

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده پردیس خوارزمی

رشته مکانیک گرایش طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

محاسبه ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی داخلی
در یک استوانه توخالی جدار ضخیم دوار از جنس ماده تابعی
در معرض شوک حرارتی

نگارنده: محمدرضا غفورالهی

استاد راهنما:

دکتر مسعود مهدی زاده رخی

شهریور ۱۳۹۵



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره: ۴۲۴۹ / ۳
تاریخ: ۹۵ / ۷ / ۱۰
ویرایش:

فرم شماره ۷: صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای محمد رضا غفورالهی به شماره دانشجویی ۹۲۳۸۲۴۴ رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان محاسبه ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی داخلی در یک استوانه توخالی جدار ضخیم دوار از جنس ماده تابعی در معرض شوک حرارتی که در تاریخ ۹۵/۰۶/۱۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: <u>بسیار خوب امتیاز ۱۸٫۳</u>)	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input type="checkbox"/> مردود
نوع تحقیق: <input checked="" type="checkbox"/> نظری <input type="checkbox"/> عملی		

- ۱- عالی (۲۰ - ۱۹) ۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)
 ۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶) ۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)
 ۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول دکتر مسعود مهدی زاده رخی	مسعود مهدی زاده رخی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی دکتر علی عباسی نژاد		استادیار	
۵- استاد ممتحن اول دکتر محمد باقر تفری		استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم دکتر محمد جعفری		استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده
 تاریخ و امضاء و مهر دانشکده
 پروفسور خوارزمی
 ۱۴

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم

که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یآوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند.

همسرم که نشانه لطف الهی در زندگی من است.

خواهرانم که همراهان همیشگی و پشتوانه‌های زندگی‌ام هستند.

تشکر و قدردانی

برخود لازم می دانم از زحمات کیله اساتید بزرگوام در این مقطع تحصیلی تشکر و قدردانی نمایم.

از استاد راهنمای گرامی جناب دکتر مسعود مهدی زاده رخی که دلسوزانه در به ثمر نشاندن این پایان نامه از هیچ راهنمایی و کمکی دریغ نمودند بسیار سپاسگزارم، چرا که بدون راهنماییهای ایشان انجام این پایان نامه بسیار مشکل می نمود.

همچنین از اساتید ممتحن آقایان دکتر محمد جعفری و دکتر محمد باقر نظری که زحمت داوری این پایان نامه را برعهده دارند، کمال تشکر را دارم.

تعهد نامه

اینجانب **محمدرضا غفورالهی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **مکانیک - طراحی کاربردی** دانشکده پردیس خوارزمی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه محاسبه ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی داخلی در یک استوانه توخالی جدار ضخیم دوار از جنس ماده تابعی در معرض شوک حرارتی تحت راهنمایی دکتر مسعود مهدی زاده رخی متعهد می شوم:

- ❖ تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- ❖ در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- ❖ مطالب مندرج در این پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- ❖ کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University Of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- ❖ حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- ❖ در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا از آن استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضاء دانشجو:

مالکیت نتایج و حق نشر

- ❖ کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و ...) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد.
- ❖ استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در سال های اخیر مواد تابعی به دلیل خواص مکانیکی و گرمایی مطلوب و قابل کنترل به صورت روز افزون مورد توجه مهندسان و محققان قرار گرفته اند. این مواد به صورت همزمان از چقرمگی بالا، استحکام مکانیکی بالای فلزات، مقاومت گرمایی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش مواد سرامیکی بهره می گیرند. در این تحقیق رفتار مواد تابعی تحت شوک های حرارتی- مکانیکی در یک استوانه جدار ضخیم مورد بررسی و تحلیل قرار می گیرد. برای این منظور از معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک جفت شده استفاده می شود. ابتدا این معادلات با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته در قلمرو مکان گسسته سازی می گردد و سپس با استفاده از روش نیومارک در قلمرو زمان حل می شوند. در این پایان نامه شبیه سازی مواد تابعی توسط مدل های میکرومکانیکی متداول برای مواد مرکب و با بهره گیری از المان های ایزو پارامتریک تعمیم یافته که تغییرات خواص ماده را به صورت پیوسته مدل سازی می کنند، انجام می شود. همچنین کلی ترین شکل انتگرال برهمکنش برای ترک محیطی متقارن محوری در یک استوانه تحت بارهای حرارتی و مکانیکی در مواد تابعی استخراج و برای محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی به کار گرفته می شود. کلیه مراحل حل مساله از المان بندی نمونه تا حل معادلات مربوطه و استخراج نتایج در محیط برنامه نویسی نرم افزار MATLAB انجام شده است. صحت و دقت برنامه نوشته شده با استفاده از حل چندین مثال عددی و مقایسه نتایج حاصل از آنها با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مقالات دیگر تایید شده است. در نهایت تاثیر طول ترک، تغییر خواص، سرعت زاویه ای و تغییر فشار داخلی و خارجی در شرایط بارگذاری حرارتی بر روی ضرایب شدت تنش بررسی گردیده است. همچنین نمودارهای تغییرات ضرایب شدت تنش نسبت به زمان در حالت بارگذاری دینامیکی در استوانه ترسیم گردیده است. جنس ماده تابعی مورد استفاده در این مسائل $Ti-6Al-4V/ZrO_2$ می باشد.

کلمات کلیدی: استوانه مدور؛ ترک محیطی؛ المان محدود توسعه یافته؛ مواد تابعی؛ ترموالاستیسیته جفت شده؛ شوک گرمایی- مکانیکی.

فهرست مطالب

فصل اول - مقدمه	۱
۱.۱ مقدمه	۲
۲.۱ مطالعات انجام شده	۴
۳.۱ خلاصه ای از مباحث ارائه شده در این پایان نامه	۹
فصل دوم - مواد تابعی	۱۱
۱.۲ تاریخچه	۱۲
۲.۲ موارد کاربرد مواد تابعی	۱۳
فصل سوم - المان محدود توسعه یافته	۱۹
۱.۳ مقدمه	۲۰
۲.۳ روش المان محدود	۲۰
۳.۳ المانهای ایزوپارامتریک	۲۱
۴.۳ المان محدود توسعه یافته	۲۳
۱.۴.۳ تفکیک واحد المانهای محدود غنی شده	۲۳
۲.۴.۳ بررسی فرایند غنی سازی در روش المان محدود توسعه یافته	۲۵
۳.۴.۳ مدل سازی ترک ها در روش المان محدود توسعه یافته	۲۸
۵.۳ انتگرال گیری عددی به روش گاوس	۳۲
فصل چهارم - معادلات حاکم	۳۵
۱.۴ مقدمه	۳۶
۲.۴ استخراج معادلات حاکم	۳۷
۳.۴ گسسته سازی معادلات حرکت در مختصات استوانه ای	۴۰
۴.۴ گسسته سازی معادلات انرژی	۴۷
۵.۴ انتگرال گیری مستقیم زمانی	۶۲
۱.۵.۴ بررسی پایداری	۶۳
۲.۵.۴ روش نیومارک	۶۵
فصل پنجم - مکانیک شکست دینامیکی	۶۷
۱.۵ مقدمه	۶۸
۲.۵ انتگرال J	۶۹
۳.۵ انتگرال برهمکنش	۷۲
۴.۵ میدان های کمکی	۷۳

- ۵.۵ فرمول بندی غیر تعادلی ۷۴
- ۶.۵ محاسبه ضرایب شدت تنش ۸۰

۸۳ فصل ششم - تحلیل های عددی ۸۳

- ۱.۶ مقدمه ۸۴
- ۲.۶ اعتبارسنجی برنامه نوشته شده ۸۴
- ۱.۲.۶ لوله جدار ضخیم در معرض شوک حرارتی گذرا ۸۵
- ۲.۲.۶ سیلندر جدار ضخیم دوار تابعی تحت بارگذاری دینامیکی ۸۸
- ۳.۲.۶ سیلندر جدار ضخیم ایزوتروپ با ترک محیطی تحت کشش محوری ۹۰
- ۴.۲.۶ لوله ای دارای ضخامت کم و ترک محیطی داخلی تحت کشش یکنواخت ۹۱
- ۳.۶ مثال های حل شده در خصوص میدان تنش، جابجایی و ضریب شدت تنش ۹۱
- ۱.۳.۶ بررسی اثر تغییر خواص بر میدان تنش و جابجایی در استوانه های ترک دار در معرض شوک گرمایی ۹۱
- ۲.۳.۶ بررسی اثر بارگذاری های مختلف بر ضریب شدت تنش در یک استوانه دارای ترک محیطی ۹۷
- ۱.۲.۳.۶ بررسی اثر کشش ساده بر روی ضریب شدت تنش ۹۸
- ۲.۲.۳.۶ بررسی اثر شوک حرارتی بر روی ضریب شدت تنش ۹۹
- ۳.۲.۳.۶ بررسی اثر سرعت زاویه ای بر روی ضریب شدت تنش ۱۰۳
- ۴.۲.۳.۶ بررسی اثر بارگذاری ترکیبی فشار، شوک حرارتی و چرخش ۱۰۷

۱۱۵ فصل هفتم - نتیجه گیری و پیشنهادها ۱۱۵

- ۱.۷ نتیجه گیری ۱۱۶
- ۲.۷ پیشنهادها ۱۱۷

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ تصویر شماتیک ریز ساختاری یک ماده درجه بندی شده تابعی متشکل از سرامیک-فلز [۳۰].... ۱۲
- شکل ۲-۲ عکس برداری از مقطع یک یک ماده تابعی ساخته شده از AL/SIC [۳۱]..... ۱۲
- شکل ۳-۲ تغییر خواص در برش عرضی پوسته یک صدف [۳۰]..... ۱۳
- شکل ۴-۲ پیستون موتورهای احتراق داخلی با پوشش تابعی و بدون پوشش تابعی [۳]..... ۱۴
- شکل ۵-۲ الف-ماده درجه بندی شده تابعی با تغییر خواص تدریجی، ب-ماده درجه بندی شده تابعی با تغییر خواص پله ای [۱]..... ۱۴
- شکل ۶-۲ نمودار تغییرات کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس برای نماهای مختلف [۲]..... ۱۶
- شکل ۷-۲ نمودار تغییرات مدول الاستیسیته برای ماده نمونه اپوکسی/شیشه به ازای n های مختلف [۲] ... ۱۸
- شکل ۸-۲ نمودار تغییرات نسبت پواسون برای ماده نمونه اپوکسی/شیشه به ازای n های مختلف [۲]..... ۱۸
- شکل ۱-۳ مختصات سراسری و محلی در المان چهار وجهی ایزوپارامتریک [۲]..... ۲۱
- شکل ۲-۳ رفتار توابع پرش در محیط تک بعدی برای گرہ های ۱ و ۲ [۵۰]..... ۲۶
- شکل ۳-۳ پارامترهای مربوط به غنی سازی گرہ های اطراف ترک و اطراف نوک ترک [۴۳]..... ۲۷
- شکل ۴-۳ نواحی مختلف مربوط به غنی سازی با تابع H و توابع نوک ترک [۴۴]..... ۲۸
- شکل ۵-۳ نواحی مختلف مربوط به غنی سازی با تابع H [۴۴]..... ۲۸
- شکل ۶-۳ تقسیم بندی المان های شامل ترک برای انتگرال گیری عددی [۱]..... ۳۴
- شکل ۷-۳ تقسیم بندی المان های شامل نوک ترک برای انتگرال گیری عددی [۱]..... ۳۴
- شکل ۱-۴ موقعیت یک المان در مختصات استوانه ای در حالت متقارن محوری..... ۳۸
- شکل ۲-۴ مقدار شعاع طیفی برحسب تغییرات $\Delta t/T$ [۴۸]..... ۶۵
- شکل ۱-۵ مشخصات سیستم مختصات [۴۹]..... ۷۰
- شکل ۱-۶ نمودار توزیع دمایی ماده همگن در زمان ۱۰۰۰ ثانیه..... ۸۶
- شکل ۲-۶ نمودار تنش شعاعی برای ماده همگن در زمان ۱۰۰۰ ثانیه..... ۸۶
- شکل ۳-۶ نمودار توزیع دما (خروجی برنامه) برای پارامتر $n=5$ ۸۷
- شکل ۴-۶ نمودار توزیع تنش شعاعی درحالت ایزوتروپیک..... ۸۹
- شکل ۵-۶ نمودار توزیع تنش محیطی درحالت ایزوتروپیک..... ۸۹
- شکل ۶-۶ نمودار توزیع تنش شعاعی برای پارامترهای مختلف n در زمان ۱۰۰ ثانیه..... ۹۳
- شکل ۷-۶ نمودار توزیع تنش محیطی برای پارامترهای مختلف n در زمان ۱۰۰ ثانیه..... ۹۴
- شکل ۸-۶ نمودار توزیع دما برای پارامترهای مختلف n در زمان ۱۰۰ ثانیه..... ۹۴
- شکل ۹-۶ نمودار ضریب شدت تنش برای پارامترهای مختلف n در زمان ۵۰۰ ثانیه..... ۹۵
- شکل ۱۰-۶ کانتورهای جابجایی در راستای شعاعی (الف) و در راستای محوری (ب) برای $n=0/6$ در زمان ۱۰۰ ثانیه..... ۹۵
- شکل ۱۱-۶ کانتورهای تنش در راستای شعاعی (الف) و در راستای محیطی (ب) برای $n=0/6$ در زمان ۱۰۰ ثانیه..... ۹۶
- شکل ۱۲-۶ کانتورهای دمایی برای n های مختلف در زمان ۱۰۰ ثانیه (الف) و زمان ۵۰۰ ثانیه (ب)..... ۹۷
- شکل ۱۳-۶ نمودار تغییرات ضریب شدت تنش برحسب پارامترهای مختلف n برای $a = 0/05$ ۹۹

- شکل ۶-۱۴ نمودار ضریب شدت تنش برحسب پارامترهای مختلف n ۱۰۰
- شکل ۶-۱۵ ضریب شدت تنش نسبت به زمان برای $a = ۰/۰۵$, $n = ۰/۶$ ۱۰۱
- شکل ۶-۱۶ تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به طول ترک و پارامتر n ۱۰۲
- شکل ۶-۱۷ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب طول ترک به ضخامت استوانه..... ۱۰۵
- شکل ۶-۱۸ تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به سرعت زاویه ای..... ۱۰۵
- شکل ۶-۱۹ تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان برحسب پارامترهای مختلف n ۱۰۸
- شکل ۶-۲۰ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب طول ترک های مختلف برای $n = ۰$ ۱۰۹
- شکل ۶-۲۱ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب طول ترک های مختلف برای $n = ۰/۳$ ۱۱۰
- شکل ۶-۲۲ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب طول ترک های مختلف برای $n = ۰/۵$ ۱۱۰
- شکل ۶-۲۳ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب سرعت زاویه ای مختلف برای $n = ۰/۶$ و $a = ۰/۰۵$ ۱۱۱
- شکل ۶-۲۴ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب فشارهای داخلی مختلف برای $n = ۰/۶$ و $a = ۰/۰۵$ ۱۱۲
- شکل ۶-۲۵ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب فشارهای خارجی مختلف برای $n = ۰/۶$ و $a = ۰/۰۵$ ۱۱۳

فهرست جداول

- جدول ۱-۶ خواص مکانیکی در دیواره داخلی و خارجی [۵۳]..... ۸۵
- جدول ۲-۶ خواص مکانیکی سیلندر استوانه ای [۵۳]..... ۸۷
- جدول ۳-۶ خواص مکانیکی استوانه ایزوتروپیک دوار..... ۸۸
- جدول ۴-۶ خواص سیلندر ایزوتروپیک..... ۹۰
- جدول ۵-۶ خواص مکانیکی تیتانیوم (فلز) و زیرکونیوم (سرامیک) [۳۲]..... ۹۲
- جدول ۶-۶ حداکثر ضریب شدت تنش مد اول در زمان ۵۰۰ ثانیه..... ۹۲
- جدول ۷-۶ حداکثر ضریب شدت تنش به ازای پارامترهای مختلف n..... ۹۹
- جدول ۸-۶ بیشینه مقدار ضریب شدت تنش بر حسب نسبت طول ترک به شعاع استوانه..... ۱۰۲
- جدول ۹-۶ حداکثر مقدار ضریب شدت تنش به ازای پارامترهای مختلف n..... ۱۰۳
- جدول ۱۰-۶ تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به طول ترک..... ۱۰۴
- جدول ۱۱-۶ ضریب شدت تنش به ازای پارامترهای مختلف n..... ۱۰۵
- جدول ۱۲-۶ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای پارامترهای مختلف n..... ۱۰۷
- جدول ۱۳-۶ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای طول ترک های مختلف..... ۱۰۹
- جدول ۱۴-۶ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای طول ترک مختلف..... ۱۱۱
- جدول ۱۵-۶ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای طول ترک مختلف..... ۱۱۲
- جدول ۱۶-۶ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای فشارهای خارجی مختلف..... ۱۱۳

فهرست علائم

A	مساحت المان، (m^2)
A^*	مساحت ناحیه انتگرال برهمکنش، (m^2)
a	طول ترک، (m)
\mathbf{a}	بردار مجهولات گره ای مربوط به توابع شکل المان محدود
B	ضخامت نمونه، (m)
B_f	بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، (N/m^3)
B_x, B_y	مولفه های بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، (N/m^3)
\mathbf{b}	بردار مجهولات گره ای مربوط به توابع شکل غنی شده با تابع هویساید
\mathbf{c}	بردار مجهولات گره ای مربوط به توابع شکل غنی شده نوک ترک
$[C]$	ماتریس میرایی
C_{ijkl}	مولفه های ماتریس تشکیل دهنده ماده، (N/m^2)
c_r	سرعت موج ریلی، (m/sec)
c_s	سرعت موج برشی، (m/sec)
c_t	ظرفیت گرمایی ویژه، ($J/(kg \cdot ^\circ K)$)
$[D]$	ماتریس خواص ماده، (N/m^2)
e	خروج از مرکز، (m)
E	مدول یانگ، (N/m^2)
F	بردار نیروهای گره ای، (N)
F_m	توابع غنی ساز نوک ترک، ($m^{0.5}$)
F_r	بردار نیرو، (N)
G	مدول صلبیت برشی، (N/m^2)
H	تابع هویساید
J	انتگرال J ، (N/m)
Ja	ماتریس ژاکوبی
k	هدایت گرمایی، ($W/(m \cdot ^\circ K)$)
K	مدول حجمی، (N/m^2)
$[K]$	ماتریس سفتی
KE	چگالی انرژی جنبشی، (N/m^2)
K_I	مد I ضریب شدت تنش، ($N \cdot m^{-1.5}$)
K_{ID}	ضریب شدت تنش بی بعد
K_{II}	ضریب شدت تنش مد II، ($N \cdot m^{-1.5}$)

K_T	ضریب شدت تنش گرمایی، ($N.m^{-1.5}$)
m	بردار نرمال بر مسیر انتگرال گیری در انتگرال J
$[M]$	ماتریس جرم، (kg)
MI	انتگرال برهمکنش، (N/m)
ns	تعداد توابع شکل المان محدود توسعه یافته
N	تابع شکل روش المان محدود
N_A	مجموعه گره های شبکه
N_H	مجموعه گره های اطراف مسیر ترک
N_C	مجموعه گره های المان های نوک ترک
n_x, n_y	بردارهای نرمال در جهت های x و y
nQ	تعداد نقاط گوسی
p	پارامتر تعیین کننده پروفیل تغییر کسر حجمی اجزای تشکیل دهنده ماده تابعی، بی بعد
q	تابع وزنی برای محاسبه انتگرال برهمکنش، بی بعد
q_i	مولفه های بردار شار گرمایی بر واحد سطح، (W/m^2)
R	گرمای تولید شده بر واحد حجم، (W/m^3)
r	مولفه دستگاه مختصات قطبی، (m)
S	بردار توابع شکل روش المان محدود توسعه یافته
SE	چگالی انرژی کرنشی، (N/m^2)
T	دما، ($^{\circ}K$)
Tr	بردار نیروی سطحی بر واحد سطح، (N/m^2)
t	زمان، (sec)
t_D	زمان بی بعد شده
t_x^n, t_y^n	مولفه های بردار نیروی سطحی، (N/m^2)
u	بردار جابجایی
V	حجم، (m^3)
V_i	کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس یک ماده تابعی
V_m	کسر حجمی ماتریس یک ماده تابعی
w	توابع وزنی در انتگرال گیری گوسی
W	ارتفاع نمونه، (m)
X_1, X_2	مولفه های دستگاه مختصات دکارتی سراسری، (m)
x, y	مولفه های دستگاه مختصات دکارتی، (m)
Z	تابع فاصله علامت دار، (m)

علامت های یونانی

α_t	ضریب انبساط گرمایی، ($1/^\circ\text{K}$)
β	عبارت جفت کننده معادلات ترموالاستیک کلاسیک، ($\text{N}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{K})$)
γ, ζ	پارامترهای فرمول بندی نیومارک، بی بعد
δ_{ij}	دلتای کرونگر، بی بعد
ε	تانسور کرنش، بی بعد
ε^{aux}	تانسور کرنش کمکی، بی بعد
ε_{ij}^m	مولفه های تانسور کرنش مکانیکی
θ	تغییر دما، ($^\circ\text{K}$)
λ, μ	ثواب لامه، (N/m^2)
ξ, η	مولفه های دستگاه مختصات محلی در المان های ایزو پارامتریک
ν	نسبت پواسون، بی بعد
ρ	چگالی، (kg/m^3)
φ	مولفه دستگاه مختصات قطبی، بی بعد
ϕ	تابع تفکیک واحد
σ	تانسور تنش، (N/m^2)
σ^{aux}	تانسور تنش کمکی، (N/m^2)
Φ	تابع شکل غنی شده برای المان های مسیر ترک، بی بعد
Ψ	تابع شکل غنی شده برای المان های نوک ترک، بی بعد
Δ	بردار مجهولات گره ای
Γ	مسیر انتگرال گیری در انتگرال J
ς	زاویه ترک

بالانویس ها

aux	مربوط به میدان های کمکی
E	مربوط به حالت الاستیک
i	مربوط به ماده افزوده شده به ماتریس ماده تابعی
m	مربوط به ماتریس ماده تابعی و حالت مکانیکی
n	مربوط به بردار نرمال n
s	مربوط به حالت برهم نهی
T	مربوط به دما
u, v	به ترتیب مربوط به جابجایی در جهت محورهای مختصات افقی و قائم

زیر نویس ها

<i>g</i>	مربوط به مختصات سراسری
<i>h</i>	شمارنده، مربوط به گره ها در یک المان
<i>i</i>	شمارنده، مربوط به مولفه x دستگاه مختصات دکارتی و نیز ماده افزوده شده به ماتریس
<i>j</i>	شمارنده، مربوط به مولفه y دستگاه مختصات دکارتی
<i>k</i>	شمارنده
<i>l</i>	شمارنده مربوط به توابع شکل و نیز نشان دهنده مختصات محلی
<i>L</i>	مربوط به طرف چپ
<i>m</i>	شمارنده، مربوط به توابع غنی سازی نوک ترک و نیز ماتریس ماده تابعی
<i>n</i>	شمارنده، مربوط به گره ها، گام زمانی و مولفه های دستگاه مختصات
<i>ne</i>	شمارنده، مربوط به گره ها در المان e
<i>ns</i>	شمارنده، مربوط به توابع شکل المان محدود توسعه یافته
<i>R</i>	مربوط به طرف راست
<i>s</i>	مربوط به سطوح مرزی
<i>tip</i>	مربوط به نوک ترک
$0 (\circ)$	مربوط به حالت اولیه
۱ تا ۹	شمارنده

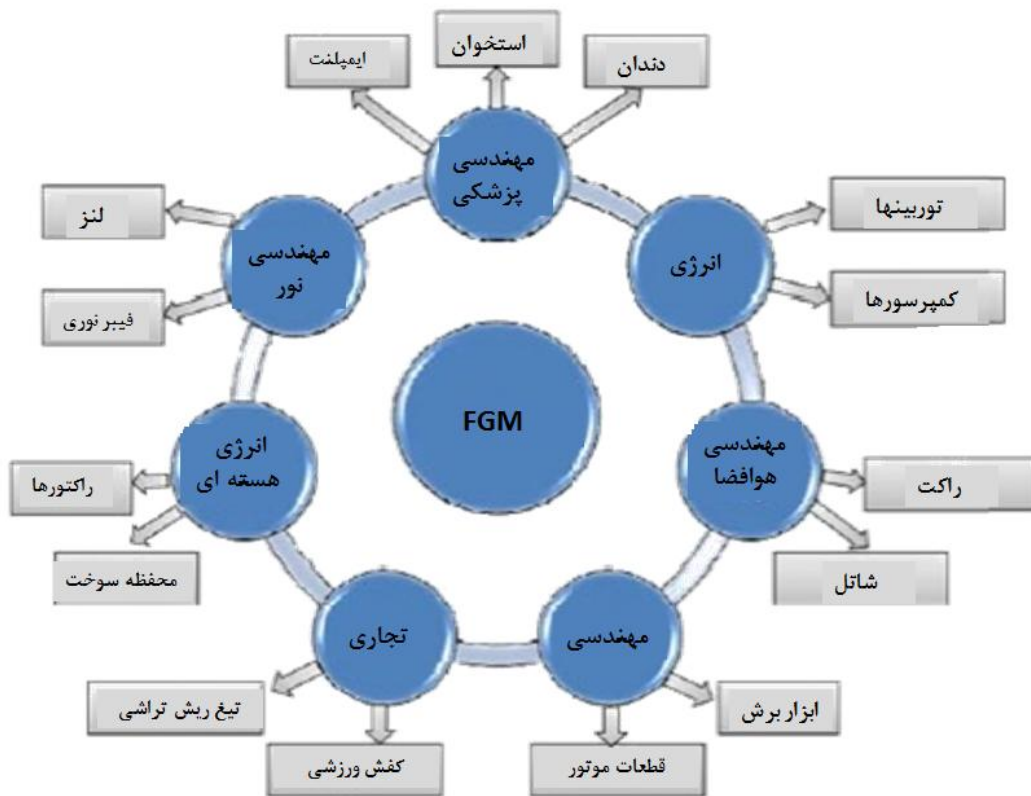
فصل اول

مقدمه

۱.۱ مقدمه

مواد تابعی از جمله موادی هستند که به واسطه‌ی تغییر تدریجی ترکیبات شیمیایی، توزیع و جهت‌گیری و یا اندازه فاز تقویت‌کننده در یک یا چند بُعد خواص متفاوتی را در مناطق مختلف از خود بروز می‌دهند. این تغییر تدریجی ساختار و خواص منجر به گسترش کاربرد این گونه مواد شده است، به خصوص در موادی که نیاز به خواص متفاوت در نواحی مختلف یک سازه باشد. در این مواد به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آنها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که موجب استحکام ماده می‌شود و همین تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد تابعی موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود [۱].

همانطور که در شکل (۱-۱) ملاحظه می‌شود مواد تابعی با توجه به نوع خواص و رفتار مدنظر، می‌توانند کاربردهای گسترده‌ای داشته باشند. این خواص شامل خواص حرارتی، خواص مکانیکی (شامل الاستیک، تغییر شکل‌های پلاستیک، شکست، پوشش‌دهی)، خواص و رفتارهای ترمودینامیکی و خواص نوری و الکتریکی هستند. با توجه به کاربردهای مختلف این مواد در صنایع هوایی، نظامی و دفاعی، بررسی رفتار شکست این مواد از اهمیت و ضرورت بالایی برخوردار است [۲].



شکل ۱-۱ کاربرد مواد تابعی در صنایع مختلف [۳]

برخی از مزایا و معایب ماده تابعی را می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

۱. چقرمگی شکست بالا
۲. کاهش ضرایب شدت تنش در نوک ترک
۳. کاهش ضرایب تمرکز تنش
۴. قابلیت طراحی پروفیل اختلاط به منظور عملکرد بهینه در شرایط حاکم
۵. داشتن خواص چندگانه مانند مقاومت به سایش و مقاومت به شکست بالا [۳]

از جمله کاربردهای مهم این مواد استفاده از آنها در ساخت مخازن تحت فشار است. مخازن تحت فشار دارای کاربردهای مختلف مهندسی می‌باشند که بسته به نوع استفاده آنها، انواع مختلف

بارگذاری‌های مکانیکی به آنها اعمال می‌گردد. از دیدگاه مکانیک شکست، جهت تعیین عمر و زمان سرویس و بازدیدهای نوبه‌ای این مخازن، تعیین ضرایب شدت تنش ضروری می‌باشد. روش‌های مختلف عددی (مثل روش المان محدود و روش المان‌های مرزی) و تحلیلی (مثل توابع پتانسیل و روش تابع گرین) برای محاسبه‌ی این ضرایب وجود دارد که هر یک دارای مزایا و معایب خاص خود می‌باشند. از طرفی اهمیت بارهای دینامیکی و ضربه‌ای بر روی سازه‌ها بسیار بیشتر از بارهای استاتیکی است به خصوص در سازه‌هایی که دارای ترک می‌باشند؛ یا احتمال وجود ترک در آنها زیاد است [۲].

۲.۱ مطالعات انجام شده

تاکنون تحقیقات زیادی بر روی رفتار استوانه‌های دارای ترک انجام شده است که به عنوان نمونه به چند مورد اشاره می‌شود. مشی و واتانابه^۱ فرم بسته ضرایب تنش را برای استوانه‌ی محدود همگن که دارای یک ترک محیطی بود به دست آوردند. آنها همچنین تأثیر طول استوانه و همچنین موقعیت ترک بر این ضرایب را نیز بررسی کردند. لبه‌های استوانه فقط می‌توانستند جابجایی محوری داشته باشند و استوانه تحت توزیع دمای شعاعی قرار داشت. نتایج نشان داد که این ضرایب هنگامی بیشینه می‌شوند که ترک در وسط استوانه قرار داشته باشد [۴].

راجو و نیومن^۲ ضرایب شدت تنش را با استفاده از روش المان محدود سه بعدی برای استوانه‌های دارای ترک نیمه بیضوی درون یا بیرون استوانه محاسبه نمودند. آنها با استفاده از اصل بر هم گذاری چهار نوع بارگذاری یکنواخت، خطی، درجه دو و سه را مورد بررسی قرار دادند [۵]. آنها همچنین در مقاله‌ای دیگر ترک‌های نیمه بیضوی درون استوانه تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند [۶].

¹ Meshii.T. and K.Watanabe

² Raju.i. and j.newman

سیفی^۱ با بکار بردن روش تابع وزنی ضرایب شدت تنش را برای ترک سطحی داخلی استوانه ساخته شده از مواد تابعی مورد بررسی قرار داد. خصوصیات مکانیکی ماده با استفاده از یک تابع نمایی در راستای شعاعی تعریف شده است. او اثرات اعمال فشار، کسر حجمی، اندازه ترک و ضخامت استوانه را بر روی ضرایب شدت تنش مورد بررسی قرار داد و به این نتیجه رسید که اثرات تغییر کسر حجمی بر روی ضرایب شدت تنش بیشتر از سایر موارد است [۷].

اشراقی و سلطانی^۲ با استفاده از تابع وزنی ضرایب شدت تنش را برای ترک حلقوی داخلی درون استوانه‌ای ساخته شده از مواد تابعی به دست آوردند. آنها همچنین اثرات ابعاد استوانه، عمق ترک و تغییر ماده را مورد بررسی قرار دادند. در تحقیق آنها هدف به دست آوردن تابع وزنی برای مواد تابعی بود [۸].

پریدن^۳ و همکاران ضرایب شدت تنش را برای یک استوانه دارای ترک نیمه بیضوی مورد بررسی قرار دادند. استوانه در معرض گشتاور پیچشی خالص قرار داشت و روش حل بر مبنای المان محدود استوار بود. آنها تأثیر طول و عمق ترک در سطح خارجی استوانه را بررسی نمودند [۹].

وارفولومیو^۴ و همکارانش مد I ضرایب شدت تنش و بازشدگی دهانه ترک داخلی را با استفاده از تابع وزن برای استوانه تحت بار یکنواخت متقارن محوری با بکارگیری روش المان‌های مرزی محاسبه نمودند [۱۰].

چن^۵ با استفاده از کامپلیانس و حل مسئله مقدار مرزی ضرایب شدت تنش و جابجایی را برای دو ترک با طول مختلف در استوانه محدود تحت تنش کششی به دست آورد [۱۱]. همچنین او در مقاله‌ای دیگر استوانه‌ای ساخته شده از مواد تابعی که دارای ترک‌های داخلی و خارجی سراسری بود

¹ Seifi.R.

² Eshraghi and n.soltani

³ Predan j.

⁴ Varfolomeyev i.m.

⁵ Chen y.

را مورد بررسی قرار داد. استوانه تحت تنش طولی قرار داشت و خواص ماده از یک تابع نمایی پیروی می‌کرد. برای محاسبه ضرایب شدت تنش نیز از روش انرژی استفاده شده بود [۱۲].

لی^۱ یک استوانه طویل همگن را که در انتهای آن بار برشی قرار داده شده بود و دارای یک ترک محیطی بود بررسی کرد و در نهایت ضرایب شدت تنش برای اندازه‌های مختلف ترک را به دست آورد [۱۳].

جونز^۲ با استفاده از روش تابع وزن ضرایب شدت تنش ناشی از بارگذاری حرارتی گذار را در استوانه‌ای با ترک محیطی داخلی به دست آورد. در تحقیق او انتگرال تابع وزن به صورت عددی محاسبه شده است [۱۴].

بیرینسی^۳ و همکاران استوانه‌ای را که درون و بیرون آن دارای روکش فلزی از جنس‌های متفاوت بود مورد بررسی قرار داد. بارگذاری محوری به استوانه اعمال می‌شد و ضرایب شدت تنش با حل عددی معادله انتگرال منفرد به دست آمدند [۱۵].

گربنر و استراسمیر^۴ لوله‌ای را با طول بی‌نهایت که یک ترک سرتاسری در درون آن ایجاد شده بود را با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند. آنها لوله را تحت بار کششی قرار دادند و ضریب شدت تنش مد یک را محاسبه نمودند [۱۶].

تران و جنیات^۵ با استفاده از روش انرژی و استفاده از روش المان محدود توسعه یافته ضرایب شدت تنش را برای استوانه دارای ترک محیطی و بار دیگر برای یک ترک دایره‌ای مرکزی مورد بررسی قرار دادند [۱۷].

¹ Lee, D.S.

² Jones, I.

³ Birinci, A.

⁴ Grebner, H. and U. Strathmeier

⁵ Tran, V.X. and S. Geniaut

لوئیس و وانگ^۱ استوانه ترک دار با اندازه‌های متفاوت را با استفاده از روش المان محدود تحت بارگذاری‌های مختلف خطی، درجه دو و درجه سه تحلیل نمودند و با استفاده از تابع وزن، تنش T را محاسبه نمودند [۱۸].

قاجار و نبوی^۲ با بکار بردن روش تابع وزنی حل بسته ضرایب شدت تنش حرارتی را برای استوانه دارای ترک محیطی داخلی در حالت بارگذاری حرارتی پایدار با استفاده از روش المان محدود ارائه نمودند. در این مقاله از توابع وزنی جهت بررسی ترک با عمق‌های مختلف در بررسی استوانه های جدار نازک و جدار ضخیم استفاده می شود [۱۹].

کورتینز و داتی^۳ ضرایب شدت تنش مد یک را با استفاده از یک روش تحلیلی برای تیرهای باز بررسی کردند. این روش بر اساس مفهوم نوع گسترش انرژی استوار بود [۲۰].

شارما^۴ و همکارانش با بکار بردن روش المان محدود توسعه یافته ضرایب شدت تنش را برای ترک نیمه بیضوی محوری و حلقوی در یک لوله خمیده محاسبه نمودند. لوله تحت فشار داخلی و خمش قرار داشت و ترک در دو حالت سطح بیرونی و داخلی مورد بررسی قرار گرفته بود. در مقاله آنها از روش تفکیک واحد برای محاسبه تقریب جابجایی غنی‌سازی استفاده شد. در نهایت با استفاده از انتگرال برهمکنش ضرایب شدت تنش را محاسبه نمودند [۲۱].

مانیکانتا^۵ و همکاران با به کار بردن نرم افزار انسیس یک استوانه تو خالی را که دارای ترک نیمه بیضوی بر روی سطح خارجی و در معرض پیچش بود را مورد بررسی قرار دادند. آنها ضرایب شدت تنش مد ترکیبی را با استفاده از انتگرال برهم کنش محاسبه نمودند [۲۲].

¹ Lewis,t. and X.Wang

² Ghajar,r. and S.Nabavi

³ Cortinez,V.H. and F.E Dotti

⁴ Sharma,k.

⁵ Manikanta,H.O.

مولیک و ساهو^۱ ضرایب شدت تنش را برای یک ترک نیمه بیضوی داخل استوانه‌ای ضخیم مورد بررسی قرار دادند. آنها از روش تابع وزنی برای به دست آوردن این ضرایب استفاده کردند [۲۳].

نبوی و کامیاب حل بسته ضرایب شدت تنش حرارتی را با بکار بردن تابع وزن در استوانه‌ی جدار ضخیم حاوی ترک محیطی تعیین کردند [۲۴].

قاجار و همکاران به بررسی ضرایب شدت تنش مد اول ترک محیطی نیم بیضوی در سطح خارجی استوانه با نسبت شعاع به ضخامت ۳۰ پرداختند. در این تحقیق با استفاده از میدان تنش و توابع وزن در استوانه ترک دار روابط صریحی برای ضرایب شدت تنش به دست آوردند و نتایج حاصل حاکی بر آن بود که ضرایب شدت تنش بی بعد عمیق ترین نقطه و نقاط سطحی ترک با افزایش نسبت بار به ترتیب کاهش و افزایش می‌یابند [۲۵].

شریعتی و همکاران ضرایب شدت تنش را برای یک ترک دایروی درون استوانه‌ای از مواد تابعی در بارگذاری استاتیکی- دینامیکی مورد بررسی قرار دادند. در این مقاله با بکار بردن فرم ضعیف و تقریب وزنی گلرکین معادلات حرکت گسسته‌سازی شد و با جایگذاری جایجایی‌ها برحسب توابع غنی‌سازی برای نوک ترک معادلات استخراج و در قلمرو زمان به روش نیومارک حل شد. تغییر خواص ماده تابعی در جهت محور شعاعی رخ می‌دهد [۲۶].

شاهانی و همکاران رشد ترکهای سطحی واقع بر سطح بیرونی استوانه‌های جدار ضخیم تحت اعمال گشتاور خمشی و همچنین بارگذاری مرکب (گشتاور خمشی و پیچشی) را مورد بررسی قرار دادند. ترک‌های اولیه با استفاده از وایرکات روی استوانه‌هایی ایجاد گردیده است. سپس قطعات توسط یک دستگاه تست خستگی مرکب تحت بارگذاری خمشی و بارگذاری مرکب قرار گرفت با محاسبه تنش در محل ترک، ضرایب شدت تنش با استفاده از اندازه گیری ابعاد ترک که بصورت نیم بیضوی رشد کرده است محاسبه و با نتایج بدست آمده از المان محدود مقایسه شده است [۲۷].

¹ Moulick, S.K. and Y.K.Sahu

شاهانی و حبیبی به بررسی ترک‌های نیم بیضوی سطحی واقع بر سطح بیرونی استوانه جدار ضخیم تحت اعمال گشتاور خمشی پرداختند. در این تحلیل با استفاده از مدل‌سازی سه بعدی اجزا محدود به منظور استفاده از چگالی تنش بالا در نقاط جبهه ترک و جلوگیری از ازدیاد بی‌رویه المان‌ها از تکنیک زیر مدل استفاده نمودند. برای مدل‌سازی از المان ایزوپارامتریک ۲۰ گره ای در نقاط عادی و از شکل منفرد این المان در جبهه ترک استفاده شده است [۲۸].

طهرانی و طالبیان به تحلیل مخازن استوانه‌ای ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی بصورت متقارن محوری پرداختند. در این بررسی توزیع خواص مکانیکی مواد در راستای ضخامت پیوسته و به صورت تابع وزنی در نظر گرفته شده است. با بکارگیری معادلات موضعی تعادل در مختصات استوانه‌ای، دستگاه معادلات دیفرانسیل کوپل با مشتقات جزئی و ضرایب متغیر به دست آمد که برای حل آن از روش اجزاء محدود استفاده شده است [۲۹].

۳.۱ خلاصه ای از مباحث ارائه شده در این پایان نامه

در بررسی مقالات مرتبط با شکست دینامیکی مواد تابعی تاکنون مطالعات اندکی در خصوص شوک های حرارتی به ترک های محیطی حلقوی با استفاده از معادلات کوپل ترموالاستیک کلاسیک به طور عددی در استوانه ها انجام پذیرفته است. بنابراین با توجه به پرکاربرد بودن ماهیت هندسی این سازه ها در صنایع مختلف موضوع پایان نامه حاضر به بررسی این پدیده اختصاص یافته است.

در فصل دوم مواد تابعی، اهمیت و کاربرد آنها به طور مختصر معرفی و نحوه مدل سازی آنها در این تحقیق با استفاده از مدل های میکرومکانیکی ارائه می شود.

در فصل سوم به معرفی و نحوه بکارگیری روش المان محدود توسعه یافته در مسائل ترک ترموالاستیک اختصاص یافته است.

در فصل چهارم معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک جفت شده با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته در قلمرو مکان گسسته سازی شده و به شکل ماتریسی مونتاژ می شوند. نحوه حل معادلات ماتریسی استخراج شده نیز با استفاده از روش نیومارک مورد بررسی قرار می گیرد.

در فصل پنجم یک فرمول بندی کلی برای انتگرال برهمکنش در مواد تابعی تحت بارهای گرمایی و مکانیکی در مختصات استوانه ای استخراج می شود و شیوه بدست آوردن ضرایب شدت تنش دینامیکی با استفاده از انتگرال برهمکنش مورد بحث قرار می گیرد.

فصل ششم به حل مثال های عددی اختصاص یافته است. در این فصل سه مثال حل می شود که هدف از حل آنها بررسی صحت و دقت نتایج حاصل از روش ارائه شده و برنامه نوشته شده در این تحقیق است. در ادامه نیز تاثیر پروفیل تغییر خواص ماده تابعی، تاثیر طول ترک و اثر چرخش بر روی استوانه ساخته شده از جنس ماده تابعی $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ مورد بحث و بررسی قرار می گیرد.

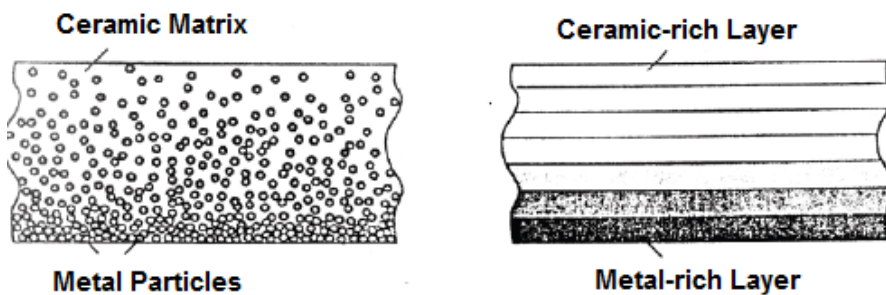
نتیجه گیری و پیشنهادات نیز در غالب فصل هفتم این پایان نامه ارائه شده است.

فصل دوم

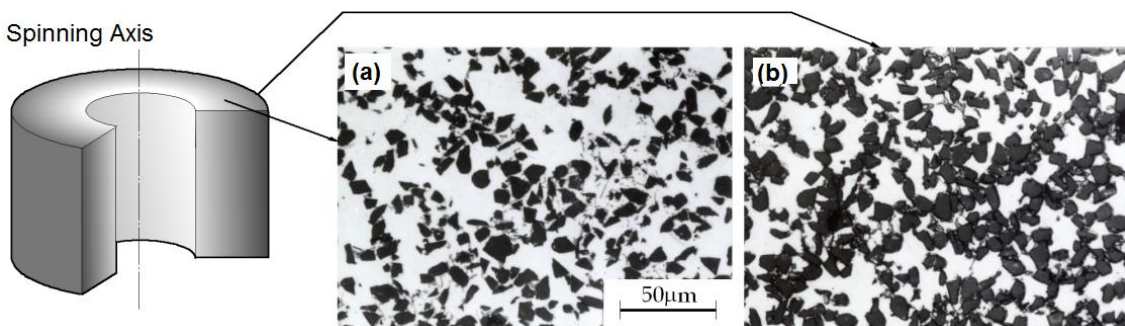
مواد تابعی

۱.۲ تاریخچه

نخستین نمونه از مواد تابعی در سال ۱۹۸۴ در منقطه سندایی ژاپن در آزمایشگاه هوا فضای نینو تولید شد. نوع رایج این مواد ترکیب پیوسته‌ای از فلزات و سرامیک‌ها می‌باشد که از مخلوط نمودن پودر آنها به دست می‌آیند. نسبت این ترکیب در جهت ضخامت جسم متغیر بوده و چگالی ذرات فلز معلق در بستر سرامیک از سطح فلزی تا سطح سرامیکی توسط یک تابع معین که می‌تواند خطی، غیر خطی یا نمایی باشد کاهش یا افزایش یابد. تصویر شماتیک یک ماده FG متشکل از فلز - سرامیک در شکل (۱-۲) مشاهده می‌گردد. در شکل (۲-۲) تصاویر عکس برداری شده توسط میکروسکوپ نوری از مقطع یک FGM از قبیل الماس - آلومینیوم (Al/Sic) مشاهده می‌شود.



شکل ۱-۲ تصویر شماتیک ریز ساختاری یک ماده درجه بندی شده تابعی متشکل از سرامیک-فلز [۳۰]



شکل ۲-۲ عکس برداری از مقطع یک ماده تابعی ساخته شده از AL/SIC [۳۱]

همان گونه که اشاره شد امتیاز اصلی مواد درجه بندی شده تابعی مقاومت بسیار بالای آنها در برابر محیط‌های با درجه حرارت بالا (تغییرات دمایی بالا) می‌باشد به گونه‌ای که مؤلفه سرامیکی ماده به دلیل ضریب هدایت حرارتی پایین باعث مقاومت در برابر دماهای بسیار بالا می‌شود. از سوی دیگر مؤلفه فلزی باعث جلوگیری از رشد ترک و شکست ماده در اثر تنش‌های حرارتی ایجاد شده می‌شود. همچنین پیوستگی تغییرات زیرساختاری باعث امتیاز ماده درجه بندی شده تابعی نسبت به انواع مواد مرکب لایه‌ای گردیده است. همانند دیگر مواد ساخته شده به دست بشر که نمونه‌هایی از آنها را می‌توان در طبیعت یافت، مواد تابعی نیز نمونه‌هایی در طبیعت دارند.

شکل (۲-۳) برش عرضی از پوسته یک صدف می‌باشد که تغییر پیوسته ماده در سطح این پوسته کاملاً در شکل ظاهری آن مشخص است. به تنوع ماده در رابطه با شکل ظاهری توجه فرمایید.



شکل ۲-۳ تغییر خواص در برش عرضی پوسته یک صدف [۳۰]

۲.۲ موارد کاربرد مواد تابعی

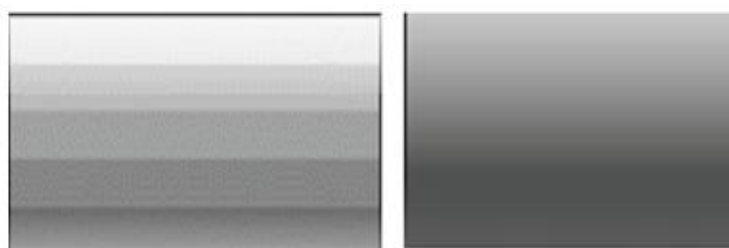
از جمله کاربردهای اصلی این مواد می‌توان به استفاده در راکتورهای هسته‌ای (مواد تشکیل دهنده دیوار داخلی راکتور)، استفاده در صنایع شیمیایی (غشاءها و کاتالیت‌ها)، استفاده در مهندسی پزشکی (کاشت دندان مصنوعی، استخوان‌ها یا اندام‌های مصنوعی)، فناوری‌های نوین مانند موتورهای سرامیکی و پوشش در برابر خوردگی و حرارت اشاره کرد. همچنین این مواد در ساخت صفحات و

پیوسته‌های مخازن - رآکتورها، توربین‌ها و دیگر اجزاء ماشین‌ها کاربرد زیادی دارند. در مواد تابعی هرم گسستگی در محل اتصال لایه‌ها وجود دارد. زیرا همان گونه که گفته شد ترکیب عناصر پیوسته و تدریجی می‌باشد. از دیگر مزایای مواد درجه‌بندی شده تابعی استفاده از آنها در ساخت پوشش‌های حرارتی می‌باشد.



شکل ۲-۴ پیستون موتورهای احتراق داخلی با پوشش تابعی و بدون پوشش تابعی [۳]

ماده سرامیک مقاومت دمایی بالایی را به خاطر رسانایی گرمایی کم دارا می‌باشد و ماده فلزی به دلیل خاصیت چکش‌خواری از شکست یا ترک به علت تنش حرارتی ممانعت به عمل می‌آورد. دو روش برای مدل‌سازی ماده تابعی وجود دارد. در روش اول جزء ماده یا کسر حجمی به طور پیوسته از یکی به دیگری همان‌طور که در شکل (۲-۵ الف) نشان داده شده است تغییر می‌کند. در روش دوم اجزاء مواد می‌توانند به صورت غیر پیوسته و مرحله به مرحله مطابق شکل (۲-۵ ب) تغییر کنند. هر دو حالت از نظر ساختاری ماده تابعی در نظر گرفته می‌شود.



(ب)

(الف)

شکل ۲-۵ الف-ماده درجه بندی شده تابعی با تغییر خواص تدریجی، ب-ماده درجه بندی شده تابعی با تغییر خواص پله ای [۱]

تاکنون تکنیک‌های مختلفی برای ساخت مواد تابعی شامل رسوب سازی با بخار شیمیایی^۱ (CVD)، رسوب با بخار فیزیکی (PVD)، متالوژی پودر، پاشش پلاسما، آبرکاری به کمک برق و سنتز احتراق به کار گرفته شده است [۳].

مهمترین مختصه مواد تابعی تغییر پیوسته خصوصیات فیزیکی است. تغییر تدریجی کسر حجمی مواد تشکیل دهنده یک ماده تابعی، به تغییر یکنواخت و پیوسته خواص ماده از یک سطح به سطح دیگر منجر می‌شود. بنابراین مشکلات فصل مشترک از بین می‌روند، تمرکز تنش کاهش یافته و توزیع تنش یکنواخت‌تری نتیجه می‌شود [۲].

در این تحقیق فرض می‌شود که تغییر خواص ماده در جهت شعاع استوانه رخ می‌دهد. همچنین فرض می‌شود که ماده تابعی از دو جزء تشکیل شده باشد؛ ماتریس و ماده افزوده شده به آن. در این تحقیق کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس (V_i) از تابع نمایی زیر پیروی می‌کند.

$$V_i(r) = \left(\frac{r - R}{W} \right)^n \quad (1-2)$$

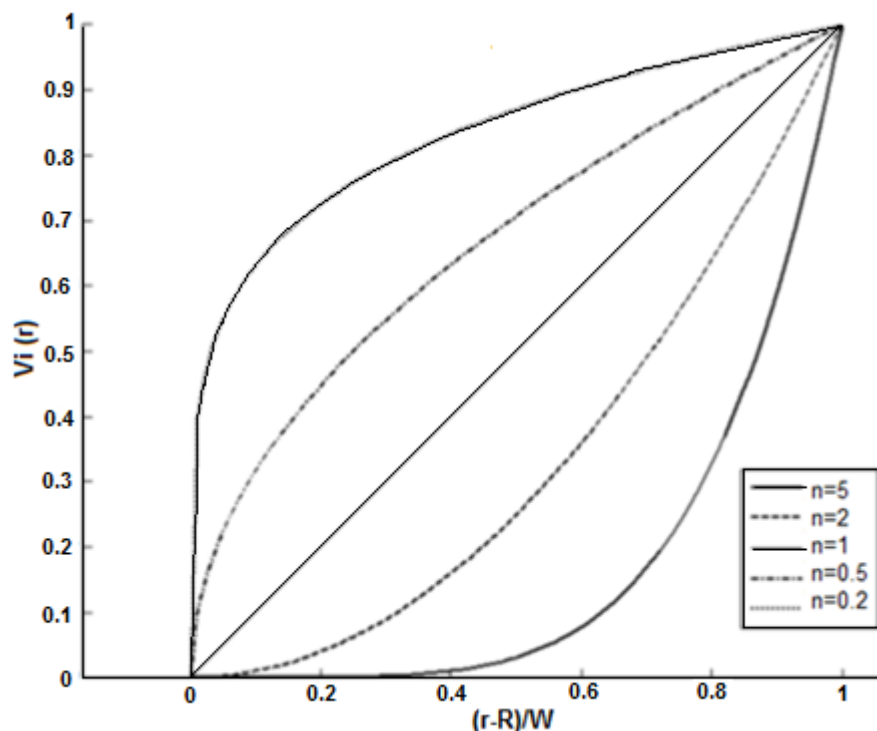
$$R \leq r \leq R + W$$

که W ضخامت استوانه در امتداد محور شعاعی r است، R شعاع داخلی استوانه و n پارامتر تعیین کننده پروفیل تغییر خواص ماده است. کسر حجمی ماتریس نیز عبارت است از:

$$V_m(r) = 1 - V_i(r) \quad (2-2)$$

لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه ماتریس و ماده افزوده شده برای مسائل مورد مطالعه $ZrO_2/Ti-6Al-4V$ خواهد بود. شکل (۲-۶) منحنی‌های تغییرات کسر حجمی ماده افزوده شده (V_i) برای مقادیر مختلف n را نشان می‌دهد که با استفاده از نرم‌افزار متلب برای ماده تابعی شیشه/اپوکسی رسم گردیده است.

¹ Chemical Vapor Deposition



شکل ۲-۶ نمودار تغییرات کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس برای نماهای مختلف [۲]

با در اختیار داشتن کسر حجمی مواد تشکیل دهنده یک ماده تابعی در هر نقطه از آن می‌توان خواص ماده را در آن نقطه محاسبه نمود. در این تحقیق از مدل‌های میکرومکانیکی مواد مرکب برای محاسبه برخی خواص مواد تابعی استفاده می‌شود. بر طبق این مدل‌ها مدول صلبیت برشی μ و مدول حجمی K را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود [۱]:

$$\mu = \mu_m + \frac{V_i(\mu_i - \mu_m)}{1 + V_m(\mu_i - \mu_m) / (\mu_m + \frac{\mu_m(9K_m + 8\mu_m)}{6(K_m + 2\mu_m)})} \quad (3-2)$$

$$K = K_m + \frac{V_i(K_i - K_m)}{1 + \frac{V_m(K_i - K_m)}{(K_m + 4\mu_m/3)}} \quad (4-2)$$

در این روابط μ_i و μ_m به ترتیب مشخص کننده مدول صلبیت برشی ماده افزوده شده و ماتریس هستند و از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \quad (5-2)$$

$$\mu_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \quad (۶-۲)$$

که E_i مدول یانگ ماده افزوده شده E_m مدول یانگ ماتریس، ν_i نسبت پواسون ماده افزوده شده و ν_m نسبت پواسون ماتریس می‌باشند و همچنین K_i مدول حجمی ماده افزوده شده و K_m مدول حجمی ماتریس در معادلات (۳-۲) و (۴-۲) خواهند بود. که از رابطه‌های زیر محاسبه می‌گردند:

$$K_i = \frac{E_i}{3(1-2\nu_i)} \quad (۷-۲)$$

$$K_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)} \quad (۸-۲)$$

در نهایت مدول یانگ E و نسبت پواسون ν نیز در هر یک از نقاط ماده به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$E = 9\mu K / (\mu + 3K) \quad (۹-۲)$$

$$\nu = (3K - 2\mu) / (2(\mu + 3K)) \quad (۱۰-۲)$$

و چگالی ρ ، ظرفیت گرمایی ویژه c_t ، ضریب انبساط گرمایی α و ضریب هدایت گرمایی k نیز با استفاده از قانون اختلاط بصورت زیر محاسبه می‌شوند [۳۰].

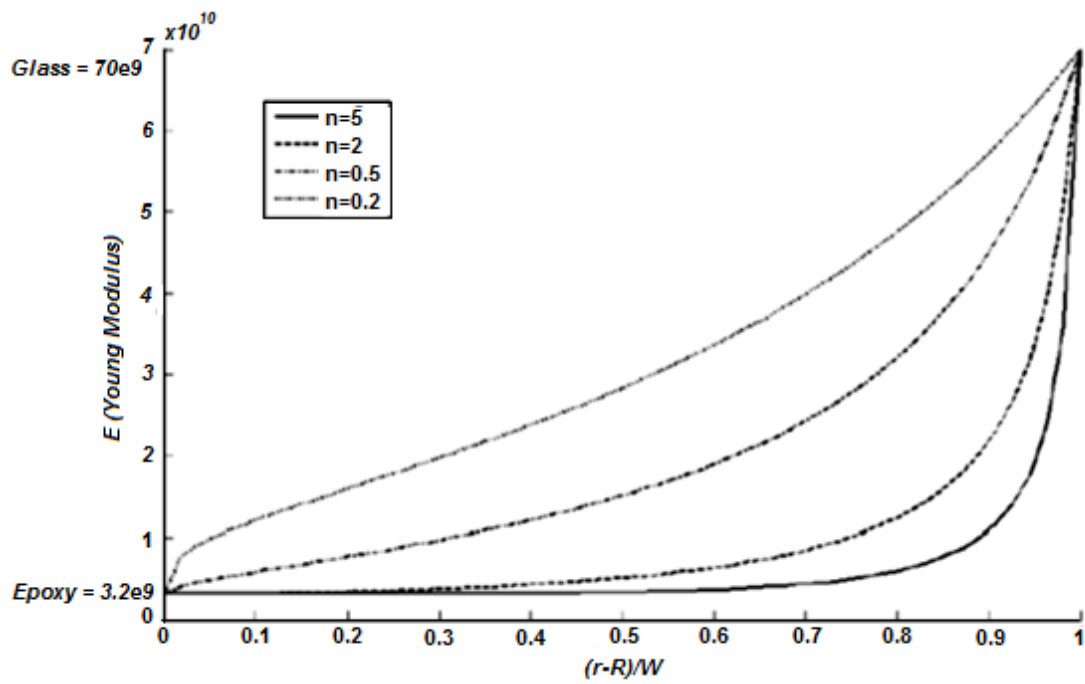
$$\rho = V_i \rho_i + V_m \rho_m \quad (۱۱-۲)$$

$$c_t = V_i c_{ti} + V_m c_{tm} \quad (۱۲-۲)$$

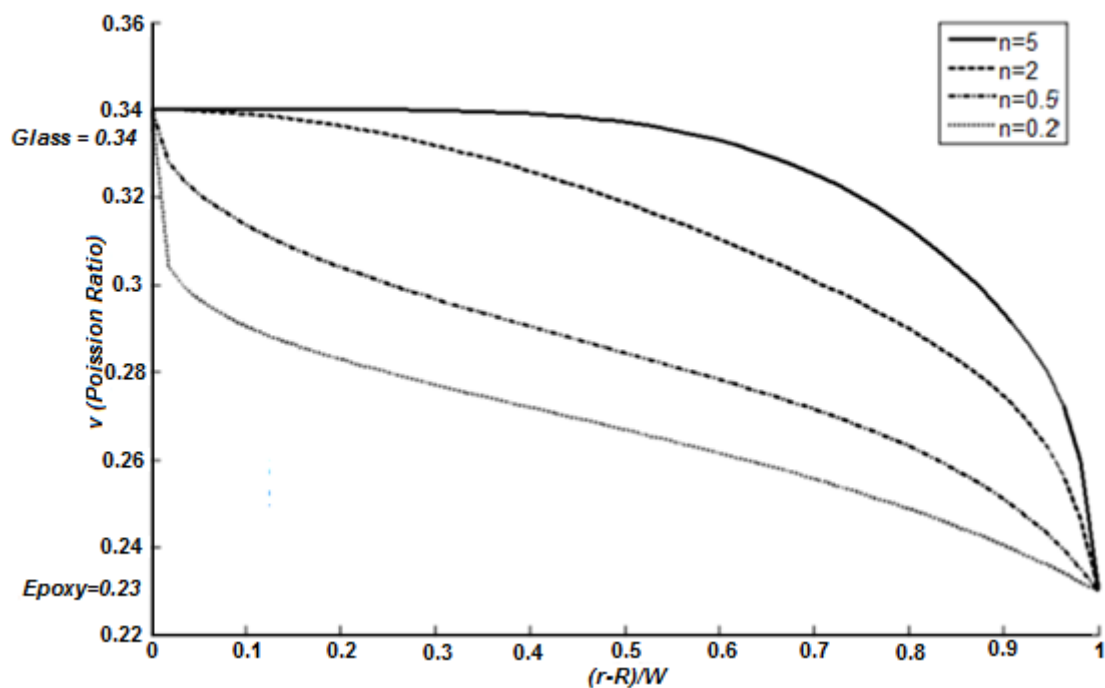
$$\alpha = V_i \alpha_i + V_m \alpha_m \quad (۱۳-۲)$$

$$k = V_i k_i + V_m k_m \quad (۱۴-۲)$$

به عنوان نمونه نمودار تغییرات مدول یانگ در شکل (۷-۲)، نسبت پواسون در شکل (۸-۲) و چگالی در شکل (۹-۲) برای ماده تابعی اپوکسی / شیشه برای استوانه‌ای که درون آن را اپوکسی و خارج آن را شیشه تشکیل می‌دهد به ازای n های مختلف در راستای ضخامت ماده آورده شده است که تمام این نمودارها در نرم‌افزار MATLAB رسم گردیده است.



شکل ۲-۷ نمودار تغییرات مدول الاستیسیته برای ماده نمونه اپوکسی/شیشه به ازای n های مختلف [۲]



شکل ۲-۸ نمودار تغییرات نسبت پواسون برای ماده نمونه اپوکسی/شیشه به ازای n های مختلف [۲]

فصل سوم

المان محدود توسعه یافته

۱.۳ مقدمه

روش اجزاء محدود روشی برای تحلیل سازه ها، حرکت سیالات، انتقال حرارت، مسائل موج و آکوستیک و... است. مفهوم اساسی روش مذکور این است که هر متغیر میدانی پیوسته مثل سرعت، تنش، فشار یا دما می تواند با یک مدل مجزا که از مجموعه ای از متغیرهای میدانی پیوسته قطعه قطعه تشکیل شده، تقریب زده شده و این متغیرها روی تعداد محدودی از زیر مجموعه ها تعریف می شوند. در روش اجزاء محدود سازه مورد نظر به اشکال گسسته که المان نامیده می شوند تقسیم بندی می شود. انواع المان ها شامل یک بعدی خطی، دو بعدی صفحه ای و سه بعدی حجمی می باشند که بسته به ابعاد و نوع مسئله مورد نظر استفاده می گردند.

۲.۳ روش المان محدود

روش اجزا محدود، جهت حل تقریبی معادلات دیفرانسیل حاکم بر محیط های پیوسته است. روش اجزا محدود در ابتدا به عنوان یک روش تحلیل تنش مطرح گردید و اکنون نیز به طور گسترده ای برای این منظور به کار می رود. علاوه بر این در بسیاری از کاربردهای مهندسی از قبیل هدایت حرارت، تراوش مایعات، دینامیک سیالات و میدان های الکتریکی و مغناطیسی، این روش جایگاه خود را یافته است. می توان گفت ریاضیدانان اکنون این روش را به عنوان یک مبحث مفید و قابل مطالعه قبول دارند.

بعضی فواید روش اجزای محدود به شرح زیر می باشد:

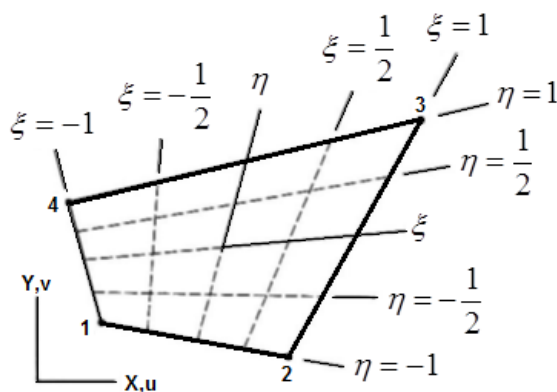
۱. قدرت روش اجزای محدود در انواع اندازه ها و مدل کردن سازه ها با هندسه دلخواه
۲. توانمندی در برخورد با بارگذاری دلخواه از جمله بارگذاری حرارتی
۳. سازه اجزای محدود شبیه به سازه واقعی است و پدیده مجزا و غیر قابل تصور نیست.

روش های تقریبی مانند روش تفاضل محدود، تمام این ویژگی ها را ندارد و یا دارای ویژگیهای محدودتری هستند.

۳.۳ المانهای ایزوپارامتریک

المانهای ایزوپارامتریک مربعی یک المان چهار وجهی در دستگاه مختصات سراسری (x,y) را به یک مربع 2×2 در دستگاه محلی (ξ, η) نگاشت می کنند. سیستم مختصات باید به گونه ای تعریف شود که غیر مستطیلی بودن چهار ضلعی را ایجاد کند. این سیستم که در شکل (۳-۱) با نام (ξ, η) مشخص شده یک سیستم مختصات طبیعی است.

در مختصات (x,y) مبداء این سیستم در نقطه ای میانگین گوشه هاست. صرفنظر از شکل و اندازه ظاهری المان یا جهت گیری آن در مختصات کلی (x,y) همیشه در مختصات طبیعی اضلاع المان با $\eta = \pm 1$ و $\xi = \pm 1$ تعریف می شوند. به طور کلی محورهای η و ξ متعامد نیستند و جهت گیری خاصی نسبت به محورهای (x,y) ندارند.



شکل ۳-۱ مختصات سراسری و محلی در المان چهار وجهی ایزوپارامتریک [۲]

مختصات x و y یک نقطه درون المان اولیه به صورت زیر تعریف می شود [۲]:

$$x = \sum_{i=1}^4 x_i N_i \quad (10-3)$$

$$y = \sum_{i=1}^4 y_i N_i \quad (11-3)$$

که در اینجا y_i و x_i مختصات گره‌های المان هستند و N_i همان توابع شکل المان محدود هستند که برای المان‌های ایزوپارامتریک از روابط زیر حاصل می‌گردند [۳۳]:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (12-3)$$

جهت المان‌بندی یک صفحه از جنس ماده تابعی می‌توان از المان‌های مدرج که توسط کیم و پائولینو^۱ پیشنهاد شده است، استفاده نمود [۳۴]. در این المان‌ها از توابع شکل یکسان برای درونیایی جابجایی‌ها، هندسه و پارامترهای ماده استفاده می‌شود. بنابراین این نوع فرمول‌بندی، فرمول‌بندی المانی ایزوپارامتریک تعمیم یافته نامیده شده است.

برای تعبیه خواص ماده تابعی در مدل المان محدود توسعه یافته، تمامی خواص برای کلیه گره‌های المان‌ها با استفاده از قانون اختلاط محاسبه می‌شوند. سپس خواص مورد نیاز برای هر نقطه گوسی در یک المان را می‌توان از روی خواص گره‌های المان مربوطه با استفاده از توابع شکل ایزوپارامتریک میان‌یابی کرد. بنابراین خواص ماده از قبیل مدول الاستیک E ، نسبت پواسون ν و چگالی ρ برای هر نقطه گوسی در یک المان را می‌توان بر حسب مختصات η و ξ و به کمک خواص گره‌های آن المان با استفاده از روابط زیر محاسبه و در معادلات مربوطه جایگزین کرد [۳۴]:

$$E = \sum_{i=1}^m N_i E_i \quad (13-3)$$

$$\nu = \sum_{i=1}^m N_i \nu_i \quad (14-3)$$

$$\rho = \sum_{i=1}^m N_i \rho_i \quad (15-3)$$

در این تحقیق از المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم یافته برای المان‌بندی مواد تابعی استفاده می‌گردد.

¹ Kim, J.H. and G. Paulino

۴.۳ المان محدود توسعه یافته

یکی از روش های تحلیل ترکها استفاده از روش المان محدود توسعه یافته است این روش که توسط بلیچکو^۱ و همکارانش پیشنهاد شد برای برطرف کردن کاستی های موجود در مدل سازی گسترش ناپیوستگی های دلخواه در روش المان محدود است [۳۵]. نام روش المان محدود توسعه یافته اولین بار توسط دانشگاه نورث وسترن در سال ۱۹۹۹ مطرح شد [۳۶]. مبنای روش المان محدود توسعه یافته همان روش المان محدود است که برای ناپیوستگی هایی مانند ترکها گسترش یافته است و از غنی سازی های موضعی بهره می گیرد. گسترش این روش حاصل تحقیقات گسترده بلیچکو و همکاران در روش های بدون المان است [۳۷].

المان محدود توسعه یافته از جمله روش های نوین مدل سازی ناپیوستگی ترک است. در مدل سازی گسترش ترک دو نوع رویکرد متداول است. در رویکرد اول ترک به صورت کرنش پخش شده در کل المان مدل می شود. روابط رفتار غیر کشسانی برای این اجزای به ظاهر پیوسته به گونه ای تعریف می شود که رفتار آنها وجود ناپیوستگی را مدل می کند. این متد روش ترک پخش شده نامگذاری شده است. در رویکرد دوم با به کارگیری توابع شکل خاص در داخل اجزای تحت تاثیر ترک موجبات مدلسازی ناپیوستگی مهیا می شود. در این رویکرد از توابع شکل موسوم به توابع غنی سازی برای مدل سازی ناپیوستگی علاوه بر توابع شکل عادی استفاده می شود. درجات آزادی مجازی نیز که بیان کننده هندسه ناپیوستگی اند برای گره های تحت تاثیر ناپیوستگی در نظر گرفته می شود [۳۸].

۱.۴.۳ تفکیک واحد المان های محدود غنی شده

مبنای روش المان محدود توسعه یافته مفهوم تفکیک واحد برای المان های محدود غنی شده یا تقریب های بدون المان است [۱]. تفکیک واحد در یک قلمرو از یک مجموعه به صورت زیر است:

^۱ Belytschko, T.

$$\sum_{\forall i} \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad (۱۶-۳)$$

در این رابطه x بردار موقعیت است. خاصیت تفکیک واحد^۱ استفاده شده در روش المان محدود توسعه یافته این است که هر تابع $\psi(x)$ را می توان توسط حاصل ضرب توابع تفکیک واحد با $\psi(x)$ ، بازیابی کرد. یعنی می توان نوشت:

$$\sum_{\forall i} \phi_i(x) \psi(x) = \psi(x) \quad (۱۷-۳)$$

به علاوه هنگامی که جمع بندی با معرفی پارامترهای b_i اصلاح می شود تابع غنی سازی می تواند به کمک تقریب زیر با این پارامترها تنظیم شود:

$$u(x) = \sum_{\forall i} N_i(x) a_i + \sum_{\forall i} \phi_i(x) \psi(x) b_i \quad (۱۸-۳)$$

در این رابطه a_i ها درجات آزادی گره های استاندارد هستند N_i ها نیز توابع شکل استاندارد روش المان محدود هستند که برای یک فرمول بندی المانی ایزوپارامتریک به صورت زیر تعریف می شوند:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad (۱۹-۳)$$

اولین عبارت در سمت راست معادله (۱۸-۳) تقریب المان محدود استاندارد است در حالی که بخش دوم اغلب انساتز^۲ نامیده می شود. مقادیر گره های b_i پارامترهای مجهول هستند که غنی سازی را تنظیم می کنند به نحوی که بتواند حل را به خوبی تقریب بزند. غالباً مبتنی بر حل های مجانبی است که حل های دقیقی نیستند؛ بنابراین انساتز لازم نیست دقیقاً حل موضعی برای مسئله مورد نظر باشد.

مزیت دیگر این تقریب سازه های این است که هنگامی که توابع $\phi_i(x)$ فقط بر روی یک زیر ناحیه کوچک از مسئله غیر صفر هستند معادلات گسسته شده برای سیستم صفر خواهند شد. در مقابل اضافه کردن مستقیم یک تابع غنی سازی به تقریب، معادلات گسسته غیر صفری را نتیجه می دهد که

^۱ Partition of Unity

^۲ Ansatz

از نظر محاسباتی پرهزینه‌تر هستند. با خاصیت تفکیک واحد هنگامی که $b_i = 1$ و $u_i = 0$ تابع $\psi(x)$ دقیقاً با تقریب (۳-۱۸) بازیابی می‌شود. همان طور که در بالا نشان داده شد توابع شکل برای تقریب استاندارد و غنی‌سازی لازم نیست توابع یکسانی باشند، اما به طور کلی توابع یکسانی مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ یعنی به طور کلی $\phi_i(x) = N_i(x)$. در اینجا نیز از این قاعده استفاده می‌گردد.

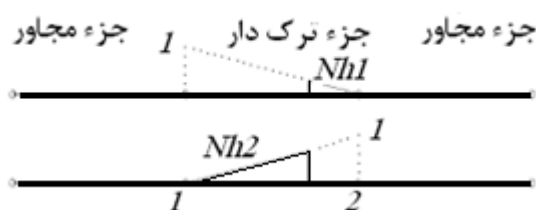
۲.۴.۳ بررسی فرایند غنی‌سازی در روش المان محدود توسعه یافته

در المان محدود استاندارد به هر گره از المان تابع شکل نسبت داده می‌شود. در حالت دو بعدی هر گره ۲ درجه آزادی دارد که ترکیب خطی حاصل ضرب تابع شکل هر نقطه داخل المان در تغییر مکان‌های گره‌ای می‌توانند تغییر مکان نقاط داخل المان را مشخص کنند. در المان محدود توسعه یافته از همان توابع شکل المان محدود استاندارد استفاده می‌شود [۳۹] و تنها درجات آزادی گره‌های اطراف ترک افزایش پیدا می‌کند (غنی‌سازی) که این کار بر اساس مفهوم نظریه تفکیک پیوستگی [۴۰] انجام می‌شود یعنی با اعمال توابع خاصی که در مورد آنها بحث می‌شود، درجات آزادی که به واسطه ناپیوستگی در محل ترک درون المان بوجود می‌آید به نقاط گره‌ای اطراف آن المان اختصاص پیدا می‌کند. برای تعیین نوع تابع مناسب جهت افزایش درجات آزادی گره‌ها (غنی‌سازی)، محل برخورد ترک با اضلاع المانها مشخص می‌شود اگر ترک در دو ناحیه اضلاع یک المان را ببرد از تابع پله واحد جهت غنی‌سازی گره‌های اطراف آن المان استفاده خواهد شد و اگر ترک تنها یکی از اضلاع المان را قطع کند و نقطه برخورد دیگری نداشته باشد یا به عبارت دیگر نوک ترک داخل المان باشد برای گره‌های اطراف آن از المان غنی‌سازی به روش تابع تکینه انجام خواهد گردید. البته چون هر گره بین چند المان مشترک است در مجموعه المانی اطراف آن گره انواع موقعیت نسبی بین ترک و المان اعم از بدون برخورد، دونقطه برخورد و احتمالاً یک نقطه برخورد به وجود می‌آید که برای غنی‌سازی گره مورد نظر از توابع مرتبه بالا استفاده می‌گردد [۴۱].

برای غنی سازی از طریق تابع پله ای واحد از یک تابع دو مقداری H به صورت زیر استفاده می شود [۳۹].

$$H(z) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad (۱۹-۳)$$

در شکل (۲-۳) که بیانگر تابع شکل پرش بمنظور ایجاد ناپیوستگی در میدان جابجایی در داخل المان بوده و ۱ و ۲ نیز بیانگر گره های المانی می باشند، نحوه عملکرد توابع غنی سازی پیشنهادی در محیط یک بعدی نشان داده شده است. مشاهده می شود که شرایط دوگانه ایجاد پرش در محل ناپیوستگی و عدم تاثیر در مرزها توسط این روش احراز می شود [۳۸].



شکل ۲-۳ رفتار توابع پرش در محیط تک بعدی برای گره های ۱ و ۲ [۵۰]

برای استفاده از تابع فوق محور x ها را به صورت محلی روی امتداد ترک قرار داده به گونه ای که جهت مثلث آن به سمت نوک ترک باشد در این شرایط نقاط بالای محور x ها دارای H برابر ۱+ و در غیر این صورت برابر ۱- می شود [۴۲]. غنی سازی در گره های اطراف نوک ترک از طریق تابع تکینه انجام می شود تا بهترین تطبیق را با شرایط واقعی جابجایی های اطراف نوک ترک پیدا کند [۴۳].

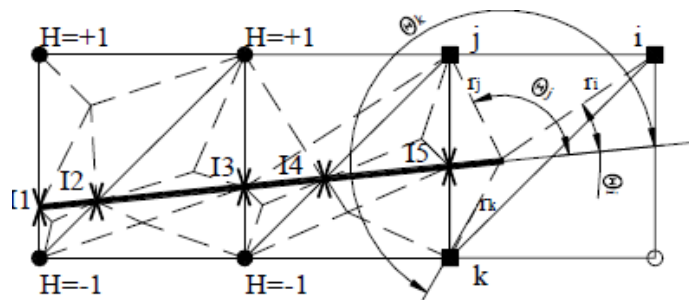
عبارتی که ایجاد حالت تکینه در نقاط اطراف ترک می نماید $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ می باشد که r و θ

مختصات قطبی نقاط اطراف نوک ترک در دستگاه مختصات قطبی واقع در نوک ترک است البته برای افزایش دقت جوابها عبارات دیگری نیز به عبارت مربوط به تکینه سازی اضافه می شود که این عبارات

از رابطه بین جابجایی‌های نقاط اطراف نوک ترک بر حسب موقعیت آن نقاط و ضرایب شدت تنش در نوک ترک به دست می‌آیند.

که در نهایت تابع چهار جمله‌ای به صورت زیر برای غنی سازی گره‌های اطراف نوک ترک مورد استفاده قرار می‌گیرد [۴۴]:

$$[\phi_{\alpha=1-4}] = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (20-3)$$



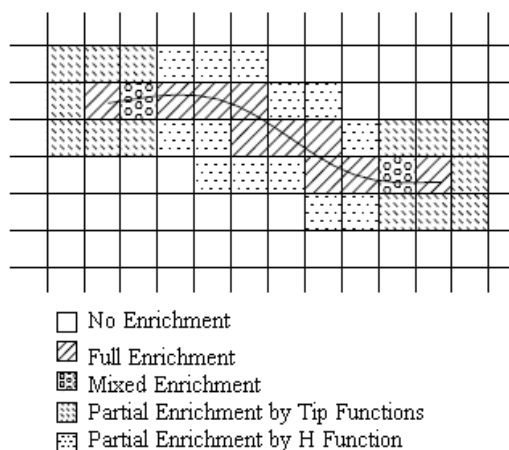
شکل ۳-۳ پارامترهای مربوط به غنی سازی گره های اطراف ترک و اطراف نوک ترک [۴۳]

در رابطه (۲۰-۳)، r و θ معرف موقعیت گره در مختصات قطبی نسبت به مختصات محلی نوک ترک است [۴۵].

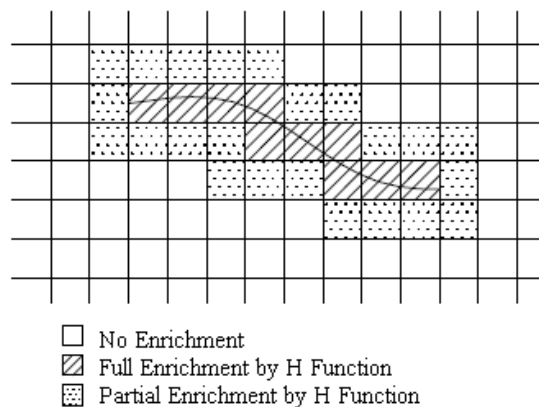
در شکل (۳-۳) تقسیم‌بندی المانی المان‌های ترک خورده و المان ترک نیز مشاهده می‌شود که به واسطه این تقسیم‌بندی تعدادی المان مثلثی جدید در دو سمت ترک ایجاد می‌گردد که برای به دست آوردن ماتریس سفتی کل المان مورد استفاده قرار می‌گیرد. مطابق شکل (۳-۳) دو گره بالای ترک با $H=+1$ و دو گره پایین ترک با $H=-1$ غنی می‌شوند و گره i از المانی که نوک ترک درون آن واقع است توسط تابع ϕ و مختصات (r_i, θ_i) غنی می‌شود و گره‌های j و k به ترتیب با (r_j, θ_j) و (r_k, θ_k) درجات آزادی‌شان افزایش پیدا می‌کند [۴۳].

۳.۴.۳ مدل سازی ترک ها در روش المان محدود توسعه یافته

یک مدل المان محدود از یک جسم ترک دار را مطابق شکل (۳-۴) و (۳-۵) در نظر بگیرید. تمام گره های شبکه المان محدود با N_a مشخص می شوند. همچنین مجموعه گره های المان های اطراف نوک ترک که گره های غنی شده نوک ترک نامیده می شوند با N_c ، که تعداد آنها را کاربر انتخاب می کند و مجموعه گره های المان هایی که توسط ترک بریده شده اند و یا به عبارتی دارای ناپیوستگی هستند و گره های غنی شده گام نامیده می شوند با N_h مشخص می گردد. لازم به ذکر است که اگر چه تعداد المان های نوک ترک یک المان هم کفایت می کند اما با استفاده از چندین المان می توان مقداری بهبودی در دقت به دست آورد [۱].



شکل ۳-۴ نواحی مختلف مربوط به غنی سازی با تابع H و توابع نوک ترک [۴۴]



شکل ۳-۵ نواحی مختلف مربوط به غنی سازی با تابع H [۴۴]

میدان جابجایی در روش المان محدود توسعه یافته برای یک المان که به طور کامل غنی سازی شده است را می توان به صورت زیر بیان کرد [۱]:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n(t) \\
 & + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n(t) \\
 & + \sum_m \sum_{n \in N_C} N_n(x, y) [F_m(r, \varphi) - F_m(r_n, \varphi_n)] C_{nm}(t)
 \end{aligned} \tag{۲۱-۳}$$

در این رابطه $a_n(t)$ و $b_n(t)$ و $c_{nm}(t)$ بردارهای مجهولات گرهی خواهند بود که تابعی از زمان هستند و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$a_n(t) = \{a_n^u(t), a_n^v(t)\}^T \tag{۲۲-۳}$$

$$b_n(t) = \{b_n^u(t), b_n^v(t)\}^T \tag{۲۳-۳}$$

$$c_{nm}(t) = \{c_{nm}^u(t), c_{nm}^v(t)\}^T \tag{۲۴-۳}$$

همچنین در رابطه (۲۱-۳)، $H(Z)$ تابع پله هویساید است که توسط رابطه زیر ارائه می گردد:

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \tag{۲۵-۳}$$

در اینجا Z تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است.

برای اجتناب از ناپایداری های عددی تابع می توان از تابع هویساید اصلاح شده زیر به جای

رابطه قبل استفاده نمود:

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z > \xi \\ 0.5 + \frac{z}{2\xi} + \frac{1}{2\mu} \sin \frac{\mu z}{\xi}, & -\xi < z < \xi \\ 0, & z < -\xi \end{cases} \tag{۲۶-۳}$$

که در این رابطه ξ کوچکتر از ابعاد یک المان انتخاب می گردد.

در رابطه (۲۱-۳) F_m یک مجموعه از توابع غنی سازی هستند که رفتار نزدیک نوک را تقریب

می زنند. این توابع عبارتند از [۱]:

$$\{F_m\} = \sqrt{r} \left\{ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right\} \quad (27-3)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (22-3) تا (24-3) و (27-3) در معادله (21-3) مولفه‌های میدان

جایجایی در روش المان محدود توسعه یافته در جهت مختصات سراسری x و y را می‌توان به صورت

زیر نوشت [1]:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n1}^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n2}^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n3}^u(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n4}^u(t) \end{aligned} \quad (28-3)$$

$$\begin{aligned} v(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^v(t) \\ & + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n^v(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{cn1}^v(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{cn2}^v(t) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n3}^v(t) \end{aligned} \quad (29-3)$$

$$+ \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_{n4}^v(t)$$

اگر ترک عایق فرض شود، میدان دما نیز در امتداد ترک ناپیوسته و شار حرارتی در نوک ترک تکین خواهد بود. بنابراین برای در نظر گرفتن ناپیوستگی دما می توان از تابع هویساید استفاده کرد. برای غنی سازی نوک ترک نیز باید میدان دمای نوک ترک را بررسی کرد. میدان دما مشابه میدان جابجایی برای مد پارگی (مد III) ترک است.

$$T = -\frac{K_T}{k} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (30-3)$$

که در این رابطه k ضریب هدایت گرمایی و K_T ضریب شدت تنش گرمایی است.

با در نظر گرفتن رابطه بالا می توان میدان دما را مشابه میدان جابجایی گسسته سازی کرد، با این تفاوت که فقط از اولین تابع رابطه (3-27) برای غنی سازی گره های نوک ترک استفاده می شود. بنابراین میدان تغییر دما را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^T(t) + \sum_{n \in N_H} N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] b_n^T(t) \quad (31-3) \\ & + \sum_{n \in N_c} N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] c_n^T(t) \end{aligned}$$

که در این رابطه $a_n^T(t)$ ، $b_n^T(t)$ و $c_n^T(t)$ مقدار تغییرات دمای گره ها برای توابع شکل مربوطه هستند. این روابط را می توان به صورت ساده شده زیر بازنویسی نمود [1].

$$\begin{aligned} v(x, y, t) = & \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^u(t) + \sum_{n \in N_H} \Phi_n(x, y) b_n^u(t) \quad (32-3) \\ & + \sum_{m=1}^4 \sum_{n \in N_c} \psi_{nm}(x, y) c_{nm}^u(t) \end{aligned}$$

$$v(x, y, t) = \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^v(t) + \sum_{n \in N_H} \Phi_n(x, y) b_n^v(t) \quad (33-3)$$

$$+ \sum_{m=1}^4 \sum_{n \in N_c} \psi_{nm}(x, y) c_{nm}^v(t)$$

$$\theta(x, y, t) = \sum_{n \in N_A} N_n(x, y) a_n^T(t) + \sum_{n \in N_H} \Phi_n(x, y) b_n^T(t) \quad (34-3)$$

$$+ \sum_{m=1}^4 \psi_{n1}(x, y) c_{n1}^T(t)$$

در این روابط Φ و ψ عبارت‌های غنی‌سازی میدان‌های جابجایی و دما هستند که به ترتیب وظیفه غنی‌سازی مسیر و نوک ترک را بر عهده دارند و به صورت زیر بیان می‌شوند [۱]:

$$\Phi_n(x, y) = N_n(x, y) [H(Z) - H(Z_n)] \quad (35-3)$$

$$\psi_{nm}(x, y) = N_n(x, y) \left[\sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \right. \\ \left. -\sqrt{r_n} \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \sqrt{r} \sin(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right), \right. \\ \left. \sqrt{r} \sin(\varphi) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n} \sin(\varphi_n) \cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right) \right] \quad (36-3)$$

با قرار دادن روابط (31-3) و (33-3) در معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر می‌توان معادلات حاکم را گسسته‌سازی نمود.

۵.۳ انتگرال گیری عددی به روش گاوس

توابع پیچیده را که به سهولت قابل انتگرال‌گیری نیستند، می‌توان نخست با یک چند جمله‌ای تقریب زده و سپس انتگرال گیری عددی نمود. اگر تابع به طور قابل توجهی از خطی بودن دور باشد، آنگاه خطای قابل ملاحظه‌ای انتظار می‌رود. ولی این خطا را می‌توان با افزایش تعداد تقسیم بندی

ها در فاصله X_0 تا X_n کاهش داد. میتوان از چند جمله ای های مرتبه بالاتر نیز برای تقریب زدن تابع استفاده نمود، به گونه ای که دقت کار بالا برود [۲].

این روش کارایی قابل توجهی دارد و موسوم به تقریب گاوسی می باشد. به خاطر حفظ کلیت، مختصات نقاط نمونه یا گاوسی و ضرایب وزنی معمولاً با حدود انتگرالگیری میان $+1$ و -1 تعریف می شوند.

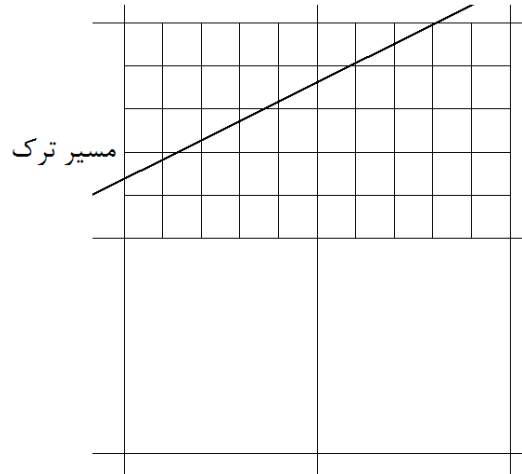
$$I = \int_{-1}^{+1} f(\zeta) d\zeta = \sum_{i=0}^n w_i f(\zeta_i) \quad (37-3)$$

که در آن W_i توابع وزنی، ζ_i مقادیر تابع در نقاط گاوسی و n تعداد نقاط گاوسی در حالت یک بعدی است. از آنجا که در روش المان محدود این انتگرال گیری ها معمولاً بر روی سطح المان ها صورت می گیرد، به محاسبه انتگرال های دو گانه نیاز داریم با استفاده از روش گاوس این انتگرال ها را می توان به صورت زیر به دست آورد [۴۶]:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_j W_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (38-3)$$

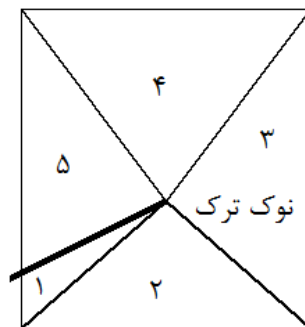
برنامه نوشته شده در این تحقیق امکان استفاده از حداکثر 21×21 نقطه گاوسی در یک المان برای انتگرال گیری دو بعدی را داراست.

از آنجایی که روش گاوس نمی تواند انتگرال توابع غنی سازی را در المان هایی که توسط ترک بریده می شوند به طور دقیق محاسبه کند، دالبو برای رفع این مشکل پیشنهاد کرد که المان هایی که در مسیر ترک واقع شده اند را به المان های چهار ضلعی کوچک تر همانند شکل (۳-۶) تقسیم بندی نماییم [۴۸].



شکل ۳-۶ تقسیم بندی المان های شامل ترک برای انتگرال گیری عددی [۱]

برای انتگرال گیری و ارزیابی تابع هویساید، موقعیت مرکز چهار ضلعی های کوچک تر نسبت به ترک ملاک قرار می گیرد. یعنی با قرار گرفتن مرکز چهار ضلعی در یک طرف ترک کل نقاط گوسی برای ارزیابی تابع هویساید در انتگرال گیری بر روی آن چهار ضلعی در همان طرف در نظر گرفته می شوند. المان نوک ترک نیز مطابق با شکل (۳-۷) به چند مثلث تقسیم می شود تا اثر تکینگی نوک ترک در عبارت زیر انتگرال حذف گردد.



شکل ۳-۷ تقسیم بندی المان های شامل نوک ترک برای انتگرال گیری عددی [۱]

فصل چهارم

معادلات حاکم

۱.۴ مقدمه

تئوری ترموالاستیک رفتار اجسام الاستیک تحت اثر میدان های دمای غیر یکنواخت را توصیف می کند. بنابراین تعمیمی از تئوری الاستیسیته است. پدیده های گرما در الاستیسیته نخستین بار توسط دوهمال^۱ در سال ۱۸۳۷ مورد بحث قرار گرفتند. در سال ۱۸۸۵ نیومن^۲ معادله به دست آمده توسط دوهمال برای تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک را دوباره به دست آورد. در این تئوری معادله حرکت یا تعادل شامل ترم دما هستند، اما معادله انتقال گرما مستقل از میدان کرنش است. پیشرفت بعدی در سال ۱۹۵۶ حاصل شد هنگامی که بیوت^۳ تئوری ترموالاستیسیته جفت شده را معرفی کرد. این معادله شامل دو معادله دیفرانسیل جفت شده در بردار جابجایی و میدان دما است که یکی معادله هایپربولیک و دیگری پارابولیک است.

تئوری ترموالاستیسیته دینامیکی بر اساس معادله هدایت گرمایی فوریه به عنوان یک تئوری ترموالاستیسیته دینامیکی کلاسیک شناخته می شود. در تئوری کلاسیک فرض می شود که اختلالات گرمایی با سرعت نامحدود در محیط انتشار می یابند [۱].

راه حل های مسائل در ترموالاستیسیته دینامیکی بسیار مورد توجه قرار گرفتند و اولین راه حل تحلیلی برای یک مساله مقدار مرزی اولیه در ترموالاستیسیته کلاسیک دینامیکی جفت نشده توسط دانیلوفسکایا^۴ ارائه شد. از جمله مطالعات مربوطه به روش های حل تحلیلی و تقریبی که قابلیت حل معادلات ترموالاستیک جفت شده و غیر جفت شده را دارند می توان به کارهای ایگنازاک^۵ و هیتنارسکی و ایگنازاک^۶ اشاره کرد.

¹ Duhamel J.M.C.

² Neumann F.

³ Biot M.A.

⁴ Danilovskaya V.I.

⁵ Ignaczak J.

⁶ Hetnarski R.B. and Ignaczak J.

حل تقریبی معادلات ترموالاستیک دینامیکی جفت شده نخستین بار توسط نیکل و ساکن^۱ ارائه شد. همچنین حل تقریبی برای مسائل گرمایی- مکانیکی با معادلات ترموالاستیسیته دینامیکی جفت شده و غیر جفت شده به کمک روش المان محدود توسط تینگ و چن^۲ لیو و پانگ^۳، تاما و رایلکار^۴ و تاما و نامبورو^۵ ارائه شده است. در این فصل روش حل معادلات ترموالاستیک کلاسیک جفت شده به روش المان محدود توسعه یافته با استفاده از المان های ایزوپارامتریک تعمیم یافته برای بکار گیری در مواد تابعی تشریح می شود [۱].

۲.۴ استخراج معادلات حاکم

یک سازه تحت شوک حرارتی باید با استفاده از شکل جفت شده معادلات ترموالاستیک و انرژی تحلیل شود. حل های تحلیلی این گونه از مسائل از نظر ریاضی پیچیده و محدود به یک جسم نامحدود یا نیم فضا با شرایط مرزی ساده هستند [۱].

در این قسمت به فرمول بندی و توسعه پاسخ مساله می پردازیم. با توجه به هندسه مساله از دستگاه مختصات استوانه ای استفاده می نماییم. در این دستگاه منحنی الخط از مختصات (r, θ, z) برای توصیف هندسه فضایی استفاده می شود. برای چنین دستگاهی، مولفه های تنش بر روی جزء دیفرانسیلی مطابق شکل (۴-۱) تعریف شده اند.

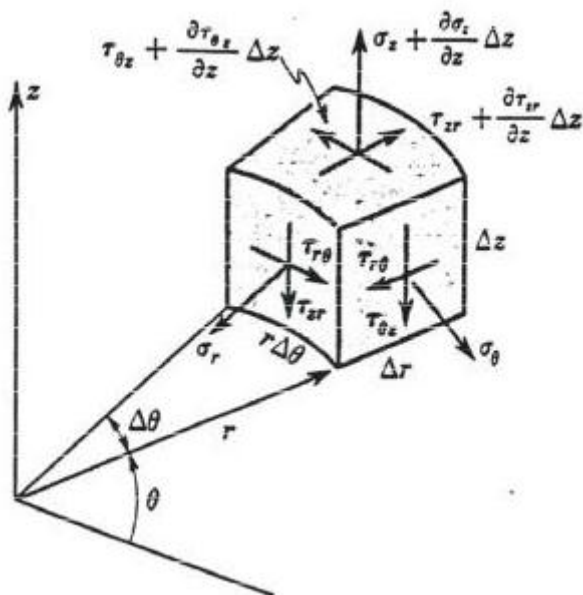
¹ Nickel R.E. and Sackman J.L.

² Ting E.C. and Chen H.C.A

³ Liu W.K. and Zhang Y.F.

⁴ Tamma K.K. and Railkar S.B.

⁵ Tamma K.K. and Namburu R.R.



شکل ۱-۴ موقعیت یک المان در مختصات استوانه ای در حالت متقارن محوری

معادلات حرکت^۱ در مختصات استوانه ای به صورت زیر بیان می گردد [۴۹]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + F_r = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + F_\theta = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + F_z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (3-4)$$

استوانه ها از چرخش یک صفحه حول یک محور به وجود می آیند. اینگونه مسایل که هدف در

آن تحلیل و بررسی این صفحات عرضی است را مسائل متقارن محوری^۲ می گویند. عموماً در مسایل

متقارن محوری خواص، بارگذاری و شرایط مرزی را به صورت متقارن ایجاد می کنند. در اینگونه

مسایل از آنجا که خواص و نیروها در راستای محیطی تغییر نمی کنند مقدار $\frac{\partial}{\partial \theta}$ را برابر صفر در نظر

¹ Equation of motion

² Axisymmetric

می گیریم. این فرضیات باعث حذف شدن ترم دوم تعادل در حالت متقارن محوری خواهد شد. در نهایت معادلات تعادل را می توان برای حالت متقارن محوری به شکل زیر بازنویسی کرد [۴۹]:

$$\text{Axisymmetric - Geometry } \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (۴-۴)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) - \sigma_\theta + r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + rf_r = \rho r \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (۵-۴)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + rf_z = \rho r \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (۶-۴)$$

روابط تنش بر حسب جابه جایی به صورت زیر بیان می گردد [۴۹]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \text{div}u + 2\mu e_{ij} \quad (۷-۴)$$

که در این رابطه داریم:

$$\text{div}u = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (۸-۴)$$

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (۹-۴)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۱۰-۴)$$

که در روابط فوق λ و μ ثوابت لامه^۱ هستند. برای بیان تنش ها در معادلات (۵-۴) و (۶-۴)

همچنین باید مولفه های کرنش را با استفاده از روابط زیر بر حسب جابه جایی در حالت متقارن

محوری نوشت:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (۱۱-۴)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (۱۲-۴)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (۱۳-۴)$$

^۱ Lamé Constant

$$2\varepsilon_{rz} = \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (14-4)$$

$$\theta = T - T_0 \quad (15-4)$$

$$\beta = \alpha(3\lambda + 2\mu) \quad (16-4)$$

با جایگذاری معادلات (۸-۴)، (۱۱-۴)، (۱۲-۴)، (۱۳-۴) و (۱۴-۴) در معادله (۷-۴)، تنش ها

را بر حسب جابه جایی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\sigma_r = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + 2\mu \varepsilon_r - \beta(T - T_0) = \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \beta \theta \quad (17-4)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + 2\mu \varepsilon_\theta - \beta(T - T_0) = \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u}{r} - \beta \theta \quad (18-4)$$

$$\sigma_z = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + 2\mu \varepsilon_z - \beta(T - T_0) = \lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial \omega}{\partial z} - \beta \theta \quad (19-4)$$

$$\sigma_{rz} = \tau_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (20-4)$$

شرایط مرزی از طریق بردار تنش سطحی بر روی مرز تعیین می شوند. مولفه نیروهای مرزی

از طریق فرمول کوشی^۱ به تانسور تنش مرتبط می شود [۴۹].

$$Tr_i^n = \sigma_{ij} n_j \quad (21-4)$$

که در این رابطه Tr_i^n مولفه تنش سطحی بر روی سطح مرز است که بردار یکه نرمال آن n می باشد.

۳.۴ گسسته سازی معادلات حرکت در مختصات استوانه ای

برای حل معادلات حرکت می توان از فرمول بندی المان محدود مبنی بر روش گلرکین

استفاده نمود. مدل المان محدود توسعه یافته مشابه مدل المان محدود است. برای هر المان مینا (e)

با این فرض که تمامی گره های آن با هر دو تابع غنی سازی شده اند؛ همان طور که در فصل گذشته

نشان داده شد، مولفه های جابه جایی و ترم حرارت با استفاده از روابط زیر تقریب زده می شوند.

¹ Cauchy's formula

$$u_r = N_h(r, z) a_h^u(t) + \varphi_h(r, z) b_h^u(t) + \psi_{hm}(r, z) c_{hm}^u(t) \quad (22-4)$$

$$w = u_z = N_h(r, z) a_h^w(t) + \varphi_h(r, z) b_h^w(t) + \psi_{hm}(r, z) c_{hm}^w(t) \quad (23-4)$$

$$\theta(r, z, t) = N_h(r, z) a_h^T(t) + \varphi_h(r, z) b_h^T(t) + \psi_{hm}(r, z) c_{hm}^T(t) \quad (24-4)$$

$$h = 1, 2, \dots, ne$$

$$m = 1, 2, 3, 4$$

که در آن ne تعداد نقاط گرهی در المان مبنا (e) است. این تقریب از نوع کانتروویچ^۱ است که در آن توابع مکان و زمان به توابع مجزایی تفکیک می شوند. در این رابطه مولفه های جابجایی در هر گره تابع زمان هستند و تابع شکل $N_h(r, z)$ ، تابعی از متغیرهای مکان است. با اعمال انتگرال باقیمانده وزنی نسبت به تابع وزنی $S_l(r, z)$ تقریب گلرکین بصورت زیر بیان خواهد گردید:

$$\int_V \left(\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \sigma_\theta + r \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + r f_r - r\rho\ddot{u} \right) S_l dv = 0 \quad (25-4)$$

$$\int_V \left(\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + r \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + r f_z - r\rho\ddot{w} \right) S_l dv = 0 \quad (26-4)$$

$$l = 1, 2, \dots, ns$$

که در این روابط $S_l(r, z)$ همان توابع شکل المان محدود توسعه یافته هستند. یعنی خواهیم داشت:

$$S_l = (N_1, N_2, N_3, N_4, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \psi_{1m}, \psi_{2m}, \psi_{3m}, \psi_{4m}) \quad (27-4)$$

$$m = 1, 2, 3, 4$$

با اعمال فرمول بندی ضعیف^۲ به ترم های مشتق روابط (۲۵-۴) و (۲۶-۴) و استفاده از تئوری

گوس [۴۹] می توان نوشت:

$$\int_V \frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} S_l dV = \int_A r\sigma_r n_r S_l dA - \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial r} \sigma_r dV \quad (28-4)$$

¹ Kantrovitch type of approximation

² Weak form

$$\int_V r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} S_l dV = \int_A r \tau_{rz} n_z S_l dA - \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial z} \tau_{rz} dV \quad (29-4)$$

$$\int_V r \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} S_l dV = \int_A r \tau_{rz} n_r S_l dA - \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial r} \tau_{rz} dV \quad (30-4)$$

$$\int_V r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} S_l dV = \int_A r \sigma_z n_z S_l dA - \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial z} \sigma_z dV \quad (31-4)$$

با در نظر گرفتن فرمول کوشی اولین عبارات سمت چپ معادلات بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{A(e)} r \sigma_r n_r S_l dA = \int_{A(e)} r T r_r^{n_r} S_l dA \quad (32-4)$$

$$\int_{A(e)} r \tau_{rz} n_z S_l dA = \int_{A(e)} r T r_r^{n_z} S_l dA \quad (33-4)$$

$$\int_{A(e)} r \tau_{rz} n_r S_l dA = \int_{A(e)} r T r_z^{n_r} S_l dA \quad (34-4)$$

$$\int_{A(e)} r \sigma_z n_z S_l dA = \int_{A(e)} r T r_z^{n_z} S_l dA \quad (35-4)$$

با جاگذاری این روابط در معادلات (25-4) و (26-4) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{A(e)} r T r_r^{n_r} S_l dA - \int_{V(e)} r \frac{\partial S_l}{\partial r} \sigma_r dV - \int_{V(e)} \sigma_\theta S_l dV + \int_{A(e)} r T r_r^{n_z} S_l dA \\ - \int_{V(e)} r \frac{\partial S_l}{\partial z} \tau_{rz} dV - \int_{V(e)} r \rho \ddot{u} S_l dV + \int_{V(e)} r f_r S_l dV = 0 \end{aligned} \quad (36-4)$$

$$\begin{aligned} \int_{A(e)} r T r_z^{n_r} S_l dA - \int_{V(e)} r \frac{\partial S_l}{\partial r} \tau_{rz} dV + \int_{A(e)} r T r_z^{n_z} S_l dA \\ - \int_{V(e)} r \frac{\partial S_l}{\partial z} \sigma_z dV - \int_{V(e)} r \rho \ddot{w} S_l dV + \int_{V(e)} r f_z S_l dV = 0 \end{aligned} \quad (37-4)$$

که این معادلات را می توان به صورت ساده شده زیر نوشت:

$$\int_V r \rho \ddot{u} S_l dV + \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial r} \sigma_r dV + \int_V \sigma_\theta S_l dV + \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial z} \tau_{rz} dV = F_r \quad (38-4)$$

$$\int_V r p \ddot{w} S_l dV + \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial r} \tau_{rz} dV + \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial z} \sigma_z dV = F_z \quad (39-4)$$

که در این روابط F_r و F_z را به صورت زیر داریم:

$$F_r = \int_{A(e)} r Tr_r^{n_r} S_l dA + \int_{A(e)} r Tr_r^{n_z} S_l dA + \int_{V(e)} r f_r S_l dV \quad (40-4)$$

$$F_z = \int_{A(e)} r Tr_z^{n_r} S_l dA + \int_{A(e)} r Tr_z^{n_z} S_l dA + \int_{V(e)} r f_z S_l dV \quad (41-4)$$

با جاگذاری تنش های به دست آمده از روابط (۱۷-۴)، (۱۸-۴)، (۱۹-۴) و (۲۰-۴) بر حسب

جابجایی در روابط (۳۶-۴) و (۳۷-۴) معادلات زیر به دست خواهند آمد:

$$\int_V r \rho \ddot{u} S_l dV + \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial r} \left(\lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) - \beta \theta \right) dV \quad (42-4)$$

$$+ \int S_L \left(\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u}{r} - \beta \theta \right) dV + \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) dV = F_r$$

$$\int_V r \rho \ddot{w} S_L dV + \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial r} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) dV \quad (43-4)$$

$$+ \int_V r \frac{\partial S_l}{\partial z} \left(\lambda \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \beta \theta \right) dV = F_z$$

اکنون با در نظر گرفتن المان مبنای e با تعداد ne گره که تمامی گره ها شامل هردو تابع غنی-

سازی هستند، مولفه های جابه جایی را همانگونه که در معادلات (۲۲-۴) و (۲۳-۴) بیان گردید با

کمک مشتقات مرتبه دوم آنها تقریب می زنیم و در معادلات بالا جایگذاری می نماییم:

$$\int_{V(e)} r \rho (N_h \ddot{a}_h^u + \Phi_h \ddot{b}_h^u + \Psi_{hm} \ddot{c}_{hm}^u) S_l dV \quad (44-4)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{V(e)} r \frac{\partial S_l}{\partial r} \left(\lambda \left(\frac{N_h a_h^u + \phi_h b_h^u + \Psi_{hm} c_{hm}^u}{r} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (N_{h,r} a_h^u + \phi_{h,r} b_h^u + \Psi_{hm,r} c_{hm}^u) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (N_{h,z} a_h^w + \phi_{h,z} b_h^w + \Psi_{hm,z} c_{hm}^w) \right) \right) \\
 & \quad \left. + 2\mu (N_{h,r} a_h^u + \phi_{h,r} b_h^u + \Psi_{hm,r} c_{hm}^u) \right. \\
 & \quad \left. - \beta (N_h a_h^T + \phi_h b_h^T + \Psi_{hm} c_{hm}^T) \right) dV \\
 & + \int_{V(e)} S_l \left(\lambda \left(\frac{N_h a_h^u + \phi_h b_h^u + \Psi_{hm} c_{hm}^u}{r} + (N_{h,r} a_h^u + \phi_{h,r} b_h^u + \Psi_{hm,r} c_{hm}^u) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (N_{h,z} a_h^w + \phi_{h,z} b_h^w + \Psi_{hm,z} c_{hm}^w) \right) \right) \\
 & \quad \left. + 2\mu \left(\frac{N_h a_h^u + \phi_h b_h^u + \Psi_{hm} c_{hm}^u}{r} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \beta (N_h a_h^T + \phi_h b_h^T + \Psi_{1m} c_{1m}^T) \right) dV \\
 & + \int_{V(e)} r \frac{\partial S_l}{\partial z} (\mu (N_{h,z} a_h^u + \phi_{h,z} b_h^u + \Psi_{hm,z} c_{hm}^u + N_{h,r} a_h^w + \phi_{h,r} b_h^w \\
 & \quad + \Psi_{hm,r} c_{hm}^w)) dV = F_r
 \end{aligned}$$

$$\int_{V(e)} r \rho (N_h \ddot{a}_h^w + \phi_h \ddot{b}_h^w + \Psi_{hm} \ddot{c}_{hm}^w) S_l dV$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{V(e)} r \frac{\partial S_l}{\partial r} (\mu (N_{h,z} a_h^u + \phi_{h,z} b_h^u + \Psi_{hm,z} c_{hm}^u + N_{h,r} a_h^w + \phi_{h,r} b_h^w \\
 & \quad + \Psi_{hm,r} c_{hm}^w)) dV \tag{۴۵-۴}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{V(e)} r \frac{\partial S_l}{\partial z} \left(\lambda \left(\frac{N_h a_h^u + \phi_h b_h^u + \Psi_{hm} c_{hm}^u}{r} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (N_{h,r} a_h^u + \phi_{h,r} b_h^u + \Psi_{hm,r} c_{hm}^u) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (N_{h,z} a_h^w + \phi_{h,z} b_h^w + \Psi_{hm,z} c_{hm}^w) \right) \right. \\
 & \quad \left. + 2\mu (N_{h,z} a_h^w + \phi_{h,z} b_h^w + \Psi_{hm,z} c_{hm}^w) \right. \\
 & \quad \left. - \beta (N_h a_h^T + \phi_h b_h^T + \Psi_{1m} c_{1m}^T) \right) dV = F_z
 \end{aligned}$$

با مرتب سازی عبارت‌های معادلات (۴۴-۴) و (۴۵-۴) می‌توان آن‌ها را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{V(e)} r \rho N_h S_l dV \right) \ddot{a}_h^u + \left(\int_{V(e)} r \rho \phi_h S_l dV \right) \ddot{b}_h^u + \left(\int_{V(e)} r \rho \Psi_{hm} S_l dV \right) \ddot{c}_{hm}^u \\
 & \quad + \\
 & \left(\int_{V(e)} \left[r S_{l,r} \left(\frac{\lambda}{r} N_h + (\lambda + 2\mu) N_{h,r} \right) + r \mu S_{l,z} N_{h,z} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + S_l \left(\lambda N_{h,r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} N_h \right) \right] dV \right) a_h^u + \\
 & \left(\int_{V(e)} \left[r S_{l,r} \left(\frac{\lambda}{r} \phi_h + (\lambda + 2\mu) \phi_{h,r} \right) + r \mu S_{l,z} \phi_{h,z} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + S_l \left(\lambda \phi_{h,r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \phi_h \right) \right] dV \right) b_h^u + \\
 & \left(\int_{V(e)} \left[r S_{l,r} \left(\frac{\lambda}{r} \Psi_{hm} + (\lambda + 2\mu) \Psi_{hm,r} \right) + r \mu S_{l,z} \Psi_{hm,z} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + S_l \left(\lambda \Psi_{hm,r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \Psi_{hm} \right) \right] dV \right) c_{hm}^u \\
 & + \left(\int_{V(e)} [r \lambda S_{l,r} N_{h,z} + \lambda S_l N_{h,z} + r \mu S_{l,z} N_{h,r}] dV \right) a_h^w
 \end{aligned} \tag{۴۶-۴}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\int_{V(e)} [r\lambda S_{l,r} \Phi_{h,z} + \lambda S_l \Phi_{h,z} + r\mu S_{l,z} \Phi_{h,r}] dV \right) b_h^w \\
 & + \left(\int_{V(e)} [r\lambda S_{l,r} \Psi_{hm,z} + \lambda S_l \Psi_{hm,z} + r\mu S_{l,z} \Psi_{hm,r}] dV \right) c_{hm}^w \\
 & - \int_{V(e)} \beta (rS_{l,r} + S_l) (N_h a_h^T + \Phi_h b_h^T + \Psi_{1m} c_{1m}^T) dV = F_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{V(e)} r\rho N_h S_l dV \right) \ddot{a}^w + \left(\int_{V(e)} r\rho \Phi_h S_l dV \right) \ddot{b}^w + \left(\int_{V(e)} r\rho \Psi_{hm} S_l dV \right) \ddot{c}^w \\
 & + \left(\int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} N_{h,z} + r\lambda S_{l,z} \left(\frac{N_h}{r} + N_{h,r} \right) \right] dV \right) a_h^u \\
 & + \left(\int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} \Phi_{h,z} + r\lambda S_{l,z} \left(\frac{\Phi_h}{r} + \Phi_{h,r} \right) \right] dV \right) b_h^u \\
 & + \left(\int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} \Psi_{hm,z} + r\lambda S_{l,z} \left(\frac{\Psi_{hm}}{r} + \Psi_{hm,r} \right) \right] dV \right) c_{hm}^u \quad (47-4) \\
 & + \left(\int_{V(e)} [r\mu S_{l,r} N_{h,r} + r(\lambda + 2\mu) S_{l,z} N_{h,z}] dV \right) a_h^w \\
 & + \left(\int_{V(e)} [r\mu S_{l,r} \Phi_{h,r} + r(\lambda + 2\mu) S_{l,z} \Phi_{h,z}] dV \right) b_h^w \\
 & + \left(\int_{V(e)} [r\mu S_{l,r} \Psi_{hm,r} + r(\lambda + 2\mu) S_{l,z} \Psi_{hm,z}] dV \right) c_{hm}^w \\
 & - \int_{V(e)} r\beta S_{l,z} (N_h a_h^T + \Phi_h b_h^T + \Psi_{1m} c_{1m}^T) dV = F_z
 \end{aligned}$$

۴.۴ گسسته سازی معادلات انرژی

برای بررسی رفتار دقیق یک سازه تحت شوک حرارتی باید از شکل جفت شده معادلات ترمو-الاستیک کلاسیک استفاده شود. حل های تحلیلی این گونه از مسائل از نظر ریاضی پیچیده و محدود به یک جسم نامحدود یا نیم فضا با شرایط مرزی ساده هستند. کلی ترین شکل قانون اول ترمودینامیک (معادله انرژی) به صورت زیر بیان می شود [۱]:

$$(k_{ij}T_{,j})_{,i} - \rho c_t \dot{\theta} - T_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \beta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + R = 0 \quad (48-4)$$

در این رابطه k_{ij} ضرایب هدایت گرمایی، c_t گرمای ویژه، θ تغییرات دما، R نرخ تولید گرما است.

$$\epsilon_{ii} = \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (49-4)$$

$$q_{i,i} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rq_r) + \frac{\partial q_z}{\partial z} \quad (50-4)$$

برطبق قانون هدایت گرمایی فوریه، شار گرمایی عبوری از یک سطح واحد در واحد زمان به یک محیط پیوسته متناسب است با توزیع دما و با روابط تجربی زیر بیان می شود:

$$q_r = -k \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (51-4)$$

$$q_z = -k \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (52-4)$$

با جایگذاری در معادله (۴۸-۴) و ضرب کردن طرفین در r :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rq_r) + r \frac{\partial q_z}{\partial z} + r \rho c_t \dot{\theta} + r T_0 \left(1 + \frac{\theta}{T_0}\right) \beta_{ii} \dot{\epsilon}_{ii} - r R = 0 \quad (53-4)$$

در صورتی که تغییرات دما θ ، در مقایسه با دمای اولیه T_0 کوچک باشد، معادله (۴-۵۳) را می توان به شکل ساده تر زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rq_r) + r \frac{\partial q_z}{\partial z} + r \rho c_t T + r T_0 \beta_{ii} \dot{\epsilon}_{ii} - r R = 0 \quad (54-4)$$

تقریب گلرکین معادله انرژی (۴-۵۳) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{V(e)} \left(\frac{\partial}{\partial r} (rq_r) + r \frac{\partial q_z}{\partial z} + r\rho c\dot{\theta} + rT_0\beta\dot{\varepsilon}_{ii} - rR \right) S_l dV = 0 \quad (۴-۵۵)$$

$$l = 1, 2, \dots, ns$$

فرمول بندی انتگرالی گرادیان شار گرمایی $q_{i,i}$ برای مسائل دو بعدی را می توان به صورت زیر

بیان کرد:

$$\int_{V(e)} \frac{\partial}{\partial r} (rq_r) S_l dV = \int_{A(e)} (rq_r n_r) S_l dA - \int_{V(e)} r q_r S_{l,r} dV \quad (۴-۵۶)$$

$$l = 1, 2, \dots, ns$$

$$\int_{V(e)} r \frac{\partial q_z}{\partial z} S_l dV = \int_{A(e)} (rq_z n_z) S_l dA - \int_{V(e)} r q_z S_{l,z} dV \quad (۴-۵۷)$$

$$l = 1, 2, \dots, ns$$

که در این رابطه $A(e)$ سطح مرزی المان e تحت شار حرارتی است. جایگذاری

روابط (۴-۵۶) و (۴-۵۷) در معادله (۴-۵۳) و مرتب کردن عبارتهای آن رابطه

زیر را نتیجه می دهد:

$$\int_{A(e)} (rq_r n_r) S_l dA - \int_{V(e)} r q_r S_{l,r} dV + \int_{A(e)} (rq_z n_z) S_l dA - \int_{V(e)} r q_z S_{l,z} dV \quad (۴-۵۸)$$

$$+ \int_{V(e)} (r\rho c\dot{\theta}) S_l dV + \int_{V(e)} (rT_0\beta\dot{\varepsilon}_{ii}) S_l dV - \int_{V(e)} (rR) S_l dV = 0$$

$$l = 1, 2, \dots, ns$$

$$\int_{V(e)} (r\rho c\dot{\theta}) S_l dV + \int_{V(e)} rk\theta_{,r} S_{l,r} dV + \int_{V(e)} rk\theta_{,z} S_{l,z} dV + \quad (59-4)$$

$$\int_{V(e)} rT_0\beta \left(\frac{\dot{u}}{r} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \right) S_l dV = \int_{V(e)} (rR) S_l dV - \int_{A(e)} (rq_r n_r) S_l dA$$

$$- \int_{A(e)} (rq_z n_z) S_l dA$$

$$l = 1, 2, \dots, ns$$

با جایگذاری مولفه‌های جابجایی w_i ، u_i و تغییر دما θ از روابط (۲۲-۴) تا (۲۴-۴) و

مشتقات مرتبه اول آنها در رابطه (۵۹-۴)، تقریب المان محدود توسعه یافته معادله انرژی

جفت شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(\int_{V(e)} r\rho c S_l N_h dV \right) \dot{a}_h^T + \left(\int_{V(e)} r\rho c S_l \Phi_h dV \right) \dot{b}_h^T + \left(\int_{V(e)} r\rho c S_l \Psi_{hm} dV \right) \dot{c}_{hm}^T +$$

$$\left(\int_{V(e)} rk S_{l,r} N_{h,r} dV \right) a_h^T + \left(\int_{V(e)} rk S_{l,r} \Phi_{h,r} dV \right) b_h^T + \left(\int_{V(e)} rk S_{l,r} \Psi_{1m,r} dV \right) c_{1m}^T +$$

$$\left(\int_{V(e)} rk S_{l,z} N_{h,z} dV \right) a_h^T + \left(\int_{V(e)} rk S_{l,z} \Phi_{h,z} dV \right) b_h^T + \left(\int_{V(e)} rk S_{l,z} \Psi_{1m,z} dV \right) c_{1m}^T +$$

$$\left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l N_h dV \right) \dot{a}_h^u + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Phi_h dV \right) \dot{b}_h^u + \left(\int_{V(e)} T_0 \beta S_l \Psi_{hm} dV \right) \dot{c}_{hm}^u +$$

$$\left(\int_{V(e)} rT_0 \beta S_l N_{h,r} dV \right) \dot{a}_h^u + \left(\int_{V(e)} rT_0 \beta S_l \Phi_{h,r} dV \right) \dot{b}_h^u + \left(\int_{V(e)} rT_0 \beta S_l \Psi_{hm,r} dV \right) \dot{c}_{hm}^u +$$

$$\left(\int_{V(e)} rT_0 \beta S_l N_{h,z} dV \right) \dot{a}_h^v + \left(\int_{V(e)} rT_0 \beta S_l \Phi_{h,z} dV \right) \dot{b}_h^v + \left(\int_{V(e)} rT_0 \beta S_l \Psi_{hm,z} dV \right) \dot{c}_{hm}^v$$

$$= \int_{V(e)} rR S_l dV - \int_{A(e)} (rq_r n_r) S_l dA - \int_{A(e)} (rq_z n_z) S_l dA$$

$$l = 1, 2, \dots, ns \quad h = 1, \dots, ne \quad m = 1, \dots, 4 \quad (60-4)$$

$$\left(\int_{V(e)} r\rho c S_l N_h dV \right) \dot{a}_h^T + \left(\int_{V(e)} r\rho c S_l \Phi_h dV \right) \dot{b}_h^T + \left(\int_{V(e)} r\rho c S_l \Psi_{hm} dV \right) \dot{c}_{1m}^T +$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{V(e)} rk[S_{l,r}N_{h,r} + S_{l,z}N_{h,z}]dV \right) a_h^T + \left(\int_{V(e)} rk[S_{l,r}\Phi_{h,r} + S_{l,z}\Phi_{h,z}]dV \right) b_h^T \\
 & + \left(\int_{V(e)} rk[S_{l,r}\Psi_{1m,r} + S_{l,z}\Psi_{1m,z}]dV \right) c_{1m}^T + \\
 & \left(\int_{V(e)} T_0\beta[S_l N_h + rS_l N_{h,r}]dV \right) \dot{a}_h^u + \left(\int_{V(e)} T_0\beta[S_l \Phi_h + rS_l \Phi_{h,r}]dV \right) \dot{b}_h^u \\
 & + \left(\int_{V(e)} T_0\beta[S_l \Psi_{hm} + rS_l \Psi_{hm,r}]dV \right) \dot{c}_{hm}^u + \\
 & \left(\int_{V(e)} rT_0\beta S_l N_{h,z}dV \right) \dot{a}_h^v + \left(\int_{V(e)} rT_0\beta S_l \Phi_{h,z}dV \right) \dot{b}_h^v + \left(\int_{V(e)} rT_0\beta S_l \Psi_{hm,z}dV \right) \dot{c}_{hm}^v \\
 & = \\
 & \int_{V(e)} rRS_l dV - \int_{A(e)} (rq_r n_r) S_l dA - \int_{A(e)} (rq_z n_z) S_l dA \\
 & l = 1, 2, \dots, ns \quad h = 1, \dots, ne \quad m = 1, \dots, 4 \tag{۶۱-۴}
 \end{aligned}$$

معادلات فوق را می توان در قالب یک معادله ماتریسی مونتاژ کرد. این معادله، معادله جفت

شده المان محدود توسعه یافته است که به صورت زیر به دست می آید:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [C]\{\dot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{f\} \tag{۶۲-۴}$$

در این رابطه $[M]$, $[C]$, $[K]$ به ترتیب ماتریس های جرم، میرایی و سفتی هستند. $\{\Delta\}$ بردار

مجهولات گرهی و $\{f\}$ بردار نیروهای گرهی هستند. برای یک المان مبنا (e) این ماتریس و بردارها

به صورت زیر به دست می آیند:

$$[M]^{(e)} = \begin{bmatrix} [m_{11}] & [m_{12}] & [m_{13}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [m_{24}] & [m_{25}] & [m_{26}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \tag{۶۳-۴}$$

$$[C]^{(e)} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [C_{31}] & [C_{32}] & [C_{33}] & [C_{34}] & [C_{35}] & [C_{36}] & [C_{37}] & [C_{38}] & [C_{39}] \end{bmatrix} \tag{۶۴-۴}$$

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] & [K_{15}] & [K_{16}] & [K_{17}] & [K_{18}] & [K_{19}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] & [K_{25}] & [K_{26}] & [K_{27}] & [K_{28}] & [K_{29}] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [K_{37}] & [K_{38}] & [K_{39}] \end{bmatrix} \quad (۶۵-۴)$$

$$\{\Delta\}^{(e)} = \{a_h^u, b_h^u, c_{hm}^u, a_h^w, b_h^w, c_{hm}^w, a_h^T, b_h^T, c_{1m}^T\}^T \quad (۶۶-۴)$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

$$\{F\}^{(e)} = \left\{ \begin{array}{c} F_r \\ F_z \\ \int_{V(e)} rRS_l dV - \int_{A(e)} (rq_r n_r) S_l dA - \int_{A(e)} (rq_z n_z) S_l dA \end{array} \right\} \quad (۶۷-۴)$$

مولفه های ماتریس های جرم، میرایی و سفتی را می توان از معادلات زیر استخراج نمود:

$$[m_{11}] = [m_{24}] = \left[\int_V r\rho N_h S_l dV \right] \quad (۶۸-۴)$$

$$[m_{12}] = [m_{25}] = \left[\int_V r\rho \phi_h S_l dV \right] \quad (۶۹-۴)$$

$$[m_{13}] = [m_{26}] = \left[\int_V r\rho \Psi_{hm} S_l dV \right] \quad (۷۰-۴)$$

$$[k_{11}] = \int_{V(e)} \left[rS_{l,r} \left(\frac{\lambda}{r} N_h + (\lambda + 2\mu) N_{h,r} \right) + r\mu S_{l,z} N_{h,z} \right. \\ \left. + S_l \left(\lambda N_{h,r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} N_h \right) \right] dV \quad (۷۱-۴)$$

$$[k_{12}] = \int_{V(e)} \left[rS_{l,r} \left(\frac{\lambda}{r} \phi_h + (\lambda + 2\mu) \phi_{h,r} \right) + r\mu S_{l,z} \phi_{h,z} \right. \\ \left. + S_l \left(\lambda \phi_{h,r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \phi_h \right) \right] dV \quad (۷۲-۴)$$

$$[k_{13}] = \int_{V(e)} \left[rS_{l,r} \left(\frac{\lambda}{r} \Psi_{hm} + (\lambda + 2\mu) \Psi_{hm,r} \right) + r\mu S_{l,z} \Psi_{hm,z} \right. \\ \left. + S_l \left(\lambda \Psi_{hm,r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} \Psi_{hm} \right) \right] dV \quad (73-4)$$

$$[k_{14}] = \int_{V(e)} [r\lambda S_{l,r} N_{h,z} + \lambda S_l N_{h,z} + r\mu S_{l,z} N_{h,r}] dV \quad (74-4)$$

$$[k_{15}] = \int_{V(e)} [r\lambda S_{l,r} \Phi_{h,z} + \lambda S_l \Phi_{h,z} + r\mu S_{l,z} \Phi_{h,r}] dV \quad (75-4)$$

$$[k_{16}] = \int_{V(e)} [r\lambda S_{l,r} \Psi_{hm,z} + \lambda S_l \Psi_{hm,z} + r\mu S_{l,z} \Psi_{hm,r}] dV \quad (76-4)$$

$$[k_{17}] = - \int_{V(e)} [\beta (rS_{l,r} + S_l) (N_h)] dV \quad (77-4)$$

$$[k_{18}] = - \int_{V(e)} [\beta (rS_{l,r} + S_l) (\Phi_h)] dV \quad (78-4)$$

$$[k_{19}] = - \int_{V(e)} [\beta (rS_{l,r} + S_l) (\Psi_{1m})] dV \quad (79-4)$$

$$[k_{21}] = \int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} N_{h,z} + r\lambda S_{l,z} \left(\frac{N_h}{r} + N_{h,r} \right) \right] dV \quad (80-4)$$

$$[k_{22}] = \int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} \Phi_{h,z} + r\lambda S_{l,z} \left(\frac{\Phi_h}{r} + \Phi_{h,r} \right) \right] dV \quad (81-4)$$

$$[k_{23}] = \int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} \Psi_{hm,z} + r\lambda S_{l,z} \left(\frac{\Psi_{hm}}{r} + \Psi_{hm,r} \right) \right] dV \quad (82-4)$$

$$[k_{24}] = \int_{V(e)} [r\mu S_{l,r} N_{h,r} + r(\lambda + 2\mu) S_{l,z} N_{h,z}] dV \quad (۸۳-۴)$$

$$[k_{25}] = \int_{V(e)} [r\mu S_{l,r} \Phi_{h,r} + r(\lambda + 2\mu) S_{l,z} \Phi_{h,z}] dV \quad (۸۴-۴)$$

$$[k_{26}] = \int_{V(e)} [r\mu S_{l,r} \Psi_{hm,r} + r(\lambda + 2\mu) S_{l,z} \Psi_{hm,z}] dV \quad (۸۵-۴)$$

$$[k_{27}] = - \int_{V(e)} [r\beta S_{l,z} (N_h)] dV \quad (۸۶-۴)$$

$$[k_{28}] = - \int_{V(e)} [r\beta S_{l,z} (\Phi_h)] dV \quad (۸۷-۴)$$

$$[k_{29}] = - \int_{V(e)} [r\beta S_{l,z} (\Psi_{1m})] dV \quad (۸۸-۴)$$

$$[k_{37}] = \int_{V(e)} rk [S_{l,r} N_{h,r} + S_{l,z} N_{h,z}] dV \quad (۸۹-۴)$$

$$[k_{38}] = \int_{V(e)} rk [S_{l,r} \Phi_{h,r} + S_{l,z} \Phi_{h,z}] dV \quad (۹۰-۴)$$

$$[k_{39}] = \int_{V(e)} rk [S_{l,r} \Psi_{1m,r} + S_{l,z} \Psi_{1m,z}] dV \quad (۹۱-۴)$$

$$[C_{31}] = \int_{V(e)} T_0 \beta [S_l N_h + r S_l N_{h,r}] dV \quad (۹۲-۴)$$

$$[C_{32}] = \int_{V(e)} T_0 \beta [S_l \Phi_h + r S_l \Phi_{h,r}] dV \quad (۹۳-۴)$$

$$[C_{33}] = \int_{V(e)} T_0 \beta [S_l \Psi_{hm} + r S_l \Psi_{hm,r}] dV \quad (۹۴-۴)$$

$$[C_{34}] = \int_{V(e)} [r T_0 \beta S_l N_{h,z}] dV \quad (۹۵-۴)$$

$$[C_{35}] = \int_{V(e)} [r T_0 \beta S_l \Phi_{h,z}] dV \quad (۹۶-۴)$$

$$[C_{36}] = \int_{V(e)} [rT_0\beta S_l \Psi_{hm,z}] dV \quad (97-4)$$

$$[C_{37}] = \int_{V(e)} [r\rho c S_l N_h] dV \quad (98-4)$$

$$[C_{38}] = \int_{V(e)} [r\rho c S_l \Phi_h] dV \quad (99-4)$$

$$[C_{39}] = \int_{V(e)} [r\rho c S_l \Psi_{1m}] dV \quad (100-4)$$

این مولفه ها را می توان به صورت ماتریسی بازنویسی نمود:

$$[m_{11}] = [m_{24}] = \int_{V(e)} r\rho [S]^T [N] dV \quad (101-4)$$

$$[m_{12}] = [m_{25}] = \int_{V(e)} r\rho [S]^T [\Phi] dV \quad (102-4)$$

$$[m_{13}] = [m_{26}] = \int_V r[\rho [S]^T [\Psi_1] \quad \rho [S]^T [\Psi_2] \quad \rho [S]^T [\Psi_3] \quad \rho [S]^T [\Psi_4]] dV \quad (103-4)$$

$$[k_{11}] = \int_V r \left[\frac{\lambda}{r} [G_{13}]^T [N] + (\lambda + 2\mu) [G_{13}]^T [G_1] + \mu [G_{14}]^T [G_2] \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_1] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [S]^T [N] \right] dV \quad (104-4)$$

$$[k_{12}] = \int_V r \left[\frac{\lambda}{r} [G_{13}]^T [\Phi] + (\lambda + 2\mu) [G_{13}]^T [G_3] + \mu [G_{14}]^T [G_4] \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_3] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [S]^T [\Phi] \right] dV \quad (105-4)$$

$$\begin{aligned}
 [k_{13}] = & \left[\int_V r \left[\frac{\lambda}{r} [G_{13}]^T [\Psi_1] + (\lambda + 2\mu) [G_{13}]^T [G_5] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu [G_{14}]^T [G_9] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_5] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [S]^T [\Psi_1] \right] dV \right. \\
 & \left. \int_V r \left[\frac{\lambda}{r} [G_{13}]^T [\Psi_2] + (\lambda + 2\mu) [G_{13}]^T [G_6] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu [G_{14}]^T [G_{10}] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_6] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [S]^T [\Psi_2] \right] dV \right. \quad (106-4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \int_V r \left[\frac{\lambda}{r} [G_{13}]^T [\Psi_3] + (\lambda + 2\mu) [G_{13}]^T [G_7] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu [G_{14}]^T [G_{11}] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_7] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [S]^T [\Psi_3] \right] dV \right. \\
 & \left. \int_V r \left[\frac{\lambda}{r} [G_{13}]^T [\Psi_4] + (\lambda + 2\mu) [G_{13}]^T [G_8] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu [G_{14}]^T [G_{12}] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_8] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} [S]^T [\Psi_4] \right] dV \right]
 \end{aligned}$$

$$[k_{14}] = \int_V r \left[\lambda [G_{13}]^T [G_2] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_2] + \mu [G_{14}]^T [G_1] \right] dV \quad (107-4)$$

$$[k_{15}] = \int_V r \left[\lambda [G_{13}]^T [G_4] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_4] + \mu [G_{14}]^T [G_3] \right] dV \quad (108-4)$$

$$\begin{aligned}
 [k_{16}] = & \int_V r \left[(\lambda [G_{13}]^T [G_9] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_9] + \mu [G_{14}]^T [G_5]) \right. \\
 & \left. (\lambda [G_{13}]^T [G_{10}] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_{10}] + \mu [G_{14}]^T [G_6]) \right. \quad (109-4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. (\lambda [G_{13}]^T [G_{11}] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_{11}] + \mu [G_{14}]^T [G_7]) \right. \\
 & \left. (\lambda [G_{13}]^T [G_{12}] + \frac{\lambda}{r} [S]^T [G_{12}] + \mu [G_{14}]^T [G_8]) \right] dV
 \end{aligned}$$

$$[k_{17}] = - \int_{V(e)} [\beta (r [G_{13}]^T + [S]^T) ([N])] dV \quad (110-4)$$

$$[k_{18}] = - \int_{V(e)} [\beta (r [G_{13}]^T + [S]^T) ([\Phi])] dV \quad (111-4)$$

$$[k_{19}] = - \int_{V(e)} \beta [(r[G_{13}]^T + [S]^T)[\Psi_1]] dV \quad (112-4)$$

$$[k_{21}] = \int_V r \left[\mu[G_{13}]^T[G_2] + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[N] + \lambda[G_{14}]^T[G_1] \right] dV \quad (113-4)$$

$$[k_{22}] = \int_V r \left[\mu[G_{13}]^T[G_4] + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Phi] + \lambda[G_{14}]^T[G_3] \right] dV \quad (114-4)$$

$$\begin{aligned} [k_{23}] = \int_V r \left[\left(\mu[G_{13}]^T[G_9] + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Psi_1] + \lambda[G_{14}]^T[G_5] \right) \left(\mu[G_{13}]^T[G_{10}] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Psi_2] + \lambda[G_{14}]^T[G_6] \right) \left(\mu[G_{13}]^T[G_{11}] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Psi_3] + \lambda[G_{14}]^T[G_7] \right) \left(\mu[G_{13}]^T[G_{12}] \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Psi_4] + \lambda[G_{14}]^T[G_8] \right) \right] dV \quad (115-4) \end{aligned}$$

$$[k_{24}] = \int_V r [\mu[G_{13}]^T[G_1] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_2]] dV \quad (116-4)$$

$$[k_{25}] = \int_V r [\mu[G_{13}]^T[G_3] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_4]] dV \quad (117-4)$$

$$\begin{aligned} [k_{26}] = \int_V r [(\mu[G_{13}]^T[G_5] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_9]) (\mu[G_{13}]^T[G_6] \\ + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{10}]) (\mu[G_{13}]^T[G_7] \\ + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{11}]) (\mu[G_{13}]^T[G_8] \\ + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{12}])] dV \quad (118-4) \end{aligned}$$

$$[k_{27}] = - \int_{V(e)} r \beta [G_{14}]^T[N] dV \quad (119-4)$$

$$[k_{28}] = - \int_{V(e)} r\beta [G_{14}]^T [\Phi] dV \quad (120-4)$$

$$[k_{29}] = - \int_{V(e)} r\beta [G_{14}]^T [\Psi_1] dV \quad (121-4)$$

$$[k_{37}] = \int_{V(e)} rk ([G_{13}]^T [G_1] + [G_{14}]^T [G_2]) dV \quad (122-4)$$

$$[k_{38}] = \int_{V(e)} rk ([G_{13}]^T [G_3] + [G_{14}]^T [G_4]) dV \quad (123-4)$$

$$[k_{39}] = \int_{V(e)} rk ([G_{13}]^T [G_5] + [G_{14}]^T [G_9]) dV \quad (124-4)$$

$$[C_{31}] = \int_{V(e)} T_0\beta ([S_t]^T ([N] + r[G_1])) dV \quad (125-4)$$

$$[C_{32}] = \int_{V(e)} T_0\beta ([S_t]^T ([\Phi] + r[G_3])) dV \quad (126-4)$$

$$[C_{33}] = \int_{V(e)} T_0\beta ([S_t]^T ([\Psi_1] + r[G_5]) \quad [S_t]^T ([\Psi_2] \\ + r[G_6]) \quad [S_t]^T ([\Psi_3] + r[G_7]) \quad [S_t]^T ([\Psi_4] + r[G_8])) dV \quad (127-4)$$

$$[C_{34}] = \int_{V(e)} rT_0\beta [S_t]^T [G_2] dV \quad (128-4)$$

$$[C_{35}] = \int_{V(e)} rT_0\beta [S_t]^T [G_4] dV \quad (129-4)$$

$$[C_{36}] = \int_{V(e)} rT_0\beta ([S_t]^T [G_9] \quad [S_t]^T [G_{10}] \quad [S_t]^T [G_{11}] \quad [S_t]^T [G_{12}]) dV \quad (130-4)$$

$$[C_{37}] = \int_{V(e)} r\rho c [S_t]^T [N] dV \quad (131-4)$$

$$[C_{38}] = \int_{V(e)} r\rho c [S_t]^T [\Phi] dV \quad (132-4)$$

$$[C_{39}] = \int_{V(e)} r \rho c [S_t]^T [\Psi_1] dV \quad (133-4)$$

ماتریس و بردارهای استفاده شده در این معادلات برای یک المان چهار گرهی به

صورت زیر بیان می شوند:

$$[S] = [N_1 \dots N_4 \ \Phi_1 \dots \Phi_4 \ \Psi_{11} \dots \Psi_{44}] \quad (134-4)$$

$$[S_t] = [N_1 \dots N_4 \ \Phi_1 \dots \Phi_4 \ \Psi_{11} \dots \Psi_{14}] \quad (135-4)$$

$$[N] = [N_1 N_2 N_3 N_4] \quad (136-4)$$

$$[\Phi] = [\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4] \quad (137-4)$$

$$[\Psi_1] = [\Psi_{11} \dots \Psi_{44}] \quad (138-4)$$

$$[\Psi_2] = [\Psi_{21} \dots \Psi_{24}] \quad (139-4)$$

$$[\Psi_3] = [\Psi_{31} \dots \Psi_{44}] \quad (140-4)$$

$$[\Psi_4] = [\Psi_{41} \dots \Psi_{44}] \quad (141-4)$$

$$[G_1] = [N_{1,r} N_{2,r} N_{3,r} N_{4,r}] \quad (142-4)$$

$$[G_2] = [N_{1,z} N_{2,z} N_{3,z} N_{4,z}] \quad (143-4)$$

$$[G_3] = [\Phi_{1,r} \Phi_{2,r} \Phi_{3,r} \Phi_{4,r}] \quad (144-4)$$

$$[G_4] = [\Phi_{1,z} \Phi_{2,z} \Phi_{3,z} \Phi_{4,z}] \quad (145-4)$$

$$[G_5] = [\Psi_{11,r} \Psi_{12,r} \Psi_{13,r} \Psi_{14,r}] \quad (146-4)$$

$$[G_6] = [\Psi_{21,r} \Psi_{22,r} \Psi_{23,r} \Psi_{24,r}] \quad (147-4)$$

$$[G_7] = [\Psi_{31,r} \Psi_{32,r} \Psi_{33,r} \Psi_{34,r}] \quad (148-4)$$

$$[G_8] = [\Psi_{41,r} \Psi_{42,r} \Psi_{43,r} \Psi_{44,r}] \quad (149-4)$$

$$[G_9] = [\Psi_{11,z} \Psi_{12,z} \Psi_{13,z} \Psi_{14,z}] \quad (150-4)$$

$$[G_{10}] = [\Psi_{21,z} \Psi_{22,z} \Psi_{23,z} \Psi_{24,z}] \quad (151-4)$$

$$[G_{11}] = [\Psi_{31,z} \Psi_{32,z} \Psi_{33,z} \Psi_{34,z}] \quad (152-4)$$

$$[G_{12}] = [\Psi_{41,z} \Psi_{42,z} \Psi_{43,z} \Psi_{44,z}] \quad (153-4)$$

$$[G_{13}] = [N_{1,r} \dots N_{4,r} \Phi_{1,r} \dots \Phi_{4,r} \Psi_{11,r} \dots \Psi_{44,r}] \quad (154-4)$$

$$[G_{14}] = [N_{1,z} \dots N_{4,z} \Phi_{1,z} \dots \Phi_{4,z} \Psi_{11,z} \dots \Psi_{44,z}] \quad (155-4)$$

در این مرحله برای ساده‌سازی ماتریس‌ها به منظور سهولت در پیاده سازی الگوریتم و برنامه نویسی، معادلات را به صورتی جابه‌جا می‌کنیم که بردار مجهولات گرهی برای المان مبنای (e) که به طور کامل غنی‌سازی شده است به صورت زیر تبدیل شود:

$$\{\Delta\} = \{a_h^u, a_h^w, b_h^u, b_h^w, c_{hm}^u, c_{hm}^w, a_h^T, b_h^T, c_{1m}^w\} \quad (156-4)$$

در این صورت ماتریس‌های جرم و سفتی و دمپر را می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

$$[M] = \begin{bmatrix} [M_1] & [0]_{48 \times 12} \\ [0]_{12 \times 48} & [0]_{12 \times 12} \end{bmatrix} \quad (157-4)$$

$$[C]^{(e)} = \begin{bmatrix} [0]_{48 \times 48} & [0]_{48 \times 12} \\ [C_1] & [C_2] \end{bmatrix} \quad (158-4)$$

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [0]_{12 \times 48} & [K_3] \end{bmatrix} \quad (159-4)$$

$$[M_1] = \int_{V(e)} r \rho [B_m]^T [B_m] dV = 2\pi \int_{V(e)} r^2 \rho [B_m]^T [B_m] dA \quad (160-4)$$

$$[C_1] = \int_{V(e)} T_0 \beta [S_t]^T [S_1] dV = 2\pi \int_{V(e)} T_0 r \beta [S_t]^T [S_1] dA, \quad (161-4)$$

$$[C_2] = \int_{V(e)} r \rho c [S_t]^T [S_t] dV = 2\pi \int_{V(e)} r^2 \rho c [S_t]^T [S_t] dA \quad (162-4)$$

$$[K_1] = \int_{V(e)} r [B_k]^T [D] [B_k] dV = 2\pi \int_{V(e)} r^2 [B_k]^T [D] [B_k] dA \quad (163-4)$$

$$[K_2] = - \int_{V(e)} \beta [S1]^T [S_t] dV = -2\pi \int_{V(e)} r \beta [S1]^T [S_t] dA \quad (164-4)$$

$$[K_3] = \int_{V(e)} rk [S2]^T [s2] dV = 2\pi \int_{V(e)} r^2 k [S2]^T [S2] dA \quad (165-4)$$

$$[S1] = \quad (166-4)$$

$$[rN_{1,r} + N_1 \quad \dots \quad rN_{4,r} + N_4 \quad rN_{1,z} \quad \dots \quad rN_{4,z} \quad r\Phi_{1,r} + \Phi_1 \quad \dots \quad r\Phi_{4,r} + \Phi_4 \\ r\Phi_{1,z} \quad \dots \quad r\Phi_{4,z} \quad r\Psi_{11,r} + \Psi_{11} \quad \dots \quad r\Psi_{44,r} + \Psi_{44} \quad r\Psi_{11,z} \quad \dots \quad r\Psi_{44,z}]$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_4 & 0 & \dots & 0 & \Phi_1 & \dots & \Phi_4 \\ 0 & \dots & 0 & N_1 & \dots & N_4 & 0 & \dots & 0 \\ & & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11} & \dots & \Psi_{44} & 0 & \dots & 0 \\ & & \Phi_1 & \dots & \Phi_4 & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11} & \dots & \Psi_{44} \end{bmatrix} \quad (167-4)$$

$$[B_k] = \begin{bmatrix} N_{1,r} & \dots & N_{4,r} & 0 & \dots & 0 & \Phi_{1,r} & \dots & \Phi_{4,r} \\ 0 & \dots & 0 & N_{1,z} & \dots & N_{4,z} & 0 & \dots & 0 \\ N_{1,r} & \dots & N_{4,r} & 0 & \dots & 0 & \Phi_{1,r} & \dots & \Phi_{4,r} \\ N_{1,z} & \dots & N_{4,z} & N_{1,r} & \dots & N_{4,r} & \Phi_{1,z} & \dots & \Phi_{4,z} \\ & & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,r} & \dots & \Psi_{44,r} & 0 & \dots & 0 \\ & & \Phi_{1,z} & \dots & \Phi_{4,z} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,z} & \dots & \Psi_{44,z} \\ & & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,r} & \dots & \Psi_{44,r} & 0 & \dots & 0 \\ & & \Phi_{1,r} & \dots & \Phi_{4,r} & \Psi_{11,z} & \dots & \Psi_{44,z} & \Psi_{11,r} & \dots & \Psi_{11,r} \end{bmatrix} \quad (168-4)$$

$$(169-4)$$

$$[S_t] = [rN_{1,r} + N_1 \quad \dots \quad rN_{4,r} + N_4 \quad r\Phi_{1,r} + \Phi_1 \quad \dots \quad r\Phi_{4,r} + \Phi_4 \\ r\Psi_{11,r} + \Psi_{11} \quad \dots \quad r\Psi_{44,r} + \Psi_{44} \quad rN_{1,z} \quad \dots \quad rN_{4,z} \quad r\Phi_{1,z} \quad \dots \quad r\Phi_{4,z} \\ r\Psi_{11,z} \quad \dots \quad r\Psi_{44,z}]$$

$$[S2] \quad (170-4)$$

$$= \begin{bmatrix} N_{1,r} & N_{2,r} & N_{3,r} & N_{4,r} & \Phi_{1,r} & \Phi_{2,r} & \Phi_{3,r} & \Phi_{4,r} & \Psi_{11,r} & \dots & \Psi_{44,r} \\ N_{1,z} & N_{2,z} & N_{3,z} & N_{4,z} & \Phi_{1,z} & \Phi_{2,z} & \Phi_{3,z} & \Phi_{4,z} & \Psi_{11,z} & \dots & \Psi_{44,z} \end{bmatrix}$$

ماتریس خواص در حالت متقارن محوری همانند حالت کرنش صفحه‌ای بیان می‌گردد که آن را

به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (171-4)$$

برای محاسبه ماتریس‌های $[B_m]$ و $[B_k]$ در صورت استفاده از المان‌های

ایزوپارامتریک، ابتدا باید مشتقات توابع شکل نسبت به دستگاه مختصات محل (ξ, η) تعیین و

با استفاده از ماتریس ژاکوبی^۱ $[Ja]$ به دستگاه مختصات (r,z) انتقال یابند. ماتریس ژاکوبی به صورت زیر تعریف می گردد [۲]:

$$[Ja] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۷۲-۴)$$

و هرکدام از مولفه های آن به صورت زیر بیان می گردند:

$$j_{11} = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 r_i N_{i,\xi} \quad (۱۷۳-۴)$$

$$j_{12} = \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 z_i N_{i,\xi} \quad (۱۷۴-۴)$$

$$j_{21} = \frac{\partial r}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 r_i N_{i,\eta} \quad (۱۷۵-۴)$$

$$j_{22} = \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 z_i N_{i,\eta} \quad (۱۷۶-۴)$$

در این صورت می توان ماتریس $[B_k]$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$[B_k] = \frac{1}{\det(Ja)} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j_{21} & j_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -j_{21} & j_{11} & j_{22} & -j_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} & \dots & N_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 \\ N_{1,\eta} & \dots & N_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_{1,\xi} & \dots & N_{4,\xi} \\ 0 & \dots & 0 & N_{1,\eta} & \dots & N_{4,\eta} \\ \frac{N_1}{R_{nQ}} \det(Ja) & \dots & \frac{N_4}{R_{nQ}} \det(Ja) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۷۷-۴)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \Phi_{1,\xi} & \dots & \Phi_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Phi_{1,\eta} & \dots & \Phi_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 \\ N_{1,\xi} & \dots & N_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 & \Phi_{1,\xi} & \dots & \Phi_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & \dots & N_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 & \Phi_{1,\eta} & \dots & \Phi_{4,\eta} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\Phi_1}{R_{nQ}} \det(Ja) & \dots & \frac{\Phi_4}{R_{nQ}} \det(Ja) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

¹ Jacobian matrix

$$\left[\begin{array}{cccccc} \Psi_{11,\xi} & \dots & \Psi_{44,\xi} & 0 & \dots & 0 \\ \Psi_{11,\eta} & \dots & \Psi_{44,\eta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\xi} & \dots & \Psi_{44,\xi} \\ 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\eta} & \dots & \Psi_{44,\eta} \\ \frac{\Psi_{11}}{R_{nQ}} \det(Ja) & \dots & \frac{\Psi_{44}}{R_{nQ}} \det(Ja) & 0 & \dots & 0 \end{array} \right]$$

در این رابطه $\det(Ja)$ دترمینان ماتریس ژاکوبی است.

R_{nQ} مختصات شعاعی نقطه گوسی مورد انتگرال گیری خواهد بود و از رابطه زیر می توان آن را محاسبه

نمود:

$$R_{nQ} = [Re] * [N]^T \quad (178-4)$$

بردار $[N]$ در این معادله بردار توابع شکل است و Re بردار مختصات شعاعی گره های یک المان خواهد

بود که آن را می توان برای یک المان چهارگره ای به صورت زیر بیان کرد:

$$Re = [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4] \quad (179-4)$$

۵.۴ انتگرال گیری مستقیم زمانی

استفاده از روش های گام به گام عددی در آنالیز دینامیکی به خصوص از نوع غیر خطی آن

بسیار مرسوم است. در این میان روش های مستقیم زمانی از عمومیت بسیاری برخوردارند، به طوری

که در آنها معادلات تعادل در زمانهای گسسته حل می گردد. در این روش ها از معادلات نموی

حرکت استفاده شده و با انتگرال گیری گام به گام، پاسخ سازه محاسبه می شود. واژه «مستقیم» به

این معنی است که پیش از انتگرال گیری عددی، تبدیل معادلات به فرم دیگری (مثلاً آنالیز در حوزه

فرکانس) انجام نمی گیرد. این گونه روش ها خود به دو نوع صریح و ضمنی تقسیم بندی می گردند

که هر کدام نیز می توانند در یک فرم تک گامی و یا چند گامی قرار گیرند. به عنوان یک ایده کلی،

در مسائل انتشار موج، استفاده از تکنیک انتگرال گیری صریح مناسبتر است، در حالیکه انتگرال گیری

ضمنی برای مسائل اینرسی موثرتر می باشد. بعضاً نیز وجود دارد که ترکیبی از هر دو الگوریتم صریح

و ضمنی می‌باشند. این قبیل روش‌ها گاهاً برای سیستم‌های چند درجه آزادی، هنگامی که مرتبه ماتریس‌ها زیاد باشد می‌تواند بسیار پر هزینه باشند. بنابراین در تحلیل‌های عملی شمار اندکی از روش‌های مؤثر، جالب توجه می‌باشند. بنابراین جهت انتخاب یک روش انتگرال‌گیری عددی کارا، یک مقایسه کامل و جامع از این روشها نیاز است. اکثر این روش‌ها، از قبیل روش‌های تفاضلات مرکزی، هوبولت، نیومارک، ویلسون، رانگ - کوتاه و بسیاری روشهای دیگر با هم مقایسه هستند [۴۸].

از آنجایی که هزینه یک روش گام به گام عددی به طور مستقیم مربوط به تعداد گام‌های زمانی است، بنابراین گام زمانی باید به اندازه‌ای بزرگ باشد که هزینه محاسباتی را کاهش دهد در حالی که این گام نیز به قدر کافی کوچک باشد تا دقت مورد مطالبه را اقماع نماید. انتخاب اندازه گام زمانی Δt که در محاسبه گام به گام پاسخ دینامیکی یک سیستم به کار می‌رود به پایداری و یا دقت الگوریتم مربوطه محدود می‌شود. اصلی‌ترین لازمه یک الگوریتم عددی این است که هنگامی که مقدار گام زمانی به سمت صفر میل می‌کند ($\Delta t \rightarrow 0$)، پاسخ محاسبه شده به مقدار دقیق آن همگرا شود. تعیین مقدار گام زمانی بهینه در هر روش متفاوت است و آنالیز پایداری و دقت در انتخاب یک گام بهینه مناسب، مفید می‌باشد [۴۸].

۱.۵.۴ بررسی پایداری

به طور کلی روش‌های انتگرال‌گیری عددی، دارای پایداری مشروط و یا نامشروط هستند. یک روش عددی، پایداری نامشروط دارد اگر جواب برای هر گونه شرایط اولیه و به ازای هر گام زمانی Δt بدون کران رشد نکند، به ویژه هنگامی که $\Delta t/T$ بزرگ باشد (T دوره تناوب سازه است). روش عددی به طور مشروط پایدار خواهد بود اگر شرط فوق تنها هنگامی صادق باشد که گام زمانی کوچکتر یا مساوی یک مقدار بحرانی ($\Delta t_{critical}$) باشد که معمولاً حد پایداری نامیده می‌شود. برای بررسی پایداری یک روش انتگرال‌گیری گام به گام، نیاز است که عملگرهای تقریب‌سازی مشخص گردد. در روش‌های انتگرال‌گیری مستقیم، فرض می‌شود که جواب مورد نیاز برای زمان‌های گسسته

در این صورت برای روش انتگرال مورد نظر، هدف ایجاد و رابطه بازگشتی زیر است:

$$\{\hat{X}_{t+\Delta t}\} = [A]\{\hat{X}_t\} + [L]\{\hat{f}_{t+\nu}\} \quad (180-4)$$

که در آن بردارهایی هستند که کمیت های جواب را ذخیره می کنند (مثلاً تغییر مکان ها و سرعت ها) و $\hat{f}_{t+\nu}$ بردار بار در زمان $t + \nu$ است. ν می تواند صفر، Δt یا هر مقدار دیگری را داشته باشد که برای هر روش انتگرال گیری متفاوت است. ماتریس A و بردار L به ترتیب عملگرهای تقریب سازی و بار انتگرال گیری هستند. به ماتریس A ماتریس تشدید نیز گفته می شود. هر کمیت در رابطه (180-4) بستگی به روش خاص انتگرال گیری مورد استفاده دارد. از این رابطه برای مطالعه پایداری روش های انتگرال گیری استفاده می شود. پایداری یک روش انتگرال گیری با ارزیابی رفتار جواب عددی برای شرایط اولیه اختیاری تعیین می شود. بنابراین انتگرال گیری را هنگامی در نظر می گیریم که هیچگونه باری وجود ندارد، به عبارت دیگر $f = 0$ است. ماتریس عملگر تقریب برای روش نیومارک به فرم زیر می باشد [48].

$$\begin{Bmatrix} X_{t+N} \\ \dot{X}_{t+N} \\ \ddot{X}_{t+N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \beta\mu & \Delta t(1 - \beta\mu - 2\beta k) & \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \beta\mu - 2(1 - \mu)\beta k \right) \\ \frac{-\mu\gamma}{\Delta t} & 1 - \mu\gamma - 2\gamma k & \Delta t \left(1 - \gamma - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \gamma\mu - 2(1 - \gamma)\gamma k \right) \\ \frac{-\mu}{\Delta t^2} & \frac{-(\mu + 2k)}{\Delta t} & - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \mu - 2(1 - \gamma)k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_t \\ \dot{X}_t \\ \ddot{X}_t \end{Bmatrix} \quad (181-4)$$

$$\mu = \left(\frac{2}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{2\zeta\mu}{\omega \Delta t} + \beta \right)^{-1}$$

$$K = \frac{\zeta\mu}{\omega \Delta t}$$

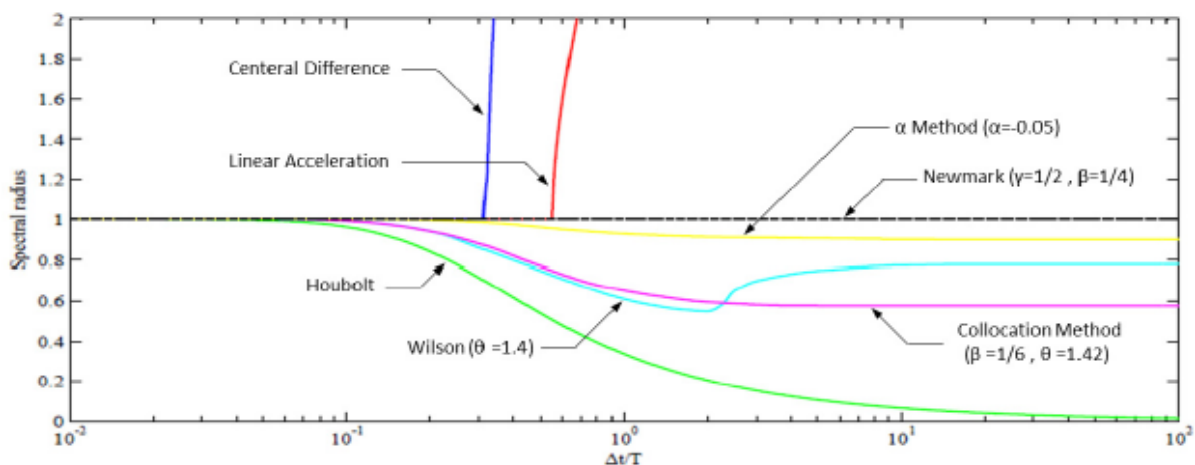
آنالیز پایداری را می توان با حل مسئله مقدار ویژه ماتریس عملگر تقریب سازی انجام داد.

مقادیر ویژه بردارهای ویژه را می توان از حل $([A] - \lambda[I])\{\phi\} = \{0\}$ محاسبه نمود. در این راه از تجزیه

طیفی A نیز می‌توان استفاده کرد. A را می‌توان بر حسب مقادیر و بردارهای ویژه به فرم $[A] = [\phi][\lambda][\phi]^{-1}$ نوشت که $[\phi]$ ماتریس متشکل از بردار ویژه‌های A و $[\lambda]$ یک ماتریس قطری از مقدار ویژه‌های A است. حال برای داشتن یک حل پایدار، نرم عناصر $[\lambda]$ نباید بیشتر از واحد باشند. بنابراین :

$$\rho(A) = \max(\|\lambda_1\|, \|\lambda_2\|, \dots) \leq 1 \quad (182-4)$$

$\rho(A)$ شعاع طیفی ماتریس A است که تابعی از گام زمانی Δt می‌باشد. بسیاری از این روش‌ها مانند ویلسون- θ و نیومارک- β دارای پارامتر متغیری هستند که با در نظر گرفتن محدوده مشخصی برای این پارامترها شعاع طیفی همواره کوچکتر از واحد می‌شود. در شکل (۲-۴) بر حسب نسبت $\Delta t/T$ برای نمونه‌هایی از روش‌های انتگرال‌گیری مستقیم، جهت مقایسه حد پایداری در مقیاس لگاریتمی ترسیم شده است. همان‌طور که از شکل نیز مشخص است، روش صریح تفاضلات مرکزی دارای حد پایداری $1/\pi = 0.32$ است که این مقدار برای روش شتاب خطی 0.55 می‌باشد [۴۸].



شکل ۲-۴ مقدار شعاع طیفی بر حسب تغییرات $\Delta t/T$ [۴۸]

۲.۵.۴ روش نیومارک

یکی از روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم روش نیومارک می‌باشد. این روش در طی پنجاه سال گذشته به طور گسترده برای حل این معادلات در دینامیک سازه‌ها و زمینه‌های

مختلف مهندسی مکانیک به کار گرفته شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. پیاده‌سازی آسان و ویژگی‌های خوب این روش و مشتقات آن در خصوص میرایی عددی و بقای انرژی بسیار قابل توجه است. خانواده نیومارک پرکاربردترین روش‌ها برای حل معادله گسسته‌سازی شده است و شامل معادلات زیر می‌باشد [۱]:

$$[M]\{\Delta''_{(n+1)}\} + [C]\{\Delta'_{(n+1)}\} + [K]\{\Delta_{(n+1)}\} = \{F(n+1)\} \quad (۱۸۳-۴)$$

$$\{\Delta_{n+1}\} = \{\Delta_n\} + \Delta t \{\dot{\Delta}_n\} + \Delta t^2 (1/2 - \zeta) \{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t^2 \zeta \{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \quad (۱۸۴-۴)$$

$$\{\dot{\Delta}_{n+1}\} = \{\dot{\Delta}_n\} + \Delta t(1 - \gamma) \{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t \gamma \{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \quad (۱۸۵-۴)$$

که در این روابط پارامترهای ζ و γ مشخصات پایداری و دقت الگوریتم مورد نظر را تعیین می‌کنند. باید توجه داشت که اگر $\gamma = 0/5$ باشد، میرایی ویسکوز بر روی پایداری اثری ندارد، همچنین هنگامی که $\gamma > 0/5$ شود اثر میرایی ویسکوز افزایش گام زمانی بحرانی روش‌های نیومارکی است که به صورت مشروط پایدار هستند.

خانواده نیومارک شامل روش‌های ویژه‌ای است که خیلی شناخته شده و پرکاربرد هستند. روش شتاب متوسط یکی از پرکاربردترین این روش‌ها برای کاربردهای دینامیک سازه‌ای می‌باشد که بدون قید و شرط پایدار است. در این روش مقادیر $\gamma = 0/5$ و $\eta = 0/25$ در نظر گرفته می‌شود [۱].

از آنجایی که برای روش المان محدود توسعه یافته با یک فرمول‌بندی نیومارک صریح، گام زمانی پایدار خیلی کوچک است، در این پایان‌نامه از روش ضمنی شتاب متوسط استفاده خواهد شد.

فصل پنجم

مکانیک شکست دینامیکی

۱.۵ مقدمه

مکانیک شکست شاخه‌ای از مکانیک جامدات می‌باشد که به بررسی ایجاد و گسترش ترک در جامدات، سازه‌ها و چگونگی تأثیر آن بر تغییر شکل و احیاناً زوال سازه می‌پردازد. این موضوعات از هر دو منظر مکانیک محیط‌های پیوسته و محیط‌های گسسته مورد مطالعه قرار گرفته و می‌گیرد. نقطه‌ی آغازین این دانش آزمایشاتی بود که در دوران جنگ جهانی اول به وسیله گریفیث بر روی شیشه انجام گرفت و در سال ۱۹۲۱ میلادی در ژورنال انجمن سلطنتی به چاپ رسید.

پیچیدگی‌های منحصر به فرد ترک باعث گردید دانشمندان و محققان تلاش‌های بسیاری بصورت عملی و تئوری انجام دهند و هنوز مسائل بسیاری از آن لاینحل باقی مانده است.

پدیده شکست در اجسام یکی از عمده‌ترین مسائلی است که انسان از زمان ساختن ساده‌ترین ابزارها با آن مواجه بوده و به دلیل پیشرفت تکنولوژی در عصر حاضر این مسئله از اهمیت بیشتری نسبت به گذشته برخوردار می‌باشد [۴۹].

در واقع گسیختگی ناگهانی بسیاری از تجهیزات و سازه‌ای صنعتی، نه تنها عواقب جانی ناگواری را در پی دارد، بلکه ضررهای چشمگیر اقتصادی را نیز فراهم می‌آورد. تحقیقات نشان داده است که قیمت ضررهای ناشی از شکست‌های ناگهانی در ایالات متحده آمریکا در سال ۱۹۸۷ بالغ بر ۱۱۹ میلیارد دلار گردیده که حدود ۴٪ تولید ناخالص ملی این کشور را تشکیل می‌دهد [۴۹].

مکانیک شکست دینامیکی زیر مجموعه مکانیک شکست است و شامل پدیده‌های شکستی می‌شود که نقش اینرسی ماده در آنها اهمیت دارد. اثرات اینرسی می‌توانند به دلیل اعمال بارگذاری سریع بر روی یک جسم ترک خورده یا بر اثر گسترش ترک ایجاد شوند.

در مسائل شکست دینامیکی میدان تنش موضعی اطراف ترک را می‌توان به تعیین ضرایب شدت تنش محدود کرد. در تئوری شکست، ضرایب شدت تنش برای تعیین رفتار شکست مورد استفاده قرار می‌گیرد. یعنی تعیین می‌کنند که ترک رشد خواهد کرد یا نه و اگر رشد می‌کند با چه

سرعتی و چه جهتی. بنابراین تعیین دقیق ضرایب شدت تنش در مسائل شکست الاستودینامیک خطی بسیار مهم است [۱].

۲.۵ انتگرال J

انتگرال J یکی از پارامترهایی است که در مکانیک شکست بسیار مورد توجه است. مفهوم انتگرال J اولین بار توسط رایس و بر پایه فرضیه انرژی معرفی شد. رایس تغییرات انرژی پتانسیل هنگام رشد ترک در مواد الاستیک غیر خطی را مورد بررسی قرار داد و انتگرال J را به عنوان انتگرال خطی مستقل از مسیر و با مقداری برابر با کاهش در انرژی پتانسیل و افزایش سطح ترک، فرمول‌بندی کرد. در واقع با فرض رفتار خطی ماده می‌توان انتگرال J را معادل نرخ رهایش انرژی در نظر گرفت. در این بخش تغییر خواص ماده در المان مبنا برای محاسبه انتگرال J در مواد تابعی نیز در نظر گرفته می‌شود [۲].

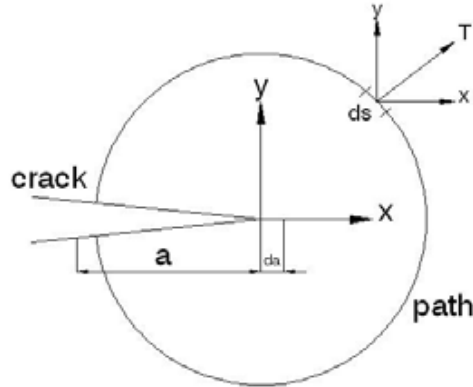
مفهوم اساسی انتگرال J به وسیله اشلیبی به کار برده شد تا توسط آن نیروهای تعمیم یافته بر روی نابجایی‌ها و عیوب نقطه‌ای در میدان الاستیک و به کمک یک مولفه ایستایی تانسور انرژی مقدار حرکت مشخص گردد. تعریف اصلی انتگرال J به وسیله رایس یک جسم همگن از یک ماده با رفتار الاستیک خطی یا غیر خطی عاری از هر نیروی داخلی و تغییر شکل اولیه و تحت یک میدان تغییر شکل دو بعدی در فضای دکارتی را در بر می‌گیرد [۴۹].

$$-\frac{\partial U_P}{\partial a} = \iint_A \frac{\partial W}{\partial a} dx dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial a} ds \quad (1-6)$$

در رابطه فوق که $-\frac{\partial U_P}{\partial a}$ به عنوان انتگرال J شناخته می‌شود W بیانگر دانسیته انرژی کرنشی، T بردار کشش، Γ محیط سطح و A مساحت می‌باشد.

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial x} ds \quad Jm^{-2} \text{ ar } Nm^{-1} \quad (2-5)$$

سیستم مختصاتی مطابق شکل (۵-۱) را به گونه ای انتخاب می کنیم که مبدأ آن در نوک ترک و $dx=da$ باشد.



شکل ۵-۱ مشخصات سیستم مختصات [۴۹]

یکی از نتایج مهم تعمیم اعتبار معادله (۵-۲) برای رفتار غیر خطی آن است که تحت محدودیت های به خصوص، می توان آن را برای مدل کردن رفتار پلاستیک استفاده کرد. محدودیت اصلی در این جا این است که جسم باید تحت بارگذاری با افزایش یکنواخت قرار گیرد و نباید هیچ گونه برداشتن بار (حذف بار) تحمیل شود. بنابراین J میزانی است برای کار ورودی به سیستم و نه مقدار کار برگشت پذیر در هنگام حذف بار (برداشتن بار) [۴۹].

رابطه (۵-۲) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$J = \lim_{\Gamma_0 \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - (SE + KE) \delta_{1i} \right] q m_i d\Gamma - \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} \sigma_{2j} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} q d\Gamma \right) \quad (۳-۵)$$

که در این رابطه m_i بردار نرمال بر مسیر است.

فرض می شود که سطوح ترک عاری از تنش باشند؛ بنابراین $\sigma_{2j} = 0$ و با اعمال تئوری دیورژانس

داریم [۵۲]:

$$J = \int_{A^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - (SE + KE) \delta_{1i} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} dA + \quad (۴-۵)$$

$$\int_{A^*} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial(SE + KE)}{\partial x_1} \right] q dA$$

که در این رابطه:

$$\sigma_{ij,i} = \rho \ddot{u}_j - B_j \quad (5-5)$$

$$\sigma_{ij} u_{j,1i} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1} \quad (6-5)$$

چگالی انرژی کرنشی SE به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۲]:

$$SE = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^m \quad (7-5)$$

که در این رابطه ε_{ij}^m کرنش مکانیکی است و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{ij}^m = \varepsilon_{ij} - \alpha_t \theta \delta_{ij} \quad (8-5)$$

در این رابطه ε_{ij} کرنش کل، α_t ضریب انبساط حرارتی خطی، θ تغییر نسبی دما و δ_{ij} دلتای کرونکر

است. بنابراین چگالی انرژی کرنشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$SE = \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} - \alpha_t \theta \delta_{ij}) \quad (9-5)$$

مشتق چگالی انرژی کرنشی نسبت به دستگاه مختصات محلی نوک ترک $(SE_{,1})$ ، که برای محاسبه

رابطه (۴-۵) مورد نیاز است، را می‌توان به صورت زیر بدست آورد:

$$SE_{,1} = \frac{\partial SE}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m \quad (10-5)$$

در این رابطه $\sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m = (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^m)_{,1} \varepsilon_{ij}^m = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^m + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m \quad (11-5)$$

که در این رابطه C_{ijkl} مولفه‌های تانسور الاستیسیته زیر هستند:

$$C(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2G(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\mathbf{x}) & 2G(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & 2G(\mathbf{x}) + \lambda(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (12-5)$$

با جایگذاری رابطه (۵-۱۱) در رابطه (۵-۱۰) نتیجه می‌شود:

$$SE_{,1} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m + \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m + \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^m \quad (۵-۱۳)$$

با استفاده از رابطه (۵-۹) می‌توان رابطه (۵-۱۳) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$SE_{,1} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1} - \alpha_{t,1} \theta \sigma_{kk} - \alpha_t \theta_{,1} \sigma_{kk} + \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^m \quad (۵-۱۴)$$

چگالی انرژی جنبشی KE به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$KE = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \quad (۵-۱۵)$$

مشتق چگالی انرژی کرنشی نسبت به محور x_1 ($KE_{,1}$) نیز عبارت است از:

$$KE_{,1} = \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1} + \frac{1}{2} \rho_{,1} \dot{u}_i \dot{u}_i \quad (۵-۱۶)$$

جایگذاری روابط (۵-۶)، (۵-۷)، (۵-۱۵) و (۵-۱۶) در معادله (۵-۴)، کلی‌ترین رابطه برای

انتگرال J در مواد تابعی را به صورت زیر نتیجه می‌دهد [۱]:

$$J = \int_{A^*} \left\{ \left[\sigma_{ij} u_{j,1} - \frac{1}{2} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^m \delta_{1i} - \frac{1}{2} \rho \dot{u}_k \dot{u}_k \delta_{1i} \right] q_{,i} \right. \\ \left. + \left[\sigma_{ij,i} u_{j,1} + \sigma_{ij} u_{j,1i} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^m - \frac{1}{2} \sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^m - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,1} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \rho_{,1} \dot{u}_i \dot{u}_i \right] q \right\} dA \quad (۵-۱۷)$$

۳.۵ انتگرال برهمکنش^۱

با محاسبه انتگرال J نمی‌توان مقادیر ضرایب شدت تنش مد I و مد II را به طور جداگانه

محاسبه کرد. یایو و همکاران روش انتگرال برهمکنش را برای این منظور پیشنهاد کردند که در آن از

جمع آثار دو حالت سینماتیکی قابل قبول از یک جسم برای استخراج ضرایب شدت تنش مد ترکیبی

استفاده می‌شود.

¹ Intraction Integral

انتگرال برهمکنش در واقع عبارت برهمکنش دو حالت بارگذاری مستقل و قابل قبول برای سازه حاوی ترک است که در انتگرال‌های پایستار الاستیسیته پدید می‌آید. انتگرال برهمکنش در واقع یک فرمول‌بندی دقیق است که با استفاده از آن می‌توان ضرایب شدت تنش را در مواد تابعی محاسبه کرد [۲].

۴.۵ میدان‌های کمکی

به کارگیری انتگرال برهم‌کنش نیازمند کاربرد میدان‌های کمکی جابجایی u^{aux} ، کرنش ϵ^{aux} و تنش σ^{aux} است. میدان‌های کمکی مذکور بر حسب نوع کمیت مورد محاسبه - ضریب شدت تنش و یا تنش T - تعریف می‌شوند.

انتخاب‌های مختلفی برای میدان‌های کمکی وجود دارد. میدان‌های کمکی را می‌توان به صورت تحلیلی و یا عددی در نظر گرفت. به طور معمول میدان‌های کمکی انتخابی هر سه قانون مکانیک جامدات را ارضا می‌کنند. در حال حاضر میدان‌های کمکی با این خصوصیت به طور عددی برای مواد تابعی با پروفیل خاص به دست می‌آیند و کاربرد چندانی ندارند. برای مواد تابعی نیز معمولاً از میدان‌های تحلیلی نوک ترک استفاده می‌شود که برای مواد همگن تحت بارگذاری مکانیکی به دست آمده است. اما کاربرد میدان‌های کمکی مواد همگن که به طور تحلیلی به دست می‌آیند منجر به نقض حداقل یکی از قوانین مکانیک جامدات می‌شود. میدان‌های انتخابی مذکور برای بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی به صورت استاتیکی و دینامیکی قابل کاربرد می‌باشند [۲].

در مواد ناهمگن به دلیل اختلاف بین خواص ماده در نوک ترک و فواصل دورتر از نوک ترک، سه فرمول‌بندی متفاوت ارائه شده است که عبارتند از فرمول‌بندی غیر تعادلی، ناسازگاری و تانسور تشکیل دهنده ثابت [۲].

در این پایان نامه فرمول بندی غیر تعادلی برای محاسبه انتگرال برهمکنش و ضرایب شدت تنش در مواد تابعی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۵.۵ فرمول بندی غیر تعادلی

در این فرمول بندی جابجایی ها و کرنش های کمکی به صورت مستقیم از حل های مجانبی مانند حل ویلیامز^۱ به دست می آیند و تنش های کمکی به کمک مدل ساختمانی ناهمگن محاسبه می شوند [۲]:

در اینجا میدان های جابجایی کمکی برای مد یک به صورت زیر در نظر گرفته خواهند شد.

$$u_1^{aux} = \frac{K_1^{aux}}{2\mu_{tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[k_{Tip} - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \quad (18-5)$$

$$u_2^{aux} = \frac{K_1^{aux}}{2\mu_{tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[k_{Tip} + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \quad (19-5)$$

این میدان ها برای مد دوم نیز به صورت زیر نوشته می شوند:

$$u_1^{aux} = \frac{K_{11}^{aux}}{2\mu_{tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[k_{Tip} + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \quad (20-5)$$

$$u_2^{aux} = \frac{K_{11}^{aux}}{2\mu_{tip}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[k_{Tip} - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \quad (21-5)$$

که در این روابط (r, φ) مختصات قطبی محلی نوک ترک هستند، μ_{tip} مدول برشی در نوک ترک و k_{Tip} برای حالت کرنش صفحه ای و متقارن محوری به صورت زیر بیان می گردد :

$$k_{Tip} = 3 - 4\nu_{Tip} \quad (22-5)$$

از آنجایی که میدان های واقعی از کمیت های به دست آمده از شبیه سازی عددی استفاده می کنند شرط تعادل و سازگاری را ارضا می نمایند. در فرمول بندی غیر تعادلی برای میدان های

¹ William's Solution

کمکی ترک ایستا شرط تعادل ($\sigma_{ij,i}^{aux} \neq 0$) ارضا نمی شوند. در حالی که جابجایی و کرنش ناسازگارند، یعنی کرنش های کمکی را می توان به صورت زیر با استفاده از جابجایی های کمکی به دست آورد.

$$\varepsilon_{ij}^{aux} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{aux} + u_{j,i}^{aux}) \quad (23-5)$$

میدان تنش کمکی نیز از رابطه زیر به دست می آید:

$$\sigma_{ij}^{aux} = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{ij}^{aux} \quad (24-5)$$

که در این رابطه C_{ijkl} همان درایه های ماتریس الاستیسیته هستند و به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$C_{ijkl}(x) = \begin{bmatrix} \lambda(x) + 2\mu(x) & \lambda(x) & \lambda(x) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(x) & \lambda(x) + 2\mu(x) & \lambda(x) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(x) & \lambda(x) & \lambda(x) + 2\mu(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu(x) \end{bmatrix} \quad (25-5)$$

برای فرمول بندی غیر تعادلی روابط زیر را می توان نوشت که برای ساده سازی انتگرال

برهمکنش مورد استفاده قرار می گیرند [۲]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i - B_i \quad (26-5)$$

$$\sigma_{ij} u_{j,1i}^{aux} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,1}^{aux} \quad (27-5)$$

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} = C_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{aux} = \sigma_{kl}^{aux} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij} \quad (28-5)$$

$$\sigma_{ij,1} \varepsilon_{ij}^{aux} = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{aux} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl,1} \varepsilon_{ij}^{aux} = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1} \quad (29-5)$$

$$\sigma_{ij,1}^{aux} \varepsilon_{ij} = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^{aux} \varepsilon_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl,1}^{aux} \varepsilon_{ij} = C_{ijkl,1} \varepsilon_{kl}^{aux} \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,1} \quad (30-5)$$

در این بخش به محاسبه و استخراج انتگرال برهمکنش به کمک میدان های کمکی از روش غیر تعادلی برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش می پردازیم. بر طبق رابطه (۲) در مرجع [۵۲] می توان نوشت:

$$I = - \int_{V(s)} (P_{lj} q_{1,j} + P_{lj,j} q_l) dV \quad (۳۱-۵)$$

که در آن q_l تابع وزنی و I بیانگر انتگرال حجمی می باشد. حسب فعالیت های ناهاتا و موران^۱ در خصوص نرخ کاهش انرژی برای ترک های کوچک از رابطه (۳۱-۵) پارامتر P_{ij} تانسور ممان انرژی و $q=q(r,z)$ معرفی می شوند.

$$p_{lj} = w \delta_{lj} - \sigma_{ij} u_{i,l} \quad (۳۲-۵)$$

w دانسیته انرژی کرنشی T ، σ_{ij} تنش، $u_{i,l}$ جابجایی می باشد. گرادیان q در مختصات استوانه ای به صورت زیر است:

$$\mathbf{q} = q \mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} q_r \\ q_\theta \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳۳-۵)$$

$$\nabla \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_{r,r} & \frac{1}{r}(q_{r,\theta} - q_\theta) & q_{r,z} \\ q_{\theta,r} & \frac{1}{r}(q_r + q_{\theta,\theta}) & q_{\theta,z} \\ q_{z,r} & \frac{1}{r}(q_{z,\theta}) & q_{z,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{r,r} & 0 & q_{r,z} \\ 0 & \frac{1}{r}(q_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۴-۵)$$

می توان p را به فرم زیر در مختصات استوانه ای نمایش داد:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} w - \sigma_{i1} u_{i,1} & -\sigma_{i2} u_{i,1} & -\sigma_{i3} u_{i,1} \\ -\sigma_{i1} u_{i,2} & w - \sigma_{i2} u_{i,2} & -\sigma_{i3} u_{i,2} \\ -\sigma_{i1} u_{i,3} & -\sigma_{i2} u_{i,3} & w - \sigma_{i3} u_{i,3} \end{bmatrix} \quad (۳۵-۵)$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\nabla \mathbf{q} : \mathbf{p} = \begin{bmatrix} w - \sigma_{i1} u_{i,1} & -\sigma_{i2} u_{i,1} & -\sigma_{i3} u_{i,1} \\ -\sigma_{i1} u_{i,2} & w - \sigma_{i2} u_{i,2} & -\sigma_{i3} u_{i,2} \\ -\sigma_{i1} u_{i,3} & -\sigma_{i2} u_{i,3} & w - \sigma_{i3} u_{i,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r & 0 & q_z \\ 0 & \frac{q}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳۶-۵)$$

¹ Nahta and Moran

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{p} : \nabla \mathbf{q}) &= (w - \sigma_{i1} u_{i,1}) q_{,r} + (w - \sigma_{i2} u_{i,2}) \frac{q}{r} - (\sigma_{i3} u_{i,1}) q_{,z} \\ &= (w - \sigma_{ir} u_{i,r}) q_{,r} + \left(w - \sigma_{\theta} \frac{u_r}{r} \right) \frac{q}{r} - (\sigma_{iz} u_{i,r}) q_{,z} \end{aligned} \quad (37-5)$$

در ادامه به محاسبه حاصلضرب ترانهاده دیورژانس p در q می پردازیم:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{p}^T) \cdot \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial p_{rr}^T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\theta r}^T}{\partial \theta} + \frac{p_{rr}^T - p_{\theta\theta}^T}{r} + \frac{\partial p_{zr}^T}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{r\theta}^T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\theta\theta}^T}{\partial \theta} + \frac{p_{r\theta}^T + p_{\theta r}^T}{r} + \frac{\partial p_{z\theta}^T}{\partial z} \\ \frac{\partial p_{rz}^T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\theta z}^T}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{zz}^T}{\partial z} + \frac{p_{rz}^T}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial p_{rr}^T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\theta r}^T}{\partial \theta} + \frac{p_{rr}^T - p_{\theta\theta}^T}{r} + \frac{\partial p_{zr}^T}{\partial z} \right) q \end{aligned} \quad (38-5)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial p_{rr}^T}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_{\theta r}^T}{\partial \theta} + \frac{p_{rr}^T - p_{\theta\theta}^T}{r} + \frac{\partial p_{zr}^T}{\partial z} \right\} &= w_{,r} - \sigma_{ir,r} u_{i,r} - \sigma_{ir} u_{i,rr} - \frac{1}{r} \sigma_{i\theta,\theta} u_{i,r} - \frac{1}{r} \sigma_{i2} u_{i,r\theta} \\ &+ \frac{(\sigma_{i2} u_{i,2} - \sigma_{i1} u_{i,1})}{r} - (\sigma_{iz,z} u_{i,r}) - (\sigma_{iz} u_{i,1z}) \end{aligned} \quad (39-5)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{p}^T) \cdot \mathbf{q} &= \left[w_{,r} - \sigma_{ij,j} u_{i,r} - \sigma_{ij} u_{i,rj} + \frac{(\sigma_{\theta} \frac{u_r}{r} - \sigma_{i1} u_{i,1})}{r} \right] q \\ j &= 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (40-5)$$

که در نهایت با جایگذاری ترم های به دست آمده در رابطه (31-5) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{R} \int [(w - \sigma_{ir} u_{i,r}) q_{,r} + (w - \sigma_{\theta} \frac{u_r}{r}) \frac{q}{r} - (\sigma_{iz} u_{i,r}) q_{,z}] \\ &+ \left[w_{,r} - \sigma_{ij,j} u_{i,r} - \sigma_{ij} u_{i,rj} + \frac{(\sigma_{\theta} \frac{u_r}{r} - \sigma_{i1} u_{i,1})}{r} \right] q dA \end{aligned} \quad (41-5)$$

با اعمال میدان های کمکی می توان $w_{,r}$ را می توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$w_{,r} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,r}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij,r} \varepsilon_{ij}^{aux} + \frac{1}{2} \sigma_{ij,r}^{aux} \varepsilon_{ij}^m \quad (42-5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,r}^m + \frac{1}{2} C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux} + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,r}^m \\ &+ \frac{1}{2} \sigma_{ij,r}^{aux} \varepsilon_{ij}^m \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,r}^m + \frac{1}{2} C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux} + \frac{1}{2} C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^{aux} \varepsilon_{ij}^m \\ &+ \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl,r}^{aux} \varepsilon_{ij}^m \end{aligned}$$

$$MI = \frac{1}{R} \int (\sigma_{ir} u_{i,r}^{aux} + \sigma_{ir}^{aux} u_{i,r} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux}) q_r \quad (43-5)$$

$$\begin{aligned} &+ \left(\sigma_{\theta}^{aux} \frac{u_r}{r} + \sigma_{\theta} \frac{u_r^{aux}}{r} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} \right) \frac{q}{r} \\ &+ (\sigma_{iz} u_{i,r}^{aux} + \sigma_{iz}^{aux} u_{i,r}) q_z \\ &- \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,r}^m + \frac{1}{2} C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux} \right. \\ &+ \frac{1}{2} C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^{aux} \varepsilon_{ij}^m + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} - (\rho \ddot{u}_i - B_i) u_{i,r}^{aux} \\ &- \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,r} - \sigma_{ij}^{aux} (\varepsilon_{ij,r}^m + \alpha_{,r} \theta + \alpha_{\theta,r}) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} \\ &\left. + \frac{(\sigma_{\theta}^{aux} \frac{u_r}{r} + \sigma_{\theta} \frac{u_r^{aux}}{r} - \sigma_{ir} u_{i,r}^{aux} - \sigma_{ir}^{aux} u_{i,r})}{r} \right] q \end{aligned}$$

با اعمال بسط رابطه $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 MI = \frac{1}{R} \int & (\sigma_{ir} u_{i,r}^{aux} + \sigma_{ir}^{aux} u_{i,r} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux}) q_{,r} + \left(\sigma_{\theta}^{aux} \frac{u_r}{r} + \sigma_{\theta} \frac{u_r^{aux}}{r} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} \right) \frac{q}{r} \quad (44-5) \\
 & + (\sigma_{iz} u_{i,r}^{aux} + \sigma_{iz}^{aux} u_{i,r}) q_{,z} \\
 & - \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij,r}^m + \frac{1}{2} C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux} + \frac{1}{2} C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^{aux} \varepsilon_{ij}^m \right. \\
 & + \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} - (\rho \ddot{u}_i - B_i) u_{i,r}^{aux} - \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,r} \\
 & - \sigma_{ij}^{aux} (\varepsilon_{ij,r}^m + \alpha_{,r} \theta + \alpha \theta_{,r}) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} \\
 & \left. + \frac{(\sigma_{\theta}^{aux} \frac{u_r}{r} + \sigma_{\theta} \frac{u_r^{aux}}{r} - \sigma_{ir} u_{i,r}^{aux} - \sigma_{ir}^{aux} u_{i,r})}{r} \right] q
 \end{aligned}$$

با جمع بندی ترم های یکسان داریم:

$$\begin{aligned}
 MI = \frac{1}{R} \int & (\sigma_{ir} u_{i,r}^{aux} + \sigma_{ir}^{aux} u_{i,r} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux}) q_{,r} \quad (45-5) \\
 & + \left(\sigma_{\theta}^{aux} \frac{u_r}{r} + \sigma_{\theta} \frac{u_r^{aux}}{r} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} \right) \frac{q}{r} \\
 & + (\sigma_{iz} u_{i,r}^{aux} + \sigma_{iz}^{aux} u_{i,r}) q_{,z} \\
 & - \left[\sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} + C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux} - (\rho \ddot{u}_i - B_i) u_{i,r}^{aux} - \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,r} \right. \\
 & - \sigma_{kk}^{aux} (\alpha_{,r} \theta + \alpha \theta_{,r}) - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,r}^{aux} \\
 & \left. + \frac{(\sigma_{\theta}^{aux} \frac{u_r}{r} + \sigma_{\theta} \frac{u_r^{aux}}{r} - \sigma_{ir} u_{i,r}^{aux} - \sigma_{ir}^{aux} u_{i,r})}{r} \right] q
 \end{aligned}$$

با بازنویسی رابطه (45-5) می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 MI = \frac{1}{R} \int \{ & (\sigma_{ir} u_{i,r}^{aux} + \sigma_{ir}^{aux} u_{i,r} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux}) q_{,r} \\
 & + \left(\sigma_{\theta}^{aux} \frac{u_r}{r} + \sigma_{\theta} \frac{u_r^{aux}}{r} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} \right) \frac{q}{r} \\
 & + (\sigma_{iz} u_{i,r}^{aux} + \sigma_{iz}^{aux} u_{i,r}) q_{,z} \\
 & - \left[C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux} - (\rho \ddot{u}_i - B_i) u_{i,r}^{aux} - \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,r} \right. \\
 & - \sigma_{kk}^{aux} (\alpha_{,r} \theta + \alpha \theta_{,r}) \\
 & \left. + \frac{\left(\sigma_{\theta}^{aux} \frac{u_r}{r} + \sigma_{\theta} \frac{u_r^{aux}}{r} - \sigma_{ir} u_{i,r}^{aux} - \sigma_{ir}^{aux} u_{i,r} \right)}{r} \right] q \} dA
 \end{aligned} \tag{۴۶-۵}$$

این رابطه کلی ترین رابطه انتگرال برهمکنش در مختصات محلی نوک ترک برای مواد تابعی در مختصات استوانه ای است. $(\rho \ddot{u}_i) u_{i,r}^{aux}$ نماینده اثرات دینامیکی و عبارت $\sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,r}$ ناشی از فرمول بندی غیر تعادلی برای میدان های کمکی است. همچنین قابل ذکر است که عبارات $\sigma_{ij,j}^{aux}$ و $\sigma_{kk}^{aux} (\alpha_{,r} \theta + \alpha \theta_{,r})$ به دلیل ناهمگنی ماده تابعی ایجاد شده اند. عبارت $C_{ijkl,r} \varepsilon_{kl}^m \varepsilon_{ij}^{aux}$ نیز اثرات تغییرات دمایی را در رابطه لحاظ می کند.

تابع q را می توان با استفاده از توابع شکل در یک المان برای یک نقطه گوسی به دست

آورد [۲]:

$$q = \sum_{i=1}^m N_i q_i \tag{۴۷-۵}$$

۶.۵ محاسبه ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال برهمکنش و ضرایب شدت تنش برای ترک در حالت کرنش صفحه

ای به صورت زیر بیان می گردد:

$$MI_I = \frac{2}{E^\circ} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (48-5)$$

در این معادله E^* برای مسائل متقارن محوری مانند مسائل کرنش صفحه ای از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$E^* = \frac{E_{tip}}{(1 - \nu_{tip}^2)} \quad (49-5)$$

که در این رابطه E_{tip} و ν_{tip} به ترتیب بیانگر مدول یانگ و نسبت پواسون در نوک ترک هستند. از این رابطه برای مسائل متقارن محوری نیز می توان استفاده کرد. برای محاسبه K_I ، در رابطه بالا $K_I^{aux} = 1$ و $K_{II}^{aux} = 0$ را قرار می دهیم در نتیجه K_I را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$K_I = \frac{E^*}{2} MI_I^{(1)} \quad (50-5)$$

همچنین برای محاسبه K_{II} مقادیر $K_I^{aux} = 0$ و $K_{II}^{aux} = 1$ را در رابطه بالا جایگذاری می کنیم و داریم:

$$K_{II} = \frac{E^*}{2} MI_I^{(2)} \quad (51-5)$$

لازم به توضیح است که مقادیر $MI_i^{(1)}$ و $MI_i^{(2)}$ به ترتیب با قرار دادن میدان کمکی مد اول (رابطه های (18-5) و (19-5)) و میدان کمکی مد دوم (رابطه های (20-5) و (21-5)) در انتگرال برهمکنش به دست می آید [2].

فصل ششم

تحلیل های عددی

۱.۶ مقدمه

در این فصل ابتدا چهار مثال عددی حل شده و نتایج حاصل از آنها با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مقالات مقایسه شده است. هدف از حل این مثال ها بررسی دقت و صحت روش حل ارائه شده در این تحقیق و برنامه نوشته شده است. سپس مسائل جدید دیگری جهت محاسبه ضریب شدت تنش مواد تابعی تحت شوک حرارتی - مکانیکی تحلیل و بررسی شده اند. تمامی این مثال ها، بخاطر انطباق با شرایط مسائل حل شده موجود در مقالات، در حالت کرنش صفحه ای مورد تحلیل مورد تحلیل قرار گرفته اند.

در این تحقیق برای پیاده سازی روش المان محدود توسعه یافته و حل معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک جفت شده به منظور شبیه سازی مسائل مختلف ضریب شدت تنش در مواد تابعی از محیط برنامه نویسی نرم افزار MATLAB استفاده شده است.

لازم به ذکر است که ارائه نمایش رفتاری کلیه مولفه های تغییر مکان، نیروها، درجه حرارت ها و تنش ها برحسب زمان و همچنین در جهت ضخامت پوسته بسیار متنوع می باشد. لذا در اینجا صرفاً چند نمونه انتخاب و ارائه گردیده است.

۲.۶ اعتبارسنجی برنامه نوشته شده

جهت صحت برنامه نوشته شده به بررسی چهار مثال پرداخته شده است. در مثال اول به بررسی اثر حرارت و تاثیرات پارامتر n در ماده تابعی پرداخته شده است. در مثال دوم به بررسی اثر دوران و تاثیر آن در یک ماده همگن پرداخته شده است. در مثال سوم به بررسی اثر کشش ساده در استوانه همگن دارای ترک محیطی پرداخته شده و در مثال چهارم ضریب تمرکز تنش در استوانه تحت کشش ساده مورد بررسی و صحت سنجی قرار گرفته شد.

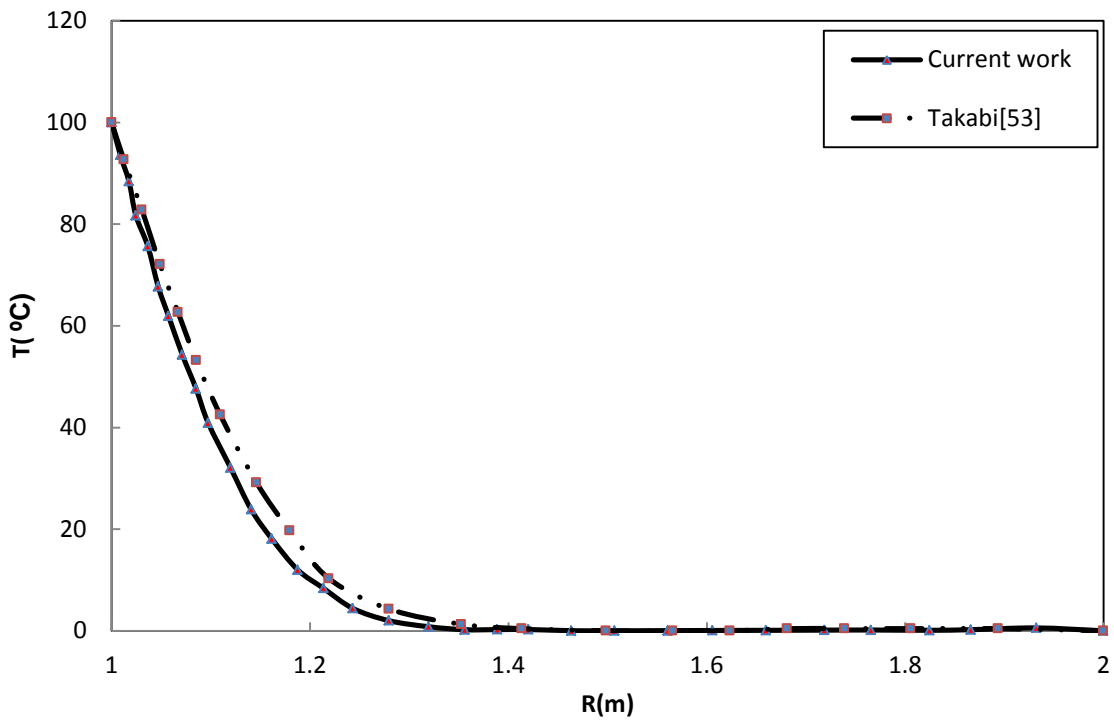
۱.۲.۶ لوله جدار ضخیم در معرض شوک حرارتی گذرا

تکابی [۵۳] سیلندری را تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی به روش عددی و تحلیلی مورد مطالعه و بررسی قرار داد. این سیلندر جدار ضخیم از مواد تابعی ساخته شده که دیواره داخلی آن از سرامیک (SiO_2) و دیواره بیرونی از فلز (Al) می باشد. شرایط مرزی حاکم بر مساله عبارتند از: فشار داخلی و خارجی به ترتیب $p_{in} = 100 \text{ Mpa}$ ، $p_{out} = 10 \text{ Mpa}$ و دمای جدار داخلی و خارجی به ترتیب $T_{in} = 1000^\circ\text{C}$ ، $T_{out} = 0^\circ\text{C}$ می باشد.

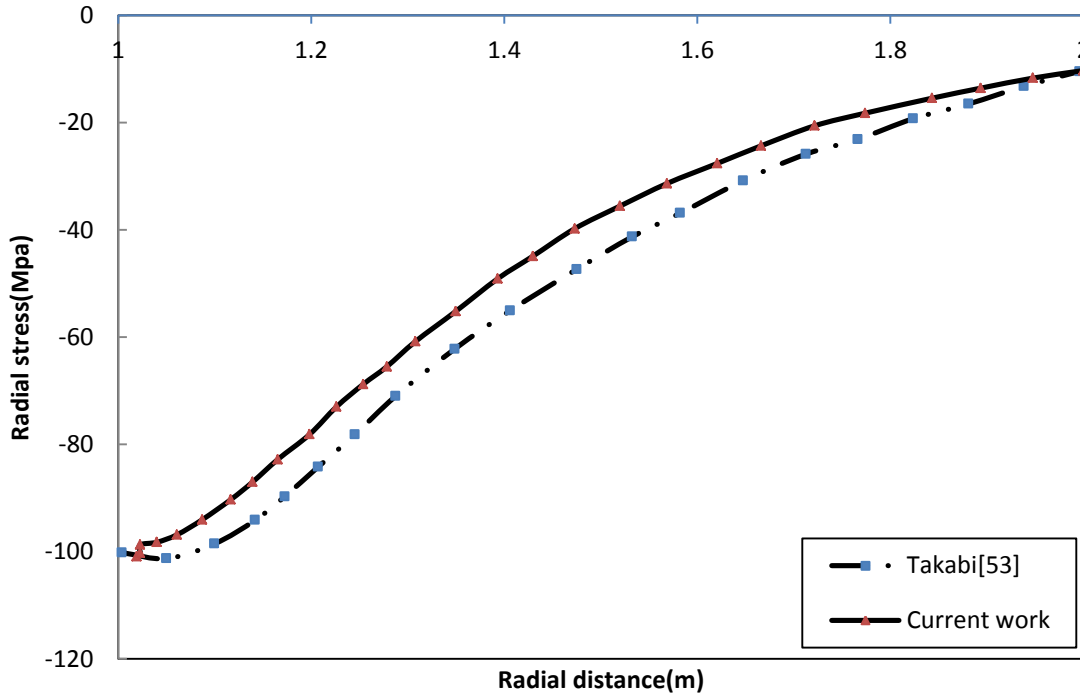
در این مقاله در گام نخست سیلندر در حالت همگن (شاهانی و نبوی [۲۰۰۷]) در زمان ۱۰۰۰ ثانیه مورد بررسی قرار گرفته است. تعداد المان ها 50×200 می باشد. جنس کل استوانه را مطابق خواص مکانیکی که در جدول (۱-۶) آمده است تماماً فلز در نظر می گیریم.

جدول ۱-۶ خواص مکانیکی در دیواره داخلی و خارجی [۵۳]

	$\rho \left(\frac{kg}{m^3}\right)$	$E (Gpa)$	$K \left(\frac{W}{mk}\right)$	$\alpha \times 10^{-6} \left(\frac{1}{k}\right)$	$C \left(\frac{J}{kgK}\right)$	ν
$r_i = 0.1 \text{ m}(SiO_2)$	۵۷۳۰	۲۱۰	۳/۰۳	۱۰/۲	۴۵۰	۰/۳
$r_r = 0.2 \text{ m}(Al)$	۷۸۰۰	۲۰۸	۲	۱۲	۲۵/۶	۰/۳



شکل ۱-۶ نمودار توزیع دمایی ماده همگن در زمان ۱۰۰۰ ثانیه

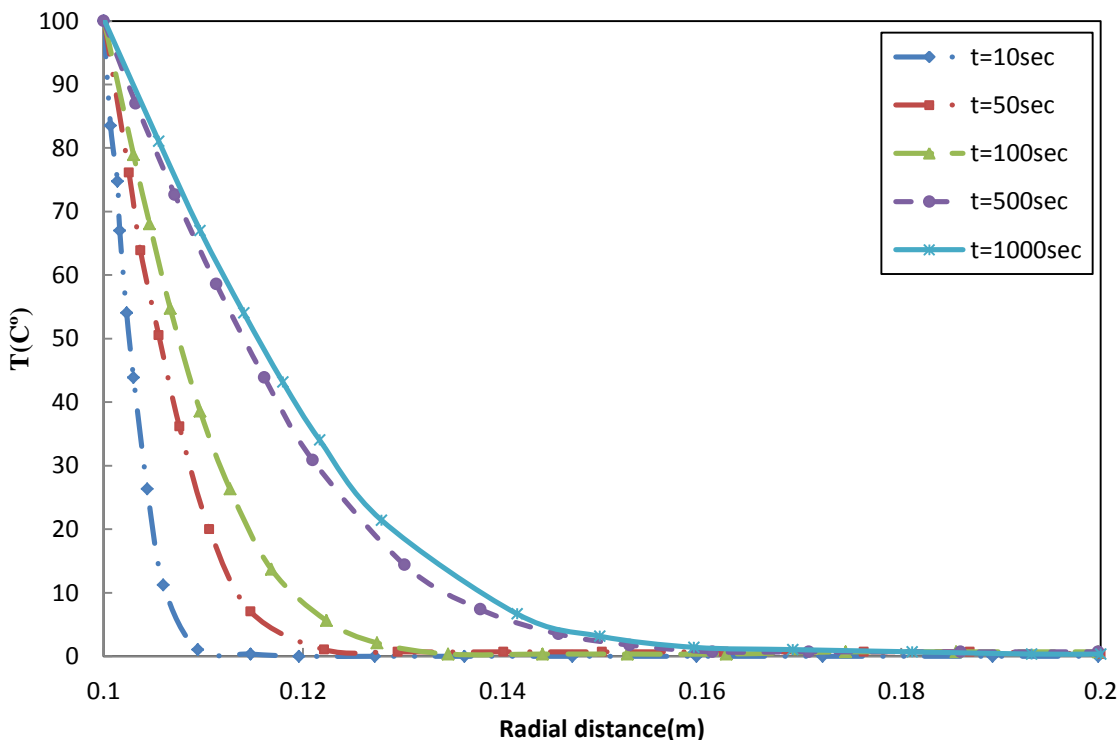


شکل ۲-۶ نمودار تنش شعاعی برای ماده همگن در زمان ۱۰۰۰ ثانیه

آنگونه که از نتایج کد خروجی قابل رویت است تنش شعاعی و توزیع دمای به دست آمده بسیار نزدیک با مقاله مورد نظر می باشد که این موضوع صحت نتایج برنامه نوشته شده را بیان می کند. در گام بعدی به بررسی تاثیر پارامتر n در سیلندر تابعی تحت حرارت گذرا می پردازیم. این موضوع برای پارامتر $n=5$ مورد بررسی قرار گرفت. خواص سیلندر تحت بررسی مطابق با جدول (۳-۶) است. تعدادالمان بندی استوانه 50×200 در نظر گرفته شده است.

جدول ۲-۶ خواص مکانیکی سیلندر استوانه ای [۵۳]

	$\rho(\frac{kg}{m^3})$	$E(Gpa)$	$K(\frac{W}{mk})$	$\alpha \times 10^{-6}(\frac{1}{k})$	$C(\frac{J}{kgK})$	ν
$r_i = 0.1 m (SiO_2)$	۲۶۰۰	۱۵۰	۱/۳۸	۳	۷۴۵	۰/۳
$r_o = 0.2 m (Al)$	۲۷۰۲	۷۰	۲۳۷	۲۳	۹۰۳	۰/۳



شکل ۳-۶ نمودار توزیع دما (خروجی برنامه) برای پارامتر $n=5$

همانگونه که مشخص است با توجه به خواص ایزوتروپیک بودن سیلندر با سپری شدن زمان و رسیدن به حالت پایدار نمودار توزیع دما به شکل خطی تبدیل می شود. همچنین میانگین دما در حالت تابعی برای این سیلندر کمتر از حالتی است که تماما فلزی باشد.

۲.۲.۶ سیلندر جدار ضخیم دوار تابعی تحت بارگذاری دینامیکی

هرن [۵۴] در فصل چهارم کتاب "مقدمه ای بر مکانیک تغییر شکل الاستیک و پلاستیک ساختار ماده ای" فرمول تحلیلی تنش محیطی و شعاعی برای استوانه توخالی دوار همگن را به فرم زیر بیان می کند:

$$\sigma_r = \left(3 + \frac{\nu}{1-\nu}\right) \times \left(\frac{\rho\omega^2}{8}\right) \times \left[R_o^2 + R_i^2 - \frac{R_o^2 R_i^2}{r^2} - r^2\right] \quad (۱-۶)$$

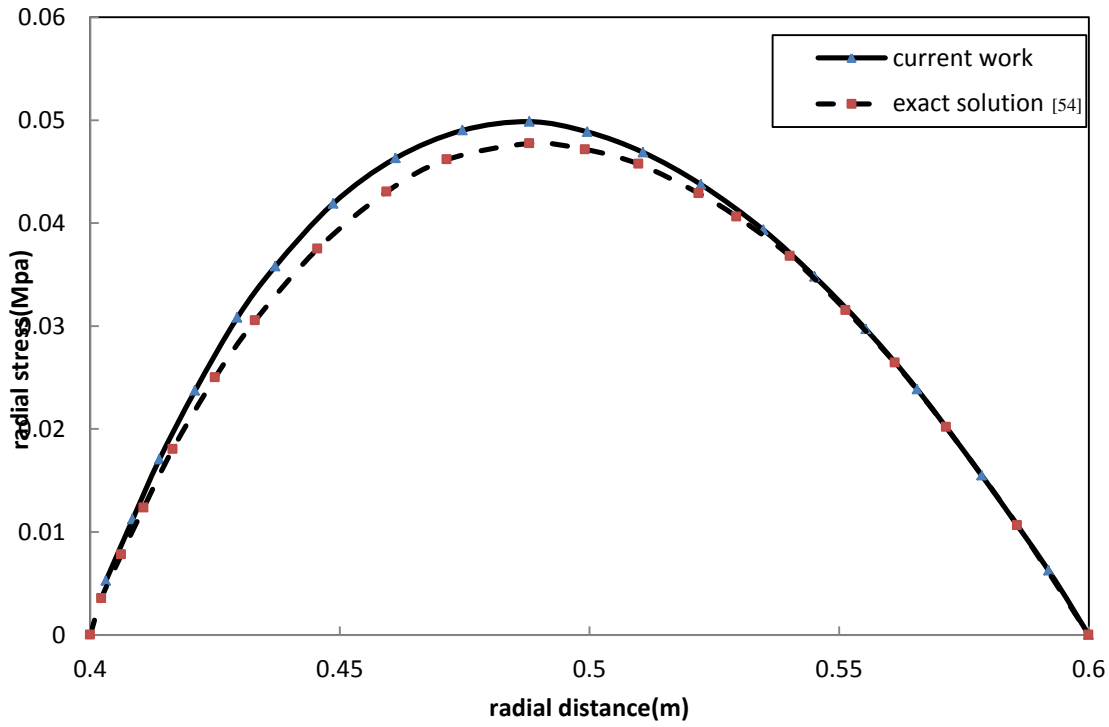
$$\sigma_H = \left(\frac{\rho\omega^2}{8}\right) \times \left[\left(3 + \frac{\nu}{1-\nu}\right) \times \left(R_o^2 + R_i^2 + \frac{R_o^2 R_i^2}{r^2}\right) - \left(1 + \frac{3\nu}{1-\nu}\right)r^2\right] \quad (۲-۶)$$

خواص استوانه مطابق با جدول (۳-۶) می باشد. مطابقت خروجی کد نوشته شده با حل تحلیلی در شکل های (۴-۶) و (۵-۶) قابل بررسی بوده و نمایانگر صحت برنامه نوشته شده است. این شکل ها به ترتیب بیانگر تنش شعاعی و تنش محیطی می باشند.

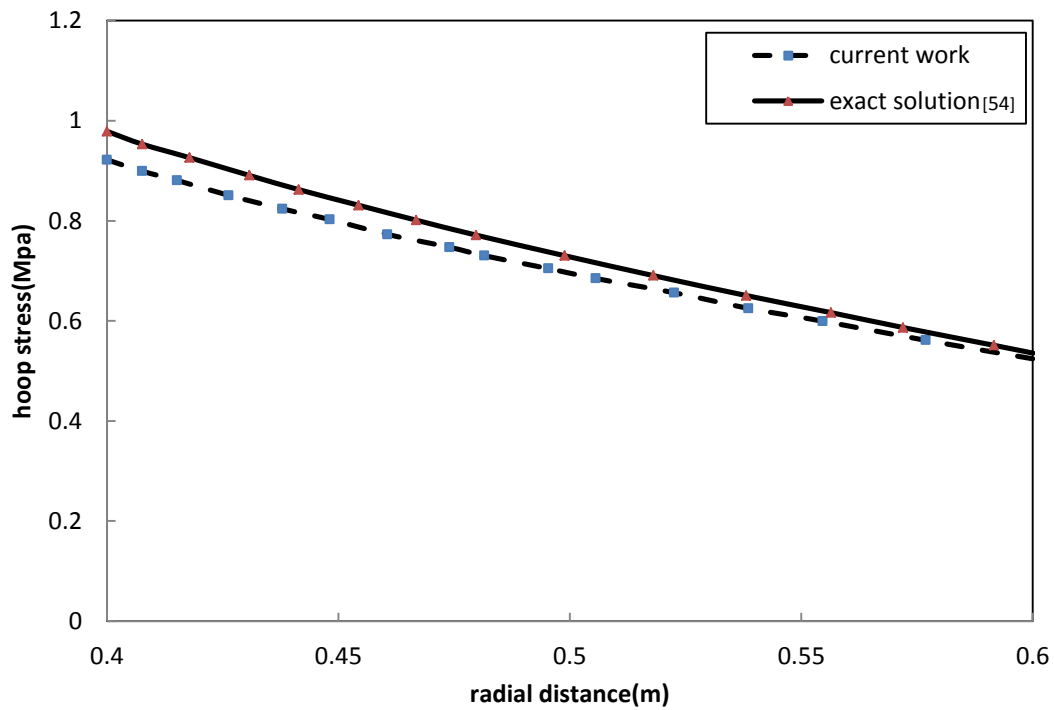
جدول ۳-۶ خواص مکانیکی استوانه ایزوتروپیک دوار

$\rho \left(\frac{kg}{m^3}\right)$	$E(Gpa)$	$K \left(\frac{W}{mk}\right)$	$\alpha \times 10^{-6} \left(\frac{1}{k}\right)$	$C \left(\frac{J}{kgK}\right)$	ν
۷۸۵۰	۲۰۰	۲	۱۲	۲۵/۶	۰/۳

در این استوانه شعاع داخلی $r_i = ۰/۴m$ ، ضخامت دیواره استوانه $t = ۰/۲m$ و تعداد المانها ۵۰×۲۰۰ می باشد. سرعت زاویه ای برابر با $\omega = ۷۰ rad/sec$ می باشد.



شکل ۴-۶ نمودار توزیع تنش شعاعی در حالت ایزوتروپیک



شکل ۵-۶ نمودار توزیع تنش محیطی در حالت ایزوتروپیک

۳.۲.۶ سیلندر جدار ضخیم ایزوتروپ با ترک محیطی تحت کشش محوری

اندرسون [۵۱] در ضمیمه دوازدهم کتاب "مکانیک شکست" فرمول زیر را برای ضریب شدت تنش در یک استوانه دارای ترک محیطی تحت کشش یکنواخت ارائه نموده است.

$$KI = \sigma_t \sqrt{\pi a} F_t \quad (۳-۶)$$

$$F_t = 1.1 + A \left[1.948 \left(\frac{a}{t} \right)^{1.5} + 0.3342 \left(\frac{a}{t} \right)^{4.2} \right] \quad (۴-۶)$$

$$A = \left(0.125 \frac{R_i}{t} - 0.25 \right)^{0.25} \quad \text{if :} \quad 5 \leq \frac{R_i}{t} \leq 10 \quad (۵-۶)$$

$$A = \left(0.4 \frac{R_i}{t} - 3 \right)^{0.25} \quad \text{if :} \quad 10 \leq \frac{R_i}{t} \leq 20 \quad (۶-۶)$$

که KI ضریب شدت تنش مد اول، σ_t تنش محوری یکنواخت، a طول ترک محیطی، t ضخامت سیلندر و R_i شعاع داخلی سیلندر می باشد. در این مثال حل شده سیلندری با شعاع داخلی ۱ متر، ضخامت ۰/۱ متر، تنش محوری ۱ Mpa، طول ترک محوری ۰/۰۵ متر، شبکه بندی مستطیلی ۳۱×۶۱ و ماده به صورت ایزوتروپیک مطابق با خواص جدول (۴-۶) در نظر گرفته شده است.

جدول ۴-۶ خواص سیلندر ایزوتروپیک

$\rho \left(\frac{kg}{m^3} \right)$	$E (Gpa)$	$K \left(\frac{W}{mk} \right)$	$\alpha \times 10^{-6} \left(\frac{1}{k} \right)$	$C \left(\frac{J}{kgK} \right)$	ν
۷۸۵۰	۲۰۰	۲	۱۲	۲۵/۶	۰/۳

در حل دقیق رابطه اندرسون $KI = ۰/۷۱۶ Mpa.m^{1/5}$ و در برنامه نوشته شده برابر با

$KI = ۰/۶۸۹ Mpa.m^{1/5}$ بدست می آید که حدود سه درصد با مقدار تحلیلی اختلاف دارد.

۴.۲.۶ لوله ای دارای ضخامت کم و ترک محیطی داخلی تحت کشش یکنواخت

رایگان [۲] در صحت سنجی خود تحقیق گرینر و استراسیمر را مورد بررسی قرار داد. در این بررسی لوله ای با طول بینهایت که یک ترک سراسری در درون آن ایجاد شده بود را تحت بارگذاری محوری قرار دادند. در مقاله گرینر و استراسیمر مقدار شعاع داخلی $R_i = 50 \text{ mm}$ ضخامت لوله $t = 5 \text{ mm}$ طول ترک $a = 2/5 \text{ mm}$ و نسبت پواسون و مدول یانگ نیز به ترتیب $\nu = 0/3$ و $E = 2 \times 10^4$ N/mm^2 در نظر گرفته شده اند و تنش محوری وارد بر لوله 105 N/mm^2 می باشد. بعد از جایگذاری مقادیر بالا و اجرای برنامه مقدار KI بصورت زیر بدست آمد:

$$KI = 551/47 \text{ N mm}^{-1/5}$$

که این عدد در بررسی گرینر برابر $520 \text{ N mm}^{-1/5}$ و در بررسی رایگان برابر $530/63 \text{ N mm}^{-1/5}$ می باشد. همانطور که مشاهده می شود مقدار ضریب شدت تنش در مد I شکست در برنامه نوشته شده بسیار نزدیک به مقادیر گزارش شده است.

در ادامه اثر چگونگی تغییر پارامتر n بر میدان های کرنش، تنش و دما و اثر میدان دما بر کرنش و تنش ها در قالب چند مثال و به کمک برنامه کامپیوتری نوشته شده مورد بررسی قرار می گیرد.

۳.۶ مثال های حل شده در خصوص میدان تنش، جابجایی و ضریب شدت تنش

۱.۳.۶ بررسی اثر تغییر خواص بر میدان تنش و جابجایی در استوانه های ترک دار در

معرض شوک گرمایی

یک سیلندر جدار ضخیم دارای ترک محیطی به طول $a = 0/05 \text{ mm}$ تحت فشار داخلی و خارجی قرار گرفته است. خواص ماده تابعی به گونه ای فرض می گردد که یک طرف پوسته آلیاژ

تیتانیوم ($Ti-6Al-4V$) و طرف دیگر پوسته آلیاژی از زیرکونیوم (ZrO_2) باشد. خواص مکانیکی و مشخصات هندسی پوسته مفروض در جدول (۵-۶) آمده است. سطح داخلی پوسته از جنس سرامیک (زیرکونیوم) و سطح خارجی آن از جنس فلز در نظر گرفته شده است. طول استوانه ۲۰۰mm است.

جدول ۵-۶ خواص مکانیکی تیتانیوم (فلز) و زیرکونیوم (سرامیک) [۳۲]

	$\rho(\frac{kg}{m^3})$	$E(Gpa)$	$K(\frac{W}{mk})$	$\alpha \times 10^{-6}(\frac{1}{k})$	$C(\frac{J}{kgK})$	ν
$r_i = 0.1m$	$5/6 \times 10^3$	۱۱۷	۲/۰۳۶	۷/۱۱	۵۱۶/۶	۰/۳۳۳
$r_r = 0.2m$	$4/41 \times 10^3$	۶۶/۲	۱۸/۱	۱۰/۳	۸۰۸/۳	۰/۳۲۱

استوانه در دمای اولیه $T_i = 400K$ قرار دارد. دیواره داخلی استوانه را در معرض دمای $T_r = 200K$ قرار می دهیم شرایط مرزی مکانیکی عبارتست از فشار در دیواره داخلی برابر $P_i = 100Mpa$ و در جدار خارجی $P_r = 10Mpa$ می باشد. به علت رسانش حرارتی پایین تر سرامیک نسبت به فلز، دمای سرامیکی داخل پوسته بالاتر از خارج آن می باشد. خواص پوسته تابعی برای $n=0$ ، $n=0.3$ و $n=0.5$ بررسی گردیده است. این مثال در حالت ترموالاستیسیته جفت شده حل می گردد. تعداد المان ها 61×121 می باشد. حداکثر مقادیر ضریب شدت تنش در این مثال در جدول (۶-۶) برای حالات مختلف بیان شده است.

جدول ۶-۶ حداکثر ضریب شدت تنش مد اول در زمان ۵۰۰ ثانیه

n	۰	۰/۳	۰/۵
$KI(MPa \cdot m^{0.5})$	۲/۶۴۵۳	۳/۰۵۱۷	۳/۶۲۸۴

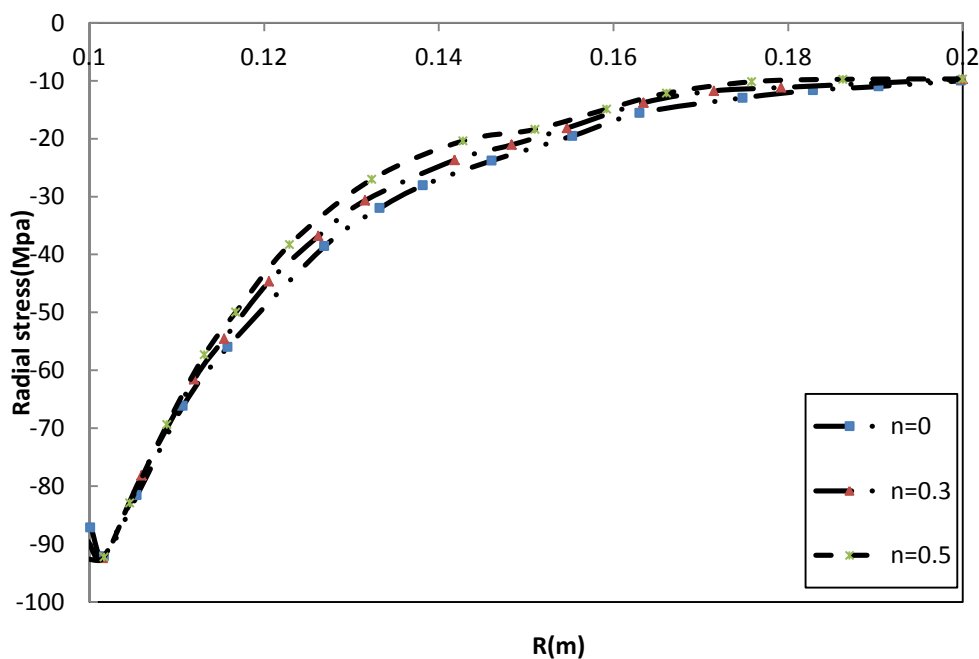
مطابق شکل (۶-۶) بیشترین مقدار تنش شعاعی در جدار داخلی و کمترین آن در جدار خارجی می باشد. افزایش پارامتر n در رابطه (۱-۲) باعث کاهش تنش شعاعی از جدار داخلی به خارجی خواهد بود.

از شکل (۶-۷) مشخص است بیشترین مقدار تنش محیطی مربوط به دیواره داخلی و کمترین مقدار آن در دیواره خارجی است. افزایش پارامتر n تا حدی دورتر از دهانه ترک باعث افزایش تنش محیطی و بعد از آن باعث کاهش نرخ تغییرات می گردد.

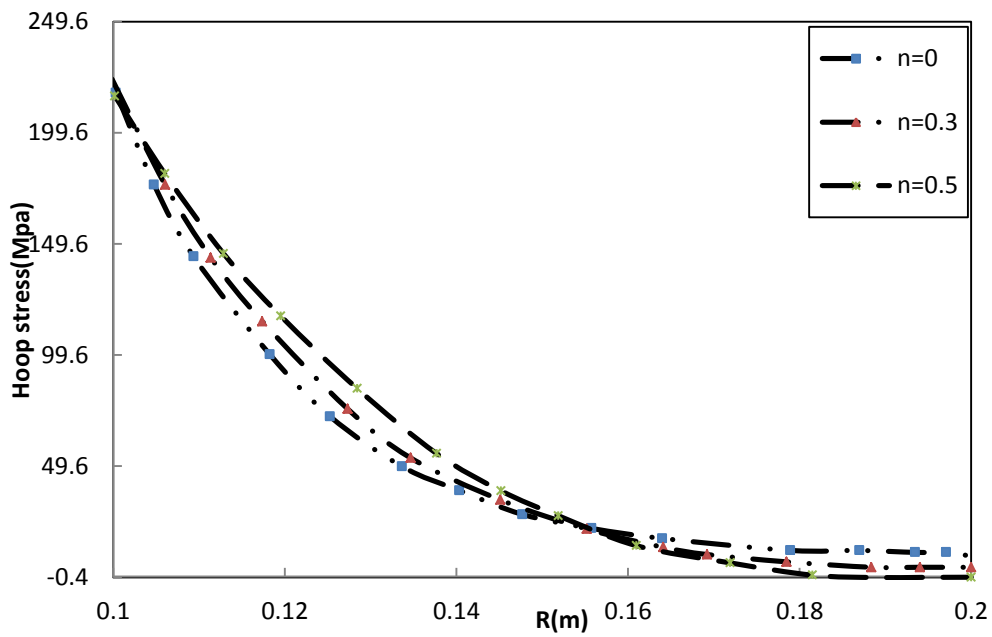
مطابق شکل (۶-۸) به علت رسانش پایین تر سرامیک نسبت به فلز دمای داخل با سرعت کمتری به دیواره خارجی منتقل می شود. همانگونه که مشخص است میانگین توزیع دما در مواد تابعی کمتر از حالتی است که کل سازه فلزی باشد. رفتار ترمومکانیکی در حالت سرامیکی دمای بالاتری را نسبت به حالت فلزی در جدار استوانه بوجود می آورد. در شکل (۶-۹) می توان دید که افزایش توان تابعی منجر به افزایش ضریب شدت تنش مد اول می گردد.

در ادامه کانتورهای تنش شعاعی و محیطی، کانتورهای جابجایی شعاعی و طولی برای

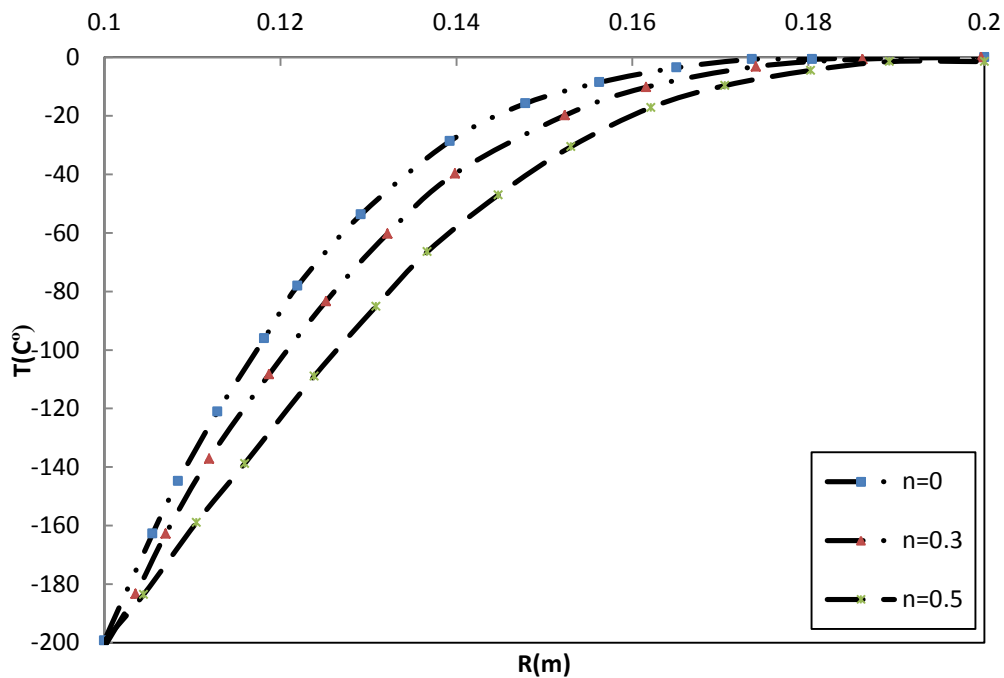
$n = 0.5$ برای 61×121 المان ترسیم می شوند.



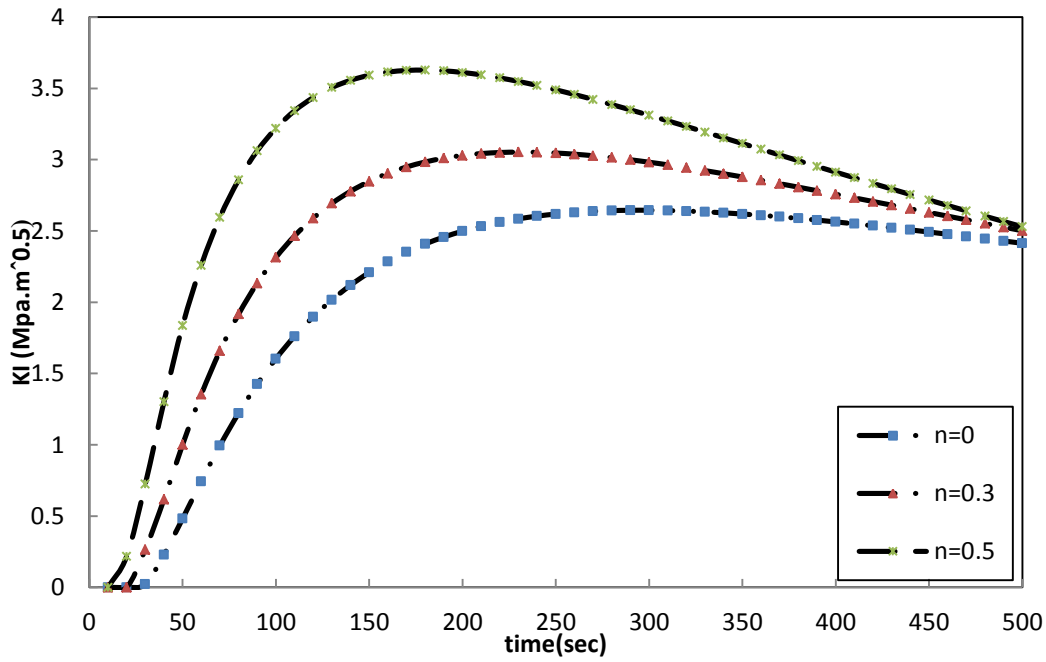
شکل ۶-۶ نمودار توزیع تنش شعاعی برای پارامترهای مختلف n در زمان ۱۰۰ ثانیه



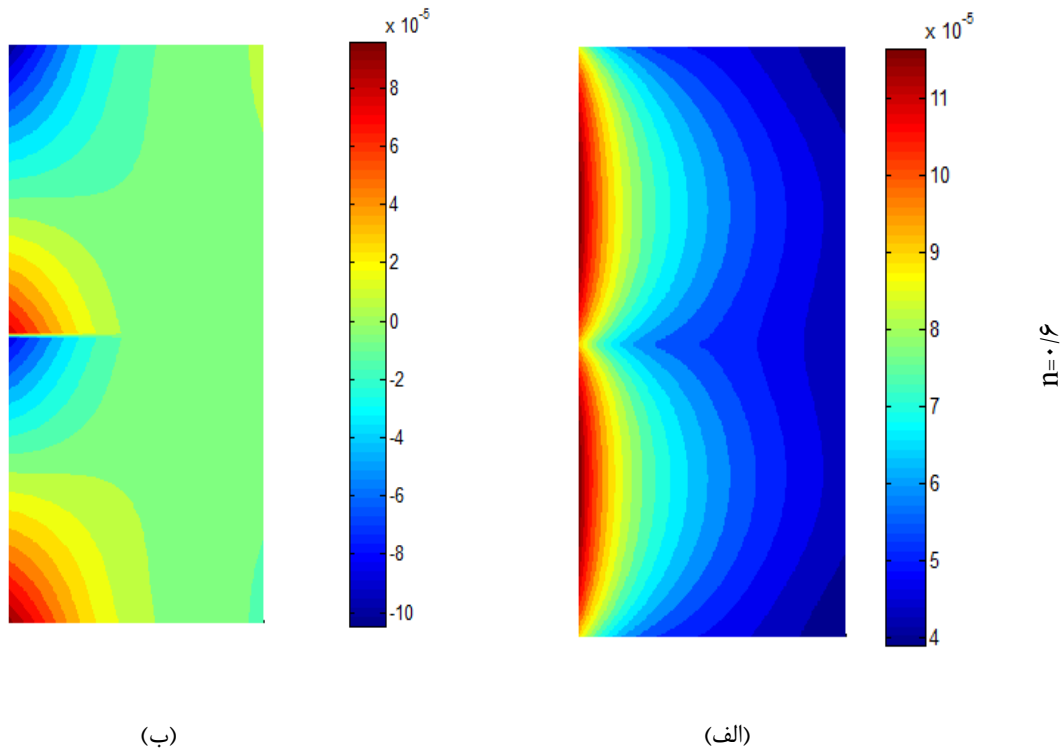
شکل ۶-۷ نمودار توزیع تنش محیطی برای پارامترهای مختلف n در زمان ۱۰۰ ثانیه



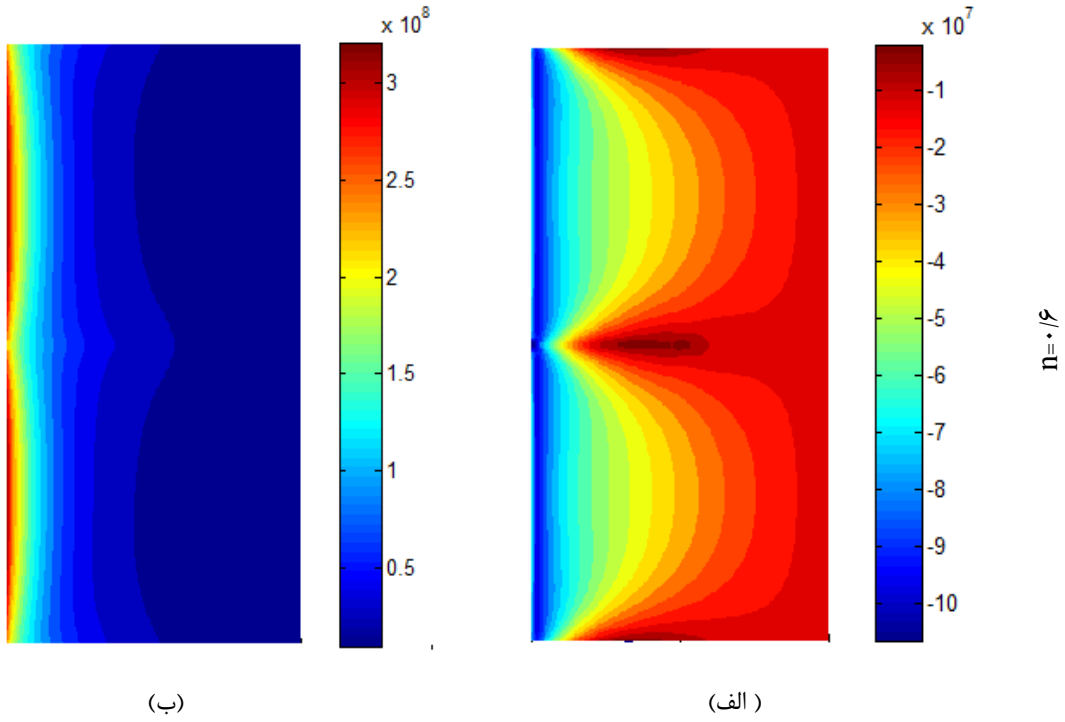
شکل ۶-۸ نمودار توزیع دما برای پارامترهای مختلف n در زمان ۱۰۰ ثانیه



شکل ۶-۹ نمودار ضریب شدت تنش برای پارامترهای مختلف n در زمان ۵۰۰ ثانیه



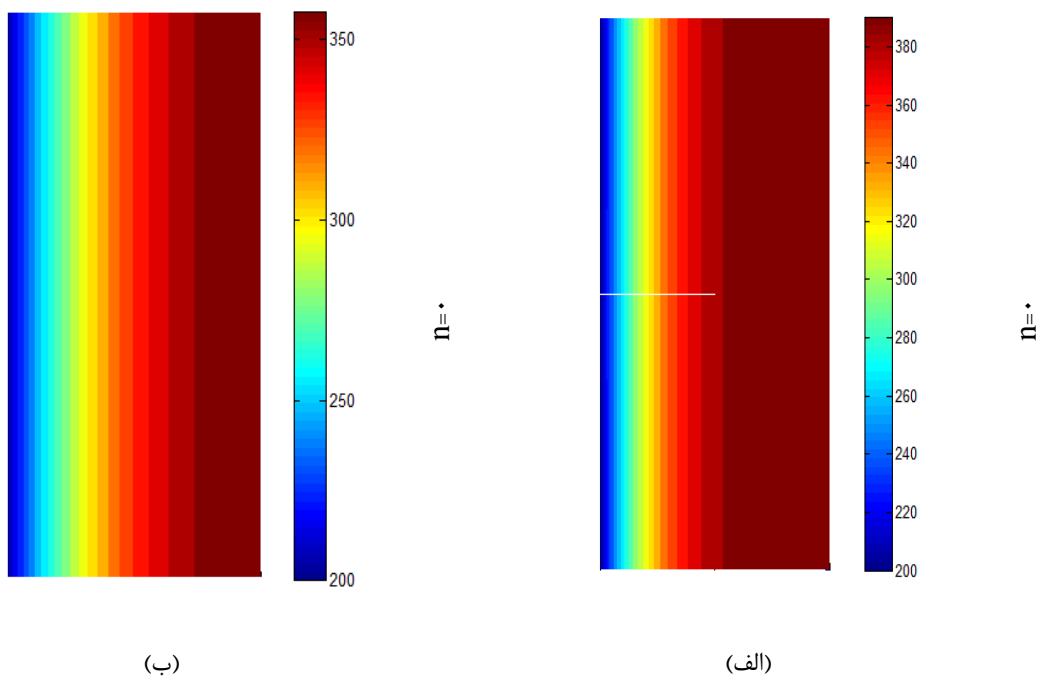
شکل ۶-۱۰ کانتورهای جابجایی در راستای شعاعی (الف) و در راستای محوری (ب) برای $n=0/6$ در زمان ۱۰۰ ثانیه

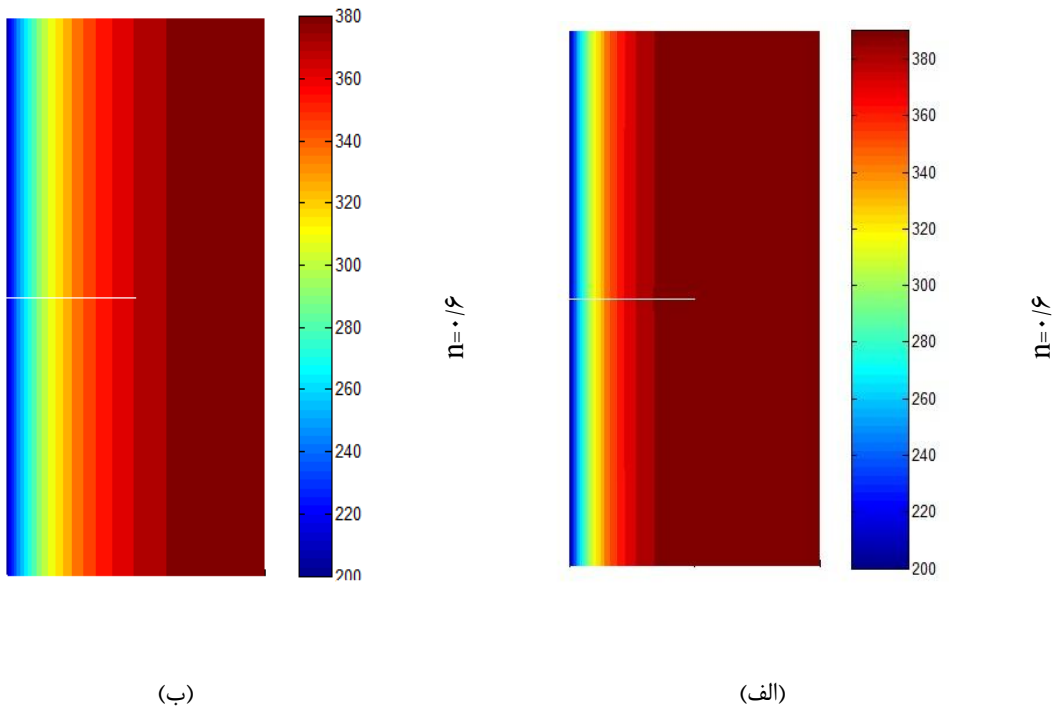


شکل ۶-۱۱ کانتورهای تنش در راستای شعاعی (الف) و در راستای محیطی (ب) برای $n=0/6$ در زمان ۱۰۰ ثانیه

برای $n=0, n=0/6$ در زمان ۱۰۰ و ۵۰۰ ثانیه کانتورهای دما در راستای ضخامت استوانه

مطابق شکل (۶-۱۲) می باشد.





شکل ۶-۱۲ کانتورهای دمایی برای n های مختلف در زمان ۱۰۰ ثانیه (الف) و زمان ۵۰۰ ثانیه (ب)

۲.۳.۶ بررسی اثر بارگذاری های مختلف بر ضریب شدت تنش در یک استوانه دارای ترک

محیطی

حال به بررسی تأثیرات فشار، حرارت و سرعت زاویه ای بر ضریب شدت تنش می پردازیم. در تمامی حالات بیان شده سیلندر تابعی دارای یک ترک محیطی می باشد. این استوانه شامل فلز $Ti-6Al-4V$ و سرامیک ZrO_2 است. جنس مواد تشکیل دهنده مطابق جدول (۶-۵) است. شعاع داخلی متشکل از ZrO_2 است و تغییر خواص در جهت r اتفاق می افتد. تغییر کسر حجمی فاز $Ti-6Al-4V$ از روابط ارائه شده در فصل دوم تبعیت می کند. ابعاد سیلندر عبارتند از: $R_i = 0.1 m, R_o = 0.2 m$ و ارتفاع استوانه $H = 0.2 m$. برای المان بندی استوانه از یک شبکه با 61×121 المان مستطیلی چهار گره ای استفاده می شود. حالات زیر مورد مطالعه قرار می گیرد. برای محاسبه انتگرال برهمکنش یک مربع با ابعاد چهار المان طول و چهار المان عرض در نظر گرفته شده است.

۱.۲.۳.۶ بررسی اثر کشش ساده بر روی ضریب شدت تنش

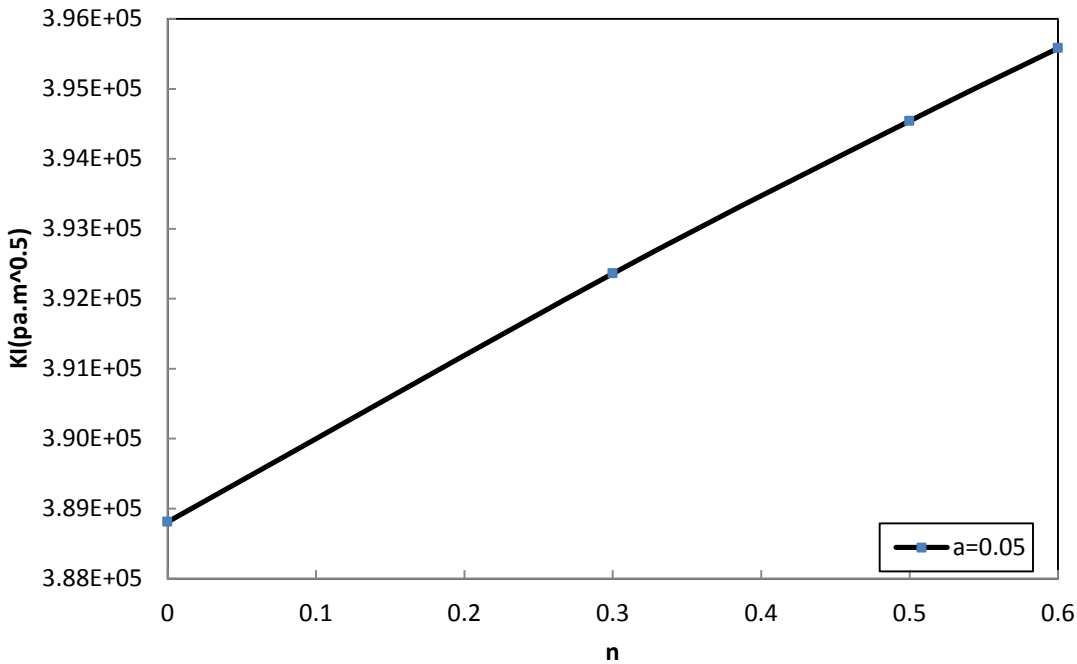
• تاثیر توان تابعی های مختلف بر ضریب شدت تنش

در این استوانه طول ترک $a = 0.05$ m فرض شده است. سیلندر تحت بارگذاری استاتیکی ۱ Mpa به صورت کشش محوری قرار گرفته و به ازای ($n=0, n=0.3, n=0.5, n=0.6$) ضریب تمرکز تنش مد اول مورد بررسی قرار گرفت. خواص در این مثال مطابق جدول (۶-۵) می باشد.

جدول ۶-۶ ضریب شدت تنش برای $a = 0.05$ و پارامترهای مختلف n

n	۰	۰/۳	۰/۵	۰/۶
$KI (pa.m^{-0.5} \times 10^5)$	۳/۸۸۸۱	۳/۹۲۳۶	۳/۹۴۵۴	۳/۹۵۵۸

افزایش پارامتر n مطابق شکل (۶-۱۳) و جدول (۶-۶) منجر به افزایش ضریب شدت تنش در حالت بار کششی در استوانه می گردد. با افزایش n درصد ماده افزوده شده که فلز می باشد کاهش می یابد. با کاهش فاز فلز در ماده تابعی مدول الاستیک ماده تابعی افزایش می یابد زیرا درصد سرامیک که مدول الاستیک بالاتری دارد بیشتر شده و مقدار تنش افزایش می یابد. بیشتر شدن مقدار تنش، افزایش ضریب شدت تنش را بوجود می آورد.



شکل ۶-۱۳ نمودار تغییرات ضریب شدت تنش برحسب پارامترهای مختلف n برای $a = 0.05$

۲.۲.۳.۶ بررسی اثر شوک حرارتی بر روی ضریب شدت تنش

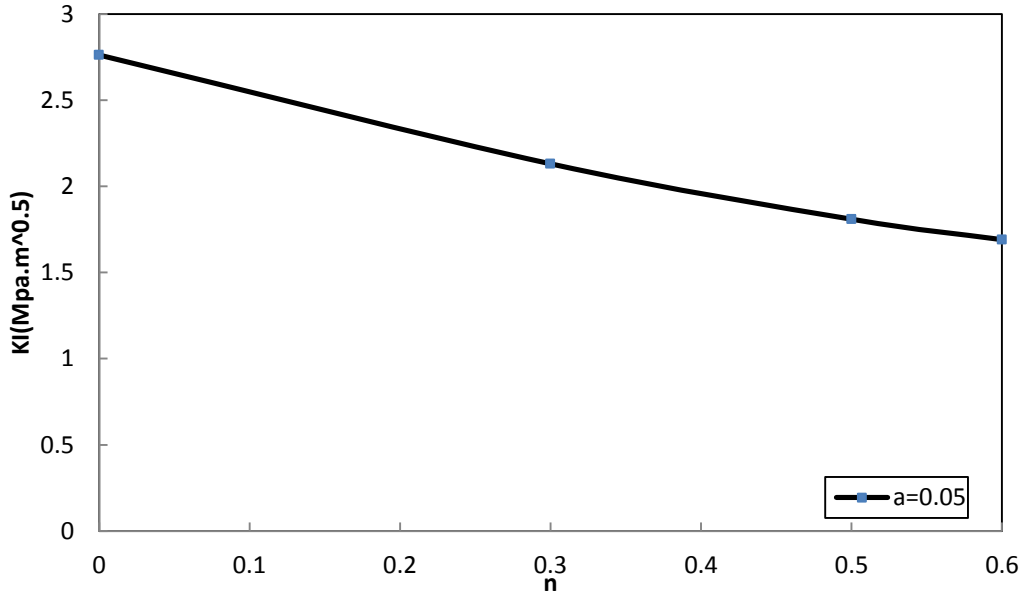
- تأثیر پارامتر n مختلف بر ضریب شدت تنش

در این مثال نیز استوانه متشکل از $Ti-6Al-4V$ و ZrO_2 است. بارگذاری استوانه در حالت مد اول است. دمای اولیه $400K$ می باشد. در لحظه $t=0$ یک شوک سرمایشی $200K$ به دیواره داخلی استوانه اعمال می شود. طول ترک $a = 0.05$ m فرض شده است. خواص مکانیکی مطابق جدول (۵-۶) می باشد و ابعاد و شرایط مرزی منطبق با حالت قبلی می باشد.

جدول ۶-۷ حداکثر ضریب شدت تنش به ازای پارامترهای مختلف n

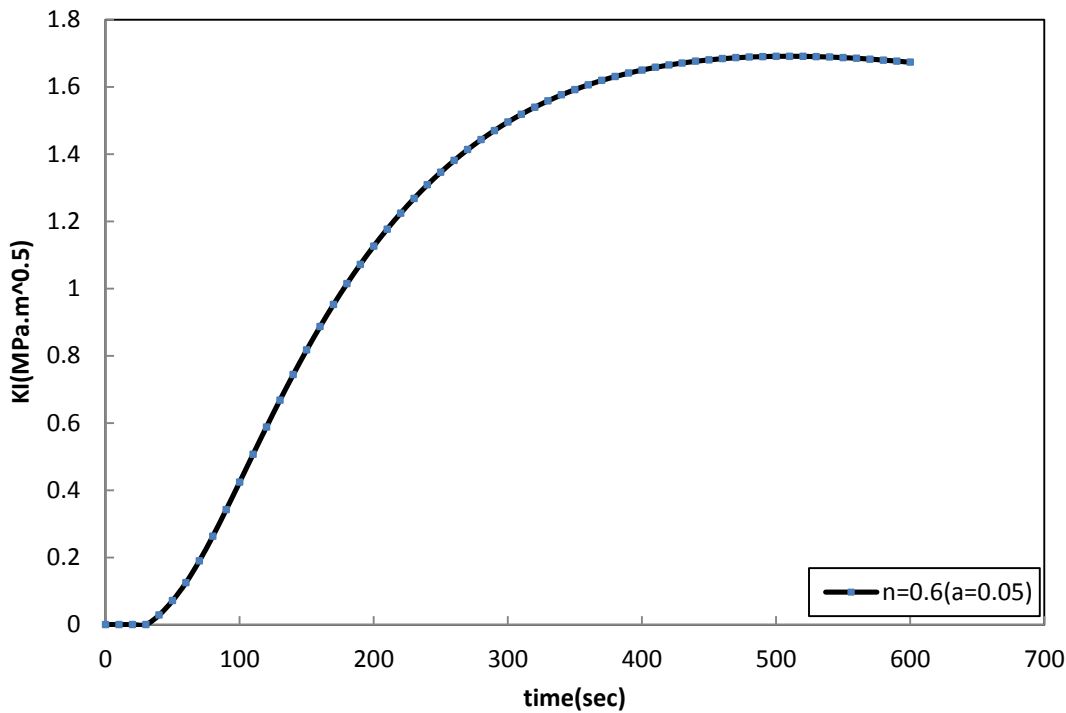
$a = 0.05$ m				
n	۰	۰/۳	۰/۵	۰/۶
$KI (Mpa.m^{-0.5})$	۲/۷۶۲۴	۲/۱۳۱۰	۱/۸۰۹۵	۱/۶۹۰۸

همانگونه که از جدول (۶-۷) و شکل (۶-۱۴) مشخص است با افزایش توان تابعی، در یک طول ترک معین شاهد کاهش ضریب شدت تنش مد اول خواهیم بود.



شکل ۶-۱۴ نمودار ضریب شدت تنش برحسب پارامترهای مختلف n

در اینجا شبیه سازی قبل از اینکه موج های منعکس شده از لبه ها به نوک ترک برسند متوقف می شود. بنابراین زمان شبیه سازی $t = 600 \text{ s}$ خواهد بود و گام زمانی مورد استفاده ۱۰ ثانیه است. افزایش پارامتر n منجر به کاهش درصد حجمی فلز و افزایش میزان فاز سرامیک در استوانه می گردد. سرامیک ضریب هدایت گرمایی کمتری نسبت به فلز داشته و این باعث می گردد حرارت کمتری در جسم منتقل شود. در نتیجه ضریب شدت تنش کاهش می یابد. در نمودار (۶-۱۵) ضریب شدت تنش را بر حسب زمان برای $n = 0.6$ و طول ترک $m = 0.05$ ترسیم گردیده است.



شکل ۶-۱۵ ضریب شدت تنش نسبت به زمان برای $n = 0.6, a = 0.05$

با اعمال بارگذاری حرارتی به جدار داخلی استوانه تا رسیدن موج تنش به نوک ترک، ضریب شدت تنش افزایش یافته و پس از عبور موج تنش این ضریب کاهش می یابد.

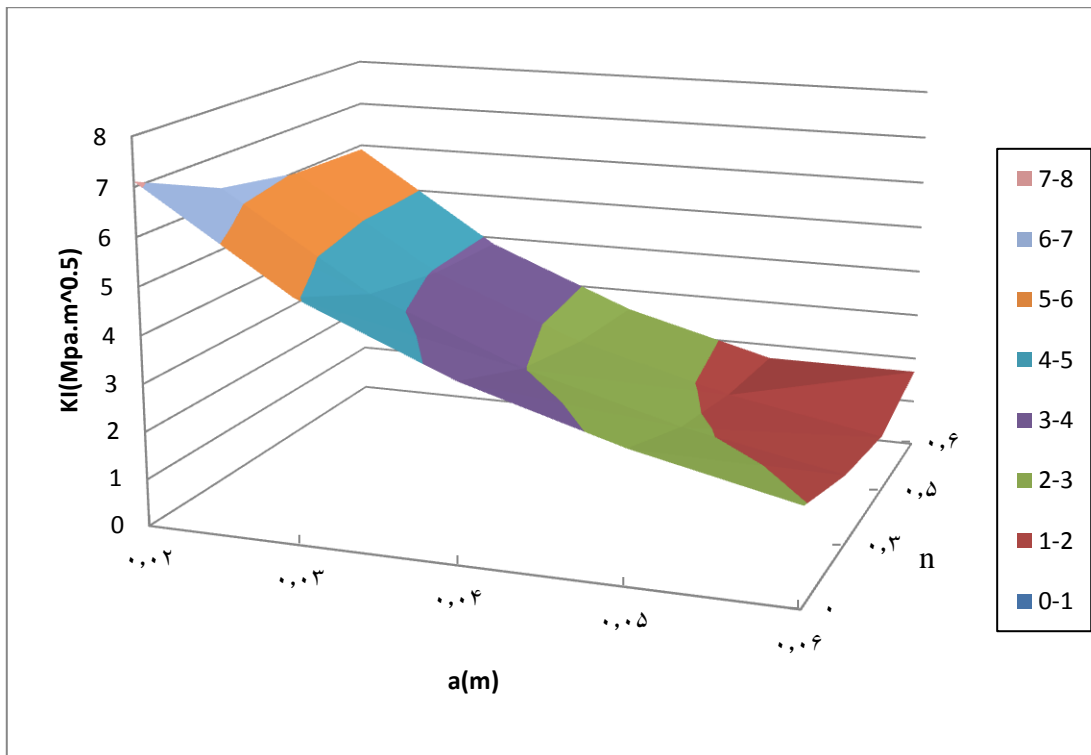
• تاثیر طول ترک های مختلف بر ضریب شدت تنش

در این مثال بارگذاری همچون بالا و در حالت مد اول است و به ازای طول ترک های $(a = 0.02, a = 0.03, a = 0.04, a = 0.05, a = 0.06)$ ضریب تمرکز تنش مد اول مورد بررسی قرار می دهیم. مقادیر متفاوت برای پارامتر n در این مثال برابر با $(n = 0, n = 0.3, n = 0.5, n = 0.6)$ در نظر گرفته شده است. زمان شبیه سازی همچون مثال فوق می باشد. نتایج بدست آمده در جدول (۶-۸) ارائه شده است. همانگونه که در جدول زیر مشخص است با افزایش پارامتر n در هر طول ترک معین، شاهد افزایش ضریب شدت تنش مد اول خواهیم بود.

جدول ۸-۶ بیشینه مقدار ضریب شدت تنش بر حسب نسبت طول ترک به شعاع استوانه

طول ترک	$n = 0$	$n = 0.3$	$n = 0.5$	$n = 0.6$
$KI (Mpa \times m^{0.5})$				
$a = 0.02$	۷/۱۱۰۳	۶/۳۰۵۷	۵/۹۷۳۷	۵/۹۰۲۹
$a = 0.03$	۵/۰۶۴۸	۴/۲۹۹۹	۳/۹۵۱۱	۳/۸۴۵۲
$a = 0.04$	۳/۷۲۳۶	۳/۰۲۱۵	۲/۶۷۱۵	۲/۵۴۸۹
$a = 0.05$	۲/۷۶۲۴	۲/۱۳۱۰	۱/۸۰۹۵	۱/۶۹۰۸
$a = 0.06$	۲/۰۴۱۲	۱/۵۰۱۴	۱/۲۲۹۱	۱/۶۹۰۸

تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب تغییرات پارامتر n و طول ترک در شکل (۱۶-۶) ترسیم شده است. در هر پارامتر n معین افزایش طول ترک باعث کاهش ضریب شدت تنش مد اول می گردد.



شکل ۱۶-۶ تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به طول ترک و پارامتر n

افزایش طول ترک باعث می گردد به دلیل اتلاف حرارتی داخل جسم، اختلاف دمای کمتری را نوک ترک نسبت به طول ترک کمتر دارا باشد. این مهم منجر به کاهش ضریب شدت تنش می گردد. در هر طول ترک ثابت افزایش پارامتر n باعث کاهش ضریب شدت تنش می گردد. با افزایش پارامتر n درصد فلز در داخل جسم کاهش می یابد. کمتر شدن فاز فلز باعث کاهش ضریب هدایت گرمایی در جسم شده و موج گرما در استوانه کندتر حرکت نموده و در نهایت ضریب شدت تنش را کاهش می دهد.

۳.۲.۳.۶ بررسی اثر سرعت زاویه ای بر روی ضریب شدت تنش

در این قسمت تاثیر سرعت زاویه ای بر ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار می گیرد. در این مثال همچون مثال قبلی استوانه متشکل از $Ti-6Al-4V$ و ZrO_2 است. بارگذاری استوانه در حالت مد اول است. دمای جسم در زمان مورد بررسی $200K$ می باشد. طول ترک $a = 0.05 m$ فرض شده است. خواص مکانیکی مطابق جدول (۶-۵) می باشد و ابعاد و شرایط مرزی منطبق با حالت قبلی می باشد.

• تاثیر پارامترهای مختلف n بر ضریب شدت تنش

استوانه را در معرض چرخش ثابت $\omega = 50 rad/sec$ قرار می دهیم. طول ترک محیطی $a = 0.05 m$ می باشد. این تحلیل را برای $300 sec$ بررسی می نماییم. همانگونه که از جدول (۶-۹) مشخص است افزایش پارامتر n در یک طول ترک ثابت باعث افزایش ضریب شدت تنش می شود.

جدول ۶-۹ حداکثر مقدار ضریب شدت تنش به ازای پارامترهای مختلف n

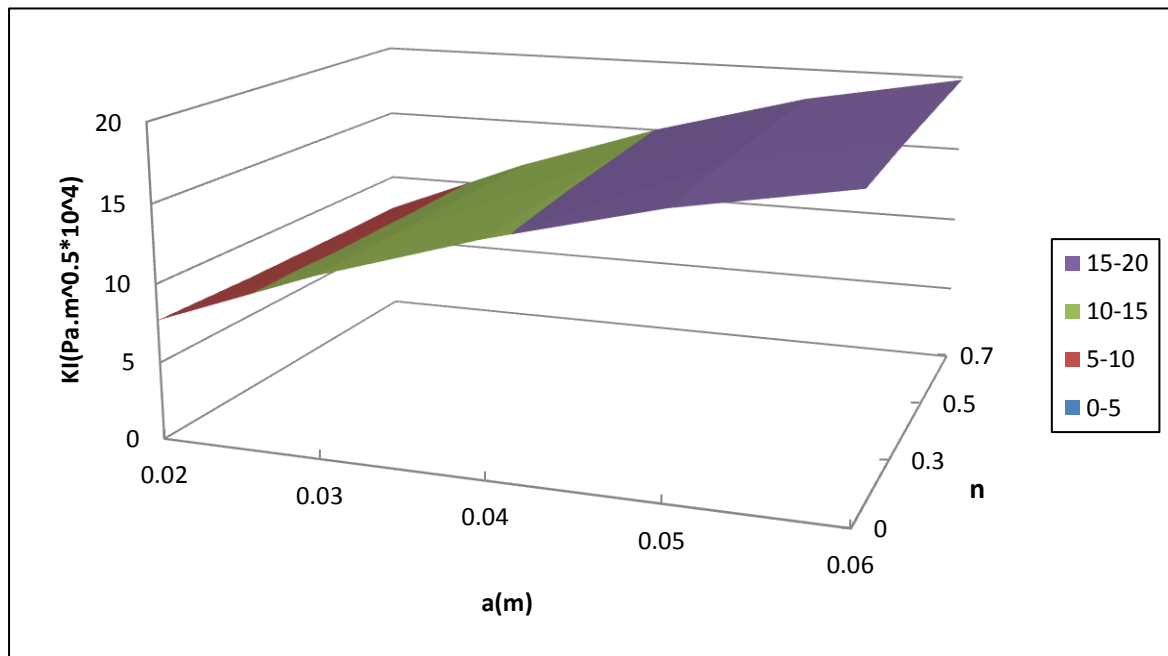
$a=0.05m$				
n	۰	۰/۳	۰/۵	۰/۶
$KI (pa.m^{-1/2} \times 10^7)$	۱/۷۲۵۳	۱/۸۳۷۱	۱/۸۸۲۲	۱/۹۰۱۶

• تاثیر طول ترک های مختلف بر ضریب شدت تنش

در این قسمت طول ترک های مختلف را مد نظر قرار می دهیم. استوانه در سرعت زاویه ای ثابت $\omega = 500 \text{ rad/sec}$ قرار می گیرد. طبق جدول (۶-۱۰) اثر طول ترک های مختلف را مورد بررسی قرار می دهیم. شرایط زمانی چون حالت فوق می باشد. همانگونه که از جدول (۶-۱۰) و شکل (۶-۱۷) مشخص است افزایش طول ترک در یک توان تابعی ثابت باعث افزایش ضریب شدت تنش می گردد.

جدول ۶-۱۰ تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به طول ترک

طول ترک	$n=0$	$n=0.3$	$n=0.5$	$n=0.6$
$KI \left(\text{pa.m}^{0.5} \times 10^4 \right)$				
$a=0.02$	۷/۵۰۴۶	۷/۵۶۵۰	۷/۷۵۴۴	۷/۸۹۹۲
$a=0.03$	۱۱/۴۶۵	۱۱/۵۰۷	۱۱/۵۸۰	۱۱/۶۸۳
$a=0.04$	۱۴/۵۹۴	۱۴/۷۹۸	۱۴/۹۵۱	۱۵/۱۱۴
$a=0.05$	۱۷/۱۹۴	۱۷/۵۱۰	۱۷/۷۱۷	۱۷/۹۱۸
$a=0.06$	۱۹/۰۵۶	۱۹/۴۰۴	۱۹/۶۲۱	۱۹/۸۲۵



شکل ۶-۱۷ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب طول ترک به ضخامت استوانه

• تاثیر سرعت زاویه ای بر ضریب شدت تنش

استوانه را طبق جدول (۶-۱۱) در معرض سرعت زاویه ای $\omega = 10 \text{ rad/sec}$ تا

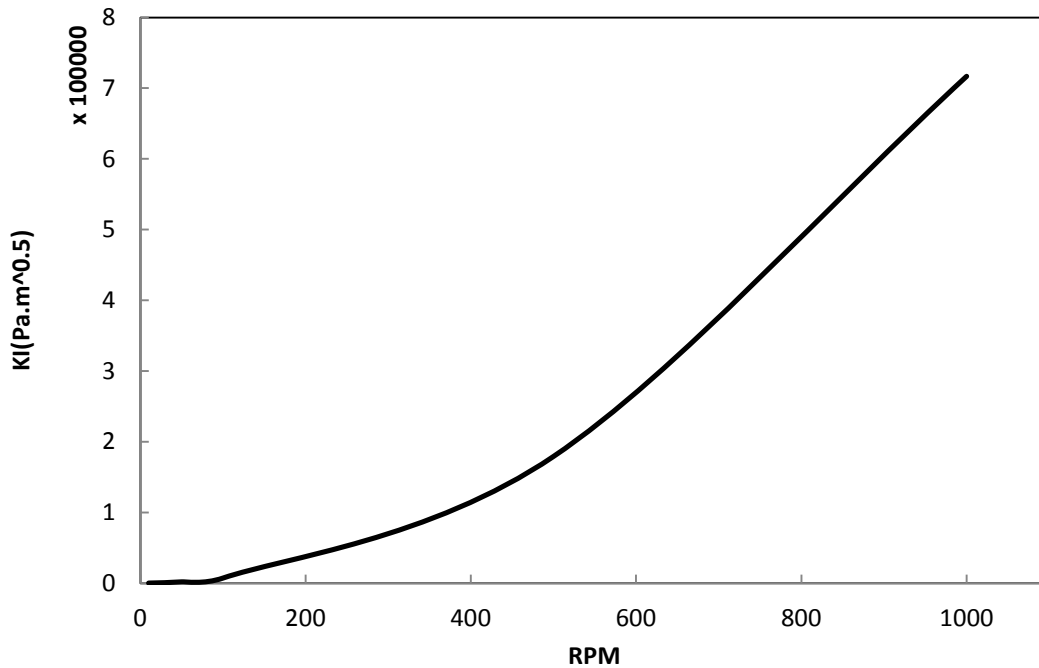
$\omega = 1000 \text{ rad/sec}$ قرار می دهیم. در این بررسی $n = 0.6$ در نظر گرفته می شود.

جدول ۶-۱۱ ضریب شدت تنش به ازای پارامترهای مختلف n

$a=0.05m, n=0.6$					
$\omega(\text{rad/sec})$	۱۰	۵۰	۱۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
$KI(\text{Pa}\sqrt{m} \times 10^5)$	۰/۰۷۱۶۷	۱/۷۹۱۸	۷/۱۶۷۳	۱۷۹/۱۸	۷۱۶/۷۳

از شکل (۶-۱۸) می توان دید که با افزایش سرعت زاویه ای در استوانه میزان ضریب شدت

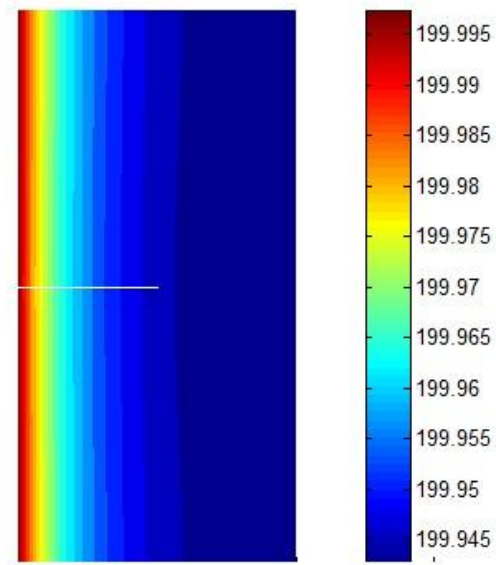
تنش رو به افزایش خواهد بود.



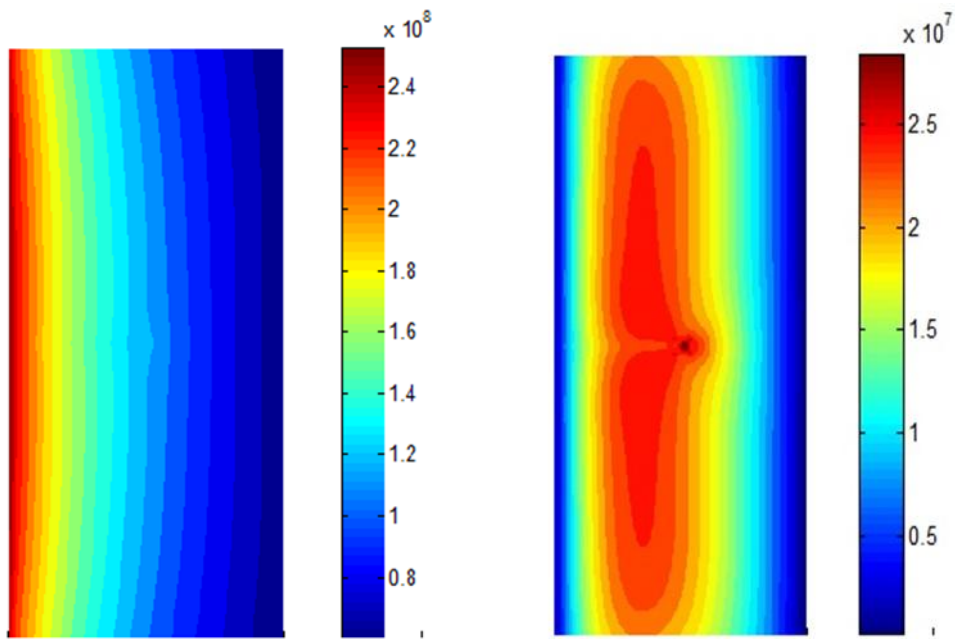
شکل ۶-۱۸ تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به سرعت زاویه ای

در ادامه کانتورهای دما و تنش شعاعی و محیطی را برای $\omega = 1000 \text{ rad/sec}$ ، $n = 0.7$ در

زمان $t = 500 \text{ sec}$ در شکل (۶-۱۹) ترسیم شده است.



(الف)



(ج)

(ب)

شکل ۶-۱۹ کانتورهای دما (الف) کانتورهای تنش شعاعی (ب) کانتورهای تنش محیطی (ج) برای
 $n = 0/6$ و $\omega = 1000 \text{ rad/sec}$

۴.۲.۳.۶ بررسی اثر بارگذاری ترکیبی فشار، شوک حرارتی و چرخش

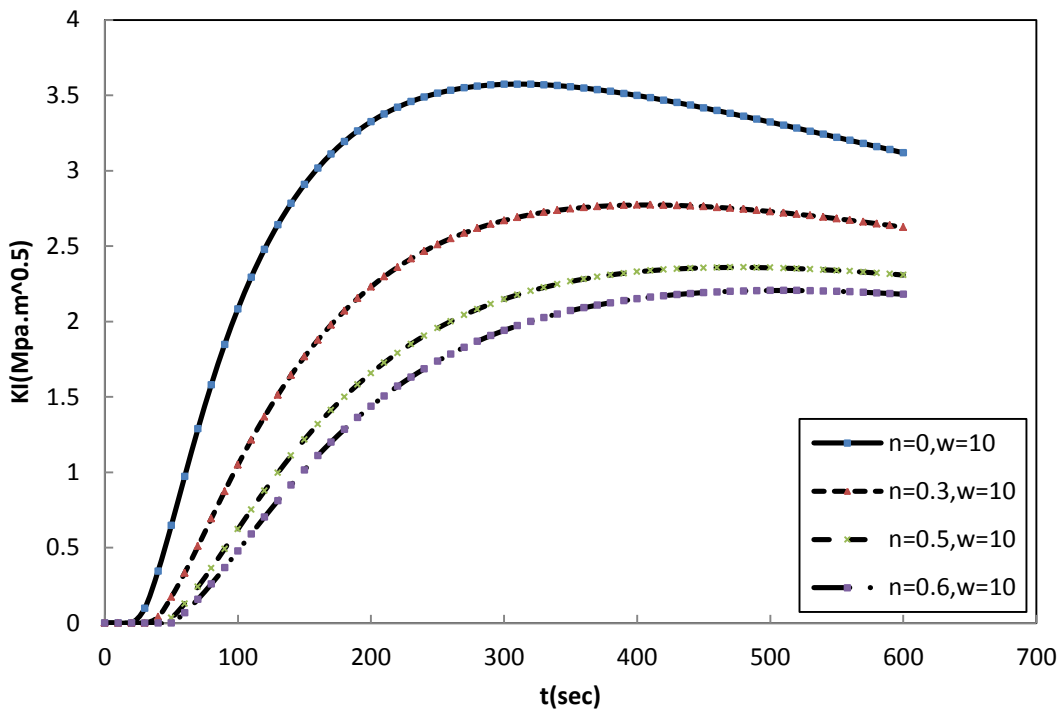
در این بررسی شعاع داخلی استوانه برابر با $r_i = 0.1 \text{ m}$ و ضخامت آن برابر با $t = 0.1 \text{ m}$ و سرعت زاویه ای آن $\omega = 1.0 \text{ rad/sec}$ ، فشار داخلی $P_i = 100 \text{ Mpa}$ ، دمای اولیه $T_i = 273^\circ \text{C}$ و دمای استوانه دیواره داخلی را در حالت سرمایشی و برابر $T_r = 0^\circ \text{C}$ در نظر گرفته شده است. نتایج برای طول ترک $a = 0.05 \text{ m}$ در $t = 600 \text{ s}$ (۶۰ گام زمانی که هر گام ۱۰s می باشد) به ازای پارامترهای مختلف n بررسی می نماییم. شبیه سازی در حالتی صورت می پذیرد که موج های منعکس شده از لبه به نوک ترک نرسیده باشند. تعداد المانها برابر با 61×121 می باشد. ماده تابعی متشکل $Ti-6Al-4V$ و ZrO_2 می باشد.

• تاثیر پارامترهای مختلف n بر ضریب شدت تنش

همانگونه که از جدول (۶-۱۲) و نمودار (۶-۲۰) مشخص است با افزایش پارامتر n در سرعت زاویه ای معین درصد فاز فلز بیشتر گردیده و با توجه به کمتر بودن مدول الاستیسیسته فلز به سرامیک مقدار ضریب شدت تنش مد اول در بارگذاری بیان شده کاهش یافت.

جدول ۶-۱۲ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای پارامترهای مختلف n

$a=0.05\text{m}, \omega=1.0\text{rad/s}$				
n	۰	۰/۳	۰/۵	۰/۶
$KI(Mpa\sqrt{m})$	۳/۵۷۴۴	۲/۷۷۲۵	۲/۳۵۸۷	۲/۲۰۶۰



شکل ۶-۱۹ تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان برحسب پارامترهای مختلف n

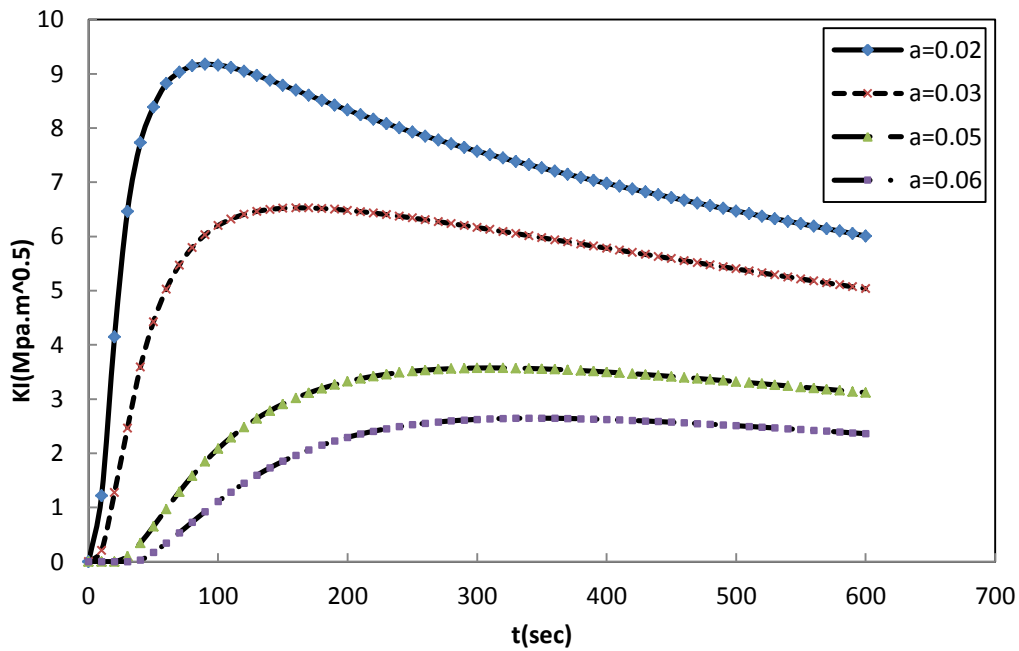
• تاثیر طول ترک های مختلف بر ضریب شدت تنش

در این حالت با رعایت تمامی پیش فرض های مطرح اولیه اثر تغییرات ضخامت را در پارامترهای n متفاوت مورد بررسی قرار داده ایم. شرایط مرزی مساله عبارتند از: فشار داخلی $p_1=100\text{Mpa}$ ، سرعت زاویه ای استوانه $\omega=10\text{rad/sec}$ ، دمای اولیه استوانه $T_0=273^\circ\text{C}$ ، دمای سطح داخلی در هنگام ورود موج سرمایشی $T_{in}=0^\circ\text{C}$ می باشد. تعداد المان بندی استوانه 61×121 است. نتایج مطابق جدول (۶-۱۳) می باشد. از شکل (۶-۲۱) مشخص است که با افزایش طول ترک در یک پارامتر n معین ضریب شدت تنش کاهش می یابد زیرا باعث می گردد فاصله بیشتری از جدار داخلی داشته و اختلاف دمای کمتری را تجربه کند. همچنین در یک طول ترک معین با افزایش پارامتر n ضریب شدت تنش

افزایش می یابد زیرا افزایش n باعث افزایش درصد فازسرامیک گردیده و منجر به افزایش ضریب شدت تنش می گردد.

جدول ۶-۱۳ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای طول ترک های مختلف

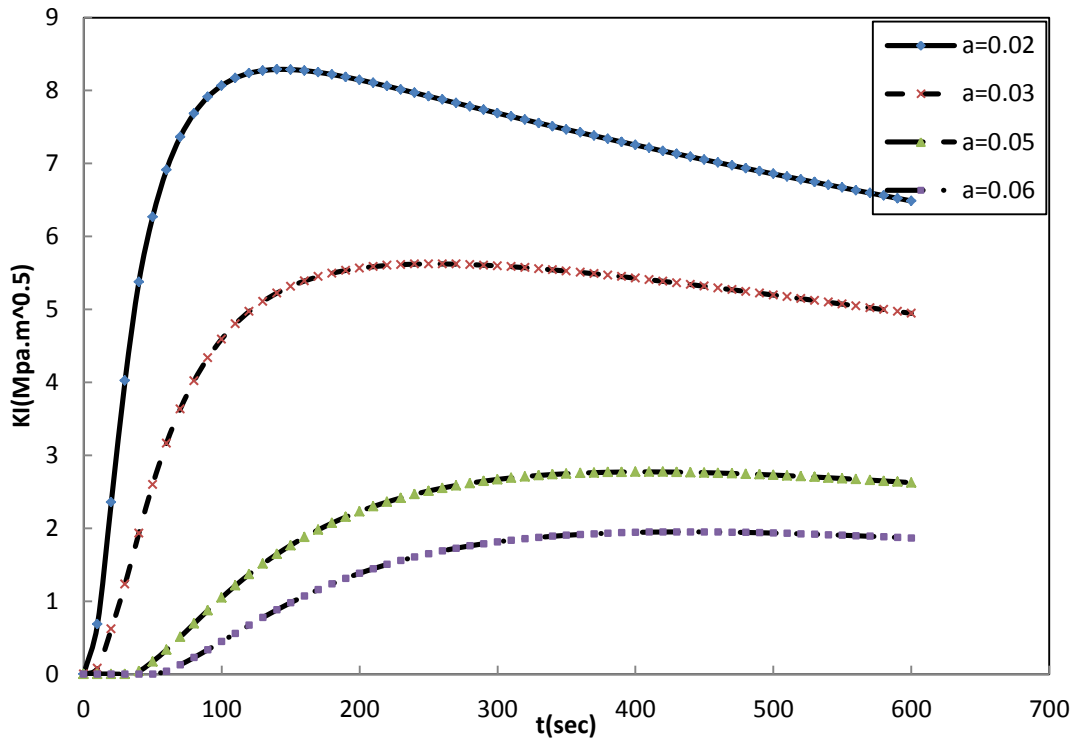
$n=0$				
a	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۵	۰/۰۶
KI(Mpa√m)	۹/۱۷۵۴	۶/۵۲۶۶	۳/۵۷۴۴	۲/۶۴۷۲
$n=0/3$				
a	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۵	۰/۰۶
KI(Mpa√m)	۸/۲۸۸۹	۵/۶۲۲۹	۲/۷۷۲۸	۱/۹۵۰۸
$n=0/5$				
a	۰/۰۲	۰/۰۳	۰/۰۵	۰/۰۶
KI(Mpa√m)	۷/۸۷۸۲	۵/۱۸۶۲	۲/۳۵۸۷	۱/۵۹۷۷



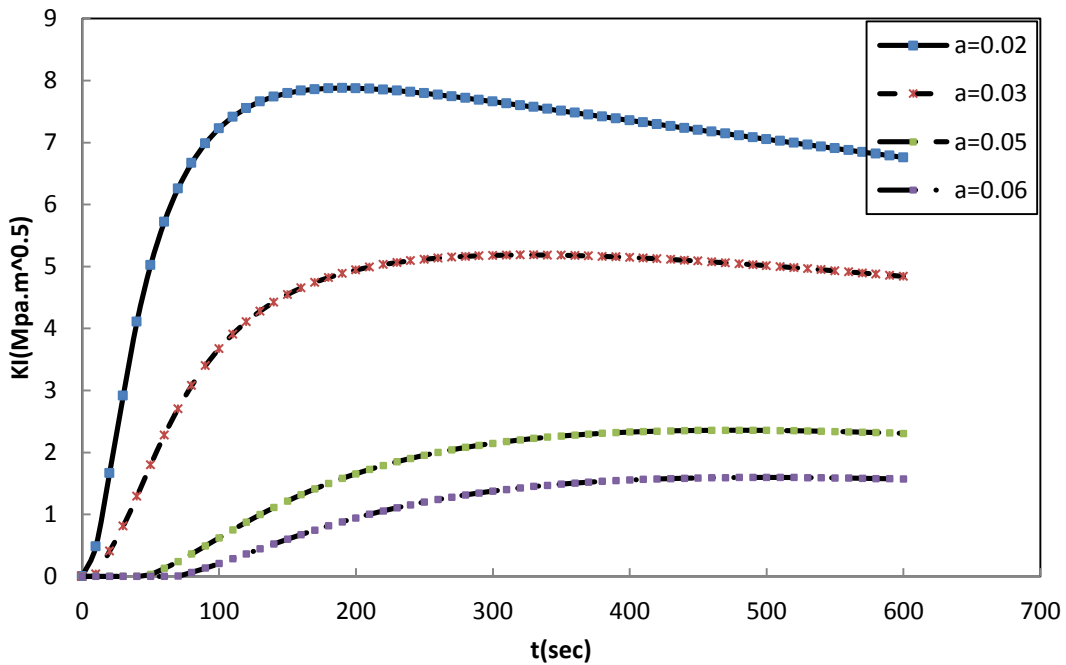
شکل ۶-۲۰ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب طول ترک های مختلف برای $n=0$

از مقایسه نتایج جدول (۶-۱۳) و شکل های (۶-۲۱)، (۶-۲۲) و (۶-۲۳) می توان گفت با

افزایش توان تابعی در یک طول ترک معین ضریب تمرکز تنش مد اول کاهش می یابد.



شکل ۶-۲۱ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب طول ترک های مختلف برای $n = 0.3$



شکل ۶-۲۲ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب طول ترک های مختلف برای $n = 0.5$

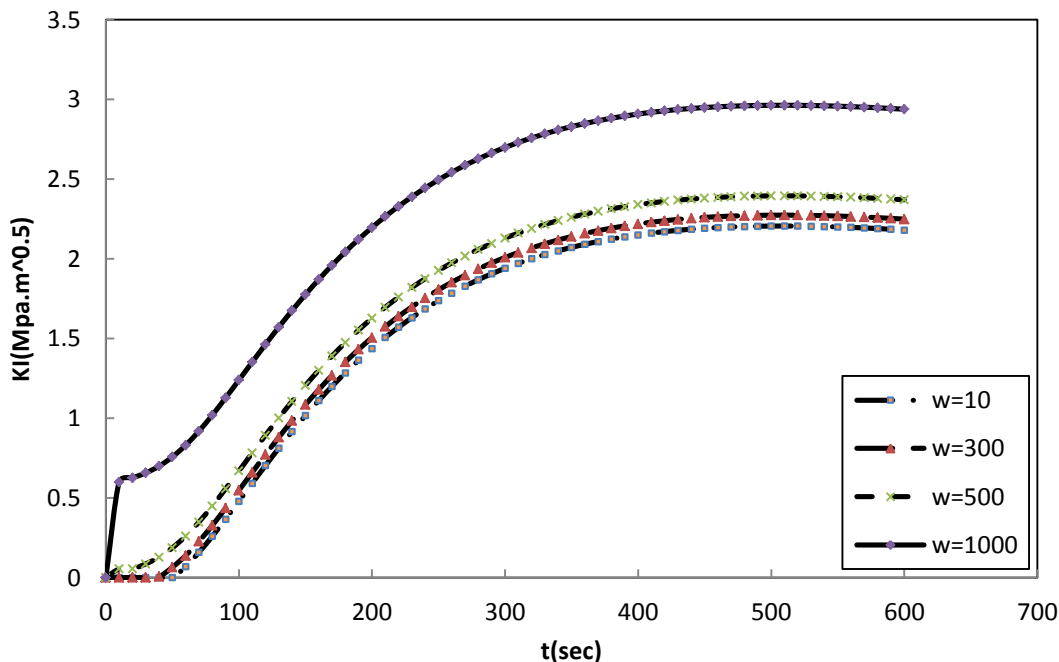
• تاثیر سرعت زاویه ای بر ضریب شدت تنش

در این بررسی با رعایت تمامی پیش فرض های مطرح اولیه، اثر تغییرات سرعت زاویه ای در $n=0.6$ و طول ترک $a=0.5m$ مورد بررسی قرار گرفت که نتایج آن مطابق جدول (۶-۱۴) می باشد. منحنی ضرایب شدت تنش بر حسب زمان در شکل (۶-۲۶) ترسیم شده است.

جدول ۶-۱۴ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای طول ترک مختلف

$n=0.6, a=0.5$				
ω (rad/s)	۱۰	۳۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
$KI(Mpa\sqrt{m})$	۲/۲۰۶۰	۲/۲۷۴۱	۲/۳۹۵۳	۲/۹۶۳۶

از شکل (۶-۲۴) مشخص است افزایش سرعت دوران باعث ازدیاد ضریب شدت تنش مد اول می گردد.



شکل ۶-۲۳ تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب سرعت زاویه ای مختلف برای $n=0.6$ و $a=0.5$

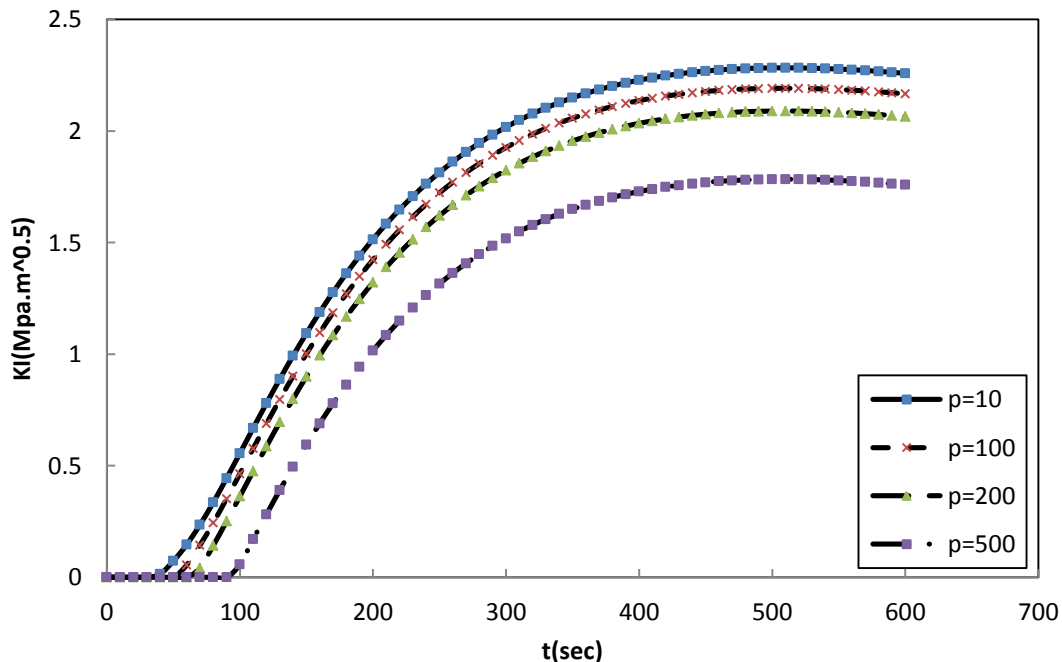
• تاثیر فشار داخلی بر ضریب شدت تنش

در این مثال $n=0.6$ و طول ترک $a=0.05m$ می باشد. فشار داخلی متغیر در این مثال $P_i = 10, 100, 200, 500 \text{ Mpa}$ و فشار خارجی $P_o = 10 \text{ Mpa}$ ، استوانه در دمای اولیه $T_i = 273^\circ \text{C}$ قرار می گیرد. دیواره داخلی در معرض شوک سرمایشی $T_r = 0^\circ \text{C}$ قرار می گیرد. مقادیر حداکثر ضریب شدت تنش برحسب زمان را مطابق جدول (۶-۱۵) می باشد. سرعت زاویه ای پیش فرض $\omega = 10 \text{ rad/s}$ می باشد.

جدول ۶-۱۵ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای طول ترک مختلف

$n=0.6, a=0.05, \omega=10 \text{ rad/s}$				
$P_i (\text{Mpa})$	۱۰	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰
$KI (\text{Mpa}\sqrt{m})$	۲/۲۸۳۳	۲/۱۹۱۶	۲/۰۸۹۸	۱/۷۸۴۲

از شکل (۶-۲۵) می توان دریافت افزایش فشار داخلی باعث کاهش ضریب شدت تنش مد اول می گردد، زیرا با افزایش فشار داخلی دهانه ترک تمایل به بسته شدن پیدا می کند.



شکل ۶-۲۴ تغییرات ضریب شدت تنش برحسب فشارهای داخلی مختلف برای $n=0.6$ و $a=0.05$

• تاثیر فشار خارجی بر ضریب شدت تنش

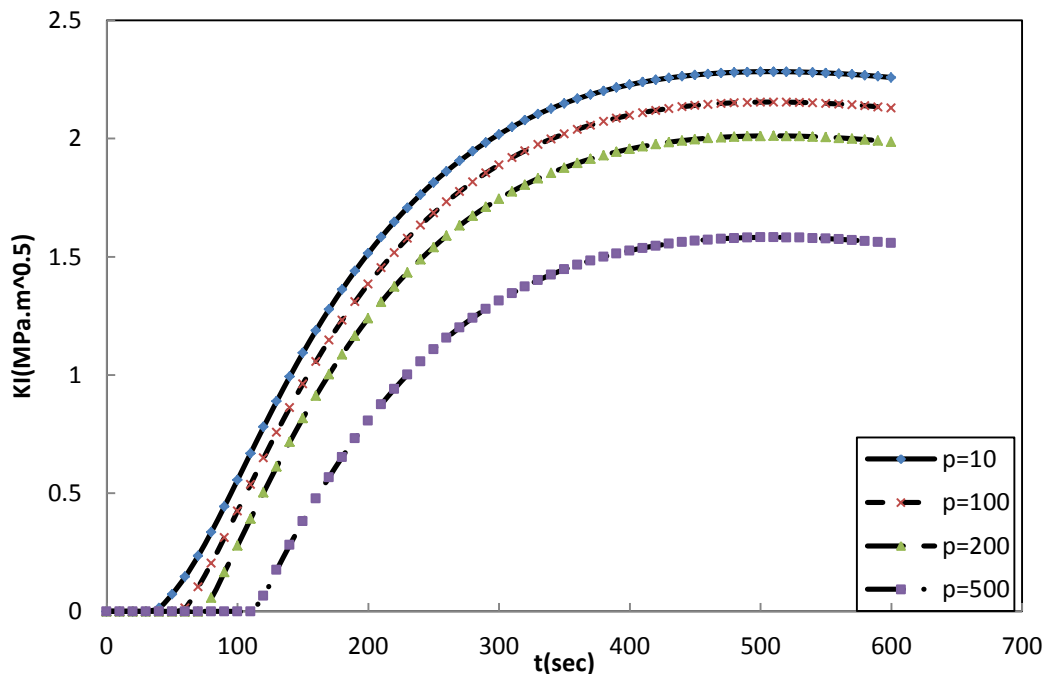
در این مثال برای $n=0.6$ با طول ترک محیطی $a=0.05 m$ و فشار خارجی متغیر $P_o = 10, 100, 200, 500 Mpa$ و فشار داخلی $P_i = 10 Mpa$ استوانه در دمای اولیه $T_i = 273^\circ C$ قرار می گیرد. دیواره داخلی را در معرض شوک سرمایشی $T_r = 0^\circ C$ قرار می دهیم. مقادیر حداکثر ضریب شدت تنش به ازای مقادیر مختلف فشار داخلی، مطابق جدول (۶-۱۶) می باشد. سرعت زاویه ای در این مثال برابر با $\omega = 10 rad/s$ می باشد.

جدول ۶-۱۶ حداکثر ضریب شدت تنش بارگذاری ترکیبی به ازای فشارهای خارجی مختلف

$n=0.6, a=0.05, \omega=10 rad/sec$				
$P_o (Mpa)$	۱۰	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰
$KI (Mpa\sqrt{m})$	۲/۲۸۳۳	۲/۱۵۴۶	۲/۰۱۱۵	۱/۵۸۲۳

همانطور که در شکل (۶-۲۶) مشاهده می شود با افزایش فشار خارجی ضریب شدت تنش مد

اول کاهش یافته است. فشار خارجی تا حدی باعث باز شدن دهانه ترک می گردد.



شکل ۶-۲۵ تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب فشارهای خارجی مختلف برای $n=0.6$ و $a=0.05$

فصل هفتم

نتیجه گیری و پیشنهادها

۱.۷ نتیجه گیری

در پروژه حاضر، از معادلات ترموالاستیک کلاسیک جفت شده در مختصات استوانه ای برای تحلیل استوانه های تابعی دوار دارای ترک محیطی در معرض بارگذاری گرمایی و مکانیکی استفاده شده است. روش عددی المان محدود توسعه یافته و روش نیومارک برای تحلیل زمانی مورد استفاده قرار گرفته اند. برای مدل سازی مواد تابعی در این پروژه از مدل های میکرومکانیکی و المان های ایزوپارامتریک تعمیم یافته استفاده شده است. بنابراین مواد تابعی به صورت واقعی و پیوسته مدل سازی شده اند. به دلیل بکارگیری این المان ها، ماتریس های حاصل از گسسته سازی معادلات ترموالاستیک جفت شده منحصر به فرد هستند.

جابجایی، دما و تنش ها و ضرایب شدت تنش به روش عددی آنالیز شدند. نتایج به دست آمده ایزوتروپیک با نتایج موجود در مراجع معتبر اعتبارسنجی شدند.

مهمترین دستاورد این پروژه کد نوشته شده برای پیاده سازی و حل معادلات و شبیه سازی ترک در مختصات استوانه ای می باشد. این کد در محیط برنامه نویسی نرم افزار MATLAB نوشته شده است و قابل تغییر برای حل مسائل دیگر در این زمینه است.

نتایج حاصل از حل مثال های عددی به صورت خلاصه در زیر ارائه شده اند:

۱. ضریب شدت تنش با افزایش پارامتر n در استوانه ای که دارای ترک محیطی با طول ثابت و

در معرض کشش محوری است، افزایش می یابد.

۲. افزایش طول ترک در یک پارامتر n معین در بارگذاری حرارتی منجر به کاهش ضریب شدت

تنش می گردد.

۳. در بارگذاری گرمایی استوانه، افزایش پارامتر n در یک طول ترک ثابت منجر به کاهش ضریب

شدت تنش می گردد.

۴. افزایش سرعت زاویه ای در طول ترک و پارامتر n معین، منجر به افزایش ضریب شدت تنش در استوانه می گردد.
۵. در سرعت زاویه ای معین افزایش طول ترک در n ثابت منجر به افزایش ضریب شدت تنش می گردد.
۶. در استوانه دوار افزایش پارامتر n در طول ترک ثابت باعث افزایش ضریب تمرکز تنش می گردد.
۷. افزایش فشار داخلی باعث در پارامتر n و طول ترک ثابت منجر به کاهش ضریب شدت تنش می گردد.

۲.۷ پیشنهادها

۱. در این پروژه از معادلات ترموالاستیک کلاسیک جفت شده برای تحلیل سیلندر استوانه ای با ترک حلقوی محیطی تحت شوک حرارتی- مکانیکی استفاده شده است. به دلیل طبیعت پارابولیکی معادله انرژی در این معادلات، این تئوری یک سرعت نامحدود برای گسترش دما پیش بینی می کند. بر مبنای مدل فوریه حرارت در محیط های هادی با سرعت بی نهایت منتشر می شود. علی رغم اینکه مدل هدایت فوریه یک فیزیک غیر واقعی را در بر دارد یعنی پخش ناگهانی انرژی حرارتی اما تقریب بسیار خوبی برای اکثر کاربردهای مهندسی است. ساختار غیرهمگن ماده باعث ایجاد یک تاخیر در پاسخ بین شار گرما و گرادیان دما می گردد. این تاخیر نمایانگر زمان لازم در انباشت انرژی برای تبادل حرارت بین اجزاء ساختاری ماده باشد. در طی این تاخیر، شار گرمایی به تدریج خود را با آنچه فوریه بیان می کند تطبیق می دهد. در حالی که فوریه بر این باور است که شار حرارتی به طور ناگهانی و سریع خود را با تغییرات گرادیان دما منطبق می سازد [۵۵]. بنابراین پیشنهاد می گردد از تئوری ترموالاستیک تعمیم یافته استفاده شود و نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه شوند.

۲. حل مساله حرارتی با مدل هدایت هذلولی گرما و در نظر گرفتن زمانهای لختی به جای مدل

گرمایی فوریه

۳. بررسی اثر کوپل و اینرسی بر ضریب شدت در یک استوانه تابعی دارای ترک محیطی متقارن

محوری

۴. محاسبه ضریب شدت تنش در دیسک های دوار دارای ترک

۵. بررسی رشد ترک در استوانه های دارای ترک محیطی و دایروی

منابع

۱. م. مهدی زاده رخی (۱۳۹۱)، رساله دکتری: "تحلیل عددی گسترش ترک در یک صفحه از جنس مواد تابعی تحت بار دینامیکی و شوک حرارتی"، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
۲. ح. رایگان (۱۳۹۳)، پایان نامه کارشناسی ارشد: "محاسبه ضریب شدت تنش دینامیکی برای یک ترک لبه ای حلقوی داخلی در یک استوانه جدار ضخیم از جنس مواد تابعی تحت بار دینامیکی"، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
۳. ع. شقاقی مقدم، مرکز تحقیقات ماده FGM، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تاکستان.
4. Meshii T. and K. Watanabe (1998) "Closed form stress intensity factor of an arbitrarily located inner-surface circumferential crack in an edge restrain cylinder under linear radial temperature distribution" *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 60(5), pp. 519-527.
5. Raju i. and j. Newman (1982) "Stress-intensity factor for internal and external surface crack in cylindrical vessels" *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 104(4), pp. 293-298.
6. Newman j.c. and i. raju (1980) "Stress-intensity factor for internal surface cracks in cylindrical pressure vessels" *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 102(4), pp. 342-346.
7. Seifi R. (2015) "Stress intensity factor for internal surface cracks in autofrettaged functionally graded thick culinders using weight function methos" *Journal of Theoritcal and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 75, pp. 113-123.
8. Eshragi i. and n. Soltani (2015) "Stress intensity factor calculation for internal circumferential cracks in functionally graded cylinders using the weight function approach" *Journal of engineering fracture mechanics*, Vol. 134, pp. 119.
9. Predan j., v. mocilnik and n. gubelj (2013) "Stress intensity factor for circumferential semi-elliptical surfave cracks in a hollow cylinder subjected to pure torsion" *Journal of Enginnering Fracture Mechanics*, Vol. 105(0), pp. 152-168.
10. Varfolomeyev i., m. petersilge and m. busch (1998) "Stress intensity factor for internal circumferential cracks in thin and thick walledcylinders" *Journal of Enginnering Fracture Mechanics*, Vol. 60(0), pp. 491-500.

11. Chen. Y. (2000) "Stress intensity factors in a finite length cylinder with a circumferential crack" *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 77(8), pp. 439-444.
12. Chen Y.Z. (2004) "Stress intensity factors in finite cracked cylinder made of functionally graded materials" *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 81(12), pp. 941-947.
13. Lee D.S. (2002) "A long circular cylinder with a circumferential edge crack subjected to a uniform shearing stress" *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 39(9), pp. 2613-2628.
14. Jones I. (2005) "Impulse response model of thermal stripping for hollow cylindrical geometries" *Journal of Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 43(1), pp. 77-88.
15. A. Birinci, T. Sukraozsahin, and R. Erdol (2006) "Axisymmetric circumferential internal crack problem thick-walled cylinder with inner and outer claddings" *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 25(5), pp. 764-777.
16. Grebner H. and U. Strathmeier (1985) "Investigation of different isoparametric axisymmetric crack tip elements applied to a complete circumferential surface crack in pipe" *Journal of Computers and Structures*, Vol. 21(6), pp. 1177-1180.
17. Tran V.X. and S. Geniaut (2012) "Development and industrial applications of X-FEM axisymmetric model for fracture mechanics" *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 82(0), pp. 135-157.
18. Lewis T. and X. Wang (2008) "The T-stress solutions for through-wall circumferential cracks in cylinders subjected to general loading conditions" *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 75(10), pp. 3206-3225.
19. Ghajar R. and S. Nabavi (2010) "Closed-form thermal stress intensity factors for an internal circumferential crack in thick-walled cylinder" *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Vol. 33(8), pp. 504-512.
20. Cortinez V.H. and F.E Dotti (2013) "Mode I stress intensity factor for cracked thin-walled open beams" *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 110, pp. 249-257.
21. Sharma k., et al. (2014) "Numerical modeling of part-through cracks in pipe and pipe bend using XFEM" *Journal of Procedia Materials Science*, Vol. 6, pp. 72-79.

22. Manikanta H. O., H. Ramesha and H.V. Lakshminarayana (2014) "Mixed mode stress intensity factors for semi elliptical surface cracks in a hollow shaft subjected to torsion" *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 2(1), pp. 165-176.
23. Moulick S.K. and Y.K. Sahu (2012) "Stress intensity factor for internal cracks in thick walled pressure vessels using weight function technique" *National conference on innovative paradigms in engineering and technology*.
۲۴. س.م. نبوی و م. کامیاب (۱۳۹۱) "تعیین ضرایب شدت تنش حرارتی گذرا در استوانه های حاوی ترک محیطی" بیستمین همایش سالانه بین المللی مهندسی مکانیک / ایران، شیراز، دانشگاه شیراز.
۲۵. ر. قاجار، م. عباس پور نیاسانی و ح. سعیدی گوگرچین، (۱۳۹۳) "توابع صریح ضریب شدت تنش برای ترک های نیم بیضوی محیطی خارجی در استوانه تحت بارهای مکانیکی و حرارتی" *ماهنامه علمی پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس*، شماره ۹، ص ۹۰-۹۸.
۲۶. م. شریعتی، ح. رایگان و م. مهدی زاده رخی (۱۳۹۳) "محاسبه ضرایب شدت تنش برای یک استوانه از جنس مواد تابعی دارای ترک دایروی مرکزی تحت بارگذاری استاتیکی و دینامیکی" *چهاردهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران*، ص ۳۹۲.
۲۷. ا.ر. شاهانی، م. محمدی شجاع، ا. فضلی و م.ع. حسینعلی (۱۳۸۵) "محاسبه ضرایب شدت تنش در یک استوانه جدار ضخیم حاوی ترک نیم بیضوی تحت گشتاور خمشی به روش تجربی" *چهاردهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک*، دانشگاه صنعتی اصفهان.
۲۸. ا.ر. شاهانی و ا. حبیبی (۱۳۸۵) "محاسبه ضرایب شدت تنش در یک استوانه جدار ضخیم حاوی ترک نیم بیضوی تحت تاثیر گشتاور خمشی به روش مدل سازی عددی" *چهاردهمین کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک*، دانشگاه صنعتی اصفهان.
۲۹. م. طهرانی و ط. طالبیان (۱۳۸۶) "تحلیل مخازن استوانه ای ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی" *کنفرانس سالانه مهندسی مکانیک*، دانشگاه صنعتی امیر کبیر.
۳۰. م. حسینی سعدی (۱۳۹۲) "Functionally Graded Material"، *مجله فنی مهندسی ساخت و تولید*، شماره ۳۸، ص ۴۵.
31. Y. Watanabe and H. Sato (2011) "Review fabrication of functionally graded materials under a centrifugal force" *Nagoya Institute of Technology*, Vol. 3, pp. 133-148.

۳۲. الف. باهوتی، (۱۳۸۳)، پایان نامه کارشناسی ارشد: "ترموالاستیسیته کوپل در پوسته استوانه ای ساخته شده از مواد هدفمند"، دانشکده مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب.

33. Battaglia G., P. Malerba and L. sgambi (2003) "Bridge deck analysis through the use of grillage models.in structural and construction cinference" *CRC press*.

34. Kim J.H. and G. Paulino (2002) "Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and otthoropicmaterials" *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 69(4), pp. 502-514.

35. Moes N.J. Dolbow, and T. Belytschko (1999) "Finite element method for crack growth without remeshing" *International Journal of Numerical Methods Engineering*, Vol. 46(1), pp. 131-150.

36. Belytschko T. and T. Black (1999) "Elastic crack growthin finite elements with minimal remeshing" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45(5), pp. 601-620.

37. Belytschko T., et al. (1996) "Meshless methods: an overview and recent developments" *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139(1), pp. 3-47.

۳۸. م.ت. کاظمی، ع.ر. فرقانی و ا.ر.خوبی (۱۳۸۶) "کاربرد روش اجزای محدود بسط یافته در مدلسازی ترک چسبیده"، فصلنامه علمی پژوهشی شریف، شماره ۳۷، ص ۵۷-۶۳.

39. Moes N., Dolbow J., Belytschko t. (1999) "A finite element method for crack growth without remeshing" *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 46, No.1, pp. 131-150.

40. Melenk, J.M., babushka I. (1996) "The partition of unity finite element method: basic theory and applications" *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 289-314.

41. Daux,C.,moes,N.,Dolbow,J.,sukumar,N., Belytschko,T. (2000) ,"Arbitray cracks and holes with the extendedfinite element method",international journal for numerical methods in engineering,vol.48,no.12,pp.1741-1760.

42. Belytschko. T., Black T. (1999) "Elastic crack Growth in finite element with minimal remeshig" *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.45, No.5, pp. 601-620.

۴۳. ع. پورکمالی انارکی و م. میرزایی (۱۳۸۷) "استفاده از دستگاه مختصات متعامد محلی در مدل کردن ترک دو بعدی به روش المان محدود توسعه یافته"، نشریه بین المللی علوم مهندسی دانشگاه علم و صنعت ایران، شماره ۳، جلد ۱۹، صفحه ۳۷-۴۹، ویژه نامه مهندسی مکانیک.

۴۴. ج. روزگار، م. میرزایی و آ. کشاورز (۱۳۸۸) "بررسی تاثیر توابع غنی ساز در روش اجزای محدود توسعه یافته"، مجله مکانیک و هوافضا، جلد ۵، شماره ۴، ص ۸۱-۹۱.

۴۵. ا. قاسمی قلعه بهمن و س. صلواتی (۱۳۹۴) "استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته در تعیین ضرایب شدت تنش و ترم های مرتبه بالای ترک" مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۵، شماره ۲، ص ۱۳۵-۱۴۶.

46. Ferreira A.J. (2008) "MATLAB codes for finite element analysis" *Journal of Solid and Structures*, Vol. 157.

47. Dolbow J.E. (1999) "An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics" *Technology and Engineering*, pp. 128-135.

۴۸. س. رستمی و همکاران (۱۳۹۰) "بررسی و مقایسه همگرایی، پایداری و دقت، در روشهای گام به گام انتگرالگیری مستقیم زمانی"، ششمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه سمنان.

۴۹. ح. فریدون و ف. یکتای کیا (۱۳۸۸) "تحلیل ترک در مواد مرکب به وسیله روش انرژی"، مجله مدل سازی در مهندسی، سال هفتم، شماره ۱۷.

۵۰. م.ت. کاظمی و همکاران (۱۳۸۶) "کاربرد روش اجزای محدود بسط یافته در مدل سازی ترک چسبنده"، فصل نامه علمی و پژوهشی شریف، شماره ۳۷، صفحه ۵۷-۶۳.

51. Anderson T.L. (1994) "Fracture Mechanics Fundamentals and Applications", Second Edition, pp. 635.

52. Nahta R. and Moran B. (1993) "Domain integral for axisymmetric integral crack problem" *International Journal Solid Structure*, Vol. 15, pp. 2027-2040.

53. Takabi, B. (2016) "Thermomechanical transient analysis of a thick hollow FGM cylinder" *Journal of Engineering Solid Mechanics*, Vol. 4, pp. 25-32.

54. Hearn E.J. (1997) "An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials", *Mechanics of Materials 2*, Third Edition, pp. 122-123.

۵۵. ا. امیدوار و م. معرفت (۱۳۸۳) "کاربرد معادله هدایت حرارت هذلولوی با توجه به شرایط مرزی"، نشریه انرژی / ایران، شماره ۱۹، صفحه ۴-۱۲.

ABSTRACT

In recent years functional materials due to mechanical and thermal properties desirable and manageable for engineers and researchers have been ever-increasing attention. These materials benefit high toughness high mechanical strength of metals, heat resistance, corrosion resistance and wear ceramic material simultaneously. So checking the behavior of the failure of these materials considering their application fields has particular importance. In this thesis, the fracture behavior of functionally graded materials under thermo-mechanical shocks in a thick-walled cylinder is investigated. For this purpose, classical coupled thermoelastic equations are used in calculations. First, these equations are discretized with extended finite element method in the space domain and then they are solved by the Newmark method in the time domain. In this thesis, micromechanical models for conventional composites with assist of generalized isoparametric element formulation, which continuously models the material properties across the elements, are used.

Also, the most general form of interaction integral is extracted for axially symmetric circumferential crack in a cylinder under thermal and mechanical loads in functional graded materials and is used to calculate dynamic stress intensity factors. All stages of problem solution from mesh generation to obtaining results has implemented in MATLAB programming environment. The accuracy of written program is verified using several solved numerical examples and compared with existing analytical and numerical results in literature. Finally, effects of length of crack, change of properties, rotational speed and change internal and external pressure in thermal loading condition are investigated on stress intensity factors. Also, variation of stress intensity factor against time in dynamic load scenario is depicted. Ti-6Al-4V/ZrO₂ is functional graded material used in this thesis.

Keywords:

Rotational Cylinder; Circumferential Crack; XFEM (Extended Finite Element Method); FGM (Functional Graded Material); Coupled Thermoelasticity; Thermo-Mechanical Shock.



Shahrood University of Technology
Faculty of Kharazmi ' s Pardis

MSc Thesis in Mechanical Engineering Applied Mechanics

**Calculation of Stress Intensity Factor for an Internal
Circumferential Crack in a Rotating Functionally Graded
Thick-walled Hollow Circular Cylinder under Thermal Shock**

By: Mohammad Reza Ghafoorelahi

Supervisor:

Dr Masoud Mahdizadeh Rokhi

September 2016