

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به

پدر و مادر مهربان و دلسوز

و همسر صبور و فداکارم

تقدیر و تشکر

ضمن سپاس بیکران خداوند، بر خود فرض می‌دانم از تمامی اساتید بزرگواری که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، بویژه اساتید محترم جناب آقایان دکتر محمد جواد مغربی، دکتر محمود فرزانه گرد و دکتر شهرام هاشمی مرغزار، که بدون یاری و راهنمایی آنان، این تلاش هیچ‌گاه به سر انجام نمی‌رسید، صمیمانه سپاسگذاری نمایم. همچنین جای دارد از دوست گرامی خود، آقای مهندس علی وظیفه دوست صالح نیز تشکر نمایم و از درگاه خداوند متعال، طلب موفقیت در تمامی مراحل زندگی را برای ایشان خواستارم.

چکیده

جریان کوئت تیلور بین استوانه های چرخان، با شرایط فیزیکی دلخواه، به جهت آنکه دارای کاربردهای علمی و صنعتی فراوانی است، در زمره یکی از مباحث مهم مکانیک سیالات قرار دارد. به همین دلیل از حدود یکصد سال قبل تا کنون، تحقیقات زیادی در رابطه با این جریان صورت گرفته است. از این جریان می توان جهت مدلسازی سیستمهای روتور استاتور، فیلتر های دینامیکی، مته های حفاری، پمپها، میکسرهای شیمیائی و... استفاده کرد.

برای اولین بار، تیلور یک سیستم ایده آل (استوانه های بلند تو در تو) را مورد بررسی قرار داد و دریافت که اولین ناپایداری توسط یک اغتشاش ثابت و دارای تقارن محوری، در جریان کوئت آرام رخ میدهد، که این جریان، جریان گردابه ای تیلور نام گرفت.

با توجه به تحقیقات صورت گرفته، گردابه های تیلور، در اثر ناپایداریهای گریز از مرکز حاصل از چرخش استوانه ها و همچنین گرادیان فشارهای محوری و شعاعی ایجاد می شوند، که باعث بوجود آمدن ستونی از گردابه در راستای افقی خواهند شد.

در این تحقیق سعی شده تا ناپایداریهای جریان آرام کوئت تیلور، برای سیال نیوتونی غیر قابل تراکم، با استفاده از کانتورهای سرعت، فشار و خطوط جریان، در نسبت ظاهری و اعداد رینولدز متفاوت، بررسی شود.

پیشگفتار

- ۱-۱- مقدمه..... ۱
- ۲-۱- تاریخچه جریان کوئت تیلور..... ۲
- ۱-۲-۱- نتایج تجربی..... ۳
- ۳-۱- مروری بر مطالعات گذشته..... ۵
- ۴-۱- روشهای تحقیق و پژوهش..... ۱۵
- ۱-۴-۱- روش تحقیق و مطالعه در این پژوهش..... ۱۷

فصل دوم

معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان

- ۱-۲- مقدمه..... ۱۸
- ۲-۲- هندسه جریان..... ۱۸
- ۳-۲- معادلات حاکم بر جریان کوئت تیلور..... ۱۹
- ۴-۲- شرایط مرزی..... ۲۰

فصل سوم

روش انفصال

- ۱-۳- مقدمه..... ۲۲
- ۲-۳- انفصال در روش تفاضل محدود و مفهوم آن..... ۲۲
- ۱-۲-۳- ساختمان معادله انفصال..... ۲۲
- ۲-۲-۳- روشهای بدست آوردن معادلات انفصال..... ۲۳
- ۳-۲-۳- بدست آوردن معادله انفصال با استفاده از حجم کنترل..... ۲۴
- ۱-۳-۲-۳- معادله دیفرانسیل کلی..... ۲۴
- ۴-۲-۳- طرحهای تفاضل مرکزی، بالا دست، نمائی، پیوندی و توانی..... ۲۵
- ۱-۴-۳-۳- طرح تفاضل مرکزی..... ۲۵

۲۷ طرح بالا دست..... ۲-۴-۳-۳
۲۹ طرح نمائی..... ۳-۴-۳-۳
۳۲ طرح پیوندی..... ۴-۴-۳-۳
۳۴ طرح قاعده توانی..... ۵-۴-۳-۳
۳۵ شکل تفاضل محدود معادله کلی..... ۵-۲-۳
۴۱ خطی کردن جمله چشمه..... ۱-۵-۲-۳
۴۱ ضریب زیر تخفیف..... ۲-۵-۲-۳
۴۲ شکل نهائی معادله انفصال..... ۶-۲-۳

فصل چهارم

حل عددی معادلات دیفرانسیل

۴۴ مقدمه..... ۱-۴
۴۵ حل عددی معادلات دیفرانسیل..... ۲-۴
۴۹ معادلات حجم محدود..... ۳-۴
۵۳ بدست آوردن مقادیر ترم چشمه..... ۴-۴
۵۵ زیر تخفیف..... ۵-۴
۵۶ الگوریتم حل برای معادلات جبری خطی..... ۶-۴
۵۷ شبکه بندی شطرنجی..... ۷-۴
۵۸ الگوریتم سیمپل..... ۸-۴
۶۲ همگرایی..... ۹-۴
۶۳ استفاده از تکرار در محاسبات..... ۱۰-۴
۶۴ آشنائی با کد سه بعدی مورد استفاده در این مسئله..... ۱۱-۴

فصل پنجم

ارائه نتایج

۶۹ ۱-۵- مقدمه
۶۹ ۲-۵- بررسی صحت روش حل عددی
۸۱ ۳-۵- جریان کوئت تیلور با نسبت ظاهری حدود یک
۸۱ ۱-۳-۵- جریان کوئت تیلور با $Re = 420, \Gamma = 1.3, \eta = 0.5$
۸۴ ۲-۳-۵- جریان کوئت تیلور با $Re = 150, \Gamma = 0.66, \eta = 0.5$
۸۸ ۳-۵-۳- جریان کوئت تیلور با $Re = 400, \Gamma = 1, \eta = 0.5$
۹۲ ۴-۵- اثر چرخش صفحات انتهائی روی جریان کوئت تیلور
۹۲ ۱-۴-۵- چرخش صفحه تحتانی با استوانه داخلی جریان شکل ۵-۲۰
۹۷ ۲-۴-۵- اثر چرخش صفحات انتهائی روی جریان شکل ۵-۳
۱۰۲ ۵-۵- بررسی جریان کوئت تیلور با چرخش استوانه ها در جهات مخالف
۱۰۳ ۱-۵-۵- اثر چرخش استوانه بیرونی روی جریان شکل ۵-۳
۱۰۵ ۲-۵-۵- بررسی جریان با $Re_i = 115, Re_o = -100$
۱۱۰ ۶-۵- جریان کوئت تیلور با استوانه بیرونی چرخان و استوانه درونی ثابت
۱۰۳ ۷-۵- جریان کوئت تیلور با لقی بسیار کوچک
۱۱۷ ۸-۵- نتیجه گیری
۱۱۹ ۹-۵- پیشنهادات
۱۲۰ مراجع

فهرست شکل ها

۳ شکل (۱-۱): دیاگرام تغییرات جریان کوئت با عدد رینولدز چرخشی استوانه ها
۴ شکل (۲-۱): ناپایداریهای جریان کوئت تیلور بعد از شروع جریان گردابه ای
۶ شکل (۳-۱): جریان بین دو استوانه با افزایش خطی سرعت استوانه درونی

- شکل (۴-۱): سیستم آزمایشگاهی جریان دو فازی..... ۷
- شکل (۵-۱): مشاهده اولین گردابه ها با افزایش عدد رینولدز در محفظه درونی..... ۸
- شکل (۶-۱): خطوط جریان گردابه ای با مکش در صفحه Γ -Z..... ۹
- شکل (۷-۱): سرعت مماسی در جریان گردابه ای با مکش..... ۱۰
- شکل (۸-۱): جریان درون یک محفظه شیب دار..... ۱۰
- شکل (۹-۱): مدهای جریان در حالت دائمی برای مقادیر مختلف شیب دیواره بیرونی..... ۱۱
- شکل (۱۰-۱): نتایج عددی و آزمایشگاهی برای $Re = 500$, $\Gamma = 3.97$, $\eta = 0.5$ ۱۲
- شکل (۱۱-۱): دیاگرام پایداری جریان در حالت آزمایشگاهی و حل عددی..... ۱۳
- شکل (۱۲-۱): نتایج عددی برای $\Gamma = 3.2$ ۱۴
- شکل (۱۳-۱): نتایج عددی برای $\Gamma = 2.975$ ۱۴
- شکل (۱۴-۱): نتایج عددی برای حالت $\Gamma = 3.225$ ۱۵
- شکل (۱-۲): هندسه استوانه های هم مرکز..... ۱۹
- شکل (۲-۲) : توزیع سرعت بین استوانه خارجی ثابت و استوانه داخلی چرخان با لقی بسیار کوچک..... ۲۱
- شکل (۱-۳): حجم کنترل عمومی برای مسئله یک بعدی..... ۲۵
- شکل (۲-۳): تغییرات a_E نسبت به عدد پکلت..... ۳۳
- شکل (۳-۳) : حجم کنترلی در مختصات قطبی..... ۳۶
- شکل (۱-۴): ساختار شبکه بندی حجم محدود..... ۵۱
- جدول (۱-۴): مقادیر C,D در معادله جداسازی شده..... ۵۳
- شکل (۲-۴): مش بندی غیر یکنواخت..... ۶۵
- شکل (۱-۵): سیستم کوئت تیلور آزمایشگاهی..... ۶۹
- شکل (۲-۵): نامگذاری انواع جتهای جریان کوئت تیلور..... ۷۰
- شکل (۳-۵): مقایسه خطوط جریان..... ۷۱
- شکل (۴-۵): مقایسه کانتور سرعت در جهت شعاعی..... ۷۱

- شکل (۵-۵): مقایسه کانتور سرعت در جهت محوری..... ۷۲
- شکل (۶-۵): مقایسه کانتور سرعت در جهت مماسی..... ۷۲
- شکل (۷-۵): نمودار تغییرات سرعت جریان شکل ۳-۵ در راستای محوری..... ۷۴
- شکل (۸-۵): کانتور فشار جریان شکل ۳-۵..... ۷۵
- شکل (۹-۵): تغییرات سرعت با افزایش عدد رینولدز جریان مرجع [۱۰]..... ۷۷
- شکل (۱۰-۵): تغییرات سرعت خطی در $r^* = 0.62$ با افزایش سرعت زاویه ای استوانه درونی جریان
شکل ۳-۵..... ۷۸
- شکل (۱۱-۵): نمودارهای تغییرات سرعت جریان شکل ۳-۵ در راستای شعاعی..... ۷۹
- شکل (۱۲-۵): تغییرات سرعت جریان شکل ۳-۵ با عدد رینولدز در سطح میانی..... ۸۰
- شکل (۱۳-۵): کانتورهای سرعت و خطوط جریان $Re = 420, \Gamma = 1.3, \eta = 0.5$ ۸۲
- شکل (۱۴-۵): کانتور فشار شکل ۱۳-۵..... ۸۲
- شکل (۱۵-۵): نمودار تغییرات سرعت جریان مرجع [۱۰] در راستای محوری..... ۸۴
- شکل (۱۶-۵): خطوط جریان $Re = 150, \Gamma = 0.66, \eta = 0.5$ ۸۵
- شکل (۱۷-۵): کانتورهای سرعت جریان شکل ۱۶-۵..... ۸۵
- شکل (۱۸-۵): نمودارهای تغییرات سرعت جریان شکل ۱۶-۵ در جهت محوری..... ۸۷
- شکل (۱۹-۵): تغییرات سرعت جریان شکل ۱۶-۵ در جهت شعاعی..... ۸۸
- شکل (۲۰-۵): خطوط جریان و کانتورهای سرعت، با دیواره سمت چپ چرخان
 $Re = 700, \Gamma = 1, \eta = 0.5$ ۸۹
- شکل (۲۱-۵): کانتور فشار جریان شکل ۲۰-۵..... ۸۹
- شکل (۲۲-۵): نمودارهای تغییرات سرعت جریان شکل ۲۰-۵ در جهت محوری..... ۹۱
- شکل (۲۳-۵): تغییرات سرعت جریان شکل ۲۰-۵ در جهت شعاعی..... ۹۲
- شکل (۲۴-۵): اثر چرخش صفحه تختانی روی جریان شکل ۲۰-۵..... ۹۳
- شکل (۲۵-۵): کانتور فشار جریان شکل ۲۴-۵..... ۹۴
- شکل (۲۶-۵): نمودارهای تغییرات سرعت شکل ۲۴-۵..... ۹۵

- شکل (۲۷-۵): اثر چرخش صفحه فوقانی روی جریان شکل ۲۰-۵ ۹۶
- شکل (۲۸-۵): کانتور فشار جریان شکل ۲۷-۵ ۹۶
- شکل (۲۹-۵): کانتور های سرعت و خطوط جریان شکل ۳-۵ با چرخش صفحه تحتانی و دیوار
چپ ۹۷
- شکل (۳۰-۵): کانتور فشار جریان شکل ۲۹-۵ ۹۸
- شکل (۳۱-۵): کانتورهای سرعت و خطوط جریان شکل ۳-۵، با چرخش صفحه فوقانی و دیوار
چپ ۹۸
- شکل (۳۲-۵): کانتور فشار جریان شکل ۳۱-۵ ۹۹
- شکل (۳۳-۵): تغییرات سرعت جریان شکل ۳۱-۵ ۱۰۰
- شکل (۳۴-۵): مقایسه اثر چرخش صفحات انتهائی همراه با استوانه درونی جریان شکل ۳-۵ روی مؤلفه
های سرعت ۱۰۱
- شکل (۳۵-۵): دیاگرام پایداری جریان بین دو استوانه چرخان در جهات مختلف با $\eta = 0.5$ ۱۰۲
- شکل (۳۶-۵): ناپایداری جریان شکل ۳-۵ در اثر چرخش استوانه بیرونی ۱۰۳
- شکل (۳۷-۵): اثر چرخش استوانه بیرونی با $Re_o = -100$ روی جریان مرجع [۱۰] ۱۰۴
- شکل (۳۸-۵): جریان $Re_o = -100$, $Re_i = 115$, $\Gamma = 1.6$, $\eta = 0.5$ ۱۰۵
- شکل (۳۹-۵): نمودار های تغییرات سرعت جریان شکل ۳۸-۵ در راستای
محوری ۱۰۶
- شکل (۴۰-۵): تغییرات سرعت جریان شکل ۳۸-۵ در راستای شعاعی ۱۰۷
- شکل (۴۱-۵): کانتور فشار جریان شکل ۳۸-۵ ۱۰۸
- شکل (۴۲-۵): اثر افزایش رینولدز استوانه بیرونی روی تغییر سرعت های جریان شکل
-۵ ۱۰۹
- ۳۸ ۱۱۰

شکل (۴۳-۵): تغییرات سرعت جریان شکل ۵-۳۸ در سطح میانی با افزایش سرعت زاویه ای استوانه

بیرونی.....

شکل (۴۴-۵): کانتور های سرعت و خطوط جریان

۱۱۱ $\Gamma = 3.1, \eta = 0.5, Re_i = 0, Re_o = 330$

شکل (۴۵-۵): مقایسه تغییرات سرعت جریان شکل ۵-۴۴ با مرجع

۱۱۲ [۱۰]

شکل (۴۶-۵): کانتور فشار شکل ۵-۴۴.....

شکل (۴۷-۵): نمودارهای تغییرات سرعت جریان با لقی بسیار کوچک.....

شکل (۴۸-۵): تغییرات سرعت مماسی بین دو استوانه در لقی کوچک.....

شکل (۴۹-۵): تغییرات تنش برشی بین دو استوانه.....

فهرست علائم و نشانه‌ها

	Ω	سرعت زاویه ای
لزجت	μ	
لزجت سینماتیکی، (μ/ρ)	ν	نسبت ظاهری، ضریب نفوذ
دلالیت بر بزرگترین مقدار A, B	$\ A, B\ $	نسبت شعاعی
متغیر کلی	ϕ	نیروی بدنی
جمله چشمه	S_ϕ	ضریب پخش
تابع جریان	ψ	قدرت جابجائی
لقی بین دو استوانه	$d = r_o - r_i$	عدد پکلت
ارتفاع استوانه	h, l	ویسکوزیته توربولانت
چرخش، سرعت زاویه‌ای	ω	فشار
تقارن جریان در جهت محوری	$Z2$	عدد رینولدز
تقارن جریان در جهت چرخش	$SO(2)$	دما
زیرنویس‌ها و بالا نویس‌ها	t	زمان
مشتق، نوسان	'	مختصات قطبی
متوسط زمانی	-	مؤلفه‌های کارتیزی سرعت
متغیرهای بی بعد	*	نوسانات سرعت
بحرانی	$crit$	مختصات کارتیزین
	α	ضریب زیر تخفیف
	u_r, u_θ, u_z	مؤلفه‌های قطبی سرعت
	κ	انرژی جنبشی توربولانت
	P^*	فشار حدسی
	V^*	سرعت حدسی
	Ta	عدد تیلور
	Ra	عدد رایلی

بسم الله الرحمن الرحيم

۱-۱- مقدمه

بر روی جریان سیال در داخل یک فضای بسته، به دلیل اهمیتی که در سیستمهای تبدیل، ذخیره و انتقال انرژی دارند، مطالعات زیادی انجام شده است. جریان بین دو استوانه هم مرکز چرخان، نمونه ای از این جریانها می باشد.

مسأله جریان بین دو استوانه، یکی از مسائل مهم و قابل بررسی در کاربردهای مهندسی است. در بسیاری از وسائل و ابزارهای علمی و صنعتی، همچون مدل‌های روتور استاتور، فیلتراسیون، مبدل‌های حرارتی، میکسرهای شیمیائی، مته های حفاری، پمپها و... از این هندسه استفاده می شود. لذا مطالعه و بررسی آن در طراحی ابزارهای علمی و صنعتی دارای جایگاه ویژه ای است.

عوامل بوجود آمدن چرخش در محیط سیال که محیطی پیوسته در نظر گرفته می شود، عبارتند از: الف) وجود لزجت یا چسبندگی، که یکی از مهم ترین عوامل انتقال چرخش در یک محیط پیوسته می باشد. ب) وجود نیروهای خارجی ناپایستاری که می توان به یک محیط پیوسته اعمال کرد. ج) سومین عامل، وجود نیروی غیر باروتروپیک است، یعنی محیطی که در آن فشار تابعی از چگالی و یا چگالی تابعی از فشار نباشد. محیط مورد مطالعه در صورتی چرخشی است که تغییرات ورتیسیتی محیط طبق تعریف زیر غیر صفر باشد [۱۸] $C(t)$ یک منحنی بسته روی محیط است):

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{C(t)} \left[-\frac{1}{\rho} \nabla P + F + v \nabla^2 U \right] dr$$

مطالعات صورت گرفته مشخص کرده اند که، نیروهای گریز از مرکز و گرادیان فشار شعاعی و محوری تأثیر اصلی روی شکل گیری گردابه های تیلور داشته و باعث بوجود آمدن ستونی از گردابه در راستای افقی می شوند. اگر سطح سیال آزاد باشد، نیروی جاذبه نیز اثرگذار است و اعداد وبر و فرود در معادلات وارد می شوند. همچنین افزایش در سرعت استوانه ها شکل گردابه ها را تغییر می دهد.

۱-۲- تاریخچه جریان کوئت تیلور

در حدود یکصد سال قبل، یک فیزیکدان فرانسوی بنام موریس کوئت^۱ [۲]، دستگاهی شامل دو استوانه تو در تو، که بین آنها با یک سیال لزج پر شده بود و استوانه بیرونی با سرعت Ω_2 چرخان بود، ساخت. هدف او پیروی ایده فیزیکدان استرالیایی ماکس مارگولس^۲ [۲]، جهت تعیین ویسکوزیته سیال، با اندازه گیری گشتاور اعمال شده بوسیله سیال، روی سیلندر درونی بود. زمانیکه Ω_2 خیلی بزرگ نیست، جریان سیال تقریباً آرام بوده و روش کوئت قابل قبول است (در سرعتهای بالا اینطور نیست)، چون گشتاور متناسب با Ω_2 است. چند سال بعد آرنولف مالوک^۳ [۲]، یک دستگاه مشابهی طراحی کرد که استوانه درونی را با سرعت Ω_1 و استوانه خارجی را $\Omega_2=0$ در نظر گرفت. جریان آرام بوجود آمده، جریان کوئت نام گرفت، بدون آنکه مقدار بحرانی Ω_{1c} را بدست آورد. سپس تیلور^۴ [۱۳]، در مقاله ای که در سال ۱۹۲۳ ارائه کرد، دریافت که با افزایش سرعت یک ناپایداری در جریان بوجود خواهد آمد. در یک جریان که هر اغتشاش کوچک تمایل برگشت به جریان اصلی با پیشرفت زمان به سمت بی نهایت داشته باشد، پایدار نامیده میشود. تیلور سیستم مورد بررسی را با طول نامحدود در نظر گرفت، که این یک حالت ایده آل است. او دریافت که اولین ناپایداری توسط یک اغتشاش ثابت و دارای تقارن محوری در جریان کوئت رخ میدهد (یعنی برای دستگاه ایده آل دارای نوسان محوری). این جریان، جریان گردابه ای تیلور نام گرفت، که شامل یک سری گردابه های افقی در امتداد محور استوانه ها بودند. در حقیقت تیلور کار

^۱ Maurice-Couette(1890)

^۲ Max-Margules

^۳ Arnulph-Mallock

^۴ Taylor (1923)

رایلی را که در رابطه با سیالات چرخشی غیر لزج و پایداری بین دو استوانه ثابت بود، کامل کرد. بنابراین با افزایش سرعت استوانه درونی Ω_1 ، الگوی جریان کاملتر شده و بصورت متقارن در فضا و زمان در خواهد آمد و نهایتاً به رژیم جریان توربولانس، که ساختاری بزرگتر با تقارن بیشتر خواهد داشت، تبدیل میشود.

زمانیکه دو استوانه در جهات مختلف می چرخند، حالت توربولانس مشاهده می شود. کولز^۵ [۱۲] با انجام آزمایشات دقیق، حالت‌های مختلف این جریان را بدست آورد.

۱-۲-۱- نتایج تجربی

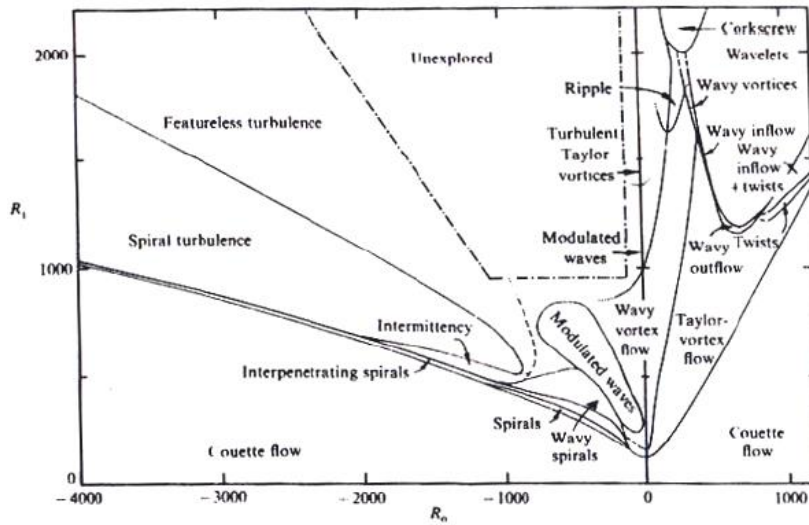
با در نظر گرفتن Ω_1 و Ω_2 سرعت‌های زاویه ای داخلی و خارجی و R_1 و R_2 شعاع‌های داخلی و خارجی و \Re_1 و \Re_2 اعداد رینولدز داخلی و خارجی داریم:

$$\Re_i = \frac{R_1(R_2 - R_1)\Omega_1}{\nu} \quad \text{و} \quad \Re_o = \frac{R_2(R_2 - R_1)\Omega_2}{\nu}$$

آندرک، لیو و سوئینی^۶ [۲]، مقادیر بالای رینولدز را با دستگاهی با نسبت شعاعی ۰٫۸۳۳ بررسی کردند، که نتیجه آن را با دیاگرام شکل (۱-۱) نشان دادند.

^۵ Donald Coles (1965)

^۶Andereck,Liu,Swinney (1991)



شکل (۱-۱): دیاگرام تغییرات جریان کوئت با عدد رینولدز چرخشی استوانه ها [۲]

این دیاگرام، نواحی مختلف جریان را در صفحه $(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_o)$ نشان میدهد، که در حالت ایده آل، یعنی استوانه های بلند، بدست آمده است. در این دیاگرام تنها جریان پایا در جریان کوئت، جریان گردابه ای تیلور است. جریان ماریپیچ و جریان گردابه موجی (شکل ۱-۲)، بصورت الگوهای چرخشی متناوب هستند، که بصورت صلب میچرخند. جریان ماریپیچ، مانند یک موج متحرک در جهت محور استوانه هاست.

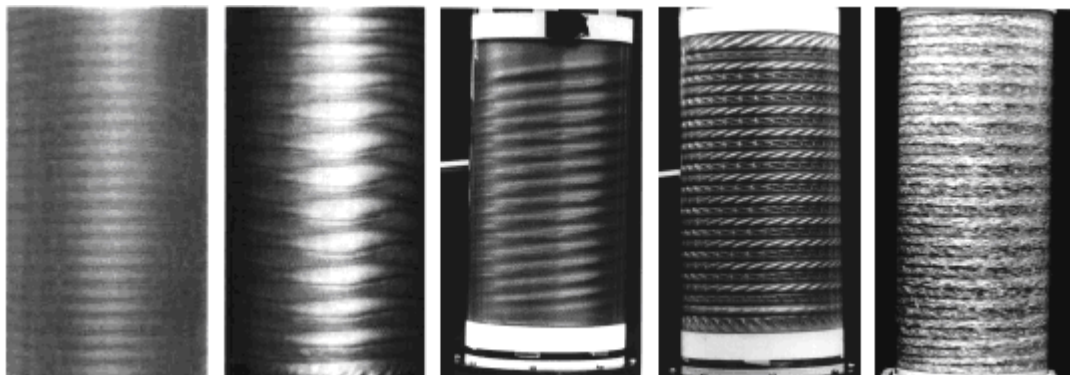
با توجه به دیاگرام، حالات متفاوتی مشاهده می شود:

(۱) زمانیکه \mathcal{R}_i کمتر از یک مقدار بحرانی وابسته به \mathcal{R}_o باشد، جریان کوئت پایدار است.

(۲) زمانیکه \mathcal{R}_o مثبت یا منفی باشد، جریان کوئت پایداری خود را از دست می دهد و جریان گردابه ای تیلور پیشرفت می کند.

(۳) زمانیکه \mathcal{R}_o از یک مقدار بحرانی منفی کمتر باشد، پایداری خود را از دست داده و با یک جریان ماریپیچ پررودیک غیر پایا جایگزین میشود. زمانیکه \mathcal{R}_i با یک مقدار ثابت \mathcal{R}_o افزایش می یابد، یک

پیوستگی در انتقال جریان مشاهده می شود. وقتی $Re \geq 0$ ، جریان گردابه تیلور ناپایدار شده و با انواع مختلف جریان های پریودیک زمانی جایگزین می شود. (شکل ۱-۲)



شکل (۱-۲): ناپایدار یهای جریان کوئت تیلور بعد از شروع جریان گردابه ای ؛

از چپ به راست: جریان گردابه ای تیلور، جریان گردابه موجی، گردابه های مارپیچ، گردابه های پیچشی و جریان گردابه ای تیلور مغشوش [۲۲]

۳-۱- مروری بر مطالعات گذشته

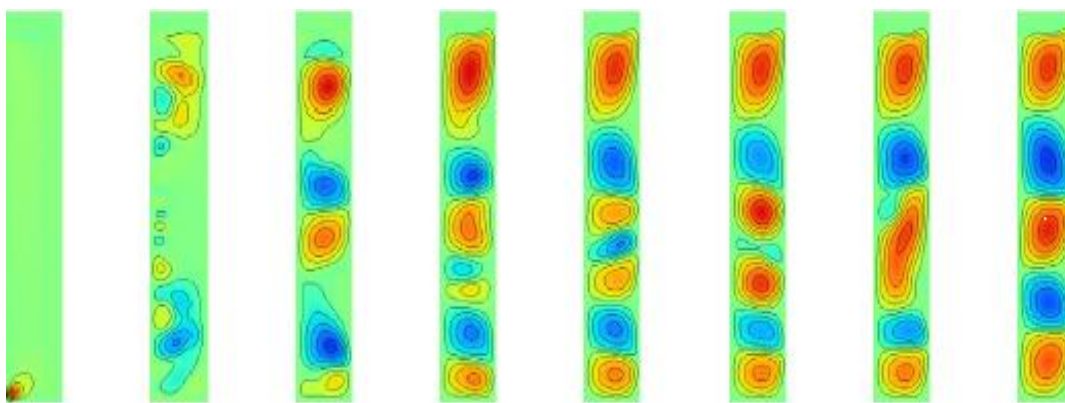
با توجه به اهمیت این جریان، تحقیقات زیادی صورت گرفته است. در ادامه این بخش به چند مورد از تحقیقات انجام شده در این زمینه اشاره کرده و خلاصه نتایج بدست آمده، ارائه می شود.

یوریکو و دانیل^۶ [۱۱] به بررسی پایداری جریان کوئت، توسط دو سیال مخلوط نشدنی ما بین استوانه های هم مرکز، با چرخش استوانه درونی پرداختند. سطح تماس دو سیال را هم مرکز با استوانه ها در نظر گرفته و از اثرات جاذبه صرفنظر شده است و سپس اثر ویسکوزیته های متفاوت، دانسیته های مختلف و کشش سطحی روی پایداری خطی این جریان بصورت عددی مطالعه شده است. نتایج نشان

^۶Yuriko, Daniel (1985)

می دهند که با وجود کشش سطحی، یک لایه نازک سیال با ویسکوزیته پائین تر، نزدیک هر استوانه به طور خطی پایدار است و با قرارگیری سیال با دانسیته کمتر به سمت خارج، پایداری آن امکانپذیر است. پایداری جریان، با قرارگیری سیال با لزجت پائین تر نزدیک استوانه داخلی بیشتر است. نتیجه اینکه، شروع نا پایداری تیلور برای جریان یک سیال ممکن است با اضافه کردن یک لایه نازک سیال با لزجت کمتر روی دیواره داخلی به تأخیر افتد.

در رابطه با جریان بین استوانه های هم مرکز چرخان، که مرز بالایی به صورت سطح آزاد است، مطالعه تجربی و عددی توسط واتابه، توپیا و ناکامورا^۸ [۲۴] صورت گرفته است. جریان ابتدا در حالت سکون است و سیلندر درونی با افزایش خطی در سرعت، به یک سرعت مشخص می رسد و نتایج ثبت می شود. اعداد بی بعد مورد استفاده علاوه بر عدد رینولدز، اعداد وبر و فرود می باشند. نتایج نشان می دهند، همچنانکه سرعت سیلندر داخلی افزایش می یابد، یک گردابه کوچک روی استوانه درونی آشکار می شود (شکل ۱-۳)، سپس با افزایش چرخش، گردابه تمام جریان را فرا گرفته و سطح آزاد به بیرون می رود.



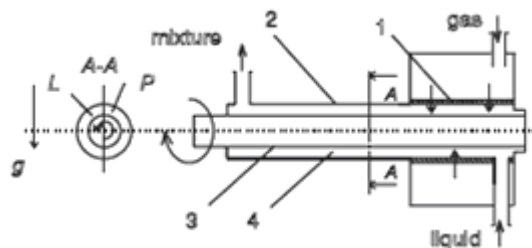
شکل (۱-۳): جریان بین دو استوانه با افزایش خطی سرعت استوانه درونی [۲۴]

در بررسی جریان مغشوش بین دو استوانه چرخان، که توسط چانگ و سانگ^۹ [۱۹] انجام شده است، از روش شبیه سازی گردابه بزرگ استفاده شده است. در این تحقیق یک جریان چرخشی توربولانت و اثر

^۸ Wataabe,Toya,Nakamura (2005)

^۹ Chung,Sung (2005)

چرخش دیواره داخلی روی جریان، شبیه سازی شده است. بیشترین تمرکز، روی اثر ناپایداری حرکت چرخشی ساختار توربولانت نزدیک دیواره است. در اینجا نتایج عددی با داده های تجربی مقایسه شده اند. با مقایسه نتایج عددی و تجربی، ممکن است اثر چرخش در جریان توربولانت، مانند یک نیروی بدنی تعبیر شود، که این نیرو می تواند اغتشاش پایدار یا ناپایدار باشد و زمانیکه چرخش سیال توسط گردش سیلندر درونی رخ می دهد، نیروی گریز از مرکز با افزایش شعاع کاهش یافته و جریان ناپایدار می شود. ساختار جریان کوئرت تیلور افقی در یک سیستم دو فازي گاز-مایع، توسط حوباز و رونسکی^{۱۰} [۶] بررسی شده است. جریان بصورت ترکیبی از جریانهای کوئرت چرخشی و پوزایه محوری است. نا پایداریهای هیدرودینامیکی در اثر وجود گردابه های تیلور، می توانند بالاتر از یک مقدار بحرانی سرعت زاویه ای رخ دهد و این در حالیست که در یک سیستم تک فازي، شکل گردابه ها وابسته به اعداد رینولدز و تیلور می باشند. نیروهای موجود در این سیستم بصورت نیروی جاذبه، نیروی گریز از مرکز و نیروی برهم کنش بین فازها (درگ)، می باشند. نتایج بصورت الگوهای جریان دو فازي به سه صورت سرعتیهای چرخش پائین و چرخش انتقالی و چرخش بالا تعریف می شوند، که در حالت چرخش پائین، جاذبه بر حرکت گاز غلبه می کند و در وضعیت انتقالی، اثر هر دو نیروی گریز از مرکز و بویانسی وجود دارند و سرعتیهای چرخش بالا، زمانی است که نیروهای گریز از مرکز بر جریان چیره می شوند. نتیجه اینکه الگوهای جریان در سیستم کوئرت تیلور دو فازي، تابعی از سرعت چرخش و نرخهای جریان حجمی گاز و مایع می باشند. همچنین در سرعتیهای چرخش بالا، جریان حلقوی حبابها مشاهده می شود.

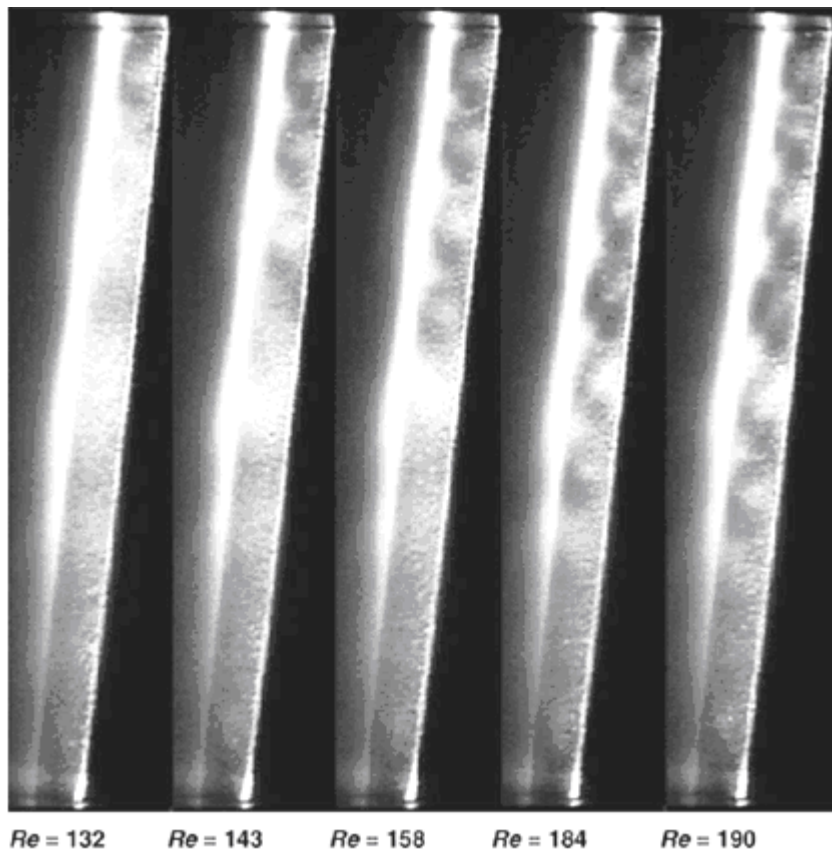


شکل (۴-۱): سیستم آزمایشگاهی جریان دو فازي؛ ۱-محفظه، ۲-لوله شیشه ای، ۳-روتور، ۴-لقی محفظه، [۲۳]

^{۱۰} Hubacz, Wronski (2004)

بررسی اثر شتاب روی خواص گذرا در یک محفظه مخروطی، توسط نوئی و مهایدی^{۱۱} [۱۷] انجام شده و مدهای جریان متفاوتی را آشکار می کند، که به شتاب استوانه داخلی تا رسیدن به یک سرعت زاویه ای مشخص، حساس است. در این آزمایش قسمت چرخان توسط یک کامپیوتر کنترل شده و مدهای جریان با توجه به نرخ شتاب بی بعد اعمال شده، طبقه بندی می شوند (شکل ۱-۵). برای شتاب خیلی آهسته سرعت سیلندر درونی، یک حرکت مارپیچ در پائین دست سیستم انجام می شود، ولی در نرخ شتابهای بالاتر، اولین گردابه ها توسط یک حرکت شعاعی در بالا دست پدید می آیند. این حرکت زمانیکه عدد رینولدز افزایش می یابد، متوقف شده و گردابه های تیلور دائمی در یک ستون از سیال بوجود می آیند. این گردابه ها با افزایش عدد رینولدز و شتاب بیشتر، بصورت گردابه های موجی در خواهند آمد. علیرغم فاصله حلقوی ثابت، چون دو استوانه زاویه رأس ثابتی دارند، تغییرات محوری نیروهای گریز از مرکز، یک میدان دینامیکی نا همگن در طول یک ستون از سیال ایجاد می کند، که اثر زیادی روی انتقال جریان از آرام به درهم دارد.

^{۱۱} Noui, Mehidi(2005)

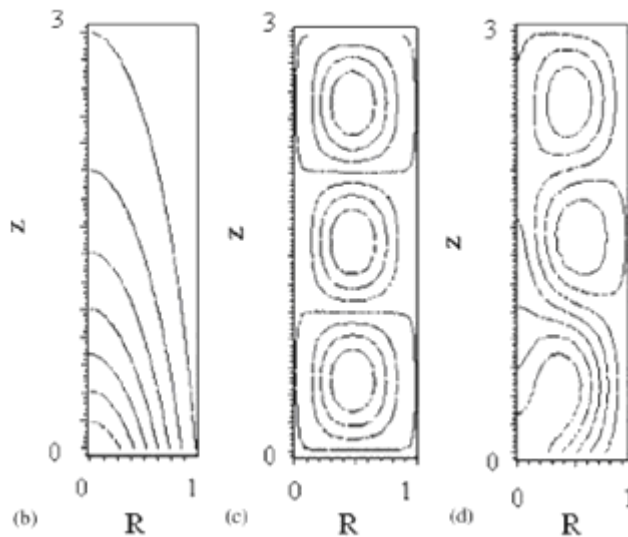


شکل (۱-۵): مشاهده اولین گردابه ها با افزایش عدد رینولدز در محفظه مخروطی [۱۷]

در تحلیلی که توسط پاتریک و دونالد^{۱۲} [۸] انجام شده است، تبدیل جریان کوئت به گردابه های تیلور با وجود مقدار کمی مکش در استوانه درونی، شرح داده شده است و از پارامتر گوتلر، که مقیاسی برای چرخش است، استفاده می شود. با افزایش عدد تیلور، بزرگی گردابه ها زیاد می شود. در جایی که نیاز به کنترل اندازه گردابه می باشد، از جریان شعاعی استفاده می شود. این سیستم اساس کار فیلتر های دینامیکی است. یعنی سیال فیلتر شده، بصورت شعاعی از سیلندر داخلی عبور می کند و به منبع ذخیره درونی وارد می شود [۹]. وظیفه گردابه های تیلور، شستن مواد زائد از روی روزنه های استوانه درونی،

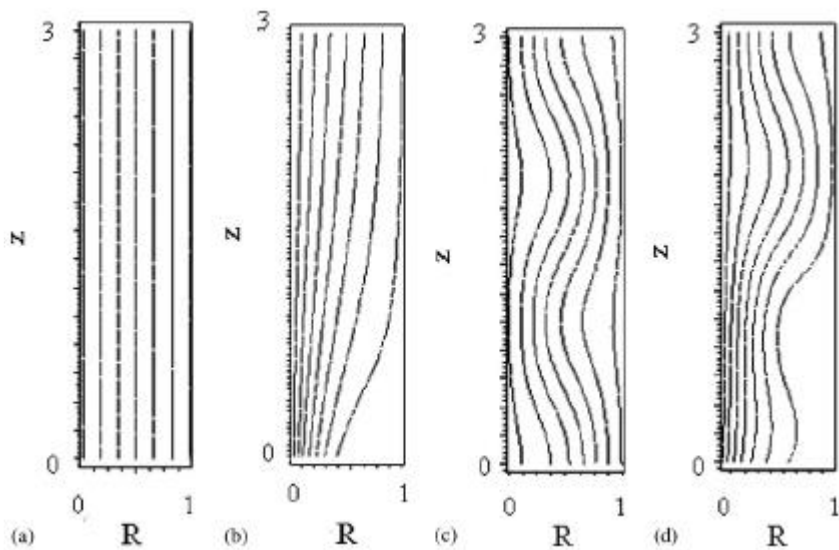
^{۱۲} Patrick, Donald (2002)

جهت جلوگیری از مسدود شدن آنهاست. در این تحقیق نرخ چرخش بحرانی و تغییر گردابه های تیلور برای حالت استوانه منفذ دار و خالی شدن سیال در یک فشار ثابت به منبع درونی، تعیین شده است. حل معادلات با استفاده از بسطهای اغتشاشی انجام شده است. در کل می توان دریافت که با ایجاد مکش در استوانه درونی، جریان بین دو استوانه پایدار تر خواهد شد، چون مکش اندازه گردابه ها را کوچکتر میکند (شکل های ۶-۱ و ۷-۱)، و با برداشتن مکش، گردابه ها دوباره به حالت اولیه بر می گردند.



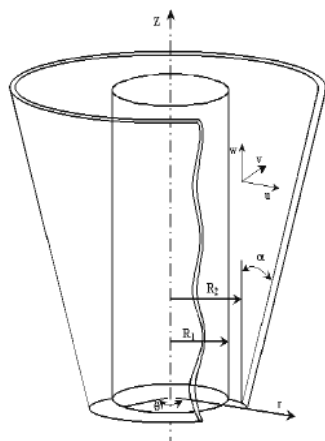
شکل (۶-۱): خطوط جریان گردابه ای با مکش در صفحه $(r-z)$ ؛ (b) با مکش، (c) با گردابه های تیلور، (d) گردابه ها با

مکش [۸]



شکل (۷-۱): سرعت مماسی در جریان گردابه ای با مکش: (a) جریان کوئت، (b) جریان مکش، (c) گردابه تیلور، (d) ترکیب مکش و گردابه [۸]

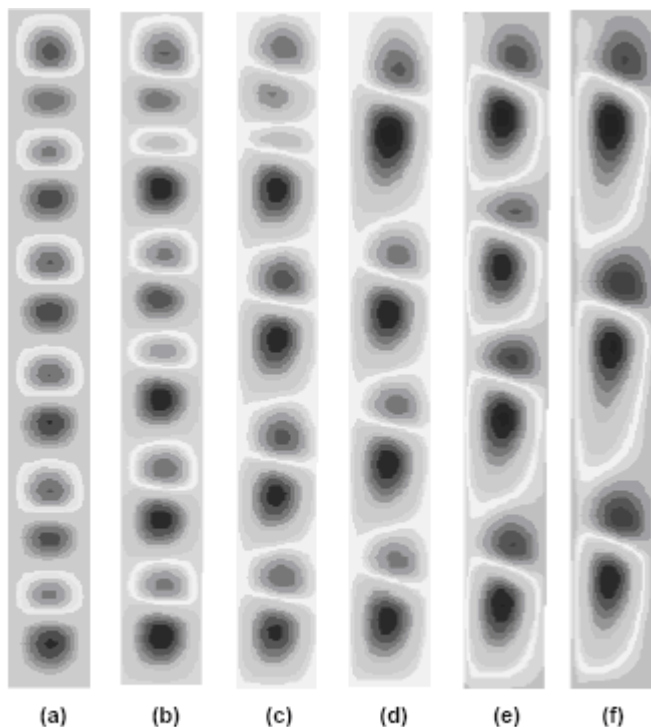
مهایدی^{۱۳} [۲۷]، جریان گردابه ای تیلور را در یک محفظه شیب دار، به صورت عددی مطالعه کردند. آنها از روش تفاضلات محدود جهت انتگرالگیری معادلات استفاده کردند. زوایای مورد بررسی از صفر تا نیم درجه هستند (شکل ۸-۱).



شکل (۸-۱): جریان درون یک محفظه شیب دار [۲۷]

^{۱۳} Mehidi, Ohmura, Wu (2002)

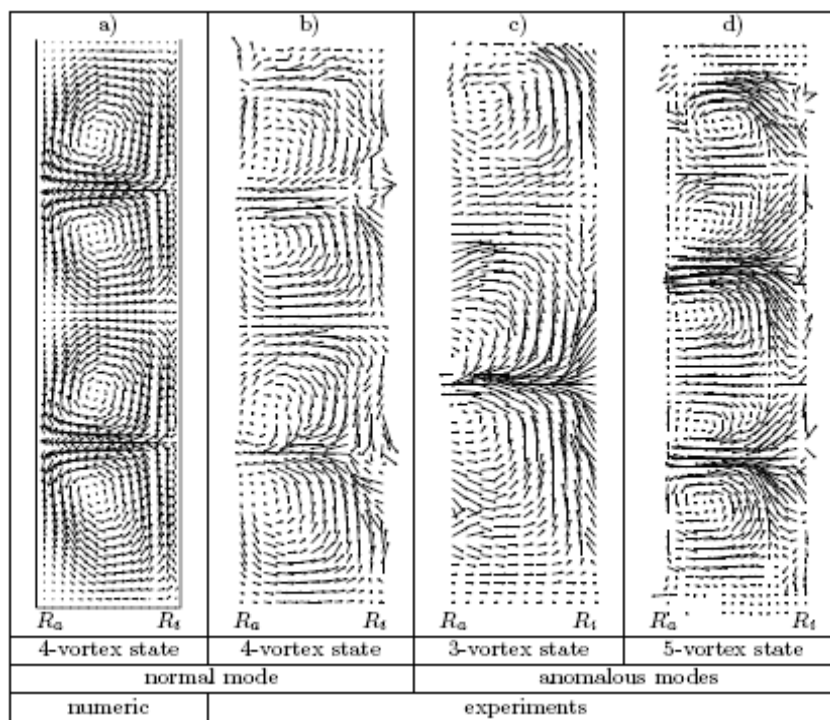
نتایج شبیه سازی نشان می دهند، زمانیکه لقی ثابت است، شش جفت گردابه بصورت ستونی از جریان بدست می آیند. وقتی زاویه افزایش می یابد، تقارن در جریان از بین رفته و گردابه های متفاوتی تولید می شوند. جریان ابتدائی تمام فضای ستون سیال را فرا می گیرد، که این جریان با چرخش دیواره به سمت بالا حرکت می کند و با ثابت شدن آن به سمت پائین می رود. پس پایداری جریان با افزایش زاویه زیاد می شود و حرکت این جریان توسط میدان فشار ایجاد شده از تغییرات نیروهای گریز از مرکزی است که این نیروها از تغییرات لقی در راستای محور ایجاد می شوند. همچنین با افزایش زاویه از صفر تا نیم درجه، تعداد گردابه ها از شش جفت به سه جفت گردابه، کاهش می یابند و گردابه های قوی تری ایجاد خواهند شد.



(a) $\alpha = 0$; (b) $\alpha = 0.1$; (c) $\alpha = 0.2$; (d) $\alpha = 0.3$; (e) $\alpha = 0.4$; and (f) $\alpha = 0.5$.

شکل (۹-۱): مدهای جریان در حالت دائمی برای مقادیر مختلف شیب دیواره بیرونی [۲۷]

مینک و دیگران^{۱۴} [۳]، در نتایج آزمایشگاهی و حل عددی، مدهای مختلفی از جریان را بدست آوردند (شکل ۱-۱۰). حرکت استوانه درونی بصورت شتابدار صورت گرفته است. با مشاهده نتایج، برخلاف حالت سه گردابه ای که کشیده شده اند، حالت پنج گردابه ای فشرده می شود. در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی، یک حالت نرمال از جریان محاسبه شده است (شکل a ۱-۱۰). هسته گردابه ها در حالت آزمایشگاهی به نظر میرسد که به استوانه بیرونی نزدیک می شوند.

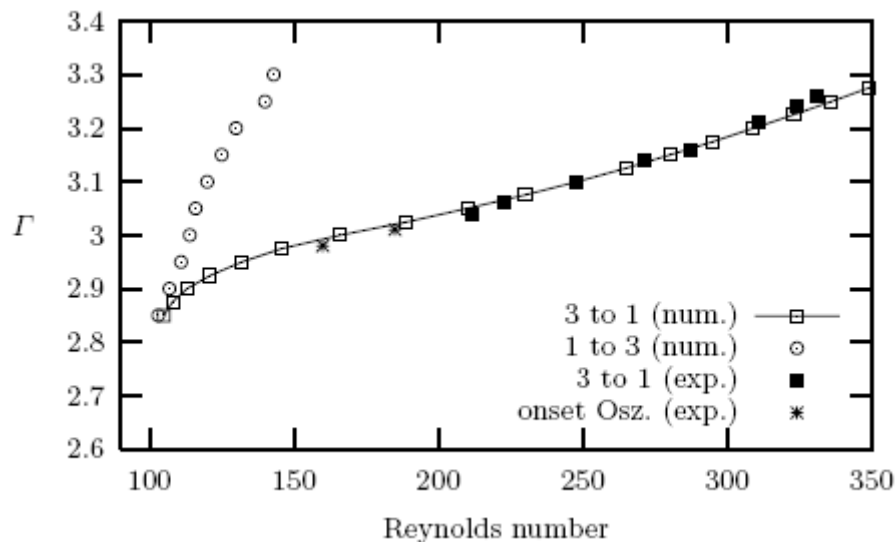


شکل (۱-۱۰): نتایج عددی و آزمایشگاهی برای [$\eta = 0.5$, $\Gamma = 3.97$, $Re = 500$]

^{۱۴} O.Meincke et al. (1999)

کلیف و مولین^{۱۵} [۱۶]، حالاتی را بررسی کردند که صفحه تحتانی در سیستم کوئت تیلور، با استوانه درونی می چرخد. در نتیجه کارهای آزمایشگاهی و عددی انجام شده، دیاگرام پایداری شکل (۱-۱۱) بدست آمده است.

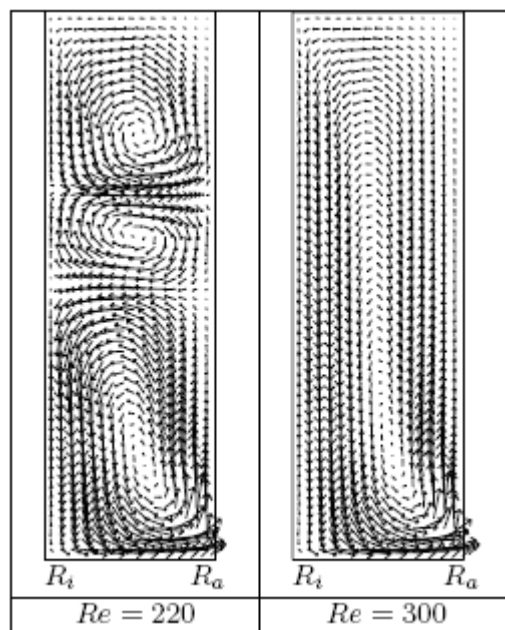
با توجه به نمودار بدست آمده، خطوط بامربعهای خط دار، انتقال از حالت سه گردابه به جریان دائمی تک گردابه را نشان می دهند. در حالت آزمایشگاهی (خطوط با مربعهای توپر)، با افزایش عدد رینولدز در یک نسبت ظاهری ثابت، پایداری مطالعه شده است. حالت دو ستاره ای در نسبت ظاهری پایین، نشاندنده یک انتقال از حالت سه گردابه ای جریان به حالت تک گردابه ای می باشد. انتقال از حالت تک گردابه ای به سه گردابه با کاهش عدد رینولدز به صورت عددی بدست آمده که توسط خطوطی با دواپر توپر نشان داده شده است.



شکل (۱-۱۱): دیاگرام پایداری جریان در حالت آزمایشگاهی و حل عددی [۱۶]

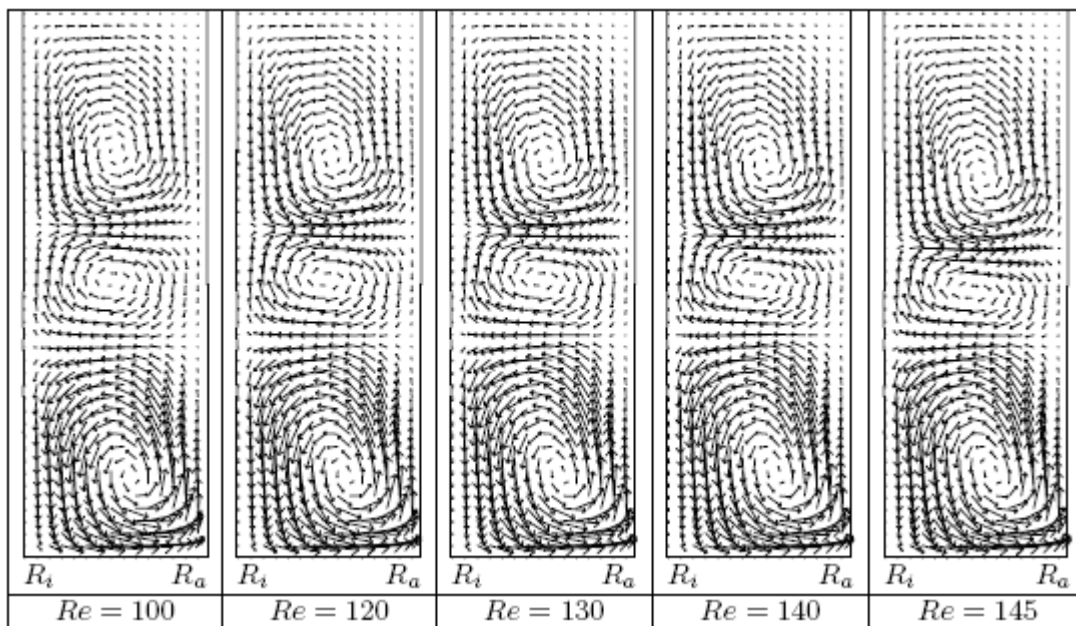
^{۱۵} Clif&Mullin (1986)

لوهم و مولین^{۱۶} [۱۵] در نتیجه کارهای عددی در $\Gamma = 3.2$ حالات سه گردابه ای و تک گردابه را برای سیستم کوئت تیلور با چرخش صفحه تحتانی بدست آوردند (شکل ۱-۱۲). فلشها نشاندهنده ترکیبات سرعت در مقطع $r-z$ در فضای لقی استوانه ها هستند. در طول مطالعه این جریان، اندازه گردابه مجاور صفحه چرخان، به عدد رینولدز وابسته است. در یک Γ ثابت، نتایج مختلفی برای اعداد رینولدز مختلف بدست آمد. شکل‌های (۱-۱۳) و (۱-۱۴)، رشد گردابه تحتانی را در حالت‌های $\Gamma = 3.225$, $\Gamma = 2.975$ نشان می دهند. در کارهای تجربی و عددی صورت گرفته، شرایط مرزی برای سیستم کوئت تیلور بررسی شده و در هر دو حالت، حد پایداری با کاهش عدد رینولدز، افزایش می یابد.

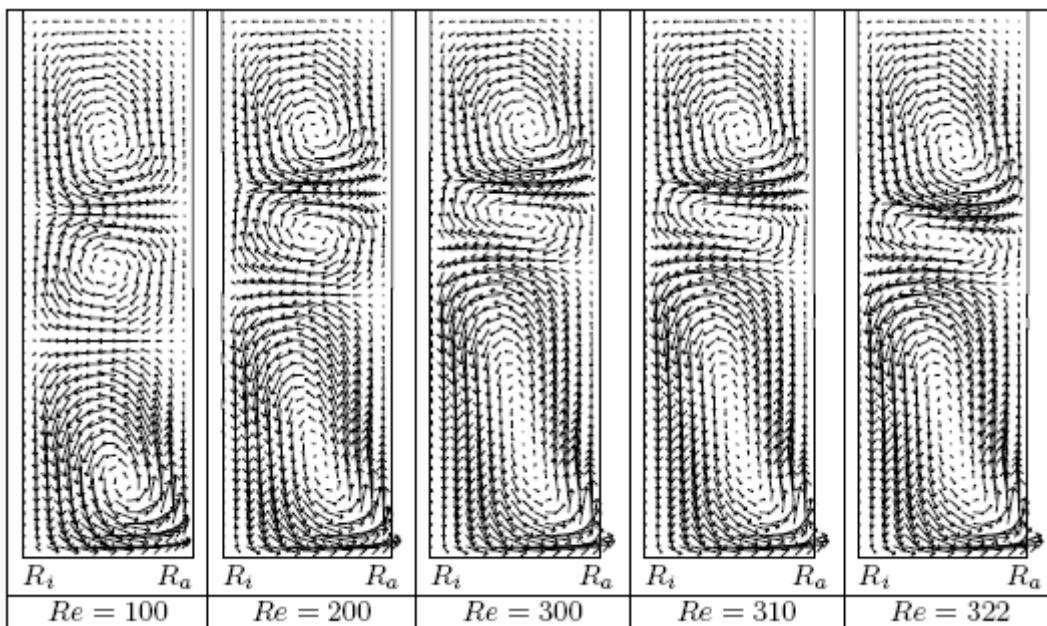


شکل (۱-۱۲): نتایج عددی برای $\Gamma = 3.2$ [۱۵]

^{۱۶} Blohem&Mullin (1997)



شکل (۱-۱۳): نتایج عددی برای حالت $[\Gamma = 2.975]$



شکل (۱-۱۴): نتایج عددی برای حالت $[\Gamma = 3.225]$

۱-۴- روشهای تحقیق و پژوهش

پیشگویی فرآیند های سیالات به دو روش اصلی انجام می شود: روش آزمایشگاهی و روش محاسبات تئوری. اطلاعات دقیق در مورد یک فرآیند فیزیکی غالباً توسط اندازه گیری عملی بدست می آید. این روش از دیر باز روشی مطمئن بوده و هم اکنون نیز برای بررسی صحت نتایج حاصل از روشهای دیگر، مخصوصاً روشهای عددی مورد استفاده قرار می گیرد. محاسبات تئوری را نیز می توان به نوبه خود به دو دسته تقسیم نمود: یکی روش تحلیلی و تئوریک و دیگری روش عددی.

در ادامه به طور خلاصه در مورد هر یک شرح داده می شود. در روش تئوریک با استفاده از معادلات دیفرانسیل سعی می شود که حلی دقیق برای مسائل پیدا شود. مسلماً با این روش قادر به حل بیشتر مسائل نمی باشیم. بدلیل اینکه مسائل را باید با یک معادله دیفرانسیل تقریب بزنییم، که در اکثر موارد بعلت وجود ترمهای غیر خطی و بوجود آمدن معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، حل غیر ممکن می باشد.

امروزه روشهای عددی، به عنوان ابزاری مفید در تجزیه و تحلیل مسائل سیالات، شناخته شده است. اغلب تأسیسات مهندسی، کم و بیش با پدیده های متعددی از جریان سیال، سروکار دارند. بررسی هر مسئله ای در این تأسیسات، مستلزم بکارگیری اصول و روابط اساسی حاکم بر پدیده های فیزیکی مذکور می باشد. این اصول و قوانین حاکم بر آنها معمولاً به شکل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همراه با ضرائب غیر خطی بیان می شوند. به جز مدل های بسیار ابتدائی و حالت های استثنائی، حل این معادلات، صرفاً از طریق تحلیل ریاضی امکانپذیر نیست. معمولاً مسائل کاربردی، مدل های بسیار پیشرفته و پیچیده ای دارند. شکلهای هندسی پیچیده، تأثیرات متقابل پدیده های فیزیکی مختلف، وابستگی زمانی پدیده ها، وجود شرایط مرزی و محدودیت ناشی از رعایت جنبه های اقتصادی، نمونه هائی از ویژگیهای مدل های واقعی هستند که به هیچ وجه نمی توان به طور تحلیلی آنها را بررسی نمود. به ناچار باید به حل های عددی متوسل شد.

با وجود کامپیوتر های پیشرفته، روز بروز بر اهمیت روشهای عددی افزوده می گردد. حتی می توان اذعان نمود که برای پیچیده ترین پدیده های فیزیکی مورد نظر در محدوده کاربردهای مهندسی، به ویژه در زمینه مکانیک سیالات، این روش به درجه ای از اهمیت و ارزش رسیده است که هر فردی در این زمینه ها تحقیق می کند به ناچار باید به این دانش، تا اندازه ای مسلط شود. از میان روشهای موجود، روش احجام محدود از اعتبار خاصی برخوردار است.

مهمترین امتیاز یک روش محاسباتی عددی، پائین بودن هزینه آن است. نکته مثبت دوم این روش سرعت قابل ملاحظه ای که این روش دارد و می توان صدها ترکیب از حالت های مختلف را در کمتر از یک روز مورد مطالعه قرار داد و دیگر اینکه شرایط واقعی را می توان به آسانی شبیه سازی نمود.

مسلماً هر روش یک سری معایبی دارد که از معایب این روش: خطاهای روش محاسباتی، وجود بعضی شرایط مرزی که باعث واگرایی جواب می شود، می باشد. البته باید در بین روشهای عددی، روشی را انتخاب کرد که زمان کامپیوتری لازم برای همگرایی کمترین و نیز خطای آن کم باشد. پس به این نتیجه پی می بریم که برای مسائل مختلف روشهای عددی متفاوتی بکار می رود.

۱-۴-۱- روش تحقیق و مطالعه در این پژوهش

در این پژوهش به بررسی جریان آرام سیال نیوتنی بین استوانه های هم مرکز چرخان (جریان گردابه ای تیلور) با سطح بسته پرداخته می شود. جریان سیال بین دو استوانه با در نظر گرفتن نیروهای گریز از مرکز و گرادیانهای فشار در جهات محوری و شعاعی انجام می گیرد. همچنین اثرات عدد رینولدز چرخشی ولقی بین دو استوانه مورد بررسی قرار می گیرد. جهت پایداری جریان می توان از دو سیال مختلف و یا اعمال مکش در استوانه درونی، یا اعمال جریان محوری که باعث کاهش تنش برشی در دیواره ها می شود، استفاده نمود. (گردابه های تیلور تنش برشی را افزایش می دهند)

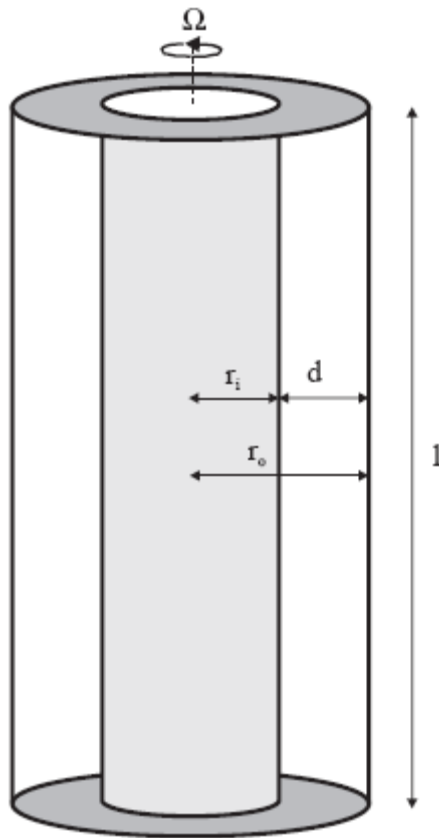
جهت حل معادلات حاکم بر جریان سیال، از روش احجام محدود استفاده شده است. در این روش میدان محاسباتی بصورت یک شبکه غیر یکنواخت، که در نزدیک دیواره ها، دارای تمرکز بیشتری بوده انتخاب گردیده و برای جلوگیری از ایجاد مشکل، در تهیه فرم انفصال گرادیان فشار و سرعت در معادلات ممنتوم و پیوستگی، از شبکه جابجا شده، در مقایسه با شبکه اصلی برای مؤلفه های سرعت، استفاده شده است. برای حل دستگاه معادلات جبری حاصله، ترکیب مناسبی از الگوریتم ماتریس سه قطری گوس سایدل استفاده شده است. همچنین از روش سیمپل در حل معادلات پیوستگی و ممنتوم برای محاسبه میدان سرعت و فشار بهره گرفته شده است.

۲-۱- مقدمه

جریانهای لزج بر اساس ساختمانهای داخلی آنها به دو رژیم آرام و درهم تقسیم بندی می شوند. در جریان آرام، ساختمان جریان با حرکت لایه ای مشخص می شود و در جریان درهم، ساختمان جریان بوسیله حرکات سه بعدی و تصادفی ذرات سیال که علاوه بر حرکت متوسط سیال می باشد، مشخص می شود. در جریان آرام، مخلوط شدن ماکروسکوپی لایه های مجاور وجود ندارد، ولی در جریانهای درهم وجود دارد. آرام و درهم بودن جریان به خواص جریان بستگی دارد. عدد رینولدز چرخشی (عدد تیلور) یک مقدار بحرانی دارد، که بالاتر از این مقدار، باعث ایجاد جریان در هم می شود. در این مطالعه عددی، تنها جریان آرام بررسی میشود.

۲-۲- هندسه جریان

ساختار کلی سیستم کوئت تیلور، در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. ترمهای مورد استفاده در پارامترهای بی بعد مسئله عبارتند از: شعاع استوانه درونی، r_i = شعاع استوانه بیرونی و l = ارتفاع سیلندرها، و پایداری جریان می تواند با نسبت شعاعی $\eta = \frac{r_i}{r_o}$ و عدد رینولدز چرخشی مشخص شود. عدد رینولدز $Re = \frac{\Omega r_i d}{\nu}$ تابعی از لقی $d = r_o - r_i$ ، نرخ چرخش استوانه درونی Ω و ویسکوزیته سینماتیکی ν است. در اعداد رینولدز کمتر از مقدار بحرانی، جریان بصورت جریان کوئت حلقوی پایدار خواهد بود. برای مقادیر فوق بحرانی گردابه های تیلور پدید می آیند.



شکل (۲-۱): هندسه استوانه های هم مرکز [۳]

۲-۳- معادلات حاکم بر جریان کوئت تیلور

در مختصات استوانه ای معادلات ناویر استوکس سه بعدی را با پارامتر های زیر بی بعد می کنیم:

سرعت های $(u_r^*, u_\theta^*, u_z^*)$ با پارامتر ΩR_1 ، مختصات فضائی (r^*, z^*) با $d = r_o - r_i$ و فشار P^* با $\rho \Omega^2 R_1^2$ بی بعد می شوند. پس برای جریان غیر قابل تراکم دائمی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + (U \cdot \nabla) u_r - \frac{(u_\theta)^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + (U \cdot \nabla) u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + (U \cdot \nabla) u_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} (\nabla^2 u_z) \end{aligned}$$

با توجه به نوع جریان و شرایط تقارن محوری، کل تغییرات درجهت چرخش صفر است $(\frac{\partial}{\partial \theta} = 0)$.

۲-۴- شرایط مرزی

شرط مرزی غیر لغزشی بصورت تابعی از $\eta = \frac{r_i}{r_o}$ بیان میشود. از آنجا که جریان تقارن محوری است،

داریم:

$$u_r(r, z, \theta) = u_z(r, z, \theta), \quad \text{for all } r, z, \theta$$

در صفحات انتهائی شرط مرزی پریودیک بصورت زیر برقرار است:

$$u_{\theta}(z=0) = u_{\theta}(z=h), \quad \frac{\eta}{1-\eta} \leq r \leq \frac{1}{1-\eta}$$

اگر سیلندر بیرونی ثابت باشد، پس:

$$u_{\theta} = 0 \quad r = \frac{1}{1-\eta} \quad 0 \leq z \leq h$$

برای سیلندر داخلی شرط مرزی دیریشله برقرار است:

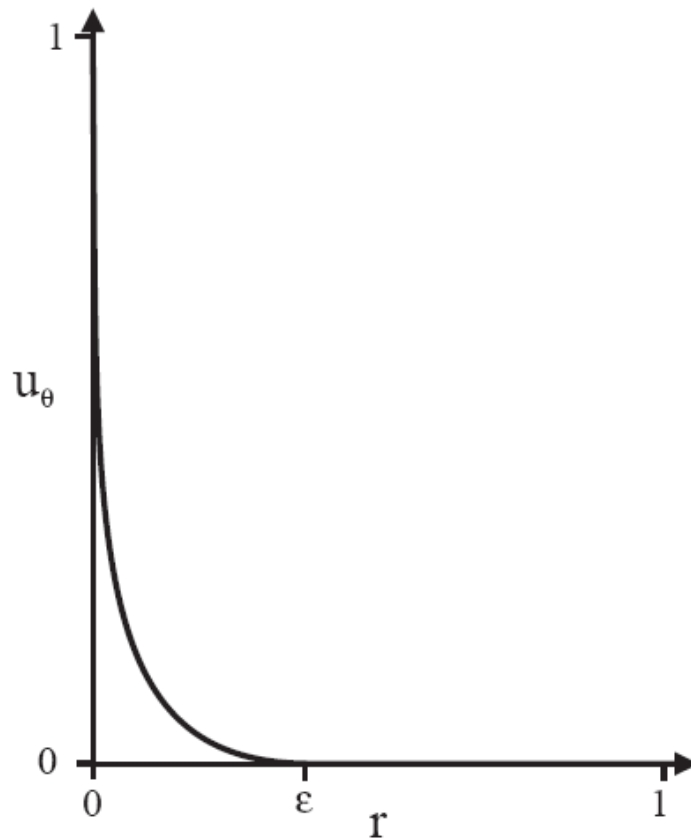
$$u_{\theta} = 1 \quad r \leq \frac{1}{1-\eta} \quad 0 \leq z \leq h$$

در سرعت‌های پائین استوانه درونی و جریان دائمی، گرادیان فشار تنها در جهت شعاعی بوجود می‌آید و هندسه جریان بگونه ایست که تنها مؤلفه غیر صفر سرعت، u_{θ} می‌باشد، که آن هم فقط تابعی از شعاع می‌باشد (شکل ۲-۲):

$$u_{\theta}(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} = -\Omega_1 \frac{\eta^2 - \mu}{1 - \eta^2}$$

$$B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = \Omega_1 \frac{R_1^2 (1 - \mu)}{1 - \eta^2}$$



شکل (۲-۲): توزیع سرعت جریان بین یک استوانه خارجی ثابت و استوانه داخلی چرخان با لقی بسیار کوچک [۳]

۳-۱- مقدمه

این قسمت اساسی ترین مرحله در پیکر بندی روش مورد استفاده، جهت حل معادلات است. در واقع در همین مرحله است، که نوع مسئله مورد حل و معادلاتی که برای تجزیه و تحلیل مورد استفاده قرار می گیرند، به طور مشخص نمایان می شوند.

۳-۲- انفصال در روش تفاضل محدود و مفهوم آن

شکل کلی معادله دیفرانسیل برای متغیر Φ به صورت معادله (۳-۱) معرفی می شود، که می خواهیم وسیله لازم جهت حل چنین معادله ای را پیدا کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho u \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_{\phi} \quad (۳-۱)$$

برای بدست آوردن این معادلات، بعضی فرضها در مورد اینکه Φ ، چگونه بین گره ها تغییر می کند، لازم است. اگر چه این پروفیل Φ می تواند طوری انتخاب شود که برای همه حوزه محاسباتی، تنها یک عبارت جبری کافی باشد، اغلب عملی تر است از پروفیلهای قطعه به قطعه استفاده گردد. بطوری که هر قطعه، تغییر Φ را فقط روی منطقه کوچکی برحسب مقادیر Φ در گره های بین و اطراف آن منطقه تشریح کند. لذا معمول است میدان محاسباتی را به تعدادی میدانهای کوچکتر یا اجزا تقسیم کنند، بطوری که بتوان برای هر میدان کوچک یک پروفیل جداگانه فرض نمود. بدین ترتیب ما با سیمای دیگری از مفهوم انفصال مواجه می شویم. حوزه محاسباتی پیوسته، نا پیوسته شده است. این انفصال سیستماتیک فضا و متغیرهای وابسته، امکان جانشین کردن معادلات ساده جبری که تقریباً به راحتی حل میشوند را فراهم کرده است.

۳-۲-۱- ساختمان معادله انفصال

یک معادله انفصال عبارت است از یک رابطه جبری، که مقادیر مربوط به دسته ای از گره ها را به هم ارتباط می دهد. چون این معادله از معادله دیفرانسیل حاکم بدست می آید، بنابراین می تواند با کمی تقریب، نتایج حاصل از حل دقیق را پیش بینی کند. وقتیکه تعداد گره ها خیلی زیاد شد، انتظار می رود جواب معادله دیفرانسیل متشابه نزدیک شود. این نتیجه از ملاحظه این موضوع بدست می آید که وقتی گره ها به هم نزدیک می شوند، تغییر Φ بین گره های همسایه کوچک شده، در نتیجه جزئیات توزیع فرضی، کم اهمیت می شود.

برای معادله دیفرانسیل معین، معادلات انفصال بدست آمده هرگز شبیه هم نخواهند شد، هر چند وقتی تعداد گره ها خیلی زیاد شود، انتظار می رود تمام معادلات انفصال در حد، جواب یکسان بدهند. علت اختلاف در معادلات انفصال، استفاده از توزیعهای فرضی مختلف و نیز تفاوت در روشهای بدست آوردن آنها می باشد.

۳-۲-۲- روشهای بدست آوردن معادلات انفصال

برای ایجاد یک معادله دیفرانسیل معلوم، معادلات انفصال لازم را از طرق بسیاری می توان بدست آورد. تعدادی از روشها عبارتند از:

(۱) استفاده از سری تیلور

(۲) استفاده از روش تغییرات^{۱۷}

(۳) روش باقیمانده های وزنی

(۴) استفاده از روش احجام محدود^{۱۸}

روشی که از آن استفاده شده است، روش چهارم یعنی بدست آوردن معادله انفصال با استفاده از احجام محدود است، که در قسمتهای بعد توضیح داده می شود.

^{۱۷} Variation

^{۱۸} Finite Volume

۳-۲-۳ بدست آوردن معادله انفصال با استفاده از حجم کنترل

یکی از روشهایی که از آن برای بدست آوردن معادلات انفصالی استفاده می شود، روش احجام محدود است، که از نظر درک، ساده و از نظر فیزیکی، قابل تفسیر است. در این روش میدان محاسباتی به تعدادی حجم کنترل به گونه ای تقسیم می شود که هر گره را یک حجم کنترل احاطه کرده و حجمهای کنترلی، دارای حجمهای مشترک با یکدیگر نباشند، ولی مرز بین آنها مشترک باشد. معادله دیفرانسیل روی هر یک از حجمهای کنترلی انتگرال گرفته می شود. برای متغیر Φ از یک توزیع خاص که تغییر Φ را بین گره ها بیان می کند، برای محاسبه انتگرالهای لازم استفاده می شود. حاصل، معادله انفصال است، که شامل مقادیر Φ برای گروهی از گره ها است. معادله انفصال بدست آمده، اصل بقاء Φ را برای حجم کنترلی محدود، بیان می دارد. درست همان گونه که معادله دیفرانسیل، آنرا برای یک حجم کنترلی بی اندازه کوچک بیان می کند.

مهمترین مزیت بدست آوردن معادله انفصال با استفاده از حجم کنترلی این است که، اصل بقاء برای کمیتهایی مانند جرم، مقدار حرکت و انرژی برای هر گروهی از حجمهای کنترلی و البته برای کل حوزه محاسباتی برقرار می باشد. این خاصیت برای هر تعداد از گره ها و حتی برای وقتی که تعداد گره ها کم باشد، صادق است. بنابراین حتی جواب مربوط به شبکه درشت، موازنه خوبی را نشان خواهد داد.

۳-۲-۳-۱- معادله دیفرانسیل کلی

همانطور که در قسمت قبل بیان شد، تمام معادلات دیفرانسیل حاکم را می توان به شکل کلی معادله (۳-۱)، برای کمیت وابسته Φ نوشت، که مقادیر Γ و S_{ϕ} به ترتیب، ضریب پخش مؤثر و جمله چشمه می باشند و به کمیت Φ بستگی دارند. با توجه به عمومیت معادله (۳-۱) برای یافتن توزیع کمیت Φ (که می تواند T, u, v, w باشد)، اقدام به حل عددی این معادله می گردد و حتی در برنامه کامپیوتری نیز

کافی است، یک رشته دستورات کلی جهت حل عددی این معادله نوشته شود. البته این دستورات برای هر کمیت Φ با مقادیر S_ϕ و Γ و شرایط مرزی مناسب، بکار برده می شود. بنابراین مفهوم معادله کلی ما را قادر می سازد، تا یک روش کلی عددی تنظیم نموده و برنامه کامپیوتری را طبق آن تهیه نمائیم.

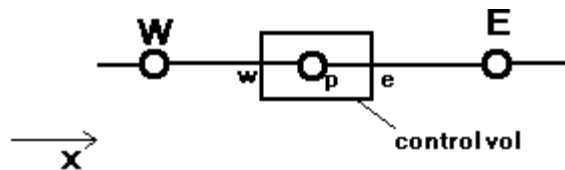
۳-۳-۴- طرحهای تفاضل مرکزی، بالا دست، نمائی، پیوندی، توانی

برای بدست آوردن معادله انفصال با استفاده از حجم کنترل، تا کنون طرحهای متفاوتی ارائه شده است. هر کدام از این روشها دارای مزیتها و معایبی می باشند. در این بخش به بررسی اجمالی چند روش مشهور، که دارای کاربرد زیادی می باشند، پرداخته و با ذکر محاسنات و معایب آنها مناسبترین روش را انتخاب و بکار می بریم. طرح انتخابی ما طرح توانی می باشد، که بطور کامل شرح داده می شود.

۳-۳-۴-۱- طرح تفاضل مرکزی

انتگرال معادله (۱-۳) روی حجم کنترلی نشان داده شده در شکل (۳-۱)، میدهد:

$$(\rho U \phi)_e - (\rho U \phi)_w = \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (۳-۲)$$



شکل (۳-۱): حجم کنترل عمومی برای مسئله ای یک بعدی [ت]

با بکار بردن یک پروفیل خطی قطعه به قطعه برای Φ داریم:

$$\frac{1}{2}(\rho U)_e(\phi_E - \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho U)_w(\phi_P - \phi_W) = \frac{\Gamma_e(\phi_E - \phi_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\Gamma_w(\phi_P - \phi_W)}{(\delta x)_w} \quad (3-3)$$

ضریب $1/2$ از فرض در وسط بودن وجوه، ظاهر شده است. برای تنظیم معادله به طور خلاصه تر، دو کمیت جدید F و D به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F = \rho U \quad D = \frac{\Gamma}{\delta X} \quad (4-3)$$

F مشخص کننده قدرت جابجائی است، در حالی که D ، ضریب هدایت کلی پخش می باشد. با کمیت های جدید، معادله انفصال می شود:

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (5-3)$$

که در آن:

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (3-6 \text{ الف})$$

$$a_W = D_w - \frac{F_w}{2} \quad (3-6 \text{ ب})$$

$$a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (3-6 \text{ ج})$$

همانگونه که ذکر شد، برای بدست آوردن معادله انفصال کلی، از فرض پروفیل خطی قطعه به قطعه برای تقریب تغییرات کمیت Φ به همراه تفاضل مرکزی^{۱۹}، استفاده شد و به همین دلیل، به اینگونه منفصل کردن، روش انفصال مرکزی گفته می شود، که نتیجه طبیعی فرمول سری تیلور می باشد. برای بررسی کردن این روش، یک مثال ساده را مورد بررسی قرار می دهیم که در آن:

$$D_e = D_w = 1 \quad , \quad F_e = F_w = 4$$

اگر مقادیر ϕ_E ، ϕ_W داده شود، می توانیم ϕ_P را از رابطه (۳-۵) بدست آوریم. دو دسته مقدار به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} \phi_E = 200, \quad \phi_W = 100 \Rightarrow \phi_P = 50 \\ \phi_E = 100, \quad \phi_W = 200 \Rightarrow \phi_P = 250 \end{cases}$$

چون ϕ_P نمی تواند خارج از میدان ۲۰۰-۱۰۰ ایجاد شده توسط همسایه هایش باشد، واضح است که این نتایج غیر واقعی است. ضعف روش: در حقیقت ما می توانیم این نتایج غیر واقعی را پیش بینی کنیم، زیرا معادلات (۳-۶)، مشخص می کنند که ضرائب می توانند در زمانهایی منفی شوند. وقتی $|F|$ بیشتر از $2D$ شود، در این صورت بسته به اینکه F مثبت یا منفی باشد، امکان منفی شدن ضرائب وجود دارد. این انحراف از قواعد اصلی بوده که ممکن است حاصلی ناخوشایند داشته باشد.

محدودیت روش: ضرائب منفی دلالت می کنند بر اینکه، مقدار a_p را که مساوی $\sum a_{nb}$ می باشد، کمتر از $\sum |a_{nb}|$ خواهد شد، که در این صورت در معیار اسکاربرو (در همین بخش بطور اجمال شرح داده می شود) صدق نخواهد کرد. بنابراین، حل نقطه به نقطه معادلات انفصال، ممکن است واگرا شود. حل مسائل جابجائی بوسیله این طرح، محدود به اعداد رینولدز کم می باشد.

^{۱۹} Central Difference

ضعف دیگر این روش این است که وقتی پخش صفر باشد ($\Gamma = 0$)، طرح منتهی به $a_p = 0$ می شود. در این صورت حل معادله (۳-۵)، توسط روش نقطه به نقطه و نیز بوسیله روشهای تکرار، نا مناسب خواهد بود.

۳-۲-۴-۲ طرح بالا دست^{۲۰}

بدلیل ضعف طرح تفاضل مرکزی، در این بخش به معرفی طرحی که دارای این ضعف نیست، پرداخته می شود. این طرح ابتدا توسط کورانت و همکارانش ارائه شده و مرتباً اصلاح و مورد استفاده مجدد قرار گرفته است.

طرح بالا دست مشخص می کند که نقطه ضعف، در فرموله کردن اولیه این است که، خاصیت جابجائی ϕ_e در وجه مشترک، مساوی ϕ_p و ϕ_E فرض شده است، و لذا روش بهتری را پیشنهاد می کند. فرموله کردن جمله پخش، بدون تغییر باقی می ماند، اما جمله جابجائی از فرض زیر محاسبه می شود. مقدار ϕ در یک وجه مشترک، مساوی با مقدار ϕ در گره بالا دست آن وجه می باشد. یعنی:

$$F_e > 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_e = \phi_p \quad (۳-۷الف)$$

(۳-۷ب)

$$F_e < 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_e = \phi_E$$

با استفاده از عملگر $\|A, B\|$ ، که دلالت بر مقدار بزرگتر A, B می کند، می توان روابط شرطی (۳-۷) را خلاصه تر نوشت:

$$F_e \phi_e = \phi_p \|F_e, 0\| - \phi_E \| -F_e, 0\| \quad (۳-۸)$$

^{۲۰} Upwind Difference or Upstream Difference

با استفاده از مفهوم ضرائب معادله:

$$A_E = D_e + \|-F_e, 0\| \quad (۳-۹الف)$$

$$A_W = D_w + \|-F_w, 0\| \quad (۳-۹ب)$$

$$A_P = A_E + A_W + (F_e - F_w) = \sum_i A_i + \Delta = D_e + \|F_e, 0\| + D_w + \|-F_w, 0\| + \Delta \quad (۳-۹ج)$$

بدیهی است از معادلات بالا، هیچ ضربی منفی نخواهد شد. بنابراین، جوابها از نظر فیزیکی همواره واقعی خواهند بود، و ملاک اسکاربرو صدق خواهد کرد.

ضعف روش:

این طرح در اعداد پکلت پائین، دارای خطای قابل ملاحظه ای می باشد. چون همیشه، جمله پخش را از یک پروفیل خطی $\phi \sim X$ محاسبه می کند، و بنابراین پخش را در مقادیر بزرگ $|P|$ ، اغراق آمیز برآورد می کند. عدد پکلت (P)، نسبت قدرتهای جابجائی و پخش است، یا به عبارت دیگر:

$$P = \frac{F}{D} \quad (۳-۱۰)$$

۳-۲-۴-۳- طرح نمائی

معادله دیفرانسیل حاکم (۱-۳) را، به شرط اینکه ضریب پخش Γ ثابت در نظر گرفته شود و جمله چشمه موجود نباشد، می توان به صورت دقیق حل نمود. برای بدست آوردن حل دقیق، ابتدا مؤلفه های افقی و عمودی شار کلی J را به فرم کلی زیر می نویسیم:

$$J_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (۱-۳ الف)$$

$$J_y = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (۱-۳ ب)$$

با این تعریف، معادله (۱-۳) بدون جمله چشمه برابر خواهد بود با:

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad (۱۲-۳)$$

که وقتی روی حجم کنترل نشان داده شده در شکل (۱-۳) انتگرال گرفته شود، میدهد:

$$(J_e - J_w) = 0 \quad (۱۳-۳)$$

با استفاده از تعریف (۱۱-۳) خواهیم داشت:

$$(J_e - J_w) = \left[\left(\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \quad (۱۴-۳)$$

رابطه قبلی را به دو قسمت تفکیک می کنیم. پس:

$$J_e = \left[(\rho u \phi)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \right] \Delta y \quad (۱۵-۳ الف)$$

$$J_w = \left[(\rho u \phi)_w - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \quad (16-3) \text{ ب}$$

هر یک از این دو رابطه را می توان به عنوان یک معادله دیفرانسیل معمولی برای ϕ در نظر گرفت، که می توان به طور دقیق حل نمود تا توزیع قطعه ای کمیت ϕ ، بین دو نقطه شکل به دست آید. به عنوان نمونه رابطه (16-3) را در نظر می گیریم:

$$\rho \frac{u_e}{\Gamma_e} \phi_E - \frac{\partial \phi_E}{\partial x} = \frac{J_e}{\Delta y \Gamma_e} = const. \quad (17-3)$$

حل عمومی معادله دیفرانسیل فوق به فرم زیر می شود:

$$\phi_E = B \exp\left(\frac{\rho u}{\Gamma_e} x\right) + \frac{J_e}{\rho u_e \Delta y} \quad (18-3)$$

شرط مرزی عبارت است از:

$$x = 0 \quad \phi = \phi_P$$

$$x = (\delta x)_e \quad \phi = \phi_E$$

پس از محاسبه B، مقدار ϕ_E به شکل زیر می شود:

$$\phi_E = \left(\phi_p - \frac{J_e}{\rho u_e \Delta y} \right) \exp\left(\frac{\rho u}{\Gamma_e} x \right) + \frac{J_e}{\rho u_e \Delta y} \quad (19-3)$$

مقدار J_e از رابطه زیر بدست می آید:

$$J_e = \frac{\phi_p \exp(P_e) - \phi_E}{\exp(P_e) - 1} F_e \quad (20-3)$$

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} = \frac{\rho u_e}{\left(\frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \right)} \quad (21-3)$$

به همین طریق برای سایر سطوح کنترل خواهیم داشت:

$$J_w = \frac{\phi_w \exp(P_w) - \phi_p}{\exp(P_w) - 1} F_w \quad (22-3)$$

عدد پکلت برای سایر سطوح کنترل، همانند P_e تعریف می گردد.

با جایگزین کردن معادلات بالا در معادله (3-13) و با در نظر گرفتن جمله چشمه، معادله انفصال زیر

حاصل خواهد شد:

$$\left[\frac{\exp(P_e) F_e}{\exp(P_e) - 1} + \frac{F_w}{\exp(P_w) - 1} \right] \phi_p = \left[\frac{F_e}{\exp(P_e) - 1} \right] \phi_E + \left[\frac{\exp(P_w) F_w}{\exp(P_w) - 1} \right] \phi_w \quad (23-3)$$

$$A_E = \frac{F_e}{\exp(P_e) - 1} \quad , \quad A_w = \frac{\exp(P_w)F_w}{\exp(P_w) - 1} \quad (24-3)$$

ضرائب فوق، ضرائب مربوط به طرح نمائی می باشند. فرم معادله انفصال، در نهایت به این صورت در خواهد آمد:

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_w \phi_w + S_\phi \quad (25-3)$$

$$A_p = A_E + A_w + \Delta \quad (26-3)$$

$$\Delta = (F_e - F_w) \quad (27-3)$$

وقتی این طرح، برای شبکه یک بعدی ماندگار استفاده می شود، تولید جواب دقیق را برای هر تعداد از گره های شبکه تضمین می کند. علیرغم رفتار بسیار مطلوب، کاربرد زیادی ندارد.

۳-۲-۴-۴- طرح پیوندی

طرح پیوندی^{۲۱}، توسط اسپالدینگ تکمیل شده و در کتاب پاتانکار تحت عنوان اصلاح شار جانبی بالا^{۲۲}، آمده است. برای مقایسه طرح پیوندی و طرح نمائی منحنی تغییرات $\frac{A_E}{D_e}$ به عنوان تابعی از عدد پکلت

P_e رسم میشود. از معادله (۳-۲۴) داریم:

$$\frac{A_E}{D_e} = \frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} \quad (۳-۲۸)$$

از شکل (۳-۲) دیده می شود، که برای مقادیر مثبت P_e ، گره E همسایه پایین دست بوده و دیده می شود که اثرش با افزایش P_e ، کاهش پیدا می کند. وقتی P_e منفی است، همان همسایه بالا دست می باشد و اثر زیادی دارد. مشخصات معینی از تغییر دقیق $\frac{A_E}{D_e}$ را که در شکل، با خط پر نشان داده شده است، می توان به صورت زیر بیان کرد:

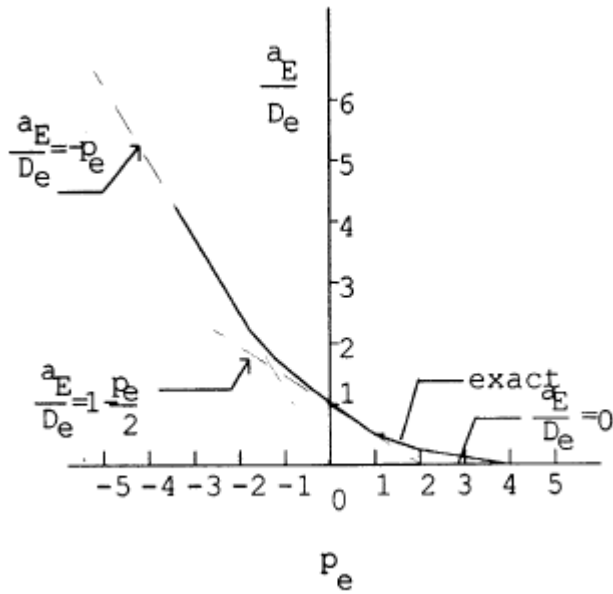
$$\text{اگر } P_e \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{A_E}{D_e} \rightarrow -P_e \quad (۳-۲۹\text{الف})$$

$$\text{اگر } P_e = 0 \Rightarrow \frac{A_E}{D_e} \rightarrow 1 - \frac{P_e}{2} \quad (۳-۲۹\text{ب})$$

$$\text{اگر } P_e \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{A_E}{D_e} \rightarrow 0 \quad (۳-۲۹\text{ج})$$

^{۲۱} The Hybrid Scheme

^{۲۲} High Lateral Flux Modification



شکل (۲-۳): تغییرات a_E نسبت به عدد پکلت [ت]

در شکل (۲-۳)، همچنین سه خط مستقیمی که نشاندهنده این حالت‌های حدی می باشند، ترسیم شده است. می بینیم که آنها بر منحنی دقیق، مماس بوده و یک تقریب منطقی از آن را نشان میدهند. در واقع طرح پیوندی از این سه خط مستقیم ساخته می شود. بطوریکه :

(۳-۳۰الف)

$$P_e < -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_E}{D_e} = -P_e$$

$$-2 \leq P_e \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_E}{D_e} = 1 - \frac{P_e}{2} \quad (۳-۳۰ب)$$

$$P_e > 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_E}{D_e} = 0 \quad (۳-۳۰ج)$$

با استفاده از همان عملگری که قبلاً بدان اشاره شد، می توان نوشت:

$$A_E = \left\| -F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right\| \quad (3-31 \text{ الف})$$

$$A_W = \left\| -F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0 \right\| \quad (3-31 \text{ ب})$$

اگر مقادیر عدد پکلت، در محدوده $-2 \leq P_e \leq 2$ باشند، طرح پیوندی شبیه طرح تفاضل مرکزی می باشد.

اگر مقادیر عدد پکلت، خارج از این محدوده باشند، طرح پیوندی به طرح بالا دست، که در آن پخش مساوی صفر قرار داده شده است، تبدیل می شود. بنابراین، نارسائی های طرح بالا دست که در بخشهای قبل گفته شد، در طرح پیوندی وجود ندارد.

از شکل (3-2) چنین استخراج می شود که، انحراف طرح پیوندی از منحنی دقیق در $P_e = \pm 2$ نسبتاً زیاد است، همچنین بنظر می رسد که مناسب نیست به محض اینکه $|P_e|$ از 2 بیشتر شد، اثرات پخش را مساوی صفر قرار دهیم. تقریب بهتری برای منحنی دقیق، توسط قاعده طرح توانی داده شده است، که در زیر مختصراً بدان پرداخته می شود.

3-2-4-5- طرح قاعده توانی

همانگونه که بیان شد، تقریب بهتر به طرح نمائی، طرح قاعده توانی می باشد، که توسط پاتانکار [۱] ارائه شده است.

گرچه روابط طرح قاعده توانی تا اندازه ای پیچیده تر از طرح پیوندی می باشند، اما محاسبه آنها سنگین نیست، و بعلاوه نمایش بسیار خوبی از رفتار طرح نمائی را ارائه می دهند. مطابق این طرح ضریب A_E به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\frac{a_E}{D_e} = -P_e \quad P_e < -10 \quad (3-32 \text{ الف})$$

$$\frac{A_E}{D_e} = (1 + 0.1P_e)^5 - P_e \quad -10 \leq P_e < 0 \quad (3-32 \text{ ب})$$

-۳)

$$\text{ج} \quad \frac{A_E}{D_e} = (1 - 0.1P_e)^5 \quad 0 \leq P_e \leq 10$$

$$\frac{A_E}{D_e} = 0 \quad P_e > 10 \quad (3-32 \text{ د})$$

از مقایسه این روابط با معادلات مربوط به طرح پیوندی مشاهده می کنیم که برای $|P_e| > 10$ ، طرح قاعده پیوندی، مشابه طرح توانی می شود. اگر از عملگر قبل استفاده کنیم، روابط بالا به شکل زیر در می آیند:

$$A_E = D_e \left\| \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1|F_e|}{D_e} \right)^5 \right\| + \left\| 0, -F_e \right\| \right\| \quad (3-33 \text{ الف})$$

$$A_w = D_w \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1|F_w|}{D_w} \right)^5 \right\| + \|0, -F_w\| \quad (3-33\text{ب})$$

۳-۲-۵- شکل تفاضل محدود معادله کلی

برای انفصال معادله (۳-۱)، یک حجم کنترل مطابق شکل (۳-۳)، در نظر می گیریم. این حجم کنترل حول نقطه P قرار دارد و با حجم کنترلهای N,E,W,S همسایه می باشد. محل سطوح حجم کنترل با حروف کوچک n,e,w,s نشان داده شده است. این حجم کنترل طوری در نظر گرفته شده است که برای مختصات قطبی مورد استفاده قرار گیرد.

با فرض جریان دائمی و خواص ثابت، معادله (۳-۱) بفرم زیر تبدیل می شود:

$$\rho[\nabla \cdot (\nabla \phi)] - \Gamma \nabla^2 \phi = S_\phi \quad (3-34)$$

عملگرهای دیورژانس و لاپلاسین در مختصات قطبی، بدین صورت تعریف می شوند:

$$\nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial}{\partial R} (V_r \phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \phi) \quad (3-35)$$

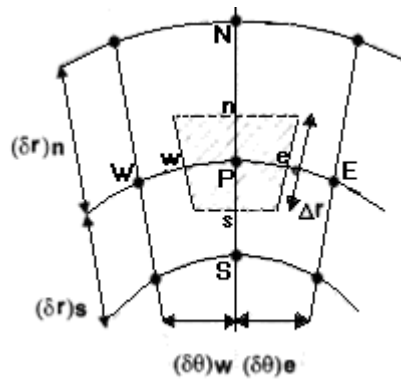
$$\nabla^2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

معادله دیفرانسیل کلی در مختصات قطبی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\left[\rho \frac{\partial}{\partial R} (V_r \phi) - \Gamma \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right) \right) \right] + \left[\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \phi) - \Gamma \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right] = S_\phi$$

(I) (II)

(۳۶-۳)



شکل (۳-۳): حجم کنترلی در مختصات قطبی [ت]

حال با استفاده از روش احجام محدود، به انفصال معادله دیفرانسیل کلی می پردازیم. با انتگرالگیری از این معادله، روی حجم کنترل P داریم:

$$\int_{\theta_w, r_s}^{\theta_e, r_n} \left[\rho V_r \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Gamma \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \phi}{\partial R} \right) \right) \right] R dR d\theta + \quad (37-3)$$

$$\int_{r_s, \theta_w}^{r_n, \theta_e} \left[\frac{\rho}{R} V_\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \Gamma \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right] R d\theta dR = \int_{r_s, \theta_w}^{r_n, \theta_e} S_\phi R d\theta dR$$

انتگرال جملات اول و دوم سمت چپ معادله فوق، به ترتیب برابر است با:

$$I = \left[\left(\rho V_r \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_n R_n - \left(\rho V_r \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial R} \right)_s R_s \right] \Delta \theta \quad (38-3)$$

$$II = \left[\left(\rho V_\theta \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_e R_e - \left(\rho V_\theta \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_w R_w \right] R \Delta \theta \quad (39-3)$$

با بکار بردن یک پروفیل خطی برای تغییرات ϕ ، مقدار این کمیت در سطوح کنترل به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2}, \quad \phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2}, \quad \phi_n = \frac{\phi_P + \phi_N}{2}, \quad \phi_s = \frac{\phi_P + \phi_S}{2}$$

(40-3)

همچنین با استفاده از تقریب تفاضل مرکزی برای تقریب گرادیان ϕ روی سطوح حجم کنترل، داریم:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial R}\right)_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta r)_n} \quad , \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial R}\right)_s = \frac{\phi_P - \phi_S}{(\delta r)_s} \quad (۴۱-۳)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta \theta)_e} \quad , \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right)_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{(\delta \theta)_w}$$

اگر علائم F و D بصورت زیر تعریف شوند:

$$F_e = (\rho V_\theta)_e \Delta r \quad , \quad F_w = (\rho V_\theta)_w \Delta r \quad (۴۲-۳ \text{ الف})$$

$$F_n = (\rho V_r)_n r_n \Delta \theta \quad , \quad F_s = (\rho V_r)_s r_s \Delta \theta$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e \Delta r}{r_e (\delta \theta)_e} \quad , \quad D_w = \frac{\Gamma_w \Delta r}{r_w (\delta \theta)_w} \quad (۴۲-۳ \text{ ب})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n r_n \Delta \theta}{(\delta r)_n} \quad , \quad D_s = \frac{\Gamma_s r_s \Delta \theta}{(\delta r)_s}$$

که F و D، بترتیب بیانگر قدرت جابجائی و ضریب نفوذ می باشند. بدیهی است که D، همواره مقداری مثبت است، در حالیکه F، بسته به جهت جریان، می تواند مقداری مثبت یا منفی داشته باشد.

با جایگزینی روابط (۳-۴۰) تا (۳-۴۲) در رابطه (۳-۳۹) داریم:

$$I = F_n \phi_n - F_s \phi_s - [D_n(\phi_n - \phi_p) + D_s(\phi_p - \phi_s)] \quad (۳-۴۳\text{الف})$$

$$II = F_e \phi_e - F_w \phi_w - [D_e(\phi_e - \phi_p) + D_w(\phi_p - \phi_w)] \quad (۳-۴۳\text{ب})$$

که پس از مرتب کردن رابطه فوق داریم:

$$I = \left[\left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) + \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \right] \phi_p - \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_e - \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_w \quad (۳-۴۴\text{الف})$$

$$II = \left[\left(D_n + \frac{F_n}{2} \right) + \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right) \right] \phi_p - \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right) \phi_n - \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right) \phi_s \quad (۳-۴۴\text{ب})$$

با تعاریف زیر، می توان معادلات را بفرم ساده تری بیان کرد:

$$A_E = D_E - \frac{F_e}{2} \quad , \quad A_W = D_w - \frac{F_w}{2}$$

$$A_N = D_n - \frac{F_n}{2} \quad , \quad A_S = D_s - \frac{F_s}{2}$$

(۳-۴۵\text{ب})

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S + \Delta = \sum A_{nb} + \Delta \quad (3-45\text{ج})$$

$$\Delta = (F_e - F_w) + (F_n - F_s) \quad (3-45\text{د})$$

$$S_\phi = s_\phi R \Delta \theta \Delta R = s_\phi vol \quad (3-45\text{هـ})$$

و یا:

$$I = [A_E + A_W + (F_e - F_w)]\phi_P - A_E\phi_E - A_W\phi_W \quad (3-46\text{الف})$$

$$I = [A_E + A_W + (F_e - F_w)]\phi_P - A_E\phi_E - A_W\phi_W \quad (3-46\text{ب})$$

$$II = [A_N + A_S + (F_n - F_s)]\phi_P - A_N\phi_N - A_S\phi_S$$

که پس از جایگذاری در رابطه (3-35) داریم:

$$A_p\phi_P = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + S_\phi = \sum A_{nb}\phi_{nb} + S_\phi \quad (3-47)$$

معادله (3-47)، فرم کلی معادله منفصل شده برای حجم کنترل P می باشد. این معادله تأثیر پذیری مقدار کمیت ϕ در نقطه P را، از مقادیر همسایه اش، در اثر فرآیندهای جابجایی و نفوذ، بصورت یک رابطه جبری نشان می دهد. از نظر فیزیکی، تغییرات مقدار کمیت ϕ در یک نقطه از شبکه، باید با تغییرات مقدار ϕ در نقاط همسایه، هم جهت باشد. به عبارت دیگر ضرائب معادله مذکور، یعنی

A_S, A_N, A_W, A_E, A_P باید هم علامت باشند. همچنین از معادله انفصال مشاهده می شود که علاوه بر نقاط همسایه، جمله چشمه S_ϕ نیز بر روی ϕ_P تأثیر می گذارد. در صورتیکه S_ϕ مثبت باشد، باید موجب افزایش کمیت ϕ ، و اگر S_ϕ منفی باشد، موجب کاهش آن شود. بنا براین برای رسیدن به جواب فیزیکی صحیح، ضریب A_P و در نتیجه ضرائب نقاط همسایه باید مثبت باشند:

$$A_P, A_E, A_W, A_N, A_S > 0 \quad (48-3)$$

عبارت Δ ظاهر شده در معادله (3-45)، نشاندهنده خالص جرم خروجی از حجم کنترل می باشد، و بصورت چشمه جرم عمل می کند. این عبارت در حقیقت شکل منفصل شده معادله پیوستگی می باشد، لذا برای ارضاء معادله پیوستگی، این مقدار باید صفر شود. در صورتیکه مقدار Δ کمتر از صفر شود، مقدار آن باید برابر صفر قرار داده شود، تا از انباشته شدن جرم در حجم کنترل، جلوگیری شود. بنابراین ضریب A_P بصورت زیر اصلاح می شود:

$$A_P = \sum A_{nb} + \max(\Delta, 0) \quad (49-3)$$

3-2-5-1- خطی کردن جمله چشمه

جمله چشمه ظاهر شده در معادله (3-47)، اغلب تابعی از خود متغیر ϕ می باشد، و بنابراین شناخت این وابستگی برای انفصال معادله کلی، لازم می باشد. با توجه به اینکه معادله انفصال فقط بوسیله روشهای مربوط به معادلات جبری خطی قابل حل می باشند، لذا برای خطی ماندن معادله انفصال، عملاً می توانیم یک ارتباط خطی برای وابستگی مذکور در نظر بگیریم. معمولاً مقدار S_ϕ بصورت زیر با یک رابطه خطی بیان می شود:

$$S_\phi = S_c + S_p \phi_P \quad (50-3)$$

که در آن S_ϕ ، بیانگر قسمت ثابت و S_p ، ضریب ϕ_P می باشد.

وقتی جمله چشمه به این صورت خطی می شود، ضریب S_p همیشه باید کوچکتر یا مساوی صفر باشد، چون در غیر اینصورت ممکن است باعث منفی شدن ضریب A_p شود. در صورتیکه S_ϕ یک تابع غیر خطی از ϕ باشد، باید آنرا خطی نمود، یعنی باید مقادیر S_p ، S_C را مشخص کرد. خطی کردن جمله چشمه، به S_ϕ بستگی دارد، ولی در هر صورت باید نمایش خوبی از ارتباط ϕ و S_ϕ باشد و همانطور که ذکر شد، مثبت نبودن S_p باید رعایت شود.

۳-۲-۵-۲- ضریب زیر تخفیف

برای اینکه در حل معادلات منفصل شده، که بروش تکرار صورت می گیرد، از بروز واگرایی جلوگیری شود، بکاربردن ضریب زیر تخفیف، بسیار مفید خواهد بود. برای اعمال این ضریب، معادله انفصال کلی (۳-۴۷) را بصورت زیر می نویسیم:

$$\phi_p = \frac{\sum A_{nb} \phi_{nb} + S_\phi}{A_p} \quad (۳-۵۱)$$

اگر ϕ_p^* را، که بیانگر مقدار ϕ_p از تکرار قبلی می باشد، به طرف راست معادله فوق، اضافه و کم کنیم:

$$\phi_p = \phi_p^* + \left(\frac{\sum A_{nb} \phi_{nb} + S_\phi}{A_p} - \phi_p^* \right) \quad (۳-۵۲)$$

مقدار داخل پرانتز، تغییر ϕ_p را در خلال عمل تکرار نشان می دهد. این تغییر را با وارد کردن ضریب زیر تخفیف α ، بصورت زیر اصلاح می کنیم:

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha \left(\frac{\sum A_{nb} \phi_{nb} + S_\phi}{A_p} - \phi_p^* \right) \quad (۳-۵۳)$$

و یا:

$$\frac{A_P}{\alpha} \phi_P = \sum A_{nb} \phi_{nb} + S_\phi + (1-\alpha) \frac{A_P}{\alpha} \phi_P^* \quad (54-3)$$

توجه داریم که وقتی محاسبات همگرا شوند، یعنی ϕ_P برابر ϕ_P^* شود، مقادیر همگرا شده ϕ_P ، که از معادله (54-3) بدست می آید، حتماً در معادله اصلی (47-3) صدق می کند. معمولاً مقدار مناسب α را می توان از طریق تجربه محاسباتی بدست آورد.

3-2-6- شکل نهائی معادله انفصال

با توجه به روابط ارائه شده در بخشهای قبلی، معادله انفصال (47-3) به شکل زیر درمی آید:

$$\frac{\sum A_{nb} + \max(\Delta, 0)}{\alpha} \phi_P = \sum A_{nb} \phi_{nb} + (S_\phi + \max(\Delta, 0) \phi_P^*) + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} (\sum A_{nb}) \phi_P^* \quad (55-3)$$

با خلاصه کردن رابطه فوق خواهیم داشت:

$$A_P \phi_P = \sum A_{nb} \phi_{nb} + S \quad (56-3)$$

بطوریکه:

$$\sum A_{nb} = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (57-3)$$

$$A_E = D_e \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1|F_e|}{D_e} \right)^5 \right\| + \|0, -F_e\| \quad (3-58الف)$$

$$A_w = D_w \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1|F_w|}{D_w} \right)^5 \right\| + \|0, F_w\| \quad (3-58\text{ب})$$

$$A_n = D_n \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1|F_n|}{D_n} \right)^5 \right\| + \|0, -F_n\| \quad (3-58\text{ج})$$

$$A_s = D_s \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1|F_s|}{D_s} \right)^5 \right\| + \|0, F_s\| \quad (3-58\text{د})$$

$$A_p = \frac{\sum A_{nb} + \|\Delta, 0\|}{\alpha} - S_p \quad (3-59\text{الف})$$

$$S = S_c + \left[\|\Delta, 0\| + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} (\sum A_{nb}) \right] \phi_p^* \quad (3-59\text{ب})$$

$$\Delta = (F_e - F_w) + (F_n - F_s) \quad (3-60)$$

معادله (3-56)، شکل نهائی معادله انفصال را نشان می‌دهد و معادلات (3-57) تا (3-59)، ضرائب این معادله را مشخص می‌کنند.

در فصل چهارم، اعمال این روش روی معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان کوئت-تیلور، شرح داده می‌شود.

۴-۱- مقدمه

معادلات دیفرانسیل خاصی که با آنها مواجه هستیم، بیان کننده یک اصل بقاء معین می باشند. هر معادله، یک کمیت فیزیکی معین را به عنوان متغیر وابسته خود بکار برده، و یک موازنه بین عوامل مختلف اثر کننده بر متغیر مذکور را بیان می کند. متغیر های وابسته این معادلات دیفرانسیلی، معمولاً خواص مخصوص هستند، یعنی کمیت‌هایی که برمبنای واحد جرم تعریف می شوند. مثالها عبارتند از: کسر جرمی، سرعت و آنتالپی مخصوص. در یک معادله دیفرانسیل از این نوع، هر جمله، تغییرات را براساس واحد حجم، نشان می دهد.

در نوشتن معادله مقدار حرکت برای یک سیال نیوتونی، باید اولاً تنشهای برشی و تنشهای عمودی هر دو مورد توجه قرار گیرند؛ ثانیاً، قانون گرانروی استوکس اعمال شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \text{div}(\rho Uu) = \text{div}(\mu \text{grad}u) - \frac{\partial P}{\partial x} + B_x + V_x$$

که در معادله بالا، V_x ، جمله های ناشی از لزجت و B_x ، مؤلفه x نیروی بدنی را نشان می دهند. در جریان های متلاطم، معادلات جریان ناپایا، با متوسط گرفتن، تبدیل به معادلات متوسط زمانی می شوند. جمله های اضافی که از این عمل حاصل می شوند، تنشهای رینولدز نامیده می شوند. معادله دیفرانسیل کلی، برای متغیر ϕ ، بصورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}(\rho u\phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S$$

که Γ ، نشاندهنده ضریب پخش، S ، جمله چشمه و $(\rho u\phi)$ جمله جابجائی را نشان می دهند. در استفاده از روش انفصال، جهت حل معادلات، رعایت چهار قاعده زیر الزامی است:

(۱) سازگاری در وجوه حجم کنترل: وقتی یک وجه بین دو حجم کنترل مشترک است، باید شار عبور کننده از آن در معادلات انفصال مربوط به دو حجم کنترلی با عبارت یکسان نشان داده شود.

(۲) ضرائب مثبت: همیشه تمام ضرائب بدست آمده در معادله انفصال باید مثبت باشند.

۳) خطی کردن جمله چشمه باشیب منفی: وقتی جمله چشمه به صورت $\bar{S} = S_c + S_p T_p$ خطی می شود، ضریب S_p باید همیشه، کمتر یا مساوی صفر باشد.

۴-۲- حل عددی معادلات دیفرانسیل

هدف از این بررسی، مطالعه جریان سیال در سیستم کوئت تیلور (استوانه های هم مرکز چرخان)، با استفاده از کدی که توسط چن^{۲۳} [۱]، به عنوان نقطه شروعی برای کارهای عددی نوشته شد، می باشد. کد فرتن مورد نظر جهت شبیه سازی جریان غیر قابل تراکم داخل دیسک های دوار سه بعدی با تقارن محوری، نوشته شده است. کد، شامل کلیدی (انتخابی) برای محاسبات جریان آرام یا توربولانت می باشد و از روش سیمپل^{۲۴} یا سیمپل سی^{۲۵} با یک شبکه بندی غیر یکنواخت استفاده میکند. روش محاسبه ارائه شده، معادلات غیر خطی کوپله را با استفاده از روش تکرار حل می کند. فن تکرار، معمولاً معادلات مورد استفاده ما را که غیر خطی و به هم مربوط هستند، ظاهراً به شکل خطی در آورده و ضرائب را از مقادیر تکرار قبلی محاسبه می کند. معادلات جبری ظاهراً خطی هر یک از متغیرهای وابسته، توسط یک روش تکرار، حل می شوند. با توجه به بررسی جریان آرام گردابه ای تیلور، توضیح مختصری درباره روش حل معادلات، در کد مورد نظر ارائه می شود. توضیح اینکه، صورت کلی معادلات ناویر استوکس سه بعدی، با وجود ترمهای تنش رینولدز، آمده است.

معادلات جریان رینولدز متوسط تراکم ناپذیر حالت پایدار سه بعدی، در یک سیستم مختصات قطبی - استوانه ای ثابت (r, ϕ, z) با مؤلفه های سرعت V_r, V_ϕ, V_z به صورت زیر نوشته می شود:

^{۲۳} Chen 1997

^{۲۴} Simple

^{۲۵} Simplec

معادله پیوستگی:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (1-4)$$

معادله ممنتوم در جهت r:

$$\begin{aligned} \rho \left(V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{V_\phi^2}{r} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} \\ -\rho \left(\frac{\partial(\overline{V_z V_r})}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\overline{V_r V_r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\overline{\partial V_r V_\phi})}{\partial \phi} - \frac{\overline{V_\phi V_\phi}}{r} \right) & \quad (2-4) \\ + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \partial V_r}{\partial r} \right) - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) & \end{aligned}$$

معادله ممنتوم در جهت ϕ :

(۳-۴)

$$\begin{aligned} \rho \left(V_z \frac{\partial V_\phi}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_\phi}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} - \frac{V_\phi V_r}{r} \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ -\rho \left(\frac{\partial(\overline{V'_z V'_\phi})}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \overline{V'_r V'_\phi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\overline{\partial V'_\phi V'_\phi})}{\partial \phi} + \frac{\overline{V'_r V'_\phi}}{r} \right) \\ + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \partial V_\phi}{\partial r} \right) - \frac{V_\phi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

معادله ممنتوم در جهت z :

$$\begin{aligned} \rho \left(V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\phi}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \\ -\rho \left(\frac{\partial(\overline{V'_z V'_z})}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \overline{V'_r V'_z})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\overline{\partial V'_z V'_\phi})}{\partial \phi} \right) \\ + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (۴-۴)$$

در اینجا (V'_r, V'_ϕ, V'_z) ، مؤلفه های نوسانی سرعت، در جهات (r, ϕ, z) می باشد. ترم هائی به فرم $(\rho \overline{V'_i V'_j})$ در معادلات بالا، تنش های توربولانت یا رینولدزی می باشند. مدل های توربولانت برای محاسبه تنش های رینولدز و ارزیابی آنها به صورت ترم های سرعت جریان متوسط، استفاده می شود. در اینجا از ویسکوزیته ایزوتروپیک توربولانت استفاده شده، که برای جریان سه بعدی در مختصات قطبی- استوانه ای، می باشد.

$$\rho \overline{V'_r V'_r} = \frac{2}{3} \rho \kappa - 2\mu_t \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (5-4)$$

$$\rho \overline{V'_\phi V'_\phi} = \frac{2}{3} \rho \kappa - 2\mu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r}{r} \right) \quad (6-4)$$

$$\rho \overline{V'_z V'_z} = \frac{2}{3} \rho \kappa - 2\mu_t \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (7-4)$$

$$\rho \overline{V'_r V'_\phi} = -\mu_t \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} \right) \quad (8-4)$$

$$\rho \overline{V'_z V'_\phi} = -\mu_t \left(\frac{\partial V_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \phi} \right) \quad (9-4)$$

$$\rho \overline{V_r' V_z'} = -\mu_t \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \quad (10-4)$$

μ_t ویسکوزیته توربولانت می باشد، که از معادله کولموگروف^{۲۶} بدست می آید:

$$\mu_t = c_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon} \quad (11-4)$$

انرژی جنبشی توربولانت k ، به صورت زیر تعریف می شود:

-۴)

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{V_\phi'^2} + \overline{V_r'^2} + \overline{V_z'^2} \right) \quad k = \frac{1}{2} \left(\overline{V_\phi'^2} + \overline{V_r'^2} + \overline{V_z'^2} \right) \quad (12)$$

با جایگزینی توصیفات بالا برای تنش رینولدز در معادله ممنتوم، می توان به معادله ای به فرم زیر رسید:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V_r \Phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho V_\phi \Phi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_z \Phi) \quad (13-4)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + S_\Phi$$

^{۲۶} Kolmogorov

که Φ تغییرات ممنتوم تولید شده می باشد و $S\Phi$ (ترم چشمه خالص) برای هر یک از مؤلفه های ممنتوم متفاوت است. $\Gamma_z, \Gamma_\Phi, \Gamma_r$ ترم های انتشار مؤثر در جهت های شعاعی و محیطی و محوری است، که مؤلفه های توربولانت و آرام را شامل می شوند.

۴-۳- معادلات حجم محدود^{۲۷}

معادله حرکت (۴-۱۳) می تواند به فرم زیر نوشته شود:

$$\text{div}(\rho \bar{u}\Phi) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\Phi) + s_\Phi \quad (۴-۱۴)$$

که \bar{u} بردار سرعت است. با انتگرال گیری روی حجم و سطح:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \bar{u}\Phi) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad}\Phi) dA + \int_V s_\Phi dV \quad (۴-۱۵)$$

بهتر است که فلاکس پخش و جابجائی ترکیب شود:

(۴-)

$$\bar{I} = \rho \bar{u}\Phi - \Gamma \text{grad}\Phi \quad (۱۶)$$

$$\bar{I} = \rho \bar{u}\Phi - \Gamma \text{grad}\Phi$$

معادله (۴-۱۵) با استفاده از معادله (۴-۱۶) به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$\int_A \bar{I} dA = \int_V s_\Phi dV \quad (۴-۱۷)$$

^{۲۷} Finite Volume Equations

معادله (۱۷-۴) را میتوان با انتگرال گیری به فرم زیر جداسازی نمود:

$$\left(\bar{\Gamma.A}\right)_e + \left(\bar{\Gamma.A}\right)_w + \left(\bar{\Gamma.A}\right)_s + \left(\bar{\Gamma.A}\right)_n + \left(\bar{\Gamma.A}\right)_u + \left(\bar{\Gamma.A}\right)_d = s_\phi \delta V \quad (18-4)$$

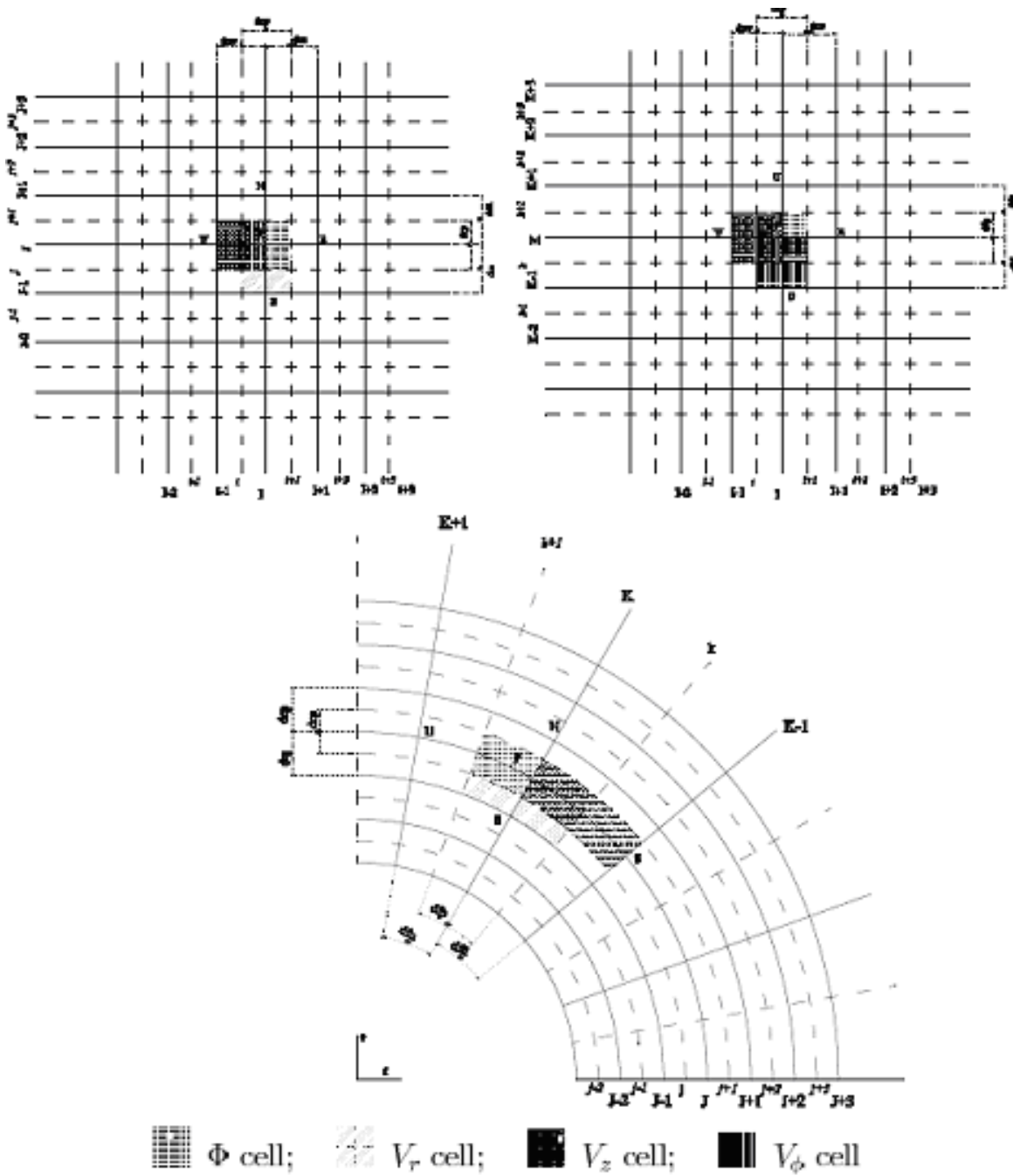
که d, u, s, n, w, e به وجوه حجم کنترل نسبت داده می شود. با توجه به حجم کنترل نشان داده شده در شکل ۱-۴ و دنبال کردن کارهای پاتانکار^{۲۸} [۱]، معادله (۱۸-۴) توصیف زیر را بدست می

دهد:

$$\begin{aligned} & \frac{r_n}{r_s} \left(\rho V_r \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_n A_n - \frac{r_n}{r_s} \left(\rho V_r \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_s A_s + \left(\rho V_z \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_e A_e - \\ & \left(\rho V_z \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_w A_w + \left(\rho V_\phi \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{r \partial \phi} \right)_u A_u - \left(\rho V_\phi \Phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{r \partial \phi} \right)_d A_d = S_\phi \delta V \end{aligned} \quad (19-4)$$

که A مساحت سطح حجم کنترل مربوطه می باشد ، δV حجم می باشد و S_ϕ مقدار متوسط ترم چشمه بر روی حجم کنترل می باشد.

^{۲۸} Patankar (1980)



شکل (۱-۴): ساختار شبکه بندی حجم محدود

در حالت کاربردی، ممکن است ترم چشمه تابعی از مقادیر وابسته باشد. در بعضی موارد روش احجام محدود، ترم چشمه را به فرم خطی تقریب می زند. ($s_p \leq 0$)

$$s_\Phi \delta V = s_u + s_p \Phi_p \quad (20-4)$$

با استفاده از تقریب تفاضل مرکزی مرتبه دوم، توصیف زیر را می توان از معادله (۱۹-۴) بدست آورد:

$$a_p \Phi_p = a_w \Phi_w + a_e \Phi_e + a_s \Phi_s + a_n \Phi_n + a_u \Phi_u + a_d \Phi_d + s_u \quad (21-4)$$

با ضرایب مرکزی:

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + a_u + a_d - s_p \quad (22-4)$$

ضرایب این معادله به صورت زیر است:

$$a_w = \max\left(\frac{|C_w|}{2}, D_w\right) + \frac{C_w}{2} \quad (23-4)$$

$$a_e = \max\left(\frac{|C_e|}{2}, D_e\right) - \frac{C_e}{2} \quad (24-4)$$

$$a_s = \max\left(\frac{|C_s|}{2}, D_s\right) + \frac{C_s}{2} \quad (25-4)$$

$$a_n = \max\left(\frac{|C_n|}{2}, D_n\right) - \frac{C_n}{2} \quad (26-4)$$

$$a_D = \max\left(\frac{|C_D|}{2}, D_D\right) + \frac{C_D}{2} \quad (27-4)$$

$$a_U = \max\left(\frac{|C_U|}{2}, D_U\right) - \frac{C_U}{2} \quad (28-4)$$

که مقادیر C,D به صورت زیر محاسبه شده است:

Face	w	e	s	n	d	u
C	$(\rho V_z)_w A_w$	$(\rho V_z)_e A_e$	$(\rho V_r)_s A_s$	$(\rho V_r)_n A_n$	$(\rho V_\phi)_d A_d$	$(\rho V_\phi)_u A_u$
D	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta z_w}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta z_e}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta r_s}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta r_n}$	$\frac{\Gamma_d A_d}{r_p \delta \phi_d}$	$\frac{\Gamma_u A_u}{r_p \delta \phi_u}$

جدول (۴-۱): مقادیر C و D در معادله جداسازی شده

۴-۴- بدست آوردن مقادیر ترم چشمه (S_u, S_p)

مقادیر ترم چشمه معادلات جداسازی شده با استفاده از مقادیر متغیرهای متداول، ارزیابی می شوند. از آنجایی که شبکه بندی شطرنجی برای محاسبات مورد استفاده قرار می گیرد، میانمایی برای محاسبه ترم های گرادیان سرعت، که در برخی توزیع های ترم های چشمه ظاهر می شود، نیاز است.

ترم های چشمه ظاهر شده در معادلات حرکت به صورت زیر است، (با استفاده از شکل ۴-۱) که ترم هایی که زیر آنها خط کشیده شده ، تنها برای جریان توربولانت استفاده میشود:

ممنتوم در جهت ۲ :

$$\begin{aligned}
 s_u = & -(P_n - P_s)r_p \delta\phi_p \delta z_p - \frac{2}{3}(\rho_n \kappa_n - \rho_s \kappa_s)r_p \delta\phi_p \delta z_p + \rho V_{\phi p}^2 \delta r_p \delta\phi_p \delta z_p - \\
 & \frac{2\mu}{r_p}(V_{\phi u} - V_{\phi l})\delta r_p \delta z_p + \left[\frac{\mu_{te} V_{zen} - \mu_{te} V_{zes}}{\delta r_p} - \frac{\mu_{tw} V_{zwn} - \mu_{tw} V_{zws}}{\delta r_p} \right] r_p \delta r_p \delta\phi_p + \\
 & \left[\frac{\mu_{tu} V_{\phi un} - \mu_{tu} V_{\phi us}}{\delta r_p} - \frac{\mu_{td} V_{\phi dn} - \mu_{td} V_{\phi ds}}{\delta r_p} \right] r_p \delta r_p \delta z_p + \alpha_G \rho_p |V_{\phi p}| V_{rp} \delta r_p \delta z_p \delta\phi_p + \\
 & |C_n - C_s + C_e - C_w + C_d - C_u| V_{rp} r_p \delta z_p \delta\phi_p \delta r_p
 \end{aligned}$$

(۴-۲۹)

$$\begin{aligned}
 s_p = & -(2\mu_t + \mu) \frac{\delta r_p \delta\phi_p \delta z_p}{r_p} - |C_n - C_s + C_e - C_w + C_d - C_u| r_p \delta z_p \delta\phi_p \delta r_p \\
 & - \alpha_G \rho_p |V_{\phi p}| \delta r_p \delta z_p \delta\phi_p
 \end{aligned}$$

(۳۰-۴)

ممنتوم در جهت ϕ :

$$\begin{aligned}
s_u = & \left[\frac{\mu_m V_{mu} - \mu_n V_{nd} - \mu_{ts} V_{rsu} - \mu_{ts} V_{rsd}}{\delta\phi_n} \right] \delta z_P \delta\phi_P + (3\mu_t P + 2\mu)(V_{ru} - V_{rd}) \\
& \frac{\delta z_P \delta\phi_P}{r_P} + \left[\frac{\mu_{te} V_{zew} - \mu_{tw} V_{zww} - \mu_{tw} V_{zww} - \mu_{tw} V_{zwe}}{\delta\phi_e} \right] \delta r_P \delta\phi_P \\
& - \frac{2}{3} (\rho_u \kappa_u - \rho_d \kappa_d) \delta r_P \delta z_P - (P_u - P_d) \delta r_P \delta z_P + 2V_r (\mu_{tu} - \mu_{td}) \frac{\delta r_P \delta z_P}{r_P} + \\
& |C_n - C_s + C_e - C_w + C_d - C_u| V_{\phi P} r_P \delta z_P \delta r_P \delta\phi_P
\end{aligned} \tag{۳۱-}$$

۴)

$$\begin{aligned}
s_P = & -V_{\phi P} (\mu_m - \mu_{ts}) \delta z_P \delta\phi_P \frac{\mu_{tP} - \mu_P}{r_P} \delta z_P \delta\phi_P \delta r_P - \\
& |C_n - C_s + C_e - C_w + C_d - C_u| r_P \delta z_P \delta\phi_P \delta r_P
\end{aligned} \tag{۳۲-۴}$$

ممنتوم در جهت Z :

$$\begin{aligned}
s_u = & -(P_e - P_w) r_P \delta\phi_P \delta r_P + \left[r_n \mu_m (V_{me} - V_{mw}) - r_s \mu_{ts} (V_{rse} - V_{rsw}) \right] \delta\phi_P - \\
& \frac{2}{3} (\rho_e \kappa_e - \rho_w \kappa_w) r_P \delta r_P \delta\phi_P + \left[(\mu_{tue} V_{\phi ue} - \mu_{tuw} V_{\phi uw}) - (\mu_{tde} V_{\phi de} - \mu_{tdw} V_{\phi dw}) \right] \delta r_P + \\
& |C_n - C_s + C_e - C_w + C_d - C_u| V_{zP} r_P \delta z_P \delta\phi_P \delta r_P
\end{aligned} \tag{۳۳-۴}$$

$$s_p = |C_n - C_s + C_e - C_w + C_d - C_u| r_p \delta z_p \delta \phi_p \delta r_p$$

(۳۴-۴)

۴-۵- زیر تخفیف^{۲۹}

تخفیف به طور گسترده ای در راه حل های تکراری معادلات جبری برای توسعه دادن یا کاهش دادن تغییرات، از یک تکرار به تکرار بعد، مورد استفاده قرار می گیرد. روش اول فوق تخفیف و روش دوم را زیر تخفیف می گویند. روش فوق تخفیف کاربرد محدودی دارد، ولی روش زیر تخفیف روش بسیار کاربردی برای مسائل غیر خطی، برای جلوگیری از واگرایی در راه حل های تکراری می باشد. با در نظر گرفتن ضریب زیر تخفیف α_ϕ برای متغیر وابسته Φ ، معادله ۴-۲۱ به فرم زیر نوشته می شود:

$$\frac{a_p}{\alpha_\phi} \Phi_p = \sum a_{nb} \Phi_{nb} + s_u + \frac{1 - \alpha_\phi}{\alpha_\phi} a_p \Phi_p^* \quad (۳۵-۴)$$

که Φ و Φ^* به ترتیب مقادیر تکرارهای جاری و قبلی می باشند.

پارامتر زیر تخفیف می تواند تغییر کند ($0 < \alpha_\phi \leq 1$) و a_p به صورت زیر داده شود:

$$a_p = \sum a_{nb} - s_p \quad (۳۶-۴)$$

^{۲۹}Under Relaxation

همچنین برای ضریب زیر تخفیف معادله ممنوم شعاعی، واقان (۱۹۸۹)^{۳۰} فاکتور میرایی که توسط گوسمن^{۳۱} پیشنهاد شده بود را به ترم چشمه معادله ممنوم شعاعی اضافه کرد، تا پایداری معادلات ممنوم را ارتقا دهد. برای جریان با چرخش زیاد، ترم های نیروی گریز از مرکز و گرادیان فشار، ترم های حاکم در معادله ممنوم شعاعی می باشند و اختلاف کوچک بین این ترم ها میتواند خطا های بزرگی در راه حل های تکراری بوجود آورد. بنابراین یک ترم میرایی اضافی به صورت زیر می توان نوشت:

$$\alpha_G \frac{\rho |V_\phi|}{r} (V_r^{old} - V_r^{new}) \quad (۳۷-۴)$$

α_G ثابت آزمایشی می باشد.

۴-۶- الگوریتم حل برای معادلات جبری خطی

تکنیک معمول برای حل معادلات جدا سازی شده به فرم معادلات ۴-۲۱،^{۳۲} TDMA نامیده می شود. همان طور که پاتانکار[ا]توصیف کرد، این الگوریتم فقط به آرایه های یک بعدی نیاز دارد و ترکیبی از حل مستقیم (TDMA) را برای حالت یک بعدی و روش تکرار گوس سایدل تشکیل می دهد. در حالت سه بعدی معادله ۴-۲۱ را می توان به فرم زیر نوشت:

$$a_p(i, j, k)\Phi(i, j, k) = a_E(i, j, k)\Phi(i+1, j, k) + a_w(i, j, k)\Phi(i-1, j, k) + a_N(i, j, k)\Phi(i, j+1, k) + a_s(i, j, k)\Phi(i, j-1, k) + a_U(i, j, k)\Phi(i, j, k+1) + a_D(i, j, k)\Phi(i, j, k-1) + s_u(i, j, k)$$

^{۳۰} Vaughan(1989)

^{۳۱}Gosman(1976)

^{۳۲}Tri Diagonal Matrix Algorithm

(۳۸-۴)

معادله سه بعدی بالا را می توان با به کار بردن متد TDMA در راستای مسیر انتخابی به معادله یک بعدی تبدیل کرد. برای این کار فرض می شود که تمام متغیرها در طول دو خط مجاور هم موقتاً معلوم باشند (با مقدار دقیق محاسبه شده جایگزین می شود).

با توجه به شکل ۴-۱ برای یک خط انتخابی ، معادله ۴-۳۸ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$i = 1, 2, 3, \dots, N \quad a(i)\Phi(i) = b(i)\Phi(i+1) + c(i)\Phi(i-1) + d(i)$$

معادله بالا را می توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\Phi(i) = P(i)\Phi(i+1) + Q(i) \quad (۳۹-۴)$$

که ضرایب $p(i)$ و $Q(i)$ با استفاده از TDMA به صورت ترم هایی از $a(i)$, $b(i)$, $c(i)$, $d(i)$ به صورت بازگشتی پیدا می شود. با به کار بردن متد TDMA برای تمام نقاط $(i=2, \dots, N-1)$ در طول خط انتخابی و سپس جابجا کردن به خط بعد در صفحه انتخابی ، حل $\Phi(i, j)$ برای یک صفحه می تواند بدست آید. سپس این پروسه باید برای تمام صفحات در جهت عمود بر صفحه انتخابی انجام شود. وقتی این عمل جاروب کردن در یک جهت کامل شد ، برای جهات دیگر نیز انجام می شود.

۴-۷- شبکه بندی شطرنجی

همان طور که توسط بسیاری از دانشمندان از جمله پاتانکار، نشان داده شد، اگر سرعت ها به صورت شبکه بندی اسکالر تعریف شوند، تأثیرات فشار در معادلات جداسازی شده ممنوم به درستی نشان داده نمی شود.

چاره این مشکل استفاده از شبکه بندی شطرنجی، برای مؤلفه های سرعت می باشد. این پیشنهاد به این صورت است که متغیرهای اسکالر از قبیل فشار ، دما و ... را در نقاط گره ای معمولی ارزیابی می

کند، ولی مؤلفه های سرعت در شبکه شطرنجی قرار گرفته در اطراف نقاط اسکالر محاسبه می شوند. مؤلفه های سرعت v_z در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. علامت های جدیدی بر روی خطوط شبکه و نقاط صفحه انجام شده است. در شکل ۴-۱ خطوط غیر شکسته شبکه با حروف بزرگ نشان داده شده است. خط تیره ها که صفحات مش بندی را می سازند با حروف کوچک نشان داده می شود. روش^{۳۳} پیشرو یا پسرو^{۳۴} برای شبکه سرعت می تواند استفاده شود. در این پروژه از روش پیشرو استفاده شده است، که موقعیت i برای سرعت $v_z(i, J, K)$ در فاصله $\delta_z/2$ از گره اسکالر (i, J, K) قرار گرفته است.

با توجه به سیستم مختصات جدید، معادله ممنوم دیسکریت شده v_z ، در موقعیت (i, J, K) به صورت زیر داده شده است:

$$a_p(i, J, K)V_z(i, J, K) = \sum_{nb} a_{nb} V_{znb} - (P(I, J, K) - P(I-1, J, K))A(i, J, K) + A(i, J, K)b(i, J, K) \quad (4-40)$$

که $b(i, J, K)$ ترم منبع ممنوم منهای ترم فشار است و $A(i, J, K)$ ، مساحت صفحه مش بندی شده شرق یا غرب از حجم کنترل می باشد.

۴-۸- الگوریتم سیمپل

مشکل واقعی در محاسبه میدان سرعت، مجهول بودن میدان فشار می باشد. گرادیان فشار قسمتی از جمله چشمه را در هر معادله مقدار حرکت تشکیل میدهد. اما هیچ معادله مشخصی برای بدست آوردن

^{۳۳} Forward

^{۳۴} Back Ward

فشار وجود ندارد. در اینجا میدان فشار به طور غیر مستقیم از طریق معادله پیوستگی مشخص می شود. هنگامیکه میدان فشار صحیح در معادلات ممنتوم استفاده شود، میدان سرعت حاصل در معادله پیوستگی صدق می کند. اما مشخص کردن غیر مستقیم برای اهداف ما زیاد مفید نیست، مگر اینکه جواب مستقیمی از دستگاه معادلات انفصال مربوط به معادلات ممنتوم و پیوستگی بدست آوریم. از آنجا که برای حل معادلات انفصال روش تکرار را ترجیح داده ایم، پس حل مستقیم، برای تمامی مؤلفه های سرعت و فشار موضوعیت ندارد.

الگوریتم سیمپل، متد نیمه ضمنی برای معادلات فشار مرتبط می باشد که توسط پاتانکار ارائه شد و یک روش سعی و خطا برای محاسبه فشار در شبکه بندی شطرنجی توضیح داده شده در بالا، می باشد و روشی برای محاسبه میدان فشار استفاده شده، است.

میدان فشار p^* برای شروع پروسه الگوریتم سیمپل حدس زده می شود و سپس معادله ممنتوم دیسکریت شده با میدان فشار حدسی، حل شده تا مؤلفه های سرعت به صورت زیر بدست آید:

$$a_p(i, J, K)V_z^*(i, J, K) = \sum_{nb} a_{nb} V_{znb}^* - A_e(P_{I-1}^* - P_I^*) + b(i, J, K) \quad (41-4)$$

اکنون تصحیح p' به صورت اختلاف میان میدان فشار صحیح p و میدان فشار حدسی p^* می باشد پس:

$$P = P^* + P' \quad (42-4)$$

بطور مشابه تصحیح سرعت به صورت زیر تعریف می شود، تا سرعت صحیح v_z را به سرعت محاسبه شده V_z^* مربوط کند:

$$V_z = V_z^* + V_z' \quad (43-4)$$

با قرار دادن میدان فشار صحیح p در معادلات ممنتوم میدان سرعت صحیح (V_r, V_ϕ, V_z) بدست می آید. معادله دیسکریت شده ۴-۴۱ میدان سرعت صحیح را به میدان فشار صحیح مربوط می کند. با کم کردن معادله ۴-۴۳ از ۴-۴۲ داریم:

$$a_p(i, J, K)(V_z(i, J, K) - V_z^*(i, J, K)) = \sum_{nb} a_{nb}(V_{znb} - V_{znb}^*) + A_e[(P'_{I-1} - P_{I-1}) - (P_I - P_I^*)] \quad (44-4)$$

با استفاده از معادله ۴-۴۱، معادله ۴-۴۴ به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$a_p(i, J, K)V'_z(i, J, K) = \sum_{nb} a_{nb}V'_{znb} + (P'_{I-1} - P'_I)A_e \quad (45-4)$$

حذف ترم های سیگما برای ساده سازی معادله (۴-۴۵) برای تصحیح سرعت، عمده ترین تقریب در الگوریتم سیمپل می باشد و معادله زیر را می دهد:

$$V'_z(i, J, K) = d(i, J, K)(P'_{I-1} - P'_I) \quad (46-4)$$

که:

$$d(i, J, K) = \frac{A_e}{a_p(i, J, K)} \quad (47-4)$$

معادله ۴-۴۶ تصحیحی را برای سرعت در معادله ۴-۴۴ اعمال می کند، که معادله زیر را می دهد:

$$V_z(i, J, K) = V_z^*(i, J, K) + d(i, J, K)(P'_{I-1} - P'_I) \quad (48-4)$$

توصیف مشابهی برای V_r و V_ϕ نیز وجود دارد:

$$V_r(I, j, K) = V_r^*(I, j, K) + d(I, j, K)(P'_{J-1} - P'_J) \quad (49-4)$$

$$V_{\phi}(I, J, k) = V_{\phi}^*(I, J, k) + d(I, J, k)(P'_{K-1} - P'_K) \quad (50-4)$$

بنابراین همان طوری که معادلات ممنتوم بررسی شد، میدان سرعت باید معادله پیوستگی را نیز ارضا کند. معادله پیوستگی در حالت دیسکریت برای حجم کنترل شکل (4-1) زمانی ارضا می شود که:

$$[(\rho V_r A)_n - (\rho V_r A)_s] + [(\rho V_{\phi} A)_u - (\rho V_{\phi} A)_d] + [(\rho V_z A)_e - (\rho V_z A)_w] = 0 \quad (51-4)$$

با جایگذاری سرعت از معادلات (4-48) تا (4-50) در معادلات جداسازی پیوستگی (4-51) به معادله زیر می رسیم:

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + a_U P'_U + a_D P'_D + b_P \quad (52-4)$$

$$a_E = (\rho Ad)_e$$

$$a_W = (\rho Ad)_w$$

$$a_N = (\rho Ad)_n$$

$$a_S = (\rho Ad)_s$$

$$a_U = (\rho Ad)_u$$

$$a_D = (\rho Ad)_d$$

$$b_p = [(\rho V_r^* A)_n - (\rho V_r^* A)_s] + [(\rho V_\phi^* A)_u - (\rho V_\phi^* A)_d] + [(\rho V_z^* A)_e - (\rho V_z^* A)_w]$$

معادله ۴-۵۲، معادله پیوستگی جداسازی برای تصحیح فشار p' می باشد و با توجه به روش حل گفته شده، حل می شود. میدان فشار اصلاح شده به فرم زیر پیدا می شود:

$$P = P^* + \alpha_p P' \quad (۵۳-۴)$$

که α_p ضریب زیر تخفیف می باشد.

توالی کارهای انجام شده در الگوریتم سیمپل به صورت زیر می باشد:

۱. حدس میدان فشار p^* و میدان سرعت (V_r^*, V_ϕ^*, V_z^*) .
۲. حل معادله ممنتوم دیسکریت شده برای بدست آوردن (V_r^*, V_ϕ^*, V_z^*) جدید.
۳. حل معادله تصحیح فشار برای بدست آوردن p' .
۴. صحیح کردن مقدار فشار و سرعت با استفاده از معادلات تصحیح فشار و سرعت.
۵. حل دیگر معادلات انتقال دیسکریت شده برای بدست آوردن Φ .
۶. تکرار مراحل از مرحله ۲ تا ۵ راه حل همگرا شود.

۴-۹- همگرایی^{۳۵}

همگرایی راه حل های عددی از طریق دو نوع اندازه گیری از تکرار قبلی ($n-1$) به تکرار فعلی (n) صورت می گیرد.

^{۳۵}Convergence

اولی RMS^{۳۶} می باشد، که برای متغیرهای وابسته در طول شبکه از یک تکرار به تکرار دیگر می باشد. مقدار تغییرات RMS به صورت زیر تعریف می شود:

$$RMS^{\Phi} = \sqrt{\frac{\sum_{ij} (\Phi^n - \Phi^{n-1})^2}{\sum_{ij} (\Phi^n)^2}} \quad (۵۴-۴)$$

که Φ^n و Φ^{n-1} مقادیر فعلی و قبلی تکرار برای متغیر محاسبه شده Φ می باشد و \sum جمع بر روی تمام نقاط شبکه می باشد.

مقادیر RMS می تواند برای چک کردن همگرایی در بیشتر مواقع کافی باشد ولی بعضی مواقع با اینکه مقادیر واقعی متغیرها یا ضرایب تخفیف کوچک می باشد و تغییرات RMS نیز کوچک می باشد، ولی راه حل همگرا نمی شود. در این حالت تغییرات مقدار RMS به تنهایی نمی تواند برای همگرایی به کار رود و اندازه گیری دیگری لازم است تا همگرایی را تضمین کند. معیار دیگر برای تضمین همگرایی، چک کردن ترازهای مقادیر محلی باقیمانده ها^{۳۷} برای تمام متغیرهای وابسته می باشد.

پس روش بهتر جهت تعیین همگرایی این است که صدق کردن مقادیر متغیرهای مسئله ، در معادلات انفصال بررسی شود.

باقیمانده ها برای هر گره برای متغیر Φ به صورت زیر محاسبه می شوند:

^{۳۶} Root Mean Square

^{۳۷}Residuals

$$R_{i,j}^{\Phi} = (a_{p,\Phi} - s_p^{\Phi})\Phi_P - (a_{N,\Phi}\Phi_N + a_{S,\Phi}\Phi_S + a_{E,\Phi}\Phi_E + a_{w,\Phi}\Phi_w + a_{U,\Phi}\Phi_U + a_{D,\Phi}\Phi_D + s_C^{\Phi})$$

(۵۵-۴)

بزرگترین مقادیر باقیمانده برای هر متغیر وابسته، محاسبه شده و سپس با پارامترهای مختلف نرمالیزه کردن، نرمالیزه می شود. یک فلاکس (شار) مرجع، که معمولاً مقدار ورودی یا مقدار واحد در سیستم های بسته می باشد، برای نرمالیزه کردن باقیمانده ها در نظر گرفته می شود.

بدیهی است وقتی معادله انفصال صدق کند، R صفر خواهد بود. یک معیار همگرایی مناسب باید مقرر کند که بزرگترین مقدار $|R|$ کمتر از یک عدد کوچک معین باشد.

در این پروژه همگرایی برای مقادیر RMS و مقادیر نرمالیزه شده باقیمانده $|R|$ برای هر متغیر، کمتر از به ترتیب 10^{-4} و 10^{-6} فرض شده است.

۱۰-۴- استفاده از تکرار در محاسبات

روش محاسبه ارائه شده، معادلات غیر خطی کوپله را با استفاده از روش تکرار حل می کند. فن تکرار معمولاً، معادلات مورد استفاده ما را که غیر خطی و به هم مربوط هستند، ظاهراً به شکل خطی در آورده و ضرائب را از مقادیر تکرار قبلی محاسبه می کنیم. معادلات جبری ظاهراً خطی هر یک از متغیرهای وابسته توسط یک روش تکرار، حل می شوند. نیازی نیست حل به طریق تکرار معادلات جبری تا همگرایی کامل ادامه پیدا کند، زیرا در مراحل میانی محاسبات فقط ضرائب آزمایشی مورد استفاده قرار می گیرند. پس از اینکه حل معادلات انفصال تا حد معینی تکرار شد، باید ضرائب مجدداً محاسبه شوند. استفاده از

روش حل مستقیم برای مسائل چند بعدی نیاز به کار محاسباتی زیاد و نامناسب دارد. در اینجا معادلات مقدار حرکت و معادله تصحیح فشار به طور دنباله ای حل می شوند. زیرا حل همزمان به وسیله روش مستقیم نیاز به مقادیر زیادی از زمان و حافظه کامپیوتر دارد. چون معادلات مقدار حرکت غیر خطی می باشند، لازم است در هر یک از این تکرارها این عملیات بر حجم محاسباتی انجام شود. در مسأله حالت پایای ارائه شده، با مقادیر حدسی برای متغیرهای مورد نظر شروع می کنیم و ادامه می دهیم تا جواب حالت پایا بدست آید. پس جهت حل معادلات غیرخطی از روش تکرار به شکل زیر عمل می کنیم: ۱- با حدس یا برآوردی برای مقادیر متغیر مورد نظر در تمام گره ها شروع می کنیم. ۲- از این مقادیر حدسی، مقادیر آزمایشی ضرائب معادله انفصال را محاسبه می کنیم. ۳- دستگاه معادلات جبری ظاهراً خطی را جهت بدست آوردن مقادیر جدید، حل می کنیم. ۴- با این مقادیر جدید به عنوان حدسهای بهتر، برمی گردیم به مرحله ۲ و این کار را آن قدر تکرار می کنیم که تکرارهای بیشتر نتوانند تغییر مهمی در مقادیر متغیر مورد نظر ایجاد نمایند. جواب همگرا شده، عملاً جواب صحیح معادلات غیر خطی می باشند، که با روشهای مربوط به حل معادلات خطی به دست آمده است.

۴-۱۱- آشنائی با کد سه بعدی مورد استفاده در این مسئله

در انتهای این فصل، توضیح مختصری در رابطه با مقادیر حدس اولیه فشار و سه مؤلفه سرعت و همچنین شرایط مرزی و بی بعد سازی مقادیر سرعت، مطابق مرجع [۱۰]، داده می شود. بی بعد سازی مقادیر سرعت، توسط $\frac{\mu}{\rho(r_{\max} - r_{\min})}$ صورت گرفته است. در ایجاد مقادیر اولیه، مقدار سرعت مماسی در این جریان برابر با سرعت مماسی حاصل از حل جریان کوئت دائمی و آرام قرار داده شده است:

$$w(i, j, k) = Ar(j) + \frac{B}{r(j)}$$

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_1^2 - R_2^2} = -\Omega_1 \frac{\eta^2 - \mu}{1 - \eta^2}$$

$$B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = \Omega_1 \frac{R_1^2 (1 - \mu)}{1 - \eta^2}$$

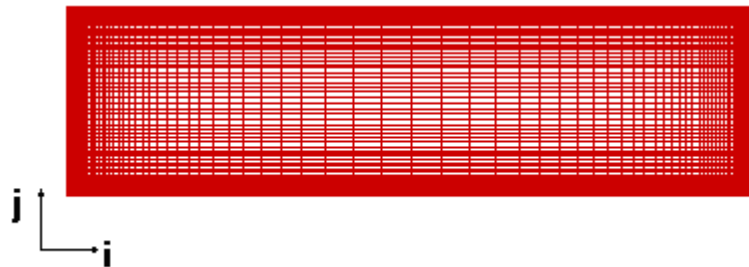
مقدار $angv$ در کد مورد نظر برابر سرعت زاویه ای چرخش استوانه هاست.

```

c*****init values *****caread
if(ivel.eq.0)goto 999
rhole=(rl1+rl2)/2./rmax
do 30 k=0,kd
do 30 j=2,jd-1
do 30 i=2,id-1
u(i,j,k)=0.1*((r(j)/rmax-rhole)**2-0.01)
v(i,j,k)=0.001*(0.5-z(i)/zmax)
continue
do 60 k=0,kd
do 60 j=1,jd-1
do 60 i=1,id-1
w(i,j,k)=(r1*angv*((r2/r(j))-r(j)/r2))/((r2/r1)-(r1/r2))
p(i,j,k)=0.001d0*r(j)*r(j)
t(i,j,k)=tref*z(i)/zmax
tk(i,j,k)=1.d-3*(w(i,j,k)*w(i,j,k)+u(i,j,k)*u(i,j,k))
td(i,j,k)=den(i,j,k)*tk(i,j,k)**1.5d0/zmax
continue

```


شرایط مرزی اعمال شده، جهت بررسی صحت روش عددی با مرجع [۱۰]، که استوانه درونی چرخان
 و استوانه بیرونی وصفحات انتهائی ساکن هستند، بصورت زیر است:



شکل (۴-۲): مش بندی غیر یکنواخت؛ استوانه درونی در $(i, j = 0)$ ، استوانه بیرونی در $(i, j = j_d)$

```

c***** i=0 boundary
i=0
do j=0,jd
do k=0,kd
c    if (r(j).gt.r4) then
w(i,j,k)=0.0
u(i,j,k)=0.0
v(i,j,k)=0.0
    
```

```

c    v(0,j,k)=0.0
tk(i,j,k)=0.0
td(i,j,k)=0.0
t(i,j,k)=tref
c    else
c    u(i,j,k)=-up
c    u(1,j,k)=-up
v(i,j,k)=0
c    w(i,j,k)=0
c    tk(i,j,k)=0.0
c    td(i,j,k)=0.0
c    t(i,j,k)=0.0
end if
end do
end do
k=kd/2
do j=0,jd
write(22,1000)u(1,j,k),v(i,j,k),w(i,j,k),t(i,j,k)
end do
c***** i=id boundary
write(22,*)'u(id,j,k) v(id,j,k) w(id,j,k) t(id,j,k)
i=id
do 3100 j=0,jd
do 3100 k=0,kd
u(i,j,k)=0
v(i,j,k)=0.0

```

```

w(i,j,k)=0
tk(i,j,k)=0
td(i,j,k)=0
t(i,j,k)=tref
c    if(j.ge.jr11.and.j.le.jr12)then
c    if(k.ge.kr11.and.k.le.kr12)then
c    u(i,j,k)=ub0
c    t(i,j,k)=0.0
c    end if
c    end if
continue
k=kd/2
do j=0,jd
write(22,1000)u(i,j,k),v(i,j,k),w(i,j,k),t(i,j,k)
end do
c***** j=0 boundary
write(22,*)'u(i,0,k) v(1,1,k) w(i,0,k) t(i,0,k)
j=0
do 3200 i=0,id
do 3200 k=0,kd
u(i,j,k)=0.0
v(i,j,k)=0
c    v(i,1,k)=0
w(i,j,k)=r1*angv
tk(i,j,k)=0.0
td(i,j,k)=0.0

```

```

t(i,j,k)=tref
continue
k=kd/2
do i=0,id
(write(22,1000)u(i,j,k),v(i,1,k),w(i,j,k),t(i,j,k)
end do
c***** j=jd boundary
'(write(22,*)'u(i,jd,2) v(1,jd,2) w(1,jd,2) t(1,jd,2
j=jd
do 3300 i=0,id
do 3300 k=0,kd
u(i,j,k)=0.0
v(i,j,k)=0.0
w(i,j,k)=0.0
tk(i,j,k)=0.0
td(i,j,k)=0.0
t(i,j,k)=tref
continue

```

نسبت ظاهری، ویسکوزیته و عدد رینولدز، در سابروتین input، تعریف می شوند (سیال مورد بررسی، روغن سیلیکون است):

```

subroutine input
'include 'common
c=====*****=====*****=====*****=====*****=====*****
c
zmin=0.d0
open(2,file='A.dat',status='old')
read(2,*)angv,zmax,rmin,rmax,fmin,fmax
read(2,*)z1,z2,fl1,fl2,fr1,fr2
read(2,*)ra,rl1,rl2,rr1,rr2
read(2,*)zb1,zb2,zb3,zb4,rb1,rb2,rb3,rb4,rb5,fb1,fb2,fb3
read(2,*)cwd,cws,cwp,cwb,sr
read(2,*)neqlz,neqlr,neqlf,nmidz,nmidr,nmidf
read(2,*)ibloc,jbloc,kbloc,in1,in2,in3,in4,jn1,jn2,jn3,jn4,jn5
kn1,kn2,kn3,&
read(2,*)qz1,qz2,qz3,qr1,qr2,qf1,qf2
read(2,*)rgas,tref,pref
read(2,*)smmax,gosman,smpic,pr,cp,sigh
read(2,*)(rf(nu),nu=1,10
read(2,*)ivel,ih,lossht,irot,icmp,ike,modl,nlam,lock
read(2,*)nitmax,ni(1),nj(1),nk(1),igrd,iold
if(ike.eq.1)read(2,*)ce1,ce2,cmu,cappa,sigk,sige
close(2)
default and reference values*****c*****
id=ni(1)+1
jd=nj(1)+1

```

```

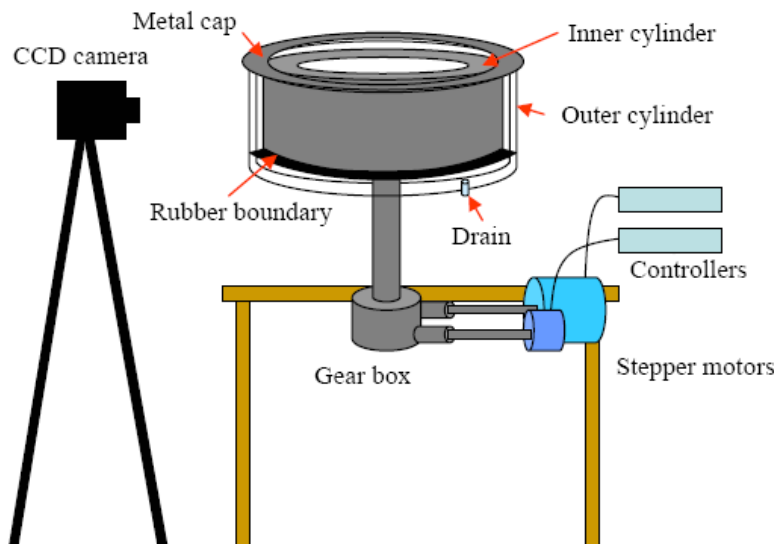
kd=nk(1)+1
print*,'id,jd,kd=:',id,jd,kd
great=1.d20
tiny=1.d-30
smallk=1.d-12
smalle=1.d-10
gridpt=float(id*jd*kd)
asp=zmax/(rmax-rmin)
refvis=1.8887E-3
refden=0.935
refrey=refden*angv*rmin*(rmax-rmin)/refvis
print*,'Reynolds number:',refrey
print*,'Viscosity:', refvis
print*,'Density:', refden
do 10 k=0,kd
do 10 j=0,jd
do 10 i=0,id
den(i,j,k)=refden
visl(i,j,k)=refvis
continue

```

در این بخش، نتایج برای مقادیر مختلف نسبت ظاهری و عدد رینولدز آمده است. جهت حل معادلات بیان شده در فصل قبل، از روش احجام محدود و کد فرتن سه بعدی [۱]، و بمنظور ارائه نتایج، از نرم افزار TECPLOT استفاده شده است. نوع سیال جریان، روغن سیلیکون است.

۵-۲- بررسی صحت روش حل عددی

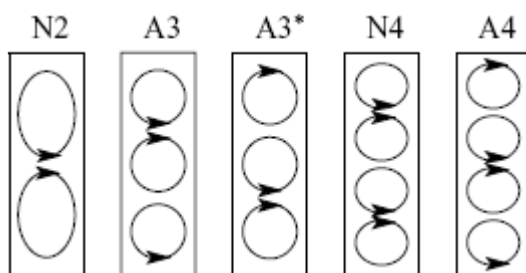
در این قسمت به منظور بررسی صحت روش حل عددی، نتایج بدست آمده با نتایج حل عددی و کار آزمایشگاهی [10] Lopez&Marques(2005)، مقایسه می شود. آزمایش انجام شده در سیستم کوئت تیلور، شامل یک سیال (روغن سیلیکون $\nu = 10.2 \text{mm}^2 \text{s}^{-1}$) می باشد. سیلندر بیرونی ثابت و سیلندر درونی، چرخان است. سیلندر داخلی از یک فولاد ضد زنگ، با شعاع حدود 12.5mm، و سیلندر بیرونی، حدود 25mm، از جنس شیشه صیقلی قابل رؤیت، ساخته شده است. دمای سیال با یک کنترلر، در دمای حدود ۲۱ درجه سانتیگراد نگهداشته می شود (شکل ۵-۱).



شکل (۵-۱): سیستم کوئت تیلور آزمایشگاهی [۱۴]

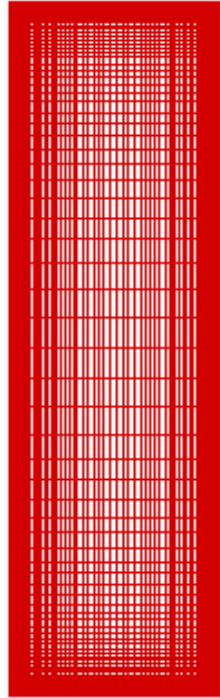
Lopez&Marques جهت حل عددی معادلات ناویر استوکس، از یک روش پیشروی شبه ضمنی مرتبه دوم پایدار، استفاده کردند [۲۰]. برای متغیرهای فضائی، از تقریب لژندر - فوریه، و جهت بسط سرعتها، از بسط لژندر، استفاده کردند. نتایج نشان داده شده در شکل (۵-۳)، برای حالت $\Gamma = 3, \eta = 0.5, Re = 330$ بدست می آید.

نتایج حاصل، نشاندهنده تغییر در تعداد، اندازه و نوع گردابه های تیلور است (شکل ۵-۲). در تمام موارد، جهت زوج گردابه به سمت استوانه بیرونی است، یعنی در کل، جهت جت جریان به سمت بیرون است. این تغییرات، با نسبت ظاهری و عدد رینولدز چرخشی یا یکی از آنها، تغییر خواهند کرد.

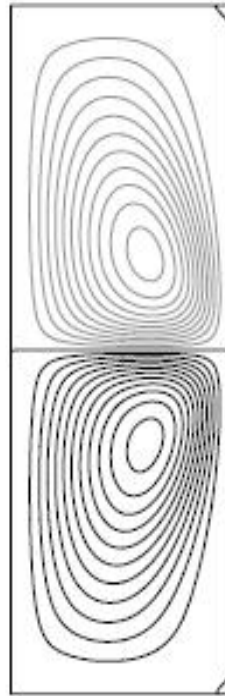


شکل (۵-۲): نامگذاری انواع جتهای جریان کوئت- تیلور [۷]

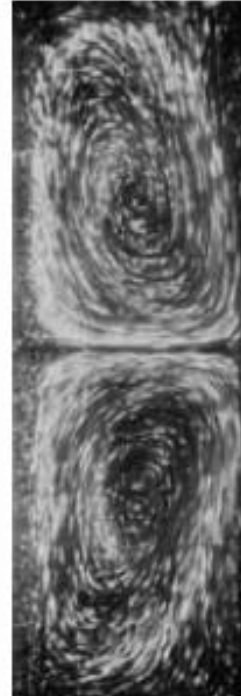
در ادامه، اثرات مختلف، از قبیل اثر چرخش صفحات انتهائی [۵]، چرخش استوانه بیرونی در جهت مخالف و اثر لقی بسیار کوچک، روی ساختار جریان، بررسی شده است. با توجه به نتایج بدست آمده، تولید گردابه ها، که یکی از انواع جریان لزوج، با شرایط مرزی ثابت و پایدار است، به علت ناپایداری جریان، باعث ایجاد حرکات ناپایدار خواهد شد [۲۶]. با توجه به اهمیت هندسه و نیروهای بوجود آمده در سیال و همچنین تراکم ناپذیری، پارامتر کنترل کننده اصلی، عدد رینولدز چرخشی می باشد. بعبارت دیگر، جت خارج شده از استوانه درونی با لایه های تشکیل شده روی دیواره های دیگر تداخل می کند (وقتی سیال در مجاورت یک جسم جامد حرکت میکند، تأثیر شرط عدم لغزش به صورت تنش برشی در آن آشکار میشود و سپس این اثر به داخل جریان نفوذ میکند، که اندازه نفوذ این اثر بستگی به عدد رینولدز دارد). ابتدا نتایج بدست آمده با نتایج مرجع مورد نظر، توسط شکلهای زیر، مقایسه میشوند. با توجه به شکل (۵-۳ج)، در حل این جریان، از یک شبکه مش بندی غیر یکنواخت، استفاده شده است.



(ج)

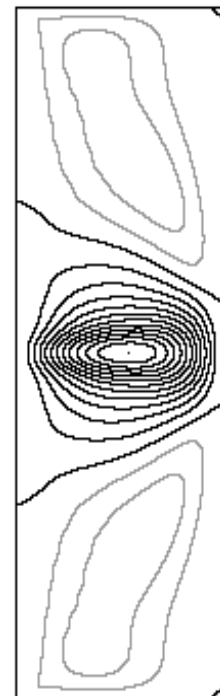
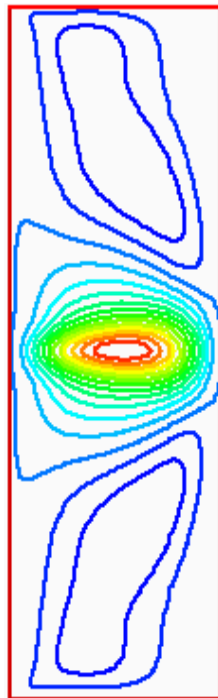


(ب)



(الف)

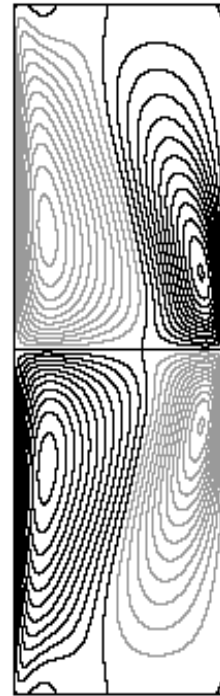
شکل (۳-۵): مقایسه خطوط جریان، الف) کار تجربی مرجع [۱۰]، ب) حل عددی مرجع [۱۰]، ج) نتایج عددی حاضر



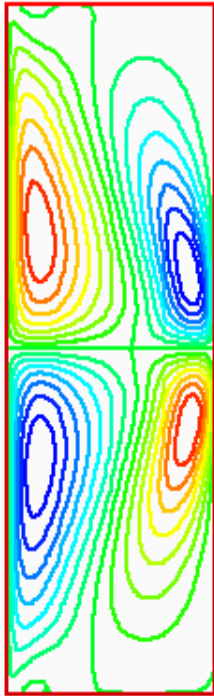
(الف)

(ب)

شکل (۴-۵): مقایسه کانتور سرعت در جهت شعاعی، الف) مرجع [۱۰]، ب) نتایج عددی حاضر



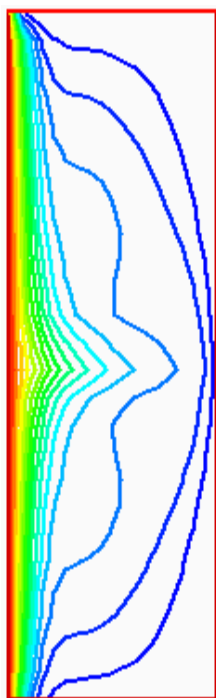
(الف)



(ب)

شکل (۵-۵): کانتور سرعت در جهت محوری، الف) مرجع [۱۰]، ب)

نتایج عددی



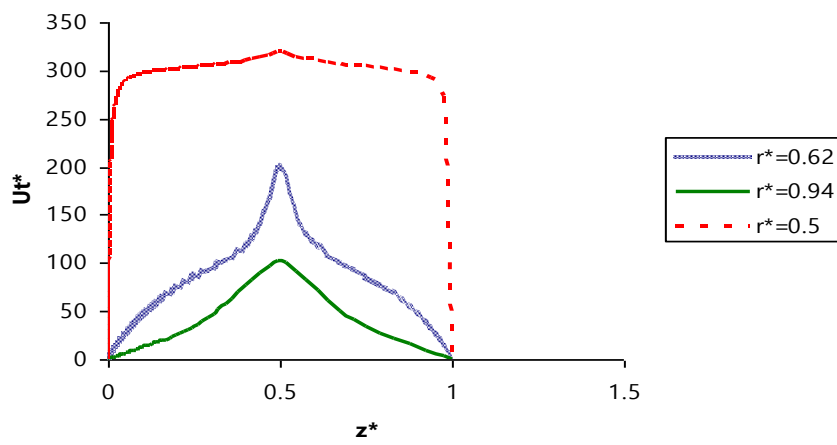
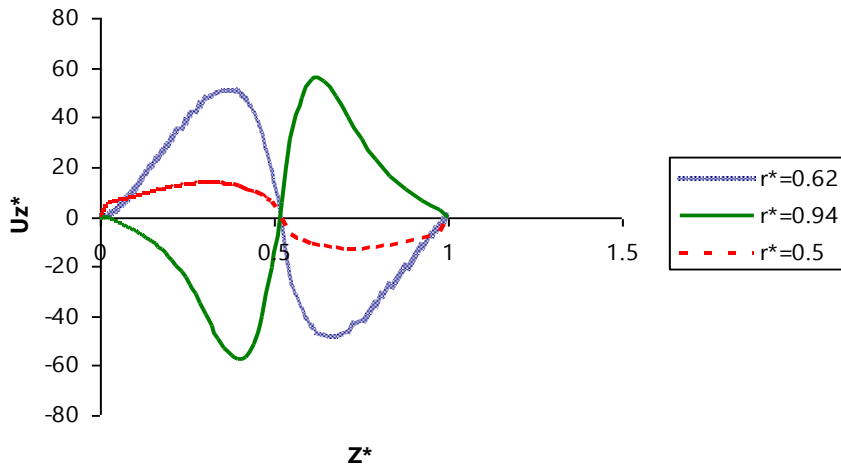
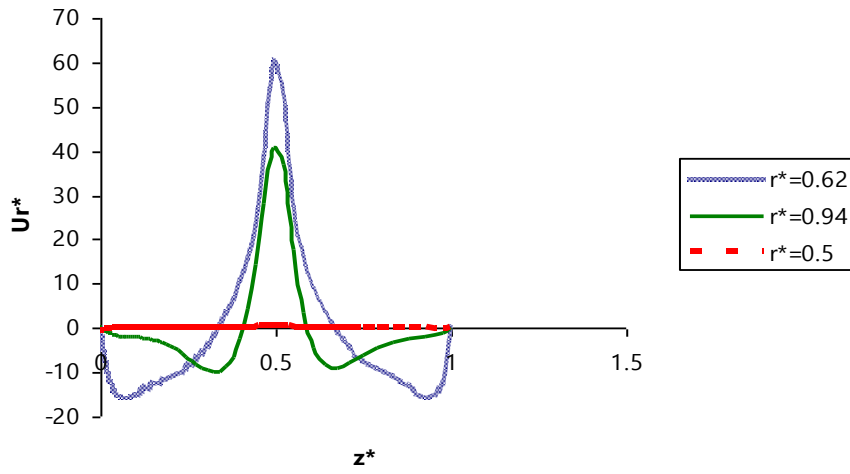
شکل (۵-۶): مقایسه کانتور سرعت مماسی، الف) مرجع [۱۰]، ب) نتایج عددی حاضر

با توجه به شکل (۵-۳)، نتایج بدست آمده با مرجع مورد نظر در توافق است. حالت‌های ایده آل در حل این جریان، شامل نسبت ظاهری نامحدود ($\Gamma \rightarrow \infty$)، و لقی بسیار کوچک ($1 \rightarrow \eta$)، می باشند. حالات خاصی که در تقارن جریان ایجاد می شوند، نیز به دو صورت تقارن نسبی جریان در راستای Z ارتفاع سیال، که به شکل تقارن $Z2$ مشخص می شود، و همچنین تقارن در جهت چرخش حول محور، که به صورت تقارن $SO(2)$ ، نشان داده می شود. نوع جریان حاصل در شکل (۵-۳)، تقارن در هر دو حالت را نشان می دهد. کانتور های سرعت در شکلهای (۵-۴) و (۵-۵) نیز در هر دو حالت متقارن هستند $(SO(2) \times Z2)$.

همانگونه که در فصل اول توضیح داده شد، گردابه ها بدلیل ایجاد گرادیانهای فشار در دو جهت شعاعی و محوری و همچنین ناپایداری گریز از مرکز (u_θ^2/r) و نیز اثر صفحات انتهائی، پدید می آیند. آنالیز سه بعدی نشان می دهد که دینامیک حرکت، توسط جت ممنوم زاویه ای خارج شده از لایه مرزی

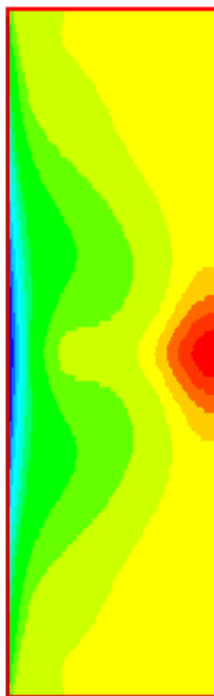
استوانه درونی، تحریک شده و در تقابل با لایه های صفحات انتهائی و دیواره بیرونی قرار می گیرد (این حالت در کانتورهای سرعت مماسی شکل (۵-۶) مشاهده می شود)، که در کل به سمت شکل گیری حفره های چرخشی حول جت ها می رود. برای صفحات انتهائی ساکن، جریان لایه مرزی صفحه انتهائی، تمایل به جهت شعاعی به سمت استوانه درونی را دارد، که این حالت در خطوط جریان شکل (۵-۳ب)، مشاهده می شود (دیواره سمت چپ استوانه داخلی چرخان است و جهت جریان در صفحات انتهائی به سمت داخل می باشد). در دسته بندی گردابه ای شکل (۵-۲)، نوع گردابه های شکل (۵-۳)، از نوع N2 می باشند، یعنی جریانی کاملاً متقارن و دائمی که سلولهای تقریباً مربعی شکل، تشکیل میدهند.

کانتور سرعت مماسی شکل (۵-۶)، نشاندهنده میزان نفوذ جت جریان بسمت استوانه بیرونی است. یعنی مقدار آن از سمت استوانه درونی به طرف استوانه خارجی کاهش می یابد، در نتیجه مقدار نیروی گریز از مرکز به سمت استوانه بیرونی کمتر خواهد شد. با توجه به این مؤلفه از سرعت، در یک شعاع ثابت از صفحه فوقانی به سمت صفحه میانی، میزان نیروی گریز از مرکز افزایش می یابد. پس گردابه ها در صفحه میانی به سمت استوانه خارجی متمایل خواهند شد. (در نمودارهای شکل (۵-۷)، جهت محوری Z، از صفحه فوقانی به صفحه تحتانی در نظر گرفته شده است).



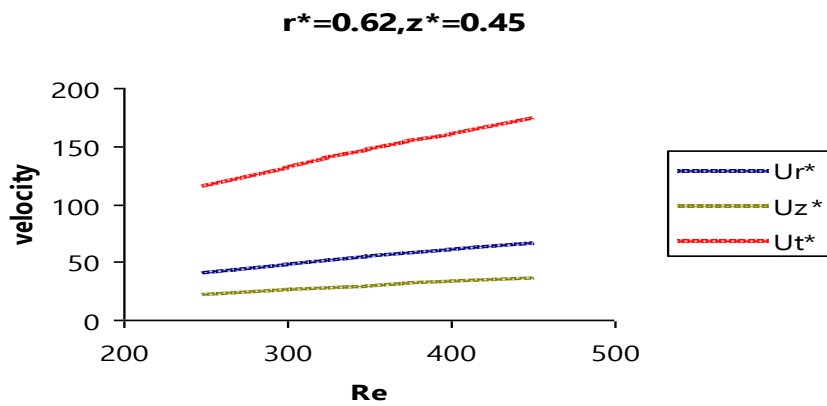
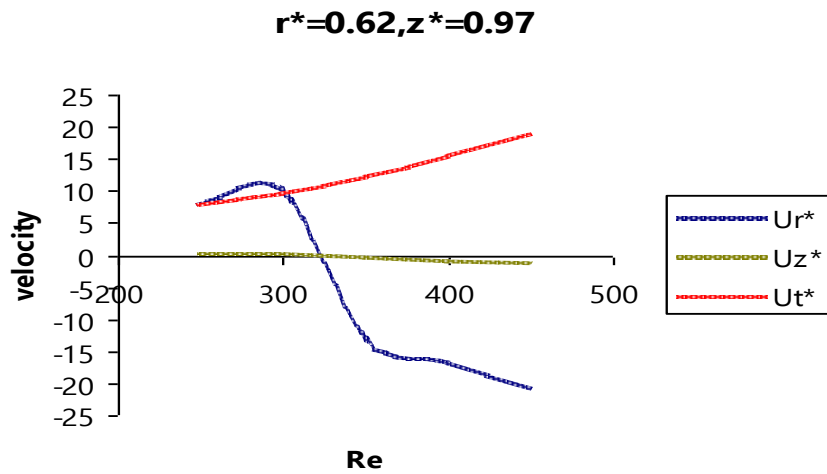
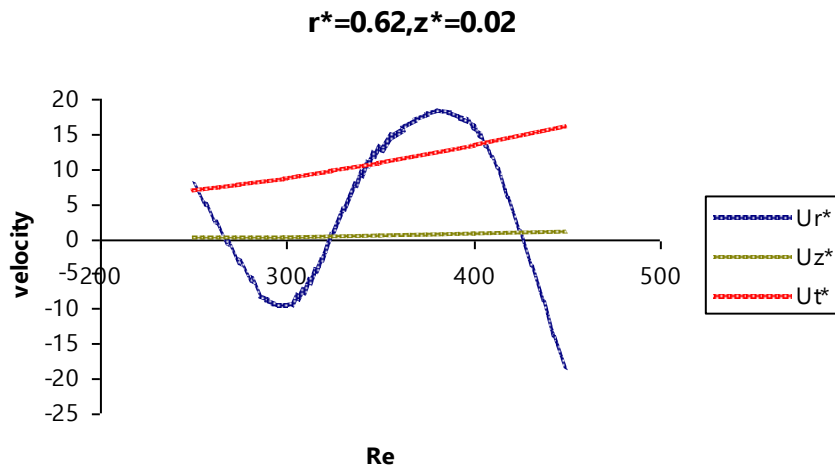
شکل (۷-۵): نمودار تغییرات سرعت جریان شکل (۳-۵) در راستای محوری

با استفاده از نمودارهای سرعت، می توان به راحتی، بزرگی مؤلفه های آن را در سه جهت بررسی نمود. با مشاهده شکل (۷-۵)، ماکزیمم مقدار مؤلفه شعاعی سرعت در راستای محوری، در سطح میانی است، که این وضعیت، به خوبی از خطوط جریان شکل (۳-۵)، که جهت سرعت بین دو گردابه را به سمت بیرون نشان می دهند، مشاهده می شود. از نمودار توزیع سرعت محوری U_z^* ، می توان دید که در صفحه میانی مقدار آن صفر است و بزرگی این مؤلفه در نزدیکی صفحه میانی، بیش از سایر نقاط است. همچنین نمودار مؤلفه سرعت مماسی نشان می دهد که در صفحه میانی بیشترین مقدار را داراست. حالت تقارنی که در کانتورهای سرعت و تابع جریان ایجاد شده، به خوبی از نمودارها مشهود است. توجه شود که شرایط مرزی اعمال شده، یعنی شرط مرزی عدم لغزش در مجاورت دیواره ها، کاملاً مشخص است.



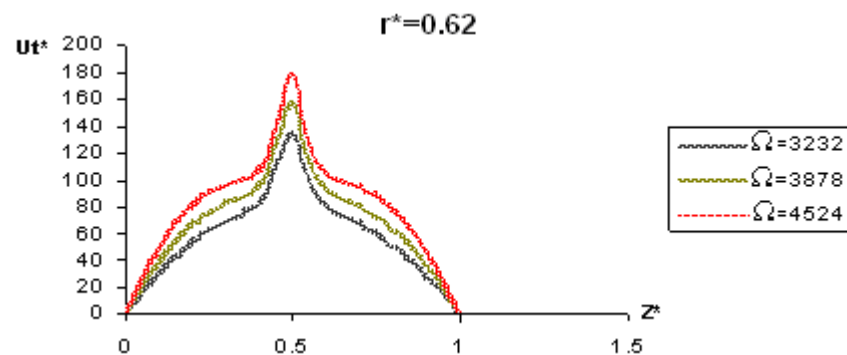
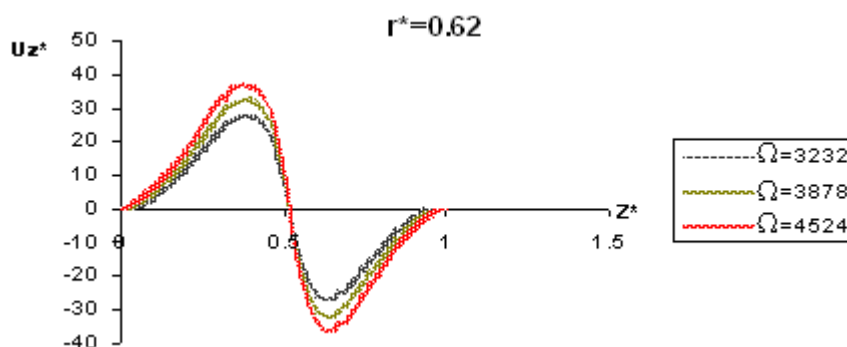
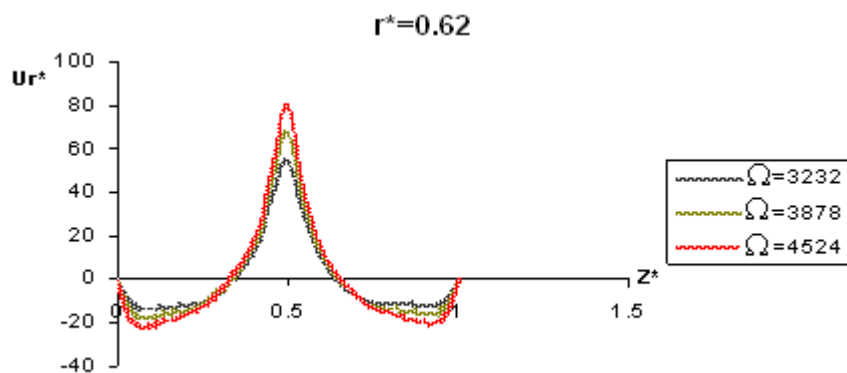
شکل (۸-۵): کانتور فشار جریان شکل (۳-۵)

تقارن ایجاد شده در شکل (۵-۸)، معین می کند که برآیند نیروی حاصل از فشار برابر صفر است. بیشترین گرادیان فشار $\frac{\partial p}{\partial r}$ ایجاد شده، در صفحه میانی است. نیروی حاصل از این گرادیان فشار با نیروی گریز از مرکز $\frac{u_{\theta}^2}{r}$ در تعادل است. گرایش هسته گردابه ها به طرف استوانه بیرونی را می توان به دلیل غلبه نیروی گریز از مرکز بر گرادیان فشار در این ناحیه دانست. همچنین در یک شعاع ثابت، گرادیان فشار $\frac{\partial p}{\partial z}$ از طرف صفحات انتهائی به سمت صفحه میانی افزایش می یابد و نزدیک شدن گردابه ها به یکدیگر در صفحه میانی بدلیل افزایش گرادیان فشار و ناپایداری گریز از مرکز در آن ناحیه است.



شکل (۹-۵): تغییرات سرعت با افزایش عدد رینولدز جریان مرجع [۱۰]

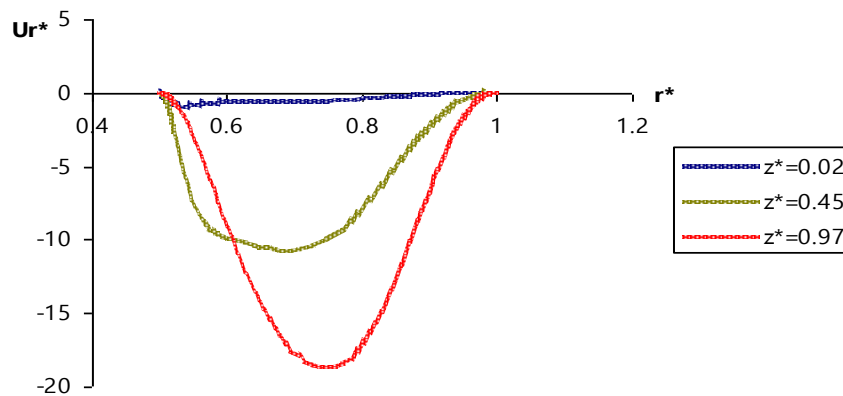
با توجه به شکل (۵-۹)، در هر سه موقعیت، اندازه سرعت مماسی با افزایش عدد رینولدز افزایش می یابد و این در حالیست که در سرعت محوری تغییر چندانی حاصل نمی شود.

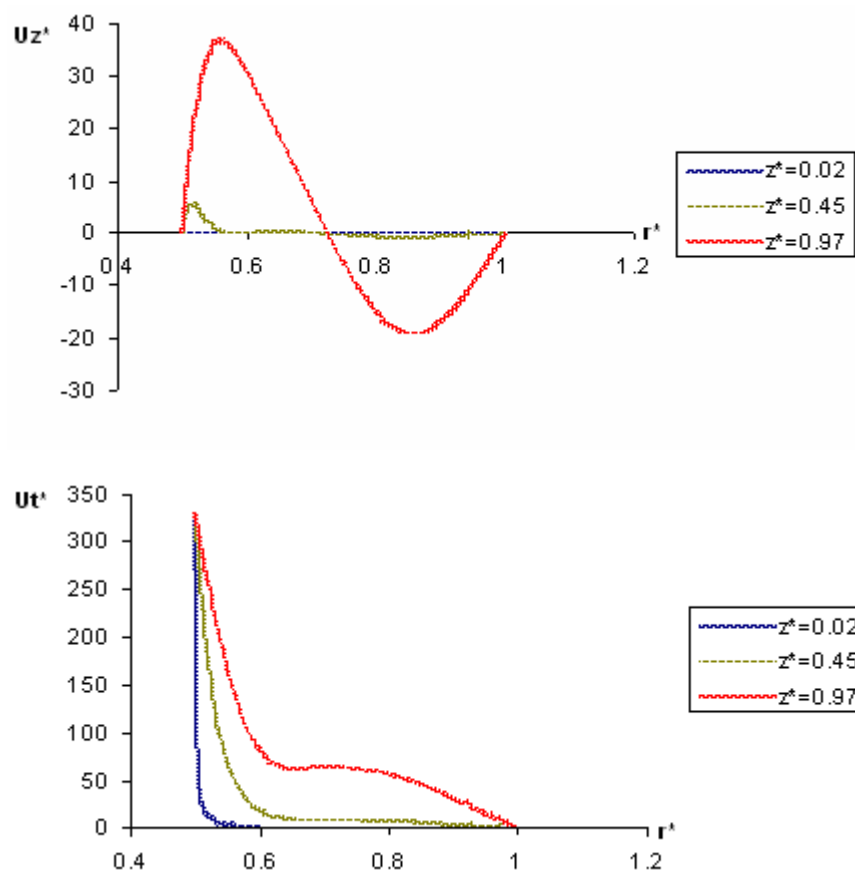


شکل (۵-۱۰): تغییرات سرعت خطی در $r^* = 0.62$ با افزایش سرعت زاویه ای Ω (rads⁻¹) استوانه

درونی جریان شکل (۵-۳)

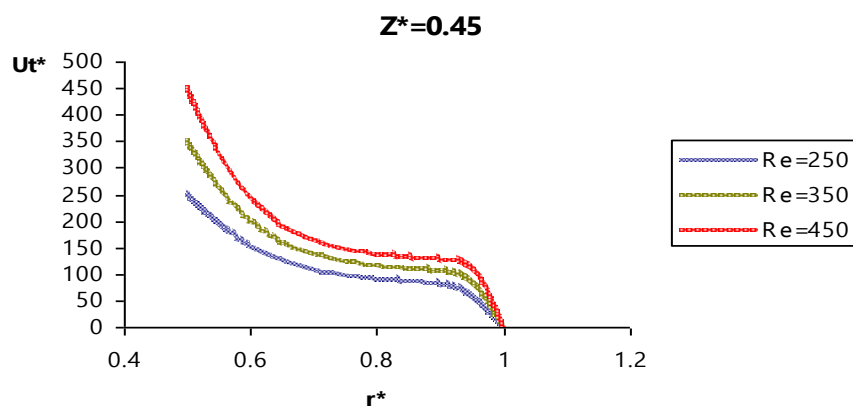
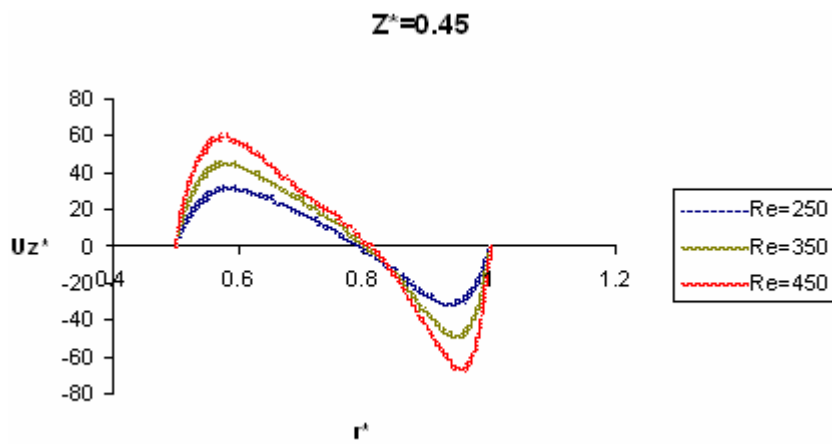
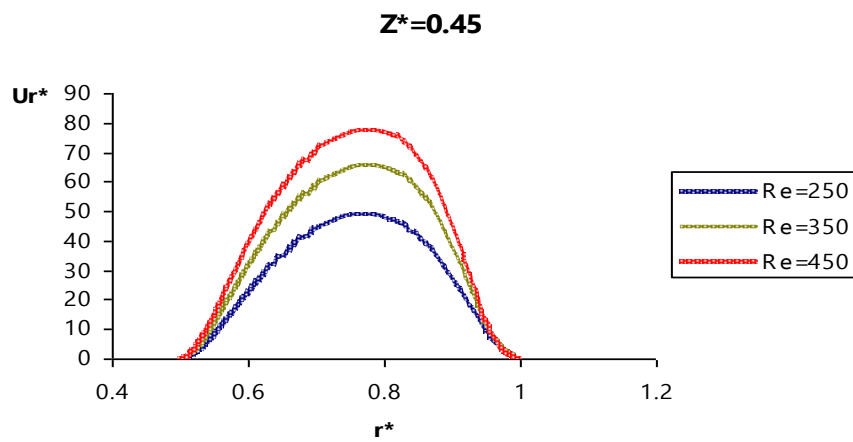
با مشاهده نتایج بدست آمده در شکل (۵-۱۰)، با افزایش سرعت استوانه درونی، هر سه مؤلفه سرعت در $r^* = 0.62$ افزایش می یابند. در نمودار بدست آمده برای مؤلفه مماسی سرعت، شکل پروفیل ایجاد شده، نفوذ ممنوم زاویه ای را به سمت استوانه بیرونی نشان می دهد (جهت z^* در نمودارها از صفحه بالائی به طرف صفحه تحتانی است).





شکل (۵-۱۱): نمودارهای تغییرات سرعت جریان شکل (۵-۳) در راستای شعاعی

با توجه به شکل (۵-۱۱)، مقدار سرعت مماسی، با توجه به شرط مرزی اعمال شده روی استوانه داخلی، از یک مقدار ماکزیمم روی دیواره درونی به سمت استوانه بیرونی کاهش می یابد.



شکل (۵-۱۲): تغییرات سرعت جریان شکل (۵-۳) با عدد رینولدز در سطح میانی

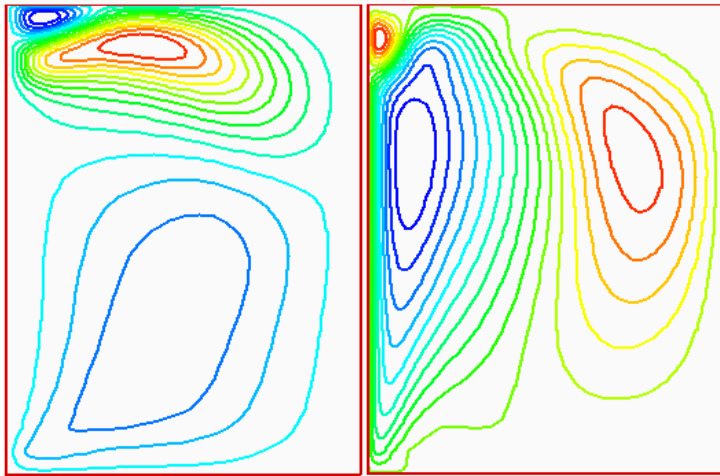
نمودارهای شکل (۵-۱۲)، افزایش مقادیر سرعتها را با افزایش عدد رینولدز در مقطع میانی بین استوانه ها نشان می دهند.

۵-۳- جریان کوئت تیلور با نسبت ظاهری حدود یک

در این قسمت با تغییر نسبت ظاهری و با استفاده از مراجع ذکر شده، حالت‌های بررسی می شوند که در آنها اندازه ارتفاع محفظه به لقی بین استوانه ها نزدیک باشد. در تمامی حالتها، جریان آرام و ناپایدار است.

۵-۳-۱- جریان کوئت تیلور با $Re = 420$, $\Gamma = 1.30$, $\eta = 0.5$

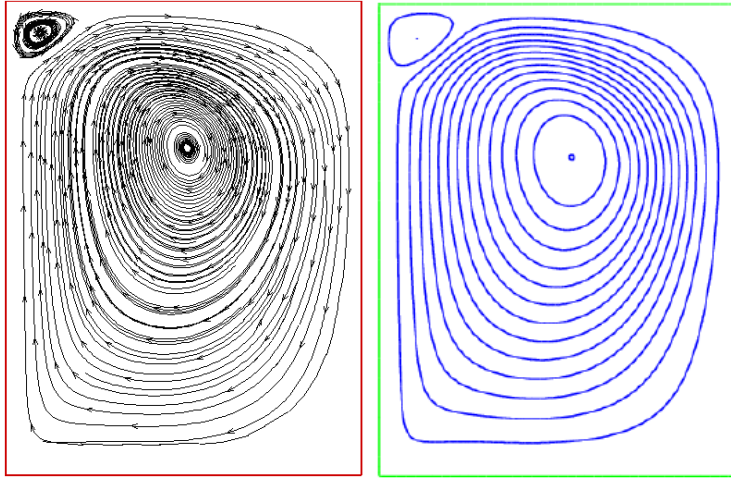
شکل (۵-۱۳)، حالتی را نشان می دهد که دیواره چپ چرخان بوده و دیواره راست و صفحات انتهائی، ثابت هستند. مطابق شکل گردابه ها نامتقارن بوده و گردابه قوی تر به صورت مربعی در جهت Z فشرده شده است. این حالت معمولاً در نسبت ظاهری های نزدیک به یک ایجاد می شود. کانتور سرعت مماسی در شکل (۵-۱۳الف)، نشاندهنده کاهش میزان نفوذ این مؤلفه در جریان، از طرف استوانه درونی به سمت بیرون است. در نتیجه مقدار نیروی گریز از مرکز $\frac{u_{\theta}^2}{r}$ به سمت استوانه بیرونی کاهش می یابد.



Ur (ج)

Uz (ب)

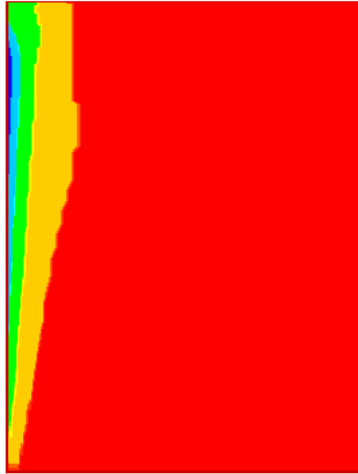
Ut (الف)



ب) حل عددی

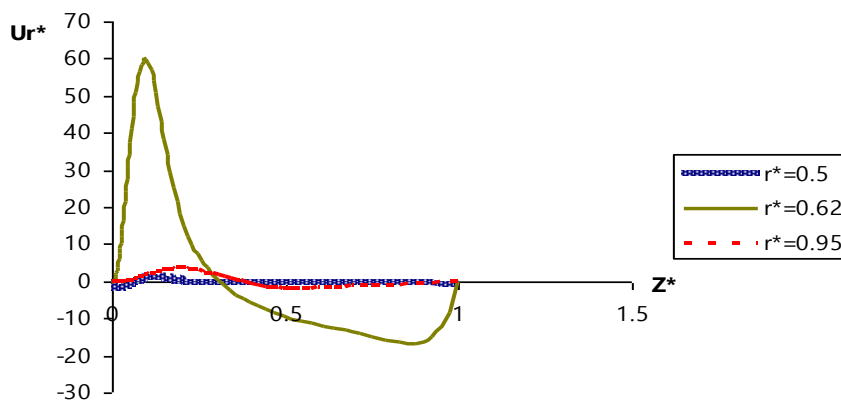
خطوط جریان: الف) مرجع [۳]

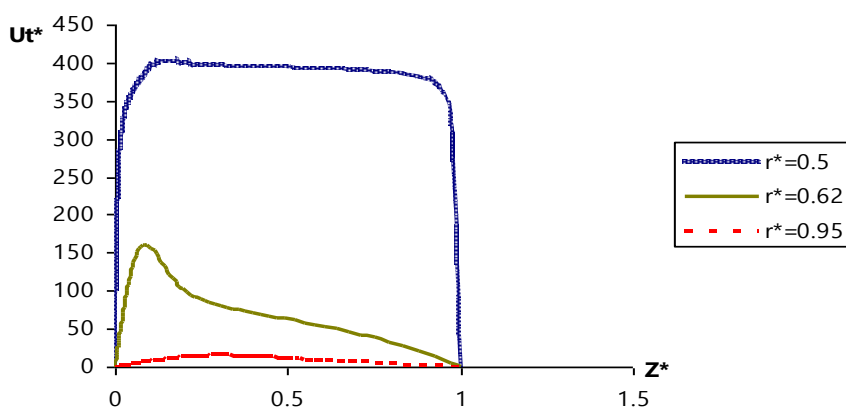
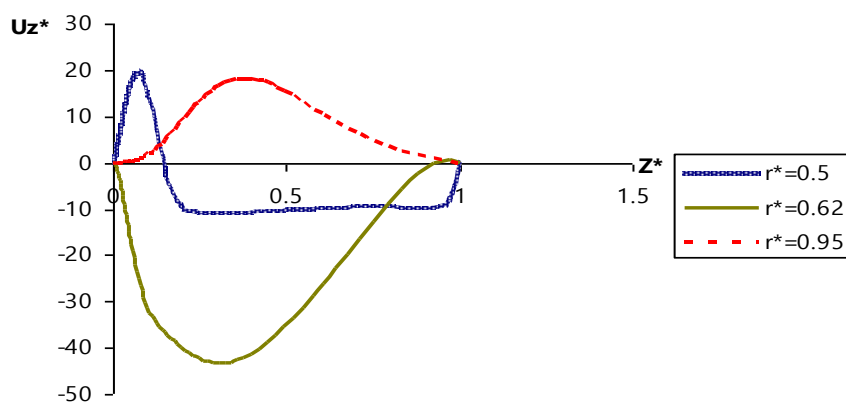
شکل (۵-۱۳): کانتورهای سرعت و خطوط جریان $Re = 420$, $\Gamma = 1.30$, $\eta = 0.5$



شکل (۵-۱۴): کانتور فشار جریان شکل (۵-۱۳) ($Re = 420$, $\Gamma = 1.30$, $\eta = 0.5$)

کانتور فشار نشان داده شده در شکل (۵-۱۴) نیز مانند کانتورهای سرعت بدست آمده، نامتقارن است و مقدار مینیمم فشار در مجاور استوانه درونی ایجاد می شود. با مشاهده کانتور بدست آمده، گرادیان فشار $\frac{\partial p}{\partial r}$ در نزدیکی استوانه داخلی بیشتر است. نیروی حاصل از این گرادیان با نیروی گریز از مرکز $\frac{u_{\theta}^2}{r}$ در تعادل است. با توجه به خطوط جریان شکل (۵-۱۳)، هسته گردابه تقریباً در وسط لقی قرار دارد، که این را می توان بدلیل نزدیک بودن مقادیر نیروهای بوجود آمده در راستای شعاعی دانست. همچنین با توجه به شکل گردابه، که گردابه ضعیفی در بالای محفظه تشکیل شده و هسته گردابه قوی تر به سمت صفحه فوقانی متمایل است، افزایش نیروی حاصل از $\frac{\partial p}{\partial z}$ و نیروی گریز از مرکز در آن ناحیه را مشخص خواهد کرد، که این موضوع از کانتور فشار و سرعت مماسی بدست آمده، مشاهده می شود.





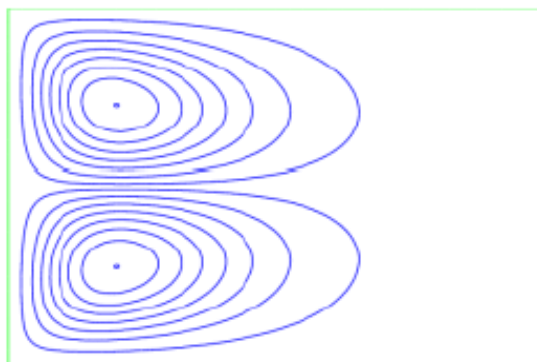
شکل (۵-۱۵): نمودارهای تغییرات سرعت جریان مرجع [۳] در راستای محوری (

$$(\text{Re} = 420, \Gamma = 1.30, \eta = 0.5)$$

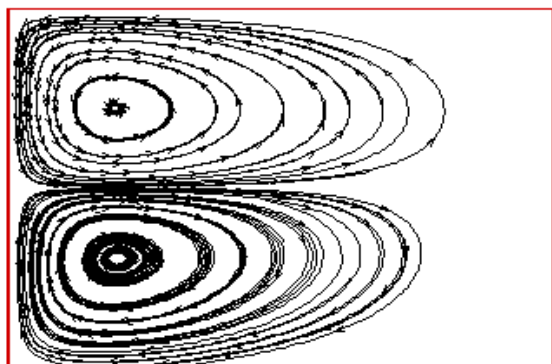
با استفاده از نمودارهای شکل (۵-۱۵)، در $r^* = 0.5$ بزرگترین مقدار مؤلفه سرعت شعاعی نزدیک به صفحه فوقانی است و شرط مرزی عدم لغزش، در دیواره های انتهائی کاملاً مشخص است. همچنین ماکزیمم مقدار سرعت مماسی، نزدیک به صفحه فوقانی ایجاد میشود (در نمودارها، جهت محوری Z ، از صفحه فوقانی به تحتانی در نظر گرفته شده است).

۵-۳-۲- جریان کوئت تیلور با $\eta = 0.5$, $\Gamma = 0.66$, $Re = 150$

شکل (۵-۱۶) نیز گردابه هائی از نوع $N2$ را تشکیل داده که جهت جتها به سمت بیرون مشاهده می شود. دلیل فشردگی گردابه ها در جهت Z ، کوچک بودن نسبت ظاهری در مقایسه با شکل (۵-۳) است، که این حالت میتواند موجب شود تا هسته گردابه ها به سمت استوانه داخلی متمایل شوند. شکل خطوط جریان بدست آمده، نشاندهنده میزان نفوذ ممتوم زاویه ای از طرف استوانه درونی به داخل محفظه جریان است، که میزان آن به طرف استوانه بیرونی کم می شود.

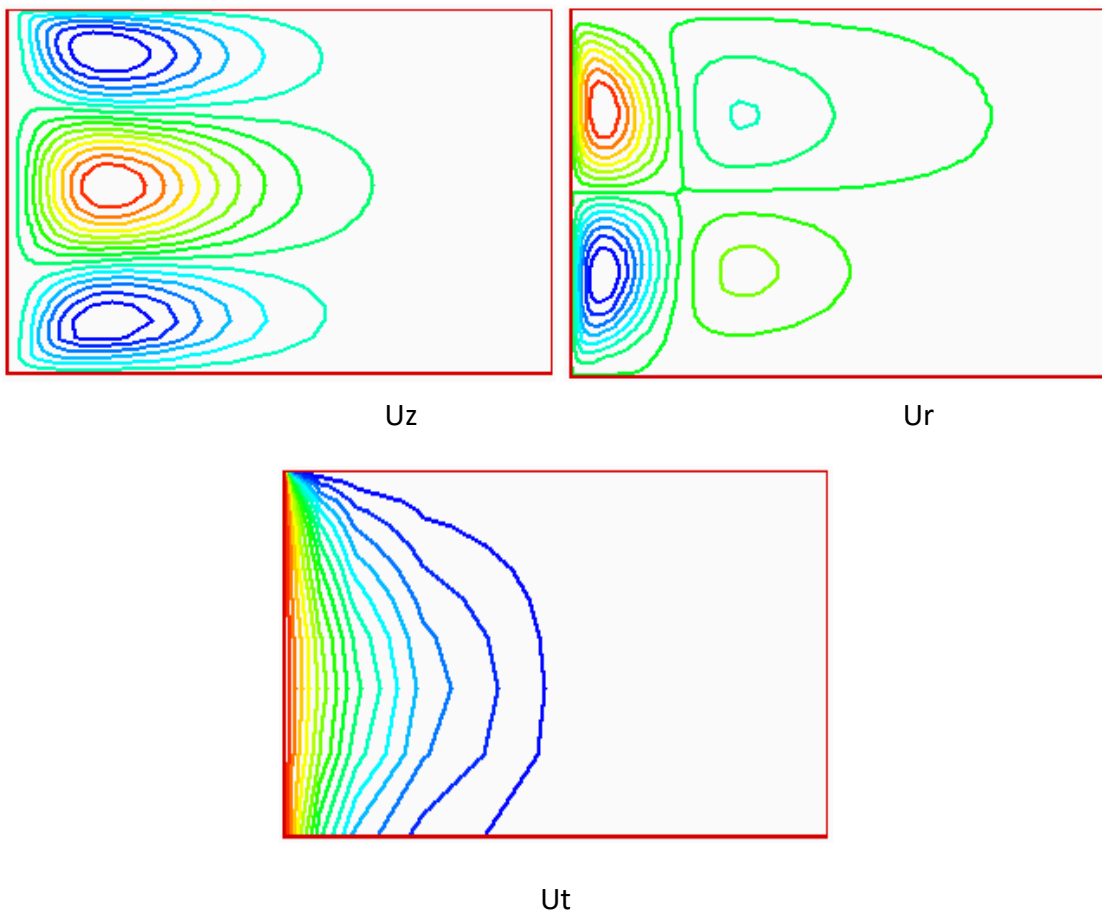


(الف)



(ب)

شکل (۵-۱۶): خطوط جریان $\eta = 0.5$, $\Gamma = 0.66$, $Re = 150$ ، (الف) مرجع [۳]، (ب) نتایج حل عددی

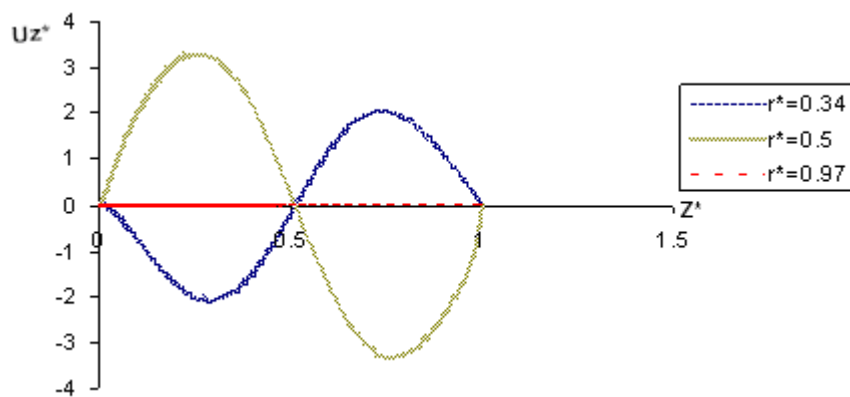
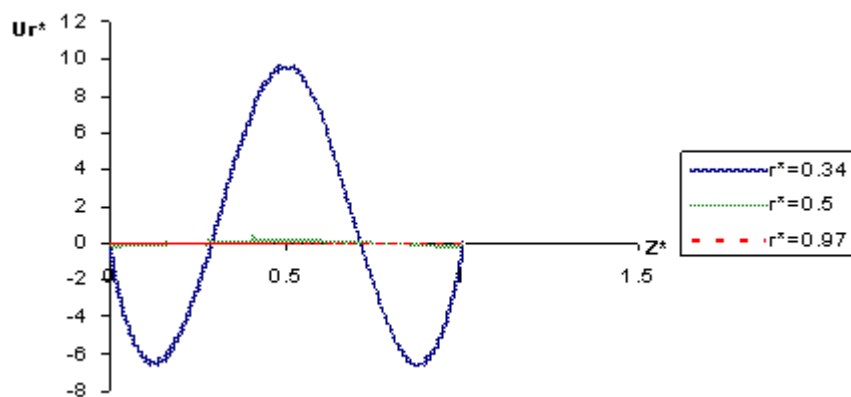


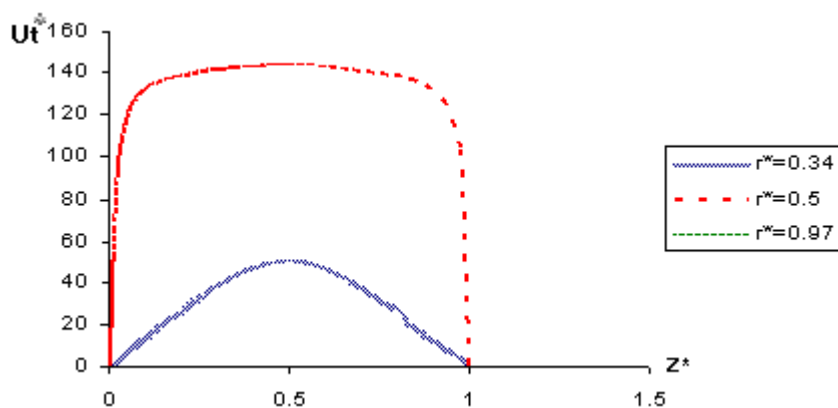
شکل (۱۷-۵): کانتورهای سرعت جریان شکل (۱۶-۵) $\eta = 0.5$, $\Gamma = 0.66$, $Re = 150$

کانتورهای سرعت شعاعی و محوری بدست آمده در شکل (۱۷-۵)، یک حالت تقارن را در جهت Z نشان می دهند. همچنین مقدار سرعت مماسی به سمت استوانه بیرونی کاهش می یابد و در نتیجه از میزان

نیروی گریز از مرکز $\frac{u_{\theta}^2}{r}$ کاسته خواهد شد. پس با مغلوب شدن این نیرو توسط نیروی حاصل از $\frac{\partial p}{\partial r}$

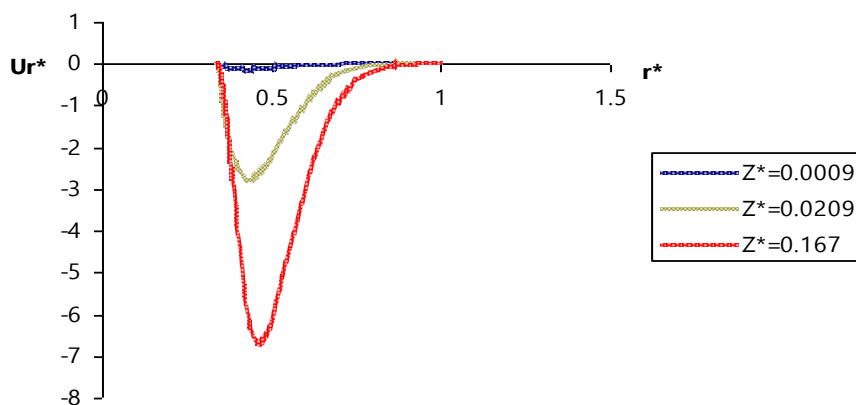
می تواند باعث نزدیک شدن هسته گردابه ها به استوانه درونی شود. از کانتور سرعت مماسی بدست آمده نیز می توان دید که در نزدیکی استوانه داخلی، از طرف صفحه تحتانی به سمت بالا، از میزان نیروی گریز از مرکز $\frac{u_{\theta}^2}{r}$ کاسته می شود.

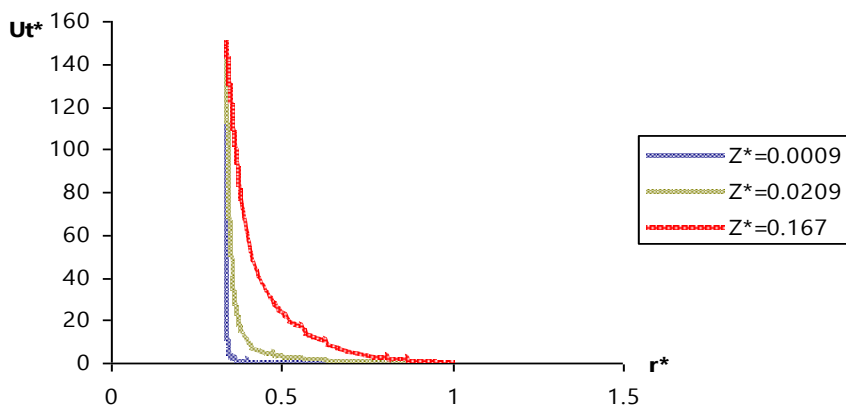
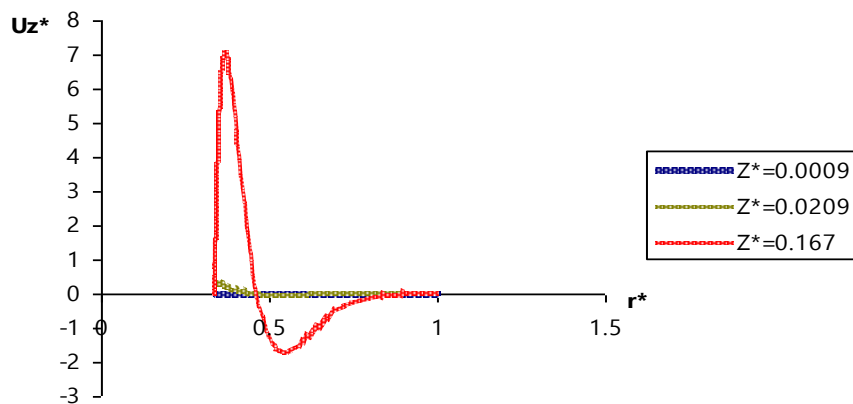




شکل (۵-۱۸): نمودارهای تغییرات سرعت جریان شکل (۵-۱۶) در جهت محوری

با توجه به نمودارهای شکل (۵-۱۸)، در $r^* = 0.5, 0.34$ ، حالت تقارن گردابه‌ها در دو مؤلفه سرعت شعاعی و مماسی مشاهده می‌شود. در صفحه میانی بین دو استوانه، سرعت شعاعی و مماسی دارای ماکزیمم مقدار و سرعت محوری صفر است. مقادیر هر سه مؤلفه سرعت در $r^* = 0.97$ ، یعنی در نزدیکی استوانه بیرونی، تقریباً صفر است. همچنین شرط مرزی عدم لغزش در صفحات انتهایی، در نمودارها مشخص است.





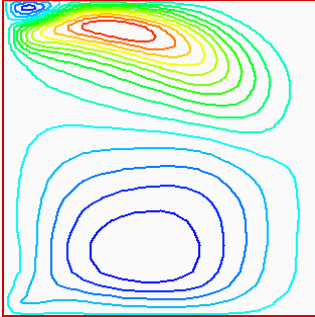
شکل (۵-۱۹): تغییرات سرعت جریان شکل (۵-۱۶) در جهت شعاعی

با توجه به نمودار های شکل (۵-۱۹)، کاهش سرعتها در نزدیکی استوانه بیرونی مشاهده می شود.

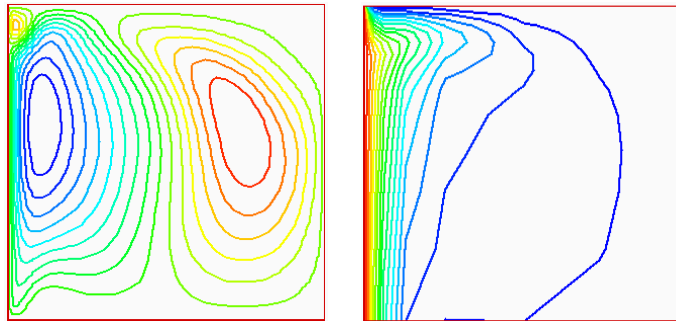
$$\Gamma = 1, \quad \text{Re} = 700, \quad \eta = 0.5 \quad \text{جریان کوئت تیلور با } ۳-۵-۳$$

شکل (۵-۲۰)، خطوط جریان را برای $\Gamma = 1, \text{Re} = 700, \eta = 0.5$ نشان می دهد. از آنجا که $\Gamma = 1$ است، سلولها مربعی نیستند و در جهت Z فشرده می شوند. در اینحالت نوع گردابه، تک سلولی A1 می

باشد، که فاقد تقارن $Z2$ است. با مشاهده شکل گردابه، هسته آن تقریباً در وسط و نزدیک سطح فوقانی محفظه قرار می گیرد، و این بدلیل برابری لقی و ارتفاع ستون سیال است، که موجب تعادل گرادیانهای



ایجاد شده در جریان میشود. ن



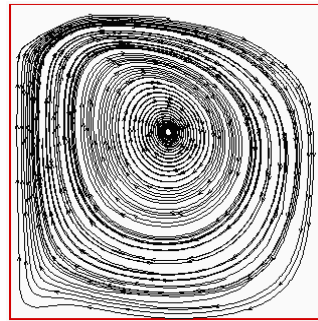
U_r

U_z

U_t



(ب) مرجع [۷]

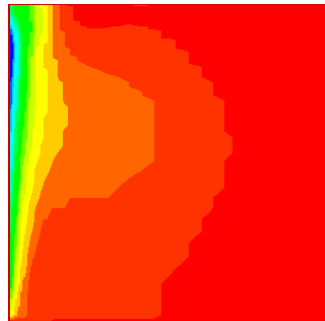


خطوط جریان: الف) حل عددی

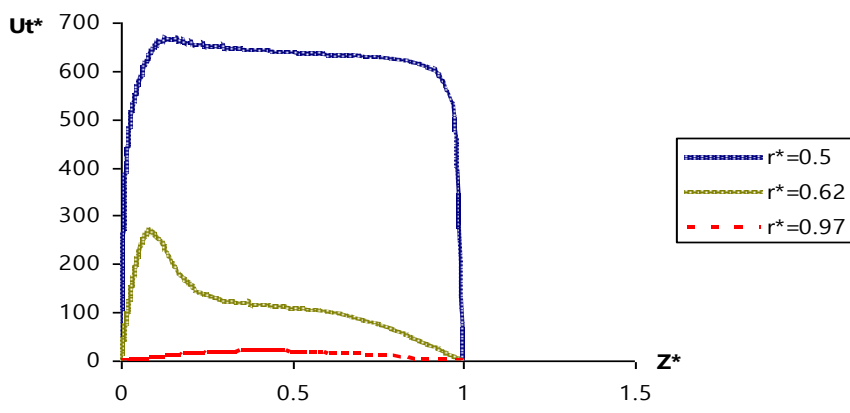
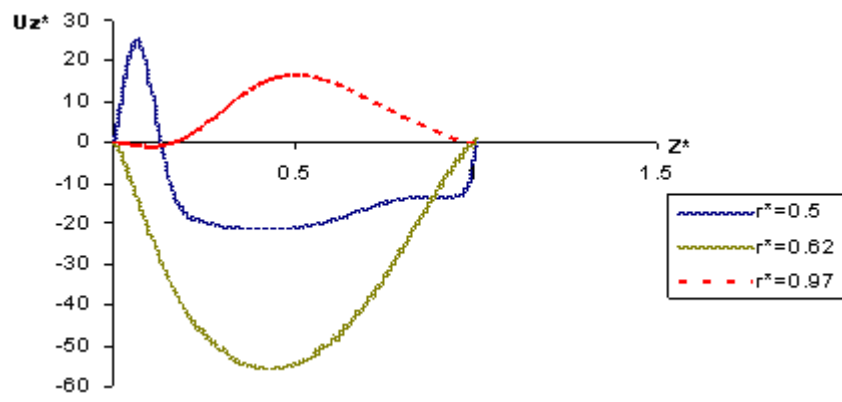
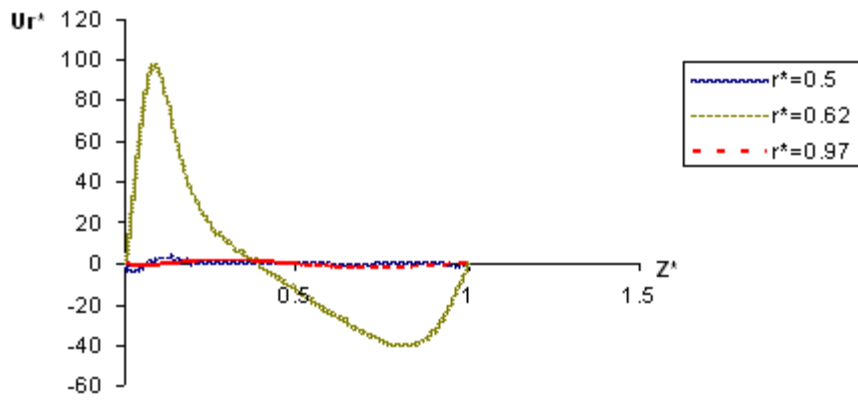
شکل (۵-۲۰): خطوط جریان و کانتورهای سرعت، با دیواره سمت چپ چرخان $\eta = 0.5$ ، $Re = 700$ ، $\Gamma = 1$

با توجه به کانتورهای سرعت شکل (۲۰-۵)، سرعت مماسی به طرف دیواره خارجی کاهش می یابد. در نتیجه، نیروی گریز از مرکز $\frac{u_\theta^2}{r}$ نیز به طرف استوانه بیرونی، کاهش خواهد یافت. همچنین یک کاهش در این نیرو از سمت صفحه فوقانی به طرف صفحه تحتانی مشاهده می شود.

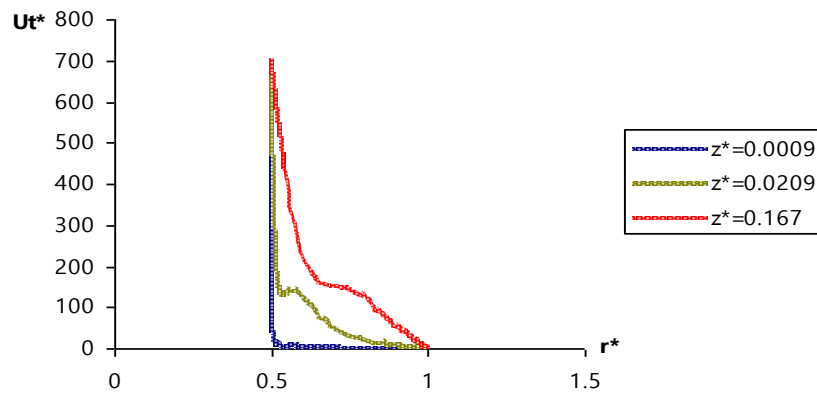
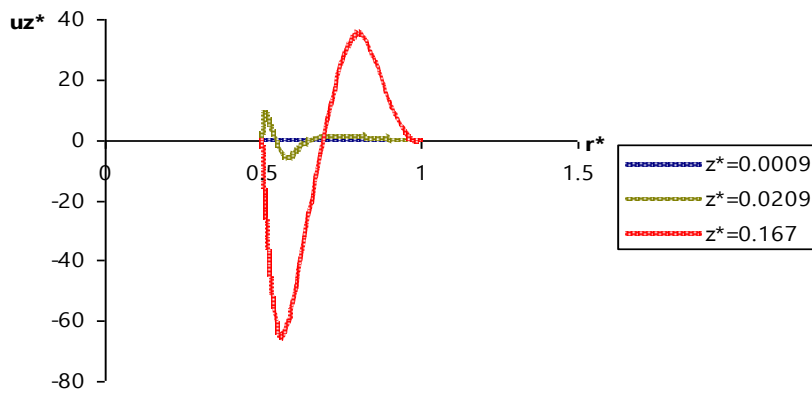
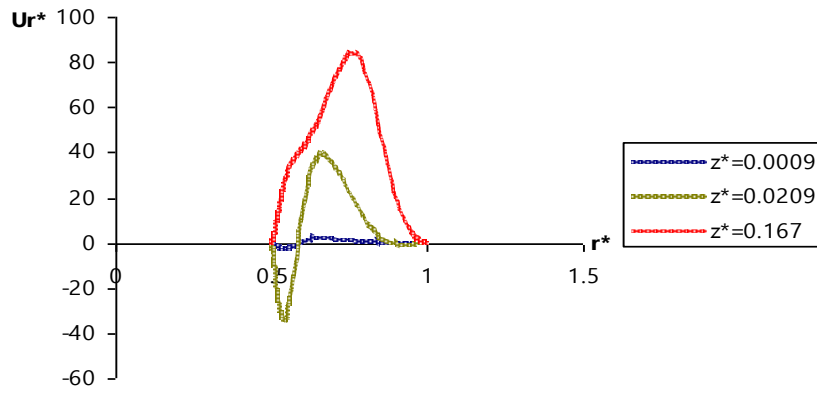
کانتور فشار شکل (۲۱-۵) نیز گرادیان فشار را در دو جهت شعاعی و محوری بخوبی نشان می دهد. گرادیان $\frac{\partial p}{\partial r}$ در مجاورت استوانه درونی بیشتر است و نیروی حاصل از آن در تعادل با نیروی گریز از مرکز $\frac{u_\theta^2}{r}$ است. همچنین نزدیک بودن هسته گردابه به صفحه فوقانی را می توان بدلیل بزرگی مقدار نیروهای حاصل از $\frac{\partial p}{\partial z}$ و $\frac{u_\theta^2}{r}$ در آن ناحیه دانست.



شکل (۲۱-۵): کانتور فشار جریان شکل (۲۰-۵) ($\Gamma = 1, \text{Re} = 700, \eta = 0.5$)



شکل (۲۲-۵): نمودارهای تغییرات سرعت جریان شکل (۲۰-۵) در جهت محوری ($\Gamma = 1, Re = 700, \eta = 0.5$)



شکل (۲۳-۵): تغییرات سرعت جریان شکل (۲۰-۵) در جهت شعاعی

با توجه به نمودارهای سرعت شکل (۵-۲۲) در $r^* = 0.62$ ، اندازه سرعت شعاعی نزدیک به صفحه فوقانی بیشترین مقدار را داراست و با نزدیک شدن به هسته گردابه جریان، مقدار آن کاهش می یابد. بزرگی سرعت محوری با نزدیک شدن به صفحه میانی بین دو استوانه زیاد می شود. سرعت مماسی نیز در نزدیکی صفحه فوقانی بیشترین مقدار را داراست (جهت محور z^* ، از صفحه فوقانی به تحتانی در نظر گرفته شده است).

۵-۴- اثر چرخش صفحات انتهائی روی جریان کوئت تیلور

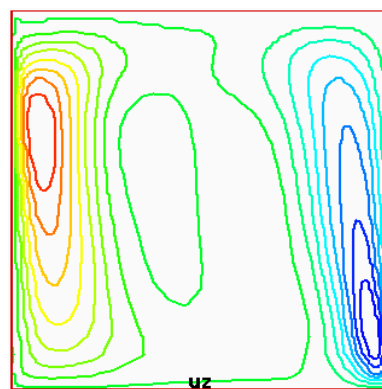
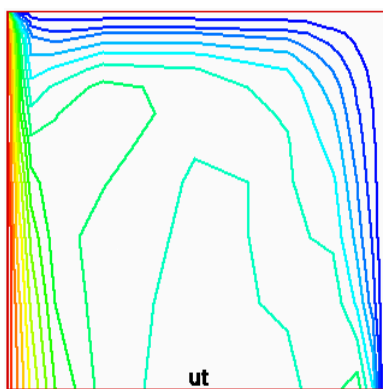
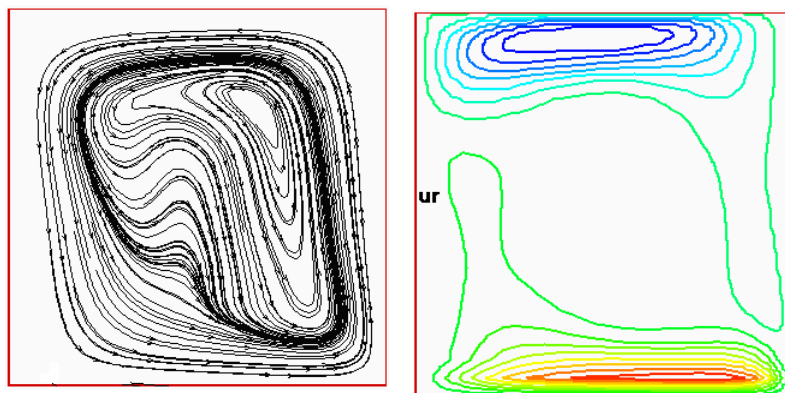
در مطالعه اثرات مختلف روی گردابه تیلور، ابتدا اثر چرخش صفحات انتهائی در جریان شکل (۵-۲۰) بررسی می شود. با توجه به نتایج، حالتی که صفحه تحتانی همراه با دیواره چپ چرخان باشد ($Re=700$)، هسته گردابه به سمت بالا و متمایل به استوانه بیرونی خواهد شد و متقابلاً اثر صفحه فوقانی روی جریان گردابه بدست می آید.

۵-۴-۱- چرخش صفحه تحتانی با استوانه داخلی جریان شکل (۵-۲۰)

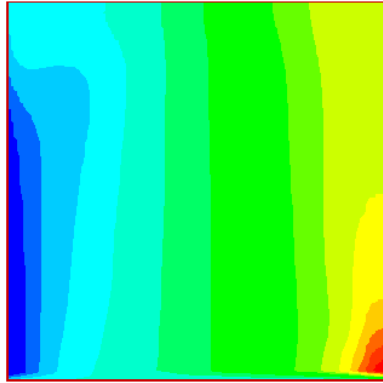
با توجه به شکل (۵-۲۴)، کانتورهای سرعت، حالت نامتقارن را نشان می دهند، که با مشاهده نمودارهای سرعت (شکل ۵-۲۶)، ماکزیمم مقدار سرعت شعاعی در مجاورت صفحات انتهائی در جهات مختلف ایجاد میشود و مینیمم مقدار این مؤلفه سرعت در صفحه میانی رخ می دهد. همچنین شرط مرزی عدم لغزش روی دیواره ها، مشخص است.

کانتور سرعت مماسی بدست آمده، اثر چرخش دیواره درونی به همراه صفحه تحتانی را نشان می دهد. نیروی گریز از مرکز $\frac{u_{\theta}^2}{r}$ به سمت استوانه بیرونی کاهش می یابد. مقدار این نیرو در یک شعاع ثابت از طرف صفحه تحتانی به صفحه فوقانی کاهش خواهد یافت.

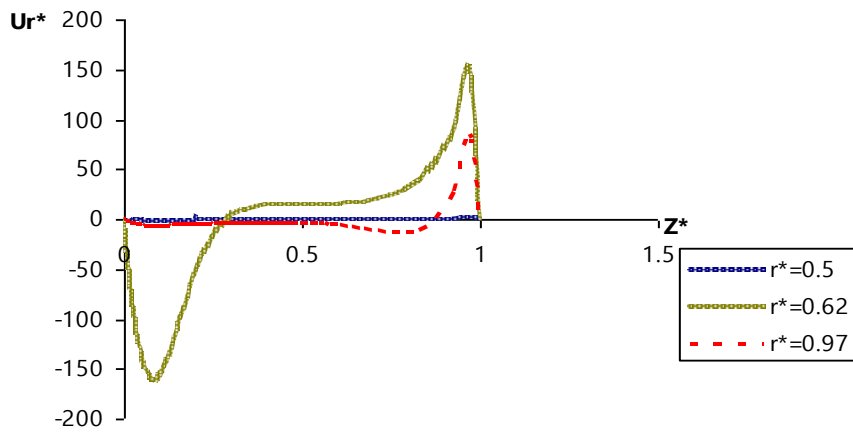
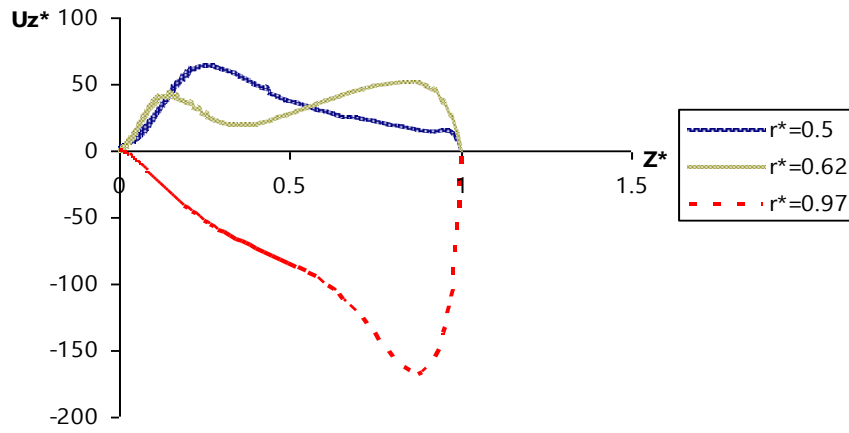
با توجه به کانتور فشار این جریان (شکل ۵-۲۵)، مقدار ماکزیمم فشار در مجاورت صفحه تختانی به طرف استوانه بیرونی است. یعنی بیشترین گرادیان فشار ایجاد شده در جریان، $\frac{\partial p}{\partial r}$ بوده و نیروی حاصل از آن در تعادل با نیروی گریز از مرکز $\frac{u_{\theta}^2}{r}$ می باشد.

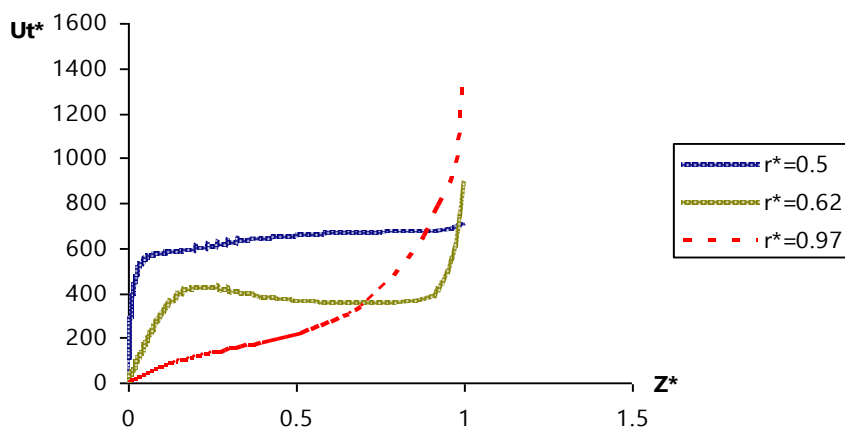


شکل (۵-۲۴): اثر چرخش صفحه تختانی روی جریان شکل (۵-۲۰) (صفحه تختانی و دیواره چپ چرخان)



شکل (۲۵-۵): کانتور فشار جریان شکل (۲۴-۵)

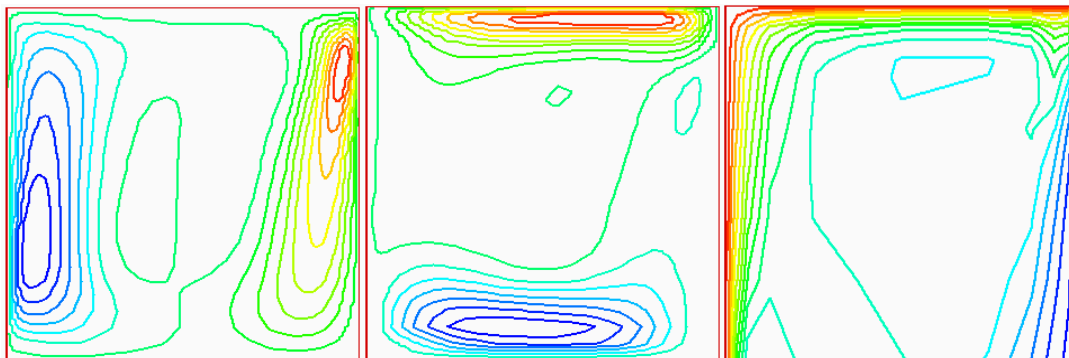




شکل (۵-۲۶): نمودارهای تغییرات سرعت جریان شکل (۵-۲۴)

شرط مرزی صفحه تحتانی چرخان، از نمودار سرعت مماسی (۵-۲۶)، مشاهده میشود (جهت محور Z ، از صفحه فوقانی به تحتانی در نظر گرفته شده است).

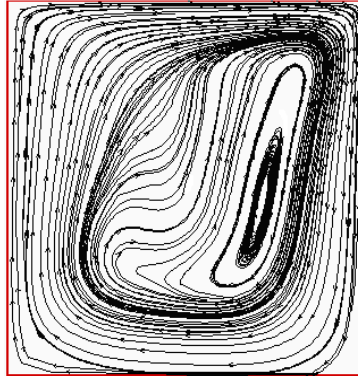
در نتیجه چرخش صفحه تحتانی، همیشه جهت جریان مجاور صفحه چرخان به سمت استوانه بیرونی است، و در صفحه فوقانی ثابت، جریان به سمت داخل رخ می دهد. این حالت موجب می شود تا تعداد گردابه های تشکیل شده فرد باشند. در کل با تحلیل عددی می توان دریافت که اندازه گردابه مجاور صفحه تحتانی یا فوقانی به عدد رینولدز وابسته است.



Ur

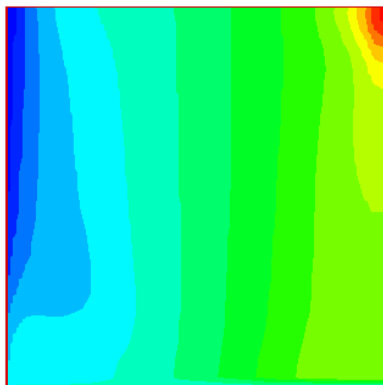
Uz

Ut



شکل (۲۷-۵): اثر چرخش صفحه فوقانی روی جریان شکل (۵-۲۰) (صفحه فوقانی و دیواره چپ چرخان)

شکل (۲۷-۵)، حالت چرخش صفحه فوقانی به همراه استوانه درونی را نشان می دهد. در این حالت، خطوط جریان نشان می دهند که، هسته گردابه در صفحه فوقانی تمایل به استوانه بیرونی دارد. این حالت را با مشاهده کانتور سرعت مماسی، که مقدار ماکزیمم آن در ناحیه مجاور صفحه فوقانی است، می توان بیان کرد. زیرا میزان نیروی گریز از مرکز $\frac{u_{\theta}^2}{r}$ در آنجا بیشتر است و هسته تمایل به دیواره بیرونی پیدا خواهد کرد.

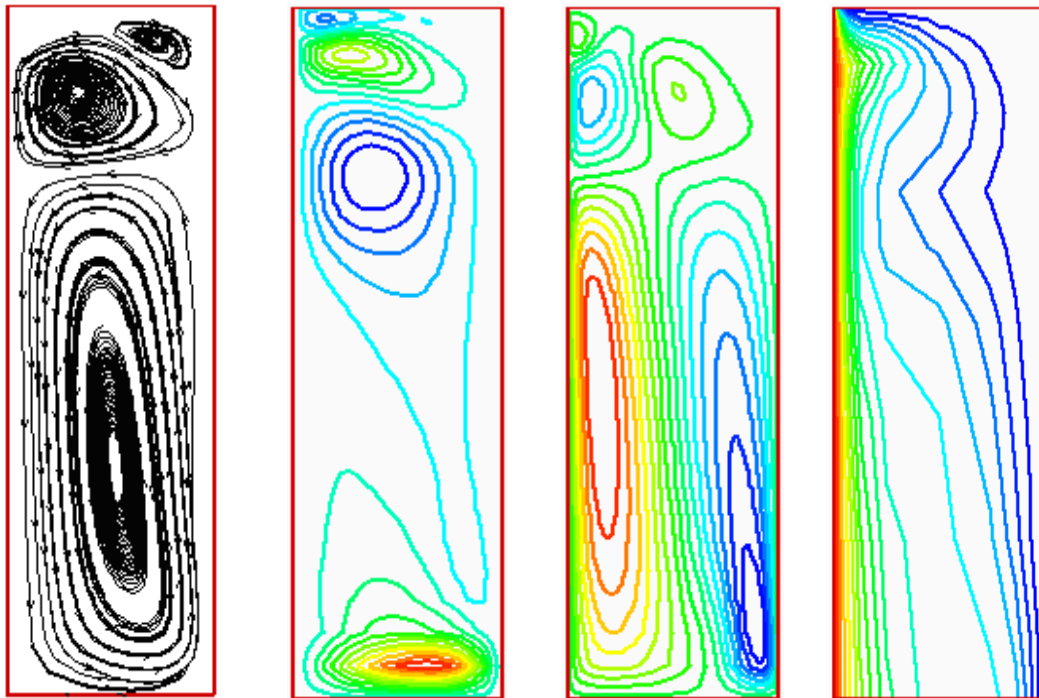


شکل (۲۸-۵): کانتور فشار جریان شکل (۲۷-۵)

در شکل (۲۸-۵)، بیشترین گرادیان فشار در جهت شعاعی، در مجاور صفحه چرخان ایجاد می شود و ماکزیمم مقدار فشار در داخل محفظه جریان، بین صفحه چرخان و استوانه بیرونی ایجاد می شود.

۵-۴-۲- اثر چرخش صفحات انتهائی روی جریان شکل (۳-۵)

با مشاهده شکل‌های (۲۹-۵) و (۳۱-۵)، گردابه های اصلی و قویتر در مجاورت صفحه چرخان، متمایل به استوانه بیرونی هستند و حالت تقارن جریان شکل (۳-۵)، بطور کامل از بین می رود. با چرخش صفحه تحتانی، جریان ناپایدارتر می شود، بطوریکه دو گردابه متقارن شکل (۳-۵)، به سه گردابه مطابق شکل (۲۹-۵)، تبدیل می شوند.



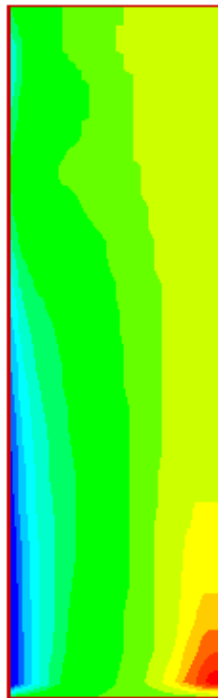
U_r U_z U_t

شکل (۲۹-۵): کانتورهای سرعت و خطوط جریان ($\Gamma = 3$, $\eta = 0.5$, $Re = 330$) شکل (۳-۵) با چرخش

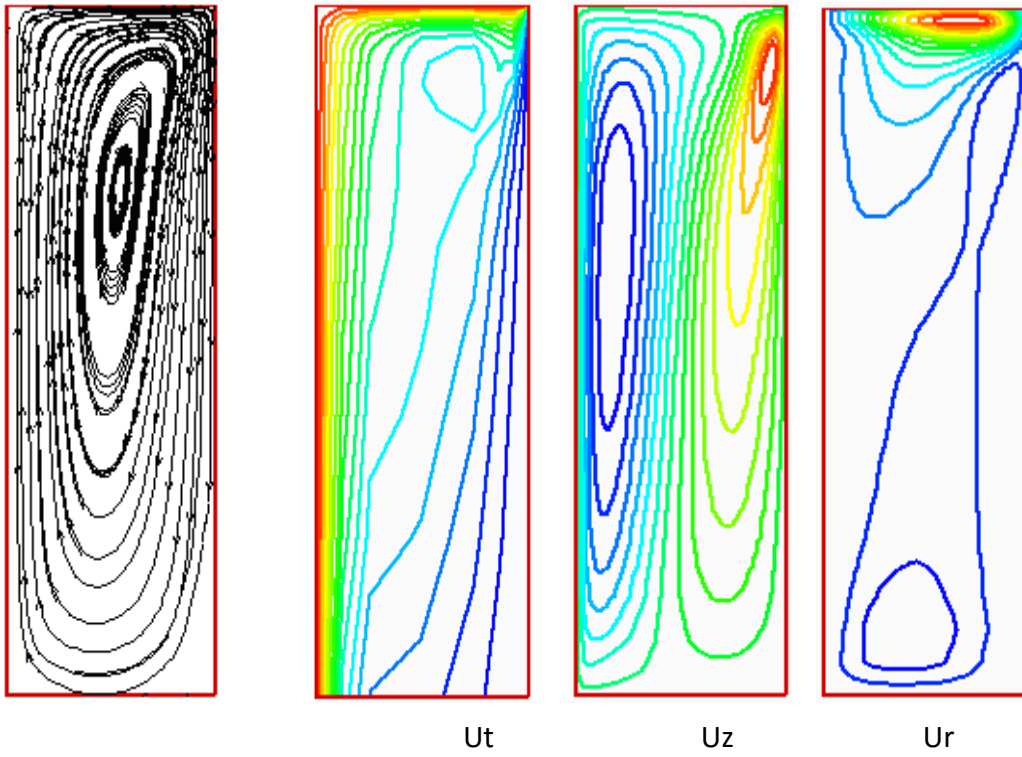
صفحه تحتانی و دیواره چپ

با مشاهده کانتورهای سرعت بدست آمده، میزان سرعت مماسی، به سمت استوانه بیرونی کم می شود. تمایل گردابه قویتر در مجاورت صفحه تحتانی، به طرف استوانه بیرونی است، که این بدلیل زیاد بودن نیروی گریز از مرکز ایجاد شده است، که در آن ناحیه مقدارش بیشتر است.

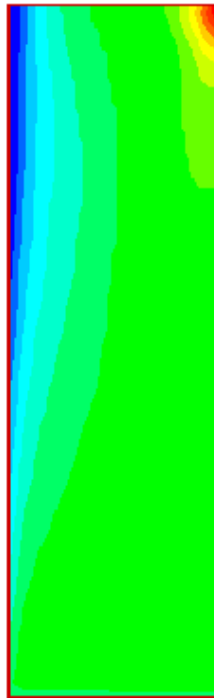
شکل کانتورهای سرعت مماسی، نفوذ ممنوم زاویه ای را از طرف استوانه درونی به داخل جریان نشان می دهند، یعنی میزان نفوذ ممنوم بداخل جریان، در مجاورت صفحه تحتانی بیشتر است.



شکل (۳۰-۵): کانتور فشار جریان شکل (۲۹-۵) ($\Gamma = 3$, $\eta = 0.5$, $Re = 330$)



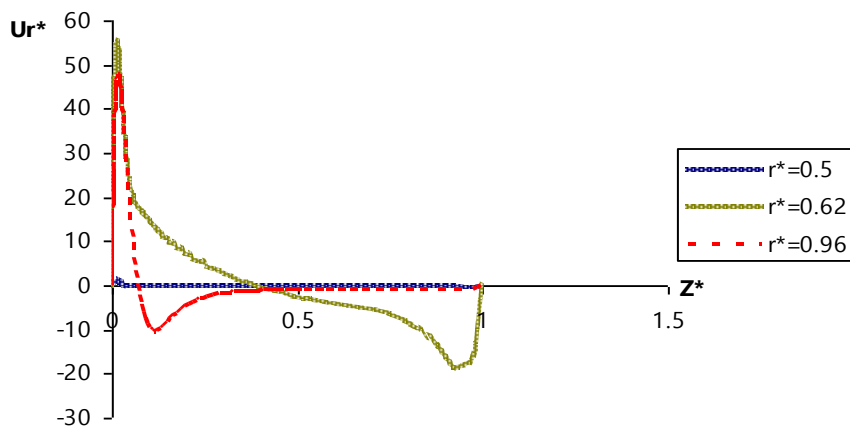
شکل (۳۱-۵): کانتورهای سرعت و خطوط جریان شکل (۳-۵)، با چرخش صفحه فوقانی و دیواره چپ

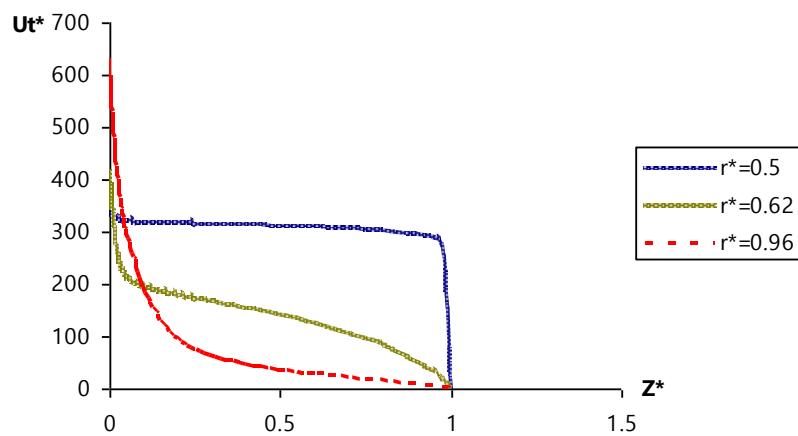
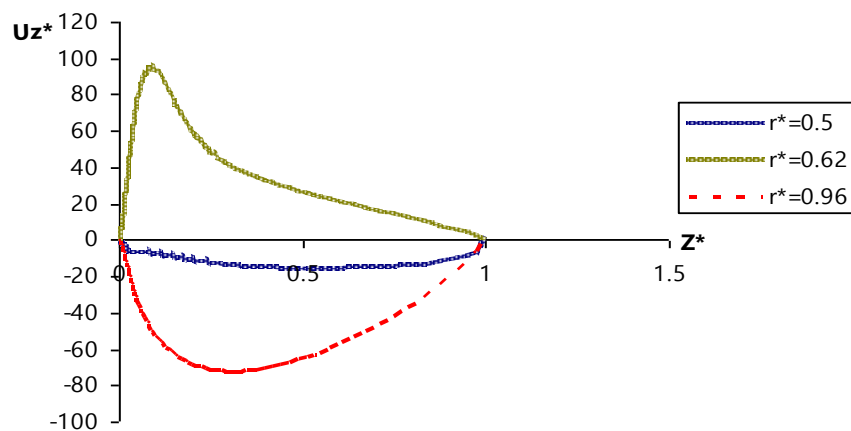


شکل (۵-۳۲): کانتور فشار جریان شکل (۵-۳۱) ($\Gamma = 3, \eta = 0.5, Re = 330$)

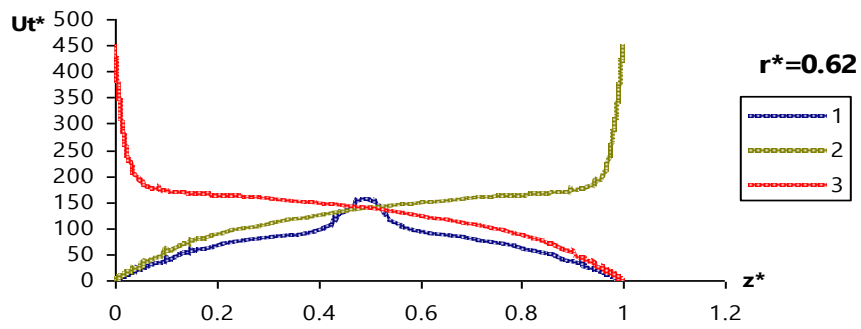
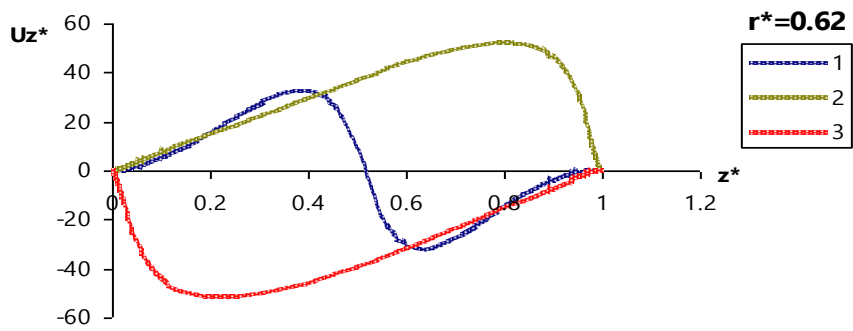
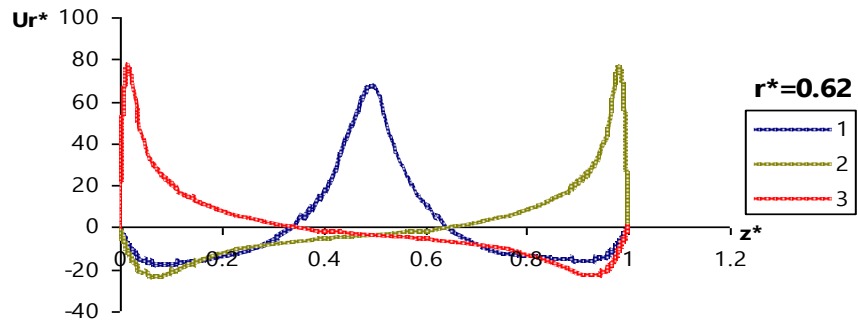
در شکل (۵-۳۱)، با چرخش صفحه فوقانی، دو گردابه متقارن شکل (۵-۳)، در هم ادغام شده و به یک گردابه قویتر، تبدیل خواهند شد. توجه شود که مطابق نتایج قبلی و نتایج این حالت، زمانیکه دیواره استوانه درونی به همراه صفحات انتهائی در چرخش باشد، تعداد گردابه های تشکیل شده، معمولاً فرد است. کانتور سرعت مماسی U_t بدست آمده، نشاندهنده کاهش نیروی گریز از مرکز به سمت استوانه بیرونی است.

گرادیان فشار این جریان (شکل ۵-۳۲)، در مجاورت صفحه فوقانی بیشترین مقدار خود را داراست، ولی در راستای محوری، گرادیان فشار کمتر است. هسته گردابه به صفحه فوقانی نزدیک می شود، علت آنرا می توان گرادیان فشار بیشتر در آن ناحیه، که ناشی از چرخش صفحه مجاور آن است، ذکر کرد. در این حالت مقدار ماکزیمم فشار بوجود آمده در محفظه جریان، در مجاورت صفحه چرخان و دیواره بیرونی دیده می شود. گرایش هسته گردابه تیلور در مجاورت صفحه چرخان به طرف استوانه بیرونی، بدلیل بالا بودن میزان ناپایداری گریز از مرکز و همچنین گرادیان فشار بوجود آمده در آن ناحیه است.





شکل (۳۳-۵): تغییرات سرعت جریان شکل (۳۱-۵)

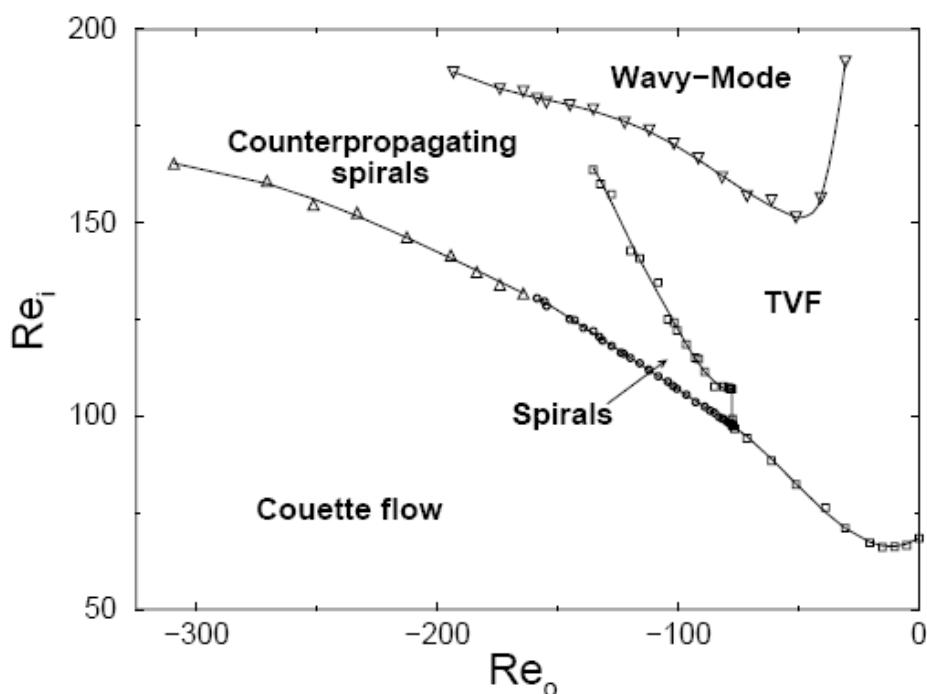


شکل (۳۴-۵): مقایسه اثر چرخش صفحات انتهائی همراه با استوانه درونی جریان شکل (۳-۵) روی مؤلفه های سرعت؛

۱- استوانه درونی چرخان، ۲- صفحه تحتانی با استوانه درونی چرخان، ۳- صفحه فوقانی با استوانه درونی چرخان

۵-۵- بررسی جریان کوئت تیلور با چرخش استوانه ها در جهات مخالف

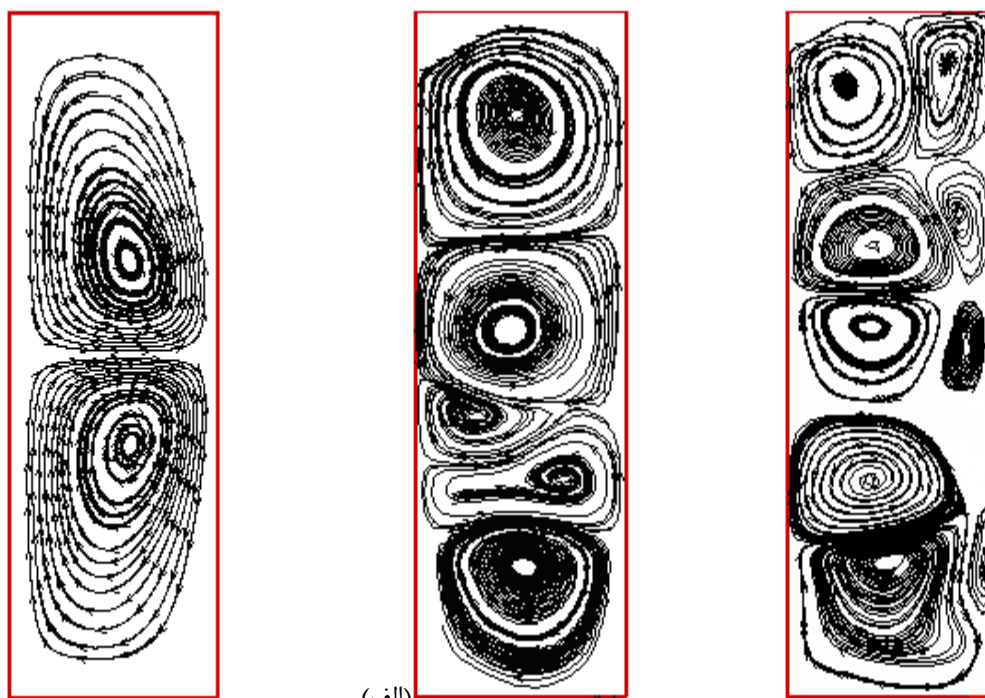
در این قسمت یک حالت کاملاً متفاوت، یعنی چرخش استوانه بیرونی در جهت مخالف استوانه درونی بررسی می شود. جهت مطالعه ساختار این جریان، از دیاگرام شکل (۳۵-۵)، که از روش آزمایشگاهی بدست آمده، استفاده می کنیم. این نمودار با مشاهده تجربی جریان بین دو استوانه چرخان در جهات مختلف، برای اعداد رینولدز چرخشی گوناگون بدست آمده است.



شکل (۳۵-۵): دیاگرام پایداری جریان بین دو استوانه چرخان در جهات مختلف با $[\eta = 0.5]$

با توجه به نمودار در یک رنج انتخابی، جریان کوئت آرام در اثر ناپایداری به جریان گردابه ای تیلور تبدیل می شود و با افزایش نرخ چرخش استوانه ها، به صورت گردابه های Spiral درمی آیند، که امواج متحرکی در جهات محوری و چرخشی ایجاد می شوند.

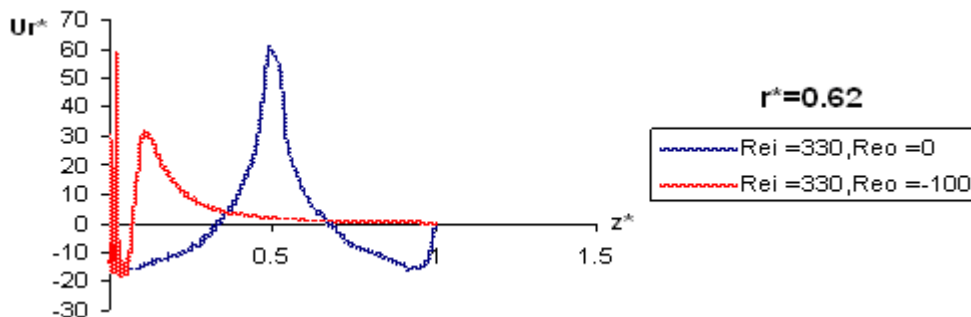
۵-۵-۱- اثر چرخش استوانه بیرونی روی جریان شکل (۵-۳)

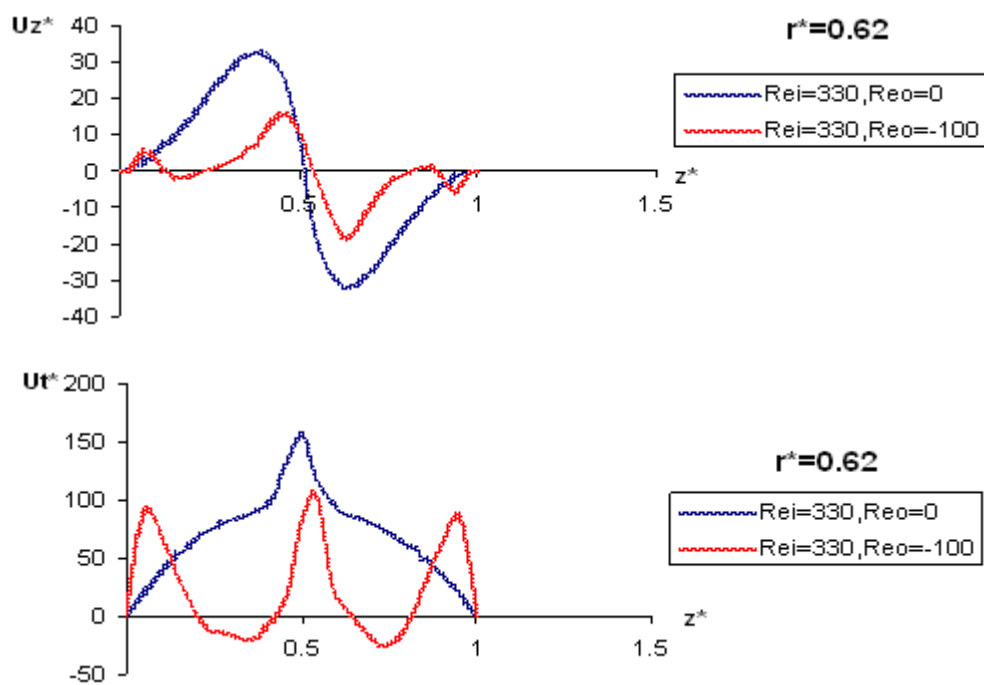


$Re_i = 330, Re_o = 0$ (ج) $Re_i = 330, Re_o = -100$ (ب) $Re_i = 330, Re_o = -264$

شکل (۵-۳۶): ناپایداری جریان شکل (۵-۳) در اثر چرخش استوانه بیرونی

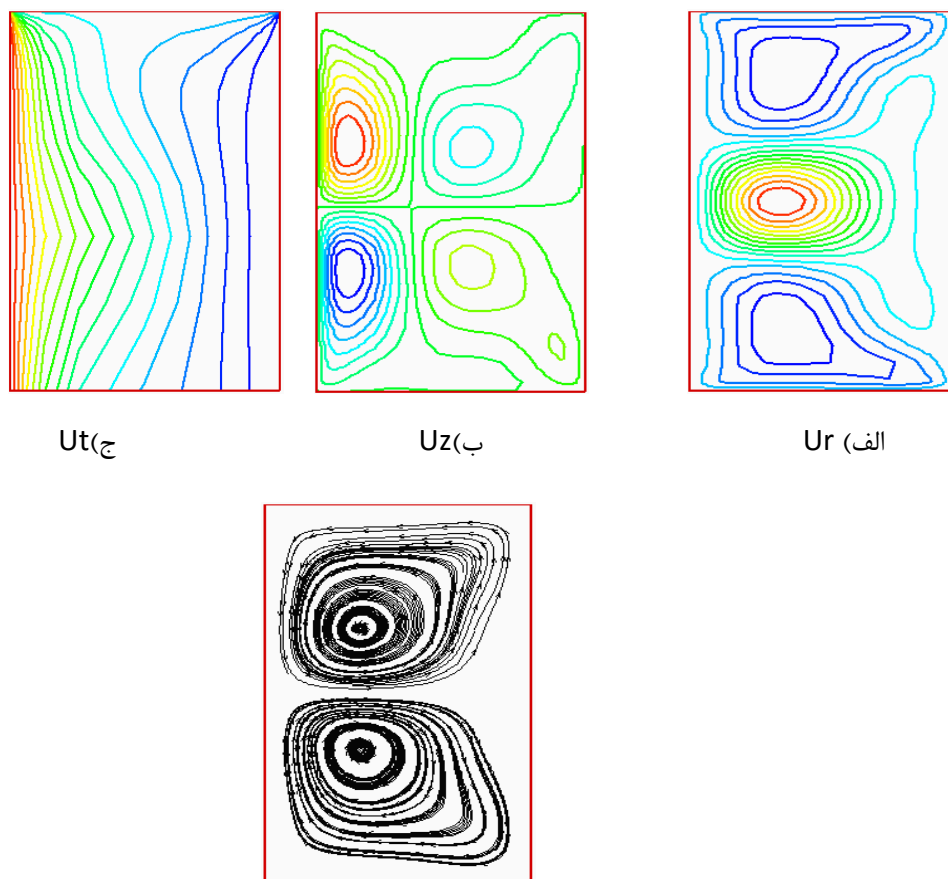
با مشاهده شکل (۵-۳۶)، در اثر چرخش استوانه بیرونی، تعداد گردابه ها از دو گردابه متقارن در حالت استوانه بیرونی ساکن، به چند گردابه ضعیف و نامنظم تبدیل می شوند. با چرخش سیلندر بیرونی ابتدا ناپایداری ضعیفی در جریان مشاهده می شود و سپس گردابه های تیلور تمام فضای بین دو استوانه را پر میکنند. اثر چرخش مخالف استوانه ها اینست که اندازه گردابه ها نسبت به حالت استوانه بیرونی ثابت، کوچکتر خواهند شد، که این موضوع در شکل (۵-۳۶ب)، کاملاً مشهود است. با توجه به شکل فوق، گردابه های اصلی و قوی تر جریان، در نزدیکی استوانه داخلی ایجاد می شوند و این در حالیست که یک چرخش ضعیف گردابه ای در مجاور استوانه بیرونی در جهت مخالف، بوجود می آید. توجه شود که در تمام حالت های بوجود آمده، جریان گردابه ای، از نوع آرام و ناپایدار است. پس با فرض یک Γ ثابت برای شکل بالا، تعداد گردابه ها از دو گردابه، با افزایش رینولدز چرخشی استوانه خارجی از صفر به حدود ۲۶۴-، به ۹ گردابه افزایش خواهند یافت. جریان های ایجاد شده به حالت Wavy-mode خواهند رسید، که شامل یک سری امواج تعدیل شده از گردابه های تیلور، می باشند. توضیح اینکه، همیشه تعداد گردابه ها در حالات Spiral و Wavy-mode، فرد است و حرکات سیال بوجود آمده با توجه به شکل بالا، از صفحه فوقانی به تحتانی صورت می گیرد.





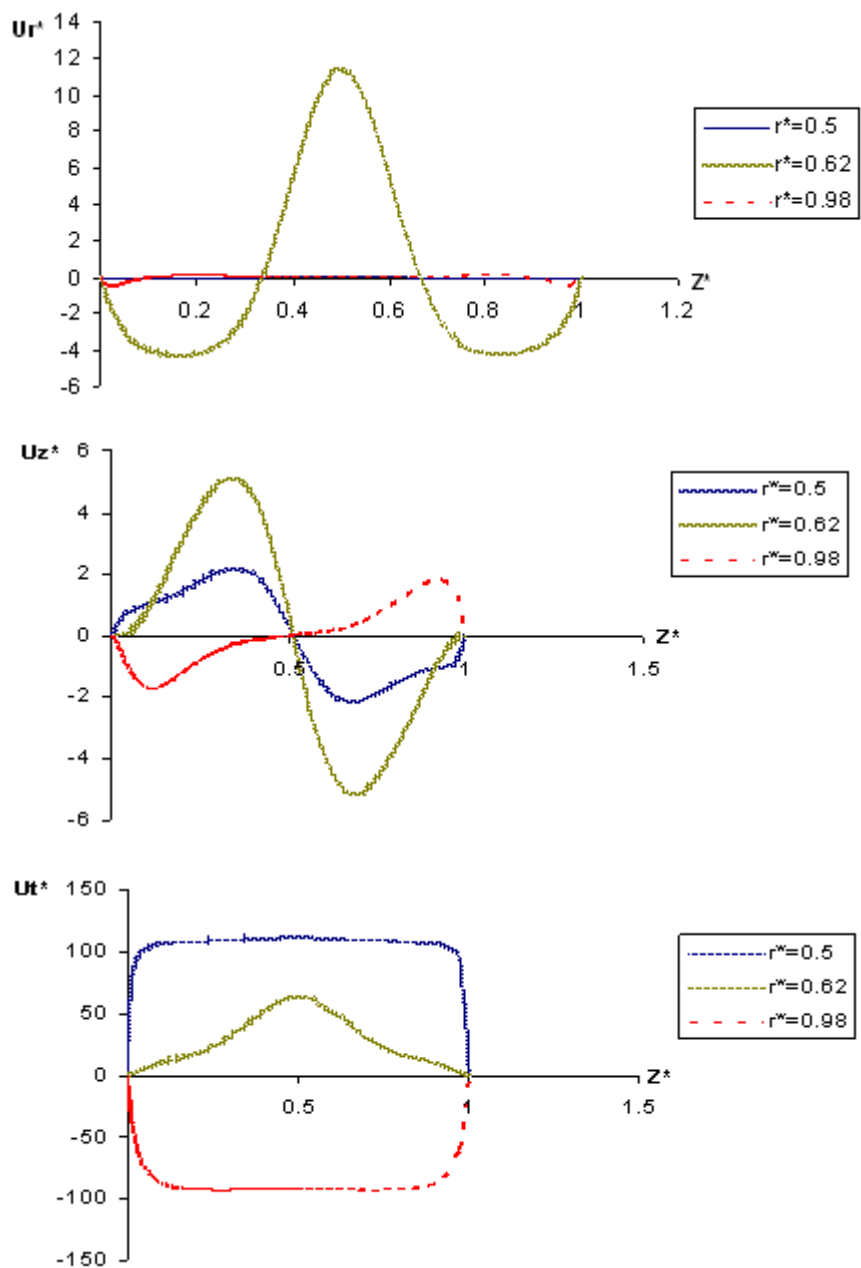
شکل (۳۷-۵): اثر چرخش استوانه بیرونی با $Re_o = -100$ روی جریان مرجع [۱۰]

۵-۲-۵- بررسی جریان با $Re_i = 115$, $Re_o = -100$

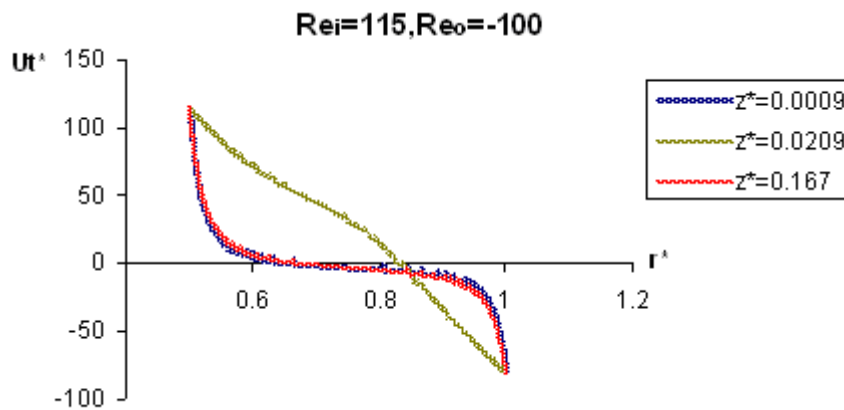
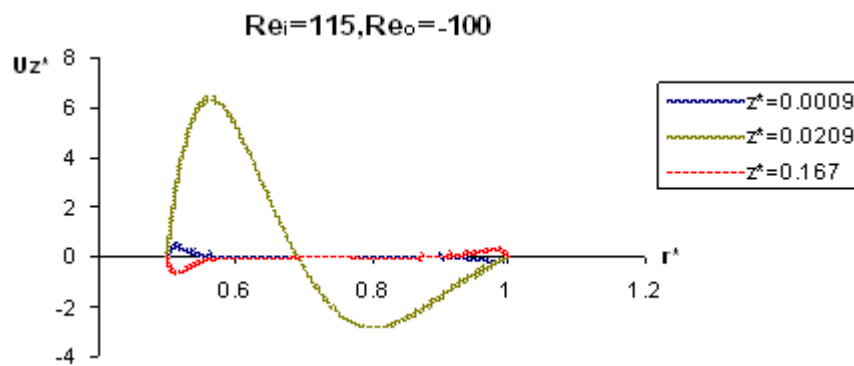
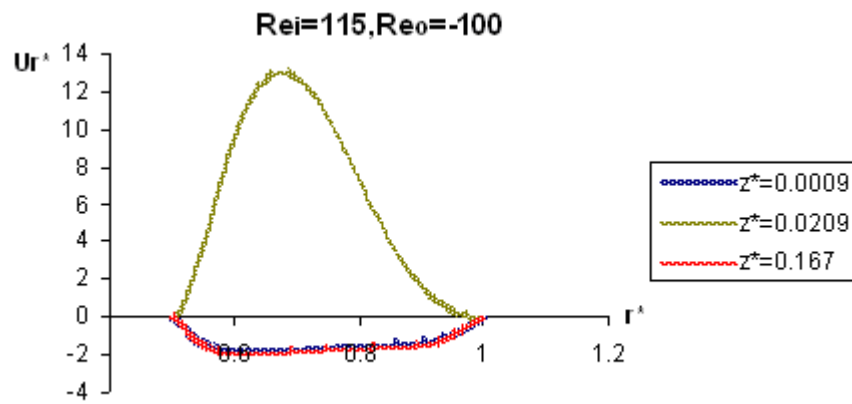


شکل (۵-۳۸): $\eta = 0.5$, $\Gamma = 1.6$, $Re_i = 115$, $Re_o = -100$

این جریان شامل دو موج Spiral متفاوت است، که هر دو از طرف صفحات انتهائی شروع می شوند و به سمت صفحه میانی حرکت می کنند. حالت تقارن ایجاد شده را میتوان بدلیل نزدیک بودن نرخ چرخش سیلندرها و یا نسبت ظاهری نزدیک به یک در نظر گرفت. این حالت تقارن نیز در نمودارهای توزیع سرعت جریان فوق مشاهده می شود. نکته قابل توجه اینکه، همواره سرعت شعاعی در صفحه میانی، با افزایش چرخش استوانه بیرونی، زیاد خواهد شد. همچنین با مشاهده کانتورهای سرعت بدست آمده، مقادیر آنها در مجاورت دیواره ها کاهش می یابند و در هسته های مرکزی افزایش می یابد. کانتور سرعت مماسی به طرف استوانه بیرونی کاهش می یابد و در نتیجه باعث کاهش نیروی گریز از مرکز خواهد شد. پس هسته های گردابه های بدست آمده تمایل به استوانه درونی پیدا خواهند کرد.

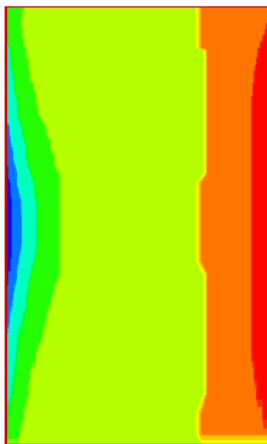


شکل (۳۹-۵): تغییرات سرعت جریان شکل (۳۸-۵) در راستای محوری



شکل (۴۰-۵): تغییرات سرعت جریان شکل (۳۸-۵) در راستای شعاعی

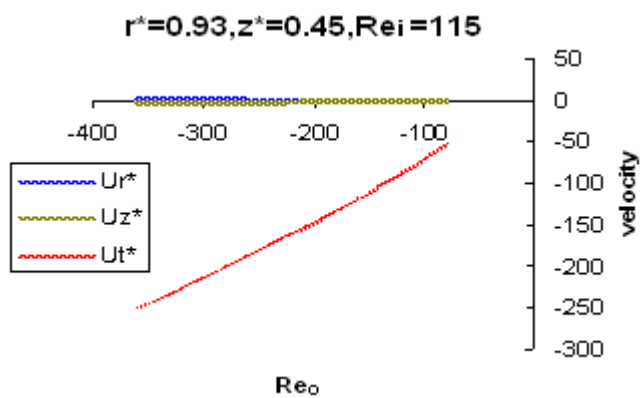
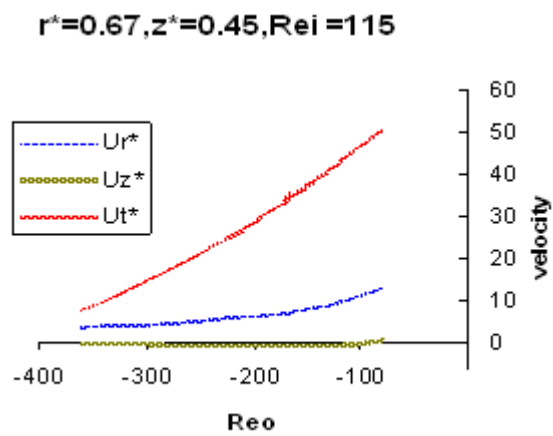
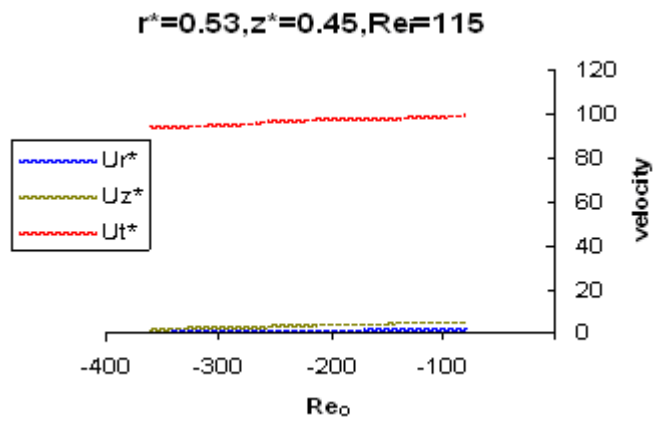
با توجه به نمودارهای توزیع سرعت شکل (۵-۳۹) می توان گفت که در حالت جریان دائمی، سرعت‌های شعاعی و مماسی در $r^* = 0.62$ در سطح میانی دارای ماکزیمم مقدار خود هستند و این در حالیست که در آنجا، مؤلفهٔ محوری سرعت، صفر است. همچنین اندازهٔ سرعت شعاعی در مرکز گردابه جریان حداقل مقدار خود را داراست.



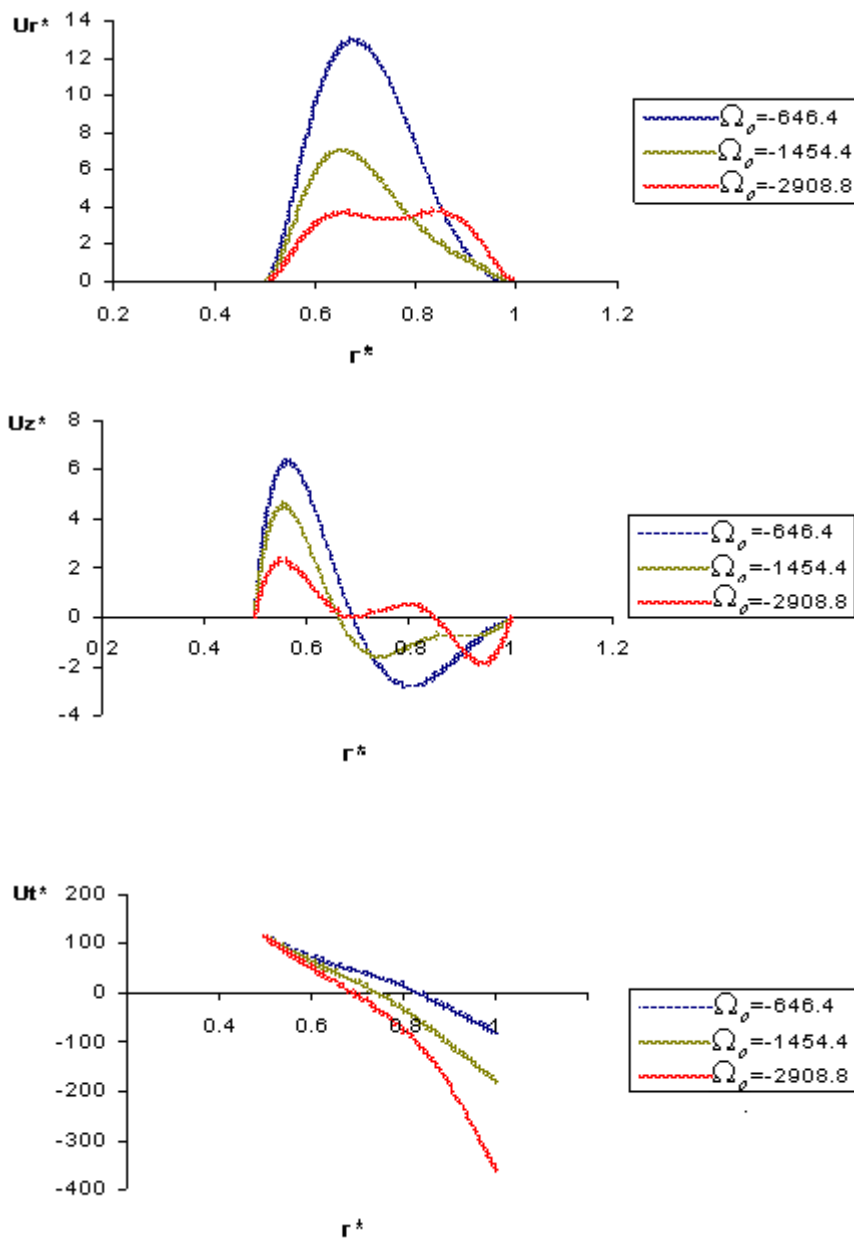
شکل (۵-۴۱): کانتور فشار جریان شکل (۵-۳۸)

کانتور فشار بدست آمده در شکل (۵-۴۱)، تقارن ایجاد شده در خطوط جریان را نشان می دهد. تقارن در کانتور فشار، معین می کند که برآیند نیروی حاصل از فشار، برابر صفر است.

با توجه به نمودارهای شکل (۵-۴۲)، در هر سه موقعیت، اندازهٔ سرعت محوری تقریباً ثابت می ماند و مقدار سرعت مماسی در $r^* = 0.53, r^* = 0.67$ با افزایش رینولدز استوانه بیرونی، کم می شود.



شکل (۴۲-۵): اثر افزایش رینولدز استوانه بیرونی روی تغییر سرعت‌های جریان شکل (۳۸-۵)

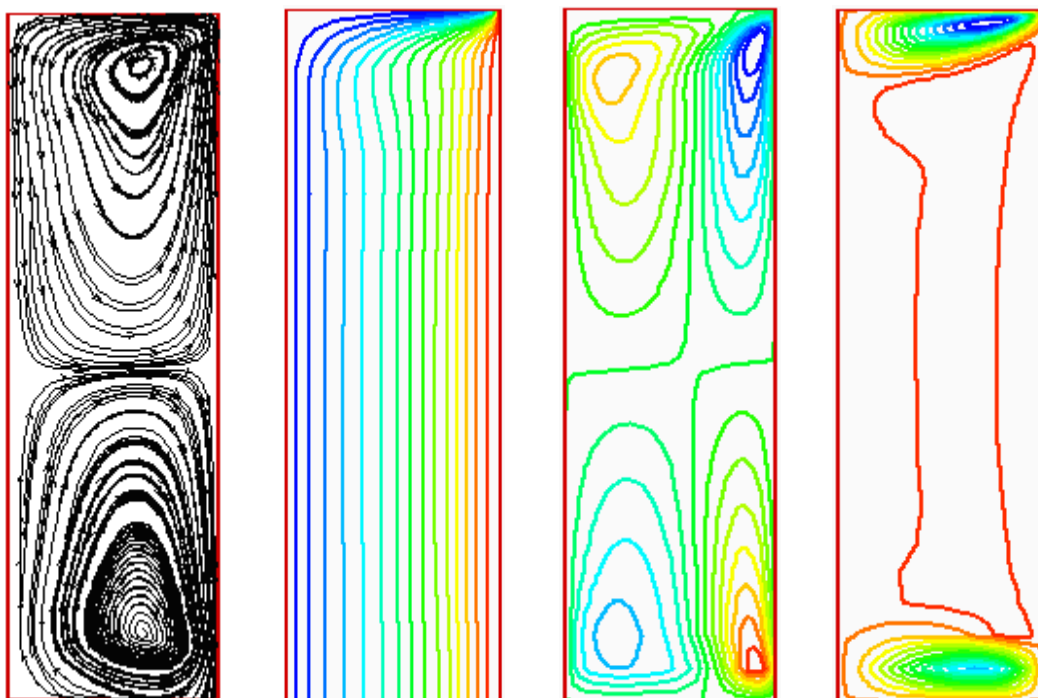


شکل (۵-۴۳): تغییرات سرعت جریان شکل (۵-۳۸) در سطح میانی، با افزایش سرعت زاویه ای استوانه بیرونی (در جهت مخالف استوانه درونی)

با توجه به نتایج نشان داده شده در شکل (۵-۴۳)، افزایش سرعت زاویه ای استوانه بیرونی، موجب کاهش در مقادیر سرعت خطی می شود.

۵-۶- جریان کوئت تیلور با استوانه بیرونی چرخان و استوانه درونی ثابت

در انتهای این قسمت، حالتی بررسی میشود که در آن، استوانه داخلی ساکن بوده و استوانه بیرونی با $Re=330$ ، در چرخش است (در شکل ۵-۴۴ دیواره چپ ثابت و دیواره راست چرخان است). با توجه به کانتورهای سرعت بدست آمده (شکل ۵-۴۴)، بیشترین تغییرات سرعت شعاعی در مجاورت صفحات انتهایی رخ می دهد. تغییرات سرعت مماسی به سمت استوانه بیرونی افزایش می یابد و نیروی گریز از مرکز حاصل از این مؤلفه سرعت، به طرف استوانه درونی کاهش می یابد. پس تمایل هسته گردابه ها به طرف استوانه بیرونی، بدلیل کاهش نیروی حاصل از $\frac{u_{\theta}^2}{r}$ بطرف استوانه درونی است.



U_t

U_z

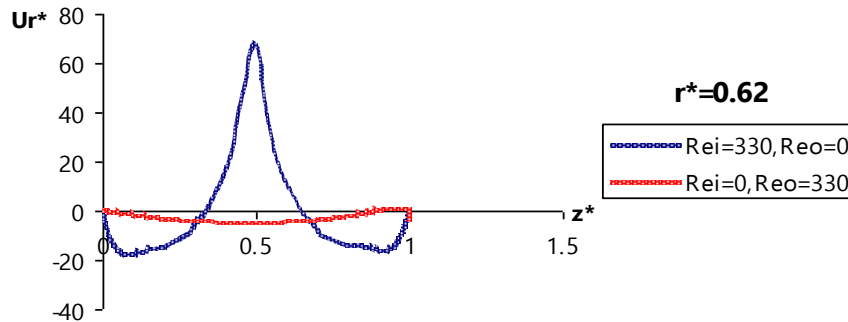
U_r

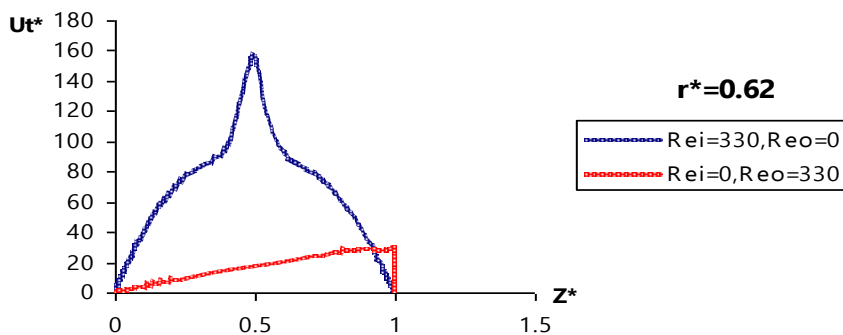
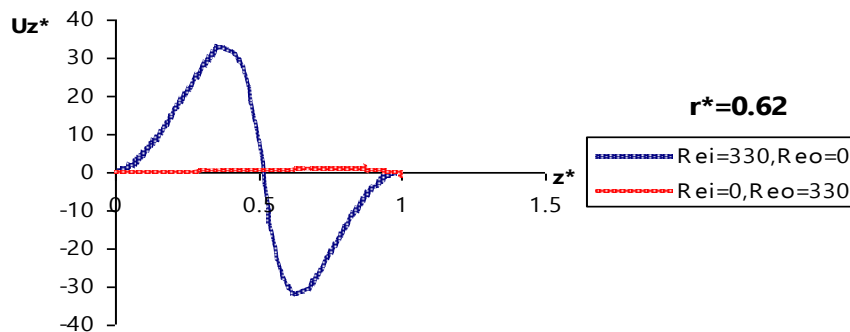
شکل (۴۴-۵): کانتورهای سرعت و خطوط جریان (دیواره راست و استوانه بیرونی چرخان و دیواره چپ و صفحات

$$\Gamma = 3.1, \quad \eta = 0.5, \quad Re_i = 0, \quad Re_o = 330$$

(انتھائی ساکن هستند)

با توجه به شکل (۴۴-۵)، خطوط جریان ایجاد شده از نوع گردابه های تیلور $N2$ ، و تقارن جریان $SO2$ است و جهت جت آن بطرف استوانه بیرونی است. با مقایسه جریان ایجاد شده با جریان شکل (۳-۵)، در حالت چرخش استوانه بیرونی، هسته گردابه ها به سمت صفحات انتھائی حرکت می کنند، در صورتیکه با چرخش استوانه درونی شکل (۳-۵)، هسته ها به طرف صفحه میانی در حرکتند. بیشترین مقدار سرعت شعاعی در نزدیکی صفحات انتھائی رخ می دهد و بزرگی سرعت محوری در صفحه میانی تقریباً صفر است. شرط عدم لغزش در مجاورت دیواره ها از نمودارهای سرعت در شکل (۴۵-۵) مشخص است.

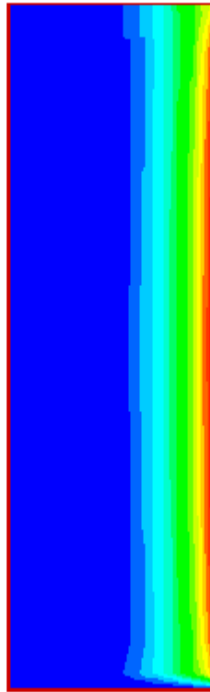




شکل (۵-۴۵): مقایسه تغییرات سرعت جریان شکل (۵-۴۴) با جریان مرجع [۱۰]

با مشاهده کانتور فشار بدست آمده در شکل (۵-۴۶)، بیشترین گرادیان فشار در جهت شعاعی رخ می دهد. دور شدن هسته گردابه ها به سمت صفحات انتهایی را می توان بدلیل کاهش نیروی حاصل از $\frac{\partial p}{\partial z}$ ذکر کرد.

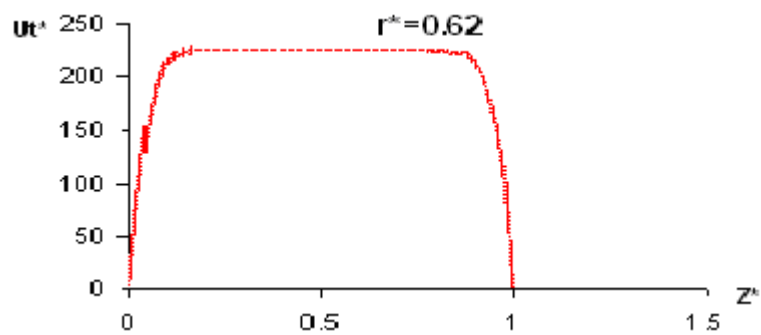
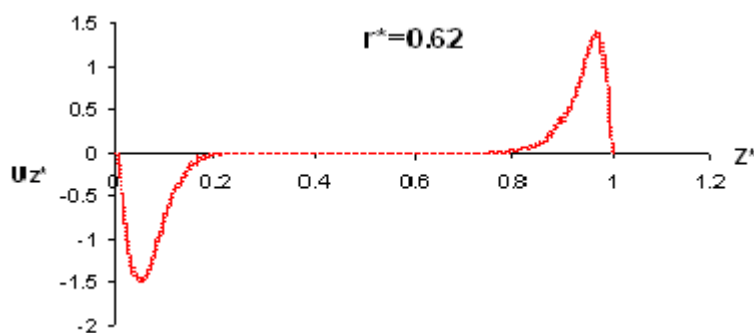
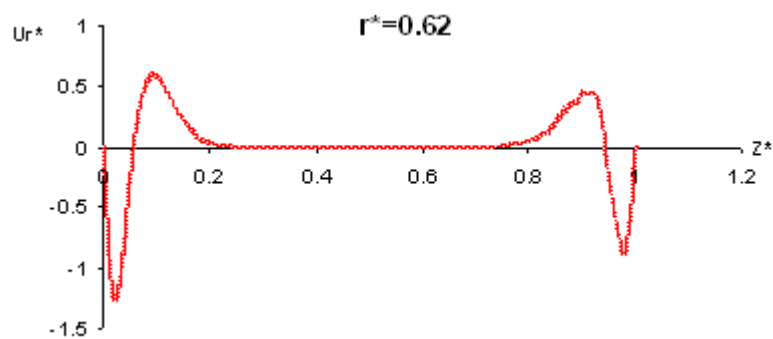
پس با توجه به نمودار پایداری شکل (۵-۳۵)، انتقال جریانها برای حالت حدود $Re_o \leq -77$ ، رخ می دهد. برای جریانهای با $Re_o \leq -160$ انتقال جریان از Spiral به Counter-Propagating رخ خواهد داد.



شکل (۴۶-۵): کانتور فشار جریان شکل (۴۴-۵) ($\Gamma = 3.1$, $\eta = 0.5$, $Re_i = 0$, $Re_o = 330$)

۵-۷- جریان کوئت پایدار با لقی بسیار کوچک

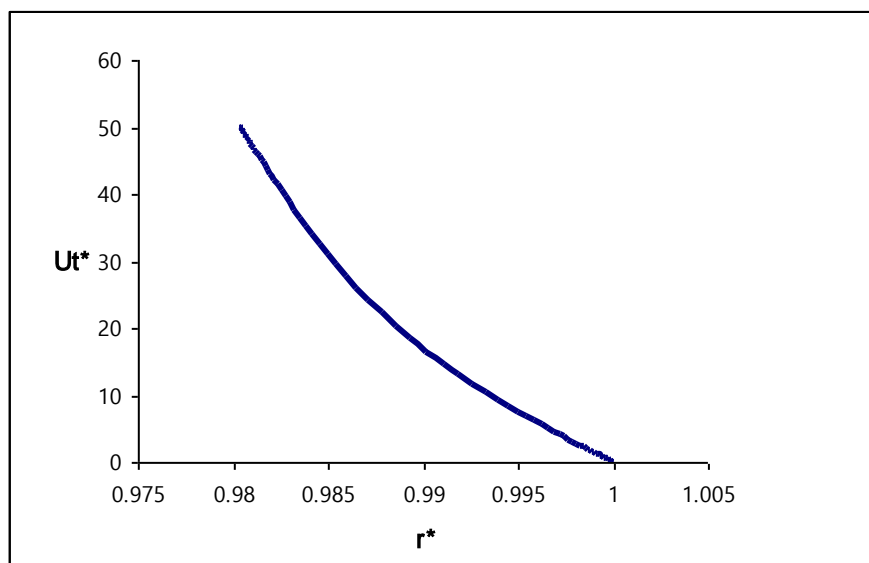
جریانهایی که تا بحال بررسی شدند، در کانتورهای سرعت شعاعی، محوری و چرخشی تغییرات زیادی مشاهده شد. در حالتی که لقی بین دو استوانه خیلی کوچک باشد ($r_2 - r_1 \ll r_1$)، تنها مؤلفه سرعت مؤثر در جریان، سرعت مماسی خواهد بود [۴]. نتایج ارائه شده در نمودارهای شکل (۴۷-۵)، گویای این مطلب است. با توجه به نمودارهای سرعت، مشاهده می شود که تنها مؤلفه غیر صفر سرعت، U_t می باشد و متغیرهای P و U_t می بایست تنها تابعی از شعاع r باشند.



شکل (۴۷-۵): نمودارهای تغییرات سرعت جریان با لقی بسیار کوچک ($Re = 38, r_o - r_i = 25 \times 10^{-3}$)

از نمودارهای بالا مشاهده می شود که با صرفنظر کردن از اثر صفحات انتهائی، سرعتهای شعاعی و محوری، در سایر نقاط صفر هستند. پس زمانیکه لقی بسیار کوچک باشد و استوانه بیرونی بدون حرکت باقی بماند، مؤلفه سرعت مماسی بصورت زیر است:

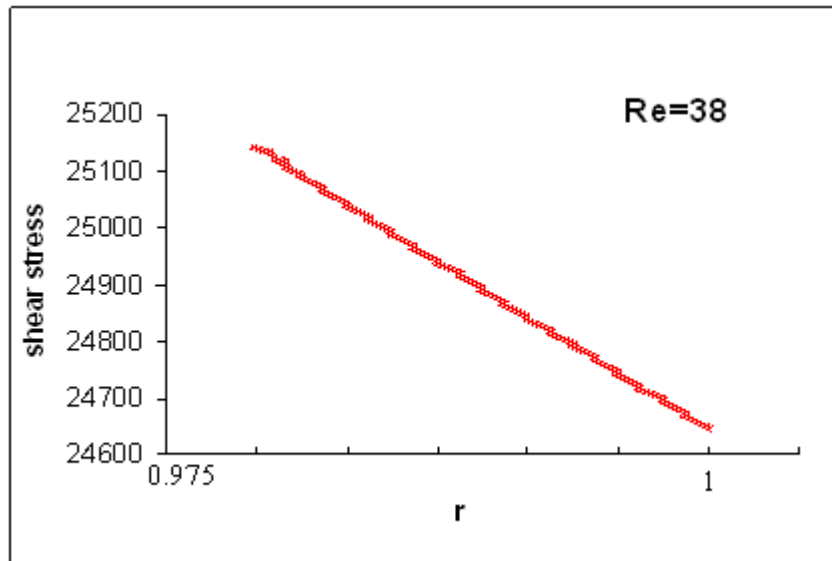
$$u_{\theta} = (r_i \Omega_i) \left(1 - \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)$$



شکل (۵-۴۸): تغییرات سرعت مماسی بین دو استوانه در لقی کوچک

که یک جریان کوئت خطی بین صفحات موازی است. چون گرادیان سرعت زیاد است، از این رو می توان در دستگاههای دارنده لقی کوچک، تغییرات بزرگی در تنشهای برشی ایجاد کرد. با توجه به تعریف تنش برشی، می توان تغییرات آنرا در جریان مذکور بدست آورد:

$$\tau = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r_i \Omega_i}{r_o - r_i} \left(\frac{r_o^2 - r^2}{rr_2} \right) \right)$$



شکل (۵-۴۹): تغییرات تنش برشی بین دو استوانه

مسئله مورد نظر در اینجا، لزجت سنج است [۴]، که در آن ممان یا گشتاور اعمال شده روی هر کدام از استوانه ها اندازه گیری می شود. این گشتاور مستقل از r بوده و دارای مقدار زیر است:

$$M = 4\pi\mu \frac{r_o^2 r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} (\Omega_o - \Omega_i)$$

با دانستن هندسه و اندازه گیری M روی هر کدام از استوانه ها، می توان لزجت سیال را محاسبه کرد، همانطور که برای اولین بار توسط کوئت انجام شد.

۵-۸- نتیجه گیری

(۱) آنالیز سه بعدی نشان می دهد که با چرخش استوانه درونی، حرکت سیال، توسط جت ممنتوم خارج شده از طرف استوانه درونی، با لایه دیواره های دیگر تداخل می کند و در نهایت به سمت شکل گیری حفره های چرخشی حول جت ها می رود.

(۲) برای جریان کوئت تیلور با استوانه درونی چرخان، همیشه جت جریان ایجاد شده به طرف استوانه بیرونی خواهد بود. در حالت صفحات انتهائی ساکن، جریان لایه مرزی مجاور صفحات انتهائی، در جهت شعاعی به سمت استوانه درونی است.

(۳) در حالتی که گردابه های ایجاد شده از نوع $N2$ ، $(SO(2) \times Z2)$ باشند، مقدار ماکزیمم سرعت شعاعی و مینیمم سرعت محوری، در صفحه میانی رخ خواهد داد. در این حالت نمودارهای سرعت بدست آمده در راستای محوری نیز متقارن خواهند بود.

(۴) در نتیجه چرخش صفحات انتهائی به همراه استوانه درونی، جهت جت جریان به سمت استوانه داخلی خواهد بود. این حالت سبب ایجاد گردابه های نامنظمی، که تعداد آنها فرد است، می شود. با مشاهده

نتایج بدست آمده، در تمام حالتها جهت جریان شعاعی در مجاورت صفحه چرخان به سمت استوانه بیرونی است. یعنی گردابه قویتر در مجاور صفحه چرخان به طرف سیلندر خارجی گرایش دارد. علت آن را می توان بدلیل افزایش نیروی گریز از مرکز در آن ناحیه نسبت به ناحیه مجاور صفحه ساکن، در نظر گرفت.

۵) در اثر چرخش دو استوانه در جهات مخالف، میزان ناپایداری جریان بیشتر شده، بگونه ای که تعداد گردابه ها افزایش پیدا می کند. اثر چرخش مخالف استوانه ها اینست که، اندازه گردابه ها نسبت به حالت استوانه بیرونی ثابت، کوچکتر خواهند شد. همچنین افزایش رینولدز چرخشی استوانه بیرونی، موجب افزایش تعداد گردابه ها می شود.

۶) با توجه به کانتورهای فشار بدست آمده، مشاهده می شود که، بزرگی و قدرت گردابه ها با گرادیان فشارهای شعاعی و محوری رابطه مستقیم دارد. از عوامل مرتبط دیگر در شکل گیری و موقعیت هسته گردابه ها علاوه بر نیروهای حاصل از گرادیان فشار، اثر ناپایداری گریز از مرکز بوجود آمده توسط مؤلفه مماسی سرعت، چرخش صفحات تحتانی و فوقانی و همچنین چرخش استوانه بیرونی هستند.

۷) یک راه جهت کنترل بزرگی و قدرت گردابه ها، ایجاد کمی مکش در سیلندر داخلی است. در اینحالت می توان گردابه ها ی بزرگ را به چند گردابه ضعیف تر تبدیل و با برداشتن مکش، گردابه ها را به حالت اولیه برگرداند.

۸) با توجه به انواع جت های جریان کوئت تیلور (شکل ۵-۲)، مشاهده می شود که، مهمترین عامل در ایجاد نوع و تعداد گردابه ها، عدد رینولدز چرخشی استوانه هاست. یعنی در حالت Γ و η ثابت، افزایش در رینولدز، موجب ناپایداری بیشتر در جریان خواهد شد.

۹) برای میدانهای جریان تک سلولی $A1$ و یا جفت سلولی $N2$ ، جتهای جریان آشکارتری از طرف استوانه درونی رخ می دهد. این حالت را می توان از مقایسه کانتورهای سرعت مماسی بدست آمده، مشاهده نمود.

۱۰) دور شدن و نزدیک شدن هسته گردابه ها به یکدیگر را می توان بدلیل کاهش یا افزایش نیروی

حاصل از $\frac{\partial p}{\partial z}$ ذکر کرد.

۵-۹- پیشنهادات

- مطالعه مسئله انتقال حرارت و تعیین میدان دمائی بین استوانه های چرخان با دماهای متفاوت
- تعیین میدان جریان بین استوانه های غیر هم مرکز چرخان
- مطالعه جریان کوئت تیلور در هندسه های کروی و مخروطی
- بررسی جریان مغشوش بین استوانه ها در رینولدزهای بالا
- تحلیل جریان کوئت تیلور با مکش در استوانه درونی جهت کنترل اندازه گردابه
- جریان کوئت تیلور با اعمال جریان محوری، جهت پایداری بیشتر جریان

مراجع

- أ. س. و. پاتانکار (۱۹۸۰). "محاسبات عددی و کامپیوتری انتقال حرارت و حرکت سیالات"، ترجمه دکتر محمد مقیمان (۱۳۸۲)، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد
- ب. ک. ا. هافمن، اس. تی. چیانگ (۱۹۹۳). "دینامیک سیالات محاسباتی"، ترجمه دکتر احمد رضا عظیمیان (۱۳۷۷)، انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان
- ت. جاوید مکی، (۱۳۷۸)، "حل عددی جریان آرام در جابجائی آزاد بین دو استوانه هم مرکز و غیر هم مرکز"، پایان نامه کارشناسی ارشد. دانشکده مکانیک دانشگاه شهید باهنر کرمان

- [1] Farzane, M, "Flow and Heat Transfer in a Pre-Swirl Rotor-Stator System", PHD Thesis, Uni Bath, UK, (2003)
- [2] Pascal Chossat & Gerard Loos (1991), **The Couette- Taylor Problem**, Springer-Verlag
- [3] Egbers, C., Pfister, G. (Eds.) 1999, **Physics of Rotating Fluids**. Springer, Berlin, pp. 195–212.
- [4] F.M. White, (1991). **Viscous Fluid Flow**, second ed., McGraw-Hill, New York
- [5] Lopez, J. M., Marques, F. & Shen, J. (2004), **Complex dynamics in a short annular container with rotating bottom and inner cylinder**. J. Fluid Mech. 51, 327–354.
- [6] R. Hubacz, S. Wronski (2004), **Horizontal Couette Taylor Flow in a two phase gas-liquid system: flow patterns**, Experimental Thermal And Fluid Science 28, 457-466

- [7] J.M.Lopez , F.Marques & G.P Fister(2006),**Onset of three dimensional unsteady states in small aspect ratio Taylor- Couette Flow**,J.Fluid Mech,vol.561,pp.255-277
- [8]Patrick M.Lahey.Donald A.Drew(2002),**Taylor Vortex Flow with suction**,Chemical Engineering Science57, 5161-5173
- [9] Lueptow, R. M. (1995). **Fluid mechanics of a rotating filter separator**. Advances in filtration and separation technology (p. 283). Nashville, TN: American Filtration and Separations Society.
- [10] J.Abshgen , J.M.Lopez , F.Marques & G.P Fister (2005),**Mode competition of rotating waves in reflection-symmetric Taylor-Couette Flow**,
J.Fluid Mech,vol.540,pp.269-299
- [11] Yuriko Renardy & Daniel D.Joseph (1985),**Couette flow of two fluids between concentric cylinders**,J.Fluid Mech.vol.105,pp.381-394
- [12] D.Coles (1965),**Transition in Circular Couette Flow(CCF)**,
J.Fluid Mech.21, 385-425.
- [13] Taylor, G. I. (1923) **Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders**. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 223, 289–343.
- [14] Y.Toya,L.Nakamura,S.Yamashita and Y.Ueki (1994),**An experiment on a Taylor Vortex Flow in a gap with small aspect ratio**,Acta Mechanica 102,137-148.
- [15] Blohm,C. (1997):**Bifurcation phenomena in Taylor Couette Flow with asymmetric boundary conditions**,diploma thesis,University of Bremen
- [16] Cliff,K.A. and Mullin (1986),**A numerical and experimental study of the Taylor Problem with asymmetric and conditions**.6th int.Symp.On Finite Element Method in Flow problems,June16-20,Antibes,France

- [17] M.N.Noui-Mehidi(2005),**Effect of acceleration on transition properties in a conical cylinder system**,Experimental Thermal And Fluid Science 29,447-456
- [18] Ali Sar Reshteh Dari & Farzaneh Samsami (1383),
Vorticity,www.fluid.persianblog.com
- [19] Seo Yoon Chung,Hyung Jin Sung (2005),**Larg Eddy Simulation (LES) of turbulent flow in a concentric annulus with rotation of an inner cylinder**,I.J.Heat And Fluid Flow 26,191-203.
- [20] Lopez, J. M., Marques, F. & Shen, J. 2002 **An efficient spectral-projection method for the Navier-Stokes equations in cylindrical geometries II**. Three dimensional cases. J. Comput. Phys. 176, 384–401.
- [21] Lopez, J. M. & Marques, F. 2003 **Small aspect ratio Taylor–Couette flow: Onset of a very-low frequency three-torus state**. Phys. Rev. E 68, 036302.
- [22] Cliffe, K. A. (1983) **Numerical calculations of two–cell and single–cell Taylor flows**. J. Fluid Mech. 135, 219–233.
- [23] E. Dłuska, S. Wro_ński, T. Ryszczuk, **Mass transfer and interfacial area in gas–liquid Couette–Taylor flow reactor**, in: 6th World Congress of Chemical Engineering, Melbourne, Australia, 23–27 September (2001).
- [24] T.Watanabe,Y.Toya & I.Nakamura(2005),**Development of free surface between concentric cylinders with vertical axes**,J.Physics:Conferenc Series 14,pp.9-19
- [25] Campero R J and Vigil R D (1999) ,**Flow patterns in liquid-liquid Taylor-Couette-Poiseuille flow**, Ind. Eng. Chem. Rev. 38 1094-8.
- [26] Meseguer, A., Marque`s, F., (2000). **On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Couette flow**. Journal of Fluid Mechanics 402, 33–56.
- [27] M N Noui-Mehidi&N Ohmura & Jwu,(2002),**A numerical study of Taylor Vortex Flow in a finite length tapered annulus**,J.Physics:Conference Series 14, 20-29

