



دانشکده مکانیک

گروه طراحی کاربردی

تحلیل کمانش پوسته استوانه ای تحت بار محوری و فشار خارجی یکنواخت با استفاده از تئوری  
تغییر شکل برشی مرتبه اول

دانشجو : سید حسن میرباقری

استاد راهنما :

جناب آقای دکتر ایپکچی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۲

## تشکر و قدردانی

پس از حمد و سپاس خداوند متعال که در تمامی لحظات زندگی بهترین راهنما، دوست و همراه زندگی من بوده، از زحمات بی دریغ استاد عزیزم جناب آقای دکتر ایپکچی تشکر می‌کنم که در تمام مراحل تهیه این پایان‌نامه مرا با صبر و حوصله یاری نموده‌اند.

اینجانب سید حسن میرباقری تأیید می نمایم که مطالب مندرج در این پایان نامه تماماً نتیجه تحقیقات خودم می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده ام. کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

شهریور ۱۳۹۲

## چکیده

در این پایان نامه بار کمانش یک پوسته استوانه ای نازک و همگن تحت بار محوری و فشار خارجی در حالت الاستیک، به صورت جداگانه و از روش های تحلیلی و عددی به دست آمده است. در روش تحلیلی ابتدا معادلات تعادل و پایداری به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و اصل کار مجازی و با استفاده از روابط هوک تعیین گردیده است. روابط کرنش جابجایی استفاده شده بر اساس معادلات فن-کارمن بوده و مساله متقارن محوری می باشد. نهایتاً معادلات بی بعد شده تعادل به کمک تئوری اغتشاشات، در دو حالت بار محوری و فشار خارجی حل شده و سپس با استفاده از نتایج آن، معادلات پایداری برای به دست آوردن بارهای کمانش حل گردیده است. در مسئله فوق بارهای کمانش تحت بارگذاری های مجزا توسط نرم افزار انسیس به صورت عددی نیز به دست آمده و با حل تحلیلی مقایسه شده اند. همچنین استوانه مذکور تحت بارهای ترکیبی فوق به صورت عددی تحلیل شده است. در نهایت اثر تغییر پارامترهای هندسی بر روی بار کمانش مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: کمانش، پوسته استوانه ای، تئوری اغتشاشات، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

## فهرست مطالب:

فصل اول - مبانی تئوری و مرور مقالات.....	۱
(۱-۱) مقدمه.....	۲
(۲-۱) کلیات.....	۲
(۳-۱) تئوری کمانش تیموشنکو(تئوری کلاسیک پوسته‌ها).....	۳
(۴-۱) تئوری غیر خطی دامل.....	۶
(۵-۱) تئوری غیر خطی فلوگه - لور - بایرن.....	۸
(۶-۱) تئوری غیر خطی ساندرس - کویتر.....	۹
(۷-۱) تئوری غیر خطی دامل برای پوسته‌های کم عمق.....	۹
(۸-۱) مرور مقاله‌ها.....	۱۰
(۹-۱) جمع‌بندی.....	۲۰
فصل دوم - استخراج معادلات تعادل و پایداری.....	۲۱
(۱-۲) مقدمه.....	۲۲
(۲-۲) تئوری تغییر شکل برشی.....	۲۲
(۳-۲) استخراج معادلات تعادل.....	۲۴
(۴-۲) استخراج معادلات پایداری.....	۳۱
(۵-۲) جمع‌بندی.....	۳۶
فصل سوم - حل معادلات به روش تحلیلی.....	۳۷
(۱-۳) مقدمه.....	۳۸

۳۸.....	حل معادلات تعادل..... (۲-۳)
۴۴.....	حل معادلات پایداری..... (۳-۳)
۴۷.....	جمع بندی..... (۴-۳)
۴۸ .....	فصل چهارم - حل مسئله کمانش به روش عددی.....
۴۹.....	مقدمه..... (۱-۴)
۴۹.....	مدل سازی..... (۲-۴)
۵۱.....	مطالعه موردی..... (۳-۴)
۵۱.....	کمانش تحت بار محوری..... (۱-۳-۴)
۵۲.....	کمانش تحت فشار خارجی..... (۲-۳-۴)
۵۳.....	جمع بندی..... (۴-۴)
۵۴ .....	فصل پنجم - بررسی نتایج.....
۵۵.....	مقدمه..... (۱-۵)
۵۵.....	مقایسه نتایج حل تحلیلی با حل عددی..... (۲-۵)
۵۵.....	کمانش تحت بار محوری..... (۱-۲-۵)
۶۲ .....	کمانش تحت فشار خارجی..... (۲-۲-۵)
۶۵.....	مقایسه نتایج حل تحلیلی با مراجع دیگر..... (۳-۵)
۶۷.....	جمع بندی..... (۴-۵)
۶۸ .....	فصل ششم - جمع بندی و پیشنهادها.....
۶۹.....	مقدمه..... (۱-۶)

۶۹	.....کمانش تحت بار محوری
۷۰	.....کمانش تحت فشار خارجی
۷۰	.....پیشنهادها
۷۱	..... <b>پیوست الف - نحوه آنالیز عددی در نرم افزار Ansys</b>
۷۱	.....الف-۱) بار محوری
۷۲	.....الف-۲) فشار خارجی
۷۳	.....الف-۳) بارگذاری ترکیبی
۷۵	.....مراجع

## فهرست اشکال:

- شکل (۱-۱) یکی از شکل مدهای کمانش بر طبق تئوری تیموشنکو [۴]..... ۵
- شکل (۲-۱) تاثیر ضخامت بر روی شکل مد کمانش الف- پوسته ضخیم ب- پوسته نازک [۵] ..... ۵
- شکل (۱-۲) محورهای مختصات برای پوسته استوانه‌ای ..... ۲۳
- شکل (۲-۲) تغییر شکل پوسته پس از بارگذاری محوری..... ۳۲
- شکل (۱-۴) المان SHELL 93..... ۴۹
- شکل (۲-۴) المان SOLID 95..... ۵۰
- شکل (۳-۴) بار کمانش در اثر بارگذاری محوری بر حسب تعداد المان ها..... ۵۱
- شکل (۴-۴) مدل شبکه‌بندی شده یک پوسته استوانه‌ای تحت بار محوری..... ۵۲
- شکل (۵-۴) مدل شبکه‌بندی شده یک پوسته استوانه‌ای تحت فشار خارجی..... ۵۲
- شکل (۱-۵) بررسی تاثیر ضریب  $R/h$  بر مقدار بار کمانش (بار محوری) پاسخ تحلیلی در مقایسه با روش عددی... ۵۶
- شکل (۲-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب طول برای ضخامت های مختلف ..... ۵۷
- شکل (۳-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب شعاع برای شعاع های مختلف ..... ۵۸
- شکل (۴-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب شعاع برای ضخامت های مختلف ..... ۵۸
- شکل (۵-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب ضخامت ..... ۵۹
- شکل (۶-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب شعاع..... ۶۰
- شکل (۷-۵) تغییرات بار کمانش بر حسب ضریب فشار خارجی..... ۶۱
- شکل (۸-۵) بررسی تاثیر ضریب  $R/h$  بر مقدار بار کمانش (فشار خارجی) پاسخ تحلیلی در مقایسه با روش عددی ..... ۶۲



شکل (۹-۵) تغییرات بار کمانش (فشار خارجی) بر حسب طول برای ضخامت های مختلف ..... ۶۳

شکل (۱۰-۵) تغییرات بار کمانش (فشار خارجی) بر حسب ضخامت برای شعاع های مختلف ..... ۶۴

شکل (۱۱-۵) تغییرات بار کمانش (فشار خارجی) بر حسب شعاع برای ضخامت های مختلف ..... ۶۴

شکل (۱۲-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) حاصل از حل تحلیلی و عددی و رابطه (۷-۵) بر حسب ضخامت

برای مقادیر ثابت طول و شعاع ..... ۶۵

شکل (۱۳-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) حاصل از حل تحلیلی و عددی و رابطه (۷-۵) بر حسب شعاع

برای مقادیر ثابت طول و ضخامت ..... ۶۶

## فهرست جداول:

جدول (۱-۳) ابعاد و مشخصات مکانیکی پوسته..... ۴۴

جدول (۱-۴) بار کمانش در اثر بارگذاری محوری بر حسب تعداد المان ها..... ۵۰

جدول (۱-۵) تغییرات خطای دو حل تحلیلی نسبت به حل عددی..... ۶۰

جدول (۲-۵) مقادیر تنش بحرانی برای پوسته با شعاع ۱۵ سانتیمتر و طول ۸۰ سانتی متر..... ۶۵

## مبانی تئوری و مرور مقاله ها

## ۱-۱) مقدمه:

در این فصل به بررسی رایج‌ترین تئوری‌های موجود در زمینه پوسته‌ها و کمانش آنها پرداخته شده است، معاینه و محاسن هر تئوری مطرح شده و فرضیات تئوری‌ها با یکدیگر مقایسه شده است، همچنین به طور مختصر به بررسی مقاله‌ها و تحقیق‌هایی که تا کنون در این زمینه انجام شده است، پرداخته شده است.

## ۱-۲) کلیات:

پوسته‌های استوانه‌ای کاربردهای بسیار زیادی در صنعت دارند، برای مثال در مخازن، کپسول‌ها و... کاربرد این نوع پوسته‌ها مشاهده می‌شود. مطالعه بر روی پوسته‌ها به خصوص پوسته استوانه‌ای تاریخچه کهنی دارد به طوری که معادلات پایداری پوسته‌های استوانه‌ای از قبل از سال ۱۸۰۰ موجود بوده است، ولی برای نخستین بار به وسیله لورنز<sup>۱</sup> (۱۹۱۱) به طور خاص به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری پرداخته شد، سپس توسط ساوتول<sup>۲</sup> (۱۹۱۳) و فن میزز<sup>۳</sup> (۱۹۱۴) حل کمانش پوسته تحت فشار یکنواخت جانبی به دست آمد. فلوگه<sup>۴</sup> (۱۹۳۲) به بررسی رفتار پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری مرکب و همچنین تحت خمش پرداخت و روش‌هایی برای حل ارائه داد. اما چیزی که امروز بیش از هر تئوری و روشی مورد استفاده قرار می‌گیرد بسط روابط ساده‌ای است که برای پایداری استوانه تحت پیچش توسط دانل<sup>۵</sup> (۱۹۳۴) و شورین<sup>۶</sup> (۱۹۲۵) ارائه شد. دانل (۱۹۳۴) تئوری غیر خطی پوسته‌های خود را منتشر کرد که بر اساس فرضیات ساده شده‌ی پوسته‌های کم عمق<sup>۷</sup> بوده و به دلیل سادگی و دقت به طور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در تئوری دانل عوامل زیادی همچون نیروهای اینرسی درون صفحه‌ای<sup>۸</sup>، تغییر شکل‌های برشی و اینرسی‌های دورانی<sup>۹</sup> در نظر گرفته نمی‌شوند و به همین خاطر نتایج این تئوری فقط برای پوسته‌های نازک صادق است. از دیگر نواقص این تئوری آن است که، به غیر از یک سری جملات سینماتیک غیر خطی غالب، سایر جملات غیر خطی حذف می‌شوند.

---

<sup>1</sup> Lorenz

<sup>2</sup> Southwell

<sup>3</sup> Von Mises

<sup>4</sup> Flugge

<sup>5</sup> Donnel

<sup>6</sup> Schwerin

<sup>7</sup> Shallow Shells

<sup>8</sup> In-Plane Inertia

<sup>9</sup> Rotary Inertia

فن-کارمن<sup>۱</sup> و تسین<sup>۲</sup> (۱۹۴۱) یک مطالعه بر پایه تئوری دانل انجام دادند و تئوری غیر خطی فن-کارمن را ارائه ارائه دادند. ساندرس<sup>۳</sup> (۱۹۶۳) یک تئوری بهبود یافته برای پوسته‌های استوانه‌ای بیان کرد که برای حالت کشش کشش بیان شده بود. همان معادلات توسط کویتز<sup>۴</sup> (۱۹۶۶) دوباره تعیین گردید که به همین خاطر به آنها معادلات ساندرس-کویتز گفته می‌شود. بعدها این روابط در دستگاه منحنی‌الخط نیز فرمول بندی شد، که کاربرد بیشتری داشت. بر اساس تئوری ساندرس-کویتز هر سه جابجایی در معادلات حرکت ظاهر شدند. نقدی و نوردگرن<sup>۵</sup> (۱۹۶۳) بر اساس فرضیات کیرشهف تئوری غیر خطی خود را ارائه دادند. در سال ۱۹۸۵ تئوری غیر خطی تغییر شکل برشی مرتبه اول توسط ردی<sup>۶</sup> و چاندراشکارا<sup>۷</sup> به منظور کاربرد در پوسته‌های ضخیم لایه‌ای ارائه شد. [۱،۲،۳]

### ۱-۳) تئوری کمانش تیموشنکو (تئوری کلاسیک پوسته‌ها) [۴]:

تیموشنکو در روش خود برای به دست آوردن بار کمانش در یک پوسته استوانه‌ای که تحت فشار محوری متقارن قرار دارد مقدار جابجایی را در جهت شعاعی به صورت سینوسی در نظر گرفت، در واقع این فرض بر این اساس استوار است که جابجایی‌ها در جهت شعاعی نسبت به محور مرکزی متقارن می‌باشند که تا حدودی صحیح است البته به شرط آنکه تمام شرایط از جمله بارگذاری، هندسه، شرایط مرزی و... همگی متقارن محوری بوده که این خود فرضی ایده آل است. وجود نواقص هندسی در پروفیل پوسته و شرایط محیطی دیگر، به راحتی این تقارن را بر هم می‌زنند اما به صورت کلی فرض تقارن به عنوان یک نظریه تئوری تا حدود زیادی به واقعیت نزدیک است و تقریب مناسبی به حساب می‌آید. تیموشنکو در نظریه خود جابجایی شعاعی (W) را به صورت رابطه (۱-۱) در نظر گرفت.

$$w = -A \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (1-1)$$

در این رابطه m تعداد نیم موج‌های هر شکل مد پوسته و l طول پوسته می‌باشد. رابطه اخیر برای جابجایی تنها یک رابطه تقریبی می‌باشد و در حقیقت با واقعیت در مواردی اختلاف زیادی دارد اما با این حال امروزه نیز در بسیاری از مقالات برای تعیین جابجایی‌ها از همین روش استفاده می‌شود.

<sup>1</sup> Von Karman

<sup>2</sup> Tsien

<sup>3</sup> Sanders

<sup>4</sup> Koiter

<sup>5</sup> Nordgren

<sup>6</sup> Reddy

<sup>7</sup> Chandrashekhara

تیموشنکو در ادامه با استفاده از همین جابجایی مقادیر کرنش را به دست آورد. برای به دست آوردن مقدار کرنش‌ها در هنگامی که کمانش رخ داده است فرض کرد که مقدار تنش در طول زمان کمانش ثابت باقی می‌ماند. با محاسبه انرژی کرنشی قبل و بعد از کمانش و همچنین محاسبه کار انجام شده توسط نیروی فشاری اعمالی و در نهایت با برابر قرار دادن اختلاف انرژی‌ها و کار انجام شده (روش انرژی) مقدار بار کمانش را به صورت رابطه (۲-۱) به دست آورد. پوسته مورد نظر از یک جهت گیردار و از جهت دیگر فقط در راستای طولی آزاد می‌باشد. در این رابطه  $l$  طول پوسته،  $a$  شعاع و  $h$  ضخامت پوسته می‌باشد.  $E$  مدول الاستیسیته و  $\nu$  ضریب پواسون است.

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{h} = D \left( \frac{m^2 \pi^2}{h \ell^2} + \frac{E}{a^2 D} \frac{\ell^2}{m^2 \pi^2} \right) \text{ (N/m)} \quad (2-1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

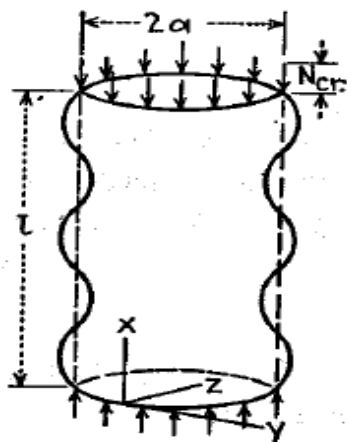
رابطه (۲-۱) نشان دهنده تمامی شکل موج‌های بار کمانش می‌باشد که با کمینه کردن آن نسبت به  $m$  می‌توان مقدار بار بحرانی را به صورت رابطه (۳-۱) به دست آورد:

$$\sigma_{cr} = \frac{2}{ah} \sqrt{EDh} = \frac{Eh}{a\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (3-1)$$

که این مقدار در نیم موج زیر اتفاق می‌افتد:

$$\frac{m\pi}{\ell} = \sqrt[4]{\frac{Eh}{a^2 D}} \quad (4-1)$$

البته تیموشنکو برای به دست آوردن بار بحرانی از روش‌های دیگری نیز استفاده کرده است، برای مثال با استفاده از حل معادله دیفرانسیل حاکم بر پوسته متقارن رابطه دیگری برای بار بحرانی به دست آورده است که در نهایت نشان داده می‌شود که این دو رابطه به لحاظ کمی دارای مقادیر یکسانی هستند. تمامی پارامترهای استفاده شده در روابط اخیر در شکل (۱-۱) که نشان دهنده یکی از شکل مدهای کمانش پوسته تیموشنکو می‌باشد مشخص است:



شکل (۱-۱) یکی از شکل مدهای کمانش بر طبق تئوری تیموشنکو [۴]

پس از انجام تست‌های آزمایشگاهی و عملی مشخص شد که تئوری کلاسیک یا تئوری تیموشنکو با واقعیت دارای اختلاف است هر چند که در مواردی نیز نتایج قابل قبول است، برای مثال در شرایط متقارن محوری پاسخ دارای تقریب خوبی می‌باشد [۵].

آزمایش‌های تجربی نشان می‌دهد که در پوسته‌های نازک معمولاً در هنگام کمانش پوسته به صورت متقارن کمانش نمی‌کند در حالی که عکس این موضوع راجع به پوسته‌های ضخیم صادق است، شکل (۲-۱). البته باز هم فرض تقارن یک فرض ایده‌آل است که در بسیاری از مقالات برای پوسته‌های با هندسه متقارن و جنس متقارن مناسب و تقریب خوبی به حساب می‌آید.



ب



الف

شکل (۲-۱) تاثیر ضخامت بر روی شکل مد کمانش الف-پوسته ضخیم ب-پوسته نازک [۵]

## ۴-۱) تئوری غیر خطی دائل [۶]:

تئوری و فرضیات دائل از مهمترین و پرکاربردترین تئوری‌هاست که امروزه مرجع بسیاری از مقاله‌ها به صورت مستقیم یا غیر مستقیم می‌باشد. در فرضیات دائل در حوزه تغییر مکان‌های کوچک، چرخش‌ها حول محورهای درون صفحه‌ای<sup>۱</sup> کوچک فرض شده در نتیجه تمامی سینوس‌ها و کسینوس‌ها در روابط تعادل به ترتیب با خود زاویه و عدد یک جایگزین می‌شوند. عبارات درجه دوم (رابطه غیر خطی بین نیروهای برشی عرضی کوچک و چرخش‌ها) به طور قابل اغمازی کوچک هستند. در فرضیات تعادل با نازک فرض کردن پوسته نیز از مقدار منتجه تنش برشی ( $Q_\theta$ ) در معادلات تعادل در جهت محیطی صرف نظر می‌شود. به طور کلی می‌توان برای تئوری دائل فرضیات زیر را دسته‌بندی کرد:

الف- پوسته نازک است و ضخامت در مقابل شعاع و طول پوسته کوچک است.

ب- دامنه و خیز شعاعی ( $W$ ) هم مرتبه با ضخامت پوسته می‌باشد، یعنی خیز پوسته نیز در مقابل شعاع و طول پوسته بسیار کوچک است.

ج- شیب تغییرات خیز در هر نقطه کوچک است یا عبارت زیر در هر نقطه صادق است:

$$\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \ll 1, \left| \frac{\partial w}{R \partial \theta} \right| \ll 1$$

د- همه اجزای کرنش کوچک هستند و در نتیجه تمامی فرضیات و تئوری‌های الاستیسیته خطی قابل استفاده می‌باشند.

ه- فرضیات لوو-کیرشهف نیز صادق است، یعنی آنکه مقدار تنش در جهت عمود بر لایه میانی پوسته قابل چشم پوشی بوده و کرنش در این جهت با ضخامت پوسته رابطه خطی دارد و به صورت خطی با ضخامت تغییر می‌کند.

و- جابجایی‌ها در راستای طولی و محیطی ( $v$  و  $u$ ) بسیار کوچک بوده و قابل صرف نظر هستند و در روابط کرنش-جابجایی تمامی جمله‌های غیر خطی بر اساس جابجایی شعاعی ( $W$ ) می‌باشد.

---

<sup>1</sup> In-plane Axis



در اکثر تئوری‌ها بعد از دائل تقریباً تمامی فرضیات دائل به غیر از فرض آخر معمولاً رعایت می‌شود که علت آن هم به دست آوردن معادلاتی دقیق و نزدیکتر به واقعیت است و وجود جابجایی‌ها برای بیان دقیق کرنش‌ها در روابط غیر خطی لازم است.

در فرضیات دائل روابط کرنش-جابجایی برای سطح میانی به صورت رابطه (۵-۱) در نظر گرفته می‌شود. که در آن  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب جابجایی در راستای طول، محیط و شعاع بوده و  $x$  و  $\theta$  به ترتیب محورهای مختصات در راستای طول و محیط می‌باشند.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \mathcal{E}_{\theta\theta} &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ \gamma_{x\theta} &= \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (5-1)$$

روابط بالا شکل ساده شده معادلات دائل-مشتري-والسو می‌باشد که برای دستگاه استوانه‌ای ساده شده است. جایگزینی این روابط در معادلات بنیادین، محاسبه منتهجه‌ها و قرار دادن آنها در معادلات تعادل منجر به یک دستگاه با سه معادله دیفرانسیل غیر خطی بر حسب متغیرهای  $u$  و  $v$  و  $w$  می‌شود که به آن معادلات غیر خطی دائل گفته می‌شود.

معادلات دیگری نیز وجود دارد که با همان فرضیاتی که در ابتدا گفته شد با حذف همه عبارتهای مرتبه دوم و بالاتر  $u$  و  $v$  و  $w$  به دست می‌آیند که به آنها معادلات خمشی خطی دائل می‌گویند و این معادلات که تشکیل یک دستگاه سه معادله و سه مجهول می‌دهند در رابطه (۶-۱) آورده شده است. با تعریف یک تابع تنش می‌توان دستگاه را به دو معادله و دو مجهول تبدیل کرد که این نیز یک دستگاه خطی می‌باشد. اگر در روابط زیر مقدار سختی خمشی صفر باشد معادلات غشایی مربوط به پوسته‌ها حاصل می‌شود. در رابطه زیر  $p$  بار خارجی و  $a$  شعاع پوشته می‌باشد.

$$\begin{aligned}\nabla^4 u &= -\frac{\nu}{a} w_{,xxx} + \frac{1}{a^3} w_{,x\theta\theta} \\ \nabla^4 v &= -\frac{2+\nu}{a^2} w_{,xx\theta} - \frac{1}{a^4} w_{,\theta\theta\theta} \\ D\nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{a^2} C w_{,xxxx} &= \nabla^4 p\end{aligned}\quad (6-1)$$

در رابطه (۶-۱)، D از رابطه (۲-۱) به دست می آید و C به صورت زیر تعریف می شود:

$$C = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$$

شکل غیر خطی معادلات تعادل مربوط به تئوری دائل، به صورت رابطه (۷-۱) می باشد که به طور وسیعی برای تعیین تغییر مکان های بزرگ پوسته های استوانه ای استفاده می شود:

$$\begin{aligned} aN_{x,x} + N_{x\theta,\theta} &= 0 \\ aN_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} &= 0 \\ D\nabla^4 w + \frac{1}{a}N_{\theta} - \left( N_x w_{,xx} + \frac{2}{a}N_{x\theta} w_{,x\theta} + \frac{1}{a^2}N_{\theta} w_{,\theta\theta} \right) &= p \end{aligned} \quad (7-1)$$

در روابط بالا جمله های N همگی منتهج های تنش می باشند که بر حسب کرنش ها به صورت رابطه (۸-۱) تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} N_x &= C(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_{\theta}) \\ N_{\theta} &= C(\varepsilon_{\theta} + \nu\varepsilon_x) \\ N_{x\theta} &= C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\theta} \\ C &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \end{aligned} \quad (8-1)$$

### ۵-۱) تئوری غیر خطی فلوگه - لور - بایرن<sup>۱</sup> [۲]:

در این تئوری فرض آخر در تئوری دائل حذف می شود. در این تئوری تمامی جابجایی ها بر حسب جابجایی صفحه میانی تعریف می شوند. روابط کرنش - جابجایی برای صفحه میانی به صورت رابطه (۹-۱) بیان می شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{\partial v}{a\partial\theta} + \frac{w}{a} + \frac{1}{2a^2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial\theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial\theta} + w \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial\theta} - v \right)^2 \right\} + \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial w_0}{\partial\theta} \left( \frac{\partial w}{\partial\theta} - v \right) + \right. \\ &\left. w_0 \left( w + \frac{\partial v}{\partial\theta} \right) \right\} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Flugge-Lure-Byrne

$$\gamma_{x\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{a\partial\theta} + \frac{1}{a} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial\theta} + w \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial\theta} - v \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial\theta} - v \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} w_0 \right\} \quad (9-1)$$

در تمامی روابط بالا  $w_0$  تعریف ریاضی نقص هندسی می‌باشد. در واقع نقص هندسی نوعی پیش‌بینی سوراخ، حفره و یا هر نوع نقص در پروفیل پوسته است و منجر به کاهش مقاومت پوسته در برابر بارگذاری می‌شود.

### ۶-۱) تئوری غیر خطی ساندرس-کوینتر [۲]:

در این تئوری نیز مانند تئوری فلوگه از فرضیه آخر دائل صرف نظر می‌شود. از کرنش‌های برشی عرضی چشم پوشی و روابط کرنش جابجایی برای صفحه میانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{a\partial\theta} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\partial v}{a\partial\theta} + \frac{w}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{a\partial\theta} - \frac{v}{a} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial u}{a\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{a\partial\theta} \left( \frac{\partial w}{a\partial\theta} - \frac{v}{a} \right) \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial u}{a\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{a\partial\theta} - \frac{v}{a} \right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{a\partial\theta} - \frac{v}{a} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{a\partial\theta} \end{aligned} \quad (10-1)$$

بر طبق این تئوری تغییرات پیچش و انحنا به صورت خطی می‌باشد. با حذف توان‌های بالای  $\frac{\partial u}{\partial x}$  و  $\frac{\partial v}{\partial y}$  و حاصل ضرب این جملات، روابط فن-کارمن به دست می‌آید که در فصل بعد ذکر می‌شود.

### ۷-۱) تئوری غیر خطی دائل برای پوسته‌های کم عمق [۲]:

به طور کلی اصطلاح کم عمق به پوسته‌هایی گفته می‌شود که شیب در مقایسه با شعاع انحنای آنها کوچک باشد. در واقع این تئوری یک تعمیم برای تئوری دائل می‌باشد، مانند تئوری دائل نیروهای اینرسی درون صفحه-ای قابل چشم پوشی بوده، از تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی چرخشی نیز صرف نظر می‌شود. این تئوری فرض (۵) در تئوری دائل را در نظر نگرفته و در نتیجه از منته‌های تنش در جهت عمود بر صفحه میانی ( $Q_\theta$ ) و  $Q_x$  صرف نظر نمی‌شود. سایر منته‌ها با رابطه (۱۱-۱) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} N_x &= C \left\{ -\frac{vw}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial w}{a\partial\theta} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial\theta} \right\} \\ N_\theta &= C \left\{ -\frac{w}{a} + \frac{v}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{a\partial\theta} \right)^2 + v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial\theta} \right\} \\ N_{x\theta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Shallow Shells

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} \right) \\
 M_\theta &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{x\theta} &= -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \\
 D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}
 \end{aligned}
 \tag{۱۱-۱}$$

$Q_x$  و  $Q_\theta$  بر حسب رابطه (۱۱-۱) به دست می‌آیند [۲].

### ۸-۱) مرور مقاله‌ها:

هاتچینسون وهمکاران [۷] (۱۹۷۱) یک مطالعه تجربی - تحلیلی روی اثرات نوعی عیوب خاص موضعی متقارن بر کمانش پوسته های سیلندری تحت فشار محوری انجام دادند. بارهای کمانش برای انواع مختلفی از عیوب گودی<sup>۱</sup> شکل محاسبه شد. پوسته های استوانه ای مورد مطالعه به روش ریخته گری ساخته شدند و عیوب مورد نظر به وسیله یک ابزار در دیواره داخلی و خارجی آنها ایجاد شده بود و دامنه گشودگی و طول موج آنها بدست آمد. نتایج بدست آمده برای بار کمانش به دو صورت محاسبه شدند یکی برای ضخامت متوسط پوسته معیوب و دیگری با در نظر گرفتن ضخامت متغیر پوسته معیوب. تاثیرات غیرخطی پیش کمانش نیز در نظر گرفته شد. نهایتاً نتایج تجربی تطابق قابل قبولی با پیش بینی های تئوریک داشت و مشخص گردید که عیوب گودی شکل بسیار کوچک، بار کمانش پوسته استوانه ای تحت فشار محوری را به طور جدی کاهش می دهد.

ان جی و لام [۸] (۱۹۹۹) به بررسی پایداری یک پوسته استوانه‌ای لایه‌ای پرداخته‌اند. آنها از سه تئوری دانل، لاو و فلوگه استفاده کرده‌اند. پوسته تحت بارگذاری مرکب ثابت و پریودیک محوری قرار دارد. ناپایداری دینامیک در پوسته‌های استوانه‌ای که تحت بارگذاری پریودیک قرار دارند شامل چهار نوع می‌شود: تشدید پارامتری مرتبه اول، تشدید پارامتری مرتبه‌ی بالا، مجموع ترکیب تشدیدها و تفاضل ترکیب تشدیدها. ناپایداری در پوسته زمانی رخ می‌دهد که یک رابطه بین فرکانس‌های طبیعی پوسته و همچنین فرکانس تحریک بار محوری وجود داشته باشد. دو نوع اول ناپایداری با نام تشدید پارامتری مستقیم و دو نوع دوم با نام تشدید پارامتری مرکب، معمولاً شناخته می‌شوند. معادلات پایداری با هر سه تئوری به دست می‌آید و سپس برای نوع اول ناپایداری با استفاده از روش عددی نواحی ناپایداری رسم شده است. در این مقاله اثر استهلاک ویسکوز نادیده گرفته شده است. با

<sup>1</sup> Dimple

رسم نمودارهای مختلف تاثیر پارامترهای گوناگون همچون نسبت طول به شعاع یا نسبت شعاع به ضخامت بر پایداری پوسته مورد بررسی قرار گرفته است. در پایان نشان داده می‌شود که نواحی ناپایداری به دست آمده به وسیله تئوری‌های فلوگه و لاو دارای انطباق بسیار خوبی بوده ولی نواحی به دست آمده برای تئوری دائل اختلاف تقریباً زیادی با دو تئوری دیگر دارد به طوری که برای نوع اول ناپایداری، ناحیه ناپایدار به دست آمده از تئوری دائل حدود ۷،۵-۸ درصد بزرگتر از نواحی به دست آمده از تئوری فلوگه و لاو است.

کای و همکاران [۹] (۲۰۰۲) تاثیر نقص هندسی را بر مقاومت کمانشی یک پوسته استوانه‌ای نازک تحت بارگذاری محوری متمرکز مورد بررسی قرار داده‌اند. تفاوت عمده این تحقیق با دیگر کارهای انجام شده در این زمینه در نوع بارگذاری آن بر روی سازه می‌باشد، به این ترتیب که در این مقاله بار فشاری محوری به صورت متمرکز وارد می‌شود. در این مقاله نقص هندسی به صورت یک تورفتگی در وسط پوسته در نظر گرفته شده است. روش کار، تحلیل با نرم افزار ABAQUS است.

ژیو و همکاران [۱۰] (۲۰۰۲) با بررسی رفتار کمانشی یک پوسته، تناقض موجود بین تئوری و تجربه را برطرف کردند. این تناقض مربوط به رابطه تنش بحرانی با توان ضخامت در مسئله کمانش است. در روابط کلاسیک نشان داده می‌شود که تنش بحرانی رابطه مستقیم با ضخامت (t) دارد. ولی در آزمایش‌های تجربی دیده شد که این تنش با توان سه دوم ضخامت ( $t^{3/2}$ ) رابطه مستقیم دارد. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد در نظر گرفتن عواملی مانند نقص‌های هندسی، وزن خود پوسته و استفاده از تئوری کلاسیک می‌تواند باعث ایجاد اختلاف در پاسخ شود.

اسلیز و همکاران [۱۱] (۲۰۰۲) به بررسی عددی حساسیت بار کمانش پوسته‌های جدار نازک تحت بار فشاری محوری یکنواخت با انواع مختلفی از عیوب هندسی داخلی و مقایسه آن با نتایج تجربی پرداختند.

بریچ و پیرچر [۱۲] (۲۰۰۲) کمانش و پس کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با عیوب جوش محیطی، در معرض بارهای محوری را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در هر جوش محیطی یک گودی ناچیز اتفاق می‌افتد که به صورت عیوب متقارن است و از آسیب پذیرترین عیوب شناخته شده است. تاثیر این عیوب روی کمانش پوسته‌ها توسط کویتر بررسی شد. وی نشان داد که عیوب متقارن به شدت جدی هستند. شکل عیب جوش در نظر گرفته شده در این معادله به صورت رابطه (۱-۱۲) می‌باشد.

$$W(x) = W_0 * e^{-\pi x/\lambda} (\cos \pi x/\lambda + \zeta * \sin \pi x/\lambda) \quad (1-12)$$

در این معادله  $W$  تغییر شکل شعاعی،  $x$  مختصات محوری که در ابتدای جوش قرار گرفته است،  $W_0$  دامنه عیب،  $a$  طول موج عیب جوش و  $\gamma$  میزان بدون عیب بودن در مرکز جوش است. نتایج به دست آمده، عیوب محیطی ایجاد شده از جوش را برای استحکام کمانش ساختارهای مذکور، زیان آور نشان می دهد.

کیم و کیم [۱۳] (۲۰۰۲) معادلات طراحی عملی و نمودارهای تخمین قدرت کمانش پوسته های سیلندری و مخازن در معرض بارهای فشاری محوری را بسط دادند. علاوه بر پوسته هایی که از نظر هندسی بدون عیب هستند، پوسته های معیوب نیز مورد مطالعه قرار گرفته اند. روش های استفاده شده در این مطالعه حل عددی و تحلیلی می باشد. طبق نتایج به دست آمده از مطالعات پارامتریک پوسته های کامل و بدون عیب، قدرت کمانش به طور قابل ملاحظه ای با افزایش نسبت قطر به ضخامت کاهش می یابد. این در حالی است که با افزایش نسبت ارتفاع به قطر، قدرت کمانش به آرامی کاهش پیدا می کند. این نتایج با نتایج به دست آمده برای ستون ها تفاوت دارد.

هانت و همکاران [۱۴] (۲۰۰۳) به معرفی یک روش جدید برای پیش بینی تعداد موج های کمانش پوسته استوانه-ای نازک تحت بار محوری پرداخته اند. برای بررسی صحت این تئوری، تعداد موج های پیش بینی شده توسط تئوری با تعداد امواج حاصل از حل عددی و تجربی مقایسه شده است.

خملیچی و همکاران [۱۵] (۲۰۰۴) کمانش پوسته استوانه ای الاستیک را با در نظر گرفتن نقص هندسی متقارن با روش تحلیلی بررسی کرده اند. بارگذاری به صورت یک فشار یکنواخت خارجی در راستای محور پوسته می باشد. برای به دست آوردن معادله حاکم از مدل فن-کارمن-دائل استفاده شده و با استفاده از روش گالرکین این معادلات با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده است. برای توصیف نقص هندسی از مدل ریاضی رابطه (۱-۱۳) استفاده شده است، این مدل توانایی توصیف هر گونه نقصی شامل نواقص متمرکز، گسترده و... را دارد و شکل کلی آن به صورت زیر است.

$$\bar{w}(x, y) = a_0(x) + a_1(x) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \quad (1-13)$$

در رابطه بالا،  $a_0$  و  $a_1$  توابع اختیاری از مختصات طولی  $x$ ،  $n$  یک عدد صحیح و  $R$  شعاع صفحه میانی پوسته می باشد. در این مقاله، ابتدا بار کمانش برای پوسته کامل، بررسی شده و سپس برای پوسته با نقص هندسی که با عبارت ساده شده بالا بیان می شود راه حل تحلیلی ارائه شده است. در قسمت اول بار بحرانی، همان بار بحرانی کلاسیک بوده و به صورت رابطه (۱-۳) بیان می شود.

این پاسخ با مقادیر واقعی اختلاف زیادی داشته و از آن بیشتر است. در مرحله بعد با در نظر گرفتن نقص هندسی پاسخ به صورت رابطه (۱۴-۱) در نظر گرفته شده و بار بحرانی نیز به صورت تابعی از دامنه نقص هندسی به دست آمده و مقدار  $m$  در این رابطه با یک برنامه عددی محاسبه، و یک مینیمم سازی نسبت به  $n$  صورت گرفته است.

$$w = \zeta_1 \sin \frac{m\pi x}{2l} \cos \frac{ny}{R} \quad (14-1)$$

برای بررسی صحت پاسخ، جوابهای به دست آمده با چندین کار تجربی موجود مورد مقایسه قرار گرفته است.

کاردومتیس و سیمیتسس [۱۶] (۲۰۰۵) به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته استوانه‌ای بلند ساندویچی تحت فشار خارجی پرداخته و یک راه حل الاستیسیته برای آن ارائه داده‌اند. مسئله به صورت سه بعدی و ماده پوسته ارتوتروپیک است. همچنین بارگذاری به صورت یک فشار هیدرواستاتیک بوده که در زمان کمانش نیز به صورت عمود بر روی سطح خمیده حاصل از کمانش باقی می‌ماند. در این مقاله از دو دیدگاه، ضریب تصحیح برشی مورد مقایسه قرار گرفته است. یکی با توجه به هسته، و دیگری بر اساس لایه‌های تشکیل دهنده بیرونی و نشان داده شده که پیش بینی‌های حاصل از تئوری کلاسیک پوسته‌ها که در آن ضریب تصحیح برشی اعمال نشده است بسیار غیر محافظه کارانه و دور از واقعیت است ولی اگر در همین نتایج (تئوری کلاسیک پوسته‌ها) ضریب تصحیح برشی اعمال شود پاسخ‌ها بسیار نزدیک به واقعیت شده و تقریب بهتری را خواهد داد. در نهایت اهمیت تاثیر برش عرضی بر روی بار بحرانی نشان داده شده است. روابط کرنش-جابجایی در این مقاله به صورت خطی در نظر گرفته شده و برای هر لایه از پوسته روابط جابجایی به صورت رابطه (۱۵-۱) است که  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب جابجایی در راستای شعاعی، محیطی و طولی می‌باشند.

$$u_i(r, \theta) = U_i(r) \cos n\theta, v_i(r, \theta) = V_i(r) \sin n\theta, w_i(r, \theta) = 0, i = f_1, c, f_2 \quad (15-1)$$

در رابطه بالا  $f_1$ ،  $f_2$  و  $c$  به ترتیب نشان دهنده شعاع سطح داخلی، بیرونی و هسته می‌باشند.

بررسی رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای فولادی با ضخامت متغیر توسط آقاجری و همکاران [۱۷] (۲۰۰۶) انجام شد. ایشان بارگذاری را به صورت یک فشار یکنواخت خارجی در نظر گرفته‌اند. روش حل در این تحقیق، حل عددی و بررسی تجربی است. فشار خارجی با یک پمپ خلا بر روی پوسته ایجاد شده است. به منظور تصدیق دقت پاسخ‌های به دست آمده از مدل اجزا محدود و نتایج حاصل از روش عددی تعیین شده از تحلیل فروپاشی غیر خطی اجزا محدود<sup>۱</sup>، جوابها با نتایج به دست آمده از بررسی تجربی مقایسه شده است، که نشان داده می

<sup>1</sup> Nonlinear Finite Element Collapse Analysis

شود نتایج حاصل بسیار به یکدیگر نزدیک بوده و همچنین می توان از این مدل اجزا محدود با در نظر گرفتن رفتار غیر خطی هندسی برای تحلیل رفتار کمانشی پوسته‌ها استفاده کرد. یکی دیگر از نتایج این تحقیق اثبات این موضوع می باشد که در صورت کوچک بودن تغییرات ضخامت پوسته در طول آن، مد کمانشی در تمام طول پوسته قابل ایجاد شدن می باشد و برای پوسته با تغییرات ضخامت زیاد مد کمانشی تنها در نواحی نازکتر ظاهر می شود، که این موضوع با واقعیت کاملاً تطابق دارد. بر اساس نظر مولف، ضخامت متغیر خود نیز نوعی نقص هندسی در شکل پوسته می باشد که تاثیر آن در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است.

لی و باترا [۱۸] (۲۰۰۶) به بررسی رفتار کمانشی یک پوسته که از سه لایه تشکیل شده است، پرداخته‌اند. لایه بیرونی و درونی این پوسته از یک جنس و از نوع همگن<sup>۱</sup> و همسانگرد<sup>۲</sup> می باشند و لایه وسط آن از جنس مواد FG<sup>۳</sup> بوده که ناهمگن و همسانگرد هستند و مدول الاستیسیته آن به صورت سهمی از مدول ورق داخلی در طول ضخامت ورق تا مدول لایه بیرونی تغییر می کند. ضریب پواسون<sup>۴</sup> نیز در لایه میانی ثابت است. برای به دست آوردن معادلات حاکم بر پوسته از تئوری فلوگه استفاده شده است. پوسته تحت فشار محوری یکنواخت و گسترده قرار دارد، رابطه کرنش جابجایی خطی بوده و تمام پارامترهای جابجایی به غیر از جابجایی در راستای شعاعی، بر حسب جابجایی‌های لایه میانی نوشته می شوند و جابجایی شعاعی با جابجایی شعاعی لایه میانی برابر است (بر اساس فرضیات تئوری کلاسیک پوسته‌ها). با در نظر گرفتن پاسخ مثلثاتی برای جابجایی‌ها که شرایط مرزی مسئله را ارضا می کنند، به یک معادله جبری برای به دست آوردن بار کمانش رسیده است، برای حل معادله جبری حاصل از روش عددی تکرار نیوتن استفاده شده است.

وزیری و استکان چی [۱۹] (۲۰۰۶) تحلیل های مقدار ویژه خطی از پوسته استوانه ای ترک خورده را، تحت بارهای ترکیبی فشار داخلی و بار محوری، به منظور مطالعه اثر نوع ترک، اندازه و جهت آن روی رفتار کمانش پوسته های سیلندری نازک به کار گرفته اند. محاسبات حاکی از آن است که با توجه به نوع ترک، طول و جهت آن و فشار داخلی، کمانش موضعی ممکن است به کمانش کلی پوسته سیلندری مقدم باشد. عموماً فشار داخلی، بار کمانش و مد کمانش کلی پوسته های استوانه ای را افزایش می دهد.

---

<sup>1</sup> Homogeneous

<sup>2</sup> Isotropic

<sup>3</sup> Functionally Graded

<sup>4</sup> Poisson Ratio



کراسووسکی و کاستیرکو [۲۰] (۲۰۰۷) به بررسی تجربی کمانش یک پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری محوری پرداخته‌اند. مهمترین تفاوت این کار با دیگر مقاله‌ها در این زمینه، وجود تقویت‌کننده‌هایی<sup>۱</sup> در روی پوسته به شکل نوارهای عمودی می‌باشد. در این مقاله تاثیر پارامترهایی همچون طول پوسته، تعداد نوارهای تقویت‌کننده، موقعیت آنها و شرایط مرزی پوسته بر روی بار کمانش مورد بررسی قرار گرفته است.

قربانپور و همکاران [۲۱] (۲۰۰۷) به بررسی کمانش پوسته استوانه‌ای تحت بارگذاری محوری با استفاده از روش انرژی با وجود هسته الاستیک در داخل پوسته پرداخته‌اند. در استخراج معادلات از فرضیات کویتر استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد وجود هسته الاستیک باعث افزایش پایداری پوسته می‌شود و بار کمانش افزایش می‌یابد.

شهزاد و همکاران [۲۲] (۲۰۰۷) اثر عیوب هندسی روی کمانش پوسته استوانه‌ای، در معرض انواع مختلف بارگذاری با استفاده از تحلیل‌های مدل المان محدود را مورد تحقیق قرار داده‌اند. سپس نتایج را با مدل تحلیلی و تجربی یک پوسته کامل مقایسه کرده‌اند. حساسیت به عیوب به نوع پوسته، بارگذاری و شرایط مرزی بستگی دارد. این وابستگی ممکن است شدید یا مختصر باشد حتی برای پوسته‌هایی که شکل هندسی یکسان دارند اما بارگذاری و شرایط مرزی متفاوت داشته باشند. برای مثال یک استوانه تحت فشار محوری به شدت به عیوب حساس است، در حالی که همان پوسته تحت فشار خارجی حساسیت کمتری به عیوب از خود نشان می‌دهد.

وزیری [۲۳] (۲۰۰۷) حساسیت رفتار کمانش پوسته‌های سیلندری کامپوزیتی ترک دار را نسبت به تاریخچه ترک‌ها با آنالیزهای خطی کمانش بررسی نموده است. تاثیر اندازه و زاویه ترک برای کامپوزیت‌های با الیاف زاویه دار روی رفتار کمانش پوسته‌های سیلندری تحت فشار محوری مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده چشم‌انداز جدیدی به طراحی کامپوزیت چند لایه که ظرفیت بار پوسته‌های سیلندری را بهبود بخشیده است و حساسیت آن‌ها را به حضور عیوب به حداقل رسانیده، ایجاد می‌کند.

نجفی‌زاده و حیدری [۲۴] (۲۰۰۸) به بررسی رفتار کمانشی یک ورق دایره‌ای FGM پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر ورق با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سه به دست آمده و خواص ماده در راستای ضخامت تغییر می‌کند. برای به دست آوردن بار کمانش ابتدا با حل معادلات تعادل نیروهای مکانیکی تعیین شده‌اند. سپس معادلات پایداری بر حسب رابطه‌ی منته‌جه‌ها و جابجایی‌ها مرتب شده است. با تلفیق این معادلات یک معادله

---

<sup>1</sup> Stiffeners

یک مجهول به دست آمده است که مجهول همان خیز ورق می‌باشد. با حل معادله پاسخ بر حسب توابع بسل تعیین شده است.

پاپاداکیس [۲۵] (۲۰۰۸) یک عبارت ریاضی برای بار بحرانی در یک پوسته استوانه‌ای ضخیم تعیین و این عبارت را با بار بحرانی به دست آمده از تئوری کلاسیک مقایسه کرده است. در این مقاله آثار برش عرضی و تغییرات غیر خطی تنش‌ها و کرنش‌ها نیز در محاسبات لحاظ شده است. در این تحقیق بارگذاری به صورت یک فشار هیدرواستاتیک خارجی است. مسئله به صورت دو بعدی، کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده و تنها جابجایی‌ها در دو جهت شعاعی و محیطی مد نظر است. عبارت مربوط به جابجایی‌ها به صورت مجموع دو قسمت تعریف شده است، اول قسمتی که معرف جابجایی در مرحله تعادل استاتیکی است و دوم قسمتی که معرف مرحله شروع کمانش است و با یک ضریب بسیار کوچک  $\varepsilon$  همراه شده است. در انتهای این مقاله نشان داده شده است که پاسخ تئوری کلاسیک با دقیقترین پاسخ ارائه شده توسط این مقاله کمتر از ۱۵ درصد اختلاف دارد و برای زمانیکه نسبت  $h/R$  کوچک می‌شود (پوسته نازک است) پاسخ تئوری کلاسیک تقریب مناسبی به حساب می‌آید.

یکی از کارهای تحلیلی انجام شده در زمینه کمانش پوسته‌ها تحقیق عبدالمولا و لگر [۲۶] (۲۰۰۸) می‌باشد.

آنها در مقاله خود به بررسی کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای با پارامتر بسیار بزرگ بتدورف<sup>۱</sup>  $Z = \frac{L^2}{Rh} *$  تحت فشار خارجی پرداخته‌اند. یک تحلیل مجانبی<sup>۲</sup>، برای تعیین اثرات شرایط مرزی بر روی بار کمانش و همچنین شکل مدهای کمانش صورت گرفته است. در این تحلیل معکوس پارامتر بتدورف به عنوان پارامتر کوچک  $\varepsilon$  در نظر گرفته شده است. ابتدا با یک ساده سازی و حذف جمله‌های غیر خطی پاسخی برای بار کمانش به دست آمده است. بار دیگر با استفاده از روش تحلیلی تئوری اغتشاشات به حل معادله دقیق تر پرداخته و صحت پاسخ مرحله قبل همراه با دقت جوابها مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین نشان داده شده که شکل کمانش پوسته استوانه‌ای دارای تغییرات بیشتری در جهت محیطی نسبت به طول پوسته می‌باشد، به شرطی که نسبت طول به شعاع پوسته خیلی بزرگ نباشد. در این مقاله برای استخراج معادلات از تئوری غیر خطی دائل استفاده شده است.

شن و زیانگ [۲۷] (۲۰۰۸) در کار خود بر روی یک پوسته استوانه‌ای مرکب<sup>۳</sup> تحت پیچش و بار محوری متمرکز شده‌اند. پوسته مورد نظر دارای یک نقص هندسی اولیه می‌باشد، معادلات بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها و

<sup>1</sup> Batdorf Parameter

<sup>2</sup> Asymptotic Analysis

<sup>3</sup> Composite

همچنین روابط سینماتیک غیر خطی فن-کارمن و دانل<sup>۱</sup> به دست آمده است. برای به دست آوردن بار کمانش از تئوری اغتشاشات استفاده شده است. شرایط مرزی در دو لبه به صورت تکیه گاه ساده<sup>۲</sup> یا گیر دار<sup>۳</sup> می باشد. بار کمانش برای دو حالت پیچش و فشار مجزا به دست آمده و با پاسخهای به دست آمده از حل تجربی در مقاله های دیگر، مقایسه شده است.

فرانو و فراساسی [۲۸] (۲۰۰۸) رفتار کمانش پوسته های سیلندری نازک معیوب تحت فشار خارجی را با روش های عددی، تحلیلی و تجربی مطالعه کرده اند. مواردی که در این مطالعه به عنوان عوامل اصلی موثر بر بار کمانش پوسته ها شناخته شده اند عبارتند از:

- نسبت قطر به ضخامت  $D/t$ ، مدول یانگ، تنش تسلیم ماده در مسیر محیطی
- عیوب اولیه بیضی شکل
- تغییرات ضخامت دیواره
- خروج از مرکزی و وجود اتصالات جوشی.

نهایتاً نشان داده شده است که استحکام کمانش نسبت به شکل عیوب و همسایگی آنها با یکدیگر به شدت وابسته است. همچنین غیر یکنواختی ضخامت و استحکام اتصالات جوشی پارامترهایی هستند که کمانش پوسته های نازک جوش داده شده را کنترل می کنند.

هوانگ و هان [۲۹] (۲۰۰۹) به بررسی رفتار غیر خطی و الاستیک، کمانش و پس کمانش پوسته FG تحت بارگذاری فشار محوری پرداخته است. معادلات به لحاظ جنس ماده خطی بوده و قانون هوک و معادلات رفتاری خطی بر مسئله حاکم است اما به لحاظ هندسی رفتار ماده غیر خطی بوده و در معادلات سینماتیکی مسئله، عبارت های غیر خطی ظاهر می شود. در این مقاله بر اساس تئوری غیر خطی دانل معادلات، استخراج و با استفاده از روش ریتز، مراحل تحلیل صورت گرفته است. تمامی خواص ماده (مدول یانگ، ضریب پواسون و...) تابعی توانی از ضخامت پوسته ( $Z$ ) می باشند. همچنین در این مقاله تاثیرات تغییر دما بر روی رفتار ماده مورد بررسی قرار گرفته است. دما نیز به صورت تابعی از ضخامت بیان شده است. نتایج نشان می دهد با افزایش دما مقدار بار کمانش کاهش می یابد.

---

<sup>1</sup> Von Karman-Donnell

<sup>2</sup> Simply Supported

<sup>3</sup> Clamped

بررسی کمانش و پس‌کمانش پوسته استوانه‌ای FGM تحت پیچش در یک محیط حرارتی توسط شن [۳۰] (۲۰۰۹) انجام شده است. خواص پوسته تابعی از دما بوده و میدان حرارتی به صورتی در نظر گرفته شده که دما فقط در جهت ضخامت دارای تغییرات باشد. خواص ماده تشکیل دهنده پوسته نیز در جهت ضخامت تغییر کرده و تابع قانون ساده توانی است. معادله حاکم بر سیستم با در نظر گرفتن روابط غیر خطی سینماتیک فن-کارمن-دائل و همچنین تئوری مرتبه بالا تغییر شکل برشی به دست آمده است و در آنها نقص هندسی اولیه و همچنین روابط غیر خطی سینماتیکی پیش از کمانش نیز لحاظ شده است. با استفاده از تکنیک اغتشاشات بار کمانش و مسیرهای تعادل پس‌کمانش به دست آمده‌اند.

لیونگ و همکاران [۳۱] (۲۰۰۹) در کار خود به بررسی رفتار کمانشی پوسته استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت فشار خارجی پرداخته‌اند. برای حل با استفاده از روش تئوری اغتشاشات و روش گالرکین-باب نوف<sup>۱</sup> یک بسط مجانبی برای پاسخ به دست آمده است. همچنین با استفاده از تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یک حل تحلیلی عددی نیز ارائه شده و در پایان با کارهای دیگر در این زمینه مقایسه انجام شده است. در ابتدا برای حل، نیروها، کرنش‌ها و جابجایی‌ها را به صورت دو بخشی در نظر گرفته‌اند که بخشی شامل قبل از کمانش و بخشی بعد از کمانش است، به عبارت دیگر برای این پارامترها یک نمو در نظر گرفته شده است که برابر با اختلاف دو بخش مذکور می‌باشد. همچنین برای پارامترهایی چون جابجایی شعاعی و ممان چرخشی در مرحله پیش از کمانش مقدار صفر در نظر گرفته می‌شود که به عبارت دیگر به آن معناست که مقدار نمو برابر با مقدار همان پارامتر در مرحله پس از کمانش است. روابط سینماتیک با فرض خیز کوچک، خطی در نظر گرفته شده‌اند و از آنجایی که جنس پوسته نیز الاستیک و خطی است در نتیجه معادلات حاکم خطی می‌باشند. شرایط مرزی به صورت تکیه گاه ساده در نظر گرفته شده است و دو پارامترخیز و تابع تنش به صورت توابعی تعریف شده‌اند که این شرایط مرزی را ارضا کنند. با تعریف توابع مناسب برای این دو پارامتر و جایگذاری آنها در معادلات حاکم، معادلات تبدیل به دو معادله دیفرانسیل معمولی می‌شوند. از معادله اول که تنها بر حسب تابع تنش است به کمک تئوری اغتشاشات تابع تنش به دست آمده است. سپس با استفاده از روش گالرکین در معادله دوم و همچنین تعریف به دست آمده برای تابع تنش به یک مسئله مقدار ویژه رسیده است که از حل آن مقدار بار بحرانی محاسبه شده است. در پایان نتایج برای پوسته با ضخامت ثابت با نتایج مقاله‌ها دیگر مورد مقایسه قرار گرفته است.

---

<sup>1</sup> Bubnov-Galerkin Method

لی و لین [۳۲] (۲۰۱۰) در کار خود به بررسی رفتار غیر خطی کمانشی پوسته غیر همسانگرد لایه‌ای<sup>۱</sup> استوانه‌ای تحت بارگذاری خارجی غیر یکنواخت پرداخته‌اند. پوسته قادر به تحمل تغییر شکل برشی بوده و یک فشار هیدرواستاتیک غیر یکنواخت خارجی به پوسته وارد می‌شود. هر لایه از پوسته به صورت الاستیک خطی و غیر همسانگرد در نظر گرفته شده است. معادله حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا و همچنین روابط سینماتیک غیر خطی فن-کارمن-دائل بوده و معادلات حاصل، شامل کوپلینگ کشش-پیچش، کشش-خمش و خمش-پیچش است. از فرضیات دیگر مقاله نقص هندسی اولیه و تغییر شکل‌های غیر خطی در مرحله پیش-کمانش می‌باشد. مدل ریاضی نقص اولیه هندسی به شکل اولین مد کمانشی پوسته در نظر گرفته شده است. با تعریف یک تابع تنش به جای منته‌های تنش و دو پارامتر چرخش، حول محورهای طولی و محیطی معادلات حاکم به صورت چهار معادله غیر خطی و چهار مجهول که شامل سه مجهول مذکور و جابجایی شعاعی پوسته می‌باشد به دست آمده است. شرایط مرزی در دو لبه به صورت تکیه گاه ساده یا گیردار در نظر گرفته شده است، پس از نوشتن شرایط مرزی مسئله بی‌بعد شده و دستگاه معادلات به صورت بی‌بعد نوشته می‌شود. برای حل معادلات از تکنیک اغتشاشات استفاده شده است و به کمک آن فشار بحرانی و مسیرهای تعادل پس‌کمانش به صورت تحلیلی به دست آمده است. با روش عددی نیز معادلات حل شده و نتایج با نتایج چند مقاله دیگر مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به طور موثری پیش‌بینی‌های مربوط به بار کمانش را نسبت به تئوری کلاسیک بهبود بخشیده است.

وانگ و کویزومی [۳۳] (۲۰۱۰) به بررسی عددی و تجربی رفتار کمانشی یک پوسته تحت فشار خارجی که دارای مفصل‌های طولی می‌باشد پرداخته‌اند. هدف تاثیر شرایط تکیه گاهی و ابعاد هندسی در رفتار کمانشی پوسته است، مفصل‌ها به سه دسته صلب، نیمه صلب و شکل پذیر تقسیم شده‌اند. فشار خارجی یکنواخت به کمک یک پمپ خلا ایجاد شده است. نتایج نشان می‌دهد که مفصل‌های مختلف نه تنها روی شکل مد کمانش بلکه روی مقدار بار کمانش هم اثر می‌گذارد. همچنین مقدار فشار بحرانی با افزایش سفتی خمشی مفصل، افزایش می‌یابد یا به عبارت دیگر افزایش صلبیت مفصل مقاومت پوسته را افزایش می‌دهد و پوسته در فشارهای بالاتری کمانش می‌کند. برای حل عددی از یک نرم افزار المان محدود استفاده شده است.

ایپک چی و شریعتی [۳۴] (۲۰۱۰) به بررسی کمانش یک پانل استوانه‌ای پرداخته‌اند. معادله حاکم بر سیستم، معادلات خطی دائل است و با استفاده از ترکیب دو روش تئوری اغتشاشات و سری‌ها، تنش بحرانی برای یک پانل که دارای دو لبه با تکیه گاه ساده و بارگذاری محوری یکنواخت می‌باشد به دست آمده است. تاثیر

<sup>1</sup> Anisotropic Laminated Shell

پارامترهای طول، شعاع و زاویه قطاع پانل بر بار کمانش بررسی و نتایج با حل عددی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد افزایش طول پانل و یا افزایش شعاع پانل باعث کاهش بار کمانش می‌شود که البته تغییرات شعاع دارای اثر بیشتری بر روی بار کمانش می‌باشد. همچنین یک ضریب تصحیح برای فرمول لورنز<sup>1</sup> به دست آمده است.

### (۹-۱) جمع‌بندی:

در این فصل مروری به چند مقاله و تئوری در زمینه پوسته‌ها شد که اکثر آنها پوسته استوانه‌ای بوده و دارای جنس الاستیک می‌باشند. وجود نقص‌های هندسی در حالت‌های مختلف اهمیت زیادی داشته و در اکثر مقاله‌ها به آن پرداخته شده است. جنس پوسته‌ها در مقاله‌های جدید به سمت مواد نو مانند مواد مرکب و FGM پیش رفته است. در اکثر مقالات از روش‌های عددی برای حل معادلات استفاده شده است و در اغلب موارد از تئوری-های غیر خطی مانند دائل و یا فن-کارمن استفاده شده است. در مجموع در هیچ مقاله‌ای مشاهده نشده است که بار کمانش تحت فشار خارجی و بار محوری، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی و به روش تحلیلی به دست آمده باشد. در این پایان نامه بار کمانش تحت بارگذاری ترکیبی فشار محوری و جانبی با این روش به دست آمده است.

---

<sup>1</sup> Lorens Formula

## استخراج معادلات تعادل و پایداری

## ۲-۱) مقدمه:

در این فصل معادلات تعادل و پایداری با استفاده از روش انرژی و با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آمده است.

## ۲-۲) تئوری تغییر شکل برشی:

میدان جابجایی در مختصات کارتزین برای هر نقطه پوسته به صورت رابطه (۱-۲) می‌باشد:

$$u = u(x, y, z, t), v = v(x, y, z, t), w = w(x, y, z, t) \quad (1-2)$$

که در آن  $u$  و  $v$  و  $w$  به ترتیب جابجایی در جهت  $X$  و  $Y$  و  $Z$  بوده و  $t$  زمان است. پارامتر  $Z$  در راستای عمود بر ضخامت پوسته می‌باشد. جابجایی‌ها در این تئوری با بسط تیلور رابطه (۱-۲) تقریب زده شدند. به کمک بسط تیلور حول نقطه  $Z=0$  نتیجه می‌شود:

$$u(x, y, z, t) = u(x, y, 0, t) + z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots$$

$$v(x, y, z, t) = v(x, y, 0, t) + z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots$$

$$w(x, y, z, t) = w(x, y, 0, t) + z \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{z^2}{2!} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \dots \quad (2-2)$$

میدان جابجایی با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به صورت ساده رابطه (۳-۲) در می‌آید:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + zu_1(x, y, t)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + zv_1(x, y, t)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + zw_1(x, y, t) \quad (3-2)$$

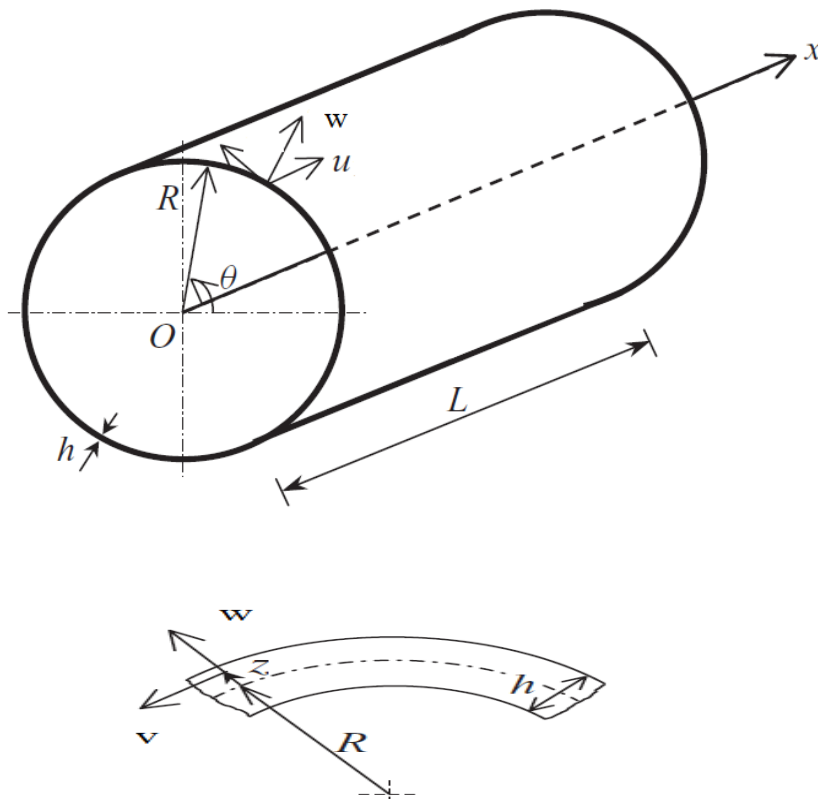
که در روابط بالا:

$$u_0(x, y, t) = u(x, y, z, t) \Big|_{z=0}$$

$$u_1(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (4-2)$$



$w_0$  و  $w_1$  نیز به صورت مشابه تعریف می شوند. با توجه به تعاریف بالا کاملاً مشخص است که میدان جابجایی به صورت یک چند جمله‌ای از  $Z$  تقریب زده شده است. در تئوری تغییر شکل برشی از تقریب چند جمله‌ای بر حسب  $Z$  برای تعریف جابجایی‌ها استفاده می‌شود. بالاترین مرتبه  $Z$  در این تقریب، مرتبه تئوری تغییر شکل برشی را تعیین می‌کند که در اینجا مرتبه اول می‌باشد. در تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، میدان جابجایی با تابعی خطی از  $Z$  تقریب زده می‌شود.



شکل (۱-۲) محورهای مختصات برای پوسته استوانه‌ای

برای پوسته با محورهای تعریف شده در شکل (۱-۲) میدان جابجایی با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی توسط رابطه (۵-۲) تعریف شده است:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, \theta) + zu_1(x, \theta) \\ v &= v_0(x, \theta) + zv_1(x, \theta) \\ w &= w_0(x, \theta) + zw_1(x, \theta) \end{aligned} \quad (۵-۲)$$

که در آن  $u$  و  $v$  و  $w$  به ترتیب جابجایی در جهت  $x$  و  $\theta$  و  $Z$  بوده و هرکدام از محورهای  $Z\theta X$  در شکل مشخص می‌باشند.

## ۳-۲) استخراج معادلات تعادل:

با داشتن میدان جابجایی و با استفاده از روابط سینماتیکی، می توان کرنش ها را محاسبه کرد. آمابیلی [۲] تانسور کرنش گرین در دستگاه مختصات استوانه ای<sup>۱</sup> را به صورت رابطه (۶-۲) ارائه کرده است:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{1}{\sqrt{g_{jj}}} \left( \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \delta_{ij} g_{ii} \right) \quad (۶-۲)$$

در معادلات بالا  $g$  تانسور متریک اقلیدسی<sup>۲</sup> بوده و پارامتر  $a_k$  در دستگاه مختصات استوانه ای با رابطه (۷-۲) تعریف می شود:

$$\begin{aligned} a_1 &= x + u \\ a_2 &= r \sin \theta + w \sin \theta + v \cos \theta \\ a_3 &= r \cos \theta + w \cos \theta - v \sin \theta \end{aligned} \quad (۷-۲)$$

مقادیر تانسور  $g$  نیز برای این دستگاه مختصات توسط رابطه (۸-۲) می باشد:

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = 1 \quad (۸-۲)$$

با توجه به تعاریف بالا و روابط (۶-۲) تا (۸-۲) می توان روابط کرنش جابجایی را از رابطه (۶-۲) به صورت رابطه (۹-۲) به دست آورد که این روابط کلی ترین حالت بوده و تمام جمله های مربوط به تانسور کرنش گرین را شامل می شود که در شرایط مختلف می توان با حذف برخی از جملات، شکل ساده تری از این معادلات را به دست آورد. در نهایت حالت کلی روابط کرنش جابجایی به صورت زیر است [۳۵]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{x\theta} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) \right] \\ \gamma_{xr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - v \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial r} + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (۹-۲)$$

<sup>1</sup> Green's Strain Tensor In Cylindrical Coordinates

<sup>2</sup> Euclidean Metric Tensor

در تمامی روابط بالا  $Z$  و  $\Gamma$  به صورت رابطه (۲-۱۰) برحسب یکدیگر نوشته می شوند:

$$r = R + z, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (۲-۱۰)$$

که  $R$  شعاع صفحه میانی می باشد. در ادامه با بیان یک سری فرضیات، روابط بیان شده در رابطه (۲-۹) تا حد امکان جهت سهولت در حل معادلات تحلیلی، ساده سازی می شود.

اولین فرضی که در اینجا مورد استفاده قرار گرفته است فرض تقارن محوری می باشد. با توجه به هندسه و بارگذاری متقارن و جنس ایزوتروپیک و همسانگرد پوسته می توان از این فرض که کمک بسیاری در ساده سازی معادلات می کند استفاده کرد. در فرض تقارن محوری تمامی مشتقها نسبت به  $\theta$  صفر بوده و از پارامتر جابجایی در این راستا نیز صرف نظر می گردد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad \text{و} \quad v = 0 \quad (۲-۱۱)$$

همچنین جابجاییها دیگر تابعی از  $\theta$  نمی باشند و بنابراین جابجاییها رابطه (۲-۵) به صورت زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} u &= u_0(x) + zu_1(x) \\ v &= 0 \\ w &= w_0(x) + zw_1(x) \end{aligned} \quad (۲-۱۲)$$

با این فرضیات، تعداد مجهولات مسئله از شش به چهار کاهش می یابد. پوسته مورد نظر نازک و فرضیات پوسته نازک صادق است. توان دوم مشتقات مرتبه دوم جابجایی در راستای طولی ( $u$ ) در مقایسه با مشتقات مرتبه اول آن کوچک بوده و قابل صرف نظر است.

استفاده از فرضیات بالا تا حد زیادی معادلات کرنش-جابجایی را ساده می کند. ولی باز هم وجود جمله های غیر خطی در این معادلات مشهود است. با توجه به اینکه در این تحقیق فرض بر اساس تغییر شکل های بزرگ<sup>۱</sup> می باشد، جمله های غیر خطی قابل حذف نیست. با حذف  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$  و  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$  در معادلات (۲-۹)، رابطه فن-کارمن به صورت زیر تعریف می شود:

---

<sup>1</sup> Large Deformation

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} (w) + \frac{w^2}{2r^2} \\
\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right] \\
\gamma_{x\theta} &= 0 \\
\gamma_{xr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial r} \\
\gamma_{\theta r} &= 0
\end{aligned}
\tag{۱۳-۲}$$

در جمله  $\varepsilon_{\theta\theta}$ ، از  $\frac{w^2}{2r^2}$  به علت کوچکی صرف نظر شده است. با جایگذاری میدان جابجایی از رابطه (۱۲-۲) در معادلات فوق و جایگزینی  $r$  بر حسب  $Z$ ، رابطه (۱۴-۲) حاصل می‌شود، که میدان کرنش - جابجایی برای پوسته نازک تحت شرایط متقارن محوری می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{du_0}{dx} + z \frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw_0}{dx} + z \frac{dw_1}{dx} \right)^2 \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{R+z} (w_0 + z w_1) \\
\varepsilon_r &= \frac{1}{2} w_1^2 + w_1 \\
\gamma_{xr} &= \frac{dw_0}{dx} + u_1 + z \frac{dw_1}{dx} + \left( \frac{dw_0}{dx} + z \frac{dw_1}{dx} \right) w_1 \\
\gamma_{x\theta} &= \gamma_{\theta z} = 0
\end{aligned}
\tag{۱۴-۲}$$

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر پوسته از اصل کار مجازی<sup>۱</sup> استفاده شده است. طبق این اصل تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار انجام شده توسط نیروهای خارجی یکسان است:

$$\delta U = \delta W$$

که در رابطه فوق  $U$  انرژی کرنشی و  $W$  کار نیروهای خارجی است. انرژی کرنشی عبارتست از:

$$\begin{aligned}
U &= \iiint U^* dV \\
dV &= r dr d\theta dx = (R + z) dz d\theta dx \\
U^* &= \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z})
\end{aligned}
\tag{۱۵-۲}$$

<sup>۱</sup> Virtual Work Principle

که در رابطه فوق  $U^*$  دانسیته انرژی کرنشی است. کار نیروهای خارجی با رابطه (۱۶-۲) تعریف می‌شود که در آن فشار محوری و  $q$  فشار خارجی بوده که واحد آنها نیوتن بر متر مربع است.

$$W_1 = \iint (Pu)rd\theta dz = \int P(u_0 + zu_1)(R+z)d\theta dz = \int \left( Pu_0Rh + \frac{Pu_1h^3}{12} \right) d\theta \quad (۱۶-۲)$$

$$W_2 = \int q(2\pi R_o)wdx = \int q(2\pi R_o)(w_0 + \frac{h}{2}w_1)dx$$

$$W = W_1 + W_2$$

انتگرال گیری‌های بالا در محدوده زیر محاسبه می‌شوند:

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, 0 \leq x \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (۱۷-۲)$$

تغییرات انرژی کرنشی و کار نیروهای خارجی به صورت رابطه (۱۸-۲) بیان می‌شود:

$$\delta U = 2\pi R \iint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dx dz$$

$$\delta W = \int \left( PRh \delta u_0 + \frac{Ph^3}{12} \delta u_1 \right) d\theta + \int q(2\pi R_o) (\delta w_0 + \frac{h}{2} \delta w_1) dx \quad (۱۸-۲)$$

مقادیر تغییرات کرنش‌ها به صورت رابطه (۱۹-۲) می‌باشند:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \left( \frac{du_0}{dx} \right) + z \delta \left( \frac{du_1}{dx} \right) + \left( \frac{dw_0}{dx} + z \frac{dw_1}{dx} \right) \left( \delta \left( \frac{dw_0}{dx} \right) + z \delta \left( \frac{dw_1}{dx} \right) \right)$$

$$\delta \varepsilon_\theta = \frac{1}{R+z} (\delta w_0 + z \delta w_1)$$

$$\delta \varepsilon_r = w_1 \delta w_1 + \delta w_1$$

$$\delta \gamma_{xr} = \delta \left( \frac{dw_0}{dx} \right) + z \delta \left( \frac{dw_1}{dx} \right) + \delta u_1 + \delta w_1 \left( \frac{dw_0}{dx} + z \frac{dw_1}{dx} \right) + w_1 \left( \delta \left( \frac{dw_0}{dx} \right) + z \delta \left( \frac{dw_1}{dx} \right) \right)$$

(۱۹-۲)

با استفاده از روابط (۱۸-۲) و (۱۹-۲) معادلات حاکم بر پوسته به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{dN_x}{dx} &= 0 \\ \frac{dM_x}{dx} - Q_x &= 0 \\ \frac{dN_x}{dx} \frac{dw_0}{dx} + \frac{dM_x}{dx} \frac{dw_1}{dx} + \frac{d}{dx} (Q_x(1 + w_1)) + N_x \frac{d^2w_0}{dx^2} + M_x \frac{d^2w_1}{dx^2} - \frac{N_\theta}{R} - \frac{qh}{2R} - q &= 0 \\ \frac{dP_x}{dx} \frac{dw_1}{dx} + \frac{dM_x}{dx} \frac{dw_0}{dx} + P_x \frac{d^2w_1}{dx^2} + M_x \frac{d^2w_0}{dx^2} - \frac{M_\theta}{R} - N_z(1 + w_1) - Q_x \frac{dw_0}{dx} + w_1 \frac{dM_{xz}}{dx} + \frac{dM_{xz}}{dx} - \frac{qh}{2} - \frac{qh^2}{4R} &= 0 \end{aligned} \quad (20-2)$$

معادلات رابطه (۲۰-۲) بر حسب نتیجه‌های تنش می‌باشند که این نتیجه‌ها با رابطه (۲۱-۲) بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ P_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ N_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\theta dz \\ M_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_\theta dz \\ N_z &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \kappa \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ M_{xz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \kappa z \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \end{aligned} \quad (21-2)$$

در رابطه (۲۱-۲)،  $\kappa$  ضریب تصحیح برشی است. رابطه بین تنش کرنش کوچک با استفاده از روابط هوک<sup>۱</sup> به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_x = A \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)$$

<sup>1</sup> Hook

$$\sigma_{\theta} = A\varepsilon_{\theta} + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_z)$$

$$\sigma_z = A\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_{\theta})$$

$$\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz} \quad (22-2)$$

در رابطه (22-2) عبارات  $\lambda$  و  $\mu$  ثوابت لامه<sup>1</sup> هستند و به صورت زیر معرفی می گردند:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \quad A = \lambda + 2\mu \quad (23-2)$$

عبارات  $E$  و  $G$  و  $\nu$  به ترتیب مدول الاستیسیته، مدول برشی الاستیسیته و ضریب پواسون می باشند.

شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$$1: N_x \frac{dw_0}{dx} + M_x \frac{dw_1}{dx} + Q_x(1 + w_1)|_{x=0..l} = 0 \quad \text{or} \quad \delta w_0|_{x=0..l} = 0$$

$$2: P_x \frac{dw_1}{dx} + M_x \frac{dw_0}{dx} + M_{xz}(1 + w_1)|_{x=0..l} = 0 \quad \text{or} \quad \delta w_1|_{x=0..l} = 0$$

$$3: 2\pi R N_x \delta u_0|_{x=0..l} = 2\pi R P h \delta u_0|_{x=l}$$

$$4: 2\pi R M_x \delta u_1|_{x=0..l} = 2\pi \frac{P h^3}{12} \delta u_1|_{x=l} \quad (24-2)$$

با جایگذاری روابط (22-2) در معادلات (21-2) می توان منتجهای تنش را بر حسب کرنشها نوشت. سپس با جایگذاری کرنشها از رابطه (14-2) در معادلات اخیر، مقادیر منتجهها بر حسب جابجاییها مشخص می شوند. جایگذاری این معادلات (منتجهها بر حسب میدان جابجایی) در رابطه (20-2) منجر به یک دستگاه چهار معادله با چهار مجهول  $W_0$  و  $W_1$  و  $U_0$  و  $U_1$  می شود.

$$\begin{aligned} & hA \frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} + hA \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + h\lambda W_1(x) \frac{dW_1(x)}{dx} + h\lambda \frac{dW_1(x)}{dx} + \frac{h\lambda}{R} \frac{dW_0(x)}{dx} + \frac{h^3 A}{12R} \frac{d^2 U_1(x)}{dx^2} + \\ & \frac{h^3 A}{12R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{12R} \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Lamé Constants

$$\begin{aligned} & \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{12R} \left( \frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \\ & \frac{h^5 A}{80R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 \lambda}{6R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) + \frac{h^3 \lambda}{12R} W_1(x) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) + \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{d^2 U_1(x)}{dx^2} \right) - \frac{h^3 \mu}{12R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) - \\ & \frac{h^3 \mu}{12R} W_1(x) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) - \mu h U_1(x) - \mu h \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) - \mu h W_1(x) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^3 A}{4R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + h \lambda W_1(x) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) - q + \frac{h \lambda}{2R} \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right)^2 + \frac{h^3 \lambda}{8R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + \\ & 2 \mu h \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) + \frac{h^3 \mu}{6R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + \mu h \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) U_1(x) + \mu h \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) W_1(x) + \\ & \frac{h^3 \lambda}{12R} W_1(x) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + h \lambda \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) + \frac{h^3 \mu}{6R} W_1(x) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + 2 \mu h W_1(x) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) + \\ & \frac{h^3 A}{4} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{12R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{3h^5 A}{160R} \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^3 A}{12R} \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dU_0(x)}{dx} \right) + \frac{h^3 A}{8R} \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right)^2 + \frac{h^3 \lambda}{6R} W_1(x) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 \lambda}{24R} (W_1(x))^2 \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \\ & \frac{h^3 A}{12R} \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 U_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h \lambda}{R} W_0(x) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{12R} \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) + \frac{h^3 \mu}{6R} W_1(x) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \\ & \frac{h^3 \mu}{2R} (W_1(x))^2 \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) - \frac{q h}{2R} + \mu h \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) + \mu h \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) - \frac{h \lambda}{2R} (W_1(x))^2 - \frac{h \lambda}{R} \left( \frac{dU_0(x)}{dx} \right) - \frac{h \lambda}{R} W_1(x) + \\ & A \alpha_0 W_1(x) - \frac{A \alpha_0}{R} W_0(x) - \frac{h A}{R} W_1(x) + \frac{h^3 \mu}{12R} \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + 2 \mu h W_1(x) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \mu h (W_1(x))^2 \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \\ & \frac{h^3 A}{8} \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 U_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) + A h \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} \right) + \\ & \frac{3h A}{2} \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right)^2 + A h \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dU_0(x)}{dx} \right) + \frac{h \lambda}{2} \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) (W_1(x))^2 + \lambda h \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) W_1(x) = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{h^3 \mu}{12} \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{3h^5 A}{80R} \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) + \frac{h^3 \lambda}{24} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 - \frac{h\lambda}{2} \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right)^2 - \lambda h \left( \frac{dU_0(x)}{dx} \right) - \\
& AR\alpha_0 W_1(x) + \frac{h^3 \mu}{12R} \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) - \mu h U_1(x) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) - \mu h W_1(x) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right)^2 + \frac{h^3 \mu}{12} W_1(x) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 - \\
& \frac{3hA}{2} (W_1(x))^2 - \frac{hA}{2} (W_1(x))^3 - \frac{h^3 \lambda}{6R} \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) - \frac{hA}{R} W_0(x) - \frac{h\lambda}{R} W_0(x) + \frac{h^3 \mu}{12R} \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \\
& \frac{h^3 \mu}{6} W_1(x) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 \mu}{12} (W_1(x))^2 \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{8} \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right)^2 + \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 U_1(x)}{dx^2} \right) + \\
& \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{3h^5 A}{160} \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + \frac{h^3 A}{12} \left( \frac{dU_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \\
& \frac{h^3 \lambda}{24} (W_1(x))^2 \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 \lambda}{12} W_1(x) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) - \frac{qh}{2} + A\alpha_0 W_0(x) - \mu h \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right)^2 + \frac{h^3 \mu}{12} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 - \\
& \frac{qh^2}{4R} + \frac{h^3 \lambda}{12R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) + \frac{h^3 \lambda}{24} W_1(x) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + \frac{h^3 \mu}{12R} W_1(x) \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) - \frac{\lambda h}{R} W_1(x) W_0(x) - \\
& \lambda h W_1(x) \left( \frac{dU_0(x)}{dx} \right) - \frac{\lambda h}{2} W_1(x) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right)^2 - \frac{h^3 \lambda}{12R} W_1(x) \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) + \frac{h^3 A}{4} \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \\
& \frac{h^3 A}{12R} \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 U_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 A}{8R} \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dW_0(x)}{dx} \right)^2 + \frac{h^3 A}{12R} \left( \frac{dU_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{3h^5 A}{160R} \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 + \\
& \frac{h^3 \lambda}{6R} W_1(x) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 \lambda}{24R} (W_1(x))^2 \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^5 A}{80R} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 U_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 \lambda}{12R} W_0(x) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \\
& \frac{h^5 A}{80R} \left( \frac{dU_1(x)}{dx} \right) \left( \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 \mu}{6R} W_1(x) \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \frac{h^3 \mu}{12R} (W_1(x))^2 \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) = 0
\end{aligned}$$

(۲۵-۲)

معادلات رابطه (۲۵-۲)، معادلات تعادل حاکم بر پوسته نازک با فرضیات ذکر شده، تحت بار محوری و فشار خارجی می‌باشند.

## ۲-۴) استخراج معادلات پایداری:

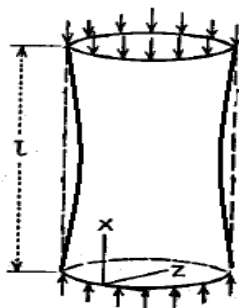
برای به دست آوردن معادلات پایداری ابتدا تغییر متغیر زیر به معادلات تعادل (۲۵-۲) اعمال می‌شود:

$$\frac{dU_0(x)}{dx} = V(x) \tag{۲۶-۲}$$

سپس جا بجایی‌ها به صورت زیر به دو بخش تقسیم می‌شوند:

$$\begin{aligned}
V &= v_0 + \varepsilon v_1 ; U_1 = y_0 + \varepsilon y_1 \\
W_0 &= w_0 + \varepsilon w_1 ; W_1 = g_0 + \varepsilon g_1
\end{aligned} \tag{۲۷-۲}$$

$v_0, w_0, g_0$  و همگی حالات نزدیک تعادل بوده و  $v_1, w_1, g_1$  و  $v_0, w_0, g_0$  نمونه‌های کوچک اختیاری درست بعد از تعادل می‌باشند. برای درک بهتر این مطلب می‌توان به این نکته اشاره کرد که بعنوان مثال تغییر شکل پوسته بعد از بارگذاری محوری مانند شکل (۲-۲) می‌باشد و منظور از جابجایی‌ها با اندیس صفر همین جابجایی‌های تعادلی می‌باشد اما حداقل باری که باعث خارج شدن پوسته از این حالت می‌شود بار کمانش بوده و جابجایی‌ها با اندیس یک مربوط به این حالت می‌باشد.



شکل (۲-۲) تغییر شکل پوسته پس از بارگذاری محوری

با در نظر گرفتن این جابجایی‌ها و جایگذاری آنها در رابطه (۲-۲۵) پس از اعمال تغییر متغیر (۲-۲۶) روابط جدیدی به دست می‌آید. با جداسازی ضرایب  $\varepsilon$  در روابط به دست آمده، معادلات پایداری حاصل می‌شوند، که بر حسب جا به جایی‌ها می‌باشند.

$$hAv_1(x) + h\lambda \left( \frac{dw_0(x)}{dx} \right) \left( \frac{dw_1(x)}{dx} \right) + h\lambda g_0(x)g_1(x) + h\lambda g_1(x) + \frac{h\lambda}{R}w_1(x) + \frac{h^3A}{12R} \frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{h^3A}{12R} \frac{dw_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} + \frac{h^3A}{12R} \frac{dw_1(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} + \frac{h^3A}{12} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^3\mu}{12R}g_1(x)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right) - \frac{h^3\mu}{12R}g_0(x)\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right) + \frac{h^3\lambda}{12R}g_1(x)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right) + \frac{h^3\lambda}{12R}g_0(x)\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right) + \\
& \frac{h^5A}{80R}\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) - \mu hg_1(x)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right) - \mu hg_0(x)\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right) - \frac{h^3\mu}{12R}\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right) + \frac{h^3\lambda}{6R}\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right) + \\
& \frac{h^3A}{12R}\left(\frac{dv_1(x)}{dx}\right) + \frac{h^3A}{12}\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{12}\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{12}\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + \\
& \frac{h^3A}{12}\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{12}\left(\frac{d^2y_1(x)}{dx^2}\right) - \mu hy_1(x) - \mu h\left(\frac{dW_1(x)}{dx}\right) + \frac{h^5A}{80R}\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + \\
& \frac{h^3A}{12R}\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{12R}\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h\mu\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{4R}\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + 2h\mu g_0(x)g_1(x)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + \\
& 3Ah\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + h\lambda g_0(x)g_1(x)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{4}\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) - \\
& \frac{h^3\mu}{6R}g_0(x)\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{12R}\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dy_1(x)}{dx}\right) + \frac{h^3A}{12R}\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dy_0(x)}{dx}\right) + \frac{h^3A}{4}\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \\
& \frac{h^3A}{4}\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3\mu}{6R}g_1(x)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{12R}v_0(x)\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{12R}v_1(x)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \\
& \frac{h^3A}{8R}\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)^2 + \frac{3h^5A}{160R}\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)^2 + \frac{h^3A}{4}\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \\
& \frac{\mu h^3}{12R}(g_0(x))^2\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{\lambda h}{R}W_1(x)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{\lambda h}{R}W_0(x)\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3A}{12R}\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2y_1(x)}{dx^2}\right) + \\
& \frac{h^3A}{12R}\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2y_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{h^3\lambda}{24R}(g_0(x))^2\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{\lambda h^3}{6R}g_0(x)\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{\lambda h^3}{6R}g_1(x)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + A\alpha_0g_1(x) + \\
& \mu h\left(\frac{dy_1(x)}{dx}\right) - \frac{\lambda h}{R}g_0(x)g_1(x) + \frac{\lambda h}{R}\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right) + \frac{h^3A}{4R}\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + \\
& \frac{Ah^3}{4R}\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{Ah^3}{4R}\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{3Ah^5}{80R}\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \\
& \frac{\mu h^3}{6R}g_0(x)g_1(x)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{\lambda h^3}{6R}g_0(x)g_1(x)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{\mu h^3}{12R}\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + 2\mu hg_0(x)\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + \\
& 2\mu hg_1(x)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{Ah^3}{8}\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{Ah^3}{12}\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2y_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{Ah^3}{12}\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2y_1(x)}{dx^2}\right) + \\
& \frac{Ah^3}{12}\left(\frac{dy_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{Ah^3}{12}\left(\frac{dy_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{d^2g_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{\lambda h}{2}(g_0(x))^2\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + \frac{3Ah}{2}\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)^2 + \\
& \lambda hg_0(x)\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + \lambda hg_1(x)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + \mu h(g_0(x))^2\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + Ahv_0(x)\left(\frac{d^2w_1(x)}{dx^2}\right) + \\
& Ahv_1(x)\left(\frac{d^2w_0(x)}{dx^2}\right) + \frac{Ah^3}{12R}\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{dv_0(x)}{dx}\right) + \frac{Ah^3}{12R}\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{dv_1(x)}{dx}\right) + \lambda hg_1(x)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right) + \\
& \lambda hg_0(x)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)\left(\frac{dw_1(x)}{dx}\right) + \lambda hg_0(x)\left(\frac{dg_1(x)}{dx}\right)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right) + \frac{\lambda h^3}{12R}g_1(x)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\mu hg_0(x) \frac{dW_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} + 2\mu hg_1(x) \frac{dW_0(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} + 2\mu hg_0(x) \frac{dW_1(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} + \frac{\mu h^3}{6R} g_1(x) \left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)^2 + \\
& \frac{\mu h^3}{3R} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} + \frac{\lambda h^3}{4R} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} + 2\mu h \frac{dW_1(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} + 2\mu h \frac{dW_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} + \lambda h \frac{dW_1(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} + \\
& \lambda h \frac{dW_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} - \frac{\lambda h}{R} v_1(x) + \mu h y_0(x) \frac{dg_1(x)}{dx} + \mu h y_1(x) \frac{dg_0(x)}{dx} + \mu h g_1(x) \frac{dy_0(x)}{dx} + \mu h g_0(x) \frac{dy_1(x)}{dx} - \\
& \frac{A\alpha_0}{R} W_1(x) + Ah \frac{dW_1(x)}{dx} \frac{dv_0(x)}{dx} + Ah \frac{dW_0(x)}{dx} \frac{dv_1(x)}{dx} - \frac{Ah}{R} g_1(x) - \frac{\lambda h}{R} g_1(x) + \frac{\lambda h^3}{6R} g_0(x) \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} + \\
& \frac{\mu h^3}{3R} g_0(x) \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu h^3}{12} (g_0(x))^2 \frac{d^2 g_1(x)}{dx^2} + \frac{\mu h^3}{6} g_1(x) \frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} + \frac{\mu h^3}{12} \frac{d^2 g_1(x)}{dx^2} + \frac{Ah^5}{80R} \frac{dy_1(x)}{dx} \frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} + \frac{Ah^5}{80R} \frac{dy_0(x)}{dx} \frac{d^2 g_1(x)}{dx^2} + \\
& \frac{\lambda h^3}{12R} W_1(x) \frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda h^3}{12R} W_0(x) \frac{d^2 g_1(x)}{dx^2} + \frac{Ah^5}{80R} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{d^2 y_1(x)}{dx^2} + \frac{Ah^5}{80R} \frac{dg_1(x)}{dx} \frac{d^2 y_0(x)}{dx^2} + \\
& \frac{\lambda h^3}{24R} (g_0(x))^2 \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \frac{\lambda h^3}{6R} g_1(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda h^3}{6R} g_0(x) \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \frac{3Ah^5}{160R} \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)^2 + \\
& \frac{Ah^3}{4} \frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} \frac{dw_1(x)}{dx} \frac{dw_0(x)}{dx} + \frac{\mu h^3}{6} g_0(x) g_1(x) \frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} + \frac{3Ah^5}{80} \frac{dg_1(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} + \\
& \frac{3Ah^5}{80R} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{dw_1(x)}{dx} \frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda h^3}{12R} g_0(x) g_1(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \frac{3Ah^5}{80} \frac{dg_1(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3Ah^5}{80R} \frac{dw_0(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{d^2 g_1(x)}{dx^2} + \frac{3Ah^5}{80R} \frac{dw_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} \frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} + \frac{Ah^3}{4R} \frac{dw_0(x)}{dx} \frac{dw_1(x)}{dx} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \\
& \frac{\mu h^3}{6R} g_0(x) g_1(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda h^3}{12} g_0(x) g_1(x) \frac{d^2 g_0(x)}{dx^2} + \frac{Ah^3}{8R} \left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)^2 \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \frac{Ah^3}{12} v_1(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \\
& \frac{Ah^3}{12} v_0(x) \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \frac{Ah^3}{4} \frac{dw_0(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \frac{Ah^3}{4} \frac{dw_0(x)}{dx} \frac{dg_1(x)}{dx} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \frac{Ah^3}{4} \frac{dw_1(x)}{dx} \frac{dg_0(x)}{dx} \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \\
& \frac{\mu h^3}{12R} (g_0(x))^2 \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} + \frac{\mu h^3}{6R} g_1(x) \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \frac{\mu h^3}{6R} g_0(x) \frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} - h\lambda v_1(x) + A\alpha_0 W_1(x) + \\
& \frac{\mu h^3}{12R} \frac{dy_1(x)}{dx} - \mu h g_1(x) \left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)^2 + \frac{\mu h^3}{12} g_1(x) \left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)^2 - \mu h y_0(x) \frac{dw_1(x)}{dx} - \mu h y_1(x) \frac{dw_0(x)}{dx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{Ah}{R}W_1(x) - \frac{\lambda h^3}{6R}\frac{dy_1(x)}{dx} - 3Ahg_1(x)g_0(x) + \frac{\lambda h^3}{12}\frac{dg_1(x)}{dx}\frac{dg_0(x)}{dx} - \lambda h\frac{dw_0(x)}{dx}\frac{dw_1(x)}{dx} - \\
& \frac{3Ah}{2}g_1(x)(g_0(x))^2 - 2\mu h\frac{dw_0(x)}{dx}\frac{dw_1(x)}{dx} + \frac{\mu h^3}{6}\frac{dg_1(x)}{dx}\frac{dg_0(x)}{dx} - AR\alpha_0g_1(x) - h\lambda g_1(x)v_0(x) - \\
& h\lambda g_0(x)v_1(x) + \frac{Ah^3}{12}\frac{dg_1(x)}{dx}\frac{dv_0(x)}{dx} + \frac{Ah^3}{12}\frac{dg_0(x)}{dx}\frac{dv_1(x)}{dx} - \frac{\lambda h}{2}g_1(x)\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)^2 + \frac{\lambda h^3}{24}g_1(x)\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)^2 + \\
& \frac{Ah^3}{12R}\frac{dw_0(x)}{dx}\frac{dv_1(x)}{dx} + \frac{Ah^3}{12R}\frac{dw_1(x)}{dx}\frac{dv_0(x)}{dx} - \frac{\lambda h^3}{12R}g_1(x)\frac{dy_0(x)}{dx} - \frac{\lambda h}{R}g_0(x)W_1(x) - \frac{\lambda h}{R}g_1(x)W_0(x) + \\
& \frac{\mu h^3}{12R}g_0(x)\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{\mu h^3}{12R}g_1(x)\frac{dy_0(x)}{dx} + \frac{\lambda h^3}{12R}\frac{dw_0(x)}{dx}\frac{dg_1(x)}{dx} + \frac{\lambda h^3}{12R}\frac{dw_1(x)}{dx}\frac{dg_0(x)}{dx} - h\lambda g_0(x)\frac{dw_1(x)}{dx}\frac{dw_0(x)}{dx} \\
& - 2\mu h g_0(x)\frac{dw_0(x)}{dx}\frac{dw_1(x)}{dx} + \frac{\mu h^3}{6}g_0(x)\frac{dg_0(x)}{dx}\frac{dg_1(x)}{dx} + \frac{\lambda h^3}{12}g_0(x)\frac{dg_0(x)}{dx}\frac{dg_1(x)}{dx} + \\
& \frac{Ah^3}{8}\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\left(\frac{dw_0(x)}{dx}\right)^2 + \frac{\lambda h^3}{24}(g_0(x))^2\frac{d^2g_1(x)}{dx^2} + \frac{3Ah^5}{160}\frac{d^2g_1(x)}{dx^2}\left(\frac{dg_0(x)}{dx}\right)^2 + \frac{Ah^3}{12}V_0(x)\frac{d^2g_1(x)}{dx^2} + \\
& \frac{Ah^3}{12}V_1(x)\frac{d^2g_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda h^3}{12}g_1(x)\frac{d^2g_0(x)}{dx^2} + \frac{\lambda h^3}{12}g_0(x)\frac{d^2g_1(x)}{dx^2} + \frac{Ah^3}{12}\frac{dw_1(x)}{dx}\frac{d^2y_0(x)}{dx^2} + \frac{Ah^3}{12}\frac{dw_0(x)}{dx}\frac{d^2y_1(x)}{dx^2} + \\
& \frac{Ah^3}{12}\frac{dy_1(x)}{dx}\frac{d^2w_0(x)}{dx^2} + \frac{Ah^3}{12}\frac{dy_0(x)}{dx}\frac{d^2w_1(x)}{dx^2} + \frac{\mu h^3}{6}g_0(x)\frac{d^2g_1(x)}{dx^2} + \frac{\mu h^3}{12R}\frac{d^2w_1(x)}{dx^2} - \frac{\lambda h}{R}W_1(x) - \\
& \frac{\lambda h^3}{12R}g_0(x)\frac{dy_1(x)}{dx} = 0
\end{aligned}$$

(۲۸-۲)

یکی دیگر از روش‌های استخراج معادلات پایداری که در برخی مقالات به آن اشاره شده است ([۲۱] و [۲۴])، استفاده از بسط تیلور انرژی کرنشی کل می‌باشد. به این ترتیب که اگر  $V$  انرژی پتانسیل کل پوسته باشد می‌توان بسط تیلور آن را به صورت رابطه (۲-۲۹) نوشت و به کمک حداقل انرژی پتانسیل، معادلات تعادل و معادلات پایداری را به دست آورد. این روش برای بررسی پایداری سازه مناسب‌تر است و با استفاده از آن می‌توان حالت پایداری سازه را بررسی کرد. برای انجام این روش با محاسبه تغییرات انرژی پتانسیل کل، معادلات تعادل به دست می‌آید و برای استخراج معادلات پایداری لازم است که تغییرات<sup>۱</sup> دوم از انرژی پتانسیل کل گرفت [۲۱]:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!}\delta^2 V + \frac{1}{3!}\delta^3 V + \dots \quad (۲۹-۲)$$

<sup>1</sup> Variational

با توجه به رابطه (۲-۲۹) برای حالت تعادل سه وضعیت پیش خواهد آمد:

الف: اگر  $\delta^2 V > 0$  باشد تعادل برای تمام جابجایی‌ها پایدار خواهد بود.

ب: اگر  $\delta^2 V < 0$  باشد تعادل برای حداقل یک دسته جابجایی قابل قبول، ناپایدار خواهد بود.

ج: وضعیت  $\delta^2 V = 0$  نیز برای استخراج معادلات پایداری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

## ۲-۵) جمع‌بندی:

در این فصل معادلات تعادل و پایداری با استفاده از روش انرژی و به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست آمد که برای این کار از تئوری غیر خطی فن-کارمن برای روابط سینماتیک استفاده شده است. با استفاده از یک سری فرضیات معادلات تا حد امکان ساده شده است. در نهایت معادلات تعادل و پایداری که یک دستگاه معادلات غیر خطی می‌باشد به دست آمده است.

## حل معادلات به روش تحلیلی

### ۳-۱) مقدمه:

در این فصل معادلات تعادل و پایداری به دست آمده در فصل قبل، بصورت تحلیلی حل شده است. برای به دست آوردن بار کمانش لازم است ابتدا معادلات تعادل را به صورت جداگانه با در نظر گرفتن بار محوری و فشار خارجی، حل کرد و پس از جایگذاری پاسخ های به دست آمده از معادلات تعادل در معادلات پایداری، با استفاده از حل مساله مقدار ویژه معادلات پایداری، بار کمانش را به دست آورد. حل تحلیلی به کمک تئوری اغتشاشات و تئوری معادلات دیفرانسیل، انجام شده است.

### ۳-۲) حل معادلات تعادل:

برای حل معادلات به دست آمده در فصل قبل به روش تئوری اغتشاشات، ابتدا باید شکل بی بعد معادلات را به دست آورد. نکته قابل توجه در این تحقیق در مقایسه با دیگر کارهای انجام شده در این زمینه، این است که، در این تحقیق معادلات از همان ابتدا به صورت مستقیم پس از بی بعد شدن، حل شده تا بار کمانش حاصل شود، ولی در مقالات دیگر مانند مرجع [۳۴] ابتدا معادلات با روش سری ها حل شده، یا شکل مد سازه حدس زده شده و پاسخ بر اساس آن شکل می گیرد ولی در حل اغتشاشات شکل مد از حل ریاضی به دست می آید. برای بی بعد سازی نیاز به تعریف پارامترهای بی بعد در مساله است که در روابط (۳-۱) به صورت ستاره دار مشخص شده اند.

$$u_0^* = \frac{u_0}{h_0}, w_0^* = \frac{w_0}{h_0}, u_1^* = u_1, w_1^* = w_1, h^* = \frac{h}{h_0}, R^* = \frac{R}{R_0}, \frac{1}{Z} = \frac{R_0 h_0}{l^2}, Z_1 = \frac{h_0}{\varepsilon R_0}, x^* = \frac{x}{l}, \varepsilon = \frac{h_0}{l}, P^* = \frac{P}{A}, q^* = \frac{q}{A}, m = \ln \frac{R+h/2}{R-h/2}, \theta_1 = \frac{\lambda}{A}, \theta_2 = \frac{\mu}{A} \quad (۳-۱)$$

در رابطه (۳-۱) پارامترهای  $h, l$  و  $R$  به ترتیب ضخامت، طول و شعاع می باشند.  $R_0$  و  $h_0$  به ترتیب شعاع و ضخامت شاخص و  $Z$  ضریبی از پارامتر بتدورف است.  $\varepsilon$  پارامتری کوچک فرض می شود.

با جایگذاری روابط (۳-۱) در (۲-۲۵) می توان به شکل بی بعد معادلات تعادل رسید. پس از جایگذاری، از تبدیل زیر در دستگاه معادلات استفاده شده است:

$$V = \varepsilon \frac{du_0^*}{dx^*} \quad (۳-۲)$$



با استفاده از رابطه (۲-۳) معادلاتی به دست می آید که شکل بی بعد شده معادلات (۲-۲) می باشد که نهایتاً با اعمال تغییر متغیر زیر، شکل معادلات به صورت رابطه (۳-۳) تبدیل می شود:

$$X = \frac{X^*}{\varepsilon}$$

$$\frac{z_1 \varepsilon h^{*2}}{12R^*} \frac{dU_1^*(X)}{dX} + V(X) + \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon}{R^*} W_0^*(X) + \frac{1}{2} \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{z_1 \varepsilon h^{*2}}{12R^*} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} + \frac{\theta_1}{2} (W_1^*(X))^2 + \theta_1 W_1^*(X) + \frac{h^{*2}}{24} \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^{*2}}{12} \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} \frac{dW_1^*(X)}{dX} + \frac{h^{*2}}{12} \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} \frac{dW_0^*(X)}{dX} + \frac{h^{*2} z_1 \varepsilon}{12R^*} \frac{dV(X)}{dX} + \frac{h^{*2} z_1 \varepsilon}{12R^*} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \\ & \frac{h^{*4} z_1 \varepsilon}{80R^*} \frac{dW_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{h^{*2} z_1 \varepsilon \theta_1}{6R^*} \frac{dW_1^*(X)}{dX} + \frac{h^{*2} z_1 \theta_1 \varepsilon}{12R^*} W_1^*(X) \frac{dW_1^*(X)}{dX} + \frac{h^{*2}}{12} \frac{d^2 U_1^*(X)}{dX^2} - \frac{h^{*2} z_1 \varepsilon \theta_2 \kappa}{12R^*} \frac{dW_1^*(X)}{dX} - \\ & \frac{h^{*2} z_1 \varepsilon \theta_2 \kappa}{12R^*} W_1^*(X) \frac{dW_1^*(X)}{dX} - \kappa \theta_2 U_1^*(X) - \kappa \theta_2 \frac{dW_0^*(X)}{dX} - \kappa \theta_2 W_1^*(X) \frac{dW_0^*(X)}{dX} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & h^* \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dV_0^*(X)}{dX} + \frac{h^*}{2} \theta_1 (W_1^*(X))^2 \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{h^{*3}}{4} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + h^* \theta_1 W_1^*(X) \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \\ & \alpha_0 W_1^*(X) + \kappa h^* \theta_2 \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \kappa h^* \theta_2 \frac{dU_1^*(X)}{dX} + h^* \theta_1 \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} + \kappa h^* \theta_2 (W_1^*(X))^2 \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \\ & 2\kappa h^* \theta_2 W_1^*(X) \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{\kappa \varepsilon \theta_2 z_1 h^{*3}}{12R^*} (W_1^*(X))^2 \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{\kappa \varepsilon \theta_2 z_1 h^{*3}}{6R^*} W_1^*(X) \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \\ & \frac{3h^*}{2} \theta_1 \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + h^* V(X) \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{h^{*3}}{12} \frac{dU_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{h^{*3}}{12} \frac{dW_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 U_1^*(X)}{dX^2} + \\ & \frac{h^{*3}}{8} \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{\varepsilon \theta_1 z_1 h^{*3}}{R^*} \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{\varepsilon z_1 h^{*3}}{12R^*} \frac{dW_1^*(X)}{dX} \frac{dV(X)}{dX} + \frac{\varepsilon \theta_1 z_1 h^*}{2R^*} \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{z_1 \varepsilon \theta_1 h^*}{R^*} V(X) + \frac{z_1 \varepsilon h^{*3}}{4R^*} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{z_1 \theta_1 \varepsilon h^{*3}}{6R^*} W_1^*(X) \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \\
& \frac{z_1 \theta_1 \varepsilon h^*}{R^*} W_0^*(X) \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{z_1 \theta_1 \varepsilon h^{*3}}{24R^*} (W_1^*(X))^2 \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{\kappa z_1 \theta_2 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \\
& \frac{z_1 \theta_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} W_1^*(X) \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{\kappa z_1 \theta_2 \varepsilon h^{*3}}{6R^*} \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{\kappa z_1 \theta_2 \varepsilon h^{*3}}{6R^*} W_1^*(X) \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 + \\
& \theta_1 h^* W_1^*(X) \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} + 2\kappa \theta_2 h^* \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} + \kappa \theta_2 h^* U_1^*(X) \frac{dW_1^*(X)}{dX} + \\
& \kappa \theta_2 h^* W_1^*(X) \frac{dU_1^*(X)}{dX} - \frac{z_1 \varepsilon h^*}{R^*} W_1^*(X) - \frac{z_1 \varepsilon h^* q^*}{2R^*} - \frac{z_1 \alpha_1 \varepsilon}{R^*} W_0^*(X) + \frac{z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} \frac{dU_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \\
& \frac{z_1 \varepsilon h^{*3}}{8R^*} \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{d^2 U_1^*(X)}{dX^2} + \frac{3z_1 \varepsilon h^{*5}}{160R^*} \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \\
& \frac{z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} V(X) \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} - q^* - \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^*}{R^*} W_1^*(X) - \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^*}{2R^*} (W_1^*(X))^2 + \\
& 2\kappa \theta_2 h^* W_1^*(X) \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\kappa \theta_2 z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} (W_1^*(X))^2 \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{\kappa \theta_2 z_1 \varepsilon h^{*3}}{6R^*} W_1^*(X) \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} - \frac{h^*}{2} (W_1^*(X))^3 - \frac{3h^*}{2} (W_1^*(X))^2 + \\
& \alpha_0 W_0^*(X) - \frac{h^* q^*}{2} + \frac{h^{*3}}{4} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{\theta_1 h^{*3}}{12} W_1^*(X) \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{\theta_1 h^{*3}}{24} (W_1^*(X))^2 \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \\
& \frac{\kappa \theta_2 h^{*3}}{12} \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} - \theta_1 h^* V(X) + \frac{\theta_1 h^{*3}}{24} \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 - \frac{\theta_1 h^*}{2} \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{h^{*3}}{12} \frac{dV(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} + \\
& \frac{\kappa \theta_2 h^{*3}}{12} (W_1^*(X))^2 \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{\kappa \theta_2 h^{*3}}{6} W_1^*(X) \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{h^{*3}}{12} V(X) \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{h^{*3}}{12} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{d^2 U_1^*(X)}{dX^2} + \\
& \frac{h^{*3}}{12} \frac{dU_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{h^{*3}}{8} \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{3h^{*5}}{160} \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} - \frac{R^* \alpha_0}{z_1 \varepsilon} W_1^*(X) - \frac{z_1 \varepsilon h^*}{R^*} W_0^*(X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{z_1 \varepsilon q^* h^{*2}}{4R^*} - \kappa \theta_2 h^* W_1^*(X) \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{\kappa \theta_2 h^{*3}}{12} W_1^*(X) \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} - \kappa \theta_2 h^* U_1^*(X) \frac{dW_0^*(X)}{dX} + \\
& \frac{\kappa \theta_2 z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} W_1^*(X) \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{3z_1 \varepsilon h^{*5}}{80R^*} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^{*3}}{6R^*} W_1^*(X) \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \\
& \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} W_0^*(X) \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^{*3}}{24R^*} (W_1^*(X))^2 \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} + \frac{\kappa \theta_2 z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} \frac{dU_1^*(X)}{dX} + \\
& \frac{\kappa \theta_2 z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} W_1^*(X) \frac{dU_1^*(X)}{dX} - \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^*}{R^*} W_0^*(X) - \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^{*3}}{6R^*} \frac{dU_1^*(X)}{dX} + \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dW_1^*(X)}{dX} - \\
& \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} W_1^*(X) \frac{dU_1^*(X)}{dX} + \frac{z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} \frac{dW_0^*(X)}{dX} \frac{dV(X)}{dX} - \frac{\theta_1 z_1 \varepsilon h^*}{R^*} W_0^*(X) W_1^*(X) + \frac{\theta_1 h^{*3}}{24} W_1^*(X) \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 - \\
& \frac{\theta_1 h^*}{2} W_1^*(X) \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 - \theta_1 h^* W_1^*(X) V(X) + \frac{\kappa \theta_2 h^{*3}}{12} \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 - \kappa \theta_2 h^* \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 + \\
& \frac{z_1 \varepsilon h^{*5}}{80R^*} \frac{dW_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 U_1^*(X)}{dX^2} + \frac{z_1 \varepsilon h^{*5}}{80R^*} \frac{dU_1^*(X)}{dX} \frac{d^2 W_1^*(X)}{dX^2} + \frac{z_1 \varepsilon h^{*3}}{8R^*} \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} \left( \frac{dW_0^*(X)}{dX} \right)^2 + \\
& \frac{3z_1 \varepsilon h^{*5}}{160R^*} \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} \left( \frac{dW_1^*(X)}{dX} \right)^2 + \frac{z_1 \varepsilon h^{*3}}{12R^*} V(X) \frac{d^2 W_0^*(X)}{dX^2} = 0
\end{aligned}$$

(۳-۳)

ضریب تصحیح برشی در محاسبات  $\kappa = \frac{5}{6}$  فرض شده است [۴].

دستگاه معادلات (۳-۳) یک دستگاه معادلات غیر خطی با ضرایب ثابت می‌باشد. در اینجا هدف، تعیین بار کمانش می‌باشد بنابراین باید معادلات تعادل به صورت پارامتری بر حسب بار کمانش بدون بعد حل شود که این حل بسیار پیچیده است و جایگذاری آن در معادلات پایداری مساله را بسیار پیچیده تر کرده و تقریباً حل آن را غیر ممکن می‌سازد. به همین خاطر از تئوری اغتشاشات برای حل معادلات تعادل استفاده می‌شود. معادلات مرتبه یک که در اینجا آورده نشده است، معادلاتی همگن می‌باشد. با توجه به شرایط مرزی همگن پاسخ این دسته از معادلات صفر است، بنابراین حل مرتبه یک صفر خواهد بود و همان حل مرتبه صفر برای بررسی پایداری کفایت می‌کند. برای شروع حل با روش تئوری اغتشاشات، ابتدا جابجایی‌ها به صورت رابطه (۳-۳) در معادلات (۳-۳) جایگذاری می‌شوند. سپس هر معادله در دستگاه معادلات بر حسب توان  $\varepsilon$  مرتب شده و جملات با مرتبه‌های مختلف مشخص می‌شوند.

$$v(X) = v_{11}(X) + \varepsilon v_{12}(X)$$

$$u_1^*(X) = u_{13}(X) + \varepsilon u_{14}(X)$$

$$w_0^*(X) = w_{11}(X) + \varepsilon w_{12}(X)$$

$$w_1^*(X) = w_{13}(X) + \varepsilon w_{14}(X) \quad (۴-۳)$$

$w_{14}, w_{13}, w_{12}, w_{11}, u_{14}, u_{13}, v_{12}, v_{11}$  توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. جملات مرتبه صفر دستگاه معادلات عبارتند از:

$$\frac{\theta_1}{2} (W_{13}(X))^2 + \frac{h^{*2}}{24} \left( \frac{dW_{13}(X)}{dX} \right)^2 + V_{11}(X) + \theta_1 W_{13}(X) + P^* + \frac{1}{2} \left( \frac{dW_{11}(X)}{dX} \right)^2 = 0$$

$$- \kappa \theta_2 U_{13}(X) + \frac{h^{*2}}{12} \frac{dW_{13}(X)}{dX} \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} - \kappa \theta_2 W_{13}(X) \frac{dW_{11}(X)}{dX} + \frac{h^{*2}}{12} \frac{dW_{11}(X)}{dX} \frac{d^2 W_{13}(X)}{dX^2} - \kappa \theta_2 \frac{dW_{11}(X)}{dX} + \frac{h^{*2}}{12} \frac{d^2 U_{13}(X)}{dX^2} = 0$$

$$\begin{aligned} & \theta_1 h^* W_{13}(X) \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} + \frac{3h^*}{2} \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} \left( \frac{dW_{11}(X)}{dX} \right)^2 + h^* V_{11}(X) \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} + h^* \frac{dW_{11}(X)}{dX} \frac{dV_{11}(X)}{dX} + \\ & 0.083h^{*3} \frac{dU_{13}(X)}{dX} \frac{d^2 W_{13}(X)}{dX^2} + \frac{h^{*3}}{8} \left( \frac{dW_{13}(X)}{dX} \right)^2 \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} + 2\kappa \theta_2 h^* W_{13}(X) \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} + \\ & \kappa \theta_2 h^* U_{13}(X) \frac{dW_{13}(X)}{dX} + \frac{h^{*3}}{4} \frac{dW_{11}(X)}{dX} \frac{dW_{13}(X)}{dX} \frac{d^2 W_{13}(X)}{dX^2} + \frac{\theta_1 h^*}{2} (W_{13}(X))^2 \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} + \\ & \theta_1 h^* W_{13}(X) \frac{dW_{11}(X)}{dX} \frac{dW_{13}(X)}{dX} + 2\kappa \theta_2 h^* W_{13}(X) \frac{dW_{11}(X)}{dX} \frac{dW_{13}(X)}{dX} + \kappa \theta_2 h^* W_{13}(X) \frac{dU_{13}(X)}{dX} + \\ & \kappa \theta_2 h^* \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} + 2\kappa \theta_2 h^* \frac{dW_{11}(X)}{dX} \frac{dW_{13}(X)}{dX} - q^* + \kappa \theta_2 h^* \frac{dU_{13}(X)}{dX} + \alpha_0 W_{13}(X) + \\ & 0.083h^{*3} \frac{dW_{13}(X)}{dX} \frac{d^2 U_{13}(X)}{dX^2} + \theta_1 h^* \frac{dW_{11}(X)}{dX} \frac{dW_{13}(X)}{dX} = 0 \end{aligned}$$

$$- \frac{R^* \alpha_0}{z_1} W_{13}(X) = 0$$

(۵-۳)

شرایط مرزی مسئله عبارتند از:

$$\begin{aligned} \text{at } X = 0 : \quad u_{13}(0) = w_{11}(0) = 0 \\ \text{at } X = \frac{1}{\varepsilon} : \quad u_{13}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = w_{11}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = 0 \end{aligned} \quad (6-3)$$

برای حل، از معادله چهارم نتیجه می شود:

$$w_{13}(X) = 0 \quad (7-3)$$

بنابراین با جایگذاری رابطه (7-3) در معادلات اول تا سوم دستگاه معادلات (5-3) رابطه (8-3) حاصل می شود:

$$V_{11}(X) + P^* + \frac{1}{2} \left( \frac{dW_{11}(X)}{dX} \right)^2 = 0$$

$$-\kappa\theta_2 U_{13}(X) - \kappa\theta_2 \frac{dW_{11}(X)}{dX} + \frac{h^{*2}}{12} \frac{d^2 U_{13}(X)}{dX^2} = 0$$

$$\begin{aligned} h^* \frac{dW_{11}(X)}{dX} \frac{dV_{11}(X)}{dX} + \kappa\theta_2 h^* \frac{dU_{13}(X)}{dX} + \frac{3h^*}{2} \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} \left( \frac{dW_{11}(X)}{dX} \right)^2 + h^* V_{11}(X) \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} + \\ \kappa\theta_2 h^* \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} - q^* = 0 \end{aligned}$$

(8-3)

حال از معادله اول رابطه (8-3)،  $V_{11}(X)$  به صورت زیر به دست می آید:

$$V_{11}(X) = -P^* - \frac{1}{2} \left( \frac{dW_{11}(X)}{dX} \right)^2 \quad (9-3)$$

قرار دادن  $V_{11}(X)$  از رابطه (9-3) در معادله سوم رابطه (8-3) منجر به ایجاد دو معادله و دو مجهول  $U_{13}(X)$  و  $W_{11}(X)$  می گردد:

$$-\kappa\theta_2 U_{13}(X) - \kappa\theta_2 \frac{dW_{11}(X)}{dX} + \frac{h^{*2}}{12} \frac{d^2 U_{13}(X)}{dX^2} = 0$$

$$\frac{3h^*}{10^{10}} \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} \left( \frac{dW_{11}(X)}{dX} \right)^2 + \kappa \theta_2 h^* \frac{dU_{13}(X)}{dX} - h^* \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} P^* + \kappa \theta_2 h^* \frac{d^2 W_{11}(X)}{dX^2} - q^* = 0 \quad (10-3)$$

با حل معادلات دیفرانسیل (۱۰-۳)، می توان جابجایی ها را قبل از کمانش تعیین کرد. ثابت های حل از تشریظ مرزی به دست می آیند.

### ۳-۳) حل معادلات پایداری:

برای استخراج بار کمانش به کمک پاسخ های مرحله قبل، معادلات پایداری به دست آمده در فصل قبل حل می گردد. ابتدا مقادیر  $v_0$ ،  $y_0$ ،  $w_0$  و  $g_0$  که حل معادلات تعادل می باشند به دست می آید این حل تابعی از  $P^*$  یا  $q^*$  است. با جایگذاری این حل در معادلات پایداری، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن با چهار معادله و چهار مجهول حاصل می شود که مجهولات آن  $v_I$ ،  $y_I$ ،  $w_I$  و  $g_I$  می باشند.

لازم به ذکر است در اینجا دو حالت بررسی شده است، اول حالتی که  $q^*$  صفر در نظر گرفته می شود و تنها بار محوری به دست می آید. حالت دوم عکس حالت اول می باشد یعنی فقط فشار خارجی در نظر گرفته می شود. پاسخ های مربوط به حل معادلات تعادل به ازای ورودی های جدول (۱-۳) در حالات مذکور به صورت رابطه (۳-۱۱) می باشد:

جدول (۱-۳) ابعاد و مشخصات مکانیکی پوسته

Thickness(mm)	Radius(cm)	Length(cm)	E (N/m <sup>2</sup> )	$\nu$
4	15	80	2.00E+11	0.3

$$\text{for } q^* = 0 \quad v_{11}(X) = -P^* ; u_{11}(X) = w_{11}(X) = w_{13}(X) = 0$$

$$\text{for } P^* = 0 \quad v_{11}(X) = -2.4 * 10^{11} q^{*2} ; u_{11}(X) = 0.024 q^*$$

$$w_{11}(X) = -1.67 * 10^8 q^* ; w_{13}(X) = 0$$

(۱۱-۳)

برای حل نیاز به بی بعد کردن معادلات می باشد که این فرآیند مانند معادلات تعادل انجام می شود. برای بی بعد کردن معادلات از روابط (۱-۳) استفاده می شود و برای به دست آوردن بار کمانش، معادلات به صورت مجزا به صورت زیر حاصل می شود:

for  $P^* = 0$

$$v_1^*(X) + 0.43g_1^*(X) + \frac{1}{300} \frac{dy_1^*(X)}{dX} + 0.017w_1^*(X) = 0$$

$$0.083 \frac{d^2y_1^*(X)}{dX^2} - 0.198y_1^*(X) - 0.198 \frac{dw_1^*(X)}{dX} + \frac{1}{300} \frac{dv_1^*(X)}{dX} + 0.0022 \frac{dg_1^*(X)}{dX} = 0$$

$$\begin{aligned} & -2.86 \cdot 10^6 q^* \frac{d^2w_1^*(X)}{dX^2} + 0.198 \frac{d^2w_1^*(X)}{dX^2} + 0.198 \frac{dy_1^*(X)}{dX} - 0.017g_1^*(X) + 0.00066 \frac{d^2g_1^*(X)}{dX^2} + \\ & 0.0046q^* \frac{dg_1^*(X)}{dX} - 7.96 \cdot 10^8 q^{*2} \frac{d^2g_1^*(X)}{dX^2} - 0.017v_1^*(X) - 2.389 \cdot 10^{11} q^{*2} \frac{d^2w_1^*(X)}{dX^2} - \\ & 0.0016w_1^*(X) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -0.429v_1^*(X) - 0.017w_1^*(X) + 0.016 \frac{d^2g_1^*(X)}{dX^2} - g_1^*(X) + 0.00066 \frac{d^2w_1^*(X)}{dX^2} - 0.0022 \frac{dy_1^*(X)}{dX} - \\ & 0.0046q^* \frac{dw_1^*(X)}{dX} - 2.39 \cdot 10^5 q^* \frac{d^2g_1^*(X)}{dX^2} + 2.864 \cdot 10^6 q^* g_1^*(X) - 7.96 \cdot 10^8 q^{*2} \frac{d^2w_1^*(X)}{dX^2} - \\ & 1.99 \cdot 10^{10} q^{*2} \frac{d^2g_1^*(X)}{dX^2} + 1.024 \cdot 10^{11} q^{*2} g_1^*(X) = 0 \end{aligned}$$

(الف-۳-۱۲)

for  $q^* = 0$

$$v_1^*(X) + 0.43g_1^*(X) + \frac{1}{300} \frac{dy_1^*(X)}{dX} + 0.017w_1^*(X) = 0$$

$$0.083 \frac{d^2y_1^*(X)}{dX^2} - 0.198y_1^*(X) - 0.198 \frac{dw_1^*(X)}{dX} + \frac{1}{300} \frac{dv_1^*(X)}{dX} + 0.0022 \frac{dg_1^*(X)}{dX} = 0$$

$$-0.017v_1^*(X) - 0.017g_1^*(X) - 0.0016w_1^*(X) - \frac{1}{300} P^* \frac{d^2g_1^*(X)}{dX^2} + 0.00066 \frac{d^2g_1^*(X)}{dX^2} +$$

$$0.198 \frac{dy_1^*(X)}{dX} + 0.198 \frac{d^2w_1^*(X)}{dX^2} - P^* \frac{d^2w_1^*(X)}{dX^2} = 0$$

$$0.429P^* g_1^*(X) - 0.083P^* \frac{d^2g_1^*(X)}{dX^2} - 0.017w_1^*(X) - 0.429v_1^*(X) - \frac{1}{300} P^* \frac{d^2w_1^*(X)}{dX^2} +$$

$$0.00066 \frac{d^2w_1^*(X)}{dX^2} - 0.0022 \frac{dy_1^*(X)}{dX} + 0.0165 \frac{d^2g_1^*(X)}{dX^2} - g_1^*(X) = 0$$

(ب-۳-۱۲)

دستگاه معادلاتی که از جایگزینی روابط (۳-۱۱) در معادلات پایداری بی بعد شده، در هر حالت ایجاد می شود، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی است که می توان آن را به شکل ماتریسی رابطه (۳-۱۳) نوشت:

$$[A]_2 \frac{d^2\{Y\}}{d\eta^2} + [A]_1 \frac{d\{Y\}}{d\eta} + [A]_0\{Y\} + \{F\} = \{0\} \quad (۳-۱۳)$$

$$\{Y\} = [v_1^*(X); y_1^*(X); w_1^*(X); g_1^*(X)]$$

معادله (۳-۱۳) دارای حل عمومی و خصوصی است. با تعریف بردار  $Y$  به صورت رابطه (۳-۱۴) به عنوان حل عمومی و جایگزینی در (۳-۱۳) نتیجه می شود:

$$\{Y\} = \{C\}e^{SX} \quad (۳-۱۴)$$

$$([A]_2S^2 + [A]_1S + [A]_0)\{e\} = \{0\} \quad (۳-۱۵)$$

در رابطه (۳-۱۵) پارامتر  $S$  در واقع مقدار ویژه مسئله می باشد که از برابر صفر قرار دادن دترمینان رابطه (۳-۱۵) به دست می آید و دارای شش ریشه می باشد که برای حالت  $q^*=0$  دو به دو قرینه اند. در حالت کلی به ازای هر مقدار ویژه یک بردار ویژه وجود دارد که از جایگزینی در (۳-۱۵) به دست می آید. پس از به دست آوردن



بردارهای ویژه می‌توان پاسخ را به صورت رابطه (۳-۱۶) نوشت که در آن  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  و  $c_6$  ضرایب ثابت بوده و  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  و  $V_6$  بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه به دست آمده می‌باشند.

$$\{Y\} = c_1 V_1 e^{S_1 X} + c_2 V_2 e^{S_2 X} + c_3 V_3 e^{S_3 X} + c_4 V_4 e^{S_4 X} + c_5 V_5 e^{S_5 X} + c_6 V_6 e^{S_6 X} \quad (۳-۱۶)$$

$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  و  $V_6$  به ترتیب بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  و  $S_6$  می‌باشند. ثابت‌های  $c_1$  تا  $c_6$  با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند. در نهایت برای استخراج بار کمانش باید شرایط مرزی را بر روی معادلات اعمال کرد. حال می‌توان ماتریس ضرایب را تشکیل داد، که در این ماتریس بار  $P^*$  یا  $q^*$  نیز وجود دارد و با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب، معادله‌ای بر حسب بار  $P^*$  یا  $q^*$  به دست می‌آید که با حل آن بار بحرانی یا همان بار کمانش برای دو حالت حاصل می‌شود. حل این معادلات برای نرم افزار به صورت پارامتری غیر ممکن است و باید تمام پارامترها مانند طول، شعاع، ضخامت و... را با مقدار عددی آن جایگزین کرد.

### ۳-۴) جمع‌بندی:

در این فصل حل معادلات تعادل و پایداری برای دو بارگذاری مورد مطالعه، با استفاده از تئوری اغتشاشات و تئوری معادلات دیفرانسیل ارائه شد. برای به دست آوردن پاسخ معادلات پایداری نیاز به حل معادلات تعادل است. بنابراین ابتدا معادلات تعادل حل شده و سپس معادلات پایداری بررسی گردید.

## حل مساله کمانش به روش عددی

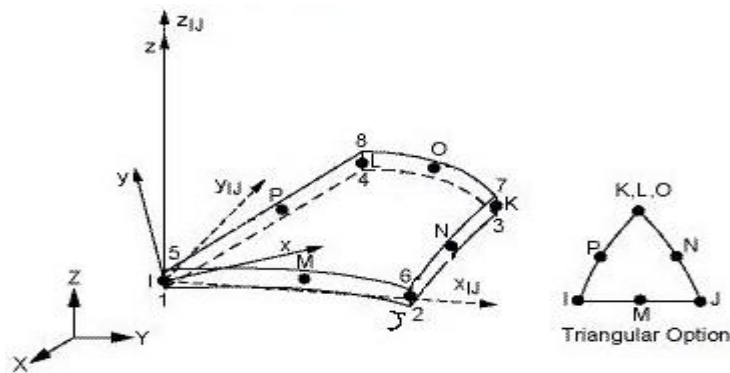
#### ۴-۱) مقدمه:

در این فصل بار کمانش با وجود بار محوری یا فشار خارجی، برای یک پوسته با استفاده از روش المان محدود<sup>۱</sup> محاسبه می‌شود. برای این کار از نرم افزار انسیس ویرایش ۱۱ و با استفاده از تحلیل استاتیکی و تحلیل مقدار ویژه آن، بار کمانش و پاسخ معادلات تعادل به دست آمده است.

#### ۴-۲) مدل سازی:

برای به دست آوردن بار کمانش ابتدا باید پوسته را در محیط انسیس شبیه سازی کرد. سپس عملیات شبکه بندی را روی آن انجام داده و پس از اعمال شرایط تکیه گاهی و بارگذاری مساله را یک بار به صورت استاتیکی حل کرد و در نهایت با حل مساله مقدار ویژه بار کمانش نهایی را به دست آورد. پوسته الاستیک، همسانگرد، همگن و متقارن محوری فرض می‌شود.

المان استفاده شده برای بررسی بار کمانش در دو حالت بارگذاری به صورت جداگانه SHELL93 است که در هر گره<sup>۲</sup> از این المان شش درجه آزادی وجود دارد و هر المان با هشت گره تعریف می‌شود. همچنین این المان قابلیت اعمال جابجایی‌های بزرگ<sup>۳</sup> را در خود دارد. شکل زیر این المان را نشان می‌دهد [۳۶]:



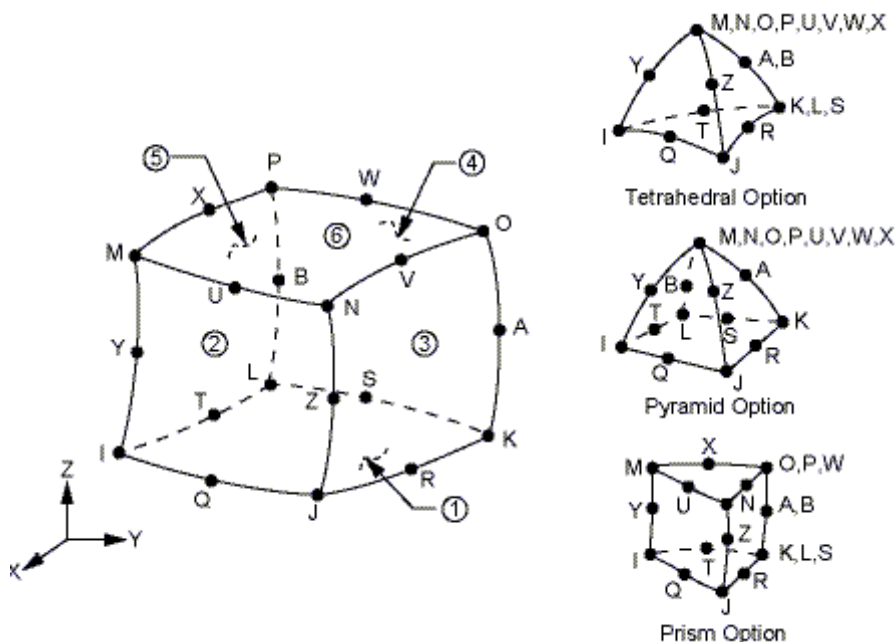
شکل (۴-۱) المان SHELL93

<sup>1</sup> Finite Element Method(FEM)

<sup>2</sup> Node

<sup>3</sup> Large Deflection

المان SOLID95 برای بررسی بار کمانش در حالی که پوسته تحت ترکیبی از دو بارگذاری فشار محوری و جانبی می باشد به کار گرفته شده است. این المان سه بعدی با ۲۰ گره تعریف می شود که در هر گره سه درجه آزادی وجود دارد. شکل زیر المان مذکور را نشان می دهد [۳۶]:

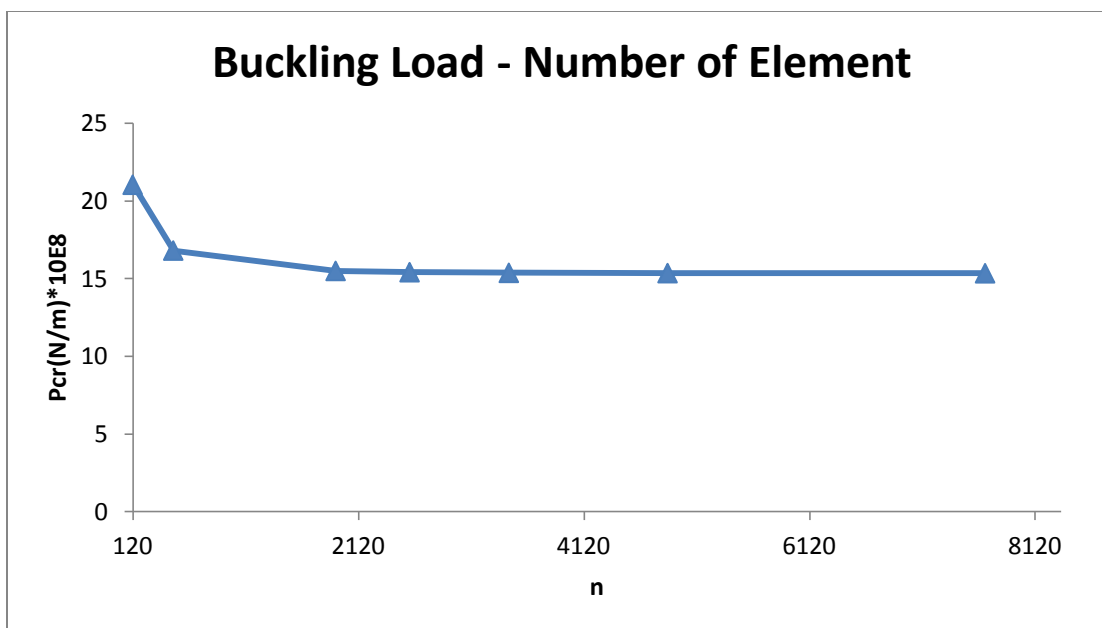


شکل (۴-۲) المان SOLID95

شرایط تکیه گاهی در یک طرف گیردار می باشد و در طرف دیگر تمام درجات آزادی به جز حرکت طولی مقید شده است. بار اعمالی در ابتدا به صورت فشار وارد بر لبه بالایی و سپس به صورت فشار خارجی می باشد. بار کمانش برای هر حالت به دست آمده است. واحد بار در حالت اول نیوتن بر واحد طول و در حالت دوم نیوتن بر متر مربع است. نمودار (۴-۳) و جدول (۴-۱) بار کمانش را برای ابعاد جدول (۳-۱) در بارگذاری محوری بر حسب تعداد المان ها نشان می دهند.

جدول (۴-۱) بار کمانش در اثر بارگذاری محوری بر حسب تعداد المان ها

Number Of Element	Pcr (FE)*10 <sup>6</sup> (N/m)
360	12.001
480	11.883
1920	11.774
7680	11.769



شکل (۳-۴) بار کمانش در اثر بارگذاری محوری بر حسب تعداد المان ها

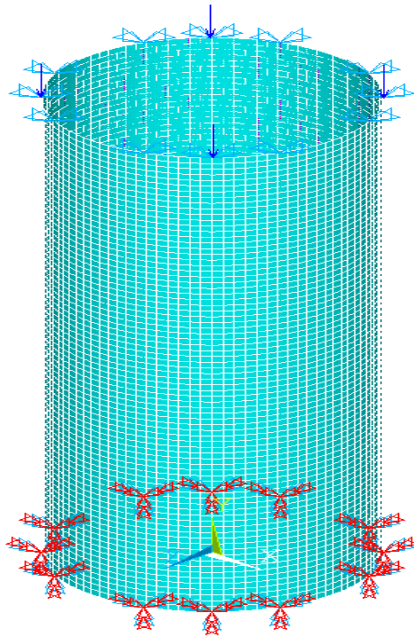
همانطور که از نمودار و جدول بالا پیداست، در نظر گرفتن تعداد ۱۹۲۰ المان برای پوسته مورد نظر منجر به پاسخ پایداری می گردد. بنابراین همین تعداد المان که معادل اندازه 0.02m برای هر لبه پوسته می باشد، مناسب است.

#### ۳-۴ مطالعه موردی:

پوسته ای با مشخصات جدول (۱-۳) و شرایط مرزی (۶-۳) مورد نظر است، شبکه بندی و بارگذاری برای دو حالت مذکور مورد بررسی قرار می گیرد.

#### ۱-۳-۴ کمانش تحت بار محوری:

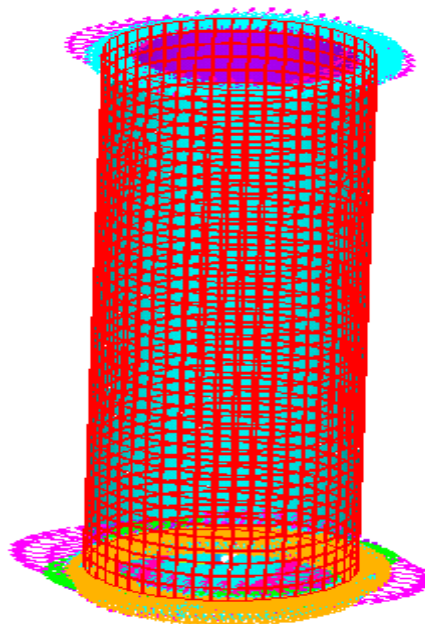
شکل (۴-۴) شبکه بندی پوسته را نشان می دهد. بار  $P=1Pa$  به لبه بالایی پوسته اعمال می شود. ابتدا تحلیل استاتیکی مساله با در نظر گرفتن اثرات پیش تنش انجام شده و سپس تحلیل کمانش انجام می شود. جزئیات روش تحلیل در پیوست الف آورده شده است. اولین بار کمانش در این مورد  $11774kN/m$  می باشد.



شکل (۴-۴) مدل شبکه‌بندی شده یک پوسته استوانه‌ای تحت بار محوری

#### ۴-۳-۲) کمانش تحت فشار خارجی:

شکل (۵-۴) شبکه بندی و بارگذاری پوسته تحت فشار خارجی را نشان می دهد. بار  $q=1\text{Pa}$  به قسمت جانبی پوسته اعمال می شود. همانند قبل ابتدا تحلیل استاتیکی مساله با در نظر گرفتن اثرات پیش تنش انجام شده و سپس تحلیل کمانش انجام می شود. اولین بار کمانش در این مورد  $5590\text{kN/m}^2$  می باشد.



شکل (۵-۴) مدل شبکه‌بندی شده یک پوسته استوانه‌ای تحت فشار خارجی

#### ۴-۴) جمع‌بندی:

در این فصل المان‌های استفاده شده و نحوه به دست آوردن بارهای کمانش در هر حالت به طور مختصر توضیح داده شده است. برای مدل کردن پوسته و استخراج بارهای کمانش در بارگذاری های جداگانه از المان SHELL93 و در بارگذاری ترکیبی از المان SOLID95 استفاده شده است. مشخصات المان های مورد نظر در این فصل توضیح داده شده است.

فصل پنجم

بررسی نتایج



## ۵-۱) مقدمه:

در این بخش نتایج حاصل از روش تحلیلی با نتایج حاصل از روش عددی و چند مرجع دیگر مقایسه و میزان دقت پاسخ تحلیلی بررسی خواهد شد. همچنین با رسم نمودارهای مختلف تاثیر پارامترهای هندسی بر بارهای کمانش در دو حالت فشار خارجی و بار محوری نشان داده خواهد شد.

## ۵-۲) مقایسه نتایج حل تحلیلی با حل عددی:

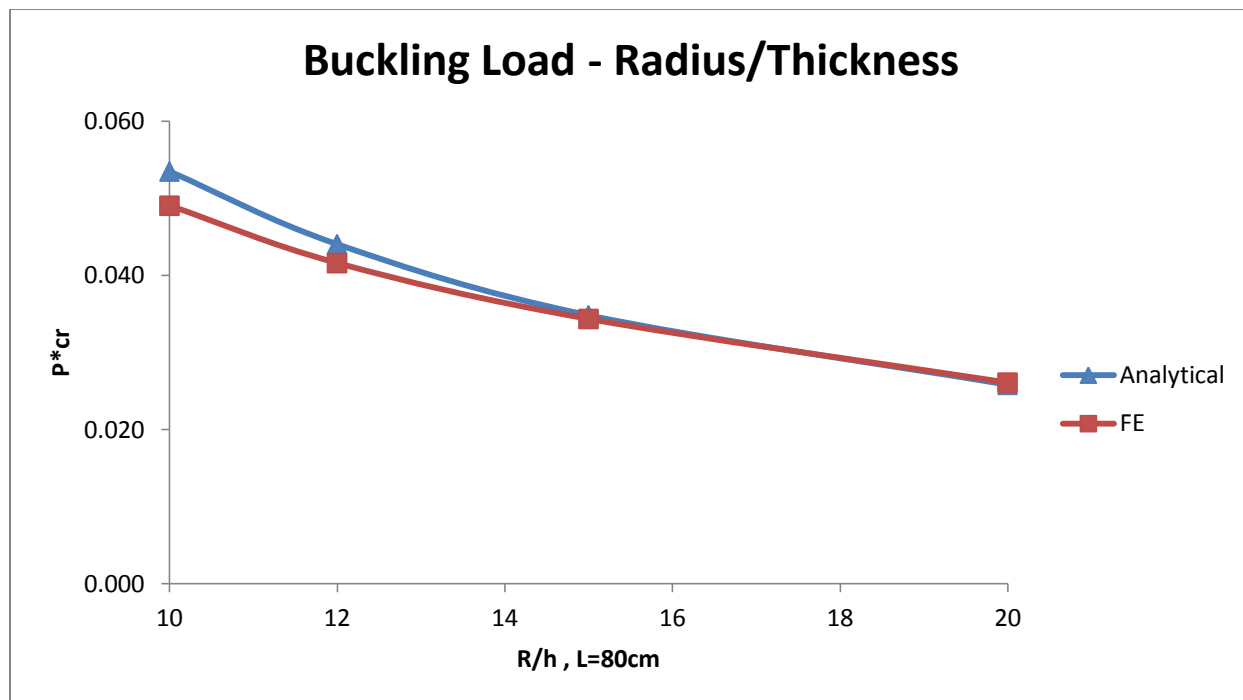
پوسته‌ای استوانه‌ای به طول  $l$ ، ضخامت  $h$  و شعاع  $R$  یک بار تحت فشار محوری  $P$  و بار دیگر تحت فشار خارجی  $q$  قرار دارد. مدول الاستیک پوسته  $200\text{ GPa}$  و ضریب پواسون آن  $0.3$  است. لبه پایینی پوسته ثابت و لبه بالایی پوسته در جهت  $x, y$  ثابت می باشد و فشار به لبه بالایی آن وارد می شود. (شکل های ۴-۴ و ۴-۵)

## ۵-۲-۱) کمانش تحت بار محوری:

در نمودار (۵-۱) تغییرات بار کمانش به دست آمده از دو پاسخ تحلیلی و عددی نسبت به ضریب  $R/h$  رسم شده است. با توجه به این نمودار مشخص است که برای پوسته‌های نازک نتایج تحلیلی و حل عددی به یکدیگر نزدیک می باشد. افزایش ضخامت باعث می شود تا تغییرات جابجایی طولی در راستای ضخامت شکل غیر خطی به خود بگیرد، (در مرجع [37] این موضوع با روش المان محدود و با انتخاب المان های 82 Plane که می توانند تغییرات را در راستای ضخامت رصد کنند نشان داده شده است.) و به همین خاطر خطای پاسخ حاصل از تئوری مرتبه اول که بر اساس خطی بودن این تغییرات استوار است افزایش می یابد. برای نسبت  $R/h$  برابر با ۱۰، پاسخ تحلیلی نسبت به حل عددی ۹ درصد خطا دارد در صورتی که در ضخامت های پایین تر این خطا به زیر یک درصد کاهش می یابد. نحوه محاسبه میزان خطا به صورت زیر است:

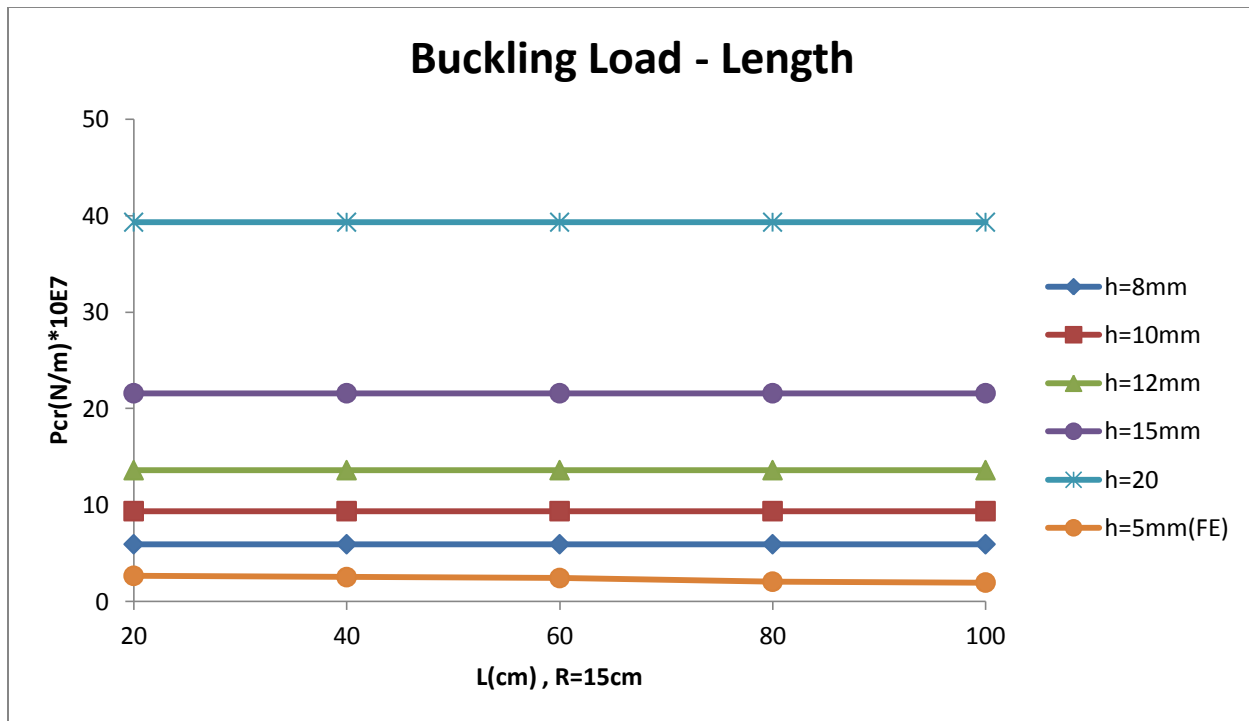
$$\%Error = \left| \frac{P_{cr(Analytical)} - P_{cr(FE)}}{P_{cr(FE)}} \right| * 100 \quad (۵-۱)$$

باید توجه داشت حل عددی نیز یک حل دقیق نیست بنابراین منظور از درصد خطا اختلاف بین حل تحلیلی و عددی است.



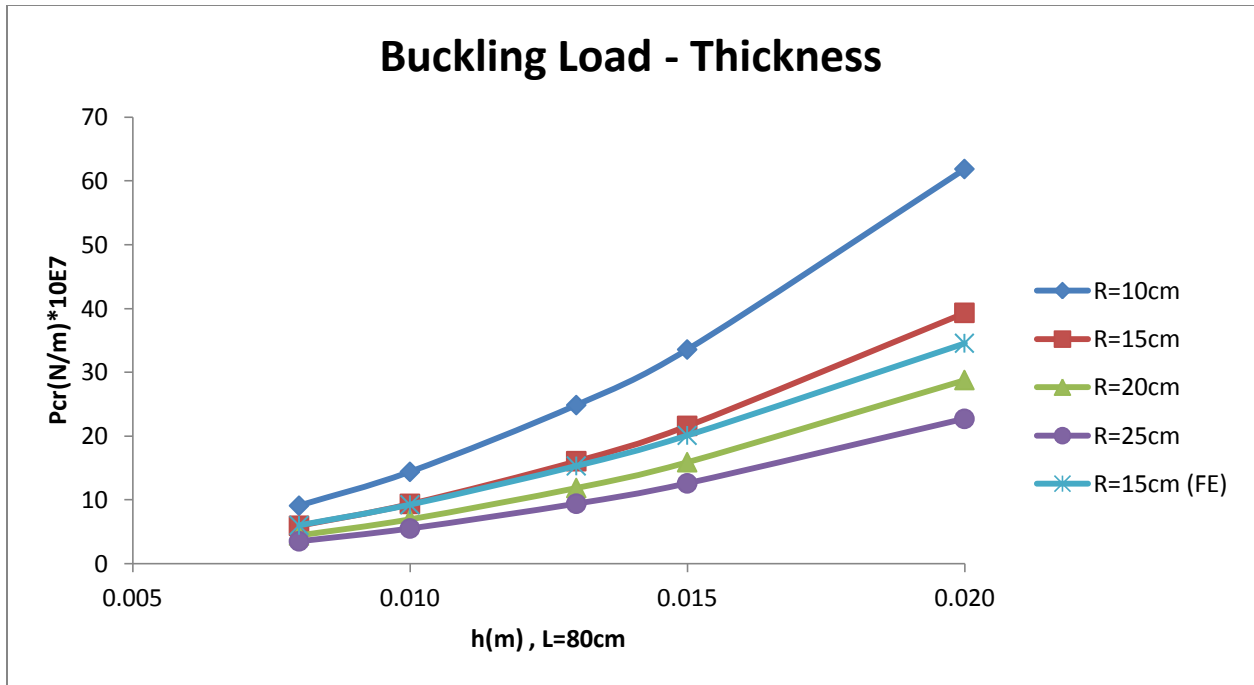
شکل (۱-۵) بررسی تاثیر ضریب  $R/h$  بر مقدار بار کمانش (بار محوری) پاسخ تحلیلی در مقایسه با روش عددی

در نمودارهای (۲-۵) تا (۴-۵) که برای نتایج حل تحلیلی و عددی رسم شده است می توان تاثیر پارامترهای هندسی را بر روی بار کمانش مشاهده کرد. در نمودار (۲-۵) تغییرات بار کمانش به دست آمده از حل تحلیلی نسبت به طول برای ضخامت های مختلف پوسته رسم شده است. به روشنی از این نمودار پیداست که افزایش و یا کاهش طول پوسته در مقایسه با تغییرات ضخامت اثری بر بار کمانش ندارد. البته با افزایش طول مقدار بار کمانش به دست آمده از حل عددی به مقداری جزئی کاهش می یابد و این در حالی است که افزایش ضخامت به شدت باعث افزایش بار کمانش شده و به عبارت دیگر باعث افزایش پایداری پوسته می شود که این یک نتیجهی منطقی می باشد.

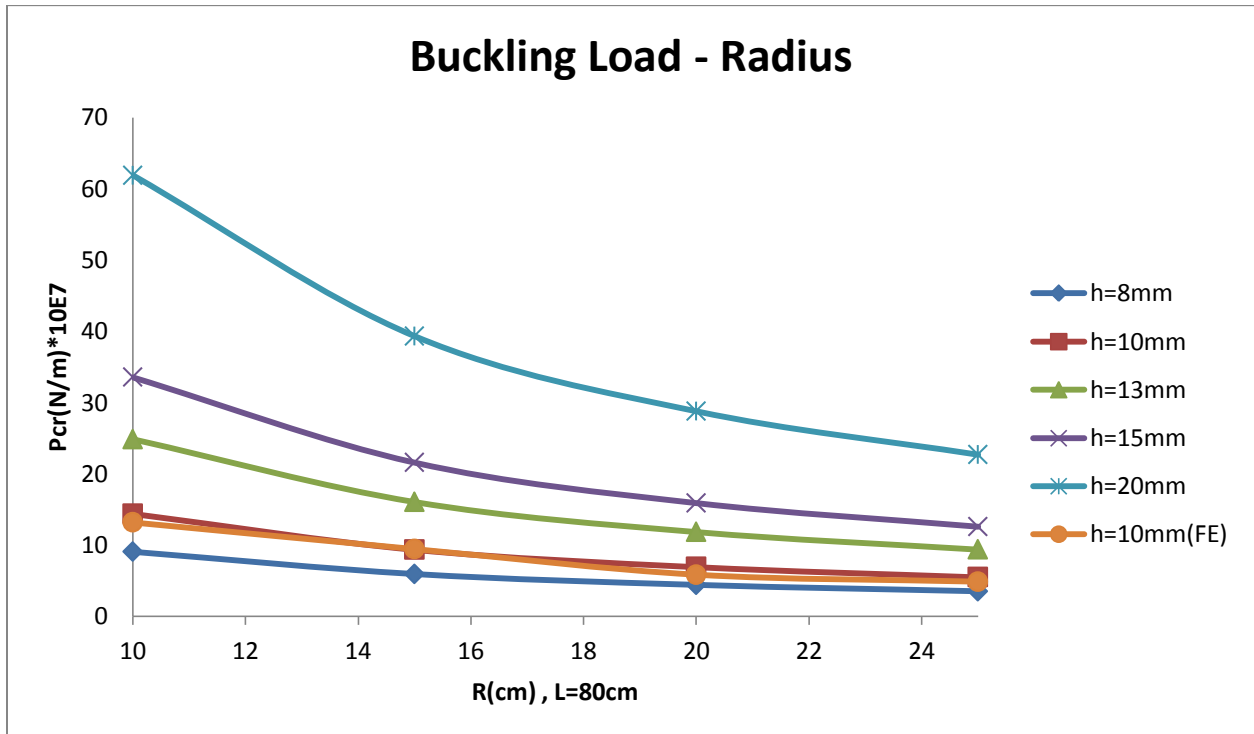


شکل (۵-۲) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب طول برای ضخامت های مختلف

در نمودار (۳-۵) تغییرات بار کمانش تحلیلی و عددی بر حسب ضخامت برای شعاع های مختلف رسم شده است. برای ضخامت های کم یا در پوسته های نازک تاثیر تغییرات شعاع بر بار کمانش کاهش می یابد و اثر تغییرات ضخامت مهم تر است، البته در همان ضخامت های کم نیز نمی توان از اثر تغییرات شعاع بر بار کمانش چشم پوشی کرد، به طور کلی افزایش شعاع باعث کاهش پایداری پوسته و در نتیجه کاهش بار کمانش می شود. در اینجا نیز مشخص است که برای پوسته های نازک نتایج تحلیلی و حل عددی به یکدیگر نزدیک می باشد. در نمودار (۴-۵) نیز که تغییرات بار کمانش بر حسب شعاع برای ضخامت های مختلف رسم شده است نیز همین نکات به وضوح قابل رویت است. همچنین در این نمودار تغییرات بار کمانش به دست آمده از دو روش تحلیلی و عددی نسبت به تغییرات شعاع برای مقادیر ثابت ضخامت و طول رسم شده است. با افزایش شعاع علاوه بر کاهش بار کمانش، میزان اختلاف بین نتایج تحلیلی و عددی نیز کاهش می یابد. با توجه به نمودارهای (۳-۵) و (۴-۵) مشخص می شود که باز هم اثر تغییرات ضخامت بر مقدار بار کمانش مهم تر است و اثر تغییرات طول بر بار کمانش نیز از همه پارامترهای هندسی کمتر است.



شکل (۳-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب ضخامت برای شعاع‌های مختلف

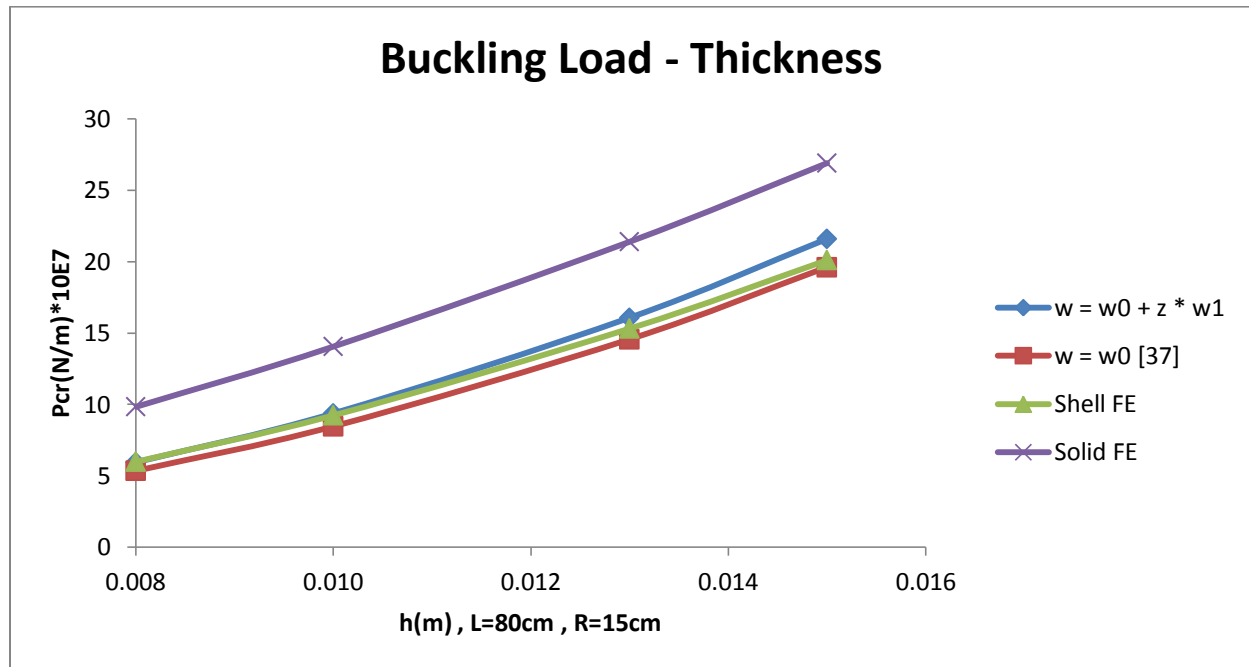


شکل (۴-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب شعاع برای ضخامت‌های مختلف

رابطه توانی حاصل از فیت کردن حل تحلیلی نمودار (۴-۵) به ازای ضخامت ۱۰ میلیمتر به صورت زیر است.

$$P_{cr}^* = 0.5799R^{-1.037} \quad (۲-۵)$$

نمودارهای (۵-۵) و (۶-۵) تغییرات بار کمانش بر حسب ضخامت و شعاع را در چهار حالت نشان می دهند. دو حالت مربوط به حل عددی و دو حالت بعدی حل تحلیلی با دو فرض مختلف می باشند. همانطور که مشخص است با کاهش نسبت  $R/h$  و در نظر گرفتن جابجایی شعاعی مطابق رابطه (۵-۲) منجر به خطای کمتری در پاسخ می گردد.



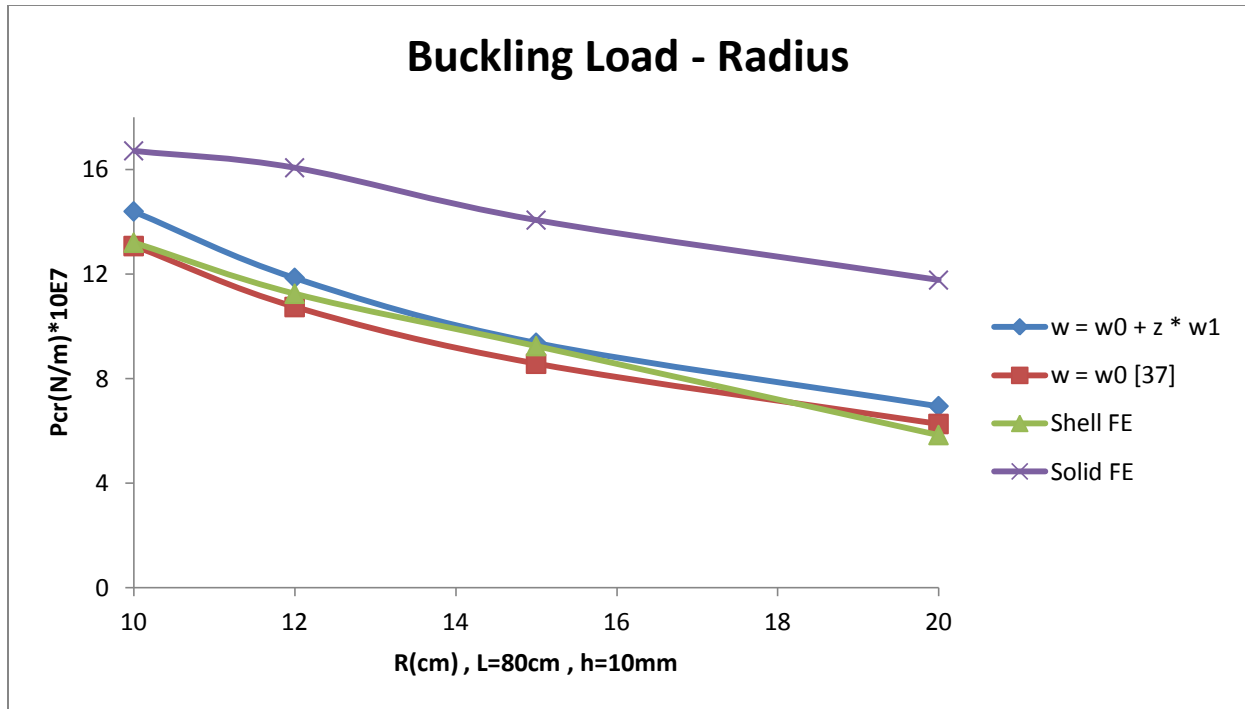
شکل (۵-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب ضخامت

رابطه توانی حاصل از فیت کردن حل تحلیلی نمودار (۵-۵) به صورت زیر است:

$$P_{cr} = 119869h^{2.0532} \quad (۳-۵)$$

همچنین رابطه توانی حاصل از فیت کردن حل تحلیلی مرجع [۳۷] نمودار (۵-۵) به صورت زیر است:

$$P_{cr} = 113474h^{2.0632} \quad (۴-۵)$$



شکل (۵-۶) تغییرات بار کمانش (بار محوری) بر حسب شعاع

رابطه توانی حاصل از فیت کردن حل تحلیلی نمودار (۵-۶) به صورت زیر است:

$$P_{cr}^* = 161.84R^{-1.052} \quad (۵-۵)$$

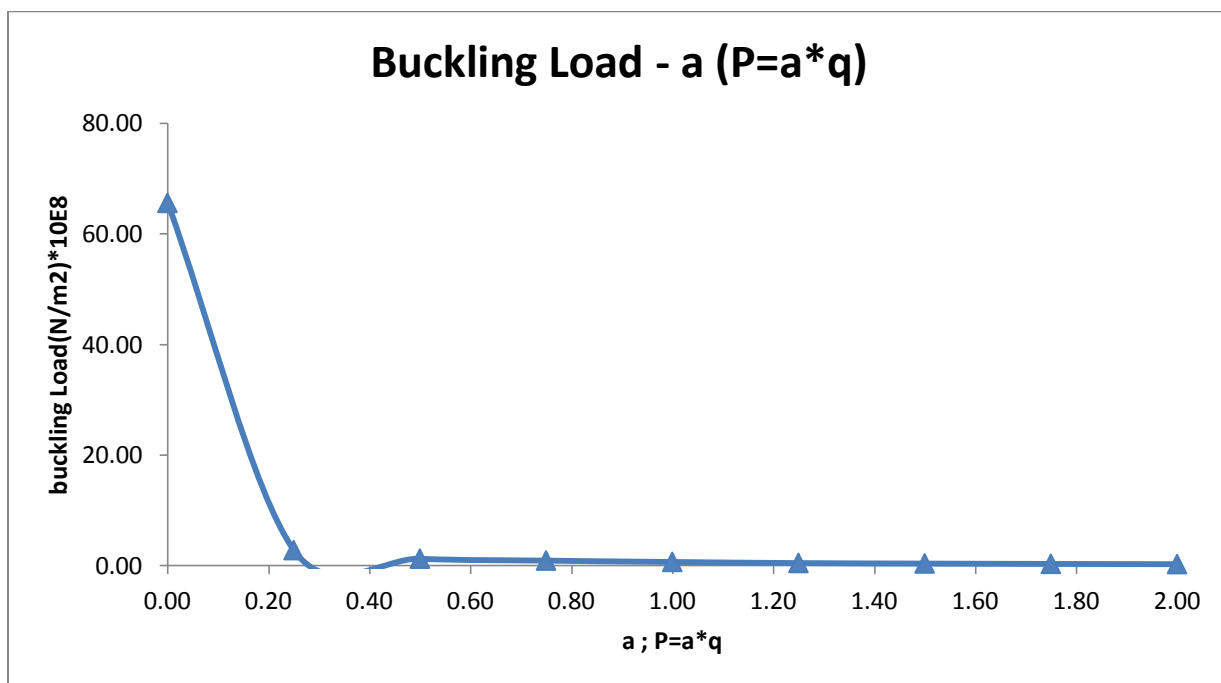
بنابراین بارکمانش با شعاع رابطه عکس دارد. این موضوع در تئوری کلاسیک (رابطه لورنز) نیز صحیح است.

جدول (۵-۱) میزان خطای پاسخ را در مقایسه با حل عددی، با تغییرات R/h برای دو حل تحلیلی فوق نشان می دهد.

R/h	w=w <sub>0</sub> [37]		w=w <sub>0</sub> +zW <sub>1</sub>		FE P <sub>cr</sub> *10E7(N/m)
	P <sub>cr</sub> *10E7(N/m)	Difference percentage with respect to FE	P <sub>cr</sub> *10E7(N/m)	Difference percentage with respect to FE	
20	6.2619	7.23%	6.9437	18.91%	5.8397
18.75	5.3585	10.63%	5.9399	0.94%	5.9960
15	8.5682	7.32%	9.3695	1.35%	9.2446
12	10.7372	4.52%	11.8536	5.40%	11.2460
10	13.0696	1.00%	14.3957	9.05%	13.2010

جدول (۵-۱) تغییرات خطای دو حل تحلیلی نسبت به حل عددی

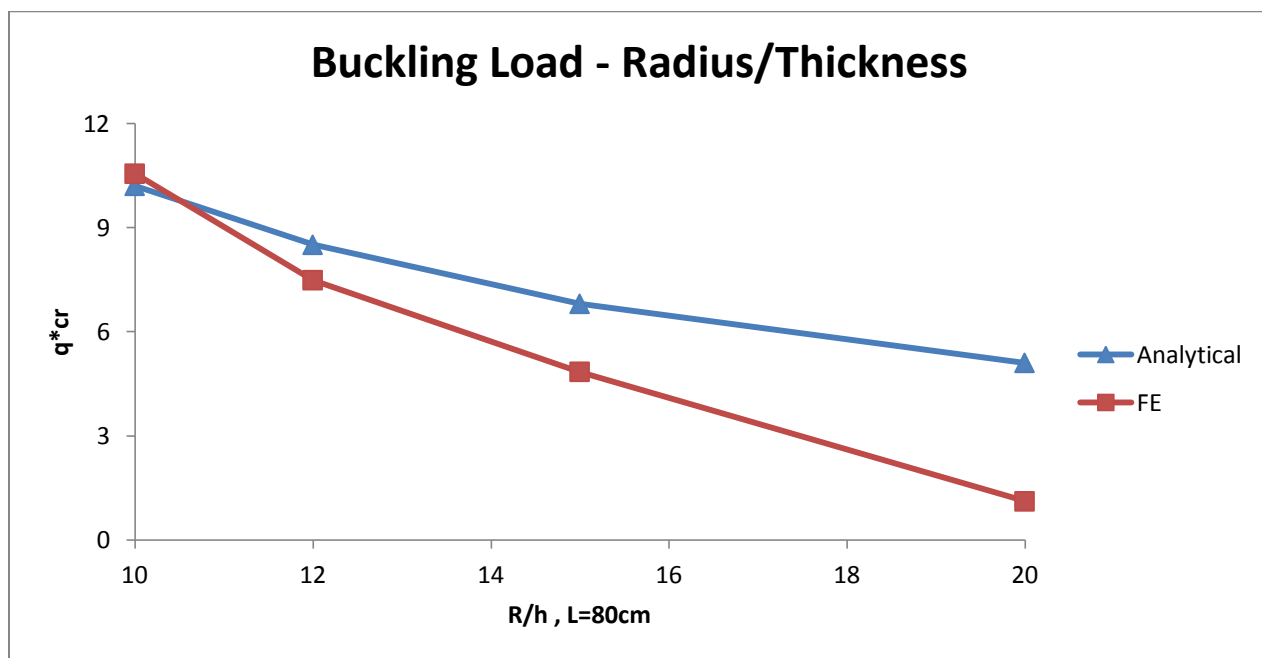
نمودار (۷-۵) مربوط به حل عددی پوسته تحت بار ترکیبی فشار خارجی و محوری است. فشار خارجی به صورت ضریبی از بار محوری در نظر گرفته شده است. ملاحظه می گردد با اضافه شدن فشار خارجی به میزان مشخص، به پوسته ای که تحت بار محوری می باشد، به شدت بار کمانش کاهش می یابد در صورتیکه با افزایش این مقدار تغییرات چندانی در بار کمانش مشاهده نمی گردد. برای حل عددی پوسته تحت بار ترکیبی از المان سه بعدی SOLID95 استفاده شده است.



شکل (۷-۵) تغییرات بار کمانش بر حسب ضریب فشار خارجی

## ۵-۲-۲) کمانش تحت فشار خارجی:

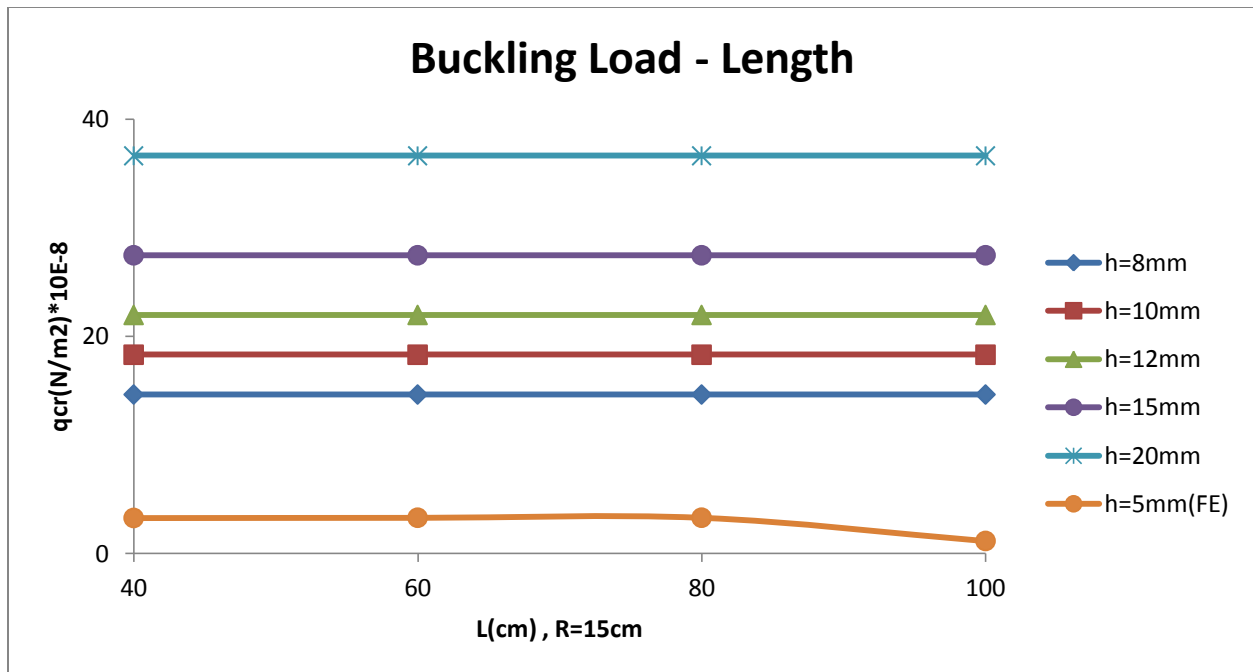
در نمودار (۵-۸) تغییرات بار کمانش به دست آمده از دو پاسخ تحلیلی و عددی نسبت به ضریب  $R/h$  رسم شده است. در این نمودار خطای حل تحلیلی نسبت به عددی روند منظمی را طی نمی کند. به نظر می رسد دلیل این خطای نامنظم استفاده از متوسط پاسخ های تعادل در معادلات پایداری می باشد.



شکل (۵-۸) بررسی تاثیر ضریب  $R/h$  بر مقدار بار کمانش (فشار خارجی) پاسخ تحلیلی در مقایسه با روش عددی

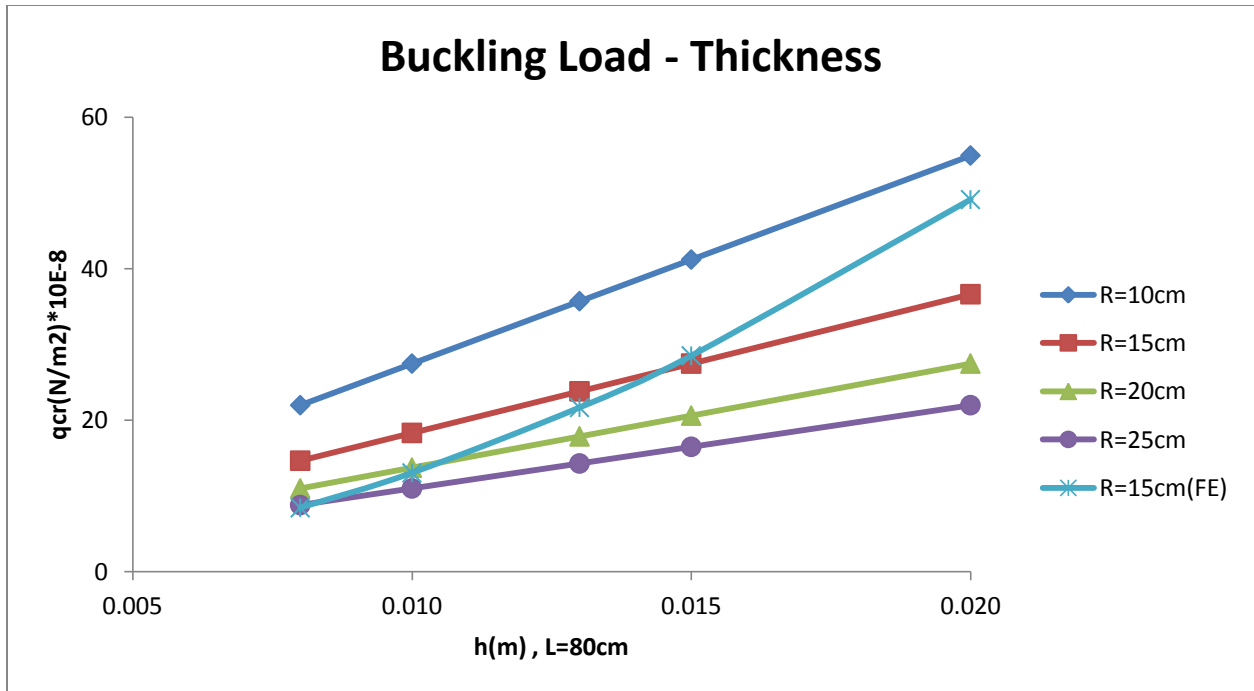
نمودار (۵-۹) که در آن بار کمانش نسبت به طول برای ضخامت های مختلف رسم شده است نیز نتیجه های برگرفته از نمودار (۵-۲) را تایید می کند. همچنین در این نمودار تغییرات بار کمانش برای دو حل تحلیلی و عددی نسبت به تغییرات طول پوسته برای مقادیر ثابت ضخامت و شعاع رسم شده است. همانند حالت قبل بار کمانش حل تحلیلی نسبت به طول پوسته تغییراتی ندارد. در روش عددی با افزایش طول، بار کمانش در طول های زیاد کاهش می یابد و این کاهش بار نسبت به بار محوری بیشتر است.



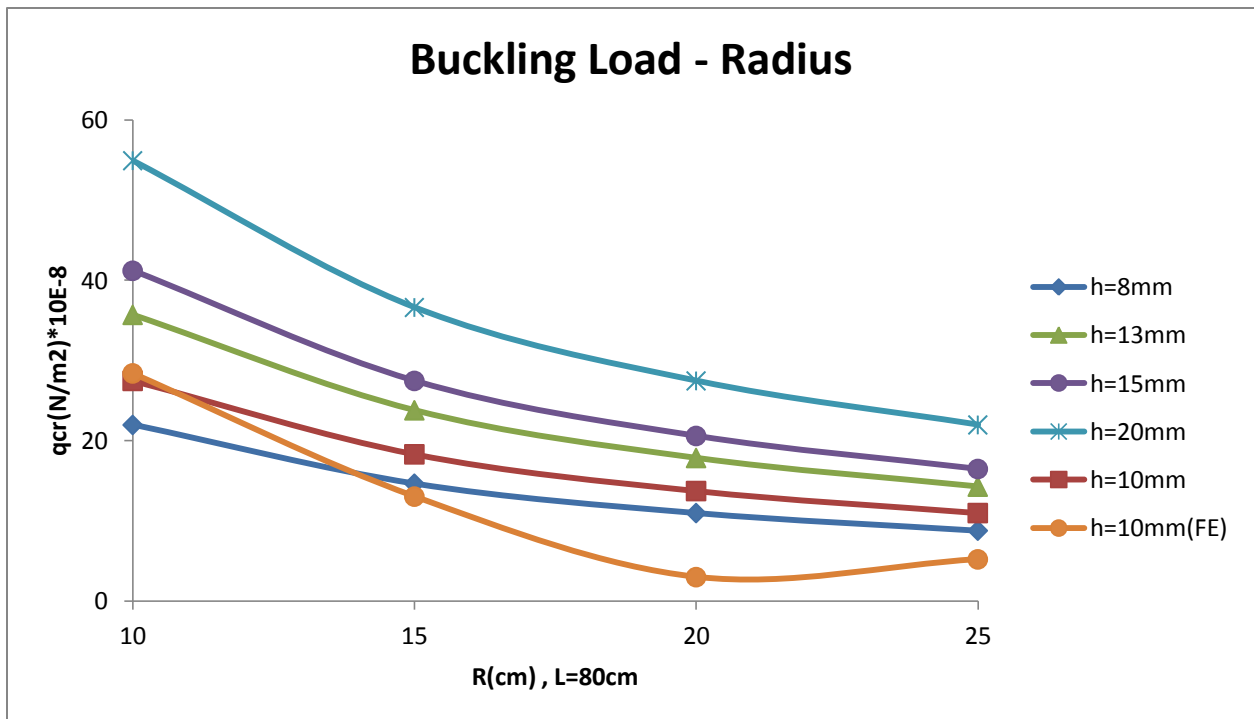


شکل (۹-۵) تغییرات بار کمانش (فشار خارجی) بر حسب طول برای ضخامت های مختلف

در نمودار (۱۰-۵) تغییرات بار کمانش بر حسب ضخامت برای شعاع های مختلف رسم شده است. برای ضخامت های کم یا در پوسته های نازک تاثیر تغییرات شعاع بر بار کمانش کمتر است. باز هم افزایش شعاع باعث کاهش پایداری پوسته و کاهش بار کمانش می شود. در نمودار (۱۱-۵) نیز که تغییرات بار کمانش بر حسب شعاع برای ضخامت های مختلف رسم شده است نیز همین نکات نشان داده شده است.



شکل (۱۰-۵) تغییرات بار کمانش (فشار خارجی) بر حسب ضخامت برای شعاع‌های مختلف



شکل (۱۱-۵) تغییرات بار کمانش (فشار خارجی) بر حسب شعاع برای ضخامت‌های مختلف

رابطه توانی حاصل از فیت کردن حل تحلیلی نمودار (۵-۱۱) به ازای ضخامت ۱۰ میلیمتر به صورت زیر است:

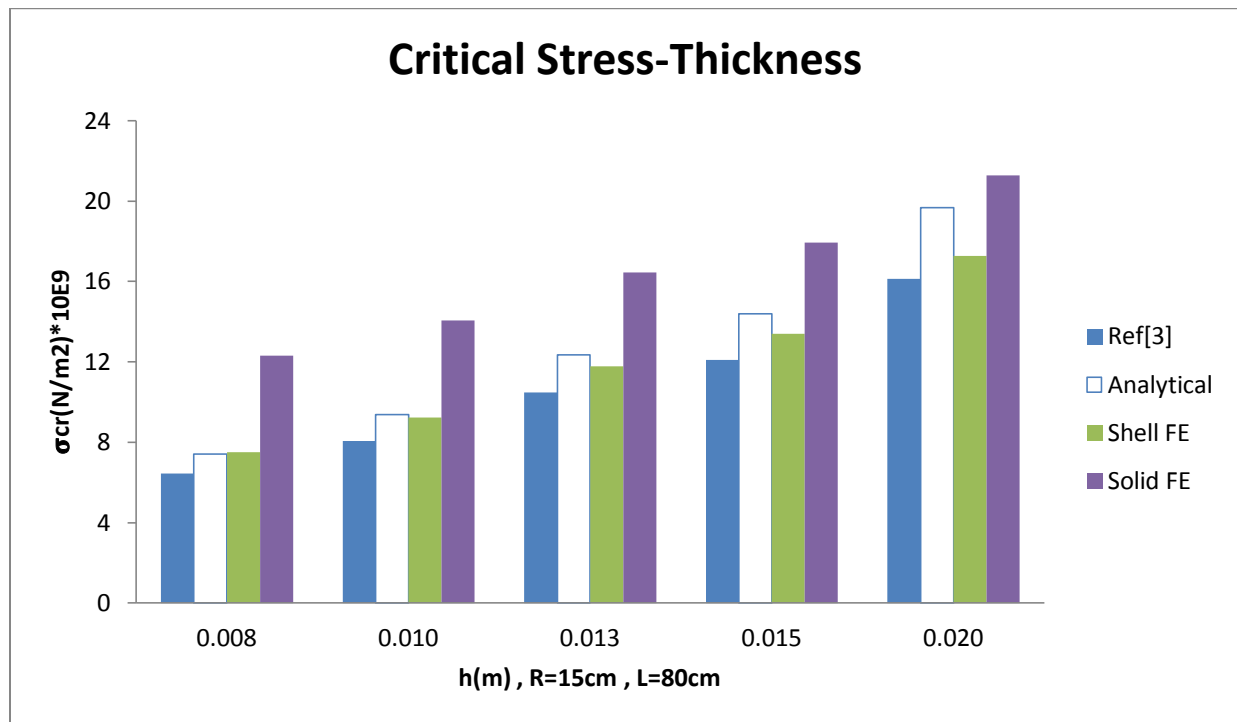
$$q_{cr}^* = 102.04R^{-1} \quad (۵-۶)$$

### ۵-۳) مقایسه نتایج حل تحلیلی با مراجع دیگر:

برای مقایسه پاسخ در این روش با روش‌های دیگر، در این بخش نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج به دست آمده مرجع [۳] مقایسه می‌شود. بر طبق این مرجع تنش بحرانی برای استوانه‌ای که دو انتهای آن بر روی تکیه-گاه ساده قرار دارد از رابطه (۵-۷) به دست می‌آید.

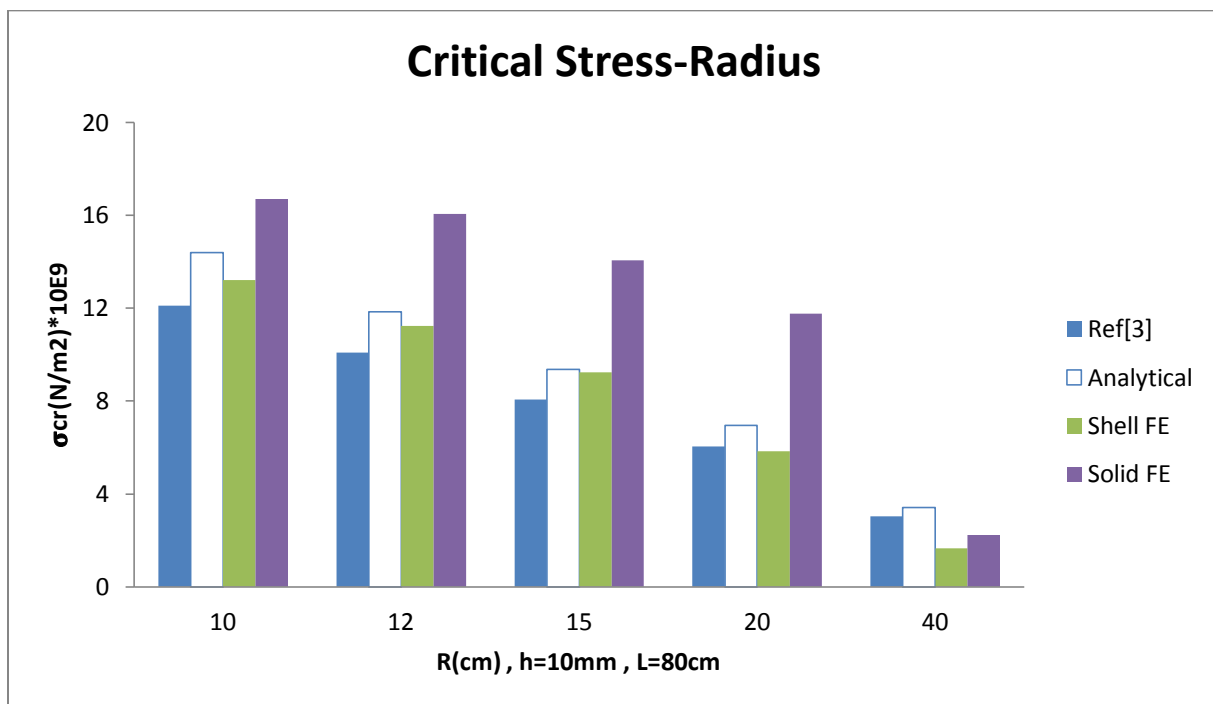
$$\sigma_{cr} = \frac{Eh}{R(3(1-\nu^2))^{1/2}} \quad (۵-۷)$$

در نمودار (۵-۱۲) تغییرات تنش بحرانی نسبت به تغییرات ضخامت برای مقادیر ثابت شعاع و طول، رسم شده است که نشان دهنده میزان اختلاف ناچیز بین دو روش تحلیلی و رابطه (۵-۷) می‌باشد.



شکل (۵-۱۲) تغییرات بار کمانش (بار محوری) حاصل از حل تحلیلی و عددی و رابطه (۵-۷) بر حسب ضخامت برای مقادیر ثابت طول و شعاع

در نمودار (۱۳-۵) تغییرات تنش بحرانی نسبت به تغییرات شعاع برای مقادیر ثابت طول و ضخامت رسم شده است. که نشان دهنده درصد خطای پایین می باشد.



شکل (۱۳-۵) تغییرات بار کمانش (بار محوری) حاصل از حل تحلیلی و عددی و رابطه (۷-۵) بر حسب شعاع برای مقادیر ثابت طول و ضخامت

در جدول (۲-۵) مقدار تنش بحرانی برای چهار روش مختلف آمده است و میزان خطا نسبت به روش عددی دو بعدی مشخص شده است.

جدول (۲-۵) مقادیر تنش بحرانی برای پوسته با شعاع ۱۵ سانتیمتر و طول ۸۰ سانتیمتر

Method	h (mm)	$P_{cr}(N/m^2)*10E9$	Difference percentage with respect to FE	R/h
FSDT	8	7.4249	0.94%	18.75
FE	8	7.4950	0	
Classical Theory	8	6.4558	13.87%	
3D FE	8	12.3050	64.18%	
FSDT	10	9.3695	1.35%	15
FE	10	9.2446	0	
Classical Theory	10	8.0697	12.71%	
3D FE	10	14.0630	52.12%	
FSDT	13	12.3582	4.86%	11.54
FE	13	11.7854	0	
Classical Theory	13	10.4906	10.99%	
3D FE	13	16.4600	39.66%	
FSDT	15	14.3958	7.36%	10
FE	15	13.4087	0	
Classical Theory	15	12.1046	9.73%	
3D FE	15	17.9360	33.76%	
FSDT	20	19.6619	13.79%	7.5
FE	20	17.2785	0	
Classical Theory	20	16.1394	6.59%	
3D FE	20	21.284	23.18%	

#### ۴-۵ جمع بندی:

در این فصل نتایج حل تحلیلی با نتایج حل عددی و نتایج حاصل از تئوری کلاسیک مقایسه شده است. با توجه به شکل‌های رسم شده مشاهده می‌شود که استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای پوسته‌های نازک جوابی با خطای کم به دست آورده و در پوسته‌های ضخیم نیز نتایجی با خطای کمتر در مقایسه با تئوری کلاسیک به دست می‌آورد.

## جمع بندی و پیشنهادها

## ۶-۱) مقدمه:

در این پایان نامه با در نظر گرفتن تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و با به کار گیری تئوری اغتشاشات، کمانش یک پوسته استوانه ای تحت بار محوری و فشار خارجی بررسی شد. خلاصه ای از نتایج و چند پیشنهاد در ادامه آورده شده است. با توجه به نتایج فصل‌های گذشته مشاهده می‌شود که استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای پوسته‌های نازک مناسب می‌باشد. هم‌چنین از نتایج آن می‌توان برای پوسته‌هایی با  $10 < R/h < 20$  نیز استفاده نمود و پاسخ به دست آمده از این روش، از پاسخ تئوری کلاسیک در اکثر موارد مناسب تر است. نتایج زیر را می‌توان استخراج کرد:

## ۶-۲) کمانش تحت بار محوری:

- ۱- با افزایش ضخامت یا کاهش شعاع، بار کمانش افزایش می‌یابد.
- ۲- تغییرات بار کمانش با ضخامت، برای طول و شعاع ثابت، خطی است درحالی که این ضابطه برای ستونها درجه سه بود.
- ۳- افزایش ضخامت یا کاهش شعاع باعث افزایش اختلاف نتایج حل تحلیلی و عددی می‌شوند.
- ۴- تغییرات بار کمانش به تغییرات شعاع حساس تر از طول است.
- ۵- تغییرات طول تاثیری بر روی نتایج حاصل از حل تحلیلی نشان نمی‌دهد و تنها با افزایش طول اختلاف میان نتایج حل تحلیلی و عددی افزایش می‌یابد.
- ۶- نتایج به دست آمده در مقایسه با تئوری کلاسیک با افزایش ضخامت خطای کمتری دارد.
- ۷- در نظر گرفتن شیب عرضی در جابجایی شعاعی به صورت  $W = W_0 + Z W_1$  نسبت به عدم وجود شیب عرضی ( $W = W_0$ ) باعث کاهش اختلاف بار کمانش تحلیلی و عددی در ضخامت‌های بالا می‌گردد. این موضوع به ویژه در ضخامت‌های بیشتر و شعاع‌های کمتر مهم است.
- ۸- اضافه شدن فشار خارجی به پوسته ای که تحت بار محوری است باعث کاهش شدید بار کمانش می‌گردد، اما با افزایش مقدار فشار خارجی در این حالت کاهش چشمگیری در بار کمانش ایجاد نمی‌گردد.

۹- با استفاده از روش ارائه شده برای پوسته‌ها با ضخامت کم می‌توان به راحتی معادلات تعادل و پایداری غیر خطی را حل کرد و زمان مورد نیاز بسیار کمتر از روش اجزا محدود است. تحلیل پوسته با این کد نیز راحت‌تر است.

### ۶-۳) کمانش تحت فشار خارجی:

- ۱- با افزایش ضخامت یا کاهش شعاع، بار کمانش افزایش می‌یابد.
- ۲- تغییرات بار کمانش به تغییرات شعاع حساس‌تر از طول است.
- ۳- تغییرات طول در ضخامت‌های پایین، تاثیر چندانی بر روی نتایج حاصل از حل تحلیلی نشان نمی‌دهد اما با افزایش ضخامت تغییرات بار کمانش با طول مشهود است.

### ۶-۴) پیشنهادها:

- ۱- بررسی استفاده از تئوری تغییر شکل برشی با مرتبه‌های بالاتر.
- ۲- در نظر گرفتن نقص هندسی.
- ۳- در نظر گرفتن جنس غیر همسانگرد و یا ناهمگن برای پوسته.
- ۴- بررسی کمانش سایر پوسته‌های متقارن مانند مخروط.
- ۵- بررسی اثر هسته مرکزی بر بار کمانش.
- ۶- بررسی کمانش نامتقارن پوسته‌ها.
- ۷- حل معادلات پایداری با ضرایب متغیر (به جای متوسط گیری).
- ۸- بررسی اثر همزمان فشار خارجی و بار محوری بر کمانش.



## پیوست الف: نحوه آنالیز عددی در نرم افزار Ansys

### الف-۱) بار محوری

1. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete > Add > shell > 8node93 > Ok > close
2. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Real constant > Add/Edit/Delete > Add > Ok > TK(I)= ...m > Ok > close
3. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models > Structural > Linear > Elastic > Isotropic > Ex=...Pa , nu=... > Ok > close
4. Preprocessor > Modeling > Create > Volumes > Cylinder > Solid Cylinder > R=...m, L=...m
5. Preprocessor > Modeling > Delete > Volumes Only > Pick All
6. ANSYS Utility Menu > Plot > Areas
7. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Modeling > Delete > Areas Only > سطوح > Ok > بالایی و پایینی انتخاب شود.
8. ANSYS Utility Menu > Plot > Lines
9. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > Manual size > Lines > Picked Lines > دو خط جانبی انتخاب می شود > Apply > NDIV No.of element divisions=... > Apply > خطوط انتهایی انتخاب می شود > Ok > NDIV No.of element divisions=... > Ok
10. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Areas > Free > Pick All
11. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Numbering Cntrls > Merge Items > Label Type of item to be merge > All > Ok
12. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Numbering Cntrls > Compress Numbers > Label item to be Compressed > All > Ok

13. ANSYS Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis > Static > Ok
14. ANSYS Main Menu > Solution > Unabridged Menu
15. ANSYS Main Menu > Solution > Analysis Type > Analysis Options > Stress Stiffness or prestress > Prestress ON > Ok
16. ANSYS Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On lines > خطوط انتهایی انتخاب می شوند > Apply > Lab2 DOFs to be constrained > All DOF > Apply > خطوط بالایی انتخاب می شوند > Apply > Lab2 DOFs to be constrained > U<sub>x</sub> > Apply > خطوط بالایی انتخاب می شوند > Apply > Lab2 DOFs to be constrained > U<sub>y</sub> > Ok
17. ANSYS Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Lines > خطوط بالایی انتخاب می شوند > Ok > Load PRES value=1 > Ok
18. ANSYS Main Menu > Solutions > Solve > Current Ls > Ok
19. ANSYS Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis > Eigen Buckling > Ok
20. ANSYS Main Menu > Solution > Analysis Type > Analysis Options > Block Lanczos , No.of modes to extract=5 > Ok
24. ANSYS Main Menu > solution > Solve > Ok
25. ANSYS Main Menu > General Postproc > Read Results > First Set
26. ANSYS Main Menu > General Postproc > Result Summary

## الف-۲) فشار خارجی

تمامی مراحل همانند بال می باشد فقط در مرحله بارگذاری به صورت زیر عمل می کنیم.

- ANSYS Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Areas > سطوح خارجی انتخاب می شوند > Ok > Load PRES value=1 > Ok

## الف-۳) بارگذاری ترکیبی

1. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete > Add > solid > 20node95 > Ok > close

2. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models > Structural > Linear > Elastic > Isotropic > Ex=...Pa , nu=... > Ok > close

3. Preprocessor > Modeling > Create > Volumes > Cylinder > Solid Cylinder > R=...m,L=...m

4. Preprocessor > Modeling > Create > Volumes > Cylinder > Solid Cylinder > R=...m,L=...m

دو حجم سیلندری باید به گونه ای ایجاد شوند که با کم کردن آن ها از هم پوسته با ضخامت مورد نظر ایجاد شود.

5. Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Subtract > Volumes > ابتدا حجم  
> Ok > سپس حجم داخلی انتخاب می گردد > Ok > بزرگتر انتخاب می شود

6. ANSYS Utility Menu > Plot > Lines

7. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > Manualsize > Lines > Picked Lines > دو خط جانبی انتخاب می شود > Apply > NDIV No.of element divisions=... > Apply > خطوط انتهایی انتخاب می شود > Ok > NDIV No.of element divisions=... > Ok

8. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Volumes > Free > Pick All

9. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Numbering Cntrls > Merge Items > Label Type of item to be merge > All > Ok

10. ANSYS Main Menu > Preprocessor > Numbering Cntrls > Compress Numbers > Label item to be Compressed > All > Ok

11. ANSYS Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis > Static > Ok

12. ANSYS Main Menu > Solution > Unabridged Menu

13. ANSYS Main Menu > Solution > Analysis Type > Analysis Options > Stress Stiffness or prestress > Prestress ON > Ok

14. ANSYS Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Areas > سطوح انتهایی انتخاب می شوند > Apply > Lab2 DOFs to be constrained > All DOF > Apply > سطوح بالایی انتخاب می شوند > Apply > Lab2 DOFs to be constrained >  $U_x$  > Apply > سطوح بالایی انتخاب می شوند > Apply > Lab2 DOFs to be constrained >  $U_y$  > Ok

15. ANSYS Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Areas > سطوح خارجی انتخاب می شوند > Ok > Load PRES value=1 > Ok

بقیه مراحل حل و نمایش پاسخ مشابه قبل تکرار می گردد.

- [۱] C.R. Calladine (1983), **"Theory of shell structure"**, Cambridge University press.
- [۲] M. Amabili (2008), **"Nonlinear vibrations and stability of shells and plates"**, Cambridge University press.
- [۳] بو ا. آلمورث - ا. برانش، (۱۳۸۳) "کمانش میله‌ها، ورق‌ها و پوسته‌ها"، مهندس مجتبی قمری زاده و دکتر غلامحسین رحیمی، چاپ اول، دانشگاه امام حسین(ع)، تهران.
- [۴] S.P. Timoshenko, Gere J.M. (1963), **"Theory of elastic stability"**, Second Edition, McGRAW- Hill international book company.
- [۵] L. A. Samuelson, S. Eggwertz (2005), **"Shell Stability Handbook"**, Taylor & Francis e-library.
- [۶] L.H. Donnell (1933), **"Stability of thin-walled Tubes under torsion"**, NACA Rep.479.
- [۷] J. W. Hutchinson, R. C. Tennyson, D. B. Muggeridge (1971), **"Effect of a Local Axisymmetric Imperfection on the Buckling Behavior of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression"**, AIAA JOURNAL, Vol. 9, No. I, January 1971, pp. 48-52
- [۸] T.Y. Ng, K.Y. Lam (1999), **"Dynamic stability analysis of cross-ply laminated cylindrical shells using different thin shell theories"**, Acta Mechanica 134, 147-167.
- [۹] M. Cai, J. Mark, F.G. Holst , J. M. Rotter (2002), **"Buckling strength of thin cylindrical shells under localized axial compression"**, 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York.
- [۱۰] E. Zhu, P. Mandal, C.R. Calladine (2002), **"Buckling of thin cylindrical shells :An attempt to resolve a paradox"**, International Journal of mechanical sciences 44,1583-1601.
- [۱۱] Ing. Robert Sliz, Prof. Ing. Stanislav Holy, CSc., Ing. Miroslav Spaniel (2002), **"Numerical Analysis of Buckling of Thin-walled Shell"**, Czech Technical University, Technická 4, Praha 6, 166 36 , Czech Republic.
- [۱۲] Russell Q. Bridge, Martin Pircher (2002), **"Buckling and Post-Buckling of Cylindrical Shells with Circumferential Weld Imperfections Subjected to Axial Load"**, Centre for Construction Technology Research University of Western Sydney, Australia.
- [۱۳] Seung-Eock Kim, Chang-Sung Kim (2002), **"Buckling strength of the cylindrical shell and tank subjected to axially compressive loads"**, Thin-Walled Structures 329-353.
- [۱۴] G.W. Hunt , G.J.Lord , M.A.Peletier (2003), **"cylindrical shell buckling :a characterization of localization and periodicity"**, Discrete And Continuous Dynamical Systems-Series B .3(4) ,505-518.
- [۱۵] A. Khamlichi , M. Bezzazi , A. Limam (2004), **"Buckling of elastic cylindrical shells considering the effect of localized axisymmetric imperfections"**, Thin-Walled structures 42,1035-1047.
- [۱۶] G.A. Kardomateas ,G.J.Simitses (2005), **"Buckling of Long sandwich cylindrical shells under external pressure"**, Journal of Applied Mechanics Vol 72,493-499.

- [۱۷] S. Aghajari , K. Abedi , H. Showkati (2006),”**Buckling and post-Buckling Behavior of Thin-walled cylindrical steel shells With varying thickness subjected to uniform external pressure**”, Thin-Walled Structures 44 , 904-909 .
- [۱۸] S. Li,R.C. Batra (2006),”**Buckling of axially compressed thin cylindrical shells with functionally graded middle layer**”, Thin walled structures 44,1039-1047.
- [۱۹] A. Vaziri, H.E. Estekanchi (2006),”**Buckling of cracked cylindrical thin shells under combined internal pressure and axial compression**”, Thin-Walled Structures 141-151.
- [۲۰] V.L. Krasovsky ,V.V. Kostyrko (2007),”**Experimental Study Of Buckling Of Stringer Cylindrical Shells Under Axial Compression**”, Thin-walled Structures 45 ,877-882.
- [۲۱] A. Ghorbanpour arani, S. Golabi, A. Loghman, H. Daneshi (2007),”**Investigation elastic stability of cylindrical shell with an elastic core under axial compression by energy method**”, Journal of Mechanical Science and Technology 21,983-996.
- [۲۲] Khuram Shahzad, Sagheer Ahmed, Himayat Ullah (2007),”**Effect of Geometric Imperfection on Buckling Strength of Cylindrical Shells**”, Engineering Materials & Structures.
- [۲۳] Ashkan Vaziri (2007),”**On the buckling of cracked composite cylindrical shells under axial compression**”, Composite Structures 152–158.
- [۲۴] M.M. Najafizadeh,H.R. Heydari (2008),”**An exact solution for Buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression**”, International Journal of mechanical sciences 50,603-612.
- [۲۵] G. Papadakis (2008),”**Buckling of thick cylindrical shells under external pressure:A new analytical expression for the critical load and comparison with elasticity solutions**”, International journal of solids and structures 45 ,5308-5321.
- [۲۶] R. Abdelmoula , A. Leger (2008),”**Singular Perturbation analysis Of the buckling of circular cylindrical shells**”, European Journal of Mechanics A/Solids 27 ,706-729.
- [۲۷] H. Shen ,Y. Xiang (2008),”**Buckling and postbuckling of anisotropic laminated cylindrical under combined axial compression and torsion**”, Composite Structure 84, 375-386.
- [۲۸] R. Lo Frano, G. Forasassi (2008),”**Buckling of Imperfect Thin Cylindrical Shell under Lateral Pressure**”, Science and Technology of Nuclear Installations.
- [۲۹] H. Huang, Q. Han (2009),”**Nonlinear elastic buckling and post-buckling of axially compressed functionally graded cylindrical shell**”, International Journal of Mechanical Sciences 51,500-507.
- [۳۰] H. Shen (2009),”**Torsional Buckling and post-buckling of FGM cylindrical shells in thermal environments**”, International Journal of Non-linear mechanics 44,644-657.
- [۳۱] H. Luong T. Nguyen,I. Elishakoff,V.T. Nguyen (2009),”**Buckling under the external pressure of cylindrical shells with variable thickness**”, International Journal of solids and structures 46,4163-4168.

- [۳۲] Z.M. Li , Z.Q. Lin (2010),”**Non-linear buckling and post-buckling of shear deformable anisotropic laminated cylindrical shell subjected to varying external pressure loads**”, composite structure 92,553-567.
- [۳۳] J.H. Wang, A. Koizumi (2010),”**Buckling of cylindrical shells with longitudinal joints under external pressure**”, Thin Walled structures 48,897-904.
- [۳۴] H.R. Eipakchi, M. Shariati (2010),”**Buckling analysis of cylindrical panel under axial stress using perturbation technique**”, ZAMM,1-8.
- [۳۵] Arthur Boresi, Ken Chong (2000),”**Elasticity in engineering mechanics**”, Second Edition, John Wiley&Sons.
- [۳۶] Ansys11 user Manual.
- [۳۷] Mahboobi F, Eipacchi H.R. (2012),”**Elastic buckling of axisymmetric cylindrical shells under axial load using first order shear deformation theory**”, Journal of applied Mathematics and Mechanics (ZAMM),92,NO.11-12,937-944

## ABSTRACT

In this research, the buckling load of an axisymmetric elastic cylindrical shell under axial load and external pressure, has been determined analytically and numerically. The equilibrium and stability equations have been derived by the virtual work principle by considering the first order shear deformation theory as the displacement field. These equations have been converted to the dimensionless form and the perturbation technique has been used for solving the equilibrium equations. The buckling load is the eigenvalue of the stability equations. In addition, the buckling load has been determined numerically by Ansys finite elements software, and it has been compared with the analytical results. Also, the buckling load of this cylinder under combined loads, has been determined. Finally the effects of the geometrical parameters on the buckling load have been investigated.

Key words: buckling, cylindrical shell, perturbation theory, first order shear deformation theory





*Shahrood University of Technology*

*Faculty Mechanic Engineering*

***Buckling analysis of a cylindrical shell subjected to axial stress  
and uniform external pressure using first order shear  
deformation theory***

Hassan Mirbagheri

Supervisor: Dr Hamid Reza Eipakchi

Date: Aug 2013