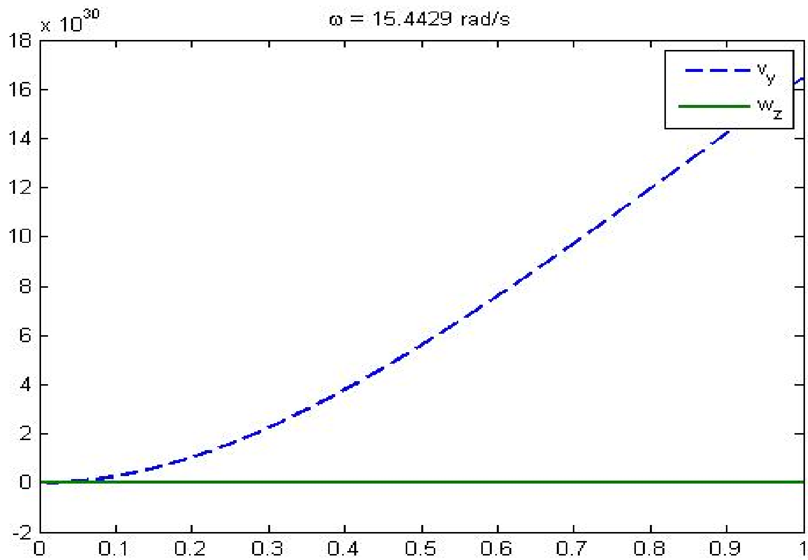
جدول(۳-۴) پنج فرکانس طبیعی اوّل تیر تابیده شده ((ω(rad/s))

	$\beta = ۰°$	$\beta = ۴۰°$
۱	۳.۴۵۳۱۷	۳.۴۷۱۸۶
۲	۱۵.۴۴۲۹	۱۳.۳۴۱۵
۳	۲۱.۶۴۰۷	۲۵.۱۶۷۱
۴	۶۰.۵۹۴۵	۵۶.۳۶۸۳
۵	۹۶.۷۷۹۲	۱۰۳.۲۶۳

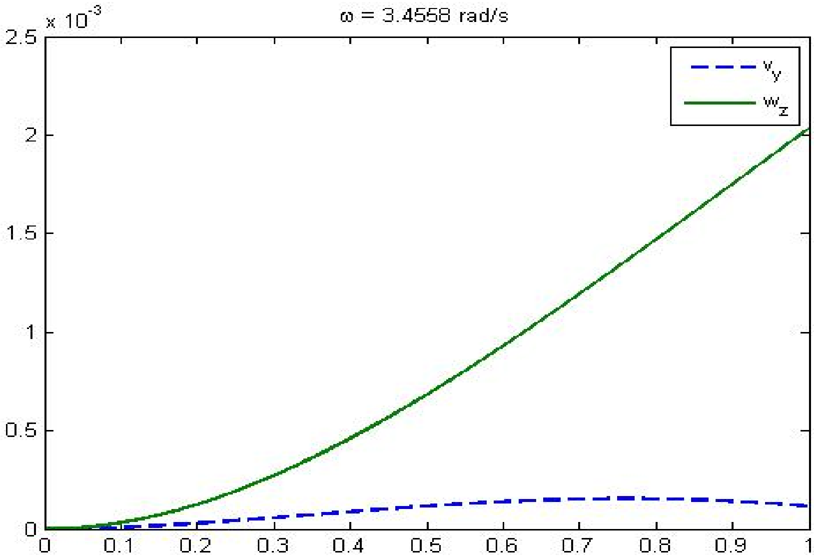
دو شکل مد اوّل برای زاویه‌های °۴۰ ,°۳۰ ,°۱۵ ,°۰ = β در شکل‌های(۳-۱۵)- (۳-۲۲) آمده‌است که با نمودارهای پژوهش انجام شده مطابقت دارد.



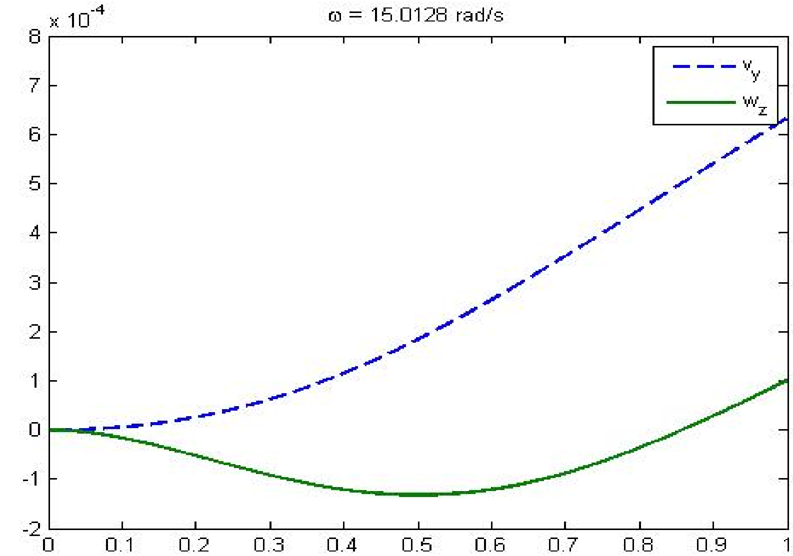
شکل(۳-۱۵) شکل مد اوّل در °۰ = β



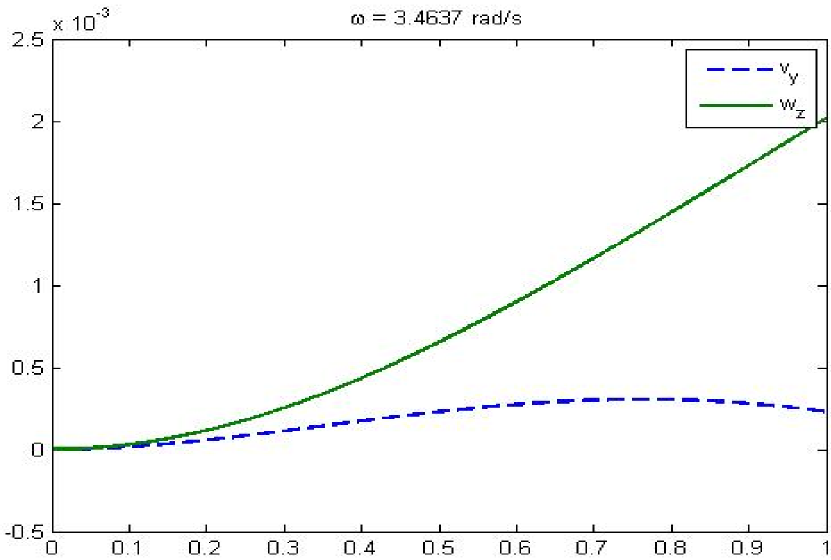
شکل(۳-۱۶) شکل مد دوّم در °۰ = β



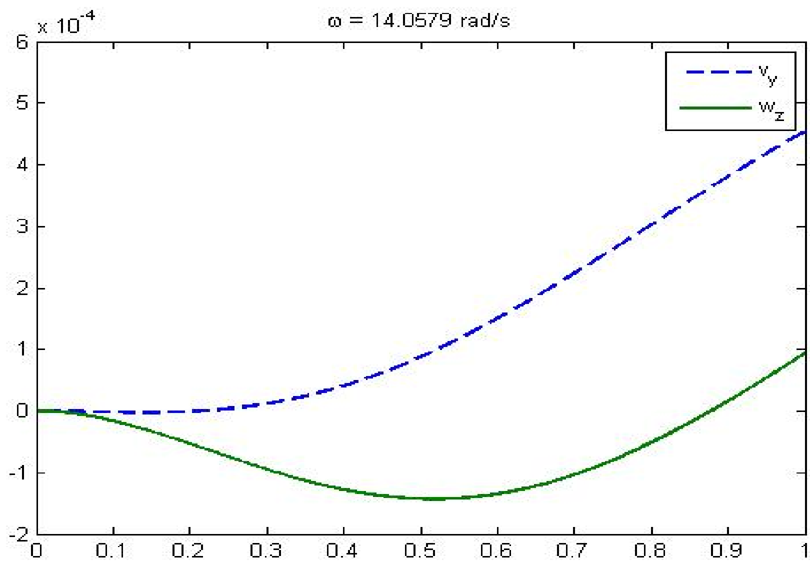
شکل(۳-۱۷) شکل مد اوّل در $\beta = 15^\circ$



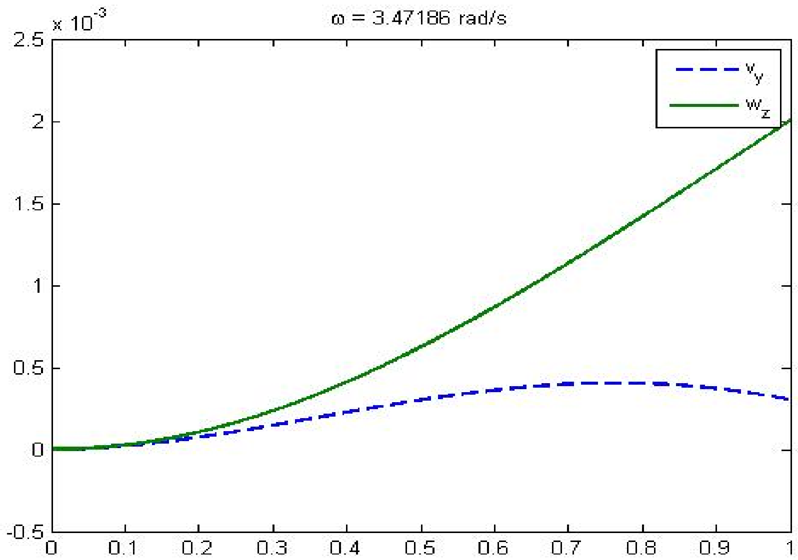
شکل(۳-۱۸) شکل مد دوّم در $\beta = 15^\circ$



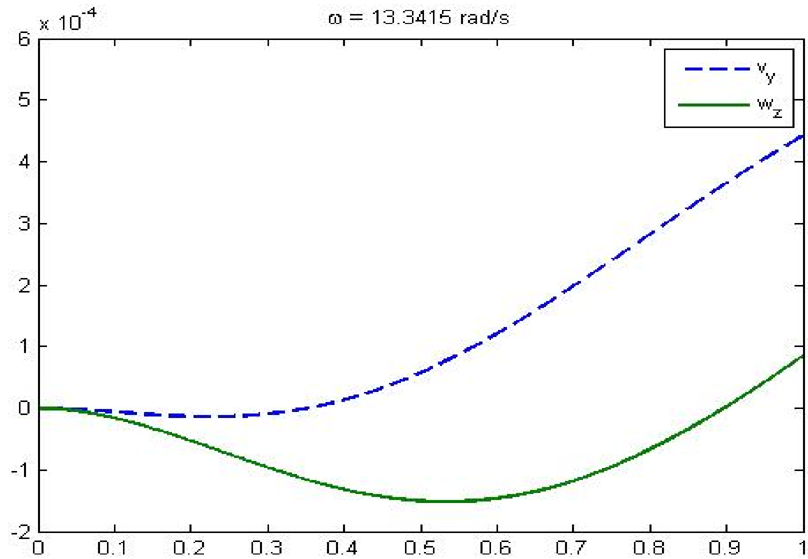
شکل(۳-۱۹) شکل مد اوّل در $\beta = ۳۰^\circ$



شکل(۳-۲۰) شکل مد دوّم در $\beta = ۳۰^\circ$



شکل(۳-۲۱) شکل مد اوّل در $\beta = ۴۰^\circ$



شکل(۳-۲۲) شکل مد دوّم در $\beta = ۴۰^\circ$

۳-۷ نتایج بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ریسمان تابیده شده

در این پژوهش، یک روش تحلیلی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی ریسمان ارائه شده‌است. استفاده از روش اجزاء محدود در تحلیل ارتعاشات آزاد می‌تواند حجم محاسبات را به شکل قابل توجّهی افزایش دهد. در این پژوهش برای کاهش حجم محاسبات، از روش ماتریس انتقال استفاده شده‌است.

۳-۷-۱ فرکانس‌های طبیعی

در این بخش، فرکانس‌های طبیعی ریسمان تابیده شده برای چند زاویه‌ی خاص محاسبه شده‌است. در جدول(۳-۵) مقادیر پنج فرکانس اوّل برای زاویه‌های پیچش $\beta = \frac{\pi}{۴}$, ۱۰π , ۲۰۰π آمده‌است. مشخّصات فیزیکی ریسمان، مطابق جدول(۳-۱) است. محدوده‌ی مورد بررسی برای پیچش در محدوده‌ی امن پژوهش انجام شده در سال ۲۰۱۲ [۱]، انتخاب شده‌است.

جدول(۳-۵) پنج فرکانس طبیعی اوّل ($\omega(\frac{rad}{s})$)

β	اوّل	دوّم	سوّم	چهارم	پنجم
$\frac{\pi}{۴}$	۷.۹۵۳۶	۴۹.۸۴۴۱	۱۳۹.۵۶۵۰	۲۷۳.۴۹۱۷	۴۵۲.۱۰۱۴
۱۰π	۷.۹۵۳۶	۴۹.۸۴۴۱	۱۳۹.۵۶۵۰	۲۷۳.۴۹۱۷	۴۵۲.۱۰۱۴
۲۰۰π	۷.۹۵۳۶	۴۹.۸۴۴۱	۱۳۹.۵۶۵۰	۲۷۳.۴۹۱۷	۴۵۲.۱۰۱۴

۳-۷-۲ شکل مدهای متناظر با فرکانس‌های طبیعی

فرکانس‌های طبیعی یک سازه فرکانس ذات سیستم هستند که به سختی و جرم سیستم مربوط می-شود.به عنوان مثال سیم‌های یک پیانو، طوری تنظیم شده‌اند که با یک فرکانس خاص نوسان نمایند. شکل سازه در یک فرکانس طبیعی خاص را شکل مد سازه می‌نامند. تحلیل مدهای طبیعی را گاهی

تحلیل مقادیر ویژه نیز می‌نامند.محاسبه مدهای ویژه یک سیستم پایه‌ای برای درک مشخّصات دینامیکی یک سازه می‌باشد.تحلیل مدهای ویژه به دلایل زیادی می‌باشد:

- تخمین اثر متقابل بین یک قطعه(مثل یک ماشین دورانی) و پایه‌ی نگهدارنده‌ی آن. اگر فرکانس طبیعی پایه‌ی نگهدارنده نزدیک فرکانس کاری ماشین در حال کار باشد،آن‌گاه نیروهای دینامیکی مزاحم بسیار خواهند شد.

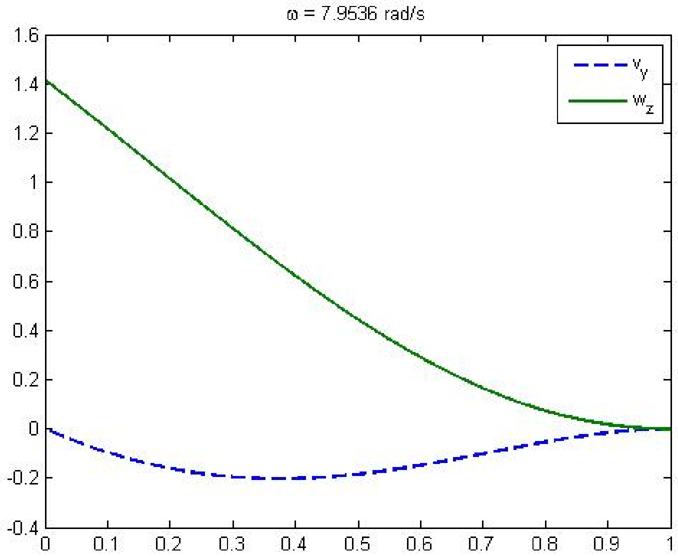
- تخمین مشخّصات دینامیکی در اثر تغییر پارامترهای طرّاحی

- استفاده از مدهای طبیعی در تحلیل ارتعاشات اجباری

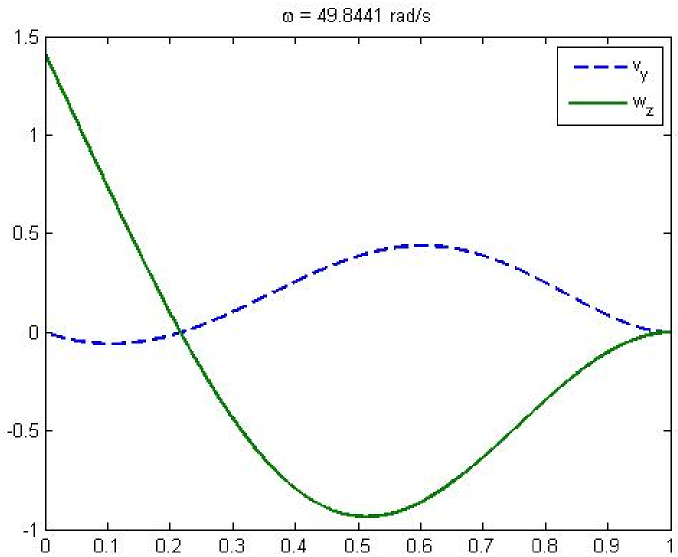
- استفاده از فرکانس‌های طبیعی به‌عنوان یک راهنما برای انتخاب زمان‌ها و فرکانس‌های مناسب در تحلیل‌های گذرا و فرکانسی

برای هر مقدار ویژه یا فرکانس طبیعی، یک بردار ویژه یا شکل مد موجود می‌باشد.در یک سیستم بدون میرا کننده، مدهای ویژه از حلّ ارتعاش آزاد به‌دست می‌آیند.

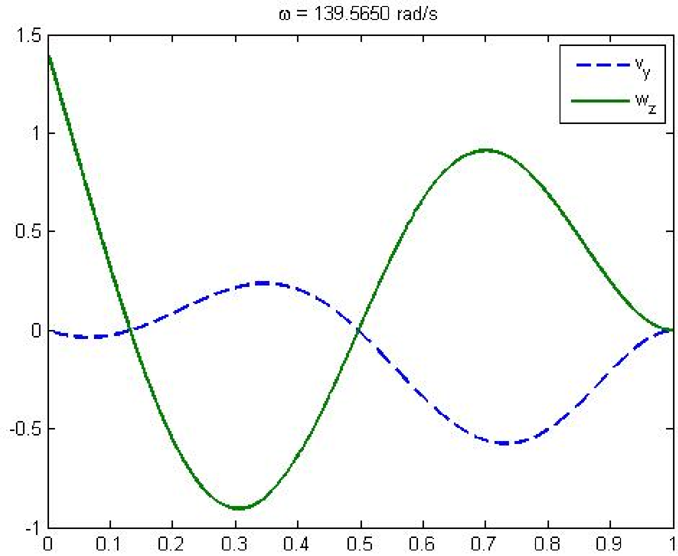
در این بخش، شکل مدهای متناظر با فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده نسبت به واحد طول ریسمان، نشان داده شده‌است.



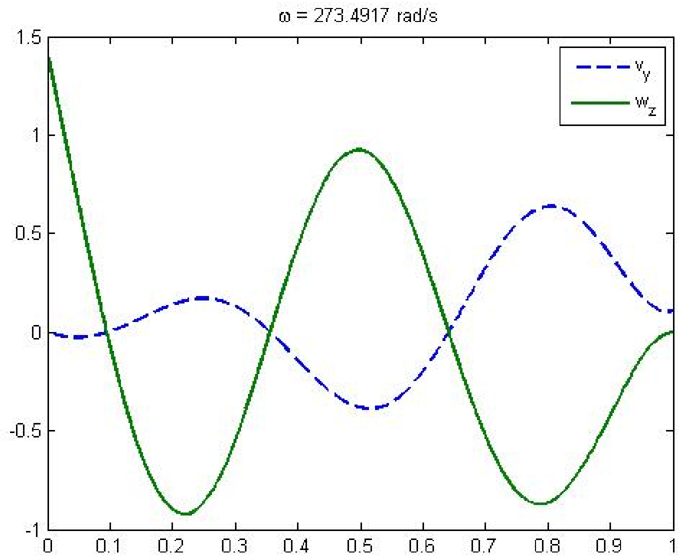
شکل(۳-۲۳) شکل مد اوّل در $\beta = \frac{\pi}{۴}$



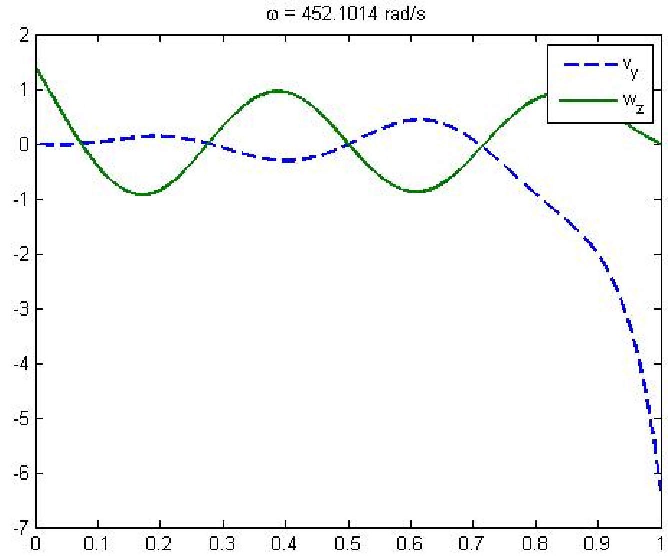
شکل(۳-۲۴) شکل مد دوّم در $\beta = \frac{\pi}{۴}$



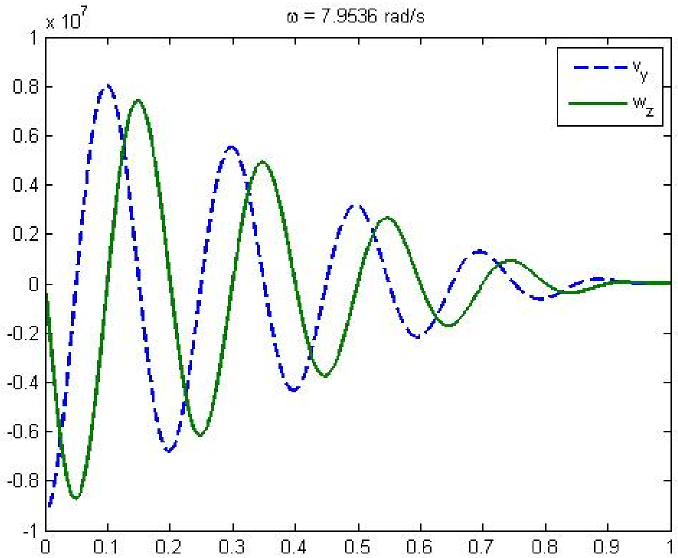
شکل(۳-۲۵) شکل مد سوّم در $\beta = \frac{\pi}{۴}$



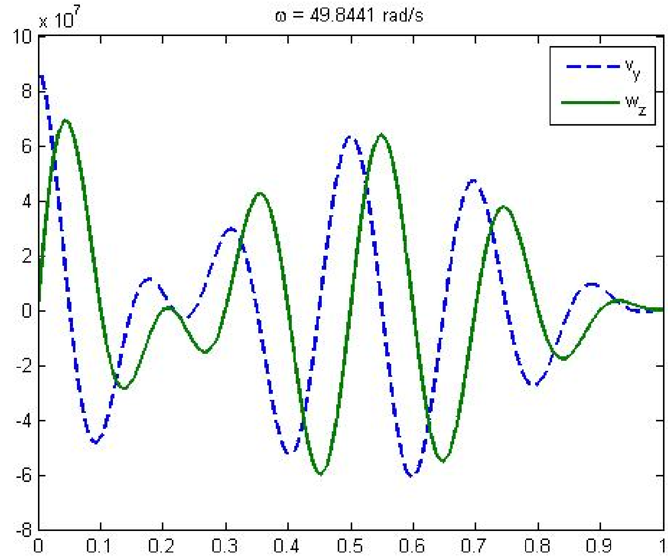
شکل(۳-۲۶) شکل مد چهارم در $\beta = \frac{\pi}{۴}$



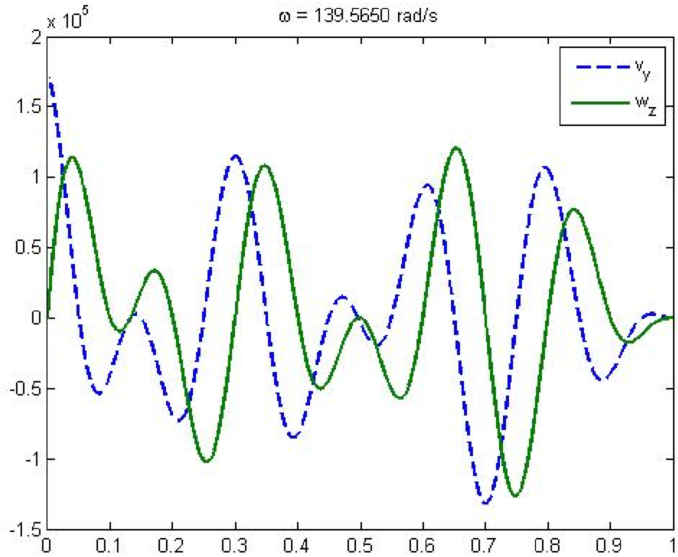
شکل(۳-۲۷) شکل مد پنجم در $\beta = \frac{\pi}{۴}$



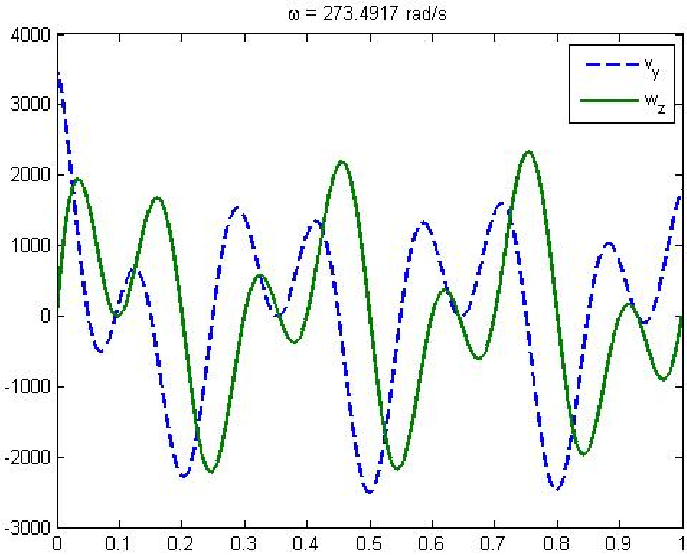
شکل(۳-۲۸) شکل مد اوّل در $\beta =۱۰\pi$



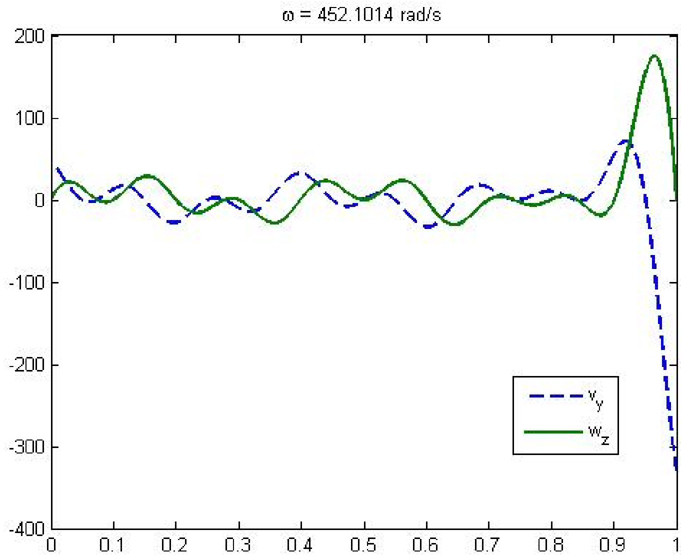
شکل(۳-۲۹) شکل مد دوّم در $\beta = 10\pi$



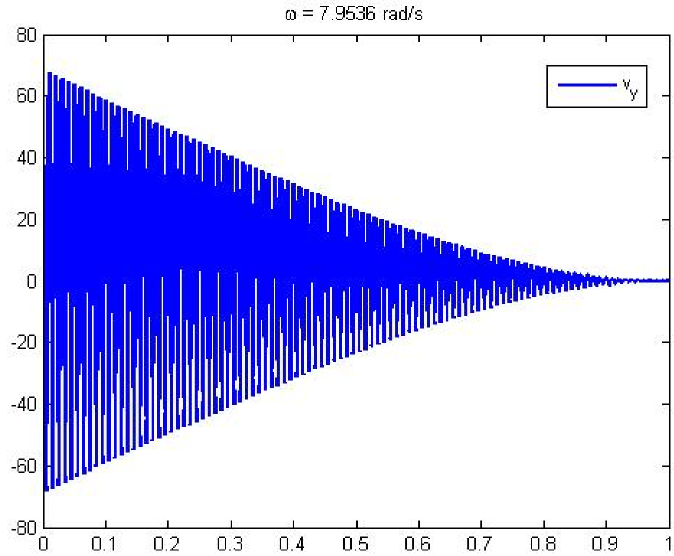
شکل(۳-۳۰) شکل مد سوّم در $\beta = 10\pi$



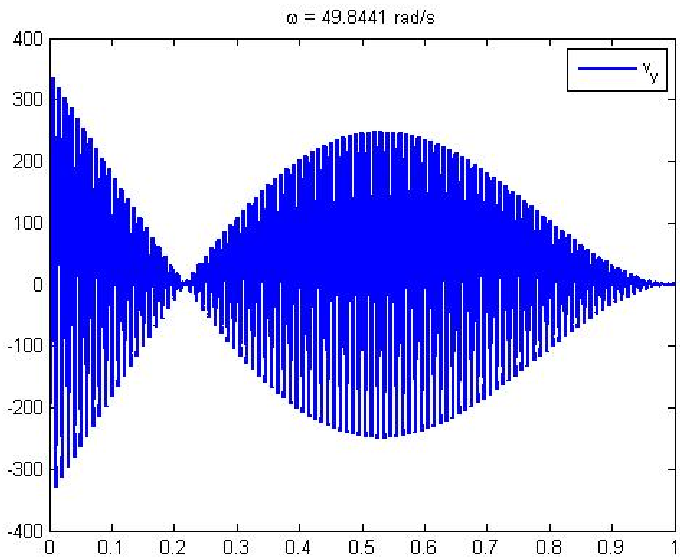
شکل(۳-۳۱) شکل مد چهارم در $\beta = 10\pi$



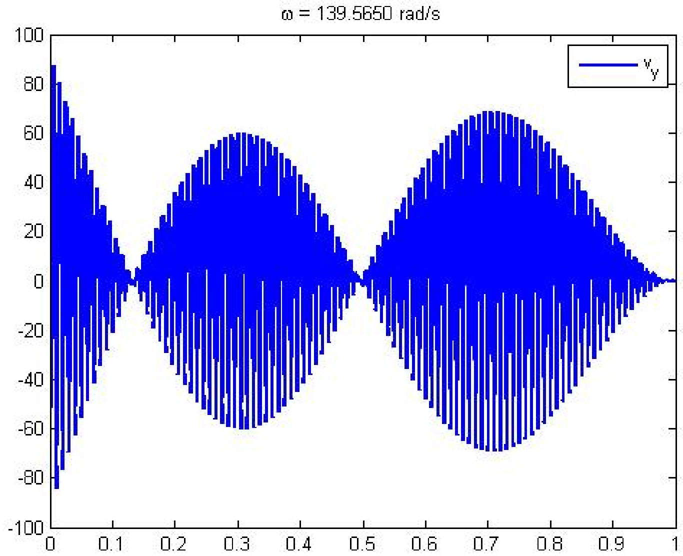
شکل(۳-۳۲) شکل مد پنجم در $\beta = 10\pi$



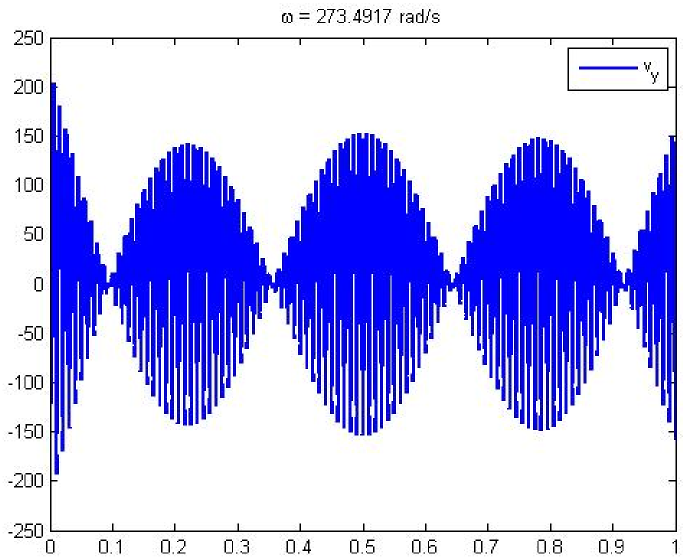
شکل(۳-۳۳) شکل مد اوّل در جهت y در β =۲۰۰π



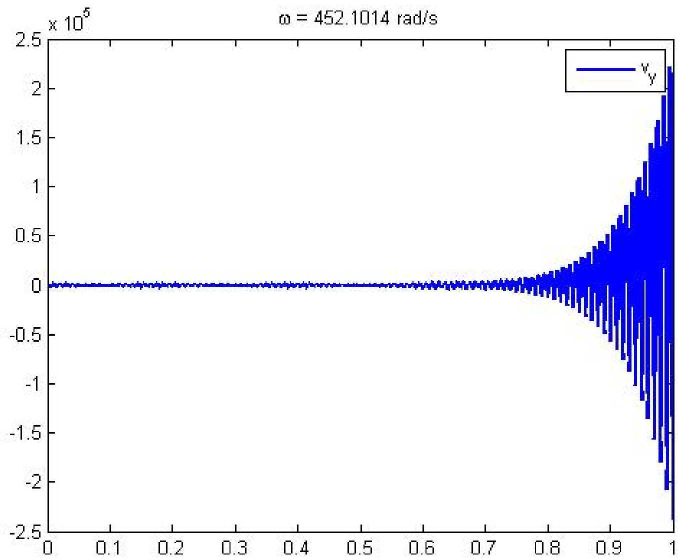
شکل(۳-۳۴) شکل مد دوّم در جهت y در β =۲۰۰π



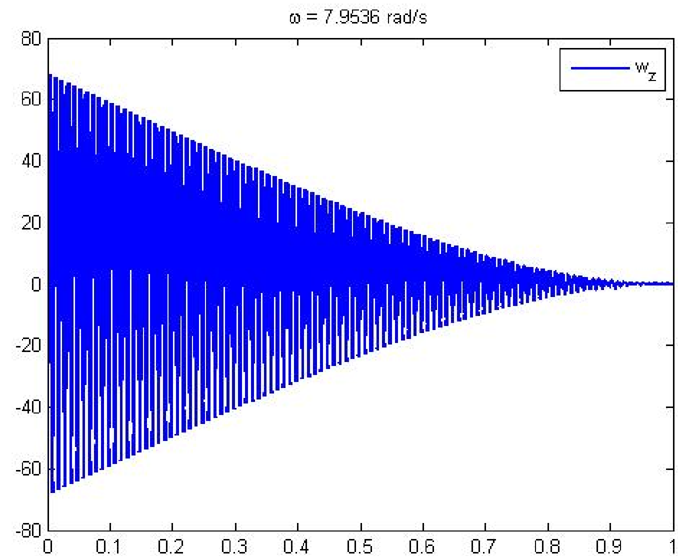
شکل(۳-۳۵) شکل مد سوّم در جهت y در $\beta = ۲۰۰\pi$



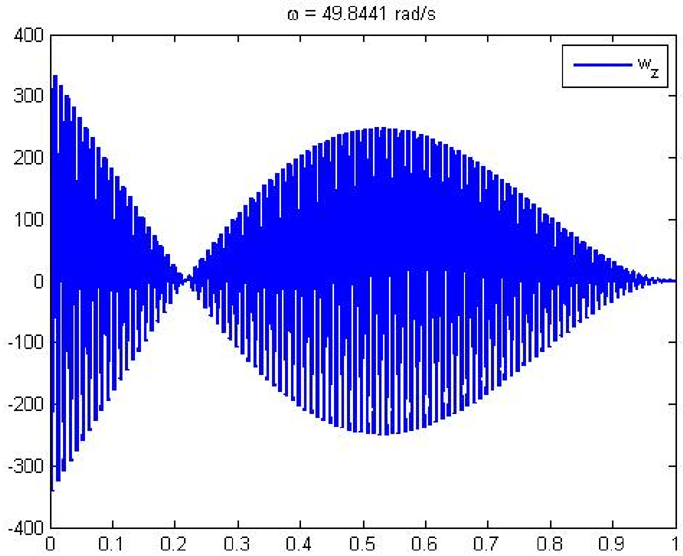
شکل(۳-۳۶) شکل مد چهارم در جهت y در $\beta = ۲۰۰\pi$



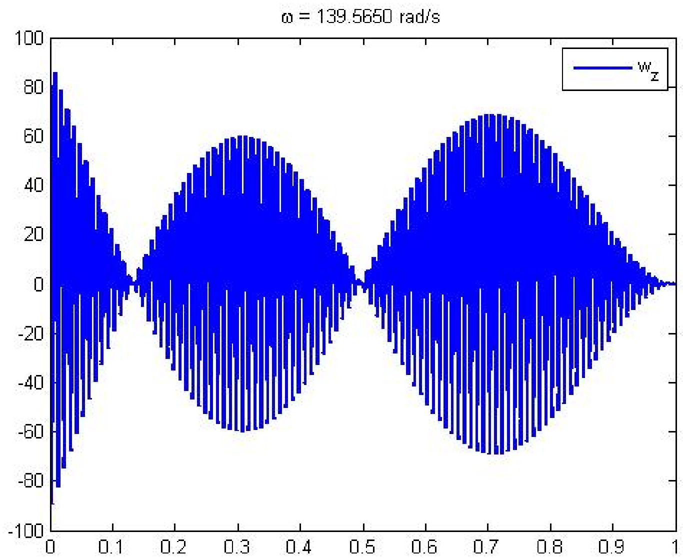
شکل(۳-۳۷) شکل مد پنجم در جهت y در β =۲۰۰π



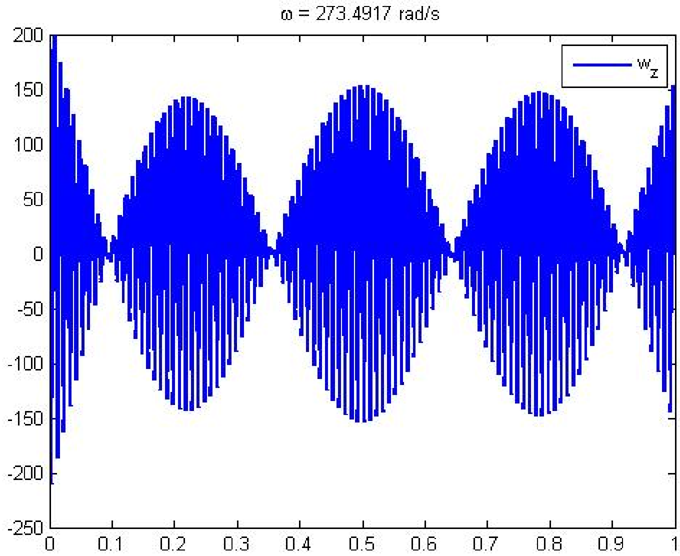
شکل(۳-۳۸) شکل مد اوّل در جهت z در β =۲۰۰π



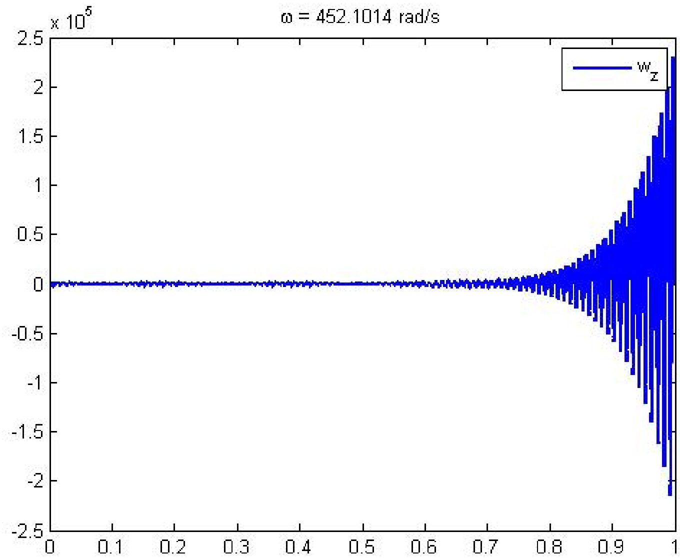
شکل(۳-۳۹) شکل مد دوّم در جهت z در $\beta = ۲۰۰\pi$



شکل(۳-۴۰) شکل مد سوّم در جهت z در $\beta = ۲۰۰\pi$



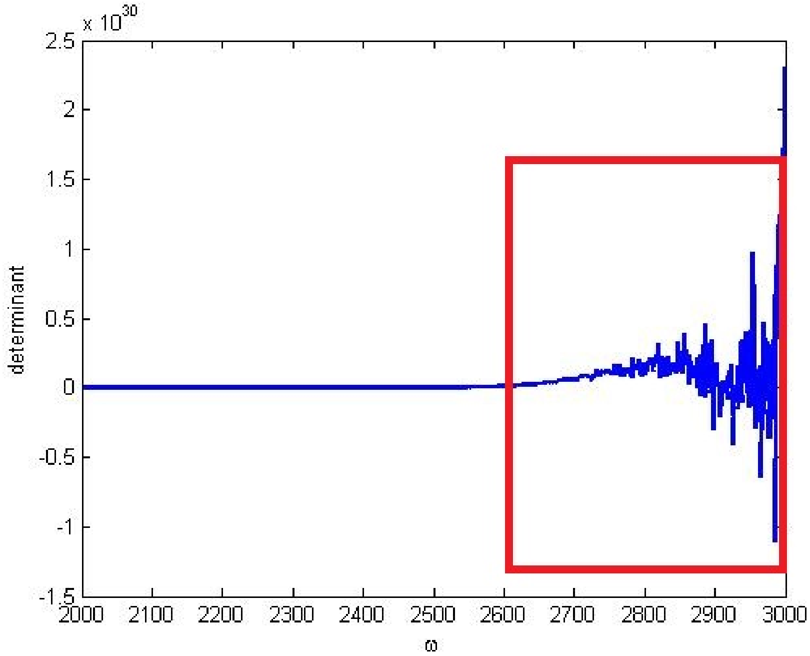
شکل(۳-۴۱) شکل مد چهارم در جهت z در $\beta = ۲۰۰\pi$



شکل(۳-۴۲) شکل مد پنجم در جهت z در $\beta = ۲۰۰\pi$

۳-۷-۳ محدوده‌ی مشکل عددی روش

روش ماتریس انتقال در فرکانس‌های بالا، دچار مشکل عددی می‌شود. به‌عنوان نمونه، برای $\beta = \frac{\pi}{۴}$ محدوده‌ای که معادله‌ی فرکانسی دچار مشکل عددی می‌شود، در شکل(۳-۴۳) نشان داده شده‌است.



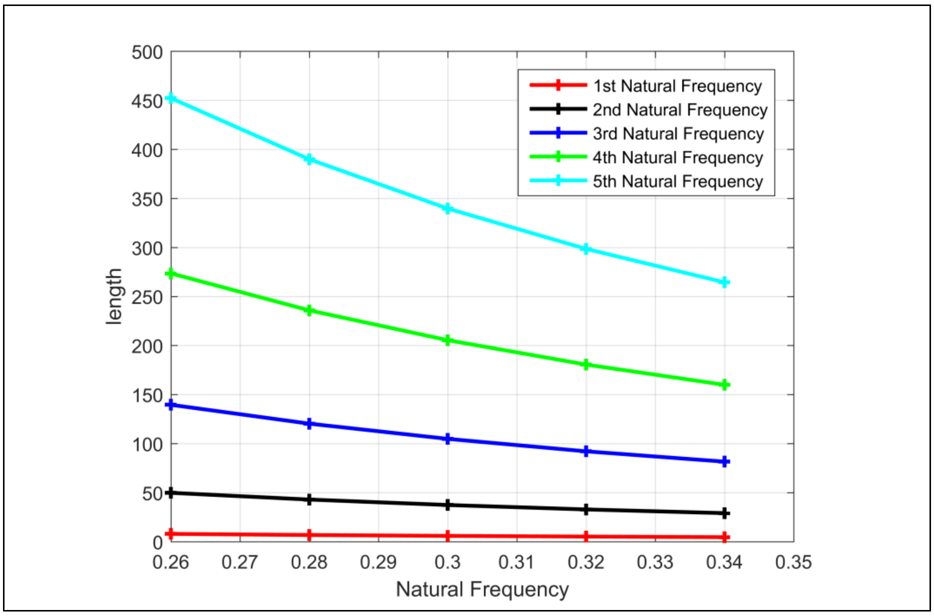
شکل(۳-۴۳) محدوده‌ی مشکل عددی در $\beta = \frac{\pi}{۴}$

۳-۷-۴ تأثیر طول ریسمان بر فرکانس طبیعی

با افزایش طول ریسمان، مقادیر پنج فرکانس طبیعی تحت زاویه‌ی $\beta = \frac{\pi}{۴}$ سیستم محاسبه شده‌است. در جدول(۳-۶) این مقادیر آورده شده‌است و شکل(۳-۴۴) نیز روند افزایش فرکانس‌ها را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش طول ریسمان، مقادیر فرکانس‌های طبیعی کاهش می‌یابند.

جدول(۳-۶) مقادیر پنج فرکانس طبیعی با افزایش طول ریسمان

چهارم	چهارم	سوّم	دوّم	اوّل	$\beta = \frac{\pi}{۴}$	
۴۵۲.۱۰۱۴	۲۷۳.۴۹۱۷	۱۳۹.۵۶۵۰	۴۹.۸۴۴۱	۷.۹۵۳۶	۰.۲۶۰	L(m)
۳۸۹.۸۲۲۱	۲۳۵.۸۱۶۸	۱۲۰.۳۳۹۲	۴۲.۹۷۷۸	۶.۸۵۷۹	۰.۲۸۰	
۳۳۹.۵۷۸۴	۲۰۵.۴۲۲۷	۱۰۴.۸۲۸۸	۳۷.۴۳۸۵	۵.۹۷۴۰	۰.۳۰۰	
۲۹۸.۴۵۷۶	۱۸۰.۵۴۷۳	۹۲.۱۳۴۷	۳۲.۹۰۴۹	۵.۲۵۰۶	۰.۳۲۰	
۲۶۴.۳۷۷۶	۱۵۹.۹۳۱۱	۸۱.۶۱۴۱	۲۹.۱۴۷۰	۴.۶۵۱۰	۰.۳۴۰	



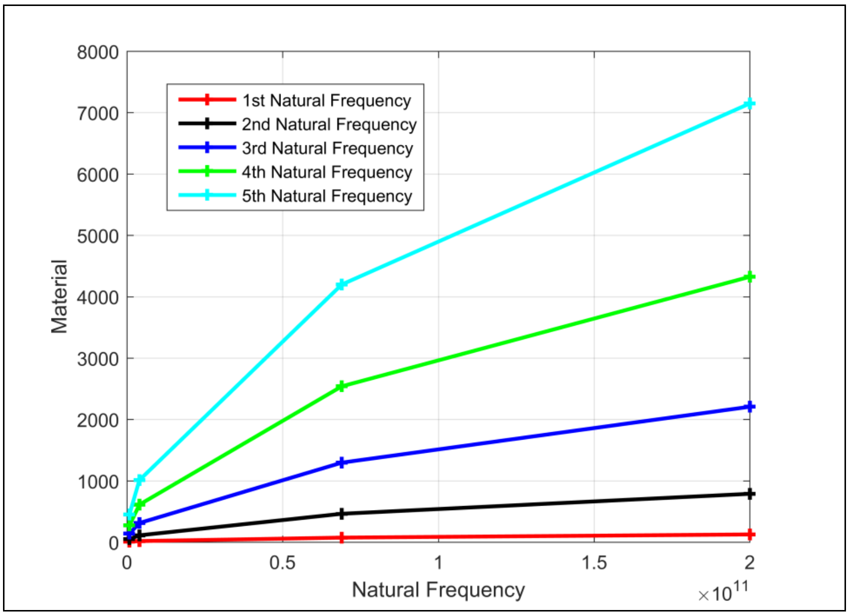
شکل(۳-۴۴) تأثیر افزایش طول ریسمان بر فرکانس طبیعی

۳-۷-۵ تأثیر جنس ریسمان بر فرکانس طبیعی

جدول(۳-۷) مقادیر پنج فرکانس طبیعی اوّل را تحت زاویه‌ی $\beta=\frac{\pi}{۴}$ با تغییر جنس ریسمان نشان می‌دهد. با افزایش سفتی ریسمان، فرکانس‌ها افزایش می‌یابند. این روند افزایشی در شکل(۳-۴۵) قابل مشاهده‌است.

جدول(۳-۷)مقادیر پنج فرکانس طبیعی با تغییر جنس طول ریسمان

$\beta=\frac{\pi}{۴}$	$E(\frac{N}{m^2})$	اوّل	دوّم	سوّم	چهارم	پنجم
پلی اتیلن	$۰.۸ * ۱۰^{۹}$	۷.۹۵۳۶	۴۹.۸۴۴۱	۱۳۹.۵۶۵۰	۲۷۳.۴۹۱۷	۴۵۲.۱۰۱۴
نایلون	$۴ * ۱۰^{۹}$	۱۷.۷۸۴۷	۱۱۱.۴۵۴۹	۳۱۲.۰۷۶۸	۶۱۱.۵۴۶۰	۱۰۱۰.۹۲۹۴
آلومینیوم	$۶۹ * ۱۰^{۹}$	۷۳.۸۶۵۴	۴۶۲.۹۰۶۸	۱۲۹۶.۱۵۲۴	۲۵۳۹.۹۴۱۵	۴۱۹۸.۷۰۵۲
فولاد	$۲۰۰ * ۱۰^{۹}$	۱۲۵.۷۵۶۹	۷۸۸.۱۰۴۹	۲۲۰۶.۷۱۶۵	۴۳۲۴.۲۸۳۵	۷۱۴۸.۳۵۰۵



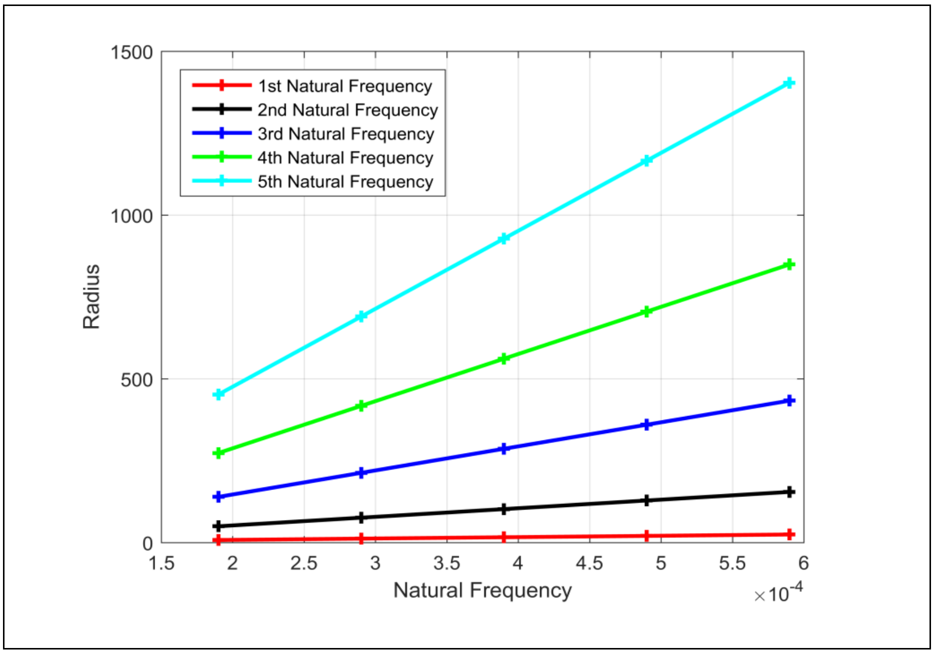
شکل(۳-۴۵)تأثیر تغییر جنس ریسمان بر فرکانس طبیعی

۳-۷-۶ تأثیر شعاع ریسمان بر فرکانس طبیعی

با افزایش شعاع ریسمان، مقادیر فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. فرکانس‌های طبیعی برای پنج شعاع تحت زاویه‌ی $\beta = \frac{\pi}{۴}$ در جدول(۳-۸) آورده شده و هم‌چنین روند افزایش در شکل(۳-۴۶) قابل مشاهده است.

جدول(۳-۸) مقادیر پنج فرکانس طبیعی با افزایش شعاع ریسمان

	$\beta = \frac{\pi}{۴}$	اوّل	دوّم	سوّم	چهارم	پنجم
r(m)	$۰.۱۹ * ۱۰^{-۳}$	۷.۹۵۳۶	۴۹.۸۴۴۱	۱۳۹.۵۶۵۰	۲۷۳.۴۹۱۷	۴۵۲.۱۰۱۴
	$۰.۲۹ * ۱۰^{-۳}$	۱۲.۱۳۹۶	۷۶.۰۷۷۹	۲۱۳.۰۲۰۳	۴۱۷.۴۳۴۷	۶۹۰.۰۴۹۵
	$۰.۳۹ * ۱۰^{-۳}$	۱۶.۳۲۵۷	۱۰۲.۳۱۱۶	۲۸۶.۴۷۵۵	۵۶۱.۳۷۷۷	۵۹۲۷.۹۹۷۶
	$۰.۴۹ * ۱۰^{-۳}$	۲۰.۵۱۱۸	۱۲۸.۵۴۵۴	۳۵۹.۹۳۰۸	۷۰۵.۳۲۰۷	۱۱۶۵.۹۴۵۷
	$۰.۵۹ * ۱۰^{-۳}$	۲۴.۶۹۷۹	۱۵۴.۷۷۹۱	۴۳۳.۳۸۶۱	۸۴۹.۲۶۳۷	۱۴۰۳.۸۹۳۸



شکل(۳-۴۶) تأثیر افزایش شعاع ریسمان بر فرکانس طبیعی

٤- فصل چهارم: نتیجه گیری و پیشنهاد

برای

پژوهش های پیش رو

۴-۱ جمع بندی مطالب پایان‌نامه

ویژگی‌های اجرایی محرّکه‌ها، انتخاب یک محرّکه را تحت تأثیر قرار می‌دهند. بسیاری از ابزارهای رباتیکی که در گذشته گسترش یافته‌اند، راه حل‌های متعدّدی برای سیستم‌های محرّکه‌ی خود پیشنهاد داده‌اند که به‌طور عمده در نوع موتور تفاوت دارند. اغلب موتورهای الکتریکی دورانی و گاهی اوقات پنوماتیکی ارائه شده‌است و در سیستم انتقال قدرت از جعبه‌دنده، تاندون و یا شافت‌های انعطاف‌پذیر استفاده شده‌است.

سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده بسیار سبک، ارزان، بی‌صدا و با اصطکاک کم است و شبیه به ماهیچه عمل می‌کند. ویژگی‌های منحصربه‌فرد این سیستم محرّکه، کاربردهای گسترده‌ای را برای آن موجب می‌شود.

در این پژوهش، سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده بررسی شده‌است. پس از بیان مقدّمات مربوط به روش ماتریس انتقال، با استفاده از DT-TMM، سیستم مورد بررسی در دو حالت مدل شده‌است، در مدل اوّل، المان‌های جرم و فنر پیچشی و در مدل دوّم، المان‌های جرم، فنر پیچشی و خطّی در نظر گرفته شده و نتایج با پژوهش مربوط، مقایسه شده‌است. هم‌چنین کنترلر PID به‌منظور کنترل میزان تغییر طول به سیستم اعمال شده‌است. در ادامه روند حلّ دقیق مشخّصه‌های دینامیکی تیر تابیده شده[۳۵] با TMM شبیه‌سازی شده و نتایج آن پژوهش به‌دست آمده‌است. سپس با استفاده از مدل تیر تابیده شده، در یک حالت خاص از مدل‌سازی با المان‌های جرم و فنر، سیستم مورد نظر در این پژوهش با رویکرد بررسی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها بررسی شده‌است.

۴-۲ نتایج و دست‌آوردها

با ارائه‌ی رابطه‌هایی برای مدل کردن سیستم مورد بررسی با المان‌های جرم و فنر پیچشی و هم‌چنین جرم، فنر پیچشی و خطّی، به نتایج دقیق‌تری نسبت به روش‌های هندسی بررسی شده، دست یافته شده‌است. سیستم مدل شده با روش ماتریس انتقال، کنترل شده است. مشخّصات فیزیکی سیستم در بررسی وارد شده‌است. با مقایسه‌ی دو مدل، روشن است که تأثیر کشیدگی ریسمان با دو روش به‌کار گرفته شده، نتایج مشابهی دارند.

سپس با بررسی سیستم محرّکه‌ی ریسمان تابیده در یک تابیدگی خاص با استفاده از مدل تیر تابیده شده، فرکانس‌های طبیعی سیستم به‌دست آمده‌است و شکل مدها در چند تابیدگی خاص، ترسیم شده‌است. تأثیر طول، شعاع و جنس ریسمان بر فرکانس طبیعی نیز بررسی شده‌است.

۴-۳ پیشنهاد برای پژوهش‌های پیش‌رو

- اعمال DT-TMM برای تیر تابیده شده و کنترل آن
- بررسی جابه‌جایی‌های طولی در معادله‌های تیر تابیده شده
- بررسی آزمایشگاهی سیستم مورد بررسی
- بررسی میزان تغییر ضخامت ریسمان در حین تابیدگی
- به‌دست آوردن پاسخ‌های سیستم با کمک فرکانس‌های طبیعی با تعمیم روش ماتریس انتقال و یا روش‌های دیگر

پیوست

A-۱ تئوری

استفاده از اصل وریبشن‌گیری، برای تعیین معادله دیفرانسیل، زاویه‌های پیچش و نیروهای مختلف به‌صورت زیر است. همان‌طور که در شکل(A-۱) نشان داده شده‌است، محورهای Y و Z به‌اندازه‌ی زاویه‌ی β دوران می‌کنند. XYZ، مختصات کلّی و xyz، مختصات محلّی هستند. مختصات محلّی در طول المان تیر تغییر می‌کند امّا محورهای X و x برهم منطبق‌اند. $v(=v_y(x,t))$ و $w(=w_z(x,t))$ جابه‌جایی‌ها به‌ترتیب در جهت y و z هستند. $\phi(=\phi_y(x,t))$ و $\psi(=\psi_z(x,t))$ نیز زاویه‌های پیچش نسبت به y و z هستند.

جابه‌جایی‌های نسبی محورهای $\overline{O}_1\bar{y}$ و $\overline{O}_1\bar{z}$ نسبت به محورهای O_1y و O_1z به این صورت است:

$$\Delta y = (v + v'dx)\cos d\beta + (w + w'dx)\sin d\beta - v \qquad (\text{A-۱})$$

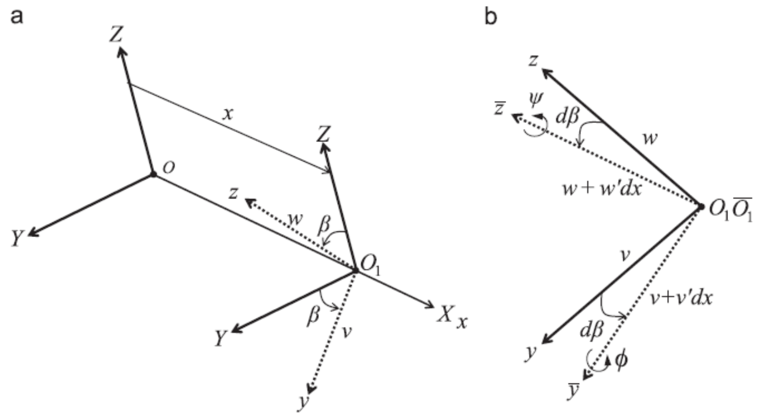
$$\Delta z = -(v + v'dx)\sin d\beta + (w + w'dx)\cos d\beta - w \qquad (\text{A-۲})$$

که '، مشتق نسبت به x است. اگر $d\beta \ll 1$ آن‌گاه $\sin(d\beta) \approx d\beta, \cos(d\beta) \approx 1$. در نتیجه معادله‌های (A-۱) و (A-۲) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\Delta y = v'dx + wd\beta = \left(v' + w\frac{d\beta}{dx}\right)dx = (v' + kw)dx \qquad (\text{A-۳})$$

$$\Delta z = -vd\beta + w'dx = \left(w' - v\frac{d\beta}{dx}\right)dx = (w' - kv)dx \qquad (\text{A-۴})$$

که $k(=d\beta/dx)$، نرخ تابیدگی است.



۰ شکل(A-۱) نشانه‌گذاری برای مختصات‌های محلّی و کلّی. a) جابه‌جایی‌های مختصات محلّی O_1yz حول مبدأ؛ b) جابه‌جایی‌ها و دوران‌های مبدأ مختصات $\overline{O}_1$ نسبت به O_1.

زاویه‌های پیچش از معادله‌های (A-۳) و (A-۴) قابل دست‌یابی است:

$$\phi=\frac{\Delta z}{dx}=w'-kv \quad (۵\text{-}A)$$

$$\psi=-\frac{\Delta y}{dx}=-v'-kw \quad (۶\text{-}A)$$

جابه‌جایی یک المان بسیار کوچک در xyz، (u_x,v_y,w_z) و در $\overline{xyz}$، $(\bar{u}_x,\bar{v}_y,\bar{w}_z)$ است. زیرا مختصه‌های محلّی در طول المان تیر تغییر می‌کنند. جابه‌جایی u_x در جهت x به این صورت است:

$$u_x=-\bar{z}\,\phi+\bar{y}\,\psi=-\bar{z}(w'-kv)+\bar{y}(-v'-kw) \quad (۷\text{-}A)$$

که:

$$\bar{z}=y\sin\beta+z\cos\beta \quad (۸\text{-}A)$$

$$\bar{y}=-z\sin\beta+y\cos\beta \quad (۹\text{-}A)$$

در نتیجه داریم:

$$u_x=-(y\sin\beta+z\cos\beta)(w'-kv)+(-z\sin\beta+y\cos\beta)(-v'-kw) \quad (۱۰\text{-}A)$$

کرنش در جهت x به این صورت به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=-\bar{y}(v+2kw'-k^2v)-\bar{z}(w''-2kv'-k^2w) \quad (۱۱\text{-}A)$$

در حقیقت چون مسأله در قالب تئوری اویلر-برنولی معمول است، فقط کرنش ε_{xx} مخالف صفر است.

بنابراین انرژی کرنشی(U) المان تیر به این صورت به‌دست می‌آید:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L \int_A \sigma\varepsilon_{xx} dA dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^L EI_{yy}(w''-2kv'-k^2w)^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^L EI_{zz}(v+2kw'-k^2v)^2 dx \quad (۱۲\text{-}A)$$
$$,\ I_{yy}=\int_A \bar{z}^2\, dA\ ,\ I_{zz}=\int_A \bar{y}^2\, dA$$

σ : تنش عمودی

E: مدول الاستیسیته

A , L: مساحت سطح مقطع و طول المان تیر

I_{yy} , I_{zz}: ممان اینرسی هندسی نسبت به محورهای $\bar{z}$- , $\bar{y}$-

انرژی جنبشی تیر تابیده شده به این صورت به‌دست می‌آید:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L m\left(\dot{v}^2+\dot{w}^2\right)dx \quad (۱۳\text{-}A)$$

که $\dot{}$ ، مشتق زمانی است. اصل همیلتون به این صورت نوشته می‌شود:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(U-T)dt=0 \quad (۱۴\text{-}A)$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء و جای‌گذاری معادله‌های(A-۱۲) و(A-۱۳) در (A-۱۴) معادله دیفرانسیل حرکت به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}EI_{ZZ}v''''-2k^2\left(EI_{zz}+2EI_{yy}\right)v''+k^4EI_{zz}v+2k\left(EI_{yy}+EI_{zz}\right)w'''\\ -2k^3\left(EI_{yy}+EI_{zz}\right)w'+m\ddot{v}=0\end{aligned} \quad (۱۵\text{-}A)$$

$$\begin{aligned}EI_{yy}w''''-2k^2\left(EI_{yy}+2EI_{zz}\right)w''+k^4EI_{yy}w-2k\left(EI_{yy}+EI_{zz}\right)v'''\\ +2k^3\left(EI_{yy}+EI_{zz}\right)v'+m\ddot{w}=0\end{aligned} \quad (۱۶\text{-}A)$$

که m(kg/m) جرم در واحد طول است.

از آن‌جایی که متغیّرها وابسته به مکان و زمان هستند، از روش جداسازی متغیّرها استفاده شده‌است.

اگر $w_z(x,t)$ و $v_y(x,t)$ با ارتعاشات هارمونیک در فرکانس زاویه‌ای ω فرض شوند، داریم:

$$w_z(x,t)=w_z(x)e^{i\omega t}$$
$$v_y(x,t)=v_y(x)e^{i\omega t} \qquad (۱۷\text{-A})$$

که $v_y(x)$ و $w_z(x)$ به ترتیب دامنه‌های $v_y(x,t)$ و $w_z(x,t)$ هستند. با جای‌گذاری معادله‌ی(A-۱۷) در معادله‌های(A-۱۵) و (A-۱۶) و پس از ساده‌سازی داریم:

$$v_y'''' - 2k^2(1+2r)v_y'' + k^4(1-a)v_y + 2k(r+1)w_z'''$$
$$-2k^3(r+1)w_z' = 0 \qquad (۱۸\text{-A})$$

$$rw_z'''' - 2k^2(r+2)w_z'' + rk^4(1-b)w_z - 2k(r+1)v_y'''$$
$$+2k^3(r+1)v_y' = 0 \qquad (۱۹\text{-A})$$

که:

$$r=\frac{EI_{yy}}{EI_{zz}},\ a=\frac{m\omega^2}{EI_{zz}k^4},\ b=\frac{m\omega^2}{EI_{zz}k^4 r}=\frac{m\omega^2}{EI_{yy}k^4}$$
$$v_y=v_y(x),\ \ w_z=w_z(x) \qquad (۲۰\text{-A})$$

با حلّ دستگاه معادلات(A-۱۸) و (A-۱۹)، معادله دیفرانسیل مرتبه هشت زیر حاصل می‌شود:

$$D^8\Theta+4k^2D^6\Theta+\{6-a-b\}k^4D^4\Theta+\{4+6a+6b\}k^6D^2\Theta$$
$$+(1-a)(1-b)k^8\Theta=0 \qquad (۲۱\text{-A})$$

که:

$$D=v_y(x) \text{ or } w_z(x), \quad D=\frac{d}{dx} \qquad (۲۲\text{-A})$$

حال، حلّ معادله‌ی(A-۲۱) را به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$\Theta(x)=Ae^{\lambda x} \quad (۲۳\text{-}A)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی(A-۲۳) در معادله‌ی(A-۲۲)، یک چندجمله‌ای با مرتبه‌ی هشت به‌دست می‌آید:

$$\lambda^8+4k^2\lambda^6+\{6-a-b\}k^4\lambda^4+\{4+6a+6b\}k^6\lambda^2+(1-a)(1-b)k^8=0 \quad (۲۴\text{-}A)$$

برای حل، معادله‌ی(A-۲۴) با متغیّر λ، قابل تبدیل به یک معادله‌ی مرتبه‌ی چهار به این صورت است:

$$\xi^4+4k^2\xi^3+\{6-a-b\}k^4\xi^2+\{4+6a+6b\}k^6\xi+(1-a)(1-b)k^8=0 \quad (۲۵\text{-}A)$$

که:

$$\lambda=\pm\sqrt{\xi} \quad (۲۶\text{-}A)$$

از این‌رو، حلّ معادله‌ی(A-۲۵) برای $v_y(x)$ و $w_z(x)$ به این صورت می‌شود:

$$v_y(x)=\sum_{j=1}^{8}A_je^{\lambda_jx} \quad (۲۷\text{-}A)$$

$$w_z(x)=\sum_{j=1}^{8}B_je^{\lambda_jx} \quad (۲۸\text{-}A)$$

که $\lambda_j(j=1\sim 8)$ از معادله‌ی(A-۲۶) به‌دست می‌آیند. A_j و B_j هم مقادیر ثابتی هستند. ارتباط بین دو ثابت A_j و B_j با جای‌گذاری معادله‌های(A-۲۷) و (A-۲۸)در معادله‌ی(A-۱۸) یا (A-۱۹) به‌صورت زیر قابل دست‌یابی است:

$$B_j=\alpha_jA_j \quad (۲۹\text{-}A)$$

که:

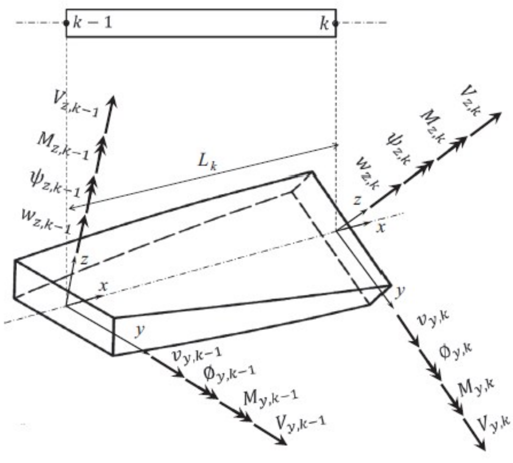
$$\alpha_j=-\frac{\{\lambda_j{}^4-2k^2(1+2r)\lambda_j{}^2+k^4(1-a)\}}{\{2k(r+1)\lambda_j{}^3-2k^3(r+1)\lambda_j\}} \quad (۳۰\text{-}A)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی(A-۲۹) در (A-۲۸) داریم:

$$w_z(x)=\sum_{j=1}^{8}\alpha_jA_je^{\lambda_jx} \quad (۳۱\text{-}A)$$

جابه‌جایی‌ها و نیروهای اعمالی بر المان دلخواه kام برای روش ماتریس انتقال ارائه شده در این مطالعه و بین دو المان دلخواه در شکل(A-۲) نشان داده شده‌است که شامل هر دو اطّلاعات جرمی و سفتی در یک ماتریس است. L_k طول المان kام است.

در مختصات محلّی، عبارت‌های مربوط به زاویه‌های پیچشی($\phi_y(x,t)$, $\psi_z(x,t)$)، نیروهای برشی($V_y(x,t)$, $V_z(x,t)$) و گشتاورهای خمشی($M_y(x,t)$, $M_z(x,t)$) به‌صورت معادله‌های(A-۳۲)-(A-۳۷) قابل دست‌یابی‌اند.



شکل(A-۲) جابه‌جایی‌ها و نیروهای اعمالی بر المان kام

$$\phi_y(x,t)=w'-kv \qquad \text{(۳۲-A)}$$

$$\psi_z(x,t)=-v'-kw \qquad \text{(۳۳-A)}$$

$$V_y(x,t)=EI_{zz}(v'''+k(2+r)w''-k^2(1+2r)v'-k^3rw) \qquad \text{(۳۴-A)}$$

$$V_z(x,t)=EI_{zz}(rw'''-k(2r+1)v''-k^2(r+2)w'+k^3v) \qquad \text{(۳۵-A)}$$

$$M_y(x,t)=-EI_{yy}(w''-2kv'-k^2w) \qquad \text{(۳۶-A)}$$

$$M_z(x,t)=EI_{zz}(v''+2kw'-k^2v) \qquad \text{(۳۷-A)}$$

که $v=v_y(x,t)$, $w=w_z(x,t)$ است.

ارتباط بین جابه‌جایی‌ها، زاویه‌ها، نیروها و گشتاورها در مختصات محلّی و کلّی بین دو سر المان تیر به این صورت قابل بیان است:

$$\begin{Bmatrix} v_Y \\ w_Z \\ \phi_Y \\ \psi_Z \\ V_Y \\ V_Z \\ M_Y \\ M_Z \end{Bmatrix}_{global} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_y \\ w_z \\ \phi_y \\ \psi_z \\ V_y \\ V_z \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_{local} \qquad (۳۸\text{-}A)$$

که $c = \cos(\beta), s = \sin(\beta)$ است.

با جای‌گذاری معادله‌های(A-۱۷)، (A-۲۷) و (A-۳۱) در معادله‌های(A-۳۲)-(A-۳۷) داریم:

$$v_y(x)=A_j e^{\lambda_j x} \qquad (۳۹\text{-}A)$$

$$w_z(x)=\alpha_j A_j e^{\lambda_j x} \qquad (۴۰\text{-}A)$$

$$\phi_y(x)=(\alpha_j\lambda_j-k)A_j e^{\lambda_j x} \qquad (۴۱\text{-}A)$$

$$\psi_z(z)= -(\lambda_j+k\alpha_j)A_j e^{\lambda_j x} \qquad (۴۲\text{-}A)$$

$$V_y(x)= EI_{zz}\{\lambda_j^{\,3}+k(2+r)\alpha_j\lambda_j^{\,2} -k^2(1+2r)\lambda_j-\alpha_j k^3 r\}A_j e^{\lambda_j x} \qquad (۴۳\text{-}A)$$

$$V_z(x)=EI_{zz}\{r\alpha_j\lambda_j^{\,3}-k(2r+1)\lambda_j^{\,2} -k^2(r+2)\alpha_j\lambda_j+k^3\}A_j e^{\lambda_j x} \qquad (۴۴\text{-}A)$$

$$M_y(x)=-EI_{yy}\{\alpha_j\lambda_j^{\,2} -2k\lambda_j-k^2\alpha_j\}A_j e^{\lambda_j x} \qquad (۴۵\text{-}A)$$

$$M_z(x)=EI_{zz}\{\lambda_j^{\,2} +2k\alpha_j\lambda_j-k^2\}A_j e^{\lambda_j x} \qquad (۴۶\text{-}A)$$

فاصله‌ی x مطابق شکل(A-۲)، درسمت راست المان تیر برابرصفر و در سمت چپ برابر L_k می‌باشد.

با جای‌گذاری x=0، داریم:

$$v_{y,k-1}(x)=A_j \qquad (۴۷\text{-}A)$$

$$w_{z,k-1}(x)=\alpha_j A_j \qquad (۴۸\text{-}A)$$

$$\phi_{y,k-1}(x)=(\alpha_j\lambda_j-k)A_j \qquad (۴۹\text{-}A)$$

$$\psi_{z,k-1}(z)= -(\lambda_j+k\alpha_j)A_j \qquad (۵۰\text{-}A)$$

$$V_{y,k-1}(x)=EI_{zz}\{\lambda_j^3+k(2+r)\alpha_j\lambda_j^2-k^2(1+2r)\lambda_j-\alpha_j k^3 r\}A_j \tag{۵۱-A}$$

$$V_{z,k-1}(x)=EI_{zz}\{r\alpha_j\lambda_j^3-k(2r+1)\lambda_j^2-k^2(r+2)\alpha_j\lambda_j+k^3\}A_j \tag{۵۲-A}$$

$$M_{y,k-1}(x)=-EI_{yy}\{\alpha_j\lambda_j^2-2k\lambda_j-k^2\alpha_j\}A_j \tag{۵۳-A}$$

$$M_{z,k-1}(x)=EI_{zz}\{\lambda_j^2+2k\alpha_j\lambda_j-k^2\}A_j \tag{۵۴-A}$$

با استفاده از معادله‌های(A-۴۷)-(A-۵۴)، ماتریس انتقال سمت چپ تشکیل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} v_y(x) \\ w_z(x) \\ \phi_y(x) \\ \psi_z(x) \\ V_y(x) \\ V_z(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}_{k-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} & C_{67} & C_{68} \\ C_{71} & C_{72} & C_{73} & C_{74} & C_{75} & C_{76} & C_{77} & C_{78} \\ C_{81} & C_{82} & C_{83} & C_{84} & C_{85} & C_{86} & C_{87} & C_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{Bmatrix} \tag{۵۵-A}$$

که اجزای ماتریسC به این صورت است:

$$C_{1j}=1 \tag{۱-۵۵-A}$$

$$C_{2j}=\alpha_j \tag{۲-۵۵-A}$$

$$C_{3j}=(\alpha_j\lambda_j-k) \tag{۳-۵۵-A}$$

$$C_{4j}=-(\lambda_j+k\alpha_j) \tag{۴-۵۵-A}$$

$$C_{5j}=EI_{zz}\{\lambda_j^3+k(2+r)\alpha_j\lambda_j^2-k^2(1+2r)\lambda_j-\alpha_j k^3 r\} \tag{۵-۵۵-A}$$

$$C_{6j}=EI_{zz}\{r\alpha_j\lambda_j^3-k(2r+1)\lambda_j^2-k^2(r+2)\alpha_j\lambda_j+k^3\} \tag{۶-۵۵-A}$$

$$C_{7j}=-EI_{yy}(\alpha_j\lambda_j^2-2k\lambda_j-k^2\alpha_j) \tag{۷-۵۵-A}$$

$$C_{8j}=EI_{zz}(\lambda_j^2+2k\alpha_j\lambda_j-k^2) \tag{۸-۵۵-A}$$

معادله‌ی(A-۵۵) را به این صورت می‌توان نوشت:

$$\{Z\}_{k-1}=\left[C_{ij}\right]\{A_j\} \tag{۵۶-A}$$

که $\{Z\}_{k-1}$، بردار حالت در نقطه‌ی k-1 است.

از معادله‌ی(A-۵۶)، واضح است که ثابت A_j به‌صورت زیر قابل دست‌یابی است:

$$\{A_j\}=[C_{ij}]^{-1}\{Z\}_{k-1} \tag{۵۷-A}$$

حال، با جای‌گذاری $x=L_k$ در معادله‌های(A-۳۹)-(A-۴۶) داریم:

$$v_y(x)=A_j e^{\lambda_j L_k} \tag{۵۸-A}$$

$$w_z(x)=\alpha_j A_j e^{\lambda_j L_k} \tag{۵۹-A}$$

$$\phi_y(x)=(\alpha_j\lambda_j-k)A_j e^{\lambda_j L_k} \tag{۶۰-A}$$

$$\psi_z(z)= -(\lambda_j+k\alpha_j)A_j e^{\lambda_j L_k} \tag{۶۱-A}$$

$$V_y(x)= EI_{zz}\{\lambda_j{}^3+k(2+r)\alpha_j\lambda_j{}^2 -k^2(1+2r)\lambda_j-\alpha_j k^3 r\}A_j e^{\lambda_j L_k} \tag{۶۲-A}$$

$$V_z(x)=EI_{zz}\{r\alpha_j\lambda_j{}^3-k(2r+1)\lambda_j{}^2 -k^2(r+2)\alpha_j\lambda_j+k^3\}A_j e^{\lambda_j L_k} \tag{۶۳-A}$$

$$M_y(x)=-EI_{yy}\{\alpha_j\lambda_j{}^2 -2k\lambda_j-k^2\alpha_j\}A_j e^{\lambda_j L_k} \tag{۶۴-A}$$

$$M_z(x)=EI_{zz}\{\lambda_j{}^2 +2k\alpha_j\lambda_j-k^2\}A_j e^{\lambda_j L_k} \tag{۶۵-A}$$

با استفاده از معادله‌های(A-۵۸)-(A-۶۵)، ماتریس انتقال سمت راست تشکیل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} v_y(x) \\ w_z(x) \\ \phi_y(x) \\ \psi_z(x) \\ V_y(x) \\ V_z(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & H_{16} & H_{17} & H_{18} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} & H_{27} & H_{28} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} & H_{37} & H_{38} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} & H_{45} & H_{46} & H_{47} & H_{48} \\ H_{51} & H_{52} & H_{53} & H_{54} & H_{55} & H_{56} & H_{57} & H_{58} \\ H_{61} & H_{62} & H_{63} & H_{64} & H_{65} & H_{66} & H_{67} & H_{68} \\ H_{71} & H_{72} & H_{73} & H_{74} & H_{75} & H_{76} & H_{77} & H_{78} \\ H_{81} & H_{82} & H_{83} & H_{84} & H_{85} & H_{86} & H_{87} & H_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{Bmatrix} \tag{۶۶-A}$$

که اجزای ماتریس H به این صورت است:

$$H_{1j}=e^{\lambda_j L_k} \tag{۱-۶۵-A}$$

$$H_{2j}=\alpha_j e^{\lambda_j L_k} \tag{۲-۶۵-A}$$

$$H_{3j}=(\alpha_j\lambda_j-k)e^{\lambda_j L_k} \tag{۳-۶۵-A}$$

$$H_{4j}= -(\lambda_j+k\alpha_j)e^{\lambda_j L_k} \tag{۴-۶۵-A}$$

$$H_{5j}=EI_{zz}\{\lambda_j^3+k(2+r)\alpha_j\lambda_j^2-k^2(1+2r)\lambda_j-\alpha_j k^3 r\}e^{\lambda_j L_k} \tag{۵-۶۵-A}$$

$$H_{6j}=EI_{zz}\{r\alpha_j\lambda_j^3-k(2r+1)\lambda_j^2-k^2(r+2)\alpha_j\lambda_j+k^3\}e^{\lambda_j L_k} \tag{۶-۶۵-A}$$

$$H_{7j}=-EI_{yy}(\alpha_j\lambda_j^2-2k\lambda_j-k^2\alpha_j)e^{\lambda_j L_k} \qquad (\text{۷-۶۵-A})$$

$$H_{8j}=EI_{zz}(\lambda_j^2+2k\alpha_j\lambda_j-k^2)e^{\lambda_j L_k} \qquad (\text{۸-۶۵-A})$$

معادله‌ی(A-۶۵) را به این صورت می‌توان نوشت:

$$\{Z\}_k=\left[H_{ij}\right]\{A_j\} \qquad (\text{۶۶-A})$$

که $\{Z\}_k$، بردار حالت در نقطه‌ی k است.

با جای‌گذاری معادله‌ی(A-۵۷) در (A-۶۶)، ماتریس انتقال المان kام به این صورت تشکیل می‌شود:

$$\{Z\}_k=\left[H_{ij}\right]\left[C_{ij}\right]^{-1}\{Z\}_{k-1} \qquad (\text{۶۷-A})$$

$$\{Z\}_k=\left[T_{ij}\right]\{Z\}_{k-1} \qquad (\text{۶۸-A})$$

که $\left[T_{ij}\right]=\left[H_{ij}\right]\left[C_{ij}\right]^{-1}$، ماتریس انتقال المان kام است.

وقتی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی از تعداد k المان استفاده کنیم، ماتریس انتقال کلّی به این صورت تشکیل می‌شود:

$$\left[T_{ij}\right]=\left[T_{ij}\right]_k\times\left[T_{ij}\right]_{k-1}\times\ldots\times\left[T_{ij}\right]_3\times\left[T_{ij}\right]_2\times\left[T_{ij}\right]_1 \qquad (\text{۶۹-A})$$

که زیرنویس‌های k… ,3 ,2 ,1، شماره‌ی المان را نشان می‌دهند.

اگر معادله‌ی(A-۶۸) در فرم ماتریسی نوشته شود، داریم:

$$\begin{Bmatrix} v_y(x) \\ w_z(x) \\ \phi_y(x) \\ \psi_z(x) \\ V_y(x) \\ V_z(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & T_{15} & T_{16} & T_{17} & T_{18} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & T_{25} & T_{26} & T_{27} & T_{28} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & T_{35} & T_{36} & T_{37} & T_{38} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & T_{45} & T_{46} & T_{47} & T_{48} \\ T_{51} & T_{52} & T_{53} & T_{54} & T_{55} & T_{56} & T_{57} & T_{58} \\ T_{61} & T_{62} & T_{63} & T_{64} & T_{65} & T_{66} & T_{67} & T_{68} \\ T_{71} & T_{72} & T_{73} & T_{74} & T_{75} & T_{76} & T_{77} & T_{78} \\ T_{81} & T_{82} & T_{83} & T_{84} & T_{85} & T_{86} & T_{87} & T_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_y(x) \\ w_z(x) \\ \phi_y(x) \\ \psi_z(x) \\ V_y(x) \\ V_z(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}_{k-1} \qquad (\text{۷۰-A})$$

ماتریس انتقال المان kام قادر به محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای ارتعاشات آزاد در یک تیر اویلر-برنولی یکنواخت با استفاده از شرایط مرزی مختلف است. به عنوان مثال، شرایط مرزی یک-سرآزاد، یک‌سر گیردار در این‌جا آورده شده‌است.

در سر گیردار داریم:

$$v_{y,k-1}(x),\ w_{z,k-1}(x),\ \phi_{y,k-1}(x),\ \psi_{z,k-1}(x)=0 \qquad \text{(۷۱-A)}$$

و در سر آزاد داریم:

$$V_{y,k}(x),\ V_{z,k}(x),\ M_{y,k}(x),\ M_{z,k}(x)=0 \qquad \text{(۷۲-A)}$$

با جای‌گذاری معادله‌های(A-۷۱)و (A-۷۲) در (A-۷۰)، ماتریس زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} T_{55} & T_{56} & T_{57} & T_{58} \\ T_{65} & T_{66} & T_{67} & T_{68} \\ T_{75} & T_{76} & T_{77} & T_{78} \\ T_{85} & T_{86} & T_{87} & T_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_y(x) \\ V_z(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}_{k-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(۷۳-A)}$$

برای حل‌های غیربدیهی، دترمینان ماتریس ضرایب معادله‌ی(A-۷۳)، باید برابر صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} T_{55} & T_{56} & T_{57} & T_{58} \\ T_{65} & T_{66} & T_{67} & T_{68} \\ T_{75} & T_{76} & T_{77} & T_{78} \\ T_{85} & T_{86} & T_{87} & T_{88} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(۷۴-A)}$$

معادله‌ی(A-۷۴)، معادله مشخّصه برای تیر یک‌سر گیردار است. فرکانس‌های طبیعی سیستم از این معادله، قابل دست‌یابی است.زمانی‌که فرکانس زاویه‌ای سیستم از صفر تا مقدار دلخواهی افزایش یابد، مقادیری از فرکانس زاویه‌ای که منجر به صفر شدن دترمینان معادله‌ی(A-۷۴) می‌شود، برابر فرکانس طبیعی سیستم است.

برای تعیین شکل مدهای ارتعاشی، نیاز به داشتن مقادیر ثابت معادله‌ی(A-۲۷) است. این مقادیر ثابت، از طریق بردار حالت معادله‌ی(A-۷۰)، قابل محاسبه است. می‌دانیم که در سرگیردار، چهار مقدار جابه-جایی$\left(v_{y,k-1}(x),\ w_{z,k-1}(x),\ \phi_{y,k-1}(x),\ \psi_{z,k-1}(x)\right)$برابر صفر هستند. امّا، چهار مقدار

نیرویی$\left(V_{y\,,\,k\text{-}1}(x), V_{z\,,\,k\text{-}1}(x), M_{y\,,\,k\text{-}1}(x), M_{z\,,\,k\text{-}1}(x) \right)$، نامشخّص‌اند. برای تعیین این نیروها، نیروی برشی $V_{z\,,\,k\text{-}1}(x)$ در جهت بردار z را برابر مقدار یک، فرض می‌کنیم. در نتیجه، معادله‌ی(A-۷۳)، به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{Bmatrix} V_y(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix}_{k\text{-}1} = \begin{bmatrix} T_{55} & T_{57} & T_{58} \\ T_{65} & T_{67} & T_{68} \\ T_{75} & T_{77} & T_{78} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -T_{56} \\ -T_{66} \\ -T_{76} \end{Bmatrix} \qquad (۷۵\text{-}A)$$

بردار حالت $\{Z\}_{k\text{-}1}$ در سر گیردار با استفاده از معادله‌ی(A-۷۵)، به این صورت تشکیل می‌شود:

$$\{Z\}_{k\text{-}1} = \left[0 , 0 , 0 , 0 , V_{y\,,\,k\text{-}1} , 1 , M_{y\,,\,k\text{-}1}, M_{z\,,\,k\text{-}1}\right]^T \qquad (۷۶\text{-}A)$$

حال، مقادیر ثابت A_j، با جای‌گذاری معادله‌ی(A-۷۶)در معادله‌ی(A-۵۷)، محاسبه می‌شوند.

جابه‌جایی‌های $w_z(x)$و $v_y(x)$ با جای‌گذاری مقادیر ثابت A_j در معادله‌های(A-۲۷) و(A-۳۱)، به‌دست می‌آیند. در نتیجه در هر x دلخواهی می‌توان شکل مدهای سیستم را با توّجه به فرکانس‌های طبیعی به‌دست آورد.

منابع

[1]Popov D., Gaponov I., Ryu J. H., (2012), "A Study on Twisted String Actuation Systems: Mathematical Model and Its Experimental Evaluation", Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, pp. 1245, Algarve, Portugal.

[2] Wurtz T., May C., Holz B., Natale C., Palli G., Melchiorri C., (2010), "The Twisted String Actuation System: Modeling and Control", Int. Conf. on Adv. Intelligent Mechatronics, pp. 1215, Montreal, Canada.

[3] Guzek J. J. and Petersen C., (2012), "Mini Twist: A Study of Long-Range Linear Drive by String Twisting", **J. of Mechanisms and Robotics**, No. 1, Vol. 4, pp. 1.

[4] Kumar A. S. and Sankar T. S., (1986), "A new transfer matrix method for response analysis of large dynamic systems", **Pergamon J. Ltd**, No. 4, Vol. 23, pp. 545.

[5] Kort, D. A., (2003), "The Transfer Matrix Method Applied to Steel Sheet Pile Walls", **Int. J. of Numerical and Analytical Methods in Geo mechanics**, No. 6, Vol. 27, pp.453.

[6] Dawson, B. and Davies, M., (1974), "An Improved Transfer Matrix Procedure", **Int. J. of Numerical Methods in Engineering**, No. 1, Vol. 8, pp.111.

[7] Tso, W. K. and Chan, P. C. K., (1973), "Static Analysis of Stepped Coupled Walls by Transfer Matrix Method", **Building Sci. Pergamon Press**, No. 2, Vol. 8, pp. 167.

[8] Ghiatti, G. and Sestieri, A., (1979), "Analysis of Static and Dynamic Structural Problems by a Combined Finite Element-Transfer Matrix Method", **Int. J. of Sound and Vibration**, No. 1, Vol. 69, pp. 35.

[9] Sankar, S. and Hoa, S.V., (1980), "An Extended Transfer Matrix- Finite Element Method for Free Vibration of plates", **Int. J. of Sound and Vibration**, No. 2, Vol. 71, pp. 205.

[10] Huiyu, X., (1994), "A Combined Dynamic Finite Element-Riccati Transfer Matrix Method for Solving Non- Linear Eigenproblems of Vibrations", **Int. J. of Computers and Structures**, No. 6, Vol. 53, pp. 1257.

[11] Rohani, M., (2002), MSc Thesis, "Vibration Analysis of Rotor, Bearing and Membrane System in a Gas Turbine", Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology. (In Persian)

[12] Uhrig, R., (1966), "The transfer matrix method seen as one method of structural analysis among others", **Int. J. of Sound and Vibration**, No. 2, Vol. 4, pp. 136.

[13] Fallah, A., (1999), MSc Thesis, "Lateral Vibration Analysis of Ship's Rotor, Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology. (In Persian)

[14] Farshidianfar A., Hoseinzadeh M., Raghebi M., (2009), "A Novel Way for Crack Detection in Rotors Using Mode Shape Changes", **Aerospace Mechanics J.**, No. 2, Vol. 5, pp. 23.

[15] Pestel E. C., Leckie F. A., Kurtz E. F., (1963), "Matrix Methods in Elastomechanics", **J. of Applied Mechanics**, No. 3, Vol. 31, pp. 574.

[16] Bababake M., (2004), MSc Thesis, "Vibration Analysis of Rotor-Bearing System by Transfer Matrix Method", Department of Mechanical Engineering, Sharif University of Technology. (In Persian)

[17] Godler I., and Sonoda T., (2011), "Performance Evaluation of Twisted Strings Driven Robotic Finger", 8th Int. Conf. on UARI, pp. 542, Incheon, Korea.

[18] Godler I., and Sonoda T., (2011), "Position and Force Control of a Robotic Finger with Twisted Strings Actuation", Int. Conf. on AIM, pp. 611, Budapest, Hungary.

[19] Palli G., Natale C., May C., Melchiorri C., Wurtz T., (2013), "Modeling and Control of the Twisted String Actuation System", **IEEE/ASME Transactions on Mechatronics**, No. 2, Vol. 18, pp. 664.

[20] Palli G., Pan L., Hosseini M., Moriello L., C. Melchiorri C., (2015), "Feedback Linearization of Variable Stiffness Joints Based on Twisted String Actuators", IEEE ICRA, pp. 2742, Washington State Convention Center Seattle, Washington.

[21] Dmitry Popov D., Gaponov I., Ryu J. H., (2013), " A Preliminary Study on a Twisted Strings-based Elbow Exoskeleton", IEEE World Haptics Conf., pp. 479, Daejeon, Korea.

[22] Lei J., Yuejuan L., Dongyang D., (2014), "Adaptive control of Twisted String System for Arm Rehabilitation Robot", Int. Conf. on Information Sci., pp. 1855.

[23] Park I. W. and SunSpiral V., (2014), "Impedance Controlled Twisted String Actuators for Tensegrity Robots", 14th Int. Conf. on CAS, pp. 1331, Gyeonggi-do, Korea.

[24] Muller R., Hessinger M., Schlaak H. F., Pott P. P., (2015), "Modeling and Characterization of Twisted String Actuation for Usage in Active Knee Outhouses", 9th IFAC Symposium on Biological and Medical Systems BMS, No. 20, Vol. 48, pp. 207.

[25] Holzer, H., (1921), "Die Berechnung der Drehschwingungen", Springer. http://www.springer.com/us/book/9783662263419

[26] Myklestad, N.O., (1944), "New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibrations of Airplane Wings and Other Types of Beams", **Aeronaut Sci**., No. , Vol. 6, pp. 153.

[27] Dai, H.L., Wang, L., Qian, Q. and Gan, J., (2012), "Vibration Analysis of Three-Dimensional Pipes Conveying Fluid with Consideration of Steady Combined Force by Transfer Matrix Method", **Applied Mathematics and Computation**, No. 5, Vol. 219, pp. 2453.

[28] Orasanu, N. and Craifaleanu, A., (2011), "Theoretical and Experimental Analysis of the Vibrations of an Elastic Beam with Four Concentrated Masses", SISOM 2011 and Session of the Commission of Acoustics, pp. 471, Bucharest.

[29] Horner G. C., Pilkey W. D., (1978), "The Riccati Transfer Matrix Method", **J. of Mechanical Design**, No. 2, Vol. 100, pp. 297.

[30] Krauss R. W., (2006), PhD. Thesis, "An Improved Technique for Modeling and Control of Flexible Structures", Department of Mechanical Engineering, Georgia University, USA.

[31] He B., Rui X., Wang G., (2007), "Riccati discrete time transfer matrix method for elastic beam undergoing large overall motion", **Springer Sci**., No. 4, Vol. 18, pp. 579.

[32] Krauss R. W., (2011), "Computationally efficient modeling of flexible robots using the transfer matrix method", **J. of Vibration and Control**, No. 5, Vol. 18, pp. 596.

[33] Wang G., Rong B., Tao L., Rui X., (2012), " Riccati Discrete Time Transfer Matrix Method for Dynamic Modeling and Simulation of an Underwater Towed System", **J. of Applied Mechanics**, No. 4, Vol. 79.

[34] Krauss R. and Okasha M., (2013), "Discrete-Time Transfer Matrix Modeling of Flexible Robots under Feedback Control", American Control Conf., Washington, DC, USA.

[35] Lee J. W. and Lee J. Y., (2016), "Development of a transfer matrix method to obtain exact solutions for the dynamic characteristics of a twisted uniform beam", **Int. J. of Mechanical Sci.**, Vol. 105, pp. 215.

[36] Mitiguy P. and Banerjee A. K., (2000), "Determination of Spring Constants for Modeling Flexible Beams".
http://www.maelabs.ucsd.edu/cosmos/resources/wm2d/documentation/FlexibleBeams.p
d

Abstract

One of the oldest means of transmission is string. String twisted around itself or woven into strings, used for transporting force. When the electric motor is connected to one end of the string and the other end is connected to the intended load, applying rotation to the string through the engine is causedstring twists, decreasing the length of the string and consequently the load transfer, due to tensile force produced is. This transmission driving system called twisted string actuator systemhas many applications in robotic devices, due to low weight, cost and friction.

Proposed flexible dynamic system model, includes a string which is connected to electric motor from one and to mass (robotic arm) from the other side. Through rotating the engine, string twists and its length changes caused concentrated mass movement. In order to find answers to the system, discrete method of transfer matrix is employed. Using discrete time transfer matrix method, system model has been studied in two modes. In the first model, the torsional spring and mass elements and in the second model, the elements of the mass, torsion and linear springs are intended and the results are compared with relevant research. By applying the PID system controller, steps response will be obtained. In the following by taking the system as a twisted beam, exact solutions for the dynamic characteristics of a twisted beam through transfer matrix method, in a special mode of modeling the spring-mass elements with evaluation of natural frequencies and mode shapes approach have been investigated.

Keywords:

Actuator System - Twisted String Actuator System - Robotic Arm - Discretization - Transfer Matrix Method – Discrete Time Transfer Matrix Method - Twisted Beam – PID Controller.

Shahrood University of Technology

Faculty of the Mechanic Engineering

MSc Thesis inMechanical Engineering

Modeling and Control of a Robotic Arm Actuated by the Twisted String with Discrete Transfer Matrix

By: Fereshteh Khodaei

Supervisor:

Dr. Mahdi Bamdad

September2016