

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک  
نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با توزیع توانی خواص

محمد پرهیزکار یعقوبی

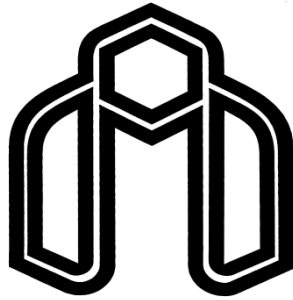
استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهتویی

ماه و سال انتشار:

شهریور ۱۳۹۲

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم

FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی

مرتب‌ی اول با توزیع توانی خواص

دانشجو: محمد پرهیزکار یعقوبی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهن‌تویی

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار:

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

## گروه طراحی کاربردی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد آقای محمد پرهیزکار یعقوبی

تحت عنوان:

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با توزیع توانی خواص

در تاریخ ..... توسط کمیته‌ی تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

مورد ارزیابی و با درجه‌ی ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

## تقدیم

---

این اثر تقدیم شد به پدر و مادرم.

## تشکر و قدردانی

---

پروردگارا، سپاسگزارم که به من نعمت حیات عطا فرمودی تا لذت بندگی تو را بچشم. بارالها، تو مرا از تاریکی‌های نفسم نجات ده و با نور خود روشن‌گر میسر باش.

با تشکر از پدر بزرگوار و روح مادر عزیزم که با حمایت‌های معنوی و مادی‌شان زمینه‌ی رشد و تحصیل را برای اینجانب فراهم آوردند. قطعاً گذشتن از این مسیر پر فراز و نشیب تنها بخش کوچکی از حمایت‌های کانون گرم خانواده‌ی عزیزم می‌باشد. از صمیم قلبم از تمامی اعضای خانواده‌ام سپاسگزارم.

از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر قنّاد و اساتید گرانقدر دانشکده به ویژه آقای دکتر ایپک‌چی سپاسگزارم. قطعاً اینجانب با راهنمایی‌های ایشان در این زمینه توانسته‌ام گام بردارم و به پیش بروم. در انتها از کلیه‌ی دوستان به ویژه مهندس قارونی، مهندس حکم‌آبادی و مهندس عامری سپاسگزارم که در این مدت کمک‌های شایانی به اینجانب داشته‌اند.

محمد پرهیزکار یعقوبی

## تعهدنامه

اینجانب محمد پرهیزکار یعقوبی دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک-گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با توزیع توانی خواص، تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهتوبی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پژوهش با استفاده از روش انرژی و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به استخراج معادلات حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن پیزوالکتریک که تحت بار حرارتی، الکتریکی و مکانیکی قرار دارد، پرداخته می‌شود و سپس نحوه‌ی حل دستگاه معادلات حاکم بیان می‌گردد. نتایج برای بارگذاری حرارتی، الکتریکی، مکانیکی و الکتروترمو مکانیکی با شرایط مرزی متفاوت استخراج می‌گردد و با نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود مورد مقایسه قرار می‌گیرد. بررسی نتایج نشان می‌دهد؛ نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میدان دمایی را به خوبی و با اختلاف اندک از نتایج اجزای محدود پیش‌بینی می‌کند، اما نتایج به دست آمده برای میدان جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به دلیل رفتار غیرخطی آن‌ها با نتایج روش اجزای محدود اختلاف دارد. همچنین اثر ناهمگنی مواد بر روی رفتار حرارتی، الکتریکی و مکانیکی جسم با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نتایج نشان می‌دهند با استفاده از اثر ناهمگنی مواد می‌توان رفتار حرارتی، الکتریکی و مکانیکی جسم را تغییر داد و اثرات بارگذاری را بر آن کمتر کرد.

**واژگان کلیدی:** استوانه‌ی جدارضخیم، ماده‌ی ناهمگن پیزوالکتریک (FGPM)،

نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT)، روش اجزای محدود (FEM)، تحلیل

الکتروترمو مکانیکی، توزیع توانی خواص.



# مطالب

---

فصل ۱	۱
۱-۱ پیش‌گفتار	۲
۲-۱ مقدمه‌ای بر پوسته‌ها	۲
۳-۱ دسته‌بندی پوسته‌ها	۳
۴-۱ نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها	۵
۱-۴-۱ نظریه‌ی پوسته‌های نازک	۵
۲-۴-۱ نظریه‌ی پوسته‌های ضخیم	۸
۵-۱ مقدمه‌ای بر مواد	۱۱
۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد پیزوالکتریک	۱۳
۲-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد FG	۱۴
۶-۱ مواد پیزوالکتریک	۱۵
۱-۶-۱ تعریف مواد پیزوالکتریک	۱۵
۲-۶-۱ مبانی رفتاری مواد پیزوالکتریک	۱۶
۳-۶-۱ کاربردهای مواد پیزوالکتریک	۱۸
۷-۱ مواد FG	۱۹
۱-۷-۱ ویژگی‌های مواد FG	۱۹
۲-۷-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG	۲۰
۸-۱ پیشینه‌ی پژوهش	۲۳

۳۱	..... جمع‌بندی	۹-۱
۳۲	.....	فصل ۲
۳۳	.....	۱-۲ پیش‌گفتار
۳۳	.....	۲-۲ استخراج اصل همیلتون توسعه‌یافته
۳۳	.....	۱-۲-۲ معادلات دیورژانس
۳۴	.....	۲-۲-۲ معادلات گرادیان
۳۴	.....	۳-۲-۲ معادلات ساختاری
۳۶	.....	۴-۲-۲ شرایط مرزی
۳۷	.....	۵-۲-۲ استخراج معادلات پیزوالکتریک وردشی
۳۷	.....	۶-۲-۲ اصل همیلتون توسعه‌یافته
۳۸	.....	۳-۲ استخراج دستگاه معادلات حاکم
۳۸	.....	۱-۳-۲ فرضیات حاکم بر مسأله
۳۹	.....	۲-۳-۲ به‌کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
۴۲	.....	۳-۳-۲ معادلات گرادیان در مختصات استوانه‌ای
۴۴	.....	۴-۳-۲ معادلات ساختاری استوانه‌ی مورد مطالعه
۴۷	.....	۵-۳-۲ محاسبه‌ی انرژی جنبشی
۴۸	.....	۶-۳-۲ محاسبه‌ی انرژی الکتروترمودمکانیکی
۵۰	.....	۷-۳-۲ محاسبه‌ی کار
۵۲	.....	۸-۳-۲ به‌کارگیری اصل همیلتون توسعه‌یافته

۵۳	..... ۹-۳-۲ دستگاه معادلات حاکم
۶۰	..... ۴-۲ حل دستگاه معادلات حاکم
۶۰	..... ۱-۴-۲ ساده‌سازی دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم
۶۱	..... ۲-۴-۲ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده
۶۶	..... ۳-۴-۲ اعمال شرایط مرزی
۶۷	..... فصل ۳
۶۸	..... ۱-۳ پیش‌گفتار
۶۸	..... ۲-۳ تحلیل اجزای محدود استوانه‌های همگن
۶۸	..... ۱-۲-۳ تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی در ANSYS
۶۹	..... ۲-۲-۳ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله
۷۰	..... ۳-۳ تحلیل حرارتی استوانه‌های همگن
۷۳	..... ۱-۳-۳ مطالعه‌ی عددی
۷۴	..... ۲-۳-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع اول
۸۲	..... ۳-۳-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم
۸۹	..... ۴-۳ تحلیل الکتریکی استوانه‌های همگن
۹۰	..... ۱-۴-۳ مطالعه‌ی عددی
۹۱	..... ۲-۴-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع اول
۹۶	..... ۳-۴-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم
۱۰۱	..... ۵-۳ تحلیل مکانیکی استوانه‌های همگن

۱۰۳.....	۳-۵-۱ مطالعه‌ی عددی
۱۰۳.....	۳-۵-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول
۱۰۹.....	۳-۵-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم
۱۱۵.....	۳-۶ تحلیل الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های همگن
۱۱۷.....	۳-۶-۱ مطالعه‌ی عددی
۱۱۸.....	۳-۶-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول
۱۲۳.....	۳-۶-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم
۱۲۹.....	فصل ۴
۱۳۰.....	۴-۱ پیش‌گفتار
۱۳۰.....	۴-۲ تحلیل اجزای محدود استوانه‌های ناهمگن
۱۳۰.....	۴-۲-۱ مدل‌سازی مواد ناهمگن پیزوالکتریک
۱۳۰.....	۴-۲-۲ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله
۱۳۱.....	۴-۳ تحلیل حرارتی استوانه‌های ناهمگن
۱۳۲.....	۴-۳-۱ مطالعه‌ی عددی
۱۳۲.....	۴-۳-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول
۱۴۰.....	۴-۳-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم
۱۴۷.....	۴-۴ تحلیل الکتریکی استوانه‌های ناهمگن
۱۴۷.....	۴-۴-۱ مطالعه‌ی عددی
۱۴۸.....	۴-۴-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول

۱۵۴.....	۳-۴-۴ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم.....
۱۶۰.....	۵-۴ تحلیل مکانیکی استوانه‌های ناهمگن.....
۱۶۰.....	۱-۵-۴ مطالعه‌ی عددی.....
۱۶۱.....	۲-۵-۴ استوانه با شرایط مرزی نوع اول.....
۱۶۷.....	۳-۵-۴ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم.....
۱۷۳.....	۶-۴ تحلیل الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های ناهمگن.....
۱۷۴.....	۱-۶-۴ مطالعه‌ی عددی.....
۱۷۴.....	۲-۶-۴ استوانه با شرایط مرزی نوع اول.....
۱۸۱.....	۳-۶-۴ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم.....
۱۸۸.....	فصل ۵.....
۱۸۹.....	۱-۵ پیش‌گفتار.....
۱۸۹.....	۲-۵ جمع‌بندی نتایج تحلیل حرارتی.....
۱۹۵.....	۳-۵ جمع‌بندی نتایج تحلیل الکتریکی.....
۱۹۸.....	۴-۵ جمع‌بندی نتایج تحلیل مکانیکی.....
۲۰۳.....	۵-۵ جمع‌بندی نتایج تحلیل الکتروترمو مکانیکی.....
۲۰۴.....	۶-۵ جمع‌بندی کلی.....
۲۰۵.....	۷-۵ پیشنهادها.....
۲۰۶.....	مراجع.....

## شکل‌ها

- شکل ۱-۱ نمای مقطع استخوان ..... ۱۲
- شکل ۲-۱ دیسک پیزوالکتریک تغییر شکل یافته ..... ۱۵
- شکل ۳-۱ نمونه‌ای از اثر پیزوالکتریک ..... ۱۶
- شکل ۴-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف ..... ۲۰
- شکل ۵-۱ توزیع خواص در استوانه‌ی ناهمگن ..... ۲۲
- شکل ۶-۱ توزیع خواص به صورت کسر حجمی در استوانه‌ی ناهمگن ..... ۲۳
- شکل ۱-۲ مقطع استوانه‌ی جدار ثابت ناهمگن ..... ۴۰
- شکل ۲-۲ مقطع استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی ..... ۵۱
- شکل ۱-۳ نمودار همگرایی تحلیل المان محدود ..... ۷۰
- شکل ۲-۳ مقطع عرضی استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی ..... ۷۱
- شکل ۳-۳ توزیع میدان دمایی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی ..... ۷۵
- شکل ۴-۳ توزیع میدان دما با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۷۵
- شکل ۵-۳ توزیع میدان دما در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۷۶
- شکل ۶-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی ..... ۷۷
- شکل ۷-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۷۷
- شکل ۸-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۷۸
- شکل ۹-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی ..... ۷۸
- شکل ۱۰-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۷۹
- شکل ۱۱-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۷۹
- شکل ۱۲-۳ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی ..... ۸۰

- شکل ۳-۱۳ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۸۱
- شکل ۳-۱۴ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۸۱
- شکل ۳-۱۵ توزیع میدان دما در استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی ..... ۸۲
- شکل ۳-۱۶ توزیع میدان دما با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۸۳
- شکل ۳-۱۷ توزیع میدان دما در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۸۳
- شکل ۳-۱۸ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی ..... ۸۴
- شکل ۳-۱۹ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۸۴
- شکل ۳-۲۰ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۸۵
- شکل ۳-۲۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی ..... ۸۶
- شکل ۳-۲۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۸۶
- شکل ۳-۲۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۸۷
- شکل ۳-۲۴ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی ..... ۸۷
- شکل ۳-۲۵ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۸۸
- شکل ۳-۲۶ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۸۸
- شکل ۳-۲۷ مقطع عرضی استوانه‌ی تحت بارگذاری الکتریکی ..... ۸۹
- شکل ۳-۲۸ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی ..... ۹۱
- شکل ۳-۲۹ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۹۲
- شکل ۳-۳۰ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۹۲
- شکل ۳-۳۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی ..... ۹۳
- شکل ۳-۳۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه ..... ۹۴
- شکل ۳-۳۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT ..... ۹۴
- شکل ۳-۳۴ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی ..... ۹۵

- شکل ۳-۳۵ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۹۵
- شکل ۳-۳۶ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۹۶
- شکل ۳-۳۷ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی..... ۹۷
- شکل ۳-۳۸ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۹۷
- شکل ۳-۳۹ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۹۸
- شکل ۳-۴۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی..... ۹۸
- شکل ۳-۴۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۹۹
- شکل ۳-۴۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۹۹
- شکل ۳-۴۳ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی..... ۱۰۰
- شکل ۳-۴۴ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۰۰
- شکل ۳-۴۵ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۰۱
- شکل ۳-۴۶ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری مکانیکی..... ۱۰۱
- شکل ۳-۴۷ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی..... ۱۰۴
- شکل ۳-۴۸ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۰۵
- شکل ۳-۴۹ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۰۵
- شکل ۳-۵۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی..... ۱۰۶
- شکل ۳-۵۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۰۶
- شکل ۳-۵۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۰۷
- شکل ۳-۵۳ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی..... ۱۰۸
- شکل ۳-۵۴ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۰۸
- شکل ۳-۵۵ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۰۹
- شکل ۳-۵۶ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی..... ۱۱۰



- شکل ۳-۵۷ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۱۰
- شکل ۳-۵۸ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۱۱
- شکل ۳-۵۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی..... ۱۱۱
- شکل ۳-۶۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۱۲
- شکل ۳-۶۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۱۲
- شکل ۳-۶۲ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی..... ۱۱۳
- شکل ۳-۶۳ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۱۴
- شکل ۳-۶۴ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۱۴
- شکل ۳-۶۵ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی..... ۱۱۵
- شکل ۳-۶۶ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی..... ۱۱۸
- شکل ۳-۶۷ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۱۹
- شکل ۳-۶۸ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۱۹
- شکل ۳-۶۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی..... ۱۲۰
- شکل ۳-۷۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۲۱
- شکل ۳-۷۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۲۱
- شکل ۳-۷۲ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی..... ۱۲۲
- شکل ۳-۷۳ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۲۲
- شکل ۳-۷۴ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۲۳
- شکل ۳-۷۵ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی..... ۱۲۴
- شکل ۳-۷۶ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۲۴
- شکل ۳-۷۷ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۲۵
- شکل ۳-۷۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی..... ۱۲۵

- شکل ۳-۷۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۲۶
- شکل ۳-۸۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۲۶
- شکل ۳-۸۱ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی ۱۲۷
- شکل ۳-۸۲ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه..... ۱۲۷
- شکل ۳-۸۳ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT..... ۱۲۸
- شکل ۴-۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی میدان دمایی در لایه‌ی میانی..... ۱۳۲
- شکل ۴-۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی..... ۱۳۳
- شکل ۴-۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی..... ۱۳۴
- شکل ۴-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی..... ۱۳۴
- شکل ۴-۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی..... ۱۳۵
- شکل ۴-۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی..... ۱۳۵
- شکل ۴-۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی..... ۱۳۶
- شکل ۴-۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی..... ۱۳۶
- شکل ۴-۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی میدان دمایی در لایه‌ی میانی..... ۱۴۰
- شکل ۴-۱۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی..... ۱۴۱
- شکل ۴-۱۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی..... ۱۴۲
- شکل ۴-۱۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی..... ۱۴۲
- شکل ۴-۱۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی..... ۱۴۳
- شکل ۴-۱۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی..... ۱۴۳
- شکل ۴-۱۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی..... ۱۴۴
- شکل ۴-۱۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی..... ۱۴۴
- شکل ۴-۱۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی..... ۱۴۸

- شکل ۴-۱۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۴۹
- شکل ۴-۱۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۰
- شکل ۴-۲۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۰
- شکل ۴-۲۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۱
- شکل ۴-۲۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۱
- شکل ۴-۲۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۲
- شکل ۴-۲۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۵
- شکل ۴-۲۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۵
- شکل ۴-۲۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۶
- شکل ۴-۲۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۶
- شکل ۴-۲۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۷
- شکل ۴-۲۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۷
- شکل ۴-۳۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی ..... ۱۵۸
- شکل ۴-۳۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۱
- شکل ۴-۳۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۲
- شکل ۴-۳۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۲
- شکل ۴-۳۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۳
- شکل ۴-۳۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۳
- شکل ۴-۳۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۴
- شکل ۴-۳۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۴
- شکل ۴-۳۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۷
- شکل ۴-۳۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۸

- شکل ۴-۴۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۹
- شکل ۴-۴۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۶۹
- شکل ۴-۴۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۰
- شکل ۴-۴۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۰
- شکل ۴-۴۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۱
- شکل ۴-۴۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۴
- شکل ۴-۴۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۵
- شکل ۴-۴۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۶
- شکل ۴-۴۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۶
- شکل ۴-۴۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۷
- شکل ۴-۵۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۷
- شکل ۴-۵۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی ..... ۱۷۸
- شکل ۴-۵۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی ..... ۱۸۱
- شکل ۴-۵۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۸۲
- شکل ۴-۵۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۸۲
- شکل ۴-۵۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی ..... ۱۸۳
- شکل ۴-۵۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی ..... ۱۸۳
- شکل ۴-۵۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی ..... ۱۸۴
- شکل ۴-۵۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی ..... ۱۸۴
- شکل ۵-۱ جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی ..... ۱۸۹
- شکل ۵-۲ جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی ..... ۱۹۰
- شکل ۵-۳ توزیع دما در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی ..... ۱۹۰

- شکل ۴-۵ میدان دما در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۱۹۱
- شکل ۵-۵ پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۱۹۲
- شکل ۶-۵ جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۱۹۲
- شکل ۷-۵ جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۱۹۳
- شکل ۸-۵ بررسی اثر پیزوالکتریک در نتایج جابه‌جایی شعاعی به دست آمده از FSDT ..... ۱۹۴
- شکل ۹-۵ بررسی اثر پیزوالکتریک در نتایج جابه‌جایی محوری به دست آمده از FSDT ..... ۱۹۴
- شکل ۱۰-۵ پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۱۹۶
- شکل ۱۱-۵ جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۱۹۶
- شکل ۱۲-۵ جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۱۹۷
- شکل ۱۳-۵ جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری مکانیکی ..... ۱۹۸
- شکل ۱۴-۵ جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری مکانیکی ..... ۱۹۹
- شکل ۱۵-۵ پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۱۹۹
- شکل ۱۶-۵ جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۲۰۰
- شکل ۱۷-۵ جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت ..... ۲۰۰
- شکل ۱۸-۵ بررسی اثر پیزوالکتریک در نتایج جابه‌جایی شعاعی به دست آمده از FSDT ..... ۲۰۱
- شکل ۱۹-۵ بررسی اثر پیزوالکتریک در نتایج جابه‌جایی محوری به دست آمده از FSDT ..... ۲۰۲
- شکل ۲۰-۵ جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری ترمومکانیکی ..... ۲۰۳
- شکل ۲۱-۵ جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری ترمومکانیکی ..... ۲۰۳

## جداول

---

جدول ۱-۱ پژوهش‌های صورت گرفته	۳۰
جدول ۱-۳ خواص استوانه	۷۳
جدول ۱-۴ نتایج میدان دمای برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۳۷
جدول ۲-۴ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۳۸
جدول ۳-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۳۸
جدول ۴-۴ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۳۹
جدول ۵-۴ نتایج تنش محوری برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۴۰
جدول ۶-۴ نتایج میدان دمای برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۴۵
جدول ۷-۴ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۴۶
جدول ۸-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۴۶
جدول ۹-۴ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۴۷
جدول ۱۰-۴ نتایج تنش محوری برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه	۱۴۷
جدول ۱۱-۴ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه	۱۵۳
جدول ۱۲-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه	۱۵۳
جدول ۱۳-۴ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه	۱۵۴
جدول ۱۴-۴ نتایج تنش محوری برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه	۱۵۴
جدول ۱۵-۴ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه	۱۵۹
جدول ۱۶-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه	۱۵۹
جدول ۱۷-۴ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه	۱۶۰
جدول ۱۸-۴ نتایج تنش محوری برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه	۱۶۰

- جدول ۴-۱۹ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۶۵
- جدول ۴-۲۰ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۶۶
- جدول ۴-۲۱ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۶۶
- جدول ۴-۲۲ نتایج تنش محوری برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۶۷
- جدول ۴-۲۳ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۷۲
- جدول ۴-۲۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۷۲
- جدول ۴-۲۵ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۷۳
- جدول ۴-۲۶ نتایج تنش محوری برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۷۳
- جدول ۴-۲۷ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۷۹
- جدول ۴-۲۸ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۷۹
- جدول ۴-۲۹ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۸۰
- جدول ۴-۳۰ نتایج تنش محوری برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۸۰
- جدول ۴-۳۱ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۸۵
- جدول ۴-۳۲ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۸۶
- جدول ۴-۳۳ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۸۶
- جدول ۴-۳۴ نتایج تنش محوری برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه..... ۱۸۷

## علائم

$u_r$	جابه‌جایی شعاعی
$r$	فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (در پوسته‌ی استوانه‌ای، شعاع استوانه یا مختصه‌ی شعاعی)
$C_1, C_2$	ثابت‌های معادله‌ی دیفرانسیل ناشی از نظریه‌ی لامه برای استوانه
$R$	فاصله‌ی سطح میانی پوسته از محور تقارن (در پوسته‌ی استوانه‌ای، شعاع صفحه‌ی میانی استوانه)
$z$	فاصله‌ی هر نقطه از سطح میانی پوسته
$u_r^0$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی
$u_r^1$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی
$u_r^2$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی دو جابه‌جایی شعاعی
$\vec{U}$	میدان جابه‌جایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\vec{U}^0$	مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر میدان جابه‌جایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\vec{U}^1$	مؤلفه‌های مرتبه‌ی یک میدان جابه‌جایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$U_x$	جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$U_x^0$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$U_x^1$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$U_\theta$	جابه‌جایی محیطی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$U_\theta^0$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محیطی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$U_\theta^1$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محیطی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$U_z$	جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$U_z^0$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$U_z^1$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$e$	عدد نپر (۲/۷۱۸۲۸)
$r_i$	شعاع داخلی استوانه
$r_o$	شعاع خارجی استوانه
$Pr_i$	خاصیت ماده در لایه‌ی داخلی استوانه
$Pr_o$	خاصیت ماده در لایه‌ی خارجی استوانه
$n_{Pr}$	ثابت ناهمگنی خاصیت
$\bar{r}$	نسبت شعاع به شعاع داخلی در استوانه
$k$	نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی در استوانه



$\sigma_{ij}$	مؤلفه‌های تانسور تنش متقارن کوشی
$D_i$	مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی الکتریکی
$h_i$	مؤلفه‌های بردار شار حرارتی
$\rho$	چگالی
$u_i$	مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی
$\eta$	چگالی آنتروپی
$\Theta^*$	دمای ثابت مثبت مرجع
$f_i$	مؤلفه‌های نیروهای حجمی مکانیکی
$q$	چگالی بار الکتریکی آزاد
$s$	منبع گرمایی حجمی
$\Omega$	محیط مادی پیزوالکتریک
$x_1, x_2, x_3$	مختصات کارتیزین در فضای سه‌بعدی اقلیدسی
$\varepsilon_{ij}$	مؤلفه‌های تانسور متقارن کرنش لاگرانژی
$E_i$	مؤلفه‌های بردار شبه ایستای میدان الکتریکی
$e_i$	مؤلفه‌های بردار میدان حرارتی
$\varphi$	پتانسیل الکتریکی
$\Theta$	تغییرات دمایی از دمای ثابت مثبت مرجع
$\Pi$	پتانسیل ترموپیزوالکتریک
$G$	تابع گیبس الکتریکی
$F$	تابع اتلاف
$c_{ijkl}$	ثوابت الاستیک
$e_{ijk}$	ثوابت پیزوالکتریک-تنش
$\epsilon_{ij}$	ثوابت دی‌الکتریک
$\alpha$	ثابت انبساط حرارتی
$p_i$	ثوابت پایروالکتریک
$\lambda_{ij}$	ثوابت تنش حرارتی-دما
$k_{ij}$	ضرایب هدایت حرارتی
$S$	مرز سطحی جسم پیزوالکتریک
$F_i$	نیروهای سطحی مکانیکی
$S_F$	سطح مرزی جسم پیزوالکتریک تحت نیروهای سطحی مکانیکی

$Q$	بار الکتریکی سطحی
$S_Q$	سطح مرزی جسم پیزوالکتریک تحت بار الکتریکی سطحی
$H$	شار حرارتی
$S_H$	سطح مرزی جسم پیزوالکتریک تحت شار حرارتی
$\overline{u}_i$	مؤلفه‌های معین بردار جابه‌جایی
$S_u$	سطح مرزی جسم پیزوالکتریک تحت میدان جابه‌جایی معین مکانیکی
$\overline{\varphi}$	پتانسیل الکتریکی معین
$S_\varphi$	سطح مرزی جسم پیزوالکتریک تحت پتانسیل الکتریکی معین
$\overline{\Theta}$	تغییرات دمایی معین از دمای ثابت مثبت مرجع
$S_\Theta$	سطح مرزی جسم پیزوالکتریک تحت تغییرات دمایی معین
$n_j$ or $n_i$	مؤلفه‌های بردار یکه‌ی عمود بر سطح با جهت‌گیری به سمت خارج جسم مادی پیزوالکتریک
$\delta u_i$	مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی مجازی پذیرفتنی
$\delta \varphi$	پتانسیل الکتریکی مجازی پذیرفتنی
$\delta \Theta$	تغییرات دمایی مجازی پذیرفتنی
$t_0, t_1$	زمان‌های دلخواه
$L$	فانکشنال لاگرانژی
$T$	انرژی جنبشی
$V$	انرژی الکتروترمودمکانیکی
$W$	کار ناشی از نیروهای مکانیکی، الکتریکی و حرارتی
$\theta$	مختصه‌ی محیطی استوانه
$x$	مختصه‌ی محوری استوانه
$\omega$	سرعت دورانی ثابت
$u_\theta$	جابه‌جایی محیطی
$u_x$	جابه‌جایی محوری
$t$	زمان
$h$	ضخامت دیواره‌ی پوسته‌ی استوانه‌ای
$L_C$	طول پوسته‌ی استوانه‌ای
$\varphi^0$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر پتانسیل الکتریکی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\varphi^1$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\Theta^0$	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر تغییرات دمایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک تغییرات دمایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول	$\Theta^1$
کرنش‌های نرمال در مختصات استوانه‌ای	$\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$
کرنش‌های نرمال در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول	$\varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$
کرنش‌های برشی در مختصات استوانه‌ای	$\gamma_{r\theta}, \gamma_{rx}, \gamma_{\theta x}$
کرنش‌های برشی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول	$\gamma_{z\theta}, \gamma_{zx}, \gamma_{\theta x}$
تانسور میدان کرنش در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول	$\vec{\varepsilon}$
مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی در مختصات استوانه‌ای	$E_r, E_\theta, E_x$
مؤلفه‌های بردار میدان الکتریکی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول	$E_z, E_\theta, E_x$
بردار میدان الکتریکی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول	$\vec{E}$
مؤلفه‌های بردار میدان حرارتی در مختصات استوانه‌ای	$e_r, e_\theta, e_x$
مؤلفه‌های بردار میدان حرارتی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول	$e_z, e_\theta, e_x$
بردار میدان حرارتی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول	$\vec{e}$
ثوابت الاستیک	$c_{11}, c_{12}, c_{22}$ $c_{23}, c_{44}, c_{55}$
ثوابت پیزوالکتریک-تنش	$e_{11}, e_{12}, e_{35}$
ثوابت تنش حرارتی-دما	$\lambda_{11}, \lambda_{22}$
ثوابت دی‌الکتریک	$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$
ضرایب هدایت حرارتی ماده	$k_{11}, k_{22}$
ثوابت الاستیک در شعاع داخلی استوانه	$c_{11}^0, c_{12}^0, c_{22}^0$ $c_{23}^0, c_{55}^0$
ثوابت ناهمگنی مربوط به ثوابت الاستیک	$np_1, np_2, np_3$ $np_4, np_5$
ثوابت پیزوالکتریک-تنش در شعاع داخلی استوانه	$e_{11}^0, e_{12}^0, e_{35}^0$
ثوابت ناهمگنی مربوط به ثوابت پیزوالکتریک-تنش	$np_6, np_7, np_8$
ثوابت تنش حرارتی-دما در شعاع داخلی استوانه	$\lambda_{11}^0, \lambda_{22}^0$
ثوابت ناهمگنی مربوط به ثوابت تنش حرارتی-دما	$np_9, np_{10}$
ثوابت دی‌الکتریک در شعاع داخلی استوانه	$\varepsilon_{11}^0, \varepsilon_{22}^0$
ثوابت ناهمگنی مربوط به ثوابت دی‌الکتریک	$np_{11}, np_{12}$
ضرایب هدایت حرارتی در شعاع داخلی استوانه	$k_{11}^0, k_{22}^0$
ثوابت ناهمگنی مربوط به ضرایب هدایت حرارتی	$np_{13}, np_{14}$
چگالی در شعاع داخلی استوانه	$\rho^0$

ثابت ناهمگنی مربوط به چگالی	$np_{15}$
چگالی انرژی جنبشی	$T^*$
عدد پی (۳/۱۴۱۵۹)	$\pi$
چگالی انرژی الکتروترمودمکانیکی	$V^*$
منتجه‌های مکانیکی	$N_z^m, N_\theta^m$ $N_x^m$
منتجه‌های مکانیکی	$M_\theta^m, M_x^m$
منتجه‌های مکانیکی	$M_{xz}^m, Q_x^m$
ضریب تصحیح برشی	$K_S$
منتجه‌های الکتریکی	$N_z^e, N_x^e$
منتجه‌های الکتریکی	$M_x^e$
منتجه‌های حرارتی	$N_z^t, N_x^t$
منتجه‌های حرارتی	$M_x^t$
فشار داخلی	$P_i$
شار الکتریکی وارده به لایه‌ی داخلی استوانه	$Q_i$
شار حرارتی وارده به لایه‌ی داخلی استوانه	$H_i$
فشار خارجی	$P_o$
شار الکتریکی وارده به لایه‌ی خارجی استوانه	$Q_o$
شار حرارتی وارده به لایه‌ی خارجی استوانه	$H_o$
ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل	$[A], [B], [C]$
شبه بردار میدان الکتروترمودمکانیکی	$\{y\}$
شبه بردار نیروی الکتروترمودمکانیکی	$\{l\}$
ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده	$[A^*], [B^*]$ $[C^*]$
شبه بردار میدان الکتروترمودمکانیکی در دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده	$\{y^*\}$
شبه بردار نیروی الکتروترمودمکانیکی در دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده	$\{l^*\}$
ثوابت انتگرال‌گیری از سطر اول، پنجم و هفتم دستگاه معادلات دیفرانسیل	$K_1, K_2, K_3, K_4$
حل قسمت خصوصی دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده	$\{y^*\}_p$
حل قسمت عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده	$\{y^*\}_g$
شبه بردار ضرایب مرتبه‌ی دوم در حل خصوصی دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده	$\{y^*\}_{p2}$

شبه بردار ضرایب مرتبه‌ی اول در حل خصوصی دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده	$\{y^*\}_{p1}$
شبه بردار ضرایب مرتبه‌ی صفر در حل خصوصی دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده	$\{y^*\}_{p0}$
مقادیر ویژه	$m, m_i$
شبه بردارهای ویژه	$\{\xi\}, \{\xi\}_i$
ضرایب شبه بردار ویژه	$K_{i+4}$
ثوابت انتگرال گیری از سطر سوم و پنجم $\{y^*\}$	$K_{15}, K_{16}$
ضخامت لایه‌های استوانه‌ی چند لایه	$d$
خاصیت در لایه‌ی $n$ ام	$Pr^n$
شعاع متوسط لایه‌ی $n$ ام	$r_m^n$
شعاع داخلی لایه‌ی $n$ ام	$r_i^n$
ضرایب انبساط حرارتی در شعاع داخلی استوانه	$\alpha_{11}^0, \alpha_{22}^0$
مساحت مقطع مستطیل شکل استوانه	$A_{Section}$
مساحت المان مربعی شکل	$A_{Element}$
میدان الکتریکی اعمالی دی‌پلاریزه کننده	$E_{de}$
میدان الکتریکی اعمالی فرضی دی‌پلاریزه کننده	$E_{de}^*$
شار حرارتی وارده به لایه‌ی درونی استوانه	$H_1$
شار حرارتی خارجه از لایه‌ی بیرونی استوانه	$H_2$
شار الکتریکی وارده به لایه‌ی درونی استوانه	$Q_1$
شار الکتریکی خارجه از لایه‌ی بیرونی استوانه	$Q_2$
فشار داخلی	$P_1$
فشار خارجی	$P_2$
مساحت هر لایه با خواص ثابت	$A_{Layer}$
ثابت ناهمگنی کل	$n$
تنش فشاری اعمالی فرضی دی‌پلاریزه کننده	$P_{de}^*$

# فصل ۱

## مقدمه

---

## ۱-۱ پیش‌گفتار

در این فصل ابتدا شرحی مختصر بر پوسته‌ها بیان می‌گردد و سپس به دسته‌بندی آن‌ها از دیدگاه‌های مختلف پرداخته می‌شود. در ادامه نظریه‌های موجود برای تحلیل پوسته‌ها بیان و دسته‌بندی می‌گردند که برخی از آن‌ها، به اختصار مورد بررسی قرار می‌گیرند. سپس درباره‌ی تکامل و پیشرفت مواد مطالبی بیان می‌گردد و بعد از آن به بیان تاریخچه‌ی مواد ناهمگن و پیزوالکتریک<sup>۱</sup> پرداخته می‌شود.

در بخش بعدی، تعریف، مبانی رفتاری و کاربرد مواد پیزوالکتریک به همراه ویژگی‌ها و مدل‌سازی ریاضی مواد ناهمگن بیان می‌شوند. در پایان، پژوهش‌های گذشته که در راستای این مطالعه قرار داشته‌اند، در حد توان مورد اشاره و بررسی قرار می‌گیرد و با صورت گرفتن جمع‌بندی، نیاز انجام این مطالعه و گره‌گشایی آن از مسائل علمی بیان می‌گردد، بدین ترتیب فصل نخست، خاتمه می‌یابد.

## ۲-۱ مقدمه‌ای بر پوسته‌ها

پوسته‌ها<sup>۲</sup> به عنوان اجزای سازه‌ها نقش مهمی را در مهندسی به ویژه مهندسی مکانیک، هوافضا، عمران، معماری و معدن دارند. نمونه‌های زیادی از این دسته سازه‌ها نظیر سقف‌های گنبدی شکل، تانکرها، مخازن نگهداری سیال، رآکتورهای اتمی، پرتابه‌ها، موشک‌ها و ... در سیستم‌های مصنوعی و ساخته شده توسط بشر یافت می‌شود. این نمونه‌ها در سیستم‌های طبیعی نیز یافت می‌شوند که می‌توان برای مثال از جمجمه، صدف، لاک، استخوان‌ها و ... نام برد. این نمونه‌ها، تنها تعداد محدودی از کاربرد وسیع پوسته‌ها در سیستم‌های طبیعی و مصنوعی می‌باشند.

موارد زیر را می‌توان به عنوان دلایل استفاده‌ی پرکاربرد سازه‌های پوسته‌ای برشمرد [۱].

۱- بازدهی بالای رفتاری در برابر تحمل بار؛

۲- بالا بودن درجه‌ی مقاومت ذخیره شده و یکپارچگی سازه؛

1. Piezoelectric  
2. Shells

۳- نسبت مقاومت به وزن بالا؛

۴- سفتی بسیار بالا؛

۵- مهار فضا.

از میان پوسته‌های بیان شده، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل کاربردهای بیشتر در ساختار تجهیزات، نظر پژوهشگران را از دیرباز به خود جلب کرده و در اکثر منابع درسی و پژوهشی بخشی را به خود اختصاص داده است.

با پیشرفت علم و مطرح شدن شاخه‌ی جدیدی از مواد، پژوهشگران در پی اعمال تغییراتی در ماده‌ی پوسته‌های استوانه‌ای برآمدند تا مطلوبیت آن‌ها را افزایش دهند و ویژگی‌های جدیدی را به آن‌ها بی‌افزایند. با توجه به آنچه که بیان شد و لزوم کاربرد پوسته‌های استوانه‌ای با مواد جدید در تجهیزات حاضر، پژوهشگران تلاش خود را برای تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای با مواد جدید آغاز کردند.

## ۱-۳ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

### الف) دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل از انتقال<sup>۱</sup>: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران<sup>۲</sup>: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک<sup>۳</sup>: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی<sup>۴</sup> آن کوچک‌تر از

$$\frac{1}{20} \text{ باشد.}$$

- 
1. Shell of Translation
  2. Shell of Rotation
  3. Thin Shell
  4. Middle Surface



پوسته‌ی جدار ضخیم<sup>۱</sup>: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگ‌تر از

$$\frac{1}{20} \text{ باشد.}$$

### ب) دیدگاه مادی

پوسته‌ی همگن و همسانگرد<sup>۲</sup>: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف و جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌ی همگن و ناهمسانگرد<sup>۳</sup>: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است ولی در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

پوسته‌ی ناهمگن و همسانگرد<sup>۴</sup>: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست ولی در جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌ی ناهمگن و ناهمسانگرد<sup>۵</sup>: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته هم در نقاط مختلف جسم و هم در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

### ج) دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک<sup>۶</sup>: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ<sup>۷</sup>: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک نیست (رفتار غیر خطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان<sup>۸</sup>: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

- 
1. Thick Shell
  2. Homogeneous and Isotropic Shell
  3. Homogeneous and Anisotropic Shell
  4. Inhomogeneous and Isotropic Shell
  5. Inhomogeneous and Anisotropic Shell
  6. Small Deflection
  7. Large Deflection
  8. Elastic Behavior

پوسته با رفتار مومسان<sup>۱</sup>: تغییر شکل‌ها بازگشت‌ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیرخطی از نظر مادی).

## ۴-۱ نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها

در این بخش نظریه‌های تحلیل پوسته به دو بخش نظریه‌ی پوسته‌های نازک و ضخیم تقسیم‌بندی می‌شوند و سپس شرح و توضیح مختصر برخی از این نظریه‌ها بیان می‌گردد.

### ۴-۱-۱ نظریه‌ی پوسته‌های نازک

در پوسته‌های نازک، نسبت ضخامت پوسته  $h$  به شعاع سطح میانی  $R$  کوچک‌تر از  $\frac{1}{20}$  می‌باشد. نظریه‌ی این دسته از پوسته‌ها بر مبنای نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی-تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به دست می‌آورند. دقت نتایج نظریه‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کیرشهف<sup>۲</sup> (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط نظریه‌ی پوسته‌ها به کاربرده شد. ارون<sup>۳</sup> (۱۸۷۴) نظریه‌ی پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات کیرشهف معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لاو<sup>۴</sup> (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌های نازک یا نظریه‌ی لاو-کیرشهف مشهور است. رایسنر<sup>۵</sup> (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لاو تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری<sup>۶</sup> را ارائه نمود. فلوگه<sup>۷</sup> (۱۹۳۲) اولین کسی است که نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص

- 
1. Plastic Behavior
  2. Kirchhoff
  3. Aron
  4. Love
  5. Reissner
  6. Axisymmetric Shell of Revolution
  7. Flugge

قابل حل می‌باشند. با ساده‌سازی آن‌ها نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به دست می‌آیند. نظریات فلوگه توسط بیرنه<sup>۱</sup> (۱۹۴۴) تکمیل شد. نقدی (۱۹۵۷) نظریه‌ی غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که به کارگیری آن‌ها مشکل می‌باشد. سندرز<sup>۲</sup> (۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلوف<sup>۳</sup> (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد.

۱- نظریه با تقریب مرتبه‌ی صفر (نظریه‌ی غشایی<sup>۴</sup>)؛

۲- نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک (نظریه‌ی خمشی<sup>۵</sup>)؛

۳- نظریه با تقریب مرتبه‌ی دو (نظریه‌ی فلوگه).

### الف) نظریه‌ی غشایی

غشاء<sup>۶</sup> از دیدگاه مکانیکی، یک تار دو بعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمل کند. پوسته‌هایی که سفتی خمشی آن‌ها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این نظریه‌ی تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در نظریه‌ی غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای<sup>۷</sup> و کرنش صفحه‌ای<sup>۸</sup> با چشم‌پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند

- 
1. Byrne
  2. Sanders
  3. Novozhilov
  4. Membrane Theory
  5. Bending Theory
  6. Membrane
  7. Plane Stress
  8. Plane Strain

[۲].

**ب) نظریه‌ی خمشی**

ورق<sup>۱</sup> از دیدگاه مکانیکی، یک تیر<sup>۲</sup> دوبعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سفتی خمشی آن‌ها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این نظریه تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر<sup>۳</sup> ارائه و سپس توسط کیرشهف در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و لاو با همین فرضیات، نظریه‌ی خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به تنهایی برای به دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در نظریه‌ی خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات نظریه‌ی غشایی و نظریه‌ی خمشی (نظریه‌ی کلاسیک) را فرضیات لاو-کیرشهف می‌نامند که عبارت‌اند از [۲]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنا<sup>۱</sup> سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

---

1. Plate  
2. Beam  
3. Navier

## ۱-۴-۲ نظریه‌ی پوسته‌های ضخیم

اولین بار لامه<sup>۱</sup> (۱۸۵۲) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی<sup>۲</sup>، حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت را که تحت فشار یکنواخت داخلی قرار داشت برای ماده‌ی همگن و همسانگرد ارائه کرد [۳]، که تاکنون نیز در حل مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین<sup>۳</sup> (۱۹۳۰) روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد. ولاسف<sup>۴</sup> (۱۹۴۹) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، نظریه‌ی تغییر شکل برشی<sup>۵</sup> را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود. میرسکی<sup>۶</sup> و هرمان<sup>۷</sup> (۱۹۵۸) با به‌کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول<sup>۸</sup>، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۴]. گرینسپن<sup>۹</sup> (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم را با نظریه‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود.

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد.

۱- نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی؛

۲- نظریه‌ی تغییر شکل برشی.

- 
1. Lamé
  2. Plane Elasticity Theory (PET)
  3. Galerkin
  4. Vlassov
  5. Shear Deformation Theory (SDT)
  6. Mirsky
  7. Hermann
  8. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)
  9. Greenspon

## الف) نظریه الاستیسیتهی خطی

به طور کلی در نظریه الاستیسیتهی سه بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می توان ۱۵ مجهول را به دست آورد؛ معادلات عبارت اند از: سه معادلهی تعادل (تنش)، شش معادلهی سینماتیک (کرنش-جابه جایی) و شش معادلهی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارت اند از: شش مؤلفهی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفهی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفهی جابه جایی (بردار جابه جایی). نظریه الاستیسیتهی سه بعدی هر چند مشخصات رفتاری پوسته ها را به طور کامل توصیف می کند و منجر به حل دقیق می شود ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده می باشد و عملاً به کارگیری آن ها امکان ناپذیر است. با فرضیات ساده شونده ای می توان معادلات بالا را کاهش داد و نظریه الاستیسیتهی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه ها به کار برد. در نظریه الاستیسیتهی مستوی، فرض می شود که مقاطع مستوی عمود بر محور استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می ماند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می شود اما برخلاف نظریه کلاسیک پوسته های نازک، جابه جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی شود. این نظریه را لامه برای استوانه ای جدار ثابت متقارن محوری از ماده ای همگن و همسانگرد به کار برد و توزیع تنش را در استوانه ها به دست آورد. نظریه لامه به نظریه کلاسیک استوانه های ضخیم مشهور است [۳].

معادله دیفرانسیل حاکم بر استوانه ای ضخیم جدار ثابت، عبارت است از:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = 0 \quad \text{or} \quad r^2 u_r'' + r u_r' + u_r = 0 \quad (1-1)$$

و جابه جایی استوانه  $u_r$  برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (2-1)$$

$r$  شعاع استوانه،  $C_1$  و  $C_2$  ثابت های معادله هستند که با شرایط مرزی به دست می آیند.

### ب) نظریه‌ی تغییر شکل برشی

در این نظریه، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. به طور کلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن ( $r$ ) برابر است با فاصله‌ی سطح میانی از محور تقارن ( $R$ ) بعلاوه فاصله‌ی آن نقطه از سطح میانی ( $z$ )، یعنی:

$$r = R + z \quad ; \quad \left| \frac{z}{R} \right| < 1 \quad (3-1)$$

بر اساس نظریه‌ی لامه، جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی توخالی:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1 (R + z) + \frac{C_2}{(R + z)} \quad (4-1)$$

به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} u_r &= C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1 (R + z) + \frac{C_2}{R} \left( 1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots \right) \\ &= \left( C_1 R + \frac{C_2}{R} \right) + z \left( C_1 - \frac{C_2}{R^2} \right) + z^2 \frac{C_2}{R^3} + \dots \\ \Rightarrow u_r &= u_r^0 + z u_r^1 + z^2 u_r^2 + \dots \end{aligned} \quad (5-1)$$

بر اساس رابطه‌ی بالا، جابه‌جایی شعاعی را به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب  $z$  می‌توان

نوشت. اگر ( $z = 0$ ) باشد، نشانگر جابه‌جایی سطح میانی پوسته است. اگر فقط جمله‌ی اول در نظر

گرفته شود ( $u_r = u_r^0$ )، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های جدار ضخیم می‌شود که مشابه

نظریه‌ی خمشی (نظریه‌ی مرتبه‌ی یک در پوسته‌های نازک) و اگر دو جمله از این بسط در نظر گرفته

شود ( $u_r = u_r^0 + z u_r^1$ )، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی یک پوسته‌های جدار ضخیم می‌شود که مشابه

نظریه‌ی فلوگه (نظریه‌ی مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) می‌باشد.

در این نظریه، علاوه بر اثر نیروهای محوری، اثرات برش، خمش و پیچش، می‌توان اثرات اینرسی

دورانی و میدان حرارتی<sup>۱</sup> را نیز در نظر گرفت. نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک به نظریه‌ی تغییر شکل

برشی مرتبه‌ی اول میرسکی-هرمان شهرت دارد که تعمیم نظریه‌ی تیموشنکو در تیرها و همچنین نظریه‌ی میندلین<sup>۱</sup> در ورق‌ها می‌باشد. میدان جابه‌جایی  $\bar{U}$  در این نظریه عبارت است از:

$$\begin{cases} U_x = U_x^0 + z U_x^1 \\ U_\theta = U_\theta^0 + z U_\theta^1 \\ U_z = U_z^0 + z U_z^1 \end{cases} \Rightarrow \bar{U} = \bar{U}^0 + z \bar{U}^1 \quad (6-1)$$

در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند ولیکن الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. هرچند به کارگیری نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی، منجر به حل دقیق مسائل می‌شود، ولیکن به دلیل اینکه تاکنون هیچ راه حل کاملی برای پوسته‌های جدار ضخیم (به غیر از موارد خاص) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه بعدی ارائه نشده است، نظریه‌ی تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، انواع مواد، انواع بارگذاری و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری<sup>۲</sup>، روش مناسبی می‌باشد.

## ۵-۱ مقدمه‌ای بر مواد

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوافضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند؛ بنابراین دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها) در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهم‌ساز به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری توأم مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از

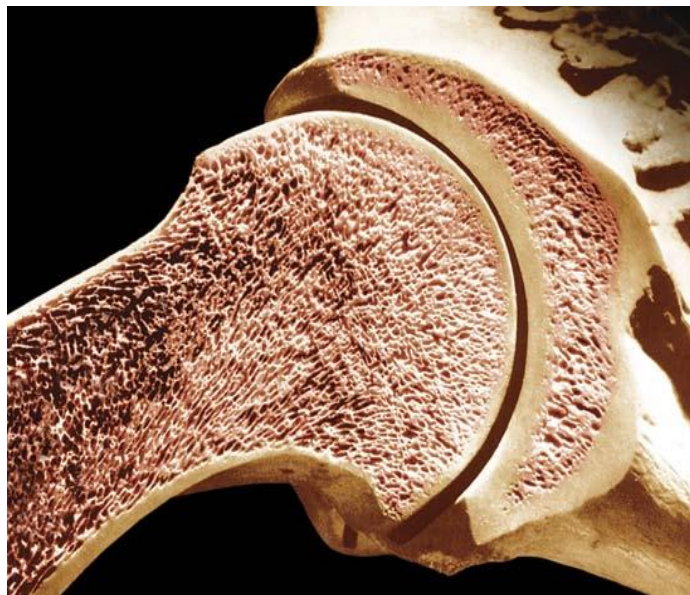
1. Mindlin  
2. Nonaxisymmetric



دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

لخنیتسکی<sup>۱</sup> (۱۹۵۰) نظریه‌ی الاستیسیته‌ی اجسام مرکب را فرمول‌بندی کرد و پس از وی دیگران، نظریه‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیت را ارائه نمودند. وینسون<sup>۲</sup> (۱۹۷۴) نظریه‌ی کلاسیک و نظریه‌ی تغییر شکل برشی را در تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی به کاربرد و بین نتایج دو روش مقایسه انجام داد.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌هاست که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص<sup>۳</sup> در ساختار ارگانسیم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. برای مثال: استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این‌رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد FG ناهمگن هستند.



شکل ۱-۱ نمای مقطع استخوان

1. Lekhnitskii
2. Vinson
3. Functionally Graded Materials (FGM)

## ۱-۵-۱ تاریخچه‌ی مواد پیزوالکتریک

کلمه‌ی پیزو<sup>۱</sup> از واژه‌ی یونانی پایزن<sup>۲</sup> که معادل لغت لاتین اسکوییز<sup>۳</sup> به معنای فشار می‌باشد، گرفته شده است. اولین رخدادی که سبب توجه به سمت مواد پیزوالکتریک<sup>۴</sup> گردید به تأثیر مواد پیروالکتریک<sup>۵</sup> بازمی‌گردد. خاصیت پیروالکتریک که تولید پتانسیل الکتریکی در اثر ایجاد تغییرات دمایی است؛ در اواسط قرن هجدهم توسط کارلوس لینائوس<sup>۶</sup> و فرانز آپی‌نئوس<sup>۷</sup> مورد پژوهش قرار گرفت. تحت تأثیر نتایج این پژوهش دو محقق دیگر به نام‌های رنه جاست هایی<sup>۸</sup> و آنتوان سیزار بکوگئوارل<sup>۹</sup> به رابطه‌ی میان تنش مکانیکی و بار الکتریکی<sup>۱۰</sup> پی بردند. با این وجود تحقیقات آن دو ناتمام ماند. اولین اثبات صریح برای تأثیر پیزوالکتریک در سال ۱۸۸۰ توسط برادران کیور<sup>۱۱</sup> ارائه گردید [۵]. آن‌ها با ترکیب دانش خود در مورد پدیده‌ی پیروالکتریک و ساختارهای کریستالی که منجر به این پدیده می‌گشت موفق به پیش‌بینی رفتار کریستالی شدند و با استفاده از کریستال‌های کهربا<sup>۱۲</sup>، کوارتز<sup>۱۳</sup>، یاقوت زرد<sup>۱۴</sup>، نیشکر<sup>۱۵</sup> و نمک راجل<sup>۱۶</sup> رفتار پیزوالکتریک را اثبات نمودند. اما آن‌ها موفق به کشف پدیده‌ی پیزوالکتریک معکوس نگشتند و این پدیده در سال ۱۸۸۱ به طور ریاضی از اصول بنیادی ترمودینامیک توسط گابریل لیپمان<sup>۱۷</sup> کشف گردید. پس از انتشار این خبر، برادران کیور وجود این پدیده را تأیید کردند و مشغول به تحقیق برای اثبات کمی بازگشت‌پذیری کامل تغییر شکل الکترو-الاستو-مکانیکی در بلورهای پیزوالکتریک شدند.

- 
1. Piezo
  2. Piezein
  3. Squeeze
  4. Piezoelectric
  5. Pyroelectric
  6. Carolus Linnaeus
  7. Franz Aepinus
  8. Rene Just Hauy
  9. Antoine Cesar Becquerel
  10. Electric Charge
  11. Curie
  12. Tourmaline
  13. Quartz
  14. Topaz
  15. Cane Sugar
  16. Rochelle Salt (Sodium Potassium Tartrate Tetra hydrate)
  17. Gabriel Lippmann

تا چندین دهه‌ی بعد از آن هم این پدیده در سطح آزمایشگاهی باقی ماند و سپس کارهای زیادی برای تعریف ساختار کریستالی که منجر به این پدیده می‌گشت انجام گردید. نقطه‌ی اوج این فعالیت‌ها در سال ۱۹۱۰ با انتشار کتاب فیزیک کریستال‌ها توسط ولدمر ویجت<sup>۱</sup> صورت پذیرفت. وی در کتابش درباره‌ی ۲۰ نوع کریستال طبیعی قادر به تولید خاصیت پیزوالکتریکی توضیح داد و سپس ثابت‌های پیزوالکتریک را با استفاده از تحلیل تانسوری تعریف نمود.

## ۱-۵-۲ تاریخچه‌ی مواد FG

مفهوم اولیه‌ی مواد متغیر تابعی توسط نینو<sup>۲</sup> و همکارانش در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوافضای ژاپن مطرح گردید و از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید آن، در این کشور شروع شد. مرحله‌ی اول پروژه ملی ((فناوری گسترش مواد متغیر تابعی)) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در این پروژه، سه گروه: ساخت، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود. پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند.

مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلی‌متر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلی‌متر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم جهانی مواد متغیر

1. Woldemar Voigt  
2. Niino

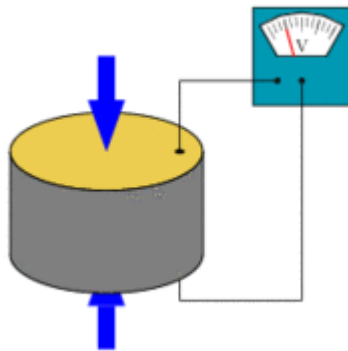
تابعی در ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به ویژه تحلیل سازه‌های از این جنس، فراگیر شد.

## ۱-۶ مواد پیزوالکتریک

در این بخش به تعریف و مبانی رفتاری مواد پیزوالکتریک پرداخته می‌شود، سپس برخی کاربردهای آن بیان می‌گردد.

### ۱-۶-۱ تعریف مواد پیزوالکتریک

مواد پیزوالکتریک موادی هستند که تحت تأثیر کرنش مکانیکی یک میدان الکتریکی با جهت‌گیری خاص در آنها پدید می‌آید، ایجاد میدان الکتریکی در این مواد به عنوان اثر پیزوالکتریکی شناخته می‌شود. کرنش مکانیکی فوق می‌تواند توسط هر عامل خارجی از قبیل نیرو، فشار، شوک حرارتی و ... به وجود آید؛ همچنین ممکن است برای ایجاد کرنش در مواد پیزوالکتریک این مواد را تحت تأثیر یک میدان الکتریکی قرار دهند که این پدیده به عنوان اثر پیزوالکتریک معکوس موسوم است [۶].

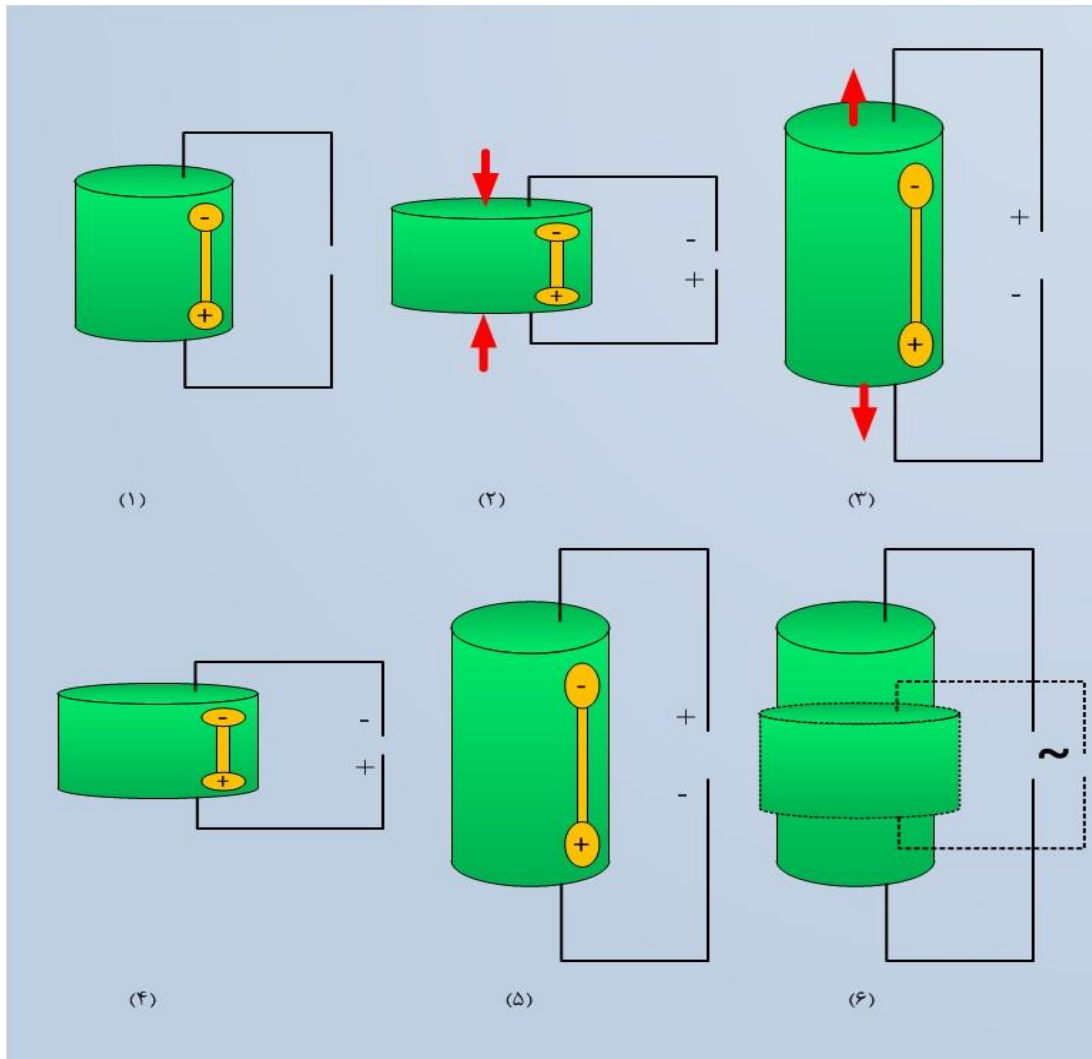


شکل ۱-۲ دیسک پیزوالکتریک تغییر شکل یافته

در شکل ۱-۲ دیسک پیزوالکتریک تغییر شکل یافته، ولتاژ الکتریکی ایجاد می‌کند که بیانگر اثر مستقیم پیزوالکتریک می‌باشد. مواد پیزوالکتریک از گستردگی زیادی برخوردار است؛ پوست و استخوان انسان نیز خاصیت پیزوالکتریکی دارند [۷].

## ۱-۶-۲ مبانی رفتاری مواد پیزوالکتریک

شکل ۱-۳ بیانگر رفتار سیلندری از جنس پیزوالکتریک است که در راستای محوری خود پلاریزه<sup>۱</sup> شده است؛ در شکل نشان داده شده سیلندر اول در شرایط بدون بار می‌باشد اگر یک نیروی خارجی که خواه کششی یا فشاری است بر دو سر سیلندر اعمال شود سبب ایجاد ولتاژ در بین الکترودها می‌گردد.



شکل ۱-۳ نمونه‌ای از اثر پیزوالکتریک

اگر بار اعمالی فشاری باشد و سبب کرنش فشاری گردد ولتاژ پدید آمده در همان جهت پلاریزه‌ی جسم خواهد بود (سیلندر دوم) اما اگر سیلندر تحت کشش قرار گیرد ولتاژ مابین الکترودها در خلاف

جهت پلاریزه‌ی جسم ایجاد می‌شود (سیلندر سوم).

مثال‌های فوق نمونه‌هایی از وضعیت عملکرد مولدی<sup>۱</sup> جسم هستند که مبدل انرژی مکانیکی به الکتریکی می‌باشند؛ از این حالت در شتاب سنج‌ها، هیدروفن‌ها، گرامافون‌ها و ... بهره می‌گیرند. هرگاه ولتاژی در جهت پلاریزه‌ی جسم بر دو سر آن اعمال شود سبب کوتاه شدن طول جسم می‌گردد (سیلندر چهارم) و برعکس اگر ولتاژ اعمالی خلاف جهت پلاریزه‌ی جسم باشد طول جسم بلندتر می‌گردد (سیلندر پنجم)، در نهایت اگر جریان متناوبی را به دو سر جسم پیزوالکتریک متصل نماییم جسم با فرکانس جریان متناوب اعمال شده، شروع به ارتعاش<sup>۲</sup> می‌کند (سیلندر آخر).

مثال‌های فوق نمونه‌هایی از وضعیت عملکرد محرکی<sup>۳</sup> هستند که مبدل انرژی الکتریکی به مکانیکی می‌باشند [۸].

### دی پلاریزه شدن

در صورتی که مواد پیزوالکتریک خاصیت پیزوالکتریک خود را از دست دهند، دی پلاریزه می‌گردند؛ در حین دی پلاریزه شدن دو قطبی‌های موجود در ماده از بین می‌روند. دی پلاریزه شدن می‌تواند منشأ الکتریکی، مکانیکی و یا حرارتی داشته باشد.

#### الف) دی پلاریزه‌ی الکتریکی

چنانچه ماده‌ی پیزوالکتریک تحت تأثیر میدان الکتریکی در خلاف جهت پلاریزه‌ی خود قرار گیرد دی پلاریزه می‌شود؛ شدت میدان الکتریکی مورد نیاز به عواملی مانند ابعاد جسم، مدت زمان اعمال میدان و همچنین درجه حرارتی که میدان تحت آن اعمال می‌شود بستگی دارد.

#### ب) دی پلاریزه‌ی مکانیکی

این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که تنش مکانیکی اعمال شده روی جسم پیزوالکتریک سبب تغییر جهت و از بین رفتن دو قطبی‌ها شود.

---

1. Generation Action  
2. Vibration  
3. Motor Action

### ج) دی‌پلاریزه‌ی حرارتی

مواد پیزوالکتریک تا دمای معینی خواص پیزوالکتریک خود را حفظ می‌کنند این دما، دمای کیور<sup>۱</sup> نام دارد؛ به عبارت دیگر چنانچه دمای این مواد از دمای فوق بالاتر رود اثر پیزوالکتریکی آن‌ها از بین می‌رود. عملیات فوق بازگشت‌ناپذیر است یعنی با سرد کردن مواد پیزوالکتریک تا زیر دمای کیور ماده دوباره خاصیت پیزوالکتریکی پیدا نمی‌کند.

## ۱-۶-۳ کاربردهای مواد پیزوالکتریک

کاربردهای بسیاری را می‌توان برای مواد پیزوالکتریک متصور شد، در این قسمت به بخشی از این کاربردها که در [۹] آمده است، اشاره‌ای می‌شود.

یکی از کاربردهای اساسی سرامیک‌های پیزوالکتریک استفاده به عنوان آتش‌زنه‌ی گاز<sup>۲</sup> می‌باشد. ولتاژ بسیار بالای تولید شده در سرامیک پیزوالکتریک به وسیله‌ی تنش مکانیکی، سبب جرقه<sup>۳</sup> و مشتعل شدن گاز می‌گردد که به دو طریق افزایش ناگهانی و تدریجی می‌توان این نیروی مکانیکی را اعمال کرد.

سرامیک‌های پیزوالکتریک، به علت وجود اثر مستقیم پیزوالکتریک، می‌توانند به عنوان شتاب‌سنج‌ها و تنش‌سنج‌ها مورد استفاده قرار گیرند. ارتعاشگرهای پیزوالکتریک در تجهیزات ارتعاشاتی مکانیکی می‌توانند به عنوان صافی<sup>۴</sup>، محرک و یا نوسانگر<sup>۵</sup> استفاده شوند.

امروزه امواج فراصوتی<sup>۶</sup> در زمینه‌های گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرند. منبع صدای تولید شده توسط سرامیک‌های پیزوالکتریک به خوبی مواد سخت‌مغناطیسی<sup>۷</sup> است. پیزوسرامیک‌ها<sup>۸</sup> در حالت کلی دارای بازده و ابعاد بهتری نسبت به مواد سخت‌مغناطیسی می‌باشند؛ به ویژه مواد

- 
1. Curie Temperature
  2. Gas Igniter
  3. Spark
  4. Filter
  5. Oscillator
  6. Ultrasonic
  7. Magnetostrictive
  8. Piezoceramics

پیزوالکتریک سخت به دلیل تولید توان بالا بدون ایجاد گرما دارای ضریب کیفیت مکانیکی بالا هستند، و برای این منظور مناسب تر می باشند. اغلب محیط مایع برای انتقال انرژی صوتی استفاده می شود. شوینده های فراصوتی، میکروفن های<sup>۱</sup> فراصوتی و دستگاه های اندازه گیری به کار رفته در سیستم های فرمان کوتاه برد، آشکارساز زیرآبی و ردیاب ماهی، سنجش گره های غیر مخرب و ... نمونه ای از کاربردها می باشند. بررسی فراصوتی آشکارسازها در زمینه های پزشکی الکترونیکی، به منظور کاربردهای درمانگاهی<sup>۲</sup> در گستره ی تشخیص تا درمان و جراحی مفید می باشند.

آنچه که گفته شد؛ تنها بخش کوچکی از کاربرد وسیع بیان شده ی مواد پیزوالکتریک در [۹]، می باشد.

## ۷-۱ مواد FG

در این بخش به توضیح مختصری درباره ی ویژگی های مواد FG پرداخته می شود و سپس نحوه ی مدل سازی آن ها به منظور تحلیل، بیان می گردد.

### ۱-۷-۱ ویژگی های مواد FG

مواد ناهمگن FG در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیتها) دارای ویژگی هایی به شرح زیر می باشند [۱۰ و ۱۱]:

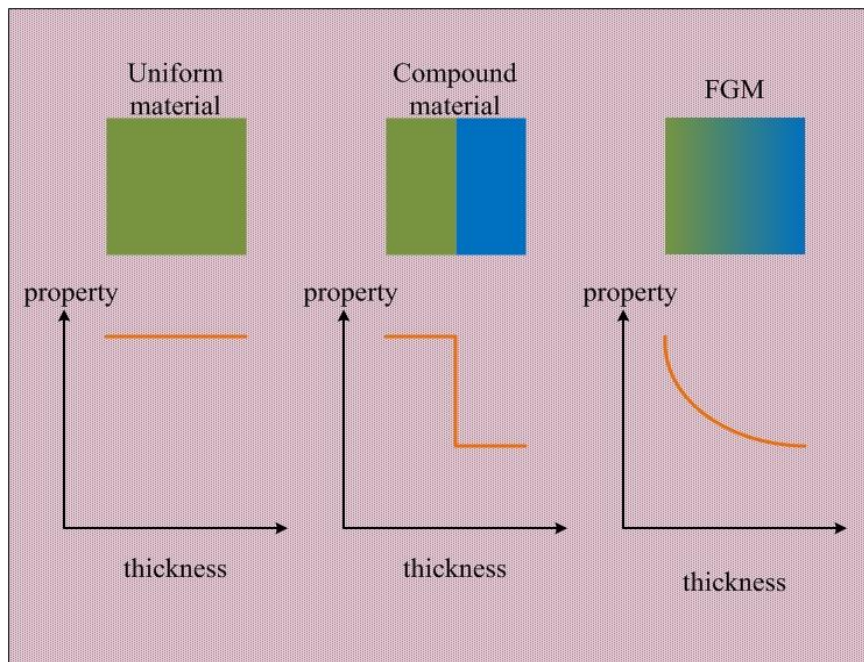
- ۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا.
- ۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا.
- ۳- یکی از مهم ترین ویژگی های مواد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می شود که به کمک مواد FG می توان آثار نامطلوب تمرکز تنش را به صورت چشم گیری کاهش داد.
- ۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد FG است.

1. Microphones  
2. Clinic



۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG، به دلیل پیوستگی موجود در خواص تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل ۴-۱ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و FGM را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف

## ۲-۷-۱ مدل‌سازی ریاضی مواد FG

مطابق شکل ۴-۱ خواص در مواد متغیر تابعی به صورت تدریجی و پیوسته تغییر می‌کند. توزیع خواص این دسته از مواد را در استوانه، با تابعی از شعاع آن بیان می‌کنند [۱۰-۱۱]؛ که عمدتاً از این قرارند.

الف) توزیع توانی<sup>۱</sup>

$$Pr(r) = Pr_i \left( \frac{r}{r_i} \right)^{n_{Pr}} = Pr_i \bar{r}^{-n_{Pr}} \quad (7-1)$$

ب) توزیع نمایی<sup>۲</sup>

$$Pr(r) = Pr_i e^{n_{Pr} \left( \frac{r}{r_i} - 1 \right)} = Pr_i e^{n_{Pr} (\bar{r} - 1)} \quad (8-1)$$

ج) توزیع کسر حجمی<sup>۳</sup>

$$Pr(r) = (Pr_o - Pr_i) \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right)^{n_{Pr}} + Pr_i = (Pr_o - Pr_i) \left( \frac{\bar{r} - 1}{k - 1} \right)^{n_{Pr}} + Pr_i \quad (9-1)$$

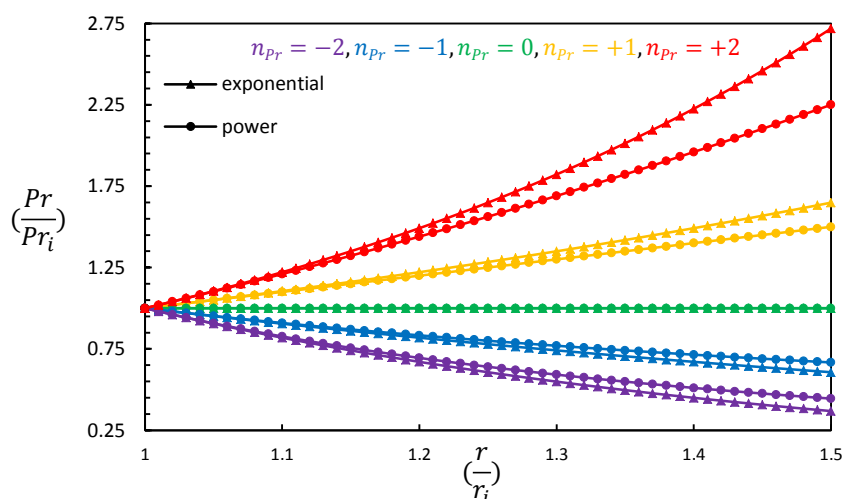
در روابط فوق  $r_i$ ،  $r_o$  شعاع استوانه و  $Pr_i$ ،  $Pr_o$  خاصیت ماده به ترتیب در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه می‌باشد که  $Pr_i$  و  $Pr_o$  می‌تواند خاصیت مکانیکی، حرارتی و الکتریکی از قبیل مدول الاستیسیته<sup>۴</sup>، چگالی<sup>۵</sup>، نسبت پواسون<sup>۶</sup>، ضریب هدایت حرارتی<sup>۷</sup>، ضریب انبساط خطی حرارتی<sup>۸</sup>، ثوابت پیزوالکتریک<sup>۹</sup> و ثوابت دی‌الکتریک<sup>۱۰</sup> باشد.  $n_{Pr}$  در روابط فوق ثابت ناهمگنی خاصیت است؛ جز رابطه‌ی (۹-۱) که ثابت ناهمگنی فقط می‌تواند مقادیر حقیقی مثبت را اختیار کند در روابط (۷-۱) و (۸-۱) مقادیر حقیقی منفی را نیز می‌تواند اختیار کند. در  $n_{Pr} = 0$  در کلیه‌ی توزیع‌ها، نشان‌دهنده مواد همگن است، همچنین  $\bar{r}$  نسبت شعاع به شعاع داخلی و  $k$  نسبت شعاع خارجی به داخلی می‌باشد. طبق رابطه‌ی (۷-۱) و (۸-۱) برای مشخص شدن توزیع خواص به صورت توانی و نمایی در استوانه‌ای با هندسه‌ی مشخص، کافی است خواص در لایه‌ی داخلی استوانه و ثابت ناهمگنی مربوط به آن تعیین شود؛ حال آنکه در توزیع کسر حجمی علاوه بر تعیین خواص لایه‌ی داخلی و ثابت ناهمگنی

- 
1. Power
  2. Exponential
  3. Volume Fraction
  4. Elasticity Modulus
  5. Density
  6. Poisson's Ratio
  7. Heat Conduction Coefficient
  8. Thermal Linear Expansion Coefficient
  9. Piezoelectric Constants
  10. Dielectric Constants

مربوط به آن، نیاز به تعیین خواص در لایه‌ی خارجی استوانه نیز می‌باشد. از این رو برخی پژوهشگران این توزیع را تابع سه متغیره نیز دانسته‌اند، در ادامه به بررسی رفتار توابع بیان شده پرداخته می‌شود.

### الف) توزیع توانی و نمایی

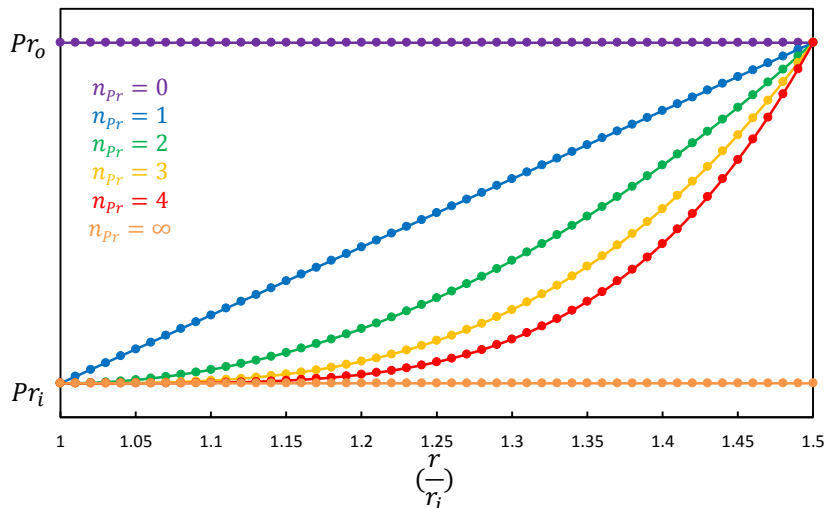
شکل ۵-۱ توزیع خواص ناهمگنی را در استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن، نسبت به خواص در لایه‌ی داخلی استوانه، به صورت توانی و نمایی نشان می‌دهد. همان طور که از شکل ۵-۱ پیداست؛ توزیع نمایی سبب می‌گردد تا تغییرات خواص با اختلاف بیشتری از حالت اولیه (خواص در لایه‌ی داخلی استوانه)، صورت گیرد. این امر بدان معناست که می‌توان توزیع نمایی با  $n_{pr}$  خاص را، با توزیع توانی که  $|n_{pr}|$  آن بزرگ‌تر از حالت نمایی می‌باشد، مدل‌سازی کرد.



شکل ۵-۱ توزیع خواص در استوانه‌ی ناهمگن

### ب) توزیع کسر حجمی

شکل ۶-۱ توزیع خواص مکانیکی را به صورت کسر حجمی در استوانه نشان می‌دهد. همان طور که از شکل پیداست خواص مکانیکی در استوانه‌ی ناهمگن بین خواص مکانیکی در لایه‌ی داخلی و خارجی آن تغییر می‌کند. هنگامی که ثابت ناهمگنی صفر است خواص مکانیکی در کل لایه‌ها ثابت و برابر خاصیت لایه‌ی خارجی است؛ همچنین با افزایش ثابت ناهمگنی و میل کردن آن به سمت بی‌نهایت، خواص مکانیکی در کل لایه‌ها ثابت و برابر خاصیت لایه‌ی داخلی می‌گردد. همان طور که از شکل پیداست، در توزیع کسر حجمی، دو حالت  $n_{pr} = 0, \infty$ ، بیانگر مواد همگن می‌باشند.



شکل ۶-۱ توزیع خواص به صورت کسر حجمی در استوانه‌ی ناهمگن

## ۸-۱ پیشینه‌ی پژوهش

همان طور که در ابتدای فصل نیز گفته شد؛ پژوهش‌های بسیاری بر روی پوسته‌ها به ویژه پوسته‌های استوانه‌ای از گذشته تا به امروز، به دلیل اهمیت و کاربرد فراوان آن‌ها صورت گرفته است. هر کدام از این پژوهش‌ها از منظرهای خاص پوسته‌های استوانه‌ای را مورد تحلیل و بررسی قرار داده‌اند؛ آنچه که در پیرو مطلب ذکر می‌گردد تنها بخش اندکی از پژوهش‌های موجود می‌باشد که با توجه به ارتباط تنگاتنگ و نزدیکی آن‌ها به پژوهش حاضر، انتخاب شده‌اند؛ با نظر به قدمت تاریخی هر یک، به این صورت ارائه می‌گردند.

استوانه‌های جدار ضخیم برای اولین بار در سال ۱۸۵۲ توسط لامه [۳] مورد تحلیل قرار گرفت. وی جنس استوانه‌ها را همگن و همسانگرد در نظر گرفت و با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی<sup>۱</sup> معادلات حاکم را استخراج کرد و حل دقیق آن‌ها را به دست آورد.

نظریه‌ی پیزوترموالاستیک<sup>۲</sup> پوسته‌ی نازک، بر اساس نظریه‌ی پیزوالکتریک خطی و فرضیات لاو-

کیرشهف توسط تئزو<sup>۳</sup> و هووارد<sup>۴</sup> [۱۲] در سال ۱۹۹۴ استخراج گردید؛ در این پژوهش ماده به صورت

1. Plane Elasticity Theory (PET)  
 2. Piezothermoelastic  
 3. Tzou  
 4. Howard

همسانگرد عرضی<sup>۱</sup> در نظر گرفته شد، سپس ایشان با استفاده از ساده‌سازی‌هایی که مبتنی بر پارامترهای لامه و شعاع انحناها بود کاربرد این نظریه را برای محیط‌های مختلف پیزوالکتریکی، از قبیل پوسته‌ی استوانه‌ای، حلقه‌ی دایروی<sup>۲</sup> و تیر نشان دادند. در سال بعد، تزو و باو<sup>۳</sup> [۱۳] کاری مشابه پژوهش پیشین انجام دادند با این تفاوت که ماده را به صورت ناهمسانگرد در نظر گرفتند و معادلات ترموالکترومکانیکی<sup>۴</sup> حاکم بر پوسته‌ی چند لایه را با استفاده از اصل همیلتون<sup>۵</sup> استخراج کردند.

در سال ۱۹۹۶ کاپوریا<sup>۶</sup> و همکاران [۱۴] با استفاده از توابع پتانسیلی که شرایط مرزی را در دو سر پوسته‌ی استوانه‌ای ارضاء می‌کرد؛ حل تحلیلی پیزوترموالاستیک پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری محدود را با استفاده از سری‌ها به دست آوردند. در این پژوهش جنس پوسته‌ی استوانه‌ای، همسانگرد عرضی در نظر گرفته شده بود که در راستای محوری خود پلاریزه شده بود؛ همچنین بارگذاری متقارن محوری از گسترش سری فوریه<sup>۷</sup> در راستای محوری در نظر گرفته شده بود و ضرایب در مجموعه‌ی توابع پتانسیل نامحدود برای هر مؤلفه‌ی فوریه، از حل شش معادله‌ی جبری که ناشی از ارضاء شرایط مرزی در لایه‌ی داخلی و خارجی پوسته‌ی استوانه‌ای بود، به دست می‌آمد. ایشان نشان دادند؛ حداکثر میزان تنش محوری و جابه‌جایی شعاعی را، می‌توان با کاربرد مناسب بار الکتریکی سطحی، کاهش داد.

با پیشرفت علم، شاخه‌ی جدیدی از مواد مطرح و ایجاد گردید که خواص آن‌ها به صورت تدریجی تغییر می‌کرد؛ امروزه این مواد ناهمگن با نام مواد متغیر تابعی (FGM) شناخته می‌شوند. با توجه به مطلوبیت خواص مواد نام‌برده نسبت به مواد معمول مورد استفاده در گذشته و لزوم کاربرد آن‌ها در تجهیزات حاضر، پژوهشگران تلاش خود را برای تحلیل این دسته از مواد آغاز کردند.

- 
1. Transversely Isotropic
  2. Circular Ring
  3. Bao
  4. Thermo-electromechanical
  5. Hamilton
  6. Kapuria
  7. Fourier

در سال ۱۹۹۹ هورگان<sup>۱</sup> و چان<sup>۲</sup> [۱۵] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، معادلات حاکم بر استوانه‌ها و دیسک‌های جدار ضخیم ساخته شده از مواد FG که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را حل کردند. ایشان ضریب پوآسون را ثابت و مدول الاستیسیته را به صورت توانی در راستای شعاعی متغیر فرض کردند؛ همچنین نشان دادند خلاف استوانه‌های همگن که بیشینه تنش محیطی الزاماً در شعاع داخلی رخ می‌دهد، این امر در استوانه‌های ناهمگن صادق نبوده و ممکن است در شعاع خارجی رخ دهد که این موضوع بستگی به ثابت ناهمگنی مواد دارد.

در سال ۲۰۰۰ بن‌جی‌دو<sup>۳</sup> [۱۶] مطالعه‌ای اجمالی بر پیشرفت مدل‌سازی اجزای محدود پیزوالکتریک المان‌های سازه‌ای وفقی انجام داد. در طی این مطالعه، ایشان نحوه‌ی استخراج معادلات وردشی<sup>۴</sup> برای محیط الکترومکانیک<sup>۵</sup> را نیز ارائه کردند.

حل دقیق پیزوترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FG با استفاده از سری توانی و فوریه، توسط ژیاو-هونگ<sup>۶</sup> و همکاران [۱۷] در سال ۲۰۰۳ ارائه شد. ایشان توزیع ناهمگنی را در استوانه به صورت توانی مورد مطالعه قرار دادند و با استفاده از تبدیل هانکل<sup>۷</sup> معادله‌ی انتقال حرارت هدایتی فوریه در حالت پایدار را حل و میدان دما را به صورت معین در معادلات فرض کردند؛ ایشان معادلات حاکم را در حالتی حل کردند که شرایط مرزی مکانیکی و الکتریکی دو سر استوانه به صورت تکیه‌گاه ساده<sup>۸</sup> و اتصال زمین در نظر گرفته شود. در این پژوهش نشان داده شد ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر روی رفتار پیزوالکتریک<sup>۹</sup> دارد.

در اوایل سال ۲۰۰۵ بن‌جی‌دو و آندریان‌آری‌سون<sup>۹</sup> [۱۸] نظریه‌ی ترموپیزوالکتریک همراه با

- 
1. Horgan
  2. Chan
  3. Benjeddou
  4. Variational
  5. Electro-mechanical
  6. Xiao-Hong
  7. Hankel
  8. Simply Suport
  9. Andrianarison

وردش را برای کامپوزیت‌های چند لایه‌ی هوشمند<sup>۱</sup> ارائه کردند. شائو<sup>۲</sup> [۱۹] در همین سال با استفاده از روش چند لایه کردن، استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار و حرارت پایدار قرار داشت، تحلیل کرد. ایشان استوانه را به لایه‌هایی تقسیم نمود که تغییرات خواص در آن‌ها اندک بود و می‌توانست خواص را در آن‌ها ثابت فرض کند؛ همچنین کلیه‌ی خواص را در جهت شعاعی به صورت کسر حجمی متغیر در نظر گرفت و با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته، معادلات حاکم بر استوانه را استخراج نمود، سپس با استفاده از سری‌ها و اعمال شرایط پیوستگی در مرز لایه‌ها، معادله‌ی حاکم را تنها در حالتی که شرایط تکیه‌گاهی دو سر استوانه ساده و دمای آن‌ها صفر باشد، حل کرد.

هونگ-جان<sup>۳</sup> و همکاران [۲۰] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، استوانه‌ی جدار ضخیمی که ضریب پواسون و مدول الاستیسیته‌ی آن به صورت خطی و نمایی تغییر می‌کرد را به صورت یکپارچه و چند لایه، در سال ۲۰۰۶ مورد تحلیل قرار دادند. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشت و در تمامی حالت‌ها جز حالت مربوط به حل تحلیلی برای استوانه‌ی یکپارچه‌ی با خواص متغیر خطی، ضریب پواسون را ثابت در نظر گرفتند. حل به دست آمده مربوط به حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای بود. نتایج نشان می‌داد که تغییر خواص از نمایی به خطی و یا بالعکس، باعث تغییر چندانی بر روی توزیع تنش شعاعی نمی‌گردد اما این امر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را با شدت بیشتری دست‌خوش تغییر می‌کند.

در اوایل سال ۲۰۰۷ ژیفای<sup>۴</sup> و همکاران [۲۱] معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را با استفاده از الاستیسیته‌ی مستوی، تنها در حالت کرنش صفحه‌ای استخراج نمودند. ایشان تغییرات خواص در استوانه‌ی ناهمگن را تنها برای مدول الاستیسیته‌ی آن در نظر گرفتند و به صورت خطی مدل کردند. سپس معادلات حاکم را با دو روش، یک بار با استفاده از چند لایه کردن استوانه به لایه‌هایی با خواص ثابت و به‌کارگیری حل لامه همراه

---

1. Smart  
2. Shao  
3. Hongjun  
4. Zhifei

با روش بازگشتی که از شرایط مرزی پیوستگی بر روی تنش و جابه‌جایی شعاعی بین لایه‌ها استفاده می‌کرد و بار دیگر با در نظر گیری استوانه یکپارچه با خواص متغیر، حل کردند. همچنین نشان دادند که در روش چند لایه کردن با افزایش تعداد لایه‌ها، مقدار جابه‌جایی شعاعی به دست آمده در داخل استوانه کاهش می‌یابد. اندکی بعد در همین سال، توتونچو<sup>۱</sup> [۲۲] پژوهشی مشابه با کار گذشته [۲۰] را انجام داد. ایشان با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به‌کارگیری سری فریبینیوس، استوانه جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی قرار داشت و مدول الاستیسیته آن به صورت نمایی تغییر می‌کرد را در حالت کرنش صفحه‌ای حل کرد. در این پژوهش اثر تغییر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی مورد مطالعه قرار گرفت. در همین زمان وو<sup>۲</sup> و تسای<sup>۳</sup> [۲۳] حل سه بعدی مگنتوالکتروالاستیک<sup>۴</sup> پوسته‌های FG دارای دو انحنای، که دارای شرایط مرزی مکانیکی، الکتریکی و مغناطیسی کاملاً ساده تکیه‌گاهی در لبه‌ی خود بودند را ارائه کردند. ایشان توزیع ناهمگنی خواص را به صورت کسر حجمی در نظر گرفتند و نشان دادند؛ میدان سینماتیک به دست آمده از نظریه‌ی جفت‌شده‌ی<sup>۵</sup> کلاسیک پوسته ممکن است برای پوسته‌های FG و مگنتوالکتروالاستیک مناسب نباشد؛ به ویژه زمانی که بارهای مغناطیسی و الکتریکی وجود دارد.

لی<sup>۶</sup> و پنگ<sup>۷</sup> [۲۴] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به‌کارگیری روش انتگرال فردهولم<sup>۸</sup> حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن تحت فشار داخلی را به دست آوردند. ایشان توزیع ناهمگنی خواص را در استوانه به صورت دلخواه در نظر گرفتند اما نتایج را تنها برای حالتی که مدول الاستیسیته، به صورت توزیع توانی و کسر حجمی ساده شده تغییر می‌کرد، بیان کردند. همچنین مانند [۲۰] نشان دادند که تغییر نحوه‌ی توزیع خواص، در تغییر نتایج به دست آمده

- 
1. Tutuncu
  2. Wu
  3. Tsai
  4. Magneto-Electro-Elastic
  5. Coupled
  6. Li
  7. Peng
  8. Fredholm



برای تنش شعاعی اثری کم و در تنش محیطی اثری مشهود دارد. در همین سال کیهانی و همکاران [۲۵] حل تحلیلی انتقال حرارت پایدار هدایتی را در استوانه‌ی کامپوزیتی چند لایه ارائه کردند. ایشان نحوه‌ی چیدمان الیاف<sup>۱</sup> در هر لایه را به صورت محیطی در نظر گرفتند که به دور استوانه پیچیده می‌شد و با راستای محیطی استوانه زاویه داشت. در این پژوهش از انتقال حرارت در راستای طولی استوانه چشم‌پوشی شد و به صورت دو بعدی مورد مطالعه قرار گرفت که با استفاده از جداسازی متغیرها اقدام به حل معادله‌ی حاکم صورت پذیرفت و پاسخ آن به وسیله‌ی سری فوریه بیان شد.

در سال ۲۰۱۰ قنّاد و زمانی‌نژاد [۲۶] با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استوانه‌ی همگن دو سر گیردار را که تحت فشار داخلی قرار داشت، مورد تحلیل قرار دادند و تنش برشی را در استوانه بررسی کردند. ایشان نشان دادند که در مناطق دور از مرزهای دو سر استوانه تنش برشی به سمت صفر میل می‌کند و سبب می‌گردد تا تنش و جابه‌جایی، تابعی تنها از شعاع استوانه باشد درحالی‌که در حوالی مرز تابعی از شعاع و طول استوانه است و همچنین مشاهده کردند در نقاط دور از مرز توافقی خوبی بین نظریه‌ی تغییر شکل برشی و الاستیسیته‌ی مستوی وجود دارد. در همین سال، دای<sup>۲</sup> و همکاران [۲۷] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی حل تحلیلی سازه‌های توخالی از جنس مواد پیزوالکتریک متغیر تابعی<sup>۳</sup> را به دست آوردند. طبق این پژوهش استوانه و کره‌ی توخالی که تحت بارهای مکانیکی و الکتریکی قرار داشت و خواص آن به صورت توانی تغییر می‌کرد، مورد بررسی قرار گرفت؛ نتایج نشان می‌داد، ثابت ناهمگنی تأثیر زیادی بر روی تنش و پتانسیل الکتریکی دارد همچنین با ایجاد بار الکتریکی مناسب می‌توان توزیع تنش را در جسم کنترل کرد. اندکی بعد، لی و همکاران [۲۸] کاری مشابه پژوهش پیشین [۲۷] انجام دادند. ایشان با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به کارگیری انتگرال فردهولم حل دقیق استوانه‌های FGP را برای هر توزیع دلخواه ناهمگنی خواص، به دست آوردند و نتایج را، تنها برای زمانی که خواص به صورت توانی

---

1. Fiber  
2. Dai  
3. Functionally Graded Piezoelectric (FGP)

و کسر حجمی تغییر می‌کرد، نشان دادند و نتایجی مشابه [۲۷] به دست آوردند.

حیدرپور و همکاران [۲۹] در سال ۲۰۱۲ با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته، معادلات حاکم بر استوانه ناهمگن چرخان که تحت فشار داخلی و توزیع حرارت پایدار قرار داشت را در حالت کلی استخراج کردند و با استفاده از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم در راستای شعاعی و طولی همراه با اعمال شرایط پیوستگی و مرزی جابه‌جایی، تنش، دمایی و انتقال حرارتی منجر به ایجاد دستگاه معادلات خطی شدند و آن را حل کردند. ایشان ناهمگنی خواص را تنها به صورت کسر حجمی و وابسته به دما در نظر گرفتند و نشان دادند وابستگی خواص به دما تأثیر مشهودی بر روی جابه‌جایی و تنش دارد. در همین سال، رحیمی و همکاران [۳۰] به وسیله‌ی نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استوانه‌ی جدار ضخیم FGP را مورد تحلیل قرار دادند. در این پژوهش ناهمگنی خواص به صورت توانی مدل‌سازی شد و استوانه تحت فشار داخلی قرار داشت. ایشان نشان دادند نظریه‌ی تغییر شکل برشی اول مقادیر جابه‌جایی را با دقت خوبی پیش‌بینی می‌کند و در نواحی دور از مرز تطابق خوبی با نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی دارد. اندکی بعد، قنّاد و زمانی‌نژاد [۳۱] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و تعریف روابط ساختاری در حالت کلی (تنش و کرنش صفحه‌ای)، حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را به دست آوردند. ایشان ناهمگنی خواص برای مدول الاستیسیته به صورت توانی در نظر گرفتند و فرض کردند ضریب پواسون ثابت می‌باشد. همچنین نشان دادند برای افزایش یا کاهش تنش و جابه‌جایی، باید مقادیر مثبت یا منفی برای ثابت ناهمگنی اختیار گردد. در همین زمان ایشان [۳۲] با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند، مورد تحلیل قرار دادند. ایشان با بررسی و مقایسه نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی در نواحی دور از سر استوانه نشان دادند با افزایش ضخامت استوانه حل نیمه تحلیلی یا نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول از حل دقیق یا نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی دور می‌گردد و همچنین بیان نمودند که اختلاف نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول از

الاستیسیتی‌های مستوی در میزان جابه‌جایی شعاعی، وقتی ضخامت جداری استوانه برابر شعاع لایه‌ی میانی آن است، در حدود ۲۵٪ می‌باشد.

جدول ۱-۱ پژوهش‌های انجام شده را به صورت فهرست‌وار ارائه می‌کند.

جدول ۱-۱ پژوهش‌های صورت گرفته

سال	پژوهشگر	موضوع پژوهش
۱۸۵۲	لامه [۳]	حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم همگن با استفاده از PET
۱۹۹۴	تتزو و هووارد [۱۲]	ارائه‌ی نظریه‌ی پیژوترموالاستیک پوسته‌ی نازک
۱۹۹۵	تتزو و باو [۱۳]	ارائه‌ی نظریه‌ی پیژوترموالاستیک پوسته‌ی نازک ناهمسانگرد چند لایه با استفاده از اصل همپلتون
۱۹۹۶	کاپوریا و همکاران [۱۴]	حل تحلیلی پیژوترموالاستیک پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری محدود
۱۹۹۹	هورگان و چان [۱۵]	حل استوانه‌ها و دیسک‌های جدار ضخیم ناهمگن با استفاده از PET
۲۰۰۰	بن‌جی‌دو [۱۶]	مطالعه‌ی اجمالی بر پیشرفت مدل‌سازی اجزای محدود پیژوالکتریک المان‌های سازه‌ای وفقی
۲۰۰۳	ژی‌او-هونگ و همکاران [۱۷]	حل دقیق پیژوترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FG
۲۰۰۵	بن‌جی‌دو و آندریان‌آری‌سون [۱۸]	ارائه‌ی نظریه‌ی ترموپیزوالکتریک همراه با وردش برای کامپوزیت‌های چند لایه‌ی هوشمند
۲۰۰۵	شائو [۱۹]	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی جدار ضخیم ناهمگن با استفاده از روش چند لایه کردن،
۲۰۰۶	هونگ-جان و همکاران [۲۰]	آنالیز الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش چند لایه کردن با استفاده از PET
۲۰۰۷	ژی‌فای و همکاران [۲۱]	حل دقیق الاستیک استوانه‌های ناهمگن با روش‌های چند لایه کردن و یکپارچه در نظر گرفتن
۲۰۰۷	توتونچو [۲۲]	حل دقیق الاستیک استوانه‌های ناهمگن با استفاده از سری‌ها
۲۰۰۷	وو و تسای [۲۳]	حل سه بعدی مگنتوالکتروالاستیک پوسته‌های FG دارای دو انحنا
۲۰۰۹	لی و پنگ [۲۴]	حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با به‌کارگیری روش انتگرال فردهولم و استفاده از PET
۲۰۰۹	کیهانی و همکاران [۲۵]	حل تحلیلی انتقال حرارت پایدار هدایتی در استوانه‌های کامپوزیتی
۲۰۱۰	قناد و زمانی‌نژاد [۲۶]	حل تحلیلی استوانه‌ی همگن دو سر گیردار با استفاده از FSDT

۲۰۱۰	دای و همکاران [۲۷]	حل تحلیلی سازه‌های توخالی FGP با استفاده از PET
۲۰۱۰	لی و همکاران [۲۸]	حل دقیق استوانه‌های FGP با به‌کارگیری روش انتگرال فردهولم و استفاده از PET
۲۰۱۲	حیدرپور و همکاران [۲۹]	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن چرخان با استفاده از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم
۲۰۱۲	رحیمی و همکاران [۳۰]	تحلیل الکترومکانیک استوانه‌ی ناهمگن FGP با استفاده از FSDT
۲۰۱۲	قنّاد و زمانی‌نژاد [۳۱]	حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن
۲۰۱۲	قنّاد و زمانی‌نژاد [۳۲]	تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن با استفاده از FSDT

## ۹-۱ جمع‌بندی

در بخش گذشته مطالبی درباره‌ی پیشینه‌ی پژوهش حاضر بیان شد، می‌توان استنباط نمود که هنوز مطالعه‌ی جامع و کاملی بر روی استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن پیزوالکتریک صورت نگرفته است؛ اگرچه مواردی پژوهش‌های پیزوترموالاستیک در این زمینه صورت گرفته، ولی این پژوهش‌ها یا با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی صورت گرفته که تنها باعث دیده شدن رفتار استوانه در راستای ضخامت (شعاعی) می‌شود و یا برای استوانه‌ای صورت گرفته که تنها دارای شرایط مرزی مشخص و معینی در دو سر خود می‌باشد.

با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و استخراج دستگاه معادله‌ی حاکم با روش انرژی می‌توان به مطالعه‌ی جامع و کاملی در این زمینه پرداخت که در سایه‌ی آن رفتار مکانیکی، الکتریکی و حرارتی استوانه نه تنها در راستای شعاعی بلکه در راستای طولی نیز مطالعه شوند و آثار تنش و کرنش برشی نیز بررسی گردد. همچنین این پژوهش تنها قابل استفاده برای شرایط مرزی خاص و مشخص در دو سر استوانه نیست و می‌توان تحلیل و نتایج آن را برای شرایط مرزی متفاوت مکانیکی، الکتریکی و حرارتی به کار برد.

## فصل ۲

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان FGPM به  
کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

---

## ۲-۱ پیش‌گفتار

در این فصل ابتدا به کمک منابع موجود، به استخراج اصل همیلتون توسعه‌یافته برای یک ماده‌ی FGM پیزوالکتریک در حالت کلی که تحت بارهای مکانیکی، الکتریکی و حرارتی قرار دارد، با استفاده از نمادگذاری شاخصی<sup>۱</sup> پرداخته می‌شود؛ سپس با استفاده از اصل همیلتون توسعه‌یافته، استخراج معادلات حاکم، برای مسأله مورد مطالعه با توجه به فرضیات آن انجام می‌گیرد. در پایان پس از استخراج دستگاه معادلات، نحوه‌ی حل آن بیان می‌گردد.

## ۲-۲ استخراج اصل همیلتون توسعه‌یافته

در این بخش، با استفاده از مراجع [۱۶] و [۱۸] به استخراج اصل همیلتون توسعه‌یافته برای تحلیل پیزوترموالاستیک پرداخته می‌شود.

### ۲-۲-۱ معادلات دیورژانس

معادلات زیر، معادلات تنش خطی حرکت، معادله‌ی بار خطی الکترواستاتیک و معادله‌ی تعادل پایدار انرژی حرارتی را بیان می‌کند.

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad \text{in } \Omega \quad (1-2)$$

$$D_{i,i} - q = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2-2)$$

$$h_{i,i} - s = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3-2)$$

که  $\sigma_{ij}$ ،  $D_i$  و  $h_i$  به ترتیب بیانگر مؤلفه‌های، تانسور تنش متقارن کوشی<sup>۲</sup>، بردار جابه‌جایی الکتریکی و بردار شار حرارتی می‌باشند؛ همچنین  $\rho$  و  $u_i$  به ترتیب بیانگر چگالی و مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی می‌باشند.  $f_i$ ،  $q$  و  $s$  به ترتیب، مؤلفه‌های نیروهای حجمی مکانیکی، چگالی بار الکتریکی

1. Indicial Notation  
2. Cauchy

آزاد و منبع گرمایی حجمی در محیط مادی پیزوالکتریک ( $\Omega$ ) می‌باشند.

واضح است که در نوشتار استاندارد تانسوری (نمادگذاری شاخصی)، زیرنویس لاتین استفاده شده، از ۱ تا ۳ متغیر است. این زیرنویس‌ها زمانی که تکرار شوند از قرارداد جمع انیشتین<sup>۱</sup> پیروی می‌کنند. در معادلات فوق قرار دادن نقطه ( $\dot{\phantom{x}}$ ) و ویرگول ( $\phantom{x},$ ) به ترتیب بیانگر مشتق زمانی و مشتق جزئی مرتبه‌ی یک نسبت به مختصات کارتزین<sup>۲</sup>  $x_1, x_2, x_3$  فضای اقلیدسی<sup>۳</sup> سه بعدی می‌باشد.

## ۲-۲-۲ معادلات گرادیان

برای روابط گرادیان با توجه به کرنش خطی-جابجایی مکانیکی، میدان الکتریکی خطی-پتانسیل الکتریکی و میدان حرارتی خطی-تغییرات دمایی داریم.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (۴-۲)$$

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad (۵-۲)$$

$$e_i = -\Theta_{,i} \quad (۶-۲)$$

که  $\varepsilon_{ij}$ ،  $E_i$  و  $e_i$  به ترتیب مؤلفه‌های، تانسور متقارن کرنش لاگرانژی<sup>۴</sup>، بردار شبه ایستای<sup>۵</sup> میدان الکتریکی، بردار میدان حرارتی می‌باشند؛ همچنین  $\varphi$  و  $\Theta$  به ترتیب بیانگر پتانسیل الکتریکی و تغییرات دمایی از دمای ثابت مثبت مرجع ( $\Theta^*$ ) می‌باشد.

## ۳-۲-۲ معادلات ساختاری

در دانش دماپویایی<sup>۶</sup>، فرضیه‌ای اساسی وجود دارد که بیان می‌کند؛ حالت ماده به وسیله‌ی مقادیر مجموعه‌ی مشخصی از متغیرهای مستقل به طور کامل تعیین می‌گردد، این متغیرهای مستقل شامل

- 
1. Einstein
  2. Cartesian
  3. Euclidean
  4. Lagrange
  5. Quasi-Static
  6. Thermodynamics

متغیرهای سینماتیک<sup>۱</sup> (کرنش‌ها  $(\varepsilon_{ij})$  و ...) و دما می‌باشند. بعلاوه، رفتار ساختاری با تعیین دو تابع حالت به طور کامل تعریف می‌گردد. این دو تابع، تابع انرژی پتانسیل حالت اولیه‌ی متغیرهای مذکور و تابع اتلاف می‌باشد. متغیرهای سه‌گانه‌ی  $(\varepsilon_{ij}, E_i, e_i, \Theta)$  در اینجا، به عنوان متغیرهای حالت آغازین انتخاب شده‌اند که با متغیرهای حالت در کنار هم  $(\sigma_{ij}, D_i, h_i, \eta)$ ، ارتباط دارند. متغیر  $\eta$  چگالی آنروپی<sup>۲</sup> می‌باشد؛ بنابراین برای معادلات ساختاری داریم.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{in } \Omega \quad (7-2)$$

$$D_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial E_i} \quad \text{in } \Omega \quad (8-2)$$

$$h_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial e_i} \quad \text{in } \Omega \quad (9-2)$$

روابط فوق با استفاده از پتانسیل ترموپیزوالکتریک  $\Pi$  بیان شده است که می‌توان آن را بر حسب عبارات، تابع گیبس<sup>۳</sup> الکتریکی  $G$  و تابع اتلاف  $F$  به صورت زیر بیان نمود.

$$\Pi(\varepsilon_{ij}, E_i, e_i, \Theta) = G(\varepsilon_{ij}, E_i, \Theta) - F(e_i) \quad (10-2)$$

با بسط دادن  $G$  با توجه به کمیت‌های کوچک  $(\varepsilon_{ij}, E_i, \Theta)$ ، شکل درجه‌دوم<sup>۴</sup> تابع گیبس الکتریکی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$G = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_i E_j - e_{ijk} \varepsilon_{ij} E_k - \frac{1}{2} \alpha \Theta^2 - p_i \Theta E_i - \lambda_{ij} \varepsilon_{ij} \Theta \quad (11-2)$$

که  $c_{ijkl}$ ،  $e_{ijk}$  و  $\varepsilon_{ij}$  به ترتیب ثوابت الاستیک، پیزوالکتریک-تنش و دی‌الکتریک ماده می‌باشند، همچنین  $\alpha$ ،  $p_i$  و  $\lambda_{ij}$  نیز به ترتیب ثابت انبساط حرارتی، ثوابت پایروالکتریک و تنش حرارتی-دما هستند. شکل درجه‌دوم تابع اتلاف بیان شده در معادله‌ی (۱۰-۲) به این صورت می‌باشد.

$$F = \frac{1}{2} k_{ij} e_i e_j \quad (12-2)$$

- 
1. Kinematic
  2. Entropy Density
  3. Gibbs
  4. Quadratic



که  $k_{ij}$  بیانگر ضرایب هدایت حرارتی می‌باشد. با استفاده از روابط (۲-۱۰) تا (۲-۱۲) می‌توان معادلات ساختاری را به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k - \lambda_{ij} \Theta \quad \text{in } \Omega \quad (۲-۱۳)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k + p_i \Theta \quad \text{in } \Omega \quad (۲-۱۴)$$

$$h_i = k_{ij} e_j \quad \text{in } \Omega \quad (۲-۱۵)$$

## ۲-۲-۴ شرایط مرزی

جسم مادی پیزوالکتریک بر روی مرز سطحی خود  $S$ ، می‌تواند به وسیله‌ی نیروهای سطحی مکانیکی  $F_i$ ، بار الکتریکی سطحی  $Q$  و شار حرارتی  $H$  که به ترتیب روی مرز سطحی  $S_F$ ،  $S_Q$  و  $S_H$  اعمال شده‌اند، تحت بارگذاری قرار بگیرد. همچنین مرز سطحی جسم پیزوالکتریک می‌تواند تأییدکننده‌ی، جابه‌جایی مکانیکی  $\bar{u}_i$  روی مرز سطحی  $S_u$  ( $S_F \cup S_u = S$  و  $S_F \cap S_u = \emptyset$ )، پتانسیل الکتریکی  $\bar{\varphi}$  روی مرز سطحی  $S_\varphi$  ( $S_Q \cup S_\varphi = S$  و  $S_Q \cap S_\varphi = \emptyset$ ) و تغییرات دمایی  $\bar{\Theta}$  روی مرز سطحی  $S_\Theta$  ( $S_H \cup S_\Theta = S$  و  $S_H \cap S_\Theta = \emptyset$ ) که متحمل شده است، باشد. این شرایط مرزی مکانیکی، الکتریکی و حرارتی را می‌توان به شکل زیر بیان نمود.

$$\sigma_{ij} n_j = F_i \quad \text{on } S_F \quad u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u \quad (۲-۱۶)$$

$$D_i n_i = -Q \quad \text{on } S_Q \quad \varphi = \bar{\varphi} \quad \text{on } S_\varphi \quad (۲-۱۷)$$

$$h_i n_i = -H \quad \text{on } S_H \quad \Theta = \bar{\Theta} \quad \text{on } S_\Theta \quad (۲-۱۸)$$

در روابط فوق  $n_j$  یا  $n_i$  نشان‌دهنده‌ی مؤلفه‌های بردار یک‌ه‌ی عمود بر سطح است که جهت آن به سمت خارج جسم مادی پیزوالکتریک می‌باشد. همچنین قرار دادن خط افقی بر روی کمیت‌ها ( $\bar{\quad}$ ) بیانگر معلوم بودن آن‌ها است.

## ۲-۲-۵ استخراج معادلات پیزوالکتریک وردشی

برای متغیرهای فضایی دلخواه جابه‌جایی  $\delta u_i$ ، پتانسیل الکتریکی  $\delta\varphi$  و تغییرات دمایی  $\delta\Theta$  که مجازی و پذیرفتنی می‌باشند، معادلات (۱-۲) تا (۳-۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i d\Omega + \int_{\Omega} (D_{i,i} - q) \delta\varphi d\Omega + \int_{\Omega} (h_{i,i} - s) \delta\Theta d\Omega = 0 \quad (۱۹-۲)$$

با انتگرال‌گیری از هر قسمت در معادله‌ی (۱۹-۲) و استفاده از قضیه‌ی دیورژانس<sup>۱</sup> خواهیم

داشت.

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega + \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega \\ & -\int_{\Omega} D_i \delta\varphi_{,i} d\Omega + \int_S D_i n_i \delta\varphi dS - \int_{\Omega} q \delta\varphi d\Omega \\ & -\int_{\Omega} h_i \delta\Theta_{,i} d\Omega + \int_S h_i n_i \delta\Theta dS - \int_{\Omega} s \delta\Theta d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (۲۰-۲)$$

با استفاده از خاصیت تقارن تانسور تنش، شرایط مرزی (۱۶-۲) تا (۱۸-۲) و معادلات گرادیان

(۴-۲) تا (۶-۲)، خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega + \int_S F_i \delta u_i dS + \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega \\ & + \int_{\Omega} D_i \delta E_i d\Omega - \int_S Q \delta\varphi dS - \int_{\Omega} q \delta\varphi d\Omega \\ & + \int_{\Omega} h_i \delta e_i d\Omega - \int_S H \delta\Theta dS - \int_{\Omega} s \delta\Theta d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (۲۱-۲)$$

اکنون، با فرض این امر که  $\delta u_i$ ،  $\delta\varphi$  و  $\delta\Theta$  وابسته به زمان است و برای هر دو زمان دلخواه  $t_0$

و  $t_1$  اگرچه مقداری ثابت دارد ولی قابل چشم‌پوشی کردن است، عبارت زیر به دست می‌آید.

$$-\int_{t_0}^{t_1} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta \left( \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \right) dt \quad (۲۲-۲)$$

## ۲-۲-۶ اصل همیلتون توسعه‌یافته

زمانی که عبارت (۲۲-۲) در معادله‌ی (۲۱-۲) استفاده شود، اصل همیلتون توسعه‌یافته برای

فضای دلخواه و  $\delta u_i$ ،  $\delta\varphi$  و  $\delta\Theta$  وابسته به زمان که در دو زمان  $t_0$  و  $t_1$  ناچیزند، به شکل زیر به

1. Divergence

دست می‌آید.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0; L = (T - V + W) \quad (23-2)$$

در رابطه‌ی فوق  $L$  فانکشنال لاگرانژی<sup>۱</sup>،  $T$  انرژی جنبشی،  $V$  انرژی الکتروترمودمکانیکی<sup>۲</sup> و

$W$  کار ناشی از نیروهای مکانیکی، الکتریکی و حرارتی می‌باشد که با استفاده از روابط زیر تعریف

می‌شوند.

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega \quad (24-2)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i - h_i e_i) d\Omega \quad (25-2)$$

$$W = \int_S F_i u_i dS + \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega - \int_S Q \varphi dS - \int_{\Omega} q \varphi d\Omega - \int_S H \Theta dS - \int_{\Omega} s \Theta d\Omega \quad (26-2)$$

اگر روابط ساختاری (۲-۱۳) تا (۲-۱۵) در معادله‌ی (۲-۲۵) جایگزین شوند؛ اصل همیلتون یا

همان معادله‌ی (۲-۲۳)، به فانکشنال لاگرانژی ( $L$ ) ثابت برای  $\delta u_i$ ،  $\delta \varphi$  و  $\delta \Theta$  مجاز دلخواه، کاهش

می‌یابد که به صورت زیر قابل بیان می‌باشد.

$$\delta L = \delta T - \delta V + \delta W = 0 \quad (27-2)$$

## ۳-۲ استخراج دستگاه معادلات حاکم

در این بخش به کمک اصل همیلتون توسعه‌یافته و با استفاده از فرضیات حاکم بر مسأله، به

استخراج معادلات پرداخته می‌شود.

### ۳-۲-۱ فرضیات حاکم بر مسأله

پوسته‌ی استوانه‌ای مورد تحلیل از نظر هندسه، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی متقارن محوری

است و می‌توان از تغییرات در راستای محیطی استوانه  $\theta$  صرف‌نظر کرد ( $\frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) = 0$ )؛ بنابراین توابع

1. Lagrangian Functional  
2. Electrothermomechanical

بیان‌کننده‌ی رفتار مکانیکی، الکتریکی و حرارتی تنها تابعی از شعاع  $r$  و محور  $x$  استوانه می‌باشند. پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه در این پژوهش با سرعت دورانی ثابت  $\omega$ ، حول محور تقارن خود می‌چرخد ( $\dot{u}_\theta = r\omega$ ).

با توجه به آنچه که بیان شد؛ میدان جابه‌جایی در این حالت به شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} u_r = u_r(r, x) \\ u_\theta = r\omega t \\ u_x = u_x(r, x) \end{cases} \quad (2-28)$$

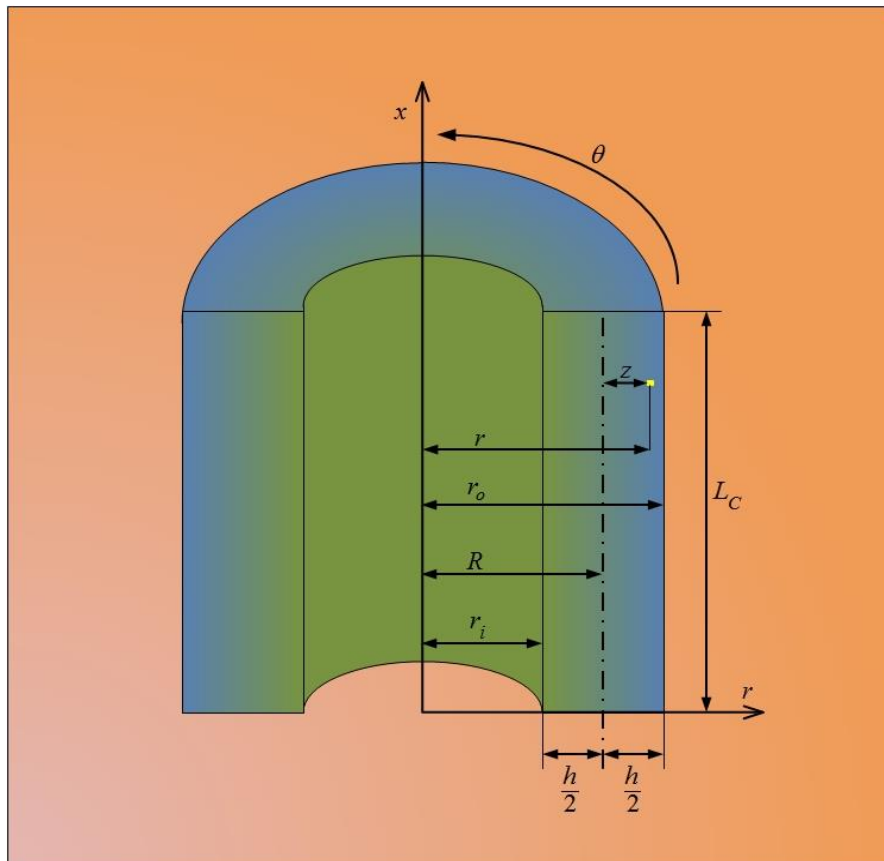
$u_r$ ،  $u_\theta$  و  $u_x$  مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و محوری هستند که  $u_r$  و  $u_x$ ، توابعی نامعلوم از شعاع و محور استوانه  $u_r(r, x)$  و  $u_x(r, x)$  می‌باشند؛ تنها جابه‌جایی در راستای محیطی  $u_\theta$  وضعیتی معلوم داشته و به صورت تابعی مشخص از سرعت دورانی ثابت  $\omega$ ، شعاع  $r$  و زمان  $t$  بیان شده است.

پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه دارای جداری ثابت می‌باشد و از جنس مواد ناهمگن و همسانگرد عرضی<sup>۱</sup> است که خاصیت ماده‌ی آن در راستای شعاعی متفاوت از دو راستای دیگر می‌باشد. ناهمگنی خواص در این پژوهش به صورت توانی در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از رابطه‌ی (۷-۱) که در فصل اول به آن اشاره شد، به مدل‌سازی ناهمگنی خواص جهت تحلیل پرداخته می‌شود.

### ۲-۳-۲ به‌کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

به منظور به‌کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مطابق شکل ۲-۱ فاصله‌ی هر نقطه از پوسته‌ی استوانه‌ای تا محور تقارن آن  $r$  به صورت فاصله‌ی آن تا لایه‌ی میانی استوانه  $z$  بعلاوه فاصله‌ی لایه‌ی میانی تا محور تقارن استوانه  $R$  بیان می‌شود. این کار، سبب تغییر مختصه و جزء دیفرانسیلی<sup>۲</sup>، از  $r$  به  $z$  می‌گردد ( $(dr, (r, \theta, x)) \Rightarrow dz, (z, \theta, x)$ ).

1. Transversely Isotropic  
2. Differential Element



شکل ۱-۲ مقطع استوانه‌ی جدار ثابت ناهمگن

فرآیند تغییر مختصه‌ی شعاعی  $r$  و نتایج ناشی از آن به صورت زیر بیان می‌شود.

$$r = R + z, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad dr = dz \quad ; \quad (r, \theta, x) \Rightarrow (z, \theta, x) \quad (29-2)$$

در روابط فوق  $h$  ضخامت استوانه است. همچنین در ادامه، رابطه‌ی میان شعاع داخلی  $r_i$  و

خارجی  $r_o$  استوانه با شعاع لایه‌ی میانی استوانه  $R$  و ضخامت  $h$  بیان می‌گردد.

$$R = \frac{r_o - r_i}{2} \quad (30-2)$$

$$h = r_o - r_i \quad (31-2)$$

لازم به ذکر است رابطه‌ی مختصه‌ی محوری  $x$  و طول استوانه  $L_C$  نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$0 \leq x \leq L_C \quad (32-2)$$

### میدان جابه‌جایی مرتبه‌ی اول

با در نظر گرفتن میدان جابه‌جایی بیان شده، با توجه به فرضیات حاکم بر مسأله‌ی مورد مطالعه

(۲۸-۲) و نظریه‌ی تغییر شکل برشی در فصل اول (۶-۱)، میدان جابه‌جایی برای پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه به شکل زیر بیان می‌گردد.

$$\begin{cases} U_z = U_z(z, x) = U_z(0, x) + z \frac{\partial U_z(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} = U_z^0(x) + z U_z^1(x) = U_z^0 + z U_z^1 \\ U_\theta = (R + z)\omega t \\ U_x = U_x(z, x) = U_x(0, x) + z \frac{\partial U_x(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} = U_x^0(x) + z U_x^1(x) = U_x^0 + z U_x^1 \end{cases} \quad (۳۳-۲)$$

در رابطه‌ی فوق  $U_z$ ،  $U_\theta$  و  $U_x$  مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی و محوری می‌باشند؛ همچنین با توجه به نظریه‌ی تغییر شکل برشی،  $U_z^0$  و  $U_z^1$  به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر و یک جابه‌جایی شعاعی و  $U_x^0$  و  $U_x^1$  به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر و یک جابه‌جایی محوری است که تنها تابعی از مختصه‌ی محوری  $x$  می‌باشند.

### پتانسیل الکتریکی مرتبه‌ی اول

با توجه به آنچه که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله بیان شد؛ رفتار مکانیکی، الکتریکی و حرارتی استوانه به دلیل تقارن محوری مستقل از مختصه‌ی محیطی  $\theta$  می‌باشد؛ بنابراین پتانسیل الکتریکی  $\varphi$  تابعی از مختصه‌ی شعاعی و محوری است  $\varphi(r, x)$ .  
نظر به استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، داریم:

$$\varphi = \varphi(z, x) = \varphi(0, x) + z \frac{\partial \varphi(z, x)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \varphi^0(x) + z \varphi^1(x) = \varphi^0 + z \varphi^1 \quad (۳۴-۲)$$

که  $\varphi^0$  و  $\varphi^1$  به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر و یک پتانسیل الکتریکی  $\varphi$  می‌باشند که تنها تابعی از مختصه‌ی محوری  $x$  می‌باشند.

### تغییرات دمایی مرتبه‌ی اول

نظر به مطالب مذکور در بخش فرضیات حاکم، تغییرات دمایی  $\Theta$  نیز تابعی از مختصه‌ی شعاعی و محوری می‌باشد  $\Theta(r, x)$ .

با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تغییرات دمایی داریم.

$$\Theta = \Theta(z, x) = \Theta(0, x) + z \left. \frac{\partial \Theta(z, x)}{\partial z} \right|_{z=0} = \Theta^0(x) + z \Theta^1(x) = \Theta^0 + z \Theta^1 \quad (35-2)$$

در رابطه‌ی فوق  $\Theta^0$  و  $\Theta^1$  به ترتیب مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر و یک تغییرات دمایی  $\Theta$  می‌باشند که تنها تابع مختصه‌ی محوری  $x$  هستند.

### ۳-۳-۲ معادلات گرادیان در مختصات استوانه‌ای

در این بخش با بیان روابط گرادیان (۴-۲) تا (۶-۲) با استفاده از [۳۳]، در مختصات استوانه‌ای و استفاده از روابط (۳۳-۲) تا (۳۵-۲) برای میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و تغییرات دمایی، به استخراج میدان کرنش، میدان الکتریکی و میدان حرارتی پرداخته می‌شود.

#### الف- میدان کرنش

در ادامه، ابتدا روابط کرنش‌های نرمال شعاعی  $\varepsilon_r$ ، محیطی  $\varepsilon_\theta$  و محوری  $\varepsilon_x$  با میدان جابه‌جایی در مختصات استوانه‌ای بیان می‌گردد، سپس با استفاده از رابطه‌ی (۳۳-۲) کرنش‌های نرمال شعاعی  $\varepsilon_z$ ، محیطی  $\varepsilon_\theta$  و محوری  $\varepsilon_x$ ، برای نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول یا مختصات  $(z, \theta, x)$  استخراج می‌گردد.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = U_z^1 \quad (36-2)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_\theta}{R+z} = \frac{U_\theta^0 + z U_\theta^1}{R+z} \quad (37-2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{dU_x^0}{dx} + z \frac{dU_x^1}{dx} \quad (38-2)$$

همچنین، روابط کرنش‌های برشی شعاعی-محیطی  $\gamma_{r\theta}$ ، شعاعی-محوری  $\gamma_{rx}$  و محیطی-محوری  $\gamma_{\theta x}$ ، در مختصات استوانه‌ای بیان می‌گردند و با به‌کارگیری میدان جابه‌جایی بیان شده در رابطه‌ی (۳۳-۲) کرنش‌های برشی شعاعی-محیطی  $\gamma_{z\theta}$ ، شعاعی-محوری  $\gamma_{zx}$  و محیطی-محوری  $\gamma_{\theta x}$  برای مختصات  $(z, \theta, x)$  استخراج می‌گردد.

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \quad \rightarrow \quad \gamma_{z\theta} = -\frac{U_\theta}{R+z} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} = -\omega t + \omega t = 0 \quad (39-2)$$

$$\gamma_{rx} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \rightarrow \gamma_{zx} = \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} = \frac{dU_z^0}{dx} + z \frac{dU_z^1}{dx} + U_x^1 \quad (40-2)$$

$$\gamma_{\theta x} = \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \rightarrow \gamma_{\theta x} = \frac{\partial U_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial U_x}{\partial \theta} = 0 \quad (41-2)$$

برای تانسور میدان کرنش  $\bar{\epsilon}$ ، در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول داریم:

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} U_z^1 & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{dU_z^0}{dx} + z \frac{dU_z^1}{dx} + U_x^1 \right) \\ 0 & \frac{U_z^0 + z U_z^1}{R+z} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{dU_z^0}{dx} + z \frac{dU_z^1}{dx} + U_x^1 \right) & 0 & \frac{dU_x^0}{dx} + z \frac{dU_x^1}{dx} \end{bmatrix} \quad (42-2)$$

### ب- میدان الکتریکی

در این قسمت به بیان معادله‌ی (۵-۲) و مؤلفه‌های شعاعی  $E_r$ ، محیطی  $E_\theta$  و محوری  $E_x$ ،

میدان الکتریکی در مختصات استوانه‌ای پرداخته می‌شود، سپس به کمک روابط (۳۴-۲) مؤلفه‌های

شعاعی  $E_z$ ، محیطی  $E_\theta$  و محوری  $E_x$ ، میدان الکتریکی در مختصات  $(z, \theta, x)$  به دست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_x \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} E_z \\ E_\theta \\ E_x \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{1}{(R+z)} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \varphi^1 \\ 0 \\ \frac{d\varphi^0}{dx} + z \frac{d\varphi^1}{dx} \end{Bmatrix} \quad (43-2)$$

برای بردار میدان الکتریکی  $\bar{E}$ ، در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول داریم:

$$\bar{E} = - \begin{Bmatrix} \varphi^1 \\ 0 \\ \frac{d\varphi^0}{dx} + z \frac{d\varphi^1}{dx} \end{Bmatrix} \quad (44-2)$$

### ب- میدان حرارتی

با بیان معادله‌ی (۶-۲) در مختصات استوانه‌ای، مؤلفه‌های شعاعی  $E_r$ ، محیطی  $E_\theta$  و محوری

$E_x$ ، میدان حرارتی تعیین می‌گردند، سپس با استفاده از رابطه‌ی (۳۵-۲)، مؤلفه‌های شعاعی  $E_z$ ،



محیطی  $E_\theta$  و محوری  $E_x$ ، میدان حرارتی برای نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مشخص می‌گردد.

$$\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_x \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} e_z \\ e_\theta \\ e_x \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \\ \frac{1}{(R+z)} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Theta^1 \\ 0 \\ \frac{d\Theta^0}{dx} + z \frac{d\Theta^1}{dx} \end{Bmatrix} \quad (45-2)$$

برای بردار میدان حرارتی  $\vec{e}$ ، داریم.

$$\vec{e} = - \begin{Bmatrix} \Theta^1 \\ 0 \\ \frac{d\Theta^0}{dx} + z \frac{d\Theta^1}{dx} \end{Bmatrix} \quad (46-2)$$

### ۲-۳-۴ معادلات ساختاری استوانه‌ی مورد مطالعه

نظر به آنچه که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله، درباره‌ی جنس استوانه گفته شد؛ با استفاده از

معادلات ساختاری (۲-۱۳) تا (۲-۱۵)، [۳۴] و [۲۵]، در ادامه روابط ساختاری بیان می‌گردد.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{z\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{35} \\ 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ E_\theta \\ E_x \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Theta \quad (47-2)$$

$$\begin{Bmatrix} D_z \\ D_\theta \\ D_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_z \\ E_\theta \\ E_x \end{Bmatrix} \quad (48-2)$$

$$\begin{Bmatrix} h_z \\ h_\theta \\ h_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_z \\ e_\theta \\ e_x \end{Bmatrix} \quad (49-2)$$

که  $c_{11}$ ،  $c_{12}$ ،  $c_{22}$ ،  $c_{23}$ ،  $c_{44}$  و  $c_{55}$  ثوابت الاستیک،  $e_{11}$ ،  $e_{12}$  و  $e_{35}$  ثوابت پیزوالکتریک-تنش،  $\lambda_{11}$  و  $\lambda_{22}$  ثوابت تنش حرارتی-دما،  $\epsilon_{11}$  و  $\epsilon_{22}$  ثوابت دی‌الکتریک و  $k_{11}$  و  $k_{22}$  ضرایب هدایت حرارتی ماده، در روابط فوق می‌باشند.

با استفاده از معادلات (۲-۴۲)، (۲-۴۴) و (۲-۴۶) و نظر به این امر که برخی از مؤلفه‌های میدان کرنش، الکتریکی و حرارتی صفر می‌باشند؛ می‌توان روابط ساختاری (۲-۴۷) تا (۲-۴۹) را به شکل کاهش‌یافته‌ی زیر بیان نمود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{12} & c_{23} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_x \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} & 0 \\ e_{12} & 0 \\ e_{12} & 0 \\ 0 & e_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ E_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \Theta \quad (50-2)$$

$$\begin{bmatrix} D_z \\ D_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_x \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_z \\ E_x \end{bmatrix} \quad (51-2)$$

$$\begin{bmatrix} h_z \\ h_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_z \\ e_x \end{bmatrix} \quad (52-2)$$

### مدل‌سازی ناهمگنی در خواص

جهت مدل‌سازی ناهمگنی در خواص، همان‌طور که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله بیان شد؛ از رابطه‌ی (۷-۱) یا توزیع توانی استفاده می‌شود. خواص به‌کاررفته برای تحلیل مسأله، روابط ساختاری (۲-۵۰) تا (۲-۵۲) و سایر خواص به صورت توانی، مدل‌سازی می‌شود.

### ناهمگنی ثوابت الاستیک

با استفاده از رابطه‌ی (۷-۱) ثوابت الاستیک به شکل تابعی از شعاع بیان می‌شوند که  $c_{11}^0$ ،  $c_{12}^0$ ،  $c_{23}^0$  و  $c_{55}^0$  ثوابت الاستیک در شعاع داخلی استوانه و  $np_1$ ،  $np_2$ ،  $np_3$ ،  $np_4$  و  $np_5$  ثوابت ناهمگنی هستند که به ترتیب مربوط به خواص  $c_{11}$ ،  $c_{12}$ ،  $c_{23}$  و  $c_{55}$  می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c_{11}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_1} = c_{11}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_1} \\
 c_{12} &= c_{12}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_2} = c_{12}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_2} \\
 c_{22} &= c_{22}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_3} = c_{22}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_3} \\
 c_{23} &= c_{23}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_4} = c_{23}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_4} \\
 c_{55} &= c_{55}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_5} = c_{55}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_5}
 \end{aligned} \tag{۵۳-۲}$$

### ناهمگنی ثوابت پیزوالکتریک-تنش

به کمک رابطه‌ی (۷-۱) برای ثوابت پیزوالکتریک-تنش داریم.

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= e_{11}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_6} = e_{11}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_6} \\
 e_{12} &= e_{12}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_7} = e_{12}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_7} \\
 e_{35} &= e_{35}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_8} = e_{35}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_8}
 \end{aligned} \tag{۵۴-۲}$$

در رابطه‌ی فوق  $e_{11}^0$ ،  $e_{12}^0$  و  $e_{35}^0$  ثوابت پیزوالکتریک-تنش در شعاع داخلی استوانه و  $np_7$ ،  $np_6$  و

$np_8$  ثوابت ناهمگنی هستند که به ترتیب مربوط به خواص  $e_{11}$ ،  $e_{12}$  و  $e_{35}$  می‌باشند.

### ناهمگنی ثوابت تنش حرارتی-دما

با استفاده از رابطه‌ی (۷-۱) برای ثوابت تنش حرارتی-دما داریم.

$$\begin{aligned}
 \lambda_{11} &= \lambda_{11}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_9} = \lambda_{11}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_9} \\
 \lambda_{22} &= \lambda_{22}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_{10}} = \lambda_{22}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_{10}}
 \end{aligned} \tag{۵۵-۲}$$

که در رابطه‌ی فوق  $\lambda_{11}^0$  و  $\lambda_{22}^0$  ثوابت تنش حرارتی-دما در شعاع داخلی استوانه و  $np_9$  و  $np_{10}$

ثوابت ناهمگنی هستند که به ترتیب مربوط به خواص  $\lambda_{11}$  و  $\lambda_{22}$  می‌باشند.

### ناهمگنی ثوابت دی‌الکتریک

برای ثوابت دی‌الکتریک با توجه به (۷-۱) داریم.

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \epsilon_{11}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_{11}} = \epsilon_{11}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_{11}} \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{22}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_{12}} = \epsilon_{22}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_{12}}\end{aligned}\quad (۵۶-۲)$$

$\epsilon_{11}^0$  و  $\epsilon_{22}^0$  ثوابت دی‌الکتریک در شعاع داخلی استوانه و  $np_9$  و  $np_{10}$  ثوابت ناهمگنی هستند که به ترتیب مربوط به خواص  $\epsilon_{11}$  و  $\epsilon_{22}$  در رابطه‌ی فوق می‌باشند.

### ناهمگنی ضرایب هدایت حرارتی

ضرایب هدایت حرارتی را با استفاده از رابطه‌ی (۷-۱) می‌توان به شکل تابعی از شعاع بیان کرد که  $k_{11}^0$  و  $k_{22}^0$  ضرایب هدایت حرارتی در شعاع داخلی استوانه و  $np_{13}$  و  $np_{14}$  ثوابت ناهمگنی هستند که به ترتیب مربوط به خواص  $k_{11}$  و  $k_{22}$  می‌باشند.

$$\begin{aligned}k_{11} &= k_{11}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_{11}} = k_{11}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_{11}} \\ k_{22} &= k_{22}^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_{12}} = k_{22}^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_{12}}\end{aligned}\quad (۵۷-۲)$$

### ناهمگنی چگالی

همچنین برای چگالی با توجه به رابطه‌ی (۷-۱) داریم.

$$\rho = \rho^0 \left( \frac{r}{r_i} \right)^{np_{15}} = \rho^0 \left( \frac{R+z}{r_i} \right)^{np_{15}}\quad (۵۸-۲)$$

که  $\rho^0$  مقدار چگالی در شعاع داخلی استوانه و  $np_{15}$  ثابت ناهمگنی مربوط به آن می‌باشد.

## ۲-۳-۵ محاسبه‌ی انرژی جنبشی

برای محاسبه‌ی انرژی جنبشی طبق رابطه‌ی (۲۴-۲) داریم.

$$T = \int_{\Omega} T^* d\Omega; \quad T^* = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i\quad (۵۹-۲)$$

که  $T^*$  چگالی انرژی جنبشی می‌باشد. با استفاده از رابطه‌ی (۲-۲۸) داریم.

$$T^* = \frac{1}{2} \rho(r\omega)(r\omega) \quad (۶۰-۲)$$

بنابراین برای انرژی جنبشی و تغییرات آن داریم.

$$T = \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \frac{1}{2} \rho(r\omega)(r\omega)r \, dr \, d\theta \, dz \Rightarrow \delta T = 0 \quad (۶۱-۲)$$

### ۳-۶ محاسبه‌ی انرژی الکتروترمودمکانیکی

برای محاسبه‌ی انرژی الکتروترمودمکانیکی طبق رابطه‌ی (۲-۲۵) و تعریف چگالی انرژی

الکتروترمودمکانیکی  $V^*$  داریم.

$$V = \int_{\Omega} V^* \, d\Omega; \quad V^* = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i - h_i e_i) \quad (۶۲-۲)$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی (۲-۲۱) برای تغییرات انرژی الکتروترمودمکانیکی داریم.

$$\delta V = \delta \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - D_i E_i - h_i e_i) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i - h_i \delta e_i) \, d\Omega \quad (۶۳-۲)$$

با گسترش و بیان روابط فوق بر حسب مختصه‌های نظریه‌ی تغییر شکل برشی  $(z, \theta, x)$ ، برای

تغییرات انرژی الکتروترمودمکانیکی خواهیم داشت.

$$\delta V = 2\pi \int_0^{L_c} \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_z \delta \varepsilon_z + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_x \delta \varepsilon_x + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} - D_z \delta E_z - D_x \delta E_x - h_z \delta e_z - h_x \delta e_x] R \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \, dx \quad (۶۴-۲)$$

اکنون به کمک روابط (۲-۳۶) تا (۲-۴۱)، رابطه‌ی (۲-۶۴) به شکل زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{2\pi} = & \int_0^{L_c} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \sigma_z \delta U_z^1 + \sigma_\theta \left( \frac{\delta U_z^0 + z \delta U_z^1}{R+z} \right) + \sigma_x \left( \frac{d}{dx} (\delta U_x^0) + z \frac{d}{dx} (\delta U_x^1) \right) \right. \\ & + \tau_{zx} \left( \left( \frac{d}{dx} (\delta U_z^0) + \delta U_x^1 \right) + z \frac{d}{dx} (\delta U_z^1) \right) \\ & + D_z \delta \phi^1 + D_x \left( \frac{d}{dx} (\delta \phi^0) + z \frac{d}{dx} (\delta \phi^1) \right) \\ & \left. + h_z \delta \Theta^1 + h_x \left( \frac{d}{dx} (\delta \Theta^0) + z \frac{d}{dx} (\delta \Theta^1) \right) \right] R \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \, dx \quad (۶۵-۲) \end{aligned}$$

### تعریف منتجه‌ها

اکنون به تعریف منتجه‌های مکانیکی، الکتریکی و حرارتی پرداخته می‌شود تا به کمک آن‌ها، ساده‌سازی رابطه‌ی (۶۵-۲) صورت گیرد.

### منتجه‌های مکانیکی

منتجه‌های مکانیکی  $N_z^m$ ،  $N_\theta^m$  و  $N_x^m$  به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N_z^m \\ N_\theta^m \\ N_x^m \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} dz \quad (۶۶-۲)$$

همچنین برای منتجه‌های مکانیکی  $M_\theta^m$  و  $M_x^m$  داریم.

$$\begin{Bmatrix} M_\theta^m \\ M_x^m \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{Bmatrix} z dz \quad (۶۷-۲)$$

منتجه‌های مکانیکی  $Q_x^m$  و  $M_{zx}^m$  با استفاده از تنش برشی  $\tau_{zx}$  تعریف می‌شوند. پژوهشگران

معتقدند توزیع تنش برشی  $\tau_{zx}$  در جدار استوانه به صورت سهمی‌وار یا به شکل درجه‌ی دو می‌باشد؛

حال آنکه با توجه به رابطه‌ی (۴۰-۲)، نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع تنش برشی  $\tau_{zx}$

را در داخل جدار استوانه به صورت خطی پیش‌بینی می‌کند، بنابراین ایشان استفاده از ضریب تصحیح

برشی  $K_S$  را جهت رفع این تفاوت پیشنهاد کرده‌اند که این ضریب تصحیح در این حالت برابر  $\frac{5}{6}$

می‌باشد [۳۵]. با توجه به آنچه بیان شد؛ برای  $Q_x^m$  و  $M_{zx}^m$  داریم.

$$Q_x^m = \int_{-h/2}^{h/2} K_S \tau_{zx} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad ; \quad M_{zx}^m = \int_{-h/2}^{h/2} K_S \tau_{zx} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (۶۸-۲)$$

### منتجه‌های الکتریکی

منتجه‌های الکتریکی  $N_z^e$  و  $N_x^e$  در ادامه تعریف می‌گردند.

$$\begin{Bmatrix} N_z^e \\ N_x^e \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} D_z \\ D_x \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (۶۹-۲)$$

همچنین برای منتجه‌ی الکتریکی  $M_x^e$  داریم.

$$M_x^e = \int_{-h/2}^{h/2} D_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z \, dz \quad (70-2)$$

### منتجه‌های حرارتی

برای نتیجه‌های حرارتی  $N_z^t$  و  $N_x^t$  رابطه‌ی زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{Bmatrix} N_z^t \\ N_x^t \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} h_z \\ h_x \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (71-2)$$

و همچنین برای  $M_x^t$  داریم.

$$M_x^t = \int_{-h/2}^{h/2} h_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) z \, dz \quad (72-2)$$

اکنون با استفاده از نتیجه‌های مکانیکی، حرارتی و الکتریکی، رابطه‌ی (۶۵-۲) را می‌توان بر

حسب نتیجه‌ها به شکل ساده‌تر زیر بیان نمود.

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{2\pi} = & \int_0^{L_c} R \left[ N_z^m \delta U_z^1 + N_\theta^m \frac{\delta U_z^0}{R} + N_x^m \left(\frac{d}{dx}(\delta U_x^0)\right) \right. \\ & + M_\theta^m \frac{\delta U_z^1}{R} + M_x^m \left(\frac{d}{dx}(\delta U_x^1)\right) \\ & + Q_x^m \left(\frac{d}{dx}(\delta U_z^0) + \delta U_x^1\right) + M_{zx}^m \left(\frac{d}{dx}(\delta U_z^1)\right) \\ & + N_z^e \delta \varphi^1 + N_x^e \left(\frac{d}{dx}(\delta \varphi^0)\right) + M_x^e \left(\frac{d}{dx}(\delta \varphi^1)\right) \\ & \left. + N_z^t \delta \Theta^1 + N_x^t \left(\frac{d}{dx}(\delta \Theta^0)\right) + M_x^t \frac{d}{dx}(\delta \Theta^1) \right] dx \quad (73-2) \end{aligned}$$

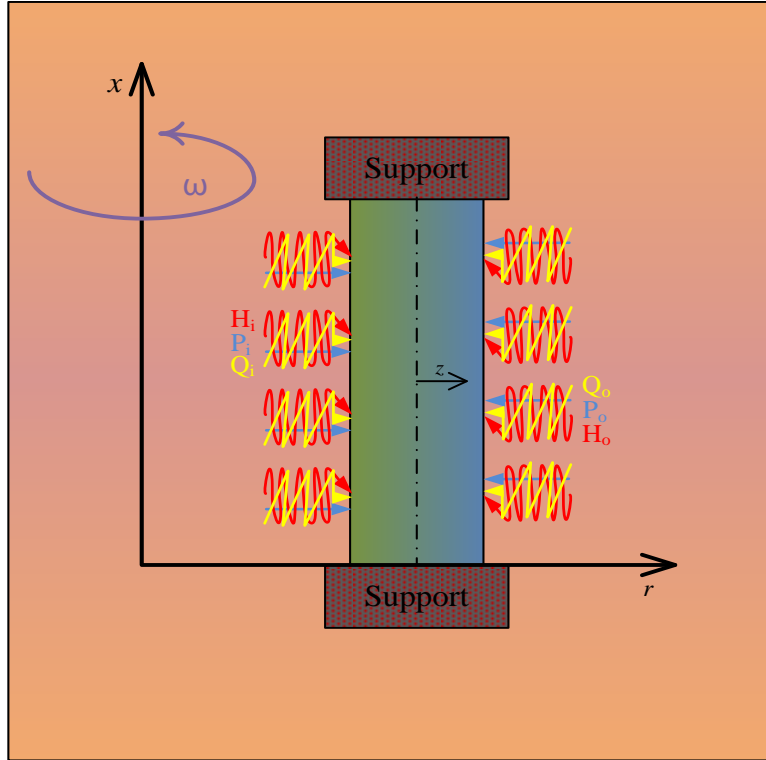
### ۷-۳-۲ محاسبه‌ی کار

شکل ۲-۲ مقطع استوانه‌ی ناهمگن پیزوالکتریک چرخان را نشان می‌دهد که تحت بارگذاری

مکانیکی، الکتریکی و حرارتی قرار دارد. استوانه در شعاع داخلی تحت فشار  $P_i$ ، شار الکتریکی وارده‌ی

$Q_i$  و شار حرارتی وارده‌ی  $H_i$  و در شعاع خارجی خود تحت فشار  $P_o$ ، شار الکتریکی وارده‌ی  $Q_o$  و

شار حرارتی وارده‌ی  $H_o$  قرار دارد.



شکل ۲-۲ مقطع استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی

برای کار ناشی از نیروهای مکانیکی، الکتریکی و حرارتی با توجه به رابطه‌ی (۲۶-۲) داریم.

$$\begin{aligned}
 W = & \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} P_i u_r |_{r=r_i} r_i d\theta dx - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} P_o u_r |_{r=r_o} r_o d\theta dx + \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \rho r \omega^2 u_r r dr d\theta dx \\
 & - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} Q_i \phi |_{r=r_i} r_i d\theta dx - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} Q_o \phi |_{r=r_o} r_o d\theta dx \quad (۷۴-۲) \\
 & - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} H_i \Theta |_{r=r_i} r_i d\theta dx - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} H_o \Theta |_{r=r_o} r_o d\theta dx
 \end{aligned}$$

با بیان رابطه‌ی (۷۴-۲) در مختصات  $(z, \theta, x)$  و استفاده از روابط (۲۳-۲) تا (۳۵-۲) خواهیم

داشت.

$$\begin{aligned}
 W = & \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} P_i \left( U_z^0 - \frac{h}{2} U_z^1 \right) \left( R - \frac{h}{2} \right) d\theta dx - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} P_o \left( U_z^0 + \frac{h}{2} U_z^1 \right) \left( R + \frac{h}{2} \right) d\theta dx \\
 & + \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 (U_z^0 + z U_z^1) (R + z)^2 dz d\theta dx \quad (۷۵-۲) \\
 & - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} Q_i \left( \phi^0 - \frac{h}{2} \phi^1 \right) \left( R - \frac{h}{2} \right) d\theta dx - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} Q_o \left( \phi^0 + \frac{h}{2} \phi^1 \right) \left( R + \frac{h}{2} \right) d\theta dx \\
 & - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} H_i \left( \Theta^0 - \frac{h}{2} \Theta^1 \right) \left( R - \frac{h}{2} \right) d\theta dx - \int_0^{L_c} \int_0^{2\pi} H_o \left( \Theta^0 + \frac{h}{2} \Theta^1 \right) \left( R + \frac{h}{2} \right) d\theta dx
 \end{aligned}$$



و برای تغییرات کار داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{2\pi} = & \int_0^{L_c} P_i \left( \delta U_z^0 - \frac{h}{2} \delta U_z^1 \right) \left( R - \frac{h}{2} \right) dx - \int_0^{L_c} P_o \left( \delta U_z^0 + \frac{h}{2} \delta U_z^1 \right) \left( R + \frac{h}{2} \right) dx \\ & + \int_0^{L_c} \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 \left( \delta U_z^0 + z \delta U_z^1 \right) (R+z)^2 dz dx \\ & - \int_0^{L_c} Q_i \left( \delta \varphi^0 - \frac{h}{2} \delta \varphi^1 \right) \left( R - \frac{h}{2} \right) dx - \int_0^{L_c} Q_o \left( \delta \varphi^0 + \frac{h}{2} \delta \varphi^1 \right) \left( R + \frac{h}{2} \right) dx \\ & - \int_0^{L_c} H_i \left( \delta \Theta^0 - \frac{h}{2} \delta \Theta^1 \right) \left( R - \frac{h}{2} \right) dx - \int_0^{L_c} H_o \left( \delta \Theta^0 + \frac{h}{2} \delta \Theta^1 \right) \left( R + \frac{h}{2} \right) dx \end{aligned} \quad (76-2)$$

### ۲-۳-۸ به کارگیری اصل همیلتون توسعه یافته

با استفاده از ثابت بودن انرژی جنبشی ( $\delta T = 0$ ) و رابطه‌ی (۲۷-۲) خواهیم داشت.

$$\delta T = 0$$

$$\Rightarrow -\delta V + \delta W = 0 \quad (77-2)$$

$$\Rightarrow \delta W = \delta V$$

رابطه‌ی فوق بیانگر برابر بودن تغییرات انرژی الکتروترمودمکانیکی با کار ناشی از نیروهای

مکانیکی، الکتریکی و حرارتی می‌باشد.

با انجام عملیات ریاضی بر روی رابطه‌ی (۲۳-۲) و بازنویسی آن خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{2\pi} = & R \int_0^{L_c} \left( \left( \frac{N_\theta^m}{R} - \frac{dQ_x^m}{dx} \right) \delta U_z^0 + \left( \frac{M_\theta^m}{R} + N_z^m - \frac{dM_{zx}^m}{dx} \right) \delta U_z^1 \right. \\ & - \frac{dN_x^m}{dx} \delta U_x^0 - \frac{dM_x^m}{dx} \delta U_x^1 \\ & - \frac{dN_x^e}{dx} \delta \varphi^0 + \left( N_z^e - \frac{dM_x^e}{dx} \right) \delta \varphi^1 \\ & \left. - \frac{dN_x^t}{dx} \delta \Theta^0 + \left( N_z^t - \frac{dM_x^t}{dx} \right) \delta \Theta^1 \right) dx \quad (78-2) \\ & + \left[ N_x^m \delta U_x^0 + M_x^m \delta U_x^1 + Q_x^m \delta U_z^0 + M_{zx}^m \delta U_z^1 \right]_{0,L_c} \\ & + \left[ N_x^e \delta \varphi^0 + M_x^e \delta \varphi^1 \right]_{0,L_c} \\ & + \left[ N_x^t \delta \Theta^0 + M_x^t \delta \Theta^1 \right]_{0,L_c} \end{aligned}$$

## ۲-۳-۹ دستگاه معادلات حاکم

اکنون با استفاده از روابط (۲-۷۶) تا (۲-۷۸)، دستگاه معادلات حاکم و شرایط مرزی بر حسب منته‌های مکانیکی، الکتریکی و حرارتی و مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی، الکتریکی و حرارتی به دست می‌آیند.

$$\left\{ \begin{array}{l} R \frac{dN_x^m}{dx} = 0 \\ R \left( Q_x^m - \frac{dM_x^m}{dx} \right) = 0 \\ R \left( \frac{N_\theta^m}{R} - \frac{dQ_x^m}{dx} \right) = P_i \left( R - \frac{h}{2} \right) - P_o \left( R + \frac{h}{2} \right) + \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 (R+z)^2 dz \\ R \left( \frac{M_\theta^M}{R} + N_z^M - \frac{dM_{xz}^M}{dx} \right) = -\frac{h}{2} \left( P_i \left( R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left( R + \frac{h}{2} \right) \right) + \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 z (R+z)^2 dz \\ R \frac{dN_x^e}{dx} = Q_i \left( R - \frac{h}{2} \right) + Q_o \left( R + \frac{h}{2} \right) \\ R \left( N_z^e - \frac{dM_x^e}{dx} \right) = \frac{h}{2} \left( Q_i \left( R - \frac{h}{2} \right) - Q_o \left( R + \frac{h}{2} \right) \right) \\ R \frac{dN_x^t}{dx} = H_i \left( R - \frac{h}{2} \right) + H_o \left( R + \frac{h}{2} \right) \\ R \left( N_z^t - \frac{dM_x^t}{dx} \right) = \frac{h}{2} \left( H_i \left( R - \frac{h}{2} \right) - H_o \left( R + \frac{h}{2} \right) \right) \end{array} \right. \quad (۷۹-۲)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، در رابطه‌ی (۲-۷۹) تعداد مجهولات بیشتر از معادلات می‌باشد،

بنابراین به منظور حل این دستگاه معادلات لازم است؛ منته‌های مکانیکی، الکتریکی و حرارتی بر

حسب میدان جابه‌جایی، الکتریکی و حرارتی بیان شوند تا تعداد مجهولات برابر معادلات شود.

رابطه زیر بیانگر شرایط مرزی مکانیکی می‌باشد که در دو سر استوانه برقرار می‌باشند.

$$\left[ N_x^m \delta U_x^0 + M_x^m \delta U_x^1 + Q_x^m \delta U_z^0 + M_{xz}^m \delta U_z^1 \right]_{0, L_c} = 0 \quad (۸۰-۲)$$

همچنین برای شرایط مرزی الکتریکی داریم.

$$\left[ N_x^e \delta \varphi^0 + M_x^e \delta \varphi^1 \right]_{0, L_c} = 0 \quad (۸۱-۲)$$

برای شرایط مرزی حرارتی نیز داریم.

$$\left[ N'_x \delta \Theta^0 + M'_x \delta \Theta^1 \right]_{0,L_c} = 0 \quad (82-2)$$

نظر به آنچه گفته شد؛ اکنون به بیان دستگاه معادلات حاکم بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی، الکتریکی و حرارتی با استفاده از روابط (۲-۳۶) تا (۲-۴۶)، (۲-۵۰) تا (۲-۵۲) و (۲-۶۶) تا (۲-۷۲)، پرداخته می‌شود.

دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم را می‌توان به شکل زیر نشان داد.

$$[A] \frac{d}{dx} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{l\} \quad (83-2)$$

ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل هستند که برای آن‌ها داریم.

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 & 0 & A_{35} & A_{36} & 0 & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & 0 & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{52} & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & 0 & 0 & A_{65} & A_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} & A_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix} \quad (84-2)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} & B_{17} & B_{18} \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 & B_{25} & B_{26} & B_{27} & B_{28} \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{43} & B_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{54} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{63} & B_{64} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (85-2)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & 0 & 0 & 0 & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ C_{41} & C_{42} & 0 & 0 & 0 & C_{46} & C_{47} & C_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{61} & C_{62} & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{88} \end{bmatrix} \quad (86-2)$$

{y} نیز شبه بردار میدان الکتروترنومکانیکی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} \quad (87-2)$$

همچنین برای شبه بردار نیروی الکتروترنومکانیکی {l} داریم.

$$\{l\} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \\ l_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_i(R - \frac{h}{2}) - P_o(R + \frac{h}{2}) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \omega^2 (R+z)^2 dz \\ -\frac{h}{2} \left( P_i(R - \frac{h}{2}) + P_o(R + \frac{h}{2}) \right) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \omega^2 z (R+z)^2 dz \\ Q_i(R - \frac{h}{2}) + Q_o(R + \frac{h}{2}) \\ Q_i \frac{h}{2} (R - \frac{h}{2}) - Q_o \frac{h}{2} (R + \frac{h}{2}) \\ H_i(R - \frac{h}{2}) + H_o(R + \frac{h}{2}) \\ H_i \frac{h}{2} (R - \frac{h}{2}) - H_o \frac{h}{2} (R + \frac{h}{2}) \end{Bmatrix} \quad (88-2)$$

در ادامه مؤلفه‌های غیر صفر ماتریس‌های ضرایب، استخراج می‌گردند.

$$A_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_3+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_3}} dz \quad (89-2)$$

$$A_{14} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_3+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_3}} z dz \quad (90-2)$$

$$B_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{23}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_4}}{(R-\frac{h}{2})^{np_4}} dz \quad (91-2)$$

$$B_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( c_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_2+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_2}} + c_{23}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_4}}{(R-\frac{h}{2})^{np_4}} z \right) dz \quad (92-2)$$

$$B_{16} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_7+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_7}} dz \quad (93-2)$$

$$B_{17} = -\int_{-h/2}^{h/2} \lambda_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{10}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{10}}} dz \quad (94-2)$$

$$B_{18} = -\int_{-h/2}^{h/2} \lambda_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{10}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{10}}} z dz \quad (95-2)$$

$$A_{23} = -\int_{-h/2}^{h/2} c_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_3+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_3}} z dz \quad (96-2)$$

$$A_{24} = -\int_{-h/2}^{h/2} c_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_3+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_3}} z^2 dz \quad (97-2)$$

$$B_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( K_S c_{55}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_5+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_5}} - c_{23}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_4}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{n_4}} z \right) dz \quad (98-2)$$

$$B_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( K_S c_{55}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_5+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{n_5}} z - c_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_2+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_2}} z - c_{23}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_4}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_4}} z^2 \right) dz \quad (99-2)$$

$$B_{25} = \int_{-h/2}^{h/2} K_S e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{n_8}} dz \quad (100-2)$$

$$B_{26} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( K_S e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_8}} z - e_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_7+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_7}} z \right) dz \quad (101-2)$$

$$B_{27} = -\int_{-h/2}^{h/2} \lambda_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{10}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{10}}} z dz \quad (102-2)$$

$$B_{28} = -\int_{-h/2}^{h/2} \lambda_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{10}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{10}}} z^2 dz \quad (103-2)$$

$$C_{24} = \int_{-h/2}^{h/2} K_S c_{55}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_5+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_5}} dz \quad (104-2)$$

$$A_{31} = -\int_{-h/2}^{h/2} K_S c_{55}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_5+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_5}} dz \quad (105-2)$$

$$A_{32} = -\int_{-h/2}^{h/2} K_S c_{55}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_5+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_5}} z \, dz \quad (106-2)$$

$$A_{35} = -\int_{-h/2}^{h/2} K_S e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_8}} dz \quad (107-2)$$

$$A_{36} = -\int_{-h/2}^{h/2} K_S e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_8}} z \, dz \quad (108-2)$$

$$B_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{23}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_4}}{(R-\frac{h}{2})^{np_4}} dz \quad (109-2)$$

$$B_{34} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( c_{23}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_4}}{(R-\frac{h}{2})^{np_4}} z - K_S c_{55}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_5+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_5}} \right) dz \quad (110-2)$$

$$C_{31} = \int_{-h/2}^{h/2} c_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_3-1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_3}} dz \quad (111-2)$$

$$C_{32} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( c_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_2}}{(R-\frac{h}{2})^{np_2}} + c_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_3-1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_3}} z \right) dz \quad (112-2)$$

$$C_{36} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_7}}{(R-\frac{h}{2})^{np_7}} dz \quad (113-2)$$

$$C_{37} = -\int_{-h/2}^{h/2} \lambda_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{10}}}{(R-\frac{h}{2})^{np_{10}}} dz \quad (114-2)$$

$$C_{38} = -\int_{-h/2}^{h/2} \lambda_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{10}}}{(R-\frac{h}{2})^{np_{10}}} z \, dz \quad (115-2)$$

$$A_{41} = -\int_{-h/2}^{h/2} K_S c_{55}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_5+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_5}} z \, dz \quad (116-2)$$

$$A_{42} = -\int_{-h/2}^{h/2} K_S c_{55}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_5+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_5}} z^2 dz \quad (117-2)$$

$$A_{45} = -\int_{-h/2}^{h/2} K_S e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_8}} z \, dz \quad (118-2)$$

$$A_{46} = -\int_{-h/2}^{h/2} K_S e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_8}} z^2 dz \quad (119-2)$$

$$B_{43} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( c_{23}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_4}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_4}} z + c_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_2+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_2}} \right) dz \quad (120-2)$$

$$B_{44} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( c_{23}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_4}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_4}} z^2 + c_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_2+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_2}} z + K_S c_{55}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_5+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{n_5}} z \right) dz \quad (121-2)$$

$$C_{41} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( c_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_3-1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_3}} z + c_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_2}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_2}} \right) dz \quad (122-2)$$

$$C_{42} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( 2c_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_2}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_2}} z + c_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_3-1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_3}} z^2 + c_{11}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_1+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_1}} \right) dz \quad (123-2)$$

$$C_{46} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( e_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_7}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_7}} z + e_{11}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_6+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_6}} \right) dz \quad (124-2)$$

$$C_{47} = -\int_{-h/2}^{h/2} \left( \lambda_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{10}}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{10}}} z + \lambda_{11}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_9+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_9}} \right) dz \quad (125-2)$$

$$C_{48} = -\int_{-h/2}^{h/2} \left( \lambda_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{10}}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{10}}} z^2 + \lambda_{11}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_9+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_9}} z \right) dz \quad (126-2)$$

$$A_{51} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_8}} dz \quad (127-2)$$

$$A_{52} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_8}} z dz \quad (128-2)$$

$$A_{55} = -\int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{12}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{12}}} dz \quad (129-2)$$

$$A_{56} = -\int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{12}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{12}}} z dz \quad (130-2)$$

$$B_{54} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_8}} dz \quad (131-2)$$

$$A_{61} = -\int_{-h/2}^{h/2} e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_8}} z dz \quad (132-2)$$

$$A_{62} = -\int_{-h/2}^{h/2} e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_8}} z^2 dz \quad (133-2)$$

$$A_{65} = \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{12}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{12}}} z dz \quad (134-2)$$

$$A_{66} = \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{12}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{12}}} z^2 dz \quad (135-2)$$

$$B_{63} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_7+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_7}} dz \quad (136-2)$$

$$B_{64} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( e_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_7+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_7}} - e_{35}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_8+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_8}} \right) z dz \quad (137-2)$$

$$C_{61} = \int_{-h/2}^{h/2} e_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_7}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_7}} dz \quad (138-2)$$

$$C_{62} = \int_{-h/2}^{h/2} \left( e_{11}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_6+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_6}} + e_{12}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_7}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_7}} z \right) dz \quad (139-2)$$

$$C_{66} = -\int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{11}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{11}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{11}}} dz \quad (140-2)$$

$$A_{77} = -\int_{-h/2}^{h/2} k_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{14}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{14}}} dz \quad (141-2)$$

$$A_{78} = -\int_{-h/2}^{h/2} k_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{14}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{14}}} z dz \quad (142-2)$$

$$A_{87} = \int_{-h/2}^{h/2} k_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{14}+1}}{\left(R-\frac{h}{2}\right)^{np_{14}}} z dz \quad (143-2)$$



$$A_{88} = \int_{-h/2}^{h/2} k_{22}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{14}+1}}{(R-\frac{h}{2})^{np_{14}}} z^2 dz \quad (144-2)$$

$$C_{88} = -\int_{-h/2}^{h/2} k_{11}^{\circ} \frac{(R+z)^{np_{13}+2}}{(R-\frac{h}{2})^{np_{13}}} dz \quad (145-2)$$

## ۲-۴ حل دستگاه معادلات حاکم

### ۲-۴-۱ ساده‌سازی دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم

جهت حل دستگاه معادلات حاکم ابتدا از سطر اول، پنجم و هفتم دستگاه معادلات انتگرال‌گیری

می‌شود، سپس با اعمال تغییر متغیر در  $\{y\}$ ، دستگاه معادلات ساده شده به شکل زیر بازنویسی می‌گردد.

$$[A^*] \frac{d}{dx} \{y^*\} + [B^*] \frac{d}{dx} \{y^*\} + [C^*] \{y^*\} = \{l^*\} \quad (146-2)$$

که  $[A^*]$ ،  $[B^*]$  و  $[C^*]$  ضرایب دستگاه معادلات ساده شده می‌باشند و برای آن‌ها داریم.

$$[A^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 & 0 & 0 & A_{36} & 0 & 0 \\ A_{41} & A_{42} & 0 & 0 & 0 & A_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & 0 & 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix} \quad (147-2)$$

$$[B^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & A_{23} & 0 & 0 & B_{26} & B_{27} & B_{28} \\ 0 & 0 & 0 & B_{34} & A_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 \\ A_{51} & A_{52} & 0 & 0 & 0 & A_{56} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{64} & A_{65} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (148-2)$$

$$[C^*] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & A_{13} & 0 & 0 & B_{16} & B_{17} & B_{18} \\ 0 & 0 & 0 & C_{24} & B_{25} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & B_{33} & 0 & 0 & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ C_{41} & C_{42} & B_{43} & 0 & 0 & C_{46} & C_{47} & C_{48} \\ 0 & 0 & 0 & B_{54} & A_{55} & 0 & 0 & 0 \\ C_{61} & C_{62} & B_{63} & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} & A_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{88} \end{bmatrix} \quad (149-2)$$

همچنین برای  $\{y^*\}$  و  $\{l^*\}$  داریم.

$$\{y^*\} = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \\ y_5^* \\ y_6^* \\ y_7^* \\ y_8^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ \frac{dU_x^0}{dx} \\ U_x^1 \\ \frac{d\varphi^0}{dx} \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{bmatrix} \quad (150-2)$$

$$\{l^*\} = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5x + K_2 \\ l_6 \\ \frac{l_7}{2}x^2 + K_3x + K_4 \\ l_8 \end{bmatrix} \quad (151-2)$$

که  $K_1, K_2, K_3, K_4$  ثوابت انتگرال‌گیری از سطر اول، پنجم و هفتم می‌باشند.

## ۲-۴-۲ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده

حل دستگاه معادلات (۱۴۶-۲) شامل دو قسمت می‌باشد.

$$\{y^*\} = \{y^*\}_g + \{y^*\}_p \quad (152-2)$$

که  $\{y^*\}_g$  و  $\{y^*\}_p$  به ترتیب بیانگر حل قسمت خصوصی و عمومی می‌باشند.

### حل قسمت خصوصی

همان طور که از رابطه‌ی (۲-۱۵۱) پیداست؛ قسمت ناهمگن دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده چندجمله‌ای مرتبه‌ی دوم<sup>۱</sup> می‌باشد، بنابراین حل قسمت خصوصی به شکل چندجمله‌ای مرتبه‌ی دوم در نظر گرفته می‌شود و داریم.

$$\{y^*\}_p = \{y^*\}_{p2} x^2 + \{y^*\}_{p1} x + \{y^*\}_{p0} \quad (۲-۱۵۳)$$

که  $\{y^*\}_{p0}$ ،  $\{y^*\}_{p1}$  و  $\{y^*\}_{p2}$  به ترتیب شبه بردار ضرایب مرتبه‌ی دوم، اول و صفر در چندجمله‌ای مرتبه‌ی دوم در نظر گرفته شده، می‌باشند. این شبه بردارها با جایگذاری در معادله‌ی (۲-۱۴۶) تعیین می‌گردند و برای آن‌ها خواهیم داشت.

$$\{y^*\}_{p2} = [C^*]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{l_7}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۲-۱۵۴)$$

$$\{y^*\}_{p1} = [C^*]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_5 \\ 0 \\ C_3 \\ 0 \end{Bmatrix} - 2[B^*][C^*]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{l_7}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۲-۱۵۵)$$

$$\{y^*\}_{p0} = [C^*]^{-1} \begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \\ l_3 \\ l_4 \\ C_2 \\ l_6 \\ C_4 \\ l_8 \end{pmatrix} - [B^*][C^*]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_5 \\ 0 \\ C_3 \\ 0 \end{pmatrix} - 2[B^*][C^*]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{l_7}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - 2[A^*][C^*]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{l_7}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (156-2)$$

### حل قسمت عمومی

برای قسمت عمومی دستگاه معادلات ساده شده داریم.

$$[A^*] \frac{d}{dx} \{y^*\} + [B^*] \frac{d}{dx} \{y^*\} + [C^*] \{y^*\} = \{0\} \quad (157-2)$$

به منظور حل رابطه‌ی فوق با در نظر گرفتن شکل نمایی برای حل قسمت عمومی  $\{y^*\}_g$  داریم.

$$\{y^*\}_g = \{\xi\} e^{mx} \quad (158-2)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۵۷-۲) در (۱۵۸-۲)، دستگاه معادلات مقدار ویژه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\left( [A^*] m^2 + [B^*] m + [C^*] \right) \{\xi\} e^{mx} = \{0\}; \det \left( [A^*] m^2 + [B^*] m + [C^*] \right) = 0 \quad (159-2)$$

با حل رابطه‌ی (۱۵۹-۲)، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به دست می‌آید و خواهیم داشت.

$$\{y^*\}_g = \sum_{i=1}^{10} K_{i+4} \{\xi\}_i e^{m_i x} \quad (160-2)$$

با توجه به حل خصوصی و عمومی برای  $\{y^*\}$  داریم.

$$\begin{aligned}
 \{y^*\} = & \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \\ y_5^* \\ y_6^* \\ y_7^* \\ y_8^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ \frac{dU_x^0}{dx} \\ U_x^1 \\ \frac{d\varphi^0}{dx} \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{pmatrix} = K_5 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_1 e^{m_1 x} + K_6 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_2 e^{m_2 x} + K_7 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_3 e^{m_3 x} \\
 & + K_8 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_4 e^{m_4 x} + K_9 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_5 e^{m_5 x} + K_{10} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_6 e^{m_6 x} + K_{11} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_7 e^{m_7 x} \\
 & + K_{12} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_8 e^{m_8 x} + K_{13} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_9 e^{m_9 x} + K_{14} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{pmatrix}_{10} e^{m_{10} x} + \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \\ y_5^* \\ y_6^* \\ y_7^* \\ y_8^* \end{pmatrix}_{p2} x^2 \\
 & + \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \\ y_5^* \\ y_6^* \\ y_7^* \\ y_8^* \end{pmatrix}_{p1} x + \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \\ y_4^* \\ y_5^* \\ y_6^* \\ y_7^* \\ y_8^* \end{pmatrix}_{p0}
 \end{aligned}
 \tag{۱۶۱-۲}$$

اکنون با انتگرال‌گیری از سطر سوم و پنجم رابطه‌ی (۱۶۱-۲) شبه بردار میدان الکترومکانیکی

$\{y\}$ ، به دست می‌آید و برای آن خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
 \{y\} &= \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = K_5 \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_1 \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_1 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_1 e^{m_1 x} + K_6 \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_2 \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_2 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_2 e^{m_2 x} + K_7 \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_3 \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_3 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_3 e^{m_3 x} \\
 &+ K_8 \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_4 \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_4 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_4 e^{m_4 x} + K_9 \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_5 \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_5 e^{m_5 x} + K_{10} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_6 \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_6 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_6 e^{m_6 x} + K_{11} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_7 \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_7 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_7 e^{m_7 x} \\
 &+ K_{12} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_8 \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_8 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_8 e^{m_8 x} + K_{13} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_9 \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_9 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_9 e^{m_9 x} + K_{14} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3/m_{10} \\ \xi_4 \\ \xi_3/m_{10} \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{Bmatrix}_{10} e^{m_{10} x} + \begin{Bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \frac{x}{3} \\ y_4^* \\ y_5^* \frac{x}{3} \\ y_6^* \\ y_7^* \\ y_8^* \end{Bmatrix}_{p2} x^2 \tag{۱۶۲-۲} \\
 &+ \begin{Bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* \frac{x}{2} \\ y_4^* \\ y_5^* \frac{x}{2} \\ y_6^* \\ y_7^* \\ y_8^* \end{Bmatrix}_{p1} x + \begin{Bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ y_3^* x \\ y_4^* \\ y_5^* x \\ y_6^* \\ y_7^* \\ y_8^* \end{Bmatrix}_{p0} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{15} \\ 0 \\ K_{16} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

## ۲-۴-۳ اعمال شرایط مرزی

اکنون با اعمال شرایط مرزی در دو سر استوانه ثابت  $K_1$  تا  $K_{16}$  به دست می‌آیند. شرایط مرزی می‌توانند بر اساس میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و تغییرات دمایی از دمای ثابت مثبت مرجع، نتیجه‌های مکانیکی، الکتریکی و حرارتی و یا به صورت ترکیبی بیان شوند.

$$x = 0, L_C \quad \left\{ \begin{array}{c} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{array} \right\} \quad \text{or} \quad \left\{ \begin{array}{c} N_x^m \\ M_x^m \\ Q_x^m \\ M_{xz}^m \\ N_x^e \\ M_x^e \\ N_x^t \\ M_x^t \end{array} \right\} \quad \text{or} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} U_z^0 & \text{or} & N_x^m \\ U_z^1 & \text{or} & M_x^m \\ U_x^0 & \text{or} & Q_x^m \\ U_x^1 & \text{or} & M_{xz}^m \\ \varphi^0 & \text{or} & N_x^e \\ \varphi^1 & \text{or} & M_x^e \\ \Theta^0 & \text{or} & N_x^t \\ \Theta^1 & \text{or} & M_x^t \end{array} \right\} \quad (2-163)$$

بنابراین شبه بردار میدان الکتروترمو مکانیکی در جسم تعیین می‌گردد و می‌توان رفتار مکانیکی،

الکتریکی و حرارتی استوانه را مورد مطالعه و بررسی قرار داد.

عملیات ریاضی بیان شده، جهت حل دستگاه معادلات دیفرانسیل و اعمال شرایط مرزی، توسط

برنامه‌ی نوشته شده در نرم‌افزار Maple 13 انجام می‌شود که در فصل آینده نتایج حاصل از مطالعه‌ی

عددی توسط این نرم‌افزار نشان داده خواهد شد.

## فصل ۳

### تحلیل استوانه‌های همگن

---



## ۱-۳ پیش‌گفتار

در این فصل ابتدا نحوه‌ی تحلیل اجزای محدود الکترومکانیکی توضیح داده می‌شود، سپس به تحلیل حرارتی، الکتریکی، مکانیکی و الکتروترمو مکانیکی استوانه‌ی همگن پرداخته می‌شود؛ در هر یک از تحلیل‌های مذکور مطالعه‌ی موردی انجام می‌گردد و نتایج بررسی می‌شوند.

## ۲-۳ تحلیل اجزای محدود استوانه‌های همگن

به منظور تحلیل اجزای محدود مواد با خاصیت پیزوالکتریک از نرم‌افزار ANSYS 12.0 در این پژوهش، استفاده می‌گردد.

### ۱-۲-۳ تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی در ANSYS

تحلیل میدان-جفت‌شده<sup>۱</sup>، ترکیبی از تحلیل رشته‌های مهندسی (میدان‌های فیزیکی) متفاوت با اثر متقابل می‌باشد که برای حل مسأله‌ی کلی مهندسی استفاده می‌شوند، بنابراین اغلب از تحلیل میدان-جفت‌شده به عنوان تحلیل چند فیزیکی<sup>۲</sup> یاد می‌گردد. زمانی که ورودی تحلیل یک میدان وابسته به نتایج تحلیل میدان دیگری باشد، تحلیل جفت‌شده می‌باشد [۳۶].

برخی تحلیل‌ها می‌توانند جفت‌شدگی یک سو<sup>۳</sup> داشته باشند. برای مثال در مسائل تنش حرارتی، میدان دمایی کرنش حرارتی را در میدان سازه‌ای ایجاد می‌کند اما به طور کلی کرنش سازه‌ای تأثیری بر توزیع دما ندارد، بنابراین نیازی به انجام تکرار متوالی حل‌های دو میدان نیست. نمونه‌های پیچیده‌تر شامل جفت‌شدگی دو سو<sup>۴</sup> می‌باشند. برای مثال تحلیل پیزوالکتریک که تأثیر متقابل میدان الکتریکی و سازه‌ای را به کار می‌برد برای حل توزیع ولتاژ بر اثر جابه‌جایی اعمالی و یا برعکس، استفاده می‌شود. این دسته مسائل نیاز به انجام تکرار متوالی حل بین دو میدان فیزیکی تا همگرا شدن دارند [۳۶].

---

1. Coupled-field  
2. Multiphysics  
3. One-way  
4. Two-way

فرآیند تحلیل میدان جفت‌شده بستگی به این امر دارد که چه میدان‌هایی باهم جفت شده‌اند، اما دو روش مجزای مستقیم و انتقال بار، برای این منظور در ANSYS به کار گرفته شده است [۳۶].

### الف) روش مستقیم

روش مستقیم اغلب شامل تنها یک تحلیل می‌باشد که از یک المان میدان جفت‌شده با تمامی درجات آزادی مورد نیاز، استفاده می‌کند. جفت‌شدگی با محاسبه‌ی ماتریس‌های المان و بردارهای نیروی المان که شامل عبارات مورد نیاز می‌باشند، اعمال می‌شود. نمونه‌ای از روش مستقیم تحلیل میدان جفت‌شده، تحلیل پیزوالکتریک با استفاده از المان‌های PLANE223، SOLID226 و SOLID227 و تحلیل سیستم‌های میکروالکترومکانیک<sup>۱</sup> با استفاده از المان TRANS126 می‌باشد [۳۶].

### ب) روش انتقال بار

روش انتقال بار شامل دو یا چند تحلیل می‌باشد که هر کدام در طول میدان متفاوتی انجام می‌شود. با اعمال نتایج میدان اول به عنوان بار برای میدان دوم، دو میدان با یکدیگر جفت می‌شوند. نوع‌های متفاوتی از تحلیل انتقال بار وجود دارد [۳۶].

با توجه به آنچه که گفته شد، به دلیل خاصیت پیزوالکتریک موجود در پوسته‌ی استوانه‌ای و نیاز به انجام تحلیل الکتروترمو مکانیکی باید تحلیل اجزای محدود آن را در ANSYS 12.0 به روش مستقیم انجام داد [۳۶].

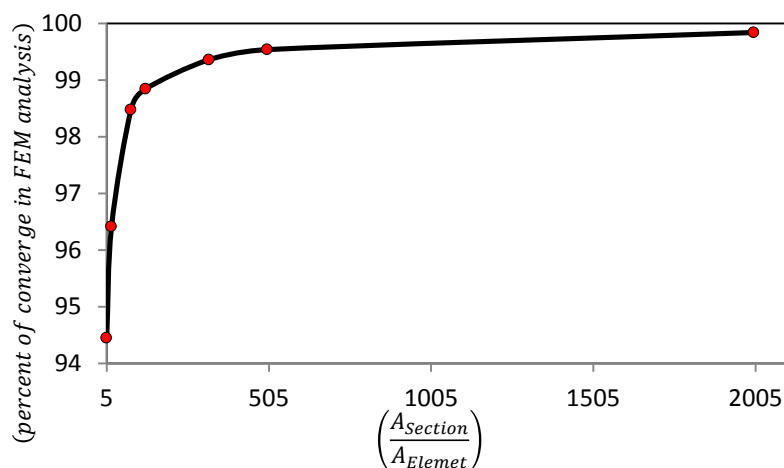
## ۳-۲-۲ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله

نظر به آنچه که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله، در فصل دوم بیان شد؛ مسأله حالت متقارن محوری دارد. در این حالت نیازی به مدل‌سازی سه بعدی نیست و می‌توان از المان‌های دو بعدی نرم‌افزار که قابلیت تقارن محوری دارند، استفاده کرد و حتی نتایج را به صورت سه بعدی استخراج

کرد [۳۷ و ۳۸].

در نرم‌افزار ANSYS با استفاده از المان PLANE223 می‌توان استوانه‌ی پیزوالکتریک را تحلیل کرد. این المان دو بعدی از هشت گره تشکیل شده که تا چهار درجه آزادی (دو درجه برای جابه‌جایی، یک درجه برای پتانسیل الکتریکی و یک درجه برای دما) را برای هر گره تأمین می‌کند. این المان دارای دقت بالا برای تحلیل مسائل متقارن محوری می‌باشد.

بنابراین مدل‌سازی مسأله به صورت دو بعدی انجام می‌شود. برای این منظور مطابق شکل ۲-۲ مقطع مستطیل شکل استوانه به صورت دو بعدی مدل‌سازی می‌گردد. شبکه‌بندی باید به صورتی انجام گیرد که تحلیل المان محدود مستقل از شبکه‌بندی باشد و نتایج به دست آمده قابل اطمینان باشند. برای این منظور المان PLANE223 به شکل مربع بر روی مقطع مستطیل شکل قرار می‌گیرد.



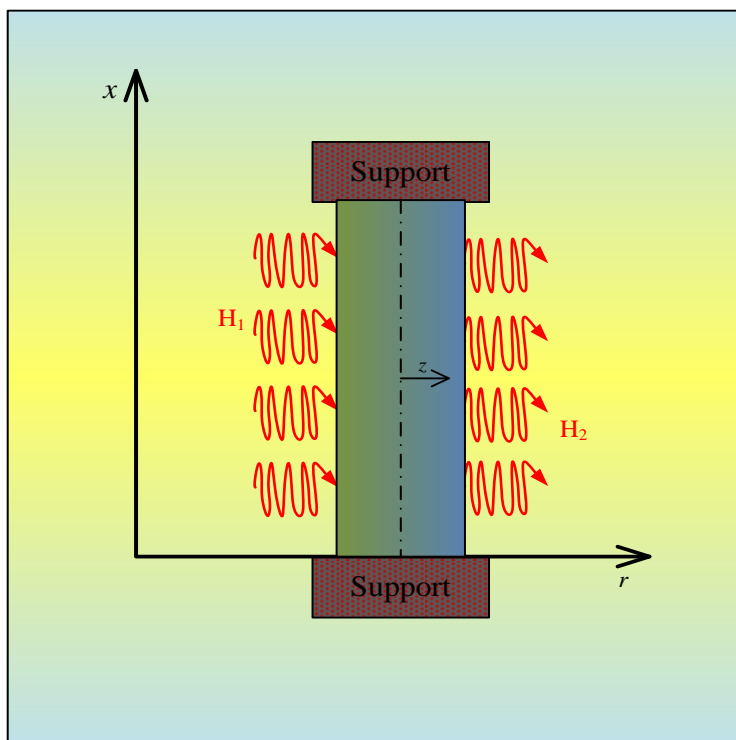
شکل ۳-۱ نمودار همگرایی تحلیل المان محدود

شکل ۳-۱ شبکه‌بندی مناسب جهت تحلیل را نشان می‌دهد، زمانی که مساحت مقطع ( $A_{Section}$ ) حدود ۱۵۰ برابر مساحت المان مربعی شکل ( $A_{Element}$ ) باشد؛ نتایج حاصل از تحلیل المان محدود به همگرایی در حدود ۹۹٪ می‌رسد و تحلیل پذیرفتنی خواهد بود.

### ۳-۳ تحلیل حرارتی استوانه‌های همگن

شکل ۳-۲ مقطع عرضی استوانه‌ی همگن را نشان می‌دهد که تحت بارگذاری حرارتی قرار دارد. استوانه در لایه‌ی درونی خود تحت شار حرارتی وارده‌ی  $H_1$  و در لایه‌ی بیرونی خود تحت شار

حرارتی خارجی  $H_2$  قرار دارد.



شکل ۲-۳ مقطع عرضی استوانه‌ای تحت بارگذاری حرارتی

در این حالت دستگاه معادلات (۲-۷۹) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} R \frac{dN_x^m}{dx} = 0 \\ R \left( Q_x^m - \frac{dM_x^m}{dx} \right) = 0 \\ R \left( \frac{N_\theta^m}{R} - \frac{dQ_x^m}{dx} \right) = 0 \\ R \left( \frac{M_\theta^M}{R} + N_z^M - \frac{dM_{xz}^M}{dx} \right) = 0 \\ R \frac{dN_x^e}{dx} = 0 \\ R \left( N_z^e - \frac{dM_x^e}{dx} \right) = 0 \\ R \frac{dN_x^t}{dx} = H_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) - H_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \\ R \left( N_z^t - \frac{dM_x^t}{dx} \right) = \frac{h}{2} \left( H_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) + H_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \right) \end{array} \right. \quad (1-3)$$

مطابق آنچه در فصل دوم بیان گردید، جهت حل دستگاه معادلات حاکم ابتدا از سطر اول، پنجم

و هفتم دستگاه معادلات انتگرال گیری می‌شود، سپس با اعمال تغییر در  $\{y\}$ ، دستگاه معادلات ساده شده به شکل رابطه‌ی (۲-۱۴۶) بیان می‌گردد.  $[A^*]$ ،  $[B^*]$  و  $[C^*]$  ضرایب دستگاه معادلات ساده شده بدون تغییر باقی مانده و با توجه به روابط (۲-۸۹) تا (۲-۱۴۵) محاسبه می‌شوند؛ نظر به این امر که ماده‌ی استوانه همگن می‌باشد، در این روابط کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی برابر صفر است و خواص لایه‌ی داخلی برابر خواص استوانه می‌باشد، همچنین برای  $\{l^*\}$  در این حالت خواهیم داشت.

$$\{l^*\} = \begin{Bmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_2 \\ 0 \\ \frac{l_7}{2}x^2 + K_3x + K_4 \\ l_8 \end{Bmatrix} \quad (2-3)$$

اکنون مطابق آنچه در فصل دوم ذکر شد با استفاده از روابط (۲-۱۵۲) تا (۲-۱۶۲) دستگاه معادلات ساده شده‌ی حاکم حل می‌گردد. برای به دست آوردن ثوابت موجود در حل به دست آمده نیاز به اعمال شرایط مرزی می‌باشد این شرایط مرزی به دو صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

### الف) شرایط مرزی نوع اول

در این حالت شرایط مرزی در دو سر استوانه بر حسب میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و تغییرات دمایی بیان می‌شوند که دارای مقادیری ثابت می‌باشند، برای این شرایط داریم.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \text{Constant}; \quad x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \text{Constant} \quad (3-3)$$

ب) شرایط مرزی نوع دوم

در این حالت، شرایط مرزی در یک سر استوانه بر حسب میدان جابه‌جایی، پتانسیل الکتریکی و تغییرات دمایی و در سر دیگر بر حسب منته‌های مکانیکی، الکتریکی و حرارتی بیان می‌شوند که مقادیری ثابت دارند، برای شرایط مرزی در دو سر استوانه داریم.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \text{Constant}; x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_x^m \\ M_x^m \\ Q_x^m \\ M_{xz}^m \\ N_x^e \\ M_x^e \\ N_x^t \\ M_x^t \end{Bmatrix} = \text{Constant} \quad (4-3)$$

۳-۳-۱ مطالعه‌ی عددی

برای مطالعه‌ی عددی استوانه‌ای با مشخصات هندسی  $r_o = 60\text{mm}$ ،  $r_i = 40\text{mm}$  در نظر گرفته می‌شود، استوانه‌ی از جنس PZT-4 می‌باشد که در راستای شعاعی خود پلاریزه گشته است، جدول ۳-۱ خواص مکانیکی، الکتریکی و حرارتی را در استوانه بیان می‌کند [۳۹ و ۴۰].

جدول ۳-۱ خواص استوانه

ثوابت الاستیک (GPa)					
$c_{55}$	$c_{44}$	$c_{23}$	$c_{22}$	$c_{12}$	$c_{11}$
25.6	30.5	78	139	74	115
ثوابت پیزوالکتریک-تنش ( $C/m^2$ )					
$e_{35}$		$e_{12}$		$e_{11}$	
12.7		-5.2		15.1	
ضرایب انبساط حرارتی ( $10^{-6} 1/K$ )		ضرایب هدایت حرارتی ( $W/mK$ )		ثوابت دی‌الکتریک ( $10^{-8} C/Vm$ )	
$\alpha_{22}$	$\alpha_{11}$	$k_{22}$	$k_{11}$	$\epsilon_{22}$	$\epsilon_{11}$
1.97	2.62	2.1	5.1	0.646	0.562
چگالی ( $kg/m^3$ )					
$\rho = 7500$					

نمونه‌ی عددی مورد مطالعه در شعاع داخلی و خارجی خود به ترتیب تحت شار حرارتی وارده‌ی  $H_1 = 60 \text{ W/m}^2$  و  $H_2 = 40 \text{ W/m}^2$  قرار دارد، همچنین شرایط مرزی با توجه به (۳-۳) و (۴-۳) به شکل روابط زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30^0 K \\ 0 \end{Bmatrix}; x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30^0 K \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5-3)$$

در رابطه‌ی (۵-۳) شرایط مرزی از نوع اول است که از لحاظ مکانیکی بیانگر استوانه با دو سر

گیردار می‌باشد.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30^0 K \\ 0 \end{Bmatrix}; x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_x^m \\ M_x^m \\ Q_x^m \\ M_{xz}^m \\ N_x^e \\ M_x^e \\ N_x^t \\ M_x^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6-3)$$

شرایط مرزی در رابطه‌ی (۶-۳) برای مطالعه‌ی موردی از نوع دوم می‌باشد؛ این شرایط مرزی در

حالت مکانیکی معادل استوانه‌ی یک سر گیردار-یک سر آزاد، در حالت الکتریکی معادل یک سر

پتانسیل الکتریکی-یک سر عایق الکتریکی و در حالت دمایی معادل یک سر دما-یک سر عایق حرارتی

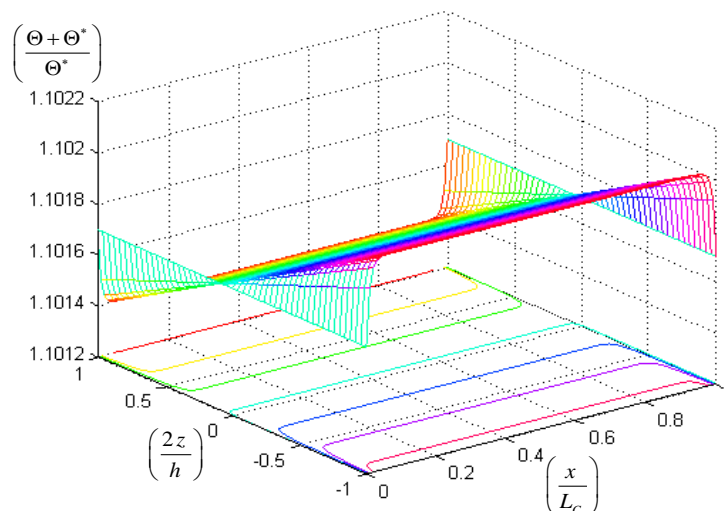
می‌باشد. همچنین لازم به ذکر است؛ دمای ثابت مثبت مرجع  $\Theta^* = 295^0 K$  فرض شده است.

## ۳-۳-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول

### رفتار حرارتی

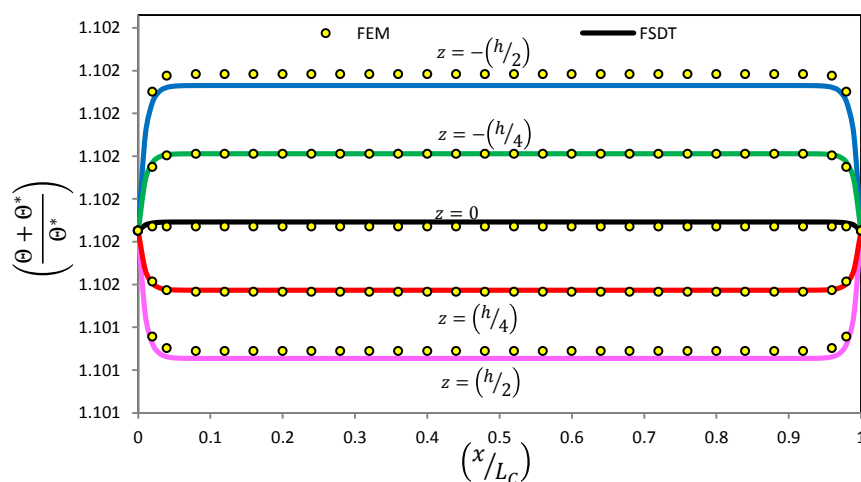
شکل ۳-۳ توزیع نرمال میدان دمایی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در

استوانه نشان می‌دهد. بر اثر بارگذاری حرارتی اعمال شده، دما در استوانه با دور شدن از دو سر آن تقریباً به مقداری ثابت همگرا می‌شود، همچنین میدان دمایی در جهت شعاعی از داخل به خارج استوانه کاهش می‌یابد که به سبب انتقال حرارت در لایه‌های داخلی و خارجی استوانه می‌باشد.



شکل ۳-۳ توزیع میدان دمایی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی

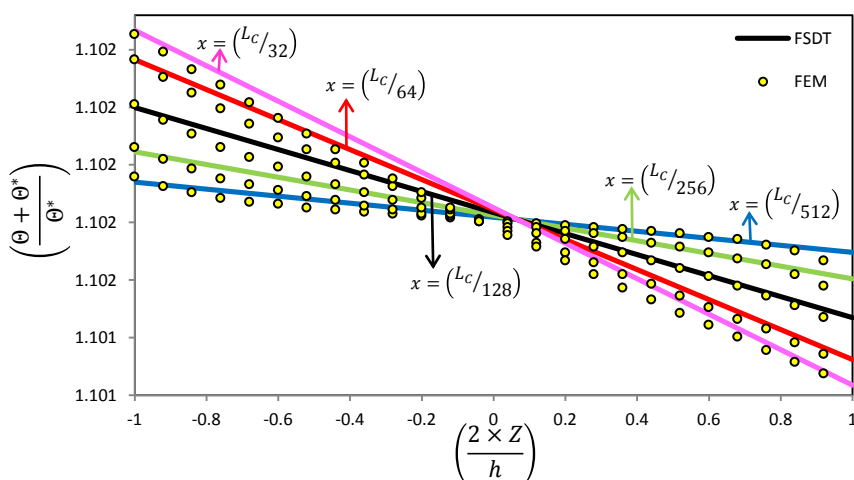
شکل ۳-۴ نتایج به دست آمده برای میدان دمایی را از دو روش اجزای محدود و حل تحلیلی در لایه‌های مختلف استوانه نشان می‌دهد، اگرچه هر دو روش توزیع هم رفتاری را برای میدان دمایی پیش‌بینی می‌کنند اما با دور شدن از لایه‌ی میانی، میزان انطباق توزیع‌های پیش‌بینی شده توسط دو روش کاهش می‌یابد.



شکل ۳-۴ توزیع میدان دما با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه



شکل ۳-۵ توزیع دما را در نزدیکی سر استوانه نشان می‌دهد. نتایج اجزای محدود بیانگر این واقعیت می‌باشد که اگرچه فرض نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تغییرات خطی توزیع دما در نزدیکی سر استوانه، با نتایج میدان دما انطباق کامل ندارد اما تقریب خوبی از واقعیت مسأله در نزدیکی سر استوانه می‌باشد.



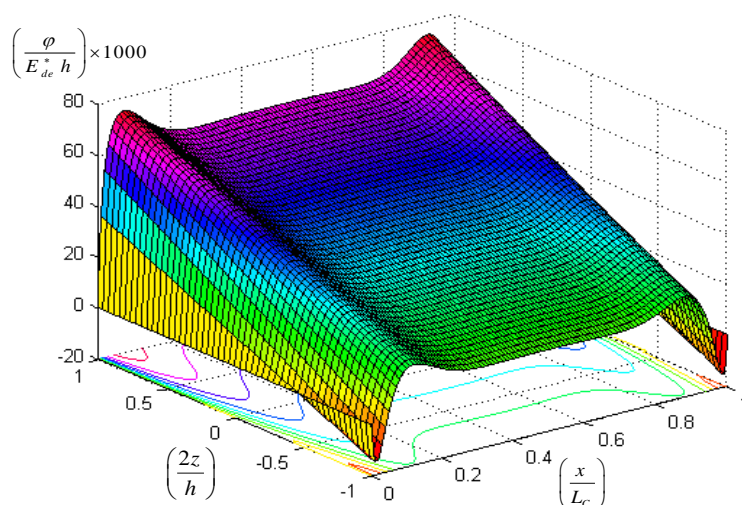
شکل ۳-۵ توزیع میدان دما در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

### رفتار الکتریکی

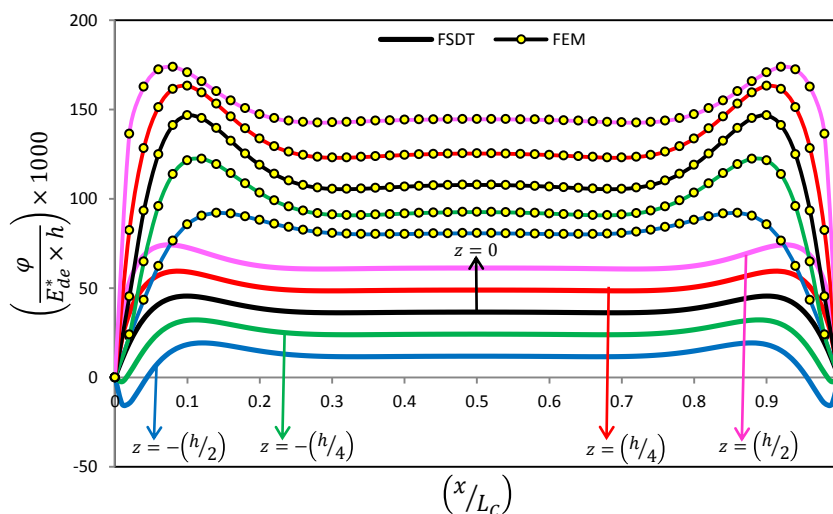
همان طور که در فصل اول نیز اشاره شد، مواد پیزوالکتریک با قرار گرفتن تحت میدان‌های بالای دمایی یا الکتریکی و یا نیروی مکانیکی زیاد خاصیت پیزوالکتریک خود را از دست می‌دهند و در اصطلاح دی‌پلاریزه می‌شوند. میدان الکتریکی استاتیکی که سبب دی‌پلاریزه شدن می‌گردد ( $E_{de}$ ) معمولاً در بازه‌ی  $2 \text{ kV/cm}$  تا  $5 \text{ kV/cm}$  می‌باشد، که بستگی به دمای میدان اعمالی دارد [۴۱]. با در نظر گرفتن میدان الکتریکی فرضی دی‌پلاریزه کننده  $E_{de}^* = 5 \text{ kV/cm}$ ، به بررسی نتایج به دست آمده برای میدان الکتریکی می‌پردازیم.

شکل ۳-۶ توزیع نرمال شده‌ی پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در داخل استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد، پتانسیل الکتریکی در راستای محوری همانند میدان دما رفتاری مشابه داشته و با فاصله گرفتن از دو سر استوانه به مقداری ثابت میل می‌کند درحالی‌که در راستای شعاعی رفتاری خلاف میدان دمایی دارد و با رفتن از لایه‌ی داخلی

به خارجی استوانه مقدار پتانسیل الکتریکی افزایش می‌یابد.

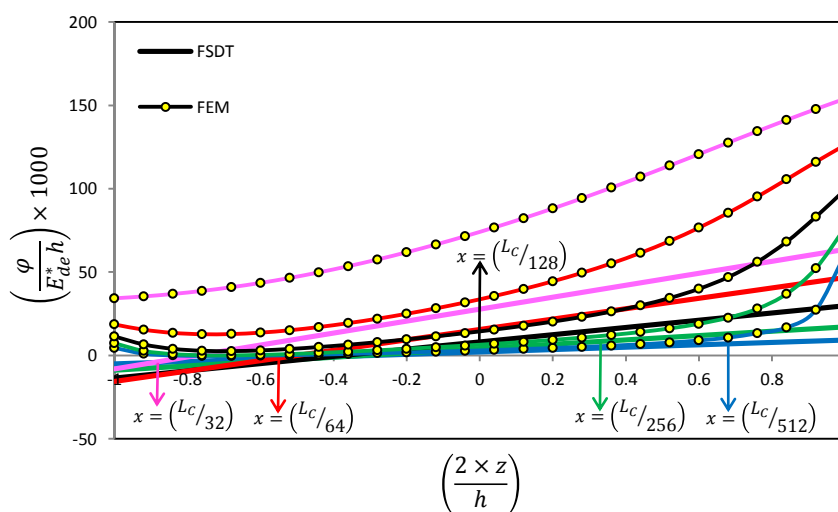


شکل ۳-۶ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی  
 شکل ۳-۷ توزیع پتانسیل الکتریکی را در استوانه نشان می‌دهد که از دو روش اجزای محدود و  
 نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول محاسبه شده است. اگرچه هر دو روش رفتار یکسانی را، برای  
 توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم پیش‌بینی می‌کنند اما نتایج به دست آمده از دو روش دارای  
 اختلاف می‌باشند؛ هر دو روش کمترین مقدار پتانسیل الکتریکی را در لایه‌ی داخلی و بیش‌ترین مقدار  
 آن را در لایه‌ی خارجی پیش‌بینی می‌کنند، همچنین نتایج نشان می‌دهند با دور شدن از دو سر  
 استوانه پتانسیل الکتریکی به مقداری ثابت همگرا می‌شود.



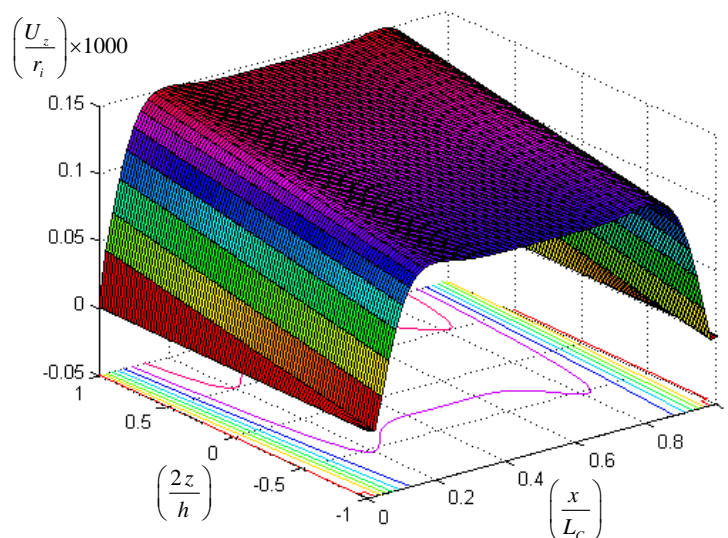
شکل ۳-۷ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه

همان طور که شکل ۸-۳ نشان می‌دهد، فرض نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تغییرات خطی پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت منطبق بر واقعیت حاکم بر مسأله نمی‌باشد؛ نتایج حاصل از روش اجزای محدود نیز در این شکل بر این امر تأکید دارند؛ بنابراین دلیل اختلاف نتایج حاصل از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با روش اجزای محدود در پیش‌بینی پتانسیل الکتریکی (شکل ۷-۳) را می‌توان همین امر دانست.



شکل ۸-۳ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

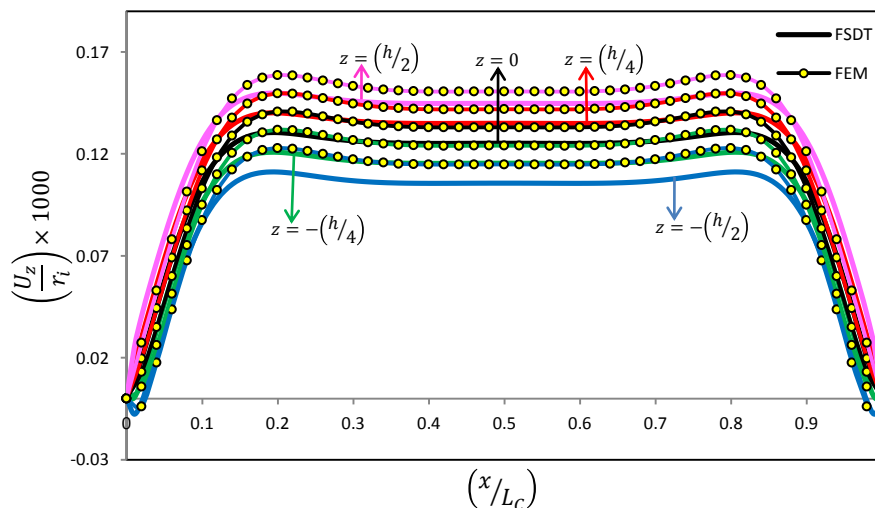
### رفتار مکانیکی



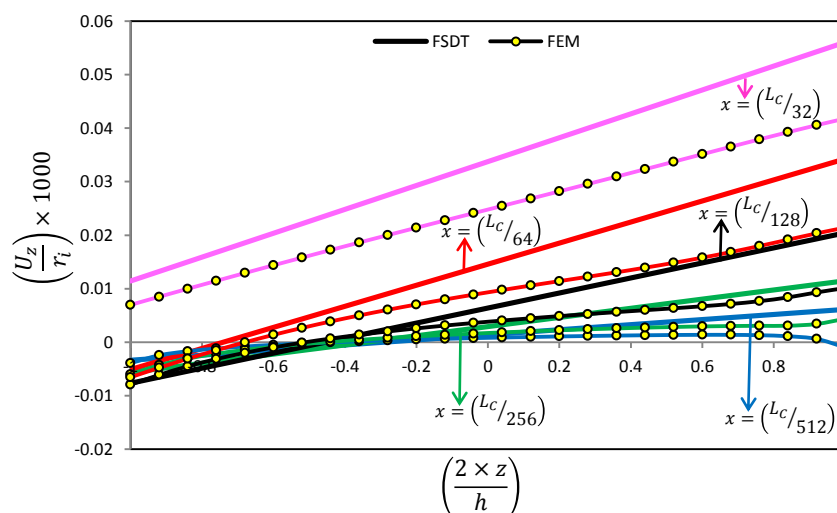
شکل ۹-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی

شکل ۹-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی را در استوانه با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی

اول نشان می‌دهد، این نظریه رفتاری مشابه با رفتار توزیع پتانسیل الکتریکی را، برای توزیع جابه‌جایی شعاعی در جسم پیش‌بینی می‌کند.

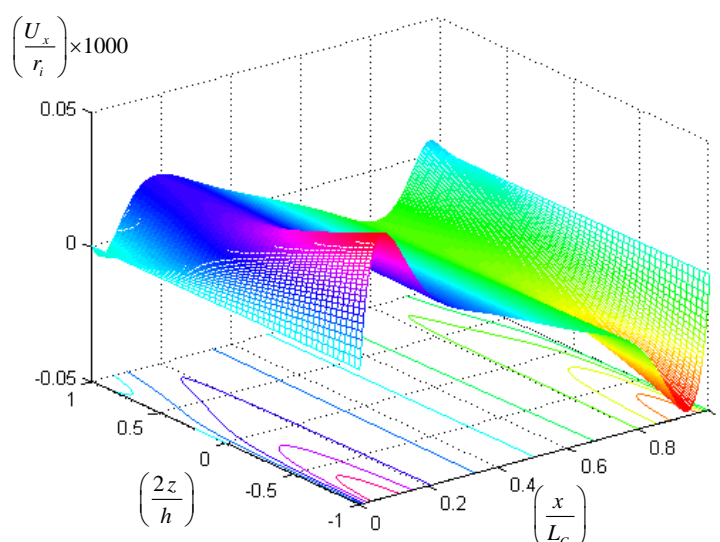


شکل ۳-۱۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه شکل ۳-۱۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی را در راستای طولی در استوانه نشان می‌دهد. هر دو روش رفتار همسانی را برای جابه‌جایی شعاعی پیش‌بینی می‌کنند اما مقادیر پیش‌بینی شده توسط دو روش دارای اختلاف می‌باشند، همچنین مشاهده می‌شود؛ توزیع جابه‌جایی شعاعی رفتاری همسان با پتانسیل الکتریکی اما با شدت کمتر دارد که به دلیل پلاریزه بودن استوانه در راستای شعاعی می‌باشد.



شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی را در راستای ضخامت استوانه در نزدیکی سر استوانه نشان می‌دهد، نتایج اجزای محدود بیان می‌کند؛ جابه‌جایی شعاعی تغییرات خطی در راستای ضخامت

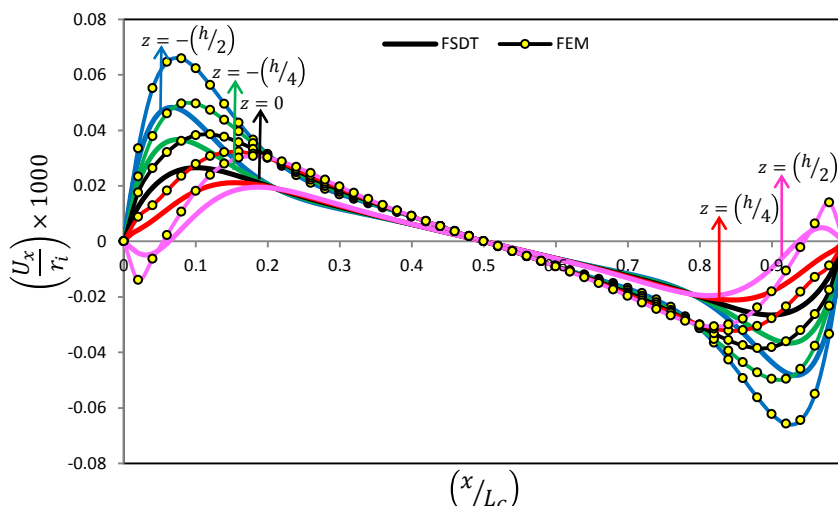
استوانه دارد اما متفاوت از رفتار پیش‌بینی شده توسط نظریه‌ی تغییر شکل برشی می‌باشد، دلیل این تفاوت مطابق آنچه ذکر شد فرض خطی بودن تغییرات پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت می‌باشد که با واقعیت حاکم بر مسأله سازگار نیست و به علت جفت‌شدگی دو سویه‌ی معادلات میدان الکتریکی و مکانیکی سبب ایجاد اختلاف در جابه‌جایی شعاعی (شکل ۳-۱۰) می‌گردد، لازم به ذکر است جفت‌شدگی معادلات میدان دمایی یک‌سویه است و اثرپذیری از نتایج میدان الکتریکی و مکانیکی ندارد.



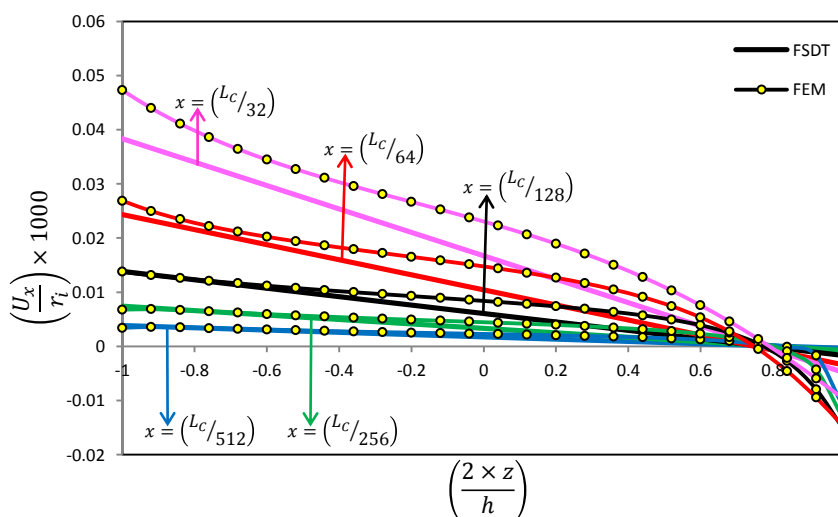
شکل ۳-۱۲ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی

شکل ۳-۱۲ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در جداره‌ی استوانه نشان می‌دهد، همان طور که از شکل پیداست مقدار بیشینه و کمینه‌ی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی استوانه اتفاق می‌افتد و جابه‌جایی محوری استوانه در راستای طولی نسبت به وسط آن حالت قرینه دارد.

شکل ۳-۱۳ توزیع جابه‌جایی محوری را در استوانه در راستای طولی نشان می‌دهد، هر دو روش رفتار همسانی را برای توزیع جابه‌جایی محوری پیش‌بینی می‌کنند که با دور شدن از وسط استوانه اختلاف مقادیر پیش‌بینی شده توسط دو روش افزایش پیدا می‌کند. نتایج نشان می‌دهند که با دور شدن از دو سر استوانه جابه‌جایی محوری رفتاری خطی پیدا می‌کند.



شکل ۳-۱۳ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۱۴ توزیع جابه‌جایی محوری را در راستای ضخامت در استوانه نشان می‌دهد، اگرچه  
 نتایج اجزای محدود شکل ۳-۱۴ بیان می‌کند توزیع جابه‌جایی محوری در کل ناحیه، رفتاری خطی  
 ندارد اما در بیشتر آن رفتاری خطی مانند را از خود نشان می‌دهد و فرض خطی بودن تغییرات  
 جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت چندان دور از واقعیت حاکم بر مسأله نیست.

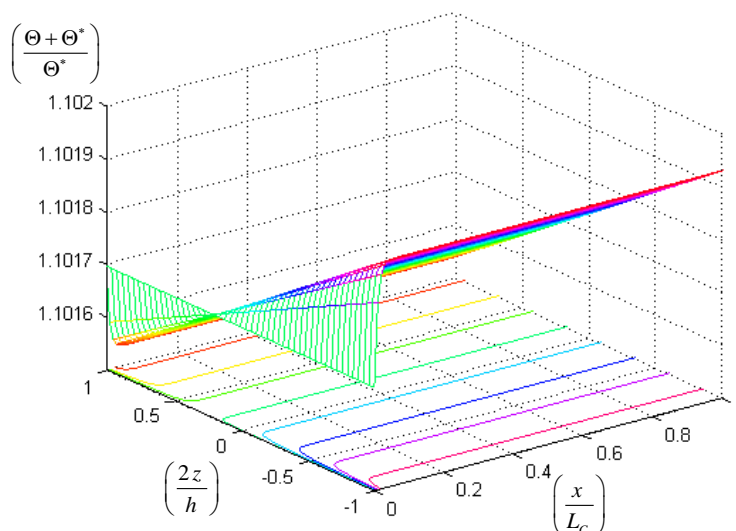


شکل ۳-۱۴ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 نظر به آنچه بیان شد این فرض نیز انطباق کامل بر رفتار استوانه در راستای ضخامت ندارد و خود  
 یکی از علل ایجاد اختلاف در نتایج به دست آمده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود برای میدان  
 الکتریکی و مکانیکی می‌باشد.

### ۳-۳-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم

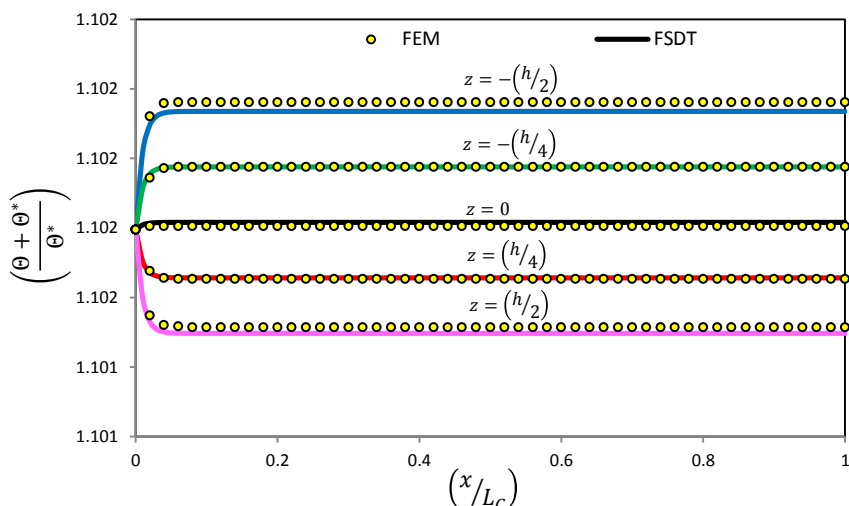
#### رفتار حرارتی

شکل ۳-۱۵ توزیع نرمال دما را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه نشان می‌دهد؛ استوانه در یک سر خود دارای عایق حرارتی و در سر دیگر دارای دمای معین می‌باشد. تغییرات دمایی در راستای طول استوانه از سری که دارای دمای معین می‌باشد شروع شده و در فاصله‌ی اندکی از آن به مقداری ثابت همگرا شده و تا سر عایق حرارتی آن بدون تغییر باقی می‌ماند.



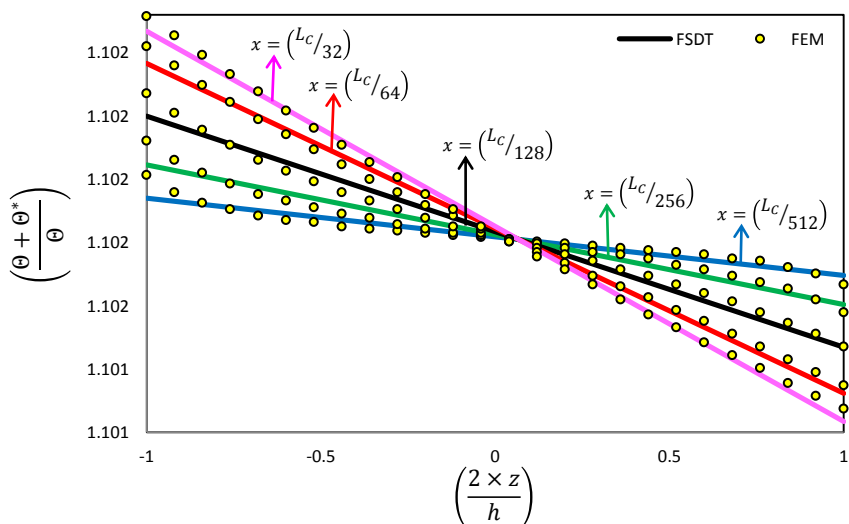
شکل ۳-۱۵ توزیع میدان دما در استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی

شکل ۳-۱۶ نتایج میدان دما را که با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود به دست آمده است، در استوانه مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. هر دو روش رفتاری همسان را برای میدان دما پیش‌بینی می‌کنند؛ اگرچه نتایج به دست آمده از دو روش دارای انطباق خوبی می‌باشند اما با دور شدن از لایه‌ی میانی استوانه دچار مقدار اندکی اختلاف می‌شوند که این اختلاف در لایه‌ی داخلی و خارجی به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد.



شکل ۳-۱۶ توزیع میدان دما با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه

شکل ۳-۱۷ توزیع میدان دما را در نزدیکی سر استوانه که دارای دمای مشخص می‌باشد، نشان می‌دهد. نتایج به دست آمده از حل اجزای محدود در این شکل نشان می‌دهد فرض نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای خطی بودن تغییرات دما در راستای ضخامت، فرضی مناسب و نزدیک به واقعیت حاکم بر مسأله می‌باشد.



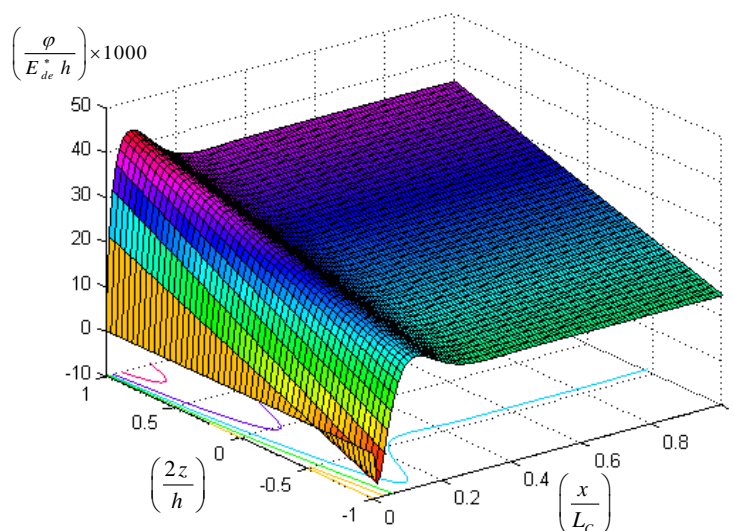
شکل ۳-۱۷ توزیع میدان دما در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

### میدان الکتریکی

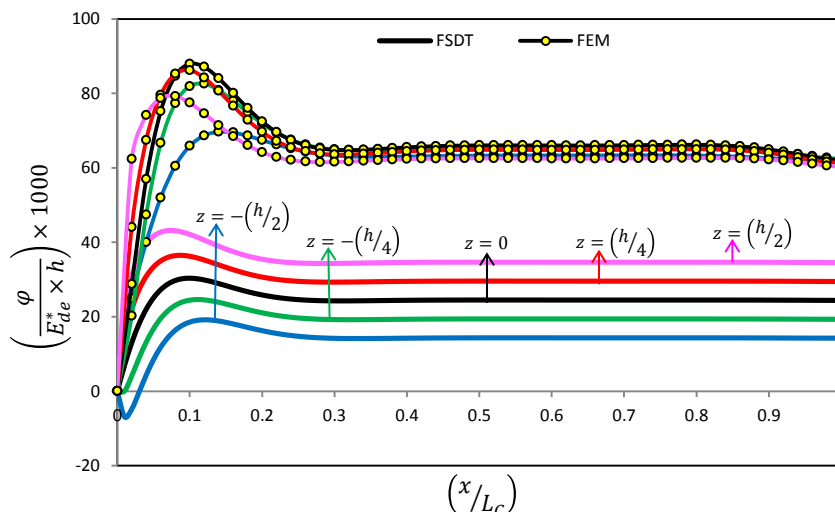
شکل ۳-۱۸ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه نشان می‌دهد. با دور شدن از سر استوانه که دارای پتانسیل الکتریکی ثابتی می‌باشد، مقدار



پتانسیل الکتریکی در لایه‌های استوانه به مقدار ثابتی همگرا می‌شود. توزیع پتانسیل الکتریکی نشان می‌دهد؛ بیش‌ترین و کمترین مقدار آن به ترتیب در لایه‌ی خارجی و داخلی استوانه در نزدیکی سری که پتانسیل مشخص دارد، اتفاق می‌افتد.



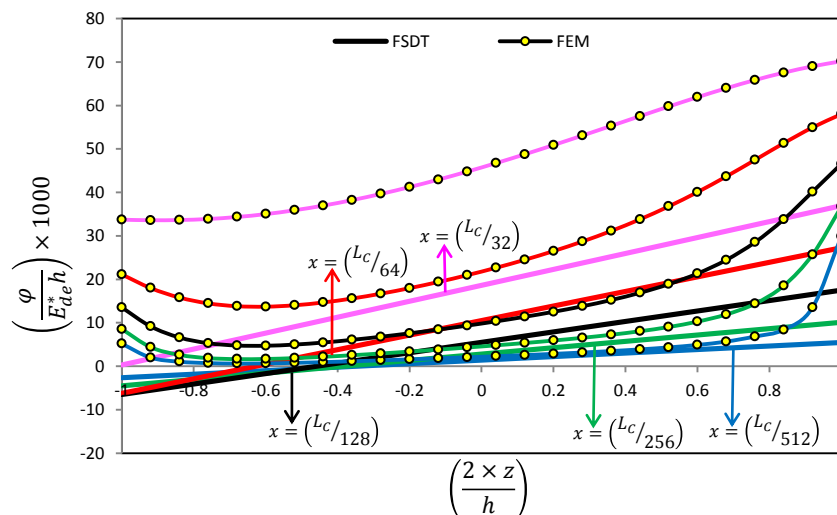
شکل ۳-۱۸ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی



شکل ۳-۱۹ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه

شکل ۳-۱۹ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود در استوانه نشان می‌دهد. اگرچه هر دو روش رفتاری مشابه را در راستای طولی برای توزیع پتانسیل الکتریکی در استوانه پیش‌بینی می‌کنند اما نتایج اجزای محدود نشان می‌دهند مقادیر پتانسیل الکتریکی پس از همگرا شدن، در لایه‌های استوانه اختلاف اندکی دارند حال آنکه روش تحلیلی اختلاف زیادی را بین

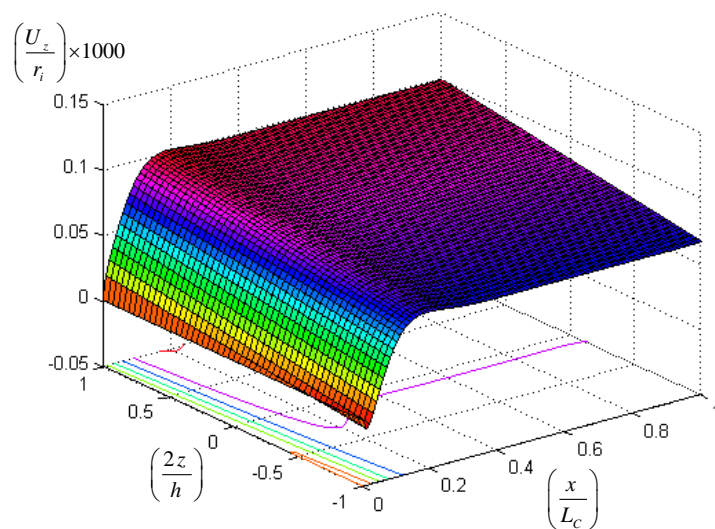
پتانسیل الکتریکی لایه‌های استوانه پس از همگرایی نشان می‌دهد. همچنین نوع رفتار بیان شده توسط دو روش در نزدیکی سر استوانه که دارای پتانسیل ثابت می‌باشد اندکی متفاوت است، علاوه بر این مقدار پیش‌بینی شده توسط دو روش نیز دارای اختلاف مشهودی می‌باشد.



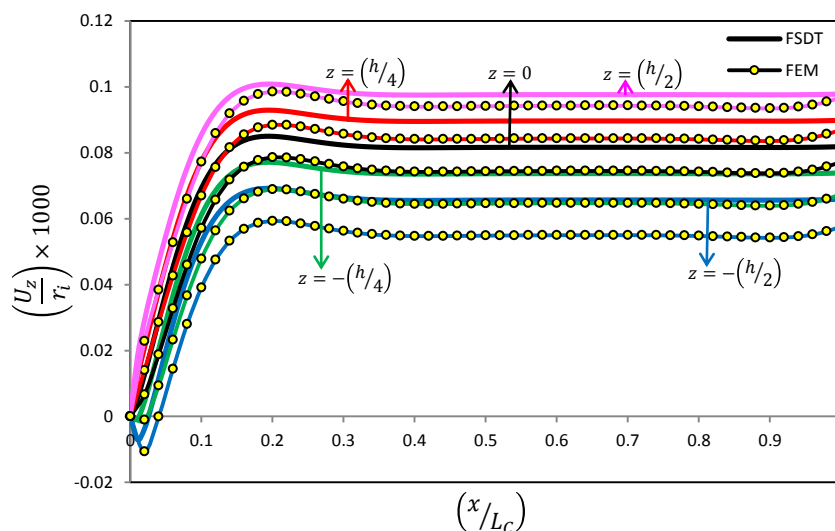
شکل ۳-۲۰ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۲۰ توزیع پتانسیل الکتریکی را در راستای شعاعی در استوانه نشان می‌دهد. در این شکل نتایج تحلیل اجزای محدود رفتار پتانسیل الکتریکی را در راستای شعاعی غیرخطی می‌داند، همچنین نتایج نشان می‌دهند فرض خطی بودن پتانسیل الکتریکی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول برای راستای شعاعی مناسب نیست و از واقعیت مسأله دور است؛ بنابراین می‌توان علت اختلاف نتایج پیش‌بینی شده توسط دو روش در مقدار پتانسیل الکتریکی را، این امر دانست.

### رفتار مکانیکی

شکل ۳-۲۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد. رفتار توزیع جابه‌جایی شعاعی همانند پتانسیل الکتریکی اما با شدت کمتر می‌باشد که این امر به دلیل پلاریزه بودن استوانه در راستای شعاعی است. در این حالت نیز مانند پتانسیل الکتریکی، بیش‌ترین و کمترین مقدار جابه‌جایی شعاعی به ترتیب در لایه‌ی خارجی و داخلی رخ می‌دهد.

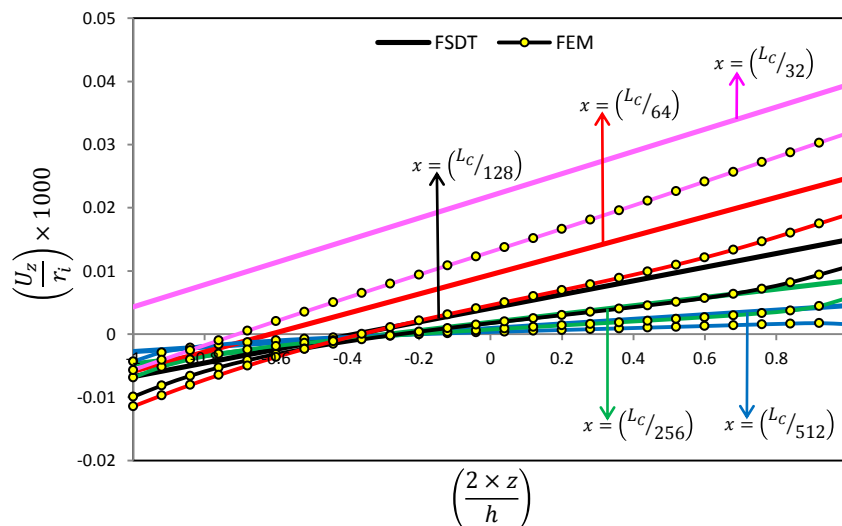


شکل ۳-۲۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی  
 شکل ۳-۲۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود در استوانه  
 نشان می‌دهد. روش تحلیلی و اجزای محدود رفتار همانندی را برای جابه‌جایی شعاعی پیش‌بینی  
 می‌کنند که دارای مقدار اندکی اختلاف می‌باشد.

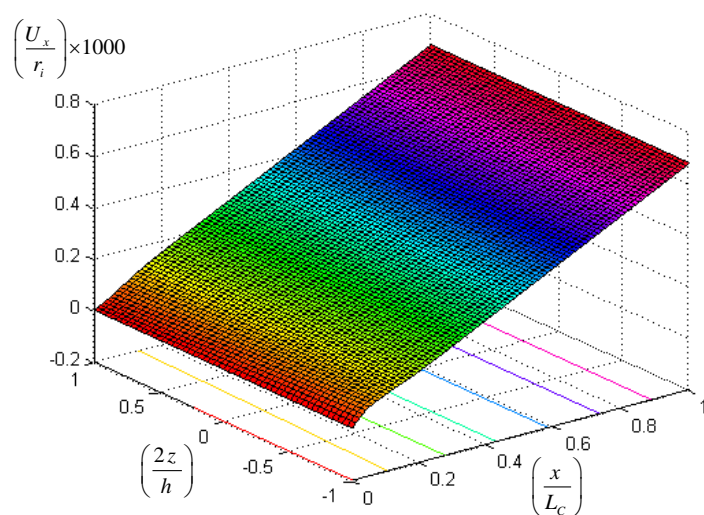


شکل ۳-۲۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی با روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۲۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود در راستای  
 ضخامت استوانه نشان می‌دهد. همان‌طور که نتایج اجزای محدود نشان می‌دهد جابه‌جایی تقریباً در  
 طول استوانه رفتار خطی دارد، بنابراین فرض خطی بودن جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل  
 برشی مرتبه‌ی اول، فرضی مناسب می‌باشد. دلیل اصلی اختلاف مقادیر پیش‌بینی شده توسط دو روش

را می‌توان فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی برای پتانسیل الکتریکی دانست که با واقعیت مسأله سازگار نیست.

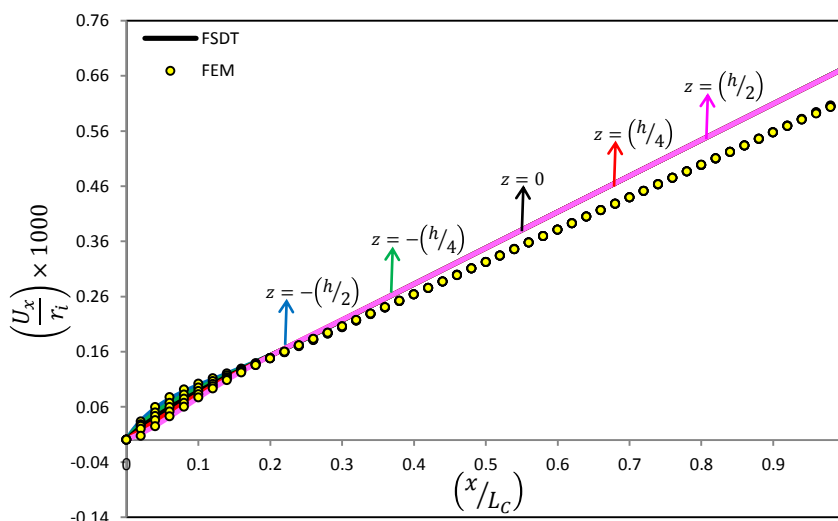


شکل ۳-۲۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۲۴ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه نشان می‌دهد. رفتار جابه‌جایی محوری تقریباً خطی می‌باشد و بیش‌ترین مقدار آن در سر آزاد استوانه اتفاق می‌افتد.

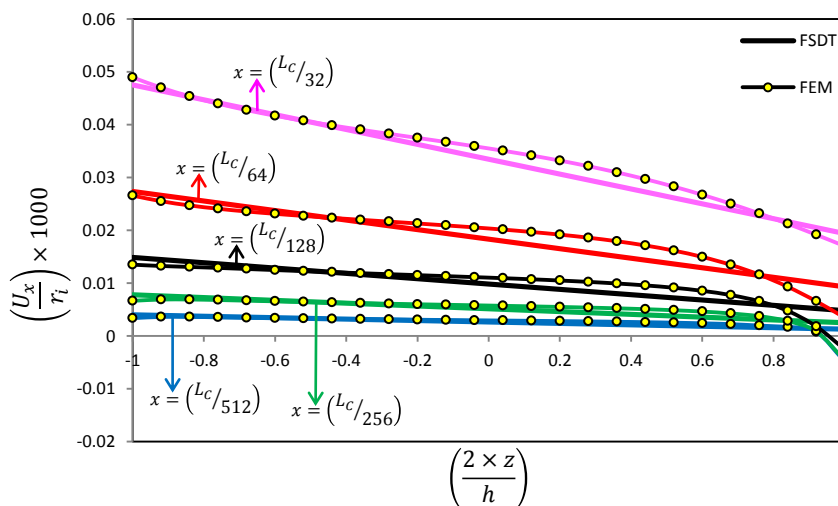


شکل ۳-۲۴ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری حرارتی  
 شکل ۳-۲۵ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد، نظریه‌ی تغییر شکل برشی و روش اجزای محدود رفتاری همسان را برای جابه‌جایی محوری

پیش‌بینی می‌کنند که دارای مقدار اندکی اختلاف است؛ این امر می‌تواند ناشی از فرض خطی بودن تغییر پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت باشد. این اختلاف موجود، در سر آزاد استوانه به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد، همچنین مشاهده می‌گردد؛ توزیع جابه‌جایی محوری در فاصله‌ای اندک از سر گیردار استوانه مستقل از لایه‌های آن می‌گردد.



شکل ۳-۲۵ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه



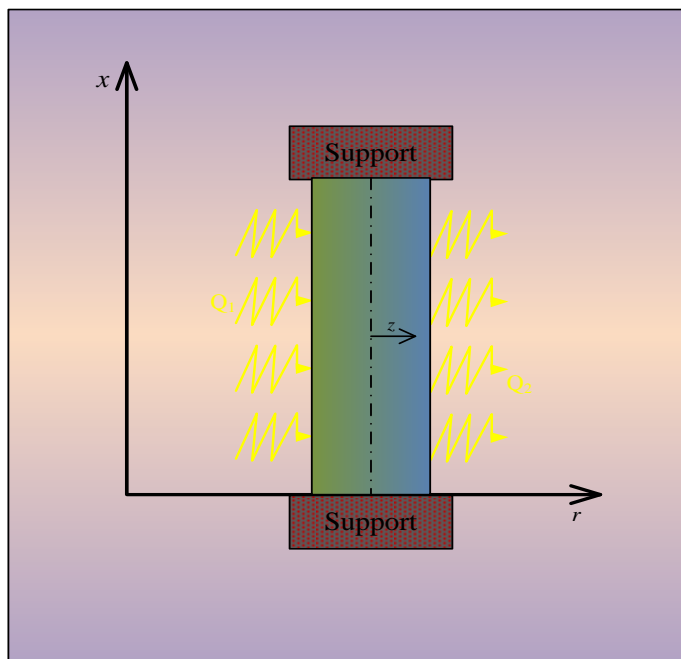
شکل ۳-۲۶ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

شکل ۳-۲۶ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ اگرچه توزیع جابه‌جایی محوری رفتاری غیرخطی دارد اما تقریب خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای آن مناسب است. این امر نیز سبب ایجاد اختلاف میان نتایج پیش‌بینی شده‌ی دو روش برای مقدار جابه‌جایی محوری می‌گردد.

### ۳-۴ تحلیل الکتریکی استوانه‌های همگن

شکل ۳-۲۷ استوانه‌ی تحت بارگذاری الکتریکی را نشان می‌دهد که در لایه‌ی درونی خود تحت

شار الکتریکی وارده‌ی  $Q_1$  و در لایه‌ی بیرونی خود تحت شار الکتریکی خارجه‌ی  $Q_2$  قرار دارد.



شکل ۳-۲۷ مقطع عرضی استوانه‌ی تحت بارگذاری الکتریکی

در این حالت دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله به صورت زیر می‌باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} R \frac{dN_x^m}{dx} = 0 \\ R \left( Q_x^m - \frac{dM_x^m}{dx} \right) = 0 \\ R \left( \frac{N_\theta^m}{R} - \frac{dQ_x^m}{dx} \right) = 0 \\ R \left( \frac{M_\theta^M}{R} + N_z^M - \frac{dM_{xz}^M}{dx} \right) = 0 \\ R \frac{dN_x^e}{dx} = Q_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) - Q_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \\ R \left( N_z^e - \frac{dM_x^e}{dx} \right) = \frac{h}{2} \left( Q_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) + Q_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \right) \\ R \frac{dN_x^t}{dx} = 0 \\ R \left( N_z^t - \frac{dM_x^t}{dx} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (۷-۳)$$

اکنون با انتگرال‌گیری از سطور اول، پنجم و هفتم و سپس اعمال تغییر متغیر در  $\{y\}$  دستگاه

معادلات ساده شده به شکل رابطه‌ی (۲-۱۴۶) بیان می‌گردد؛ مانند تحلیل گذشته ضرایب دستگاه معادلات ساده شده بدون تغییر باقی می‌ماند و با توجه به روابط (۲-۸۹) تا (۲-۱۴۵) محاسبه می‌شوند. با توجه به همگن بودن ماده ثابت ناهمگنی در کلیه‌ی روابط برابر صفر و خواص لایه‌ی داخل برابر خواص استوانه می‌باشد. برای  $\{I^*\}$  خواهیم داشت.

$$\{I^*\} = \begin{Bmatrix} K_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ l_5x + K_2 \\ l_6 \\ K_3x + K_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۸-۳)$$

دستگاه معادلات ساده شده‌ی حاکم با استفاده از روابط (۲-۱۵۲) تا (۲-۱۶۲) حل می‌شود، برای دست آوردن ثابت موجود در حل، شرایط مرزی به دو صورت، رابطه‌ی (۳-۳) (نوع اول) و رابطه‌ی (۳-۴) (نوع دوم) همچون تحلیل گذشته استفاده می‌گردد.

### ۳-۴-۱ مطالعه‌ی عددی

برای مقایسه‌ی بهتر، در این بخش نیز، مشخصات هندسی و جنس استوانه همچون مطالعه‌ی عددی تحلیل گذشته در نظر گرفته می‌شود. شار الکتریکی  $Q_1 = 6 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$  از لایه‌ی درونی و شار الکتریکی  $Q_2 = 40 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$  از لایه‌ی بیرونی به ترتیب خارج و وارد استوانه می‌شوند، همچنین شرایط مرزی با توجه به روابط (۳-۳) و (۴-۳) به شکل‌های زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \text{ V} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \text{ V} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۹-۳)$$

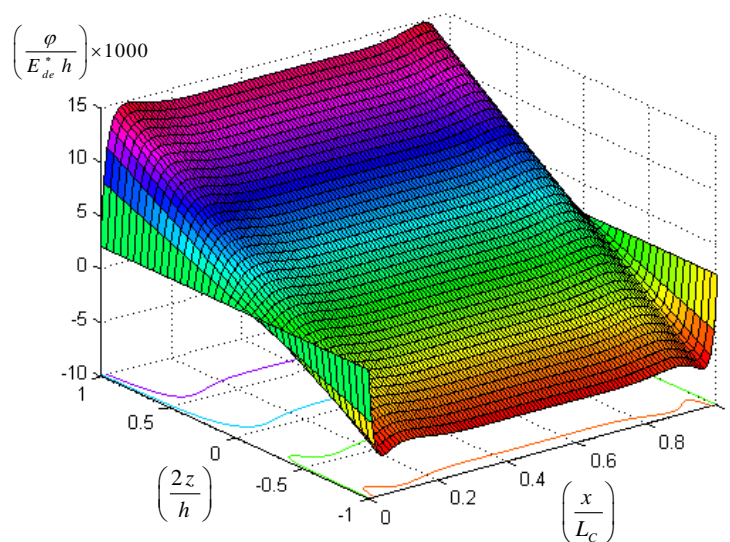
$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_x^m \\ M_x^m \\ Q_x^m \\ M_{xz}^m \\ N_x^e \\ M_x^e \\ N_x^t \\ M_x^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10-3)$$

### ۳-۴-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول

#### رفتار حرارتی

با توجه به عدم وجود بارگذاری حرارتی، عدم وجود شرایط مرزی تغییرات دمایی در دو سر استوانه و جفت‌شدگی یک‌سویه‌ی میدان حرارتی با میدان الکتریکی و مکانیکی، دما در استوانه مقداری ثابت دارد که برابر دمای ثابت مثبت مرجع  $\Theta^* = 295^\circ K$  می‌باشد. پر واضح است که در این حالت تغییرات دمایی در استوانه برابر صفر می‌باشد ( $\Theta = 0^\circ K$ ).

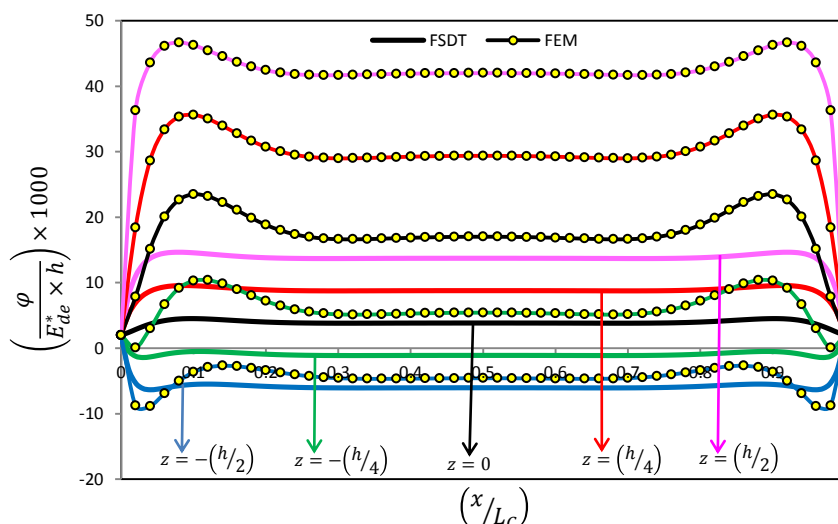
#### رفتار الکتریکی



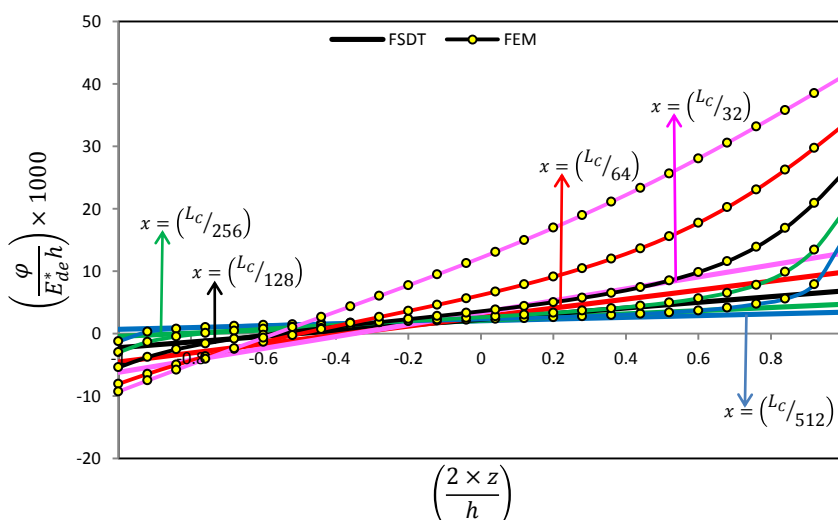
شکل ۳-۲۸ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی  
شکل ۳-۲۸ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در



استوانه نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ با فاصله گرفتن از دو سر استوانه پتانسیل الکتریکی رفتاری خطی پیدا می‌کند. همچنین بیش‌ترین و کمترین مقدار پتانسیل الکتریکی به ترتیب در لایه‌ی خارجی و داخلی اتفاق می‌افتد که به دلیل بارگذاری الکتریکی می‌باشد.



شکل ۳-۲۹ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه شکل ۳-۲۹ نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی را از دو روش اجزای محدود و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مورد مقایسه قرار می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند؛ هر دو روش رفتاری مشابه را برای پتانسیل الکتریکی پیش‌بینی می‌کنند، اما نتایج به دست آمده از دو روش دارای اختلاف مشهودی می‌باشند.

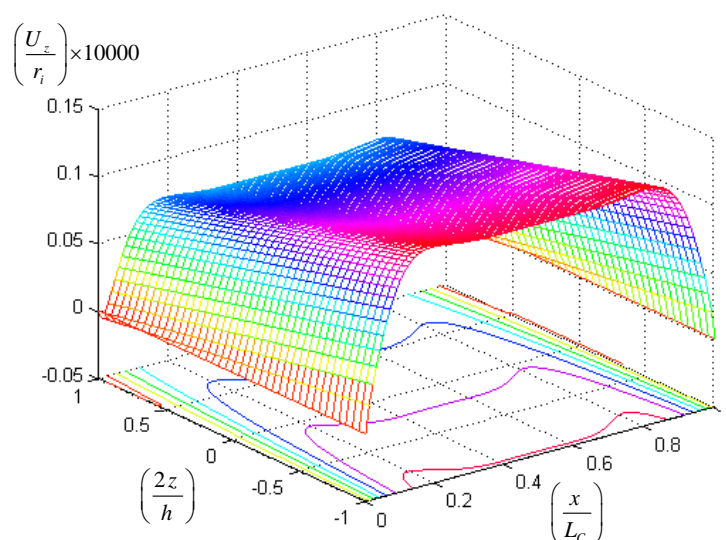


شکل ۳-۳۰ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

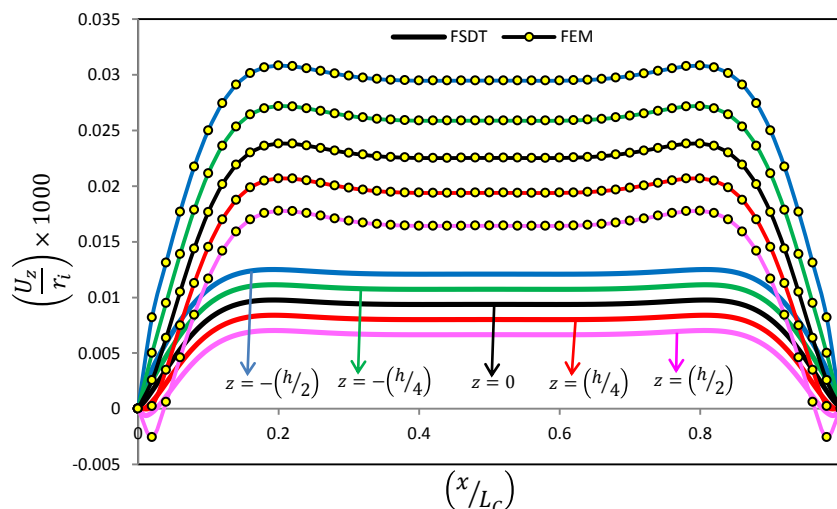
شکل ۳-۳۰ توزیع پتانسیل الکتریکی را در راستای ضخامت از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد. با توجه به نتایج تحلیل اجزای محدود مشاهده می‌گردد رفتار پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت غیرخطی است و با فرض خطی بودن آن در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول سازگاری ندارد، همین امر سبب ایجاد اختلاف در مقادیر پیش‌بینی شده می‌گردد.

### رفتار مکانیکی

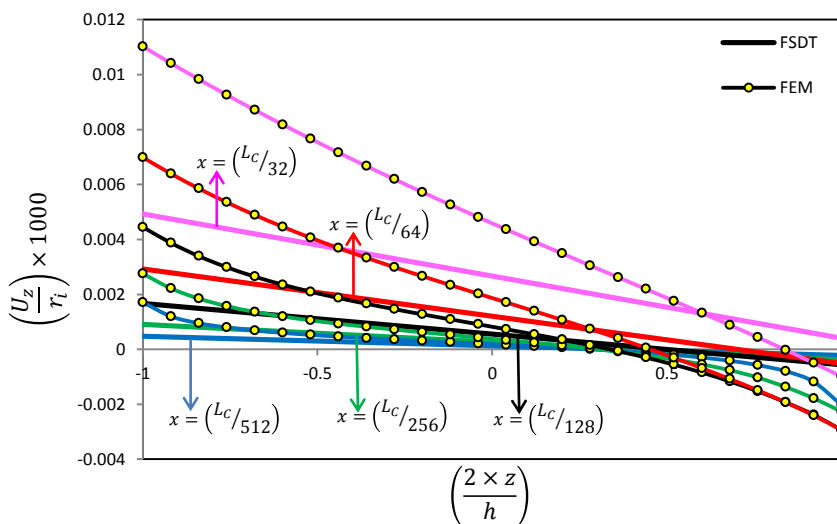
شکل ۳-۳۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد، مشاهده می‌گردد با دور شدن از دو سر استوانه، جابه‌جایی شعاعی در راستای طولی به مقدار ثابتی همگرا می‌شود و رفتار خطی پیدا می‌کند.



شکل ۳-۳۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی  
 شکل ۳-۳۲ نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و تحلیل اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. نتایج بیانگر این امر است که هر دو روش رفتاری همسان برای جابه‌جایی شعاعی پیش‌بینی می‌کنند؛ مقادیر پیش‌بینی شده توسط دو روش دارای اختلاف است که این اختلاف می‌تواند ناشی از فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تغییرات پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت باشد که مطابق آنچه در بخش گذشته بیان شد، سازگار با واقعیت حاکم بر مسأله نیست و سبب اختلاف می‌گردد.

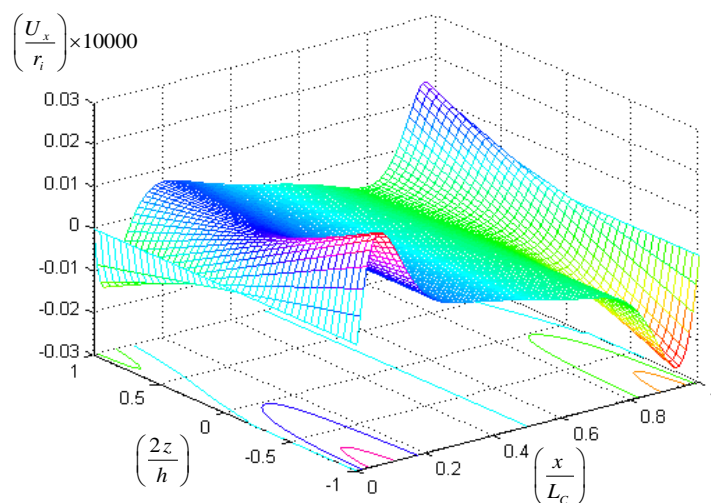


شکل ۳-۳۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۳۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی را در راستای ضخامت با استفاده از روش تحلیلی و اجزای  
 محدود نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود رفتار جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر آن غیر خطی می‌باشد؛  
 به سبب سازگار نبودن فرضیات نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در تمامی طول استوانه، رفتار  
 خطی پیش‌بینی شده توسط نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در نقاط دور از مرز نیز دارای  
 اختلاف می‌باشد.

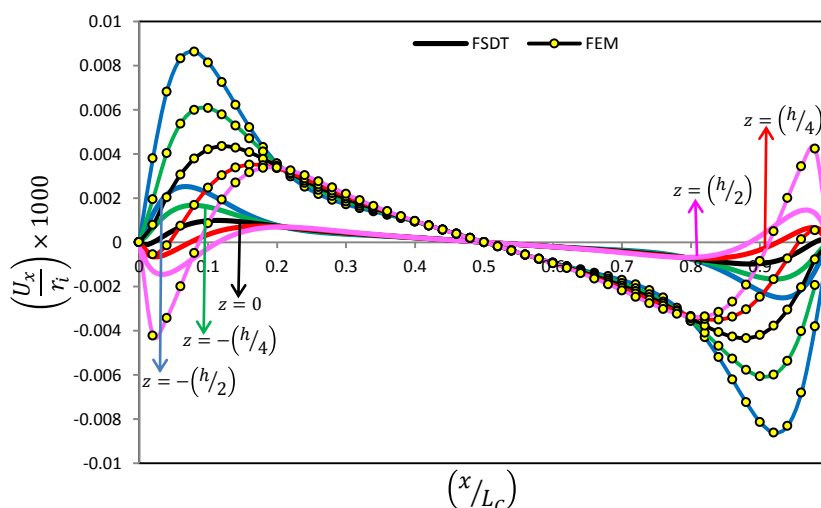


شکل ۳-۳۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۳۴ توزیع جابه‌جایی محوری را در استوانه با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی  
 مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد مقادیر بیشینه و کمینه‌ی جابه‌جایی محوری در شعاع  
 داخلی اتفاق می‌افتد، همچنین جابه‌جایی محوری نسبت به وسط استوانه حالتی قرینه دارد و در نقاط

دور از دو سر استوانه رفتاری خطی پیدا می‌کند.

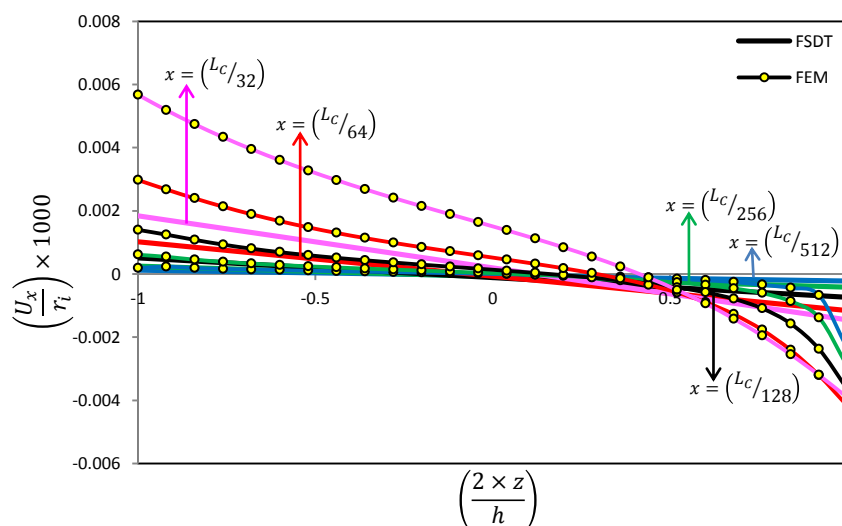


شکل ۳-۳۴ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی  
 شکل ۳-۳۵ نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی محوری را با استفاده از دو روش تحلیلی و  
 اجزای محدود نشان می‌دهد. با توجه به شکل هر دو روش رفتاری همانند با مقادیری متفاوت را برای  
 جابه‌جایی محوری پیش‌بینی می‌کنند. همچنین مشاهده می‌گردد در نقاط دور از دو سر استوانه  
 جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت دارای مقداری ثابت و بدون تغییر می‌باشد.



شکل ۳-۳۵ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۳۶ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و  
 تحلیل اجزای محدود در راستای ضخامت استوانه نشان می‌دهد. روش اجزای محدود رفتاری غیرخطی

را برای توزیع جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت پیش‌بینی می‌کند درحالی‌که روش تحلیلی فرض خطی بودن توزیع جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت را دارد؛ همین امر سبب ایجاد اختلاف در مقادیر پیش‌بینی شده می‌گردد.



شکل ۳-۳۶ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

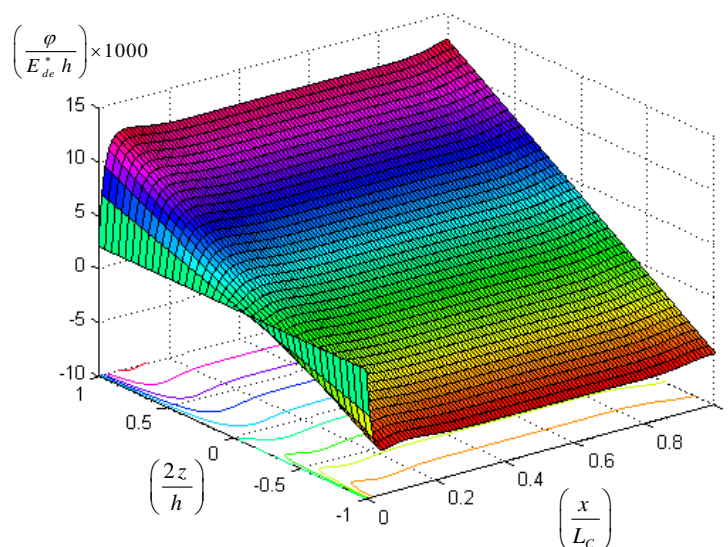
### ۳-۴-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم

#### رفتار حرارتی

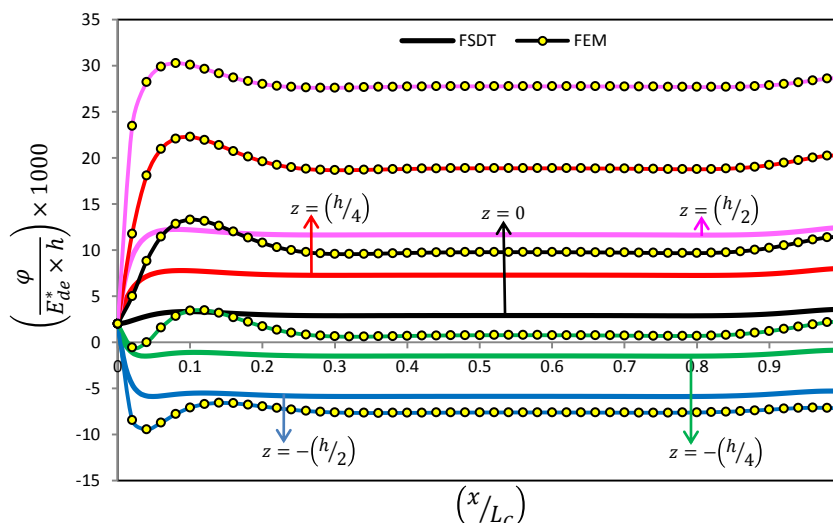
مطابق آنچه برای استوانه تحت بارگذاری الکتریکی با شرایط مرزی نوع اول بیان شد. در این حالت نیز به همان دلایل تغییرات دمایی در استوانه وجود ندارد ( $\Theta = 0^\circ K$ ) و تمامی جدار استوانه در دمای ثابت مثبت مرجع  $\Theta^* = 295^\circ K$  می‌باشند.

#### رفتار الکتریکی

شکل ۳-۳۷ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه‌ی تحت بارگذاری الکتریکی با شرایط مرزی نوع دوم نشان می‌دهد. اثر شرایط مرزی بر توزیع پتانسیل الکتریکی کاملاً مشهود است؛ در فاصله‌ای اندک از سر استوانه با پتانسیل الکتریکی معین، پتانسیل الکتریکی به مقداری ثابت همگرا شده و تا سر عایق آن تقریباً ثابت باقی می‌ماند، در نواحی دور از دو سر استوانه پتانسیل الکتریکی رفتاری خطی را از خود نشان می‌دهد.

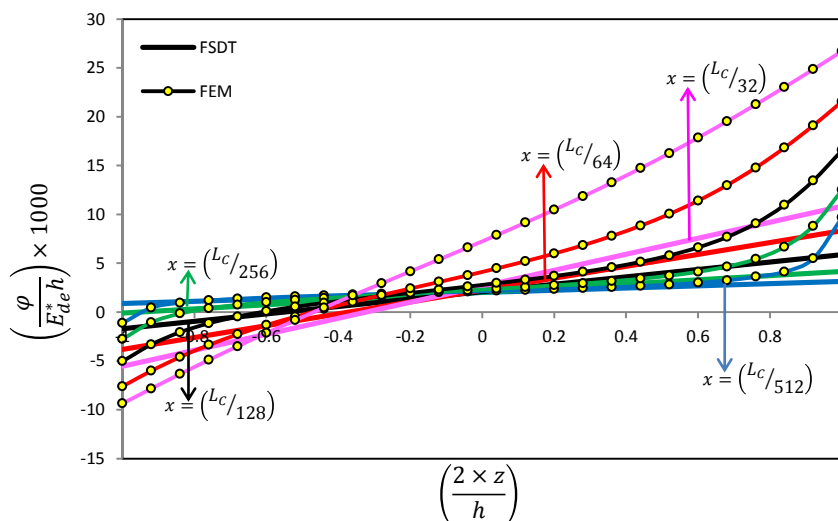


شکل ۳-۳۷ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی  
 شکل ۳-۳۸ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و  
 اجزای محدود نشان می‌دهد. اگرچه هر دو روش رفتاری همسان را برای پتانسیل الکتریکی پیش‌بینی  
 می‌کنند اما نتایج به دست آمده از دو روش دارای اختلاف می‌باشد، همچنین اثر شرایط مرزی بر نتایج  
 محاسبه شده توسط دو روش نمایان است.



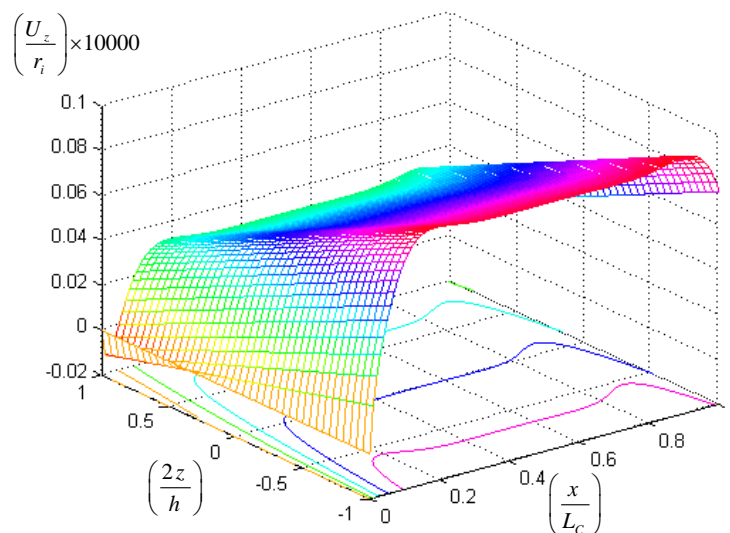
شکل ۳-۳۸ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۳۹ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی  
 اول و اجزای محدود در راستای ضخامت مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. مشاهده می‌گردد توزیع

پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت غیرخطی است و فرض خطی بودن آن در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، سازگاری با واقعیت حاکم بر مسأله ندارد؛ همین امر را می‌توان مسبب اصلی ایجاد اختلاف در نتایج پیش‌بینی شده به کمک دو روش دانست.



شکل ۳-۳۹ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

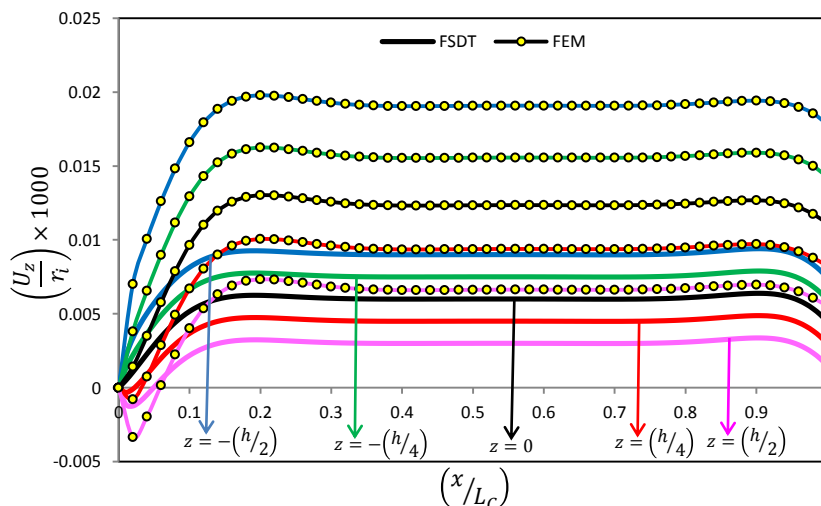
### رفتار مکانیکی



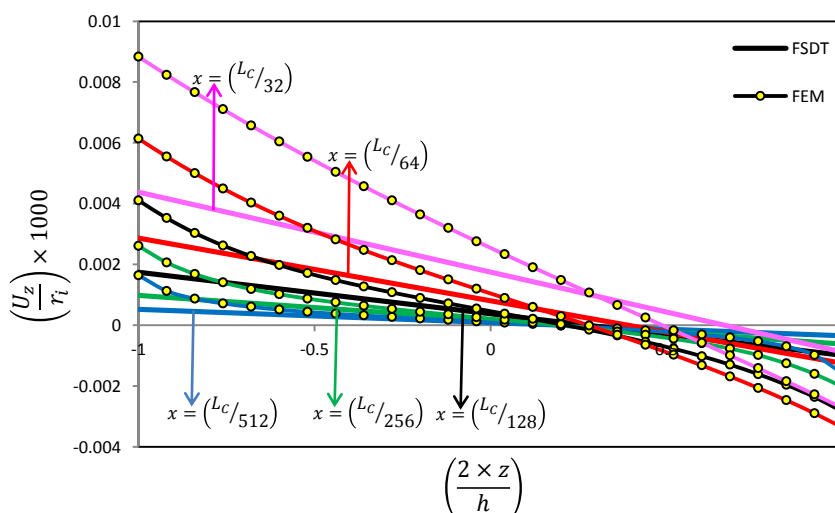
شکل ۳-۴۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی

شکل ۳-۴۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه نشان می‌دهد. جابه‌جایی شعاعی با فاصله گرفتن از سر گیردار استوانه به مقدار ثابتی همگرا

می‌گردد که این مقدار ثابت در نزدیکی سر آزاد استوانه دست‌خوش تغییرات اندکی می‌شود. همچنین جابه‌جایی شعاعی در نقاط دور از دو سر استوانه رفتار خطی دارد.



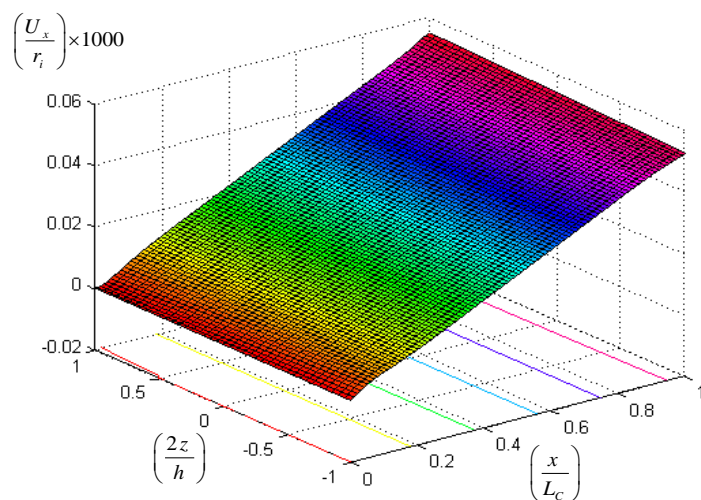
شکل ۳-۴۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۴۱ نتایج به دست آمده برای توزیع جابه‌جایی شعاعی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل  
 برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. هر دو روش رفتاری  
 همانند با مقادیری مختلف را برای توزیع جابه‌جایی شعاعی پیش‌بینی می‌کنند.



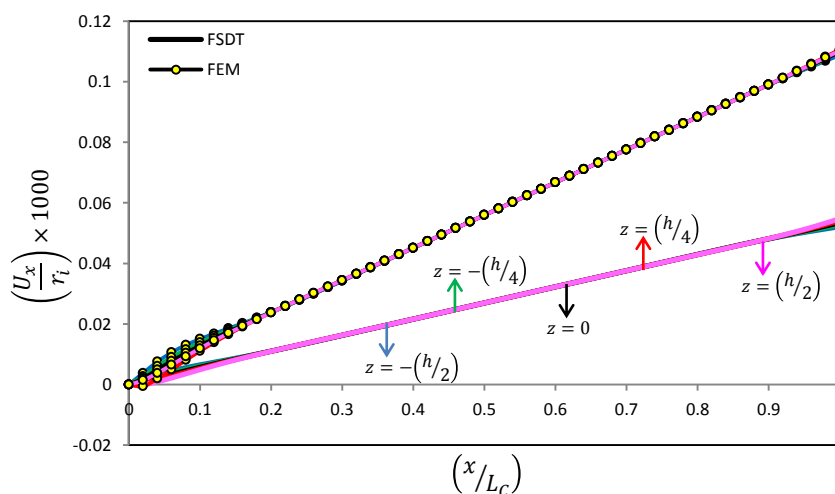
شکل ۳-۴۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۴۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و  
 روش اجزای محدود در راستای ضخامت استوانه نشان می‌دهد. نتایج اجزای محدود نشان می‌دهد  
 جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه رفتاری غیرخطی دارد و فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر



شکل برشی مرتبه‌ی اول در نواحی نزدیک سر استوانه با واقعیت مسأله ناسازگار است. آنچه ذکر شد؛ به همراه فرض خطی بودن برای پتانسیل الکتریکی منشأ اصلی ایجاد اختلاف در نتایج می‌باشند.

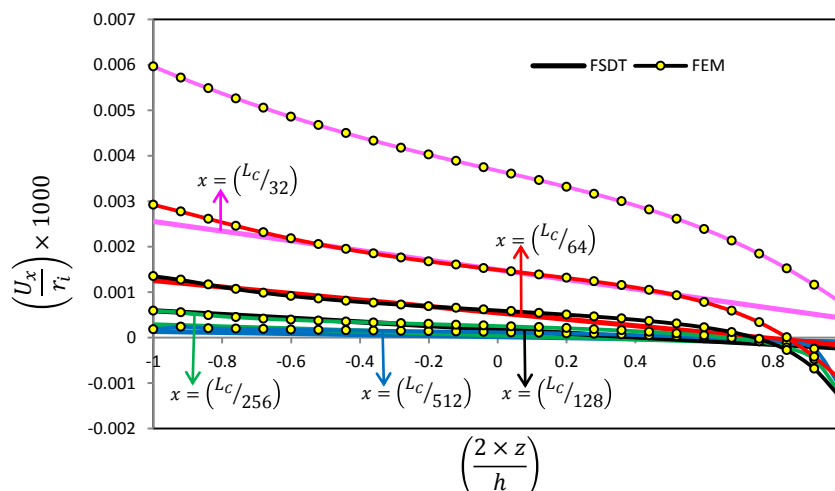


شکل ۳-۴۳ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتریکی  
 شکل ۳-۴۳ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه نشان می‌دهد. جابه‌جایی محوری جز در نواحی نزدیک سر گیردار استوانه، رفتاری خطی دارد و اثرات شرایط مرزی دو سر استوانه بر توزیع آن کاملاً مشهود است؛ جابه‌جایی محوری از سر گیردار استوانه با مقدار صفر شروع شده و با روندی صعودی تا سر آزاد آن ادامه پیدا می‌کند، بیش‌ترین مقدار جابه‌جایی محوری در سر آزاد استوانه رخ می‌دهد.



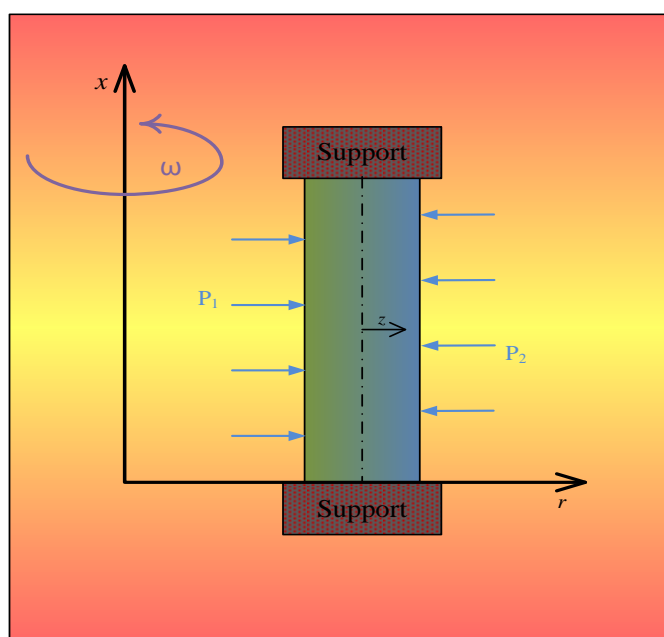
شکل ۳-۴۴ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۴۴ توزیع جابه‌جایی محوری را با دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد، هر دو

روش رفتار همانندی را با اختلاف برای جابه‌جایی محوری پیش‌بینی می‌کنند.



شکل ۳-۴۵ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۴۵ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود در راستای ضخامت، مقایسه می‌کند. نتایج اجزای محدود نشان می‌دهد؛ جابه‌جایی محوری رفتار غیرخطی دارد و فرض خطی بودن آن در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مناسب نیست. همین امر سبب ایجاد اختلاف در مقادیر پیش‌بینی شده‌ی دو روش می‌گردد.

### ۳-۵ تحلیل مکانیکی استوانه‌های همگن



شکل ۳-۴۶ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری مکانیکی

شکل ۳-۴ استوانه‌ی چرخان را نشان می‌دهد؛ که تحت فشار داخلی  $P_1$  و فشار خارجی  $P_2$  قرار دارد. در این حالت برای دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله با توجه به روابط فصل دوم داریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} R \frac{dN_x^m}{dx} = 0 \\ R \left( Q_x^m - \frac{dM_x^m}{dx} \right) = 0 \\ R \left( \frac{N_\theta^m}{R} - \frac{dQ_x^m}{dx} \right) = P_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) - P_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) + \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 (R+z)^2 dz \\ R \left( \frac{M_\theta^M}{R} + N_z^M - \frac{dM_{xz}^M}{dx} \right) = -\frac{h}{2} \left( P_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) + P_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \right) + \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 z (R+z)^2 dz \\ R \frac{dN_x^e}{dx} = 0 \\ R \left( N_z^e - \frac{dM_x^e}{dx} \right) = 0 \\ R \frac{dN_x^t}{dx} = 0 \\ R \left( N_z^t - \frac{dM_x^t}{dx} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (11-3)$$

مشابه تحلیل‌های گذشته برای به دست آوردن دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده از سطور

اول، پنجم و هفتم رابطه‌ی (۱۱-۳) انتگرال‌گیری می‌شود، سپس تغییر متغیر در شبه بردار  $\{y\}$  اعمال می‌شود. دستگاه معادلات ساده شده به شکل رابطه‌ی (۲-۱۴۶) بیان می‌گردد که برای محاسبه‌ی ضرایب دستگاه معادلات ساده شده از روابط (۲-۸۹) تا (۲-۱۴۵) استفاده می‌گردد. با توجه به همگن بودن ماده در این روابط کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی برابر صفر و خواص استوانه برای خواص لایه‌ی داخلی در نظر گرفته می‌شود. همچنین در این حالت برای  $\{l^*\}$  داریم.

$$\{l^*\} = \left\{ \begin{array}{c} K_1 \\ 0 \\ l_3 \\ l_4 \\ K_2 \\ 0 \\ K_3x + K_4 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (12-3)$$

همچون گذشته، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از روابط (۲-۱۵۲) تا (۲-۱۶۲) حل می‌شود و ثوابت موجود در حل، با استفاده از شرایط مرزی به دو صورت رابطه‌ی (۳-۳) (نوع اول) و رابطه‌ی (۳-۴) (نوع دوم) به دست می‌آیند.

### ۳-۵-۱ مطالعه‌ی عددی

برای مقایسه‌ی بهتر، در این بخش نیز، مشخصات هندسی و جنس استوانه همچون مطالعه‌های عددی گذشته در نظر گرفته می‌شود. استوانه با سرعت دورانی ثابت  $\omega = 350 \text{ rad/s}$  حول محور خود می‌چرخد و تحت فشار داخلی  $P_1 = 3 \text{ MPa}$  قرار دارد.

همچنین شرایط مرزی با توجه به روابط (۳-۳) و (۳-۴) در دو حالت نوع اول و دوم به شکل روابط (۳-۱۳) و (۳-۱۴) بیان می‌شوند.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۳-۱۳)$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_x^m \\ M_x^m \\ Q_x^m \\ M_{xz}^m \\ N_x^e \\ M_x^e \\ N_x^t \\ M_x^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۳-۱۴)$$

### ۳-۵-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول

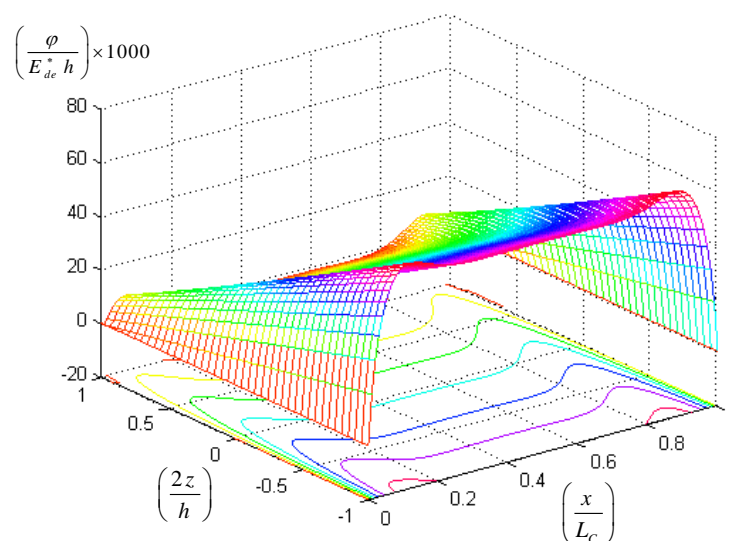
#### رفتار حرارتی

در این بخش نیز به دلیل عدم بارگذاری حرارتی، نبود تغییرات دمایی در شرایط مرزی نوع اول و

دوم مورد مطالعه و جفت‌شدگی یک‌سویه‌ی معادلات میدان حرارتی با میدان الکتریکی و مکانیکی، تغییرات دمایی در استوانه وجود ندارد ( $\Theta = 0^\circ K$ )، دما در استوانه مقداری ثابت و برابر دمای ثابت مثبت مرجع  $\Theta^* = 295^\circ K$  دارد.

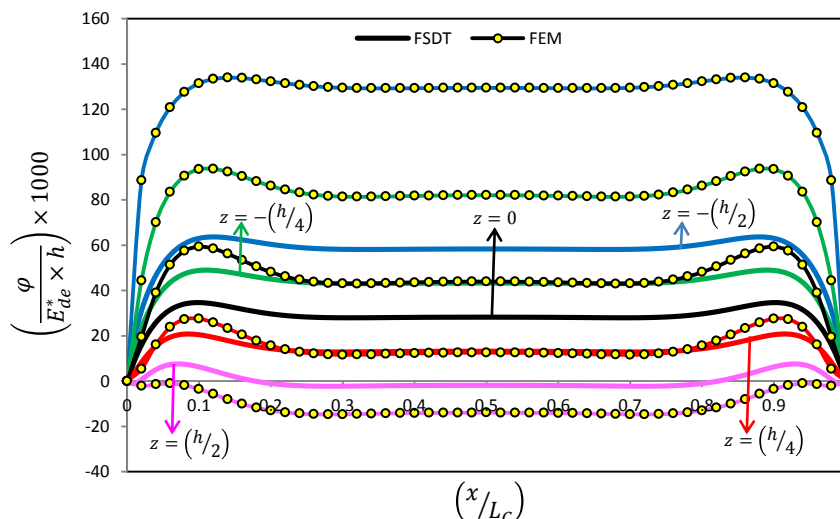
### رفتار الکتریکی

شکل ۳-۴۷ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه، بر اثر بارگذاری مکانیکی نشان می‌دهد. در نقاط دور از دو سر استوانه، پتانسیل الکتریکی در راستای طولی به مقداری ثابت همگرا می‌گردد و رفتار خطی از خود نشان می‌دهد. همچنین مشاهده می‌گردد؛ بر اثر بارگذاری مکانیکی بیش‌ترین و کمترین مقدار پتانسیل الکتریکی به ترتیب در لایه‌ی داخلی و خارجی اتفاق می‌افتد.

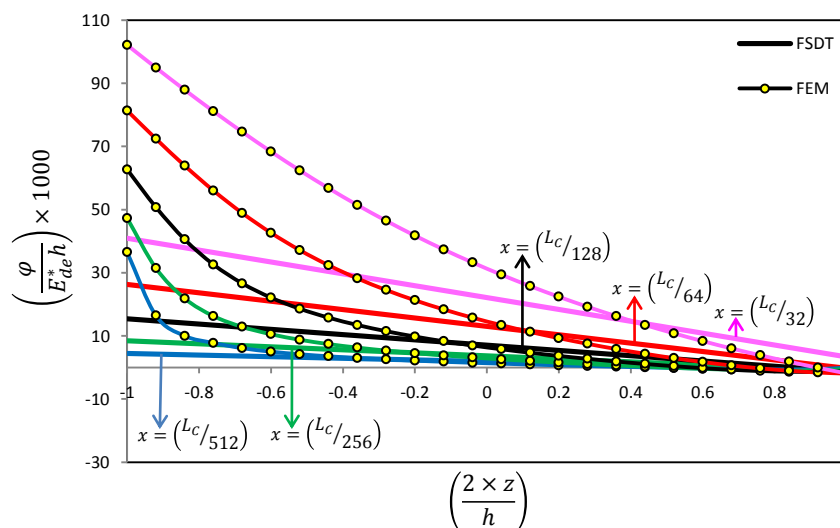


شکل ۳-۴۷ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی

شکل ۳-۴۸ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و اجزای محدود نشان می‌دهد. هر دو روش روندی مشابه را برای توزیع پتانسیل الکتریکی در استوانه پیش‌بینی می‌کنند که دارای اختلاف می‌باشند که این اختلاف موجود در نتایج پیش‌بینی شده به کمک دو روش، در لایه‌ی داخلی به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد.



شکل ۳-۴۸ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۴۹ نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش اجزای محدود و  
 تحلیلی در راستای ضخامت مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. روش اجزای محدود رفتاری غیرخطی  
 را برای توزیع پتانسیل الکتریکی پیش‌بینی می‌کند، درحالی‌که نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول  
 رفتار پتانسیل الکتریکی را در راستای ضخامت خطی می‌داند. همین امر سبب ایجاد اختلاف در نتایج  
 پیش‌بینی شده به کمک دو روش می‌گردد.

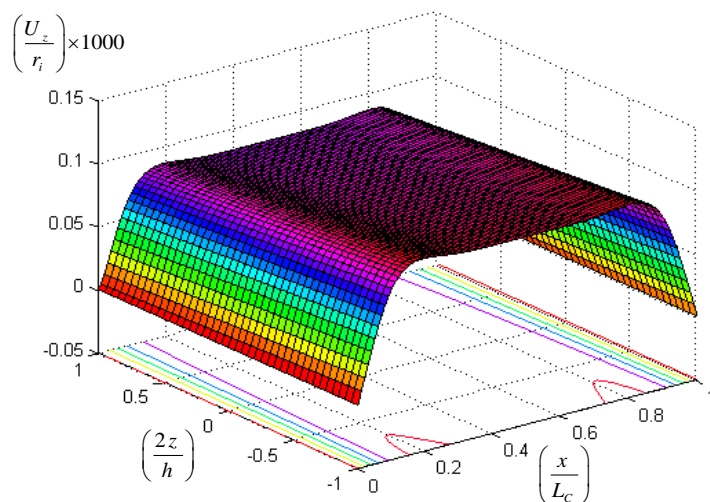


شکل ۳-۴۹ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

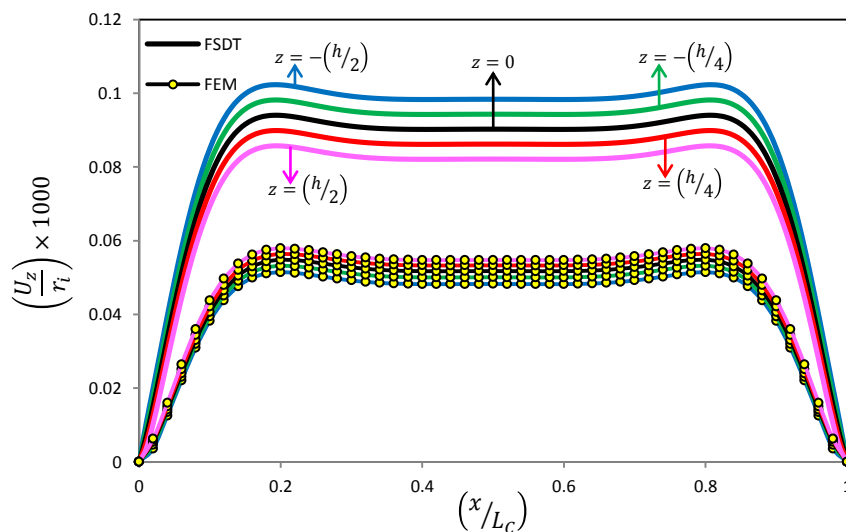
### رفتار مکانیکی

شکل ۳-۵۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر

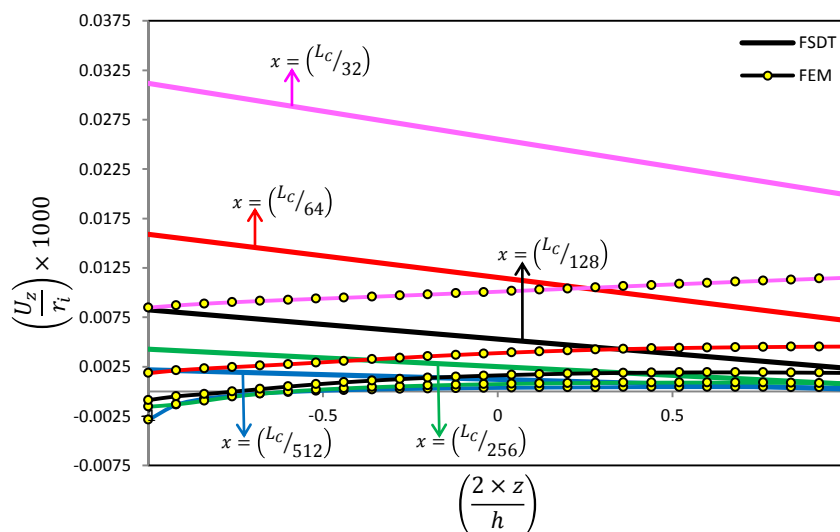
اثر بارگذاری مکانیکی در استوانه نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ با دور شدن از دو سر استوانه جابه‌جایی در راستای طولی به مقداری ثابت همگرا شده و رفتاری خطی پیدا می‌کند.



شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی  
 شکل ۳-۵۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد. اگرچه هر دو روش رفتاری همانند را، برای توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه پیش‌بینی می‌کنند اما مقادیر پیش‌بینی شده به کمک دو روش دارای اختلاف می‌باشند؛ همچنین روش تحلیلی با حرکت از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی رفتاری نزولی را برای جابه‌جایی شعاعی پیش‌بینی می‌کند در حالی که روش اجزای محدود خلاف روش تحلیلی، رفتاری صعودی را پیش‌بینی می‌کند.



شکل ۳-۵۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه

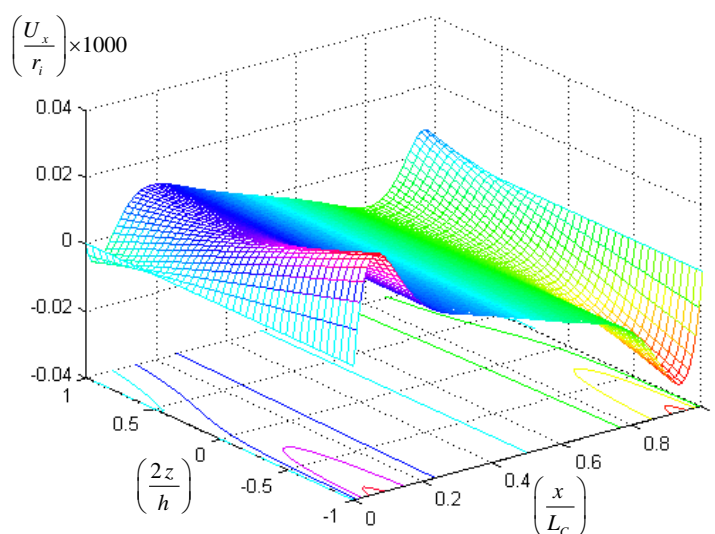


شکل ۳-۵۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

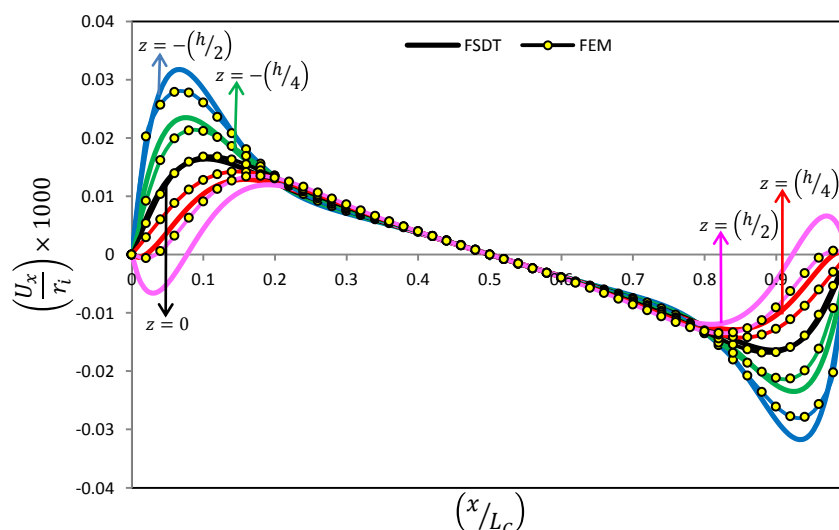
شکل ۳-۵۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود در راستای ضخامت مورد بررسی قرار می‌دهد. نتایج اجزای محدود نشان می‌دهند؛ اگرچه توزیع جابه‌جایی شعاعی رفتاری کاملاً خطی ندارد اما فرض تغییرات خطی جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه فرض مناسبی می‌باشد.

مشاهده می‌گردد؛ درحالی‌که نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای توزیع جابه‌جایی شعاعی فرض خطی بودن را به کار می‌برد اما رفتاری خلاف واقعیت حاکم بر مسأله را در راستای ضخامت برای استوانه پیش‌بینی می‌کند. علت این امر را می‌توان این‌گونه بیان نمود؛ نامناسب بودن فرض تغییرات خطی برای پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت سبب ایجاد اختلاف در پیش‌بینی پتانسیل الکتریکی می‌گردد و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با اختلاف چشم‌گیری، مقدار کمتری را برای پتانسیل الکتریکی مخصوصاً در لایه‌ی داخلی محاسبه می‌کند. به همین خاطر، در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول اثر پیزوالکتریک حاکم بر مجموعه کمتر لحاظ می‌گردد و بیشتر اثر بارگذاری خارجی (چرخش و فشار داخلی) بر مجموعه دیده می‌شود؛ بنابراین نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول خلاف واقعیت حاکم بر مسأله بیش‌ترین مقدار جابه‌جایی شعاعی را در لایه‌ی داخلی پیش‌بینی می‌کند، البته فرض خطی بودن توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت نیز، خود یکی از علل ایجاد اختلاف می‌باشد.



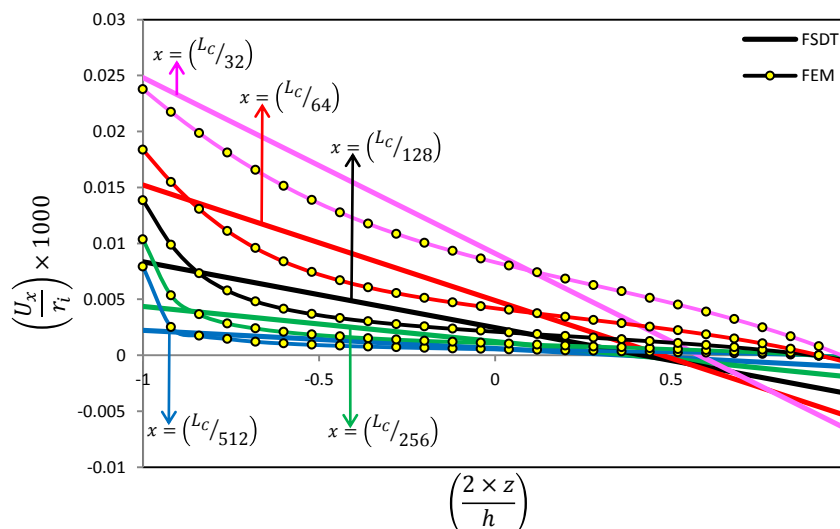


شکل ۳-۵۳ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی  
 شکل ۳-۵۳ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در  
 استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد با دور شدن از دو سر استوانه  
 جابه‌جایی محوری رفتاری خطی پیدا می‌کند؛ همچنین جابه‌جایی محوری نسبت به وسط استوانه  
 حالت قرینه دارد و مقادیر بیشینه و کمینه‌ی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی داخلی اتفاق می‌افتد.



شکل ۳-۵۴ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۵۴ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود در استوانه  
 نشان می‌دهد. هر دو روش رفتاری همسان را برای توزیع جابه‌جایی محوری در راستای طولی استوانه  
 پیش‌بینی می‌کنند که با دور شدن از لایه‌ی میانی، مقادیر پیش‌بینی شده در نزدیکی دو سر استوانه،

دارای اختلاف می‌گردند.



شکل ۳-۵۵ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۵۵ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از دو روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. اگرچه روش اجزای محدود رفتار غیرخطی را برای جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت پیش‌بینی می‌کند؛ اما فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تقریب رفتار جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت مناسب است.

### ۳-۵-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم

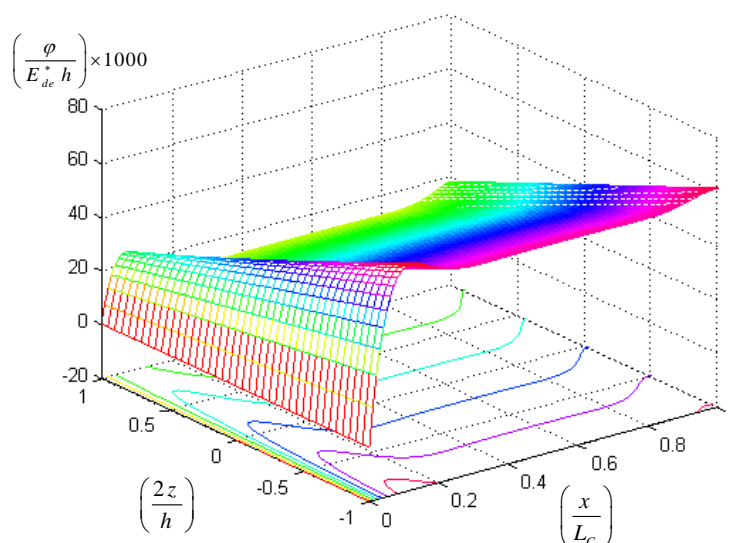
#### رفتار حرارتی

مطابق آنچه در رفتار حرارتی استوانه با شرایط مرزی نوع اول برای بارگذاری مکانیکی بیان شد؛ در این جا نیز دمای استوانه برابر دمای ثابت مثبت مرجع ( $\Theta^* = 295^\circ K$ ) می‌باشد.

#### رفتار الکتریکی

شکل ۳-۵۶ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه با شرایط مرزی نوع دوم که تحت بارگذاری مکانیکی قرار دارد، نشان می‌دهد. اثر شرایط مرزی نوع دوم بر توزیع پتانسیل الکتریکی کاملاً مشهود است؛ پتانسیل الکتریکی با فاصله گرفتن از سری که دارای پتانسیل الکتریکی مشخص می‌باشد به مقداری ثابت همگرا می‌گردد و در نزدیکی سر عایق

الکتریکی استوانه دست‌خوش تغییرات اندکی می‌گردد.

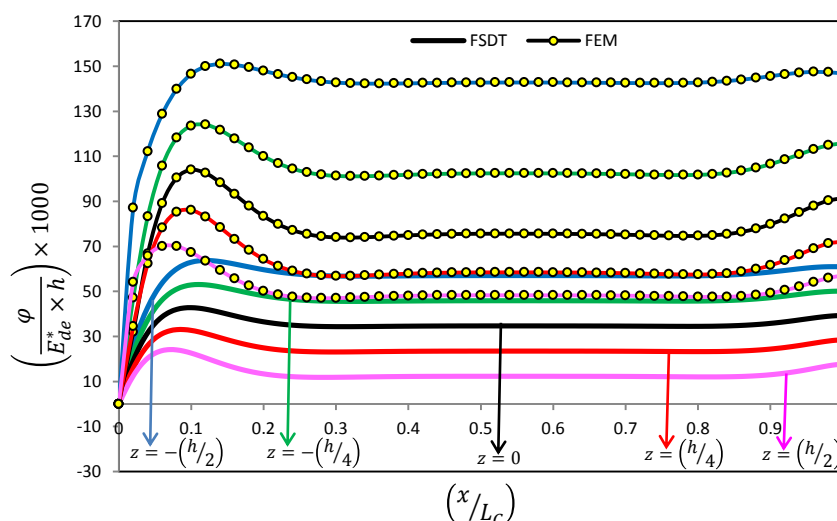


شکل ۳-۵۶ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی

شکل ۳-۵۷ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی

اول و اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند؛ هر دو روش رفتاری

مشابه اما با اختلاف را برای پتانسیل الکتریکی پیش‌بینی می‌کنند.

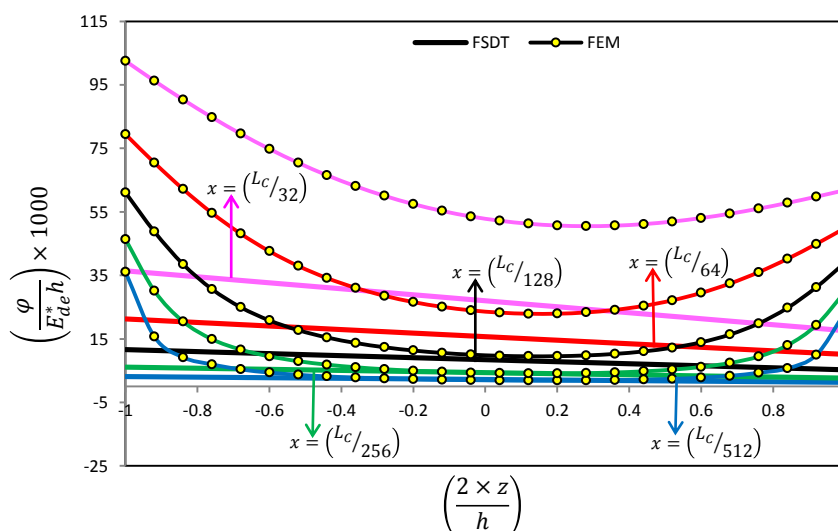


شکل ۳-۵۷ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه

شکل ۳-۵۸ توزیع پتانسیل الکتریکی را در راستای ضخامت با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل

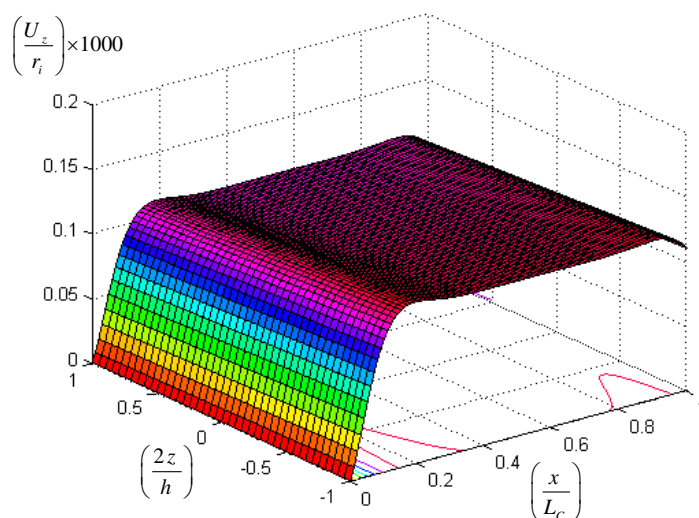
برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. نتایج اجزای محدود

تأکید دارند رفتار توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت، رفتاری غیرخطی و تقریباً سهمی‌وار می‌باشد؛ بنابراین می‌توان فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت را فرضی نامناسب و به دور از واقعیت حاکم بر مسأله دانست که سبب ایجاد اختلاف در مقادیر پیش‌بینی شده به کمک روش تحلیلی می‌گردد.



شکل ۳-۵۸ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

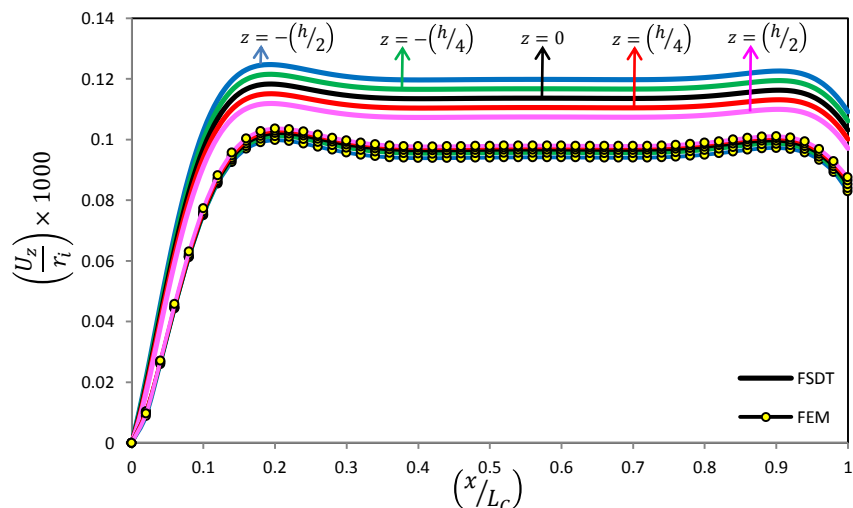
### رفتار مکانیکی



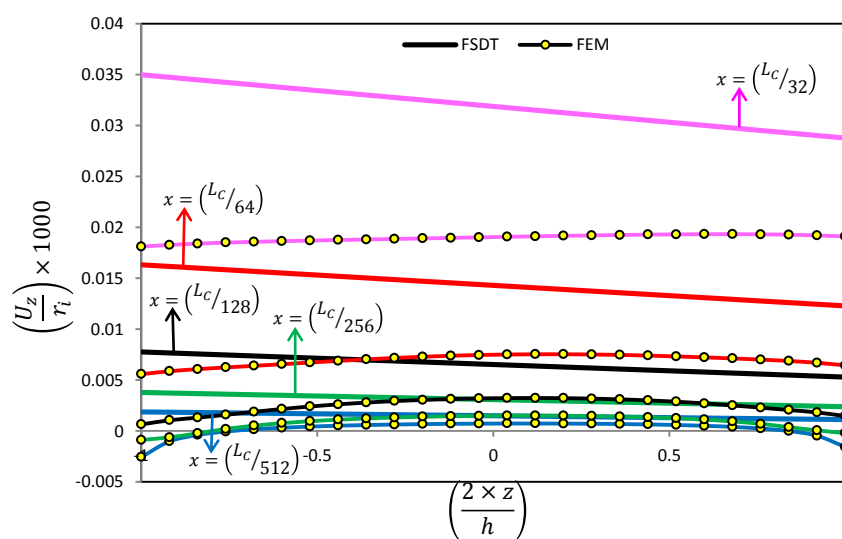
شکل ۳-۵۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی

شکل ۳-۵۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه با شرایط مرزی نوع دوم نشان می‌دهد. در این حالت نیز اثر شرایط مرزی نوع دوم بر توزیع

جابه‌جایی شعاعی کاملاً مشهود است؛ جابه‌جایی شعاعی با فاصله گرفتن از سر گیردار استوانه به مقدار ثابتی همگرا می‌گردد و در نزدیکی سر آزاد آن دست‌خوش تغییرات اندک می‌گردد.

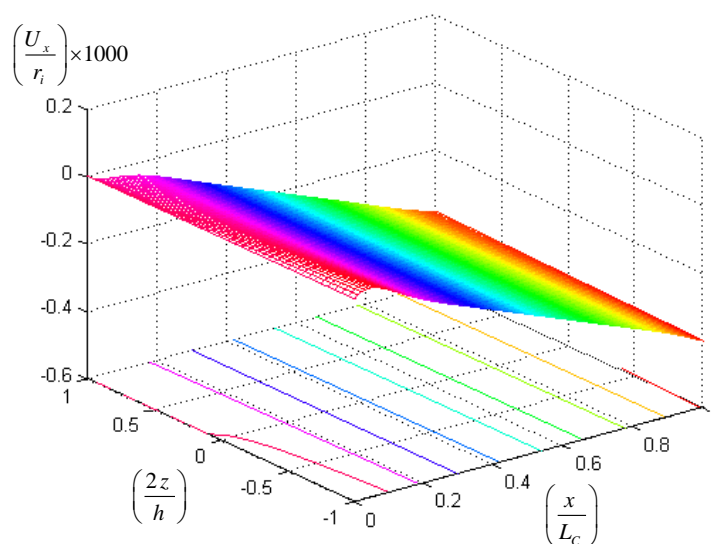


شکل ۳-۶۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۶۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود در استوانه مورد بررسی قرار می‌دهد. اگرچه هر دو روش رفتار مشابهی را برای توزیع جابه‌جایی شعاعی پیش‌بینی می‌کنند اما مقادیر پیش‌بینی‌شده توسط دو روش تفاوت دارند؛ همچنین روش تحلیلی با حرکت از لایه‌ی داخلی به لایه‌ی خارجی روندی نزولی را برای جابه‌جایی شعاعی پیش‌بینی می‌کند در حالی که روش اجزای محدودی روندی صعودی را پیش‌بینی می‌کند.



شکل ۳-۶۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۶۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی را در راستای ضخامت با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل

برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. مطابق آنچه در بخش گذشته برای استوانه با شرایط مرزی نوع اول بیان شد؛ اگرچه نتایج اجزای محدود رفتاری تقریباً خطی را برای توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه نشان می‌دهند اما به دلیل فرض نامناسب خطی بودن برای توزیع پتانسیل الکتریکی، نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع پتانسیل الکتریکی را با اختلاف زیاد، به ویژه در لایه‌ی داخلی با مقدار اندک پیش‌بینی می‌کند، همین امر سبب می‌گردد؛ تأثیر پیزوالکتریک در روش تحلیلی اندک شود و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بیشتر جابه‌جایی شعاعی را تحت اثر بارگذاری مکانیکی (فشار داخلی و چرخش) محاسبه کند. به همین خاطر، جابه‌جایی شعاعی پیش‌بینی‌شده به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با واقعیت مسأله سازگار نیست و با حرکت از لایه‌ی خارجی به لایه‌ی داخلی روندی نزولی را در پیش می‌گیرد. همان طور که در گذشته نیز بیان شد؛ فرض خطی بودن توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت نیز از علل ایجاد اختلاف در پیش‌بینی نتایج می‌باشد.

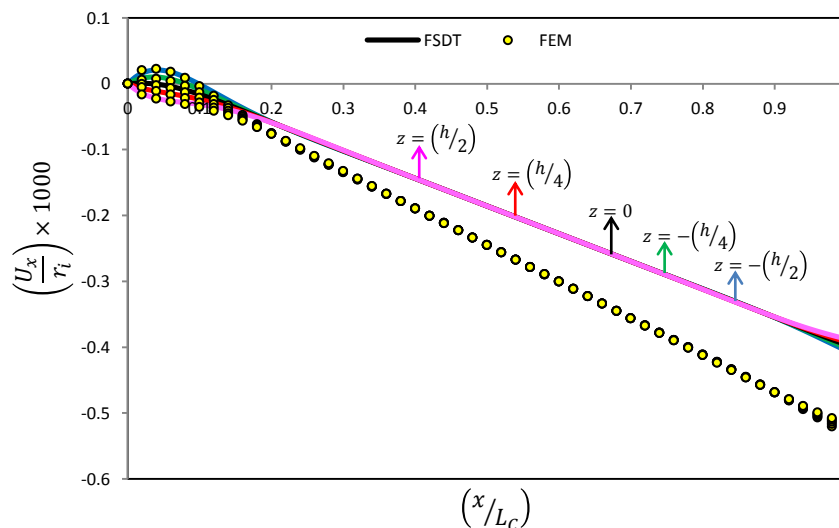


شکل ۳-۶۲ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری مکانیکی

شکل ۳-۶۲ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی

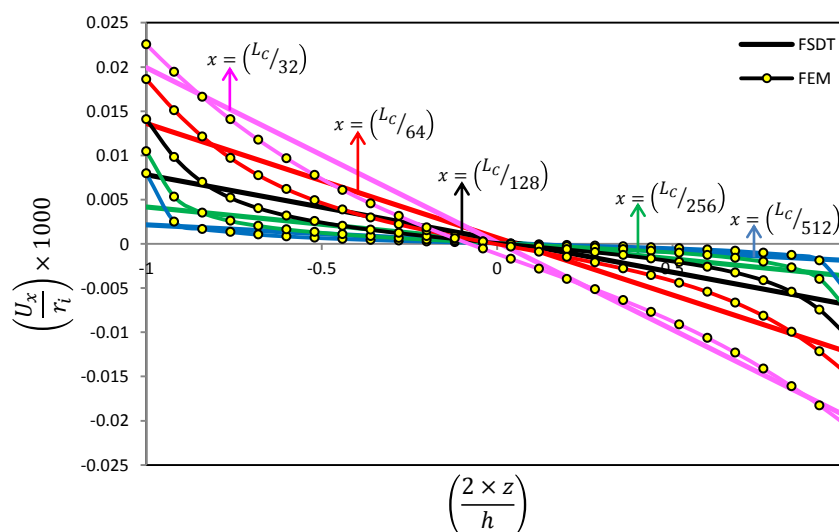
اول در استوانه نشان می‌دهد. اثر شرایط مرزی نوع دوم بر توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه کاملاً مشهود است، توزیع جابه‌جایی محوری با فاصله گرفتن از سر گیردار استوانه رفتاری خطی و نزولی از

خود نشان می‌دهد که در نزدیکی سر آزاد استوانه دست‌خوش تغییرات اندک می‌گردد، در این حالت بیش‌ترین مقدار جابه‌جایی محوری در سر آزاد آن اتفاق می‌افتد.



شکل ۳-۶۳ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه

شکل ۳-۶۳ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. هر دو روش رفتاری مشابه اما با اختلاف را برای توزیع جابه‌جایی محوری پیش‌بینی می‌کنند. با فاصله گرفتن از سر گیر دار استوانه اختلاف به وجود آمده رفته‌رفته زیاد می‌گردد و در سر آزاد استوانه به بیش‌ترین مقدار می‌رسد. همچنین هر دو روش در نقاط دور از دو سر استوانه، رفتار جابه‌جایی محوری را مستقل از لایه‌های استوانه می‌دانند.

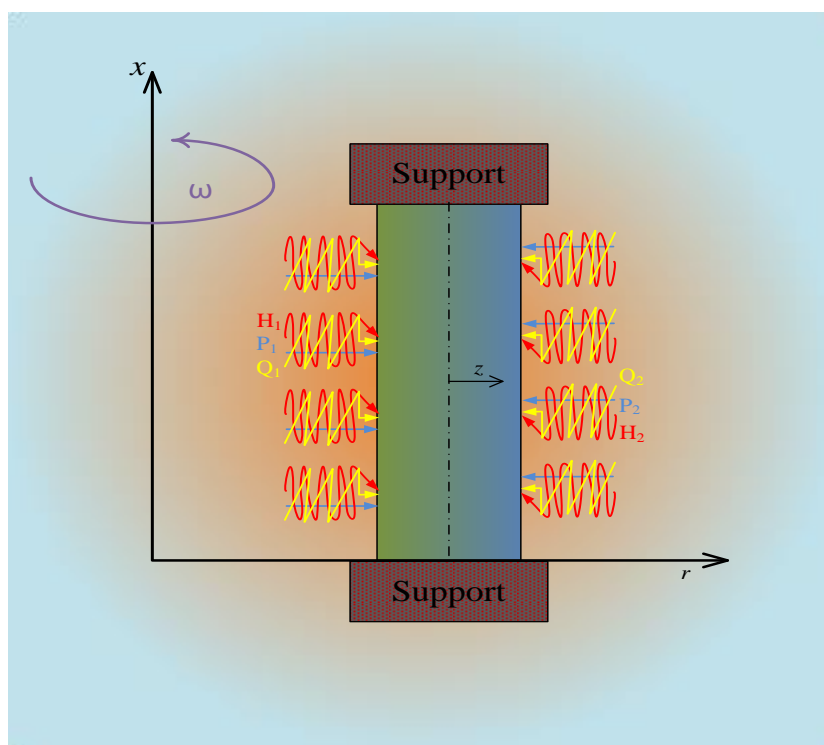


شکل ۳-۶۴ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

شکل ۳-۶۴ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود در راستای ضخامت استوانه مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. اگرچه نتایج اجزای محدود رفتاری غیرخطی را برای توزیع جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت استوانه نشان می‌دهد؛ اما فرض خطی بودن روش تحلیلی نیز، تقریب به نسبت خوبی برای رفتار غیرخطی جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت استوانه است.

### ۳-۶ تحلیل الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های همگن

شکل ۳-۶۵ استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی را نشان می‌دهد؛ استوانه در لایه‌ی داخلی تحت فشار  $P_1$ ، شار حرارتی وارده‌ی  $H_1$  و شار الکتریکی وارده‌ی  $Q_1$  و در لایه‌ی خارجی تحت فشار  $P_2$ ، شار حرارتی وارده‌ی  $H_2$  و شار الکتریکی وارده‌ی  $Q_2$  قرار دارد.



شکل ۳-۶۵ مقطع عرضی استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در این حالت با توجه به روابط فصل دوم، برای دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله خواهیم داشت.



$$\left\{ \begin{array}{l} R \frac{dN_x^m}{dx} = 0 \\ R \left( Q_x^m - \frac{dM_x^m}{dx} \right) = 0 \\ R \left( \frac{N_\theta^m}{R} - \frac{dQ_x^m}{dx} \right) = P_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) - P_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) + \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 (R+z)^2 dz \\ R \left( \frac{M_\theta^M}{R} + N_z^M - \frac{dM_{xz}^M}{dx} \right) = -\frac{h}{2} \left( P_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) + P_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \right) + \int_{-h/2}^{h/2} \rho \omega^2 z (R+z)^2 dz \\ R \frac{dN_x^e}{dx} = Q_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) + Q_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \\ R \left( N_z^e - \frac{dM_x^e}{dx} \right) = \frac{h}{2} \left( Q_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) - Q_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \right) \\ R \frac{dN_x^t}{dx} = H_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) + H_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \\ R \left( N_z^t - \frac{dM_x^t}{dx} \right) = \frac{h}{2} \left( H_1 \left( R - \frac{h}{2} \right) - H_2 \left( R + \frac{h}{2} \right) \right) \end{array} \right. \quad (15-3)$$

مطابق آنچه پیش‌تر بیان شد؛ برای ایجاد دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده از سطور اول،

پنجم و هفتم دستگاه معادلات حاکم انتگرال‌گیری می‌شود و سپس تغییر متغیر در شبه بردار  $\{y\}$

انجام می‌شود. دستگاه معادلات دیفرانسیل ساده شده به شکل رابطه‌ی (۲-۱۴۶) می‌باشد که  $[A^*]$ ،

$[B^*]$  و  $[C^*]$  ماتریس‌های ضرایب این دستگاه می‌باشند و با استفاده از روابط (۲-۸۹) تا (۲-۱۴۵)

محاسبه می‌شوند. با توجه به همگن بودن ماده، در محاسبه‌ی مؤلفه‌های ماتریس‌های ضرایب دستگاه

معادلات ساده شده، ثوابت ناهمگنی موجود در روابط برابر صفر و خواص لایه‌ی داخلی استوانه برابر

خواص استوانه در نظر گرفته می‌شوند. همچنین برای  $\{l^*\}$  داریم.

$$\{l^*\} = \left\{ \begin{array}{c} K_1 \\ 0 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 x + K_2 \\ l_6 \\ \frac{l_7}{2} x^2 + K_3 x + K_4 \\ l_8 \end{array} \right\} \quad (16-3)$$

نظر به آنچه در فصل دوم بیان شد؛ دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از روابط

(۱۵۲-۲) تا (۱۶۲-۲) حل می‌گردد. ثوابت موجود در حل با اعمال شرایط مرزی به دو صورت رابطه‌ی (۳-۳) (نوع اول) و رابطه‌ی (۴-۳) (نوع دوم) محاسبه می‌شوند.

### ۳-۶-۱ مطالعه‌ی عددی

برای بررسی و مقایسه‌ی تحلیل‌های گذشته در کنار هم، در این بخش نیز جنس و هندسه‌ی استوانه مطابق آنچه در فصل‌های گذشته بیان شد؛ در نظر گرفته می‌شود. برای بارگذاری و اعمال شرایط مرزی نیز روندی مشابه در پیش گرفته می‌شود؛ بارگذاری و شرایط مرزی در این حالت برابر مجموع بارگذاری و شرایط مرزی در حالت‌های تحلیل حرارتی، الکتریکی و مکانیکی می‌باشند؛ بنابراین استوانه در شعاع داخلی خود تحت فشار  $P_1 = 3 \text{ MPa}$ ، شار الکتریکی خارجیه‌ی  $Q_1 = 6 \times 10^{-4} \text{ c/m}^2$  و شار حرارتی وارده‌ی  $H_1 = 60 \text{ w/m}^2$  و در شعاع خارجی خود تحت شار الکتریکی وارده‌ی  $Q_2 = 40 \times 10^{-4} \text{ c/m}^2$  و شار حرارتی خارجیه‌ی  $H_2 = 40 \text{ w/m}^2$  قرار دارد و با سرعت دورانی ثابت  $\omega = 350 \text{ rad/s}$  حول محور خود می‌چرخد.

همچنین برای شرایط مرزی با توجه به تحلیل‌های گذشته و روابط (۳-۳) و (۴-۳)، داریم.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix}; x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۱۷-۳)$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} U_z^0 \\ U_z^1 \\ U_x^0 \\ U_x^1 \\ \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \Theta^0 \\ \Theta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \end{Bmatrix}; x = L_c \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_x^m \\ M_x^m \\ Q_x^m \\ M_{xz}^m \\ N_x^e \\ M_x^e \\ N_x^t \\ M_x^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۱۸-۳)$$

## ۳-۶-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول

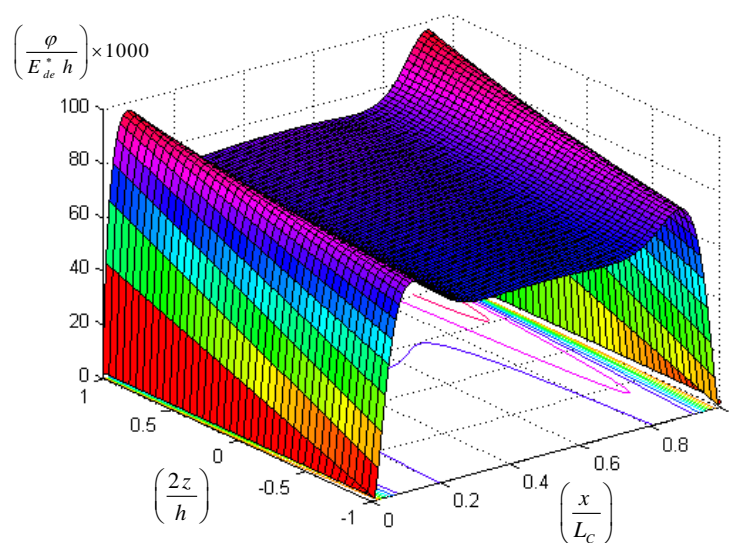
### رفتار حرارتی

با توجه به جفت‌شدگی یک‌سویه‌ی میدان حرارتی با میدان الکتریکی و میدان مکانیکی؛ بنابراین بارگذاری و شرایط مرزی الکتریکی و مکانیکی تأثیری بر توزیع میدان دمایی در جسم ندارد و تنها بارگذاری و شرایط مرزی حرارتی بر توزیع میدان دمایی اثرگذار است.

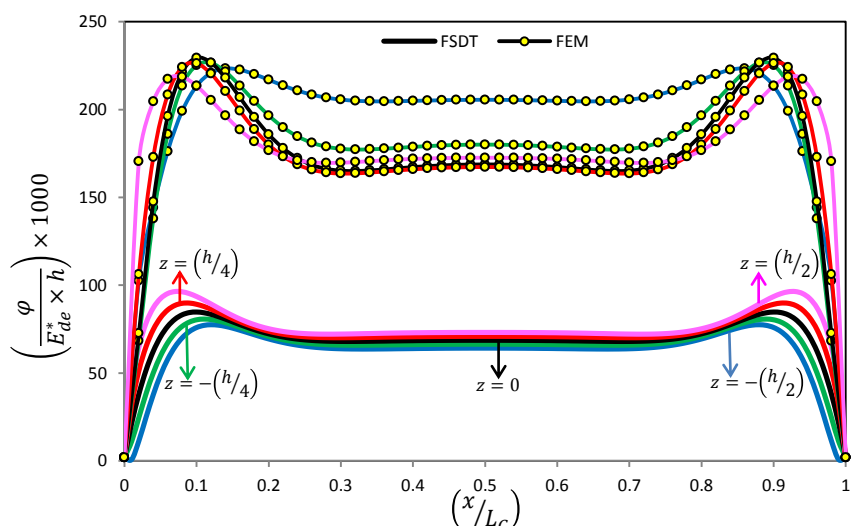
نظر به آنچه گفته شد و برابر بودن بارگذاری و شرایط مرزی حرارتی با مطالعه‌ی عددی تحلیل حرارتی، رفتار حرارتی استوانه در این حالت مطابق شکل ۳-۳ تا شکل ۵-۳ است که پیش‌تر مورد بحث و بررسی قرار گرفت و در بر گیرنده‌ی نتایج خاصی نیست.

### رفتار الکتریکی

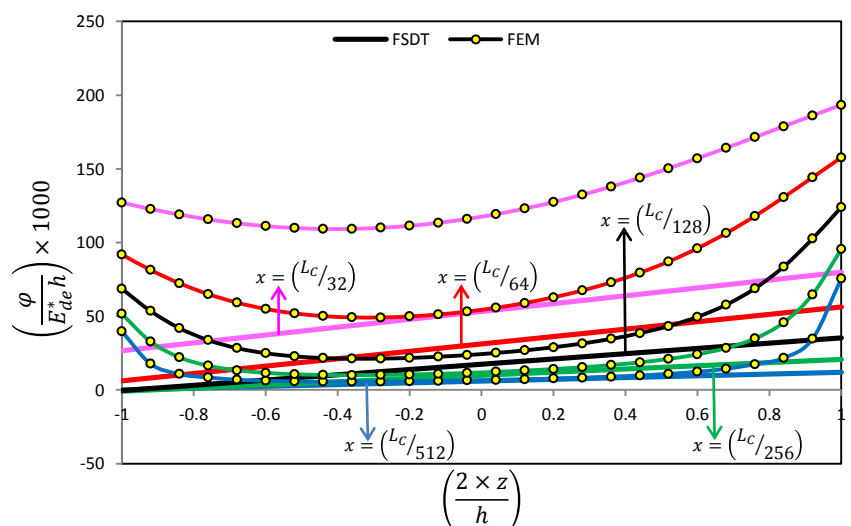
شکل ۳-۶۶ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه‌ی تحت بارگذاری الکتروترمو مکانیکی نشان می‌دهد. با فاصله گرفتن از دو سر استوانه که دارای پتانسیل الکتریکی مشخص می‌باشند، مشاهده می‌گردد؛ پتانسیل الکتریکی به مقداری ثابت در راستای طولی همگرا می‌شود و در نقاط دور از دو سر استوانه رفتار خطی از خود نشان می‌دهد.



شکل ۳-۶۶ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی



شکل ۳-۶۷ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۶۷ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش اجزای محدود و نظریه‌ی تغییر  
 شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. اگرچه هر دو روش رفتاری  
 هم‌شکل را برای توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم پیش‌بینی می‌کنند اما مقادیر و نحوه‌ی رفتار با  
 عبور در راستای ضخامت از لایه‌ها متفاوت است، همچنین مشاهده می‌گردد؛ اختلاف موجود در  
 پیش‌بینی نتایج در لایه‌ی داخلی به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد.

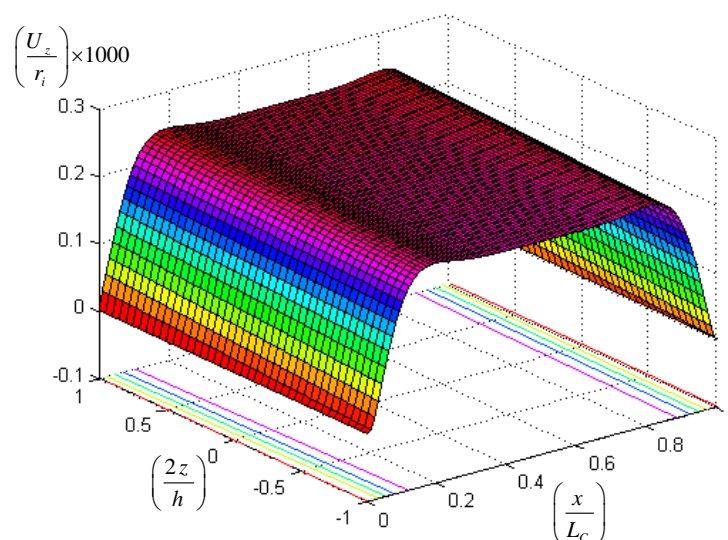


شکل ۳-۶۸ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۶۸ توزیع پتانسیل الکتریکی را در راستای ضخامت با استفاده از دو روش نظریه‌ی تغییر  
 شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. نتایج اجزای

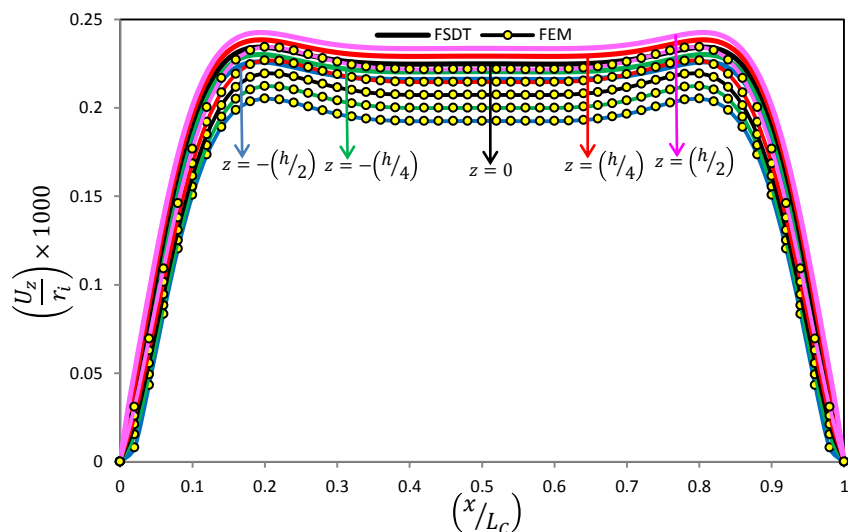
محدود تأکید دارند توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت غیرخطی و تقریباً به شکل سهمی وار می‌باشد درحالی که نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول فرض خطی بودن را برای توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت دارد، همین امر سبب ایجاد اختلاف در نتایج پیش‌بینی شده به کمک دو روش می‌گردد.

### رفتار مکانیکی

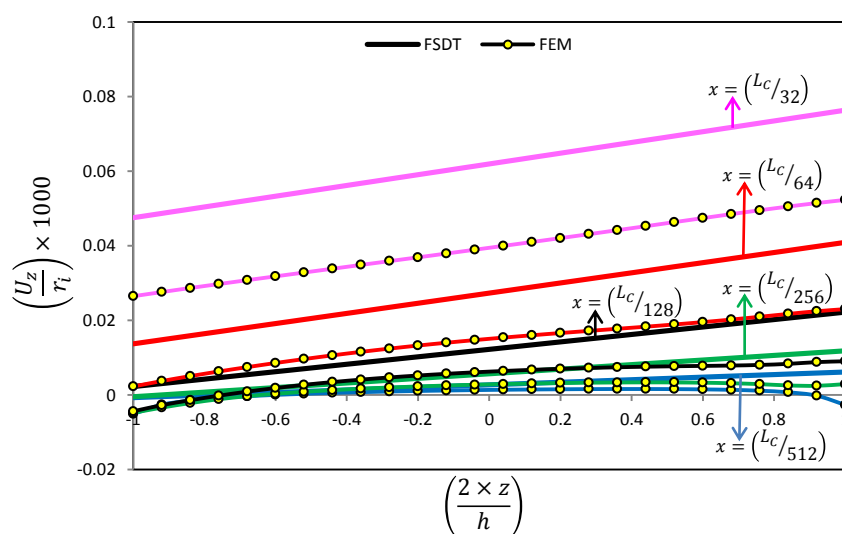
شکل ۳-۶۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه نشان می‌دهد. جابه‌جایی شعاعی در استوانه با فاصله گرفتن از دو سر گیردار استوانه به مقداری ثابت در راستای طولی همگرا می‌گردد. تغییرات جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه اندک می‌باشد، همچنین در نواحی دور از دو سر استوانه جابه‌جایی شعاعی رفتاری خطی از خود نشان می‌دهد.



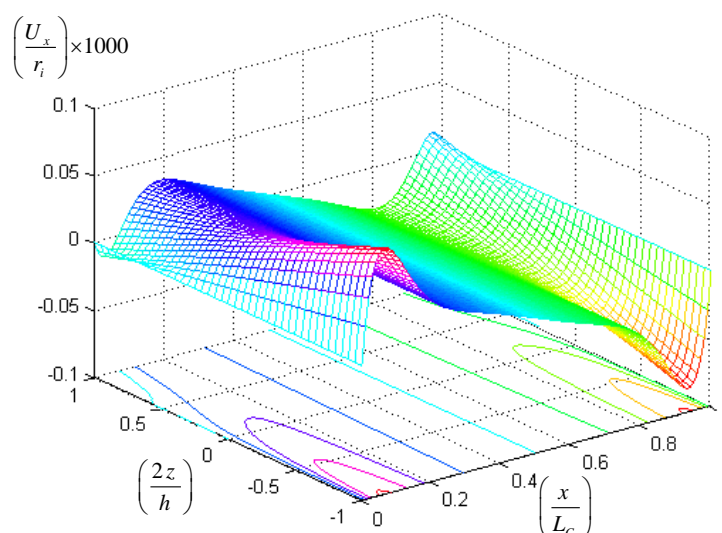
شکل ۳-۶۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی شکل ۳-۷۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود در استوانه مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. هر دو روش رفتاری مشابه را برای توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه پیش‌بینی می‌کنند که دارای اختلاف می‌باشند؛ این اختلاف در لایه‌ی داخلی استوانه به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد.



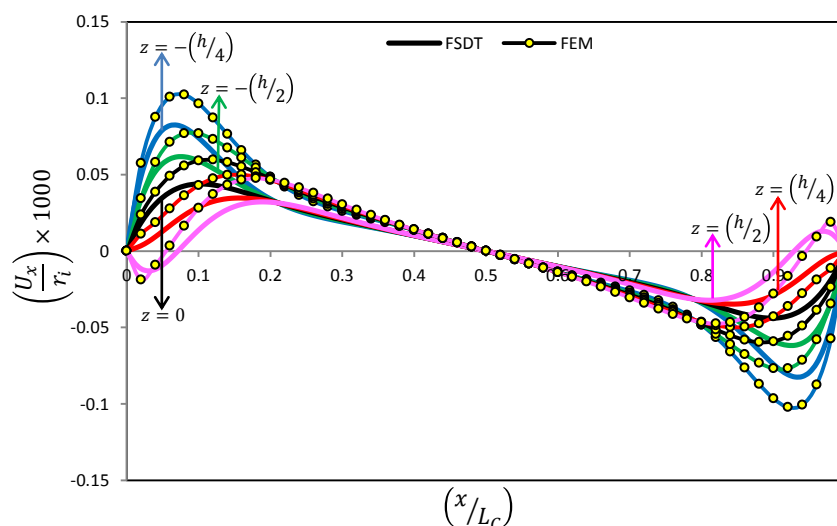
شکل ۳-۷۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۷۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از دو روش اجزای محدود و نظریه‌ی تغییر  
 شکل برشی مرتبه‌ی اول در راستای ضخامت استوانه مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. نتایج اجزای  
 محدود نشان می‌دهند؛ جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت رفتار تقریباً خطی دارد. اگرچه فرض  
 خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تغییرات جابه‌جایی شعاعی در راستای  
 ضخامت، فرضی مناسب و نزدیک به واقعیت حاکم بر مسأله است اما به دلیل نامناسب بودن فرض  
 خطی آن برای توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت، نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول  
 رفتار جابه‌جایی شعاعی را با اختلاف پیش‌بینی می‌کند.



شکل ۳-۷۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

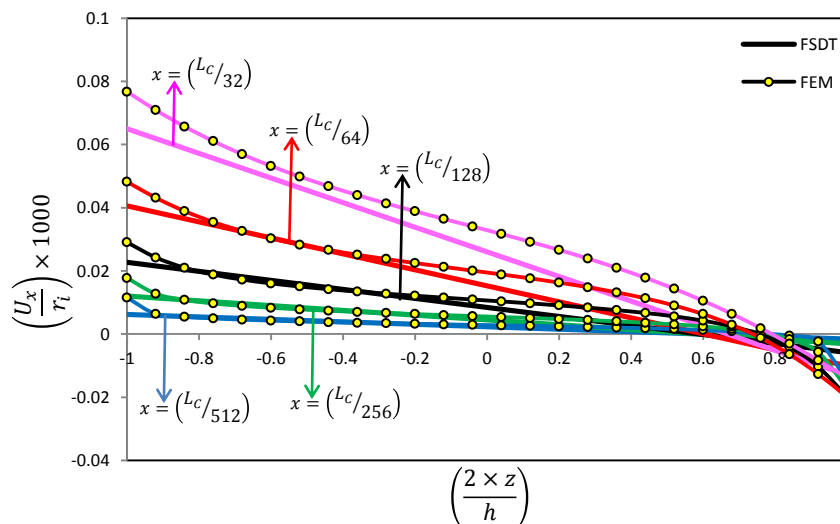


شکل ۳-۷۲ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترنومکانیکی  
 شکل ۳-۷۲ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در  
 استوانه نشان می‌دهد. جابه‌جایی محوری در راستای طولی نسبت به وسط استوانه حالتی قرینه دارد و  
 بیش‌ترین و کمترین مقدار آن در لایه‌ی داخلی استوانه اتفاق می‌افتد. همچنین جابه‌جایی محوری در  
 نقاط دور از دو سر استوانه رفتاری خطی را از خود نشان می‌دهد.



شکل ۳-۷۳ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه  
 شکل ۳-۷۳ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و  
 روش اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند؛ هر دو روش رفتاری

همانند اما با اختلاف را برای توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه پیش‌بینی می‌کنند که این اختلاف در دو سر و وسط استوانه به کمترین مقدار خود می‌رسد.



شکل ۳-۷۴ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۷۴ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود در راستای ضخامت استوانه مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند، اگرچه رفتار توزیع جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت غیرخطی می‌باشد اما فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نیز تقریب خوبی برای پیش‌بینی رفتار جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت استوانه می‌باشد؛ هرچند که فرض خطی بودن جابه‌جایی محوری نیز خود یکی از علل ایجاد اختلاف در نتایج پیش‌بینی شده به کمک دو روش می‌باشد.

### ۳-۶-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم

#### رفتار حرارتی

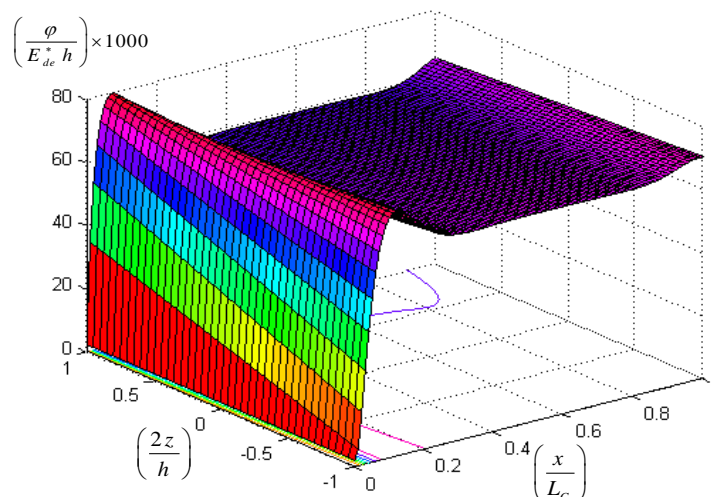
نظر به آنچه در بخش گذشته گفته شد؛ رفتار حرارتی استوانه در این حالت مطابق شکل ۳-۱۵ تا شکل ۳-۱۷ می‌باشد که در جای خود مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

#### رفتار الکتریکی

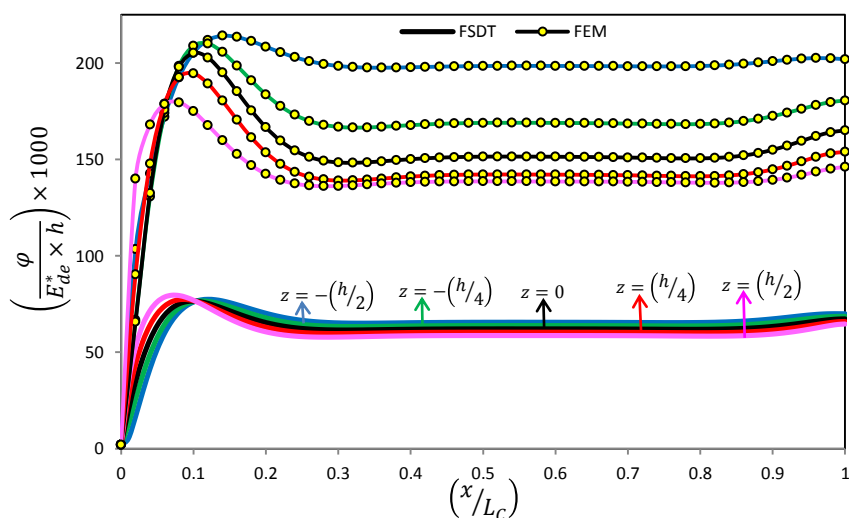
شکل ۳-۷۵ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در



استوانه نشان می‌دهد. اثر شرایط مرزی نوع دوم بر توزیع پتانسیل الکتریکی در استوانه کاملاً مشهود است. پتانسیل الکتریکی با فاصله گرفتن از سر استوانه که دارای پتانسیل مشخص می‌باشد به مقداری ثابت همگرا می‌گردد و در نزدیکی سر عایق الکتریکی استوانه دست‌خوش تغییرات اندک می‌گردد. همچنین پتانسیل الکتریکی در نواحی دور از دو سر استوانه رفتار خطی از خود نشان می‌دهد.

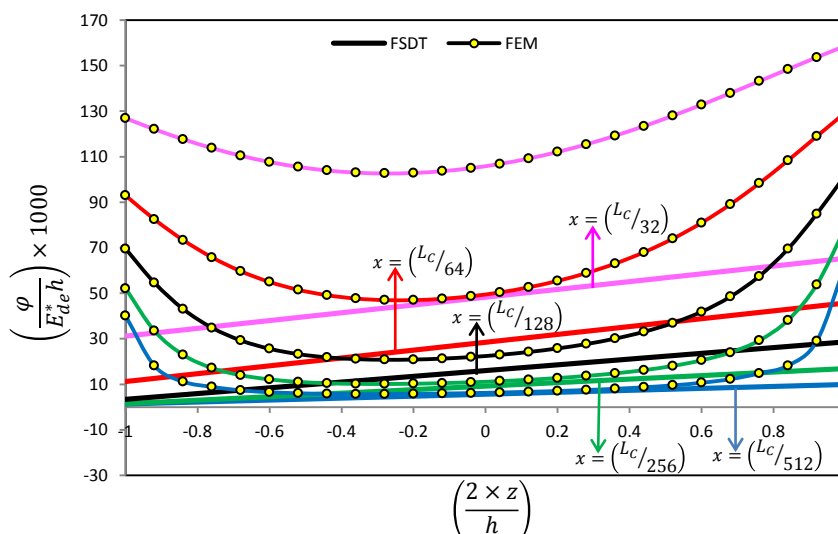


شکل ۳-۷۵ توزیع پتانسیل الکتریکی در جداری استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی



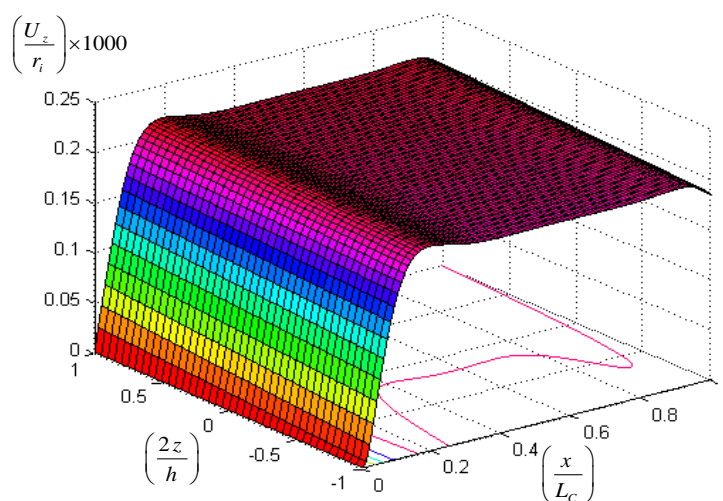
شکل ۳-۷۶ توزیع پتانسیل الکتریکی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه

شکل ۳-۷۶ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش اجزای محدود و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ هر روش رفتاری همانند اما با اختلاف را برای توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم پیش‌بینی می‌کنند.



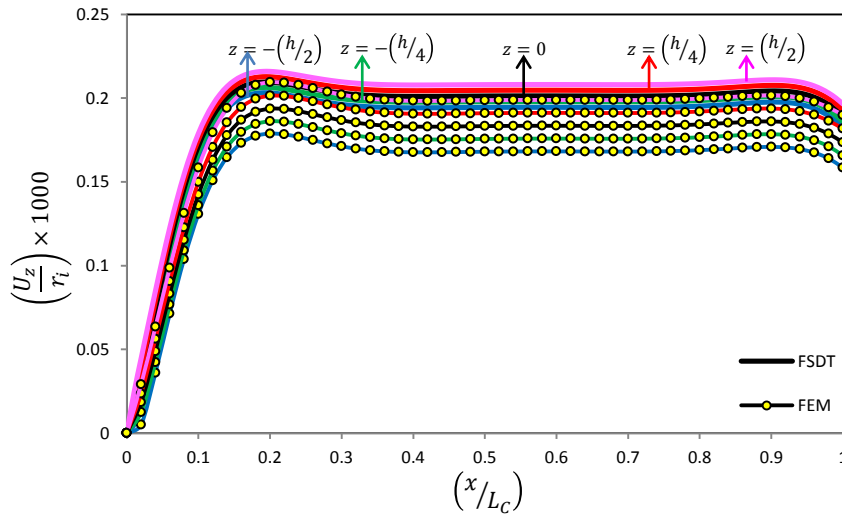
شکل ۳-۷۷ توزیع پتانسیل الکتریکی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۷۷ توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از روش اجزای محدود و نظریه‌ی تغییر شکل  
 برشی مرتبه‌ی اول در راستای ضخامت مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. مشاهده می‌گردد رفتار  
 توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت غیرخطی و تقریباً به شکل سهمی می‌باشد؛ بنابراین  
 فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای توزیع پتانسیل الکتریکی در راستای  
 ضخامت فرضی ناسازگار و به دور از واقعیت حاکم بر مسأله می‌باشد که یکی از علل ایجاد اختلاف در  
 نتایج پیش‌بینی شده به کمک دو روش می‌باشد.

### رفتار مکانیکی

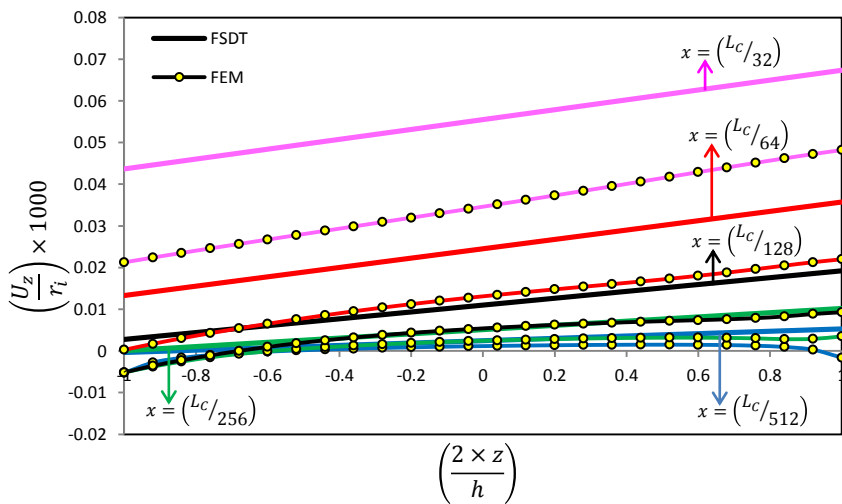


شکل ۳-۷۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی

شکل ۳-۷۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در جدار استوانه نشان می‌دهد. جابه‌جایی شعاعی با فاصله گرفتن از سر گیردار استوانه به مقدار ثابتی همگرا می‌گردد و در نزدیکی سر آزاد آن دست‌خوش تغییرات اندک می‌گردد، همچنین تغییرات توزیع جابه‌جایی در نقاط دور از سر گیردار استوانه اندک و چندان محسوس نیست.

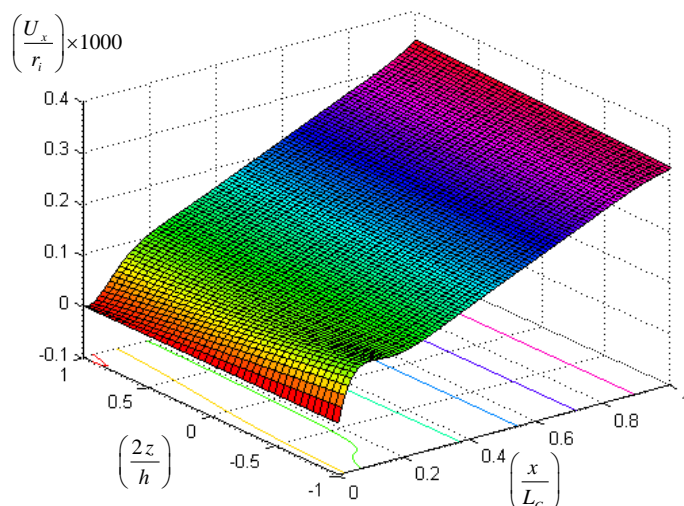


شکل ۳-۷۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه شکل ۳-۷۹ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از دو روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. اگرچه هر دو روش رفتاری همانند را برای توزیع جابه‌جایی شعاعی در جسم پیش‌بینی می‌کنند، اما مقادیر پیش‌بینی شده توسط دو روش دارای اختلاف می‌باشند که اختلاف موجود، در لایه‌ی داخلی استوانه به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد.

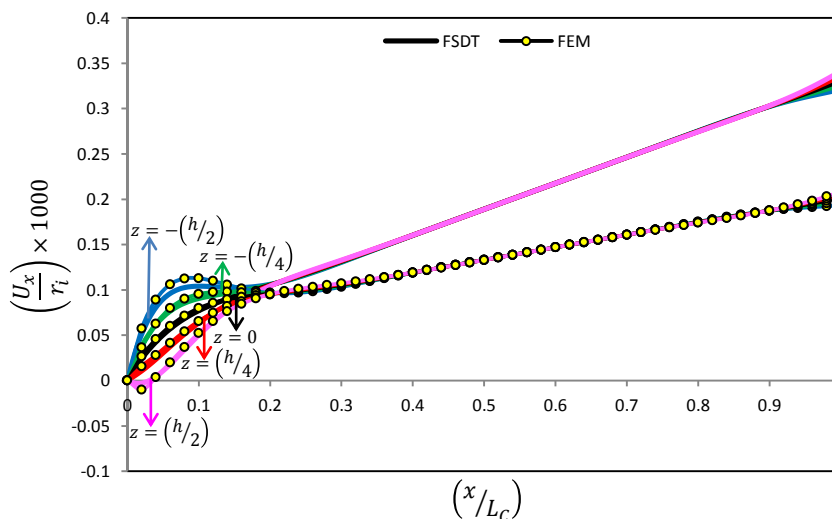


شکل ۳-۸۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT

شکل ۳-۸۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود در راستای ضخامت استوانه مورد مقایسه قرار می‌دهد. نتایج اجزای محدود نشان می‌دهند توزیع جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت رفتاری خطی دارد، اما به دلیل فرض نامناسب خطی بودن روش تحلیلی برای توزیع پتانسیل الکتریکی، این نظریه‌ی رفتار جابه‌جایی شعاعی را با اختلاف پیش‌بینی می‌کند.

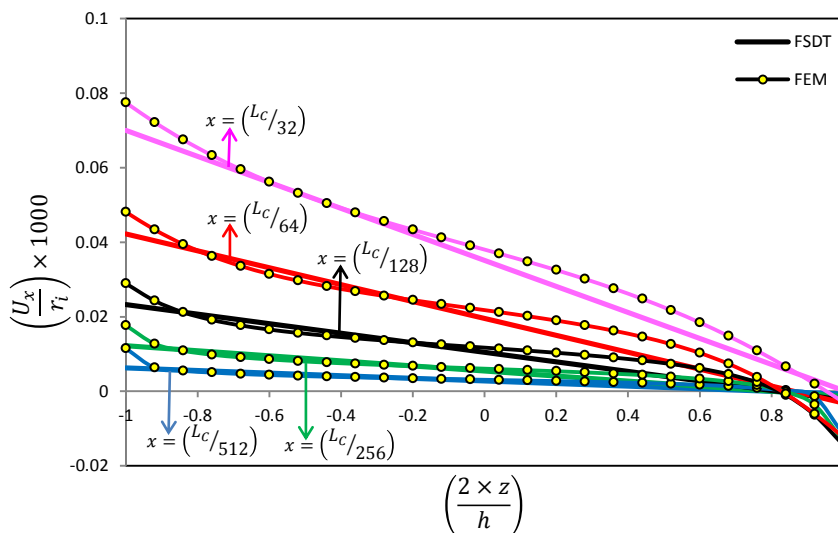


شکل ۳-۸۱ توزیع جابه‌جایی محوری در جداره‌ی استوانه بر اثر بارگذاری الکتروترمو مکانیکی شکل ۳-۸۱ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از روش تحلیلی نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد با دور شدن از سر گیردار استوانه جابه‌جایی محوری رفتاری صعودی از خود در راستای طولی نشان می‌دهد. همچنین جابه‌جایی محوری در نقاط دور از دو سر استوانه رفتاری خطی دارد.



شکل ۳-۸۲ توزیع جابه‌جایی محوری با دو روش FE و FSDT در لایه‌های استوانه

شکل ۳-۸۲ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از دو روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و اجزای محدود مورد مقایسه قرار می‌دهد. هر دو روش رفتاری همانند اما با اختلاف را برای توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه پیش‌بینی می‌کنند.



شکل ۳-۸۳ توزیع جابه‌جایی محوری در نزدیکی سر استوانه با دو روش FE و FSDT  
 شکل ۳-۸۳ توزیع جابه‌جایی محوری را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. اگرچه نتایج اجزای محدود رفتاری غیرخطی را برای توزیع جابه‌جایی محوری در راستای ضخامت استوانه نشان می‌دهند اما فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نیز، تقریب خوبی را از رفتار غیرخطی استوانه نشان می‌دهد، همچنین فرض خطی بودن جابه‌جایی محوری نیز، یکی از علل ایجاد اختلاف در نتایج پیش‌بینی شده به کمک دو روش می‌باشد.

## فصل ۴

### تحلیل استوانه‌های ناهمگن

---

## ۴-۱ پیش‌گفتار

در این فصل نخست نحوه‌ی تحلیل اجزای محدود استوانه‌ی ناهمگن پیزوالکتریک بیان می‌گردد، سپس تحلیل‌های حرارتی، الکتریکی، مکانیکی و الکتروترمو مکانیکی انجام و همراه با نتایج مربوط به مطالعه‌ی عددی هر یک بیان می‌شوند.

## ۴-۲ تحلیل اجزای محدود استوانه‌های ناهمگن

برای تحلیل اجزای محدود الکتروترمو مکانیکی مواد ناهمگن پیزوالکتریک در این پژوهش از نرم‌افزار ANSYS 12.0 استفاده می‌شود.

### ۴-۲-۱ مدل‌سازی مواد ناهمگن پیزوالکتریک

همان‌طور که در فصل اول بیان شد در مواد ناهمگن خواص به صورت تدریجی تغییر می‌کند. در نرم‌افزار ANSYS 12.0 المانی جهت تعریف و مدل‌سازی مواد ناهمگن وجود ندارد؛ بنابراین برای تحلیل، استوانه به لایه‌های زیادی با ضخامت یکسان  $d$  تقسیم می‌شود؛ به طوری که تغییرات خواص در هر لایه اندک باشد و بتوان خواص ثابتی را به هر لایه نسبت داد.

$$Pr^n = Pr|_{r=r_m^n}; r_m^n = \left( r_i^n + \frac{d}{2} \right) \quad (1-4)$$

در رابطه‌ی فوق  $Pr^n$  خاصیت در لایه‌ی  $n$ ام است که با توجه به شعاع متوسط آن  $r_m^n$  تعیین می‌گردد،  $r_i^n$  نیز شعاع داخلی لایه‌ی  $n$ ام است. با استفاده از روابط (۱-۴)، (۷-۱) و (۵۳-۲) تا (۵۸-۲) خواص برای هر لایه محاسبه می‌شود و به آن اختصاص می‌یابد، سپس این لایه‌ها به هم متصل می‌شوند و استوانه‌ی FGP را به وجود می‌آورند، در حقیقت این کار تقریب بسیار خوبی از تغییر تدریجی خواص در استوانه می‌باشد [۳۷-۳۸].

### ۴-۲-۲ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله

همان‌طور که در فصل گذشته، بخش تحلیل اجزای محدود آن توضیح داده شد؛ مسأله حالت

مقارن محوری دارد و از المان‌های دو بعدی می‌توان جهت تحلیل استفاده کرد. مطابق تحلیل اجزای محدود فصل گذشته از المان PLANE 223 استفاده می‌گردد.

جهت مدل‌سازی مسأله به صورت دو بعدی مطابق شکل ۲-۲ مقطع مستطیل شکل استوانه به صورت دو بعدی مدل‌سازی می‌گردد؛ سپس با توجه به ابعاد هندسی مسأله و چند لایه کردن آن، مقطع مستطیل شکل به لایه‌هایی تقسیم می‌گردد و با استفاده از رابطه‌ی (۴-۱) خواص به هر لایه اختصاص می‌یابد.

شبکه‌بندی هر لایه باید به صورتی انجام گیرد که تحلیل المان محدود مستقل از شبکه‌بندی باشد و نتایج به دست آمده قابل اطمینان باشند. با استفاده از نتایج به دست آمده برای شبکه‌بندی در بخش تحلیل اجزای محدود فصل گذشته، المان‌های PLANE 223 به شکل مربع بر روی لایه‌های مستطیل شکل قرار می‌گیرند. با توجه به همگن بودن هر لایه و شکل ۳-۱ زمانی که مساحت هر لایه  $A_{Layer}$  که به شکل مستطیل است، حدود ۱۵۰ برابر مساحت المان مربعی شکل  $A_{Element}$  باشد؛ نتایج حاصل از تحلیل المان محدود به همگرایی در حدود ۹۹٪ می‌رسد و تحلیل پذیرفتنی خواهد بود. بنابراین برای شبکه‌بندی، مقطع مستطیل شکل استوانه به لایه‌های یکسان تقسیم می‌شود و هر لایه با المان‌های مربعی شکل به گونه‌ای پوشانده می‌شوند که نسبت مساحت هر لایه از استوانه به مساحت المان‌های همانند مربعی شکل حدود ۱۵۰ یا بیشتر باشد.

### ۳-۴ تحلیل حرارتی استوانه‌های ناهمگن

تحلیل حرارتی استوانه‌های ناهمگن همچون تحلیل حرارتی استوانه‌های همگن در فصل گذشته می‌باشد با این تفاوت که  $[A^*]$ ،  $[B^*]$  و  $[C^*]$  ضرایب دستگاه معادلات ساده شده، با استفاده از روابط (۲-۸۹) تا (۲-۱۴۵) و در نظر گرفتن ثوابت ناهمگنی به همراه خواص لایه‌ی داخلی استوانه محاسبه می‌شوند.



### ۳-۳-۱ مطالعه‌ی عددی

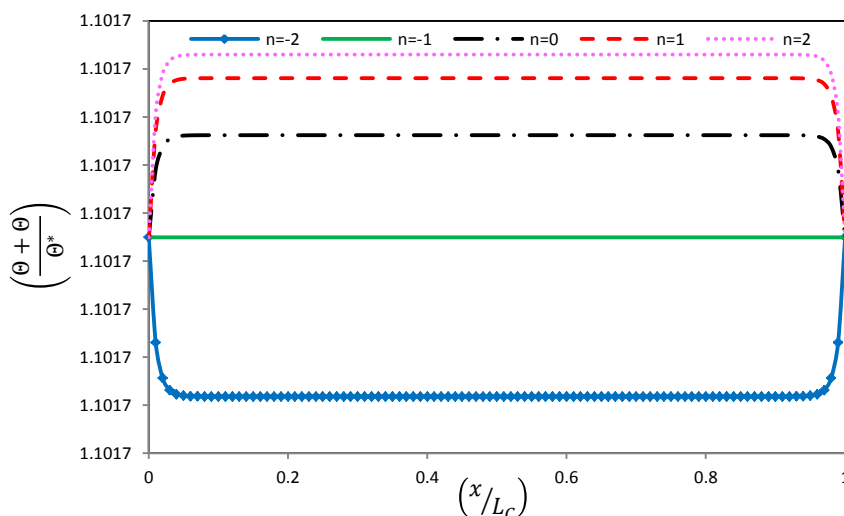
برای مقایسه و بررسی بهتر، هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی این بخش مطابق مطالعه‌ی عددی صورت گرفته در بخش تحلیل حرارتی فصل گذشته در نظر گرفته می‌شود. به همین منظور خواص استوانه‌ی ناهمگن در لایه‌ی داخلی مطابق فصل گذشته و برابر جدول ۳-۱ می‌باشد.

برای بررسی اثر ثابت ناهمگنی کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی برابر ثابت ناهمگنی کل  $n$  فرض می‌شود و مقادیر  $n = -2, -1, 0, 1, 2$  با توجه به [۱۵-۳۲]، مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در این حالت داریم.

$$\begin{cases} np_1 = np_2 = np_3 = np_4 = np_5 = np_6 = np_7 = np_8 = n \\ np_9 = np_{10} = np_{11} = np_{12} = np_{13} = np_{14} = np_{15} = n \end{cases}; n = -2, -1, 0, 1, 2 \quad (۲-۴)$$

### ۳-۳-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول

#### رفتار حرارتی



شکل ۳-۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی میدان دمایی در لایه‌ی میانی

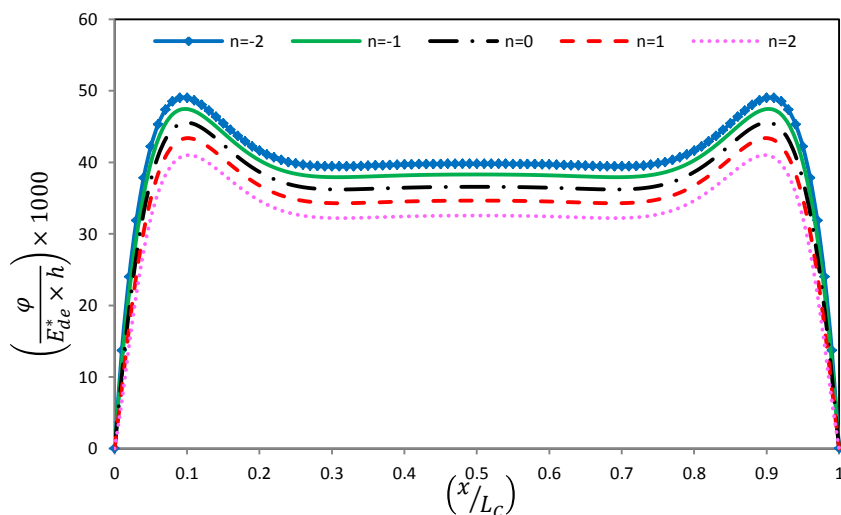
شکل ۳-۱ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

توزیع میدان دمایی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد. همان طور که از شکل پیداست؛ ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر توزیع میدان دمایی در جسم دارد و با افزایش آن میدان دمایی در جسم افزایش می‌یابد، بنابراین در طراحی با استفاده از این موضوع می‌توان میدان دمایی ایجاد شده در جسم را دست‌خوش تغییرات مطلوب کرد، همچنین برای این نمونه‌ی مورد مطالعه

$n = -1$  حالت بحرانی دارد که در این حالت توزیع میدان دما در سراسر استوانه ثابت و مستقل از طول آن می‌باشد اما با کاهش یا افزایش ثابت ناهمگنی از این مقدار، رفتار میدان دمایی در نزدیکی سر استوانه حالتی صعودی یا نزولی پیدا می‌کند.

### رفتار الکتریکی

شکل ۲-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد. اگرچه در این حالت نیز ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر رفتار الکتریکی در جسم دارد اما افزایش یا کاهش ثابت ناهمگنی سبب رفتاری همانند اما با مقدار بیشتری یا کمتر می‌گردد و شکل رفتار را به طور کامل دست‌خوش تغییر نمی‌کند.



شکل ۲-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی

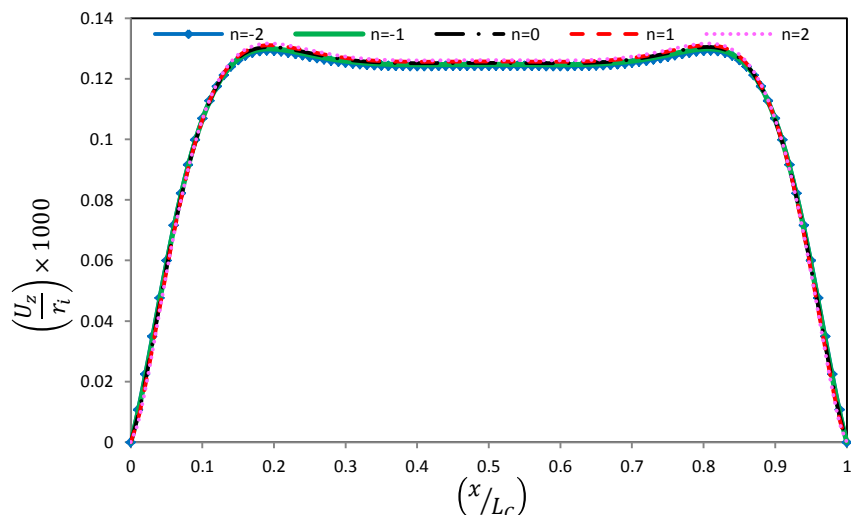
### رفتار مکانیکی

ابتدا اثر ثابت ناهمگنی بر روی میدان جابه‌جایی در استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد سپس به بررسی نتایج به دست آمده برای تنش شعاعی، محیطی، محوری و برشی پرداخته می‌شود.

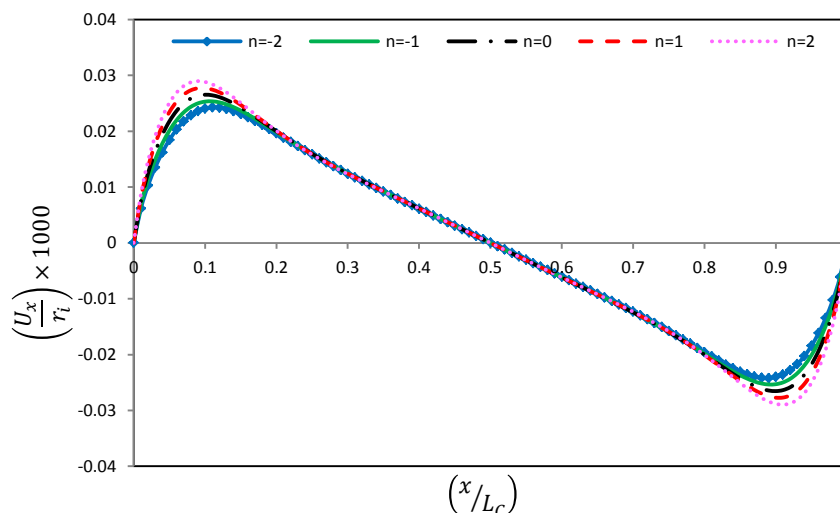
#### الف) میدان جابه‌جایی

شکل ۳-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه، بر اثر بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد. ثابت ناهمگنی بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی اثری مشهود ندارد.



شکل ۳-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی



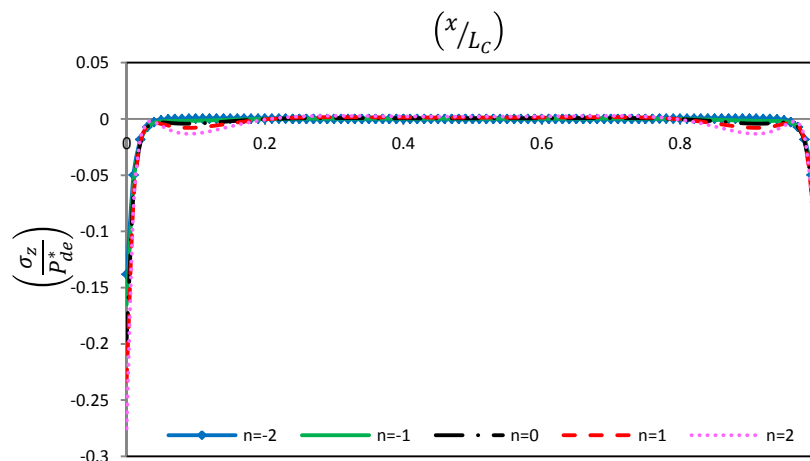
شکل ۴-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی استوانه نشان می‌دهد. در این حالت نیز در نقاط دور از دو سر استوانه ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر جابه‌جایی محوری ندارد، اما در نقاط نزدیک دو سر استوانه ثابت ناهمگنی اثری قابل مشاهده پیدا می‌کند.

(ب) میدان تنش

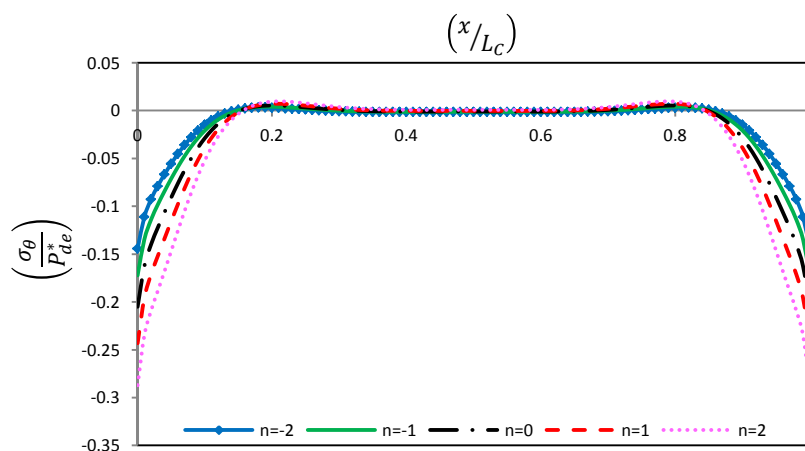
همان طور که پیش‌تر نیز اشاره شد؛ میدان‌های بالای اعمالی حرارتی، الکتریکی و مکانیکی سبب

دی‌پلاریزه شدن مواد پیزوالکتریک می‌شوند که برخی از این دسته مواد با اعمال تنش فشاری در بازه‌ی (10–100 MPa) دی‌پلاریزه می‌شوند [۴۲]؛ با در نظر گرفتن  $p_{de}^* = 55 \text{ MPa}$  به عنوان تنش فرضی اعمالی فشاری که سبب دی‌پلاریزه شدن در این حالت می‌گردد؛ به بررسی اثر ثابت ناهمگنی بر روی رفتار میدان تنش در استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی پرداخته می‌شود.



شکل ۴-۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی

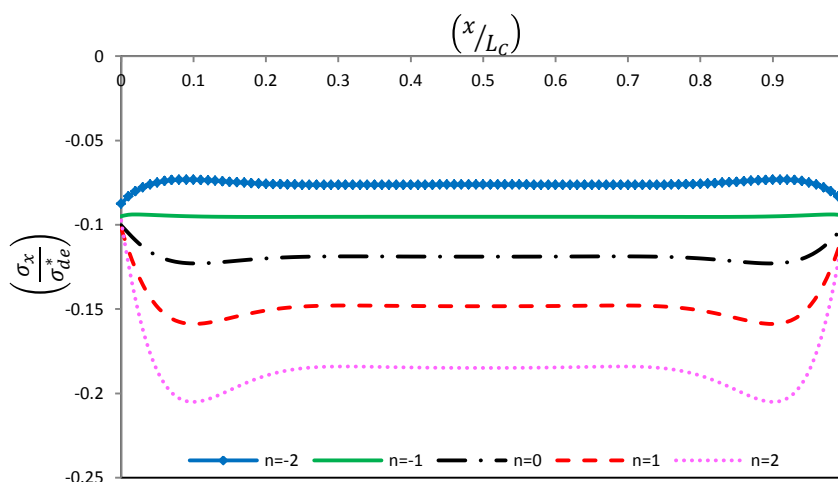
شکل ۴-۵ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع تنش شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد، در این حالت تنش شعاعی جز در نواحی کوچک نزدیک دو سر استوانه رفتاری تقریباً مستقل از ثابت ناهمگنی را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی

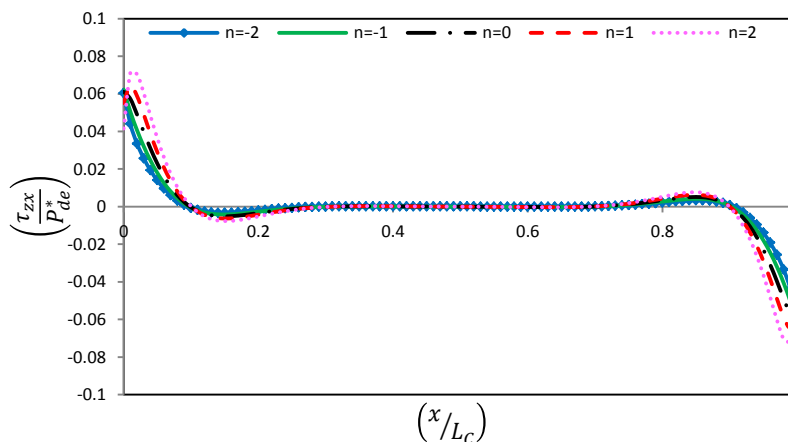
شکل ۴-۶ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی تنش

محیطی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد؛ تنش محیطی نیز همانند تنش شعاعی تأثیرپذیری اندکی از ثابت ناهمگنی دارد و تنها در نواحی کوچک نزدیک دو سر استوانه تغییر رفتاری مشهودی را متأثر از ثابت ناهمگنی نشان می‌دهد.



شکل ۷-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی

شکل ۷-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی استوانه نشان می‌دهد، رفتار تنش محوری متأثر از ثابت ناهمگنی همانند میدان دما می‌باشد. در تنش محوری بر خلاف تنش شعاعی و محیطی ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر رفتار آن دارد، همچنین  $n = -1$  حالت بحرانی دارد و با تغییر ثابت ناهمگنی از این مقدار توزیع تنش محوری در استوانه حالتی صعودی یا نزولی نسبت به دو سر آن پیدا می‌کند.



شکل ۸-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی

شکل ۸-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

توزیع تنش برشی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد. تنش برشی در نقاط دور از دو سر استوانه به مقدار تقریباً ثابت صفر میل می‌کند و توزیع آن رفتاری مستقل از ثابت ناهمگنی پیدا می‌کند، با افزایش ثابت ناهمگنی مقدار تنش برشی در نزدیکی دو سر استوانه افزایش پیدا می‌کند.

### جمع‌بندی

نتایج به دست آمده که در قسمت‌های قبل ارائه شد؛ برای مقایسه‌ی عددی بهتر به صورت خلاصه در جداول ذکر می‌شوند.

### میدان حرارتی

جدول ۱-۴ نتایج به دست آمده برای میدان دمایی را از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد؛ همان طور که پیداست هر دو روش نتایج یکسانی را برای میدان دما پیش‌بینی می‌کنند.

جدول ۱-۴ نتایج میدان دمای برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$\Theta (^{\circ}K)$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	
$z = -(h/2)$	FEM	۳۰/۱۳	۳۰/۱۲	۳۰/۱۱	۳۰/۱۰	۳۰/۰۹
	FSDT	۳۰/۱۴	۳۰/۱۲	۳۰/۱۰	۳۰/۰۸	۳۰/۰۷
$z = 0$	FEM	۳۰/۰۰	۳۰/۰۰	۳۰/۰۰	۳۰/۰۱	۳۰/۰۱
	FSDT	۲۹/۹۹	۳۰/۰۰	۳۰/۰۱	۳۰/۰۱	۳۰/۰۱
$z = (h/2)$	FEM	۲۹/۸۳	۲۹/۸۸	۲۹/۹۲	۲۹/۹۴	۲۹/۹۶
	FSDT	۲۹/۸۵	۲۹/۸۸	۲۹/۹۱	۲۹/۹۴	۲۹/۹۵

### میدان الکتریکی

جدول ۲-۴ نتایج به دست آمده را برای پتانسیل الکتریکی از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد؛ همان طور که پیش‌تر بررسی شد علت اصلی اختلاف نتایج را می‌توان در خطی فرض کردن تغییرات در راستای ضخامت نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول دانست. همان طور که در

بخش قبل نشان داده شد این فرض در مواردی با واقعیت حاکم بر مسأله سازگار نیست و منشأ ایجاد اختلاف در پیش‌بینی نتایج می‌گردد. همچنین به دلیل هم مرتبه نبودن ضرایب روابط ساختاری اختلاف عددی ایجاد شده در پیش‌بینی پتانسیل الکتریکی رشد چشم‌گیری پیدا می‌کند.

جدول ۲-۴ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$\varphi(V)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۲۷۷۲	۳۲۱۸	۴۰۳۳	۵۴۹۳	۸۰۳۴
	FSDT	۷۶۹	۶۸۷	۵۹۵	۴۹۳	۳۸۵
$z = 0$	FEM	۴۳۹۷	۴۸۵۰	۵۳۸۸	۶۰۹۸	۷۱۲۱
	FSDT	۱۹۹۰	۱۹۱۵	۱۸۲۹	۱۷۳۳	۱۶۲۸
$z = (h/2)$	FEM	۴۰۵۷	۵۴۵۸	۷۲۲۴	۹۵۱۱	۱۲۵۳۴
	FSDT	۳۲۱۰	۳۱۴۳	۳۰۶۲	۲۹۷۲	۲۸۷۲

### میدان مکانیکی

جدول ۳-۴ نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد. مطالبی که در بخش گذشته درباره‌ی اختلاف نتایج به دست آمده بیان شد در این بخش نیز حاکم می‌باشد.

جدول ۳-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$U_z (mm)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۰/۰۰۳۱۶	۰/۰۰۳۷۳	۰/۰۰۴۵۹	۰/۰۰۵۹۰	۰/۰۰۷۸۸
	FSDT	۰/۰۰۴۱۹	۰/۰۰۴۲۱	۰/۰۰۴۲۲	۰/۰۰۴۲۵	۰/۰۰۴۲۷
$z = 0$	FEM	۰/۰۰۳۷۰	۰/۰۰۴۳۵	۰/۰۰۵۳۲	۰/۰۰۶۷۸	۰/۰۰۸۹۶
	FSDT	۰/۰۰۴۹۷	۰/۰۰۴۹۹	۰/۰۰۵۰۱	۰/۰۰۵۰۸	۰/۰۰۵۰۵
$z = (h/2)$	FEM	۰/۰۰۴۱۳	۰/۰۰۴۸۹	۰/۰۰۶۰۳	۰/۰۰۷۷۱	۰/۰۱۰۲۲
	FSDT	۰/۰۰۵۷۶	۰/۰۰۵۷۷	۰/۰۰۵۷۹	۰/۰۰۵۸۱	۰/۰۰۵۸۳

جداول پیش‌رو، نتایج حاصل از پیش‌بینی تنش را با دو روش تحلیلی و اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد در محاسبه‌ی میدان تنش دو روش دارای اختلاف مشهودتری می‌باشند؛ علت این امر را می‌توان این‌گونه بیان کرد که میدان کرنش و میدان الکتریکی با استفاده از روابط گرادیان که در فصل گذشته شرح آن داده شده محاسبه می‌شوند، این امر سبب می‌گردد برخی مؤلفه‌های میدان‌های مذکور از مرتبه‌ی صفر محاسبه شوند و سبب ایجاد اختلاف بیشتری بین فرضیات و واقعیت حاکم بر مسأله شوند.

همان‌طور که پیش‌تر توضیح داده شد فرض خطی بودن میدان جابه‌جایی در مواردی فرض مناسبی نیست و این فرض منشأ ایجاد اختلاف بین دو روش حل است، این اختلاف به واسطه‌ی محاسبه‌ی گرادیان آن بیشتر می‌گردد و با استفاده از روابط ساختاری به میدان تنش انتقال می‌یابد. از این رو همان‌طور که نتایج جداول نشان می‌دهند؛ اختلاف بیشتری در نتایج پیش‌بینی شده برای میدان تنش وجود دارد.

جدول ۴-۴ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$\sigma_{\theta}(MPa)$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	
$z = -(h/2)$	FEM	-۴/۷۹۲	-۲/۳۶۹	۱/۵۴۱	۷/۷۲۸	۱۷/۳۹۶
	FSDT	۰/۵۱۶	۰/۵۸۱	۰/۶۴۷	۰/۷۱۴	۰/۷۸۱
$z = 0$	FEM	۰/۷۷۵	۰/۲۸۴	-۰/۱۲۳	۰/۲۱۷	۲/۹۶۰
	FSDT	-۰/۰۷۴	-۰/۰۶۸	-۰/۰۵۰	-۰/۰۱۵	-۰/۰۴۳
$z = (h/2)$	FEM	۱/۷۶۴	۱/۲۴۰	-۰/۱۲۲	-۸/۶۱۲	-۲۷/۸۰۶
	FSDT	-۰/۲۲۵	-۰/۳۳۵	-۰/۴۹۳	-۰/۷۱۹	-۱/۰۳۶

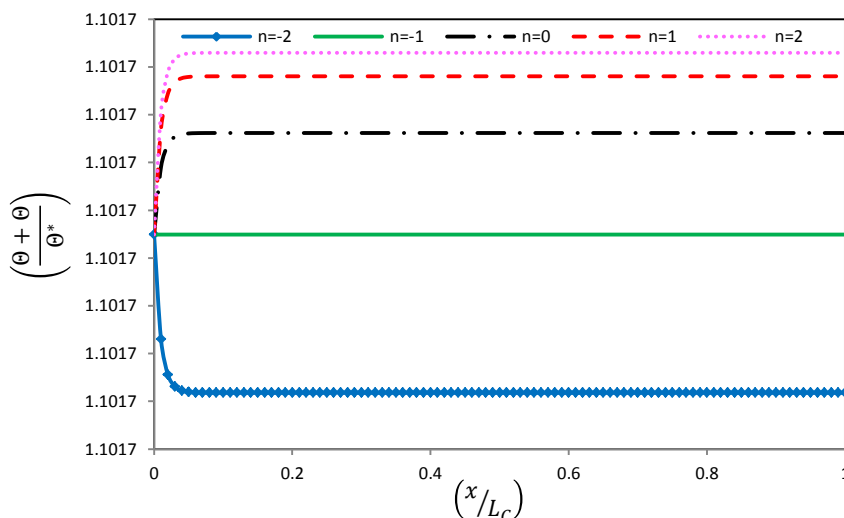


جدول ۴-۵ نتایج تنش محوری برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$\sigma_x$ (MPa)	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	
$z = -(h/2)$	FEM	-۹/۸۷۹	-۸/۴۴۳	-۶/۰۲۲	-۲/۰۸۹	۴/۱۵۵
	FSDT	-۶/۲۴۴	-۶/۲۱۲	-۶/۱۷۸	-۶/۱۴۳	-۶/۱۰۶
$z = 0$	FEM	-۲/۳۶۷	-۴/۳۲۸	-۷/۱۶۵	-۱۰/۹۷۵	-۱۵/۵۰۶
	FSDT	-۴/۱۹۴	-۵/۲۳۹	-۶/۵۳۹	-۸/۱۵۵	-۱۰/۱۶۷
$z = (h/2)$	FEM	-۰/۳۰۷	-۲/۴۰۵	-۷/۸۹۱	-۲۱/۲۸۱	-۵۲/۷۴۹
	FSDT	-۲/۹۹۰	-۴/۴۹۷	-۶/۷۵۶	-۱۰/۱۴۱	-۱۵/۲۰۷

### ۴-۳-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم

#### رفتار حرارتی



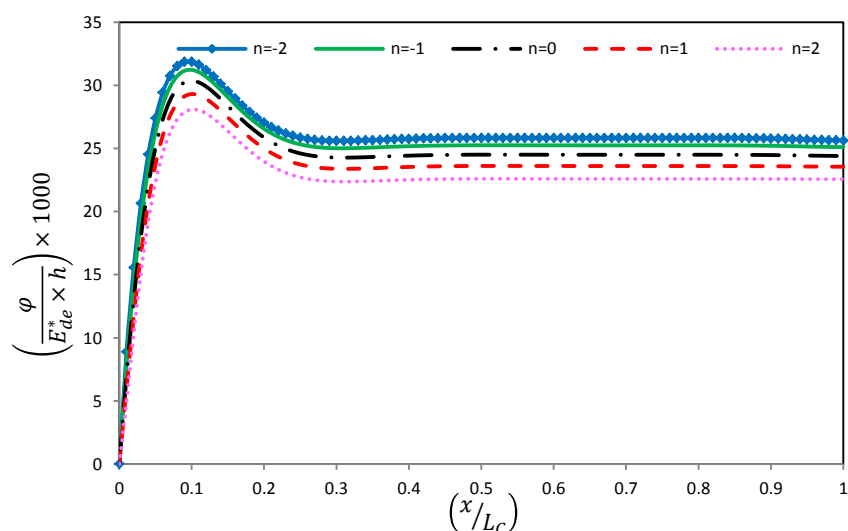
شکل ۴-۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی میدان دمایی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۹ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع میدان دمایی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی یک سر دما-یک سر عایق حرارتی نشان می‌دهد که تحت بارگذاری حرارتی قرار دارد. همانند استوانه با شرایط مرزی نوع اول، در این حالت نیز ثابت ناهمگنی اثری کاملاً مشهود بر توزیع میدان دما در جسم دارد که می‌توان از این امر در طراحی استوانه‌ها استفاده کرد. در این حالت نیز مشابه استوانه با شرایط مرزی نوع اول، با افزایش ثابت

ناهمگنی، مقادیر توزیع میدان دمایی در جسم افزایش می‌یابد. همچنین در این شکل اثر شرایط مرزی بر توزیع میدان دما دیده می‌شود.

### رفتار الکتریکی

شکل ۴-۱۰ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع میدان پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی نشان می‌دهد. در این حالت نیز اثر شرایط مرزی در جسم کاملاً مشهود است. همچنین افزایش ثابت ناهمگنی بر خلاف رفتار حرارتی، سبب کاهش مقادیر توزیع پتانسیل الکتریکی در استوانه می‌گردد.

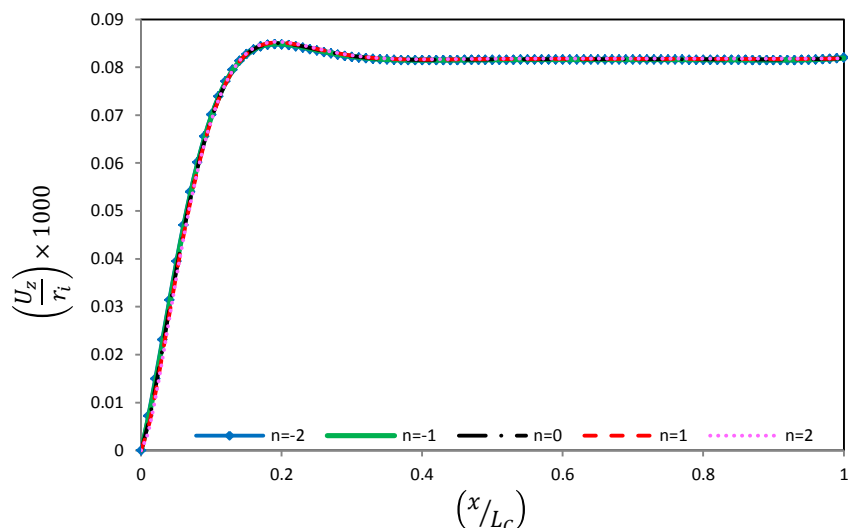


شکل ۴-۱۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی

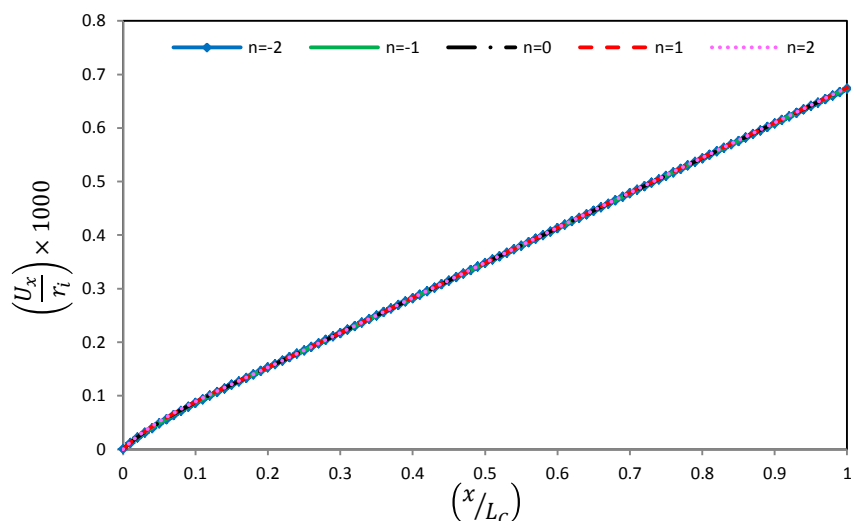
### رفتار مکانیکی

الف) میدان جابه‌جایی

شکل ۴-۱۱ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود ثابت ناهمگنی اثری ناچیز بر جابه‌جایی شعاعی دارد که می‌توان از این اثر چشم‌پوشی کرد و توزیع جابه‌جایی شعاعی را مستقل از ثابت ناهمگنی دانست.



شکل ۴-۱۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه میانی



شکل ۴-۱۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه میانی

شکل ۴-۱۲ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر توزیع

جابه‌جایی محوری در لایه میانی استوانه نشان می‌دهد. همانند جابه‌جایی شعاعی، مشاهده می‌گردد

جابه‌جایی محوری نیز رفتاری مستقل از ثابت ناهمگنی از خود نشان می‌دهد.

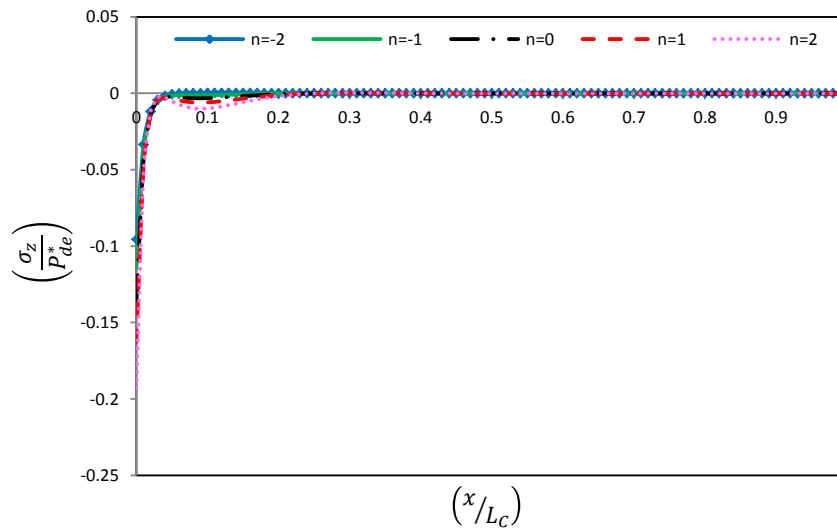
(ب) میدان تنش

شکل ۴-۱۳ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

توزیع تنش شعاعی در لایه میانی استوانه نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود در نقاط دور از سر گیردار

استوانه، ثابت ناهمگنی اثر قابل مشاهده‌ای بر توزیع تنش محوری ندارد و می‌توان تنش محوری را

مستقل از ثابت ناهمگنی دانست.

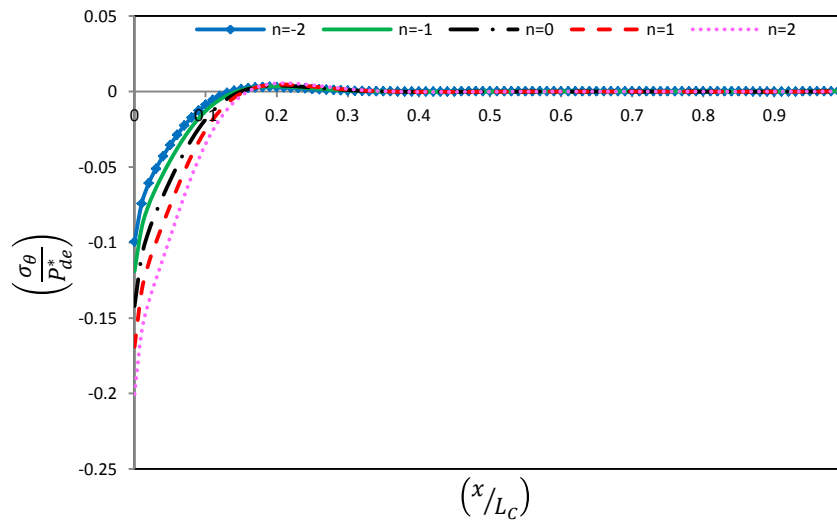


شکل ۴-۱۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه میانی

شکل ۴-۱۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول بر توزیع

تنش محیطی در لایه میانی استوانه نشان می‌دهد. تنش محیطی در نقاط دور از سر گیردار استوانه

رفتاری مستقل از ثابت ناهمگنی را از خود نشان می‌دهد.



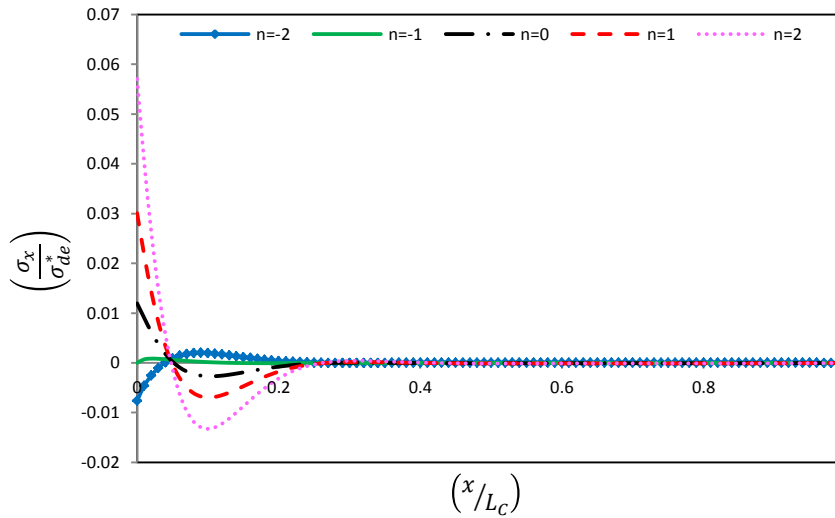
شکل ۴-۱۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه میانی

شکل ۴-۱۵ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول بر تنش

محوری در لایه میانی استوانه نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد در نواحی نزدیک سر گیردار استوانه

رفتار تنش محوری به ثابت ناهمگنی وابستگی دارد و با تغییر آن توزیعی صعودی یا نزولی از سر

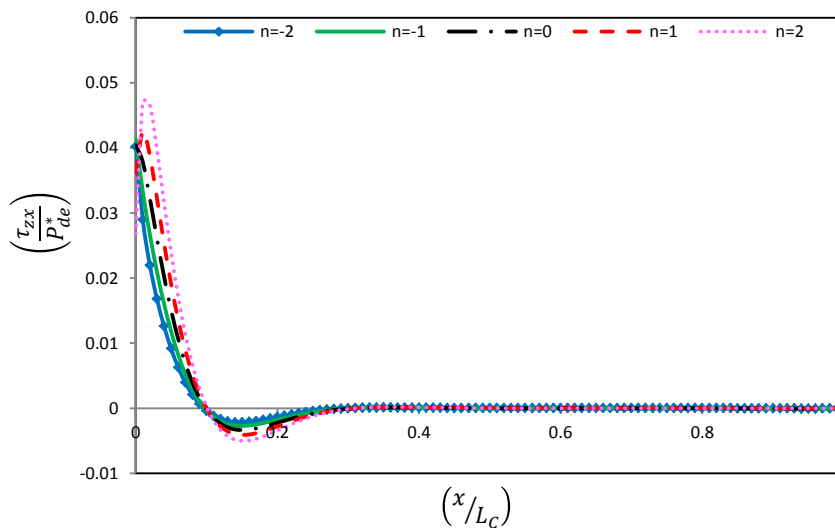
گیردار استوانه پیدا می‌کند.



شکل ۴-۱۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۱۶ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

توزیع تنش برشی در لایه‌ی میانی استوانه نشان می‌دهد. تنش برشی در نواحی دور از سر گیردار استوانه رفتاری مستقل از ثابت ناهمگنی نشان می‌دهد و به مقدار تقریباً ثابت صفر همگرا می‌شود، همچنین وابستگی رفتاری تنش برشی در نزدیکی سر گیردار آن به ثابت ناهمگنی کاملاً مشهود می‌باشد.



شکل ۴-۱۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی

### جمع‌بندی

نتایج به دست آمده برای استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی با شرایط مرزی نوع دوم، جهت مقایسه و بررسی بهتر به صورت جدول با دو روش تحلیلی و اجزای محدود ارائه می‌گردد.

### میدان حرارتی

جدول ۴-۶ نتایج به دست آمده برای دما را از دو روش تحلیلی و اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد توافق خوبی میان مقادیر پیش‌بینی شده به کمک دو روش وجود دارد و فرض نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای خطی بودن تغییرات دما در راستای ضخامت، فرضی مناسب و سازگار با مسأله می‌باشد.

جدول ۴-۶ نتایج میدان دمای برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$\Theta (^{\circ}K)$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	
$z = -(h/2)$	FEM	۳۰/۱۳	۳۰/۱۲	۳۰/۱۱	۳۰/۱۰	۳۰/۰۹
	FSDT	۳۰/۱۴	۳۰/۱۲	۳۰/۱۰	۳۰/۰۸	۳۰/۰۷
$z = 0$	FEM	۳۰/۰۰	۳۰/۰۰	۳۰/۰۰	۳۰/۰۱	۳۰/۰۱
	FSDT	۲۹/۹۹	۳۰/۰۰	۳۰/۰۱	۳۰/۰۱	۳۰/۰۱
$z = (h/2)$	FEM	۲۹/۸۳	۲۹/۸۸	۲۹/۹۲	۲۹/۹۴	۲۹/۹۶
	FSDT	۲۹/۸۵	۲۹/۸۸	۲۹/۹۱	۲۹/۹۴	۲۹/۹۵

### میدان الکتریکی

جدول ۴-۷ نتایج به دست آمده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود را برای پتانسیل الکتریکی در استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی با شرایط مرزی نوع دوم، بررسی می‌کند. نظر به آنچه پیش‌تر بیان شد فرض تغییرات خطی برای پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت با واقعیت مسأله سازگار نیست و منشأ اصلی ایجاد اختلاف در مقادیر پیش‌بینی شده توسط دو روش می‌باشد.

جدول ۷-۴ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$\varphi (V)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -\left(\frac{h}{2}\right)$	FEM	۲۱۴۵	۲۴۸۷	۳۱۶۴	۴۴۴۳	۶۷۵۵
	FSDT	۷۹۲	۷۵۹	۷۱۷	۶۶۸	۶۱۴
$z = 0$	FEM	۲۹۱۰	۳۱۱۴	۳۳۰۲	۳۵۲۴	۳۸۷۹
	FSDT	۱۲۹۱	۱۲۶۲	۱۲۲۵	۱۱۸۰	۱۱۳۰
$z = \left(\frac{h}{2}\right)$	FEM	۱۲۰۲	۲۰۹۶	۳۱۲۶	۴۳۵۹	۵۸۹۲
	FSDT	۱۷۹۰	۱۷۶۶	۱۷۳۳	۱۶۹۲	۱۶۴۵

### میدان مکانیکی

همان طور که در جمع‌بندی نتایج مربوط به استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی با شرایط مرزی نوع اول بیان شد؛ در این حالت نیز برخی از فرضیات نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، یا سازگار با مسأله و واقعیت حاکم بر آن نیست و یا در نواحی اندکی از استوانه فرض مناسبی می‌باشد؛ بنابراین نتایج پیش‌بینی شده توسط دو روش دارای اختلاف می‌باشند که با توجه به آنچه ذکر شد، این اختلاف‌ها در میدان تنش نمایان‌تر از میدان جابه‌جایی است. جداول پیش‌رو نتایج به دست آمده از روش تحلیلی و اجزای محدود برای میدان جابه‌جایی و تنش را مورد مقایسه قرار می‌دهند.

جدول ۸-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$U_z (mm)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -\left(\frac{h}{2}\right)$	FEM	۰/۰۰۱۶۵	۰/۰۰۱۸۶	۰/۰۰۲۱۹	۰/۰۰۲۷۰	۰/۰۰۳۴۸
	FSDT	۰/۰۰۲۶۲	۰/۰۰۲۶۲	۰/۰۰۲۶۳	۰/۰۰۲۶۳	۰/۰۰۲۶۳
$z = 0$	FEM	۰/۰۰۲۲۳	۰/۰۰۲۵۳	۰/۰۰۲۹۷	۰/۰۰۳۶۴	۰/۰۰۴۶۴
	FSDT	۰/۰۰۳۲۶	۰/۰۰۳۲۶	۰/۰۰۳۲۷	۰/۰۰۳۲۷	۰/۰۰۳۲۷
$z = \left(\frac{h}{2}\right)$	FEM	۰/۰۰۲۷۱	۰/۰۰۳۱۴	۰/۰۰۳۷۶	۰/۰۰۴۶۹	۰/۰۰۶۰۶
	FSDT	۰/۰۰۳۹۰	۰/۰۰۳۹۰	۰/۰۰۳۹۰	۰/۰۰۳۹۱	۰/۰۰۳۹۱

جدول ۹-۴ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$\sigma_{\theta} (MPa)$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	
$z = -(h/2)$	FEM	-۶/۱۷۶	-۴/۲۰۸	-۰/۹۹۷	۴/۱۱۲	۱۲/۱۱۲
	FSDT	-۰/۰۴۹	-۰/۰۳۳	-۰/۰۱۷	۰/۰۰۰	۰/۰۱۷
$z = 0$	FEM	۰/۹۶۶	۰/۴۸۵	۰/۰۴۸	۰/۲۵۳	۲/۶۱۱
	FSDT	۰/۰۰۲	-۰/۰۰۲	-۰/۰۰۵	-۰/۰۰۷	-۰/۰۰۷
$z = (h/2)$	FEM	۴/۴۱۳	۲/۳۵۲	۰/۷۴۹	-۴/۹۹۶	-۲۱/۰۰۸
	FSDT	۰/۰۳۱	۰/۰۲۹	۰/۰۲۲	۰/۰۰۹	-۰/۰۱۴

جدول ۱۰-۴ نتایج تنش محوری برای بارگذاری حرارتی در وسط استوانه

$\sigma_x (MPa)$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	
$z = -(h/2)$	FEM	-۶/۴۰۲	-۴/۲۵۰	-۰/۷۶۴	۴/۷۴۱	۱۳/۳۰۲
	FSDT	-۰/۰۶۷	-۰/۰۵۳	-۰/۰۳۸	-۰/۰۲۴	-۰/۰۱۰
$z = 0$	FEM	۰/۶۸۵	۰/۲۵۷	۰/۰۰۱	۰/۶۳۸	۳/۸۹۲
	FSDT	۰/۰۰۲	-۰/۰۰۱	-۰/۰۰۴	-۰/۰۰۶	-۰/۰۰۷
$z = (h/2)$	FEM	۲/۱۹۷	۲/۰۸۸	۰/۵۰۵	-۵/۰۱۶	-۲۰/۲۷۶
	FSDT	۰/۰۳۷	۰/۰۳۹	۰/۰۳۹	۰/۰۳۶	۰/۰۲۹

#### ۴-۴ تحلیل الکتریکی استوانه‌های ناهمگن

مشابه آنچه در قسمت تحلیل حرارتی مواد ناهمگن بیان شد، تحلیل الکتریکی مواد ناهمگن نیز همانند مواد همگن است با این تفاوت که برای محاسبه‌ی ضرایب دستگاه معادلات ساده شده، باید ثوابت ناهمگنی به همراه خواص لایه‌ی داخلی استوانه در روابط (۲-۸۹) تا (۲-۱۴۵) استفاده شوند.

#### ۴-۴-۱ مطالعه‌ی عددی

برای مقایسه‌ی بهتر اثر ثابت ناهمگنی بر روی رفتار الکتروترمو مکانیکی استوانه، هندسه،



بارگذاری و شرایط مرزی مطابق مطالعه‌ی عددی صورت گرفته در بخش تحلیل الکتریکی استوانه‌ی همگن در نظر گرفته می‌شود، همچنین خواص در لایه‌ی داخلی استوانه‌ی ناهمگن برابر خواص استوانه‌ی همگن (جدول ۳-۱) محاسبه می‌شود.

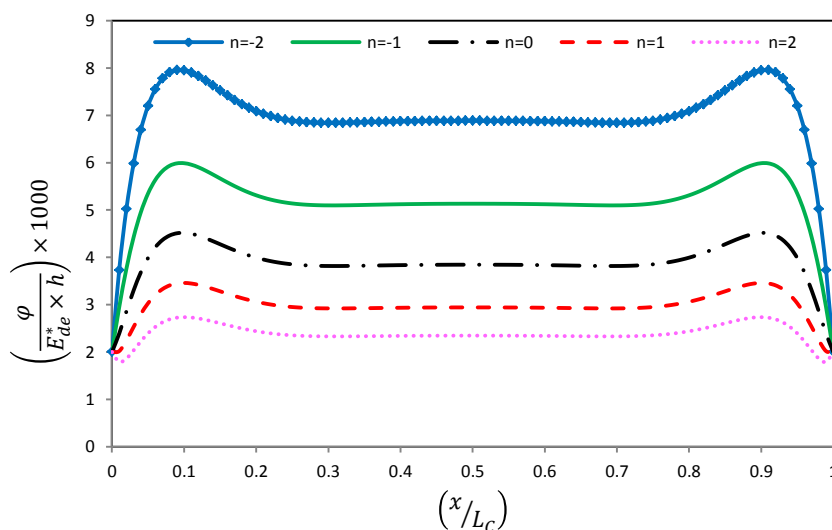
برای بررسی بهتر نتایج، کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی برابر ثابت ناهمگنی کل  $n$  در نظر گرفته می‌شوند و مطالعه‌ی عددی با توجه به مراجع [۱۵-۳۲] برای مقادیر  $n = -2, -1, 0, 1, 2$  انجام می‌شود.

## ۴-۴-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول

### رفتار حرارتی

همان طور که در بخش تحلیل الکتریکی استوانه‌های همگن بیان شد؛ در این حالت به دلیل عدم بارگذاری حرارتی و عدم وجود شرایط مرزی تغییرات دمایی، تغییرات دمایی در استوانه وجود نخواهد داشت ( $\Theta = 0^\circ K$ ) و دما در استوانه برابر دمای ثابت مثبت مرجع ( $\Theta^* = 295^\circ K$ ) می‌باشد. پرواضح است؛ که این امر مستقل از ثابت ناهمگنی می‌باشد.

### رفتار الکتریکی



شکل ۴-۱۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۱۷ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

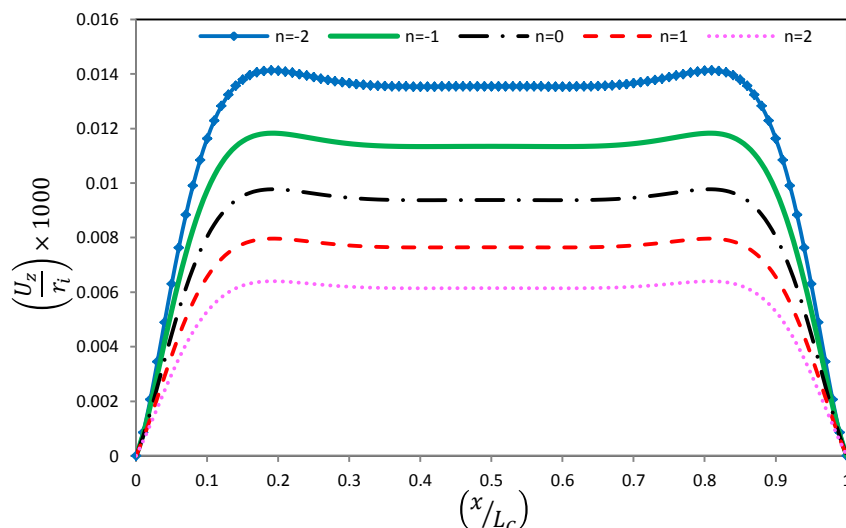
توزیع پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه نشان می‌دهد. اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم کاملاً مشهود است و با افزایش ثابت ناهمگنی پتانسیل الکتریکی در جسم کاهش می‌یابد.

### رفتار مکانیکی

ابتدا اثر ناهمگنی بر روی توزیع میدان جابه‌جایی مورد بررسی قرار می‌گیرد، سپس اثر آن بر روی میدان تنش مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

#### الف) میدان جابه‌جایی

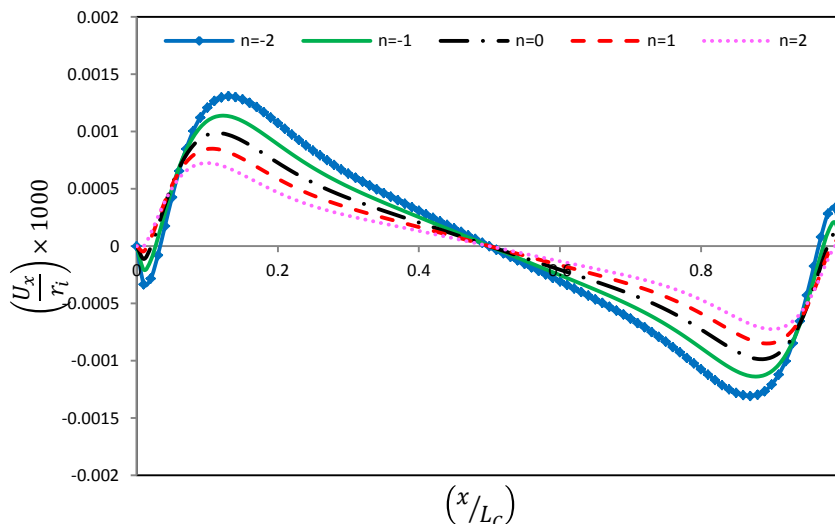
شکل ۴-۱۸ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع جابه‌جایی شعاعی دست‌خوش تغییر می‌گردد و کاهش می‌یابد. رفتار جابه‌جایی شعاعی بر اثر ثابت ناهمگنی مشابه پتانسیل الکتریکی می‌باشد که این امر به خاطر پلاریزه بودن استوانه در راستای شعاعی و بارگذاری الکتریکی می‌باشد.



شکل ۴-۱۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۱۹ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع جابه‌جایی محوری نشان می‌دهد. خلاف مطالعه‌ی عددی صورت گرفته در بخش تحلیل حرارتی در این بخش ثابت ناهمگنی توزیع جابه‌جایی محوری را دست‌خوش تغییرات مشهودتری می‌کند، البته

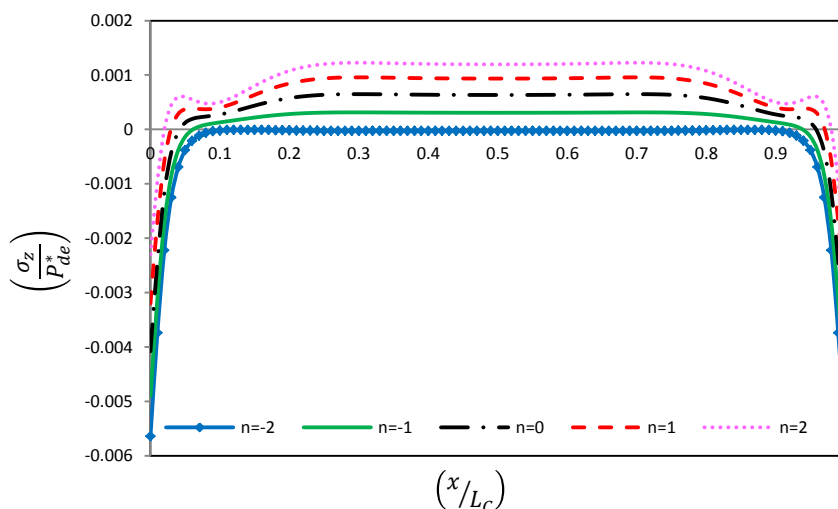
در این حالت نیز مشابه مطالعه‌ی عددی تحلیل گذشته، مقدار جابه‌جایی محوری در وسط لایه‌ی میانی استوانه رفتاری مستقل از ثابت ناهمگنی را از خود نشان می‌دهد.



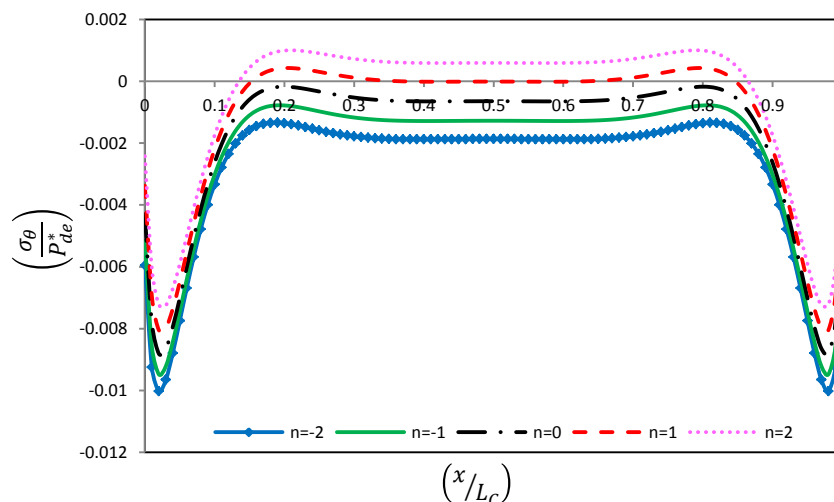
شکل ۴-۱۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی

(ب) میدان تنش

شکل ۴-۲۰ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش شعاعی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در لایه‌ی میانی استوانه نشان می‌دهد. در این بخش نیز اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی مشهودتر از گذشته می‌باشد.

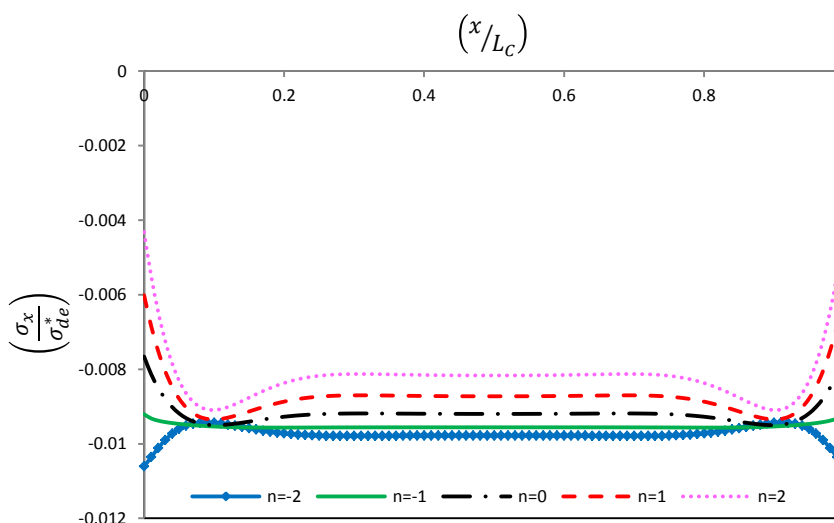


شکل ۴-۲۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی



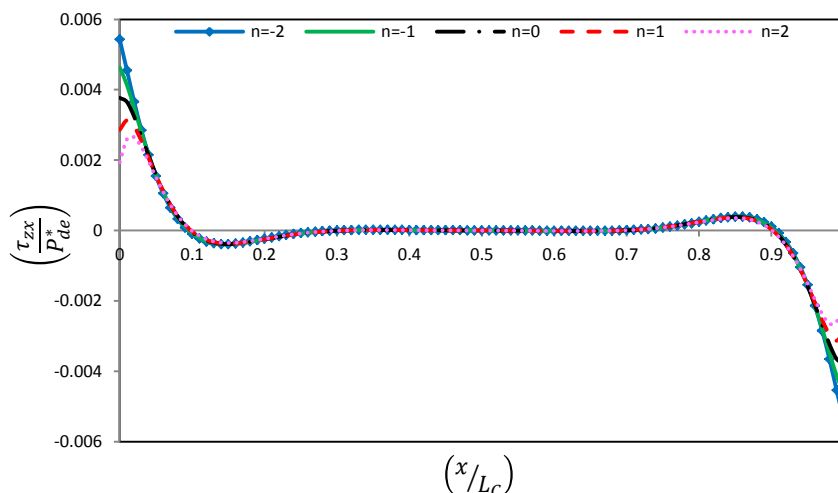
شکل ۲۱-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی

شکل ۲۱-۴ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش محیطی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در لایه‌ی میانی استوانه نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ با افزایش ثابت ناهمگنی، تنش محیطی افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۲۲-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی

شکل ۲۲-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع تنش محوری در لایه‌ی میانی استوانه نشان می‌دهد. ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر توزیع تنش محوری در جسم دارد و با تغییر آن تنش محوری در نزدیکی دو سر استوانه رفتار صعودی یا نزولی پیدا می‌کند. در این مطالعه  $n = -1$  تقریباً حالت بحرانی دارد و در این حالت رفتار تنش محوری در طول استوانه بدون تغییر باقی می‌ماند.



شکل ۴-۲۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۲۳ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

توزیع تنش برشی نشان می‌دهد. نتایج حاکی از این امر می‌باشد که تنش برشی در نواحی دور از دو سر استوانه مقداری ناچیز و مستقل از ثابت ناهمگنی دارد. اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش برشی را می‌توان در نقاط نزدیک دو سر استوانه مشاهده کرد.

### جمع‌بندی

به منظور مقایسه‌ی بهتر، نتایج به دست آمده به صورت جدول ارائه می‌گردند.

### میدان حرارتی

مطابق آنچه بیان شد؛ تغییرات دمایی در استوانه وجود ندارد (  $\Theta = 0^\circ K$  ) و میدان حرارتی

حاوی نتایج و اطلاعات خاصی نمی‌باشد.

### میدان الکتریکی

جدول ۴-۱۱ نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای

محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. همان طور که اشاره شد؛ فرض خطی بودن تغییرات در

روش تحلیلی منشأ اصلی ایجاد اختلاف می‌باشد. این فرض به ویژه برای توزیع پتانسیل الکتریکی در

راستای ضخامت ناسازگار است و همین امر را می‌توان دلیل اصلی اختلاف به وجود آمده دانست.

جدول ۱۱-۴ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه

$\varphi(V)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	-۱۳۰	-۱۶۱	-۲۲۹	-۳۱۸	-۴۱۳
	FSDT	-۴۲۰	-۳۶۲	-۳۰۲	-۲۴۲	-۱۸۶
$z = 0$	FEM	۱۰۵۴	۹۵۸	۸۵۱	۷۳۹	۶۲۹
	FSDT	۳۴۴	۲۵۷	۱۹۲	۱۴۷	۱۱۷
$z = (h/2)$	FEM	۳۹۹۴	۲۸۸۶	۲۱۰۰	۱۵۳۸	۱۱۳۴
	FSDT	۱۱۰۸	۸۷۶	۶۸۷	۵۳۷	۴۲۰

### میدان مکانیکی

جدول ۱۲-۴ نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد؛ در این بخش نیز به دلایل مختلف از جمله فرض خطی سازی، اختلاف در نتایج مشاهده می‌گردد.

جدول ۱۲-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه

$U_z (mm)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۰/۰۰۱۶۴	۰/۰۰۱۳۹	۰/۰۰۱۱۸	۰/۰۰۰۹۹	۰/۰۰۰۸۲
	FSDT	۰/۰۰۰۷۱	۰/۰۰۰۵۹	۰/۰۰۰۴۸	۰/۰۰۰۳۹	۰/۰۰۰۳۱
$z = 0$	FEM	۰/۰۰۱۳۰	۰/۰۰۱۰۹	۰/۰۰۰۹۰	۰/۰۰۰۷۳	۰/۰۰۰۵۹
	FSDT	۰/۰۰۰۵۴	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۰۰۳۸	۰/۰۰۰۳۱	۰/۰۰۰۲۵
$z = (h/2)$	FEM	۰/۰۰۰۸۲	۰/۰۰۰۷۵	۰/۰۰۰۶۸	۰/۰۰۰۵۶	۰/۰۰۰۴۶
	FSDT	۰/۰۰۰۳۷	۰/۰۰۰۳۲	۰/۰۰۰۲۷	۰/۰۰۰۲۲	۰/۰۰۰۱۸

جداول پیش‌رو، نتایج به دست آمده برای میدان تنش را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهند. همان‌طور که گفته شد؛ در این بخش اختلاف‌ها نمایان‌تر می‌باشند.

جدول ۱۳-۴ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه

$\sigma_{\theta} (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۳/۴۳۷	۲/۳۴۱	۱/۳۴۹	۰/۴۶۵	-۰/۳۰۹
	FSDT	۰/۸۰۰	۰/۷۰۰	۰/۶۰۳	۰/۵۱۰	۰/۴۲۴
$z = 0$	FEM	-۰/۴۲۱	-۰/۲۴۶	-۰/۱۱۴	-۰/۰۲۸	۰/۰۰۹۴
	FSDT	-۰/۱۰۳	-۰/۰۷۰	-۰/۰۳۶	-۰/۰۰۱	۰/۰۳۳
$z = (h/2)$	FEM	-۱/۸۳۳	-۱/۴۰۶	-۰/۹۱۰	-۰/۳۴۸	۰/۲۸۰
	FSDT	-۰/۳۵۶	-۰/۴۰۹	-۰/۴۶۱	-۰/۵۱۱	-۰/۵۵۸

جدول ۱۴-۴ نتایج تنش محوری برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه

$\sigma_x (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۰/۹۲۳	۰/۱۷۱	-۰/۵۰۹	-۱/۱۱۲	۱/۶۳۹
	FSDT	-۰/۳۰۲	-۰/۲۱۵	-۰/۱۴۸	-۰/۰۹۷	-۰/۰۶۱
$z = 0$	FEM	-۱/۴۸۶	-۱/۳۶۵	-۱/۲۷۱	-۱/۲۰۹	-۱/۱۷۷
	FSDT	-۰/۵۳۸	-۰/۵۲۶	-۰/۵۰۶	-۰/۴۸۰	-۰/۴۴۹
$z = (h/2)$	FEM	-۲/۲۴۲	-۱/۹۶۱	-۱/۶۳۶	-۱/۲۶۶	-۰/۸۵۲
	FSDT	-۰/۵۳۳	-۰/۶۳۴	-۰/۷۴۴	-۰/۸۶۲	-۰/۹۸۵

#### ۳-۴-۴ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم

##### رفتار حرارتی

همچون گذشته، تغییرات دمایی در استوانه وجود ندارد ( $\Theta = 0^\circ K$ ) و دما برابر دمای ثابت

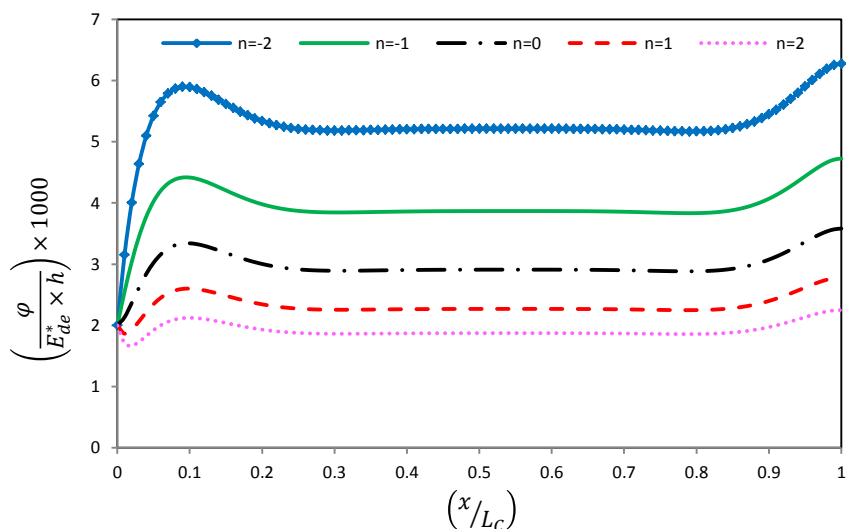
مثبت مرجع ( $\Theta^* = 295^\circ K$ ) می‌باشد.

##### رفتار الکتریکی

شکل ۲۴-۴ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی با استفاده از نظریه‌ی تغییر

شکل برشی مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد؛ اثر ثابت ناهمگنی بر توزیع پتانسیل الکتریکی کاملاً مشهود

می‌باشد و با افزایش ثابت ناهمگنی پتانسیل الکتریکی در جسم کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۲۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی

### رفتار مکانیکی

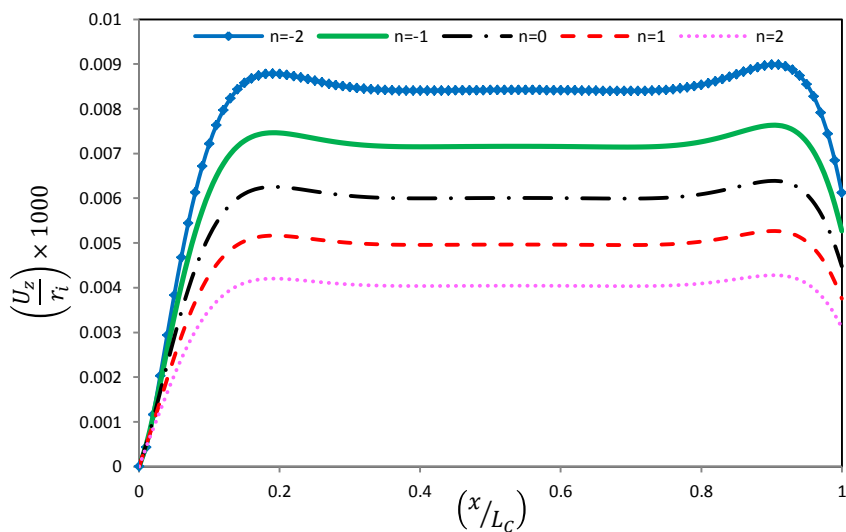
اثر ثابت ناهمگنی ابتدا بر روی میدان جابه‌جایی و سپس بر روی میدان تنش مورد مطالعه و

بررسی قرار می‌گیرد.

الف) میدان جابه‌جایی

شکل ۴-۲۵ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی با استفاده از روش تحلیلی

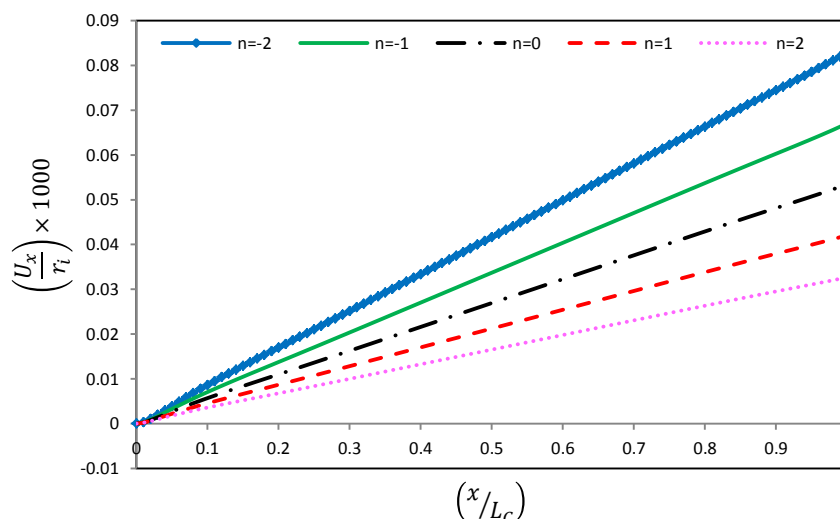
نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ با افزایش ثابت ناهمگنی، جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۲۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی



شکل ۴-۲۶ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع جابه‌جایی محوری با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد. شرایط مرزی یک سر گیردار-یک سر آزاد سبب می‌گردد؛ اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع جابه‌جایی محوری در کل طول استوانه کاملاً مشهود باشد. با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه کاهش می‌یابد.

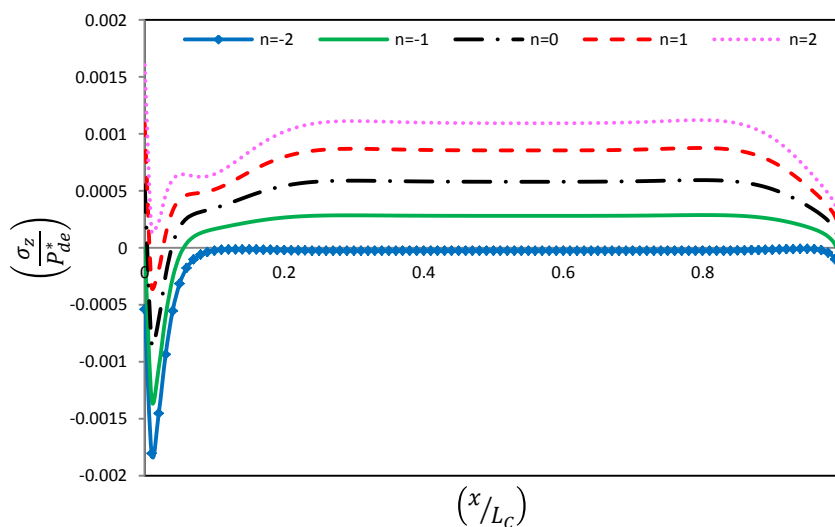


شکل ۴-۲۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی

(ب) میدان تنش

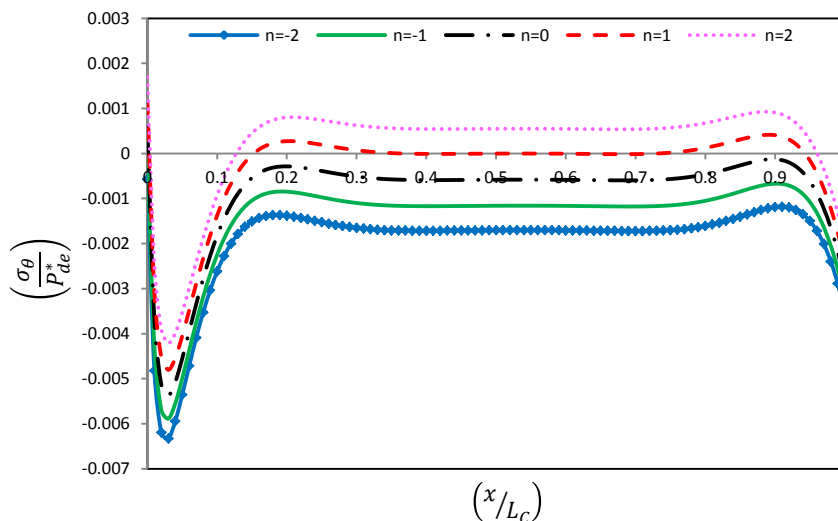
شکل ۴-۲۷ توزیع اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی تنش شعاعی نشان

می‌دهد. با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع تنش شعاعی در جسم افزایش می‌یابد.



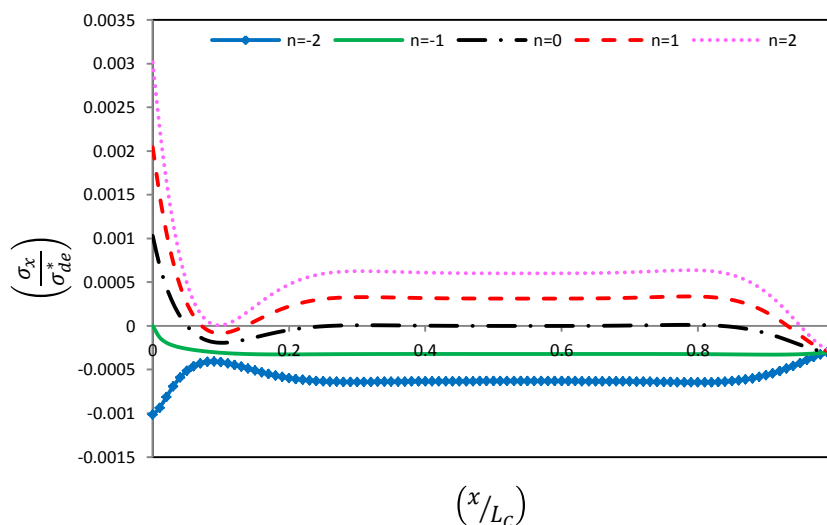
شکل ۴-۲۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۲۸ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی تنش محیطی نشان می‌دهد. اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش محیطی در نزدیکی دو سر استوانه چندان مشهود نیست؛ اما در نواحی دور از دو سر استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع تنش محیطی در جسم افزایش می‌یابد.



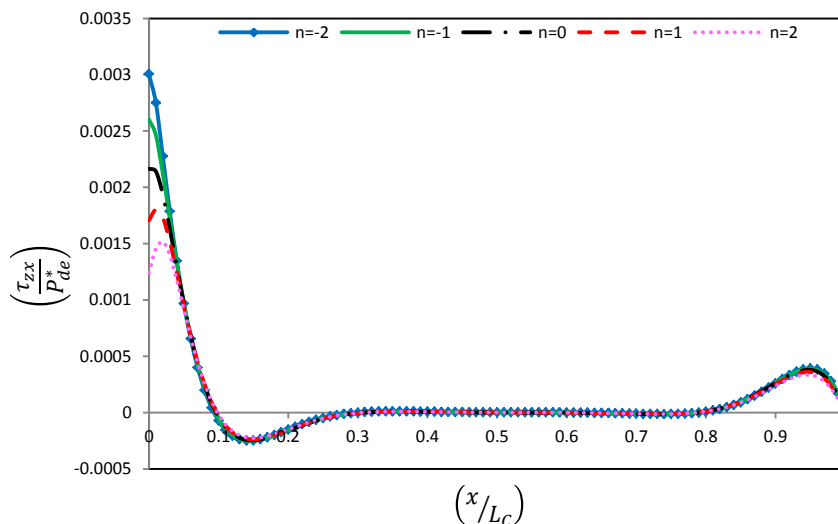
شکل ۴-۲۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۲۹ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش محوری با استفاده از روش تحلیلی نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ توزیع تنش محوری تحت تأثیر ثابت ناهمگنی قرار دارد و به ویژه در نزدیکی سر گیردار استوانه با افزایش و کاهش آن رفتاری صعودی یا نزولی از خود نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۳۰ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع تنش برشی نشان می‌دهد. تنش برشی در نواحی دور از دو سر استوانه رفتاری تقریباً مستقل از ثابت ناهمگنی را از خود نشان می‌دهد.



شکل ۴-۳۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی

### جمع‌بندی

به منظور مقایسه‌ی بهتر نتایج با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و روش اجزای محدود به صورت جدول ارائه می‌گردد.

### میدان حرارتی

با توجه به آنچه بیان شد؛ دمای استوانه برابر دمای ثابت مثبت مرجع ( $\Theta^* = 295^\circ K$ ) می‌باشد.

### میدان الکتریکی

جدول ۴-۱۵ نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی را با استفاده از روش اجزای محدود و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مورد مقایسه قرار می‌دهد. همان طور که قبلاً بحث شد؛ به دلیل فرض خطی بودن در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نتایج به دست آمده از دو روش دارای اختلاف می‌باشند، این اختلاف به خاطر هم‌مرتبه نبودن روابط ساختاری در نتایج پتانسیل الکتریکی نمایان‌تر می‌گردد.

جدول ۱۵-۴ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه

$\varphi (V)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	-۴۰۲	-۳۶۷	-۳۸۰	-۴۲۵	-۴۸۶
	FSDT	-۴۱۷	-۳۵۵	-۲۹۳	-۲۳۲	-۱۷۵
$z = 0$	FEM	۴۱۰	۴۶۹	۴۸۹	۴۷۷	۴۴۴
	FSDT	۲۶۱	۱۹۳	۱۴۵	۱۱۳	۹۴
$z = (h/2)$	FEM	۲۷۵۴	۱۹۳۶	۱۳۸۸	۱۰۱۵	۷۵۷
	FSDT	۹۳۸	۷۴۲	۵۸۴	۴۵۹	۳۶۲

### میدان مکانیکی

جدول ۱۶-۴ نتایج مربوط به جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد. اگرچه فرض خطی بودن در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول سبب ایجاد اختلاف در نتایج به دست آمده می‌گردد اما مشاهده می‌شود هر دو روش رفتاری مشابه را برای توزیع جابه‌جایی شعاعی با توجه به ثابت ناهمگنی پیش‌بینی می‌کنند.

جدول ۱۶-۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه

$U_z (mm)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۰/۰۰۰۹۸	۰/۰۰۰۸۷	۰/۰۰۰۷۶	۰/۰۰۰۶۶	۰/۰۰۰۵۷
	FSDT	۰/۰۰۰۵۲	۰/۰۰۰۴۴	۰/۰۰۰۳۶	۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۰۰۲۴
$z = 0$	FEM	۰/۰۰۰۶۶	۰/۰۰۰۵۸	۰/۰۰۰۴۹	۰/۰۰۰۴۲	۰/۰۰۰۳۴
	FSDT	۰/۰۰۰۳۴	۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۰۰۲۴	۰/۰۰۰۲۰	۰/۰۰۰۱۶
$z = (h/2)$	FEM	۰/۰۰۰۲۰	۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۲۷	۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۲۳
	FSDT	۰/۰۰۰۱۵	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۰۰۱۲	۰/۰۰۰۱۰	۰/۰۰۰۰۹

نتایج مربوط به میدان تنش در جداول آتی مورد مقایسه و بررسی قرار می‌گیرد. همان‌طور که قبلاً توضیح داده شد؛ اختلاف نتایج در این حالت نسبت به میدان جابه‌جایی مشهودتر است.

جدول ۴-۱۷ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه

$\sigma_{\theta} (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۲/۸۳۲	۱/۸۲۰	۰/۹۰۸	۰/۰۹۹	-۰/۶۰۷
	FSDT	۰/۷۳۲	۰/۶۴۱	۰/۵۵۲	۰/۴۶۶	۰/۳۸۸
$z = 0$	FEM	۳/۳۷۷	-۰/۱۹۰	-۰/۰۸۴	۰/۰۲۴	-۰/۰۱۰
	FSDT	-۰/۰۹۴	-۰/۰۶۴	-۰/۰۳۲	-۰/۰۰۰	۰/۰۳۰
$z = (h/2)$	FEM	-۱/۵۴۸	-۱/۰۹۰	-۰/۵۶۸	۰/۰۱۸	۰/۶۶۳
	FSDT	-۰/۳۲۵	-۰/۳۷۳	-۰/۴۲۱	-۰/۴۶۷	-۰/۵۰۹

جدول ۴-۱۸ نتایج تنش محوری برای بارگذاری الکتریکی در وسط استوانه

$\sigma_x (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۲/۴۲۸	۱/۳۵۱	۰/۴۰۳	۰/۴۱۷	-۱/۱۱۷
	FSDT	۰/۴۳۸	۰/۳۸۲	۰/۳۲۷	۰/۲۷۵	۰/۲۲۸
$z = 0$	FEM	-۱/۵۸۷	-۰/۰۷۰	-۰/۰۲۷	-۰/۰۳۰	-۰/۰۷۶
	FSDT	-۰/۰۳۵	-۰/۰۱۸	-۰/۰۰۰	۰/۰۱۷	۰/۰۳۳
$z = (h/2)$	FEM	-۱/۱۵۱	-۰/۶۹۰	-۰/۱۷۸	۰/۳۸۳	۰/۹۸۶
	FSDT	-۰/۱۷۰	-۰/۱۹۴	-۰/۲۱۸	-۰/۲۴۱	-۰/۲۶۲

## ۴-۵ تحلیل مکانیکی استوانه‌های ناهمگن

همانند تحلیل‌های گذشته، تحلیل مکانیکی مواد ناهمگن همچون مواد همگن می‌باشد؛ با این تفاوت که در روابط استفاده شده برای محاسبه‌ی ماتریس ضرایب دستگاه معادلات ساده شده و شبه بردار  $\{l^*\}$  ثوابت ناهمگنی و خواص لایه‌ی داخلی به کار گرفته می‌شوند.

### ۴-۵-۱ مطالعه‌ی عددی

همچون گذشته برای مشاهده‌ی بهتر اثر ناهمگنی، هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی مانند

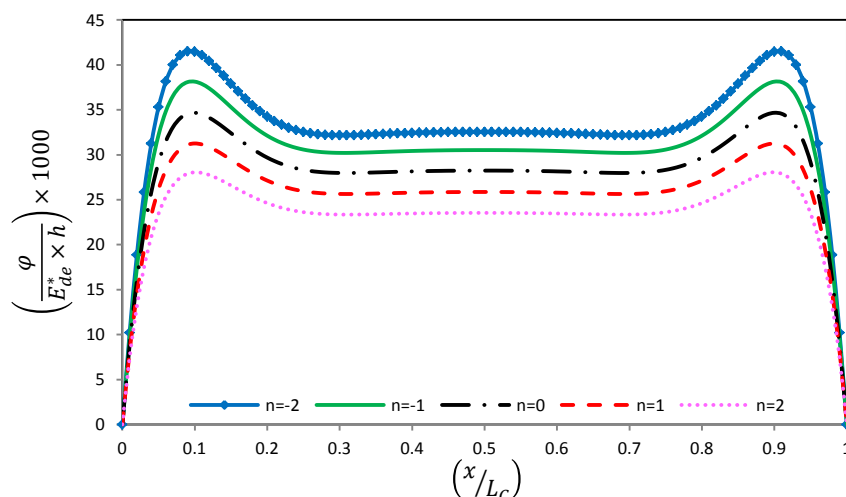
مطالعه‌ی عددی حالت همگن و خواص در لایه‌ی داخلی برابر خواص استوانه‌ی همگن (جدول ۳-۱) در نظر گرفته می‌شوند. همچنین تمامی ثوابت ناهمگنی برابر  $n$  در نظر گرفته می‌شود و مطالعه‌ی عددی با توجه به مراجع [۱۵-۳۲] برای  $n = -2, -1, 0, 1, 2$  انجام می‌شود.

## ۴-۵-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول

### رفتار حرارتی

به دلیل عدم بارگذاری حرارتی و عدم شرایط مرزی تغییرات دمایی، همچون گذشته تغییرات دمایی در استوانه وجود ندارد ( $\Theta = 0$ ) و دما برابر دمای ثابت مثبت مرجع ( $\Theta^* = 295^\circ K$ ) می‌باشد.

### رفتار الکتریکی



شکل ۴-۳۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی

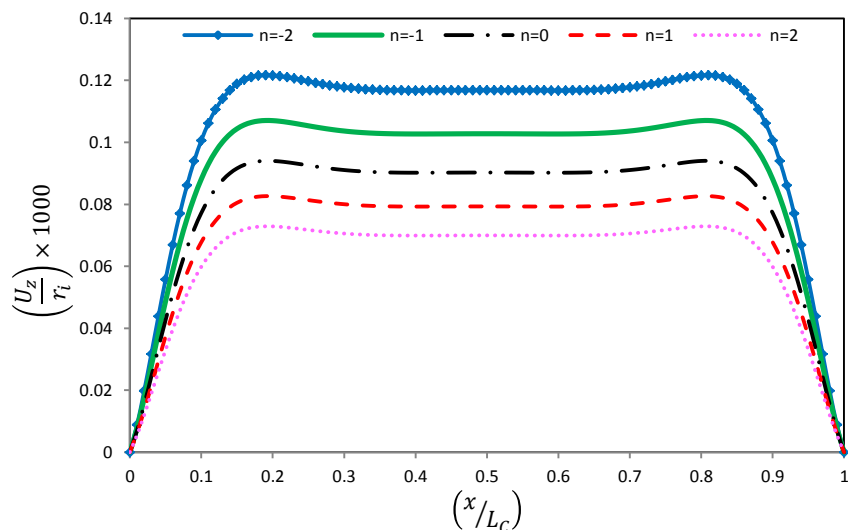
شکل ۴-۳۱ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد. با دور شدن از دو سر استوانه اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی کاملاً مشهود می‌گردد. همان طور که مشاهده می‌گردد با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم کاهش می‌یابد.

### رفتار مکانیکی

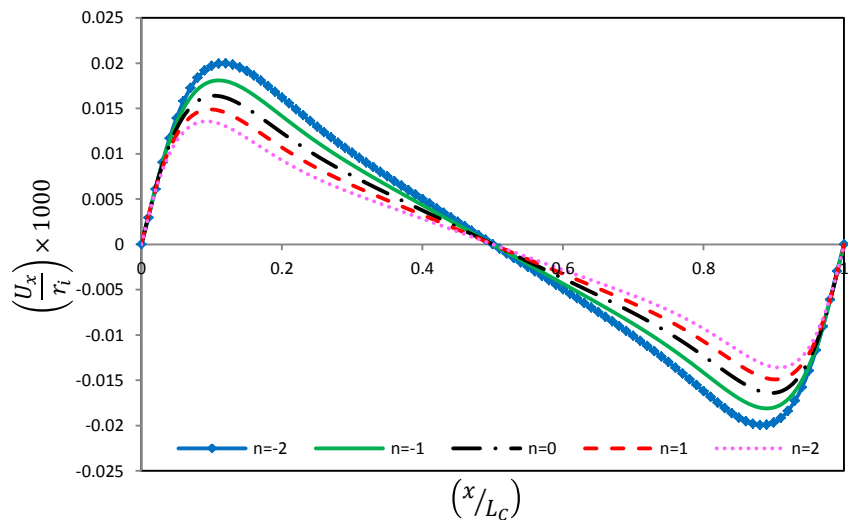
ابتدا اثر ثابت ناهمگنی بر روی میدان جابه‌جایی و سپس بر روی تنش مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

الف) میدان جابه‌جایی

شکل ۴-۳۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از روش تحلیلی نشان می‌دهد. ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی دارد و همانند پتانسیل الکتریکی با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۳۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه میانی



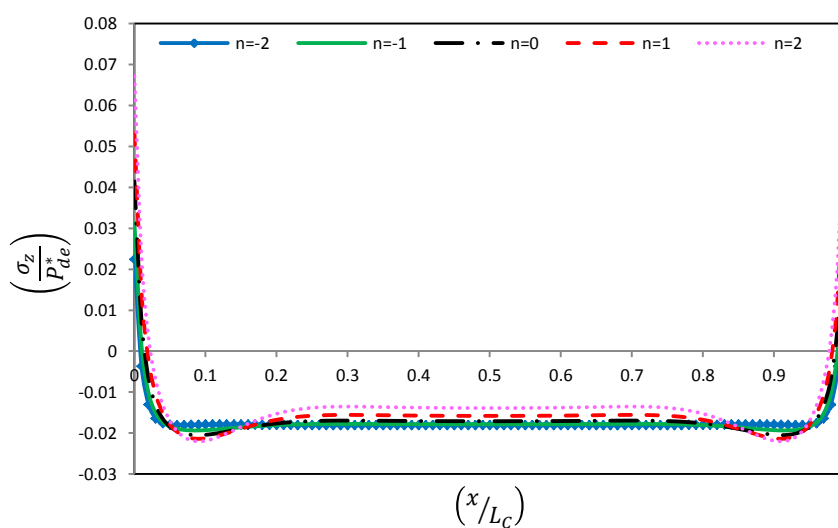
شکل ۴-۳۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه میانی

شکل ۴-۳۳ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول بر روی توزیع جابه‌جایی محوری نشان می‌دهد. ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر روی توزیع جابه‌جایی محوری در استوانه دارد و با کاهش ثابت ناهمگنی، اختلاف مقادیر بیشینه و کمینه‌ی جابه‌جایی محوری در

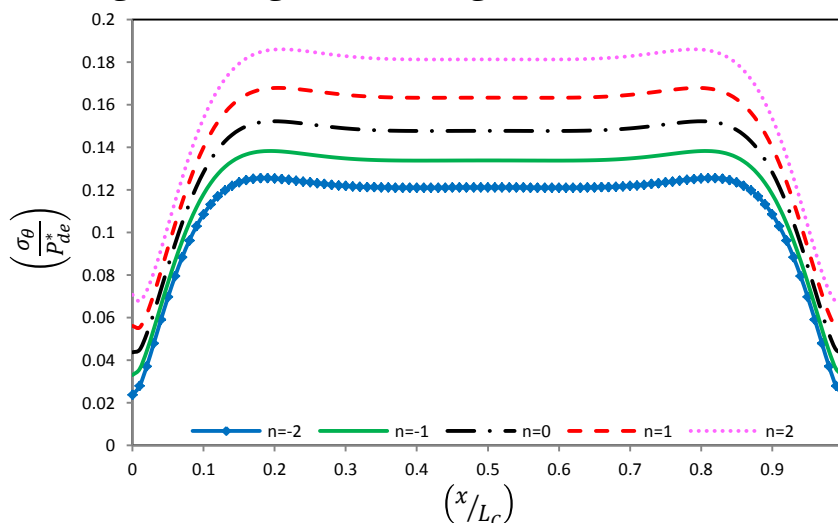
استوانه افزایش می‌یابد.

(ب) میدان تنش

شکل ۴-۳۴ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش شعاعی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد. ثابت ناهمگنی اثری اندک بر روی توزیع تنش شعاعی دارد و چندان مشهود نیست.



شکل ۴-۳۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی

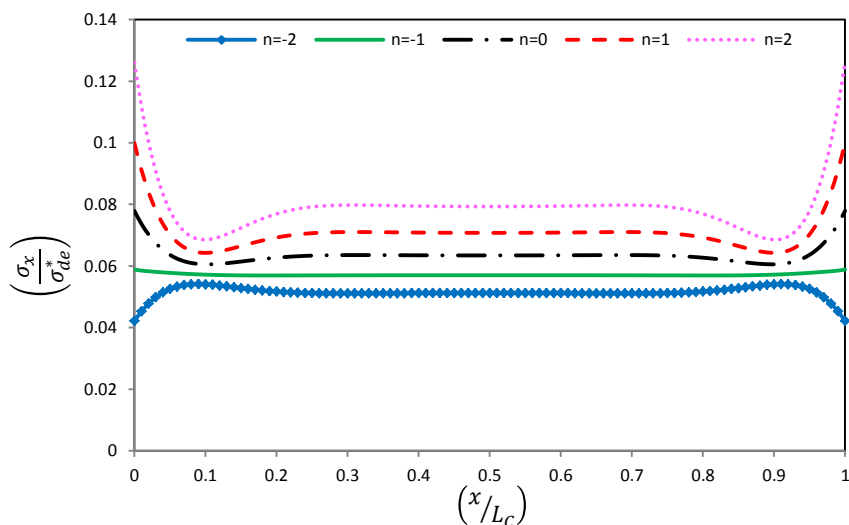


شکل ۴-۳۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۳۵ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش محیطی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد. ثابت ناهمگنی اثری مشهود بر روی توزیع تنش محیطی دارد و با

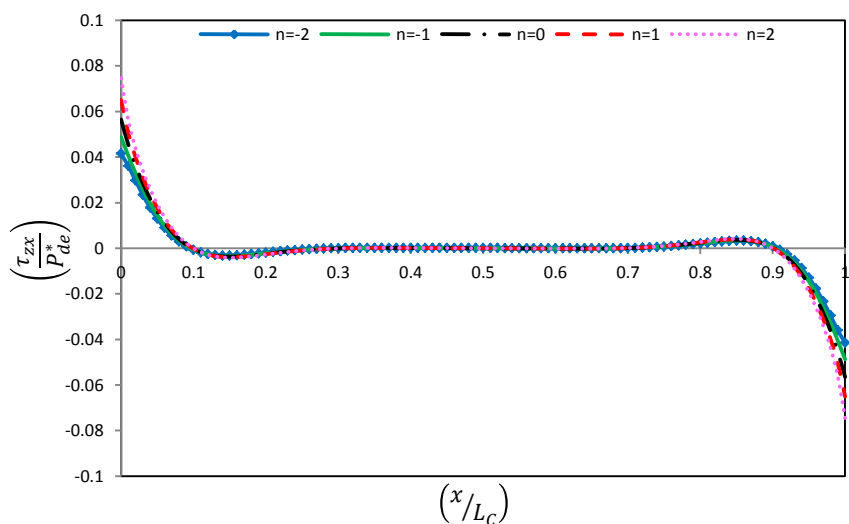


افزایش ثابت ناهمگنی مقادیر توزیع تنش محیطی در جسم افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۴-۳۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۳۶ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی توزیع تنش محوری در استوانه نشان می‌دهد. توزیع تنش محوری در نزدیکی دو سر استوانه به شدت تحت تأثیر ثابت ناهمگنی قرار دارد و با افزایش و کاهش آن رفتاری صعودی یا نزولی از خود نسبت به دو سر استوانه نشان می‌دهد. در نقاط دور از دو سر استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع تنش محوری افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۳۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۳۷ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی توزیع تنش برشی نشان

می‌دهد. مشاهده می‌گردد در نقاط دور از دو سر استوانه، تنش برشی مقداری ناچیز دارد و مستقل از ثابت ناهمگنی می‌باشد؛ همچنین اثر ثابت ناهمگنی در دو سر استوانه چندان محسوس نیست.

### جمع‌بندی

نتایج برای مقایسه بهتر و کمی به صورت جداول ارائه می‌گردند.

### میدان حرارتی

مطابق آنچه بیان شد؛ دمای جسم برابر دمای ثابت مثبت مرجع ( $\Theta^* = 295^\circ K$ ) می‌باشد.

### میدان الکتریکی

جدول ۴-۱۹ نتایج پتانسیل الکتریکی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود مورد مقایسه

قرار می‌دهد. ملاحظه می‌گردد؛ فرض خطی بودن روش تحلیلی باعث ایجاد اختلاف شده است.

جدول ۴-۱۹ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه

$\varphi (V)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۷۷۴۰	۷۱۰۱	۶۴۷۲	۵۸۷۹	۵۳۳۷
	FSDT	۳۶۴۸	۳۲۷۳	۲۹۱۷	۲۵۸۸	۲۲۹۳
$z = 0$	FEM	۲۳۵۵	۲۳۰۳	۲۱۹۸	۲۰۶۱	۱۹۱۲
	FSDT	۱۶۲۶	۱۵۲۶	۱۴۱۲	۱۲۹۳	۱۱۷۶
$z = (h/2)$	FEM	-۱۴۸۰	-۱۰۳۰	-۶۹۷	-۴۵۶	-۲۸۶
	FSDT	-۳۹۵	-۲۲۱	-۹۳	-۲	۶۰

### میدان مکانیکی

جدول ۴-۲۰ نتایج جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود مورد مقایسه

قرار می‌دهد؛ به دلیل فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تغییرات در

راستای ضخامت و هم مرتبه نبودن ضرایب روابط ساختاری روش تحلیلی پتانسیل الکتریکی را با

اختلاف و با مقدار کمتری پیش‌بینی می‌کند که سبب می‌گردد؛ نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی

اول جابه‌جایی شعاعی را بیشتر تحت تأثیر بارگذاری مکانیکی پیش‌بینی و مقادیر بیشتری را برای آن محاسبه کند. فرض خطی بودن برای جابه‌جایی شعاعی در روش تحلیلی نیز، یکی از علل ایجاد اختلاف در نتایج پیش‌بینی شده توسط دو روش می‌باشد.

جدول ۴-۲۰ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه

$U_z (mm)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۰/۰۰۲۵۵	۰/۰۰۲۲۲	۰/۰۰۱۹۳	۰/۰۰۱۶۸	۰/۰۰۱۴۷
	FSDT	۰/۰۰۵۱۱	۰/۰۰۴۴۹	۰/۰۰۳۹۳	۰/۰۰۳۴۵	۰/۰۰۳۰۴
$z = 0$	FEM	۰/۰۰۲۷۳	۰/۰۰۲۳۸	۰/۰۰۲۰۷	۰/۰۰۱۸۱	۰/۰۰۱۵۸
	FSDT	۰/۰۰۴۶۷	۰/۰۰۴۱۱	۰/۰۰۳۶۱	۰/۰۰۳۱۷	۰/۰۰۲۸۰
$z = (h/2)$	FEM	۰/۰۰۲۸۹	۰/۰۰۲۵۲	۰/۰۰۲۱۹	۰/۰۰۱۹۱	۰/۰۰۱۶۸
	FSDT	۰/۰۰۴۲۳	۰/۰۰۳۷۳	۰/۰۰۳۲۹	۰/۰۰۲۸۹	۰/۰۰۲۵۶

در ادامه نتایج مربوط به میدان تنش در جداول آورده می‌شود. همان طور که اشاره شد؛ فرض خطی بودن در روش تحلیلی سبب ایجاد اختلاف در پیش‌بینی نتایج میدان دمایی، الکتریکی و مکانیکی می‌گردد. برای محاسبه‌ی میدان تنش به کمک روش تحلیلی به دلیل استفاده از روابط گرادیان، اختلاف به وجود آمده در نتایج بیشتر می‌شود.

جدول ۴-۲۱ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه

$\sigma_\theta (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۱۲/۹۴۲	۱۱/۵۲۸	۱۰/۲۸۲	۹/۲۰۷	۸/۳۰۲
	FSDT	۱۵/۱۷۱	۱۳/۳۶۵	۱۱/۷۵۶	۱۰/۳۵۰	۹/۱۴۸
$z = 0$	FEM	۶/۹۰۹	۷/۵۲۲	۸/۱۸۷	۸/۹۳۲	۹/۷۹۹
	FSDT	۶/۶۵۸	۷/۳۵۸	۸/۱۲۳	۸/۹۷۹	۹/۹۶۸
$z = (h/2)$	FEM	۴/۱۰۱	۵/۳۰۹	۶/۸۷۴	۸/۹۲۷	۱۱/۶۶۶
	FSDT	۳/۲۱۲	۴/۲۸۰	۵/۷۰۲	۷/۶۰۹	۱۰/۲۰۳

جدول ۴-۲۲ نتایج تنش محوری برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه

$\sigma_x (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۸/۸۳۵	۷/۹۰۸	۷/۰۹۴	۶/۳۹۴	۵/۸۰۶
	FSDT	۷/۰۶۹	۶/۲۵۲	۵/۵۲۳	۴/۸۸۷	۴/۳۴۲
$z = 0$	FEM	۴/۵۷۱	۴/۹۷۸	۵/۴۲۱	۵/۹۱۸	۶/۴۹۶
	FSDT	۲/۸۱۶	۳/۱۳۴	۳/۴۸۹	۳/۸۹۲	۴/۳۶۲
$z = (h/2)$	FEM	۲/۶۳۰	۳/۴۰۴	۴/۴۰۹	۵/۷۳۱	۷/۵۰۰
	FSDT	۱/۱۶۵	۱/۵۷۶	۲/۱۳۴	۲/۸۹۹	۳/۹۶۱

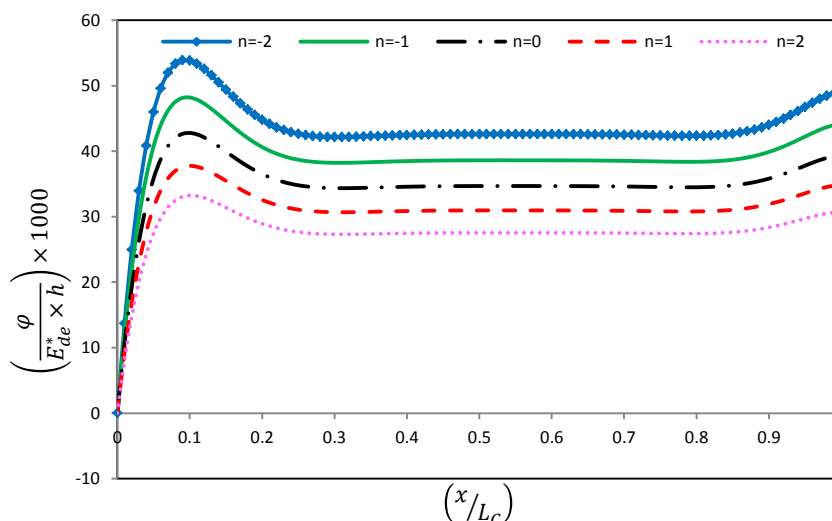
### ۴-۵-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم

#### رفتار حرارتی

شرایط مرزی نوع دوم مورد مطالعه نیز به گونه‌ای می‌باشد که تغییرات دمایی ( $\Theta = 0$ ) ایجاد

نمی‌گردد و دما در استوانه برابر دمای ثابت مثبت مرجع ( $\Theta^* = 295^\circ K$ ) می‌باشد.

#### رفتار الکتریکی



شکل ۴-۳۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۳۸ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی با استفاده از نظریه‌ی تغییر

شکل برشی مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد. اثر شرایط مرزی نوع دوم و ثابت ناهمگنی بر توزیع پتانسیل

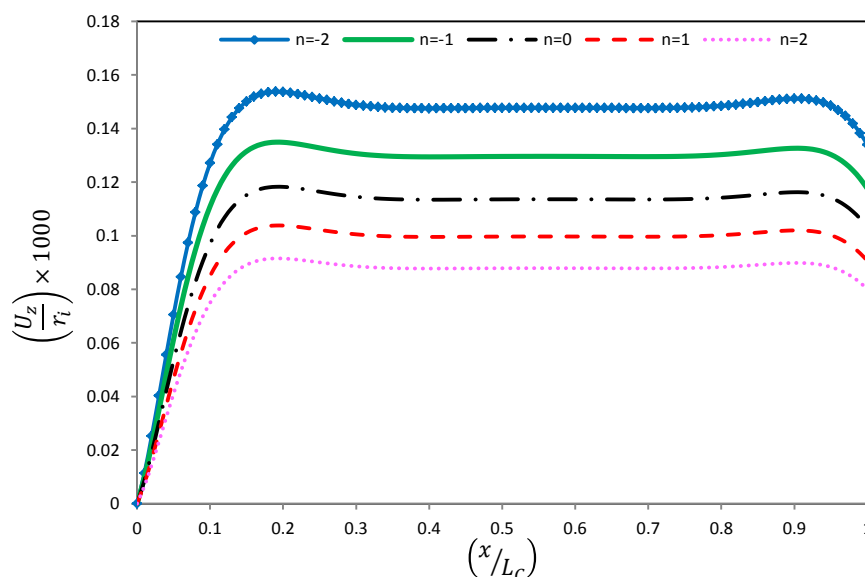
الکتریکی در جسم کاملاً مشخص می‌باشد، با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع پتانسیل الکتریکی در استوانه کاهش می‌یابد.

### رفتار مکانیکی

اثر ثابت ناهمگنی بر روی میدان جابه‌جایی و میدان تنش مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

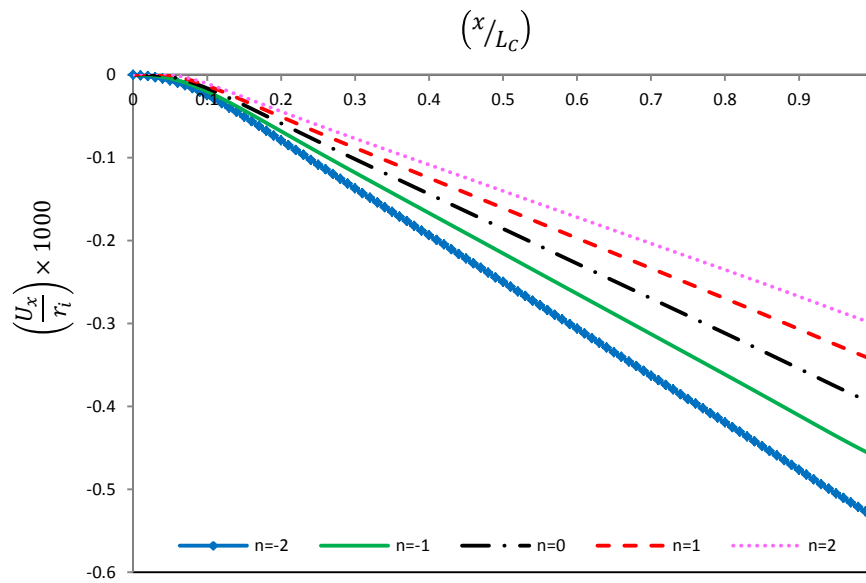
#### الف) میدان جابه‌جایی

شکل ۴-۳۹ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی جابه‌جایی شعاعی نشان می‌دهد. با دور شدن از سر گیردار استوانه اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی نمایان می‌گردد، افزایش ثابت ناهمگنی سبب کاهش توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه می‌گردد.



شکل ۴-۳۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۴۰ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی توزیع جابه‌جایی محوری نشان می‌دهد. اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع جابه‌جایی محوری در این حالت نسبت به شرایط مرزی نوع اول مشهودتر است.



شکل ۴-۴۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی

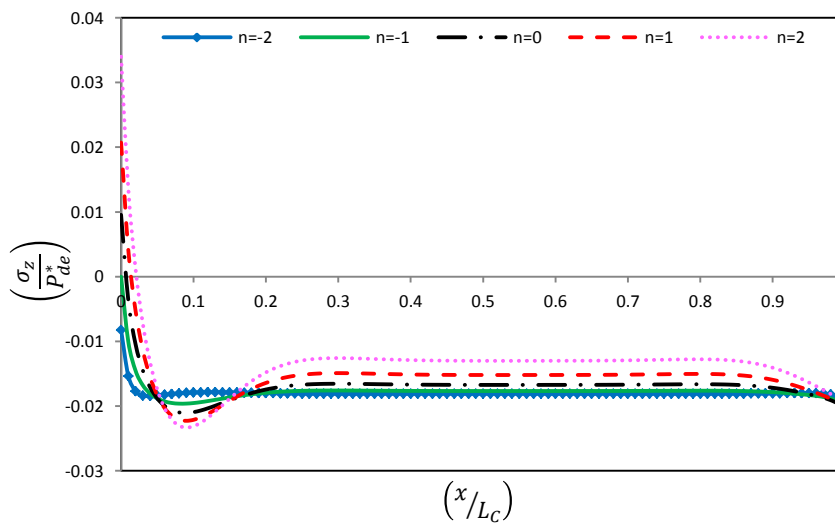
(ب) میدان تنش

شکل ۴-۴۱ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی توزیع تنش شعاعی نشان

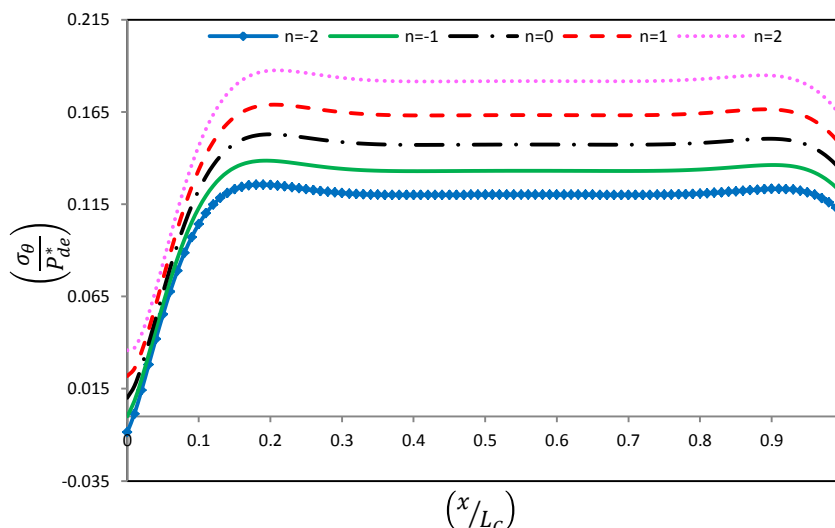
می‌دهد. در نزدیکی سر گیردار استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی رفتار توزیع تنش شعاعی شدت

می‌یابد و در سر آزاد استوانه اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی چندان مشهود نیست.

همچنین در نواحی دور از دو سر استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی مقدار تنش شعاعی کاهش می‌یابد.



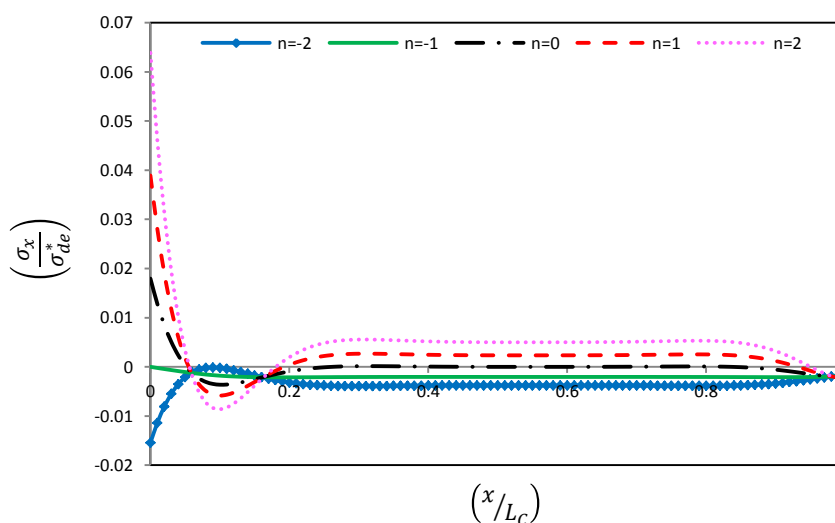
شکل ۴-۴۱ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی



شکل ۴-۴۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۴۲ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی توزیع تنش محیطی نشان

می‌دهد، با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع تنش محیطی در استوانه افزایش می‌یابد.



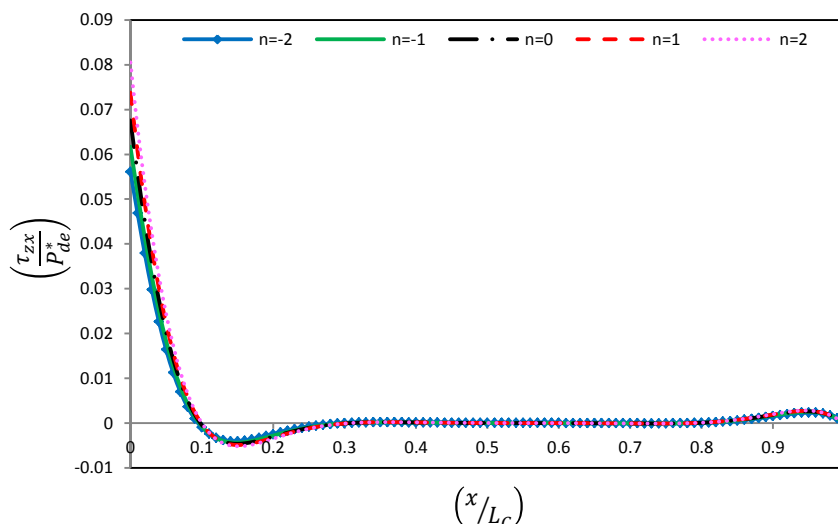
شکل ۴-۴۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۴۳ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

توزیع تنش محوری نشان می‌دهد، شرایط مرزی نوع دوم سبب کاهش قابل ملاحظه‌ای در مقدار تنش

محوری شده است، همچنین اثر ثابت ناهمگنی در نواحی دور از دو سر استوانه بر روی تنش محوری

به طور مشهودی دیده می‌شود.



شکل ۴-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع تنش برشی نشان می‌دهد. تنش برشی در نواحی دور از دو سر استوانه، مخصوصاً سر گیردار آن، مستقل از ثابت ناهمگنی است و مقداری ناچیز در حدود صفر دارد.

### جمع‌بندی

جهت بررسی کمی نتایج گزارش شده در این بخش نتایج از دو روش تحلیلی و اجزای محدود به صورت جدول ارائه می‌گردند.

### میدان حرارتی

شرایط مرزی نوع دوم مورد مطالعه نیز فاقد عامل ایجاد تغییرت دمایی در جسم می‌باشد، بنابراین با توجه به این امر که بارگذاری حرارتی نیز در استوانه وجود ندارد، تغییرات دمایی در استوانه وجود ندارد و دما برابر دمای ثابت مثبت مرجع است (  $\Theta^* = 295^\circ K$  ).

### میدان الکتریکی

جدول ۴-۲۳ نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی را با استفاده از روش اجزای محدود و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. عمده دلیل اختلاف موجود در نتایج، ناسازگاری فرض خطی بودن روش تحلیلی برای تغییرات در راستای ضخامت است



که در فصل تحلیل استوانه‌های ناهمگن دور بودن این فرض از واقعیت حاکم بر مسأله نشان داده شد و مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

جدول ۴-۲۳ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه

$\varphi(V)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۸۷۳۱	۷۹۲۰	۷۱۳۶	۶۴۰۵	۵۷۴۸
	FSDT	۳۶۳۱	۳۲۲۹	۲۸۵۲	۲۵۰۸	۲۲۰۱
$z = 0$	FEM	۴۷۰۱	۴۲۴۰	۳۷۷۹	۳۳۴۲	۲۹۴۷
	FSDT	۲۱۲۹	۱۹۳۰	۱۷۳۴	۱۵۴۸	۱۳۷۷
$z = (h/2)$	FEM	۳۰۴۱	۲۷۳۲	۲۴۱۴	۲۱۰۹	۱۸۳۲
	FSDT	۶۲۷	۶۳۲	۶۱۶	۵۸۸	۵۵۳

### میدان مکانیکی

جدول ۴-۲۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود در استوانه مورد مقایسه قرار می‌دهد. همانند گذشته؛ به دلیل فرض خطی بودن، روش تحلیلی پتانسیل الکتریکی را با اختلاف و با مقدار کمتر پیش‌بینی می‌کند و جابه‌جایی شعاعی را بیشتر تحت تأثیر بارگذاری مکانیکی می‌داند، به همین خاطر جابه‌جایی شعاعی را با اختلاف و با مقدار بیشتر پیش‌بینی می‌کند.

جدول ۴-۲۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه

$U_z (mm)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۰/۰۰۴۹۵	۰/۰۰۴۳۱	۰/۰۰۳۷۶	۰/۰۰۳۲۹	۰/۰۰۲۸۹
	FSDT	۰/۰۰۶۲۴	۰/۰۰۵۴۷	۰/۰۰۴۷۹	۰/۰۰۴۲۰	۰/۰۰۳۷۰
$z = 0$	FEM	۰/۰۰۵۰۸	۰/۰۰۴۴۳	۰/۰۰۳۸۶	۰/۰۰۳۳۸	۰/۰۰۲۹۷
	FSDT	۰/۰۰۵۹۱	۰/۰۰۵۱۸	۰/۰۰۴۵۴	۰/۰۰۳۹۹	۰/۰۰۳۵۲
$z = (h/2)$	FEM	۰/۰۰۵۱۴	۰/۰۰۴۴۹	۰/۰۰۳۹۲	۰/۰۰۳۴۳	۰/۰۰۳۰۱
	FSDT	۰/۰۰۵۵۷	۰/۰۰۴۹۰	۰/۰۰۴۳۰	۰/۰۰۳۷۸	۰/۰۰۳۳۴

در جداول آتی نتایج مربوط به میدان تنش ارائه می‌شوند. به دلیلی که قبلاً نیز ذکر گردید، مشاهده می‌شود؛ نتایج محاسبه شده از دو روش دارای اختلاف مشهودی می‌باشند.

جدول ۴-۲۵ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه

$\sigma_{\theta} (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۱۵/۱۸۰	۱۳/۶۳۰	۱۲/۲۴۵	۱۱/۰۳۷	۱۰/۰۰۸
	FSDT	۱۵/۵۹۰	۱۳/۷۵۶	۱۲/۱۲۰	۱۰/۶۸۹	۹/۴۶۳
$z = 0$	FEM	۶/۶۱۵	۷/۳۱۱	۸/۰۷۵	۸/۹۳۳	۹/۹۳۱
	FSDT	۶/۶۰۷	۷/۳۲۲	۸/۱۰۴	۸/۹۸۲	۹/۹۹۵
$z = (h/2)$	FEM	۳/۰۶۵	۴/۰۶۱	۵/۳۷۷	۷/۱۳۵	۹/۵۱۴
	FSDT	۳/۰۲۸	۴/۰۵۶	۵/۴۲۸	۷/۲۷۶	۹/۷۹۵

جدول ۴-۲۶ نتایج تنش محوری برای بارگذاری مکانیکی در وسط استوانه

$\sigma_x (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۳/۳۵۹	۳/۲۳۸	۳/۱۱۶	۲/۹۹۸	۲/۸۹۰
	FSDT	۲/۶۲۵	۲/۴۳۹	۲/۲۵۰	۲/۰۶۶	۱/۸۹۴
$z = 0$	FEM	-۰/۲۷۲	-۰/۱۶۰	-۰/۰۲۷	۰/۱۲۷	۰/۳۰۵
	FSDT	-۰/۲۰۹	-۰/۱۱۳	-۰/۰۰۰	۰/۱۲۹	۰/۲۷۵
$z = (h/2)$	FEM	-۱/۳۵۷	-۱/۶۴۸	-۱/۹۸۹	-۲/۳۹۲	-۲/۸۷۳
	FSDT	-۱/۰۱۸	-۱/۲۴۰	-۱/۵۰۰	-۱/۸۰۷	-۲/۱۷۸

## ۴-۶ تحلیل الکتروترمو مکانیکی استوانه‌های ناهمگن

با اعمال ثوابت ناهمگنی مواد و خواص لایه‌ی داخل در روابط تحلیلی برای محاسبه ضرایب دستگاه معادلات ساده شده و شبه بردار نیروی الکتروترمو مکانیکی  $\{l^*\}$ ، تحلیل الکتروترمو مکانیکی مواد ناهمگن مشابه مواد همگن می‌باشد؛ بنابراین در روابط (۲-۸۹) تا (۲-۱۴۵) و (۲-۱۵۱) باید ثوابت ناهمگنی به همراه خواص لایه‌ی داخلی استوانه در نظر گرفته شوند و روندی مشابه تحلیل مواد

همگن برای حل در پیش گرفته شود.

#### ۴-۶-۱ مطالعه‌ی عددی

برای مشاهده‌ی بهتر اثر ناهمگنی، همچون مطالعه‌های عددی صورت گرفته در بخش‌های گذشته، بارگذاری، شرایط مرزی و هندسه برابر مطالعه‌ی عددی تحلیل الکتروترمو مکانیکی استوانه‌ی همگن و خواص در لایه‌ی داخلی برابر جدول ۳-۱ در نظر گرفته می‌شود.

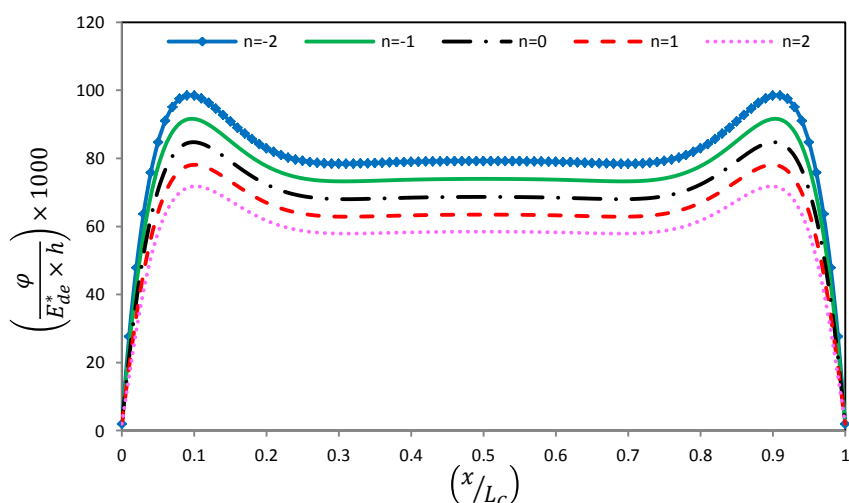
همچون مطالعه‌ی عددی تحلیل‌های گذشته؛ برای بررسی بهتر اثر ناهمگنی، کلیه‌ی ثوابت ناهمگنی برابر  $n$  در نظر گرفته می‌شوند و با توجه به مراجع [۱۵-۳۲] بررسی برای  $n = -2, -1, 0, 1, 2$  انجام می‌شود.

#### ۴-۶-۲ استوانه با شرایط مرزی نوع اول

##### رفتار حرارتی

به دلیل مشابه بودن بارگذاری و شرایط مرزی حرارتی با مطالعه‌ی عددی صورت گرفته در تحلیل حرارتی، رفتار حرارتی استوانه در این بخش همچون گذشته می‌باشد که در بخش تحلیل حرارتی مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

##### رفتار الکتریکی



شکل ۴-۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی

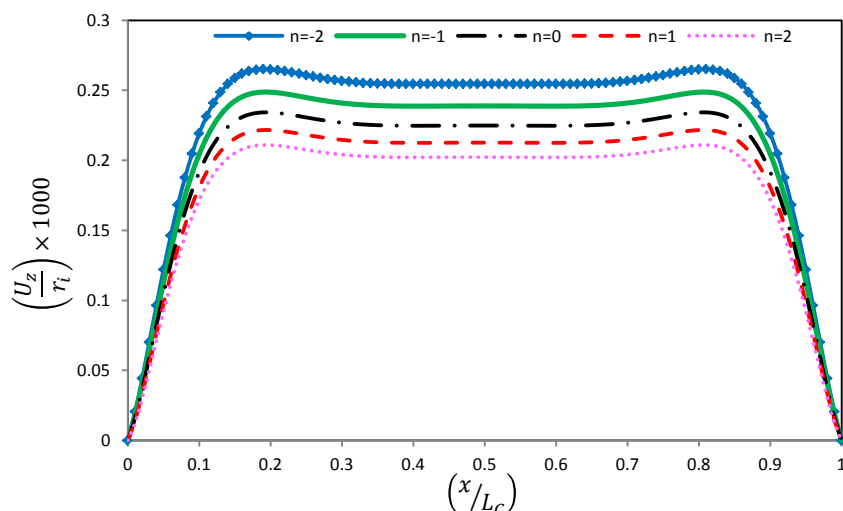
شکل ۴-۴۵ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل مرتبه‌ی اول بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی نشان می‌دهد. اثر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی در نقاط دور از دو سر استوانه مشهود است و با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم کاهش می‌یابد.

### رفتار مکانیکی

اثر ثابت ناهمگنی ابتدا بر روی میدان جابه‌جایی و سپس بر روی تنش مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

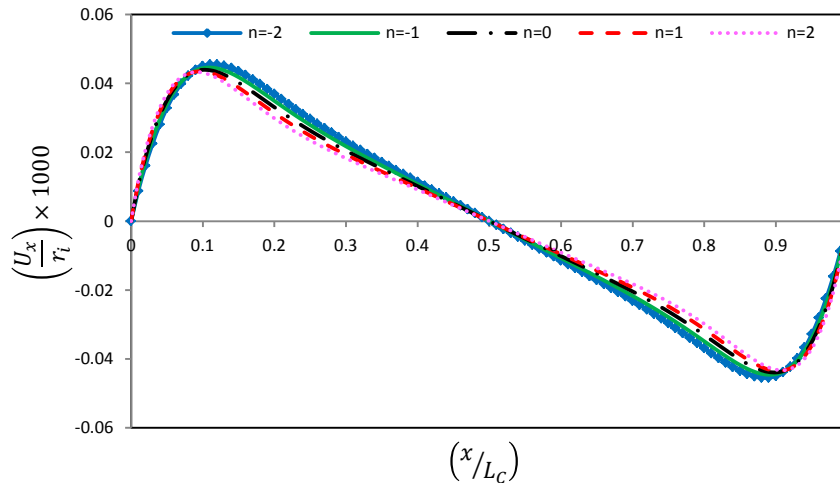
الف) میدان جابه‌جایی

شکل ۴-۴۶ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی نشان می‌دهد. با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع جابه‌جایی شعاعی در جسم کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۴۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۴۷ با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع جابه‌جایی محوری نشان می‌دهد. ثابت ناهمگنی در نقاط دور از دو سر استوانه جابه‌جایی محوری را دست‌خوش اندکی تغییر می‌کند، البته مقدار جابه‌جایی محوری در وسط استوانه مستقل از ثابت ناهمگنی است و مقداری ناچیز در حدود صفر دارد.

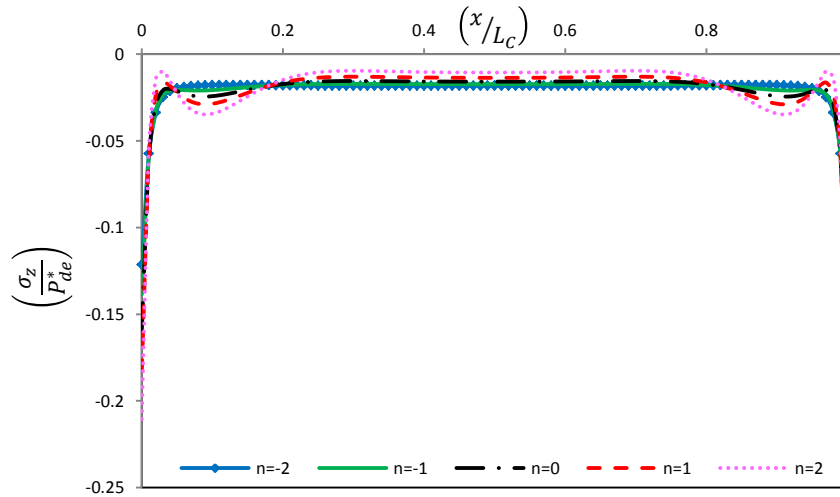


شکل ۴-۴۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی

(ب) میدان تنش

شکل ۴-۴۸ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی تنش شعاعی نشان می‌دهد.

ثابت ناهمگنی در نواحی نزدیک دو سر استوانه اثری مشهود ندارد و با دور شدن از دو سر استوانه رفته‌رفته اثر ثابت ناهمگنی نمایان می‌شود.

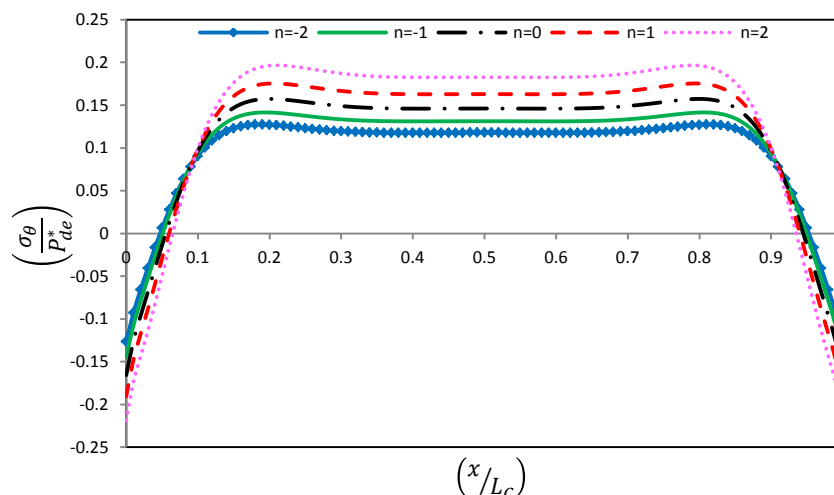


شکل ۴-۴۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۴۹ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

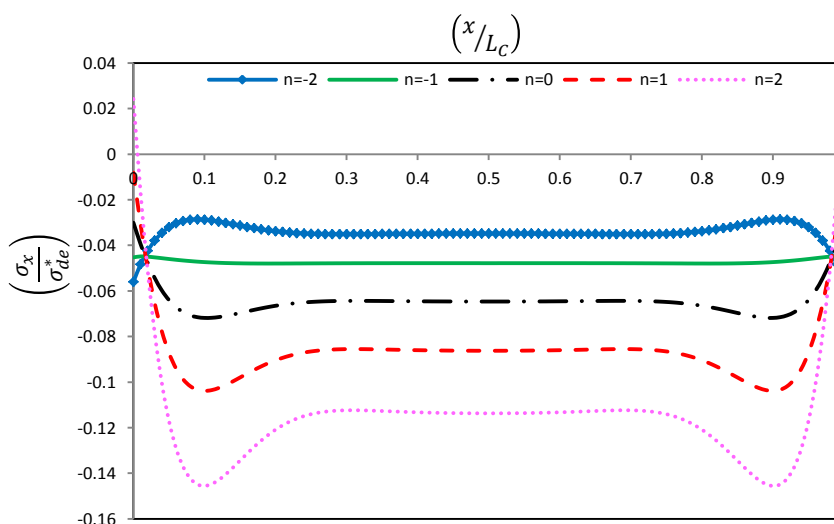
توزیع تنش محیطی نشان می‌دهد. در نقاط دور از دو سر استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی تنش

محیطی افزایش می‌یابد.



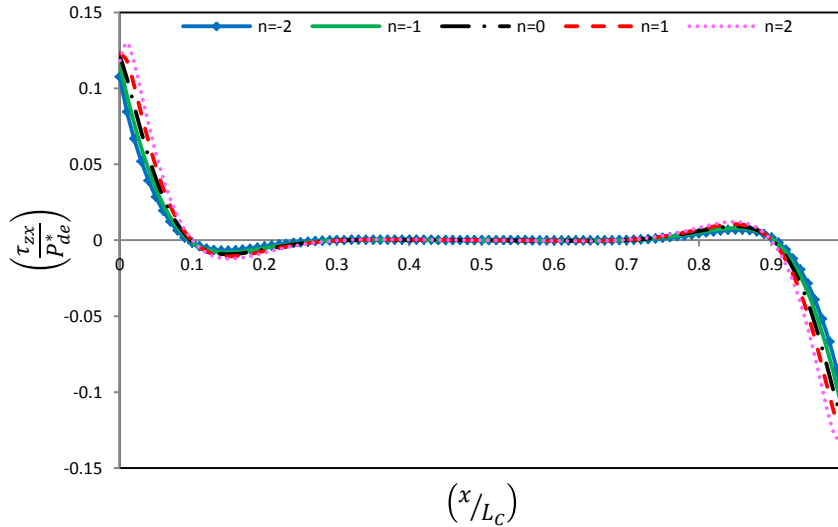
شکل ۴-۴۹ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۵۰ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی توزیع تنش محوری نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ ثابت ناهمگنی رفتار تنش محوری را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد و در نزدیکی دو سر استوانه با تغییر ثابت ناهمگنی، توزیع جابه‌جایی محوری رفتاری صعودی یا نزولی پیدا می‌کند.



شکل ۴-۵۰ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۵۱ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از روش تحلیلی بر روی توزیع تنش برشی نشان می‌دهد. ثابت ناهمگنی در نقاط دور از دو سر استوانه تأثیری بر توزیع تنش برشی ندارد، در این نواحی تنش برشی مقداری ناچیز، در حدود صفر دارد.



شکل ۴-۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی

### جمع‌بندی

برای بررسی بهتر و مقایسه‌ی کمی، گزارشی از نتایج به صورت جداول ارائه می‌گردد.

### میدان حرارتی

با توجه به آنچه که در بخش رفتار حرارتی بیان شد؛ نتایج این بخش برابر جدول ۴-۱ می‌باشد

که قبلاً در جای خود مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

### میدان الکتریکی

جدول ۴-۲۷ نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش نظریه‌ی تغییر

شکل برشی مرتبه‌ی اول و اجزای محدود مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. به دلیل سازگار نبودن

فرض خطی روش تحلیلی مشاهده می‌گردد؛ مقادیر پیش‌بینی شده توسط دو روش دارای اختلاف

مشهودی می‌باشد.

جدول ۴-۲۷ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه

$\varphi (V)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -\left(\frac{h}{2}\right)$	FEM	۱۰۳۸۱	۱۰۱۵۸	۱۰۲۷۷	۱۱۰۵۴	۱۲۹۵۸
	FSDT	۳۹۹۷	۳۵۹۹	۳۲۱۰	۲۸۴۰	۲۴۹۳
$z = 0$	FEM	۷۸۰۶	۸۱۱۱	۸۴۳۷	۸۸۹۸	۹۶۶۱
	FSDT	۳۹۶۱	۳۶۹۸	۳۴۳۴	۳۱۷۳	۲۹۲۳
$z = \left(\frac{h}{2}\right)$	FEM	۶۵۷۱	۷۳۱۴	۸۶۲۸	۱۰۵۹۳	۱۳۳۸۲
	FSDT	۳۹۲۴	۳۷۹۸	۳۶۵۷	۳۵۰۷	۳۳۵۲

### میدان مکانیکی

جدول ۴-۲۸ نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از روش تحلیلی و روش اجزای محدود مورد مقایسه قرار می‌دهد. به دلیل نامناسب بودن فرض تغییرات خطی در روش تحلیلی، روش تحلیلی پتانسیل الکتریکی را با اختلاف و مقداری اندک پیش‌بینی می‌کند، همین امر سبب می‌گردد؛ روش تحلیلی اثر پیزوالکتریک حاکم بر مجموعه را کمتر ببیند و جابه‌جایی شعاعی را بیشتر تحت تأثیر بارگذاری ترمومکانیکی پیش‌بینی کند. به همین دلیل نتایج به دست آمده از روش تحلیلی دارای اختلاف است و با مقدار بیشتری نسبت به نتایج اجزای محدود پیش‌بینی شده است.

جدول ۴-۲۸ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه

$U_z (mm)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -\left(\frac{h}{2}\right)$	FEM	۰/۰۰۷۳۴	۰/۰۰۷۳۴	۰/۰۰۷۷۰	۰/۰۰۸۵۸	۰/۰۱۰۱۸
	FSDT	۰/۰۱۰۰۱	۰/۰۰۹۲۸	۰/۰۰۸۶۴	۰/۰۰۸۰۹	۰/۰۰۷۶۱
$z = 0$	FEM	۰/۰۰۷۷۳	۰/۰۰۷۸۲	۰/۰۰۸۲۹	۰/۰۰۹۳۲	۰/۰۱۱۱۳
	FSDT	۰/۰۱۰۱۹	۰/۰۰۹۵۵	۰/۰۰۸۹۹	۰/۰۰۸۵۱	۰/۰۰۸۰۹
$z = \left(\frac{h}{2}\right)$	FEM	۰/۰۰۷۸۴	۰/۰۰۸۱۶	۰/۰۰۸۸۷	۰/۰۱۰۱۸	۰/۰۱۲۳۷
	FSDT	۰/۰۱۰۳۶	۰/۰۰۹۸۲	۰/۰۰۹۳۴	۰/۰۰۸۹۲	۰/۰۰۸۵۷



در ادامه نتایج به دست آمده برای میدان تنش از دو روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و اجزای محدود در جداول مورد مقایسه و بررسی قرار می‌گیرد. همان طور که قبلاً توضیح داده شد؛ فرض خطی بودن تغییرات در روش تحلیلی، تقریبی از رفتار میدان‌های الکتریکی، حرارتی و مکانیکی در راستای ضخامت می‌باشد. در روش تحلیلی هنگام محاسبه‌ی میدان تنش از روابط گرادیان استفاده می‌گردد که این امر تقریب موجود را ضعیف‌تر می‌کند و سبب مشاهده‌ی اختلاف بیشتر در نتایج پیش‌بینی شده می‌گردد.

جدول ۴-۲۹ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه

$\sigma_{\theta} (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۱۱/۵۸۶	۱۱/۵۰۰	۱۳/۱۷۲	۱۷/۴۰۰	۲۵/۳۸۸
	FSDT	۱۶/۴۸۷	۱۴/۶۴۶	۱۳/۰۰۶	۱۱/۵۷۵	۱۰/۳۵۳
$z = 0$	FEM	۷/۲۶۲	۷/۵۶۰	۷/۹۵۰	۹/۱۲۱	۱۲/۷۶۹
	FSDT	۶/۴۸۱	۷/۲۲۰	۸/۰۳۷	۸/۹۶۴	۱۰/۰۴۴
$z = (h/2)$	FEM	۴/۰۳۲	۵/۱۴۳	۴/۷۳۹	-۰/۰۳۲	-۱۵/۸۶۰
	FSDT	۲/۶۳۱	۳/۵۳۶	۴/۷۴۷	۶/۳۷۹	۸/۶۱۰

جدول ۴-۳۰ نتایج تنش محوری برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه

$\sigma_x (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	-۰/۱۲۰	-۰/۳۶۴	۰/۵۶۴	۳/۱۹۳	۸/۳۲۲
	FSDT	۰/۵۲۳	-۰/۱۷۶	-۰/۸۰۳	-۱/۳۵۴	-۱/۸۲۶
$z = 0$	FEM	۰/۷۱۸	-۰/۷۱۴	-۳/۰۱۶	-۶/۲۶۶	-۱۰/۱۸۸
	FSDT	-۱/۹۱۶	-۲/۶۳۰	-۳/۵۵۶	-۴/۷۴۴	-۶/۲۵۴
$z = (h/2)$	FEM	۰/۰۸۱	-۰/۹۶۲	-۵/۱۱۷	-۱۶/۸۱۵	-۴۶/۱۰۱
	FSDT	-۲/۳۵۷	-۳/۵۵۵	-۵/۳۶۷	-۸/۱۰۳	-۱۲/۲۳۲

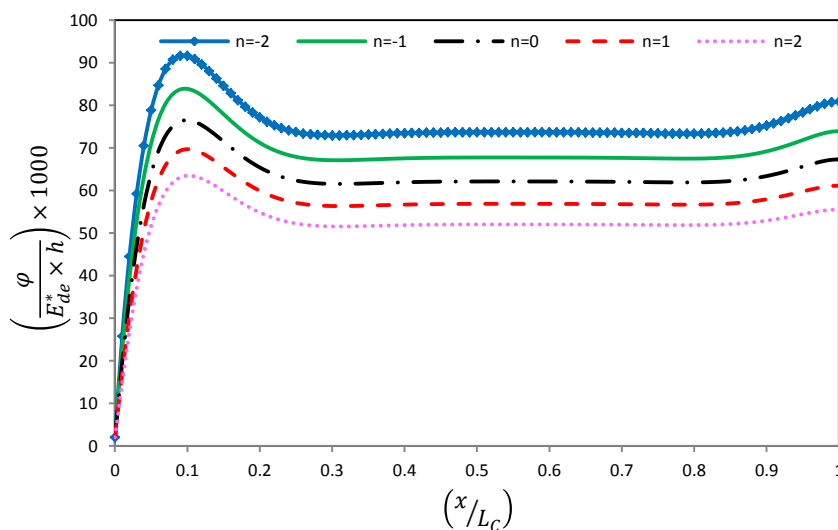
## ۴-۶-۳ استوانه با شرایط مرزی نوع دوم

### رفتار حرارتی

همان طور که قبلاً توضیح داده شد؛ رفتار حرارتی در این حالت، برابر رفتار حرارتی مطالعه‌ی عددی صورت گرفته در تحلیل حرارتی می‌باشد (شکل ۴-۹) که مورد بررسی قرار گرفت.

### رفتار الکتریکی

شکل ۴-۵۲ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی توزیع پتانسیل الکتریکی نشان می‌دهد. اثرات شرایط مرزی نوع دوم و ثابت ناهمگنی بر توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم کاملاً مشهود است. با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع پتانسیل الکتریکی در جسم کاهش می‌یابد.



شکل ۴-۵۲ اثر ثابت ناهمگنی بر روی پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی

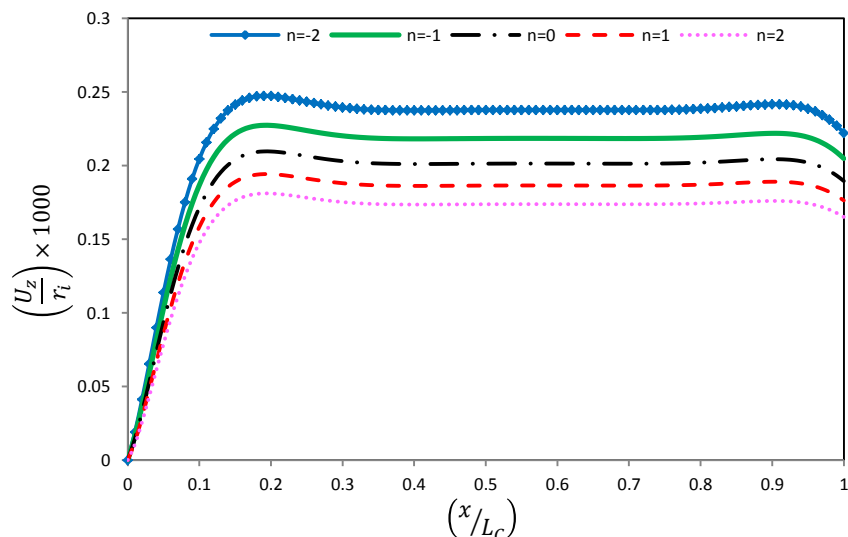
### رفتار مکانیکی

ابتدا مطالعه‌ی اثر ناهمگنی بر روی توزیع میدان جابه‌جایی و سپس بر روی تنش انجام می‌شود.

#### الف) میدان جابه‌جایی

شکل ۴-۵۳ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع جابه‌جایی شعاعی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نشان می‌دهد. در نزدیکی سر گیردار استوانه اثر ثابت ناهمگنی چندان

مشهود نیست، اما در نواحی دور از سر گیردار استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع جابه‌جایی شعاعی کاهش می‌یابد.

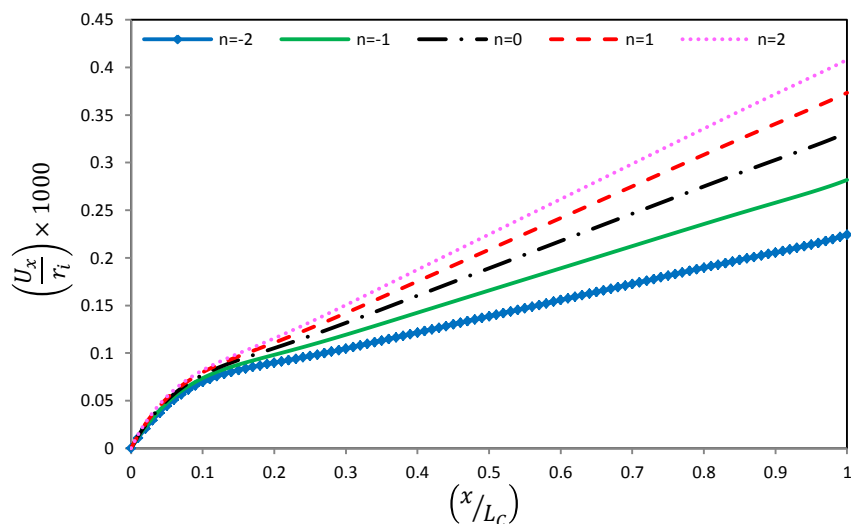


شکل ۴-۵۳ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۵۴ اثر ثابت ناهمگنی را با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بر روی

توزیع جابه‌جایی محوری نشان می‌دهد. در نقاط دور از سر گیردار استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی

جابه‌جایی محوری افزایش می‌یابد.

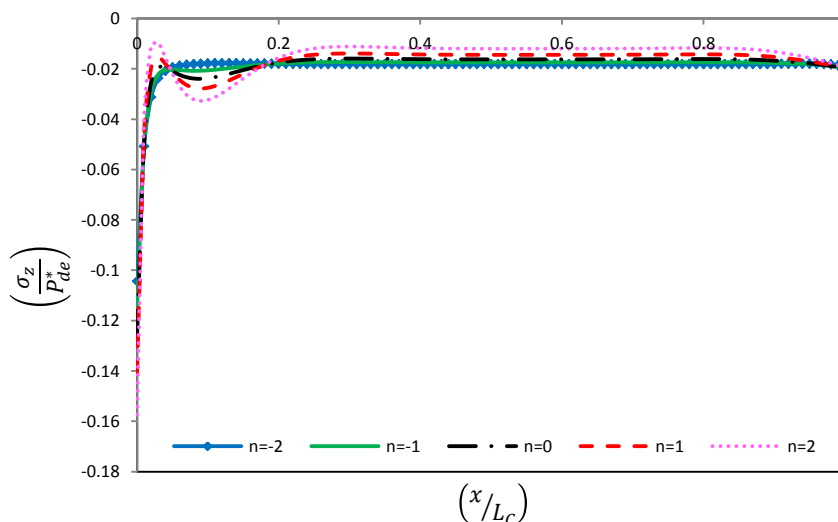


شکل ۴-۵۴ اثر ثابت ناهمگنی بر روی جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی

(ب) میدان تنش

شکل ۴-۵۵ اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش شعاعی با استفاده از روش تحلیلی در جسم

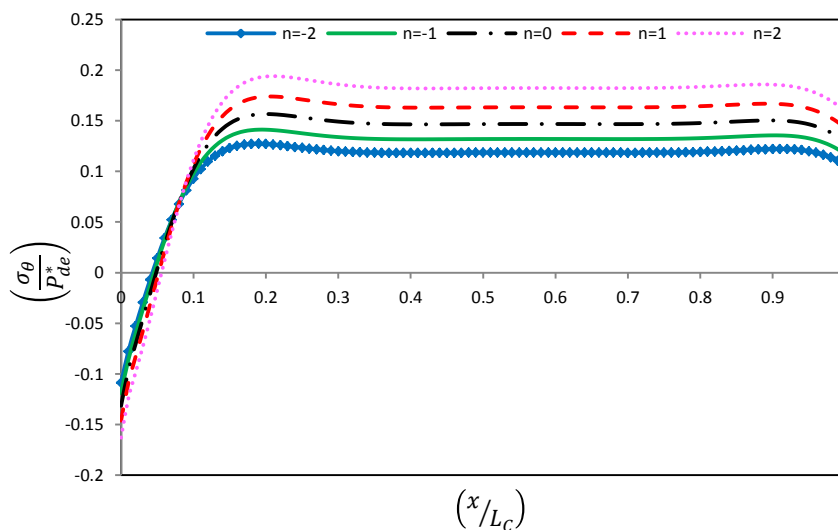
نشان می‌دهد. با افزایش ثابت ناهمگنی در نواحی دور از سر استوانه مقدار تنش شعاعی دچار تغییرات اندکی می‌گردد.



شکل ۴-۵۵ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۵۶ با استفاده از روش تحلیلی اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش محیطی نشان

می‌دهد. در نواحی دور از سر گیردار استوانه ثابت ناهمگنی اثری چشم‌گیر بر توزیع تنش محیطی دارد و با افزایش آن، تنش محیطی افزایش می‌یابد.

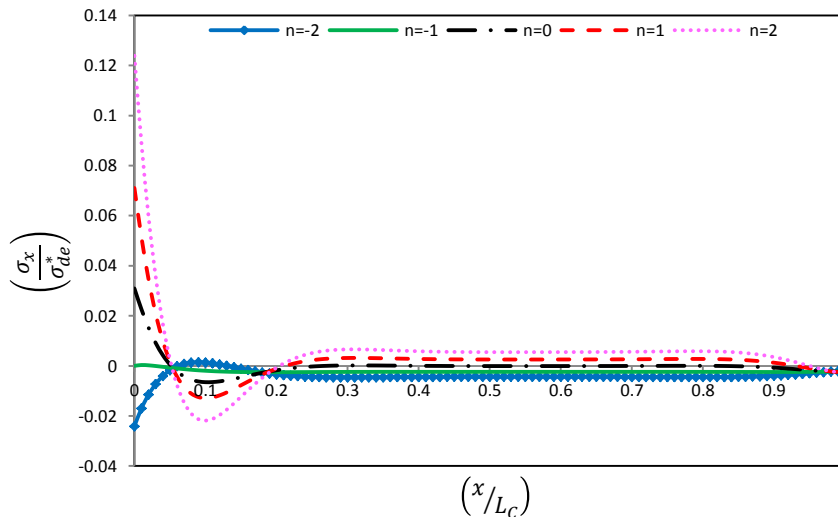


شکل ۴-۵۶ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محیطی در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۵۷ با استفاده از روش تحلیلی اثر ثابت ناهمگنی را بر روی توزیع تنش محوری نشان

می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود. شرایط مرزی نوع دوم باعث می‌گردد؛ در نواحی دور از سر

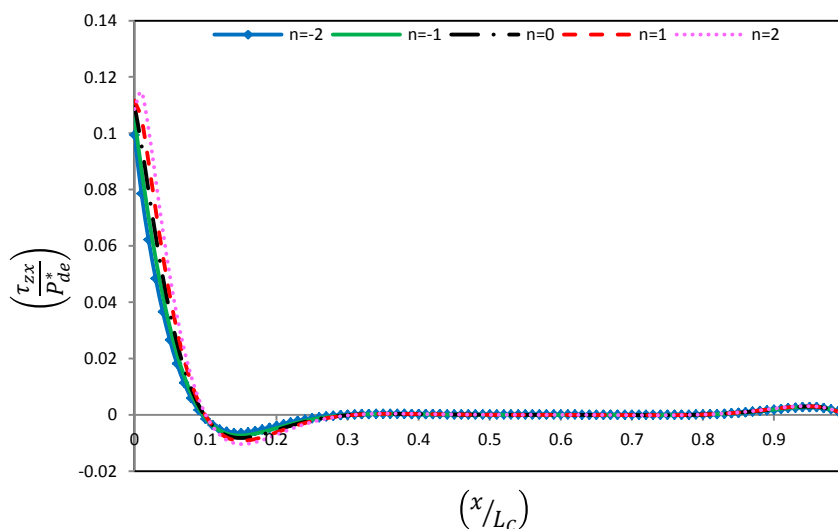
گیردار استوانه توزیع تنش محوری کاهش یابد، همچنین در این نواحی با افزایش ثابت ناهمگنی توزیع تنش محوری اندکی افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۴-۵۷ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش محوری در لایه‌ی میانی

شکل ۴-۵۸ با استفاده از روش تحلیلی اثر ناهمگنی را بر روی توزیع تنش برشی نشان می‌دهد.

همان طور که قبلاً نیز گفته شد؛ تنش برشی در نواحی دور از سر گیردار مستقل از ثابت ناهمگنی است و مقداری اندک در حدود صفر دارد، در نواحی نزدیک سر گیردار استوانه اثر ثابت ناهمگنی اندکی مشهود است.



شکل ۴-۵۸ اثر ثابت ناهمگنی بر روی تنش برشی در لایه‌ی میانی

### جمع بندی

گزارشی به صورت جدول ارائه می‌گردد تا بررسی بهتر و مقایسه‌ی کمی حاصل شود.

### میدان حرارتی

همان طور که توضیح داده شد؛ نتایج این بخش برابر جدول ۴-۶ می‌باشد که در بخش تحلیل حرارتی مورد بحث و گفتگو قرار گرفت.

### میدان الکتریکی

جدول ۴-۲۳ نتایج به دست آمده برای توزیع پتانسیل الکتریکی را با استفاده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهد، به دلیل فرض خطی بودن تغییرات در روش تحلیلی، نتایج به دست آمده از دو روش دارای اختلاف می‌باشند.

جدول ۴-۳۱ نتایج پتانسیل الکتریکی برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه

$\varphi(V)$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	
$z = -(\frac{h}{2})$	FEM	۱۰۴۷۵	۱۰۰۴۰	۹۹۲۰	۱۰۴۲۴	۱۲۰۱۷
	FSDT	۴۰۰۶	۳۶۳۳	۳۲۷۷	۲۹۴۴	۲۶۴۰
$z = 0$	FEM	۸۰۲۱	۷۸۲۳	۷۵۷۰	۷۳۴۴	۷۲۶۹
	FSDT	۳۶۸۱	۳۳۸۶	۳۱۰۵	۲۸۴۲	۲۶۰۰
$z = (\frac{h}{2})$	FEM	۶۹۹۶	۶۷۶۴	۶۹۲۹	۷۴۸۴	۸۴۸۱
	FSDT	۳۳۵۶	۳۱۴۰	۲۹۳۳	۲۷۳۹	۲۵۶۰

### میدان مکانیکی

جدول ۴-۲۴ نتایج جابه‌جایی شعاعی را با استفاده از روش تحلیلی و اجزای محدود مورد بررسی و مقایسه قرار می‌دهد، مطابق آنچه قبلاً نیز ذکر شد؛ فرض خطی روش تحلیلی سبب می‌گردد، روش تحلیلی پتانسیل الکتریکی را با اختلاف و با مقدار کمتری پیش‌بینی کند، همین امر سبب می‌گردد اثر پیزوالکتریک در روش تحلیلی کمتر دیده شود و جابه‌جایی شعاعی بیشتر تحت اثر بارگذاری

ترمو مکانیکی پیش‌بینی گردد.

جدول ۴-۳۲ نتایج جابه‌جایی شعاعی برای بارگذاری الکترو ترمومکانیکی در وسط استوانه

$U_z (mm)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۰/۰۰۷۵۸	۰/۰۰۷۰۵	۰/۰۰۶۷۲	۰/۰۰۶۶۵	۰/۰۰۶۹۴
	FSDT	۰/۰۰۹۳۹	۰/۰۰۸۵۳	۰/۰۰۷۷۸	۰/۰۰۷۱۲	۰/۰۰۶۵۶
$z = 0$	FEM	۰/۰۰۷۹۷	۰/۰۰۷۵۳	۰/۰۰۷۳۳	۰/۰۰۷۴۳	۰/۰۰۷۹۵
	FSDT	۰/۰۰۹۵۱	۰/۰۰۸۷۳	۰/۰۰۸۰۵	۰/۰۰۷۴۵	۰/۰۰۶۹۵
$z = (h/2)$	FEM	۰/۰۰۸۰۶	۰/۰۰۷۸۸	۰/۰۰۷۹۵	۰/۰۰۸۳۷	۰/۰۰۹۳۰
	FSDT	۰/۰۰۹۶۳	۰/۰۰۸۹۳	۰/۰۰۸۳۲	۰/۰۰۷۷۹	۰/۰۰۷۳۳

در ادامه نتایج به دست آمده برای میدان تنش به صورت جداول ارائه می‌گردند. به دلیل استفاده از روابط گرادیان به منظور محاسبه‌ی میدان تنش اختلاف بیشتری در نتایج به دست آمده برای میدان تنش مشاهده می‌گردد.

جدول ۴-۳۳ نتایج تنش محیطی برای بارگذاری الکترو ترمومکانیکی در وسط استوانه

$\sigma_\theta (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	۱۱/۸۳۶	۱۱/۲۴۱	۱۲/۱۵۶	۱۵/۲۴۸	۲۱/۵۱۲
	FSDT	۱۶/۲۷۲	۱۴/۳۶۴	۱۲/۶۵۵	۱۱/۱۵۶	۹/۸۶۸
$z = 0$	FEM	۷/۲۴۳	۷/۶۰۶	۸/۰۳۸	۹/۱۶۲	۱۲/۵۳۱
	FSDT	۶/۵۱۵	۷/۲۵۶	۸/۰۶۷	۸/۹۷۴	۱۰/۰۱۸
$z = (h/2)$	FEM	۳/۹۳۰	۵/۳۲۲	۵/۵۵۸	۲/۱۵۶	-۱۰/۸۳۱
	FSDT	۲/۷۳۳	۳/۷۱۱	۵/۰۲۹	۶/۸۱۸	۹/۲۷۲

جدول ۴-۳۴ نتایج تنش محوری برای بارگذاری الکتروترمو مکانیکی در وسط استوانه

$\sigma_x (MPa)$		$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$z = -(h/2)$	FEM	-۰/۶۱۵	۰/۳۳۹	۲/۷۵۵	۷/۳۲۲	۱۵/۰۷۵
	FSDT	۲/۹۹۵	۲/۷۶۸	۲/۵۳۹	۲/۳۱۸	۲/۱۱۲
$z = 0$	FEM	۰/۲۵۴	۰/۰۲۶	-۰/۰۵۳	-۰/۷۳۵	۴/۱۲۱
	FSDT	-۰/۲۴۱	-۰/۱۳۲	-۰/۰۰۴	۰/۱۴۰	۰/۳۰۱
$z = (h/2)$	FEM	-۰/۳۱۱	-۰/۲۵۰	-۱/۶۶۲	-۷/۰۲۵	-۲۲/۱۶۳
	FSDT	-۱/۱۵۲	-۱/۳۹۵	-۱/۶۷۸	-۲/۰۱۱	-۲/۴۱۲



## فصل ۵

### نتیجه‌گیری و پیشنهادات

---

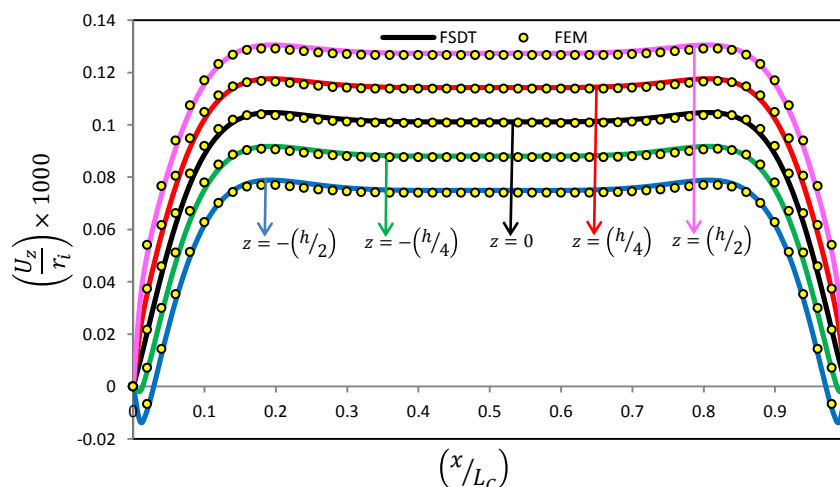
## ۵-۱ پیش‌گفتار

در این فصل به جمع‌بندی نتایج به دست آمده در فصل‌های گذشته پرداخته می‌شود و درصد اختلاف در نتایج، با مبنا قرار دادن نتایج روش اجزای محدود بیان می‌گردد. در انتها با پیشنهادهایی به منظور پژوهش در همین راستا این فصل خاتمه می‌یابد.

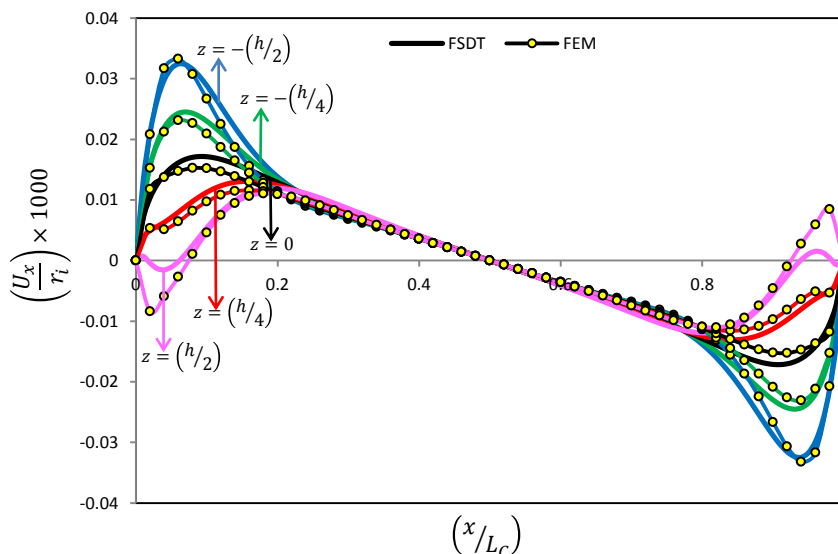
## ۵-۲ جمع‌بندی نتایج تحلیل حرارتی

نتایج به دست آمده برای تحلیل حرارتی نشان می‌دهد؛ فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول منشأ اصلی ایجاد اختلاف در نتایج محاسبه شده از دو روش اجزای محدود و تحلیلی می‌باشد. همان طور که در فصل سوم نیز به این موضوع پرداخته شد؛ این فرض به ویژه برای پتانسیل الکتریکی ناسازگار است.

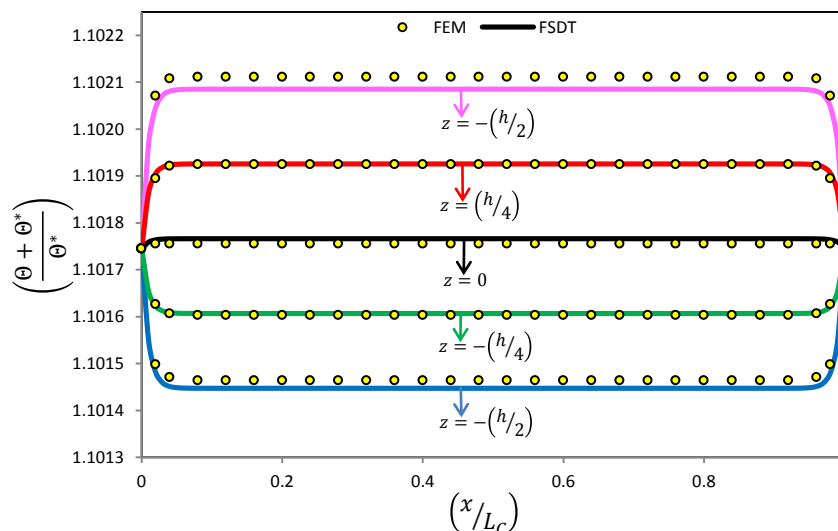
شکل ۵-۱ تا شکل ۵-۳ میدان جابه‌جایی و دمایی را در استوانه همگن بدون در نظر گرفتن اثر ثوابت پیزوالکتریک-تنش برای استوانه‌ی مورد مطالعه در بخش تحلیل حرارتی استوانه‌ی همگن با شرایط مرزی نوع اول نشان می‌دهد؛ انطباق خوبی میان نتایج به دست آمده از دو روش مشاهده می‌گردد. در این حالت نیز در نزدیکی دو سر استوانه برای جابه‌جایی محوری اندکی انحراف مشاهده می‌گردد که می‌تواند ناشی از نامناسب بودن فرض خطی در نواحی نزدیک دو سر استوانه باشد.



شکل ۵-۱ جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی



شکل ۲-۵ جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی



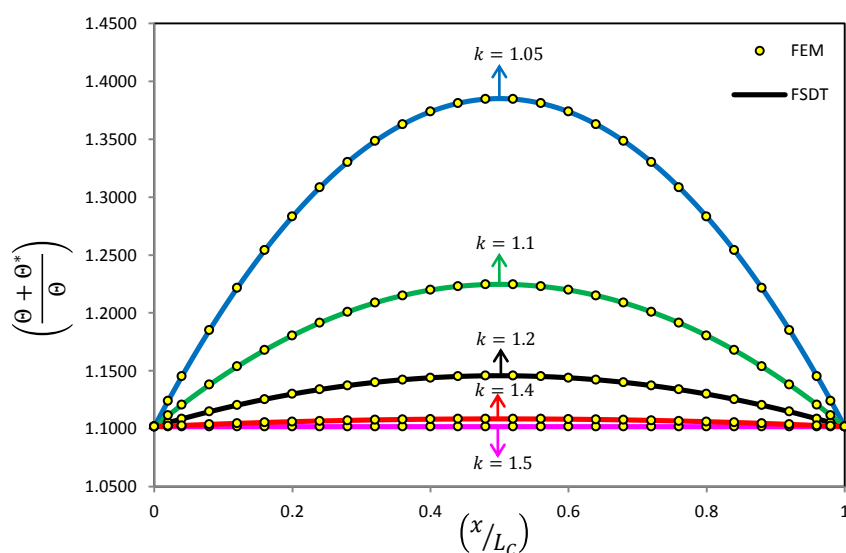
شکل ۳-۵ توزیع دما در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری حرارتی

در فصل سوم بخش تحلیل حرارتی اختلافی حدود ۷۰ درصد در پیش‌بینی نتایج پتانسیل الکتریکی و حدود ۵ درصد در پیش‌بینی نتایج جابه‌جایی مشاهده شد. همان‌طور که ذکر گردید؛ فرض خطی بودن تغییرات برای پتانسیل الکتریکی چندان مناسب نیست و علت اصلی ایجاد اختلاف نیز همین امر است. درحالی‌که این اختلاف در شکل ۱-۵ و شکل ۲-۵ جز در نواحی کوچک نزدیک دو سر استوانه چندان قابل مشاهده نیست.

معادلات میدان دما با معادلات میدان الکتریکی و مکانیکی جفت‌شدگی یک سو به دارند و به طور مجزا می‌توانند حل شوند. نتایج به دست آمده برای میدان دما در فصل‌های گذشته نشان می‌دهند

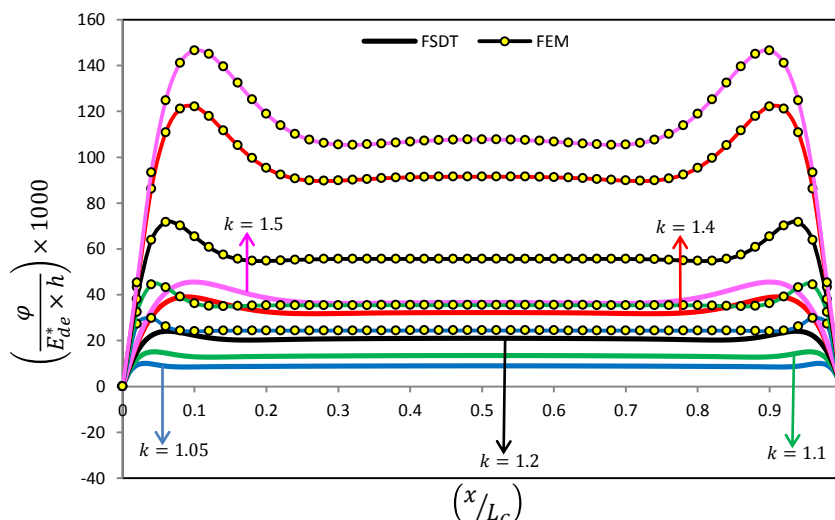
فرض تغییرات خطی فرضی مناسب و سازگار با میدان دما می‌باشد؛ اما این فرض برای پتانسیل الکتریکی مناسب نیست، همچنین زمانی که جابه‌جایی ایجاد شده در جسم بیشتر تحت اثر میدان الکتریکی باشد این فرض اختلاف بیشتری را در نتایج جابه‌جایی، به ویژه جابه‌جایی شعاعی ایجاد می‌کند.

البته دلایل مختلفی را برای اختلاف در نتایج می‌توان نام برد از جمله: نا هم‌مرتبه بودن ضرایب روابط ساختاری، خطای عددی موجود در تحلیل اجزای محدود و غیره که بیش‌ترین سهم مربوط به فرض خطی بودن در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول می‌باشد.

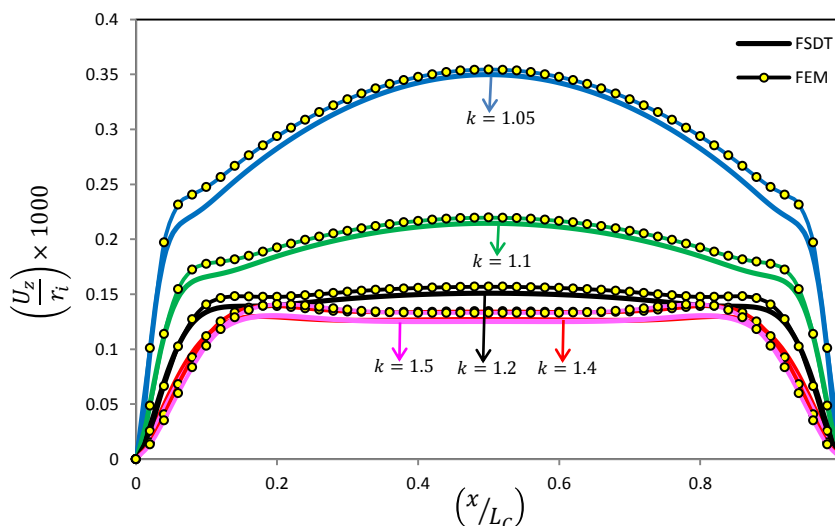


شکل ۴-۵ میدان دما در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت

شکل ۴-۵ اثر ضخامت را در اختلاف نتایج به دست آمده برای میدان دمایی نشان می‌دهد. این نتایج مربوط به استوانه‌هایی با شرایط همانند مطالعه‌ی عددی صورت گرفته در بخش تحلیل حرارتی استوانه‌ی همگن با شرایط مرزی نوع اول می‌باشند که شعاع خارجی آن‌ها متفاوت است. همان‌طور که در فصل اول بیان شد؛  $k$  نسبت شعاعی خارجی به داخلی است که برای بی‌بعد سازی استفاده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد؛ نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای پیش‌بینی میدان دمایی در استوانه‌هایی تا ضخامت  $h = 1.5R$  مناسب می‌باشد و میدان دمایی را به خوبی پیش‌بینی می‌کند.

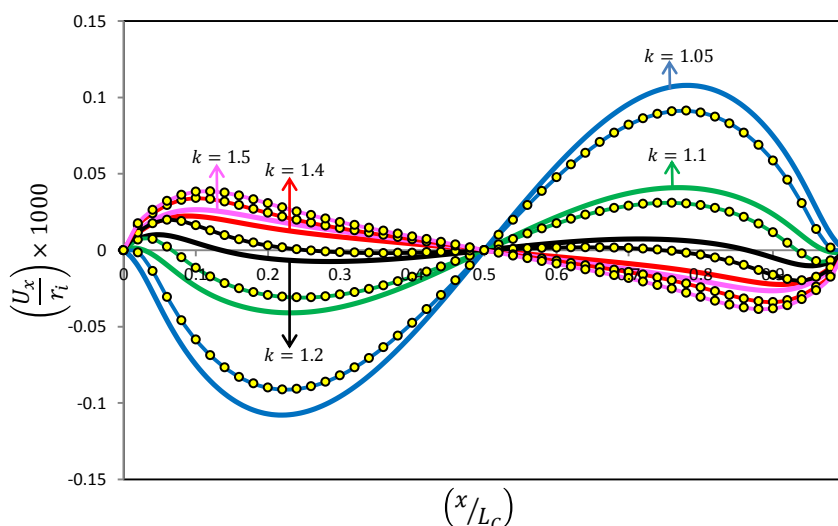


شکل ۵-۵ پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت شکل ۵-۵ اثر ضخامت را در اختلاف نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی نشان می‌دهد. همان طور که ملاحظه می‌گردد؛ تحلیل نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای پیش‌بینی پتانسیل الکتریکی در استوانه‌های ضخیم چندان مناسب نیست. نتایج به دست آمده برای استوانه‌های در مرز جدار ضخیم حدود ۶۵ درصد اختلاف دارد، اگرچه با افزایش ضخامت درصد اختلاف چندان تغییر نمی‌کند و به حدود ۷۰ درصد می‌رسد اما اختلاف بین نتایج بیش‌تر می‌گردد.



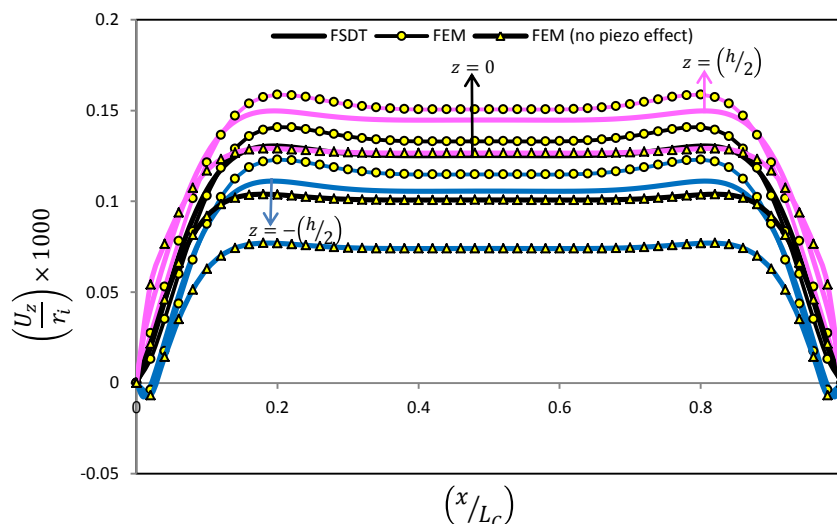
شکل ۵-۶ جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت شکل ۵-۶ اثر ضخامت را در اختلاف نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ میدان جابه‌جایی به دست آمده برای استوانه با ضخامت در مرز جدار ضخیم، در

نواحی نزدیک دو سر استوانه دارای اختلافی در حدود ۵ درصد است، این اختلاف ناشی از غیرخطی بودن توزیع جابه‌جایی شعاعی در نزدیکی دو سر استوانه است. نتایج جابه‌جایی در وسط استوانه‌ها نشان می‌دهند با افزایش ضخامت اختلاف مقادیر پیش‌بینی شده افزایش می‌یابد که برای استوانه با  $h = 1.5R$  اختلاف نتایج در وسط استوانه در حدود ۶ درصد است.

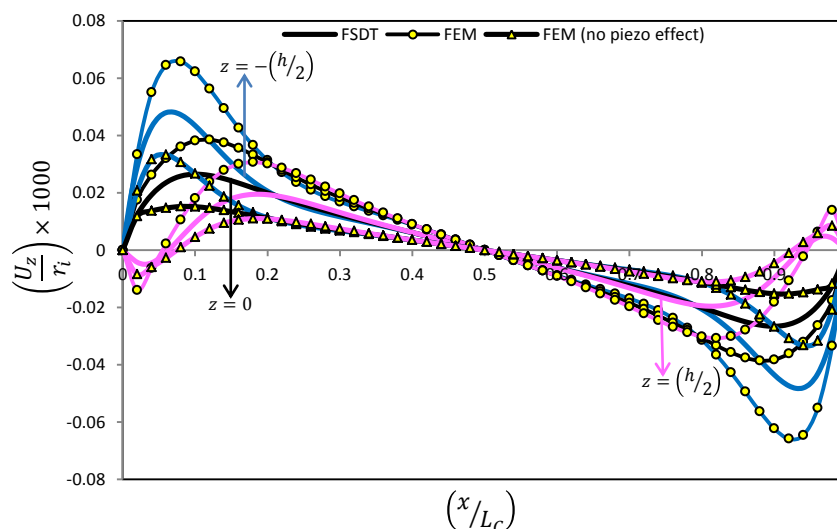


شکل ۵-۷ جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت شکل ۵-۷ اثر ضخامت را در اختلاف نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی محوری نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد؛ برای استوانه با ضخامتی در مرز جدار ضخیم، نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی محوری در نزدیکی دو سر استوانه دارای اختلافی در حدود ۲۰ درصد می‌باشد که بیش‌تر به علت رفتار غیرخطی جابه‌جایی محوری در نزدیکی دو سر استوانه می‌باشد. با افزایش ضخامت رفته‌رفته درصد اختلاف زیاد می‌شود و به مقدار حدوداً ۳۰ درصد برای استوانه‌ای با  $h = 1.5R$  در نزدیکی دو سر آن می‌رسد.

شکل ۵-۸ اثر پیزوالکتریک مشاهده شده در نتایج جابه‌جایی محوری را که با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به دست آمده است، مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند؛ اثر پیزوالکتریک نسبت به بارگذاری حرارتی در روش تحلیلی غالب است و نظریه‌ی تغییر شکل برشی نتایج جابه‌جایی شعاعی را نزدیک به اثر پیزوالکتریک با اختلافی در حدود ۳ درصد پیش‌بینی می‌کند که این اختلاف ناشی از علل مختلف از جمله تقریب خطی می‌باشد.



شکل ۸-۵ بررسی اثر پیزوالکتریک در نتایج جابه‌جایی شعاعی به دست آمده از FSDT



شکل ۹-۵ بررسی اثر پیزوالکتریک در نتایج جابه‌جایی محوری به دست آمده از FSDT

شکل ۹-۵ اثر پیزوالکتریک مشاهده شده در نتایج جابه‌جایی محوری را که با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به دست آمده است، مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. مشاهده می‌گردد اثر بارگذاری حرارتی بر جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول غالب است. جابه‌جایی محوری به ویژه در نزدیکی مرزها نزدیک به اثر بارگذاری حرارتی و بدون در نظر گرفتن اثر پیزوالکتریک به کمک روش تحلیلی پیش‌بینی می‌شود.

### خلاصه‌ی جمع‌بندی

۱- نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای مشاهده‌ی میدان دمایی در استوانه مناسب

است.

۲- فرض خطی بودن نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای پتانسیل الکتریکی منشأ اصلی اختلاف است.

۳- بدون در نظر گرفتن اثر پیزوالکتریک برای تحلیل حرارتی نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول ابزاری سودمند است.

۴- نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میدان جابه‌جایی را با اختلافی حدود ۲۰ الی ۳۰ درصد، میدان الکتریکی را با اختلافی حدود ۶۰ الی ۷۰ درصد و میدان دمایی را با اختلافی کمتر از ۱ درصد پیش‌بینی می‌کند، بنابراین در طراحی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول باید ضریب اطمینان به‌کاررفته برای پتانسیل الکتریکی اندکی با احتیاط اعمال گردد.

۵- نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نتایج جابه‌جایی شعاعی را بیشتر نزدیک نتایج اثر پیزوالکتریک و نتایج جابه‌جایی محوری را بیشتر نزدیک نتایج اثر بارگذاری حرارتی پیش‌بینی می‌کند.

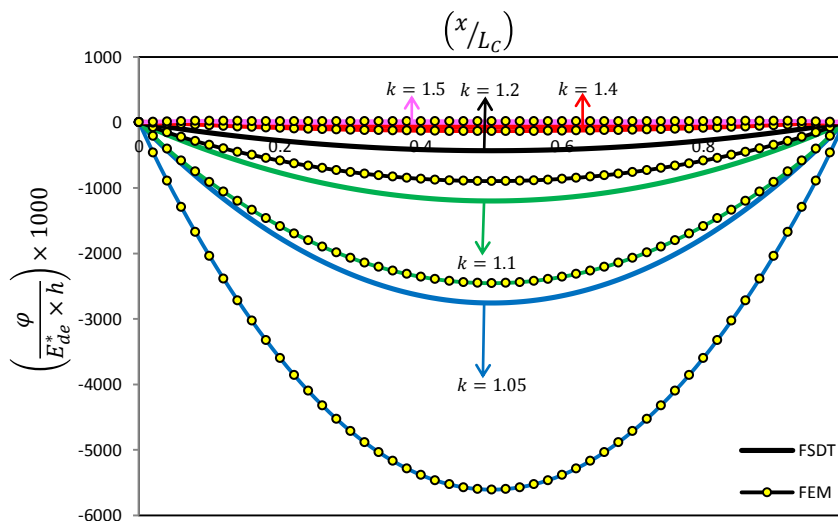
### ۳-۵ جمع‌بندی نتایج تحلیل الکتریکی

بارگذاری الکتریکی بدون در نظر گرفتن اثر پیزوالکتریک در ماده، تأثیری در میدان جابه‌جایی ندارد. از این رو در این بخش تنها به گزارش اثر ضخامت بر روی نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی و جابه‌جایی پرداخته می‌شود. همان‌طور که در فصل‌های گذشته نیز بیان شد؛ معادلات میدان حرارتی جفت‌شدگی یک‌سویه با معادلات مکانیکی و الکتریکی دارند بنابراین نتایج به دست آمده برای میدان حرارتی همان نتایج بیان شده در بخش گذشته می‌باشند.

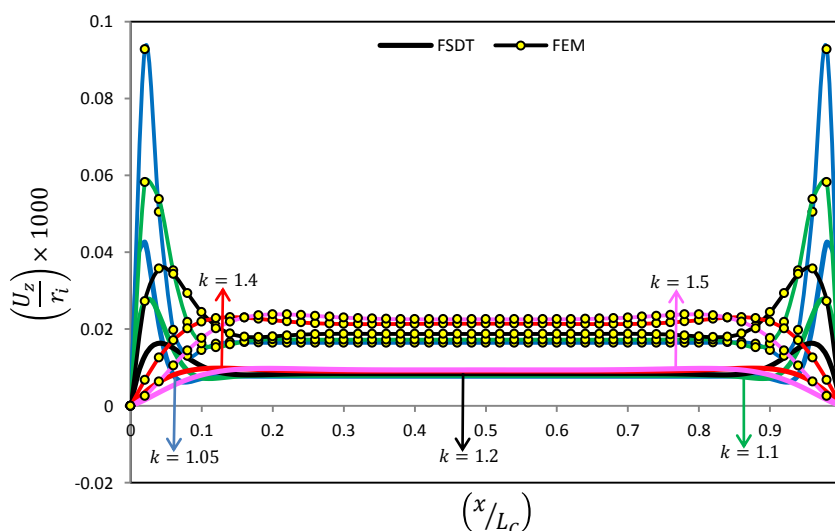
شکل ۵-۱۰ اثر ضخامت را در اختلاف نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی نشان می‌دهد. این نتایج مربوط به استوانه‌هایی با شرایط همانند مطالعه‌ی عددی صورت گرفته در بخش تحلیل الکتریکی استوانه با شرایط مرزی نوع اول است که دارای شعاعی خارجی متفاوت می‌باشند. مشاهده می‌گردد؛ نتایج به دست آمده برای استوانه با ضخامتی در مرز جدار ضخیم حدود ۵۰ درصد اختلاف



دارد، با افزایش ضخامت درصد اختلاف بین روش تحلیلی و عددی افزایش می‌یابد و به حدود ۸۰ درصد برای استوانه‌ای با  $h = 1.5R$  می‌رسد.

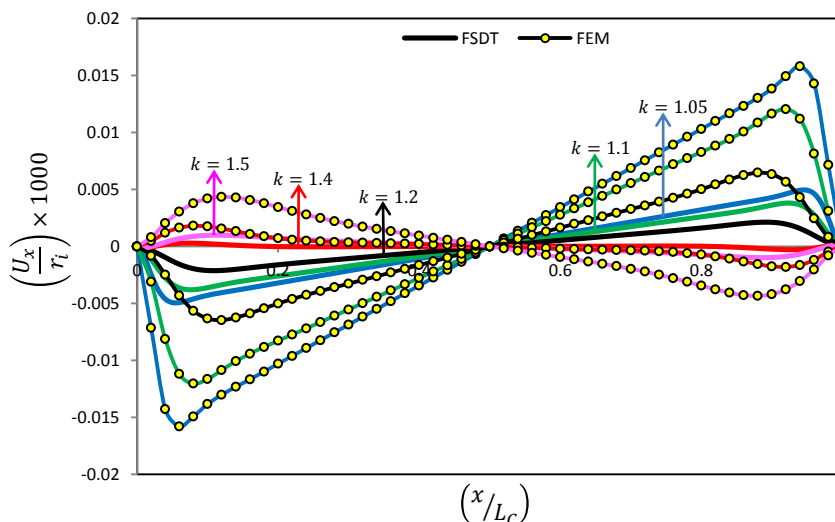


شکل ۵-۱۰ پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت فرض خطی بودن تغییرات در روش تحلیلی برای پتانسیل الکتریکی منشأ اصلی اختلاف می‌باشد که به علت بارگذاری الکتریکی ناسازگاری این فرض نتایج به دست آمده برای میدان جابه‌جایی را تحت تأثیر قرار می‌دهد و دچار اختلاف بیشتری می‌کند.



شکل ۵-۱۱ جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت شکل ۵-۱۱ اثر ضخامت را بر روی نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی نشان می‌دهد. نتایج جابه‌جایی شعاعی برای استوانه با ضخامتی در مرز جدار ضخیم، در حدود ۵۵ درصد اختلاف

دارد که این امر با افزایش ضخامت استوانه افزایش می‌یابد و برای استوانه با  $h = 1.5R$  به ۶۰ درصد می‌رسد.



شکل ۵-۱۲ جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت شکل ۵-۱۲ اثر ضخامت را بر روی نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی محوری نشان می‌دهد. اختلاف میان نتایج در نزدیکی دو سر استوانه‌ها به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسند. برای استوانه با ضخامتی در مرز جدار ضخیم، این اختلاف در حدود ۷۵ درصد می‌باشد که با افزایش ضخامت استوانه رفته‌رفته زیاد می‌گردد و برای استوانه با  $h = 1.5R$ ، به مقدار حدوداً ۸۰ درصد می‌رسد. رفتار جابه‌جایی محوری در نزدیکی دو سر استوانه غیرخطی است که این امر نیز یکی از علل ایجاد اختلاف در نتایج می‌باشد اما فرض خطی بودن تغییرات اختلاف پتانسیل، نقش اصلی در ایجاد اختلاف را دارد.

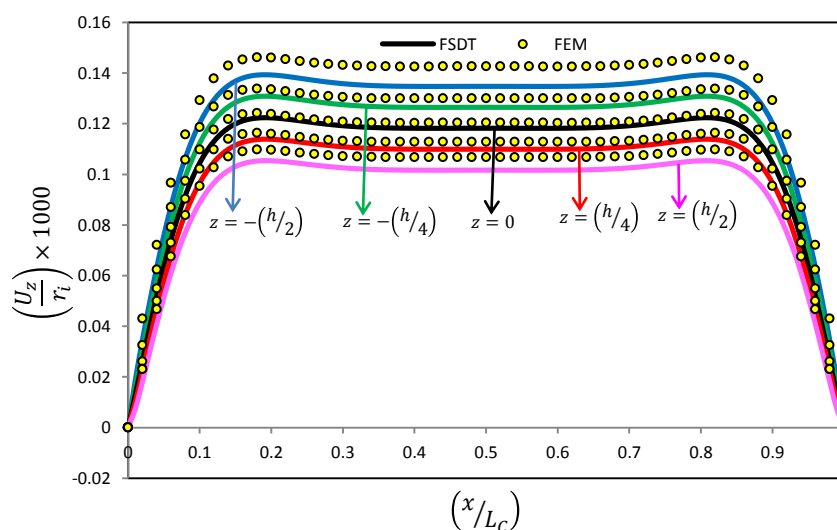
### خلاصه‌ی جمع‌بندی

- ۱- در بارگذاری الکتریکی فرض خطی بودن تغییرات برای پتانسیل الکتریکی نتایج را تحت تأثیر زیادی قرار می‌دهد و اختلاف مشهودی را در نتایج ایجاد می‌کند.
- ۲- نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای پیش‌بینی نتایج حاصل از بارگذاری الکتریکی چندان مناسب نیست و نتایج را با اختلافی بالا در بازه‌ی ۵۰ الی ۸۰ درصد پیش‌بینی می‌کند.
- ۳- استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای طراحی نیازمند کاربرد ضریب اطمینان بالا می‌باشد.

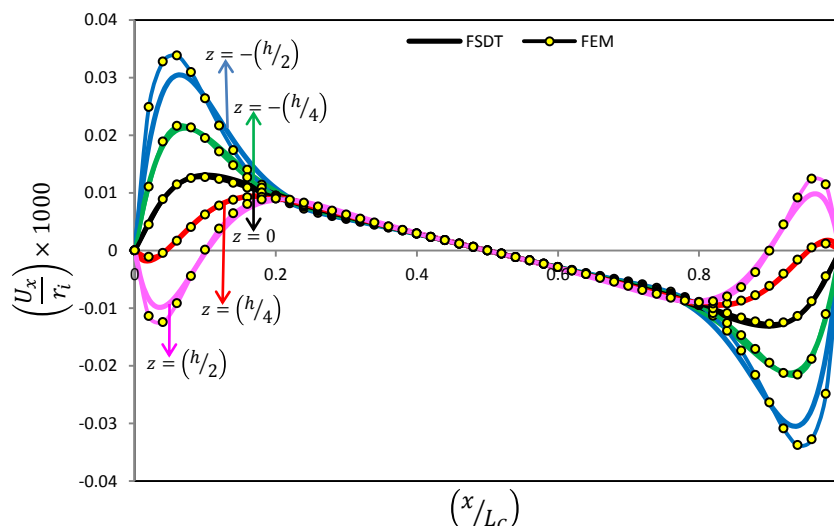
۴- برای تحلیل الکتریکی دقیق، استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول چندان مناسب نیست و پیشنهاد می‌گردد از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا استفاده شود، البته می‌توان نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول را اصلاح نمود و در این نظریه‌ی تغییرات پتانسیل الکتریکی را همانند [۳۰] از مرتبه‌ی بالا در نظر گرفت.

## ۴-۵ جمع‌بندی نتایج تحلیل مکانیکی

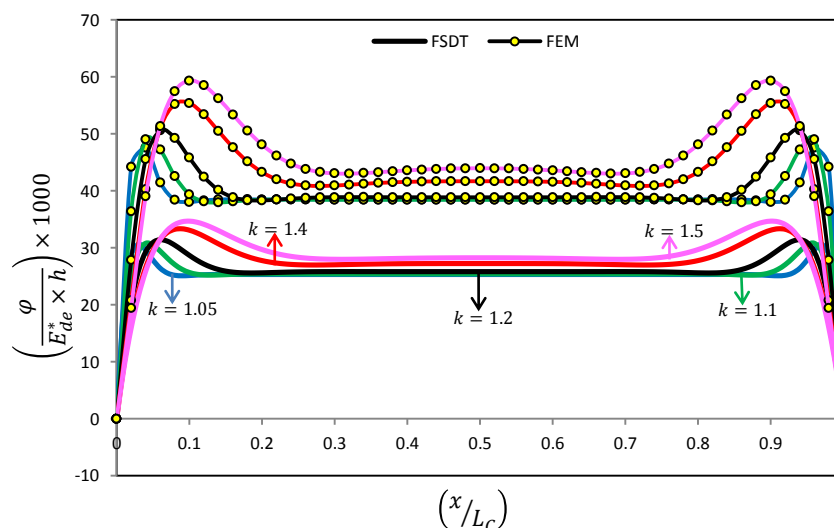
شکل ۵-۱۳ الی شکل ۵-۱۴ نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی و محوری را بدون در نظر گرفتن اثر ثوابت پیزوالکتریک-تنش برای استوانه‌ی مورد مطالعه در بخش تحلیل مکانیکی استوانه‌ی همگن با شرایط مرزی نوع اول نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌گردد؛ نتایج به دست آمده دارای انطباق خوبی می‌باشند. بیش‌ترین اختلاف برای جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی خارجی حدود ۵ درصد و برای جابه‌جایی محوری در نزدیکی دو سر استوانه حدود ۱۰ درصد است.



شکل ۵-۱۳ جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری مکانیکی

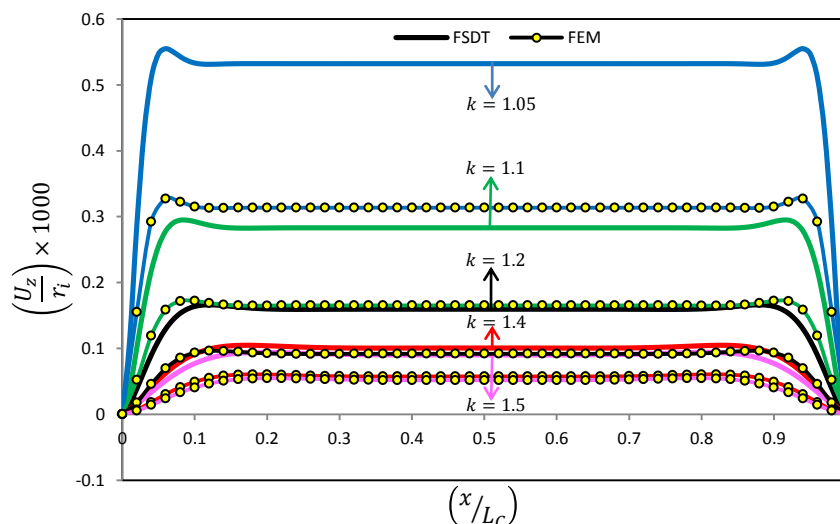


شکل ۱۴-۵ جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری مکانیکی اختلاف اندکی در نتایج شکل ۱۳-۵ و شکل ۱۴-۵ می‌تواند ناشی از ناسازگار بودن فرض خطی در نزدیکی سر استوانه باشد، البته اگر استوانه مورد مطالعه همسانگرد باشد اختلاف موجود در نتایج کمتر نیز می‌گردد [۲۶ و ۳۲]. همان‌طور ملاحظه می‌گردد؛ فرض خطی بودن تغییرات برای میدان جابه‌جایی و حرارتی فرض مناسب و نسبتاً سازگار می‌باشد، درحالی‌که این فرض برای تغییرات پتانسیل الکتریکی نامناسب است و علت اصلی ایجاد اختلاف در نتایج می‌باشد.

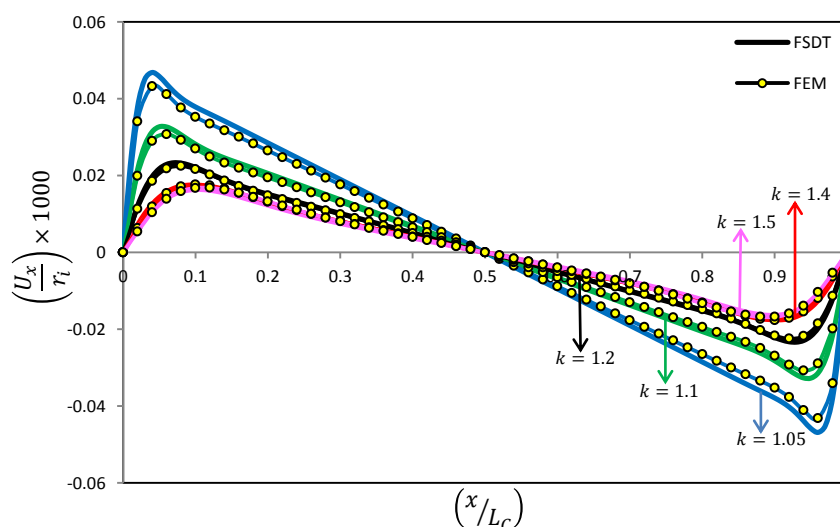


شکل ۱۵-۵ پتانسیل الکتریکی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت شکل ۱۵-۵ اثر ضخامت را در نتایج به دست آمده برای پتانسیل الکتریکی نشان می‌دهد. این نتایج مربوط به استوانه‌هایی می‌باشند که شرایط آن‌ها همانند مطالعه‌ی عددی صورت گرفته در بخش

تحلیل مکانیکی استوانه‌ی همگن با شرایط مرزی نوع اول است. این استوانه‌ها تنها دارای شعاع خارجی متفاوت می‌باشند. ملاحظه می‌گردد؛ نتایج پتانسیل الکتریکی برای استوانه با ضخامت در مرز جدار ضخیم، حدود ۳۵ درصد اختلاف دارد که با افزایش ضخامت این امر برای استوانه با  $h = 1.5R$ ، به حدود ۴۰ درصد می‌رسد.



شکل ۵-۱۶ جابه‌جایی شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت شکل ۵-۱۶ اثر ضخامت را در نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی شعاعی نشان می‌دهد. نتایج جابه‌جایی شعاعی برای استوانه با ضخامت در مرز جدار ضخیم، اختلافی در حدود ۷۰ درصد دارد که با افزایش ضخامت این اختلاف برای استوانه با  $h = 1.5R$ ، به حدود ۷۵ درصد می‌رسد.

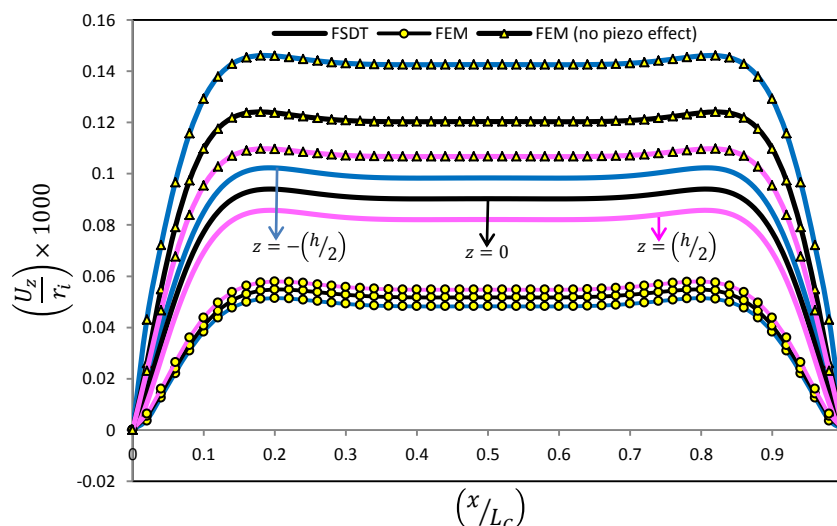


شکل ۵-۱۷ جابه‌جایی محوری در لایه‌ی میانی استوانه‌ها با شعاع خارجی متفاوت

شکل ۵-۱۷ اثر ضخامت را بر روی نتایج به دست آمده برای جابه‌جایی محوری نشان می‌دهد. نتایج جابه‌جایی محوری برای استوانه با ضخامتی در مرز جدار ضخیم، دارای اختلاف اندکی در حدود ۵ درصد در دو سر استوانه می‌باشد که با افزایش ضخامت استوانه، این مقدار اندکی افزایش و به حدود ۶ درصد برای استوانه با  $h = 1.5R$  می‌رسد.

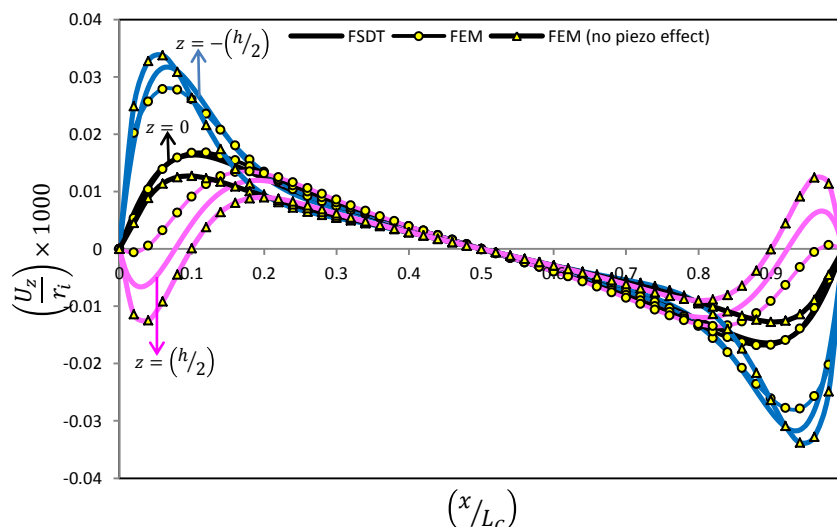
به دلیل پلاریزه بودن استوانه در راستای شعاعی اثر پیزوالکتریک مجموعه بر جابه‌جایی محوری اندک است و جابه‌جایی محوری در استوانه بیشتر متأثر از بارگذاری مکانیکی می‌باشد، بنابراین ناسازگاری موجود در فرض تغییرات خطی برای پتانسیل الکتریکی، نتایج جابه‌جایی محوری را کمتر تحت تأثیر قرار می‌دهد و جابه‌جایی محوری با اختلاف کمتری محاسبه می‌شود.

شکل ۵-۱۸ اثر پیزوالکتریک مشاهده شده در نتایج جابه‌جایی شعاعی را که با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول محاسبه می‌شوند، مورد بررسی قرار می‌دهد. مشاهده می‌گردد؛ در روش نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول اثر بارگذاری مکانیکی بر جابه‌جایی شعاعی غالب می‌باشد و نتایج بیشتر تحت تأثیر بارگذاری مکانیکی محاسبه می‌شوند.



شکل ۵-۱۸ بررسی اثر پیزوالکتریک در نتایج جابه‌جایی شعاعی به دست آمده از FSDT  
 شکل ۵-۱۹ اثر پیزوالکتریک مشاهده شده در جابه‌جایی محوری را که با استفاده از روش تحلیلی محاسبه می‌شود، مورد بررسی قرار می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند؛ در جابه‌جایی محوری اثر پیزوالکتریک در روش تحلیلی غالب است و نتایج با اختلاف کمی از نتایج روش اجزای محدود

پیش‌بینی می‌شود.



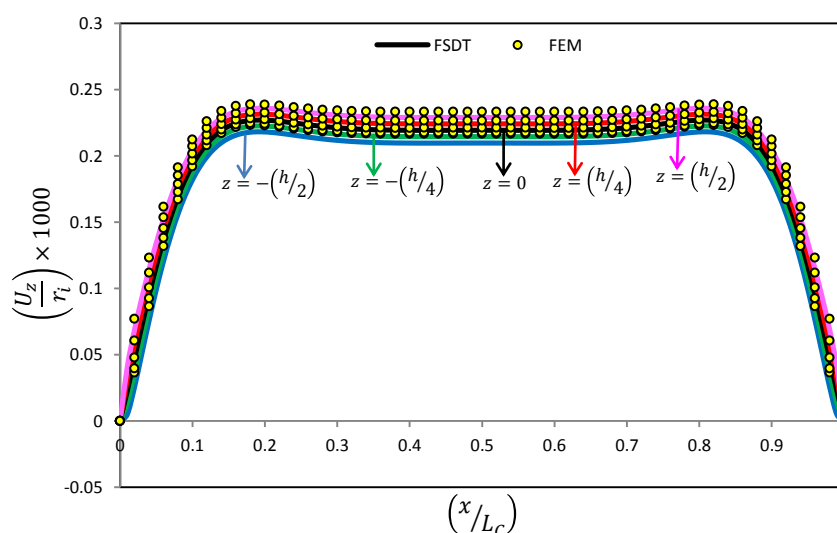
شکل ۵-۱۹ بررسی اثر پیزوالکتریک در نتایج جابه‌جایی محوری به دست آمده از FSDT

### خلاصه‌ی جمع‌بندی

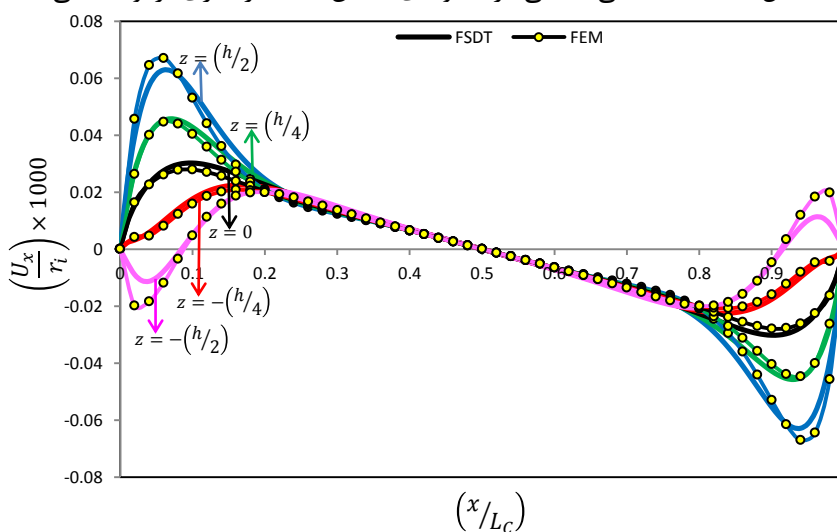
- ۱- نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل مکانیکی استوانه بدون در نظر گرفتن اثر پیزوالکتریک مناسب می‌باشد.
- ۲- فرض خطی بودن تغییرات در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای پتانسیل الکتریکی مناسب نیست و منشأ اصلی ایجاد اختلاف در نتایج می‌باشد.
- ۳- نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، پتانسیل الکتریکی را با اختلافی در حدود ۳۵ الی ۴۰ درصد، جابه‌جایی شعاعی را با اختلاف ۷۰ الی ۷۵ درصد و جابه‌جایی محوری را با اختلافی اندک در حدود ۵ درصد پیش‌بینی می‌کند.
- ۴- میدان جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بیشتر تحت اثر بارگذاری مکانیکی پیش‌بینی می‌گردد و اثر پیزوالکتریک مجموعه کمتر مشاهده می‌شود.
- ۵- برای تحلیل‌های دقیق باید فرض خطی بودن تغییرات برای پتانسیل الکتریکی اصلاح و با فرض‌های مرتبه بالا جایگزین شود.

## ۵-۵ جمع‌بندی نتایج تحلیل الکتروترمو مکانیکی

شکل ۵-۲۰ و شکل ۵-۲۱ بدون در نظر گرفتن اثر ثوابت پیزوالکتریک-تنش، ثواب دی‌الکتریک و بارگذاری الکتریکی، نتایج به دست آمده از میدان جابه‌جایی را در جسم مورد مقایسه و بررسی قرار می‌دهد. استوانه‌ی مورد مطالعه شرایطی همانند مطالعه‌ی عددی صورت گرفته در بخش تحلیل الکتروترمو مکانیکی استوانه‌ی همگن با شرایط مرزی نوع اول را، دارد. همان طور که ملاحظه می‌گردد؛ نتایج به دست آمده از دو روش برای جابه‌جایی از انطباق خوبی برخوردار می‌باشد و اختلاف مشاهده شده بین نتایج جز در نواحی نزدیک دو سر استوانه چندان مشهود نیست.



شکل ۵-۲۰ جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری ترمومکانیکی



شکل ۵-۲۱ جابه‌جایی محوری در استوانه‌ی همگن تحت بارگذاری ترمومکانیکی



همان طور که در فصل دوم بیان شد؛ دستگاه معادله‌ی حاکم بر استوانه (۲-۷۹)، دستگاه معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت می‌باشد، بنابراین اصل جمع آثار در مسأله برقرار است. نتایج به دست آمده در این بخش مجموع نتایج به دست آمده در تحلیل‌های گذشته می‌باشد و دارای نتیجه‌گیری ویژه‌ای نیست.

### خلاصه‌ی جمع‌بندی

- ۱- نتایج به دست آمده با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل ترموالاستیک مناسب می‌باشد.
- ۲- با توجه به برقرار بودن اصل جمع آثار، نتایج به دست آمده برای تحلیل الکتروترمو مکانیکی برابر مجموع نتایج تحلیل حرارتی، الکتریکی و مکانیکی می‌باشد.

## ۵-۶ جمع‌بندی کلی

پر واضح است نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول زمانی پیش‌بینی مناسبی از رفتار مسأله نشان می‌دهد که تغییرات موجود در راستای ضخامت خطی باشد با دور شدن مسأله از این وضعیت از مطلوبیت نتایج پیش‌بینی شده توسط این نظریه کاسته می‌شود. علل بسیاری از جمله اثر شرایط مرزی، اثر پیزوالکتریک و ... را می‌توان نام برد که منجر به رفتار غیرخطی در استوانه می‌گردد. همان طور که در پژوهش حاضر مشاهده گردید؛ اثر پیزوالکتریک سبب ایجاد رفتار غیرخطی برای پتانسیل الکتریکی می‌گردد. نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با فرض خطی چندان قادر به مشاهده‌ی اثر پیزوالکتریک در مجموعه نیست و اگر بارگذاری مکانیکی یا حرارتی در مجموعه غالب باشد نتایج را بیشتر تحت تأثیر آن‌ها پیش‌بینی می‌کند، برای رفع این مشکل توصیه می‌گردد؛ فرض تغییرات خطی پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت را به صورت غیرخطی و از مرتبه‌ی بالا در نظر گرفت [۳۰]. البته نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در پیش‌بینی رفتار استوانه بدون در نظر گیری اثر پیزوالکتریک ابزاری قدرتمند است و میدان جابه‌جایی و دمایی را به خوبی مشاهده می‌کند،

با ایجاد اثر پیزوالکتریک میدان دمایی به خوبی پیش‌بینی می‌شود اما میدان جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی چندان مناسب پیش‌بینی نمی‌شود.

در فصل چهارم به این نکته نیز پرداخته شد که پیش‌بینی نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای میدان تنش، الکتریکی و حرارتی به دلیل استفاده از روابط گرادین چندان مناسب نیست و با اختلاف بیشتری نتایج را پیش‌بینی می‌کند. از این رو برای پیش‌بینی مناسب میدان تنش، الکتریکی و حرارتی باید نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا را استفاده کرد.

## ۷-۵ پیشنهادها

با توجه به مطالعات انجام شده در این زمینه پیشنهادهای مختلفی را می‌توان ارائه نمود که برخی از این پیشنهادها به قرار زیر است.

۱- تحلیل مگنتوالکترترمو مکانیکی استوانه‌های ناهمگن با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول؛

۲- تحلیل الکترترمو مکانیکی استوانه‌های FGPM با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا و مقایسه‌ی نتایج آن با پژوهش حاضر؛

۳- تحلیل الکترترمو مکانیکی استوانه‌های جدار ضخیم FGPM با در نظر گیری وابستگی خواص به میدان دمایی در جسم؛

۴- تحلیل سه بعدی حرارتی گذرا در استوانه‌های جدار ضخیم نامتقارن محوری؛

۵- تحلیل الکترترمو مکانیکی استوانه‌های جدار ضخیم FGPM نامتقارن محوری با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول؛

۶- تحلیل کمانشی و یا ارتعاشاتی استوانه‌های جدار ضخیم FGPM.

پیشنهادهای ارائه شده تنها بخش کوچکی از میان موارد بسیار است، چرا که تغییر در تحلیل، بارگذاری، هندسه، جنس و شرایط مرزی هر کدام سبب ایجاد موضوعات جدید برای پژوهش می‌گردد.

## مراجع

- [1] Ventsel E., Krauthammer T.; *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [2] Ugural A.C.; *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1981.
- [3] Ugural A.C., Fenster S.K.; *Advanced Strength and Applied Elasticity*, 4<sup>th</sup> ed., Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [4] Mirsky I., Hermann G.; *Axially motions of thick cylindrical shells*, J. Appl. Mech., Vol. 25, pp. 97-102, 1958.
- [5] Manbachi A., Cobbold R.S.C.; *Development and Application of Piezoelectric Materials for Ultrasound Generation and Detection*, Ultrasound, 19 (4), pp. 187–196, 2011.
- [6] Gautschi G.; *Piezoelectric Sensorics: Force, Strain, Pressure, Acceleration and Acoustic Emission Sensors, Materials and Amplifiers*, Springer, Berlin, 2002.
- [7] Holler F.J., Skoog D.A., Crouch S.R.; *Principles of Instrumental Analysis*, 6<sup>th</sup> ed., Cengage Learning, 2007.
- [8] Moulson A.J., Herbert J.M.; *Electroceramics: Materials Properties Applications*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, 2003.
- [9] Uchino K.; *Advanced piezoelectric materials: Science and technology*, Woodhead Publishing Limited, Cambridge, 2010.
- [۱۰] قارونی ح.; تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، زمستان ۱۳۹۰.
- [۱۱] رستاقی ع.; تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات توانی مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، تابستان ۱۳۹۱.
- [12] Tzou H.S., Howard R.V.; *a Piezothermoelastic Thin Shell Theory Applied to Active Structures*, Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 116, pp. 295-302, 1994.

- [13] Tzou H.S., Bao Y.; *a Theory on Anisotropic Piezothermoelastic Shell Laminates with Sensor/Actuator Applications*, Journal of Sound and Vibration, 184(3), pp. 453-473, 1995.
- [14] Kapuria S., Dumir P.C., Sengupta S.; *Exact Piezothermoelastic Axisymmetric Solution of a Finite Transversely Isotropic Cylindrical Shell*, Computers & Structures, Vol. 61, No. 6, pp. 1085-1099, 1996.
- [15] Horgan C.O., Chan A.M.; *The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Materials*, journal of elasticity, 55, pp.43-59, 1999.
- [16] Benjeddou A.; *Advances in Piezoelectric Finite Element Modeling of Adaptive Structural Elements: a Survey*, Computers and Structures, 76, pp. 347-363, 2000.
- [17] Xiao-Hong W., Ya-Peng S., Changqing C.; *an Exact Solution for Functionally Graded Piezothermoelastic Cylindrical Shell as Sensors or Actuators*, Materials Letters, 57, pp. 3532-3542, 2003.
- [18] Benjeddou A., Andrianarison O.; *a Thermopiezoelectric Mixed Variational Theorem for Smart Multilayered Composites*, Computers and Structures, 83, pp. 1266-1276, 2005.
- [19] Shao Z.S.; *Mechanical and Thermal Stresses of a Functionally Graded Circular Hollow Cylinder With Finite Length*, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 82, pp. 155-163, 2005.
- [20] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; *Elastic Analysis of Heterogeneous Hollow Cylinders*, Mechanics Research Communications, 33, pp. 681-691, 2006.
- [21] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; *Exact Solutions of Heterogeneous Elastic Hollow Cylinders*, Composite Structures, 79, pp. 140-147, 2007.
- [22] Tutuncu N.; *Stresses in Thick-Walled FGM Cylinders with Exponentially-Varying Properties*, Engineering Structures, 29, pp. 2032-2035, 2007.
- [23] Wu C.P., Tsai Y.H.; *Static Behavior of Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Shells Under Electric Displacement and Magnetic Flux*, International Journal of Engineering Science, 45, pp. 744-769, 2007.
- [24] Li X.F., Peng X.L.; *a Pressurized Functionally Graded Hollow Cylinder with Arbitrarily Varying Material Properties*, J. Elast., pp. 81-95, 2009.

[۲۵] کیهانی م.ح.، شریعتی م.، نوروزی م.؛ *حل تحلیلی انتقال حرارت پایدار هدایتی در استوانه‌ی کامپوزیتی*، مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس-مکانیک، ش. ۳۷، صص. ۱۳۵-۱۵۱، پاییز ۱۳۸۸.

[26] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; *Elastic Analysis of Pressurized Thick Hollow Cylindrical Shells with Clamped-Clamped Ends*, *Mechanika*, 5(85), pp. 11-18, 2010.

[27] Dai H.L., Xiao X., Fu Y.M.; *Analytical Solutions of Stresses in Functionally Graded Piezoelectric Hollow Structures*, *Solid State Communications*, 150, pp. 763-767, 2010.

[28] Li X.F., Peng X.L., Lee K.Y.; *Radially Polarized Functionally Graded Piezoelectric Hollow Cylinders as Sensors and Actuators*, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 29, pp. 704-713, 2010.

[29] Heydarpour Y., Malekzadeh P., Golbahar-Haghighi M.R., Vaghefi M.; *Thermoelastic Analysis of Rotating Laminated Functionally Graded Cylindrical Shells Using Layerwise Differential Quadrature Method*, *Acta Mech*, 223, pp. 81-93, 2012.

[30] Rahimi G.H., Arefi M., Khoshgoftar M.J.; *Electro Elastic Analysis of a Pressurized Thick-Walled Functionally Graded Piezoelectric Cylinder Using The First Order Shear Deformation Theory and Energy Method*, *Mechanika*, 18(3), pp. 292-300, 2012.

[31] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; *Complete Elastic Solution of Pressurized Thick Cylindrical Shells Made of Heterogeneous Functionally Graded Materials*, *Mechanika*, 18(6), pp. 640-649, 2012.

[32] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; *Elastic Analysis of Heterogeneous Thick Cylinders Subjected to Internal or External Pressure Using Shear Deformation Theory*, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 9, No. 6, pp. 117-136, 2012.

[33] Reddy J.N.; *an Introduction to Continuum Mechanics: With Applications*, Cambridge University Press, New York, 2008.

[34] Wang X., Zhong Z.; *the General Solution of Spherically Isotropic Magnetoelastic Media and Its Applications*, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 22, pp. 953-969, 2003.

[35] Reddy J.N.; *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, 2<sup>nd</sup> ed., CRC Press, New York, 2004.

[36] Ansys Co.; *Coupled-Field Analysis Guide*, ANSYS Inc., USA, 2009.

[۳۷] م. پرهیزکار، م. قنّاد؛ تحلیل عددی استوانه‌ی FGM دارای گشودگی از نوع دایروی و مربعی، یازدهمین کنفرانس انجمن هوافضای ایران، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ۳-۱ اسفند، ۱۳۹۰.

[۳۸] م. پرهیزکار، م. قنّاد؛ مطالعه‌ی عددی اثر ثابت ناهمگنی بر روی استوانه‌ی FGM دارای گشودگی از نوع دایروی و مربعی، کنفرانس بین‌المللی مهندسی مکانیک و فناوری‌های پیشرفته، دانشگاه آزاد اسلامی - واحد شهر مجلسی، اصفهان، ۱۹-۲۱ مهر، ۱۳۹۱.

[39] Yang J.; *the Mechanics of Piezoelectric Structures*, World Scientific Publishing, Singapore, 2006.

[40] Akbari Alashti R., Khorsand M.; *Three-Dimensional Dynamo-Thermo-Elastic Analysis of a Functionally Graded Cylindrical Shell with Piezoelectric Layers by DQ-FD Coupled*, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 96-97, pp. 49-67, 2012.

[41] Ye Z.G.; *Handbook of Dielectric, Piezoelectric and Ferroelectric Materials: Synthesis, Properties and Applications*, CRC Press, Boca Raton, 2008.

[42] Moulson A.J., Herbert J.M.; *Electroceramics: Materials Properties Applications*, 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, 2003.