دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک گرایش تبدیل انرژی

عنوان:

حل عددی معادلات لایه مرزی در جریان تراکم ناپذیر تحت اثر گرادیان فشار معکوس و انحنا سطح

اساتید راهنما :

دکتر خوشنویس

دکترمحمود فرزانه

ارائه دهنده:

سعیدحریری

زمستان ۱۳۸۵

بسم الله الرحمن الرحيم

از الطاف بیکران خداوند مهربان که مثل همیشه شامل حال این بنده حقیرشده است بر خود می بالم و شکر این نعمت بزرگ را برجای می آورم .

لازم است از زحمات بی دریغ پدر ومادرعزیزم که در راه ادامه تحصیل من از هیچ کوششی فروگذاری نکرده اند کمال سپاس و تشکر را داشته باشم و امیدوارم بتوانم تنها قسمت کوچکی از زحمات این عزیزان را جبران کنم .

همچنین برخود لازم دانسته از کمکهای آقای دکتر محمود فرزانه که به عنوان استاد راهنمای دوم بنده در انجام این پروژه بوده اند قدر دانی نموده و آرزوی توفیق ایشان را از درگاه خداوند متعال دارم .

این پایان نامه را تقدیم می کنم:

به استاد عزیز و مهربانم جناب آقای دکتر خوشنویس

این پروژه به عنوان پایان نامه کارشناسی ارشد با نمره (۱۹,۷۵) از طرف گروه حرارت و سیالات دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود ارزیابی گردیده است.

استاد راهنمای اول(آقای دکتر خوشنویس):

استاد راهنمای دوم(آقای دکتر فرزانه):

استاد محترم ممتحن :

استاد محترم ممتحن :

رییس دانشکده مکانیک و نماینده تحصیلات تکمیلی:

چکیده:

تاثیرات گرادیان فشار معکوس برروی لایه مرزی متلاطم در این پروژه مورد بررسی قرارگرفته است.مقادیر شدتهای توربولانسی و تنش برشی توربولانسی به همراه پروفیل های سرعت تحت تاثیر گرادیان فشار معکوس به وسیله حل عددی معادلات لایه مرزی متلاطم بدست آمده اند. همچنین پارامترهای ذکر شده را به ازای مقادیر متفاوتی از گرادیان فشار معکوس بدست آورده ایم.یکی از نتایج مهم گرفته شده اینست که گرادیان فشار معکوس سبب افزایش در مقادیر توربولانسی میشودکه می توان گفت این عامل باعث افزایش ناپایداری جریان می گردد و این نتیجه ای است که توسط کارهای تجربی مورد استفاده در این پایان نامه نیز تایید شده است.مدل توربولانسی مورداستفاده مدل($k-\varepsilon$)است که جهت گرفتن جواب مناسب در نزدیکی دیواره مدل تغییر یافته آن که توابع دیواره در آن دخالت داده شده اند مورد استفاده قرار گرفته است .علاوه بر این ما جریان برروی سطوح محدب ومقعر را نیز در پروژه مذکور مورد بررسی قرار داده ایم. نتایج شامل تنش برشی توربولانسی و شدتهای توربولانسی وپروفیل سرعت متوسط جریان بدست آمده از حل عددی معادلات لایه مرزی بر روی سطوح منحنی در شرایط متلاطم می باشند. نتیجه گرفته شده این را تصدیق میکند که مقادیر توربولانسی تحت تاثیر انحنا مقعر افزایش یافته در حالتی که در مقایسه با صفحه مسطح قراربگیرند. همچنانکه عکس این موضوع درمورد سطوح محدب نیز صادق می باشد.بنابراین پایداری جریان تحت انحنا محدب افزایش می یابد در حالی که ناپایداری جریان به وسیله انحنا مقعر تقویت پیدا میکند. همچنین پارامترهای انتگرالی نظیر ضخامت مومنتومی وضخامت جابجایی تحت تاثیر سطوح محدب رشدشان کاهش وتوسط سطوح مقعر شاهد افزایش در رشد آنها خواهیم بود.مدل توربولانسی که برای سطوح منحنی مورد استفاده قرارگرفته است نیز مدل ($k-\varepsilon$) میباشد .

فهرست مطالب: شماره صفحه:

فصل اول: مقدمه

فصل دوم: حل عددی معادلات لایه مرزی بر روی سطوح مسطح

فصل سوم: اثرات گرادیان فشار معکوس بر روی لایه مرزی متلا طم

فهرست اشکال: شماره صفحه:

شماره صفحه:

شماره صفحه:

فهرست جدول ها: شماره صفحه:

فهرست علائم:

δ: ضخامت لایه مرزی

δ^*: ضخامت جابجائی

θ: ضخامت مومنتوم

C_f:ضریب اصطکاک

β:پارامتر گرادیان فشارتعریف شده درقسمت(۱-۳)

H:ضریب شکل $\frac{\delta^*}{\theta}$

ν:ویسکوزیته سینماتیکی

ρ:دانسیته جرمی

Re_x:عدد رینولدز براساس مسافت طولی

k:انرژی جنبشی توربولانسی

k_r: معکوس شعاع انحنا

K: ثابت طول اختلاط برابربا۴,۰

ε:نرخ استهلاک انرژی جنبشی توربولانسی

u:سرعت مماس بر خطوط جریان

v:مولفه عمودی سرعت وعمود برراستای جریان

l_m: طول اختلاطی

u_p: سرعت در ناحیه پتانسیلی

u_{pw}: سرعت پتانسیلی برروی دیواره

V_t:ویسکوزیته آشفتگی

فصل اول :

مقدمه

۱-۱) بیان خصوصیاتی از جریان آشفته

جریانات آشفته:

همانطور که از نام آن مشخص است این جریان رفتاری بسیار اتفاقی و بی سازمان دارد در این جریان سیال به واسطه فرایندهای اختلاطی شدید جزء در نواحی بسیار نزدیک به دیواره شکل لایه های جریان به راحتی قابل تشخیص نمی باشد.به عبارت دیگر جریان آشفته نوعی از جریان سیال است که در آن سیال تحت نوسانات جریانی و فرایندهای اختلاطی شدید قرار می گیرد. این رفتار بر خلاف رفتار جریان آرام است که در آن ذرات سیال تحت لایه ها و مسیرهای مشخص حرکت می نماید .در یک جریان آشفته اندازه سرعت در هر نقطه دائما تحت نوسانات و تغییرات هم در اندازه و هم در راستای حرکتی قرار می گیرد به طوریکه تشخیص موقعیت ذره در داخل میدان جریان مشکل می باشد بطوریکه همین وضعیت نوسانات دائمی و غیر مشخص را می توان در اندازه دما و فشار وچگالی هر نقطه مشاهده نمود.البته نوسانات اندازه چگالی فقط در جریانهای تراکم پذیر و یا جریانهای درگیر با انتقال حرارت جابجایی آزاد مشاهده می گردد.[۴]

اغلب جریانهایی که در مسائل مهندسی با آنها دست به گریبان هستیم جریانهای آشفته محسوب می شوند مگر در جریانهایی که اعداد رینولدز بسیار کوچک بوده و یا جریانهای بسیار نزدیک به لبه حمله اجسام و یا لایه های بسیار نزدیک به سطوح جامد اجسام و یا سیالاتی که دارای ویسکوزیته بسیار بالا باشند بطور کلی یک جریان آشفته دارای خصوصیات ذیل می باشد:[۳]

۱. بی نظمی مکانی و زمانی

۲. رینولدز های بالا(معمولا)

۳.استهلاک افزایش یافته انرژی و مومنتوم

۴.سه بعدی بودن (حتی در جریانهایی که ظا هرا دو بعدی باشند)

یک جریان آشفته به واسطه ادیهای موجود در ساختار خود از یک جریان آرام تمیز داده می شود ادیهای موجود در جریانات آشفته باعث ایجاد نوسان در میدان سرعت، فشار، دما و چگالی و حتی غلطت جریان می شوند. همین ادیها باعث ایجاد نوعی عدم قاطعیت در تعیین مقادیر صریح متغیرهای جریانی در توزیع میدان جریان می گردند. (اگرچه نوسانات میدان سرعت به خودی خود نیز به نوعی باعث تشکیل ادی می گردند) در ادامه به بررسی اجمالی چگونگی تشکل ادی می پردازیم.

به واسطه حرکات اتفاقی و نامنظم ذرات در یک جریان آشفته و وجود اغتشاش در جریان گاها" در امتداد عمود بر راستای جریان اصلی ، یک سری جریانات ، جانبی رخ می دهد. به واسطه این عمل، مومنتوم لایه های نزدیک دیواره (که به واسطه ذات اضمحلالی جریان آشفته بخشی از انرژی آنها از دست رفته است) به طور دائمی توسط لایه های پر انرژی بالاتر انتقال می یابد و همین امر باعث

می شود که بخشی از مومنتوم از دست رفته سیال مجاور دیواره توسط لایه های پرانژری بالاتر جبران گردد.نتیجه دیگر حرکات اتفاقی و نامنظم جریان در جهت عمود بر جریان ، تشکیل ادی می باشد. با در نظر گرفتن این اصل که هموار هر ذره متحرک سیال تمایل به حفظ مومنتوم خود دارد، وقتی به واسطه یک اغتشاش کوچک ذره‌ای از سیال داخل لایه مرزی بدون وجود پتانسیل لازمه (و تنها تحت اثر ذرات ناپایدار جریان) از لایه با مومنتوم کم به لایه با مومنتوم بالا جهش می نماید، برای حفظ و بازگشت مومنتوم ذره به مقدار اولیه خود، ذره در موقعیت جدید خود،حرکتی را در مقیاس کوچک ولی در خلاف جهت ممنتوم لایه مزبور انجام می دهد تا مومنتوم افزایش یافته مجددا تا حدی به مومنتوم اولیه خود کاهش یابد. مجموعه این نوع حرکات در کنار تمایل جریان به حفظ قانون پیوستگی ،منجر به تشکیل ادی می گردد. همین توصیف در مورد ذراتی که از لایه با مومنتوم بالا به لایه با ممنتوم پائین منتقل می گردند و در نهایت باعث تشکیل ادی می گردند نیز صحیح می باشد

به بیان دیگر،وقتی بخشی از جریان به صورت جانبی به لایه های پائینتر منتقل می گردد، در همین زمان برای جلوگیری از تجمیع ذرات در لایه تحتانی و به واسطه قانون پیوستگی جرم، حرکت مشابهی

در جهت مخالف بایستی رخ دهد تا سیال کندتر را به سمت سیال سریعتر منتقل نماید تا در آن قسمت شتاب دهی شود. مجددا برای جلوگیری از تجمع ذرات فقط در دو نقطه لازم است که حرکات مشابهی در راستای جریان اصلی نیز رخ دهد. مجموعه این فرآیندهای انتقال مومنتوم منجر به تشکیل ادی ها در جریانات آشفته می شود.

خاطر نشان می کنیم که این اغتشاشات موجود در جریانات آشفته (مثلا اغتشاشات سرعتی) می توانند دارای اندازه‌ای از چند صدم اندازه سرعت متوسط جریان تا اندازه‌ای از مرتبه سرعت متوسط جریان یا بیشتر داشته باشد،به عبارت دیگراثر اغتشاش می تواند از مقادیر کوچک (جهش به لایه های نزدیک با مومنتومی نزدیک به مومنتوم لایه موجود) تا مقادیر قابل توجه (جهش به لایه های دور با مومنتومی بسیار بزرگتر یا بسیار کوچکتر از مومنتوم لایه موجود) طبق بندی گردد. به عبارت دیگر می توان طیف وسیعی از اندازه ادیها را در یک جریان شاهد باشیم.

در صورت چرخش یک ادی در جهت مناسب ادی مزبور می تواند باعث انتقال انرژی از لایه های پرانرژی به سمت لایه های کم انرژی و بالعکس می شود. به عبارت دیگر حضور ادی می تواند باعث توزیع متناسب مومنتوم ، انرژی حرارتی ، فشار ، دما و غیره در داخل میدان گردد. لازم به ذکر است که چنانچه در یک میدان جریان گرادیان سرعت وجود نداشته باشد ، دیگر برای سیال دلیلی وجود نداردکه در مقابل اغتشاشات اتفاقی جریان ,یک حرکت دیگر و در جهت عمود بر آن برای بازگشت به ممنتوم اولیه انجام دهد. یعنی در یک جریان بدون وجود گرادیان در میدان سرعت متوسط ، یک اغتشاش در مولفه سرعت لزوما به یک ادی تبدیل نشده و اغتشاش مزبور پس از مدت کوتاهی تحت اثرات لزجت سریعا میرا می گردد. بنابراین وجود گرادیان سرعت متوسط شرط لازم برای تشکیل ادیها و تبدیل جریان آرام به آشفته می باشد. لذا در مدلسازی های جریانات آشفته بایستی نواحی دارای گرادیان سرعت متوسط (بالاخص نواحی مجاور دیواره و یا نواحی داخل گردابه ها و جریانات جدایشی) به دقت مدلسازی گردند تا بتوان رژیم دقیقی از جریان آشفته را مدل نمود.

جریانات آرام دارای اغتشاش تنها در مقیاس مولکولی می باشند که اصطلاحا به آن نفوذ یا اختلاط مولکولی گفته می شود. یعنی آنچه باعث نفوذ، پخش و یا دیفیوژن (توزیع) کمیتهای فیزیکی نظیر حرارت یا مومنتوم در داخل جریان می شود، خواصی مولکوی نظیر هدایت حرارتی K و یا ویسکوزیته و با استفاده از حرکت مولکولها در مقیاس Mean Free Path می باشند. در جریان آشفته نوسانات اغتشاشی موجود ، بر روی طیف وسیعی از مقیاسها (به واسطه حضور ادیهائی در مقیاسهای مختلف) رخ می دهد. اندازه ساختارهای موجود در جریان آشفته (مثلا ادیهای موجود در جریان آشفته) که می تواند از مقادیر نزدیک به مقیاس مولکولی تا بزرگترین طول مقیاسهای جریان (نظیر قطر لوله یا طول صفحه) باشد.از طرفی نوسانات میدان سرعت می توان از چند درصد مقدار سرعت متوسط تا صد درصد مقدار سرعت متوسط در هر دو سوی مثبت و منفی باشند. اغتشاشات دینامیکی که ذات جریانات آشفته می باشد، می تواند باعث اختلاط و نیز تبادل شدید مومنتوم و حرارت گردد، از همین رو جریانات آشفته به جریاناتی شدیدا اضمحلالی با ضریب اصطکاک و ضریب انتقال حرارت بالا در مقایسه با حریانات آرام محسوب می شوند. هر چه میزان اغتشاش در مقیاس بزرگتری رخ دهد ، اندازه تبادل مومنتوم و حرارت بزرگتر خواهد بود. پروفیل سرعت جریانات آشفته نسبت به جریانات آرام،مسطح تر می باشد. و بالتبع آن گرادیان سرعت در نزدیکی دیواره و تنش برشی ناشی از آن در جریانات آشفته بیش از جریانات آرام می باشد.[۴]

۲-۱)بیان مختصری از دو مدل توربولانسی مورد استفاده :

.تعیین تنش برشی برای جریانات آشفته بسیار حیاتی ودر عین حال از دیدگاه محاسباتی کمی پیچیده می باشداز طرفی بدون داشتن رابطه ای برای تنش برشی نمی توان با نوشتن بالانس نیروهای وارد بر یک المان سیال توزیع سرعت را در درون یک جریان بدست آورد.لذا در این راستا از مدلهای توربولانسی کمک گرفته می شود.

تاکنون صدها مدل توربولانسی ارائه شده اند که هر یک برای رژیمهای خاص جریانی و حتی در ناحیه ای خاص از میدان جریان معتبر و دقیق می باشند هدف نهایی تمام مدلهای توربولانسی محاسبه اندازه تنش رینولدز $-\rho\overline{u_i'u_j'}$ در نقاط مختلف جریان می باشند .

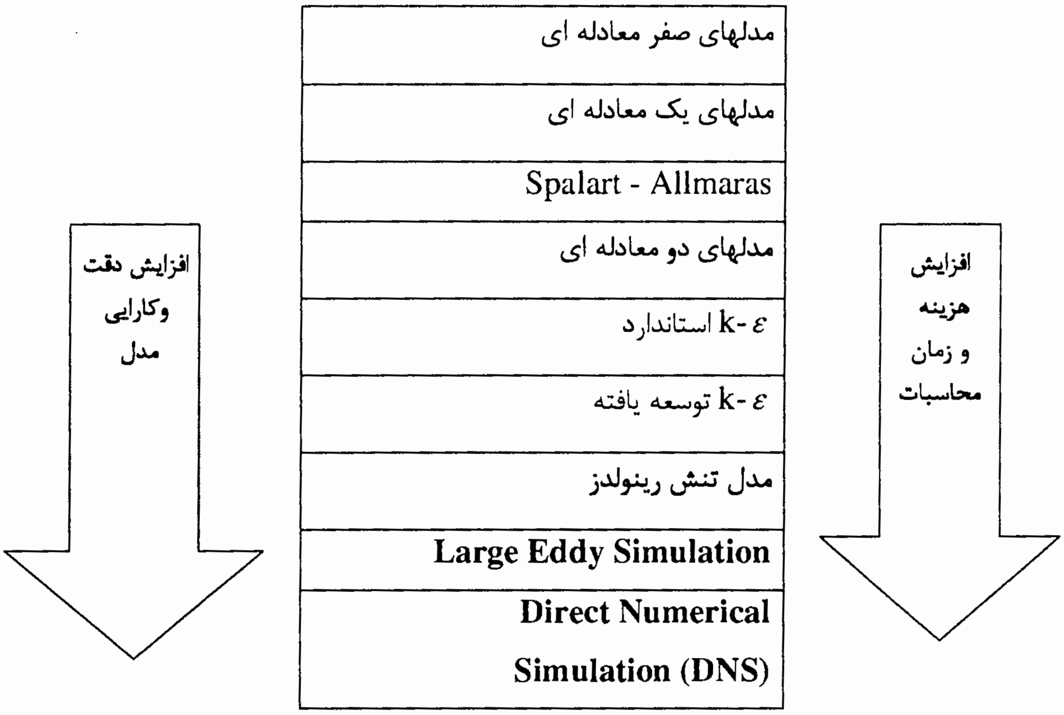
مدلهای توربولانسی موجود را می توان از دو منظر نگریست :

الف) روابط اساسی حاکم Eddy-viscosity

ب) مدلهای Eddy-viscosity

روابط اساسی حاکم بر Eddy-viscosity از یک پارامتر منفرد که اصطلاحاً ویسکوزیته آشفته μ_Tنامیده می شود برای بیان رابطه بین تنش های رینولدز موجود در معادلات لایه مرزی از پروفیلهای موجود در میدان جریان متوسط استفاده می کنند . از سوی دیگر مدلهای Eddy-viscosity نیز برای محاسبه μ_T معرفی شده در روابط اساسی Eddy-viscosity استفاده می شود .[۲]

برای مقایسه انواع مدلها با یکدیگر می توان از نمودار زیر استفاده کرد :



جدول (۱-۱):مقایسه مدلهای توربولانسی از لحاظ کارایی و هزینه

۱-۲-۱)مدلهای صفر معادله ای (مدل طول اختلاطی):

پرانتل در سال ۱۹۲۵ پیشنهاد کرد که می‌توان به یک جریان آشفته ، به صورت انتقال اتفاقی دسته‌ای از ذرات در طول یک طول مقیاس اختلاطی l_m نگریست (این طول مقیاس اختلاطی معیاری از اندازه ادی می باشد). وی با استفاده از فرضیات ریاضی و مشاهدات آزمایشگاهی فرض نمود که در داخل لایه مرزی ، اندازه نوسانات سرعت در راستای y,x میدان سرعت را می توان به گرادیان سرعت میدان جریان در راستای عمود بر راستای صفحه مرتبط دانست[۲]:

$$u' \sim l_x \frac{\partial u}{\partial y}, v' \sim l_y \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۱-۱)$$

که در آن مقادیر بیان شده توسط رابطه(۱-۱) ، اندازه‌های فرضی برای ادیهای آشفته می باشند. در این صورت با ضرب نمودن دو اندازه مزبور در یکدیگر و متوسط گیری از نتیجه خواهیم دید که :

$$-\overline{u'v'} = l_m^{\ 2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \qquad (۱-۲)$$

که در آن طولی اختلاطی برابراست با :

$$l_m = \sqrt{l_x l_y} \qquad (۱-۳)$$

در این بین ثوابت نسبت حذف شده اند.[۲]. توجه شودکه طول مقیاس اختلاطی معیاری از اندازه متوسط ادیهای جریان آشفته می باشد. از سوی دیگر از آنجا که به دنبال رابطه‌ای به شکل زیر هستیم:

$$-\rho\overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۱-۴)$$

رابطه‌ای ساده که در آن اندازه تنش برشی غالب در جریانات لایه مرزی آشفته را با گرادیان سرعت دائم در راستای عمود بر جریان لایه مرزی صفحه‌ای مرتبط می نماید.لذا با مقایسه نتایج به دست آمده

می‌توان نشان داد که :

$$\nu_t = l_m^{\ 2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (۱-۵)$$

از نقطه نظر دیگر نیز می توان به رابطه ($\nu_t = l_m^{\ 2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$) دست یافت : از آنجا که ν_t دارای بعد [سرعت] × [طول] می باشد، پیشنهاد می شودکه این کمیت به صورت زیر تقریب زده شود.[۲]:

$$\nu_t = u_0 \times l_m \qquad (۱-۵)$$

که در آن اندازه مرسوم برای ادی آشفته بوده و یک سرعت مقیاس آشفتگی می باشد.

در فرضیه طول اختلاطی فرض می شود که $u_0 = l_m \frac{\partial u}{\partial y}$ می باشد. به هر حال نیازمند آن هستیم که مقادیر را به نحوی تعیین نمائیم. اما تجربه نشان داده است که طول مقیاس اختلاط را می توان تابعی از فاصله از دیواره در نظر گرفت.زیرا در نواحی نزدیک دیواره ، به واسطه محدود شدن رشد ادیها توسط دیواره ، طول مقیاس اختلاط کوچک می‌گردد، به همین دلیل در نواحی دور از دیواره نیز انتظار داریم که اندازه ادیها و نیز طول مقیاس اختلاط بزرگتر باشد. حال چنانچه اندازه نوسانات آشفتگی سرعت را به ترتیب با $\sqrt{v'^2}, \sqrt{u'^2}$ نمایش داده و رابطه بین آنها و اندازه تنش برشی آشفته را به صورت $R \equiv \frac{-\overline{u'v'}}{\sqrt{u'^2}\sqrt{v'^2}}$ تعریف نمائیم. اندازه گیریهای تجربی نشان داده‌اند که مقدار R بین ۰٫۴۵ و ۰٫۵۵ تغییر می نماید.[۲]. پرانتل فرض نمود $R = 1$ که می باشد. بنابراین بر طبق تعریف R خواهیم دید که :

$$-\rho\overline{u'v'} = \rho\sqrt{u'^2}\sqrt{v'^2} \qquad (۱-۶)$$

او همچنین فرض نمود که آشفتگی جریان ایزوتوپ می باشد (یعنی اندازه آن ـ یا اندازه ادیها ـ در جهات x و y برابر می باشد) . او همچنین جذر متوسط مربعات نوسانات آشفتگی را به عنوان سرعت مقیاس در نظر گرفت ، بنابراین :

$$\sqrt{u'^2} = \sqrt{v'^2} = u_0 \qquad (۱-۷)$$

و یا آنکه :

$$-\rho\overline{u'v'} = \rho u_0^{\,2} \qquad (۱-۸)$$

از آنجا که در یک جریان برشی ساده $\tau_{xy} = -\rho\overline{u'v'} = \mu_t \dfrac{\partial u}{\partial y}$ می باشد ، و با این فرض که $\nu_t = u_0 \times l_m$ می باشد . لذا مدل پرانتل اظهار می دارد که :

$$\nu_t = l_m^{\,2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (۱-۵)$$

بنابراین میتوان با استفاده از رابطه فوق ، اندازه ویسکوزیته سینماتیک آشفته را به طول مقیاس اختلاط l_m و گرادیان سرعت متوسط مرتبط نمود. مطالعات تجربی بعدی پرانتل نشان داد که حتی درون یک جریان مجزا دارای مقدار ثابتی نمی باشد و مقدار آن وابسته به فاصله از دیواره و پارامترهای دیگر می‌باشد. در بخش بعدی میتوان چگونگی تعیین اندازه را برای جریانات مختلف و در قسمتهای مختلف هر جیان مشاهده نمود. اگرچه می‌توان روابط کاملتری را در کتابهای مرتبط با جریانات آشفته بیابیم. پیش از ادامه مبحث ، مجددا یادآوری می کنیم که استفاده از روش پرانتل و روابطی نظیر $\nu_t = l_m^{\,2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ تنها محدود به جریانات برشی ساده نظیر لایه‌های مرزی ، جریانات جت برشی و کلا هر جریانی که در آن توزیع سرعت در هر مقطع تنها تابعی از y می باشد. لذا هر چه انحراف جریانات دیگر از این شرط بیشتر باشد ، استفاده از رابطه با خطای بیشتری مواجه خواهد بود.[۲]

تعیین اندازه طول اختلاطی در نواخی مختلف یک لایه مرزی :

چنانچه یک میدان جریان تشکیل شده بر روی یک صفحه را به دو ناحیه مختلف ذیل تقسیم نمائیم:

ناحیه نزدیک دیواره ,ناحیه دور از دیواره

روابط مختلفی برای توزیع در این نواحی ارائه شده است.

اندازه طول اختلاطی برای ناحیه نزدیک دیواره(**Near-Wall Region**)

$$l_m = ky\left[1-\exp\left(-\frac{y^+}{A}\right)\right] \qquad (۱-۹)$$

ناحیه دور از دیواره یا Outer Layer

طول اختلاطی (معیاری از اندازه ادی)، در فواصل دور از دیواره نمی تواند به طور بی حد و حصر رشد نمایند، چرا که همواره اندازه ادیهای آشفتگی (جزء در اعداد رینولدز خیلی بزرگ که ادیها در داخل لایه مرزی کشیده می شوند) از ضخامت لایه مرزی کوچکتر می باشند. لذا کاری که در اینجا عملا صورت می پذیرد آن است که یک حد فوقانی برای جلوگیری از رشد بی حد وحصر ادیها تعیین می گردد که این حد فوقانی کسری از ضخامت لایه مرزی می باشد. متناسب با فاصله از دیواره y ، و نیز بخشی از ضخامت لایه مرزی است. Smith , Cebeci پیشنهاد نموده اند[۲] که :

$$l_m = Min(ky, 0.09\delta) \qquad (۱-۱۰)$$

که ثابت k ، ثابت فن کارمن و برابر ۴۱,۰می باشد .

به طور کلی مدل طول اختلاطی برای جریانات برشی تعادلی یا جریانات نزدیک به به حالت تعادل خوب جواب می دهد ولی در جریانات پیچیده این مدل مشکلات عمده‌ای دارد. مشکل اصلی مدل نیمه تجربی طول اختلاطی ارائه شده برای تعیین ویسکوزیته اصلاح شده با ویسکوزیته آشفته این است که در نواحی از میدان جریان که به واسطه شکل خاصی از پروفیل سرعت می شود،ویسکوزیته اصلاح شده با ویسکوزیته آشفته صفر خواهند شد که به معنای آرام بودن جریان در آن نقطه (البته از دید این تئوری) می‌باشد که این ادعای غیر جامع و بعضا غلطی می باشد.[۱]

۱-۲-۲)مدلهای یک معادله ای :

در مدلهای یک معادله ای یکی از دو مقیاس مهم در جریانات آشفته ، یعنی از میان زمان مقیاس جریانات آشفته و طول مقیاس جریانات آشفته و یا ترکیبی از آن دو ، با استفاده از یک معادله انتقالی به دست می آید . معمولاً این انرژی جنبشی k است که برای آن از یک معادله انتقالی استفاده می شود.

بطورمثال, مدل (spalart-Allmaras)در شکل اصلی خود مدلی موثر برای اعداد رینولدز پائین محسوب می گردد یعنی استفاده موثر از این مدل تنها محدود به نواحی متاثر از لزجت در داخل لایه مرزی و نواحی مشابه (با عدد رینولدز پائین) می باشد . هر چه از این نواحی دور شویم و به سمت نواحی با عدد رینولدز بالاتر حرکت نمائیم از قابلیت های این مدل در تعیین μ_t کاسته خواهد شد . اما در برخی از نرم افزارهای تجاری این مدل را می توان برای مواقعی که المانهای نزدیک خیلی ریز نمی باشند به توابع دیواره ها مجهز نمود تا بتوان اثرات نواحی با ویسکوزیته بالای نزدیک دیواره را در توانائیهای این مدل داخل نمود این امر باعث شده است که این مدل بهترین گزینه برای رسیدن به حلهای خام (crude simulation)بر روی شبکه درشت اولیه باشد به علاوه گرادیانهای نزدیک دیواره متغییرهای انتقالی در این مدل بسیار کوچکتر از گرادیانهای نزدیک دیواره متغییرهای انتقالی در مدلهای $k-\varepsilon$ است . این امر باعث آن می شود که این مدل در مقایسه با مدل $k-\varepsilon$نسبت به خراب بودن مشها (که می تواند منجر به ایجاد دیفیوژن مجازی شود) از حساسیت کمتری برخوردار می باشد و از این لحاظ با مشکلات کمتری مواجه می شود . تجربه نشان داده است که این مدل در جریانات با گرادیان های فشار معکوس بهتر از مدل $k-\varepsilon$ عمل می کند . چون این مدل ، مدل جدید بوده هنوز هیچ ادعائی مبنی بر مناسب بودن این مدل برای تمام جریانات مهندسی پیچیده ارائه نشده است . مدلهای یک معادله ای بخاطر عدم توانایی در وفق دادن خود با تغییرات سریع در مقیاسهای طولی همواره مورد انتقاد قرار داشته اند این تغییرات شدید را بالاخص در تغییرات ناگهانی

جریانات محدود به دیواره به جریانات برشی آزاد (همانند تخلیه یک جت با ابعاد محدود به درون محیطی با ابعاد نامتناهی همانند هوای اتمسفر) مشاهده می نمائیم . [۲]

۳-۲-۱)مدلهای دو معادله ای:

مدلهای دو معادله ای به عنوان زیر بنای بسیاری از تحقیقات مربوط به مدلسازی جریانات آشفته و بالاخص در سالیان اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته اند ساده ترین مدلهای کامل آشفتگی (که در عین حال قابلیت های بالا ، دارای معادلات نسبتاً ساده ای نیز می باشند) ، مدلهائی دو معادله ای هستند که در آنها حل دو معادله انتقال جداگانه باعث تعیین شدن مستقل مقیاس سرعت آشفتگی و مقیاس طول آشفتگی می شوند .

مهمترین اختلاف بین مدلهای دو معادله ای و سایر مدلهای Eddy-viscosity آن است که مدلهای دو معادله ای مدلهای کاملی می باشند یعنی از آنها می توان برای پیش بینی خواص یک جریان آشفته بدون آگاهی قبلی از ساختار جریان و یا هندسه جریان استفاده نمود . در حالیکه هم در معادلات صفر معادله ای (جبری) و هم در معادلات ، طول مقیاسهائی وجود دارد که برای تعیین اندازه آنها ، نیاز به دانستن از قبل رژیم جریان و شکل آن می باشد و این امر مدلسازی جریانات آشفته قبل از حل آنها را کمی پیچیده می نماید . نقطه آغاز تمام مدلهای Eddy-viscosity دو معادله مجازاً خطی ، استفاده از تقریب Boussinesq و معادله انتقال برای انرژی جنبشی آشفتگی ، k می باشد . انتخاب متغییر دوم دلخواه بوده و تا امروزه پیشنهادات زیادی برای این انتخاب ارائه شده است قدرت ، اقتصادی بودن و دقت قابل قبول برای طیف وسیعی از جریانات آشفته ، این مدل را به یک مدل رایج برای جریانات صنعتی و مدلسازی انتقال حرارت نموده است .

۱-۳-۲-۱)مدل استاندارد $k-\varepsilon$

مدل $k-\varepsilon$ معروفترین مدل دو معادله ای می باشد چرا که فهم آن آسان و استفاده از آن در برنامه نویسی ساده می باشد در مدلهای Eddy-viscosity ، $k-\varepsilon$ ، میدان آشفته بر حسب دو متغییر بیان می شود :

الف) انرژی جنبشی جریان آشفته k

ب) نرخ اضمحلال ویسکوزیته انرژی آشفته ε

$$k=\frac{1}{2}\left(\overline{u'_i u'_i}\right)$$
$$\varepsilon=\left[\frac{\mu}{\rho}\right]\overline{u'_{i,j}u'_{i,j}} \qquad (۱-۱۰)$$

می توان به کمک آنالیز ابعادی نشان داد که ویسکوزیته آشفته μ_t را میتوان به طول مقیاسی ادیهای بزرگ جریان آشفته مرتبط ساخت:

$$\mu_t \propto \rho u_L \delta_L \qquad (۱-۱۱)$$

که در آن u_L و δ_lبه ترتیب سرعت مقیاس و طول مقیاس بزرگترین ادی ها درمیدان جریان آشفته می باشند بعلاوه می توان نشان داد که :

$$U_L \propto \sqrt{k}$$
$$\delta_L \propto \frac{\sqrt{k^3}}{\varepsilon} \qquad (۱-۱۲)$$

که می توان در نهایت به معادله زیر رسید :

$$\mu_\tau = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \qquad (۱-۱۳)$$

که در آن C_μ یک ضریب تجربی است که مقدار آنرا معمولاً برابر ۰,۰۹ در نظر می گیرند .

در مدل استاندارد $k-\varepsilon$ مقادیر ε, K توسط معادلات نیمه تجربی زیر بدست می آید:

$$\rho\frac{\partial K}{\partial t}+\rho u_j k_{,j}=\left[\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}k_{,j}\right]_{,j}+G+B-\rho\varepsilon \qquad (۱-۱۴)$$

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\rho u_j \varepsilon_{,j}=\left[\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\varepsilon_{,j}\right]_{,j}+C_1\frac{\varepsilon}{k}G+C_1(1-C_3)\frac{\varepsilon}{K}B-C_2\rho\frac{\varepsilon^2}{K} \qquad (۱-۱۵)$$

که در آن $C_۱, C_۲, C_۳$ ضرایبی تجربی بوده و $\sigma_\varepsilon, \sigma_K$ نیز به ترتیب اعدا پرانتل و اشمیت آشفته می باشند و ترمهای $G\ C_1\left[\frac{\varepsilon}{K}\right], C_2\rho\left[\frac{\varepsilon^2}{K}\right]$ به ترتیب بیانگر فرایندهای تولید برش (Shear Generation processes) و فرایند اضمحلال ویسکوز ε می باشند ترم $C_1(1-C_3)(\frac{\varepsilon}{K})B$ بیانگر اثرات شناوری می باشد.[۲]

۲-۳-۲-۱)ویژگیهای مدل استاندارد $k-\varepsilon$

مدل استاندارد $k-\varepsilon$ وقتی که در کنار رابطه Boussinesq Eddy-viscosity به کار برده می شود برای طیف وسیعی از مسائل نسبتاً مشکل بخوبی کار می کند اما برای مسائلی که شامل اثرات غیر تعادلی هستند این مدل در نهایت به جوابهائی خواهد رسید که تا حدی فوق دیفیوزراست یعنی مقادیر μ_t که توسط این مدل پیش بینی می شود تا حدی بزرگ خواهد بود و گاهاً دیده می شود که این مدل در پیش بینی هسته های جدایشی تشکیل شده بر روی سطوح با انحنای ملایم نتایج غلطی را در بر داشته است با شناخته شدن نقاط ضعف و قوت مدل $k-\varepsilon$ بهینه سازی هائی که بر روی این مدل و به منظور بهبود کارائی این مدل صورت گرفته است .

این مدل بالاخص می تواند در جریانات محصور که در آنها تنشهای برشی Re بسیار مهمند نیز مورد استفاده قرارگیرد .[۲]

۴-۲-۱)مقایسه کلی مدلهای صفر معادله ای با مدلهای دو معادله ای

در مقایسه کلی مدلهای دو معادله ای با صفر معادله ای ذکر نکات ذیل ضروری است .

از نقطه نظر کارایی و کاربرد مدلهای دو معادله ای دقیقتر و عمومی تر بوده و به کرات مورد استفاده قرار می گیرند .

استفاده از مدلهای دو معادله ای مستلزم حل دو معادله انتقالی اضافی است که می تواند منجر به افزایش قابل توجهی در زمان حل گردد . به علاوه مطرح شدن معادلات ε, K باعث افزایش قابل توجهی در غیر خطی بودن و وابستگی معادلات کلی جریان به یکدیگر می گردد که این امر می تواند باعث ناپایداری خواص همگرایی فرایند حل گردد . لیکن درمقابل ، مدلسازی های جریانات آشفته ای که با استفاده از مدلهای صفر معادله ای صورت می پذیرد خواص همگرایی و پایداری بهتری را در مقایسه با مدلهای دو معادله ای نشان می دهند .

۳-۱)نگاهی مختصر به تحقیقات صورت گرفته در گذشته در مورد جریان روی سطوح منحنی وجریانهای همراه با گرادیان فشار معکوس

جریان های همراه با گرادیان فشار وهمچنین جریان بر روی سطوح منحنی همواره به عنوان یک موضوع جذاب در کارهای تجربی مورد بررسی قرار گرفته اند[۲۸].Nagano.et.al در سال ۱۹۹۱ این موضوع را به این صورت بیان کرد که تا زمانی که گرادیان فشار معکوس در بسیاری از ساختار های سیالاتی به صورت های مختلف به وجود می آید در نتیجه آن را به عنوان یک عامل اساسی در بسیاری از تحقیقات تجربی باید در جهت تاثیرات شگرفی که بر روی خاصیت های توربولانسی دارد در نظر گرفت.درادامه می توان به اهمیت این موضوع از نگاه[۲۹] Spalart, Watmuff (۱۹۹۳) اشاره کرد و عنوان کردند که گرادیان فشارمعکوس به خاطرتاثیری که در ایجاد جدایی دارد در کارهای عملی مورد توجه بسیار قرار گرفته است از طرفی به خاطراینکه تنش برشی روی دیواره در این حالت موقعیتها و شرایط مختلف را نمی تواند زیاد تحت شعاع قرار دهد در کار های تئوری از اهمیت زیادی برخوردار است و به دلیل حساسیت بسیار بالای که در مورد شرایط جریان بالا دست ایجاد می کند در کارهای تجربی علاقمندان زیادی خواهد داشت.[۱۰]

همچنین تحقیقات که منحصرا بر روی جریان های همراه با گرادیان فشارمعکوس متمرکز شده است صورت گرفته که از جمله می توان کارهای صورت گرفته توسط[۳۰] Ayala et.al.(۱۹۹۷) , Lin(۱۹۹۵) که بیان کردند مقادیر توربولانسی به صورت یک مجموعه ای از ساختارهایی با مقیاس نسبتا بزرگ هستند که دارای یک ارتباط منطقی با ضخامت لایه مرزی خواهند بود از طرفی می توان این ارتباط وساختار منطقی را به صورت یک ارتباط مهم واساسی در محدوده وسیعی از لایه مرزی مشاهده نمود.

اما Linو Ayala نیز بیان کردند که این ساختار توربولانسی در مقایسه با صفحه مسطح ویا به بیان دقیق تر در حالت بدون گرادیان فشار بسیار بزرگتر هستند از طرفی جابجاییهای صورت گرفته توسط این تر مهای توربولانسی بسیار بیشتر وناپایدارتر خواهد بود یا باعث ایجاد آشوب بیشتر خواهد شد.

همچنین[۲۸] .Nagano.et.al در سال های ۱۹۹۸و۱۹۹۱ ودر قسمت دیگر به همراهTagawa در سال ۱۹۸۸بحث گستردهای را در مورد تاثیرات گرادیان فشار معکوس واثرات آن بر روی سرعت متوسط ودیگر خاصیت های لایه مرزی توربولانسی بان کردند.علاوه براین افراد[۳۴] Blackwell (۱۹۷۲)نیز به همراه (۱۹۷۴)Orlando تمرکز خود بر روی جریانهای همراه با گرادیان فشار معکوس وتاثیرات آن بر خاصیت های حرارتی ودینامیکی این گونه از جریانات برای حالت های مختلف معطوف کردند.[۹]

اماجریانهای توربولانسی کاملاً توسعه یافته در کانالهای موازی با انحنا ثابت در ابتدا توسط افرادی همچون [۳۵]Rose .Lien , yeh , Eskinazi[۳۳], wattendrof مورد تحقیق و بررسی قرار گرفت و مقاله های اصلی متعددی در مورد لایه مرزی توربولانسی در حالت کاملاً توسعه یافته و خطوط جریان منحنی شکل وجود دارد که در این زمینه می توان اشاره کرد به اندازه گیریها و تحقیقات مفصل و گسترده ای که توسط[۳۵] wattendrof بر روی پروفیل های سرعت متوسط و تغییرات فشار در عرض دو کانال منحنی شکل انجام گرفت بطوریکه برای کانال اولی نسبت عرض کانال به شعاع متوسط انحنا سطح $1/19$ و برای کانال دومی $1/9$ بود و با اندازه گیریهای که در یک کانال مستقیم انجام گرفته بود مقایسه شدند و نتایج آن این موضوع را تصدیق کرد که انحنا تاثیر مستقیمی بر روی پروفیلهای سرعت متوسط دارد و همچنین قانونهایی که در مورد یک دیواره صاف و بدون انحنا وجود دارد و از نتیجه تحقیقات در یک کانال مستقیم بدست آمده است در مورد کانالهای منحنی شکل و به طور کلی سطوح منحنی شکل جوابگو نخواهد بود . از طرفی اندازه گیریهایی که توسط[۳۵] wattendrof بر روی کانال دوم انجام گرفت در راستای مشابه با همین کارها[۳۳] Eskinazi نیز تحقیقاتی را انجام

داد و این نتایج با توزیع پروفیلهای سرعت اندازه گیری شده در لایه مرزی با گرادیان فشار مطلوب و مخالف توسط Head , patel مورد مقایسه قرار گرفتند و یک پیشنهادی توسط آنان در مورد تشابه اثرات انحنا خطوط جریان با گرادیان های فشار بیان شد که توزیع پروفیل سرعت بدست آمده در سطح داخلی مقعر مانند با اندازه گیریهای انجام شده در حالت گرادیان فشار شدید مخالف مشابه به نظر میرسد همچنین در سطح خارجی محدب مانند این پروفیلها با نتایجی که در شرایط گرادیان فشار مطلوب گرفته شده است مشابه است البته باید به این نکته اشاره کرد که گرادیان فشار مطلوبی که بر روی دو صفحه منحنی شکل از لوله وجود دارد بسیار کوچکتر از گرادیان فشاری است که لازم است به وجود آید تا نتایجش مشابه با نتایج حاصل بر روی صفحات منحنی شکل باشد . آنچه که باید به آن اعتراف کرد این است که انحراف و کژروی در مورد این نتاج بدست آمده است که غیر قابل برگشت است و اینکه ما نمی توانیم یک عامل را در نظر نگیریم و خود به خود حذف کنیم و در غیاب آن به یک نتایج محکم و استواری برسیم یعنی به تشابه تاثیرات انحنا و گرادیانهای فشار بپردازیم . بنابراین گفته قبلی خود را اینگونه می توان اصلاح کرد که در شرایطی که لایه مرزی ایجاد شده بر روی صفحات منحنی شکل تحت گرادیان فشاری نیست (گرادیان فشار صفر است) می تواند رفتاری مشابه داشته باشد با رشد لایه مرزی بر روی یک صفحه صاف در شرایطی که گرادیان فشار نیز اعمال شود که این نکته باید مورد تجزیه و تحلیل بیشتری قرار گیرد . [۲۶]

Eskinazi[۳۳], yeh و گروه کاریشان اندازه گیریها و تحقیقات مفصلی را در مورد سرعت متوسط و جریان توربولانسی در لوله مشابه منحنی شکل با نسبت $1/19$ که نشان دهنده نسبت عرض به شعاع متوسط است را انجام دادند و نتایجی که بدست آوردند تا حدودی مشابه با نتایجی بود که توسط wattendrof[۳۵] بدست آمد. آن قسمت از نتایج کاریشان که در زمینه اندازه گیری های شدت توربولانسی بود بیشتر مورد توجه قرار گرفت و در مقایسه با فرضیات و داده های یک کانال مستقیم نشان داد که تولید جریان توربولانسی و شدت آن در نزدیکی دیواره مقعر بزرگتر و در نزدیکی دیواره

محدب مانند کوچکتر می باشد البته در مقایسه با نقاط مشابه آنها در کانال مستقیم این نگرش با شرط پایداری که توسط[۲۶] Roylcigh برای جریانهای منحنی شکل بیان شد هماهنگی و تطابق داشت . با توجه به این نظریه که توسط[۳۵] wattendrof نیز جزئیاتش مورد بررسی قرار گرفته بود حرکت سیال با سرعت متوسط مماسی u در فاصله r از مرکز انحنا پایدار است اگر گرادیان شعاعی ایجاد شده ((Ur)) مثبت باشد و ناپایدار خواهد بود اگر این مقدار منفی بدست آید بنابراین جریان در کانال منحنی شکل در همسایگی سطح مقعر مانند انتظار می رود که ناپایدار باشد و تقویت جریان توربولانسی در این قسمت مشاهده می شود . همچنانکه در نزدیکی سطح محدب مانند انتظار می رود که شرایط پایداری برقرار باشد و میزان شدت توربولانسی کاهش یابد .

اندازه گیریهای توربولانسی در لایه اختلاطی و جت هایی که هوا با فشار و سرعت زیاد به صورت مماسی بر روی سطوح منحنی شکل خارج می شود در ابتدا توسط Margolis انجام گرفت و نتایج او با نتایج حاصل از تحقیقات[۳۵] yeh , [۳۳]Eskinazi تطابق دارد همچنین او به این نتیجه رسید که شدت توربولانسی در منطقه ای که گرادیان Ur باعث ناپایداری می شود تقویت می یابد و در منطقه ای که Ur باعث ایجاد پایداری می گردد این مقدار کاهش خواهد یافت . شاید مهمترین مشاهده و نتیجه ای که از این تحقیقات می توان بدست آورد و باعث ایجاد توجه بیشتری می شود این است که در مطالعه جریانهای توربولانسی در روی سطح منحنی شکل که توسط Guitton , worthy start ford , yawor, Goles, margolis, Newman , fekete , sawyer و گروهی دیگر انجام شد همگی این عقیده و نظر را داشتند که جریان جت بر روی دیواره های مقعر شکل بسیار سریعتر رشد پیدا می کند نسبت به همان جریان جت بر روی سطوح صاف و این نتیجه با تحقیقات صورت گرفته توسط [۲۶]Margolis و همچنین ملاک پایداری[۲۶] Rayleigh همخوانی دارد . در خارج از دیواره مقعر که جریان جت برقرار است یک ناحیه نسبتاً بزرگی وجود دارد که ناپایدار است در نتیجه حرکتهای توربولانسی (جابه جائیهای توربولانسی) تقویت می یابد بنابراین قدرت پخش جت

انتگرالی همانند ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم و shape factor R_θ , (ضخامت مومنتومی عدد Rc) وابستگی این مقادیر را به انحنا سطح هر چند که بسیار کوچک باشد را نشان می دهد . بنابراین Thompson این وابستگی را به خاطر تاثیر پذیری خطوط جریان منحنی شکل از نحوه حرکت جریان دانست و جهت اصلاح کردن معادله مومنتموم با وارد کردن یک فاکتور تجربی که فرض شد تابع ساده ای است از نسبت δ/R باشد اقدام نمود و اثر این ترم انحنا تطبیق نتایج حاصل از کارهای تجربی و روشهای محاسباتی تحقیقاتی را تقویت بخشید هر چند که روش و رویه عملی که توسط Thompson انجام گرفت کاملاً رضایتبخش نبود اما نتایج او یک نتیجه گیری مهم را بیان کرد و آن اینکه اثرات اولیه انحنا هر چند ممکن است که بر روی پروفیل های سرعت تاثیر آنچنانی نداشته باشد ولی بر روی حرکتهای توربولانسی و جابجایی جریان آزاد در داخل لایه تاثیربسیار زیادی دارد . هدف اصلی آنها از این تحقیقات تخمین زدن یک فاکتور تصحیح کننده مناسب و تجربی بین معادلات حرکت و پارامتر انحنا مانند δ/R بود که در نتیجه آن می توان این روش را که توسط Thompson و Head به کار گرفته شد در جهت استفاده بر روی سطوح منحنی شکل تعمیم داد . از طرفی باید به این نکته اعتراف کرد که نمی توان تاثیر انحنا بصورت خنثی و ناچیز پنداشته شود همچنین بسیار سخت می توان اثرات انحنا را از گرادیان های فشارش ایزوله و مبرا دانست . [۲۶]

از طرفی[۳۱] Bradshaw تلاش کرد که یک شباهتی را بین پارامترهایی همانند عدد Richardson و پارامترهایی که اثرات انحنا بر روی لایه مرزی توربولانسی را نشان می دهند بدست آورد . با استفاده از این آنالوژی و گرفتن داده هایی که از لایه مرزی اطراف زمین بدست آمد او تاثیرات انحنا را بر روی لایه مرزی توربولانسی نشان داد و زمانی این تاثیرات قابل توجه است که اگر ضخامت لایه مرزی تقریباً (($1/300$)) شعاع انحنا باشد و این حدود در مورد نسبت δ/Rبیان می کند که باید تاثیرات اساسی و مستدلی از انحنا را در کارهای تجربی که توسط محققان و مولفان مختلف ذکر شده است در نظرگرفت .

آنچه که گفته شد در حالت کلی به این نتیجه منجر خواهد گردید که تاثیرات انحنا در شرایطی که توزیع فشار استاتیکی کوچک باشد می تواند بزرگ و قابل توجه در نظر گرفته شود . از طرفی Bradshaw[۳۱] چگونگی توزیع و تعدیل طولهای اختلاطی و یا به طور دقیقتر چگونگی توزیع و پخش پارامتر اتلاف طولی L_ε در محاسباتی که خود او و Ferris , Atwell و محاسبات دوباره ای که توسط[۲۶] schmidbauer , schubauer , Klebanoff بر روی توزیع لایه مرزی انجام گرفت را بیان کرد . همچنین ایجاد اصلاحاتی در انحنا و تغییر شکل منجر به گرفتن نتیجه ای بهتر برای مقایسه مقادیر δ و C_f بدست آمده از طریق کارهای تجربی و محاسباتی و تطابق آنها با یکدیگر شد و محاسبات [۳۱]Bradshaw نشان دادند که تاثیر انحنا مهم و با اهمیت باید تلقی شوند به خصوص در کارهای تجربی جایی که سطوح منحنی عمدتا در جهت ایجاد توزیع فشار کاربرد دارند و یا در شرایطی که تغییرات فشار استاتیکی نیز در طول لایه مرزی هنوز به صورت ناچیز و کم اهمیت پنداشته می شود . از طرفی با بررسی دقیق کارهایی که قبلاً انجام شده است می توان به وضوح به این مسئله رسید که قبل از تحقیقات Bradshaw اطلاعاتی که در زمینه تاثیرات انحنا های بزرگ و توزیع گرادیان فشار در طول لایه مرزی منجر به معادلات دیفرانسیل و انتگرالی چند گانه ای می شود که بیشتر در جهت بیان چگونگی گسترش خطوط جریان در طول لایه مرزی مورد استفاده قرار می گیرد .

همچنین از طریق کارهای تجربی و تئوری که توسط Narasimba , Breuer , Grunow , Murphy , ojha انجام گرفت به این نتیجه می توان رسید که در لایه مرزی آرام بر روی سطوح منحنی تاثیرات انحنا سطح با اهمیت و مهم خواهد بود در شرایطی که ضخامت لایه مرزی بر شعاع انحنا مقدار و درجه ای در حدود ۰,۰۵ را اختیار کند اما کارهای اخیر Bradshaw تا حدودی این فاصله و شکاف را محدود کرد بطوریکه تاثیرات انحنا را می توان قابل توجه دانست زمانی که نسبت δ/R مقدار کوچکی در حدود $1/300$ باشد و از طرفی توزیع فشار استاتیکی ناچیز فرض شود . همچنین

این نظریه ما را سوق می دهد به پذیرش این واقعیت زمانی که نسبت $\frac{\delta}{R}$بزرگتر از $1/300$ است ما باید تاثیرات شدیدی از انحنا را انتظار داشته باشیم.[۱۵]

همچنین کارهای تجربی اولیه ای که بر روی سیلندرهای دایره ای و دیوارهای محدب ۹۰ درجه انجام شد به خودی خود بیان کردند که ما باید تاثیرات اساسی و مهمی از انحنا خطوط جریان و سطوح منحنی شکل بر روی نحوه توزیع لایه مرزی زمانیکه نسبت ضخامت لایه مرزی δبه شعاع انحنا سطح R در محدوده ای بین $1/30$ تا $1/10$ باشد در نظر بگیریم و مقادیر δ/Rکه در این کارهای تجربی بدست می آمد در بعضی از مواقع بالاتر از مقادیری بود که در اندازه گیریهای قبلی با آن مواجه می شدند و بسیار بالاتر از مقدار $1/300$ که توسط Bradshaw بیان شد . از طریق کارهای تجربی انجام شده به این نتیجه می توان رسید که برای یک انحنا سطح به اندازه کافی بزرگ این لازم و ضروری است که پارامترهای انتگرالی متداول مانند θ,δ^* دوباره تعریف شوند . با توجه به این نکته که سرعت در جریان غیر چرخشی در خارج لایه مرزی مدت طولانی با فاصله از سطح ثابت باقی نمی ماند . همچنین مشاهده شد که معادله انتگرالی مومنتوم بر روی سطح صاف در شرایطی که فشار استاتیکی مقدار ثابتی نیست در عرض لایه مرزی تجزیه شده و[۲۶] Newman تغییراتی را در این رابطه برای صدق کردن در لایه مرزی در شرایطی که تغییرات بزرگی از فشار استاتیکی داشته باشیم ایجاد کرد که این معادله هماهنگی خوبی با مقادیر تجربی دارد . مقدار بدست آمده برای H (ضریب شکل) بر روی سطح محدب بسیار بالاتر از مقادیری است که توسط روش Head بدست آمده است هرچند که این روش موفقیت خوبی را در جهت محاسبه H بر روی سطح مسطح نشان داده است و از طرفی می توان گفت که این تفاوت بین اندازه گیریها و محاسبات به دلیل وجود تاثیرات انحنا است و چنین تفاوت هایی در مورد لایه مرزی بر روی سطح محدب در اندازه گیریهای Klebanoff , Schubauer , Schmidbauer توسط Bradshaw مورد بررسی قرار گرفته است .

نکته مورد توجه این است که مقادیر H اندازه گیری شده بر روی سطوح مقعر بیشتر از مقادیر پیش بینی شده بر روی سطوح صاف است و این بیان می کند که انحنا مقعر مانند سطح باعث کاهش مومنتوم جریان آزاد سیال در داخل لایه مرزی می شود . و این نتایج از طریق بررسی و مورد ملاحظه قرار دادن ملاک پایداری Rayleigh برای جریانهای منحنی شکل قابل انتظار و دسترسی است . نتایج به دست آمده از تحلیل جریان جت بر روی دیواره های منحنی شکل و جریانهای توسعه یافته در کانالهای منحنی شکل پروفیلهای سرعت اندازه گیری شده نشان داده که به انحنا در دو ناحیه داخلی و خارجی از لایه مرزی وابسته هستند و همچنین تاثیرات انحنا بر پروفیل های سرعت نشان داد که حرکتهای جزئی توربولانسی در داخل لایه مرزی تحت تاثیر انحنا خطوط جریان قرار می گیرند که دلایلی از آن نیز توسط Bradshaw بیان شد .از بررسی کارهای قبلی می توان به این نتایج تا حدودی دست یافت این که غیر ممکن است بتوان تاثیرات گرادیان فشار در جهت خطوط جریان را از تاثیرات انحنا این خطوط جدا کنیم .در کار تجربی انجام گرفته بر روی سطوح منحنی انحنا خطوط جریان به قدر کافی با دقت تخمین زده نشده اند همچنین زمانیکه گرادیان فشار با تغییرات شدید و سریع انحنا سطح همراه می شود مثلا در یک لوله و یا Duct کارهای تجربی به سختی می توانند تاثیرات انحنا را مجزا بیان کنند بنابراین اگر لایه مرزی را روی سطح منحنی شکل در شرایطی که گرادیان فشار در جهت جریان را صفر فرض کنیم بررسی نموده و نتایج آن را با یک سطح مسطح مقایسه کنیم آنگاه می توان به تاثیرات بیشتر انحنا پی برد . از طرفی کارهای تجربی به خوبی تاثیرات تعقر سطح را بر روی لایه مرزی نشان نداده اند بنابراین می توان گفت که در کارهای آینده مطالعه لایه مرزی بر روی سطوح مقعر می تواند مفید و سود آور باشد . [۲۶]

فصل دوم

حل عددی معادلات لایه مرزی بر روی سطح مسطح

حل عددی معادلات لایه مرزی بر روی سطح مسطح

۱-۲) بیان معادلات لایه مرزی در روی سطح مسطح:

معادله پیوستگی :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۲-۱)$$

معادله مومنتوم در جهت x :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\nu+\nu_t\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (۲-۲)$$

دراین حالت ترم گرادیان فشار صفر خواهد بود.[۱]
شرایط مرزی:

$$y=0 \quad u=0 \quad v=0$$
$$y=\delta \quad u=u_e \qquad (۲-۳)$$

۱-۱-۲)در صورتی که از روشFalkner Skan در بی بعد کردن معادلات فوق استفاده گردد خواهیم داشت:

$$f'\zeta\frac{\partial f'}{\partial \zeta}+\left[\frac{1}{2}\eta\left(m-1\right)f'+V\right]\frac{\partial f'}{\partial \eta}=\left(1-f'^2\right)m+\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(1+\nu_t^+\right)\frac{\partial f'}{\partial \eta}\right]$$

(۲-۴)

شرایط مرزی جهت حل این معادله از طریق معادله(۱۴-۲) بیان می شود.

که دراین حالت $f'=\frac{u}{u_e}$ و$m=0$ برای حالت صفحه مسطح می باشد و همچنین η به صورت $\eta=y\left[\frac{\nu x}{U_e(x)}\right]^{-\frac{1}{2}}$ تعریف شده است.(جزئیات بیشتر در پیوست ۳ آورده شده است).[۲]

۲-۱-۲)اما روش دیگری وجود دارد که در آن تنها محور yبی بعد خواهد شد که در صورت فرض زیر:

$$\eta = \frac{y}{\delta} \tag{۲-۵}$$

معادلات لایه مرزی به صورت زیر خواهند بود:[۱]

معادله مومنتوم:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + m_{\Pi}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} - m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\nu_t + \alpha\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \tag{۲-۶}$$

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + m_{\mathrm{I}}\frac{\partial v}{\partial \eta} - m_{\Delta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \tag{۲-۷}$$

درمعادلات فوق پارامترهای بیان شده بدین قرار هستند :

$$m_1 = \frac{1}{\delta} \tag{۲-۸}$$

$$m_{\Pi} = m_{\mathrm{I}} v - m_{\Delta} u - m_{\mathrm{I}}^{2}\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \tag{۲-۹}$$

$$m_{\Delta} = \left(\frac{d\delta}{dx}\frac{\eta}{\delta}\right) \tag{۲-۱۰}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}_L}u_{\infty}L = \alpha \tag{۲-۱۱}$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\eta = 0 \qquad u = 0 \qquad v = 0$$

$$\eta = 1 \qquad u = u_e \qquad (۲.۱۲)$$

جزئیات بیشتر در این مورد نیز در پیوست ۱آورده شده است.

۲-۲) نحوه ی استفاده از روش طول اختلاطی در مدل کردن ترم توربولانسی وچگونگی حل معادلات:

در ابتدای توضیحات مربوط به حل معادله دیفرانسیلی(۴-۲) با استفاده از مدل طول اختلاطی لازم به ذکر است که روش مورد استفاده در حل معادله ذکر شده روشKeller's box می باشد که در ادامهٔ نحوه ی استفاده از این روش توضیح داده می شود.[۲]

در صورتی که در معادله(۴-۲)

$$f' = u$$
$$u' = v$$
$$x = \zeta$$

و $b=(1+\nu_t^{+})$ تغییرات فوق را اعما ل کنیم میتوان نوشت:

$$(bv)' + \frac{m+1}{2} fv + m\left(1-u^2\right) = x\left(u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad (۲\text{-}۱۳)$$

در این حالت شرایط مرزی عبارتند از:

$$\eta = 0 \qquad f = f_w = -\frac{1}{\sqrt{u_e \nu x}}\int_0^x v_w(x)\,dx \qquad f' = 0$$

$$\eta = \eta_e \Rightarrow f' = 1 \qquad (۲\text{-}۱۴)$$

البته مقدار f در روی دیواره برابر با صفر خواهد بود.

در صورتی که محدوده ی محاسباتی به این شکل داشته باشیم:

$$x_0 = 0 \qquad x_n = x_{n-1} + k_n \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

$$\eta_0 = 0 \qquad \eta_j = \eta_{j-1} + h_j \quad j = 1, 2, \ldots, J$$

با استفاده از روش تفاضل مرکزی خواهیم داشت:[۵]

$$\frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{h_j} = \frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2} \equiv u_{j-\frac{1}{2}}^n$$
$$\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h_j} = \frac{v_j^n + v_{j-1}^n}{2} \equiv v_{j-\frac{1}{2}}^n$$

در صورتی که طرف چپ معادله (۴-۲) با L نشان داده شود می توان این معادله را به شکل زیرنوشت:

$$\frac{1}{2}\left(L^n + L^{n-1}\right) = x^{\frac{n-1}{2}}\left[u^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k_n}\right) - v^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{f^n - f^{n-1}}{k_n}\right)\right] \tag{۲-۱۵}$$

که پارامتر های ذکر شده به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\alpha^n = \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{k_n} \tag{۲-۱۶-۱}$$

$$\alpha_1 = \frac{m^n + 1}{2} + \alpha^n \tag{۲-۱۶-۲}$$

$$\alpha_2 = m^n + \alpha^n \tag{۲-۱۶-۳}$$

$$R^{n-1} = -L^{n-1} + \alpha^n\left[\left(fv\right)^{n-1} - \left(u^2\right)^{n-1}\right] - m^n \tag{۲-۱۶}$$

$$L^{n-1} \equiv \left[\left(bv\right)' + \frac{m+1}{2}fv + m\left(1-u^2\right)\right]^{n-1} \tag{۲-۱۶-۴}$$

معادله (۴ ۲) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left[(bv)'\right]^n + \alpha_1 (fv)^n - \alpha_2 \left(u^2\right)^n + \alpha^n \left(v^{n-1} f^n - v^n f^{n-1}\right) = R^{n-1} \qquad (۲\text{-}۱۷)$$

اگر این معادله درنقطه $x^{n-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}$ به صورت منفصل شده نوشته شود:

$$h_j^{-1}\left(b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n\right) + \alpha_1 (fv)^n_{j-\frac{1}{2}} - \alpha_2 \left(u^2\right)^n_{j-\frac{1}{2}} + \alpha^n \left(v^{n-1}_{j-\frac{1}{2}} f^n_{j-\frac{1}{2}} - v^n_{j-\frac{1}{2}} f^{n-1}_{j-\frac{1}{2}}\right) = R^{n-1}_{j-\frac{1}{2}} \qquad (۲\text{-}۱۷\text{-}۱)$$

بطوریکه:

$$R^{n-1}_{j-\frac{1}{2}} = -L^{n-1}_{j-\frac{1}{2}} + \alpha^n \left((fv)^{n-1}_{j-\frac{1}{2}} - \left(u^2\right)^{n-1}_{j-\frac{1}{2}} \right) - m^n \qquad (۲\text{-}۱۷\text{-}۲)$$

$$L^{n-1}_{j-\frac{1}{2}} = \left[h_j^{-1}\left(b_j v_j - b_{j-1} v_{j-1}\right) + \frac{m+1}{2} (fv)_{j-\frac{1}{2}} + m\left(1 - \left(u^2\right)_{j-\frac{1}{2}}\right) \right]^{n-1} \qquad (۲\text{-}۱۷\text{-}۳)$$

این معادلات برای محدوده ی $j = 1,2,3,\ldots J-1$ در یک x^n صادق است بنابراین شرایط مرزی به شکل زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} f_0^n &= f_w \\ u_0^n &= 0 \\ u_J^n &= 1 \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۱۸)$$

۱-۲-۲)استفاده از روش نیوتن در خطی سازی معادلات:

اگر ما فرض کنیم که مقادیر $\left(v_j^{n-1}, u_j^{n-1}, f_j^{n-1}\right)$ در محدود ه ی $0 \le j \le J$ شناخته شده باشد در این شرایط برای بدست آوردن مقادیر $\left(v_j^n, u_j^n, f_j^n\right)$ در همان محدود ه ی ذکر شده از آنجا که با سیستم معادلات غیر خطی مواجه هستیم لذا از روش نیوتن د رجهت خطی سازی معا دلات استفاده می کنیم بنا براین یک پارامتر به عنوان پارامتر تکرار(iteration parameter) تعریف شده و بر این اساس خواهیم داشت[۵]:

$$f_j^{(\nu+1)} = f_j^{(\nu)} + \delta f_j^{(\nu)}$$

$$u_j^{(\nu+1)} = u_j^{(\nu)} + \delta u_j^{(\nu)} \qquad (۲-۱۹)$$

$$u_j^{(\nu+1)} = u_j^{(\nu)} + \delta u_j^{(\nu)}$$

با استفاده از این روش می توان معا دلات زیر را بدست آورد با توجه به این نکته که جهت سادگی کار (νوn) در معادلا ت نوشته نشده اند:

$$\delta f_j - \delta f_{j-1} - \frac{h_j}{2}\left(\delta u_j - \delta u_{j-1}\right) = \left(r_1\right)_j \qquad (۲-۲۰)$$

$$\delta u_j - \delta u_{j-1} - \frac{h_j}{2}\left(\delta v_j - \delta v_{j-1}\right) = \left(r_3\right)_j \qquad (۲-۲۱)$$

$$\left(s_1\right)_j \delta v_j + \left(s_2\right)_j \delta v_{j-1} + \left(s_3\right)_j \delta f_j + \left(s_4\right)_j \delta f_{j-1} + \left(s_5\right)_j \delta u_j + \left(s_6\right)_j \delta u_{j-1} = \left(r_2\right)_j \qquad (۲-۲۲)$$

بطوریکه:

$$\left(r_1\right)_j = f_{j-1}^{(\nu)} - f_j^{(\nu)} + h_j u^{(\nu)}{}_{j-\frac{1}{2}}$$

(۲-۲۲-۱)

$$\left(r_3\right)_j = u_{j-1}^{(\nu)} - u_j^{(\nu)} + h_j v^{(\nu)}{}_{j-\frac{1}{2}}$$

$$-\left[h_j^{-1}\left(b_j^{(\nu)} v_j^{(\nu)} - b_{j-1}^{(\nu)} v_{j-1}^{(\nu)}\right) + \alpha_1 \left(fv\right)_{j-\frac{1}{2}}^{(\nu)} - \alpha_2 \left(u^2\right)_{j-\frac{1}{2}}^{(\nu)} + \alpha^n \left(v_{j-\frac{1}{2}}^{(\nu)} f_{j-\frac{1}{2}}^{n} - v_{j-\frac{1}{2}}^{n} f_{j-\frac{1}{2}}^{(\nu)}\right)\right] + R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = \left(r_2\right)_j$$

(۲-۲۲-۲)

در این حالت ضرایب معادله مومنتوم خطی شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\left(s_1\right)_j = h_j^{-1} b_j^{(\nu)} + \frac{\alpha_1}{2} f_j^{(\nu)} - \frac{\alpha_2}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \qquad (۲-۲۲-۳)$$

$$\left(s_2\right)_j = -h_j^{-1} b_{j-1}^{(\nu)} + \frac{\alpha_1}{2} f_{j-1}^{(\nu)} - \frac{\alpha_2}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \qquad (۲-۲۲-۴)$$

$$\left(s_3\right)_j = \frac{\alpha_1}{2} v_j^{(\nu)} + \frac{\alpha''}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$ (۲ ۲۲ ۵)

$$\left(s_4\right)_j = \frac{\alpha_1}{2} v_{j-1}^{(\nu)} + \frac{\alpha''}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}$$ (۲-۲۲-۶)

$$\left(s_5\right)_j = -\alpha_2 u_j^{(\nu)}$$ (۲-۲۲-۷)

$$\left(s_6\right)_j = -\alpha_2 u_{j-1}^{(\nu)}$$ (۲-۲۲-۸)

شرایط مرزی را می توان به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$\delta u_0 = 0 \quad \delta f_0 = 0$$
$$\delta u_J = 0$$ (۲-۲۳)

در این قسمت می توان ساختار کلی حل را به صورت ماتریس زیر بیان کرد:

$$A\vec{\vec{\delta}} = \vec{\vec{r}}$$ (۲-۲۴)

که:

$$A = \begin{vmatrix} A_0 & C_0 & \cdots \\ B_1 & A_1 & C_1 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & & B_j \cdots \end{vmatrix}$$ (۲-۲۴-۱)

$$\vec{\vec{\delta}} = \begin{vmatrix} \vec{\delta}_0 \\ \vec{\delta}_1 \\ \vdots \\ \vec{\delta}_j \\ \vdots \\ \vec{\delta}_J \end{vmatrix}$$ (۲-۲۴-۲)

$$\vec{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \\ \vdots \\ \vec{r}_j \\ \vdots \\ \vec{r}_J \end{vmatrix}$$ (۲-۲۴-۳)

$$\delta_j^{\cdot} = \begin{vmatrix} (\delta f)_j \\ (\delta u)_j \\ (\delta v)_j \end{vmatrix}, \quad r_j^{\cdot} = \begin{vmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_3)_j \end{vmatrix} \qquad 0 \le j \le J \qquad (۲-۲۴-۴)$$

ماتریسهای A_j، B_j و C_j که ماتریس های ۳*۳ هستند عبارتند از:

$$A_j \equiv \begin{vmatrix} 1 & \frac{-h_j}{2} & 0 \\ (s_3)_j & (s_5)_j & (s_1)_j \\ 0 & -1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{vmatrix} 0 \le j \le J-1 \qquad (۲-۲۴-۵)$$

$$A_0 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{-h_1}{2} \end{vmatrix} \qquad (۲-۲۴-۶)$$

$$A_J \equiv \begin{vmatrix} 1 & \frac{-h_J}{2} & 0 \\ (s_3)_J & (s_5)_J & (s_1)_J \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (۲-۲۴-۷)$$

$$B_j \equiv \begin{vmatrix} 1 & \frac{-h_j}{2} & 0 \\ (s_4)_j & (s_6)_j & (s_2)_j \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} 1 \le j \le J \qquad (۲-۲۴-۸)$$

$$C_j \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{vmatrix} 0 \le j \le J-1 \qquad (۲-۲۴-۹)$$

تا این قسمت ما نحوه بدست آوردن معادلات و در نتیجه آن ماتریسهای مورد نیاز در جهت حل عددی معادلات در شرایطی که از مدل طول اختلاطی استفاده کنیم را بیان کردیم اما در این قسمت می خواهیم نحوه استفاده از این مدل را به صورت کلی مورد بررسی قرار دهیم در معادله اصلی مومنتوم شاهد وجود پارامتری به نام(b) هستیم این پارامتر را به صورت زیر تعریف کردیم[۲]:

$$b = (1 + \nu_t^{+})$$

مشاهده می شود در شرایطی که جریان آرام باشد در این حالت مقدار پارامتر مورد نظر برابر یک خواهد بود.اما نحوه ی محاسبه پارامتر فوق درجریان متلاطم به صورت زیر خواهد بود:

در ناحیه Inner layer :

$$\left(\nu_t^{+}\right)_i = 0.16 R_x^{\frac{1}{2}} \left[1 - \exp\left(\frac{-y}{A}\right)\right] \eta^2 \upsilon \gamma \qquad (۲-۲۵)$$

در ناحیه Outer layer :

$$\left(\nu_t^{+}\right)_o = 0.0168 R_x^{\frac{1}{2}} \left[\eta_e - f\left(\eta_e\right)\right] \gamma \qquad (۲-۲۶)$$

که:

$$\frac{y}{A} = \frac{N}{26} R_x^{\frac{1}{4}} \nu_w^{\frac{1}{2}} \eta \qquad (۲-۲۶-۱)$$

برای صفحه مسطح مقدار N برابر یک خواهد بود.

$$\nu_t^{+} = \frac{\nu_t}{\nu} \text{ و } R_x = \frac{u_e x}{\nu} \qquad (۲-۲۶-۲)$$

سوال اینجا است که چگونه این دو فرمول برای محاسبه با هم تداخل نخواهند کرد؟در پاسخ به این سوال باید گفت که مقادیر($\left(V_t^+\right)_i$) تا زمانی که کوچکتریا مساوی مقدار (V_t^+) محاسبه شده از طریق فرمول (۲۶-۲) باشد قابل قبول بوده ودر این شرایط V_t^+ از طریق فرمول مربوط به ناحیه Inner layer محاسبه خواهد شد در غیر این صورت از طریق فرمول ناحیه Outer layer بدست خواهد آمد[۲].

۲-۳) نحوه ی استفاده از مدل $k-\varepsilon$ در مدل کردن ترم توربولانسی وچگونگی حل معادلات لایه مرزی:

۲-۳-۱)معادلات مومنتوم وپیوستگی:

معادلات مومنتوم وپیوستگی در این قسمت فقط در جهت محور y به صورت بی بعد در نظر گرفته خواهند شد بنابراین با همین روش نیز میتوان معادلات ($k-\varepsilon$) را نیز در جهت y بی بعد کرد.[۱]

ابتدا از معادله مومنتوم شروع می کنیم:

بر طبق آنچه که در قسمت (۲-۱-۲) بیان شد این معادله به شکل زیر خواهد بود :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+m_{\Pi}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}-m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\nu_t+\alpha\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0 \qquad (۲-۶)$$

که شرایط مرزی نیز مطابق با (۲-۱۲)تعریف خواهد شد.

با ذکر دوباره پارامترهای بیان شده در این قسمت می توان نوشت:

$$m_{\Pi}=m_{\mathrm{I}}v-m_{\Delta}u-m_{\mathrm{I}}^{2}\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \qquad (۲-۹)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}_L}u_{\infty}L=\alpha \qquad (۲-۱۱)$$

$$m_{\Delta}=\left(\frac{d\delta}{dx}\frac{\eta}{\delta}\right) \qquad (۲-۱۰)$$

$$m_{\mathrm{I}}=\frac{1}{\delta} \qquad (۲-۸)$$

جهت حل این معادله با استفاده از روش تفاضل مرکزی حول نقطه $p_{i+\frac{1}{2},j}$ می توان آن را به صورت منفصل شده به شکل زیر نوشت[۵]:

$$\left[\frac{-m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j}+\left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j-1}+$$
$$\left[\frac{-m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j+1}+\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j}+\left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j-1}-\left(\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

(۲-۲۷)

در حالت منظم شده خواهیم داشت:

$$A_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j+1}+B_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j}+C_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j-1}+D_{i+\frac{1}{2},j}=0 \qquad (۲-۲۷-۱)$$

بطوریکه:

$$A_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۲-۲۷-۲)$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_1^2(\nu_t+\alpha)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۲-۲۷-۳)$$

$$C_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۲-۲۷-۴)$$

$$\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_1^2(\nu_t+\alpha)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۲-۲۷-۵)$$

$$D_{i+\frac{1}{2},j}=A_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j+1}+\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j}+C_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j-1}-\left(\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۲-۲۷-۶)$$

در تمام معادلات این قسمت ترم گرادیان فشار مقداری برابر با صفر خواهد داشت.

این معادله با استفاده از ساختارCrank-Nicholson نوشته شده است آنچه که از معادله فوق پیدا است این که مقدار $u_{i+1,j}$ به صورت مستقیم از این معادله قابل محاسبه نیست به عبارتی با شکلimplicit معادلات دیفرانسیلی روبه رو هستیم .اما مسئله مهم اینست که ضرایب ماتریسی معادله فوق در نقطه $p_{i+\frac{1}{2},j}$ باید محاسبه شوند در این روش ما این گونه عمل کردیم که فرض کردیم مقادیر (u, ν_t,δ,v) در نقطه $p_{i,j}$ مشخص باشد.بنابراین درتکرار اول به جای مقادیر مذکور در نقطه $p_{i+\frac{1}{2},j}$ باید

مقادیرمربوط به نقطه $p_{i,j}$ قرار داده شود.اما موضوع دیگراینکه می توان معادله را به شکل ساده تری تعمیم داد اگر شرط عدم لغزش بر روی دیواره اعمال شود در این حالت می توان برای نقطه $p_{i+\frac{1}{2},j=2}$ معادله(۱-۲۷-۲) را به شکل زیر نوشت:

$$u_{i+1,j=2} = E_{i+\frac{1}{2},j=2} u_{i+1,j=3} + F_{i+\frac{1}{2},j=2} \tag{۲-۲۸}$$

$$E_{i+\frac{1}{2},j=2} = -\frac{A_{i+\frac{1}{2},j=2}}{B_{i+\frac{1}{2},j=2}} \tag{۲-۲۹}$$

$$F_{i+\frac{1}{2},j=2} = -\frac{D_{i+\frac{1}{2},j=2}}{B_{i+\frac{1}{2},j=2}} \tag{۲-۳۰}$$

و برای ۳=j نیز می توان نوشت:

$$u_{i+1,j=3} = E_{i+\frac{1}{2},j=3} u_{i+1,j=4} + F_{i+\frac{1}{2},j=3}$$

از طرفی این معادله را می توان به صورت کلی زیر تعمیم داد(چگونگی تعمیم این معادله در پیوست ۱آورده شده است):

$$u_{i+1,j} = E_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j+1} + F_{i+\frac{1}{2},j} \quad 2 \le j \le J-1 \tag{۲-۳۱}$$

$$E_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{A_{i+\frac{1}{2},j}}{B_{i+\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j} E_{i+\frac{1}{2},j-1}} \tag{۲-۳۱-۱}$$

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{D_{i+\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j} F_{i+\frac{1}{2},j-1}}{B_{i+\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j} E_{i+\frac{1}{2},j-1}} \tag{۲-۳۱-۲}$$

شرایط مرزی در این قسمت به صورت زیر بیان می شود:

$$u_{i+1,j=1}=0$$
$$v_{i+1,j=1}=0 \qquad (۲\text{-}۳۲)$$
$$u_{i+1,J}=U\left(x_{i+1}\right)$$

حال با استفاده از روش توماس(Thomas algorithm) واینکه مقدارپروفیل سرعت در لبه لایه مرزی برابر با سرعت جریان آزاد است می توان مقادیر پروفیل های سرعت را از نقطه $p_{i+1,j=J-1}$ به صورت معکوس بدست آورد.بعد از بدست آمدن مقادیر پروفیل سرعت در نقاط ذکر شده $p_{i+1,j}$ میتوان با استفاده از فرمول های زیر برای نمونه:

$$u_{m_{i+\frac{1}{2},j}}=\frac{u_{i+1,j}+u_{i,j}}{2} \qquad (۲\text{-}۳۳\text{-}۱)$$

$$v_{m_{i+\frac{1}{2},j}}=\frac{v_{i+1,j}+v_{i,j}}{2} \qquad (۲\text{-}۳۳\text{-}۲)$$

$$m_{1m_{i+\frac{1}{2},j}}=\frac{m_{1i+1,j}+m_{1i,j}}{2} \qquad (۲\text{-}۳۳\text{-}۳)$$

مقادیر متوسط را به جای مقادیر قبلی که بدست آمده از نقطه $p_{i,j}$ در ضرایب ماتریسی بودند را جایگزین نمود. این عمل تا زمانی که شرط همگرایی در مورد پروفیل های سرعت برقرار شود ادامه پیدا خواهد کرد.[۵]

البته در اینجا سعی شد که یک دید کلی از نحوه ی حل معادلات ارائه شود بیان جزئیات دیگر به خصوص در مورد حل معادلات مدل توربولانسی در قسمت بعد توزیع داده خواهد شد.

معادله پیوستگی:

هما ن طور که گفتیم معادله پیوستگی به صورت زیر بیان میشود :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+m_1\frac{\partial v}{\partial \eta}-m_\Delta\frac{\partial u}{\partial \eta}=0 \qquad (۲\text{-}۷)$$

با نوشتن معادله انفصال برای نقطه($p_{i+\frac{1}{2},j}$) می توان رابطه زیر را بدست آورد:

$$\frac{2\Delta\eta}{m_1\Delta x}\left(u_{i,j}-u_{i+1,j}\right)+\frac{m_\Delta}{m_1}\left(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j}+u_{i,j+1}-u_{i,j}\right)+\left(v_{i,j}-v_{i,j+1}+v_{i+1,j}\right)=v_{i+1,j+1}$$

(۲-۷-۱)

که شرط مرزی ($v_{i+1,j=1}=0$) می تواند در اینجا به ما در بدست آوردن مقادیر ($v_{i+1,j+1}$) کمک نمایید. توجه شود که این معادله بعد از تکرار اول و بدست آمدن مقادیر اولیه ($u_{i+1,j}$) باید در جهت بدست آوردن($v_{i+\frac{1}{2},j}$) وارد چرخه حل گردد.[۵]

۲-۳-۲) بیان معادلات ($k-\varepsilon$) وچگونگی حل این معادلات :

براساس آنچه که در فصل اول بیان شد مدل توربولانسی ($k-\varepsilon$) جزء مدلهای دومعادله ای است یعنی برای استفاده از این مدل باید به جزء معادلات مومنتوم وپیوستگی باید معادله های ($k-\varepsilon$) نیز حل گردد. همانطور که عنوان شد مدل ($k-\varepsilon$) برای ناحیه کاملا متلاطم نوشته شده است وتا کنون اقدامات زیادی در جهت بهبود این مدل به خصوص در نزدیکی دیواره صورت گرفته است که می توان به تعریف توابع دیواره ودخالت دادن آن در مدل مذکور نام برد اما آنچه که ما استفاده کردیم هر چند در انجام محاسبات برای ما مشکلاتی را ایجاد کرد البته در نهایت توانستیم با استفاده از بعضی از تخمینها آنها را بر طرف نماییم استفاده از مدل رینولدز پایین ($k-\varepsilon$) بود که می توانست تا حدودی نزدیک دیواره را پوشش دهد وتنها مزیت این روش استفاده از شرایط مرزی مناسبی بود که توانستیم از آن بهره ببریم البته درقسمتی که در آخرین فصل پایان نامه بیان خواهد شد یک سری روشهای مناسب در جهت سریعترهمگرا شدن پارامترهای مذکور عنوان شده است.

در این شرایط برای بدست آوردن (ν_t) از فرمول مهم زیر بهره برده می شود:[۲]

$$\nu_t = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \qquad (۱-۱۳-۱)$$

که:

$$f_\mu = \exp\left[-\frac{3.4}{(1+\frac{R_t}{50})^2}\right] \qquad (۱-۱۳-۲)$$

$$R_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon} \qquad (۱-۱۳-۳)$$

معادلهk (انرژی جنبشی توربولانسی):

$$u\frac{\partial k}{\partial x} + +v_1\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}\right) + \nu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \varepsilon - 2\nu\left(\frac{\partial k^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\partial y}\right)^2 \qquad (۲-۳۴-۱۱)$$

ضرایب بکار رفته در معادله فوق به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$c_{\mu}=0.09,\sigma_{k}=1.0 \qquad (۲-۳۴-۱۱-۱)$$

در صورتی همانند معادله مومنتوم از روش بی بعد کردن فقط در جهت y استفاده کنیم متوان معادله k را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u\frac{\partial k}{\partial x}+-m_{\Delta}u\frac{\partial k}{\partial \eta}+vm_{1}\frac{\partial k}{\partial \eta}=m_{1}^{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(\nu+\frac{\nu_{t}}{\sigma_{k}}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}\right)+\nu_{t}m_{1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{2}-\varepsilon-2\nu m_{1}^{2}\left(\frac{\partial k^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\partial \eta}\right)^{2}$$

(۲-۳۴)

که دارای شرایط مرزی زیر می باشد:

$$\begin{aligned}\eta=0 &\rightarrow k=0,\varepsilon=0\\ \eta=1 &\rightarrow k=k_{e},\varepsilon=\varepsilon_{e}\end{aligned} \qquad (۲-۳۴-۱۲)$$

ضرایب ذکرشده در این قسمت مشابه با معادله مومنتوم خواهد بود[۱].

مشاهده می شود که در معادله ترمی با توان (۱/۲) از k وجود دارد که ما با استفاده ازفرمول(۵-۵) معادله مذکور را به شکل زیر باز نویسی کردیم[۳]:

$$u\frac{\partial k}{\partial x}+\left(-m_{\Delta}u+vm_{1}-\frac{m_{1}^{2}}{\sigma_{k}}\frac{\partial \nu_{t}}{\partial \eta}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}=m_{1}^{2}\left(\left(\alpha+\frac{\nu_{t}}{\sigma_{k}}\right)\frac{\partial^{2}k}{\partial \eta^{2}}\right)+\nu_{t}m_{1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{2}-\varepsilon-\frac{\alpha m_{1}^{3}}{0.3}\left(\frac{\partial \nu_{t}}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial \eta^{2}}\right)$$

(۲-۳۴-۱)

در صورتی که همانند معادله مومنتوم این معادله را نیز به شکل منفصل شده درنقطه ($p_{i+\frac{1}{2},j}$) بنویسیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&u\left(\frac{k_{i+1,j}-k_{i,j}}{\Delta x}\right)+m_{\Pi}'\left(\frac{k_{i+1,j+1}-k_{i+1,j-1}+k_{i,j+1}-k_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)-m_{1}^{2}\left(\frac{\nu_{t}}{\sigma_{k}}+\alpha\right)\left(\frac{k_{i+1,j+1}-2k_{i+1,j}+k_{i+1,j-1}+k_{i,j+1}-2k_{i,j}+k_{i,j-1}}{2\Delta\eta^{2}}\right)\\&-\nu_{t}m_{1}^{2}\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)^{2}}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}+\varepsilon+\frac{\alpha m_{1}^{3}}{0.3}\left(\frac{\partial \nu_{t}}{\partial \eta}\right)\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^{2}}\right)}_{M_{i+\frac{1}{2},j}}=0\end{aligned}$$

(۲-۳۴-۳)

در این حالت نیز به شکل منظم شده این معادله را می توان به صورت زیر نوشت:

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+B'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j-1}+D'_{i+\frac{1}{2},j}=0 \tag{۲-۳۴-۴}$$

که ضرایب ماتریسی در این قسمت اندکی متفاوت خواهد بود:

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۴-۵}$$

$$B'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۴-۶}$$

$$C'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۴-۷}$$

$$\overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۴-۸}$$

بیشترین تفاوت در ضریب ماتریسی زیر صورت می گیرد:

$$D'_{i+\frac{1}{2},j}=A'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j+1}+\overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j-1}+L'_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2-\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}-G'_{i+\frac{1}{2},j}\left(M_{i+\frac{1}{2},j}\right) \tag{۲-۳۴-۹}$$

بطوریکه:

$$G'_{i+\frac{1}{2},j}=\left(\frac{\alpha m_{\mathrm{I}}^{3}}{0.3}\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial\eta}\right)\right)_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۴-۱۰}$$

بعد از منفصل کردن معادلات دوباره شاهد عدم محاسبه مستقیم ($k_{i+1,j}$) هستیم در این مرحله ما دو روش را معرفی می کنیم:

روش اول :بعد از آن که معادله مومنتوم (معادله(۳۱-۲)) براساس مقادیر مورد نیاز در نقطه ($p_{i,j}$) میزان پروفیل های سرعت را در مرحله اول از تکرار برای نقطه($p_{i+1,j}$)بدست آورد بدون توجه به همگرا شدن سرعت در معادله مومنتوم از این مقادیر سرعت استفاده شده و ضرایب ماتریسی معادلات (k,ε) دراین مرحله همانند معادله مومنتوم در نقطه ($p_{i,j}$) بدست آید در مرحله بعدی از تکرار با استفاده ازحل معادلات (k,ε) ودر نتیجه آن مقادیر بدست آمده ($k_{i+1,j}$و $\varepsilon_{i+1,j}$) ومتوسط گیری از آنها در بدست آوردن مقادیر مورد نیاز برای ضرایب ماتریسی وبا همان پروفیل های سرعت قبلی مرحله دیگر تکرا ر را برای معادله (k) وبصورت مشابه برای(ε) انجام دهیم واین عمل تا زمانی که مقادیر مذکور همگرا نشدند ادامه می یابد در صورت همگرا شدن مقادیر (k,ε) این بار در معادله اصلی مومنتوم در جهت بدست سرعت در نقطه ی ($p_{i+1,j}$) و به تبع آن همگرا شدن سرعت از مقادیر همگرا شده (k,ε) استفاده گردد یعنی مراحل همگرایی ابتدا برای(k) و(ε) ودر مرحله نهایی برای پروفیل سرعت در معادله مومنتوم (معادله(۳۱-۲)) اعمال شود در این روش احتمال همگرا شدن سریعتر وجود دارد هر چند که ما در محاسبه مقادیر (k,ε) به احتمال زیاد با خطا روبه رو خواهیم شد چرا که تنها از یک مرحله تکرار در مورد سرعتهای بکار برده شده در معادلاتمومنتوم استفاده شده است .

روش دوم : در این روش برخلاف مرحله قبلی در هر مرحله پروفیلهای سرعت بدست آمده بعد هر تکرار در معادلات (k,ε) دخالت داده شده ومقادیر جدید بدست آمده از (k,ε) بعد از بررسی همگرایی در جهت محاسبه مقادیر جدید($u_{i+1,j}$) در معادله مومنتوم دخالت داده میشوند ومی توان گفت مقادیر (k,ε) سریعتر از پروفیلهای سرعت همگرا خواهند شد.

روش سوم:در این روش شرط همگرایی فقط بر روی پروفیل های سرعت اعمال میشود وفرض میگردد که با همگرا شدن مقادیر سرعت مقادیر (k,ε) نیز همگرا شده اند.[۲]

برای معادلات (ε) می توان همانند دو مرحله قبلی اقدام کرد به طوریکه:

$$u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+-m_{\Lambda}u\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}+vm_{1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}=m_{1}^{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(v+\frac{v_{t}}{\sigma_{e}}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right)+\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}v_{t}m_{1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^{2}-f_{2}c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^{2}}{k}+2vv_{t}m_{1}^{4}\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial \eta^{2}}\right)^{2}$$

(۲-۳۵)

ضرایب برای معادله فوق به صورت زیر تعریف شده است:

$$c_{\varepsilon 1}=1.44, c_{\varepsilon 2}=1.92, \sigma_{\varepsilon}=1.3$$
$$f_{2}=1-0.3\exp\left(-R_{t}^{2}\right)$$

(۲-۳۵-۱۰)

یا در حالت منفصل شده خواهیم داشت:

$$\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{1}^{2}\left(\frac{v_{t}}{\sigma_{e}}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_{1}^{2}\left(\frac{v_{t}}{\sigma_{e}}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^{2}}-\left(f_{2}c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j}+\left[\frac{+m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{1}^{2}\left(\frac{v_{t}}{\sigma_{e}}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{1}^{2}\left(\frac{v_{t}}{\sigma_{e}}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}$$
$$+\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_{1}^{2}\left(\frac{v_{t}}{\sigma_{e}}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^{2}}-\left(f_{2}c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j}+\left[\frac{+m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{1}^{2}\left(\frac{v_{t}}{\sigma_{e}}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j-1}+\left(c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}v_{t}m_{1}^{2}\right)_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^{2}+\left(2\alpha m_{1}^{4}(v_{t})\right)_{i+\frac{1}{2},j}\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^{2}}\right)^{2}}_{M'_{i+\frac{1}{2},j}}=0$$

(۲-۳۵-۱)

در نهایت به صورت منظم شده وماتریسی خواهیم داشت:

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+B''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j-1}+D''_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

(۲-۳۵-۲)

ضرایب ماتریسی نیز به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{1}^{2}\left(\frac{v_{t}}{\sigma_{e}}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

(۲-۳۵-۳)

$$B''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_1^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2 c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۵-۴}$$

$$C''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۵-۵}$$

$$\overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_1^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2 c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۵-۶}$$

$$D''_{i+\frac{1}{2},j}=A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}+\overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j-1}+L''_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+G''_{i+\frac{1}{2},j}\left(M_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2 \tag{۲-۳۵-۷}$$

$$L''_{i+\frac{1}{2},j}=\left(c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t m_1^{2}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۵-۸}$$

$$G''_{i+\frac{1}{2},j}=\left(2\alpha m_1^{4}(\nu_t)\right)_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۵-۹}$$

برای حل معادلات فوق می توان همانند معادله مومنتوم رابطه های زیر را بیان کرد:

$$k_{i+1,j}=E'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+F'_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۶}$$

$$\varepsilon_{i+1,j}=E''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+F''_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۲-۳۷}$$

$$E'_{i+\frac{1}{2},j}=-\frac{A'_{i+\frac{1}{2},j}}{B'_{i+\frac{1}{2},j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}E'_{i+\frac{1}{2},j-1}} \tag{۲-۳۶-۱}$$

$$F'_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{D'_{i+\frac{1}{2},j} + C'_{i+\frac{1}{2},j} F'_{i+\frac{1}{2},j-1}}{B'_{i+\frac{1}{2},j} + C'_{i+\frac{1}{2},j} E'_{i+\frac{1}{2},j-1}} \qquad (۲-۳۶-۲)$$

$$E''_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{A''_{i+\frac{1}{2},j}}{B''_{i+\frac{1}{2},j} + C''_{i+\frac{1}{2},j} E''_{i+\frac{1}{2},j-1}} \qquad (۲-۳۷-۱)$$

$$F''_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{D''_{i+\frac{1}{2},j} + C''_{i+\frac{1}{2},j} F''_{i+\frac{1}{2},j-1}}{B''_{i+\frac{1}{2},j} + C''_{i+\frac{1}{2},j} E''_{i+\frac{1}{2},j-1}} \qquad (۲-۳۷-۲)$$

شرایط مرزی برای حل معادلات توربولانسی به این قرار است:

$$\begin{aligned} &\eta_1 = 0 \rightarrow k_{i+1,j=1} = 0, \varepsilon_{i+1,j=1} = 0 \\ &\eta_J = 1 \ , \ k_{i+1,J} = k_e\left(x_{i+1}\right), \varepsilon_{i+1,J} = \varepsilon_e\left(x_{i+1}\right) \end{aligned} \qquad (۲-۳۸)$$

بعد از تکرار اول باید مقادیر متوسط در ضرایب ماتریسی از طریق فرمول های متوسط گیری همانند (۱-۳۳-۲) این بار برای k,ε با همین ساختارمحاسبه و تعیین گردد.

۳-۳-۲)نحو ه ی شبکه بندی:

در حل عددی جریانهای متلاطم نسبت به جریانهای آرام یک تفاوت اساسی می توان بیان کرد وآن در نحوه شبکه بندی می باشد از آنجا که گرادیان سرعت در نزدیکی دیواره در جریان متلاطم بسیار بزرگتر از مقدار این پارامتر در موقعیت مشابه در جریان آرام میباشد بنابراین باید سعی کرد که در نزدیکی دیواره فاصله بین شبکه کوچکتر ودر عین حال در فواصل دورتر از دیواره این فواصل بزرگتر باشد بنابراین باید از یک نوع شبکه بندی متغییر در جهت (η) باید استفاده کرد به عبارتی باید گامهای فواصل در جهت (η) با دور شدن از دیواره تغییر نماید بر این اساس آنچه را در کتابها ومنابع مختلف درجهت بدست آوردن این فواصل اعلام شده به شکل زیر می توان بیان کرد:[۲]

$$\begin{aligned} &\eta_1 = 0 \\ &\eta_j = \eta_2 \frac{K^{j-1}-1}{K-1} \qquad j = 2,3,4,\ldots,J \\ &\eta_J = 1 \end{aligned} \tag{۲-۳۹}$$

بطوریکه:

$$\Delta\eta_{i,j} = \eta_2 K^{j-2} \tag{۲-۴۰}$$

$$\eta_2 = \frac{(k-1)}{\left(k^{J-1}-1\right)} \tag{۲-۴۱}$$

تعداد نقاط کل(J)

$$J = \frac{\ln\left[1+(k-1)\left(\frac{\eta_e}{\eta_2}\right)\right]}{\ln k} \tag{۲-۴۲}$$

که: $k = 1.1$

براین اساس ضرایب ماتریسی بکار رفته در معادلات اصلی مربوط به مومنتوم و(k,ε) نیز دستخوش تغییراتی به شکل زیر خواهند شد که به دلیل شباهت در تغییرات ایجاد شده به عنوان نمونه ضرایب تغییریافته معادله منفصل شده مومنتوم را در اینجا بیان میکنیم[۱،۵]:

به عنوان مثال می توان نوشت:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{i+1,j} = (g_1)_{i,j}\, u_{i+1,j+1} - \left[\left((g_1)_{i,j}\right) - (g_2)_{i,j}\right] u_{i+1,j} - \left((g_2)_{i,j}\right) u_{i+1,j-1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_{i+1,j} = 2\left\{(g_3)_{i,j}\, u_{i+1,j+1} - \left[\left((g_3)_{i,j}\right) + (g_4)_{i,j}\right] u_{i+1,j} + \left((g_4)_{i,j}\right) u_{i+1,j-1}\right\}$$

در نتیجه:

$$A_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-m_{\Pi}}{2} g_1 + m_{\mathrm{I}}^2 (\nu_t + \alpha) g_3\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۲\text{-}۲۷\text{-}۲\text{-}۱)$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-u}{\Delta x} - m_{\mathrm{I}}^2 (\nu_t + \alpha)(g_3 + g_4) + \frac{m_{\Pi}}{2}(g_1 - g_2)\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۲\text{-}۲۷\text{-}۳\text{-}۱)$$

$$C_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+m_{\Pi}}{2} g_2 + m_{\mathrm{I}}^2 (\nu_t + \alpha) g_4\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۲\text{-}۲۷\text{-}۴\text{-}۱)$$

$$\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+u}{\Delta x} - m_{\mathrm{I}}^2 (\nu_t + \alpha)(g_3 + g_4) + \frac{m_{\Pi}}{2}(g_1 - g_2)\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۲\text{-}۲۷\text{-}۵\text{-}۱)$$

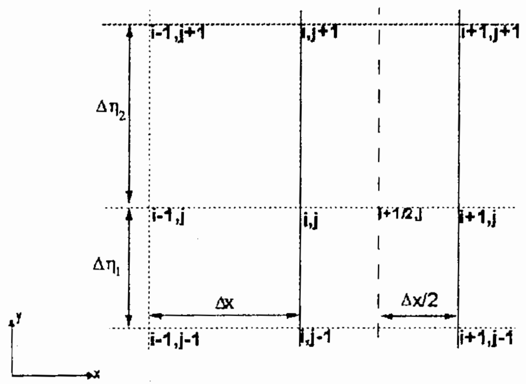
که ضرایب جدید بکار رفته به صورت زیر بیان می گردد:

$$\left(g_1\right)_{i,j}=\frac{1}{\eta_2}\frac{K}{1+K} \tag{۲-۴۳}$$

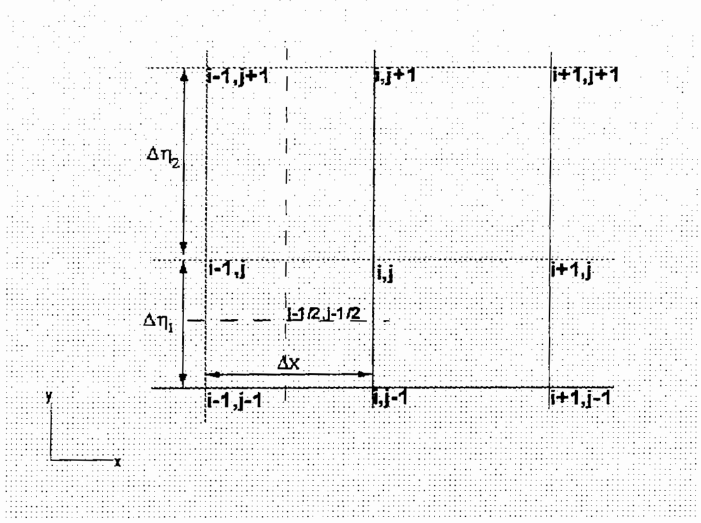
$$\left(g_2\right)_{i,j}=K^2\left(g_1\right)_{i,j} \tag{۲-۴۴}$$

$$\left(g_3\right)_{i,j}=\frac{1}{\eta_2^2}\frac{K^{3-2j}}{1+K} \tag{۲-۴۵}$$

$$\left(g_4\right)_{i,j}=K^2\left(g_3\right)_{i,j} \tag{۲-۴۶}$$



شکل(۱۱-۲):نحوه شبکه بندی جهت حل عددی با استفاده از ساختار Crank-Nicholson در روی صفحات بدون انحنا



شکل(۱۲-۲):نحوه شبکه بندی جهت حل عددی با استفاده از ساختار Keller's box در روی صفحات بدون انحنا

۴-۳-۲)نحو ه ی بدست آوردن ترمهای توربولانسی:

برای بدست آوردن تر مهای توربولانسی روابط مختلفی بیان شده است که از آن جمله به روابط اساسی زیر اشاره کرد:

Boussinesq eddy viscosity, Speziale eddy viscosity, Launder eddy viscosity که از میان این روابط رابطه [۲] Launder eddy viscosity می توان گفت دقیقترین جوابها را در مورد ترمهای توربولانسی بدست می آورد اما رابطه Boussinesq eddy viscosity, نیز کاربرد وسیعی دارد که در اینجا از این رابطه استفاده شده است البته این روابط نیاز به اصلاحاتی دارند به خصوص زمانی که در مورد جریانهای برشی ساده از آنها استفاده می شود .بنابراین خواهیم داشت[۳ ,۲] :

$$-\rho\overline{u_i'u_j'} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \qquad (۲-۴۷)$$

که تانسور های کرنش به صورت زیر تعریف می شوند:

$$S_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} div\vec{V} \qquad (۲-۴۸)$$

$$S_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} div\vec{V} \qquad (۲-۴۹)$$

که برای سیال تراکم ناپذیر $div\vec{V} = 0$ است.

در صورتی که معادلات فوق در مختصات خواسته شده نوشته شود داریم:

$$-\rho\overline{u'^2} = 2\mu_t\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \left(-m_\Delta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right) - \frac{2}{3}\rho k \qquad (۲-۵۰)$$

$$-\rho\overline{v'^2} = 2\mu_t m_1\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) - \frac{2}{3}\rho k \qquad (۲-۵۱)$$

که انرژی جنبشی توربولانسی به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{v'^2} + \overline{u'^2} + \overline{w'^2}\right)$$

اگر معادلات فوق را بخواهیم به شکل ماتریسی در جهت حل بکار بریم معادلات به صورت زیر خلاصه خواهند شد:

$$\left(\overline{u'^2}\right)_{i,j} = \left(2\nu_t\right)_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} + \left(-m_\Delta 2\nu_t\right)_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{i,j} - \frac{2}{3}k_{i,j} \qquad (۲-۵۰-۱)$$

$$\left(\overline{v'^2}\right)_{i,j} = \left(2\nu_t m_1\right)_{i,j}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_{i,j} \qquad (۲-۵۱-۱)$$

$$\left(\overline{w'^2}\right)_{i,j} = 2k_{i,j} - \left(\left(\overline{v'^2}\right)_{i,j} + \left(\overline{u'^2}\right)_{i,j}\right) \qquad (۲-۵۳)$$

با تاکید مجدد بر این نکته که داریم: $\left(\nu_t\right)_{i,j} = \left(f_\mu c_\mu\right)\dfrac{\left(k_{i,j}\right)^2}{\varepsilon_{i,j}}$

بر طبق آنچه که در ابتدای این قسمت بیان شد ما جهت اصلاح روابط گفته شده و بدست آوردن تنشهای نرمال توربولانسی مجبور شدیم که ضرایبی از تنش برشی آشفتگی به عنوان ترم اصلاحی به معادلات (۲-۵۰) و(۲-۵۱) اضافه نماییم البته این ترمها به صورت ضریب دلخواه وبدون منطق خاصی در معادلات مذکور دخالت داده نشده اند چرا که این ضرایب اصلاحی به کمک رابطه غیر خطی Launder eddy viscosity بدست آمده اند.[۲]

۴-۲)بررسی نتایج مربوط به حل عددی معادلات لایه مرزی بر روی صفحه مسطح:

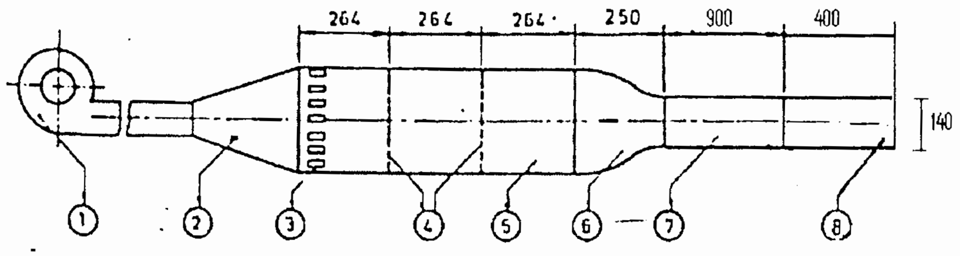
از آنجا که اعتبا ر هر حل عددی از معالات مختلف در نحوه ی مقایسه ای است که با حل های تجربی ویا حل های تحلیلی انجام می گیرد بنابراین ما در این مرحله سعی می کنیم حداقل برای پروفیل های سرعت بدست آمده و در صورت امکان تنش برشی توربولانسی مقایسه درستی از مقادیر بدست آمده از حل عددی ومقادیر تجربی داشته باشیم :

توضیحاتی در مورد ساختار کارهای تجربی مورد استفاده وهندسه حل:

آنچه که از آن به عنوان داده های تجربی در انجام این پروژه جهت مقایسه با مقادیر بدست آمده از حل عددی مورد استفاده قرار می گیرد شامل دو گروه از کارهای تجربی است که توضیحاتی در مورد آن همرا با هندسه مسئله مورد نظر درطی دو قسمت آورده می شود:

قسمت اول از مقادیر تجربی مورد استفاده مربوط به دستگاه تونل بادی است که دارای ویژگیهایی به شرح زیر میباشد[۶]:

ناحیه test section دارای سطح مقطعی مربعی شکل با ابعاد $140mm \times 140mm$ بوده و طول این قسمت $900mm$ می باشد همچنین شدت توربولانسی وسرعت جریان آزاد در این ناحیه به ترتیب برابر با $0.01, 13\frac{m}{s}$است در ادامه این ناحیه یک صفحه مسطح به طول $400mm$ که به صورت یک مجرا مسطح(straight duct) است قرار دارد سرعت جریان آزاد وشدت توربولانسی نیز در این قسمت برابر با مقدار $0.01, 13\frac{m}{s}$ در نظر گرفته شده است شکل شماتیک این دستگاه در زیر نشان داده شده است:



:

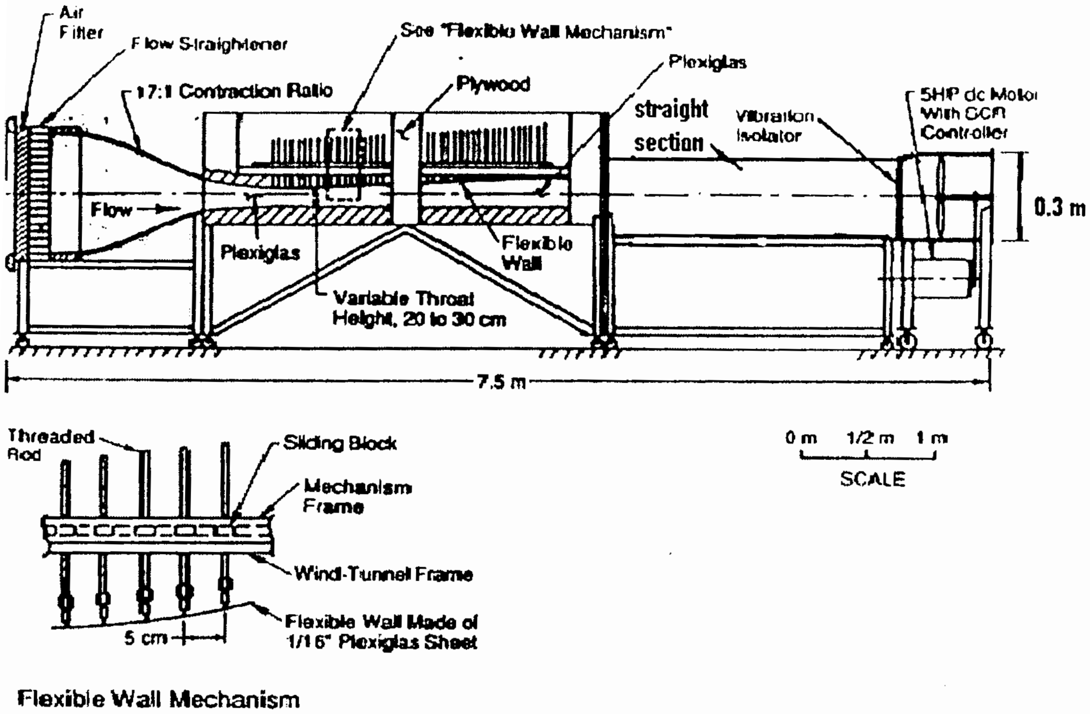
1. Centrifugal blower 2. Diffuser 3. Honey comb 4. Nylon screen
5. Settling chamber 6. Contraction 7. Test section 8. straight duct

All dimensions in mm

شکل(۱۳-۲):نمایی از ساختار وجزئیات دستگاه تجربی توضیح داده شده

برای اینکه بتوانیم از لحاظ هندسی شرایطی را که مطابق با ساختار دستگاه تجربی است جهت حل عددی مورد استفاده قرار دهیم یک صفحه مسطح با طول $1300mm$ و عرض $70mm$ که جریان آزاد با سرعت $13\frac{m}{s}$وشدت توربولانسی 0.01 برروی صفحه مذکور جریان دارد در نظر گرفتیم .توجه به این نکته الزامی است که حل فوق به صورت دو بعدی بوده و در کار تجربی فوق بر دو بعدی بودن تاکید شده زیرا تمام مقادیر تجربی بدست آمده در امتداد خط مرکز یا همان centerline بدست آمده است.

قسمت دوم از کارهای تجربی از لحاظ ساختار وشکل نیز تا حدودی شبیه به دستگاه قبلی است ولی با ابعادی متفاوت مقادیر تجربی مورد استفاده مربوط به دستگاه تونل بادی است که در دانشگاه کالیفرنیا مورد استفاده قرارگرفته است این دستگاه بطور خلاصه دارای طولی به اندازه $7.5m$ بوده که طول کل قسمت test section برابر با $3m$ میباشد عرض ناحیه مورد آزمایش نیز برابر با $0.3m$ است سرعت جریان آزاد در این ناحیه برابر با $17.5\frac{m}{s}$ و شدت توربولانسی نیز 0.01 است .در حالت اول از اندازه گیریهای صورت گرفته که بر روی یک صفحه مسطح بوده طول این صفحه $2.3m$ از طول کل ناحیه test section را در بر گرفته است.در این قسمت نیز سرعت جریان آزاد برابر با $17.5\frac{m}{s}$ وشدت توربولانسی 0.01 می باشد.[۹]



شکل(۱۴-۲):نمایی از ساختار دستگاه تجربی

برای حل عددی صفحه مسطحی را که دارای طول $3m$ وعرض $0.3m$ را درنظر گرفتیم سرعت جریان آزاد در این قسمت برابر با $17.5\frac{m}{s}$و شدت توربولانسی نیز 0.01 است .

در تمامی موارد فوق تعیین نقطه گذر از جریان آرام به متلاطم توسط رابطه زیر داده شده است:

$$\mathrm{Re}_{x,tr}^{\frac{1}{2}} = \frac{-1+\sqrt{1+132500T^2}}{39.2T^2} \qquad (۲-۵٤)$$

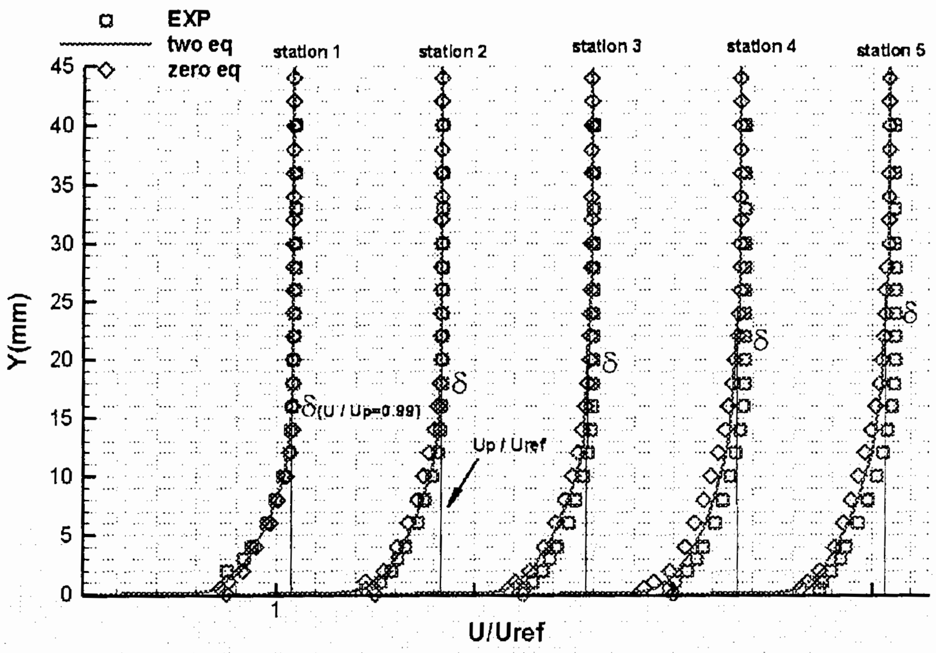
که T دراینجا شدت توربولانسی جریان آزاد است.

سرعت جریان ازاد	موقعیت۱	موقعیت۲	موقعیت۳	موقعیت۴	موقعیت۵	موقعیت۶	موقعیت۷
$u_{\infty}=13\frac{m}{s}$ ، $u_{ref}=12\frac{m}{s}$	۱m	۱,۰۵m	۱,۱m	۱,۲m	۱,۳m	-	-
$u_{\infty}=17.5\frac{m}{s}$	.,۷m	۱m	۱,۲۵m	۱,۷۵m	۲m	۲,۲۵m	۲,۵m

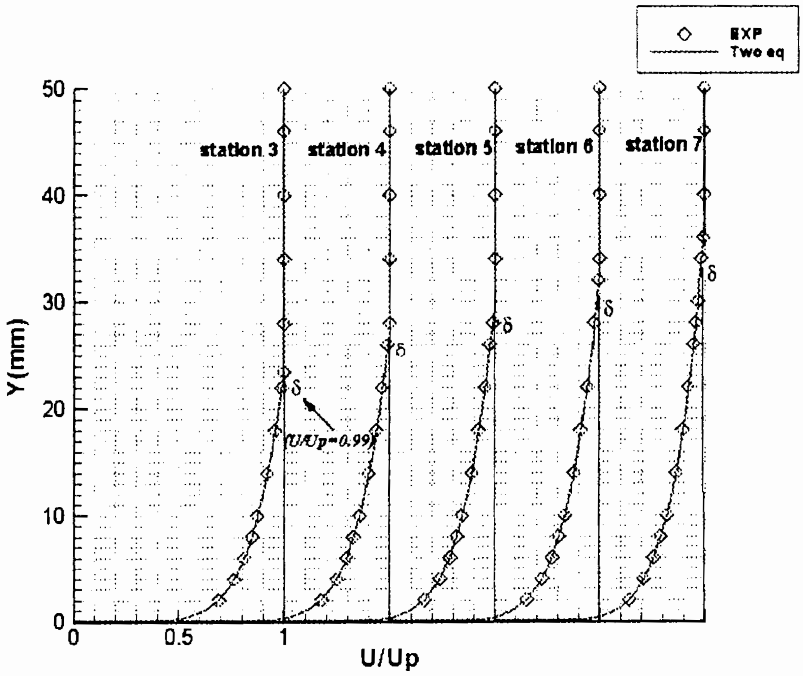
جدول(۱-۲):بیان وضعیت قرارگرفتن موقعیت های مختلف ذکرشده درنمودارهای مربوط به بخش نتایج

در این مرحله نتایج بدست آمده را به صورت نمودار که نحو ه ی مقایسه با کارهای تجربی نیز در آن مشخص است بیان می گردد. از آنجا که مقادیر (δ^*,θ,H) در فصل های بعدی به صورت نمودار در مقایسه با شرایط بیان شده در آن فصل ها آورده شده است بنا بر این از ذکر مجدد این مقادیر به صورت نمودار خودداری کرده وفقط به بیان نتایج آن در قسمت بعدی خواهیم پرداخت:

۱-۴-۲)نتایج مربوط به پروفیل های سرعت:



شکل(۱-۲):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته برروی صفحه مسطح ($u_e = 13 m/s$)



شکل(۲-۲):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته برروی صفحه مسطح($u_e = 17.5 m/s$)

۱) از مقایسه پروفیل ها ی سرعت بدست آمده برای حالتهای مختلف می توان به یک نتیجه مشترک رسید یعنی مقدار ضخامت لایه مرزی در امتداد حرکت در جهت صفحه افزایش می یابد که امری است بدیهی همچنین مقدار ($\frac{\partial u}{\partial y}$) در عرض لایه مرزی سیری نزولی خواهد داشت هچنانکه در جهت طولی لایه مرزی شاهد کاهش ($\frac{\partial u}{\partial y}$) خواهیم بود البته در یک y یکسان نه در یک ($\frac{y}{\delta}$) مشابه.

۲) در حالت کلی می توان گفت که در یک صفحه مسطح مقدار $\frac{\partial u}{\partial x}$ نیز مقداری منفی است در حالی که ($\frac{\partial u}{\partial y}$) مقداری مثبت می باشد.

۳) اگر فرض بقای مومنتوم را مورد توجه قرار دهیم می توان این گونه استنباط نمود که با کاهش میزان مومنتوم ناشی از سرعت متوسط در جهت صفحه (طول لایه مرزی) مقدار باقیمانده آن صرف غلبه بر ناپایداریهای ناشی از ترمهای توربولانسی می شود.

۴) مقدار ($\frac{\partial u}{\partial y}$) در ($y=0$) نیز در طول لایه مرزی کاهش می یابد و این امر در بدست آوردن مقدار u_τ (سرعت توربولانسی) وهمچنین (τ_w و C_f) از اهمیت ویژه ای برخوردار است هر چند که این مقدار کاهش بر روی صفحه مسطح تا حدودی کم میباشد.

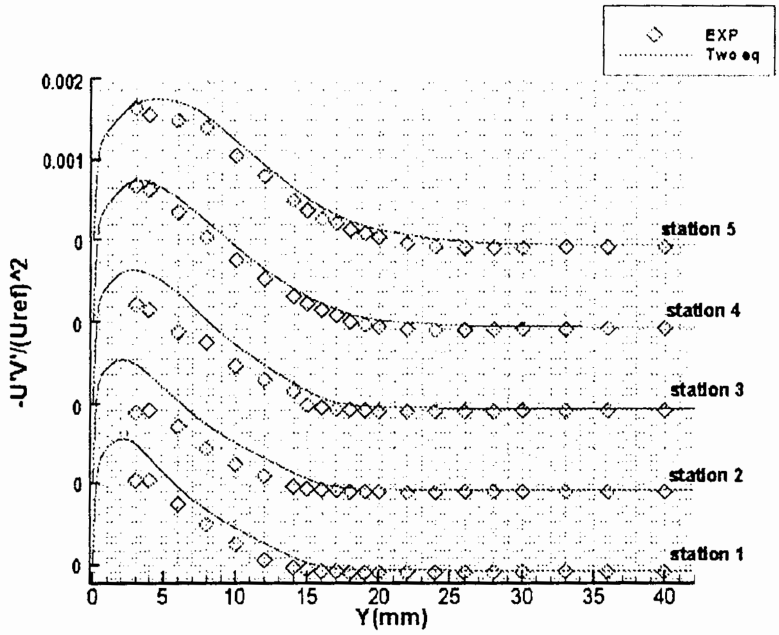
۵) درمقادیر (δ,δ^*,θ) همگی شاهد افزایش آنها خواهیم بود البته افزایش ضخامت لایه مرزی در جهت حرکت در امتداد صفحه امری مشخص است وبه تبع آن ضخامت مومنتومی و جابجایی نیز افزایش می یابد.وبه این خاطر است که خطوط جریان خارجی باید به اندازه δ^* به سمت خارج منحرف شوند که اصل بقای جرم ارضا گردد.[۴]

در یک Re یکسان در روی یک صفحه مسطح مقدار δ تابعی است از x یعنی اگر دو جریان داشته باشیم با دوسرعت آزاد متفاوت آن جریانی که دارای سرعت بیشتری است دارای ضخامت لایه مرزی کمتری خواهد بود البته در یک (Re_x) یکسان زیرا این جریان با طی مسافت کمتری به مقدار Re مورد نظرمیرسد همچنین همین شرایط تقریبا برای (δ^*,θ) برقرار است .[۴]

۶) مقدار C_f در یک صفحه مسطح با توجه به کاهش تنش برشی ناشی از لزجت در روی دیواره کاهش خواهد یافت اما این میزان کاهش تقریبا زیاد چشمگیر نخواهد بود.می توان گفت C_f با (Re_x) نسبت عکس دارد اما در(Re_x) برای جریانهای مختلف با سرعت های آزاد متفاوت مقدار C_f تا حدودی یکسان خواهد بود.

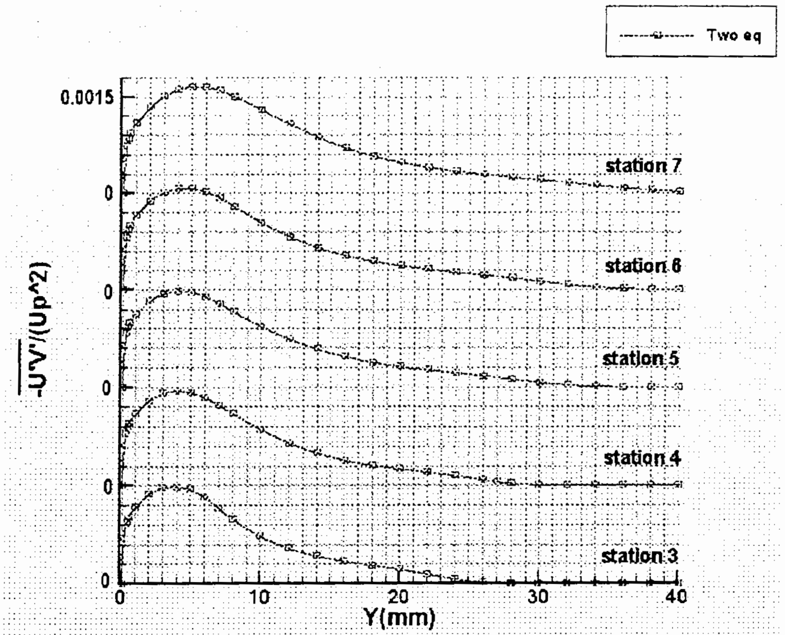
۷) تغییرات H (ضریب شکل) در طول یک صفحه مسطح بسیارناچیز خواهد بود اما این مقدار به صورت جزئی تمایل به کاهش دارد.به طور کلی می توان گفت تغییرات H با تغییرات (C_f) نسبت مستقیم دارد.

۲-۴-۲)نتایج مربوط به مقادیر توربولانسی:



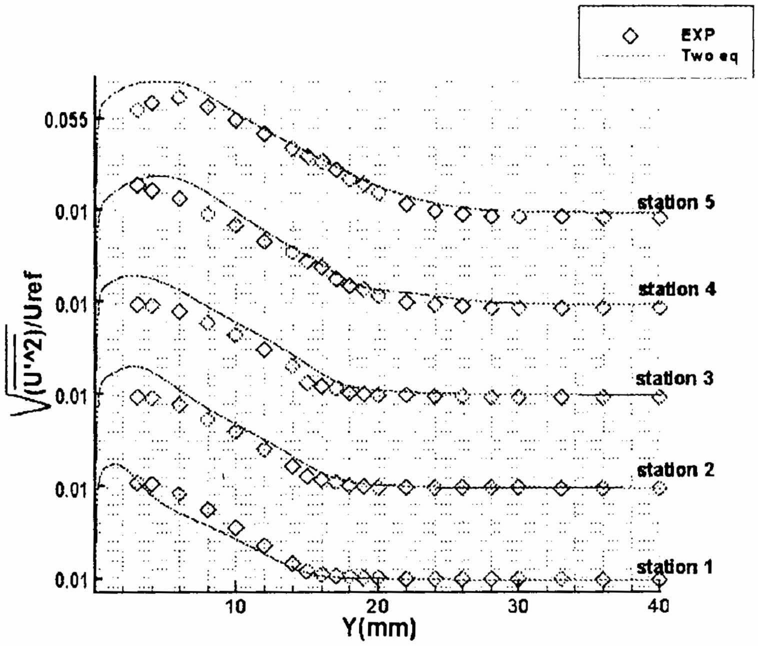
شکل(۳-۲):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی (turbulence shear stress)

برروی صفحه مسطح($u_e = 13 m/s$)



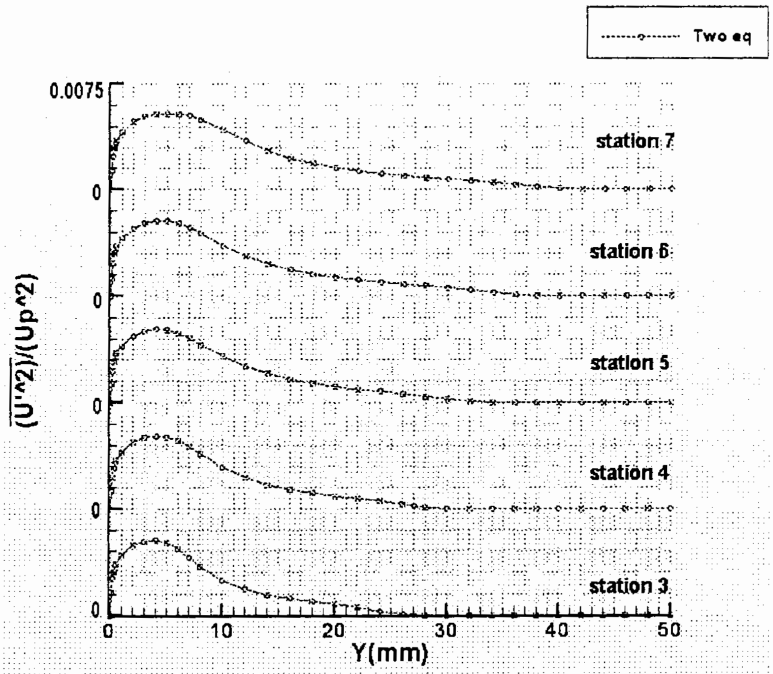
شکل(۴-۲):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی (turbulence shear stress)

برروی صفحه مسطح($u_e = 17.5 m/s$)



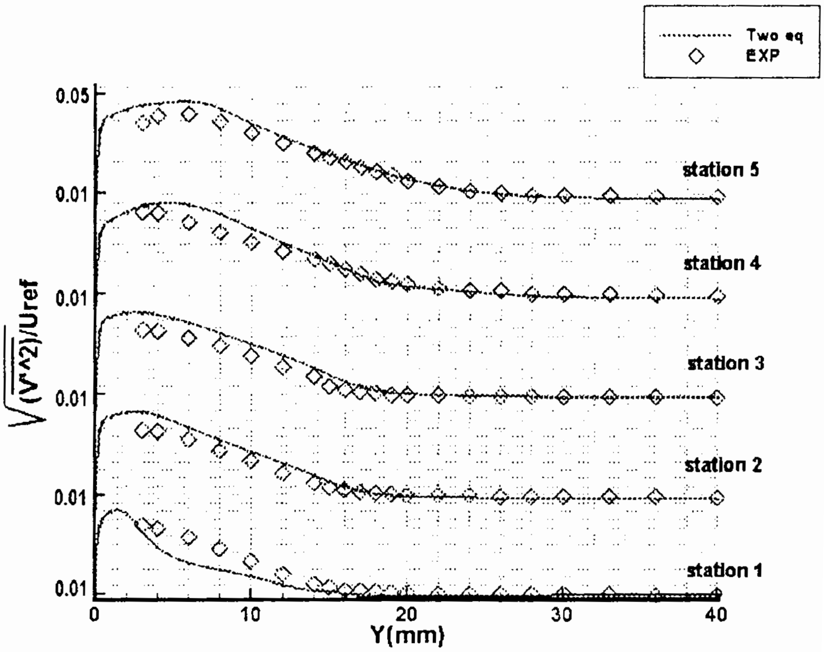
شکل(۵-۲):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulence intensity)

برروی صفحه مسطح($u_e = 13 \, m/s$)



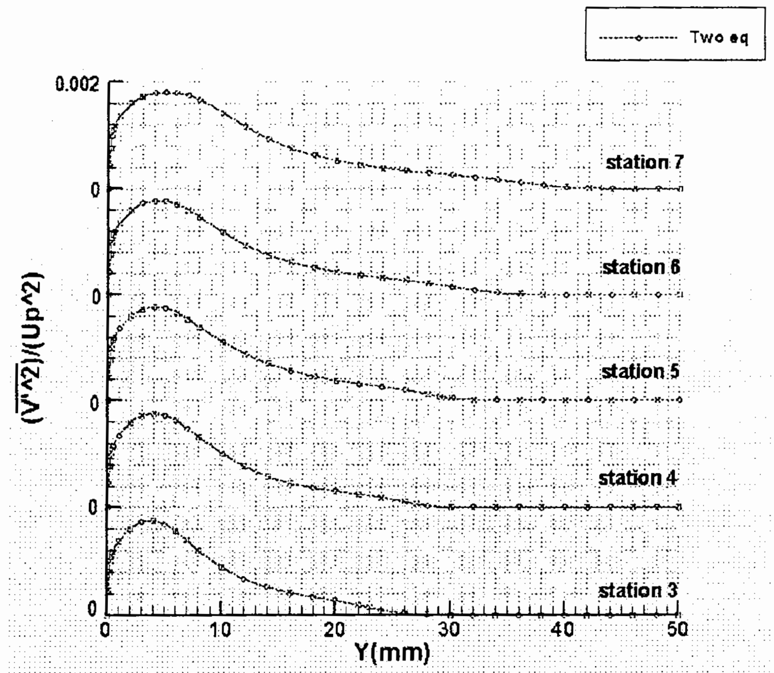
شکل(۶-۲):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulence intensity)

برروی صفحه مسطح($u_e = 17.5 \, m/s$)



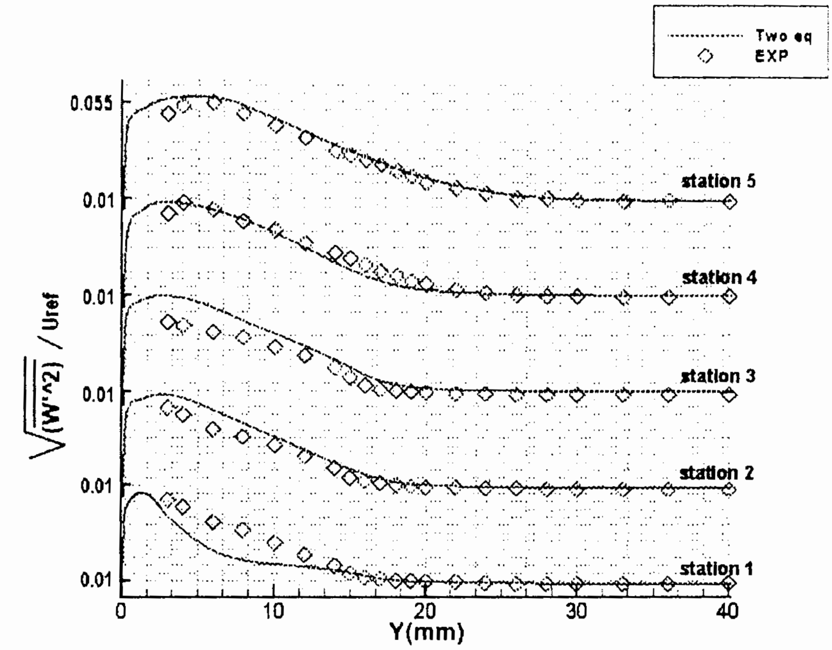
شکل(۷-۲):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulence intensity)

روی صفحه مسطح($u_e = 13 \, m/s$)



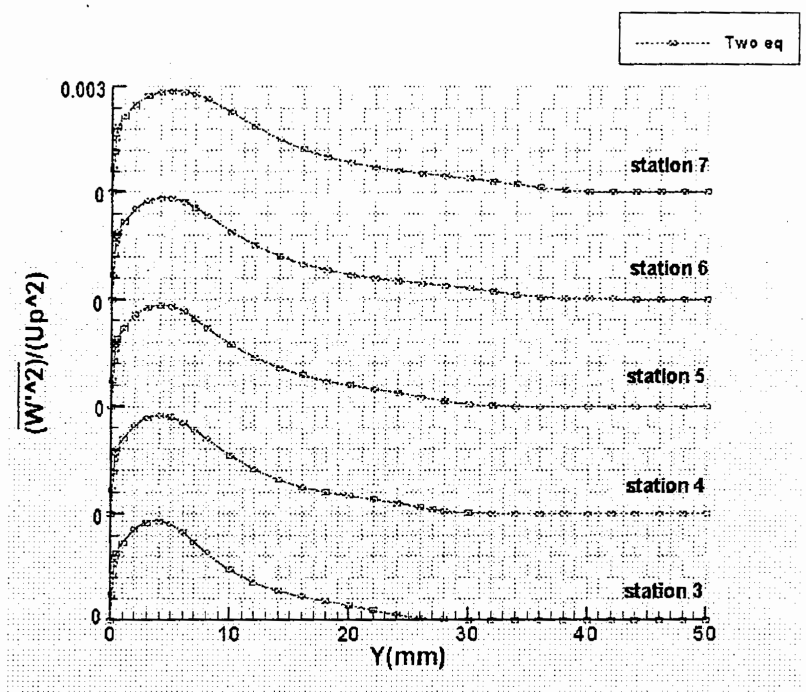
شکل(۸-۲):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulence intensity)

برروی صفحه مسطح($u_e = 17.5 \, m/s$)



شکل(۹-۲):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulence intensity)

برروی صفحه مسطح($u_e = 13 m/s$)



شکل(۱۰-۲):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulence intensity)

برروی صفحه مسطح($u_e = 17.5 m/s$)

۱)مقادیر وتغییرات $\frac{-\overline{u'v'}}{u_{\tau}^{2}}$ در عرض لایه مرزی شامل دو موقیت کاملا متفاوت است در یک محدوده شامل رشد ودر محدوده ی دیگر کاهش این مقادیر را خواهیم دید. دلیل رفتار اول که در محدوده $0.02 \le \frac{y}{\delta} \le 0.2 - 0.3$ اتفاق می افتد به این خاطر است که در ناحیه viscous sub layer که ناحیه ای است که لزجت اهمیت دارد وترمهای توربولانسی مقداری برابر با صفر خواهند داشت اما وقتی از این ناحیه وارد ناحیه Buffer layer میشویم ترمهای توربولانسی ولزجت از یک درجه واهمیت بر خودار هستند. که در کارهای عددی اکثرا ضخامت اولین المان به گونه ا ی در نظر گرفته میشود که این دو ناحیه را در تمامی موقعیت ها تحت پوشش قرار دهد.اما در محدوده ناحیه لگاریتمی که در آن قانون لگاریتمی سرعت برقرار است شاهد رشد مقادیر تنش برشی توربولانسی هستیم براساس آنچه که در نتیجه انجام این پروژه صورت گرفته و بر فیزیک جریان نیز منطبق است مقدار تنش برشی توربولانسی ابتدا تا حد ماکزییمی رشد خواهد داشت سپس در مقطعی دارای مقدار ثابتی خواهد شد که در آن مقطع شیب رشد تنش برشی توربولانسی کم میشود بطوریکه می توان آن مقادیر را ثابت در نظر گرفت که این ناحیه ثبات (constant region) محدوده اش برای موقعیت های گوناگون متفاوت خواهد بود وتا قسمتی ازناحیه ی (outer layer) نیز میتواند رشد پیدا کند.ولی در نا حیه (outer layer) شاهد کاهش مقادیر توربولانسی در عرض لایه مرزی میشویم. (مقایسه صورت گرفته در موقعیت طولی یکسان ولی در مقادیر عرضی متفاوت خواهد بود.) بنابراین سیر نزولی تنش برشی توربولانسی و شدتهای توربولانسی در ناحیه (outer layer) خواهد بود .

۲)همانطور که در قسمت قبلی توضیح داده شد ناحیه ثابت (constant region) برای موقعیت های گوناگون در طول لایه مرزی متفاوت خواهد بود.این ناحیه باتوجه به حرکت در امتداد لایه مرزی گسترش پیدا می کند اما فاصله این ناحیه در عرض لایه مرزی نسبت به دیواره نیز متفاوت است.به بیان دیگر آنچه که بدیهی است اینست فاصله ای که در آن مقدار ماکزیمم تنش برشی توربولانسی اتفاق می افتد متفاوت خواهد بود و این فاصله از دیواره

بیشتر میشود وقتی که در جهت طولی لایه مرزی حرکت کنیم.اما برای یک صفحه مسطح وقتی در حالت بی بعد شده ($\frac{y}{\delta}$) این فواصل از دیواره مورد بررسی قرار می گیرد محدوده ای در حدود ۰٫۱ الی ۰.۱۵ را در بر میگیرد.

۳)در ناحیه (outer layer) هر چند مقدار تنش برشی توربولانسی در عرض لایه مرزی کاهش می یابد ولی وقتی مقادیر ذکر شده در این ناحیه با نواحی (outer layer) در موقعیت های طولی دیگر مورد بررسی قرار میگیرد شاهد رشد مقادیر توربولانسی در طول لایه مرزی در ناحیه (outer layer) خواهیم بوددر حالی که عکس این موضوع برای ناحیه (inner layer) وجود دارد.دلیل این امر هم واضح است چرا که با افزایش ضخامت لایه مرزی مقادیر توربولانسی دیرتر به مقدار صفر میرسد .

۴) مقادیرشدت توربولانسی نیز از نظر چگونگی توزیع شرایط مشابهی با تنش برشی توربولانسی خواهند داشت در این شرایط $\frac{+\overline{u'^2}}{u_p^{\ 2}}$ از سایر شدتهای توربولانسی مقداری بیشتر خواهد داشت ودر میان مقدار ($\frac{+\overline{v'^2}}{u_p^{\ 2}}$) از همه ی مقادیر شدتهای توربولانسی‌کمتر خواهد بود.چنانچه نسبت ($\frac{+\overline{v'^2}}{u_p^{\ 2}}$) دردو حالت متفاوت یکی بر روی صفحه مسطح ودیگری در حالت گرادیان فشار معکوس در نظر گرفته شود شاهد افزایش این نسبت در اثر عوامل ناپایداری (گرادیان فشار معکوس) خواهیم بود .

۵)نکته جالب توجه شباهت نمودارهای تنش برشی توربولانسی وشدتهای توربولانسی با همدیگر میباشد.به خصوص نمودارهای ($\frac{+\overline{v'^2}}{u_p^{\ 2}}$ و $\frac{-\overline{u'v'}}{u_p^{\ 2}}$) بسیاربه هم شبیه هستند از طرفی میتوان گفت نسبت ($\frac{+\overline{v'^2}}{k}$)تا حدودی مشابه نسبت تنش برشی توربولانسی به k (انرژی جنبشی توربولانسی) میباشد البته این میزان نسبت برای ($\frac{+\overline{v'^2}}{k}$) تا اندازه ای بیشتر خواهد بود.

۶)آنچه که میتوان در مورد نحوه ی تغییر مقادیر ماکزیمم تنش برشی توربولانسی در طول لایه مرزی بدین صورت است که در نگاه اول با توجه به کاهش $\frac{\partial u}{\partial y}$ در جهت x این گونه به نظر میرسد که با کاهش این مقادیر روبه رو

هستیم اما در اینجا یک ترم متغییر دیگر(V_t) نیز وجود دارد که این ترم با توجه به افزایش آن در جهت (x) باعث میشود که مقدار ماکزیمم ($\frac{-\overline{u'v'}}{u_p^{2}}$) در جهت (x) ثابت و حتی در بعضی مراحل شاهد افزایش جزئی نیز باشیم.در صورتی که بخواهیم از این فرض استفاده کنیم که مقدار ($\frac{-\overline{u'v'}_{\max}}{u_\tau^{2}}$) در ناحیه لگاریتمی مقدار ثابتی وبرابر با یک است در این حالت با یک تناقض روبه رو خواهیم شد زیرا مقدار u_τ در طول لایه مرزی همراه با کاهش است یعنی مقدار ماکزیمم تنش برشی توربولانسی نیز دچار کاهش خواهد شد اما آنچه در انجام این پروژه به آن دست یافتیم اینست که در هر موقعیت نمی توان دقیقا گفت که مقدار $-\overline{u'v'}_{\max}$ نسبت به u_τ^{2} برابر با یک خواهد شد زیرا بر اساس یافته های ما این نسبت در موقعیت های طولی مختلف متفاوت خواهد بود وبا حرکت در طول لایه مرزی این نسبت افزایش می یابد.و توجه داشته باشیم این تناقض ذکر شده بر این اساس بدست آمده است که مقدار تنش برشی مقدارثابتی باشد در حا لیکه ثابت بودن تنش برشی تنها برای نواحی بسیار نزد یک به دیواره قابل قبول است همانطور که در قسمتهای قبلی نیز توضیح داده شد حتی درناحیه ثبا ت (constant region) باز هم شاهد رشد بسیار جزئی این مقادیر هستیم بنابراین ثابت بودن به معنای مطلق وجود ندارد.

۷)دلیل اینکه محدوده (constant region) در جهت طولی لایه مرزی افزایش می یابد بدین خاطر است قانون سرعت لگاریتمی سرعت محدوده ی بیشتری را در بر میگیرد.

۸)توجه به این نکته الزامی است هر چقدرشروع ناحیه لگاریتمی درفاصله دورتری از دیواره باشد میزان گسترش آن نیز بیشتر خواهد بود به همین دلیل شاهد رشد تنش برشی توربولانسی در فاصله دورتری نسبت نسبت به دیواره خواهیم بود.هرچقدر مقدار این ناحیه توسعه یابد رشد ترمهای توربولانسی بیشتر خواهد شد اگر چه بعضی از تحقیقات تجربی این گونه میخواهند القاء کنند که این مقادیر در این ناحیه ثابت هستند که باز هم تاکید می کنیم که این با شرایط فیزیکی جریان اصلا سازگاری ندارد.

۹)مقادیر ماکزیمم تنش برشی توربولانسی را برای حالتهای مختلف با جریانهایی که سرعت آزاد متفاوت دارند را بدست آوردیم در نهایت این مقادیر بدست آمده تا حدودی ثابت نشان میدادند در حالی که تفاوت آنها چیزی در۰٫۰۰۰۱ تا۰٫۰۰۰۱۵ می باشد اما اگر در حالت غیر بی بعد شده یعنی ($-\overline{u'v'}$) در نظر گرفته شوند هر چقدر سرعت جریان خارجی بیشتر مقدار ($-\overline{u'v'}$) نیز بیشتر خواهد شد .این شرایط برای مقادیر شدت توربولانسی نیز برقرار است.

۱۰)برای جلوگیری از بیان مجدد آنچه که در تنش برشی توربولانسی و نحوه رشد آن توضیح داده شد در مورد شدتهای توربولانسی نیز صادق خواهد بود با این تفاوت که رابطه مقدار ماکزیمم تنش برشی توربولانسی نسبت به مجذورسرعت توربولانسی که برابر با یک در نظر گر فته شد در اینجا در مورد ترمهای شدت توربولانسی درست نیست.

محاسبه خطای موجود بین مقادیر بدست آمده از حل عددی در مقایسه با کارهای تجربی:

از آنجا که بیشتر مقادیر تجربی مورد استفاده مربوط به کار تجربی توضیح داده شده در قسمت اول بخش (۴-۲) می باشد لذا خطای موجود بین حل عددی ومقادیر تجربی فوق به صورت میانگین خطا در موقعیت های بیان شده به صورت جدولی در زیر آورده شده است. از محاسبه میانگین خطا ی بدست آمده می توان اینگونه نتیجه گیری کرد که خطای موجود بین مقادیر تجربی وعددی در مورد پروفیل های سرعت تا حدودی کمتر از خطای محاسبه شده در مورد مقادیر توربولانسی است(تنش برشی وشدتهای توربولانسی) واین به دلیل کوچک بودن این مقادیر از لحاظ مقداری در مقایسه با مقادیر پروفیل سرعت است.

موقعیتها ی طولی				
۱m	۱,۰۵m	۱,۱m	۱,۲m	۱,۳m
میانگین خطای محاسبه شده برای پروفیل های سرعت در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۱,۱۷۶	۲,۴۴۴	۳,۰۷۵	۴,۶۸۷	۵,۲۴۹
میانگین خطای محاسبه شده تنش برشی توربولانسی در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۱۰,۲۵۳	۱۰,۵۱۷	۱۰,۳۴۸	۳,۴۴۵	۵,۸۸۹
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{u'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۵,۲۳۷	۶,۸۱۸	۸,۵۴۵	۴,۱۶۶	۵,۱۲۶
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{v'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۱۰,۲۰۸	۴,۹۶۷	۴,۷۴۴	۴,۸۵۷	۲,۷۵۴
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{w'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۱۰,۷۱۴	۴,۷۴۰	۷,۶۲۶	۱,۲۲۶	۱,۹۹۷

جدول(۲-۲):خطای محاسبه شده برای مقادیر عددی بدست آمده در مقایسه با کار تجربی در روی صفحه مسطح($u_e = 13 \, {}^{m}/_{s}$)

فصل سوم:

اثرات گرادیان فشار معکوس بر روی لایه مرزی متلا طم

اثرات گرادیان فشار معکوس بر روی لایه مرزی متلا طم

۱-۳) بیان معادلات لایه مرزی همراه با ترم گرادیان فشار

معادله پیوستگی دراین حالت نیزهمانند شرایط صفحه مسطح است بنابراین:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۱-۲)$$

اما معادله مومنتوم دارای یک تفاوت اساسی است و آن وجود ترم گرادیان فشار است که در حالت صفحه مسطح برابربا صفر در نظر گرفته می شد که دراین حالت مقداری غیر از صفر خواهدداشت در بیشتر کارهای تجربی از پارامتری به نام (β) استفاده می شود(closure's parameter) که به صورت ($\beta=\left(\frac{\delta^*}{u_\tau}\right)\frac{dp}{dx}$) نشان داده میشود در این شرایط ما معمولا با دوحالت کاملا متفاوت از مسائل روبه رو هستیم در مسائل اول مقدار (β) ثابت در نظر گرفته میشود که همه حالت های مورد بررسی در انجام این پروژه از این قبیل موارد هستند در حالی که در مسائلی که بیشتر هدف بدست آوردن موقعیتی است که در نتیجه آن جدایی اتفاق بیفتد در این حالت مقدار (β) روندی افزایشی خواهد داشت طبیعی است که با افزایش این پارامتر ما شاهد افزایش گرادیان فشار وبه تبع آن ایجاد شرایط مناسب در جهت جدائی جریان خواهیم بود.که این قبیل مسائل بیشتر در ناحیه (wake) مورد بررسی قرار می گیرد.بنا براین همانطور که گفته شد ما با مقدار ثابت(β) مواجه هستیم که در نتیجه آن باید شرایط زیر را در نظر گرفت[۱]:

از این قبیل مسائل به عنوان equilibrium boundary layer که مشخصه آنها مقدار βاست یاد می کند در این حالت سرعت جریان آزاد به صورت زیر تعریف می گردد:

$$u_e=u_1(x^*)^m \qquad (۱-۳)$$

u_1 مقدار سرعت در $x^* = 1$ است و $x^* = 1 + \frac{x}{l}$ که مقدار x عبارت است از ناحیه ای که اثرات گرادیان فشار معکوس از آن ناحیه شروع می شود در حالیکه مقدار L طول ناحیه ای است که گرادیان فشار در آن وجود نداشته وبه تبع آن مقدار سرعت جریان آزاد مقداری ثابت خواهد بود وقتی از همان ابتدای شروع حرکت جریان ما شاهد اعمال گرادیان فشار باشیم در این شرایط باید مقدار L طول کل صفحه باشد و u_1 نیز مقدار سرعت جریان آزاد در انتهای صفحه خواهد بود[۱].

که m از طریق:

$$m = -\frac{\beta}{1+3\beta} \tag{۳-۲}$$

بدست می آید. یا

$$\beta = -\frac{m}{1+3m} \tag{۳-۲-۱}$$

بنابراین معادله مومنتوم در این شرایط در صورتی که با دو روش متفاوت گفته شده بی بعد گردد خواهیم داشت :

در صورتی که از روش Falkner Skan استفاده شود[۲]:

$$f'\zeta\frac{\partial f'}{\partial \zeta} + \left[\frac{1}{2}\eta(m-1)f' + V\right]\frac{\partial f'}{\partial \eta} = \left(1 - f'^2\right)m + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(1 + \nu_t^+\right)\frac{\partial f'}{\partial \eta}\right] \tag{۲-۴}$$

شرایط مرزی:

$$\eta = 0 \rightarrow \quad f' = 0 \quad f = f_w = -\frac{1}{\sqrt{u_e \nu x}}\int_0^x v_w(x)dx$$

(۲-۱۴)

$$\eta = \eta_e \rightarrow f' = 1$$

در صورتی که فقط در جهت y بی بعد گردد[۱]

می توان نوشت:

معادله مومنتوم:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + m_{\Pi}\frac{\partial u}{\partial \eta} - mU_1^2\left(1 + \frac{x}{L}\right)^{2m-1} - m_1^2\left(\nu_t + \alpha\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \tag{۲-۶-۱}$$

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+m_1\frac{\partial v}{\partial \eta}-m_5\frac{\partial u}{\partial \eta}=0 \qquad (۲ ۷)$$

شرایط مرزی:

$$\begin{aligned}&\eta=0\rightarrow\ u=0\ v=0\\&\eta=1\rightarrow\ u=u_e\end{aligned} \qquad (۲-۱۲)$$

۳-۲) تفاوت استفاده از روش طول اختلاطی در مدل کردن ترم توربولانسی وچگونگی حل معادلات

آنچه که به عنوان معادلات اساسی در فصل دوم برای روش مذکور آوردیم برای جریان همراه با گرادیان فشار معکوس نیز به همین ترتیب خواهد بود و الگوریتم حل نیز تفاوتی نخواهد داشت فقط در چند مورد تفاوتهایی وجود دارد که عبارتند از:[۲]

۱.مقدار m مقداری غیر از صفراست که باید از طریق معادله (۳-۲) بدست آید.

۲.مقدار N که در مدل توربولانسی مورد استفاده قرار گرفت باید از طریق معادله

$$N = (1-11.8P^{+})^{\frac{1}{2}} \qquad (۳-۳)$$

بدست آید و N=۱ فقط برای صفحه مسطح قابل اعتبار است.با تو جه به اینکه:

$$P^{+} = m\,\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{4}}\left(f_w''\right) \qquad (۳-۴)$$

$$f_w'' = v_w \qquad (۳-۴-۱)$$

توضیحاتی در مورد الگوریتم حل:

از آنجا که باید درابتدا مقادیری از (f_j, u_j, v_j) رابه صورت مقادیر اولیه در اختیار برنامه قرار دهیم در این حالت می توان مقادیر ورودی را برای مرحله ابتدائی به صورت زیر برای هر دو حالت صفحه مسطح وگرادیان فشار معکوس در نظر گرفت بنابراین خواهیم داشت:[۲]

$$u_j = \frac{3}{2}\frac{\eta_j}{\eta_e} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_j}{\eta_e}\right)^3 \qquad (۳-۵)$$

$$f_j = \frac{\eta_e}{4}\left(\frac{\eta_j}{\eta_e}\right)^2\left(3-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_j}{\eta_e}\right)^2\right) \qquad (۳-۶)$$

$$v_j = \frac{3}{2}\frac{1}{\eta_e}\left(1-\left(\frac{\eta_j}{\eta_e}\right)^2\right) \qquad (۳-۷)$$

بدیهی است که مقادیر بدست آمده توسط این فرمولها در مرحله اول جهت بدست آوردن $\delta v_j, \delta u_j, \delta f_j$ در اولین تکرار مورد استفاده قرار خواهند گرفت در مراحل وتکرارهای بعدی مقادیر جدید بدست آمده از این پارامترها جایگزین مقادیر مذکور شده واین عمل ادامه می یابد تا زمانی که شرط همگرایی برقرار شود.

۳-۳) نحوه ی استفاده از روش($k-\varepsilon$) در مدل کردن ترم توربولانسی وچگونگی حل معادلات

از آنجا که روش بکار برده شده در حل معادلات لایه مرزی بر روی صفحه مسطح چه از لحاظ الگوریتم حل چه از لحاظ معادلات بدست آمده تفاوتی وجود نخواهد داشت مگر در ترم گرادیان فشار که در قسمت (۱-۳) در مورد آن توضیح داده شد.بنا براین از ذکر مجدد معادلات (۳۴-۲)و(۳۵-۲) صرفنظر می کنیم .

۴-۳) نتایج بدست آمده (پروفیل های سرعت ,تنش برشی توربولانسی, شدتهای توربولانسی وپارامترهای دیگر لایه مرزی) در جریان همراه با گرادیان فشار معکوس:

در این قسمت نیز باید به این نکته اشاره کرد که شاهد تفاوت های بیشتری در مقایسه حل عددی با کارهای تجربی می باشیم که این نشان میدهد هر چقدر میزان ناپایداریها در یک جریان بیشتر می شود شاید این میزان تفاوت بیشتر باشد البته کارهای تجربی در این مورد بسیارکم میباشد اما آنچه را که جهت مقایسه استفاده کردیم را به صورت زیر بیان کنیم:

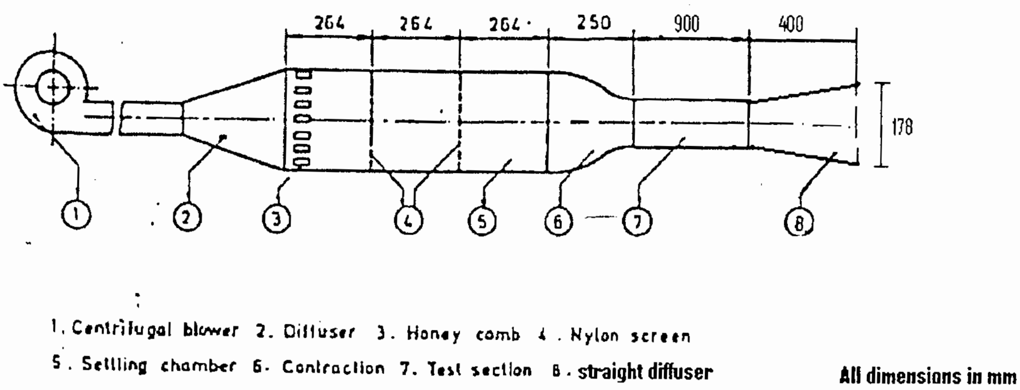
توضیحاتی در مورد ساختار کارهای تجربی مورد استفاده وهندسه حل:

کارهای تجربی مورد استفاده دراین قسمت از لحاظ ساختار وشکل کلی دستگاه تا حدود زیادی شبیه به کارهایی است که توضیحات آن در فصل دوم آورده شده است با تفاوت هایی که از لحاظ ابعاد وناحیه مورد آزمایش وجود دارد.

قسمت اول از مقادیر تجربی مورد استفاده مربوط به دستگاه تونل بادی است که دارای ویژگیهایی به شرح زیر میباشد[۶]:

ناحیه test section دارای سطح مقطعی مربعی شکل با ابعاد $140 \times 140mm$ بوده که طول این قسمت $900mm$ می باشد همچنین شدت توربولانسی وسرعت جریان آزاد در این ناحیه به ترتیب برابر با $0.01, 13\frac{m}{s}$است در ادامه این ناحیه یک دیفیوزرکه $400mm$طول دارد و دارای نسبت سطح 1.54 است (سطح خروجی دیفیوزر نسبت به سطح ورودی) قرار دارد سرعت جریان آزاد در ابتدای ورود به دیفیوزر برابر با $13\frac{m}{s}$ وشدت توربولانسی نیز مقدار 0.01 در نظر گرفته شده است. تفاوت ساختار بیان شده در این قسمت با مورد مشابه در فصل دوم اینست که در ادامه ناحیه test section به جای قراردادن یک مجرا مسطح(straight duct) یک دیفیوزر با مشخصات فوق قرارداده شده است.

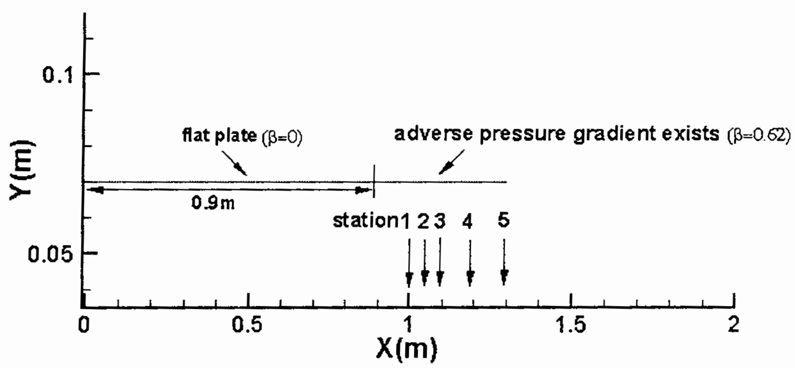
شکل شماتیک این دستگاه در زیر نشان داده شده است:



شکل(۲۷-۳):نمایی از ساختار و اجزای دستگاه تجربی مورد استفاده

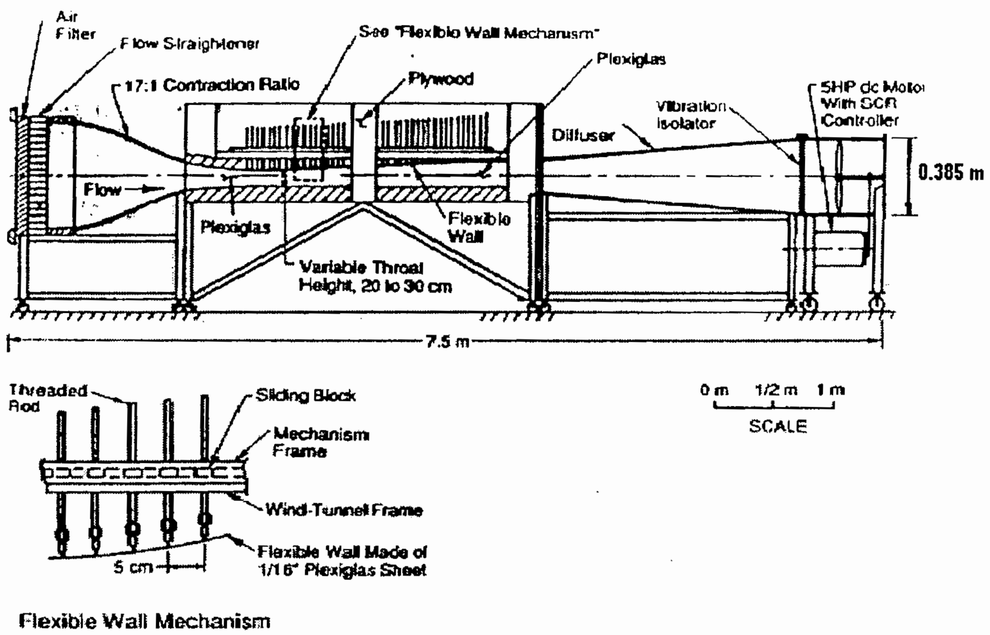
جهت حل عددی در ابتدا یک صفحه مسطح با طول $900mm$ و عرض $70mm$ که جریان آزاد با سرعت $13\frac{m}{s}$ وشدت توربولانسی 0.01برروی صفحه مذکور جریان دارد در نظر گرفتیم درا نتهای این صفحه ترم گرادیان فشار را که تا قبل از شروع این ناحیه صفربود در معادلات مومنتوم مطابق با مقدار کار تجربی انجام گرفته ($\beta = 0.62$)وارد کرده و این حل برای ناحیه ای به طول $400mm$ صورت می گیرد.دراین قسمت نیز سرعت جریان آزاد در ابتدای ورود به ناحیه ای که دارای ترم گرادیان فشار معکوس است برابر با $13\frac{m}{s}$ بوده مقادیر سرعت جریان آزاد در موقعیتهای مورد نظر در جدول(۱-۳)آمده است.مقدار شدت توربولانسی نیز دراین ناحیه برابر با 0.01 است.

شکل شماتیک این حل در زیر نشان داده شده است:



شکل(۲۸-۳):نمایی از موقعیتها وهندسه مورداستفاده جهت حل عددی

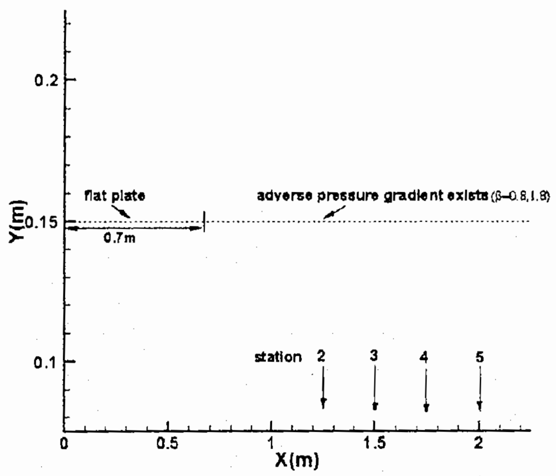
قسمت دوم از کارهای تجربی مورد استفاده دوباره مربوط به دستگاه تونل بادی است که در دانشگاه کالیفرنیا مورد استفاده قرارگرفته است این دستگاه بطور خلاصه دارای طولی به اندازه $7.5m$ بوده که طول کل قسمت test section برابر با $3m$ میباشد همچنین طول دیفیبوزر که در ادامه ناحیه test section و بعد از $0.7m$ آورده می شود برابر با $2.3m$ است عرض ناحیهtest section برابر با $0.3m$ است سرعت جریان آزاد در این ناحیه برابر با $17.5\frac{m}{s}$ و شدت توربولانسی نیز 0.01 است در ناحیه ای که ترم گرادیان فشار معکوس فعال است شدت توربولانسی تغییر کرده وبرابر با 0.015 می باشد. مقادیر β به عنوان نماینده گرادیان فشار معکوس برای سه حالت متفاوت به ترتیب برابربا $\beta = 0.8,1.3,1.8$ میباشد.[۸،۹]



شکل(۲۹-۳):نمایی از ساختار و اجزای دستگاه تجربی مورد استفاده

در این قسمت نیز برای حل عددی ابتدا صفحه مسطحی را که دارای طول $0.7m$ وعرض $0.3m$ را درنظر گرفتیم سرعت جریان آزاد در این قسمت برابر با $17.5\frac{m}{s}$ و شدت توربولانسی نیز 0.01 است در ادامه ناحیه ای را که ترم گرادیان فشار معکوس در آن فعال است را به طول $2.3m$ فرض کرده بطوریکه شدت توربولانسی در آن ناحیه برای جریان آزاد برابر با 0.015 است. سرعت جریان آزاد نیز برای این قسمت در موقعیتهای مورد نظر در جدول (۱-۳)آورده شده است.

شکل شماتیک این حل در زیر نشان داده شده است:



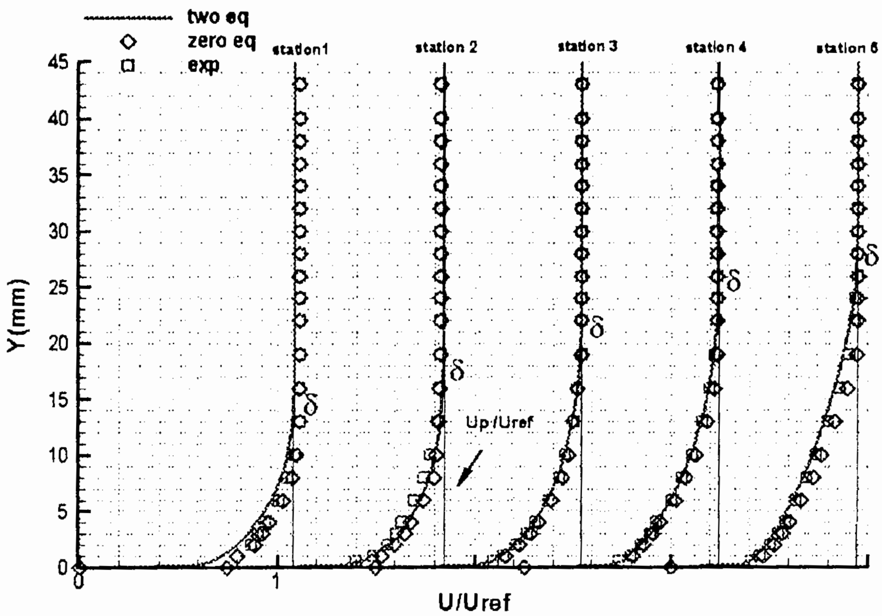
شکل(۳۰-۳):نمایی از موقعیتها وهندسه مورداستفاده جهت حل عددی

البته ذکر این نکته الزامی است که در بعضی از موارد فقط مقادیر تجربی پروفیل های سرعت را در اختیار داشتیم که در نمودارها نیز بیان شده است.

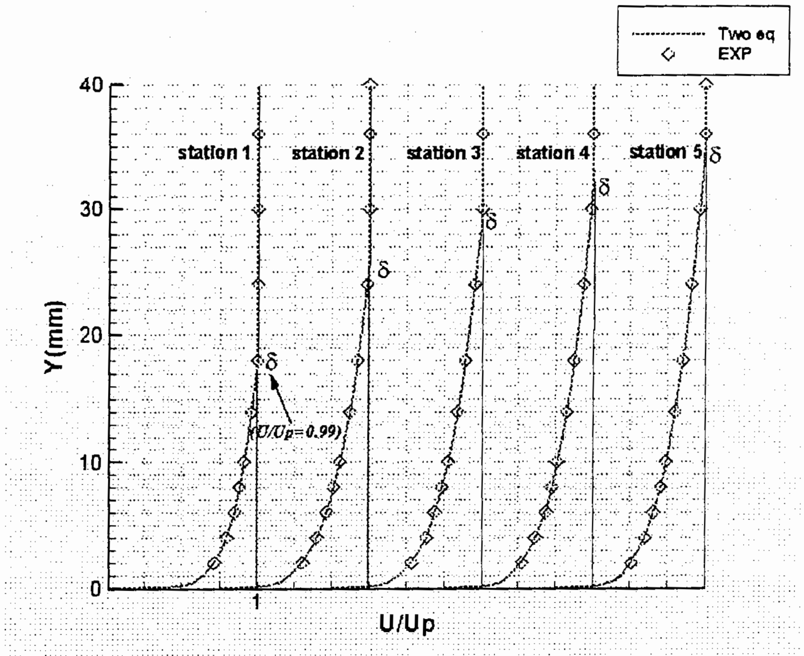
سرعت جریان ازاد	موقعیت ۱	موقعیت ۲	موقعیت ۳	موقعیت ۴	موقعیت ۵
$\beta = 0.62$ $u_{ref} = 12\frac{m}{s}$ $u_{\infty 1} = 13\frac{m}{s}$	۱m	۱,۰۵m	۱,۱m	۱,۲m	۱,۳m
سرعت محاسبه شده برای جریان آزاد تحت تاثیرگرادیان فشار معکوس	$12.5742\frac{m}{s}$	$12.2167\frac{m}{s}$	$12.3871\frac{m}{s}$	$11.9098\frac{m}{s}$	$11.6607\frac{m}{s}$
$u_{\infty 1} = 17.5\frac{m}{s}$ $\beta = 0.8$	صفحه مسطح	۱,۲۵m	۱,۵m	۱,۷۵m	۲m
سرعت محاسبه شده برای جریان آزاد تحت تاثیرگرادیان فشار معکوس	$17.5\frac{m}{s}$	$15.3871\frac{m}{s}$	$14.6303\frac{m}{s}$	$14.1098\frac{m}{s}$	$13.6739\frac{m}{s}$
$u_{\infty 1} = 17.5\frac{m}{s}$ $\beta = 1.8$	صفحه مسطح	۱,۲۵m	۱,۵m	۱,۷۵m	۲,۲۵ m
سرعت محاسبه شده برای جریان آزاد تحت تاثیرگرادیان فشار معکوس	$17.5\frac{m}{s}$	$14.8667\frac{m}{s}$	$14.1236\frac{m}{s}$	$13.5243\frac{m}{s}$	$12.6014\frac{m}{s}$
$u_{\infty 1} = 26.5\frac{m}{s}$ $\beta = 1.3$	صفحه مسطح	۱,۵m	۲,۱m	*	*
سرعت محاسبه شده برای جریان آزاد تحت تاثیرگرادیان فشار معکوس	$u_{\infty 1} = 26.5\frac{m}{s}$	$23.1449\frac{m}{s}$	$21.1705\frac{m}{s}$	*	*

جدول(۱-۳):مقادیر بدست آمده از سرعت جریان آزاد درموقعیتهای مختلف موردبررسی

۱-۴-۳) نتایج مربوط به پروفیل های سرعت بدست آمده با استفاده از حل عددی معادلات لایه مرزی همراه با گرادیان فشار معکوس:

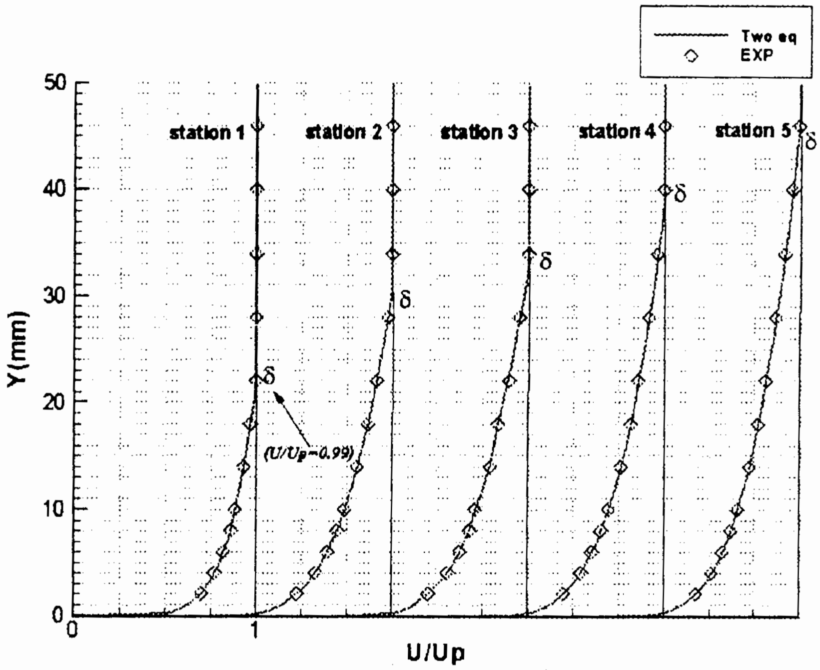


شکل(۱-۳):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس($u_{e1}=13\,m/s\,,\beta=0.62$)

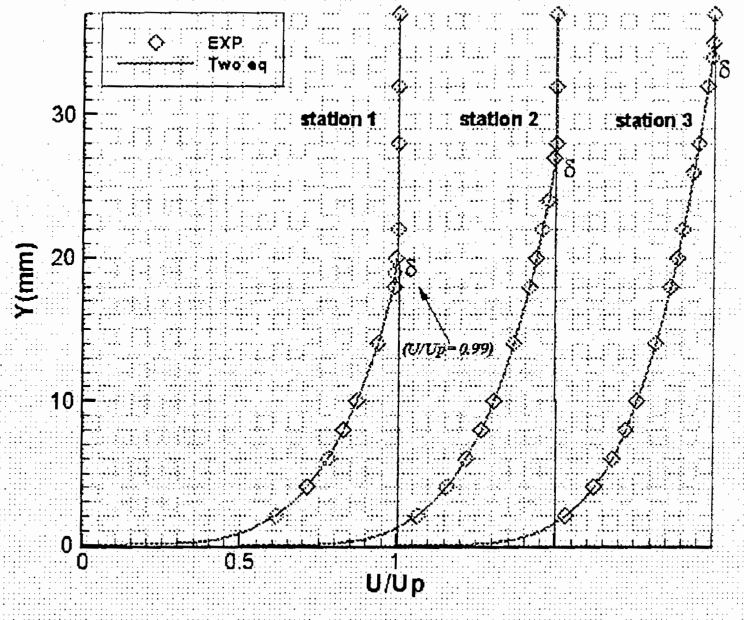


شکل(۲-۳):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس

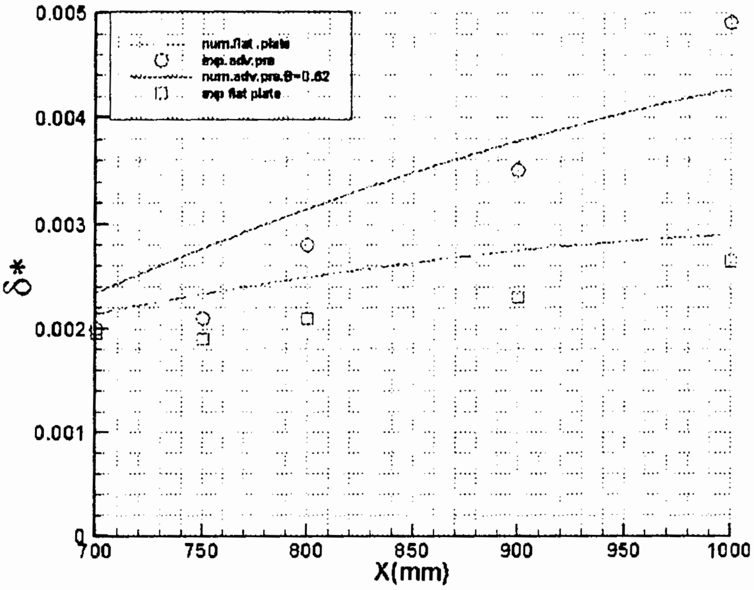
$(u_{e1}=17.5\,m/s\,,\beta=0.8)$



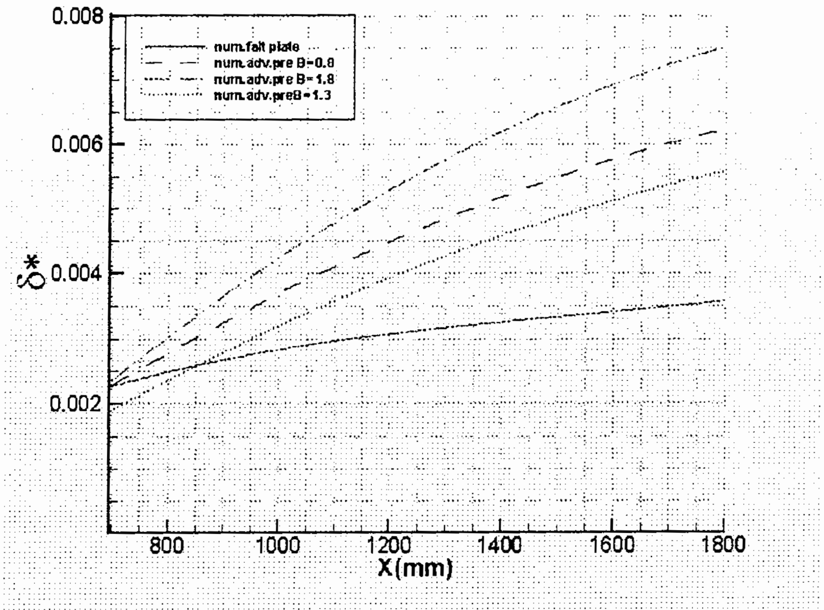
شکل(۳-۳):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس
($u_{e1} = 17.5, \beta = 1.8$)



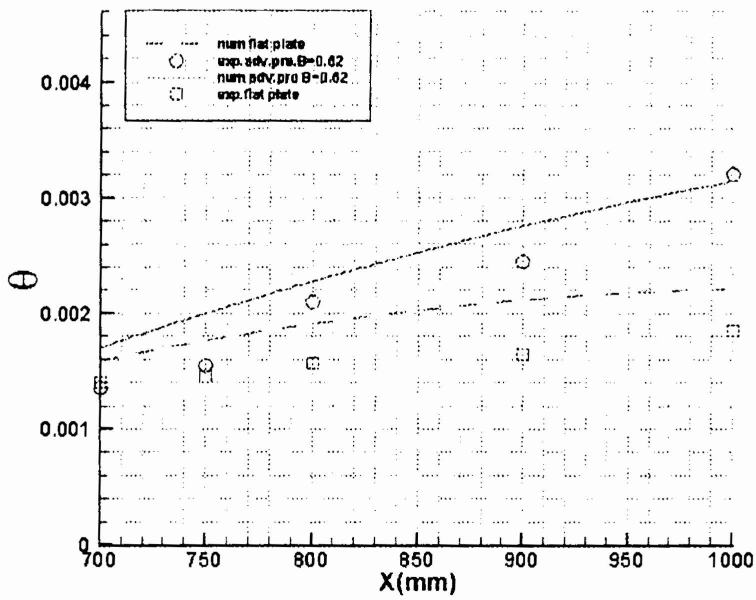
شکل(۴-۳):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس
($u_{e1} = 26.5, \beta = 1.3$)



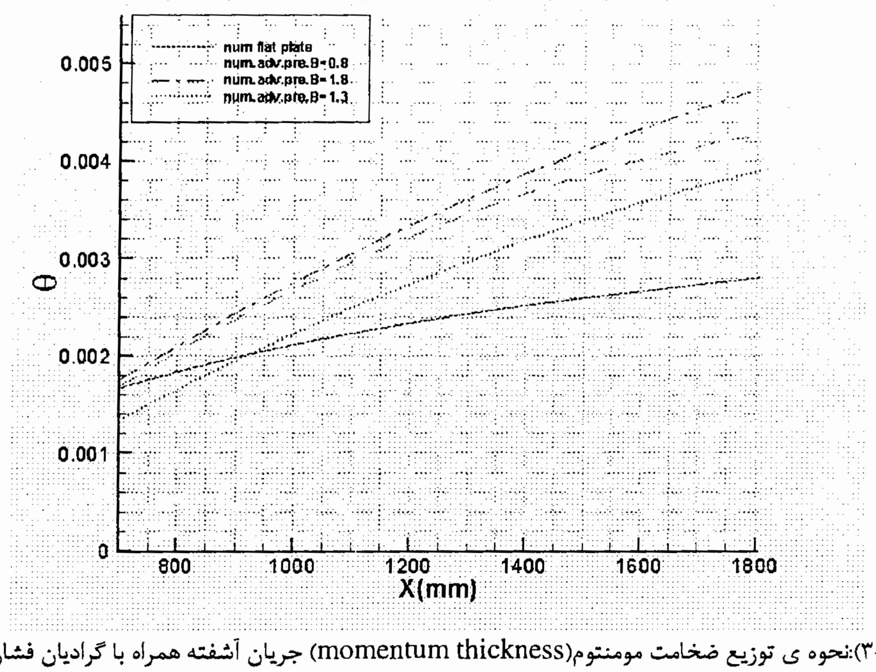
شکل(۵-۳):نحوه ی توزیع ضخامت جابجایی(displacement thickness) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1}=13, \beta=0.62$) در مقایسه با صفحه مسطح



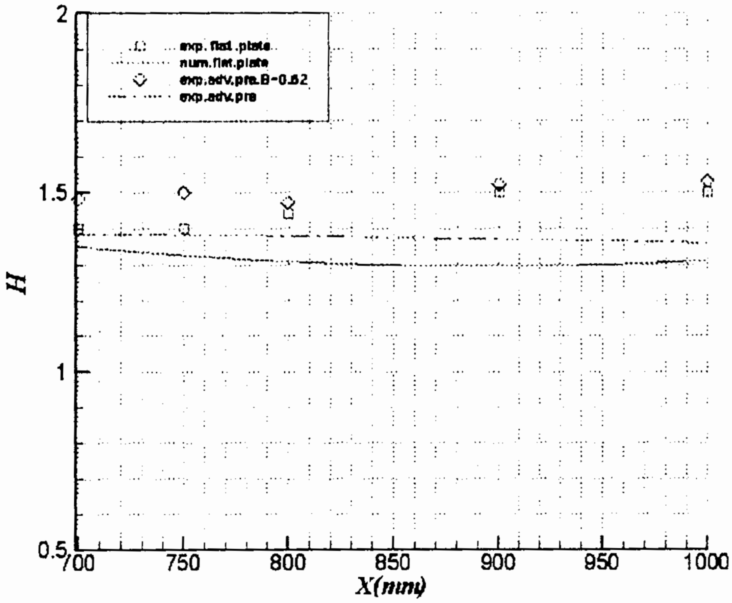
شکل(۶-۳):نحوه ی توزیع ضخامت جابجایی(displacement thickness) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1}=17.5, \beta=0.8,1.3,1.8$) در مقایسه با صفحه مسطح



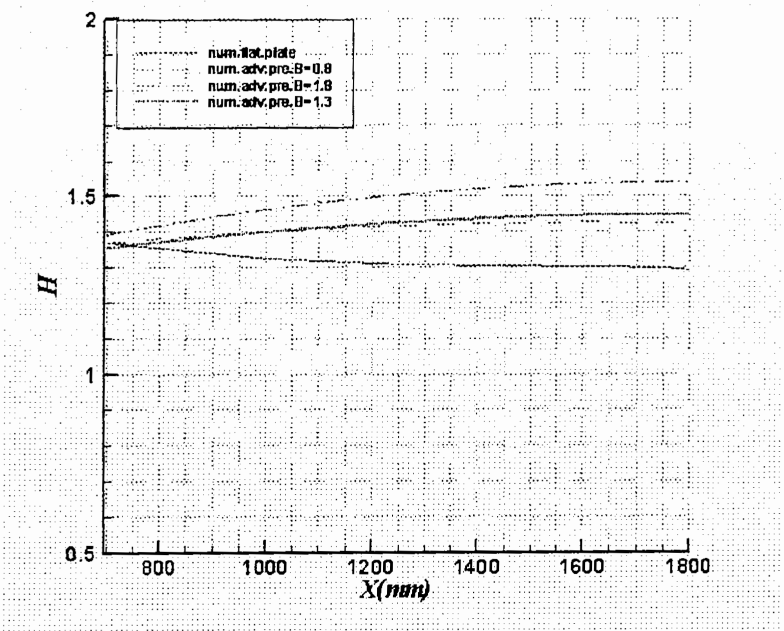
شکل(۷-۳):نحوه ی توزیع ضخامت مومنتوم(momentum thickness) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1}=13, \beta=0.62$) در مقایسه با صفحه مسطح



شکل(۸-۳):نحوه ی توزیع ضخامت مومنتوم(momentum thickness) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1}=17.5, \beta=0.8,1.3,1.8$) در مقایسه با صفحه مسطح



شکل(۹-۳):نحوه ی توزیع ضریب شکل(shape factor) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1}=13, \beta=0.62$) در مقایسه با صفحه مسطح



شکل(۱۰-۳):نحوه ی توزیع ضریب شکل(shape factor) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1}=17.5, \beta=0.8,1.3,1.8$) در مقایسه با صفحه مسطح

۱.مقایسه اثرات گرادیان فشار معکوس بر لایه مرزی زمانی قابل درک است که با شرایط مشابه بر روی صفحه مسطح مورد تجزیه وتحلیل قرار گیرد.

از مقایسه پروفیل های سرعت بدست آمده برای حالتهای مختلف می توان گفت که در اثر گرادیان فشار معکوس ضخامت لایه مرزی افزایش بیشتری نسبت به موقعیت مشابه بر روی صفحه مسطح دارد از طرفی هر چقدر میزان گرادیان فشار معکوس بیشتر شود ضخامت لایه مرزی افزایش چشمگیرتری خواهد داشت. همانند صفحه مسطح مقدار($\frac{\partial u}{\partial y}$) دوباره دچار سیر نزولی شده وحداکثر مقدار آن بر روی دیواره تشکیل میشود همچنین ($\frac{\partial u}{\partial y}$) در مقایسه با سطوح صاف میزان کمتری در موقعیت مشابه دارد. [۲۲]

۲.در این شرایط نیز مقدار ($\frac{\partial u}{\partial y}$) مثبت خواهد بود در حالی که($\frac{\partial u}{\partial x}$) منفی است ودر عین حال از لحاظ قدر مطلق نیز ($\frac{\partial u}{\partial x}$) از مقدار آن در شرایط مشابه با سطح مسطح بیشتر است یعنی منفی تر است.

۳.از آنجا که میزان کاهش مومنتوم ناشی از سرعت متوسط در اثر گرادیان فشار بیشتر است می توان این گونه استباط کرد که این مقدار نقصان یافته از مومنتوم صرف غلبه بر ناپایداریهایی میشود که در اثر گرادیان فشار معکوس ایجاد میشود وبه عاملی در جهت تبادل بیشترترمهای توربولانسی بین اجزای سیال عمل می کند .

۴.در صورتی که گرادیان فشار قوی اعمال شود شرایط برای جدائی جریان یعنی (separation) فراهم میگردد. که این تاثیر شگرف گرادیان فشار معکوس بر روی مومنتوم جریان را به خودی خود نشان میدهد.[۲۳ ,۱۰]

۵.میزان کاهش (τ_w) (تنش برشی در روی دیواره) باعث کاهش بیشتری در میزان (u_τ) خواهد شد این میزان کاهش نسبت به صفحه ی مسطح بیشتر خواهد بود.

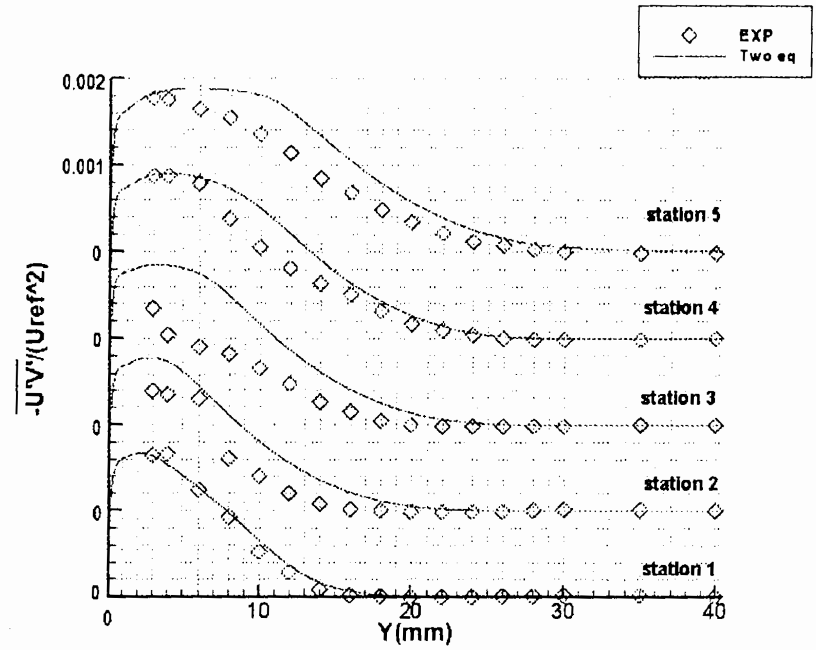
۶مقادیر (δ, δ^*, θ)در حالت گرادیان فشار دارای سرعت رشد بیشتری هستند هر چقدر میزان β به عنوان پارامتر ی که نماینده گرادیان فشار محسوب میشود بیشتر شود در این حالت این مقادیر هم بزرگتر خواهند بود و

هم دارای سرعت رشد بیشتری نسبت به حالتهای دیگر خواهد بود.باز هم با توجه به کاهش شدید مومنتوم ناشی از سرعت متوسط این شرایط قابل توجیه میباشد.

۷.پارامتر C_f باید به دقت مورد تجزیه وتحلیل قرار گیرد چرا که هر چند τ_wهمراه با کاهش جزئی در امتداد صفحه است اما توجه شود که میزان سرعت جریان خارجی یا همان (u_e) نیز در امتداد صفحه در حال کاهش است وباید دید که اثرات کاهش کدام شدیدتر است .در شرایط مشابه با صفحه مسصح معمولا C_f بدست آمده بر اثر گرادیان فشار معکوس تا اندازه ای بیشتر خواهد بود .دلیل این امر اینست که در ابتدای اعمال گرادیان فشار معکوس میزان کاهش τ_w نسبت به توان ۲ سرعت جریان خارجی کمتر است واین شرایط برای بزرگتر شدن (C_f)در موقعیت مشابه با صفحه مسطح فراهم می کند.هر چند درادامه برای هر دو حالت شاهد کاهش نسبی این مقادیرخواهیم بود.میزان روند کاهش (C_f) در حالت گرادیان فشار معکوس نسبت به شرایط دیگر کمتر می باشد.

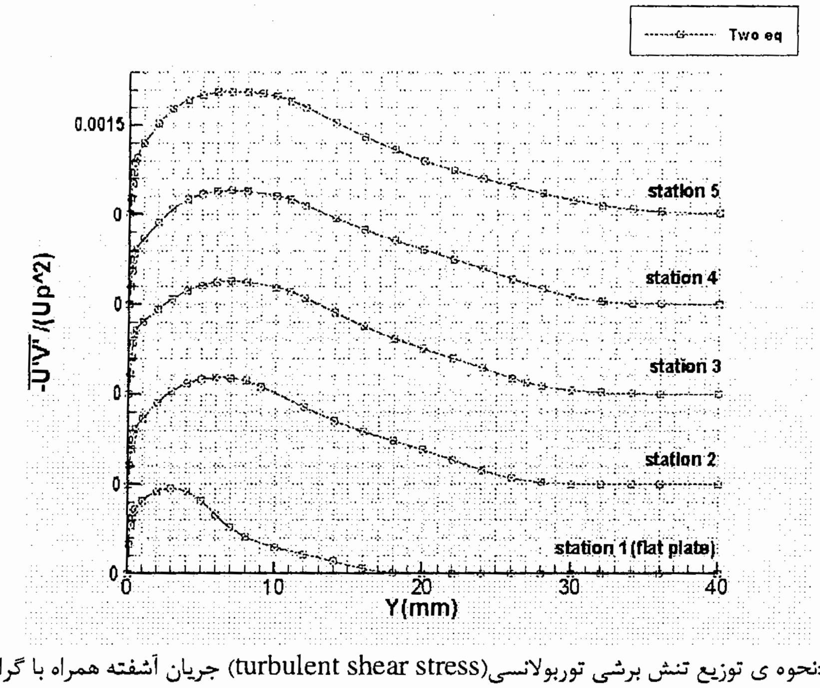
۸. پارامتر ضریب شکل (H) کمک بسیار زیادی در جهت تشخیص جدائی جریان می کند بطوریکه هر چقدر میزان (β) بیشتر شود در این حالت شرایط برای جدائی جریان فراهم می گردد.بنابراین می توان انتظار داشت که با افزایش β میزان (H) نیز افزایش پیدا میکند.

۲-۴-۳) نتایج مربوط به ترمهای توربولانسی لایه مرزی همراه باگرادیان فشار معکوس:



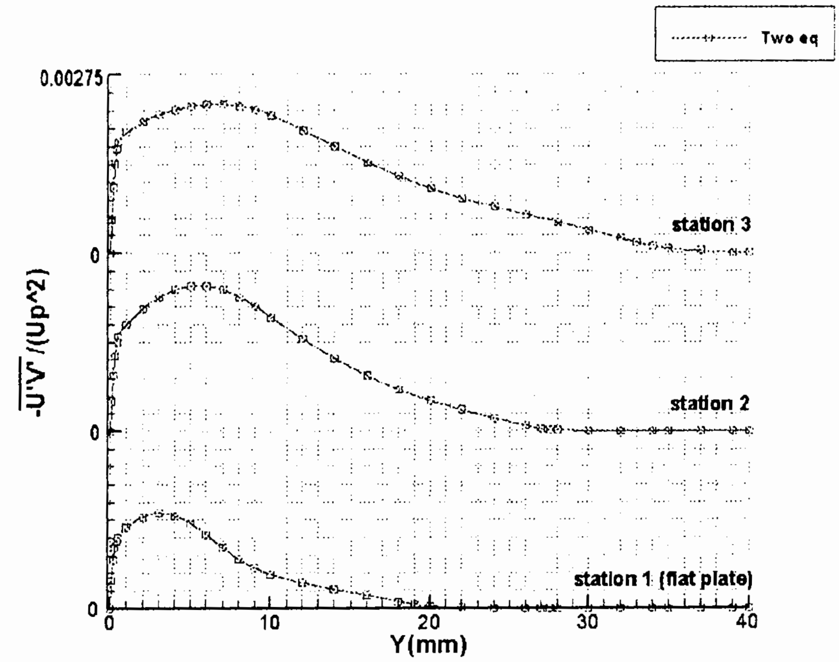
شکل(۱۱-۳):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی(turbulent shear stress) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس

$(u_{e1} = 13, \beta = 0.62)$

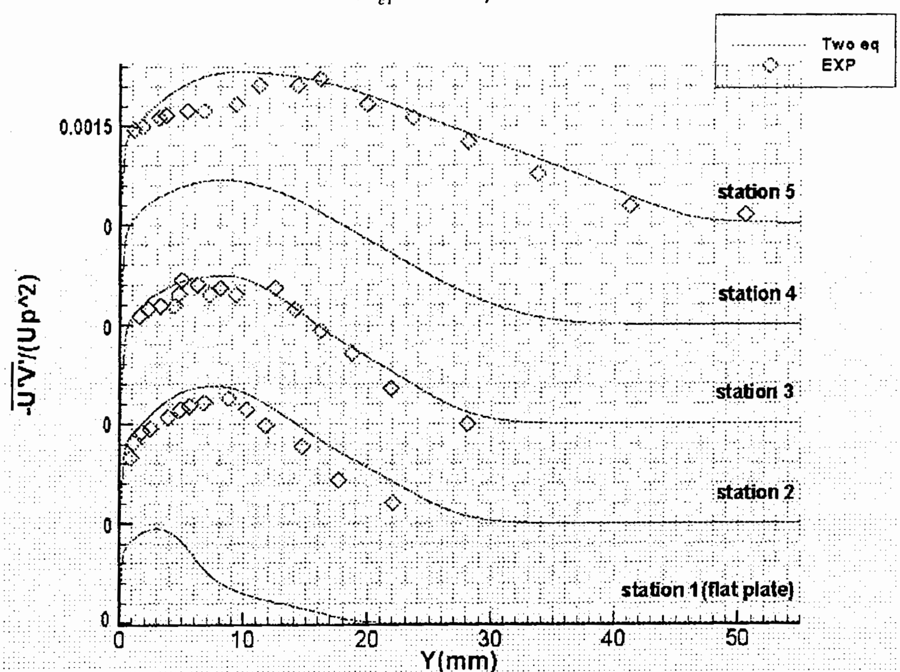


شکل(۱۲-۳):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی(turbulent shear stress) جریان آشفته همراه با گرادیان فشارمعکوس

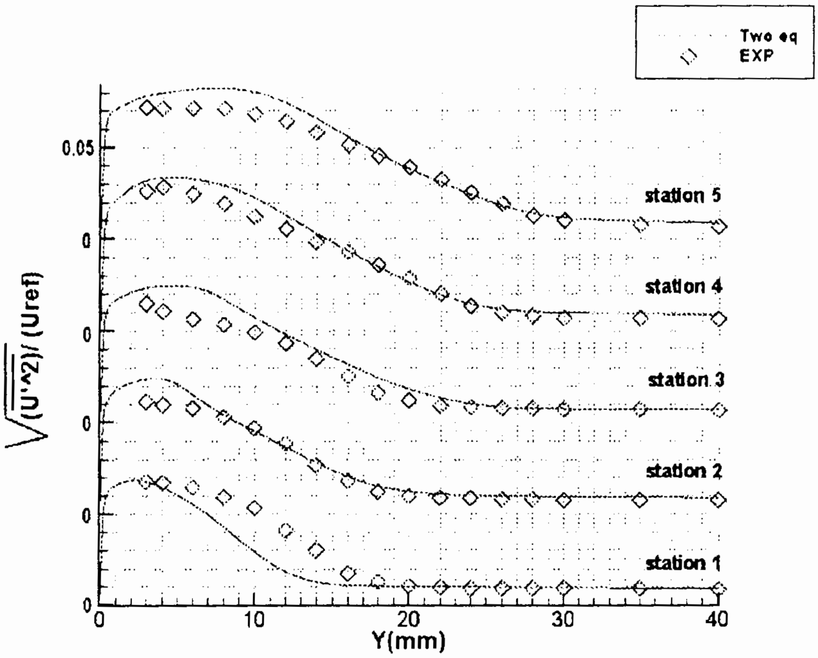
$(u_{e1} = 17.5, \beta = 0.8)$



شکل(۱۳-۳):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی(turbulent shear stress) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1}=26.5, \beta=1.3$)

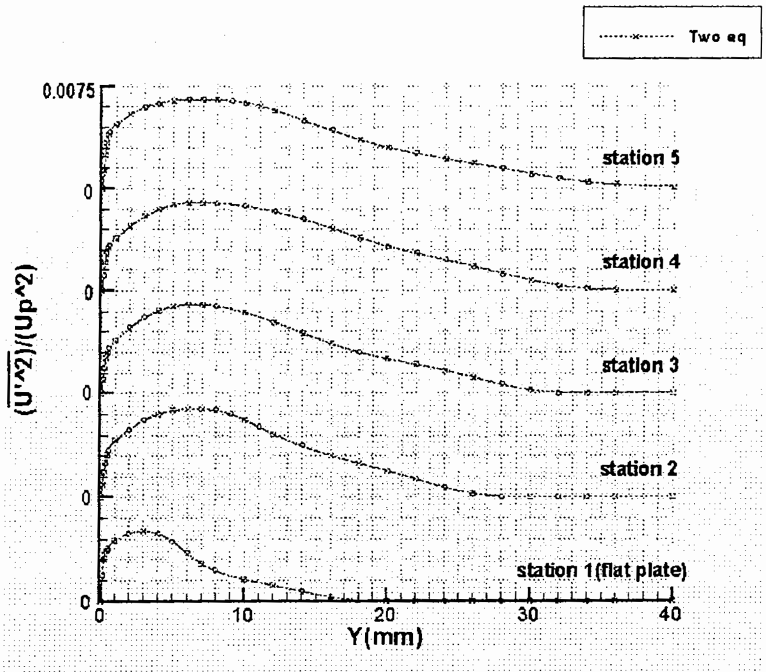


شکل(۱۴-۳):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی(turbulent shear stress) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1}=17.5, \beta=1.8$)



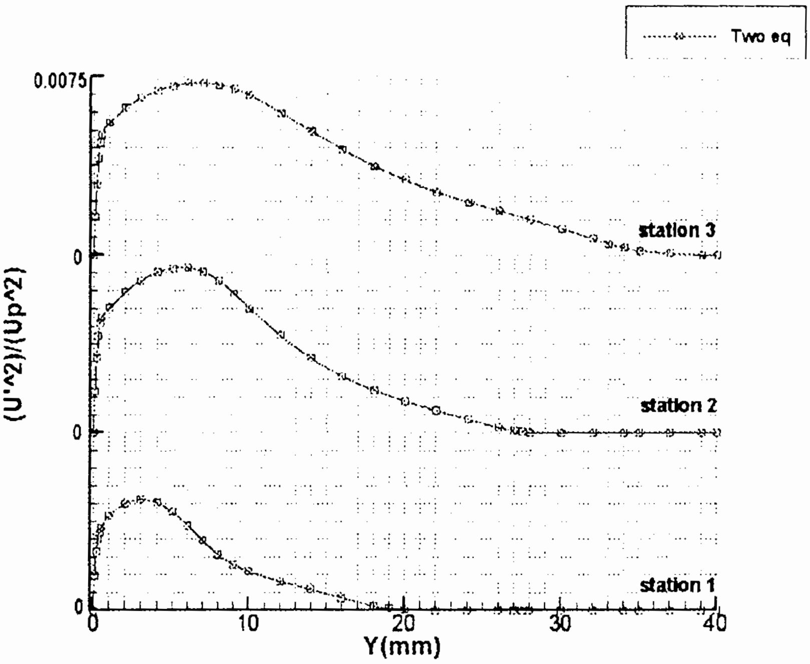
شکل(۱۵-۳):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس

($u_{e1} = 13, \beta = 0.62$)



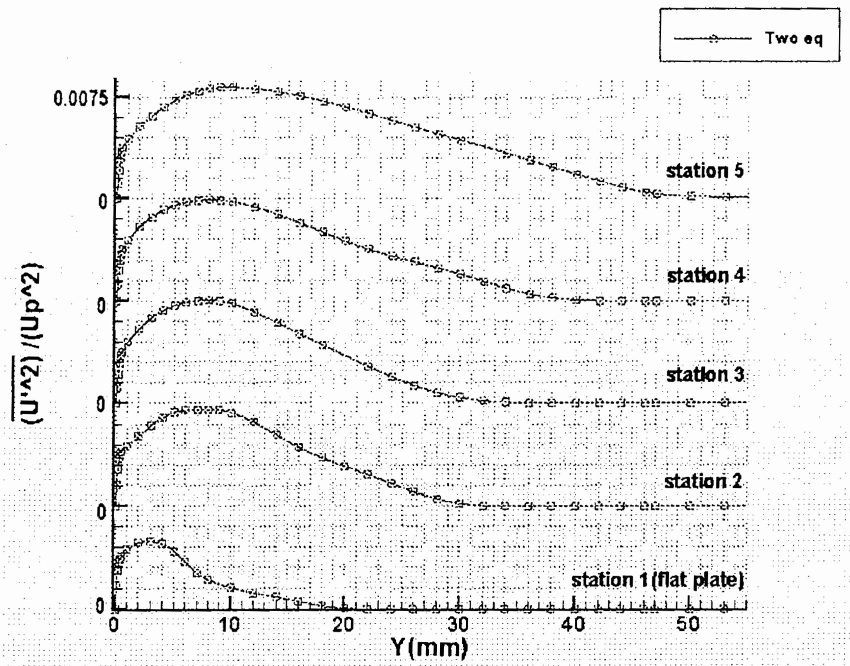
شکل(۱۶-۳): نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس

($u_{e1} = 17.5, \beta = 0.8$)



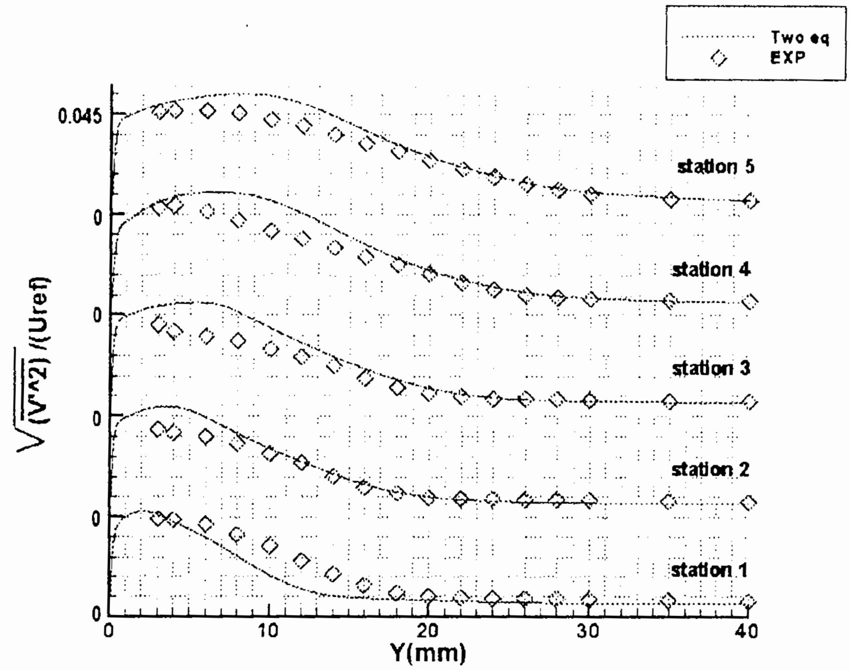
شکل(۱۷-۳): نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس

$(u_{e1} = 26.5 \beta = 1.3)$

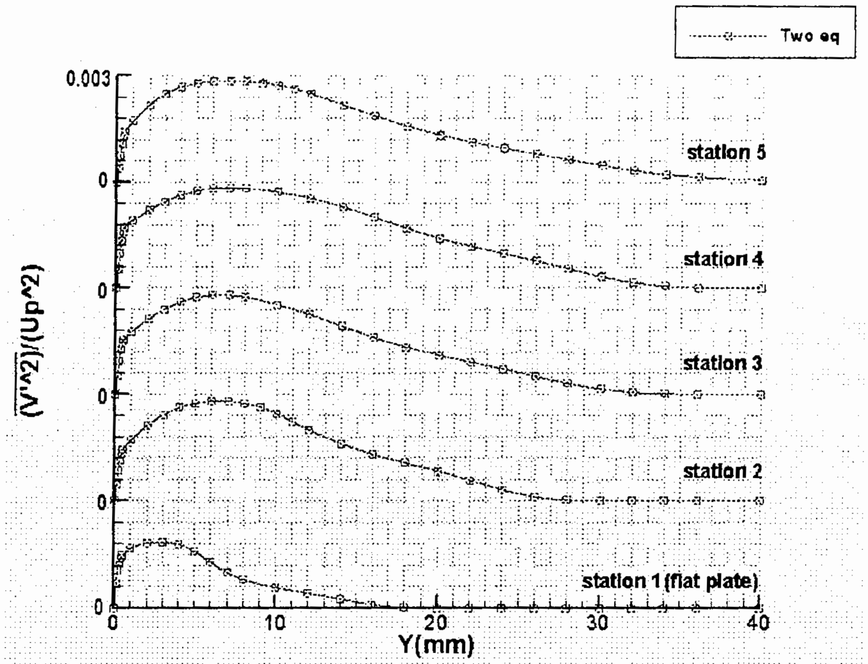


شکل(۱۸-۳): نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس

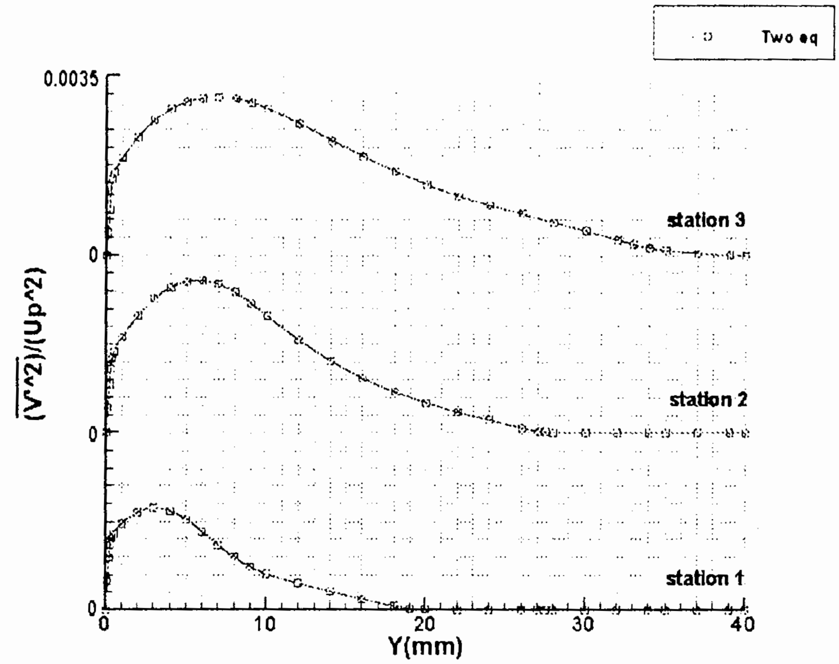
$(u_{e1} = 17.5, \beta = 1.8)$



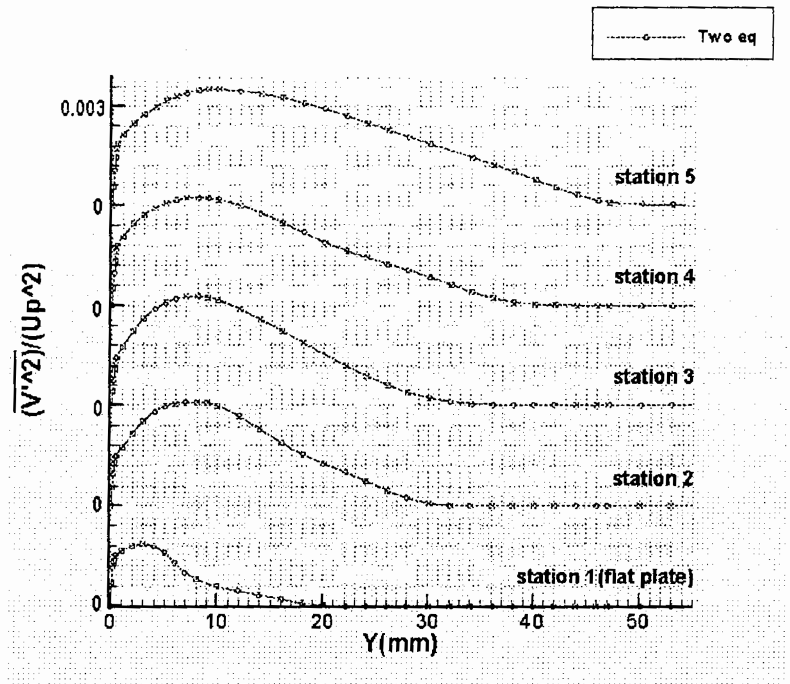
شکل(۱۹-۳):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشارمعکوس ($u_{e1} = 13, \beta = 0.62$)



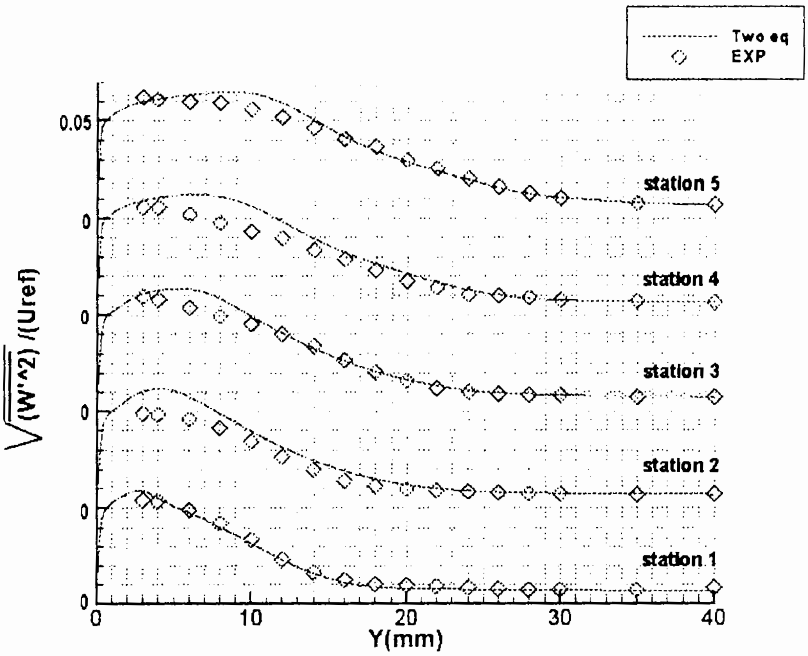
شکل(۲۰-۳): نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس
($u_{e1} = 17.5, \beta = 0.8$)



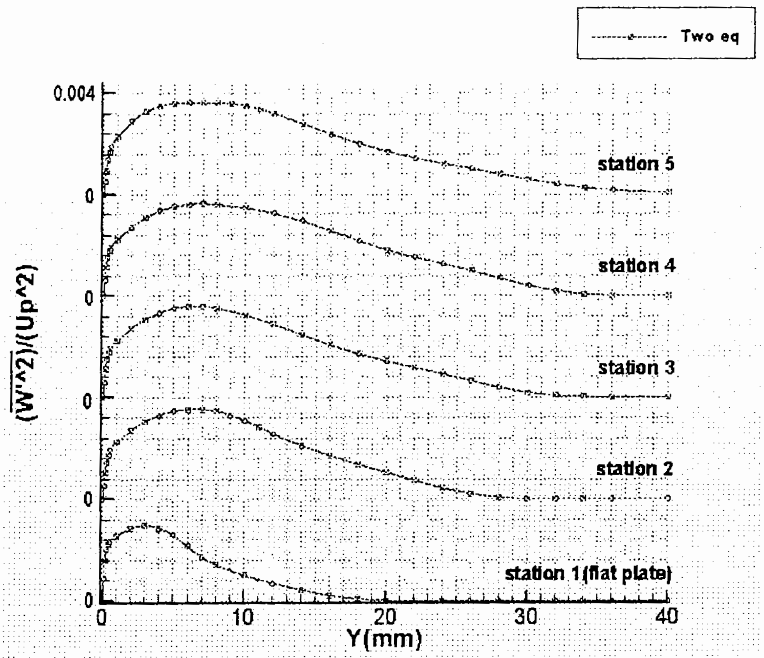
شکل(۲۱-۳): نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس
($u_{e1} = 26.5 \beta = 1.3$)



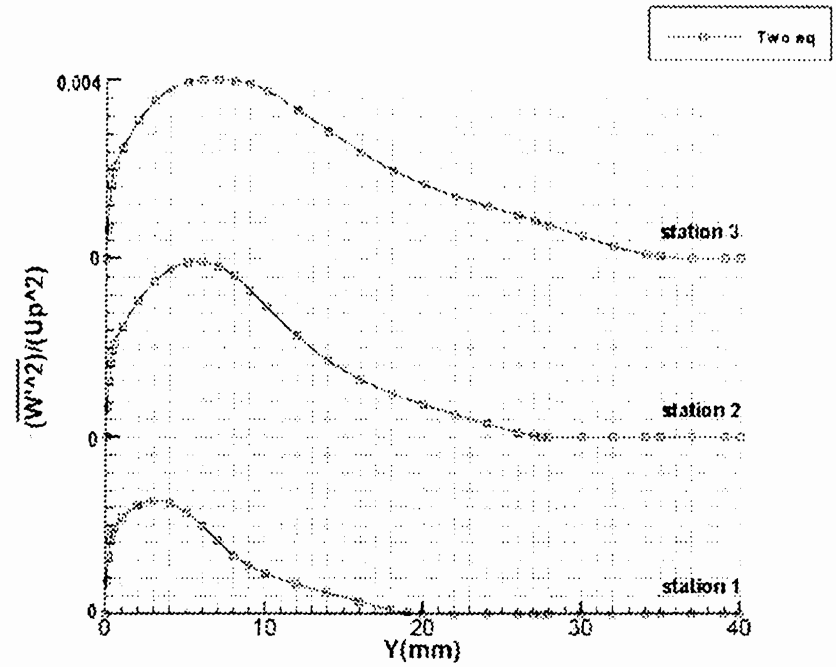
شکل(۲۲-۳): نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس
($u_{e1} = 17.5, \beta = 1.8$)



شکل(۲۳-۳):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس
$(u_{e1}=13, \beta=0.62)$

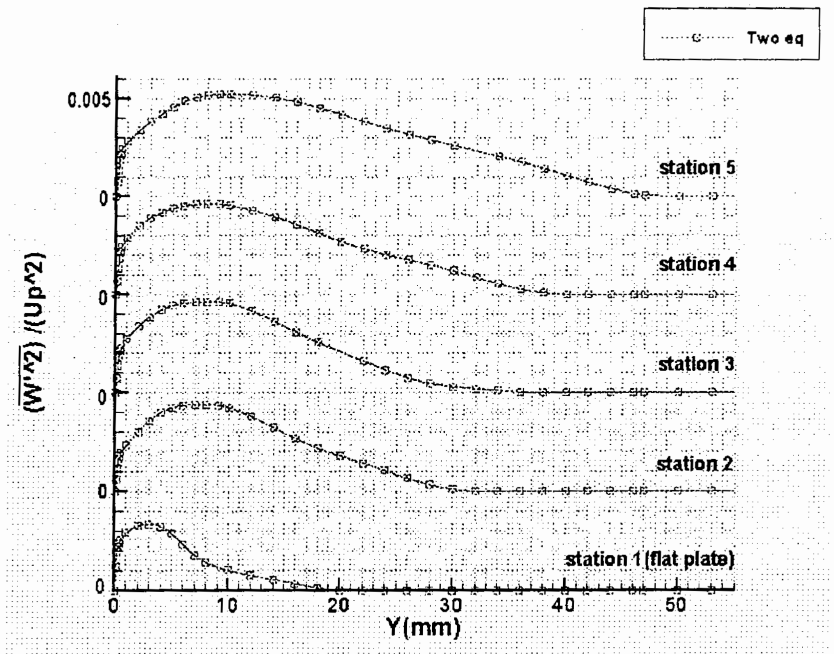


شکل(۲۴-۳): نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس
$(u_{e1}=17.5, \beta=0.8)$



شکل(۲۵-۳): نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس

($u_{e1} = 26.5 \beta = 1.3$)



شکل(۲۶-۳): نحوه ی توزیع شدت توربولانسی (turbulent intensity) جریان آشفته همراه با گرادیان فشار معکوس

($u_{e1} = 17.5, \beta = 1.8$)

مقادیر تنش برشی توربولانسی و شدت های توربولانسی و نحوه توزیع آنها در دو جهت طولی وعرضی لایه مرزی مورد تجزیه وتحلیل قرار میگیرد:

۱) در عرض لایه مرزی توزیع تنش برشی توربولانسی نیز مانند صفحه مسطح دارای دو موقعیت متفاوت خواهد بود:

در حالت اول وهمانند صفحه مسطح مقادیر تنش برشی توربولانسی در ناحیه Inner layer رشد ودر مرحله بعد در ناحیه Outer layer شاهد سیر نزولی این مقادیر خواهیم بود.نکته مهم در مورد نقطه ماکزیمم تنش برشی توربولانسی اینست که همانطور که در صفحه مسطح ($\frac{-\overline{u'v'}_{\max}}{u_\tau^2}=1$) در نظر گرفته شد برای شرایطی که دارای گرادیان فشار معکوس هستیم مقدار ماکزیمم ترم توربولانسی تنش برشی به صورت ($\frac{-\overline{u'v'}_{\max}}{u_\tau^2}=(1+\frac{3}{4}\beta)$) معرفی میگردد. در صورتی که در معادله ذکرشده مقدار $\beta=0$ آنگاه همان رابطه مربوط به صفحه مسطح بدست می آید.

۲)نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی در جهت طولی لایه مرزی:

نکته مهم اینست که می تواند به عنوان یک سوال مطرح باشد که چگونه جریان گرادیان فشار که باعث کاهش در $\frac{\partial u}{\partial y}$ میشود ما شاهد افزایش نسبی مقادیر تنش برشی توربولانسی و شدت های توربولانسی هستیم.از لحاظ ریاضی می توان به این سوال پاسخ داد در ترمهای توربولانسی بطور مثال تنش برشی توربولانسی ما شاهد دو ترم متغییر هستیم اولی $\frac{\partial u}{\partial y}$ که سیر نزولی در جهت □ دارد در حالی که ترم (ν_t) سیری افزایشی در این جهت خواهد داشت که ترم اخیر ذکر شده سبب افزایش مقادیرتنش برشی توربولانسی شده است .اما از لحاظ فیزیکی می توان گفت که گرادیان فشارچون باعث افزایش درتبادل مومنتوم توربولانسی بین اجزا وذرات سیال می گردد در نتیجه شاهد رشد این مقادیرهستیم .

۳)در مورد نحوه توزیع مقدار ماکزیمم ترمهای توربولانسی در طول لایه مرز باید به چند مورد اشاره کرد اولا مقدار ماکزیمم تنش برشی توربولانسی هر چند به صورت $\frac{-\overline{u'v'}_{\max}}{u_\tau^2}=(1+\frac{3}{4}\beta)$ تعریف شده است اما باید گفت در

موقعیت های اولیه ما شاهد ضریب ودرصدی ازمقداری هستیم که از این رابطه بدست می آید به بیان واضح تر اگر رابطه فوق را به صورت ($\frac{-\overline{u'v'}_{max}}{u_\tau^2} = \alpha(1+\frac{3}{4}\beta)$) در نظر بگیریم برای موقعیت های طولی اولیه مقدار $0.9 \le \alpha \le 1$ در بر می گیرد چنانچه با طی فاصله بیشتر در جهت طولی لایه مرزی این ضریب مقداری برابر با یک خواهد داشت.

۴)مسئله مهم دیگر تاثیرگرادیان فشار معکوس در تحت پوشش قرار دادن محدوده ی بیشتری از ناحیه constant region می باشد به گونه ای که برای صفحه مسطح این تاحیه در محدوده ای $0.1\delta \le y \le 0.15\delta$ گسترش پیدا می کرد در حالی که برای حالت گرادیان فشار معکوس این محدوده تا 0.35δ نیز می تواند گسترش پیدا کند.واین به خودی خود نشان میدهد هر چند ($\frac{\partial u}{\partial y}$)سیری نزولی دارد اما میزان افزایش (v_t) به گونه ای است که شرایط برای گسترش این ناحیه تا حدود (0.35δ) نیز ادامه فراهم می کند بدیهی است افزایش ضخامت این ناحیه در نتیجه افزایش میزان گرادیان فشار معکوس (به شرط عدم جدایی) قابل توجیه می باشد.

۵)در مورد نمودارهای شدت توربولانسی باید گفت که تمامی موارد مربوط به تنش برشی توربولانسی در مورد چگونگی نحوه توزیع صادق است به جزء تعیین مقدار ماکزیمم این پارامترها که نمی توان از رابطه گفته شده برای این مقادیر توربولانسی استفاده کرد.

۶)همچنین در اثر وجود گرادیان فشار معکوس نسبت ($\frac{\overline{v'^2}}{\overline{u'^2}}$) مقدار بیشتری در مقایسه با حالت صفحه مسطح نشان می دهد به عبارت دیگر در اثر وجود گرادیان فشار معکوس مقدار سهم تعلق گرفته به ($\overline{v'^2}$) از انرژی جنبشی بیشتر شده وبر عکس سهم ($\overline{u'^2}$و $\overline{w'^2}$)ازk کاهش می یابد هر چند این عامل باعث نمی شود که مقدار($\overline{u'^2}$و $\overline{w'^2}$) در مقایسه باصفحه مسطح افزایشی نداشته باشد لازم به توضیح است که این شرایط شباهت زیادی با جریان بر روی صفحه تحت انحنا مقعر دارد.

۷)کلیه شرایط ذکر شده در نهایت سبب افزایش ناپایداری در اثر گرادیان فشار معکوس میشود بدیهی است هرچقدر میزان گرادیان فشار معکوس بیشتر باشداین ناپایداریها محسوس تر و در این حالت شرایط برای جدایی جریان فراهم خواهد شد .

۸)به عنوان آخرین مورد ذکر شده باید گفت در طول لایه مرزی وقتی مقادیر شدتهای توربولانسی و تنش برشی توربولانسیدر ناحیه Inner layer مورد بررسی قرار می گیرند شاهد کاهش این مقادیردر جهت طولی لایه مرزی خواهیم شد در حالی که مقایسه ناحیه Outer layer برای موقعیت های متفاوت حاکی از افزایش مقادیر ذکر شده در طول لایه مرزی را دارد .به بیان دیگر وقتی بطور مثال موقعیتهای ۱و۲ مورد بررسی قرار گیرد تا زمانی که در موقعیت ۱ مقادیر ترمهای توربولانسی به حد ماکزیمم خود برسند مقادیرشان در y مشابه با موقعیت بیشتر خواهد بود اما بعد رسیدن موقعت ۱ به حالت ماکزیمم ازآن به بعد این ترمهای توربولانسی در موقعیت ۲ هستند که دارای مقادیر بیشتری میباشند.

محاسبه خطای موجود بین مقادیر بدست آمده از حل عددی در مقایسه با کارهای تجربی:

خطای موجود بین حل عددی ومقادیر تجربی به صورت میانگین خطا در موقعیت های بیان شده که به صورت جدولی در این قسمت آورده شده است از مقایسه ای که بین حل عددی با کار تجربی بیان شده در قسمت اول ودوم مربوط به توضیحات کارهای تجربی صورت گرفته بدست آمده است. از محاسبه میانگین خطای بدست آمده می توان اینگونه نتیجه گیری کرد که خطای موجود بین مقادیر تجربی وعددی در این قسمت در مقایسه با صفحه مسطح بیشتر بوده به خصوص این مورد در ارتباط با ترمهای توربولانسی و به طور دقیقتر در مورد تنش برشی توربولانسی صادق است.

موقعیتها ی طولی				
۱,۳m	۱,۲m	۱,۱m	۱,۰۵m	۱m
میانگین خطای محاسبه شده برای پروفیل های سرعت در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۳,۴۳۷	۲,۲۷۵	۱,۴۳۷۵	۲,۳۱۲۵	۱,۸۷۵
میانگین خطای محاسبه شده تنش برشی توربولانسی در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۱۲,۰۶۳	۹,۲۸۶	۱۶,۵۹۸	۱۱,۴۲۸	۲,۴۵۷
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{u'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۴,۲۸۶	۴,۱۶۶	۸,۱۴۴	۳,۹۱۶	۱۰,۱۰۸
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{v'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۷,۴۵۸	۸,۸۹۴	۱۰,۹۹۵	۵,۲۴۷	۱۰,۳۱۲
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{w'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۳,۷۴۷	۵,۱۰۵	۴,۵۳۲	۵,۰۳۵	۲,۳۴۵

جدول(۲-۳):خطای محاسبه شده برای مقادیر عددی بدست آمده در مقایسه با کار تجربی در جریان همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1} = 13, \beta = 0.62$)

موقعیتها ی طولی				
۱m	۱,۲۵m	۱,۵m	۱,۷۵m	۲,۲۵m
میانگین خطای محاسبه شده برای پروفیل های سرعت در مقایسه با مقادیر تجربی برای صفحه منسطح $U_e = 17.5\frac{m}{s}$ (مقادیر برحسب درصد)				
۱,۰۱۵	۱,۰۱۷۵	۱,۰۰۵	۲,۰۱۴	۱,۴۱۵
میانگین خطای محاسبه شده برای پروفیل های سرعت در مقایسه با مقادیر تجربی برای جریان همراه با گرادیان فشار معکوس $U_{e1} = 17.5\frac{m}{s}, \beta = 0.8$ (مقادیر برحسب درصد)				
۱,۴۵۷	۱,۰۲۸	۱,۱۹۸	۰,۹۰۸	۱,۰۶۳
میانگین خطای محاسبه شده برای پروفیل های سرعت در مقایسه با مقادیر تجربی برای جریان همراه با گرادیان فشار معکوس $U_{e1} = 17.5\frac{m}{s}, \beta = 1.8$ (مقادیر برحسب درصد)				
۱,۱۰۸	۱,۹۰۶	۱,۱۴۴	۱,۰۰۶	۱,۰۲۰۶

جدول(۳-۳):خطای محاسبه شده برای مقادیر عددی بدست آمده در مقایسه با کار تجربی در جریان همراه با گرادیان فشار معکوس ($u_{e1} = 17.5, \beta = 1.8, 0.8$)

فصل چهارم:

اثرات انحنا بر روی لایه مرزی متلاطم

اثرات انحنا بر روی لایه مرزی متلاطم

۱-۴) بیان معادلات لایه مرزی در روی سطوح منحنی

دراین قسمت معادلات لایه مرزی بر روی سطوح منحنی بیان میشود .معادلات مذکور در مختصات (x,y) تعریف شده اند به گونه ای که محور (x) در جهت خط جریان مرجع ومحور (y) نیز عمود بر این خط جریان خواهد بود.اما آنچه که میتوان بیان کرد این مختصات می تواند به عنوان یک مختصات کلی در نظر گرفته شود زیرا اگر به معادلات لایۀ مرزی در این مختصات دقت شود اگر شعاع انحنا را برابربا بی نهایت فرض کنیم در این شرایط معادلات به شکل ساده شده در مختصات کارتزین تبدیل خواهند شد مزیت این مختصات امکان ایجاد شبکه بندی مناسب در جهت خطوط جریان می باشد البته در بیشتر مراجع مهم این مختصات به مختصات (s-n) مشهور است. [۱,۱۴,۲۵].

معادلات لایه مرزی به صورت زیر تعریف میشوند:

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(vh_1\right)=0 \qquad (۴-۱)$$

معادله مومنتوم در جهت x :

$$\frac{u}{h}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{k_r}{h}uv=-\frac{1}{h\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\left[\frac{\partial \nu_t}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{k_r u}{h}\right)\right]+\left[\left(\nu+\nu_t\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{k_r}{h}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{{k_r}^2 u}{h^2}\right)\right] \qquad (۴-۲-۱)$$

یا :

$$\frac{u}{h}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{k_r}{h}uv=-\frac{1}{h\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(h^2\tau_{xy}\right) \qquad (۴-۲-۲)$$

معادله مومنتوم در جهت y:

$$\frac{k_r u^2}{h_1}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (۴-۲-۳)$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$\begin{aligned} &y=0, u=0, v=0 \\ &y\to\delta, u\to u_e(x,y) \end{aligned} \qquad (۴-۲-۴)$$

در این معادلات شاهد دو پارامتر جدید هستیم که k به عنوان معکوس شعاع انحنا یا $k_r(x)=\pm\frac{1}{R(x)}$ تعریف می شود و پارامتر جدید دیگرh می باشد که آن را می توان اینگونه بیان کرد: $h_1=1\pm k_r(x)y$ این پارامتر ها نقش بسیار اساسی در حل معادلات وهمچنین نحوه ی شبکه بندی برای حل عددی دارند از طرفی این دو پارامتر هستند که تفاوت بین سطوح محدب ومقعر را برای ما مشخص می کنند به طوریکه علامت مثبت برای سطح محدب وعلامت منفی برای سطح مقعر میباشد دلیل این بسیار واضح است چون در حالت محدب شعاع انحنا در جهت مثبت محورy ودر حالت مقعر این شعاع در جهت عکس محور مذکور خواهد بود.اما تفاوت دیگر عدم صفر شدن گرادیان فشار در جهت y می باشد به گونه ای که حل عددی این معادلات در شرایطی که گرادیان فشار غیر صفر در نظر گرفته شود تا حدودی غیر ممکن خواهد بود البته در بعضی از کارهای تجربی فرض می کردند که گرادیان فشار فقط تابعی از x وآن هم فقط در نزدیکی دیواره که باز هم فرض قابل اعتمادی نخواهد بود.نکته مهم دیگر عدم یکسان بودن سرعت در جهت عمود برخط جریان است آنچه که ما تا پیش از این عادت داشتیم وجود سرعت پتانسیلی(potential velocity) یکسان درجهت y است اما باید گفت که چنین فرضی در اینجا قابل بیان نیست .در این پروژه ما به عینه توانستیم دریابیم که سرعت پتانسیل درروی دیواره برای حالت انحنا محدب بیشتر مقدار سرعت پتانسیل برای صفحه مسطح خواهد بود در صورتی که یک خط فرضی به عنوان خط مرکزی (center line) در نظر گرفته شده وبرای هر دو حالت در آن خط سرعت پتانسیلی یکسانی فرض گرددو عکس این

موضوع برای انحنا مقعر نیز صادق خواهد بود به طوریکه مقدار سرعت پتانسیلی یکسان در روی یک خط مرکزی به ما سرعت کمتری را در روی دیواره در حالت انحنا مقعر نسبت به صفحه مسطح می دهد.بیان مطالب بیشتر را در قسمت نتیجه گیری این فصل عنوان خواهیم کرد.[۲۶ ,۲۴ ,۱۶]

در صورتی که از رابطه زیر برای بی بعد کردن در جهت y استفاده شود[۱]
می توان نوشت:

$$\eta=\frac{y}{\delta} \qquad (۲-۵)$$

که معادله مومنتوم بعد از بی بعد کردن در جهت عمود بر خط جریان به صورت زیر در دو جهت (x,η) نوشته خواهد شد[۲]:

معادله مومنتوم در جهت x:

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{\delta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{k_r}{h_1}uv+\frac{u}{h_1}\frac{d\delta}{dx}(-\eta m_1)\frac{\partial u}{\partial \eta}=-\frac{1}{h\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\left[\frac{\partial \nu_t}{\delta\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\delta\partial\eta}-\frac{k_r u}{h_1}\right)\right]+\left[(\alpha+\nu_t)\left(\frac{\partial^2 u}{\delta^2\partial\eta^2}+\frac{k_r}{h_1}\frac{\partial u}{\delta\partial\eta}-\frac{k_r^2 u}{h_1^2}\right)\right]$$

(۴-۳)

وبه شکل منظم تر:

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\underbrace{\left[v m_1-\frac{u}{h_1}\underbrace{\frac{d\delta}{dx}(+\eta m_1)}_{m_\delta}-m_1^2\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}-(\alpha+\nu_t)\frac{k_r m_1}{h_1}\right]}_{m_\Pi}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\underbrace{\left(\frac{k_r}{h_1}v+\frac{k_r^2 u}{h_1^2}+\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\frac{k_r m_1}{h_1}\right)}_{m_x}u+\frac{1}{h_1\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\left[(\alpha+\nu_t)m_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\right]=0$$

(۴-۳-۱)

معادله مومنتوم در جهت η :

$$\frac{k_r u^2}{h_1}=\frac{m_1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \eta} \qquad (۴-۳-۲)$$

شرایط مرزی بدین گونه تعریف می شود:

$$\begin{aligned}&\eta=0\rightarrow u=0, v=0\\&\eta=1\rightarrow u=u_e\end{aligned} \qquad (۴-۳-۳)$$

۴-۲) نحوه ی استفاده از روش($k-\varepsilon$) در مدل کردن ترم توربولانسی وچگونگی حل معادلات

در این قسمت می خواهیم به معرفی مدل توربولانسی مورد استفاده در روی سطوح منحنی در جهت مدل کردن لزجت توربولانسی بپردازیم اما آنچه که باید به آن اشاره کرد اینست که بر اساس تحقیقات صورت گرفته در زمینه استفاده از مدل های توربولانسی بر روی سطوح منحنی وآنچه که مقالات مختلف در این زمینه نیز نشان می دهند باید گفت که در این شرایط باید از مدلهای دو معادله ای استفاده شود اما باید اعتراف کرد هر چند ما در انجام این پروژه از مدل تغییریافته ($k-\varepsilon$) استفاده کردیم اما می توان با مقایسه با نتایج حاصل از حل های عددی که در آن ترمهای توربولانسی از طریق مدل(RSM) بدست آمده اند این مدل نتایج بهتری نسبت مدل تغییر یافته ($k-\varepsilon$) خواهد داشت اما هر چند ممکن است معادلات مدل در ابتدا کمی غریب به نظر برسند اما در صورتی که پارامتر انحنا صفر در نظر گر فته شود در این شرایط می توان گفت مدل مذکور به حالت اول آن که در دو فصل قبل مورد استفاده قرار گرفت تبدیل خواهد شد اما مدل معرفی شده از منابعی که در آخر همین پایان نامه ذکر شده مورد استفاده قرار گرفته است.با این توضیحات می توان نوشت[۲،۱۸،۲۱]:

ν_tدر این حالت از طریق معادله (۱-۱۳-۱) وضرایب آن نیز از طریق رابطه(۲-۱۳-۱) تعریف خواهند شد

معادله انرژی جنبشی توربولانسی[۲]:

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial k}{\partial x}+v\frac{\partial k}{\partial y}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t h_1\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\nu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{Rh_1}\right)^2-\varepsilon-2\nu\left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y}\right)^2 \qquad (۴-۴)$$

ضرایب بکار رفته در این معادله از طریق رابطه(۱-۱۱-۳۴-۲) قابل دسترسی می باشد.

در صورتی که بی بعد کردن در جهتy را نیز برای این معادله همانند معادلات قبل انجام دهیم :

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial k}{\partial x}+-\frac{m_\Delta}{h_1}u\frac{\partial k}{\partial \eta}+vm_1\frac{\partial k}{\partial \eta}=\frac{m_1^2}{h_1}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(h_1\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}\right)+\nu_t\left(m_1^2\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{ku}{h_1}\right)^2-\varepsilon-2\nu m_1^2\left(\frac{\partial k^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\partial \eta}\right)^2$$

(۱-۴-۴)

یا:

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial k}{\partial x}-\frac{m_\Delta}{h_1}u\frac{\partial k}{\partial \eta}+\nu m_1\frac{\partial k}{\partial \eta}=m_1^2\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2}+m_1^2\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\frac{\partial k}{\partial \eta}+m_1\frac{k_r}{h_1}\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}$$
$$+\nu_t\left(m_1\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{k_r u}{h_1}\right)^2-\varepsilon-\frac{\alpha}{0.3}m_1^3\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\frac{\alpha}{0.3}m_1^2\frac{k_r}{h}\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\alpha k_r^2 u}{0.3h_1^2}m_1^1\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)$$

(۴-۴-۲)

در شرایط مشابه می توان برای معادله (ε) نیز نوشت[۲] :

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}h_1\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)-f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}+c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{u}{Rh_1}\right)^2+2\nu\nu_t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 \qquad (۴\text{-}۵)$$

بطوریکه:

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}-m_\Delta\frac{u}{h_1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}+\nu m_1\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}=m_1^2\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_e}\right)\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2}+\frac{k_r}{h_1}m_1\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_e}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}+\frac{1}{\sigma_e}\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}m_1^2$$
$$+\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}\nu_t m_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+c_{\varepsilon 1}\nu_t\left(\frac{k_r}{h_1}u\right)^2\frac{\varepsilon}{k}-2\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}\nu_t\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{k_r}{h_1}u\right)-f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}+2\alpha\nu_t m_1^4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)^2$$

(۴-۵-۱)

ضرایب بکار رفته در این معادله از طریق رابطه(۱۰-۳۵-۲) قابل دسترسی می باشد.

شرایط مرزی جهت حل معادلات فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\eta=0 &\rightarrow k=0,\varepsilon=0\\ \eta=1 &\rightarrow k=k_e,\varepsilon=\varepsilon_e\end{aligned} \qquad (۴\text{-}۴\text{-}۳)$$

در این مرحله نحوه منفصل کردن معادلات لایه مرزی وهمچنین معادلات مدل توربولانسی بیان میشود.

ذکر این نکته لازم است که نحو هی انفصال معادلات ودر حالت کلی الگوریتم حل د راین شرایط دقیقا شبیه به حالت صفحه مسطح خواهد بود وانفصال معادلات نیز در نقطه $p_{i+\frac{1}{2},j}$ انجام گرفته است با این تفاوت که در اینجا شبکه بندی تا حدودی متفاوت خواهد شد که بعد از این قسمت نیز در مورد آن توضیح داده میشود . [۵].

معادله مومنتوم در حالت منفصل شده در جهت X به صورت زیر خواهد بود:

$$\left[\frac{-m_{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{h_{1}\Delta x}-\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j}+\left[\frac{+m_{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j-1}+$$

$$\left[\frac{-m_{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j+1}+\left[\frac{+u}{h_{1}\Delta x}-\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j}+\left[\frac{+m_{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j-1}$$

$$-\left(\frac{1}{\rho h_{1}}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}-\left(\frac{k_{r}}{h_{1}}v+\frac{k_{r}^{2}u}{h_{1}^{2}}+\frac{\partial\nu_{t}}{\partial\eta}\frac{k_{r}m_{1}}{h_{1}}\right)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

(۴-۶-۱)

در صورتی که به صورت منظم نوشته شود:

$$A_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j+1}+B_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j}+C_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j-1}+D_{i+\frac{1}{2},j}=0 \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۲)$$

ضرایب ماتریسی در اینجا تا اندازه ای متفاوت خواهد بود:

$$A_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m_{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۳)$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{h_{1}\Delta x}-\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۴)$$

$$C_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m_{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۵)$$

$$\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{h_{1}\Delta x}-\frac{m_{I}^{2}(\nu_{t}+\alpha)}{(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۴\text{-}۶\text{-}۶)$$

بیشترین تفاوت مربوط به ضریب $D_{i+\frac{1}{2},j}$ میباشد:

$$D_{i+\frac{1}{2},j}=A_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j+1}+\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j}+C_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j-1}-\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}-\left(\frac{k_{r}}{h_{1}}v+\frac{k_{r}^{2}u}{h_{1}^{2}}+\frac{\partial\nu_{t}}{\partial\eta}\frac{k_{r}m_{1}}{h_{1}}\right)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j}$$

(۴-۶-۷)

همانطور که در فصل قبلی نیز بیان شداین معادلات به صورت مستقیم نمی توانند مقدار پروفیل سرعت را در($u_{i+1,j}$) به ما بدهند بنابراین ابتدا ضرایب ماتریسی را در نقطه($p_{i,j}$) بدست آورده وبا این فرض که ما پروفیلهای سرعت را در نقطه ($p_{i,j}$) داریم محاسبات اولیه برای بدست آوردن ($u_{i+1,j}$) انجام میگیرد اما با توجه به تقارنی که در جهت محوردر شبکه بندی انجام شده برای حل معادلات داریم در این قسمت نیز می توان از روش متوسط گیری استفاده کرد.بنابراین معادلات را می توان به صورت تعمیم یافته وشکل ساده تری نوشت:[۵]

$$u_{i+1,j} = E_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j+1} + F_{i+\frac{1}{2},j} \qquad 2 \le j \le J-1 \qquad (۴-۶-۸)$$

$$E_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{A_{i+\frac{1}{2},j}}{B_{i+\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j} E_{i+\frac{1}{2},j-1}} \qquad (۴-۶-۹)$$

$$F_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{D_{i+\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j} F_{i+\frac{1}{2},j-1}}{B_{i+\frac{1}{2},j} + C_{i+\frac{1}{2},j} E_{i+\frac{1}{2},j-1}} \qquad (۴-۶-۱۰)$$

که دارای شرایط مرزی زیر است:

$$\begin{aligned} \eta = \eta_1 &\rightarrow u_{i+1,1} = 0, v_{i+1,1} = 0 \\ \eta = \eta_J &\rightarrow u_{i+1,J} = u_{eJ} \end{aligned} \qquad (۴-۶-۱۱)$$

که:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0 \\ \eta_J &= 1 \end{aligned}$$

معادله پیوستگی که در تکرار دوم جهت محاسبه ($v_{i+1,j+1}$) مورد استفاده قرار میگیرد را نیز میتوان به شکل منفصل شده زیر بیان کرد:

$$\left(\frac{2\Delta\eta}{m_1 h_1 \Delta x}\right)\left(u_{i,j}-u_{i+1,j}\right)+\left(\frac{m_\Delta}{m_1 h_1}\right)\left(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j}+u_{i,j+1}-u_{i,j}\right)+\left(v_{i,j}-v_{i,j+1}+v_{i+1,j}\right)-\left(\frac{\delta}{R}\right)\left(v_{i+1,j}+v_{i,j}\right)=v_{i+1,j+1}$$

(۴-۷-۱)

که در محدوده $1 \le j \le J-1$ باید مورد حل قرار گیرد.که شرط اساسی در حل این معادله استفاده از شرط مرزی زیر می باشد:

$$\eta=\eta_1 \rightarrow u_{i+1,1}=0, v_{i+1,1}=0$$

نحوه انفصال معادلات مدل توربولانسی نیز همانند قسمت قبلی درنقطه ($P_{i+\frac{1}{2},j}$) با استفاده از روش تفاضل مرکزی به صورت زیر نوشته میشود:

$$\left[\frac{-m'_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} k_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} k_{i+1,j}+\left[\frac{+m'_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} k_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m'_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} k_{i,j+1}$$

$$+\left[\frac{+u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} k_{i,j}+\left[\frac{+m'_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} k_{i,j-1}+L'_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(N'_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2$$

$$-N''_{i+\frac{1}{2},j}-\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}-G'_{i+\frac{1}{2},j}\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)}_{M_{i+\frac{1}{2},j}}+G''_{i+\frac{1}{2},j}N_{i+\frac{1}{2},j}-G'''_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

(۴-۸-۱)

و به شکل منظم تر خواهیم داشت:

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+B'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j-1}+D'_{i+\frac{1}{2},j}=0 \qquad (۴-۸-۲)$$

ضرایب ماتریسی فوق دچار تغییراتی خواهند شد که بیشترین تغییر مربوط به ($D_{i+\frac{1}{2},j}$) میباشد:

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۴\text{-}۸\text{-}۳)$$

$$B'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۴\text{-}۸\text{-}۴)$$

$$C'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۴\text{-}۸\text{-}۵)$$

$$\overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{h_1\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۴\text{-}۸\text{-}۳)$$

$$\begin{aligned}D'_{i+\frac{1}{2},j}&=A'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j+1}+\overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j-1}+L'_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(N'_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2\\&-N''_{i+\frac{1}{2},j}-\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}-G'_{i+\frac{1}{2},j}\left(M_{i+\frac{1}{2},j}\right)+G''_{i+\frac{1}{2},j}N_{i+\frac{1}{2},j}-G'''_{i+\frac{1}{2},j}\end{aligned} \quad (۴\text{-}۸\text{-}۴)$$

وبه شکل ساده تر داریم:

$$k_{i+1,j}=E'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+F'_{i+\frac{1}{2},j} \qquad 2\le j\le J-1 \quad (۴\text{-}۸\text{-}۵)$$

که:

$$E'_{i+\frac{1}{2},j}=-\frac{A'_{i+\frac{1}{2},j}}{B'_{i+\frac{1}{2},j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}E'_{i+\frac{1}{2},j-1}} \quad (۴\text{-}۸\text{-}۶)$$

$$F'_{i+\frac{1}{2},j}=-\frac{D'_{i+\frac{1}{2},j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}F'_{i+\frac{1}{2},j-1}}{B'_{i+\frac{1}{2},j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}E'_{i+\frac{1}{2},j-1}} \qquad (۴\ ۸\ ۷)$$

به طور مشابه برای معادله(ε) می توان نوشت:

$$\left[\frac{-m''_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j}+\left[\frac{+m''_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m''_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}$$

$$+\left[\frac{-m''_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}+\left[\frac{+u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j}+\left[\frac{+m''_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j-1}+\left(c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t m_1^{\,2}\right)_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+$$

$$\left(2\alpha m_1^{\,4}(\nu_t)\right)_{i+\frac{1}{2},j}\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)^2}_{M_{i+\frac{1}{2},j}}-\left[2\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}\nu_t\left(\frac{k_r}{h_1}u\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)+\left[c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t m_1^{\,2}\left[\frac{k_r u}{h_1}\right]^2\right]_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

(۴-۹-۱)

یا:

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+B''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j-1}+D''_{i+\frac{1}{2},j}=0 \qquad (۴\text{-}۹\text{-}۲)$$

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۴\text{-}۹\text{-}۳)$$

$$B''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۴\text{-}۹\text{-}۴)$$

$$C''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j} \qquad (۴\text{-}۹\text{-}۵)$$

$$\overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2 C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۴-۹-۶}$$

$$D''_{i+\frac{1}{2},j}=A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}+\overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j-1}+L''_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+G''_{1_{i+\frac{1}{2},j}}\left(M_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2$$
$$-G''_{2_{i+\frac{1}{2},j}}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)+G''_{3_{i+\frac{1}{2},j}}$$

(۴-۹-۷)

به شکل ساده تر برای این معادلات خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{i+1,j}=E''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+F''_{i+\frac{1}{2},j} \qquad 2\le j\le J-1 \tag{۴-۹-۸}$$

$$E''_{i+\frac{1}{2},j}=-\frac{A''_{i+\frac{1}{2},j}}{B''_{i+\frac{1}{2},j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}E''_{i+\frac{1}{2},j-1}} \tag{۴-۹-۹}$$

$$F''_{i+\frac{1}{2},j}=-\frac{D''_{i+\frac{1}{2},j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}F''_{i+\frac{1}{2},j-1}}{B''_{i+\frac{1}{2},j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}E''_{i+\frac{1}{2},j-1}} \tag{۴-۹-۱۰}$$

در نهایت شرایط مرزی نیز اینگونه بیان می شود:

$$\eta_1=0\rightarrow k_{i+1,j=1}=0,\varepsilon_{i+1,j=1}=0$$

(۴-۹-۱۱)

$$\eta_J=1\ ,\ k_{i+1,J}=k_e\left(x_{i+1}\right),\varepsilon_{i+1,J}=\varepsilon_e\left(x_{i+1}\right)$$

۱-۲-۴)نحوه ی شبکه بندی:

شبکه بندی در این حالت در جهت محور x ومحور عمود برآن یعنی η صورت می گیرد در این قسمت هم با توجه به این نکته که باید در جهت (η) گامهای انتخابی متغییر باشد لذا مشابه با حالت های قبلی خواهیم داشت[۲].

$$\eta_1 = 0 \quad , \quad \eta_j = \eta_2 \frac{K^{j-1}-1}{K-1} \quad , \quad \eta_J = 1 \qquad j = 2,3,4,\ldots,J \tag{۲-۳۹}$$

بطوریکه:

$$\Delta\eta_{i,j} = \eta_2 K^{j-2} \tag{۲-۴۰}$$

$$\eta_2 = \frac{(k-1)}{(k^{J-1}-1)} \tag{۲-۴۱}$$

تعداد نقاط کل(J)

$$J = \frac{\ln\left[1+(k-1)\left(\frac{\eta_e}{\eta_2}\right)\right]}{\ln k} \tag{۲-۴۲}$$

که: $k = 1.1$

براین اساس ضرایب ماتریسی بکار رفته در معادلات اصلی مربوط به مومنتوم و(k,ε) نیز دستخوش تغییراتی به شکل زیر خواهند شد که به دلیل شباهت در تغییرات ایجاد شده به عنوان نمونه ضرایب تغییریافته معادله منفصل شده مومنتوم را در اینجا بیان میکنیم:

به عنوان مثال می توان نوشت:

$$A_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-m_{\Pi}}{2} g_1 + m_{\mathrm{I}}^2 (\nu_t + \alpha) g_3\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۴-۶-۳-۱}$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-u}{\Delta x} - m_{\mathrm{I}}^2 (\nu_t + \alpha)(g_3 + g_4) + \frac{m_{\Pi}}{2}(g_1 - g_2)\right]_{i+\frac{1}{2},j} \tag{۴-۶-۴-۱}$$

$$C_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m_{\Pi}}{2}g_2+m_{\mathrm{I}}^2\left(\nu_t+\alpha\right)g_4\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۴-۶-۵-۱)$$

$$\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{\Delta x}-m_{\mathrm{I}}^2\left(\nu_t+\alpha\right)\left(g_3+g_4\right)+\frac{m_{\Pi}}{2}\left(g_1-g_2\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j} \quad (۴-۶-۶-۱)$$

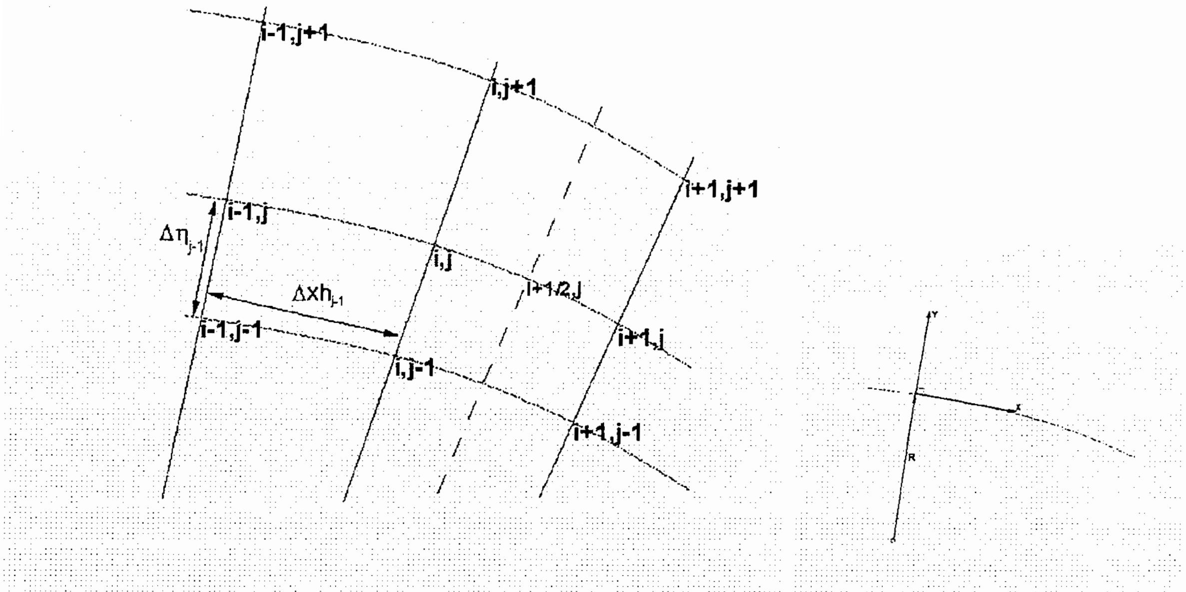
که ضرایب جدید بکار رفته به صورت زیر بیان می گردد:

$$\left(g_1\right)_{i,j}=\frac{1}{\eta_2}\frac{K}{1+K} \quad (۲-۴۳)$$

$$\left(g_2\right)_{i,j}=K^2\left(g_1\right)_{i,j} \quad (۲-۴۴)$$

$$\left(g_3\right)_{i,j}=\frac{1}{\eta_2^2}\frac{K^{3-2j}}{1+K} \quad (۲-۴۵)$$

$$\left(g_4\right)_{i,j}=K^2\left(g_3\right)_{i,j} \quad (۲-۴۶)$$



شکل(۲۷-۴):نحوه شبکه بندی مورد استفاده جهت حل عددی در جریان برروی سطوح منحنی

۲-۲-۴)نحو ه ی بدست آوردن ترمهای توربولانسی:

آنچه که در مورد بدست آوردن ترمهای توربولانسی بیان در فصل دوم بیان شد دراین قسمت نیز به نوعی می توان آنرا تعمیم داد فقط بعضی از تانسورهای کرنش در انجا شکلی متفاوت خواهند داشت: [۱,۲,۱۸]

$$-\rho\overline{u_i'u_j'} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \qquad (۲\text{-}۴۷)$$

که تانسور های کرنش به صورت زیر تعریف می شوند:

$$S_{xx} = \left[\frac{1}{1+k_r y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + k_r v\right) - \frac{1}{3}div\vec{V}\right] \qquad (۴\text{-}۱۰)$$

$$S_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}div\vec{V} \qquad (۴\text{-}۱۱)$$

که برای سیال تراکم ناپذیر $div\vec{V} = 0$ است.

در صورتی که معادلات فوق در مختصات خواسته شده نوشته شود داریم:

$$-\rho\overline{u'^2} = 2\mu_t\left(\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \left(-m_\Delta\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\right)\right) - \frac{2}{3}\rho k \qquad (۴\text{-}۱۲)$$

$$-\rho\overline{v'^2} = 2\mu_t m_1\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) - \frac{2}{3}\rho k \qquad (۴\text{-}۱۳)$$

در معادله(۱۲-۴) از ترم ($k_r v$) صرفنظر شده است و این به دلیل کوچک بودن این ترم در مقایسه با ترم اول می باشد.

با تعریف مجدد انرژی توربولانسی خواهیم داشت:

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{v'^2} + \overline{u'^2} + \overline{w'^2}\right)$$

اگر معادلات فوق را بخواهیم به شکل ماتریسی در جهت حل بکار بریم معادلات به صورت زیر خلاصه خواهند شد:

$$\left(\overline{u'^2}\right)_{i,j} = \left(\frac{2\nu_t}{h_1}\right)_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} + \left(\frac{-m_\Delta 2\nu_t}{h_1}\right)_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{i,j} - \frac{2}{3}k_{i,j} \qquad (۴\text{-}۱۲\text{-}۱)$$

$$\left(\overline{v'^2}\right)_{i,j} = \left(2\nu_t m_1\right)_{i,j}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_{i,j} \qquad (۴\text{-}۱۲\text{-}۱)$$

$$\left(\overline{w'^2}\right)_{i,j} = 2k_{i,j} - \left(\left(\overline{v'^2}\right)_{i,j} + \left(\overline{u'^2}\right)_{i,j}\right) \qquad (۴\text{-}۱۴)$$

با تاکید مجدد بر این نکته که داریم: $\left(\nu_t\right)_{i,j} = \left(f_\mu c_\mu\right)\frac{\left(k_{i,j}\right)^2}{\varepsilon_{i,j}}$

البته تنش برشی در این حالت به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \left(m_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{k_r u}{h_1} \right)$$

که از رابطه (۴۷-۲) و با جایگذاری معادله زیردرآن بدست آمده است:

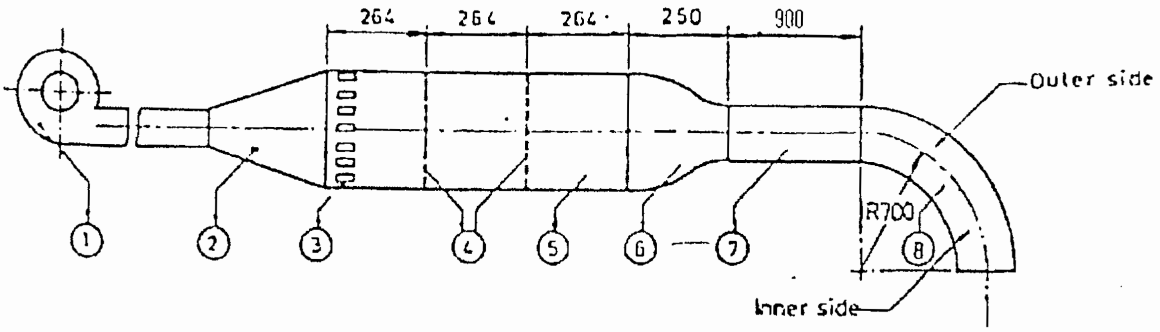
$$S_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{1+k_r y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{k_r u}{1+k_r y} \right)$$

دراین رابطه باید توجه شود که ترم دوم به خاطر ناچیز بودن وهمچنین فرض صورت گرفته دربدست آوردن معادلات لایهٔ مرزی قابل صرفنظر کردن است.همچنین بیان دوباره این نکته الزا می است که ترمهای اصلاحی در این قسمت نیز همانند فصول دوم وسوم باید در جهت بدست آوردن تنشهای نرمال آشفتگی مورد استفاده قرارگیرند ودر غیر این صورت شاهد اشتباهات و خطاهای فاحشی در هنگام بدست آوردن موارد مذکور خواهیم بود.[۲،۱۸]

۴-۳) ساختارکارهای تجربی مورد استفاده وهندسه حل:

کارهای تجربی که در این قسمت در مورد آن توضیح داده خواهد شد در حقیقت شامل چهار گروه مقادیر تجربی است که دو مورد در ارتباط با انحنا محدب و دومورد دیگر مربوط به انحنا مقعر خواهد بود.که به ترتیب توضیحاتی درمورد آنها آورده خواهد شد.

گروه اول از مقادیر تجربی مورد استفاده این بار نیز مربوط به دستگاه تونل بادی است که دارای ویژگیهایی شبیه به آنچه است که در فصول دوم وسوم به آن پرداختیم اما تفاوتهای کلی در قسمت test section دارد. ناحیه test section در ابتدا دارای سطح مقطعی مربعی شکل با ابعاد $140\times140mm$ بوده که طول این قسمت مشابه با کارهای قبلی $900mm$ است همچنین شدت توربولانسی و سرعت جریان آزاد در این ناحیه نیز به ترتیب برابر با $0.01, 13\frac{m}{s}$ است تا این مرحله هیچ گونه انحنای سطحی وجود ندارد در ادامه این ناحیه یک مجرای منحنی شکل(curved duct) که در امتداد خط مرکزی دارای $400mm$ طول وشعاع انحنای $700mm$می باشد قرار دارد سرعت جریان آزاد در این ناحیه در امتداد خط مرکزی $13\frac{m}{s}$ وشدت توربولانسی نیز مقدار 0.01 در نظر گرفته شده است. نکته قابل توجه این که شعاع انحنا سطح محدب $630mm$ و شعاع انحنا سطح مقعر برابربا $770mm$ می باشد. پارامتر انحنا در تمامی موقعیت ها برابر با مقدار ثابت $\frac{\delta}{R}=0.023$ فرض گردیده است. شکل شماتیک این دستگاه در زیر نشان داده شده است:[۶]



1. Centrifugal blower 2. Diffuser 3. Honey comb 4. Nylon screen
5. Settling chamber 6- Contraction 7. Test section 8. Curved section

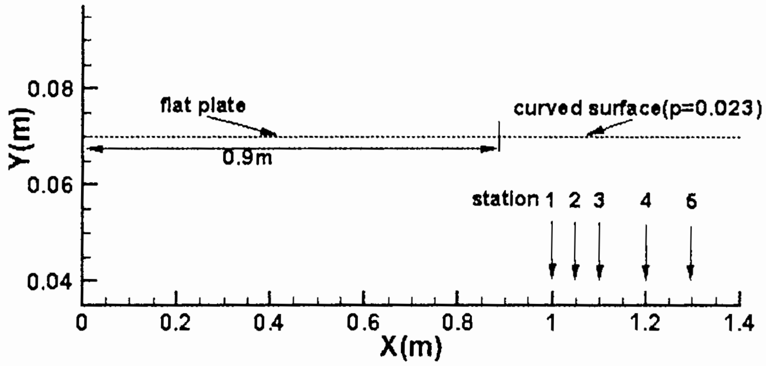
All dimensions in mm

شکل(۲۸-۴):نمایی ازساختار و جزئیات دستگاه تجربی معرفی شده

برای حل عددی در ابتدا یک صفحه مسطح با طول $900mm$ و عرض $70mm$ که جریان آزاد با سرعت $13\frac{m}{s}$ وشدت توربولانسی 0.01 برروی صفحه مذکور جریان دارد در نظر گرفتیم تا این مرحله معادلات لایه مرزی ازلحاظ شکل و ساختار همان معادلات لایه مرزی بر روی صفحه مسطح می باشد اما درانتهای این صفحه پارامتر انحنا که تاقبل از این ناحیه مقدارش صفر بوده وهمچنین شعاع انحنا که در روی سطوح مسطح برابر با بی نهایت میباشد با توجه به حالت محدب یا مقعر بودن سطح مقدارش در معادلات لایه مرزی دخالت داده می شود از طرفی از آنجا که خط مرکزی به عنوان خط مرجع که در فاصله $70mm$ از دیواره قرار داردر نظر گرفته شده است این حل در امتداد خط مرکزی وتا طول $400mm$ ادامه می یابد.دراین قسمت نیز سرعت جریان آزاد در امتداد خط مرکزی برابر با $13\frac{m}{s}$ بوده و همچنین شدت توربولانسی جریان آزاد نیز 0.01 است.

اما سطح محدب دراین قسمت مشابه با کار تجربی صورت گرفته دارای شعاع انحنا $630mm$ است وسطح مقعر دارای شعاع انحنا $770mm$ می باشد.برای ایجاد تفاوت در حالت انحنا محدب ومقعر شعاع انحنا در حالت محدب مثبت ودر حالت مقعر منفی در نظر گرفته می شود.نکته مهم دیگر اینکه پارامتر انحنا در تمامی این حالتها ثابت وبرابر با $\frac{\delta}{R}=0.023$ می باشد.

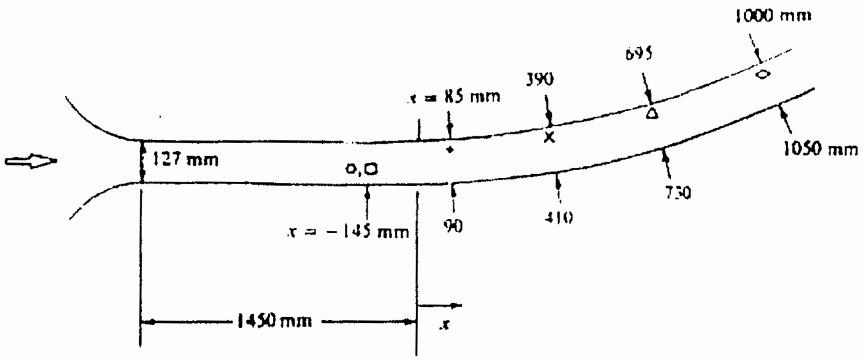
شکل شماتیک این حل در زیر نشان داده شده است:



شکل(۲۹-۴):نمایی از موقعیتها وهندسه مورداستفاده جهت حل عددی

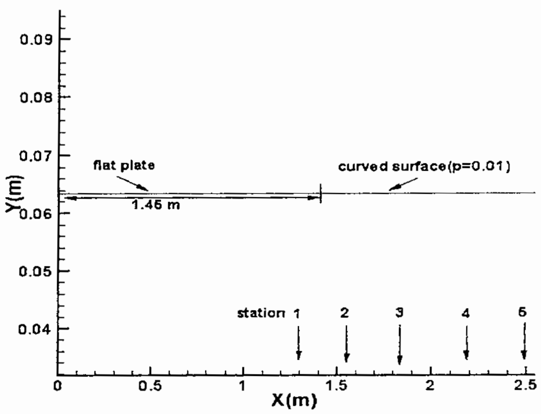
اما گروهی دیگر از اندازه گیریهای بدست آمده مقادیر تجربی جهت مقایسه با حل عددی مورد استفاده قرارگرفته توسطMeroney,Bradshaw در سال ۱۹۷۵ از دستگاه تونل بادی در کالج Imperial استخراج شده است. مشخصات کلی این دستگاه به صورت زیر می باشد.[۷,۱۵,۱۶]

قسمت test section دارای طولی به اندازه $1450mm$ بوده وعرض وارتفاع آن به ترتیب $127mm, 762mm$ می باشد. قسمت انحنا محدب به صورت سطحی محدب مانند با شعاع انحنا $2410mm$ و با طولی که برابر با $1000mm$ است در ادامهtest section آورده شده است سرعت جریان آزاد در ناحیه test section برابر با $33\frac{m}{s}$ و شدت توربولانسی نیز 0.001 است همچنین ضخامت لایه مرزی در ابتدای ورود به ناحیه محدب برابر با $22mm$ بوده و $\frac{\delta}{R}$ پارامتر انحنا نیز برابر با 0.01 است و شعاع انحنا نیز ثابت می باشد.در این حالت خط مرکزی که در ارتفاع $63.5mm$از دیواره قرار دارد به عنوان خط مرجع بوده و سرعت جریان آزاد در امتدا د آن برابربا $33\frac{m}{s}$ میباشد.در حالت انحنا مقعر تمامی مواردفوق برقرار است فقط شعاع انحنا مقدار ثابت $2537mm$ است.



شکل(۳۰-۴):نمایی از موقعیتها و جزئیاتی دیگراز دستگاه تجربی معرفی شده

برای ایجاد شرایط مشابه با حالت تجربی جهت حل عددی ابتدا صفحه مسطحی را به طول $1450mm$ که برابربا طول ناحیه test section در نظر گرفته و سرعت جریان آزاد در این شرایط برابر با $33\frac{m}{s}$ بوده همچنین شدت توربولانسی در این قسمت 0.001می باشد. در قسمت انحنا محدب یک خط مرکزی را در نظر گرفته وبا این فرض که سرعت جریان آزاد روی این خط که ارتفاع $63.5mm$ نسبت به دیواره قرار دارد برابر با $33\frac{m}{s}$ است می توان مقدار سرعت پتانسیل را برروی دیواره محاسبه نمود همچنین در قسمت محدب شعاع انحنا برابر با $2410mm$ بوده و پارامتر انحنا $\frac{\delta}{R}=0.01$ نیز می باشد در این مرحله نیز سطح مقعر با توجه به اینکه دارای شعاع ثابت $2537mm$است با قرار دادن مقدار منفی شعاع برای این سطح از سطح محدب متمایز می شود .

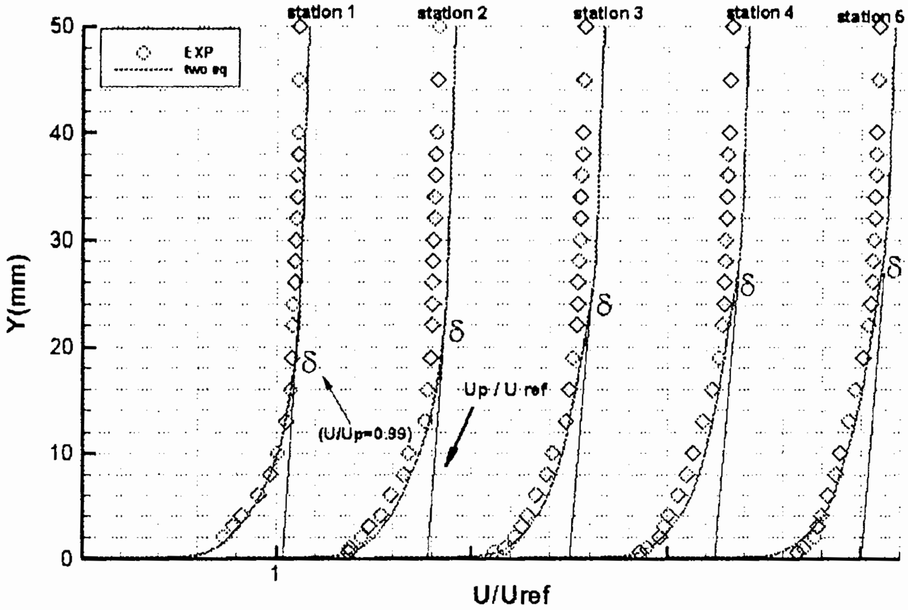


شکل(۳۱-۴):نمایی از موقعیتها وهندسه مورداستفاده جهت حل عددی

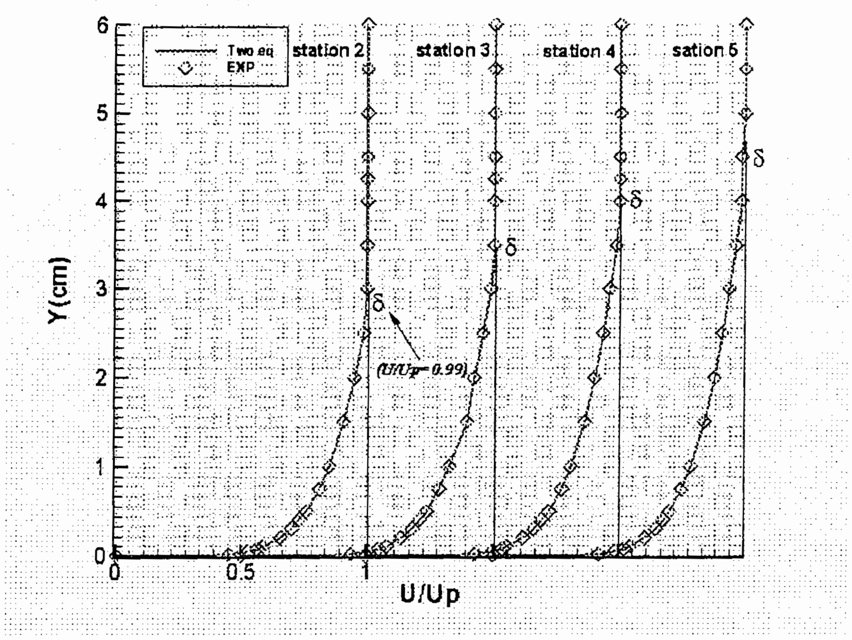
نوع انحنا سطح	میزان پارامترانحنا	موقعیت۵	موقعیت۴	موقعیت۳	موقعیت۲	موقعیت۱	سرعت جریان آزاد
محدب وگرادیان فشار در روی دیواره وجود ندارد	$\frac{\delta}{R}=0.023$	۱,۲۶m	۱,۱۷m	۱,۰۸m	۱,۰۳۵m	۰,۹۹m	$u_{ref}=12\frac{m}{s}$ $u_{\infty}=13\frac{m}{s}$
مقعرو گرادیان فشار در روی دیواره وجود ندارد.	$\frac{\delta}{R}=0.023$	۱,۳۴m	۱,۲۳m	۱,۱۲m	۱,۰۶۵m	۱,۰۱m	$u_{\infty}=13\frac{m}{s}$ $u_{ref}=12\frac{m}{s}$
مقعرو گرادیان فشار در روی دیواره وجود ندارد.	$\frac{\delta}{R}=0.01$	۲,۵m	۲,۱۸m	۱,۸۶m	۱,۵۴m	صفحه مسطح	$u_{ref}=33\frac{m}{s}$
محدب وگرادیان فشار در روی دیواره وجود ندارد.	$\frac{\delta}{R}=0.01$	۲,۴۵m	۲,۱۴۵ m	۱,۸۴m	۱,۵۳۵m	صفحه مسطح	$u_{ref}=33\frac{m}{s}$

جدول(۱-۴):بیان وضعیت قرارگرفتن موقعیت های مختلف ذکرشده درنمودارهای مربوط به بخش نتایج

۱-۳-۴) بررسی نتایج مربوط به پروفیل ها ی سرعت بر روی صفحه ی منحنی با انحنا مقعر:



شکل(۱-۴):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته برروی صفحه مقعر($u_{e1} = 13 m/_{s}, P_{cv} = 0.023$)



شکل(۲-۴):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته برروی صفحه مقعر($u_{e1} = 33 m/_{s}, P_{cv} = 0.01$)

۱) در ابتدای بررسی پروفیل های سرعت بر روی صفحه مقعر ودر حالت کلی صفحات دارای انحنا (محدب ومقعر) باید به این نکته اشاره کرد که مقدار سرعت ناحیه پتانسیل (potential velocity) تابعی از y نیز هستند بنابراین سرعت پتانسیل در عین حال که می تواند تابعی از x باشد باید حتما با (y)و دراین پروژه با حالت بی بعد شده یعنی η نیز تغییر کند یعنی با حرکت در امتداد عرضی لایه مرزی سرعت پتانسیل بر خلاف حالتهای قبلی ثابت نبوده وتغییرمی کند که این سرعت در حات انحنا مقعر دارای روند افزایشی و برای انحنا محدب دارای سیر کاهشی خواهد بود.در تحلیل نحوه اهمیت و تاثیر تغییرات سرعت پتانسیل در امتداد عرضی لایه مرزی همین بس که این تغییرات سبب افزایش یا کاهش پایداری جریان وهمچنین بر سایر پارامترهای دیگرلایه مرزی تاثیر بسیارزیادی خواهند داشت.در صفحاتی که انحنا مقعر دارند براساس نتایج بدست آمده از حل عددی و مقایسه با کارهای تجربی می توان به این نتیجه مهم دست یافت که ضخامت لایه مرزی در اثر انحنا مقعر نسبت به صفحه مسطح در حالت شرایط مشابه بیشتر خواهد بود بطوریکه آن را می توان با شرایط موجود برای گرادیان فشار معکوس مقایسه کرد.نکته حائز اهمیت اینست که هر چقدر میزان انحنا مقعر بیشتر باشد در این حالت شاهد افزایش ناپایداریها وبه دنبال آن افزلیش در پارامترهای دیگر لایه مرزی خواهیم بود .

۲)در حالت انحنا مقعر نیز می توان گفت که شرایط مشابهی از لحاظ نحوه توزیع مومنتوم های جریان با گرادیان فشار معکوس وجود دارد که این امر لزوم بررسی اثرات ناپایداری را به خوبی نشان می دهد.

۳)نکته دیگردرمورد سرعت پتانسیل باید گفت که سرعت پتانسیل حداقل مقدار خود را در حالت انحنا مقعر بروی دیواره وحداکثر مقدار آن بر روی خط مرکزی (center line) وجود دارد. [۱۶،۲۴]

بنابراین نمودار مربوط به این سرعت به جای آنکه در جهت (η)یا(y) بصورت یک خط مستقیم وقائم باشد دارای زاویه ای بیشتر از (۹۰)با محور مذکور خواهد بود.این تغییرات سبب شده است که شرایطی ایجاد گردد که نتوان از تغییرات فشار در جهت (y) چشم پوشی کرد. آنچه که در جرایان همراه با گرادیان فشار معکوس مورد توجه بود اینست که می توانستیم تغییرات فشار را به صورت تابعی از سرعت جریان آزاد در نظر گرفت بطوریکه

برای جریان همراه با گرادیان فشار معکوس خواهیم داشت:

$$(-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=u_c\frac{du_c}{dx})$$

در حالی که نوشتن چنین رابطه ای برای جریانهای روی سطوح منحنی کاملا اشتباه بوده واین به خاطر وجود تغییرات فشار در جهت(y) می باشد این تفاوت عمده باعث شده که حل عددی جریان های همراه با گرادیان فشار بر روی صفحات منحنی با مشکلات بسیاری همراه باشد.

۴)در جریان بر روی صفحات منحنی همراه با انحنا مقعر نیز شاهد رشد چشمگیرترمقادیر δ, δ^*, θ خواهیم بود به گونه ای که این مقادیر در موقعیت مشابه با صفحات مسطح بزرگتر وقابل توجه تر هستند وهمانطور که گفته شد می توان آنها را با مقادیر بدست آمده از لایه مرزی همراه با گرادیان فشار معکوس مقایسه کردوتا حدودی مشابه دانست.به طور مثال تغییر در انحنا سطح به اندازه($\frac{\delta}{R}=0.01$) باعث تغییر وافزایشی در حدود ده درصد کهی بیشتر شاید در مقادیر انتگرالی (δ^*, θ) خواهد شد (انحنا مقعر).

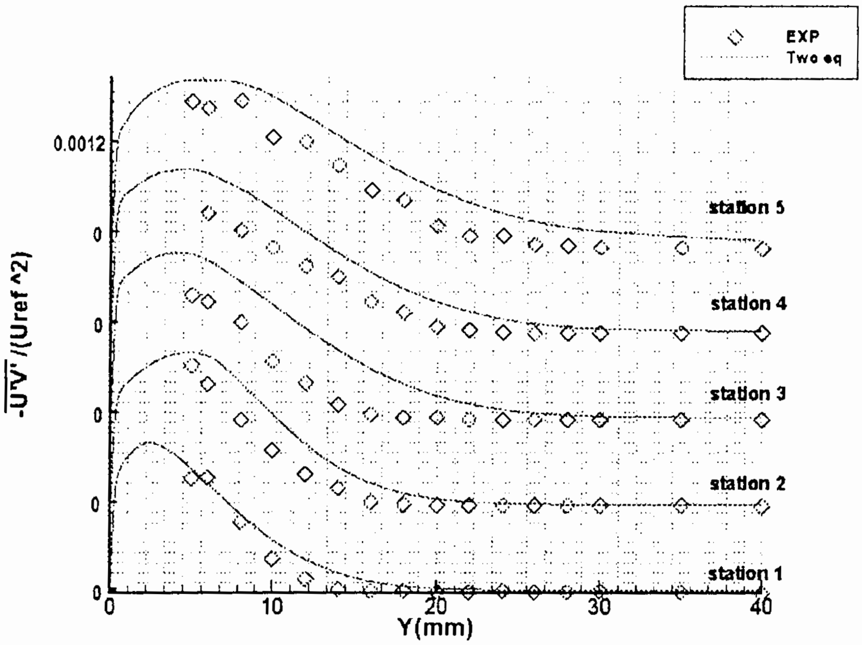
از طرفی هر چقدر پارامتر انحنا بزرگتر باشد در این شرایط باید انتظار رشد بیشتری از مقادیر ذکر شده را داشته باشیم البته بیان دقیق تر باید گفت که پارامتر انحنا برای شرایط انحنا مقعر باید به صورت منفی($-\frac{\delta}{R}$) نوشته شود واین به دلیل عکس بودن جهت محور فرضی y وشعاع می باشد.

۵)مقدار (C_f)در جریان بر روی صفحات منحنی شکل می تواند دچار کاهش یا افزایش گرددچرا که در این حالت نقش اساسی را (u_{pw}) سرعت پتانسیل در روی دیواره ایفاء می کند هر چند که میزان τ_w همراه با کاهش نسبی است اما چنانچه u_{pw} دارای سیر نزولی باشد یعنی در روی دیواره نیز گرادیان فشا ر معکوس وجود داشته باشد در این حالت باید گفت که کاهش u_{pw}بر کاهش (τ_w) برتری داشته وسبب افزایش در میزان (C_f) خواهد شد همچنین مقادیر (C_f) بدست آمده در حالتی که (u_{pw})حتی مقدار ثابتی باشد بیشتر

از مقادیر (C_f) در شرایط مشابه با صفحه مسطح است .زیرا مقادیر سرعت پتانسیل در روی دیواره سطح مقعرمانند به مراتب کمتر از سرعت پتانسیل در جریان برروی صفحه مسطح در شرایط یکسان می باشد.[۷]

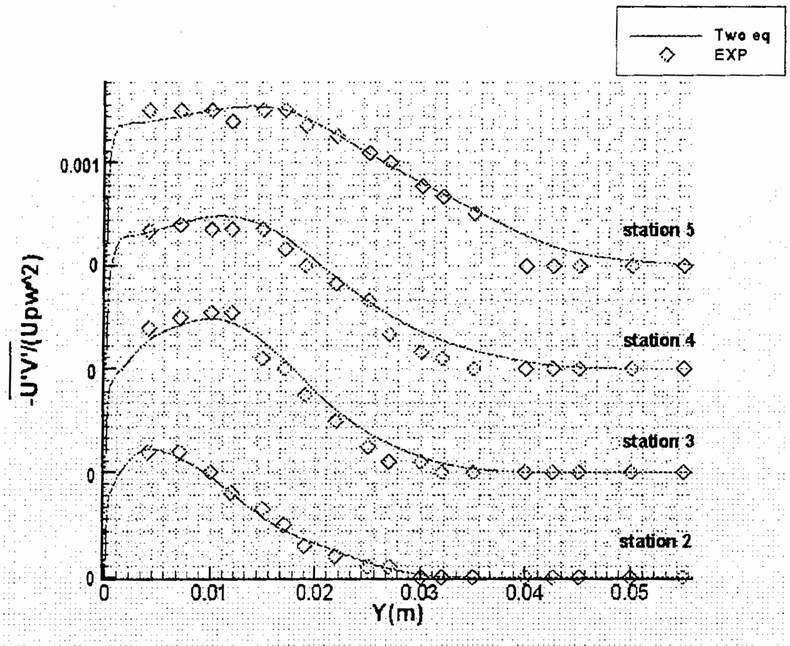
۶)در مورد توزیع H در طول لایه مرزی باید با شک وتردید سخن گفت آنچه پیدا است میزانH در حالت انحنا مقعربیشتر از مقدار آن در روی صفحه مسطح میباشد اما در عین حال روند کاهش ضریب شکل در طول لایه مرزی با افزایش پارامتر انحنا مقعر کند تر شده ودر حالت کلی از سیر نزولی آن بر روی صفحه مسطح بیشتر از صفحه مقعر می باشد.

۲-۳-۴) اثرات انحنا مقعربر ترمهای توربولانسی لایه مرز ی:



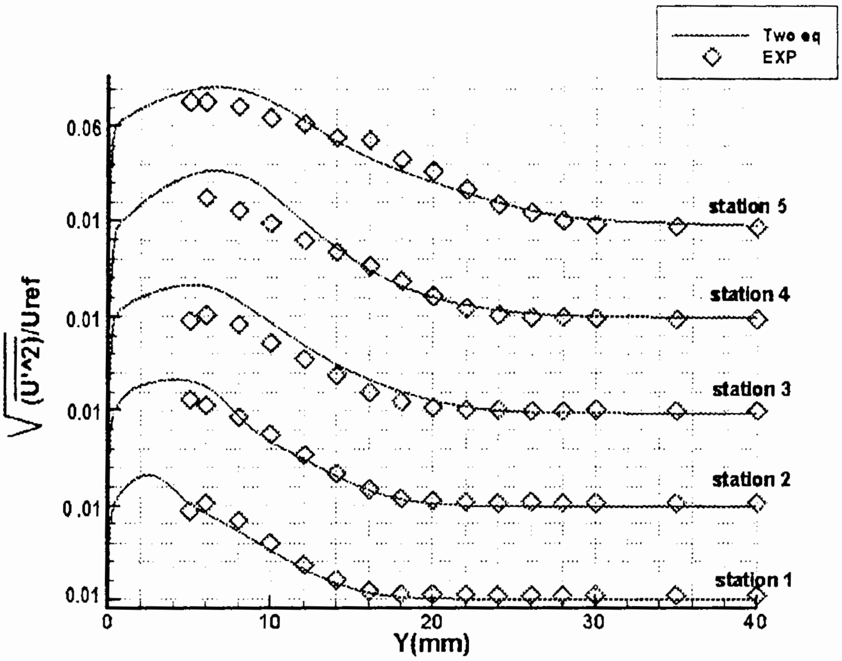
شکل(۳-۴):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی(Turbulent shear stress) در جریان آشفته برروی صفحه مقعر

$(u_{e1} = 13 \,{}^{m}\!/\!_{s}, P_{cv} = 0.023)$



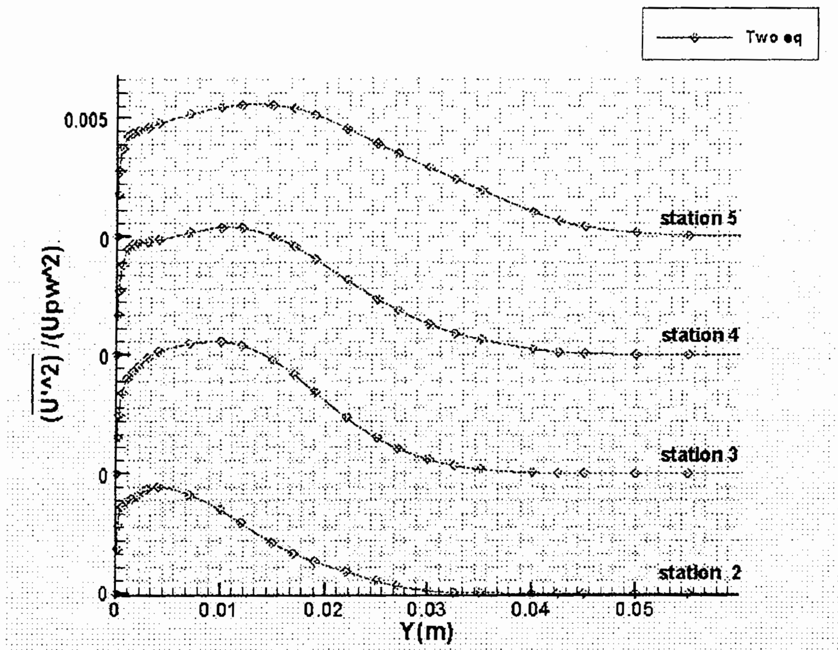
شکل(۴-۴):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی(Turbulent shear stress) در جریان آشفته برروی صفحه مقعر

$(u_{e1} = 33 \,{}^{m}\!/\!_{s}, P_{cv} = 0.01)$



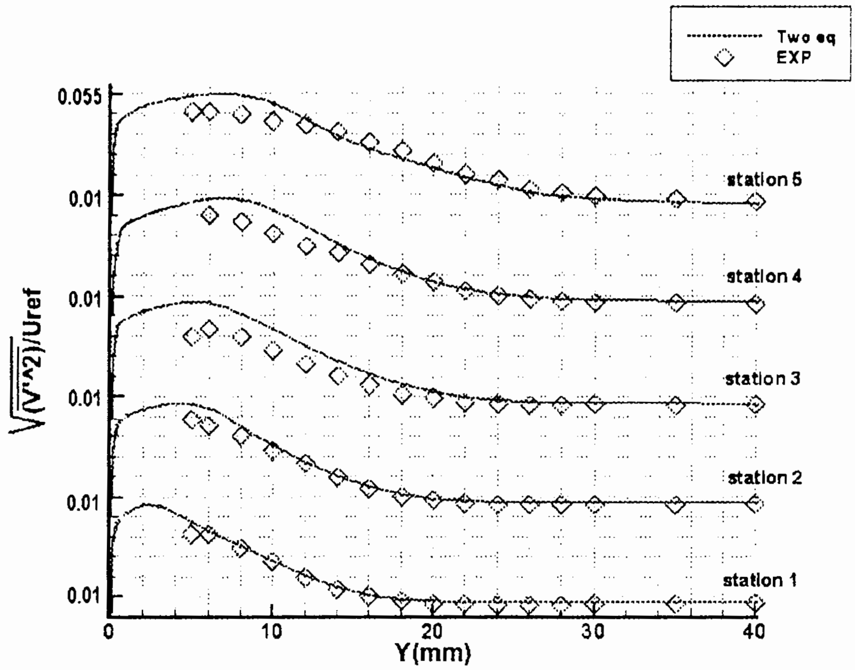
شکل(۵-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه مقعر

$(u_{e1} = 13 \,m/_s \,, P_{cv} = 0.023\,)$



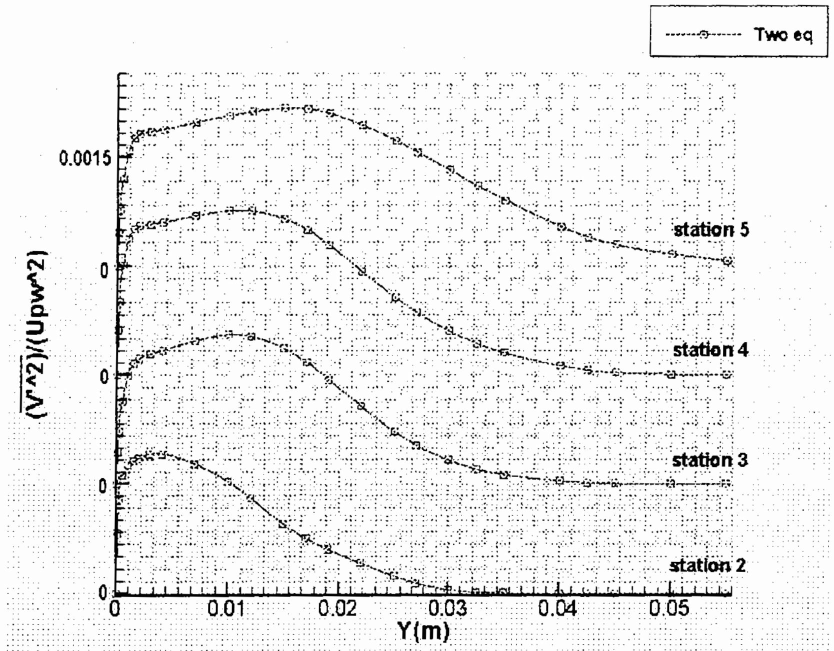
شکل(۶-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه مقعر

$(u_{e1} = 33 \,m/_s \,, P_{cv} = 0.01\,)$



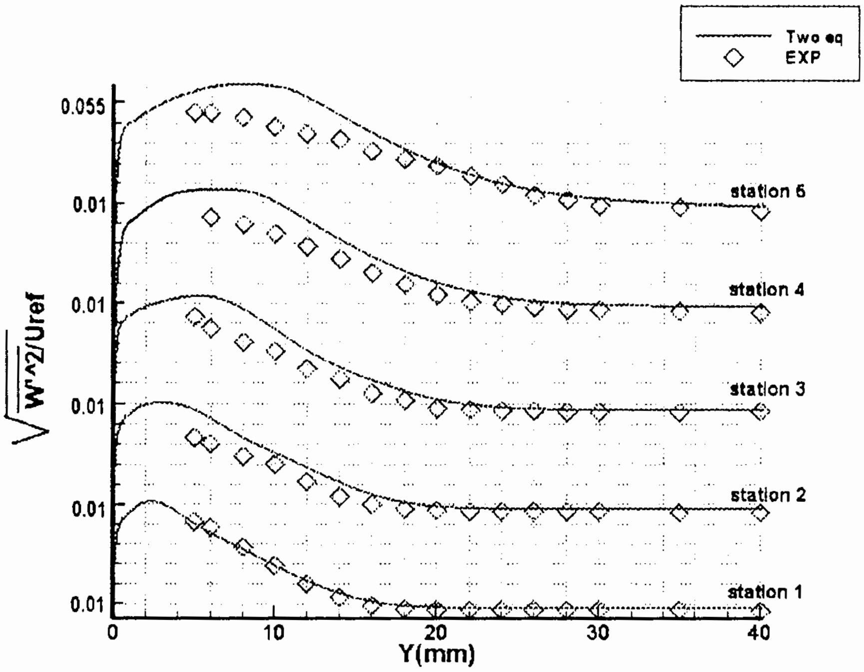
شکل(۴-۷):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه مقعر

$(u_{e1} = 13 \, m/s \, , P_{cv} = 0.023 \,)$



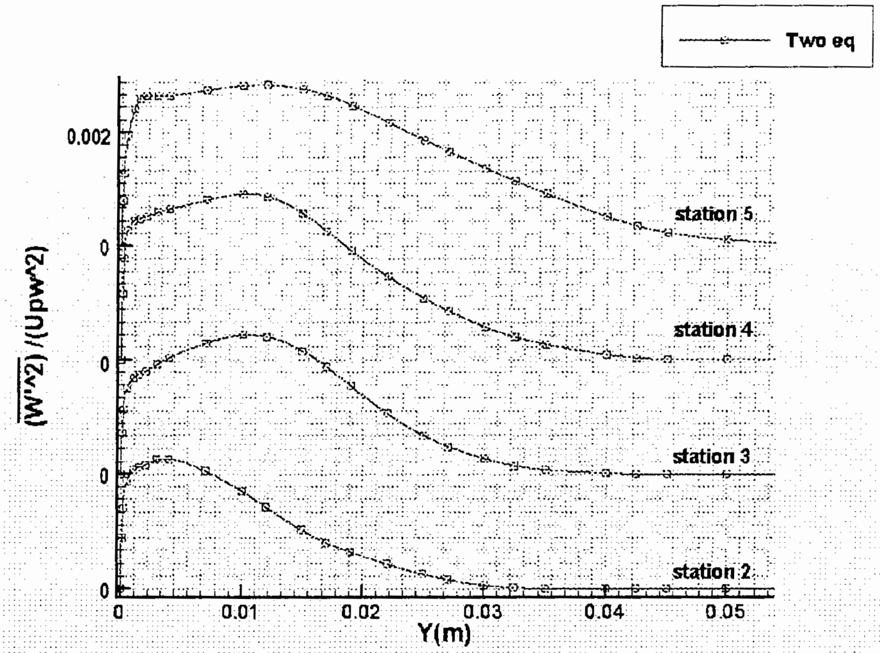
شکل(۴-۸):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه مقعر

$(u_{e1} = 33 \, m/s \, , P_{cv} = 0.01 \,)$



شکل(۹-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه مقعر

$(u_{e1} = 13 \,{}^{m}\!/_{s}, P_{cv} = 0.023)$



شکل(۱۰-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه مقعر

$(u_{e1} = 33 \,{}^{m}\!/_{s}, P_{cv} = 0.01)$

۱)مقادیر تنش برشی توربولانسی و شدت توربولانسی در اثر جود انحنا مقعر دچار افزایش خواهند شد که این عامل نشان دهنده افزایش ناپایداریها در اثر وجود انحنا مقعر است نکته جالب توجه در مورد نحوه توزیع پارامترهای توربولانسی اینست که در این قسمت نیز توزیع مقادیر توربولانسی دارای دو مرحله کاملا متفاوت از لحاظ کاهش ویا افزایش این مقادیر می باشد. که دقیقا نحوه ی توزیع آنها شبیه حالت گرادیان فشار معکوس می باشد یعنی در عرض لایه مرزی و در ناحیه Inner layerروند صعودی و برعکس بعد از رسیدن این مقادیر به نقطه ی ماکزیمم وطی ناحیه ثبات(Constant region)شاهد کاهش تنش برشی توربولانسی و شدت توربولانسی در ناحیه Outer layer هستیم میزان گسترش ناحیه ثبات (Constant region)در این شرایط تا ($\frac{y}{\delta} \approx (0.35 \sim 0.4)$) می تواند ادامه پیدا کند. این افزایش ناحیه مذکور به این معنی است که افزایش V_t شرایط را به گونه ای فراهم کرده است که بر کاهش $\frac{\partial u}{\partial y}$ غلبه کرده و ناحیه ثباترا تا حدودی گسترش دهد.

۲)آنچه که توسط مولفان این پایان نامه به عنوان رابطه ای در جهت محاسبه مقدار ماکزیمم تنش برشی توربولانسی و شدت توربولانسی برای حالتهای گرادیان فشار معکوس و صفحه مسطح آورده شد برای این قسمت به صورت زیر تعمیم داده میشود:

$$\frac{-\overline{u'v'}_{\max}}{u_{pw}^{2}} = \frac{C_f}{2\left(1+\frac{\delta}{R}\right)} \quad \text{یا} \quad \frac{-\overline{u'v'}_{\max}}{u_{\tau}^{2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{R}\right)}$$

که در حالت انحنا مقعر ($\frac{\delta}{R}$) به صورت منفی در نظر گرفته میشود.

۳)در بیان چگونگی توزیع مقدار ماکزیمم($-\overline{u'v'}_{\max}$)آنچه را که در مورد گرادیان فشار معکوس ذکر کردیم دراینجا نیز صادق است یعنی ما در حالت کلی شاهد افزایش درصدی از مقادیر در جهت طولی لایه مرزی هستیم و این به خاطر وجود V_t به عنوان یک پارامتر مهم در محاسبه مقادیر توربولانسی است.همچنین با

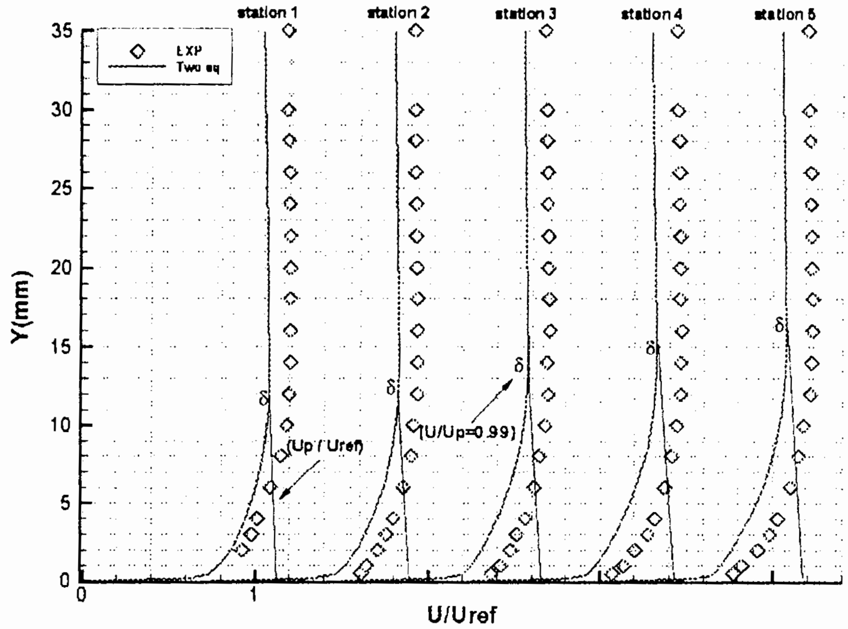
زهم تاکید می کنیم که اثرات پارامتر انحنا مقعر نیز همانند گرادیان فشار معکوس سبب افزایش تبادل مومنتوم توربولانسی در بین اجزای سیال میگردد.

۴)در حالت انحنا مقعر نیز شاهد سهم بیشتری از $\frac{\overline{v'^2}}{{u_{pw}}^2}$ نسبت به حالت صفحه مسطح هستیم به عبارت دیگر با کاهش سهم ($\overline{u'^2}$و $\overline{w'^2}$) از انرژی جنبشی توربولانسی درصد بیشتری در اختیار $\overline{v'^2}$ قرار گرفته هر چند باز هم تاکید می کنیم که میزان ($\overline{u'^2}$و $\overline{w'^2}$) از مقادیررابطه های مذکور در سفحه مسطح به مراتب بیشتر است.

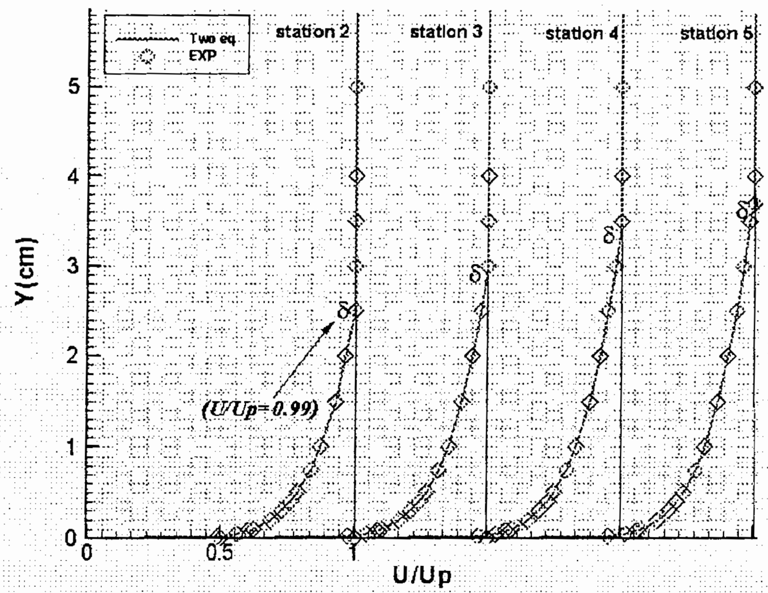
۵)افزایش ($\frac{\delta}{R}$) باعث افزایش در مقادیر تنش برشی توربولانسی و شدت توربولانسی می گردد بطوریکه این پارامتر می تواند به عنوان یک عامل ناپایداری معرفی شود.

۶)در رسم نمودارهای مربوط به شدت های توربولانسی نیز شاهد شباهت این نمودارها به نمودار تنش برشی توربولانسی هستیم هر چند شباهت ($\frac{\overline{v'^2}}{{u_{pw}}^2}$) تا حدودی به ($\frac{-\overline{u'v'}}{{u_{pw}}^2}$)بیشتر خواهد بود که این به دلیل نزدیکی مقادیر این دو پارامتر به همدیگر است از طرفی با زهم تاکید می کنیم که در میان مقادیر توربولانسی ($\overline{u'^2}$) بیشترین مقدار و($\overline{w'^2}$) در مرحله بعدی و ($\overline{v'^2}$)کمترین مقدار را خواهد داشت.

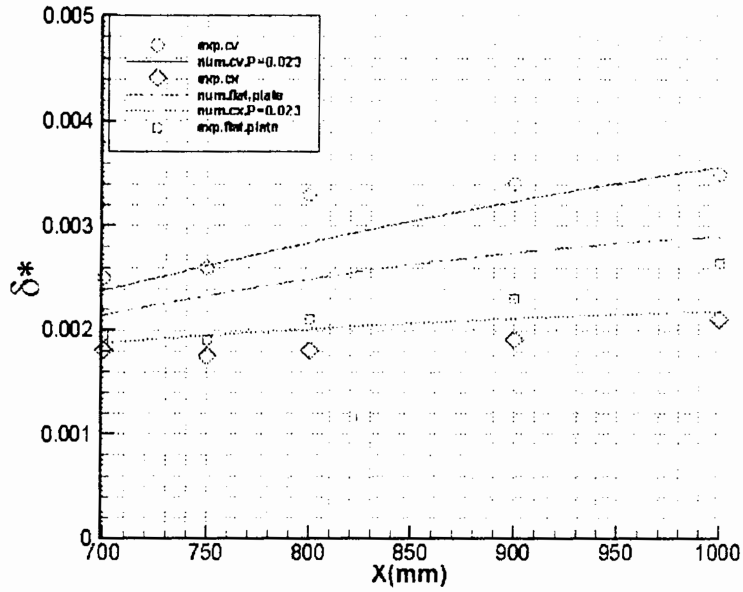
۴-۳-۳) بررسی نتایج مربوط به پروفیل ها ی سرعت بر روی صفحه ی منحنی با انحنا محدب:



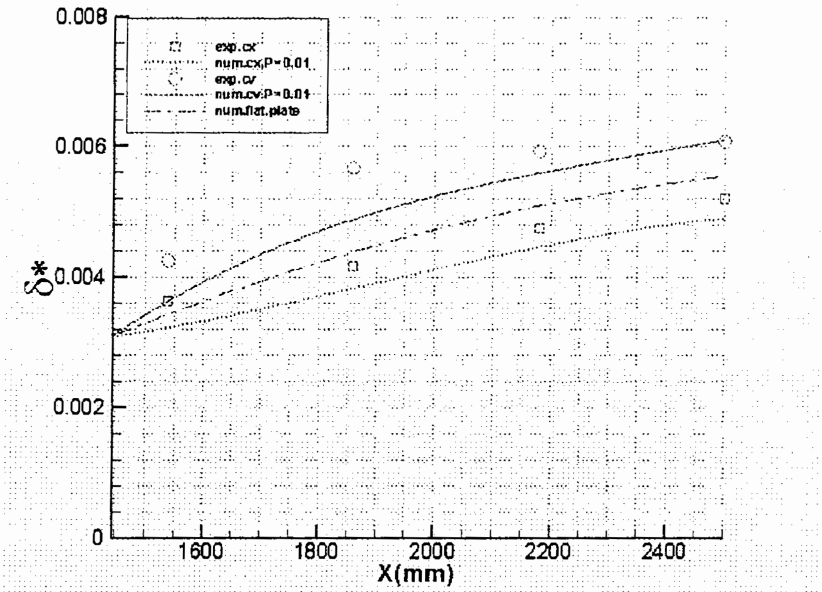
شکل(۱۱-۴):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته برروی صفحه محدب($u_{e1} = 13\, m/s, P_{cx} = 0.023$)



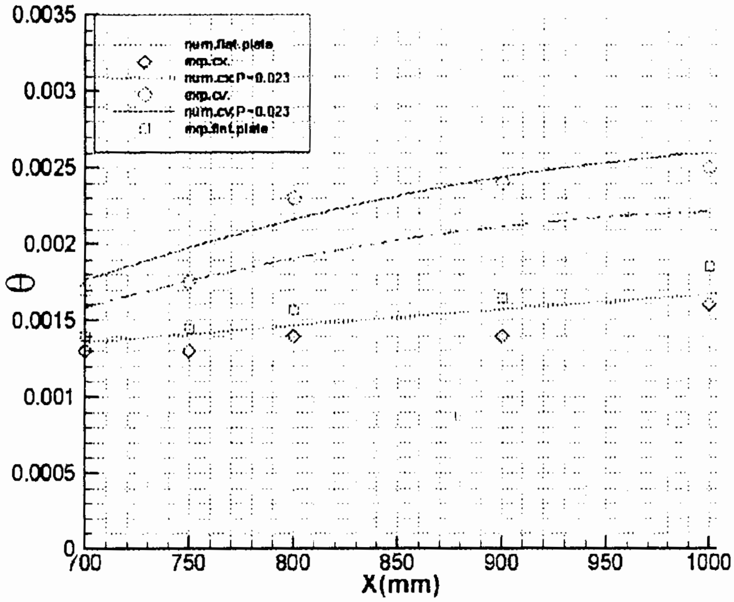
شکل(۱۲-۴):نحوه ی توزیع پروفیل های سرعت در جریان آشفته برروی صفحه محدب($u_{e1} = 33\, m/s, P_{cx} = 0.01$)



شکل(۱۳-۴):نحوه ی توزیع ضخامت جابجایی(displacement thickness) در جریان آشفته برروی صفحات محدب ومقعر در مقایسه با صفحه مسطح ($u_{e1} = 13 m/s , P_{cx} = 0.023$)

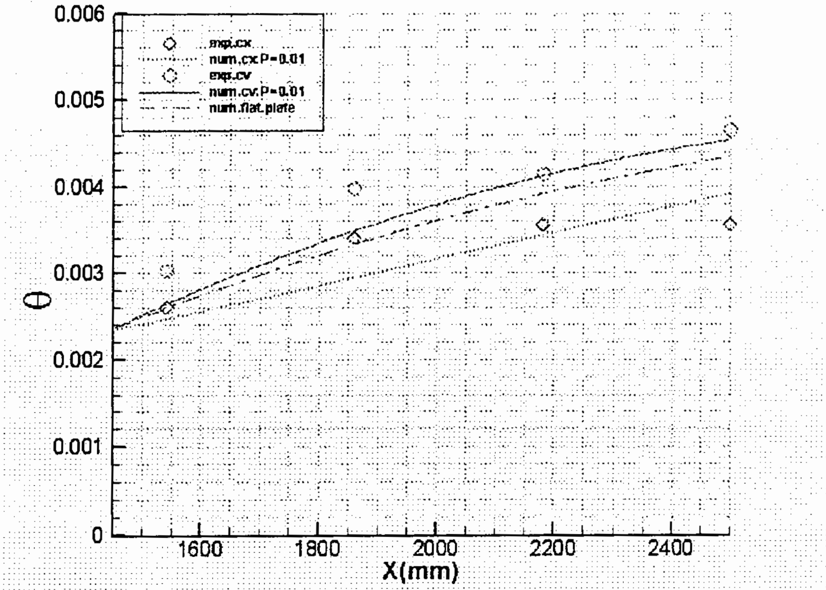


شکل(۱۴-۴):نحوه ی توزیع ضخامت جابجایی(displacement thickness) در جریان آشفته برروی صفحات محدب ومقعر در مقایسه با صفحه مسطح ($u_{e1} = 33 m/s , P_{cx} = 0.01$)



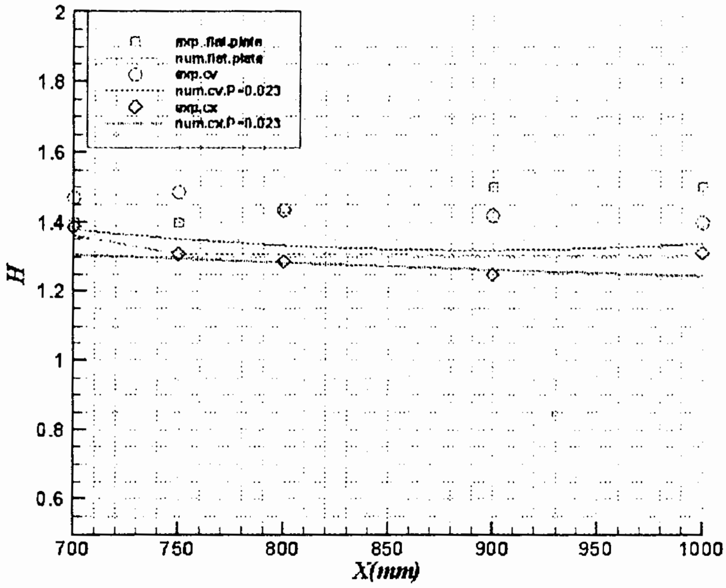
شکل(۴-۱۵):نحوه ی توزیع ضخامت مومنتوم(Momentum thickness) در جریان آشفته برروی صفحات محدب ومقعر

در مقایسه با صفحه مسطح ($u_{e1} = 13 \, m/s \, , P_{cx} = 0.023$)

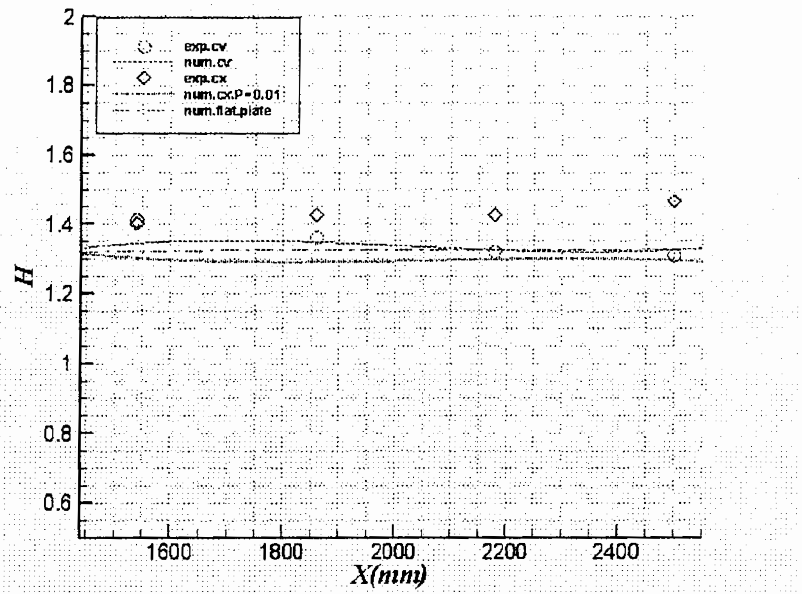


شکل(۴-۱۶):نحوه ی توزیع ضخامت مومنتوم (Momentum thickness) در جریان آشفته برروی صفحات محدب ومقعر

در مقایسه با صفحه مسطح ($u_{e1} = 33 \, m/s \, , P_{cx} = 0.01$)



شکل(۴-۱۷):نحوه ی توزیع ضریب شکل(shape factor) در جریان آشفته برروی صفحات محدب ومقعر در مقایسه با صفحه مسطح ($u_{e1}=13 m/s, P_{cx}=0.023$)



شکل(۴-۱۸):نحوه ی توزیع ضریب شکل(shape factor) در جریان آشفته برروی صفحات محدب ومقعر در مقایسه با صفحه مسطح ($u_{e1}=33 m/s, P_{cx}=0.01$)

۱) برخلاف آنچه که درمورد انحنا مقعروهمچنین جریان همراه با گرادیان فشار معکوس وجریان بر روی صفحه مسطح شاهد رشد نسبتا زیاد لایه مرزی به خصوص در دو مورد اول هستیم در این جریان رشد ضخامت لایه مرزی بسیا کم مشود ولی نمی توان گفت کاهش ویا متوقف میشود هر چند بعضی از کارهای تجربی این گونه نشان میدهند که تا حدود با کارها ونتایج عددی در این زمینه تناقض وجود دارد اما میتوان این گونه تفسیر کرد که سطوح محدب از رشد زیاد ضخامت لایه مرزی جلوگیری میکنند.اما نکته حائز اهمیت در اینجا روند کاهشی سرعت پتانسیل در عرض لایه مرزی است بدین صورت که حداکثر سرعت پتانسیل بر روی دیواره یا همان سطح محدب مانند تشکیل میشود وحداقل مقدار سرعت مذکور بر رویcenter line یا همان خط مرکزی ایجاد می گردد.

۲)افزایش پارامتر انحنا ($\frac{\delta}{R}$)در حالت محدب سبب افزایش پایداری وکاهش در مقادیر (δ,δ^{*},θ) می گردد وآنچه که در انجام این پروژه به آن دست یافتیم اینست که اثرات انحنا محدب نسبت به میزان پارامترانحنای یکسان در حالت انحنای مقعر بیشتر است.[۶]

۳)همانطور که برای انحنا مقعر ذکر کردیم در این حالت هم گرادیان فشار در جهت (y)یا(η) باعث میشود که مدل کردن ترم گرادیان فشار بسیار سخت دشوار باشد.که به دلیل تغییرات سرعت پتانسیل در دو جهت (x,y) میباشد.

۴)اثرات مثبتی که انحنا محدب در کاهش ناپایداری جریان دارد در نحوه توزیع ترمهای توربولانسی به خوبی قابل درک است .

۵)هما نطور که در قسمتهای قبلی توضیح داده شد می توان گفت که سطوح محدب تمایل زیادی به کاهش روند افزایشی ضخامت لایه مرزی دارند که این تاثیرات (در میزان انحنا مشابه با حالت مقعر) بسیار بیشتر است یعنی کاهشی که در ضخامت لایه مرزی وسایر پارامترهای لایه مرزی در اثرانحنا محدب ایجاد میشود به مراتب بیشتر از مقدار افزایشی است که توسط انحنا مقعر در مورد این پارامترها به وجود می آید.بنابراین می توان گفت که انحنا

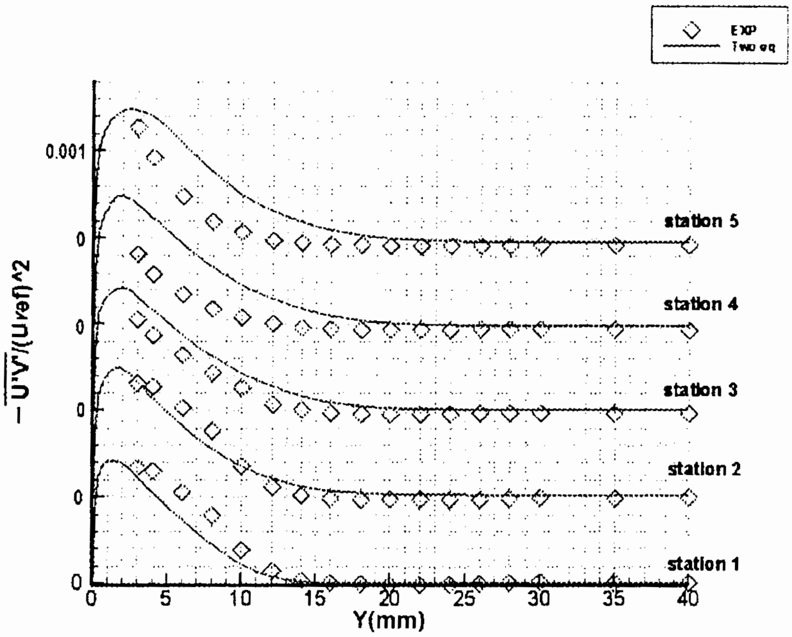
محدب موثرتر عمل می کند که باز هم تاکید می کنیم این تاثیرات به عینه در مورد توزیع ترمهای توربولانسی قابل تشخیص است .

همچنین ذکر این نکته الزامی است که پارامتر انحنا باید به صورت مثبت در نظر گرفته شود.[۱۵]

۶)مقدار (C_f) در حالت انحنا محدب روند کاهشی که تمایل به ثابت بودن دارد پیدا می کند دلیل این امر به خاطرتغییرات کم در(τ_w) می باشد در صورتی که میزان (u_{pw}) ثابت باقی بماند در این حالت میزان تغییرات (C_f) ناچیز خواهد بود اما در حالتی که (u_{pw}) روند افزایشی داشته باشد در این شرایط شاهد کاهش شدید تر در مقادیر (u_{pw}) درامتداد طولی لایه مرزی خواهیم بود .همچنین مقادیر (u_{pw}) در مقایسه با سطوح صاف کمتر خواهد بود که این به دلیل وجود سرعت پتانسیلی بزرگتر در روی دیواره در حالت انحنا محدب می باشد که این تا حدودی به توجبه کم بودن مقادیر(u_{pw}) در روی سطوح محدب کمک می کند.

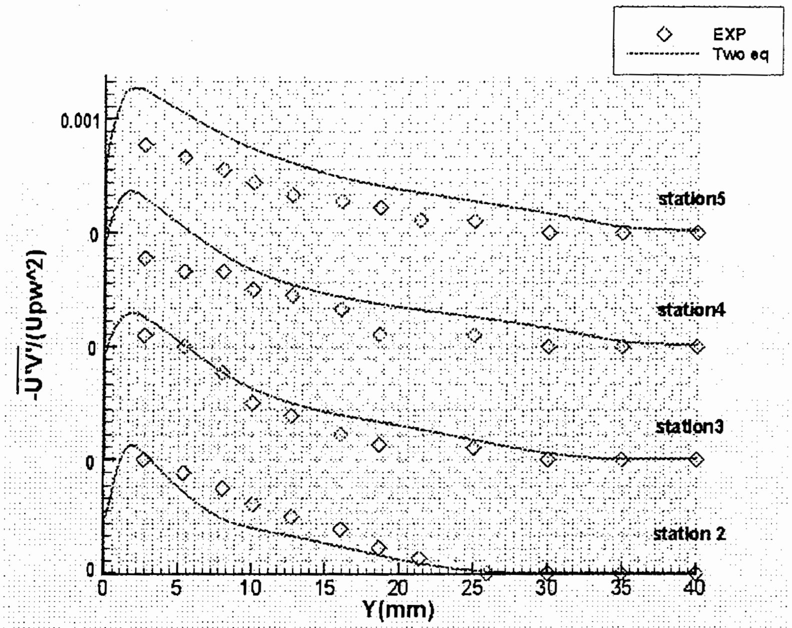
۷)توزیع H در طول لایه مرزی با توجه به رشد ناچیز (δ^*,θ) را می توان تا حدودی ثابت در نظر گرفت اما واقعیت اینست که در شرایطی که (δ^*,θ) دارای روند افزایشی بیشتری باشند در این شرایط کاهش H دور از انتظار نخواهد بود که در مقایسه با صفحه مسطح این مقادیرتا اندازه ای کوچکتر خواهند بود اما بعضی از کارهای تجربی در شرایطی که مقدار (C_f)توسط انحنا محدب به شدت کاهش یابد (افزایش حداکثری در سرعت پتانیسل برروی دیواره) رشد ناچیزی را در مقادیر پارامتر مذکور نشان میدهند که این می تواند به عنوان تناقضی بین حل های عددی وتحقیقات تجربی باشد.

۴-۳-۴)اثرات انحنا محدب بر ترمهای توربولانسی لایه مرز ی:



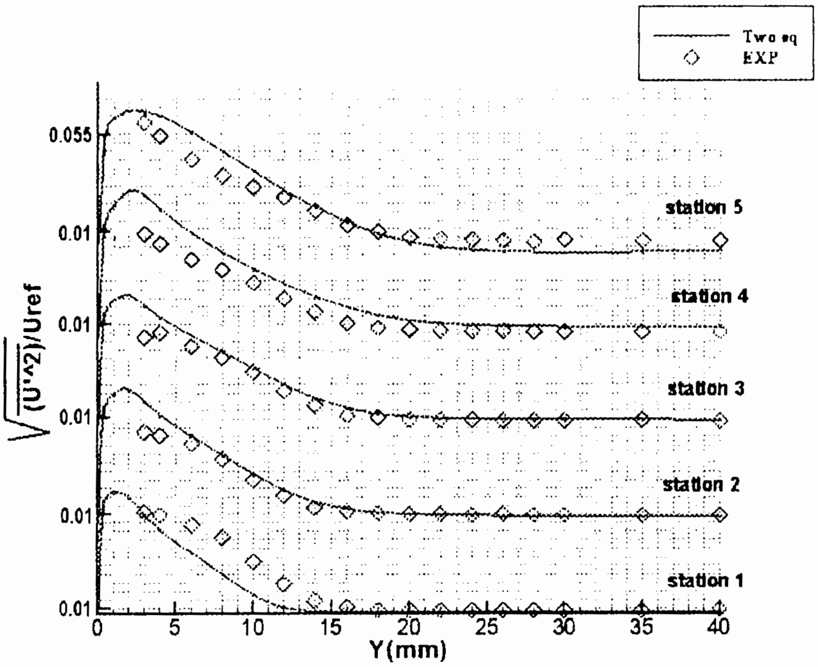
شکل(۱۹-۴):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی(Turbulent shear stress) در جریان آشفته برروی صفحه محد ب

$(u_{e1} = 13 \, m/s , P_{cx} = 0.023)$



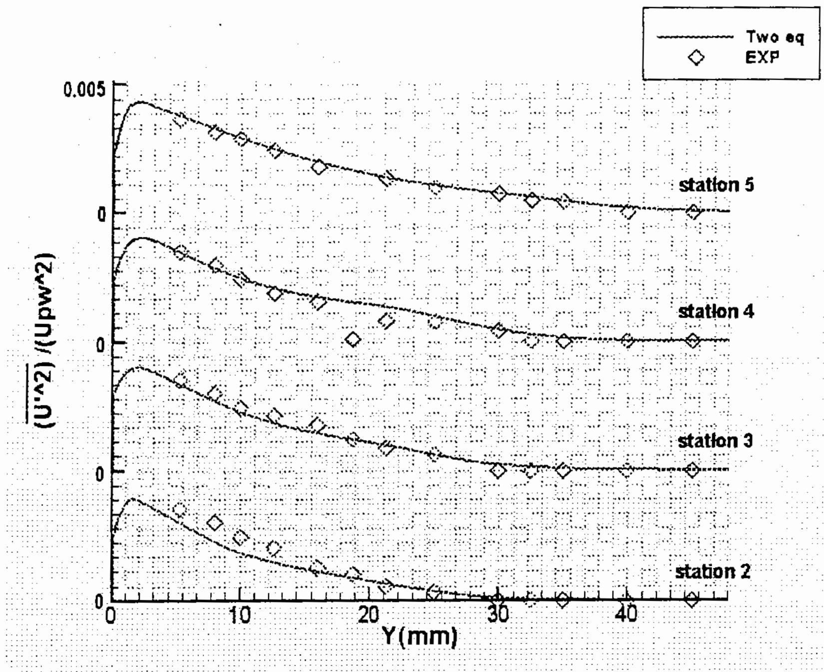
شکل(۲۰-۴):نحوه ی توزیع تنش برشی توربولانسی(Turbulent shear stress) در جریان آشفته برروی صفحه محدب

$(u_{e1} = 33 \, m/s , P_{cx} = 0.01)$



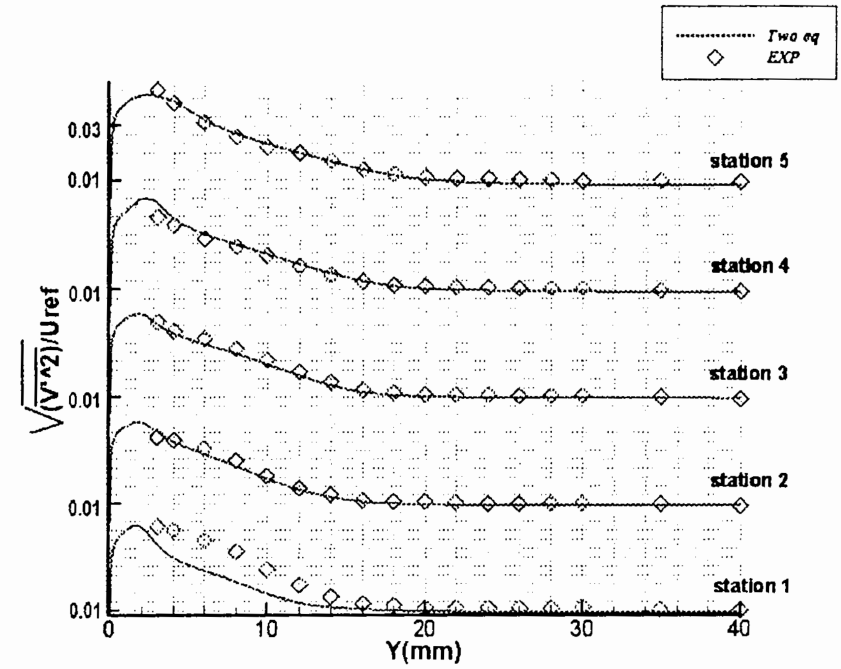
شکل(۲۱-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه محدب

$(u_{e1} = 13 \, m/s, P_{cx} = 0.023)$



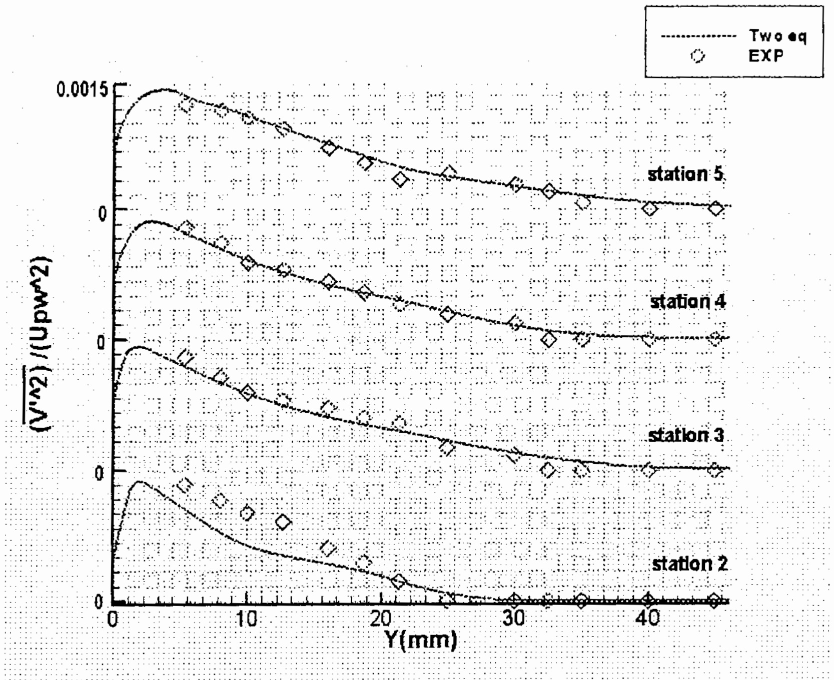
شکل(۲۲-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه محدب

$(u_{e1} = 33 \, m/s, P_{cx} = 0.01)$



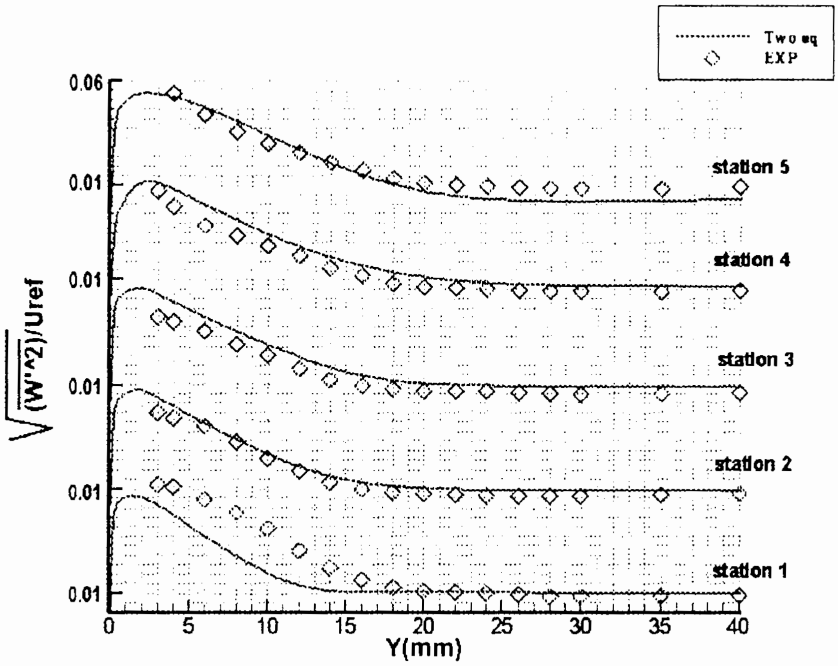
شکل(۲۳-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه محد ب

$(u_{e1} = 13 m/s , P_{cx} = 0.023)$



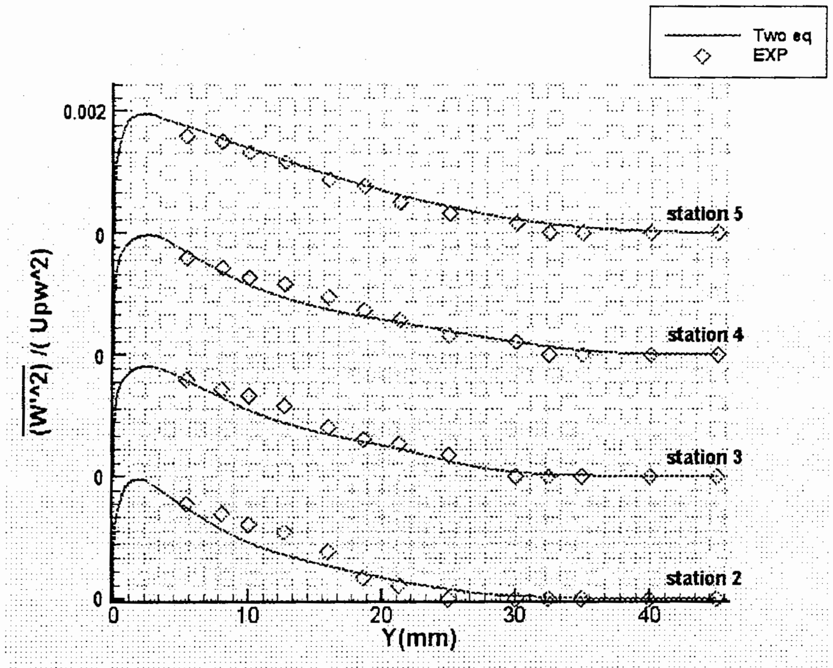
شکل(۲۴-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه محد ب

$(u_{e1} = 33 m/s , P_{cx} = 0.01)$



شکل(۲۵-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه محد ب

$(u_{e1} = 13 m/s, P_{cx} = 0.023)$



شکل(۲۶-۴):نحوه ی توزیع شدت توربولانسی(Turbulent intensity) در جریان آشفته برروی صفحه محد ب

$(u_{e1} = 33 m/s, P_{cx} = 0.01)$

۱)با توجه به اثر ات مهم سطوح با انحنا محدب در کاهش ناپایداریهای توربولانسی مقادیر تنش برشی توربولانسی و شدت توربولانسی دچار تغییراتی اساسی در لایه مرزی خواهند شد برخلاف انحنا مقعر که مقدار ماکزیمم ترمهای توربولانسی ذکر شده بزرگتر از مقادیر این ترمها در صفحه مسطح بود در این حالت (انحنا محدب) شاهد کاهش این مقادیر ماکزیمم هستیم بطوریکه این کاهش بیشتر از افزایش صورت گرفته توسط انحنا مقعر می باشد.

۲)توزیع ترمهای توربولانسی در حالت انحنا محدب نیز همانند سایر موارد قبلی شامل دو مرحله افزایشی وکاهشی در عرض لایه مرزی می باشد .اما ضخامت ناحیه افزایشی یا همان (inner layer) بسیار کم خواهد بود از طرفی میتوان گفت محدوده ناحیه ثبات (constant region) نیز بسیار ناچیز است.در حالت انجام شده برای این پروژه تقریبا ضخامت ناحیه گفته شده کمتر از (0.07δ) می باشد.

۳)میزان ماکزیمم تنش برشی توربولانسی و شدت توربولانسی حدودا برای یک پارامتر انحنا ثابت مقداری ثابت در طول لایه مرزی خواهد بود .تنها مسئله مهم در هنگام بررسی پروفیل های توربولانسی در موقعیت های مختلف میزان افزایش این مقادیر در ناحیه (outer layer) نسبت به موقعیت های طولی قبلی می باشد اما مهمترین نکته که دراین جا قابل بیان است تفاوت حل های عددی وکارهای تجربی است که در زمینه مطلب پیشین با تناقض دارند یعنی اینکه کارهای تجربی در حالت انحنا محدب کاهش مقادیر توربولانسی در ناحیه (outer layer) را با حرکت در امتداد طولی لایه مرزی نشان میدهند اما همانطور که گفتیم در حل های عددی که صورت گرفت این مسئله نقض شده وافزایش جزئی را در این مورد نشان میدهد. این نتیجه اخیر با حل DNS صورت گرفته توسط گروهی از محققان در دانشگاه توکیو ژاپن تطابق کامل دارد[۷].

۴)در حالی که شباهت زیادی بین منحنی های ($\frac{\overline{u'^2}}{u_{pw}^{\ 2}},\frac{\overline{v'^2}}{u_{pw}^{\ 2}},\frac{\overline{w'^2}}{u_{pw}^{\ 2}}$) وجود دارد باید این را خاطر نشان کرد که بر خلاف کارهای قبلی که شاهد افزایش نسبت($\frac{\overline{v'^2}}{\overline{u'^2}}$) در مقایسه با صفحه مسطح بودیم اما در این قسمت

شاهد تقریبا کاهش نسبت مذکور در مقایسه با حالت صفحه مسطح هستیم در این حالت البته طبق شرایط قبلی بیشترین مقدار شدت توربولانسی مربوط به($\overline{u'^2}$) ودر مراحل بعدی($\overline{w'^2}$ و $\overline{v'^2}$) به ترتیب قرار دارند.

۵)فرمول جدیدی که در اینجا برای تعیین مقدار ماکزیمم ($-\overline{u'v'}_{\max}$) برای حالت انحنا محدب بیان میشود دقیقا شبیه به حالت مقعر است با این تفاوت که به جای ($\frac{\delta}{R}$) منفی باید مقدار مثبت آن در نظر گرفته شود.

$$\left(\frac{-\overline{u'v'}_{\max}}{u_{pw}^{2}}=\frac{C_f}{2\left(1+\frac{\delta}{R}\right)}\right)$$

یا :

$$\frac{-\overline{u'v'}_{\max}}{u_{\tau}^{2}}=\frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{R}\right)}$$

محاسبه خطای موجود بین مقادیر بدست آمده از حل عددی در مقایسه با کارهای تجربی:

جهت بدست آوردن **خطاهای** محاسباتی و تفاوتی که **بین** مقادیر **عددی** و**تجربی** وجود دارد چهار گروه از کارهای تجربی توضیح داده شده در قسمت(۳-۴) که شامل مقادیر **تجربی** مربوط به سطوح محدب ومقعر با پارامتر انحنا $\frac{\delta}{R}=0.023$ وسطح محدب ومقعر با پارامتر انحنا $\frac{\delta}{R}=0.01$ می باشد جهت **بدست** آوردن **خطا** مورد استفاده قرار گرفته اند که در چهار جدول جداگانه به ترتیب آورده شده است . از مقایسه مقادیر میانگین **خطای** بدست آمده در مورد سطوح محدب و مقعر با پارامتر انحنا $\frac{\delta}{R}=0.023$ مشاهده شد که میزان خطا در حالت انحنا مقعر در ارتباط با ترمهای توبولانسی وبه خصوص تنش برشی توربولانسی نسبت به انحنا محدب بیشتر بوده واز طرفی عکس این موضوع در مورد سطوح منحنی با انحنا $\frac{\delta}{R}=0.01$ برقرار است که می توان این را به نحوه بدست آوردن مقادیر تجربی نسبت داد.

موقعیتها ی طولی				
۱٫۳۴m	۱٫۲۳m	۱٫۱۲m	۱٫۰۶۵m	۱٫۰۰۱m
میانگین خطای محاسبه شده برای پروفیل های سرعت در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۴٫۸۰۵	۶٫۲۸۷	۵٫۱۸۷	۴٫۲۸۳	۲٫۱۰۹
میانگین خطای محاسبه شده تنش برشی توربولانسی در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۱۲٫۶۲۸	۱۲٫۰۳۳	۱۴٫۶۶۶	۱۱٫۵۸۳	۴٫۳۷۵
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{u'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۲٫۶۷۸	۶٫۶۵۳	۵٫۱۶۶	۳٫۹۰۹	۲٫۳۳۳
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{v'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۴٫۴۲۳	۵٫۹۱۳	۵٫۱۳۶	۲٫۹۳۴	۱٫۲۵۰
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{w'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۸٫۷۸۲	۶٫۱۶۳	۵٫۲۶۶	۵٫۰۶۲	۱٫۷۶۶

جدول(۲-۴):خطای محاسبه شده برای مقادیر عددی بدست آمده در مقایسه با کار تجربی در روی
صفحه مقعر($u_{e1} = 13 m/s , P_{cx} = 0.023$)

موقعیتها ی طولی				
۱,۲۶m	۱,۱۷m	۱,۰۸m	۱,۰۳۵m	۰,۹۹m
میانگین خطای محاسبه شده برای پروفیل های سرعت در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۹,۲۸۷	۹,۸۷۵	۹,۶۶۷	۸,۰۷۵	۸,۳۷۵
میانگین خطای محاسبه شده تنش برشی توربولانسی در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۱۰,۷۸۸	۱۱,۶۶۶	۵,۲۶۷	۴,۳۷۵	۹,۷۵۰
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{u'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۷,۶۸۷	۸,۵۲۸	۶,۰۱۸	۴,۵۸۷	۱۰,۸۶۸
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{v'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۲,۰۳۹	۲,۸۴۶	۲,۶۱۴	۲,۴۴۴	۸,۲۶۷
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{w'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۳,۱۶۸	۴,۶۱۵	۴,۰۸۵۷	۳,۸۶۶	۱۰,۸۷۸

جدول(۳-۴):خطای محاسبه شده برای مقادیر عددی بدست آمده در مقایسه با کار تجربی در روی

صفحه محدب($u_{e1} = 13 m/s , P_{cx} = 0.023$)

موقعیتها ی طولی				
۲,۴۵m	۲,۱۴۵m	۱,۸۴m	۱,۵۳۵m	۱,۳۰۵m
میانگین خطای محاسبه شده برای پروفیل های سرعت در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۱,۰۰۷	۱,۰۷۱	۱,۰۶۲	۰,۹۱۴	۱,۰۱۲
میانگین خطای محاسبه شده تنش برشی توربولانسی در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۱۰,۷۷۷	۱۲,۱۵۶	۴,۲۶۷	۱۰,۰۱۲	۴,۵۲۱
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{u'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۳,۰۹۴	۴,۴۵۷	۲,۷۹۰	۵,۰۴۸	۳,۱۴۵
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{v'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۴,۱۴۹	۳,۰۲۱۵	۲,۷۵۳	۹,۱۵۹	۳,۹۶۰
میانگین خطای محاسبه شده $\overline{w'^2}$ در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۴,۵۹۸	۲,۷۵۶	۲,۰۸۰۱	۷,۷۰۲	۴,۰۱۷

جدول(۴-۴):خطای محاسبه شده برای مقادیر عددی بدست آمده در مقایسه با کار تجربی در روی صفحه محدب($u_{e1} = 33 m/s , P_{cx} = 0.01$)

موقعیتها ی طولی				
۲,۵m	۲,۱۸m	۱,۸۶m	۱,۵۴m	۱,۳۰۵m
میانگین خطای محاسبه شده برای پروفیل های سرعت در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۰,۷۹۲	۰,۸۵۶	۱,۷۴۷	۱,۰۳۵	۱,۰۱۲
میانگین خطای محاسبه شده تنش برشی توربولانسی در مقایسه با مقادیر تجربی(مقادیر برحسب درصد)				
۶,۹۳۵	۶,۷۸۲	۴,۰۷۴۹	۳,۳۵۸	۴,۵۲۱

جدول(۵-۴):خطای محاسبه شده برای مقادیر عددی بدست آمده در مقایسه با کار تجربی در روی صفحه مقعر($u_{e1} = 33 m/s , P_{cx} = 0.01$)

فصل پنجم:

نکاتی دیگر در مورد حل عددی معادلات لایه مرزی

نکاتی دیگر در مورد حل عددی معادلات لایه مرزی

واضح است که برای مدلسازی جریانات آشفته لازم است که دانش و آگاهی کافی راجع به این جریانات و نیز مدلهای موجود و توانائی هر یک وجود داشته باشد. این دانش ما را قادر خواهد ساخت که مدل آشفتگی بهینه را بر مبنای دقت مورد نیاز انتخاب نمود. این دانش همچنین این توانائی را به ما خواهد داد تا بتوان ارزیابی صحیحی از جواب داشت و بتوان در مورد واقعی و فیزیکی بودن جوابهای بدست آمده اظهار نظر نمود. این چنین ارزیابیهائی بر روی جواب به دست آمده اغلب مستلزم انجام دادن عملیاتهای اضافی نظیر چک کردن حساسیت جواب به دست آمده و شرایط مرزی انتخاب شده و نیز شکل و توزیع المانهای میدان ودیگر پارامترهای عددی یا فیزیکی مساله می باشد.[۲]

۱-۵)شرایط اولیه برای مدلهای دو معادله‌ای:

تجربه نشان داده است که ویژگیهای همگرائی برای مسائل درگیر با مدلهای دو معادله‌ای ، چنانچه از مقادیر غیر صفر به عنوان حدس اولیه برای k,ε استفاده می شود . به طرز قابل توجهی بهبود می یابد. بنابراین روش پیشنهادی آن است که از میدانهای اولیه غیر صفر برای کمیتهای k,ε استفاده گردد. این امر مستقل از این است که مدلسازی صورت گرفته در شرایط جریان دائمی است یا جریان گذرا.[۲]

مقادیر اولیه برای را می توان برابر مقادیر مشخصه به دست آمده از معادلات زیر:

$$k = \tau u_\infty{}^2 \qquad (۵\text{-}۱)$$

که در آن τ شدت آشفتگی می باشد.

یا در مورد مسائل در گیر با تونل باد:

$$k = 1.5\left(\overline{u'^2}\right) = 1.5(\tau u_\infty)^2 \qquad (۵\text{-}۲)$$

وبرای ε:

$$\varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{0.1\delta} \qquad (۵\text{-}۳)$$

یا

$$\varepsilon = \rho c_\mu \frac{k^1}{R_\mu \mu} \qquad (۵\text{-}۴)$$

که

$$R_\mu = \frac{\mu_t}{\mu} \qquad (۵\text{-}۴\text{-}۱)$$

اما آنچه که ما در انجام پروژه مذکورازآن استفاده کردیم به صورت زیر است:

$$k = \frac{\left(l_m \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}{c_\mu{}^{\frac{1}{2}}} \qquad (۵\text{-}۵)$$

$$\varepsilon = c_\mu k^2 \left(l_m{}^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1} \qquad (۵\text{-}۶)$$

که l_m همان طول اختلاطی جریان است.

۲-۵)چند نکته دیگر در مورد شبکه بندی:

۱-۲-۵)تراکم شبکه و توزیع فضائی آن:

واضح است که برای مدلسازی جریانات آشفته با استفاده از مدلهای دو معادله‌ای در مقایسه با جریانات آرام و با مدلهای صفر معادله‌ای نیاز به شبکه محاسباتی ریزتری می باشد. این امر به این خاطر است که در جریانات معمولی متغیرهای آشفتگی تحت تغییرات شدیدتر مکانی قرار داشته و لذا این متغیرها و المانهای مربوط به آنها حاوی جزئیات بسیار بیشتر در بطن خود به نسبت متغیرهای جریان متوسط می باشند.

بنابراین چنانچه حتی جواب مستقل از شبکه میدان جریان متوسط به دست آمده باشد شبکه محاسباتی ایجاد شده بایستی به منظور به دست آوردن جزئیات دقیق میدان k,ε به اندازه کافی ریز باشد. یعنی چه بسا با تقسیم یک المان به چند المان کوچکتر، تغییر چندانی در میدان جریان متوسط موضعی مشاهده نشود لیکن تغییرات قابل توجهی در متغیرهای جریان آشفته موضعی می تواند به وجود آید.

از طرفی در طراحی و ساخت شبکه محاسباتی دقت داشت که توزیع مکانی یکنواختی از نودها در داخل میدان جریان به دست اید. جهشهای ناگهانی در تراکم شبکه می تواند باعث نوسانات مکانی غیر واقعی در متغیرهای میدان جریان گردد،بالاخص چنانچه این تغییرات ناگهانی در راستای جریان و در نواحی با عدد رینولدز بزرگ رخ داده باشد. در موارد خیلی حاد، آنچه که اصطلاحا Wiggles نامیده می شود باعث واگرا شدن حل خواهد شد.[۵]

۲-۲-۵)کنترل ضخامت المانها (سلولها) در نزدیکی دیواره در صورتی که از مدل رینولدز بالا استفاده شود:

برای مدلهای رینولدز بالا نظیر مدل $k-\varepsilon$ برای اطمینان یافتن از اینکه لایه اول المانها به قدر کافی ضخیم می باشد تا بتوان با اطمینان از قرار گرفتن زیر لایه لزج و ناحیه گذرا در داخل آن از توابع دیواره استفاده نمودبهتر است نمودار y^+ روی دیواره ها ترسیم گردد. چنانچه مقدار برای تمام یا بخش عمده‌ای از المانها (یا سلولها) نزدیک دیواره بزرگتر از ۳۰ باشد در این صورت میتوان گفت که این المانها (یا سلولها) به قدر کافی ضخیم می باشند. چنانچه برای برخی از المانها (یا سلولها) مقدار کوچکتر از ۳۰ درآمده باشد در صورتیکه این اتفاق در نواحی بحرانی و مهم جریان رخ نداده باشد ،در این صورت می توان با دیده اغماض از کنار این مساله گذشت. (البته همچنانکه بارها گفته شد حد بالای محدوده گذرا، یعنی $y^+=30$ تنها یک عدد تقریبی است و این حد می تواند در مسائل مختلف تغییر قابل توجهی داشته باشد.)

در مسائلی که شامل پدیده های جدایش آرام و ملایم می باشند (نظیر آنچه در روی سطوح با شیب ملایم ، مثلا در دیفیوزرها ، رخ می دهد و یا بر روی سطوح منحنی وار ، مثلا جریان درون کانالهای پیچیده شده و یا اتصالات U شکل) میدان جریان پیش بینی شده به مقادیر y^+ بالا دست نقطه جدایش حساس می باشد. در این موارد دقیقترین جوابها هنگامی به دست می آیند که مقادیر y^+ در بالادست نقطه جدایش جریان پتانسیل در محدوده $30 \le y^+ \le 100$ حفظ شده باشد.[۱,۲]

برای مدلهای رینولدز پائین ، نظیر مدل $k-\varepsilon$ ، بهترین راه برای چک کردن اینکه آیا المانهای نزدیک دیواره به حد کافی ریز هستند یا نه ؟ آن است که مقدار ویسکوزیته مولکولی را با مقدار ویسکوزیته آشفته بر روی نودهای مجاور دیواره مقایسه نمائیم. به صورت تئوریک نبایستی مقدار ویسکوزیته آشفته فراتر از مقدار ویسکوزیته مولکولی برود. چنانچه این اتفاق بیافتد، بایستی از المانهای ریزتر در نزدیکی دیواره استفاده نمود.

۳-۵)منابع ناپایداری حل:

چندین منبع اصلی ناپایداری وجود داردکه چنانچه مورد توجه قرار نگیرند باعث خراب شدن اثرات مفید استفاده از مدلهای دو معادله‌ای می شوند اما مهمتربن آن بدین صورت ظاهر میشود:

ناپایداریهای جریانات حاوی نواحی آرام وآشفته در کنار یکدیگر:

ناپایداریها گاهی خود را به صورت مقادیر غیر فیزیکی و حتی مقادیر k,ε منفی نشان می دهند. (کمیتهای k,ε کمیتهائی هستندکه از لحاظ فیزیکی همواره مثبت بوده و هیچگاه نمی توانند مقدار منفی اختیار نمایند) گاهی نیز ناپایداریها خود را به صورت مقادیر بسیار غیر واقعی طول مقیاس و زمان مقیاس جریان آشفته ناشی از مقادیر بسیار کوچک در میدان جریان و در نواحی از میدان جریان که سطح آشفتگی جریان در عمل ناگهان کاهش چشمگیری می یابد نشان میدهند. علت این ناپایداریها در داخل معادلات نهفته است.

منبع ناپایداری هنگامی رخ می دهد که از یک مدل دو معادله‌ای برای پیش بینی جریاناتی استفاده شودکه هم دارای نواحی آرام و هم دارای نواحی آشفته همزمان در کنار یکدیگر در یک مساله فیزیکی باشند.

در مدلهای استاندارد k,ε رینولدز بالای از آنجا که به کرات با نسبتهای مختلف بین k,ε مواجه می گردیم مثلا $\frac{k^2}{\varepsilon},\frac{k}{\varepsilon},\frac{\varepsilon}{k},\frac{\varepsilon^2}{k}$ با ترمهائی مانند مواجه می شویم و اندازه ترمهای k,ε در نواحی عاری از آشفتگی هر یک نزدیک به صفر می باشند لذا نسبتهای مذکور معنای ریاضی خود را از دست می دهند و یا به عبارت دیگر دارای مقدار مبهم و نامشخصی خواهند شد. از سوی دیگر در این نواحی ، از آنجا که مقادیر بسیار نزدیک به صفر می باشند لذا این نسبتها نسبت به هر گونه تغییرات اغتشاشی در اندازه بسیار حساس بوده و شروع به نوسانات شدید وغیر عادی از یک نود به نود بعدی می کنند. این امر میتواند بر روی پایداری عددی محاسباتی تاثیر تخریبی داشته و این رفتار ناپایدار به سرعت به داخل نواحی تماما آشفته انتشار یاته و ظرف چند تکرار به سرعت حل عددی را آلوده سازد.

۱-۳-۵)روش پایدارسازی:

برای پایدارسازی باید برای هر یک از این ترمهای گفته شده باید برای مقادیر k,ε یک حد پایین در نظر گرفته شود که این مقادیر از این حد مثبت در نظر گرفته شده به پایین تر سقوط نکند یعنی می توان با در نظر گرفتن مقداری برای k,ε در جریان آزاد هر چند بسیار کوچک هم باشد از مبهم شدن مثالهای بیان شده در قسمت قبلی جلوگیری کرد .البته در بعضی از کتابها برای تخمین این حد پایین حدودا ده هزار بار کوچکتر از ماکزیمم مقادیر k,ε پیشنهاد میشود. [۲]

۴-۵)لزوم استفاده از مدل رینولدز پایین ومدلسازی ناحیه زیر لایه لزج نزدیک دیواره:

جریانات آشفته به شدت متاثر از حضور دیواره های جامد می باشند. واضح است که سرعت متوسط جریان به واسطه شرط عدم لغزش متاثر از حضور دیواره خواهد شد. آشفتگی در نزدیکی دیواره به طرق مختلفی متاثر می گردد. در فاصله بسیار نزدیک به دیواره اثرات میرائی لزجت سیال باعث کاهش نوسانات سرعت در راستای مماسی می گردد. در حالیکه انسداد دیواره باعث کاهش نوسانات در راستای عمود بر دیواره می گردد. کمی بالاتر از دیواره درحوالی ناحیه‌ای که اثرات میرائی لزجت کاهش یافته است ،آشفتگی به سرعت و به واسطه تولید انرژی جنبشی آشفتگی ناشی از گرادیانهای شدید سرعت متوسط افزایش می یابد. مدلسازی نواحی نزدیک دیواره به شدت صحت و سقم مسائل عددی را متاثر از خود می سازد تا آنجائیکه می توان دیوارها را منبع اصلی ایجاد آشفتگی جریان نام برد،از طرفی این ناحیه نزدیک دیوار است که متغیرهای جریانی در آن نواحی با گرادیانهای بالا تغییر می نمایند، انتقال ممنتوم و سایر کمیتهای اسکالر از طریق این ناحیه صورت می پذیرد. لذا هرچه حضور فیزیکی دیوارها و جریان سیال مجاور آنها در مسائل عددی بهتر و دقیقتر مورد توجه قرار گیرند مدلسازی عددی انجام شده به نتایج فیزیکی و تجربی نزدیکتر خواهد بود.

از طرفی می دانیم که معادلات حاکم بر مدلهائی همچون مدلهای دو معادله‌ای k,ε استاندارد براساس فرض جریان کاملا آشفته نوشته شده اند لذا این قبیل مدلها اغلب برای هسته مرکزی آشفته جریان مناسب هستند و استفاد از مدلهای مزبور برای نواحی نزدیک دیواره که جریان آرام می باشد مناسب نبوده و اغلب با مشکل عدم دقت و خطای بالای محاسباتی مواجه می شوند. بنابراین برای به دست آوردن پروفیل خواص در نزدیک دیواره از دو روش استفاده می گردد:[۱,۴]

الف۔ استفاده از توابع دیواره

ب ۔ استفاده از مدلهای دو معادله‌ای رینولدز پائین

استفاد از توابع دیواره نیاز به اصلاح مدلهای آشفتگی را برطرف می سازد لیکن مشکل اصلی این توابع محدودیت استفاد از آنها در جریانات مختلف میباشد.

استفاده از مدلهای دو معادله‌ای رینولدز پائین اگرچه حجم محاسباتی بیشتری را می طلبد لیکن به واسطه حل معادله به جای استفاده از معادلات پروفیل ثابت دقیقتر خواهدبود.

همانطور که می دانیم توابع دیواره توابعی هستند که تغییرات خواصی نظیر k,ε,u,T را در ناحیه نزدیک دیواره بیان می کنند. دراستفاده از توابع دیواره بایستی دقت داشت اگرچه برای تمام نواحی زیر لایه لزج, ناحیه گذراوناحیه تماما آشفته صادق هستند ولی به واسطه محدود بودن دقت این توابع وحساسیت جواب نهایی به خطاهای عددی تنها برای نواحی زیر لایه لزج وناحیه گذرا مورد استفاده قرار گیرند. یعنی حل معادلات جریات آشفته از ابتدای ناحیه جریان تماما آشفته مثلا $\begin{matrix} y^+ \geq 30 \\ y^+ \geq 50 \end{matrix}$ آغاز شوند.

به عبارت دیگر اولین المان بهتر است در $y^+ = 50$ یا $y^+ = 30$ قرارداشته باشد (متغیر بودن محدوده ۳۰ تا ۵۰ به واسطه متغیر بودن نقطه شروع جریان تماما در مسائل مختلف می باشد).[۲،۵]

استفاده از روش توابع دیواره تنها در جریانات غیر جدایشی دو بعدی به گفته محققان اعتبار دارد و برای جریانات جدایشی ، لایه مرزی آشفته در اعداد رینولدز گذرا و پائینتر از گذرا جریانات جدایشی ، جریانات غیر دائمی و وابسته به زمان ، جریان روی سطوح دوار ، جریان روی سطوح با انتقال حرارت و یا جریان بر روی سطوح با انتقال جرم (ناشی از دمش یا مکش یا غیره) استفاده از توابع دیواره خطای قابل توجهی را باعث می شود.

بدین منظور سعی شده است که نسخه های رینولدر پائین معادله به عنوان مدل اصلاح شده به دست آیند. با بررسی جریان دیواره با استفده از روشهای همچون DNS به این نتیجه رسیدند که مدل اصلاح شده به عنوان مدل آشفتگی رینولدز پائین مقدار ε حداکثر را بر روی دیواره پیش بینی می نماید که

یک نتیجه کاملا فیزیکی است اما در مدلهای قبلی، همانند توابع دیواره مقدار حداکثر بر روی دیوار واقع نمی شد که ناکارآمدی این مدلها در نزدیک دیواره را نشان می دهد.[۷]

در مورد این مدل در فصل های قبل و نحوه استفاده از آن در حل مدل کردن ترم توربولانسی معادلات لایه مرزی توضیحاتی ارائه شد.

اما در ادامه با تاکید مجدد بر این نکته که اگر برای مدلسازی جریان در نزدیکی دیواره از توابع دیواره استفاده نمائیم ، اولین المان یا اولین گره به کار رفته در گسسته سازی میدان بایستی در خارج ناحیه زیر لایه لزج و ناحیه گذرا ، یعنی در محدوده $50 \le y^{+} \le 500$ (یا خارج از محدوده مجاز برای استفاده از توابع دیواره) قرار داشته باشد. استفاده از المانی که نود مرکزی آن در فواصل نزدیکتر به دیواره قرار دارد می تواند باعث حل معادلات مدلهای آشفته رینولدز بالا نظیر مدل استاندارد در نواحی نزدیک دیواره با جریانات با رینولدز موضعی و آشفتگی کم گردد که این امر میتواند باعث به وجود آمدن خطای محاسباتی گردد. یعنی معادلاتی ار که برای هسته آشفته جریان ارائه شده اند را در ناحیه نزدیک دیواره (با جریان آرام) حل نموده ایم که باعث خطای مدلسازی خواهد شد.

اما آنچه که به آن در انجام این پروژه رسید ه ایم اینست که چون از مدل رینولدز پائین استفاده کرده ایم بایستی شبکه بندی میدان درست تا لب دیواره امتداد یابد یعنی شبکه عددی ایجاد شده بایستی ناحیه زیر لایه لزج و ناحیه گذر را توما بپوشاند.

اما آنچه که توسط کاربران حرفه ای CFD بیان شده است اینست که:

به طور کلی استفاده از توابع دیواره در جریانات ذیل خطای قابل توجهی را در مدلسازی ها باعث می شود[۲]:

۱) جریاناتی که بخش عمده آن جریان رینولدز پائین می باشد و یا دارای اثرات نزدیکی دیواره شدیدی می باشد مانند جریان درون یک شکاف کوچک ویا جریان سیال با ویسکوزیته خیلی بالا و یا سرعت پائین و با فواصل اولیه جریان برخوردی به یک دیواره.

۲) وقتی انحراف زیادی از یک بعدی بودن جریان در ناحیه نزدیک دیواره وجودداشته باشد این نواحی در نزدیکی نقاط جدایش جریان ، اتصال مجدد نقطه سکون جریان و نیز در مواردی که شتابدهی سریع جریان یا توقف سریع جریان و نیز در مورد نیروهای حجمی رخ می دهد مشاهده می گردد.

۳) انتقال حرارت وانتقال جرم به طور همزمان

۴) گرادیان شدید فشار که منجر به جدایش جریان گردد.

۵)نیروهای حجمی قوی (نظیر جریان در نزدیکی صفحات دوار و یا جریانات ناشی از نیروهای شناوری)

گاها مشاهده شده است که در برخی از نرم افزارهای تجارتی نظیر (Fluent Star CD , Ansys،) در مدلسازی نواحی نزدیک دیواره از مدلی با نام مدل منطقه‌ای دولایه استفاده می شود. دراین مدل تمام دامنه مساله به دو قسمت کلی ناحیه متاثر از لزجت و ناحیه تمام آشفته تقسیم می گردد. این دو ناحیه را میتوان با استفاده از تعریف عدد رینولدر در راستای عمود بر صفحه از یکدیگر تمیز داد. بر مبنای معیارهای به کار رفته در این مدل . ناحیه متاثر از لزجت ناحیه‌ای است که $Re_y \leq 200$ باشد از سوی دیگر ناحیه تمام آشفته ناحیه‌ای است که $Re_y \geq 200$ باشد در ناحیه متاثر از لزجت برای به دست آوردن تغییرات کمیتهای آشفتگی مدل طول اختلاطی استفاده می شود و یا آنکه از مدل یک معادله‌ای استفاده می گردد . در ناحیه تمام آشفته نیز از مدلهای $k-\varepsilon, RSM$ استفاده می شود.

اما نکته آخر اینکه اگرچه میتوان از توابع دیواره برای طیف وسیعی ازمقادیر استفاده نمود لیکن به واسطه فرضیات ساده کننده استفاده شده در توابع دیواره برای جلوگیری از خطای مدلسازی ، بهتر آن است که استفاده از این توابع را تنها به نواحی نزدیک دیواره محدود نمائیم و از گسترش خطای مدلسازی این توابع به نواحی مرکزی و هسته اصلی آشفتگی جریان جلوگیری به عمل آید.

فصل ششم

نتیجه گیری نهایی

در این فصل به جمع بندی کلی از آنچه که در فصل های قبلی بیان شد می پردازیم لذا به ترتیب به نتایج نهایی گرفته شده درمورد جریان متلاطم همراه با گرادیان فشار معکوس و جریان بر روی سطوح مقعر ومحدب خواهیم پرداخت.

اثرات گرادیان فشار معکوس:

بر طبق آنچه که در فصل سوم از پایان نامه گفته شد گرادیان فشار معکوس تاثیرات بسیار واضح ومهمی را بر روی تمامی خصوصیات لایه مرزی خواهد گذاشت آنچه بیشتر از همه در مورد این گونه جریانات خودنمایی می کند افزایش ضخامت لایه مرزی است که نمی توان به سادگی از کنار آن گذشت .ما در انجام این پروژه شاهد افزایش چشمگیر این پارامتر به ازای مقادیر بزرگتر β بودیم به طوریکه در یک موقعیت یکسان از جریان مقدارضخامت لایه مرزی در جریان همراه با گرادیان فشار معکوس حدودا ۱,۵الی۲ حالت مشابه با صفحه مسطح بود.از طرفی این افزایش در ضخامت لایه مرزی سبب شد که شاهد افزایش پارامتر دیگری از جمله ضخامت جابجایی وضخامت مومنتومی باشیم شاید ذکر مجدد این نکته لازم باشد که سیر افزایشی دو پارامتر اخیر باعث افزایش در پارامتر ضریب شکل می شود که در نتیجه آن می توان این گونه استنباط کرد افزایش Hسبب این خواهد شد که به ما نشان دهد که جریان تا چه اندازه آماده جدایی است.

اما در مورد پروفیل های سرعت بدست آمده در جریان همراه باگرادیان فشار معکوس باید گفت که در این حالت شاهد این هستیم که هر چند در جریان متلاطم پروفیل های سرعت نسبت به جریان آرام مسطح تر هستند اما در جریان متلاطم همراه با گرادیان فشار معکوس این مسطح بودن تا حدودی کمتر خواهد شد که نمودارهای بیان شده در فصل سوم در مورد پروفیل های سرعت به عینه این موضوع را تصدیق می کنند.

در این مرحله نگاه خود را معطوف به پارامتر های توربولانسی یعنی تنش برشی توربولانسی و شدتهای توربولانسی خواهیم کرد .بر طبق آن چه که در قسمت قبلی بیان شد رشد لایه مرزی تاثیرات فراوانی

خواهدداشت زمانی که یک گرادیان فشار معکوس به عنوان یک عامل ناپایداری ومنفی برای یک جریان سیال اعمال می شود شاهد افزایش در مقادیر توربولانسی خواهیم بود حال چه تنش برشی توربولانسی باشد ویا شدتهای توربولانسی .این افزایش زمانی که در مقایسه با صفحه مسطح باشد بسیار واضح تر خواهد بود چه بسا زمانی که بخواهیم این میزان گرادیان فشار قوی تری اعمال کنیم این افزایش در مقادیر توربولانسی بسیار شگرف خواهد بود که این شرایط به خودی خود جریان جهت ایجاد ناپایداری وحتی در شرایطی حاد برای جدایی مستعد می سازد.

اثرات انحنا مقعر ومحدب بر روی لایه مرزی متلاطم:

در این بخش از نتیجه گیری بار دیگر توجه خود را به ضخامت لایه مرزی وافزایش ویا کاهش آن در مقایسه با صفحه مسطح معطوف می کنیم.

ضخامت لایه مرزی در اثر انحنا مقعر یا به بیان بهتر ضخامت لایه مرزی بر روی سطوح مقعر در مقایسه با سطوح مسطح بیشتر است این افزایش همانطور که در قسمت های قبلی نیز بیان شد سبب افزایش در پارامترهای دیگر لایه مرزی یعنی δ^* و θ نیز خواهد شد شاید از بسیاری جهات بتوان اثرات انحنا مقعر و گرادیان فشار معکوس بر روی لایه مرزی را تا حدودی مشابه دانست چرا که در نتایجی که برای هر دوحالت ذکر شده داشتیم تقریبا می توان این گونه گفت که شرایط مشابه ومشترک زیادی در مورد این دو حالت وجود دارد در انحنا مقعر نیز تا حدودی حالت مسطح بودن پروفیل سرعت که در جریانهای متلاطم معمول است کم خواهد شد که در مقایسه با جریان همراه با گرادیان فشار معکوس تا حدودی این میزان کاهش کمتر خواهد بود.اما شاید عمده ترین تفاوت در جریان روی سطوح منحنی ودر این حالت انحنا مقعر با جریان همراه با گرادیان فشار معکوس نحوه ی توزیع سرعت در ناحیه پتانسیلی می باشد که در حالت انحنا سرعت در جهت محور عمودی ثابت نخواهد بود در حالی که در جریان های تحت تاثیر گرادیان فشار معکوس سرعت در جهت محور عمودی y ثابت است که این به دلیل صفر فرض کردن گرادیان فشار در جهت y می باشد.

اما در مورد تر مهای توربولانسی دوباره باید گفت که انحنا مقعر نیز سبب افزایش در مقدار تنش برشی توربولانسی وشدتهای توربولانسی خواهد شد که این در مورد گرادیان فشار معکوس وتاثیرات آن نیزصادق بود اما این میزان افزایش در مورد گرادیان فشار معکوس تا حدودی بیشتر خواهد بود.ناحیه ثبات (constant region)در جریان بر روی سطوح مقعر نیز رشد پیدا کرده وحتی در بعضی از موارد شاهد افزایش دو یا سه برابری ضخامت آن در مقایسه با صفحه مسطح خواهیم بود که این مورد در نمودارهای مربوط به ترمهای توربولانسی در فصل چهارم قسمت انحنا مقعر دیده میشود.

اما انحنا محدب شاید بتوان گفت که تمامی آنچه که در مورد اثرات گرادیان فشار معکوس و انحنا مقعر گفته شد عکس آن در مورد جریان های روی سطوح محدب صادق است از جمله این که ضخامت لایه مرزی از نظر رشد در مقایسه با سطوح مسطح به مراتب کاهش پیدا خواهد کرد همچنانکه در مورد ضخامت مومنتومی وجابجایی نیز این موضوع صادق است در مورد تنش برشی توربولانسی و شدتهای توربولانسی این میزان کاهش در مقادیر پارامترهای مذکور دیده میشود حتی ناحیه ثبات (constant region) و ضخامت این ناحیه نیز بسیار کم خواهد بود اما تنها نکته مشترک با انحنا مقعر تغییرات سرعت پتانسیلی در جهت y می باشد که برای انحنا محدب سیری نزولی و برای حالت مقعر سیری افزایشی و صعودی خواهد داشت.

بنابراین می توان به این صورت نتیجه گیری کرد که انحنا محدب به پایدار کردن جریان کمک میکند در حالی که انحنا مقعر و گرادیان فشار معکوس اثرات عکسی خواهند داشت هر چه قدر میزان گرادیان فشار معکوس بیشتر باشد در این شرایط افزایش تر مهای توربولانسی دور از انتظار نخواهد بود در حالی که افزایش پارامتر انحنا در شرایط انحنا مقعر نیز چنین تاثیری خواهد داشت. وقتی پارامتر انحنا در حالت مقعر ومحدب یکسان فرض شود می توان اینگونه استنباط کرد که اثرات انحنا محدب بر روی لایه مرزی بیشتر خواهد بود.

پیوست۱:

Dimension less of the B.L.E (no curvature)

١ .Dimension less of boundary layer equation (no curvature): By using $\eta = \dfrac{y}{\delta}$

١-١) Momentum equation:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x_o} = \frac{\partial(\ )}{\partial \eta}\left(-\frac{d\delta}{dx}\frac{\eta}{\delta}\right) + \frac{\partial(\ )}{\partial x_n}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left((\nu+\nu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + m_{\Pi}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} - m_1^{2}(\nu_t+\alpha)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

$$m_{\Pi} = m_1 v - m_{\Delta} u - m_1^{2}\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}_L} u_\infty L = \alpha$$

$$m_{\Delta} = \frac{d\delta}{dx}\frac{\eta}{\delta}$$

$$m_1 = \frac{1}{\delta}$$

$$\lim_{y\to\delta}(u_e - u) = a(x)(\delta - y)^n$$

$$\lim_{y\to\delta}(\nu_t) = b(x)(\delta - y)$$

$$\frac{du_e}{dx} - \frac{\partial u}{\partial x} = a(n)\left(\frac{d\delta}{dx}\right)(\delta - y)^{n-1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a(-n)(n-1)(\delta - y)^{n-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a(n)(\delta - y)^{n-1}$$

$$k-\varepsilon \rightarrow n = 1$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{v_e}{u_e} + \frac{b}{u_e}$$

١-١-١) Discritizing of momentum equation:

$$u\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}\right)+m_{\Pi}\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)-m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^{2}}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=0$$

$$\left[\frac{-m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j}+\left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j-1}+$$

$$\left[\frac{-m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j+1}+\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j}+\left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j-1}-\left(\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j+1}+B_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j}+C_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j-1}+D_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{2(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D_{i+\frac{1}{2},j}=A_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j+1}+\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j}+C_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j-1}-\left(\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\right)_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_{\mathrm{I}}^{2}(\nu_t+\alpha)}{(\Delta\eta)^{2}}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$u_{i+1,j}=E_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j+1}+F_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\frac{\delta_{i+1}-\delta_i}{\Delta x}=\left(\frac{v_e}{u_e}\right)_i+\left(\frac{b}{u_e}\right)_i$$

$$b_i=\frac{(m_1)_i(v_t)_{i,J-1}}{1-\eta_{J-1}}$$

١-٢) Turbulence model equations:

١-٢-١) k equation:

$$u\frac{\partial k}{\partial x}+u\left(-\frac{d\delta}{dx}\frac{\eta}{\delta}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}+\frac{v}{\delta}\frac{\partial k}{\partial \eta}=\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(\nu+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}\right)+\frac{\nu_t}{\delta^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2-\varepsilon-\frac{2\nu}{\delta^2}\left(\frac{\partial k^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\partial \eta}\right)^2$$

$$u\frac{\partial k}{\partial x}+\left(-m_{\Delta}u+vm_1-\frac{m_1^{\,2}}{\sigma_k}\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}=m_1^{\,2}\left(\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2}\right)+\nu_t m_1^{\,2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2-\varepsilon-\frac{\alpha m_1^{\,3}}{0.3}\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

١-٢-٢) Discritizing of (k) equation:

$$u\left(\frac{k_{i+1,j}-k_{i,j}}{\Delta x}\right)+m_{11}'\left(\frac{k_{i+1,j+1}-k_{i+1,j-1}+k_{i,j+1}-k_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)-m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)\left(\frac{k_{i+1,j+1}-2k_{i+1,j}+k_{i+1,j-1}+k_{i,j+1}-2k_{i,j}+k_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)$$

$$-\nu_t m_1^{\,2}\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)^2}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}+\varepsilon+\frac{\alpha m_1^{\,3}}{0.3}\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)=0$$

$$\left[\frac{-m_{\Pi}'}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j}+\left[\frac{+m_{\Pi}'}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m_{\Pi}'}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j+1}$$

$$+\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j}+\left[\frac{+m_{\Pi}'}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j-1}$$

$$+L'_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2-\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}-G'_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)=0$$

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+B'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j-1}+D'_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m_{\Pi}'}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D'_{i+\frac{1}{2},j}=A'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j+1}+\overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j-1}+L'_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2-\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}-G'_{i+\frac{1}{2},j}\left(M_{i+\frac{1}{2},j}\right)$$

$$G'_{i+\frac{1}{2},j}=\left(\frac{\alpha m_1^{\,3}}{0.3}\left(\frac{\partial\nu_t}{\partial\eta}\right)\right)_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$k_{i+1,j}=E'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+F'_{i+\frac{1}{2},j}$$

۱-۲-۳) (ε) equation:

$$u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+v\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}v_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-c_{\varepsilon 2}f_2\frac{\varepsilon^2}{k}+2vv_t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2$$

$$u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+-m_\Delta u\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}+vm_\text{I}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}=m_\text{I}^2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left(v+\frac{v_t}{\sigma_e}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\right)+\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}v_t m_\text{I}^2\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2-f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}+2vv_t m_\text{I}^4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)^2$$

$$u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+\left(-m_\Delta u+vm_\text{I}-\frac{m_\text{I}^2}{\sigma_e}\frac{\partial v_t}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}=m_\text{I}^2\left(\left(\alpha+\frac{v_t}{\sigma_e}\right)\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2}\right)+\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}v_t m_\text{I}^2\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2-f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}+2vv_t m_\text{I}^4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)^2$$

۱-۲-۴) Discritizing of (ε) equation:

$$u\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}-\varepsilon_{i,j}}{\Delta x}\right)+m''_\Pi\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j+1}-\varepsilon_{i+1,j-1}+\varepsilon_{i,j+1}-\varepsilon_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)$$

$$-m_\text{I}^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j+1}-2\varepsilon_{i+1,j}+\varepsilon_{i+1,j-1}+\varepsilon_{i,j+1}-2\varepsilon_{i,j}+\varepsilon_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)$$

$$-c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}v_t m_\text{I}^2\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}^2+f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon\varepsilon_{i+1,j}}{2k}+$$

$$f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon\varepsilon_{i,j}}{2k}-2\alpha m_\text{I}^4(v_t)\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)^2=0$$

$$\left[\frac{-m''_\text{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_\text{I}^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_\text{I}^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j}$$

$$+\left[\frac{+m''_\text{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_\text{I}^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m''_\text{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_\text{I}^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}$$

$$+\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_\text{I}^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j}+\left[\frac{+m''_\text{II}}{4\Delta\eta}+\frac{m_\text{I}^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j-1}$$

$$+\left(c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}v_t m_\text{I}^2\right)_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(2\alpha m_\text{I}^4(v_t)\right)_{i+\frac{1}{2},j}\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)^2}_{M'_{i+\frac{1}{2},j}}=0$$

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+B''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j-1}+D''_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D''_{i+\frac{1}{2},j}=A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}+\overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j-1}+L''_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+G''_{i+\frac{1}{2},j}\left(M_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2$$

$$\overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$L''_{i+\frac{1}{2},j}=\left(c_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t m_1^2\right)_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$G''_{i+\frac{1}{2},j}=\left(2\alpha m_1^4(\nu_t)\right)_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\varepsilon_{i+1,j}=E''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+F''_{i+\frac{1}{2},j}$$

پیوست۲:

Dimension less of B.L.E(Curved surfaces)

٢ .Dimension less of boundary layer equation (Curved surfaces): By using $\eta=\frac{y}{\delta}$

٢-١) momentum equation:

$$\frac{u}{h}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{k_r}{h}uv=-\frac{1}{h\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{h^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(h^2\tau_{xy}\right)$$

$$\frac{u}{h}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{k_r}{h}uv=-\frac{1}{h\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\left[\frac{\partial}{\partial y}\left((\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{k_r u}{h}\right)\right)\right]+\frac{2k_r}{h}\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{k_r u}{h}\right)\right]$$

$$\frac{u}{h}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{k_r}{h}uv=-\frac{1}{h\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\left[\frac{\partial \nu_t}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{k_r u}{h}\right)\right]+\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{k_r}{h}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{k_r^{\,2}u}{h^2}\right)\right]$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{v}{\delta}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{k_r}{h_1}uv+\frac{u}{h_1}\frac{d\delta}{dx}(-\eta m_1)\frac{\partial u}{\partial \eta}=-\frac{1}{h\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\left[\frac{\partial \nu_t}{\delta\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\delta\partial\eta}-\frac{k_r u}{h_1}\right)\right]+\left[(\alpha+\nu_t)\left(\frac{\partial^2 u}{\delta^2\partial\eta^2}+\frac{k_r}{h_1}\frac{\partial u}{\delta\partial\eta}-\frac{k_r^{\,2}u}{h_1^{\,2}}\right)\right]$$

$$\lim_{y\to\delta}(u_e-u)=a(x)(\delta-y)^n$$

$$\lim_{y\to\delta}(\nu_t)=b(x)(\delta-y)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial y}=\frac{-k_r}{h_1}u_e$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a(-n)(n-1)(\delta-y)^{n-2}+\frac{k_r^{\,2}}{h_1^{\,2}}u_e$$

$$\frac{d\delta}{dx}=\frac{\nu_e h_1}{u_e}+\frac{bh_1}{u_e}-\frac{k_r l}{\mathrm{Re}_l}-\frac{k_r\nu_t}{u_e}\left[\left(1+\frac{2}{1-\frac{u}{u_e}}\right)\right]$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\underbrace{\left[\nu m_1-\frac{u}{h_1}\underbrace{\frac{d\delta}{dx}(+\eta m_1)}_{m_\Delta}-m_1^{\,2}\frac{\partial \nu_t}{\partial\eta}-(\alpha+\nu_t)\frac{k_r m_1}{h_1}\right]}_{m_\Pi}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\underbrace{\left(\frac{k_r}{h_1}v+\frac{k_r^{\,2}u}{h_1^{\,2}}+\frac{\partial\nu_t}{\partial\eta}\frac{k_r m_1}{h_1}\right)}_{m_X}u+\frac{1}{h_1\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\left[(\alpha+\nu_t)m_1^{\,2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right)\right]=0$$

۲-۱-۲) Discritizing of momentum equation:

$$\frac{u}{h_1}\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{\Delta x}\right)+m_{11}\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)-m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)$$

$$+\frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial p}{\partial x}+\underbrace{\left(\frac{k_r}{h_1}v+\frac{k_r^{\,2}u}{h_1^{\,2}}+\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\frac{k_r m_1}{h_1}\right)}_{m_x}u=0$$

$$\left[\frac{-m_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)}{2\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)}{\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j}+\left[\frac{+m_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)}{2\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j-1}+$$

$$\left[\frac{-m_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)}{2\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j+1}+\left[\frac{+u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)}{\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j}+\left[\frac{+m_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)}{2\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}u_{i,j-1}$$

$$-\left(\frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}-\left(\frac{k_r}{h_1}v+\frac{k_r^{\,2}u}{h_1^{\,2}}+\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\frac{k_r m_1}{h_1}\right)_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j+1}+B_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j}+C_{i+\frac{1}{2},j}u_{i+1,j-1}+D_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)}{2\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)}{\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m_{11}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\nu_t+\alpha\right)}{2\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\frac{\delta_{i+1}-\delta_i}{\Delta x}=\left(\frac{v_e h_1}{u_e}\right)_i+\left(\frac{bh_1}{u_e}\right)_i-\frac{k_r l}{\mathrm{Re}_l}-\left(\frac{k_r \nu_t}{u_e}\right)_i\left[\left(1+\frac{2}{1-\frac{u_{i,J-1}}{\left(u_e\right)_i}}\right)\right]$$

$$\frac{\delta_{i+1}-\delta_i}{\Delta x}=\left(\frac{v_e h_1}{u_e}\right)_i+\left(\frac{bh_1}{u_e}\right)_i-\frac{k_r l}{\mathrm{Re}_l}-\left(\frac{k_r \nu_t}{u_e}\right)_i\left[c_i\right]$$

$$c_i = \left(1 + \frac{2}{1 - \frac{u_{i,j-1}}{(u_e)_i}} \right)$$

$$\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+u}{h_1 \Delta x} - \frac{m_1^2 (\nu_t + \alpha)}{(\Delta \eta)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D_{i+\frac{1}{2},j} = A_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j+1} + \overline{B}_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j} + C_{i+\frac{1}{2},j} u_{i,j-1} - \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{k_r}{h_1} v + \frac{k_r^2 u}{h_1^2} + \frac{\partial \nu_t}{\partial \eta} \frac{k_r m_1}{h_1} \right)_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+\frac{1}{2},j}$$

۲-۲) turbulence model equations:

۲-۲-۱) k equation:

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial k}{\partial x}+-\frac{m_\Delta}{h_1}u\frac{\partial k}{\partial \eta}+\nu m_1\frac{\partial k}{\partial \eta}=\frac{m_1^2}{h_1}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(h_1\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}\right)+\nu_t\left(m_1^2\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{ku}{h_1}\right)^2-\varepsilon-2\nu m_1^2\left(\frac{\partial k^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\partial \eta}\right)^2$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial k}{\partial x}-\frac{m_\Delta}{h_1}u\frac{\partial k}{\partial \eta}+\nu m_1\frac{\partial k}{\partial \eta}=m_1^2\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2}+m_1^2\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\frac{\partial k}{\partial \eta}+m_1\frac{k_r}{h_1}\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial \eta}$$

$$+\nu_t\left(m_1\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{k_r u}{h_1}\right)^2-\varepsilon-\frac{\alpha}{0.3}m_1^3\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\frac{\alpha}{0.3}m_1^2\frac{k_r}{h}\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\alpha k_r^2}{0.3h_1^2}m_1^1\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)$$

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial k}{\partial x}+\underbrace{\left(-\frac{m_\Delta}{h_1}u+\nu m_1-\frac{m_1^2}{\sigma_k}\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}-\frac{k_r}{h_1}m_1\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\right)}_{m_\Pi'}\frac{\partial k}{\partial \eta}=m_1^2\left(\left(\alpha+\frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2}\right)$$

$$+\nu_t\left(m_1\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{k_r u}{h_1}\right)^2-\varepsilon-\frac{\alpha}{0.3}m_1^3\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)+\frac{\alpha}{0.3}m_1^2\frac{k_r}{h}\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\alpha k_r^2}{0.3h_1^2}m_1^1\left(\frac{\partial \nu_t}{\partial \eta}\right)$$

۲-۲-۲) Discritizing of (k) equation:

$$\frac{u}{h_1}\left(\frac{k_{i+1,j}-k_{i,j}}{\Delta x}\right)+m'_{11}\left(\frac{k_{i+1,j+1}-k_{i+1,j-1}+k_{i,j+1}-k_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)-m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)\left(\frac{k_{i+1,j+1}-2k_{i+1,j}+k_{i+1,j-1}+k_{i,j+1}-2k_{i,j}+k_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)$$

$$-\nu_t m_1^2\left(\underbrace{\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}\right)^2-\underbrace{\nu_t\left(\left(\frac{k_r}{h_1}\right)u\right)^2}_{N'_{i+\frac{1}{2},j}}+\left[2\nu_t m_1\left(\frac{k_r}{h_1}\right)u\right]\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}+\varepsilon$$

$$+\frac{\alpha m_1^3}{0.3}\left(\frac{\partial\nu_t}{\partial\eta}\right)\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)-$$

$$\frac{\alpha}{0.3}m_1^2\frac{k_r}{h}\left(\frac{\partial\nu_t}{\partial\eta}\right)\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}+\frac{\alpha k_r^2}{0.3h_1^2}m_1^1\left(\frac{\partial\nu_t}{\partial\eta}\right)u=0$$

$$\left[\frac{-m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j}$$

$$+\left[\frac{+m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j+1}$$

$$+\left[\frac{+u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j}+\left[\frac{+m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j-1}+L'_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(N'_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2$$

$$-N''_{i+\frac{1}{2},j}-\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}-G'_{i+\frac{1}{2},j}\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)}_{M_{i+\frac{1}{2},j}}+G''_{i+\frac{1}{2},j}N_{i+\frac{1}{2},j}-G'''_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+B'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j-1}+D'_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+m'_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D'_{i+\frac{1}{2},j}=A'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j+1}+\overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i,j-1}+L'_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(N'_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2$$

$$-N''_{i+\frac{1}{2},j}-\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j}-G'_{i+\frac{1}{2},j}\left(M_{i+\frac{1}{2},j}\right)+G''_{i+\frac{1}{2},j}N_{i+\frac{1}{2},j}-G'''_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$k_{i+1,j}=E'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+F'_{i+\frac{1}{2},j}$$

۲-۲-۳) (ε) equation:

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}-m_\Lambda \frac{u}{h_1}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}+vm_1\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}=m_1^2\left(\alpha+\frac{v_t}{\sigma_e}\right)\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2}+\frac{k_r}{h_1}m_1\left(\alpha+\frac{v_t}{\sigma_e}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}+\frac{1}{\sigma_e}\frac{\partial v_t}{\partial \eta}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}m_1^2$$

$$+\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}v_t m_1^2\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+c_{\varepsilon 1}v_t\left(\frac{k_r}{h_1}u\right)^2\frac{\varepsilon}{k}-2\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}v_t\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\left(\frac{k_r}{h_1}u\right)-f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}+2\alpha v_t m_1^4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)^2$$

۲-۲-۴) Discritizing of (ε) equation:

$$\frac{u}{h_1}\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}-\varepsilon_{i,j}}{\Delta x}\right)+m''_\Pi\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j+1}-\varepsilon_{i+1,j-1}+\varepsilon_{i,j+1}-\varepsilon_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)$$

$$-m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j+1}-2\varepsilon_{i+1,j}+\varepsilon_{i+1,j-1}+\varepsilon_{i,j+1}-2\varepsilon_{i,j}+\varepsilon_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)$$

$$-c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}v_t m_1^2\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)^2}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}$$

$$+f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon\varepsilon_{i+1,j}}{2k}+f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon\varepsilon_{i,j}}{2k}-2\alpha m_1^4(v_t)\left(\underbrace{\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}}_{M_{i+\frac{1}{2},j}}\right)^2-$$

$$c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}v_t m_1^2\left[\frac{k_r u}{h_1}\right]^2+2\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}v_t\left(\frac{k_r}{h_1}u\right)\left(\underbrace{\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}\right)=0$$

$$\left[\frac{-m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j}+\left[\frac{+m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}$$

$$+\left[\frac{-m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}+\left[\frac{+u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j}+\left[\frac{+m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{v_t}{\sigma_e}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j-1}+\left(c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}v_t m_1^2\right)_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+$$

$$\left(2\alpha m_1^4(v_t)\right)_{i+\frac{1}{2},j}\underbrace{\left(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)^2}_{M_{i+\frac{1}{2},j}}-\left[2\frac{c_{\varepsilon 1}\varepsilon}{k}v_t\left(\frac{k_r}{h_1}u\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}+u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)+\left[c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}v_t m_1^2\left[\frac{k_r u}{h_1}\right]^2\right]_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$m''_\Pi=-\frac{m_\Delta}{h_1}u+vm_1-\frac{m_1^2}{\sigma_e}\frac{\partial v_t}{\partial \eta}-\frac{k_r}{h_1}m_1(\alpha+v_t)$$

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+B''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j-1}+D''_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$B''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}+\alpha\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{+u}{h_1\Delta x}-\frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}+\alpha\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon}{2k}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D''_{i+\frac{1}{2},j}=A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j+1}+\overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i,j-1}+L''_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+G''_{1_{i+\frac{1}{2},j}}\left(M_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2$$

$$-G''_{2_{i+\frac{1}{2},j}}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)+G''_{3_{i+\frac{1}{2},j}}$$

$$\varepsilon_{i+1,j}=E''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+F''_{i+\frac{1}{2},j}$$

پیوست۳ :

Falkner Skan transformation for boundary layer equation with no curvature terms

۳. Falkner skan transformation for boundary layer equation with no curvature terms:

۳-۱) Transformation parameters:

$$V=\frac{\nu}{u_e}\left[\frac{u_e x}{\nu}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\zeta=\frac{x}{L}$$

$$\eta=y\left[\frac{\nu x}{U_e(x)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'=\frac{u}{u_e}$$

$$\left(\frac{\partial(\ )}{\partial x}\right)_y=\frac{\eta}{2}\frac{1}{\zeta L}[m-1]\left[\frac{\partial(\ )}{\partial\eta}\right]_\zeta+\frac{1}{L}\left[\frac{\partial(\ )}{\partial\zeta}\right]_\eta$$

$$\left[\frac{\partial(\ )}{\partial y}\right]_x=\left(\frac{u_e}{\nu\zeta L}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial(\ )}{\partial\eta}\right)_\zeta$$

۳-۲) momentum equation:

$$f'\zeta\frac{\partial f'}{\partial\zeta}+\left[\frac{1}{2}\eta(m-1)f'+V\right]\frac{\partial f'}{\partial\eta}=\left(1-f'^2\right)m+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1+\nu_t^+\right)\frac{\partial f'}{\partial\eta}\right]$$

۳-۲-۱) Discritizing of momentum equation:

$$f'\zeta\left(\frac{f'_{i+1,j}-f'_{i,j}}{\Delta\zeta}\right)+m_\Pi\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-f'_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)-$$

$$\left(\nu_t^+ +1\right)\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-2f'_{i+1,j}+f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-2f'_{i,j}+f'_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)+\left(f'\left(f'_{i,j}+f'_{i+1,j}\right)-1\right)m=0$$

$$m_\Pi=\left[-\frac{\partial\nu_t^+}{\partial\eta}+V+\frac{\eta}{2}[m-1]f'\right]$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\nu_t^+ +1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{\left(\nu_t^+ +1\right)}{(\Delta\eta)^2}-\frac{f'}{2}m\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta} + \frac{\left(\nu_t^+ + 1\right)}{2\left(\Delta\eta\right)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+f'\zeta}{\Delta\zeta} - \frac{\left(\nu_t^+ + 1\right)}{\left(\Delta\eta\right)^2} - \frac{f'}{2}m \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i+1,j+1} + B_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i+1,j} + C_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i+1,j-1} + D_{i+\frac{1}{2},j} = 0$$

$$D_{i+\frac{1}{2},j} = A_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i,j+1} + \overline{B}_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i,j} + C_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i,j-1} + m_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$u_{i+1,j} = E_{i+\frac{1}{2},j} u_{i+1,j+1} + F_{i+\frac{1}{2},j}$$

۳-۳) turbulence model equations:

۳-۳-۱)k equation:

$$f'\zeta\frac{\partial k^+}{\partial\zeta}+\left[\frac{1}{2}\eta(m-1)f'\right]\frac{\partial k^+}{\partial\eta}+V\frac{\partial k^+}{\partial\eta}+2f'\frac{\zeta}{u_e}\frac{du_e}{d\zeta}k^+=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1+\frac{\nu_t^+}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k^+}{\partial\eta}\right]-$$

$$\frac{\varepsilon\zeta l}{u_e^{3}}+\nu_t^+\left[\frac{\partial f'}{\partial\eta}\right]^2-\left(\frac{1}{c_\mu \mathrm{Re}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial \nu_t^+}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^2 f'}{\partial\eta^2}\right)$$

$$f'\zeta\frac{\partial k^+}{\partial\zeta}+\left[\frac{1}{2}\eta(m-1)f'+V\right]\frac{\partial k^+}{\partial\eta}+2f'mk^+=\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1+\frac{\nu_t^+}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k^+}{\partial\eta}\right]-\varepsilon^+$$

$$+\nu_t^+\left[\frac{\partial f'}{\partial\eta}\right]^2-\left(\frac{1}{c_\mu \mathrm{Re}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial \nu_t^+}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^2 f'}{\partial\eta^2}\right)$$

$$m'_\Pi=\frac{1}{2}\eta(m-1)f'+V-\frac{\partial \nu_t^+}{\sigma_k\partial\eta}$$

۳-۳-۲) Discritizing of k equation:

$$\left[\frac{-m'_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i+1,j+1}+\left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i+1,j}+\left[\frac{+m'_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m'_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+$$

$$+\left[\frac{+f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i,j}+\left[\frac{+m'_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i,j-1}+L'_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2-\varepsilon^+_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$-G'_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-2f'_{i+1,j}+f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-2f'_{i,j}+f'_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)-(2f'm)k^+_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j+1}+B'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k_{i+1,j-1}+D'_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m'_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B'_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta} - \frac{\left(\frac{\nu_t^{+}}{\sigma_k} + 1 \right)}{(\Delta\eta)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C'_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-m'_{\Pi}}{4\Delta\eta} + \frac{\left(\frac{\nu_t^{+}}{\sigma_k} + 1 \right)}{2(\Delta\eta)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D'_{i+\frac{1}{2},j} = A'_{i+\frac{1}{2},j} k_{i,j+1} + \overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j} k_{i,j} + C'_{i+\frac{1}{2},j} k_{i,j-1} + L'_{i+\frac{1}{2},j} \left(N_{i+\frac{1}{2},j} \right)^2 - \varepsilon^{+}_{i+\frac{1}{2},j} - G'_{i+\frac{1}{2},j} \left(M_{i+\frac{1}{2},j} \right) - (G'')_{i+\frac{1}{2},j} k^{+}_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$L'_{i+\frac{1}{2},j} = [+\nu_t]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$G'_{i+\frac{1}{2},j} = \left(\frac{1}{(0.3\,\mathrm{Re})} \left(\frac{\partial \nu_t^{+}}{\partial \eta} \right) \right)_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$(G'')_{i+\frac{1}{2},j} = (2f'm)_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$k_{i+1,j} = E'_{i+\frac{1}{2},j} k_{i+1,j+1} + F'_{i+\frac{1}{2},j}$$

۳-۳-۴) (ε) equation:

$$u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\frac{\nu_t}{\sigma_e}+\nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\nu_t\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-c_{\varepsilon 2}f_2\frac{\varepsilon^2}{k}+2\nu\nu_t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2$$

$$f'\zeta\frac{\partial \varepsilon^+}{\partial \zeta}+3f'm\varepsilon^+-f'\varepsilon^++\frac{f'}{2}\eta(m-1)\frac{\partial \varepsilon^+}{\partial \eta}+V\frac{\partial \varepsilon^+}{\partial \eta}=\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(1+\nu_t^+\right)\frac{\partial \varepsilon^+}{\partial \eta}\right]+c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon^+}{k^+}\nu_t^+\left(\frac{\partial f'}{\partial \eta}\right)^2$$

$$-c_{\varepsilon 2}f_2\frac{\left(\varepsilon^+\right)^2}{k^+}+2\nu_t^+\left(\frac{\partial^2 f'}{\partial \eta^2}\right)^2$$

۳-۳-۵) Discritizing of (ε) equation:

$$f'\zeta\left(\frac{\varepsilon^+_{i+1,j}-\varepsilon^+_{i,j}}{\Delta\zeta}\right)+m''_\Pi\left(\frac{\varepsilon^+_{i+1,j+1}-\varepsilon^+_{i+1,j-1}+\varepsilon^+_{i,j+1}-\varepsilon^+_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)-\left(\frac{\nu^+_t}{\sigma_e}+1\right)\left(\frac{\varepsilon^+_{i+1,j+1}-2\varepsilon^+_{i+1,j}+\varepsilon^+_{i+1,j-1}+\varepsilon^+_{i,j+1}-2\varepsilon^+_{i,j}+\varepsilon^+_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)$$

$$-c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon^+}{k^+}\nu_t^+\underbrace{\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-f'_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}^2+f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^+\varepsilon^+_{i+1,j}}{2k^+}+f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^+\varepsilon^+_{i,j}}{2k^+}-$$

$$2(\nu_t)\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-2f'_{i+1,j}+f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-2f'_{i,j}+f'_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)^2-f'\varepsilon^++3f'm\varepsilon^+=0$$

$$\left[\frac{-m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_e}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+1,j+1}+\left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_e}+1\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^+}{2k^+}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+1,j}+\left[\frac{+m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\frac{\nu^+_t}{\sigma_e}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{m_1^2\left(\frac{\nu^+_t}{\sigma_e}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j+1}$$

$$+\left[\frac{+f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{\left(\frac{\nu^+_t}{\sigma_e}+1\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^+}{2k^+}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j}+\left[\frac{+m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\frac{\nu^+_t}{\sigma_e}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j-1}+\left(c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon^+}{k^+}\nu^+_t\right)_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+$$

$$\left(2\left(\nu^+_t\right)\right)_{i+\frac{1}{2},j}\underbrace{\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-2f'_{i+1,j}+f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-2f'_{i,j}+f'_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)}_{M_{i+\frac{1}{2},j}}^2+\left[f'(1-3m)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$m''_\Pi=V+\frac{f'}{2}\eta(m-1)-\frac{\partial \nu^+_t}{\sigma_e\partial\eta}$$

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1}+B''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j-1}+D''_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m''_\Pi}{4\Delta\eta}+\frac{\left(\frac{\nu^+_t}{\sigma_e}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B''_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta} - \frac{\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon} + 1 \right)}{(\Delta\eta)^2} - \left(f_2 c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^+}{2k^+} \right) \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C''_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta} + \frac{m_1^{\,2}\left(\frac{\nu^+_t}{\sigma_\varepsilon} + 1 \right)}{2(\Delta\eta)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D''_{i+\frac{1}{2},j} = A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+{}_{i,j+1} + \overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+{}_{i,j} + C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+{}_{i,j-1} + L''_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j} \right)^2 + G''_{1_{i+\frac{1}{2},j}}\left(M_{i+\frac{1}{2},j} \right)^2$$

$$+G''_{2_{i+\frac{1}{2},j}}\varepsilon^+{}_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\varepsilon_{i+1,j} = E''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon_{i+1,j+1} + F''_{i+\frac{1}{2},j}$$

۴. Falkner skan transformation for curved surfaces:

۴-۱) momentum equation:

$$f'\zeta\frac{\partial f'}{\partial\zeta}+\left[\frac{1}{2}\eta(m-1)f'+V\right]\frac{\partial f'}{\partial\eta}+\frac{B}{h_1'}fV=\left(-f'^2\right)m+\left(\frac{-\zeta}{u_w^{\ 2}}\right)\frac{\partial p^+_e}{\partial\zeta}+h_1'\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}\frac{\partial f'}{\partial\eta}$$

$$+\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}Bf'+h_1'\left(1+v_t^+\right)\frac{\partial^2 f'}{\partial\eta^2}+\left(1+v_t^+\right)B\frac{\partial f'}{\partial\eta}-\frac{B^2}{h'}\left(1+v_t^+\right)f'$$

$$f'\zeta\frac{\partial f'}{\partial\zeta}+\left[\frac{1}{2}\eta(m-1)f'+V-h_1'\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}-\left(1+v_t^+\right)B\right]\frac{\partial f'}{\partial\eta}$$

$$+\left[\frac{B}{h_1'}V+\frac{B^2\left(1+v_t^+\right)}{h_1'}-\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}\right]f'+\left(f'^2\right)m+\left(\frac{+\zeta}{u_w^{\ 2}}\right)\frac{\partial p^+_e}{\partial\zeta}-h_1'\left(1+v_t^+\right)\frac{\partial^2 f'}{\partial\eta^2}=0$$

$$h_1'=1+B\eta$$

$$B=\left[\frac{\left(\dfrac{x}{L}\right)}{\dfrac{u_w}{u_\infty}R_\infty}\right]^{\frac{1}{2}}Lk_r$$

۴-۱-۱) Discritizing of momentum equation:

$$\left[\frac{-m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(v_t^++1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i+1,j+1}+\left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{h_1'\left(v_t^++1\right)}{(\Delta\eta)^2}-\frac{f'm}{2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i+1,j}+\left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(1+v_t^+\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i+1,j-1}+$$

$$\left[\frac{-m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(v_t^++1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i,j+1}+\left[\frac{+f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{h_1'\left(v_t^++1\right)}{(\Delta\eta)^2}-\frac{f'm}{2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i,j}+\left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(v_t^++1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i,j-1}$$

$$-\left(\left(\frac{+\zeta}{u_w^{\ 2}}\right)\frac{\partial p^+_e}{\partial\zeta}\right)_{i+\frac{1}{2},j}-\left(\frac{B}{h_1'}V+\frac{B^2\left(1+v_t^+\right)}{h_1'}-\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}\right)_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i+1,j+1}+B_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i+1,j}+C_{i+\frac{1}{2},j}f'_{i+1,j-1}+D_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(v_t^++1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta} - \frac{h_1'\left(\nu_t^+ + 1\right)}{\left(\Delta\eta\right)^2} - \frac{f'm}{2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+m_{\Pi}}{4\Delta\eta} + \frac{h_1'\left(1+\nu_t^+\right)}{2\left(\Delta\eta\right)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\overline{B}_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+f'\zeta}{\Delta\zeta} - \frac{h'\left(\nu_t^+ + 1\right)}{\left(\Delta\eta\right)^2} - \frac{f'm}{2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$D_{i+\frac{1}{2},j} = A_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i,j+1} + \overline{B}_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i,j} + C_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i,j-1} - \left(\left(\frac{+\zeta}{u_w^{\,2}}\right)\frac{\partial p^+_{e}}{\partial\zeta}\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{B}{h_1'}V + \frac{B^2\left(1+\nu_t^+\right)}{h_1'} - \frac{\partial\nu_t^+}{\partial\eta}\right)_{i+\frac{1}{2},j} f'_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$u_{i+1,j} = E_{i+\frac{1}{2},j}\, u_{i+1,j+1} + F_{i+\frac{1}{2},j}$$

۴-۲) turbulence model equations:

۴-۲-۱) k equation:

$$f'\zeta\frac{\partial k^+}{\partial\zeta}+\underbrace{\left(+V-\frac{h_1'}{\sigma_k}\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}-B\left(1+\frac{v_t^+}{\sigma_k}\right)+f'\eta\left(\frac{m-1}{2}\right)\right)}_{m_\Pi'}\frac{\partial k^+}{\partial\eta}-h_1'\left(\left(1+\frac{v_t^+}{\sigma_k}\right)\frac{\partial^2 k^+}{\partial\eta^2}\right)$$

$$-v_t^+h_1'\left(\frac{\partial f'}{\partial\eta}-\frac{Bf'}{h_1}\right)^2+\varepsilon^+h_1'+\frac{h_1'}{0.3\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v^+_t}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial^2 f'}{\partial\eta^2}\right)-\frac{B_1}{0.3\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}\right)\frac{\partial f'}{\partial\eta}+\frac{B^2 f'}{0.3\mathrm{Re}\,h_1'}\left(\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}\right)+2f'mk^+=0$$

۴-۲-۲) Discritizing of k equation:

$$f'\zeta\left(\frac{k^+_{i+1,j}-k^+_{i,j}}{\Delta\zeta}\right)+m_\Pi'\left(\frac{k^+_{i+1,j+1}-k^+_{i+1,j-1}+k^+_{i,j+1}-k^+_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)-h_1'\left(\frac{v_t^+}{\sigma_k}+1\right)\left(\frac{k^+_{i+1,j+1}-2k^+_{i+1,j}+k^+_{i+1,j-1}+k^+_{i,j+1}-2k^+_{i,j}+k^+_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)$$

$$-v_t^+h_1'\left(\underbrace{\frac{f'_{i+1,j+1}-f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-f'_{i,j-1}}{4\Delta\eta}}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}\right)^2\underbrace{-v_t^+h_1'\left(\left(\frac{B}{h_1'}\right)f'\right)^2}_{N'_{i+\frac{1}{2},j}}+\left[2v_t^+h_1'\left(\frac{B}{h_1'}\right)f'\right]\underbrace{\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-f'_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}+\varepsilon^+h_1'$$

$$+\frac{h_1'}{0.3\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}\right)\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-2f'_{i+1,j}+f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-2f'_{i,j}+f'_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)$$

$$-\frac{B}{0.3\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}\right)\underbrace{\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-f'_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)}_{N_{i+\frac{1}{2},j}}+\frac{B^2}{0.3h_1'\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v_t^+}{\partial\eta}\right)f'+(2f'm)k^+_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$\left[\frac{-m_\Pi'}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{v_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i+1,j+1}+\left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{h_1'\left(\frac{v_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i+1,j}+\left[\frac{+m_\Pi'}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{v_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m_\Pi'}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{v_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i,j+1}$$

$$+\left[\frac{+f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{h_1'\left(\frac{v_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i,j}+\left[\frac{+m_\Pi'}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{v_t^+}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i,j-1}+L'_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(N'_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2$$

$$-N''_{i+\frac{1}{2},j}-\varepsilon h'_{1_{i+\frac{1}{2},j}}-G'_{i+\frac{1}{2},j}\underbrace{\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-2f'_{i+1,j}+f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-2f'_{i,j}+f'_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)}_{M_{i+\frac{1}{2},j}}+G''_{i+\frac{1}{2},j}N_{i+\frac{1}{2},j}-G''_{1_{i+\frac{1}{2},j}}-G''_{2_{i+\frac{1}{2},j}}k^+_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A'_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i+1,j+1}+B'_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i+1,j}+C'_{i+\frac{1}{2},j}k^+_{i+1,j-1}+D'_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$D'_{i+\frac{1}{2},j} = A'_{i+\frac{1}{2},j} k^{+}{}_{i,j+1} + \overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j} k^{+}{}_{i,j} + C'_{i+\frac{1}{2},j} k^{+}{}_{i,j-1} + L'_{i+\frac{1}{2},j} \left(N_{i+\frac{1}{2},j} \right)^{2} + \left(N'_{i+\frac{1}{2},j} \right)^{2}$$

$$-N''_{i+\frac{1}{2},j} - h'_1 \varepsilon^{+}{}_{i+\frac{1}{2},j} - G'_{i+\frac{1}{2},j} \left(M_{i+\frac{1}{2},j} \right) + G''_{i+\frac{1}{2},j} N_{i+\frac{1}{2},j} - G''_{1\,i+\frac{1}{2},j} - G''_{2\,i+\frac{1}{2},j} k^{+}{}_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$A'_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-m'_{\Pi}}{4\Delta\eta} + \frac{h'_1\left(\frac{\nu_t^{+}}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B'_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta} - \frac{h'_1\left(\frac{\nu_t^{+}}{\sigma_k}+1\right)}{(\Delta\eta)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C'_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-m'_{\Pi}}{4\Delta\eta} + \frac{h'_1\left(\frac{\nu_t^{+}}{\sigma_k}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\overline{B}'_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+f'\zeta}{\Delta\zeta} - \frac{h'_1\left(\frac{\nu_t^{+}}{\sigma_k}+1\right)}{(\Delta\eta)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$k_{i+1,j} = E'_{i+\frac{1}{2},j} k_{i+1,j+1} + F'_{i+\frac{1}{2},j}$$

۴-۲-۳) ε equation:

$$f'\zeta\frac{\partial\varepsilon^+}{\partial\zeta}+\eta f'\frac{(m-1)}{2}\frac{\partial\varepsilon^+}{\partial\eta}+V\frac{\partial\varepsilon^+}{\partial\eta}-f'\varepsilon^+ +3mf'\varepsilon^+ = h_1'\left(1+\frac{\nu_t^+}{\sigma_e}\right)\frac{\partial^2\varepsilon^+}{\partial\eta^2}+$$

$$B\left(1+\frac{\nu_t^+}{\sigma_e}\right)\frac{\partial\varepsilon^+}{\partial\eta}+\frac{h_1'}{\sigma_e}\frac{\partial\nu_t^+}{\partial\eta}\frac{\partial\varepsilon^+}{\partial\eta}+\frac{c_{\varepsilon1}\varepsilon^+}{k^+}\nu_t^+h_1'\left(\frac{\partial f'}{\partial\eta}\right)^2+c_{\varepsilon1}\nu_t^+h_1'\left(\frac{B}{h_1'}f'\right)^2\frac{\varepsilon^+}{k^+}-$$

$$2\frac{c_{\varepsilon1}\varepsilon^+}{k^+}\nu_t^+h_1'\left(\frac{\partial f'}{\partial\eta}\right)\left(\frac{B}{h_1'}f'\right)-f_2c_{\varepsilon2}h_1'\frac{\varepsilon^{+^2}}{k^+}+2\nu_t^+h_1'\left(\frac{\partial^2 f'}{\partial\eta^2}\right)^2$$

$$f'\zeta\frac{\partial\varepsilon^+}{\partial\zeta}+\left[V+\eta f'\frac{(m-1)}{2}-B\left(1+\frac{\nu_t^+}{\sigma_e}\right)-\frac{h_1'}{\sigma_e}\frac{\partial\nu_t^+}{\partial\eta}\right]\frac{\partial\varepsilon^+}{\partial\eta}-h_1'\left(1+\frac{\nu_t^+}{\sigma_e}\right)\frac{\partial^2\varepsilon^+}{\partial\eta^2}$$

$$+f_2c_{\varepsilon2}h_1'\frac{\varepsilon^{+^2}}{k^+}-2\nu_t^+h_1'\left(\frac{\partial^2 f'}{\partial\eta^2}\right)^2-c_{\varepsilon1}\nu_t^+h_1'\left(\frac{B}{h_1'}f'\right)^2\frac{\varepsilon^+}{k^+}-f'\varepsilon^+ +3mf'\varepsilon^+ -c_{\varepsilon1}\nu_t^+h_1'\left(\frac{B}{h_1'}f'\right)^2\frac{\varepsilon^+}{k^+}$$

$$+2\frac{c_{\varepsilon1}\varepsilon^+}{k^+}\nu_t^+\left(\frac{\partial f'}{\partial\eta}\right)(Bf')=0$$

۴-۲-۴) Discritizing of ε equation:

$$\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+1,j+1}+\left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon}+1\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^+}{2k^+}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+1,j}$$

$$+\left[\frac{+m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+1,j-1}+\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j+1}$$

$$+\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j+1}+\left[\frac{+f'\zeta}{\Delta\zeta}-\frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon}+1\right)}{(\Delta\eta)^2}-\left(f_2c_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^+}{2k^+}\right)\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j}$$

$$+\left[\frac{+m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j-1}+\left(c_{\varepsilon1}h_1'\frac{\varepsilon^+}{k^+}\nu_t^+\right)_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+$$

$$\left(2\left(\nu_t^+h_1'\right)\right)_{i+\frac{1}{2},j}\underbrace{\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-2f'_{i+1,j}+f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-2f'_{i,j}+f'_{i,j-1}}{2\Delta\eta^2}\right)}_{M_{i+\frac{1}{2},j}}^2-\left[2c_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon^+}{k^+}\nu_t^+(Bf')\right]_{i+\frac{1}{2},j}\left(\frac{f'_{i+1,j+1}-f'_{i+1,j-1}+f'_{i,j+1}-f'_{i,j-1}}{4\Delta\eta}\right)+$$

$$\left[c_{\varepsilon1}h_1'\frac{\varepsilon^+}{k^+}\nu_t^{+2}\left[\frac{Bf'}{h_1'}\right]^2\right]_{i+\frac{1}{2},j}-\left[(3m-1)f'\right]_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+1,j+1}+B''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+1,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i+1,j-1}+D''_{i+\frac{1}{2},j}=0$$

$$D''_{i+\frac{1}{2},j}=A''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j+1}+\bar{B}''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j}+C''_{i+\frac{1}{2},j}\varepsilon^+_{i,j-1}+L''_{i+\frac{1}{2},j}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+G''_{1_{i+\frac{1}{2},j}}\left(M_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2$$

$$-G''_{2_{i+\frac{1}{2},j}}\left(N_{i+\frac{1}{2},j}\right)+G''_{3_{i+\frac{1}{2},j}}+G''_{4_{i+\frac{1}{2},j}}$$

$$A''_{i+\frac{1}{2},j}=\left[\frac{-m''_{\Pi}}{4\Delta\eta}+\frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_\varepsilon}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2}\right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$B''_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{-f'\zeta}{\Delta\zeta} - \frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_e}+1\right)}{(\Delta\eta)^2} - \left(f_2 c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^+}{2k^+} \right) \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$C''_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+m''_{\Pi}}{4\Delta\eta} + \frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_e}+1\right)}{2(\Delta\eta)^2} \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\overline{B}''_{i+\frac{1}{2},j} = \left[\frac{+f'\zeta}{\Delta\zeta} - \frac{h_1'\left(\frac{\nu_t^+}{\sigma_e}+1\right)}{(\Delta\eta)^2} - \left(f_2 c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^+}{2k^+} \right) \right]_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\varepsilon_{i+1,j} = E''_{i+\frac{1}{2},j}\,\varepsilon_{i+1,j+1} + F''_{i+\frac{1}{2},j}$$

فهرست مراجع:

کتابها:

[1] Hermann Schlichting. Klaus Gersten."Boundary layer theory".Springer, 8th edition 2000.

[2] Tuncer Cebeci .Jean Coysteix."Modeling and computational of boundary layer Flows".Springer,1999

[3] S.W.Yuan."Foundations of fluid mechanic"1967

[4] Frank.M.White."Fluid Mechanics"1990

[5] C.Gerald,P.Wheatley." Applied numerical analysis".2003

مقالات:

[6] E.G.Tulapurkara ,A.Khoshnevis,J.Lakeshnarasimham, "Boundary layer subjected to pressure Gradient". J . Aero.Soc.of India.vol. 53. NO.3 pp.184-191.Agust 2001

[7] Nobuyuki Shima,Takafumi Kawai ,Masayoshi Okamoto,Ryuta Tsuchikura, "Prediction of streamline curvature effects on wall bounded turbulent flows" .Elsevier. IntJ. Heat and fluid flow.21(2000)614-619.

[8] K.P.Angele,B.Muhammad-Klingmann. "PIV measurements in weakly separating and reattching turbulent boundary layer". Elsevier. European Journal of Mechanics /Fluid.2005 Elsevier SAS.

[9]Alberto Ayala,Bruce R.White,Dae Seong Kim,Nder Bagheri, "Turbulent transport characteristics in low speed boundary layer subjected to adverse pressure gradient". proceedings of the 36th heat transfer and fluid mechanics institute, California state university,Sacramento,1999.

[10] M.P.Escudier , A.Abdel-Hameed, .W.Johnson , C.J.Sutcliffe, "Laminarisation and re-transition of a turbulent boundary layer subjected to pressureGradient",Springer ,Experiments in fluid ,vol 25,1998-491-502.

[11] Huang Y-N,Kasagi N. "Modeling the constitutive relation for the Reynolds stress".J.Japan Soc Fluid mechanic 1997,16 (suppl)199-200.

[12] Huang Y-N,Rajagopal KR. "On necessary and sufficient conditions for turbulent flows in a straight tube". Math Models Meth Appl Sci 1995,111-23.

[13]Yang XD,Ma HY. "Linear and nonlinear eddy –viscosity turbulent models for a comfined swiring co-axial jet". ,J. heat transfer.2003.

[14] M.M.Gibson, W.P.Jones, and B.A.Younis, "Calculation of turbulent boundary layer on curved surfaces", J.Phys.Fluids ,Vol.24,No.3,1981,pp.386-395.

[15] K.C.Muck,P.H.Hoffmann and P.Bradshaw, "The Effect of convex surface curvature on turbulentBoundarylayers",J.FluidMech,1985Vol. 161,pp347 - 369.

[16] K.C.Muck,P.H.Hoffmann and P.Bradshaw, "The Effect of concave surface curvature on turbulent boundary layers", .FluidMech,1985Vol.161,pp371-403.

[17] Miodrag Oljaca,James Sucec, "Prediction of trans Pried turbulent boundary layers with arbitrary pressure gradients", J. Fluids Engineering, 1994Vol .119.pp526-532.

[18] W.Rodi ,G.Scheuerer, "Calculation of curved shear Layers with two equation turbulence models" , Phys. Fluids,Vol.26.No.6.1983,PP.1422-1436.

[19] B.Majumdar,D.P.Agrawal, "Flow characteristics In a large area ratio curved diffuser",J. Aerospace engineering, 1996.pp.65-75 .

[20] T Ravi,E.G. Tulapurkara and V Balabaskarm, "Effect of fins in a curved square duct" .J .Aero. Society Of India , Vol 28.pp-48-55,1996.
[21] Farzad Pourahmadi , ,Joseph A.C Humphrey, "Prediction of curved channel flow with an extended $k-\varepsilon$ model of turbulence", AIAA Journal ,Vol.21 No.10, 1983.pp.1365-1373.
[22] W.B.Nicoil,B.R.Ramaprian "Amodified entrainment theory for the prediction of turbulent boundary Layer growth in adverse pressure gradients". J. Basic Engineering. pp-649-654, 1969.
[23] Y.Senoo,M.Nishi,"Prediction of flow separation in a diffuser by a boundary layer calculation", Fluids Engineering1977,pp379-389.
[24] Ronald M C So, George L Mellor, "Experiment On turbulent boundary layer on a concave wall", 1975
[25] R.N.Meroney, P. Bradshaw, "Turbulent Boundary layer growth over a longitudinally Curved surface ",AIAA .J.Vol.13.No.11,1974
[26] V.C.Patel. "Effects of curvature on turbulent Boundary layer" ,Ministry of technology,1969.
[27] G.Chukkapalli,O,F.Turan, "Structural parameter And prediction of adverse pressure gradient turbulent flow an improved $k-\varepsilon$ model" ,J, Fluids ,Vol,117,1995
[28]Nagano,Y.,Tagava,M.and Tsuji,T., "Effect of adverse pressure gradient on mean flow and turbulence statistics in a boundary layer," Proceeding of the 8th symposium on turbulent shear flow, Munich ,September,1991,pp7-21.
[29]Sparlart,P.R.and Watmuff,J.H., "Experimental and numerical study of a turbulent boundary layer with adverse pressure gradient",J.Fluid mechanics,Vol.249,1993,pp.337-371
[30]Ayala,A.,White,B.R. and Bagheri,N., "Turbulent prandtl number measurements in adverse pressure gradient equilibrium boundary layer," proceedings of the 2th heat transfer and fluid mechanics institute, Delft,The Netherlands,June,1997,pp.137-146.
[31]P.Bradshaw, "The analogy between streamline curvature and boundary in turbulent shear flow".A.R.C.29,048,1978
[32]A.E.von Doenhoff and N.Tetervin. "Determination of general relations for the behavior of turbulent boundary layer".N.A.C.A.Report772.1963
[33]S.Eskinazi."An investigation of fully developed turbulent flow in curved channel".J.Aero.Sci.Vol.23,p.23.1966
[34]Blackwell., "The turbulent boundary layer on porous plate". Report No. HMT-16,Thermosciences Division , Dept. of mechanical engineering ,Stanford univ,Stanford,CA, August,1982
[35]H.Yeh,W.G.Rose and,Lien,Wattendorf . "Further investigations on fully developed turbulent flows in curved channel"Johns Hopkins Univ.,Contract Nour-248(33)Report.1976

Abstract:

Flow with Adverse pressure gradient:

Effect of adverse pressure gradient on turbulent boundary layer was studied in this recent project .We calculate turbulent intensity , turbulent shear stress and mean velocity by the effect of adverse pressure gradient The values of (β) are different and we examined the mentioned turbulent characters for different cases. One of the most important conclusion is that the adverse pressure gradient causes to increase turbulent intensity and turbulence shear stress by the other way we can say that adverse pressure gradient causes an increases on the instability of the flow .These conclusions were also carried out by experimental research those we receive them by numerical solution of boundary layer equations.

($k-\varepsilon$) model was used for modeling turbulence term on momentum equation. But this model should be modified if we want to get correct value near wall region in this manner we introduced wall function to ($k-\varepsilon$) equations.

Flow on curved surfaces:

Also we examine the effect of concave and convex curvature on turbulent flow by numerical solution of boundary layer equation on curved surface Turbulence intensities and turbulent shear stress were calculated in the mentioned cases. It is obvious that the turbulent intensities and turbulent shear stress are increased on concave wall if we compare with the results on flat plate with the same conditions and the opposite is true for the boundary layer on convex wall. We conclude that for the boundary layer on Concave surface the de-stabilizing effects lead to increased turbulent momentums exchange between fluid particles and in this case also the convex curvature has the opposite effect when compares with results on concave wall by the other way convex curvature causes to that the flow being stabilized .The integral parameter of boundary layer like momentum thickness and displacement thickness are increased on concave surface and reduced on convex curvature when they were compared by the values of mentioned parameter on flat plate. The model is used to calculate turbulent parameter is $k-\varepsilon$ model which is introduced by wall functions and we modified these equations for curved surfaces.