بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

بررسی عددی ناپایداری سه بعدی تیلور – کوئت سیالات ویسکوالاستیک بین دو استوانه چرخان هم مرکز

دانشجو : علی جعفری

استاد راهنما : دکتر محمود نوروزی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای علی جعفری رشته مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی تحت عنوان بررسی عددی ناپایداری سه بعدی تیلور – کوئت سیالات ویسکوالاستیک بین دو استوانه چرخان هم مرکز که در تاریخ ۹۲/۱۱/۲۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸,۴۹) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	محمود نوروزی	استادیار	
۲ـ استاد مشاور	ــــــــ		
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	علی خالقی	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	علی جباری مقدم	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	پوریا اکبرزاده	استادیار	

رئیس دانشکده : آقای دکتر محمدمحسن شاه‌مردادن

ش. مردان

انیشتین معتقد بود که جسم واحدهای انرژی از خود گسیل می کنـد و نـام آن واحدها را «فوتون» نهاد. به امید آن روز که ربایندگان دیروز علوم ما، اسوه امروز پژوهشگرانمان نباشند. این پژوهش

تقدیم به مردی که هزار سال قبل از انیشتین، اجزاء لطیفه (فوتون) را کشف کرد.

تقدیم به مردی که صدها سال قبل از نیوتن، قوه جاذبه (گرانش) را تعریف کرد.

تقدیم به مردی که چند سده قبل از بور، سرعت نور را بیش از آوا (صوت) دانست.

تقدیم به مردی که شش سده قبل از گریوری و با دقت بالاتر گاه شمار را معرفی نمود.

تقدیم به مردی که هزار سال قبل، شعاع زمین را به درستی اندازه گرفت.

و . . .

تقدیم به ابوریحان محمد بن احمد بیرونی

تشکر و قدردانی:

با سپاس از مهر ایزد یکتا

با تشکر از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر محمود نوروزی که با ایجاد انگیزه مطالعه و درک شرایط بنده، با ارائه‌ی رهنمودهای راهگشا، مسیر دشوار این پژوهش را هموار ساختند.

از استادان محترمی که در طول دوران تحصیلی‌ام جهت آموزش و ارتقای علمی بنده، زحمت کشیده اند سپاسگزارم. به خصوص آقای دکتر مجید صفرآبادی، آقای دکتر وحید وکیل الرعایا و آقای دکتر علی جباری مقدم.

در پایان هم از همراهی دوستان عزیزم مهندس آشوری، شوقی صمیمانه قدردانی نمایم و از خداوند منان آرزوی سلامت و توفیق روزافزون برایشان دارم.

دانشجو تأیید می‌نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضـوع ایـن پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

بهمن ۱۳۹۲

تعهد نامه

اینجانب علی جعفری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته تبدیل انرژی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **بررسی عددی ناپایداری سه بعدی تیلور – کوئت سیالات ویسکوالاستیک بین دو استوانه چرخان هم مرکز** تحت راهنمائی **دکتر محمود نوروزی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.**

*** متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .**

چکیده

بررسی های اخیر حول ناپایداری تیلور-کوئت سیال ویسکوالاستیک بیشتر به شکل دو بعدی و برپایه سیالاتی با عدد الاستیک ناچیز و با کمک معادله ساختاری اولدروید-بی صورت پذیرفته است. در این پژوهش با استعانت از روش های دینامیک سیالات محاسباتی و در بستر نرم افزار OpenFoam مدل‌سازی سه بعدی از ناپایداری مذکور براساس معادله ساختاری گزیکس انجام شده است. مدل‌سازی سه بعدی این امکان را فراهم آورده است، که الگوهای نامتقارن جریان ثانویه این ناپایداری به خصوص الگوی موج گذار محوری و الگوی موج نوسانی ایستا برای اولین بار با اتکا بر معادله ساختاری گزیکس آشکار گردد.

در قیاسی که بین جریان‌های نیوتنی و ویسکوالاستیک انجام می‌پذیرد، تنش حلقوی به عنوان عامل موثر در افزایش گرادیان فشار و ایجاد ناپایداری ویسکوالاستیک تیلور-کوئت تبیین می‌شود. در ادامه تغییرات تنش حلقوی در تولد سایر الگوها مورد کنکاش قرار می‌گیرد و بدین ترتیب نقش اساسی این عامل در ایجاد ناپایداری و پیدایش سایر الگوها جریان ثانویه آشکار می‌گردد. همچنین در کنار تعیین اعداد تیلور بحرانی عوامل موثر بر این شاخص پایداری بررسی می‌شوند. بر طبق نتایج به دست آمده زمان رهایی از تنش به کندی از میزان عدد تیلور بحرانی می‌کاهد. در صورتی که ضریب تحرک تأثیر بیشتری بر شرایط بحرانی داشته و سبب کاهش های قابل توجهی در عدد تیلور می‌گردد. همچنین نسبت لزجت چنان موثر است که اغلب با تغییر کوچکی الگوی جریان ثانویه دچار تغییر می‌گردد.

کلمات کلیدی: ناپایداری تیلور-کوئت، معادله گزیکس، الگوهای نامتقارن

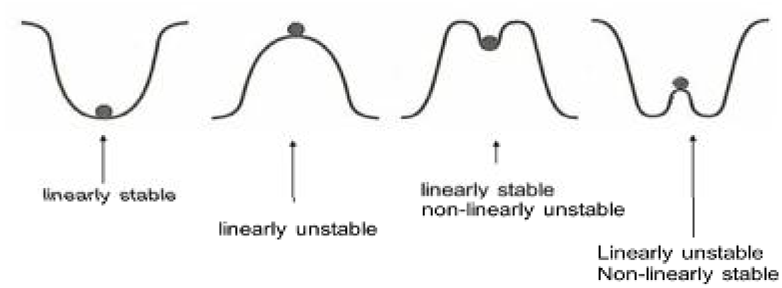
فهرست مطالب

فصل اول

مقـــدمه

۱-۱) مقدمه

تمامی حل های پایایی[1] که برای سیستم‌ها و مسایل مکانیکی از جمله مسایل مربوط به مکانیک سیالات از روش های کلاسیک ارایه می‌شوند بر این مبنا هستند که هیچ‌گونه اغتشاشی در سیستم وجود ندارد. اما همواره در شرایط واقعی مقداری اغتشاش به علل مختلف در سیستم وجود دارد یا از محیط پیرامون به آن تحمیل می‌شود. این اغتشاشات ممکن است بر روی سیستم مورد بحث تأثیر بگذارند و در نتیجه تمامی تحلیل ابتدایی مسئله را بی‌ارزش نمایند و به سیستم را ناپایدار کنند. لذا دانستن اینکه تا چه زمانی حل ابتدایی صحت دارد و یا اینکه شرایط بحرانی برای خروج سیستم از حالت تعادل (مرز پایدار و ناپایدار بودن سیستم) کجاست (شکل (۱-۱)) از اهمیت خاصی برخوردار است.



شکل (۱-۱): انواع تعادل در یک سیستم

برای دست یافتن به این مهم روش های متفاوتی وجود دارد:

۱) آنالیز خطی:

در اینجا با در نظر گرفتن معادلات متشکله سیستم و اعمال یک اغتشاش به شکل یک متغیر مختلط به آنها، معادلات دیفرانسیل جزئی پدید می‌آید که با فرض یک جواب برای آن (اغلب به

[1] Steady State

شکل پریودیک) و استفاده از ابزار ریاضیات مهندسی پارامترهای بحرانی مسئله را تعیین می‌نمایند.

۲) آنالیز غیر خطی:

اطلاعاتی که آنالیز خطی ارایه می‌دهد بسیار کلی است و اغلب اوقات شرایط بعد از ناپایداری و یا شرایط سیال و جریان را در یک نقطه خاص تعیین نمی‌کند. لذا برای تعیین خصوصیات جریان ثانویه، دامنه نوسانات، عدد موج و به طور کلی بازبینی مسئله بعد از اعمال اغتشاش و ایجاد ناپایداری، احتیاج به آنالیز غیر خطی می‌باشد. البته شایان ذکر است آنالیز خطی در بسیاری از مواقع در تعیین مرز ناپایداری نیز دارای خطا است، اما برای برآوردهای مهندسی ابزاری قابل اتکا می‌باشد.

۳) مطالعات تجربی:

ایجاد شرایط آزمایشگاهی و مطالعه تجربی مسئله محور اصلی این روش است؛ اما اگر کوچک‌ترین تغییری در شرایط فیزیکی مسئله ایجاد گردد نتایج مطالعات دیگر قابل اتکا نبوده و تنها دید کلی در چارچوب مسئله ارایه می‌گردد.

۴) مطالعات عددی:

در مدل‌سازی عددی و استفاده از مفاهیم از دینامیک سیال محاسباتی همواره مقداری اغتشاش را به مسئله تحمیل می‌کنند. در اینجا رشد ناگهانی این اغتشاشات معرف شرایط بحرانی است. شایان ذکر است این پروژه از چنین ایده‌ای سود برده که در فصول آینده با جزئیات بیشتری شرح داده خواهد شد.

به هر شکل، ناپایداری‌ها متنوع و گوناگونی در مسایل مربوط به علم مکانیک و بخصوص مکانیک سیالات تاکنون معرفی گردیده است. از آن جمله می‌توان به ناپایداری تیلور–کوئت[۱] اشاره نمود که موضوع بحث این نوشتار می‌باشد. دو دانشمند به نام های تیلور و کوئت (شکل (۱-۲))، هریک از دیدگاه خود جریان بین دو استوانه هم مرکز چرخان را بررسی نمودند و شرایط و جزئیات جریان مذکور را شرح دادند. امروزه ناپایداری جریان بین دو استوانه چرخان که یکی از رایج‌ترین ناپایداری‌ها در صنایع مختلف می‌باشد با نام ناپایداری تیلور-کوئت شناخته می شود. از آن‌جا که صنایع مختلف درگیر این ناپایداری هستند، جریان شناسی آن مورد توجه محققین علم مکانیک سیالات قرار دارد. از جمله موارد صنعتی درگیر با این ناپایداری می‌توان به تجهیزاتی همچون یاتاقان‌ها، همزن‌ها (صنایع غذایی و دارویی)، مته‌های حفاری [۱]، دستگاه‌های اندازه‌گیر خواص سیال (رئومترها و ویسکومترها) و ... اشاره نمود. برای طراحی هر یک از تجهیزات صنعتی ذکرشده چه از لحاظ تأثیر بر دقت اندازه‌گیری‌ها و چه از لحاظ بهینه بودن مصرف انرژی پیش‌بینی ناپایداری و ویژگی های جریان ثانویه حاصله بسیار مهم است.

شکل (۱-۲): سر جفری اینگرام تیلور[۲] (سمت راست)؛ مایریس ماری آلفرد کوئت[۳] (سمت چپ)

[1] Taylor-Couette instability
[2] Sir Geoffrey Ingram Taylor
[3] Maurice Marie Alfred Couette

امکان بروز این ناپایداری در جریان سیال بین دو استوانه‌ی هم راستا که با سرعت زاویه‌های دلخواهی در حال دوران هستند، وجود دارد. بدین ترتیب که با بالا رفتن سرعت های زاویه‌ای توامان و یا تنها افزایش سرعت زاویه‌ای استوانه داخلی از یک حد معین، جریان های ثانویه‌ای شروع به رشد می‌کنند. هر چند که چرخش استوانه داخلی شرط لازم وقوع این ناپایداری است؛ اما منشاء این ناپایداری به عوامل مختلفی بازمی‌گردد. خواص سیال، مقادیر سرعت زاویه ای هر استوانه، مشخصات هندسی مسئله، هم مرکز یا خارج مرکز بودن دو استوانه نسبت به هم از مهم‌ترین این عوامل می‌باشد (اکثر مطالعات از تأثیرات نیروی گرانش بر جریان چشم‌پوشی می‌کنند). از نظر دینامیکی نیز برهم‌کنش نیروی جانب مرکز حاصل از دوران استوانه‌ها و گرادیان فشار در راستای شعاعی دلیل اصلی ایجاد این ناپایداری است. البته عامل اصلی در ناپایدار شدن جریان تیلور-کوئت سیالات غیر نیوتنی، اختلاف تنش نرمال اولی است که باعث بروز تنش محوری در راستای جریان اصلی شده و این تنش کشیدگی بزرگی در خطوط جریان ایجاد می‌کند. لذا شاخص پیش‌بینی پایداری یا ناپایداری جریان نیوتنی عدد بدون بعد تیلور و این شاخص برای جریان غیر نیوتنی اعداد بی بعد تیلور[1] و وایزنبرگ[2] توامان و یا عدد الاستیک[3] می‌باشد. بدین ترتیب اگر اعداد تیلور مسئله‌ای با سیال نیوتنی از یک حد بحرانی کمتر باشد جریان پایدار باقی می‌ماند و اگر بیشتر باشد جریان ناپایدار شده و جریان ثانویه ایجاد خواهد شد. این در حالی است که برای سیالات غیر نیوتنی علاوه بر قیاس عدد تیلور باید میزان عدد وایزنبرگ جریان یا عدد الاستیک سیال را نیز در نظر داشت.

از طرف دیگر این ناپایداری خود دارای سطوح مختلفی است، به شکلی که بسته به میزان تجاوز عدد تیلور از حد بحرانی و شرط های مرزی امکان شکل‌گیری انواع الگوهای جریان ثانویه

[1] Taylor Number
[2] Wisenberg Number
[3] Elastic Number

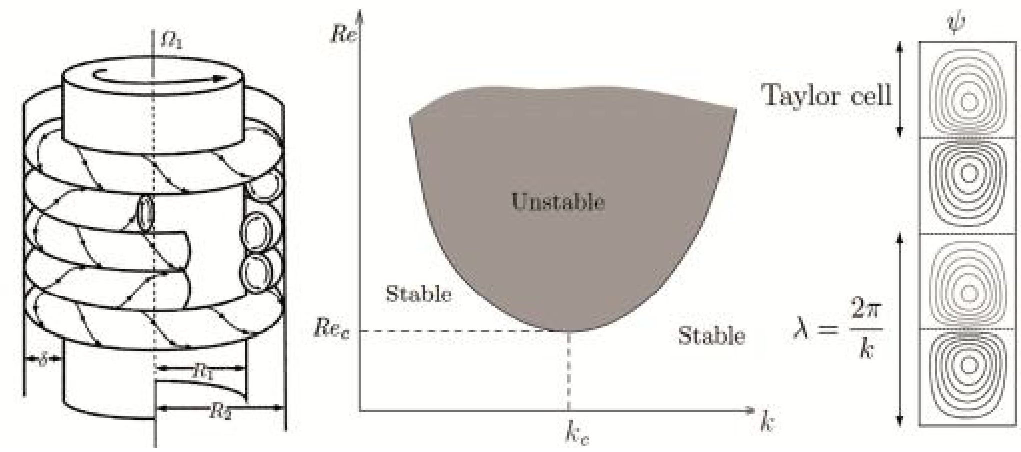
وجود دارد. بنابراین برای یک مسئله مشخص اعداد تیلور بحرانی سطح یک، دو و... تعریف می‌نمایند. تجاوز از هر یک از این اعداد باعث ظهور جریان ثانویه‌ای با الگو تازه‌ای می‌شود.

تلاش دانشمندان و محققان این عرصه معطوف به تعیین دقیق مرز ناپایداری، تعیین خصوصیات الگوهای جریان ثانویه و مرز بین این الگوها با توجه به شرایط مرزی و خصوصیات سیال جاری است.

۱-۲) تاریخچه

نخستین بار جریان بین دو استوانه، در مورد سیال غیر لزج در سال ۱۹۱۶ توسط رایلی[۱] [۲] بررسی شد و فون کارمن[۲] [۳] با همین فرض حل دیگری را ارایه نمود. سپس تیلور [۴, ۵] بررسی تحلیلی را این بار با فرض لزج بودن سیال، ارایه کرد. وی دریافت اگر سرعت زاویه‌ای استوانه داخلی از حدی بالاتر رود و استوانه خارجی در حال سکون باشد. مؤلفه‌های شعاعی و محوری بردار سرعت به شکل نمایی رشد می‌کنند و در نهایت جریانی شامل جفت گردابه های متقارن محوری در طول استوانه تشکیل می‌گردد. این الگو جریان با نام جریان گردابه ای تیلور[۳] شناخته می‌شود. طبق محاسبات تیلور هر جفت گردابه، طول موج (λ) و یک عدد موج (k) دارد و لذا جریان در یک رینولدز و عدد موج بحرانی ناپایدار می‌شود. خطوط جریان مربوط به جریان ثانویه نیز نمایانگر واحد های مربعی شکلی هستند این واحدها امروزه به سلول تیلور[۴] معروف هستند (شکل (۱-۳)). لازم به ذکر است که بعدها شاندرآسکر[۵] [۶, ۷] حل های تیلور و فون کارمن را بهبود بخشید.

[1] Rayleigh
[2] Karman, T.von
[3] Taylor vortex flow
[4] Taylor cell
[5] Chandrasekhar

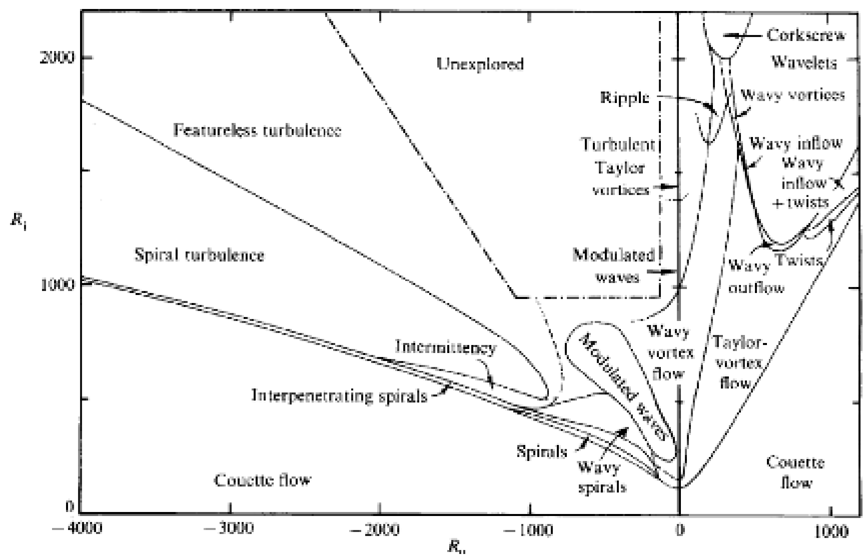


شکل (۱-۳): الف: جریان ثانویه تیلور ور تکس. ب: نمودار پایداری برحسب عدد رینولدز و عدد موج ج) سلول های تیلور

به‌هرحال در آن زمان ریاضیات توانایی حل کامل این نوع مسائل ناپایداری را نداشت و بیشتر تحقیقات بر پایه تجربه و آزمایش صورت می‌گرفت. از نخستین مطالعات تجربی می‌توان به کوشش های کول[1] [۸] اشاره نمود. وی در سال ۱۹۶۷ با مطالعه استوانه‌های هم مرکز و مختلف المرکز با مشخصات هندسی معین، مقادیر سرعت زاویه‌ای بحرانی را که در آن‌ها گردابه ها دیده می‌شدند گزارش نمود. سپس بررسی های قابل‌توجه آزمایشگاهی توسط کوئت [۹] در سال ۱۸۹۰ و شش سال بعد از آن در پی تلاش های مالوک[2] [۱۰] انجام پذیرفت و در نهایت یکی از کامل‌ترین دیاگرام های مسئله تیلور – کوئت برای سیال نیوتنی توسط آندرک[3] [۱۱, ۱۲] بر پایه آزمایش‌های تجربی در همان سال ارایه گردید. وی نمودار دو بعدی معرفی کرد (شکل (۱-۴)) که محور عمودی آن عدد تیلور استوانه داخلی و محور افقی آن عدد تیلور استوانه خارجی را نشان می‌داد. بدین ترتیب، مرزهای ناپایداری و رژیم‌های جریان های ثانویه را در نمودار مشخص نمود و نام‌گذاری برای هر یک از الگوهای جریان ثانویه انجام داد (جدول (۱-۱)). اکثر مطالعات

[1] Cole
[2] Mallock
[3] Andereck

تجربی، پس از آن تا زمان حاضر بر روی نتایج حاصل از این مقاله صورت پذیرفته و در تمامی مقالات سعی بر آن شده که مرزهای اشاره شده با دقت بیشتر مشخص شوند.[۱۳, ۱۴]



شکل (۱-۴): نمودار آندرک [۱۱] بر حسب رینولدز استوانه داخلی و خارجی، خط چین‌ها مرزهایی است که تشخیص آن‌ها با مشاهدات تجربی مشکل بوده است

جدول (۱-۱): نام‌گذاری رژیم های جریان ثانویه ممکنه در جریان بین دو استوانه چرخان

CCF	Circular Couette Flow
AZI	Azimuthal Laminar Flow with weak Ekman Vortices
CKS	Corkscrew
INT	Intermittent Turbulent Spots
IPS	Interpenetrating Spirals
MWV	Modulated Wavy Vortices
RIP	Ripple
SPI	Spiral Vortices
SPT	Spiral Turbulence
TRA	Transition Region
TTV	Turbulent Taylor Vortices
TUR	Turbulent Flow
TVF	Taylor Vortex Flow
TWI	Twisted Vortices

WIB	Wavy Inflow Boundary
WIS	Wavy Interpenetrating Spiral
WOB	Wavy Outflow Boundary
WVF	Wavy Vortex Flow
WVL	Wavelents

هر چند مطالعات تجربی به طور واضح شرایط جریان های ثانویه را آشکار می سازند اما از طرفی به دلیل محدودیت های آزمایشگاهی اعداد تیلور بحرانی و برخی مرزهای الگوهای جریان ثانویه را به‌درستی گزارش نمی‌کنند. یکی از مهم‌ترین مشکلات رایج در مطالعات آزمایشگاهی، تأثیر سطوح مقطع دو جداره[۱] بالایی و پایینی[۲] می‌باشد. وقتی این جداره‌ها با استوانه داخلی یا خارجی بچرخند قبل از رسیدن به عدد تیلور بحرانی گردابه های ضعیفی را تولید می‌کنند و سبب ایجاد خطا در مطالعات می‌شوند[۸]. اگر هم این دو سطح ثابت نگه‌داشته شوند. طبق مطالعات بنجامین[۳] [۱۵]، لایه مرزی در مجاورتشان تولید می‌گردد و باعث خروج جریان از لایه مرزی و ایجاد یک الگوی جریان غیرعادی می‌شوند که تمایل به انتشار در جریان اصلی را دارند [۱۶]. بروز چنین مشکلاتی در بررسی های آزمایشگاهی در کنار پیشرفت بررسی‌های عددی – رایانه‌ای سبب شد این‌گونه مطالعات مورد توجه قرار گیرد.

محققان با تکیه بر روش‌های عددی مختلف همواره سعی بر آن دارند با دقت بالایی شرایط بحرانی را تعیین کنند. از میان خیل مطالعات عددی که بر روی اغلب رژیم های جریانی و شروط مرزی صورت پذیرفته است، تحقیقاتی همچون [۱۷, ۱۸] بر روی مسایلی با استوانه‌های چرخان مختلف‌الجهت، [۱۹, ۲۰] بررسی شرایط مرزی چرخش نوسانی و نوسان محوری استوانه‌ها و تلاش های دانگ[۴] (۲۰۰۸ تاکنون) [۲۱-۲۵] به منظور مدل‌سازی عددی رژیم جریانی متلاطم و

1 Cap
2 End effect
3 Benjamin
4 Dong

بررسی انواع رژیم های جریان ثانویه توسط وی نتایج و دستاوردهای مهم و راه‌گشایی را در بر دارند. همچنین روشی موسوم به حداقل مربعات بر پایه روش لتیس بولتزمن[1] در مدل‌سازی ناپایداری تیلور – کوئت برای حالتی که فقط استوانه داخلی می‌چرخد، توانمند نشان می‌دهد [۲۶]. یکی از به‌روزترین مقالات [۲۷] بر پایه روش عددی مدل‌سازی عددی مستقیم[2] شبیه‌سازی دقیقی از ناپایداری تیلور – کوئت در حیطه جریان های متلاطم ارایه می‌کند.

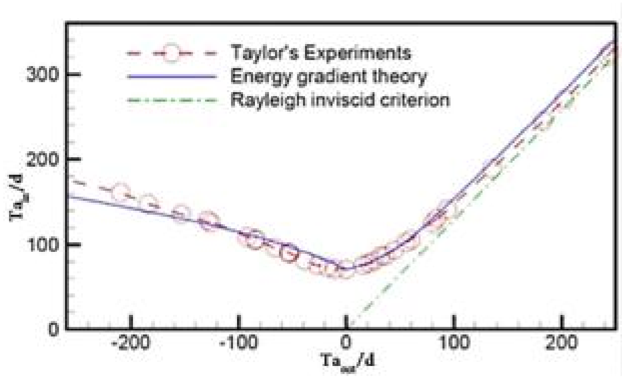
بررسی تحلیلی - عددی رکتنوالد[3] [۲۸] معادله‌ای را برای به‌دست آوردن عدد تیلور بحرانی برای هندسه‌های مختلف پیشنهاد داده است. میزان دقت معادله یادشده آن را تنها برای استفاده در طراحی های مهندسی و برآوردهای اولیه تضمین می‌کند. چندی بعد، ئر سال ۲۰۰۴ پژوهش مبتنی بر روش های عددی توسط یوئن[4] [۲۹] توانست مکملی بر تلاش های رکتنوالد باشد. یوئن همانند رکتنوالد مسئله تیلور – کوئت را در حضور یک جریان محوری بررسی نموده و اکثر رژیم‌ها و مد های ناپایداری را مطالعه کرده و جزئیات کاملی از جمله عدد تیلور بحرانی هر مد، مدل رژیم جریانی و مشخصات میدان های سرعت را تبیین نموده است. به هر روی می‌دانیم در محاسبات عددی مسئله همگرایی و سرعت همگرایی از اهمیت خاصی برخوردار است. لذا برای بررسی شرایط نامتقارن و پیچیده احتیاج به‌صرف زمان زیاد می‌باشد و از طرفی هر روش عددی برای پایدار ماندن و همگرا شدن یکسری محدودیت های فیزیکی را در بر دارد. لذا در موازات بررسی های عددی، استفاده از ابزار ریاضیات پیشرفته مورد توجه بوده است.

با گذر زمان و پیشرفت علوم ریاضی روش های جدیدی برای تحلیل سیستم های ناپایدار ارایه گردید. حساب اغتشاشات هر چند امروزه ابزار قوی به شمار نمی‌آید. اما با کمک یکسری مفاهیم ریاضی و ساده‌سازی های مهندسی جواب های قابل قبولی برای مسئله مورد بحث حاصل

[1] Least square based Lattice Boltzmann method
[2] Direct numerical simulation –DNS
[3] Recktenwald
[4] Yeon

می‌کند و زوایای جدیدتر و جزئیات بیشتر از این مسئله را آشکار می‌نماید. دیپریما[1] و همکارانش [۳۰-۳۲] با اهرم حساب اغتشاشات توانستند ناپایداری تیلور-کوئت را با دقت خوبی پدیده‌شناسی کنند و عوامل موثر بر این ناپایداری را بررسی نمودند. در کنار روش های کلاسیک ریاضیات پیشرفته که اغلب در آنالیز های خطی پایداری کاربرد دارند، امروزه تئوری های آنالیز غیرخطی نیز مطرح‌شده‌اند. از میان این تئوری های مختلف ریاضی، تئوری دوشاخگی[2] مختص تحلیل پایداری سیستم‌ها غیرخطی است. برای آشنایی با این تئوری و کاربردهایش می‌توانید به کتبی نظیر [۳۳-۳۵] مراجعه نمایید. این تئوری در تحلیل بیشتر ناپایداری های سیستم‌های مکانیکی از جمله ناپایداری تیلور – کوئت توسط دانشمندان مختلفی به‌کار گرفته شده است. به جرأت می‌توان گفت دقیق‌ترین و البته پیچیده‌ترین راه تعیین نقطه بحرانی پایداری و الگوهای ثانویه اکثر سیستم های مکانیکی استفاده از این تئوری است [۳۶-۳۸]. اما پیچیدگی ریاضی این تئوری اجازه بررسی الگوهای بالاتر را نمی‌دهد. به هر صورت استفاده از این تئوری احتیاج به پیش‌زمینه قوی ریاضی دارد و توضیح جزئیات آن از حوصله بحث خارج است. در میان روش های مختلف ریاضی و تئوری افرادی نیز هستند که به‌جای درگیر شدن با مباحث غالبا پیچیده ریاضی از مفاهیم فیزیک استفاده می‌نمایند. یکی از این مفاهیم، تئوری گرادیان انرژی است. این تئوری بیان می‌کند که کل انرژی مکانیکی در راستای عمود بر جریان و کل انرژی هدر رفته در راستای جریان به دلیل وجود لزجت در ایجاد پدیده ناپایداری جریان نقش دارند. گرادیان انرژی در راستای عمود بر جریان می‌تواند دامنه اغتشاشات را تقویت کند و از سوی دیگر لزجت می‌تواند این اغتشاشات را جذب و نابود کند. با کمک این تئوری می‌توان معیار های پایداری برای هر جریان دلخواهی تعریف کرد. به‌کارگیری این روش در بررسی ناپایداری تیلور-کوئت [۳۹] نتایج را با دقتی فراتر از انتظار گزارش می‌کند (شکل (۱-۵)).

[1] DiPrima
[2] Bifurcation



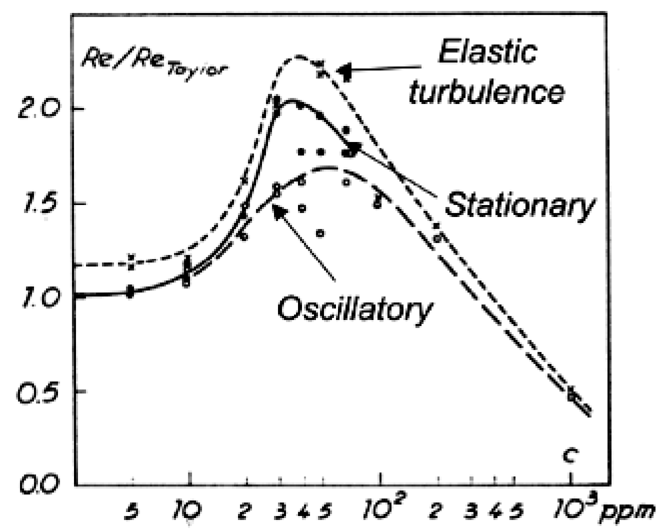
شکل (۱-۵): نمودار مقایسه نتایج حاصل از تئوری گرادیان انرژی

با گسترش و توسعه صنعت، به‌خصوص صنایع ای مانند پتروشیمی، نفت، رنگ، داروسازی و... دانشمندان با سیالات و جریان های سیالاتی مواجه شدند که دیگر از رابطه معروف نیوتن پیروی نمی‌کردند. این مسئله باعث پدید آمدن علم جدیدی با نام رئولوژی[1] گردید. مطالعات در این حیطه جدید در دوران جنگ های جهانی دوم شدت گرفت و افق های تازه‌ای از علم مکانیک سیالات را آشکار ساخت. به‌موازات سایر مباحث، مبحث ناپایداری های ویسکوالاستیک نیز به مرور مورد مطالعه قرار گرفت. علاوه بر بررسی انواع ناپایداری‌های دیده شده در جریان های نیوتنی بر روی سیالات غیر نیوتنی، ناپایداری های جدیدی که ناشی از رفتار خاص سیالات غیر نیوتنی بود معرفی گردید. در بازخوانی لارسون[2] [۴۰] معرفی از انواع ناپایداری‌های ناشی از رفتار الاستیک سیالات آورده شده است که به آشنایی بیشتر محققین با ناپایداری‌های سیال غیر-نیوتنی کمک می‌کند. از یک طرف در آن سال‌ها، شناخت خصوصیات بیشتر این سیالات احتیاج به تجهیزات اندازه‌گیری همچون رئومترهایی با دقت بالا داشت و از طرف دیگر مبحث راندمان و استفاده بهینه از انرژی در صنایع و پرکاربرد شدن سیالات غیرنیوتنی در بخش‌های مختلف تولیدی–صنعتی سبب شد که ناپایداری تیلور-کوئت سیالات غیرنیوتنی نسبت به سایر ناپایداری‌ها مورد توجه ویژه مهندسین و دانشمندان قرار گیرد.

[1] Rheology
[2] Larson

با توجه به ذات پیچیده این سیالات و ریاضیات دشوار حاکم بر جریانشان، بررسی ناپایداری‌ها از جمله ناپایداری تیلور - کوئت سیالات غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک ها در ابتدا محدود به پژوهش های تجربی می‌شد. اولین مطالعات در خصوص تنش‌ها القایی در جریان بین دو استوانه در حال چرخش توسط توماس[۱] و والترز[۲] [۴۱, ۴۲] بر روی سیالات غیر نیوتنی در سال ۱۹۶۴ انجام پذیرفت. اکثر مطالعات اولیه ناپایداری تیلور–کوئت سیال ویسکوالاستیک تمرکز بر سیالاتی با الاستیسیته ضعیف داشتند. سرانجام دانشمندانی همچون گزیکس[۳] [۴۳]، الاتا[۴] و روبین[۵] [۴۴] نشان دادند که الاستیسیته ضعیف سیال یا خواص ویسکوالاستیک محلول های پلیمری رقیق به پایدار ماندن جریان کمک می‌کند. بدین طریق که نیرو ویسکوالاستیک با نیروی جانب مرکز مقابله کرده، از تشکیل گردابه های تیلور جلوگیری می‌نماید. در واقع خاصیت ویسکوالاستیک ضعیف سبب افزایش عدد تیلور بحرانی نسبت به حالت مشابه سیال نیوتنی می‌شود. اما عدد موج و رژیم جریان ثانویه سطح یک در هر دو حالت کاملا یکسان می‌ماند. با زیاد شدن غلظت محلول های پلیمری، گزیکس [۴۳] در مورد یک سیال خاص نشان داد که در ابتدا حالت نوسانی در جریان ثانویه ایجاد می‌شود و سپس در تیلور های بالاتری به ترتیب حالت ساکن و متلاطم در جریان ثانویه ایجاد می‌شود. (شکل (۱-۶))

[1] Thomas
[2] Walters
[3] Giesekus
[4] Elata
[5] Rubin



شکل (۱-۶): نتیجه مطالعه تجربی گزیکس بر روی پلی اکلیرآمید

در مورد محلول های غلیظ پلیمری، در حدود ppm ۱۰۰۰، شدیداً تیلور بحرانی کاهش می‌یابند. گزیکس [۴۵] در کنار مطالعات تجربی، بررسی های تحلیلی نیز انجام داد. در مقاله‌ای که به بررسی ناپایداری تیلور-کوئت سیال مرتبه دو پرداخته است. برای اولین بار نقش یک تابع ویسکومتریک را در مسئله تیلور-کوئت تبیین می‌کند. به‌طوری‌که ضریب اختلاف تنش نرمال دوم منفی را به‌ویژه در فواصل کم بین دو استوانه عامل اصلی پایدار ماندن جریان معرفی می‌کند [۴۵].

در همان سال‌ها مطالعات کامل تری توسط والترز و همکارانش [۴۶] بر پایه معادله ساختاری ماکسول[1] صورت پذیرفت که در آن شرایط پایداری و کیفیت آن مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها متوجه شدند که با افزایش عدد الاستیک، مقدار عدد تیلور بحرانی حالت جریان ثانویه گرداب‌ه تیلور ساکن به طور منظم کاهش می‌یابد. ولی با بالا رفتن مقدار عدد الاستیک حالت جدیدی از رژیم جریان ثانویه نوسانی ایجاد می‌گردد که در برابر افزایش عدد الاستیک، عدد تیلور بحرانی

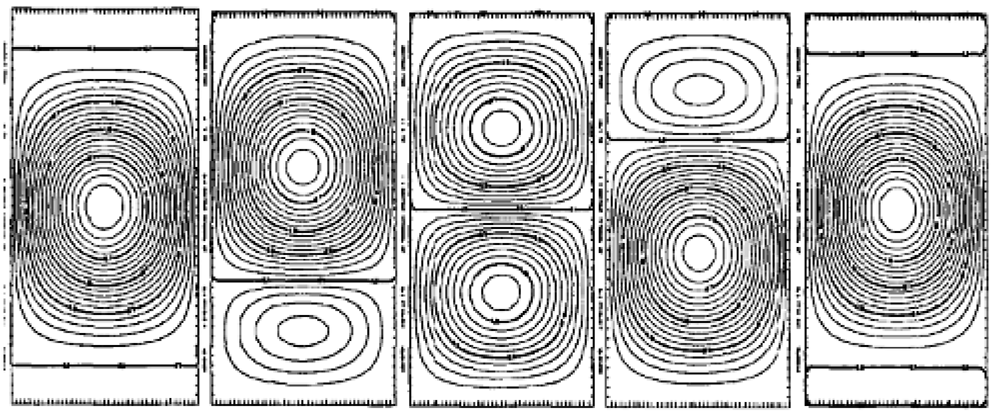
[1] Maxwell

این حالت کاهشی یکنواخت دارد. شایان توجه است که این مطالعه در محدوده صفر تا یک عدد الاستیک صورت پذیرفت. به هر طریق در آن سال‌ها با توجه به محدودیت‌هایی از قبیل پایین بودن دقت ابزار آزمایشگاهی و ناکارآمد بودن تجهیزات مطالعات تجربی و عددی رشد مطالعات در حیطه مورد بحث بسیار کند بود.

با پیشرفت علم رئولوژی و معرفی و تکامل تجهیزات آزمایشگاهی و روش های عددی پژوهش‌ها در زمینه ناپایداری‌های سیالات ویسکوالاستیک در مسیر مشخصی قرار گرفت. لذا اکثر مقالاتی که از لحاظ علم رئولوژی کاربردی بوده و امروزه ارزش علمی دارند به دو دهه اخیر محدود می‌گردند. به‌طوری که با پیشرفت در روش های سیال شناسی، بالاخره نحوه و روش تولید سیالات غیرنیوتنی ویسکوالاستیک با خواص مشخص روشن شد [۴۷]. این سیالات محلول-های رقیق پلیمری با خاصیت الاستیک بالا هستند که به سیال بوگر[1] شهرت دارند. رفتار سیال بوگر با آنچه که معادلات متشکله‌ای مانند اولروید-بی[2] پیش‌بینی می‌کنند قرابت خوبی دارند. لذا از این تاریخ به بعد امکان مطالعه همزمان نظری و تجربی و مقایسه بین این دو روش برای رسیدن به نتایج قابل اتکا به وجود آمد. در نهایت در اواخر دهه هشتاد و اوایل دهه نود میلادی نخستین پژوهش های کاربردی در مورد ناپایداری سیالات ویسکوالاستیک منتشر گردید. انتشار مقاله‌ی مولر[3] [۴۸] مشتمل بر دو جنبه آنالیز پایداری خطی و مشاهدات تجربی بر روی سیالات UCM در سال ۱۹۸۹ سرآغازی بر این پژوهش‌ها بود. لارسون [۴۹] ابتدا با آنالیز خطی براساس معادله متشکله اولروید-بی برای جریان‌هایی با رینولدز پایین نشان داد که رژیم ثانویه ناپایداری تیلور–کوئت ویسکوالاستیک نوسانی شکل بوده (شکل (۱- ۷)) و فرکانس این نوسان با معکوس

[1] Boger Fluid
[2] Oldroyd-B
[3] Muller

زمان رهایی از تنش سیال متناسب است و عدد دبورا[1] بحرانی از مرتبه معکوس مجذور فاصله بین دو استوانه می‌باشد.



شکل (۱- ۷): نمایش نصف دوره تناوب الگوی نوسانی در جریان غیر اینرسی جریان ویسکوالاستیک.

وی در مطالعات بعدی درباره تأثیرات خواص الاستیک سیال بر روی جریان تیلور–کوئت بیان نمود که ناپایداری مورد مطالعه در ۳۰ الی ۴۵ درصد تنش برشی حد بحرانی آنالیز خطی مبتنی بر حالت متقارن محوری رخ می‌دهد و همچنین آنالیز مد نامتقارن فوق بحرانی بر پایه معادله متشکله K-BKZ را برای دوری از خطاهای ۳۰ تا ۴۰ درصدی حاصل از آنالیز خطی متقارن محوری بر پایه معادله اولدروید-بی را پیشنهاد می‌کند [۵۰] و از طرفی اوگوستی و همکارانش [۵۱, ۵۲] به کمک تحلیل پایداری خطی در سیالات ویسکوالاستیک احتمال شکل‌گیری دو رژیم جریانی، موج های حرکت محوری و موج های ایستا متناوب با زمان، پیش‌گویی می‌کنند. طبق تئوری دوشاخگی اگر پاسخ هر دو حل زیر بحرانی باشند، هیچ‌کدام از این دو جریان ثانویه پایدار نخواهند بود. به‌هرحال تنها یکی از این دو الگو جریان شکل می‌گیرند و آن هم به شرایطی است که جواب هر دو حل فوق بحرانی باشند. طبق این پژوهش جامع، تحلیل های دو بعدی در استخراج برخی از حالت های ناپایداری ناتوان هستند و به‌عنوان اصلی‌ترین نتیجه کارشان تحلیل

[1] Debura Number

سه بعدی را تنها راه قضاوت درست ناپایداری تیلور–کوئت سیال غیر نیوتنی می‌داند [۵۱, ۵۲]. نتیجه این مقالات و مقالات نظیری که مجال توضیحشان نیست آن شد که تلاش اکثر محققین این حیطه به سمت مدل‌سازی عددی دقیق به‌منظور آشکار ساختن جزئیات جریان های ثانویه در کنار بررسی های تجربی معطوف گردد. از سوی دیگر بررسی های تجربی اکثراً یک سیال با ویژگی های خاص را مطالعه می‌نمایند و لذا نتایج حاصل قابل تعمیم نمی‌باشد و محدود به نتایجی دقیق و کامل مربوط به سیال مورد مطالعه می‌شود. در نهایت سهم سیالات هم خانواده سیال مورد بحث تخمین‌ها و کل گویی های نه چندان دقیق می‌باشد [۵۳]. از این روی نقش مدل‌سازی های دقیق عددی–تئوری در این مسئله بیش از سایر مباحث مورد توجه محققین است. مسئله تیلور – کوئت سیال نسبتاً ساده بینگهام[۱] در حالی که استوانه علاوه بر چرخش دارای حرکت محوری نیز هست یکی از موفق‌ترین مدل‌سازی های این‌چنینی است[۵۴]. متوتی[۲] و همکارانش [۵۵] بر اساس مدل سیال تعمیم یافته نیوتنی و حل دوبعدی عددی در غیاب شرط دوره‌ای، نتایجی قابل قبول برای نسبت شعاع های متفاوت در الگوی اول ناپایداری گزارش نموده‌اند. دلیل دقت خوب نتایج گزارش شده را می‌توان در نحوه تعریف هندسه جستجو کرد. طبق شکل (۱- ۸-الف) در دو انتهای فاصله بین استوانه‌ها (مناطق ۲ و ۳ در شکل مذکور) جداره‌هایی فرض شده تا گردابه های حاصل از وجود شرط عدم لغزش دیواره‌ها به دام افتاده و در جریان وارد نشوند. شایان توجه است، چنین مدل‌سازی تنها در مورد شناسایی الگوی اولیه ناپایداری مورد قبول می‌باشد، چرا که الگوهای بعدی نامتقارن بوده و دیگر جواب‌ها این نوع مدل‌سازی قابل استناد نخواهند بود.

[1] Bingham
[2] Matutti

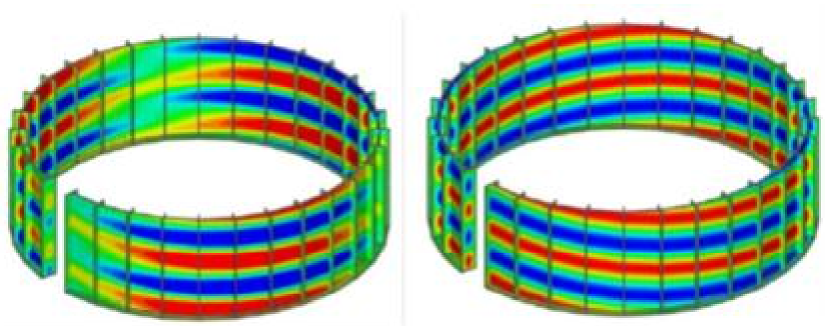
این مقاله در واقع تلاشی برای بهبود نتایج پژوهش لوکت[1] [۵۶] است. وی در واقع تأثیر تغییرات لزجت و نرخ برش را بر مبنا مدل تعمیم یافته نیوتنی بر عدد بحرانی تیلور جستجو کرده است. مقایسه‌ای از نتایج این دو مقاله اخیر در شکل (۱- ۸- ب) آورده شده است.

شکل (۱- ۸): الف: مدل‌سازی متتوتی؛ ب: مقایسه نتایج تحقیق لوکئت و متوتی

اولین و تنها مدل‌سازی سه بعدی جریان تیلور – کوئت سیال ویسکوالاستیک مبتنی بر سیال اولدروید-بی در پی کوشش‌های توماس [۵۷] در سال ۲۰۰۶ انتشار یافت. این مدل‌سازی بر پایه روش عددی OSIMS[2] می باشد و در طی تشریح خود مسئله بر روی دقت و کیفیت روش مدل‌سازی صحبت شده، با حل مسئله تیلور – کوئت برای دو هندسه متفاوت، الگو نواری[3] شکل را برای فاصله‌های کم و متوسط بین دو استوانه و در بازه خاصی از عدد الاستیک پایدار دانسته است. در واقع وی نشان می‌دهد که شکاف به سمت الگوی پیچشی در منطقه انتقال ناپایدار شکل می‌گیرد حال آنکه در اعداد الاستیک کم منطقه انتقال پایدار باقی می‌ماند. در نهایت نیز

[1] Lockett
[2] operator splitting influence matrix spectral
[3] Ribbon mode

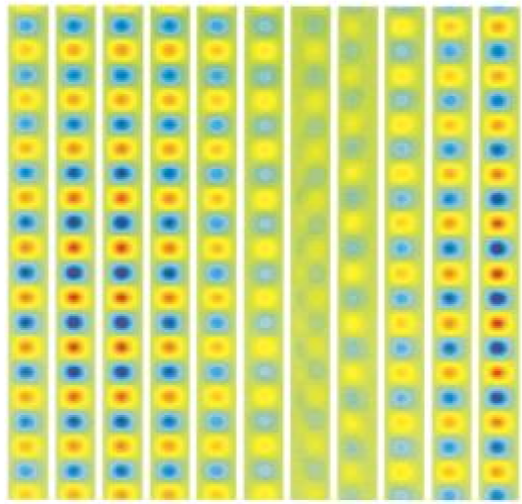
امکان عبور از الگوهای نواری و پیچشی را تنها در اعداد الاستیک بالا و همراه با آشوب جریان میسر می‌داند. جالب توجه است ابررایانه‌ای از سری SGI-ORIGIN 2000[1] در پژوهش فوق استفاده شده است. چنین سخت‌افزاری در دانشگاه‌های ایران کمیاب و بلکه نایاب می‌باشد.



شکل (۱- ۹): الگوهای نواری و پیچشی به‌دست آمده توسط روش OSIMS

هر چند همان طور که در شکل (۱- ۹) بر می‌آید، مدل‌سازی در نمایش الگو نواری چندان نتایج قابل قبولی را در بر ندارد. از سویی دیگر نویسنده همین نتایج را وابسته به سایز شبکه‌بندی دانسته و برای جبران آن تنش مجازی را به معادله متشکله اضافه کرده است. اما می‌توان گفت کامل‌ترین حل عددی موضوع مورد بحث است. جالب توجه است که سال‌ها قبل از این کوشش مدل‌سازی‌ای [۵۸] بر پایه معادله ساختاری اولدروید-بی، الگوی نوسانی جریان ثانویه را مشابه پیش‌بینی آگوستی [۵۱] گزارش می‌کند. از جهتی تعریف اعداد بی بعد به شکل بعد دار در این پژوهش از اعتبار آن کاسته و تنها یک برداشت ظاهری را ارایه داده است.

[1] واقع در مرکز محاسبات موازی دانشگاه واشنگتن



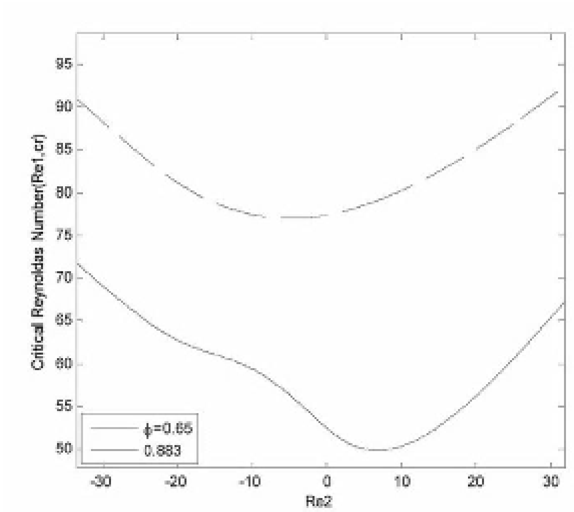
شکل (۱- ۱۰): گردابه های تیلور در رژیم جریان ثانویه نوسانی حاصل از پژوهش کوفرمن [۵۸]

در این میان کوشش‌هایی نیز توسط محققین داخلی انجام پذیرفته است. اشرفی [۵۹] ناپایداری سیال باریک شونده[1] را در بین دو استوانه دوار بررسی کرده و در واقع کاری مشابه مرجع [۵۵] اما از روشی متفاوت و البته قابل توجه انجام داده است. جریان بین دو استوانه چرخان بر پایه سیال گزیکس توسط تخت روانچی و همکارانش [۶۰] مطالعه شده است. تمرکز این مقاله به بررسی کامل میدان های سرعت، فشار و مشخصات ویسکوالاستیک جریان در حالت پایدار معطوف بوده و صحبتی از ناپایداری تیلور –کوئت در میان نیست.

پورجعفر و صادقی [۶۱]، ناپایداری تیلور-کوئت سیال ویسکوالاستیک بررسی نموده‌اند. ایشان ناپایداری مذکور را با استعانت از تحلیل خطی و با فرض بزرگ بودن فاصله بین دو استوانه می‌کاوند. نتایج این پژوهش بیان رابطه کیفی بین عدد وایزنبرگ بحرانی و فاصله بین دو استوانه را براساس معادله ساختاری گزیکس و در شرایطی که استوانه‌ها هر دو می‌چرخند، بیان می‌دارد. جریان ویسکوالاستیک حتی در شرایطی که فقط استوانه خارجی چرخان باشد، ناپایدار است

[1] Shear Thinnig

[۴۸, ۴۹]. حال آنکه در این پژوهش علی‌رغم بررسی دوران همزمان استوانه‌ها بحثی از این مسئله به میان نیامده است.



شکل (۱- ۱۱): نتایج بررسی پورجعفر و صادقی [۶۱] برای دو نسبت شعاعی متفاوت درحالی‌که هر دو استوانه‌ها امکان چرخش دارند. عدد وایزنبرگ برابر با ۱/۲ است

۱-۳) تعریف مسئله

به دلایل عدیده‌ای، بررسی و مطالعات در حوزه ناپایداری تیلور-کوئت سیال ویسکوالاستیک مهم و ضروری است. به‌عنوان مثال فرآیند تولید صنعتی بسیاری از پلیمرها، تحت تأثیر شروع ناپایداری‌های مانند تیلور-کوئت ناقص می مانند و یا با مشکلاتی همچون بازده تولید کم و کیفیت محصول مواجه می‌شوند. پژوهش های علمی نیز جهت بهبود همین فرآیند های تولید و موضوعات مشابه خود با چالشی از همین جنس روبرو هستند. چراکه برای تعیین معادلات ساختاری مناسب پلیمر مورد نظر احتیاج به اندازه‌گیری خواص ویسکومتریک سیال بوده، حال آنکه این دستگاه‌ها نیز به دلیل بروز همین ناپایداری در تعیین این خواص ناتوان و معیوب هستند. لذا تنها راه توسعه فن آوری تولید و شناخت نحوه رفتار سیالات ویسکوالاستیک، بررسی و کنکاش ناپایداری های چنین سیالاتی است. در واقع هدف مورد پژوهش پیش رو و اکثر مقالات

با چنین موضوعاتی تنها دستیابی به یک نتیجه انتزاعی نیست. بلکه کمک به بهبود و توسعه دیگر پژوهش‌ها و فعالیت های علمی و صنعتی در این حیطه می‌باشد. به‌عنوان نمونه بررسی فرآیند روزن رانی یک سیال ویسکوالاستیک، هر قدر هم که دقیق و جامع باشد، بدون استفاده از خواص حقیقی آن سیال و ملحوظ نکردن ناپایداری های ناشی از آن سیال در بستر جریانی مسئله، آن تحقیق را از جنبه تحلیلی تبدیل به یک بحث ریاضیاتی-محاسباتی و از جنبه آزمایشگاهی تبدیل به فرآیند مشاهده-گزارش صرف می‌کند. از سوی دیگر به دلیل خواص ذاتی سیال ویسکوالاستیک، رفتارهای دینامیکی نامتقارنی در جریان‌های این‌گونه سیالات بروز می‌کند که امکان تحلیل های دو بعدی و ساده‌سازی های هندسی را از پژوهشگر می‌ستاند. لذا تحقیقاتی که بر مبنای ساده‌سازی‌هایی همچون فرض دو بعدی بودن جریان یا فرض تقارن محوری انجام می‌پذیرد، چندان از دیدگاه دینامیک سیالات قابل اعتنا نیستند.

تمرکز بیشتر تحقیقات در حوزه تیلور-کوئت سیال ویسکوالاستیک معطوف به سیالات با خواص الاستیک ضعیف می‌باشد. به‌طوری که عدد الاستیک سیال مورد بررسی در مقالات تجربی کمتر از یک و در مقالات تحلیلی عددی کمتر از ۰/۱ می‌باشد. پژوهش های این چنین، دیدگاه مطلوبی را چه از نظر جریان شناسی و چه از لحاظ روش تحلیل ارایه می‌دهند. با این وصف خلا پاسخ‌گویی در مورد جریان‌هایی حاوی سیال با خواص الاستیک شدید در منطقه‌ای دور از رفتار خزشی، هنوز پابرجاست.

از نقطه نظر دیگر، تاکنون معادلات ساختاری مورد استفاده در تحقیقات محدود به مشتق های معادله ساختاری ماکسول بوده است. لذا استفاده از یک معادله ساختاری دقیق تر می‌تواند دید بهتری را تبیین نماید. معادله ساختاری همانند گزیکس علاوه بر مفاهیم مدل‌سازی مکانیکی، تئوری مولکولی را هم برای توصیف بهتر سیال بکار می‌بندند. به همین روی با دخالت

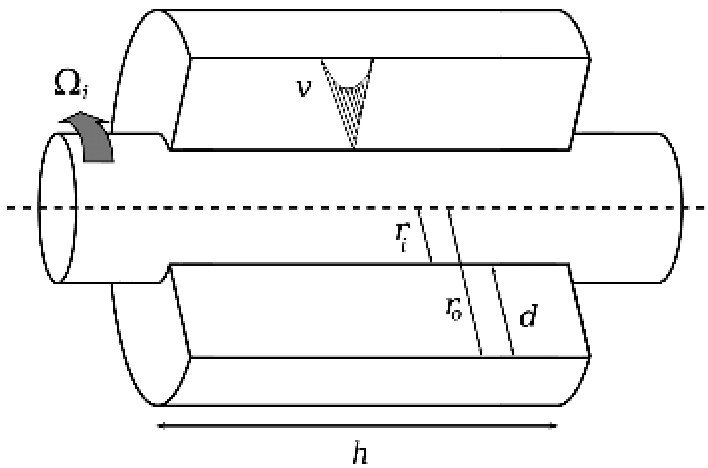
دادن متغیرهایی مانند مانا[1] سوم تانسور تنش و گزارش مقادیری همچون اختلاف تنش نرمال دوم امکان قضاوت های بهتری نسبت به معادلات ساختاری همچون اولدروید-بی را فراهم می‌سازد.

به هر روی، تحقیق حاضر سعی بر مطالعه سه بعدی ناپایداری تیلور-کوئت در حضور سیالی با خواص ویسکوالاستیک شدید را بر مبنای معادله متشکله گزیکس با کمک نرم‌افزار OpenFoam دارد. بدین شکل با مدل‌سازی سه بعدی و اعمال شرط مرزی پریودیک بر سطوح بالا و پایین استوانه‌ها تأثیرات گردابه های القایی محوشده و امکان مطالعه حالات مختلف جریان ثانویه از جمله حالت های نامتقارن و تعیین دقیق تر شرایط بحرانی میسر می‌شود. به‌کارگیری معادله متشکله گزیکس به‌واسطه اینکه از تئوری مولکولی نشأت گرفته است و دخالت داشتن مانا سوم تانسور تنش در آن، امکان بررسی طیف وسیعی از سیالات ویسکوالاستیک و شبیه‌سازی رفتار غیرخطی آن‌ها را می‌دهد. شکل (۱- ۱۲) شمای از هندسه و شرایط مرزی مسئله مورد بحث در این نوشتار را نشان می دهد. هندسه مسئله از دو استوانه هم مرکز تشکیل یافته است. شعاع‌های این دو استوانه به شکلی انتخاب می‌گردند که نسبت شعاع‌هایشان نزدیک به یک باشد (فاصله بین دو استوانه بسیار کمتر از یک است). معادلات و بررسی های تحقیق پیش رو نیز بر اساس دستگاه مختصات استوانه‌ای تبیین می شوند تا امکان درک بهتر شرایط مسئله میسر شود.

نرم‌افزار OpenFoam نیز در کنار دشواری های ناشی از محیط خشکش یک بسته متن باز محاسبات دینامیک سیالات است و قابلیت‌هایی همچون استفاده از پیش‌پردازش، پردازش و پس پردازش متفاوت و قابل‌کنترل، اعمال تغییرات و بهینه‌سازی در متن برنامه و به‌کارگیری بیشینه توان رایانه‌ها را در اختیار کاربر می‌گذارد. با توجه به توضیحات اخیر، مطالعه پیشرو نه تنها

[1] Invariant

نوآوری های بسیاری را در خود دارد بلکه نتایجی دقیق تر، کامل تر و البته قابل تعمیمی در پی خواهد داشت.



شکل (۱- ۱۲): نمای جریان سیال بین دو استوانه هم مرکز

فصل دوم

معادلات حاکم

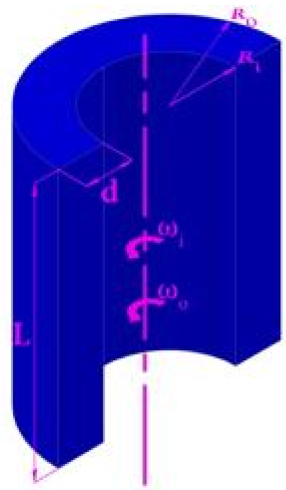
در ابتدا این فصل هندسه مسئله مورد بازبینی قرار می‌گیرد و پارامترهای هندسی و مفروضاتی که در طی تحلیل مورد استفاده قرار خواهد گرفت تبین می‌شود. در ادامه معادلات حاکم بر جریان مشتمل بر معادلات پیوستگی، ممنتوم و ساختاری تشریح می‌گردد و شروط مرزی لازم با توجه با فرضیاتی که از قبل تعیین شده، معرفی می‌گردد. بی بعد سازی معادلات و بررسی اعداد بی بعد مهم مسئله گام بعدی است که در جهت اعمال تحلیل مرتبه بزرگی انجام می‌شود. همان طور که در انتها این بخش مشخص می‌شود، انجام تحلیل مذکور کمک شایانی به دریافت درک بهتری از مسئله می‌انجامد.

۲-۱) مفروضات مسئله

جریان سیال تراکم ناپذیر بین دو استوانه هم مرکز که در غیاب گرادیان دمایی و هر گونه نیرو خارجی با سرعت های زاویه‌ای دلخواهی در حال دوران هستند، چارچوب مسئله مورد بررسی این نوشتار را تشکیل می‌دهد. به‌طوری که نسبت شعاع استوانه داخلی به خارجی نزدیک به یک انتخاب می‌شوند. دلیل این انتخاب، به کاربری چنین هندسه‌ای در دستگاه‌های ویسکومتر و رئومتر بازمی‌گردد. نسبت اختلاف شعاع دو استوانه به طول استوانه‌ها نسبت دیگری است که در طراحی های دستگاه‌های اندازه‌گیر، مته‌های حفاری و همزن‌ها در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب با توجه به شکل (۲-۱) دو پارامتر هندسی مهم به شکل زیر تعریف می‌گردند.

$$\kappa = \frac{R_i}{R_0} \tag{۱-۲}$$

$$\Gamma = \frac{R_o - R_i}{L} = \frac{R_i\left(\kappa - 1\right)}{L} \tag{۲-۲}$$



شکل (۲-۱): دو استوانه هم مرکز که با سرعت زاویه‌های دلخواه حول محور مرکزی دوران می‌کنند

شایان ذکر است که دو استوانه با سرعت های زاویه دلخواه می‌توانند حول محور مرکزی دوران نمایند. البته پژوهش پیش رو معطوف به حالتی است که تنها استوانه داخلی دارای سرعت زاویه‌ای بوده و استوانه داخلی در حالت سکون به سر می‌برد. با در نظر گرفتن توضیحات بالا در ادامه انعقاد معادلات حاکم مسئله صورت می‌پذیرد.

۲-۲) معادلات پیوستگی و ممنتوم

به وضوح معادلات پیوستگی و ممنتوم سیال تراکم ناپذیر، از قرار زیر است.

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \qquad (۲-۳)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\nabla}\vec{V}\right) = -\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}.\tilde{\tau} \qquad (۲-۴)$$

بر طبق توضیحات بخش قبلی، معادلات پیوستگی و ممنتوم در دستگاه استوانه‌ای قرابت بیشتری با فیزیک حاکم بر مسئله دارد. با صرف‌نظر کردن از اثر نیروی گرانش در محاسبات و لحاظ کردن فرض

های تراکم ناپذیری جریان و عدم حضور گرادیان دمایی، معادلات پیوستگی ((۲-۵)) و ممنتوم ((۲-۶)، (۲-۷) و (۲-۸)) در این دستگاه به قرار زیر است.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\left(ru_r\right)\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \qquad (۵-۲)$$

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)=&\\ -\frac{\partial p}{\partial r}+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rr}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}-\frac{\tau_{\theta\theta}}{r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}\right]&\end{aligned} \qquad (۶-۲)$$

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_\theta u_r}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)=&\\ -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{r\theta}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}\right]&\end{aligned} \qquad (۷-۲)$$

$$\begin{aligned}\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=&\\ -\frac{\partial p}{\partial z}+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right]&\end{aligned} \qquad (۸-۲)$$

تا زمانی که تانسور تنش به شکل تابعی از تانسور نرخ برش و خواص سیال بیان نشود، دسته معادله بالا قابل حل نیست. در ادامه معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک مسئله که چگونگی محاسبه تانسور تنش را تبیین می‌کند، معرفی می‌گردد. به خاطر این که تانسور تنش معادله ممنتوم دیگر از رابطه سیال نیوتنی غیرقابل تراکم (معادلات ناویر – استوکس) پیروی نمی‌کند، حل تحلیلی دستگاه معادلات پیوستگی، ممنتوم و ساختاری جریان سیالات ویسکوالاستیک با روش های مرسوم ریاضیات پیشرفته پیچیده و بلکه غیرممکن است. لذا در انتها این فصل، با کمک تحلیل مرتبه بزرگی دید اولیه‌ای حاصل می‌گردد و سپس با کمک تحلیل عددی در فصول بعدی ابعاد مختلف چنین جریانی تشریح می‌شود.

۲-۲-۱) معادله ساختاری

تنش در روابط فوق تابعی از خواص سیال می‌باشد و توسط معادلات ساختاری، این تابعیت بیان می‌گردد. معادلات ساختاری بسیاری تاکنون معرفی گردیده است و اغلب هر کدام برای یک دسته از مواد پاسخگویی خوب و نزدیک بر مشاهدات تجربی دارد[۶۲]. یکی از این معادلات را گزیکس [۶۳] در سال ۱۹۸۲ بر پایه تئوری مولکولی معرفی نمود:

$$\begin{cases} \tilde{\tau} = \tilde{\tau}^{s} + \tilde{\tau}^{p} \\ \tilde{\tau}^{s} = \eta_s \dot{\tilde{\gamma}} \\ \tilde{\tau}^{p} + \lambda \tilde{\tau}^{p}_{(1)} + \alpha \dfrac{\lambda}{\eta_p} \left\{ \tilde{\tau}^{p} \circ \tilde{\tau}^{p} \right\} = \eta_p \dot{\tilde{\gamma}} \end{cases} \qquad (۹-۲)$$

این رابطه بیشتر برای محلول های رقیق پلیمری به‌کار می رود. به شکلی که سیال تشکیل شده از دو بخش نیوتنی (حلال) و غیر نیوتنی (حل شونده) را مدل می‌کند. تانسور تنش محول مورد مطالعه مدل گزیکس از مجموع دو تانسور تنش قسمت نیوتنی و غیرنیوتنی محاسبه می‌گردد. نکته حائز اهمیت معادله گزیکس حضور توامان ثوابتی از مفاهیم جریان شناسی و تئوری مولکولی می‌باشد. λ زمان رهایی از تنش، η_s لزجت حلال در نرخ برش صفر، η_p لزجت پلیمر در نرخ برش صفر و α ضریب تحرک بی بعد و بیانگر سطح حرکت کاتوره‌ای غیر ایزنتروپیک ذرات، ثوابت بکار رفته در معادله گزیکس هستند. لازم به توضیح است، معادله $\dot{\gamma}$ تانسور نرخ برش و $\tau_{p(1)}$ مشتق همرفتی بالادست[۱] تانسور تنش محلول می‌باشند و به شکل زیر تعریف می‌گردند:

$$\dot{\tilde{\gamma}} = 2\tilde{D} = \left[\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V} + \left(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V} \right)^{T} \right] \qquad (۱۰-۲)$$

$$\tilde{\tau}^{p}{}_{(1)} = \frac{D\tilde{\tau}^{p}}{Dt} - \left\{ \tilde{\tau}^{p} . \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V} + \left(\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{V} \right)^{T} . \tilde{\tau}^{p} \right\} \qquad (۱۱-۲)$$

که

[1] Upper Convicted Derivative

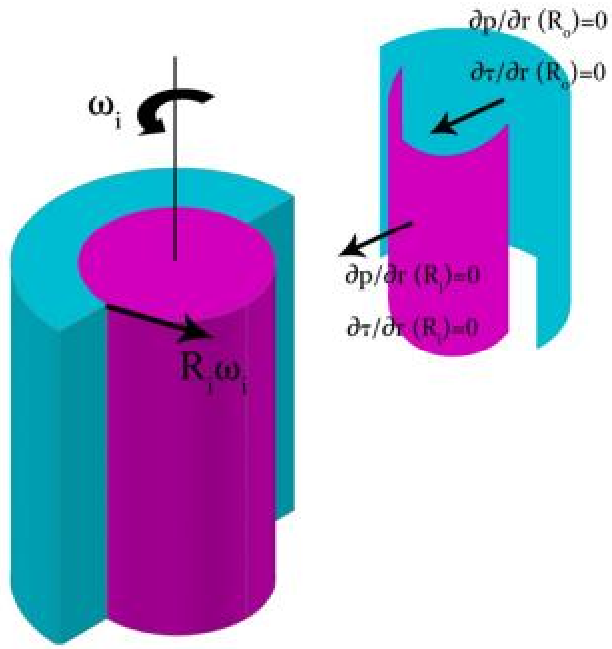
$$\frac{D\tilde{\tau}^{p}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{\tau}^{p}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\vec{\nabla}\right)\tilde{\tau}^{p} \qquad (۱۲-۲)$$

اکنون از نظر ریاضی تعداد معادلاتی که باید حل شوند بیشتر شده است و در نتیجه علاوه بر شروط مرزی حاصل از جریان، به شروط مرزی اضافه‌ای برای حل معادله ساختاری نیز احتیاج است.

۲-۲-۲) شروط مرزی

شکل (۲-۲) نشان‌دهنده شرط های مرزی مسئله است. شایان‌ذکر است استفاده از شرط دوره‌ای[۱] هرچند کار محاسبات عددی را دشوار می‌کند. اما حل را به سمت جواب‌هایی دقیق پیش می‌برد چرا که دیگر مسئله تحت تأثیر گردابه های حاصل از وجود دیواره‌های بالا و پایین نیست. از سوی دیگر شرط تنش‌های روی جدار استوانه‌ها این مفهوم را می‌رساند که تنش دارای شرط نیومن است و پیوستگی تنش را ارضا می‌کند.

[1]Periodic



شکل (۲-۲): شرایط مرزی برای حل ناپایداری تیلور - کوئت در جریان ویسکوالاستیک

بنابراین شروط مرزی را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود.

$$
\begin{aligned}
&u_r(R_i,\theta,Z) = 0;\\
&u_\theta(R_i,\theta,Z) = R_i\omega;\\
&u_z(R_i,\theta,Z) = 0;\\
&u_r(R_o,\theta,Z) = 0;\\
&u_\theta(R_o,\theta,Z) = 0;\\
&u_z(R_o,\theta,Z) = 0;\\
&\frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial r}(R_i,\theta,Z) = 0;\\
&\frac{\partial\tilde{\tau}}{\partial r}(R_o,\theta,Z) = 0;
\end{aligned}
\qquad (۱۳-۲)
$$

لازم به توضیح است که در بالا و پایین استوانه ها برای تمامی متغیرها شرط پریودیک اعمال می-گردد. برای اجرای محاسبات عددی و تفسیر کردن نتایج حاصل از پردازش رایانه‌ای، احتیاج به حالت بی بعد معادلات می‌باشد.

۲-۳) بی بعد سازی مسئله

تعیین صحیح متغیرهای بی بعد مسئله همواره از اهمیت خاصی برخوردار است چرا که نتایج را به طور مستقیم تحت تأثیر قرار می‌دهد و امکان دارد حل را از شرایط فیزیکی مسئله دور سازد. نگاهی دقیق به فیزیک مسئله مورد بحث منجر به استخراج متغیرهای بی بعدی با تعاریف زیر می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
&\overset{*}{\vec{X}} = \frac{\vec{X}}{d} \\
&\overset{*}{\vec{\nabla}}() = \frac{1}{d}\vec{\nabla}() \\
&\overset{*}{\vec{V}} = \frac{\vec{V}}{R_i\,\omega} \\
&\tilde{S} = \frac{\tilde{\tau}\,d}{\eta_0 R_i\,\omega} \\
&\overset{*}{p} = \frac{p\,d}{\eta_0 R_i\,\omega} \\
&\overset{*}{t} = \frac{t\,R_i\,\omega}{d} \\
&\overset{*}{\dot{\tilde{\gamma}}} = \frac{\dot{\tilde{\gamma}}\,d}{R_1\omega}
\end{aligned}
\qquad (۱۴-۲)
$$

مقدار لزجت در نرخ برش صفر با η_0 نشان داده شده است که برابر با مجموعه لزجت های حلال و محلول سیال مورد بحث در نرخ برش صفر می‌باشد. با این توضیح، معادلات بی بعد شده از قرار زیر هستند.

الف) معادله پیوستگی:

$$\frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_r}{\partial \overset{*}{r}}+\left(\overset{*}{r}\,\overset{*}{u}_r\right)\frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \overset{*}{u}_z}{\partial \overset{*}{z}}=0 \qquad (۱۵\text{–}۲)$$

ب) معادلات ممنتوم:

$$\left(\frac{\partial \overset{*}{u}_r}{\partial \overset{*}{t}}+\overset{*}{u}_r\frac{\partial \overset{*}{u}_r}{\partial \overset{*}{r}}+\frac{\overset{*}{u}_\theta}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_r}{\partial \theta}-\frac{\overset{*}{u}{}_\theta^2}{\overset{*}{r}}+\overset{*}{u}_z\frac{\partial \overset{*}{u}_r}{\partial \overset{*}{z}}\right)=$$
$$\frac{1}{Ta}\left\{-\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{r}}+\left[\frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial}{\partial \overset{*}{r}}\left(\overset{*}{r}\,\overset{*}{S}_{rr}\right)+\frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial S_{r\theta}}{\partial \theta}-\frac{S_{\theta\theta}}{\overset{*}{r}}+\frac{\partial S_{rz}}{\partial \overset{*}{z}}\right]\right\} \qquad (۱۶\text{–}۲)$$

$$\left(\frac{\partial \overset{*}{u}_\theta}{\partial \overset{*}{t}}+\overset{*}{u}_r\frac{\partial \overset{*}{u}_\theta}{\partial \overset{*}{r}}+\frac{\overset{*}{u}_\theta}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_\theta}{\partial \theta}+\frac{\overset{*}{u}_\theta\,\overset{*}{u}_r}{\overset{*}{r}}+\overset{*}{u}_z\frac{\partial \overset{*}{u}_\theta}{\partial \overset{*}{z}}\right)=$$
$$\frac{1}{Ta}\left\{-\frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \theta}+\left[\frac{1}{\overset{*}{r}{}^2}\frac{\partial}{\partial \overset{*}{r}}\left(\overset{*}{r}{}^2 S_{r\theta}\right)+\frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial S_{\theta z}}{\partial \overset{*}{z}}\right]\right\} \qquad (۱۷\text{–}۲)$$

$$\left(\frac{\partial \overset{*}{u}_z}{\partial \overset{*}{t}}+\overset{*}{u}_r\frac{\partial \overset{*}{u}_z}{\partial \overset{*}{r}}+\frac{\overset{*}{u}_\theta}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_z}{\partial \theta}+\overset{*}{u}_z\frac{\partial \overset{*}{u}_z}{\partial \overset{*}{z}}\right)=$$
$$\frac{1}{Ta}\left\{-\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{z}}+\left[\frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial}{\partial \overset{*}{r}}\left(\overset{*}{r}\,S_{rz}\right)+\frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial S_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial S_{zz}}{\partial \overset{*}{z}}\right]\right\} \qquad (۱۸\text{–}۲)$$

ج) معادله ساختاری:

حالت بی بعد مشتق همرفتی بالادست تنش محلول معادله ساختاری، به شکل زیر است.

$$\tilde{S}^p_{(1)}=\frac{\overset{*}{R}{}_1^2\omega^2\eta_p}{d^2}\left[\frac{D\overset{*}{\tilde{S}}}{D\overset{*}{t}}-\left\{\left(\overset{*}{\vec{\nabla}}\overset{*}{\vec{V}}\right).\tilde{S}^p+\tilde{S}^p.\left(\overset{*}{\vec{\nabla}}\overset{*}{\vec{V}}\right)^T\right\}\right]$$

لذا حالت بی بعد معادله ساختاری عبارت است از:

$$\begin{cases} S_s = \dfrac{\eta_s}{\eta_0}\dot{\gamma}^{*} \\ S_p + Wi\ \tau^{*}_{p(1)} + \alpha\ Wi\left\{S_p \circ S_p\right\} = \dfrac{\eta_p}{\eta_0}\dot{\gamma}^{*} \end{cases} \qquad (۱۹-۲)$$

د) شروط مرزی:

تنها شرط مرزی ناهمگنی که تحت تأثیر بی بعد سازی قرار می‌گیرد، سرعت روی استوانه داخلی و در راستای جریان اصلی می‌باشد. سایر شروط همگن به همان صورت در شکل بی بعد نیز ظاهر می‌شوند.

$$u_\theta(R_i,\theta,Z)=1;$$

مرور شکل بی بعد شده معادلات حاکم، حاکی از ظهور دو عدد بی بعد تیلور (در معادلات ممنتوم) و وایزنبرگ (در معادلات ساختاری) می‌باشد.

هر چند عدد تیلور از نظر ظاهری همانند عدد رینولدز است، اما عدد رینولدز معرف نسبت نیروی اینرسی به نیرو لزجی می باشد، در حالی که عدد تیلور از نظر مفهومی بیانگر نسبت نیروی جانب مرکز به نیروی لزجی است و به احترام کوشش های راه گشای سر *جأفری اینگرام تیلور* نسبت مذکور عدد تیلور نامیده می‌شود. در مقالات عدد تیلور به اشکال مختلفی معرفی می‌گردد. در نوشتار پیش رو این عدد به طریق معادله (۲-۲۰) معرفی می‌گردد.

$$Ta = \frac{R_i\,\omega\,d}{\eta_0/\rho} \qquad (۲۰-۲)$$

از سوی دیگر نسبت نیرو حاصل از خاصیت الاستیک جریان به نیرو ناشی از لزجت جریان با عددی به نام وایزنبرگ تعیین می‌گردد (معادله (۲-۲۱)). به‌عبارت‌دیگر عدد مذبور نشان‌دهنده میزان رفتار غیرخطی جریان می‌باشد.

$$Wi = \lambda \frac{R_1 \omega}{d} \tag{۲-۲۱}$$

دو عدد بی بعد تیلور و وایزنبرگ به شکل واضحی علاوه بر خواص سیال وابسته به خصوصیات جریان است. از تقسیم این دو عدد به هم عدد بی بعد سومی با نام عدد الاستیک متولد می‌گردد که مهم‌ترین خصوصیت آن عدم وابستگی به جریان است و تنها مبین رفتار الاستیک سیال می‌باشد.

$$E = \frac{Wi}{Ta} = \lambda \frac{\eta_s + \eta_P}{\rho d^2} \tag{۲-۲۲}$$

۲-۴) تحلیل مرتبه بزرگی

در اکثر ناپایداری‌ها، جریان ثانویه ایجاد شده در قیاس با جریان اصلی از نظر مقدار مطلق پارامترهای اساسی جریان از قبیل سرعت و فشار از مرتبه پایین تری برخوردار هستند. در مورد ناپایداری تیلور-کوئت نیز می‌توان با در نظر گرفتن چنین حالتی معادلات حاکم را ساده نمود. این ساده‌سازی منجر به یافتن دید بهتری، برای قضاوت در مورد پارامترهای موثر در ایجاد و تقویت جریان ثانویه می‌گردد. با در نظر گرفتن مختصات استوانه‌ای و ملحوظ نمودن حالت تقارن محوری برای جریان ثانویه مد اول می‌توان مفروضات زیر را در بررسی مرتبه بزرگی جریان در نظر گرفت.

$$\begin{gathered} O\left(u_\theta\right) = O\left(\frac{\partial}{\partial r}(\ )\right) = O\left(\frac{\partial}{\partial z}(\ )\right) = 1 \\ O\left(u_z\right) = O\left(u_r\right) = O\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\ )\right) = \varepsilon \end{gathered} \tag{۲-۲۳}$$

تنش حاصل از ذرات پلیمری محلول از معادله ساختاری گزیکس بی بعد شده تحت تأثیر چنین تحلیلی به شکل زیر ساده می‌شود.

$$\begin{gathered} \tilde{S}^p + Wi \left\{ \frac{\partial \tilde{S}^p}{\partial \overset{*}{t}} + \overset{*}{\vec{V}} . \overset{*}{\vec{\nabla}} \tilde{S}^p - \left[\left(\widetilde{\overset{*}{\nabla} V} \right)^T \tilde{S}^p + \tilde{S}^p \left(\widetilde{\overset{*}{\nabla} V} \right) \right] \right\} + \\ \alpha\, Wi \left\{ \tilde{S}^p \circ \tilde{S}^p \right\} = \frac{\eta_p}{\eta_0} \overset{*}{\tilde{\dot{\gamma}}} \end{gathered} \tag{۲-۲۴}$$

$$\vec{V}.\vec{\nabla}\widetilde{\tau_p}=\left(u_r\widehat{e}_r+u_\theta\widehat{e}_\theta+u_z\widehat{e}_z\right).$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial\theta}-\left(\tau_{\theta r}+\tau_{r\theta}\right)\right]\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_\theta+\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial z}\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_z+\\
\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}-\left(\tau_{rr}+\tau_{\theta\theta}\right)\right]\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_\theta+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial z}\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_z+\\
\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial\theta}-\left(\tau_{\theta z}\right)\right]\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_\theta+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_z+\\
\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial r}\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial\theta}+\left(\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta}\right)\right]\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_\theta+\frac{\partial\tau_{\theta r}}{\partial z}\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_z+\\
\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial r}\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\left(\tau_{rr}+\tau_{\theta\theta}\right)\right]\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_\theta+\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial z}\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_z+\\
\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial r}\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\left(\tau_{rz}\right)\right]\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_\theta+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_z+\\
\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial r}\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial\theta}-\left(\tau_{z\theta}\right)\right]\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_\theta+\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z}\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_r\otimes\widehat{e}_z+\\
\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial r}\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_r+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial\theta}+\left(\tau_{zr}\right)\right]\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_\theta+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_\theta\otimes\widehat{e}_z+\\
\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial r}\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial\theta}\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_\theta+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_z\otimes\widehat{e}_z
\end{array}\right\}$$ (٢٥-٢)

معادله (۲-۲۶)

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} S_{rr}^{p} & S_{r\theta}^{p} & S_{rz}^{p} \\ S_{\theta r}^{p} & S_{\theta\theta}^{p} & S_{\theta z}^{p} \\ S_{zr}^{p} & S_{\theta z}^{p} & S_{zz}^{p} \end{bmatrix}
+Wi\Bigg\{ \frac{\partial}{\partial \overset{*}{t}}\begin{bmatrix} S_{rr}^{p} & S_{r\theta}^{p} & S_{rz}^{p} \\ S_{\theta r}^{p} & S_{\theta\theta}^{p} & S_{\theta z}^{p} \\ S_{zr}^{p} & S_{\theta z}^{p} & S_{zz}^{p} \end{bmatrix}
+\overset{*}{u}_{r}\begin{bmatrix} \frac{\partial S_{rr}^{p}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial S_{r\theta}^{p}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial S_{rz}^{p}}{\partial \overset{*}{r}} \\ \frac{\partial S_{\theta r}^{p}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial S_{\theta\theta}^{p}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial S_{\theta z}^{p}}{\partial \overset{*}{r}} \\ \frac{\partial S_{zr}^{p}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial S_{\theta z}^{p}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial S_{zz}^{p}}{\partial \overset{*}{r}} \end{bmatrix} \\
&+\overset{*}{u}_{\theta}\begin{bmatrix} \frac{1}{\overset{*}{r}}\left[\frac{\partial S_{rr}^{p}}{\partial\theta}-\left(S_{\theta r}^{p}+S_{r\theta}^{p}\right)\right] & \frac{1}{\overset{*}{r}}\left[\frac{\partial S_{rr}^{p}}{\partial r}-\left(S_{rr}^{p}+S_{\theta\theta}^{p}\right)\right] & \frac{1}{\overset{*}{r}}\left[\frac{\partial S_{rz}}{\partial\theta}-\left(S_{\theta z}^{p}\right)\right] \\ \frac{1}{\overset{*}{r}}\left[\frac{\partial S_{\theta r}^{p}}{\partial\theta}+\left(S_{rr}^{p}-S_{\theta\theta}^{p}\right)\right] & \frac{1}{\overset{*}{r}}\left[\frac{\partial S_{\theta\theta}^{p}}{\partial\theta}+\left(S_{r\theta}^{p}+S_{\theta r}^{p}\right)\right] & \frac{1}{\overset{*}{r}}\left[\frac{\partial S_{\theta z}^{p}}{\partial\theta}+\left(S_{rz}^{p}\right)\right] \\ \frac{1}{\overset{*}{r}}\left[\frac{\partial S_{zr}^{p}}{\partial\theta}-\left(S_{z\theta}^{p}\right)\right] & \frac{1}{\overset{*}{r}}\left[\frac{\partial S_{\theta z}^{p}}{\partial\theta}+\left(S_{zr}^{p}\right)\right] & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial S_{zz}^{p}}{\partial\theta} \end{bmatrix}^{p}+ \\
&\overset{*}{u}_{z}\begin{bmatrix} \frac{\partial S_{rr}^{p}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial S_{r\theta}^{p}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial S_{rz}^{p}}{\partial \overset{*}{z}} \\ \frac{\partial S_{\theta r}^{p}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial S_{\theta\theta}^{p}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial S_{\theta z}^{p}}{\partial \overset{*}{z}} \\ \frac{\partial S_{zr}^{p}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial S_{\theta z}^{p}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial S_{zz}^{p}}{\partial \overset{*}{z}} \end{bmatrix}
-\Bigg\{\begin{bmatrix} \frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial\theta}-\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial \overset{*}{z}} \\ \frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial\theta}+\frac{\overset{*}{u}_{r}}{\overset{*}{r}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{z}} \\ \frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial\theta} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial \overset{*}{z}} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} S_{rr}^{p} & S_{r\theta}^{p} & S_{rz}^{p} \\ S_{\theta r}^{p} & S_{\theta\theta}^{p} & S_{\theta z}^{p} \\ S_{zr}^{p} & S_{\theta z}^{p} & S_{zz}^{p} \end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} S_{rr}^{p} & S_{r\theta}^{p} & S_{rz}^{p} \\ S_{\theta r}^{p} & S_{\theta\theta}^{p} & S_{\theta z}^{p} \\ S_{zr}^{p} & S_{\theta z}^{p} & S_{zz}^{p} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial \overset{*}{r}} \\ \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial\theta}-\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial\theta}+\frac{\overset{*}{u}_{r}}{\overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial\theta} \\ \frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial \overset{*}{z}} \end{bmatrix}\Bigg\}\Bigg\} \\
&+\alpha Wi\left\{\begin{bmatrix} S_{rr}^{p} & S_{r\theta}^{p} & S_{rz}^{p} \\ S_{\theta r}^{p} & S_{\theta\theta}^{p} & S_{\theta z}^{p} \\ S_{zr}^{p} & S_{\theta z}^{p} & S_{zz}^{p} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{rr}^{p} & S_{r\theta}^{p} & S_{rz}^{p} \\ S_{\theta r}^{p} & S_{\theta\theta}^{p} & S_{\theta z}^{p} \\ S_{zr}^{p} & S_{\theta z}^{p} & S_{zz}^{p} \end{bmatrix}\right\}
=\frac{\eta_{p}}{2\eta_{0}}\left\{\begin{bmatrix} \frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial\theta}-\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial \overset{*}{z}} \\ \frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial\theta}+\frac{\overset{*}{u}_{r}}{\overset{*}{r}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{z}} \\ \frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial\theta} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial \overset{*}{z}} \end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} \frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{r}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial \overset{*}{r}} \\ \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial\theta}-\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial\theta}+\frac{\overset{*}{u}_{r}}{\overset{*}{r}} & \frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial\theta} \\ \frac{\partial \overset{*}{u}_{r}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{z}} & \frac{\partial \overset{*}{u}_{z}}{\partial \overset{*}{z}} \end{bmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

اگر ساده سازی ها مطابق الگوی مرتبه بزرگی بر روی دسته معادله (۲-۲۶) اعمال گردد، تنش های پلیمری معادله ساختاری گزیکس از معادلات زیر محاسبه خواهند شد.

$$S_{rr}^{p}+\alpha Wi\left\{S_{rr}^{p\,2}+S_{r\theta}^{p\,2}+S_{rz}^{p\,2}\right\}=0$$

$$S_{r\theta}^{p}-Wi\left\{+\frac{1}{\overset{*}{r}}\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}}\right)S_{rr}^{p}+\frac{\partial\overset{*}{u}_{\theta}}{\partial\overset{*}{z}}S_{zr}^{p}\right\}+$$
$$\alpha Wi\left\{S_{rr}^{p}S_{r\theta}^{p}+S_{r\theta}^{p}S_{\theta\theta}^{p}+S_{rz}^{p}S_{z\theta}^{p}\right\}=\frac{\overset{*}{r}}{2}\frac{\partial}{\partial\overset{*}{r}}\left(\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}}\right)$$

$$S_{rz}^{p}+\alpha Wi\left\{S_{rr}^{p}S_{rz}^{p}+S_{r\theta}^{p}S_{z\theta}^{p}+S_{rz}^{p}S_{zz}^{p}\right\}=0$$

$$S_{\theta\theta}^{p}-Wi\left\{+2\overset{*}{r}\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}}\right)S_{r\theta}^{p}+\frac{\partial\overset{*}{u}_{\theta}}{\partial\overset{*}{z}}S_{\theta z}^{p}\right\}+\alpha Wi\left\{S_{\theta r}^{p\,2}+S_{\theta\theta}^{p\,2}+S_{z\theta}^{p\,2}\right\}=0$$

$$S_{\theta z}^{p}-Wi\left\{+\overset{*}{r}\frac{\partial}{\partial}\left(\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}}\right)S_{rz}^{p}+\frac{\partial\overset{*}{u}_{\theta}}{\partial z}S_{zz}^{p}\right\}+$$
$$\alpha Wi\left\{S_{rz}^{p}S_{r\theta}^{p}+S_{\theta z}^{p}S_{\theta\theta}^{p}+S_{zz}^{p}S_{z\theta}^{p}\right\}=\frac{1}{2}\frac{\partial\overset{*}{u}_{\theta}}{\partial\overset{*}{z}} \qquad (۲-۲۷)$$

$$S_{zz}^{p}+\alpha Wi\left\{S_{zr}^{p\,2}+S_{z\theta}^{p\,2}+S_{zz}^{p\,2}\right\}=0$$

با فرض اینکه ضریب تحرک از مرتبه ε باشد. با جایگذاری تنش های حاصل از معادله ساختاری گزیکس در معادله ممنتوم مشخص می‌شود که علاوه بر مؤلفه شعاعی گرادیان فشار تقابل نیروی جانب مرکز و مؤلفه تنش عمودی محوری $S_{\theta\theta}$، در ایجاد گردابه ها نقش خواهند داشت.

$$
\begin{cases}
S_{rr}^{p} \simeq 0 \\
S_{rz}^{p} \simeq 0 \\
S_{zz}^{p} \simeq 0 \\
S_{r\theta}^{p} \simeq \dfrac{\overset{*}{r}}{2}\dfrac{\partial}{\partial \overset{*}{r}}\left(\dfrac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}}\right) \\
S_{\theta z}^{p} \simeq \dfrac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{z}} \\
S_{\theta\theta}^{p} \simeq Wi\left(2\overset{*}{r}\dfrac{\partial}{\partial \overset{*}{r}}\left(\dfrac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}}\right)S_{r\theta}^{p} + \dfrac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{z}}S_{\theta z}^{p}\right)
\end{cases}
\tag{۲۸-۲}
$$

$$
\left(\frac{\overset{*}{u}_{\theta}^{2}}{\overset{*}{r}}\right) = \frac{1}{Ta}\left(\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{r}} + \frac{S_{\theta\theta}^{p}}{\overset{*}{r}}\right)
\tag{۲۹-۲}
$$

$$
\left(\frac{\overset{*}{u}_{\theta}^{2}}{\overset{*}{r}}\right) = \frac{1}{Ta}\left(\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{r}}\right) + En\left(\left(\overset{*}{r}\frac{\partial}{\partial \overset{*}{r}}\left(\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}}\right)\right)^{2} + \left(\frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{z}}\right)^{2}\right)
\tag{۳۰-۲}
$$

یادآوری این نکته ضروری است که دیگر فرض استوکس در مورد برابر بودن فشار ترمودینامیکی (p) با فشار متوسط هیدرولیکی ($\overline{p}$) صادق نبوده و در به طور کلی فشار سیال غیر نیوتنی توسط رابطه تعریف می‌شود. که در آن N_1 اختلاف تنش اصلی اول و N_2 اختلاف تنش اصلی دوم می‌باشد.

$$
\overline{p} = p - \tau_{yy} - \frac{1}{3}\left(N_1 - N_2\right)
\tag{۳۱-۲}
$$

بنابراین در کنار نقش برجسته تنش $S_{\theta\theta}$، نباید از تأثیر تغییرات فشار در راستای شعاعی غافل شد. در فصل چهارم به طور کامل تمامی این عناصر بررسی و مطالعه می‌گردد.

فصل سوم

مدلسازی عددی

۲-۵) چرا OpenFoam؟

بیشتر نرم‌افزارهای موجود در زمینه دینامیک سیالات محاسباتی تحت مجوزهای خاص تجاری هستند و در نتیجه بسیار گران‌قیمت می‌باشند. در این نرم‌افزارها دستیابی به متن برنامه‌ها و کدهایی که امکان حل مسئله را فراهم می‌آورند بسیار دشوار و حتی غیرممکن است. با توجه به پیچیدگی‌ها و تنوع مسایل و روش های حل در زمینه مکانیک اغلب این نرم‌افزارها توانایی پوشش دهی به‌تمامی ابعاد این علم را ندارند. لذا کد نویسی با زبان های برنامه‌نویسی سطح دو و سه تا یک دهه پیش تنها راه حل بود. کد نویسی مستقیم هم خالی از اشکال نبود زیرا هم زمان زیادی را برای معرفی متغیرها انواع تلف می‌کرد و هم رفع نواقص آن احتیاج به‌صرف هزینه و تلاش زیاد داشت و در آخر هم نتیجه همه تلاش‌ها فقط به‌کار آن مسئله خاص می‌آمد. بالاخره در ۱۱ دسامبر ۲۰۰۴ توسط شرکت OpenCFD Ltd نرم‌افزاری با نام OpenFoam به بازار عرضه شد. این نرم‌افزار قبل از آن که یک نرم‌افزار کاربردی باشد. یک زبان برنامه‌نویسی مختص محققین حوزه مهندسی و اقتصاد با سطح سه و چهار بر پایه زبان برنامه‌نویسی سطح دو C++ دانست. زبان برنامه‌نویسی که برای تعریف یک معادله ممنتوم در آن احتیاج به ایجاد توابع و زیر توابع زیاد و یا معرفی متغیرها نیست و سرعت کار کد نویسی را با در اختیار گذاشتن امکاناتی همچون استفاده از روش‌های محاسباتی گوناگون، حل‌گرهای آماده، ویرایش کردن آن‌ها و یا حتی ایجاد حل‌گری جدید بالا می‌برد. همچنین ابزاری برای کنترل سرعت و دقت همگرایی و برقراری ارتباط با سایر نرم‌افزارهای تجاری در تمامی مراحل تحلیل، به شکل مجزا در اختیار کاربران خود قرار می‌دهد.

تحلیل مسئله‌ای سه بعدی با سیال ویسکوالاستیک که رفتاری غیرخطی از خود بروز می‌دهد (مسئله حاضر) چالش های بیشماری را پیش رو دارد. اگر از کد نویسی مستقیم استفاده می‌شد نه تنها زمان محاسبات را با توجه به محدودیت های پردازش موازی بسیار بالا می‌برد بلکه هیچ دستاورد خاصی در مقایسه با استفاده از نرم‌افزار OpenFoam در بر نداشت.

این نرم افزار را می توان بر روی سیستم عامل‌های مختلفی نصب و راه اندازی نمود. سیستم عامل میزبان می تواند بر روی بازدهی و سرعت نرم افزار مذبورثاتیرگذار باشد. در ادامه روش های رایج راه-اندازی OpenFOAM بر سیستم عامل های مختلف مرور می شود.

۱) راه‌اندازی مستقیم بر روی سیستمم عامل ویندوز که محدود به ویرایش های خاصی از این نرم افزار می شود.

۲) راه‌اندازی غیر مستقیم بر روی سیستم عامل ویندوز با استفاده از محیط شبیه ساز توزیع لینوکس که بازه حافظه و پردازش گرهای مورد استفاده در این حالت کاهش می یابد.

۳) راه‌اندازی مستقیم بر روی یکی از توزیع های لینوکس.

لازم به ذکر است که تاکنون موسسات و دانشگاه های مختلف با صرف انرژی و تعریف پروژه های گوناگون، سعی در بهبود و توسعه نرم افزار OpenFOAM داشته‌اند. کشورهای مختلفی همچون آلمان، سوئد، دانمارک، ایتالیا، چین، هند و برزیل در این مسیر گام‌های بزرگی برداشته‌اند. این تلاش ها در کنار تحقیقات هدفمند و پیگیری های مستمر در رابطه با نرم افزار های منبع باز دینامیک سیالات محاسباتی سبب توسعه روز افزون این دسته از نرم افزار شده است. به شکلی که توسعه این گونه نرم افزار در سال های اخیر سرعت خیره کننده ای به خود گرفته است و چشم انداز بسیار روشنی برای آینده آن‌ها می توان متصور بود. نقطه تاریک این روند پیشرفت مربوط به کمبود و کسیختگی منابع مرجع و راهنما کاربران این گونه نرم افزارهاست که عدم حمایت کافی و رواج عمومی را در پی داشته است.

۲-۶) دینامیک سیالات محاسباتی در چارچوب نرم‌افزار OpenFoam

همانند تمامی نرم‌افزارها و کدهای عددی که برای تحلیل مسایل دینامیک سیالات طراحی و استفاده می‌شوند. OpenFoam نیز از چارچوب‌ها و قواعد دینامیک سیالات محاسباتی پیروی می‌کند. شالوده و اساس یک کد در روش گسسته سازی مسئله است. بسیاری از محدودیت‌ها و توانایی های یک کد وابستگی به قرابت معادلات حاکم و روش گسسته سازی عددی بکار رفته در مسئله دارد. نرم‌افزار OpenFoam روش گسسته سازی حجم محدود را بکار می‌برد. این روش از سه گام کلی تشکیل شده است.

۲-۶-۱) گسسته سازی فضایی

توسط یک سری نقاط به هم متصل که نواحی و مرزهای یک منطقه از فضا تعریف می‌گردد. کمیت این منطقه از فیزیک مسئله نشأت می‌گیرد.

الف) شبکه‌بندی:

روش های متنوعی به‌منظور شبکه‌بندی در OpenFoam موجود است. یکی از ساده‌ترین و درعین‌حال کارآمدترین این روش‌ها PolyMesh است که بر اساس ایجاد چندوجهی های منظم به تعداد نامحدود طرح‌ریزی‌شده است. با کمک چهار مفهوم زیر توسط PolyMesh می‌توان شبکه‌بندی مورد نظر را ایجاد نمود (شکل (۳-۱)).

نقاط: یک فهرست بردار مکانی (کمیت برداری) هستند که جانمایی از فضا مورد نظر را در دستگاه مختصات کارتزین تعریف می‌نمایند.

صفحات: هر فهرست دلخواهی از نقاط معرف یک صفحه هستند به‌شرط اینکه ترتیب نقاط در فهرست از قانون دست راست پیروی نماید و صفحه منتجه مقعر نباشد. صفحات خود به دو دسته

تقسیم می‌شوند. صفحات داخلی که فقط و فقط دو سلول را به هم متصل می‌کنند و صفحات مرزی که نتها به یک سلول تعلق دارند و حتماً در مرز منطقه فضایی قرار دارند.

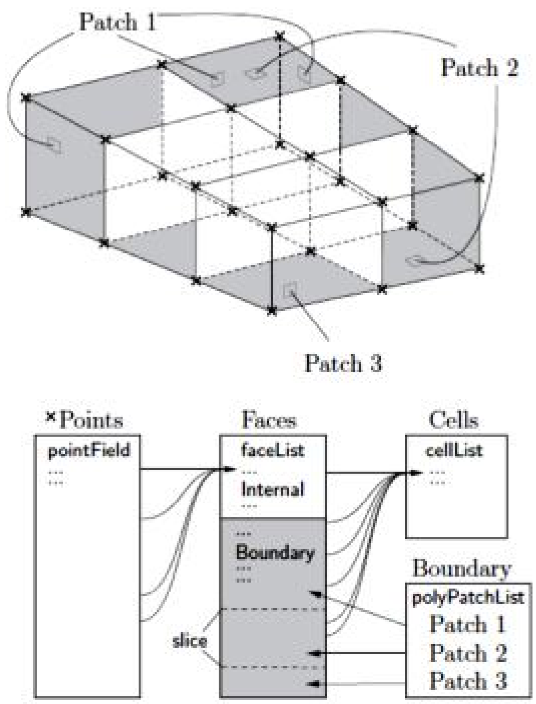
سلول: هر فهرست دلخواهی از صفحات که امکان تشکیل یک شکل هندسی منظم را داشته باشند.

مرز: مرزهای یک ناحیه از محدوده‌هایی شامل تعدادی صفحات مرزی است. محدوده‌هایی که از لحاظ شروط مرزی یکی هستند، تشکیل یک مرز را می‌دهند.

این‌گونه، PolyMesh شبکه‌بندی روش حجم محدود را ایجاد و اطلاعات را در میدان های داده‌ای جدول (۳-۱) ذخیره و دسته‌بندی می‌کند. که امکان تغییر این اطلاعات در طول زمان محاسبات وجود دارد.

جدول (۳-۱): داده‌های ذخیره‌شده توسط PolyMesh

تابع فراخوان کننده	نماد	توضیح	نوع میدان داده‌ای
V()	V	حجم سلول را ذخیره می‌کند	VolScalerField
S_f()	S_f	بردار نرمال صفحه را ذخیره می‌کند	SurfaceVectorField
magSf()	$\|S_f\|$	مساحت صفحه را ذخیره می‌کند	SurfaceScalerField
C()	C	بردار مکانی مرکز سلول را ذخیره می‌کند	VolVectorField
Cf()	C_f	بردار مکانی مرکز صفحه را ذخیره می‌کند	SurfaceVectorField
φg()	φ_g	شار جریانی صفحه را ذخیره می‌کند.	SurfaceScalerField



شکل (۳-۱): ارکان شبکه‌بندی در نرم‌افزار OpenFoam

ب) سازمان‌دهی داده‌ها و متغیرها:

روال کلی OpenFoam برای تعریف و شناسایی متغیرها استفاده از الگوی Field<Type> است. این الگو متغیر را به شکل تانسوری ذخیره می‌کند. به طور مثال یک دسته متغیر اسکالر را تانسوری از مرتبه صفر می‌داند. برای بیان کامل (هندسه و فیزیک) مسئله نرم‌افزار از الگوی دیگری با نام geometricField<Type> استفاده می‌نماید و در واقع اطلاعات نقاط را به شبکه‌بندی الصاق می‌کند. geometricField<Type> داده‌های زیر را در خود دارد.

میدان داخلی: در واقع همان داده‌های الگوی Field<Type> مسئله در درون منطقه فضایی مسئله است.

میدان مرزی: داده‌های مربوط به هر محدوده تعریف‌شده در الگوی Field آن محدوده می‌نشیند. این الگو حاوی اطلاعات تعدادی صفحه نیز می‌باشد لذا داده‌های یک صفحه مرزی باید به شکل FieldField<Type> توسط نرم‌افزار ذخیره شود.

شبکه‌بندی: علاوه بر اطلاعات مربوط به شبکه‌بندی حجم محدود، اطلاعات مختص به هر سلول را نیز ذخیره می‌کند.

یکا و ابعاد: به طور پیش‌فرض نرم‌افزار از سیستم SI برای محاسبات استفاده می‌نماید. اما در صورت لزوم امکان انجام تبدیلات وجود دارد.

مقادیر مستعمل: در حل های گذرا همواره نیاز به استفاده از داده‌های گام های زمانی قبلی وجود دارد.

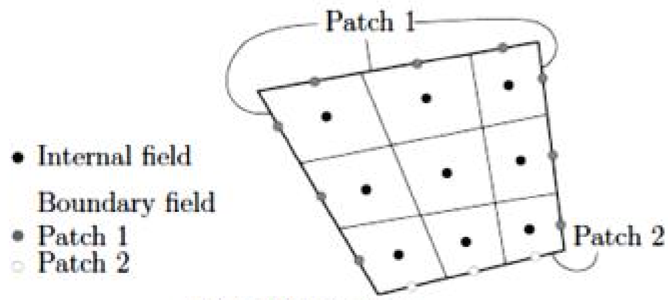
مقادیر تکرارهای قبلی: برای تصحیح مقادیر کمیت‌ها، محاسبه خطاها و مهار واگرایی اغلب به اطلاعات تکرارهای قبلی نیاز است.

با توجه به توضیحات اخیر زیرمجموعه‌های geometricField در سه شاخه کلی جای می‌گیرند (شکل (۳-۲)) که عبارتند از:

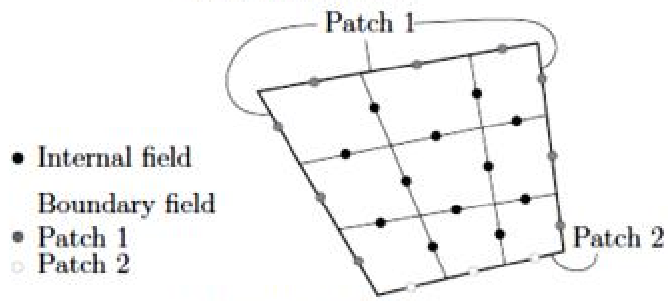
میدان های حجمی: برای مرکز هر سلول تعریف می‌شوند.

میدان های صفحه‌ای: برای صفحات تشکیل‌دهنده هر سلول تعریف می‌شوند.

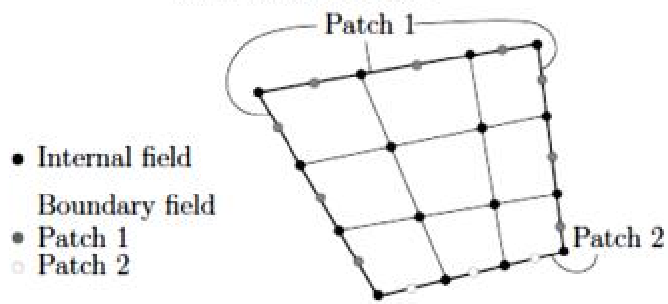
میدان های نقطه‌ای: برای بردار های مکانی تشکیل‌دهنده هر سلول تعریف می‌شوند.



(a) A volField<Type>



(b) A surfaceField<Type>

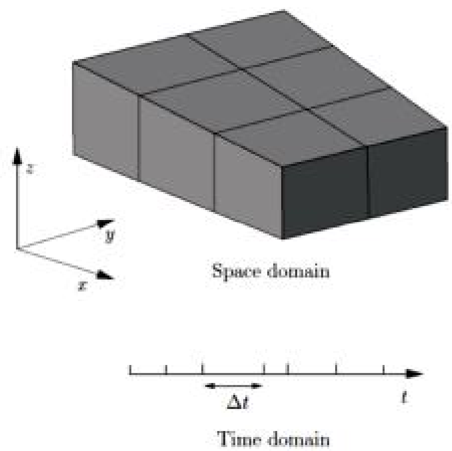


(c) A pointField<Type>

شکل (۳-۲): انواع میدان های دادهای برای مسئلهای دوبعدی با دو محدود مرزی

۲-۶-۲) گسسته سازی زمانی

اکثراً برای حل های وابسته به زمان انجام می‌گیرد و عبارت است از تقسیم‌بندی زمان به بازه‌های کوچک. تعداد این بازه‌ها معلوم و مقیاس و تعدادشان به عوامل مختلفی وابسته است.



شکل (۳- ۳): تنظیم گام های زمانی برای مهار رشد عدد کورانت

اما تعیین گام زمانی مناسب بسیار مهم است. چرا که اگر بیش از حد کوچک باشد زمان پردازش رایانه بالا می‌رود و اگر از حد خاصی بیشتر باشد سبب واگرایی می‌شود. OpenFoam عدد بی بعد کورانت را به منظور ایجاد تناسب بین گام های زمانی و مکانی معرفی می‌نماید. با توجه به حل‌گر مورد استفاده و مسئله مدل شده، عدد کورانت یک مقدار بحرانی دارد. این مقدار معمولاً باید کوچک‌تر از یک باشد و در صورت تجاوز کردن عدد کورانت هر سلول از این مقدار مسئله واگرا می‌شود. این عدد توسط معادله (۳-۱) برای هر مدل‌سازی قابل تعیین است. در این معادله δx اندازه یک سلول، δt گام زمانی و U اندازه سرعت مربوط به آن سلول است. به طور کلی یک عدد کورانت برای مسئله در نظر گرفته می‌شود و با توجه به میزان شبکه‌بندی فضایی با کمک معادله (۳-۱) مقدار گام زمانی (شکل (۳- ۳)) تعیین می‌شود.

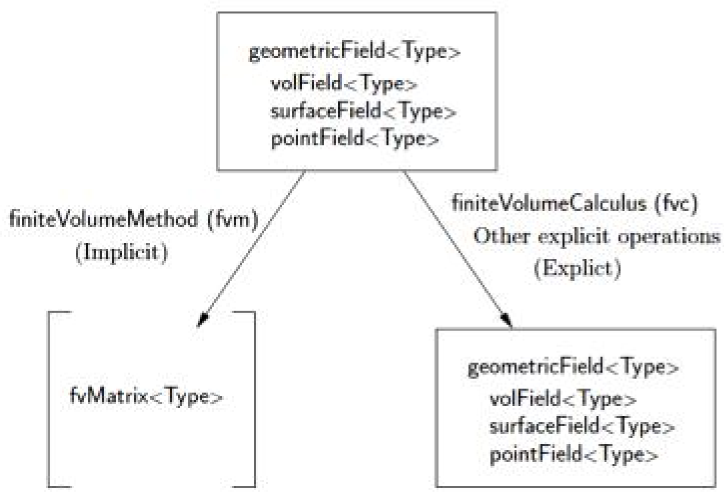
$$Co = \frac{\delta t \left| U \right|}{\delta x} \tag{۳-۱}$$

۳-۶-۲) گسسته سازی معادلات

هدف این بخش ایجاد یک سیستم معادلات جبری از تمامی معادلات دیفرانسیل های جزئی حاکم بر نواحی مختلف مسئله با توجه به متغیرها جاری در مسئله است. در واقع برای هر مسئله نرم‌افزار یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی تشکیل می‌دهد.

$$[A][x]=[b]$$

بردارهای x و b از الگو geometricField هستند. اما ماتریس A از یک سری ضرایب معادلات جبری تشکیل شده است. در نتیجه در الگو x و b نمی‌گنجد و در الگو دیگری با نام fvMatrix<Type> طبقه‌بندی می‌شود. در حقیقت نتایج محاسبات ضمنی (عموماً محاسباتی حاوی اپراتورهای ریاضی) مبتنی بر روش های مختلف حجم محدود مانند Central differencing، Upwind differencing و ... بر روی اطلاعات geometricField<Type> در الگو fvMatrix<Type> جای می‌گیرد. اما سایر محاسبات صریح روش حجم محدود بر روی اطلاعات geometricField<Type> سبب تغییری در الگو ذخیره‌سازی نمی‌شود (شکل (۳-۴)).



شکل (۳-۴): دسته‌بندی داده‌ها و تأثیر عملگرها در ذخیره‌سازی نتایج

به کمک توضیحات بالا می‌توان معادله ممنتوم سیال نیوتنی تراکم پذیر را با زبان نرم‌افزار بازنویسی کرد:

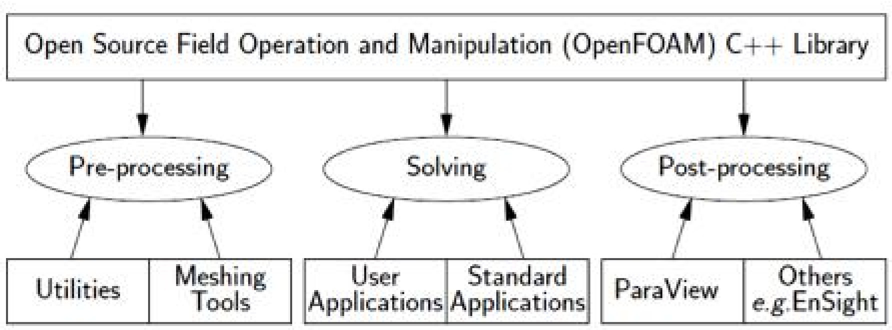
$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t}+\nabla.(\rho UU)-\nabla.\mu\nabla U=-\nabla P$$

```
fvm : : ddt (rho , U)  +
+ fvm : : div (phi , U)
 – fvm : : laplacian (mu , U)
== - fvc : : grad(p)
```

البته امکان انتخاب روش حل هر یک از قسمت های این معادله به صورت جداگانه وجود دارد. این‌گونه جزئیات در راهنمای این نرم‌افزار [۶۴, ۶۵] توضیح داده شده است.

۲-۷) تحلیل ناپایداری تیلور-کوئت با نرم‌افزار OpenFoam

تمامی نرم‌افزارهای حیطه دینامیک سیالات محاسباتی از سه بخش کلی پیش‌پردازش، پردازش و پس پردازش تشکیل‌شده‌اند. خود این بخش‌ها به فراخور مسئله و روش حل ممکن است از یک تا چند ده زیرمجموعه داشته باشند. شمای کلی این تقسیم‌بندی برای نرم‌افزار OpenFoam در شکل (۳-۵) نمایش داده شده است. براین اساس روند تحلیل مسئله مذبور در این پروژه پی گرفته می‌شود.



شکل (۳-۵): مراحل حل یک مسئله با کمک نرم افزار OpenFoam

۲-۷-۱) شبکه‌بندی

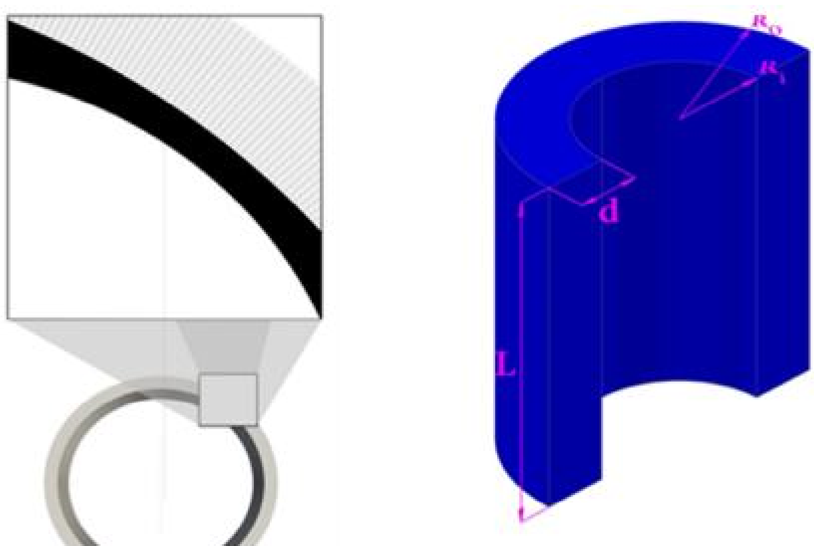
مشخصات هندسی استوانه‌های بکار رفته در این مدل‌سازی در جدول (۳-۲) آورده شده است. نسبت شعاع استوانه داخلی به خارجی همانند اکثر ویسکومتر ها و رئومترها نزدیک به یک در نظر گرفته شده است تا نتایج از حیث کاربردی نیز قابل استفاده باشند و تنها یک سری مفاهیم فیزیکی را بیان نکنند.

البته در کنار بار محاسباتی حاصل از تعدد سلول های لازمه برای دیدن جریان ثانویه نسبت فوق نیز یک بار محاسباتی مضاعف را بر مسئله تحمیل می‌نماید که از آن گریزی نیست.

جدول (۳-۲): مشخصات شبکه‌بندی مسئله

$\gamma=\frac{L}{d}$	$\kappa=\frac{R_i}{R_o}$	تعداد سلول‌ها		
		در راستا محور استوانه	در راستا جریان	در راستا شعاعی
۴	۰/۸۸۳	۷۰	۷۱۲	۳۰

لازم به توضیح است که مقدار γ در بررسی های عددی دو بعدی باید در حدود ۱۰ و برای بررسی های تجربی در حدود ۲۰ در نظر گرفته شود. کیفیت و مشخصات هندسی شبکه‌بندی در شکل (۳-۶) نمایش داده شده است.



شکل (۳-۶): مشخصات هندسی شبکه‌بندی

۲-۷-۲) تنظیمات حل گر

حل‌گر مورد استفاده در این پروژه ViscoelasticFluidFoam نام دارد. متن کد این حل گر در دسترس است و درستی آن مورد تأیید می‌باشد. اما برای بهره‌برداری هرچه بهتر از روش های حل حجم محدود و روش محاسبات حجم محدود برای مسئله جاری کمی تغییر در روش های محاسبات داده می‌شود.

یکی از اساسی‌ترین مسایل در دینامیک سیالات محاسباتی تعیین نحوه حل و مرتبط ساختن معادلات پیوستگی و ممنتوم در سیالات تراکم ناپذیر است. زیرا برخلاف سیالات تراکم پذیر که از طریق جرم مخصوص تأثیرات فشار در هر دو معادله ظاهر می‌شود در سیالات تراکم ناپذیر فشار نقش مستقیمی در معادله پیوستگی ایفا نمی‌کند. روش های مختلفی برای غلبه بر این مشکل پیشنهاد شده است. از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) خط جریان – تابع جریان [۶۶]

۲) روش های مبتنی بر حل سرعت و فشار در شبکه‌های مجزا [۶۷-۶۹]

۳) حل ابتدایی معادله ممنتوم و حصول میدان سرعت معادله پیوستگی بر پایه نتایج ممتنوم [۷۰]

۴) اجرا روند تصحیح فشار برای هر سلول [۷۱]

۵) شبکه ثابت (همه متغیرها در مرکز حجم کنترل ذخیره می‌شود) / شبکه متغیر [۷۲]

۶) الگوریتم سیمپلار و هم خانواده‌هایش [۷۱]

۷) الگوریتم پیزو [۷۳]

۸) و...

در بین روش های مذبور، روش پیزو در این تحقیق با توجه به روش های موجود در نرم‌افزار OpenFoam به‌کار بسته شده است. در روش پیزو معادله مبین فشار از حالت گسسته شده معادلات ممنتوم و پیوستگی بجای حالت دیفرانسیلی معادلات ممنتوم و پیوستگی استخراج می‌گردد. با این

ترفند بسیاری از مشکلات حالت حل همزمان و مسایل مربوط به همگرایی تقلیل می‌یابد. به‌منظور روشن شدن مراحل روش گسسته سازی بر روی معادلات حاکم مسئله تشریح می‌شود.

۱) گام پیش‌بینی: با فرض وجود میدان فشار و سرعت و تنش در زمان t_n، با حل معادلات ممنتوم به شکل صریح، میدان سرعت گام پیش‌بینی محاسبه می‌شود.

$$\frac{\rho}{\delta t}\left(u_i^* - u_i^n\right) = H(u_i^*) - \Delta_i p^n + \Delta_i \tau^n_{(p)i} \qquad (۳-۲)$$

H اپراتوری است که میزان همرفتی و انتشار ممنتوم ناشی از قسمت نیوتنی محلول را توامان در بر دارد.

۲) مرحله تصحیح اولیه: یک میدان سرعت جدید u** به همراه میدان های فشار و تنش متناظر p* و τ_p* محاسبه می‌گردد. در ابتدا تنش قسمت حل شونده محاسبه، سپس میدان فشار مربوطه تعیین و سرعت تصحیح شده از معادله پیوستگی استخراج می‌شود. ترتیب معادلات بدین‌صورت است.

$$\tau^*_{(p)i} + \lambda\left\{\frac{1}{\delta t}\left(\tau^*_{(p)i} - \tau^n_{(p)i}\right) - \left[\left(\Delta u_i^*\right)^T . \tau^*_{(p)i} + \tau^*_{(p)i} . \left(\Delta u_i^*\right)\right]\right\} + \alpha \frac{\lambda}{\eta_p}\left\{\tau^*_{(p)i} . \tau^*_{(p)i}\right\} = \eta_p G(u_i^*) \qquad (۳-۳)$$

$$\Delta_i^2 p^* = \Delta_i H(u_i^*) + \Delta_i \tau^*_{(p)i} + \frac{\rho}{\delta t}\Delta_i u_i^n \qquad (۳-۴)$$

$$\frac{\rho}{\delta t}\left(u_i^{**} - u_i^n\right) = H(u_i^*) - \Delta_i p^* + \Delta_i \tau^*_{(p)i} \qquad (۳-۵)$$

$$\Delta_i u_i^{**} = 0 \qquad (۳-۶)$$

در اینجا تنش اصلاحی ناشی از رفتار ویسکوالاستیک سیال به شکل ضمنی از معادله (۳-۳) محاسبه و سپس توزیع فشار تعیین می‌گردد (معادله(۳-۴)) و در نهایت سرعت متناظر از معادله (۳-۵) با توجه به معادله (۳-۶) حاصل می‌گردد. تعداد دفعات تصحیح می‌تواند چندین بار تکرار شوند. به‌خصوص زمانی که مدل‌سازی با شبکه‌بندی های غیر متعامد مواجه باشد. لازم به توضیح است که دقت این روش

در محاسبه میدان فشار از مرتبه دوم گام زمانی است[۷۳]. مراحل حل به انضمام آنچه که در بالا توضیح داده شد در ساختار OpenFoam گنجانده شده است. طبق توضیحات قبلی معادله ممنتوم جریان ویسکوالاستیک بدون ملحوظ نمودن گرادیان فشار اینگونه نگاشته می‌شود:

```
Tmp<fvVectorMatrix> UEqn
(
fvm::ddt(U)
+ fvm::div(phi,U)
- Visco.divTau(U)
);
Ueqn().relax();
solve(UEqn == -fvc::grad(p));
```

مقدار Tau تنش حاصل از رفتار ویسکوالاستیک سیال است و بر طبق مدل ساختاری انتخاب شده محاسبه می‌گردد (در اینجا از مدل ساختاری گزیکس استفاده شده است).

```
// Stress transport equation
tmp<fvSymmTensorMatrix> tauEqn
(
fvm::ddt(tau_)
+ fvm::div(phi(), tau_)
==
etaP_ / lambda_ * twoD
+ twoSymm(C)
- (alpha_ / etaP_) * ( tau_ & tau_)
- fvm::Sp(1/lambda_, tau_)
);
tauEqn().relax();
solve(tauEqn);
```

با فرض وجود گرادیان فشار از گام زمانی قبلی، معادله ممنتوم حل می‌شود:

```
solve (UEqn() == -fvc::grad(p));
```

سرعت در مراکز سلول محاسبه شده و سپس با کمک درون‌یابی شار جریان عبوری از سلول‌ها تعیین می‌گردد:

```
volScalarField rUA = 1.0/UEqn( ).A( );
U = rUA*UEqn( ).H( );
phi = fvc::interpolate(U) & mesh.Sf( )
adjustPhi(phi, U, p);
```

حال با توجه به معیارهای تنظیم شده و روش منتخب کاربر میدان فشار (در اینجا با شبکه‌بندی متعامد و توسط الگوریتم پیزو) تصحیح می‌گردد:

```
for (int nonOrth=0; nonOrth<=nNonOrthCorr; nonOrth++)
{
fvScalarMatrix pEqn
(
fvm::laplacian(rUA, p) == fvc::div(phi)
);
pEqn.setReference(pRefCell, pRefValue);
pEqn.solve( );
if (nonOrth == nNonOrthCorr)
{
Phi -= pEqn.flux();
}
}
```

در نهایت میزان فاکتور های تصحیح گام فشار تأثیر داده می‌شود و سرعت متناظر فشار از معادله ممنتوم محاسبه می‌گردد. شرایط مرزی جدید و ویسکوزیته جدید برای گام بعدی نیز محاسبه شده و خطاهای محاسبات و مقدار معادله پیوستگی گزارش می‌شود.

```
p.relax( );
U -= rUA*fvc : : grad (p);
U.correctBoundaryCondition( );
visco.correct( );
runtime.write( );
```

تنها کار باقی‌مانده در این مرحله تعیین نحوه محاسبات عددی اپراتورهای ریاضی و روش‌ها میان یابی توسط نرم‌افزار در طول اجرا کدهای فوق می‌باشد. به منظور کاهش زمان محاسبات و در نظر گرفتن دقت مورد نیاز مسئله مورد بررسی، محاسبات مشتق های زمانی، اپراتور لاپلاسین، اپراتور گرادیان و میانیابی‌ها از روش گوس خطی و اپراتور دیورژانس با روش گوس بالا دستی صورت می پذیرد.

۲-۷-۳) تعیین شرایط مرزی در نرم‌افزار

از دید مکانیک سیالات شرایط مرزی در فصل گذشته تعیین گردید. این شرایط به شکل زیر در نرم‌افزار گنجانده می‌شود.

شرط مرزی سرعت:

```
internalField uniform (0 0 0);
boundaryField
{
out
{
type fixedValue;
value uniform ( 0 0 0 );
```

```
}
in
{
type rotatingWallVelocity;
origin ( 0 0 0 );
axis ( 0 0 1 );
omega 38;
}
bottom
{
type cyclic;
}
top
{
type cyclic;
}
}
```

شروط مرزی تنش و فشار هم شبیه هم هستند:

```
internalField uniform 0;
boundaryField
{
out
{
type zeroGradient;
}
in
{
type zeroGradient;
}
bottom
{
type cyclic;
}
top
{
type cyclic;
}
}
```

با توجه به اینکه هدف بررسی سه بعدی جریان ویسکوالاستیک تیلور-کوئت می‌باشد، استفاده از محاسبات موازی بسیار مهم و راهبردی است. جزئیات نحوه محاسبات موازی بسته به بسته نرم‌افزاری مورد استفاده بسیار پیچیده می‌باشد. لذا توضیح مسایل مربوط به محاسبات موازی نرم‌افزار

OpenFoam از حوصله نوشتار پیشرو خارج است. به هر روی در این پژوهش از دو رایانه با مشخصات جدول (۳-۳) استفاده شده و زمان صرف شده برای استخراج نتایج بدون در نظر گرفتن زمان های پس پردازش و پیش‌پردازش ارایه گردیده است.

جدول (۳-۳): مشخصات رایانه‌های مورد استفاده در این پژوهش

مشخصات / رایانه	پردازنده(مجازی)	فرکانس (GHz)	حافظه موقت (GB)	حافظه جانبی (GB)	زمان متوسط پردازش هر مسئله (ثانیه)	زمان کل (10^6 GHz.s)
اینتل-اینتل	۶ هسته (۱۲)	۳/۲	۱۶	۱۲۱۰	۱۸۲۸۰۰	۳۲
اینتل-ایسوز	۴ هسته (۸)	۲/۹	۱۶	۵۳۰	۱۹۸۰۰۰	۱۷

فصل چهارم

نـــتایج

۳-۱) مطالعه کیفیت شبکه‌بندی

یکی از دغدغه‌های همیشگی در پژوهش های عددی، انتخاب شبکه‌بندی مناسب است. به‌طوری که شبکه مورد استفاده در کنار حصول جواب‌هایی با دقت مناسب، از نظر زمان اختصاص‌یافته به پردازش های رایانه‌ای نیز اقتصادی باشد. بدین ترتیب همواره سعی بر این است که توازنی مطلوب بین دقت جواب‌ها و زمان مصرفی برقرار باشد. علاوه بر این در دینامیک سیالات محاسباتی، شاخص مهم تایید کننده کیفیت و صحت حل عددی انجام‌شده، بررسی میزان وابستگی جواب‌ها به کمیت شبکه‌بندی است. روش های گوناگونی برای مطالعه این شاخص وجود دارد. بدین منظور، در تحقیق حاضر روش برون‌یابی ریچاردسون [۷۴] به کار گرفته شده است. در ادامه سعی شده اجرای روش مذبور بر روی مدل‌سازی تحقیق پیشرو شرح داده شود.

شبکه‌بندی در تحقیق حاضر بدین شکل است که اندازه هر یال سلول در جهت شعاعی و دورانی برابر و نصف یالی است که در جهت محوری قرار دارد. با توجه به هندسه مسئله (جدول (۳-۲)) سه شبکه‌بندی متفاوت از لحاظ تعداد گره‌ها به شکل تجربی در نظر گرفته و معیار شبکه‌بندی (h) هر یک تعیین می‌شود. این معیار طبق معادله (۴-۱) محاسبه می‌گردد [۷۵].

$$h=\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta V_i\right]^{1/3} \qquad (۱-۴)$$

نسبت معیار شبکه‌بندی درشت به معیار شبکه‌بندی ریزتر نباید از ۱/۳ کمتر باشد. این نسبت کلی است و بر طبق تجربه ارایه شده است. حال اگر شبکه ریز با پانویس ۱، شبکه معمولی با پانویس ۲ و شبکه‌بندی درشت با پانویس سه نشان داده شود، متغیر مکانی اساسی (φ) بسته به شرایط مسئله تعیین و با حل دسته معادلات زیر خطای ظاهری (P) شبکه‌بندی بر مبنای روش ریچاردسون مشخص می‌شود.

$$\begin{cases} P = \dfrac{1}{\ln\left(r_{21}\right)}\left|\ln\left|\dfrac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}}\right| + q\left(P\right)\right| \\ q(P) = \ln\left(\dfrac{r_{21}^{P} - s}{r_{32}^{P} - s}\right) \\ s = Sign\left(\dfrac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}}\right) \end{cases} \qquad (۲-۴)$$

در روابط فوق:

$$r_{21} = \frac{h_2}{h_1}$$
$$r_{32} = \frac{h_3}{h_2}$$
$$\varepsilon_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$$
$$\varepsilon_{32} = \varphi_3 - \varphi_2$$

با کمک روش برون‌یابی ریچاردسون مقدار متغیر مورد نظر را برون‌یابی کرده و میزان خطاهای شبکه‌بندی e_a و خود خطای برون‌یابی e_{ext}، تعیین شود.

$$\varphi_{ext}^{21} = \frac{r_{21}^{P}\varphi_1 - \varphi_2}{r_{21}^{P} - 1}$$
$$e_a^{21} = \left|\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1}\right| \qquad (۳-۴)$$
$$e_{ext}^{21} = \left|\frac{\varphi_{ext}^{12} - \varphi_1}{\varphi_{ext}^{12}}\right|$$

علاوه بر تعیین خطای شبکه‌بندی و مرتبه آن به کمک روش ریچاردسون می‌توان نمایه کیفیت همگرایی شبکه‌بندی GCI را محاسبه کرد.

$$GCI_{fine}^{21} = \frac{1.25e_a^{21}}{r_{21}^{P} - 1} \qquad (۴-۴)$$

نتایج حاصل از اجرای روند شرح داده شده در بالا بر روی ۱۰۰ گره از گره‌های مدل‌سازی این تحقیق در جدول (۴-۱) تدوین شده است.

جدول (۴-۱): نتایج حاصل از مطالعه شبکه‌بندی مسئله

$N_1=434240$ $N_2=1465560$ $N_3=3287324$	مؤلفه‌های سرعت در صفحه x=0		
	U_x	U_y	U_z
r_{21}	۱/۳	۱/۳	۱/۳
r_{32}	۱/۵	۱/۵	۱/۵
P_{av} (متوسط مرتبه خطا)	۲/۶	۲/۲	۱/۷۱
درصد همگرایی نوسانی	٪۰	٪۹۹	٪۴۶
$e_{ext}^{21}\|_{ave}$ (متوسط خطای برون‌یابی شبکه ریز)	٪۱/۴	٪۱/۹	٪۰/۹۸
$e_{ext}^{32}\|_{ave}$ (متوسط خطای برون‌یابی شبکه درشت)	٪۰/۳۵۷	٪۰/۶	٪۹/۰۹
GCI_{21} (متوسط نمایه کیفیت شبکه ریز)	٪۱	٪۹/۶	٪۸
GCI_{32} (متوسط نمایه کیفیت شبکه درشت)	٪۰/۷۴	٪۱/۹۷	٪۴/۳

با در نظر گرفتن نتایج حاصل از بررسی کیفیت شبکه‌بندی و لحاظ نمودن مسئله محدودیت های سخت‌افزاری، تعداد گره‌های مورد استفاده در پژوهش پیش رو مقدار N_2 انتخاب گردید.

۳-۲) بررسی صحت روش مطالعه

راستی آزمایی روش مطالعه در طول این فصل از جهات مختلفی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این بخش بر پایه روش استفاده شده در پژوهش [۵۵] و مقایسه نتایج با چندین مقاله میزان دقت و درستی روش مورد استفاده برای سیال نیوتنی سنجیده می‌شود.

مشخص است به دلیل حضور خطا در محاسبات عددی – هر چند کوچک – همواره نتایج حاصل از این روش حل در جریان مقداری ناپایداری را نشان می‌دهد. چنین شرایطی حتی برای جریانی که از

دیدگاه تجربی و تحلیلی پایدار است، واقع می‌شود. به همین روی در تحلیل های عددی باید مرتبه بزرگی مؤلفه محوری بردار سرعت مورد توجه قرار گیرد. این یکه سازی[1] می‌تواند بر پایه شاخص های مختلفی انجام پذیرد. از آن جمله، براساس اندازه بردار سرعت، بر پایه سرعت مشخصه و ...

در تحقیق پیش رو یکه سازی، همواره توسط معادله (۴-۵) و بر اساس مؤلفه زاویه‌ای بردار سرعت انجام می‌پذیرد.

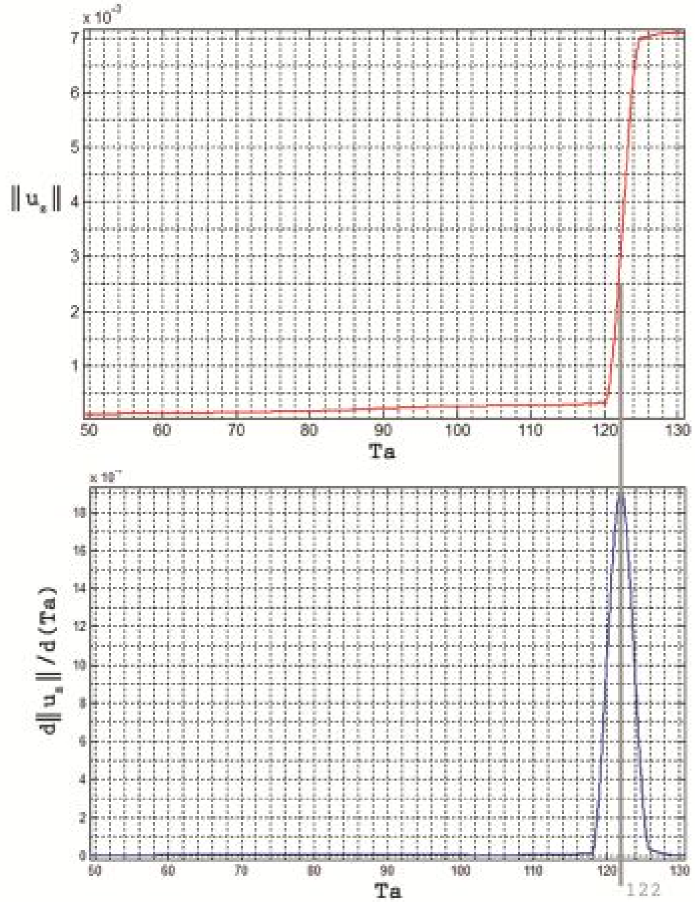
$$\|u_z\| = \frac{\sum_{i=1}^{N} u_z}{\sum_{i=1}^{N} u_\theta} \qquad (۴\text{-}۵)$$

در اینجا N تعداد گره‌های استفاده شده در حل عددی می‌باشد.

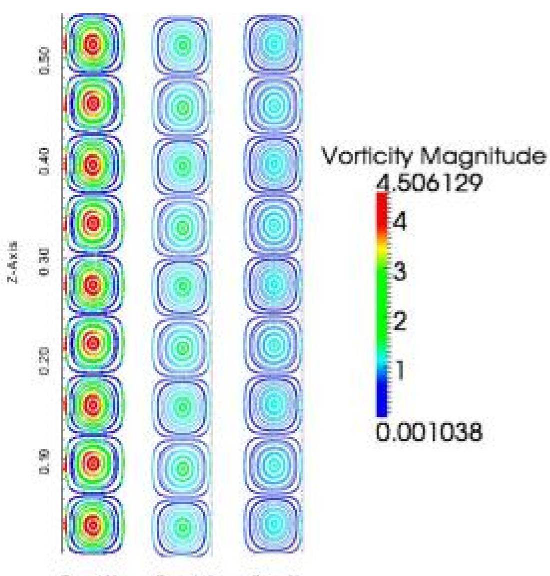
با این‌چنین یکه سازی می‌توان رشد مؤلفه زاویه‌ای سرعت را بر اثر افزایش سرعت زاویه دوران استوانه‌ها مرور نمود. نتایج حاصل از حل عددی ناپایداری تیلور-کوئت یک جریان نیوتنی با لزجت سینماتیکی ۰/۰۰۱۸۴ متر مربع بر ثانیه و نسبت شعاعی ۰/۸۸۳ بر اساس روش تحلیل تبیین شده در فصل قبل حاکی از نحوه تغییرات رشد مؤلفه محوری سرعت در قبال افزایش عدد تیلور مسئله می‌باشد. مطابق شکل (۴-۱) با زیاد شدن سرعت زاویه‌ای دوران استوانه داخلی ، در حالت سکون استوانه خارجی، رشد مؤلفه سرعت محوری جریان یک سیال ثابت مشهود است. این رشد تا قسمتی از نمودار با افزایش شیب به پیش می‌رود و از عدد تیلوری حدود ۱۲۲ شیب این رشد، رفتار کاهشی از خود بروز می‌دهد. از دید عددی چنین نقطه‌ای در نمودار، حکم همان عدد تیلور بحرانی حاصل از بررسی های عددی و تجربی را دارد. علاوه بر این تغییر در اندازه گردابه های تیلور هم می‌تواند گواهی بر این استنتاج باشد (شکل (۴-۲)). شایان توجه است سیر همگرایی حل عددی و کیفیت آن با کمک شکل (۴-۳) قابل بررسی است. دقت محاسبات نیز در قیاس با سایر پژوهش‌ها در

جدول (۴-۲) برآورد شده است.

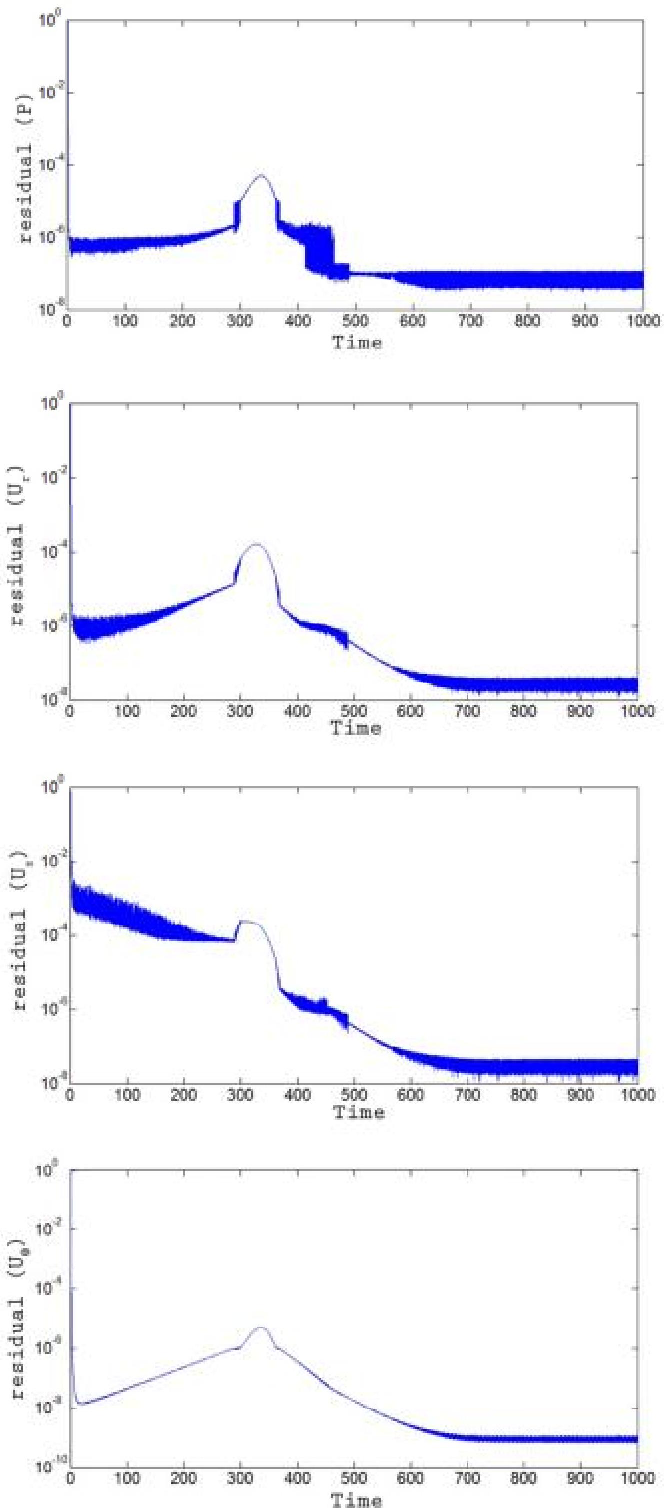
[1] Normalize



شکل (۴-۱): تعیین عدد تیلور بحرانی جریان نیوتنی با نسبت شعاعی ۰/۸۸۳ و لزجت سینماتیکی ۰/۰۰۱۸۴ مترمربع بر ثانیه



شکل (۴-۲): نحوه شکل کیری گردابه های تیلور و افزایش قدرت گردابه با بالا رفتن عدد تیلور جریان



شکل (۴-۳): دقت محاسبات و میزان باقیمانده ناشی از حل عددی

جدول (۴-۲): مقایسه نتایج با مطالعات پیشین

	رکتندوالد[۲۸]	لوئیلو[76]	آندراک[11]	این پژوهش
عدد تیلور بحرانی	۱۲۲	۱۲۳	۱۲۰	۱۲۲

حال که از صحت شبکه‌بندی و دقت تحلیل اطمینان حاصل شد. به بررسی سیال ویسکوالاستیک در بستر ناپایداری تیلور-کوئت پرداخته می‌شود.

همان طور که در قبل گفته شد، در جریان نیوتنی عدد تیلور بهترین و کامل‌ترین معیار قضاوت در مورد شرایط جریان است. چراکه به طور همزمان خواص جریان و سیال را در بر دارد. ولی در ویسکوالاستیک‌ها عدد تیلور به تنهایی نمی‌تواند تمام ابعاد جریان را بازگو کند و احتیاج به معیارهای مکمل نیز می‌باشد. عدد دبورا و عدد الاستیک از جمله معیارهای مورد نیاز هستند. از سوی دیگر بسته به معادله ساختاری ممکن است پارامترهای دیگری نیز تأثیرگذار باشند. به طور مثال در تحقیق پیش رو ضریب تحرک معادله ساختاری گزیکس تعیین‌کننده میزان رفتار غیرخطی سیال است. به هر طریق در ادامه الگوهای ثانویه پایدار دیده‌شده، تبیین می‌شوند و نحوه و عوامل موثر بر این الگوها همزمان با بررسی شرایط بحرانی آن‌ها تشریح می گردد. در آخر نیز نقش عواملی همچون ضریب تحرک و نسبت لزجت در ایجاد ناپایداری مطالعه می شود.

۳-۳) الگوهای جریانی ناپایداری تیلور-کوئت جریان ویسکوالاستیک

اکثر مطالعات قبلی در این بخش محدود به جریان‌هایی با ویسکوالاستیک کمتر از یک می‌باشند. لذا در این پژوهش به مرور جریان های ثانویه حاصل از سیالاتی با عدد الاستیک فراتر از یک پرداخته می‌شود. برای تبیین بهتر نتایج مطالعات این بخش، تمامی بررسی‌ها حول مسائلی با مشخصات سیال و هندسه ثابت (جدول (۴-۳)) انجام پذیرفته است.

جدول (۴-۳): مشخصات سیالات بررسی‌شده در این تحقیق

ردیف	η_s	η_p	α	ε	λ
۱	۱/۶	۳/۱	۰/۱	۰/۸۸۳	۰/۲۵
۲	۱/۶	۳/۱	۰/۱	۰/۸۸۳	۱
۳	۱/۶	۳/۱	۰/۱	۰/۸۸۳	۴
۴	۱/۶	۳/۱	۰/۲	۰/۸۸۳	۱
۵	۱/۶	۳/۱	۰/۳	۰/۸۸۳	۱
۶	۰/۵	۳/۱	۰/۱	۰/۸۸۳	۷
۷	۰/۷	۴	۰/۱	۰/۸۸۳	۱

۳-۳-۱) الگو گردابه تیلور

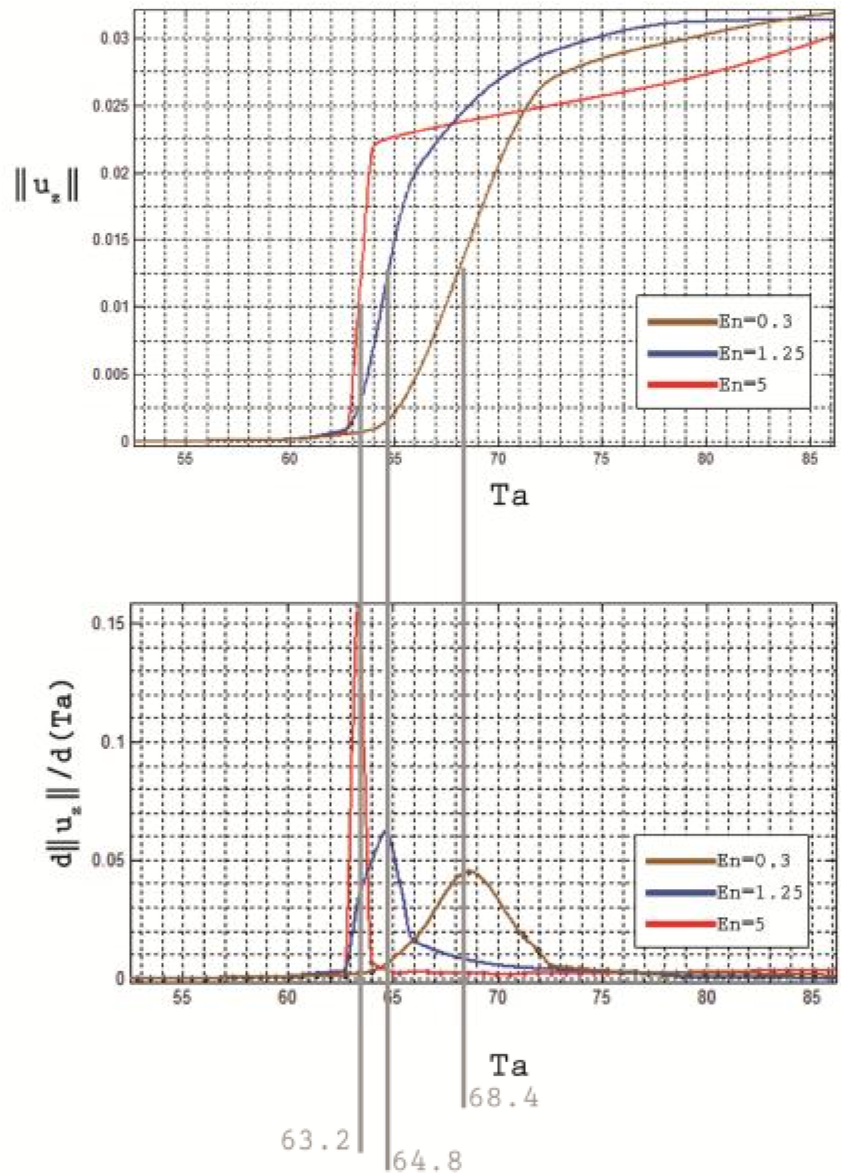
در واقع همان الگو اولیه‌ای است که در ناپایداری سیال نیوتنی نیز دیده می‌شود. البته با توجه به خواص الاستیک سیال ممکن است از نظر عدد موج محوری، شرایط متفاوتی را تجربه کند. به طور مثال در مورد سیال (۱) جدول (۴-۳) عدد موج محوری به حدود ۴/۱ می‌رسد. این در حالی است که سیال نیوتنی در چنین شرایطی عدد موج محوری ۳/۱۲ به جریان القا می‌نماید (شکل (۴-۲)).

$$\left(\frac{\overset{*}{u}_\theta^2}{\overset{*}{r}}\right)=\frac{1}{Ta}\left(\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{r}}+\frac{S_{\theta\theta}^p}{\overset{*}{r}}\right) \tag{۴-۶}$$

$$\left(\frac{\overset{*}{u}_\theta^2}{\overset{*}{r}}\right)=\frac{1}{Ta}\left(\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{r}}\right) \tag{۴-۷}$$

هرچند از نظر ظاهری شباهت هایی در این الگو بین جریان‌های نیوتنی و ویسکوالاستیک وجود دارد. اما از لحاظ مکانیزم رخداد الگو مذبور تفاوت‌های چشم گیری بین این دو جریان وجود دارد. با نگاهی دقیق تر به معادله (۴-۶) مشخص می گردد که ترم های تنش محلول (قسمت نیوتنی) هیچگونه نقشی در معادله نداشته و در روند انجام تحلیل مرتبه بزرگی حذف گردیده‌اند. لذا می توان گفت معادله

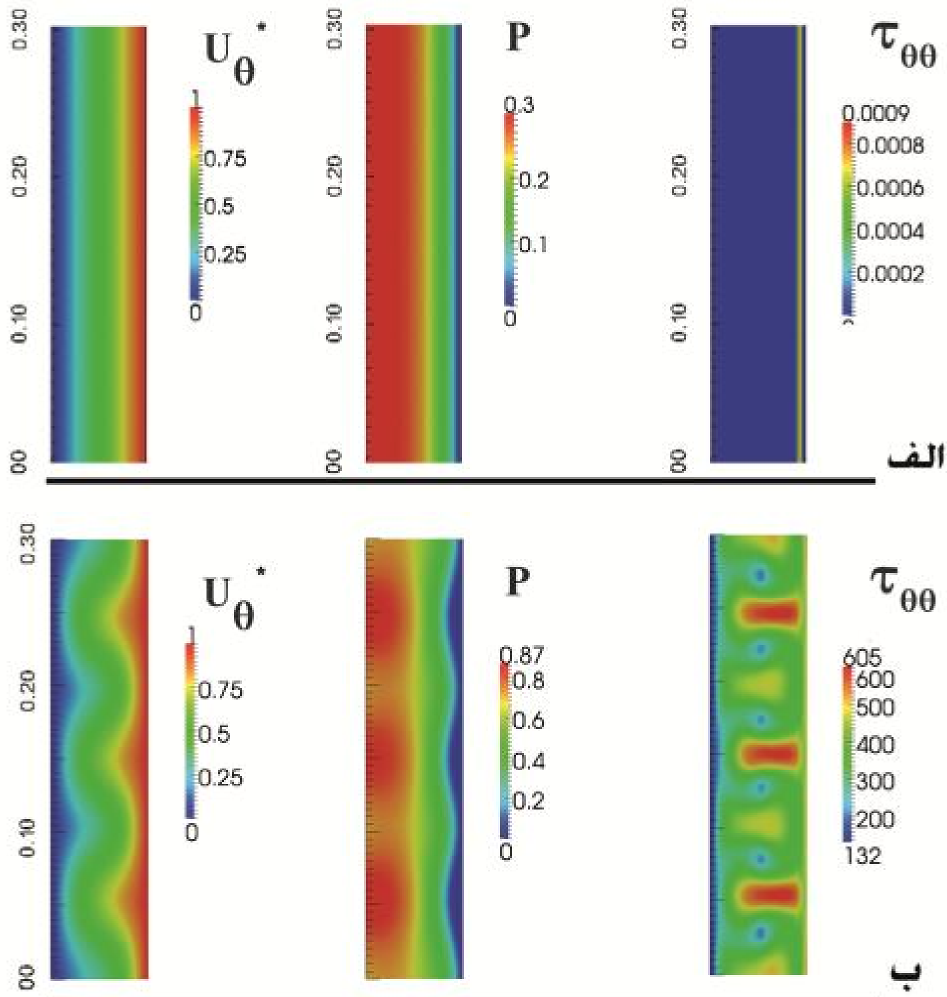
ممنتوم جریان نیوتنی براساس تحلیل مرتبه بزرگی مطابق با معادله (۴-۷) است. براساس معادله ممتنوم، عامل ایجاد ناپایداری تیلور-کوئت، افزایش مولفه شعاعی گرادیان فشار بر اثر بالا رفتن نیروی گریز از مرکز وارد بر جریان حاصل از دوران استوانه داخلی می باشد. در جریان ویسکوالاستیک علاوه بر نیروی گریز از مرکز، تنش حلقوی نیز در معادله ممنتوم راستای شعاعی حضور داشته و باعث تغییر مقدار گرادیان فشار شعاعی می گردد.



شکل (۴-۴): تأثیر خاصیت الاستیک بر عدد تیلور بحرانی الگو گردابه تیلور برای سیالی نسبت لزجت پلیمری ۰/۶۶

برای بررسی نقش تنش حلقوی، عدد تیلور بحرانی برای جریان‌های ویسکوالاستیکی با اعداد الاستیک متفاوت بر طبق روش تشریح شده در بخش (۲-۴) محاسبه شده است (شکل (۴-۴)). نتایج مبین، کاهش عدد تیلور بحرانی در قبال افزایش عدد الاستیک در یک سیال ویسکوالاستیک خاص می باشد. هرچند افزایش عدد الاستیک در نسبت لزجت های ظاهری معین در یک سیال معلوم به کندی از مقدار عدد تیلور بحرانی می‌کاهد. اما در مقایسه با جریان نیوتنی نظیر این کاهش بسیار شدید می‌باشد. دلیل اصلی این کاهش ناگهانی چیزی جز تأثیر تنش حلقوی نیست.

شکل(۴- ۵) نمایش کانتورهای میدان های فشار، سرعت جریان اصلی و بزرگی تنش حلقوی در دو جریان نیوتنی و ویسکوالاستیک است. مقدار تنش حلقوی در سیال نیوتنی صفر می باشد، در صورتی که در جریان ویسکوالاستیک از بزرگی قابل توجهی برخوردار است و سبب افزایش فشار در مرکز گردابه‌ها و سوق دادن جریان به سمت ناپایداری شده است. این نتیجه تطبیق کاملی با پیش بینی های حاصل از تحلیل مرتبه بزرگی دارد.



شکل(۴- ۵): نمایش میدان های سرعت، فشار و بزرگی تنش حلقوی. الف)جریان نیوتنی. ب)جریان ویسکوالاستیک

۳-۳-۲) الگوی موج گذار محوری

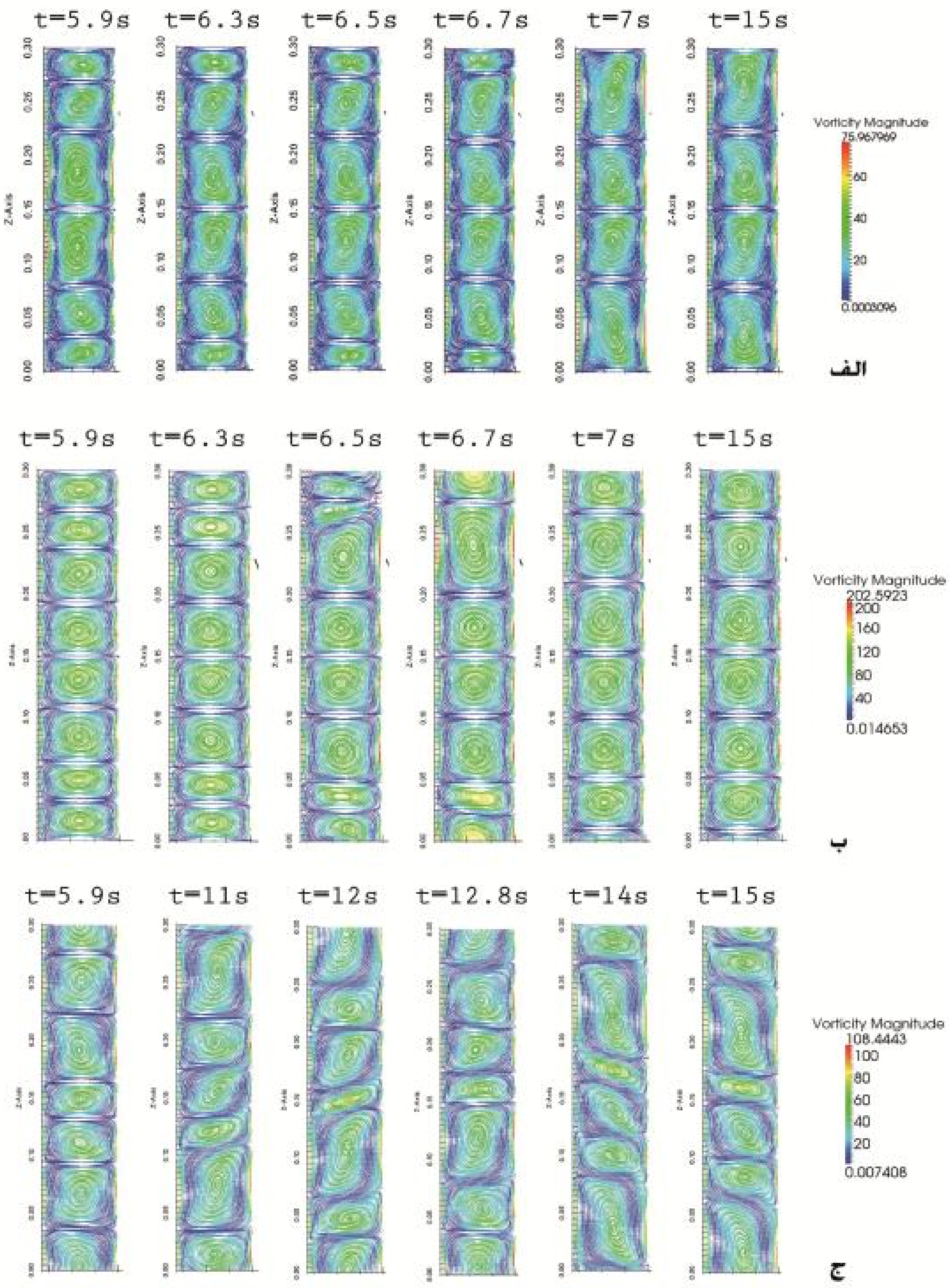
با افزایش اغتشاشات ناشی از بالا بردن عدد تیلور، الگوی گردابه‌های تیلور از بین رفته و جای خود را به الگوی موج های گذار محوری می‌دهد. نحوه شکل‌گیری این الگو بدین ترتیب است که در شروع گردابه های الگوی گردابه تیلور از وسط به شکل متقارن شروع به رشد نموده و بسته به مشخصات ویسکوالاستیک سیال یکی از دو قسمت بالایی یا پایینی گردابه های مجاور را می‌بلعند. این رشد با توجه به مقدار نیروی گریز از مرکز جریان ممکن است درست از گردابه های میانی و یا از گردابه های دورتر نسبت به راستای شعاعی شروع شود. بسته به شرایط جریان، الگو مذکور در سه حالت مختلف

ادامه حیات می‌دهد. در صورت بالا نبودن خاصیت الاستیک سیال، جریان دوباره به الگو گردابه تیلور با یک عدد موج متفاوت رجعت می‌نماید شکل(۴- ۶-الف). اما اگر به اندازه کافی عدد دبورا زیاد باشد، گردابه ها در راستا محوری و در جهت مذبور شروع به حرکت می‌کنند شکل(۴- ۶-ب). در صورت کافی بودن توان نیروی جانب مرکز، گردابه ها علاوه بر حرکت در راستای محوری، شکل مایلی نیز به خود می‌گیرند شکل(۴- ۶-ج) (الگو اخیر توسط کوفرمن [۵۸] دیده شده است).

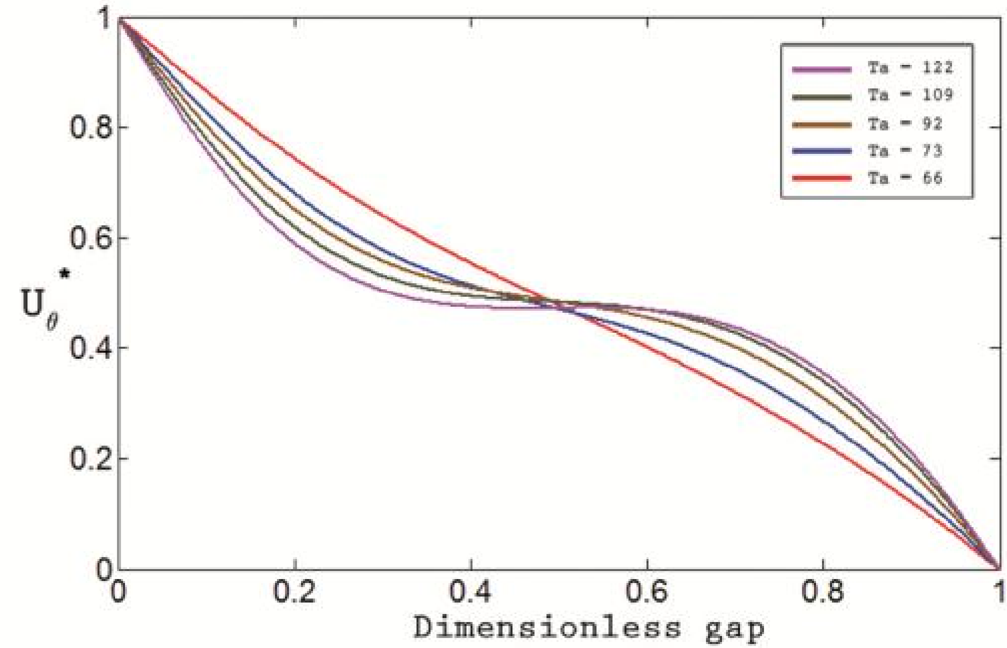
در مورد دلیل شکل گیری این الگو بر طبق معادله (۴-۶) گمان می رود که تنش حلقوی بار دیگر نقش بسزایی را ایفا نماید. از طرفی عدم پایا بودن این الگو، قضاوت را کمی دشوار می‌نماید. نگاهی دقیق تر به تحلیل مرتبه بزرگی نشان دهنده حضور دو مولفه تنش برشی دیگر در دل تنش حلقوی معادلات حاکم بر این الگو است. با جایگذاری مقادیر متناظر با تنش‌های مذکور معادله (۴-۸) ظاهر می‌گردد

$$\left(\frac{\overset{*}{u}_\theta^2}{\overset{*}{r}}\right)=\frac{1}{Ta}\left(\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{r}}\right)+En\left(\left(\overset{*}{r}\frac{\partial}{\partial \overset{*}{r}}\left(\frac{\overset{*}{u}_\theta}{\overset{*}{r}}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial \overset{*}{u}_\theta}{\partial \overset{*}{z}}\right)^2\right) \qquad (۸-۴)$$

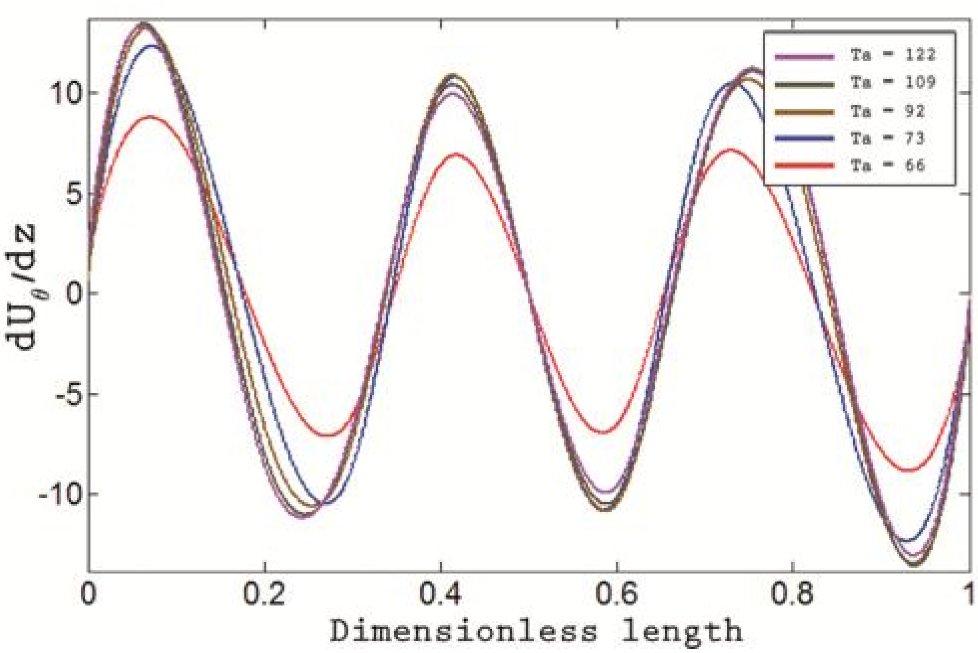
بنابراین بررسی رفتار تغییرات سرعت جریان اصلی در راستاهای شعاعی و محوری در مراکز گردابه ها کمک شایانی به پدیده شناسی این الگو خواهد کرد. شکل(۴-۷) مبین کاهش تغییرات سرعت جریان اصلی در راستای شعاعی در مرکز گردابه است. با بالا رفتن عدد تیلور شیب نمودار به سمت صفر میل می کند. همچنین در نسبت شعاع های بزرگ جمله $\frac{u_\theta}{r}$ بسیار ناچیز است. بررسی تغییرات سرعت در طول استوانه ها و در ناحیه مرکزی موید وجود شیب زیاد سرعت در مراکز گردابه ها است (شکل(۴-۸)).



شکل(۴- ۶): نحوه شکل گیری الگوی جریان موج گذار محوری سیالی با عدد الاستیک ۶/۶ و نسبت لزجت پلیمری ۰/۸۶ در طول زمان (صفحه $\theta = \frac{\pi}{2}$) الف) موج گذار محوری بازگشتی به الگو گردابه تیلور. ب) موج گذار محوری ساده. ج) موج گذار محوری مایل

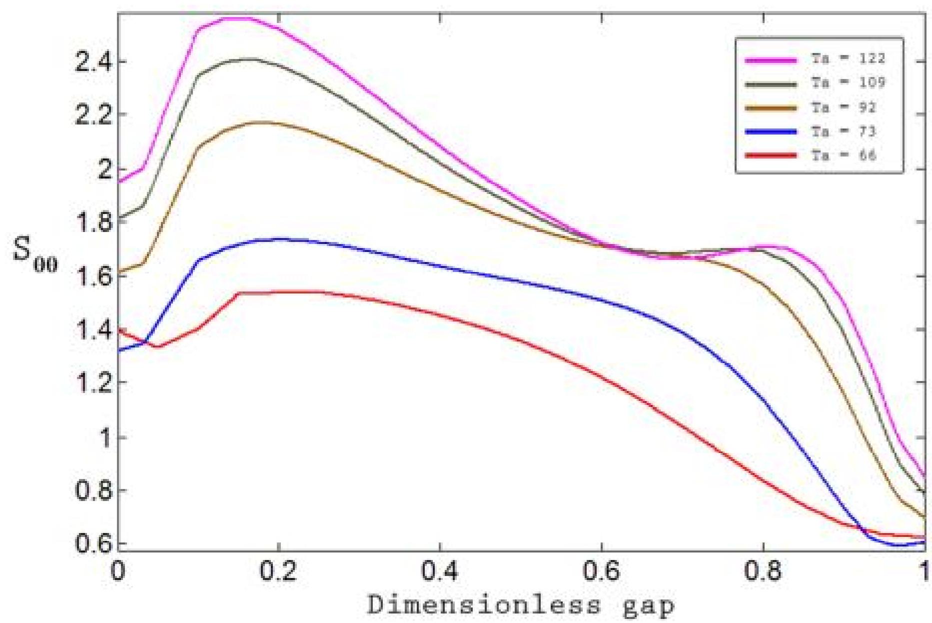


شکل(۴-۷): نمودار سرعت جریان اصلی در حدفاصل دو استوانه، عبوری از مرکز الگوگردابه تیلور

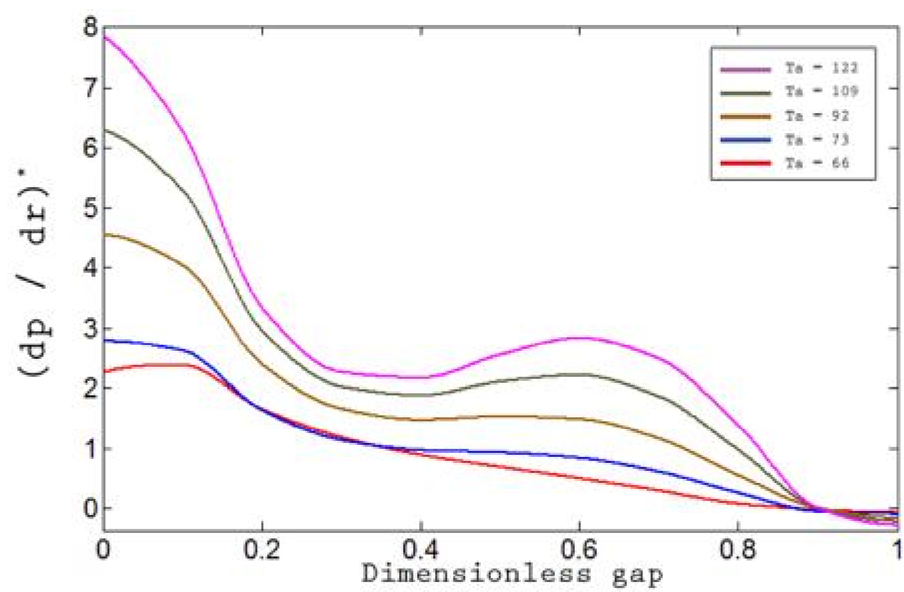


شکل(۴-۸): نمودار مشتق نسبی سرعت جریان اصلی نسبت به راستا محوری در طول استوانه و در شعاع $(R_i+R_o)/2$

کندن شدن روند رشد مقادیر تنش حلقوی و مولفه شعاعی گرادیان فشار بر اثر افزایش عدد تیلور در اشکال شکل(۴-۹) و شکل(۴-۱۰) مشخص است. این روند در واقع تصدیقی بر کاهش مقدار مشتق جزئی سرعت جریان اصلی نسبت به شعاع است.



شکل(۴-۹): نمودار تنش حلقه در راستا شعاعی دو استوانه (عبوری از مرکز گردابه) به ازای مقادیر مختلف عدد تیلور



شکل(۴-۱۰): نمودار مولفه شعاعی گرادیان فشار در راستا شعاعی دو استوانه (عبوری از مرکز گردابه) به ازای مقادیر مختلف عدد تیلور

لذا قبل از وقوع این الگو و در تیلورهای فراتر از حد بحرانی الگوی گردابه تیلور معادله ممنتوم بدین شکل قابل اصلاح است:

$$\frac{\partial}{\partial \overset{*}{r}}\left(\frac{\overset{*}{u}_\theta}{\overset{*}{r}}\right) \ll \left(\frac{\partial \overset{*}{u}_\theta}{\partial \overset{*}{z}}\right) \rightarrow$$

$$\left(\frac{\overset{*}{u}{}_\theta^2}{\overset{*}{r}}\right) = \frac{1}{Ta}\left(\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{r}}\right) + En\left(\frac{\partial \overset{*}{u}_\theta}{\partial \overset{*}{z}}\right)^2 \quad (۹-۴)$$

با توجه به شکل(۴-۹) در حالت حدی، زمانی که الگوی گردابه تیلور به سمت الگوی موج گذار محوری میل می کند مقدار تنش حلقوی با تقریبی قابل قبول ثابت فرض می شود.

$$\left(\frac{\overset{*}{u}{}_\theta^2}{\overset{*}{r}}\right) = \frac{1}{Ta}\left(\frac{\partial \overset{*}{p}}{\partial \overset{*}{r}}\right) + En\, M^2 \quad (۱۰-۴)$$

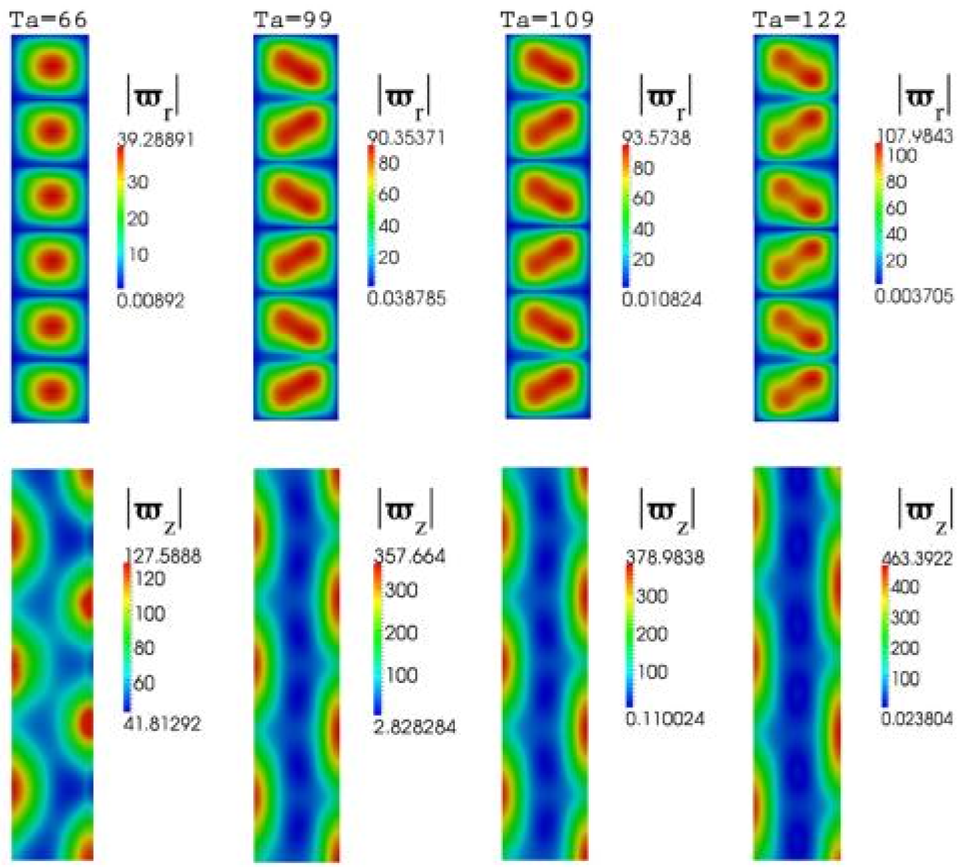
معادله (۴-۱۰) از نظر کیفی بدین مفهوم است که سیال ویسکوالاستیک نسبت به جریان نیوتنی مشابه به اندازه EnM^2 سریعتر و یا کندتر (بسته به رفتار ماده) به سمت الگوی گردابه گذار محوری به پیش می رود. با توجه به اینکه چنین الگویی در جریان نیوتنی هم نمایان می گردد، برآورد پیش رو منطقی به نظر می رسد.

از دیدگاه دیگری نیز می توان جمله های موثر در معادله ممنتوم شعاعی را بررسی نمود. اگر به مولفه‌های تشکیل دهنده بردار گردابه در دستگاه مختصات استوانه‌ای مطابق با معادله (۴-۱۱) دقت شود. دو جمله تشکیل دهنده تنش حلقوی در بردار گردابه مشهود می باشد. بنابراین با محاسبه مولفه های بردار گردابه امکان تحقیق درباره بزرگی و کیفیت جمله های معادله تنش حلقوی و در پی آن معادله ممنتوم شعاعی فراهم می گردد.

$$\vec{\varpi} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\hat{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r u_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\hat{e}_z \quad (۱۱-۴)$$

$$\vec{\varpi} \simeq \left(-\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_r + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)\hat{e}_z \rightarrow \left|\varpi\right|^2 = \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2 \quad (۱۲-۴)$$

براساس تحلیل مرتبه بزرگی، مجموع مربعات دو مولفه شعاعی و محوری بردار گردابه، معرف تنش حلقوی حاکم بر مسئله هستند. شکل(۴- ۱۱) نحوه تغییر بزرگی این مولفه‌ها را برای یک سیال ویسکوالاستیک معین به ازای افزایش عدد تیلور نشان می‌دهد. با افزایش تدریجی عدد تیلور مولفه محوری بردار گردابه که مبین جمله $\frac{\partial}{\partial \overset{*}{r}}\left(\frac{\overset{*}{u}_{\theta}}{\overset{*}{r}}\right)$ در مرکز گردابه‌ها به آرامی کاهش و $\frac{\partial \overset{*}{u}_{\theta}}{\partial \overset{*}{z}}$ افزایش می یابد. این رفتار حکایت از صحت روش تحلیل اخیر و برقراری معادله (۴-۱۰) دارد.



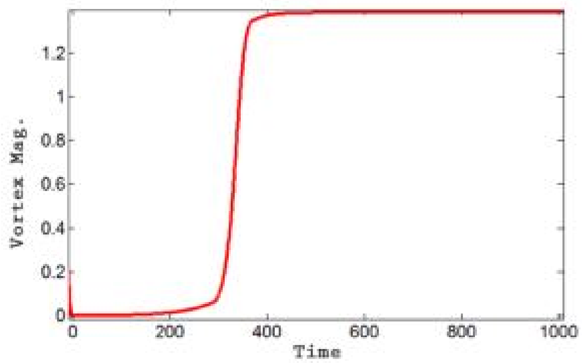
شکل(۴- ۱۱): نحوه تغییر اندازه مولفه های شعاعی و محوری بردار گردابه بر اثر افزایش عدد تیلور

البته زیر شاخه‌های این الگوی جریانی به دلیل وجود رفتارهای نامتقارن سیالات ویسکوالاستیک پدیدار می شوند و بسته به خواص ویسکوالاستیک سیال از لحاظ پایداری متفاوت و متنوع هستند. از

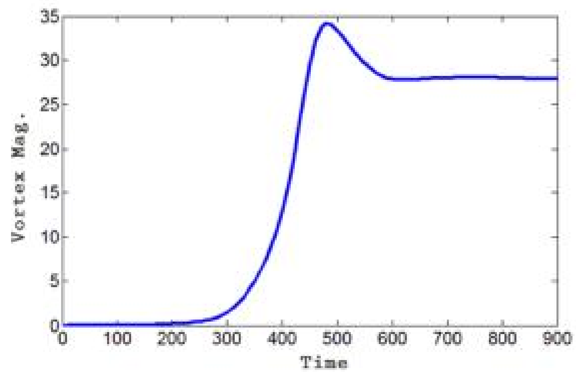
این رو مطالعه کمی این الگوهای جریانی با استفاده از تحلیل مرتبه بزرگی نه تنها ناممکن می باشد، بلکه از لحاظ نظری نیز محاسبه قابل اتکایی به شمار نمی رود.

۳-۳-۳) الگوی موج نوسانی ایستا

لارسون و همکارانش [۷۷] امکان حضور الگوهای غیرمتقارن محوری را قبل از الگوی گردابه تیلور را به طور کامل رد می‌کنند. همچنین آگوستی [۵۱] نیز حضور دو الگوی موج‌های ایستا و موج‌های گذار محوری را از طریق آنالیز پایداری پیش‌بینی می‌نماید. وی برعکس لارسون احتمال ظهور الگوی موج های ایستا را قبل از الگوی گردابه تیلور می‌داند. در ظاهر نتایج پیش رو همخوانی بیشتری با تلاش های لارسون دارد. اما با نگاهی عمیق‌تر به تفاوت در نحوه تغییر قدرت گردابه و همگرا شدن آن در الگوی ثانویه گردابه تیلور بین جریان‌های نیوتنی و ویسکوالاستیک، حالت تپش قدرت گردابه در ویسکوالاستیک ها مشهود است (شکل (۴-۱۲)). بدین ترتیب که در ابتدا از مقادیر کم به سوی یک حد نهایی پیش‌رفته و دوباره کاهش یافته و به سمت یک مقدار معین همگرا می‌شود. حال آنکه در سیال نیوتنی این روند حالت نمایی دارد و هیچ‌گونه بیشینه‌ای در آن اتفاق نمی‌افتد.



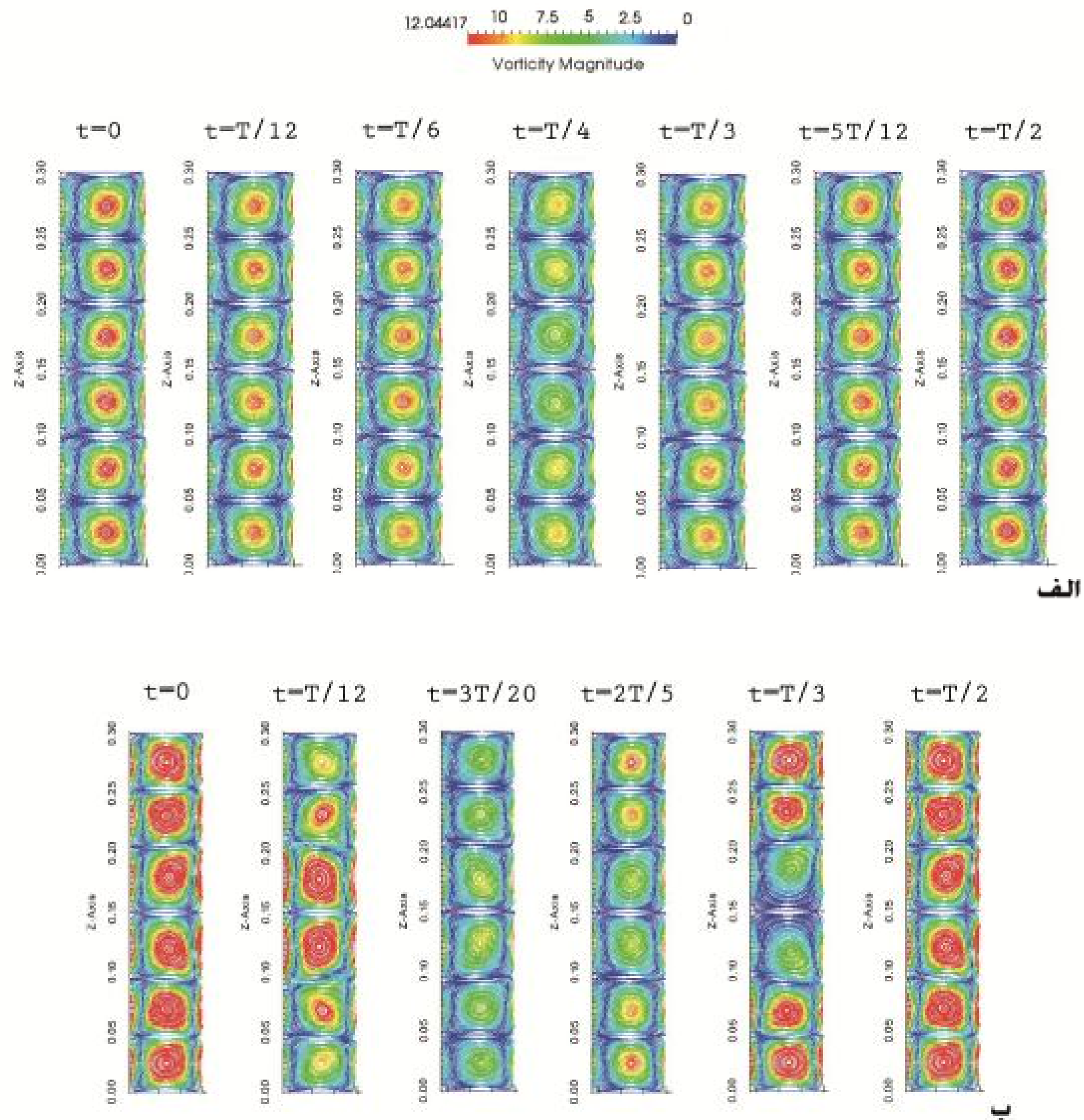
الف



ب

شکل (۴-۱۲): سیر همگرایی قدرت گردابه در الگو گردابه تیلور. الف) جریان ویسکوالاستیک. ب) جریان نیوتنی

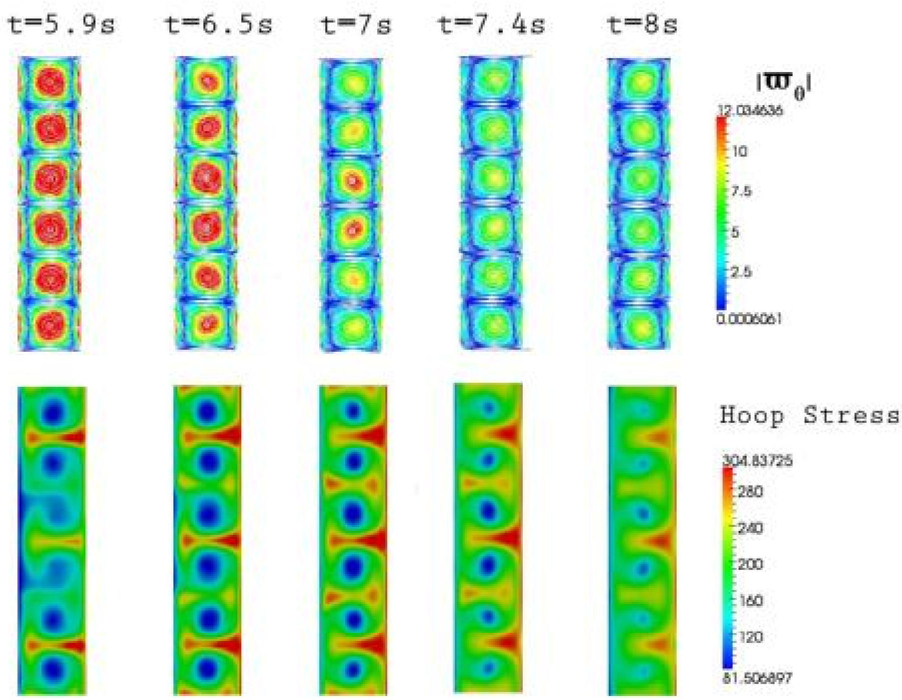
با این فرض که رفتار مذبور به خاصیت الاستیک مربوط می‌شود، عدد الاستیک به شکل تدریجی افزایش داده شد و در آخر الگوی پیش‌بینی‌شده توسط آگوستی آشکار گردید. البته این الگو (موج ایستا) خود به دو حالت همگن و ناهمگن شکل می‌گیرد شکل (۴- ۱۳). حالت همگن بسیار پایدارتر از حالت ناهمگن می‌باشد. طبق توضیحات قبلی چنین نتایجی موید تطبیق محصول این قسمت از تحقیق پیش رو با مطالعات آگوستی است و در نتیجه با قسمتی از نتایج لارسون منافات دارد. چرا که هم این پژوهش و هم مطالعات آگوستی بر ایجاد الگوی ثانویه غیرمتقارن محوری قبل از الگوی گردابه تیلور اتفاق نظر دارند.



شکل (۴- ۱۳): الگو موج نوسانی ایستا سیالی با عدد الاستیک ۶/۶ و نسبت لزحت پلیمری ۰/۸۶. در نیم دوره تناوب (صفحه $\theta = \frac{\pi}{2}$) الف) موج نوسانی ایستا همگن. ب) موج نوسانی ایستا ناهمگن

هر چند که این الگو وابسته به زمان می باشد، ولی ردپای تنش حلقوی در شکل گیری آن به چشم می‌خورد. شکل(۴-۱۴) چگونگی تغییرات قدرت گردابه‌ها و تنش حلقوی را با گذشت زمان نشان می-دهد. در زمانی که قدرت گردابه‌ها به حداکثر خود می‌رسد، مقدار تنش حلقوی کمینه خود را تجربه می نماید. از آن‌جا که الگوی مورد بحث در جریان نیوتنی بروز نمی کند، مقایسه و تطبیق رفتار جریان‌های

ویسکوالاستیک و نیوتنی جهت استخراج عوامل موثر دشوار است. از طرفی وابسته به زمان بودن مسئله نیز مسیر قضاوت را ناهموار می نماید. از دیدگاه ریاضی الگوی موج ایستا دارای شرایط مرزی ثابت است ولی از خود رفتار نوسانی بروز می‌دهد و بنابراین در حوزه مسایل چرخه محدود امکان مطالعه دارد. از این رو می‌توان عدد تیلوری را که در آن جریان دیگر قادر به جذب اغتشاشات تحمیلی نیست را به عنوان عدد تیلور بحرانی معرفی نمود. از دید تحلیل پایداری غیرخطی، چنین حالتی معادل با خروج یکی از مقادیر ویژه معادله حساسیت[1] از دایره طرح پونیکر[2] است.



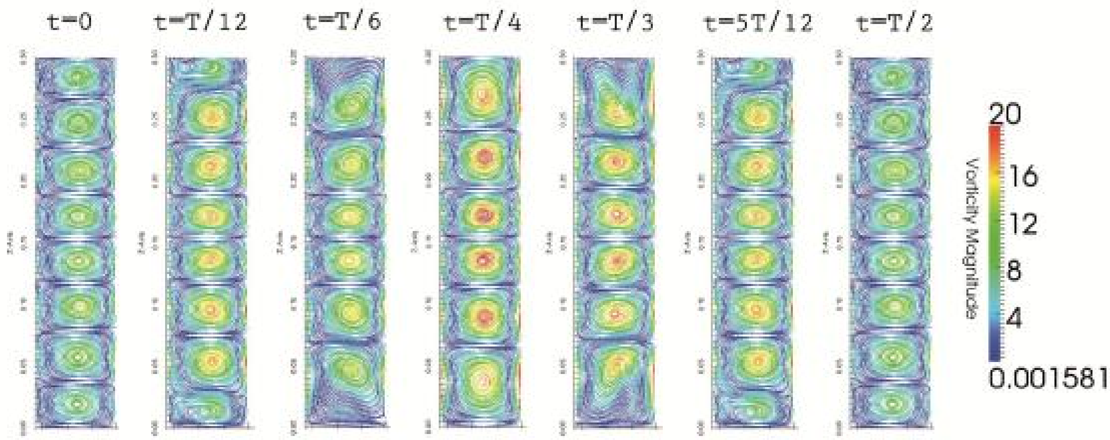
شکل(۴-۱۴): نحوه تغییر مقادیر قدرت گردابه و تنش حلقوی در گذر زمان (صفحه $\theta = \frac{\pi}{2}$)

۴-۳-۳) الگوی موج نوسانی ایستا با عدد موج نوسانی

تاکنون تمامی الگوها از نظر محوری دارای تقارن‌هایی بوده‌اند. لذا همواره امکان تعریف عدد موج محوری برای آن‌ها امکان‌پذیر بود. الگوی گردابه نوسانی ایستا با عدد موج محوری نوسانی در واقع

1 trajectory
2 Poincar´e map

ترکیبی از الگوهای خزشی ویسکوالاستیک [۴۰] و موج ایستا می‌باشد (شکل (۴-۱۵)). در دو انتها همواره گردابه‌هایی به شکل نوسانی در حالت تولد و مرگ هستند (شکل (۴-۱۵)). این امر سبب تغییر عدد موج محوری و دورانی می‌گردد.

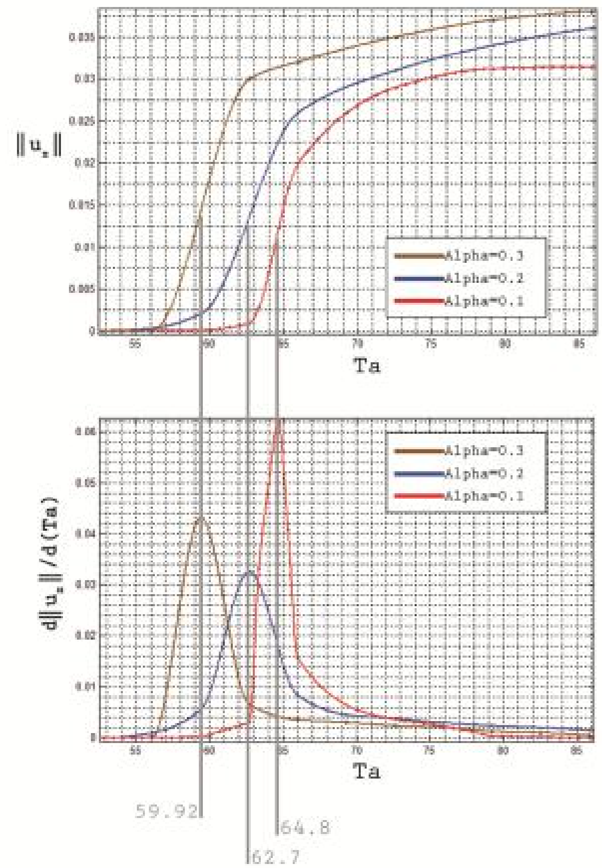


شکل (۴-۱۵): موج نوسانی ایستا با عدد موج نوسانی سیالی با عدد الاستیک ۶/۶ و نسبت لزجت پلیمری ۰/۸۶ در نیم دوره تناوب (صفحه $\theta = \frac{\pi}{2}$)

بررسی این الگو به سبب رفتار وابسته به زمان و بسیار پیچیده‌اش از رهگذر تحلیل مرتبه بزرگی ناممکن می‌باشد. استفاده از روش تشریح شده در قسمت قبلی به منظور یافتن عدد تیلور بحرانی الگو-های متقارن چندان منطقی به نظر نمی‌رسد. زیرا در این الگو پارامترهای دیگری چون عدد موج محوری، عدد موج زاویه‌ای، فرکانس نوسان و ... در حال تغییر هستند. ولی از آنجا که این الگوی جریانی نیز همانند الگوی موج ایستا رفتار چرخه ثابت دارد، می‌توان عدد تیلور بحرانی را با کمک سعی و خطای مهندسی یافت.

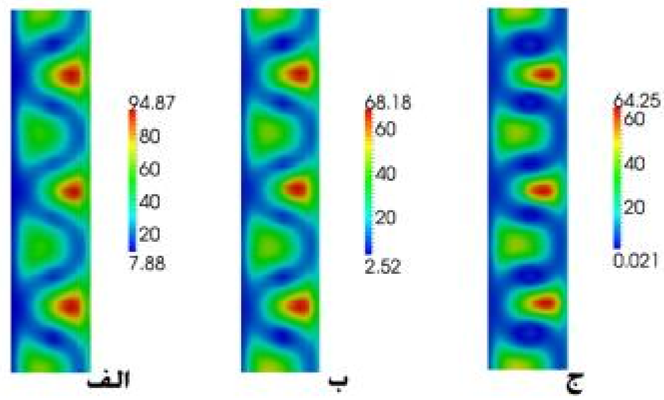
۴-۳) ضریب تحرک

در بخش قبلی، الگوهای مختلف جریان ثانویه در ناپایداری ویسکوالاستیک تیلور-کوئت معرفی گردید و نقش خواصی همچون زمان رهایی از تنش مورد بررسی قرار گرفت. در این بخش، تأثیر ضریب تحرک بر جریان‌های ثانویه مطالعه می گردد. همان طور که پیش از این گفته شد این پارامتر از مفاهیم تئوری مولکولی سرچشمه گرفته است و به نوعی تعیین کننده شدت رفتار غیر خطی معادله گزیکس می باشد. به بیان دیگر با کمک این پارامتر می‌توان تفاوت معادله گزیکس را با سایر معادلات ساختاری مشابه همانند اولروید-بی را روشن نمود. در یک برآورد کلی شاید تفاوتی میان نتایج مستخرجه از معادله گزیکس و اولدروید-بی نباشد. به منظور مطالعه این پارامتر، تغییرات شرایط بحرانی الگوی گردابه تیلور به ازای مقادیر مختلفی از ضریب تحرک بررسی شده است (شکل(۴- ۱۶)). بر این اساس در شرایط جریانی یکسان و با فرض ثابت ماندن سایر متغیرها، ضریب تحرک تأثیر بیشتری نسبت به زمان رهایی از تنش بر شرایط بحرانی داشته و عدد تیلور بحرانی را در قیاس با زمان رهایی از تنش بیشتر کاهش می دهد. به‌طوری که به جرات می‌توان ضریب تحرک را عاملی مهم و محوری در قیاس با عدد الاستیک در یک سیال معین برشمرد.



شکل(۴- ۱۶): تأثیر ضریب تحرک بر عدد تیلور بحرانی الگو گردابه تیلور برای سیالی با عدد الاستیک ۱/۲۵ و نسبت لزجت پلیمری ۰/۶۶

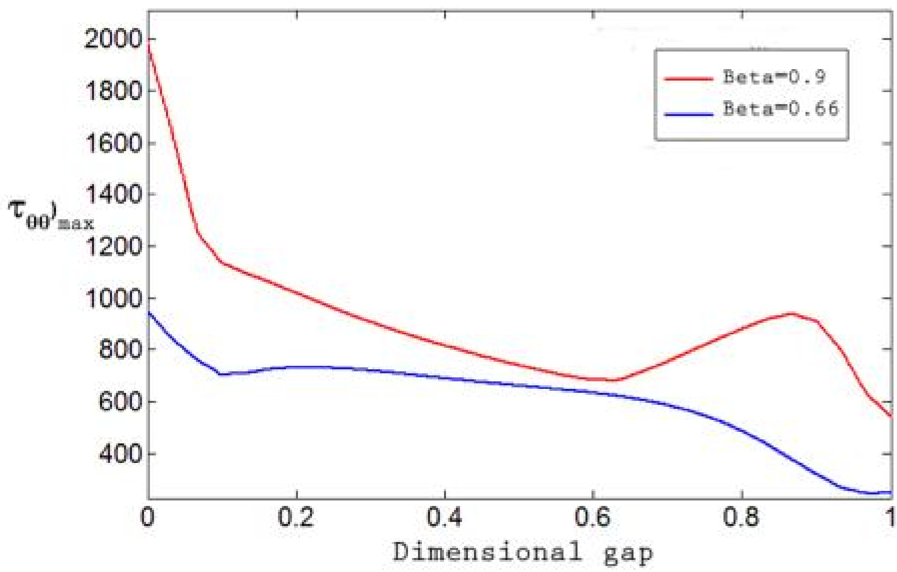
در واقع میزان ضریب تحرک به نوعی نشان دهنده میزان رفتار باریک شوندگی سیال است. در یک شرایط یکسان با ضریب تحرک های متفاوت، لزجت سیالی که ضریب تحرک بیشتری دارد سریعتر کاهش یافته و در حقیقت در تنش برشی کمتری به حد ناپایداری میل می نماید. شکل(۴- ۱۷) نحوه تغییر تنش برشی سیالی به ازای سه مقدار متفاوت ضریب تحرک را نشان می دهد. کاهش تنش برشی در مراکز گردابه ها بر اثر افزایش پارامتر مذکور مشهود است و گویای این مطلب است که سیال با ضریب تحرک های بیشتر در تیلور کمتری شرایط جریان سیال با ضریب تحرک بیشتر را تجربه می نماید.



شکل(۴- ۱۷): مقدار تنش برشی در مراکز گردابه ها. الف) ضریب تحرک ۰/۱. ب)ضریب تحرک ۰/۲. ج)ضریب تحرک ۰/۳

۳-۵) نسبت لزجت

نکته ظریفی که در این بین وجود دارد، نسبت لزجت ظاهری پلیمر به لزجت ظاهری کل سیال می‌باشد و اغلب با β نمایش داده می شود. در سیالات باریک شونده، لزجت تابعی از نرخ برش بوده و در طول جریان ثابت باقی نمی‌ماند. با زیاد شدن نسبت مذکور گویی حضور قسمت پلیمری تنش در تنش کل افزایش یافته و در نتیجه تأثیر پارامترهایی همچون ضریب تحرک و رهایی از تنش را تشدید می‌نماید. اهمیت این مطلب زمانی بهتر تبیین می‌گردد که دو سیال با عدد الاستیک یکسان و درصد لزجت پلیمری متفاوت در شرایط یکسان، مقایسه شوند. محاسبات انجام شده بر روی دو سیال با درصد لزجت ظاهری پلیمری ۶۶ درصد و ۹۰ درصد، با اعداد الاستیک و تیلور یکسان ۱/۲۴ و ۶۶، تفاوت در الگو های جریان ثانویه را گزارش می‌نماید. سیال با نسبت ۹۰ درصد در الگوی جریان گذار محوری به سر می‌برد. حال آنکه سیال دیگر الگوی گردابه تیلور را تجربه می‌نماید. در شکل(۴- ۱۸) نمودار تنش حلقوی دو سیال با نسبت لزجت‌های متفاوت در راستای شعاعی در زمان یکسانی حکایت از اختلاف رفتاری این دو سیال دارد.



شکل(۴- ۱۸): نمودار تنش حلقوی در راستا شعاعی دو سیال با نسبت لزجت متفاوت

۳-۶) نتیجه‌گیری

در ابتدای این فصل، با استعانت از روش ریچاردسون از صحت و میزان دقت مدل‌سازی اطمینان حاصل گردید. سپس نتایج کاربردی حاصل از حل با سایر پژوهش‌ها مقایسه و از روش تحلیل سنجشی به عمل آمد. در ادامه الگوهای متقارن و نامتقارن جریان ثانویه مربوط به ناپایداری تیلور-کوئت ویسکوالاستیک معرفی گردید. برخی از این الگوها در تحقیق های قبلی بر پایه سیال اولدروید-بی مشاهده شده بودند. ولی در این نوشتار علاوه بر الگوهای مذکور، الگو های جدید دیگری که بر مبنای سیال گزیکس آشکار می‌گردند، معرفی شدند. نحوه شکل گیری این الگوها با کمک تحلیل مرتبه بزرگی و انجام یک سری ساده سازی‌ها، مورد بحث قرار گرفت. نتایج حاصل از مدل‌سازی‌های عددی نمایانگر نقش پررنگ تنش حلقوی در شکل‌گیری الگوهای مذبور بودند. این نتیجه منطبق با پیش‌بینی‌های تحلیل مرتبه بزرگی بود. بنابراین می‌توان گفت تفاوت بنیادی بین معادله ممنتوم جریان ویسکوالاستیک با جریان نیوتنی حضور جمله تنش حلقوی در معادله ممنتوم جریان ویسکوالاستیک است و لذا نقش اساسی تنش حلقوی در ناپایداری ویسکوالاستیک تیلور-کوئت غیرقابل انکار است.

علاوه بر مطالعه الگوها، با کمک روش یکه سازی متغیر سرعت امکان استخراج عدد تیلور بحرانی الگوی گردابه تیلور میسر گردید و رفتار متغیرهایی همچون تنش و سرعت که براساس تحلیل مرتبه بزرگی در ناپایدار شدن جریان اصلی و الگوهای جریان ثانویه نقش اساسی ایفا می‌نمایند مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. براساس بررسی‌های صورت گرفته بر روی مقادیر متفاوت زمان رهایی از تنش، مشخص شد که افزایش عدد الاستیک بر اثر ازدیاد زمان رهایی از تنش می تواند موجب کاهش عدد تیلور بحرانی شود. این کاهش در مقایسه با جریان نیوتنی نظیر بسیار زیاد است. به عنوان مثال در مورد سیال (۱) و (۲) جدول (۴-۳) اعداد تیلور بحرانی الگو گردابه تیلور به ترتیب برابر با ۶۴/۸ و ۶۳/۲ می باشد، حال آن که این مقدار برای جریان نیوتنی نظیر بر طبق محاسبات همین تحقیق حدود ۱۲۲ است. نکته قابل تأمل کاهش کند این عدد در ازای افزایش عدد الاستیک جریان است.

مطالعه ضریب تحرک در اعداد الاستیک بالا، نشان دهنده تأثیر بیشتر ضریب تحرک در قیاس با زمان رهایی از تنش سیال در کاهش عدد تیلور بحرانی جریان و جلو انداختن مرز ناپایداری و بروز الگو های نامتقارن دارد. به طوری که در مورد سیالات (۲)، (۴) و (۵) جدول (۴-۱) عدد تیلور بحرانی الگوی گردابه تیلور به ترتیب ۶۴/۸، ۶۲/۷ و ۵۹/۹ است. همچنین ضریب تحرک بالا سبب استهلاک نوسانات الگوی موج ایستا شده و آن را به سمت الگوی گردابه تیلور سوق می‌دهد.

پارامتر موثر دیگر در عدد الاستیک مستتر است و اغلب تأثیر آن نادیده گرفته می‌شود، در حالی که در تحقیق حاضر نقش پررنگ آن تبیین شد. این پارامتر درصد (نسبت) لزجت می‌باشد. دامنه حضور الگوی گردابه تیلور به شدت تحت تأثیر درصد لزجت ظاهری پلیمری است. تا جایی که تغییر در این پارامتر امکان تغییر در الگو جریان ثانویه را بالا می برد. لذا نتایج حاصل از بررسی‌های سیال ویسکوالاستیک قابل تعمیم – حتی به منظور برآورد- به سیال دیگری با نسبت لزجت متفاوت نیست.

مطالعه پیش رو در کنار ارایه یک روش تحلیلی برای هر جریان دلخواه مبتنی بر معادله گزیکس، پارامترهای موثر بر ناپایداری تیلور-کوئت جریان‌هایی با خاصیت الاستیک زیاد را معرفی نمود و میزان تأثیر هریک را مورد مطالعه قرارداد. در پایان شایان ذکر است که تعداد زیاد پارامترهای موثر بر جریان

از یک سو و تأثیرات آن‌ها بر یکدیگر سبب پیدایش طیفی گسترده و متفاوت از الگوهای جریان ثانویه می‌گردد. لذا مطالعه عددی سه بعدی هریک از این الگوهای نامتقارن و کنکاش جزئیات آن می‌تواند هدف یک پژوهش مجزا باشد. بی شک چنین پژوهش‌هایی محتاج سخت افزارهای بسیار قوی و زمان کافی است.

منابع

۱. Philip, Z., M. Mukul, and E. Martin, *The Role of Taylor Vortices in the Transport of Drill Cutting*. 1998: SPE.

۲. Rayleigh, L., *On the dynamics of rotating fluid*. 1916: p. 148-154.

۳. Karman, T.v., *Some aspects of the turbulence problem*. Proc. 4th Intr.Congr. for Applied Mech., 1934: p. 54-91.

۴. Taylor, G.I., *Stability of a viscous lliquid contained between two rotating cylinders*. Phil.Trans.Royal Soc., 1923: p. 289-343.

۵. Taylor, G.I., *Fluid friction between Rotating Cylinders. I. Torque Meshurements*. Proceeding of the Royal Society of London, 1936: p. 546-564.

۶. Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic stability of viscid flow between coaxial cylinders*. Proceeding of the National Academy of Sciences, 1960b: p. 141-143.

۷. chandrasekhar, S., *Hydrodynamic stability of inviscid flow between coaxial cylinders*. Proceeding of the National Academy of Sciences, 1960a: p. 137-141.

۸. Cole, J.A., *Taylor Vortex Instability and annulus-Length Effects*. Fluid Mech., 1976: p. 1-15.

۹. Couette, M., *Sur un nouvel appareil pour letude du fronttement des fluids*. 1888: p. 388-390.

۱۰. Mallock, A., *Determination of the Viscosity of Water*. Proceeding of the Royal Society of London, 1888: p. 126-132.

۱۱. Andereck, C.D., S.S. Liu, and H.L. Swinney, *Flow regimes in a circular couette system with independently rotating cylinders*. Fluid Mech., 1986: p. 155-183.

۱۲. Andereck, C.D. and F. Hayot, *Ordered and turbulent patterns in Taylor Couette flow*. Plenum, 1992.

۱۳. Van Gils, D.P.M., et al., *Torque Scaling in Turbulent Taylor-Couette Flow with Co- and Counterrotating Cylinders*. Physical Review Letters, 2011.

۱۴. Nemri, M., et al., *Experimental and numerical investigation on mixing and axial dispersion in Taylor–Couette flow patterns*. 2012.

۱۵. Benjamin, T.B. and T. Mullin, *Anomalous modes in the Taylor experiment*. Proc. Roy. Soc. Lond.A, 1981. 337: p. 221-249.

۱۶. Czarny, O., et al., *Ekman vortices and the centrifugal instability in counter-rotating cylindrical Couette flow*. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 2004. 18: p.]۱۱٦٨.-٥١

۱۷. Bilson, M. and K. Bremhorst, *Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette flow*. Fluid Mech., 2007: p. 227-270.

۱۸. Pirro, D. and M. Quadrio, *Direct numerical simulation of turbulent TaylorCouette flow*. European Journal of Mechanics B/Fluids, 2008: p. 552-566.

۱۹. Youd, J.A., *Bifurcations in Forced Taylor–Couette Flow*. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, 2005.

۲۰ CA˜NELLAS, M.A., *NONLINEAR DYNAMICS OF MODE COMPETITION IN ANNULAR FLOWS*. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, 2008.

۲۱. Dong, S., *Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette flow.* Fluid Mech., 2007: p. 373-393.

۲۲. Dong, S., *Turbulent flow between counter-rotating concentric cylinders: a direct numerical simulation study*.Fluid Mech., 2008b: p. 371-399.

۲۳. Dong, S., *Evidence for internal structures of spiral turbulence.* Phys.Rev., 2009.

۲۴. Dong, S., *Herringbone streaks in Tayor-Couette turbulence.* Physical Review E, 2008a.

۲۵. Dong, S. and X. Zheng, *Direct numerical simulation of spiral turbulence.* Fluid Mech., 2011: p. 150-173.

۲۶. NIU, X.D., C. SHU, and Y.T. CHEW, *An Axisymmetric Lattice Boltmann Model for Simulation of Taylor-Couette Flows between two Concentric Cylinders.* International Journal of Modern Physis C, 2 :۰۰۳p. 785-796.

۲۷. Brauckmann, H.J. and B. Eckhart, *Direct Numerical Simulations of Local and Global Torque in Taylor-couette Flow up to Re=30.000.* Fluid Mech, 2012.

۲۸. Recktenwald, A., M. Lucke, and H.W. Muller, *Taylor vortex formation in axial through-flow : Linear and weakly nonlinear analaysis.* PHYSICAL REVIEW E, 1993. 48: p. 4446-4454.

۲۹. Jong-Yeon, H. and Y. Kyung-Soo, *Numerical study of Taylor–Couette flow with an axial flow.* Computers & Fluids, 2004. 33: p. 97-118.

۳۰. DiPrima, R.C. and J.T. Stuart, *Non-local effects in the stability of flow between eccentric rotating cylinders.* Fluid Mech., 1972: p. 393.

۳۱. DiPrima, R.C. and J.T. Stuart, *The nonlinear calculation of Taylor-vortex flow between eccentric rotating cylinders.* Fluid Mech., 1975 :p. 85-111.

۳۲. DiPrima, R.C. and H.L. Swinney, *Instabilities and transition in flow between cocentric rotating cylinders.* Hydrodynamic Instabilitirs and the Transition to Turbulence, 1985.

۳۳. Kuznetsov, Y.A., *Elements of Applied Bifurcation Theory.* 2004 ,New-York: Springer–Verlag.

۳۴. Iooss, G. and M. Adelmeyer, *Topics in Bifurcation Theory and Applications.* Vol. 3. 1998, Singapore: World Scientific.

۳۵. Choosat, P. and R. Lauterbach, *Methods in Equivariant Bifurcations and Dynamical Systems.* 2000: World Scientific.

۳۶. Pfister, G., et al., *Bifurcation phenomena in Taylor-Couette flow in a very short annulus.* J. Fluid Mech., 1988. 191: p. 1-18.

۳۷. Morshneva, I.V. and S.N. Ovchinnikova, *NONRESONANT CASE OF INTERSECTION OF BIFURCATION CURVES.* Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2010. 51: p. 819–826.

۳۸. Arkeryd, L. and A. Nouri, *On a Taylor-Couette Type Bifurcation for the.* Journal of Statistical Physics,, 2006. 124: p. 402.

۳۹. Dou, H.-S., B. Cheong Khoo, and K. Seng Yeo, *Instability of Taylor-Couette flow between concentric rotating cylinders.* 2008. 1422-1435.

۴۰. Larson, *Instabilities in viscoelastic flows.* Rheol. Acta, 1992. 31: p. 213-263.

۴۱. Thomas, R. and K. Walters, *The Stability of Elastico-Viscous Flow Between Rotating Cylinders . Part1.* J.Fluid Mech., 1964(18): p. 33-43.

۴۲. Thomas, R. and K. Walters, *Stability of Elastico-Viscous Flow Between Rotating Cylinders. Part2.* Fluid Mech, 1964(19): p. 557-560.

۴۳. Giesekus, H., *Zur stabilität von Strömungen viskoelastischer Flüssigkeiten: 1. Ebene und kreisförmige Couette-Strömung*. Rheol. Acta, 1966. 5: p. 239-252.

۴۴. Rubin, H. and E. C., *Stability of Couette flow of dilute polymer solutions*. Phys. Fluids, 1966. 9: p. 1929-1933.

۴۵. Giesekus, H., *On instabilities in Poiseuille and Couette flows of viscoelastic fluids*. Progress in Heat and Mass Transfer 5, 1972: p. 187-193.

۴۶. Beard, D.W., M.H. Davies, and K. Walters, *The Stability of elastico-viscous flow between rotating cylinders, Part3 , Overstability and Maxwell fluids*. J. Fluid Mech, 1966. 24: p. 321-334.

۴۷. Boger, D.V., *A highly elastic constant viscosity fluid*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1977/1978. 3: p. 87-91.

۴۸. Muller, S.J., R.G. Larson, and E.S.G. Shaqfeh, *A purely elastic transition in Taylor-Couette flow*. Rheol. Acta, 1989. 28: p. 499-503.

۴۹. Larson, R.G., E.S.G. Shaqfeh, and S.J. Muller, *A purely elastic instability in Taylor-Couette flow*. J. Fluid Mech., 1990. 218: p. 573-600.

۵۰. Larson, R.G., S.J. Muller, and E.S.G. Shaqfeh, *The effect of fluid rheology on the elastic Taylor-Couette instability*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics,, 1994. 51: p. 195-225.

۵۱. Avgousti, M. and N. Beris, *Non-axisymmetric modes in viscoelastic Taylor-Couette flow*. Journal of eon-Newtonian Fluid Mechanics, 1993. 50: p. 225-251.

۵۲. Avgousti, M. and A.N. Beris, *Viscoelastic Taylor-Couette flow: bifurcation analysis in the presence of symmetries*. Proc. R. Soc. London, 1993. 443: p. 17-37.

۵۳. Bardon, M.B., L. Dorian, and S.J. Muller, *Digital particle image velocimetry in flows with nearly closed pathlines: the viscoelastic Taylor-Couette instability*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1997. 69: p. 221-237.

۵۴. Jeng, J. and K.-Q. Zhu, *Numerical simulation of Taylor Couette flow of Bingham fluids*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2010. 16 :٥p. 1161-1170.

۵۵. Matutti, O.C., P.R.S. Mendes, and M.S. Carvalho, *Instability of Inelastic hear-Thinning Liquids in a Couette Flow Between Concentric Cylinders*. Journal of Fluids Engineering, 2004. 126: p. 385-390.

۵۶. Lockett, T.J., S.M. Richardson ,and W.J. Worraker, *The stability of inelastic non-Newtonian fluid in Couette flow between concentric cylinders : afinit element study*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1992. 43: p. 165-177.

۵۷. Thomas, D.G., et al., *Time-dependent simulations of non-axisymmetric patterns in Taylor-Couette flow of dilute polymer solutions*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2006. 138: p. 111-133.

۵۸. Raz, K., *Simulation of Viscoelastic Fluids:Couette–Taylor Flow*. JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS, 1998. 147: p. 22-59.

۵۹. Ashrafi ,N., *Stability Analysis of Shear Thinnig Flow between Rotating Cylinders*. Applied Mathematical Modeling, 2011. 35: p. 4407-4423.

۶۰. Takht Ravanchi, M., M. Mirzadeh, and F. Rashidi, *Flow of Giesekus viscoelastic fluid in a concentric annulus with inner cylinder rotation*. HEAT AND FLUID FLOW, 2007. 28: p. 838-845.

۶۱. Pourjafar, M. and K. Sadeghy, *Taylor-Couette Instability of Gissekus Fluids*. ANNUAL TRANSACTIONS OF THE NORDIC RHEOLOGY SOCIETY, 2012. 20: p. 91-97.

۶۲. Bird, R.B. and J.M. Wiest, *CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR POLYMERIC LIQUIDS*. Annu. Rev. Fluid Mech., 1995. 27: p. 93-169.

۶۳. Giesekus, H., *A Unified Approach to a Variety of Constitutive Models for Polymer Fluids Based on the Concept of Configuration-Dependent Molecular Mobility*. Rheol. Acta., 19 :۲۱ .۸۲p. 366-375.

۶۴. *OpenFoam User Guide*. 2011.

۶۵. *OpenFoam Programmer's Guide*. 2012.

۶۶. Darbandi, M., *A Momentum Variable Calculation Procedure for Solving Flow at All Speeds ,PhD Dissertation*. 1996, Ontario, Canada: University of Waterloo.

۶۷. Harlow, F.M. and J.E. Welch, *Numerical Solution of Time Dependent Viscous Incompressible Flow with Free Surface*. Physics of Fluids, 1965. 8: p. 2182-2189.

۶۸. Raithby, G.D. and G.E. Schneider, *Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow; Treatment of the Velocity-Pressure Coupling*. Numerical Heat Transfer, 1979. 2: p. 417-440.

۶۹. Patankar, S.V., *A Calculation Procedure for Two Dimensional Elliptic Situations*. Numerical Heat Transfer, 1981. 4: p. 409-425.

۷۰. Zedan, M. and G.E. Schneider, *A Coupled Strongly Implicit Procedure for Velocity and Pressure Computation in Fluid Flow Problems*. Numerical Heat Transfer, 1985. 4: p. 409-425.

۷۱. Patankar, S.V. and D.B. Spalding, *A Calculation Procedure for Heat,Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows*. Int. J. of Heat and Mass Transfer, 1972. 15: p. 1787-1806.

۷۲. Prakash, C. and S.V. Patankar, *A Control-Volume Based Finite-Element Method for Solving the Navier-Stokes Equation Using Equal Order Variable Interpolation*. Numerical Heat Transfer, 1985. 8: p. 259-280.

۷۳. Issa, R.I., A.D. Gosman, and A.P. Watkins, *The computation of compressible and incompressible recirculating flows by a non-iterative implicit scheme*. Journal of Computational Physis, 1986. 62: p. 66-82.

۷۴. Richardson, L.F., *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam*. Transactions of the Royal Society of London, 1910. Ser. A(210): p. 307 -- 357.

۷۵. Oberkampf, W.L., *Discussion: "Comprehensive Approach to Verification and Validation of CFD Simulations—Part 1: Methodology and Procedures" (Stern, F., Wilson, R. V., Coleman, H. W., and Paterson, E. G., 2001, ASME J. Fluids Eng., 123, pp. 793–802)*. Journal of Fluids Engineering, 2002. 124(3): p. 809-810.

۷۶. Lueptow, R.M., A. Docter, and K. Min, *Stability of axial flow in an annulus with a rotating inner cylinder*. Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993), 1992. 4(11): p. 2446-2455.

۷۷. Larson ,R.G., S.J. Muller, and E.S.G. Shaqfeh, *The effect of fluid rheology on the elastic Taylor-Couette instability*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1994. 51: p. 195-225.

Abstract

The recent surveys about Taylor-Couette instability are mainly focusing on two dimensional modeling of this instability with weak elastic number by aide of Oldroyd-B constitutive equation. In present research, the three dimensional modeling was done for mention instability based on Giesekus constitutive equation by aid of CFT methods and OpenFOAM software. As a first time the 3D modeling gives the opportunity of investigating the non-axisymmetric second flow regimes of Taylor-Couette instability especially axial travelling wave and standing wave regime based on Giesekus equation.

By making a comparison between Newtonian and viscoelastic regimes, hoop stress is determined as an effective factor in growing pressure gradient and creating Taylor-Couette viscoelastic instability. Also, the variation of hoop stress has a crucial rule in crating of instabilities and appearing of other second flows patterns. Besides, relaxation time has weak effect on critical Taylor number. Against that, mobility factor has greater effect on critical condition and causes a substantial decline in Taylor number. Finally, the greatest effect is related to viscosity ratio .

Keywords :

Taylor-Couette instability, Giesekus constitutive equation, non-axisymmetric flow

Shahrood University of Technology
Engineering Department

Numerical investigation for of 3D Taylor-Couette viscoelastic instability between concentric rotating cylinders

A Thesis submitted in partial Fulfillment of the Requirement for

The Degree of Master of Science

By:

Ali Jafari

Supervisor:

Dr. Mahmood Norouzi

Jan 2014