

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک

گروه جامدات

**حلّ کامل استوانه‌های جدارضخیم چرخان FGM با تغییرات نمایی
خواص مکانیکی تحت بارگذاری‌های فشاری و حرارتی بر اساس تئوری
الاستیسیته‌ی مستوی**

دانشجو: مسعود بابایی

استاد راهنما:

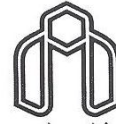
دکتر مهدی قنّاد کهنوی

استاد مشاور:

مهندس حامد قارونی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: شهریور ۱۳۹۳



دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مسعود بابایی رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان حل کامل استوانه‌های جدارضخیم چرخان FGM با تغییرات نمایی خواص مکانیکی تحت بارگذاری‌های فشاری و حرارتی بر اساس تئوری الاستیسیته مستوی (PET) که در تاریخ ۹۳/۰۶/۲۹ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input checked="" type="checkbox"/> امتیاز (۹,۴۱) عالی
--------------------------------	------------------------------------	--------------------------------------------------------

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)

۱- عالی (۱۹ - ۲۰)

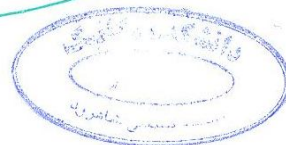
۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استادیار	دکتر مهدی فناد کهنوی	۱- استاد راهنما
	استادیار	مهندس حامد قارونی	۲- استاد مشاور
	استادیار	دکتر مجتبی قطعی	۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر محمد جعفری	۴- استاد ممتحن
	استادیار	دکتر محمد باقر نظری	۵- استاد ممتحن

رئیس دانشکده:



تقدیم اثر

ماحصل آموخته هایم را تقدیم می کنم به آنان که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پرمهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، وجود سبز مادرم

به برترین دوست و همراهم، برادر عزیزم

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران مهربانیتان را

سپاس نتوانم بگویم. امروز هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما. ره آوردی گران

سنگ تر از این ارزان نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم، باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه، غبار

خستگیان را بزداید.

بوسه بر دستان پرمهرتان

تشکر و قدردانی

شکر شایان، نثار ایزد مَنان، که توفیق را رفیقِ راهم ساخت تا این پایان نامه را به اتمام برسانم. از تمامی اساتید محترم دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه شاهرود به‌ویژه استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر مهدی فنّاد کهن‌تویی به‌عنوان استاد راهنما که همواره اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند، کمال تشکر را دارم.

تعهد نامه

اینجانب مسعود بابایی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم چرخان FGM با تغییرات نمایی خواص مکانیکی تحت بارگذاری‌های فشاری و حرارتی بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی مستوی تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهن‌تویی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

هدف از مطالعه‌ی حاضر، تحلیل و مدل‌سازی جابه‌جایی و تنش‌های ایجاد شده در استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت ثابت در حالت تقارن محوری تحت بارگذاری‌های مکانیکی و حرارتی می‌باشد. در ابتدا معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم برای ماده‌ی FG با تغییرات نمایی خواص تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی استخراج و روش حل معادلات نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حل تحلیلی، مدل‌سازی عددی استوانه‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. همچنین تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، تحت بارگذاری فشاری انجام و توزیع تنش و جابه‌جایی در شرایط مرزی مختلف ارائه و نتایج حاصل با نتایج حل عددی مقایسه شده‌اند. علاوه بر آن تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری و شار حرارتی یکنواخت برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده و مقایسه‌ی نتایج حاصل با حل عددی نشان داده است که تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در تحلیل استوانه‌ها با شرایط مذکور از دقت بسیار خوبی برخوردار است. نهایتاً نتیجه‌گیری و جمع‌بندی نهایی انجام شده و پیشنهادهایی نیز ارائه شده است.

واژگان کلیدی: استوانه‌های جدار ضخیم، تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حل تحلیلی، تغییرات

نمایی خواص، مواد هوشمند، روش اجزاء محدود.

فهرست مطالب

فصل ۱: مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها

۲	۱-۱ مقدمه
۲	۲-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها
۴	۳-۱ تئوری پوسته‌های نازک
۵	۱-۳-۱ تئوری غشایی
۶	۲-۳-۱ تئوری خمشی
۷	۴-۱ تئوری پوسته‌های ضخیم
۸	۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی
۹	۲-۴-۱ تئوری تغییر شکل برشی
۱۰	۵-۱ مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM)
۱۱	۱-۵-۱ ویژگی‌های مواد FG
۱۳	۲-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد FG
۱۴	۳-۵-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG
۱۶	۶-۱ پیشینه‌ی پژوهش
۲۱	۷-۱ جمع‌بندی

فصل ۲: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

۲۴	۱-۲ مقدمه
۲۴	۲-۲ روابط اساسی
۲۶	۱-۲-۲ معادلات تعادل تنش
۲۷	۲-۲-۲ روابط سینماتیک (روابط کرنش-جاب‌جایی)
۲۷	۳-۲-۲ روابط ساختاری (روابط تنش-کرنش)
۲۸	۴-۲-۲ مسائل متقارن محوری
۳۰	۵-۲-۲ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی
۳۲	۶-۲-۲ تنش مؤثر
۳۲	۳-۲ تحلیل استوانه‌های ناهمگن تحت فشار
۳۳	۱-۳-۲ حل الاستیک استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار
۳۸	۱-۳-۲-۱ مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی
۴۲	۲-۳-۲-۱ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی
۴۵	۲-۳-۲ حل عددی استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار
۴۶	۴-۲ حل الاستیک استوانه‌ی همگن تحت فشار
۴۸	۱-۴-۲ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)
۴۹	۲-۴-۲ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)
۴۹	۵-۲ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج
۵۰	۱-۵-۲ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)
۵۰	۱-۱-۵-۲ فشار داخلی
۵۳	۲-۵-۲ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)

۵۳	۱-۲-۵-۲ فشار داخلی
۵۵	۲-۲-۵-۲ فشار خارجی
۶۰	۳-۲-۵-۲ فشار داخلی و خارجی
۶۱	۶-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

فصل ۳: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

۶۴	۱-۳ مقدمه
۶۴	۲-۳ تحلیل استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار
۶۶	۱-۲-۳ حل الاستیک استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار
۷۲	۱-۱-۲-۳ مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی
۷۷	۲-۱-۲-۳ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی
۸۰	۲-۲-۳ حل عددی استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار
۸۱	۳-۳ حل الاستیک استوانه‌ی همگن چرخان تحت فشار
۸۲	۱-۳-۳ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)
۸۳	۲-۳-۳ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)
۸۴	۴-۳ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج
۸۴	۱-۴-۳ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)
۸۹	۲-۴-۳ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)
۹۳	۵-۳ طراحی بهینه
۱۰۱	۶-۳ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

فصل ۴: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

۱۰۴	۱-۴ مقدمه
۱۰۴	۲-۴ روابط اساسی
۱۰۴	۱-۲-۴ تحلیل حرارتی استوانه
۱۰۶	۲-۲-۴ توزیع دما در استوانه
۱۰۸	۳-۴ تحلیل استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت و دمای ثابت داخلی و خارجی
۱۰۹	۱-۳-۴ حلّ ترموالاستیک استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار
۱۱۶	۱-۱-۳-۴ مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی
۱۲۰	۲-۱-۳-۴ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی
۱۲۴	۲-۳-۴ حلّ عددی استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت و دمای ثابت داخلی و خارجی
۱۲۵	۴-۴ حلّ ترموالاستیک استوانه‌ی همگن چرخان تحت فشار
۱۲۷	۱-۴-۴ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)
۱۲۸	۲-۴-۴ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)
۱۲۹	۵-۴ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج
۱۳۰	۱-۵-۴ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)
۱۳۵	۲-۵-۴ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)
۱۳۸	۶-۴ طراحی بهینه
۱۴۶	۷-۴ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

فصل ۵: جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۱۵۰	۱-۵ مقدمه
۱۵۰	۲-۵ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
۱۵۴	۳-۵ پیشنهادها
۱۵۷	مراجع

فهرست اشکال و نمودارها

- شکل ۱-۱ مقایسه‌ی تغییرات خواص در مواد مختلف ۱۳
- شکل ۱-۲ مؤلفه‌های تنش در المان استوانه‌ای ۲۵
- شکل ۲-۲ مقطع استوانه‌ی جدارضخیم FGM تحت فشار داخلی و خارجی ۳۲
- شکل ۳-۲ توزیع بی‌بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاع ۳۳
- شکل ۴-۲ مقطع عرضی استوانه تحت فشار در حالت تنش صفحه‌ای ۵۰
- شکل ۵-۲ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای ۵۱
- شکل ۶-۲ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای ۵۲
- شکل ۷-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای ۵۲
- شکل ۸-۲ مقطع عرضی استوانه‌ی تحت فشار در حالت کرنش صفحه‌ای ۵۳
- شکل ۹-۲ توزیع تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای ۵۴
- شکل ۱۰-۲ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای ۵۴
- شکل ۱۱-۲ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۵۶
- شکل ۱۲-۲ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۵۶
- شکل ۱۳-۲ توزیع تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۵۸
- شکل ۱۴-۲ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۵۸

- شکل ۲-۱۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در
حالت کرنش صفحه‌ای ۵۹
- شکل ۲-۱۶ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در
حالت کرنش صفحه‌ای ۵۹
- شکل ۳-۱ مقطع استوانه‌ی جدارضخیم چرخان FGM تحت فشار داخلی و خارجی ۶۵
- شکل ۳-۲ توزیع بی‌بعد چگالی در راستای شعاع ۶۵
- شکل ۳-۳ توزیع تابع گاما ۶۸
- شکل ۳-۴ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت فشار در حالت تنش صفحه‌ای ۸۵
- شکل ۳-۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در
حالت تنش صفحه‌ای ۸۵
- شکل ۳-۶ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی
در حالت تنش صفحه‌ای ۸۷
- شکل ۳-۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار
داخلی در حالت تنش صفحه‌ای ۸۷
- شکل ۳-۸ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در
حالت تنش صفحه‌ای ۸۸
- شکل ۳-۹ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت فشار در حالت کرنش صفحه‌ای ۸۹
- شکل ۳-۱۰ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی
در حالت کرنش صفحه‌ای ۸۹
- شکل ۳-۱۱ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی
در حالت کرنش صفحه‌ای ۹۰
- شکل ۳-۱۲ توزیع تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در
حالت کرنش صفحه‌ای ۹۰
- شکل ۳-۱۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار
داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای ۹۱
- شکل ۳-۱۴ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در
حالت کرنش صفحه‌ای ۹۱

- شکل ۳-۱۵ توزیع سه‌بعدی کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای ۹۴
- شکل ۳-۱۶ توزیع میله‌ای کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای ۹۴
- شکل ۳-۱۷ توزیع سه‌بعدی بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای ۹۵
- شکل ۳-۱۸ توزیع میله‌ای بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای ۹۵
- شکل ۳-۱۹ توزیع سه‌بعدی کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای ۹۶
- شکل ۳-۲۰ توزیع میله‌ای کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای ۹۶
- شکل ۳-۲۱ توزیع سه‌بعدی بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای ۹۷
- شکل ۳-۲۲ توزیع میله‌ای بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای ۹۷
- شکل ۳-۲۳ توزیع بهینه‌ی تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۹۹
- شکل ۳-۲۴ توزیع بهینه‌ی تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۹۹
- شکل ۳-۲۵ توزیع بهینه‌ی تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۱۰۰
- شکل ۳-۲۶ توزیع بهینه‌ی جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۱۰۰
- شکل ۳-۲۷ توزیع بهینه‌ی تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۱۰۱

- شکل ۴-۱ مقطع استوانه‌ی جدارضخیم چرخان FGM تحت فشار یکنواخت و دمای ثابت داخلی و خارجی ۱۰۸
- شکل ۴-۲ توزیع بی‌بعد ضریب انبساط حرارتی در راستای شعاع ۱۰۹
- شکل ۴-۳ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای ۱۳۰
- شکل ۴-۴ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای ۱۳۲
- شکل ۴-۵ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای ۱۳۲
- شکل ۴-۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای ۱۳۳
- شکل ۴-۷ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای ۱۳۳
- شکل ۴-۸ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۳۴
- شکل ۴-۹ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۳۵
- شکل ۴-۱۰ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۳۵
- شکل ۴-۱۱ توزیع تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۳۶
- شکل ۴-۱۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۳۶
- شکل ۴-۱۳ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۳۷
- شکل ۴-۱۴ توزیع سه‌بعدی کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای ۱۳۹

- شکل ۴-۱۵ توزیع میله‌ای کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای ۱۳۹
- شکل ۴-۱۶ توزیع سه‌بعدی بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای ۱۴۰
- شکل ۴-۱۷ توزیع میله‌ای بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای ۱۴۰
- شکل ۴-۱۸ توزیع سه‌بعدی کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۴۱
- شکل ۴-۱۹ توزیع میله‌ای کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۴۱
- شکل ۴-۲۰ توزیع سه‌بعدی بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۴۲
- شکل ۴-۲۱ توزیع میله‌ای بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای ۱۴۲
- شکل ۴-۲۲ توزیع بهینه‌ی تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۱۴۴
- شکل ۴-۲۳ توزیع بهینه‌ی تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۱۴۴
- شکل ۴-۲۴ توزیع بهینه‌ی تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۱۴۵
- شکل ۴-۲۵ توزیع بهینه‌ی جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۱۴۵
- شکل ۴-۲۶ توزیع بهینه‌ی تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ۱۴۶

فهرست جداول

- ۶۰ جدول ۱-۲ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در حالت تنش صفحه‌ای و در لایه‌ی میانی
- ۶۰ جدول ۲-۲ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در حالت کرنش صفحه‌ای و در لایه‌ی میانی
- ۹۲ جدول ۱-۳ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌های داخلی، میانی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای
- ۹۲ جدول ۲-۳ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌های داخلی، میانی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای
- ۱۳۷ جدول ۱-۴ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌های داخلی، میانی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای
- ۱۳۸ جدول ۲-۴ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌های داخلی، میانی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای

فهرست علائم و اختصارات

u_R	جابه‌جایی شعاعی
u_θ	جابه‌جایی محیطی
u_x	جابه‌جایی طولی
R	مختصات در جهت شعاعی استوانه
θ	مختصات در جهت محیطی استوانه
x	مختصات در جهت طولی استوانه
$\varepsilon_R, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$	کرنش‌های شعاعی، محیطی و طولی
ε^e	کرنش الاستیک
ε^T	کرنش حرارتی
λ, μ	ضرایب لامه
ν	نسبت پواسون
$\theta(R)$	توزیع اختلاف دما در راستای شعاعی
θ_i, θ_o	اختلاف دمای داخلی و دمای خارجی با دمای مرجع
E	مدول الاستیسیته
k	نسبت شعاع خارجی به داخلی
r	نسبت شعاع استوانه به شعاع داخلی
R_i	شعاع داخلی استوانه
R_o	شعاع خارجی استوانه
L	طول استوانه
h	ضخامت پوسته
n_i	ضریب ناهمگنی
P_i	فشار داخلی
P_o	فشار خارجی
α	ضریب انبساط حرارتی
K_t	ضریب انتقال حرارت

C_p	ظرفیت گرمایی ویژه
\dot{q}	نرخ تولید گرما
ρ	چگالی
$\sigma_R^H, \sigma_\theta^H, \sigma_x^H$	تنش‌های شعاعی، محیطی و طولی در استوانه‌ی همگن
ω	سرعت دورانی
T_i	دمای داخلی
T_o	دمای خارجی
T^*	دمای مرجع
$\Delta T(r)$	توزیع دما در راستای شعاعی

فصل ۱

مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها

۱-۱ مقدمه

پوسته‌ها^۱ یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسانها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند؛ در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف: ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی، هوا و فضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها و هواپیماها، پرتابه‌ها و پرتاب‌کننده‌ها، موشک‌ها و سفینه‌ها تولید می‌شوند.

پوسته‌ها به طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آنها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌تری برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش‌پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند.

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

الف- از دیدگاه هندسی:

پوسته‌ی حاصل از انتقال^۲: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

1. Shells
2. Shell of Translation

پوسته‌ی حاصل از دوران^۱: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک^۲: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی^۳ آن کوچکتر از $1/20$ باشد.

پوسته‌ی جدار ضخیم^۴: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگتر از $1/20$ باشد.

ب- از دیدگاه مادی:

پوسته‌ی همگن^۵: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته‌ی ناهمگن^۶: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

پوسته‌ی همسانگرد^۷: خواص مکانیکی (E, ν) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد^۸: خواص مکانیکی (E, ν) ماده‌ی پوسته در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

ج- از دیدگاه رفتاری:

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک^۹: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارگذاری و بی‌باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

-
1. Shell of Rotation
 2. Thin Shell
 3. Midsurface
 4. Thick Shell
 5. Homogeneous Shell
 6. Inhomogeneous(Heterogeneous) Shell
 7. Isotropic Shell
 8. Anisotropic Shell
 9. Small Deflection

پوسته با تغییر شکل های بزرگ^۱: جابه جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی باری، کوچک نیست(رفتار غیر خطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان^۲: تغییر شکل ها بازگشت پذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می کنند(رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان^۳: تغییر شکل ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی کنند(رفتار غیر خطی از نظر مادی).

۱-۳ تئوری پوسته های نازک

در پوسته های نازک، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچکتر از $1/20$ می باشد. تئوری این دسته از پوسته ها بر مبنای تئوری الاستیسیته ی خطی بنا شده است. به طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته ی سه بعدی استفاده نمی شود؛ بلکه با ساده سازی روابط الاستیسیته، روش های تحلیلی- تقریبی برای تحلیل پوسته های نازک به دست می آورند. دقت نتایج تئوری های ارائه شده بستگی به درجه ی ساده سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کیرشهف^۴ (۱۸۵۰) درباره ی ورق ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته ها به کار گرفته شد. ارون^۵ (۱۸۷۴) تئوری پوسته ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لوو^۶ (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته های نازک یا تئوری لوو- کیرشهف مشهور است. رایسنر^۷ (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لوو تحلیل پوسته های

1. Large Deflection
2. Elastic Behavior
3. Plastic Behavior
4. Kirchhoff
5. Aron
6. Love
7. Reissner

حاصل از دوران متقارن محوری^۱ را ارائه نمود. فلوگه^۲(۱۹۳۲) اولین کسی است که تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشد. با ساده‌سازی آنها تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به دست می‌آیند. نظریات فلوگه توسط بیرنه^۳(۱۹۴۴) تکمیل شد. نقدی^۴(۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به کارگیری آنها مشکل می‌باشد. سنדרز^۵(۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلوف^۶(۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)^۷

۲- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)^۸

۳- تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو (تئوری فلوگه)^[۱]

۱-۳-۱ تئوری غشایی

غشاء^۹ از دیدگاه مکانیکی، یک تار^{۱۰} دو بعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای

غشایی) را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی^{۱۱} آنها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند

-
1. Axisymmetric Shell of Revolution
 2. Flugge
 3. Byrne
 4. Naghdi
 5. Sanders
 6. Novozhilov
 7. Membrane Theory
 8. Bending Theory
 9. Membrane
 10. String
 11. Bending Stiffness

لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته-های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسایل در حالت تنش صفحه‌ای^۱ و کرنش صفحه‌ای^۲ با چشم‌پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۲].

۱-۳-۲ تئوری خمشی

ورق^۳ از دیدگاه مکانیکی، یک تیر^۴ دو بعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناور^۵ ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لوو با همین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات لوو- کیرشهف می‌نامند که عبارتند از [۲]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته

ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

-
1. Plane Stress
 2. Plane Strain
 3. Plate
 4. Beam
 5. Navier

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

۱-۴ تئوری پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه^۱ (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (PET)^۲، حلّ دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد [۳]، که تاکنون نیز در حلّ مسایل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین^۳ (۱۹۳۰) روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد. ولاسف^۴ (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلّی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی^۵ را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود [۴]. میرسکی و هرمان^۶ (۱۹۵۸) با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۵]. گرینسپن^۷ (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود [۶].

تئوری عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری الاستیسیته‌ی خطی

۲- تئوری تغییر شکل برشی

-
1. Lamé
 2. Plane Elasticity Theory
 3. Galerkin
 4. Vlassov
 5. Shear Deformation
 6. Mirsky-Hermann
 7. Greenspon

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی

به طور کلی در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول رابه‌دست آورد؛ معادلات عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی هر چند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حل دقیق می‌شود ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به کارگیری آنها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده‌شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها به کار برد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به‌دست آورد. تئوری لامه به تئوری کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است [۷ و ۸].

معادله دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌ی ضخیم جدار ثابت عبارت است از:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0 \quad \text{or} \quad r^2 u_r'' + r u_r' - u_r = 0 \quad (1-1)$$

و جابه‌جایی استوانه u_r برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (2-1)$$

r شعاع استوانه، C_1, C_2 ثابت‌های معادله هستند که با شرایط مرزی به‌دست می‌آیند.

۱-۴-۲ تئوری تغییر شکل برشی

در این تئوری، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. به طور کلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (r) برابر است با شعاع سطح میانی (R) به علاوه فاصله‌ی آن نقطه از سطح میانی (z)، یعنی:

$$r = R + z \quad , \quad \left| \frac{z}{h} \right| < 1 \quad (۳-۱)$$

بر اساس تئوری لامه، جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی توخالی:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1 (R + z) + \frac{C_2}{(R + z)} \quad (۴-۱)$$

به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} u_r &= \left(C_1 (R + z) + \frac{C_2}{R} \right) \left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots \right) \\ &= \left(C_1 R + \frac{C_2}{R} \right) + \left(C_1 - \frac{C_2}{R^2} \right) z + \frac{C_2}{R^3} z^2 + \dots \\ \Rightarrow u_r &= u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots \end{aligned} \quad (۵-۱)$$

بر اساس رابطه‌ی بالا، جابه‌جایی شعاعی را به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب z می‌توان نوشت.

اگر $z = 0$ باشد، نشانگر جابه‌جایی سطح میانی است. اگر فقط جمله‌ی اول در نظر گرفته شود $u = u_0$

، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های کلفت می‌شود که مشابه تئوری خمشی (تئوری مرتبه‌ی یک

در پوسته‌های نازک) و اگر دو جمله در نظر گرفته شود $u = u_0 + u_1 z$ ، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی یک

پوسته‌های کلفت می‌شود که مشابه تئوری فلوگه (تئوری مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) می‌باشد [۶].

در این تئوری، علاوه بر اثر نیروهای محوری، اثرات برش، خمش، پیچش و نیز اثرات اینرسی

دورانی و میدان حرارتی را می‌توان در نظر گرفت. تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک به تئوری تغییر شکل

برشی مرتبه‌ی اول میرسکی- هرمان شهرت دارد که تعمیم تئوری تیموشنکو^۱ در تیرها و همچنین تئوری میندلین^۲ در ورق‌ها می‌باشد [۹]. میدان جابه‌جایی در این تئوری عبارت است از:

$$\begin{cases} U_x = u + \phi z \\ U_\theta = v + \theta z \Rightarrow \{U\} = \{u_0\} + \{u_1\} z \\ U_z = w + \psi z \end{cases} \quad (۶-۱)$$

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند ولیکن الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. هرچند به کارگیری تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، منجر به حل دقیق مسائل می‌شود، ولیکن به دلیل اینکه تاکنون هیچ راه حل کاملی برای پوسته‌های کلفت (به غیر از موارد خاص) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی ارائه نشده است، تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، انواع مواد، انواع بارگذاری و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری^۳، روش مناسبی می‌باشد.

۱-۵ مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM)

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوا و فضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. از این رو دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها)^۴ در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهمسان

1. Timoshenko
2. Mindlin
3. Nonaxisymmetric
4. Functionally Graded Materials
5. Composite Material (Composites)

به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری همزمان مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

لخنیتسکی^۶ (۱۹۵۰) تئوری الاستیسیته‌ی مواد ناهمسانگرد را فرمول‌بندی کرد [۱۰] و پس از وی دیگران، تئوری‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی را ارائه نمودند. وینسون^۷ (۱۹۷۴) تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی را در تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی به کار برد و بین نتایج دو روش مقایسه‌ای انجام داد.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آنهاست که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به‌ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص یا مواد هدفمند (FGM) در ساختار ارگانیزم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به عنوان مثال استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد FG، ناهمگن هستند ولیکن آنها را همسانگرد در نظر می‌گیرند.

۱-۵-۱ ویژگی‌های مواد FG

مواد ناهمگن FG در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای

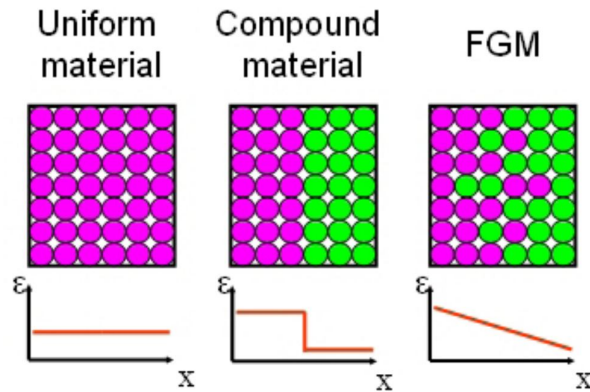
ویژگی‌های به شرح زیر می‌باشند [۱۱]:

1. Lekhnitskii
2. Vinson

- ۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا. درحقیقت این گونه مواد با کاهش تنش‌های حرارتی، آثار منفی آنها را به نحو قابل توجهی کاهش می‌دهند. به کمک مواد FG می‌توان در ناحیه‌هایی که تنش‌های حرارتی به حالت بحرانی می‌رسند، آنها را کنترل کرد.
- ۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا. به کمک مواد FG می‌توان استحکام مواد را افزایش داد تا از ورود اجسام به ناحیه‌ی مومسان و حتی شکست^۱ تا حدود زیادی جلوگیری شود.
- ۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود، مانند لبه‌های جسم و نزدیکی سوراخ‌ها و گشودگی‌ها. به کمک مواد FG می‌توان آثار تمرکز تنش را به صورت چشم‌گیری کاهش داد.
- ۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد هدفمند FG است.
- ۵- اگر پوشش ترد^۲ بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.
- ۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG، به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آنها

1. Fracture
2. Brittle Coating

حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل (۱-۱) مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد همسانگرد، کامپوزیت و FG را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱ مقایسه‌ی تغییرات خواص در مواد مختلف [۱۱]

۱-۵-۲ تاریخچه‌ی مواد FG

مفهوم اولیه‌ی FGM توسط نینو^{۱۰} و همکارانش در ۱۹۸۴ در سازمان هوا و فضای ژاپن مطرح و از ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید FGM در این کشور شروع شد [۱۲ و ۱۳]. مرحله‌ی اول پروژه‌ی ملی ((فناوری گسترش FGM)) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در زمینه‌ی تحقیق در مورد این پروژه، سه گروه ساخت مواد، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود.

پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلیمتر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه‌ی کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه‌ی کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در

1. Ninno

۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند [۱۴]. مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلیمتر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلیمتر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد [۱۵]. دومین سمپوزیوم جهانی FGM، در ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به‌ویژه تحلیل سازه‌های FGM فراگیر شد.

۱-۵-۳ مدل‌سازی ریاضی مواد FG

با توجه به اینکه مواد FG اساساً ناهمگن می‌باشند و خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی آنها به صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند، می‌توان تغییر خواص را با یک تابع پیوسته‌ی ریاضی، مدل کرد و از آن در روش‌های تحلیلی و عددی بهره گرفت. روش مرسوم در مدل‌سازی خواص مکانیکی و حرارتی مواد FG، استفاده از یک تابع توانی یا تابع نمایی برای بیان توزیع پیوسته‌ی خواص در ماده می‌باشد. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خواص، تغییرات مدول کشسانی (E)^{۱۱}، ضریب هدایت-حرارتی، ضریب انبساط حرارتی و چگالی را در نظر می‌گیرند و تغییرات نسبت پواسون (ν)^{۱۲}، را لحاظ نمی‌کنند. دلیل آن، مقدار نسبت پواسون است که بسیار نزدیک به هم می‌باشد، به گونه‌ای که می‌توان از تغییرات ناچیز آن در جسم چشم‌پوشی کرد، یعنی ماده را ناهمگن همسانگرد (FG ایزوتروپ) در نظر گرفت.

أباتا و نودا^{۱۳} (۱۹۹۴) تابع توانی [۱۶]، هورگان و چان^{۱۴} (۱۹۹۹) تابع توانی [۱۷]، یانگ^{۱۵} (۲۰۰۰) تابع توانی [۱۸]، توتونچو^{۱۶} (۲۰۰۱) تابع توانی [۱۹]، تارن^{۱۷} (۲۰۰۱) تابع توانی [۲۰]، جباری و همکاران

-
1. Elasticity Modulus
 2. Poisson's Ratio
 3. Obata & Noda
 4. Horgan & Chan
 5. Yang
 6. Tutuncu
 7. Tarn

(۲۰۰۳) تابع توانی [۲۱]، اراسلان و آکیز^{۱۸} (۲۰۰۶) تابع نمایی [۲۲] و هونگ جون و ژیفای^{۱۹} (۲۰۰۶) تابع نمایی [۲۳] را در روش‌های تحلیلی به کار بردند.

تابع توانی در اکثر مراجع به صورت رابطه‌ی (۷-۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$P(z) = P_a \left(\frac{z}{a} \right)^n \quad (7-1)$$

P_a خاصیت ماده (مکانیکی، حرارتی و ...) در یک لایه‌ی مشخص و n ثابت ناهمگنی است.

رایج‌ترین ماده‌ی FG، تلفیق فلز-سرامیک^{۲۰} است که با افزودن برخی عناصر آلیاژی دیگر خواص دلخواه تأمین می‌شود. پراوین و ردی^{۲۱} (۱۹۹۸)، رابطه‌ی ویژه‌ای برای یک ورق FGM با ضخامت ثابت h ارائه کردند. ایشان تغییر خواص را در ورق به صورت زیر بیان نمودند [۲۴]:

$$P(z) = (P_c - P_m)V^n + P_m \quad (8-1)$$

P_m خواص فلز، P_c خواص سرامیک و V نسبت حجمی در جسم می‌باشد.

$$V = \left(\frac{z}{h} \right) + \frac{1}{2}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (9-1)$$

اگر $n = 0$ باشد، ورق همگن سرامیک به دست می‌آید؛ اگر $z = -h/2$ باشد، خاصیت فلزی و اگر $z = h/2$ باشد، خاصیت سرامیک به دست می‌آید. این ماده در اجسامی که لبه‌ی بالایی آن در معرض گرادیان دمایی بالا و لبه‌ی پایینی آن تحت بارهای مکانیکی قرار دارند، بسیار مفید است.

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت کلی‌تر برای دو خاصیت به شکل زیر بیان نمود:

$$P(z) = (P_1 - P_2)V^n + P_2 \quad (10-1)$$

P_1 و P_2 خواص در دو لایه‌ی مختلف می‌باشد. به عنوان مثال رابطه برای یک استوانه‌ی توخالی

جدار ثابت، به صورت زیر نوشته می‌شود:

-
1. Eraslan & Akis
 2. Hongjun & Zhifei
 3. Metal-Ceramic
 4. Praveen & Reddy

$$\begin{cases} E(r) = (E_0 - E_i)V^n + E_i \\ V = \frac{r/r_i - 1}{r_o/r_i - 1} \end{cases} \quad (11-1)$$

E_0 و E_i به ترتیب، مدول یانگ ماده‌ی FG در شعاع داخلی و خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۹) سه مدل تابع توانی ساده، تابع توانی مشابه تابع پراوین و ردی و نیز تابع نمایی به صورت تلفیق فلز-سرامیک ارائه کرد [۲۵]. شاو^{۲۲} (۲۰۰۸) برای خواص ماده‌ی ناهمگن تابع نمایی به صورت رابطه‌ی (۱۲-۱) ارائه کرد [۲۶]:

$$\begin{cases} A(R) = A_0 e^{m_i(R-R_1)} \\ R_1 = \frac{r_1}{r_m}, R_2 = \frac{r_2}{r_m} \end{cases} \quad (12-1)$$

که در این رابطه m_i ثابت ناهمگنی ماده، r_1 و r_2 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و r_m میانگین شعاع داخلی و خارجی و A_0 خواص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۷) [۲۷] و همچنین کلس و کانکر^{۲۳} (۲۰۱۱) [۲۸] تغییر خواص در جداره‌ی استوانه را به صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی زیر بیان نمودند:

$$A(r) = A_0 e^{\beta r} \quad (13-1)$$

که در آن r شعاع استوانه، β ثابت ناهمگنی ماده و A_0 نیز خواص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

۱-۶ پیشینه‌ی پژوهش

تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلف، همان‌گونه که در بخش ۱-۴ بیان شد، دارای قدمتی نسبتاً طولانی است. تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد به حدود نیم قرن پیش

1. Shao
2. Keles & Conker

برمی‌گردد، ولی تحلیل استوانه‌های ناهمگن مربوط به دهه‌ی اخیر است. در این بخش، مطالعات انجام شده بر روی استوانه‌های همگن و ناهمگن در رابطه با موضوع پروژه گزارش می‌شود.

استوانه‌های همگن: برای اولین بار لامه در ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی،

حل دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از مواد همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای را ارائه کرد [۷ و ۳]. گالرکین در ۱۹۳۰ روابط حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف در ۱۹۴۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حل برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی در ۱۹۵۶ با لحاظ اثر برش عرضی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود [۴]. میرسکی و هرمان در ۱۹۸۵ با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم را ارائه کردند [۵]. در ۱۹۶۰ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را گرینسپین با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم، محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود [۶].

زیو و پرل^{۲۴} در ۱۹۷۳ با به‌کارگیری تئوری میرسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، پاسخ ارتعاشی استوانه‌های نیمه‌بلند را به‌دست آوردند [۲۹]. سوزوکی و تاکاهاشی^{۲۵} در ۱۹۸۱ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر استوانه‌های همگن جدار متغیر را استخراج و آنها را به کمک سری فریبینیوس حل کردند. ایشان برای همگرایی ۵۰ جمله از سری را در نظر گرفتند [۳۰]. سوزوکی و همکاران در ۱۹۸۶ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر مخروط‌های همگن جدار متغیر را به‌دست آورده و آنها را به کمک سری فریبینیوس با لحاظ ۱۰۰ جمله از سری، حل کردند [۳۱]. ایپک‌چی و همکاران در ۲۰۰۳ معادلات استوانه‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات^{۲۶} حل کردند [۳۲]. ایشان در ۲۰۰۸ معادلات مخروط‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی

1. Ziv & Perl
2. Suzuki & Takahashi
3. Perturbation Theory

مرتبه‌ی دوم، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حل کردند [۳۳]. قناد و همکاران در ۲۰۰۹ حل عمومی پوسته‌های مخروطی شکل ناقص جدار ضخیم همگن و همسانگرد را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به کمک تئوری اغتشاشات ارائه نمودند [۳۴]. در سال ۲۰۱۰ نیز قناد و زمانی‌نژاد با استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم همگن و همسانگرد بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت حاصل را برای شرایط مرزی دوسر گیردار حل نمودند [۳۵]. ایپک‌چی در ۲۰۱۰ نیز معادلات پوسته‌های جدار ضخیم مخروطی شکل همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حل کرد [۳۶].

استوانه‌های ناهمگن: پس از اولین سمپوزیوم جهانی FGM در ۱۹۹۰، فوکویی و یاماناکا^{۲۷} در ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه-ای به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به روش عددی رانگ-کوتا حل کردند [۳۷]. آباتا و نودا در ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره‌ی توخالی FGM استخراج و ماده‌ی بهینه را به دست آوردند [۱۶]. لوی و ردی^{۲۸} در ۱۹۹۹ ارتعاشات پوسته‌های نازک استوانه‌ای FGM را با استفاده از تئوری لوی-کیرشلف استخراج و آنها را به کمک روش ریلی-ریتز حل کردند [۳۸]. هورگان و چان^{۲۹} در ۱۹۹۹ معادلات حاکم بر یک استوانه‌ی توخالی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را به دست آوردند [۱۶]. ایشان در ۱۹۹۹ با همین روش، تنش‌ها را در یک دیسک دوار FGM بررسی کردند [۳۹]. توتونچو در ۲۰۰۱ حل دقیق مخازن استوانه‌ای و کره‌ی جدار ثابت FGM با توزیع توانی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت داخلی را ارائه کردند. ایشان معادلات استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک تئوری لامه استخراج و توزیع تنش را به‌ازای ریشه‌های مثبت معادله مشخصه به دست آورد. در مقاله‌ی ایشان، رابطه و نمودار تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه است

1. Fukui & Yamanaka
2. Loy & Reddy
3. Horgan & Chan

که در برخی از پژوهش‌های پسین نیز استفاده شده است [۱۹]. جباری و همکاران در ۲۰۰۲ تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی توخالی FGM تحت بارهای متقارن [۲۱] و در ۲۰۰۳ تحت بارهای نامتقارن حرارتی [۴۰] را به دست آوردند.

هونگ‌جون و ژیفای در ۲۰۰۶ حلّ دقیق استوانه‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی مدول یانگ در راستای شعاعی با لایه‌های همگن را ارائه کردند [۲۳]. ژیفای و همکاران در ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به صورت توانی و خطی، استوانه‌ی FGM را با روش چند لایه‌ای کردن، تحلیل و با حلّ توتونچو مقایسه و در نتیجه به اشتباه مقاله‌ی نامبرده پی‌بردند [۴۱]. توتونچو در ۲۰۰۷ تحلیل استوانه‌ی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع نمایی مدول یانگ، ارائه کرد [۲۷]. شاو در ۲۰۰۸ تحلیل ترمومکانیکی استوانه‌های توخالی تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص تحت بارهای مکانیکی و افزایش خطی دمای مرزی را با انتقال معادلات دیفرانسیل حاکم به حوزه‌ی لاپلاس و استفاده از روش حل به کمک سری‌ها انجام داد [۲۶]. توتونچو در ۲۰۰۹ نیز توزیع میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش مربوط به دیسک، استوانه و کره‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی و توانی خواص ماده در راستای شعاع تحت فشار داخلی را توسط تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش تابع متمم تعیین نمود [۲۵]. زمانی‌نژاد و قناد در ۲۰۰۹ با ارائه‌ی دستگاه معادلات سه‌بعدی بر اساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدار ضخیم FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر در راستای نصف‌النهار را بررسی کردند [۴۲]. قناد و همکاران در ۲۰۱۰ حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه و اشتباه مقاله‌ی توتونچو را نشان داده و آن را تصحیح کردند [۴۳]. ایشان در ۲۰۱۱ حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، ارائه و نتایج آن را با حلّ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی مقایسه نمودند [۴۴]. در ۲۰۱۰ عارفی و رحیمی تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را تحت فشار داخلی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در حالت کرنش

صفحه‌ای انجام دادند [۴۵]. در ۲۰۱۱ کلس و کانکر حل‌گذرای هدایت حرارتی به صورت هذلولوی برای استوانه و کره‌ی توخالی ناهمگن تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص را ارائه نمودند [۲۸]. قربانپور و همکاران در ۲۰۱۱ اثر ناهمگنی را بر روی رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی یک استوانه‌ی چرخان جدار ضخیم 30 FGPM با تغییرات توانی خواص تحت فشار داخلی و خارجی بررسی و معادلات حاصل را برای این استوانه حل کردند [۴۶]. در ۲۰۱۲ بیات و همکاران تحلیل ترموالاستیک کره‌ی جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی را تحت فشارهای داخلی و خارجی با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی انجام دادند [۴۷]. قنّاد و زمانی نژاد در سال ۲۰۱۲ حل‌کره‌های تحت فشار ساخته شده از مواد متغیر تابعی با تغییرات توانی خواص را برای ریشه‌های حقیقی، دوگانه و مختلط از معادله‌ی حاکم بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی مستوی بیان کردند [۴۸]. ایشان در همان سال به بررسی استوانه‌های ناهمگن در شرایط مشابه و در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای پرداختند [۴۹]. تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار FGM با استفاده از اصل کار مجازی و بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در حالت تنش صفحه‌ای و در نهایت مقایسه‌ی نتایج با تئوری الاستیسیته‌ی مستوی از دیگر فعالیت‌های آنها در سال ۲۰۱۲ بود [۵۰]. در همان سال قنّاد و قارونی تنش‌ها و جابه‌جایی‌های ایجاد شده در استوانه‌های تحت فشار ساخته شده از مواد متغیر تابعی با تغییرات توانی خواص را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا به‌دست آوردند [۵۱]. کورسان^{۳۱} و همکاران در سال ۲۰۱۲ حل عددی را برای دیسک چرخان FGM با تغییرات نمایی خواص را به روش اختلاف محدود ارائه دادند [۵۲]. قنّاد و همکاران در ۲۰۱۲ استوانه‌های FGM جدار متغیر تحت فشار را به‌کمک چند لایه کردن دیسک مانند آن به‌صورت نیمه تحلیلی حل کردند [۵۳]. ایشان تحلیل همان سازه را با استفاده از اصل کار مجازی و بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در سال ۲۰۱۳ ارائه دادند [۵۴].

1. Functionally Graded Porous Materials
2. Kursun

۷-۱ جمع بندی

برای تحلیل استوانه‌های ضخیم همگن و ناهمگن با جدار ثابت، فشار یکنواخت و شرایط انتهایی متفاوت، به گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی دو بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی که از دقت بالایی برخوردار می‌باشد استفاده کرد. به دلیل اهمیت تحلیل پوسته‌ها و همچنین ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی آن‌ها و با توجه اینکه تاکنون حلّ تحلیلی برای استوانه‌های جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی خواص تحت بارگذاری‌های فشاری، حرارتی و دورانی به طور همزمان ارائه نشده است؛ در این پژوهش با ارائه‌ی حلّ تحلیلی برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم با شرایط انتهایی مختلف به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حلّ عددی به منظور بررسی صحت نتایج صورت پذیرفته است.

ابتدا در فصل اول این پژوهش، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و کلفت، مطالعات انجام شده در خصوص پوسته‌های استوانه‌ای ارائه شده است. همچنین مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) تعریف و ضمن بیان تاریخچه و ویژگی‌های آن‌ها، شیوه‌های مدل‌سازی ریاضی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته و پیشینه‌ی پژوهشی مواد FG ارائه شده است. فصل دوم شامل مروری بر روابط اساسی حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم و سپس استخراج معادلات حاکم با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی برای ماده‌ی FG با تغییرات نمایی خواص و همچنین ماده‌ی همگن تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی می‌باشد. در نهایت با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حلّ تحلیلی، مدل‌سازی عددی استوانه‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. در فصل سوم برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های چرخان جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن و همگن بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، ضمن ارائه‌ی حلّ عمومی پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری دورانی و فشاری، توزیع تنش و جابه‌جایی به صورت مطالعه‌ی موردی برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار یکنواخت

داخلی و شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. سپس نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه و در نهایت حالت بهینه در طراحی سازه‌ی مورد نظر ارائه شده است. در فصل چهارم نیز به منظور تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، پس از استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن و همگن بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ عمومی پوسته‌های استوانه‌ای چرخان تحت بارگذاری فشاری و حرارتی ارائه و به صورت مطالعه‌ی موردی تحت فشار داخلی و دماییکنواخت در سطوح داخلی و خارجی برای شرایط مرزی مختلف حل شده است. سپس با ارائه‌ی حلّ عددی برای استوانه‌ی مورد نظر، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه و در نهایت به بررسی طراحی بهینه برای استوانه با شرایط مذکور پرداخته شده است. نتیجه‌گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه‌ی پیشنهادها در فصل پنجم انجام شده است.

فصل ۲

تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

۱-۲ مقدمه

از میان انواع پوسته‌های مورد استفاده در صنعت، پوسته‌های جدار ضخیم از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. از جمله کاربردهای آنها می‌توان به تولید مخازن تحت فشار، لوله‌های پرتاب کننده‌ی توپ و بسیاری تجهیزات نظامی و فضایی دیگر اشاره کرد. لذا محققان همواره به دنبال ایجاد تغییرات در این سازه‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آنها در برابر انواع بارگذاری‌ها را افزایش داده و تا حد امکان از وزن آنها بکاهند.

در این فصل ابتدا معادلات و فرضیات اساسی حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم استوانه‌ای، شرایط تقارن محوری و تئوری الاستیسیته‌ی مستوی بیان شده و به کمک آنها، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم همگن و FGM در بارگذاری‌ها و شرایط انتهایی متفاوت به دست آمده است. سپس به کمک روابط اساسی ذکر شده و در نظر گرفتن شرایط تماماً متقارن محوری و با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، معادله‌ی کلی حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن FGM تحت فشارهای داخلی و خارجی استخراج شده و به حلّ تحلیلی آن در شرایط تنش و کرنش صفحه‌ای و برای مقادیر متفاوت ثابت ناهمگنی پرداخته می‌شود. در ادامه حلّ الاستیک استوانه‌های همگن تحت فشار بررسی شده و در نهایت، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با حلّ عددی صورت گرفته توسط نرم افزار المان محدود آباکوس^۱ مقایسه و نتایج در قالب نمودارها و جداول ارائه شده است.

۲-۲ روابط اساسی

در مسائل تحلیل تنش در مجموع با ۲۱ مجهول مواجه هستیم. مجهولات شامل مؤلفه‌های تانسورهای تنش، کرنش و بردار جابه‌جایی می‌باشند. با فرض عدم وجود ممان‌های حجمی و در نظر

1. Abaqus

گرفتن تغییر شکل‌های کوچک، تانسورهای تنش و کرنش متقارن شده و مجهولات به ۱۵ عدد کاهش می‌یابند. این مجهولات در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از:

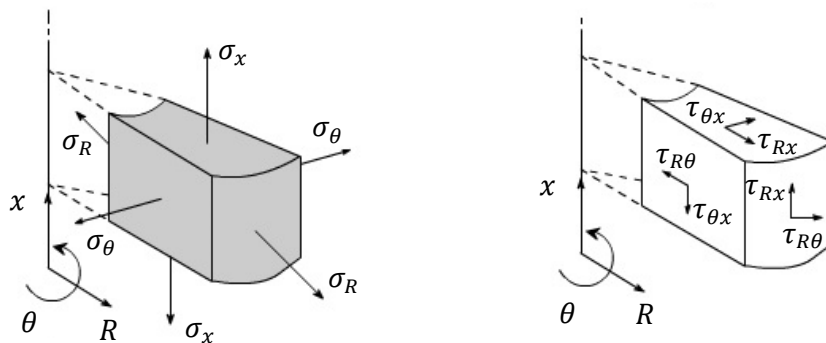
$$[\tilde{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\theta} & \tau_{Rx} \\ \tau_{R\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta x} \\ \tau_{Rx} & \tau_{\theta x} & \sigma_x \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

$$[\tilde{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \gamma_{R\theta}/2 & \gamma_{Rx}/2 \\ \gamma_{R\theta}/2 & \varepsilon_\theta & \gamma_{\theta x}/2 \\ \gamma_{Rx}/2 & \gamma_{\theta x}/2 & \varepsilon_x \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

$$(\bar{u}) = \begin{pmatrix} u_R \\ u_\theta \\ u_x \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

برای حل این ۱۵ مجهول، پانزده معادله را در سه گروه معادلات تعادل، روابط سینماتیک و روابط

ساختاری در اختیار داریم.



شکل ۱-۲ مؤلفه‌های تنش در المان استوانه‌ای

در ادامه با توجه به آن که تغییرات خواص مکانیکی برای مواد FG به صورت نمایی و تنها در راستای شعاعی در نظر گرفته شده است؛ به بیان معادلات حاکم در دستگاه مختصات استوانه‌ای می‌پردازیم. معادله‌ی (۴-۲) توزیع نمایی هر خاصیت را در طی ضخامت استوانه نشان می‌دهد.

$$Pr(R) = Pr_i e^{n(r-1)} \quad (۴-۲)$$

که در آن Pr نماینده خاصیت مورد نظر، R_i شعاع داخلی استوانه و $r = R / R_i$ پارامتر بی‌بعد شده شعاع می‌باشد. بدیهی است که اگر ضریب ناهمگنی برابر صفر در نظر گرفته شود؛ خاصیت در طی ضخامت استوانه ثابت باقی می‌ماند. یعنی ماده‌ی همگن است. نکته‌ی حائز اهمیت دیگر آن است که تغییرات نسبت پواسون در مواد FG و در طی ضخامت استوانه، بسیار ناچیز می‌باشد. لذا روابط با فرض ثابت ماندن این نسبت ارائه می‌شوند.

۲-۲-۱ معادلات تعادل تنش

معادله‌ی حرکت در حالت کلی به صورت زیر است: [۸]

$$div \bar{\sigma} + \rho \bar{b} = \rho \bar{a} \quad (۵-۲)$$

که در آن ρ چگالی، \bar{b} بردار نیروهای حجمی و \bar{a} بردار شتاب است. در حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت، بردار شتاب صفر بوده و به معادله‌ی تعادل تنش می‌رسیم.

$$div \bar{\sigma} + \rho \bar{b} = \bar{0} \quad (۶-۲)$$

با بسط رابطه‌ی فوق در دستگاه مختصات استوانه‌ای (R, θ, x) ، سه معادله حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{Rx}}{\partial x} + \frac{1}{R} (\sigma_R - \sigma_\theta) + \rho b_R = 0 \\ \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{2}{R} \tau_{R\theta} + \rho b_\theta = 0 \\ \frac{\partial \tau_{Rx}}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \tau_{Rx} + \rho b_x = 0 \end{cases} \quad (۷-۲)$$

۲-۲-۲ روابط سینماتیک (روابط کرنش-جابہ جایی)

در حالت کلی، معادله‌ی سینماتیک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}[(\bar{\nabla}\bar{u}) + (\bar{\nabla}\bar{u})^T] \quad (۸-۲)$$

که با ساده سازی در دستگاه مختصات استوانه‌ای، به شش معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_R = \frac{\partial u_R}{\partial R} \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_R}{R} \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{R\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} - \frac{u_\theta}{R} \\ \gamma_{\theta x} = \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\ \gamma_{Rx} = \frac{\partial u_x}{\partial R} + \frac{\partial u_R}{\partial x} \end{array} \right. \quad (۹-۲)$$

۳-۲-۲ روابط ساختاری (روابط تنش-کرنش)

شش معادله‌ی حل باقیمانده، روابط بین مؤلفه‌های تنش و کرنش است که برای مواد الاستیک

خطی و همسانگرد، در حالت کلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{\sigma} = 2\mu\tilde{\varepsilon} + \lambda\tilde{I}tr(\tilde{\varepsilon}) \quad (۱۰-۲)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu}[\tilde{\sigma} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\tilde{I}tr(\tilde{\sigma})] \quad (۱۱-۲)$$

که در آنها μ و λ ثابت‌های لامه بوده و خود تابعی از خواص مکانیکی ماده می‌باشند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{E(R)}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{\nu E(R)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{array} \right. \quad (۱۲-۲)$$

$$E(R) = E_i e^{n_1(r-1)} \quad (۱۳-۲)$$

با بیان معادلات ساختاری در قالب مؤلفه‌های مختصات استوانه‌ای خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sigma_R = 2\mu\varepsilon_R + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \tau_{R\theta} = \mu\gamma_{R\theta} \\ \tau_{\theta x} = \mu\gamma_{\theta x} \\ \tau_{Rx} = \mu\gamma_{Rx} \end{cases} \quad (14-2)$$

و یا

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_R - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_x = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \end{cases}, \begin{cases} \gamma_{R\theta} = \frac{\tau_{R\theta}}{\mu} \\ \gamma_{\theta x} = \frac{\tau_{\theta x}}{\mu} \\ \gamma_{Rx} = \frac{\tau_{Rx}}{\mu} \end{cases} \quad (15-2)$$

۲-۲-۴ مسائل متقارن محوری^۱

در مسائلی که هندسه، بارگذاری‌ها، شرایط مرزی و خواص ماده در تمامی زوایا نسبت به یک محور تغییری نداشته باشند؛ شرایط تقارن محوری برقرار بوده که این امر به ساده‌تر شدن حلّ مسأله کمک می‌کند.

در این تحقیق، هندسه‌ی موردنظر استوانه‌ی جدار ثابت است. شرایط مرزی متقارن بوده و بارگذاری تنها در راستای شعاعی و به صورت متقارن اعمال می‌شود. علاوه بر آن، تمامی خواص، توابع نمایی از شعاع استوانه هستند. لذا در اینجا نیز شرط تقارن محوری برقرار است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial\theta} = 0, \quad u_\theta = 0 \quad (16-2)$$

با اعمال این تغییرات در رابطه‌ی (۹-۲) و استفاده از (۲-۱۴) داریم:

$$\begin{cases} \gamma_{R\theta} = \gamma_{\theta x} = 0 \\ \tau_{R\theta} = \tau_{\theta x} = 0 \end{cases} \quad (۱۷-۲)$$

در این صورت تعداد مجهولات به ۱۰ عدد کاهش یافته و معادلات تعادل تنش، روابط سینماتیک

و روابط ساختاری به ترتیب به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{\partial \tau_{Rx}}{\partial x} + \frac{1}{R}(\sigma_R - \sigma_\theta) + \rho b_R = 0 \\ \frac{\partial \tau_{Rx}}{\partial R} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{R}\tau_{Rx} + \rho b_x = 0 \end{cases} \quad (۱۸-۲)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{\partial u_R}{\partial R} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_R}{R} \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \gamma_{Rx} = \frac{\partial u_R}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial R} \end{cases} \quad (۱۹-۲)$$

$$\begin{cases} \sigma_R = 2\mu\varepsilon_R + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \tau_{Rx} = \mu\gamma_{Rx} \end{cases} \quad (۲۰-۲)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_R - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_x = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \gamma_{Rx} = \frac{\tau_{Rx}}{\mu} \end{cases} \quad (۲۱-۲)$$

تا اینجا توانستیم تعداد مجهولات را به ده عدد کاهش دهیم. اما همچنان قادر به حلّ معادلات به دست آمده و یافتن مجهولات نیستیم. لذا به سراغ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی می‌رویم.

۲-۲-۵ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی (PET)

همان گونه که در فصل نخست ذکر شد؛ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی - که به تئوری کلاسیک مشهور است - اولین بار در سال ۱۸۵۲ توسط لامه برای حلّ استوانه‌های جدار ضخیم معرفی و به کار گرفته شد.

در این تئوری فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود بر محور مرکزی باقی می‌مانند. تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور متقارن بوده و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند، علاوه بر آن جابه‌جایی شعاعی تنها تابع شعاع استوانه است. لذا کرنش برشی γ_{Rx} و تنش برشی τ_{Rx} صفر در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه محورهای دستگاه استوانه‌ای، همان محورهای اصلی و تنش‌های عمودی، همان تنش‌های اصلی هستند. از دیگر نتایج این تئوری، ثابت ماندن تنش و کرنش طولی در راستای طول استوانه می‌باشد.

$$\begin{cases} \gamma_{Rx} = 0, \tau_{Rx} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0, \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (22-2)$$

لذا با در نظر گرفتن شرایط تقارن محوری و استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی؛ معادلات (۲-۱۸ تا ۲-۲۱) به ترتیب به صورت روابط (۲-۲۳ تا ۲-۲۶) بازنویسی می‌شوند.

$$\frac{d\sigma_R}{dR} + \frac{1}{R}(\sigma_R - \sigma_\theta) + \rho b_R = 0 \quad (23-2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{du_R}{dR} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_R}{R} \\ \varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} \end{cases} \quad (24-2)$$

$$\begin{cases} \sigma_R = 2\mu\varepsilon_R + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \\ \sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) \end{cases} \quad (25-2)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_R - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \\ \varepsilon_x = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x) \right] \end{cases} \quad (26-2)$$

روابط تنش-کرنش را می‌توان بدین صورت نیز نمایش داد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(R) \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (27-2)$$

$$\sigma_x = \beta(\sigma_R + \sigma_\theta) \quad (28-2)$$

ثابت‌های A ، B و β با توجه به شرایط انتهای استوانه تعیین می‌شوند.

۲-۲-۵-۱ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\begin{cases} A = \frac{1}{1-\nu^2} \\ B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \\ \beta = 0 \end{cases} \quad (29-2)$$

۲-۲-۵-۲ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)

$$\begin{cases} A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \beta = \nu \end{cases} \quad (30-2)$$

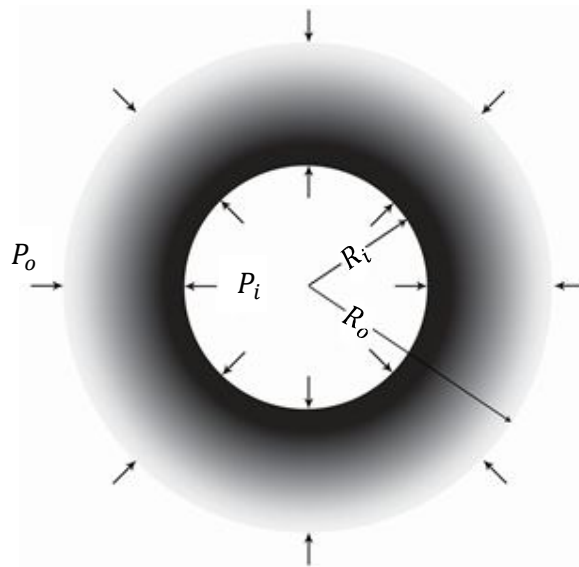
۲-۲-۶ تنش مؤثر

در تحقیق پیش رو به منظور تحلیل و مقایسه‌ی نتایج، از تنش مؤثر فون میزس^۲ استفاده شده است. مقدار این تنش با توجه به تئوری تسلیم فون میزس تعیین می‌شود. طبق این تئوری، نارسایی در اثر تسلیم وقتی در یک جسم اتفاق می‌افتد که، در نقطه‌ای از جسم، چگالی انرژی تغییر شکل در حالت تنش کلی برابر چگالی انرژی تغییر شکل در آزمایش کشش ساده هنگام تسلیم گردد. این معیار هماهنگی خوبی با نتایج آزمایش برای اجسام نرم داشته و به همین علت در طراحی کاربرد زیادی دارد. این معیار برحسب تنش‌های اصلی به صورت زیر می‌باشد:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{eff}^2 \quad (۲-۳۱)$$

۲-۳ تحلیل استوانه‌های ناهمگن تحت فشار

هندسه‌ی مورد بررسی در این بخش، استوانه‌ی جدار ضخیم همسانگرد FGM به شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o می‌باشد. بارگذاری تنها از نوع فشاری بوده و فشارهای وارد بر سطوح داخلی و خارجی استوانه به ترتیب با P_i و P_o مشخص می‌شوند (شکل ۲-۲).

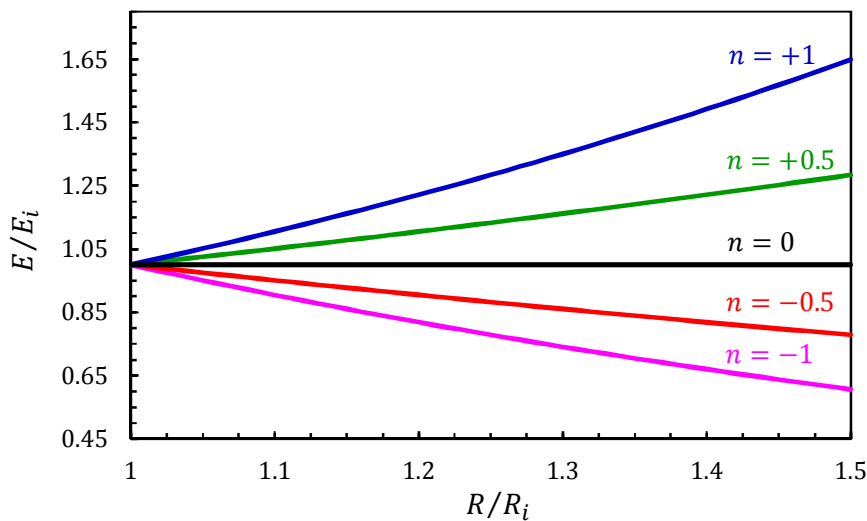


شکل ۲-۲ مقطع استوانه‌ی جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی و خارجی

مدول الاستیسیته و نسبت پواسون توابعی از شعاع استوانه می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و همچنین در این تحقیق، به علت تغییرات جزئی نسبت پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. تغییرات مدول الاستیسیته نسبت به شعاع استوانه نمایی بوده و با رابطه‌ی (۳۲-۲) تعریف می‌شود.

$$E(R) = E_i e^{n_1(r-1)} \quad (32-2)$$

در این رابطه $r = R/R_i$ مختصات شعاع بی‌بعد است. E_i مدول الاستیسیته در سطح داخلی و n_1 ضریب ناهمگنی ماده می‌باشد. شکل (۳-۲) توزیع مدول الاستیسیته‌ی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن و همسانگرد به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۳-۲ توزیع بی‌بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاع

۲-۳-۱ حل الاستیک استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار

در حالتی که نیروهای حجمی در مسأله وجود نداشته باشند؛ معادله‌ی تعادل (۲۳-۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\sigma_R}{dR} + \frac{1}{R}(\sigma_R - \sigma_\theta) = 0 \quad (33-2)$$

با جایگذاری تنش‌های شعاعی و محیطی از رابطه‌ی (۲۷-۲) در معادله‌ی تعادل (۳۳-۲) و همچنین استفاده از (۲۴-۲) و (۳۲-۲)، معادله‌ی حاکم بر استوانه به دست می‌آید.

$$R^2 \frac{d^2 u_R}{dR^2} + (R^2 p + R) \frac{du_R}{dR} + (Rp v^* - 1) u_R = 0 \quad (۳۴-۲)$$

که در آن $p = n_1 / R_i$ بوده و v^* با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شود.

$$v^* = \frac{B}{A} = \begin{cases} v & (\text{Plane stress}) \\ \frac{v}{1-v} & (\text{Plane strain}) \end{cases} \quad (۳۵-۲)$$

با استفاده از روش تغییر متغیر و جایگذاری عبارت $u_R(R) = w/R$ در (۳۴-۲)، معادله‌ی حاکم به معادله‌ی هایپرژئومتریک^۳ زیر تبدیل می‌شود:

$$R \frac{d^2 w}{dR^2} + (Rp - 1) \frac{dw}{dR} + p(v^* - 1)w = 0 \quad (۳۶-۲)$$

حل معادله‌ی هایپرژئومتریک (۳۶-۲) کاملاً وابسته به علامت ثابت p می‌باشد. از آنجا که شعاع داخلی استوانه عددی مثبت است؛ لذا حل معادله‌ی فوق وابسته به علامت ضریب ناهمگنی n_1 می‌باشد. نکته‌ی قابل توجه آن است که روش پیش رو جهت حل معادله‌ی حاکم، برای مقادیر مخالف صفر از ضریب n_1 قابل ارائه بوده و در صورت صفر شدن این ضریب، همان گونه که پیش تر نیز به آن اشاره شد، جنس استوانه به یک ماده‌ی همگن تبدیل شده و باید از حل کلاسیک که در بخش (۴-۲) به آن اشاره خواهد شد، به تحلیل استوانه پرداخت.

پاسخ معادله‌ی (۳۶-۲) به ازای مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی عبارت است از: [۵۶ و ۵۵]

$$w = e^{-Rp} J(-v^*, -1; Rp), n \neq 0 \quad (۳۷-۲)$$

و برای مقادیر منفی داریم:

$$w = J(v^* - 1, -1; -Rp), n \neq 0 \quad (۳۸-۲)$$

که در آنها

1. Hypergeometric equation

$$J(a, b; z) = z^{1-b} [C_1 \Phi(a-b+1, 2-b; z) + C_2 \Psi(a-b+1, 2-b; z)] \quad (39-2)$$

$$\Phi(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \quad (40-2)$$

$$\Psi(a, b; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt \quad (41-2)$$

تابع گاما که در روابط بالا از آن استفاده شد؛ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad (42-2)$$

با جایگزینی (39-2) در (37-2) و (38-2) و همچنین استفاده از $u_R(R) = w/R$ ، پاسخ معادله-

ی (34-2) عبارت است از:

$$u_R(R) = C_1 M(R) + C_2 N(R) \quad (43-2)$$

به منظور کوتاه‌تر شدن عبارات، توابع $M(R)$ و $N(R)$ که در برگیرنده‌ی روابط به ازای مقادیر

مثبت و منفی ضریب ناهمگنی می‌باشند را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M(R) = \begin{cases} \frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Phi(2-\nu^*, 3; Rp) & n > 0 \\ Rp^2 \Phi(1+\nu^*, 3; -Rp) & n < 0 \end{cases} \quad (44-2)$$

$$N(R) = \begin{cases} \frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Psi(2-\nu^*, 3; Rp) & n > 0 \\ Rp^2 \Psi(1+\nu^*, 3; -Rp) & n < 0 \end{cases} \quad (45-2)$$

ثابت‌های C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌شوند. از آنجا که شرایط مرزی را برای

تنش شعاعی در اختیار داریم؛ لذا با جایگذاری (43-2) در (24-2) و همچنین استفاده از رابطه‌ی (2-

27)، تنش شعاعی را بر حسب ثابت‌های C_1 و C_2 به دست می‌آوریم:

$$\sigma_R(R) = E_i e^{n(r-1)} [C_1 (AC(R) + B \frac{M(R)}{R}) + C_2 (AD(R) + B \frac{N(R)}{R})] \quad (46-2)$$

که در آن ثابت‌های A و B با توجه به شرایط تکیه‌گاهی و با استفاده از روابط (۲-۲۹) و (۲-۳۰)

تعیین می‌شوند.

توابع $C(R)$ و $D(R)$ عبارتند از:

$$C(R) = \begin{cases} \frac{p^2 - Rp^3}{e^{Rp}} \Phi(2 - v^*, 3; Rp) + \frac{p^3 R(2 - v^*)}{3e^{Rp}} \Phi(3 - v^*, 4; Rp) & n > 0 \\ p^2 \Phi(1 + v^*, 3; -Rp) - \frac{p^3 R(1 + v^*)}{3} \Phi(2 + v^*, 4; -Rp) & n < 0 \end{cases} \quad (۴۷-۲)$$

$$D(R) = \begin{cases} \frac{p^2 - Rp^3}{e^{Rp}} \Psi(2 - v^*, 3; Rp) - \frac{p^3 R(2 - v^*)}{e^{Rp}} \Psi(3 - v^*, 4; Rp) & n > 0 \\ p^2 \Psi(1 + v^*, 3; -Rp) + p^3 R(1 + v^*) \Psi(2 + v^*, 4; -Rp) & n < 0 \end{cases} \quad (۴۸-۲)$$

شرایط مرزی برای تنش شعاعی عبارت است از:

$$\begin{cases} \sigma_R(R)|_{r=1} = -P_i \\ \sigma_R(R)|_{r=k} = -P_o \end{cases} \quad (۴۹-۲)$$

با داشتن شرایط مرزی و استفاده از معادله‌ی (۲-۴۶)، ثابت‌های C_1 و C_2 محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{P_i e^{n(k-1)} \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - P_o \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right)}{E_i e^{n(k-1)} \left\{ \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \right\}} \\ C_2 = \frac{P_i e^{n(k-1)} \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - P_o \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right)}{E_i e^{n(k-1)} \left\{ \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \right\}} \end{cases} \quad (۵۰-۲)$$

با جایگذاری مقادیر فوق در (۲-۴۳) و استفاده از (۲-۲۴)، (۲-۲۷) و (۲-۲۸)؛ تنش‌های شعاعی،

محیطی و طولی و جابه‌جایی شعاعی به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R(R) = \frac{e^{n(r-k)}}{F} \left[\left(AC(R) + \frac{BM(R)}{R} \right) G + \left(AD(R) + \frac{BN(R)}{R} \right) H \right] \quad (۵۱-۲)$$

$$\sigma_{\theta}(R) = \frac{e^{n(r-k)}}{F} \left[(BC(R) + \frac{AM(R)}{R})G + (BD(R) + \frac{AN(R)}{R})H \right] \quad (52-2)$$

$$\sigma_x(R) = \frac{\alpha(A+B)e^{n(r-k)}}{F} \left[(C(R) + \frac{M(R)}{R})G + (D(R) + \frac{N(R)}{R})H \right] \quad (53-2)$$

$$u_R(R) = \frac{1}{E_i F e^{n(k-1)}} (M(R)G + N(R)H) \quad (54-2)$$

که در آنها

$$F = \left\{ \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - \right. \\ \left. - \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \right\} \quad (55-2)$$

$$G = P_i e^{n(k-1)} \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - P_o \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \quad (56-2)$$

$$H = P_o \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) - P_i e^{n(k-1)} \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \quad (57-2)$$

مقدار تنش مؤثر براساس معیار تسلیم فون میزس عبارت است از:

$$\sigma_{eff}(R) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_R - \sigma_{\theta})^2 + (\sigma_{\theta} - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_R)^2]^{0.5} \quad (58-2)$$

با جایگذاری (28-2) در (58-2)، تنش مؤثر را می‌توان براساس پارامتر β به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{eff}(R) = [(1 - \beta + \beta^2)(\sigma_R^2 + \sigma_{\theta}^2) - (1 + 2\beta - 2\beta^2)\sigma_R\sigma_{\theta}]^{0.5} \quad (59-2)$$

حال با توجه به مقادیر ضریب ناهمگنی n_1 و شرایط تکیه‌گاهی تنش و کرنش صفحه‌ای، معادلات

(2-51 تا 2-54) و (2-58) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

۲-۳-۱-۱ مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی

(الف) استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned} \sigma_R(R) = \frac{e^{n(r-k)}}{J} & \left\{ \left(\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(2-\nu, 3; Rp) + \right. \right. \\ & + \frac{Rp^3(2-\nu)}{3(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(3-\nu, 4; Rp) \Big) K + \\ & + \left(\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(2-\nu, 3; Rp) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{Rp^3(2-\nu)}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(3-\nu, 4; Rp) \right) L \right\} \end{aligned} \quad (۶۰-۲)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R) = \frac{e^{n(r-k)}}{J} & \left\{ \left(\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3\nu}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(2-\nu, 3; Rp) + \right. \right. \\ & + \frac{Rp^3(2\nu - \nu^2)}{3(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(3-\nu, 4; Rp) \Big) K + \\ & + \left(\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3\nu}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(2-\nu, 3; Rp) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{Rp^3(2\nu - \nu^2)}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(3-\nu, 4; Rp) \right) L \right\} \end{aligned} \quad (۶۱-۲)$$

$$\sigma_x(R) = 0 \quad (۶۲-۲)$$

$$u_R(R) = \frac{1}{E_i J e^{n(k-1)}} \left\{ \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Phi(2-\nu, 3; Rp) \right) K + \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Psi(2-\nu, 3; Rp) \right) L \right\} \quad (۶۳-۲)$$

$$\sigma_{eff} = (\sigma_R^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_R \sigma_\theta)^{0.5} \quad (۶۴-۲)$$

که در آنها

$$\begin{aligned}
 J = & \left\{ \left[\frac{p^2(1+\nu) - R_i p^3}{(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Psi(2-\nu, 3; R_i p) - \frac{R_i p^3(2-\nu)}{(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Psi(3-\nu, 4; R_i p) \right] \right. \\
 & \left[\frac{p^2(1+\nu) - R_o p^3}{(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Phi(2-\nu, 3; R_o p) + \frac{R_o p^3(2-\nu)}{3(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Phi(3-\nu, 4; R_o p) \right] - \\
 & - \left[\frac{p^2(1+\nu) - R_o p^3}{(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Psi(2-\nu, 3; R_o p) - \frac{R_o p^3(2-\nu)}{(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Psi(3-\nu, 4; R_o p) \right] \\
 & \left. \left[\frac{p^2(1+\nu) - R_i p^3}{(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Phi(2-\nu, 3; R_i p) + \frac{R_i p^3(2-\nu)}{3(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Phi(3-\nu, 4; R_i p) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{۶۵-۲}$$

$$\begin{aligned}
 K = & \left\{ P_i e^{n(k-1)} \left[\frac{p^2(1+\nu) - R_o p^3}{(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Psi(2-\nu, 3; R_o p) - \right. \right. \\
 & - \frac{R_o p^3(2-\nu)}{(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Psi(3-\nu, 4; R_o p) \left. \right] - \\
 & - P_o \left[\frac{p^2(1+\nu) - R_i p^3}{(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Psi(2-\nu, 3; R_i p) - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{R_i p^3(2-\nu)}{(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Psi(3-\nu, 4; R_i p) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{۶۶-۲}$$

$$\begin{aligned}
 L = & \left\{ P_o \left[\frac{p^2(1+\nu) - R_i p^3}{(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Phi(2-\nu, 3; R_i p) + \right. \right. \\
 & + \frac{R_i p^3(2-\nu)}{3(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Phi(3-\nu, 4; R_i p) \left. \right] - \\
 & - P_i e^{n(k-1)} \left[\frac{p^2(1+\nu) - R_o p^3}{(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Phi(2-\nu, 3; R_o p) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{R_o p^3(2-\nu)}{3(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Phi(3-\nu, 4; R_o p) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{۶۷-۲}$$

(ب) استوانه با دو سر بسته (گرنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned} \sigma_r(R) = \frac{e^{n(r-k)}}{Q} & \left\{ \left[\frac{p^2 - Rp^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) + \right. \right. \\ & + \frac{Rp^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \Big] S + \\ & + \left[\frac{p^2 - Rp^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{Rp^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] T \right\} \end{aligned} \quad (68-2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R) = \frac{e^{n(r-k)}}{Q} & \left\{ \left[\frac{p^2 - Rp^3\nu}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) + \right. \right. \\ & + \frac{Rp^3(2\nu-3\nu^2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \Big] S + \\ & + \left[\frac{p^2 - Rp^3\nu}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{Rp^3(2\nu-3\nu^2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] T \right\} \end{aligned} \quad (69-2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(R) = \frac{\nu e^{n(r-k)}}{Q} & \left\{ \left[\frac{2p^2 - Rp^3}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, \nu, 3; Rp\right) + \right. \right. \\ & + \frac{Rp^3(2-3\nu)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \Big] S + \\ & + \left[\frac{2p^2 - Rp^3}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{Rp^3(2-3\nu)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] T \right\} \end{aligned} \quad (70-2)$$

$$u_R(R) = \frac{1}{E_i Q e^{n(k-1)}} \left\{ \left[\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) \right] S + \left[\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) \right] T \right\} \quad (71-2)$$

$$\sigma_{eff} = [(1-\nu+\nu^2)(\sigma_R^2 + \sigma_\theta^2) - (1+2\nu-2\nu^2)\sigma_R\sigma_\theta]^{0.5} \quad (۷۲-۲)$$

که در آنها

$$\begin{aligned} Q = & \left\{ \left[\frac{p^2 - R_i p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_i p}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_i p\right) - \right. \right. \\ & \left. \left[\frac{R_i p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_i p}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_i p\right) \right] \right. \\ & \left[\frac{p^2 - R_o p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_o p}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_o p\right) + \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{R_o p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_o p}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_o p\right) \right] - \right. \\ & \left. \left[\frac{p^2 - R_o p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_o p}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_o p\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{R_o p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_o p}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_o p\right) \right] \right. \\ & \left. \left[\frac{p^2 - R_i p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_i p}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_i p\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \frac{R_i p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_i p}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_i p\right) \right] \right\} \quad (۷۳-۲) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S = & \left\{ P_i e^{n(k-1)} \left[\frac{p^2 - R_o p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_o p}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_o p\right) - \right. \right. \\ & \left. \left[\frac{R_o p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_o p}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_o p\right) \right] - \right. \\ & \left. \left. \left. P_o \left[\frac{p^2 - R_i p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_i p}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_i p\right) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left[\frac{R_i p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_i p}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_i p\right) \right] \right] \right\} \quad (۷۴-۲) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T = & \left\{ P_o \left[\frac{p^2 - R_i p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)} e^{R_i p} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_i p\right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{R_i p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)} e^{R_i p} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_i p\right) \right] - \\
& - P_i e^{n(k-1)} \left[\frac{p^2 - R_o p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)} e^{R_o p} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_o p\right) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{R_o p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)} e^{R_o p} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_o p\right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{۷۵-۲}$$

۲-۱-۳-۲ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی

(الف) استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned}
\sigma_R(R) = & \frac{e^{n(r-k)}}{U} \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -Rp) - \frac{Rp^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -Rp) \right] V + \right. \\
& \left. + \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -Rp) + \frac{Rp^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -Rp) \right] W \right\}
\end{aligned} \tag{۷۶-۲}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta(R) = & \frac{e^{n(r-k)}}{U} \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -Rp) - \frac{Rp^3 \nu}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -Rp) \right] V + \right. \\
& \left. + \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -Rp) + \frac{Rp^3 \nu}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -Rp) \right] W \right\}
\end{aligned} \tag{۷۷-۲}$$

$$\sigma_x(R) = 0 \tag{۷۸-۲}$$

$$u_R(R) = \frac{1}{E_i U e^{n(k-1)}} \left\{ [Rp^2 \Phi(1+\nu, 3; -Rp)] V + [Rp^2 \Psi(1+\nu, 3; -Rp)] W \right\} \tag{۷۹-۲}$$

که در آنها

$$\begin{aligned}
 U = & \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -R_i p) + \frac{R_i p^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -R_i p) \right] \right. \\
 & \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -R_o p) - \frac{R_o p^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -R_o p) \right] - \\
 & - \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -R_o p) + \frac{R_o p^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -R_o p) \right] \\
 & \left. \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -R_i p) - \frac{R_i p^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -R_i p) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{۸۰-۲}$$

$$\begin{aligned}
 V = & \left\{ P_i e^{n(k-1)} \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -R_o p) + \frac{R_o p^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -R_o p) \right] - \right. \\
 & \left. - P_o \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -R_i p) + \frac{R_i p^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -R_i p) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{۸۱-۲}$$

$$\begin{aligned}
 W = & \left\{ P_o \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -R_i p) - \frac{R_i p^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -R_i p) \right] - \right. \\
 & \left. - P_i e^{n(k-1)} \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -R_o p) - \frac{R_o p^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -R_o p) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{۸۲-۲}$$

(ب) استوانه با دو سر بسته (گرنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned}
 \sigma_R(R) = & \frac{e^{n(r-k)}}{X} \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) - \right. \right. \\
 & - \frac{Rp^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] Y + \\
 & + \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{Rp^3}{(1-\nu-2\nu^2)} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] Z \right\}
 \end{aligned} \tag{۸۳-۲}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}(R) = \frac{e^{n(r-k)}}{X} & \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{Rp^3\nu}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] Y + \right. \\
& \left. + \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Rp^3\nu}{(1-\nu^2)(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] Z \right\}
\end{aligned} \tag{۸۴-۲}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x(R) = \frac{\nu e^{n(r-k)}}{X} & \left\{ \left[\frac{2p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] Y + \right. \\
& \left. + \left[\frac{2p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{(1-\nu^2)(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] Z \right\}
\end{aligned} \tag{۸۵-۲}$$

$$u_R(R) = \frac{1}{E_i X e^{n(k-1)}} \left\{ [Rp^2 \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right)] Y + [Rp^2 \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right)] Z \right\} \tag{۸۶-۲}$$

که در آنها

$$\begin{aligned}
X = & \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_i p\right) + \frac{R_i p^3}{(1-\nu-2\nu^2)} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_i p\right) \right] \right. \\
& \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_o p\right) - \frac{R_o p^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_o p\right) \right] - \\
& \left. - \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_o p\right) + \frac{R_o p^3}{(1-\nu-2\nu^2)} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_o p\right) \right] \right. \\
& \left. \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_i p\right) - \frac{R_i p^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_i p\right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{۸۷-۲}$$

$$Y = \left\{ P_i e^{n(k-1)} \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_o p\right) + \frac{R_o p^3}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_o p\right) \right] - \right. \\ \left. - P_o \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_i p\right) + \frac{R_i p^3}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_i p\right) \right] \right\} \quad (88-2)$$

$$Z = \left\{ P_o \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_i p\right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{R_i p^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_i p\right) \right] - \\ \left. - P_i e^{n(k-1)} \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_o p\right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{R_o p^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_o p\right) \right] \right\} \quad (89-2)$$

۲-۳-۲ حل عددی استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار

در این پایان نامه، حل عددی با استفاده از روش اجزای محدود^۴ و به کمک مدل‌سازی نرم افزار Abaqus ۶.۱۳ صورت گرفته است. در این بخش به توضیح در رابطه با نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی FGM پرداخته شده است.

به منظور المان‌بندی استوانه، از المان‌های متقارن محوری هشت گره‌ای^۵ CAX8R استفاده شده است. این المان در تحلیل پوسته‌ها و در شرایط تنش و کرنش صفحه‌ای به منظور افزایش دقت و همچنین بالا بردن سرعت تحلیل، به صورت داخلی به المان C3D20R تبدیل می‌شود. به هر گره دستگاه مختصاتی با دو راستای شعاعی و طولی اختصاص می‌یابد که درجات آزادی آن را مشخص می‌کنند. [۵۷]

1. Finite Element Method (FEM)
2. Node

استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر، شعاع خارجی ۶۰ میلی‌متر و طول ۸۰۰ میلی‌متر با رسم مقطعی مستطیلی از آن در حالت تقارن محوری، مدل‌سازی شده است.

برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است؛ با تقسیم جداره استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز از لایه‌ی داخلی به صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی (۲-۳۲)، نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محلّ اتصال به هم پیوسته اند و خواص در محلّ اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مرز دو لایه در نظر گرفته می‌شوند. برای اعمال شرایط مرزی موجود در دو انتهای استوانه، بسته به شرایط انتهایی درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در دو انتهای استوانه را مقید می‌کنیم. برای استوانه با دو سر بسته، تنها جابه‌جایی در راستای طولی المان‌های دو سر استوانه را مقید می‌کنیم. در شرایط تنش صفحه‌ای، نیاز به اعمال هیچ قیدی به دو سر استوانه نمی‌باشد. فشارهای داخلی و خارجی نیز به گره‌های موجود در سطوح داخلی و خارجی مقطع ترسیم شده اعمال می‌شوند.

۲-۴ حل الاستیک استوانه‌ی همگن تحت فشار

در استوانه‌های جدار ضخیم همگن و همسانگرد، مدول یانگ و نسبت پواسون هر دو ثابت هستند.

$$E = const. \quad (۲-۹۰)$$

از آنجا که هیچ نیروی حجمی به استوانه وارد نمی‌شود؛ در این بخش نیز می‌توان از معادله‌ی تعادل تنش (۲-۳۳) استفاده کرد. با استفاده از این معادله‌ی تعادل و معادلات (۲-۲۴)، (۲-۲۷) و (۲-۹۰)، معادله‌ی ناویر حاکم بر حسب جابه‌جایی شعاعی عبارت است از:

$$R^2 \frac{d^2 u_R}{dR^2} + R \frac{du_R}{dR} - u_R = 0 \quad (۲-۹۱)$$

حلّ معادله‌ی (۹۱-۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$u_R(R) = C_1 R^{m_1} + C_2 R^{m_2} \quad (92-2)$$

معادله‌ی مشخصه مربوط به معادله‌ی (۹۱-۲) عبارت است از:

$$m^2 - 1 = 0 \quad (93-2)$$

با حلّ معادله‌ی مشخصه، به دو ریشه‌ی حقیقی خواهیم رسید.

$$\begin{cases} m_1 = +1 \\ m_2 = -1 \end{cases} \quad (94-2)$$

با جایگذاری دو ریشه‌ی $m_1 = +1$ و $m_2 = -1$ در معادله‌ی (۹۲-۲) داریم:

$$u_R(R) = C_1 R + \frac{C_2}{R} \quad (95-2)$$

به منظور محاسبه‌ی ثابت‌های C_1 و C_2 ، از شرایط مرزی استفاده می‌شود. از آنجا که این شرایط

را برای تنش شعاعی در اختیار داریم؛ با استفاده از روابط (۲۷-۲)، (۲۴-۲) و (۹۵-۲)، تنش شعاعی را

به صورت زیر و بر حسب ثابت‌های C_1 و C_2 می‌نویسیم.

$$\sigma_R(R) = E[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{R^2}] \quad (96-2)$$

شرایط مرزی برای استوانه‌ی ای که تحت فشارهای داخلی و خارجی می‌باشد، در رابطه‌ی (۴۹-۲)

معرفی شده است. با اعمال این شرایط در (۹۶-۲)، ثابت‌های C_1 و C_2 محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{P_i - k^2 P_o}{E(A+B)(k^2 - 1)} \\ C_2 = \frac{(P_i - P_o)R_o^2}{E(A-B)(k^2 - 1)} \end{cases} \quad (97-2)$$

با جایگذاری C_1 و C_2 در (۹۵-۲) و همچنین استفاده از (۲۴-۲)، (۲۷-۲) و (۲۸-۲) داریم:

$$\sigma_R^H(R) = \frac{1}{k^2 - 1} [(P_i - k^2 P_o) - (P_i - P_o)\left(\frac{k}{r}\right)^2] \quad (98-2)$$

$$\sigma_\theta^H(R) = \frac{1}{k^2 - 1} [(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o)\left(\frac{k}{r}\right)^2] \quad (99-2)$$

$$\sigma_x^H(R) = \frac{2\beta}{k^2 - 1} (P_i - k^2 P_o) \quad (100-2)$$

$$u_R^H(R) = \frac{R_i r}{E(k^2 - 1)} \left[\left(\frac{P_i - k^2 P_o}{A + B} \right) + \left(\frac{P_i - P_o}{A - B} \right) \left(\frac{k}{r} \right)^2 \right] \quad (101-2)$$

می‌توان مشاهده کرد که σ_R و σ_θ مستقل از A ، B و E هستند. یعنی در استوانه‌های جدار ضخیم همگن و همسانگرد با هندسه‌ی مشابه و تحت فشار یکسان، اما با نسبت پواسون‌های مختلف، تنش‌های شعاعی و محیطی مستقل از شرایط تکیه‌گاهی می‌باشند.

تنش مؤثر براساس تنش معادل فون‌میزس با استفاده از رابطه‌ی (2-58) محاسبه می‌شود. تنش طولی، جابه‌جایی شعاعی و تنش مؤثر معرفی شده در معادلات (2-101) و (2-58)، با اعمال شرایط تنش و کرنش صفحه‌ای عبارتند از:

2-4-1 استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\sigma_x^H(R) = 0 \quad (102-2)$$

$$u_R^H(R) = \frac{R_i r}{E(k^2 - 1)} \left[(1 - \nu)(P_i - k^2 P_o) + (1 + \nu)(P_i - P_o) \left(\frac{k}{r} \right)^2 \right] \quad (103-2)$$

$$\sigma_{eff}^H(R) = [(\sigma_R^H)^2 + (\sigma_\theta^H)^2 - \sigma_R^H \sigma_\theta^H]^{0.5} \quad (104-2)$$

۲-۴-۲ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)

$$\sigma_x^H(R) = \nu(\sigma_R + \sigma_\theta) = \frac{2\nu(P_i - k^2 P_o)}{k^2 - 1} \quad (105-2)$$

$$u_R^H(R) = \frac{(1+\nu)R_i r}{E(k^2 - 1)} [(1-2\nu)(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o)\left(\frac{k}{r}\right)^2] \quad (106-2)$$

$$\sigma_{eff}^H(R) = \left[(1-\nu + \nu^2)[(\sigma_R^H)^2 + (\sigma_\theta^H)^2] - (1+2\nu - 2\nu^2)\sigma_R^H \sigma_\theta^H \right]^{0.5} \quad (107-2)$$

۲-۵ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج

به منظور مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با مقادیر به دست آمده از حلّ

عددی به کمک مدل سازی نرم افزاری؛ استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن و همسانگردی را به شعاع داخلی

$R_i = 40 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $R_o = 60 \text{ mm}$ و طول $L = 800 \text{ mm}$ در نظر می‌گیریم.

مدول یانگ در سطح داخلی استوانه (E_i) دارای مقدار 200 GPa بوده و فرض می‌شود که نسبت

پواسون (ν)، مقدار ثابت $0/3$ را در طی ضخامت داراست. نتایج را برای سه حالت بارگذاری تنها فشار

داخلی، تنها فشار خارجی و اعمال هم‌زمان فشار داخلی و خارجی بررسی می‌کنیم. مقادیر این فشارها

برابر 80 MPa در نظر گرفته شده است. ($P = P_i = P_o = 80 \text{ MPa}$)

از آنجا که رفتار نمودارها در توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی، در شرایط تنش و کرنش صفحه‌ای و

برای یک نوع بارگذاری تفاوت چندانی با هم ندارند؛ نمودارها در بارگذاری‌های مختلف، تنها برای یکی

از شرایط تکیه‌گاهی ترسیم شده‌اند. خطوط ممتد نشانگر حلّ تحلیلی و دایره‌های کوچک نماینده‌ی

حلّ عددی صورت گرفته می‌باشند. بالانویس H نمایانگر مقادیر پارامترها در استوانه‌ی همگن می‌باشد.

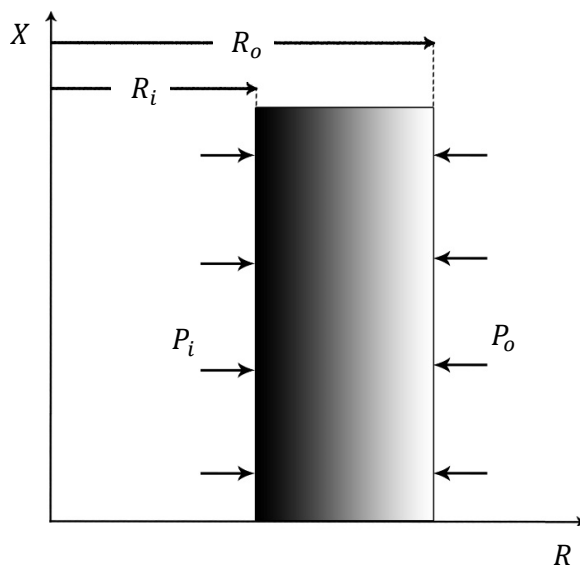
اعداد انتخاب شده برای مطالعه‌ی موردی در این فصل و همچنین در فصول آینده؛ برگرفته از

طراحی صورت گرفته جهت ابزار نظامی خاصی می‌باشد.

۲-۵-۱ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

در این بخش، استوانه‌ی ناهمگن تحت فشارهای داخلی و خارجی 80 MPa و در حالت تنش

صفحه‌ای قرار دارد (شکل ۲-۴).



شکل ۲-۴ مقطع عرضی استوانه تحت فشار در حالت تنش صفحه‌ای

۲-۵-۱-۱ فشار داخلی

شکل (۲-۵) توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه نمایش می‌دهد. مقدار

تنش شعاعی در لایه‌های داخلی و خارجی برای تمامی مقادیر ضریب ناهمگنی با هم برابر بوده و در

لایه‌ی داخلی نسبت σ_R / σ_R^H برابر یک است.

در طول دیواره و به ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی، مقدار تنش شعاعی نسبت به ماده‌ی

همگن کاهش یافته و به ازای n های مثبت، افزایش می‌یابد. لذا افزایش یا کاهش مقادیر تنش شعاعی

به مقدار n بستگی دارد و به ازای اعمال فشار داخلی، این مقادیر منفی هستند.

شکل (۲-۶) توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. مقدار

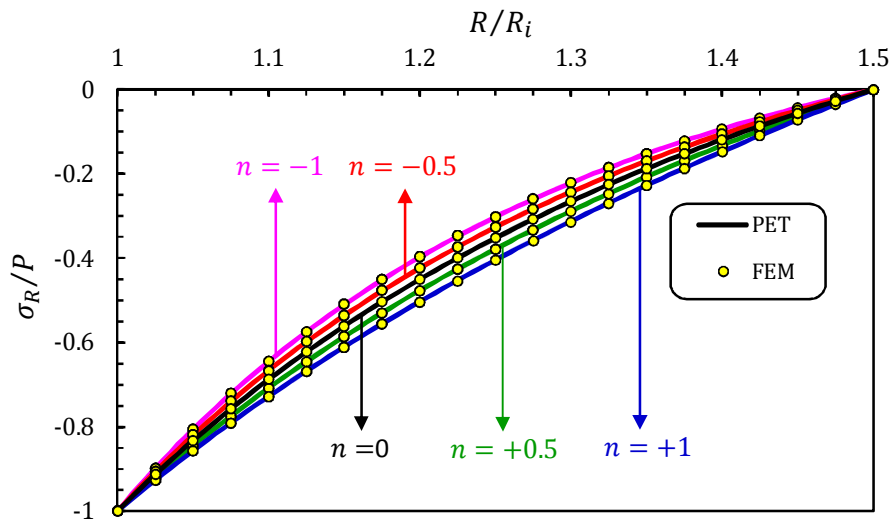
این تنش در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی و به ازای مقادیر مختلف از ضریب ناهمگنی، یکسان

نبوده و در هیچ کدام از سطوح، نسبت $\sigma_\theta / \sigma_\theta^H$ برابر یک نیست. مقدار تنش محیطی به ازای n های

منفی و در نیمه‌ی داخلی استوانه، بیشتر از ماده‌ی همگن، و در نیمه‌ی خارجی کمتر از آن می‌باشد. در حالی که به ازای مقادیر مثبت از ضریب ناهمگنی، عکس این قضیه برقرار است.

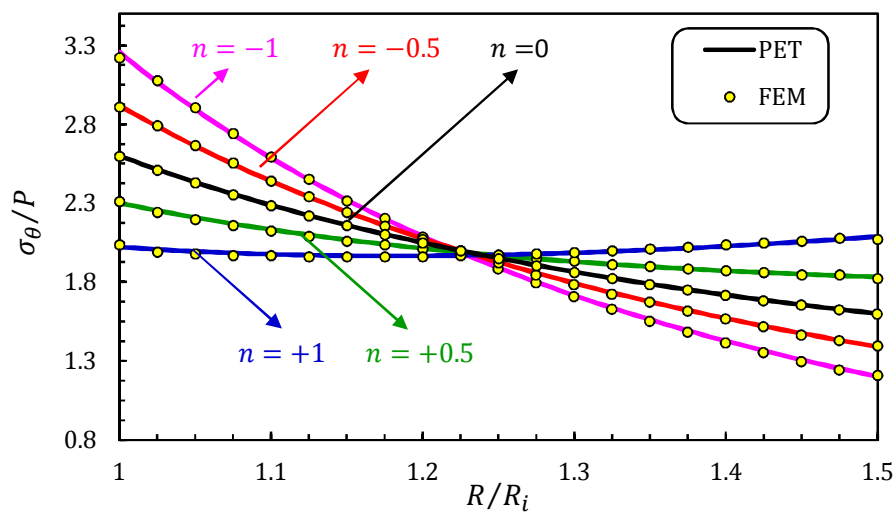
برای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی و همچنین $n = 0.5$ ، با افزایش شعاع، تنش محیطی کاهش می‌یابد. منحنی مربوط به $n = 1$ نشان می‌دهد که توزیع تنش محیطی نسبت به شعاع استوانه کمترین تغییرات را داشته و مقدار آن در طی ضخامت تقریباً ثابت می‌ماند که این خود مزیتی برای کنترل تنش در طراحی‌ها می‌باشد. مشاهده می‌شود که در نیمه‌ی داخلی استوانه، منحنی‌ها به هم نزدیک شده و رفتار مشابهی دارند. قابل ذکر است که در مرجع [۲۷] نمودار مربوط به توزیع تنش محیطی، نادرست ترسیم شده است.

شکل (۲-۷) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. در هیچ یک از نقاط، نسبت u_R/u_R^H برابر یک نیست. به ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی، مقدار جابه‌جایی شعاعی بزرگ‌تر از استوانه‌ی همگن و برای n های مثبت، کوچک‌تر از آن می‌باشد. این نسبت‌ها در تمام ضخامت دیواره، تقریباً دارای مقدار ثابتی می‌باشند و منحنی‌ها به ازای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی، رفتار مشابهی را در مقایسه با استوانه‌ی همگن از خود نشان می‌دهند.

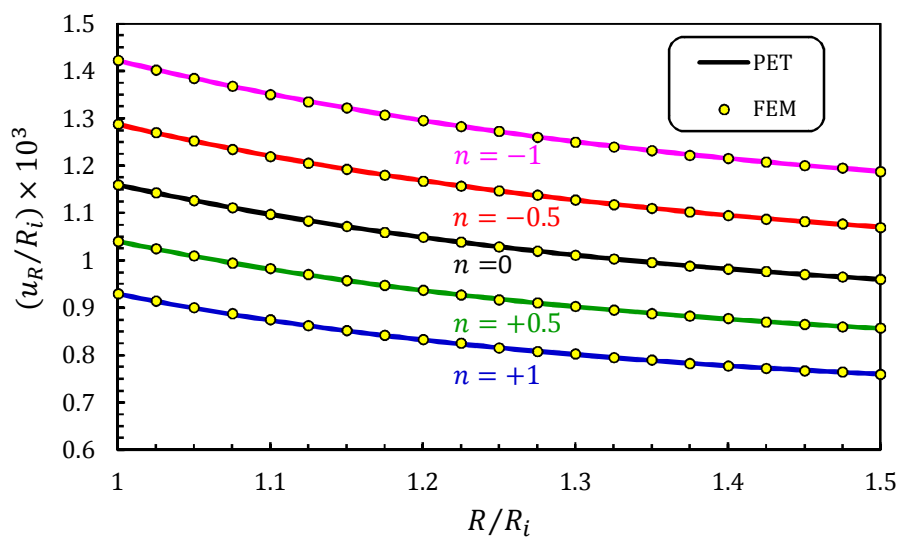


شکل ۲-۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

در حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۲-۶ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ای ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای



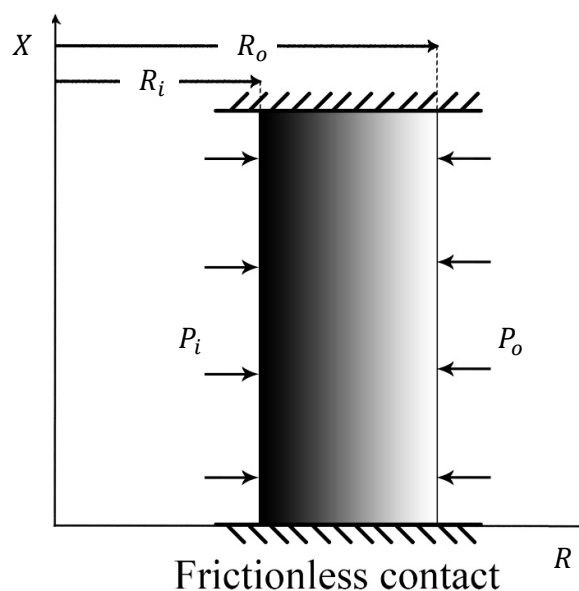
شکل ۲-۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ای ناهمگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای

به دلیل آن که به ازای $n = 1$ کمترین جابه‌جایی در استوانه ایجاد می‌شود؛ در صورتی که جابه‌جایی شعاعی عامل تعیین کننده در طراحی استوانه‌ی تحت فشار باشد (مانند لوله‌ی پرتابه‌ها در صنایع نظامی) انتخاب ماده‌ی FG با این ضریب ناهمگنی پیشنهاد می‌شود.

۲-۵-۲ استوانه با دو سر بسته (گرنش صفحه‌ای)

در این بخش، استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و/یا خارجی و در حالت گرنش صفحه‌ای قرار

دارد (شکل ۸-۲).



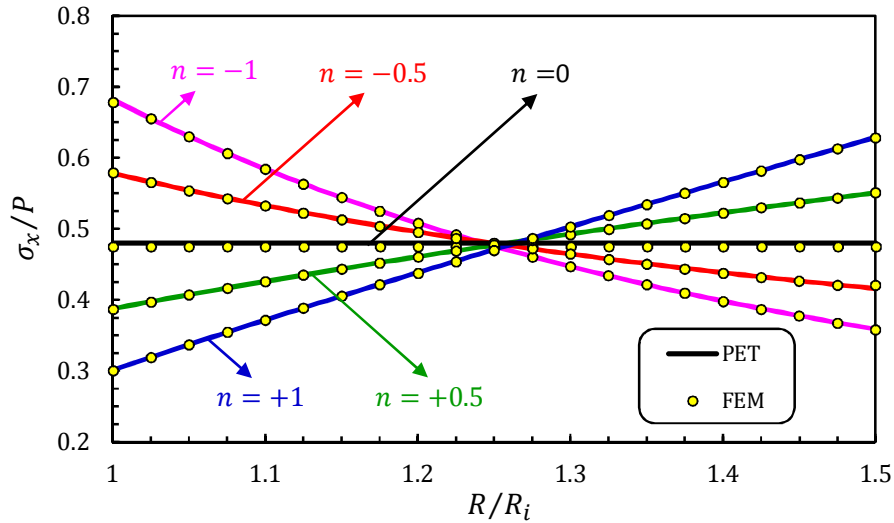
شکل ۸-۲ مقطع عرضی استوانه‌ی تحت فشار در حالت گرنش صفحه‌ای

۲-۵-۲-۱ فشار داخلی

توزیع تنش طولی نسبت به شعاع استوانه در شکل (۹-۲) آورده شده است. در هیچ یک از لایه‌های داخلی و خارجی استوانه، مقدار تنش طولی برای مقادیر مختلف از ضریب ناهمگنی برابر نبوده و علاوه بر آن، نسبت σ_x / σ_x^H نیز برابر یک نیست.

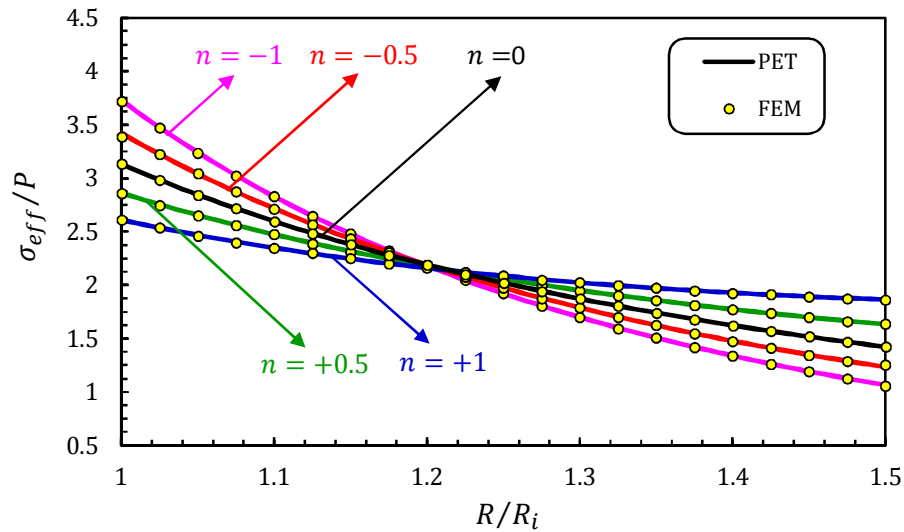
مقدار تنش طولی، به ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی و در شعاع‌های کمتر از حدود $1/25$ ، بزرگ‌تر از ماده‌ی همگن بوده در حالی که در نیمه‌ی خارجی استوانه، دارای مقادیر کوچک‌تری از آن

می‌باشد. عکس آن برای n های مثبت رخ می‌دهد. به ازای $n = 0$ ، تنش طولی دارای مقدار تقریباً ثابتی در طی ضخامت استوانه می‌باشد. در نیمه‌ی داخلی استوانه، منحنی‌ها دارای رفتار مشابهی بوده و به مقدار واحدی نزدیک می‌شوند.



شکل ۹-۲ توزیع تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۱۰-۲ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

در حالت کرنش صفحه‌ای

شکل (۲-۱۰) توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را طبق معادله‌ی (۲-۶۴) نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در هیچ یک از لایه‌های داخلی و خارجی استوانه، نسبت $\sigma_{eff}^H / \sigma_{eff}$ برابر یک نبوده و به ازای هیچ یک از مقادیر ضرایب ناهمگنی، تنش‌های مؤثر یکسانی در این دو سطح ایجاد نمی‌شود. به ازای شعاع‌های کمتر از شعاع لایه‌ی میانی، با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، شاهد کاهش مقادیر تنش مؤثر و برای نیمه‌ی خارجی استوانه، با افزایش مقدار n ، شاهد افزایش مقادیر این تنش هستیم. از آنجا که تنش مؤثر ایجاد شده در استوانه به ازای $n = 1$ علاوه بر داشتن کمترین مقادیر، کمترین تغییرات را نیز در طی ضخامت دارد؛ در صورتی که تنش ایجاد شده در استوانه عامل تعیین کننده در طراحی آن باشد (مانند مخازن استوانه‌ای پر شده از اکسیژن با فشار بسیار زیاد در زیردریایی‌ها)؛ انتخاب ماده‌ی FG با ضریب ناهمگنی $n = 1$ پیشنهاد می‌شود.

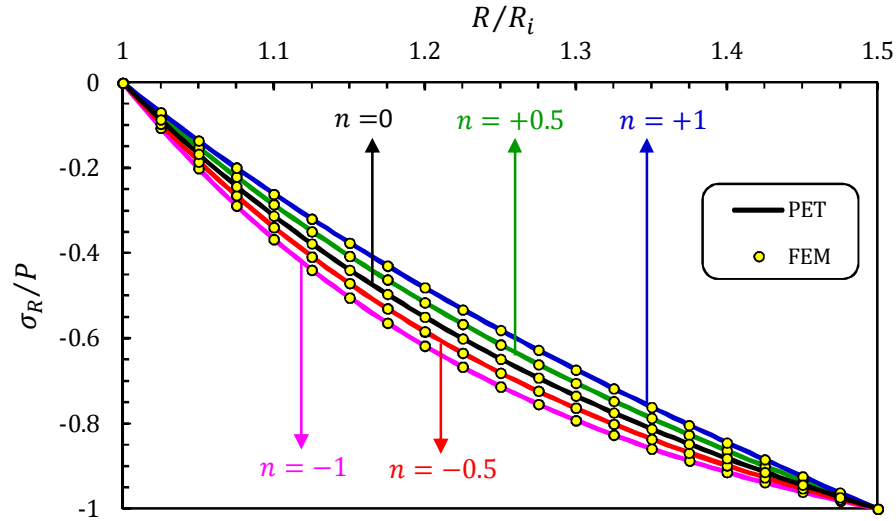
۲-۲-۵-۲ فشار خارجی

نمودار توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده نسبت به ضخامت استوانه در شکل (۲-۱۱) آورده شده است. مقدار تنش در لایه‌های داخلی و خارجی استوانه، برای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی یکسان بوده و نسبت σ_R / σ_R^H در لایه‌ی داخلی برابر یک است. تنش شعاعی در طول دیواره‌ی استوانه و به ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، نسبت به استوانه‌ی همگن افزایش و به ازای مقادیر مثبت این ضریب کاهش می‌یابد. میزان کاهش یا افزایش تنش وابسته به n است.

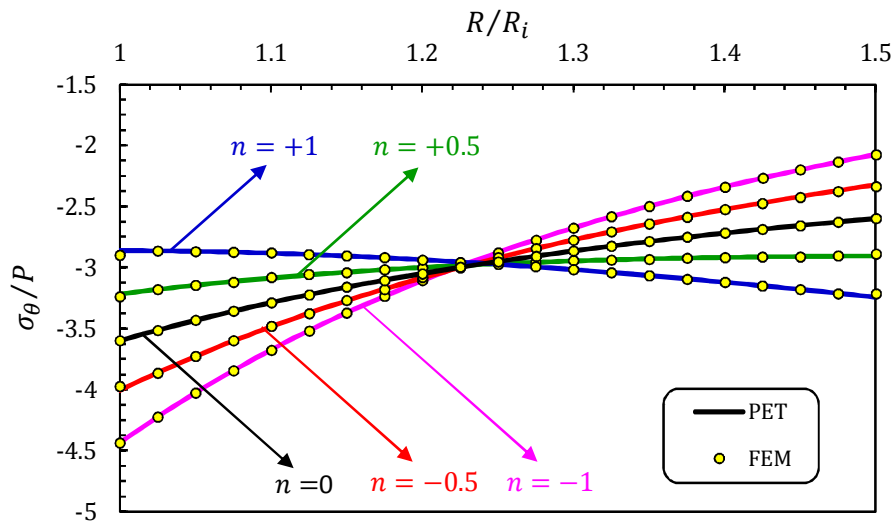
شکل (۲-۱۲) نمودار توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه نشان می‌دهد. مقدار این تنش در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی و برای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی یکسان نبوده و نسبت $\sigma_\theta / \sigma_\theta^H$ برابر یک نیست.

به ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، تنش محیطی در نیمه‌ی داخلی استوانه، بزرگ‌تر از تنش ایجاد شده در ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی استوانه، کوچک‌تر از آن می‌باشد. عکس این قضیه برای مقادیر مثبت ضریب ناهمگنی اتفاق می‌افتد.

تنش محیطی به ازای $n = 0.5$ ، تقریباً مقدار ثابتی را در طی ضخامت استوانه داراست که ویژگی خوبی در طراحی استوانه‌ها به حساب می‌آید. همچنین ملاحظه می‌شود که منحنی‌ها در لایه‌ی داخلی استوانه به یک مقدار واحد میل کرده و رفتار مشابهی از خود نشان می‌دهند.



شکل ۲-۱۱ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۲-۱۲ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای

نمودار تنش طولی بی‌بعد شده در دیواره‌ی استوانه و نسبت به شعاع آن، در شکل (۲-۱۳) آورده شده است. در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی استوانه و به ازای هیچ مقدار از ضریب ناهمگنی، مقادیر تنش طولی یکسان نبوده و نسبت σ_x/σ_x^H برابر یک نیست. هم‌چنین تنش طولی ایجاد شده در استوانه به ازای اعمال فشارهای خارجی به آن، دارای مقادیر منفی می‌باشد.

در شعاع‌های کوچک‌تر از شعاع لایه‌ی میانی $R < 1/25$ و به ازای مقادیر منفی ضریب ناهمگنی، مقدار تنش طولی بزرگ‌تر از تنش ایجاد شده در استوانه‌ی همگن بوده و در لایه‌ی خارجی عکس آن اتفاق می‌افتد. در حالی که در نیمه‌ی داخلی استوانه و به ازای n های مثبت، تنش طولی کوچک‌تر از تنش در ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی بزرگ‌تر از آن می‌باشد.

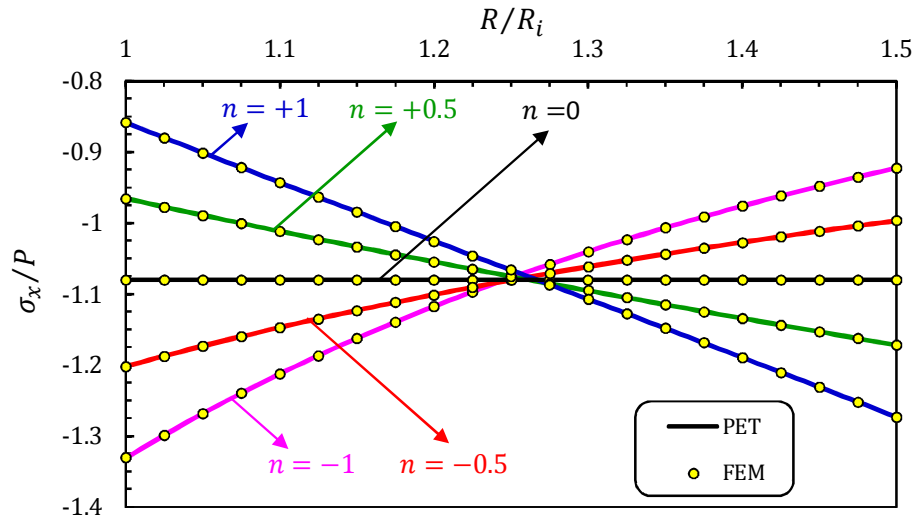
در استوانه‌ی همگن ($n_1 = 0$)، تنش طولی تقریباً دارای مقدار ثابتی در طی ضخامت می‌باشد. منحنی‌ها در نیمه‌ی داخلی استوانه رفتار یکسانی داشته و با نزدیک شدن به لایه‌ی میانی، به مقدار مشخصی میل می‌کنند.

شکل (۲-۱۴) نمودار توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را در دیواره‌ی استوانه نشان می‌دهد. در نیمه‌ی داخلی استوانه و به ازای شعاع‌های کوچک‌تر از لایه‌ی میانی، با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، شاهد کاهش مقادیر تنش مؤثر بوده و در نیمه‌ی دیگر استوانه، شاهد افزایش این مقادیر هستیم.

در این نمودار نیز به ازای هیچ یک از مقادیر n و در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی، مقادیر تنش مؤثر یکسان نبوده و نسبت $\sigma_{eff}^H/\sigma_{eff}^H$ برابر یک نیست. به ازای n های مثبت، مقادیر کوچک‌تری از تنش مؤثر را نسبت به n های منفی شاهد هستیم. لذا در استوانه‌ی ای که تنها تحت فشار خارجی و در شرایط کرنش صفحه‌ای قرار گرفته باشد، با انتخاب مقادیر مثبت برای ضریب ناهمگنی، استوانه در ناحیه ایمن‌تری از نظر تنش‌های ایجاد شده در آن، نسبت به نقطه‌ی تسلیم ماده قرار می‌گیرد. شکل (۲-۱۵) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در طول دیواره‌ی استوانه نمایش می‌دهد.

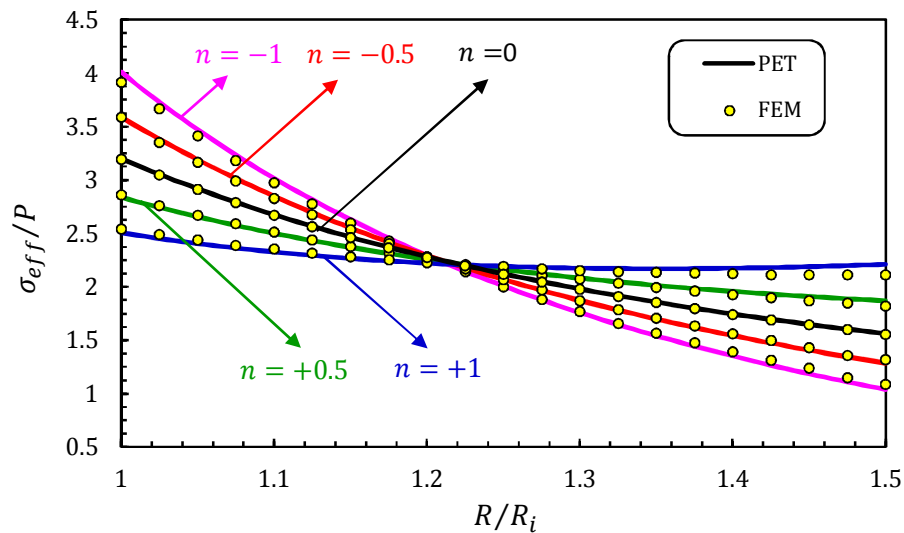
در هیچ یک از نقاط، نسبت u_R/u_R^H برابر یک نیست. جابه‌جایی ایجاد شده در استوانه منفی بوده و با افزایش n ، مقدار آن کاهش می‌یابد. به گونه‌ای که مقادیر جابه‌جایی به ازای $n < 0$ بزرگ‌تر از ماده‌ی

همگن و به ازای $n > 0$ کوچکتر از آن می‌باشد. این نسبت‌ها در تمام ضخامت دیواره، تقریباً دارای مقدار ثابتی می‌باشند و منحنی‌ها به ازای مقادیر مختلف ضریب ناهمگنی، رفتار مشابهی را در مقایسه با استوانه‌ی همگن از خود نشان می‌دهند.



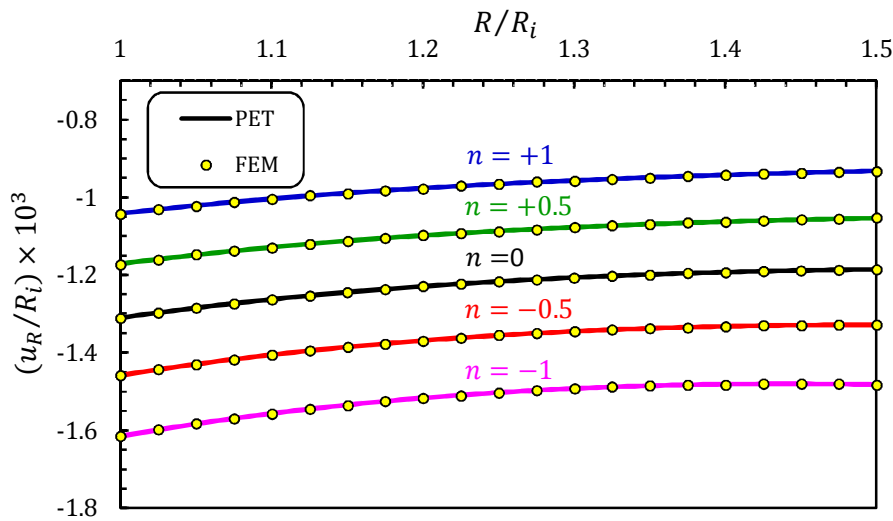
شکل ۲-۱۳ توزیع تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی

در حالت کرنش صفحه‌ای

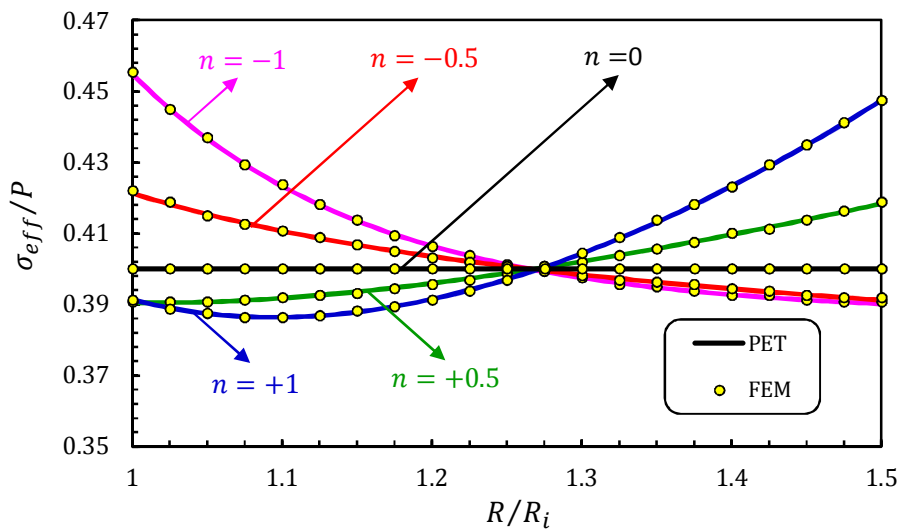


شکل ۲-۱۴ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی

در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۲-۱۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۲-۱۶ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای

۲-۵-۲ فشار داخلی و خارجی

شکل (۲-۱۶) نمودار تنش مؤثر بی‌بعد شده را نسبت به شعاع استوانه نشان می‌دهد. تنش مؤثر ایجاد شده در نیمه‌ی داخلی استوانه، تقریباً دارای مقادیر یکسانی به ازای n های مثبت می‌باشد. همچنین با افزایش ضریب ناهمگنی و در بازه‌ی شعاع داخلی تا شعاع لایه‌ی میانی، کاهش تنش و در نیمه‌ی خارجی، افزایش آن را شاهد هستیم. علاوه بر آن، منحنی‌ها به ازای $n < 0$ و در نیمه‌ی خارجی استوانه، تقریباً برهم منطبق می‌باشند.

جدول (۲-۱) مقادیر تنش مؤثر حاصل از تحلیل استوانه به دو روش PET و FEM را در حالت تنش صفحه‌ای و تحت فشارهای داخلی و/یا خارجی، در لایه‌ی میانی استوانه نمایش می‌دهد.

جدول (۲-۲) نیز شامل همین مقادیر و برای حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد.

pressure (MPa)		$\sigma_{eff} (MPa)$				
		$n = -1$	$n = -0.5$	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$
$P_i = 80$	PET	۱۶۴/۷	۱۶۸/۷	۱۷۱/۹	۱۷۴/۵	۱۷۶
	FEM	۱۶۵	۱۶۹	۱۷۱/۹	۱۷۴/۶	۱۷۶
$P_o = 80$	PET	۲۰۷/۸	۲۱۱/۸	۲۱۵	۲۱۷/۱	۲۱۸/۲
	FEM	۲۰۸	۲۱۲	۲۱۵	۲۱۷/۱	۲۱۸/۳
$P_i = P_o = 80$	PET	۸۰/۲۱	۸۰/۱۷	۸۰	۷۹/۷۰	۷۹/۲۵
	FEM	۸۰/۲۲	۸۰/۱۷	۸۰	۷۹/۷۲	۷۹/۲۶

جدول ۲-۱ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در حالت تنش صفحه‌ای و در لایه‌ی میانی

pressure (MPa)		$\sigma_{eff} (MPa)$				
		$n = -1$	$n = -0.5$	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$
$P_i = 80$	PET	۱۵۳/۷۳	۱۵۸/۰۱	۱۶۱/۶۷	۱۶۴/۶۲	۱۶۶/۸۵
	FEM	۱۵۳/۷۳	۱۵۷/۹۹	۱۶۱/۶۷	۱۶۴/۵۹	۱۶۶/۸۲
$P_o = 80$	PET	۱۶۰/۶۰	۱۶۵/۵۵	۱۶۹/۷۰	۱۷۲/۹۸	۱۷۵/۳۳
	FEM	۱۶۰/۶۰	۱۶۵/۵۳	۱۶۹/۷۰	۱۷۲/۹۵	۱۷۵/۳۱
$P_i = P_o = 80$	PET	۳۲/۱۰	۳۲/۰۶	۳۲	۳۱/۹۰	۳۱/۷۶
	FEM	۳۲/۱۰	۳۲/۰۶	۳۲	۳۱/۹۱	۳۱/۷۷

جدول ۲-۲ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در حالت کرنش صفحه‌ای و در لایه‌ی میانی

۲-۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در استوانه‌های همسانگرد و ناهمگن با تغییرات نمایی خواص، جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی مستقل از خواص مکانیکی و شرایط تکیه‌گاهی نبوده و به واسطه‌ی ضریب n به خواص مکانیکی و از طریق U^* به شرایط تکیه‌گاهی وابسته می‌شوند. تنش شعاعی نیز تنها به خواص مکانیکی وابسته است. با بررسی توزیع جابه‌جایی و تنش‌های حاصل از تحلیل استوانه‌ی ناهمگن به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و مقایسه‌ی آنها با حل عددی صورت گرفته توسط نرم افزار آباکوس، انطباق خوبی در نتایج مشاهده شد. تاثیر ضریب ناهمگنی در خواص ماده‌ی FG بر رفتارهای مکانیکی، با انتخاب مقادیر مختلف برای n ، در گراف‌ها قابل مشاهده می‌باشد.

می‌توان نتیجه گرفت که در استوانه‌ی جدار ضخیم با ضخامت ثابت، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی شعاعی منفی در استوانه می‌شود. برای استوانه تحت هر سه حالت بارگذاری، مواد ناهمگن با مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش جابه‌جایی در استوانه نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود در حالیکه مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش جابه‌جایی نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود. با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی و برای هر یک از دو نوع بارگذاری فشار داخلی و خارجی، مقادیر تنش محیطی و تنش مؤثر، در نیمه‌ی داخلی استوانه کاهش و در نیمه‌ی خارجی آن افزایش می‌یابند. رفتار مشابهی نیز برای تنش طولی و در شرایط کرنش صفحه‌ای مشاهده می‌شود. با افزایش ضریب ناهمگنی، کاهش در مقدار تنش شعاعی در استوانه با فشار خارجی قابل مشاهده است. در بارگذاری داخلی استوانه، مقدار تنش شعاعی با افزایش ضریب ناهمگنی افزایش می‌یابد. ماده با ضریب ناهمگنی $n = 1$ می‌تواند بهترین انتخاب برای تولید استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار باشد چرا که علاوه بر داشتن کمترین مقادیر در تنش مؤثر و جابه‌جایی شعاعی، دارای توزیع با گرادین تغییر مقادیر بسیار اندک در دیواره‌ی استوانه می‌باشد. این اطلاعات می‌تواند در طراحی استوانه‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار مورد استفاده قرار بگیرد.

فصل ۳

تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای

چرخان FGM

۱-۳ مقدمه

استوانه‌های چرخان دارای کاربرد وسیعی در صنعت می‌باشند. لذا بررسی و تحلیل تنش در آنها در شرایط مختلف کاری از اهمیت بسزایی برخوردار است. همچنین اکثر سازه‌هایی که از مواد FG در آنها استفاده می‌شود و نیاز به مقاومت بالا در شرایط کاری دارند؛ از قبیل سازه‌های فضایی، موشک‌ها، سازه‌های دوآر رآکتورهای اتمی و ... به غیر از نیروهای مکانیکی، دارای دوران نیز می‌باشند. از اینرو تحلیل و بررسی این نوع بارگذاری حائز اهمیت می‌باشد.

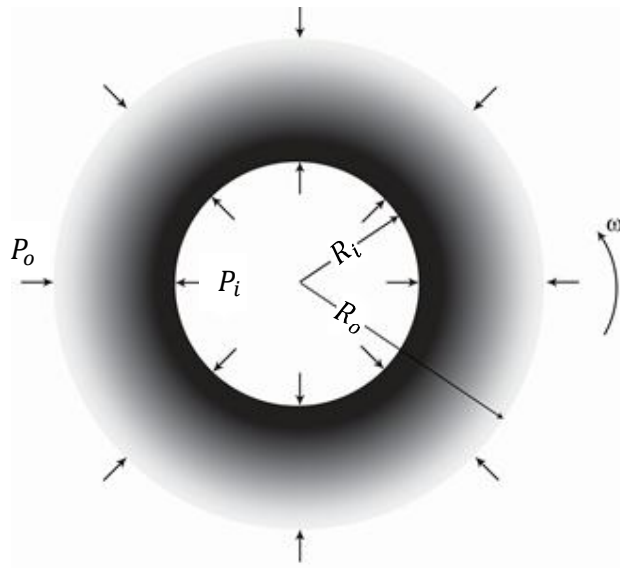
در این فصل با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، معادله‌ی کلی حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن چرخان FGM تحت فشارهای داخلی و خارجی استخراج شده و سپس به حلّ تحلیلی آن در شرایط تکیه‌گاهی مختلف و برای مقادیر متفاوت ثابت ناهمگنی پرداخته می‌شود. در ادامه حلّ الاستیک استوانه‌های چرخان همگن تحت فشار بررسی شده و سپس، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با حلّ عددی صورت گرفته توسط نرم افزار المان محدود آباکوس مقایسه و نتایج در قالب نمودارها و جداول ارائه شده است. در نهایت، بهینه‌ترین طراحی برای استوانه‌های چرخان ناهمگن با بارگذاری و شرایط انتهایی مذکور ارائه می‌شود.

۲-۳ تحلیل استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار

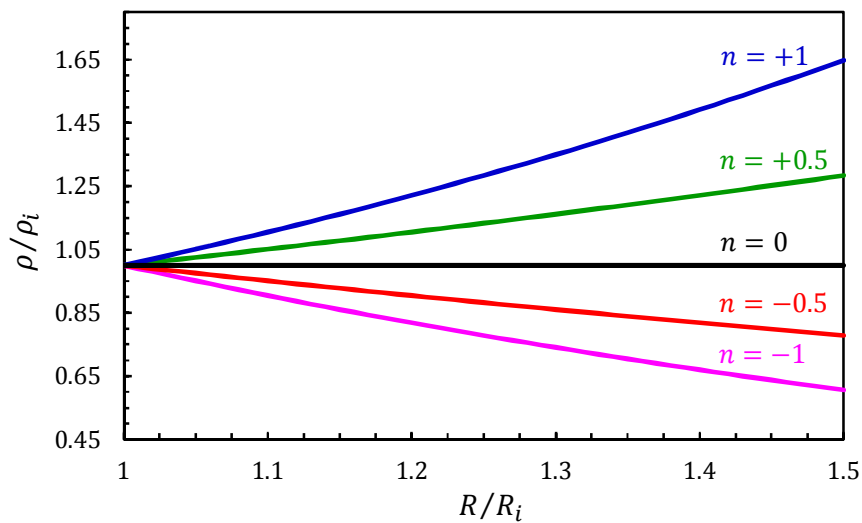
در این فصل نیز روابط برای استوانه‌ای جدار ضخیم و از جنس مواد متغیر تابعی با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o ارائه می‌شوند. علاوه بر فشارهای P_i و P_o که به ترتیب به سطوح داخلی و خارجی وارد می‌شوند؛ استوانه دارای چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت ω نیز می‌باشد (شکل ۱-۳). نسبت پواسون در طول دیواره ثابت فرض شده است. مدول الاستیسیته و چگالی هر دو دارای تغییرات نمایی نسبت به شعاع بوده و به ترتیب با روابط (۲-۳۲) و (۱-۳) تعریف می‌شوند.

$$\rho(R) = \rho_i e^{n_2(r-1)} \quad (1-3)$$

در این رابطه $r = R/R_i$ مختصات شعاع بی‌بعد است. ρ_i چگالی در سطح داخلی استوانه و n_2 ضریب ناهمگنی ماده می‌باشد. شکل (۲-۳) توزیع چگالی در دیواره‌ی استوانه را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد و به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳ مقطع استوانه‌ی جدارضخیم چرخان FGM تحت فشار داخلی و خارجی



شکل ۲-۳ توزیع بی‌بعد چگالی در راستای شعاع

۳-۲-۱ حل الاستیک استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار

هنگامی که استوانه با سرعت ثابت در حال چرخش باشد؛ شتاب مجموعه برابر صفر بوده و لذا می‌توان از معادله‌ی تعادل (۲-۲۳) برای تحلیل آن استفاده کرد. نیروی ایجاد شده در اثر شتاب گریز از مرکز به صورت یک نیروی حجمی و در راستای شعاع به تمام نقاط استوانه وارد می‌شود. لذا این بارگذاری را نیز می‌توان نسبت به محور، متقارن در نظر گرفت. در نتیجه هم‌چنان شرایط تقارن محوری برقرار است و می‌توان از روابط ذکر شده در این حوزه استفاده کرد.

بار اعمال شده به استوانه در اثر چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت ω ، برابر است با:

$$b_r = R\omega^2 \quad (۲-۳)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود؛ این نیرو تنها تابعی از شعاع استوانه بوده و مستقل از دو مختصه‌ی x و θ می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی (۲-۳)، معادله‌ی تعادل تنش (۲-۲۳) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d\sigma_r}{dR} + \frac{1}{R}(\sigma_r - \sigma_\theta) + R\rho\omega^2 = 0 \quad (۳-۳)$$

با جایگذاری (۲-۲۴) و (۲-۲۷) در (۳-۳) و همچنین استفاده از روابط (۲-۳۲) و (۳-۱)، معادله‌ی

حاکم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R^2 \frac{d^2 u_R}{dR^2} + (R^2 p + R) \frac{du_R}{dR} + (Rpv^* - 1)u_R = f(R) \quad (۴-۳)$$

که در آن

$$f(R) = -\frac{\rho(R) R^3 \omega^2}{E(R) A} \quad (۵-۳)$$

ثابت‌های U^* ، A و B وابسته به شرایط انتهایی استوانه می‌باشند که مقادیر آنها به همراه مقدار ثابت p در فصل قبل آمده است. یکی از روش‌های حل برای معادله‌ی ناهمگن (۴-۳)، روش لاگرانژ می‌باشد که طبق آن، جواب معادله‌ی ناهمگن به صورت مجموعی از حل عمومی معادله‌ی همگن متناظر و یک حل خصوصی از معادله‌ی ناهمگن بیان می‌شود.

$$u_R(R) = u_R^h(R) + u_R^p(R) \quad (6-3)$$

همان گونه که در فصل قبل مشاهده شد؛ معادله‌ی همگن متناظر، یک معادله‌ی هایپرژئومتریک بوده و حل آن کاملاً وابسته به علامت ثابت p و در نتیجه علامت ضریب ناهمگنی n_1 می‌باشد. لذا در این بخش نیز، با توجه به علامت n_1 ، پاسخ‌های معادله به دو گروه برای مقادیر مثبت و منفی ضریب ناهمگنی تقسیم می‌شوند.

با توجه به رابطه‌ی (۲-۴۳)، حل عمومی معادله‌ی همگن متناظر با معادله‌ی حاکم عبارتست از:

$$u_R^h(R) = C_1 M(R) + C_2 N(R) \quad (7-3)$$

که در آن $M(R)$ و $N(R)$ از روابط (۲-۴۴) و (۲-۴۵) محاسبه می‌شوند.

دو حل خصوصی مربوط به معادله‌ی همگن عبارتند از:

$$u_1(R) = M(R) , u_2(R) = N(R) \quad (8-3)$$

حل خصوصی معادله‌ی ناهمگن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$u_R^p(R) = u_1(R)v_1(R) + u_2(R)v_2(R) \quad (9-3)$$

که در آن

$$v_1(R) = \int \frac{-u_2(R)f(R)}{W(u_1, u_2)} dR , v_2(R) = \int \frac{u_1(R)f(R)}{W(u_1, u_2)} dR \quad (10-3)$$

رونسکی دو تابع $u_1(R)$ و $u_2(R)$ که در رابطه‌ی فوق با $W(u_1, u_2)$ نمایش داده شده؛ به صورت

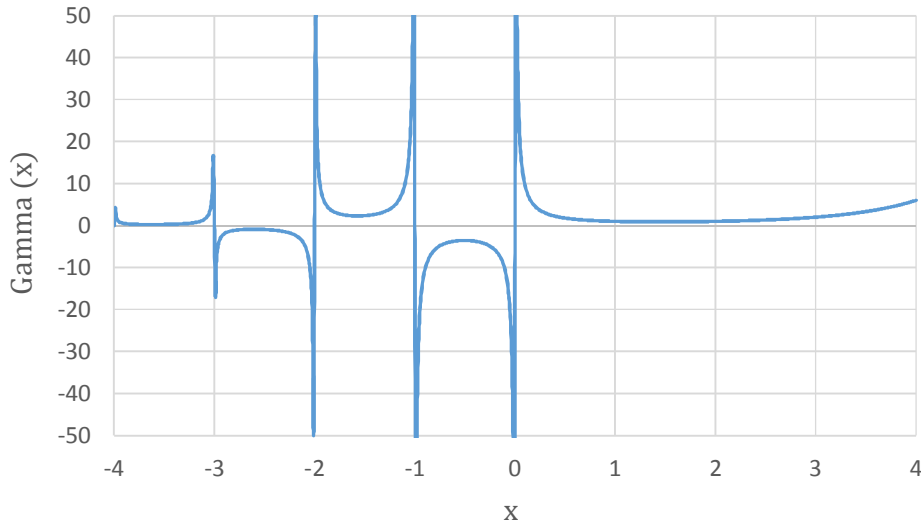
زیر محاسبه می‌شود:

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} u_1(R) & u_2(R) \\ \frac{du_1(R)}{dR} & \frac{du_2(R)}{dR} \end{vmatrix} = \frac{du_2(R)}{dR} u_1(R) - \frac{du_1(R)}{dR} u_2(R) \quad (11-3)$$

با جایگذاری در (۳-۸) در (۳-۱۱) و استفاده از روابط (۲-۴۴) و (۲-۴۵) داریم:

$$W(u_1, u_2) = \begin{cases} -\frac{p^2 \Gamma(3)}{Re^{Rp} \Gamma(2-v^*)} & n_1 > 0 \\ -\frac{p^2 \Gamma(3)}{Re^{Rp} \Gamma(1+v^*)} & n_1 < 0 \end{cases} \quad (12-3)$$

$\Gamma(x)$ از رابطه‌ی (۴۲-۲) محاسبه می‌شود که توزیع آن در شکل (۳-۳) آورده شده است.



شکل ۳-۳ توزیع تابع گاما

با جایگذاری (۵-۳)، (۸-۳) و (۱۲-۳) در (۱۰-۳) و استفاده از روابط (۴۴-۲)، (۴۵-۲)، (۳۲-۲) و (۱-۳) داریم:

$$v_1(R) = \begin{cases} -\frac{\rho_i \omega^2 \Gamma(2-v^*)}{AE_i \Gamma(3)} \int R^5 \Psi(2-v^*, 3; Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR & n_1 > 0 \\ -\frac{\rho_i \omega^2 \Gamma(1+v^*)}{AE_i \Gamma(3)} \int R^5 e^{Rp} \Psi(1+v^*, 3; -Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR & n_1 < 0 \end{cases} \quad (13-3)$$

$$v_2(R) = \begin{cases} \frac{\rho_i \omega^2 \Gamma(2-v^*)}{AE_i \Gamma(3)} \int R^5 \Phi(2-v^*, 3; Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR & n_1 > 0 \\ \frac{\rho_i \omega^2 \Gamma(1+v^*)}{AE_i \Gamma(3)} \int R^5 e^{Rp} \Phi(1+v^*, 3; -Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR & n_1 < 0 \end{cases} \quad (14-3)$$

از آنجا که توابع Ψ و Φ را نمی‌توان با استفاده از روابط (۵۰-۲) و (۵۱-۲)، به صورت صریح برحسب متغیر R به دست آورد؛ لذا می‌بایست برای محاسبه‌ی روابط (۱۳-۳) و (۱۴-۳) و در نتیجه به دست آوردن حل تحلیلی برای معادله‌ی حاکم، از بسط تیلور^۱ تابع نمایی به جای خود این تابع استفاده کرد. بسط تیلور تابع نمایی عبارت است از:

1. Taylor expansion

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (15-3)$$

با جایگذاری (15-3) در (2-50) و (2-51) سپس انتگرال گیری از تابع حاصل شده و در نهایت

استفاده از تعاریف و خواص دو تابع معروف بسل و گاما، Φ و Ψ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(a, b; z) &= \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!} = \Phi^*(a, b; z) \\ (a)_k &= a(a+1)\dots(a+k-1), (a)_0 = 1. \end{aligned} \right. \quad (16-3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi(a, b+1; z) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a} dt \\ &= \frac{(-1)^{b-1}}{b! \Gamma(a-b)} \{ \Phi(a, b+1; z) \ln(z) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b+1)_k} [\psi(a+k) - \psi(1+k) - \psi(1+b+k)] \frac{z^k}{k!} \} \\ &\quad + \frac{(b-1)!}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{b-1} \frac{(a-b)_k}{(1-b)_k} \frac{z^{k-b}}{k!} = \Psi^*(a, b; z) \\ \psi(z) &= -\gamma + \int_0^1 \frac{(1-t^{z-1})}{1-t} dt \end{aligned} \right. \quad (17-3)$$

که در آن γ ثابت اولر بوده و مقدار آن برابر $0.5772156649 \dots$ می باشد. حال با استفاده از روابط فوق،

توابع $v_1(R)$ و $v_2(R)$ به سادگی قابل محاسبه می باشند.

با جایگذاری (3-7) و (3-9) در (3-6)، به حل معادله‌ی (3-4) خواهیم رسید.

$$u_R(R) = (v_1(R) + C_1)M(R) + (v_2(R) + C_2)N(R) \quad (18-3)$$

نکته‌ی قابل توجه آن است که پاسخ به دست آمده برای معادله‌ی حاکم، تنها به ازای مقادیر

مختلف صفر از ضریب n_1 برقرار می باشد. لذا در صورت صفر بودن این ضریب، جنس استوانه به یک

ماده‌ی همگن تبدیل می شود که حل آن در ادامه‌ی همین فصل آمده است.

به منظور محاسبه‌ی ثابت‌های C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی؛ ابتدا می‌بایست با جایگزین

کردن $(3-18)$ در $(2-24)$ و استفاده از رابطه‌ی $(2-27)$ ، تنش شعاعی را به دست آوریم.

$$\sigma_R(R) = E_i e^{n(r-1)} \left\{ (v_1(R) + C_1) \left(AC(R) + B \frac{M(R)}{R} \right) + (v_2(R) + C_2) \left(AD(R) + B \frac{N(R)}{R} \right) \right\} \quad (19-3)$$

توابع $C(R)$ و $D(R)$ از روابط $(2-56)$ و $(2-61)$ محاسبه می‌شوند.

$$C_1 = \frac{\left\{ P_o \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) - P_i e^{n_1(k-1)} \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) + E_i e^{n_1(k-1)} \left[v_1(R_o) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - v_1(R_i) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \right] \right\}}{\left\{ E_i e^{n_1(k-1)} \left[\left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \right] \right\}} \quad (20-3)$$

$$C_2 = \frac{\left\{ P_i e^{n_1(k-1)} \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - P_o \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) + E_i e^{n_1(k-1)} \left[v_2(R_i) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - v_2(R_o) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \right] \right\}}{\left\{ E_i e^{n_1(k-1)} \left[\left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \right] \right\}}$$

با جایگذاری مقادیر این ثابت‌ها در (۳-۱۸) و استفاده از (۲-۲۴)، (۲-۲۷) و (۲-۲۸)، تنش‌های

شعاعی، محیطی و طولی و جابه‌جایی شعاعی به دست می‌آیند.

$$\sigma_R(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{F} \left\{ (G + F^* v_1(R)) \left(AC(R) + \frac{BM(R)}{R} \right) + (H + F^* v_2(R)) \left(AD(R) + \frac{BN(R)}{R} \right) \right\} \quad (۳-۲۱)$$

$$\sigma_\theta(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{F} \left\{ (G + F^* v_1(R)) \left(BC(R) + \frac{AM(R)}{R} \right) + (H + F^* v_2(R)) \left(BD(R) + \frac{AN(R)}{R} \right) \right\} \quad (۳-۲۲)$$

$$\sigma_x(R) = \frac{\beta(A+B)e^{n_1(r-k)}}{F} \left\{ (G + F^* v_1(R)) \left(C(R) + \frac{M(R)}{R} \right) + (H + F^* v_2(R)) \left(D(R) + \frac{N(R)}{R} \right) \right\} \quad (۳-۲۳)$$

$$u_R(R) = \frac{1}{F^*} [(G + F^* v_1(R))M(R) + (H + F^* v_2(R))N(R)] \quad (۳-۲۴)$$

که در آنها

$$F = \left\{ \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \right\} \quad (۳-۲۵)$$

$$G = \left\{ P_o \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) - P_i e^{n_1(k-1)} \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) + E_i e^{n_1(k-1)} \left[v_1(R_o) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - v_1(R_i) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \right] \right\} \quad (۳-۲۶)$$

$$\begin{aligned}
H = & \left\{ P_i e^{n_i(k-1)} \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - P_o \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) + \right. \\
& + E_i e^{n_i(k-1)} \left[v_2(R_i) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) + \right. \\
& + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - \\
& \left. \left. - v_2(R_o) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \right] \right\} \quad (27-3)
\end{aligned}$$

$$F^* = E_i F e^{n_i(k-1)} \quad (28-3)$$

تنش مؤثر بر اساس تئوری تسلیم فن میزس، با استفاده از رابطه‌ی (۵۸-۲) محاسبه می‌شود. حال با توجه به علامت ضریب ناهمگنی n_1 و شرایط انتهایی استوانه، معادلات (۳-۲۱ تا ۳-۲۴) و (۵۸-۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

۳-۲-۱-۱ مقایر مثبت ضریب ناهمگنی

الف) استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned}
\sigma_R(R) = & \frac{e^{n_1(r-k)}}{J} \left\{ \left[\frac{p^2(1+v) - Rp^3}{(1-v^2)e^{Rp}} \Phi(2-v, 3; Rp) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{Rp^3(2-v)}{3(1-v^2)e^{Rp}} \Phi(3-v, 4; Rp) \right] \\
& (K - J^* \int R^5 \Psi^*(2-v, 3; Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) + \\
& + \left[\frac{p^2(1+v) - Rp^3}{(1-v^2)e^{Rp}} \Psi(2-v, 3; Rp) - \right. \\
& - \left. \frac{Rp^3(2-v)}{(1-v^2)e^{Rp}} \Psi(3-v, 4; Rp) \right] \\
& \left. (L + J^* \int R^5 \Phi^*(2-v, 3; Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) \right\} \quad (29-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}(R) = \frac{e^{\eta_1(r-k)}}{J} & \left\{ \left[\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3\nu}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(2-\nu, 3; Rp) + \right. \right. \\
& + \frac{Rp^3(2\nu-\nu^2)}{3(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(3-\nu, 4; Rp) \Big] \\
& (K - J^* \int R^5 \Psi^*(2-\nu, 3; Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) + \\
& + \left[\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3\nu}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(2-\nu, 3; Rp) - \right. \\
& - \frac{Rp^3(2\nu-\nu^2)}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(3-\nu, 4; Rp) \Big] \\
& \left. (L + J^* \int R^5 \Phi^*(2-\nu, 3; Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) \right\}
\end{aligned} \tag{۳۰-۳}$$

$$\sigma_x(R) = 0 \tag{۳۱-۳}$$

$$\begin{aligned}
u_R(R) = \frac{1}{E_i J e^{\eta_1(k-1)}} & \left\{ (K - J^* \int R^5 \Psi^*(2-\nu, 3; Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) \right. \\
& \left. \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Phi(2-\nu, 3; Rp) \right) + \right. \\
& + (L + J^* \int R^5 \Phi^*(2-\nu, 3; Rp) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) \\
& \left. \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Psi(2-\nu, 3; Rp) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{۳۲-۳}$$

$$\sigma_{eff} = (\sigma_R^2 + \sigma_{\theta}^2 - \sigma_R \sigma_{\theta})^{0.5} \tag{۳۳-۳}$$

که در آنها

$$J = AM_1 AM_4 - AM_2 AM_3 \tag{۳۴-۳}$$

$$\begin{aligned}
K = \left\{ P_o AM_3 - P_i e^{\eta_1(k-1)} AM_4 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [v_1(R_o) AM_2 AM_3 + \right. \\
\left. + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) AM_3 AM_4 - v_1(R_i) AM_1 AM_4] \right\}
\end{aligned} \tag{۳۵-۳}$$

$$L = \left\{ P_i e^{n_1(k-1)} AM_2 - P_o AM_1 + E_i e^{n_1(k-1)} [v_2(R_i) AM_2 AM_3 + \right. \\ \left. + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) AM_1 AM_2 - v_2(R_o) AM_1 AM_4] \right\} \quad (36-3)$$

$$J^* = \frac{\rho_i \omega^2 (1-\nu^2) \Gamma(2-\nu) e^{n_1(k-1)}}{\Gamma(3)} J \quad (37-3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} AM_1 &= \left(\frac{p^2(1+\nu) - R_i p^3}{(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Phi(2-\nu, 3; R_i p) + \frac{R_i p^3(2-\nu)}{3(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Phi(3-\nu, 4; R_i p) \right) \\ AM_2 &= \left(\frac{p^2(1+\nu) - R_o p^3}{(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Phi(2-\nu, 3; R_o p) + \frac{R_o p^3(2-\nu)}{3(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Phi(3-\nu, 4; R_o p) \right) \\ AM_3 &= \left(\frac{p^2(1+\nu) - R_i p^3}{(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Psi(2-\nu, 3; R_i p) - \frac{R_i p^3(2-\nu)}{(1-\nu^2)e^{R_i p}} \Psi(3-\nu, 4; R_i p) \right) \\ AM_4 &= \left(\frac{p^2(1+\nu) - R_o p^3}{(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Psi(2-\nu, 3; R_o p) - \frac{R_o p^3(2-\nu)}{(1-\nu^2)e^{R_o p}} \Psi(3-\nu, 4; R_o p) \right) \end{aligned} \right. \quad (38-3)$$

(ب) استوانه با دو سر بسته (گرنش صفحه‌ای)

$$\sigma_R(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{Q} \left\{ \left[\frac{p^2 - Rp^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{Rp^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] \right. \\ \left. (S - Q^* \int R^5 \Psi^*\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) + \right. \\ \left. + \left[\frac{p^2 - Rp^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{Rp^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] \right. \\ \left. (T + Q^* \int R^5 \Phi^*\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) \right\} \quad (39-3)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta(R) = \frac{e^{\eta_1(r-k)}}{Q} & \left\{ \left[\frac{p^2 - Rp^3v}{(1-v-2v^2)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) + \right. \right. \\
& + \frac{Rp^3(2v-3v^2)}{3(1-v^2)(1-2v)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{3-4v}{1-v}, 4; Rp\right) \Big] \\
& (S-Q^* \int R^5 \Psi^*\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) + \\
& + \left[\frac{p^2 - Rp^3v}{(1-v-2v^2)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) - \right. \\
& - \frac{Rp^3(2v-3v^2)}{(1-v^2)(1-2v)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{3-4v}{1-v}, 4; Rp\right) \Big] \\
& \left. \left. (T+Q^* \int R^5 \Phi^*\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) \right\} \right. \tag{۴۰-۳}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x(R) = \frac{ve^{\eta_1(r-k)}}{Q} & \left\{ \left[\frac{2p^2 - Rp^3}{(1-v-2v^2)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) + \right. \right. \\
& + \frac{Rp^3(2-3v)}{3(1-v^2)(1-2v)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{3-4v}{1-v}, 4; Rp\right) \Big] \\
& (S-Q^* \int R^5 \Psi^*\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) + \\
& + \left[\frac{2p^2 - Rp^3}{(1-v-2v^2)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) - \right. \\
& - \frac{Rp^3(2-3v)}{(1-v^2)(1-2v)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{3-4v}{1-v}, 4; Rp\right) \Big] \\
& \left. \left. (T+Q^* \int R^5 \Phi^*\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) \right\} \right. \tag{۴۱-۳}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_R(R) = \frac{1}{E_i Q e^{\eta_1(k-1)}} & \left\{ (S-Q^* \int R^5 \Psi^*\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) \right. \\
& \left. \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) \right) + \right. \\
& + (T+Q^* \int R^5 \Phi^*\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) \\
& \left. \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3v}{1-v}, 3; Rp\right) \right) \right\} \tag{۴۲-۳}
\end{aligned}$$

$$\sigma_{eff} = [(1-\nu+\nu^2)(\sigma_R^2 + \sigma_\theta^2) - (1+2\nu-2\nu^2)\sigma_R\sigma_\theta]^{0.5} \quad (43-3)$$

که در آنها

$$Q = BM_1BM_4 - BM_2BM_3 \quad (44-3)$$

$$S = \left\{ P_o BM_3 - P_i e^{\eta_1(k-1)} BM_4 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [\nu_1(R_o) BM_2 BM_3 + \right. \\ \left. + (\nu_2(R_o) - \nu_2(R_i)) BM_3 BM_4 - \nu_1(R_i) BM_1 BM_4] \right\} \quad (45-3)$$

$$T = \left\{ P_i e^{\eta_1(k-1)} BM_2 - P_o BM_1 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [\nu_2(R_i) BM_2 BM_3 + \right. \\ \left. + (\nu_1(R_i) - \nu_1(R_o)) BM_1 BM_2 - \nu_2(R_o) BM_1 BM_4] \right\} \quad (46-3)$$

$$Q^* = \frac{\rho_i \omega^2 (1-\nu-2\nu^2) \Gamma\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}\right) e^{\eta_1(k-1)}}{(1-\nu)\Gamma(3)} Q \quad (47-3)$$

$$\left\{ \begin{aligned} BM_1 &= \left(\frac{p^2 - R_i p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_i p}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_i p\right) + \frac{R_i p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_i p}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_i p\right) \right) \\ BM_2 &= \left(\frac{p^2 - R_o p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_o p}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_o p\right) + \frac{R_o p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_o p}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_o p\right) \right) \\ BM_3 &= \left(\frac{p^2 - R_i p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_i p}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_i p\right) - \frac{R_i p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_i p}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_i p\right) \right) \\ BM_4 &= \left(\frac{p^2 - R_o p^3 (1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_o p}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_o p\right) - \frac{R_o p^3 (3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_o p}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_o p\right) \right) \end{aligned} \right. \quad (48-3)$$

۲-۱-۲-۳ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی

الف) استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned} \sigma_R(R) = \frac{e^{\eta_1(r-k)}}{U} & \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -Rp) - \frac{Rp^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -Rp) \right] \right. \\ & (V - U^* \int R^5 e^{Rp} \Psi^*(1+\nu, 3; -Rp) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) + \\ & + \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -Rp) + \frac{Rp^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -Rp) \right] \\ & \left. (W + U^* \int R^5 e^{Rp} \Phi^*(1+\nu, 3; -Rp) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) \right\} \end{aligned} \quad (49-3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R) = \frac{e^{\eta_1(r-k)}}{U} & \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -Rp) - \frac{Rp^3\nu}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -Rp) \right] \right. \\ & (V - U^* \int R^5 e^{Rp} \Psi^*(1+\nu, 3; -Rp) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) + \\ & + \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -Rp) + \frac{Rp^3\nu}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -Rp) \right] \\ & \left. (W + U^* \int R^5 e^{Rp} \Phi^*(1+\nu, 3; -Rp) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) \right\} \end{aligned} \quad (50-3)$$

$$\sigma_x(R) = 0 \quad (51-3)$$

$$\begin{aligned} u_R(R) = \frac{1}{E_i U e^{\eta_1(k-1)}} & \left\{ (V - U^* \int R^5 e^{Rp} \Psi^*(1+\nu, 3; -Rp) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) \right. \\ & (Rp^2 \Phi(1+\nu, 3; -Rp)) + \\ & + (W + U^* \int R^5 e^{Rp} \Phi^*(1+\nu, 3; -Rp) e^{(n_2-\eta_1)(r-1)} dR) \\ & \left. (Rp^2 \Psi(1+\nu, 3; -Rp)) \right\} \end{aligned} \quad (52-3)$$

که در آنها

$$U = CM_1 CM_4 - CM_2 CM_3 \quad (53-3)$$

$$V = \left\{ P_o CM_3 - P_i e^{\eta_1(k-1)} CM_4 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [v_1(R_o) CM_2 CM_3 + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) CM_3 CM_4 - v_1(R_i) CM_1 CM_4] \right\} \quad (54-3)$$

$$W = \left\{ P_i e^{\eta_1(k-1)} CM_2 - P_o CM_1 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [v_2(R_i) CM_2 CM_3 + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) CM_1 CM_2 - v_2(R_o) CM_1 CM_4] \right\} \quad (55-3)$$

$$U^* = \frac{\rho_i \omega^2 (1-\nu^2) \Gamma(1+\nu) e^{\eta_1(k-1)}}{\Gamma(3)} U \quad (56-3)$$

$$\begin{cases} CM_1 = \left(\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -R_i p) - \frac{R_i p^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -R_i p) \right) \\ CM_2 = \left(\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -R_o p) - \frac{R_o p^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -R_o p) \right) \\ CM_3 = \left(\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -R_i p) + \frac{R_i p^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -R_i p) \right) \\ CM_4 = \left(\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -R_o p) + \frac{R_o p^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -R_o p) \right) \end{cases} \quad (57-3)$$

(ب) استوانه با دو سر بسته (گرنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned} \sigma_R(R) = \frac{e^{\eta_1(r-k)}}{X} & \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{Rp^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] \right. \\ & (Y - X^* \int R^5 e^{Rp} \Psi^*\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) e^{(\eta_2-\eta_1)(r-1)} dR) + \\ & \left. + \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{Rp^3}{(1-\nu-2\nu^2)} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] \right. \\ & \left. (Z + X^* \int R^5 e^{Rp} \Phi^*\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) e^{(\eta_2-\eta_1)(r-1)} dR) \right\} \quad (58-3) \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta}(R) = \frac{e^{\eta_1(r-k)}}{X} \left\{ \left[\frac{p^2}{1-v-2v^2} \Phi\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) - \frac{Rp^3v}{3(1-v^2)(1-2v)} \Phi\left(\frac{2-v}{1-v}, 4; -Rp\right) \right] \right. \\ (Y - X^* \int R^5 e^{Rp} \Psi^*\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) + \\ + \left[\frac{p^2}{1-v-2v^2} \Psi\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) + \frac{Rp^3v}{(1-v^2)(1-2v)} \Psi\left(\frac{2-v}{1-v}, 4; -Rp\right) \right] \\ \left. (Z + X^* \int R^5 e^{Rp} \Phi^*\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) \right\} \quad (59-3)$$

$$\sigma_x(R) = \frac{ve^{\eta_1(r-k)}}{X} \left\{ \left(\frac{2p^2}{1-v-2v^2} \Phi\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) - \frac{1}{3(1-v^2)(1-2v)} \Phi\left(\frac{2-v}{1-v}, 4; -Rp\right) \right) \right. \\ (Y - X^* \int R^5 e^{Rp} \Psi^*\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) + \\ + \left(\frac{2p^2}{1-v-2v^2} \Psi\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) + \frac{1}{(1-v^2)(1-2v)} \Psi\left(\frac{2-v}{1-v}, 4; -Rp\right) \right) \\ \left. (Z + X^* \int R^5 e^{Rp} \Phi^*\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) \right\} \quad (60-3)$$

$$u_R(R) = \frac{1}{E_i X e^{\eta_1(k-1)}} \left\{ (Y - X^* \int R^5 e^{Rp} \Psi^*\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) \right. \\ (Rp^2 \Phi\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right)) + \\ + (Z + X^* \int R^5 e^{Rp} \Phi^*\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right) e^{(n_2-n_1)(r-1)} dR) \\ \left. (Rp^2 \Psi\left(\frac{1}{1-v}, 3; -Rp\right)) \right\} \quad (61-3)$$

که در آنها

$$X = DM_1DM_4 - DM_2DM_3 \quad (۶۲-۳)$$

$$Y = \left\{ P_o DM_3 - P_i e^{\eta_1(k-1)} DM_4 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [v_1(R_o) DM_2 DM_3 + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) DM_3 DM_4 - v_1(R_i) DM_1 DM_4] \right\} \quad (۶۳-۳)$$

$$Z = \left\{ P_i e^{\eta_1(k-1)} DM_2 - P_o DM_1 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [v_2(R_i) DM_2 DM_3 + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) DM_1 DM_2 - v_2(R_o) DM_1 DM_4] \right\} \quad (۶۴-۳)$$

$$X^* = \frac{\rho_i \omega^2 (1-\nu-2\nu^2) \Gamma\left(\frac{1}{1-\nu}\right) e^{\eta_1(k-1)}}{(1-\nu)\Gamma(3)} X \quad (۶۵-۳)$$

$$\begin{cases} DM_1 = \left(\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_i p\right) - \frac{R_i p^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_i p\right) \right) \\ DM_2 = \left(\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_o p\right) - \frac{R_o p^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_o p\right) \right) \\ DM_3 = \left(\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_i p\right) + \frac{R_i p^3}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_i p\right) \right) \\ DM_4 = \left(\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_o p\right) + \frac{R_o p^3}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_o p\right) \right) \end{cases} \quad (۶۶-۳)$$

۳-۲-۲ حل عددی استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار

نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی ناهمگن چرخان، همانند فصل قبل می‌باشد. به منظور اعمال تغییرات

چگالی در هر لایه، از رابطه‌ی (۱-۳) استفاده می‌شود.

نیروی حجمی ایجاد شده در مجموعه بواسطه‌ی چرخش استوانه، با تعریف تابع (۲-۳) به تمامی

گره‌های موجود اعمال می‌شود.

۳-۳ حل الاستیک استوانه‌ی همگن چرخان تحت فشار

چرخش استوانه با سرعت ثابت، بار $b_R = R\omega^2$ را به مجموعه اعمال می‌کند. لذا در این بخش نیز معادله‌ی تعادل تنش (۳-۳) برقرار است. با استفاده از معادلات (۲۷-۲)، (۲۴-۲)، (۲۰-۲) و (۳-۳)، معادله‌ی حاکم اویلر-کوشی به‌دست می‌آید.

$$R^2 \frac{d^2 u_R}{dR^2} + R \frac{du_R}{dR} - u_R = -\frac{\rho\omega^2}{EA} R^3 \quad (۶۷-۳)$$

چرخش استوانه با سرعت زاویه‌ای ثابت، یک ترم ناهمگنی به معادله‌ی (۲-۹۱) اضافه می‌کند. پاسخ معادله‌ی ناهمگن ایجاد شده را می‌توان با استفاده از روش لاگرانژ به‌دست آورد. اما به منظور ساده‌تر شدن حل، معادله‌ی (۳-۶۷) را به صورت مشتقات پی‌درپی نوشته و سپس با انتگرال‌گیری از معادله‌ی به‌دست آمده؛ پاسخ را می‌یابیم.

$$\frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (R u_R) \right] = -\frac{\rho\omega^2}{EA} R \quad (۶۸-۳)$$

با دو بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق، جابه‌جایی شعاعی به‌دست می‌آید.

$$u_R(R) = C_1 R + \frac{C_2}{R} - \frac{\rho\omega^2}{8EA} R^3 \quad (۶۹-۳)$$

به منظور یافتن ثابت‌های C_1 و C_2 ، از شرایط مرزی استفاده می‌شود. از آنجا که این شرایط را برای تنش شعاعی در اختیار داریم؛ با استفاده از روابط (۲۷-۲)، (۲۴-۲) و (۳-۶۹) تنش شعاعی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\sigma_R(R) = E \left[(A+B)C_1 - (A-B) \frac{C_2}{R^2} \right] - \frac{1}{8} (3+\nu^*) \rho\omega^2 R^2 \quad (۷۰-۳)$$

که در آن ν^* با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شود. با اعمال شرایط مرزی (۲-۴۹) در (۳-۷۰)، ثابت‌های C_1 و C_2 محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{(3+\nu^*)(k^4-1)\rho\omega^2 R_i^2 + 8(P_i - k^2 P_o)}{8E(A+B)(k^2-1)} \\ C_2 = \frac{(3+\nu^*)(k^2-1)\rho\omega^2 R_i^2 R_o^2 + 8(P_i - P_o)R_o^2}{8E(A-B)(k^2-1)} \end{cases} \quad (۷۱-۳)$$

با جایگذاری C_1 و C_2 در (۳-۶۹) و استفاده از (۲۴-۲)، (۲۷-۲) و (۲۸-۲) داریم:

$$\sigma_R^H(R) = \left\{ \frac{(3+\nu^*)}{8} [(k^2+1) - \frac{k^2}{r^2} - r^2] \rho \omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} [(P_i - k^2 P_o) - (P_i - P_o) (\frac{k}{r})^2] \right\} \quad (72-3)$$

$$\sigma_\theta^H(R) = \left\{ \frac{(3+\nu^*)}{8} [(k^2+1) + \frac{k^2}{r^2} - \frac{1+3\nu^*}{3+\nu^*} r^2] \rho \omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} [(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o) (\frac{k}{r})^2] \right\} \quad (73-3)$$

$$\sigma_x^H(R) = \frac{\beta(3+\nu^*)}{4} [(k^2+1) - \frac{2+2\nu^*}{3+\nu^*} r^2] \rho \omega^2 R_i^2 + \frac{2\beta}{k^2-1} (P_i - k^2 P_o) \quad (74-3)$$

$$u_R^H(R) = \left\{ \frac{(3+\nu^*)}{8E} [\frac{k^2+1}{A+B} + \frac{k^2}{r^2(A-B)} - \frac{r^2}{3A+B}] \rho \omega^2 r R_i^3 + \right. \\ \left. + \frac{R_i r}{E(k^2-1)} [(\frac{P_i - k^2 P_o}{A+B}) + (\frac{P_i - P_o}{A-B}) (\frac{k}{r})^2] \right\} \quad (75-3)$$

حال با توجه به شرایط تکیه‌گاهی، روابط (۷۲-۳ تا ۷۵) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

۳-۳-۱ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\sigma_R^H(R) = \left\{ \frac{(3+\nu)}{8} [(k^2+1) - \frac{k^2}{r^2} - r^2] \rho \omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} [(P_i - k^2 P_o) - (P_i - P_o) (\frac{k}{r})^2] \right\} \quad (76-3)$$

$$\sigma_\theta^H(R) = \left\{ \frac{(3+\nu)}{8} [(k^2+1) + \frac{k^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2] \rho \omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} [(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o) (\frac{k}{r})^2] \right\} \quad (77-3)$$

$$\sigma_x^H(R) = 0 \quad (78-3)$$

$$u_R^H(R) = \left\{ \frac{(3+\nu)(1+\nu)}{8E} [(k^2+1) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{k}{r}\right)^2 - \frac{1+\nu}{3+\nu} r^2] \rho \omega^2 r R_i^3 + \right. \\ \left. + \frac{R_i r}{E(k^2-1)} [(1-\nu)(P_i - k^2 P_o) + (1+\nu)(P_i - P_o) \left(\frac{k}{r}\right)^2] \right\} \quad (79-3)$$

$$\sigma_{eff}^H(R) = [(\sigma_R^H)^2 + (\sigma_\theta^H)^2 - \sigma_R^H \sigma_\theta^H]^{0.5} \quad (80-3)$$

۲-۳-۳ استوانه با دو سر بسته (گرنش صفحه‌ای)

$$\sigma_R^H(R) = \left\{ \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} [(k^2+1) - \frac{k^2}{r^2} - r^2] \rho \omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} [(P_i - k^2 P_o) - (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r}\right)^2] \right\} \quad (81-3)$$

$$\sigma_\theta^H(R) = \left\{ \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} [(k^2+1) + \frac{k^2}{r^2} - \frac{1+2\nu}{3-2\nu} r^2] \rho \omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} [(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r}\right)^2] \right\} \quad (82-3)$$

$$\sigma_x^H(R) = \frac{3\nu-2\nu^2}{4(1-\nu)} [(k^2+1) - \frac{2r^2}{3-2\nu}] \rho \omega^2 R_i^2 + \frac{2\nu}{k^2-1} (P_i - k^2 P_o) \quad (83-3)$$

$$u_R^H(R) = \left\{ \frac{(1+\nu)R_i r}{E(k^2-1)} [(1-2\nu)(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r}\right)] + \right. \\ \left. + \left[\frac{(3-2\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{8E(1-\nu)} \rho \omega^2 r R_i^3 \left((k^2+1) + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{k}{r}\right)^2 - \frac{r^2}{3-2\nu} \right) \right] \right\} \quad (84-3)$$

$$\sigma_{eff}^H(R) = [(1-\nu+\nu^2)[(\sigma_R^H)^2 + (\sigma_\theta^H)^2] - (1+2\nu-2\nu^2)\sigma_R^H \sigma_\theta^H]^{0.5} \quad (85-3)$$

۳-۴ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج

به منظور مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با مقادیر به‌دست آمده از حلّ عددی به کمک مدل‌سازی نرم افزاری، استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن و همسانگردی به شعاع داخلی $R_i = 40 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $R_o = 60 \text{ mm}$ و طول $L = 800 \text{ mm}$ در نظر می‌گیریم. مدول یانگ و چگالی در سطح داخلی استوانه به ترتیب دارای مقادیر $E_i = 200 \text{ GPa}$ و $\rho_i = 7860 \text{ kg/m}^3$ می‌باشند. همچنین فرض می‌شود که نسبت پواسون دارای مقدار ثابت $\nu = 0.3$ در طی ضخامت است. استوانه تحت فشار داخلی ($P = P_i = 80 \text{ MPa}$) بوده و با سرعت زوایه‌ای ثابت $\omega = 3600 \text{ rpm}$ در حال چرخش حول محور مرکزی می‌باشد.

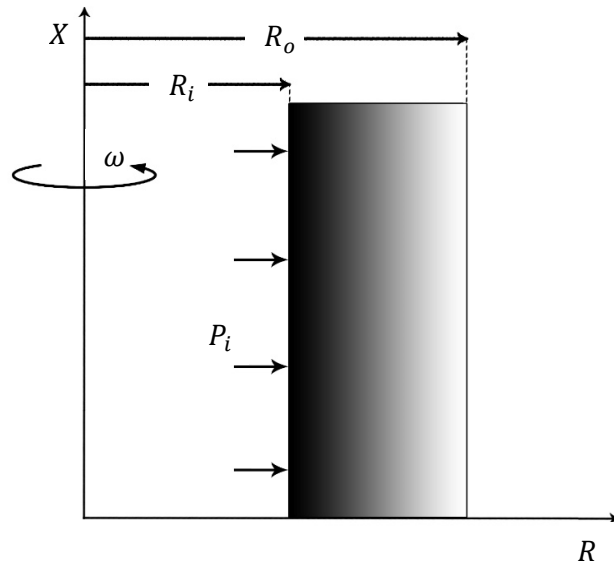
ثابت‌های ناهمگنی n_1 و n_2 برابر یک‌دیگر فرض شده و نتایج برای دو حالت تنش و کرنش صفحه‌ای ارائه می‌شوند. خطوط ممتد نشانگر حلّ تحلیلی و دایره‌های کوچک نماینده‌ی حلّ عددی صورت گرفته می‌باشند.

۳-۴-۱ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

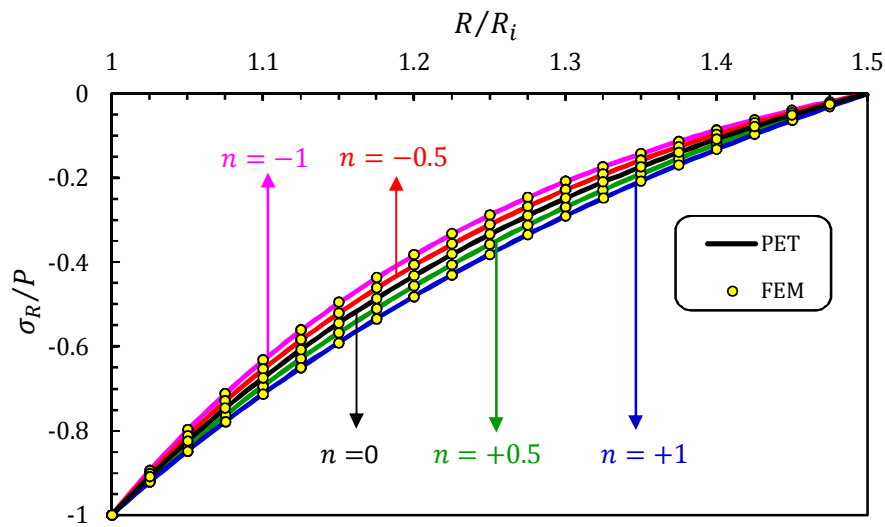
در این بخش، استوانه در حال دوران با سرعت ثابت 3600 rpm ، تحت فشار داخلی 80 MPa و در حالت تنش صفحه‌ای می‌باشد (شکل ۳-۴).

شکل (۳-۵) توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه نشان می‌دهد. از آنجا که هم فشار و هم نیروی حجمی، هر دو در جهت مثبت محور مختصات به استوانه اعمال شده‌اند؛ لذا تنش شعاعی دارای مقادیر منفی در طول دیواره می‌باشد. به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی، تنش‌ها در سطوح داخلی و خارجی استوانه یکسان بوده و همچنین نسبت σ_R / σ_R^H در لایه‌ی داخلی برابر یک می‌باشد.

با کاهش n ، مقدار تنش شعاعی نیز کاهش می‌یابد. این مقدار به ازای $n < 0$ ، کوچک‌تر از تنش ایجاد شده در استوانه‌ی همگن و به ازای $n > 0$ ، بزرگ‌تر از آن می‌باشد.



شکل ۳-۴ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت فشار در حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۳-۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی

در حالت تنش صفحه‌ای

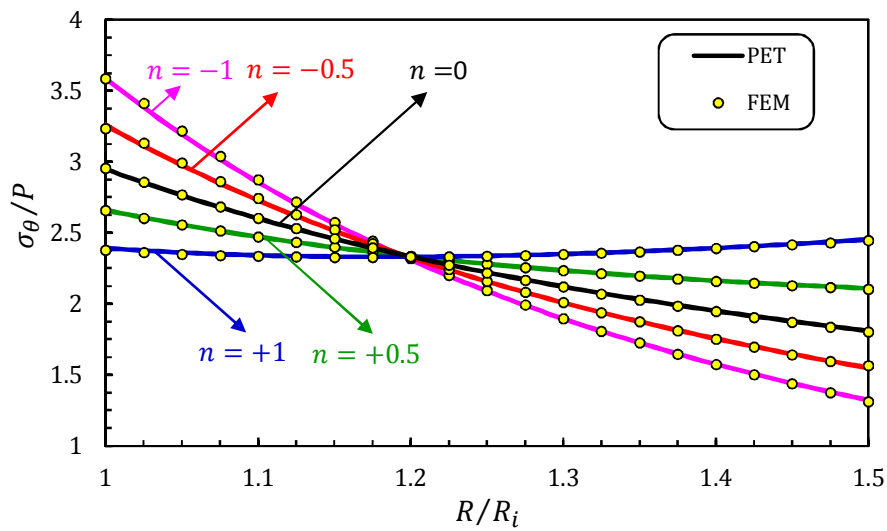
شکل (۳-۶) توزیع تنش محیطی بی بعد شده را نشان می دهد. مقدار این تنش در سطوح داخلی و خارجی استوانه، به ازای هیچ یک از ضرایب ناهمگنی یکسان نمی باشد. همچنین نسبت $\sigma_\theta/\sigma_\theta^H$ در هیچ یک از این دو سطح برابر یک نیست.

با افزایش n ، تقریباً در نیمه‌ی داخلی استوانه، تنش محیطی کاهش و در نیمه‌ی دیگر افزایش می یابد. لذا در شعاع‌های کمتر از حدود $1/2$ ، تنش به ازای $n < 0$ دارای مقادیر بزرگ‌تر و به ازای $n > 0$ دارای مقادیر کوچک‌تری نسبت به استوانه‌ی همگن می باشد. تنها در همین شعاع است که نسبت $\sigma_\theta/\sigma_\theta^H$ برابر یک می شود.

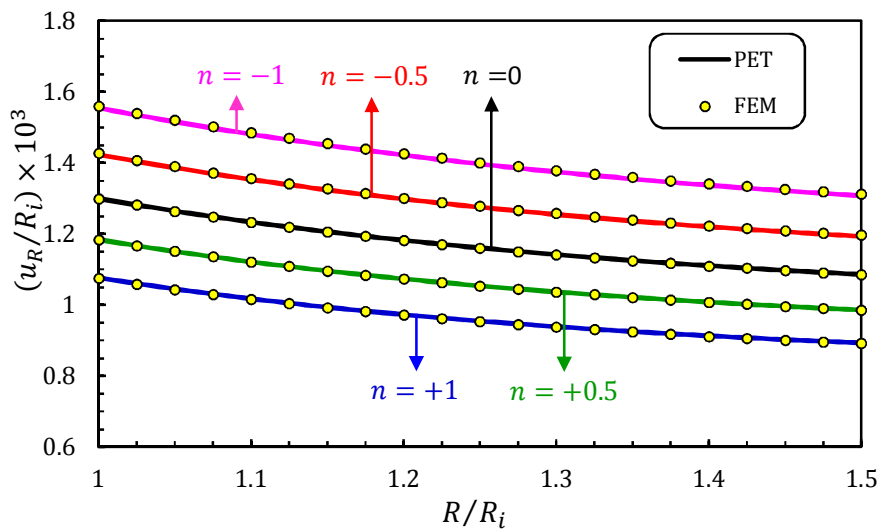
در نیمه‌ی داخلی استوانه، منحنی‌ها به یکدیگر نزدیک شده و دارای رفتار مشابهی می باشند. همچنین منحنی مربوط به $n = 1$ ، تغییرات اندکی را در طی ضخامت داشته که می تواند نکته‌ی مهمی در طراحی این استوانه به حساب آید.

شکل (۳-۷) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی بعد شده را در طول دیواره‌ی استوانه نشان می دهد. در هیچ مکانی از استوانه و به ازای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی، جابه‌جایی شعاع یکسانی را شاهد نبوده و همچنین نسبت u_R/u_R^H در هیچ مکانی برابر یک نیست. جابه‌جایی ایجاد شده در استوانه مثبت بوده و با افزایش n ، مقدار آن کاهش می یابد. به گونه‌ای که جابه‌جایی‌ها به ازای $n < 0$ دارای مقادیر بزرگ‌تر و به ازای $n > 0$ دارای مقادیر کوچک‌تری نسبت به ماده‌ی همگن می باشد.

به دلیل آن که به ازای $n = 1$ کمترین جابه‌جایی در استوانه ایجاد می شود؛ در صورتی که جابه‌جایی شعاعی عامل تعیین کننده در طراحی استوانه‌ی تحت فشار باشد (مانند لوله‌ی پرتابه‌ها در صنایع نظامی) و همچنین در صورت داشتن محدودیت در تولید ماده‌ی FG با ضرایب ناهمگنی متفاوت برای خواص مکانیکی، انتخاب ماده با این ضریب ناهمگنی پیشنهاد می شود. تغییرات جابه‌جایی در طول دیواره تقریباً اندک بوده و از این جهت استوانه‌ی ناهمگن رفتار مشابهی را نسبت به استوانه‌ی همگن از خود نشان می دهد.



شکل ۳-۶ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ای ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی
در حالت تنش صفحه‌ای

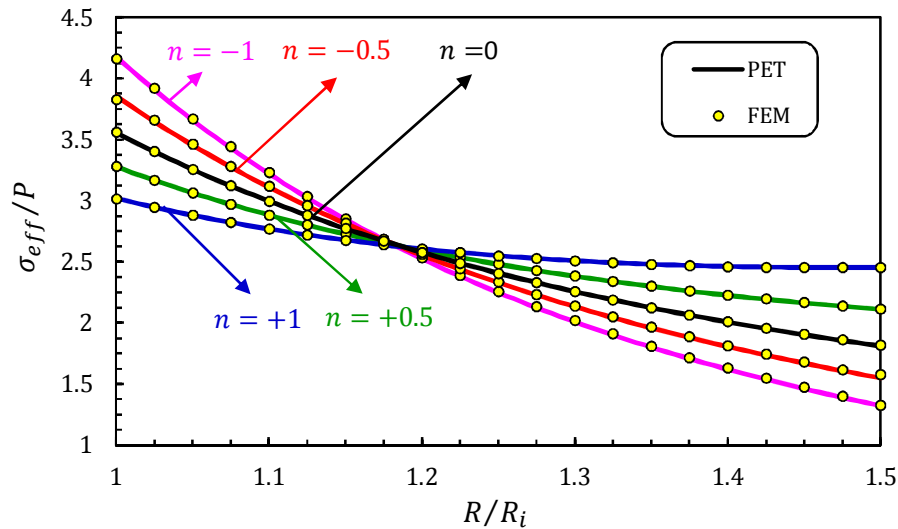


شکل ۳-۷ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ای ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی
در حالت تنش صفحه‌ای

شکل (۳-۸) توزیع تنش مؤثر بی‌بعد شده را بر اساس معادله‌ی (۳-۳۳)، در طی ضخامت نشان می‌دهد. با اعمال فشار داخلی به استوانه همچنین چرخش آن با سرعت ثابت، تنش‌های مؤثر ایجاد شده در استوانه، دارای مقادیر مثبتی خواهد بود. این تنش‌ها به ازای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی، در سطوح داخلی و خارجی، مقادیر یکسانی نداشته و نسبت $\sigma_{eff} / \sigma_{eff}^H$ در هیچ کدام از این سطوح برابر یک نیست.

مقدار تنش مؤثر، به ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی و در شعاع‌های کمتر از حدود $1/2$ بزرگ‌تر از ماده‌ی همگن بوده در حالیکه در نیمه‌ی خارجی استوانه، دارای مقادیر کوچک‌تری از آن می‌باشد. عکس این قضیه برای n های مثبت رخ می‌دهد. در نیمه‌ی داخلی استوانه، منحنی‌ها رفتار مشابهی داشته و به یک مقدار واحد نزدیک می‌شوند. بنابراین تنها در شعاع حدود $1/2$ ، نسبت $\sigma_{eff} / \sigma_{eff}^H$ برابر یک می‌شود.

به ازای $n = 1$ ، تنش مؤثر دارای تغییرات اندکی در طی ضخامت می‌باشد. لذا انتخاب این عدد برای ضریب ناهمگنی، در طراحی استوانه‌های چرخان تحت فشار داخلی توصیه می‌شود.

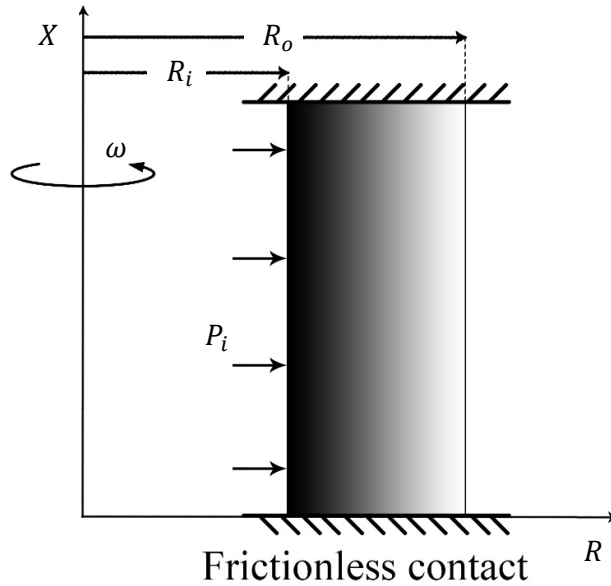


شکل ۳-۸ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی

در حالت تنش صفحه‌ای

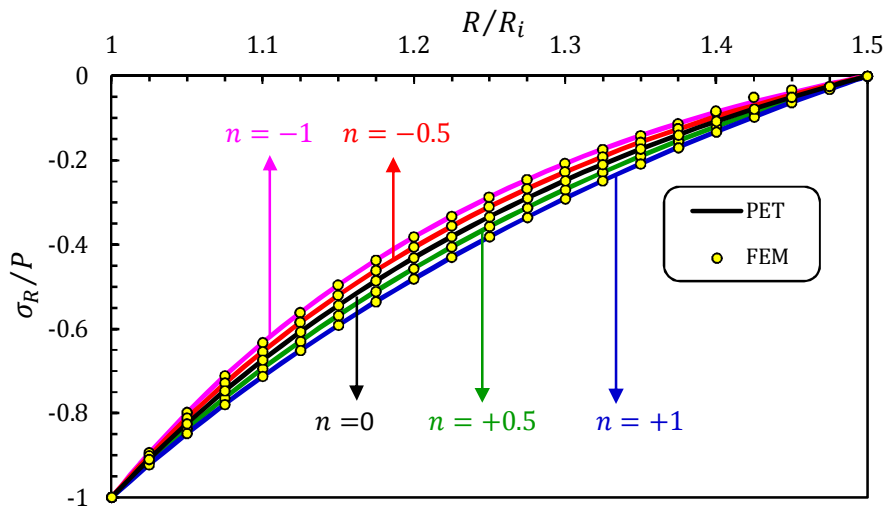
۳-۴-۲ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)

در این بخش، استوانه در حال دوران با سرعت ثابت ۳۶۰۰ rpm، تحت فشار داخلی ۸۰ MPa و در حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد (شکل ۳-۹).



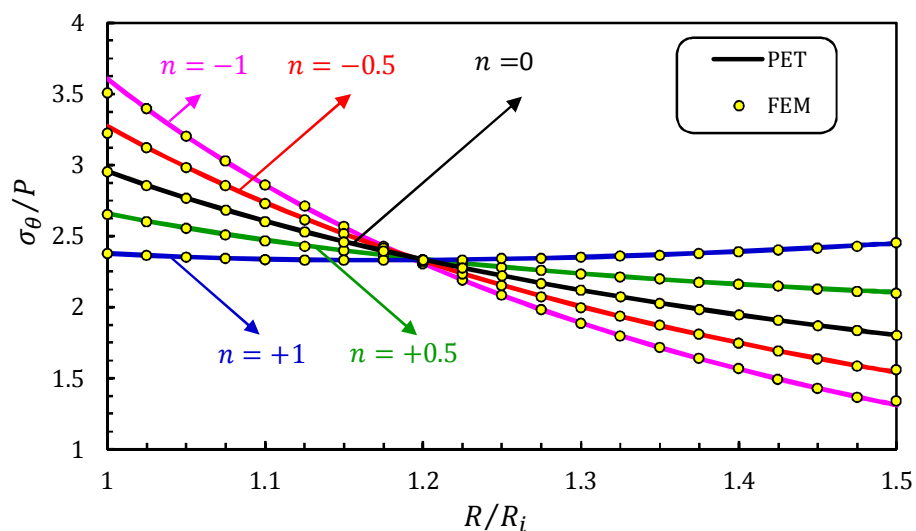
شکل ۳-۹ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت فشار در حالت کرنش صفحه‌ای

شکل‌های (۳-۱۰) تا (۳-۱۴)، توزیع تنش‌های شعاعی، محیطی و طولی، جابه‌جایی شعاعی و تنش مؤثر را نشان می‌دهند. رفتار این نمودارها، مشابه آن چیزی است که در بخش (۳-۴-۱) توضیح داده شد.

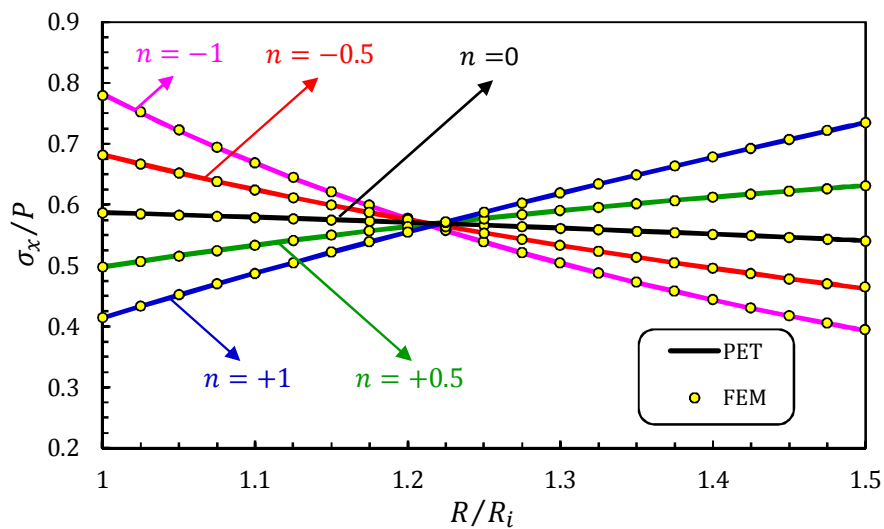


شکل ۳-۱۰ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی

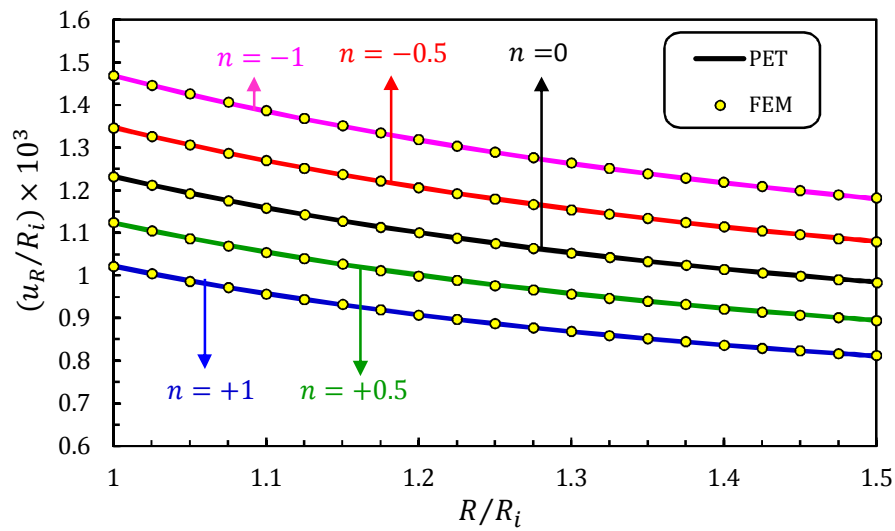
در حالت کرنش صفحه‌ای



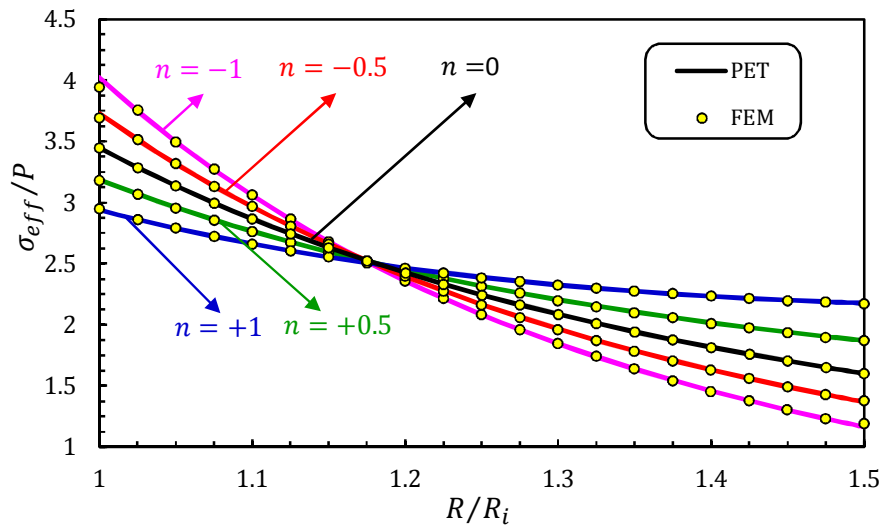
شکل ۳-۱۱ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ای ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۳-۱۲ توزیع تنش طولی در استوانه‌ای ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۳-۱۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۳-۱۴ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای

جدول (۱-۳) مقادیر تنش مؤثر حاصل از تحلیل استوانه‌ی چرخان به دو روش PET و FEM را در حالت تنش صفحه‌ای و تحت فشار داخلی، در لایه‌های داخلی، میانی و خارجی استوانه نمایش می‌دهد.

جدول (۲-۳) نیز شامل همین مقادیر و برای حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد.

		$\sigma_{eff} (MPa)$				
		$n = -1$	$n = -0.5$	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$
لایه‌ی داخلی	PET	۳۳۴/۲۷	۳۰۸/۶۱	۲۸۴/۵۷	۲۶۲/۲۱	۲۴۱/۵۶
	FEM	۳۳۲/۷۳	۳۰۵/۹۴	۲۸۴/۵۶	۲۶۲/۲۴	۲۴۱/۱۹
لایه‌ی میانی	PET	۱۷۹/۸۲	۱۸۶/۳۱	۱۹۲/۴۹	۱۹۸/۳۸	۲۰۳/۹۹
	FEM	۱۸۰/۴۸	۱۸۶/۷۲	۱۹۲/۴۷	۱۹۸/۴۰	۲۰۳/۸۴
لایه‌ی خارجی	PET	۱۰۵/۷۴	۱۲۳/۹۲	۱۴۴/۸۰	۱۶۸/۷۸	۱۹۶/۳۰
	FEM	۱۰۶/۱۶	۱۲۶/۳۲	۱۴۴/۸۰	۱۶۹/۱۲	۱۹۶/۳۲

جدول ۱-۳ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌های داخلی، میانی و خارجی

در حالت تنش صفحه‌ای

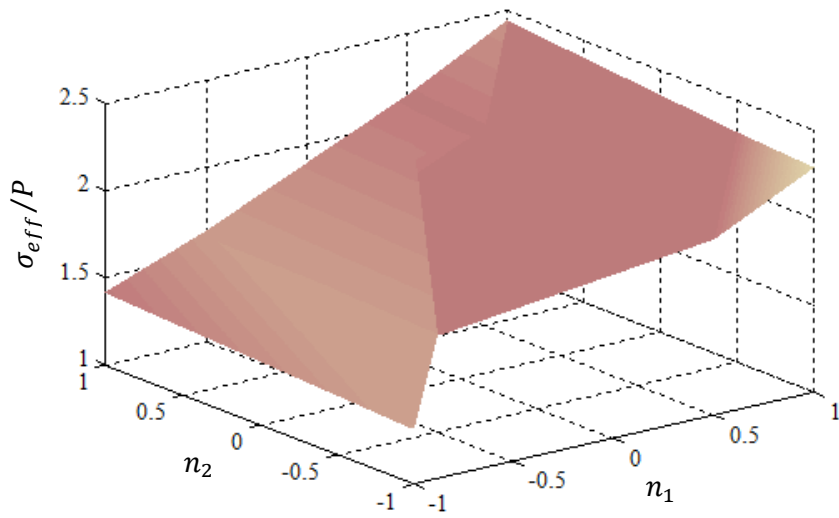
		$\sigma_{eff} (MPa)$				
		$n = -1$	$n = -0.5$	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$
لایه‌ی داخلی	PET	۳۲۱/۸۷	۲۹۸/۳۸	۲۷۵/۹۴	۲۵۴/۸۸	۲۳۵/۱۷
	FEM	۳۱۵/۴۹	۲۹۵/۴۹	۲۷۵/۹۴	۲۵۴/۵۰	۲۳۶/۰۰
لایه‌ی میانی	PET	۱۶۶/۷۲	۱۷۳/۳۶	۱۷۹/۵۹	۱۸۵/۵۱	۱۹۱/۰۷
	FEM	۱۶۷/۰۴	۱۷۳/۰۴	۱۷۹/۵۹	۱۸۵/۵۲	۱۹۰/۹۶
لایه‌ی خارجی	PET	۹۳/۲۱	۱۰۹/۵۴	۱۲۸/۲۲	۱۴۹/۶۵	۱۷۴/۱۶
	FEM	۹۵/۷۶	۱۱۰/۵۳	۱۲۸/۲۲	۱۵۰/۴۰	۱۷۴/۰۰

جدول ۲-۳ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌های داخلی، میانی و خارجی

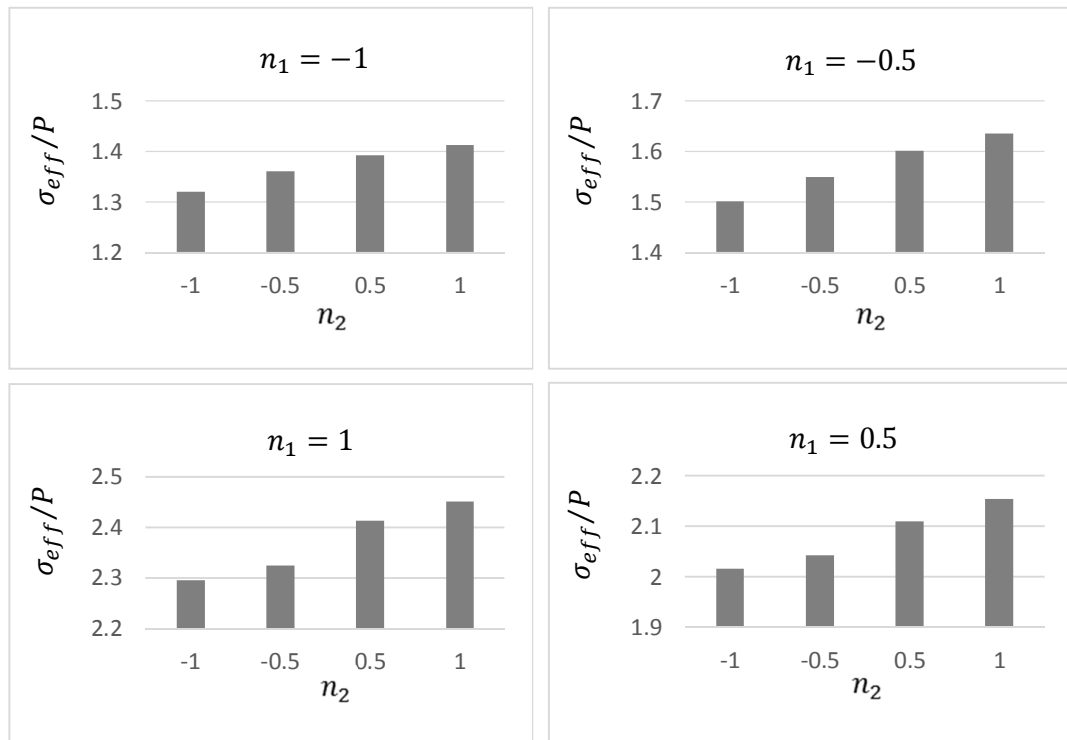
در حالت کرنش صفحه‌ای

۳-۵ طراحی بهینه

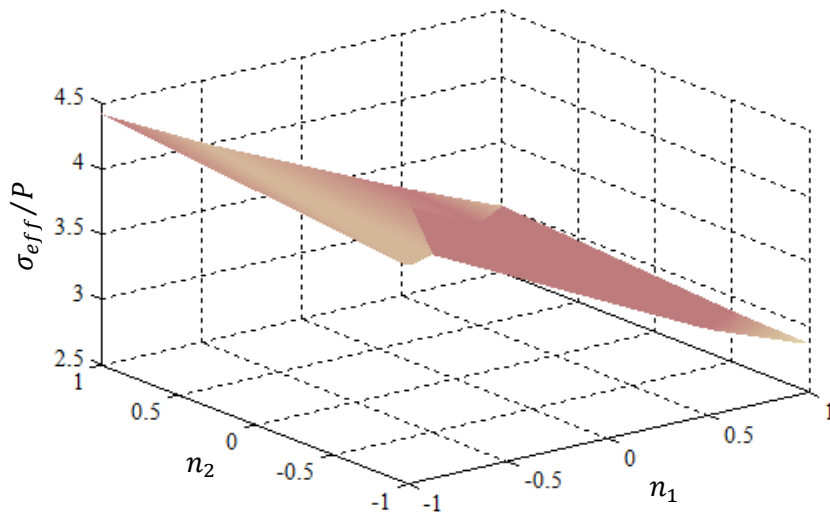
حلّ تحلیلی ارائه شده، این امکان را به ما می‌دهد که تنش‌ها و جابه‌جایی‌های ایجاد شده در استوانه را، به ازای انتخاب مقادیر متفاوتی از ضرایب ناهمگنی n_1 و n_2 بررسی کرده و ترکیب بهینه‌ی این ضرایب را به دست آوریم. با همین مقصود، در ادامه به ازای ۹۰۰ ترکیب متفاوت از n_1 و n_2 ، تنش‌های مؤثر بیشینه و کمینه ایجاد شده در استوانه، که مهم‌ترین معیار برای طراحی می‌باشد، برای حالت‌های تنش و کرنش صفحه‌ای محاسبه شده و در قالب نمودارهای سه بعدی و گراف‌های میله‌ای ارائه می‌شوند.



شکل ۳-۱۵ توزیع سه بعدی کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای

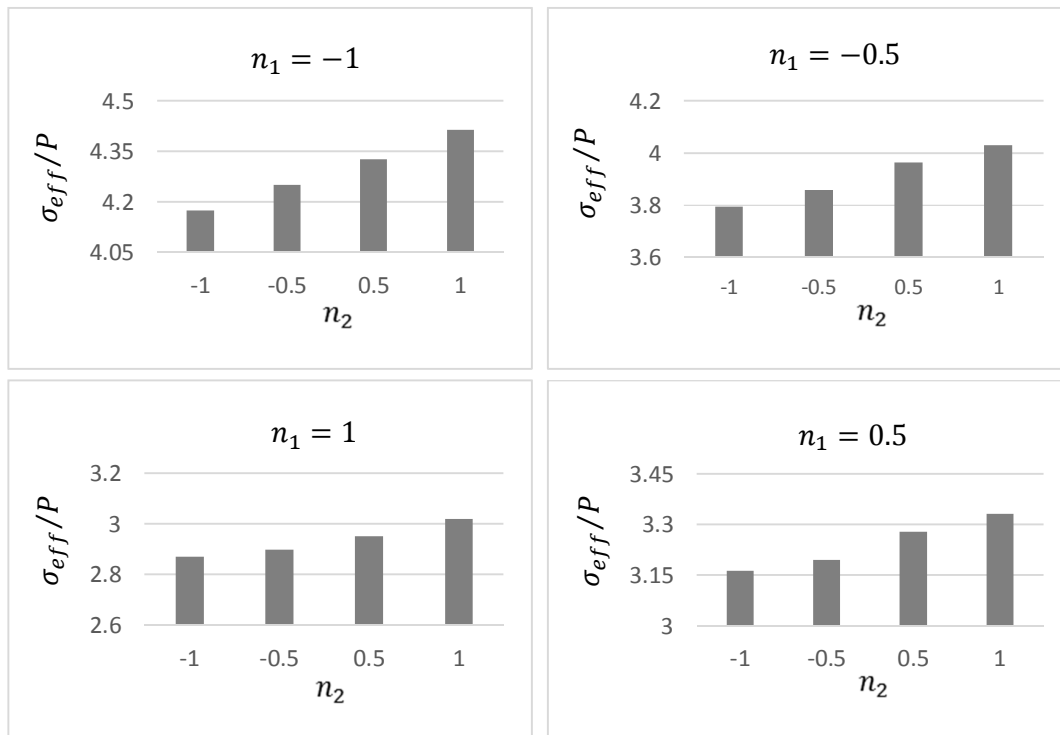


شکل ۳-۱۶ توزیع میله‌ای کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای



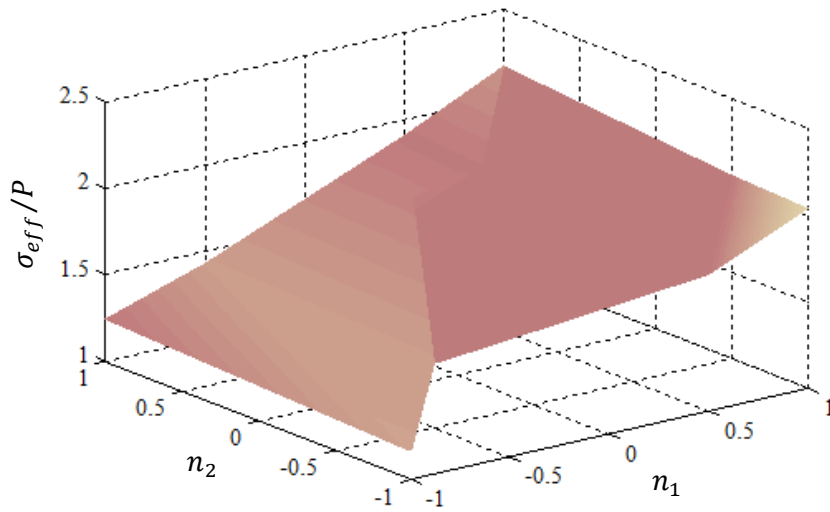
شکل ۳-۱۷ توزیع سه بعدی بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف

در حالت تنش صفحه‌ای



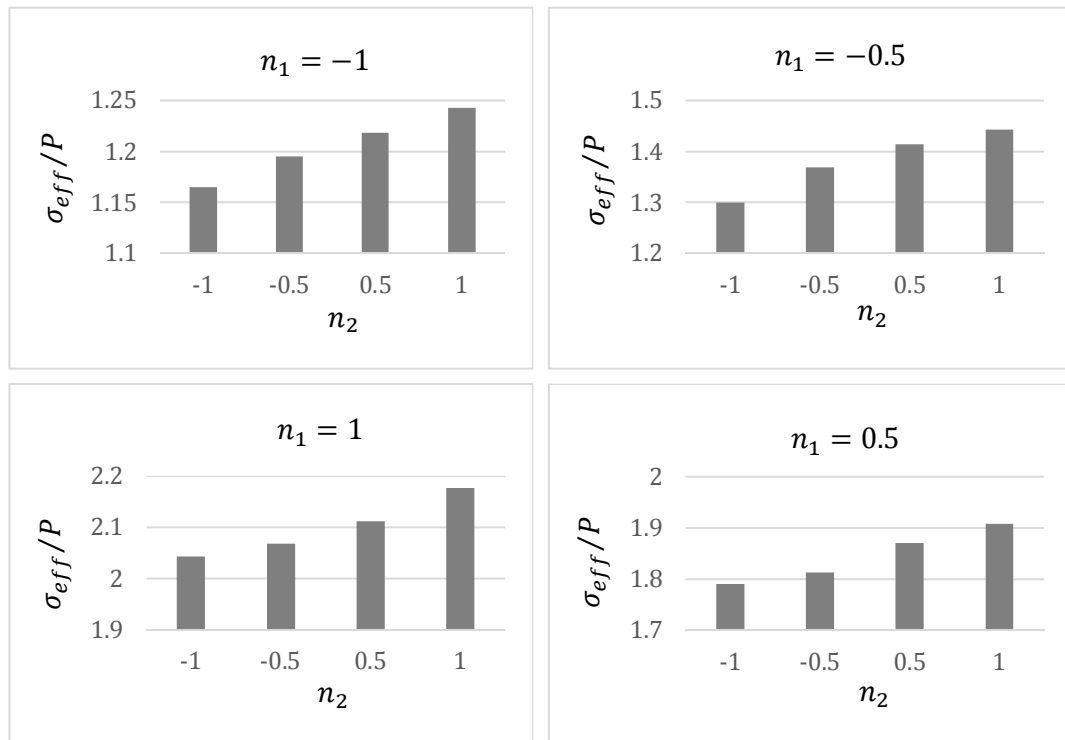
شکل ۳-۱۸ توزیع میله‌ای بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف

در حالت تنش صفحه‌ای



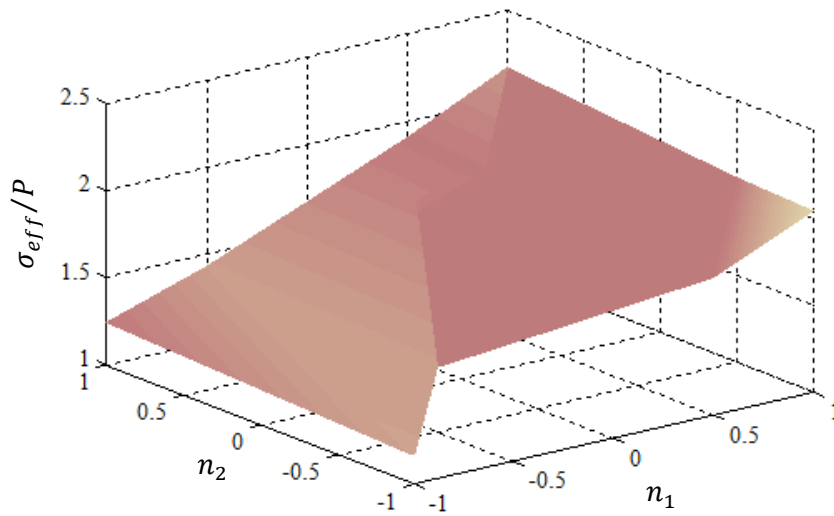
شکل ۳-۱۹ توزیع سه بعدی کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف

در حالت کرنش صفحه‌ای



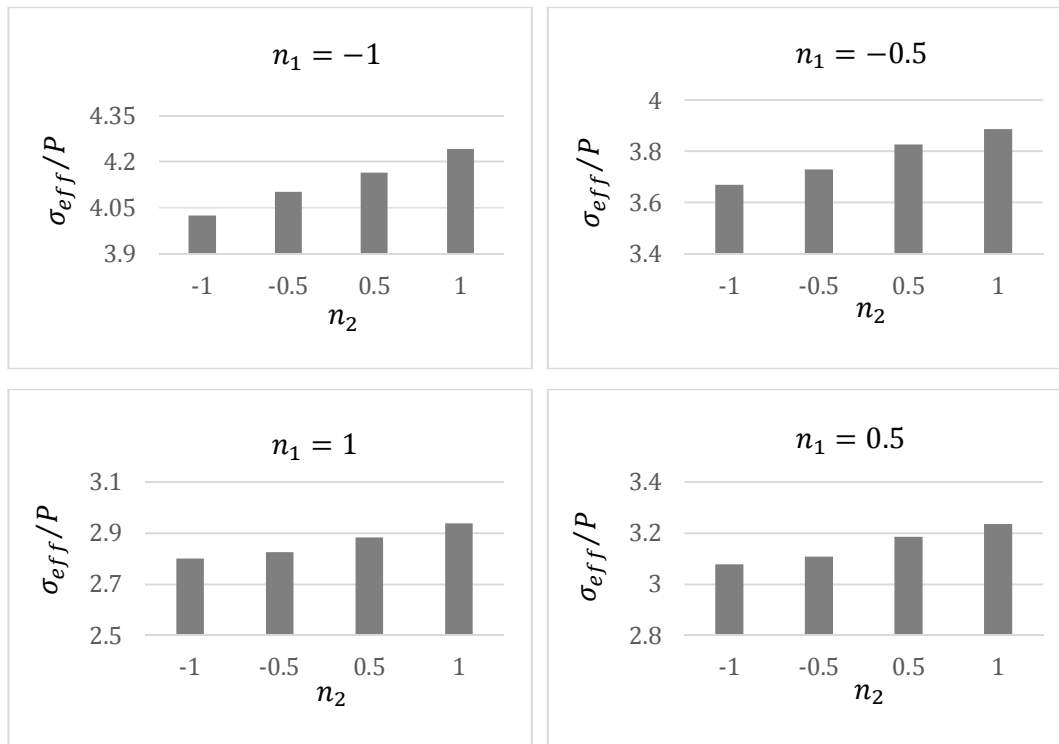
شکل ۳-۲۰ توزیع میله‌ای کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف

در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۳-۲۱ توزیع سه بعدی بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف

در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۳-۲۲ توزیع میله‌ای بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف

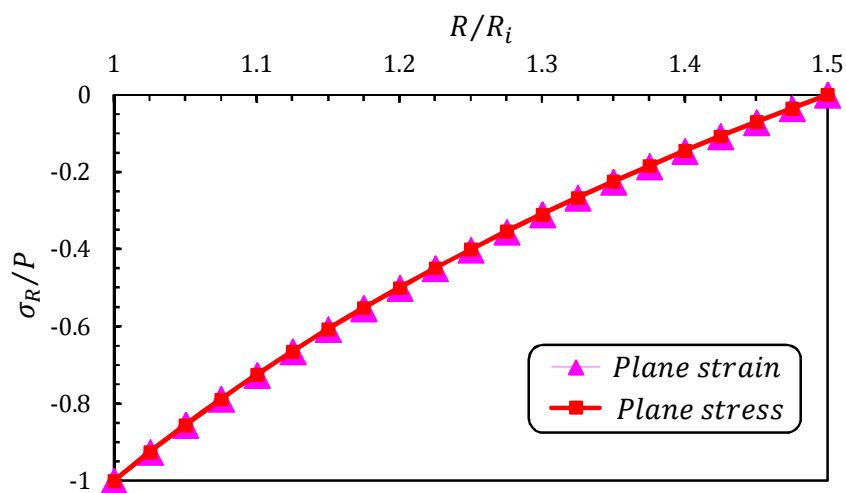
در حالت کرنش صفحه‌ای

با توجه به نمودارهای ارائه شده در این بخش، مشاهده می‌شود که در هر دو حالت تنش و کرنش صفحه‌ای، با انتخاب عدد +1 برای ضریب n_1 و عدد -1 برای ضریب n_2 ، کمترین مقدار تنش مؤثر را هم در بین بیشینه‌ها و هم بین کمینه‌ها خواهیم داشت. علاوه بر آن، انتخاب ترکیب ذکر شده، تنش مؤثر ایجاد شده در دیواره‌ی استوانه دارای کمترین تغییرات نسبت به هر ترکیب دیگر می‌باشد.

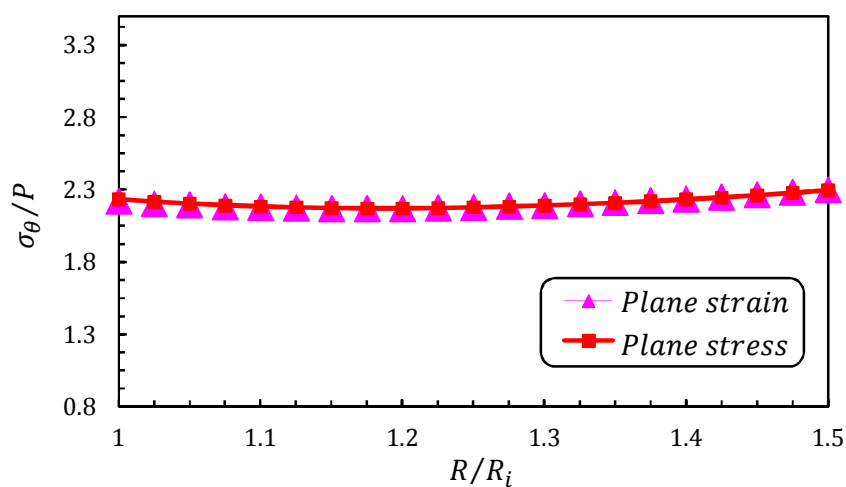
بنابراین در طراحی استوانه‌های ناهمگن چرخان و تحت فشار، اکیداً بهترین و بهینه‌ترین ترکیب برای ضرایب ناهمگنی، $n_1 = +1$ و $n_2 = -1$ می‌باشد. انتخاب شدن این مقادیر امری قابل پیش‌بینی بود. چرا که در فصل قبل مشاهده شد مناسب‌ترین مقدار برای ضریب ناهمگنی مربوط به مدول الاستیسیته که در آن منحنی تنش مؤثر علاوه بر داشتن کمترین مقادیر، کمترین تغییرات را در طی ضخامت نیز داراست، عدد 1 می‌باشد. از آنجا که تأثیر چرخش استوانه با سرعت ثابت به صورت اعمال یک نیروی حجمی با تابعی خطی از شعاع به تمام ذرات تشکیل دهنده می‌باشد؛ بیشترین نیرو به ذراتی که در شعاع‌های دورتر از محور استوانه قرار دارند وارد می‌شود. لذا می‌بایست ماده در آن نواحی دارای چگالی کمتری باشد تا دامنه‌ی این نیرو را به حد اقل برساند. این شرایط با انتخاب عدد -1 برای ضریب ناهمگنی چگالی برقرار می‌شود.

از جمله نکات مهمی که می‌توان به آن اشاره کرد یکنوا بودن منحنی‌های تنش می‌باشد. به این معنا که مقادیر کمینه و بیشینه‌ی تنش در سطوح داخلی و یا خارجی استوانه رخ می‌دهد و در بین این دو نقطه منحنی‌ها اکیداً صعودی و یا نزولی می‌باشند.

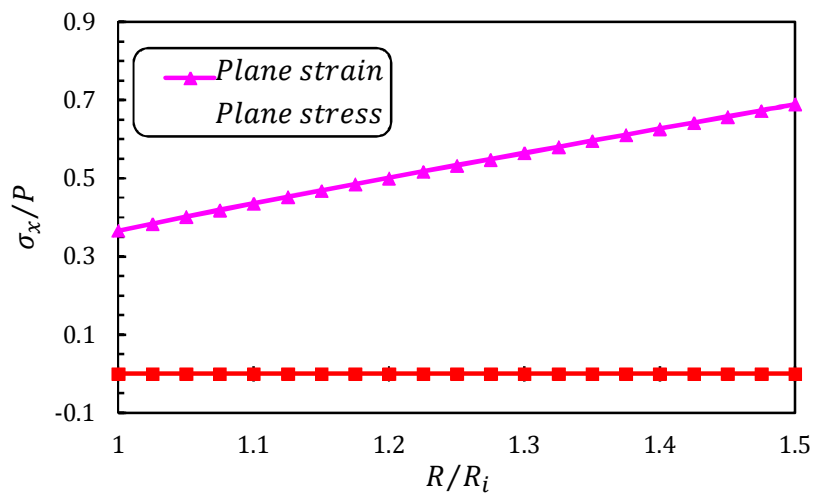
شکل‌های (۳-۲۳) تا (۳-۲۷) توزیع تنش‌های شعاعی، محیطی و طولی، جابه‌جایی شعاعی و تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار را برای دو وضعیت تنش و کرنش صفحه‌ای و در بهینه‌ترین حالت نشان می‌دهند.



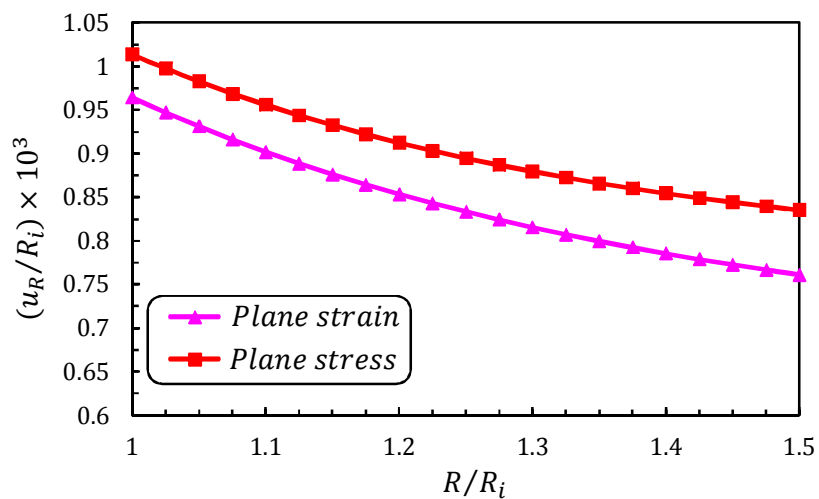
شکل ۳-۲۳ توزیع بهینه‌ی تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای



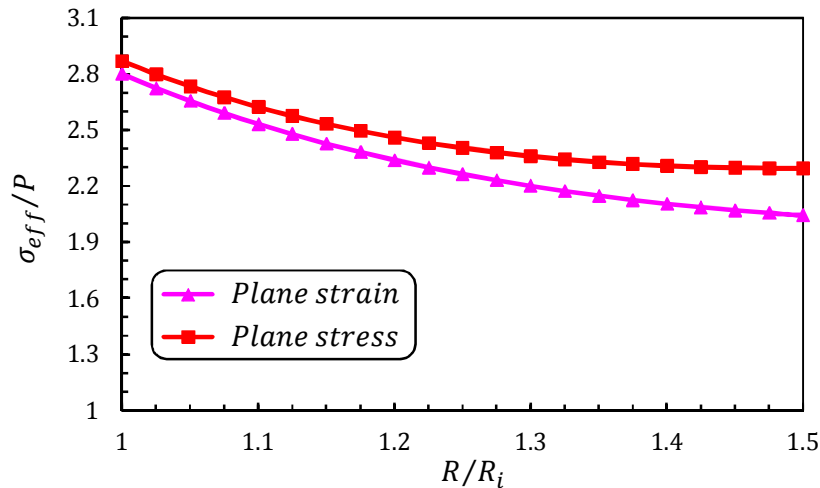
شکل ۳-۲۴ توزیع بهینه‌ی تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای



شکل ۳-۲۵ توزیع بهینه‌ی تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای



شکل ۳-۲۶ توزیع بهینه‌ی جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای



شکل ۳-۲۷ توزیع بهینه‌ی تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار داخلی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای

۳-۶ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای سرعت‌های نه چندان زیاد، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی و فشاری بسیار مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. اما چرخش با سرعت ثابت ۳۶۰۰ rpm، تغییرات نسبتاً کمی را در مقادیر تنش‌ها و جابه‌جایی نسبت به استوانه‌ی همگن ایجاد می‌کند. این تغییرات در لایه‌ی داخلی استوانه بیشینه هستند. به عنوان مثال در سطح داخلی و به ازای ثابت ناهمگنی $n = 1$ ، شاهد حدود ۲۸ MPa اختلاف در مقدار تنش مؤثر و حدود $3/5 \mu m$ اختلاف مقدار جابه‌جایی شعاعی هستیم.

در استوانه‌های ناهمگن چرخان و تحت فشار نیز همانند فصل گذشته، تنش شعاعی مستقل از شرایط انتهایی استوانه بوده و تنها به خواص مکانیکی ماده وابسته می‌باشند. اما تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی، هم به شرایط انتهایی و هم به خواص مکانیکی ماده وابسته هستند.

نتایج حاصل از حلّ تحلیل عددی، دارای تطابق بسیار خوبی می‌باشند. می‌توان نتایج گرفت که با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، مقادیر تنش محیطی و تنش مؤثر در نیمه‌ی داخلی استوانه کاهش و در نیمه‌ی دیگر افزایش می‌یابند. رفتار مشابهی نیز برای تنش طولی و در شرایط کرنش صفحه‌ای مشاهده می‌شود. علاوه بر آن، با افزایش ضریب ناهمگنی، جابه‌جایی شعاعی کاهش و تنش شعاعی افزایش می‌یابند.

در استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی با انتخاب مقادیر $+1$ و -1 به ترتیب برای ضرایب ناهمگنی n_1 و n_2 و در هر دو حالت تنش و کرنش صفحه‌ای، تنش مؤثر ایجاد شده در استوانه دارای کمترین مقدار نسبت به هر ترکیب دیگر از این دو ضریب می‌باشد. علاوه بر آن، تنش دارای توزیع تقریباً یکنواختی در دیواره‌ی استوانه بوده که ویژگی بسیار مطلوبی در طراحی به شمار می‌رود. لذا از این اعداد می‌توان به‌عنوان ترکیب بهینه جهت طراحی استوانه‌های چرخان FGM تحت فشار داخلی یاد کرد.

فصل ۴

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های

FGM استوانه‌ای

۴-۱ مقدمه

طراحی مواد FG در ابتدا به منظور کاربردهای حرارتی آنها در شرایط ویژه بود و مقاومت منحصر به فرد استوانه‌های جدار ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، محققان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند.

در این فصل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، پس از بیان روابط اساسی، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حلّ عمومی برای استوانه‌های جدار ضخیم FGM چرخان تحت فشار که دمای ثابتی به سطوح داخلی و خارجی آن اعمال می‌شود؛ در شرایط تنش و کرنش صفحه‌ای ارائه شده است. سپس حل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم همگن با بارگذاری مشابه بررسی شده و در ادامه با ارائه‌ی حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود آباکوس برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک تئوری الاستیسیته-ی مستوی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند. در نهایت، بهینه‌ترین طراحی برای استوانه‌های چرخان ناهمگن با بارگذاری و شرایط انتهایی مذکور ارائه می‌شود.

۴-۲ روابط اساسی

۴-۲-۱ تحلیل حرارتی استوانه

هنگامیکه بین دو سطح داخلی و خارجی استوانه اختلاف دما وجود داشته باشد؛ توزیع دمای مشخصی در ضخامت شکل می‌گیرد. لذا علاوه بر کرنش الاستیک، بخشی از کرنش ایجاد شده در هر نقطه از جسم، مربوط به کرنش حرارتی ناشی از اختلاف دمای اولیه و ثانویه‌ی آن نقطه می‌باشد.

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}^e + \tilde{\varepsilon}^T \quad (1-4)$$

$$\tilde{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}[(\bar{\nabla}\bar{u}) + (\bar{\nabla}\bar{u})^T] \quad (2-4)$$

$$\tilde{\varepsilon}^T = \alpha(R)\theta(R)\tilde{I}, \theta(R) = \Delta T = T(R) - T^* \quad (3-4)$$

$$\alpha(R) = \alpha_i e^{n_3(r-1)} \quad (4-4)$$

که در آن $T(R)$ توزیع دما، T^* دمای اولیه، $\alpha(R)$ ضریب انبساط حرارتی و \tilde{I} ماتریس همانی می باشد.

لذا روابط ساختاری را می توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \sigma_R = 2\mu\varepsilon_R + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(R)\theta(R) \\ \sigma_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(R)\theta(R) \\ \sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_x) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(R)\theta(R) \end{cases} \quad (5-4)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \frac{1}{2\mu}[\sigma_R - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x)] + \alpha(R)\theta(R) \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{2\mu}[\sigma_\theta - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x)] + \alpha(R)\theta(R) \\ \varepsilon_x = \frac{1}{2\mu}[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(\sigma_R + \sigma_\theta + \sigma_x)] + \alpha(R)\theta(R) \end{cases} \quad (6-4)$$

در اینجا نیز می توان روابط تنش-کرنش را به صورت ماتریسی نمایش داد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E(R) \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} - E(R) \begin{bmatrix} C \\ C \end{bmatrix} \alpha(R)\theta(R) \quad (7-4)$$

$$\sigma_x = \beta[(\sigma_R + \sigma_\theta) - \frac{E(R)\alpha(R)\theta(R)}{\nu}] \quad (8-4)$$

ثابت C با توجه به شرایط انتهایی استوانه تعیین می‌شود.

۴-۲-۱-۱ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$C = \frac{1}{1-\nu} \quad (۹-۴)$$

۴-۲-۱-۲ استوانه با دو سر بسته (گرش صفحه‌ای)

$$C = \frac{1}{1-2\nu} \quad (۱۰-۴)$$

۴-۲-۲ توزیع دما در استوانه

معادله‌ی هدایت حرارتی^۱ به شکل کلی زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla^2(K_t(R)T) + \dot{q} = \rho C_p \dot{T} \quad (۱۱-۴)$$

$$K_t(R) = K_t e^{n_4(r-1)} \quad (۱۲-۴)$$

که در آن $K(R)$ ضریب هدایت حرارتی، \dot{q} نرخ تولید گرما، C_p گرمای ویژه و ρ چگالی ماده است.

معادله‌ی هدایت حرارتی را می‌توان در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر نمایش داد:

$$\rho C_p \dot{T} = \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (K_t(R) R \frac{\partial T}{\partial R}) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (K_t(R) \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial x} (K_t(R) \frac{\partial T}{\partial x}) + \dot{q} \right] \quad (۱۳-۴)$$

1. Heat conduction equation

با در نظر گرفتن مسأله در حالت پایا، بدون منبع حرارتی، انتقال حرارت متقارن نسبت به محور

و توزیع دما تنها در راستای شعاع؛ رابطه‌ی توزیع دمای بی‌بعد شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (K_r(R) R \frac{dT}{dR}) = 0 \quad (14-4)$$

با فرض ثابت ماندن ضریب انتقال حرارت در طی ضخامت استوانه $(n_4 = 0)$ ، رابطه‌ی (۱۴-۴) را

می‌توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dR} (R \frac{dT}{dR}) = 0 \quad (15-4)$$

با دو بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق و نوشتن معادله بر حسب پارامتر بی‌بعد r داریم:

$$T(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \quad (16-4)$$

شرایط مرزی حرارتی در استوانه عبارتند از:

$$\begin{cases} T(r)|_{r=1} = T_i \\ T(r)|_{r=k} = T_o \end{cases} \quad (17-4)$$

$$k = \frac{R_o}{R_i} \quad (18-4)$$

T_o و T_i به ترتیب دمای سطوح داخلی و خارجی استوانه و R_o شعاع سطح خارجی آن می‌باشد.

به منظور یافتن ثابت‌های C_1 و C_2 در معادله‌ی (۱۶-۴)، شرایط مرزی حرارتی را اعمال می‌کنیم.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{T_o - T_i}{\ln(k)} \\ C_2 = T_i \end{cases} \quad (19-4)$$

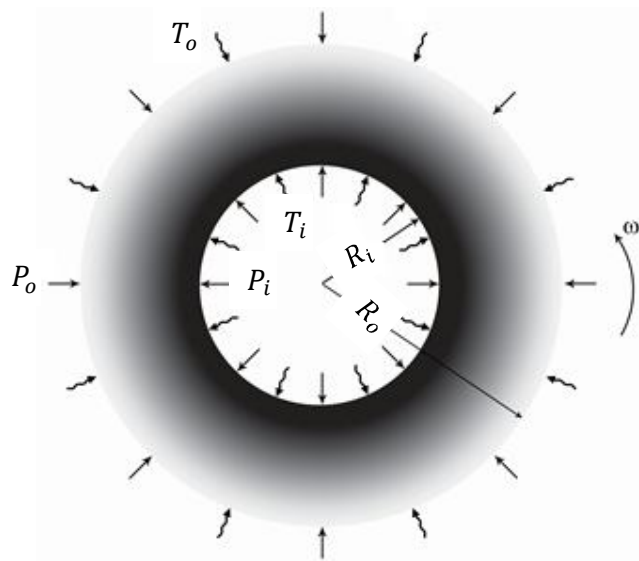
لذا توزیع دما در استوانه عبارت است از:

$$T(r) = (T_o - T_i) \frac{\ln(r)}{\ln(k)} + T_i \quad (20-4)$$

۳-۴ تحلیل استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت و

دمای ثابت داخلی و خارجی

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o تحت فشار داخلی و خارجی P_i و P_o و با حضور منبع حرارتی در شعاع داخلی و خارجی استوانه را به صورت شکل (۴-۱) در نظر می‌گیریم. استوانه دارای چرخش با سرعت زاویه‌ای ثابت ω نیز می‌باشد.



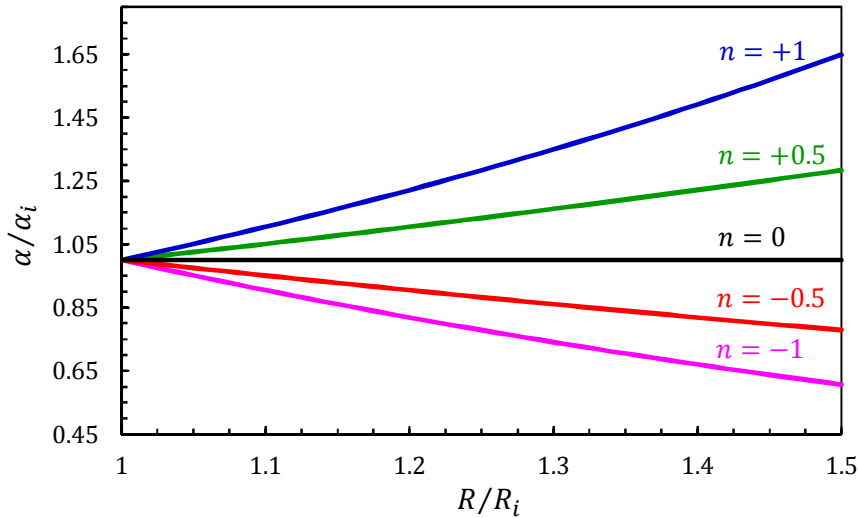
شکل ۴-۱ مقطع استوانه‌ی جدارضخیم چرخان FGM تحت فشار

یکنواخت و دمای ثابت داخلی و خارجی

از آنجا که تغییرات نسبت پواسون در طی ضخامت بسیار جزئی است، مقدار آن را ثابت در نظر می‌گیریم. تغییرات ضریب انبساط حرارتی نسبت به شعاع استوانه نمایی بوده و با رابطه‌ی (۴-۲۱) تعریف می‌شود. طبق روابط (۲-۳۲) و (۳-۱) مدول الاستیسیته و چگالی نیز دارای توزیع نمایی در دیواره‌ی استوانه هستند.

$$\alpha(R) = \alpha_i e^{n_3(r-1)} \quad (۴-۲۱)$$

در این رابطه $r = R/R_i$ مختصات شعاع بی بعد است. α_i ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی استوانه و n_3 ضریب ناهمگنی ماده می باشد. شکل (۲-۴) توزیع ضریب انبساط حرارتی در دیواره‌ی استوانه را نسبت به مختصات شعاعی بی بعد و به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می دهد.



شکل ۲-۴ توزیع بی بعد ضریب انبساط حرارتی در راستای شعاع

۴-۳-۱ حل ترموالاستیک استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار

در حالتی که سطوح داخلی و خارجی استوانه تحت دمای ثابت قرار می گیرند؛ توزیع دمای شکل گرفته در دیواره‌ی استوانه باعث ایجاد کرنش‌های حرارتی در کنار کرنش‌های الاستیک ناشی از سایر بارگذاری‌های مکانیکی می شود. با توجه به اینکه انتقال حرارت تنها در راستای شعاع فرض می شود؛ همچنان شرایط تقارن محوری برقرار بوده و می توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی جهت تحلیل استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت و دمای ثابت داخلی و خارجی استفاده کرد.

به دلیل چرخش استوانه با سرعت زاویه‌ای ثابت، به مجموعه باری معادل (۲-۳) وارد می شود. لذا

معادله‌ی تعادل تنش (۳-۳) همچنان معتبر است. با جایگذاری (۲-۴) در (۳-۳) و همچنین استفاده از

رابطه‌ی (۲-۲۴)، معادله‌ی حاکم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R^2 \frac{d^2 u_R}{dR^2} + (R^2 p + R) \frac{du_R}{dR} + (Rpv^* - 1)u_R = f(R) \quad (۲۲-۴)$$

که در آن

$$f(R) = \left(\frac{C(n_1 + n_3)}{AR_i} \theta(R) + \frac{C}{A} \frac{d\theta(R)}{dR} \right) R^2 \alpha(R) - \frac{\rho(R)}{E(R)} \frac{R^3 \omega^2}{A} \quad (۲۳-۴)$$

$$\theta(R) = \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \quad (۲۴-۴)$$

که در آن θ_i و θ_o به ترتیب اختلاف دمای سطوح داخلی و خارجی نسبت به دمای مرجع T^* و ثابت‌های U^* ، A و B وابسته به شرایط انتهایی استوانه می‌باشند. با جایگذاری (۲-۳۲)، (۳-۱) و (۴-۴)

(۲۱) در رابطه‌ی (۴-۲۳)، ترم ناهمگنی معادله‌ی حاکم بر استوانه به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$f(R) = \left\{ \left[\frac{C(n_1 + n_3)}{AR_i} \left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] + \frac{C}{A} \frac{(\theta_o - \theta_i)}{\ln(k)} \frac{1}{R} \right] \alpha_i R^2 e^{n_3(r-1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{AE_i} R^3 e^{(n_2 - n_1)(r-1)} \right\} \quad (۲۵-۴)$$

به منظور حل معادله‌ی ناهمگن (۴-۲۲)، از روش لاگرانژ استفاده می‌کنیم که طبق آن، جواب

معادله‌ی ناهمگن به صورت مجموعی از حل عمومی معادله‌ی همگن متناظر و یک حل خصوصی از معادله‌ی ناهمگن بیان می‌شود.

$$u_R(R) = u_R^h(R) + u_R^p(R) \quad (۲۶-۴)$$

حل عمومی معادله‌ی همگن متناظر عبارت است از:

$$u_R^h(R) = C_1 M(R) + C_2 N(R) \quad (۲۷-۴)$$

حلّ خصوصی معادله‌ی ناهمگن به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$u_R^P(R) = u_1(R)v_1(R) + u_2(R)v_2(R) \quad (28-4)$$

که در آن $u_1(R)$ و $u_2(R)$ به ترتیب $M(R)$ و $N(R)$ دو حلّ خصوصی مربوط به معادله‌ی همگن بوده و توابع $v_1(R)$ و $v_2(R)$ از رابطه‌ی (29-4) به دست می‌آیند.

$$v_1(R) = \int \frac{-u_2(R)f(R)}{W(u_1, u_2)} dR, \quad v_2(R) = \int \frac{u_1(R)f(R)}{W(u_1, u_2)} dR \quad (29-4)$$

که در آن

$$W(u_1, u_2) = \begin{cases} -\frac{p^2 \Gamma(3)}{Re^{Rp} \Gamma(2-\nu^*)} & n_1 > 0 \\ -\frac{p^2 \Gamma(3)}{Re^{Rp} \Gamma(1+\nu^*)} & n_1 < 0 \end{cases} \quad (30-4)$$

رابطه‌ی (29-4) را با توجه به (25-4)، (30-4) می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$v_1(R) = \begin{cases} \left. \frac{\Gamma(2-\nu^*)}{A\Gamma(3)} \left\{ \int \Psi(2-\nu^*, 3; Rp) \left[\left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \frac{C(n_1 + n_3)}{R_i} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{C(\theta_o - \theta_i)}{\ln(k)} \frac{1}{R} \right] \alpha_i R^4 e^{n_3(r-1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{E_i} R^5 e^{(n_2 - n_1)(r-1)} \right] dR \right\} \right. \\ \left. n_1 > 0 \right. \\ \left. \frac{\Gamma(1+\nu^*)}{A\Gamma(3)} \left\{ \int e^{Rp} \Psi(1+\nu^*, 3; -Rp) \left[\left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \frac{C(n_1 + n_3)}{R_i} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{C(\theta_o - \theta_i)}{\ln(k)} \frac{1}{R} \right] \alpha_i R^4 e^{n_3(r-1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{E_i} R^5 e^{(n_2 - n_1)(r-1)} \right] dR \right\} \right. \\ \left. n_1 < 0 \right. \end{cases} \quad (31-4)$$

$$v_2(R) = \begin{cases} -\frac{\Gamma(2-\nu^*)}{A\Gamma(3)} \left\{ \int \Phi(2-\nu^*, 3; Rp) \left[\left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \frac{C(n_1 + n_3)}{R_i} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C(\theta_o - \theta_i)}{\ln(k)} \frac{1}{R} \right] \alpha_i R^4 e^{n_3(r-1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{E_i} R^5 e^{(n_2 - n_1)(r-1)} \right] dR \right\} & n_1 > 0 \\ -\frac{\Gamma(1+\nu^*)}{A\Gamma(3)} \left\{ \int e^{Rp} \Phi(1+\nu^*, 3; -Rp) \left[\left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \frac{C(n_1 + n_3)}{R_i} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C(\theta_o - \theta_i)}{\ln(k)} \frac{1}{R} \right] \alpha_i R^4 e^{n_3(r-1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{E_i} R^5 e^{(n_2 - n_1)(r-1)} \right] dR \right\} & n_1 < 0 \end{cases} \quad (32-4)$$

در اینجا نیز نمی‌توان از روابط معرفی شده در (۲-۵۰) و (۲-۵۱) برای توابع Φ و Ψ استفاده کرد. لذا با نوشتن بسط تیلور تابع نمایی و استفاده از تعاریف و خواص توابع بسل و گاما، Φ و Ψ به صورت (۳-۳) و (۳-۱۷) به دست می‌آیند که در نتیجه با استفاده از آنها می‌توان $v_1(R)$ و $v_2(R)$ را محاسبه کرد. با جایگذاری حل عمومی معادله‌ی همگن و همچنین حل خصوصی معادله‌ی ناهمگن در رابطه‌ی (۴-۲۶)، پاسخ معادله‌ی حاکم به دست می‌آید.

$$u_R(R) = (v_1(R) + C_1)M(R) + (v_2(R) + C_2)N(R) \quad (33-4)$$

این حل برای مقادیر مخالف صفر از ضریب n_1 قابل ارائه بوده و در صورت صفر شدن این ضریب، همان گونه که در فصول قبل نیز به آن اشاره شد، جنس استوانه به یک ماده‌ی همگن تبدیل شده و باید از حل کلاسیک به تحلیل استوانه پرداخت.

با جایگذاری (۴-۳۳) در (۲-۲۴) و استفاده از (۴-۷)، تنش شعاعی در استوانه عبارت است از:

$$\sigma_R(R) = E(R) \left\{ [(v_1(R) + C_1)(AC(R) + B \frac{M(R)}{R}) + (v_2(R) + C_2)(AD(R) + B \frac{N(R)}{R})] - E(R)C\alpha(R)\theta(R) \right\} \quad (34-4)$$

توابع $C(R)$ و $D(R)$ از روابط (۲-۵۶) و (۲-۶۱) محاسبه می‌شوند.

حال با داشتن رابطه‌ی تنش شعاعی و اعمال شرایط مرزی (۲-۴۹) در آن می‌توان ثابت‌های C_1

و C_2 را محاسبه کرد.

$$C_1 = \frac{\left\{ P_o \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) - P_i e^{n_1(k-1)} \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) + E_i e^{n_1(k-1)} \left[v_1(R_o) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) + C\alpha_i \theta_i \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - C\alpha_i \theta_o e^{n_3(k-1)} \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) - v_1(R_i) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \right\}}{\left\{ E_i e^{n_1(k-1)} \left[\left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \right] \right\}}$$

(۳۵-۴)

$$C_2 = \frac{\left\{ P_i e^{n_1(k-1)} \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - P_o \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) + E_i e^{n_1(k-1)} \left[v_2(R_i) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) + C\alpha_i \theta_o e^{n_3(k-1)} \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) - C\alpha_i \theta_i \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - v_2(R_o) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \right\}}{\left\{ E_i e^{n_1(k-1)} \left[\left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \right] \right\}}$$

با جایگذاری مقادیر این ثابت‌ها در (۳۳-۴) و استفاده از (۲۴-۲)، (۷-۴) و (۸-۴)، تنش‌های

شعاعی، محیطی و طولی و جابه‌جایی شعاعی به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{F} \left\{ (G + F^* v_1(R)) \left(AC(R) + \frac{BM(R)}{R} \right) + (H + F^* v_2(R)) \left(AD(R) + \frac{BN(R)}{R} \right) - CF^* \alpha(R) \theta(R) \right\} \quad (۳۶-۴)$$

$$\sigma_\theta(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{F} \left\{ (G + F^* v_1(R)) \left(BC(R) + \frac{AM(R)}{R} \right) + (H + F^* v_2(R)) \left(BD(R) + \frac{AN(R)}{R} \right) - CF^* \alpha(R) \theta(R) \right\} \quad (۳۷-۴)$$

$$\sigma_x(R) = \frac{\beta(A+B)e^{n_1(r-k)}}{F} \left\{ (G + F^* v_1(R)) \left(C(R) + \frac{M(R)}{R} \right) + (H + F^* v_2(R)) \left(D(R) + \frac{N(R)}{R} \right) - \frac{2CF^*}{A+B} \alpha(R) \theta(R) \right\} \quad (۳۸-۴)$$

$$u_R(R) = \frac{1}{F^*} [(G + F^* v_1(R))M(R) + (H + F^* v_2(R))N(R)] \quad (۳۹-۴)$$

که در آنها

$$F = \left\{ \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \right\} \quad (۴۰-۴)$$

$$\begin{aligned}
G = & \left\{ P_o \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) - P_i e^{n_1(k-1)} \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) + \right. \\
& + E_i e^{n_1(k-1)} \left[v_1(R_o) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) + \right. \\
& + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) + \\
& + C\alpha_i \theta_i \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) - C\alpha_i \theta_o e^{n_3(k-1)} \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) - \\
& \left. \left. - v_1(R_i) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \right\} \quad (41-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H = & \left\{ P_i e^{n_1(k-1)} \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - P_o \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) + \right. \\
& + E_i e^{n_1(k-1)} \left[v_2(R_i) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) \left(AD(R_i) + \frac{BN(R_i)}{R_i} \right) + \right. \\
& + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) + \\
& + C\alpha_i \theta_o e^{n_3(k-1)} \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) - C\alpha_i \theta_i \left(AC(R_o) + \frac{BM(R_o)}{R_o} \right) - \\
& \left. \left. - v_2(R_o) \left(AC(R_i) + \frac{BM(R_i)}{R_i} \right) \left(AD(R_o) + \frac{BN(R_o)}{R_o} \right) \right] \right\} \quad (42-4)
\end{aligned}$$

$$F^* = E_i F e^{n_1(k-1)} \quad (43-4)$$

تنش مؤثر براساس تئوری تسلیم فن میزس، با استفاده از رابطه‌ی (۵۸-۲) محاسبه می‌شود.

معادلات (۴-۳۶ تا ۳۹) و (۲-۵۸) را برای مقادیر مثبت و منفی ضریب ناهمگنی n_1 و شرایط تنش و

کرنش صفحه‌ای، بازنویسی می‌کنیم.

۴-۳-۱-۱ مقایسه مثبت ضریب ناهمگنی

(الف) استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned} \sigma_R(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{J} & \left\{ \left[\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(2-\nu, 3; Rp) + \right. \right. \\ & + \frac{Rp^3(2-\nu)}{3(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(3-\nu, 4; Rp) \Big] (K + J^* MA(2-\nu, 3; Rp)) + \\ & + \left[\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(2-\nu, 3; Rp) - \right. \\ & - \frac{Rp^3(2-\nu)}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(3-\nu, 4; Rp) \Big] (L - J^* MB(2-\nu, 3; Rp)) + \\ & \left. + \frac{E_i \alpha_i J}{\nu - 1} e^{n_1(k-1)} e^{n_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (44-4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{J} & \left\{ \left[\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3\nu}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(2-\nu, 3; Rp) + \right. \right. \\ & + \frac{Rp^3(2\nu - \nu^2)}{3(1-\nu^2)e^{Rp}} \Phi(3-\nu, 4; Rp) \Big] (K + J^* MA(2-\nu, 3; Rp)) + \\ & + \left[\frac{p^2(1+\nu) - Rp^3\nu}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(2-\nu, 3; Rp) - \right. \\ & - \frac{Rp^3(2\nu - \nu^2)}{(1-\nu^2)e^{Rp}} \Psi(3-\nu, 4; Rp) \Big] (L - J^* MB(2-\nu, 3; Rp)) + \\ & \left. + \frac{E_i \alpha_i J}{\nu - 1} e^{n_1(k-1)} e^{n_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \end{aligned} \quad (45-4)$$

$$\sigma_x(R) = 0 \quad (46-4)$$

$$\begin{aligned} u_R(R) = \frac{1}{E_i J e^{n_1(k-1)}} & \left\{ (K + J^* MA(2-\nu, 3; Rp)) \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Phi(2-\nu, 3; Rp) \right) + \right. \\ & \left. + (L - J^* MB(2-\nu, 3; Rp)) \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Psi(2-\nu, 3; Rp) \right) \right\} \end{aligned} \quad (47-4)$$

$$\sigma_{eff} = (\sigma_R^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_R \sigma_\theta)^{0.5} \quad (48-4)$$

که در آنها

$$J = AM_1 AM_4 - AM_2 AM_3 \quad (49-4)$$

$$K = \left\{ P_o AM_3 - P_i e^{\eta_1(k-1)} AM_4 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [v_1(R_o) AM_2 AM_3 - v_1(R_i) AM_1 AM_4 + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) AM_3 AM_4 + C \alpha_i \theta_i AM_4 - C \alpha_i \theta_o e^{n_3(k-1)} AM_3] \right\} \quad (50-4)$$

$$L = \left\{ P_i e^{\eta_1(k-1)} AM_2 - P_o AM_1 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [v_2(R_i) AM_2 AM_3 - v_2(R_o) AM_1 AM_4 + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) AM_1 AM_2 + C \alpha_i \theta_o e^{n_3(k-1)} AM_1 - C \alpha_i \theta_i AM_2] \right\} \quad (51-4)$$

$$J^* = \frac{E_i (1-\nu^2) \Gamma(2-\nu) e^{\eta_1(k-1)}}{\Gamma(3)} J \quad (52-4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} AM_1 &= \left(\frac{p^2(1+\nu) - R_i p^3}{(1-\nu^2) e^{R_i p}} \Phi(2-\nu, 3; R_i p) + \frac{R_i p^3 (2-\nu)}{3(1-\nu^2) e^{R_i p}} \Phi(3-\nu, 4; R_i p) \right) \\ AM_2 &= \left(\frac{p^2(1+\nu) - R_o p^3}{(1-\nu^2) e^{R_o p}} \Phi(2-\nu, 3; R_o p) + \frac{R_o p^3 (2-\nu)}{3(1-\nu^2) e^{R_o p}} \Phi(3-\nu, 4; R_o p) \right) \\ AM_3 &= \left(\frac{p^2(1+\nu) - R_i p^3}{(1-\nu^2) e^{R_i p}} \Psi(2-\nu, 3; R_i p) - \frac{R_i p^3 (2-\nu)}{(1-\nu^2) e^{R_i p}} \Psi(3-\nu, 4; R_i p) \right) \\ AM_4 &= \left(\frac{p^2(1+\nu) - R_o p^3}{(1-\nu^2) e^{R_o p}} \Psi(2-\nu, 3; R_o p) - \frac{R_o p^3 (2-\nu)}{(1-\nu^2) e^{R_o p}} \Psi(3-\nu, 4; R_o p) \right) \end{aligned} \right. \quad (53-4)$$

$$MA(a, b; c) = \left\{ \int \Psi^*(a, b; c) \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \frac{C(n_1 + n_3)}{R_i} + \frac{C(\theta_o - \theta_i)}{\ln(k)} \frac{1}{R} \left[\alpha_i R^4 e^{n_3(r-1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{E_i} R^5 e^{(n_2 - n_1)(r-1)} \right] dR \right\} \quad (54-4)$$

$$MB(a, b; c) = \left\{ \int \Phi^*(a, b; c) \left[\left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \frac{C(n_1 + n_3)}{R_i} + \frac{C(\theta_o - \theta_i)}{\ln(k)} \frac{1}{R} \right] \alpha_i R^4 e^{n_3(r-1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{E_i} R^5 e^{(n_2 - n_1)(r-1)} \right] dR \right\} \quad (55-4)$$

(ب) استوانه با دو سر بسته (گرنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned} \sigma_R(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{Q} & \left\{ \left[\frac{p^2 - Rp^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{Rp^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] \right. \\ & \left. (S + Q^* MA\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right)) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{p^2 - Rp^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{Rp^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] \right. \\ & \left. (T - Q^* MB\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right)) + \right. \\ & \left. + \frac{E_i \alpha_i Q}{2\nu - 1} e^{n_1(k-1)} e^{n_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \quad (56-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{Q} & \left\{ \left[\frac{p^2 - Rp^3\nu}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{Rp^3(2\nu - 3\nu^2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] \right. \\ & \left. (S + Q^* MA\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right)) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{p^2 - Rp^3\nu}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{Rp^3(2\nu - 3\nu^2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] \right. \\ & \left. (T - Q^* MB\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right)) + \right. \\ & \left. + \frac{E_i \alpha_i Q}{2\nu - 1} e^{n_1(k-1)} e^{n_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \quad (57-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x(R) = \frac{\nu e^{n_1(r-k)}}{Q} & \left\{ \left[\frac{2p^2 - Rp^3}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) + \right. \right. \\
& + \frac{Rp^3(2-3\nu)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \Big] \\
& (S + Q^* MA\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right)) + \\
& + \left[\frac{2p^2 - Rp^3}{(1-\nu-2\nu^2)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) - \right. \\
& \left. - \frac{Rp^3(2-3\nu)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{Rp}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; Rp\right) \right] \\
& (T - Q^* MB\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right)) \\
& \left. + \frac{2E_i \alpha_i Q}{2\nu-1} e^{n_1(k-1)} e^{n_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \quad (58-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_R(R) = \frac{1}{E_i Q e^{n_1(k-1)}} & \left\{ (S + Q^* MA\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right)) \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) \right) + \right. \\
& \left. + (T - Q^* MB\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right)) \left(\frac{Rp^2}{e^{Rp}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; Rp\right) \right) \right\} \quad (59-4)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{eff} = [(1-\nu+\nu^2)(\sigma_R^2 + \sigma_\theta^2) - (1+2\nu-2\nu^2)\sigma_R\sigma_\theta]^{0.5} \quad (60-4)$$

که در آنها

$$Q = BM_1 BM_4 - BM_2 BM_3 \quad (61-4)$$

$$\begin{aligned}
S = \{ & P_o BM_3 - P_i e^{n_1(k-1)} BM_4 + E_i e^{n_1(k-1)} [v_1(R_o) BM_2 BM_3 - v_1(R_i) BM_1 BM_4 + \\
& + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) BM_3 BM_4 + C\alpha_i \theta_i BM_4 - C\alpha_i \theta_o e^{n_3(k-1)} BM_3] \} \quad (62-4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T = \{ & P_i e^{n_1(k-1)} BM_2 - P_o BM_1 + E_i e^{n_1(k-1)} [v_2(R_i) BM_2 BM_3 - v_2(R_o) BM_1 BM_4 + \\
& + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) BM_1 BM_2 + C\alpha_i \theta_o e^{n_3(k-1)} BM_1 - C\alpha_i \theta_i BM_2] \} \quad (63-4)
\end{aligned}$$

$$Q^* = \frac{E_i(1-\nu-2\nu^2)\Gamma(\frac{2-3\nu}{1-\nu})e^{\eta_1(k-1)}}{(1-\nu)\Gamma(3)} Q \quad (64-4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} BM_1 &= \left(\frac{p^2 - R_i p^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_i p}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_i p\right) + \frac{R_i p^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_i p}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_i p\right) \right) \\ BM_2 &= \left(\frac{p^2 - R_o p^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_o p}} \Phi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_o p\right) + \frac{R_o p^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_o p}} \Phi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_o p\right) \right) \\ BM_3 &= \left(\frac{p^2 - R_i p^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_i p}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_i p\right) - \frac{R_i p^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_i p}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_i p\right) \right) \\ BM_4 &= \left(\frac{p^2 - R_o p^3(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)e^{R_o p}} \Psi\left(\frac{2-3\nu}{1-\nu}, 3; R_o p\right) - \frac{R_o p^3(3\nu^2 - 5\nu + 2)}{(1-\nu^2)(1-2\nu)e^{R_o p}} \Psi\left(\frac{3-4\nu}{1-\nu}, 4; R_o p\right) \right) \end{aligned} \right. \quad (65-4)$$

۴-۳-۱-۲ مقادیر منفی ضریب ناهمگنی

(الف) استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned} \sigma_R(R) &= \frac{e^{\eta_1(r-k)}}{U} \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -Rp) - \frac{Rp^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -Rp) \right] \right. \\ &\quad (V + U^* MC(1+\nu, 3; -Rp)) + \\ &\quad \left. + \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -Rp) + \frac{Rp^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -Rp) \right] \right. \\ &\quad (W - U^* MD(1+\nu, 3; -Rp)) + \\ &\quad \left. + \frac{E_i \alpha_i U}{\nu-1} e^{\eta_1(k-1)} e^{\eta_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \quad (66-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(R) &= \frac{e^{\eta_1(r-k)}}{U} \left\{ \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -Rp) - \frac{Rp^3 \nu}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -Rp) \right] \right. \\ &\quad (V + U^* MC(1+\nu, 3; -Rp)) + \\ &\quad \left. + \left[\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -Rp) + \frac{Rp^3 \nu}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -Rp) \right] \right. \\ &\quad (W - U^* MD(1+\nu, 3; -Rp)) + \\ &\quad \left. + \frac{E_i \alpha_i U}{\nu-1} e^{\eta_1(k-1)} e^{\eta_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \quad (67-4) \end{aligned}$$

$$\sigma_x(R) = 0 \quad (68-4)$$

$$u_R(R) = \frac{1}{E_i U e^{\eta(k-1)}} \left\{ (V + U^* MC(1+\nu, 3; -Rp))(Rp^2 \Phi(1+\nu, 3; -Rp)) + \right. \\ \left. + (W - U^* MD(1+\nu, 3; -Rp))(Rp^2 \Psi(1+\nu, 3; -Rp)) \right\} \quad (69-4)$$

که در آنها

$$U = CM_1 CM_4 - CM_2 CM_3 \quad (70-4)$$

$$V = \left\{ P_o CM_3 - P_i e^{\eta(k-1)} CM_4 + E_i e^{\eta(k-1)} [v_1(R_o) CM_2 CM_3 - v_1(R_i) CM_1 CM_4 + \right. \\ \left. + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) CM_3 CM_4 + C\alpha_i \theta_i CM_4 - C\alpha_i \theta_o e^{\eta_3(k-1)} CM_3] \right\} \quad (71-4)$$

$$W = \left\{ P_i e^{\eta(k-1)} CM_2 - P_o CM_1 + E_i e^{\eta(k-1)} [v_2(R_i) CM_2 CM_3 - v_2(R_o) CM_1 CM_4 + \right. \\ \left. + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) CM_1 CM_2 + C\alpha_i \theta_o e^{\eta_3(k-1)} CM_1 - C\alpha_i \theta_i CM_2] \right\} \quad (72-4)$$

$$U^* = \frac{E_i (1-\nu^2) \Gamma(1+\nu) e^{\eta(k-1)}}{\Gamma(3)} U \quad (73-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} CM_1 = \left(\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -R_i p) - \frac{R_i p^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -R_i p) \right) \\ CM_2 = \left(\frac{p^2}{1-\nu} \Phi(1+\nu, 3; -R_o p) - \frac{R_o p^3}{3(1-\nu)} \Phi(2+\nu, 4; -R_o p) \right) \\ CM_3 = \left(\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -R_i p) + \frac{R_i p^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -R_i p) \right) \\ CM_4 = \left(\frac{p^2}{1-\nu} \Psi(1+\nu, 3; -R_o p) + \frac{R_o p^3}{(1-\nu)} \Psi(2+\nu, 4; -R_o p) \right) \end{array} \right. \quad (74-4)$$

$$MC(a, b; c) = \left\{ \int e^{Rp} \Psi^*(a, b; c) \left[\left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \frac{C(n_1 + n_3)}{R_i} + \frac{C(\theta_o - \theta_i)}{\ln(k)} \frac{1}{R} \right] \alpha_i R^4 e^{n_3(r-1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{E_i} R^5 e^{(n_2 - n_1)(r-1)} \right] dR \right\} \quad (75-4)$$

$$MD(a, b; c) = \left\{ \int e^{Rp} \Phi^*(a, b; c) \left[\left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \frac{C(n_1 + n_3)}{R_i} + \frac{C(\theta_o - \theta_i)}{\ln(k)} \frac{1}{R} \right] \alpha_i R^4 e^{n_3(r-1)} - \frac{\rho_i \omega^2}{E_i} R^5 e^{(n_2 - n_1)(r-1)} \right] dR \right\} \quad (76-4)$$

(ب) استوانه با دو سر بسته (گرنش صفحه‌ای)

$$\sigma_R(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{X} \left\{ (Y + X^* MC\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right)) \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) - \frac{Rp^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] + (Z - X^* MD\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right)) \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) + \frac{Rp^3}{(1-\nu-2\nu^2)} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] + \frac{E_i \alpha_i X}{2\nu-1} e^{n_1(k-1)} e^{n_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \quad (77-4)$$

$$\sigma_\theta(R) = \frac{e^{n_1(r-k)}}{X} \left\{ (Y + X^* MC\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right)) \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) - \frac{Rp^3 \nu}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] + (Z - X^* MD\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right)) \left[\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp\right) + \frac{Rp^3 \nu}{(1-\nu^2)(1-2\nu)} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp\right) \right] + \frac{E_i \alpha_i X}{2\nu-1} e^{n_1(k-1)} e^{n_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \quad (78-4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x(R) = \frac{\nu e^{\eta_1(r-k)}}{X} & \left\{ (Y + X^* MC(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp)) \left[\frac{2p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp) - \right. \right. \\ & - \frac{1}{3(1-\nu^2)(1-2\nu)} \Phi(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp) \left. \right] + \\ & + (Z - X^* MD(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp)) \left[\frac{2p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp) + \right. \\ & + \frac{1}{(1-\nu^2)(1-2\nu)} \Psi(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -Rp) \left. \right] \\ & \left. + \frac{2E_i \alpha_i X}{2\nu-1} e^{\eta_1(k-1)} e^{\eta_3(r-1)} \left[\left(\frac{\theta_o - \theta_i}{\ln(k)} \right) \ln(r) + \theta_i \right] \right\} \quad (79-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_R(R) = \frac{1}{E_i X e^{\eta_1(k-1)}} & \left\{ (Y + X^* MC(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp)) (Rp^2 \Phi(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp)) + \right. \\ & \left. + (Z - X^* MD(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp)) (Rp^2 \Psi(\frac{1}{1-\nu}, 3; -Rp)) \right\} \quad (80-4) \end{aligned}$$

که در آنها

$$X = DM_1 DM_4 - DM_2 DM_3 \quad (81-4)$$

$$\begin{aligned} Y = \left\{ P_o DM_3 - P_i e^{\eta_1(k-1)} DM_4 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [v_1(R_o) DM_2 DM_3 - v_1(R_i) DM_1 DM_4 + \right. \\ \left. + (v_2(R_o) - v_2(R_i)) DM_3 DM_4 + C \alpha_i \theta_i DM_4 - C \alpha_i \theta_o e^{\eta_3(k-1)} DM_3] \right\} \quad (82-4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z = \left\{ P_i e^{\eta_1(k-1)} DM_2 - P_o DM_1 + E_i e^{\eta_1(k-1)} [v_2(R_i) DM_2 DM_3 - v_2(R_o) DM_1 DM_4 + \right. \\ \left. + (v_1(R_i) - v_1(R_o)) DM_1 DM_2 + C \alpha_i \theta_o e^{\eta_3(k-1)} DM_1 - C \alpha_i \theta_i DM_2] \right\} \quad (83-4) \end{aligned}$$

$$X^* = \frac{E_i (1-\nu-2\nu^2) \Gamma(\frac{1}{1-\nu}) e^{\eta_1(k-1)}}{(1-\nu) \Gamma(3)} X \quad (84-4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} DM_1 = \left(\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_i p\right) - \frac{R_i p^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_i p\right) \right) \\ DM_2 = \left(\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Phi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_o p\right) - \frac{R_o p^3}{3(1-\nu-2\nu^2)} \Phi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_o p\right) \right) \\ DM_3 = \left(\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_i p\right) + \frac{R_i p^3}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_i p\right) \right) \\ DM_4 = \left(\frac{p^2}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{1}{1-\nu}, 3; -R_o p\right) + \frac{R_o p^3}{1-\nu-2\nu^2} \Psi\left(\frac{2-\nu}{1-\nu}, 4; -R_o p\right) \right) \end{array} \right. \quad (۸۵-۴)$$

۴-۳-۲ حل عددی استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت و دمای ثابت داخلی و خارجی

در این بخش نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی FGM تحت بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی توضیح داده شده است.

به منظور المان‌بندی استوانه، از المان‌های متقارن محوری هشت گره‌ای CAX8R استفاده شده است. این المان در تحلیل پوسته‌ها و در شرایط تنش و کرنش صفحه‌ای به منظور افزایش دقت و همچنین بالا بردن سرعت تحلیل، به صورت داخلی به المان C3D20R تبدیل می‌شود. به هر گره دستگاه مختصات با دو راستای شعاعی و طولی اختصاص می‌یابد که درجات آزادی آن را مشخص می‌کنند. برای تحلیل توزیع حرارت در جداره‌ی استوانه، المان متقارن محوری از نوع CTH25 انتخاب شده است.

استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر، شعاع خارجی ۶۰ میلی‌متر و طول ۸۰۰ میلی‌متر با رسم مقطعی مستطیلی از آن در حالت تقارن محوری، مدل‌سازی شده است.

برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است؛ با تقسیم جداره‌ی استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب انبساط حرارتی در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز از لایه‌ی داخلی به صورت تابع نمایی طبق روابط (۲-۳۲)، (۳-۱) و (۴-۲۱)؛ نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد

به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محلّ اتصال به هم پیوسته اند و خواص در محلّ اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مرز دو لایه در نظر گرفته می‌شوند. برای اعمال شرایط مرزی موجود در دو انتهای استوانه، بسته به شرایط انتهایی درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در دو انتهای استوانه را مقید می‌کنیم. برای استوانه با دو سر بسته، تنها جابه‌جایی در راستای طولی المان‌های دو سر استوانه را مقید می‌کنیم. در شرایط تنش صفحه‌ای، نیاز به اعمال هیچ قیدی به دو سر استوانه نمی‌باشد. فشارهای داخلی و خارجی نیز به گره‌های موجود در سطوح داخلی و خارجی مقطع ترسیم شده اعمال می‌شوند. همچنین برای اعمال شرایط دمایی، با در نظر گرفتن کل گره‌های موجود در سطوح داخلی و خارجی استوانه، مقدار اختلاف دمای مربوط به هر یک از این سطوح را با دمای محیط به عنوان بارگذاری حرارتی اعمال می‌کنیم.

۴-۴ حلّ ترموالاستیک استوانه‌ی همگن چرخان تحت فشار

با استفاده از روابط (۲-۲۴)، (۲-۹۰)، (۳-۳) و (۴-۷)؛ معادله‌ی حاکم بر استوانه به دست می‌آید.

$$R^2 \frac{d^2 u_R}{dR^2} + R \frac{du_R}{dR} - u_R = \frac{C\alpha}{A} R^2 \frac{d\theta(R)}{dR} - \frac{\rho\omega^2}{EA} R^3 \quad (۸۶-۴)$$

حلّ معادله‌ی ناهمگن فوق را می‌توان به روش لاگرانژ و با حاصل جمع جواب خصوصی معادله‌ی

ناهمگن و جواب عمومی معادله‌ی همگن متناظر به دست آورد. اما در روشی دیگر، معادله‌ی (۴-۸۶) را

به صورت مشتقات پی‌درپی نوشته و با انتگرال‌گیری از آن، به حلّ معادله‌ی حاکم می‌پردازیم.

$$\frac{d}{dR} \left[\frac{1}{R} \frac{d}{dR} (Ru_R) \right] = \frac{C\alpha}{A} \frac{d\theta(R)}{dR} - \frac{\rho\omega^2}{EA} R \quad (۸۷-۴)$$

با دو بار انتگرال‌گیری از رابطه‌ی فوق، داریم:

$$u_R(R) = C_1 R + \frac{C_2}{R} + \frac{C\alpha}{A} \frac{I(r)}{R} - \frac{\rho\omega^2}{8EA} R^3 \quad (۸۸-۴)$$

که در آن

$$I(r) = R_i^2 \int_1^r \theta(r) r dr \quad (۸۹-۴)$$

$\theta(r)$ از رابطه‌ی (۲۴-۴) محاسبه می‌شود. تنش شعاعی با استفاده از روابط (۲۴-۲)، (۷-۴) و

(۸۸-۴) و برحسب ثابت‌های C_1 و C_2 به صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_R(R) = \left\{ E[(A+B)C_1 - (A-B)\frac{C_2}{R^2}] + \right. \\ \left. - E(A-B)\frac{C\alpha}{A}\frac{I(r)}{R^2} - \frac{(3+\nu^*)}{8}\rho\omega^2 R^2 \right\} \quad (۹۰-۴)$$

با اعمال شرایط مرزی (۲۹-۲) در معادله‌ی فوق، ثابت‌های C_1 و C_2 محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} C_1 = \frac{(A-B)C\alpha I^*}{AR_i^2(A+B)(k^2-1)} + \frac{(3+\nu^*)(k^4-1)\rho\omega^2 R_i^2 + 8(P_i - k^2 P_o)}{8E(A+B)(k^2-1)} \\ C_2 = \frac{C\alpha I^*}{A(k^2-1)} + \frac{(3+\nu^*)(k^2-1)\rho\omega^2 R_i^2 R_o^2 + 8(P_i - P_o)R_o^2}{8E(A-B)(k^2-1)} \end{cases} \quad (۹۱-۴)$$

که در آن

$$I^* = R_i^2 \int_1^k \theta(r) r dr \quad (۹۲-۴)$$

با جایگزینی C_1 و C_2 در (۸۸-۴) و استفاده از (۲۴-۲)، (۷-۴) و (۸-۴)، تنش‌های شعاعی،

محیطی و طولی و جابه‌جایی شعاعی به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R^H(R) = \left\{ \frac{E(A-B)}{(k^2-1)R_i^2} \frac{C\alpha}{A} \left[\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) I^* - (k^2-1) \frac{I(r)}{r^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(3+\nu^*)}{8} \left[(k^2+1) - \frac{k^2}{r^2} - r^2 \right] \rho\omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} \left[(P_i - k^2 P_o) - (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r}\right)^2 \right] \right\} \quad (۹۳-۴)$$

$$\sigma_\theta^H(R) = \left\{ \frac{E(A-B)}{(k^2-1)R_i^2} \frac{C\alpha}{A} \left[\left(1 + \frac{1}{r^2}\right) I^* + (k^2-1) \left(\frac{I(r)}{r^2} - R_i^2 \theta(r) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{(3+\nu^*)}{8} \left[(k^2+1) + \frac{k^2}{r^2} - \frac{1+3\nu^*}{3+\nu^*} r^2 \right] \rho\omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} \left[(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r}\right)^2 \right] \right\} \quad (۹۴-۴)$$

$$\sigma_x^H(R) = \left\{ \frac{\beta E(A-B) C\alpha}{(k^2-1)R_i^2} \frac{1}{A} [2I^* - (k^2-1)R_i^2\theta(r)] + \right. \\ \left. + \frac{\beta(3+\nu^*)}{4} [(k^2+1) - \frac{2+2\nu^*}{3+\nu^*} r^2] \rho\omega^2 R_i^2 + \frac{2\beta}{k^2-1} (P_i - k^2 P_o) \right\} \quad (95-4)$$

$$u_R^H(R) = \left\{ \frac{1}{(k^2-1)R_i} \frac{C\alpha}{A} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{(A-B)}{(A+B)} r \right) I^* + (k^2-1) \frac{I(r)}{r} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(3+\nu^*)}{8E} \left[\frac{k^2+1}{A+B} + \frac{k^2}{r^2(A-B)} - \frac{r^2}{3A+B} \right] \rho\omega^2 r R_i^3 + \right. \\ \left. + \frac{R_i r}{E(k^2-1)} \left[\left(\frac{P_i - k^2 P_o}{A+B} \right) + \left(\frac{P_i - P_o}{A-B} \right) \left(\frac{k}{r} \right)^2 \right] \right\} \quad (96-4)$$

با اعمال شرایط تکیه‌گاهی، روابط (۴-۹۳ تا ۹۶) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

۴-۴-۱ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$\sigma_R^H(R) = \left\{ \frac{E\alpha}{(k^2-1)R_i^2} \left[\left(1 - \frac{1}{r^2} \right) I^* - (k^2-1) \frac{I(r)}{r^2} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(3+\nu)}{8} [(k^2+1) - \frac{k^2}{r^2} - r^2] \rho\omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} [(P_i - k^2 P_o) - (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r} \right)^2] \right\} \quad (97-4)$$

$$\sigma_\theta^H(R) = \left\{ \frac{E\alpha}{(k^2-1)R_i^2} \left[\left(1 + \frac{1}{r^2} \right) I^* + (k^2-1) \left(\frac{I(r)}{r^2} - R_i^2 \theta(r) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{(3+\nu)}{8} [(k^2+1) + \frac{k^2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} r^2] \rho\omega^2 R_i^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2-1} [(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r} \right)^2] \right\} \quad (98-4)$$

$$\sigma_x^H(R) = 0 \quad (99-4)$$

$$\begin{aligned}
u_R^H(R) = & \left\{ \frac{\alpha(1+\nu)}{(k^2-1)R_i} \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} r \right) I^* + (k^2-1) \frac{I(r)}{r} \right] + \right. \\
& + \frac{(\nu^2+4\nu+3)}{8E} \left[(k^2+1) + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{k}{r} \right)^2 - \frac{1+\nu}{3+\nu} r^2 \right] \rho \omega^2 r R_i^3 + \\
& \left. + \frac{R_i r}{E(k^2-1)} \left[(1-\nu)(P_i - k^2 P_o) + (1+\nu)(P_i - P_o) \left(\frac{k}{r} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.0.4)
\end{aligned}$$

۴-۴-۲ استوانه با دو سر بسته (گرنش صفحه‌ای)

$$\begin{aligned}
\sigma_R^H(R) = & \left\{ \frac{E\alpha}{(1-\nu)(k^2-1)R_i^2} \left[\left(1 - \frac{1}{r^2} \right) I^* - (k^2-1) \frac{I(r)}{r^2} \right] + \right. \\
& + \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \left[(k^2+1) - \frac{k^2}{r^2} - r^2 \right] \rho \omega^2 R_i^2 + \\
& \left. + \frac{1}{k^2-1} \left[(P_i - k^2 P_o) - (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.1.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta^H(R) = & \left\{ \frac{E\alpha}{(1-\nu)(k^2-1)R_i^2} \left[\left(1 + \frac{1}{r^2} \right) I^* + (k^2-1) \left(\frac{I(r)}{r^2} - R_i^2 \theta(r) \right) \right] + \right. \\
& + \frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \left[(k^2+1) + \frac{k^2}{r^2} - \frac{1+2\nu}{3-2\nu} r^2 \right] \rho \omega^2 R_i^2 + \\
& \left. + \frac{1}{k^2-1} \left[(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r} \right)^2 \right] \right\} \quad (1.2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x^H(R) = & \left\{ \frac{E\alpha\nu}{(1-\nu)(k^2-1)R_i^2} \left[2I^* - (k^2-1)R_i^2 \theta(r) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{3\nu-2\nu^2}{4(1-\nu)} \left[(k^2+1) - \frac{2r^2}{3-2\nu} \right] \rho \omega^2 R_i^2 + \frac{2\nu}{k^2-1} (P_i - k^2 P_o) \right\} \quad (1.3.4)
\end{aligned}$$

$$u_R^H(R) = \left\{ \frac{(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)(k^2-1)R_i} \left[\left(\frac{1}{r} + (1-2\nu)r \right) I^* + (k^2-1) \frac{I(r)}{r} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(1+\nu)R_i r}{E(k^2-1)} [(1-2\nu)(P_i - k^2 P_o) + (P_i - P_o) \left(\frac{k}{r} \right)^2] + \right. \\ \left. + \left[\frac{(3-2\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{8E(1-\nu)} \rho \omega^2 r R_i^3 \right] \left[(k^2+1) + \frac{1}{1-2\nu} \left(\frac{k}{r} \right)^2 - \frac{r^2}{3-2\nu} \right] \right\} \quad (104-4)$$

در اینجا نیز برای محاسبه‌ی تنش مؤثر فون میزس در شرایط تکیه‌گاهی تنش و کرنش صفحه‌ای،

به ترتیب از روابط (۲-۱۰۴) و (۲-۱۰۷) استفاده می‌شود.

۴-۵ مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج

به منظور مطالعه‌ی موردی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با مقادیر به دست آمده از حلّ

عددی به کمک مدل‌سازی نرم افزاری، استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن و همسانگردی به شعاع داخلی

$R_i = 40 \text{ mm}$ و شعاع خارجی $R_o = 60 \text{ mm}$ و طول $L = 800 \text{ mm}$ در نظر می‌گیریم. مدول یانگ،

چگالی و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی استوانه به ترتیب دارای مقادیر $E_i = 200 \text{ GPa}$ ،

$\rho_i = 7860 \text{ kg/m}^3$ و $\alpha_i = 12 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ می‌باشند. همچنین فرض می‌شود که نسبت پواسون دارای

مقدار ثابت 0.3 در طی ضخامت است. دمای سطوح داخلی و خارجی استوانه به ترتیب $T_i = 25^\circ\text{C}$ و

$T_o = 125^\circ\text{C}$ بوده و فشار $P = P_i = 80 \text{ MPa}$ به سطح داخلی وارد می‌شود. استوانه با سرعت زوایه‌ای

ثابت $\omega = 3600 \text{ rpm}$ در حال چرخش حول محور مرکزی می‌باشد.

ثابت‌های ناهمگنی n_1 ، n_2 و n_3 برابر یک‌دیگر فرض شده و نتایج برای دو حالت تنش و کرنش

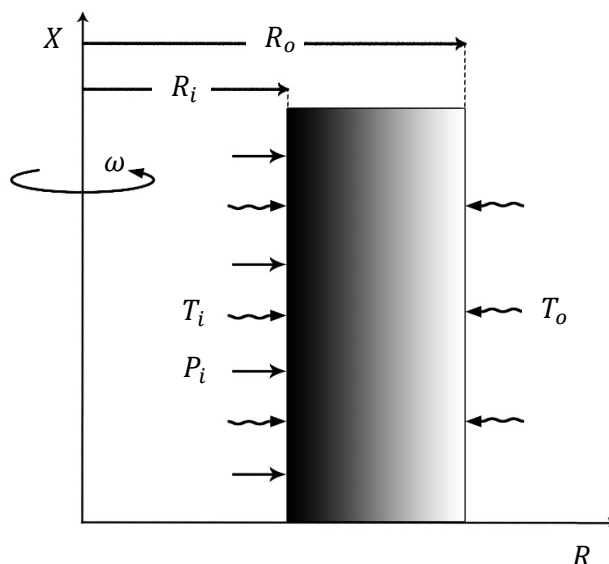
صفحه‌ای ارائه می‌شوند. خطوط ممتد نشانگر حلّ تحلیلی و دایره‌های کوچک نماینده‌ی حلّ عددی

صورت گرفته می‌باشند.

۴-۵-۱ استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

در این بخش، استوانه در حال دوران با سرعت ثابت، تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت

داخلی و خارجی بوده و در حالت تنش صفحه‌ای می‌باشد (شکل ۴-۳).



شکل ۴-۳ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی

و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای

شکل (۴-۴) توزیع تنش شعاعی بی‌بعد شده را در طی ضخامت استوانه نمایش می‌دهد.

از آنجا که در تحلیل تنش استوانه‌ی ناهمگن مورد نظر، با مسأله‌ای خطی مواجه هستیم؛ لذا توزیع تنش

می‌تواند با توجه به اصل جمع آثار و با استفاده از نتایج به‌دست آمده در دو فصل قبل مربوط به تحلیل

استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار به همراه تحلیل حرارتی بیان شده در این فصل محاسبه شود.

مقدار تنش شعاعی در لایه‌های داخلی و خارجی برای تمامی مقادیر ضریب ناهمگنی با هم برابر

بوده و در لایه‌ی داخلی نسبت σ_R / σ_R^H برابر یک است. در طول دیواره و به ازای مقادیر منفی از ضریب

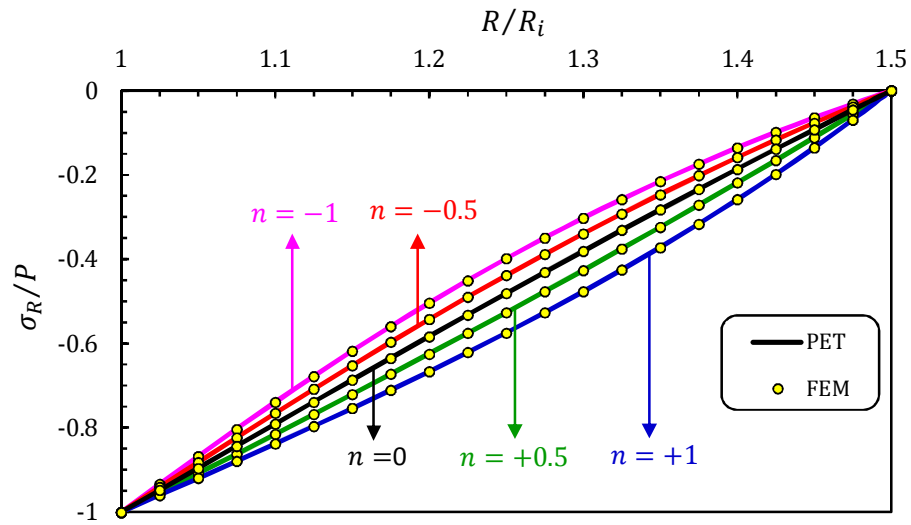
ناهمگنی، مقدار تنش شعاعی نسبت به ماده‌ی همگن کاهش یافته و به ازای n های مثبت، افزایش

می‌یابد. مقادیر تنش شعاعی منفی بوده و افزایش یا کاهش آن نسبت به ماده‌ی همگن به مقدار n بستگی دارد.

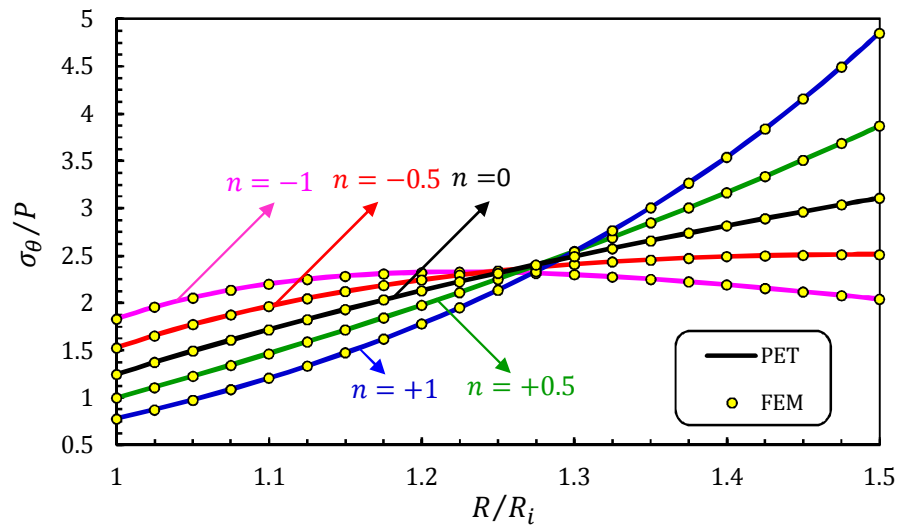
شکل (۴-۵) توزیع تنش محیطی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. مقدار این تنش در هیچ کدام از لایه‌های داخلی و خارجی و به ازای هیچ یک از مقادیر ضرایب ناهمگنی یکسان نمی‌باشد. در تمامی سطوح، نسبت $\sigma_\theta/\sigma_\theta^H$ مخالف یک بوده و تنها در لایه‌ی میانی ($r \approx 1/25$) برابر این عدد می‌شود. مقدار تنش محیطی به ازای $n < 0$ و در نیمه‌ی داخلی استوانه، بیشتر از ماده‌ی همگن، و در نیمه‌ی خارجی کمتر از آن می‌باشد. در حالی که تنش ایجاد شده در ماده‌ی همگن به ازای $n > 0$ و در نیمه‌ی داخلی استوانه بیشتر و در نیمه‌ی خارجی کمتر از ماده‌ی ناهمگن می‌باشد.

در نیمه‌ی داخلی استوانه، منحنی‌ها به یکدیگر نزدیک شده و دارای رفتار مشابهی می‌باشند. همچنین با اعمال دمای ثابت به سطوح داخلی و خارجی استوانه، منحنی مربوط به $n = 1$ ، که تا پیش از این و در دو فصل قبل تغییرات اندکی را در طی ضخامت داشت؛ دیگر این ویژگی خود را از دست داده و شیب تغییرات آن افزایش یافته است.

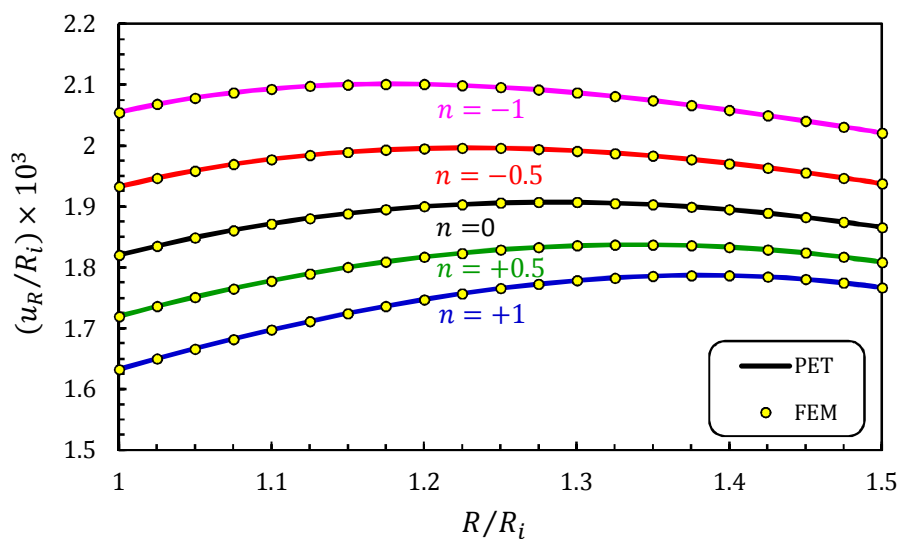
شکل (۴-۶) توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را نسبت به شعاع بی‌بعد شده نمایش می‌دهد. در هیچ یک از نقاط، نسبت u_R/u_R^H برابر یک نیست. به ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی، مقدار جابه‌جایی شعاعی بزرگ‌تر از استوانه‌ی همگن و برای n های مثبت، کوچک‌تر از آن می‌باشد. همان گونه که انتظار می‌رفت؛ با اضافه شدن دما به مجموعه، مقادیر جابه‌جایی‌ها نسبت به استوانه‌ی چرخان تحت فشار افزایش قابل ملاحظه‌ای پیدا کرده است. علاوه بر آن، نسبت اختلاف مقادیر در بین منحنی‌های مربوط به ضرایب ناهمگنی متفاوت دیگر یکسان نخواهد بود. لذا در طراحی استوانه‌هایی که قرار است در محیط با دمای بالا مورد استفاده قرار بگیرند، توجه به مقادیر جابه‌جایی امری ضروری به حساب می‌آید.



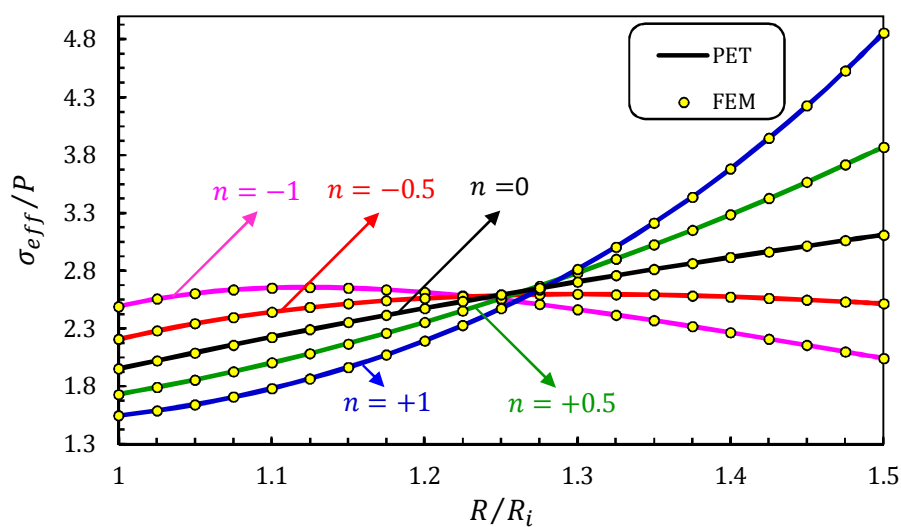
شکل ۴-۴ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمایی ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۴-۵ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمایی ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای

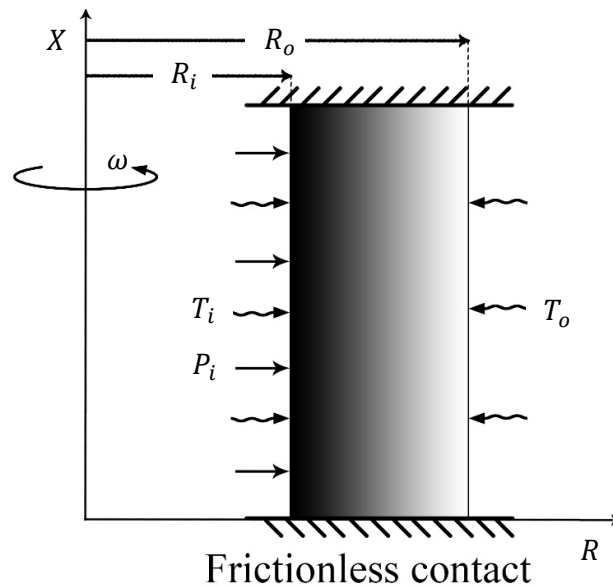


شکل ۴-۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۴-۷ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای

شکل (۴-۷) توزیع تنش مؤثر بی بعد شده را بر اساس معادله‌ی (۴-۴۸)، در طی ضخامت نشان می‌دهد. این تنش‌ها به ازای هیچ یک از مقادیر ضریب ناهمگنی، در سطوح داخلی و خارجی، مقادیر یکسانی نداشته و نسبت $\sigma_{eff}/\sigma_{eff}^H$ در هیچ کدام از این سطوح برابر یک نیست. مقدار تنش مؤثر، به ازای مقادیر منفی از ضریب ناهمگنی و در شعاع‌های کمتر از حدود $1/2$ بزرگ‌تر از ماده‌ی همگن بوده در حالیکه در نیمه‌ی خارجی استوانه، دارای مقادیر کوچک‌تری از آن می‌باشد. عکس این قضیه برای n های مثبت رخ می‌دهد. در نیمه‌ی داخلی استوانه، منحنی‌ها رفتار مشابهی داشته و به یک مقدار واحد نزدیک می‌شوند. بنابراین تنها در شعاع حدود $1/2$ ، نسبت $\sigma_{eff}/\sigma_{eff}^H$ برابر یک می‌شود. منحنی مربوط به $n = -0.5$ ، تغییرات اندکی را در طی ضخامت استوانه دارد. علاوه بر آن کمترین مقدار تنش مؤثر نیز مربوط به همین مقدار از ضریب ناهمگنی می‌باشد. لذا در وضعیتی که تنش ایجاد شده در جسم عامل تعیین کننده در طراحی باشد؛ استفاده از ماده‌ی ناهمگن که مقدار هر سه ضریب ناهمگنی آن برابر -0.5 است توصیه می‌شود.



شکل ۴-۸ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی

و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای

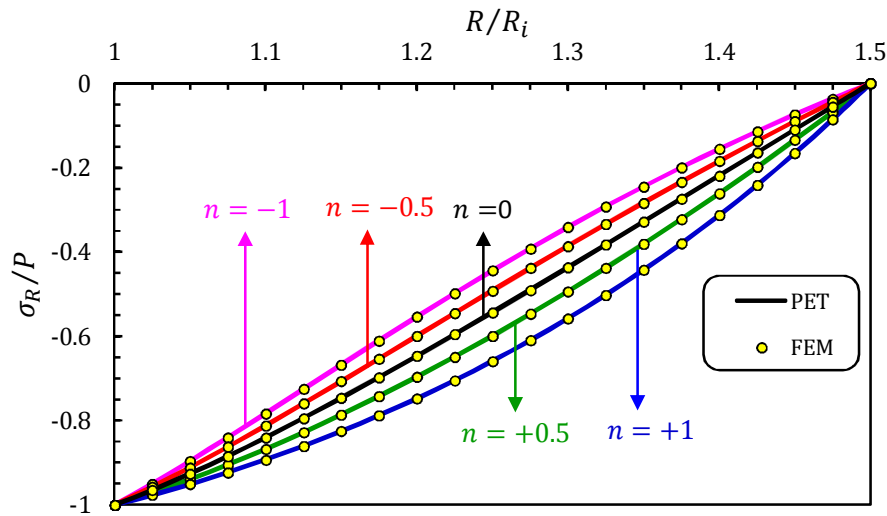
۴-۵-۲ استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)

در این بخش، استوانه در حال دوران با سرعت ثابت، تحت فشار داخلی و دمای ثابت در سطوح

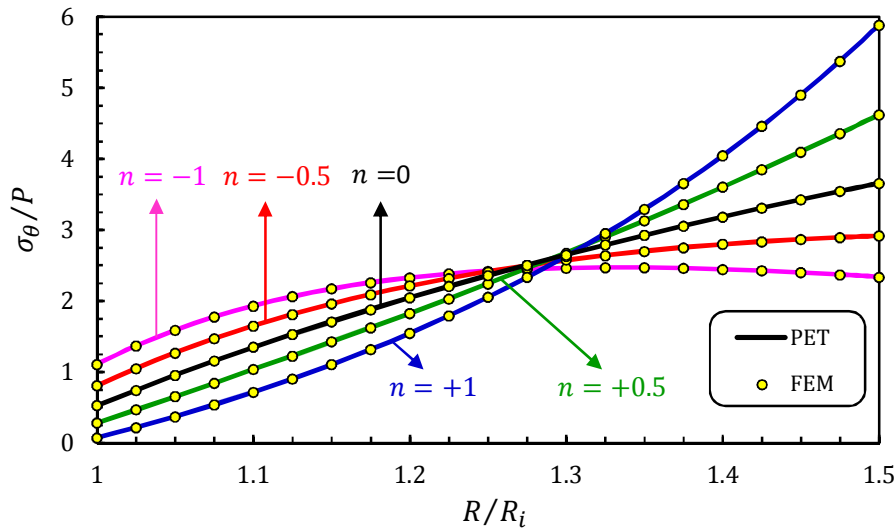
داخلی و خارجی بوده و در حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد (شکل ۴-۸).

شکل‌های (۴-۹) تا (۴-۱۳)، توزیع تنش‌های شعاعی، محیطی و طولی، جابه‌جایی شعاعی و تنش

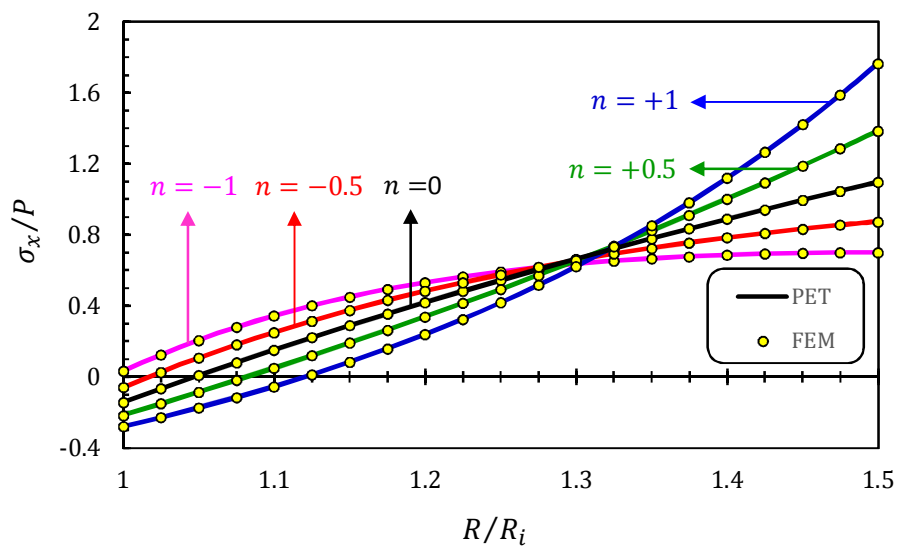
مؤثر را نشان می‌دهند. رفتار این نمودارها، مشابه آن چیزی است که در بخش قبل توضیح داده شد.



شکل ۴-۹ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای

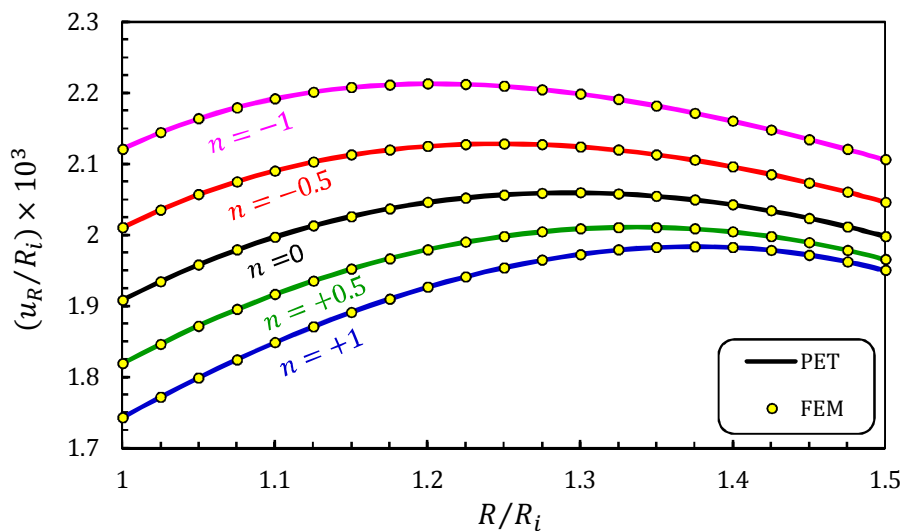


شکل ۴-۱۰ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



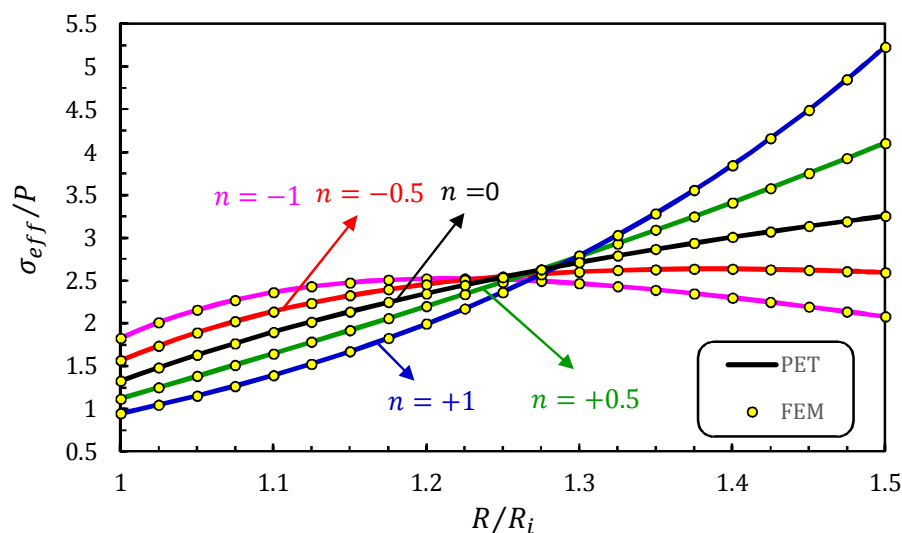
شکل ۴-۱۱ توزیع تنش طولی در استوانه‌ای ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت

داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۴-۱۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ای ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت

داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۴-۱۳ توزیع تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت

داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای

جدول (۴-۱) مقادیر تنش مؤثر حاصل از تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی چرخان به دو روش

PET و FEM را در حالت تنش صفحه‌ای و تحت فشار داخلی، در لایه‌های داخلی، میانی و خارجی

استوانه نمایش می‌دهد.

جدول (۴-۲) نیز شامل همین مقادیر و برای حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد.

		$\sigma_{eff} (MPa)$				
		$n = -1$	$n = -0.5$	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$
لایه‌ی داخلی	PET	۱۹۹/۳۸	۱۸۲/۳۷	۱۵۶/۷۶	۱۳۸/۵۲	۱۲۳/۷۲
	FEM	۱۹۹/۲۲	۱۸۲/۳۰	۱۵۶/۷۵	۱۳۸/۲۵	۱۲۳/۶۴
لایه‌ی میانی	PET	۱۸۶/۴۴	۲۰۷/۰۰	۱۵۲/۵۵	۲۰۴/۷۱	۱۹۷/۹۹
	FEM	۱۸۶/۴۰	۲۰۶/۹۲	۱۵۲/۵۵	۲۰۴/۷۰	۱۹۷/۸۳
لایه‌ی خارجی	PET	۱۶۳/۴۳	۲۰۱/۱۸	۲۴۸/۷۶	۳۰۹/۶۲	۳۸۸/۳۹
	FEM	۱۶۲/۰۰	۲۰۰/۹۸	۲۴۸/۷۶	۳۰۹/۵۷	۳۸۸/۳۴

جدول ۴-۱ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌های

داخلی، میانی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای

		$\sigma_{eff} (MPa)$				
		$n = -1$	$n = -0.5$	$n = 0$	$n = 0.5$	$n = 1$
لایه‌ی داخلی	PET	۱۴۶/۳۳	۱۲۵/۳۱	۱۰۶/۱۱	۸۹/۵۸	۷۵/۸۴
	FEM	۱۴۵/۹۷	۱۲۵/۲۰	۱۰۶/۱۱	۸۹/۵۰	۷۵/۷۳
لایه‌ی میانی	PET	۲۰۱/۱۰	۲۰۳/۸۱	۲۰۳/۲۱	۱۹۸/۷۸	۱۸۹/۲۵
	FEM	۲۰۱/۰۲	۲۰۳/۵۴	۲۰۳/۱۸	۱۹۸/۶۵	۱۸۹/۱۷
لایه‌ی خارجی	PET	۱۶۶/۳۲	۲۰۷/۵۴	۲۶۰/۲۲	۳۲۸/۶۷	۴۱۸/۶۶
	FEM	۱۶۶/۱۴	۲۰۷/۳۵	۲۶۰/۲۲	۳۲۸/۳۰	۴۱۸/۵۲

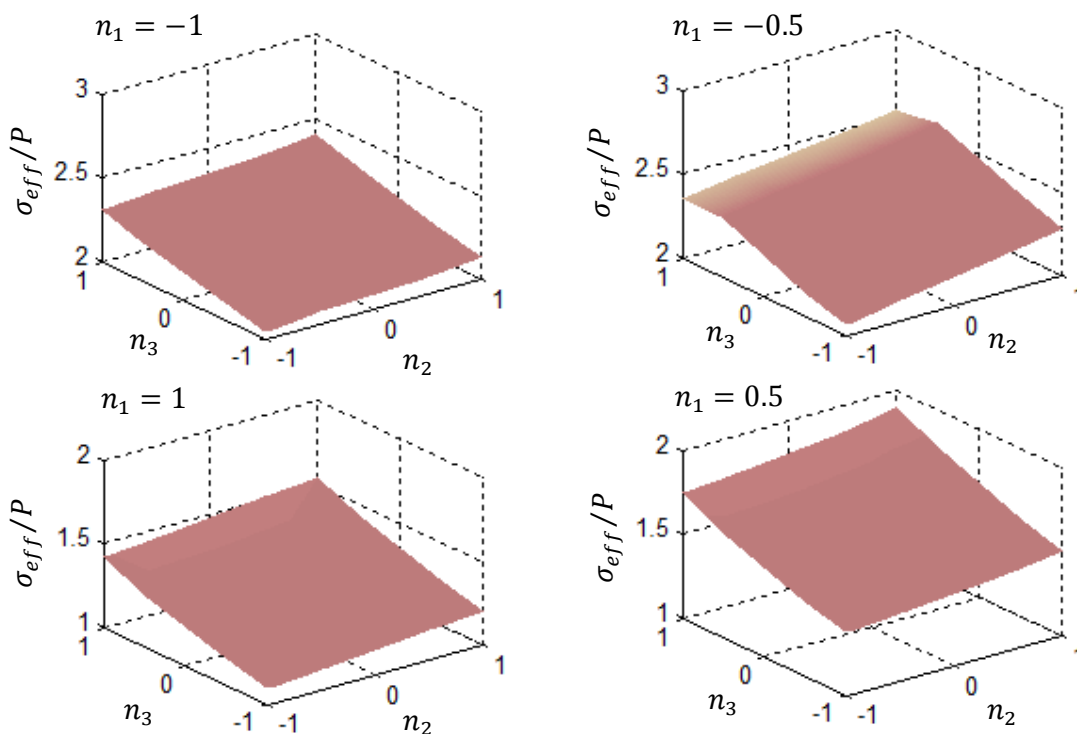
جدول ۴-۲ مقایسه‌ی مقادیر تنش مؤثر حاصل از PET و FEM در لایه‌های

داخلی، میانی و خارجی در حالت کرنش صفحه‌ای

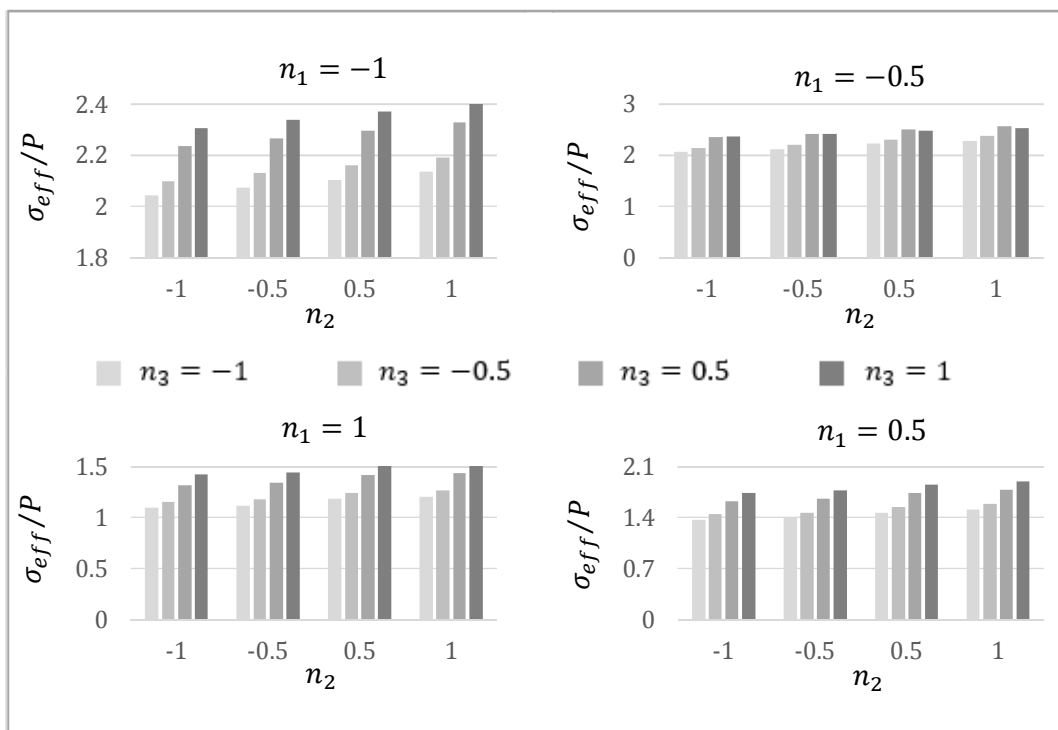
۴-۶ طراحی بهینه

همان‌گونه که در فصل قبل نیز به آن اشاره شد؛ شیوه‌ی حلّ استفاده شده در این پایان نامه برای تحلیل استوانه‌ی FGM این امکان را به ما می‌دهد تا بتوانیم استوانه‌های ناهمگن ساخته شده از مواد متغیر تابعی را با ترکیب‌های مختلف از ضرایب ناهمگنی و نه یکسان در نظر گرفتن هر سه مقدار تحلیل کرده و بهینه‌ترین طراحی را در بارگذاری‌های متفاوت و در شرایط مختلف انتهایی ارائه دهیم.

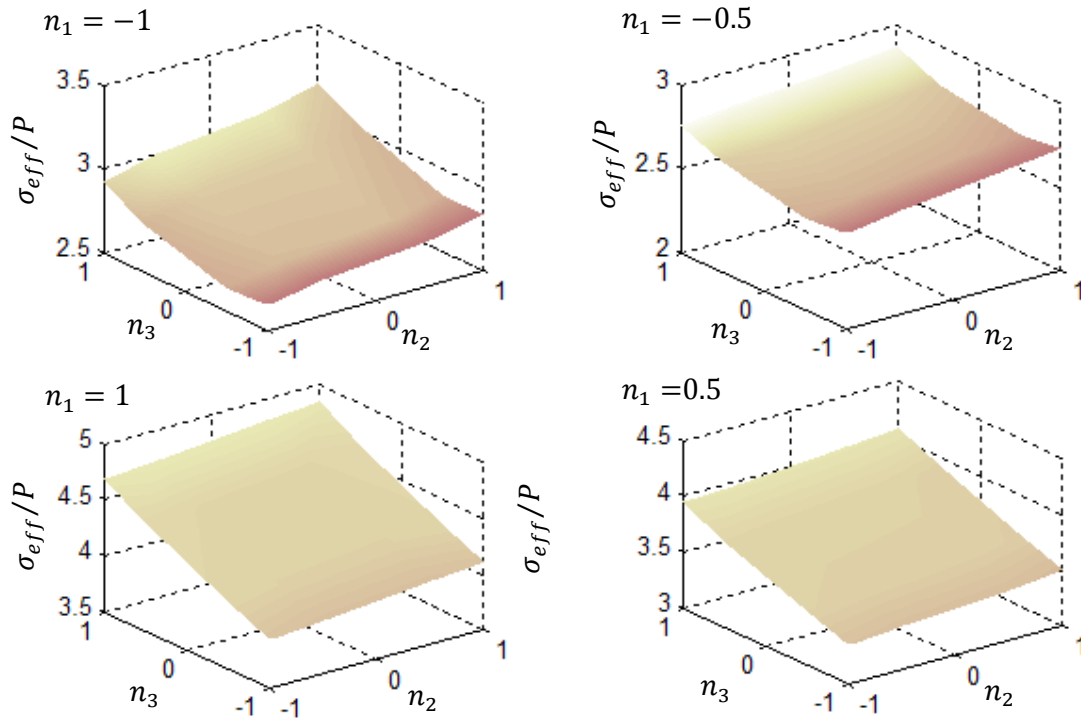
در این فصل با سه خاصیت مدول الاستیسیته، چگالی و ضریب انبساط حرارتی که هر سه دارای توزیع نمایی در دیواره‌ی استوانه می‌باشند روبه‌رو هستیم. در نتیجه مقادیر سه ضریب ناهمگنی n_1 ، n_2 و n_3 نقش اساسی را در تحلیل و طراحی استوانه‌های FGM چرخان تخت فشار و دما ایفا می‌کنند. در این قسمت با در نظر گرفتن ۲۰ مقدار در بازه‌ی $-1 < n_i < 1$ برای هر یک از این ضرایب، ۲۷۰۰۰ ترکیب بررسی شده و در نتیجه ترکیب بهینه جهت طراحی پیشنهاد داده شده است. نتایج برای تنش-های مؤثر بیشینه و کمینه که یکی از مهم‌ترین معیارها در طراحی به حساب می‌آیند؛ در قالب نمودارهای سه‌بعدی (برای تمام ترکیبات) و میله‌ای (برای ۶۴ ترکیب مهم‌تر) و برای تنش و کرنش صفحه‌ای ترسیم شده‌اند.



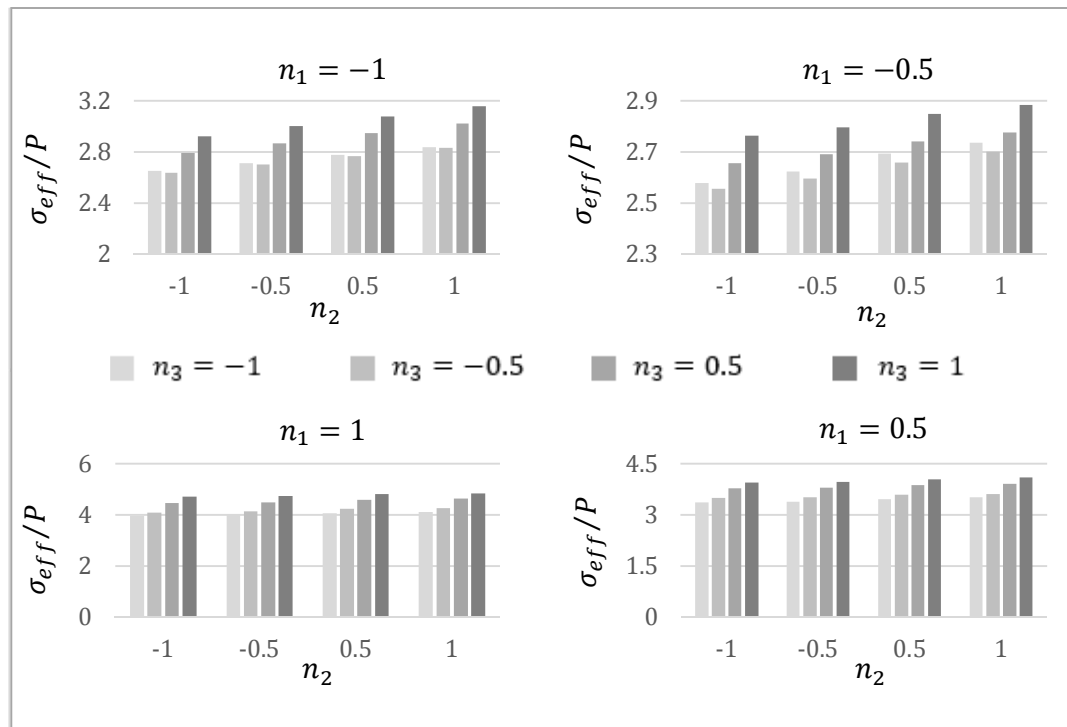
شکل ۴-۱۴ توزیع سه‌بعدی کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای



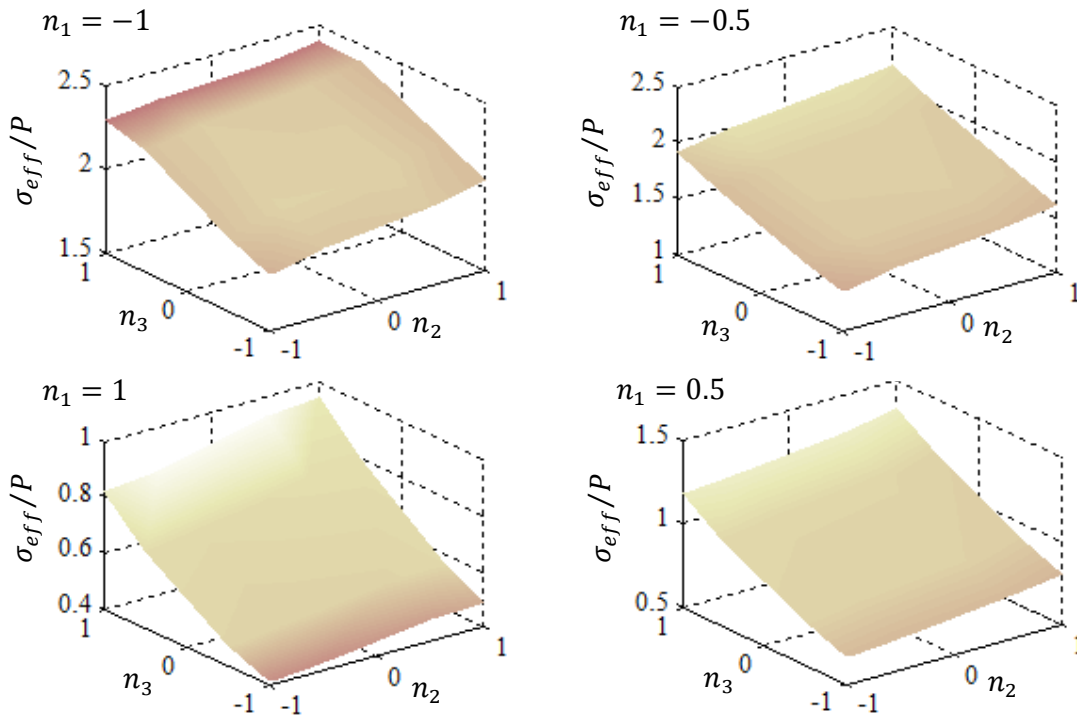
شکل ۴-۱۵ توزیع میله‌ای کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای



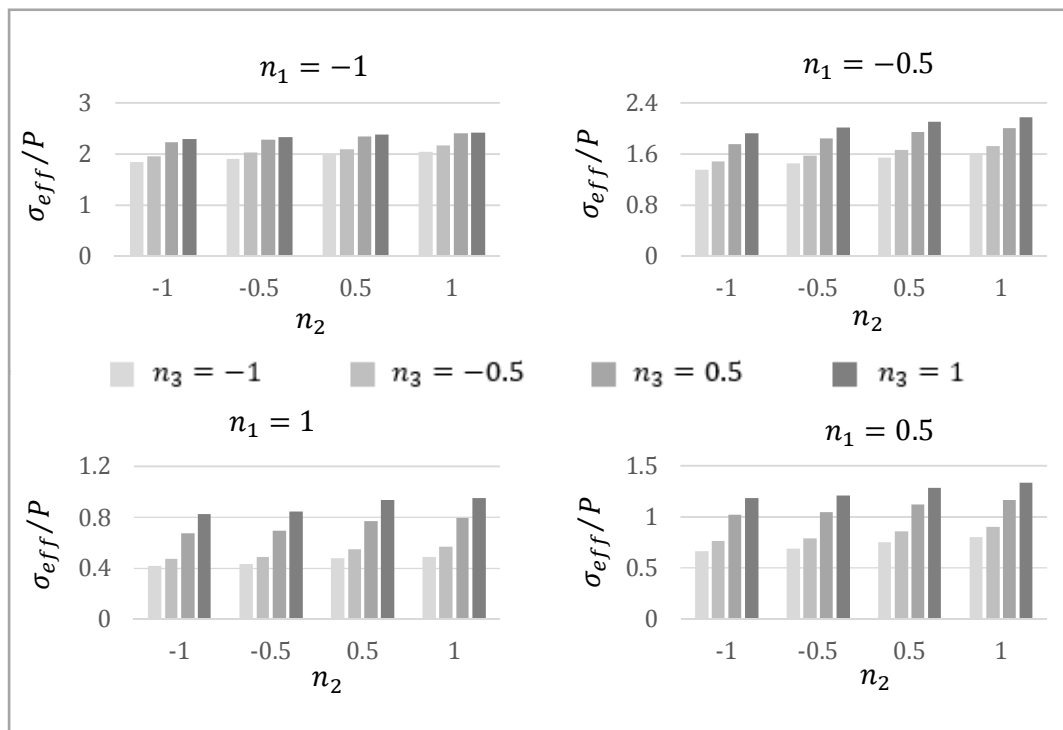
شکل ۴-۱۶ توزیع سه‌بعدی بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای



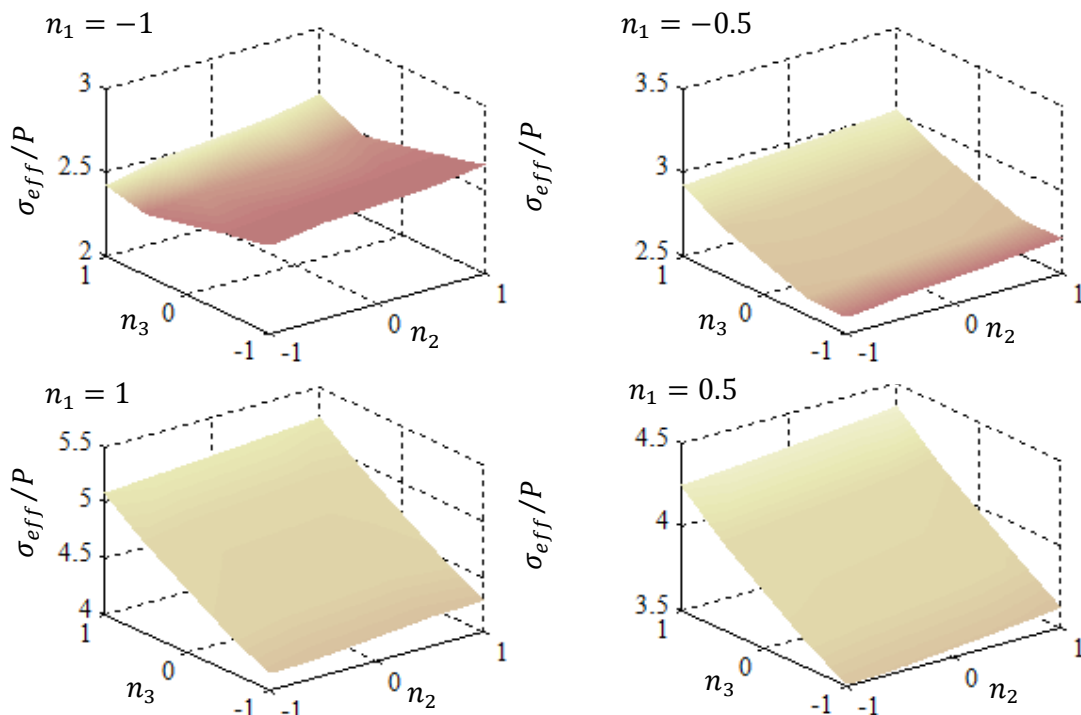
شکل ۴-۱۷ توزیع میله‌ای بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت تنش صفحه‌ای



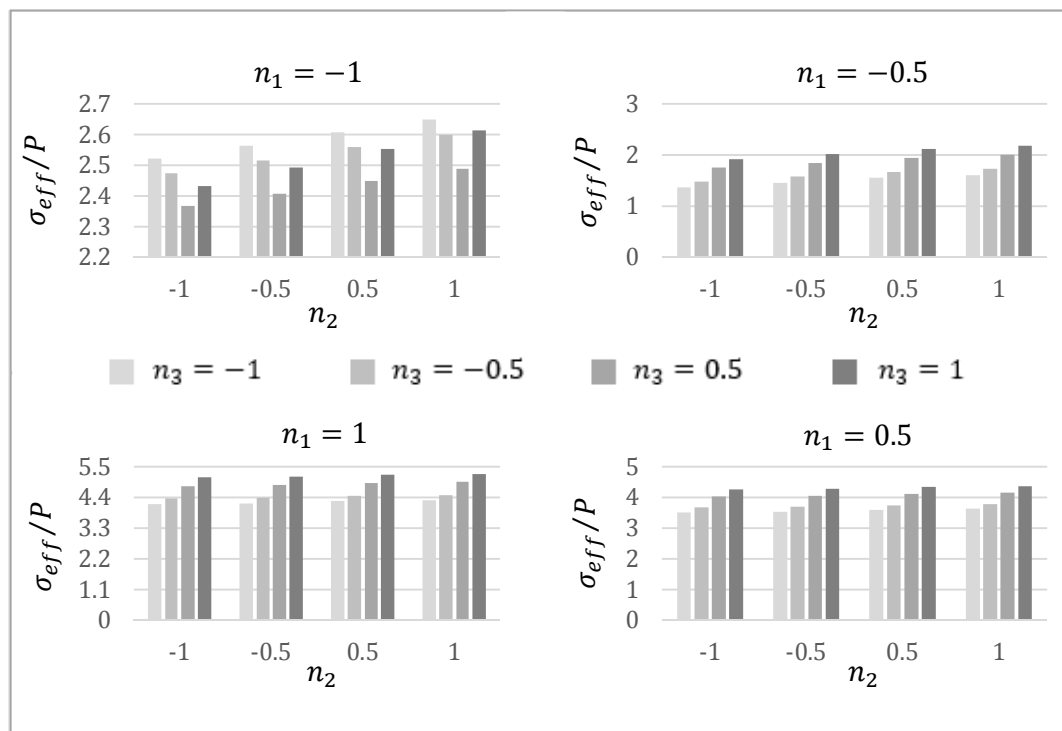
شکل ۴-۱۸ توزیع سه‌بعدی کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای



شکل ۴-۱۹ توزیع میله‌ای کمینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای



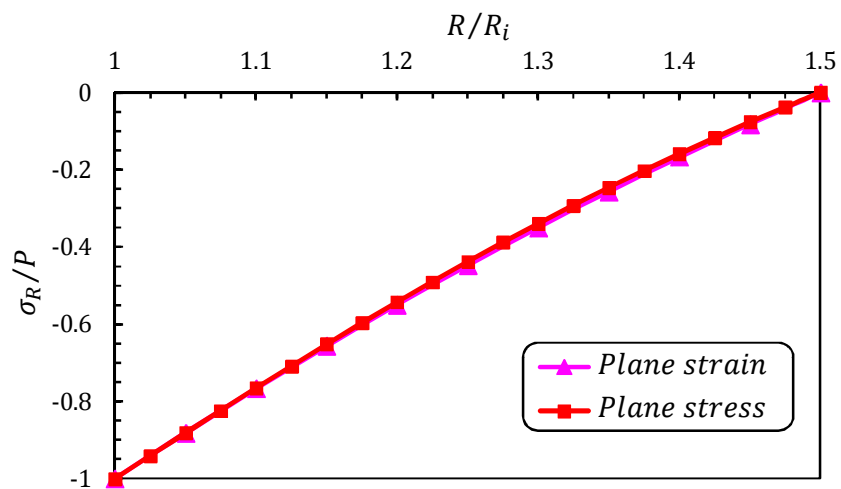
شکل ۴-۲ توزیع سه بعدی بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای



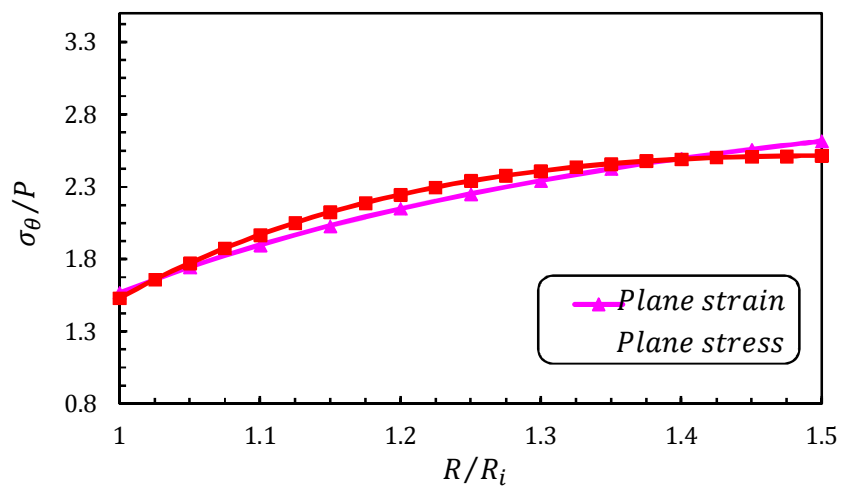
شکل ۴-۲۱ توزیع میله‌ای بیشینه تنش مؤثر نسبت به ضرایب ناهمگنی مختلف در حالت کرنش صفحه‌ای

در فصل قبل و برای استوانه‌ی FGM چرخان تحت فشار مشاهده شد که کمینه و بیشینه مقادیر تنش مؤثر تنها در سطوح داخلی و خارجی استوانه ایجاد می‌شود و منحنی‌های تنش به صورت یکنوا صعود و یا نزول می‌کنند. اما بررسی نمودارها در این بخش نشان می‌دهد که منحنی‌ها اکیداً صعودی و یا نزولی نبوده و مقدار کمینه و یا بیشینه‌ی تنش مؤثر ممکن است در مکانی غیر از سطوح داخل و خارج رخ می‌دهد. از طرف دیگر برخلاف نتایج حاصل از استوانه‌ی چرخان تحت فشار که ترکیب با کمترین مقدار تنش مؤثر در بین بیشینه تنش‌ها، کمترین مقدار را در بین کمینه تنش‌ها نیز داشت؛ با اضافه شدن دما به مجموعه شرایط تغییر کرده و این دو ویژگی متعلق به یک ترکیب واحد نخواهد بود. از دیگر تغییراتی که اعمال دمای ثابت به سطوح استوانه به وجود آورده آن است که بهینه‌ترین ترکیب در حالت تنش صفحه‌ای همان بهینه‌ترین مقادیر برای حالت کرنش صفحه‌ای نیست. با توجه به نمودارهای (۴-۱۴) تا (۴-۲۱) کمترین تنش مؤثر بیشینه در حالت تنش صفحه‌ای زمانی اتفاق می‌افتد که هر سه ضریب با هم برابر و مساوی عدد $0/5$ باشند. اما بهترین ترکیب در حالت کرنش صفحه‌ای انتخاب اعداد 1 ، -1 و $0/5$ به ترتیب برای ضرایب n_1 تا n_3 می‌باشد. ترکیبات بیان شده علاوه بر آن که کمترین تنش‌های مؤثر را در بین بیشینه مقادیر تنش دارند؛ کمترین تغییرات را نیز در طی ضخامت دارا هستند.

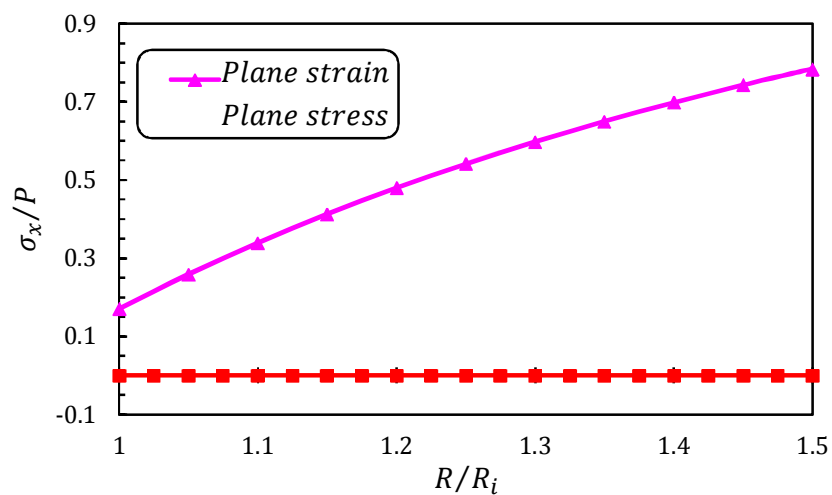
شکل‌های (۴-۲۲) تا (۴-۲۶) نمودار تنش‌ها و جابه‌جایی بهترین ترکیب ضرایب را در دو حالت تنش و کرنش صفحه‌ای برای استوانه‌ی FGM چرخان تحت فشار داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲۲ توزیع بهینه‌ی تنش شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای

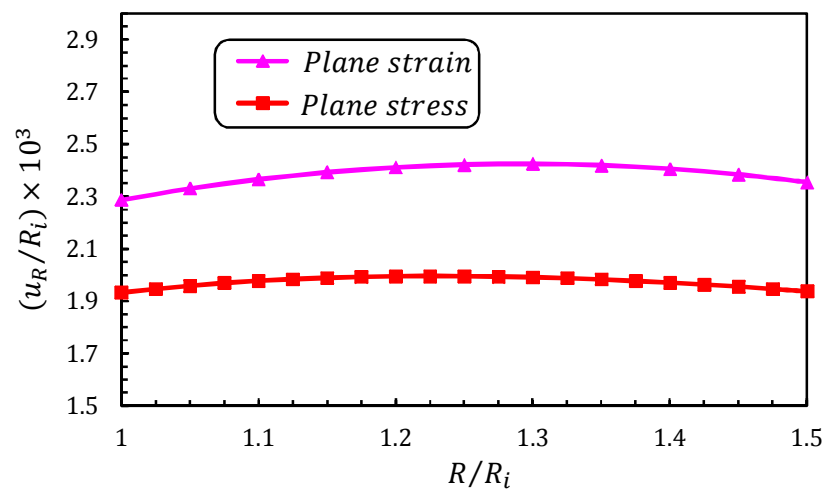


شکل ۴-۲۳ توزیع بهینه‌ی تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای



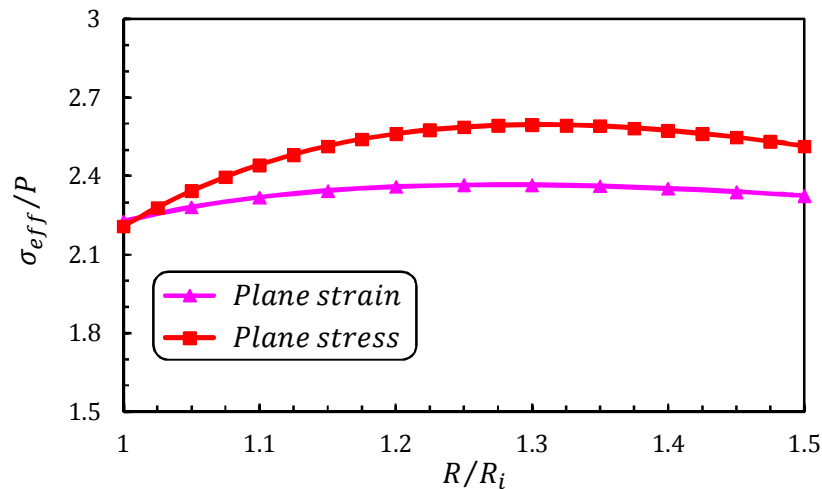
شکل ۴-۲۴ توزیع بهینه‌ی تنش طولی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت

داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای



شکل ۴-۲۵ توزیع بهینه‌ی جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت

داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای



شکل ۴-۲۶ توزیع بهینه‌ی تنش مؤثر در استوانه‌ی ناهمگن چرخان و تحت فشار یکنواخت

داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی در حالت تنش و کرنش صفحه‌ای

۴-۷ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در فصل قبل مشاهده شد که چرخش استوانه با سرعت‌های نسبتاً بالا نیز -در مطالعه‌ی موردی صورت گرفته- تأثیر چندانی بر توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی ایجاد شده در آن ندارد. اما اعمال دمای یکنواخت به سطوح داخلی و خارجی استوانه و در نتیجه تشکیل پروفیل دمایی در آن، تأثیر بسزایی بر مقادیر تنش و جابه‌جایی خواهد داشت. در بارگذاری حرارتی شرایط انتهایی تأثیر بیشتری نسبت به دو بارگذاری دیگر بر روی رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای می‌گذارد. در استوانه‌ی تحت شار حرارتی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد؛ درحالی‌که در استوانه‌ی تحت فشار داخلی، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش پیدا می‌کنند.

در استوانه‌های ناهمگن چرخان و تحت فشار و دما نیز همانند دو فصل گذشته، تنش شعاعی مستقل از شرایط انتهایی استوانه بوده و تنها به خواص مکانیکی ماده وابسته می‌باشند. اما تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی، هم به شرایط انتهایی و هم به خواص مکانیکی ماده وابسته هستند. نتایج حاصل از حل عددی، دارای تطابق بسیار خوبی با نتایج تحلیلی می‌باشند. می‌توان نتایج گرفت که با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، مقادیر تنش محیطی و تنش مؤثر در نیمه‌ی داخلی استوانه کاهش و در نیمه‌ی دیگر افزایش می‌یابند. رفتار مشابهی نیز برای تنش طولی و در شرایط کرنش صفحه‌ای مشاهده می‌شود. علاوه بر آن، با افزایش ضریب ناهمگنی، جابه‌جایی شعاعی کاهش و تنش شعاعی افزایش می‌یابند.

ترکیب بهینه‌ی ضرایب ناهمگنی در استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی و شار حرارتی برای حالت‌های تنش و کرنش صفحه‌ای متفاوت می‌باشد. عدد $0/5$ - برای هر سه ضریب در حالت تنش صفحه‌ای و اعداد 1 -، 1 - و $0/5$ به ترتیب برای ضرایب n_1 تا n_3 و در حالت کرنش صفحه‌ای، بهینه‌ترین طراحی را به دنبال خواهند داشت.

فصل ۵

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۵-۱ مقدمه

استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری، به دلیل مقاومت بالا در برابر انواع فشارهای داخلی و خارجی، نیروها و لنگرها، گرادیان دمایی و بارگذاری‌های متنوع دیگر کاربرد فراوانی در صنعت پیدا کرده‌اند. دستیابی به روش‌های مختلف تحلیل این گروه از پوسته‌ها با تغییرات هندسه، ماده و بارگذاری مورد علاقه‌ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران می‌باشد. در همین راستا در این رساله سعی شده است تا با ارائه‌ی روش حلّ تحلیلی بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی برای استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت ثابت در حالت تقارن محوری تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی، بارگذاری دورانی شامل چرخش با سرعت ثابت و بارگذاری حرارتی به صورت شار حرارتی یکنواخت در جداره‌ی استوانه ناشی از گرادیان دما، اثر هر یک از این بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف بر روی مقادیر تنش و جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای بررسی شود. همچنین قابلیت‌های تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و نکات قوت و ضعف آن بیان شده است. در این فصل ضمن جمع‌بندی کارهای صورت گرفته در این رساله، نتیجه‌گیری جامعی از مباحث مربوط به هر فصل صورت پذیرفته است و نهایتاً پیشنهادهایی برای ادامه و تکمیل کار نیز ارائه شده است.

۵-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

به طور کلی تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم (با جدار ثابت یا متغیر) در حالت متقارن محوری تحت انواع بارگذاری‌ها (شامل فشار محوری، فشار شعاعی، نیروهای دورانی، حرارتی و ...) با شرایط انتهایی مختلف با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی منجر به ایجاد معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم بر حسب جابه‌جایی شعاعی استوانه می‌شود. این معادله را با استفاده از روش تغییر متغیر می‌توان به یک معادله‌ی هایپرژئومتریک اصلاح شده تبدیل کرد. در این صورت معادله دارای حلّ دقیق بوده و در حالت بارگذاری فشاری به سادگی قابل حل می‌باشد. زمانی که استوانه دارای چرخش باشد، معادله از حالت

همگن خارج شده و تأثیر چرخش به صورت یک ترم ناهمگنی در آن ظاهر می‌شود. در این صورت حلّ معادله‌ی حاکم دشوار خواهد بود.

یکی از روش‌های حلّ معادلات دیفرانسیل ناهمگن، استفاده از روش لاگرانژ می‌باشد. این روش بر مبنای به دست آوردن یک حلّ خصوصی برای معادله‌ی ناهمگن و جمع نتیجه‌ی حاصل با حلّ عمومی معادله‌ی همگن متناظر عمل می‌کند. از آنجا که توابع معرفی شده برای حلّ دقیق معادله در بخش اول خود به صورت انتگرال‌های معین می‌باشند؛ لذا نمی‌توان از این شکل توابع در روش لاگرانژ و در به دست آوردن حلّ خصوصی استفاده کرد. پیشنهادی که برای حلّ معادله در این وضعیت ارائه شد، استفاده از بسط تیلور توابع به جای خود آنها بود. در این صورت به سادگی می‌توان حل به روش لاگرانژ را پیش برده و به جواب معادله‌ی حاکم رسید. علاوه بر این شیوه‌ی حل، جنبه‌ی دیگر نوآوری در این رساله تحلیل استوانه‌های ناهمگن FGM با بارگذاری‌ها و شرایط انتهایی مختلف به ازای مقادیر متفاوت از ضرایب ناهمگنی و نه ارائه‌ی حل تنها در حالت برابر بودن این ضرایب است. در نتیجه امکان بررسی بهینه‌ترین وضعیت در طراحی استوانه‌ها با در نظر گرفتن ترکیب‌های مختلف از ضرایب ناهمگنی فراهم می‌شود.

استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در حلّ مسائل متقارن محوری که در آنها تنش و یا کرنش برشی ایجاد نشود مناسب بوده و نتایج حاصل از آن دقیق می‌باشد. در صنعت مسائلی از این دست به وفور یافت می‌شوند.

حالت اول: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

همانطور که در فصل دوم اشاره شد، در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار، جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی مستقل از خواص مکانیکی و شرایط تکیه‌گاهی نبوده و به واسطه‌ی ضریب n به خواص مکانیکی و از طریق U^* به شرایط تکیه‌گاهی وابسته می‌شوند. تنش شعاعی نیز تنها به خواص مکانیکی وابسته است.

با بررسی توزیع جابه‌جایی و تنش‌های حاصل از تحلیل استوانه‌ی ناهمگن به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و مقایسه‌ی آنها با حلّ عددی صورت گرفته توسط نرم افزار آباکوس، انطباق خوبی در نتایج مشاهده می‌شود. می‌توان نتیجه گرفت که در استوانه‌ی جدار ضخیم با ضخامت ثابت، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی شعاعی منفی در استوانه می‌شود. برای استوانه تحت هر سه حالت بارگذاری، مواد ناهمگن با مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش جابه‌جایی در استوانه نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود در حالیکه مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش جابه‌جایی نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود. با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی و برای هر یک از دو نوع بارگذاری فشار داخلی و خارجی، مقادیر تنش محیطی و تنش مؤثر، در نیمه‌ی داخلی استوانه کاهش و در نیمه‌ی خارجی آن افزایش می‌یابند. رفتار مشابهی نیز برای تنش طولی و در شرایط کرنش صفحه‌ای مشاهده می‌شود. با افزایش ضریب ناهمگنی، کاهش در مقدار تنش شعاعی در استوانه با فشار خارجی قابل مشاهده است. در بارگذاری داخلی استوانه، مقدار تنش شعاعی با افزایش ضریب ناهمگنی افزایش می‌یابد. ماده با ضریب ناهمگنی $n = 1$ می‌تواند بهترین انتخاب برای تولید استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار باشد چرا که علاوه بر داشتن کمترین مقادیر در تنش مؤثر و جابه‌جایی شعاعی، دارای توزیع با گرادیان تغییر مقادیر بسیار اندک در دیواره‌ی استوانه می‌باشد.

حالت دوّم: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای سرعت‌های نه چندان زیاد، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی و فشاری بسیار مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. اما چرخش با سرعت ثابت ۳۶۰۰ rpm، تغییرات نسبتاً کمی را در مقادیر تنش‌ها و جابه‌جایی نسبت به استوانه‌ی همگن ایجاد می‌کند. این تغییرات در لایه‌ی داخلی استوانه بیشینه هستند. به عنوان مثال در سطح داخلی و به ازای ثابت ناهمگنی $n = 1$ ، شاهد حدود ۲۸ MPa اختلاف در مقدار تنش مؤثر و

حدود $3/5 \mu\text{m}$ اختلاف مقدار جابه‌جایی شعاعی هستیم. در استوانه‌های ناهمگن چرخان و تحت فشار نیز تنش شعاعی مستقل از شرایط انتهایی استوانه بوده و تنها به خواص مکانیکی ماده وابسته می‌باشند. اما تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی، هم به شرایط انتهایی و هم به خواص مکانیکی ماده وابسته هستند. نتایج حاصل از حلّ تحلیل عددی، دارای تطابق بسیار خوبی می‌باشند. می‌توان نتایج گرفت که با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، مقادیر تنش محیطی و تنش مؤثر در نیمه‌ی داخلی استوانه کاهش و در نیمه‌ی دیگر افزایش می‌یابند. رفتار مشابهی نیز برای تنش طولی و در شرایط کرنش صفحه‌ای مشاهده می‌شود. علاوه بر آن، با افزایش ضریب ناهمگنی، جابه‌جایی شعاعی کاهش و تنش شعاعی افزایش می‌یابند.

در استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی با انتخاب مقادیر $+1$ و -1 به ترتیب برای ضرایب ناهمگنی n_1 و n_2 و در هر دو حالت تنش و کرنش صفحه‌ای، تنش مؤثر ایجاد شده در استوانه دارای کمترین مقدار نسبت به هر ترکیب دیگر از این دو ضریب می‌باشد. علاوه بر آن، تنش دارای توزیع تقریباً یکنواختی در دیواره‌ی استوانه بوده که ویژگی بسیار مطلوبی در طراحی به شمار می‌رود. لذا از این اعداد می‌توان به‌عنوان بهینه‌ترین ترکیب جهت طراحی استوانه‌های چرخان FGM تحت فشار داخلی یاد کرد.

حالت سوم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

با توجه به آنچه فصل چهارم بیان شد، اعمال دمای ثابت به سطوح داخلی و خارجی استوانه و در نتیجه تشکیل پروفیل دمایی در آن، تاثیر بسزایی بر مقادیر تنش و جابه‌جایی دارد. در بارگذاری حرارتی شرایط انتهایی تأثیر بیشتری نسبت به دو بارگذاری دیگر بر روی رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای می‌گذارد. در استوانه‌ی تحت دما از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد؛ درحالی‌که در استوانه‌ی تحت فشار داخلی، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش پیدا می‌کنند. در استوانه‌های ناهمگن چرخان و تحت فشار و دما نیز همانند

دو فصل گذشته، تنش شعاعی مستقل از شرایط انتهایی استوانه بوده و تنها به خواص مکانیکی ماده وابسته می‌باشند. اما تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی، هم به شرایط انتهایی و هم به خواص مکانیکی ماده وابسته هستند.

نتایج حاصل از حلّ تحلیل عددی، دارای تطابق بسیار خوبی می‌باشند. می‌توان نتایج گرفت که با افزایش مقدار ضریب ناهمگنی، مقادیر تنش محیطی و تنش مؤثر در نیمه‌ی داخلی استوانه کاهش و در نیمه‌ی دیگر افزایش می‌یابند. رفتار مشابهی نیز برای تنش طولی و در شرایط کرنش صفحه‌ای مشاهده می‌شود. علاوه بر آن، با افزایش ضریب ناهمگنی، جابه‌جایی شعاعی کاهش و تنش شعاعی افزایش می‌یابند.

ترکیب بهینه‌ی ضرایب ناهمگنی در استوانه‌های ناهمگن چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و دمای ثابت داخلی و خارجی برای حالت‌های تنش و کرنش صفحه‌ای متفاوت می‌باشد. عدد $0/5$ - برای هر سه ضریب در حالت تنش صفحه‌ای و اعداد -1 ، -1 و $0/5$ به ترتیب برای ضرایب n_1 تا n_3 و در حالت کرنش صفحه‌ای، بهینه‌ترین طراحی را به دنبال خواهند داشت.

۳-۵ پیشنهادها

با توجه به کارهایی که در گذشته در رابطه با موضوع این رساله انجام شده و شیوه‌ی حلی که در این پژوهش ارائه شد، می‌توان دریافت که قابلیت بسیار فراوانی در تحلیل مسائل مشابه که تا پیش از این به شیوه‌ی غیر تحلیلی و با ساده‌سازی فراوان حل می‌شد، وجود دارد. به همین منظور جهت تکمیل این بررسی‌ها و با توجه به کاربرد وسیع و متنوع پوسته‌های استوانه‌ای پیشنهادات زیر ارائه می‌گردد:

- ۱- در نظر گرفتن رفتار پلاستیک استوانه به صورت ویسکوالاستیک، کرنش سختی خطی به جای پلاستیک کامل.

۲- حلّ مسأله با در نظر گرفتن شرایط ناپایا در تحلیل حرارتی استوانه.

۳- تحلیل مسأله در معرض سایر نیروهای حجمی با حفظ شرایط تقارن محوری.

۴- تحلیل مسأله با در نظر گرفتن خاصیت پیزوالکتریک برای ماده‌ی ناهمگن.

۵- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای با مقاطع بیضوی در دستگاه بیضی‌گون.

مراجع

- [1] Flugge W. (1973) "Stresses in Shells" 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- [2] یوگورال ای. سی. (۱۳۷۵)، "تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها"، ترجمه‌ی غلامحسین رحیمی، چ اول، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، دانشگاه تهران
- [3] Timoshenko S.P. & Goodier J.N.(1983) "Theory of Elasticity" 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- [4] Naghdi P.M. & Cooper R.M. (1956) "Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia" **J. Acoustical Sci. America**, **28**, **1**, pp 56-63.
- [5] Mirsky I. & Hermann G.(1958) "Axially motions of thick cylindrical shells" **J. Appl. Mech.** **25**, pp 97-102.
- [6] Greenspon J.E.(1960) "Vibration of a thick-walled cylindrical shell, comparison of the exact theory with approximate theories" **J. Acoustical Sci. America** **32**, **5**, pp 571-578.
- [7] Timoshenko S.P.(1976) "Strength of Materials: Part II (Advanced Theo. and Prob.)" 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York.
- [8] Boresi P. & Chong K. & Lee J.D.(2010) "Elasticity in Engineering Mechanics" 3rd ed., John Wiley.
- [9] Mindlin R.D.(1951) "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates" **J. Appl. Mech.**, **18**, pp 31-38.
- [10] Lekhnitskii S.G.(1981) "Theory of Elasticity of An Anisotropic Body" Mir Pub., Moscow.
- [11] Suresh S. & Mortensen A.(1998) "Fundamentals of Functionally Graded Materials" Cambridge Pub., London.
- [12] Koizumi M. & Niino M.(1995) "Overview of FGM research in Japan, **MRS Bulletin**" **20**, pp 19-21.
- [13] Koizumi M.(1997) "FGM activities in Japan, **Composites: Part B(Engineering)**" **28B**, pp 1-4.

- [14] Yamanouchi M. & Koizumi M. & Hirai M. & Shiota I.(1990) “Proceedings of the first international symposium on FGM, functionally gradient materials forum and the society of non-traditional technology”, Japan.
- [15] Koizumi M.(1993) “**The concept of FGM, Ceramic Transactions Functionally Graded Material**” **34**, pp **3-10**.
- [16] Obata Y. & Noda N.(1994) “Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material” **J. Thermal Stresses**, **17**, pp **471-487**.
- [17] Horgan C.O. & Chan A.M.(1999) “The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials” **J. Elasticity**, **55**, pp **43-59**.
- [18] Yang Y.Y.(2000) “Time-dependet stress analysis in functionally graded materials” **Int. J. Solids and Struc.**, **37**, pp **7593-7608**.
- [19] Tutuncu N. & Ozturk M.(2001) “Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels” **J. Composites: Part B(Engineering)**, **32B**, pp **683-686**.
- [20] Tarn J.Q.(2001); Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads” **Int. J. Solds and Struc.**, **38**, pp **9189-8206**.
- [21] Jabbari M. & Sohrabpour S. & Eslami M.R.(2002) “Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads” **Int. J. Pressure Vessel and Piping**, **79**, pp **493-497**.
- [22] Eraslan A.N. & Akis T.(2006) “On the plain strain and plane stress solution of functionally graded solid shaft and solid disk problems” **J. Acta Mechanica**, **181**, pp **4363**.
- [23] Hongjun X. & Zhifei S. & Taotao Z.(2007) “Elastic analysis of heterogeneous elastic hollow cylinders” **J. Composite Struc.**, **79**, pp **140-147**.
- [24] Praveen G.N. & Reddy J.N.(1998) “Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded Ceramic-Metal plates” **Int. J. Solids and Struc.** **35**, pp **4457-4476**.
- [25] Tutuncu N. & Temel B.(2009) “A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres” **J. Composite Struc.**, **91**, pp **385-390**.
- [26] Shao Z.S. & Ma G.W.(2008) “Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature” **J. Composite Struc.**, **83**, pp **259-265**.

- [27] Tutuncu N.(2007) “Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties” **J. Eng. Struc.**, **29**, pp **2032-2035**.
- [28] Keles & Conker C.(2011) “Transient hyperbolic heat condition in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties” **European Journal of Mechanics A/Solids**, **30**, pp **449-455**.
- [29] Ziv M. & Perl M.(1973) “Impulsive deformation of Mirsky-Hermann's thick cylindrical shells by a numerical methods” **J. Appl. Mech.**, pp **1009-1016**.
- [30] Suzuki K. & Konnon M. & Takahashi S.(1981) “Axisymmetric vibration of a cylindrical shell with variable thickness” **JSME**, **24**, **198**, pp **2122-2132**.
- [31] Takahashi S. & Suzuki K. & Kosawada T.(1986) “Vibrations of conical shells with variable thickness” **JSME**, **29**, **285**, pp **4306-4311**.
- [32] Eipakchi H.R. & Rahimi G.H. & Esmaeilzadeh Kh., S.(2003) “Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to nonuniform internal pressure” **Struc. Eng. and Mech.**, **16**, **6**, pp **731-748**.
- [33] Eipakchi H.R. & Esmaeilzadeh Kh. S. & Rahimi G.H.(2008) “Axisymmetric stress analysis of a thick conical shell with varying thickness under nonuniform internal pressure” **J. Eng. Mech. .ASCE**, **134**, **8**, pp **601-610**.
- [34] Ghannad M. & Zamani Nejad M. & Rahimi G.H.(2009) “Elastic solution of axisymmetric thick truncated conical shells based on first-order shear deformation theory” **J. Mechanika**, **5**, **79**, pp **13-20**.
- [35] Ghannad M. & Zamani nejad M.(2010) “Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends” **J. Mechanika**, **5**, **85**, pp **11-18**.
- [36] Eipakchi H.R.(2010) “Third-order shear deformation theory for stress analysis of a thick conical shell under pressure” **J. OF Mechanics OF Materials and Structures**, **1**, **5**, pp **1-17**.
- [37] Fukui Y. & Yamanaka N.(1992) “Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded materials subjected to internal pressure” **JSME, Ser. I**, **35**, **4**, pp **891-900**.
- [38] Loy C.T. & Lam K.Y. & Reddy J.N.(1999) “Vibration of functionally graded cylindrical shells” **Int. J. Mech. Sci.**, **41**, pp **309-324**.
- [39] Horgan C.O. & Chan A.M.(1999) “The stress response of functionally graded isotropic linearly rotating disks” **J. Elasticity**, **55**, pp **219-230**.

- [40] Jabbari M. & Sohrabpour S. & Eslami M.R.(2003) "General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads" **J. Appl. Mech.**, **70**, pp 111-118.
- [41] Zhifei S. & Taotao Z. & Hongjun X.(2007) "Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders" **J. Composite Struc.**, **79**, pp 140-147.
- [42] Zamani Nejad M. & Rahimi G.H. & Ghannad M.(2009) "Set of field equations for thick shell of revolution made of functionally graded materials in curvilinear coordinate system" **J. Mechanika**, **3**, 77, pp 18-26.
- [۴۳] قناد م.، رحیمی غ. و اسماعیل‌زاده خادم س.، پاییز ۱۳۸۹ "حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی"، **مجله فنی و مهندسی مدرس-مهندسی مکانیک**، جلد ۱۰، شماره ۳، ص ۳۱-۴۱.
- [۴۴] قناد م.، رحیمی غ. و اسماعیل‌زاده خادم س.، زمستان ۱۳۸۹ "حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی"، **مجله فنی و مهندسی مدرس-مهندسی مکانیک**، جلد ۱۰-شماره ۴، ص ۱۳-۲۵.
- [45] Arefi M. & Rahimi G.H.(2010) "Thermo elastic analysis of a functionally graded cylinder under internal pressure using first order shear deformation theory" **J. Scientific Research and Essays**, **5**, 12, pp 1442-1454.
- [46] Ghorbanpour Arani A. & Kolahchi R. & Mosallaie Barzoki A.A.(2011) "Effect of material in-homogeneity on elec. thermo-mechanical behaviors of functionally graded piezoelectric rotating shaft" **J. Applied Mathematical Modelling**, **6**, 35, pp 2771-2789.
- [47] Bayat Y. & Ghannad M. & Torabi H.(2012) "Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading" **Archieve of applied mechanics**, **89**, pp 229-242.
- [48] Ghannad M. & Zamani Nejad M.(2012) "Complete closed-form solution for pressurized heterogeneous thick spherical shells" **Mechanika**, **18**, 5, pp 508-516.
- [49] Ghannad M. & Zamani Nejad M.(2012) "Complete elastic solution of pressurized thick cylindrical shells made of heterogeneous functionally graded materials" **Mechanika**, **18**, 6, pp 640-649.
- [50] Ghannad M. & Zamani Nejad M.(2012) "Elastic analysis of heterogeneous thick cylinders subjected to internal or external pressure using shear deformation theory" **Acta Polytechnica Hungarica**, **9**, 6, pp 117-136.
- [51] Ghannad M. & Gharooni H.(2012) "Displacements and stresses in pressurized thick

- FGM cylinders with varying properties of power function based on HSDT” **Journal of Solid Mechanics, 4, 3**, pp 237-251.
- [52] Kursun A. & topcu M. & Yucel U.(2012) “Stress analysis of a rotating FGM circular disk with exponentially-varying properties” *IMECE*, 8, pp 659-663.
- [53] Ghannad M. & Jabbari M. & Zamani Nejad M.(2012) “A semi-analytical solution for elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness using disk form multilayers” **The Scientific World Journal**, pp 11-25.
- [54] Ghannad M. & Rahimi G.H. & Zamani Nejad M.(2013) “Elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness made of functionally graded materials” **Composites: Part B, 45**, pp 388-396.
- [55] Polyanin A.D. & Zaitsev V.F.(2003) “**Exact solutions for ordinary differential equations**”, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton.
- [56] Abramowitz M. & Stegun I.A.(1972) “**Handbook of Mechanical Functions**” 10th ed., United states department of commerce, Washington D.C.
- [57] Abaqus 6.13 Documentation.

Abstract:

The aim of this study is to investigate and modeling the associated stress and displacement of thick walled heterogeneous cylinder under mechanical and thermal loading. The governing equation of the thick cylinders have been extracted for exponentially varying properties of material under internal and external pressure, the solution of the final equation has been indicated and by case study, results and graphs of the stress and displacement distribution for different boundary conditions have been indicated. For investigating the accuracy of results conducted from analytical solution, the numerical modeling of cylinder has been done and the results of two methods compare. Also, for elastic analysis of rotary cylindrical shells, by doing general solution of the cylinders under pressure loading, stress and displacement distribution for different B.C has been indicated and the results compared with that of analytical solution. Furthermore, thermo-elastic analysis of the cylindrical shells under pressure and uniform heat flux for different boundary conditions have been conducted and comparing the results with that of numerical shows that plane elasticity theory is a very efficient method on thermo elastic analysis. Finally conclusion, discussion and suggestion have been indicated.

Key words: Thick cylinders, Plane elasticity theory, Analytical solution, Exponentially varying properties, FGM, FEM.



Shahrood University

Faculty of Mechanical Engineering

**Complete solution of rotating FGM pressurized
thick hollow cylinder under thermal load with
exponential-varying properties based on PET**

Masoud Babaei

Supervisor:

Dr. Mehdi Ghannad

Sep 2014