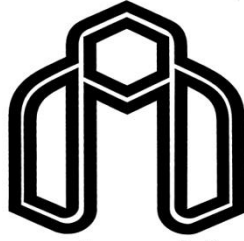


اللَّهُمَّ احْمِزْنِي



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه حرارت و سیالات

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

# استفاده از روش متریک متغیر برای حل مسائل معکوس حرارتی در انجماد فلزات

دانشجو:

**مهدی جلوه قاضیانی**

اساتید راهنما:

**دکتر محمد جواد مغربی**

استاد مشاور:

**دکتر علی عباس نژاد**

آذر ماه ۱۳۸۹

## دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مکانیک

گروه : تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مهدی جلوه قاضیانی

تحت عنوان: استفاده از روش متریک متغیر برای حل مسائل معکوس حرارتی در انجماد فلزات

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی : علی عباس نژاد		نام و نام خانوادگی : محمد جواد مغربی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

## تقدیم به

پدر و مادر عزیزم و همسر مهربانم که همواره مشوق و حامی من در دوران تحصیل بوده‌اند.

## تقدیر و تشکر:

بعد از حمد و سپاس الهی، بر خود لازم می‌دانم تا از زحمات استاد راهنمای محترم جناب دکتر مغربی و بویژه استاد مشاور گرامی جناب دکتر عباس‌نژاد که مرا در به انجام رسانیدن این پایان نامه راهنمایی کردند، تقدیر و تشکر نمایم. در انتها نیز از تمامی اساتید محترم دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که توفیق شاگردیشان را داشتم، سپاسگزاری نموده و از خداوند منان آرزوی سلامت و توفیق روزافزون برایشان دارم.

دانشجو تأیید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد .

آبان ۱۳۸۹

## چکیده:

مسائل معکوس حرارتی امروزه مورد توجه بسیاری از دانشمندان در زمینه‌های مختلف علوم و فناوری قرار گرفته است. یکی از کاربردهای این روش در حل مسائل انجماد فلزات می‌باشد. با توجه به اینکه کیفیت ماده در حال انجماد به شدت میزان سرعت سطح مشترک جامد- مایع وابسته است، از این رو با کنترل سرعت سطح مشترک در حین فرآیند انجماد می‌توان به ماده‌ای با کیفیت دلخواه و مناسب برای یک کاربرد مشخص دست یافت.

هدف از حل مسائل معکوس حرارتی در فرآیندهای انجماد، تخمین شار حرارتی در مرزهاست بگونه‌ای که بتوان به ماده‌ای با کیفیت دلخواه دست پیدا کرد. روش‌های عددی مختلفی برای حل مسائل معکوس شامل انجماد پیشنهاد شده که روش گرادیان مزدوج، بهترین روشی است که تاکنون استفاده گردیده است. بدلیل نرخ همگرایی و دقت بالاتری که روش متریک متغیر نسبت به سایر روش‌های معکوس حرارتی داراست، در این پایان‌نامه از این روش برای کنترل انجماد مواد خالص استفاده شده است. همچنین برای کاهش هزینه حل مساله مستقیم، روش آنتالپی بکار برده شده است.

بمنظور ارزیابی کارایی روش متریک متغیر، نتایج بدست آمده به ازای پارامترهای مختلف موثر بر حل معکوس با نتایج حاصل از روش گرادیان مزدوج همراه با مساله الحاقی مقایسه شده است. نتایج بدست آمده، نشان از کارایی بالای روش متریک متغیر در حل مسئله معکوس حرارتی انجماد نسبت روش گرادیان مزدوج دارد.

**کلمات کلیدی:** مسائل معکوس حرارتی - روش متریک متغیر - روش گرادیان مزدوج - انجماد مواد

خالص - روش آنتالپی

## لیست مقالات مستخرج

1. Source Term Identification in Inverse Heat Conduction Problem Using Variable Metric Method, Presented at International Symposium on Computing in Science and Engineering, 3-5 June 2010, Kusadasi, Turkey.

۲. مقایسه روش متریک متغیر با روش گرادیان مزدوج در حل مساله معکوس انجماد

مواد خالص. ارسال شده برای نوزدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک ایران.



## فهرست مطالب

عنوان.....	صفحه.....
چکیده.....	ز.....
لیست مقالات مستخرج.....	ح.....
فهرست مطالب.....	ط.....
فهرست اشکال.....	م.....
فهرست جداول.....	ع.....
فهرست علائم و اختصارات.....	ف.....
<b>فصل اول - مقدمه.....</b>	<b>۱.....</b>
۱-۱ مسائل معکوس حرارتی.....	۲.....
۲-۱ مسائل معکوس حرارتی همراه با تغییر فاز.....	۲.....
۳-۱ مروری بر پژوهشهای گذشته در زمینه انجماد فلزات.....	۴.....
۴-۱ اهداف پایان نامه.....	۱۰.....
۵-۱ سابقه تحلیل مسائل معکوس حرارتی با استفاده از روش متریک متغیر.....	۱۱.....
<b>فصل دوم - معادلات حاکم بر مسائل تغییر فاز.....</b>	<b>۲۲.....</b>
۱-۲ مقدمه.....	۲۳.....
۲-۲ بیان ریاضی معادلات حاکم.....	۲۴.....
۳-۲ روش آنتالپی.....	۲۷.....
۴-۲ بی بعدسازی معادلات حاکم به شکل آنتالپی.....	۲۹.....
۵-۲ نحوه پیدا کردن سطح مشترک.....	۳۰.....

۳۳	فصل سوم - مسائل معکوس حرارتی
۳۴	۱-۳ مقدمه
۳۵	۲-۳ تاریخچه مسائل معکوس حرارتی
۳۶	۳-۳ دسته بندی مسائل معکوس حرارتی
۳۸	۴-۳ حل مسائل معکوس حرارتی
۳۹	۵-۳ طبقه بندی روش ها
۴۱	۶-۳ ارزیابی روش های مسائل معکوس هدایت
۴۲	۷-۳ کاربرد روش های معکوس در مهندسی
۴۵	فصل چهارم - روش های بهینه سازی توابع
۴۶	۱-۴ مقدمه
۴۶	۲-۴ مسائل بهینه سازی
۴۷	۳-۴ دسته بندی روش های بهینه سازی
۴۸	۴-۴ راه حل کلی
۴۹	۵-۴ نرخ همگرایی
۵۰	۶-۴ گرادیان تابع
۵۲	۱-۶-۴ محاسبه گرادیان
۵۳	۲-۶-۴ تعیین طول گام بهینه در جهت کاهش تابع
۵۴	۷-۴ معیار همگرایی
۵۴	۸-۴ روش کاهش سریع
۵۵	۸-۴ روش گرادیان مزدوج

۵۵	۱-۹-۴ جهت های مزدوج.....
۵۶	۲-۹-۴ شرح روش گرادیان مزدوج.....
۵۷	۳-۹-۴ الگوریتم روش گرادیان مزدوج.....
۵۹	۱۰-۴ روش نیوتن.....
۶۲	۱۱-۴ روش مارکارت- لونبرگ.....
۶۳	۱۲-۴ روش شبه نیوتن.....
۶۵	۱-۱۲-۴ روش متریک متغیر (روش دیویدون- فیلچر- پاول).....
۶۷	۲-۱۲-۴ طبیعت روش متریک متغیر.....
۷۱	فصل پنجم- کنترل فرآیند انجماد مواد خالص با استفاده از روش متریک متغیر.....
۷۲	۱-۵ مقدمه.....
۷۲	۲-۵ معادلات حاکم بر مسأله مستقیم.....
۷۴	۳-۵ مسأله معکوس.....
۷۵	۴-۵ روش متریک متغیر.....
۷۸	۱-۴-۵ محاسبه گرادیان تابع هدف.....
۷۹	۲-۴-۵ محاسبه گام جستجوی بهینه.....
۸۱	۳-۴-۵ روابط به هنگام کردن ماتریس $H$ .....
۸۴	۴-۴-۵ معیار توقف.....
۸۴	۵-۵ محاسبات عددی حل معادلات.....
۸۷	فصل ششم- نتایج حل عددی.....
۸۸	۱-۶ مقدمه.....

۸۸	۲-۶ اعمال شار مرزی معلوم و بازسازی آن
۹۲	۱-۲-۶ بررسی استقلال از شبکه محاسباتی
۹۶	۲-۲-۶ بررسی اثر حدس اولیه
۱۰۲	۳-۲-۶ اثر موقعیت قرارگیری حسگرها
۱۱۰	۴-۲-۶ بررسی اثر عدد استفان
۱۱۵	۵-۲-۶ اثر میزان خطا در داده های ورودی
۱۲۰	۳-۶ کنترل سرعت سطح مشترک
۱۲۳	<b>فصل هفتم - نتیجه گیری</b>
۱۲۴	۱-۷ نتیجه گیری
۱۲۶	۲-۷ پیشنهادات
۱۲۷	<b>پیوست الف</b>
۱۲۷	الف-۱ حل مساله معکوس با استفاده از روش گرادیان مزدوج
۱۲۸	الف-۲ معیار توقف
۱۲۸	الف-۳ مساله حساسیت
۱۲۹	الف-۴ مساله الحاقی
۱۳۰	الف-۵ الگوریتم روش گرادیان مزدوج
۱۳۲	<b>منابع و مراجع</b>

## فهرست اشکال

- شکل (۱-۱): ساختارهای مختلف سطح مشترک در گرادیان های مختلف دما [۲] ۳
- شکل (۲-۱): انجماد تک جهتی به همراه جابجایی طبیعی [۸] ۷
- شکل (۳-۱): مقایسه مکانهای کنترل شده سطوح مشترک برای: الف) سرعتهای  $V_f = 2, V_s = 1.25$  (ب) سرعت های مساوی [۱۳] ۹
- شکل (۴-۱) شماتیک مساله حل شده در مرجع [۱۸] ۱۲
- شکل (۵-۱) شار مثلثی دقیق و تخمین زده شده توسط روش DFP [۱۸] ۱۳
- شکل (۶-۱) مقایسه نرخ کاهش تابع هدف برای شار مثلثی [۱۸] ۱۳
- شکل (۷-۱) شار مستطیلی دقیق و تخمین زده شده توسط روش DFP [۱۸] ۱۳
- شکل (۸-۱) نرخ کاهش تابع هدف برای شار مستطیلی [۱۸] ۱۳
- شکل (۹-۱) شار حرارتی تخمین زده شده برای حالت داده های دارای اغتشاش الف) شار مثلثی ب) شار مستطیلی [۱۸] ۱۵
- شکل (۱۰-۱) شماتیک مساله حل شده در مرجع [۱۹] ۱۶
- شکل (۱۱-۱) تخمین شار حرارتی الف) توسط روش متریک متغیر ب) توسط روش گرادیان مزدوج بعد از ۹۰ بار تکرار همراه با شروع مجدد در تکرار ۵۰ ام [۱۹] ۱۷
- شکل (۱۲-۱). مقایسه روش متریک متغیر و روش گرادیان مزدوج [۱۹]: الف) نرخ کاهش تابع هدف ب) نرخ کاهش اندازه گرادیان ۱۷
- شکل (۱۳-۱) هندسه کلی یک مساله طراحی تشعشعی معکوس [۲۰] ۱۸
- شکل (۱۴-۱) شماتیک مساله حل شده در مرجع [۲۰] ۱۸
- شکل (۱۵-۱) مقایسه به ازای پارامتر های مختلف منظم سازی: الف) شار حرارتی تخمین زده شده ب) نرخ کاهش تابع هدف [۲۰] ۱۹
- شکل (۱۶-۱) هندسه مساله حل شده در مرجع [۲۱] ۲۰
- شکل (۱۷-۱) باز گردانی ترم منبع حرارتی: الف) ترم سینوسی ب) ترم مستطیلی [۲۱] ۲۰
- شکل (۱۸-۱) باز گردانی ترم منبع حرارتی سینوسی: الف) نرخ کاهش تابع هدف ب) نرخ کاهش اندازه گرادیان [۲۱] ۲۱
- شکل (۱-۲) نمایش هندسه و مختصات برای مساله الف) انجماد و ب) ذوب ۲۵
- شکل (۲-۲) رابطه آنتالپی-دما برای موادخالص ۲۸
- شکل (۳-۲) روش مشخص کردن موقعیت مرز مشترک ۳۱
- شکل (۱-۴) نمودار روند بهینه سازی تابع هدف ۴۹
- شکل (۲-۴) جهت های سریع ترین افزایش ۵۱
- شکل (۳-۴) مینیمم یک تابع درجه دوم در یک مرحله با روش نیوتن ۶۱
- شکل (۱-۵) نمایش شماتیک مساله انجماد برای ماده خالص ۷۳

۷۶	شکل (۲-۵) گسسته سازی شار حرارتی به $M$ گام زمانی [۱۸]
۸۲	شکل (۳-۵) الگوریتم روش ریشه مستقیم [۱۵]
۹۰	شکل (۱-۶) مقایسه شار حرارتی مطلوب و محاسبه شده
۹۱	شکل (۲-۶) الف) نرخ کاهش تابع هدف و ب) نرخ کاهش نرم گرادیان شار مثلثی
۹۳	شکل (۳-۶) مقایسه نتایج جدول (۱-۶) شار حرارتی مثلثی: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS
۹۴	شکل (۴-۶) باز گردانی شار حرارتی پله ای برای شبکه های متفاوت
۹۵	شکل (۵-۶) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای شبکه های متفاوت شار مثلثی
۹۸	شکل (۶-۶) مقایسه نتایج جدول (۲-۶) شار حرارتی مثلثی: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS
۹۹	شکل (۷-۶) مقایسه نتایج جدول (۳-۶) شار حرارتی پله ای : الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS
۱۰۰	شکل (۸-۶) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای حدس اولیه متفاوت شار مثلثی
۱۰۱	شکل (۹-۶) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای حدس اولیه متفاوت شار پله ای
۱۰۳	شکل (۱۰-۶) دماهای ثبت شده در موقعیت های متفاوت سنسور برای الف) شار مثلثی و ب) شار پله ای
۱۰۴	شکل (۱۱-۶) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای مکان های متفاوت حسگر شار مثلثی
۱۰۵	شکل (۱۲-۶) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای مکان های متفاوت حسگر شار پله ای
۱۰۷	شکل (۱۳-۶) مقایسه نتایج جدول (۴-۶) شار حرارتی مثلثی: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS
۱۰۹	شکل (۱۴-۶) مقایسه نتایج جدول (۵-۶) شار حرارتی پله ای: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS
۱۱۱	شکل (۱۵-۶) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای حدس اولیه متفاوت شار مثلثی
۱۱۲	شکل (۱۶-۶) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای شبکه های متفاوت شار پله ای
۱۱۳	شکل (۱۷-۶) مقایسه نتایج جدول (۷-۶) شار حرارتی مثلثی: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS
۱۱۴	شکل (۱۸-۶) مقایسه نتایج جدول (۸-۶) شار حرارتی پله ای: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS

- ۱۱۶ شکل (۱۹-۶) الف) دماهای ثبت شده و اغتشاش یافته برای شار مثلثی و ب) توزیع نرمال گوسی
- شکل (۲۰-۶) باز گردانی شار حرارتی به ازای مقادیر مختلف اغتشاش در ورودی الف) شار مثلثی و ب) شار پله ای
- ۱۱۸ شکل (۲۱-۶) مقایسه شار بدست آمده با حل تحلیلی به منظور کنترل سرعت سطح مشترک برای مواد خالص
- ۱۲۱
- ۱۲۲ شکل (۲۲-۶) مقایسه مکان سطح مشترک در دو حالت مطلوب و محاسبه شده

## فهرست جداول

۹	جدول (۱-۱) درصد میانگین مربعات خطا بین سرعت مطلوب و محاسبه شده، دقت و تعداد تکرار مورد نیاز [۱۳]
۱۴	جدول (۲-۱) مقایسه سرعت و دقت نسخه های مختلف روش متریک متغیر در بازگردانی شار حرارتی مثلثی [۱۸]
۱۴	جدول (۳-۱) سرعت و دقت نسخه های مختلف روش متریک متغیر در بازگردانی شار حرارتی مستطیلی برای حالت بدون خطا [۱۸]
۱۵	جدول (۴-۱) شار حرارتی تخمین زده شده برای حالت داده های دارای اغتشاش الف) مثلثی ب) مستطیلی [۱۸]
۱۸	جدول (۵-۱) مقایسه ی درصد خطا در تخمین شار حرارتی [۱۹]
۲۱	جدول (۶-۱) مقایسه نتایج ترم منبع حرارتی سینوسی و مستطیلی برای داده های بدون خطا [۲۱]
۴۸	جدول (۱-۴) دسته بندی روشهای بهینه سازی
۹۲	جدول (۱-۶) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای شبکه های مختلف شار مثلثی
۹۶	جدول (۲-۶) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای حدس های اولیه متفاوت شار مثلثی
۹۷	جدول (۳-۶) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای حدس های اولیه متفاوت شار پله ای
۱۰۶	جدول (۴-۶) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای مکان های حسگر متفاوت شار مثلثی
۱۰۸	جدول (۵-۶): مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای مکان های حسگر متفاوت شار پله ای
۱۱۰	جدول (۶-۶): مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای اعداد استغاف مختلف شار مثلثی
۱۱۴	جدول (۷-۶): مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای اعداد استغاف مختلف شار پله ای
۱۱۷	جدول (۸-۶) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز در حالت اغتشاش در داده های ورودی شار مثلثی
۱۱۹	جدول (۹-۶) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز در حالت اغتشاش در داده های ورودی شار پله ای



## فهرست علائم

ظرفیت گرمایی ویژه	$c$
طول قالب در جهت X	$d$
جهت کاهش	$S$
خطای RMS	$e_{RMS}$
گرادین دمای سطح مشترک	$G$
آنتالپی	$h$
ضریب هدایت حرارتی	$k$
گرمای نهان	$L$
تعداد بازه های زمانی	$M$
تعداد بازه های مکانی	$N$
شار حرارتی	$q$
تابع هدف	$f(q)$
موقعیت سطح مشترک	$s(t)$
عدد استفان	$Ste$
دما	$T$
دمای ذوب	$T_f$
دمای اولیه	$T_i$
دمای مرجع	$T_0$
زمان	$t$
زمان نهایی	$t_f$
سرعت سطح مشترک	$V$
ضریب حساسیت	$X$
دمای اندازه گیری شده	$Y$

### علائم یونانی

چگالی	$\rho$
مقدار کوچک	$\varepsilon$
گام جستجو	$\lambda$
ضریب نفوذ حرارتی	$\alpha$
گرادیان تابع هدف	$\nabla f [q]$
متغیر حساسیت	$\Delta T$
انحراف معیار داده های اندازه گیری شده	$\sigma$
تابع دیراک دلتا	$\delta(.)$
خطای اندازه گیری	$\omega$

### زیر نویس ها

فاز جامد	s
فاز مایع	l

# فصل اول

## مقدمه

## ۱-۱ مسائل معکوس حرارتی

مسائل انتقال حرارت به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: مسائل مستقیم و مسائل معکوس. مسائل مستقیم بطور کلی هندسه، خواص فیزیکی و شرایط اولیه و مرزی را در برمی‌گیرد و هدف آن یافتن دما در محدوده‌ی حل است. حل این‌گونه مسائل معمولاً با دقت و کارایی کافی امکان‌پذیر می‌باشد؛ بدین معنی که خطای وارده در شرایط مرزی، خطایی هم‌مقیاس با خود در دمای محاسبه شده ایجاد می‌کند. اما مسائل معکوس شامل بعضی از شرایط مشخص در مساله مستقیم نمی‌باشد، ولی دماهای اندازه‌گیری شده موجود است. این‌گونه مسائل از لحاظ ریاضی جزو مسائل ناهنجار<sup>۱</sup> طبقه‌بندی می‌شوند چون وجود هرگونه خطای تصادفی اجتناب‌ناپذیر در اندازه‌گیری دما، باعث بزرگنمایی خطای تخمین می‌شود. بنابراین در مسائل مستقیم حرارتی، علت (بعنوان نمونه شار حرارتی در مرز)، جزو معلومات بوده و اثر (میدان دما در داخل جسم)، بوسیله حل معادلات حاکم مشخص خواهد شد، اما در مسائل معکوس حرارتی به تخمین علت مجهول با استفاده از اثر معلوم یا اثر مطلوب پرداخته می‌شود. در فصل سوم بطور مشروح درباره انواع روش‌های معکوس و کاربردهای آن بحث شده است.

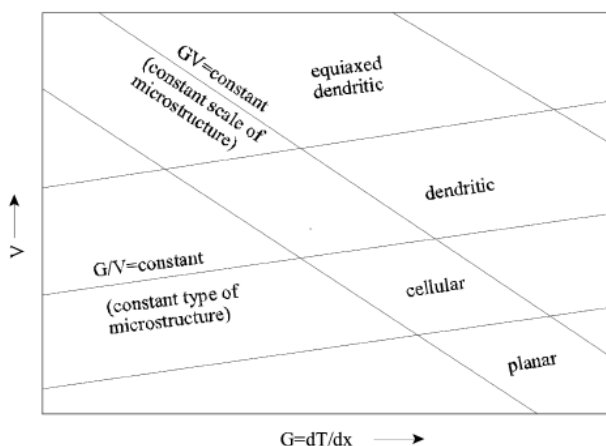
## ۱-۲ مسائل معکوس حرارتی همراه با تغییر فاز

مسائل شامل تغییر فاز همراه با جذب یا آزاد شدن انرژی (ذوب یا انجماد) هستند. در سطح مشترک موجود در این فرآیندها در حالیکه دو فاز با خواص ترموفیزیکی متفاوت از یکدیگر جدا می‌شوند، حرارت نهان جذب یا آزاد می‌شود. در مسائل معکوس شامل تغییر فاز، دما و سرعت در سطح مشترک جامد - مایع مشخص هستند و دما یا شار حرارتی در مرز برای داشتن چنین دما و سرعتی در سطح مشترک از مجهولات مسأله است. یکی از مهمترین پارامترها در ریخته‌گری و رشد کریستال‌ها، سرعت سطح

---

<sup>1</sup> Ill-Posed

مشترک جامد - مایع است که کیفیت ماده منجمد شده (ریخته شده) را تعیین می‌کند. علاوه بر این ترکیب سرعت و گرادیان دما در سطح مشترک، اندازه و نوع ریز ساختارها را در یک ماده در حال انجماد مشخص می‌کنند [۱]. به عنوان مثال شکل (۱-۱) ریز ساختارهای متفاوتی را در انجماد آلیاژها با تغییرات سرعت سطح مشترک  $V$ ، و گرادیان دمای سطح مشترک  $G$  نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با کنترل این پارامترها می‌توان به موادی با کیفیت‌های مطلوب دست پیدا کرد. پس هدف در حل مسائل کنترل انجماد آلیاژها و مواد خالص، تعیین شرایط مرزی مجهول برای دستیابی به سرعت و گرادیان دمای معلوم در سطح مشترک است.



شکل (۱-۱) ساختارهای مختلف سطح مشترک در گرادیان‌های مختلف دما [۲]

کنترل گرادیان دما و سرعت در سطح مشترک هم برای آلیاژها و هم برای مواد خالص می‌تواند صورت گیرد. در انجماد مواد خالص، دمای سطح مشترک ثابت بوده و انجماد در یک دمای ثابت (دمای ذوب) روی می‌دهد و مسأله تنها شامل دو فاز مایع و جامد خواهد بود. در انجماد آلیاژها، انجماد در یک دمای ثابت رخ نداده و در یک بازه دمایی اتفاق می‌افتد و علاوه بر فاز جامد و مایع، فاز سوم به نام ناحیه

میانی<sup>۱</sup> حضور خواهد داشت که یک ناحیه دو فازی (ترکیبی از فاز جامد - مایع) بوده و خواص در این ناحیه دارای مقادیر ثابتی نخواهند بود.

### ۳-۱ مروری بر پژوهش‌های گذشته در زمینه انجماد فلزات

مسائل معکوس انتقال حرارتی که شامل تغییر فاز (ذوب یا انجماد) هستند را می‌توان در گروه‌های زیر طبقه بندی نمود:

۱. مسأله شامل تخمین خواص و حرارت نهان در طی فرآیند انجماد.
۲. مسأله انجماد که شامل محاسبه سطح مشترک جامد - مایع و محاسبه شار حرارتی مرزی با استفاده از اندازه گیری دما در ناحیه مایع و جامد است.
۳. مسأله طراحی و کنترل انجماد که شامل محاسبه شرایط مرزی لازم برای رسیدن به حرکت (سرعت) و گرادین دمای مطلوب، در سطح مشترک است.
۴. مسأله تخمین مقاومت حرارتی تماسی یا ضریب انتقال حرارت بین مذاب و قالب در طی فرآیندهای انجماد.

پژوهش‌های صورت گرفته که در چهار گروه فوق طبقه بندی شده‌اند هم مربوط به انجماد آلیاژها و هم مواد خالص هستند. از میان ۴ دسته فوق، گروه سوم از اهمیت فوق العاده‌ای در فرآیندهای انجماد برخوردار است، چرا که با کنترل پارامترهای مؤثر بر انجماد مواد خالص یا آلیاژها می‌توان به ماده‌ای با کیفیت و شکل مطلوب و در طی فرآیندهای جوشکاری به یک اتصال جوش مقاوم و مطمئن دست یافت.

---

<sup>1</sup> Mushy zone

مهمترین پارامترهایی که بر کیفیت قطعه ریخته شده مؤثر هستند، سرعت سطح مشترک جامد - مایع و گرادیان دمای سطح مشترک در سمت جامد یا مایع هستند که باعث افزایش مقاومت قطعه در مقابل تنش‌ها و خستگی حرارتی می‌شوند.

زاباراس<sup>۱</sup> و همکارانش [۳] با استفاده از روش انتگرالی، مسأله معکوس شامل تغییر فاز را حل کرده‌اند. این روش برای یافتن شرایط مرزی مناسب برای رسیدن به سرعت مطلوب سطح مشترک مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین ذکر شده که می‌توان با این روش و استفاده از دماهای اندازه‌گیری شده توسط ترموکوپل، حرکت سطح مشترک را برای حالتی که شار سطوح معلوم است، پیش بینی نمود.

تلجکو<sup>۲</sup> [۴] با استفاده از روش انتقال حرارت معکوس در فرآیندهای انجماد، به طور همزمان به تعیین ضریب هدایت حرارتی و حرارت نهان در طی انجماد فولاد پرداخته است. نتایج محاسبه ضریب انتقال حرارت هدایتی با نتایج تجربی مقایسه شده و دقت خوبی گزارش شده است.

آغاز مسأله کنترل انجماد را می‌توان کارهای زاباراس دانست. وی و همکارانش [۵] به محاسبه شار حرارتی یا دمای مرزی برای یک جسم در حال انجماد با سرعت مطلوب سطح مشترک پرداختند. مسأله انجماد برای حالت تک جهتی با یک شار حرارتی سینوسی در مرز در نظر گرفته شده و سرعت یا موقعیت مطلوب سطح مشترک از حل مسأله مستقیم بدست آمده است. در این مقاله برای حل مسأله ناهنجار معکوس از روش اطلاعات آینده بک<sup>۳</sup> و منظم سازی مکانی استفاده شده است.

زاباراس و کانگ<sup>۴</sup> [۶] به کنترل سرعت سطح مشترک در یک هندسه دو بعدی پرداختند. در این کار نیز هدف یافتن تاریخچه زمانی شار حرارتی مرزی برای دست یابی به سرعت مطلوب سطح مشترک است که

---

<sup>1</sup> Zabaras

<sup>2</sup> Telejko

<sup>3</sup> Beck's Future Information

<sup>4</sup> Zabaras and Kang

برای بهینه‌سازی تابع هدف که به صورت زیر تعریف شده از روش الحاقی و الگوریتم روش گرادیان مزدوج<sup>۱</sup> استفاده شده است.

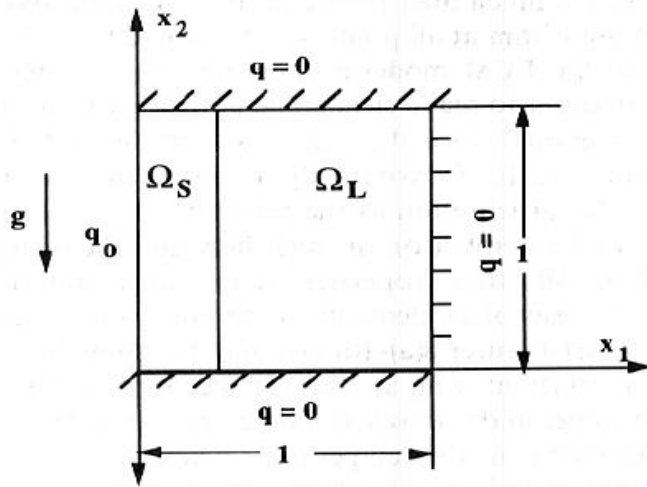
$$S(q) = \frac{1}{2} \int_0^{t_{\max}} \int_{\partial\Omega_f(t)} (T_m - T(x, t; q))^2 d\Gamma dt$$

که در آن  $T(x, y; q)$  توزیع دمای محاسبه شده در سطح مشترک و  $T_m$  دمای ذوب یا انجماد داده شده هستند. مسأله برای دو حالت مختلف از انجماد یک ماده خالص حل شده است. حالت اول مربوط به انجماد تک جهتی و حالت دوم مربوط به انجماد در یک گوشه بی نهایت است. در حالت اول سرعت مطلوب سطح مشترک از حل مسأله مستقیم با شار حرارتی سینوسی در مرز بدست آمده است. همچنین در این مقاله بیان شده است که این روش بهینه‌سازی تابع هدف (روش الحاقی و CGM) دارای یک حل همگرا در زمان‌های طولانی تر نسبت به مقاله قبلی دارد. هنگامی که مقدار حدس اولیه از مقدار واقعی حل دور باشد بدلیل شرایط پایانی در مسأله الحاقی، دقت و نرخ همگرایی حل کاهش پیدا می‌کند.

زاباراس [۷، ۸] با استفاده از روش الحاقی و الگوریتم گرادیان مزدوج به کنترل سطح مشترک جامد - مایع در حضور جابجایی طبیعی پرداخته است. در این تحقیق مسأله معکوس فقط برای فاز جامد حل شده و جریان جابجایی طبیعی در فاز مایع به صورت مستقیم حل شده و از نتایج آن برای حل مسأله معکوس در ناحیه جامد استفاده شده است. هدف از حل مسأله معکوس رسیدن به سرعت مطلوب سطح مشترک در انجماد آلومینیوم خالص بیان شده است و برای این منظور از روش (FTFET) Front Tracking Finite Element Technique استفاده شده است. بهینه‌سازی تابع هدف با استفاده از الگوریتم گرادیان مزدوج و با حل مسائل مستقیم، حساسیت و الحاقی صورت گرفته است. هندسه مورد استفاده این مقاله در شکل (۲-۱) ملاحظه می‌شود.

<sup>۱</sup> Conjugate Gradient Method (CGM)





شکل (۲-۱) انجماد تک جهتی به همراه جابجایی طبیعی [۸]

محاسبه شرایط مرزی در دیوار سمت چپ برای سرعت بدون بعد سطح مشترک برابر یک انجام شده است. در تحقیق حاضر فقط سرعت سطح مشترک به وسیله شار مرزی در  $x=0$  کنترل و پیشنهاد شده است که برای کنترل شار حرارتی در سطح مشترک از پارامتر کنترل دیگری مانند شار در  $x=1$ ، نیروهای الکترومغناطیسی و یا یک چشمه حرارتی در قسمت مایع استفاده شود.

یانگ و زاباراس<sup>۱</sup> [۹] در توسعه تحقیق قبلی خود علاوه بر حل مساله معکوس در ناحیه جامد به حل مساله معکوس در ناحیه مایع نیز در حضور جابجایی طبیعی پرداخته‌اند. در این پژوهش از الگوریتم اجزای محدود و استفاده از روش الحاقی و گرادیان مزدوج برای طراحی مساله انجماد استفاده شده است. علاوه بر کنترل سرعت سطح مشترک، کنترل گرادیان دمای سطح مشترک نیز صورت پذیرفته است. هدف این تحقیق یافتن شرایط مرزی مناسب برای کاهش اثرات جابجایی طبیعی روی سطح مشترک و رسیدن به سرعت و گرادیان دمای مطلوب در سطح مشترک برای یک ماده خالص عنوان شده است.

<sup>1</sup> Yang and Zabaras

سمپاس و زاباراس<sup>۱</sup> [۱۰] نیز مسأله معکوس در ناحیه جامد و مایع برای حصول سرعت و گرادیان دمایی مطلوب در سطح مشترک برای یک قالب روباز، بدون در نظر گرفتن ناحیه دوفازی، حل شده است. ماده مورد استفاده در این پژوهش آلیاژ  $Sb-8.6\% Ge$  است. سپس با بدست آمدن شرایط مرزی بهینه<sup>۲</sup>، از آنها برای حل مسأله مستقیم استفاده شده است.

در این پژوهش عنوان شده است که نیاز به روش‌های محاسباتی دیگر و جدیدتری برای حل مسأله معکوس وجود دارد. علاوه بر این ذکر شده که برای افزایش دقت روش‌های عددی مش‌های ریزتری در بازه مکانی مورد نیاز است که این روش‌ها می‌تواند به منظور طراحی فرآیندهای انجماد با حضور ناحیه دوفازی توسعه داده شود.

زو و ناترر<sup>۳</sup> [۱۱] با استفاده از روش انتقال حرارت معکوس، شرط مرزی دمایی را برای حالتی که سرعت سطح مشترک ثابت باشد بدست آورده اند. در این مقاله از قانون دوم ترمودینامیک برای افزایش پایداری روش و حذف جواب‌های غیر فیزیکی استفاده شده است.

لی و اوکاموتو<sup>۴</sup> [۱۲] با توسعه یک روش انتقال حرارت معکوس برای مسائل کنترل و طراحی انجماد و با استفاده از یک روش منظم سازی<sup>۵</sup> به محاسبه شار حرارتی بهینه برای دستیابی به سطح مشترکی با شکل و سرعت مطلوب پرداخته اند. اثر جابجایی طبیعی ناشی از گرادیان دما در جهت عمودی نیز در این تحقیق لحاظ شده است. هر دو روش تمام دامنه زمانی و روش مرحله‌ای در این پژوهش در نظر گرفته شده است.

عباس‌نژاد و همکارانش [۱۳ و ۱۴] با در نظر گرفتن ناحیه میانی به حل مسأله معکوس حرارتی در انجماد آلیاژها پرداختند. در این کار به منظور کنترل سرعت انجماد، با استفاده از دو شار حرارتی سرعت‌های مرز

---

<sup>1</sup> Sampath and Zabaras

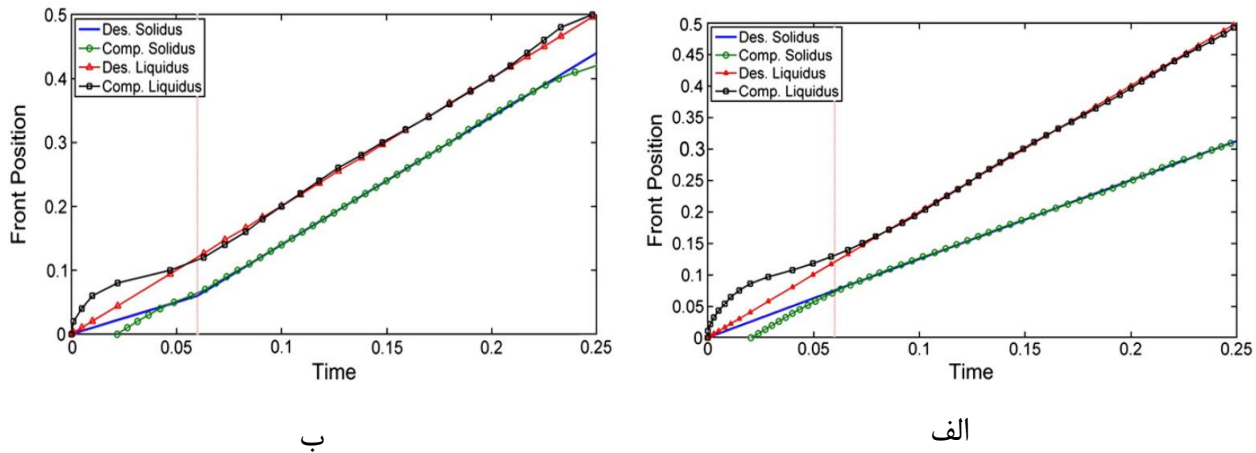
<sup>2</sup> Optimal

<sup>3</sup> Xu and Naterer

<sup>4</sup> Li and Okamoto

<sup>5</sup> Tikhonov Regularization

سالیدوس<sup>۱</sup> و مرز لیکیدوس<sup>۲</sup> کنترل شده است. حل مساله مستقیم با استفاده از روش آنتالپی و حل مساله معکوس با استفاده از روش گرادیان مزدوج همراه با مساله الحاقی انجام شده است. شکل (۱-۳) مقایسه بین سرعت مطلوب و محاسبه شده را نشان می‌دهد.



شکل (۱-۳) مقایسه مکان‌های کنترل شده سطوح مشترک برای: الف) سرعت‌های  $V_l=2, V_s=1.25$  ب) سرعت‌های مساوی [۱۳]

در جدول (۱-۱) نیز مقادیر خطا برای حالات مختلف سرعت بررسی شده است. دقت نتایج کارایی روش ارائه شده را برای کنترل سرعت در آلیاژها با در نظر گرفتن ناحیه میانی نشان می‌دهد.

جدول (۱-۱) درصد میانگین مربعات خطا بین سرعت مطلوب و محاسبه شده، دقت و تعداد تکرار مورد نیاز [۱۳]

Solidus velocity	Liquidus velocity	Objective function	Iteration numbers	Solidus $e_{RMS}\%$	Liquidus $e_{RMS}\%$
0.25	2	$3.1e-4$	25	7.23	4.72
1.25	2	$4.078e-4$	41	4.25	5.63
1.75	2	$8.33e-4$	64	6.43	7.15
2	2	$3.69e-4$	70	5.86	4.70

<sup>1</sup> Solidus

<sup>2</sup> Liquidus

## ۱-۴ اهداف پایان نامه

در فرآیندهای ریخته گری مهمترین مساله دستیابی به قطعه‌ای با کیفیت مشخص می‌باشد. بدین منظور فلز بایستی دارای ساختار متالورژیکی مطلوب باشد. ساختار متالورژیکی فلزات تابعی از دما و تغییرات آن است. بنابراین یکی از راههای تغییر ساختار متالورژیکی مواد فلزی، کنترل فرآیند انجماد در ریخته‌گری و تغییرات میدان دمای درون آنهاست. تغییر ساختار متالورژیکی فلزات مختلف با دما را می‌توان با استفاده از نمودارهای فازی بررسی نمود. نکته مهم در فرآیند انجماد در ریخته‌گری فلزات، الگوی سرد شدن قطعه و قالب با زمان و به تبع آن سرعت سطح مشترک جامد-مایع می‌باشد.

شیوه‌هایی که مهندسان در انجام فرآیندهای ریخته‌گری به کار می‌برند بر اساس نمودارها و نتایج حاصل از کارهای تجربی است. در نتیجه بایستی برای هر کاربرد با توجه به پارامترهای موثر (جنس قطعه، ابعاد و هندسه آن، نوع انتقال حرارت و...) آزمایشی تجربی را انجام داد و یا با استفاده از نتایج موجود، شرایط جدید را استنتاج کرد. از آنجا که نمونه سازی و انجام آزمایش برای هر کاربردی نیازمند صرف وقت و هزینه زیاد است، بنابر این توسعه روش‌های تحلیلی و عددی به منظور مدل سازی این فرآیندها لازم است. با توجه به مطالب گفته شده و آنچه که در مرور کارهای گذشته آمد، بهترین روش عددی بکار گرفته شده در این پژوهش‌ها روش گرادیان مزدوج می‌باشد. اما روشی که اخیراً مورد توجه قرار گرفته و کارایی بمراتب بالاتری نسبت به روش گرادیان مزدوج دارد، روش متریک متغیر است. هدف در این پایان نامه حل مساله معکوس انجماد با دقت و سرعت بالاتر می‌باشد. همچنین در بیشتر پژوهش‌های گذشته حل مساله مستقیم با در نظر گرفتن دو فاز جداگانه مایع و جامد حل شده است، اما استفاده از روش آنتالپی که در [۱۳ و ۱۴] نیز بکار گرفته شده، باعث کاهش در هزینه حل می‌شود. در ادامه به برخی از کارهای انجام شده در حل مساله معکوس حرارتی با استفاده از روش متریک متغیر اشاره شده است.

## ۵-۱ سابقه‌ی تحلیل مسائل معکوس حرارتی با استفاده از روش متریک متغیر

همانطور که پیش از این بیان شد، در یک مساله مستقیم، شرایط مرزی (شار حرارتی) معلوم می‌باشد؛ برخلاف مساله معکوس که مجهول است. می‌توان جستجو برای تعیین بردار شار حرارتی وابسته به زمان را بعنوان یک مساله برنامه ریزی غیر خطی در نظر گرفت. راثو [۱۵] تکنیک‌های مختلفی را برای حل این‌گونه مسائل بطور کامل بررسی کرده است که بعضی از این روش توسط محققان مسائل حرارتی معکوس، برای کمینه سازی تابع هدف استفاده شده‌اند. در تمامی تکنیک‌های بهینه سازی نامقید هدف رسیدن به یک نقطه کمینه از طریق یک رویه تکراری می‌باشد. مخصوصاً روش‌هایی که شامل شروع کردن با یک حدس اولیه برای بردار  $q_i$  و تولید کردن متوالی آن با استفاده از رابطه زیر می‌باشد:

$$\vec{q}_{i+1} = \vec{q}_i + \lambda_i \vec{S}_i$$

که در آن  $\vec{S}_i$  بردار جهت جستجو،  $\lambda_i$  یک اسکالر که نشان دهنده اندازه گام بهینه جستجو در جهت  $\vec{S}_i$  بوده و  $i$  شماره تکرار می‌باشد.

روش‌هایی که در بهینه سازی نامقید بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند عبارتند از: روش گرادیان مزدوج<sup>۱</sup> (CGM)، روش نیوتن اصلاح شده<sup>۲</sup> (MNM) و روش متریک متغیر<sup>۳</sup> (VMM). اختلاف عمده بین این سه روش در نحوه تعیین جهت جستجو در رابطه اخیر می‌باشد. جزئیات بیشتر درباره این روش‌ها در فصل ۴ ارائه شده است.

مروری گذرا بر کارهای گذشته در زمینه مسائل معکوس حرارتی تمام دامنه ای<sup>۴</sup> نشان می‌دهد که روش گرادیان مزدوج بطور گسترده‌ای برای کمینه سازی تابع مربعات خطا استفاده شده است. اما باید توجه داشت که کارایی روش متریک متغیر بیشتر و دارای خصوصیات برتری در مقایسه با سایر روش‌های بهینه

<sup>1</sup> Conjugate gradient method

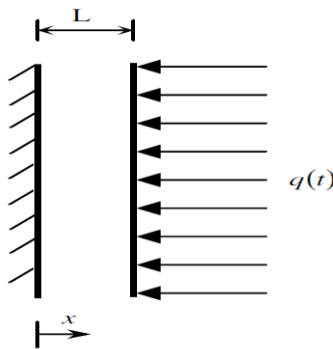
<sup>2</sup> Modified Newton method

<sup>3</sup> Variable metric method

<sup>4</sup> whole domain

سازی نامقید می باشد [۱۵]. نسخه‌های پیشنهادی مختلفی از این روش در مقالات وجود دارد که هر یک از آنها روند متفاوتی در تعیین کردن جهت جستجو  $\bar{K}$  دارند. لوکسان<sup>۱</sup> و اسپدیکیتو<sup>۲</sup> [۱۶] بطور مشروح درباره نسخه‌های مختلف روش متریک متغیر بحث کرده و عملکرد آنها را در انواع گوناگون مسائل بهینه سازی ارزیابی کرده‌اند. ژانگ<sup>۳</sup> و همکارانش [۱۷] بطور ریاضی اثبات کرده‌اند که برای یک تابع هدف درجه دو محدب، ترتیب تکراری تولید شده توسط روش متریک متغیر بطور کلی و خطی به یک حل یکتا همگرا می‌شود.

اولین بار پورشقافی و همکارانش [۱۸] استفاده از روش متریک متغیر را در حل مساله معکوس حرارتی پیشنهاد کردند. شکل (۴-۱) یک مساله هدایت حرارتی یک بعدی و شرایط مرزی آن که توسط آنها حل شده است را نشان می‌دهد. همچنین در این مقاله چهار نسخه متداول روش متریک متغیر (BFGS-DFP- Biggs-SR1) از نظر سرعت، دقت و کارایی در بازگردانی دو شار حرارتی مثلثی و مستطیلی با هم مقایسه شده‌اند. در ادامه به برخی از نتایج این مقاله اشاره شده است.



شکل (۴-۱) شماتیک مساله حل شده در مرجع [۱۸]

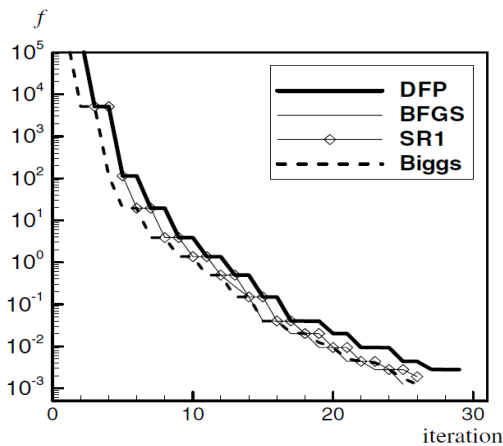
شکل های (۵-۱ تا ۸-۱) و جداول (۲-۱ و ۳-۱) قابلیت چهار روش ذکر شده متریک متغیر را در بازگردانی شار حرارتی مثلثی و مستطیلی (برای حالتی که داده بدون خطا باشند) نشان می‌دهد. همچنین

<sup>1</sup> Luksan

<sup>2</sup> Spedicato

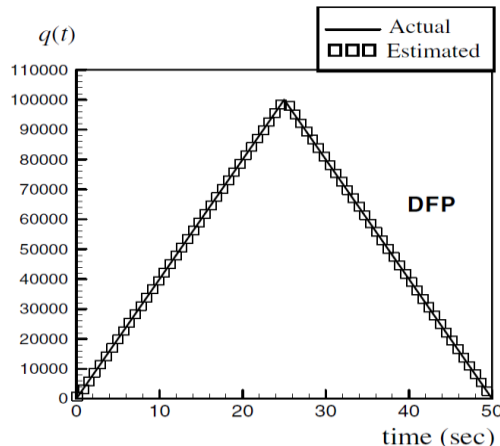
<sup>3</sup> Zhang

شکل (۹-۱) و جدول (۴-۱) این مقایسه را در بازگردانی شار حرارتی مثلثی و مستطیلی برای حالتی که داده ها دارای اغتشاش در ورودی باشند، نشان می دهند.



شکل (۶-۱) مقایسه نرخ کاهش تابع هدف برای شار مثلثی

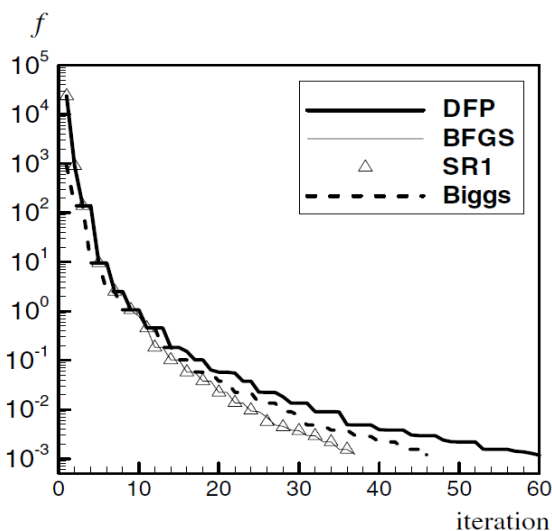
[۱۸]



شکل (۵-۱) شار مثلثی دقیق و تخمین زده شده توسط

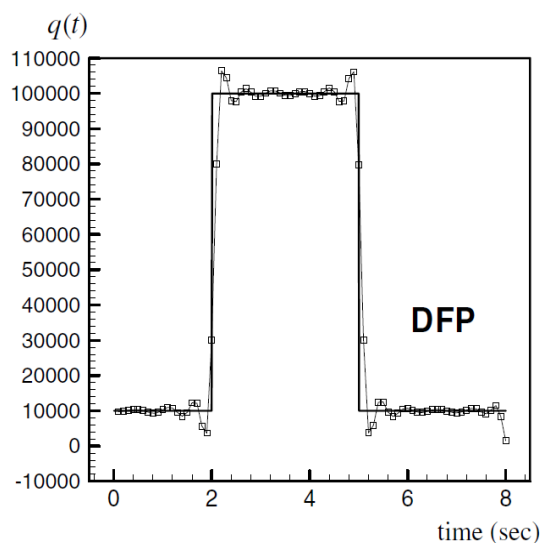
روش DFP [۱۸]

این نتایج نشان داد که دقت این نسخه ها اختلاف قابل ملاحظه ای با یکدیگر ندارند اما روش SR1 بطور کلی کارایی بیشتری نسبت به دیگر نسخه ها دارد.



شکل (۸-۱) نرخ کاهش تابع هدف برای شار

مستطیلی [۱۸]



شکل (۷-۱) شار مستطیلی دقیق و تخمین زده شده

توسط روش DFP [۱۸]

جدول (۲-۱) مقایسه سرعت و دقت نسخه های مختلف روش متریک متغیر در بازگردانی شار حرارتی مثلثی [۱۸]

	Required iterations to satisfy stopping criteria	Run time (s)	$f$ at final sol	$\ \nabla f\ $ at final sol ( $\times 10^{-6}$ )	$e_{RMS}$
DFP	29	8.84	0.00279	4.72	0.334
BFGS	25	10.15	0.00124	2.79	0.334
SR1	26	6.11	0.00189	2.79	0.334
Biggs	26	10.06	0.00124	2.79	0.334

نسخه های BFGS، Biggs، DFP و بدنبال آنها SR1 در مقیاس مورد بررسی شده، اختلاف زیادی با هم ندارند.

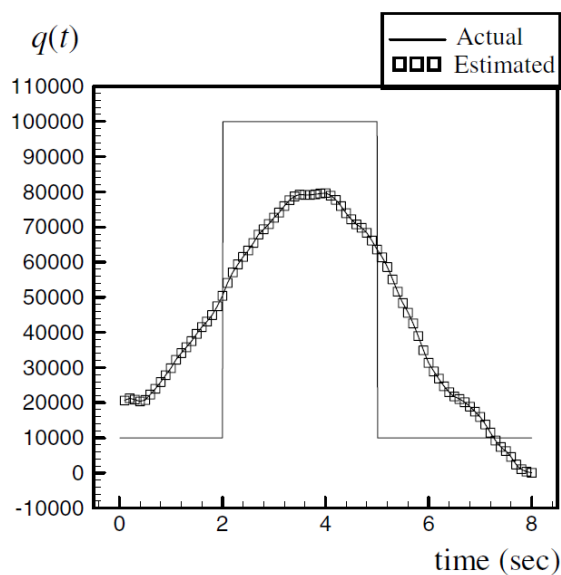
جدول (۳-۱) سرعت و دقت نسخه های مختلف روش متریک متغیر در بازگردانی شار حرارتی مستطیلی برای حالت بدون

خطا [۱۸]

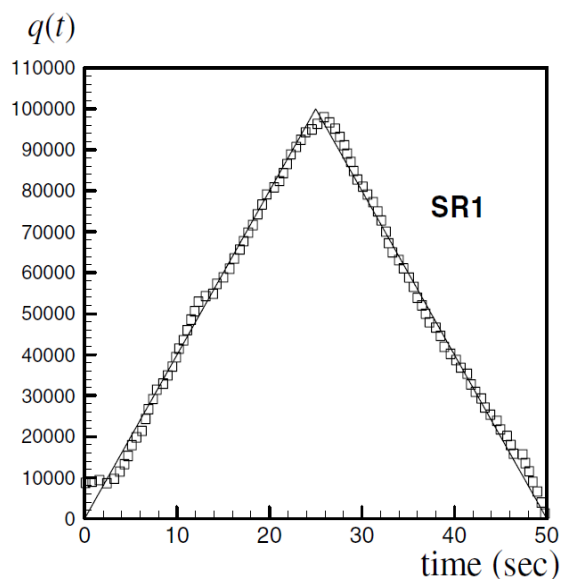
	Required iterations to satisfy stopping criteria	Run time (s)	$f$ at final sol	$\ \nabla f\ $ at final sol ( $\times 10^{-7}$ )	$e_{RMS}$
DFP	60	0.9	0.00118	1.8	8.05
BFGS	37	0.6	0.00123	1.73	8.05
SR1	36	0.53	0.00156	1.74	8.05
Biggs	46	0.88	0.00118	1.73	8.05

همچنین این مطالعه نشان داد که روش متریک متغیر نیز مانند سایر روشهای تمام دامنه ای حرارتی معکوس در تخمین شار ناگهانی در گوشه ها ضعیف می باشد اما در کل عملکرد این الگوریتم در تخمین شار مستطیلی بسیار خوب است.





ب



الف

شکل (۹-۱) شار حرارتی تخمین زده شده برای حالت داده‌های دارای اغتشاش الف) شار مثلثی ب) شار مستطیلی [۱۸]

جدول (۴-۱) شار حرارتی تخمین زده شده برای حالت داده‌های دارای اغتشاش الف) مثلثی ب) مستطیلی [۱۸]

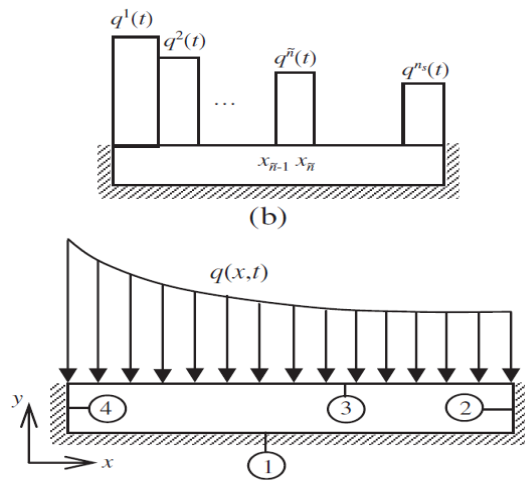
الف

	Required iterations to satisfy stopping criteria	Run time (s)	$f$ at final sol	$\ \nabla f\ $ at final sol	$e_{RMS}$
DFP	5	1.43	2,763.1	0.00563	4.37
BFGS	5	1.87	2763.1	0.00273	3.9
SR1	5	1.13	2763.1	0.00273	3.9
Biggs	4	1.3	2763.1	0.00541	4.37

ب

	Required iterations to satisfy stopping criteria	Run time (s)	$f$ at final sol	$\ \nabla f\ $ at final sol	$e_{RMS}$
DFP	3	0.004	457.3	0.0016	42.1
BFGS	3	0.005	457.3	0.0016	42.1
SR1	3	0.005	457.3	0.0016	42.1
Biggs	2	0.0035	457.3	0.0016	42.1

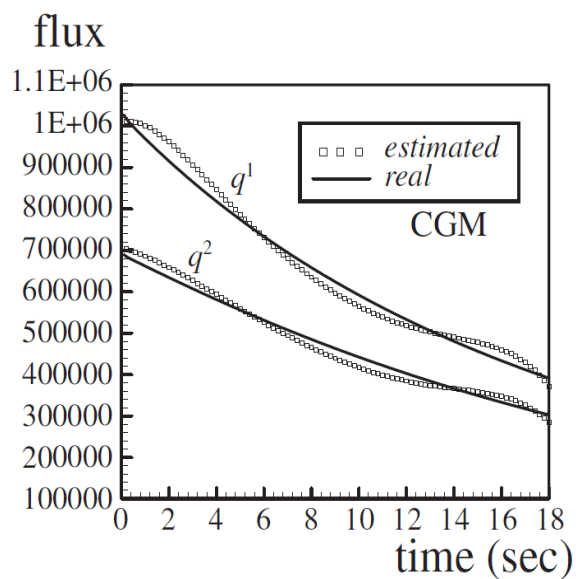
کوثری و همکارانش [۱۹] کاربرد روش متریک متغیر را برای حل مسائل دو بعدی تعمیم دادند. شکل (۱۰-۱) شماتیک مساله حل شده را نشان می دهد. در این مسئله شار حرارتی وابسته به مکان و زمان می باشد.



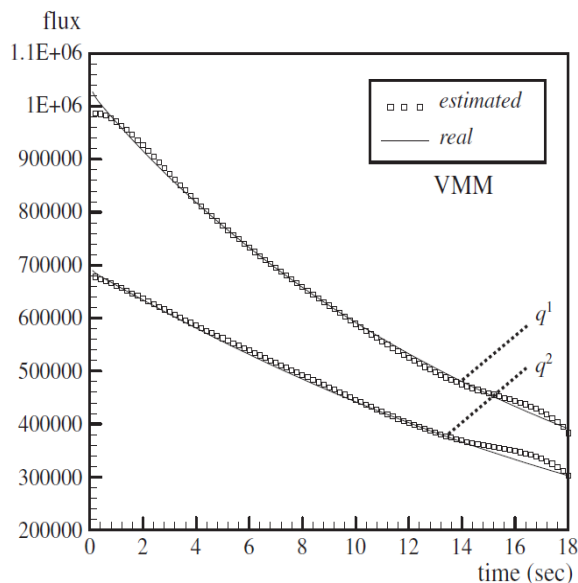
شکل (۱۰-۱) شماتیک مساله حل شده در مرجع [۱۹]

در این مقاله علاوه بر ارائه روش برای استفاده از بهینه سازی متریک متغیر در حل مساله معکوس هدایت حرارتی دو بعدی در تخمین شار، نتایج حاصل با روش گرادیان مزدوج مقایسه شده است. شکل (۱۱-۱) شار حرارتی تخمین زده شده توسط دو روش ذکر شده را نشان می دهد.

در جدول (۵-۱) و شکل (۱۲-۱) نتایج حاصل با هم مقایسه شده است. نتایج این پژوهش برتری روش متریک متغیر بر روش گرادیان مزدوج از نظر سرعت و دقت نشان می دهد.



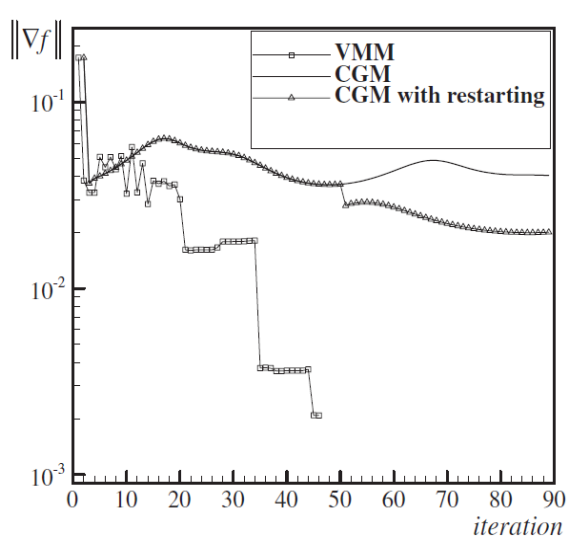
ب



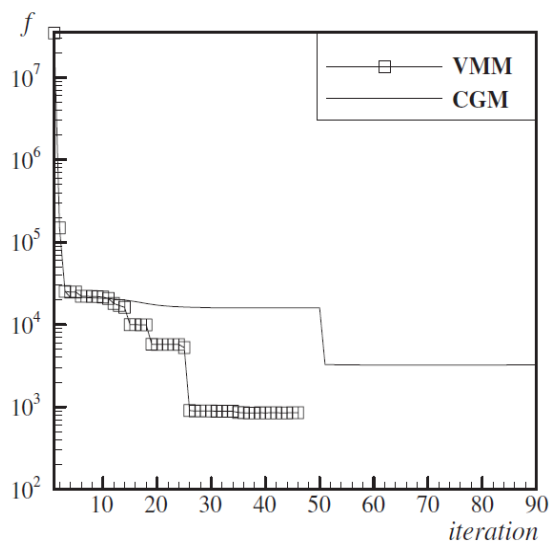
الف

شکل (۱۱-۱) تخمین شار حرارتی الف) توسط روش متریک متغیر ب) توسط روش گرادیان مزدوج بعد از ۹۰ بار تکرار

همراه با شروع مجدد در تکرار ۵۰ ام [۱۹]



ب



الف

شکل (۱۲-۱) مقایسه روش متریک متغیر و روش گرادیان مزدوج [۱۹]: الف) نرخ کاهش تابع هدف ب) نرخ کاهش

اندازه گرادیان

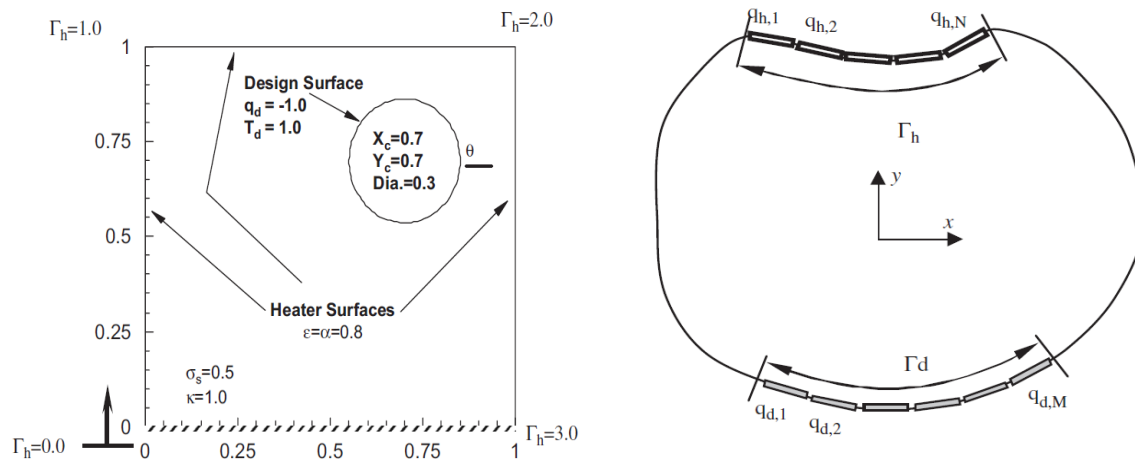
جدول (۵-۱) مقایسه ی درصد خطا در تخمین شار حرارتی [۱۹]

	$e_{RMS, q}$	$e_{RMS, q^2}$
CGM	12.82	9.95
CGM with restarting	5.28	4.61
VMM	1.92	1.85

حل مساله معکوس حرارتی در طراحی مرز تشعشی با استفاده از روش متریک متغیر نظم یافته توسط کوثری و همکارانش [۲۰] انجام شده است. در این مقاله هدف طراحی قدرت گرمکن‌ها در یک کوره تشعشی می‌باشد که با استفاده از یک توزیع دما و شار حرارتی بطور معکوس تعیین می‌شود. نتایج بدست آمده را با نتایج روش گرادیان مزدوج مقایسه شده است. شکل (۱-۱۳) هندسه کلی یک مساله طراحی تشعشی معکوس را نشان می‌دهد. تابع هدف این مساله بصورت زیر تعریف شده است:

$$f(\vec{q}_h) = \sum_{m=1}^M [\vec{q}_{d,m} - \vec{q}_{c,m}(\vec{q}_h)]^2$$

که در این رابطه  $m$  معرف اندیس المنت‌های حرارتی بر روی سطح طراحی،  $\vec{q}_{c,m}$  شار حرارتی محاسبه شده و  $\vec{q}_{d,m}$  توزیع شار دلخواه بر روی همین سطح می‌باشد.

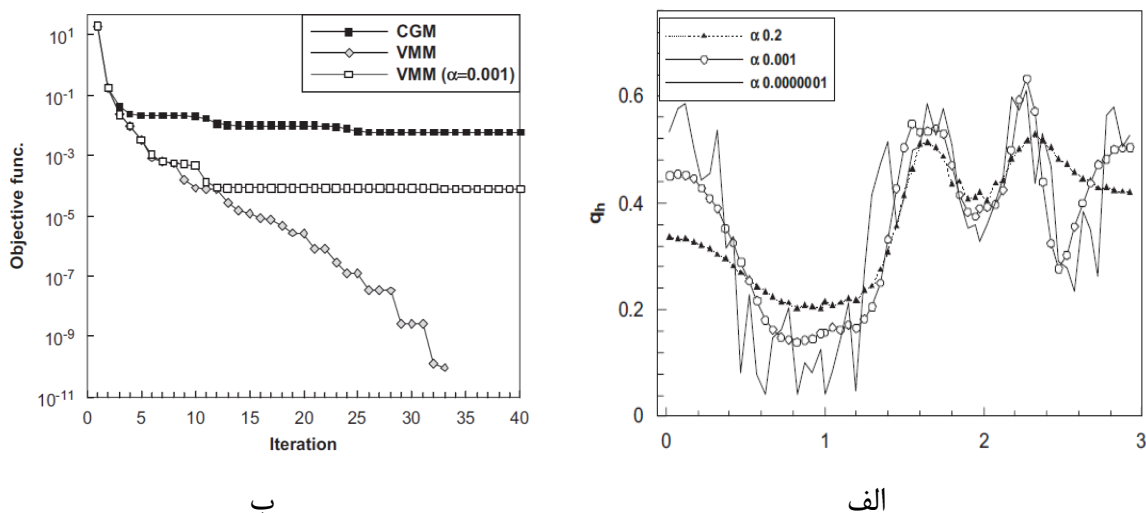


شکل (۱-۱۴) شماتیک مساله حل شده در مرجع [۲۰]

شکل (۱-۱۳) هندسه کلی یک مساله طراحی تشعشی

معکوس [۲۰]

در حل این مساله بمنظور کاهش نوسانات در تخمین شار، از ترم مرتبه اول روش منظم سازی تیخونوف استفاده شده است. شکل (۱-۱۵) نشان می‌دهد که استفاده از منظم سازی می‌تواند تا حد زیادی نوسانات شار تخمینی توسط روش متریک متغیر را کاهش دهد.  $\alpha$  پارامتر منظم سازی می‌باشد.



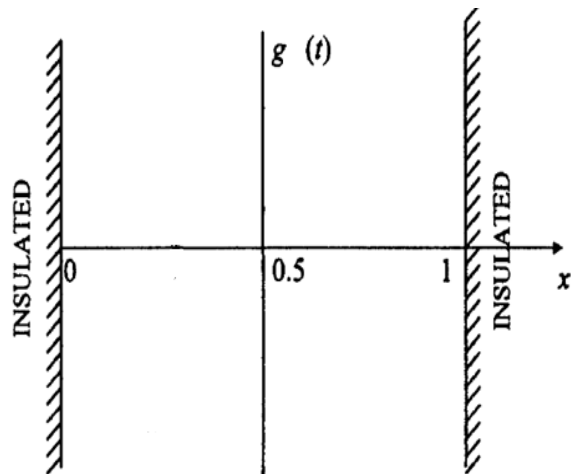
شکل (۱-۱۵) مقایسه پارامترهای مختلف منظم سازی الف) شار حرارتی تخمین زده شده ب) نرخ کاهش تابع

#### هدف [۲۰]

نتایج این مقاله هم بر کارایی و دقت بالاتر روش متریک متغیر نسبت به روش گرادیان مزدوج تاکید دارد. مغربی و همکارانش [۲۱] از روش متریک متغیر برای تعیین قدرت منبع حرارتی در یک مساله هدایت حرارتی استفاده کرده‌اند. شکل (۱-۱۶) هندسه این مسئله را نشان می‌دهد. این مساله قبلاً توسط ازیشیک<sup>۱</sup> و ارلانده<sup>۲</sup> با استفاده از روش گرادیان مزدوج حل شده است.  $\bar{g}(t)$  ترم منبع حرارتی بوده که در مساله مستقیم وابسته به زمان و معلوم می‌باشد، اما هدف در حل مساله معکوس یافتن آن با استفاده از دمای اندازه‌گیری شده می‌باشد. نتایج حاصل از هر دو روش متریک متغیر و گرادیان مزدوج در دو حالت ترم منبع سینوسی و ترم منبع مستطیلی با هم مقایسه شده‌اند.

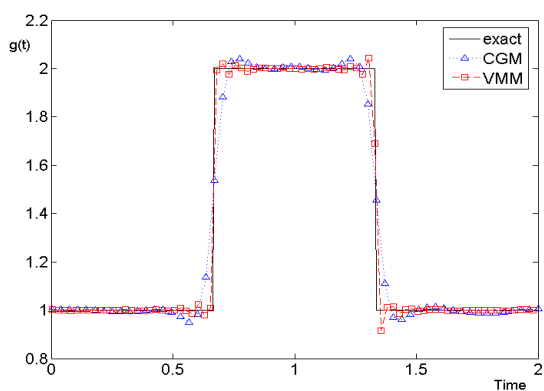
<sup>1</sup> Ozisik

<sup>2</sup> Orlande

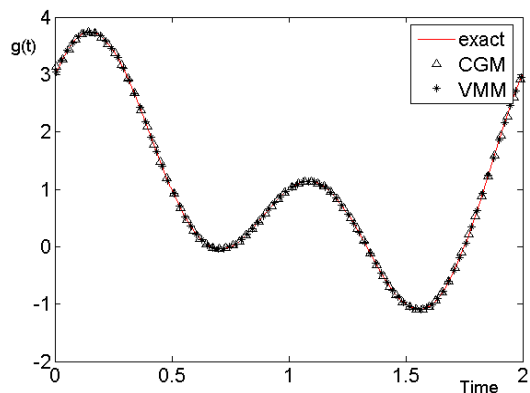


شکل (۱۶-۱) هندسه مساله حل شده در مرجع [۲۱]

در شکل (۱۷-۱) و (۱۸-۱) به ترتیب بازگردانی شار حرارتی، نرخ کاهش تابع هدف و نرخ کاهش اندازه گرادیان نشان داده شده است. جدول (۶-۱) نیز درصد میانگین مربعات خطا به همراه تعداد تکرارهای مورد نیاز را نشان می‌دهد.

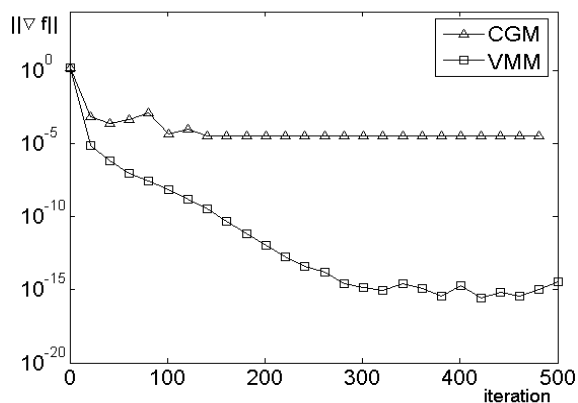


ب

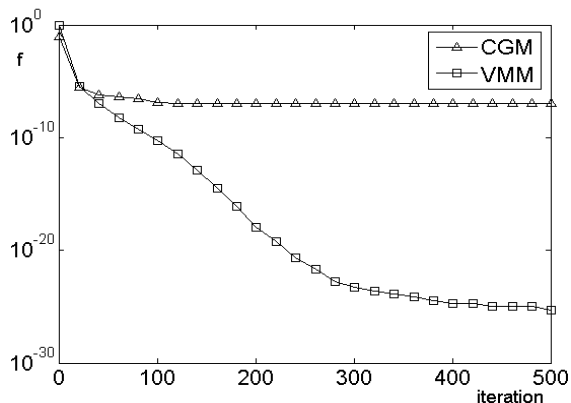


الف

شکل (۱۷-۱) باز گردانی ترم منبع حرارتی: الف) ترم سینوسی ب) ترم مستطیلی [۲۱]



ب



الف

شکل (۱۸-۱) باز گردانی ترم منبع حرارتی سینوسی: الف) نرخ کاهش تابع هدف ب) نرخ کاهش اندازه گرادیان [۲۱]

جدول (۶-۱) مقایسه نتایج ترم منبع حرارتی سینوسی و مستطیلی برای داده های بدون خطا [۲۱]

Method	ترم حرارتی مستطیلی		ترم حرارتی سینوسی بعد ۵۰۰ تکرار	
	$e_{RMS}$	Iteration	$e_{RMS}$	f at final iteration
CGM	6.0569	49	0.4231	1.0354e-007
VMM	2.9553	37	1.2089e-009	5.1898e-026

این نتایج نشان می‌دهد که روش متریک متغیر در تمامی حالات اعم از تابع پیوسته یا ناپیوسته، با خطا و بدون خطا دارای دقت و سرعت بیشتری نسبت به روش گرادیان مزدوج می‌باشد.

## فصل دوم

# معادلات حاکم



مسائل انتقال حرارت گذرا شامل ذوب و انجماد که به مسائل تغییر فاز یا مرز متحرک موسوم هستند، نقش مهمی را در بسیاری از کاربردهای مهندسی مانند انجماد مواد غذایی، ریخته گری، جوشکاری، ذخیره انرژی گرمایی، رشد کریستال‌ها و بسیاری از کاربردهای دیگر ایفا می‌کنند. حل چنین مسائلی بدلیل وجود مرز مشترک بین فازهای جامد و مایع که با آزاد شدن یا جذب گرمای نهان حرکت می‌کند دشوار است. در انجماد مواد خالص، انجماد در یک درجه حرارت مشخص رخ داده و دو فاز جامد و مایع بوسیله یک سطح مشترک مشخص از هم جدا می‌شوند.

اولین جواب‌های تحلیلی مسائل شامل تغییر فاز بوسیله لامه و کلاپیرون<sup>۱</sup> و استفان<sup>۲</sup> انجام شد. در این تحلیل، موقعیت سطح مشترک که هم مجهول و هم متحرک بود در یک مسأله هدایت حرارتی به شکل معادلات سهموی می‌بایستی در ناحیه‌ای که خود نیز مجهول بود حل شود. علاوه بر این جوابهای دقیق، جوابهای تحلیلی دیگری برای مسائل تغییر فاز به شکلهای کلی تر بوسیله نیومان<sup>۳</sup> ارائه شده است. نکته‌ای که باید در اینجا به آن توجه شود این است که حل‌های دقیق و تحلیلی محدود به شماری از حالت‌های ایده‌آل شامل نواحی بی نهایت و نیمه بی نهایت و شرایط مرزی و اولیه ساده شده است [۲۲].

بدلیل طبیعت غیرخطی این مسائل، استفاده از اصلی برهم نهی<sup>۴</sup> غیرممکن بوده و هر موردی باید به طور جداگانه بررسی شود. در غیاب جواب‌های تحلیلی، روش‌های تقریبی، نیمه تحلیلی (شبه تحلیلی) و عددی برای حل این گونه مسائل پیشنهاد شده‌اند. از جمله این روش‌ها، روش انتگرال، روش حساب تغییرات، منبع حرارتی متحرک، روش اختلالات، روش مقادیر ویژه متغیر و روش‌های عددی که امروزه بواسطه دسترسی به کامپیوترهای دیجیتال پرسرعت به شدت مورد توجه قرار گرفته است، می‌باشند.

---

<sup>1</sup> Lamé and Clapeyron

<sup>2</sup> Stefan

<sup>3</sup> Neumann

<sup>4</sup> Superposition

## ۲-۲ بیان ریاضی معادلات حاکم

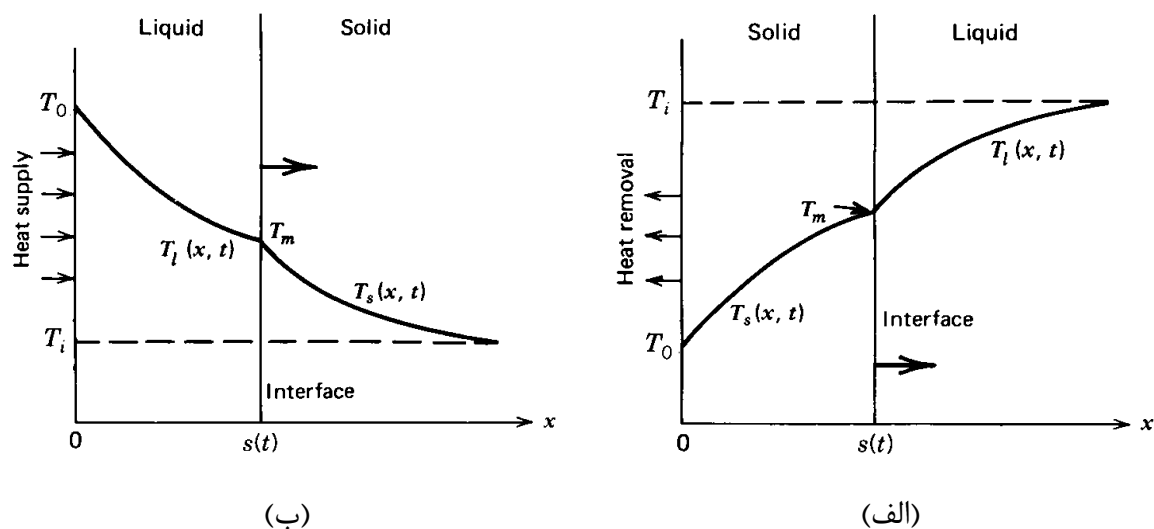
جهت نشان دادن معادلات حاکم بر مسائل تغییر فاز، ابتدا یک مسأله یک بعدی انجماد ماده خالص را به شکل زیر در نظر می‌گیریم، مایعی با درجه حرارت تغییر فاز  $T_f$  را در نظر بگیرید که در یک ناحیه نیمه بی نهایت  $0 < x < \infty$  قرار گرفته است. در ابتدا مایع در درجه حرارت یکنواخت  $T_i$  که بالاتر از  $T_f$  می‌باشد، کل ناحیه را پر کرده است. در لحظه  $t = 0$ ، دما در مرز  $x = 0$  ناگهان به دمای  $T < T_f$  رسیده و برای  $t > 0$  در همین دما باقی می‌ماند. انجماد از سطح  $x = 0$  آغاز شده و سطح مشترک جامد-مایع  $x = s(t)$  در جهت مثبت محور  $x$  حرکت می‌کند. شکل (۱-۲) طرح شماتیک مسأله انجماد یک بعدی را نشان می‌دهد. دماهای  $T_s(x, t)$  و  $T_l(x, t)$  برای نواحی جامد و مایع با فرض خواص ثابت برای فازهای جامد و مایع توسط معادلات زیر تعیین می‌شود [۲۲، ۲۳].

$$\frac{\partial^2 T_s(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s(x, t)}{\partial t} \quad 0 < x < s(t) \quad t > 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial^2 T_l(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_l} \frac{\partial T_l(x, t)}{\partial t} \quad s(t) < x < \infty \quad t > 0 \quad (2-2)$$

در اینجا  $s(t)$  موقعیت سطح مشترک است که مجهول بوده و باید به عنوان قسمتی از حل مشخص شود. اندیسهای  $s$  و  $l$  به ترتیب مربوط به نواحی جامد و مایع می‌شوند.

بنابراین مسأله دارای سه مجهول  $T_s(x, t)$ ،  $T_l(x, t)$  و  $s(t)$  خواهد بود. از آنجا که  $s(t)$  مجهول و متغیر است، برای تعیین موقعیت آن نیاز به یک معادله اضافی داریم. این معادله که به شرط استفان (Stefan) مشهور است بیان می‌کند که حرکت سطح مشترک انجماد به گونه‌ای است که سرعت آن متناسب با پرش در شار حرارتی در خلال سطح مشترک است. به طور کلی، مواد خالص در یک دمای مشخص ثابت تغییر فاز داده و دارای یک گرمای نهان مشخص در طی تغییر فاز هستند.



شکل (۱-۲) نمایش هندسه و مختصات برای مساله الف) انجماد و ب) ذوب

معادله دیگری که مربوط به  $s(t)$  می شود، با نوشتن موازنه انرژی در سطح مشترک جامد مایع  $x = s(t)$  به شرح ذیل بدست می آید.

(نرخ آزاد شدن یا جذب گرمای نهان بر واحد سطح) = (شار حرارتی در جهت منفی محور  $x$  ها در ناحیه مایع) - (شار حرارتی در جهت منفی محور  $x$  ها در ناحیه جامد)

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt} \quad x = s(t) \quad t > 0 \quad (۳-۲)$$

که  $L$  گرمای نهان بر واحد جرم است و چگالی فازهای جامد و مایع برابر فرض شده است  $(\rho_s = \rho_l = \rho)$ . لازم به ذکر است به این دلیل که  $\frac{ds(t)}{dt}$  تابعی از تغییرات دما است این معادله یک معادله غیرخطی است. از پیوستگی دما در سطح مشترک و همچنین طبیعت مسائل تغییر فاز می توان نتیجه گرفت که:

$$T_s(x,t) = T_l(x,t) = T_f \quad x = s(t) \quad (۴-۲)$$

به طور خلاصه، معادلات (۲-۱) تا (۲-۳) سه معادله دیفرانسیل اصلی حاکم بر مسائل تغییر فاز هستند که با حل آنها توزیع دما در نواحی جامد و مایع و مکان سطح مشترک محاسبه می‌شود. ابتدا باید توجه داشت که این معادلات با فرض خواص ثابت فیزیکی برای فازهای جامد و مایع نوشته شده‌اند و برای حالت‌های واقعی که خواص ثابت نیستند این معادلات باید اصلاح شوند.

معادله (۲-۴)، دو شرط مرزی را برای معادلات دیفرانسیل مذکور فراهم کرده و در شرایط مرزی و اولیه دیگر نیز با توجه به شرایط و فیزیک حاکم بر مسأله و سطوح مرزی مشخص خواهند شد.

به دلیل مشکلات مذکور در حل مسائل شامل تغییر فاز، جواب‌های دقیق و تحلیلی فقط به چند حالت ایده‌آل محدود می‌باشد. این جواب به مسأله یک بعدی در یک محیط بی نهایت یا نیمه بی نهایت و شرایط مرزی ساده مانند دمای مشخص در مرزها محدود می‌شود.

هنگامی که حل تحلیلی و دقیق مسائل مربوط به تغییر فاز غیرممکن می‌شود، روش‌های عددی مانند اجزاء محدود یا تفاضل محدود برای حل معادلات حاکم بکار برده می‌شود. روش‌های عددی برای حل مسائل شامل تغییر فاز به شرح زیر خلاصه می‌شوند.

۱. روش‌های شبکه ثابت: در این روش‌ها، دامنه مکان و زمان به تعدادی نقطه با فواصل مساوی برای  $\Delta x$  و  $\Delta t$  تقسیم می‌شود. در این روش، مرز مشترک جامد - مایع که متحرک است در حالت کلی ممکن است در نقطه ای بین دو گره مجاور قرار گیرد. استفاده از روش‌های مناسب درونیایی برای تخمین موقعیت سطح مشترک در کارهای گذشته پیشنهاد شده است.

۲. روش‌های شبکه متغیر: در این روش‌ها، دامنه مکان - زمان به نقاطی با فواصل مساوی فقط در یک جهت تقسیم شده و تقسیم در جهت دیگر به گونه‌ای انجام می‌گیرد که مرز متحرک همیشه روی یکی از نقاط شبکه قرار گیرد. به عنوان مثال می‌توان دامنه مکانی را به تعدادی نقطه با فاصله مساوی و ثابت  $\Delta x$  تقسیم کرده و  $\Delta t$  را طوری پیدا کرد که سطح مشترک در هر بازه زمانی فقط به اندازه یک  $\Delta x$  پیشروی

می کند. این روش از نظر محاسباتی زمان بر است چرا که پیدا کردن یک چنین  $\Delta t$  با استفاده از یک روش مبتنی بر تکرار انجام می شود.

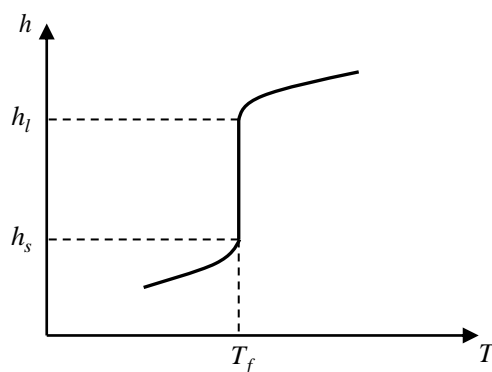
این روش بیشتر برای مسائل یک بعدی استفاده شده است. این روش یک روش انتقال مختصات است به گونه ای که مکان سطح مشترک را ثابت کرده و نیاز به مکان یابی آن را از بین می برد. عیب این روش این است که نیاز به حل یک مسأله پیچیده با روش های عددی دارد که از نظر محاسباتی بسیار زمان بر است. ۳. روش آنتالپی: این روش نیز تقریباً یک روش شبکه ثابت بوده با این تفاوت که بجای حل مسأله برای دو ناحیه جامد و مایع به طور جداگانه و ارتباط آنها در سطح مشترک، با تعریف تابع آنتالپی، مسأله فقط برای یک ناحیه ثابت زمانی و مکانی حل شده و سپس با استفاده از جواب بدست آمده برای آنتالپی در نقاط مختلف، دما و مکان سطح مشترک محاسبه خواهند شد. این روش یک روش بسیار کارآمد در حل مسائل انجماد مواد خالص با یک سطح مشترک متحرک می باشد.

## ۲-۳ روش آنتالپی

در مسائل مربوط به تغییر فاز که با روشی غیر از روش آنتالپی تحلیل می شوند، تنها دما به عنوان متغیر تابع در نظر گرفته می شود که در این حالت نیاز به نوشتن و حل معادلات حاکم به طور جداگانه برای دو ناحیه جامد و مایع داریم. این دماهای مختلف در نواحی جامد و مایع بوسیله موازنه انرژی حرارتی در مرز مشترک به یکدیگر مرتبط می شوند. بنابراین حل این مسأله با روش ذکر شده بدلیل نیاز به تعیین موقعیت سطح مشترک همزمان با حل معادلات پیچیده مشکل می باشد.

یک راه حل برای ساده سازی حل یک چنین مسائلی، استفاده از شکل آنتالپی برای معادلات حاکم می باشد. مزیت بزرگ این روش این است که یک معادله انرژی برای همه فازها (جامد، مایع) بکار برده شده و نیاز به در نظر گرفتن معادلات برای فازهای مختلف به صورت جداگانه نیست. بنابراین هر روش عددی اعم

از تفاضلات محدود یا المان محدود می‌تواند به سادگی برای این گونه مسائل استفاده شود. شکل (۲-۲) به طور شماتیک رابطه بین آنتالپی و دما را برای مواد خالص نشان می‌دهد.



شکل (۲-۲) رابطه آنتالپی- دما برای مواد خالص

برای مواد خالص و آلیاژهای یوتکتیک، تغییر فاز در یک دمای مشخص رخ داده و چون گرمای نهان در همین دما جذب یا آزاد می‌شود یک پرش در نمودار آنتالپی دما مشاهده شده و  $\frac{\partial h}{\partial T}$  در این نقطه بی‌نهایت می‌شود.

معادله انرژی حاکم به شکل آنتالپی به صورت زیر است:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (۵-۲)$$

که معادل با معادلات هدایت حرارتی و شرایط موازنه انرژی ذکر شده در سطح مشترک بین دو ناحیه است.

رابطه بین آنتالپی و دما برای مواد خالص به گونه‌ای است که در فاز جامد ( $T < T_f$ )، ماده فقط دارای گرمای محسوس بر واحد جرم  $C_p T$  است و در فاز مایع ( $T > T_f$ )، علاوه بر گرمای محسوس، گرمای نهان نیز به آن اضافه می‌شود به نحوی که:

$$h = \begin{cases} C_p (T - T_f), & T < T_f \\ C_p (T - T_f) + L, & T > T_f \end{cases} \quad (6-2)$$

و با توجه به عبارت فوق و تعریف آنتالپی، دما از رابطه زیر محاسبه خواهد شد:

$$T = \begin{cases} T_f + \frac{h}{C_p} & h < 0 \\ T_f & 0 \leq h \leq L \\ T_f + \frac{h - L}{C_p} & h > L \end{cases} \quad (7-2)$$

## ۴-۲ بی بعد سازی معادلات حاکم به شکل آنتالپی

با توجه به روابط بین آنتالپی و بیان معادلات حاکم به شکل آنتالپی، پارامترهای زیر برای بی بعد سازی معادلات ذکر شده مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{a} & \bar{t} &= \frac{\alpha_l t}{a^2} & \alpha_l &= \frac{k_l}{\rho_l C_{pl}} \\ \bar{T} &= \frac{T - T_f}{T_f - T_0} & \bar{h} &= \frac{h}{C_{pl}(T_f - T_0)} & \bar{k} &= \frac{k}{k_l} \\ Ste &= \frac{L}{C_{pl}(T_f - T_0)} & \bar{q} &= \frac{qa}{k(T_f - T_0)} & \bar{c} &= \frac{C_p}{C_{pl}} \end{aligned} \quad (8-2)$$

که در آنها  $a$  طول مشخصه (معمولاً طول قالب)،  $T_0$  یک دمای مرجع،  $C_{pl}$  گرمای ویژه مایع،  $k_l$  هدایت حرارتی مایع،  $Ste$  عدد استفان یا همان شکل بی بعد گرمای نهان می باشند. با توجه به پارامترهای فوق معادله حاکم و روابط بین آنتالپی و دما به شکل زیر خلاصه خواهد شد:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \nabla \cdot (\bar{k}(T) \nabla T) \quad (9-2)$$

$$\bar{h} = \begin{cases} \bar{c}T & \bar{T} < 0 \\ \bar{c}T + Ste & \bar{T} > 0 \end{cases} \quad (10-2)$$

که با توجه به تعریف  $\bar{c}$  و  $\bar{k}$ ، برای فاز مایع  $\bar{c}_l$  و  $\bar{k}_l$  برابر با یک خواهند شد.

## ۲-۵ نحوه پیدا کردن سطح مشترک

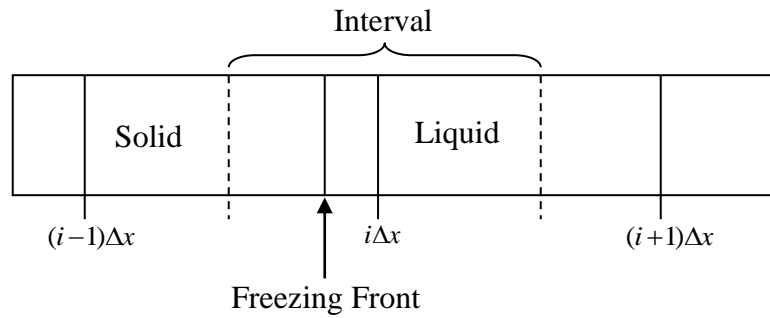
با توجه به معادلات حاکم و با استفاده از شرایط مرزی و اولیه مناسب با توجه به هندسه و شرایط خنک کاری قالب و همچنین استفاده از روابط بین آنتالپی و دما، مقادیر آنتالپی و دما برای تمام نقاط شبکه پس از حل مشخص خواهند شد. قبلاً گفته شد که از مزایای روش آنتالپی این است که نیاز به پیدا کردن سطح مشترک در خلال حل معادلات ندارد و یافتن مکان سطح مشترک در زمان‌های مختلف پس از حل کامل معادلات حاکم انجام خواهد شد. برای مواد خالص که در آنها یک پرش در نمودار آنتالپی-دما اتفاق می افتد، کافی است پس از محاسبه آنتالپی در همه مکان‌ها و زمان‌ها، مکان و زمانی که این پرش اتفاق می افتد محاسبه شود که دقیقاً همان مکان سطح مشترک است.

برای این منظور به ترتیب زیر عمل می کنیم. فرض می کنیم که در بازه زمانی  $\Delta t$ ، سطح مشترک از مکان

$i \Delta x$  عبور می کند. یک بازه شامل این نقطه  $i \Delta x$ ،  $\left[ (i - \frac{1}{2})\Delta x, (i + \frac{1}{2})\Delta x \right]$  را مطابق شکل (۲-۳) در

نظر می گیریم.





شکل (۳-۲) روش مشخص کردن موقعیت مرز مشترک

فرض می‌کنیم که سطح مشترک از سمت چپ به راست در حال حرکت است. در وضعیت نشان داده شده و برای بازه  $\Delta x$  در نظر گرفته شده، فرض کنیم که به اندازه کسر  $\varepsilon$  از ماده تبدیل به جامد شده است. بنابراین برای این بازه می‌توان آنتالپی کل را به شکل زیر نشان داد:

$$\bar{h}_i = \varepsilon \bar{C}_p \bar{T}_i + (1 - \varepsilon)(\bar{C}_p \bar{T}_i + Ste) \quad (11-2)$$

هنگامی که سطح مشترک دقیقاً از نقطه  $i \Delta x$  می‌گذرد،  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  و  $T_i = T_f = 0$  خواهد شد، پس خواهیم داشت:

$$\bar{h}_i = \frac{Ste}{2} \quad (12-2)$$

بنابراین هرگاه برای نقطه‌ای آنتالپی به اندازه  $\frac{Ste}{2}$  شود، سطح مشترک در آن نقطه قرار گرفته است. برای پیدا کردن زمانی که سطح مشترک در گره  $i$  قرار می‌گیرد از فرض تغییرات خطی آنتالپی نسبت به زمان درباره زمانی  $n \Delta t$  و  $(n+1) \Delta t$  استفاده می‌کنیم.

هنگامی که در بازه زمانی  $n \Delta t$  تا  $(n+1) \Delta t$ ، سطح مشترک از نقطه  $i \Delta x$  عبور می‌کند خواهیم داشت:

$$\bar{h}_i^n > \frac{Ste}{2} \qquad \bar{h}_i^{n+1} < \frac{Ste}{2} \qquad (13-2)$$

با فرض تغییرات خطی آنتالپی با زمان:

$$\bar{h}_i^{n+\theta} = (1-\theta)\bar{h}_i^n + \theta\bar{h}_i^{n+1} \qquad (14-2)$$

و برای حالتی که  $(n + \theta)\Delta t$  مربوط به زمانی می‌باشد که سطح مشترک از  $i \Delta x$  می‌گذرد، آنتالپی برابر

با  $\frac{Ste}{2}$  خواهد شد و می‌توان نوشت:

$$\bar{h}_i^n + \theta(\bar{h}_i^{n+1} - \bar{h}_i^n) = \frac{Ste}{2} \qquad (15-2)$$

و بنابراین پارامتر  $\theta$  محاسبه خواهد شد.

$$\theta = \frac{\frac{Ste}{2} - \bar{h}_i^n}{\bar{h}_i^{n+1} - \bar{h}_i^n} \qquad (16-2)$$

با محاسبه  $\theta$ ، مکان سطح مشترک و زمانی که سطح مشترک در این مکان ( $i \Delta x$ ) قرار می‌گیرد محاسبه

خواهد شد. پس سطح مشترک در زمان  $t = (n + \theta)\Delta t$  در مکان  $i \Delta x$  قرار می‌گیرد.

در فصل پنجم، معادلات حاکم فوق به همراه شرایط مرزی و روش معکوس مناسب ارائه می‌شوند.

## فصل سوم

# مسائل معکوس حرارتی

### ۳-۱ مقدمه

توسعه کامپیوتر و ابزار محاسباتی، رشد روش های عددی را برای مدل سازی پدیده های فیزیکی تسریع کرده است. برای مدل سازی یک پدیده فیزیکی به یک مدل ریاضی و یک روش حل نیاز است. مدل سازی مسائل هدایت حرارتی نیز به مانند دیگر پدیده های فیزیکی با حل معادلات حاکم امکان پذیر است. برای حل مسائل هدایت حرارتی به اطلاعات زیر نیاز داریم:

➤ هندسه ناحیه حل

➤ شرایط اولیه

➤ شرایط مرزی (دما یا شار حرارتی سطحی)

➤ خواص ترموفیزیکی

➤ و محل و قدرت ترمهای منبع در صورتی که وجود داشته باشند.

پس از حل معادلات حاکم توزیع دما در داخل ناحیه حل به دست می آید. این نوع مسائل را مسائل مستقیم حرارتی می گوئیم. روش های حل مسائل مستقیم از سال ها پیش توسعه یافته اند. این روش ها شامل حل مسائلی با هندسه پیچیده و مسائل غیرخطی نیز می گردند. علاوه بر این پایداری و یکتایی این روش ها نیز بررسی شده است. روش های اولیه عمدتاً بر مبنای حل های تحلیلی بوده اند. این روش ها بیشتر برای مسائل خطی و با هندسه های ساده قابل استفاده هستند. برعکس، روش های عددی دارای این محدودیت نبوده و برای کاربردهای مهندسی بیشتر مورد توجه هستند. دسته دیگر از این مسائل که در دهه های اخیر مورد توجه قرار گرفته اند، مسائل معکوس حرارتی هستند. در این نوع از مسائل یک یا تعدادی از اطلاعات مورد نیاز برای حل مستقیم، دارای مقدار معلومی نمی باشند و هدف اینست تا از طریق اندازه گیری دما در یک یا چند نقطه از ناحیه مورد نظر، به تخمین مقادیر مجهول پرداخته شود.

به طور کلی می توان گفت که در مسائل مستقیم حرارتی، علت (شار حرارتی، هندسه و...) معلوم، و هدف یافتن معلول (میدان دما) می باشد. اما در مسائل معکوس حرارتی، معلول (دما در بخش ها و یا تمام میدان)، معلوم می باشد، و هدف یافتن علت (شار حرارتی، هندسه و...) است.

### ۳-۲ تاریخچه مسائل معکوس حرارتی

شروع تحقیقات بر روی موضوع انتقال حرارت معکوس را می توان دهه ۱۹۵۰ دانست. در همین سال ها، مقاله ای روسی توسط شوماکوف<sup>۱</sup> [۲۴] در مورد مسائل انتقال حرارت معکوس به ثبت رسید. یکی از قدیمی ترین مقالات در این زمینه، توسط استولز<sup>۲</sup> [۲۵] گزارش شده است. نویسنده در این مقاله، نرخ انتقال حرارت را در فرآیند آب دهی اجسام با هندسه ساده و محدود محاسبه کرده است. آغاز سفرهای فضائی از اواخر دهه ۱۹۵۰ انگیزه مهمی برای گسترش کاربردها و تحقیقات در زمینه IHCP شد. به عنوان مثال محاسبه نرخ انتقال حرارت در اثر گرمایش آئرودینامیکی بر روی دماغه موشکها و یا اجسامی که وارد جو زمین می شوند از قبیل نازل، شپوره موشکها و... از جمله مباحث مورد توجه بود [۲۶]. [۲۷]. بک<sup>۳</sup> [۲۸، ۲۹] طی مقالاتی در دهه ۱۹۶۰ مفاهیم و روش هایی را برای تخمین شار حرارتی از طریق اندازه گیری دما ارائه داد که در آنها امکان استفاده از گام زمانی کوچکتری نسبت به روش استولز امکان پذیر بود.

یکی دیگر از روش های به کار گرفته شده برای حل مسائل معکوس، روش های بهینه سازی است. در مرجع [۳۰] تاریخچه و مجموعه ای از روش های بهینه سازی که در حل مسائل معکوس به کار می روند، آمده است. یکی از این روش ها روش گرادیان مزدوج است که به طور گسترده ای در مسائل بهینه سازی مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از نکاتی که در این روش حائز اهمیت است، نحوه محاسبه تابعی است

<sup>1</sup> Shumakov

<sup>2</sup> Stolz

<sup>3</sup> Beck

که می خواهیم بهینه کنیم. روش های متعددی برای محاسبه گرادیان تابع هدف در روش گرادیان مزدوج وجود دارد.

پارک و چانگ<sup>۱</sup> [۳۱] دو روش مشتق گیری مستقیم و استفاده از معادله الحاقی برای محاسبه گرادیان در روش گرادیان مزدوج را با هم مقایسه کرده اند. در این مقاله نتیجه گرفته اند که اگر چه روش مشتق گیری معمولی آسان و دقیق است، اما مدت زمان بیشتری را برای محاسبه طلب می کند. در عوض بدست آوردن گرادیان از طریق تشکیل معادله الحاقی می تواند زمان محاسبه را کاهش دهد، هر چند که بدست آوردن روابط مورد نیاز، دارای پیچیدگی های ریاضی می باشد.

جاننی<sup>۲</sup> و همکارانش [۳۲] مسأله انتقال حرارت هدایتی معکوس در حالت چند بعدی را با استفاده از روش گرادیان مزدوج و معادله الحاقی بررسی کرده اند. هوانگ<sup>۳</sup> [۳۳] مسأله تخمین شار حرارتی را برای یک جسم سه بعدی، در حالتی که شار به صورت پیوسته روی مرز تغییر می کند را بررسی کرد.

زیانگ<sup>۴</sup> [۳۴] مقایسه ای بین روش های موجود IHCP انجام داد و همچنین اثر دینامیکی ترموکوپل را بر محاسبات انتقال حرارت معکوس مورد تحلیل قرار داد. کوثری [۱۸-۲۰] و همکارانش نیز هم با استفاده از روش گرادیان مزدوج و هم متریک متغیر به بررسی مسائل معکوس هدایت و تشعشع حرارتی پرداخته اند.

### ۳-۳ دسته بندی مسائل معکوس حرارتی

به دلیل کاربرد گسترده مسائل معکوس حرارتی در علوم و صنعت، توسعه دسته بندی این گونه مسائل مهم است. در یک دسته بندی مسائل معکوس حرارتی به دو دسته زیر تقسیم می شود:

- مسائل تخمین پارامتر

---

<sup>1</sup> Park and Chung

<sup>2</sup> Jarny

<sup>3</sup> Huang

<sup>4</sup> Xiang

- مسائل تخمین تابع

در مسائل تخمین پارامتر، هدف، تخمین پارامترها، ثابت ها و یا خواص ترموفیزیکی مانند رسانش گرمایی و یا ظرفیت گرمایی ویژه است. در حالی که در مسائل تخمین تابع، هدف، تخمین یک تابع مانند شار حرارتی سطحی و یا رسانش تماسی در سطح مشترک است که با زمان و یا مکان تغییر می کند. مسائل معکوس حرارتی را همچنین می توان با توجه به طبیعت مسأله به صورت زیر طبقه بندی نمود:

- مسائل معکوس هدایت حرارتی

- مسائل معکوس جابجایی (آزاد یا اجباری)

- مسائل معکوس تشعشع سطحی

- مسائل معکوس تشعشع در محیط های موثر در تشعشع

- مسائل معکوس هدایت و تشعشع همزمان

- مسائل معکوس جابجایی و هدایت همزمان

- مسائل معکوس تغییر فاز (ذوب یا انجماد)

یک دسته بندی دیگر برای مسائل معکوس هدایتی را می توان برپایه نوع مشخصه سببی تخمینی در نظر گرفت که در زیر معرفی شد:

- مسائل تخمین پارامتر

- مسائل تخمین شرط مرزی

- مسائل تخمین شرایط اولیه

- مسائل تخمین هندسه ناحیه حل

- مسائل دیگر

مسائل تخمین پارامتر، شامل مسائلی می‌شوند که هدف آنها تخمین یک یا چند پارامتر است. این پارامترها معمولاً خواص فیزیکی یک جسم مانند ضریب هدایت حرارتی، چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه، ضریب نفوذ حرارتی و... می‌باشند. این نوع از مسائل معمولاً غیرخطی هستند.

مسائل تخمین شرط مرزی از پرکاربردترین مسائل مورد استفاده در مسائل معکوس هدایت حرارتی هستند، زیرا در اکثر مسائل، تخمین شار حرارتی سطحی از روی اندازه‌گیری دما در داخل جسم مورد توجه می‌باشد. در برخی مسائل از این نوع هم هدف یافتن شرط مرزی دما است.

مسائل تخمین شرایط اولیه کمتر از دیگر مسائل مورد بررسی قرار گرفته‌اند، زیرا نسبت به دیگر مسائل معکوس کاربرد کمتری دارند.

مسائل تخمین هندسه نیز هنگامی که هندسه ناحیه حل کاملاً مشخص نیست و یا به دنبال هندسه بهینه برای یک مسأله خاص باشیم، مطرح می‌شوند.

### ۳-۴ حل مسائل معکوس حرارتی

همان‌طور که در بخش مقدمه اشاره کردیم مسائل معکوس از دیدگاه ریاضی جزو دسته مسائل ناهنجار هستند. بنابراین برای حل این گونه مسائل می‌بایست روش‌های خاصی به کار گرفته شود.

وجود جواب برای مسائل معکوس حرارتی را می‌توان با استدلال فیزیکی مسأله بررسی کرد. اما یکتایی جواب تنها برای تعدادی از مسائل به صورت ریاضی اثبات شده است، (بک و الیفانف). همچنین مسائل معکوس نسبت به خطاهای اندازه‌گیری و اغتشاشات در ورودی‌ها و داده‌ها مسأله بسیار حساس هستند و به همین دلیل بایستی روش‌های خاصی را برای یافتن جواب این گونه مسائل به کار برد. برای حل این مشکل تیخونوف و آرسنین<sup>۱</sup> [۳۵] روش منظم‌سازی را ارائه دادند که در آن به منظور کاهش اثر خطاهای

---

<sup>1</sup> Tikhonov and Arsenin



ناشی از اندازه گیری دما، جمله‌هایی به معادله تخمین افزوده می‌شود. الیفانوف نیز روش منظم سازی تکراری را ارائه داد که در آن بهبود جواب مسأله در یک روند تکراری و متوالی انجام می‌گیرد. در این روش معیار توقف روند تکرار براساس پایداری جواب نسبت به خطای موجود در داده‌های ورودی تعیین می‌شود.

### ۳-۵ طبقه بندی روش‌ها

روش‌هایی که برای حل مسائل معکوس هدایت به کار می‌روند به طرق مختلف طبقه بندی می‌شوند. یک طبقه بندی مربوط به توانمندی روش برای حل مسائل اعم از مسائل غیرخطی و خطی است. به عنوان مثال روش تخمین تابع و منظم سازی را می‌توان برای مسائل غیرخطی نیز به کار برد، در حالی که روش‌هایی مانند تبدیل لاپلاس منحصراً برای مسائل خطی به کار می‌روند.

روش دیگر طبقه بندی براساس روش بدست آوردن جواب معادله هدایت حرارتی است، مانند روش دوهامل، تفاضل محدود، اجزای محدود و حجم محدود و... روش دوهامل تنها برای مسائل خطی کاربرد دارد در حالی که دیگر روش‌های ذکر شده در مسائل غیرخطی نیز می‌توانند استفاده شوند.

دامنه زمانی در مسائل انتقال حرارت هدایت معکوس را می‌توان به عنوان معیاری برای طبقه بندی در نظر گرفت. در این تقسیم بندی روش‌های IHCP به دو گروه تقسیم می‌شوند.

۱. روش‌های متوالی

۲. روش‌های تمام دامنه

این نوع تقسیم بندی مهم ترین نوع تقسیم بندی روش‌های IHCP است. هرکدام از روش‌های بالا دارای مزایا و معایب مربوط به خود هستند. در روش‌های متوالی، مولفه‌های شار حرارتی به شکل گام به گام و یکی پس از دیگری تخمین زده می‌شوند. دو روش از این دسته، یکی روش تطابق دقیق یا استولز است و

دیگری روش تخمین متوالی تابع می‌باشد. در روش اول، دماهای بدست آمده از سنسور برابر با دماهای محاسبه شده قرار می‌گیرند و محاسبات انجام می‌شود. این روش از نظر محاسباتی بسیار سریع و آسان است اما مشکل آن، این است که نسبت به خطاهای اندازه‌گیری بسیار حساس و در نتیجه ناپایدار است. در روش دوم از چند دمای اندازه‌گیری شده در زمان‌های آینده نیز برای تخمین شار حرارتی در زمان حال استفاده می‌شود. این روش که توسط یک ارائه شد برخلاف روش اول به خطاهای اندازه‌گیری حساسیت کمتری دارد و می‌توان گام‌های زمانی کوچکتری را برای اندازه‌گیری دما به کار برد. استفاده از گام‌های زمانی کوچک این امکان را به ما می‌دهد که اطلاعات بیشتری از تغییرات شار حرارتی در طول زمان به دست آوریم.

روش تمام دامنه، روشی کارآمد است که از تمام دماهای اندازه‌گیری شده به طور همزمان استفاده می‌کند و تمام مولفه‌های شار حرارتی در زمان‌های مختلف را با یکدیگر و به طور همزمان تخمین می‌زند. این روش به خاطر امکان استفاده از گام‌های زمانی کوچک مناسب است، اما حجم محاسبات آن در مقایسه با روش مرحله‌ای خیلی بیشتر است. روش‌های بهینه‌سازی از دسته روش‌های تمام دامنه هستند. طبقه‌بندی دیگری که برای حل مسائل معکوس هدایت به کار می‌روند، براساس ابعاد مسأله معکوس است. اگر هدف مسأله تخمین تنها یک شار حرارتی باشد، مسأله یک بعدی است. در روش دوهم ابعاد فیزیکی مسأله تأثیری در نحوه حل ندارد بدین معنی که اگر هدف، تخمین تنها یک شار حرارتی باشد، روال حل برای اجسام یک، دو و سه بعدی یکسان است. اگر هدف تخمین دو یا چند شار حرارتی با استفاده از روش دوهم باشد، مسأله چند بعدی است. اگر از روش‌هایی همچون تفاضل محدود، اجزاء محدود یا... در مسائل غیرخطی استفاده شود، تعداد مختصات فضایی که برای تحلیل فیزیکی انتقال حرارت هدایت در جسم به کار می‌رود، بعد مسأله را تعیین می‌کند.

## ۳-۶ ارزیابی روش های مسائل معکوس هدایت

به منظور ارزیابی روش های به کار گرفته شده در IHCP باید معیارهای زیر را در نظر گرفت:

۱. کمیت پیش بینی شده در صورتی که داده های اندازه گیری شده دارای دقت بالایی باشند، بایستی دقیق باشد.

۲. روش می بایست نسبت به خطاهای اندازه گیری پایدار باشد (حساسیت نداشته باشد).

۳. روش می بایست دارای پایه های آماری باشد و اجازه دهد تا توزیع های آماری متنوعی برای خطاهای اندازه گیری وجود داشته باشد.

۴. روش نباید نیازمند این باشد که داده های اندازه گیری از قبل هموار شده باشند.

۵. روش می بایست برای گام های زمانی کوچک پایدار باشد این عمل باعث دقت بهتر در تغییرات زمانی کمیت مجهول می شود.

۶. روش می بایست امکان بهره گیری از چندین سنسور را در اختیار ما قرار دهد.

۷. روش نباید نیازمند مشتقات اول پیوسته مجهول باشد اگر چه روش باید قادر باشد تا توابعی را که دارای ناپیوستگی هستند، بازیابی کند.

۸. دانستن زمان شروع دقیق کاربرد شار حرارتی سطح یا ترم چشمه مجهول نباید مورد نیاز باشد. معمولاً زمان ابتدای اعمال شار حرارتی هم زمان با زمان اندازه گیری دما توسط سنسور نیست. همچنین زمان دقیق تغییرات ناگهانی شار حرارتی نیز برای ما معلوم نیست.

۹. روش نباید به تعداد مشخصی از داده های اندازه گیری محدود باشد.

۱۰. روش می بایست قادر باشد تا در موقعیت های فیزیکی پیچیده شامل جامدهای مرکب، مرزهای متحرک، خواص وابسته زمانی انتقال حرارت جابجایی یا تشعشعی، مدل های ترکیبی از انتقال حرارت، مسائل چند بعدی و هندسه های غیرمتعارف عمل کند.

۱۱. روش می‌بایست جهت برنامه نویسی کامپیوتری ساده باشد.

۱۲. هزینه محاسبات می‌بایست متعادل باشند.

۱۳. روش نبایست به گونه‌ای باشد که کاربر برای بهره‌گیری از آن در اجسام با هندسه‌های مختلف نیازمند مهارت بالایی در ریاضیات باشد.

۱۴. روش می‌بایست قادر به گسترش به بیش از یک مجهول باشد.

### ۳-۷- کاربرد روش‌های معکوس در مهندسی

در سالهای اخیر روش‌های معکوس کاربرد زیادی در صنایع یافته‌اند. محققین دانشگاهی و صنعتی، مسائل مختلف مدل‌سازی، آنالیز و توسعه روش‌های عددی نوین را مورد توجه قرار داده‌اند. کاربرد روش‌های معکوس در مسائل حرارتی را به سه دسته زیر می‌توان تقسیم کرد:

۱. کاربرد در مسائل تعیین و شناخت

۲. کاربرد در مسائل طراحی

۳. کاربردهای کنترلی

متداولترین کاربرد مسائل معکوس مربوط به دسته اول می‌باشد. این نوع مسائل شامل تحلیل و آنالیز داده‌های تجربی می‌باشند. در این دسته از مسائل هدف تعیین یک تابع و یا ثابت می‌باشد که اندازه‌گیری مستقیم آن مشکل یا غیرعملی است.

دسته دوم مسائل که شامل مسائل طراحی می‌باشند معمولاً شامل اندازه‌گیری نمی‌باشند. بلکه رسیدن به یک طراحی و یا بهینه‌سازی یک طرح از طریق مینیمم کردن یک تابع تعریف‌کننده یک مسئله معکوس (تابع هدف)، می‌باشد. به عنوان مثال می‌توان به مسئله استفان اشاره کرد.

در بعضی مواقع انجماد با سرعت خاص مورد نظر می باشد. با تعیین شرط مرزی مجهول، می توان سرعت انجماد مورد نظر را تأمین کرد. کاربردهای دیگر این گونه مسائل را می توان در شاخه های مختلف علوم مهندسی نظیر مسائل تصفیه، محاسبه اتلاف مواد، یافتن خوردگی در سطح، را مشاهده نمود.

مسائل کنترلی سومین دسته از مسائل معکوس می باشند. در این نوع مسائل هدف تعیین علت (پارامتر کنترل کننده) با اندازه گیری یک متغیر می باشد. در بسیاری از مسائل از این نوع، باید یک مسأله معکوس را حل نمود.

یکی از متداولترین کاربردهای مسائل معکوس تعیین شرط مرزی مجهول و یا تخمین یک پارامتر می باشد. به عنوان نمونه می توان به تعیین ضرایب جابجایی اشاره نمود. تعیین این ضرایب نیاز به تعیین دمای سطحی، دمای سیال و شار حرارتی با توجه به رابطه زیر دارد:

$$q = h(T_s - T_a) \quad (1-3)$$

که  $T_s$  و  $T_a$  به ترتیب دماهای سطحی و سیال بوده و  $q$  شار حرارتی می باشد. تعیین ضرایب حرارتی با استفاده از رابطه بالا نیاز به اندازه گیری دمای سطح دارد. دماهای اندازه گیری شده به وسیله دماسنجی که بر روی سطح قرار دارد حاوی خطای بالایی است. این خطا در مواردی که سرعت سیال بالا می باشد، افزایش می یابد. راه مناسب تر برای محاسبه، استفاده از یک روش معکوس می باشد.

در مقاله استولز یک روش برای تعیین ضریب انتقال حرارت، زمانی که راهی برای قرار دادن دماسنج داخل جسم وجود ندارد، ارائه گردیده است. در این روش جسم مورد نظر را در داخل یک فلز مایع با نقطه انجماد پایین غوطه ور می کنند. در نتیجه یک لایه از فلز روی جسم به وجود می آید. ضریب انتقال حرارت مجهول را می توان با حل یک مسئله استفان برای سطح خارجی بدست آورد. این روش برای اجسام بسیار نازک نیز کاربرد دارد. مثال دیگر این کاربرد، تخمین شار حرارتی بر روی دیواره یک کوره است که با فرض انتقال حرارت یک بعدی می توان شار حرارتی را بدست آورد [۳۶].

انتقال حرارت در اجسام متخلخل کاربرد دیگر روش‌های معکوس است. مسائل مورد بررسی در اجسام متخلخل، تعیین شرط مجهول یا خواص ترموفیزیکی است. کاربردهای مختلف مسائل معکوس در زمینه متالورژی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱. کنترل فرآیند گرم کردن یک جسم داخل کوره

۲. مدل سازی فرآیند سردسازی فولاد به منظور رسیدن به دمای سطحی مورد نظر

۳. مدل سازی فرآیند کربنیزه کردن فولاد و بررسی نفوذ کربن در فولاد

مثال‌های که در زمینه روش معکوس بیان گردید، نشان می‌دهد که بسیاری از آنها شامل تعیین یک شرط مرزی مجهول می‌باشد. در واقع تعیین خواص ترموفیزیکی که یکی دیگر از کاربردهای روش‌های معکوس است، در بسیاری از مواقع با روش‌های دیگر امکان پذیر است. یکی دیگر از کاربردهای روش‌های معکوس تعیین قابلیت نفوذ یک جسم جامد است. نفوذ در یک جسم جامد بسیار کند صورت می‌گیرد و معمولاً به حالت پایدار نمی‌رسد، در این حالت نیز روش‌های معکوس، می‌توانند به کار گرفته شوند.

## فصل چهارم

# روش‌های بهینه‌سازی توابع

#### ۴-۱ مقدمه

در این فصل به معرفی و بررسی روش‌هایی که برای بهینه‌سازی توابع استفاده می‌شوند، پرداخته می‌شود. ابتدا به تعریف مسأله بهینه‌سازی پرداخته و در ادامه مفاهیم مربوط به روند انجام فرآیند بهینه‌سازی در یک مسأله و همچنین انواع روش‌های مستقیم و غیرمستقیم بهینه‌سازی معرفی می‌شوند. از آنجا که در این پایان‌نامه از روش غیرمستقیم برای بهینه‌سازی استفاده گردیده، لذا بیشتر درباره‌ی این روش‌ها بحث شده است. در تمامی این روش‌ها محاسبه گرادیان تابع الزامی است، بنابراین بررسی خواص و نحوه محاسبه آن آورده شده است. در ادامه شرح مختصری از انواع روش‌های غیرمستقیم به همراه الگوریتم محاسباتی آنها آورده شده است.

#### ۴-۲ مسائل بهینه سازی

یک مسأله بهینه سازی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

تعیین بردار  $\bar{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  به گونه ای که تابع  $f(\bar{X})$  تحت شرایط زیر مینیمم شود.

$$\begin{cases} l_j(\bar{X}) = \alpha & j = 1, 2, \dots, p \\ g_j(\bar{X}) \leq \beta & j = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (۱-۴)$$

که در آن  $\bar{X}$  یک بردار  $n$  بعدی به نام بردار طراحی،  $f(\bar{X})$  تابع هدف و  $l_j(\bar{X})$  و  $g_j(\bar{X})$  به ترتیب قیدهای برابری و نابرابری نامیده می‌شوند. در حالت کلی تعداد متغیرها  $n$  و تعداد قیود  $r$  یا  $p$  رابطه‌ای با هم ندارند. مسأله فوق یک مسأله بهینه سازی مقید نامیده می‌شود. در مسائلی که قیودی وجود ندارند با یک مسأله بهینه سازی نامقید روبرو هستیم.

نقطه  $X^*$  را مینیمم یا نقطه سکون تابع هدف  $f(\bar{X})$  می‌نامیم اگر داشته باشیم:

$$\nabla f|_{X^*} = 0 \quad (۲-۴)$$



شرط بالا یک شرط لازم است در صورتی که ماتریس هسین<sup>۱</sup> معین مثبت باشد آنگاه حتماً نقطه مینیمم نسبی خواهد بود. یعنی اگر داشته باشیم:

$$[H]_{x^*} = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x^*} \quad (3-4)$$

البته شرط بالا در صورتی صادق است که تابع  $f(\bar{X})$  مشتق پذیر باشد.

### ۳-۴ دسته بندی روش‌های بهینه سازی

روش‌های حل مسائل مینیمم سازی به دو دسته روش‌های جستجوی مستقیم و روش‌های کاهش تقسیم بندی می‌شوند.

برای استفاده از روش‌های جستجوی مستقیم در محاسبه نقطه مینیمم، تنها به مقدار تابع هدف نیاز است و نیازی به مشتقات جزئی تابع نیست. بنابراین اغلب، روش‌های غیرگرادیانی یا روش‌های مرتبه صفر نامیده می‌شوند زیرا از مشتقات مرتبه صفر تابع استفاده می‌کنند. این روش‌ها بیشتر برای مسائلی کاربرد دارند که تعداد متغیرها کم و یا محاسبه مشتقات تابع مشکل می‌باشند و بطور کلی کارایی کمتری نسبت به روش‌های کاهش دارند.

روش‌های کاهش علاوه بر مقدار تابع به مشتقات اول و در برخی موارد به مشتقات مرتبه دوم تابع هدف نیز نیاز دارند. از آنجا که در روش‌های کاهش، اطلاعات بیشتری از تابع هدفی که (از طریق مشتقات آن) مینیمم می‌شود، مورد استفاده قرار می‌گیرد، این روش‌ها کارایی بیشتری نسبت به روش‌های جستجوی مستقیم دارند. روش‌های کاهش همچنین روش‌های گرادیانی نیز نامیده می‌شوند. در این بین روش‌هایی که فقط به مشتق اول تابع هدف نیاز دارند، روش‌های مرتبه اول و آنهایی که به مشتق اول و دوم هر دو نیاز دارند، روش‌های مرتبه دوم نامیده می‌شوند. در جدول (۴-۱) روش‌هایی از هر دو دسته آمده است.

<sup>1</sup> Hessian Matrix

جدول (۱-۴) دسته بندی روشهای بهینه سازی

روشهای کاهشی	روشهای جستجوی مستقیم
بیشترین کاهش	روش جستجوی تصادفی
گرادیان مزدوج	جستجوی شبکه
روش نیوتن	روش تک متغیر
روش لونبرگ-مارکورات	جستجوی الگو
میزان متغیر	

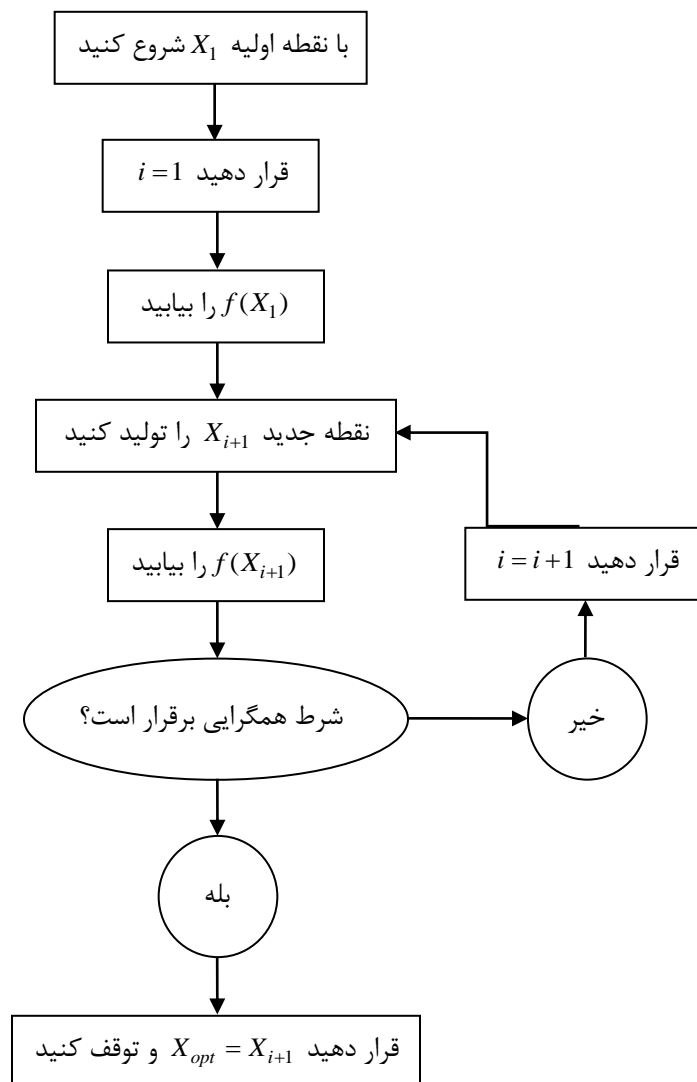
#### ۴-۴ راه حل کلی

تمام روشهای مینیمم سازی نامقید اساساً تکراری هستند و از این رو از یک حدس اولیه شروع می کنند و به شکل ترتیبی به سمت نقطه مینیمم پیش می روند. طرح کلی این روش ها در شکل (۱-۴) نشان داده شده است.

باید توجه شود تمام روشهای مینیمم سازی نامقید:

۱. نیاز به نقطه اولیه  $X_1$  برای شروع تکرار دارند.

۲. با یکدیگر تنها در نحوه تولید نقطه بعدی  $X_{i+1}$  از  $X_i$  تفاوت دارند.



شکل (۴-۱) نمودار روند بهینه سازی تابع هدف

#### ۴-۵ نرخ همگرایی

روش‌های مختلف بهینه سازی، نرخ همگرایی مختلف دارند. به طور کلی یک روش، همگرایی از مرتبه  $p$

دارد اگر داشته باشیم:

$$\frac{\|X_{i+1} - X^*\|}{\|X_i - X^*\|^p} \leq l, \quad l \geq 0, p \geq 1 \quad (4-4)$$

که  $X_i$  و  $X_{i+1}$  نقاط محاسبه شده در پایان تکرارهای  $i$  و  $i+1$  هستند.  $X^*$  نقطه بهینه و  $\|X\|$  نشان دهنده طول یا نرم بردار  $X$  است که از رابطه زیر بدست می آید:

$$\|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2} \quad (5-4)$$

اگر  $p=1$  و  $0 \leq l \leq 1$  باشد، روش همگرای خطی (متناظر با همگرایی آهسته) و اگر  $p=2$  باشد، روش همگرای مرتبه دوم (متناظر با همگرایی سریع) نامیده می شود. یک روش بهینه سازی، همگرای فوق خطی است اگر:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\|X_{i+1} - X^*\|}{\|X_i - X^*\|^p} \rightarrow 0 \quad (6-4)$$

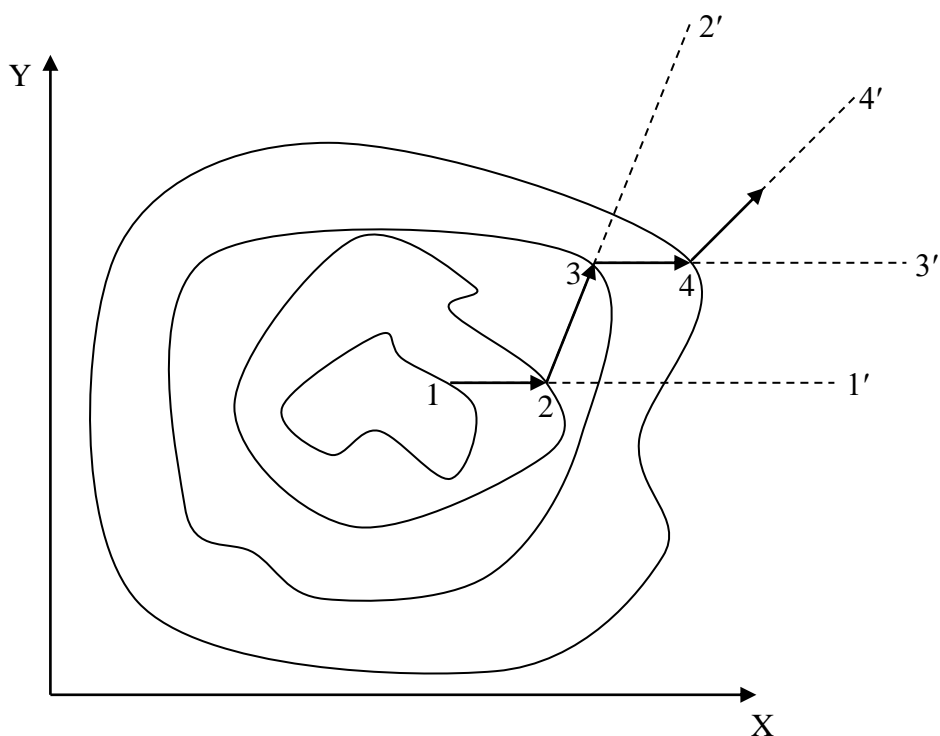
تعریف دیگری برای روش همگرایی مرتبه دوم وجود دارد: اگر یک روش مینیمم سازی با استفاده از روند دقیق ریاضی بتواند نقطه مینیمم یک تابع درجه دوم  $n$  متغیره را در  $n$  تکرار پیدا کند. روش همگرای مرتبه دوم نامیده می شود.

#### ۶-۴ گرادیان تابع

گرادیان تابع، یک بردار  $n$  مولفه ایست که با رابطه زیر داده می شود:

$$\nabla f = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \quad (7-4)$$

اگر از یک نقطه در فضای  $n$  بعدی در راستای گرادیان حرکت کنیم، مقدار تابع با سریع ترین نرخ افزایش می یابد. بنابراین جهت گرادیان، جهت بیشترین افزایش نیز نامیده می شود.



شکل (۲-۴) جهت های سریع ترین افزایش

اما جهت بیشترین افزایش یک خاصیت محلی است و نه سراسری. این مطلب در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. در این شکل، بردار گرادیان  $\nabla f$  محاسبه شده در نقاط 1, 2, 3 و 4 به ترتیب در جهت های 11' و 22' و 33' و 44' قرار دارد. بنابراین در نقطه 1 مقدار تابع در جهت 11' با سریع ترین نرخ افزایش می یابد و به همین ترتیب اگر به تعداد بی نهایت مسیر کوچک در جهت های سریع ترین افزایش حرکت کنیم، مسیر حرکت یک منحنی شبیه به منحنی 4-3-2-1 خواهد بود.

از آنجا که بردار گرادیان جهت بیشترین افزایش مقدار تابع را نشان می دهد، منفی بردار گرادیان جهت سریع ترین کاهش را نشان می دهد. بنابراین انتظار داریم روش هایی که از بردار گرادیان برای بهینه سازی استفاده می کنند نسبت به روش های دیگر سریع تر به نقطه مینیمم برسند. بنابراین دو قضیه زیر را بدون اثبات می آوریم.

۱. بردار گرادیان جهت سریع ترین افزایش را نشان می دهد.

۲. بیشترین نرخ تغییر تابع  $f$  در هر نقطه  $X^*$ ، برابر اندازه بردار گرادیان در آن نقطه است.

#### ۴-۶-۱ محاسبه گرادیان

محاسبه گرادیان نیاز به محاسبه مشتقات جزئی  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) دارد. سه حالت وجود دارد که

محاسبه گرادیان را مشکل می کند:

۱. تابع در تمامی نقاط مشتق پذیر است، اما محاسبه مولفه های بردار گرادیان غیر عملی است.

۲. رابطه ای برای مشتقات جزئی  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  می توان بدست آورد، اما محاسبه آن نیازمند زمان محاسباتی زیادی

است.

۳. گرادیان تابع در تمامی نقاط تعریف نشده باشد.

در مورد اول می توان از فرمول تفاضل محدود پیشرو برای تخمین مشتق جزئی استفاده کرد:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{X_m} = \frac{f(X_m + \Delta x_i, u_i) - f(X_m)}{\Delta x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۸-۴)$$

برای یافتن نتیجه بهتر می توان از فرمول اختلاف مرکزی محدود زیر استفاده کرد:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{X_m} = \frac{f(X_m + \Delta x_i, u_i) - f(X_m - \Delta x_i, u_i)}{2\Delta x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۹-۴)$$

در روابط بالا  $\Delta x_i$  یک کمیت اسکالر کوچک و  $u_i$  برداری  $n$  بعدی است که مولفه  $i$  ام آن یک، و مابقی صفر هستند. در محاسبات، مقدار  $\Delta x_i$  را می بایست با دقت انتخاب نمود، زیرا کوچک بودن بیش از حد آن ممکن است اختلاف میان مقادیر محاسبه شده تابع در  $(X_m + \Delta x_i, u_i)$  و  $(X_m - \Delta x_i, u_i)$  را بسیار کوچک کرده، و موجب افزایش خطای گرد کردن شود و نتایج را با خطا همراه سازد. به همین ترتیب بزرگ بودن

بیش از اندازه  $\Delta x_i$  نیز خطای برشی را در محاسبه گرادیان ایجاد می کند. در حالت دوم استفاده از فرمول های تفاضل محدود پیشنهاد می شود. برای حالت سوم با توجه به این نکته که گرادیان در تمام نقاط تعریف شده نیست، نمی توان از فرمول های تفاضل محدود استفاده کرد. بنابراین در این موارد مینیمم کردن فقط با استفاده از روش های مستقیم امکان پذیر است.

#### ۴-۶-۲ تعیین طول گام بهینه در جهت کاهش تابع

در بیشتر روش های بهینه سازی، نیاز است که نقطه مینیمم در یک راستای مشخص را تعیین نمود. بنابراین لازم است نرخ تغییر تابع هدف از یک نقطه مانند  $\bar{X}_i$ ، در راستای مشخصی مانند  $\bar{S}_i$ ، نسبت به پارامتری چون  $\lambda$  محاسبه شود. باید در نظر داشت که موقعیت هر نقطه در این راستا را می توان با توجه به نقطه  $X_i$ ، به صورت  $\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \lambda \bar{S}_i$  نشان داد. بنابراین نرخ تغییر تابع نسبت به این متغیر  $\lambda$  در راستای  $\bar{S}_i$  را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\frac{df}{d\lambda} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \lambda} \quad (10-4)$$

که در رابطه فوق  $x_j$  مولفه  $j$ -ام  $\bar{X}_i$  است. از طرفی داریم:

$$\frac{\partial x_j}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (x_{ij} + \lambda s_{ij}) = s_{ij} \quad (11-4)$$

که  $x_{ij}$  و  $s_{ij}$  مولفه های  $j$ -ام  $\bar{X}_i$  و  $\bar{S}_i$  هستند. بنابراین نرخ تغییر تابع در راستای  $\bar{S}_i$  برابر است با:

$$\frac{df}{d\lambda} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot s_{ij} = \nabla f^T \cdot \bar{S}_i \quad (12-4)$$

در صورتی که  $\lambda^*$  تابع  $f$  را در راستای  $\bar{S}_i$  مینیمم کند، در نقطه  $\bar{X}_i + \lambda^* \bar{S}_i$  می توان نوشت:

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = \nabla f^T \cdot \bar{S}_i = 0 \quad (13-4)$$

بنابراین مینیمم تابع، در راستای  $\bar{S}_i$ ، در نقطه  $\bar{X}_i + \lambda^* \bar{S}_i$  می باشد.

#### ۷-۴ معیار همگرایی

معیارهای زیر می توانند برای بررسی همگرایی در محاسبات تکراری به کار روند:

- در صورتی که تغییرات تابع در دو تکرار متوالی از مقدار معینی کوچک تر شود:

$$\left| \frac{f(\bar{X}_{i+1}) - f(\bar{X}_i)}{f(\bar{X}_i)} \right| \leq \varepsilon_1 \quad (14-4)$$

- زمانی که مشتقات جزئی (گرادیان مولفه ها) به اندازه کافی کوچک شود:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq \varepsilon_2 \quad (15-4)$$

- زمانی که تغییرات بردار مورد نظر در دو تکرار متوالی کوچک شود:

$$|\bar{X}_{i+1} - \bar{X}_i| \leq \varepsilon_3 \quad (16-4)$$

که  $\varepsilon_1$ ،  $\varepsilon_2$  و  $\varepsilon_3$  مقادیر معین کوچکی در نظر گرفته می شوند.

#### ۸-۴ روش کاهش سریع

استفاده از قرینه بردار گرادیان به عنوان جهت مینیمم سازی اولین بار توسط کوشی انجام گرفت. در این روش محاسبات از نقطه‌ای مانند  $X_1$  شروع شده و طی فرآیندهای تکراری با حرکت در جهت سریع‌ترین نرخ کاهش، نهایتاً به نقطه مینیمم می‌رسد. مراحل مختلف این روش را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

۱. شروع محاسبات از یک نقطه  $X_1$  دلخواه به عنوان اولین تکرار ( $i=1$ )

۲. یافتن جهت  $S_i$  به صورت  $S_i = -\nabla f_i = -\nabla f(x_i)$



۳. محاسبه طول گام بهینه  $\lambda_i^*$  در جهت  $S_i$  و قراردادن  $X_{i+1} = X_i + \lambda_i^* S_i$  و یا  $X_{i+1} = X_i - \lambda_i^* \nabla f_i$ .

۴. بررسی بهینه بودن نقطه  $X_{i+1}$  و پایان محاسبات در صورت مینیمم بودن این نقطه، در غیر این صورت

قراردادن  $i = 2$  و ادامه محاسبات از مرحله ۲.

## ۹-۴ روش گرادیان مزدوج

### ۱-۹-۴ جهت‌های مزدوج

فرض کنید  $A$  یک ماتریس متقارن  $n \times n$  باشد. یک مجموعه از  $n$  بردار یا جهت  $\{S_i\}$  مزدوج نامیده می‌شود اگر داشته باشیم:

$$S_i^T A S_j = 0, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (17-4)$$

مشاهده می‌شود که جهات متعامد حالت خاصی از جهات مزدوج هستند.

اگر  $f$  یک تابع درجه دوم مانند زیر باشد:

$$f = \frac{1}{2} X^T A X + B^T X + C \quad (18-4)$$

که به شکل ترکیبی در جهات مزدوج مینیمم شود، مینیمم تابع در  $n$  تکرار یا کمتر به دست می‌آید. سرعت همگرایی روش کاهش سریع را می‌توان با ترکیب جهت‌های کاهش تابع به میزان قابل توجهی افزایش داد. در این صورت روش گرادیان مزدوج را بدست می‌دهد که در آن از جهت‌های مزدوج برای کاهش تابع استفاده می‌شود. روش‌های مینیمم سازی که از جهت‌های مزدوج بهره می‌برند، همگرایی مرتبه ۲ دارند. این خاصیت از این جهت دارای اهمیت بسیار است که می‌تواند این اطمینان را دهد که بتواند مینیمم یک تابع مرتبه دوم  $n$  متغیره را در  $n$  یا کمتر از  $n$  تکرار پیدا کند.

از آنجا که هر تابع دلخواهی را در نزدیکی نقطه بهینه، می‌توان با دقت خوبی به صورت یک تابع درجه دوم تقریب زد می‌توان از این روش انتظار داشت، که در تعداد تکرار کمتری نقطه مینیمم را پیدا کنند. در این

روش با محاسبه گرادیان مورد نظر می‌توان بعد از هر مینیمم سازی یک بعدی، یک جهت ترکیبی را بدست آورد. چگونگی ایجاد جهت‌های مزدوج و الگوریتم این روش در ادامه آورده شده است.

#### ۴-۹-۲ شرح روش گرادیان مزدوج

توسعه الگوریتم این روش با انجام اصلاحاتی بر روی روش کاهش سریع انجام می‌گیرد و برای اعمال بر روی یک تابع درجه دوم مثل  $f(X) = \frac{1}{2} X^T A + B^T X + C$  به گونه ای صورت می‌گیرد که جهت جدید به وجود آمده متقابلاً با هم مزدوج باشند، فرض کنید  $X_1$  نقطه شروع فرآیند مینیمم یابی و اولین جهت جستجوی منطبق بر جهت سریع ترین نرخ کاهش باشد:

$$X_1 = -\nabla f_1 = -AX_1 - B \quad (۱۹-۴)$$

$$X_2 = X_1 + \lambda_1^* S_1 \quad (۲۰-۴)$$

$$S_1 = \frac{X_2 - X_1}{\lambda_1^*} \quad (۲۱-۴)$$

$\lambda_1^*$  مقدار تابع را در جهت  $S_1$  مینیمم می‌کند بنابراین:

$$S_1^T \nabla f_1 |_{X_2} = 0 \quad (۲۲-۴)$$

به این ترتیب مقدار  $\lambda_1^*$  را می‌توان بدست آورد:

$$\lambda_1^* = \frac{-S_1^T (AX_1 + B)}{S_1^T AS_1} = -\frac{S_1^T \nabla f_1}{S_1^T AS} \quad (۲۳-۴)$$

جهت کاهش در مرحله دوم به صورت ترکیب خطی از  $S_1$  و  $\nabla f_2$  در نظر گرفته می‌شود:

$$S_2 = -\nabla f_2 + \beta_2 S_1 \quad (۲۴-۴)$$

مقدار  $\beta_2$  به گونه ای محاسبه می‌شود که  $S_1$  و  $S_2$  با تعریف زیر مزدوج شوند:

$$S_1^T AS_2 = 0 \quad (۲۵-۴)$$

با ترکیب روابط فوق می توان برای  $\beta_2$  رابطه زیر را بدست آورد:

$$\beta_2 = \frac{-\nabla f_2^T \nabla f_2}{\nabla f_1^T S_1} = \frac{\nabla f_2^T \nabla f_2}{\nabla f_1^T \nabla f_1} \quad (26-4)$$

به همین ترتیب جهت کاهش بعدی را می توان از ترکیب خطی  $S_1$  و  $S_2$  و  $\nabla f_3$  بدست آورد:

$$S_3 = -\nabla f_3 + \beta_3 S_2 + \delta_3 S_1 \quad (27-4)$$

که مقادیر  $\beta_3$  و  $\delta_3$  را با مزدوج در نظر گرفتن  $S_3$  نسبت به  $S_1$  و  $S_2$  بدست می آید. با استفاده از شرط

$$S_1^T A S_3 = 0 \quad \delta_3 = 0 \quad \text{بدست می آید. مقدار } \beta_3 \text{ نیز به صورت زیر خواهد شد:}$$

$$\beta_2 = \frac{\nabla f_3^T \nabla f_3}{\nabla f_2^T \nabla f_2} \quad (28-4)$$

و در نتیجه:

$$S_3 = -\nabla f_3 + \beta_3 S_2 \quad (29-4)$$

صورت کلی دو رابطه فوق را برای فرآیند تکرارپذیر می توان به شکل زیر نوشت:

$$S_i = -\nabla f_i + \beta_i S_{i-1} \quad (30-4)$$

$$\beta_i = \frac{\nabla f_i^T \nabla f_i}{\nabla f_{i-1}^T \nabla f_{i-1}} \quad (31-4)$$

دو رابطه اخیر مسیر جستجوی کاهش تابع را ارائه می کنند.

### ۳-۹-۴ الگوریتم روش گرادیان مزدوج

الگوریتم روش تکراری گرادیان مزدوج را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

۱. شروع محاسبات با نقطه دلخواه  $X_1$ .

۲. قراردادن اولین مسیر جستجو به صورت  $S_1 = -\nabla f(X_1) = -\nabla f_1$ .

۳. یافتن نقطه  $X_2$  با توجه به  $X_2 = X_1 + \lambda_1^* S_1$  که  $\lambda_1^*$  رابطه طول گام بهینه در مسیر  $S_1$  می باشد.

۴. قراردادن  $i = 2$  برای تکرار بعدی و انجام مرحله بعد.

۵. محاسبه  $\nabla f_i = \nabla f(X_i)$  و قراردادن:

$$S_i = -\nabla f_i + \frac{\|\nabla f_i\|^2}{\|\nabla f_{i-1}\|^2} S_{i-1} \quad (۳۲-۴)$$

۶. محاسبه طول گام بهینه  $\lambda_i^*$  در جهت  $S_i$  و یافتن نقطه جدید:  $X_{i+1} = X_i + \lambda_i^* S_i$ .

۷. بررسی نقطه  $X_{i+1}$  و پایان محاسبات در صورت بهینه بودن. در غیر این صورت با قرار دادن  $i = i + 1$

محاسبات از مرحله ۴ به بعد ادامه می‌یابد.

در این زمینه نکات زیر قابل توجه می‌باشند:

روش گرادیان مزدوج در اصل به عنوان روشی برای حل دستگاه معادلات خطی بنیان گذاری شده است و از یسیک<sup>۱</sup> در کتاب خود شرح کاملی از تکنیک‌های مختلف این روش ارائه داده است [۳۷]. از آنجائی که جهت‌های  $S_i$  استفاده شده در این روش با ماتریس  $A$  مزدوج هستند ( $S_i^T A S_i = 0$ )، این فرآیند می‌بایست برای یک تابع مرتبه دوم در  $n$  تکرار یا کمتر از آن همگرا شود. این روش برای توابع مرتبه دوم ناهنجار به تعداد بیشتری تکرار برای همگرایی نیازمند است. علت این موضوع خطای تجمعی گرد کردن است.

چون  $S_i$  از رابطه (۴-۳۰) بدست می‌آید، هر خطای ناشی از کم بودن دقت  $\lambda_i^*$  در محاسبه و خطای ناشی

از گرد کردن تجمعی در ترم  $S_{i-1}$  به  $\frac{\|\nabla f_i\|^2}{\|\nabla f_{i-1}\|^2} S_{i-1}$  به مرحله بعدی  $S_i$  نیز راه پیدا می‌کند و جهت کاهش  $S_i$  به

صورت قابل توجهی توسط این خطاها، منحرف می‌شود. بنابراین لازم است تا بعد از هر  $m$  تکرار برخلاف

<sup>1</sup> Ozisik

مقدار موجود در الگوریتم، برابر با  $-\nabla f_{m+1}$  قرار گیرد. این کار شروع مجدد نام دارد. فلچر-ریوز<sup>۱</sup> مقدار  $m = n + 1$  را برای شروع مجدد پیشنهاد دادند که  $n$  تعداد متغیرهای مجهول می‌باشد.

با وجود محدودیت‌های گفته شده، روش گرادیان مزدوج از لحاظ یافتن مسیرهای مزدوج کاهش بسیار موثرتر از روش کاهش سریع عمل می‌کند.

#### ۴-۱۰ روش نیوتن

روش نیوتن را می‌توان برای مینیمم کردن توابع چند متغیره استفاده نمود. تقریب مرتبه دوم تابع  $f(X)$  در نقطه  $X = X_i$  با استفاده از بسط سری تیلور به صورت زیر است:

$$f(X) = f(X_i) + \nabla f_i^T (X - X_i) + \frac{1}{2} (X - X_i)^T [J_i] (X - X_i) \quad (۳۳-۴)$$

که  $[J_i] = [J]_{X_i}$  ماتریس هسین نام دارد و شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع  $f$  در نقطه  $X_i$  می‌باشد. با مساوی صفر قراردادن مشتقات در رابطه فوق برای محاسبه مینیمم تابع رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial X_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (۳۴-۴)$$

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$\nabla f = \nabla f_i + [J_i](X - X_i) = 0 \quad (۳۵-۴)$$

در صورتی که  $[J_i]$  غیر منفرد باشد، می‌توان از رابطه فوق تقریب بسیار خوبی (در نقطه  $X = X_{i+1}$ ) به صورت زیر بدست آورد:

$$X_{i+1} = X_i - [J_i]^{-1} \nabla f_i \quad (۳۶-۴)$$

<sup>۱</sup> Fletcher and Reeves

با صرف نظر کردن از ترم‌های مرتبه بالا در روابط (۴-۳۳) و (۴-۳۶) می‌توان از یک فرآیند تکراری برای محاسبه جواب  $X^*$  بهینه استفاده نمود.

می‌توان نشان داد که دنباله نقاط  $X_1, X_2, \dots, X_{i+1}$  در صورتی که نقطه شروع  $X_1$  به اندازه کافی به  $X^*$  نزدیک شود و  $[J_1]$  غیرمنفرد باشد، می‌تواند به جواب واقعی  $X^*$  همگرا شود. همچنین از آنجائی که در روش نیوتن از مشتقات مرتبه دوم تابع مورد نظر (به فرم ماتریس  $[J_i]$ ) استفاده می‌شود، روش مرتبه دوم محسوب می‌شود. در ادامه نشان داده شده که با روش نیوتن می‌توان مینیمم یک تابع مرتبه دوم را با یک تکرار محاسبه نمود.

فرض کنید فرم تابع  $f$  به صورت زیر باشد:

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T A X + B^T X + C \quad (۴-۳۷)$$

مینیمم تابع  $f$  در نقطه زیر بدست می‌آید:

$$X^* = -[A]^{-1} B \quad (۴-۳۸)$$

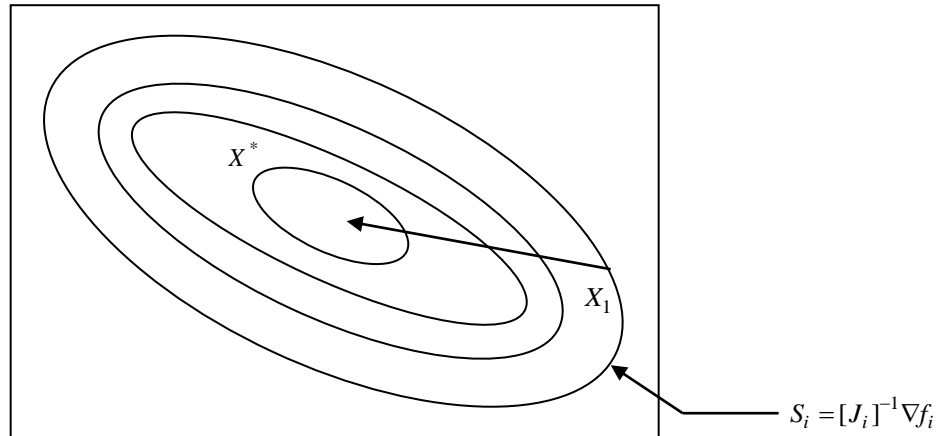
بنابراین روش تکراری با استفاده از رابطه (۴-۳۶) به صورت زیر خواهد شد:

$$X_{i+1} = X_i - [A]^{-1} ([A] X_i + B) \quad (۴-۳۹)$$

که  $X_i$  نقطه شروع در تکرار  $i$ ام می‌باشد. از رابطه فوق جواب دقیق به صورت زیر بدست می‌آید:

$$X_{i+1} = X^* = -[A]^{-1} B \quad (۴-۴۰)$$

شکل زیر چگونگی انجام این کار را نشان می‌دهد.



شکل (۳-۴) مینیمم یک تابع درجه دوم در یک مرحله با روش نیوتن

در صورتی که  $f$  تابعی مرتبه دوم نباشد، ممکن است روش نیوتن واگرا شود. برای جلوگیری از این اتفاق رابطه (۳۶-۴) را می‌بایست به صورت زیر اصلاح نمود:

$$X_{i+1} = X_i + \lambda_i^* S_i = X_i - \lambda_i^* [J_i]^{-1} \nabla f_i \quad (۴۱-۴)$$

که  $\lambda_i^*$  طول گام برای مینیمم کردن تابع در جهت  $S = -[J_i]^{-1} \nabla f_i$  است. این اصلاح امتیازاتی را به دنبال خواهد داشت. اول اینکه این حالت در مقایسه با روش قبلی در تعداد تکرار کمتری نقطه مینیمم را پیدا می‌کند. دوم اینکه در این روش یافتن نقطه مینیمم برای همه حالات، در صورتی که فرمولاسیون اصلی در برخی موارد، نقطه مینیمم را پیدا کند، امکان پذیر می‌باشد. سوم اینکه، این روش منجر به پیدا کردن نقطه ماکزیمم یا عطف نخواهد شد. با توجه به امتیازات گفته شده، خصوصیات زیر باعث می‌شود این روش در عمل آنچنان موثر نباشد:

۱. در این روش لازم است ماتریس  $[J]$  با بعد  $n \times n$  ذخیره شود.

۲. محاسبه درایه های ماتریس  $[J]$  بسیار مشکل و در مواردی غیرممکن می‌باشد.

۳. در هر مرحله به محاسبه مقدار  $[J_i]^{-1} \nabla f_i$  نیاز است.

خصوصیات ذکر شده، این روش را در مورد توابع پیچیده با تعداد زیاد متغیر، غیرکاربردی می‌کند.

#### ۴-۱۱ روش مارکارت - لونیبرگ<sup>۱</sup>

روش کاهش سریع مقدار تابع را برای حالتی که بردار  $X_i$  از نقطه بهینه  $X^*$  دور باشد، کاهش می‌دهد، روش نیوتن در حالتی که بردار  $X_i$  به نقطه بهینه نزدیک باشد، از سرعت همگرایی بالائی برخوردار است. روش مارکارت روشی است که امتیازات هر دو روش گفته شده را در بردارد. این روش، درایه‌های قطری ماتریس هسین را به صورت زیر اصلاح می‌کند:

$$[J_i] = [J_i] + \alpha_i [I] \quad (42-4)$$

که  $[I]$  ماتریس واحد و  $\alpha_i$  مقدار ثابتی است که در این صورت، مثبت معین بودن ماتریس  $[J_i]$  در صورتی که  $[J_i]$  مثبت معین نباشد را تضمین می‌کند.

می‌توان اینگونه گفت که، وقتی  $\alpha_i$  به اندازه کافی بزرگ باشد (از مرتبه  $10^4$ )، ترم  $\alpha_i [I]$  بر ترم  $[J_i]$  غالب شده و معکوس ماتریس  $[J_i]$  به صورت زیر خواهد شد:

$$[J_i]^{-1} = [[J_i] + \alpha_i [I]]^{-1} \approx [\alpha_i [I]]^{-1} = \frac{1}{\alpha_i} [I] \quad (43-4)$$

در این صورت جهت کاهش  $S_i$  به صورت زیر خواهد شد:

$$S_i = -[J_i]^{-1} \nabla f_i \quad (44-4)$$

$S_i$  برای مقادیر بزرگ  $\alpha_i$  همان جهت کاهش سریع است. در روش مارکارت، برای  $\alpha_i$  در آغاز عملیات تکراری، مقدار بزرگی در نظر گرفته می‌شود و این مقدار در طول تکرارهای مختلف کاهش می‌یابد و نهایتاً

<sup>1</sup> Marquardt-Levenberg



به صفر می‌رسد، بنابراین با کاهش  $\alpha_i$  از یک مقدار بزرگ به صفر، جهت جستجو در این روش، از روش کاهش سریع در آغاز عملیات تا روش نیوتن در انتها تغییر می‌کند.

$$X_{i+1} = X_i + \lambda_i^* S_i = X_i - \lambda_i^* [[J_i] + \alpha_i [I]]^{-1} \nabla f_i \quad (45-4)$$

که  $\lambda_i^*$  را می‌توان از بخش جستجوی یک بعدی محاسبه نمود.

## ۴-۱۲ روش شبه نیوتن

همانگونه که تفاوت‌ها در مقدار تابع شامل اطلاعاتی درباره‌ی مشتق‌های اول هستند، تفاوت‌ها در مقدار گرادیان شامل اطلاعاتی درباره‌ی مشتق‌های دوم می‌باشند. از این ایده می‌توان در ساده کردن محاسبات  $J_i$  در روش نیوتن استفاده کرد. اگر  $X_i$  و  $X_{i+1}$  تقریب‌هایی برای کمینه باشند که در دو تکرار متوالی به دست آمده‌اند، با استفاده از رابطه‌ی (۴-۳۶) می‌توانیم بنویسیم:

$$g(X^*) = g(X_i + S) = g_i + J_i S \quad (46-4)$$

وقتی که

$$X^* = X_i + S \quad (47-4)$$

اگر نقطه‌ی جدیدی را که از تکرار نیوتن به دست می‌آید، به جای  $X^*$  با  $X_{i+1}$  نشان دهیم، روابط (۴-۴۶) و (۴-۴۷) به صورت زیر در می‌آیند:

$$g_{i+1} - g_i = J_i S = J_i (X_{i+1} - X_i) \quad (48-4)$$

با تعریف عبارات

$$G_i = g_{i+1} - g_i \quad (49-4)$$

و

$$S = X_{i+1} - X_i \quad (50-4)$$

رابطه (۴-۴۸) به صورت زیر در می آید:

$$G_i = J_i S_i \quad (۵۱-۴)$$

یا در صورت غیر منفرد بودن  $J_i$ :

$$S_i = J_i^{-1} G_i \quad (۵۲-۴)$$

روابط (۴-۵۱) و (۴-۵۲) به ما اجازه می دهند که از تفاوت های گرادیان در یافتن تقریب هایی برای ماتریس  $J_i$  یا معکوس آن  $J_i^{-1}$  استفاده کنیم.

برای بسط رابطه تکراری روش های شبه نیوتن، فرض کنید :

$$S_i = H_i G_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (۵۳-۴)$$

وقتی که  $H_i$  تقریبی از  $J_i^{-1}$  در  $k$  امین گام است (می توانیم یک  $H_1$  مناسب برای شروع فرآیند تکراری استفاده کنیم). اگر فرض کنیم که رابطه (۴-۵۳) در  $(k+1)$  امین مرحله هم صادق باشد داریم :

$$S_{k+1} = H_{k+1} G_{k+1} = H_{k+1} (g_{k+2} - g_{k+1}) \quad (۵۴-۴)$$

برای اینکه نقطه ی بدست آمده در انتهای  $(k+1)$  امین گام (یعنی  $X_{k+2}$ ) یک نقطه ی ایستایی باشد، بایستی  $g_{k+2} = 0$  شود، و روابط (۴-۵۴) به رابطه ی زیر ساده می شوند:

$$S_{k+1} = -H_{k+1} g_{k+1} \quad (۵۵-۴)$$

روشن است که فرض بالا به طور کلی درست نیست، و ممکن است که نقطه ی  $X_{k+1}$  تقریب بدی از یک نقطه ی ایستایی باشد. بنابراین از رابطه (۴-۵۵) به عنوان یک جهت جستجو استفاده و نقطه ی جدید  $X_{k+2}$  را بصورت زیر پیدا می کنیم:

$$X_{k+2} = X_{k+1} + S_{k+1} \quad (۵۶-۴)$$

که در آن،

$$S_{k+1} = -\lambda_{k+1}^* H_{k+1} g_{k+1} \quad (۵۷-۴)$$

وقتی که  $\lambda_{k+1}^*$  طول گام کمینه‌سازی در امتداد جهت  $-H_{k+1} g_{k+1}$  است. مبنای همی روش‌های شبه نیوتن بر روابط (۴-۵۶) و (۴-۵۷) است. تنها تفاوت آنها در شیوهی ساختن  $H_k$  برای برقراری رابطه‌ی (۴-۵۳) و انتخاب  $\lambda^*$  در رابطه‌ی (۴-۵۷) است.

روش ساختن  $H_k$  نیاز به ارزیابی مشتق‌های دوم و تشکیل معکوس‌های ماتریس را کاملاً مرتفع می‌سازد و باز هم دنباله‌ی تکرارها در نقطه‌ی کمینه  $X^*$  همگرا می‌شود. بعلاوه، می‌توان نشان داد که ماتریس  $H_k$ ، که در هر تکرار بهبود می‌یابد، به  $J^{-1}$  همگرا می‌شود. در بخش بعد یک روش شبه نیوتن خاص را که توسط دیویدون، فلچر و پاول توسعه یافته است، بررسی خواهیم کرد.

#### ۴-۱۲-۱ روش متریک متغیر (روش دیویدون - فلچر - پاول)

با معرفی روش متریک متغیر توسط دیویدون، روش‌های کاهشی توسعه قابل ملاحظه‌ای یافتند. این روش توسط فلچر و پاول در ۱۹۶۳ بسط یافت. این روش گسترده‌ترین روش بهینه‌سازی نامقید است و از مشتق‌هایی که فعلاً موجود هستند استفاده می‌کند. شیوه تکراری این روش بصورت زیر است [۱۵]:

۱- از یک نقطه آغازین  $X_1$  و یک ماتریس  $n \times n$  مثبت معین متقارن  $H_1$  شروع کنید. معمولاً  $H_1$  به عنوان ماتریس واحد  $I$  انتخاب می‌شود. شماره تکرار را  $i = 1$  قرار دهید.

۲- گرادیان تابع،  $\nabla f_i$  را در نقطه  $X_i$  محاسبه و جهت جستجو را به صورت زیر انتخاب کنید:

$$S_i = -H_i \nabla f_i \quad (۴-۵۸)$$

۳- طول گام بهینه  $\lambda_i^*$  در جهت  $S_i$  را پیدا و نقطه‌ی جدید را به صورت زیر بدست آورید:

$$X_{i+1} = X_i + \lambda_i^* S_i \quad (۴-۵۹)$$

۴- نقطه‌ی جدید  $X_{i+1}$  را برای بهینگی آزمایش کنید. اگر  $X_{i+1}$  بهینه است، فرآیند تکراری را متوقف کنید، در غیر اینصورت به گام ۵ بروید.

۵- ماتریس  $H$  را بصورت زیر به هنگام کنید:

$$H_{i+1} = H_i + M_i + N_i \quad (۴-۶۰)$$

وقتی که

$$M_i = \lambda_i^* \frac{S_i S_i^T}{S_i^T Q_i} \quad (۴-۶۱)$$

$$N_i = -\frac{(H_i Q_i)(H_i Q_i)^T}{Q_i^T H_i Q_i} \quad (۴-۶۲)$$

و

$$Q_i = \nabla f(X_{i+1}) - \nabla f(X_i) = \nabla f_{i+1} - \nabla f_i \quad (۴-۶۳)$$

۶- شماره ی تکرار را  $i = i + 1$  قرار دهید و به گام ۲ بروید.

این روش که توسط دیویدون به عنوان یک روش متریک متغیر بررسی شد، می توان آن را به عنوان یک روش شبه نیوتن و همچنین به عنوان روش گرادیان مزدوج در نظر گرفت. این روش بسیار نیرومند بوده و به سرعت همگرا می شود (چون یک روش گرادیان مزدوج است). همچنین در پیشرفت به سمت کمینه حتی در کمینه سازی توابع نامتمرکز و مغشوش، بسیار پایدار و پیوسته است. پایداری این روش را می توان ناشی از این واقعیت دانست که اطلاعات بدست آمده در تکرارهای قبلی را از طریق ماتریس  $H_i$  با خود حمل می کند. می توان نشان داد که  $H_i$  همواره مثبت معین باقی می ماند و یک تقریب برای معکوس ماتریس مشتق های جزئی مرتبه ی دوم تابع هدف  $f$  خواهد بود. بعلاوه با رسیدن نقطه ی کمینه  $X^*$ ،  $H_i$  به ماتریس  $J^{*-1}$  همگرا می شود. طبیعت متریک متغیر و مثبت معین بودن ماتریس  $H_i$  را قبل از بررسی سایر مشخصات مهم این روش خواهیم دید.

#### ۴-۱۲-۲ طبیعت روش متریک متغیر:

برای پی بردن به اینکه چرا دیویدون - فلچر - پاول را یک روش متریک متغیر می نامند، ابتدا باید مفهوم یک متریک را بررسی کنیم. فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی  $X_1$  و  $X_2$  در فضای  $n$  بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$d^2 = (X_1 - X_2)^T A (X_1 - X_2) \quad (۴-۶۴)$$

وقتی که  $A$  یک ماتریس مثبت معین متقارن از مرتبه  $n$  است و ماتریس متریک نامیده می شود. معمولاً برای یافتن بین دو نقطه  $ی، A = I$  انتخاب می شود. چون  $A$  مثبت معین است، برای هر  $X_1, X_2$  مخالف صفر، همواره فاصله  $d$  را مثبت بدست می آوریم. فرض کنید  $I$  ماتریس متریک رابطه‌ی (۴-۷۳) باشد. داریم :

$$d^2 = (X_1 - X_2)^T (X_1 - X_2) \quad (۴-۶۵)$$

اگر از یک تبدیل (مقیاس بندی مجدد) متغیرها به صورت زیر استفاده می کنیم،

$$X = R \tilde{X} \quad (۴-۶۶)$$

و آن را در رابطه‌ی (۴-۶۴) قرار دهیم، داریم:

$$d^2 = (\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2)^T R^T R (\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2) \quad (۴-۶۷)$$

بنابراین، مقیاس بندی مجدد متغیرها ماتریس متریک جدید  $R^T R$  را در رابطه با سیستم مختصات قدیم معرفی می کنیم.

چنان که بعداً نشان داده خواهد شد، انتخاب‌های مختلف ماتریس متریک، به انواع مختلفی از روش‌های کاهشی می انجامد. بعلاوه، در خود یک روش کاهشی مشخص، لزومی ندارد که در همه تکرارها از یک ماتریس متریک استفاده کنیم. تغییر ماتریس متریک طی فرآیند تکرار را می توان معادل با مقیاس بندی مجدد متغیرها در پیشرفت فرآیند حل در نظر گرفت. روش دیویدون - فلچر - پاول دارای این جنبه‌ی

متریک متغیر است. برای روشن تر شدن مطلب، مکان همه نقاط واقع در یک فاصله‌ی  $\delta$  از یک نقطه‌ی  $X_i$  در یک فضای  $n$  بعدی را در نظر بگیرید. این مکان یک بیضیگون  $n$  بعدی با مرکز  $X_i$  (اگر  $A = I$ ) باشد یک کره‌ی  $n$  بعدی خواهد بود) است که با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$\delta^2 = (X - X_i)^T A (X - X_i) \quad (68-4)$$

وقتی که  $X$  هر نقطه واقع بر بیضیگون است. به طور کلی، مقدار تابع هدف  $f(X)$  در نقاط مختلف  $X$  از این بیضیگون متفاوت خواهد بود. اجازه دهید نقطه مشخصی  $\tilde{X} = X_i + \Delta X$  واقع بر این بیضیگون را که در آن تابع هدف  $f(X)$  دارای کمینه باشد بررسی کنیم. بنابراین نقطه‌ی  $X$  در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\min_{\Delta X} \left\{ f(X_i + \Delta X) \Big|_{\delta^2 = \Delta X^T A \Delta X} \right\} \quad (69-4)$$

با استفاده از تقریب مرحله‌ی اول سری تیلور برای  $f(X_i + \Delta X)$  حول نقطه‌ی  $X_i$  داریم:

$$f(X_i + \Delta X) \approx f(X_i) + \Delta X^T \nabla f_i \quad (70-4)$$

وقتی که  $\nabla f_i = \nabla f(X_i)$  چون  $f(X_i)$  ثابت است، رابطه‌ی (69-4) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\min_{\Delta X} \left\{ \Delta X^T \nabla f_i \Big|_{\delta^2 = \Delta X^T A \Delta X} \right\} \quad (71-4)$$

بنابر این، برای یافتن کمینه‌ی  $f(X_i + \Delta X)$ ، بایستی  $\Delta X^T \nabla f_i$  را به شرط قید مساوی  $\delta^2 = \Delta X^T A \Delta X$  کمینه‌سازی کنیم. این مسئله را می‌توان با روش مضارب لاگرانژ حل کرد. تابع لاگرانژ عبارت است از:

$$L(\Delta X, \beta) = \Delta X^T \nabla f_i + \beta [-\Delta X^T A \Delta X + \delta^2] \quad (72-4)$$

وقتی که  $\beta$  مضرب لاگرانژ است.

شرایط لازم باری کمینه مقید  $\Delta X^T \nabla f_i$  عبارتند از:

$$\frac{\partial L}{\partial(\Delta X)} = \nabla f_i - 2\beta A \Delta X = 0 \quad (73-4)$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \Delta X^T A \Delta X - \delta^2 = 0 \quad (74-4)$$

از رابطه ی (73-4) داریم :

$$\Delta X_i = \frac{1}{2\beta} A^{-1} \nabla f_i \quad (75-4)$$

وقتی که مقدار ثابت  $\beta$  را می توان با حل همزمان معادلات (74-4) و (75-4) پیدا کرد. اگر هدف تعیین یک جهت تندترین کاهش موضعی  $S_i$  در نقطه ی  $X_i$  باشد، به آسانی می توان آن را از رابطه ی (74-4)، با حذف ثابت تناسب، به صورت زیر به دست آورد:

$$S_i = -A_i^{-1} \nabla f_i \quad (76-4)$$

می توان ثابت کرد که افزودن علامت منفی در رابطه ی (76-4) در واقع مربوط به جهت کمینه سازی است. برای این کار حاصلضرب زیر را در نظر بگیرید :

$$S_i^T \nabla f_i = -\nabla f_i^T (A_i^{-1})^T \nabla f_i \quad (77-4)$$

مشخص است که این حاصلضرب برای هر بردار گرادیان غیر صفر  $\nabla f_i$  همواره منفی است. زیرا که معکوس ماتریس مثبت متقارن، مثبت معین است.

توجه شود که زیرنویس  $i$  به ماتریس متریک اضافه شده است، تا امکان تغییر آن را از تکراری به تکرار دیگر نشان دهد. همچنین اگر به ازای همه ی مقادیر  $i$ ،  $A_i = I$  باشد، جهات جستجوی  $S_i$  بر جهات روش تندترین کاهش منطبق خواهند بود. اگر رابطه (76-4) را با رابطه ی (58-4) مقایسه کنیم، می بینیم که ماتریس  $H_i$  در روش دیویدون - فلچر - پاول، را می توان به عنوان  $i$  امین تقریب برای معکوس ماتریس متریک  $A_i^{-1}$  در نظر گرفت. به همین دلیل روش متریک متغیر است.

می‌توان دید که مثبت معین بودن ماتریس  $H_i$  وابستگی زیادی به میزان دقت در محاسبه‌ی  $\lambda_i^*$  و بنابراین در محاسبه‌ی  $H_{i+1}$  دارد. پس اگر  $\lambda_i^*$  در هر تکرار به دقت محاسبه نشود، ماتریس  $H_{i+1}$  را به هنگام نکرده‌ایم. در این حالت دو امکان وجود دارد. امکان اول به دست آوردن یک مقدار بهتر  $\lambda_i^*$  با استفاده از تعداد برازش‌های بیشتر در روش کمینه‌سازی یک بعدی (تا وقتی که  $S_{i+1}^T \nabla f_{i+1}$  تولید شده به اندازه‌ی کافی کوچک شود) است. اما این روش ممکن است به وقت محاسباتی زیادی نیازمند باشد. امکان دوم عبارت است از تعیین تعداد بیشینه‌ای از برازش‌ها در کمینه‌سازی یک بعدی و حذف به هنگام کردن  $H_i$  در صورتی که نتوان  $\lambda_i^*$  را حتی در تعداد زیادی برازش به طور دقیق پیدا کرد (یعنی اگر  $S_{i+1}^T \nabla f_{i+1}$  زیاد باشد). در این حال:

$$H_{i+1} = H_i \quad (78-4)$$

و

$$S_{i+1} = -H_{i+1} \nabla f_{i+1} \quad (79-4)$$

در نظر می‌گیریم و مانند قبل ادامه می‌دهیم.

سایر مشخصات روش :

اگر تابع هدف، یک تابع درجه دوم  $f(X) = X^T A X + B^T X + C$  باشد، می‌توان نشان داد که روش

دیویدون - فلچر - پاول دارای مشخصات زیر خواهد بود:

i. ماتریس  $H_i$  در نقطه بهینه به معکوس ماتریس هسین  $f(X)$  همگرا می‌شود. یعنی :

$$H_{n+1} = A^{-1} \quad (80-4)$$

ii. جهات تولید شده  $A$  مزدوج هستند. بنابراین

$$S_i^T A S_j = 0 \quad i \neq j \quad (81-4)$$



## فصل پنجم

**کنترل فرآیند انجماد مواد خالص**

**با استفاده از روش متریک متغیر**

## ۵-۱ مقدمه

در فصل حاضر، ابتدا معادلات حاکم بر مسأله و نحوه حل آنها معرفی شده و سپس با توجه به آنها به تعریف تابع هدف می پردازیم. در ادامه، روش متریک متغیر در حل مسأله انجماد برای مواد خالص معرفی گردیده است. روش گرادیان مزدوج مورد استفاده به همراه معادلات حساسیت و الحاقی مورد نیاز آن در پیوست الف آورده شده است.

## ۵-۲ معادلات حاکم بر مسأله مستقیم

در این قسمت معادلات حاکم و روش حل برای یک مسأله یک بعدی شامل انجماد مواد خالص معرفی شده است. فرض می شود که در قالب نشان داده شده در شکل (۵-۱)، شار خنک کن حرارتی فقط از مرز پایین و بالا به عنوان تابعی از زمان اعمال شده، سطوح جانبی عایق بوده و بنابراین هیچ گونه جابجایی طبیعی در ناحیه مایع اتفاق نخواهد افتاد و انجماد فقط در جهت عمودی و رو به بالا خواهد بود. معادلات حاکم، شرایط مرزی و شرایط اولیه به شکل بی بعد برای هندسه نشان داده شده در شکل (۵-۱) به شرح زیر خواهند بود.

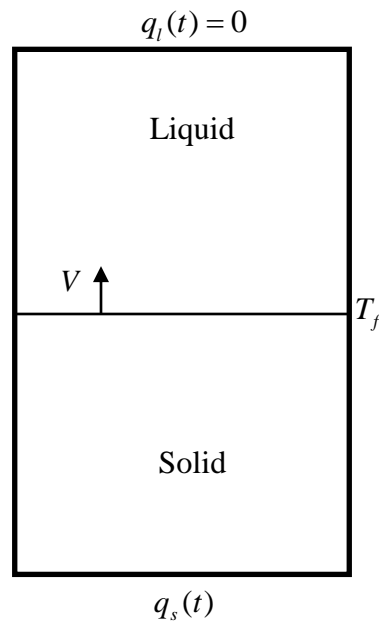
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad 0 < x < b \quad 0 < t \leq t_f \quad (\text{الف-۱})$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_s(t) \quad x=0 \quad 0 < t \leq t_f \quad (\text{الف-۲})$$

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=b} = q_i(t) \quad x=b \quad 0 < t \leq t_f \quad (\text{الف-۳})$$

$$T = T_i \text{ or } h = h_i \quad 0 \leq x \leq b \quad t = 0 \quad (\text{الف-۴})$$

برای انجماد مواد خالص با فرض ثابت بودن خواص حرارتی،  $k(T) = 1$  خواهد بود.  $h$  آنتالپی می باشد.



شکل (۱-۵) نمایش شماتیک مسأله انجماد برای ماده خالص

همانطور که از شکل (۱-۵) پیداست، در انجماد مواد خالص هدف کنترل شار حرارتی و یا کنترل سرعت سطح مشترک موجود میان فازهای جامد و مایع است. قبلاً ذکر شد که کیفیت ماده ریخته‌گری شده به میزان سرعت در سطح وابسته است. در کنترل انجماد مواد خالص  $q_s$  در نظر گرفته شده و  $q_l$  برابر صفر یا عایق فرض شده است. رابطه بین آنتالپی و دما بصورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$h = \begin{cases} cT & T < 0 \\ [0, Ste] & T = 0 \\ cT + Ste & T > 0 \end{cases} \quad (\text{الف-۵})$$

که  $Ste$  عدد استفان یا همان شکل بعد گرمای نهان می‌باشد. هدف مسأله مستقیم تعیین توزیع دما و یا آنتالپی با دانستن شارهای حرارتی در مرزها به عنوان یک پارامتر معلوم می‌باشد. از طرف دیگر در یک مسأله معکوس، این شرایط مرزی مجهول بوده و بجای آنها مقدار دما در نقاط خاصی از هندسه (مکان

حسگرها) و یا سرعت سطح مشترک به عنوان پارامترهای معلوم هستند. به عبارت دیگر هدف در حل مسأله معکوس، یافتن ورودی‌ها (شرایط مرزی) برای دستیابی به خروجی‌های مطلوب (دما در نقاط حسگرها و یا سرعت مطلوب سطح مشترک) می باشد. در ادامه فرمول‌بندی مسأله معکوس به همراه روش متریک متغیر برای حل آن ارائه خواهد شد.

### ۵-۳ مسأله معکوس

همانگونه که مطرح شد در یک مسأله معکوس طراحی و کنترل انجماد، شرایط حرارتی در مرزها مجهول بوده و با استفاده از دماهای اندازه گیری شده در نقاطی از هندسه مورد نظر و یا با استفاده از سرعت مطلوب سطح مشترک تخمین زده می شوند. بنابراین هدف از حل معکوس یافتن  $q_s$  به گونه‌ای است که دما در نقاط خاصی از دامنه و یا سرعت سطح مشترک، به مقدار مطلوب برسد. با توجه به رفتار فیزیکی مواد خالص در هنگام انجماد، می‌دانیم دما در سطح مشترک جامد- مایع برابر دمای ذوب ( $T_f$ ) خواهد بود.

بنابراین با دانستن سرعت سطح مشترک، مکان سطح مشترک معلوم بوده و دما در این مکان و در زمان- های مشخص باید برابر  $T_f$  باشد. در نتیجه مسأله کنترل سرعت سطح مشترک می‌تواند با مسأله کنترل دما جایگزین شود. بر پایه آنچه ذکر شد، تابع هدف برمبنای اختلاف بین دمای  $T_f$  که همان دمای مطلوب در مکان‌های مطلوب سطح مشترک است و دمای محاسبه شده در این مکان‌ها تعریف می‌شود. در مسائل کلاسیک انتقال حرارت معکوس که در آنها از دماهای اندازه گیری شده و یا شبیه سازی شده جهت تخمین تابع مجهول (شرایط مرزی و...) استفاده می‌شود، تابع هدف برمبنای اختلاف بین دمای اندازه گیری شده و محاسبه شده (تخمین زده شده) در مکان حسگرها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$f = \int_0^{t_f} \sum_{k=1}^K (Y_k - T_k)^2 dt \quad (\text{الف-۶})$$

که در آن  $Y_k$  و  $T_k$  به ترتیب دماهای تخمینی و برداشت شده در مکان  $x_k$  (مکان حسگر)،  $K$  تعداد حسگرها و  $t_f$  نیز زمان نهایی می‌باشند. دماهای  $T_k$  از حل مسأله مستقیم محاسبه می‌شوند.

در مسائل طراحی و کنترل با استفاده از روش‌های انتقال حرارت معکوس به جای  $Y_k$  یا دماهای اندازه‌گیری شده، دمای مطلوب در نقطه‌ای مشخص از دامنه قرار گرفته و  $T_k$  دمای محاسبه شده از حل مستقیم در همان مکان خواهد بود. به این ترتیب برای کنترل سرعت و مکان سطح مشترک در انجماد مواد خالص، تابع هدف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f [q_s(t)] = \int_0^{t_f} [T_f - T(x_m, t; q_s(t))]^2 dt \quad (\text{الف-۷})$$

که  $T(x_m, t; q_s(t))$  دمای محاسبه شده در سطح مشترک جامد-مایع، با فرض شار مشخص حرارتی در مرز است. برای مینیمم کردن توابع هدف مذکور، از روش‌های متریک متغیر و گرادیان مزدوج استفاده شده است. هدف این پایان‌نامه معرفی روشی با کارایی و دقت بالاتر نسبت به روش‌های معمول مانند گرادیان مزدوج می‌باشد. لذا مساله معکوس مورد نظر با استفاده از دو روش متریک متغیر و گرادیان مزدوج همراه با مساله الحاقی حل شده و نتایج آنها با هم مقایسه شده است.

## ۴-۵ روش متریک متغیر

روش متریک متغیر همانند سایر روش‌های بهینه‌سازی نامقید دارای یک رویه تکراری می‌باشد. فرض کنیم  $M$  تعداد کل گام زمانی<sup>۱</sup> باشد که تمام بازه‌ی زمانی<sup>۲</sup> را که شار حرارتی باید تخمین زده شود،

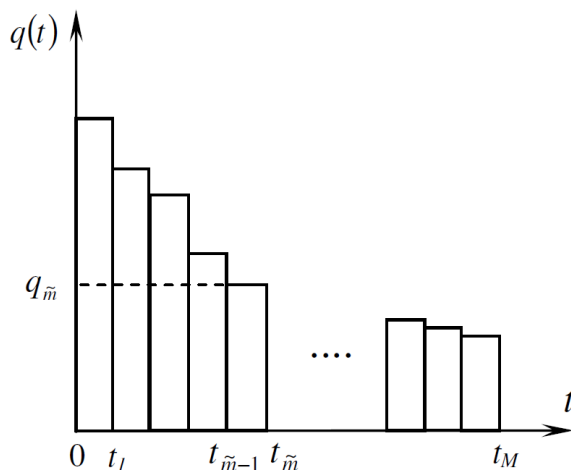
<sup>۱</sup> Time step

<sup>۲</sup> Time domain

پوشش دهد. شکل (۲-۵) گسسته سازی شار حرارتی وابسته به زمان را نشان می‌دهد. بنابراین می‌توان شار حرارتی را بصورت برداری تابع زمان بصورت زیر نشان داد:

$$\vec{q}(t) = [q(t_1) \ q(t_2) \ \dots \ q(t_M)]^T = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_M]^T \quad (\text{الف-۸})$$

در بالا  $T$  علامت ترانهاده می‌باشد.  $\vec{q}$  ( $\vec{q} = \vec{q}_s$ ) بردار شار حرارتی مجهول یا بردار طراحی نامیده می‌شود.



شکل (۲-۵) گسسته سازی شار حرارتی به  $M$  گام زمانی [۱۸]

برای بدست آوردن بردار شار ابتدا با یک حدس اولیه شروع می‌شود و سپس با رابطه زیر به هنگام<sup>۱</sup> می‌شود:

$$\vec{q}_{i+1} = \vec{q}_i + \lambda_i \vec{S}_i \quad (\text{الف-۹})$$

که در آن  $\vec{S}$  بردار جهت جستجو می‌باشد و  $\lambda$  یک اسکالر است که اندازه گام بهینه جستجو در جهت  $\vec{S}$  را نشان می‌دهد.  $i$  نیز شماره تکرار می‌باشد. به منظور تعیین  $\vec{S}$  و  $\lambda$  ابتدا باید ضرایب حساسیت را تعیین نمود. عناصر ضرایب حساسیت در حسگر  $k$ ام متناظر با عناصر بردار طراحی  $\vec{q}$  با رابطه (۵-۱۰) تعریف می‌شود:

<sup>۱</sup> Update

$$X(x_k, t_m, q_{\tilde{m}}) = \frac{\partial T(x_k, t_m)}{\partial q_{\tilde{m}}} \quad \text{for } \tilde{m} = 1, 2, \dots, M \quad (\text{الف-۱۰})$$

معادلات لازم برای بدست آوردن ضرایب حساسیت را می‌توان از مشتق گیری معادلات حاکم (روابط (۵-۱) تا (۵-۴)) نسبت به  $q_{\tilde{m}}$  بدست آورد. بعد از مشتق گیری و ساده سازی، معادلات ضرایب حساسیت بصورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad 0 < x < b \quad 0 < t \leq t_f, \quad (\text{الف-۱۱})$$

$$\frac{\partial X(0, t)}{\partial x} = \begin{cases} 1 & t < t_{\tilde{m}} \\ 0 & \text{other } t \end{cases} \quad x = 0 \quad 0 < t \leq t_f, \quad (\text{الف-۱۲})$$

$$\frac{\partial X(1, t)}{\partial x} = 0 \quad x = b \quad 0 < t \leq t_f, \quad (\text{الف-۱۳})$$

$$X(x, t \leq t_{\tilde{m}-1}) = 0 \quad 0 \leq x \leq b \quad t = 0. \quad (\text{الف-۱۴})$$

معادلات معرفی شده باید برای هر  $\tilde{m} = 1, 2, \dots, M$  بطور جداگانه حل شود، یعنی این معادلات باید  $M$  مرتبه برای محاسبه  $X(x, t, q_{\tilde{m}})$  حل شود [۱۸].

همانطور که در قسمت (۵-۲) گفته شد، تابع هدف مساله معکوس برای تعیین شار حرارتی با رابطه (۵-۶) و کنترل سرعت سطح مشترک جامد-مایع برای ماده خالص با رابطه (۵-۷) تعریف می‌شود:

$$f = \int_0^{t_f} \sum_{k=1}^K (Y_k - T_k)^2 dt$$

$$f[q_s(t)] = \int_0^{t_f} [T_f - T(x, t; q_s(t))]^2 dt,$$

روند تکراری به منظور حل مساله معکوس حرارتی با استفاده از روش متریک متغیر که در [۱۸] ارائه شده است بترتیب زیر می‌باشد:

۱. یافتن ضرایب حساسیت برای هر عضو بردار هدف که با حل کردن معادلات ((۵-۱۱) تا (۵-۱۴))

در تمام دامنه زمانی بدست می‌آیند.

۲. با یک حدس اولیه برای  $\vec{q}_i$  و در نظر گرفتن یک ماتریس  $M \times M$  متقارن معین برای  $H_i$  (که معمولاً آن را ماتریس واحد در نظر می‌گیرند) شروع می‌شود. شماره تکرار  $i = 1$  قرار داده می‌شود.

۳. گرادیان تابع مجموع مربعات خطا در نقطه شروع  $\vec{q}_i$  محاسبه شده و جهت کمترین کاهش (جهت جستجو) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\vec{S}_i = -H_i \vec{\nabla} f_i \quad (\text{الف-۱۵})$$

۴. بردار جهت جستجو را بر اندازه آن تقسیم نموده تا نرمالیزه شود:

$$\vec{S}_i = \frac{\vec{S}_i}{\|\vec{S}_i\|} \quad (\text{الف-۱۶})$$

۵. طول گام بهینه  $\lambda_i^*$  را در جهت بردار  $\vec{S}_i$  محاسبه و نقطه بعدی بصورت زیر پیدا می‌شود:

$$\vec{q}_{i+1} = \vec{q}_i + \lambda_i^* \vec{S}_i \quad (\text{الف-۱۷})$$

۶. نقطه جدید  $\vec{q}_{i+1}$  برای بهینگی امتحان می‌شود. اگر بهینه است فرآیند تکرار متوقف می‌شود، در غیر اینصورت به مرحله ۷ می‌رویم.

۷. در این مرحله باید ماتریس  $H$  را به هنگام (اصلاح) کرد.

۸. شماره تکرار را  $i = i + 1$  قرار داده و به مرحله ۳ بروید.

در قسمت‌های بعدی نحوه محاسبه گرادیان تابع هدف، گام جستجوی بهینه و روابط به هنگام کردن ماتریس  $H$  توضیح داده خواهد شد.

## ۵-۴-۱ محاسبه گرادیان تابع هدف

شکل کلی گرادیان تابع هدف بصورت زیر می‌باشد:



$$\bar{\nabla} f_{M \times 1} = \left[ \frac{\partial f}{\partial q_1} \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial q_M} \right]^T \quad (\text{الف-۱۸})$$

با در نظر گرفتن تعریف  $f$  و گرفتن مشتق از آن نسبت به اعضای بردار طراحی  $\bar{q}$  و با استفاده از رابطه (۱۰-۵)،  $\bar{\nabla} f$  بدست می آید:

$$\bar{\nabla} f_{M \times 1} = \begin{bmatrix} -2 \sum_{k=1}^K \int_0^{t_f} ([Y(x_k, t_m) - T(x_k, t_m, \bar{q})] X(x_k, t_m, \bar{q}_1)) dt \\ -2 \sum_{k=1}^K \int_0^{t_f} ([Y(x_k, t_m) - T(x_k, t_m, \bar{q})] X(x_k, t_m, \bar{q}_2)) dt \\ \vdots \\ -2 \sum_{k=1}^K \int_0^{t_f} ([Y(x_k, t_m) - T(x_k, t_m, \bar{q})] X(x_k, t_m, \bar{q}_M)) dt \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱۹})$$

#### ۵-۴-۲ محاسبه گام جستجوی بهینه

اندازه گام بهینه  $\lambda_i^*$  در جهت  $\bar{S}_i$  عبارتست از مقداری از  $\lambda_i$  که به ازای آن تابع  $f(\bar{q}_i + \lambda_i \bar{S}_i)$  کمینه شود. بنابراین  $\lambda_i^*$  ریشه‌ی معادله زیر می‌باشد:

$$\frac{df(\bar{q}_i + \lambda_i \bar{S}_i)}{d\lambda_i} = 0 \quad (\text{الف-۲۰})$$

اگر  $\lambda_i^*$  بطور دقیق یافته شود، ماتریس  $H$  مثبت معین بودن خود را با افزایش  $i$  حفظ می‌کند. خصوصیت مثبت معین بودن  $H$  باعث می‌شود تا با تکرار به هنگام کردن آن، به ماتریس هسین حقیقی همگرا شود. بهر حال در کاربرد عملی اگر گام بهینه به دقت یافت نشود ممکن است  $H$  مثبت معین بودن خود را از دست بدهد [۱۵].

روش‌های مختلفی برای تعیین  $\lambda_i^*$  وجود دارد که در این قسمت دو روش آن معرفی می‌گردد (برای جزئیات بیشتر رجوع شود به فصل ۵ مرجع [۱۵]).

در روش اول  $\lambda_i^*$  با استفاده از بسط سری تیلور تعیین می‌شود [۳۷]. در این روش دمای  $T(\bar{q}_i + \lambda_i \bar{S}_i)$  توسط بسط سری تیلور حول  $\bar{q}_i$  خطی می‌شود:

$$T(\bar{q}_i + \lambda_i \bar{S}_i) = T(\bar{q}_i) + \lambda_i \left[ \frac{\partial T}{\partial q_i} \right]^T \bar{S}_i = T(\bar{q}_i) + \lambda_i X(x_k, t_m, \bar{q}_i) \bar{S}_i \quad (\text{الف-۲۱})$$

عبارت حاصل بجای  $T$  در تابع هدف  $f$  قرار داده و با گرفتن مشتق  $f$  نسبت  $\lambda_i$  و یافتن ریشه‌ی آن، رابطه (۲۳-۵) برای کنترل شار و رابطه (۲۵-۵) برای کنترل سرعت سطح مشترک جامد-مایع بدست می‌آید:

$$f(\bar{q}_{i+1}) = \int_0^{t_f} \sum_{k=1}^K (Y_k - T_k)^2 dt = \int_0^{t_f} \sum_{k=1}^K (Y_k - (T_k(\bar{q}_i) + \lambda_i X(x_k, t_m, \bar{q}_i) S_{\bar{m}}))^2 dt \quad (\text{الف-۲۲})$$

$$\frac{df(\bar{q}_{i+1})}{d\lambda_i} = 0 \Rightarrow \lambda_i^* = \frac{\int_0^{t_f} \sum_{k=1}^K \{ [Y_k(x_k, t_m) - T_k(x_k, t_m, \bar{q}_i)] [ \sum_{\bar{m}=1}^M X(x_k, t_m, \bar{q}_{\bar{m}}) \times S_{\bar{m}} ] \} dt}{\int_0^{t_f} \sum_{k=1}^K \left( \sum_{\bar{m}=1}^M X(x_k, t_m, \bar{q}_{\bar{m}}) \times S_{\bar{m}} \right)^2 dt} \quad (\text{الف-۲۳})$$

$$f(\bar{q}_{i+1}) = \int_0^{t_f} [T_f - T(x, t; q_i(t))]^2 dt = \int_0^{t_f} \left( T_f - T(x, t; q_i(t)) + \lambda_i X(x, t, \bar{q}_i) \bar{S}_i \right)^2 dt \quad (\text{الف-۲۴})$$

$$\lambda_i^* = \frac{\int_0^{t_f} \{ [T_f - T(x, t; q_i(t))] [ \sum_{\bar{m}=1}^M X(x, t, \bar{q}_{\bar{m}}) \times S_{\bar{m}} ] \} dt}{\int_0^{t_f} \left( \sum_{\bar{m}=1}^M X(x, t, \bar{q}_{\bar{m}}) \times S_{\bar{m}} \right)^2 dt} \quad (\text{الف-۲۵})$$

روش دیگر روش ریشه مستقیم می‌باشد. شکل (۳-۵) الگوریتم این روش را نشان می‌دهد. مشتق تابع هدف نسبت به  $\lambda_i$  با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$f'_{\lambda}(\vec{q}_i + \lambda_i \vec{S}_i) = S_i^T \nabla f(\vec{q}_i + \lambda_i \vec{S}_i) = -2 \int_0^{t_f} \sum_{k=1}^K \{ [Y_k(t) - T_k(t, \vec{q}_i + \lambda_i \vec{S}_i)] X_k(t, \vec{q}_1) S_i \} dt - \dots$$

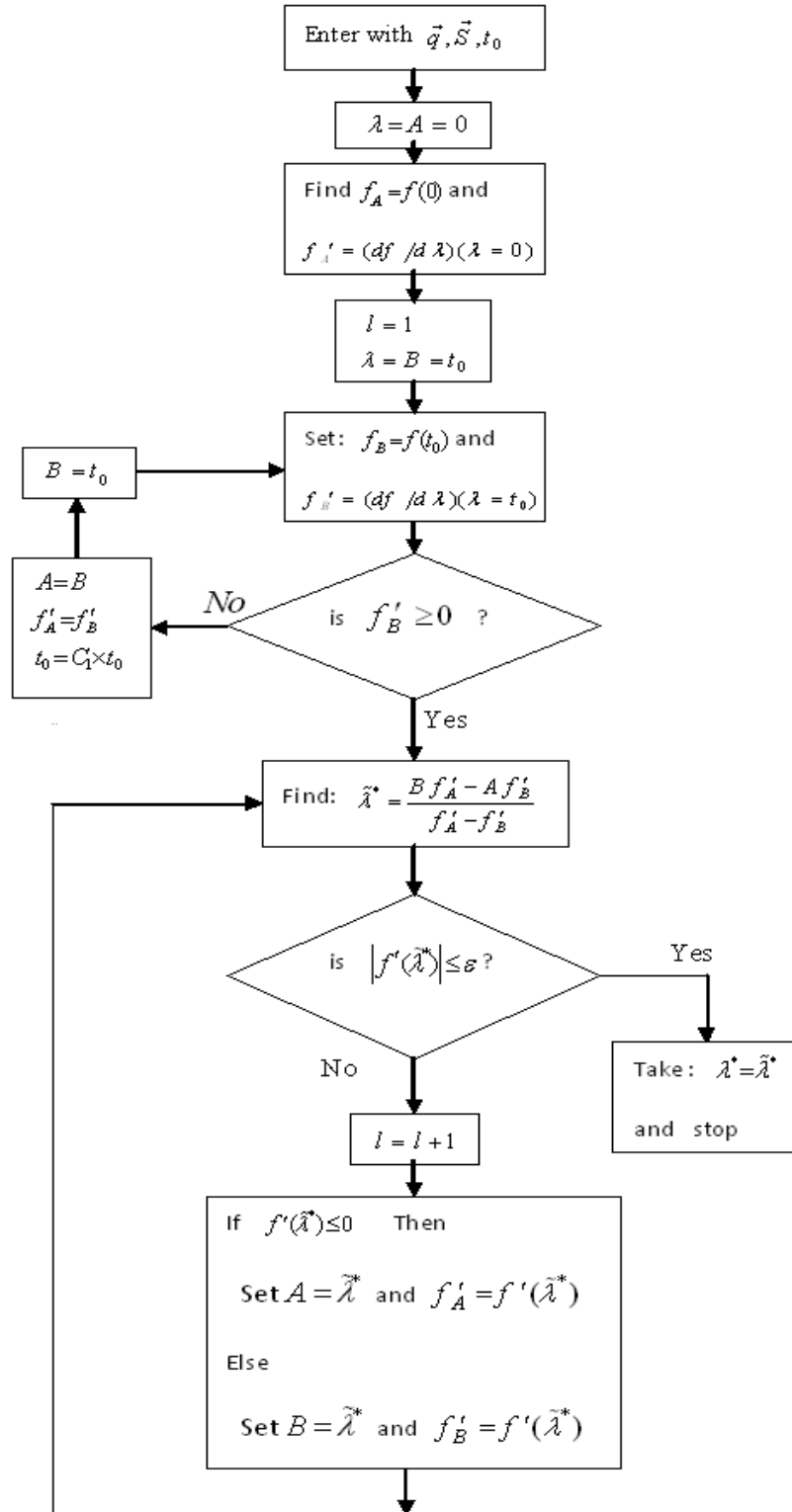
$$\dots - 2 \int_0^{t_f} \sum_{k=1}^K \{ [Y_k(t) - T_k(t, \vec{q}_i + \lambda_i \vec{S}_i)] X_k(t, \vec{q}_M) S_i \} dt \quad (\text{الف-۲۶})$$

در این روش دو نقطه اولیه بصورت  $\lambda = A$  و  $\lambda = B$  در نظر گرفته و مقادیر مشتقات آنها  $(f'_A = (df/d\lambda))$  و  $(f'_B = (df/d\lambda))$  با قرار دادن در رابطه (۵-۲۶) محاسبه می‌شود (معمولاً  $A = 0$  در نظر گرفته می‌شود). اگر  $f'_A$  و  $f'_B$  دارای علامت‌های مختلف باشند همگرایی سریعتری به  $\lambda^*$  مورد انتظار است. حال  $\lambda^*$  را با توجه به فلوجارت ریشه مستقیم محاسبه می‌کنیم. ثابت‌های  $C_1$  و  $t_0$  در فلوجارت برای یافتن مقادیر اولیه  $A$  و  $B$  که مشتقات آنها دارای علامت مخالفند می‌باشند. سپس با سرعت  $\lambda^*$  یافته می‌شود. در توابع ساده مقادیر کوچک نزدیک به یک برای  $C_1$  و  $t_0$  پیشنهاد می‌شود. پارامتر  $\varepsilon$  در این الگوریتم دقت محاسبه ریشه معادله (۵-۲۶) را نشان می‌دهد.

### ۵-۴-۳ روابط به هنگام کردن ماتریس $H$

تفاوت نسخه‌های مختلف  $VMM$  در نحوه‌ی به‌هنگام کردن ماتریس  $H$  می‌باشد. در این قسمت سه مدل رایج که در اصطلاح کلاس‌های "restricted - Broydon" روش متریک متغیر نامیده می‌شوند (که عبارتند از: DFB, BFGS and SR1) بعلاوه روش اصلاح شده Biggs نیز اشاره شده است. در هر تکرار  $VMM$ ،  $Q_i$  با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$Q_i = \vec{\nabla} f(\vec{q}_{i+1}) - \vec{\nabla} f(\vec{q}_i) \quad (\text{الف-۲۷})$$



شكل (٥-٣) الگوریتم روش ریشه مستقیم [١٥]

پیشنهاد Davidon – Fletcher – Powel (DFP) [۱۵] برای به هنگام کردن ماتریس  $H$  بصورت زیر می باشد:

$$H_{i+1} = H_i + \lambda_i^* \frac{S_i S_i^T}{S_i^T Q_i} - \frac{(H_i Q_i)(H_i Q_i)^T}{Q_i^T H_i Q_i} \quad (\text{الف-۲۸})$$

Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) [۱۶] با رابطه (۵-۲۹)  $H$  را به هنگام کرده اند.

$$H_{i+1} = H_i + \lambda_i^* \frac{S_i S_i^T}{S_i^T Q_i} - \frac{(H_i Q_i)(H_i Q_i)^T}{Q_i^T H_i Q_i} + (Q_i^T H_i Q_i) v_i v_i^T \quad (\text{الف-۲۹})$$

$$v_i = \frac{S_i}{S_i^T Q_i} - \frac{H_i Q_i}{Q_i^T H_i Q_i} \quad (\text{الف-۳۰})$$

روش متقارن مرتبه‌ی یک (Symmetric Rank – one (SR1)) با رابطه زیر  $H$  را به هنگام می کند [۱۶]:

$$H_{i+1} = H_i + \left(1 - \frac{Q_i^T H_i Q_i}{Q_i^T (\lambda_i^* S_i)}\right)^{-1} \frac{1}{Q_i^T (\lambda_i^* S_i)} (\lambda_i^* S_i - H_i Q_i)(\lambda_i^* S_i - H_i Q_i)^T \quad (\text{الف-۳۱})$$

و فرمول Biggs برای به هنگام کردن  $H$  بصورت زیر پیشنهاد شده است [۳۸]:

$$H_{i+1} = H_i - \frac{H_i Q_i S_i^T + S_i Q_i^T H_i}{S_i^T Q_i} + \left(\frac{1}{\tau_i} + \frac{Q_i^T H_i Q_i}{\lambda_i^* S_i^T Q_i}\right) \lambda_i^* \frac{S_i S_i^T}{S_i^T Q_i} \quad (\text{الف-۳۲})$$

$$\tau_i = \frac{6}{\lambda_i^* S_i^T Q_i} (f(\bar{X}_i) - f(\bar{X}_{i+1}) + \lambda_i^* S_i^T \bar{\nabla} f(\bar{X}_{i+1})) - 2 \quad (\text{الف-۳۳})$$

DFP و BFGS در مقایسه با سایر نسخه‌ها بطور گسترده‌ای در مسائل مختلف بهینه‌سازی مورد استفاده

قرار گرفته‌اند. روش SR1 مثبت معین بودن  $H$  به هنگام شده را تضمین نمی‌کند. فرمول Biggs

درحقیقت اصلاح شده‌ی نسخه BFGS می‌باشد. در عمل مشاهده شده، اگرچه ممکن است یکی از نسخه

های VMM نسبت به سایر آنها در حل نوعی از مسائل بهینه‌سازی نامقید بهتر باشد اما امکان دارد

کارایی آن در حل دسته‌ای دیگر از این مسائل کم باشد [۱۸]. لذا این موضوع برای ارزیابی کارایی نسخه-

های مختلف VMM اساسی می‌باشد.

## ۴-۴-۵ معیار توقف

برای داده‌های بدون اغتشاش در ورودی، هر کدام از روابط زیر را می‌توان برای توقف فرآیند تکراری استفاده کرد :

$$\|\vec{\nabla} f_i\| \leq \varepsilon \quad (\text{الف-۳۴})$$

$$|f| \leq \varepsilon \quad (\text{الف-۳۵})$$

که  $\varepsilon$  یک عدد دلخواه کوچک می‌باشد. در این پایان‌نامه رابطه (۳۵-۳۴) بعنوان شرط توقف استفاده شده است. اما در مورد داده‌های دارای اغتشاش،  $\varepsilon$  بایستی بر پایه‌ی یک روش منظم سازی انتخاب شود تا حساسیت جواب را نسبت به یک خطای تصادفی کاهش دهد. ایده‌ی اصلی در منظم سازی تکراری، توقف در نزدیکی نقطه‌ی بهینه می‌باشد، نه دقیقاً نقطه‌ی بهینه [۱۸]. بنابراین این روش تمایل خواهد داشت تا منظم کند و اثرات ناشی از خطای دلخواه را از بین ببرد. مطابق مرجع [۳۷] شرط توقف در منظم سازی تکراری برای یک خطای با دامنه‌ی ثابت با رابطه‌ی زیر داده شده است :

$$\varepsilon \approx K \sigma^2 t_f \quad (\text{الف-۳۶})$$

در رابطه فوق  $K$  تعداد حسگرهای موجود،  $\sigma$  دامنه خطا و  $t_f$  زمان نهایی می‌باشد.

## ۵-۵ محاسبات عددی حل معادلات

رابطه (۵-۱) یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی مرتبه دوم می‌باشد. برای حل معادلات حاکم بر مسأله مستقیم و معادلات ضرایب حساسیت، از روش تفاضل محدود با استفاده از یک طرح صریح<sup>۱</sup> FTCS استفاده شده است. علت استفاده از روش صریح، نبود رابطه خطی بین آنتالپی و دما در مواد خالص می‌باشد. با روش تفاضلات محدود پیشرو عبارت سمت چپ معادله (۵-۱) به صورت زیر گسسته می‌شود:

<sup>۱</sup> Forward in Time-Central Space

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (\text{الف-۳۷})$$

که  $n$  معرف موقعیت زمانی و  $j$  گره مکانی بوده و مرتبه خطای این روش  $\Delta t$  می‌باشد. برای تقریب مشتقات مکانی (عبارت سمت راست معادله (۵-۱)) از روش تفاضلات محدود مرکزی با مرتبه‌ی خطای  $\Delta x^2$  استفاده شده است:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (\text{الف-۳۸})$$

بنابراین معادله (۵-۱) پس از گسسته سازی بصورت زیر در می‌آید:

$$h_j^{n+1} = h_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n) \quad (\text{الف-۳۹})$$

شبکه مورد استفاده یکنواخت بوده و رابطه (۵-۳۹) برای گره‌های  $j = 2: J-1$  صادق می‌باشد. مقادیر وابسته در مقطع زمانی  $n$  از نتایج حل گام قبلی و یا شرایط اولیه معلوم است؛ یعنی مقادیر محاسبه شده در مقطع زمانی  $(n+1)$  تنها به مرحله قبلی وابسته‌اند. بنابراین در روش صریح، معادله اختلاف محدود تنها شامل یک مجهول ( $h_i^{n+1}$ ) بوده که مستقیماً توسط آن محاسبه می‌شود. پس از محاسبه  $h_i^{n+1}$  می‌توان دمای آن را با استفاده رابطه (۵-۴۰) بدست آورد:

$$T = \begin{cases} h & h < 0 \\ 0 & 0 \leq h \leq Ste \\ h - Ste & h > Ste \end{cases} \quad (\text{الف-۴۰})$$

برای گره اول و آخر از شرایط مرزی مساله استفاده می‌شود:

$$T_1^{n+1} = T_2^{n+1} + q_s(t_{n+1}) \Delta x \quad (\text{الف-۴۱})$$

$$T_J^{n+1} = T_{J-1}^{n+1} \quad (\text{الف-۴۲})$$

در روش صریح هنگامی که مقداری برای  $\Delta x$  انتخاب می‌شود،  $\Delta t$  دیگر مقدار مستقل و دلخواهی نخواهد بود بلکه  $\Delta t$  باید برابر یا کمتر از مقدار معینی که توسط معیارهای پایداری تعیین می‌شود، باشد.

همانطور که بیان شد، رابطه (۳۹-۵) از مرتبه‌ی  $O(\Delta t, \Delta x^2)$  بوده و در صورتی پایدار است که معادله

زیر برقرار باشد:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{الف-۴۳})$$

بنابراین روش صریح از نظر حل کردن و برنامه نویسی ساده بوده ولی ممکن است برای برقراری پایداری

$\Delta t$  خیلی کوچک شده و در نتیجه انجام محاسبات را افزایش دهد. در فصل بعد نتایج حل عددی مورد

بررسی قرار گرفته است.



## فصل ششم

# نتایج حل عددی

## ۶-۱ مقدمه

در این فصل با توجه به معادلات حاکم ارائه شده و نحوه حل آنها در فصل‌های قبل، نتایج حاصل از حل مساله معکوس برای مواد خالص ارائه خواهد شد. به منظور ارزیابی و اطمینان از صحت نتایج عددی بدست آمده برای هر مساله خاص، برای هر حالت ابتدا یک شار حرارتی مشخص به مساله مستقیم اعمال شده و تاریخچه زمانی دما در یک نقطه خاص (مکان حسگر)، اندازه‌گیری و ثبت می‌شود. سپس بوسیله این دماهای اندازه‌گیری شده و حل مساله معکوس، شار حرارتی ورودی در قسمت اول بازسازی خواهد شد. با مقایسه کمی و کیفی این دو شار بدست آمده می‌توان به میزان دقت روش‌های استفاده شده پی برد. در نهایت پس از تایید کد عددی استفاده شده، مساله معکوس به منظور طراحی و کنترل سرعت سطح مشترک در نظر گرفته می‌شود. در تمامی موارد بررسی شده، نتایج حاصل از روش متریک متغیر و روش گرادیان مزدوج با هم مقایسه شده‌اند.

## ۶-۲ اعمال شار مرزی معلوم و بازسازی آن

به منظور تحلیل مساله معکوس انجماد مواد خالص در حالت یک بعدی، معادلات (۵-۱) تا (۵-۴) را برای حالتی که ضریب هدایت حرارتی ثابت باشد در نظر می‌گیریم. همان‌گونه که ذکر شد، ابتدا دو شار حرارتی با توابع مشخص که ذکر خواهند شد به عنوان ورودی به مساله مستقیم اعمال شده و سپس با ثبت دما در نقاط حسگرها و استفاده از روش انتقال حرارت معکوس به تخمین و بازسازی این شارهای ورودی پرداخته خواهد شد. دو شار حرارتی ورودی با اشکال مثلثی و پله‌ای انتخاب شده‌اند. دلیل انتخاب این دو نوع تابع برای شار حرارتی، تایید صحت نتایج برای حالت‌هایی است که گوشه‌های تیز و یا تغییرات ناگهانی در شار حرارتی وجود دارد، چرا که روش‌های انتقال حرارت معکوس باید برای هر نوع

شکل شار حرارتی پایدار بوده و جوابی یکتا تولید نماید. توابع زیر به عنوان شار حرارتی ورودی در نظر گرفته شده‌اند.

$$q(t) = \begin{cases} -120t - 15 & 0 \leq t \leq 0.125 \\ 120t - 45 & 0.125 \leq t \leq 0.25 \\ -15 & t \geq 0.25 \end{cases} \quad (۱-۶)$$

$$q(t) = -10 - 20u(t - 0.15) \quad (۲-۶)$$

که  $u(t)$  تابع پله‌ای هویساید می باشد. توابع فوق برای مقادیر مختلف موقعیت مکانی حسگرها، نویز در داده‌های اندازه گیری شده، عدد استفان، حدس اولیه در روش متریک متغیر و روش گرادیان مزدوج و همچنین استقلال حل از شبکه محاسباتی نیز برای این حالات ارزیابی شده است.

ابتدا در نظر بگیرید که تمام قالب از ماده مذاب خالص با دمای یکنواخت  $T_i = 0.5$  پر شده، مرز بالا ایزوله و انتقال حرارت تنها از مرز پایین صورت گیرد. در لحظه  $t = 0$  ناگهان مرز پایین در معرض یک شار حرارتی قرار گرفته و مقدار دما در مکان حسگر برای یک بازه زمانی  $[0, t_f]$  ثبت شده که برای این مساله  $t_f = 0.4$  در نظر گرفته شده است.

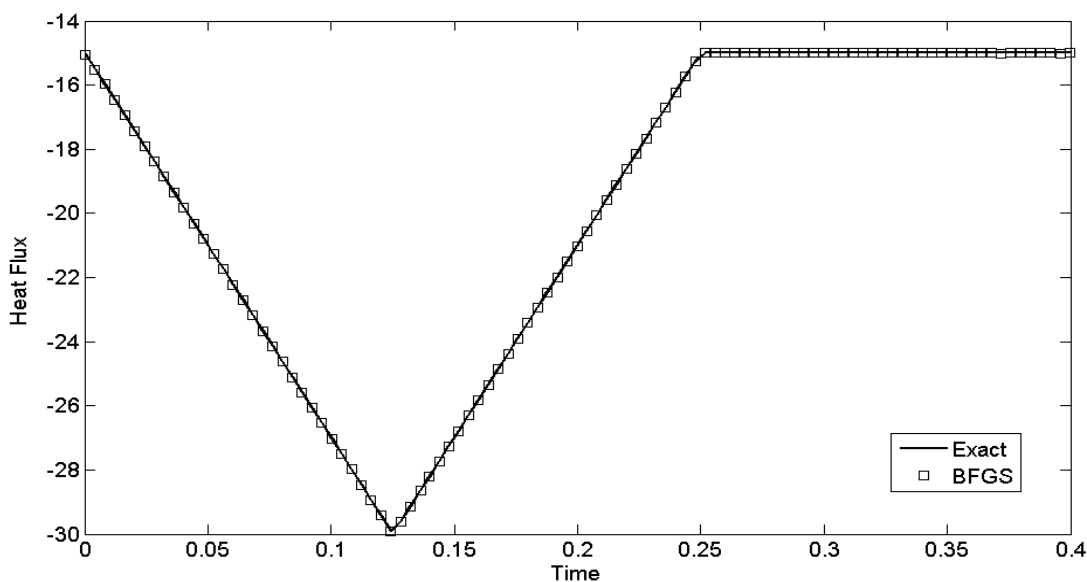
شار حرارتی مطلوب و محاسبه شده بوسیله دماهای ثبت شده در مکان حسگر و الگوریتم حل معکوس در حالت مثلثی برای  $Ste = 0.5$ ،  $x_s = 0.1$ ،  $N_x = 40$  و  $T_i = 0.5$  در شکل (۱-۶) نمایش داده شده است که  $x_s$  موفقیت قرارگیری حسگر می باشد. لازم به ذکر است که تمامی مقادیر مورد نیاز برای حل مساله در هر دو روش متریک متغیر و گرادیان مزدوج یکسان بوده و برای توقف الگوریتم بهینه سازی  $\varepsilon = 10^{-7}$  که دقت بسیار بالایی می باشد، در نظر گرفته شده است. در این بررسی دو نسخه  $BFGS$  و  $SR1$  روش متریک متغیر و نسخه  $Polak-Ribiere$  روش گرادیان مزدوج با هم مقایسه شده اند. مطابق شکل و طی یک ارزیابی کیفی ملاحظه می شود که تخمین و محاسبه این شار حرارتی از دقت خوبی برخوردار بوده است و این نشان دهنده صحت و دقت روش و الگوریتم معکوس بکار گرفته شده است. بدلیل اینکه دقت

تمامی روش‌ها در بازگردانی شار حرارتی بالا انتخاب شده است، لذا تفاوتی در شکل شار ندارند و تنها نتایج BFGS نشان داده شده است. علاوه بر این جهت ارزیابی کمی دقت نتایج بدست آمده، مقدار درصد جذر مربعات خطای متوسط به شکل رابطه (۳-۶) تعریف می‌شود.

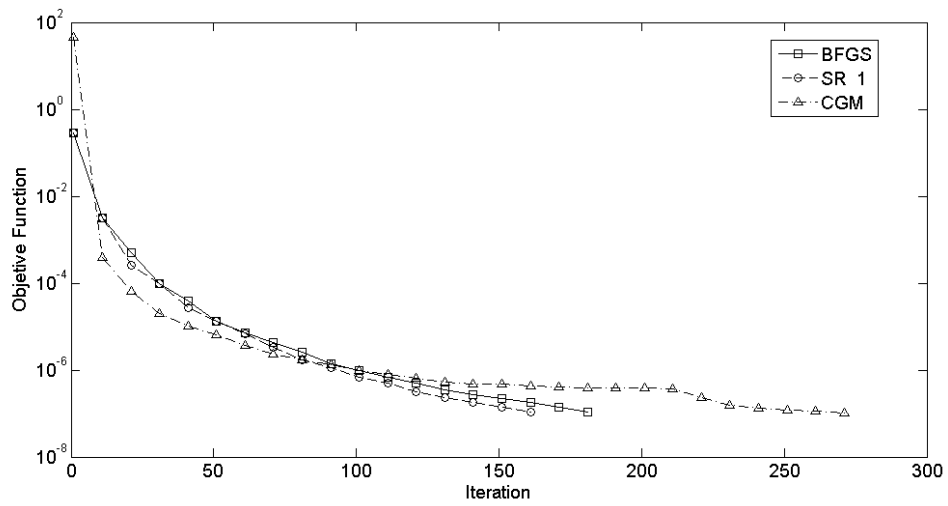
$$e_{RMS} = \frac{\sqrt{(1/M) \sum_{m=1}^M (q_{desired,m} - q_{estimate,m})^2}}{\sqrt{(1/M) \sum_{m=1}^M (q_{desired,m})^2}} \times 100 \quad (3-6)$$

که در رابطه بالا  $M$  تعداد کل بازه‌های زمانی است.

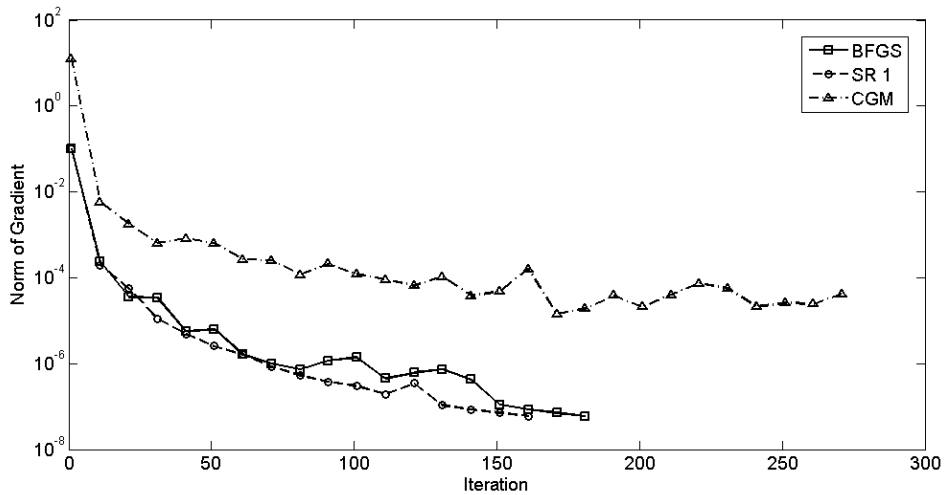
نرخ کاهش تابع هدف به همراه نرخ کاهش نرم بردار گرادیان نیز در شکل (۲-۶) ملاحظه می‌شوند که نشان دهنده روند بسیار مناسب همگرایی این روش به سمت میزان مطلوب بوده که این خود دلیل بر بدست آوردن و حل صحیح مساله و انجام پذیری مطلوب مساله بهینه سازی می‌باشد. تمامی مقایسه‌ها برتری محسوس روش متریک متغیر را بر روش گرادیان مزدوج نشان می‌دهد.



شکل (۱-۶) مقایسه شار حرارتی مطلوب و محاسبه شده



الف



ب

شکل (۶-۲) الف ( نرخ کاهش تابع هدف و ب) نرخ کاهش نرم گرادیان شار حرارتی مثلثی

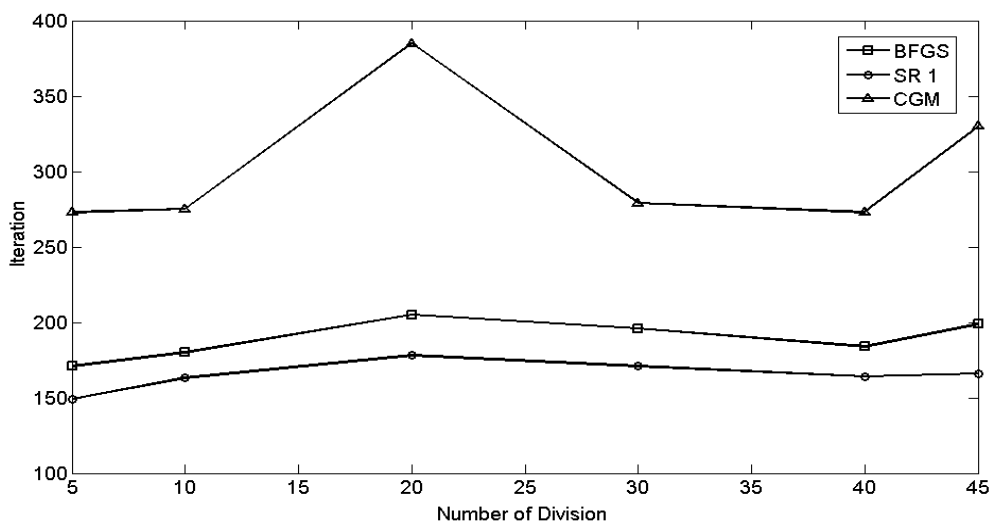
## ۱-۲-۶ بررسی استقلال از شبکه محاسباتی

به منظور ارزیابی میزان وابستگی حل معکوس به تعداد گره‌های شبکه یا به عبارتی اندازه مش‌ها، تحلیل معکوس برای دو شار حرارتی مذکور برای مقادیر مختلفی از نقاط شبکه انجام گرفته است. مقدار تابع هدف در آخرین گام بهینه‌سازی، تعداد تکرارهای لازم برای همگرایی روش و همچنین میزان خطای  $RMS$  برای دامنه‌ای با شبکه‌های متفاوت برای شار حرارتی مثلثی در جدول (۱-۶) ارائه شده‌اند. برای ارزیابی بهتر، نتایج جدول در شکل (۳-۶) ترسیم شده است. شکل (۴-۶) بازگردانی شار حرارتی پله‌ای را نشان می‌دهد. مطابق این نتایج،  $N_x = 40$  بعنوان مقدار بهینه اندازه شبکه انتخاب شده است. تمامی مواردی که در قسمت‌های بعد مورد بررسی قرار گرفته است با این اندازه می‌باشد.

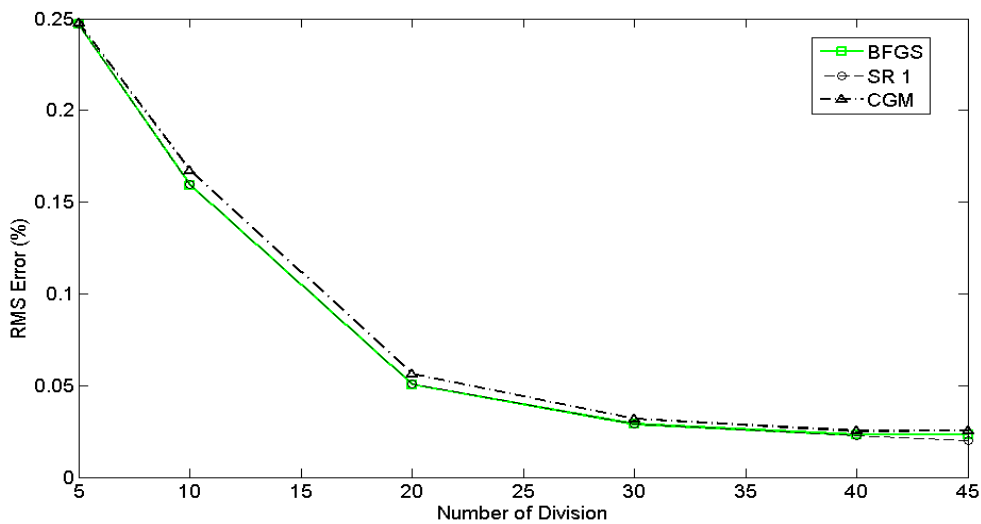
جدول (۱-۶) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای شبکه‌های مختلف شار مثلثی

$N_x$	Method	Version	Objective Function	RMS Error(%)	Iteration
5	VMM	BFGS	9.9978e-008	0.2469	171
		SR 1	9.9982e-008	0.2469	149
	CGM	Polak-Ribiere	9.1524e-008	0.2478	273
10	VMM	BFGS	9.9125e-008	0.1593	180
		SR 1	9.8094e-008	0.1594	163
	CGM	Polak-Ribiere	2.0403e-007	0.1673	275
20	VMM	BFGS	9.6176e-008	0.0506	205
		SR 1	9.0988e-008	0.0511	178
	CGM	Polak-Ribiere	1.2246e-007	0.0563	385
30	VMM	BFGS	9.4570e-008	0.0288	196
		SR 1	9.3832e-008	0.0291	171
	CGM	Polak-Ribiere	9.9317e-008	0.0319	279
40	VMM	BFGS	9.7950e-008	0.0230	184
		SR 1	9.7940e-008	0.0229	164
	CGM	Polak-Ribiere	9.9770e-008	0.0253	273
45	VMM	BFGS	9.0085e-008	0.0230	199
		SR 1	9.2537e-008	0.0200	166
	CGM	Polak-Ribiere	1.2451e-007	0.0255	330

شار حرارتی محاسبه شده، نرخ کاهش نرم گرادیان و همچنین نرخ کاهش تابع هدف برای مقادیر مختلف اندازه شبکه برای شار حرارتی مثلثی در شکل (۵-۶) آورده شده است.



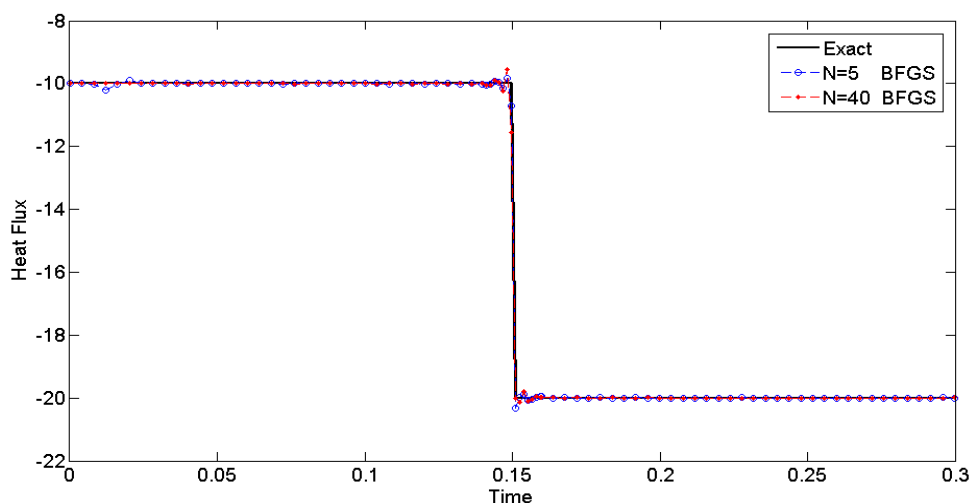
الف



ب

شکل (۳-۶) مقایسه نتایج جدول (۱-۶) شار حرارتی مثلثی: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS

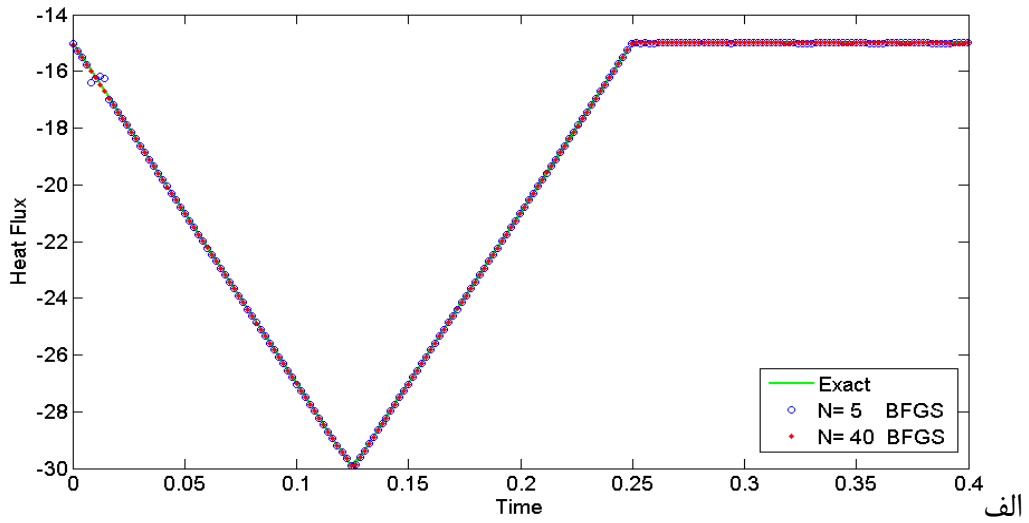
نتایج جدول (۶-۱) در مورد شار حرارتی مثلثی نشان می‌دهد که تعداد تکرارهای مورد نیاز روش متریک متغیر به میزان قابل توجهی کمتر از روش گرادیان مزدوج می‌باشد. علاوه بر این نوسان تعداد تکرار نسخه‌های SR1 با افزایش تعداد تقسیمات خیلی کمتر از روش CGM است. همچنین مطابق انتظار سرعت نسخه SR1 بیشتر از BFGS می‌باشد.



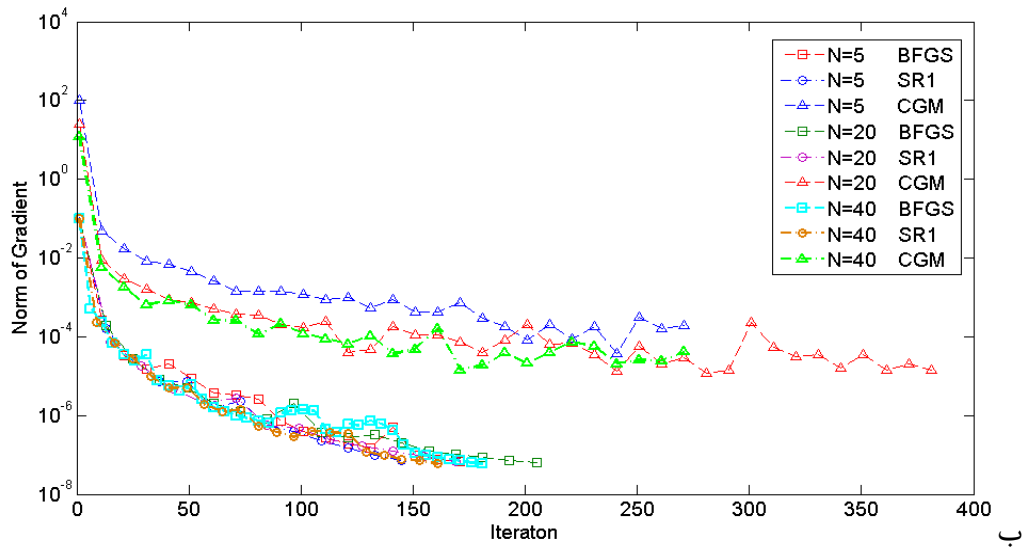
شکل (۶-۴) باز گردانی شار حرارتی پله ای برای شبکه های متفاوت

بدلیل اینکه مرتبه خطا پایین است، لذا از نظر درصد خطا اختلاف خیلی محسوسی از این نظر بین آنها اتفاق نمی‌افتد. شکل (۶-۵ الف) نشان می‌دهد که با ریز کردن شبکه محاسباتی چگونه دقت در باز گردانی شار حرارتی بالا می‌رود. در شکل (۶-۵ ب) هم ملاحظه می‌شود که نرخ کاهش نرم گرادیان روش متریک متغیر بسیار بالاتر از روش گرادیان مزدوج است.

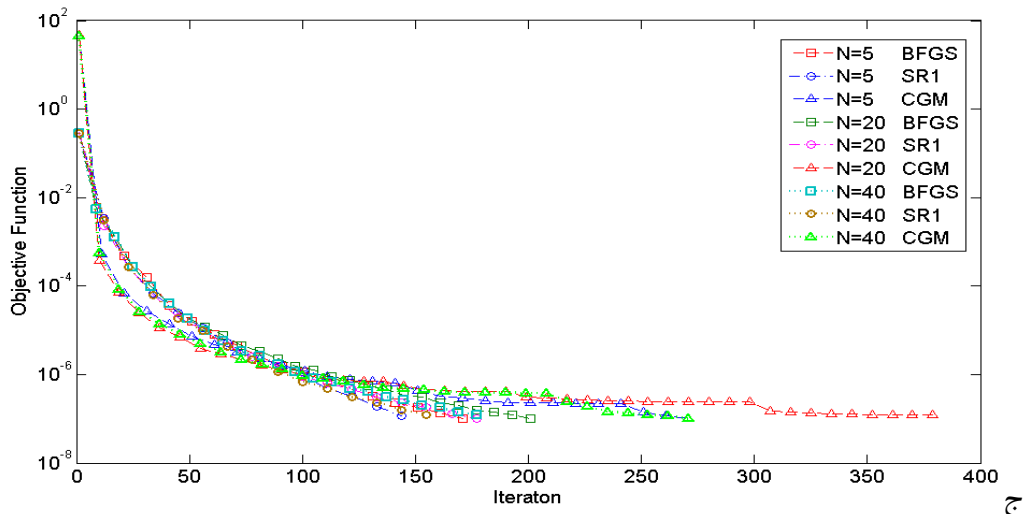




الف



ب



ج

شکل (۵-۶) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادینان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای شبکه های متفاوت شار مثلی

## ۲-۲-۶ بررسی اثر حدس اولیه

جهت بررسی اثر حدس اولیه برای شروع تکرارها بر حل مساله معکوس ذکر شده، مساله برای شکل‌های مختلفی از حدس اولیه برای هر دو شار حرارتی مثلثی و پله‌ای حل شده و نتایج آنها بترتیب در جداول (۲-۶) و (۳-۶) آورده شده است. بمنظور بررسی دقیق‌تر، نتایج جداول به ترتیب در شکل‌های (۶-۶) و (۶-۶) نشان داده شده‌اند. همچنین در شکل‌های (۸-۶) و (۹-۶) شار تخمین زده شده، نرخ کاهش نرم‌گرادیان و تابع هدف برای هر دو شار حرارتی ترسیم شده است.

جدول (۲-۶) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای حدس‌های اولیه متفاوت شار مثلثی

$q$	Method	Version	Objective Function	RMS Error(%)	Iteration
0	VMM	BFGS	9.7950e-008	0.0230	184
		SR 1	9.7940e-008	0.0229	164
	CGM	Polak-Ribiere	9.9770e-008	0.0253	273
-10	VMM	BFGS	9.9145e-008	0.0394	112
		SR 1	9.4272e-008	0.0396	99
	CGM	Polak-Ribiere	9.8917e-008	0.0429	109
-15	VMM	BFGS	9.2993e-008	0.1903	60
		SR 1	8.1039e-008	0.1668	58
	CGM	Polak-Ribiere	9.4434e-008	0.1928	37
-20	VMM	BFGS	9.1196e-008	0.0425	110
		SR 1	9.1399e-008	0.0423	100
	CGM	Polak-Ribiere	9.8499e-008	0.0462	107
-30	VMM	BFGS	9.9781e-008	0.0259	196
		SR 1	9.7722e-008	0.0272	164
	CGM	Polak-Ribiere	9.6217e-008	0.0246	353

با یک مرور کلی بر نتایج حاصل می‌توان دریافت که همگی این روش‌ها با هر حدس اولیه‌ای می‌توانند به جواب مطلوب برسند. شکل‌های (۶-۶) و (۷-۶) نشان می‌دهند که در حدس‌های اولیه‌ی ۱۵- (برای شار مثلثی) و ۲۰- (برای شار پله‌ای) کمترین تکرار برای رسیدن به تابع هدف مورد نظر و بالاترین درصد خطا را دارند. این پدیده به این دلیل رخ می‌دهد که در این روش‌ها، شار حرارتی تخمین زده شده به

سمت مقدار حدس اولیه پیش می‌رود و دقیقا در آخرین لحظه از شبیه سازی به مقدار حدس اولیه می‌رسد. چون مقدار حدس اولیه در این حالت با مقدار شار حرارتی در زمان نهایی برابر است، لذا تعداد تکرار کمتری برای رسیدن به این مقدار مورد نیاز است و بهمین دلیل از دقت در جواب نهایی کاسته می‌شود.

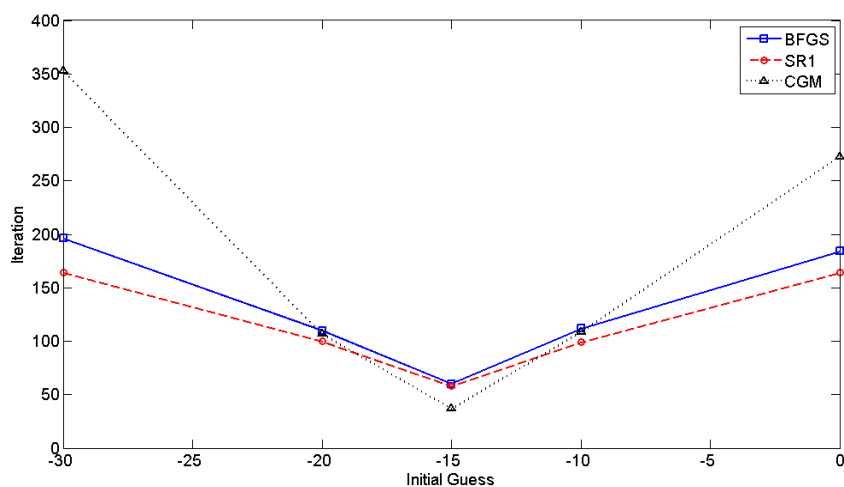
جدول (۳-۶) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای حدس‌های اولیه متفاوت شار پله ای

$q$	Method	Version	Objective Function	RMS Error(%)	Iteration
0	VMM	BFGS	9.6589e-008	1.0283	268
		SR 1	9.9498e-008	1.0304	219
	CGM	Polak-Ribiere	2.4227e-007	1.1852	328
-10	VMM	BFGS	9.9349e-008	1.1916	205
		SR 1	9.9405e-008	1.1920	183
	CGM	Polak-Ribiere	9.9866e-008	1.1930	316
-15	VMM	BFGS	9.0649e-008	1.3074	150
		SR 1	9.0204e-008	1.3053	150
	CGM	Polak-Ribiere	9.6728e-008	1.3308	176
-20	VMM	BFGS	9.9492e-008	1.4144	143
		SR 1	9.9607e-008	1.4149	125
	CGM	Polak-Ribiere	9.8904e-008	1.4157	124
-30	VMM	BFGS	9.7245e-008	1.1867	213
		SR 1	9.5674e-008	1.1877	163
	CGM	Polak-Ribiere	9.8813e-008	1.2119	254

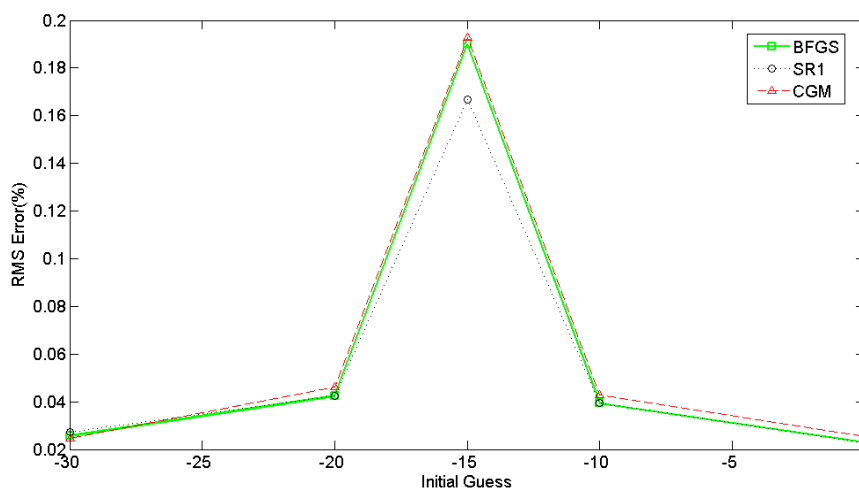
همچنین ملاحظه می‌شود که در این دو حدس اولیه روش گرادیان مزدوج از روش متریک متغیر سریع‌تر عمل کرده است. البته ذکر این نکته ضروریست که اگر شرط توقف بر روی نرم گرادیان قرار داده شود (شکل‌های (۶-۸) ب) و (۶-۹) ب)، همواره *VMM* سریعتر از *CGM* عمل می‌کند. در کارهای گذشته که با روش متریک متغیر انجام شده است شرط توقف بر روی نرم گرادیان قرار داده شده است [۱۸-۱۹-۲۰]. در اینجا نیز اگر شرط توقف  $\|\vec{\nabla}f_i\| \leq 10^{-7}$  گذاشته شود، *VMM* به ۷۰ تکرار نیاز دارد و این در حالیست که *CGM* با ۴۵۶ تکرار به این دقت می‌رسد.

نکته قابل توجه دیگر اینست که حساسیت *VMM* با تغییر حدس اولیه خیلی کمتر از روش *CGM* می‌باشد. اختلاف بین کمترین تکرار و بیشترین آن در جدول، این پایداری خوب *VMM* نشان می‌دهد.

بنابر این با در نظر گرفتن نتایج کمی و کیفی به دست آمده نتیجه می‌شود که روش‌های استفاده شده، وابستگی به میزان حدس اولیه ندارند و لذا می‌توان با انتخاب هر مقدار حدس اولیه به جواب نهایی دست پیدا کرد. البته انتخاب حدس اولیه مناسب می‌تواند تعداد تکرارها برای رسیدن به حالت بهینه را کاهش دهد.

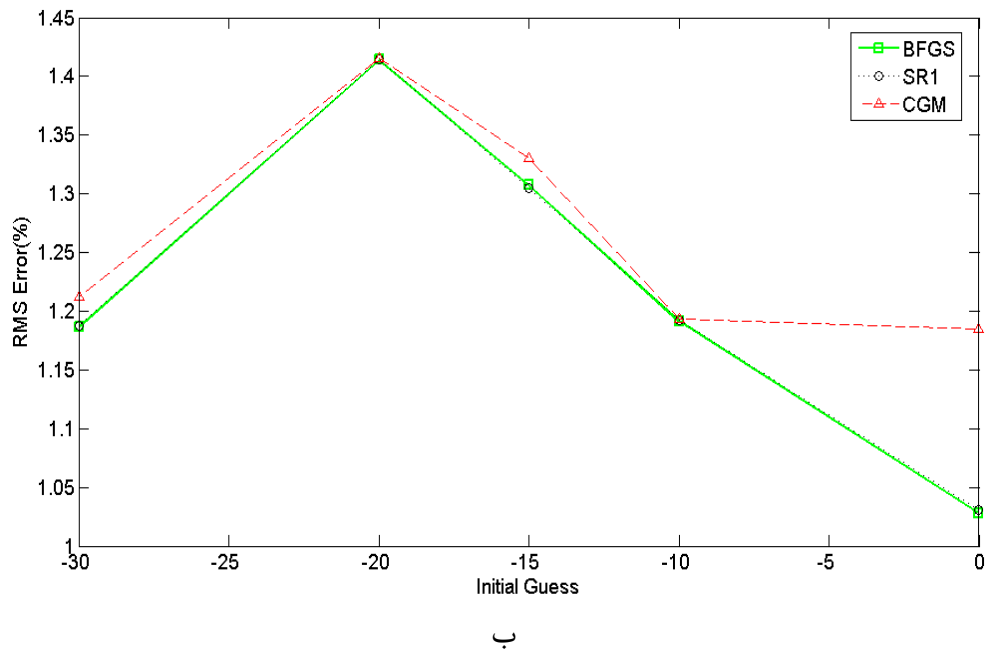
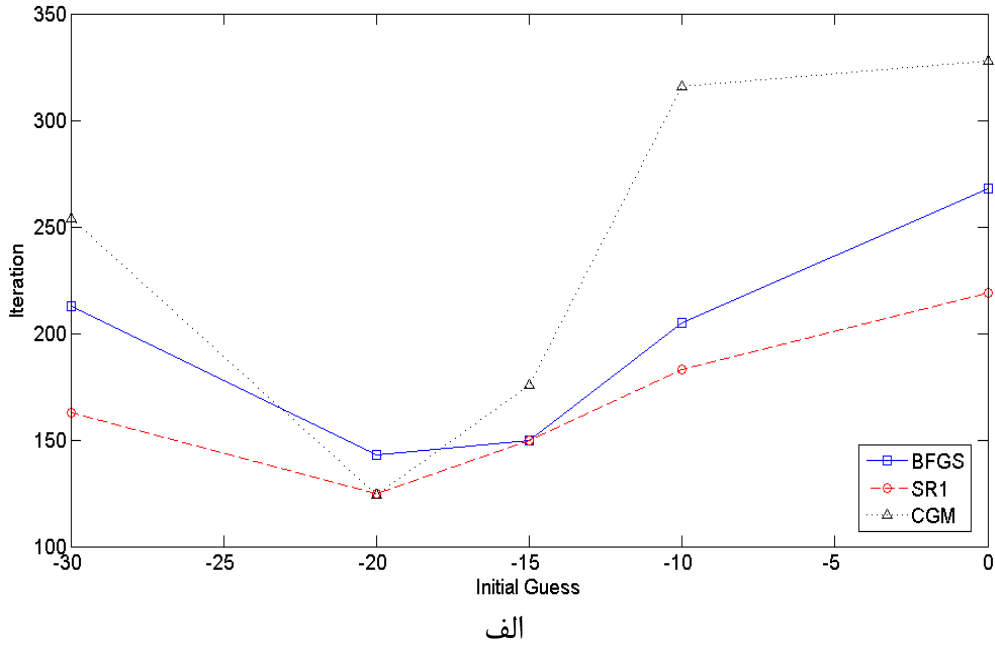


الف

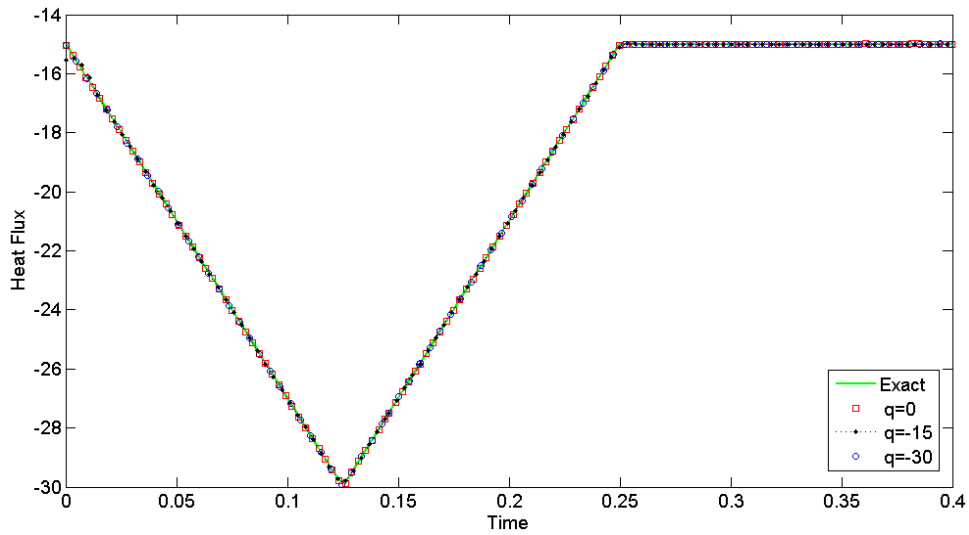


ب

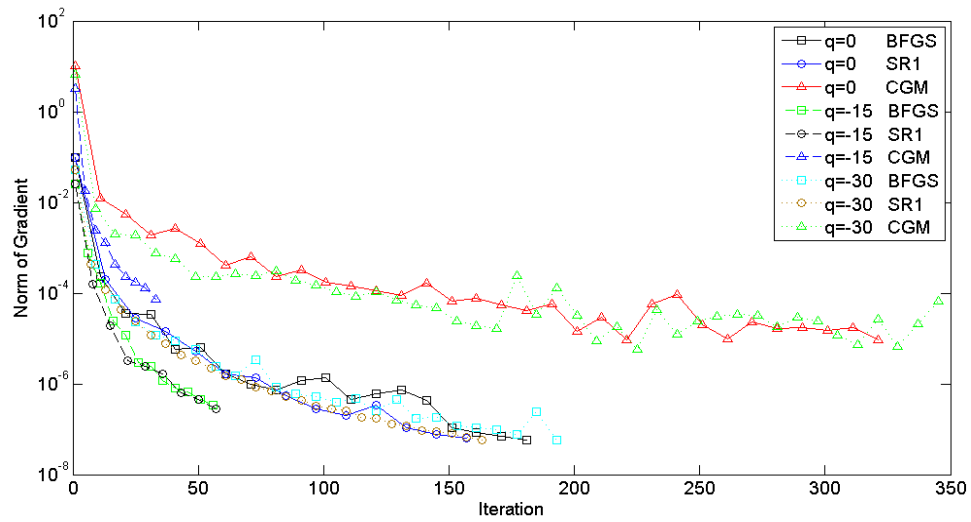
شکل (۶-۶) مقایسه نتایج جدول (۲-۶) شار حرارتی مثلثی: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS



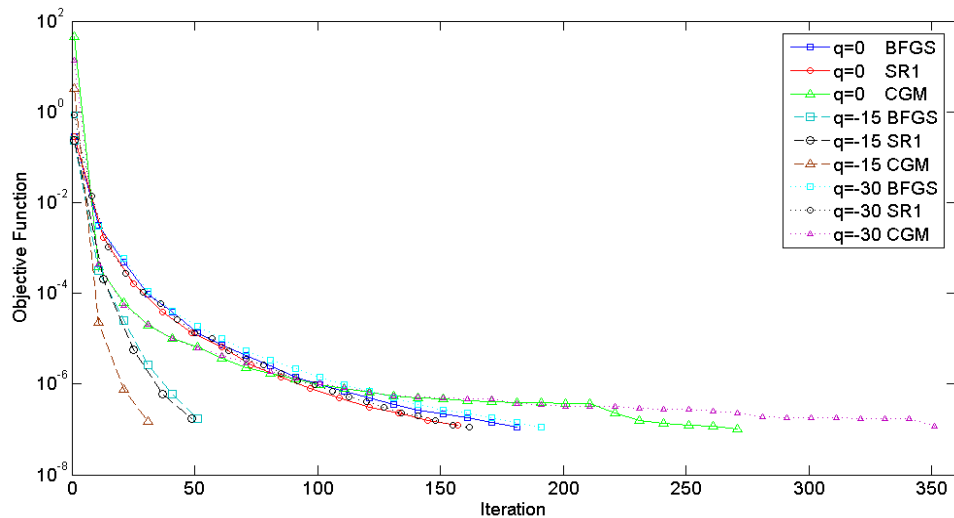
شکل (۶-۷) مقایسه نتایج جدول (۶-۳) شار حرارتی پله ای : الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS



الف

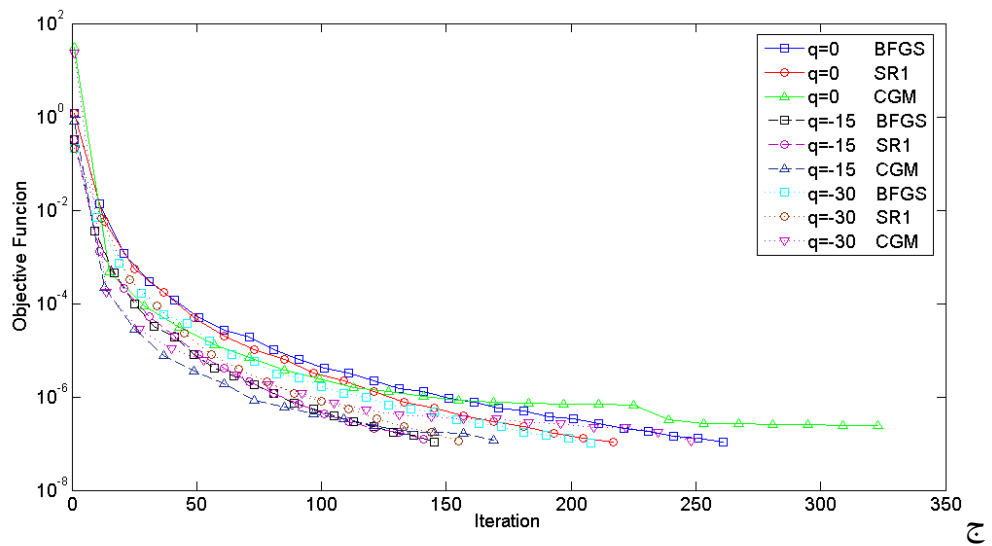
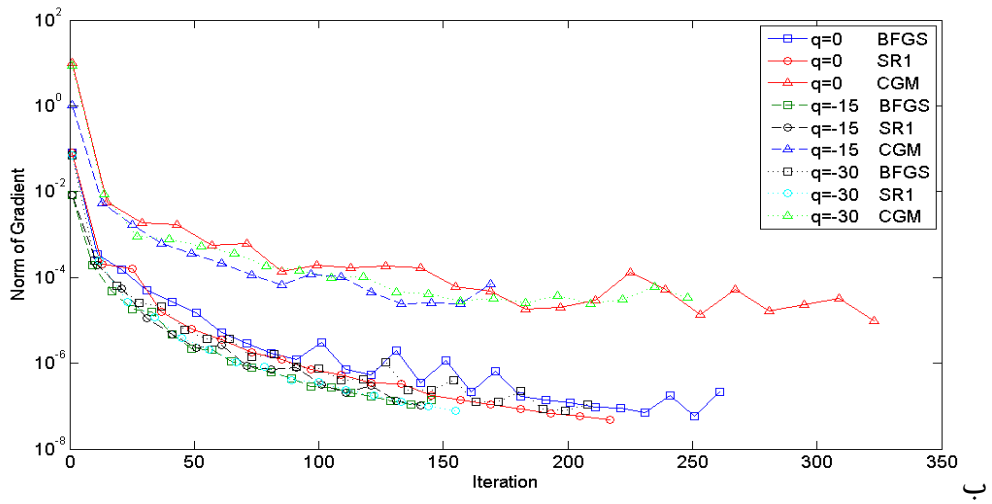
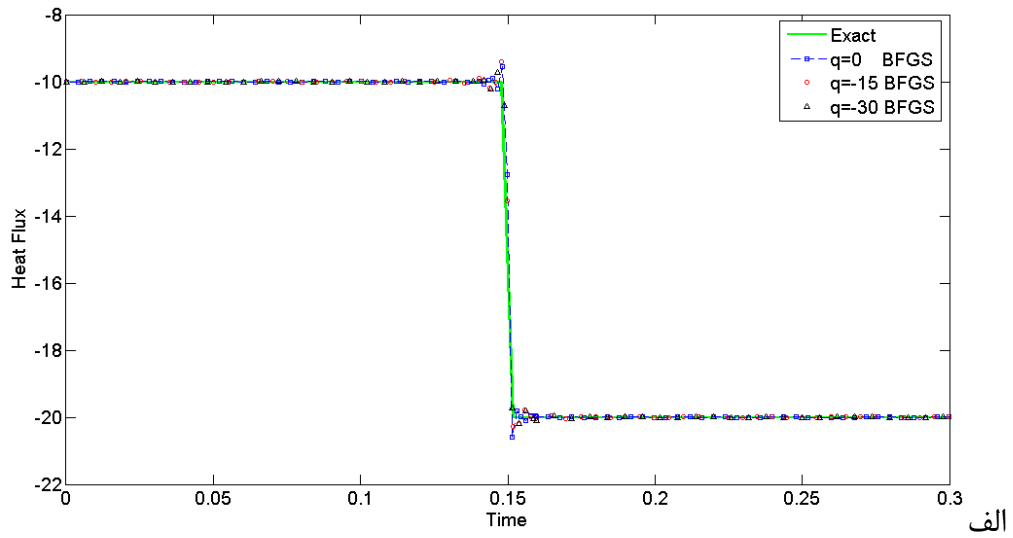


ب



ج

شکل (۶-۸) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای حدس اولیه متفاوت شار مثلثی



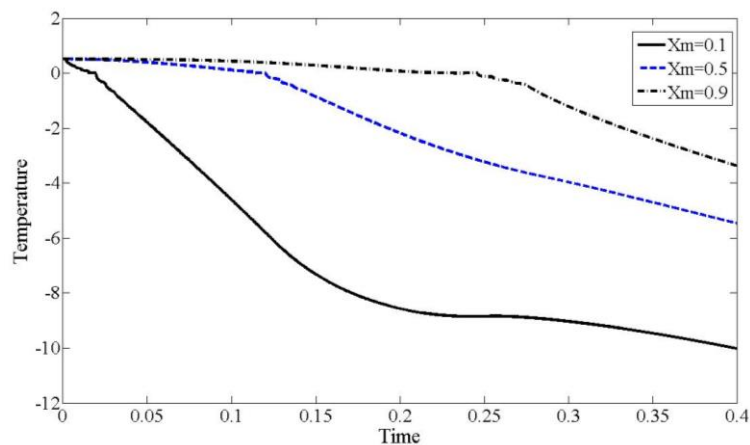
شکل (۶-۹) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادینان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای حدس اولیه متفاوت شار پله‌ای

## ۶-۲-۳ اثر موقعیت قرارگیری حسگرها

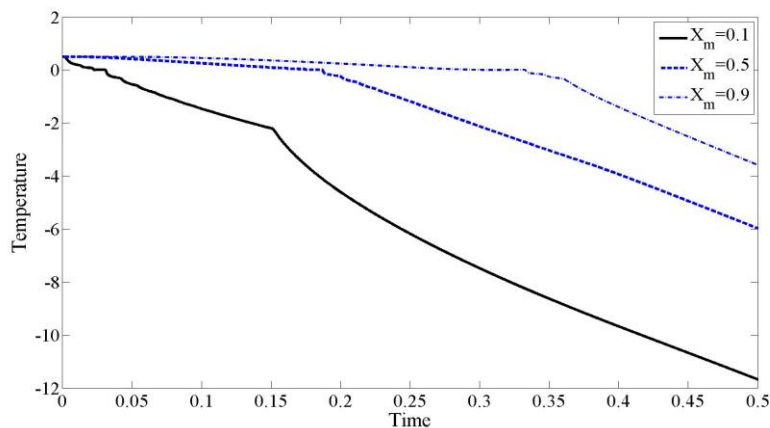
به منظور مطالعه اثر حرکت حسگر در دامنه مکانی، ابتدا موقعیت‌های مختلفی در طول قالب به فواصل ۰/۱ برای حسگر در مساله فوق در نظر گرفته شده و دماهای ثبت شده در این نقاط به همراه روش‌های معکوس توصیف شده برای بازگردانی شار حرارتی مورد استفاده قرار گرفته است. نمونه‌ای از دماهای اندازه‌گیری شده با اعمال شار مثلثی و پله‌ای در شکل (۶-۱۰ الف و ب) نمایش داده شده است. شکل‌های (۶-۱۱ الف) و (۶-۱۲ الف) نشان دهنده شار حرارتی بدست آمده برای موقعیت‌های مختلف حسگر بوده و بیانگر این مطلب است که با فاصله گرفتن حسگر از مرز فعال یعنی مرزی که شار حرارتی روی آن اعمال می‌شود، دقت نتایج برای بازگرداندن هر دو نوع شار مثلثی و پله‌ای کاهش می‌یابد که این مطلب برای شار حرارتی پله‌ای به دلیل گرادیان شدیدی که در شکل این شار وجود دارد شدیدتر است. این مطلب با مقایسه مقدار خطای متوسط در جداول (۶-۴) و (۶-۵) تایید می‌شود. با توجه به نتایج حاصل درمی‌یابیم که برای مساله کنترل سطح مشترک، هرچه حسگر از مرز فعال دورتر شود خطای محاسبه بیشتر شده و بنابر این انتظار می‌رود که دقت محاسبات نسبت به حالتی که حسگر ثابت باشد کاهش یابد.

همانطور که در شکل‌های (۶-۱۳) و (۶-۱۴) مشاهده می‌شود، روش متریک متغیر با سرعت چشم‌گیری نسبت به روش گرادیان مزدوج در مکان‌های مختلف به جواب همگرا می‌شود. البته ملاحظه می‌شود که مقدار خطای متوسط  $CGM$  از یک  $X_m$  به بعد، از مقدار خطای متوسط  $VMM$  کمتر می‌شود. علت این موضوع را می‌توان در شکل‌های (۶-۱۱ ب و ج) و (۶-۱۲ ب و ج) دید. ملاحظه می‌شود که روش گرادیان مزدوج برخلاف روش متریک متغیر (که همواره به سمت دقت‌های پایین‌تر می‌رود)، تعداد تکرارهایی که در یک بازه از دقت‌ها انجام می‌دهد زیاد است. البته با دقت در مقادیر درصد خطا، این اختلاف کمتر از ۰,۵ درصد می‌باشد که قابل چشم‌پوشی است.





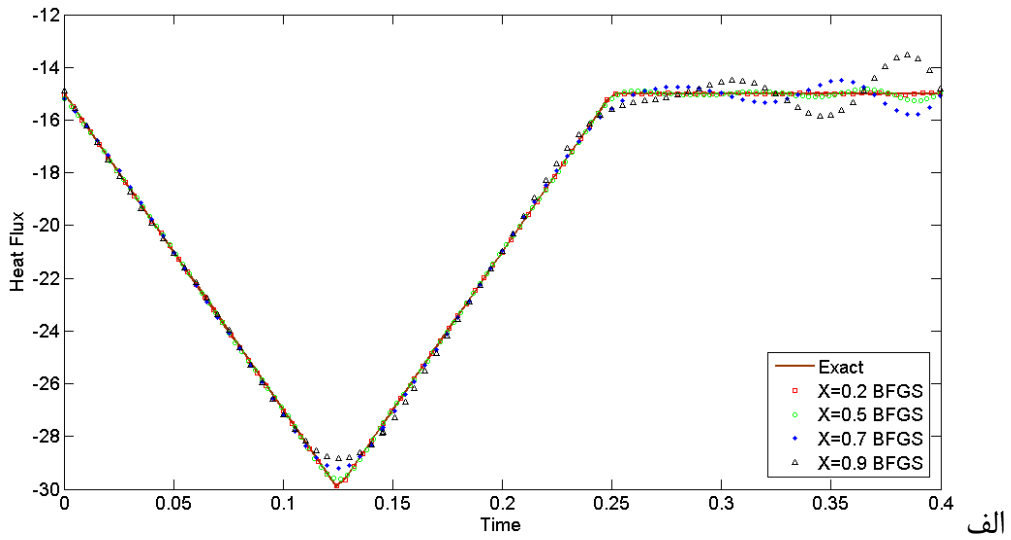
الف



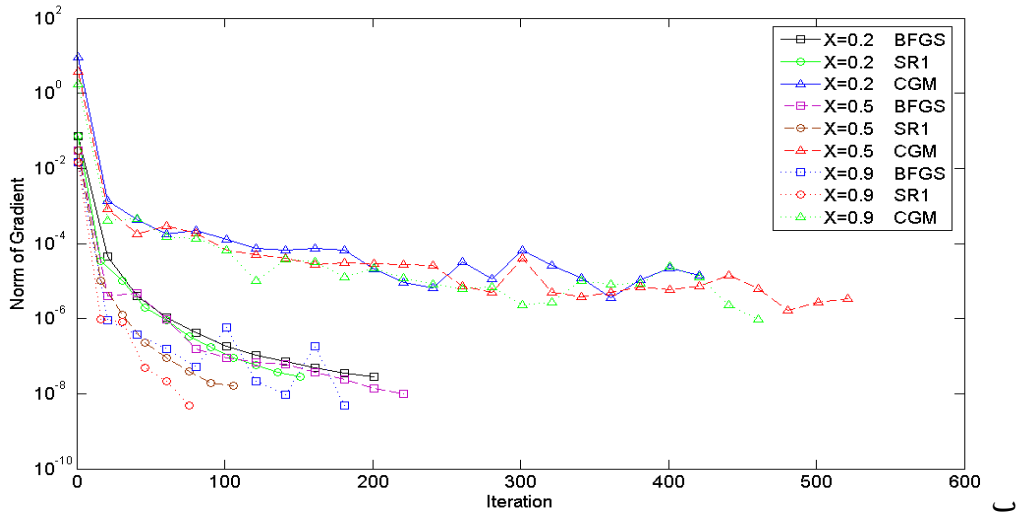
ب

شکل (۶-۱۰) دماهای ثبت شده در موقعیت‌های متفاوت حسگر برای الف) شار مثلثی و ب) شار پله‌ای

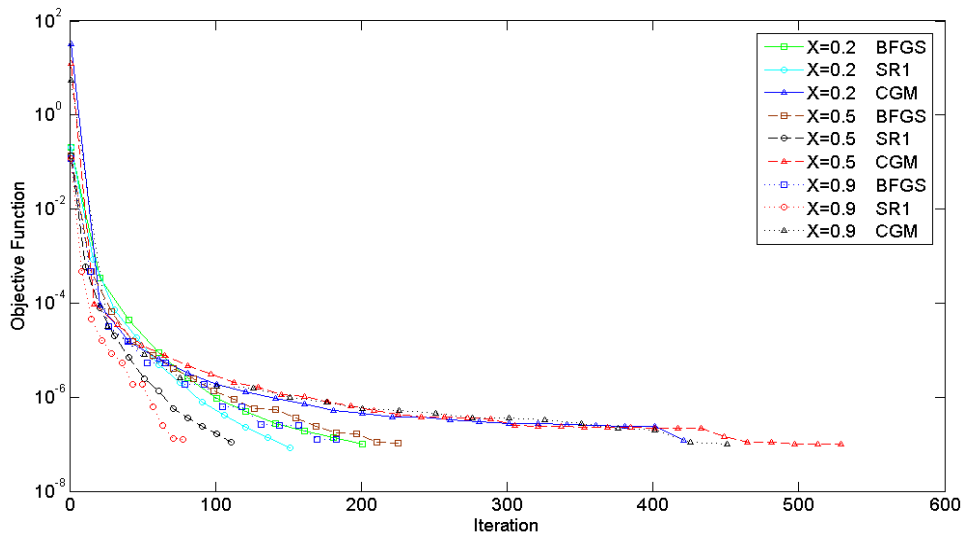
در اینجا نیز روش متریک متغیر حساسیت کمتر خود را از نظر تکرار نسبت به تغییر مکان حسگر نشان می‌دهد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در شرایط سخت از دید روش معکوس (مانند دور شدن حسگر از مرز فعال)  $VMM$  کارایی به مراتب بالایی از خود نشان می‌دهد.



الف

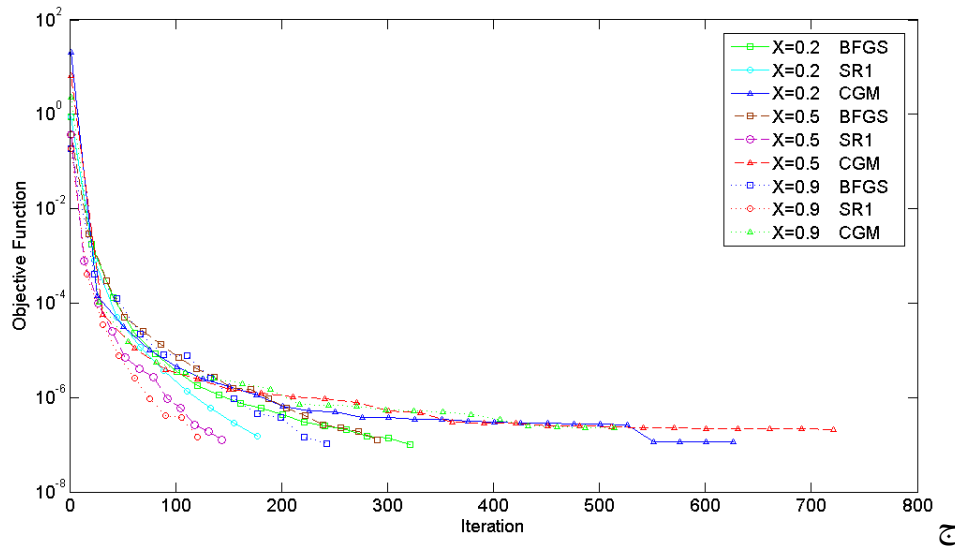
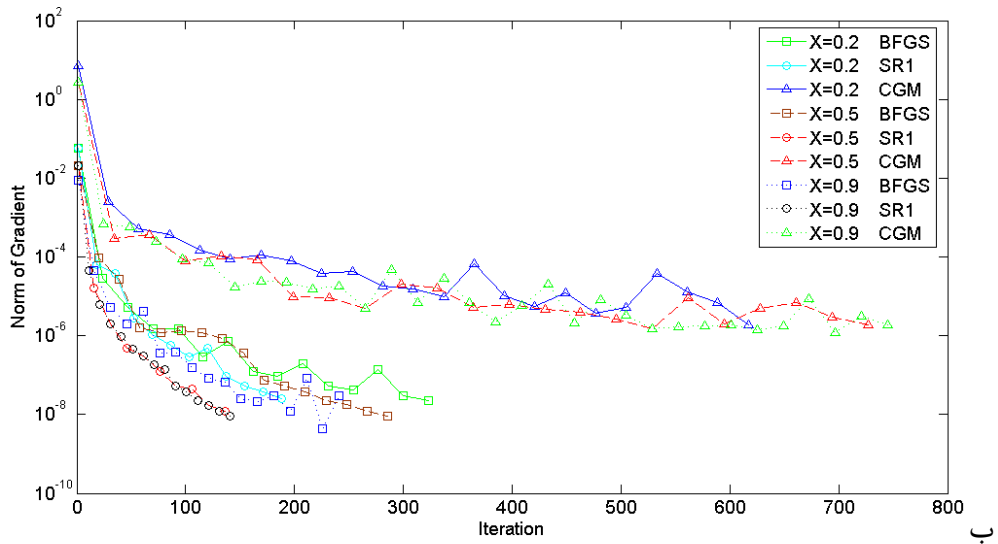
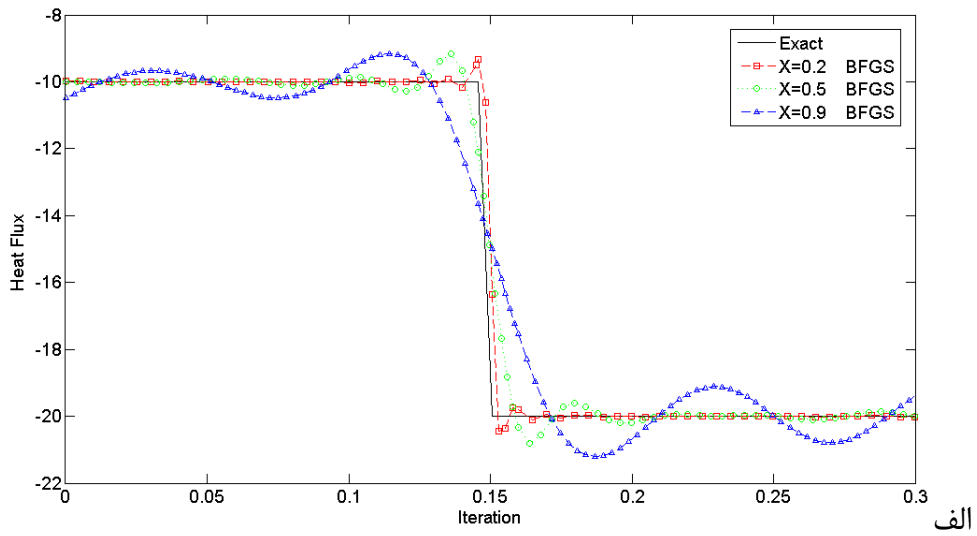


ب



ج

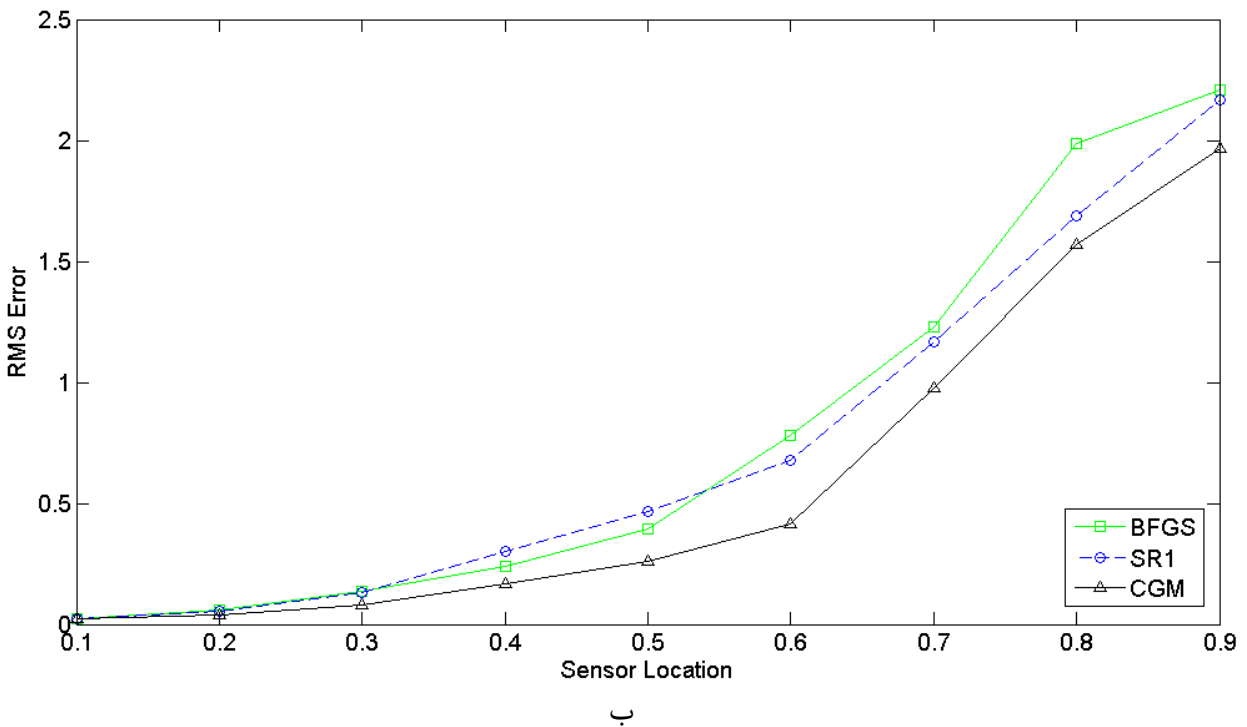
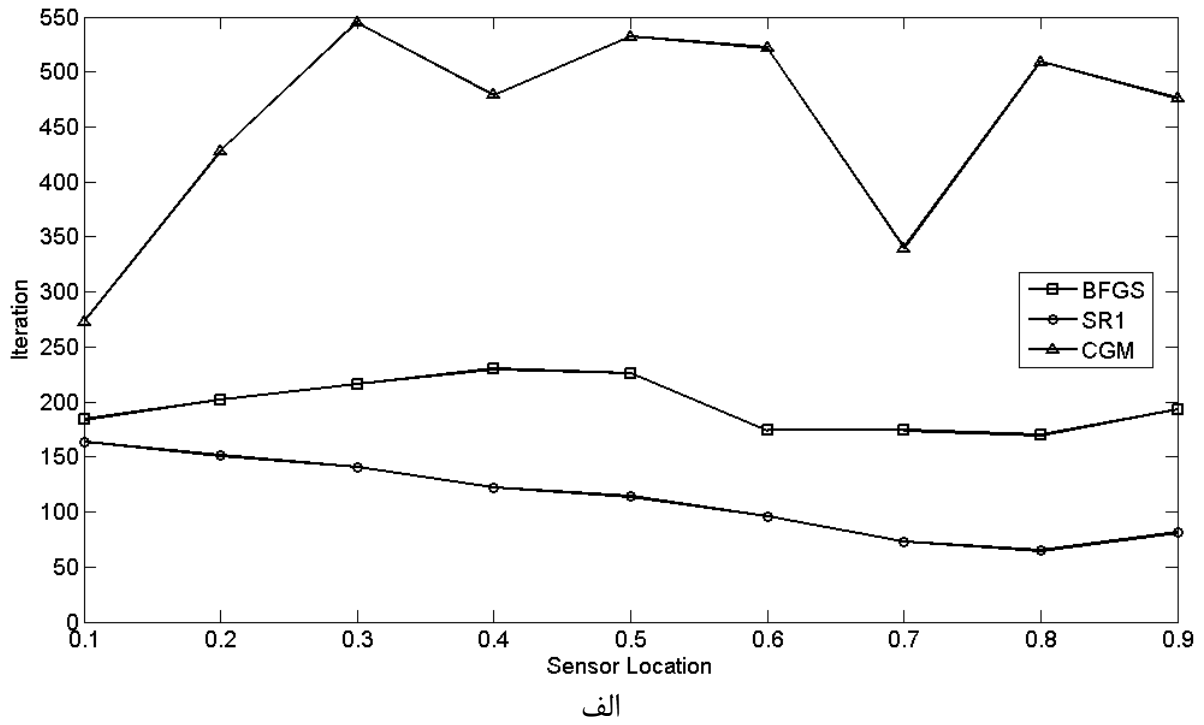
شکل (۶-۱۱) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای مکان‌های متفاوت حسگر شار مثلثی



شکل (۶-۱۲) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادینان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای مکان‌های متفاوت حسگر شار پله ای

جدول (۴-۶): مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای مکان‌های حسگر متفاوت شار مثلثی

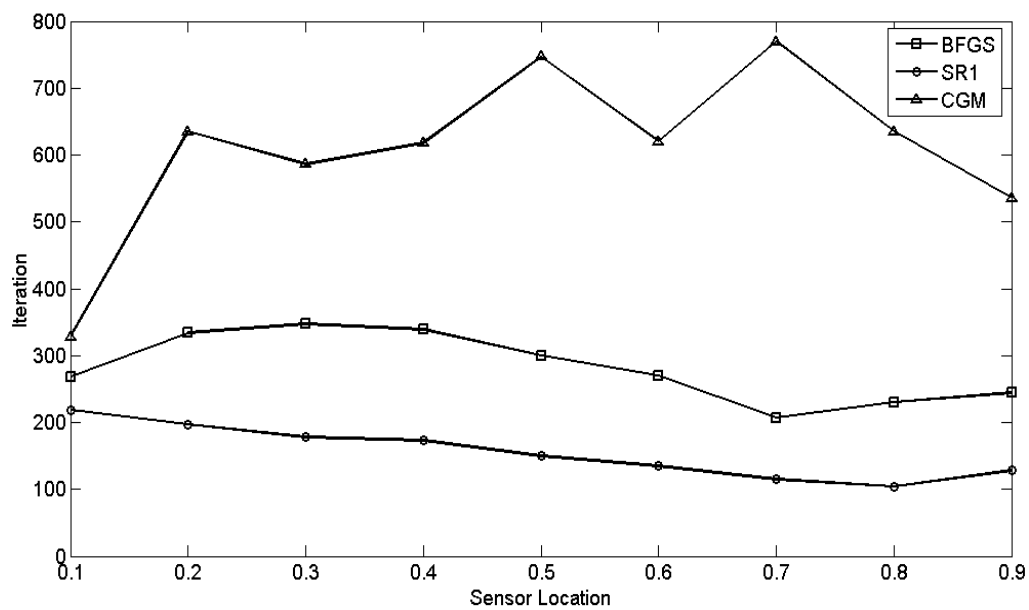
$X_m$	Method	Version	Objective Function	RMS Error(%)	Iteration
0.1	VMM	BFGS	9.7950e-008	0.0230	184
		SR 1	9.7940e-008	0.0229	164
	CGM	Polak-Ribiere	9.9770e-008	0.0253	273
0.2	VMM	BFGS	9.9696e-008	0.0582	202
		SR 1	8.5484e-008	0.0567	151
	CGM	Polak-Ribiere	9.9680e-008	0.0402	428
0.3	VMM	BFGS	8.7417e-008	0.1363	216
		SR 1	8.9060e-008	0.1314	141
	CGM	Polak-Ribiere	9.9143e-008	0.0800	545
0.4	VMM	BFGS	9.1064e-008	0.2380	230
		SR 1	9.4356e-008	0.3004	122
	CGM	Polak-Ribiere	1.7462e-007	0.1684	479
0.5	VMM	BFGS	9.0171e-008	0.3953	226
		SR 1	7.5986e-008	0.4642	114
	CGM	Polak-Ribiere	9.9770e-008	0.2583	532
0.6	VMM	BFGS	8.6433e-008	0.7827	174
		SR 1	8.7703e-008	0.6788	96
	CGM	Polak-Ribiere	9.2604e-008	0.4157	522
0.7	VMM	BFGS	9.2759e-008	1.2303	174
		SR 1	8.9735e-008	1.1691	73
	CGM	Polak-Ribiere	9.8789e-008	0.9792	340
0.8	VMM	BFGS	9.3043e-008	1.9885	170
		SR 1	9.9503e-008	1.6894	65
	CGM	Polak-Ribiere	9.7789e-008	1.5686	509
0.9	VMM	BFGS	7.4879e-008	2.2095	193
		SR 1	5.4807e-008	2.1653	81
	CGM	Polak-Ribiere	9.8870e-008	1.9665	476



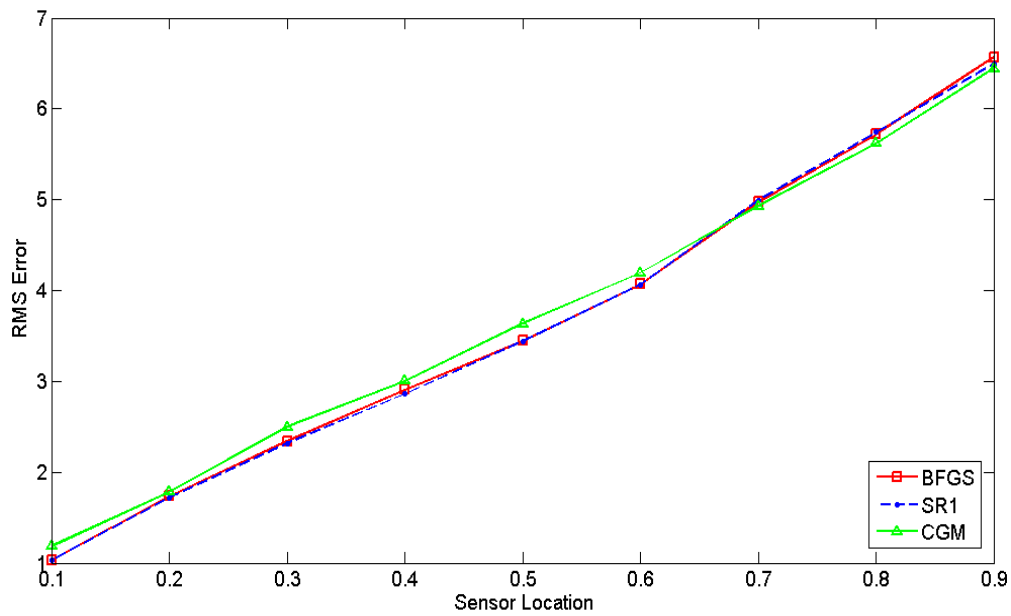
شکل (۶-۱۳) مقایسه نتایج جدول (۶-۴) شار حرارتی مثلثی: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS

جدول (۵-۶): مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای مکان‌های حسگر متفاوت شار پله‌ای

$X_m$	Method	Version	Objective Function	RMS Error(%)	Iteration
0.1	VMM	BFGS	9.6589e-008	1.0283	268
		SR 1	9.9498e-008	1.0304	219
	CGM	Polak-Ribiere	2.4227e-007	1.1852	328
0.2	VMM	BFGS	9.7126e-008	1.7357	334
		SR 1	8.6698e-008	1.7154	197
	CGM	Polak-Ribiere	1.1348e-007	1.7845	635
0.3	VMM	BFGS	9.9961e-008	2.3432	347
		SR 1	8.9098e-008	2.3184	178
	CGM	Polak-Ribiere	2.0654e-007	2.5021	586
0.4	VMM	BFGS	9.8810e-008	2.9099	339
		SR 1	8.0173e-008	2.8634	173
	CGM	Polak-Ribiere	1.5009e-007	3.0081	618
0.5	VMM	BFGS	8.8537e-008	3.4491	300
		SR 1	8.6753e-008	3.4439	150
	CGM	Polak-Ribiere	2.1186e-007	3.6393	747
0.6	VMM	BFGS	8.6041e-008	4.0681	270
		SR 1	8.6023e-008	4.0625	135
	CGM	Polak-Ribiere	1.5817e-007	4.1955	620
0.7	VMM	BFGS	9.2576e-008	4.9739	208
		SR 1	8.2502e-008	4.9926	115
	CGM	Polak-Ribiere	1.3752e-007	4.9294	770
0.8	VMM	BFGS	9.6137e-008	5.7190	230
		SR 1	7.2985e-008	5.7420	104
	CGM	Polak-Ribiere	1.0519e-007	5.6233	635
0.9	VMM	BFGS	9.2103e-008	6.5686	244
		SR 1	9.3354e-008	6.4979	128
	CGM	Polak-Ribiere	9.9410e-008	6.4447	536



الف



ب

شکل (۶-۱۴) مقایسه نتایج جدول (۶-۵) شار حرارتی پله‌ای: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS

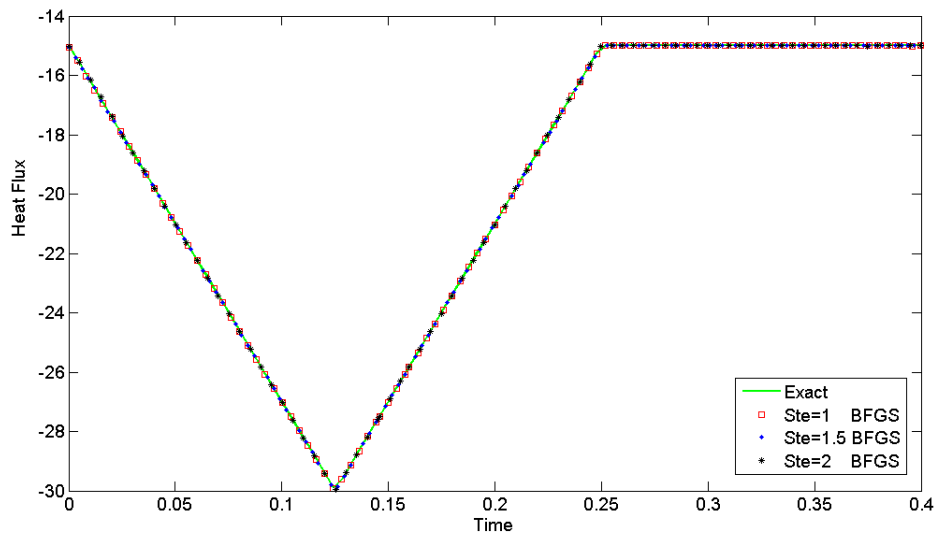
## ۴-۲-۶ بررسی اثر عدد استفان

یکی از شرایط مطلوب حل مسائل معکوس به ویژه در انجماد مواد خالص، عملکرد مناسب روش و الگوریتم استفاده شده برای مواد گوناگون با خواص مختلف می‌باشد. به منظور بررسی عدم وابستگی تحلیل مساله به نوع و جنس ماده مورد بررسی، مساله مذکور برای مواد مختلف در یک گستره مشخص از اعداد استفان بررسی شده است. چرا که با عوض شدن جنس و ماده تحت انجماد فقط عدد استفان تغییر می‌کند. عدد استفان شکل بدون بعد گرمای نهان آزاد شده در طی فرآیند انجماد است. شار حرارتی بدست آمده از حل معکوس برای گستره‌ای از اعداد استفان در شکل‌های (۶-۱۸) و (۶-۱۹) آورده شده است. نتایج حاصل موید این مطلب است که روش‌های استفاده شده برای حل مساله معکوس چه از نظر روند همگرایی الگوریتم بهینه‌سازی و چه از نظر شار حرارتی محاسبه شده به جنس ماده وابستگی زیادی ندارد. این مطلب را می‌توان در جداول (۶-۶) و (۶-۷) که نتایج آنها بترتیب در شکل‌های (۶-۱۷) و (۶-۱۸) مقایسه شده‌اند، ملاحظه نمود.

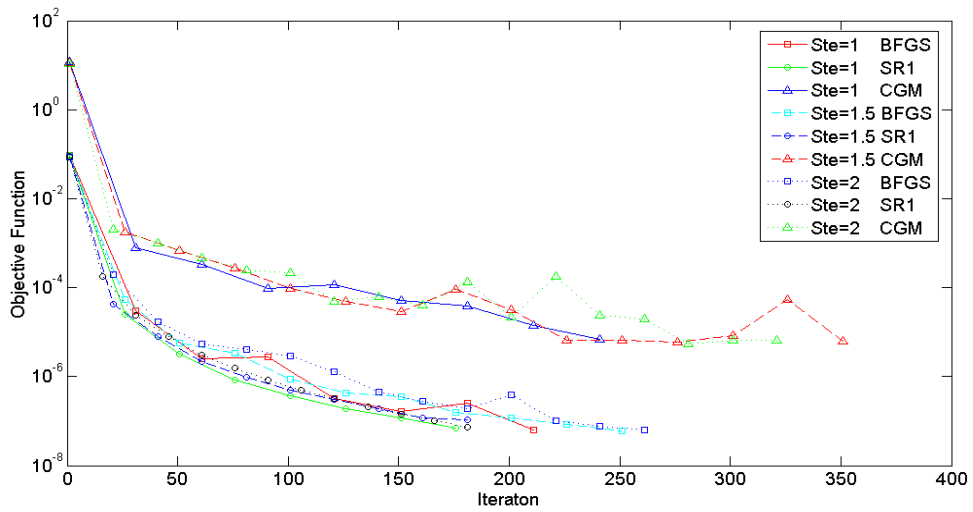
جدول (۶-۶): مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای اعداد استفان مختلف شار مثلثی

Ste	Method	Version	Objective Function	RMS Error(%)	Iteration
0.5	VMM	BFGS	9.7950e-008	0.0230	184
		SR 1	9.7940e-008	0.0229	164
	CGM	Polak-Ribiere	9.9770e-008	0.0253	273
1	VMM	BFGS	9.6765e-008	0.0340	220
		SR 1	9.6987e-008	0.0343	187
	CGM	Polak-Ribiere	2.2419e-007	0.0416	255
1.5	VMM	BFGS	9.7233e-008	0.0503	264
		SR 1	9.5466e-008	0.0502	198
	CGM	Polak-Ribiere	1.2945e-007	0.0479	359
2	VMM	BFGS	9.4445e-008	0.0732	270
		SR 1	9.4234e-008	0.0731	195
	CGM	Polak-Ribiere	2.0053e-007	0.0739	325

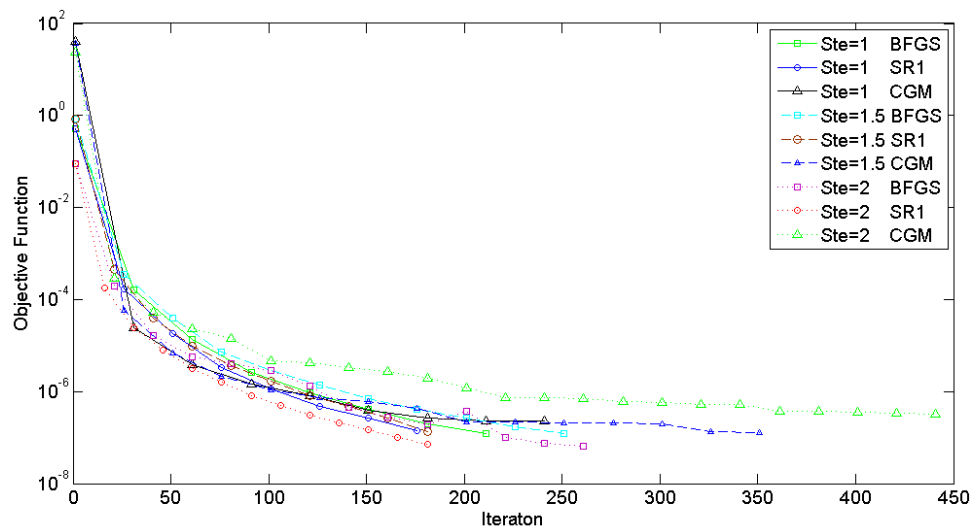




الف

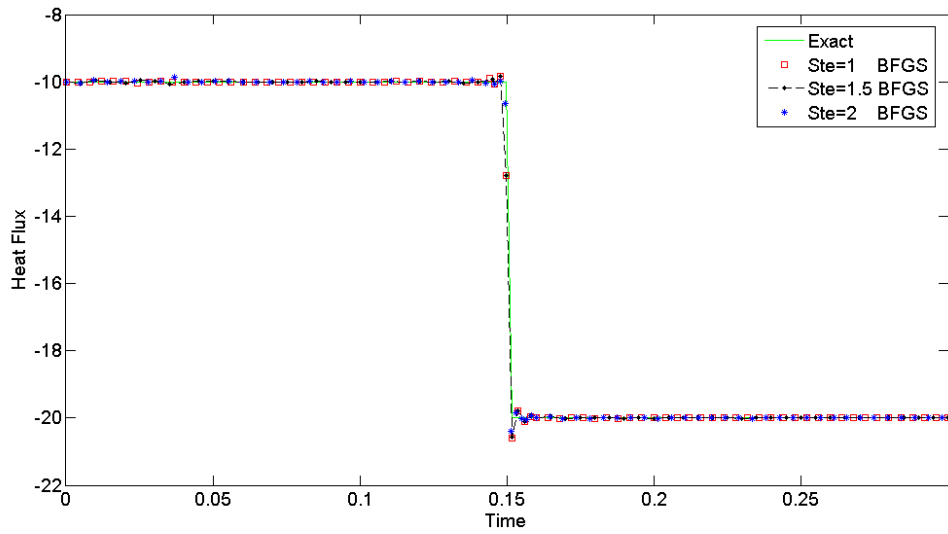


ب

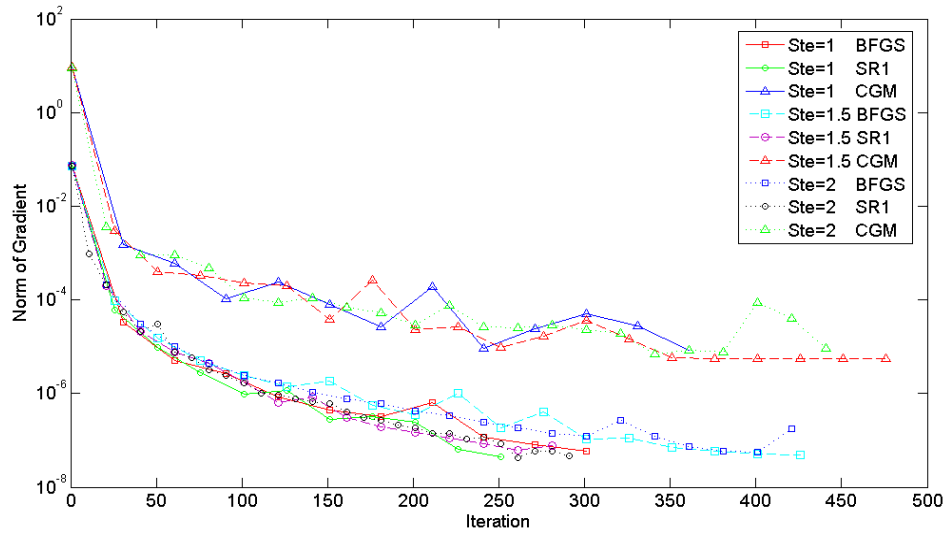


ج

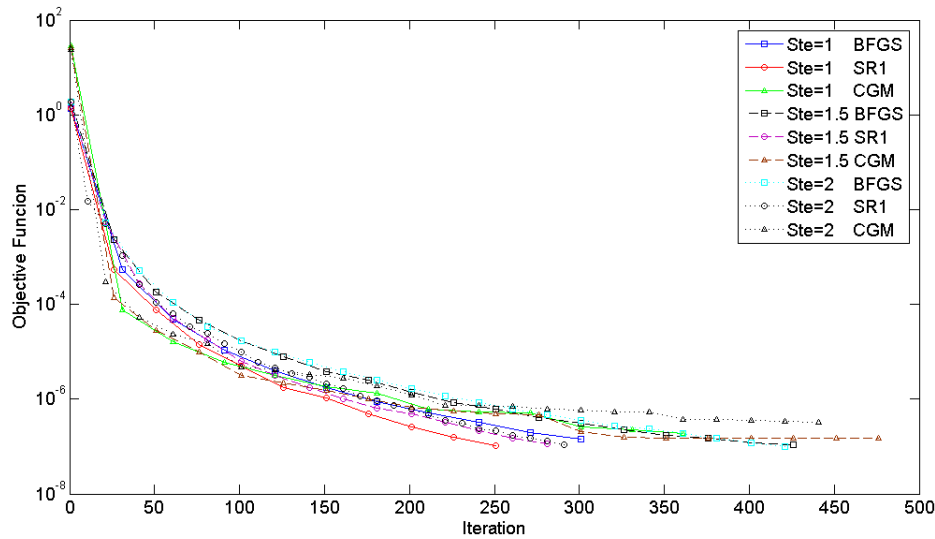
شکل (۶-۱۵) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادیان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای مواد مختلف شار مثلثی



الف



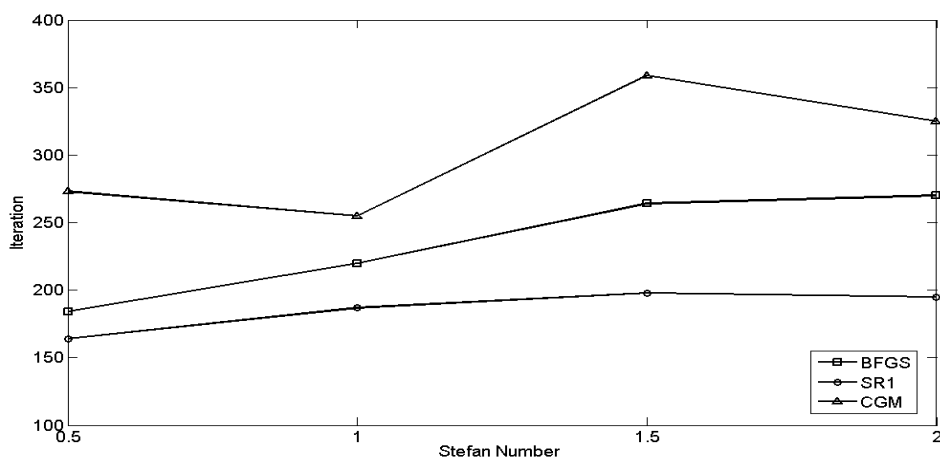
ب



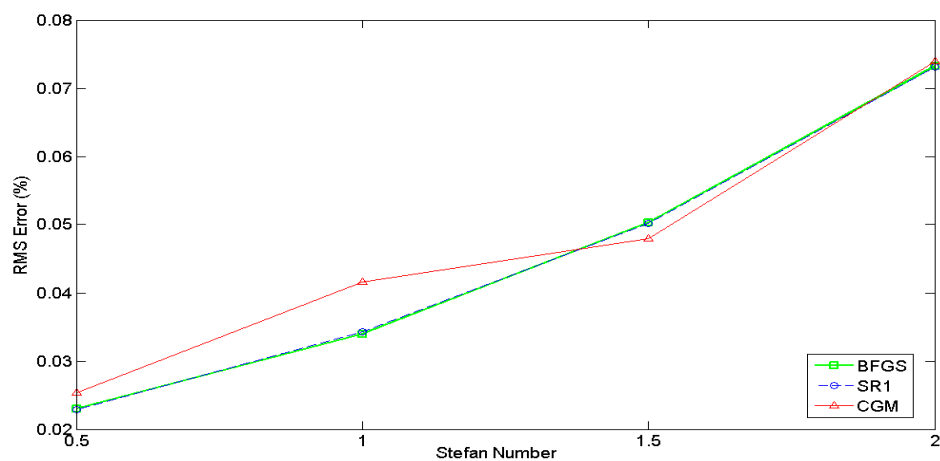
ج

شکل (۶-۱۶) الف) شار حرارتی، ب) نرخ کاهش نرم گرادینان و ج) نرخ کاهش تابع هدف برای مواد مختلف شار پله ای

در این قسمت نیز می توان کارایی بالاتر روش متریک متغیر را نسبت به روش گرادیان مزدوج مشاهده نمود. شکل های (۶-۱۸ الف) و (۶-۱۹ الف) سریعتر بودن نسخه های VMM نسبت به CGM را نشان می-دهند. نسخه SR1 در هر دو شار حرارتی، بخصوص شار حرارتی پله ای بسیار سریعتر از دو روش دیگر به نقطه کمینه می رسد.



الف

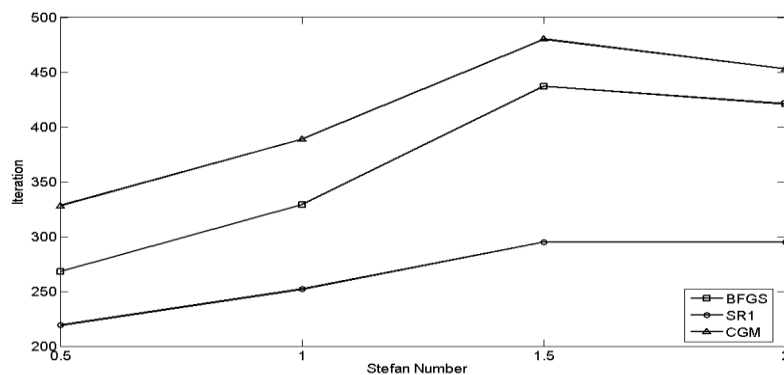


ب

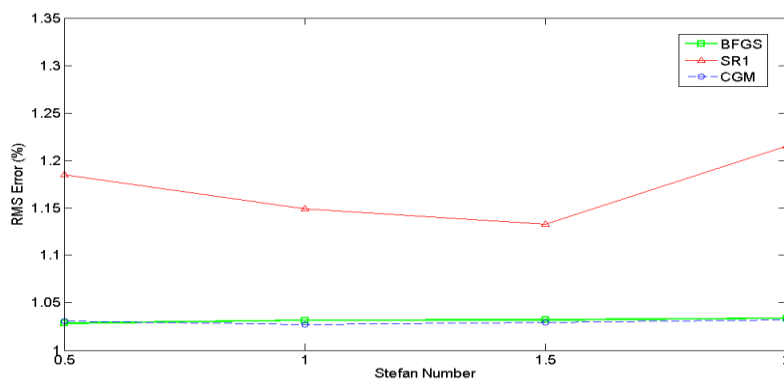
شکل (۶-۱۷) مقایسه نتایج جدول (۶-۶) شار حرارتی مثلثی: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS

جدول (۶-۷): مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز برای اعداد استفان مختلف شار پله ای

Ste	Method	Version	Objective Function	RMS Error(%)	Iteration
0.5	VMM	BFGS	9.6589e-008	1.0283	268
		SR 1	9.9498e-008	1.0304	219
	CGM	Polak-Ribiere	2.4227e-007	1.1852	328
1	VMM	BFGS	9.8021e-008	1.0316	329
		SR 1	9.4401e-008	1.0272	252
	CGM	Polak-Ribiere	1.8871e-007	1.1488	389
1.5	VMM	BFGS	9.8504e-008	1.0320	437
		SR 1	9.6488e-008	1.0295	295
	CGM	Polak-Ribiere	1.5314e-007	1.1328	480
2	VMM	BFGS	9.9327e-008	1.0336	421
		SR 1	9.8167e-008	1.0319	295
	CGM	Polak-Ribiere	3.2644e-007	1.2153	453



الف



ب

شکل (۶-۱۸) مقایسه نتایج جدول (۶-۷) شار حرارتی پله ای: الف) تعداد تکرارها ب) مقدار درصد خطای RMS

## ۵-۲-۶ اثر میزان خطا در داده‌های ورودی

یکی از مهمترین مسائل مربوط به مسائل معکوس، پایداری و یکتایی جواب‌ها برای حالتی است که اغتشاش یا خطا در داده‌های ورودی وجود داشته باشد. در راستای بررسی این اثر، داده‌های ورودی یا همان دمای اندازه‌گیری شده در موقیعت حسگر با یک مقدار خطای اندازه‌گیری مصنوعی  $\omega$  حول مقادیر اندازه‌گیری شده مطابق رابطه (۴-۶) نوسان داده می‌شوند.

$$T_m = T_m^{ex} + \sigma\omega \quad (۴-۶)$$

که در رابطه فوق،  $T_m^{ex}$  دمای اندازه‌گیری شده بدون خطای اندازه‌گیری،  $\sigma$  انحراف معیار خطاهای اندازه‌گیری هستند و  $\omega$  از یک توزیع نرمال با متوسط صفر و واریانس یک تولید می‌شود. نمونه‌ای از دمای اندازه‌گیری شده به همراه مقدار نوسان یافته آن با  $\sigma = 0.3$  که حدود ۸-۱۲٪ خطا در داده‌های اندازه‌گیری شده می‌باشد در شکل (۶-۱۹) نشان داده شده است.

در حالت وجود خطا در داده‌های ورودی، علیرغم کاهش مقدار تابع هدف با افزایش تکرارها، کیفیت تخمین شار حرارتی ورودی با افزایش تکرارها کاهش می‌یابد. لذا ضروری است که محاسبات در یک تکرار مشخص با یک مقدار  $\varepsilon$  مشخص خاتمه یابد که این مقدار با توجه به اصل اختلاف<sup>۱</sup> در نظر گرفته می‌شود. این اصل پیشنهاد می‌کند که فرآیند بهینه‌سازی هنگامی خاتمه یابد که قدر مطلق اختلاف بین دمای مطلوب و محاسبه شده برابر انحراف معیار خطای داده‌های ورودی شود [۳۸].

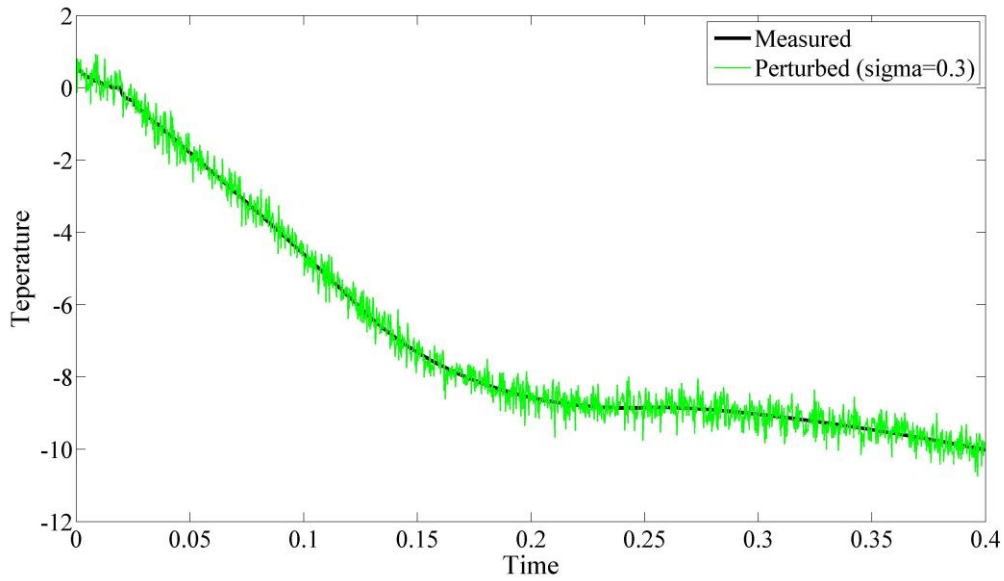
$$|T(x_s, t; q_s) - T_m(x_s, t)| \approx \sigma \quad (۵-۶)$$

با جایگزین کردن رابطه (۵-۶) در رابطه مربوط به تابع هدف خواهیم داشت:

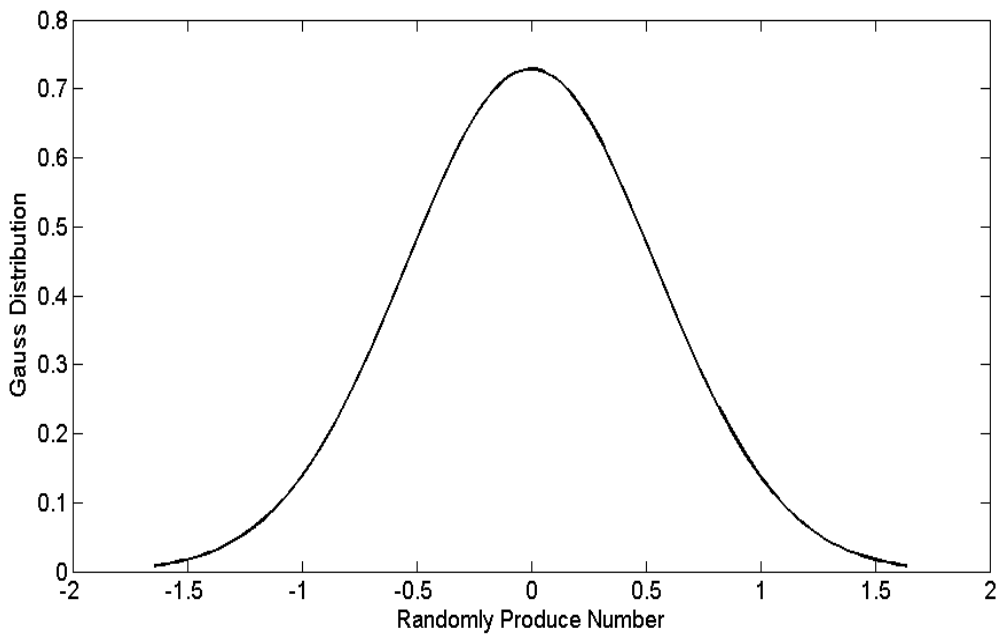
$$\varepsilon \approx \sigma^2 t_f \quad (۶-۶)$$

رابطه (۶-۶) در صورت وجود چندین حسگر به شکل رابطه (۶-۷) تغییر خواهد یافت.

<sup>۱</sup> Discrepancy Principle



الف



ب

شکل (۶-۱۹) الف) دماهای ثبت شده و اغتشاش یافته برای شار مثلثی و ب) توزیع نرمال گوسی

$$\varepsilon \approx K \sigma^2 t_f \quad (7-6)$$

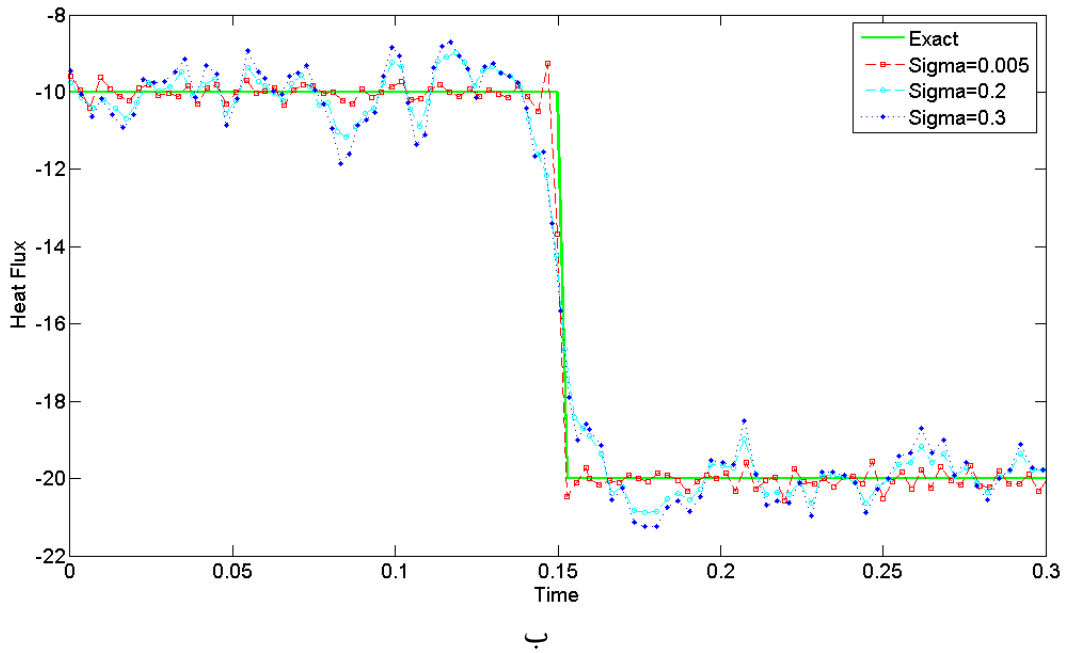
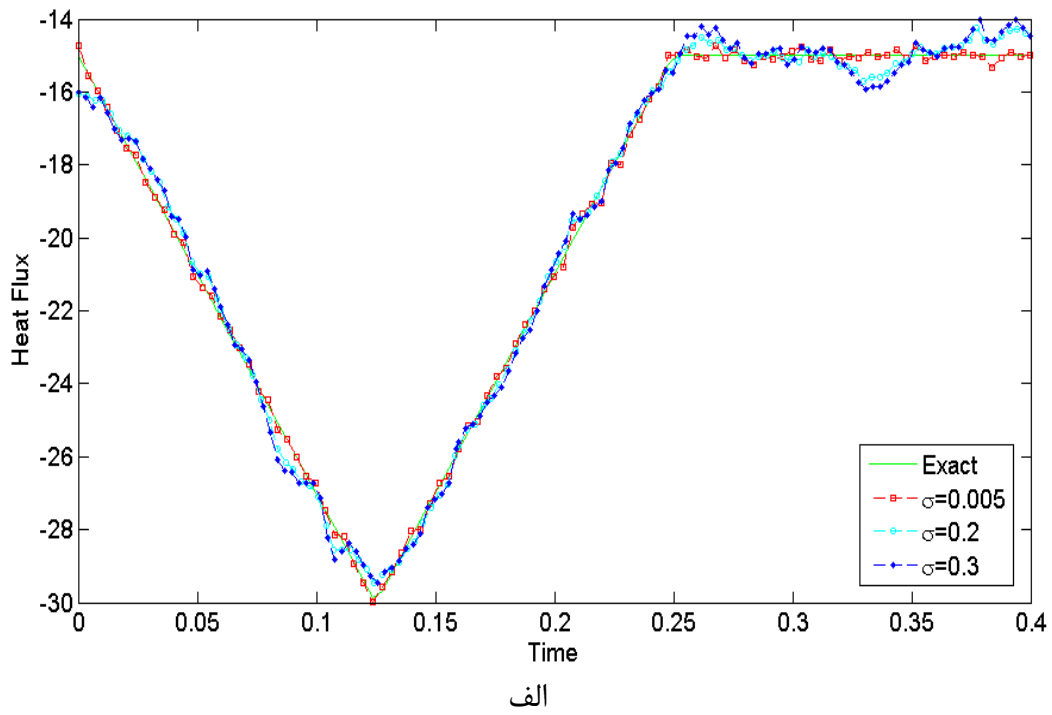
در رابطه فوق  $K$  تعداد حسگرهای موجود می باشد.

در این کار مقادیر متفاوتی از انحراف معیار برای داده های ورودی در نظر گرفته شده و نتایج حاصل از تخمین هر دو شار حرارتی توسط نسخه  $BFGS$  روش متریک متغیر، در شکل (۶-۲۰) برای مقادیر مختلف انحراف معیار نمایش داده شده است. علاوه بر این مقادیر خطا به همراه مقدار تابع هدف در آخرین تکرار برای شار حرارتی مثلثی و پله‌ای بترتیب در جداول (۶-۸) و (۶-۹) درج شده است.

جدول (۶-۸) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز در حالت اغتشاش در داده های ورودی شار

مثلثی

$\sigma$	Method	Version	Objective Function	RMS Error(%)
0	VMM	BFGS	9.6589e-008	1.0283
		SR 1	9.9498e-008	1.0304
	CGM	Polak-Ribiere	2.4227e-007	1.1852
0.002	VMM	BFGS	1.9948e-006	0.6218
		SR 1	1.9895e-006	0.6224
	CGM	Polak-Ribiere	1.9989e-006	0.6177
0.005	VMM	BFGS	1.2432e-005	0.8208
		SR 1	1.2425e-005	0.8170
	CGM	Polak-Ribiere	1.2480e-005	1.0486
0.1	VMM	BFGS	0.0049	1.9264
		SR 1	0.0049	1.8607
	CGM	Polak-Ribiere	0.0050	2.2127
0.2	VMM	BFGS	0.0200	1.9112
		SR 1	0.0200	1.8877
	CGM	Polak-Ribiere	0.0200	2.0964
0.3	VMM	BFGS	0.0444	2.7614
		SR 1	0.0444	2.7705
	CGM	Polak-Ribiere	0.0445	3.1589



شکل (۶-۲۰) باز گردانی شار حرارتی به ازای مقادیر مختلف اغتشاش در ورودی الف) شار مثلی و ب) شار پله ای



جدول (۶-۹) مقادیر تابع هدف، متوسط خطا و تکرارهای مورد نیاز در حالت اغتشاش در داده‌های ورودی شار

پله‌ای

$\sigma$	Method	Version	Objective Function	RMS Error(%)
0	VMM	BFGS	9.6589e-008	1.0283
		SR 1	9.9498e-008	1.0304
	CGM	Polak-Ribiere	2.4227e-007	1.1852
0.002	VMM	BFGS	1.9927e-006	1.4781
		SR 1	1.9975e-006	1.4787
	CGM	Polak-Ribiere	1.9910e-006	1.5024
0.005	VMM	BFGS	1.2497e-005	1.8561
		SR 1	1.2494e-005	1.8566
	CGM	Polak-Ribiere	1.2496e-005	2.0044
0.1	VMM	BFGS	0.0050	3.5473
		SR 1	0.0050	3.5994
	CGM	Polak-Ribiere	0.0050	3.9417
0.2	VMM	BFGS	0.0200	4.2626
		SR 1	0.0200	4.2674
	CGM	Polak-Ribiere	0.0199	4.7099
0.3	VMM	BFGS	0.0444	5.1401
		SR 1	0.0444	5.1509
	CGM	Polak-Ribiere	0.0450	5.4916

مطابق آنچه در این جداول و شکل‌ها ملاحظه می‌شود، این روش‌ها از دقت بسیار خوبی حتی با وجود میزان بالای خطا در داده‌های ورودی (حدوداً ۱۲٪) برخوردار بوده و طبیعتاً با افزایش این مقدار خطا، از دقت حل مساله به میزان قابل توجهی کاسته می‌شود. دلیل این پدیده طبیعت ناهنجار مسائل معکوس است که نسبت به اغتشاش داده‌های ورودی حساس بوده و یک اغتشاش ورودی کوچک می‌تواند منجر به ایجاد نوسانات بزرگی در جواب‌های تولید شده گردد. البته نسخه‌های روش متریک متغیر دقت بهتری نسبت به روش گرادیان مزدوج دارند.

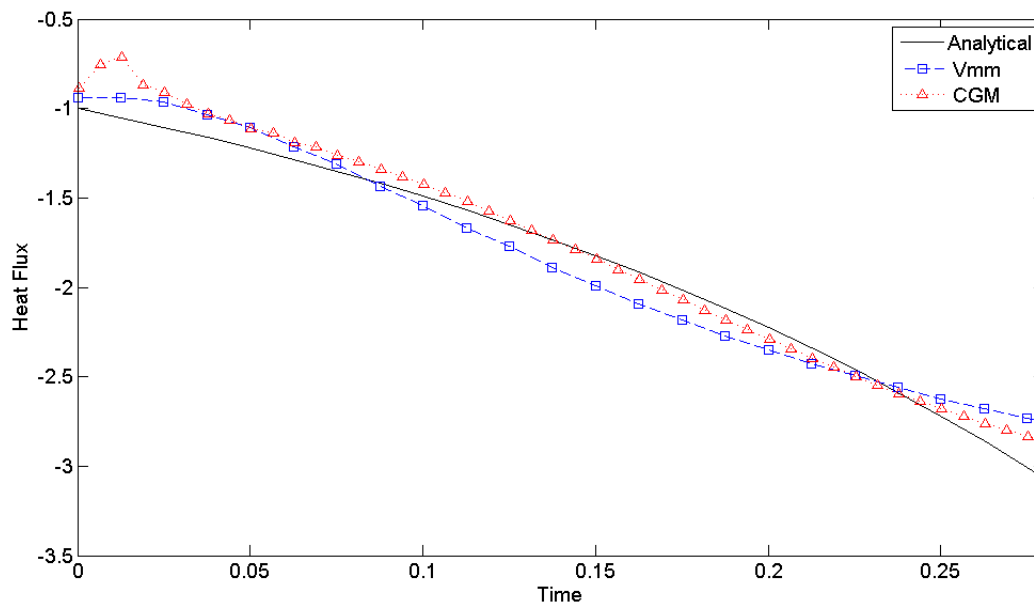
### ۳-۶ کنترل سرعت سطح مشترک

پس از تایید صحت عملکرد روش استفاده شده نوبت به کنترل حرکت سطح مشترک یا به عبارتی سرعت آن می رسد. در این حالت نیز فرض می شود که ابتدا قالب از ماده‌ای مذاب با دمای یکنواخت  $T_i$  پر شده و در لحظه  $t = 0$  ناگهان در معرض اعمال شار حرارتی قرار می‌گیرد. دمای بدون بعدی که در آن تغییر فاز رخ می‌دهد (دمای ذوب)  $T_f = 0$  می‌باشد که این دما در حقیقت همان دمای مطلوب در موقعیت حسگر یا همان سطح مشترک جامد-مایع می‌باشد. به عبارت دیگر بدلیل اینکه دما در سطح مشترکی که دو فاز را از هم جدا می‌کند برابر با  $T_f$  است کافی است برای کنترل حرکت این سطح مشترک، دما در مکان‌های مطلوب سطح مشترک برابر  $T_f$  شود. در حقیقت می‌توان موقعیت مطلوب سطح مشترک را به عنوان موقعیت قرارگیری حسگر دانست که دمای اندازه‌گیری شده یا مطلوب آن دمای ثابت  $T_f$  است. به منظور ارزیابی صحت نتیجه بدست آمده در این حالت، جواب بدست آمده برای شرایط خاصی که دارای جواب تحلیلی است مقایسه خواهد شد. برای مواد خالص حل تحلیلی در حالتی که عدد استفان ۰٫۵ و سرعت سطح مشترک ۲ باشد بصورت زیر در مرجع [۴۱] ارائه شده است:

$$q(0,t) = -0.5 \times \exp(4t) \quad (۸-۶)$$

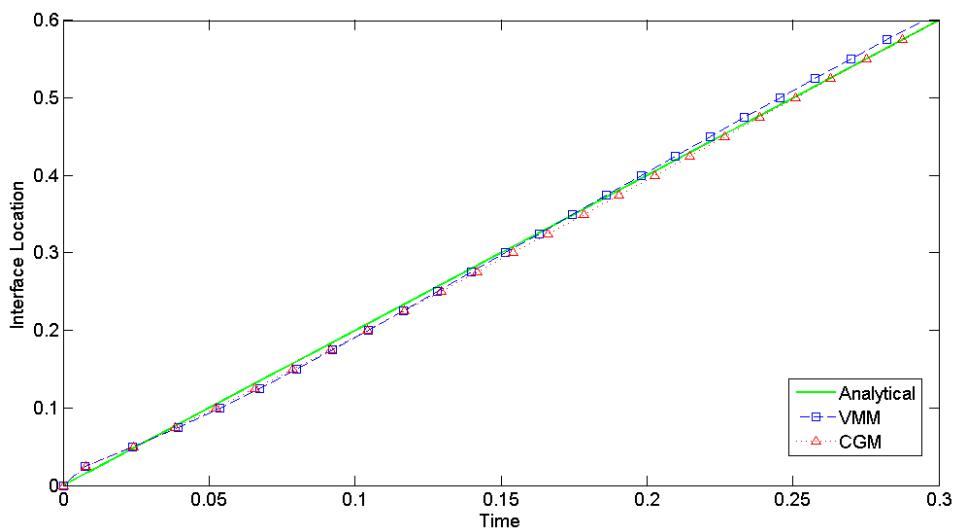
شکل (۶-۲۱) مقایسه بین شار تحلیلی و شار تخمین زده شده توسط دو روش متریک متغیر و گرادیان مزدوج را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که هر دو روش متریک متغیر و گرادیان مزدوج دقت خوبی در تخمین این شار مرزی دارند، جز در زمان‌های اولیه که این پدیده ممکن است به دو دلیل رخ دهد. اولین عامل مربوط می‌شود به توزیع دمای اولیه مذاب درون قالب و دومین دلیل مربوط می‌شود به طبیعت مسائل کنترلی است که در لحظات ابتدایی تطابق خوبی بین مقادیر مطلوب و محاسبه شده وجود ندارد. البته روش متریک متغیر توانسته تا حدودی از این خطا در لحظات ابتدایی بکاهد. درصد خطای RMS در

بازگردانی شار برای روش متریک متغیر ۳,۹۹ درصد و برای روش گرادیان مزدوج ۴,۲ درصد می باشد. تعداد تکرارهای مورد نیاز آنها نیز به ترتیب ۴ و ۱۳ تکرار و دقت محاسبات  $10^{-6}$  می باشد.



شکل (۶-۲۱) مقایسه شار بدست آمده با حل تحلیلی به منظور کنترل سرعت سطح مشترک برای مواد خالص

با اعمال شار حرارتی بدست آمده از تحلیل معکوس به عنوان شرایط مرزی برای مساله مستقیم و محاسبه توزیع دما و در نهایت موقعیت سطح مشترک، مشخص می شود که با اعمال این شار حرارتی سرعت مطلوب برای سطح مشترک یافته شده است. شکل (۶-۲۲) نشان دهنده موقعیت های مطلوب و محاسبه شده برای شرایط ذکر شده در بالا است که بیانگر دقت خوب روش متریک متغیر در کنترل سرعت سطح مشترک می باشد. بدلیل اینکه نتایج نسخه های متریک متغیر تفاوت چندانی نداشتند، تنها نتایج *BFGS* آورده شده است.



شکل (۶-۲۲) مقایسه مکان سطح مشترک در دو حالت مطلوب و محاسبه شده

## فصل هفتم

### نتیجه‌گیری و پیشنهادات

## ۷-۱ نتیجه گیری:

حل مساله معکوس انجماد ماده خالص با استفاده از روش متریک متغیر ارائه و نتایج آن با روش گرادیان مزدوج مقایسه گردید. در این تحقیق دو نسخه روش متریک متغیر (SR1-BFGS) به همراه یک نسخه روش گرادیان مزدوج (Polak-Ribiere) بکار گرفته شد. برای کاهش حجم محاسبات در حل مساله مستقیم بجای در نظر گرفتن دو فاز جداگانه مایع و جامد، از فرمول بندی آنتالپی استفاده شده است.

مساله معکوس ابتدا برای حالتی که حسگر ثابت باشد حل شده است. نحوه کار بدین ترتیب است که ابتدا با اعمال یک شار حرارتی مشخص در یکی از مرزها، دما در نقاط مشخصی از دامنه ثبت شده که دمای مطلوب نام دارد. از آنجا که هدف از حل معکوس در این حالت یافتن شار حرارتی مرزی است که باعث تولید این توزیع دما در دامنه است، تابع هدف بر مبنای اختلاف میان این دما و دمای محاسبه شده در این نقطه تعریف می‌شود. به منظور بهینه (کمینه) کردن تابع هدف از دو روش VMM و CGM استفاده شده است. در این قسمت دو شار حرارتی مثلثی و پله‌ای برای ارزیابی دقت این روش‌ها بکار برده شد.

پس از تایید اعتبار کد استفاده شده، مساله مربوط به کنترل سرعت و شکل سطح مشترک بررسی شده که در این حالت موقعیت حسگر ثابت نبوده و متحرک است. البته ذکر این نکته ضروری است که در این حالت، دماهای اندازه گیری شده وجود ندارند. در حالت کنترل سطح مشترک از این واقعیت فیزیکی استفاده شده که دما در سطح مشترک جامد- مایع بایستی دمای ذوب ماده باشد. لذا با معلوم بودن سرعت سطح مشترک جهت دستیابی به کیفیت مشخص ماده تحت انجماد، موقعیت سطح مشترک در هر زمان معلوم بوده و دما در این مکان‌های معلوم دمای ذوب می‌باشد. برای بررسی کارایی روش‌های بکار گرفته شده، نتایج بدست آمده در این حالت با نتایج حل تحلیلی ارزیابی شده است.

نتایج بدست آمده در حالتی که حسگر ثابت است، بصورت زیر می‌باشد:

- حل مساله معکوس با حدس‌های اولیه‌ی متفاوت: تمامی روش‌های بکار گرفته شده به ازای هر حدس اولیه‌ای برای هر دو شار حرارتی به جواب همگرا می‌گردند. اما انتخاب حدس اولیه‌ی مناسب می‌تواند تعداد تکرارها برای رسیدن به حالت بهینه را کاهش دهد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که وابستگی روش متریک متغیر به حدس اولیه کمتر از روش گرادیان مزدوج می‌باشد. معیار توقف در تمامی بررسی‌ها بر روی تابع هدف قرار داده شده است. بهمین دلیل در حدس اولیه‌ای که با مقدار شار حرارتی در زمان نهایی برابر است، روش گرادیان مزدوج سریعتر به جواب می‌رسد. اما اگر معیار توقف بر روی نرم گرادیان قرار داده شود، همواره VMM سریعتر از CGM نقطه کمینه را می‌یابد.

- اثر مکان قرارگرفتن حسگرها: نتایج نشان داد که با دور شدن حسگر از مرز فعال یعنی مرزی که شار حرارتی روی آن اعمال می‌شود، دقت بازگردانی شارهای حرارتی مثلی و پله‌ای برای هر دو روش تا حد قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. این کاهش برای شار حرارتی پله‌ای شدیدتر بوده و در دورترین حسگر دقت محاسبه تا حدود ۵٪ کاهش یافته است.

نکته‌ای که در این بررسی خیلی جلب توجه می‌کند، سرعت قابل ملاحظه‌ای است که نسخه‌های روش متریک متغیر نسبت به روش گرادیان مزدوج دارند. نسخه‌های VMM پایداری بسیار بالاتری از نظر تعداد تکرارها با دور شدن حسگر از مرز فعال دارند. از نظر درصد خطا اختلاف چندانی بین روش‌ها مشاهده نشد.

- عملکرد روش‌ها برای مواد مختلف: بررسی‌ها نشان داد که روش‌های بررسی شده برای طیف وسیعی از مواد خالص با اعداد استفان متفاوت قابل استفاده می‌باشد. مقایسه تعداد تکرارها بر سرعت بالاتر روش متریک متغیر نسبت به روش گرادیان مزدوج تاکید دارد. دقت VMM بهتر از CGM ارزیابی شد، اما اختلاف بین آنها قابل توجه نیست.

• ارزیابی کارایی روش‌ها در مقابل داده‌های دارای خطا: به منظور شبیه‌سازی واقعی‌تر مساله، دماهای اندازه‌گیری شده به صورت مصنوعی و تصادفی حول همان مقدار نوسان داده شد. نتایج نشان داد که هر دو روش متریک متغیر و گرادیان مزدوج پایداری خوبی در برابر اغتشاش در داده‌های ورودی دارند. البته دقت VMM بهتر از CGM ارزیابی شد.

یک نتیجه کلی که در تمامی بررسی‌ها به چشم می‌خورد سرعت بسیار خوب نسخه SR1 می‌باشد. البته سرعت بهتر این روش از قبل مورد انتظار بود.

در حالت کنترل سطح مشترک مواد خالص، نتایج بدست آمده با جواب تحلیلی موجود مقایسه شد. روش متریک متغیر با ۴ تکرار و روش گرادیان مزدوج با ۱۳ تکرار به نقطه کمینه همگرا شده‌اند. همچنین دقت این روش‌ها در بازگردانی شار حرارتی بترتیب ۳,۹۹ و ۴,۲ درصد می‌باشد. نتایج نشان داد که روش متریک متغیر با سرعت و دقت بهتری نسبت به روش گرادیان مزدوج عمل می‌کند.

## ۲-۷ پیشنهادات:

با توجه به مطالب ارائه شده در این پایان‌نامه، مواردی برای بهبود و ادامه این تحقیق به شرح ذیل پیشنهاد می‌شوند:

◀ کنترل شار حرارتی مرزی با استفاده از روش متریک متغیر برای انجماد آلیاژها.

◀ استفاده از روش متریک متغیر در کنترل سرعت مرز مایع و مرز جامد برای انجماد آلیاژها.



## پیوست الف:

الف-۱ حل مساله معکوس با استفاده از روش گرادیان مزدوج:

تابع هدف برای کنترل سرعت سطح مشترک بصورت زیر تعریف می شود:

$$f [q_s(t)] = \int_0^{t_f} [T_f - T(x_m, t; q_s(t))]^2 dt \quad (\text{الف-۱})$$

برای محاسبه شرط مرزی  $q_s(t)$  بوسیله روش گرادیان مزدوج، الگوریتم تکرار زیر به کار برده شده است.

$$q_s^{k+1}(t) = q_s^k(t) - \beta^k d^k(t) \quad t > 0 \quad (\text{الف-۲})$$

که بالانویس  $k$  مربوط به شماره تکرار می باشد و فرآیند تکرار با یک فرض اولیه شروع شده که این فرض  $q_s^0(t) = 0$  است.

جهت کاهش توسط رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$d^{k=0}(t) = -\nabla f [q_s^k(t)] \quad (\text{الف-۳})$$

$$d^k(t) = -\nabla f [q_s^k(t)] + \gamma^k d^{k-1}(t)$$

در رابطه بالا، ضریب مزدوج یا ضریب پیوستگی از عبارت (الف-۴) به شکل زیر بدست می آید.

$$\gamma^0 = 0$$

$$\gamma^k = \frac{\int_0^{t_f} \{ \nabla f [q_s^k(t)] - \nabla f [q_s^{k-1}(t)] \} \nabla f [q_s^k(t)] dt}{\int_0^{t_f} \{ \nabla f [q_s^{k-1}(t)] \}^2 dt}, \quad (\text{الف-۴})$$

که  $\nabla f [q_s^k(t)]$  میزان گرادیان تابع هدف در تکرار  $k$ ام است که از حل معادله الحاقی و توسط رابطه‌ای که در ادامه ذکر خواهد شد قابل محاسبه است. یک عبارت برای اندازه گام جستجو با حداقل کردن تابع

هدف (معادله (الف-۱)) نسبت به  $\beta^k$  بدست می آید. گام جستجو از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\beta_s^k = \frac{\int_0^{t_f} [T(x_m, t; q_s^k(t)) - T_f] \Delta T(x_m, t; d_s^k(t)) dt}{\int_0^{t_f} [\Delta T(x_m, t; d_s^k(t))]^2 dt} \quad (\text{الف-۵})$$

$\Delta T_s$  ، جواب مسأله حساسیت (معادلات (الف-۸) تا (الف-۱۱)) است.

فرآیند تکراری معرفی شده تا زمانی ادامه می یابد که شرط توقف ارضا شود. بسته به نوع مسأله و شرایط آن، انواع مختلفی از شروط توقف می تواند استفاده گردد.

## الف-۲ معیار توقف

در صورتی که مسأله با هیچ خطای اندازه گیری مواجه نشود، شرط زیر برای توقف تکرارها مورد استفاده قرار می گیرد.

$$|f(q_s)| < \varepsilon \quad (\text{الف-۶})$$

که  $\varepsilon$  یک مقدار کوچک و مشخص است که از قبل برای مسأله تعیین می شود. هنگامی که داده های اندازه گیری شده دارای خطای ورودی با انحراف معیار  $\sigma$  باشند، از اصل اختلاف<sup>۱</sup> استفاده می شود:

$$\varepsilon \approx \sigma^2 t_f \quad (\text{الف-۷})$$

## الف-۳ مسأله حساسیت:

اگر فرض کنیم که  $q_s(t)$  به اندازه  $\Delta q_s(t)$  تغییر کند، طبعاً دما و آنتالپی نیز به اندازه  $\Delta H$  و  $\Delta T$  تغییر خواهند کرد. جهت طرح مسأله حساسیت،  $T$  را با  $T + \Delta T$ ،  $H$  را با  $H + \Delta H$ ،  $q_s$  را با  $q_s + \Delta q_s$  در مسأله مستقیم (معادلات (۵-۱) تا (۵-۴)) جایگزین کرده و سپس معادلات مستقیم را از نتیجه بدست آمده کم می کنیم. مسأله حساسیت به دست آمده به شرح ذیل خواهد بود.

<sup>1</sup> Discrepancy Principle

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k(T) \Delta T) \quad 0 < x < b \quad 0 < t \leq t_f \quad (\text{الف-۸})$$

$$-k \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \Delta q_s(t) \quad x=0 \quad 0 < t \leq t_f \quad (\text{الف-۹})$$

$$k \frac{\partial \Delta T}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0 \quad x=b \quad 0 < t \leq t_f \quad (\text{الف-۱۰})$$

$$\Delta T = 0 \quad 0 \leq x \leq b \quad t = 0 \quad (\text{الف-۱۱})$$

پس از حل مسأله حساسیت، طول گام بهینه برای انجماد مواد خالص از رابطه (الف-۴) محاسبه خواهد شد.

#### الف-۴ مسأله الحاقی:

برای بدست آوردن مسأله الحاقی، ابتدا معادلات حاکم بر مسأله مستقیم را در ضریب لاگرانژ  $\lambda(x, t)$  ضرب کرده روی دامنه زمان و مکان انتگرال گرفته و حاصل را به تابع هدف اضافه می کنیم. خواهیم داشت:

$$f[q_s(t)] = \int_0^{t_f} [T_f - T(x_m, t; q_s(t))]^2 dt + \int_0^{t_f} \int_0^b \lambda(x, t) [k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial H}{\partial t}] dx dt \quad (\text{الف-۱۲})$$

با جایگزین کردن  $T$  با  $[T + \Delta T]$ ،  $q_s$  با  $q_s + \Delta q_s$  و  $f[q_s]$  با  $f[q_s + \Delta q_s]$  در معادله تابع هدف و کم کردن معادله اصلی (الف-۱) از عبارت حاصل و صرف نظر کردن از عبارتهای مرتبه بالاتر خواهیم داشت.

$$\frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 \lambda(x, t)}{\partial x^2} + 2[T - T_f] \delta(x - x_m) = 0 \quad 0 < x < b \quad 0 < t \leq t_f \quad (\text{الف-۱۳})$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \quad x=0 \quad 0 < t \leq t_f \quad (\text{الف-۱۴})$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \quad x = b \quad 0 < t \leq t_f \quad (\text{الف-۱۵})$$

$$\lambda = 0 \quad 0 \leq x \leq b \quad t = t_f \quad (\text{الف-۱۶})$$

که  $\delta(\bullet)$  تابع دیراک دلتا می باشد. پس از انجام عملیات ریاضی فوق و نادیده گرفتن عبارت‌های شامل  $\Delta T(x, t)$ ، عبارت انتگرالی ذیل باقی می ماند.

$$\Delta f [q_s] = \int_0^{t_f} \lambda(0, t) \Delta q_s dt \quad (\text{الف-۱۷})$$

از آنجا که  $q(t) \in L_2(0, t_f)$ ، می توان نوشت:

$$\Delta f (q) = \int_0^{t_f} \Delta q \nabla f [q(t)] dt \quad (\text{الف-۱۸})$$

و با مقایسه دو معادله اخیر خواهیم داشت:

$$\nabla f [q_s(t)] = \lambda(0, t), \quad (\text{الف-۱۹})$$

بدین ترتیب با محاسبه گرادیان شارهای حرارتی، می توان ضریب مزدوج  $\gamma^k$  و جهت کاهش  $d^k$  را مطابق روابط (الف-۳) و (الف-۴) محاسبه کرد.

### الف-۵ الگوریتم روش گرادیان مزدوج

با توجه به مطالعه روش گرادیان مزدوج و معادلات حساسیت و الحاقی که ذکر شد، می توان از الگوریتم تکرار زیر برای تخمین شار حرارتی در مرزها استفاده کرد:

قدم اول: مشخص کردن یک حدس اولیه برای شارهای حرارتی  $q_s^0$  و قراردادن شماره تکرار  $k=0$ .

قدم دوم: حل معادلات مستقیم حاکم بر مسأله با شارهای مفروض برای مشخص کردن توزیع دما در قالب

قدم سوم: بررسی معیار همگرایی (توقف)، در صورت عدم برقراری، رفتن به قدم چهارم، در صورت برقرار

شدن، توقف تکرارها.

قدم چهارم: حل معادلات الحاقی برای  $\lambda(x,t)$  و نهایتاً محاسبه گرادیان با توجه به روابط (الف-۱۹).

قدم پنجم: محاسبه ضریب مزدوج  $\gamma^k$  و جهت کاهش  $d^k$  با استفاده از روابط (الف-۳) و (الف-۴).

قدم ششم: حل معادله حساسیت با توجه به شرایط ذکر شده.

قدم هفتم: محاسبه طول گام بهینه  $\beta^k$  با رابطه (الف-۵).

قدم هشتم: حدس جدید برای شارهای حرارتی با توجه به رابطه (الف-۲) و برگشت به قدم دوم.

- [1] Alifanov, O.M. (1994), "**Inverse Heat Transfer Problems** ", Berlin: Springer Verlag.
- [2] Xu, R. and Naterer, G.F. (2004), "Controlled interface acceleration in unidirectional solidification", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 47(22), pp. 4821-4832.
- [3] Zabararas, N., Mukherjee, S. and Richmond, S. (1988), "An Analysis of Inverse Heat Transfer Problems with Phase Changes Using an Integral Method ", **Journal of Heat Transfer**, 110, pp. 554-561.
- [4] Telejko, T. (2004), "Analysis of an inverse method of simultaneous determination of thermal conductivity and heat of phase transformation in steels", **Journal of Materials Processing Technology**, 155-156, pp. 1317-1323.
- [5] Zabararas ,N. (1992), "On the design of two-dimensional Stefan processes with desired freezing front motions ", **Numerical Heat Transfer**, 21, pp. 307-325.
- [6] Kang, S. and Zabararas, N. (1995), "Control of the freezing interface motion in two-dimensional solidification processes using the adjoint method ", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 38, pp. 63-80.
- [7] Zabararas, N. and Enguyen, H.T. (1995), "Control of the freezing interface morphology in solidification processes in the presence of natural convection ", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 38, pp. 1555-1578.
- [8] Zabararas, N. and Yang, G.Z. (1997), "A functional optimization formulation and implementation of an inverse natural convection problem ", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 144(3-4), pp. 245-274.
- [9] Yang, G.Z. and Zabararas, N. (1998), "An adjoint method for the inverse design of solidification processes with natural convection ", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 42, pp. 1121-1144.
- [10] Sampath, R. and Zabararas, N. (2001), "Adjoint variable method for the thermal design of eutectic directional solidification processes in an open-boat configuration", **Numerical Heat Transfer**, 39, pp. 655-683.
- [11] Xu, R. and Naterer, G.F. (2001), "Inverse method with heat and entropy transport in solidification processing of materials ", **Journal of Materials Processing Technology**, 112(1), pp. 98-108.
- [12] Okamoto, K. and Li, B.Q. (2007), "A regularization method for the inverse design of solidification processes with natural convection ", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 50(21-22), pp. 4409-4423.

- [13] Abbas Nejad, A. , Maghrebi, M.J. , Basirat Tabrizi, H., Heng, Y., Mhamdi, A., Marquardt, W. (2010), "Optimal operation of alloy material in solidification processes with inverse heat transfer ",
- [14] Abbas Nejad, A. , Maghrebi, M.J. and Basirat Tabrizi, H. (2010), "Effect of sensor locations on the solution of inverse Stefan problems ", **Scientific Journal Mechanika**, **3(83)**.
- [15] Rao SS (1995), "**Optimization; theory and applications**", 2nd edn (9th reprint). New Age International (P) Limited Publishers, New Delhi.
- [16] Luksan, L., Spedicato, E. (2000). "Variable metric methods for unconstrained optimization and nonlinear least squares ". **Journal of Comput Appl Math**, **124(61–95)**.
- [17] Zhang, Z., Cao DH, Zeng JP (2004), "Convergence property of a class of variable metric methods", *Appl Math Lett*, **17(437–442)**.
- [18] Pourshaghaghay, A., Kowsary, F., Behbahaninia, A. (2007), "Comparison of four different versions of the variable metric method for solving inverse heat conduction problems ". *Heat Mass Transfer*, **43(285–294)**.
- [19] Kowsary, F., Behbahaninia, A. and Pourshaghaghay, A. (2006), "Transient heat flux function estimation utilizing the variable metric method ", **International Communications in Heat and Mass Transfer**, **33(6)**, pp. **800-810**.
- [20] Kowsary, F., K. Pooladvand, and A. Pourshaghaghay (2007), "Regularized variable metric method versus the conjugate gradient method in solution of radiative boundary design problem ", **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, **108(2)**, pp. **277-294**.
- [21] Maghrebi, M., Jelveh Ghazini, M. and Abbas Nejad, A. (2010), " Source Term Identification in Inverse Heat Conduction Problem Using Variable Metric Method ", *International Symposium on Computing in Science and Engineering*, P 935, Turkey.
- [22] Ozisik, M.N. (1993), "**Heat Conduction** ", New York: John Wiley & Sons.
- [23] Hill, J.M. and Dewynne, J.N. (1987), "**Heat Conduction** ", Blackwell Scientific Publication.
- [24] Shumakov, N.V. (1957), "A Method for Experimental Study of the Process of Heating in Solid Body ", **Soviet Physics Technical Physics**, **2**, pp. **771-781**
- [25] Stolz, G.J. (1960), "Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes ", **ASME Journal of Heat Transfer**, **82**, pp. **20-26**.
- [26] Blackwell, B.F. (1980), "An Efficient Technique for the Solution of the One-Dimensional Inverse Problem of Heat Conduction ", **Technical Report**, Sandia Laboratories, Thermal Test and Analysis Division.
- [27] Imber, M. (1973), "A Temperature Extrapolation Method for the Hollow Cylinders ", **AIAA Journal**, **11**, pp. **117-118**.
- [28] Beck, J.V. (1962), "Calculation of Surface Heat Flux from an Internal Temperature History ", **ASME Paper**, **62HT**, pp. **40**.

- [29] Beck, J.V. (1968), "Surface Heat Flux Determination using an Integral Method ", **Nuclear Engineering Design**, 7, pp. 170-178
- [30] Shidfar, A., G.R. Karamali, and J. Damirchi (2006), "An Inverse Heat Conduction Problem with a Nonlinear Source Term ", **Nonlinear Analysis**, 65, pp. 615-621.
- [31] Park, H.M. and O.Y. Chung (1999), "Comparison of Various Conjugate Gradient Methods for Inverse Heat Transfer Problems ", **Chemical Engineering Communications**, 176(1), pp. 201 - 228.
- [32] Jarny, Y., M.N. Ozisik and J.P. Bardon (1991), "A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction ", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 34, pp. 3387-3408.
- [33] Huang, C.-H. and S.-P. Wang (1999), "A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method ", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 42(18), pp. 3387-3403.
- [34] Xiang, X. (2003), Ph.D. Thesis, "Improvement of heat flux and heat conductance estimation with application to metal casting ", in Mechanical Engineering Department, Mississippi state university: Mississippi.
- [35] Tikhonov, A.N. and V.Y. Arsenin (1977), "Solution of Ill-Posed Problems ", Washington DC: Winston & Sons.
- [36] Tadrari, O. and M. Lacroix (2006), "Prediction of protective banks in high temperature smelting furnaces by inverse heat transfer ", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 49(13-14), pp. 2180-2189.
- [37] Ozisik, M.N. and H.R.B. Orlande (2000), "Inverse Heat Transfer, Fundamentals and Applications ", Taylor & Francis.
- [38] Biggs MC (1973) ,"A note on minimization algorithms which make use of non-quadratic properties of the objective function", J Inst Maths Appl 12:337–338.
- [39] عباس‌نژاد، ع. (۱۳۸۹)، رساله دکتری، "کنترل سطح مشترک جامد-مایع در فرآیندهای انجماد با استفاده از روش‌های انتقال حرارت معکوس"، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [40] سوری، ع. (۱۳۸۶)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، "شبیه‌سازی فرآیندهای انجماد فلزات با استفاده از روش انتقال حرارت معکوس به منظور تخمین ضریب انتقال حرارت رسانشی مشترک"، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [41] Carslaw, H.S., Jaeger, J.C. (1959), "Conduction of Heat in Solids", 2nd ed. Oxford University Press, Oxford.



**Abstract:**

Today, Inverse heat transfer problems (IHTP) are considered by many scientists in different branch of technologies. The solidification of metal is one of the applications of this method. In solidification the quality of the material is mainly depend on interface velocity. Therefore, by controlling this parameter during the solidification process we can get a desired quality. The aim of solving inverse problems in solidification processes is to estimate the heat flux in boundaries so that the desired quality is obtained.

Different methods are suggested for solving IHTP in solidification. The Conjugate Gradient Method (CGM) is known to be the best method until now. The Variable Metric Method (VMM) which is experienced in this investigation is found to have higher convergence rate and accuracy between the other methods of IHTP. Here, the VMM is used to control the solidification of pure material. Also to decrease the cost of solution, the enthalpy formulation is applied to solve the direct heat transfer problem.

For evaluating the VMM performance, the results for various parameters, affecting the inverse solution, has been compared with CGM. The obtained results indicate that the VMM has more efficient than the CGM in solving inverse problem of solidification.

**Key words:** Inverse heat transfer problems (IHTP) - Variable Metric Method (VMM) - Conjugate Gradient Method (CGM) - solidification of pure material- enthalpy formulation



**Shahrood University of Technology  
Department of Mechanical Engineering**

# **Variable Metric Method for the Solution of Inverse Heat Transfer Problems in Solidification of Metals**

**Student:  
Mahdi Jelveh Ghaziani**

**Supervisor:  
Dr. Mohammad Javad Maghrebi**

**Advisor:  
Ali Abbas Nejad**

**Nov 2010**