
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد

محاسبه ضریب شدت تنش دینامیکی برای یک ترک لبه‌ای حلقوی داخلی در یک استوانه جدار ضخیم از جنس ماده تابعی تحت بار دینامیکی

حسن رایگان

اساتید راهنما:

پروفسور محمود شریعتی

دکتر حمیدرضا ایپک‌چی

استاد مشاور:

دکتر مسعود مهدی‌زاده رخی

بهمن ماه ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **حسن رایگان** به شماره دانشجویی **۹۱۰۳۱۲۴** رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **طراحی کاربردی** تحت عنوان **محاسبه ضریب شدت تنش دینامیکی برای یک ترک لبه‌ای حلقوی داخلی در یک استوانه جدار ضخیم از جنس ماده تابعی تحت بار دینامیکی** که در تاریخ **۱۳۹۳/۱۱/۳۰** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸,۸۳) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)
۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	پروفسور محمود شریعتی	استاد	
۲- استاد راهنما	دکتر حمیدرضا ایپک‌چی	دانشیار	
۳ـ استاد مشاور	دکتر مسعود مهدیزاده‌رخی	استادیار	
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مجید محمدی	استادیار	
۵ـ استاد ممتحن	دکتر محمد جعفری	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن	دکتر محمدباقر نظری	استادیار	

رئیس دانشکده : دکتر محمدمحسن شاه‌مردان **امضا**

دانشکده مکانیک

تقدیم به تمام خدمتگزارانی که

از نتایج این پایان نامه

در راه پیشرفت علم بشریت

و کمک به انسان ها

استفاده خواهند نمود.

تقدیر و تشکر میکنم از اساتید بزرگوارم جناب **پروفسور محمود شریعتی** و **دکتر حمیدرضا ایپک چی** که در انجام این پایان نامه از کمک به بنده دریغ نکردند.

همچنین سپاسگزاری می کنم از استاد مشاور عزیزم جناب **دکتر مسعود مهدی زاده رخی** که نه تنها به عنوان یک مشاور بلکه همانند یک دوست مرا در تمام مراحل انجام پایان نامه همراهی نمودند.

و ارج می نهم زحمات خانواده خود را که محیطی فراهم نمودند تا بتوانم پایان نامه خود را به اتمام برسانم.

تعهد نامه

اینجانب **حسـن رایگان** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک – طراحی کاربردی** دانشکده **مهندسی مکانیک** دانشگاه **شاهرود** نویسنده پایان نامه **محاسبه ضرایب شدت تنش دینامیکی برای یک ترک لبه‌ای حلقوی داخلی در یک استوانه جدار ضخیم از جنس ماده تابعی تحت بار دینامیکی** تحت راهنمایی **پروفسور محمود شریعتی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه شاهرود» و یا «*Shahrood University*» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ:

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

از آنجا که مواد تابعی یکی از جدیدترین مواد موجود در جهان به حساب می‌آیند و روز به روز بر کاربرد آن‌ها افزوده می‌گردد، لازم اســت که خواص و رفتار آن‌ها بیش از پیش مورد بررســی قرار گیرد. مکانیک شـکسـت دینامیکی یکی از شـاخه‌های علم مکانیک اسـت که به بررسی رفتار ترک در اجسام می‌پردازد و از حدود یک قرن پیش مورد توجه مهندسان قرار گرفته است و تحقیقات زیادی در رابطه با آن صورت گرفته است.

پایان‌نامه پیش رو با اســتفاده از روش المان‌محدود توســعه‌یافته که یکی از روش‌های عددی برای تحلیل ترک‌ها می‌باشــد، به محاســبه ضــریب شــدت تنش دینامیکی در ترک‌های موجود در اسـتوانه‌ها و مخازن پرداخته اسـت. در این تحقیق بعد از شـناسایی مواد تابعی و بررسی خواص آن‌ها روش المان‌محدود به طور بسـیار خلاصـه معرفی شـده اسـت. در ادامه روش المان‌محدود توسعه‌یافته مطرح شـده اسـت و کاربرد آن در مسائل مکانیک شکست و مدل‌سازی ترک‌ها با بکار بردن مدل‌های میکرومکانیکی متداول برای مواد مرکب و بهره‌گیری از المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم‌یافته شرح داده شده است.

در ادامه معادلات تعادل در مختصات استوانه‌ای برای حالت متقارن محوری با استفاده از روش المان‌محدود توسعه‌یافته در قلمرو مکان، گسسته‌سازی شده و با ساده کردن معادلات به فرم ماتریسی مورد نظر، با بکار بردن روش نیومارک معادلات در قلمرو زمان حل شده‌اند. در این پایان‌نامه از انتگرال برهمکنش برای به‌دست آوردن ضرایب شدت تنش استفاده گردیده است.

تمـام مراحل حل مســئله از المان‌بندی و حل معادلات مربوطه تا محاســبه نتایج و رســم کانتورهای جابه‌جایی و تنش در نرم‌افزار متلب کدنویسـی گردیده است. صحت نتایج برنامه نوشته‌شده با حل چند مثال عددی و مقایسه آن با مقالات معتبر به اثبات رسیده است. در نهایت تاثیر طول ترک، تغییر خواص، سـرعت دورانی و میزان شـعاع اسـتوانه در شـرایط بارگذاری اسـتاتیکی بر روی ضرایب شـدت‌تنش بررسـی گردیده است. همچنین نمودارهای تغییرات ضرایب شدت‌تنش نسبت به زمان در حالت بارگذاری دینامیکی در اسـتوانه ترسـیم گردیده اسـت. جنس ماده تابعی مورد اسـتفاده در این مسائل شیشه/اپوکسی می‌باشد.

کلیدواژه‌ها:

المان‌محدود توســعه‌یافته – مدل میکرومکانیکی – متقارن محوری – انتگرال برهمکنش - ضریب شدت تنش – مواد تابعی.

فهرست

فهرست شکل‌ها

فصل اول:

مقدمه

مواد تابعی از جمله موادی هستند که به واسطه‌ی تغییر تدریجی ترکیبات شیمیایی، توزیع و جهت‌گیری و یا اندازه فاز تقویت کننده در یک یا چند بعد خواص متفاوتی را در مناطق مختلف از خود بروز می‌دهند. این تغییر تدریجی ساختار و خواص منجر به گسترش کاربرد این گونه مواد شده است. بخصوص در مواردی که نیاز به خواص متفاوت در نواحی مختلف یک سازه باشد.

در این مواد به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که موجب استحکام ماده می‌شود و همین تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد تابعی موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه‌ای الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند.

این مواد به‌منظور افزایش استحکام سازه‌ها ایجاد و گسترش یافته‌اند و امروزه استفاده از آن‌ها رو به گسترش است. وقتی سطح مواد تابعی (مخصوصاً در سطوح سرامیکی) تحت تنش قرار گیرد، ممکن است ترک‌هایی در سطح ایجاد شوند. چنانکه معمول‌ترین مود گسیختگی در مواد تابعی وجود این ترک‌ها می‌باشد. بنابراین بررسی رفتار ترک‌ها در سازه‌های ساخته‌شده از این مواد تحت بارگذاری‌های مکانیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است[۳۰].

مواد تابعی با توجه به نوع خواص و رفتار مدنظر، می‌توانند کاربردهای گسترده‌ای داشته باشند. این خواص شامل خواص حرارتی، خواص مکانیکی (شامل الاستیک، تغییرشکل های پلاستیک، شکست، پوشش دهی)، خواص و رفتارهای ترمومکانیکی و خواص نوری و الکتریکی هستند. با توجه به کاربردهای مختلف این مواد در صنایع هوایی، نظامی و دفاعی، بررسی رفتار شکست این مواد از اهمیت و ضرورت بالایی برخوردار است.

از جمله کاربردهای مهم این مواد استفاده از آن‌ها در ساخت مخازن تحت فشار است. مخازن تحت فشار دارای کاربردهای مختلف مهندسی می‌باشند که بسته به نوع استفاده‌ی آن‌ها، انواع مختلف بارگذاری‌های مکانیکی به آن‌ها اعمال می‌گردد. از دیدگاه مکانیک شکست، جهت تعیین عمر و زمان سرویس و بازدیدهای نوبه‌ای این مخازن، تعیین ضرایب شدت تنش ضروری می‌باشد. روش‌های مختلف عددی (مثل روش المان‌محدود و روش المان‌های مرزی) و تحلیلی (مثل توابع پتانسیل و روش تابع‌گرین) برای محاسبه‌ی این ضرایب وجود دارد که هر یک دارای مزایا و معایب خاص خود می‌باشند. از طرفی اهمیت بارهای دینامیکی و ضربه‌ای بر روی سازه‌ها بسیار بیشتر از بارهای استاتیکی است؛ به‌خصوص در سازه‌هایی که دارای ترک می‌باشند؛ یا احتمال وجود ترک در آن‌ها زیاد است.

مشی و واتانابه [۱] فرم بسته‌ی ضرایب شدت تنش را برای استوانه‌ی محدود همگن که دارای یک ترک محیطی بود به‌دست آوردند. تأثیر طول استوانه و همچنین موقعیت ترک بر این ضرایب را نیز بررسی کردند. لبه‌های استوانه فقط می‌توانستند جابه‌جایی محوری داشته باشند و استوانه تحت توزیع دمای شعاعی قرار داشت. نتایج نشان داد که این ضرایب هنگامی بیشینه می‌شوند که ترک در وسط استوانه قرار داشته باشد.

راجو و نیومن[۲] ضرایب شدت تنش را با استفاده از روش المان محدود سه بعدی برای استوانه‌های دارای ترک نیمه بیضوی درون و یا بیرون استوانه محاسبه نمودند. آن‌ها با استفاده از اصل برهم گذاری چهار نوع بارگذاری یکنواخت، خطی، درجه دو و درجه سه را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها همچنین در مقاله‌ای دیگر[۳] ترک‌های نیمه بیضوی درون استوانه تحت فشار داخلی را مورد بررسی قرار دادند.

سیفی[۴] با بکار بردن روش تابع وزنی ضرایب شدت تنش را برای ترک در استوانه ساخته شده از مواد تابعی مورد بررسی قرار داد. خصوصیات مکانیکی ماده با استفاده از یک تابع نمایی در راستای شعاعی تعریف شده است. او اثرات اعمال فشار، کسر حجمی، اندازه ترک و ضخامت استوانه را بر روی ضرایب شدت تنش مورد بررسی قرار داد و به این نتیجه رسید که اثرات تغییر کسر حجمی بر روی ضرایب شدت تنش بیشتر از سایر موارد است.

اشراقی و سلطانی[۵] با استفاده از تابع وزنی ضرایب شدت تنش را برای ترک حلقوی داخلی درون استوانه‌ی ساخته شده از مواد تابعی به‌دست آوردند. آن‌ها همچنین اثرات ابعاد استوانه، عمق ترک و تغییر ماده را مورد بررسی قرار دادند. در تحقیق آن‌ها هدف بدست آوردن تابع وزنی برای مواد تابعی است.

پریدن و همکاران[۶] ضرایب شدت تنش را برای یک استوانه دارای ترک نیمه بیضوی مورد بررسی قرار داد. استوانه تحت گشتاور پیچشی خالص قرار داشت و روش حل بر مبنای المان محدود استوار بود. آن‌ها تأثیر طول و عمق ترک در سطح خارجی استوانه را بررسی نمودند.

وارفولومیو و همکارانش [۷] مود I ضرایب شدت تنش و بازشدگی دهانه‌ی ترک داخلی را با استفاده از تابع وزن برای استوانه تحت بار یکنواخت متقارن محوری با بکارگیری روش المان‌های مرزی محاسبه نمودند.

چن [۸] با استفاده از کامپلیانس و حل مسئله مقدار مرزی ضرایب شدت تنش و جابه‌جایی را برای دو ترک با طول مختلف در استوانه محدود تحت تنش کششی به‌دست آورد. همچنین او در مقاله‌ای دیگر[۹] استوانه‌ای ساخته شده از مواد تابعی که دارای ترک‌های داخلی و خارجی سراسری

بود را مورد بررسی قرار داد. استوانه تحت تنش طولی قرار داشت و خواص ماده از یک تابع نمایی پیروی می‌کرد. برای محاسبه ضرایب شدت تنش نیز از روش انرژی استفاده شده بود.

مشی و واتانابه [۱۰] حل بسته‌ی ضرایب شدت تنش برای استوانه ترک دار در حالتی که بارگذاری روی سطح ترک صورت گرفته بود را محاسبه نمودند.

لی [۱۱] یک استوانه طویل همگن را که در انتهای آن بار برشی قرار داده شده بود و دارای یک ترک محیطی بود بررسی کرد و در نهایت ضرایب شدت تنش برای اندازه‌های مختلف ترک را به‌دست آورد.

جونز [۱۲] با استفاده از روش تابع وزن ضرایب شدت تنش ناشی از بارگذاری حرارتی گذرا را در استوانه‌ای با ترک محیطی داخلی به‌دست آورد. در تحقیق او انتگرال تابع وزن به‌صورت عددی محاسبه شده است.

بیرینسی و همکاران[۱۳] استوانه‌ای را که درون و بیرون آن دارای روکش فلزی از جنس‌های متفاوت بود مورد بررسی قرار داد. بارگذاری محوری به استوانه اعمال می‌شد و ضرایب شدت تنش با حل عددی معادله انتگرال منفرد به‌دست آمدند.

گربنر و استراسمیر[۱۴] لوله‌ای را با طول بی‌نهایت که یک ترک سرتاسری در درون آن ایجاد شده بود را با استفاده از روش المان محدود مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها لوله را تحت بار کششی قرار دادند و ضریب شدت تنش مود یک را محاسبه نمودند.

تران و جنیات[۱۵] با استفاده از روش انرژی و استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته ضرایب شدت تنش را برای استوانه دارای ترک محیطی و بار دیگر برای یک ترک دایره‌ای مرکزی مورد بررسی قرار دادند.

لوئیس و وانگ [۱۶] استوانه ترک دار با اندازه‌های متفاوت را با استفاده از روش المان‌محدود تحت بارگذاری‌های مختلف خطی، درجه دو و درجه‌سه تحلیل کردند و با استفاده از تابع وزن تنش T را محاسبه نمودند.

قاجار و نبوی [۱۷] با به‌کار بردن روش تابع وزنی حل بسته‌ی ضرایب شدت تنش حرارتی را در حالت بارگذاری مکانیکی و حرارتی پایدار با استفاده از روش المان‌محدود ارائه نمودند.

کورتینز و داتی [۱۸] ضــرایب شــدت تنش مد یک را با اســتفاده از یک روش تحلیلی برای تیرهای باز بررسی کردند. این روش بر اساس مفهوم نرخ گسترش انرژی[۱] استوار بود.

وو و همکارانش[۱۹] با اســتفاده از روش المان محدود توسـعه یافته ضـرایب شـدت تنش مد ترکیبی را در حالت سه بعدی محاسبه نمودند.

شـارما و همکارانش [۲۰] با بکاربردن روش المان محدود توسـعه‌یافته ضـرایب شدت تنش را برای ترک نیمه بیضوی محوری و حلقوی در یک لوله خمیده محاسبه نمودند. لوله تحت فشار داخلی و خمش قرار داشـت و ترک در دو حالت سطح بیرونی و داخلی مورد بررسی قرار گرفته بود. در مقاله آن‌ها از روش تفکیک واحد برای محاســبه تقریب جابه‌جایی غنی‌ســازی اســتفاده شــد. در نهایت با استفاده از انتگرال برهمکنش ضرایب شدت تنش را محاسبه نمودند.

مانیکانتا و همکاران[۲۱] با بکار بردن نرم‌افزار انســیس یک اســتوانه را که دارای ترک نیمه بیضــوی بر روی ســطح خارجی خود بود را مورد بررســی قرار دادند. آن‌ها ضــرایب شــدت تنش را با استفاده از انتگرال برهمکنش محاسبه نمودند.

مولیک و ساهو[۲۲] ضرایب شدت تنش را برای یک ترک نیمه بیضوی داخل استوانه‌ای ضخیم مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش تابع وزنی برای به‌دست آوردن این ضرایب استفاده کردند.

نبوی و کامیاب [۶۶] حل بســته‌ی ضـرایب شدت تنش حرارتی را با به‌کار بردن تابع وزن در استوانه‌ی جدارضخیم حاوی ترک محیطی تعیین کردند.

هدف ما در این پایان‌نامه بدســت آوردن ضـریب شدت تنش برای استوانه ساخته شده از مواد تابعی تحت بارگذاری های دینامیکی و استاتیکی خواهد بود.

[۱] *Energy release rate*

فصل دوم:

مواد تابعی

۲-۱ تاریخچه

در سال‌های اخیر با توسعه موتورهای پرقدرت صنایع هوافضا، توربین‌ها و راکتورها و دیگر ماشین‌ها نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا و مقاوم‌تر از لحاظ مکانیکی احساس شده است. در سال‌های قبل در صنایع هوافضا از مواد سرامیکی خالص جهت پوشش و روکش قطعات با درجه کارکرد بالا استفاده می‌شد، این مواد عایق‌های بسیار خوبی بودند؛ ولی مقاومت زیادی در برابر تنش‌های پسماند نداشتند. تنش‌های پسماند در این مواد مشکلات زیادی از جمله ایجاد حفره و ترک در مواد را در پی داشت. بعدها برای رفع این مشکل از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده شد که تنش‌های حرارتی در این مواد نیز موجب پدیده لایه‌لایه شدن می‌گردید. با توجه به این مشکلات طرح ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالایی داشته باشد و هم مشکل لایه‌لایه شدن را نداشته باشد، ضرورت پیدا کرد.

مواد تابعی مواد کامپوزیتی با ریز ساختار ناهمگن می‌باشند، که خواص مکانیکی آن‌ها (مثلاً سختی یا ترکیب شیمیایی) بطور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند[۲۳]. نوع رایج آن ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز می‌باشد. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک به‌دست می‌آیند. تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملا پیوسته می‌باشد. به گونه‌ای که یک سطح از جنس سرامیک خالص و یک سطح فلز خالص است. بین دو سطح ترکیب پیوسته‌ای از هردو می‌باشد. خواص مکانیکی نیز با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ای در جهت ضخامت دارد. این مواد با توجه به پیوستگی ترکیب مواد تشکیل دهنده دارای خواص مکانیکی موثری نسبت به مواد کامپوزیت لایه‌ای می‌باشد.

این نوع مواد در بعضی از سازه‌های طبیعی موجود در طبیعت نیز وجود دارد، مثل استخوان و نی خیزران که در ساختارشان دارای تغییرات تدریجی می‌باشند [۲۴]. بدین صورت که در جایی که تنش بیشتر است، ساختارشان قوی‌تر می‌باشد. به طور کلی تفاوت‌های عمده‌ای بین ساختارهای با تغییر تدریجی زنده و آن چه به صورت مصنوعی ساخته می‌شود وجود دارد. از جمله این که مواد تابعی زنده، هوشمند می‌باشند و می‌توانند محیط در بردارنده تنش موضعی خود را حس کنند، در حالی که مواد تابعی ساخت بشر حداقل در حال حاضر فاقد چنین قابلیتی می‌باشند. پس این مواد، جدید نیستند. از طرف دیگر با پیدایش مواد مرکب و با تعریف و ترکیب فازهای مختلف مواد، امکان ایجاد ساختاری با اجزای تشکیل دهنده قابل کنترل و همراه با تغییرات تدریجی ایجاد شده است.

اولین بار در سال ۱۸۹۴ مفهوم مواد تابعی توسط نینو[1] و همکارانش در آزمایشگاه ملی هوافضای سندای[2] در ژاپن به‌عنوان مواد ضد حرارت[3] معرفی شد [۲۵]. هدف نینو تولید پوششی با مقاومت حرارتی بسیار بالا برای بدنه هواپیماهای فوق سریع بود که کاهش تنش حرارتی و افزایش مقاومت در برابر گرما را در پی داشته باشد. پس از آن تلاش‌هایی برای توسعه مواد با مقاومت بالا با استفاده از مواد تابعی ادامه یافت. مواد تابعی ابتدا به عنوان عایق حرارتی برای سازه‌های هوافضا و راکتورهای هسته‌ای طراحی شدند[۲۳]. اما امروزه مواد تابعی کاربردهای وسیع‌تری یافته‌اند. با توسعه صنایع جدید و فرایندهای مدرن، این مواد به عنوان مؤلفه‌های سازه‌ای در محیط‌هایی با دماهای بسیار بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند. رسانندگی گرمایی و ضریب انبساط گرمایی پایین به مواد تابعی قابلیت تحمل تغییرات دمایی زیاد را می‌دهند. از دیگر موارد کاربردهای مواد تابعی علاوه بر سازه‌های هوافضا می‌توان به ابزارهای برش پوشش‌های ضد حرارت، پره‌های توربین‌ها، کاشی‌های ضد حرارت، مخازن تحت فشار و لوله‌ها در راکتور نیروگاه‌های هسته‌ای و اجزای داخلی راکتورهای شیمیایی، حفاظ حرارتی موشک‌ها، کوره‌ها، سنسورها و محرک‌ها، زره‌پوش‌ها و دندان‌های مصنوعی اشاره کرد [۲۶-۲۸].

تا کنون تکنیک‌های مختلفی برای ساخت مواد تابعی شامل رسوب سازی با بخار شیمیایی[4] (*CVD*)، رسوب با بخار فیزیکی (*PVD*)، متالوژی پودر، پاشش پلاسما، آبکاری به کمک برق[5] و سنتز احتراق[6] بکار گرفته شده است [۲۸, ۲۹].

مهم‌ترین مختصه مواد تابعی تغییر پیوسته خصوصیات فیزیکی است. تغییر تدریجی کسر حجمی مواد تشکیل دهنده‌ی یک ماده تابعی، به تغییر یکنواخت و پیوسته خواص ماده از یک سطح به سطح دیگر منجر می‌شود. بنابراین مشکلات فصل مشترک از بین می‌روند، تمرکز تنش کاهش یافته و توزیع تنش یکنواخت‌تری نتیجه می‌شود [۳۰]. معمولاً مواد تابعی به‌صورت ترکیب پیوسته دو ماده مختلف در نظر گرفته می‌شوند. یک تغییر فضایی در نسبت اجزای سازنده و خواص در یک اتصال بین دو ماده مختلف - در مقایسه با یک فصل مشترک دو ماده‌ای - پتانسیل کاهش تنش‌ها در محل اتصال را داراست. بعلاوه استحکام فصل مشترک در اتصال افزایش و احتمال گسستن آن کاهش می‌یابد [۲۹]. از مواد تابعی می‌توان به‌عنوان اتصالات بین انواع مختلف مواد و پوشش‌های سطحی

---

[1] *Niino*
[2] *Sendai*
[3] *Thermal Barrier Materials*
[۴] *Chemical Vapor Deposition*
[۵] *Electro-Plating*
[۶] *Combustion Synthesis*

طبقه‌بندی‌شـده[1] یا به‌طور سـاده به‌عنوان مؤلفه‌های طبقه‌بندی‌شـده[2] استفاده نمود. عدم حضور فصل مشـــترک‌هـا نیز در مواد تابعی عدم تناســـب خواص مواد را کاهش داده و درنتیجه مقاومت در برابر لایه‌لایه شدن فصل مشترک و گسترش ترک را بهبود می‌دهد. بااین‌وجود ساختمان میکروسکوپی مواد تابعی به‌طورکلی ناهمگن است و نوع خرابی حاکم بر مواد تابعی آغاز ترک و گسترش آن است. بنابراین توانایی پیش‌بینی رفتار شـــکســـت مواد تابعی هنگامی‌که در معرض بارهای مکانیکی قرار می‌گیرند از اهمیت بسیار بالایی در تحلیل این نوع سازه‌ها برخوردار است.

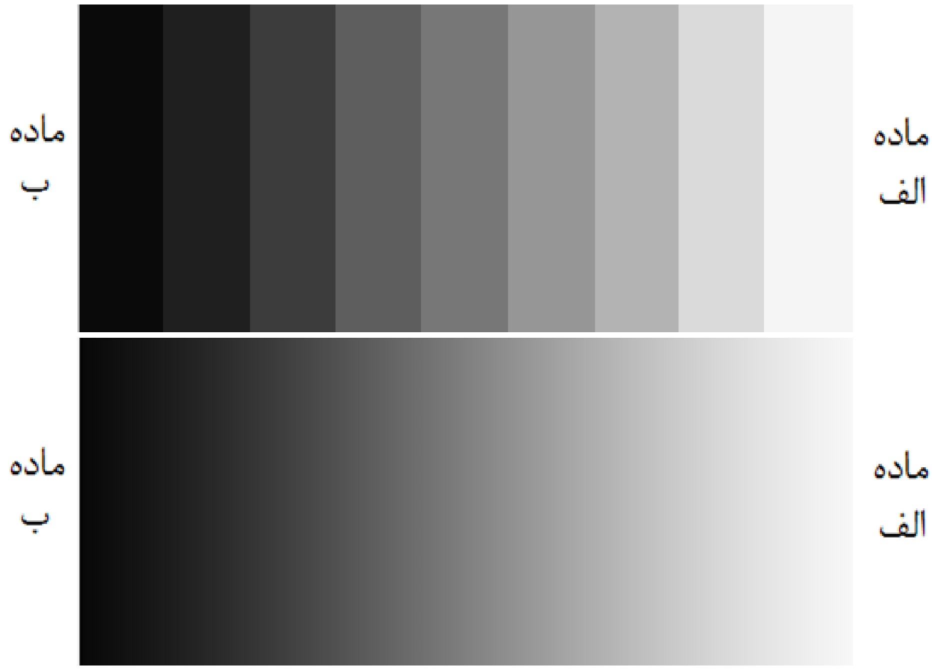
۲-۲ خواص مواد تابعی

به‌طورکلی، خواص مواد تابعی علاوه بر پروفیل ترکیب، تابع خواص مواد تشکیل دهنده انتخابی نیز می‌باشـد. معمولاً یک توصـیف تفصیلی از میکروساختارهای تابعی واقعی در دسترس نیست [۳۰]. ازآنجـایی‌که کســـر حجمی هر فاز به‌طور تدریجی در جهت گرادیان ماده تابعی تغییر می‌کند، خواص مؤثر مواد تابعی نیز در امتداد همین جهت تغییر خواهند کرد.

دو روش برای مدل‌ســازی مواد تابعی وجود دارد [۲۶]. در روش اول فرض می‌شــود که کســر حجمی ســرامیک یا فلز به‌صـورت تکه‌ای تغییر می‌کند و ماده تابعی به‌صورت لایه‌لایه با کسر حجمی یکســان در هر ناحیه در نظر گرفته می‌شـود (شـکل ۲-۱ - بالا). در روش دوم فرض می‌شود که کسر حجمی ســرامیک یا فلز به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند (شکل ۲-۱ - پایین) در این روش خواص یک ماده در امتداد ضـخامت آن باید با استفاده از یک تابع توصیف شود. در این تحقیق از روش دوم برای مدل‌سازی ماده تابعی استفاده می‌شود.

[1] *Graded Surface Coatings*

[2] *Graded Components*



شکل ۲-۱- نحوه تغییر خواص در مدل‌های تحلیلی برای یک ماده تابعی دلخواه

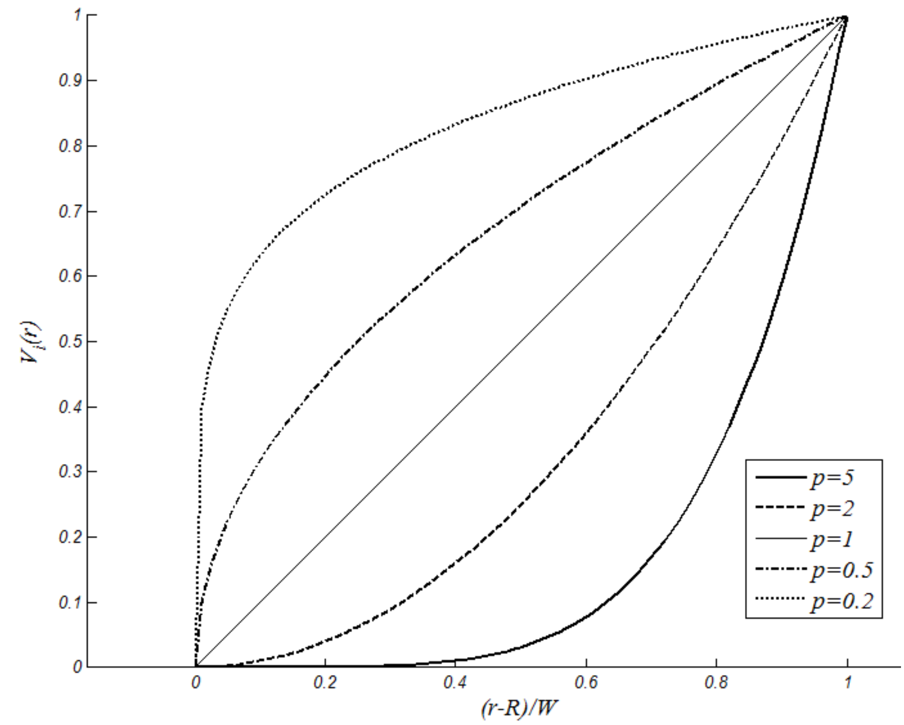
در این تحقیق فرض می‌شـــود که تغییر خواص ماده در جهت شـــعاع اســـتوانه رخ می‌دهد. همچنین فرض می‌شود که ماده تابعی از دو جزء تشکیل شده باشد؛ ماتریس و ماده افزوده‌شده به آن. در این تحقیق کسر حجمی ماده افزوده‌شده به ماتریس (V_i) از تابع نمایی زیر پیروی می‌کند.

$$V_i(r) = \left(\frac{r-R}{W}\right)^P \qquad (۱-۲)$$
$$R \le r \le R+W$$

که W ضـخامت اسـتوانه در امتداد محور شـعاعی r اسـت، R شعاع داخلی استوانه و نمای P پارامتر تعیین کننده پروفیل تغییر خواص ماده است. کسر حجمی ماتریس نیز عبارت است از:

$$V_m(r) = 1 - V_i(r) \qquad (۲-۲)$$

لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه ماده افزوده شده برای مسائل مورد مطالعه شیشه و ماده ماتریس اپوکســی خواهد بود. شکل ۲-۲ منحنی‌های تغییرات کسر حجمی ماده افزوده‌شده (V_i) برای مقادیر مختلف P را نشان می‌دهد که با استفاده از نرم‌افزار متلب رسم گردیده است.



شکل ۲-۲- نمودار تغییرات کسر حجمی ماده افزوده شده به ماتریس برای نماهای مختلف

با در اختیار داشتن کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده یک ماده تابعی در هر نقطه از آن می‌توان خواص ماده را در آن نقطه محاسبه نمود. در این تحقیق از مدل‌های میکرومکانیکی مواد مرکب برای محاسبه خواص مواد تابعی استفاده می‌شود. بر طبق این مدل‌ها مدول صلبیت برشی μ و مدول حجمی K را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود[۳۱]:

$$\mu = \mu_m + \frac{V_i(\mu_i - \mu_m)}{1 + V_m(\mu_i - \mu_m)\Big/\left(\mu_m + \dfrac{\mu_m(9K_m + 8\mu_m)}{6(K_m + 2\mu_m)}\right)} \qquad (۲-۳)$$

$$K = K_m + \frac{V_i(K_i - K_m)}{1 + \dfrac{V_m(K_i - K_m)}{(K_m + 4\mu_m/3)}} \qquad (۲-۴)$$

در این روابط μ_i و μ_m به ترتیب مشخص کننده مدول صلبیت برشی ماده افزوده‌شده و ماتریس هستند و از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mu_i = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \qquad (۲-۵)$$

$$\mu_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)} \qquad (۲-۶)$$

که E_i مدول یانگ ماده افزوده‌شده، E_m مدول یانگ ماتریس، ν_i نسبت پواسون ماده افزوده‌شده و ν_m نسبت پواسون ماتریس می‌باشند و همچنین K_i مدول حجمی ماده افزوده‌شده و

K_m مـدول حجمی ماتریس در معادلات (۲-۳) و (۲-۴) خواهند بود که از رابطه‌های زیر محاسـبه می‌گردند:

$$K_i = \frac{E_i}{3(1-2\nu_i)} \tag{۲-۷}$$

$$K_m = \frac{E_m}{3(1-2\nu_m)} \tag{۲-۸}$$

در نهایت مدول یانگ E و نسبت پواسون ν نیز در هر یک از نقاط ماده به‌صورت زیر محاسبه می‌گردند:

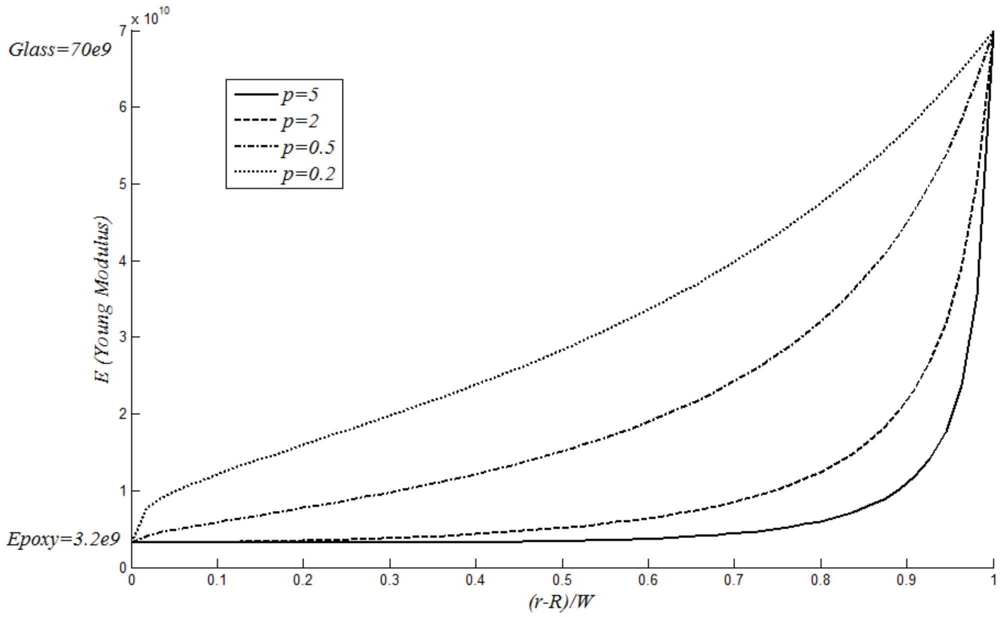
$$E = 9\mu K/(\mu + 3K) \tag{۲-۹}$$

$$\nu = (3K - 2\mu)/\big(2(\mu + 3K)\big) \tag{۲-۱۰}$$

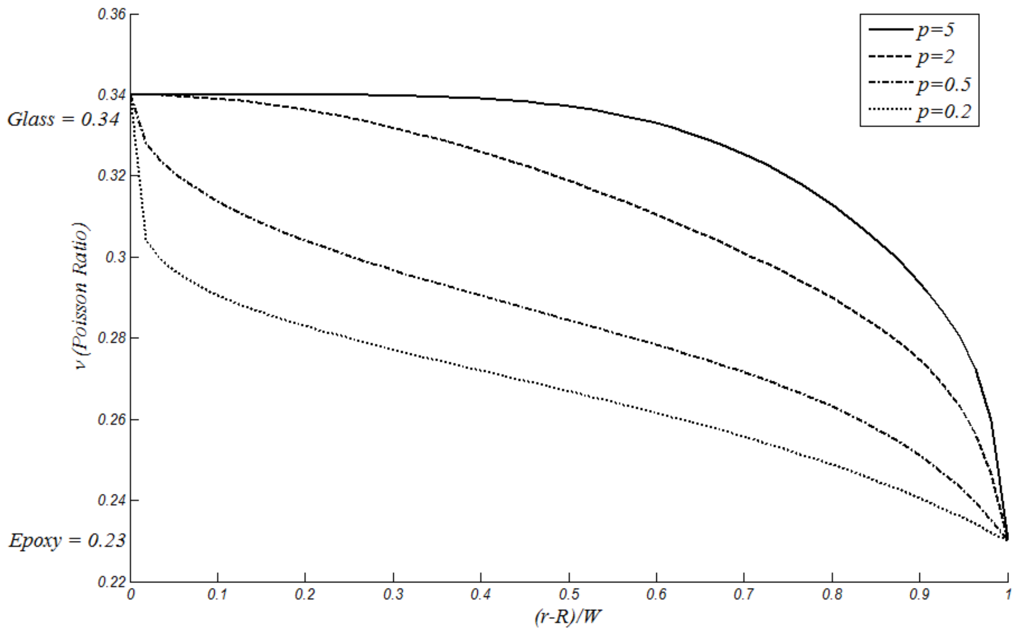
و چگالی نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود[۳۲]:

$$\rho = V_i\rho_i + V_m\rho_m \tag{۲-۱۱}$$

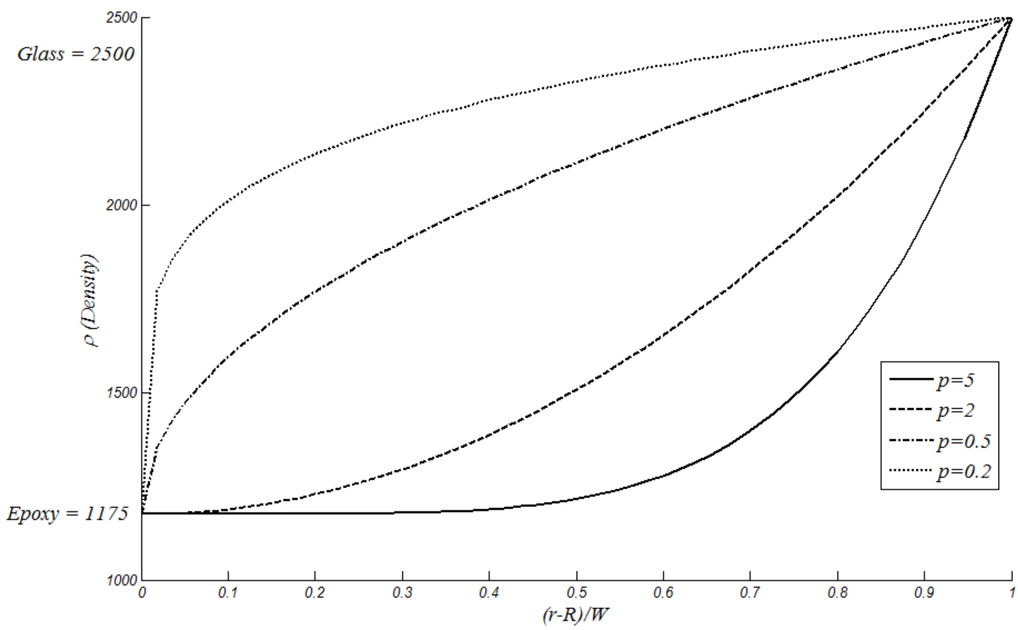
به عنوان نمونه نمودار تغییرات مدول یانگ در شـکل ۲-۳، نسـبت پواسـون در شـکل ۲-۴ و چگالی در شـکل ۲-۵ برای ماده تابعی اپوکسی/شیشه برای استوانه‌ای که درون آن را اپوکسی و خارج آن را شیشه تشکیل می‌دهد، به ازای Pهای مختلف در راستای ضخامت ماده آورده شده است که تمام این نمودارها در نرم‌افزار متلب رسم گردیده است:



شکل ۲-۳- نمودار تغییرات مدول الاستیسیته برای ماده‌ی نمونه اپوکسی/شیشه به ازای Pهای مختلف



شکل ۲-۴- نمودار تغییرات نسبت پواسون برای ماده‌ی نمونه اپوکسی/شیشه به ازای Pهای مختلف



شکل ۲-۵- نمودار تغییرات چگالی برای ماده‌ی نمونه اپوکسی/شیشه به ازای Pهای مختلف

فصل سوم:

المان‌محدود توسعه‌یافته

۳-۱ مقدمه

در توسـعه‌ی روش المان محدود[1] سـهم مهندسـانی که از دیدگاه فیزیکی اسـتفاده می‌نمایند بیش از ریاضـیدان‌هایی اسـت که روش‌های فشرده ریاضی را بکار می‌برند. این روش ابتدا برای مسائل تحلیل تنش و سپس دیگر مسائل محیط‌های پیوسته کاربرد یافت.

برای آن‌کـه بتوانیم علـت یک پدیده‌ی فیزیکی را توجیه و رفتارهای آن در زمان‌های بعدی را پیش‌بینی کنیم، لازم است که آن پدیده را با توجه به شرایط مرزی و معادلات حاکم بر آن مدل‌سازی کنیم. در واقع یک معادله دیفرانسـیل با شرایط مرزی و اولیه‌ی مورد نیاز، خود یک مدل ریاضی کامل از یک پدیده است.

با توجه به شرایط هندسی پیچیده موجود در این گونه پدیده‌ها و با توجه به این‌که، این روش در حالت کلی نوعی تقریب محســوب می‌شــود، مدل‌ســازی به وســیله‌ی نرم‌افزارهای پیشــرفته انجام می‌گیرد تا این کار با حداکثر دقت صــورت پذیرد. برای دســت‌یابی به چنین هدفی می‌توان از انواع مختلف روش‌های گســســته‌ســازی یک مســاله پیوســته تعریف شــده به وسیله‌ی معادلات دیفرانسیل استفاده نمود.

۳-۲ روش المان‌محدود

روش المان‌محدود روشــی برای تحلیل ســازه‌ها، حرکت سیالات، انتقال حرارت، مسائل موج و آکوستیک و غیره است. مفهوم اساسی روش مذکور این است که هر متغیر میدانی پیوسته مثل سرعت، تنش، فشــــار یــا دمــا می‌توانــد بــا یک مدل مجزا که از مجموعه‌ای از متغیرهای میدانی پیوســـته‌ی قطعه‌قطعه تشـکیل شده، تقریب زده شده و این متغیرها روی تعداد محدودی از زیرمجموعه‌ها تعریف می‌شوند.

این روش جهت حل تقریبی معادلات دیفرانسیل حاکم بر محیط‌های پیوسته است. روش اجزا محدود در ابتدا به عنوان یک روش تحلیل تنش مطرح گردید و اکنون نیز به طور گســـترده ای برای این منظور به کار می‌رود. علاوه بر این در بســـیاری از کاربردهای مهندســـی از قبیل هدایت حرارت، تراوش مایعات، دینامیک ســیالات و میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، این روش جایگاه خود را یافته است.

[1] *Finite Element Method (FEM)*

تعریفی ساده از روش المان‌محدود این است که: این روش شامل قطعه‌قطعه کردن سازه به المان‌های متعدد (اجزای سازه)، توصیف رفتار هرکدام از المان‌ها با روش ساده و سپس چسباندن مجدد آن‌ها در گره‌هاست، این روش ابتدا ناحیه مورد نظر را به تعداد زیادی ناحیه کوچک موسوم به المان تقسیم می‌کند؛ نقاط اتصال المان‌ها به یکدیگر گره نامیده می‌شود به‌طوری‌که گره‌ها به‌مثابه لولا یا قطرات چسبی در نظر گرفته می‌شوند که المان‌ها را به همدیگر نگه می‌دارند. به مجموعه یک المان با گره‌هایش یک مش گفته می‌شود. المان‌ها می‌توانند یک‌بعدی خطی، دوبعدی صفحه‌ای و سه‌بعدی حجمی باشند. همچنین بسته به بعد المان، اشکال مختلف برای یک المان قابل‌تصور است. یک المان دوبعدی می‌تواند به شکل مثلث، مربع و یا شکل دلخواه دیگری باشد. از طرفی یک المان سه‌بعدی نیز می‌تواند اشکالی مانند چهاروجهی، هرم، منشور و یا مکعب داشته باشد. مش‌بندی هندسه مسئله از مراحل مهم مدل‌سازی می‌باشد که مستلزم دقت و مهارت مناسب می‌باشد.

در مرحله‌ی بعدی تقریب اولیه‌ای برای مسئله در نظر می‌گیرد که این تقریب یک تابع درجه یک یا درجه دو با ضرایب مجهول می‌باشد. این توابع تقریب‌زن، که به‌عنوان توابع میانیاب[۱] نیز شناخته می‌شوند، در محدوده‌ی یک المان زده می‌شوند و برای کل شکل مسئله انجام نمی‌گیرد. در خصوص مسائلی که توسط نرم‌افزار حل می‌شوند، چون می‌توان ابعاد المان‌ها را بسیار ریز انتخاب کرد، هیچ‌گاه تقریبی با درجه بیشتر از دو زده نمی‌شود. به‌عبارت‌دیگر تقریب اولیه برای جواب همواره در نرم‌افزارها یا خطی است و یا سهموی. بعد معادله حاکم برای تک‌تک گره‌ها نوشته شده و پس از انتگرال‌گیری‌های لازم، به فرم یک معادله‌ی جبری تبدیل می‌شود.

در مرحله‌ی بعدی با استخراج دستگاه معادلات جبری در صورت استفاده از روش گالرکین[۲]، تابع وزنی[۳] برای هر گره مشخص شده و سپس انتگرال باقیمانده‌ی وزنی تشکیل می‌گردد. با انتگرال‌گیری، برای هر گره یک معادله‌ی جبری ایجاد می‌گردد که پس از استخراج معادلات همه گره‌ها، دستگاه معادلات به وجود می‌آید. پس از مشخص شدن مقادیر گرهی، با توجه به ابعاد اولیه و خواص هندسی ماده‌ی تعریف‌شده، سایر کمیت‌ها نظیر کرنش، تنش، نیرو و گشتاور محاسبه می‌گردند.

روش المان‌محدود راهی برای حل عددی مسئله است. تحلیل المان‌محدود نه فرمول بسته‌ای به‌عنوان حل ارائه می‌کند و نه گونه خاصی از مسائل را حل می‌نماید. همچنین حل پیشنهادشده توسط آن تقریبی است، مگر آن‌که در یک مسئله بسیار ساده، فرمول دقیق و مناسبی در دسترس باشد.

[۱] *Interpolation functions*

[۲] *Galerkin method*

[۳] *Weight function*

۳-۳ انتگرال وزنی[۱] و تشکیل روابط ضعیف[۲]

معادله دیفرانسـیل ذیل را تحت شـرایط مرزی آن برای حل $\varphi(x)$ در نظر بگیرید. (به ازای $0 < x < L$)

$$-\frac{d}{dx}\left[a(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] = q(x) \qquad (۱-۳)$$
$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad , \quad \left(a\frac{d\varphi}{dx}\right)_{x=L} = Q_0$$

در اینجا a و q توابع معلوم بر حسب مختصه x ، φ_0 و Q_0 مقادیر معلوم و L طول دامنه یک بعدی می‌باشند. توابع a و q و ثوابت φ_0 و Q_0 همراه با طول دامنه، داده‌های مسئله هستند.

φ متغیر وابسـته در این مسـئله اسـت. معادلات از نوع (۳-۱) برای مثال در بررسـی هدایت حرارت در یک پره مبدل حرارتی با یک استوانه متقارن محوری ظاهر می‌گردند.

شـایان ذکر است که هدف اصلی نوشتن عبارت انتگرال وزنی برای معادله دیفرانسیل، داشتن ابزاری جهت به‌دست آوردن n رابطه جبری مستقل خطی بین ضرایب برای تقریب زیر می‌باشد.

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j + \varphi_0(x) \qquad (۲-۳)$$

در این روش تمام عبارات معادله دیفرانسیل در یک طرف تساوی قرار داده شده و تابع وزن w در کل معادله ضرب می‌شود و روی دامنه مسئله انتگرال گرفته می‌شود.

$$\int_0^L w\left[-\frac{d}{dx}\left(a\frac{d\varphi}{dx}\right) - q\right]dx = 0 \qquad (۳-۳)$$

عبارت (۳-۳) را عبارت انتگرال وزنی یا باقیمانده وزنی معادل با معادله (۳-۲) می‌نامند. زمانی که φ به وسیله مقدار تقریبی آن جایگزین می‌گردد، دیگر عبارات داخل کروشه برابر صفر نیست.

عبارت انتگرالی (۳-۳) امکان انتخاب n تابع مستقل خطی برای w و به‌دست آوردن n معادله برای ضـرایب $C_1 , C_2 , C_3 , \ldots$ را فراهم می‌آورد. باید توجه داشـت که عبارت انتگرال وزنی هر معادله دیفرانسـیل، قابل دسـترس اسـت. به طور کلی تابع وزن w در عبارت انتگرالی تحت شرایط پیوستگی ضعیف‌تری نسبت به متغیر وابسته φ قرار دارد. عبارت انتگرال وزنی تنها بیان کننده معادله دیفرانسیل است و هیچ گونه شرایط مرزی را شامل نمی‌گردد.

---

[۱] *Integral weight*

[۲] *Weak Form*

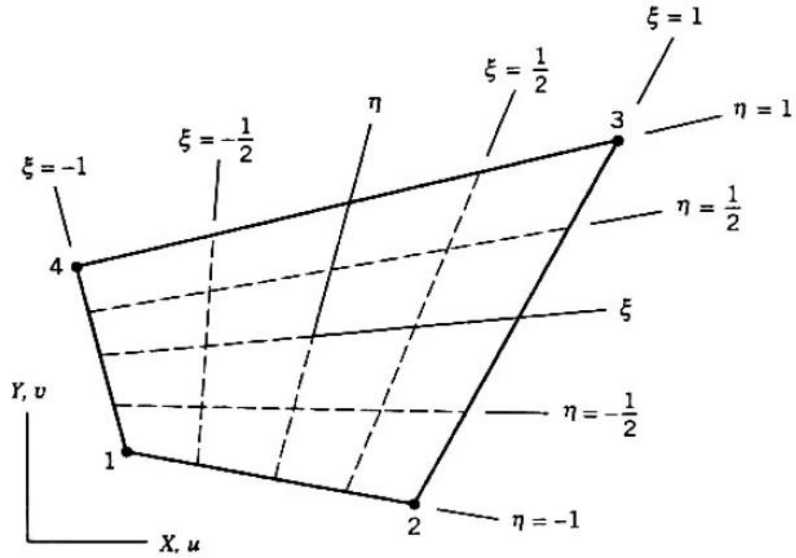
تابع وزن w در نقاط مرزی، جایی که شـرایط مرزی اسـاسی معین شده است، باید برابر صفر شـود. به بیان دیگر w باید شـکل همگن شـرایط مرزی اساسی معین مسئله را ارضا نماید. اگر در این انتگرال از توابع شکل[1] به جای توابع وزنی استفاده گردد به آن روش گالرکین اطلاق می‌شود[۳۳].

۳-۴ المان‌های ایزوپارامتریک

المان‌های ایزوپارامتریک[2] مربعی یک المان چهار وجهی در دسـتگاه مختصات سراسری (x,y) را به یک مربع ۲*۲ دردستگاه محلی (ξ, η) نگاشت می‌کنند.

فرمولبندی المان‌های ایزوپارامتریک، اسـتفاده از المان‌های غیر مستطیلی، المان‌هایی با اضلاع خمیده، المان‌های نامحدود برای محیط‌های بی‌حد و مرز و المان‌های منفرد مورد استفاده در مکانیک شکست را ممکن می‌کند.

سیستم مختصات باید بگونه‌ای تعریف شود، که غیر مستطیلی بودن چهار ضلعی را لحاظ کند. این سـیسـتم که در شـکل ۳-۱ با نام (ξ, η) مشـخص شده، یک سیستم مختصات طبیعی است. در مختصـات (x,y) مبدأ این سیستم در نقطه‌ی میانگین گوشه‌هاست. صرف‌نظر از شکل و اندازه ظاهری المان یا جهت‌گیری آن در مختصـات کلی (x,y) همیشه در مختصات طبیعی اضلاع المان با $\eta = \pm 1$ و $\xi = \pm 1$ تعریف می‌شـوند. بطورکلی محورهای η و ξ متعامد نیسـتند و جهت‌گیری خاصی نسبت به محورهای (x,y) ندارند.



شکل ۳-۱- مختصات سراسری و محلی در المان محدود ایزوپارامتریک[۳۴]

---

[1] *Shape function*

[2] *Isoparametric elements*

مختصات x و y یک نقطه درون المان اولیه بصورت زیر تعریف می‌شود[۳۴]:

$$x = \sum_{i=1}^{4} x_i\, N_i \tag{۳-۴}$$

$$y = \sum_{i=1}^{4} y_i\, N_i \tag{۳-۵}$$

که در اینجا y_i و x_i مختصات گره‌های المان هستند و N_i همان توابع شکل المان محدود هستند که برای المان‌های ایزوپارامتریک از روابط زیر حاصل می‌گردند[۳۵]:

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) \tag{۳-۶}$$

جهت المان بندی یک صفحه از جنس ماده تابعی می‌توان از المان‌های مدرج[1] که توسط کیم و پائولینو پیشنهاد شده است استفاده نمود[۳۶]. در این المان‌ها از توابع شکل یکسان برای درونیابی جابه‌جایی‌ها، هندسه و پارامترهای ماده استفاده می‌شود. بنابراین این نوع فرمول‌بندی، فرمول‌بندی المانی ایزوپارامتریک تعمیم یافته[2] نامیده شده است.

برای تعبیه خواص ماده تابعی در مدل المان محدود توسعه یافته، تمامی خواص برای کلیه گره‌های المان‌ها با استفاده از مدل‌های میکرومکانیکی محاسبه می‌شوند. سپس خواص مورد نیاز برای هر نقطه گوسی در یک المان را می‌توان از روی خواص گره‌های المان مربوطه با استفاده از توابع شکل ایزوپارامتریک میان‌یابی کرد. بنابراین خواص ماده از قبیل مدول الاستیک E، نسبت پواسون ν و چگالی ρ برای هر نقطه گوسی در یک المان را می‌توان بر حسب مختصات ξ و η و به کمک خواص گره‌های آن المان با استفاده از روابط زیر محاسبه و در معادلات مربوطه جایگزین کرد[۳۶]:

$$E = \sum_{i=1}^{m} N_i E_i \tag{۳-۷}$$

$$\nu = \sum_{i=1}^{m} N_i \nu_i \tag{۳-۸}$$

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} N_i \rho_i \tag{۳-۹}$$

در این تحقیق از المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم یافته برای المان بندی مواد تابعی استفاده می‌گردد.

---

[1] *Graded Elements*

[2] *Generalized Isoparametric Elements Formulation (GIF)*

۳-۵ المان‌محدود توسعه‌یافته

یکی از روش‌های تحلیل ترک‌ها استفاده از روش المان محدود توسعه یافته[۱] است. این روش که توسط بلیچکو و همکارانش پیشنهاد شد برای برطرف کردن کاستی‌های موجود در مدل سازی گسترش ناپیوستگی‌های دلخواه در روش المان محدود است[۳۷].

نام روش المان محدود توسعه یافته اولین بار توسط دانشگاه نورث وسترن در سال ۱۹۹۹ مطرح گردید[۳۸]. مبنای روش المان محدود توسعه یافته همان روش المان محدود است که برای پیوستگی‌هایی مانند ترک‌ها گسترش یافته است و از غنی‌سازی‌های موضعی بهره می‌گیرد. گسترش این روش حاصل تحقیقات گسترده بلیچکو و همکاران در روش‌های بدون المان است[۳۹].

۳-۵-۱ تفکیک واحد المان‌های محدود غنی شده

مبنای روش المان‌محدود توسعه یافته مفهوم تفکیک واحد[۲] برای المان‌های محدود غنی شده با تقریب‌های بدون المان است[۴۰]. تفکیک واحد در یک قلمرو یک مجموعه از توابع است به صورتی که:

$$\sum_{\forall i} \emptyset_i(x) = 1 \quad , \quad \forall x \in \Omega \tag{۳-۱۰}$$

در این رابطه x بردار موقعیت است.

خاصیت تفکیک واحد استفاده شده در روش المان‌محدود توسعه‌یافته این است که هر تابع $\Psi(x)$ را می‌توان توسط حاصل‌ضرب توابع تفکیک واحد با $\Psi(x)$، بازیابی کرد[۴۱]، یعنی می‌توان نوشت:

$$\sum_{\forall i} \emptyset_i(x)\Psi(x) = \Psi(x) \tag{۳-۱۱}$$

به علاوه هنگامی که جمع بندی با معرفی پارامترهای b_i اصلاح می‌شود، تابع غنی سازی می‌تواند به کمک تقریب زیر با این پارامترها تنظیم شود[۴۲]:

$$u(x) = \sum_{\forall i} N_i(x)a_i + \sum_{\forall i} \emptyset_i(x)\Psi(x)b_i \tag{۳-۱۲}$$

در این رابطه a_iها درجات آزادی گره‌ای استاندارد هستند. N_iها نیز توابع شکل استاندارد روش المان‌محدود هستند که قبلا آن‌ها را در رابطه (۳-۶) بیان نمودیم.

[۱] *Extended Finite Element Method*

[۲] *Partition of unity*

اولین عبارت در سمت راست معادله (۳-۱۲) تقریب المان محدود استاندارد است؛ در حالی که بخش دوم اغلب انساتز[۱] نامیده می شود[۴۲]. مقادیر گره ای b_i پارامترهای مجهول هستند که غنی سازی را تنظیم می کنند به نحوی که بتواند حل را به خوبی تقریب بزند. $\Psi(x)$ غالبا مبتنی بر حل‌های مجانبی است که حل‌های دقیقی نیستند؛ بنابراین، لازم نیست دقیقا حل موضعی برای مسئله مورد نظر باشد[۳۸]. مزیت دیگر این تقریب سازه‌ای این است که هنگامی که توابع $\emptyset_i(x)$ فقط بر روی یک زیر ناحیه کوچک از مسئله غیر صفر هستند، معادلات گسسته شده برای سیستم صفر خواهند شد. در مقابل اضافه کردن مستقیم یک تابع غنی سازی به تقریب، معادلات گسسته غیر صفری را نتیجه می‌دهد که از نظر محاسباتی پرهزینه‌تر هستند. توجه شود که با خاصیت تفکیک واحد هنگامی که $b_i = 1$ و $u_i = 0$، تابع $\Psi(x)$ دقیقا با تقریب (۳-۳) بازیابی می‌شود. باید اشاره کرد، همانطور که در بالا نشان داده شد، توابع شکل برای تقریب استاندارد و غنی سازی لازم نیست توابع یکسانی باشند؛ اما به طور کلی توابع یکسانی مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ یعنی به طور کلی $\emptyset_i(x) = N_i(x)$ [۴۲]. در اینجا نیز از این قاعده استفاده می‌گردد.

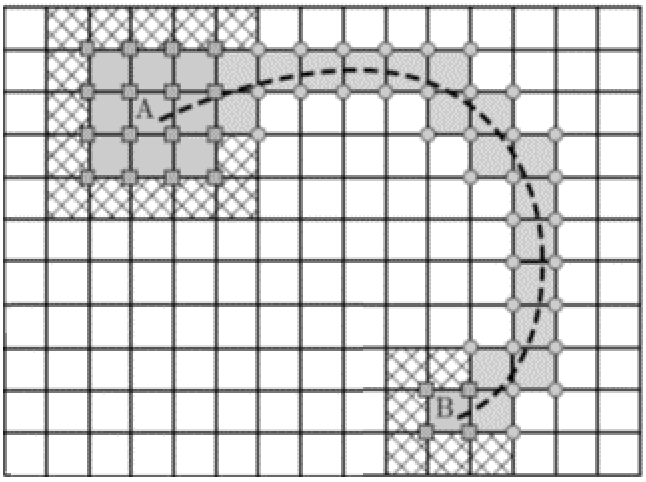
تمام توابع شکل المان محدود لاگرانژی خاصیت تفکیک واحد را ارضا می‌کنند؛ زیرا این خاصیت برای همگرایی و عبور از آزمون پیوستگی ضروری است. خاصیت تفکیک واحد به تقریب المان محدود این قابلیت را می‌دهد که حرکت انتقال جسم صلب را به طور دقیق نمایش دهد[۴۲].

۳-۵-۲ مدل‌سازی ترک‌ها در روش المان‌محدود توسعه‌یافته

یک مدل المان محدود از یک جسم ترک‌دار را مطابق شکل ۳-۲ در نظر بگیرید. تمام گره‌های شبکه المان‌محدود با N_A مشخص می‌شوند. همچنین مجموعه گره‌های المان‌های اطراف نوک ترک که گره‌های غنی‌شده‌ی نوک ترک نامیده می‌شوند با N_C، که تعداد آن‌ها را کاربر انتخاب می‌نماید؛ و مجموعه گره‌های المان‌هایی که توسط ترک بریده می‌شوند و یا به عبارتی دارای ناپیوستگی هستند و گره‌های غنی‌شده گام نامیده می‌شوند با N_H مشخص می‌گردد. لازم به ذکر است که اگرچه تعداد المان‌های نوک ترک یک المان هم کفایت می‌کند (مانند المان B در شکل ۳-۲) اما با استفاده از چندین المان می‌توان مقداری بهبود در دقت را به‌دست آورد[۴۲].

---

[۱] *Ansatz*



شکل ۳-۲ - یک خط ترک دلخواه (خط نقطه چین) در یک شبکه با المان‌های غنی شده گام (کم رنگ) و غنی شده نوک (پررنگ). گره‌ها در مجموعه‌های N_C و N_H به ترتیب توسط مربع‌ها و دایره‌ها مشخص می‌شوند[۴۲]

میدان جابه‌جایی در روش المان‌محدود توسعه‌یافته برای یک المان که به طور کامل غنی‌سازی شده است را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد[۲۰, ۴۱]:

$$u\,(x,y,t)=\sum_{n\epsilon N_A}N_n(x,y)a_n(t)+\sum_{n\epsilon N_H}N_n(x,y)[H(Z)-H(Z_n)]b_n(t)+\sum_m\sum_{n\epsilon N_c}N_n(x,y)[F_m(r,\varphi)-F_m(r_n,\varphi_n)]c_{nm}(t) \quad (۱۳\text{-}۳)$$

در این رابطه $a_n(t)$ و $b_n(t)$ و $c_{nm}(t)$ بردارهای مجهولات گرهی خواهند بود که توابعی از زمان هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_n(t)=\{a_n^u(t),a_n^v(t)\}^T \quad (۱۴\text{-}۳)$$

$$b_n(t)=\{b_n^u(t),b_n^v(t)\}^T \quad (۱۵\text{-}۳)$$

$$c_{nm}(t)=\{c_{nm}^u(t),c_{nm}^v(t)\}^T \quad (۱۶\text{-}۳)$$

همچنین در رابطه (۳-۱۳)، $H(Z)$ تابع پله هویساید است که توسط رابطه زیر ارائه می‌گردد:

$$H(z)=\begin{cases}1, & z>0\\0, & z\le 0\end{cases} \quad (۱۷\text{-}۳)$$

در اینجا Z تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است.

برای اجتناب از ناپایداری‌های عددی تابع می‌توان از تابع هویساید اصلاح شده‌ی زیر به جای رابطه‌ی قبل استفاده نمود[۳۰].

$$H(z) = \begin{cases} 1, & Z > \zeta \\ 0.5 + \frac{Z}{2\zeta} + \frac{1}{2\pi} sin \frac{\pi Z}{\zeta} & -\zeta < Z < \zeta \\ 0, & Z < -\zeta \end{cases} \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

که در این رابطه ζ کوچکتر از ابعاد یک المان انتخاب می‌گردد.

در رابطه (۳-۱۳)، F_m یک مجموعه از توابع غنی‌سازی هستند که رفتار نزدیک نوک را تقریب می‌زنند. این توابع عبارتند از [۱۹, ۲۰, ۳۷, ۴۱]:

$$\{F_m\} = \sqrt{r}\left\{sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), sin(\varphi)sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), sin(\varphi)\,cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \qquad (۱۹\text{-}۳)$$

در نهایت با جایگذاری رابطه (۳-۱۹) در معادله (۳-۱۳) مولفه‌های میدان جابه‌جایی در روش المان‌محدود توسعه‌یافته در جهت مختصات سراسری x و y را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} u\,(x,y,t) = &\sum_{n\epsilon N_A} N_n(x,y)a_n^u(t) \\ &+ \sum_{n\epsilon N_H} N_n(x,y)[H(Z)-H(Z_n)]b_n^u(t) \\ &+ \sum_{n\epsilon N_c} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\,sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\,sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n1}^u(t) \\ &+ \sum_{n\epsilon N_c} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\,cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\,cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n2}^u(t) \\ &+ \sum_{n\epsilon N_c} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\,sin(\varphi)\,sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right. \\ &\left. - \sqrt{r_n}\,sin(\varphi_n)\,sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n3}^u(t) \\ &+ \sum_{n\epsilon N_c} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\,sin(\varphi)\,cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right. \\ &\left. - \sqrt{r_n}\,sin(\varphi_n)\,cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n4}^u(t) \end{aligned} \qquad (۲۰\text{-}۳)$$

$$\begin{aligned} v(x,y,t) = &\sum_{n\epsilon N_A} N_n(x,y)a_n^v(t) \\ &+ \sum_{n\epsilon N_H} N_n(x,y)[H(Z)-H(Z_n)]b_n^v(t) \\ &+ \sum_{n\epsilon N_c} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\,sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\,sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n1}^v(t) \end{aligned} \qquad (۲۱\text{-}۳)$$

$$+\sum_{n\epsilon N_c} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n2}^{v}(t)$$
$$+\sum_{n\epsilon N_c} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n3}^{v}(t)$$
$$+\sum_{n\epsilon N_c} N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right]c_{n4}^{v}(t)$$

این روابط را می‌توان به صورت ساده شده زیر بازنویسی نمود[۱۹, ۳۲]:

$$u\,(x,y,t)=\sum_{n\epsilon N_A} N_n(x,y)a_n^u(t)+\sum_{n\epsilon N_H}\Phi_n(x,y)b_n^u(t)+\sum_{m=1}^{4}\sum_{n\epsilon N_c}\Psi_{nm}(x,y)c_{nm}^{u}(t) \qquad (۲۲\text{-}۳)$$

$$v\,(x,y,t)=\sum_{n\epsilon N_A} N_n(x,y)a_n^v(t)+\sum_{n\epsilon N_H}\Phi_n(x,y)b_n^v(t)+\sum_{m=1}^{4}\sum_{n\epsilon N_c}\Psi_{nm}(x,y)c_{nm}^{v}(t) \qquad (۲۳\text{-}۳)$$

در این روابط Φ و Ψ عبارت‌های غنی‌سازی میدان‌های جابه‌جایی هستند که به ترتیب وظیفه غنی‌سازی مسیر و نوک ترک را بر عهده دارند و به صورت زیر بیان می‌شوند[۳۲]:

$$\Phi_n(x,y)=N_n(x,y)[H(Z)-H(Z_n)] \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

$$\Psi_{nm}(x,y)=N_n(x,y)\left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right),\sqrt{r}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right.$$
$$\sqrt{r}\sin(\varphi)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\sin\left(\frac{\varphi_n}{2}\right),$$
$$\left.\sqrt{r}\sin(\varphi)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sqrt{r_n}\sin(\varphi_n)\cos\left(\frac{\varphi_n}{2}\right)\right] \qquad (۲۵\text{-}۳)$$

با استفاده از دو رابطه (۳-۲۲) و (۳-۲۳) می‌توان معادلات حاکم بر مسئله را گسسته‌سازی نمود.

۳-۶ انتگرال‌گیری عددی

توابع پیچیده را که به سهولت قابل انتگرال‌گیری نیستند، می‌توان نخست با یک چند جمله‌ای تقریب زده و سپس انتگرال‌گیری عددی[۱] نمود. اگر تابع به طور قابل توجهی از خطی بودن دور باشد، آنگاه خطای قابل ملاحظه‌ای انتظار می‌رود. ولی این خطا را می‌توان با افزایش تعداد تقسیم‌بندی‌ها در فاصله X_0 تا X_n کاهش داد. می‌توان از چند جمله‌ای‌های مرتبه بالاتر نیز برای تقریب زدن تابع استفاده نمود، بگونه‌ای که دقت کار بالا برود. به طور کلی در روش المان‌محدود برای محاسبه انتگرال‌هایی که از گسسته‌سازی معادلات نتیجه می‌شوند، باید از روش‌های عددی استفاده کرد. در اینجا نیز برای محاسبه انتگرال‌ها از روش انتگرال‌گیری گاوس[۲] استفاده می‌شود.

فرض کنید می‌خواهیم $I = \int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi$ را محاسبه نماییم. در این حالت و در روش گاوس صورت کلی انتگرال را به صورت زیر می‌توان تقریب زد[۴۳]:

$$I = \sum_{i=1}^{n} w_i \, f(\xi_i) \qquad (۳-۲۶)$$

که در آن w_i توابع وزنی، ξ_i مقادیر تابع در نقاط گوسی و n تعداد نقاط گوسی در حالت یک بعدی است.

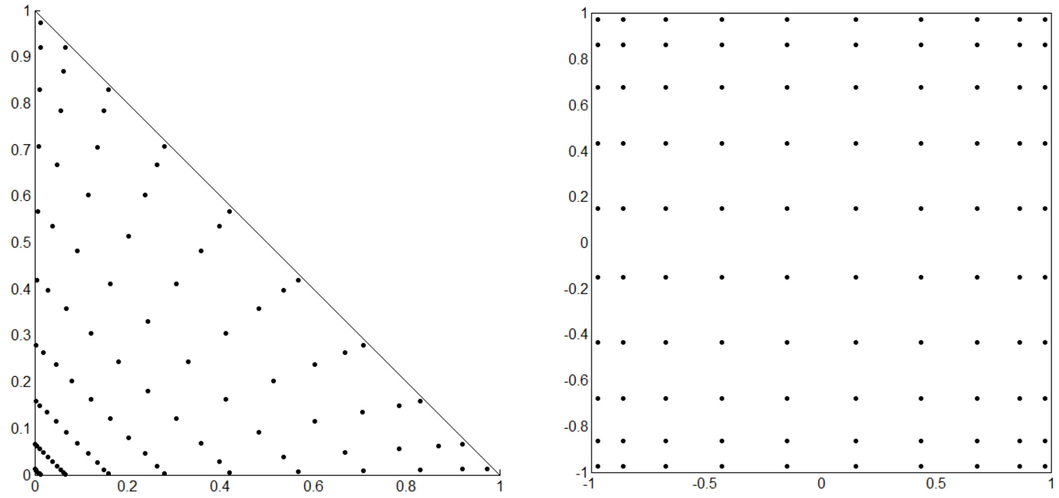
از آنجا که در روش المان‌محدود این انتگرال‌گیری‌ها معمولا بر روی سطح المان‌ها صورت می‌گیرد، به محاسبه انتگرال‌های دو گانه نیاز داریم. با استفاده از روش گاوس این انتگرال‌ها را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد[۴۳]:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) \, d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_j w_i \, f(\xi_i, \eta_i) \qquad (۳-۲۷)$$

برنامه نوشته شده در این تحقیق امکان استفاده از حداکثر ۲۱*۲۱ نقطه گوسی در یک المان برای انتگرال‌گیری دو بعدی را داراست. موقعیت نقاط گوسی برای حالت n برابر با ۱۰ در یک المان مربعی و مثلثی در شکل ۳-۳ با استفاده از نرم‌افزار متلب به تصویر کشیده شده است.

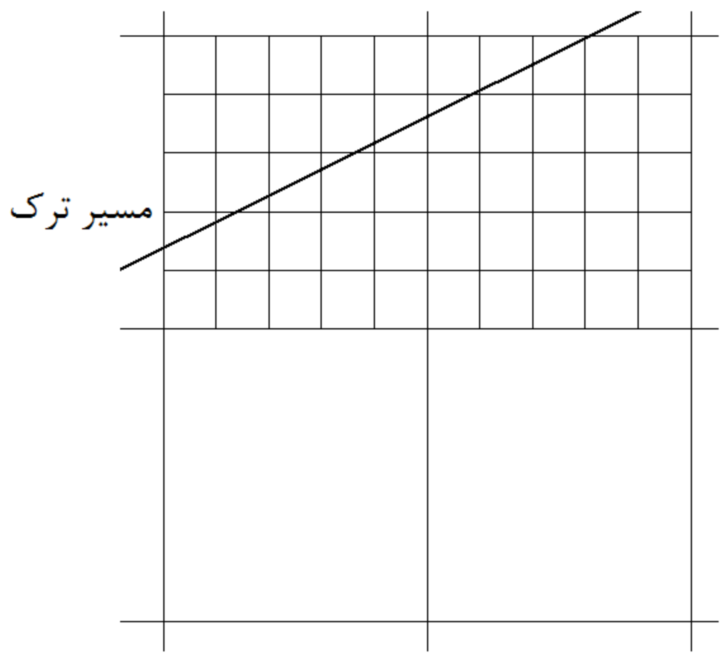
[۱] *Numerical integration*

[۲] *Gauss integration method*



شکل ۳-۳- موقعیت نقاط گوسی برای حالت n برابر با ۱۰ در یک المان مربعی و مثلثی

از آنجایی که روش گاوس نمی‌تواند انتگرال توابع غنی‌سازی را در المان‌هایی که توسط ترک بریده می‌شوند به طور دقیق محاسبه کند، دالبو برای رفع این مشکل پیشنهاد کرد که المان‌هایی که در مسیر ترک واقع شده‌اند را به المان‌های چهارضلعی کوچک‌تر همانند شکل ۳-۴ تقسیم‌بندی نماییم[۴۴].

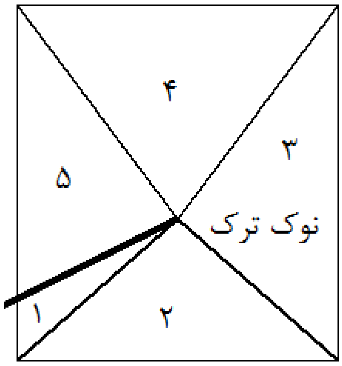


شکل ۳-۴- تقسیم‌بندی المان‌های مسیر ترک برای انتگرال‌گیری عددی[۳۰]

برای انتگرال‌گیری و ارزیابی تابع هویساید، موقعیت مرکز چهارضلعی‌های کوچک‌تر نسبت به ترک ملاک قرار می‌گیرد. یعنی با قرار گرفتن مرکز چهارضلعی در یک طرف ترک کل نقاط گوسی

برای ارزیـابی تابع هویســـاید در انتگرال‌گیری بر روی آن چهارضــــلعی در همان طرف در نظر گرفته می‌شوند.

المان نوک ترک نیز مطابق با شکل ۳-۵ به چند مثلث تقسیم می‌شود تا اثر تکینی نوک ترک در عبارت زیر انتگرال حذف گردد.



شکل ۳-۵- تقسیم‌بندی المان نوک ترک برای انتگرال‌گیری عددی[۳۰]

۳-۷ تعیین موقعیت نقاط نسبت به مسیر ترک

موقعیت قرار گرفتن نقاط (اعم از نقاط گره‌ای یا گوســی) نســبت به مســیر ترک، یعنی اینکه نقاط در کدام طرف ترک قرار می‌گیرند، برای محاســـبه تابع هویســـاید و انتگرال‌های عددی بر روی المان‌های شامل ترک یک مسئله مهم است.

در اینجا با اســتفاده از معادله مســیر ترک می‌توان موقعیت نقاط را مشــخص نمود. اگر شــیب ترک را m در نظر بگیریم داریم:

$$m = tan(\alpha) \quad (۳\text{-}۲۸)$$

که α زاویه ترک نسبت به خط افق می‌باشد.

با مقایســه دو مقدار Z_{nQ} که موقعیت ارتفاع نقطه گوسی را مشخص می‌کند و Z که از رابطه زیر به‌دست می‌آید می‌توان موقعیت نقطه گوسی را مشخص نمود:

$$Z = m * \left(R_{nQ} - R_1\right) + Z_1 \quad (۳\text{-}۲۹)$$

که در این رابطه (R_1, Z_1) موقعیت نقطه ابتدایی ترک است.

اگر مقدار Z از مقدار Z_{nQ} بیشــتر باشــد، به این معنی است که نقطه گوسی مورد نظر در زیر مسیر ترک قرار دارد.

فصل چهارم:

معادلات مربوطه

۴-۱ معادلات حرکت

معادلات حرکت[۱] در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌گردد[۴۵]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}+F_r=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{۱-۴}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}+F_\theta=\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \tag{۲-۴}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+F_z=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{۳-۴}$$

استوانه‌ها از چرخش یک صفحه حول یک محور به وجود می‌آیند. اینگونه مسائل که هدف در آن، تحلیل و بررسی این صفحات عرضی است را مسائل متقان محوری[۲] می‌گویند. عموما در مسائل متقارن محوری خواص، بارگذاری و شرایط مرزی را به صورت متقارن ایجاد می‌کنند (لازم به ذکر است که برای حل مسائل متقارن محوری تحت بارگذاری غیرمتقارن از سری فوریه[۳] استفاده می‌گردد)[۴۶]. در اینگونه مسائل از آنجا که خواص و نیروها در راستای محیطی تغییری نمی‌کنند مقدار $\frac{\partial}{\partial \theta}$ برابر صفر خواهد بود. به علت تقارن موجود مقدار جابه‌جایی در راستای محور θ نیز صفر می‌شود[۴۷]. این فرضیات باعث حذف شدن معادله دوم تعادل در حالت متقارن محوری خواهد شد. در نهایت معادلات تعادل را می‌توان برای حالت متقارن محوری به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial (r\sigma_r)}{\partial r}-\sigma_\theta+r\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}+rf_r=r\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{۴-۴}$$

$$\frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r}+r\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+rf_z=r\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{۵-۴}$$

روابط تنش برحسب جابه‌جایی به صورت زیر بیان می‌گردد[۴۵]:

$$\sigma_{ij}=\lambda\delta_{ij}divu+2\mu e_{ij} \tag{۶-۴}$$

که در این رابطه داریم:

$$divu=\frac{1}{r}\frac{\partial (ru)}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{۷-۴}$$

و همچنین در این رابطه λ و μ ثابت‌های لامه[۴] هستند و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{۸-۴}$$

---

۱ *Equations of motion*

۲ *Axisymmetric*

۳ *Fourier series*

۴ *Lamé constants*

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۹-۴}$$

برای بیان تنش‌ها در معادلات (۴-۴) و (۴-۵) همچنین باید مولفه‌های کرنش را با اســتفاده از روابط زیر برحسب جابه‌جایی در حالت متقارن محوری نوشت:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \tag{۱۰-۴}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \tag{۱۱-۴}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{۱۲-۴}$$

$$2\varepsilon_{rz} = \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \tag{۱۳-۴}$$

با جایگذاری روابط (۴-۷)، (۴-۱۰)، (۴-۱۱)، (۴-۱۲) و (۴-۱۳) در معادله (۴-۶) تنش‌ها را برحسب جابه‌جایی به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\sigma_r = \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\varepsilon_r = \lambda\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r} \tag{۱۴-۴}$$

$$\sigma_\theta = \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\varepsilon_\theta = \lambda\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{u}{r} \tag{۱۵-۴}$$

$$\sigma_z = \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\varepsilon_z = \lambda\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{۱۶-۴}$$

$$\sigma_{13} = \tau_{rz} = 2\,\mu\varepsilon_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{۱۷-۴}$$

شرایط مرزی از طریق بردار تنش‌های سطحی[۱] بر روی مرز تعیین می‌شوند. مولفه‌های نیروی مرزی از طریق فرمول کوشی[۲] به تانسور تنش مرتبط می‌شوند.

$$Tr_i^n = \sigma_{ij} n_j \tag{۱۸-۴}$$

که در این رابطه Tr_i^n مولفه تنش سطحی بر روی سطح مرزی است که بردار یکه نرمال آن n می‌باشد.

---

۱ *Traction vector*

۲ *Cauchy's formula*

۴-۲ گسسته‌سازی معادلات حرکت

برای حل معادلات حرکت میتوان از فرمول‌بندی المان‌محدود مبتنی بر روش گلرکین[1] استفاده نمود. مدل المان‌محدود توسعه‌یافته مشابه مدل المان‌محدود است. برای هر المان مبنا (e) با این فرض که تمامی گره‌های آن با هر دو تابع غنی‌سازی، غنی شده‌اند؛ همان طور که در فصل گذشته نشان داده شد، مولفه‌های جابه‌جایی با استفاده از روابط زیر تقریب زده می‌شوند:

$$u = u_r = N_h(r,z)a_h^u(t) + \emptyset_h(r,z)b_h^u(t) + \Psi_{hm}(r,z)c_{hm}^u(t) \tag{۴-۱۹}$$

$$w = u_z = N_h(r,z)a_h^w(t) + \emptyset_h(r,z)b_h^w(t) + \Psi_{hm}(r,z)c_{hm}^w(t) \tag{۴-۲۰}$$

$h = 1,2,\ldots,ne \qquad m = 1,2,3,4$

که در آن ne تعداد نقاط گرهی در المان مبنا (e) است. این تقریب از نوع کانتروویچ[2] است که در آن توابع زمان و مکان به توابعی مجزا تفکیک می‌شـــوند. در این رابطه مولفه‌های جابه‌جایی در هر گره تابع زمان هســتند و تابع شـکل $N_h(r,z)$، تابعی از متغیرهای مکان است. مشتق دوم مولفه‌های جابه‌جایی را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\ddot{u} = N_h(r,z)\ddot{a}_h^u(t) + \emptyset_h(r,z)\ddot{b}_h^u(t) + \Psi_{hm}(r,z)\ddot{c}_{hm}^u(t) \tag{۴-۲۱}$$

$$\ddot{w} = N_h(r,z)\ddot{a}_h^w(t) + \emptyset_h(r,z)\ddot{b}_h^w(t) + \Psi_{hm}(r,z)\ddot{c}_{hm}^w(t) \tag{۴-۲۲}$$

$h = 1,2,\ldots,ne \qquad m = 1,2,3,4$

با اعمال انتگرال باقی مانده وزنی نســبت به توابع وزنی $S_l(r,z)$ ، تقریب گلرکین به صــورت زیر بیان خواهد گشت:

$$\int_V \left(\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r} - \sigma_\theta + r\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + rf_r - r\rho\ddot{u}\right)S_l dV = 0 \tag{۴-۲۳}$$

$$\int_V \left(\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r} + r\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + rf_z - r\rho\ddot{w}\right)S_l dV = 0 \tag{۴-۲۴}$$

$l=1,2,\ldots,ns$

کـه در این روابط $S_l(r,z)$ همان توابع شـــکل المان‌محدود توســـعه‌یافته خواهند بود. یعنی خواهیم داشت:

$$S_l = \{N_1, N_2, N_3, N_4, \emptyset_1, \emptyset_2, \emptyset_3, \emptyset_4, \Psi_{1m}, \Psi_{2m}, \Psi_{3m}, \Psi_{4m}\} \tag{۴-۲۵}$$

$$m = 1,2,3,4$$

---

[1] *Galerkin method*

[2] *Kantrovitch type of approximation*

با اعمال فرمول‌بندی ضـعیف[۱] به ترم‌های مشتق روابط (۴-۲۳) و (۴-۲۴) و استفاده از تئوری گوس[۴۸] می‌توان نوشت:

$$\int_{V(e)} \frac{\partial (r\sigma_r)}{\partial r} S_l dV = \int_{A(e)} r\sigma_r n_r S_l dA - \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\sigma_r dV \qquad (۴\text{-}۲۶)$$

$$\int_{V(e)} r\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} S_l dV = \int_{A(e)} r\tau_{rz} n_z S_l dA - \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\tau_{rz} dV \qquad (۴\text{-}۲۷)$$

$$\int_{V(e)} \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} S_l dV = \int_{A(e)} r\tau_{rz} n_r S_l dA - \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\tau_{rz} dV \qquad (۴\text{-}۲۸)$$

$$\int_{V(e)} r\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} S_l dV = \int_{A(e)} r\sigma_z n_z S_l dA - \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\sigma_z dV \qquad (۴\text{-}۲۹)$$

با در نظر گرفتن فرمول کوشی[۲] اولین عبارت‌های سمت چپ معادلات بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_{A(e)} r\sigma_r n_r S_l dA = \int_{A(e)} rT{r_r}^{n_r} S_l dA \qquad (۴\text{-}۳۰)$$

$$\int_{A(e)} r\tau_{rz} n_z S_l dA = \int_{A(e)} rT{r_r}^{n_z} S_l dA \qquad (۴\text{-}۳۱)$$

$$\int_{A(e)} r\tau_{rz} n_r S_l dA = \int_{A(e)} rT{r_z}^{n_r} S_l dA \qquad (۴\text{-}۳۲)$$

$$\int_{A(e)} r\sigma_z n_z S_l dA = \int_{A(e)} rT{r_z}^{n_z} S_l dA \qquad (۴\text{-}۳۳)$$

با جایگذاری این روابط در معادلات (۴-۲۳) و (۴-۲۴) خواهیم داشت:

$$\int_{A(e)} rT{r_r}^{n_r} S_l dA - \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\sigma_r dV - \int_{V(e)} \sigma_\theta S_l dV + \int_{A(e)} rT{r_r}^{n_z} S_l dA - \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\tau_{rz} dV - \int_{V(e)} r\rho\ddot{u} S_l dV + \int_{V(e)} r f_r S_l dV = 0 \qquad (۴\text{-}۳۴)$$

$$\int_{A(e)} rT{r_z}^{n_r} S_l dA - \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\tau_{rz} dV + \int_{A(e)} rT{r_z}^{n_z} S_l dA - \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\sigma_z dV - \int_{V(e)} r\rho\ddot{w} S_l dV + \int_{V(e)} r f_z S_l dV = 0 \qquad (۴\text{-}۳۵)$$

[۱] *Weak formulation*

[۲] *Cauchy formula*

که این معادلات را می‌توان به صورت ساده شده‌ی زیر نوشت:

$$\int_{V(e)} r\rho\ddot{u}S_l dV + \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\sigma_r dV + \int_{V(e)} \sigma_\theta S_l dV + \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\tau_{rz} dV = F_r \quad (۳۶\text{-}۴)$$

$$\int_{V(e)} r\rho\ddot{w}S_l dV + \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\tau_{rz} dV + \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\sigma_z dV = F_z \quad (۳۷\text{-}۴)$$

در این روابط F_r و F_z را به‌صورت زیر داریم:

$$F_r = \int_{A(e)} rTr_r{}^{n_r}S_l dA + \int_{A(e)} rTr_r{}^{n_z}S_l dA + \int_{V(e)} rf_r S_l dV \quad (۳۸\text{-}۴)$$

$$F_z = \int_{A(e)} rTr_z{}^{n_r}S_l dA + \int_{A(e)} rTr_z{}^{n_z}S_l dA + \int_{V(e)} rf_z S_l dV \quad (۳۹\text{-}۴)$$

با جایگذاری تنش‌های به‌دست آمده از روابط (۴-۱۴)، (۴-۱۵)، (۴-۱۶) و (۴-۱۷) بر حسب جابه‌جایی در روابط (۴-۳۴) و (۴-۳۵) معادلات زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}\int_{V(e)} r\rho\ddot{u}S_l dV &+ \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\left(\lambda\left(\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial r}\right)dV \\ &+ \int_{V(e)} S_l\left(\lambda\left(\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{u}{r}\right)dV \\ &+ \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right)dV = F_r \end{aligned} \quad (۴۰\text{-}۴)$$

$$\begin{aligned}\int_{V(e)} r\rho\ddot{w}S_l dV &+ \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\left(\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right)dV \\ &+ \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\left(\lambda\left(\frac{u}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)dV = F_z \end{aligned} \quad (۴۱\text{-}۴)$$

اکنون بـا در نظر گرفتن المـان مبنای e با تعداد ne گره که تمامی گره‌ها شـــامل هردو تابع غنی‌ســـازی هســـتند، مولفه‌های جابه‌جایی را همانگونه که در معادلات (۴-۱۹)، (۴-۲۰)، (۴-۲۱) و (۴-۲۲) بیان گردید تقریب می‌زنیم و در معادلات بالا جایگذاری می‌نماییم:

$$\int_{V(e)} r\rho\left(N_h \ddot{a}_h^u + \emptyset_h \ddot{b}_h^u + \Psi_{hm}\ddot{c}_{hm}^u\right)S_l dV$$
$$+ \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\left(\lambda\left(\frac{N_h a_h^u + \emptyset_h b_h^u + \Psi_{hm}c_{hm}^u}{r} + \left(N_{h,r}a_h^u + \emptyset_{h,r}b_h^u + \Psi_{hm,r}c_{hm}^u\right) + \left(N_{h,z}a_h^w + \emptyset_{h,z}b_h^w + \Psi_{hm,z}c_{hm}^w\right)\right) + 2\mu\left(N_{h,r}a_h^u + \emptyset_{h,r}b_h^u + \Psi_{hm,r}c_{hm}^u\right)\right)dV$$
$$+ \int_{V(e)} S_l\left(\lambda\left(\frac{N_h a_h^u + \emptyset_h b_h^u + \Psi_{hm}c_{hm}^u}{r} + \left(N_{h,r}a_h^u + \emptyset_{h,r}b_h^u + \Psi_{hm,r}c_{hm}^u\right) + \left(N_{h,z}a_h^w + \emptyset_{h,z}b_h^w + \Psi_{hm,z}c_{hm}^w\right)\right) + 2\mu\left(\frac{N_h a_h^u + \emptyset_h b_h^u + \Psi_{hm}c_{hm}^u}{r}\right)\right)dV$$
$$+ \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\left(\mu\left(N_{h,z}a_h^u + \emptyset_{h,z}b_h^u + \Psi_{hm,z}c_{hm}^u + N_{h,r}a_h^w + \emptyset_{h,r}b_h^w + \Psi_{hm,r}c_{hm}^w\right)\right)dV = F_r \quad (۴-۴۲)$$

$$\int_{V(e)} r\rho\left(N_h \ddot{a}_h^w + \emptyset_h \ddot{b}_h^w + \Psi_{hm}\ddot{c}_{hm}^w\right)S_l dV$$
$$+ \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial r}\left(\mu\left(N_{h,z}a_h^u + \emptyset_{h,z}b_h^u + \Psi_{hm,z}c_{hm}^u + N_{h,r}a_h^w + \emptyset_{h,r}b_h^w + \Psi_{hm,r}c_{hm}^w\right)\right)dV$$
$$+ \int_{V(e)} r\frac{\partial S_l}{\partial z}\left(\lambda\left(\frac{N_h a_h^u + \emptyset_h b_h^u + \Psi_{hm}c_{hm}^u}{r} + \left(N_{h,r}a_h^u + \emptyset_{h,r}b_h^u + \Psi_{hm,r}c_{hm}^u\right) + \left(N_{h,z}a_h^w + \emptyset_{h,z}b_h^w + \Psi_{hm,z}c_{hm}^w\right)\right) + 2\mu\left(N_{h,z}a_h^w + \emptyset_{h,z}b_h^w + \Psi_{hm,z}c_{hm}^w\right)\right)dV = F_z \quad (۴-۴۳)$$

با مرتب سازی عبارت‌های معادلات (۴-۴۲) و (۴-۴۳) می‌توان آن‌ها را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left(\int_{V(e)} r\rho N_h S_l\, dV\right)\ddot{a}_h^u + \left(\int_{V(e)} r\rho \emptyset_h S_l\, dV\right)\ddot{b}_h^u + \left(\int_{V(e)} r\rho \Psi_{hm} S_l\, dV\right)\ddot{c}_{hm}^u +$$

$$\left(\int_{V(e)} \left[rS_{l,r}\left(\frac{\lambda}{r}N_h + (\lambda+2\mu)N_{h,r}\right) + r\mu S_{l,z}N_{h,z} + S_l\left(\lambda N_{h,r} + \frac{(\lambda+2\mu)}{r}N_h\right)\right] dV\right) a_h^u +$$

$$\left(\int_{V(e)} \left[rS_{l,r}\left(\frac{\lambda}{r}\emptyset_h + (\lambda+2\mu)\emptyset_{h,r}\right) + r\mu S_{l,z}\emptyset_{h,z} + S_l\left(\lambda \emptyset_{h,r} + \frac{(\lambda+2\mu)}{r}\emptyset_h\right)\right] dV\right) b_h^u +$$

$$\left(\int_{V(e)} \left[rS_{l,r}\left(\frac{\lambda}{r}\Psi_{hm} + (\lambda+2\mu)\Psi_{hm,r}\right) + r\mu S_{l,z}\Psi_{hm,z} + S_l\left(\lambda \Psi_{hm,r} + \frac{(\lambda+2\mu)}{r}\Psi_{hm}\right)\right] dV\right) c_{hm}^u$$

$$+\left(\int_{V(e)} \left[r\lambda S_{l,r}N_{h,z} + \lambda S_l N_{h,z} + r\mu S_{l,z}N_{h,r}\right] dV\right) a_h^w$$

$$+\left(\int_{V(e)} \left[r\lambda S_{l,r}\emptyset_{h,z} + \lambda S_l \emptyset_{h,z} + r\mu S_{l,z}\emptyset_{h,r}\right] dV\right) b_h^w$$

$$+\left(\int_{V(e)} \left[r\lambda S_{l,r}\Psi_{hm,z} + \lambda S_l \Psi_{hm,z} + r\mu S_{l,z}\Psi_{hm,r}\right] dV\right) c_{hm}^w = F_r \qquad (۴۴\text{-}۴)$$

$$\left(\int_{V(e)} r\rho N_h S_l dV\right)\ddot{a}^w + \left(\int_{V(e)} r\rho \emptyset_h S_l dV\right)\ddot{b}^w + \left(\int_{V(e)} r\rho \Psi_{hm} S_l dV\right)\ddot{c}^w$$
$$+\left(\int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} N_{h,z} + r\lambda S_{l,z}\left(\frac{N_h}{r} + N_{h,r}\right)\right] dV\right) a_h^u$$
$$+\left(\int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} \emptyset_{h,z} + r\lambda S_{l,z}\left(\frac{\emptyset_h}{r} + \emptyset_{h,r}\right)\right] dV\right) b_h^u$$
$$+\left(\int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} \Psi_{hm,z} + r\lambda S_{l,z}\left(\frac{\Psi_{hm}}{r} + \Psi_{hm,r}\right)\right] dV\right) c_{hm}^u$$
$$+\left(\int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} N_{h,r} + r(\lambda + 2\mu) S_{l,z} N_{h,z}\right] dV\right) a_h^w$$
$$+\left(\int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} \emptyset_{h,r} + r(\lambda + 2\mu) S_{l,z} \emptyset_{h,z}\right] dV\right) b_h^w$$
$$+\left(\int_{V(e)} \left[r\mu S_{l,r} \Psi_{hm,r} + r(\lambda + 2\mu) S_{l,z} \Psi_{hm,z}\right] dV\right) c_{hm}^w = F_z \qquad (۴۵-۴)$$

این معادلات را می‌توان در غالب یک معادله ماتریسی به فرم زیر مونتاژ کرد:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{F\} \qquad (۴۶-۴)$$

در این رابطـه $[M]$ مـاتریس جرم المان و $[K]$ ماتریس سـفتی المان خواهد بود. $\{\Delta\}$ بردار مجهولات گرهی و $\{F\}$ نیز بردار نیروهای گرهی است که برای المان مبنا (e) این ماتریس‌ها و بردارها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$[M]^{(e)} = \begin{bmatrix} [m_{11}] & [m_{12}] & [m_{13}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [m_{24}] & [m_{25}] & [m_{26}] \end{bmatrix} \qquad (۴۷-۴)$$

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] & [k_{13}] & [k_{14}] & [k_{15}] & [k_{16}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] & [k_{23}] & [k_{24}] & [k_{25}] & [k_{26}] \end{bmatrix} \qquad (۴۸-۴)$$

$$\{\Delta\} = \{a_h^u, b_h^u, c_{hm}^u, a_h^w, b_h^w, c_{hm}^w\}^T$$
$$h\,,m = 1,2,3,4 \qquad (۴۹\text{-}۴)$$

$$\{F\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{A(e)} r({Tr_r}^{n_r} + {Tr_r}^{n_z}) S_l dA + \int_{V(e)} r f_r S_l dV \\ \int_{A(e)} r({Tr_z}^{n_r} + {Tr_z}^{n_z}) S_l dA + \int_{V(e)} r f_z S_l dV \end{Bmatrix} \qquad (۵۰\text{-}۴)$$

مولفه‌های ماتریس‌های جرم و سفتی را نیز می‌توان از معادلات زیر استخراج نمود:

$$[m_{11}] = [m_{24}] = \left[\int_V r\rho N_h S_l dV\right] \qquad (۵۱\text{-}۴)$$

$$[m_{12}] = [m_{25}] = \left[\int_V r\rho \emptyset_h S_l \, dV\right] \qquad (۵۲\text{-}۴)$$

$$[m_{13}] = [m_{26}] = \left[\int_V r\rho \Psi_{hm} S_l dV\right] \qquad (۵۳\text{-}۴)$$

$$[k_{11}] = \int_{V(e)} r\left[\frac{\lambda}{r} S_{l,r} N_h + (\lambda + 2\mu) S_{l,r} N_{h,r} + \mu S_{l,z} N_{h,z} + \frac{\lambda}{r} S_l N_{h,r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^{\,2}} S_l N_h\right] dV \qquad (۵۴\text{-}۴)$$

$$[k_{12}] = \int_{V(e)} r\left[\frac{\lambda}{r} S_{l,r} \emptyset_h + (\lambda + 2\mu) S_{l,r} \emptyset_{h,r} + r\mu S_{l,z} \emptyset_{h,z} + \frac{\lambda}{r} S_l \emptyset_{h,r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} S_l \emptyset_h\right] dV \qquad (۵۵\text{-}۴)$$

$$[k_{13}] = \int_{V(e)} r\left[\frac{\lambda}{r} S_{l,r} \Psi_{hm} + (\lambda + 2\mu) S_{l,r} \Psi_{hm,r} + r\mu S_{l,z} \Psi_{hm,z} + \frac{\lambda}{r} S_l \Psi_{hm,r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} S_l \Psi_{hm}\right] dV \qquad (۵۶\text{-}۴)$$

$$[k_{14}] = \int_{V(e)} r\left[\lambda S_{l,r} N_{h,z} + \frac{\lambda}{r} S_l N_{h,z} + \mu S_{l,z} N_{h,r}\right] dV \qquad (۵۷\text{-}۴)$$

$$[k_{15}] = \int_{V(e)} r\left[\lambda S_{l,r} \emptyset_{h,z} + \frac{\lambda}{r} S_l \emptyset_{h,z} + \mu S_{l,z} \emptyset_{h,r}\right] dV \qquad (۵۸\text{-}۴)$$

$$[k_{16}] = \int_{V(e)} r\left[\lambda S_{l,r}\Psi_{hm,z} + \frac{\lambda}{r}S_l\Psi_{hm,z} + \mu S_{l,z}\Psi_{hm,r}\right]dV \qquad (۵۹\text{-}۴)$$

$$[k_{21}] = \int_{V(e)} r\left[\mu S_{l,r}N_{h,z} + \frac{\lambda}{r}S_{l,z}N_h + \lambda S_{l,z}N_{h,r}\right]dV \qquad (۶۰\text{-}۴)$$

$$[k_{22}] = \int_{V(e)} r\left[\mu S_{l,r}\emptyset_{h,z} + \frac{\lambda}{r}S_{l,z}\emptyset_h + \lambda S_{l,z}\emptyset_{h,r}\right]dV \qquad (۶۱\text{-}۴)$$

$$[k_{23}] = \int_{V(e)} r\left[\mu S_{l,r}\Psi_{hm,z} + \frac{\lambda}{r}S_{l,z}\Psi_{hm} + \lambda S_{l,z}\Psi_{hm,r}\right]dV \qquad (۶۲\text{-}۴)$$

$$[k_{24}] = \int_{V(e)} r\left[\mu S_{l,r}N_{h,r} + (\lambda + 2\mu)S_{l,z}N_{h,z}\right]dV \qquad (۶۳\text{-}۴)$$

$$[k_{25}] = \int_{V(e)} r\left[\mu S_{l,r}\emptyset_{h,r} + (\lambda + 2\mu)S_{l,z}\emptyset_{h,z}\right]dV \qquad (۶۴\text{-}۴)$$

$$[k_{26}] = \int_{V(e)} r\left[\mu S_{l,r}\Psi_{hm,r} + (\lambda + 2\mu)S_{l,z}\Psi_{hm,z}\right]dV \qquad (۶۵\text{-}۴)$$

این مولفه‌ها را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی نمود:

$$[m_{11}] = [m_{24}] = \int_{V(e)} r\rho[S]^T[N]dV \qquad (۶۶\text{-}۴)$$

$$[m_{12}] = [m_{25}] = \int_{V(e)} r\rho[S]^T[\Phi]dV \qquad (۶۷\text{-}۴)$$

$$[m_{13}] = [m_{26}] = \int_{V} r\left[\rho[S]^T[\Psi_1]\ \ \rho[S]^T[\Psi_2]\ \ \rho[S]^T[\Psi_3]\ \ \rho[S]^T[\Psi_4]\right]dV \qquad (۶۸\text{-}۴)$$

$$[k_{11}] = \int_{V} r\left[\frac{\lambda}{r}[G_{13}]^T[N] + (\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_1] + \mu[G_{14}]^T[G_2] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_1] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2}[S]^T[N]\right]dV \qquad (۶۹\text{-}۴)$$

$$[k_{12}] = \int_{V} r\left[\frac{\lambda}{r}[G_{13}]^T[\Phi] + (\lambda + 2\mu)[G_{13}]^T[G_3] + \mu[G_{14}]^T[G_4] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_3] + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2}[S]^T[\Phi]\right]dV \qquad (۷۰\text{-}۴)$$

$$[k_{13}] = \Bigg[\int_V r\left[\frac{\lambda}{r}[G_{13}]^T[\Psi_1] + (\lambda+2\mu)[G_{13}]^T[G_5] + \mu[G_{14}]^T[G_9] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_5] + \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}[S]^T[\Psi_1]\right]dV$$
$$\int_V r\left[\frac{\lambda}{r}[G_{13}]^T[\Psi_2] + (\lambda+2\mu)[G_{13}]^T[G_6] + \mu[G_{14}]^T[G_{10}] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_6] + \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}[S]^T[\Psi_2]\right]dV$$
$$\int_V r\left[\frac{\lambda}{r}[G_{13}]^T[\Psi_3] + (\lambda+2\mu)[G_{13}]^T[G_7] + \mu[G_{14}]^T[G_{11}] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_7] + \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}[S]^T[\Psi_3]\right]dV$$
$$\int_V r\left[\frac{\lambda}{r}[G_{13}]^T[\Psi_4] + (\lambda+2\mu)[G_{13}]^T[G_8] + \mu[G_{14}]^T[G_{12}] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_8] + \frac{(\lambda+2\mu)}{r^2}[S]^T[\Psi_4]\right]dV\Bigg] \tag{۷۱-۴}$$

$$[k_{14}] = \int_V r\left[\lambda[G_{13}]^T[G_2] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_2] + \mu[G_{14}]^T[G_1]\right]dV \tag{۷۲-۴}$$

$$[k_{15}] = \int_V r\left[\lambda[G_{13}]^T[G_4] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_4] + \mu[G_{14}]^T[G_3]\right]dV \tag{۷۳-۴}$$

$$[k_{16}] = \int_V r\Bigg[\left(\lambda[G_{13}]^T[G_9] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_9] + \mu[G_{14}]^T[G_5]\right)$$
$$\left(\lambda[G_{13}]^T[G_{10}] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_{10}] + \mu[G_{14}]^T[G_6]\right)$$
$$\left(\lambda[G_{13}]^T[G_{11}] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_{11}] + \mu[G_{14}]^T[G_7]\right)$$
$$\left(\lambda[G_{13}]^T[G_{12}] + \frac{\lambda}{r}[S]^T[G_{12}] + \mu[G_{14}]^T[G_8]\right)\Bigg]dV \tag{۷۴-۴}$$

$$[k_{21}] = \int_V r\left[\mu[G_{13}]^T[G_2] + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[N] + \lambda[G_{14}]^T[G_1]\right]dV \tag{۷۵-۴}$$

$$[k_{22}] = \int_V r\left[\mu[G_{13}]^T[G_4] + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Phi] + \lambda[G_{14}]^T[G_3]\right]dV \tag{۷۶-۴}$$

$$[k_{23}] = \int_V r\Big[\Big(\mu[G_{13}]^T[G_9] + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Psi_1] + \lambda[G_{14}]^T[G_5]\Big) \quad \Big(\mu[G_{13}]^T[G_{10}] + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Psi_2] + \lambda[G_{14}]^T[G_6]\Big) \quad \Big(\mu[G_{13}]^T[G_{11}] + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Psi_3] + \lambda[G_{14}]^T[G_7]\Big) \quad \Big(\mu[G_{13}]^T[G_{12}] + \frac{\lambda}{r}[G_{14}]^T[\Psi_4] + \lambda[G_{14}]^T[G_8]\Big)\Big] dV \tag{۷۷-۴}$$

$$[k_{24}] = \int_V r\big[\mu[G_{13}]^T[G_1] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_2]\big]dV \tag{۷۸-۴}$$

$$[k_{25}] = \int_V r\big[\mu[G_{13}]^T[G_3] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_4]\big]dV \tag{۷۹-۴}$$

$$[k_{26}] = \int_V [(\mu[G_{13}]^T[G_5] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_9])(\mu[G_{13}]^T[G_6] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{10}])\ (\mu[G_{13}]^T[G_7] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{11}])\ (\mu[G_{13}]^T[G_8] + (\lambda + 2\mu)[G_{14}]^T[G_{12}])]dV \tag{۸۰-۴}$$

ماتریس‌ها وبردارهای اســتفاده شده در این معادلات برای یک المان چهارگرهی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$[S] = [N_1\ \dots\ N_4\ \ \Phi_1\ \dots\ \Phi_4\ \ \Psi_{11}\ \dots\ \Psi_{44}] \tag{۸۱-۴}$$

$$[N] = [N_1\ \ N_2\ \ N_3\ \ N_4\ ] \tag{۸۲-۴}$$

$$[\Phi] = [\Phi_1\ \ \Phi_2\ \ \Phi_3\ \ \Phi_4\ ] \tag{۸۳-۴}$$

$$[\Psi_1] = [\Psi_{11}\ \ \Psi_{12}\ \ \Psi_{13}\ \ \Psi_{14}\ ] \tag{۸۴-۴}$$

$$[\Psi_2] = [\Psi_{21}\ \ \Psi_{22}\ \ \Psi_{23}\ \ \Psi_{24}\ ] \tag{۸۵-۴}$$

$$[\Psi_3] = [\Psi_{31}\ \ \Psi_{32}\ \ \Psi_{33}\ \ \Psi_{34}\ ] \tag{۸۶-۴}$$

$$[\Psi_4] = [\Psi_{41}\ \ \Psi_{42}\ \ \Psi_{43}\ \ \Psi_{44}\ ] \tag{۸۷-۴}$$

$$[G_1] = \big[N_{1,x}\ \ N_{2,x}\ \ N_{3,x}\ \ N_{4,x}\ \big] \tag{۸۸-۴}$$

$$[G_2] = \big[N_{1,y}\ \ N_{2,y}\ \ N_{3,y}\ \ N_{4,y}\ \big] \tag{۸۹-۴}$$

$$[G_3] = \left[\Phi_{1,x}\ \ \Phi_{2,x}\ \ \Phi_{3,x}\ \ \Phi_{4,x}\right] \qquad (۹۰\text{-}۴)$$

$$[G_4] = \left[\Phi_{1,y}\ \ \Phi_{2,y}\ \ \Phi_{3,y}\ \ \Phi_{4,y}\right] \qquad (۹۱\text{-}۴)$$

$$[G_5] = \left[\Psi_{11,x}\ \ \Psi_{12,x}\ \ \Psi_{13,x}\ \ \Psi_{14,x}\right] \qquad (۹۲\text{-}۴)$$

$$[G_6] = \left[\Psi_{21,x}\ \ \Psi_{22,x}\ \ \Psi_{23,x}\ \ \Psi_{24,x}\right] \qquad (۹۳\text{-}۴)$$

$$[G_7] = \left[\Psi_{31,x}\ \ \Psi_{32,x}\ \ \Psi_{33,x}\ \ \Psi_{34,x}\right] \qquad (۹۴\text{-}۴)$$

$$[G_8] = \left[\Psi_{41,x}\ \ \Psi_{42,x}\ \ \Psi_{43,x}\ \ \Psi_{44,x}\right] \qquad (۹۵\text{-}۴)$$

$$[G_9] = \left[\Psi_{11,y}\ \ \Psi_{12,y}\ \ \Psi_{13,y}\ \ \Psi_{14,y}\right] \qquad (۹۶\text{-}۴)$$

$$[G_{10}] = \left[\Psi_{21,y}\ \ \Psi_{22,y}\ \ \Psi_{23,y}\ \ \Psi_{24,y}\right] \qquad (۹۷\text{-}۴)$$

$$[G_{11}] = \left[\Psi_{31,y}\ \ \Psi_{32,y}\ \ \Psi_{33,y}\ \ \Psi_{34,y}\right] \qquad (۹۸\text{-}۴)$$

$$[G_{12}] = \left[\Psi_{41,y}\ \ \Psi_{42,y}\ \ \Psi_{43,y}\ \ \Psi_{44,y}\right] \qquad (۹۹\text{-}۴)$$

$$[G_{13}] = \left[N_{1,x}\ \dots\ N_{4,x}\ \ \Phi_{1,x}\ \dots\ \Phi_{4,x}\ \ \Psi_{11,x}\ \dots\ \Psi_{44,x}\right] \qquad (۱۰۰\text{-}۴)$$

$$[G_{14}] = \left[N_{1,y}\ \dots\ N_{4,y}\ \ \Phi_{1,y}\ \dots\ \Phi_{4,y}\ \ \Psi_{11,y}\ \dots\ \Psi_{44,y}\right] \qquad (۱۰۱\text{-}۴)$$

در این مرحله برای ساده‌سازی ماتریس‌ها به منظور سهولت در پیاده سازی الگوریتم و برنامه نویسی، معادلات را به صورتی جابه‌جا می‌کنیم که بردار مجهولات گرهی برای المان مبنای (e) که به طور کامل غنی‌سازی شده است به صورت زیر تبدیل شود:

$$\{\Delta\} = \{a_h^u, a_h^w, b_h^u, b_h^w, c_{hm}^u, c_{hm}^w\} \qquad (۱۰۲\text{-}۴)$$

در این صورت ماتریس‌های جرم و سفتی را می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

$$[M] = \int_{V(e)} r\rho [B_m]^T [B_m]\, dV \qquad (۱۰۳\text{-}۴)$$

$$[K] = \int_{V(e)} r [B_k]^T [D][B_k]\, dV \qquad (۱۰۴\text{-}۴)$$

که در این روابط خواهیم داشت:

$$[B_m] = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & N_4 & 0 & \dots & 0 & \emptyset_1 & \dots & \emptyset_4 & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11} & \dots & \Psi_{44} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_1 & \dots & N_4 & 0 & \dots & 0 & \emptyset_1 & \dots & \emptyset_4 & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11} & \dots & \Psi_{44} \end{bmatrix} \qquad (۱۰۵\text{-}۴)$$

$$[B_k] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & \dots & N_{4,x} & 0 & \dots & 0 & \emptyset_{1,x} & \dots & \emptyset_{4,x} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{44,x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_{1,y} & \dots & N_{4,y} & 0 & \dots & 0 & \emptyset_{1,y} & \dots & \emptyset_{4,y} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} \\ N_1/r & \dots & N_4/r & 0 & \dots & 0 & \emptyset_1/r & \dots & \emptyset_4/r & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11}/r & \dots & \Psi_{44}/r & 0 & \dots & 0 \\ N_{1,y} & \dots & N_{4,y} & N_{1,x} & \dots & N_{4,x} & \emptyset_{1,y} & \dots & \emptyset_{4,y} & \emptyset_{1,x} & \dots & \emptyset_{4,x} & \Psi_{11,y} & \dots & \Psi_{44,y} & \Psi_{11,x} & \dots & \Psi_{11,x} \end{bmatrix} \tag{۱۰۶-۴}$$

ماتریس خواص در حالت متقارن محوری همانند حالت کرنش صـفحه‌ای بیان می‌گردد که آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{۱۰۷-۴}$$

برای محاسبه ماتریس‌های $[B_k]$ و $[B_m]$ در صورت استفاده از المان‌های ایزوپارامتریک، ابتدا باید مشـتقات توابع شـکل نسـبت به‌دسـتگاه مختصـات محلی $(\xi\ ,\eta)$ تعیین و با استفاده از ماتریس ژاکوبی[۱] $[Ja]$ بـه‌دســتگاه مختصــات $(x\ ,y)$ انتقال یابند. ماتریس ژاکوبی به صــورت زیر تعریف می‌گردد[۴۹]:

$$[Ja] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix} \tag{۱۰۸-۴}$$

و هرکدام از مولفه‌های آن به‌صورت زیر بیان می‌گردند:

$$j_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} x_i N_{i,\xi} \tag{۱۰۹-۴}$$

$$j_{12} = \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^{4} y_i N_{i,\xi} \tag{۱۱۰-۴}$$

$$j_{21} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} x_i N_{i,\eta} \tag{۱۱۱-۴}$$

$$j_{22} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} y_i N_{i,\eta} \tag{۱۱۲-۴}$$

۱ *Jacobian matrix*

در این صورت می‌توان ماتریس $[B_k]$ را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$
[B_k]=\frac{1}{det(Ja)}\begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j_{21} & j_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -j_{21} & j_{11} & j_{22} & -j_{12} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\left[\begin{matrix}
N_{1,\xi} & \dots & N_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \emptyset_{1,\xi} & \dots & \emptyset_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\xi} & \dots & \Psi_{44,\xi} & 0 & \dots & 0 \\
N_{1,\eta} & \dots & N_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \emptyset_{1,\eta} & \dots & \emptyset_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\eta} & \dots & \Psi_{44,\eta} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & N_{1,\xi} & \dots & N_{4,\xi} & N_{1,\xi} & \dots & N_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 & \emptyset_{1,\xi} & \dots & \emptyset_{4,\xi} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\xi} & \dots & \Psi_{44,\xi} \\
0 & \dots & 0 & N_{1,\eta} & \dots & N_{4,\eta} & N_{1,\eta} & \dots & N_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 & \emptyset_{1,\eta} & \dots & \emptyset_{4,\eta} & 0 & \dots & 0 & \Psi_{11,\eta} & \dots & \Psi_{44,\eta} \\
\frac{N_1}{R_{nQ}}det(Ja) & \dots & \frac{N_4}{R_{nQ}}det(Ja) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\emptyset_1}{R_{nQ}}det(Ja) & \dots & \frac{\emptyset_4}{R_{nQ}}det(Ja) & 0 & \dots & 0 & \frac{\Psi_{11}}{R_{nQ}}det(Ja) & \dots & \frac{\Psi_{44}}{R_{nQ}}det(Ja) & 0 & \dots & 0
\end{matrix}\right] \tag{۱۱۳-۴}
$$

در این رابطه $det(Ja)$ دترمینان ماتریس ژاکوبی است.

R_{nQ} مختصات شعاعی نقطه گوسی مورد انتگرال‌گیری خواهد بود و از رابطه زیر می‌توان آن را محاسبه نمود:

$$
R_{nQ}=[Re]*[N]^T \tag{۱۱۴-۴}
$$

بردار $[N]$ در این معادله بردار توابع شکل است و Re بردار مختصات شعاعی گره‌های یک المان خواهد بود که آن را می‌توان برای یک المان چهارگرهی به‌صورت زیر بیان کرد:

$$
Re=[R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4] \tag{۱۱۵-۴}
$$

۴-۳ روش نیومارک

یکی از روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم روش نیومارک[۱] می‌باشد. این روش در طی پنجاه سال گذشته به طور گسترده برای حل این معادلات در دینامیک سازه‌ها و زمینه‌های مختلف مهندسی مکانیک بکار گرفته شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. پیاده‌سازی آسان و ویژگی‌های خوب این روش و مشتقات آن در خصوص میرایی عددی و بقای انرژی بسیار قابل توجه است. خانواده نیومارک پرکاربردترین روش‌ها برای حل معادله گسسته‌سازی شده است و شامل معادلات زیر می‌باشد[۵۰]:

$$\{\Delta_{n+1}\} = \{\Delta_n\} + \Delta t\{\dot{\Delta}_n\} + \Delta t^2(1/2 - \xi)\{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t^2\xi\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \quad (۴\text{-}۱۱۶)$$

$$\{\dot{\Delta}_{n+1}\} = \{\dot{\Delta}_n\} + \Delta t\ (1-\gamma)\{\ddot{\Delta}_n\} + \Delta t\ \gamma\{\ddot{\Delta}_{n+1}\} \quad (۴\text{-}۱۱۷)$$

که در این روابط پارامترهای ξ و γ مشخصات پایداری و دقت الگوریتم مورد نظر را تعیین می‌کنند. باید توجه داشت که اگر $\gamma = 0.5$ باشد میرایی ویسکوز بر روی پایداری اثری ندارد؛ همچنین هنگامی که $\gamma > 0.5$ شود اثر میرایی ویسکوز افزایش گام زمانی بحرانی روش‌های نیومارکی است که به صورت مشروط پایدار هستند[۵۰].

خانواده نیومارک شامل روش‌های ویژه‌ای است که خیلی شناخته شده و پرکاربرد هستند. روش شتاب متوسط[۲] یکی از پرکاربردترین این روش‌ها برای کابردهای دینامیک سازه‌ای می‌باشد که بدون قید و شرط پایدار است. در این روش مقادیر $\gamma = 0.5$ و $\eta = 0.25$ در نظر گرفته می‌شود[۵۰].

از آنجایی‌که برای روش المان‌محدود توسعه‌یافته با یک فرمول‌بندی نیومارک صریح، گام زمانی پایدار خیلی کوچک است[۵۱]، در این پایان‌نامه از روش ضمنی شتاب متوسط استفاده خواهد شد.

با استفاده از معادله (۴-۴۶) می‌توان شتاب را به‌صورت زیر به‌دست آورد[۴۹]:

$$\{\ddot{\Delta}_n\} = [M]^{-1}(\{F_n\} - [K]\{\Delta_n\}) \quad (۴\text{-}۱۱۸)$$

برای محاسبه $\{\Delta_{n+1}\}$ ابتدا طرفین معادله (۴-۱۱۶) را در ماتریس $[M]$ ضرب می‌کنیم سپس رابطه (۴-۱۱۸) را در آن جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}[M]\{\Delta_{n+1}\} = [M]\{\Delta_n\} + \Delta t[M]\{\dot{\Delta}_n\} + \Delta t^2(1/2 - \xi)[M]\{\ddot{\Delta}_n\} \\ + \Delta t^2\xi(\{F_{n+1}\} - [K]\{\Delta_{n+1}\})\end{aligned} \quad (۴\text{-}۱۱۹)$$

---

۱ *Newmark method*

۲ *Average acceleration method*

با ساده سازی این معادله می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد:

$$[K]'\{\Delta_{n+1}\} = \{F_{n+1}\}' \qquad (۱۲۰\text{-}۴)$$

که در آن:

$$[K]' = [K] + \frac{[M]}{\Delta t^2 \xi} \qquad (۱۲۱\text{-}۴)$$

$$\{F_{n+1}\}' = \frac{[M]}{\Delta t^2 \xi}\left(\{\Delta_n\} + \Delta t\{\dot{\Delta}_n\} + \Delta t^2(1/2 - \xi)\{\ddot{\Delta}_n\}\right) + \{F_{n+1}\} \qquad (۱۲۲\text{-}۴)$$

بنابراین مراحل حل مسئله با استفاده از روش نیومارک به صورت زیر خواهد بود:

۱- در زمان $t=0$ شرایط مرزی و اولیه مقادیر $\{\Delta_0\}$ و $\{\dot{\Delta}_0\}$ تعریف می‌گردد.

۲- با استفاده از معادله (۴-۱۱۸) می‌توان شتاب اولیه را نیز محاسبه کرد:

$$\{\ddot{\Delta}_0\} = [M]^{-1}(\{F_0\} - [K]\{\Delta_0\}) \qquad (۱۲۳\text{-}۴)$$

۳- با حل کردن معادله (۴-۱۲۰) می‌توان مقدار $\{\Delta_1\}$ را محاسبه نمود؛ زیرا که مقادیر نیروی اعمالی را برای تمام مراحل داریم و همچنین $\{\Delta_0\}$ ، $\{\dot{\Delta}_0\}$ و $\{\ddot{\Delta}_0\}$ در مراحل قبل به‌دست آمده است.

۴- معادله (۴-۱۱۶) برای به‌دست آوردن مقدار $\{\ddot{\Delta}_1\}$ حل می‌گردد:

$$\{\ddot{\Delta}_1\} = \frac{1}{\Delta t^2 \xi}\left(\{\Delta_1\} - \{\Delta_0\} - \Delta t\{\dot{\Delta}_0\} - \Delta t^2(1/2 - \xi)\{\ddot{\Delta}_0\}\right) \qquad (۱۲۴\text{-}۴)$$

۵- معادله (۴-۱۱۷) جهت به‌دست آوردن $\{\dot{\Delta}_1\}$ حل می‌شود.

۶- با استفاده از نتایج به‌دست آمده در مراحل ۴ و ۵ به مرحله سوم باز گشته و مقدار $\{\Delta_2\}$ را محاسبه کرده و این مراحل را تا رسیدن به جواب نهایی تکرار می‌نماییم.

فصل پنجم:

مکانیک شکست دینامیکی

۵-۱ مقدمه

مکانیک شکست[۱] شاخه‌ای از مکانیک جامدات می‌باشد که به بررسی ایجاد و گسترش ترک در جامدات (و سازه‌ها) و نحوه تأثیر آن بر تغییر شکل و احیاناً زوال سازه می‌پردازد. این موضوعات از هر دو منظر مکانیک محیط‌های پیوسته و محیط‌های گسسته مورد مطالعه قرار گرفته و می‌گیرد. نقطه آغازین این دانش آزمایشاتی بود که در دوران جنگ جهانی اول بوسیله گریفیث[۲] بر روی شیشه انجام گرفت و در سال ۱۹۲۱ میلادی در ژورنال انجمن سلطنتی به چاپ رسید[۵۲, ۵۳]. پیچیدگی‌های منحصر بفرد ترک این دانش را عرصه تلاش‌های تئوری و تجربی بسیاری کرده است و هنوز هم بسیاری از مسائل آن لاینحل باقی مانده است.

پدیده شکست در اجسام یکی از عمده‌ترین مسائلی است که انسان از زمان ساختن ساده‌ترین ابزارها با آن مواجه بوده و به دلیل پیشرفت تکنولوژی در عصر حاضر این مسئله از اهمیت بیشتری نسبت به گذشته برخوردار می‌باشد.

در واقع گسیختگی ناگهانی بسیاری از تجهیزات و سازه‌های صنعتی، نه تنها عواقب جانی ناگواری را در پی دارد، بلکه ضررهای چشمگیر اقتصادی را نیز فراهم می‌آورد. تحقیقات نشان داده است که قیمت ضررهای ناشی از شکست‌های ناگهانی در ایالات متحده آمریکا درسال ۱۹۸۷ بالغ بر ۱۱۹ میلیارد دلار گردیده که حدود ۴٪ تولید ناخالص ملی این کشور را تشکیل می‌دهد[۶۷].

مکانیک شکست دینامیکی[۳] زیر مجموعه مکانیک شکست است و شامل پدیده‌های شکستی می‌شود که نقش اینرسی ماده در آن‌ها اهمیت دارد. اثرات اینرسی می‌توانند به دلیل اعمال بارگذاری سریع بر روی یک جسم ترک خورده یا بر اثر گسترش ترک ایجاد شوند[۵۴].

در مسائل شکست دینامیکی میدان تنش موضعی اطراف ترک را می‌توان به تعیین ضرایب شدت تنش محدود کرد. در تئوری شکست، ضرایب شدت تنش[۴] برای تعیین رفتار شکست مورد استفاده قرار می‌گیرد. یعنی تعیین می‌کنند که ترک رشد خواهد کرد یا نه و اگر رشد می‌کند با چه سرعتی و چه جهتی. بنابراین تعیین دقیق ضرایب شدت تنش در مسائل شکست الاستودینامیک خطی بسیار مهم است.

---

۱ *Fracture mechanic*

۲ *Griffith(1893-1963)*

۳ *Dynamic fracture mechanic*

۴ *Stress Intensity Factor (SIF)*

۵-۲ قضیه گریفیث

او چنین بیان می‌کند که در ماده‌ای که حاوی تعدادی ترک بسیار ریز با طول معینی است، همین که مقدار تنش متمرکز در نوک ترک، حداقل به مقدار تنش لازم برای گسستن پیوندهای اتمی در آن موضع (استحکام کششی) برسد، شکست ظاهر می‌شود. با رشد ترک، سطح ترک افزایش می‌یابد. این مطلب بدین معنی است که برای ایجاد این سطح باید انرژی به کار برده شود. این مقدار انرژی از انرژی تغییر شکل کسب می‌شود[۵۵].

بنابراین فرضیه گریفیت علت پدیدار گشتن شکست ترد را وجود ترک‌ها و خراش‌های سطحی بسیار ریز (با اندازه بحرانی) و پائین بودن استحکام را در آن مواضع می‌داند. اما مواردی هم وجود دارد که بدون داشتن ترک‌های سطحی بسیار ریز شکست ترد در آن‌ها پدیدار می‌شود. بنابراین در این گونه مواد هم باید فعل و انفعالاتی صورت گیرد که موجب به وجود آمدن تمرکز تنش و فراتر رفتن موضعی مقدار تنش از استحکام کششی و در نتیجه ایجاد منشأ ترک شود. زنر و اشترو مکانیزم این فعل و انفعال را چنین بیان داشتند که در حین تغییر شکل پلا ستیکی نابجایی‌ها در پشت موانع (مانند مرزدانه‌ها و مرز مشترک دو قلویی‌ها) تجمع یافته و بدین ترتیب در زیر نیم صفحه‌های مربوط به این نابجایی‌ها ترک‌های بسیار ریزی ایجاد می‌شود .

۵-۳ انتگرال J

انتگرال J [۱] یکی از پارامترهایی است که در مکانیک شکست بسیار مورد توجه است. مفهوم انتگرال J اولین بار توسط رایس و بر پایه فرضیه انرژی معرفی شد[۳۰]. رایس تغییرات انرژی پتانسیل هنگام رشد ترک در مواد الاستیک غیر خطی را مورد بررسی قرار داد و انتگرال J را به عنوان انتگرال خطی مستقل از مسیر و با مقداری برابر با کاهش در انرژی پتانسیل و افزایش سطح ترک، فرمول‌بندی کرد. در واقع با فرض رفتار خطی ماده می‌توان انتگرال J را معادل نرخ رهایش انرژی در نظر گرفت. در این بخش تغییر خواص ماده در المان مبنا برای محاسبه انتگرال J در مواد تابعی نیز در نظر گرفته می‌شود.

با استفاده از دستگاه مختصات محلی نوک ترک با محور x_1 مماس بر لبه ترک و محور x_2 عمود بر آن می‌توان انتگرال J را بر روی یک مسیر کوچک صفر شونده حول نوک ترک به صورت زیر نوشت[۳۰].

$$J = \lim_{\Gamma \to 0} \int_{\Gamma} (W+T)dx_2 - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \tag{۵-۱}$$

[۱] *J-integral*

در این رابطه W و T به ترتیب چگالی انرژی کرنشی و چگالی انرژی جنبشی هستند و به صورت زیر تعریف می‌گردند[۵۶]:

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{۵-۲}$$

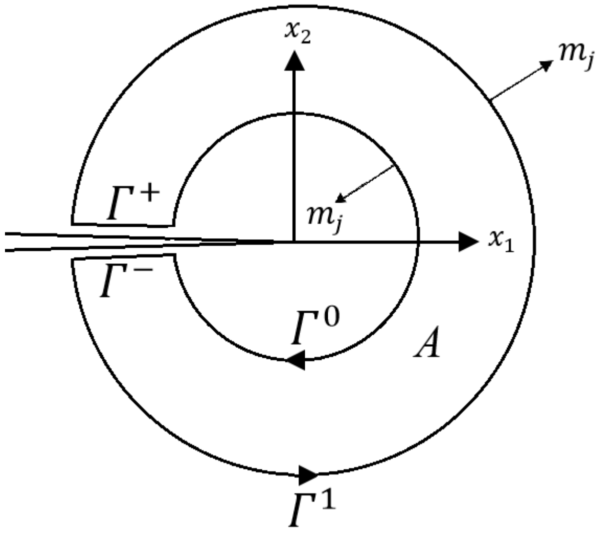
$$T = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t} \tag{۵-۳}$$

از آنجا که در این مبحث ما قصد بررسی ترک‌های متحرک را نخواهیم داشت، چگالی انرژی جنبشی را برابر با صفر در نظر می‌گیریم. در نتیجه انتگرال J را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد[۵۷, ۵۸]:

$$J = \lim_{\Gamma\to 0}\int_{\Gamma}\left(W\delta_{1j} - \sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right)n_j d\Gamma \tag{۵-۴}$$

شکل معادله بالا برای تحلیل‌های عددی مناسب نیست؛ زیرا محاسبه تنش‌ها و کرنش‌ها در امتداد یک مسیر کوچک به سمت صفر میل می‌کند، امکان پذیر نمی‌باشد. یک مسیر بسته‌ی Γ^*، ($\Gamma^* = \Gamma^0 + \Gamma^+ + \Gamma^- + \Gamma^1$) مطابق با شکل ۵-۱ در نظر گرفته می‌شود. با حدگیری از معادله بالا و ساده کردن آن می‌توان انتگرال J را در امتداد این مسیر به صورت زیر نوشت[۳۰, ۳۷]:

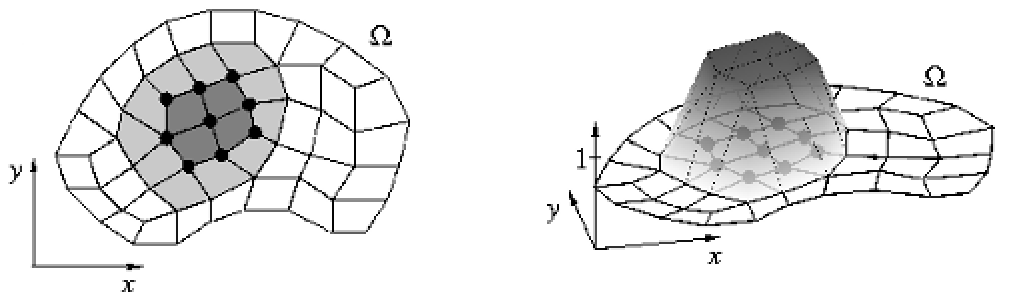
$$J = \int_{\Gamma^*}\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W\delta_{1j}\right)qm_j d\Gamma - \int_{\Gamma^- + \Gamma^+}\sigma_{2i}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}q d\Gamma \tag{۵-۵}$$



شکل ۵-۱- مسیر انتگرال J اطراف نوک ترک[۳۰]

که در اینجا m_j بردار یکه و عمود رو به خارج کانتور Γ می‌باشد (یعنی $m_j = n_j$ روی Γ^1 و $m_j = -n_j$ روی Γ^0)[۳۰, ۳۷]. از آنجا که سطوح ترک عاری از تنش هستند، بنابراین $\sigma_{2i} = 0$

اســـت. یعنی هنگامی که روی ســـطح ترک بارگذاری نداریم، انتگرال دوم در معادله بالا حذف خواهد شد[۵۸]. همچنین تابع وزنی q تابع دلخواهی است که مقدار آن بر روی Γ_0 برابر با یک و بر روی Γ_1 برابر با صفر است[۵۹]. این تابع مطابق با شکل ۵-۲ بر روی ناحیه انتگرال‌گیری تعریف می‌شود.



شکل ۵-۲- تابع وزنی q

با اعمال تئوری دیورژانس می‌توان انتگرال J را به صورت زیر نوشت :

$$J = \int_A \left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W\delta_{1j}\right)\frac{\partial q}{\partial x_j}dA + \int_A \left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W\delta_{1j}\right)_{,j} qdA \qquad (۶-۵)$$

در این رابطه انتگرال دوم برای مواد همگن برابر با صـفر است [۶۰]. میان انتگرال J در فضای دوبعدی و انتگرال J در فضای سه‌بعدی رابطه زیر برقرار است[۶۰]:

$$J = \frac{J^S}{\int_{L_C} q(s)ds} \qquad (۷-۵)$$

که در این رابطه J^S انتگرال J در فضـای ســه‌بعدی است، q همان تابع وزنی و L_C مسیر نوک ترک خواهد بود.

۴-۵ انتگرال برهمکنش

با محاســبه انتگرال J نمی‌توان مقادیر ضــرایب شــدت تنش مد I و مد II را به طور جداگانه محاسبه کرد. یایو و همکاران[۶۱] روش انتگرال برهمکنش[۱] را برای این منظور پیشنهاد کردند که در آن از جمع آثار دو حالت ســینماتیکی قابل قبول از یک جســم برای اســتخراج ضرایب شدت تنش مد ترکیبی اســتفاده می‌شـود. انتگرال برهمکنش در واقع عبارت برهمکنش دو حالت بارگذاری مستقل و قابل قبول برای ســازه حاوی ترک اســت که در انتگرال‌های پایســتار الاستیسیته پدید می‌آید. انتگرال برهمکنش در واقع یک فرمول‌بندی دقیق اســت که با استفاده از آن می‌توان ضرایب شدت تنش را در مواد تابعی محاسبه نمود[۲۷].

[۱] *Interaction integral*

در این بخش انتگرال برهمکنش برای به‌دست آوردن ضرایب شدت تنش سه‌بعدی با استفاده از برهم نهی میدان‌های واقعی و کمکی در انتگرال J مستقل از مسیر فرمول‌بندی شده و با استفاده از فرمول‌بندی غیر تعادلی[۱] به‌دست می‌آید.

اکنون دو میدان واقعی $(u\ ,\ \varepsilon\ ,\ \sigma)$ و کمکی $(u^{aux}\ ,\ \varepsilon^{aux}\ ,\ \sigma^{aux})$ را در نظر می‌گیریم. انتگرال J برای میدان‌های برهم‌نهی شده در فضای سه‌بعدی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} J^s = \int_V \Big(& (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}) \\ & - 0.5(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux})\delta_{1j}\Big) q_{,j} dV \\ + \int_V \Big(& (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{aux})(u_{i,1} + u_{i,1}^{aux}) \\ & - 0.5(\sigma_{ik} + \sigma_{ik}^{aux})(\varepsilon_{ik} + \varepsilon_{ik}^{aux})\delta_{1j}\Big)_{,j} q dV \end{aligned} \tag{۸-۵}$$

معادله بالا را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه نمود[۵۷, ۶۰]:

$$J^s = \bar{J} + J^{aux} + MI \tag{۹-۵}$$

که در این رابطه $\bar{J}$ و J^{aux} به ترتیب انتگرال J سه‌بعدی برای میدان واقعی و میدان کمکی هستند و MI انتگرال برهمکنش (انتگرال M) است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\bar{J} = \int_V (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j}) q_{,j} dV + \int_V (\sigma_{ij} u_{i,1} - W\delta_{1j})_{,j} q dV \tag{۱۰-۵}$$

$$\begin{aligned} J^{aux} = & \int_V (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j}) q_{,j} dV \\ & + \int_V (\sigma_{ij}^{aux} u_{i,1}^{aux} - W^{aux}\delta_{1j})_{,j} q dV \end{aligned} \tag{۱۱-۵}$$

$$\begin{aligned} MI = & \int_V (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{MI}\delta_{1j}) q_{,j} dV \\ & + \int_V (\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{MI}\delta_{1j})_{,j} q dV \end{aligned} \tag{۱۲-۵}$$

در این روابط W^{aux} چگالی انرژی کرنشی میدان‌های کمکی و W^{MI} تابع چگالی انرژی کرنشی مکانیکی برهمکنش هستند و داریم[۵۸]:

$$W^{aux} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij}^{aux} \tag{۱۳-۵}$$

[۱] *Non-equilibrium*

$$W^{MI} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}\right) \tag{۵-۱۴}$$

در نهایت با باز کردن ترم‌های معادله بالا می‌توان انتگرال برهمکنش را به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} MI = &\int_V \left(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1} - \frac{1}{2}\sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}\delta_{1j} \right. \\ &\left. \qquad - \frac{1}{2}\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{aux}\delta_{1j}\right) q_{,j}dV \\ &+ \int_V \left(\sigma_{ij,j}u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}u_{i,1j}^{aux} + \sigma_{ij,j}^{aux}u_{i,1} + \sigma_{ij}^{aux}u_{i,1j} - \frac{1}{2}\sigma_{ij,1}^{aux}\varepsilon_{ij} \right. \\ &\left. \qquad - \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij,1} - \frac{1}{2}\sigma_{ij,1}\varepsilon_{ij}^{aux} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1}^{aux}\right) qdV \end{aligned} \tag{۵-۱۵}$$

۵-۵ میدان‌های کمکی

بکارگیری انتگرال برهمکنش نیازمند کاربرد میدان‌های کمکی جابه‌جایی u^{aux}، کرنش ε^{aux} و تنش σ^{aux} است. میدان‌های کمکی مذکور برحسب نوع کمیت مورد محاسبه –ضریب شدت تنش و یا تنش T- تعریف می‌شوند.

انتخاب‌های مختلفی برای میدان‌های کمکی وجود دارد. میدان‌های کمکی را می‌توان به صورت تحلیلی و یا عددی در نظر گرفت. به طور معمول میدان‌های کمکی انتخابی هر سه قانون مکانیک جامدات را ارضا می‌کنند. در حال حاضر، میدان‌های کمکی با این خصوصیت، به طور عددی برای مواد تابعی با پروفیل خاص به‌دست می‌آیند و کاربرد چندانی ندارند. برای مواد تابعی نیز معمولا از میدان‌های تحلیلی نوک ترک استفاد می‌شود که برای مواد همگن تحت بارگذاری مکانیکی به‌دست آمده است. اما کاربرد میدان‌های کمکی مواد همگن که به طور تحلیلی به‌دست می‌آیند ، منجر به نقض حداقل یکی از قوانین مکانیک جامدات می‌شود. میدان‌های انتخابی مذکور برای بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی به صورت استاتیکی و دینامیکی قابل کاربرد می‌باشند.

در مواد ناهمگن به دلیل اختلاف بین خواص ماده در نوک ترک و فواصل دورتر از نوک ترک، سه فرمول‌بندی متفاوت ارائه شده است که عبارتند از فرمول‌بندی غیر تعادلی[۱]، ناسازگاری[۲] و تانسور تشکیل دهنده ثابت[۳]. در این تحقیق فرمول‌بندی غیر تعادلی برای محاسبه انتگرال برهمکنش و ضرایب شدت تنش در مواد تابعی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

---

۱ *Non-equilibrium*

۲ *Incompatibility*

۳ *Constant constitutive tensor*

۵-۶ فرمول‌بندی غیر تعادلی

در این فرمول‌بندی جابه‌جایی‌ها و کرنش‌های کمکی به صــورت مســتقیم از حل‌های مجانبی مانند حل ویلیامز[1] به‌دســت می‌آیند و تنش‌های کمکی به کمک مدل ســاختمانی ناهمگن محاســبه می‌شوند.

در اینجـا میـدان‌هـای جـابه‌جایی کمکی برای مد یک به صــورت زیر در نظر گرفته خواهند شد[۶۰]:

$$u_1^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{2\mu_{tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} - 1 + 2\,sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad (۵-۱۶)$$

$$u_2^{aux} = \frac{K_I^{aux}}{2\mu_{tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} + 1 - 2\,cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad (۵-۱۷)$$

این میدان‌ها برای مد دوم نیز به صورت زیر نوشته می‌شوند[۶۰]:

$$u_1^{aux} = \frac{K_{II}^{aux}}{2\mu_{tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} + 1 + 2\,cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad (۵-۱۸)$$

$$u_2^{aux} = \frac{-K_{II}^{aux}}{2\mu_{tip}}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\left[\kappa_{Tip} - 1 - 2\,sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \quad (۵-۱۹)$$

که در این روابط (r,φ) مختصات قطبی محلی نوک ترک هستند، μ_{tip} مدول برشی در نوک ترک و κ_{Tip} برای حالت کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری به صورت زیر بیان می‌گردد[۵۳]:

$$\kappa_{Tip} = 3 - 4\nu_{Tip} \quad (۵-۲۰)$$

از آنجایی‌که میدان‌های واقعی از کمیت‌های به‌دســت آمده از شــبیه‌ســازی عددی اســتفاده می‌کنند، شرط تعادل و سازگاری را ارضا می‌نمایند. در فرمول‌بندی غیر تعادلی برای میدان‌های کمکی ترک ایستا شرط تعادل $(\sigma_{ij,i}^{aux} \neq 0)$ ارضا نمی‌شود[۶۲]. در حالی که جابه‌جایی و کرنش سازگارند، یعنی کرنش‌های کمکی را می‌توان به‌صــورت زیر با استفاده از جابه‌جایی‌های کمکی به‌دست آورد[۵۷, ۶۰]:

$$\varepsilon_{ij}^{aux} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{aux} + u_{j,i}^{aux}\right) \quad (۵-۲۱)$$

میدان تنش کمکی نیز از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۲۷, ۳۲, ۶۰]:

$$\sigma_{ij}^{aux} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{ij}^{aux} \quad (۵-۲۲)$$

[1] *Williams' solution*

که در این رابطه C_{ijkl} همان درایه‌های ماتریس الاستیسیته هستند و به صورت زیر نمایش داده می‌شوند[۶۰]:

$$C_{ijkl}(x) = \begin{bmatrix} \lambda(x)+2\mu(x) & \lambda(x) & \lambda(x) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(x) & \lambda(x)+2\mu(x) & \lambda(x) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(x) & \lambda(x) & \lambda(x)+2\mu(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu(x) \end{bmatrix} \quad (۲۳\text{-}۵)$$

برای فرمول‌بندی غیر تعادلی روابط زیر را می‌توان نوشت که برای ساده سازی انتگرال برهمکنش مورد استفاده قرار می‌گیرند[۳۰, ۳۷, ۵۸, ۶۰, ۶۳]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i - B_i \quad (۲۴\text{-}۵)$$

$$\sigma_{ij}u^{aux}_{j,1i} = \sigma_{ij}\varepsilon^{aux}_{ij,1} \quad (۲۵\text{-}۵)$$

$$\sigma_{ij}\varepsilon^{aux}_{ij} = C_{ijkl}(x)\varepsilon_{kl}\varepsilon^{aux}_{ij} = \sigma^{aux}_{kl}\varepsilon_{kl} = \sigma^{aux}_{ij}\varepsilon_{ij} \quad (۲۶\text{-}۵)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,1}\varepsilon^{aux}_{ij} &= C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}\varepsilon^{aux}_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl,1}\varepsilon^{aux}_{ij} \\ &= C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}\varepsilon^{aux}_{ij} + \sigma^{aux}_{ij}\varepsilon_{ij,1}\end{aligned} \quad (۲۷\text{-}۵)$$

$$\sigma^{aux}_{ij,1}\varepsilon_{ij} = C_{ijkl,1}\varepsilon^{aux}_{kl}\varepsilon_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon^{aux}_{kl,1}\varepsilon_{ij} = C_{ijkl,1}\varepsilon^{aux}_{kl}\varepsilon_{ij} + \sigma_{ij}\varepsilon^{aux}_{ij,1} \quad (۲۸\text{-}۵)$$

اکنون با استفاده از رابطه‌های بالا می‌توان انتگرال برهمکنش را ساده سازی نمود[۶۰]:

$$\begin{aligned}MI = &\int_V \left(\sigma_{ij}u^{aux}_{i,1} + \sigma^{aux}_{ij}u_{i,1} - \sigma_{ik}\varepsilon^{aux}_{ik}\delta_{1j}\right)q_{,j}dV \\ &+ \int_V \left(\rho\ddot{u}_i u^{aux}_{i,1} + \sigma^{aux}_{ij,j}u_{i,1} - C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}\varepsilon^{aux}_{ij}\right)qdV\end{aligned} \quad (۲۹\text{-}۵)$$

لازم به ذکر است که در این رابطه عبارت $\sigma^{aux}_{ij,j}u_{i,1}$ ناشی از فرمول‌بندی غیر تعادلی ظاهر شده است و همچنین عبارت $\sigma_{ij,j}u^{aux}_{i,1}$ ناشی از اثرات دینامیکی است و $C_{ijkl,1}\varepsilon_{kl}\varepsilon^{aux}_{ij}$ به دلیل ناهمگنی ماده تابعی به وجود آمده است [۲۷, ۳۰, ۶۰].

از آنجایی‌که محاسبه عددی سایر کمیت‌ها (جابجایی‌ها، کرنش‌ها، تنش‌ها و...) در روش المان‌محدود توسعه‌یافته بر مبنای دستگاه مختصات سراسری است، ابتدا باید انتگرال M در دستگاه مختصات سراسری محاسبه و سپس جهت محاسبه ضرایب شدت تنش به‌دستگاه مختصات محلی انتقال یابد. مولفه‌های انتگرال برهمکنش در دستگاه مختصات سراسری به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(MI_n)_g = \int_V \left(\sigma_{ij} u_{i,n}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,n} - \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux} \delta_{nj}\right) \frac{\partial q}{\partial X_j} dV + \int_V \left(\rho \ddot{u}_i u_{i,n}^{aux} + \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,n} - C_{ijkl,n} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{aux}\right) q dV \quad (۵-۳۰)$$

$$n = 1,2$$

در این رابطه X_j مؤلفه‌های دستگاه مختصات سراسری هستند. انتگرال برهمکنش در دستگاه مختصات محلی نوک ترک را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد[۶۲]:

$$MI_l = (MI_1)_g cos\omega + (MI_2)_g sin\omega \quad (۵-۳۱)$$

در این رابطه ω زاویه بین دستگاه مختصات سراسری و محلی در نوک ترک است. برای به‌دست آوردن مقادیر عددی رابطه انتگرال برهمکنش می‌توان از روش انتگرال‌گیری گوسی استفاده نمود. بنابراین رابطه انتگرال برهمکنش را می‌توان به‌صورت زیر نوشت[۶۰]:

$$(MI_n)_g = \sum_{el.} \sum_{G.P.} 2\pi r_{gp} \left[\left(\sigma_{ij} u_{i,n}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,n} - \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^{aux} \delta_{nj}\right) \frac{\partial q}{\partial X_j} + \left(\rho \ddot{u}_i u_{i,n}^{aux} + \sigma_{ij,j}^{aux} u_{i,n} - C_{ijkl,n} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}^{aux}\right) q\right] det(J) w_{gp} \quad (۵-۳۲)$$

در این رابطه سیگمای اول شامل تمامی المان‌های داخل ناحیه انتگرال‌گیری و سیگمای دوم شامل تمامی نقاط گوسی مربوط به توابع وزنی w_{gp} در داخل هر المان می‌باشد. همچنین r_{gp} مختصات شعاعی نقطه گوسی و $det(J)$ دترمینان ماتریس ژاکوبی است که مختصات (X_1, X_2) را به مختصات (ξ, η) مرتبط می‌کند.

تابع q را می‌توان با استفاده از توابع شکل در یک المان برای یک نقطه گوسی به‌دست آورد [۵۹, ۶۳, ۶۴].

$$q = \sum_{i=1}^{m} N_i q_i \quad (۵-۳۳)$$

۵-۷ محاسبه ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال برهمکنش و ضرایب شدت تنش برای ترک در حالت کرنش صفحه‌ای به‌صورت زیر بیان می‌گردد[۳۷, ۵۸, ۶۳]:

$$MI_l = \frac{2}{E^*}\left(K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}\right) \quad (۵-۳۴)$$

در این معادله E^* برای مسائل متقارن محوری مانند مسائل کرنش صفحه ای از رابطه زیر محاسبه می گردد[۷, ۸, ۱۶]:

$$E^* = \frac{E_{tip}}{(1 - \nu_{tip}^2)} \tag{۳۵-۵}$$

که در این رابطه E_{tip} و ν_{tip} به ترتیب بیانگر مدول یانگ و نسبت پواسون در نوک ترک هستند. از این رابطه برای مسائل متقارن محوری نیز می‌توان استفاده کرد.

برای محاسبه K_I، در رابطه بالا $K_I^{aux} = 1$ و $K_{II}^{aux} = 0$ را قرار می‌دهیم در نتیجه K_I را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد [۲۷, ۵۷, ۵۸]:

$$K_I = \frac{E^*}{2} MI_l^{(1)} \tag{۳۶-۵}$$

همچنین برای محاسبه K_{II} مقادیر $K_I^{aux} = 0$ و $K_{II}^{aux} = 1$ را در رابطه بالا جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$K_{II} = \frac{E^*}{2} MI_l^{(2)} \tag{۳۷-۵}$$

لازم به توضیح است که مقادیر $MI_l^{(1)}$ و $MI_l^{(2)}$ به ترتیب با قرار دادن میدان کمکی مد اول (روابط (۵-۱۶) و (۵-۱۷)) و میدان کمکی مد دوم (رابطه های (۵-۱۸) و (۵-۱۹)) در انتگرال برهمکنش به‌دست می‌آید.

فصل ششم:

تحلیل‌های عددی

۶-۱ ویژگی‌های برنامه نوشته شده

برنامه نوشته شده در این تحقیق دارای ۳۱ زیربرنامه است که هرگونه تغییر برای کاربردهای دیگر را ساده می‌سازد. ویژگی‌های برنامه نوشته شده در این تحقیق عبارت‌اند از:

۱- یک زیر برنامه برای تولید شبکه نوشته شده است که قادر به تولید شبکه برای یک هندسه مستطیلی با ابعاد دلخواه و تعداد المان دلخواه است. در این زیر برنامه برای هرکدام از خواص ماده با توجه به پروفیل تغییرات خاصیت، ماتریسی جداگانه به وجود می‌آید که هر سطر از این ماتریس‌ها بیان کننده خواص در چهار گره یک المان خواهد بود.

۲- این برنامه قادر خواهد بود مواد همگن و تابعی با خواص دلخواه را مدل سازی نماید و هر نوع پروفیل تغییر خواص ماده را برای مواد تابعی لحاظ کند.

۳- در برنامه نوشته شده امکان ایجاد بارگذاری‌های دینامیکی و استاتیکی در سطح‌های مختلف وجود دارد.

۴- برنامه دارای خروجی‌های گرافیکی بوده و کلیه کانتورهای جابه‌جایی، تنش‌ها و کرنش‌ها و همچنین شبکه‌ی شامل المان‌های غنی‌شده و شبکه تغییر یافته در هر گام زمانی را ذخیره و در دسترس قرار می‌دهد.

۵- امکان تحلیل ترک‌های زاویه دار نیز در برنامه به کاربر داده شده است.

۶-۲ بررسی صحت کد نوشته شده

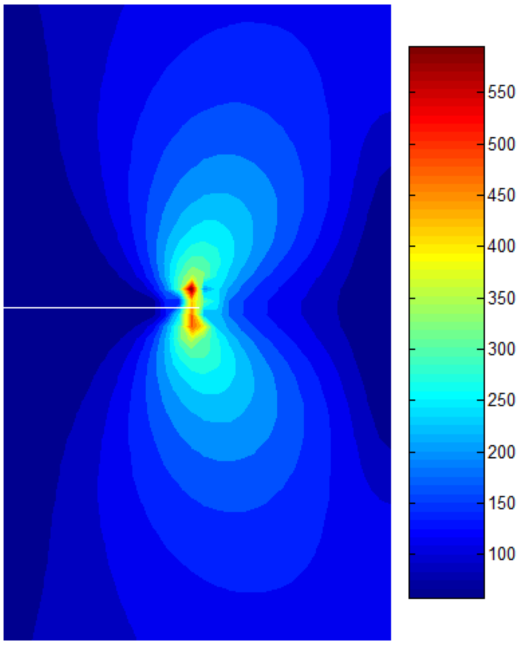
۶-۲-۱ لوله‌ی دارای ضخامت کم و ترک محیطی داخلی تحت کشش یکنواخت

گربنر و استراسمیر[۱۴] لوله‌ای را با طول بی نهایت که یک ترک سراسری در درون آن ایجاد شده بود را مورد بررسی قرار دادند؛ آن‌ها لوله را تحت بارگذاری محوری قرار دادند و مقدار K_I را برابر با $۵۲۰ N\ mm^{-3/2}$ به‌دست آوردند. در مقاله‌ی آن‌ها مقدار شعاع داخلی R_i= ۵۰mm، ضخامت لوله t = ۵mm، طول ترک ۲/۵mm و همچنین نسبت پواسون و مدول یانگ نیز به ترتیب ν = ۰/۳ ، E = ۲*۱۰$^{۵}N/mm^2$ در نظر گرفته شده‌اند و تنش محوری وارد بر لوله ۱۰۵N/mm^2 می‌باشد. بعد از جایگذاری مقادیر بالا در برنامه و اجرای برنامه، مقدار K_I را به‌دست آوردیم که نتیجه به‌دست آمده به قرار زیر است:

$$K_I = 530.63\ \ N\ mm^{-3/2}$$

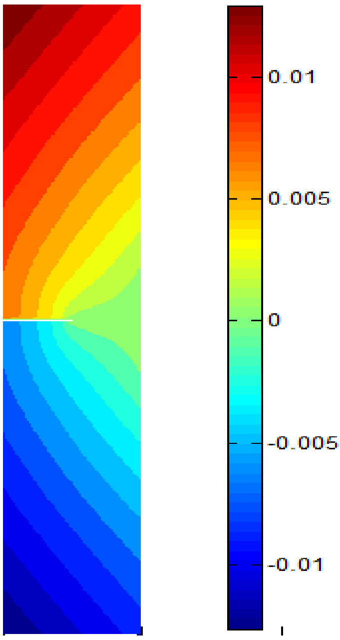
همانگونه که مشاهده می‌شود، مقدار ضریب شدت تنش در مود I شکست بسیار نزدیک به مقدار مقاله مورد نظر است که این موضوع بیان کننده صحت نتایج برنامه نوشته شده می‌باشد.

کانتور تنش ون‌میسز به وجود آمده در اطراف نوک ترک مشابه با شکل ۶-۱ است.



شکل ۶-۱- تنش ون‌میسز اطراف نوک ترک برحسب مگاپاسکال

کانتور جابه‌جایی در راستای محور zها نیز همانند شکل ۶-۲ به‌دست می‌آید.



شکل ۶-۲- کانتور جابه‌جایی در راستای محوری بر حسب میلی‌متر

۶-۲-۲ ترک دایره‌ای درون استوانه

تران و جنیات[۱۵] یک ترک دایره‌ای را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها مساله را برای نسبت طول ترک به شعاع استوانه (a/W = ۰/۲) حل نمودند. آن‌ها شعاع استوانه را برابر ۱۰m ، ارتفاع را برابر ۲۰m، مدول الاستیسیته را ۲۱۰ GPa و نسبت پواسون را برابر ۰/۳ در نظر گرفتند.

آن‌ها با استفاده از روش عددی ضریب شدت تنش مود I را برای تنش محوری با بزرگی ۱MPa برابر ۱/۶۵۶$MPa.m^{1/2}$ محاسبه نمودند؛ در حالی که در حل تحلیلی این مساله ضریب شدت‌تنش برابر ۱/۵۹۶$MPa.m^{1/2}$ است.

مقدار ضریب شدت تنش به‌دست آمده توسط برنامه نوشته شده در این تحقیق با یک شبکه متشکل از ۸۱ در ۱۶۱ المان برابر است با ۱/۵۳۵۷$MPa.m^{1/2}$ که بار دیگر درستی و دقت برنامه نوشته شده را نوید می‌دهد.

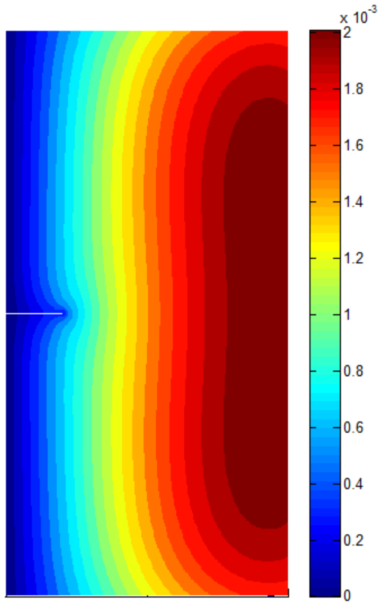
همچنین در این مقاله آن‌ها ضرایب شدت تنش را برای بارگذاری دورانی نیز به‌دست آوردند. مقدار ضریب شدت تنش برای دوران ۱۵۰ دور بر دقیقه (۱۵۰RPM) و همزمان با آن بارگذاری ۱MPa مقدار ۲۲/۰۳۵$MPa.m^{1/2}$ به‌دست آمد. در حالی که با برنامه نوشته شده در این پایان‌نامه مقدار ۲۳/۰۷۶$MPa.m^{1/2}$ به‌دست آمد.

لازم به ذکر است که در بارگذاری دورانی مقدار دور بر دقیقه باید در $\frac{2\pi}{60}$ ضرب گردد و سپس مقدار رابطه (۶-۱) روی هرگره از یک المان جایگذاری گردد:

$$F = \frac{2\pi A\bar{r}}{4}\bar{r}\rho\omega^2 \qquad (۶\text{-}۱)$$

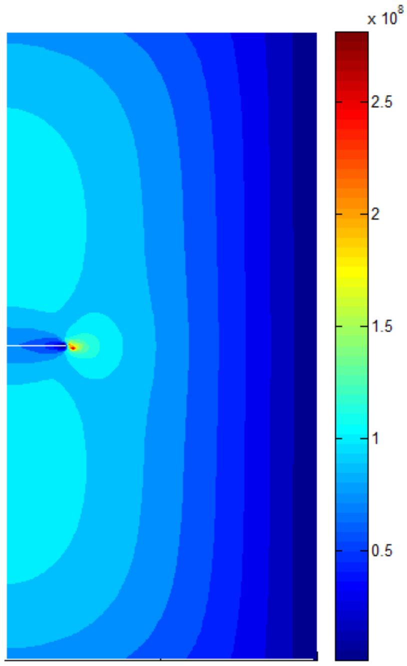
که در این رابطه $\bar{r}$ فاصله شعاعی مرکز دوران، A سطح مقطع یک المان، ω سرعت زاویه‌ای و ρ چگالی المان است که با استفاده از رابطه (۳-۹) محاسبه می‌گردد.

کانتور جابه‌جایی در راستای محور شعاعی در شکل ۶-۳ نمایش داده شده است.



شکل ۶-۳- کانتور جابه‌جایی در راستای محور شعاعی بر حسب متر

همچنین کانتور تنش شعاعی نیز به صورت شکل ۶-۴ به‌دست می‌آید.



شکل ۶-۴- کانتور تنش شعاعی برای ترک دایره‌ای بر حسب پاسکال

۶-۲-۳ ترک دایره‌ای درون استوانه

جیا[۶۵] ضریب شدت تنش بی بعد شده را برای یک ترک دایره‌ای به‌دست آورد. استوانه از دو طرف تحت تنش قرار داده شده بود. مقدار تنش اعمالی برابر با ۱، مدول الاستیسیته ۲۰۰۰۰، نسبت پواسون ۰/۳، شعاع استوانه ۱، ارتفاع استوانه ۲/۸ و شعاع ترک ۰/۵ بود. مقدار ضریب شدت‌تنش بی‌بعد شده در این مقاله برابر با ۰/۶۸۱ به‌دست آمده است.

بعد از وارد کردن اطلاعات داده شده در بالا و اجرای برنامه نوشته شده مقدار ضریب شدت تنش ۰/۷۸۶۱ به‌دست آمد که با استفاده از فرمول (۶-۲) بی بعد می‌شود:

$$k = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}} \tag{۶-۲}$$

که در این رابطه σ تنش وارد شده به استوانه و a شعاع ترک می‌باشد.

در نهایت بعد از بی بعد کردن ضریب شدت تنش، مقدار ۰/۶۲۷۲ به‌دست می‌آید که به مقدار به‌دست آمده در مرجع [۶۵] نزدیک می‌باشد.

۶-۲-۴ ترک دایره‌ای درون استوانه

اشراقی و سلطانی[۵] یک ترک دایره‌ای را درون یک استوانه مورد بررسی قرار دادند. در این استوانه که شعاع آن ۵۰ میلی‌متر و طول آن ۱۰۰ میلیمتر بود یک ترک دایره‌ای به شعاع ۵ میلی‌متر قرار داشت. بار کششی ۱۰ مگاپاسکال به این استوانه وارد می‌شد. آن‌ها ضریب شدت تنش تحلیلی را با استفاده از رابطه (۶-۳) برابر ۲۵/۲۷$MPa.mm^{1/2}$ به‌دست آوردند.

$$k = \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi a}F\left({}^{a}/_{b}\right) \tag{۶-۳}$$

که در این رابطه a شعاع ترک، b شعاع استوانه و تابع F توسط رابطه (۶-۴) تعریف می‌گردد:

$$F\left({}^{a}/_{b}\right) = \frac{1 - 0.5\left({}^{a}/_{b}\right) + 0.148\left({}^{a}/_{b}\right)^3}{\sqrt{1 - {}^{a}/_{b}}} \tag{۶-۴}$$

آن‌ها با استفاده از حل عددی مقدار ضریب شدت تنش را برابر با ۲۵/۲۳$MPa.mm^{1/2}$ به‌دست آوردند.

بعد از وارد کردن ابعاد و اجرای برنامه، مقدار ضریب شدت تنش با استفاده از برنامه نوشته شده و به کار بردن یک شبکه متشکل از ۷۵ در ۱۵۱ المان، مقدار ۲۴/۱۲$MPa.mm^{1/2}$ به‌دست آمد.

در جدول ۶-۱ می توانید خلاصه‌ای از نتایج برنامه را برای مسائل بالا مشاهده نمایید.

جدول ۶-۱- مقایسه نتایج برنامه

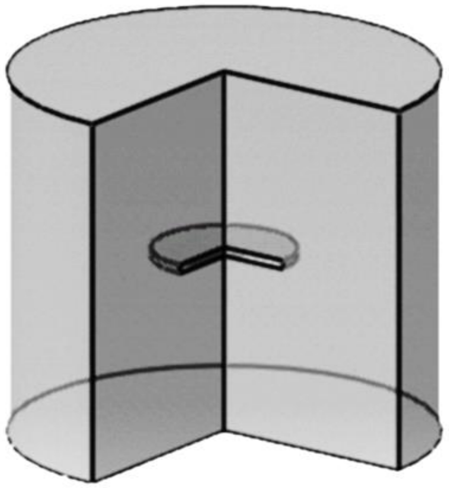
اشراقی	ترک دایره ای	بارگذاری محوری	تحلیلی	۲۵/۲۷		
			عددی	۲۵/۲۳	۲۴/۱۲	٪ ۴/۶
جیا	ترک دایره ای	بارگذاری محوری	عددی	۰/۶۸۱	۰/۶۲۷۲	٪ ۷/۹
تران	ترک دایره ای	بارگذاری محوری	تحلیلی	۱/۵۹۶		
			عددی	۱/۶۵۶	۱/۵۳۵۷	٪ ۳/۸
		بارگذاری محوری و دورانی	عددی	۲۲/۰۳۵	۲۳/۰۷۶	٪ ۴/۷
گربنر	ترک محیطی	بارگذاری محوری	عددی	۵۲۰	۵۳۰/۶۳	٪ ۲/۰۴

بعد از اطمینان از صحت نتایج به‌دست آمده توسط برنامه نوشته شده، سراغ حل مثال‌های مختلف می‌رویم.

۶-۳ مسائل حل شده در شرایط بارگذاری استاتیکی

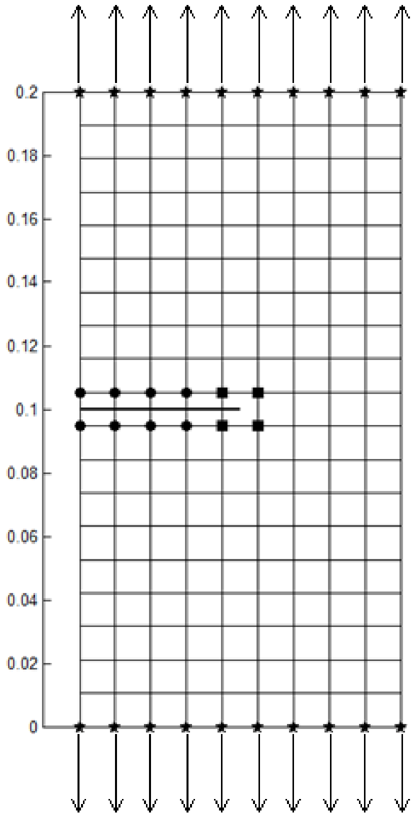
۶-۳-۱ تاثیر طول ترک بر ضریب شدت تنش در استوانه دارای ترک دایره‌ای

یک میله استوانه‌ای از جنس ماده تابعی شیشه/اپوکسی دارای یک ترک دایره‌ای مانند شکل ۶-۵ در نظر گرفته می‌شود. این استوانه تحت بارگذاری استاتیکی در راستای محوری قرار می‌گیرد و با تغییر طول ترک ضرایب شدت تنش محاسبه می‌شوند.



شکل ۶-۵- استوانه دارای ترک دایروی

در این مسئله شعاع استوانه W = ۰/۱m ارتفاع استوانه H = ۰/۲m هستند. آن را در سطح بالایی و پایینی تحت کشش یکنواخت σ = ۱MPa قرار می‌دهیم (شکل ۶-۶).



شکل ۶-۶- مربع‌ها گره‌های نوک ترک را نمایش می‌دهد و دایره‌ها گره‌های مسیر ترک را مشخص می‌کنند. همچنین گره‌هایی که با علامت ستاره مشخص شده‌اند، محل اعمال نیرو هستند.

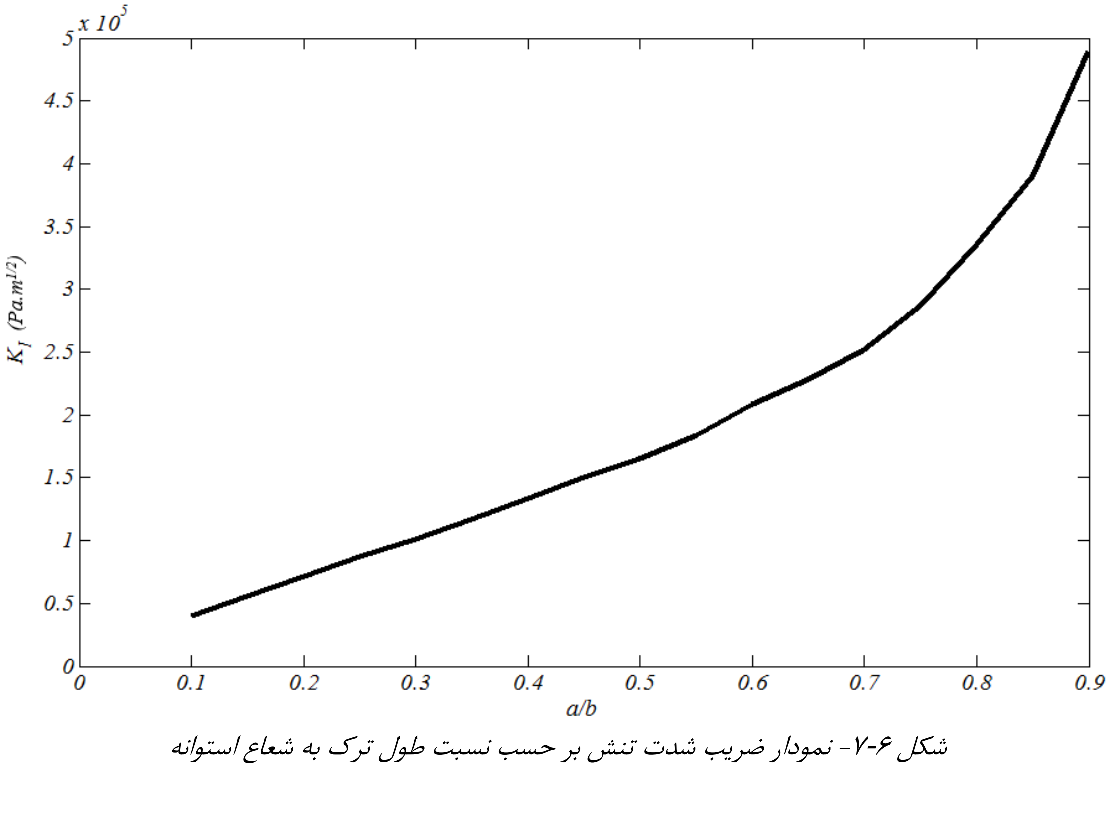
داخل این استوانه را اپوکسی و خارج آن را شیشه تشکیل می‌دهند. خواص این مواد در جدول ۶-۲ بیان شده است.

جدول ۶-۲- خواص مواد سازنده استوانه [۳۰]

ماده	مدول یانگ (GPa)	نسبت پواسون	چگالی Kg/m^3
اپوکسی	۳/۲	۰/۳۴	۱۱۷۵
شیشه	۷۰	۰/۲۳	۲۵۰۰

پارامتر تعیین‌کننده در معادله تغییر خواص برای این مساله مقدار ۰/۲ است و شبکه استفاده شده برای حل این مسئله متشکل از ۵۵ در ۱۰۵ المان مستطیلی چهار گرهی می‌باشد. برای محاسبه انتگرال برهمکنش یک مربع با ابعاد چهار المان طول و چهار المان ارتفاع در نظر گرفته شده است.

نمودار ضریب شدت تنش برای نسبت طول‌های مختلف ترک به شعاع استوانه در شکل ۶-۷ با واحد $(Pa.m^{1/2})$ نمایش داده شده است.

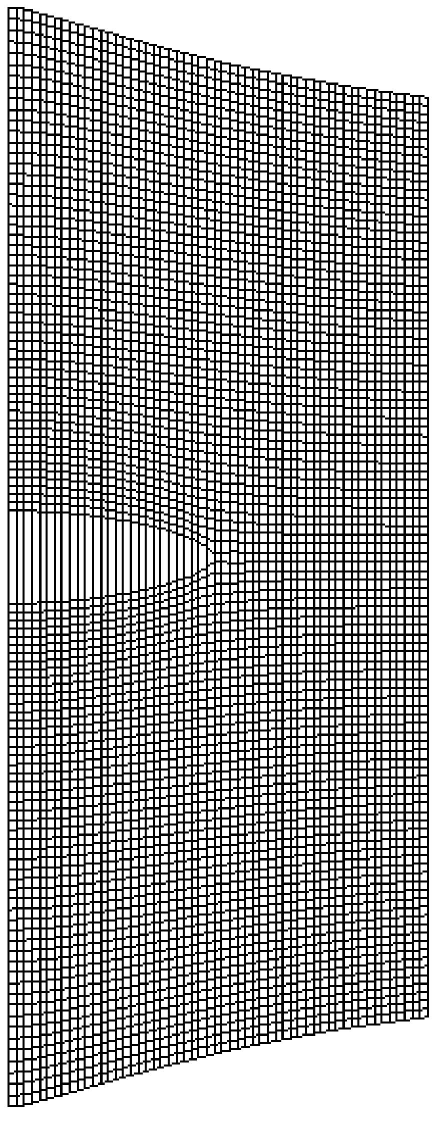


شکل ۶-۷- نمودار ضریب شدت تنش بر حسب نسبت طول ترک به شعاع استوانه

همانگونه که در نمودار شکل ۶-۷ مشاهده می‌گردد، با افزیش طول ترک و انتقال نوک ترک به سمت خارج استوانه، ضریب تمرکز تنش افزایش می‌یابد که این رفتار به دو دلیل می‌تواند توجیه شود؛ اول اینکه افزایش طول ترک باعث باز شدن بیشتر دهانه ترک می‌گردد و این رفتار باعث افزایش

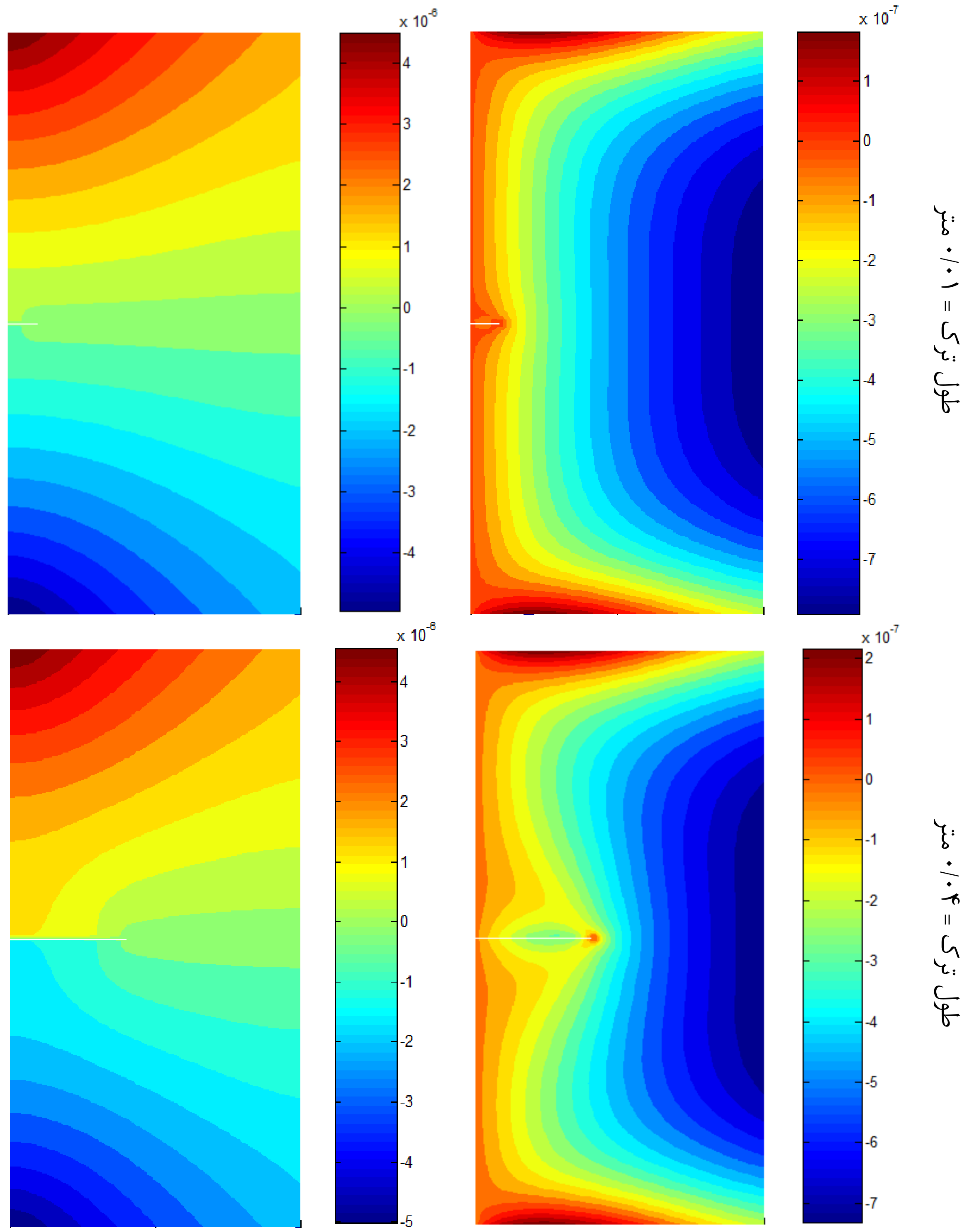
تنش‌ها در نوک ترک می‌گردد و در نتیجه ضریب شدت تنش نیز افزایش می‌یابد. نکته دوم در رابطه با این رفتار می‌تواند این نکته باشد که از آنجا که ماده بکار رفته در استوانه ماده تابعی است که در داخل استوانه نرم‌تر و در خارج استوانه سخت‌تر می‌گردد، هنگامی که نوک ترک به سطح خارجی استوانه نزدیک می‌شود، در واقع به سمت سفتی بیشتر حرکت می‌کند و این طبیعی خواهد بود که تنش در سطح خارجی استوانه بیشتر از درون آن باشد و لذا نوک ترک به سمتی پیش می‌رود که تنش بیشتری به آن وارد می‌شود و در نتیجه ضریب تمرکز تنش افزایش می‌یابد.

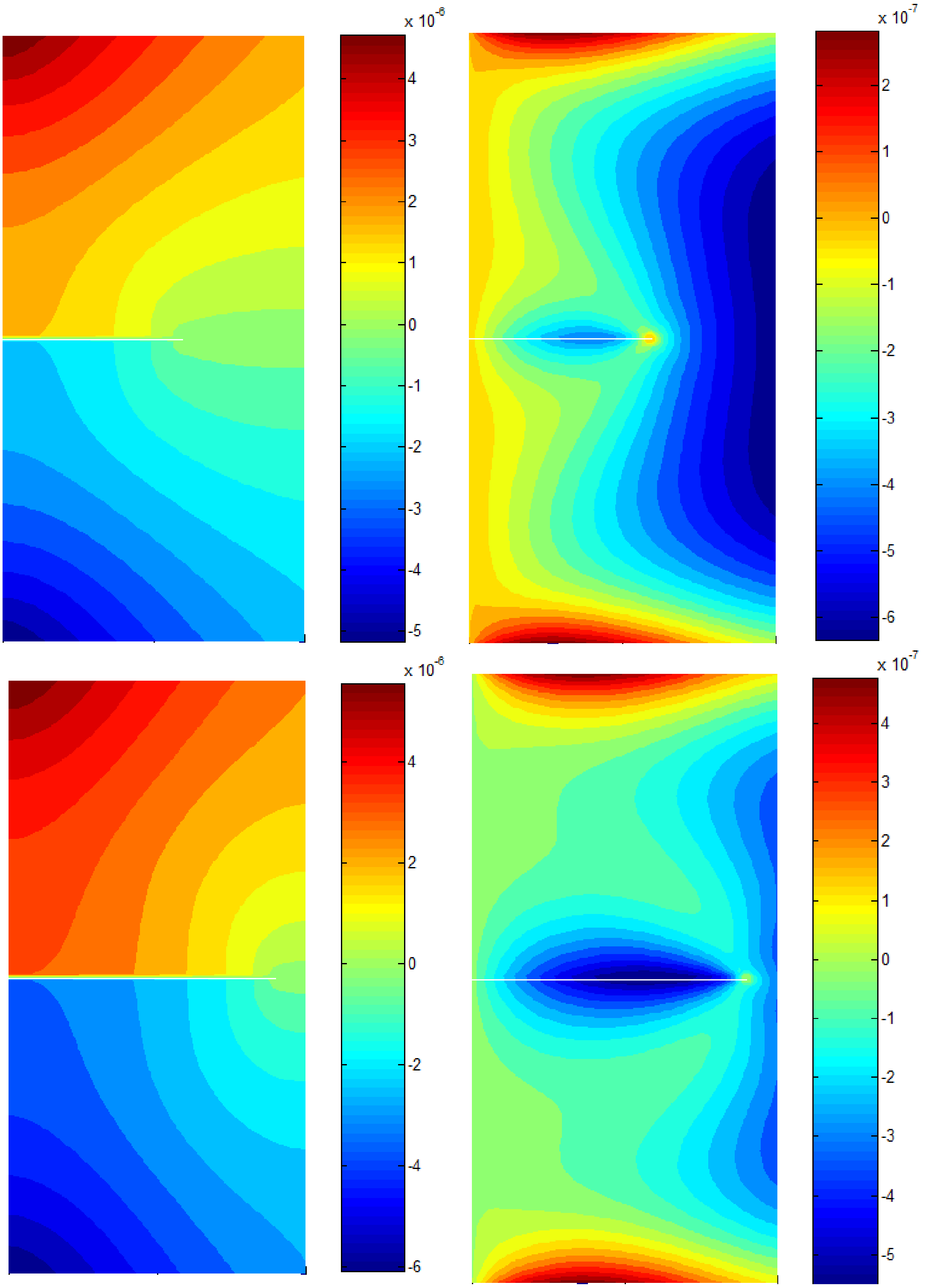
شبکه تغییر شکل یافته برای این مثال در شکل ۶-۸ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که به منظور نمایش بهتر تغییر شکل شبکه، جابه‌جایی در راستای محوری ۷۰۰۰ برابر شده است.



شکل ۶-۸- شبکه تغییر شکل یافته برای طول ترک ۰/۰۵ متر

کانتورهای جابه‌جایی در راســتای شعاعی و محوری نیز برای چند طول مختلف ترک در شکل ۶-۹ آورده شده است.



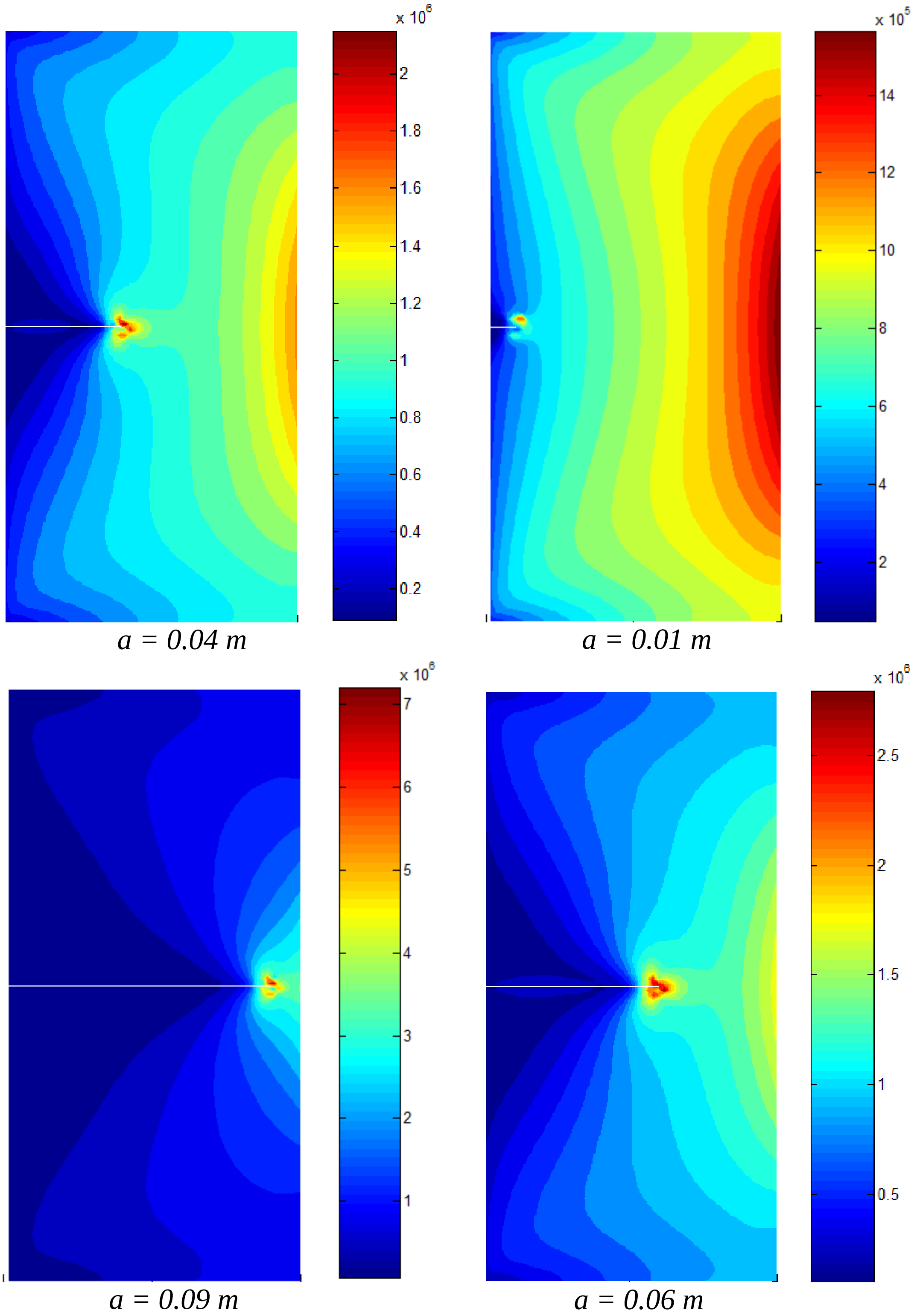


طول ترک = ۰/۰۶ متر

طول ترک = ۰/۰۹ متر

شکل ۶-۹- سمت راست جابه‌جایی در راستای محور شعاعی و سمت چپ در راستای محور طولی بر حسب متر

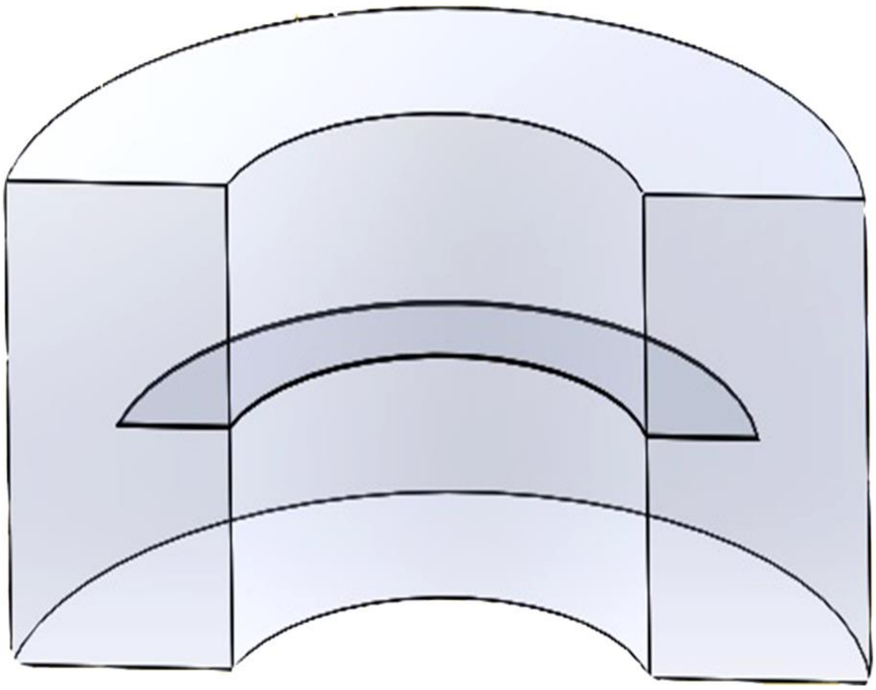
کانتور تنش ون‌میسز برای طول‌های مختلف در شکل ۶-۱۰ نمایش داده شده است.



شکل ۶-۱۰ – کانتورهای تنش ون‌میسز برای ترک دایره‌ای با طول‌های مختلف ترک بر حسب پاسکال

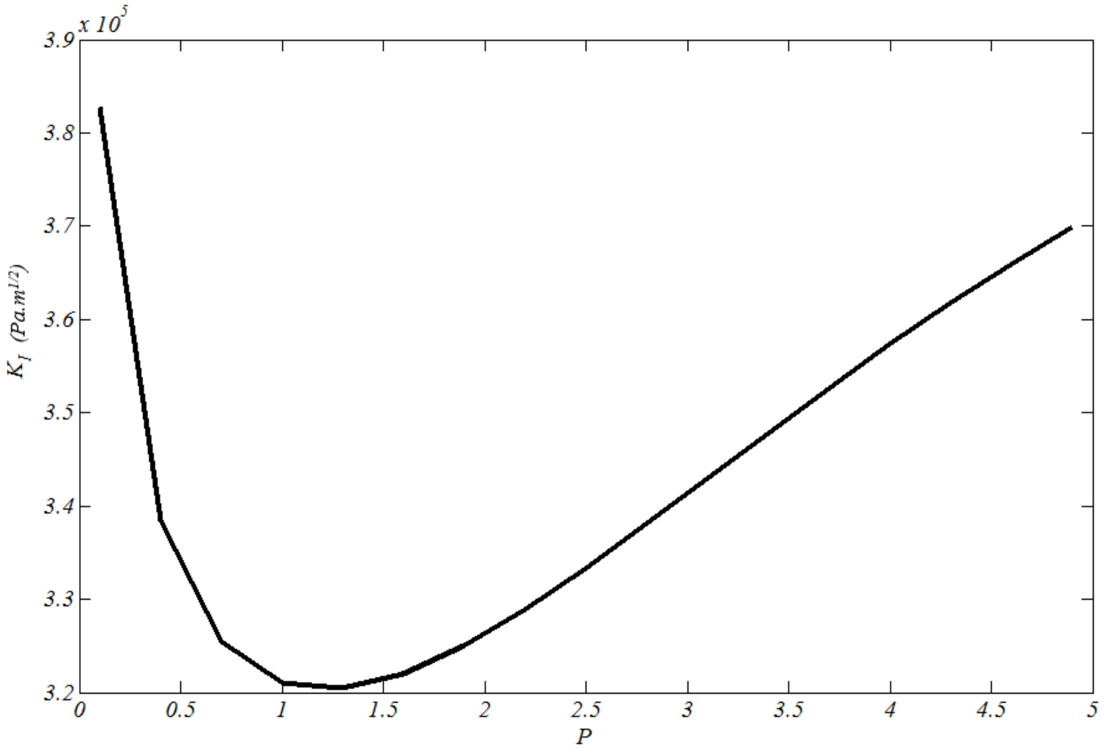
۶-۳-۲ تاثیر پارامتر تعیین‌کننده P بر ضریب شدت تنش در استوانه توخالی دارای ترک محیطی

در این قسمت استوانه شکل ۶-۱۱ که همانند مسئله قبل از جنس مواد تابعی اپوکسی/شیشه است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. شعاع داخلی آن را برابر ۰/۱ متر و ترکی محیطی به طول ۰/۰۵ متر در درون آن فرض می‌کنیم.



شکل ۶-۱۱- استوانه توخالی دارای ترک محیطی داخلی

با تغییر نمای خواص مواد تابعی P، ضریب شدت تنش را محاسبه می‌کنیم. نمودار تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب نمای P در نمودار شکل ۶-۱۲ آورده شده است.

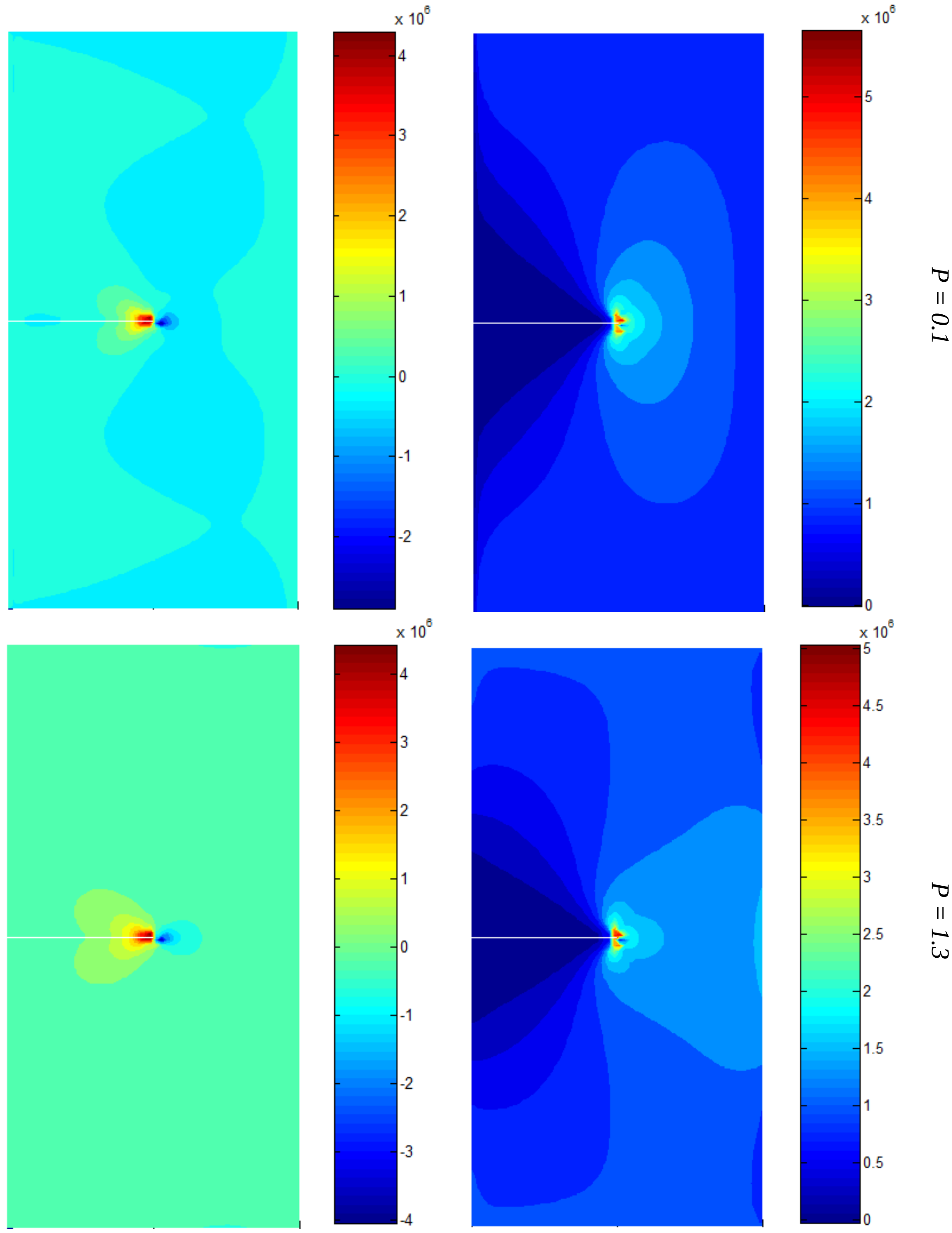


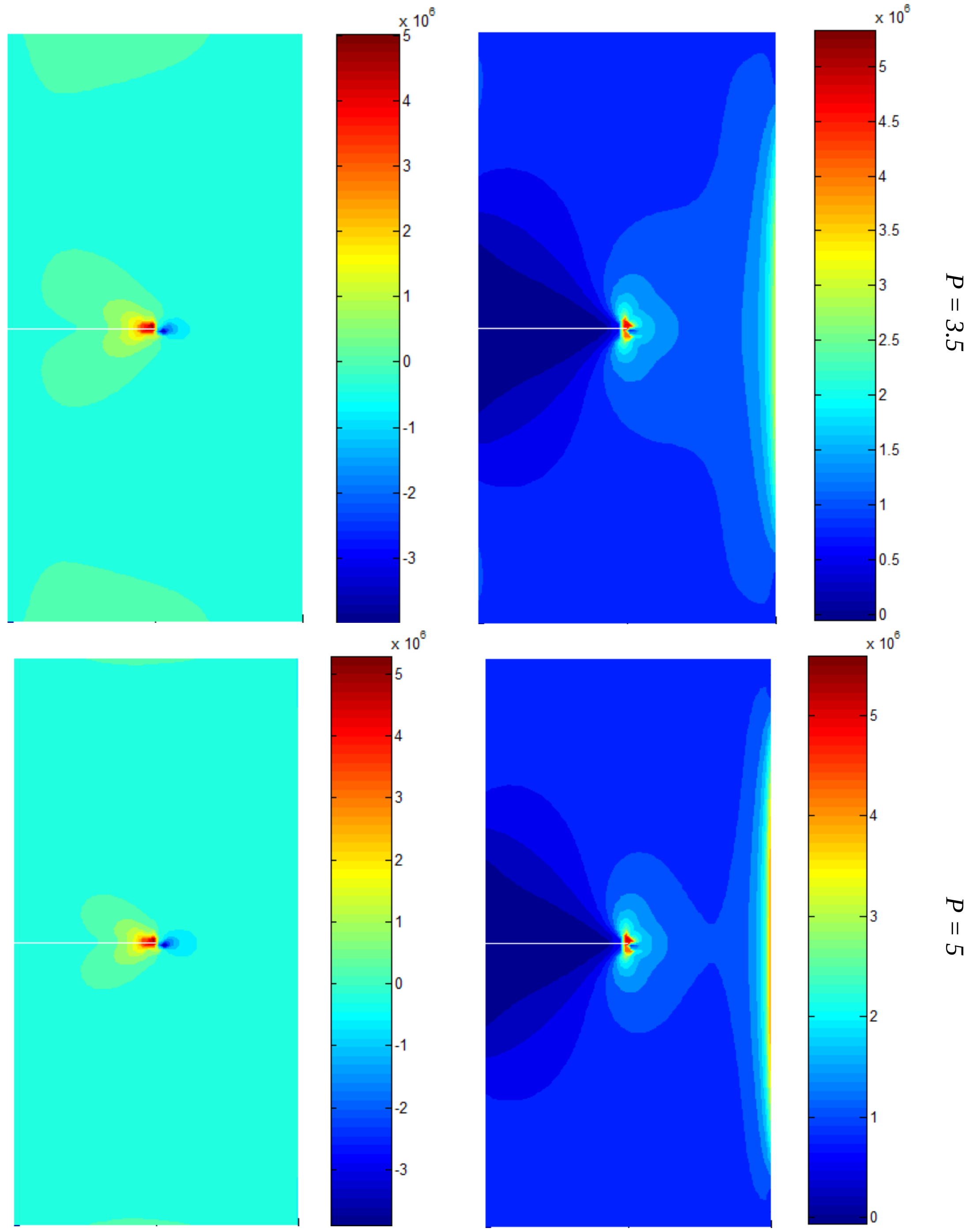
شکل ۶-۱۲- تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب نمای P

لازم به ذکر است که این ضریب برای استوانه‌ای از جنس اپوکسی خالص برابر ۴/۲۷e۵ $Pa.m^{1/2}$ و برای استوانه‌ای از جنس شیشه برابر ۴/۳۳e۵ $Pa.m^{1/2}$ است. هنگامی که مقدار P صفر است استوانه‌ای از جنس اپوکسی تحلیل می‌شود و با افزایش P استوانه از اپوکسی به شیشه تغییر خواص می‌دهد.

با تغییر پارامتر P خواص مورد استفاده در راستای شعاعی استوانه مطابق با نمودارهای شکل ۲-۳، شکل ۲-۴ و شکل ۲-۵ تغییر می‌کند. همانگونه که در شکل ۲-۳ مشاهده می‌شود، مدول الاستیسیته به ازای مقدار Pهای بیشتر از تقریبا ۱/۳ در نوک ترک که همان میان استوانه است، تغییر چندانی نخواهد کرد. همانطور که در نمودار شکل ۶-۱۲مشاهده می‌شود، با افزایش P تا مقدار تقریبی ۱/۳ به نرمی نوک ترک افزوده می‌گردد و در نتیجه ضریب شدت تنش کاهش می‌یابد. اما پس از عبور P از این مقدار نرمی نوک ترک تغییر چندانی نمی‌کند و افزایش ضریب شدت تنش به خاطر افزایش جابه‌جایی در دهانه ترک که باعث افزایش تنش در نوک ترک می‌شود، خواهد بود.

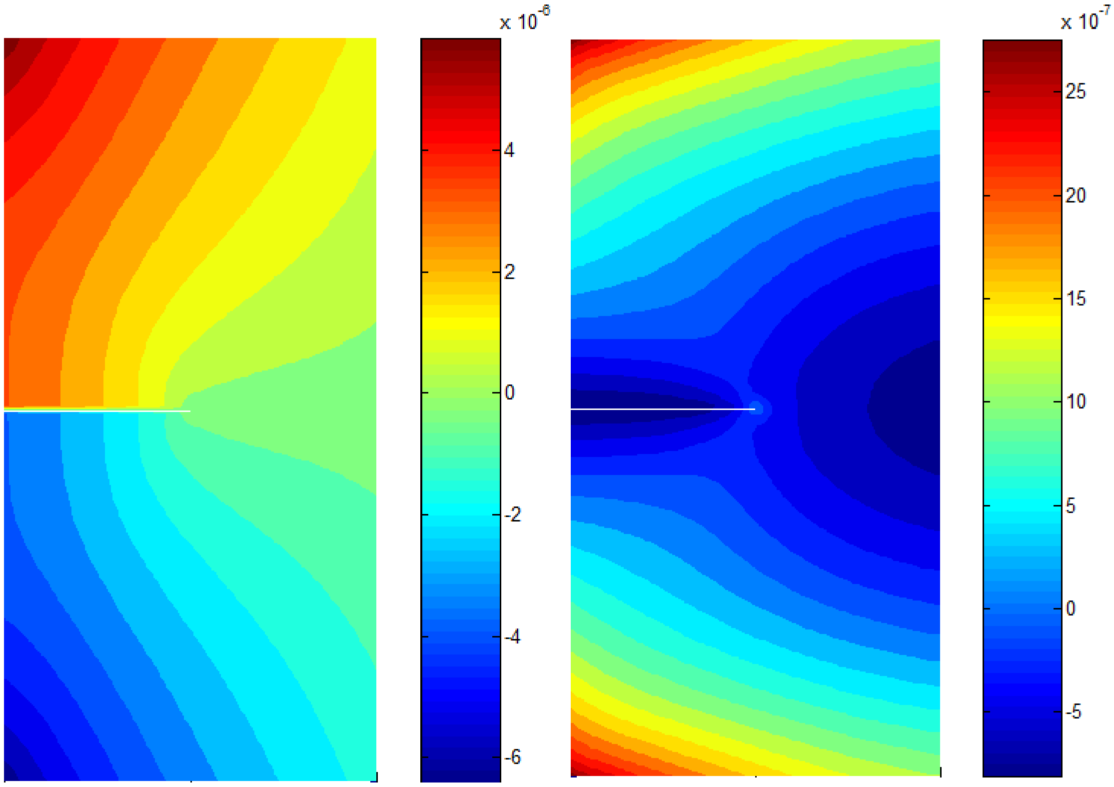
کانتور تنش در راستای شعاعی و محوری نیز برای Pهای مختلف در شکل ۶-۱۳ داده شده است.





شکل ۶-۱۳- کانتور تنش‌های شعاعی (چپ) و تنش‌های محوری (راست) برای Pهای مختلف بر حسب پاسکال

همچنین کانتورهای جابه‌جایی در راستای محوری و شعاعی نیز برای $P=0.1$ به صورت شکل ۶-۱۴ نشان داده می‌شود.



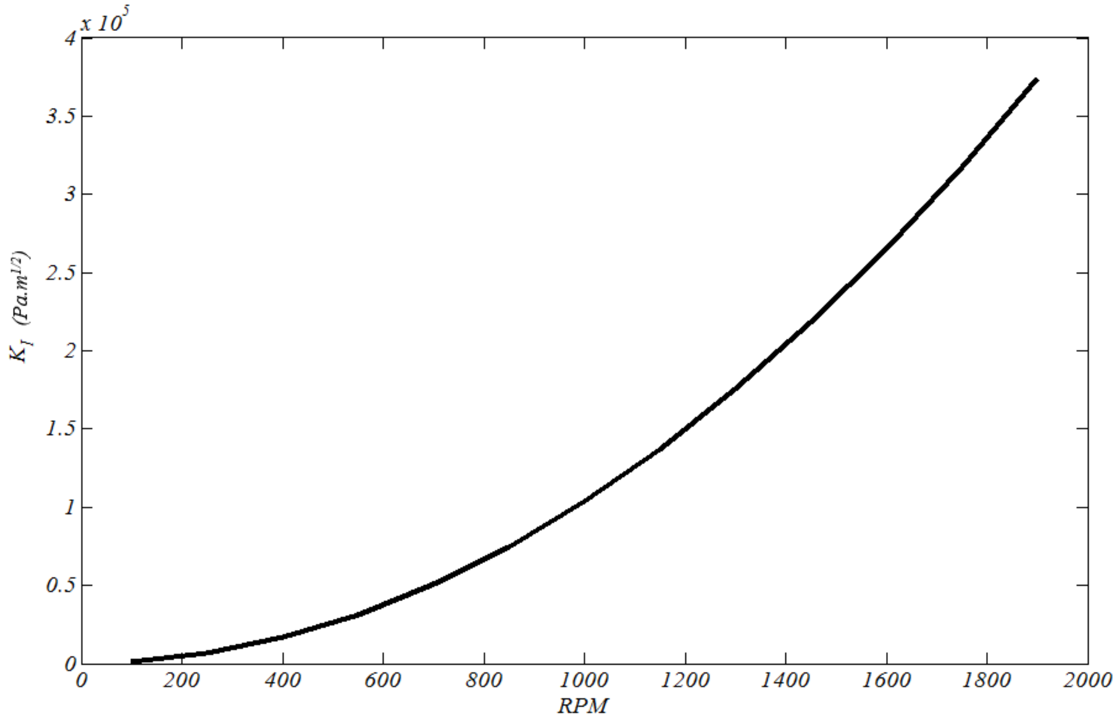
شکل ۶-۱۴- کانتورهای جابه‌جایی در راستای شعاعی (راست) و در راستای محوری (چپ) برای $p=0.1$ بر حسب متر

لازم به ذکر است که این کانتورها برای سایر مقادیر تقریبا شبیه همین اشکال هستند با این تفاوت که مقدار جابه‌جایی‌ها با افزایش P افزایش می‌یابند.

۶-۳-۳ تاثیر سرعت دورانی بر ضریب شدت تنش

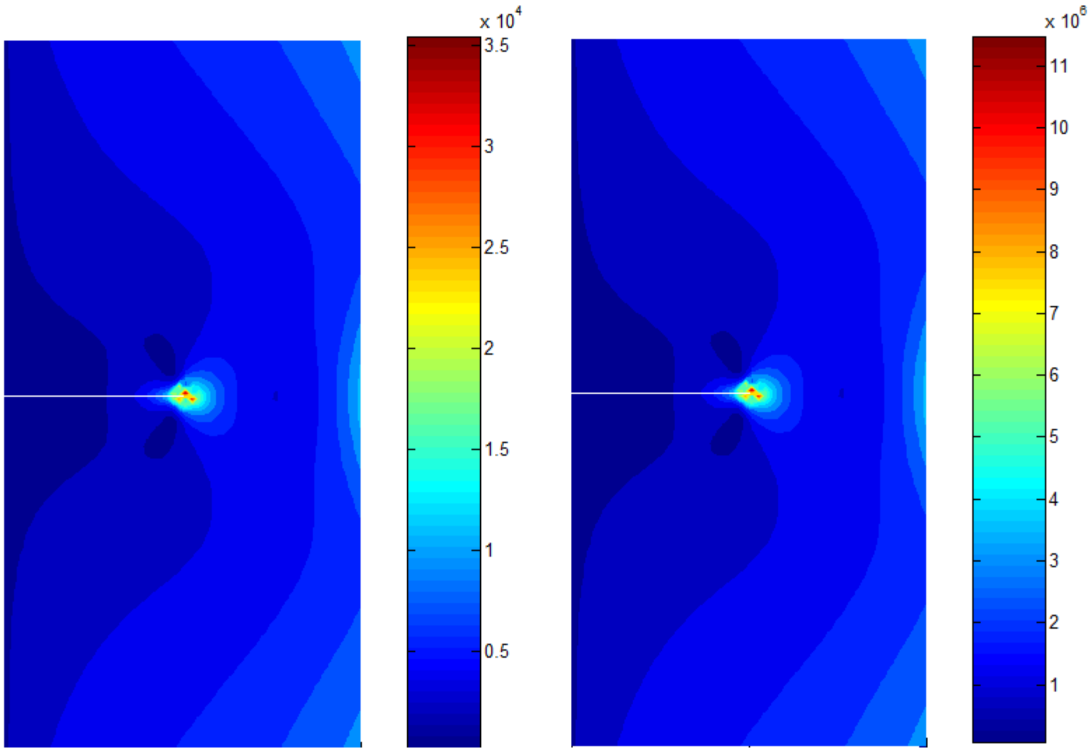
در این قسمت تاثیر سرعت دورانی استوانه بر ضریب شدت تنش مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرعت دوران را از ۱۰۰ دور بر دقیقه تا ۱۹۰۰ دور بر دقیقه افزایش داده و ضریب شدت تنش را محاسبه می‌نماییم. در این صورت نمودار شکل ۶-۱۵ به‌دست خواهد آمد.

با افزایش سرعت دورانی در استوانه تنش به وجود آمده در استوانه افزایش خواهد یافت و در نتیجه تنش در نوک ترک نیز زیاد خواهد شد و همانگونه که در نمودار شکل ۶-۱۵ مشاهده می‌گردد باعث افزایش ضریب تمرکز تنش در نوک ترک خواهد شد.



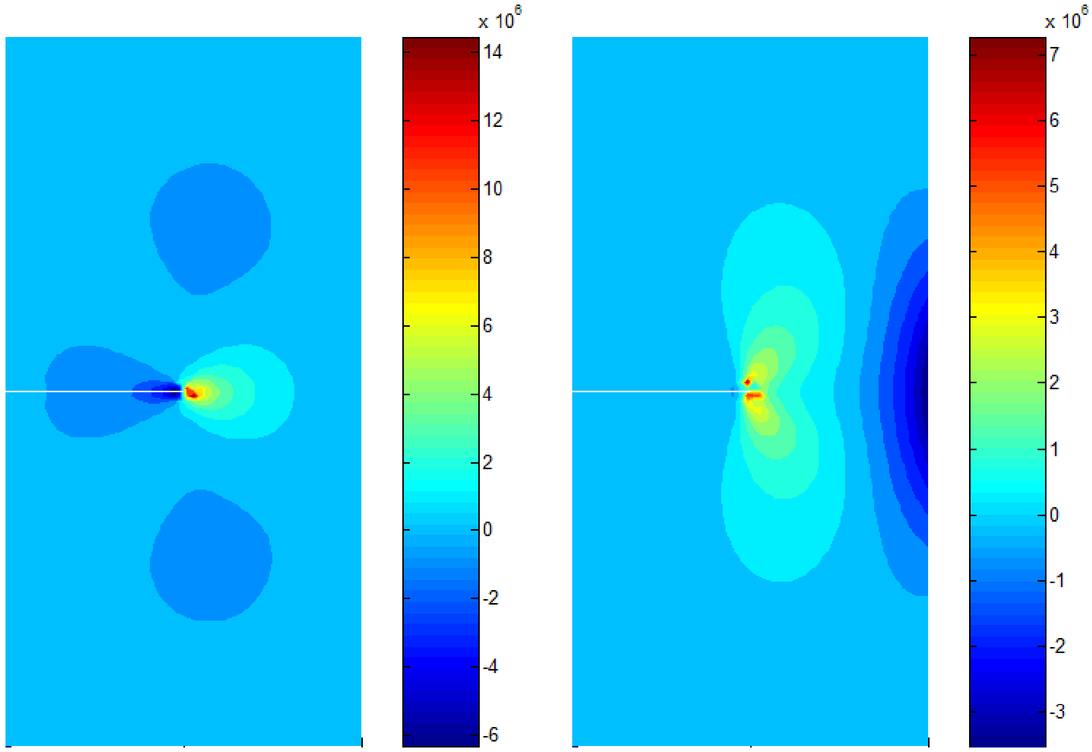
شکل ۶-۱۵- نمودار ضریب شدت تنش بر حسب سرعت دورانی

در شکل ۶-۱۶ تنش ون میسز برای تعداد دوران ۱۸۰۰ دور و ۱۰۰ دور آورده شده است.



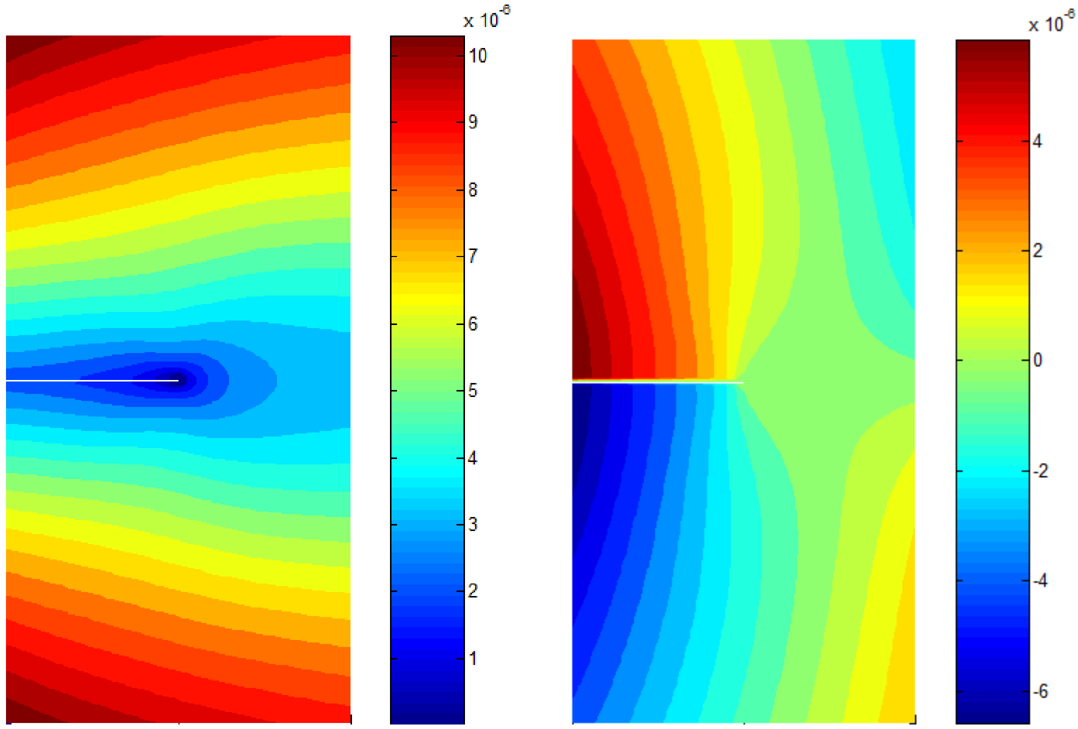
شکل ۶-۱۶- کانتور تنش ون‌میسز برای ۱۸۰۰ دور در دقیقه (راست) و برای ۱۰۰ دور در دقیقه (چپ) بر حسب پاسکال

در ادامه کانتورهای تنش محوری و شــعاعی برای دوران ۱۸۰۰ دور بر دقیقه در شــکل ۶-۱۷ نشان داده شده است:



شکل ۶-۱۷- کانتور تنش در راستای محوری (راست) و راستای شعاعی (چپ) برای RPM ۱۸۰۰ با واحد پاسکال

همچنین کانتورهای جابه‌جایی نیز به صورت شکل ۶-۱۸ خواهد بود:

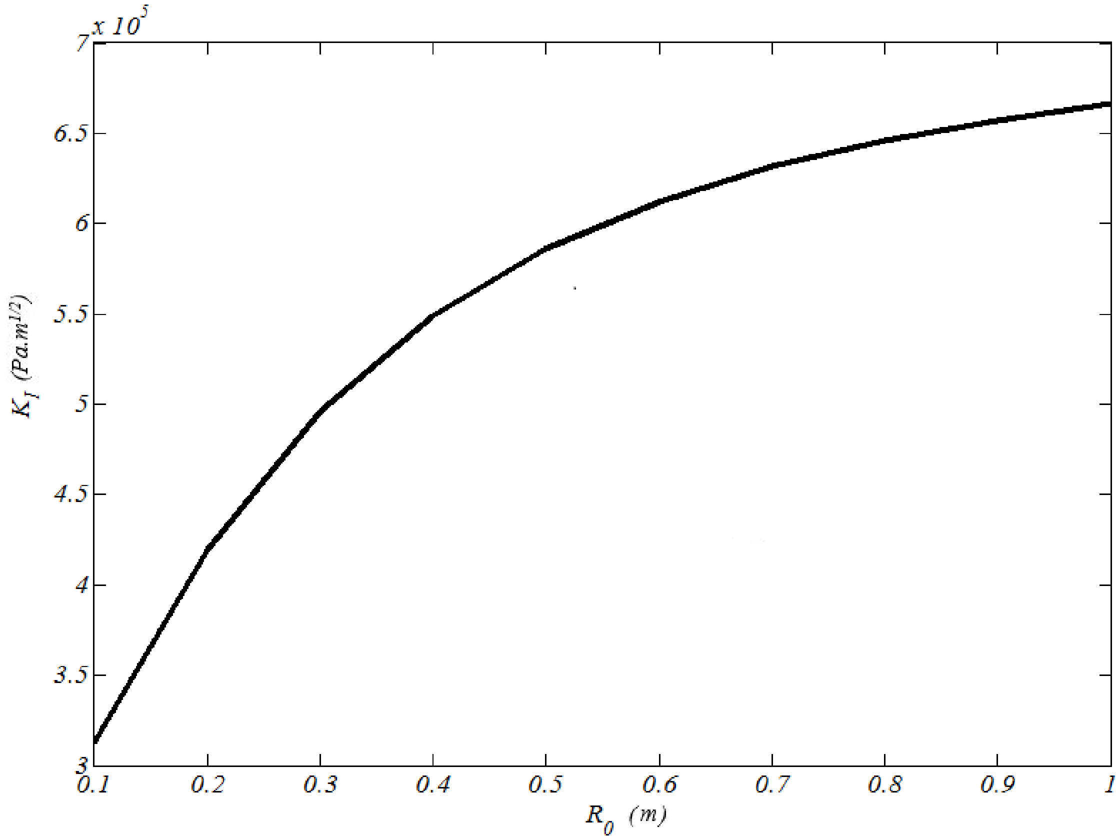


شکل ۶-۱۸- کانتور جابه‌جایی در راستای محوری (راست) و راستای شعاعی (چپ) برای RPM ۱۸۰۰ بر حسب متر

۶-۳-۴ تاثیر شعاع داخلی استوانه بر ضریب شدت تنش

در این قسمت شعاع استوانه مورد نظر را از مقدار ۰/۰۱ متر تا ۱ متر افزایش می‌دهیم و ضریب شدت تنش را به‌دست می‌آوریم.

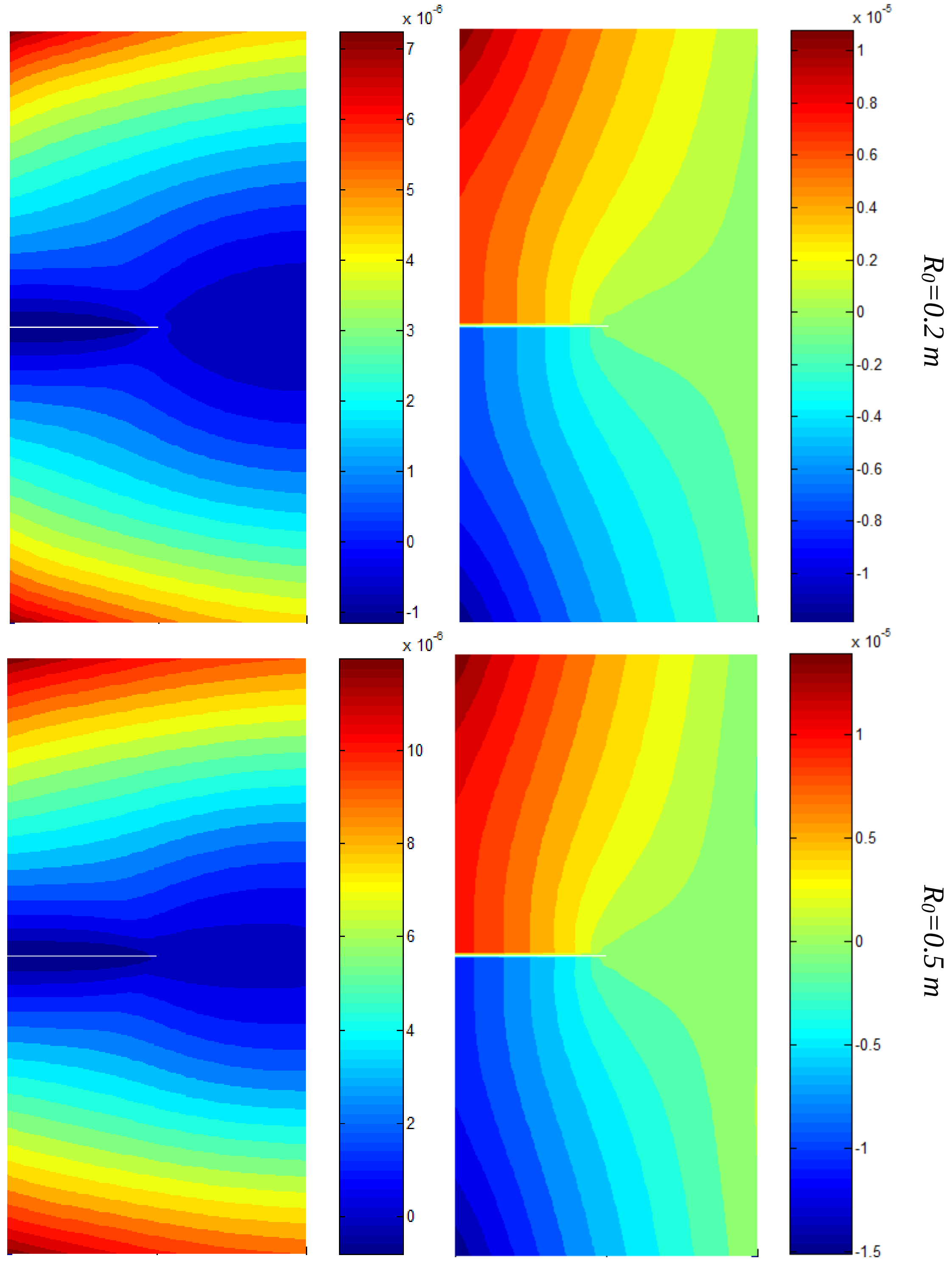
نمودار تغییرات ضریب شدت تنش بر حسب شعاع استوانه در شکل ۶-۱۹ آورده شده است.

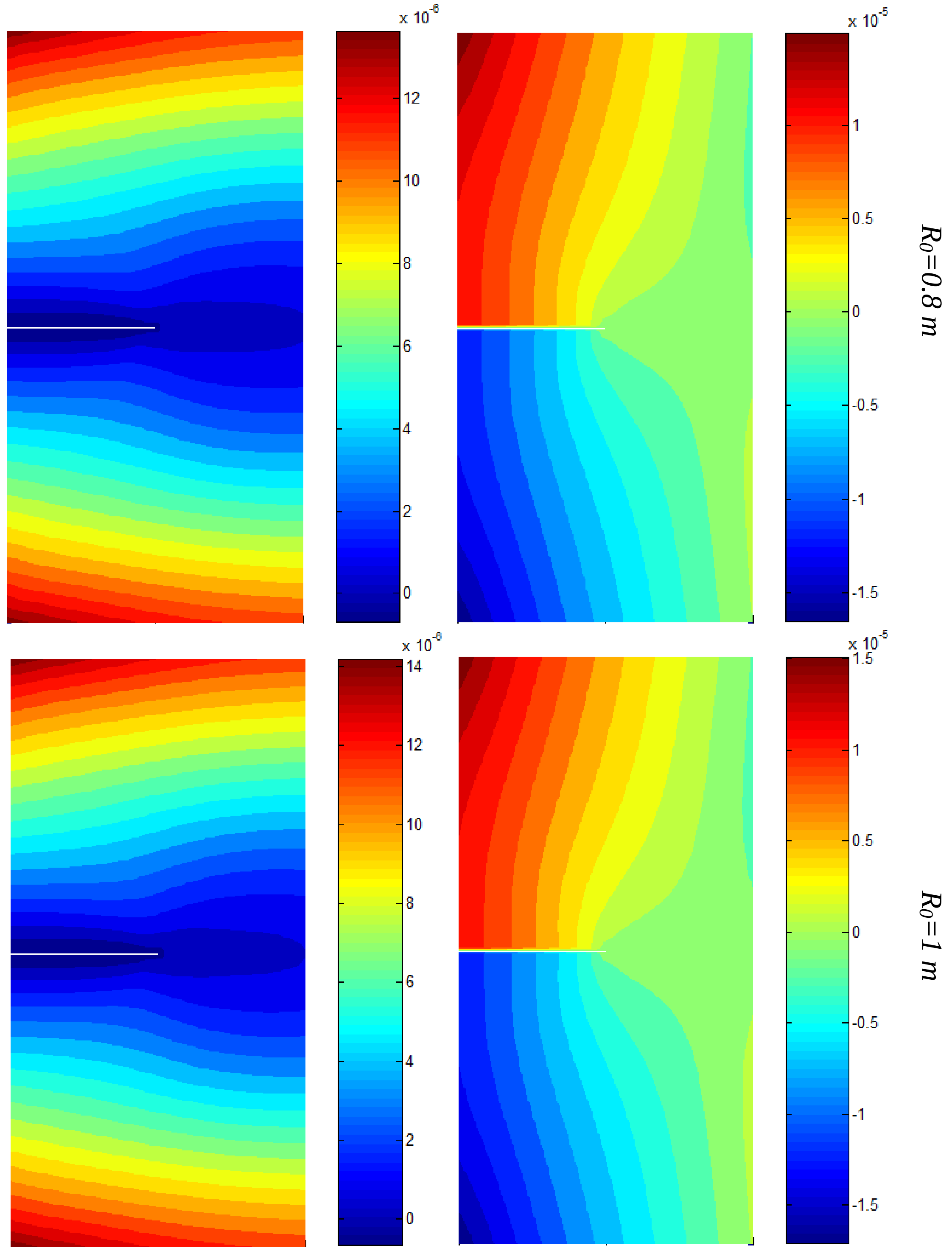


شکل ۶-۱۹- نمودار تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به تغییرات شعاع داخلی استوانه

با افزایش شـعاع استوانه ضریب تمرکز تنش در نوک ترک افزایش می یابد این رفتار در منبع [۵] نیز مشاهده می‌گردد. اگر چه بارگذاری‌های مختلف استفاده شده در این منبع بر روی سطح ترک اعمال می‌شوند.

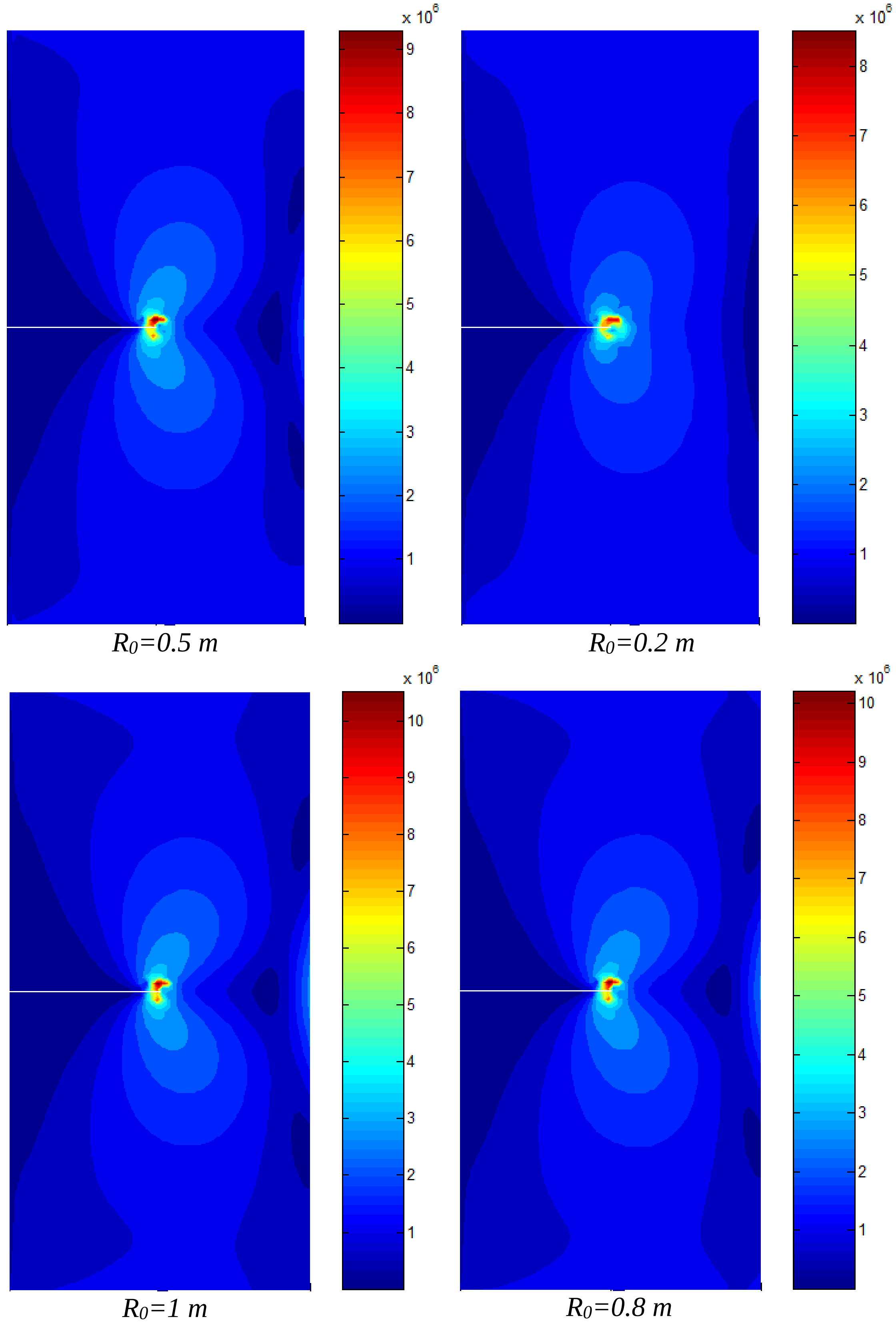
همچنین کانتورهای جابه‌جایی در راستای شعاعی و محوری برای چند شعاع مختلف در شکل ۶-۲۰ نشان داده شده است.





شکل ۶-۲۰- کانتورهای جابه‌جایی بر حسب متر در راستای محوری (راست) و راستای شعاعی (چپ) برای استوانه با شعاع‌های داخلی مختلف

کانتورهای تنش ون‌میسز نیز برای شعاع‌های مختلف در شکل ۶-۲۱ نمایش داده شده است.



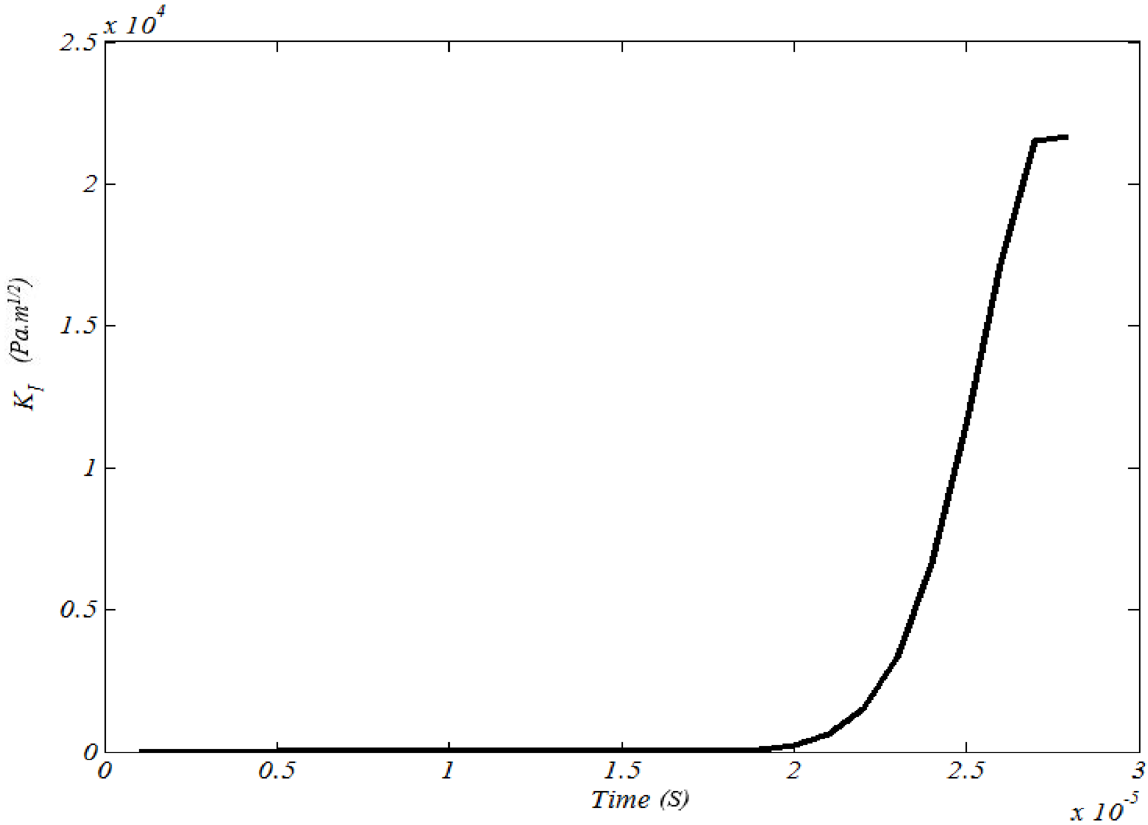
شکل ۶-۲۱- کانتور تنش ون‌میسز بر حسب پاسکال برای استوانه با شعاع‌های مختلف

۴-۶ مسائل حل شده برای بارگذاری دینامیکی

۱-۴-۶ استوانه دارای ترک دایره‌ای تحت بارگذاری محوری دینامیکی

در این مرحله استوانه‌ی شکل ۶-۵ که از جنس مواد تابعی شیشه/اپوکسی است را تحت بارگذاری دینامیکی قرار می‌دهیم. در این استوانه یک ترک دایره‌ای به شعاع ۰/۰۵ متر وجود دارد. با اجرای برنامه نتایج حاصل شده است.

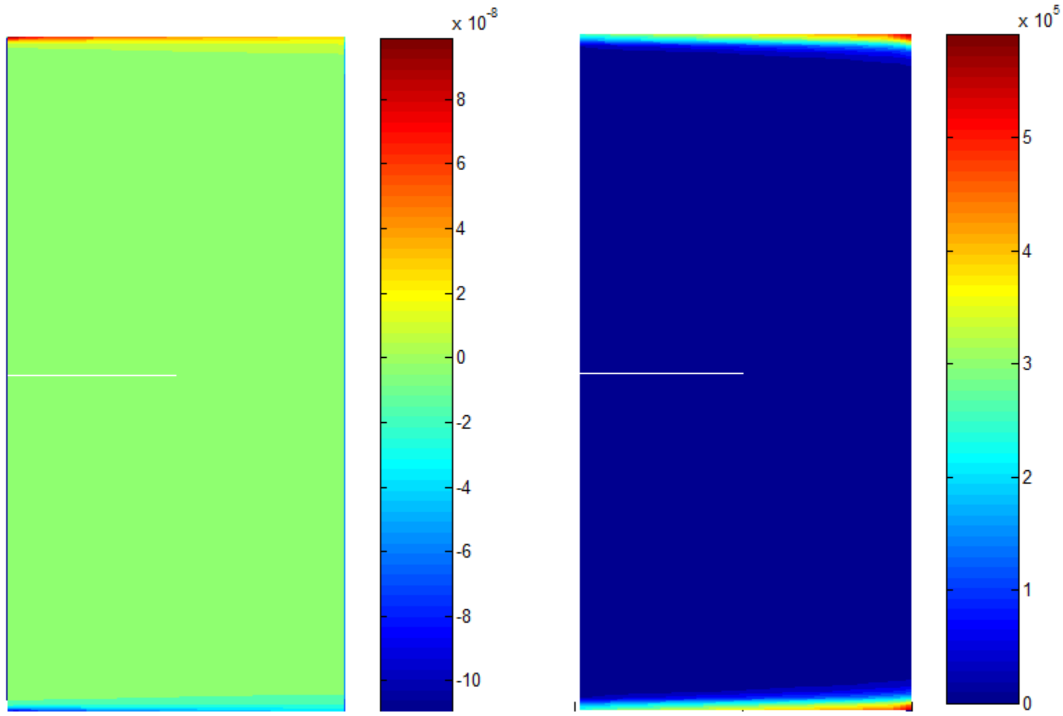
به این استوانه یک ضربه محوری به اندازه‌ی ۱MPa وارد می‌شود. به عبارتی دیگر در ابتدای زمان حل مسئله، استوانه تحت کشش ناگهانی قرار می‌گیرد. گام زمانی در این مسئله ۱μs در نظر گرفته شده است. تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان برای $P=0.2$ در شکل ۶-۲۲ ترسیم شده است.



شکل ۶-۲۲- تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان

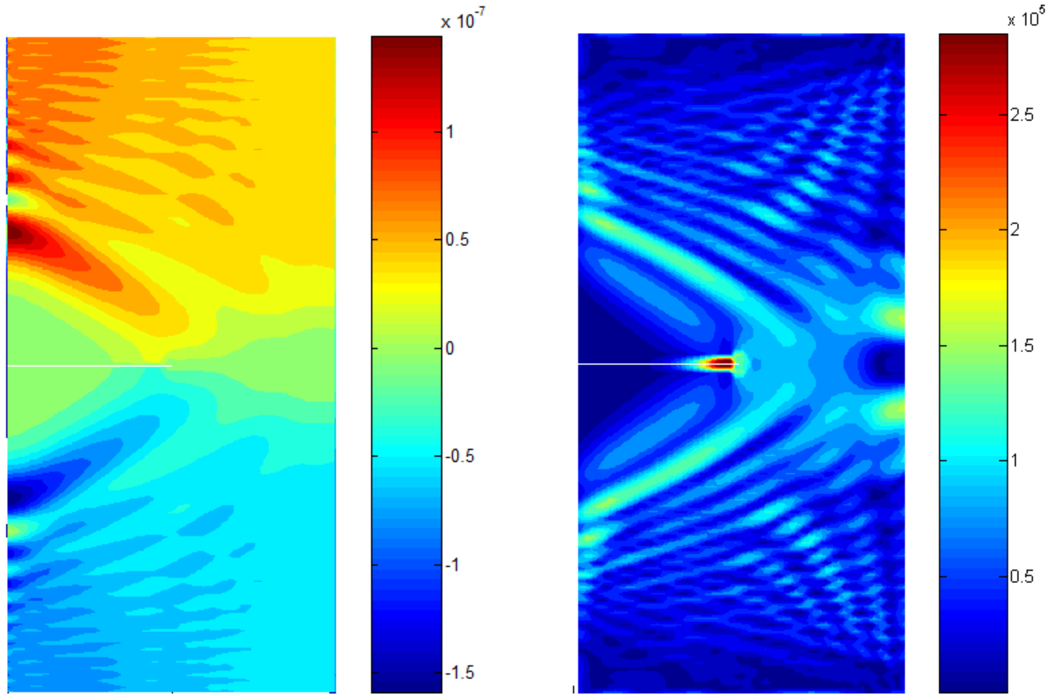
با اعمال بارگذاری ضربه‌ای به استوانه تا رسیدن موج تنش به نوک ترک، مقداری طول میکشد که در این مدت ضریب شدت تنش صفر خواهد بود. اما بعد از رسیدن موج تنش ضریب شدت تنش در حال بالا رفتن است و پس از عبور موج تنش این ضریب کاهش می‌یابد.

همچنین کانتورهای جابه‌جایی در راستای محوری و تنش ون‌میسز در زمان وارد کردن ضربه در شکل ۶-۲۳ آورده شده است.



شکل ۶-۲۳- کانتورهای تنش ون‌میسز بر حسب پاسکال (راست) و جابه‌جایی در راستای محوری بر حسب متر (چپ) در ابتدای تحلیل

کانتورهای جابه‌جایی و تنش در زمان ۲۶ میکروثانیه که زمان رسیدن موج ضربه به ترک است نیز در شکل ۶-۲۴ داده شده است.

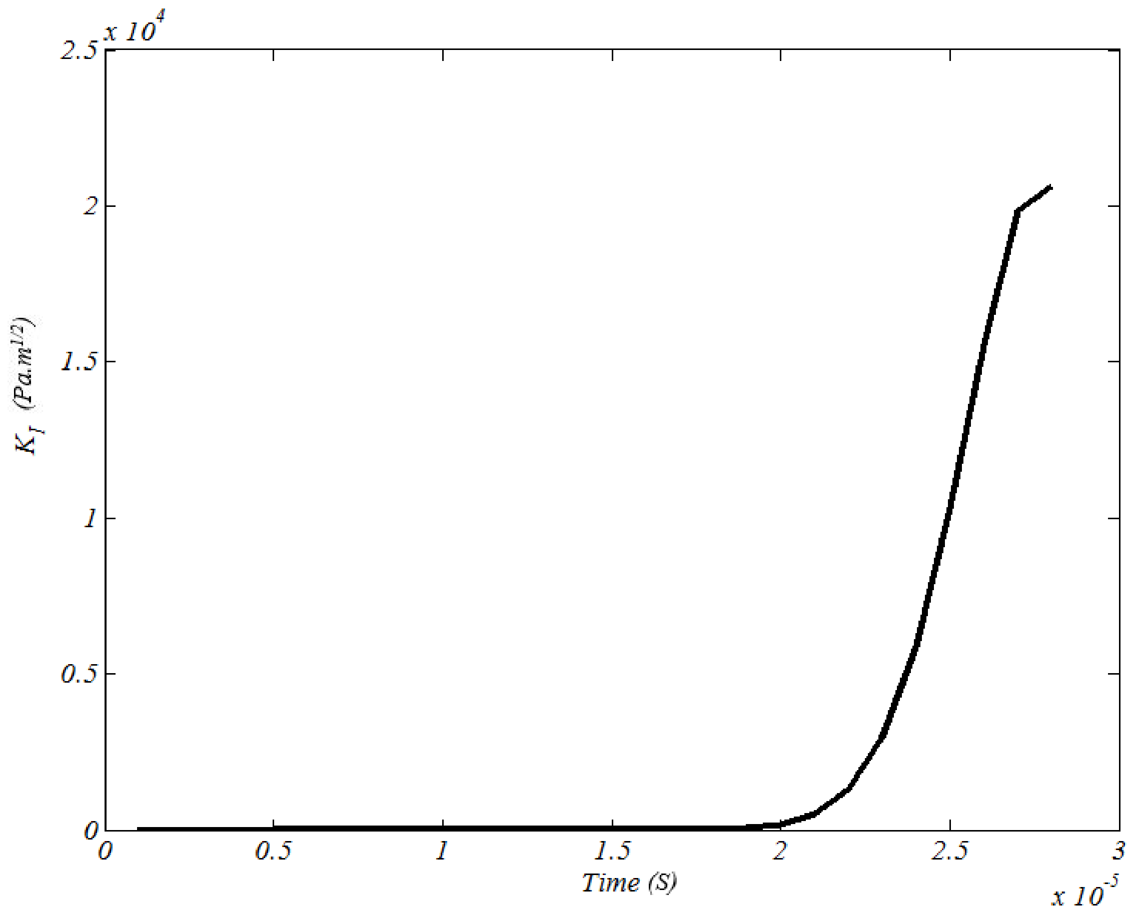


شکل ۶-۲۴- کانتورهای تنش ون‌میسز بر حسب پاسکال (راست) و جابه‌جایی در راستای محوری بر حسب متر (چپ) در زمان ۲۶ میکرو ثانیه

۶-۴-۲ استوانه توخالی دارای ترک محیطی تحت بارگذاری محوری دینامیکی

در این مسئله استوانه‌ی شکل ۶-۱۱ که همانند مسائل قبلی از جنس مواد تابعی شیشه/اپوکسی است را تحت بارگذاری دینامیکی قرار می‌دهیم. در درون این استوانه که دارای شعاع داخلی ۰/۱ متر است، یک ترک محیطی به شعاع ۰/۰۵ متر وجود دارد. با اجرای برنامه نتایج مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.

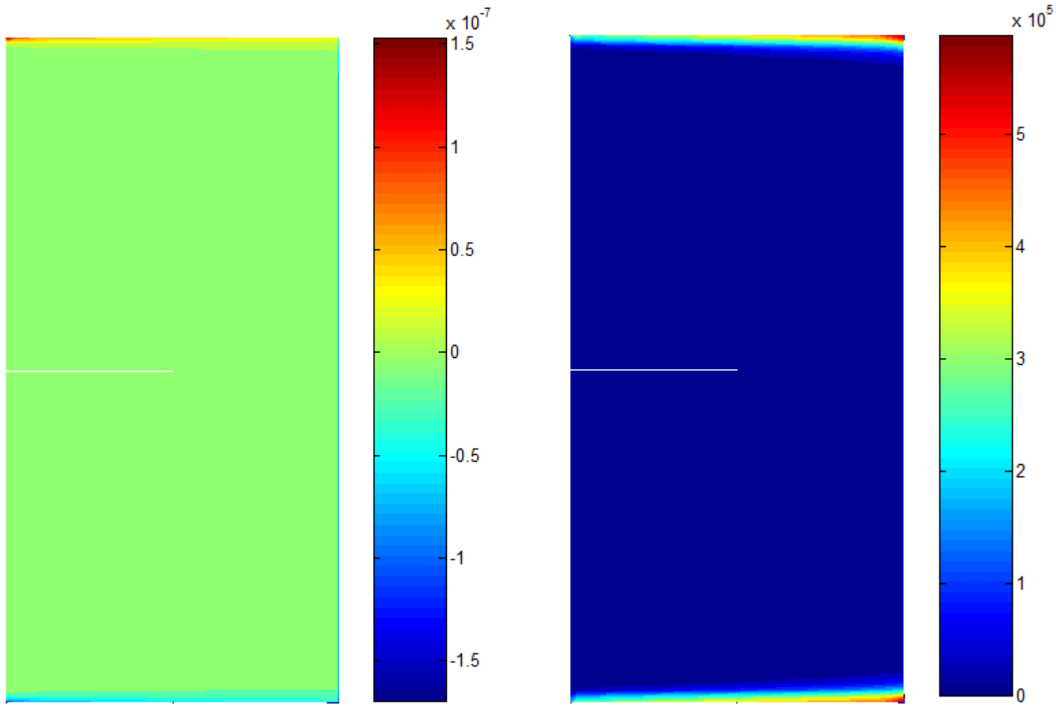
به این استوانه نیز مانند مسئله قبلی یک ضربه محوری در زمان $1\mu s$ وارد می‌شود. تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان در شکل ۶-۲۵ مشاهده می‌شود.



شکل ۶-۲۵- تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان

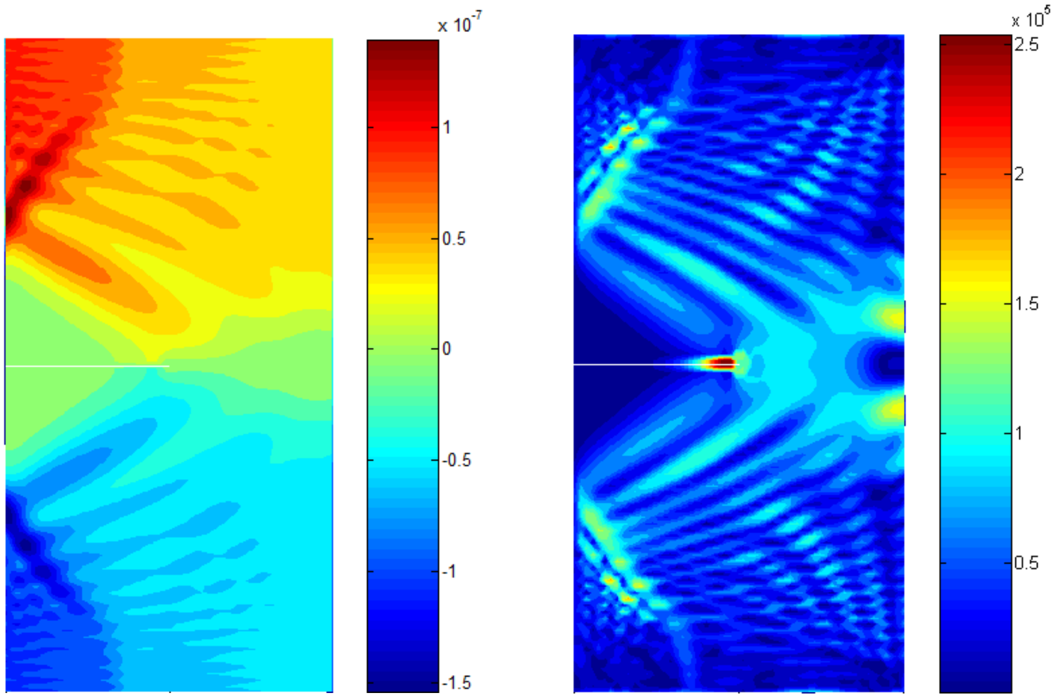
از آنجا که جنس استوانه تغییر نمی‌کند، همانطور که در شکل ۶-۲۲ و شکل ۶-۲۵ مشاهده می‌شود، زمان رسیدن موج تنش به ترک در دو حالت استوانه توخالی و استوانه دارای ترک دایره‌ای در حالت بارگذاری ضربه‌ای محوری یکی است و فقط در استوانه توخالی مقدار این ضریب اندکی کاهش می‌یابد؛ که علت این کاهش، کاهش تنش‌های به وجود آمده در استوانه توخالی می‌باشد.

همچنین کانتورهای جابه‌جایی در راستای محوری و تنش ون‌میسز در زمان وارد کردن ضربه در شکل ۶-۲۶ نشان داده شده است.



شکل ۶-۲۶- کانتورهای تنش ون‌میسز بر حسب پاسکال (راست) و جابه‌جایی در راستای محوری بر حسب متر (چپ) در ابتدای تحلیل

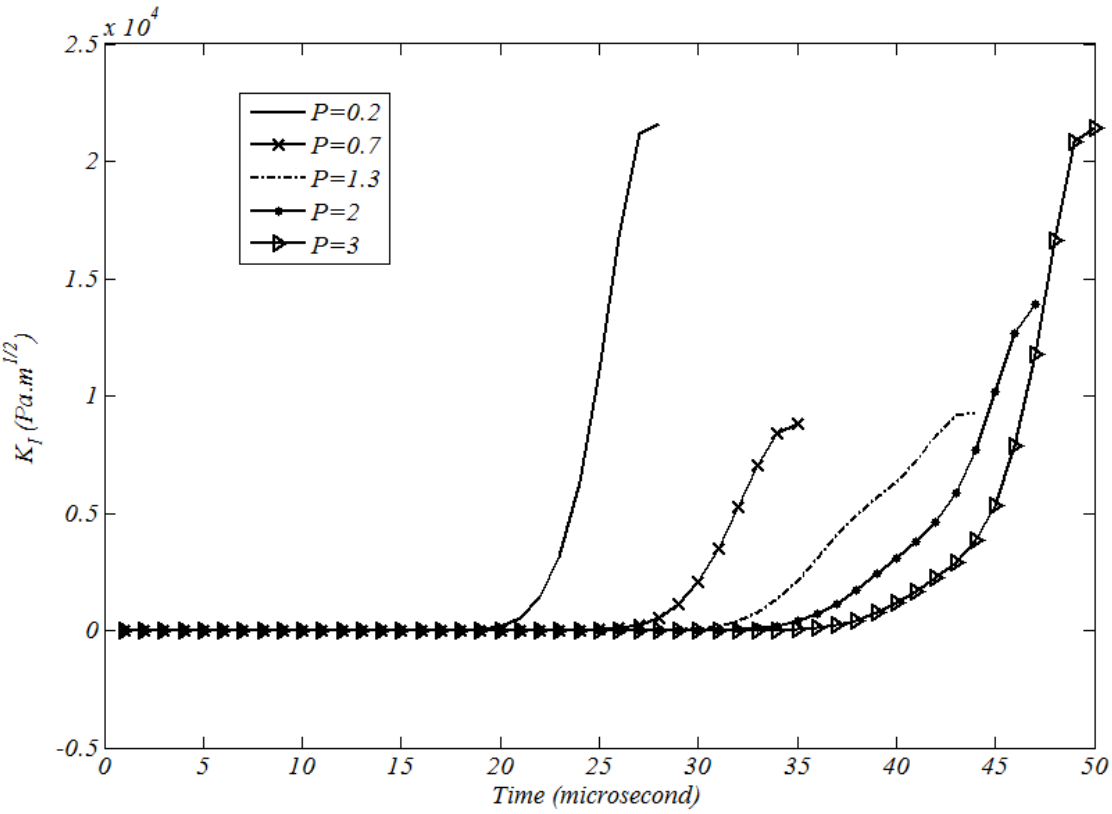
کانتورهای جابه‌جایی و تنش در زمان ۲۶ میکروثانیه و زمان رسیدن موج ضربه به ترک نیز در شکل ۶-۲۷ داده شده است.



شکل ۶-۲۷- کانتورهای تنش ون‌میسز بر حسب پاسکال (راست) و جابه‌جایی در راستای محوری بر حسب متر (چپ) در زمان ۲۶ میکرو ثانیه

۶-۴-۳ تاثیر پارامتر تعیین‌کننده P در استوانه توخالی تحت بارگذاری دینامیکی

در اینجا استوانه مسئله قبل که از جنس مواد تابعی اپوکسی/شیشه است و تحت بارگذاری دینامیکی قرار دارد را مورد بررسی قرار می‌دهیم . با تغییر مقدار P تغییرات ضریب شدت‌تنش را نسبت به زمان همانند شکل ۶-۲۸ بدست می‌آید.



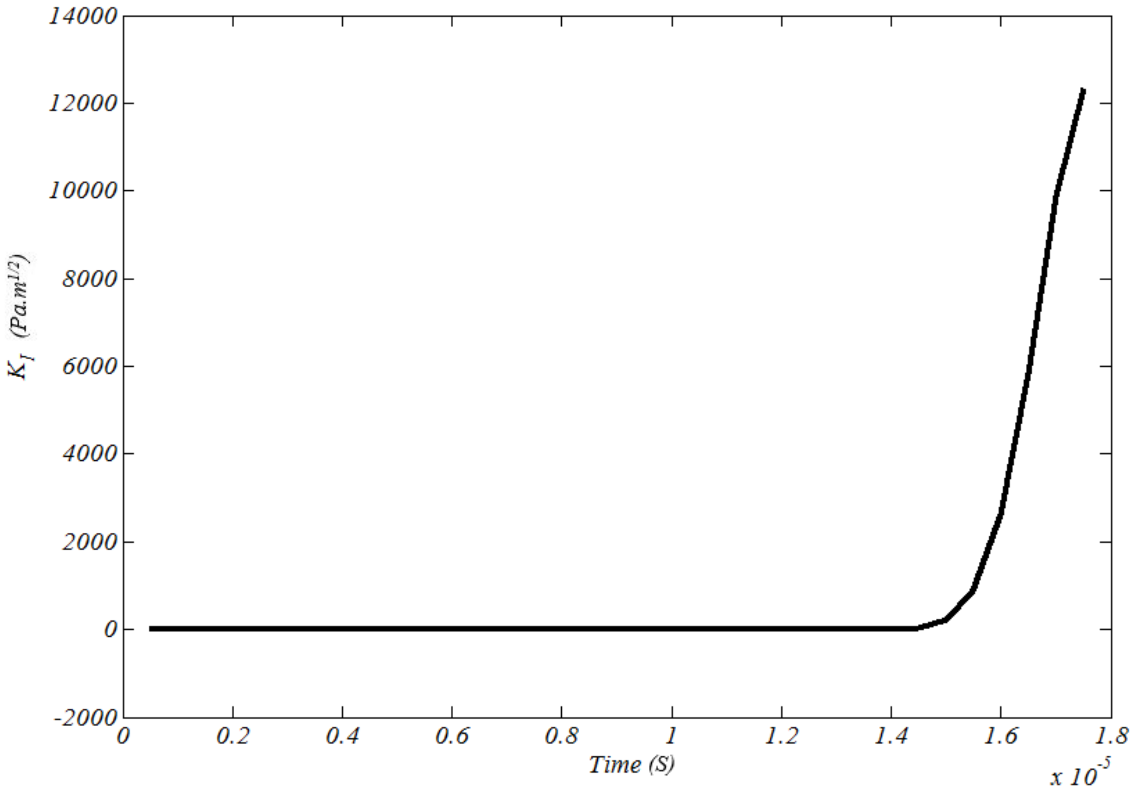
شکل ۶-۲۸- تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان برای Pهای مختلف

همانطور که ملاحظه می‌گردد همانند بارگذاری استاتیکی با افزایش P ضریب شدت‌تنش ابتدا کاهش و بعد از آن مجددا افزایش پیدا می‌کند. همچنین با افزایش P چون استوانه نرم‌تر می‌شود زمان رسیدن موج تنش به نوک ترک افزایش خوهد یافت.

۶-۴-۴ استوانه توخالی دارای ترک محیطی تحت بارگذاری داخلی دینامیکی

در این قسمت استوانه مسئله قبل را تحت بار ضربه‌ای فشار منفی در درون استوانه قرار می‌دهیم و ضرایب شدت تنش را محاسبه می‌کنیم. مقدار بار وارده $۱MPa$ است و مسئله در استپ‌های زمانی $۰/۵\mu s$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

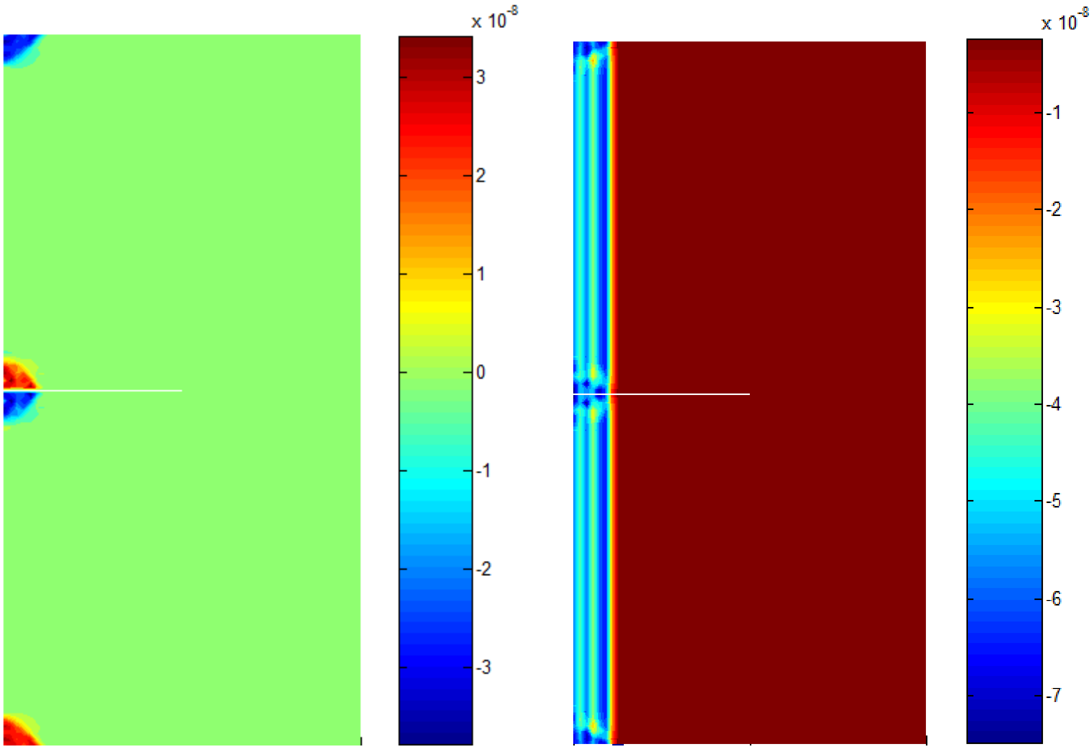
نمودار ضریب شدت تنش برحسب زمان برای این مسئله در شکل ۶-۲۹ ترسیم شده است.



شکل ۶-۲۹- تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به زمان

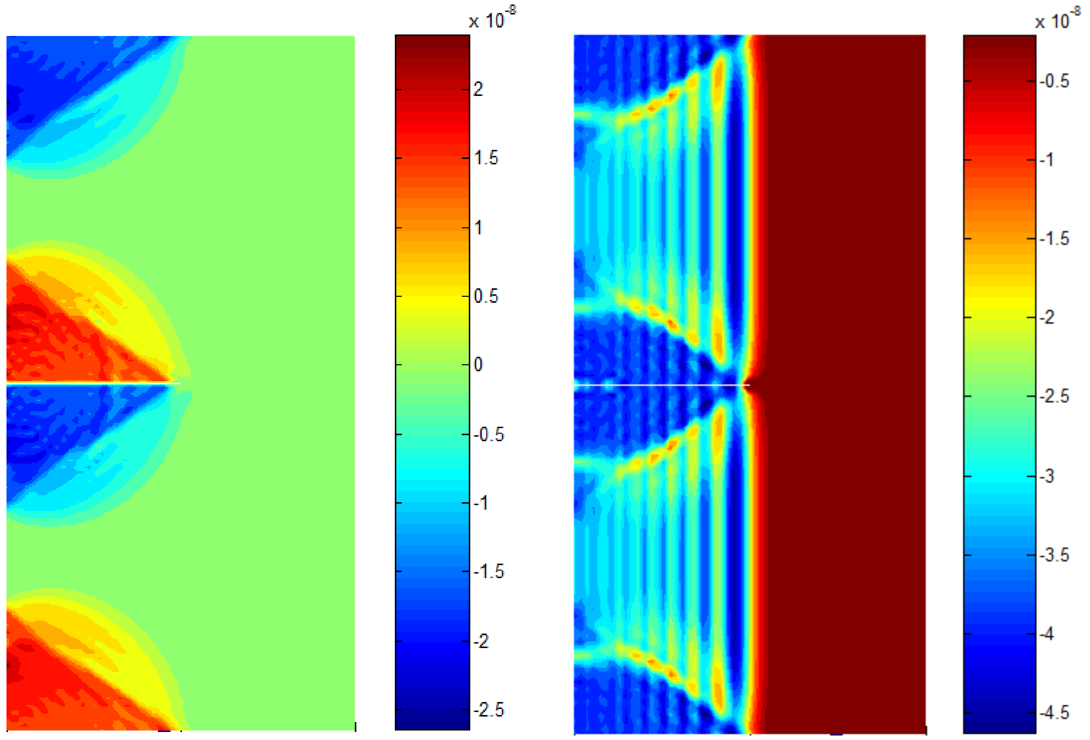
از آنجا که هنگام بارگذاری فشاری درون استوانه در ابتدای تحلیل نوک ترک بسته می‌شود، بارگذاری فشار منفی درون استوانه برای محاسبه ضریب شدت تنش مورد استفاده قرار گرفت که این بارگذاری باعث باز شدن دهانه ترک می‌گردد. این بازشدگی و از طرفی رسیدن موج ضربه به نوک ترک باعث افزایش ضریب تمرکز تنش مطابق با شکل ۶-۲۹ در نوک ترک می‌شود.

کانتورهای جابه‌جایی در راستای محوری و شعاعی در زمان ۵μs بعد از وارد کردن ضربه در شکل ۶-۳۰ نشان داده شده است.



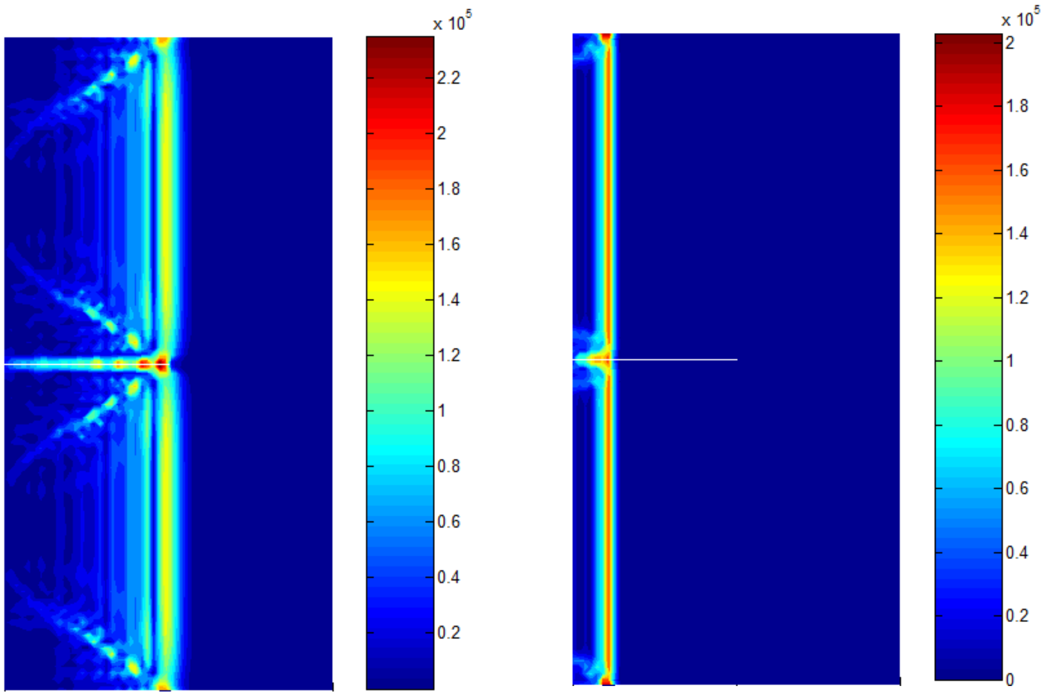
شکل ۶-۳۰- کانتورهای جابه‌جایی در راستای شعاعی (راست) و راستای محوری (چپ) در ۵μs بر حسب متر

کانتورهای جابه‌جایی در راســتای محوری و شعاعی در زمان ۱۷μs نیز در شکل ۶-۳۱ نمایش داده شده است.



شکل ۶-۳۱- کانتورهای جابه‌جایی در راستای شعاعی (راست) و راستای محوری (چپ) در ۱۷μs بر حسب متر

همچنین کانتورهای تنش ون‌میسز در این دو زمان نیز در شکل ۶-۳۲ نشان داده شده است.



شکل ۶-۳۲- کانتورهای تنش ون‌میسز در ۵μs (راست) و در ۱۷μs (چپ) بر حسب پاسکال

فصل هفتم:

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه معادلات حرکت در مختصات استوانه‌ای با استفاده از روش المان‌محدود توسعه‌یافته برای به‌دست آوردن ضریب شدت تنش در استوانه‌های دارای ترک محیطی تحت بارگذاری‌های استاتیکی و دینامیکی گسسته‌سازی شده است. جهت مدل‌سازی مواد تابعی از مدل‌های میکرومکانیکی و المان‌های ایزوپارامتریک تعمیم یافته استفاده گردیده است؛ در نتیجه مواد تابعی به صورت واقعی و پیوسته مدل‌سازی گشته‌اند.

مهم‌ترین دستاورد این پایان‌نامه کد نوشته‌شده برای حل مسئله از المان‌بندی و حل معادلات مربوطه تا محاسبه نتایج و رسم کانتورهای جابه‌جایی و تنش در نرم‌افزار متلب است. جهت بررسی صحت کد نوشته شده، نتایج عددی برنامه با چهار مقاله معتبر اعتبار سنجی شده است که در تمام این مثال‌ها دقت نتایج برنامه نوشته شده مورد تایید قرار گرفت.

با توجه به نتایج داده شده می‌توان به طور خلاصه موارد زیر را بیان نمود:

۱. با افزایش نسبت طول ترک به ضخامت استوانه، در استوانه‌ای از جنس ماده تابعی که درون آن از بیرون آن نرم‌تر است و تحت بار کششی قرار دارد، ضریب شدت تنش در نوک ترک افزایش می یابد.
۲. با گسترش نرمی در استوانه از سطح داخلی به سطح خارجی، ضریب شدت تنش ابتدا کاهش و بعد از یکسان شدن مقدار سفتی در مسیر و نوک ترک، افزایش خواهد یافت.
۳. افزایش سرعت دورانی در استوانه باعث افزایش ضریب شدت تنش در نوک ترک می‌گردد.
۴. با افزایش شعاع داخلی مخازن دارای ترک، ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد و با افزایش هرچه بیشتر این شعاع ضریب شدت تنش تغییرات کمتری پیدا می‌کند.
۵. در بارگذاری دینامیکی استوانه ضریب شدت تنش تا رسیدن موج تنش به نوک ترک صفر است و پس از رسیدن موج، این ضریب افزایش می یابد، سپس با عبور موج از نوک ترک این ضریب کاهش می‌یابد.

در پایان نیز پیشنهاداتی برای ادامه این تحقیق ارائه می‌گردد:

۱. محاسبه ضریب شدت تنش برای ترک‌های موجود در سطح خارجی استوانه
۲. محاسبه ضریب شدت تنش در دیسک‌های دارای ترک
۳. بررسی رشد ترک در استوانه‌های دارای ترک محیطی و دایره‌ای

منابع

1. Meshii, T. and K. Watanabe, (1998); Closed form stress intensity factor of an arbitrarily located inner-surface circumferential crack in an edge-restraint cylinder under linear radial temperature distribution. *Engineering fracture mechanics*, 60(5): p. 519-527.
2. Raju, I. and J. Newman, (1982); Stress-intensity factors for internal and external surface cracks in cylindrical vessels. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 104(4): p. 293-298.
3. Newman, J.C. and I. Raju, (1980); Stress-intensity factors for internal surface cracks in cylindrical pressure vessels. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 102(4): p. 342-346.
4. Seifi, R., (2015); Stress intensity factors for internal surface cracks in autofrettaged functionally graded thick cylinders using weight function method. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 75, p. 113-123.
5. Eshraghi, I. and N. Soltani, (2015); Stress Intensity Factor Calculation for Internal Circumferential Cracks in Functionally Graded Cylinders Using the Weight Function Approach. *Engineering fracture mechanics*, 134: p. 1-19.
6. Predan, J., V. Močilnik, and N. Gubeljak, (2013); Stress intensity factors for circumferential semi-elliptical surface cracks in a hollow cylinder subjected to pure torsion. *Engineering fracture mechanics*, 105(0): p. 152-168.
7. Varfolomeyev ,I., M. Petersilge, and M. Busch, (1998); Stress intensity factors for internal circumferential cracks in thin-and thick-walled cylinders. *Engineering fracture mechanics*, 60(5): p. 491-500.
8. Chen, Y., (2000); Stress intensity factors in a finite length cylinder with a circumferential crack. *International journal of pressure vessels and piping*, 77(8): p. 439-444.
9. Chen, Y.Z., (2004); Stress intensity factors in a finite cracked cylinder made of functionally graded materials. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 81(12): p. 941-947.
10. Meshii, T. and K. Watanabe, (2001); Stress intensity factor evaluation of a circumferential crack in a finite length thin-walled cylinder for arbitrarily distributed stress on crack surface by weight function method. *Nuclear engineering and design*, 206(1): p. 13-20.
11. Lee, D.S., (2002); A long circular cylinder with a circumferential edge crack subjected to a uniform shearing stress. *International journal of solids and structures*, 39(9): p. 2613-2628.

12. Jones ,I., (2005); Impulse response model of thermal striping for hollow cylindrical geometries. *Theoretical and applied fracture mechanics*, 43(1): p. 77-88.
13. Birinci, A., T. Sukru Ozsahin, and R. Erdol, (2006); Axisymmetric circumferential internal crack problem of a thick-walled cylinder with inner and outer claddings. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 25(5): p. 764-777.
14. Grebner, H. and U. Strathmeier, (1985); Investigation of different isoparametric axisymmetric crack tip elements applied to a complete circumferential surface crack in a pipe. *Computers & Structures*, 21(6): p. 1177-1180.
15. Tran, V.-X. and S. Geniaut, (2012); Development and industrial applications of X-FEM axisymmetric model for fracture mechanics. *Engineering fracture mechanics*, 82(0):p. 135-157.
16. Lewis, T. and X. Wang, (2008); The T-stress solutions for through-wall circumferential cracks in cylinders subjected to general loading conditions. *Engineering fracture mechanics*, 75(10): p. 3206-3225.
17. Ghajar, R. and S. Nabavi, (2010); Closed-form thermal stress intensity factors for an internal circumferential crack in a thick-walled cylinder. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 33(8): p. 504-512.
18. Cortínez, V.H. and F.E. Dotti, (2013); Mode I stress intensity factor for cracked thin-walled open beams. *Engineering fracture mechanics*, 110: p. 249-257.
19. Wu, L., L. Zhang, and Y. Guo, (2012); Extended finite element method for computation of mixed-mode stress intensity factors in three dimensions. Procedia Engineering, 31: p. 373-380.
20. Sharma, K., et al., (2014); Numerical Modeling of Part-through Cracks in Pipe and Pipe Bend Using XFEM. *Procedia Materials Science*, 6: p. 72-79.
21. Manikanta, H.O., H. Ramesha, and H.V. Lakshminarayana, (2014); Mixed Mode Stress Intensity Factors for Semi Elliptical Surface Cracks in a Hollow Shaft Subjected to Torsion. *Journal of Mechanical Engineering*, 2(1): p. 165-176.
22. Moulick, S.K. and Y.K. Sahu, (2012); Stress Intensity Factor for Internal Cracks in Thick Walled Pressure Vessels using Weight Function Technique, *in National Conference on Innovative Paradigms in Engineering & Technology*.
23. Suleiman, B.M., The Effective Thermal Transport in Composite Materials.

24. Silva, E.C.N., M.C. Walters, and G.H. Paulino, (2006); Modeling bamboo as a functionally graded material: *lessons for the analysis of affordable materials. Journal of materials science*, 41(21): p. 6991-7004.
25. Ichikawa, K., (2001); Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts. Springer.
26. Shen, H.S., (2009); Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells. CRC press.
27. Kim, J.H. and G.H. Paulino, (2007); On fracture criteria for mixed-mode crack propagation in functionally graded materials. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(4): p. 227-244.
28. Mahamood, R.M., et al., (2012); Functionally graded material: an overview.
29. Shukla, A., (2006); Dynamic Fracture Mechanics. World Scientific.
30. Rokhi, M.M., (2012); Numerical analysis of crack propagation in a functionally graded layer under dynamic loading and thermal shock. Shahrood University of Technology.
31. Mori, T. and K. Tanaka, (1973); Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, 21(5): p. 571-574.
32. Rokhi, M.M. and M. Shariati, (2013); Implementation of the extended finite element method for coupled dynamic thermoelastic fracture of a functionally graded cracked layer. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 35(2): p. 69-81.
33. Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor, (2005); The finite element method for solid and structural mechanics. Butterworth-heinemann.
34. Cook, R.D., (2007); Concepts and applications of finite element analysis. John Wiley & Sons.
35. Battaglia, G., P. Malerba, and L. Sgambi. (2003); Bridge deck analysis through the use of grillage models. *in Structural & Construction Conference*. CRC Press.
36. Kim, J.H. and G. Paulino, (2002); Isoparametric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. *Journal of Applied Mechanics*, 69(4): p. 502-514.
37. Moës, N., J. Dolbow, and T. Belytschko, (1999); A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 46(1): p. 131-150.
38. Belytschko, T. and T. Black, (1999); Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5): p. 601-620.

39. Belytschko, T., et al., (1996); Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139(1): p. 3-47.
40. Melenk, J.M. and I. Babuška, The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 19(1)96 .139 .p. 289-314.
41. Mohammadi, S., (2008); Extended finite element method: for fracture analysis of structures. John Wiley & Sons.
42. Belytschko, T., R. Gracie, and G. Ventura, (2009); A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17(4): p. 043001.
43. Ferreira, A.J., (2008); MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures. Vol. 157. Springer.
44. Dolbow, J.E., (1999); An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics.
45. Lai, W.M., et al., (2009); Introduction to continuum mechanics, ed. 4. Butterworth-Heinemann. 2009.
46. Boeraeve, P., (2010); Introduction To The Finite Element Method(FEM).
47. Rao, S.S., (2004); The finite element method in engineering, ed. 4. Butterworth-heinemann.
48. Sadd, M.H., (2014); Elasticity: theory, applications, and numerics. Academic Press.
49. Logan, D., (2011); A first course in the finite element method. Cengage Learning.
50. Hughes, T.J., (2012); The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis. Courier Dover Publications.
51. Gerlach, C.A., (1999); Computational Methods for the Dynamic Response of Cracked Specimens. Northwestern University. p. 130.
52. Griffith, A.A., (1921); The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, c*ontaining papers of a mathematical or physical character*, p. 163-198.
53. Salam, I.u., (2008); Analysis of crack propagation in a thick-walled cylinder under fatigue loading. National University of Sciences and Technology. p. 192.
54. Freund, L.B., (1998); Dynamic fracture mechanics. Cambridge university press.

55. Marigo, J.J., (2010); Initiation of cracks in Griffith's theory: an argument of continuity in favor of global minimization. *Journal of nonlinear science*, 20(6): p. 831-868.
56. Anderson, T.L., (2005); Fracture mechanics: fundamentals and applications. CRC press.
57. Gosz, M. (2013); An Interaction integral methodfor computation of T-stress along the fronts of general non-planer cracks in three-dimensions. in ICF11, Italy 2005.
58. Walters, M.C., G.H. Paulino, and R.H. Dodds Jr, (2005); Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions. *Engineering fracture mechanics*, 72(11): p. 1635-1663.
59. Jackson, J., A. Kobayashi, and S. Atluri, (2004); A Three Dimensional Numerical Investigation of the T* integral along a Curved Crack Front. *Computer modeling in engineering and sciences*, 6: p. 17-30.
60. Walters, M.C., G.H. Paulino, and R.H. Dodds Jr, (2006); Computation of mixed-mode stress intensity factors for cracks in three-dimensional functionally graded solids.*Journalof engineering mechanics*,132(1):p.1-15.
61. Yau, J., S. Wang, and H. Corten, (1980); A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47(2): p. 335-341.
62. Song, S.H. and G.H. Paulino, (2006); Dynamic stress intensity factors for homogeneous and smoothly heterogeneous materials using the interaction integral method. *International journal of solids and structures*, 43(16): p. 4830-4866.
63. Gosz, M. and B. Moran, (2002); An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering fracture mechanics*, 69(3): p. 299-319.
64. Potjananapasiri, K., S. Phongthanapanich, and P. Dechaumphai. (2004); Stress Intensity Factor Calculation by the Domain Integral Method and Adaptive FEM Remeshing Technique .*in Proceeding of the 18th ME-NETT Conference*.
65. Jia, X., C. China, and F.D.Q. Wang, (2006); Three-dimensional static and dynamic stress intensity factor computations using ANSYS. *Simwe Electronics Periodical*, 1: p. 5-16.

۶۶. نبوی س.م.، کامیاب م.، (۱۳۹۱)؛ ''تعیین ضرایب شدت تنش حرارتی گذرا در استوانه‌های حاوی ترک محیطی''. *بیستمین همایش سالانه بین‌المللی مهندسی مکانیک ایران*.

۶۷. فریدون ع.، یکتای‌کیا ف.، (۱۳۸۸)؛ تحلیل ترک در مواد مرکب به وسیله روش انرژی''. *مجله مدل سازی در مهندسی مکانیک*، سال هفتم، شماره ۱۷.

Abstract

Considering the fact that functional graded materials are categorized among the newest material in the world, it is necessary to analyze their behavior and properties more accurately. Dynamic fracture mechanic is one the mechanical branches that attracted the attention of researchers during last century to analyzes the behavior of fracture in material. The current thesis, using the extended finite element method (XFEM) i,e, one of the numerical methods in the analyzes of fracture, investigates the dynamic of stress intensity factor in cylindrical conservators in great detail.

In this thesis after functional graded materials detection and their behaviors the finite element method is investigated. In following the extended finite element method (XFEM) is introduced and its application in fracture mechanic problems and simulation of fractures with regular micromechanical method for complex material with using the generalized isoparametric elements are studied.

Afterward, equilibrium equations in cylindrical coordinates for axisymmetric scenario with XFEM is presented in discrete matrix style and solved with Newmark method. In this dissertation, interaction integral is used to obtain the stress intensity factors.

All of the solving steps from creation of mesh up to solution and results part, displacement contours and stress tensors are solved with MATLAB scientific program. Accuracy of the results is checked against some other well-known publications. Finally effects of length of fracture, change of properties, rotational speed and radii of cylinder in static loads on stress intensity factor. Also variation of stress intensity factor against time in dynamic load scenario is depicted. The material in this investigation in considered be glass epoxy.

***Keywords**:*

Extended Finite Element Method (XFEM) - Micromechanical Model – Axisymmetric – Interaction Integral – Stress Intensity Factor (SIF) – FGM.

University of Shahrood

Faculty of Mechanic

Calculation of stress intensity factor for an internal annular edge crack in a thick-walled FGM cylinder under dynamic loading

Hassan Rayegan

Supervisors:

Prof. Mahmood Shariati

Dr. Hamid Reza Eipakchi

Adviser:

Dr. Masoud Mahdizadeh Rokhi

February 2015