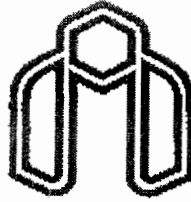


صلى الله عليه وسلم



دانشگاه گیلان
دانشکده مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مکانیک تبدیل انرژی

تحلیل تنش و انتقال حرارت در یک مخزن کامپوزیتی تحت فشار داخلی و گرادیان دما

اساتید راهنما:

جناب آقای دکتر شریعتی

جناب آقای دکتر کیهانی

دانشجو:

ایمان شالچیان تبریزی

بهار ۱۳۸۶

تقدیم به پدرم

مهندس مرتضی شالچیان

این مجموعه بدون مساعدت این عزیزان به ثمر نمی رسید ، جای دارد تا از زحمات بی شمار جناب آقای دکتر محمود شریعتی و جناب آقای دکتر محمود فرهادی نیا از دانشگاه صنعتی مالک اشتر قدردانی نمایم .
همچنین از راهنمایی های دوستان ارجمندم جناب آقای دکتر محمود نوروزی و جناب آقای مهندس امید میرزاده تشکر کنم .
در تمام این مدت خانواده گرامیم و همچنین همسر فداکارم در این مسیر یار و یاور من بوده اند ، بر خود واجب می دانم که نهایت سپاس و امتنان خود را به این عزیزان تقدیم دارم .

چکیده :

بررسی و تحلیل تنش و همچنین انتقال حرارت و توزیع دما در مواد کامپوزیتی به دلیل غیر همگن بودن ساختار آن یکی از موارد پیچیده ای است که همواره مورد توجه محققین در سراسر دنیا می باشد. در این پایان نامه از سه روش کلاسیک، الاستیسیته و نرم افزار ANSYS به نمایندگی از روش المان محدود در تحلیل تنش و کرنش و جابجایی برای سه لایه چینی متداول مختلف و در سه حالت بارگذاری مکانیکی، ترمومکانیکی و حرارتی خالص استفاده شده و در انتهای بخش تحلیل تنش، خواص موثر مخازن کامپوزیتی چهار لایه برای زوایای مختلف نمایش داده شده است.

در بخش انتقال حرارت ابتدا تانسور هدایت در محیط های گوناگون بررسی شده و روش بدست آوردن مقدار اعضای این ماتریس هدایت برای لمینا های کامپوزیتی ارائه می شود.

برای یافتن توزیع دما در لایه های مختلف مخزن کامپوزیتی، معادلات شار حرارتی و انرژی در مواد غیر ایزوتروپیک را به کمک روش عددی تفاضل محدود مورد بررسی و تحلیل قرار داده و نتایجی را که از تغییر در شرایط مرزی همرفت، اضافه نمودن شرط مرزی تشعشع و بررسی مجدد توزیع دما در زمانهای مختلف قبل از رسیدن به پایداری و در شرایط پایداری بدست می آید، ارائه شده است. در آخر مقایسه ای بین تاثیر ضریب هدایت در توزیع دما برای سه وضعیت مختلف آورده شده است.

واژگان کلیدی : مواد مرکب، انتقال حرارت، تحلیل تنش، کرنش و جابجایی

فصل اول ۱

- ۱ - ۱ - ۱ - مقدمه ۱
- فصل دوم ۷
- ۱ - ۲ - مقدمه تحلیل ماکرومکانیکی ۷
- ۲ - ۲ - فرضیات ۷
- ۳ - ۲ - حل تحلیلی مخزن کامپوزیتی ۸
- فصل سوم ۱۱
- ۱ - ۳ - حل الاستیسیته تک لایه ۱۱
- ۱ - ۱ - ۳ - کرنش در مختصات استوانه ای ۱۱
- ۱ - ۳ - ۲ - سازگاری ۱۳
- ۱ - ۳ - ۳ - معادلات تشکیل دهنده ۱۳
- ۱ - ۳ - ۴ - تعادل ۱۵
- ۱ - ۳ - ۵ - جابجایی ۱۶
- ۱ - ۳ - ۶ - شرایط مرزی تنش ۲۰
- ۱ - ۳ - ۷ - جابجایی های نهایی ۲۱
- ۱ - ۳ - ۸ - کرنش ۲۱
- ۱ - ۳ - ۹ - تنش ها ۲۲
- ۱ - ۳ - ۱۰ - شرایط مرزی تنش عمودی ۲۳
- ۱ - ۳ - ۱۱ - نیروی محوری ۲۴
- ۱ - ۳ - ۱۲ - گشتاور ۲۴
- ۱ - ۳ - ۱۳ - بارگذاری ترمومکانیکی ۲۵
- ۱ - ۳ - ۱۴ - بارگذاری حرارتی خالص ۲۵
- ۱ - ۳ - ۱۵ - جهت گیری های خاص الیاف ۲۵
- ۱ - ۳ - ۱۵ - ۱ - لایه های ارتوروپیک ۲۶
- ۱ - ۳ - ۱۵ - ۲ - لایه های ارتوروپیک عرضی ۲۶
- ۲ - ۳ - استوانه لمینیتی ۲۶
- ۱ - ۲ - ۳ - جابجایی لایه ۲۷
- ۲ - ۲ - ۳ - شرایط پیوستگی کشش ۲۷
- ۲ - ۲ - ۳ - شرایط پیوستگی و جابجایی ۲۷
- ۲ - ۳ - ۴ - کاهش جابجایی ها ۲۸
- ۲ - ۳ - ۵ - کرنش های لایه ۲۸
- ۲ - ۳ - ۶ - تنش های لایه ۲۹

۲۹ ۳ - ۲ - ۷ - نیروی محوری
۳۰ ۳ - ۲ - ۸ - گشتاور
۳۰ ۳ - ۲ - ۹ - شرایط مرزی
۳۰ ۳ - ۲ - ۱۰ - پیوستگی مورد استفاده در کشش و جابجایی
۳۱ ۳ - ۲ - ۱۱ - معادلات برای لوله لمینیتی
۳۲ فصل چهارم
۳۲ ۴ - نتایج
۳۳ ۴ - ۱ - انتخاب مخزن
۳۵ ۴ - ۲ - ۱ - تحلیل و مقایسه روش های حل مخزن کامپوزیتی
۳۵ الف - جابجایی های حاصله تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی
۴۰ ب - کرنش های حاصله تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی
۵۰ ج - تنش های حاصله تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی
۵۸ ۴ - ۲ - ۲ - مقایسه نتایج حل به روش الاستیسیته برای حالت های مختلف بارگذاری
۵۸ الف - جابجایی حاصله تحت سه نوع بارگذاری
۶۱ ب - کرنش های حاصله تحت سه نوع بارگذاری
۶۵ ج - تنش های حاصله تحت سه نوع بارگذاری
۶۹ ۴ - ۲ - ۳ - تاثیر لایه چینی در توزیع تنش ، کرنش و جابجایی
۶۹ الف - تاثیر لایه چینی در جابجایی
۷۲ ب - تاثیر لایه چینی در کرنش
۷۶ ج - تاثیر لایه چینی در تنش
۸۰ ۴ - ۳ - ۱ - مدول موثر محوری
۸۱ ۴ - ۳ - ۲ - ضریب پواسون موثر
۸۲ ۴ - ۳ - ۳ - مدول برشی موثر
۸۳ ۴ - ۳ - ۴ - ضریب موثر انبساط گرمایی
۸۵ ۴ - ۴ - ۱ - ضریب مدول موثر محوری کامپوزیت چهارلایه
۸۷ ۴ - ۴ - ۲ - ضریب پواسون موثر کامپوزیت چهارلایه
۸۸ ۴ - ۴ - ۳ - مدول برشی موثر کامپوزیت چهارلایه
۹۰ ۴ - ۴ - ۴ - ضریب موثر انبساط گرمایی کامپوزیت چهارلایه
۹۲ ۴ - ۵ - جمع بندی و نتیجه گیری
۹۴ فصل پنجم
۹۴ ۵ - ۱ - مقدمه انتقال حرارت
۹۷ فصل ششم
۹۷ ۶ - ۱ - هدایت در جامدات ایزوتروپیک و غیر ایزوتروپیک

۹۸	۶ - ۲ - تانسورهای هدایت در محیط های گوناگون
۱۰۰	۶ - ۲ - ۱ - اعضای تانسور هدایت
۱۰۲	۶ - ۲ - ۲ - دوران ماتریس هدایت
۱۰۴	۶ - ۳ - معادلات شار حرارتی در اجسام غیرایزوتروپ
۱۰۵	۶ - ۴ - معادله انرژی در جامدات غیر ایزوتروپیک
۱۰۶	۶ - ۵ - شرایط اولیه و شرایط مرزی
۱۰۶	۶ - ۵ - ۱ - شرایط مرزی (حجم)
۱۰۷	۶ - ۵ - ۲ - شرایط مرزی (سطح)
۱۰۹	۶ - ۵ - ۲ - ۱ - انتقال گرما به محیط بوسیله همرفت
۱۱۲	۶ - ۵ - ۲ - ۲ - انتقال گرما به محیط بوسیله تشعشع
۱۱۳	۶ - ۵ - ۲ - ۳ - شارش گرمایی عمل کننده از یک فاصله خاص
۱۱۴	۶ - ۵ - ۳ - سطح مشترک دو پیوستار با رسانش گرمایی متفاوت k_1 و k_2
۱۱۶	فصل هفتم
۱۱۶	۷ - ۱ - مقدمه
۱۱۶	۷ - ۲ - تقریب FDM بوسیله سری های تیلور
۱۱۷	۷ - ۲ - ۱ - مشتق های مرتبه اول
۱۱۹	۷ - ۲ - ۲ - مشتقات مرتبه دوم
۱۲۱	۷ - ۲ - ۳ - مشتقات مخلوط
۱۲۳	۷ - ۳ - خطاهای موجود در راه حل های عددی
۱۲۴	۷ - ۴ - تغییر اندازه شبکه
۱۲۶	۷ - ۵ - روش حجم کنترل
۱۲۸	۷ - ۶ - مفهوم گره های مجازی برای تجزیه شرایط مرزی
۱۲۹	۷ - ۷ - روش های حل معادلات جبری همزمان
۱۲۹	۷ - ۷ - ۱ - روش های مستقیم
۱۲۹	۷ - ۷ - ۲ - روش های تکراری
۱۳۱	فصل هشتم
۱۳۱	۸ - ۱ - مقدمه نتایج
۱۳۷	۸ - ۲ - ۱ - تاثیر چیدمان بر توزیع دما در بین لایه های مختلف مخزن
	۸ - ۲ - ۲ - تاثیر چیدمان بر توزیع دما در بین لایه های مختلف مخزن با شرط مرزی تشعشع
۱۴۰	
۱۴۳	۸ - ۳ - تاثیر چیدمان بر توزیع دما در راستای مماسی در لایه های مختلف مخزن

- ۸ - ۴ - توزیع دما در زمانهای مختلف قبل از رسیدن به پایداری ۱۵۰
- ۸ - ۵ - تاثیر انتقال حرارت همرفت بر توزیع دما ۱۵۲
- ۸ - ۶ - تاثیر ضریب انتقال حرارت هدایتی بر توزیع دما ۱۶۰

فصل اول

۱ - ۱ - مقدمه

استفاده از پیچش محیطی به منظور افزایش مقاومت گسیختگی برخی سازه ها در گذشته نیز متداول بوده است. برای جلوگیری از گسیختگی بشکه های استوانه ای و یا لوله های چوبی بدور آنها سیم می پیچیدند و یا جهت چسباندن دو قطعه نیم استوانه از این عمل استفاده می شد. اما استفاده از ساختمانهای فیلامنتی در سازه هایی با اشکال هندسی متفاوت امری جدید و کاملاً منحصر بفرد است. رشته پیچی^۱ یک تکنیک ساخت جهت ایجاد بخشهایی سبک و مقاوم از یک پلاستیک تقویت شده است. انجام این کار از طریق استفاده از خواص مقاومتی قابل توجه الیاف و یا پیچش پیوسته به کمک یک ماده رزینی آلی یا معدنی امکانپذیر است. تقویت کننده ها به هر شکلی که باشند در یک شبکه رزینی قرار می گیرند و جهت این منظور بلافاصله قبل از عمل پیچش با رزین مرطوب می گردند^۲ و یا از قبل با رزین آغشته می شوند^۳. قرار گرفتن تقویت کننده ها در یک شبکه رزینی موجب می گردد تا این مواد در جای ثابتی قرار گیرند و از آسیب های مکانیکی در امان باشند. شبکه رزینی از اثرات تخریبی محیطی، تقویت کننده ها را محافظت می کنند.

تقویت کننده آغشته به رزین بطور مداوم دور فرم^۴ و یا قالب^۵ پیچیده می شوند که شکل آن در ساختمان داخلی قطعه ای است که می خواهند ساخته شود. پس از پخت، قالب می تواند خارج گشته و یا بعنوان یک جزء مکمل ساختمان اصلی باقی بماند.

هرچند این روش ساخت امکان تولید اجزا سبک و قوی را می دهد ولی ثابت شده که این تکنیک خصوصاً برای ساخت قطعاتی در زمینه های هوانوردی، دریایی و کاربردهای فضایی شرح داده شده در جدول ۱-۱ و قطعات تجاری و صنعتی جدول ۱-۲ مناسبتر است.

¹ Filament Winding

² Wet Process

³ Pre impregnated Process

⁴ Form

⁵ Mandrel

جدول ۱-۱ سازه های رشته پیچی شده برای کاربردهای فضایی ، آبی و نظامی

عایق موتورهای راکت	بدنه موتورهای راکت
مخروطی دماغه جهت ادوات فضایی	لایزر موتورهای سوخت جامد
لایزر نازل راکتها	مخروطی دماغه راکتها
وسیله ایجاد و تنظیم تراست موتورهای سوخت مایع	موتور JATO (وسایلی که به کمک موتور جت پرتاب می شوند)
ادوات پرتاب اژدر	سیلندرهای خلأ
لوله های پرتاب کننده اشعه	ادوات پرتاب راکت
سازه های شاتل های فضایی	میله های پایه فرود موشک ها
محفظه احتراق	دماغه پوشش رادار
تیغه پروانه هلیکوپتر	مخازن درون بال هواپیما
محفظه حمل کننده مواد در موشک ها	ترمیستورها
بدنه توربین های APV	پوشش دریچه تهویه قایق ها
مخازن مواد شیمیایی	قیف خروج گازها در موتور موشک ها
راکت های بمباران تاکتیکی	لوله های موشک های صوتی
کاسکت محافظ سر	دیرک چادر
قیف های محافظ ادوات توپخانه	محفظه حمل گلوله های توپخانه
مخازن زیردریایی ها	لوله های مایعات در زیردریایی ها
بدنه زیردریایی ها	لوله های تهویه زیردریایی ها
مخازن سرمازا	راه نما های دریایی
قسمت های کنبدی شکل سونارها	مدارات یکپارچه الکترونیکی
جعبه فیوز	پوسته موتور
	محفظه اژدرها و لانچرهای آنها

جدول ۱-۲ سازه های رشته پیچی شده برای کاربردهای تجاری و صنعتی

مخازن ذخیره ، اسید ، مواد قلیایی ، آب ، روغن ، نمک ها و ...	مخازن راه آهن
پروانه ها	چرخ دنده کلید های ولتاژ بالا
داربست های ساختمانی	ظروف تحت فشار
گویچه های دریایی و راهنما	محفظه موتور ، باطری و غیره
مخازن هواپیما و سازه های هوایی	سوپاپ ها
قلاّب های ماهیگیری	محفظه زیر هواپیما
دکل قایق	قایق های دماغه گرد و سرپوشیده
وسایل بازی گلف	قطبین لامپ ها
بدنه اتومبیل ها	نرده پیست های مسابقه

سپلندر ترمزهایی که با هوا کار می کنند	گاردان اتومبیل ها
فیلترهای اسید	لوله های انتقال حرارت
پل های موقت	لوله تفنگ بدون درز
لوازم و تجهیزات کامپیوترها	لوازم و تجهیزات موتورها
تجهیزات دستگاه های تهویه	طشت و وان حمام
گلدانی فیوز	فنرهای کامیون و اتومبیل
لوله های آبیاری و آبرسانی و اتصالات آنها	ظروف آبخاری
نردبان ها	لوله های چاه های نفت
پایه های نصب شونده روی کامیون ها	قرقره های منسوجات
بدنه و عایق درون خازنها	شمع (پایه) اتوبان ها
هدایتگر امواج الکتریکی	هسته سیم پیچ ها
بشقاب آنتن ها	روتور موتورهای الکتریکی
	بدنه یکسو کننده ها

هم تقویت کننده و هم رزین را میتوان به گونه های مختلفی انتخاب و طراحی نمود بنحوی که هر خاصیت مورد نیاز را فراهم آورد .

پلاستیک های تقویت شده در واقع سیستم های کامپوزیتی هستند که در آنها شبکه رزینی آن الیاف تقویت کننده را دربر گرفته است . آزادی عمل زیادی در انتخاب رزین ها و نیز نسبت رزین به تقویت کننده وجود دارد که نهایتا موجب تولید محصولاتی با خواص کاملا متفاوت می گردد . برخی از خواص فیزیکی مفید به این شرح است : نسبت بالای مقاومت به وزن ، مقاومت در برابر عوامل شیمیایی و مناسب بودن برای ساخت در روش های مختلف .

مواد مورد استفاده در ساخت بوستر موشک و وسایل نظامی ، محدوده وسیعی از " مواد مخصوص با دانسیته بالا به منظور جذب حرارت " تا " مواد مقاوم سبک به منظور تحمل تنش های ساختمانی " را در بر می گیرد اما برای هر کاربردی نیاز به حداقل وزن یک فاکتور مهم است ، به عنوان مثال برای یک محصول تجاری مانند تانکهای لوکوموتیو بسیاری از مواد موجود است اما این محصول در نهایت می توانند یک خاصیت برجسته داشته باشند پس می توان نتیجه گیری نمود که کامپوزیت ترکیبی صحیح از دو یا چند ماده اصلی است که در این ترکیب هر جزء بهترین خاصیتش را به کامپوزیت نهایی می بخشد .

در حوالی سالهای ۱۹۴۰ کار اساسی بر روی مواد پلاستیکی تقویت شده با الیاف شیشه انجام شد و هدف آن کسب اطلاعات جهت طراحی مخازن تحت فشار مورد مصرف در راکت بود که نتیجه آن موتورهای رشته پیچی و تولید موشک هایی نظیر اطلس و پولاریس بود .

از سال ۱۹۴۷ کمپانی های قدرتمند بسیاری در زمینه بکارگیری روش رشته پیچی به منظور تولید ظروف تحت فشار مقاوم وسبک تحقیقات وسیعی را انجام داده اند [26].

مخازن و لوله های چند لایه رشته پیچی شده از محدود اشکال و ساختارهای کامپوزیتی هستند که حل دقیق آنها موجود است. آنالیز آنها برای بار مکانیکی بوسیله لیخنیسکی^۱ (۱۹۵۰)، شرر^۲ (۱۹۶۷)، ریسنر^۳ (۱۹۷۰)، پاگانو^۴ (۱۹۷۱)، ریسنر و سای^۵ (۱۹۷۴) و ویلسون و ارگیل^۶ (۱۹۸۶) پیگذاری شد. تنش های حرارتی بوسیله هایر و کوپر^۷ (۱۹۸۶) و هایر و روسو^۸ کارشد. ارگیل و ویلسون^۹ (۱۹۸۶) بر روی مواد و هندسه های غیر خطی کارهایی انجام دادند [25].

در سالهای اخیر مطالعات زیادی بر روی خواص مکانیکی استوانه ها و مخازن کامپوزیتی تحت شرایط مختلف بارگذاری خمشی [1]، عرضی [2,3]، فشاری محوری [4,5] صورت پذیرفته است. تحلیل های تجربی زیادی بر روی مخازن استوانه ای تحت فشار جدار نازک با نسبت تنش محیطی به طولی ۲:۱ با زاویه بهینه ۵۵ درجه، برای بررسی خرابی این مخازن صورت گرفته است [6-9]. روزنوف^{۱۰} [10] با استفاده از تئوری الاستیک ورق های چند لایه، میدان تنش و کرنش را در لوله هایی با زوایای پیشش مختلف ۱۵ الی ۸۵ درجه را بدست آورد و با نتایج تجربی مقایسه کرد. او نشان داد که زاویه پیشش ۵۵ درجه یک زاویه بهینه برای لوله های رشته پیچی شده با نسبت تنش محیطی به طولی ۲:۱ است و این زاویه برای حالت فشار بدون بارگذاری محوری ۷۵ درجه می باشد.

اسپنسر و هال^{۱۱} [11] مکانیزم خرابی در پلاستیک های تقویت شده با الیاف کربن و نیز اومارا و فوکاناگا^{۱۲} [12] همان حالت را برای پلاستیک های تقویت شده با الیاف شیشه را در لوله های رشته پیچی شده با زوایای مختلف مورد بررسی قرار دادند. حداکثر تنش بوجود آمده در زاویه ۵۵ درجه و حداکثر کرنش های محوری در زوایای ۳۵ تا ۵۰ مشاهده شده اند. بارتن^{۱۳} [13] حلی برای مسئله فشار یکنواخت در یک استوانه ایزوتروپ با طول محدود را بر اساس حل پاپکویچ^{۱۴} ارائه کرد. وایلد و ویسکرز^{۱۵} [14] یک روش تحلیلی بر اساس تئوری ورق های استوانه ای اورتوتروپ در حالت تنش و کرنش صفحه ای برای استوانه های مرکب از چند لایه اورتوتروپ ارائه دادند. در این بررسی نشان داده شد که زاویه

¹ Lekhnitskii

² Scherrer

³ Reissner

⁴ Pagano

⁵ Reissner and Tsai

⁶ Wilson and Orgill

⁷ Hyer and Cooper

⁸ Hyer and Rousseau

⁹ Orgill and Wilson

¹⁰ Rosenow

¹¹ Spencer and Hull

¹² Uemura and Fukunaga

¹³ Barton

¹⁴ Papkovich-Neube

¹⁵ Wild and Vickers

پیچش الیاف یک پارامتر مهم در طراحی پوسته های استوانه ای رشته پیچی شده است. روی¹ [15] یک تحلیل تنش حرارتی در حلقه های چند لایه ضخیم اورتوتروپ ارائه داد. این تحلیل با فرض تنش صفحه ای (تنش های طولی و محیطی) در صفحه $(r-\theta)$ صورت گرفت. بن² [16] روش المان محدود را برای بدست آوردن تنش های حرارتی و تغییر شکل دیواره ضخیم لوله استوانه ای بکار برد. در کار او اثرات تنش های پسماند در طراحی این سازه ها مورد بررسی قرار گرفت. البته وی در تحلیل خود بارهای محوری بوجود آمده به هنگام بسته بودن دو سر لوله تحت فشار داخلی را در نظر نگرفت.

در سالهای اخیر روش المان محدود برای تحلیل لوله های کامپوزیتی بکار گرفته شده است. کینائو و آکیاما³ [17] میزان پیشرفت آسیب بوجود آمده در لوله های جدار ضخیم را بررسی کرده اند. فو⁴ و دیگران [18] با بکار بردن روش رایلی - ریتز، تحلیل کرنش در حالت های اورتوتروپ قطبی و چهار ضلعی در بارگذاری فشار یکنواخت خارجی را انجام داده اند. یک حل الاستودینامیک برای تنش ناشی از شوک حرارتی در یک پوسته استوانه ای ضخیم اورتوتروپ با استفاده از تبدیل لاپلاس و هنکل توسط چو⁵ و دیگران [19] صورت گرفت. میدان تنش الاستیک - پلاستیک در یک کامپوزیت با الیاف پیوسته در معرض بار حرارتی مکانیکی نیز توسط یو⁶ و دیگران [20] مورد بررسی قرار گرفت. مطالعاتی نیز توسط کلسنر⁷ و دیگران [21] بر روی حل الاستیسیته پوسته های استوانه ای ایزوتروپ تحت بارهای خطی شعاعی یکنواخت انجام شده است. بر اساس حل لیخنیسکی [22] و وایلد و ویسکرز⁸ یک روش تحلیلی برای ورق های استوانه ای اورتوتروپ توسعه داده شده است. زیا⁹ و دیگران [23] روشی تحلیلی برای بررسی تنش های حرارتی لوله های ساندویچی جدار ضخیم تحت فشار داخلی و بار همزمان حرارتی و مکانیکی ارائه داده اند. این روش بر اساس تئوری کلاسیک ورق های چند لایه استوار است. در این تحلیل پوسته اورتوتروپ با لایه چینی $\pm\phi$ در نظر گرفته شده. بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی مواد غیر ایزوتروپ یک حل تحلیلی دقیق برای تنش ها و کرنش ها و تغییر شکل های لوله های تحت فشار داخلی توسط زیا [24] و همکارانش ارائه گردیده است و تاثیر چیدمان لایه ها بر روی توزیع تنش و کرنش مورد بررسی قرار می گیرد.

تعریف یک مخزن تحت فشار می تواند بدین صورت باشد: ساختمانی که قادر به دربرگرفتن یک مایع تحت فشار باشد و یا بتواند فشار یک مایع خارجی را تحمل نماید.

¹ Roy

² Ben

³ Kitao and Akiyama

⁴ Fu

⁵ Cho

⁶ You

⁷ Klosner

⁸ Wild and Vickers

⁹ Xia

ظروف تحت فشاری که چیزی را درون خود نگاه می دارند ، باید دارای مقاومت کششی بالا باشند و شکل آنها معمولاً بصورت کره یا استوانه است . البته با اندکی کاهش در راندمان می توان تقریباً هر شکل مطلوب دیگری را به وجود آورد . از طرف دیگر ظروف تحت فشاری که بار از خارج به آنها اعمال می گردد ، تحت تنش های فشاری قرار می گیرند . بدیهی است که در این مورد هم یک کره بهترین طرح است ، زیرا از بین تمام شکل های هندسی ، کره بیشترین حجم را در مقابل یک سطح معین ایجاد می کند .

مخازن تحت فشار با مغزیهای جدار نازک فلزی که توسط کولار پیچیده شده است ، نقش مهمی را در صنایع هوایی و فضایی عهده دار می باشد ، هلیوم ، اکسیژن ، هیدروژن و نیتروژن در مغزیهایی که از جنس تیتانیوم ، فولاد ضد زنگ و آلومینیوم هستند نگهداری می شوند . این مخازن عمدتاً کروی هستند و از قطر 0.3 الی 1.0 متر در بیست و سه نوع مختلف در شاتل های فضایی کاربرد دارند . کپسول های تحت فشار آتش نشانان و یا کوهنوردان از الیاف کولار یا شیشه به همراه رزین اپوکسی تولید می شوند . این کپسول ها دارای یک مخزن جدار نازک فلزی هستند که به خوبی فشار را تحمل کرده و بدون اینکه دچار نشتی و یا شکست ناشی از خستگی شوند . از مزایای دیگر این کپسول ها علاوه بر سبکی عدم تکه تکه شده و پرتاب ترکش هنگام انفجار بر اثر سوراخ شدنشان می باشد . ساخت مخازن ذخیره ، لوله های زیر زمینی انتقال بنزین از مواد مرکب توسط روش رشته پیچی از اهداف اکولوژی می باشد ، زیرا در مخازن و لوله های فلزی خوردگی باعث نشت بنزین به داخل زمین می شود . یکی از کاربردهای اخیراً از مخازن کامپوزیت در برخی از کشورها استفاده از آن به عنوان مخازن ذخیره گاز طبیعی فشرده^۱ برای استفاده در خودروها می باشد . به دلیل سبکی و استحکام مناسب ، سهولت ساخت ، مقرون به صرفه بودن و مشکلات ناشی از استفاده مخازن فلزی سبب گسترش این نوع از مخازن گردیده است .

در قسمت تحلیل تنش این پایان نامه به دو روش عمده تحلیل مخازن کامپوزیتی پرداخته و برای نمونه و مقایسه ای بین جواب ها و پاسخ نرم افزار انسیس^۲ به عنوان روشی دیگر از حل مسئله کامپوزیت پرداخته می شود . تاثیر بار حرارتی بر روی توزیع تنش ، کرنش و جابجایی و بررسی سه نوع چیدمان مختلف بر روی خواص مکانیکی مخزن از دیگر نتایج این تحقیق است . بدست آوردن ضرایب موثر از قبیل مدول الاستیسیته ، برشی ، ضریب انبساط حرارتی و پواسون برای بدنه استوانه ای مخزن دو لایه پادمقارن و سپس بسط آن برای یک حالت چهار لایه از اهداف این قسمت از پایان نامه می باشد . این بخش از نتایج نقش بسیار مهمی در طراحی و چیدمان لایه های مخازن کامپوزیتی و همین طور سایر ساختارهای استوانه ای مانند لوله ها ، تیوپ ها و ... دارند .

¹ Compressed Natural Gas (CNG)

² ANSYS

فصل دوم

۲ - ۱ - مقدمه تحلیل ماکرومکانیکی

در این بخش در مورد تحلیل کلاسیک لمینیت و یا آنالیز رفتار ماکرومکانیکی مواد کامپوزیتی بحث می شود. ابتدا لازم است تا تعریفی از تحلیل میکرومکانیک^۱ و ماکرومکانیک^۲ داشته باشیم. میکرومکانیک با رفتار مواد متشکله (در اینجا فیبر و ماتریس) و رابطه متقابل این اجزا و رفتار یک لمینا رابطه دارد. در این روش خصوصیات مواد تشکیل دهند و لمینا مطالعه و بحث می شود. ماکرومکانیک با رفتار مکانیکی مواد کامپوزیتی و ساختارهای آن بدون توجه به مواد متشکله یا واکنش بین آنها رابطه دارند. در این تحلیل رفتاری که ممکن است لمینیت تحت بارهای مکانیکی از خود نشان دهد بحث و آنالیز می شود.

۲ - ۲ - فرضیات

برای حل مسئله به روش ماکرومکانیکی فرضیات زیادی انجام می شود که در ذیل به برخی فرضیات با اهمیت تر اشاره می شود:

۱. در هر دو ماده (گرافیت اپوکسی) تنش متناسب با کرنش می باشد.
۲. ضخامت نسبت به طول و عرض لمینیت بسیار کوچک است.
۳. جابجایی های در جهات شعاعی، مماسی و طولی قابل چشم پوشی در برابر ضخامت لمینیت است.
۴. اتصال رزین به الیاف محکم می باشد به نحوی که رزین و الیاف کرنشی برابر در مقابل یک بار معین دارند.
۵. الیاف پیوسته و مستقیم هستند.
۶. مواد اصلی تشکیل دهنده هموزن و ایزوتروپیک می باشند. [27]

¹ Micromechanics

² Macromechanics

۲-۳- حل تحلیلی مخزن کامپوزیتی

برای بدست آوردن مقدار تنش حاصله از فشار داخلی مخزن ابتدا لازم است که کرنش را بدست آورده شود.

برای این کار ابتدا از روابط زیر ماتریس سختی^۱ [Q] لمینا را محاسبه می کنند:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (۱-۲)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (۲-۲)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (۳-۲)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (۴-۲)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (۵-۲)$$

حال به کمک روابط زیر تغییر ناپذیرها^۲ را می یابیم.

$$U_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \quad (۶-۲)$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}) \quad (۷-۲)$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \quad (۸-۲)$$

$$U_4 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \quad (۹-۲)$$

لازم است که ماتریس سختی که مربوط به هر لمینا می باشد را برای حالتی که راستای الیاف با راستای محورهای مختصات لمینیت یکی نمی باشد بدست آوریم. حالت دوران یافته ماتریس سختی را با $[\bar{Q}]$ نمایش می دهیم، و به کمک روابط (۲-۱۰) الی (۲-۱۵) بدست می آید.

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (۱۰-۲)$$

$$\bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = U_4 - U_3 \cos 4\theta \quad (۱۱-۲)$$

^۱ Stiffness

^۲ Invariants

$$\bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (12-2)$$

$$\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{61} = \frac{U_2}{2} \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \quad (13-2)$$

$$\bar{Q}_{26} = \bar{Q}_{62} = \frac{U_2}{2} \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \quad (14-2)$$

$$\bar{Q}_{66} = \frac{1}{2}(U_1 - U_4) - U_3 \cos 4\theta \quad (15-2)$$

که θ زاویه الیاف با محور اصلی می باشد .

حال می توان ماتریس سختی کششی $^1[A]$ ، ماتریس سختی کوپلینگ $^2[B]$ و ماتریس سختی خمشی $^3[D]$ را بصورت زیر بدست آورد :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (16-2)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (17-2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (18-2)$$

در روابط فوق N تعداد لمیناهای بکار رفته در کامپوزیت و z_k فاصله از صفحه میانی است .
حال با استفاده از روابط زیر می توان ماتریس کامپلینس 4 لمینیت را بدست آورد :

$$[A'] = [A^{-1}] + [A^{-1}][B]([D] - [B][A^{-1}][B])^{-1}[B][A^{-1}] \quad (19-2)$$

$$[B'] = [C'] = -[A^{-1}][B]([D] - [B][A^{-1}][B])^{-1} \quad (20-2)$$

$$[D'] = ([D] - [B][A^{-1}][B])^{-1} \quad (21-2)$$

با توجه به روابط بدست آمده اکنون کرنش در صفحه میانی و انحنا را می توان بصورت زیر بدست آورد :

$$\varepsilon_1^0 = A'_{11}N_1 + A'_{12}N_2 + A'_{16}N_6 + B'_{11}M_1 + B'_{12}M_2 + B'_{16}M_6 \quad (22-2)$$

$$\varepsilon_2^0 = A'_{21}N_1 + A'_{22}N_2 + A'_{26}N_6 + B'_{21}M_1 + B'_{22}M_2 + B'_{26}M_6 \quad (23-2)$$

¹ Extensional Stiffness

² Coupling Stiffness

³ Bending Stiffness

⁴ Compliance Matrix

$$\varepsilon_6^0 = A'_{61}N_1 + A'_{62}N_2 + A'_{66}N_6 + B'_{61}M_1 + B'_{62}M_2 + B'_{66}M_6 \quad (24-2)$$

$$k_1 = C'_{11}N_1 + C'_{12}N_2 + C'_{16}N_6 + D'_{11}M_1 + D'_{12}M_2 + D'_{16}M_6 \quad (25-2)$$

$$k_2 = C'_{21}N_1 + C'_{22}N_2 + C'_{26}N_6 + D'_{21}M_1 + D'_{22}M_2 + D'_{26}M_6 \quad (26-2)$$

$$k_6 = C'_{61}N_1 + C'_{62}N_2 + C'_{66}N_6 + D'_{61}M_1 + D'_{62}M_2 + D'_{66}M_6 \quad (27-2)$$

که در روابط فوق N_i و M_i به ترتیب نیرو و ممان بر واحد طول می باشد که برای مسئله ای که مخزن تحت فشار داخلی قرار دارد می توان نوشت $\sigma_x = \frac{Pd}{4t}$ و $\sigma_y = \frac{Pd}{2t}$ (d قطر سیلندر و t ضخامت جداره مخزن است) داریم :

$$N_1 = \frac{Pd}{4} \quad (28-2)$$

$$N_2 = \frac{Pd}{2} \quad (29-2)$$

و بقیه عناصر نیرو و ممان برای این شرایط خاص برابر با صفر هستند .
اکنون کرنش هر لایه را به کمک رابطه زیر می یابیم :

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k^0 + zk_k \quad (30-2)$$

و تنش در هر لایه از رابطه زیر بدست می آید: [27]

$$\{\sigma\}_k = [\bar{Q}]_k (\{\varepsilon^0\} + z\{k\}) \quad (31-2)$$

فصل سوم

۳ - ۱ - حل الاستیسیته تک لایه

این حل ، یک حل الاستیسیته دقیق برای سیلندر طولی ، ساخته شده از مواد همگن و لایه های مونوکلینیک تحت بارگذاری محوری ترمومکانیکی است . سایر نتایج بدست آمده در ادامه این پایان نامه با بهره گیری از این حل انجام شده و در این فصل توضیحات کاملی از روابط شرح داده می شود . بارهای مکانیکی بکارگرفته شده بطور متقارن در انتها و بشکل یکسان و متقارن در امتداد طول سیلندر هستند . بارهای حرارتی بطور یکسان با دما تغییر می کنند . این حل معادلات تعادل ، کرنش و جابجایی ، سازگاری و شرایط مرزی را برای بارگذاری های مختلف ارضا می کند .

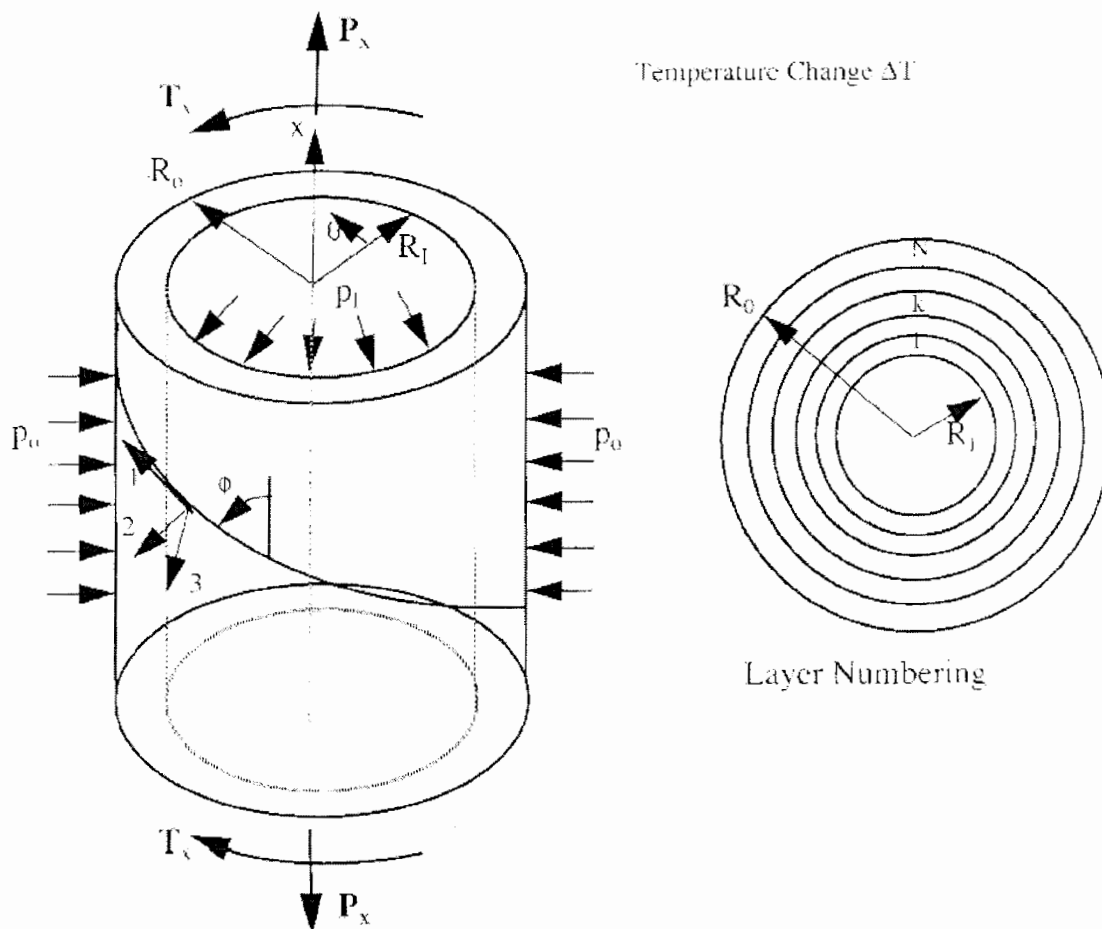
۳ - ۱ - ۱ - کرنش در مختصات استوانه ای

در مختصات استوانه ای (x, θ, r) بهتر است که همانند شکل ۳ - ۱ در راستای محور لوله باشد . در زمینه عمومی جابجایی ها ، ترم های جابجایی را می توان به صورت جابجایی محوری $u(x, \theta, r)$ ، جابجایی مماسی $v(x, \theta, r)$ و جابجایی شعاعی $w(x, \theta, r)$ نشان داد .

$$\begin{aligned} u &= u(x, \theta, r) \\ v &= v(x, \theta, r) \\ w &= w(x, \theta, r) \end{aligned} \quad (۳ - ۱)$$

رابطه کرنش جابجایی در مختصات استوانه ای به فرم زیر است :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) & \varepsilon_r &= \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v + r \frac{\partial}{\partial r} (v) \right) & \gamma_{xr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{\theta x} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (۳ - ۲)$$



Temperature Change ΔT

Layer Numbering

شکل ۱ - ۳ نمایشی از جهات محورها و حالات کلی نیروهای واده به بدنه استوانه ای شکل

برای لوله های متقارن تحت بررسی ، تمام جابجایی ها ، کرنش ها و تنش ها وابسته به θ نیستند . در طول لوله ، جابجایی شعاعی ، w ، نیز اگر نیروی محوری و گشتاور در کنار محور نباشد به مختصات x وابسته نیست :

$$\begin{aligned}
 u &= u(x, r) \\
 v &= v(x, r) \\
 w &= w(r)
 \end{aligned}
 \tag{۳ - ۳}$$

با ترکیب (۳ - ۳) و (۲ - ۳) معادله کرنش - جابجایی برای یک لوله متقارن و بارگذاری یکنواخت در امتداد محور لوله بدست می آید :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_\theta &= \frac{w}{r} & \varepsilon_r &= \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} & \gamma_{xr} &= \frac{\partial u}{\partial r} & \gamma_{\theta x} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (4-3)$$

۳-۱-۲ - سازگاری^۱

برای کرنش های (۳-۴) معادلات سازگاری که آنها را ارضا می کند به فرم زیر است :

$$\frac{d^2 \varepsilon_x}{dr^2} = 0 \quad (5-3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d\varepsilon_x}{dr} = 0 \quad (6-3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\gamma_{x\theta}) \right] = 0 \quad (7-3)$$

مشخص است که تمامی مشتقات تابعی از متغیر r هستند . با انتگرال گیری از (۳-۵) و (۳-۶) نشان داده خواهد شد که کرنش محوری در تمام لایه ها ثابت است ، همچنین :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 \quad (8-3)$$

۳-۱-۳ - معادلات تشکیل دهنده^۲

برای لایه های اورتوروپیک ، معادلات تشکیل دهنده ترموالاستیک در مختصات اصلی مواد به فرم زیر است :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_2^T \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_3^T \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (9-3)$$

که $\varepsilon_i^T = \alpha_i \Delta T$ کرنش حرارتی است . معادلات تشکیل دهنده ترموالاستیک در مختصات کلی استوانه ای (x, θ, r) برای یک لایه اورتوروپیک با زاویه الیاف ϕ نسبت به امتداد محور x (شکل ۳-۱)

¹ Compatibility

² Constitutive Equations

بواسطه تبدیل محورهای شعاعی در راستای زاویه ϕ تعریف می شود، که در نتیجه معادلات تشکیل دهنده دارای فرم مواد مونوکلینیک در مختصات استوانه ای (x, θ, r) دارند^۱:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{\theta r} \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_x^T \\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^T \\ \varepsilon_r - \varepsilon_r^T \\ \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\theta} - \gamma_{x\theta}^T \end{bmatrix} \quad (۳ - ۱۰)$$

معکوس رابطه (۳ - ۱۰) معادلات اساسی برای کرنش ها بر حسب ترمهای تنش تعریفی شایسته از ضریب کامپلیننس^۲ \bar{S}_{ij} به ما می دهد:

^۱ که ترمهای \bar{C}_{ij} از معادلات تبدیلی نوشته شده با زاویه الیاف ϕ بدست می آید:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{11} &= m^4 C_{11} + 2m^2 n^2 (C_{12} + 2C_{66}) + n^4 C_{22} \\ \bar{C}_{12} &= n^2 m^2 (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) + (n^4 + m^4) C_{12} \\ \bar{C}_{13} &= m^2 C_{13} + n^2 C_{23} \\ \bar{C}_{16} &= mn [m^2 (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) + n^2 (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})] \\ \bar{C}_{22} &= n^4 C_{11} + 2m^2 n^2 (C_{12} + 2C_{66}) + m^4 C_{22} \\ \bar{C}_{23} &= n^2 C_{13} + m^2 C_{23} \\ \bar{C}_{26} &= mn [n^2 (C_{11} - C_{12} - 2C_{66}) + m^2 (C_{12} - C_{22} + 2C_{66})] \\ \bar{C}_{33} &= C_{33} \\ \bar{C}_{36} &= mn (C_{13} - C_{23}) \\ \bar{C}_{44} &= m^2 C_{44} + n^2 C_{55} \\ \bar{C}_{45} &= mn (C_{55} - C_{44}) \\ \bar{C}_{55} &= n^2 C_{44} + m^2 C_{55} \\ \bar{C}_{66} &= n^2 m^2 (C_{11} - 2C_{12} + C_{22}) + (n^2 - m^2)^2 C_{66} \end{aligned}$$

در روابط فوق $n = \sin \theta$ و $m = \cos \theta$ می باشد.

^۲ Compliance coefficients

که E و F ثابت های انتگرال هستند .

۳ - ۱ - ۵ - جابجایی

استفاده از (۳ - ۱۴) با معادلات تشکیل دهنده به فرم (۳ - ۱۱) برای محاسبه γ_{xr} ، معادلات کرنش - جابجایی (۳ - ۴) کرنش برشی را به ما می دهد :

$$\gamma_{xr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \bar{S}_{45} \frac{E}{r^2} + \bar{S}_{55} \frac{F}{r} \quad (۳ - ۱۵)$$

انتگرال گیری از (۳ - ۱۵) بر حسب به r جابجایی محوری را به ما می دهد :

$$u(x, r) = -\bar{S}_{45} \frac{E}{r} + \bar{S}_{55} F \ln r + f(x) \quad (۳ - ۱۶)$$

که $f(x)$ تابعی اختیاری است .

با توجه به (۳ - ۸) و (۳ - ۱۶) و اولین معادله کرنش جابجایی (۳ - ۴) نشان می دهد که $f(x)$ باید برابر با ε_x° و یک ثابت باشد که آن را F_1 می نامیم ، که دلالت بر جابجایی جسم صلب دارد . پس آخرین وضعیت از جابجایی محوری به صورت زیر است :

$$u(x, r) = \varepsilon_x^\circ x - \bar{S}_{45} \frac{E}{r} + \bar{S}_{55} F \ln r + F_1 \quad (۳ - ۱۷)$$

جابجایی مماسی v بوسیله انتگرال گیری از سومین معادله سازگاری (۳ - ۷) برای بدست آوردن کرنش برشی تعریف می شود :

$$\gamma_{x\theta} = K_1 r + \frac{K_2}{r} \quad (۳ - ۱۸)$$

که K_1 و K_2 ثابت های انتگرال هستند ، با ترکیب (۳ - ۱۸) با رابطه کرنش جابجایی (۳ - ۴) برای $\gamma_{x\theta}$ جابجایی مماسی را به فرم زیر می دهد :

$$v = \left(K_1 r + \frac{K_2}{r} \right) x + g(r) \quad (۳ - ۱۹)$$

که $g(r)$ تابعی اختیاری است .
همچنین از حالت (۳ - ۴) داریم :

$$\gamma_{\theta r} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = g'(r) - \frac{2K_2 x}{r^2} - \frac{g(r)}{r} \quad (۳ - ۲۰)$$

با ترکیب معادلات تشکیل دهنده (۳ - ۱۱) و نتایج (۳ - ۱۴) برای تعادل ، کرنش برشی $\gamma_{\theta r}$ می شود :

$$\gamma_{\theta r} = \bar{S}_{44} \frac{E}{r^2} + \bar{S}_{45} \frac{F}{r} \quad (۳ - ۲۱)$$

با مقایسه (۳ - ۲۰) و (۳ - ۲۱) برای $\gamma_{\theta r}$ نشان می دهد که $K_2 = 0$ و $g(r)$ باید معادله دیفرانسیل معمولی را ارضا نماید :

$$\frac{d}{dr} g(r) - \frac{g(r)}{r} = \bar{S}_{44} \frac{E}{r^2} + \bar{S}_{45} \frac{F}{r} \quad (۳ - ۲۲)$$

حل (۳ - ۲۲) به فرم زیر است :

$$g(r) = -\bar{S}_{44} \frac{E}{2r} - \bar{S}_{45} F + G_1 r \quad (۳ - ۲۳)$$

که G_1 ثابت انتگرال وابسته به حرکت پیچشی جسم صلب است .
با جایگزینی (۳ - ۲۳) در (۳ - ۱۹) (با $K_2 = 0$) و تعریف $K_1 = \gamma^\circ$ ، زاویه پیچش (بر حسب رادیان) به ازای واحد طول ، آخرین فرم برای $v(x,r)$ را به ما می دهد :

$$v(x,r) = \gamma^\circ x r - \bar{S}_{44} \frac{E}{2r} - \bar{S}_{45} F + G_1 r \quad (۳ - ۲۴)$$

با ترکیب اولین معادله تعادل (۳ - ۱۳) با معادله ترموالاستیک تشکیل دهنده (۳ - ۱۰) ، رابطه کرنش جابجایی (۳ - ۴) و جابجایی (۳ - ۱۷) و (۳ - ۲۴) یک معادله دیفرانسیل معمولی نوع دوم^۱ برای

^۱ Ordinary Differential Equation ODE

جابجایی w بصورت تابعی از r ، کرنش محوری یکنواخت ε_x° ، زاویه پیچش به ازای واحد طول γ° و کرنش حرارتی ε_i^T به ما می دهد:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{\bar{C}_{22}}{\bar{C}_{33}} \frac{w}{r^2} = \frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[\frac{(\bar{C}_{12} - \bar{C}_{13}) \varepsilon_x^\circ + \Sigma}{r} + (\bar{C}_{26} - 2\bar{C}_{36}) \gamma^\circ \right] \quad (25-3)$$

که Σ تعریف می شود:

$$\Sigma = (\bar{C}_{13} - \bar{C}_{12}) \varepsilon_x^T + (\bar{C}_{23} - \bar{C}_{22}) \varepsilon_\theta^T + (\bar{C}_{33} - \bar{C}_{32}) \varepsilon_r^T + (\bar{C}_{63} - \bar{C}_{62}) \gamma_{x\theta}^T \quad (26-3)$$

و یا بصورت راحت تر آن را نمایش می دهیم:

$$\Sigma = (\bar{C}_{i3} - \bar{C}_{i2}) \varepsilon_i^T \quad (i = 1, 2, 3, 6) \quad (27-3)$$

برای تغییرات یکسان دما ΔT ، کرنش حرارتی (27-3) می تواند بصورت ترمهایی از ضریب انبساط حرارتی نوشته شود:

$$\varepsilon_i^T = \alpha_i \Delta T \quad (28-3)$$

که ضرایب انبساط حرارتی به فرم زیر هستند:

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \\ \alpha_r \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (29-3)$$

تعریف می کنیم:

$$\tilde{\Sigma} = (\bar{C}_{i3} - \bar{C}_{i2}) \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3, 6) \quad (30-3)$$

می توانیم ترمهای حرارتی را به فرم زیر بنویسیم :

$$\Sigma = \tilde{\Sigma} \Delta T \quad (۳ - ۳۱)$$

پس ODE (۳ - ۲۵) به فرم زیر می شود :

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{\bar{C}_{22}}{\bar{C}_{33}} \frac{w}{r^2} = \frac{1}{\bar{C}_{33}} \left[\frac{(\bar{C}_{12} - \bar{C}_{13}) \varepsilon_x^\circ + \tilde{\Sigma} \Delta T}{r} + (\bar{C}_{26} - 2\bar{C}_{36}) \gamma^\circ \right] \quad (۳ - ۳۲)$$

حل ODE (۳ - ۳۲) به فرم زیر است :

$$w(r) = A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda} + \left(\frac{\bar{C}_{12} - \bar{C}_{13}}{\bar{C}_{33} - \bar{C}_{22}} \right) \varepsilon_x^\circ r + \left(\frac{\bar{C}_{26} - 2\bar{C}_{36}}{4\bar{C}_{33} - \bar{C}_{22}} \right) \gamma^\circ r^2 + \left(\frac{\tilde{\Sigma}}{\bar{C}_{33} - \bar{C}_{22}} \right) r \Delta T \quad (۳ - ۳۳)$$

که

$$\lambda = \sqrt{\frac{\bar{C}_{22}}{\bar{C}_{33}}} \quad (۳ - ۳۴)$$

اگر تعاریف زیر را مطرح نماییم :

$$\left(\frac{\bar{C}_{12} - \bar{C}_{13}}{\bar{C}_{33} - \bar{C}_{22}} \right) = \Gamma \quad (۳ - ۳۵)$$

$$\left(\frac{\bar{C}_{26} - 2\bar{C}_{36}}{4\bar{C}_{33} - \bar{C}_{22}} \right) = \Omega \quad (۳ - ۳۶)$$

$$\left(\frac{\tilde{\Sigma}}{\bar{C}_{33} - \bar{C}_{22}} \right) = \Psi \quad (۳ - ۳۷)$$

و ثابت حرکت جسم صلب F_1 را در (۳ - ۱۷) و G_1 را در (۳ - ۲۴) برابر صفر قرار دهیم ، جابجایی برای لوله یک لایه تحت بارگذاری متقارن محوری می تواند بصورت زیر خلاصه شوند :

$$u(x, r) = \varepsilon_x^\circ x - \bar{S}_{45} \frac{E}{r} + \bar{S}_{55} F \ln r \quad (۳ - ۳۸)$$

$$v(x, r) = \gamma^\circ x r - \bar{S}_{44} \frac{E}{2r} - \bar{S}_{45} F \quad (3-39)$$

$$w(r) = A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda} + \Gamma \varepsilon_x^\circ r + \Omega \gamma^\circ r^2 + \Psi r \Delta T \quad (3-40)$$

اگر لایه ای ایزوتروپیک یا ایزوتروپیک عرضی باشد $\bar{C}_{22} = \bar{C}_{33}$ و $\bar{C}_{12} = \bar{C}_{13}$ و $\bar{C}_{16} = 0$ و $\alpha_\theta = \alpha_r$ است. پس ODE (3-32) فرم زیر را می‌گیرد:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{w}{r^2} = 0 \quad (3-41)$$

که حل آن:

$$w(r) = A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda} \quad (3-42)$$

یادآوری می‌کنیم که (3-42) برابر (3-40) با $\Gamma = \Omega = \Psi = 0$ و $\lambda = 1$ است، پس بقیه فقط از توسعه (3-40) فرموله و استفاده می‌شود، با توجه به آنکه اختصاص دادن آن ترمها برای لایه های ایزوتروپیک عرضی باید حذف یا اصلاح شوند.

برای ΔT داده شده، بطور کلی 6 ثابت مجهول در زمینه جابجایی مشخص شده در (3-38) تا (3-40) ε_x° ، E ، F ، γ° ، A_1 و A_2 هستند. این ثابت ها از شرایط مرزی و شرایط بارگذاری معین می‌شوند.

3-1-6- شرایط مرزی تنش

برای یک سیلندر تو خالی تحت تنش عمودی (فشار) $\sigma_r = -P_i$ در سطوح داخلی $r = R_i$ ، و فشار $\sigma_r = -P_o$ در سطوح خارجی $r = R_o$ شرایط مرزی به فرم زیر است:

در سطوح داخلی $r = R_i$:

$$\begin{aligned} \sigma_r(R_i) &= -P_i \\ \tau_{\theta r}(R_i) &= 0 \\ \tau_{xr}(R_i) &= 0 \end{aligned} \quad (3-43)$$

در سطوح خارجی $r = R_o$:

$$\begin{aligned}\sigma_r(R_o) &= -P_o \\ \tau_{\theta r}(R_o) &= 0 \\ \tau_{xr}(R_o) &= 0\end{aligned}\quad (3-44)$$

دو عبارت آخر (3-43) یا (3-44) نشان می دهند که ثابت های E و F تنش برشی در رابطه (3-14) باید دارای مقدار صفر باشند :

$$F = E = 0 \quad (3-45)$$

3-1-7- جابجایی های نهایی

استفاده از شرایط (3-45) ، جابجایی های (3-38) تا (3-40) در لوله های تک لایه با بارگذاری متقارن محوری ترمومکانیکی با اعمال تنش در سطوح فرم ساده شده زیر را می دهد :

$$u(x,r) = \varepsilon_x^\circ x \quad (3-46)$$

$$v(x,r) = \gamma^\circ xr \quad (3-47)$$

$$w(r) = A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda} + \Gamma \varepsilon_x^\circ r + \Omega \gamma^\circ r^2 + \Psi r \Delta T \quad (3-48)$$

برای بار حرارتی داده شده ΔT ، تعداد مجهولات به چهار کاهش می یابد : ε_x° ، γ° ، A_1 و A_2 (فرض می شود که هیچکدام از مقادیر ε_x° یا γ° معلوم نیستند).

3-1-8- کرنش

کرنش در لایه می تواند از فرم های در روابط (3-4) و عبارات (3-38) تا (3-40) برای جابجایی تعیین شوند . نتیجه به این صورت است :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial w}{\partial r} = \lambda A_1 r^{\lambda-1} - \lambda A_2 r^{-\lambda-1} + \Gamma \varepsilon_x^\circ + 2\Omega \gamma^\circ r + \Psi \Delta T \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r} = A_1 r^{\lambda-1} + A_2 r^{-\lambda-1} + \Gamma \varepsilon_x^\circ + \Omega \gamma^\circ r + \Psi \Delta T \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x^\circ \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \gamma^\circ x - \gamma^\circ x = 0 \\ \gamma_{xr} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0 + 0 = 0 \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \gamma^\circ r \end{aligned} \quad (49-3)$$

از (49-3) مشاهده می شود که کرنش برشی $\gamma_{\theta r}$ و γ_{rx} بطور یکسان و برابر صفر هستند و کرنش محوری ε_x° ثابت است. همچنین، کرنش برشی $\gamma_{\theta x}$ بصورت خطی با r تغییر می کند. کرنش عمودی ε_θ و ε_r بصورت توان r تغییر می کنند.

۳-۱-۹- تنش ها

تنش در لایه ها را اکنون می توان بطور مستقیم از معادلات تشکیل دهنده (3-10) و کرنش ها (3-49) مشخص نمود. نتیجه تنش های برشی بصورت زیر است:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{xr} = 0 \quad (50-3)$$

و

$$\tau_{x\theta} = \bar{C}_{16} \varepsilon_x^\circ + \bar{C}_{26} \varepsilon_\theta + \bar{C}_{36} \varepsilon_r + \bar{C}_{66} \gamma^\circ r - \bar{C}_{i6} \alpha_i \Delta T \quad (i=1,2,3,6) \quad (51-3)$$

با ترکیب (3-49) و (3-51) تنش برشی غیر صفر را به فرم زیر می دهد:

$$\begin{aligned} \tau_{x\theta} &= \{ \bar{C}_{16} + (\bar{C}_{26} + \bar{C}_{36}) \Gamma \} \varepsilon_x^\circ + \{ \bar{C}_{66} + (\bar{C}_{26} + 2\bar{C}_{36}) \Omega \} \gamma^\circ r + [(\bar{C}_{26} + \bar{C}_{36}) \Psi - \bar{C}_{i6} \alpha_i] \Delta T \\ &+ (\bar{C}_{26} + \lambda \bar{C}_{36}) A_1 r^{\lambda-1} + (\bar{C}_{26} - \lambda \bar{C}_{36}) A_2 r^{-\lambda-1} \quad (i=1,2,3,6) \end{aligned} \quad (52-3)$$

تنش های عمودی بوسیله زیر مجموعه هایی از معادلات تشکیل دهنده تعیین می شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_\theta - \alpha_\theta \Delta T \\ \varepsilon_r - \alpha_r \Delta T \\ \gamma_{x\theta} - \alpha_{x\theta} \Delta T \end{Bmatrix} \quad (53-3)$$

که کرنش ها بوسیله (3-49) بدست می آید .
 نتایج روشنی که برای تنش های عمودی اظهار می شوند به فرم زیر است :

$$\sigma_x = \{ \bar{C}_{11} + (\bar{C}_{13} + \bar{C}_{12}) \Gamma \} \varepsilon_x^\circ + \{ \bar{C}_{16} + (\bar{C}_{12} + 2\bar{C}_{13}) \Omega \} \gamma^\circ r + [(\bar{C}_{12} + \bar{C}_{13}) \Psi - \bar{C}_{11} \alpha_i] \Delta T + (\bar{C}_{12} + \lambda \bar{C}_{13}) A_1 r^{\lambda-1} + (\bar{C}_{12} - \lambda \bar{C}_{13}) A_2 r^{-\lambda-1} \quad (i = 1, 2, 3, 6) \quad (54-3)$$

$$\sigma_\theta = \{ \bar{C}_{12} + (\bar{C}_{22} + \bar{C}_{23}) \Gamma \} \varepsilon_x^\circ + \{ \bar{C}_{26} + (\bar{C}_{22} + 2\bar{C}_{23}) \Omega \} \gamma^\circ r + [(\bar{C}_{22} + \bar{C}_{23}) \Psi - \bar{C}_{12} \alpha_i] \Delta T + (\bar{C}_{22} + \lambda \bar{C}_{23}) A_1 r^{\lambda-1} + (\bar{C}_{22} - \lambda \bar{C}_{23}) A_2 r^{-\lambda-1} \quad (i = 1, 2, 3, 6) \quad (55-3)$$

$$\sigma_r = \{ \bar{C}_{13} + (\bar{C}_{23} + \bar{C}_{33}) \Gamma \} \varepsilon_x^\circ + \{ \bar{C}_{36} + (\bar{C}_{23} + 2\bar{C}_{33}) \Omega \} \gamma^\circ r + [(\bar{C}_{23} + \bar{C}_{33}) \Psi - \bar{C}_{13} \alpha_i] \Delta T + (\bar{C}_{23} + \lambda \bar{C}_{33}) A_1 r^{\lambda-1} + (\bar{C}_{23} - \lambda \bar{C}_{33}) A_2 r^{-\lambda-1} \quad (i = 1, 2, 3, 6) \quad (56-3)$$

چهار مجهول : ε_x° ، γ° ، A_1 و A_2 برای تعیین باقی مانده است . پس به چهار معادله برای یافتن آنها احتیاج می باشد . اگر ε_x° و یا γ° داده شوند ، دو متغیر وابسته نیروی محوری P و گشتاور T باید تعیین شوند .

چهار معادله مورد نیاز برای تعیین مجهولات معادله تعادل نیروی محوری ، معادله تعادل گشتاور و شرایط مرزی تنش در سطوح داخلی و خارجی هستند .

3-1-10 - شرایط مرزی تنش عمودی

از شرایط مرزی (3-43) و (3-44) داریم :

$$\sigma_r(R_i) = -P_i \quad (57-3)$$

$$\sigma_r(R_0) = -P_0 \quad (58-3)$$

استفاده از (3-56) در شرایط مرزی دو معادله لازم را از چهار معادله برای بدست آوردن γ° ، ε_x° ، A_1 و A_2 حاضر می کند:

$$-P_i = \{\bar{C}_{13} + (\bar{C}_{23} + \bar{C}_{33})\Gamma\}\varepsilon_x^\circ + \{\bar{C}_{36} + (\bar{C}_{23} + 2\bar{C}_{33})\Omega\}\gamma^\circ r_i + [(\bar{C}_{23} + \bar{C}_{33})\Psi - \bar{C}_{13}\alpha_i]\Delta T + (\bar{C}_{23} + \lambda\bar{C}_{33})A_1 r_i^{\lambda-1} + (\bar{C}_{23} - \lambda\bar{C}_{33})A_2 r_i^{-\lambda-1} \quad (i=1,2,3,6) \quad (59-3)$$

$$-P_0 = \{\bar{C}_{13} + (\bar{C}_{23} + \bar{C}_{33})\Gamma\}\varepsilon_x^\circ + \{\bar{C}_{36} + (\bar{C}_{23} + 2\bar{C}_{33})\Omega\}\gamma^\circ r_0 + [(\bar{C}_{23} + \bar{C}_{33})\Psi - \bar{C}_{13}\alpha_1]\Delta T + (\bar{C}_{23} + \lambda\bar{C}_{33})A_1 r_0^{\lambda-1} + (\bar{C}_{23} - \lambda\bar{C}_{33})A_2 r_0^{-\lambda-1} \quad (i=1,2,3,6) \quad (60-3)$$

۳-۱-۱- نیروی محوری

نیروی محوری P_x مورد لزوم در انتهای لوله بوسیله انتگرال گیری تنش محوری σ_x در روی سطح مقطع لوله تعیین می شود. برای لوله با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_0 برای P_x بصورت زیر بیان می شود:

$$P_x = \int_{R_i}^{R_0} 2\pi\sigma_x r dr \quad (61-3)$$

با استفاده از تنش محوری (3-54) در (3-61) ما سومین معادله را بدست می آوریم:

$$P_x = 2\pi\{\bar{C}_{11} + (\bar{C}_{13} + \bar{C}_{12})\Gamma\}\varepsilon_x^\circ \left(\frac{R_0^2 - R_i^2}{2}\right) + 2\pi\{\bar{C}_{16} + (\bar{C}_{12} + 2\bar{C}_{13})\Omega\}\gamma^\circ \left(\frac{R_0^3 - R_i^3}{3}\right) + 2\pi[(\bar{C}_{12} + \bar{C}_{13})\Psi - \bar{C}_{11}\alpha_i]\Delta T \left(\frac{R_0^2 - R_i^2}{3}\right) + 2\pi\frac{(\bar{C}_{12} + \lambda\bar{C}_{13})}{\lambda+1}A_1(R_0^{\lambda+1} - R_i^{\lambda+1}) + 2\pi\frac{(\bar{C}_{12} - \lambda\bar{C}_{13})}{-\lambda+1}A_2(R_0^{-\lambda+1} - R_i^{-\lambda+1}) \quad (i=1,2,3,6) \quad (62-3)$$

۳-۱-۱- گشتاور

گشتاور T_x بوسیله انتگرال گیری ممان تنش برشی $\tau_{x\theta}$ از (۳ - ۵۲) در روی سطح مقطع لوله تعیین می شود .

$$T_x = \int_{R_i}^{R_o} 2\pi\tau_{x\theta}r^2 dr \quad (۳ - ۶۳)$$

با جایگذاری (۳ - ۵۲) در (۳ - ۶۳) و انتگرال گیری آخرین معادله لازم بدست می آید :

$$(۳ - ۶۴)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_x = & 2\pi\{\bar{C}_{16} + (\bar{C}_{26} + \bar{C}_{36})\Gamma\}\varepsilon_x^\circ \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{3}\right) + 2\pi\{\bar{C}_{66} + (\bar{C}_{26} + 2\bar{C}_{36})\Omega\}\gamma^\circ \left(\frac{R_o^4 - R_i^4}{4}\right) \\ & + 2\pi[(\bar{C}_{26} + \bar{C}_{36})\Psi - \bar{C}_{16}\alpha_i]\Delta T \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{3}\right) \\ & + 2\pi(\bar{C}_{26} + \lambda\bar{C}_{36})\frac{A_1}{\lambda+2}(R_o^{\lambda-2} - R_i^{\lambda-2})r^{\lambda-2} + 2\pi(\bar{C}_{26} - \lambda\bar{C}_{36})\frac{A_2}{2-\lambda}(R_o^{2-\lambda} - R_i^{2-\lambda}) \end{aligned} \quad (i = 1,2,3,6)$$

۳ - ۱ - ۱۳ - بارگذاری ترمومکانیکی

معادلات (۳ - ۵۹) ، (۳ - ۶۰) ، (۳ - ۶۲) و (۳ - ۶۴) تشکیل چهار معادله ای را می دهد که حل مسائل ترمومکانیکی را فراهم می آورد . با داشتن ΔT چهار مجهول A_1 ، A_2 ، ε_x° یا P_x و γ° یا T_x را داریم .

۳ - ۱ - ۱۴ - بارگذاری حرارتی خالص

بارگذاری حرارتی تنها با تغییرات دمایی غیر صفر مطابق است که P_i ، P_o ، P_x و T_x تماما صفر هستند و چهار مجهول ε_x° ، γ° ، A_1 و A_2 داریم . کرنش محوری ε_x° به ازای واحد تغییرات دمایی مطابق با ضریب انبساط حرارتی محوری α_x ، و γ° به ازای واحد تغییرات دمایی با ضریب پیچش حرارتی مطابق است ، که آن را با α_γ نمایش می دهیم .

۳ - ۱ - ۱۵ - جهت گیری های خاص الیاف

برای موارد خاص از لایه چینی اورتوروپیک و اورتوروپیک عرضی ساده نویسی هایی در عباراتی برای جابجایی های شعاعی w است . عبارات برای جابجایی محوری u (۳ - ۳۸) و جابجایی مماسی v (۳ - ۳۹) بدون تغییر می مانند . با تغییرات در w ، عبارات تنش و کرنش تغییر می کند . در دو بخش بعدی اصلاحاتی که در عبارت جابجایی شعاعی w است ارائه می شود . در تفسیری صریح می توان بیان

نمود که اختصاص دادن مشتقات جزئی برای بدست آوردن کرنش و سپس جایگزینی آنها در معادلات تشکیل دهنده برای بدست آوردن تنش استفاده می شود .

۳ - ۱ - ۱۵ - ۱ - لایه های ارتوروپیک

اگر لایه ای ارتوروپیک است از قبیل جهت گیری ۹۰ درجه ضریب سختی \bar{C}_{16} ، \bar{C}_{26} و \bar{C}_{36} برای لایه برابر با صفر است ، بطوریکه Ω در رابطه (۳ - ۳۶) است . راه حل اصلاح ODE (۳ - ۳۲) به این فرم است :

$$w(r) = A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda} + \Gamma \varepsilon_x^\circ r + \Psi r \Delta T \quad (۳ - ۶۵)$$

بطوریکه اشاره شد از معادلات (۳ - ۵۴) تا (۳ - ۵۶) تمام مولفه های کوپلینگ های بین تنش عمودی و پیچش ، γ° ، برای لایه های ارتوروپیک ناپدید می شوند . و از (۳ - ۶۵) می بینیم که جابجایی شعاعی w از پیچش γ° غیر کوپل است .

۳ - ۱ - ۱۵ - ۲ - لایه های ارتوروپیک عرضی

در مباحث قبلی ، اگر لایه ارتوروپیک عرضی در صفحه r, θ باشد ، بطوریکه برای جهت گیری صفر درجه الیاف) ساده سازی افزونتری اتفاق می افتد . برای لایه ای ایزوتروپ عرضی $\bar{C}_{16} = \bar{C}_{26} = \bar{C}_{36} = 0$ و $\bar{C}_{12} = \bar{C}_{13}$ و $\bar{C}_{22} = \bar{C}_{33}$ و $\lambda = 1$ و $\alpha_r = \alpha_\theta$ و $\Gamma = \Omega = \Sigma = 0$ و ODE حاکم برای جابجایی شعاعی ، w ، کاهش می یابد به :

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{w}{r^2} = 0 \quad (۳ - ۶۶)$$

که حل آن

$$w(r) = A_1 r + A_2 r^{-1} \quad (۳ - ۶۷)$$

۳ - ۲ - استوانه لمینیتی

راه حل برای لمینیت استوانه یا لوله چند لایه ، مستقیماً از روابط گسترش یافته برای لوله تک لایه با ترکیبی اضافه در زمینه خواص مواد برای لایه ای به لایه دیگر و نیاز به شرط پیوستگی تنش و جابجایی در لایه های میانی انجام می شود . برای یک لوله لمینیت N لایه در حالت عمومی $6N$ مجهول ε_x° ، γ° ، E ، F ، A_1 و A_2 برای هر لایه داریم . هرچند ، نشان خواهیم داد برای شرایط بارگذاری فقط با تنش

عمودی (فشار) در سطوح داخلی و خارجی (همچنین تنش برشی صفر در این سطوح) ، ثابت های E و F در تمام لایه ها برابر با صفر هستند و پیوستگی جابجایی بین لایه ها به اینک ε_x° و γ° در تمام لوله ثابت باشند احتیاج دارد . این کاهش تعداد مجهولات را به $2N+2$ می رساند . عبارات مجهول ε_x° ، γ° ، $A_1^{(k)}$ و $A_2^{(k)}$ ($k=1, \dots, N$) . در ادامه بحث حالت عمومی لایه k را مورد بررسی قرار می دهیم .

۳ - ۲ - ۱ - جابجایی لایه

حالت عمومی جابجایی برای لایه k ام از لوله لمینیتی تحت بارگذاری متقارن محوری با پیروی از (۳ - ۳۸) تا (۳ - ۴۰) به فرم زیر است :

$$u^{(k)}(x, r) = \varepsilon_x^{o(k)} x - \bar{S}_{45}^{(k)} \frac{E^{(k)}}{r} + \bar{S}_{55}^{(k)} F^{(k)} \ln r \quad (۳ - ۶۸)$$

$$v^{(k)}(x, r) = \gamma^{o(k)} x r - \bar{S}_{44}^{(k)} \frac{E^{(k)}}{2r} - \bar{S}_{45}^{(k)} F^{(k)} \quad (۳ - ۶۹)$$

$$w^{(k)}(r) = A_1^{(k)} r^\lambda + A_2^{(k)} r^{-\lambda} + \Gamma^{(k)} \varepsilon_x^{o(k)} r + \Omega^{(k)} \gamma^{o(k)} r^2 + \Psi^{(k)} r \Delta T \quad (۳ - ۷۰)$$

۳ - ۲ - ۲ - شرایط پیوستگی کشش

پیوستگی در کشش بین لایه ها احتیاج دارد که دو تنش برشی بین لایه ای $\tau_{\theta r}$ و τ_{xr} از لایه ای به لایه دیگر پیوسته باشد . شروط پیوستگی (۳ - ۱۴) را استفاده و از هر کدام از سطوح داخلی یا خارجی که بررسی نماییم مشخص است که تنش برشی صفر است که نشان می دهد ثابت های $E^{(k)}$ و $F^{(k)}$ در تمام لایه ها برابر با صفر است .

$$E^{(k)} = F^{(k)} = 0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (۳ - ۷۱)$$

پس تعداد کل مجهولات در مسئله از $6N$ به $4N$ کاهش یافت .

از (۳ - ۱۴) و (۳ - ۷۱) نتیجه جالبی که بدست می آید آن است که تنش های برشی بین لایه ای τ_{xr} و $\tau_{\theta r}$ در سراسر طول برابر صفر برای لوله لمینیتی تحت فشار یکنواخت متقارن محوری در سراسر طول است .

$$\tau_{\theta r}^{(k)} = \tau_{rx}^{(k)} = 0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (۳ - ۷۲)$$

۳ - ۲ - ۳ - شرایط پیوستگی و جابجایی

برای لایه هایی که بخوبی به هم بسته شده ، تمام جابجایی ها، شامل جابجایی محوری u ، باید از لایه ای به لایه دیگر پیوسته باشد . پس در یک عبارت کلی (۳ - ۳۸) برای جابجایی محوری u (با $E^{(k)} = F^{(k)} = 0$ از رابطه (۳ - ۷۱)) احتیاج است که کرنش محوری برای تمام لایه ها ثابت باشد :

$$\varepsilon_x^{(k)} = \varepsilon^0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (۳ - ۷۳)$$

همچنین جابجایی مماسی v نیز باید از لایه ای به لایه دیگر پیوسته باشد . پس از عبارت کلی (۳ - ۳۹) برای v (با $E^{(k)} = F^{(k)} = 0$ از رابطه (۳ - ۷۱)) لازم است که زاویه پیچش به ازای واحد طول در تمام لایه ها ثابت باشد .

$$\gamma_x^{(k)} = \gamma^0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (۳ - ۷۴)$$

۳ - ۲ - ۴ - کاهش جابجایی ها

با $E^{(k)} = F^{(k)} = 0$ و اینکه ε_x^0 و γ_x^0 در سراسر لوله ثابت است ، جابجایی خاص از لایه k ام از روابط (۳ - ۷۳) تا (۳ - ۷۴) را می توان به فرم ساده شده زیر نوشت :

$$u^{(k)}(x, r) = \varepsilon_x^{(k)} x \quad (۳ - ۷۵)$$

$$v^{(k)}(x, r) = \gamma_x^{(k)} x r \quad (۳ - ۷۶)$$

$$w^{(k)}(r) = A_1^{(k)} r^\lambda + A_2^{(k)} r^{-\lambda} + \Gamma^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} r + \Omega^{(k)} \gamma_x^{(k)} r^2 + \Psi^{(k)} r \Delta T \quad (۳ - ۷۷)$$

در روابط بالا ملاحظه می شود که در x داده شده ، جابجایی محوری یکسانی در سراسر ضخامت لوله وجود دارد و جابجایی مماسی بصورت خطی با r تغییر می کند . جابجایی شعاعی حالت تغییرات پیچیده تری دارد ، اما فقط تابعی از r است .

۳ - ۲ - ۵ - کرنش های لایه

جابجایی های خاص یک لایه (۳ - ۷۵) الی (۳ - ۷۷) برای لوله لمینیتی با روابط (۳ - ۳۸) الی (۳ - ۴۰) که برای تک لایه است زمانی برابر است که خواص مادی یک لایه و ثوابت مجهول A_1 و A_2 برای لایه مورد نظر اختصاص یابد . پس روابط کرنش (۳ - ۴۹) برای لایه های یک لوله لمینیتی زمانی اختصاص داده می شود که اصلاحاتی در زمینه خواص و ثوابت داده شود . کرنش ها را می توان به فرم زیر نوشت :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(k)} &= \lambda^{(k)} A_1^{(k)} r^{\lambda^{(k)}-1} - \lambda^{(k)} A_2^{(k)} r^{-\lambda^{(k)}-1} + \Gamma^{(k)} \varepsilon_x^\circ + 2\Omega^{(k)} \gamma^\circ r + \Psi^{(k)} \Delta T \\ \varepsilon_\theta &= A_1^{(k)} r^{\lambda^{(k)}-1} + A_2^{(k)} r^{-\lambda^{(k)}-1} + \Gamma^{(k)} \varepsilon_x^\circ + \Omega^{(k)} \gamma^\circ r + \Psi^{(k)} \Delta T \\ \varepsilon_x &= \varepsilon_x^\circ \\ \gamma_{\theta r} &= 0 \\ \gamma_{xr} &= 0 \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma^\circ r \end{aligned} \quad (78-3)$$

۳-۲-۶ - تنش های لایه

ملاحظه شد که در (۳-۷۲) زمانی تنش های برشی بین لایه ای لوله لمینیتی برابر با صفر می شود که کشش سطوح در سطح داخلی و خارجی محدود به تنش های عمودی باشد. تنش های خاص لایه های باقی مانده از معادلات تشکیل دهنده (۳-۱۰) و کرنش ها (۳-۷۸) پیروی می کند. نتایج مشابه آنهایی که در (۳-۵۲) و (۳-۵۴) تا (۳-۵۶) داده شده، با اختصاص دادن اصلاحاتی برای خواص و ثوابت لایه ها هستند، پس:

$$\begin{aligned} \tau_{x\theta} &= \{ \bar{C}_{16} + (\bar{C}_{26} + \bar{C}_{36}) \Gamma \} \varepsilon_x^\circ + \{ \bar{C}_{66} + (\bar{C}_{26} + 2\bar{C}_{36}) \Omega \} \gamma^\circ r + [(\bar{C}_{26} + \bar{C}_{36}) \Psi - \bar{C}_{16} \alpha_i] \Delta T \\ &+ (\bar{C}_{26} + \lambda \bar{C}_{36}) A_1 r^{\lambda-1} + (\bar{C}_{26} - \lambda \bar{C}_{36}) A_2 r^{-\lambda-1} \quad (i = 1, 2, 3, 6) \end{aligned} \quad (79-3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \{ \bar{C}_{11} + (\bar{C}_{13} + \bar{C}_{12}) \Gamma \} \varepsilon_x^\circ + \{ \bar{C}_{16} + (\bar{C}_{12} + 2\bar{C}_{13}) \Omega \} \gamma^\circ r + [(\bar{C}_{12} + \bar{C}_{13}) \Psi - \bar{C}_{11} \alpha_i] \Delta T \\ &+ (\bar{C}_{12} + \lambda \bar{C}_{13}) A_1 r^{\lambda-1} + (\bar{C}_{12} - \lambda \bar{C}_{13}) A_2 r^{-\lambda-1} \quad (i = 1, 2, 3, 6) \end{aligned} \quad (80-3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \{ \bar{C}_{12} + (\bar{C}_{22} + \bar{C}_{23}) \Gamma \} \varepsilon_x^\circ + \{ \bar{C}_{26} + (\bar{C}_{22} + 2\bar{C}_{23}) \Omega \} \gamma^\circ r + [(\bar{C}_{22} + \bar{C}_{23}) \Psi - \bar{C}_{12} \alpha_i] \Delta T \\ &+ (\bar{C}_{22} + \lambda \bar{C}_{23}) A_1 r^{\lambda-1} + (\bar{C}_{22} - \lambda \bar{C}_{23}) A_2 r^{-\lambda-1} \quad (i = 1, 2, 3, 6) \end{aligned} \quad (81-3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \{ \bar{C}_{13} + (\bar{C}_{23} + \bar{C}_{33}) \Gamma \} \varepsilon_x^\circ + \{ \bar{C}_{36} + (\bar{C}_{23} + 2\bar{C}_{33}) \Omega \} \gamma^\circ r + [(\bar{C}_{23} + \bar{C}_{33}) \Psi - \bar{C}_{13} \alpha_i] \Delta T \\ &+ (\bar{C}_{23} + \lambda \bar{C}_{33}) A_1 r^{\lambda-1} + (\bar{C}_{23} - \lambda \bar{C}_{33}) A_2 r^{-\lambda-1} \quad (i = 1, 2, 3, 6) \end{aligned} \quad (82-3)$$

۳-۲-۷ - نیروی محوری

نیروی محوری P_x در انتهای لوله بوسیله انتگرال گیری از تنش محوری σ_x در روی سطح مقطع تعریف می شود، برای لوله N لایه با شعاع داخلی R_i و شعاع خارجی R_o بصورت زیر بیان می شود:

$$P_x = \int_{R_i}^{R_o} 2\pi \sigma_x r dr = 2\pi \sum_{k=1}^N \int_{k-1}^k \sigma_x^{(k)}(r) r dr \quad (83-3)$$

این رابطه یکی از معادلات لازم جهت تعیین مجهولات مسئله را فراهم می آورد .

۳ - ۲ - ۸ - گشتاور

گشتاور T_x نیز در وضعیت مشابه ای با انتگرال گیری ممان تنش برشی $\tau_{x\theta}$ در روی سطح مقطع لوله تعیین می شود ، پس :

$$T_x = \int_{R_i}^{R_o} 2\pi\tau_{x\theta}r^2 dr = 2\pi \sum_{k=1}^N \int_{r_{k-1}}^{r_k} \tau_{x\theta}^{(k)}(r)r^2 dr \quad (۳ - ۸۴)$$

این رابطه دومین معادله لازم جهت تعیین مجهولات مسئله را فراهم می آورد .

۳ - ۲ - ۹ - شرایط مرزی

شرایط مرزی برای یک سیلندر لمینیتی با تنها بارگذاری فشاری در سطوح داخلی و خارجی همانند حالت تک لایه ، با اختصاص دادن اصلاحاتی برای خواص و شماره لایه ها است . در سطح داخلی $r = R_i$ ($k=1$) شرایط مرزی برای σ_r بصورت زیر است :

(۳ - ۸۵)

$$-P_i = \left\{ \bar{C}_{13}^{(1)} + (\bar{C}_{23}^{(1)} + \bar{C}_{33}^{(1)})\Gamma^{(1)} \right\} \epsilon_x^\circ + \left\{ \bar{C}_{36}^{(1)} + (\bar{C}_{23}^{(1)} + 2\bar{C}_{33}^{(1)})\Omega^{(1)} \right\} \gamma^\circ R_i + \left[(\bar{C}_{23}^{(1)} + \bar{C}_{33}^{(1)})\Psi^{(1)} - \bar{C}_{13}^{(1)}\alpha_i^{(1)} \right] \Delta T \\ + (\bar{C}_{23}^{(1)} + \lambda^{(1)}\bar{C}_{33}^{(1)})A_1^{(1)}R_i^{\lambda^{(1)}-1} + (\bar{C}_{23}^{(1)} - \lambda^{(1)}\bar{C}_{33}^{(1)})A_2^{(1)}R_i^{-\lambda^{(1)}-1} \quad (i=1,2,3,6)$$

معادلات مشابه ای شرایط مرزی را در سطح خارجی ($k=N$) $r = R_o$ تشریح می کند :

(۳ - ۸۶)

$$-P_o = \left\{ \bar{C}_{13}^{(N)} + (\bar{C}_{23}^{(N)} + \bar{C}_{33}^{(N)})\Gamma^{(N)} \right\} \epsilon_x^\circ + \left\{ \bar{C}_{36}^{(N)} + (\bar{C}_{23}^{(N)} + 2\bar{C}_{33}^{(N)})\Omega^{(N)} \right\} \gamma^\circ R_o + \left[(\bar{C}_{23}^{(N)} + \bar{C}_{33}^{(N)})\Psi^{(N)} - \bar{C}_{13}^{(N)}\alpha_i^{(N)} \right] \Delta T \\ + (\bar{C}_{23}^{(N)} + \lambda^{(N)}\bar{C}_{33}^{(N)})A_1^{(N)}R_o^{\lambda^{(N)}-1} + (\bar{C}_{23}^{(N)} - \lambda^{(N)}\bar{C}_{33}^{(N)})A_2^{(N)}R_o^{-\lambda^{(N)}-1} \quad (i=1,2,3,6)$$

پس اکنون دو معادله دیگر برای حل مسئله در اختیار داریم .

۳ - ۲ - ۱۰ - پیوستگی مورد استفاده در کشش و جابجایی

دو معادله باقی مانده پیوستگی مورد نیاز که باید برای هر لایه میانی ارضا شوند ، پیوستگی در تنش شعاعی σ_r و پیوستگی شعاعی w هستند . برای یک لمینیت N لایه با $N-1$ سطح میانی این شرایط $2(N-1)$ معادله مورد نیاز را برای اتمام معادلات ارائه می کند . می توان این شرایط پیوستگی را به فرم زیر بنویسیم :

$$w^{(k)} = w^{(k+1)} \quad (\text{int erfaces } k = 1, N-1) \quad (۸۷ - ۳)$$

$$\sigma_r^{(k)} = \sigma_r^{(k+1)} \quad (\text{int erfaces } k = 1, N-1) \quad (۸۸ - ۳)$$

که جابجایی شعاعی از رابطه (۳ - ۷۷) و تنش شعاعی در (۳ - ۸۲) داده شده است .

۳ - ۲ - ۱۱ - معادلات برای لوله لمینیتی

مجهولات مسئله لوله لمینیتی که شرح داده شد شامل NA_1 ، NA_2 ، ε_x° و γ° که در مجموع $2N+2$ مجهول است . معادلات پیوستگی ، معادله تعادل نیروی محوری ، معادله تعادل گشتاور و دو شرط مرزی در سطوح که حل همزمان این معادلات مجهولات معادلات شرح داده شده را فراهم می کند . [25]

فصل چهارم

۴ - نتایج

با توجه به مطالب ارائه شده در فصل دوم و سوم می توان تحلیلی از یک مخزن استوانه ای N لایه داشت . در بخش دوم این فصل برای نتیجه گیری بهتر و داشتن نتایج کامل و ایجاد دیدی کلی جابجایی ، کرنش و تنش های حاصله در حالت بارگذاری مکانیکی و ترمومکانیکی از سه روش حل مجزا کلاسیک ، الاستیسیته و یک حل نرم افزار اجزا محدود مانند ANSYS برای یک لایه چینی ارائه و با هم مقایسه می شود . در ادامه بخش دوم ، نتایج حل به روش الاستیسیته را برای سه حالت بارگذاری مکانیکی ، ترمومکانیکی و حرارتی خالص برای لایه چینی دیگری ارائه و بررسی می شود . در آخر بخش دوم تاثیر لایه چینی در توزیع تنش ، کرنش و جابجایی ارائه و با هم مقایسه می شوند . باتوجه به اینکه اکثر نمودارها بر حسب تغییرات شعاع هستند ، برای استفاده راحت تر ، آنها را برحسب شماره لایه ها نمایش داده می شود بطوریکه عدد صفر نمایشگر شعاع داخلی مخزن و آخرین عدد نمایشگر شعاع خارجی می باشد .

می توان در ادامه به نتایجی تکمیلی از قبیل مدول موثر محوری ، مدول برشی ، ضریب انبساط حرارتی طولی و شعاعی و موارد دیگری در مورد خواص مکانیکی مخزن نیز رسید . استفاده از این نتایج نقش مهمی در طراحی مخازن و عملکرد آنها در شرایط مختلف کاری دارد . این نتایج بصورت تابعی از نسبت شعاع داخلی به ضخامت مخزن R_i / h برای استوانه های پادمتقارن دو لایه در بخش سوم ارائه و با نتایج مرجع [25] مقایسه می شود . در انتها ، این نتایج برای کامپوزیت پادمتقارن چهار لایه گسترش داده شده و در بخش چهارم ارائه می گردد . بطور کلی نتایج بدست آمده مربوط به کامپوزیت کربن/اپوکسی T300/5208 می باشد که خواص آن در جدول ۴ - ۱ آمده است .

جدول ۴ - ۱ برخی خواص کامپوزیت تک جهته

Material	T300/5208
E_1 Axial modulus GPa (Msi)	132 (19.2)
$E_2 = E_3$ Transverse modulus GPa (Msi)	10.8 (1.56)
Poisson`s ratio $\nu_{12} = \nu_{13}$	0.24
Poisson`s ratio ν_{23}	0.59
$G_{12} = G_{13}$ Shear modulus GPa (Msi)	5.65 (0.82)
G_{23} Shear modulus GPa (Msi)	3.38 (0.49)
α_1 Axial CTE $\mu/^\circ\text{C}$ ($\mu/^\circ\text{F}$)	-0.77 (-0.43)
$\alpha_2 = \alpha_3$ Transverse CTE $\mu/^\circ\text{C}$ ($\mu/^\circ\text{F}$)	25 (13.6)
V_f Fiber volume fraction	0.62

۴ - ۱ - انتخاب مخزن

مشخصات مخزنی که قرار است آنالیز شود از نوع CNG-4 می باشد . مشخصه این نوع مخزن آن است که توسط رشته پیچی ماریپیچ در تمام قسمتها و رشته پیچی محیطی در قسمت استوانه تولید می شود . جنس لاینر این نوع از مخازن غیر فلزی است . تعداد لایه های با پیچش ماریپیچ هشت عدد و تعداد پیچش محیطی دو عدد می باشد . تعداد لایه هایی که معمولا برای مخازن CNG-4 در نظر گرفته می شود حداقل ۶ لایه ماریپیچ و یک لایه محیطی است . البته با افزایش تعداد لایه ها مقاومت و بالنتیجه وزن مخزن افزایش یافته و تغییرات تنش در جهت ضخامت یکنواخت تر خواهد شد . در قسمت داخل مخزن یک لاینر از جنس مواد پلیمری کشیده شده است که از دو جهت لازم است : اول اینکه از نشت گاز به خارج جلوگیری می کند و دوم اینکه در طولانی مدت از اثرات شیمیایی اکسیژن ، بخار آب و گازهای دیگر که بطور ناخواسته با متان مخلوط می باشند بر روی کامپوزیت جلوگیری می نمایند . زاویه پیچش الیاف θ نسبت به محور استوانه سنجیده می شود و در مراجع مختلف این قاعده رعایت می شود . این مقادیر برای هر لایه در جدول ۴ - ۲ آورده شده .

جدول ۴ - ۲ زاویه پیچش الیاف نسبت به محور استوانه برحسب درجه برای سه نوع چیدمان مختلف

زاویه	زاویه	زاویه	زاویه	زاویه	زاویه	زاویه	زاویه	زاویه	زاویه	
لایه اول	لایه دوم	لایه سوم	لایه چهارم	لایه پنجم	لایه ششم	لایه هفتم	لایه هشتم	لایه نهم	لایه دهم	
۲۵/۴	۲۹/۶	۵۳/۷	۵۳/۸	۵۳/۸	۸۸	-۸۸	-۵۳/۷	-۲۹/۶	-۲۵/۴	چیدمان A
۲۵/۴	-۲۵/۴	۲۹/۶	۲۹/۶	۵۳/۷	۵۳/۷	-۵۳/۷	۵۳/۸	۸۸	-۸۸	چیدمان B
-۸۸	-۵۳/۸	-۵۳/۷	۲۹/۶	۲۵/۴	-۲۵/۴	-۲۹/۶	-۵۳/۷	۵۳/۸	۸۸	چیدمان C

در مراجع مختلف ضخامت لایه ها بین ۰/۳ الی ۲/۵ میلیمتر ذکر شده است. دو لایه با زوایای ۸۸ و ۸۸- درجه انتخاب شده که این انتخاب با مدارک تجربی تایید شده و علت آن حرکت مکانیزم پیچش الیاف در حین دوران ماندل می باشد. این بدان معنی است که پیچش الیاف با زاویه ۹۰ درجه تقریباً غیر ممکن است و مقدار واقعی این زاویه بستگی به شعاع ماندل، سرعت زاویه ای ماندل و سرعت حرکت خطی مکانیزم پیچش الیاف در راستای محور دوران دارد و بنابراین مقدار ثابتی نبوده و در مراجع مختلف از ۸۷ تا ۹۹/۵ درجه ذکر شده است. برای هر سه نوع چیدمان ضخامت هریک از لایه ها بجز ۸۸ و ۸۸- برابر ۲/۱۹۳ میلیمتر و برای این دو لایه برابر ۲/۰۲ میلیمتر است.

ابعاد مخزن حتی الامکان با ابعاد مخزن فلزی که جهت استفاده در خودروهای سواری مناسب است یکی گرفته شده تا مقایسه نتایج با سهولت بیشتری انجام شود. این مخازن که در خودروهای سبک استفاده می شود عمدتاً قطر داخلی ۱۰ اینچ می باشد یعنی شعاع تقریبی داخلی این مخازن حدود ۱۲۷ میلیمتر است که شعاع مخزن مورد نظر برای آنالیز در محدوده قابل قبولی برای استفاده در خودروهای سواری می باشد. شعاع داخلی برای تمامی چیدمان ها برابر ۱۵۱ میلیمتر و طول قسمت استوانه ای مخزن برابر ۶۰۰ میلیمتر می باشد. همچنین کلیه نتایج برای حالتی که فشار داخلی برابر ۲۰ مگا پاسگال است، و در مواردی که تاثیر مکانیکی تغییرات دما مورد نظر است، اختلاف دما را برابر ۵۰+ درجه سانتیگراد در نظر گرفته شده است.

در دو سر این مخزن کلگی هایی قرار دارد که بصورت یکپارچه و همزمان با بدنه استوانه ای مخزن تولید می شوند^۱. معمولاً بر روی یکی از کلگی ها نازل نصب و در کلگی دیگر شیر تخلیه اضطراری نصب می گردد. بطور کلی حجم کلگی مسطح حدود چهار برابر حجم کلگی نیم کره است. این دلیل موجب

^۱ این روش بر اساس استانداردهای جهانی فقط برای مخازنی با قطرهای محدود کاربرد دارد.

افزایش وزن و قیمت نهایی محصول شده و فقط در موارد خاص از آن استفاده می کنند. سایر اشکال کلگی (مثل بیضی) از نظر حجم و وزن بین اشکال مسطح و نیم کره قرار دارد. بطور کلی در کاربردهای مهندسی تنش ها در بحرانی ترین مقاطع بررسی و تحلیل می گردد، در مخازن به دلیل آنکه تمرکز تنش در سطوح کروی نصف مقدار تنش متمرکز در سطوح استوانه ای می باشد و کلگی ایجاد شده به روش رشته پیچی به دلایل تغییرات ضخامت در راستای شعاع^۱، (فاصله تا محور استوانه) مشخص نبودن وضعیت لایه ها و خواص مکانیکی ایجاد شده و مواردی دیگر، تحلیل کلگی ها در این قسمت صورت نگرفته است.

۴ - ۲ - ۱ - تحلیل و مقایسه روش های حل مخزن کامپوزیتی

در این بخش جابجایی، کرنش و تنش های حاصله در حالت بارگذاری مکانیکی و ترمومکانیکی از سه روش حل مجزا کلاسیک، الاستیسیته و نرم افزار اجزا محدود ANSYS برای لایه چینی نوع B ارائه و با هم مقایسه می شود.

الف - جابجایی های حاصله تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

همانطور که در بخش های قبلی ملاحظه شد هر یک از روش های حل دارای مزیت ها و محدودیتهای است و هر کدام دارای یک سری پاسخ است که در ادامه ملاحظه می شود در روشی دیگر پاسخی برای آن در نظر گرفته نشده و یا به عبارت دیگر از آن صرفه نظر می شود. مثلا جابجایی ها در روش کلاسیک در دسته پاسخ ها قرار ندارد. لذا در این بخش فقط جابجایی های حاصله از حل به روش الاستیسیته و نرم افزار ارائه می شود.

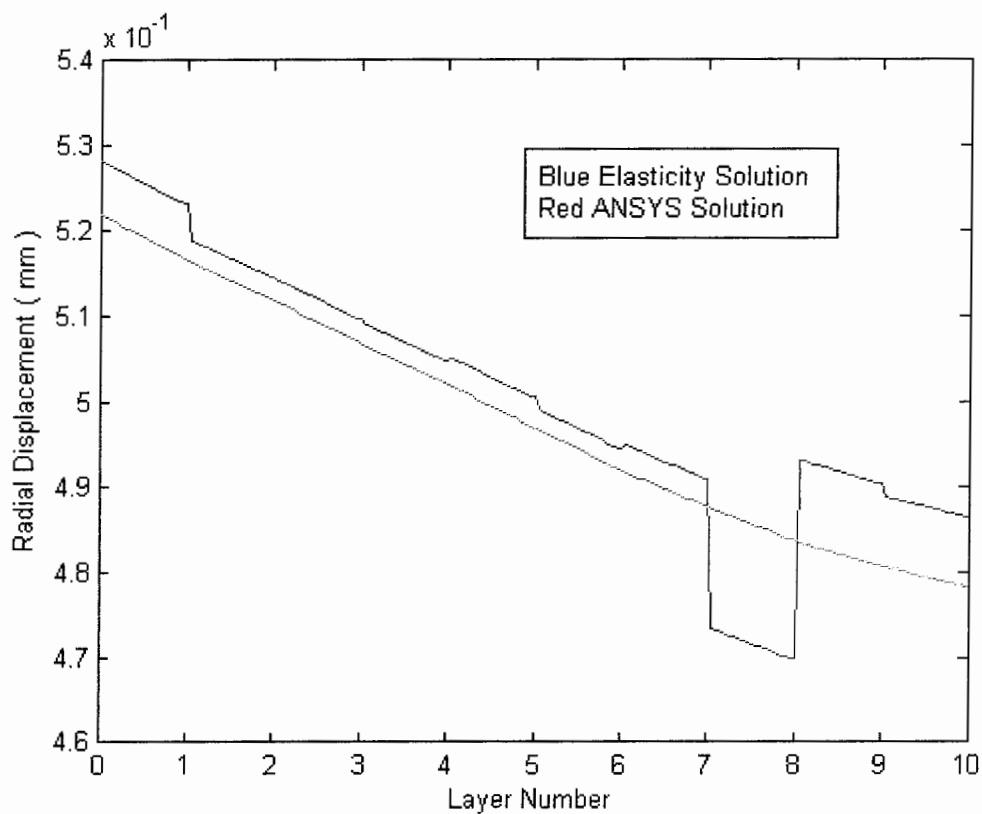
• جابجایی شعاعی تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

• در شکل ۴ - ۱ جابجایی شعاعی تحت بار گذاری مکانیکی مشاهده می شود. همانطور که ملاحظه می شود مقدار جابجایی شعاعی در لایه های آخر دارای مقدار کوچکتری نسبت به لایه های ابتدایی است. این امر به دلیل زاویه لایه های آخر است.

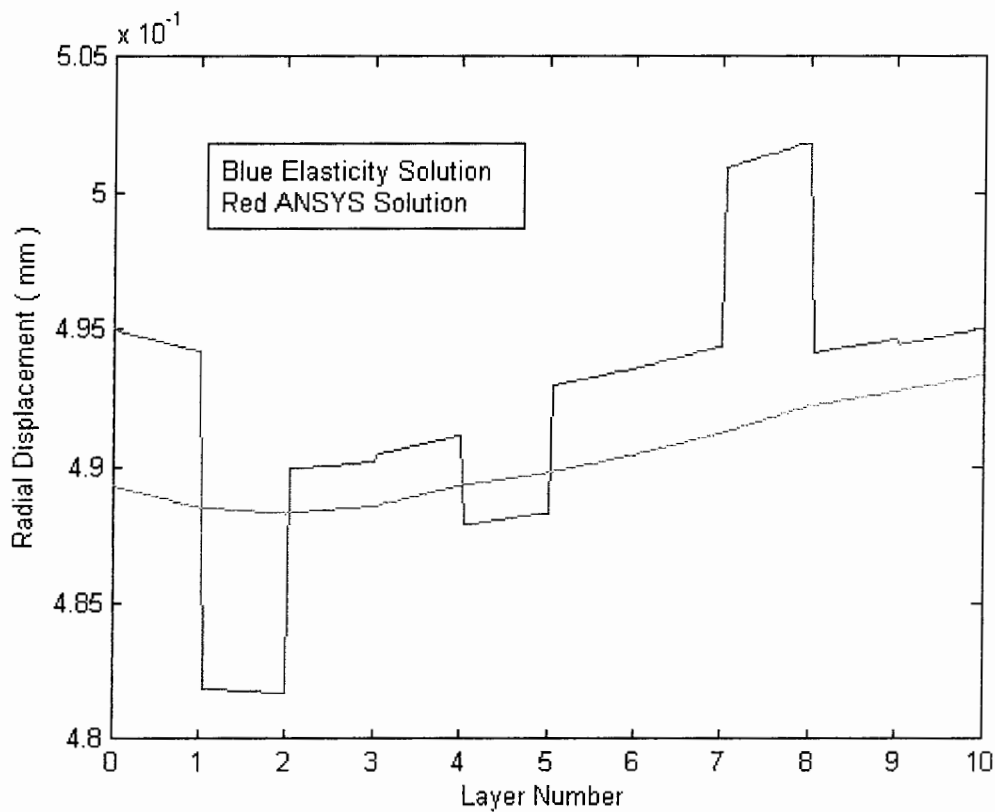
در شکل ۴ - ۲ جابجایی شعاعی تحت بار گذاری ترمومکانیکی مشاهده می شود. در این حالت علاوه بر نیرو های مکانیکی نیروهای ناشی از بارگذاری حرارتی نیز در در جابجایی تاثیر خود را به نمایش گذاشته و برخلاف حالت قبلی که بر اثر بارگذاری مکانیکی ما شاهد سیر نزولی جابجایی شعاعی بودیم ولی در این حالت از لایه دوم به بعد به تدریج افزایش مقدار جابجایی شعاعی را داریم.

^۱ این افزایش ضخامت از قسمت اتصال به بدنه شروع و با کاهش شعاع (فاصله تا محور استوانه) این مقدار به دو برابر ضخامت استوانه می رسد.

در مورد بارگذاری مکانیکی در بیشترین حالت دارای ۲ درصد اختلاف در پاسخ ها هستیم که این مقدار برای بارگذاری ترمومکانیکی در بیشترین حالت به ۵/۵ درصد می رسد .



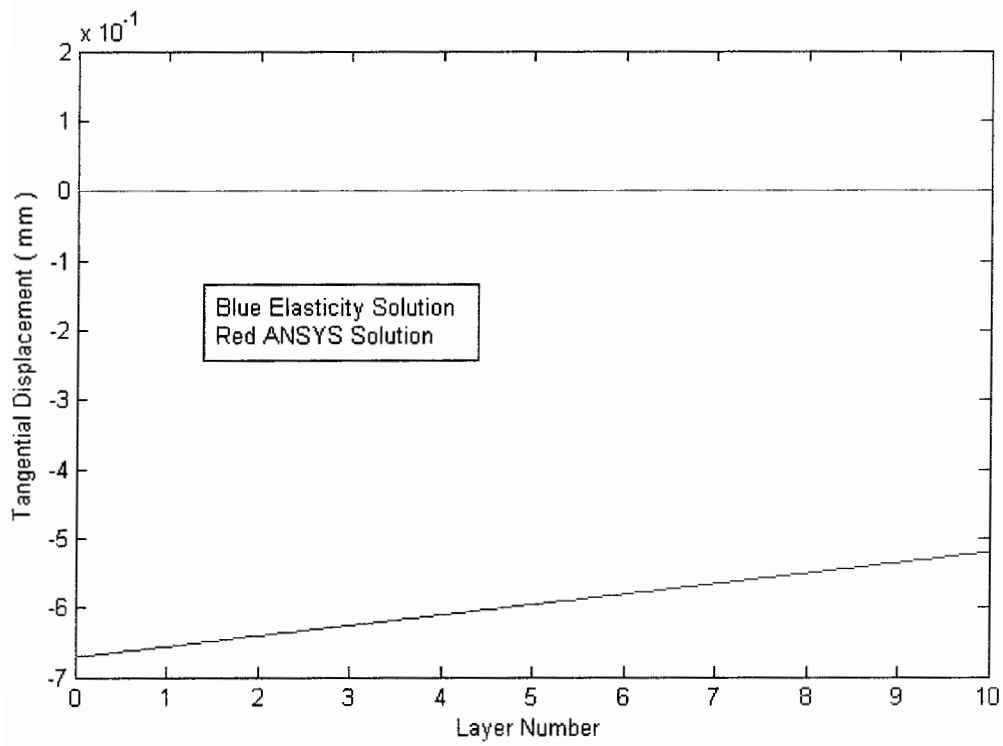
شکل ۴ - ۱ جابجایی شعاعی W تحت بارگذاری مکانیکی



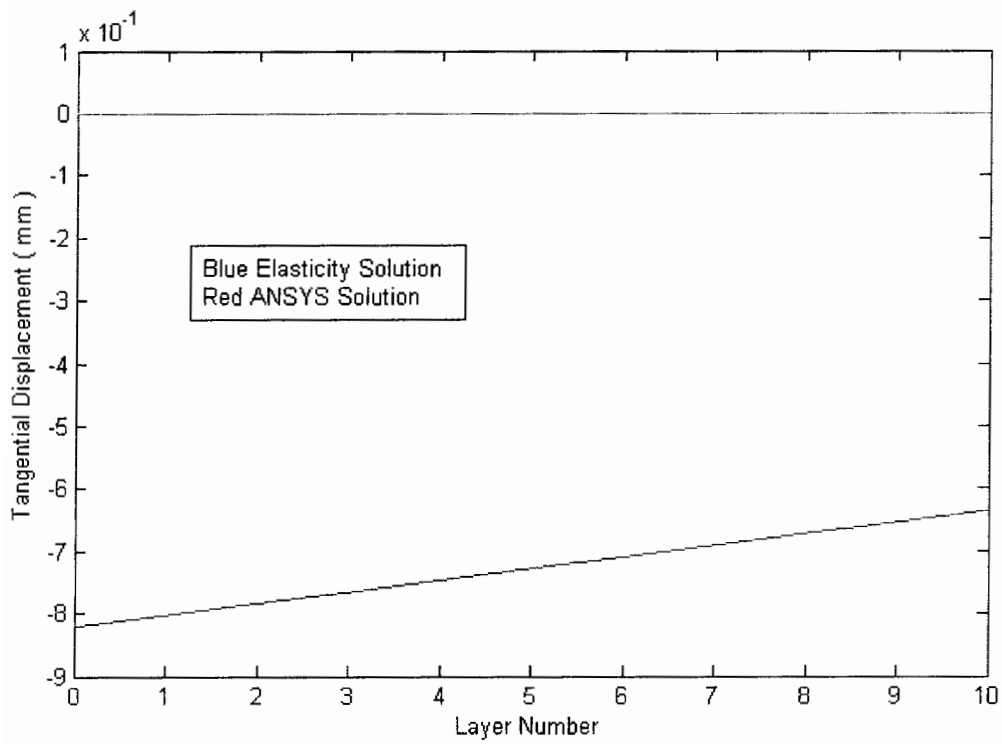
شکل ۴ - ۲ جابجایی شعاعی w تحت بارگذاری ترمومکانیکی

• جابجایی مماسی تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

جابجایی مماسی با توجه به روابط بدست آمده در فصل قبل تابع دو متغیر r و x است که با توجه به اینکه اکثر نمودارها بر حسب تغییرات شعاع هستند و برای استفاده راحت تر، بر حسب شماره لایه ها نمایش داده شده اند، پیرو این قضیه جابجایی مماسی نیز تنها بر حسب تغییرات شعاع بررسی می شود. در شکل ۴ - ۳ جابجایی مماسی بر حسب تغییرات شعاعی تحت تاثیر بارگذاری مکانیکی ارائه شده است. همچنین در شکل ۴ - ۴ این تغییرات را بر اثر بارگذاری ترمومکانیکی شاهد هستیم. پاسخ نرم افزار یک مقدار بسیار کوچک است که دقیقاً برابر با صفر نیست.



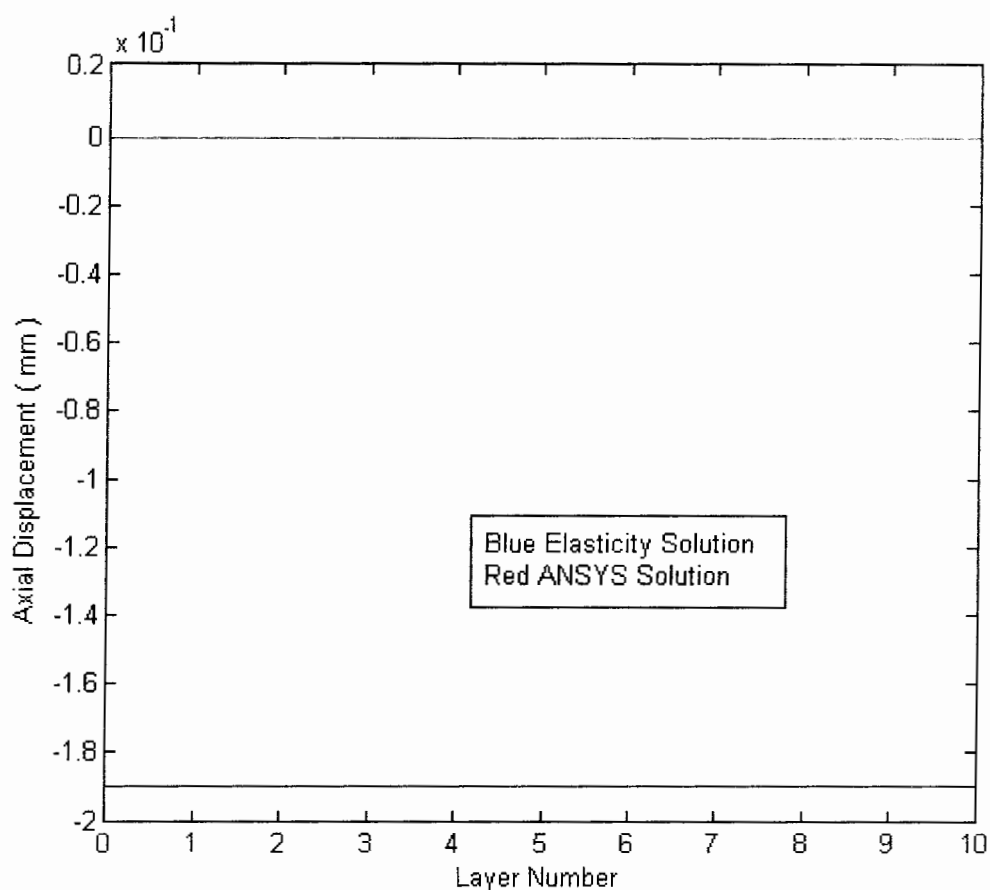
شکل ۴-۳ جابجایی مماسی ۷ تحت بارگذاری مکانیکی



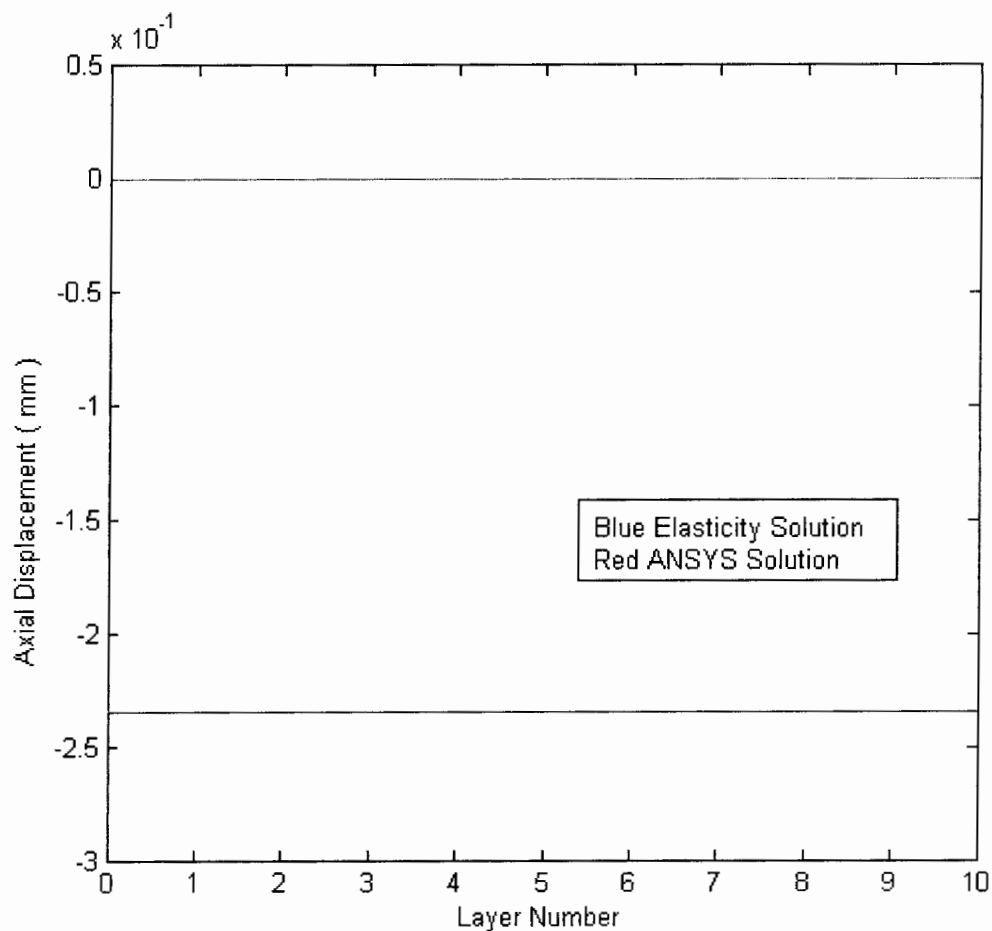
شکل ۴-۴ جابجایی مماسی ۷ تحت بارگذاری ترمومکانیکی

• جابجایی محوری تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

تغییرات جابجایی محوری همانطور که در فصل سوم ملاحظه نمودید تابعی از شعاع نیست و تغییرات آن برحسب تغییرات در راستای محور سیلندر می باشد اما برای هماهنگی بیشتر نتایج این بخش نیز مانند حالت قبل برحسب تغییرات شعاع برای x ثابت نمایش داده شده . در شکل ۴ - ۵ جابجایی محوری برحسب تغییرات شعاعی تحت تاثیر بارگذاری مکانیکی و همچنین در شکل ۴ - ۶ این تغییرات را بر اثر بارگذاری ترمومکانیکی شاهد هستیم .



شکل ۴ - ۵ جابجایی محوری u تحت بارگذاری مکانیکی



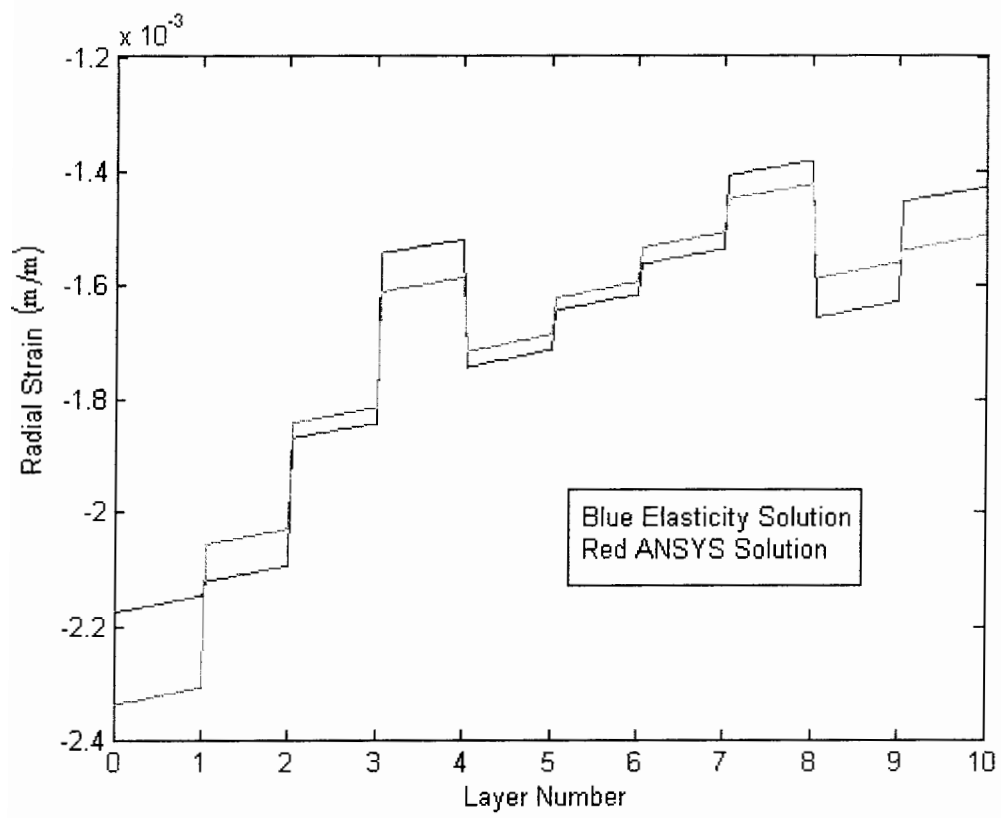
شکل ۴ - ۶ جابجایی محوری u تحت بارگذاری ترمومکانیکی

ب - کرنش های حاصله تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

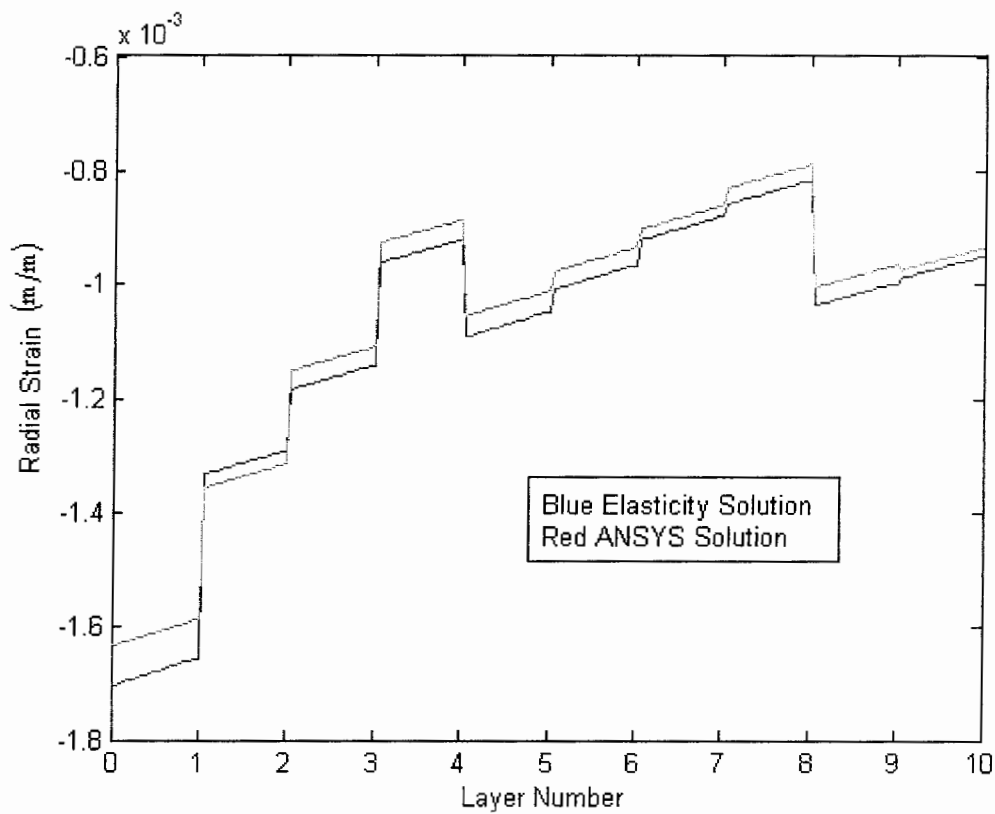
همانطور که در فصل سوم توضیح داده شد با حل همزمان معادلاتی که مطرح شده به دسته پاسخهای دیگری در مورد کرنش می رسیم که از اهمیت خاصی در مسائل مهندسی و طراحی دارد. در همان فصل نشان داده شده که برخی از کرنش های برشی مانند $\gamma_{\theta r}$ و γ_{rx} در شرایط بارگذاری مطرح شده برابر با صفر است که همین کرنش ها دارای مقادیری غیر صفر در حل به کمک نرم افزار هستند.

• کرنش شعاعی تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

در شکل ۴ - ۷ کرنش حاصله از بارگذاری مکانیکی را ملاحظه می کنید. مقادیر کرنش شعاعی از حدود $2/2$ - هزارم در شعاع داخلی مخزن شروع و به مقداری در حدود $1/5$ - هزارم در لایه خارجی افزایش می یابد. با بررسی شکل ۴ - ۸ که مربوط به همان چیدمان ولی با بارگذاری ترمومکانیکی است مشخص می شود که کرنش محوری ایجاد شده تحت بارگذاری ترمومکانیکی از حدود $1/65$ - هزارم شروع و بطور صعودی به مقدار $0/97$ - هزارم می رسد. در اینجا پاسخ الاستیسیته و نرم افزار از الگویی یکسان پیروی می کنند ولی تفاوت هایی در مقدار با یکدیگر دارند.



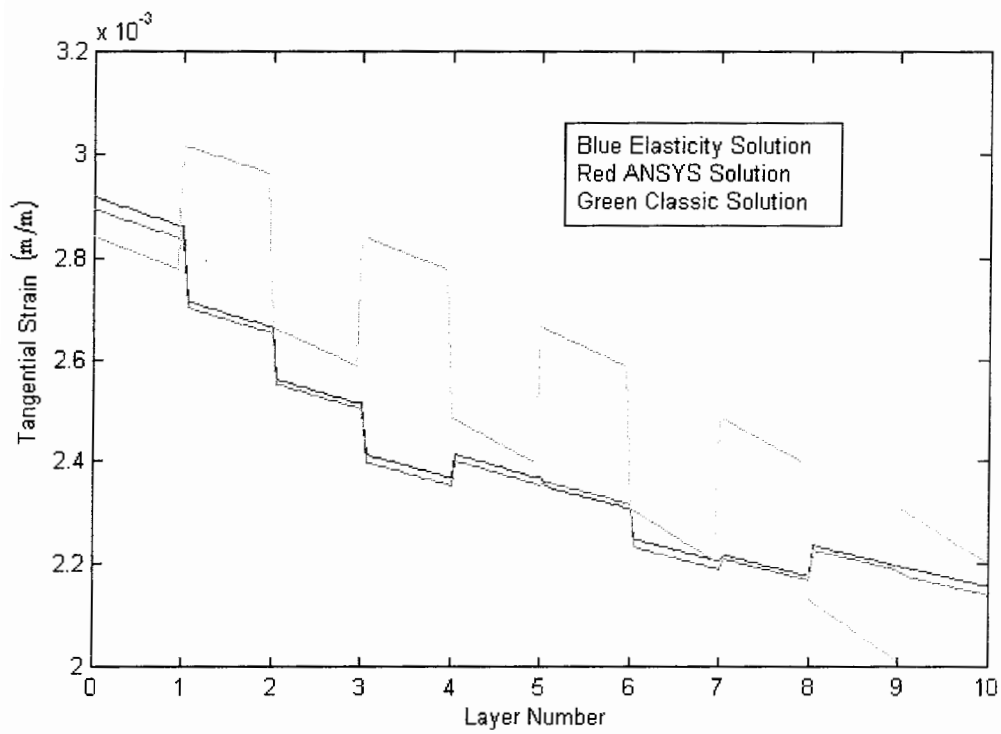
شکل ۴ - کرنش شعاعی ϵ_r تحت بار مکانیکی



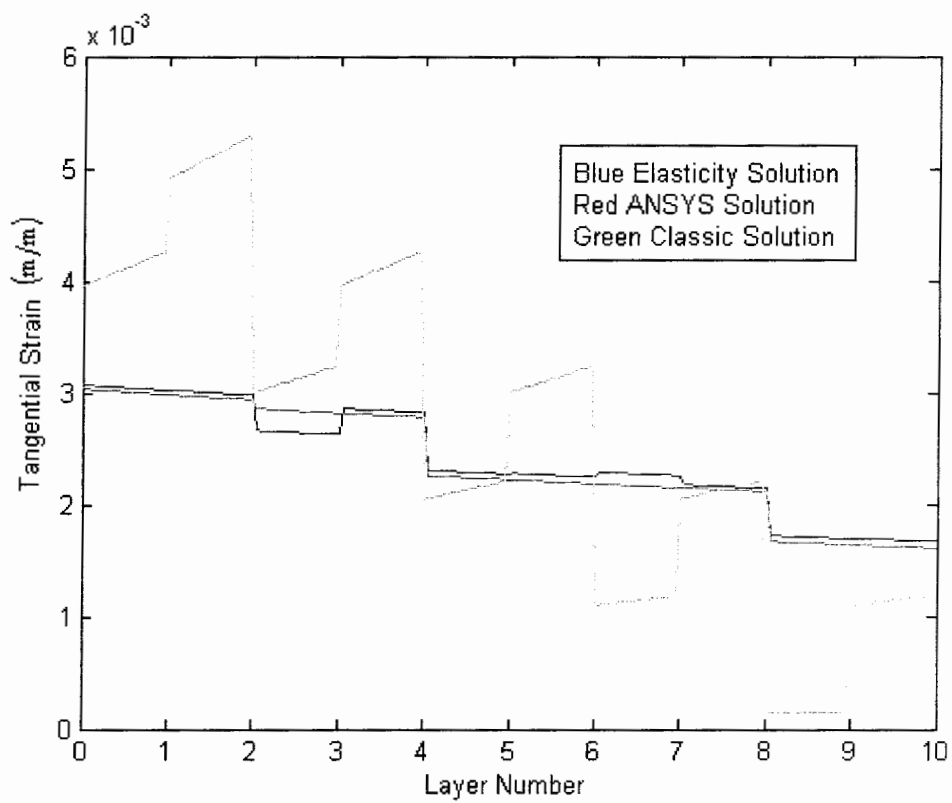
شکل ۴ - ۸ کرنش شعاعی ϵ_r تحت بار ترمومکانیکی

• کرنش مماسی تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

در شکل ۴ - ۹ و ۴ - ۱۰ کرنش های مماسی حاصله از بارگذاری مکانیکی و ترمومکانیکی به نمایش گذاشته شده است. همانطور که ملاحظه می شود در این نمودارها علاوه بر منحنی های حل ANSYS و الاستیسیته منحنی روش کلاسیک که در فصل دوم شرح داده شد وجود دارد، که با مقایسه آن متوجه اختلاف پاسخ در برخی قسمت ها می شویم. همچنین این نمودار دارای نوسانات شدیدتری نسبت به نمودارهای پاسخ نرم افزار و الاستیسیته است.



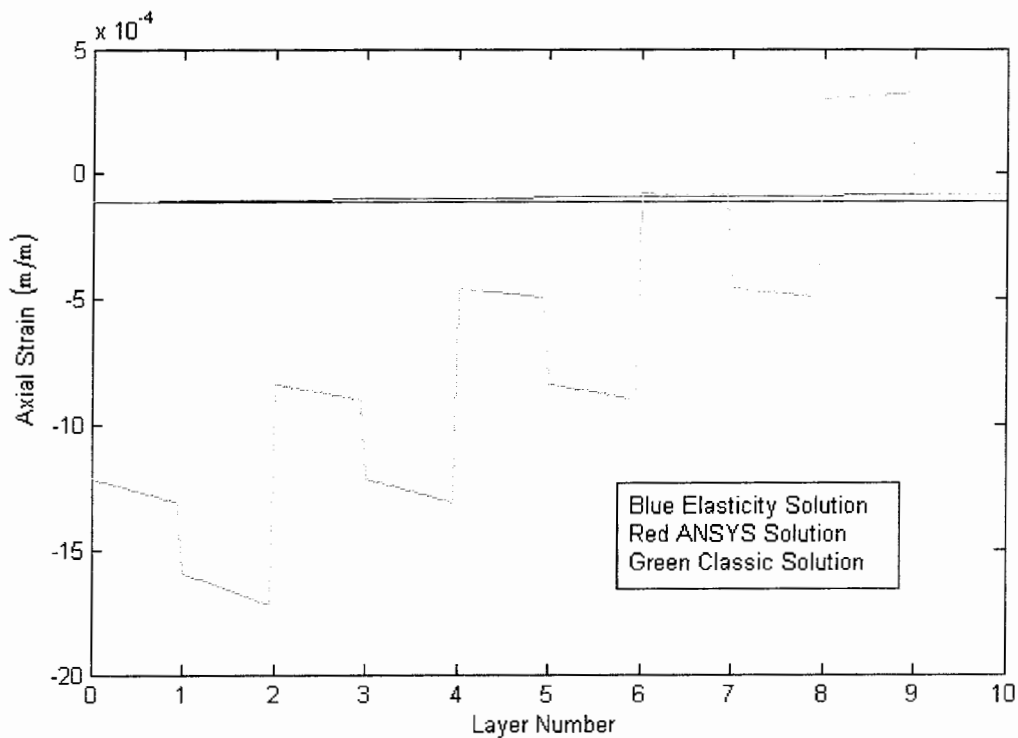
شکل ۹-۴ کرنش مماسی ϵ_{θ} تحت بار مکانیکی



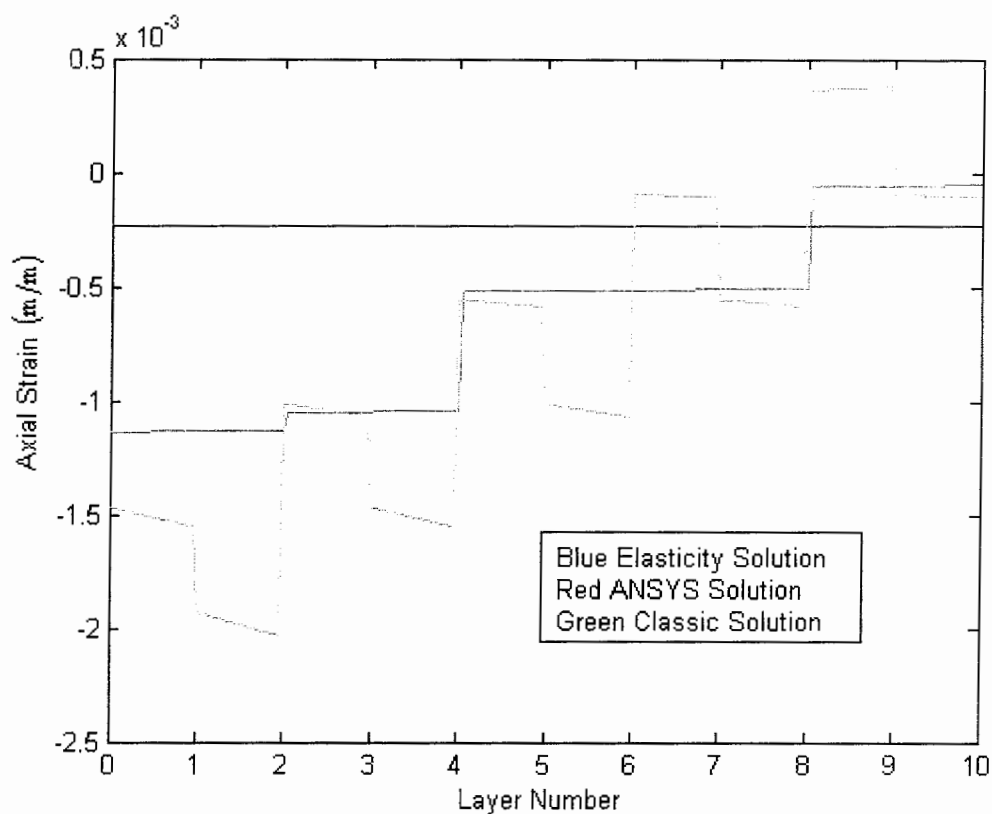
شکل ۱۰-۴ کرنش مماسی ϵ_{θ} تحت بار ترمومکانیکی

• کرنش محوری تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

از دیگر نتایج بدست آمده کرنش محوری است که در شکل ۴ - ۱۱ تحت بارگذاری مکانیکی و در شکل ۴ - ۱۲ تحت بارگذاری ترمومکانیکی آن را مشاهده می کنید. همانطور که در فصل سوم شرح داده شد، پاسخ روش حل الاستیسیته به یک بارگذاری خاص عددی ثابت است که با ϵ_x° نمایش داده می شود. اما همانطور که در شکل های ۴ - ۱۱ و بخصوص ۴ - ۱۲ نشان داده شده دو روش حل دیگر این مقدار را بصورت خطوط ناپیوسته ای که مقدار آن در هر لایه متفاوت است نمایش می دهند. در مجموع تحت بارگذاری خاص به عنوان مثال آنچه که در شکل ۴ - ۱۱ وجود دارد، اشاره به این نکته که پاسخ غیر پیوسته و متغیر نرم افزار را می توان با تقریب خوبی، خطی در نظر گرفت.



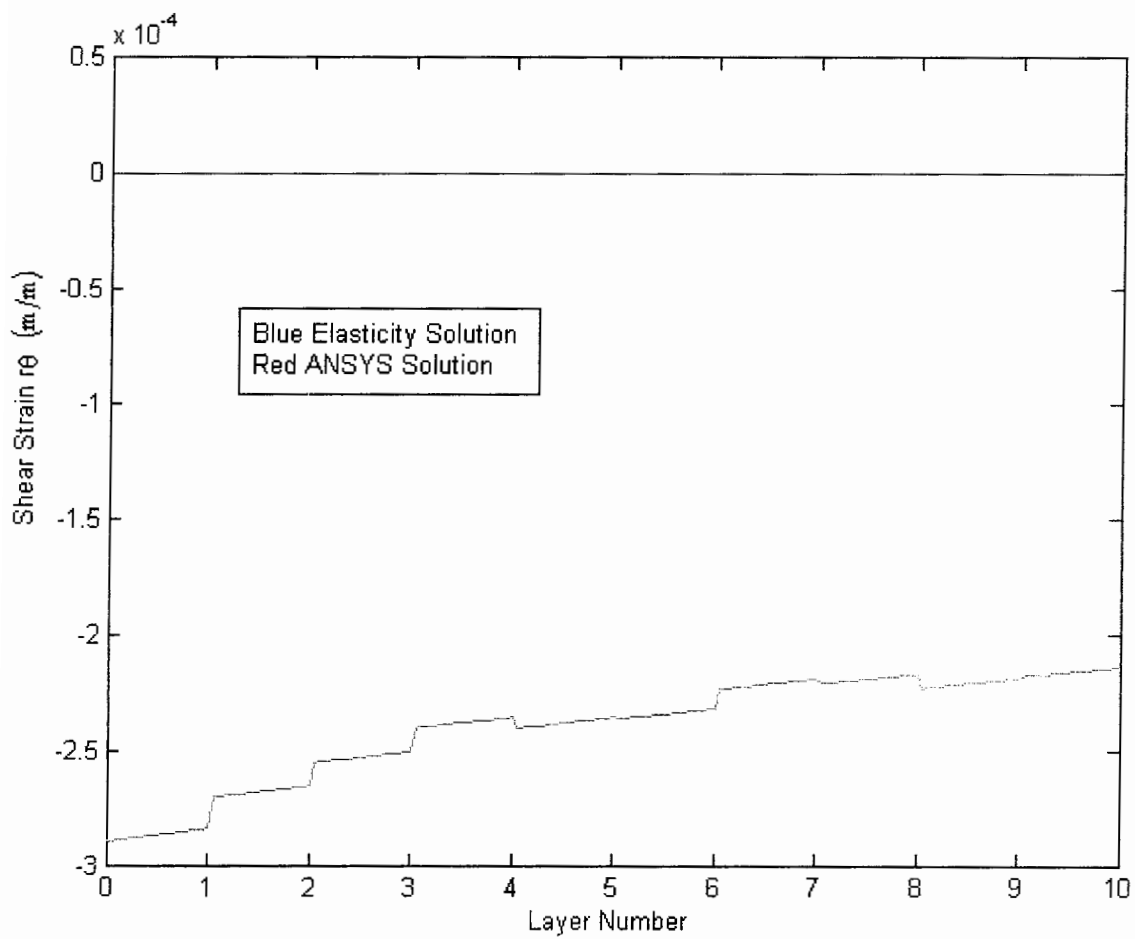
شکل ۴ - ۱۱ کرنش محوری ϵ_x تحت بار مکانیکی



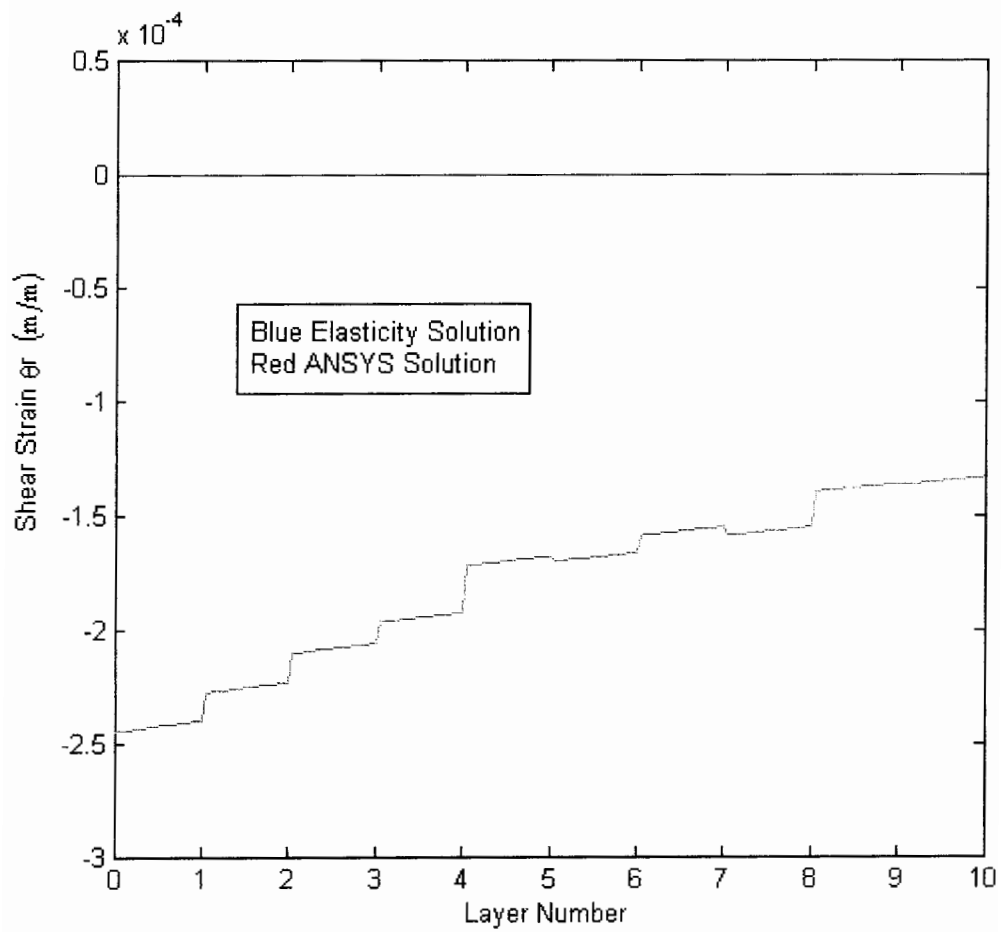
شکل ۴ - ۱۲ کرنش محوری ϵ_x تحت بار ترمومکانیکی

• کرنش های برشی تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

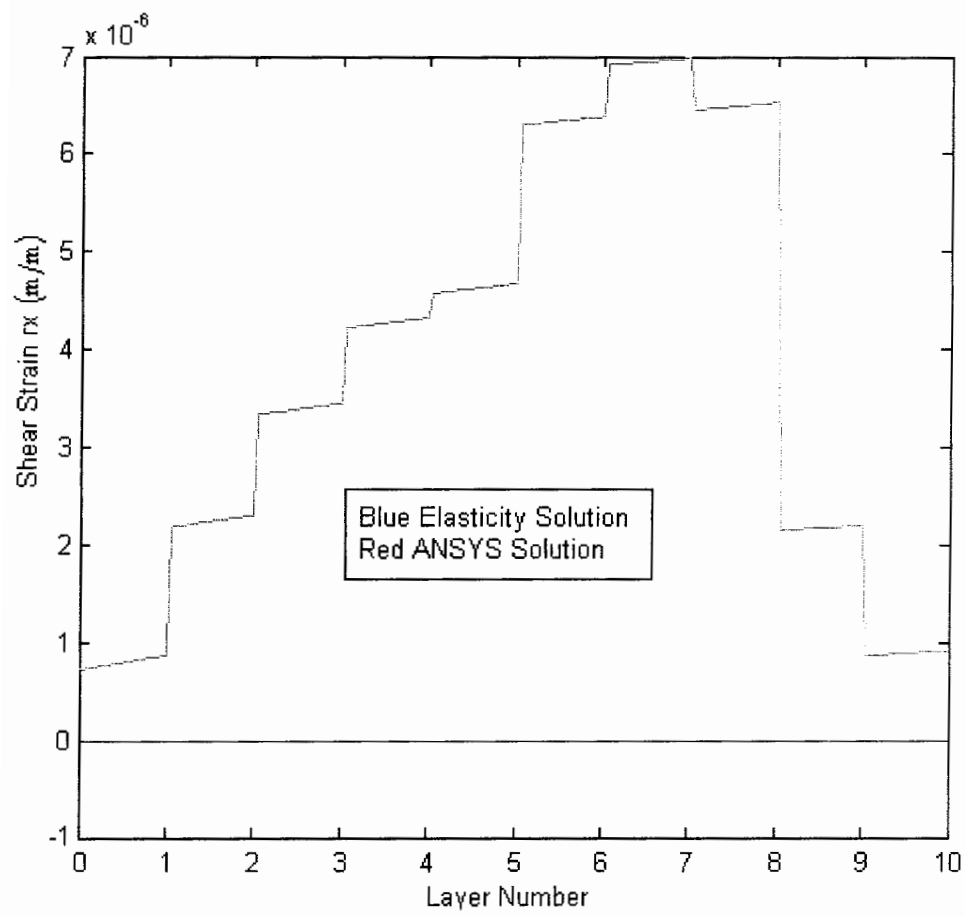
کرنش های برشی یکی از مهمترین دسته پاسخ هایی است که در تئوری های شکست مربوط به مواد مرکب به آن توجه و استفاده می شود. در روش کلاسیک به دلیل آنکه در جهت ضخامت لمینا تحلیلی صورت نمی گیرد و یا به عبارت دیگر از آن صرفه نظر می شود، بالطبع فقط یک کرنش برشی $\gamma_{\theta x}$ را داریم. از طرف دیگر در روابط نشان داده شده مربوط به حل الاستیسیته کرنش های برشی γ_{rx} و $\gamma_{\theta r}$ برابر با صفر در نظر گرفته می شود. اما در تحلیل به کمک نرم افزار، این مقادیر را غیر صفر و حتی در مواردی با مقدار اختلاف زیاد با مقدار بدست آمده از روش الاستیسیته بدست خواهیم آورد. در شکل های ۴ - ۱۳ الی ۴ - ۱۸ نکاتی که در بالا به آن اشاره شد قابل درک و بررسی است.



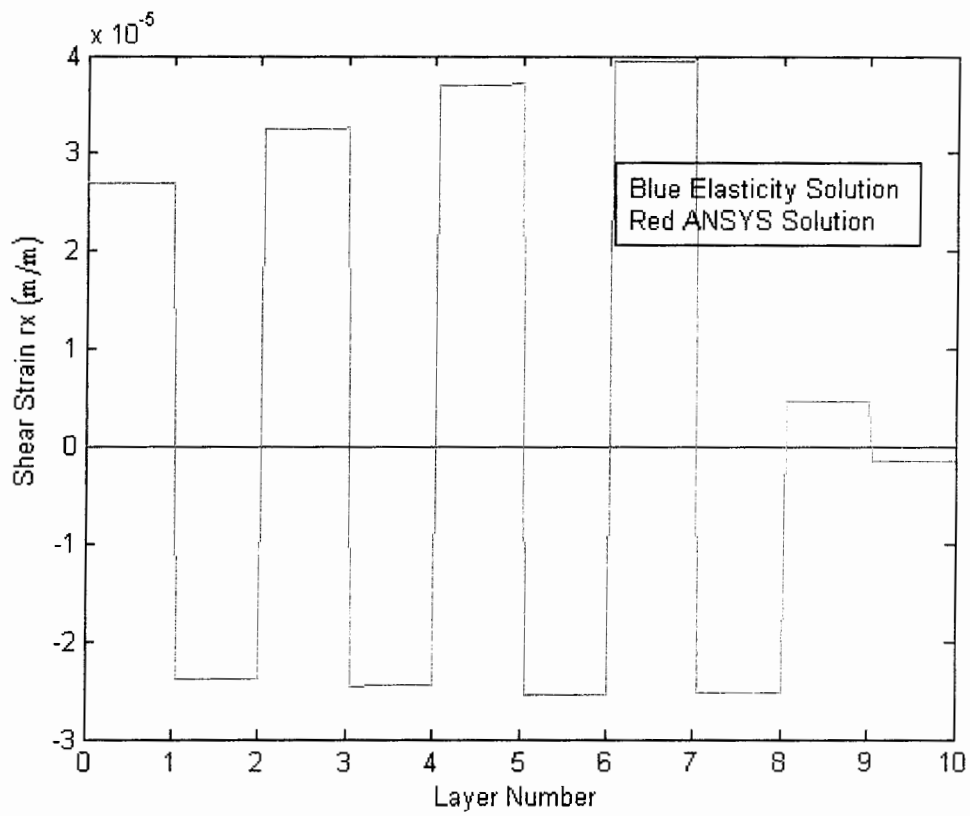
شکل ۴ - ۱۳ کرنش برشی $\gamma_{r\theta}$ تحت بار مکانیکی



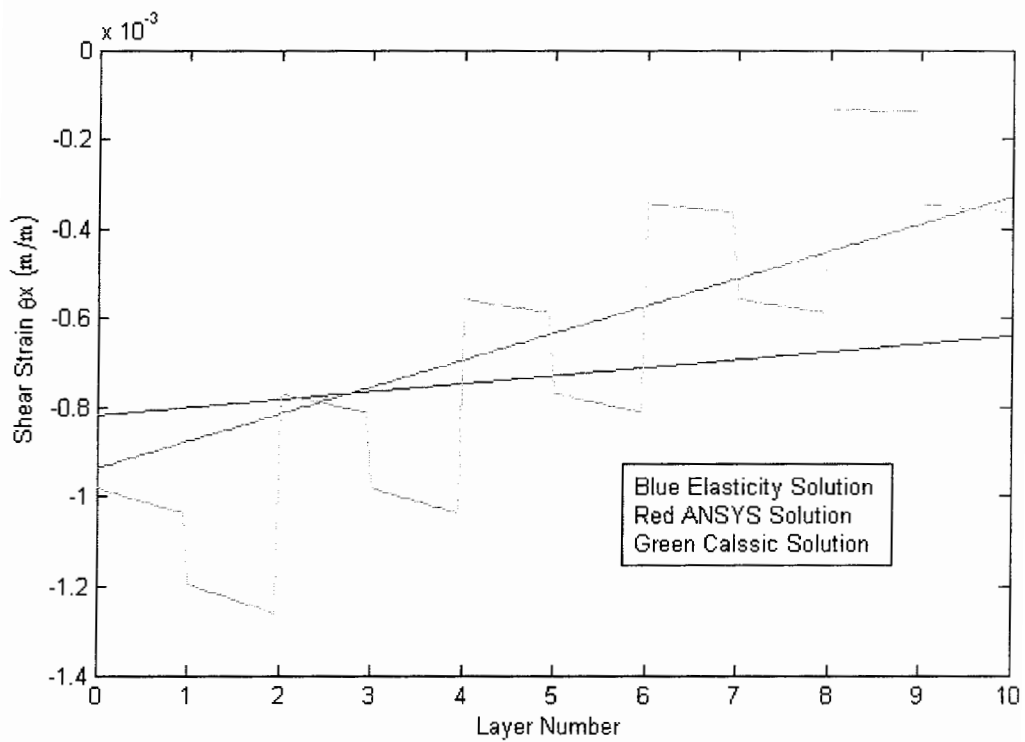
شکل ۴-۱۴ کرنش برشی $\gamma_{r\theta}$ تحت بار ترمومکانیکی



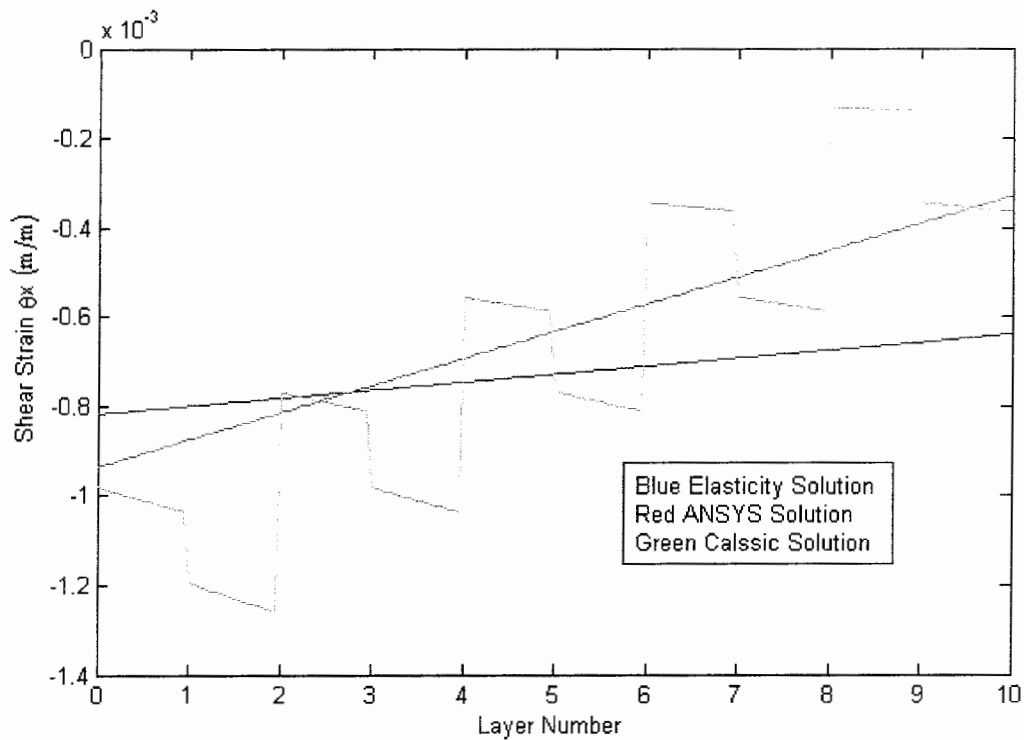
شکل ۴-۱۵ کرنش برشی γ_{rx} تحت بار مکانیکی



شکل ۴-۱۶ کرنش برشی γ_{rx} تحت بار ترمومکانیکی



شکل ۴-۱۷ کرنش برشی γ_{θ_x} تحت بار مکانیکی



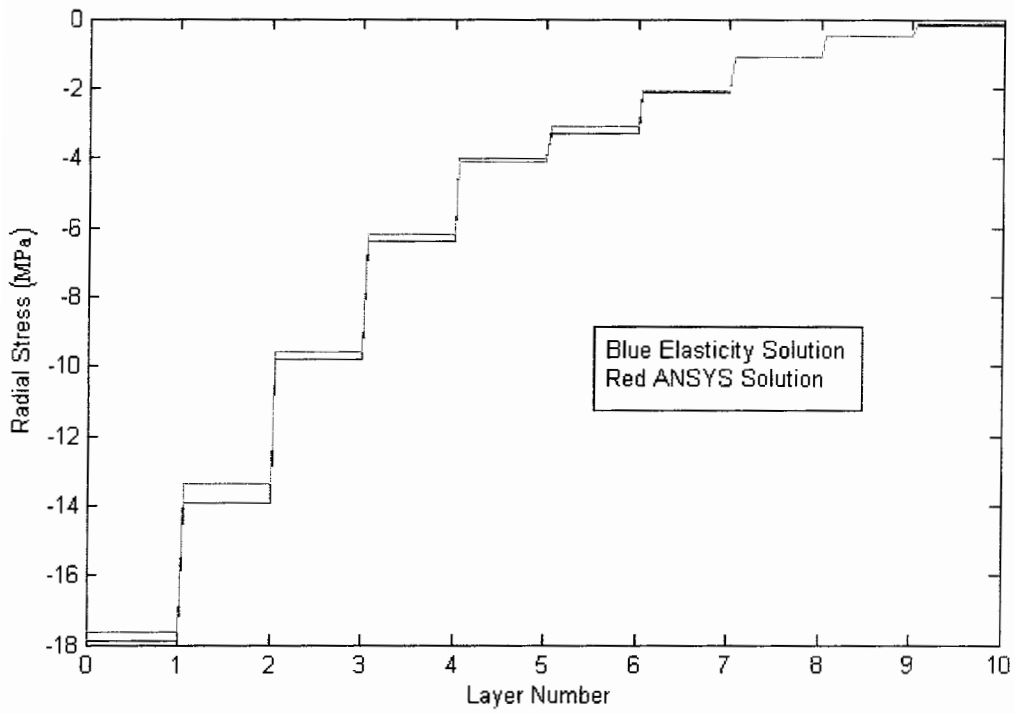
شکل ۴ - ۱۸ کرنش برشی $\gamma_{\theta x}$ تحت بار ترمومکانیکی

ج - تنش های حاصله تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

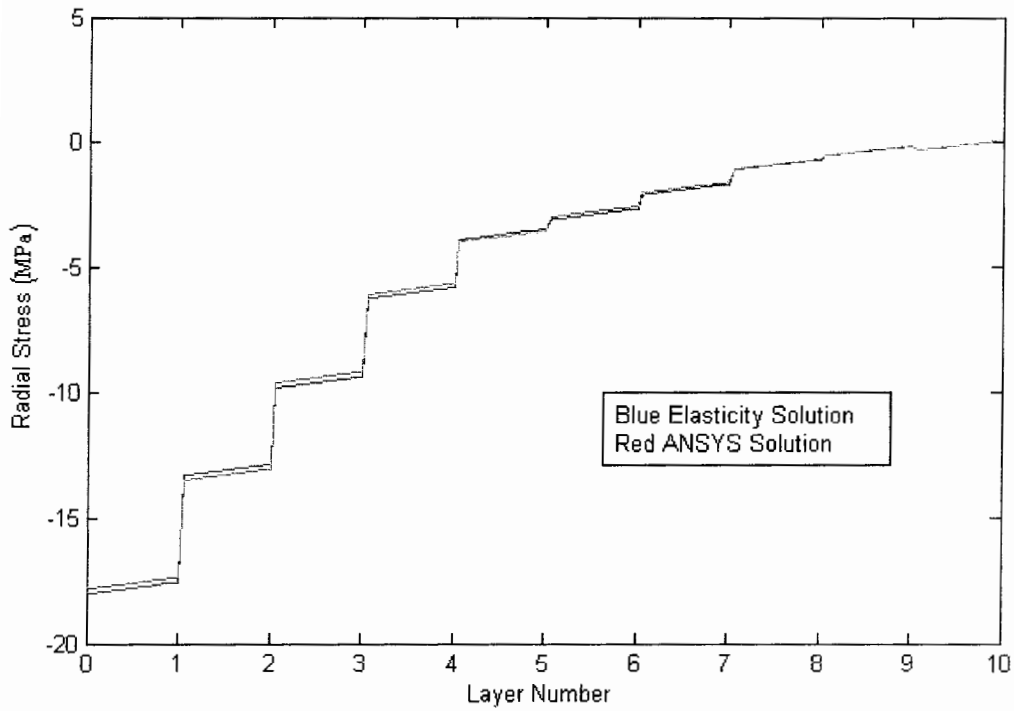
تنش ها از دیگر مواردی است که از معادلات مطرح شده بدست می آید. این دسته از پاسخ ها نیز استفاده فراوانی در تئوری های شکست در مواد مرکب دارند از این رو بررسی و مقایسه نتایج روش های حل مطرح شده نقش مهمی در این زمینه دارد.

• تنش شعاعی تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

در شکل ۴ - ۱۹ مقدار و تغییرات تنش شعاعی را در لایه های مختلف مخزن ملاحظه می کنید. شکل ۴ - ۲۰ نیز این تغییرات را بر اثر بارگذاری ترمومکانیکی نشان می دهد.



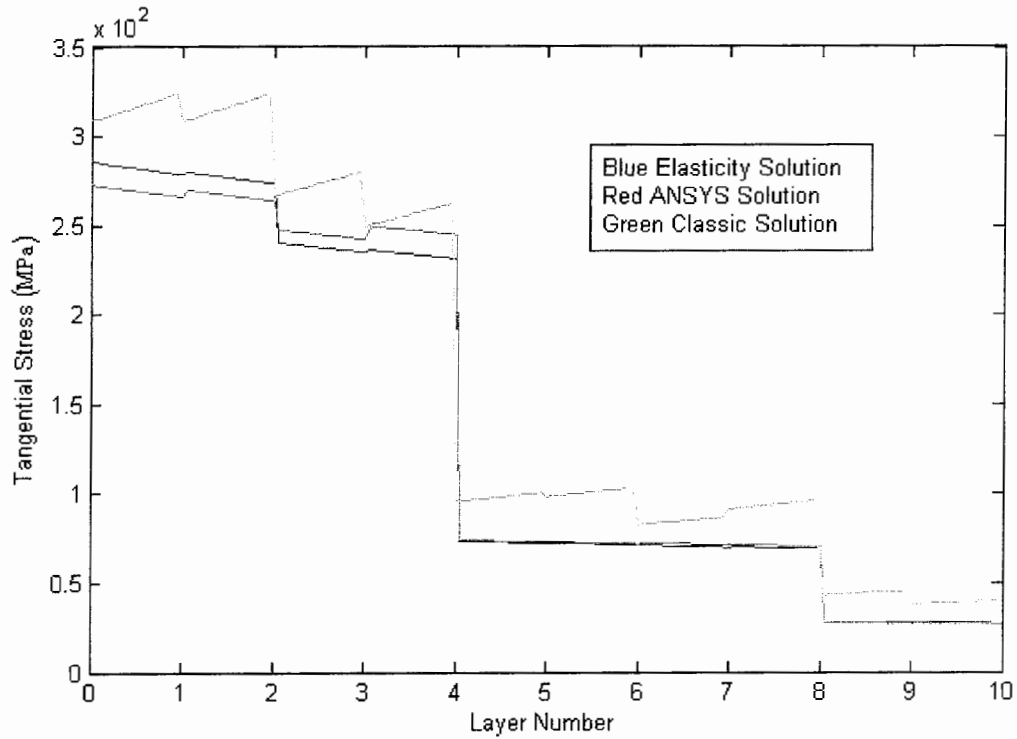
شکل ۴ - ۱۹ تنش شعاعی σ_r تحت بار مکانیکی



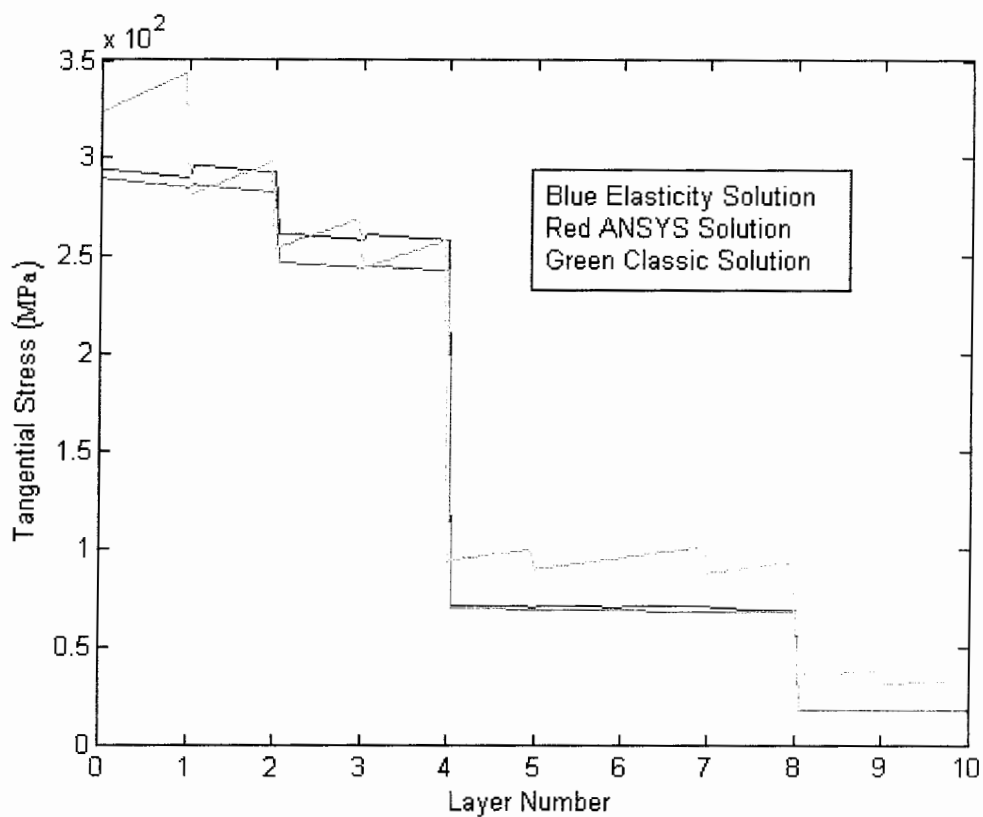
شکل ۴ - ۲۰ تنش شعاعی σ_r تحت بار ترمومکانیکی

• تنش مماسی تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

در نمودارهای ۴ - ۲۱ و ۴ - ۲۲ تغییرات تنش مماسی را تحت بارگذاری مکانیکی و ترمومکانیکی مشاهده می کنید. در این نمودارها نزدیکی خوبی بین پاسخ های روش حل الاستیسیته، نرم افزار ANSYS و روش کلاسیک وجود دارد، و تقریباً تمامی آنها از الگویی خاص پیروی می کنند.



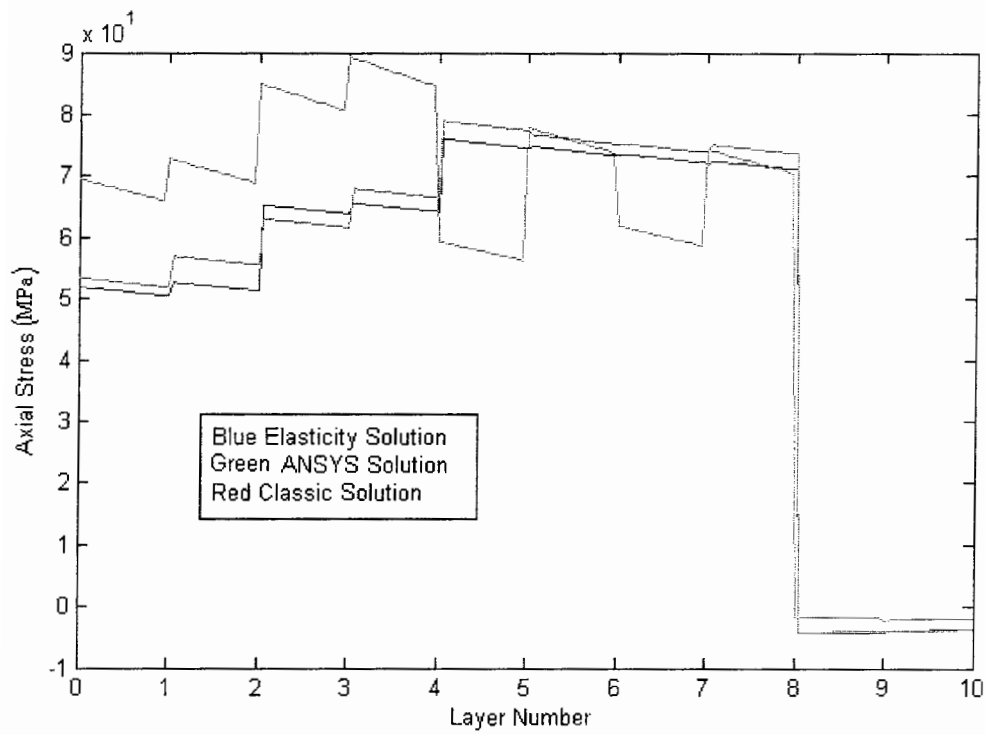
شکل ۴ - ۲۱ تنش مماسی σ_{θ} تحت بار مکانیکی



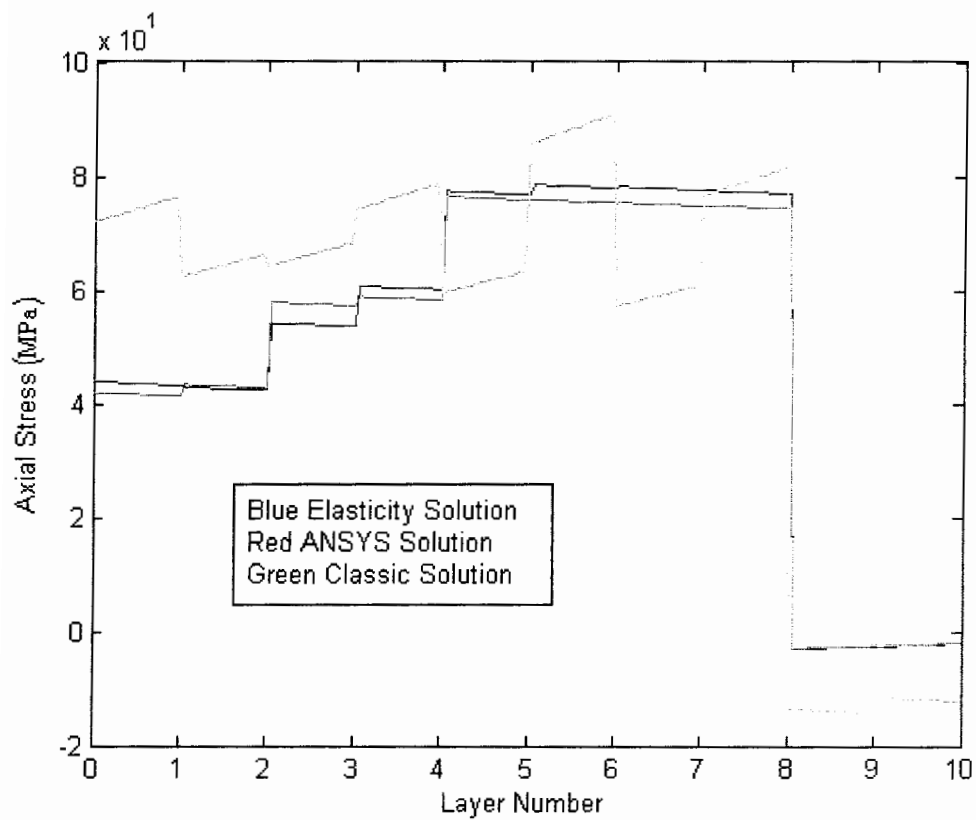
شکل ۴ - ۲۲ تنش مماسی σ_{θ} تحت بار ترمومکانیکی

• تنش محوری تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

همانطور که در بخش قبل اشاره شد هرکدام از روش های حل به دلیل انجام فرضیاتی دارای مزایا و معایبی در روند حل هستند. روش کلاسیک با در نظر نگرفتن خواص در امتداد شعاع حجمی از معادلات را پایین آورده که از دید دیگر این موضوع نوسانات و اختلاف هایی در مقادیر بدست آمده نسبت به سایر روش های حل ارائه شده ایجاد کرده است. از جمله این موارد مقادیر تنش محوری حاصل شده از بار مکانیکی است که در شکل ۴ - ۲۳ و تنش ایجاد شده از بارگذاری ترمومکانیکی شکل ۴ - ۲۴ است که در زیر آن را ملاحظه می کنید.



شکل ۴-۲۳ تنش محوری σ_x تحت بار مکانیکی

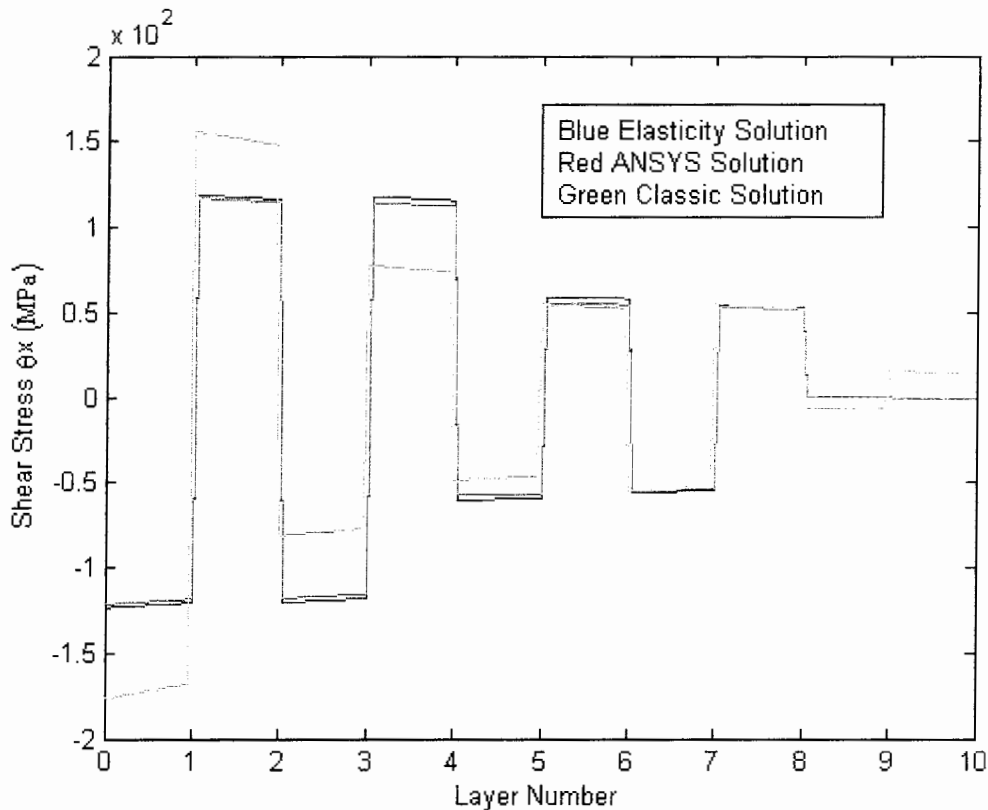


شکل ۴-۲۴ تنش محوری σ_x تحت بار ترمومکانیکی

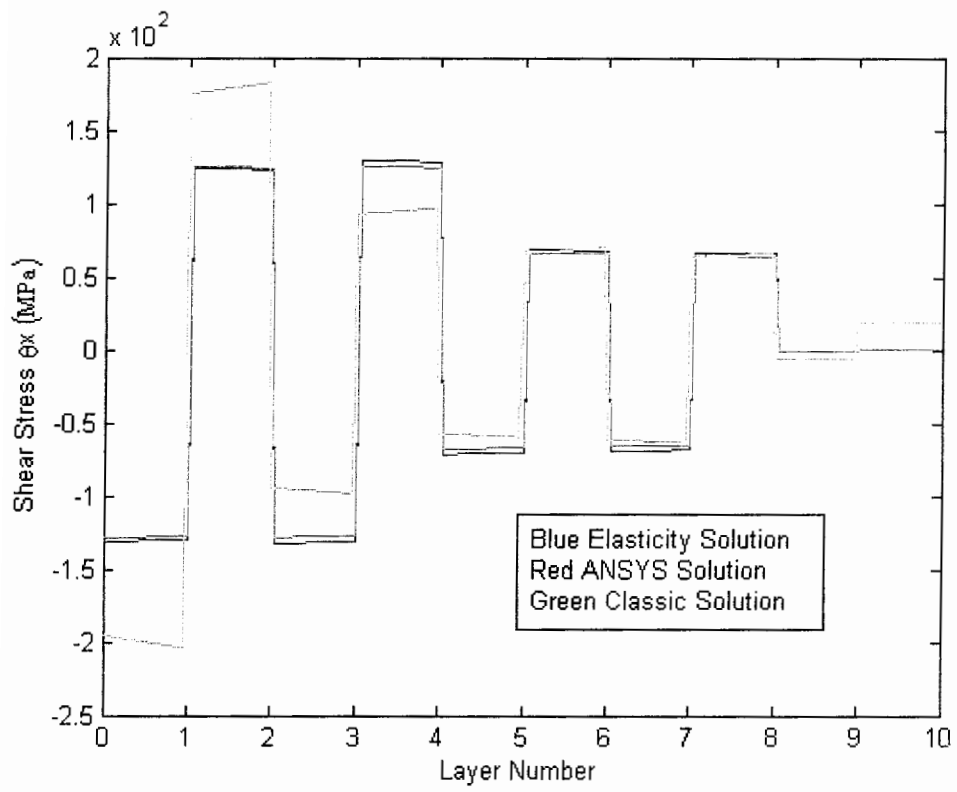
• تنش های برشی تحت بار مکانیکی و ترمومکانیکی

در بخش قبل اشاره ای به محدودیت های نسبی روش های تحلیلی شد. یکی از موارد دیگری که به آن اشاره می شود این است که در روش الاستیسیته مقادیر تنش برشی τ_{xz} و $\tau_{z\theta}$ صفر بدست می آید. از طرفی مطرح شد که در روش کلاسیک از خواص مکانیکی کامپوزیت در جهت شعاع استفاده ای نمی شود این موضوع یکی از دلایل همخوانی پاسخ های روش الاستیسیته و کلاسیک برای موارد فوق است که در نمودارهای ۴ - ۲۷ الی ۴ - ۳۰ نمایش داده شده. از طرفی این مقادیر گاه دارای اختلاف های قابل توجه ای است که، با پاسخ های نرم افزار دارد.

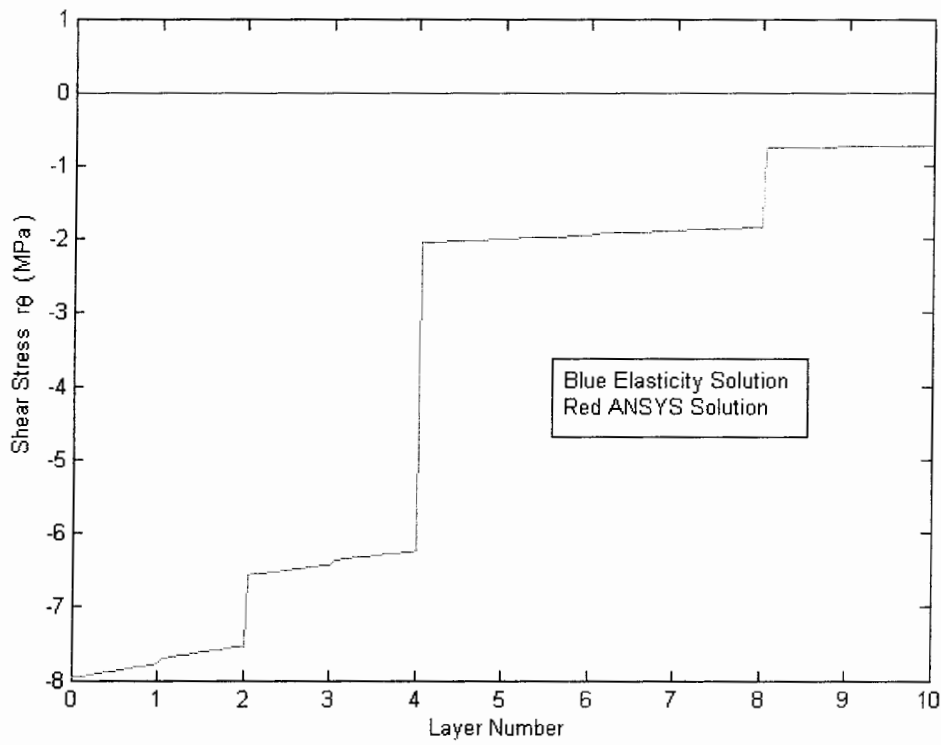
به عنوان تنها بخش غیر صفر تنش برشی می توان به پاسخ های نمودار ۴ - ۲۵ که از بارگذاری مکانیکی و ۴ - ۲۶ که آن نیز از بارگذاری ترمومکانیکی ایجاد شده است اشاره نمود که در این حالت نیز الگوی یکسان این پاسخ ها را می توان دید.



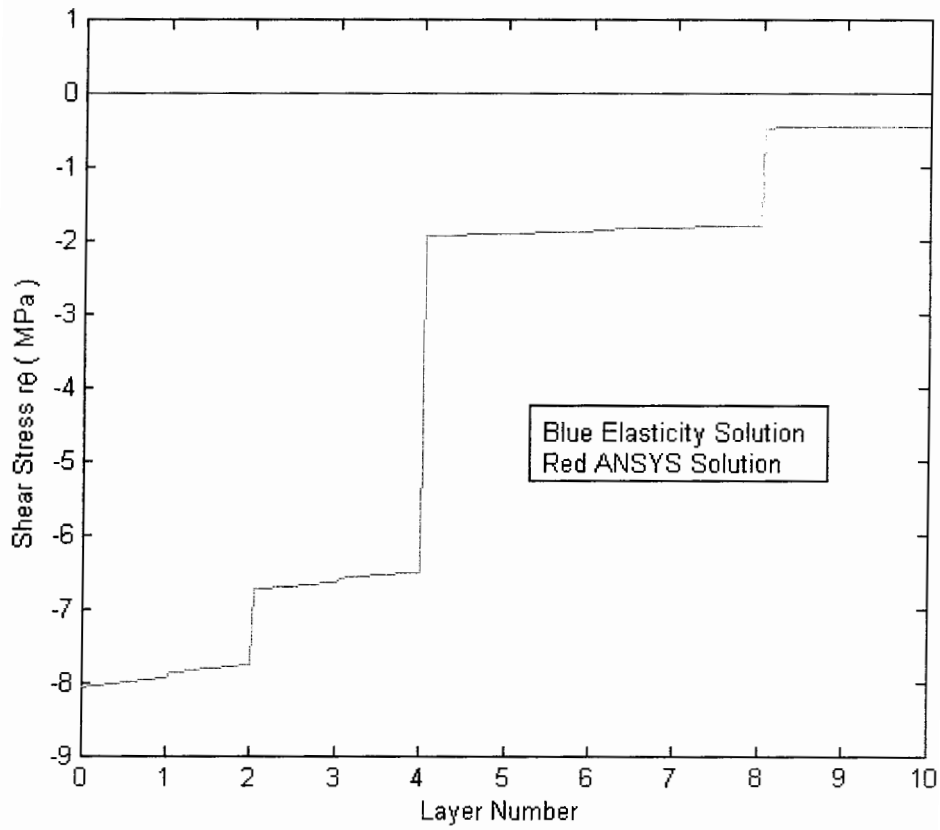
شکل ۴ - ۲۵ تنش برشی $\tau_{\theta x}$ تحت بار مکانیکی



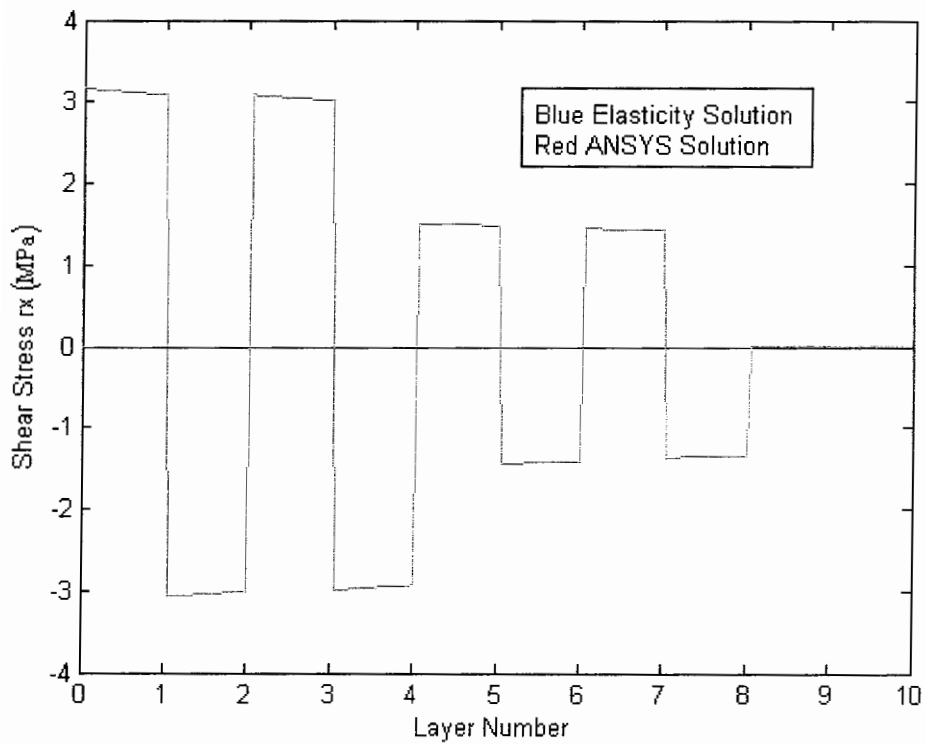
شکل ۴- ۲۶ تنش برشی $\tau_{\theta x}$ تحت بار ترمومکانیکی



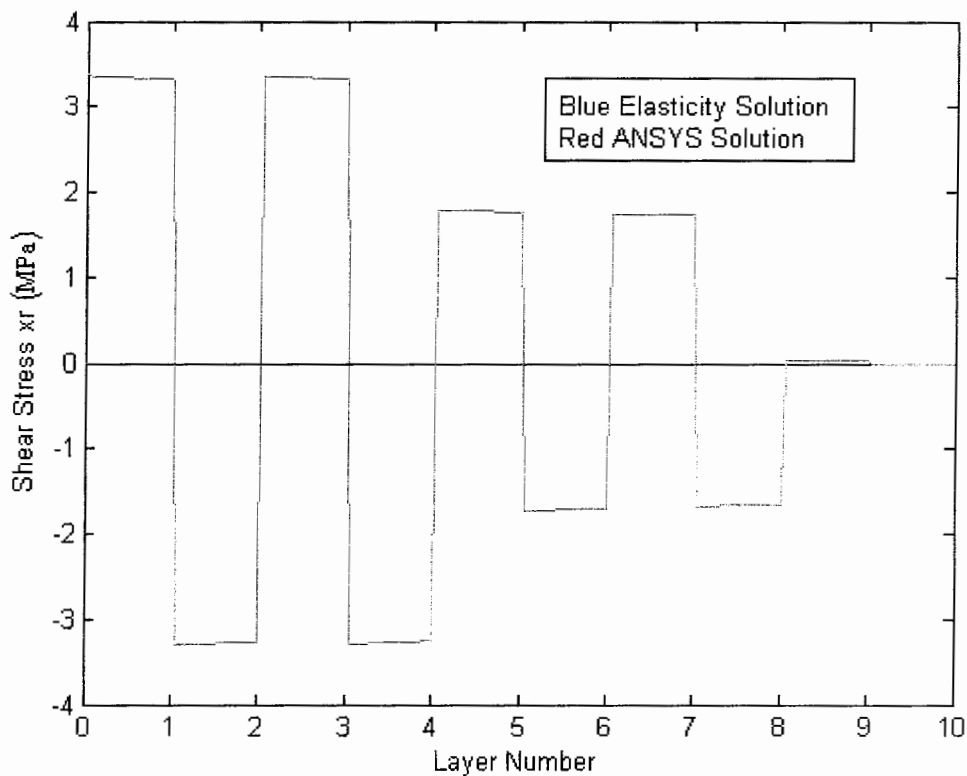
شکل ۴- ۲۷ تنش برشی $\tau_{r\theta}$ تحت بار مکانیکی



شکل ۴- ۲۸ تنش برشی τ_{θ} تحت بار ترمومکانیکی



شکل ۴- ۲۹ تنش برشی τ_{xr} تحت بار مکانیکی



شکل ۴ - ۳۰ تنش برشی τ_{xr} تحت بار ترمومکانیکی

۴ - ۲ - ۲ - مقایسه نتایج حل به روش الاستیسیته برای حالت های مختلف بارگذاری

در بخش قبل به مقایسه سه روش حل مطرح برای دو حالت بارگذاری مکانیکی و ترمومکانیکی پرداخته شد. در این بخش نتایج حل به روش الاستیسیته را برای سه حالت بارگذاری مکانیکی، ترمومکانیکی و حرارتی خالص را برای لایه چینی نوع A مطرح می کنیم.

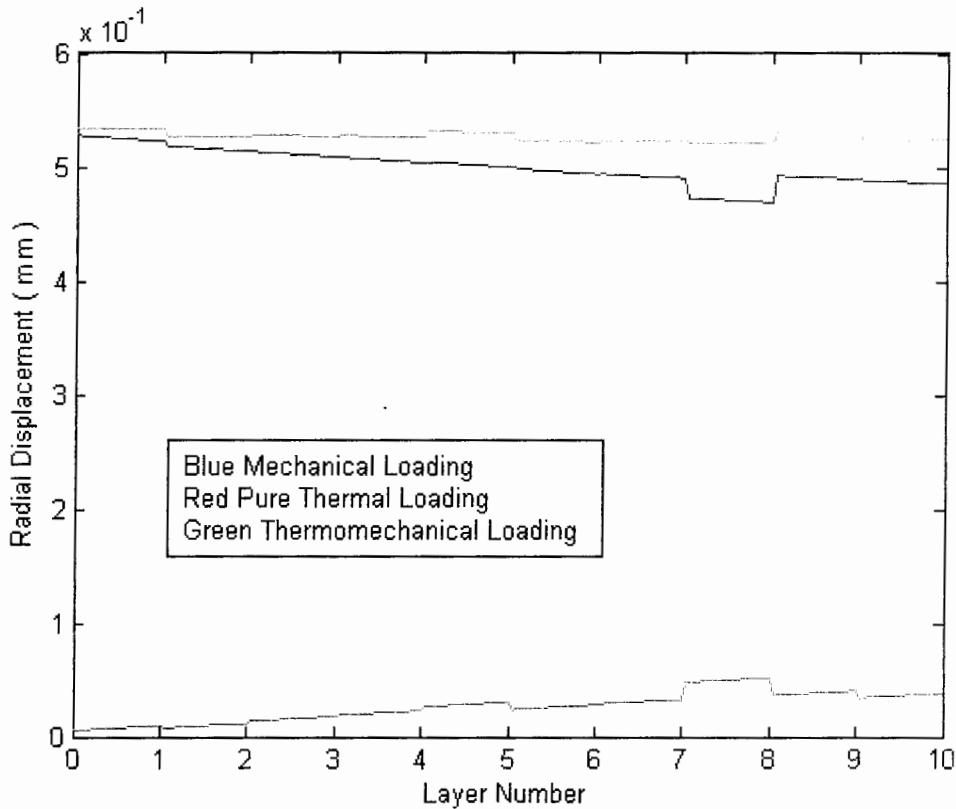
همانطور که مطرح شد این مخزن تحت فشار داخلی برابر با ۲۰ مگا پاسگال است، اختلاف دما را نیز برابر ۵۰ درجه سانتیگراد در نظر گرفته شده. در مواردی که اشاره به بارمکانیکی شده فقط تاثیرات فشار داخلی در نظر گرفته شد. موارد با بارگذاری ترمومکانیکی فشار داخلی و اختلاف دما، و موارد بار حرارتی خالص فقط تاثیر تغییرات دمایی ۵۰ درجه سانتیگراد در نظر گرفته شده.

الف - جابجایی حاصله تحت سه نوع بارگذاری

در روابط فصل قبل ملاحظه شد که در x داده شده، جابجایی محوری یکسانی در سراسر ضخامت لوله وجود دارد و جابجایی مماسی بصورت خطی با r تغییر می کند. جابجایی شعاعی حالت تغییرات پیچیده تری دارد، اما فقط تابعی از r است. در ادامه این نتایج را مشاهده خواهید نمود.

- جابجایی شعاعی تحت سه نوع بارگذاری

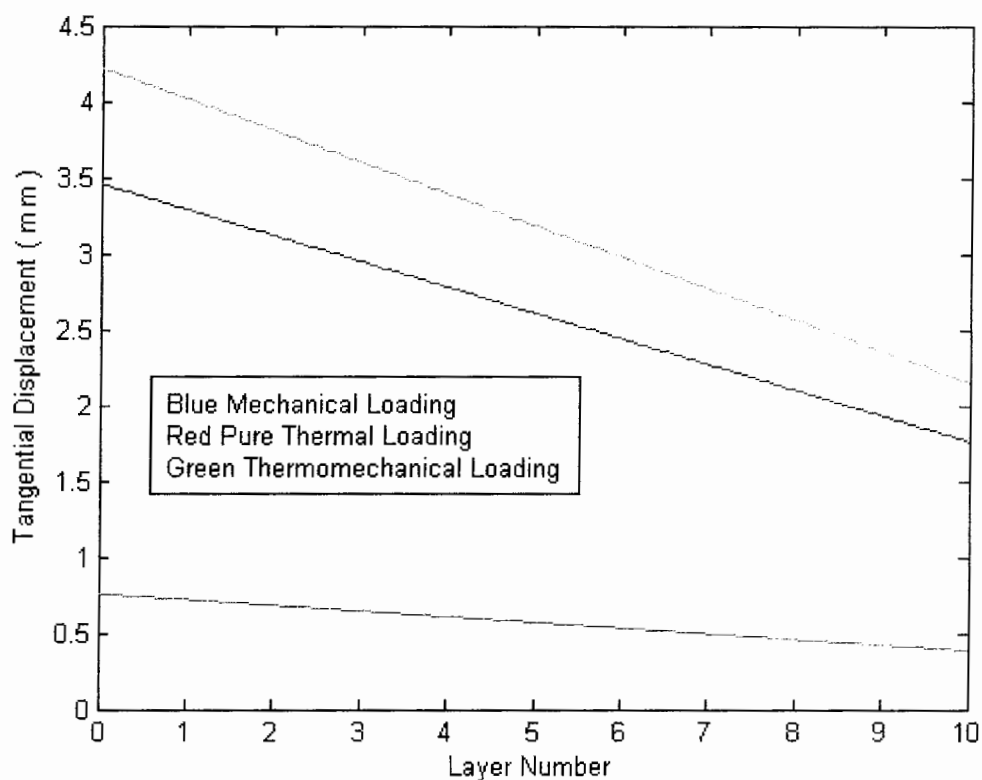
جابجایی شعاعی ایجاد شده تحت سه نوع بارگذاری را در شکل ۴ - ۳۱ مشاهده می کنید . در توضیح نمودار زیر باید این نکته مطرح شود که تنش های ایجاد شده در اثر بار حرارتی خالص اثر کمتری نسبت به بار مکانیکی و ترمومکانیکی دارد .



شکل ۴ - ۳۱ جابجایی شعاعی W تحت سه نوع بارگذاری

- جابجایی مماسی تحت سه نوع بارگذاری

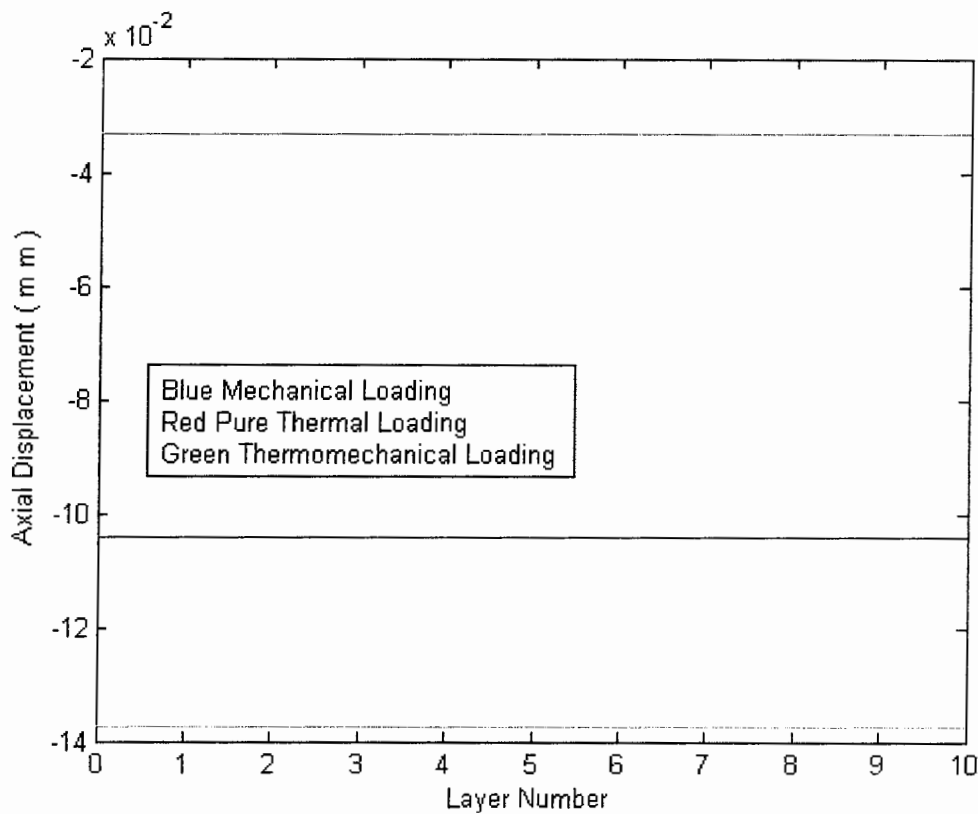
رابطه جابجایی مماسی همانطور که قبلا شرح داده شد هم با تغییرات شعاع تغییر کرده و هم با تغییرات در طول مخزن دچار تغییرات می شود . در اینجا فقط به بررسی تغییرات جابجایی مماسی با شعاع تحت بارگذاری های مختلف می پردازیم . این تغییرات را می توان در نمودار ۴ - ۳۲ مشاهده نمود . ملاحظه می شود که هم مقدار و هم شیب نمودار تحت بارگذاری های مکانیکی ، حرارتی و ترمومکانیکی دچار تغییرات شده است .



شکل ۴ - ۳۲ جابجایی مماسی ۷ تحت سه نوع بارگذاری

• جابجایی محوری تحت سه نوع بارگذاری

جابجایی مماسی نیز مانند آنچه که در بخش قبل شرح داده شد فقط برحسب تغییرات شعاع در شکل ۴ - ۳۳ نمایش داده شده است. ملاحظه می شود تحت بارگذاری های مختلف مقدار جابجایی محوری مقادیر مختلفی را نشان داده و تاثیر بارگذاری ترمومکانیکی از بارگذاری مکانیکی و حرارتی خالص بیشتر است.



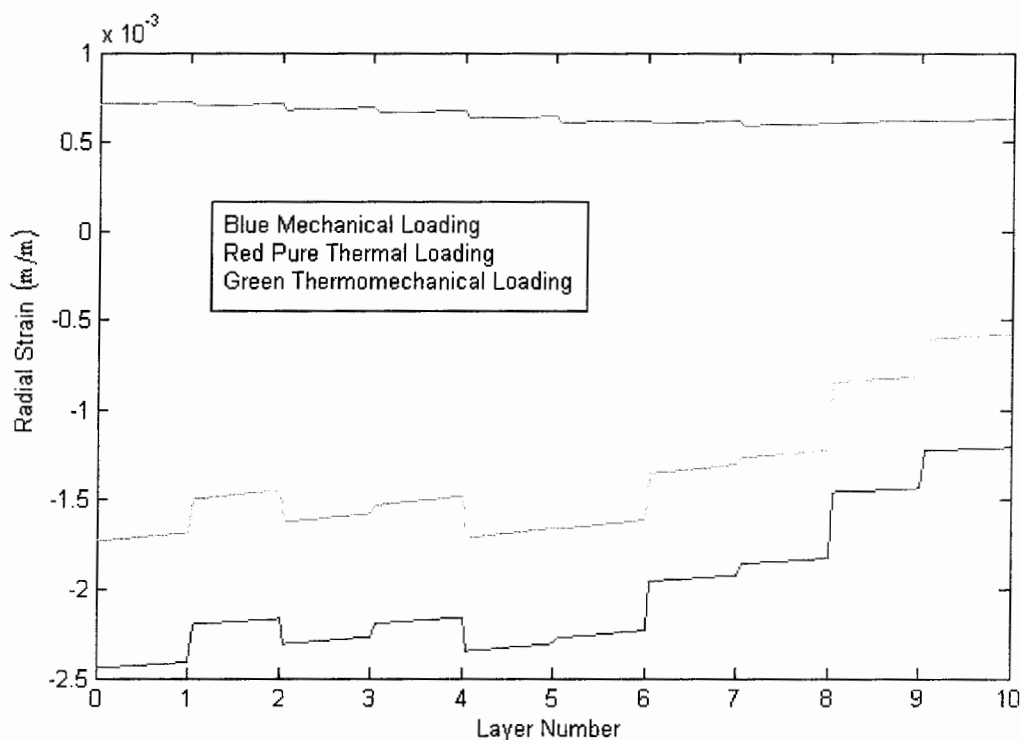
شکل ۴ - ۳۳ جابجایی محوری u تحت سه نوع بارگذاری

ب - کرنش های حاصله تحت سه نوع بارگذاری

با توجه به روابط ارائه شده در فصل قبل تغییرات کرنش را برای کرنش های شعاعی ، مماسی ، محوری و برشی $\gamma_{x\theta}$ ارائه می کنیم . لازم به یاد آوری است که برای حالات بارگذاری شرح داده شده سایر کرنش های برشی دارای مقدار صفر می باشد .

• کرنش شعاعی تحت سه نوع بارگذاری

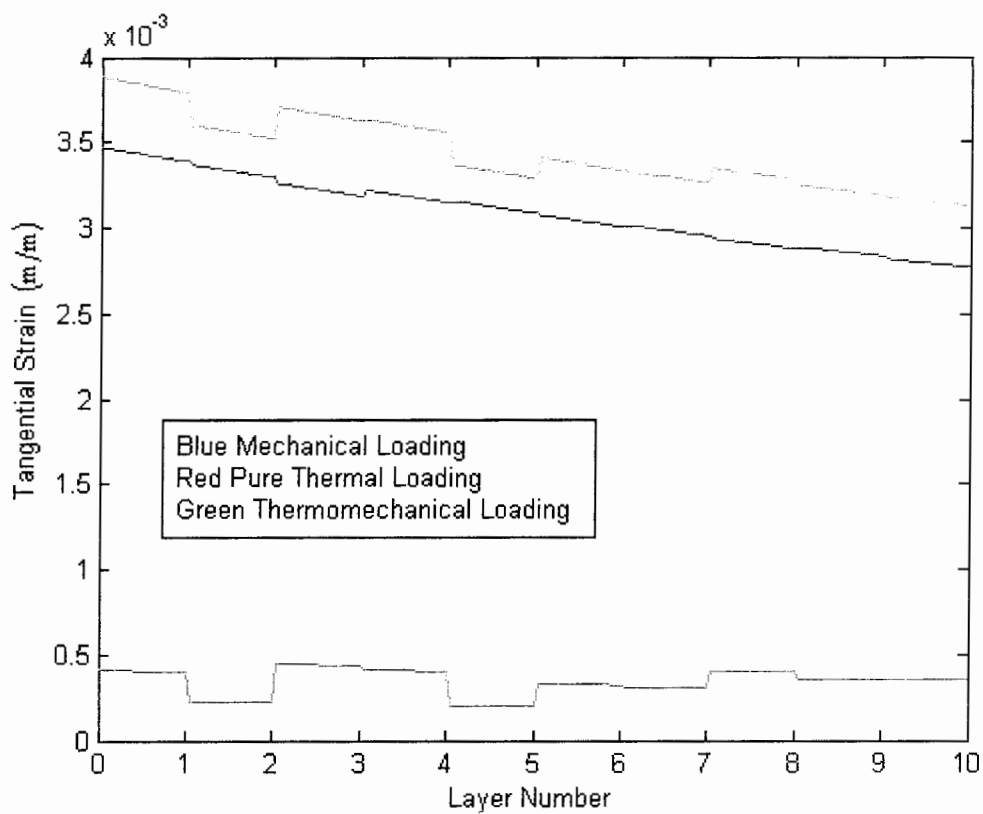
یکی از نتایج جالب که در شکل ۴ - ۳۴ قابل تامل می باشد این است که بارگذاری حرارتی تاثیری برخلاف سایر حالات بر روی کرنش شعاعی گذاشته است . همانطور که ملاحظه می کنید مخزن تحت بارگذاری حرارتی خالص دچار کرنشی با علامت مثبت شده در واقع حرارت تاثیری عکس تاثیر نیروهای مکانیکی وارد کرده این موضوع به خاصیت مواد انتخابی باز می گردد . در مقدمه این فصل در جدول ۴ - ۱ مشاهده می کنید که مقدار ضریب انبساط حرارتی محوری لمیناهای انتخابی منفی است که این موضوع خود را در این بخش از نتایج نشان داده است .



شکل ۴ - ۳۴ کرنش شعاعی ϵ_r تحت سه نوع بارگذاری

• کرنش مماسی تحت سه نوع بارگذاری

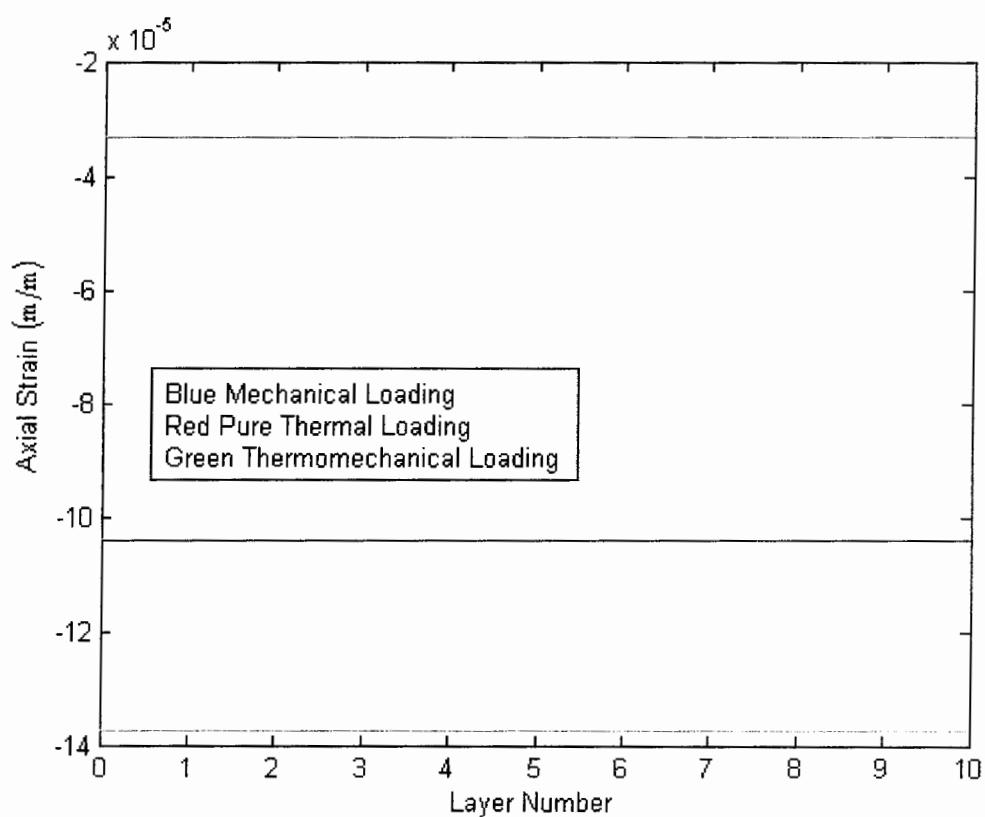
در شکل ۴ - ۳۵ کرنش مماسی را تحت سه نوع بارگذاری مکانیکی ، حرارتی خالص و ترمومکانیکی ملاحظه می کنید . یکی از نتایج دیگری که در این بخش به آن اشاره می شود و در بسیاری از مسائل مکانیک کاربرد دارد این است که نتایج از قانون جمع آثار پیروی می کند . در کلیه نمودارهای این بخش جمع تاثیر بارگذاری مکانیکی با بارگذاری حرارتی با تقریب بسیار خوبی با تاثیر بارگذاری ترمومکانیکی برابر است .



شکل ۴ - ۳۵ کرنش مماسی ϵ_{θ} تحت سه نوع بارگذاری

• کرنش محوری تحت سه نوع بارگذاری

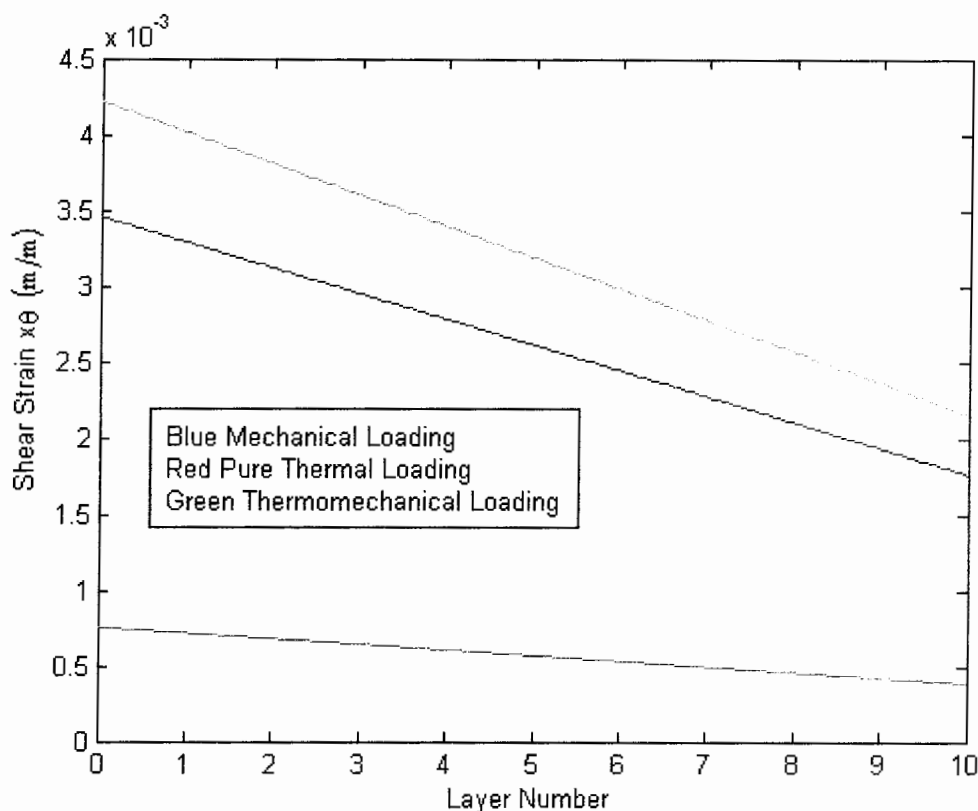
کرنش محوری همانطور که در فصل قبل توضیح داده شد، در کلیه لایه ها دارای مقدار ثابتی است که این مقادیر را برای سه حالت بارگذاری مکانیکی، ترمومکانیکی و حرارتی خالص در نمودار ۴ - ۳۶ مشاهده می کنید.



شکل ۴ - ۳۶ کرنش محوری ϵ_x تحت سه نوع بارگذاری

• کرنش برشی تحت سه نوع بارگذاری

در نمودار ۴ - ۳۷ کرنش برشی γ_{x0} قابل بررسی است. همانطور که گفته شد مقادیر کرنش برشی بصورت خطی با تغییرات شعاع تغییر می کنند که شدت این تغییرات به نوع بارگذاری، چیدمان لایه ها، نوع ماده بکاررفته و غیره بستگی دارد.



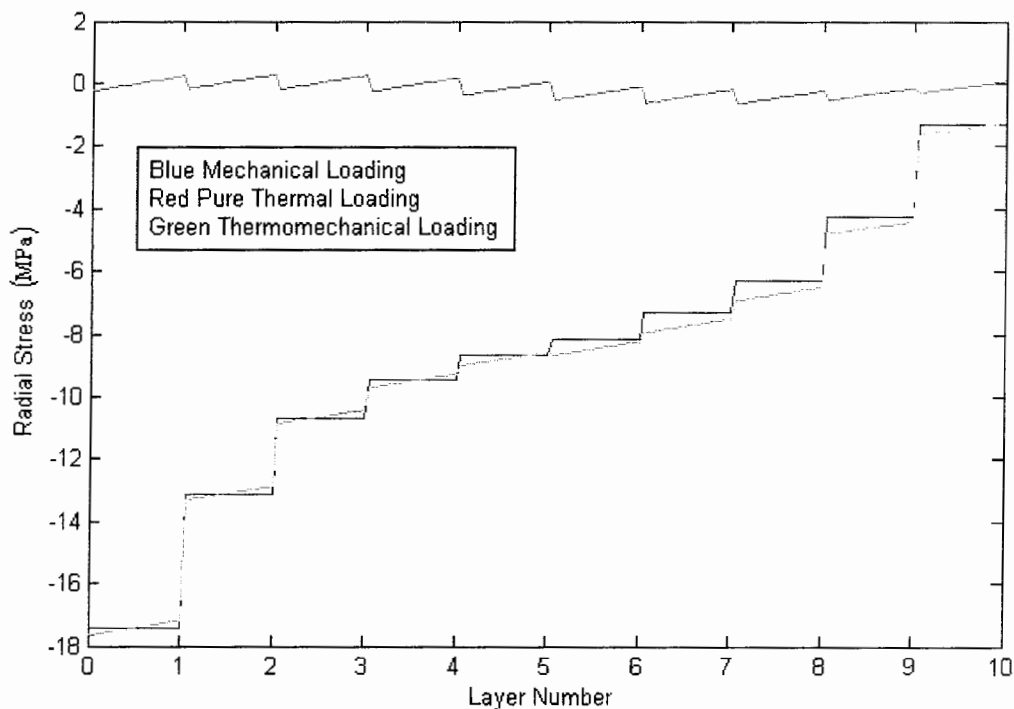
شکل ۴ - ۳۶ کرنش برشی $\gamma_{x\theta}$ تحت سه نوع بارگذاری

ج - تنش های حاصله تحت سه نوع بارگذاری

در ادامه بررسی ها تنش های شعاعی ، مماسی ، محوری و تنش برشی $\tau_{x\theta}$ تحت سه حالت بارگذاری را مورد بررسی قرار می دهیم . سایر مقادیر تنش برشی در حل به روش الاستیسیته برابر با صفر است که از رسم این نمودارها خودداری شده . در ادامه ملاحظه خواهید نمود که مقادیر تنش بدست آمده نیز با تقریب خوبی از خاصیت جمع آثار پیروی نموده و در مواردی نیز اختلاف دما برخلاف سایر موارد دیگر سعی در خنثی نموده اثرات نیروی مکانیکی داشته است .

• تنش شعاعی تحت سه نوع بارگذاری

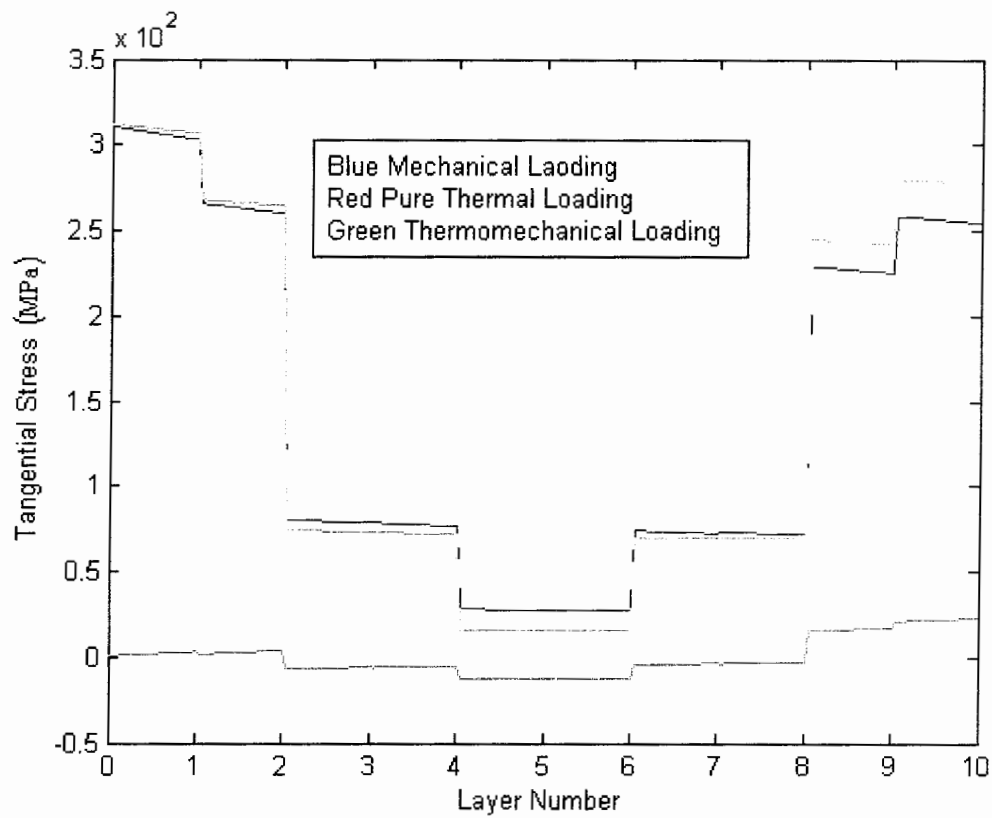
در شکل ۴ - ۳۷ تغییرات تنش شعاعی را تحت سه حالت بارگذاری ملاحظه می کنید . تنش حاصل از بار حرارتی ، در لایه های مختلف بطور تقریباً یکسانی نوسان نموده . همچنین مشاهده می شود مقدار تنش شعاعی در درون هر لایه در اثر بارگذاری ترمومکانیکی دارای تغییرات زیادتری نسبت به بارگذاری مکانیکی است .



شکل ۴ - ۳۷ تنش شعاعی σ_r تحت سه نوع بارگذاری

• تنش مماسی تحت سه نوع بارگذاری

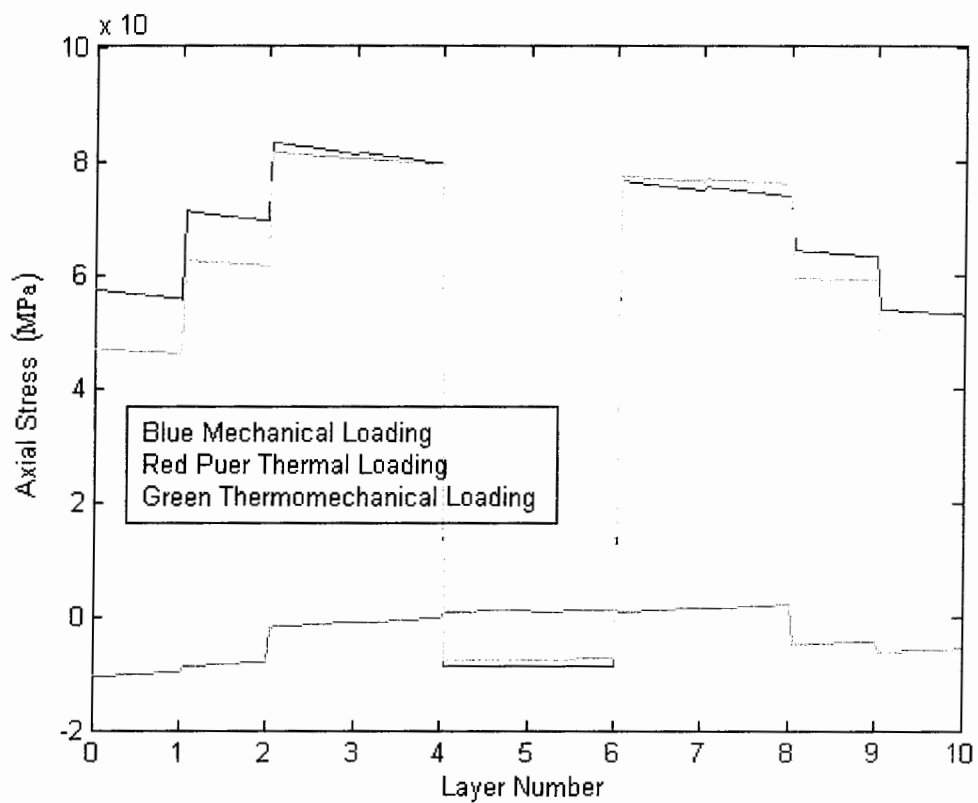
در نمودار ۴ - ۳۸ تغییرات تنش مماسی را می توان بررسی نمود . همانطور که در شکل مشخص است در این حالت ، بارگذاری حرارتی ایجاد مقادیری عکس مقادیر بارگذاری مکانیکی در برخی لایه ها نموده است . این یک نمونه جالب از کارایی کامپوزیت برای مصارف خاص است که تحت شرایط کاری مورد نظر می توان در برخی از نقاط داخلی ایجاد تنش دلخواه نمود . در نمودار زیر مشخص است که در لایه های اول ، دوم ، نهم و دهم حرارت ایجاد افزایش در مقدار تنش نموده ولی در لایه های سوم تا هشتم حرارت ایجاد کاهش در مقدار تنش مماسی نموده است .



شکل ۴ - ۳۸ تنش مماسی σ_{θ} تحت سه نوع بارگذاری

• **تنش محوری تحت سه نوع بارگذاری**

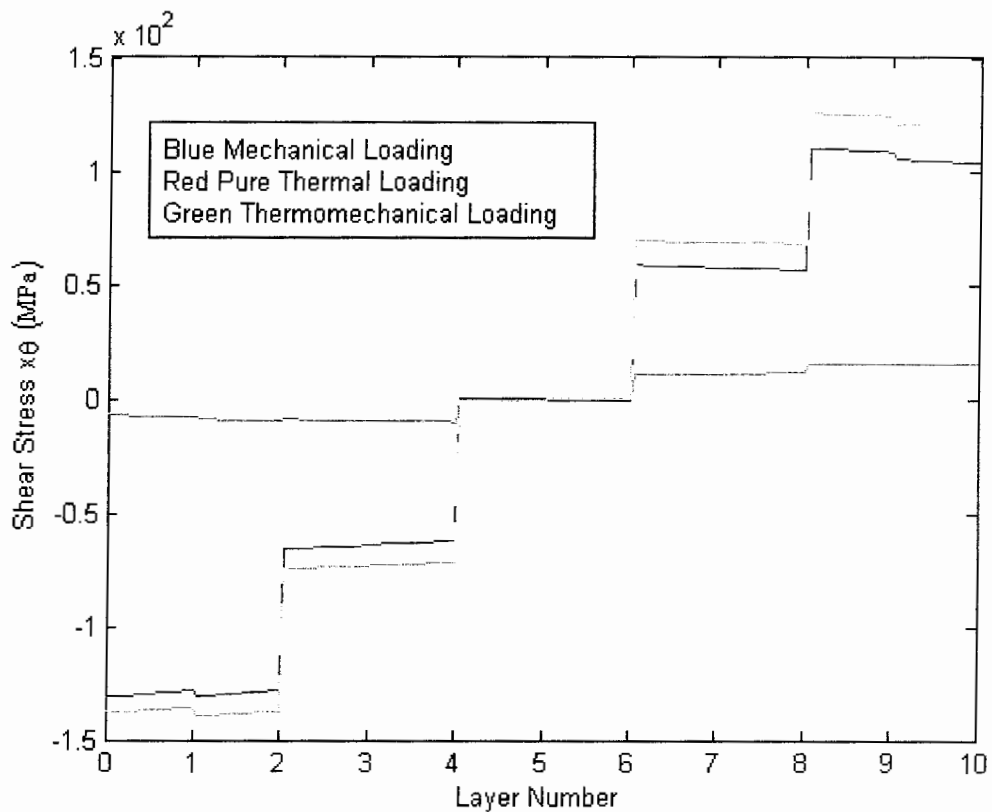
مقدار تغییرات تنش محوری تحت سه حالت بارگذاری در شکل ۴ - ۳۹ قابل بررسی است. در این وضعیت، بارگذاری حرارتی ایجاد مقادیری عکس مقادیر تنش محوری نموده و بطور کلی نمودار ایجاد شده تحت بارگذاری ترمومکانیکی، دارای مقدار کوچکتری نسبت به مقدار تنش محوری ایجاد شده در اثر بارگذاری مکانیکی در لایه مورد نظر است.



شکل ۴ - ۳۹ تنش محوری σ_x تحت سه نوع بارگذاری

• تنش برشی تحت سه نوع بارگذاری

مقادیر تنش برشی τ_{x0} برای این نوع چیدمان دارای مقادیر صعودی است که در نمودار ۴ - ۴۰ قابل بررسی است.



شکل ۴ - ۴۰ تنش برشی $\tau_{x\theta}$ تحت سه نوع بارگذاری

۴ - ۲ - ۳ - تاثیر لایه چینی در توزیع تنش ، کرنش و جابجایی

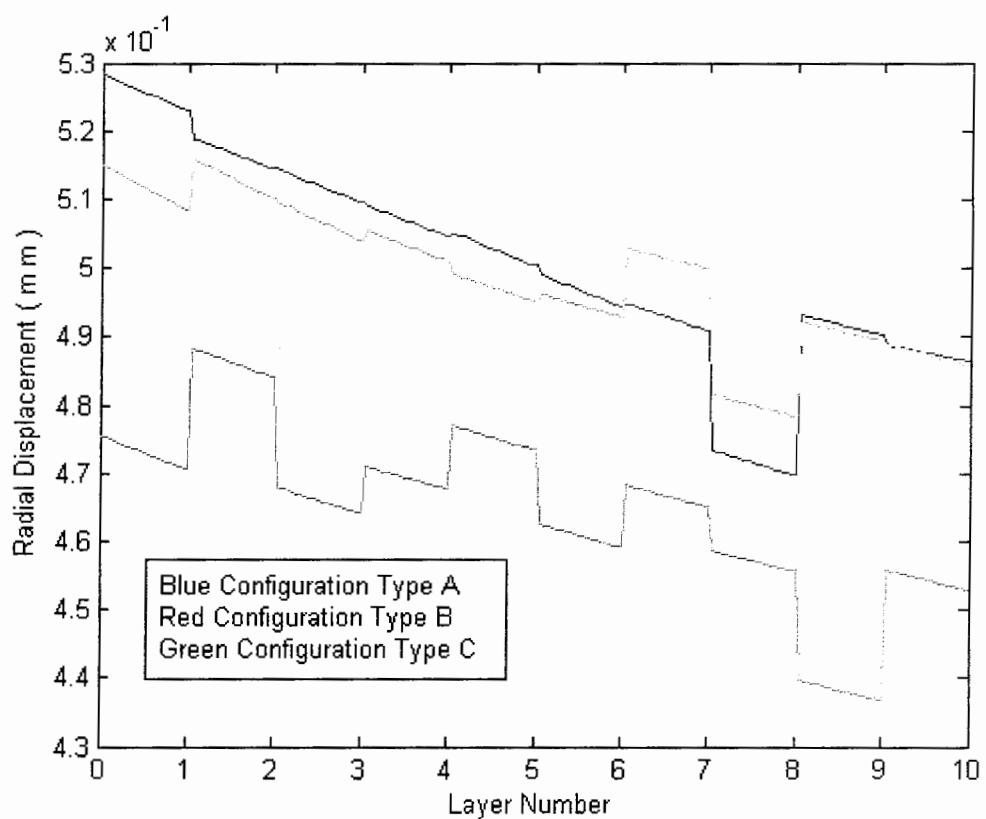
لایه چینی و محاسبه زاویه لایه ها یکی از مهمترین مباحث در زمینه طراحی ساختارهای کامپوزیتی می باشد . در این بخش نتایج حاصل از بارگذاری مکانیکی را برای سه نوع لایه چینی مطرح شده در بخش اول این فصل ارائه و به بررسی نمودارها خواهیم پرداخت .

الف - تاثیر لایه چینی در جابجایی

لایه چینی بر خلاف تصورات اولیه نقش مهمی در پاسخ ساختار کامپوزیتی به نیروهای وارده دارد . یکی از این پاسخ ها جابجایی است که در ادامه به بررسی آن می پردازیم .

• تاثیر لایه چینی در جابجایی شعاعی

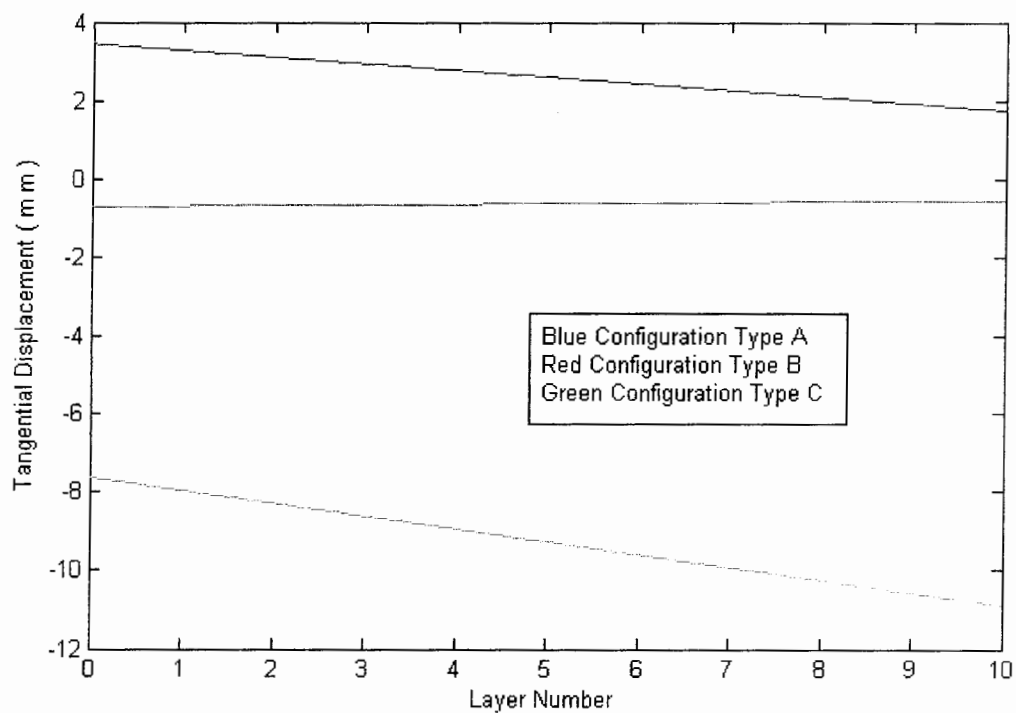
در نمودار ۴ - ۴۱ تغییرات جابجایی شعاعی برای سه لایه چینی مختلف مشاهده می کنید . در هر سه حالت جابجایی شعاعی سیر نزولی دارد یعنی با افزایش مقدار شعاع مقدار جابجایی شعاعی کاهش می یابد .



شکل ۴ - ۴۱ جابجایی شعاعی w تحت سه نوع بارگذاری

• تاثیر لایه چینی در جابجایی مماسی

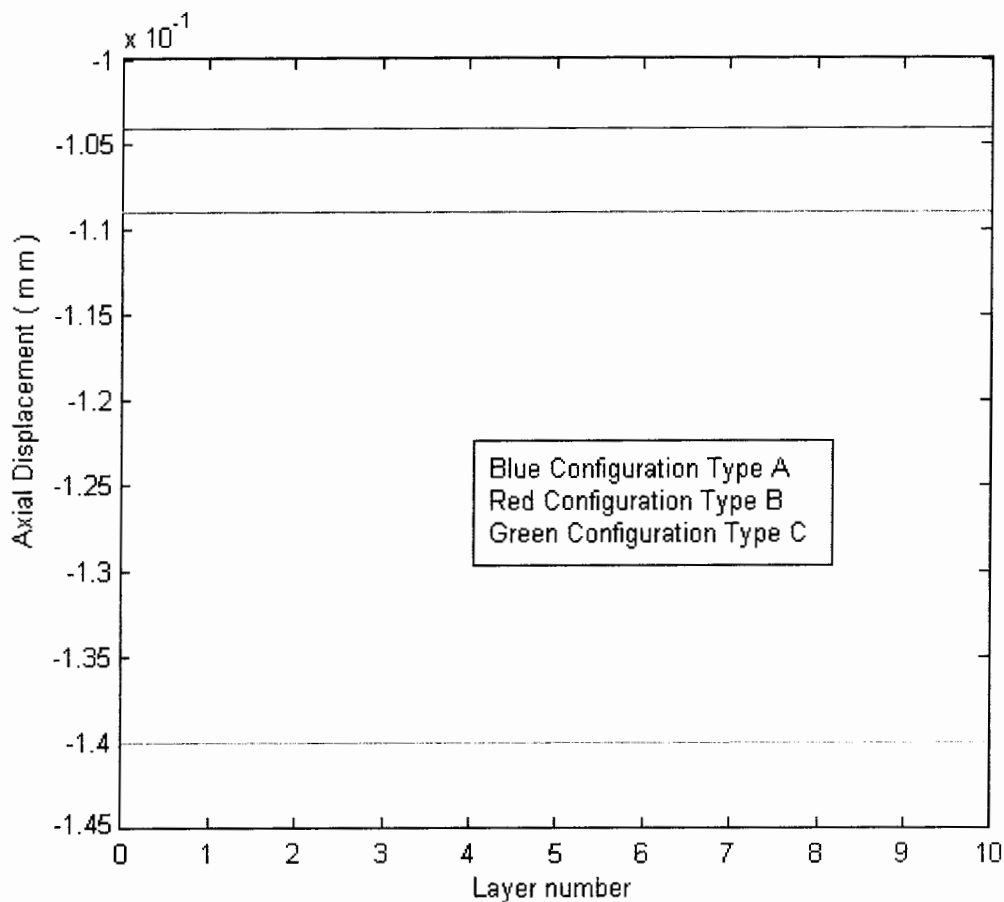
نمودار ۴ - ۴۲ جابجایی مماسی را برای سه وضعیت مختلف لایه چینی نشان می دهد. این نمودار یک نمونه مشخص از تاثیر این موضوع بر رفتار سازه است. بطوریکه جابجایی مماسی در مخزن لایه چینی شده نوع A و C دارای شیب منفی، در نوع B دارای شیبی کوچکتر اما مثبت است.



شکل ۴ - ۴۲ جابجایی مماسی ۷ تحت سه نوع بارگذاری

• تاثیر لایه چینی در جابجایی محوری

در نمودار ۴ - ۴۳ تغییر مقدار جابجایی محوری را برای سه نوع چیدمان مختلف شاهد هستیم. مشاهده می شود که محل های مختلف قرار گرفتن لایه ایجاد تغییراتی در مقدار جابجایی حاصله می کند.



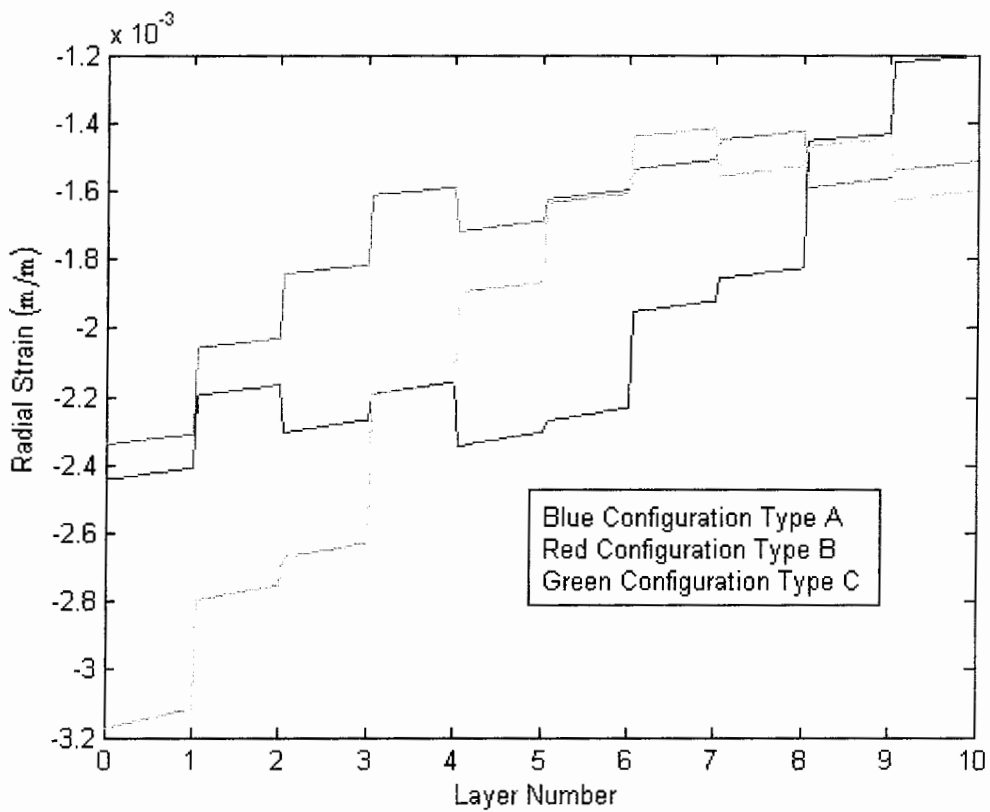
شکل ۴ - ۴۳ جابجایی محوری u تحت سه نوع لایه چینی

ب - تاثیر لایه چینی در کرنش

در این بخش به تاثیر لایه چینی در کرنش های شعاعی ، مماسی ، محوری و برشی $\gamma_{x\theta}$ می پردازیم .

• تاثیر لایه چینی در کرنش شعاعی

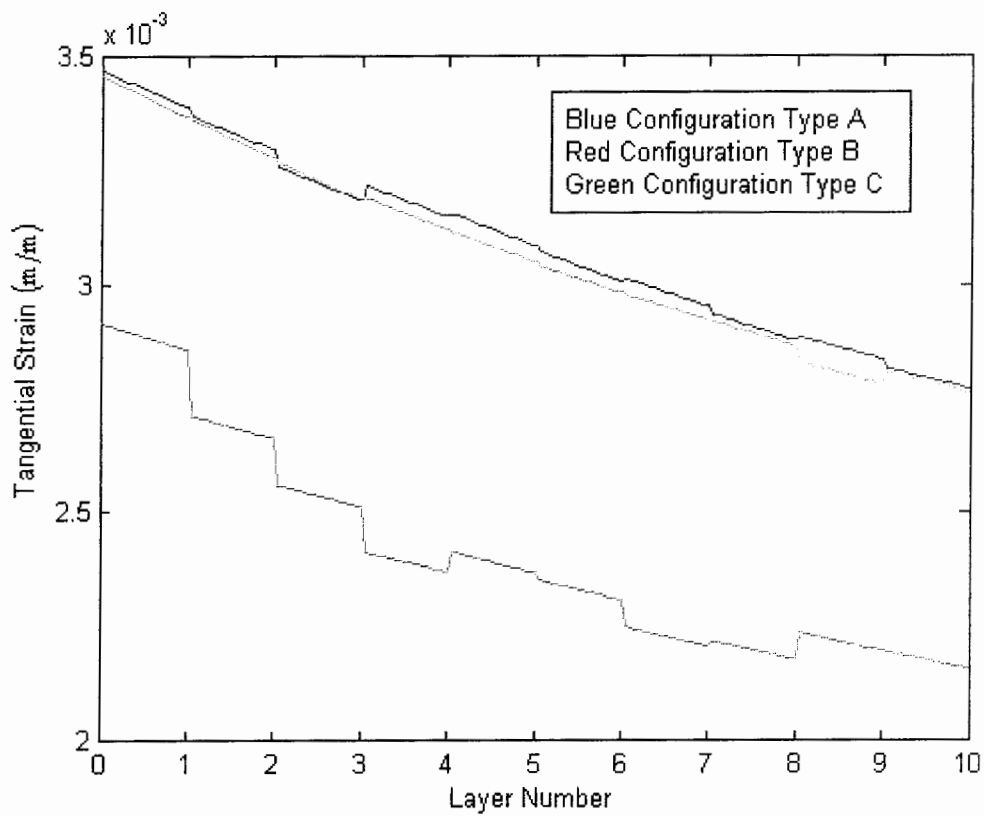
در نمودار ۴ - ۴۴ تغییرات کرنش شعاعی در لایه های مختلف الیاف به نمایش گذاشته شده . همانطور که ملاحظه می کنید ، کرنش شعاعی لایه چینی نوع C در محدوده زیادتری به نسبت لایه چینی A و B تغییر می کند . کرنش شعاعی در لایه چین نوع A و B از مقدار کمتری (از لحاظ مقدار) نسبت به لایه چینی نوع C در لایه های داخلی مخزن دارند .



شکل ۴ - ۴۴ کرنش شعاعی ϵ_r تحت سه نوع لایه چینی

• تاثیر لایه چینی در کرنش مماسی

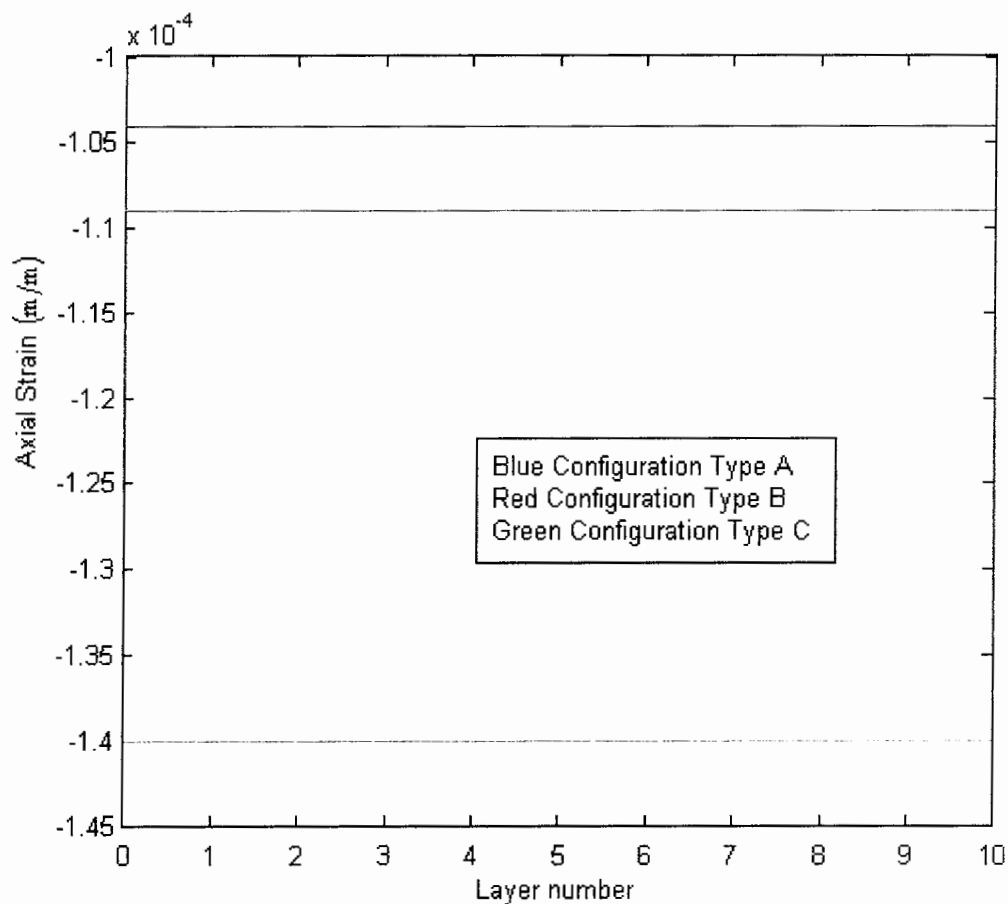
در شکل ۴ - ۴۵ تغییرات کرنش مماسی در لایه های مختلف مخزن برای سه نوع لایه چینی مختلف مشاهده می کنید. در اینجا بر خلاف نمودار قبلی لایه چینی نوع B دارای مقادیر کرنش مماسی به مراتب کمتر از لایه چینی نوع A و B است. ولی هر سه مورد از یک الگوی تقریباً یکسانی پیروی می کنند، بطوریکه مقدار کرنش مماسی با حرکت از شعاع داخلی به سمت شعاع خارجی کاهش می یابد.



شکل ۴ - ۴۵ کرنش مماسی ϵ_{θ} تحت سه نوع لایه چینی

• تاثیر لایه چینی در کرنش محوری

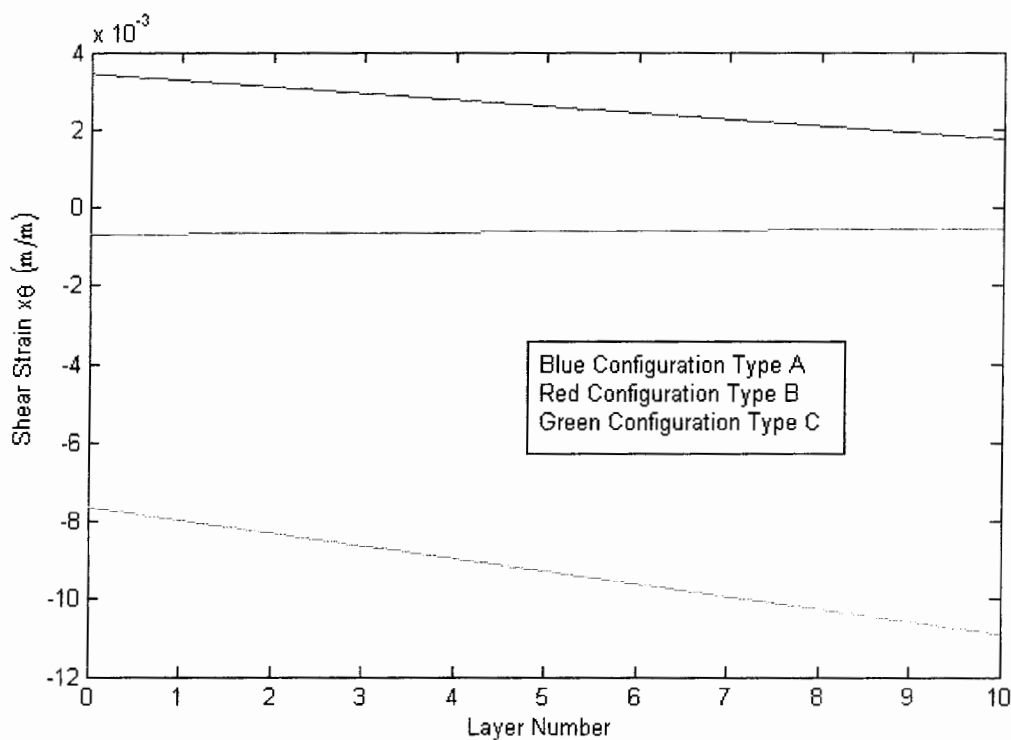
شکل ۴ - ۴۶ مقادیر مختلف کرنش محوری را نسبت به لایه های مختلف مخزن برای سه نوع چیدمان نشان می دهد. مقدار کرنش محوری در چیدمان C بزرگتر از مقدار کرنش محوری در چیدمان های نوع A و B است. چیدمان A دارای کوچکترین مقدار بوده که می توان مقایسه ای در نمودار فوق الذکر داشت.



شکل ۴ - ۴۶ کرنش محوری ε_x تحت سه نوع لایه چینی

• تاثیر لایه چینی در کرنش برشی

در شکل ۴ - ۴۷ مقادیر کرنش برشی γ_{x0} در لایه های مختلف مخزن برای سه نوع چیدمان مختلف به نمایش گذاشته شده است. در این نمودار شاهد الگوی رفتاری یکسان چیدمان نوع A و C هستیم که چیدمان نوع B از آن پیروی نمی کند. یکی از نکاتی که در چیدمان نوع A و C وجود دارد این است که لایه ها بصورت پادمتقارن هستند ولی چیدمان نوع B الگوی چیدمان لایه ها بصورت لایه های اورتوروپیک می باشد. این مطلب گاه ایجاد پاسخ های مشابه در آنها کرده و گاه چیدمانی از این الگو پیروی نخواهد نمود. این نکته در سایر نمودارهای این بخش قابل تامل و بررسی است.



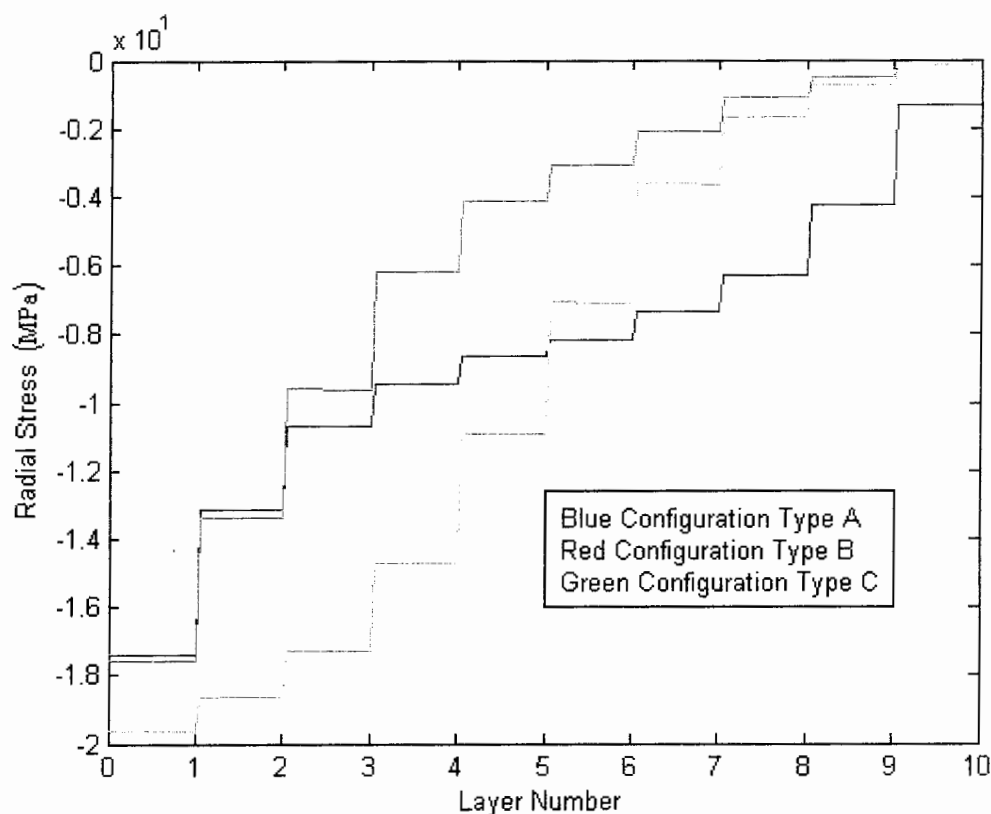
شکل ۴ - ۴۷ کرنش برشی $\gamma_{x\theta}$ تحت سه نوع لایه چینی

ج - تاثیر لایه چینی در تنش

همانطور که قبلا شرح داده شد ، دسته پاسخ های ارائه شده در بخش تنش استفاده فرآوانی در تئوری های شکست در مواد مرکب دارند . از این رو بررسی و مقایسه تاثیر چیدمان لایه ها بر روی نتایج تنش ، نقش مهمی در طراحی یک قطعه کامپوزیتی دارد . در ادامه نمودار های تنش شعاعی ، مماسی ، محوری و برشی برای سه چیدمان مطرح شده ارائه و توضیحاتی در این زمینه آورده می شود .

• تاثیر لایه چینی در تنش شعاعی

در شکل ۴ - ۴۸ تغییرات تنش شعاعی را در لایه های مختلف مخزن برای سه لایه چینی ملاحظه می کنید . در این نمودار هر سه چیدمان از الگویی واحد پیروی می کنند و مقدار تنش در لایه های اول و دوم چیدمان A و B به نسبت چیدمان C نزدیک به هم هستند . از طرفی در لایه های هشتم تا دهم چیدمان B و C مقدار نزدیکی از تنش شعاعی را مشاهده می کنیم . این بدان معنا است که زوایای مشابه چه با علامت مثبت و چه منفی مقدار نزدیکی از تنش شعاعی را نتیجه می دهند .

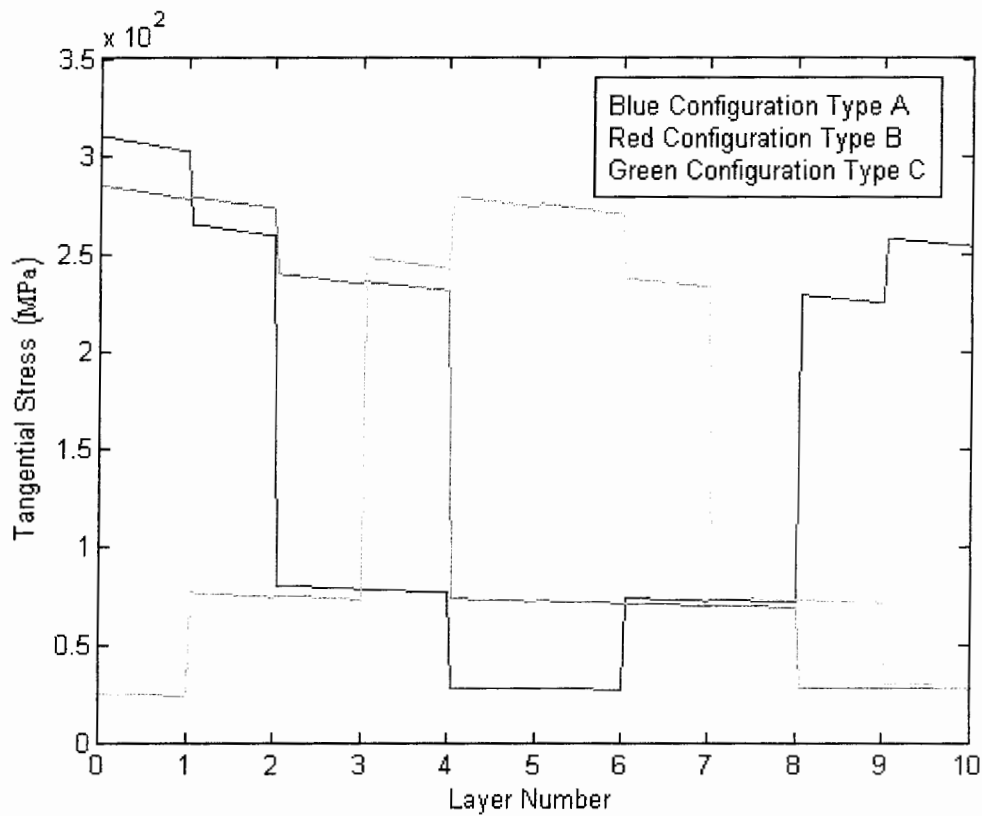


شکل ۴ - ۴۸ تنش شعاعی σ_r تحت سه نوع لایه چینی

• تاثیر لایه چینی در تنش مماسی

در نمودار ۴ - ۴۹ تاثیر سه نوع چیدمان مختلف را در مقادیر تنش مماسی را مشاهده می کنید. نکته ای که در این نمودار قابل تامل و بررسی می باشد آن است که مقدار تنش مماسی در زوایای کوچک مثبت یا منفی بسیار بزرگتر از زوایای بزرگتر است.

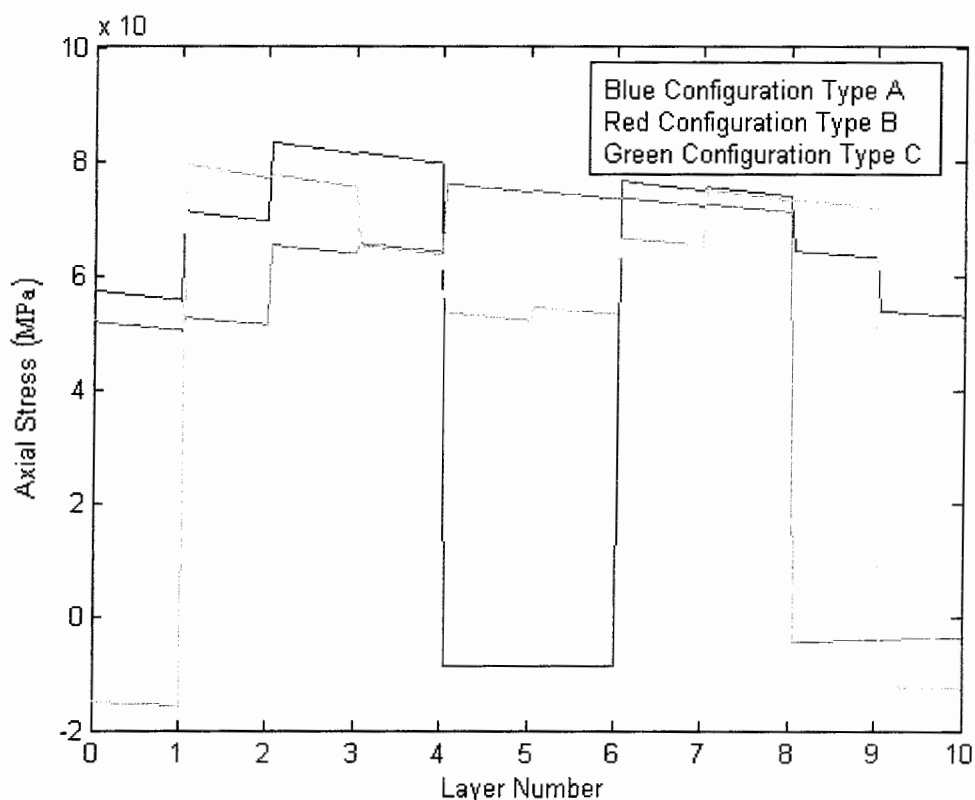
نکته دیگری که در اینجا به آن اشاره می شود آن است که چیدمان های A و C پادمتقارن هستند. این تقارن ایجاد توزیعی از تنش نموده که در آن مقدار تنش در لایه های اول و آخر و به همین ترتیب دوم و نهم و ... از نظر مقدار نزدیک به هم هستند. ولی در چیدمان نوع B این وضعیت وجود ندارد. این موضوع از لحاظ انتخاب نوع جنس یا انتخاب چند نوع جنس اولیه به عنوان ماده تشکیل دهنده کامپوزیت در لایه های مختلف از اهمیت خاصی برخوردار است.



شکل ۴ - ۴۹ تنش مماسی σ_{θ} تحت سه نوع لایه چینی

• تاثیر لایه چینی در تنش محوری

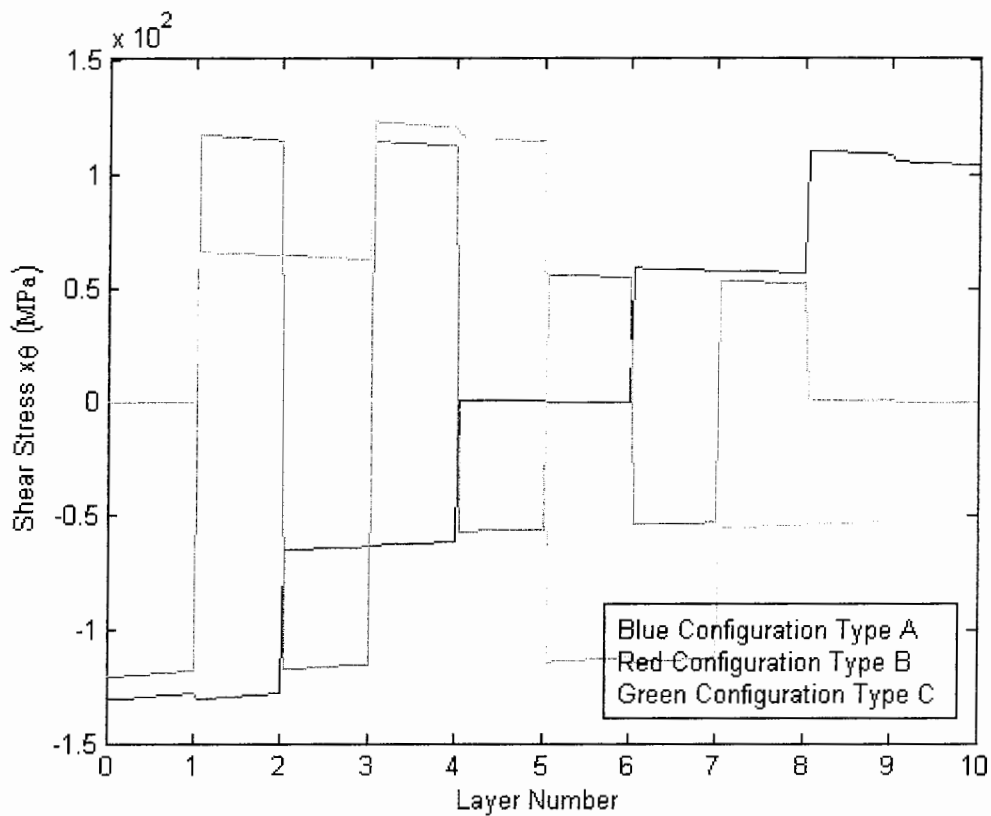
در نمودار ۴ - ۵۰ توزیع تنش محوری در لایه های مخزن را برای سه حالت مختلف چیدمان لایه ها ملاحظه می کنید. در این نمودار مقدار تنش در زوایای ۸۸ درجه مثبت با منفی دارای مقداری کوچک نسبت به سایر زوایا است و از طرفی در زوایای ۵۳/۸ و ۵۳/۷ چه مثبت و چه منفی بیشینه مقدار تنش محوری را شاهد هستیم.



شکل ۴ - ۵۰ تنش محوری σ_x تحت سه نوع لایه چینی

• تاثیر لایه چینی در تنش برشی

تنش برشی نقش بسیار مهمی در تئوری های شکست مواد مرکب بازی می کند در شکل ۴ - ۵۱ نمودارهای تنش برشی در لایه های مخزن برای سه لایه چینی مختلف تحت بارگذاری مکانیکی مشاهده می کنید. همانطور که مشاهده می کنید این نمودار از پیچیدگی بیشتری نسبت به سایر نمودارهای این بخش دارد. مقدار تنش برشی برای لایه های اولیه لایه چینی B، دارای بیشترین اختلاف مقدار در بین لایه ها نسبت به دو لایه چینی دیگر دارد. مقدار تنش برشی در لایه چینی A با افزایش شعاع افزایش یافته (فرم نمودار یکنواختی بیشتری نسبت به لایه چینی B دارد). از طرفی در لایه چینی C کمینه تنش برشی را در لایه های مرزی داریم و در این لایه چینی بجز آنچه که در لایه های پنجم و ششم رخ می دهد تغییرات شدید دیگری را نداریم.



شکل ۴ - ۵۱ تنش برشی $\tau_{x\theta}$ تحت سه نوع لایه چینی

۴ - ۳ - ۱ - مدول موثر محوری

مدول موثر محوری \bar{E}_x را می توان به فرم زیر نوشت :

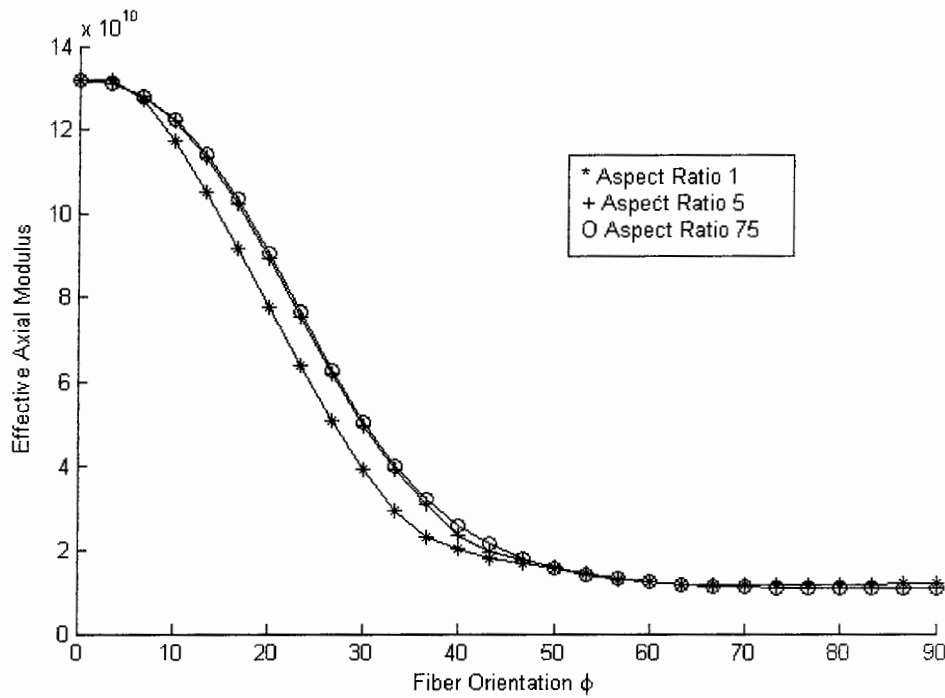
$$\bar{E}_x = \frac{P_x}{A \varepsilon_x^0} \quad (۴ - ۱)$$

که P_x نیروی محوری ، A سطح مقطع استوانه سیلندر و ε_x^0 کرنش همسان محوری است که از حل $2N + 2$ بدست می آید . مدول موثر محوری ترکیبی از لمینیت های بدون زاویه^۱ و با زاویه است که آنها تابعی از جهت گیری الیاف ϕ و نسبت شعاع داخلی به ضخامت هستند که در شکل ۴ - ۵۲ نمایش داده شده است .

همانطور که در شکل آمده مدول استوانه های چند زاویه ای^۲ تا زاویه حدود ۶۰ به بعد تقریباً با هم برابر است . همچنین مشخص است که ابعاد استوانه تاثیر کمی بر روی مدول موثر دارد . این نتایج برای نسبت شعاع داخلی به ضخامت ۷۵ ، ۵ و ۱ ارائه شده و همخوانی درستی با نتایج [25] دارد .

^۱ off-axis

^۲ Angle-ply



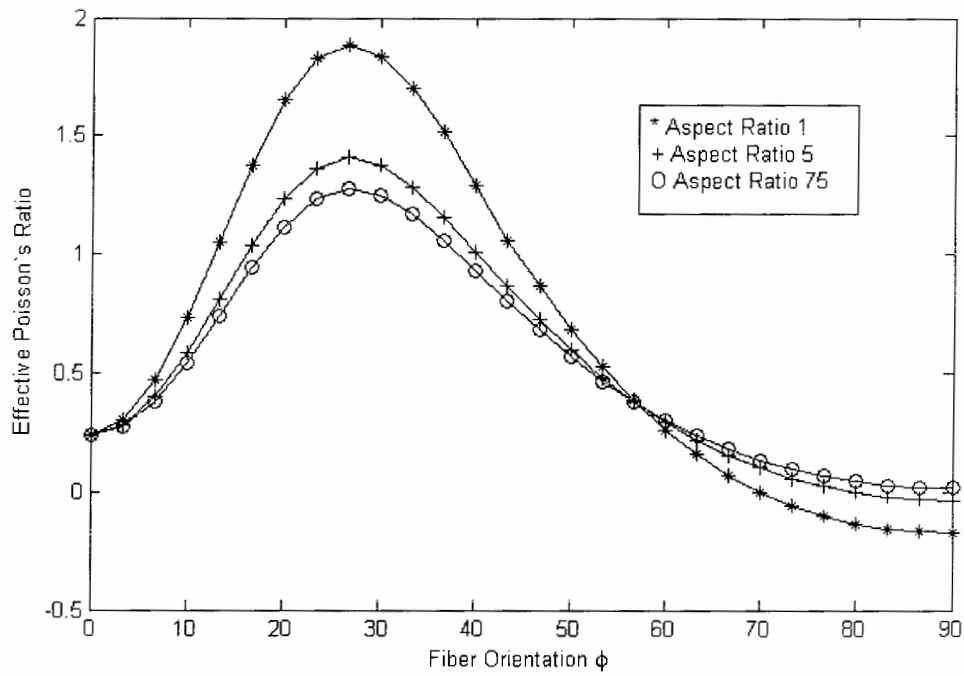
شکل ۴ - ۵۲ تغییرات مدول موثر محوری (برحسب Pa) با زاویه الیاف

۴ - ۳ - ۲ - ضریب پواسون موثر

ضریب پواسون موثر $\bar{v}_{x\theta}$ به عنوان نسبت منفی از کرنش حلقه ای در شعاع داخلی به کرنش یکنواخت محوری ایجاد شده توسط بار محوری P_x تعریف می شود .

$$\bar{v}_{x\theta} = \left. \frac{-\varepsilon_{\theta}}{\varepsilon_x^0} \right|_{R_1} = \frac{-w(R_1)}{\varepsilon_x^0 R_1} \quad (۲ - ۴)$$

بنابراین ضریب موثر پواسون در شعاع داخلی تغییر ایجاد می کند . این نتایج برای استوانه های چند زاویه ای برای ضریب شعاع داخلی به ضخامت ۷۵ ، ۵ و ۱ در شکل ۴ - ۵۳ نشان داده شده است . مشخص است که تغییرات بزرگی در ضریب پواسون موثر رخ می دهد . حداکثر این ضریب ۱/۲۵ برای نسبت شعاع داخلی به ضخامت ۷۵ تا بیش از ۱/۸۵ برای نسبت شعاع داخلی به ضخامت ۱ می باشد . همچنین برای نسبت شعاع داخلی به ضخامت بیشتر از ۵ و زوایای بزرگ این ضریب منفی است . از این نتایج برای طراحی عضوهایی با کاربرد خاص استفاده نمود به عنوان مثال سازه هایی حلقوی که تحت بار محوری دچار لهیدگی می شوند .



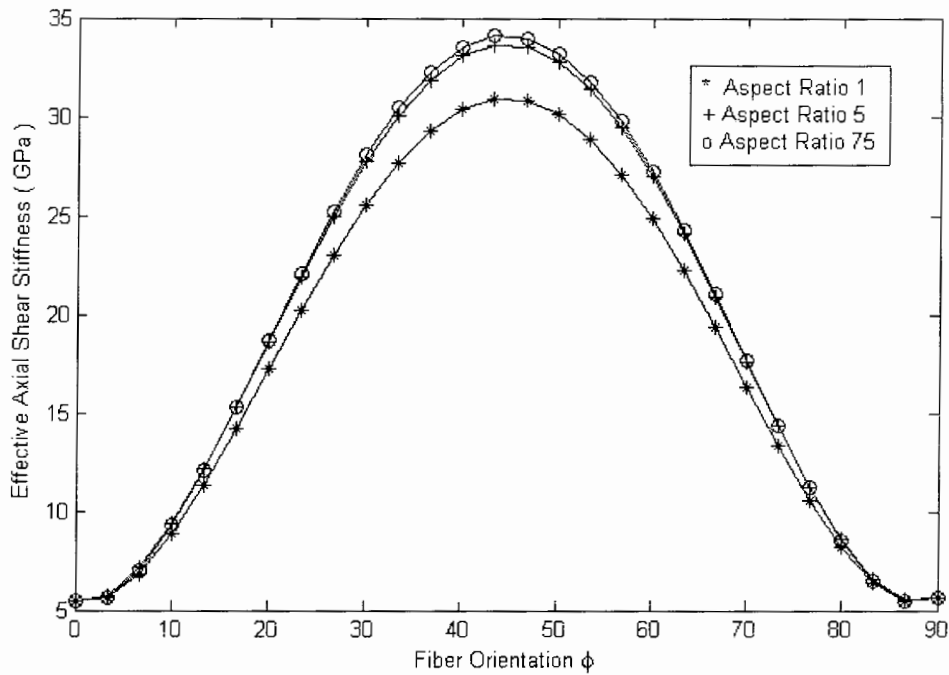
شکل ۴ - ۵ تغییرات ضریب پواسون موثر با زاویه الیاف

۴ - ۳ - ۳ - مدول برشی موثر

می توان این مدول را همانند استوانه های ایزوتروپیک تعریف نمود .

$$\bar{G}_{x\theta} = \frac{T_x}{J\gamma^0} \quad (۲ - ۴)$$

در رابطه فوق J ممان اینرسی قطبی ، T_x گشتاور اعمالی است . همانطور که در شکل ۴ - ۵ آمده برای ضریب شعاع داخلی به ضخامت ۷۵ ، ۵ و ۱ متقارن و حداکثر مقدار آن در $\phi = 45^\circ$ می باشد .



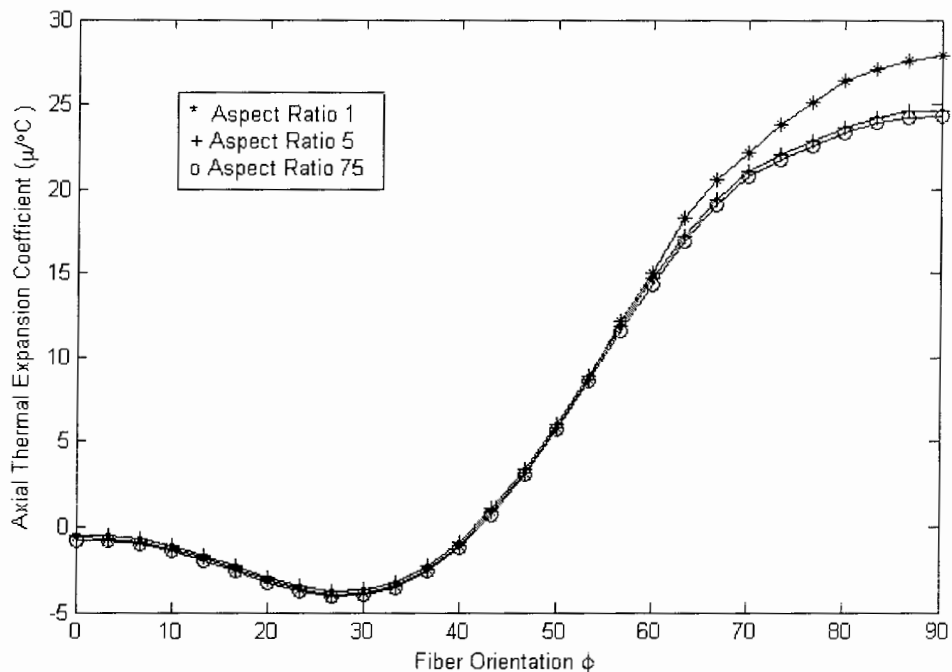
شکل ۴ - ۵ تغییرات مدول برشی موثر با زاویه الیاف

۴ - ۳ - ۴ - ضریب موثر انبساط گرمایی

ضریب موثر انبساط گرمایی $\bar{\alpha}_x$ بصورت زیر تعریف می شود :

$$\bar{\alpha}_x = \frac{\varepsilon_x^0}{\Delta T} \quad (۳ - ۴)$$

که ε_x^0 از حل همزمان معادلات شرح داده شده با بارگذاری $P_x = T_x = P_i = P_o = 0$ و $\Delta T \neq 0$ بدست می آید. نتایج در شکل ۴ - ۵۵ نمایش داده شده است. مشخص است که برای ضریب شعاع داخلی به ضخامت های مختلف این مقادیر تقریباً یکسان است. ضریب موثر انبساط گرمایی از یک مقدار کوچک در $\theta = 0^\circ$ کاهش یافته و در حدود $\theta = 30^\circ$ حداکثر مقدار منفی را دارد سپس در حدود زاویه $\theta = 45^\circ$ صفر شده و در زوایای بزرگ بیشینه مقدار خود را می گیرد.

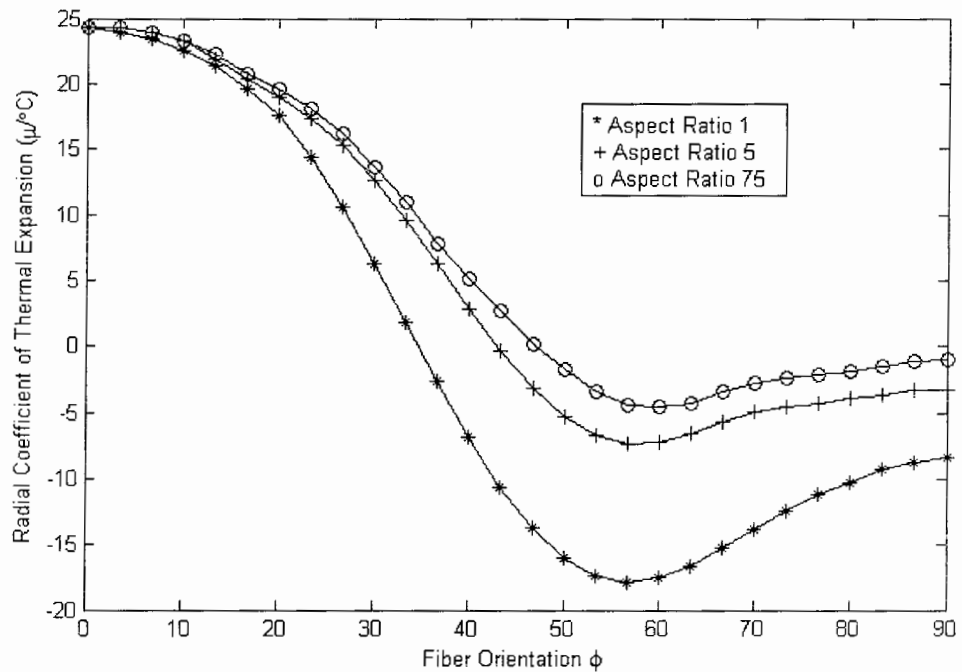


شکل ۴ - ۵۵ تغییرات ضریب موثر انبساط گرمایی با زاویه الیاف

یکی از خصوصیات جالب استوانه های ، تغییر شعاع آن است که با بار گرمایی مرتبط است . این خاصیت ضریب شعاعی موثر انبساط گرمایی نامیده می شود ، $\bar{\alpha}_r$ را به عنوان تغییرات شعاع به ازای هر واحد از طول شعاع داخلی R_i و تغییرات هر واحد دمایی ΔT عنوان می کنند . بنابراین بزرگی و ابعاد یک ضریب انبساط گرمایی را دارد . اگر مقدار نهایی شعاع داخلی بعد از تغییر دمایی ΔT باشد ، ضریب رادیال موثر انبساط گرمایی برابر است با :

$$\alpha_r = \frac{R_i^f - R_i}{R_i \Delta T} \quad (4 - 4)$$

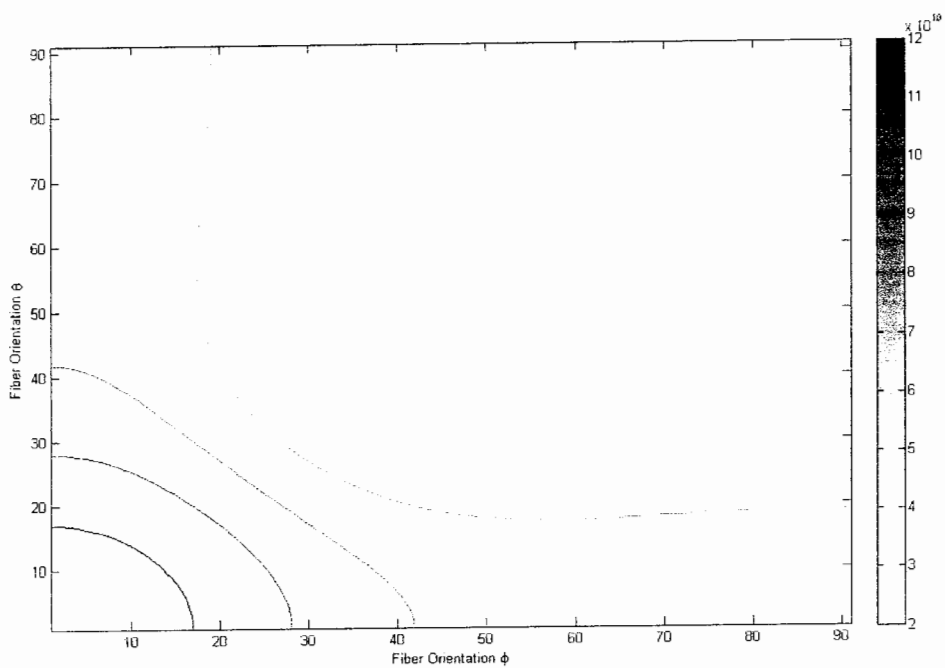
منحنی های موجود در شکل ۴ - ۵۶ تغییر در ضرایب شعاعی انبساط گرمایی استوانه های چند لایه را نشان می دهد . یکی از نتایجی که از روی نمودار قابل بررسی می باشد این است که برای ضریب شعاع داخلی به ضخامت های کوچک این مقدار به حداقل خود رسید و همچنین کمینه مقدار ضریب شعاعی موثر انبساط گرمایی در حدود زاویه $\phi = 55^\circ$ اتفاق می افتد .



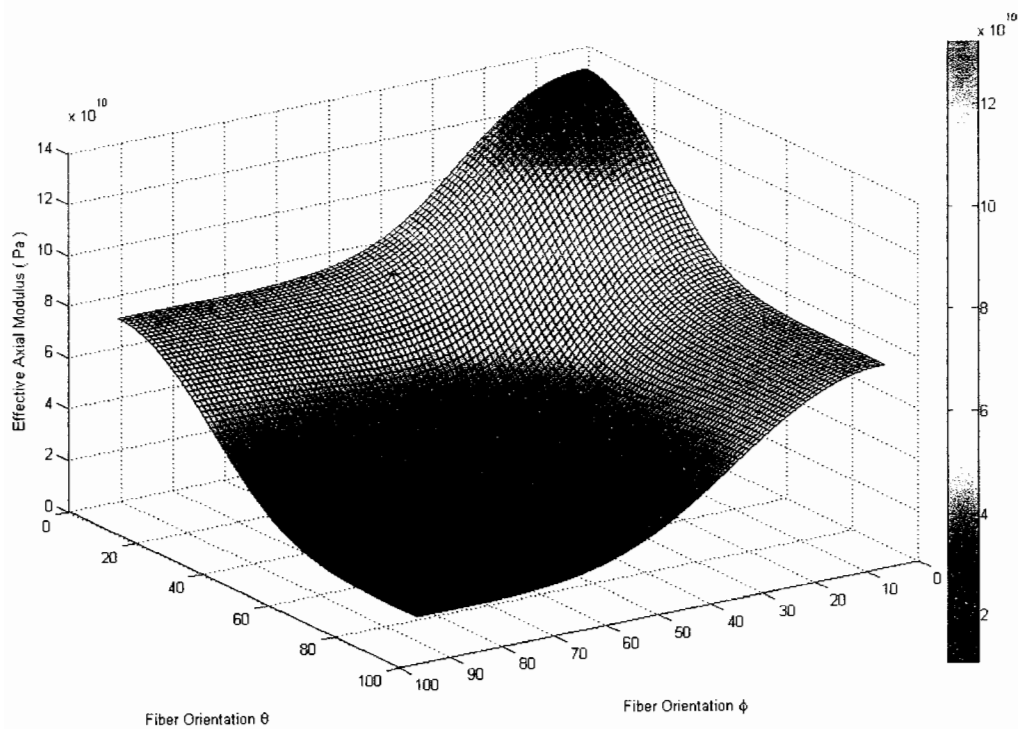
شکل ۴ - ۵۶ تغییرات ضریب رادیال موثر انبساط گرمایی با زاویه الیاف

۴ - ۴ - ۱ - ضریب مدول موثر محوری کامپوزیت چهارلایه

مدول موثر محوری \bar{E}_x از همان رابطه فوق بدست آمد، تغییرات زاویه θ در بروی محور x و تغییرات زاویه ϕ در بروی محور y نمایش داده شده است. برای دید بهتر این نتایج یکبار بصورت کانتور و یکبار بصورت سطح در شکل ۴ - ۵۷ و شکل ۴ - ۵۸ نمایش داده شده.



شکل ۴ - ۵۷ نمایش تغییرات مدول موثر محوری با تغییر زوایای داخلی (Pa)

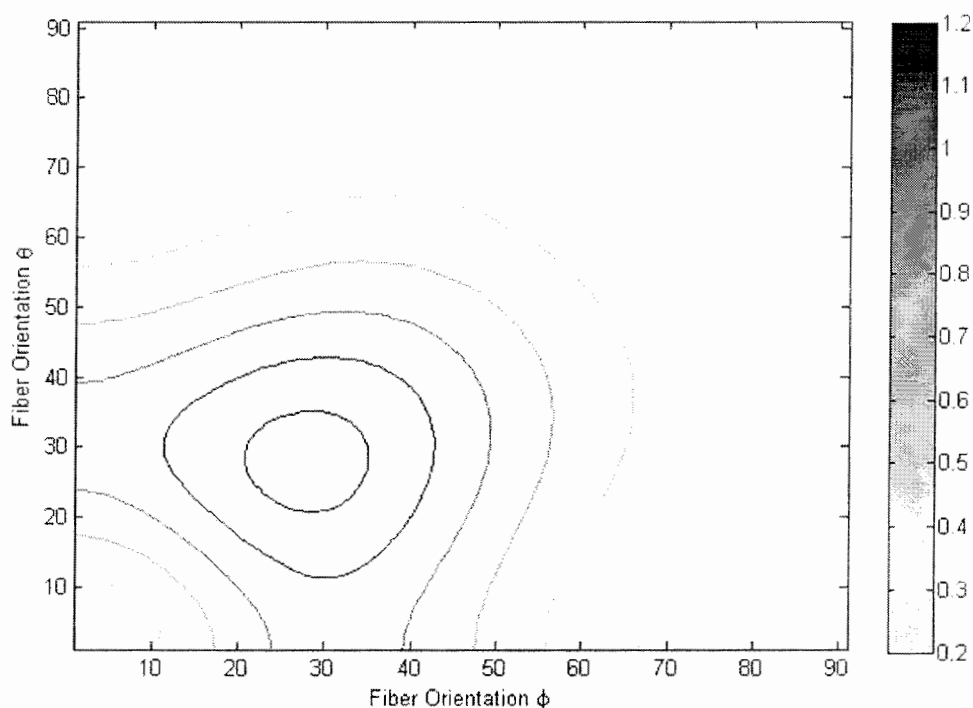


شکل ۴ - ۵۸ نمایش تغییرات مدول موثر محوری با تغییر زوایای داخلی (Pa)

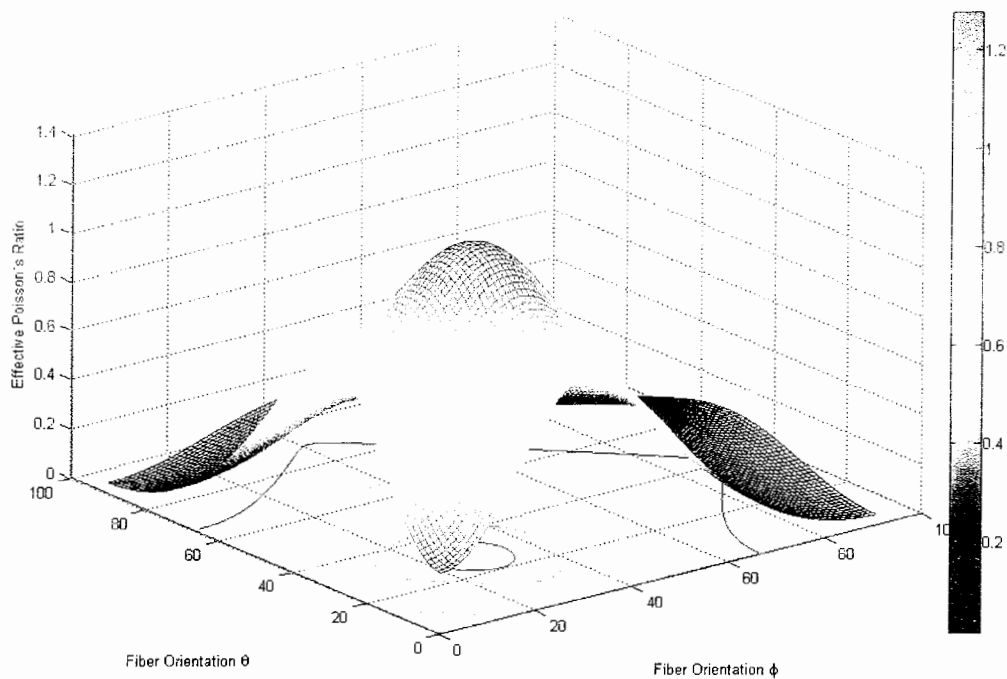
همانطور که در شکل ملاحظه می کنید بیشینه مقدار مدول موثر محوری در حدود زوایای ۰ تا ۴ درجه است و برای سازه ای با چیدمان زوایای حدود ۹۰ این مقدار به حداقل خود می رسد. ثابت نگه داشتن یکی از زوایای چیدمان لایه اول و چهارم و یا لایه های دوم و سوم و تغییرات زاویه دو لایه دیگر فرقی در نتیجه ندارد به دلیل آنکه دامنه جواب های بدست آمده نسبت به قطر صفحه Z متقارن است. این وضعیت برای کلیه خواص بدست آمده مشابه است.

۴ - ۴ - ۲ - ضریب پوآسون موثر کامپوزیت چهارلایه

در اشکال ۴ - ۵۹ و ۴ - ۶۰ می توان تغییرات ضریب پوآسون موثر یک کاپوزیت چهارلایه را با تغییر زوایای چیدمان هر جفت لایه مشاهده کنید. ضریب پوآسون موثر در حدود زوایای ۳۰ به بیشینه مقدار خود می رسد سایر مقادیر ضریب پوآسون کوچکتر از این مقدار بوده. در شکل ۴ - ۵۹ می توانید زوایایی که ایجاد مقادیر یکسان مقدار ضریب پوآسون موثر را بدهد ملاحظه نمایید.



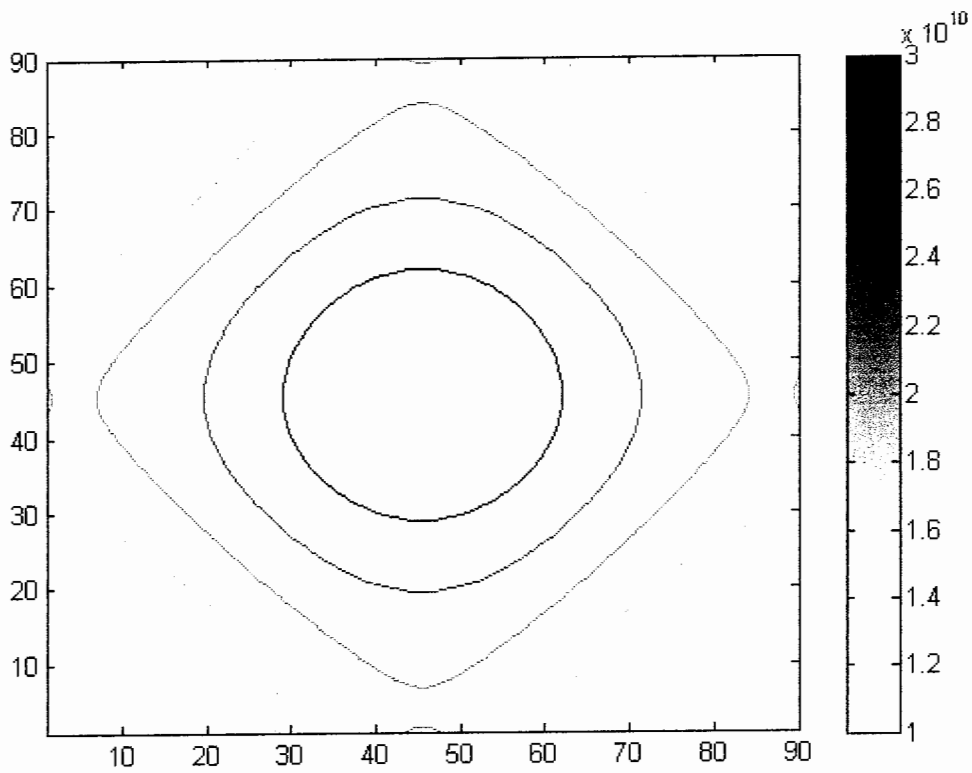
شکل ۴ - ۵۹ نمایش تغییرات ضریب پوآسون موثر محوری با تغییر زوایای داخلی



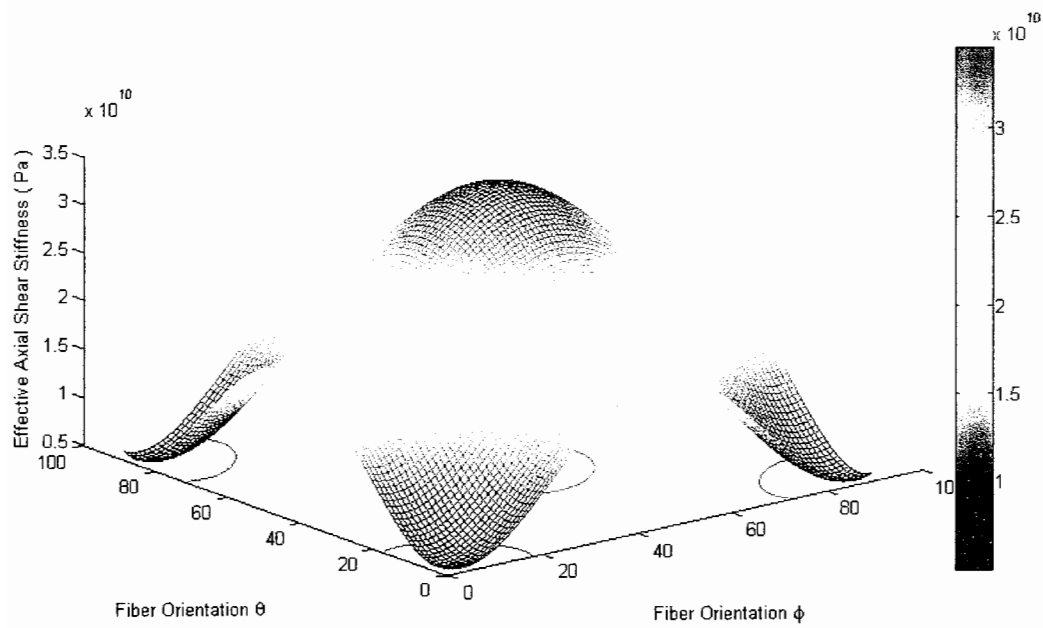
شکل ۴ - ۶۰ نمایش تغییرات ضریب پواسون موثر محوری با تغییر زوایای داخلی

۴ - ۳ - ۴ - ۴ - مدول برشی موثر کامپوزیت چهارلایه

در اشکال ۴ - ۶۱ و ۴ - ۶۲ تغییرات مدول برشی موثر یک کامپوزیت چهارلایه را با تغییر زوایای چیدمان هر جفت لایه آورده شده است. همانطور که در شکل ۴ - ۶۱ مشخص تر می باشد، مقدار مدول موثر برشی در حدود زاویه ۴۵ درجه دارای بیشینه مقدار است. از طرفی این مقدار برای زوایای صفر و نود درجه که عموماً برای حالت کراس پلای استفاده می شود دارای کمترین مقدار می باشد.



شکل ۴ - ۶۱ تغییرات مدول برشی موثر با تغییر زوایای داخلی (Pa)



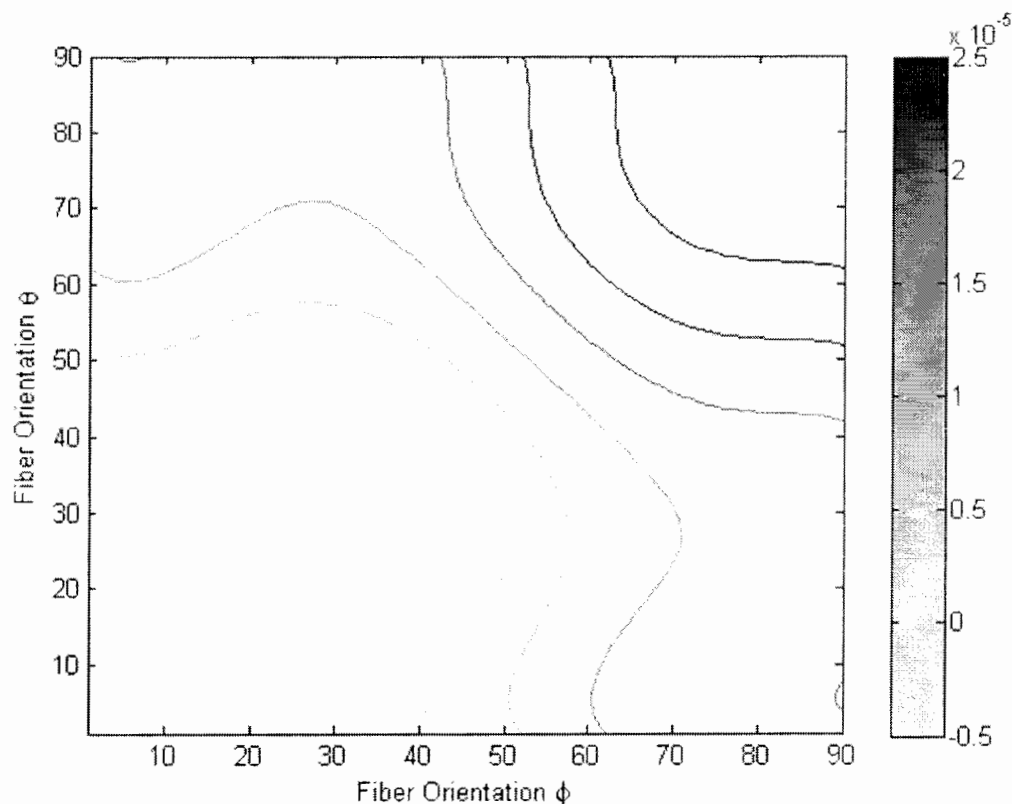
شکل ۴ - ۶۲ تغییرات مدول برشی موثر با تغییر زوایای داخلی

۴ - ۴ - ۴ - ضریب موثر انبساط گرمایی کامپوزیت چهارلایه

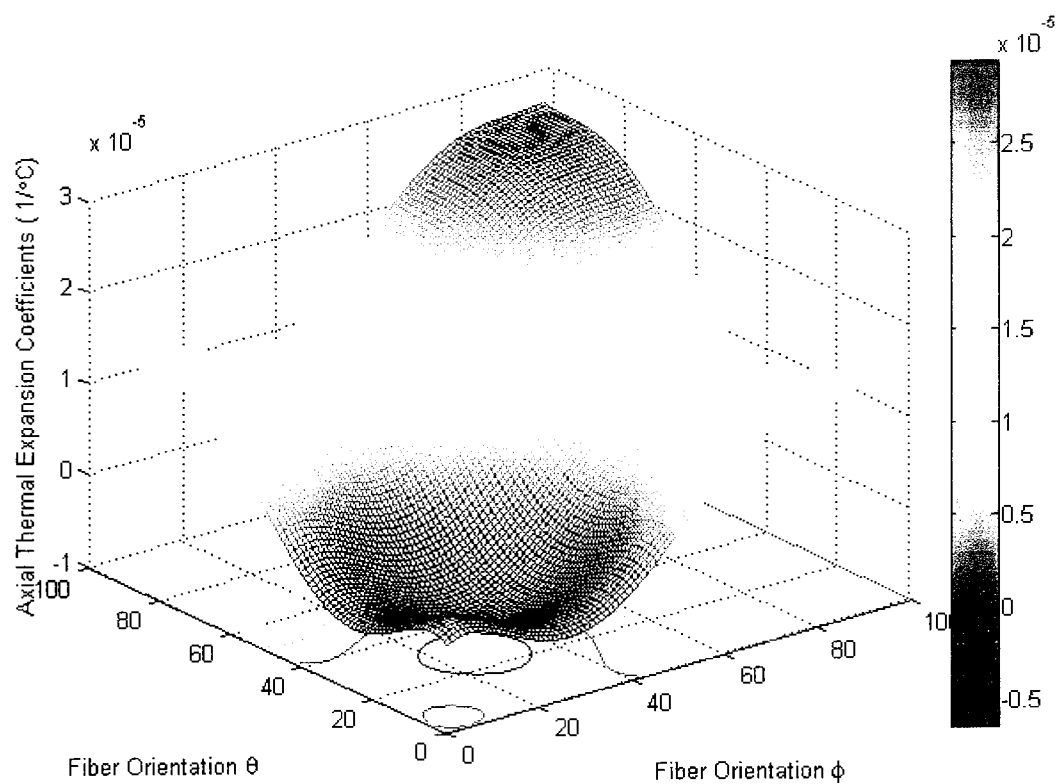
بطور کلی یکی از روشه های مهم در کاهش مقدار تنش حرارتی در سازه های کامپوزیتی ایجاد وضعیتی است که مقدار ضریب انبساط موثر گرمایی در جهت یا جهاتی خاص برابر با صفر شود. البته ناگفته نماند این وضعیت فقط برای حالاتی ایجاد می شود که لمینیت هایی با ضریب انبساط گرمایی مثبت یا منفی داشته باشیم. یا بطور دقیقتر یکی از اجزای کلی تشکیل دهنده لمینیت چه تقویت کننده باشد چه زمینه دارای ضریب انبساط حرارتی منفی یا مثبت باشد.

در صورتی که مقدار ضریب موثر حرارتی یک سازه برابر با صفر باشد دیگر کرنشی در آن جهت نخواهیم داشت این بدان معنا است که می توان سازه هایی با پایداری ابعادی بالا و یا سازه های که در آن خستگی حرارتی ایجاد نمی شود طراحی نمود.

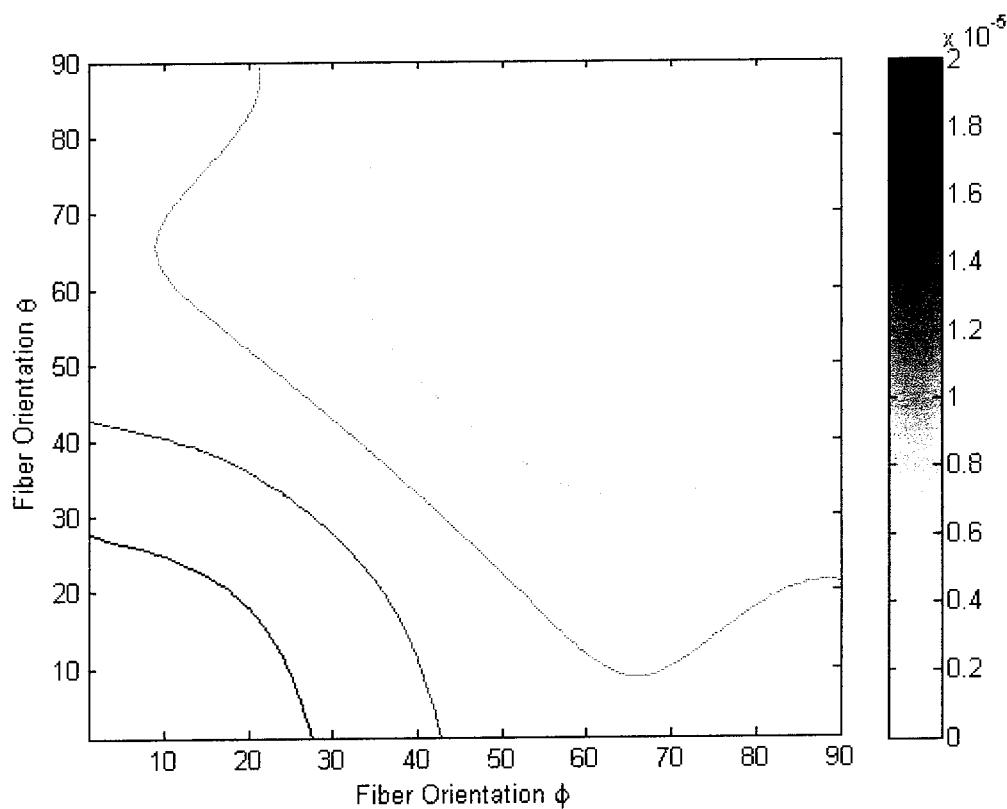
در ادامه در نمودارهای ۴ - ۶۳، ۴ - ۶۴ مقادیر ضریب موثر انبساط گرمایی محوری با تغییر زوایای داخلی را ملاحظه و زوایای مورد بحثی که در آن این مقدار برابر با صفر است مشاهده نمود. در اشکال ۴ - ۶۵ و ۴ - ۶۶ مقادیر شعاعی ضریب موثر انبساط گرمایی شعاعی بر حسب تغییرات زوایای داخلی برای یک استوانه چهار لایه را بررسی نمود.



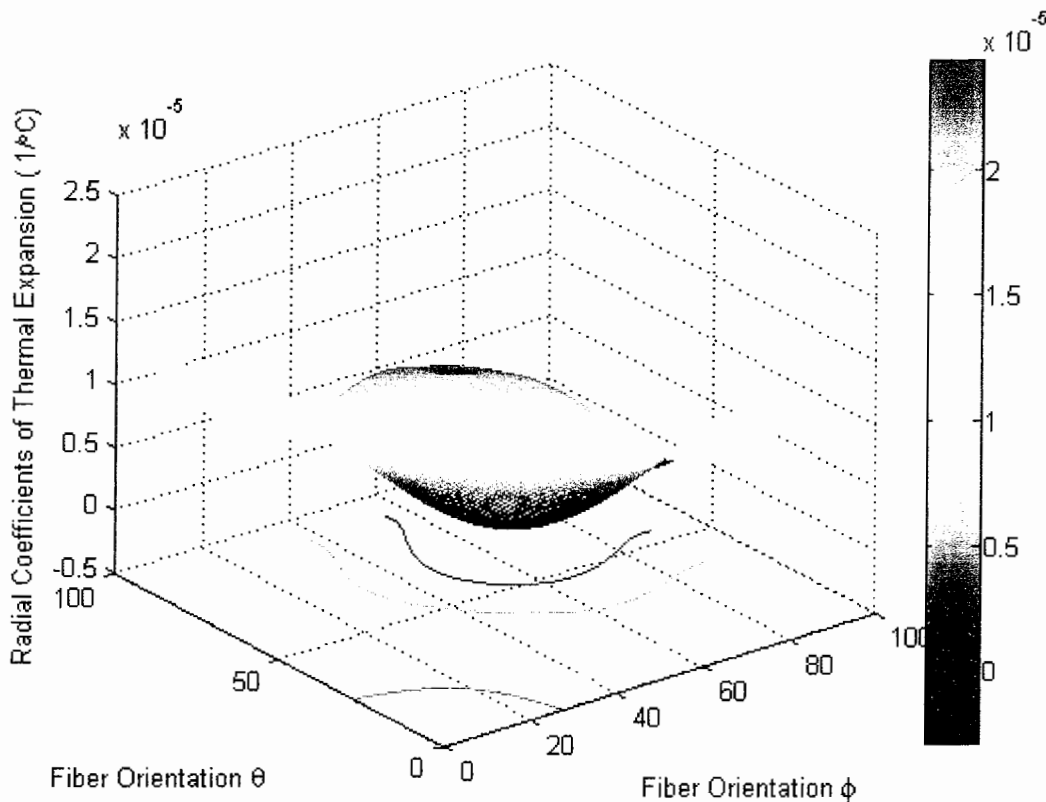
شکل ۴ - ۶۳ تغییرات ضریب موثر انبساط گرمایی با تغییر زوایای داخلی (1°)



شکل ۴ - ۶۴ تغییرات ضریب موثر انبساط گرمایی با تغییر زوایای داخلی



شکل ۴ - ۶۵ تغییرات ضریب موثر انبساط گرمایی با تغییر زوایای داخلی ($1/^\circ\text{C}$)



شکل ۴ - ۶۶ تغییرات ضریب موثر انبساط گرمایی با تغییر زوایای داخلی

۴ - ۵ - جمع بندی و نتیجه گیری

با توجه به مطالب ارائه شده در بخش های قبلی سه روش اصلی در حل مسائل مواد مرکب مورد بررسی و پاسخ هر یک از این سه روش برای یک لایه چینی خاص و بارگذاری مشخص مکانیکی و ترمومکانیکی مورد بررسی قرار گرفت. در روش کلاسیک به دلیل نادیده گرفتن خواص در جهت ضخامت لمینا حجم بسیاری از معادلات کاسته شده و سرعت رسیدن به جواب از سایر روش ها بیشتر است ولی اثراتی که این جهت بر روی خواص و نتایج در جهات دیگر می گذارد بطور کلی نادیده گرفته شده که این موضوع یکی از دلایل اختلاف در مقادیر ارائه شده در این بخش می باشد. در هر حال این فرض در روابط روش الاستیسیته به نوعی تصدیق می شود که نمونه آن را در کرنش های برشی می توانید ملاحظه کنید. از طرفی روش المان محدود برای این بخش پاسخی دارد که گاه به دلیل کوچکی مقدار می توان با آن برابر دانس و گاه ایجاد اختلافات غیر قابل چشم داشت می کند.

از موارد دیگر تاثیر بار حرارتی بر روی پاسخ سازه برای یک چیدمان خاص مورد بررسی قرار گرفت که در اینجا به این نتیجه اشاره می شود که این بارگذاری مانند بسیاری از حالات موجود در مسائل جامدات از

قضیه جمع آثار با تقریب بسیار خوب پیروی نموده و از دیگر نتایج این است که بارگذاری حرارتی گاه به افزایش تنش در جسم کمک کرده و گاه عکس این حالت رخ می دهد که نمونه هایی از آن در بخش های قبلی اشاره شد .

در مرحله بعدی به بررسی چیدمان در توزیع تنش ، کرنش و جابجایی پرداخته شد که دو حالت مختلف از چیدمان های معمول در مسائل رشته پیچی یعنی پادمتقارن و لایه های ایزوتروپ بررسی و مقادیر مختلف پاسخ در آن بررسی شد .

از دیگر نتایج حل مسائل به کمک روش الاستیسیته پیدار کردن مقادیر موثر است که بدین معناست که یک استوانه تولید شده دو لایه با نسبت خاص شعاع به ضخامت بدون توجه به ساختار و حل مسائل پیچیده دارای چه مقدار خاصیتی در زاویه دلخواه است . که در نهایت این موضوع برای لوله های چهار لایه که کاربرد بسیار فراوانی در صنایع مختلف دارند بسط داده شد .

نتایج این بخش در مسائل طراحی و محاسبات اولیه بسیار با اهمیت می باشند .

فصل پنجم

۵ - ۱ - مقدمه انتقال حرارت

بنا بر اصل دوم ترمودینامیک چنانچه قسمتی از یک سیستم نسبت به قسمتهای دیگر آن اختلاف دما داشته باشد، انرژی حرارتی از نقاط گرم به سمت نقاط سرد جریان می یابد. به کمک روابط ترمودینامیکی می توان وضعیت حالت تعادل، دمای تعادل و مقدار کل انرژی مبادله شده را بدست آورد. اما اگر پرسش هایی مانند شدت جریان حرارت، تغییرات دمای نقاط برحسب زمان و یا زمان لازم برای رسیدن به تعادل مورد نظر باشد ترمودینامیک پاسخگو نیست و وارد محدوده انتقال حرارت شده ایم. اگر دمای قسمتی از جسم نسبت به نواحی دیگر آن بالاتر باشد، حرارت از قسمت های گرم به سمت نواحی سرد جریان می یابد. این پدیده را رسانش حرارتی یا هدایت حرارتی می نامند. ضریب هدایت حرارتی یا گرماسانایی یک خاصیت مهم اجسام است و به نوع جسم و شرایط آن بستگی دارد. هر چه مقدار ضریب هدایت حرارتی جسم بیشتر باشد، جسم هادی تر بوده و مقدار بیشتری حرارت از آن می گذرد. [34]

اکثر منابع موجود انتقال حرارت هدایت در موادی که ایزوتروپ هستند بحث می کنند. در این مواد هدایت حرارتی به مسیر بستگی ندارند. اما مواد طبیعی و مصنوعی بسیاری در طبیعت وجود دارند که این مواد هدایت گرمایی به مسیر بستگی دارند این مواد غیرایزوتروپ نامیده می شوند. به عنوان مثال کریستال ها، چوب ها، سنگ های رسوبی، صفحات لایه لایه، کابل ها، مواد محافظ در برابر حرارت که در کاربردهای هوا فضا استفاده می شوند و همین طور ساختارهای کامپوزیتی و بسیاری از موارد دیگر جزو مواد غیرایزوتروپ می باشند.

در لمینیت ها، هدایت گرمایی در امتداد الیاف (تقویت کننده ها) و یا در ماتریس ها متفاوت است. در صفحه های لمینا هدایت گرمایی در امتداد و یا در وسط لایه ها یکسان نمی باشد. از این رو، هدایت گرمایی در اجسام غیرایزوتروپ از لحاظ شاخه های مختلف علمی و مهندسی از اهمیت خاصی برخوردار است.

بیشتر تحقیقات قبلی در مورد مسائل یک بعدی در فیزیک کریستال ها صورت گرفته بود. معادله دیفرانسیل هدایت گرمایی برای جامدات غیرایزوتروپیک شامل مشتق عرضی متغیرهای فضایی می شود. از این جهت، آنالیز عمومی هدایت گرمایی در این مواد بسیار پیچیده می باشد. وقتی مشتقات عرضی در

معادله هدایت گرمایی حضور نداشته باشند ، همانند مواد جامد اورتوروپیک ، آنالیز جابجایی حرارتی بطور قابل ملاحظه ای ساده می شوند. [32]

در سالهای اخیر تحقیقات متعددی در مورد راه حل‌های هدایت گرمایی در محیط غیرایزوتروپ انجام گرفته ولی تحقیقات عملی و آزمایشگاهی بر روی نفوذ حرارتی در مواد غیرایزوتروپیک بسیار محدود است . بطور کلی در بسیاری از مسائل مهندسی نیاز فراوانی برای دانستن توزیع دما و شار گرمایی در مواد کامپوزیتی که از لایه های مجزا با ضریب هدایتی متفاوت دارند احساس می شود . مطالعه این تیپ از مسائل در نگهداری و کاربرد لمینیت های تقویت شده با الیاف و بطور کلی تر در تمام انواع جامدات ناهمگن^۱ کاربرد دارد .

حل مسائل انتقال حرارت هدایتی در محیط های مرکب محققان بسیاری را به خود مشغول ساخته است . برخی از افرادی که اخیرا در این راه سهم بسیاری داشته اند و راه حل هایی از انتقال حرارت در بدنه های ناهمگن چند لایه ارائه و بر روی نفوذ در محیط های مرکب کار کرده بلاوین و کاشچف^۲ (۱۹۶۵) و مولهولند و کوبل^۳ (۱۹۷۲) بوده اند .

رفتار جامعی از روش های حل شامل آزمایشات تجربی انتقال حرارت در محیط های مرکب بوسیله هان و کسنر^۴ (۱۹۸۱) ، وافای و اکیر^۵ (۱۹۸۴) ، زوارت و یوانوویچ^۶ (۱۹۸۵) ، تاکاو و تایا^۷ (۱۹۸۶) ، هاشین^۸ (۱۹۹۱) و (۲۰۰۱ ، ۲۰۰۲) ، اوزیسیک^۹ (۱۹۹۳) ، کودل و فلچر و پیترسن^{۱۰} (۱۹۹۴) ، بوویک^{۱۱} (۱۹۹۴) ، میلو و بنونیست^{۱۲} (۱۹۹۹) ، میلر و شنوی^{۱۳} (۲۰۰۰) ، شارما^{۱۴} و دیگران (۲۰۰۳) ، دوآن^{۱۵} و دیگران (۲۰۰۵) ، انجام شده است .

در ادامه بخش انتقال حرارت معادله انرژی و شار گرمایی در جامدات غیر ایزوتروپیک بررسی و تانسور هدایت حرارتی برای این مواد (جامدات غیرایزوتروپیک) ارائه می شود و مولفه های این تانسور برای یک لمینیت کامپوزیتی بدست می آید . توضیحاتی نیز در مورد شرایط مرزی بکار برده شده در حل این چنین مسائل در ادامه بخش آورده شده .

¹ Heterogeneous

² Bulavin and Kashcheev

³ Mulholland and Cobble

⁴ Han and Cosner

⁵ Vafai and Akire

⁶ Zwart and Yavanovich

⁷ Takao and Taya

⁸ Hashin

⁹ Ozisik

¹⁰ Couedel and Fletcher and Peterson

¹¹ Bovik

¹² Miloh and Benveniste

¹³ Miller and Shenoy

¹⁴ Sharma

¹⁵ Duan

همانطور که در بالا اشاره شد به دلیل پیچیدگی روابط امکان حل به روش تحلیلی وجود نداشت به همین دلیل از روش های عددی برای این منظور بهره گرفته شد در بخش های بعدی اشاره ای به روش های عددی در حل مسائل انتقال حرارت شده است .

در بخش نتایج ابتدا به بررسی توزیع دما در لایه های مختلف مخزن می پردازیم . به دلیل تقارنی که در شرایط مرزی وجود دارد تغییرات دما در راستای مماسی برابر با صفر است . برای بررسی بیشتر و پیچیده تر شدن موضوع و داشتن توزیع دما در حالاتی دیگر فرض می شود که مخزن تحت منبع تشعشعی از بیرون مخزن قرار گرفته و این شرط مرزی را نیز علاوه بر شروط قبلی مد نظر قرار می دهیم و مقایسه ای بین حالتی که شرط مرزی تشعشع وجود دارد و بدون آن انجام داده می شود .

در بخشی دیگر به بررسی تغییرات دما در لایه های مختلف مخزن برای سه نوع چیدمان مطرح شده^۱ پرداخته می شود . نتایج این بخش سایر چیدمان ها را نیز شامل می شود .

در این بخش فرض می شود که مخازن مورد بررسی حرارت را در لایه خارجی بصورت همرفت جابجا می کنند . تاثیرات ضریب همرفت بر توزیع دما از دیگر نتایج مورد بررسی است .

در آخر به بررسی تاثیر عناصر ماتریس هدایت بر توزیع دما پرداخته و آن را برای شرط مرزی تشعشعی نیز مورد مطالعه قرار می دهیم .

^۱ شرح داده شده در بخش نتایج تنش .

فصل ششم

۶-۱ - هدایت در جامدات ایزوتروپیک و غیر ایزوتروپیک

بر اساس قانون فوریه بردار شار حرارتی در جامدات ایزوتروپیک با توجه به اینکه ضریب هدایت حرارتی k مستقل از جهت می باشد، بدین صورت بیان می شود:

$$\bar{q} = -k\nabla T \quad (۶-۱)$$

در جامدات ایزوتروپیک بردار شار حرارتی \bar{q} در هر نقطه از جسم عمود بر خطوط هم دمایی است که از آن نقطه می گذرد. این در حالی است که در جامدات غیر ایزوتروپیک اینچنین نیست و به طور مثال بردار شار حرارتی q_1 که در راستای Ox_1 می باشد با یک ترکیب خطی به گرادیان های درجه حرارت در جهات Ox_1 و Ox_2 و Ox_3 بستگی دارد. بنابراین بردار شار حرارتی در جهات Ox_1 و Ox_2 و Ox_3 برای جامدات غیر ایزوتروپیک و در مختصات کارتزین بدین صورت بیان می گردد:

$$\begin{aligned} q_1 &= -k_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} - k_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} - k_{13} \frac{\partial T}{\partial x_3} \\ q_2 &= -k_{21} \frac{\partial T}{\partial x_1} - k_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} - k_{23} \frac{\partial T}{\partial x_3} \\ q_3 &= -k_{31} \frac{\partial T}{\partial x_1} - k_{32} \frac{\partial T}{\partial x_2} - k_{33} \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (۶-۲)$$

روابط فوق را می توان بطور عمومی برای مختصات منحنی الخط متعامد (u_1, u_2, u_3) بدین صورت بیان کرد:

$$q_i = -\sum_{j=1}^3 \frac{1}{a_j} k_{ij} \frac{\partial T}{\partial u_j} \quad i = 1, 2, 3 \quad (۶-۳)$$

که در آن a_j ها فاکتور تبدیل هستند .

۶ - ۲ - تانسورهای هدایت در محیط های گوناگون

همانطور که از روابط فوق نیز مشخص است ضرایب هدایت حرارتی k_{ij} شامل ۹ مولفه است که این ضرایب را می توان بصورت عناصر یک تانسور مرتبه دوم در نظر گرفت . در سیستم تریکلینیک^۱ محدودیتی بر روی ضرایب هدایتی توسط عامل تقارن ایجاد نمی شود . پس تمام نه مولفه k_{ij} می توانند غیر صفر باشند :

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (۶ - ۴)$$

با مطالعه فرآیندهای غیر قابل بازگشت [35] می توان نشان داد که ضرایب هدایت حرارتی k_{ij} از اصل معکوس پذیری تبعیت می کنند ، بنابراین خواهیم داشت :

$$k_{ij} = k_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (۶ - ۵)$$

همچنین با توجه به اصول ترمودینامیک غیر قابل بازگشت ضرایب k_{11} و k_{22} و k_{33} همواره باید مثبت باشند و بقیه ضرایب هدایت حرارتی نیز دارای محدودیتی هستند که بدین صورت بیان می گردد . [36]

$$k_{ii} > 0 \quad (۶ - ۶)$$

$$k_{ii}k_{jj} - k_{ij}^2 > 0$$

تانسور فوق با توجه به محیط های مورد بررسی می تواند بصورت های گوناگونی ساده شود به عنوان مثال می توان آنها را در موارد زیر ساده تر کرد :
محیط های مونوکلینیک^۲ که دارای تقارن نمی باشند تانسور هدایت حرارتی به فرم زیر می شود :

¹ Triclinic

² Monoclinic

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \quad (۷-۶)$$

برای محیط های تتراگونال^۱ و تری گونال^۲ و هگزاگونال^۳ تانسور هدایت حرارتی به فرم زیر نوشته می شود :

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ -k_{12} & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \quad (۸-۶)$$

و در محیط های اورتورومبیک^۴ تانسور هدایت به فرم زیر ساده می شود :

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \quad (۹-۶)$$

به دلیل وجود صفحات تقارن برای مسئله مورد نظر ما (یک لمینیت کامپوزیتی) تانسور هدایت به فرم زیر در می آید [33] :

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۰-۶)$$

و در ساده ترین حالت در محیط های کیوبیک^۵ داریم :

$$\bar{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} \end{bmatrix} \quad (۱۱-۶)$$

¹ Tetragonal

² Trigonal

³ Hexagonal

⁴ Orthorhombic

⁵ Cubic

اگر جهات محورهای مختصات با راستای الیاف یکی نباشد به کمک ماتریس دوران تانسور ضرایب انتقال حرارت را به راستای محورها دوران می دهیم .
 بطور کلی اعضای تانسور انتقال حرارت چه در جهت الیاف و یا در جهت عمود بر آن تابعی از ضریب انتقال حرارت مواد تشکیل دهنده و نسبت حجمی آن مواد می باشد .

۶-۲-۱ - اعضای تانسور هدایت

اگر گرادیان دما را در جهت محوری بصورت زیر در تمام فازها باشد :

$$\theta = \beta x_1 \quad (۶-۱۲)$$

معادله $\nabla^2 \theta = 0$ تمامی فازها را ارضا می نماید . از رابطه $\bar{q}_i = -k_{ij} \bar{\theta}_j$ داریم :

$$\bar{q}_i = -k_{i1} \bar{\theta}_1 \quad (۶-۱۳)$$

که k_{i1} را هدایت محوری می نامیم . همچنین داریم :

$$\bar{q}_i = \sum_{n=1}^N c_n q_i^{(n)} \quad (۶-۱۴)$$

که رابطه فوق برای N فاز با نسبت های حجمی c_n نوشته شده است . با ترکیب رابطه (۶-۱۳) و (۶-۱۴) داریم :

$$k_{i1} = \sum_{n=1}^N c_n k_n \quad (۶-۱۵)$$

که هدایت محوری بوسیله رابطه آشنای فوق قانون اختلات^۱ بدست می آید .
 در آخر برای بدست آوردن هدایت عرضی با توجه به رابطه زیر

^۱ Rule of Mixture

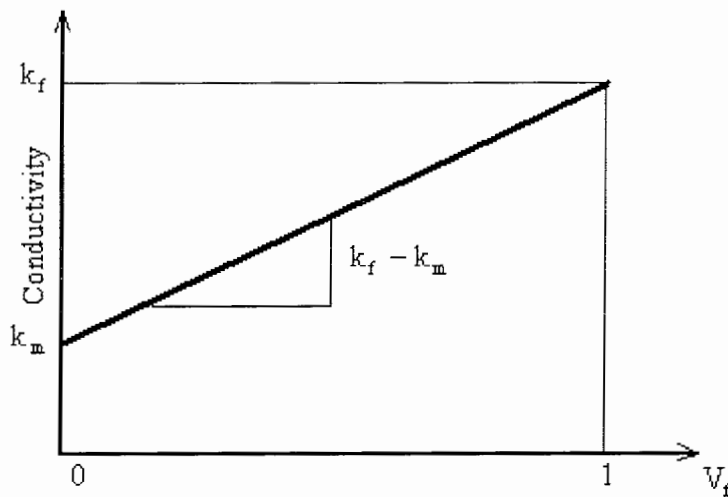
$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (۱۶-۶)$$

و حل بدست آمده از هدایت عرضی داریم :

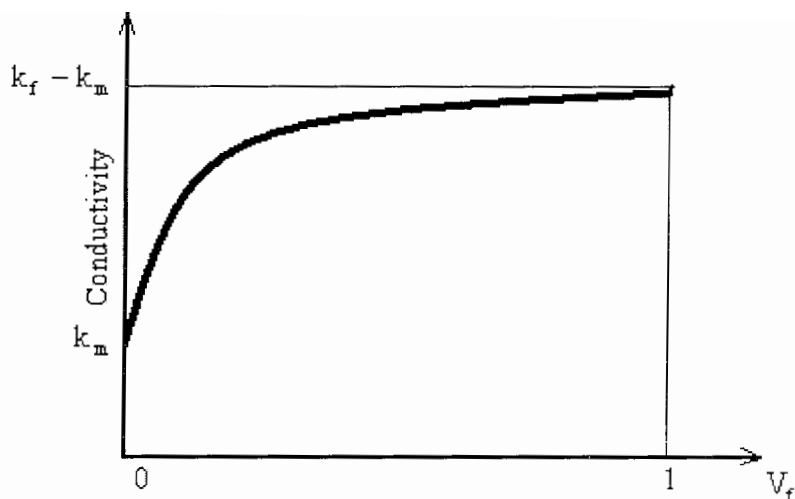
$$k_{22} = k_m \left[1 + \frac{c}{k_m / (k_f - k_m) + (1-c)/2} \right] \quad (۱۷-۶)$$

که c نسبت حجمی فاز الیاف است [37].

در نمودار (۱-۶) و (۲-۶) می توان تغییرات ضریب هدایت طولی و عرضی را نسبت به تغییرات نسبت حجمی الیاف با فرض $k_f > k_m$ ملاحظه نمود :



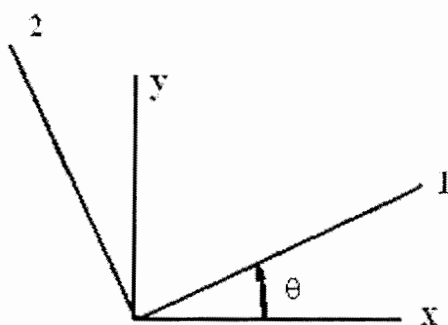
شکل (۱-۶) تغییرات ضریب هدایت طولی نسبت به تغییرات نسبت حجمی الیاف با فرض $k_f > k_m$



شکل (۶-۲) تغییرات ضریب هدایت عرضی نسبت به تغییرات نسبت حجمی الیاف با فرض $k_f > k_m$

۶-۲-۲ - دوران ماتریس هدایت

در آنالیز لمینیت ها که دارای چند لمینا هستیم ، گاهی ضروری است که بدانیم روابط تنش کرنش برای حالت عمومی لمینیت در محورهای غیر اصلی هر لمینا کدام است^۱. شکل (۶-۳) این محورها را نمایش می دهد .



شکل (۶-۳) جهت ۱ در راستای الیاف و جهت x در راستای محور سیلندر و جهت ۳ هم راستای جهت z و عمود بر محور های ۱ و ۲ می باشد .

اکنون این فرم از دوران را برای معادله شار اثبات می کنیم :

^۱ به محورهای غیر اصلی لمینا اصطلاحاً Off - Axis می گویند .

$$\{q\}_{on} = -[k]_{on} \nabla \{T\}_{on} \quad (۱۸ - ۶)$$

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix} \nabla \{T\}_{on}$$

توضیح: جهات x_1, y_1, z_1 همان راستاهای ۱، ۲، و ۳ شکل (۶-۳) هستند. اکنون به کمک ماتریس دوران^۱ طرفین تساوی را دوران می دهیم.

$$[a] \begin{Bmatrix} q_r \\ q_\theta \\ q_z \end{Bmatrix}_{off} = - \begin{bmatrix} k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix} [a] \nabla \{T\}_{off} \quad (۱۹ - ۶)$$

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\theta \\ q_z \end{Bmatrix}_{off} = -[a]^{-1} \begin{bmatrix} k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & k_{11} & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix} [a] \{T\}_{off} \quad (۲۰ - ۶)$$

اکنون $[\bar{k}]$ را برای حالت Off - Axis به فرم زیر تعریف می کنیم:

$$[\bar{k}] = [a]^{-1} [k] [a] \quad (۲۱ - ۶)$$

در نتیجه:

^۱ ماتریس دوران برای انتقال حول محور ۳ به فرم زیر نمایش داده می شود: [2]

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} q_r \\ q_\theta \\ q_z \end{Bmatrix}_{\text{off}} = -[\bar{k}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix}_{\text{off}} \quad (۲۲-۶)$$

و مقدار ماتریس هدایت در حالت Off - Axis بصورت زیر می شود :

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} k_{11} \sin^2 \theta + k_{22} \cos^2 \theta & (k_{11} - k_{22}) \sin \theta \cos \theta & 0 \\ (k_{11} - k_{22}) \sin \theta \cos \theta & k_{11} \cos^2 \theta + k_{22} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & k_{22} \end{bmatrix} \quad (۲۳-۶)$$

۶-۳ - معادلات شار حرارتی در اجسام غیرایزوتروپ

معادلات (۶-۲) که برای مولفه های شار حرارتی در مختصات کارتزین بیان شد را می توان برای مختصات استوانه ای (r, ϕ, z) که در آن :

$$\begin{aligned} u_1 &= r & a_1 &= 1 \\ u_2 &= \phi & a_2 &= r \\ u_3 &= z & a_3 &= 1 \end{aligned} \quad (۲۴-۶)$$

بدین صورت بیان نمود :

$$\begin{aligned} q_r &= -k_{11} \frac{\partial T}{\partial r} - k_{12} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} - k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \\ q_\phi &= -k_{21} \frac{\partial T}{\partial r} - k_{22} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} - k_{23} \frac{\partial T}{\partial z} \\ q_z &= -k_{31} \frac{\partial T}{\partial r} - k_{32} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} - k_{33} \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (۲۵-۶)$$

و در مختصات کروی (r, ϕ, θ) داریم :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= r & a_1 &= 1 \\
 u_2 &= \phi & a_2 &= r \sin \theta \\
 u_3 &= \theta & a_3 &= r
 \end{aligned}
 \tag{۶-۲۶}$$

بنابراین معادلات (۶-۲) را می توان بصورت زیر بیان نمود :

$$\begin{aligned}
 q_r &= -k_{11} \frac{\partial T}{\partial r} - k_{12} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} - k_{13} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\
 q_\phi &= -k_{21} \frac{\partial T}{\partial r} - k_{22} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} - k_{23} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\
 q_\theta &= -k_{31} \frac{\partial T}{\partial r} - k_{32} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} - k_{33} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}
 \end{aligned}
 \tag{۶-۲۷}$$

۶-۴ - معادله انرژی در جامدات غیر ایزوتروپیک

معادله انتقال حرارت هدایتی در مختصات منحنی الخط متعامد (u_1, u_2, u_3) برای جامدات غیر ایزوتروپیک بدین صورت بیان می گردد :

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (a_2 a_3 q_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (a_1 a_3 q_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (a_1 a_2 q_3) \right] - g = -\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}
 \tag{۶-۲۸}$$

که در آن a_1 ، a_2 و a_3 فاکتور تبدیل هستند . و مقادیر q_1 ، q_2 و q_3 از روابط (۶-۱) بدست می آیند ، همچنین تولید انرژی در داخل جسم با پارامتر g نشان داده شده است . اکنون می توان معادله انرژی را در مختصات کارتیزین ، استوانه ای و را بدست آورد . در مختصات کارتیزین (x, y, z) داریم :

$$\begin{aligned}
 k_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (k_{12} + k_{21}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \\
 (k_{13} + k_{31}) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} + (k_{23} + k_{32}) \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} + g(x, y, z, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}
 \end{aligned}
 \tag{۶-۲۹}$$

در سیستم مختصات استوانه ای (r, ϕ, z) داریم :

$$k_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k_{22} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + k_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + (k_{12} + k_{21}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial z} +$$

$$(k_{13} + k_{31}) \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial z} + \frac{k_{31}}{r} \frac{\partial T}{\partial z} + (k_{23} + k_{32}) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial z} + g(r, \varphi, z, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۳۰ - ۶)$$

در سیستم مختصات کروی (r, ϕ, θ) داریم :

$$k_{11} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k_{22} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + k_{33} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) +$$

$$(k_{12} + k_{21}) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \varphi} + k_{13} \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{k_{12}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{(k_{13} + k_{31})}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \quad (۳۱ - ۶)$$

$$+ (k_{23} + k_{32}) \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta \partial \varphi} + k_{31} \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial r} + g(r, \varphi, \theta, t) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

۶ - ۵ - شرایط اولیه و شرایط مرزی

این شرایط توضیحات ریاضی وار مشاهدات تجربی است . اعداد مربوط به هریک از متغیرهای مستقل یک مسئله برابر است با مرتبه بالاترین مشتق معادله دیفرانسیل حاکم در همان جهت . مثلا معادله همرفت در مختصات کارتزین یک حرکت جامد ایزوتروپ همگن ، با سرعت V بصورت زیر نوشته شده است :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{u'''}{\rho c} \quad (۳۲ - ۶)$$

که v_x ، v_y و v_z اجزا V هستند . حل معادله (۳۲ - ۶) بدون توجه به روش ریاضی بکار گرفته شده ، مستلزم یک انتگرال گیری ساده و یک انتگرال گیری مضاعف در هر یک از سه فضای متغیر موجود می باشد . بنابراین ، بر حسب شرایط موجود زمانی که به عنوان شرایط اولیه نامیده می شوند و شرایط فضایی که به عنوان شرایط مرزی نامیده می شوند ، می توانیم بگوییم که معادله (۳۲ - ۶) به همراه یک شرایط اولیه و شش شرایط مرزی ، فرمول دیفرانسیلی مساله را تشکیل می دهند . روشن است که مولفه های سرعت در معادله (۳۲ - ۶) هرچند که بر روی مسئله تاثیر می گذارد ، مقدار مربوط به شرایط مرزی و اولیه را تغییر نخواهند داد .

اکنون جزئیات شرایط مرزی و اولیه متناسب با مسئله را در نظر می گیریم .

۶ - ۵ - ۱ - شرایط مرزی (حجم)

در یک مسئله ناپایدار^۱ دمای پیوستار^۲ مورد نظر باید در همان زمان مشخص باشد. در بسیاری از موارد راحت تر است که این زمان همان زمان آغاز مسئله در نظر گرفته شود. از لحاظ ریاضی، اگر شرایط اولیه را با $T_0(r)$ نشان دهیم، حل این مسئله، $T(r,t)$ ، باید به گونه ای باشد که همه نقاط پیوستار بصورت زیر باشد:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(r,t) = T_0(r) \quad (۶ - ۳۳)$$

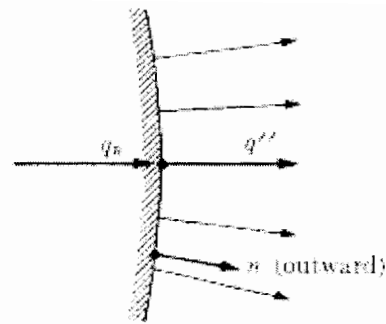
۶ - ۵ - ۲ - شرایط مرزی (سطح)

رایج ترین و متداول ترین شرایط مرزی موجود در همرفت به شرح زیر است. دمای تعیین شده^۳: شار گرمایی محاط بر مرزی ها باید یکنواخت و یا تابعی از فضا یا زمان باشد. از طریق قانون جریان کریشهف^۴ که طبق آن مجموع جبری شارهای گرمایی در یک مرز باید برابر با صفر باشد، می توان توضیح ریاضی این شرایط را بیان کرد. در اینجا علامت شار گرمایی تا مرز مثبت و علامت شار گرمایی از حد منفی فرض می شود. بنابراین با بخاطر داشتن این موضوع که طبق قانون فوریه^۵ $q_n = -k(\partial T / \partial n)$ به توزیع گرمایی وابسته نیست، با در نظر گرفتن جهت q_n بطوریکه مثبت شود، از روی شکل (۶ - ۴) مورد زیر را خواهیم داشت:

$$\pm k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma = \pm q'' \quad (۶ - ۳۴)$$

که $\partial / \partial n$ دیفرانسیل در راستای عمود آن مرز را نشان می دهد. علائم مثبت و منفی در طرف چپ معادله (۶ - ۳۴) به ترتیب نشان دهنده دیفرانسیل در جهات عمود بر سطح درونی و برونی می باشد. علائم مثبت و منفی در سمت راست معادله به ترتیب نشان دهنده شار گرمایی از و به طرف مرزی می باشد.

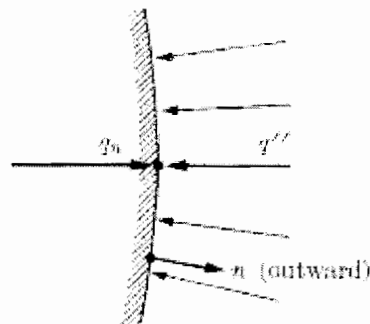
^۱ Unsteady
^۲ Continuum
^۳ Prescribed temperature
^۴ Kirchhoff
^۵ Fourier



$$q_n - q'' = 0,$$

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_e - q'' = 0.$$

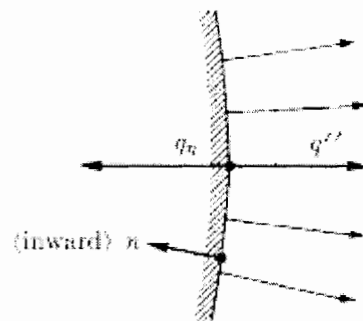
(a)



$$q_n + q'' = 0,$$

$$k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_e + q'' = 0.$$

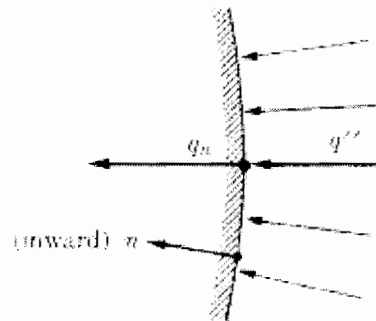
(b)



$$-q_n - q'' = 0,$$

$$- \left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_e \right] - q'' = 0.$$

(c)



$$-q_n + q'' = 0,$$

$$- \left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_e \right] + q'' = 0.$$

(d)

شکل (۶-۴) جهات شار گرمایی و نرمال های سطوح

یک مثال کاربردی از این مورد در ارزیابی تجربی ضریب انتقال گرمایی همرفت با جریان اجباری هوا می باشد. یک انرژی درونی یکنواخت بصورت الکتریکی در دیواره های خارجی یک سطح تولید می شود که سیال به روش های گوناگونی می تواند در اطراف آن جریان داشته باشند. تحت شرایط پایدار و با فرض

اینکه مقاومت الکتریکی و رسانش گرمایی دیواره های سطح یکنواخت هستند ، مایع تابعی از شار گرمایی یکنواخت محیطی خواهند شد .

۶ - ۵ - ۲ - ۱ - انتقال گرما به محیط بوسیله همرفت

وقتی نمی توان انتقال گرمایی مرزهای پیوستار را تعیین کرد ، می توان آن را متناسب با تفاوت دمایی بین مرزها و محیط فرض کرد . در این صورت :

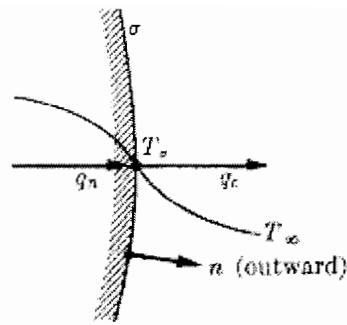
$$q_e = h(T_\sigma - T_\infty) \quad (۶ - ۳۵)$$

که T_σ دمای یکنواخت مرزها ، T_∞ دمای محیط در فاصله دورتر از مرز ، و h ثابت تناسب که ضریب انتقال حرارت گرمایی نامیده می شود ، می باشد . معادله (۶ - ۳۵) قانون سرمایش نیوتن می باشد . باید توجه شود که این رابطه مانند قانون همرفت فوریه و قانون تشعشع^۱ پدیده ای نیست . از آنجایی که فقط بر پایه فرضیه است ، نمی توان آن را به عنوان یک قانون طبیعی در نظر گرفت ، بنابراین به عنوان ضریب انتقال گرمایی تعریف می شود . علی رغم پایه و اساس ضعیف معادله (۶ - ۳۵) که تنها رابطه موجود برای نشان دادن انتقال گرمایی نامشخص به محیط می باشد ، ولی نقش مهمی در مسائل همورفتی ایفا می کند . بنابراین در نظر گرفتن این موضوع که مجموع شارهای گرمایی در مرز باید برابر صفر باشد ، و از طریق معادلات قبلی و معادله (۶ - ۳۵) ، شرایط مرزی مورد نیاز به شکل زیر ارائه می شود .

$$\pm k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma = h(T_\sigma - T_\infty) \quad (۶ - ۳۵)$$

که $\partial/\partial n$ مشتق در امتداد نرمال را نشان می دهد . علائم مثبت و منفی سمت چپ معادله (۶ - ۳۵) نشان دهنده تفاوت در جهت نرمال های درونی و بیرونی شکل (۶ - ۵) می باشد . باید بخاطر داشت که q_{n1} آمده در شکل (۶ - ۵) یک کمیت مثبت است که از طریق انتخاب اختیاری آن در جهت نرمال بدست می آید . البته معادله (۶ - ۳۵) به توزیع حرارتی و جهت انتقال گرما وابسته نیست .

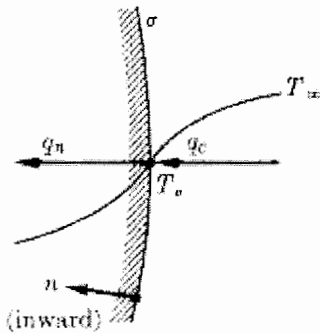
^۱ Stefan - Boltzmann



$$q_n - q_c = 0,$$

$$-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s - h(T_s - T_\infty) = 0.$$

(a)



$$-q_n + q_c = 0,$$

$$- \left[-k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_s \right] + h(T_\infty - T_s) = 0.$$

(b)

شکل (۵-۶) نمایش تفاوت در جهت نرمال های درونی و بیرونی

اکنون دامنه ای از مقادیر مربوط به ضرایب انتقال گرمایی که تحت شرایط مختلف رخ می دهند، نشان داده خواهند شد تا بتوان تصویرری از ترتیب بزرگنمایی داشت. باید بخاطر داشت که h ، مشابه k ولی قویتر از آن است که به متغیرهای خاصی وابسته است. این متغیرها می تواند شامل فضا، زمان، هندسه، شرایط شارش و خصوصیات فیزیکی شود. جدول (۱-۶) مقادیر پایدار ضرایب انتقال حرارت گرمایی رایج آمده است.

جدول (۱-۶) مقادیر پایدار ضرایب انتقال حرارت گرمایی

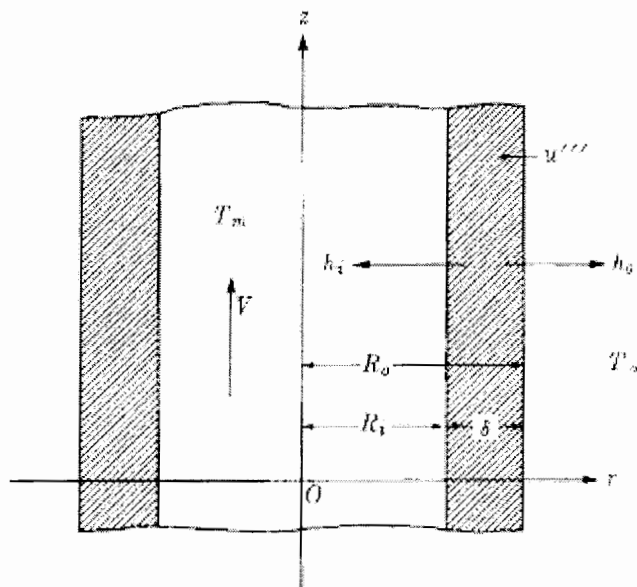
Condition		h (Btu / ft ² .hr. °F)
Free convection	Gases	1-5
	Water	20-150
Forced convection	Gases	2-50
	Water	50-2000
	Viscous oils	10-300
	Liquid metals	1000-20000
Phase change	Boiling liquids	500-10000
	Condensing vapors	1000-20000

اشاره به آن شد که مقدار ضریب انتقال گرمایی برای نوع شرایط مرزی مورد استفاده در روابط مسئله بسیار مهم است .

بررسی مقدار h به بررسی مشابهی در رابطه با بزرگی (مقدار) k می انجامد . بدین منظور لوله ای با قطر داخلی و خارجی R_o و R_i را در نظر بگیرید که درون آن جریان مایعات تحت شرایط پایدار مشخص شده در شکل (۶ - ۶) وجود دارد . انرژی درونی یکنواخت و پایدار هر واحد حجم با نرخ u''' در دیواره های لوله تولید می شود . دمای محیط و دمای مخصوص^۱ مایع T_m و T_∞ و h_i و h_o به ترتیب ضرایب انتقال گرمایی درونی و بیرونی هستند . شرایط مرزی شعاعی این لوله بصورت زیر است :

$$q_i = +k \frac{\partial T(R_i, z)}{\partial r} = h_i [T(R_i, z) - T_m] \quad (۶ - ۳۶)$$

$$q_o = +k \frac{\partial T(R_o, z)}{\partial r} = h_o [T(R_o, z) - T_\infty]$$



شکل (۶ - ۶) لوله ای که درون آن جریان مایعات تحت شرایط پایدار جریان دارد .

برای یک q_i ، هرچه رسانش گرمایی بزرگتر باشد ، شیب (افت) گرمایی $\partial T(R_i, z) / \partial r$ کوچکتر خواهد بود . وقتی $k \rightarrow \infty$ به سوی صفر گرایش دارد ، متوجه می شویم که توزیع دمای

^۱ Bulk دمای مخصوص مایع بصورت زیر است :

$$T_m = \frac{1}{\pi R_i^2 \rho_m C_{pm} V} \int_0^{R_i} 2\pi r u(r) \rho C_p T(r) dr$$

که ρ_m ، C_{pm} و V به ترتیب چگالی ، گرمایی مخصوص در فشار ثابت و سرعت متوسط سرعت مایع می باشد که همگی در دمای مخصوص اندازه گیری شده اند .

شعاعی در دیواره های لوله ناچیز است و می توان از آن صرفه نظر کرد . و این از آنجاییکه منجر به آنالیز متراکم شعاعی^۱ می شود ، بطور قابل توجهی فرمولاسیون مسئله را آسان می کند . به عبارت دیگر ، مقادیر کوچک یا متوسط k مستلزم آنالیز گسترده شعاعی^۲ می باشد . بنابر این اندازه رسانش گرمایی نقش مهمی در فرمولاسیون معادله همرفت یک مسئله دارد . در آخر ، شکل بی بعد شرایط مرزی مورد نظر به شکل زیر نوشته می شود .

$$\pm \left[\frac{\partial T}{\partial (r/R)} \right]_{\sigma} = \frac{hR}{k} (T_{\sigma} - T_{\infty}) \quad (۶ - ۳۷)$$

این معادله نشان می دهد که تاثیر h و k را می توان در قالب عددی بی بعد به نام بایوت^۳ یا بیو بررسی کرد :

$$hR/k = Bi \quad (۶ - ۳۸)$$

که R طول مشخصه می باشد . با سازماندهی دوباره عدد بایوت به شکل $(R/k)/(l/h)$ عدد بایوت می تواند به عنوان نسبت مقاومت داخلی و خارجی یک مسئله در جهت معادله (۶ - ۳۷) بکار رود .

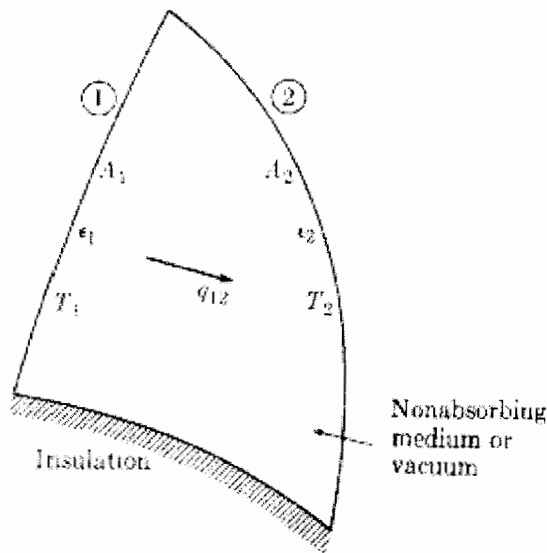
۶ - ۵ - ۲ - انتقال گرما به محیط بوسیله تشعشع

به عنوان یک مثال شرایط مرزی را که انتقال گرما توسط تشعشع را تعیین می کند را از روی مرزهای^۱ شکل (۶ - ۷) بررسی کنیم .

^۱ Radially lumped analysis

^۲ Radially distributed analysis

^۳ Biot



شکل (۶ - ۷) شرایط مرزی را که انتقال گرما توسط تشعشع

وقتی T_1 یکنواخت ولی نامشخص است ، برای نشان دادن شار گرمایی در طول سطوح ۱ بوسیله همرفت و تشعشع ، می توان شرایط مرزی را بصورت زیر نوشت :

$$\pm k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma = \sigma \bar{\tau}_{12} (T_1^4 - T_2^4) \quad (۶ - ۳۹)$$

که مانند قبل علائم مثبت و منفی همرفت مشان دهنده تفاوت در جهت نرمال های درونی و بیرونی می باشد . معادله (۶ - ۳۹) به توزیع گرمای واقعی وابسته نیست و از آنجائیکه شامل توان چهارم متغیر وابسته است ، یک شرایط مرزی غیر خطی به حساب می آید .

با ترکیب معادلات (۶ - ۳۷) و (۶ - ۳۹) انتقال دمای همزمان بوسیله همرفت و تشعشع از مرزهای پیوستار را بدست می آورد . در عمل ، چنین انتقال همزمانی یک مورد واقعی می باشد . اهمیت تشعشع نسبت به همرفت تا حد زیادی به میزان دمای سطح دارد . تشعشع به سرعت با افزایش دما ، افزایش می یابد . حتی در دمای اتاق ، برای همرفت های با میزان کم ، مثلاً همرفت آزاد هوا ، تشعشع می تواند تا پنجاه درصد به مجموع انتقال گرما کمک کند .

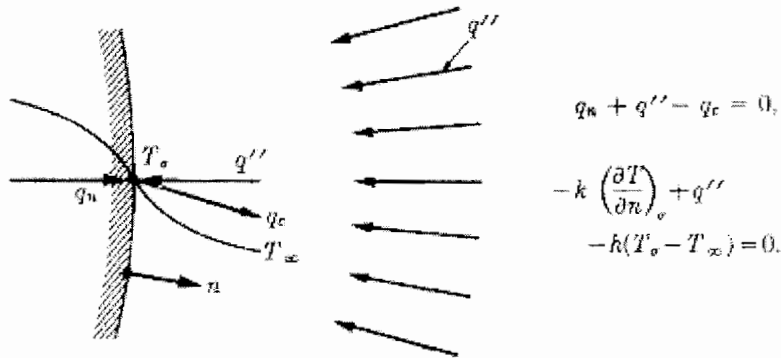
۶ - ۵ - ۲ - ۳ - شارش گرمایی عمل کننده از یک فاصله خاص

یک پیوستار را در نظر بگیرید که گرما را بوسیله همرفت در حالیکه تشعشع خالص شار گرمایی q'' را از منبع قرار گرفته در یک فاصله دریافت می کند (شکل (۶ - ۸)) ، و گرما را به محیط منتقل می کند .

ضریب انتقال گرمایی h و درجه دما محیط T_∞ می باشد. این شرایط مرزی را می توان از رابطه پایین بدست آورد:

$$\pm k \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\sigma + q'' = h(T_\sigma - T_\infty) \quad (۴۰ - ۶)$$

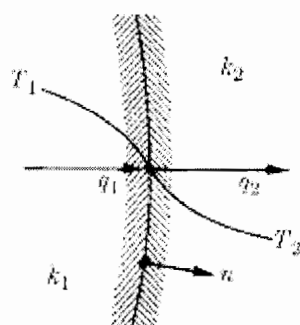
که علامت وضعیت همرفت به عهت بردار نرمال بستگی دارد. معادله (۴۰ - ۶)، مانند معادله (۳۹ - ۶) به توزیع گرمایی وابسته نیست. هر جسمی که توسط اتمسفر احاطه شده باشد، قابلیت دریافت تشعشع گرمای تشعشعی را داشته باشد و نزدیک یک منبع تشعشع مانند یک لامپ روشن یا خورشید باشد، می تواند به عنوان مثالی از شرایط مرزی بیان شده، در نظر گرفته شود.



شکل (۸ - ۶) وضعیت گرمایی همرفت برای یک جهت نرمال از مرز

۶ - ۵ - ۳ - سطح مشترک دو پیوستار با رسانش گرمایی متفاوت k_1 و k_2 وقتی دو پیوستار یک مرز مشترک (شکل (۹ - ۶)) دارند، شار گرمایی آن از روی دو پیوستار بدون در نظر گرفتن جهت نرمال بصورت زیر ارزیابی می شود.

$$k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_\sigma = k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_\sigma \quad (۴۱ - ۶)$$



$$q_1 - q_2 = 0,$$

$$-k_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n} \right)_x - \left[-k_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n} \right)_x \right] = 0.$$

شکل (۶ - ۹) شماتیکی از دو پیوستار یک مرز مشترک

به علاوه یک شرط دومی نیز می تواند در طول این مرز در رابطه با دمای دو پیوستار مشخص شود . اگر دو پیوستار برای مثال این طور فرض شود که یکنواخت باشد و در اتصال کاملی نسبت به هم داشته باشند ، صورت ریاضی آن برابری درجه حرارت ها را نشان خواهد داد .

$$(T_1)_\sigma = (T_2)_\sigma \quad (۶ - ۴۲)$$

هر چند معادله (۶ - ۴۲) یک شرط مشکل برای کاربرد عملی است . حتی برای سطوح کاملا صاف که به هم پرس شده اند ، انتقال گرما بین دو پیوستار بوسیله عامل مقاومت تماسی^۱ صورت می گیرد . این مقاومت که اندازه گیری آن بسیار مشکل است ، سبب بوجود آمدن تفاوت دما بین پیوستار در طول سطح مشترک می شود . علی رغم این واقعیت ، معادله (۶ - ۴۲) استفاده گسترده ای در فرمولاسیون مسائل همرفتی دارد . دیواره های کامپوزیت و لوله های عایق شده مثال های شناخته شده ای در این رابطه هستند . [34]

¹ Contact resistance

فصل هفتم

۷ - ۱ - مقدمه

روش های عددی برای حل دینامیک سیالات ، مسائل جابجایی جرم و گرما و دیگر معادلات دیفرانسیل جزئی بکار می روند . البته وقتی چنین مسائلی را بخاطر غیر خطی بودن ، خصوصیات پیچیده و یا شرایط مرزی دشوار نمی توان بوسیله حل دقیق بررسی نمود . استفاده از کامپیوتر سبب استفاده از روش های عددی در بخش های مختلف علوم و مهندسی می شود این مسائل را می توان با هزینه اندک و در مدت زمانی بسیار کوتاه تحلیل نمود . در حال حاضر دو روش اصلی که در راه حل اصلی که در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی حرارت ، جرم و جابجایی ممتنم استفاده می شوند شامل روش اجزا محدود^۱ FDM و روش المان محدود FEM می باشند . هر کدام از این روش ها دارای مزایای مربوط به خود می باشند که بسته به طبیعت مسئله فیزیکی قابل حل هستند . روش های FD برای فرمول بندی آسان هستند ، به آسانی می توانند به صورت مسائل دو یا سه بعدی توسعه یابند و برای یادگیری و کاربرد در معادلات دیفرانسیل جزئی ساده و راحت هستند . اخیرا با ورود روش گسترش شبکه عددی^۲ ، روش FD در رفتار با هندسه غیر معمول با FEM مقایسه می شود . در اینجا به طور مختصر به مطالب کاربردی FDM اشاره می شود .

۷ - ۲ - تقریب FDM بوسیله سری های تیلور

نظریه نمایش FD یک مشتق را می توان با تعریف مشتق تابع $f(x,y)$ در $x = x_0$ و $y = y_0$ برای x بدست آورد :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (7-1)$$

روشن است که اگر تابع $f(x,y)$ تابعی پیوسته باشد ، طرف راست معادله (۷ - ۱) تقریبی منطقی از $\frac{\partial f}{\partial x}$ برای Δx نسبتا کوچک اما متناهی خواهد بود .

^۱ Finite-Difference Methods (FDM)

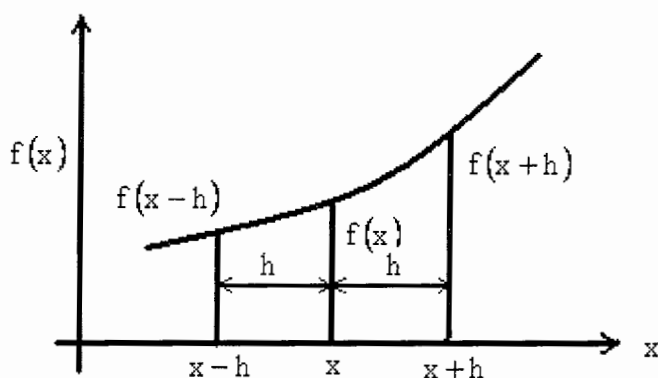
^۲ Numerical Grid Generation

ما سری های $f(x+h)$ و $f(x-h)$ تیلور را برای نقطه x ، همانطور که در شکل (۷-۱) آمده است بصورت زیر ارائه داده ایم:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) \quad \text{الف (۷-۲)}$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) \quad \text{ب (۷-۲)}$$

که در آنها مقدار اولیه با توجه به x داده شده اند. مشتق مرتبه اول $f'(x)$ و مرتبه دوم $f''(x)$ ، را می توان با استفاده از بسط سری تیلور که در معادله (۷-۲) آمده است، به روش های مختلف بصورت FD نشان داد.



شکل (۷-۱) نامگذاری سری تیلور

۷-۲-۱ - مشتق های مرتبه اول

مشتق های مرتبه اول پیشرو و پسرو تابع $f(x)$ به وسیله حل معادلات (۷-۲) الف و (۷-۲) ب برای $f'(x)$ بدست می آیند:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(x) - \frac{h^2}{6}f'''(x) \dots \quad \text{الف (پیشرو) (۷-۳)}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2}f''(x) - \frac{h^2}{6}f'''(x) \dots \quad \text{ب (پسرو) (۷-۳)}$$

با تفریق معادله (۷-۲) الف از (۷-۲) ب، تقریب تفاضل مرکزی مرتبه اول بصورت زیر بدست می آید:

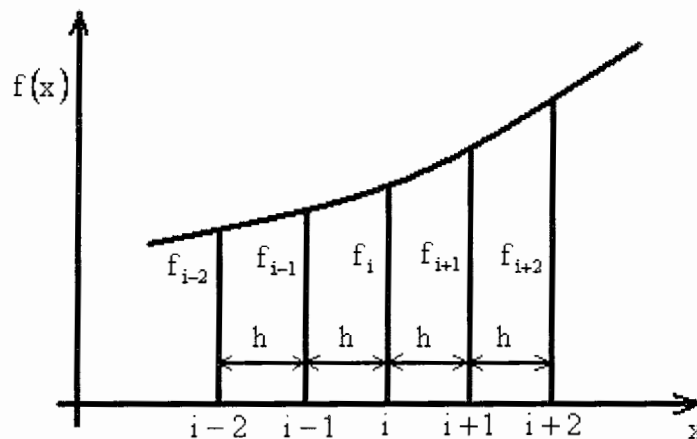
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) \dots \quad (۳-۷) \text{ ج (مرکزی)}$$

سه نتیجه بالا را می توان بصورت زیر ارائه کرد :

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h) \quad (۴-۷) \text{ الف (پیشرو)}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h) \quad (۴-۷) \text{ ب (پسرو)}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (۴-۷) \text{ ج (مرکزی)}$$



شکل (۲-۷) نامگذاری نمایشی FD $f(x)$

در اینجا نماد $O(h)$ برای نشان دادن خطای موجود در مرتبه h و نماد $O(h^2)$ برای خطای مرتبه h^2 مورد استفاده قرار می گیرد .

اگر نمادهای زیر را که در شکل (۲-۷) نشان داده شده اند در نظر بگیریم :

$$x = ih \quad x+h = (i+1)h \quad x-h = (i-1)h, \text{ etc.} \quad (۵-۷) \text{ الف}$$

$$f(x) = f_i \quad f(x+h) = f_{i+1} \quad f(x-h) = f_{i-1}, \text{ etc.} \quad (۵-۷) \text{ ب}$$

آنگاه نمایش FD مشتق مرتبه اول تابع $f(x)$ برای x ، که در معادلات (۶-۷) آمده اند به ترتیب زیر خواهد بود :

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad \text{الف (۶-۷) (پیشرو)}$$

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad \text{ب (۶-۷) (پسرو)}$$

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad \text{ج (۶-۷) (مرکزی)}$$

۷-۲-۲ - مشتقات مرتبه دوم

ما در اینجا با نمایش FD مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)$ در نقطه x معین $f''(x)$ بکار ادامه می دهیم. برای بدست آوردن نتایج مورد نظر، بسط سری های تیلور و توابع $f(x+2h)$ و $f(x-2h)$ برای x را بصورت های زیر ارائه می دهیم:

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \dots \quad \text{الف (۷-۷)}$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \frac{4}{3}h^3f'''(x) + \dots \quad \text{ب (۷-۷)}$$

با حذف $f'(x)$ در معادلات (۷-۷) و (۷-۷) معادله زیر بدست می آید:

$$f''(x) = \frac{f(x) + f(x+2h) - 2f(x+h)}{h^2} - hf'''(x) \quad \text{(۸-۷)}$$

متشابه آن، با حذف $f'(x)$ از معادلات (۷-۷) و (۷-۷) خواهیم داشت:

$$f''(x) = \frac{f(x-2h) + f(x) - 2f(x-h)}{h^2} + hf'''(x) \quad \text{(۹-۷)}$$

$$f''(x) = \frac{f(x-h) + f(x+h) - 2f(x)}{h^2} - \frac{1}{12}h^2f'''(x) \quad \text{(۱۰-۷)}$$

و نتایج معادلات (۸-۷) و (۱۰-۷) اگر $f''_i \equiv \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_i$ باشد بصورت های مرتب تر زیر نوشته می شوند:

$$f''_i = \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{h^2} + O(h) \quad \text{(تفاضل پیشرو) (۱۱-۷)}$$

$$f_i'' = \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{h^2} + O(h) \quad (7-12) \quad (\text{تفاضل پسرو})$$

$$f_i'' = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} + O(h^2) \quad (7-13) \quad (\text{تفاضل مرکزی})$$

ما متوجه می شویم که نمایش تفاضل مرکزی برای $O(h^2)$ و تفاضل پیشرو، پسرو برای $O(h)$ دقیق می باشد.

در عبارات تفاضل متناهی ذکر شده، فرمول های دو نقطه ای برای مشتقات مرتبه اول و فرمول های سه نقطه ای مشتقات مرتبه دوم استفاده می شوند. می توان جهت بدست آوردن تفاضل های متناهی دقیق تر، از نقاط بیشتری استفاده کرد.

خلاصه ای از مشتقات مرتبه اول

در فرمول های زیر نماد و سمبل های B و C و F به ترتیب برای مشتقات پسرو، مرکزی و پیشرو استفاده می شوند.

• فرمول های دو نقطه ای :

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h) \quad F \quad \text{الف (7-14)}$$

$$f_i' = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + O(h) \quad B \quad \text{ب (7-14)}$$

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad C \quad \text{ج (7-14)}$$

• فرمول های سه نقطه ای :

$$f_i' = \frac{1}{2h}(-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}) + O(h^2) \quad F \quad \text{الف (7-15)}$$

$$f_i' = \frac{1}{2h}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i) + O(h^2) \quad B \quad \text{ب (7-15)}$$

$$f_i' = \frac{1}{2h}(f_{i+1} - f_{i-1}) + O(h^2) \quad C \quad \text{ج (7-15)}$$

• فرمول های چهار نقطه ای :

$$f_i' = \frac{1}{6h}(-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}) + O(h^3) \quad F \quad \text{الف (7-16)}$$

$$f'_i = \frac{1}{6h}(-2f_{i-1} - 3f_i + 6f_{i+1} - f_{i+2}) + O(h^3) \quad \text{B} \quad \text{ب (۱۶-۷)}$$

$$f'_i = \frac{1}{6h}(f_{i-2} - 6f_{i-1} + 3f_i + 2f_{i+1}) + O(h^3) \quad \text{C} \quad \text{ج (۱۶-۷)}$$

خلاصه ای از مشتقات مرتبه دوم :

$$f''_i = \frac{1}{h^2}(2f_i - 5f_{i+1} + 4f_{i+2} - f_{i+3}) + O(h^2) \quad \text{F} \quad \text{الف (۱۷-۷)}$$

$$f''_i = \frac{1}{h^2}(-f_{i-3} + 4f_{i-2} - 5f_{i-1} + 2f_i) + O(h^2) \quad \text{B} \quad \text{ب (۱۷-۷)}$$

$$f''_i = \frac{1}{h^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + O(h^2) \quad \text{C} \quad \text{ج (۱۷-۷)}$$

۷-۲-۳ - مشتقات مخلوط

اغلب ضروری است که مشتقات مخلوط جزئی مانند $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ را بصورت FD نمایش دهیم . تقریب

FD را می توان با کاربرد پی در پی FD مرتبه اول متغیرهای x و y بدست آورد .

برای اهداف نمایشی ، ماتریب FD مشتق مخلوط جزئی $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ را در نظر گرفته و از معادله (۷ - ۶

(برای تجزیه کردن مشتق های متغیر x و y استفاده می کنیم . پس خواهیم داشت :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i+1,j} - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{i-1,j} \right) + O(\Delta x)^2 \quad (۱۸ - ۷)$$

جدول (۷ - ۱) تقریب FD مشتق مخلوط جزئی

Case No.	Differencing Scheme		FD Approximation	Order of the Error
	x	y		
1	F	F	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{\Delta y} - \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} \right)$	$O[\Delta x, \Delta y]$
2	F	B	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1}}{\Delta y} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} \right)$	$O[\Delta x, \Delta y]$
3	F	C	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta y} - \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)$	$O[\Delta x, (\Delta y)^2]$
4	B	F	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta y} - \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j}}{\Delta y} \right)$	$O[\Delta x, \Delta y]$
5	B	B	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta y} - \frac{f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1}}{\Delta y} \right)$	$O[\Delta x, \Delta y]$
6	B	C	$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y} - \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right)$	$O[\Delta x, (\Delta y)^2]$
7	C	F	$\frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j}}{\Delta y} - \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j}}{\Delta y} \right)$	$O[(\Delta x)^2, \Delta y]$
8	C	B	$\frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1}}{\Delta y} - \frac{f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1}}{\Delta y} \right)$	$O[(\Delta x)^2, \Delta y]$
9	C	C	$\frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta y} - \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right)$	$O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$

F=Forward difference , B=Backward difference , C=Central difference

که زیر نویس های i و j به ترتیب نشان دهنده نقاط شبکه مرتبط با تجزیه های متغیر x و y می باشد . با بکاربردن فرمول تفاضل مرکزی ، یکبار دیگر ، برای تجزیه کردن مشتقات جزئی با توجه به متغیر y در طرف راست معادله (۷ - ۱۸) ، معادله زیر بدست خواهد آمد .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta y} - \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right) + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (۷ - ۱۹)$$

معادله بدست آمده تقریب FD مشتق مخلوط جزئی $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ می باشد که از تفاضل های مرکزی برای متغیرهای x و y استفاده می کنند. اگر مشتقات پیوسته باشند، تفاضل ناچیز خواهد بود، یعنی $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ با $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ برابر هستند. در بالا، ما تفاضل مرکزی را برای مشتقات x و y در نظر گرفته ایم. در صورتیکه همه ترکیب های احتمالی تفاضل پیشرو؛ پسرو و مرکزی را در نظر بگیریم، ۹ مورد تقریب تفاضلی از $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ خواهیم داشت. در جدول (۷ - ۱) تقریب های تفاضل متناهی این ۹ مورد آمده است.

۷ - ۳ - خطاهای موجود در راه حل های عددی

در روند تجزیه و در طول حل معادلات جبری حاصله بوسیله کامپیوتر، در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی^۱ با استفاده از FD، خطاهایی وجود خواهد داشت. این خطاها را می توان به خطاهای رند کردن^۲، تجزیه کردن^۳ و کوتاه سازی^۴ تقسیم کرد. خطاهای رند سازی، همانطور که از اسمش پیداست، بوسیله گرد کردن اعداد با کامپیوتر در روند حل مسئله، ایجاد می شوند. خطای تجزیه کردن با جایگزینی مسئله پیوسته یعنی معادلات دیفرانسیل جزئی به یک مسئله کسسته با تقریب تفاضل متناهی شامل تسهیم های ناعادلانه تفاضلی و شرایط حدی می شود، ولی خطاهای رندسازی در آنها وجود ندارد. برای مثال، معادله رسانش گرمایی پایدار زیر:

$$L(T) \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (۷ - ۲۰) \text{ الف}$$

و تقریب FD

$$L_{FD}(T) \equiv \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \quad (۷ - ۲۰) \text{ ب}$$

را در نظر بگیرید که باید در یک حوزه و تحت شرایط حدی مشخص شده حل شود. اگر مسئله هدایت تحت حوزه، دقیقاً با استفاده از PDE و معادلات FD بدون هیچ خطای روند سازی حل شود، نتایج یکسان نخواهد بود. این تفاضل (یا اختلاف) خطای تجزیه نامیده می شود که از خطاهای کوتاه سازی

^۱ Partial-Differential Equation PDE

^۲ round-off

^۳ discretization

^۴ truncation

مرتبط با تقریب FD معادله دیفرانسیلی و شرایط مرزی به وجود می آید. عبارت خطای کوتاه سازی برای شناسایی خطای حاصل از تجزیه PDE استفاده می شود:

$$\underbrace{\left(\text{Exact solution of PDE} \right)}_{L(T)} - \underbrace{\left(\text{solution of finite-difference equation without round-off error} \right)}_{L_{FD}(T)} = \underbrace{\left(\text{truncation error} \right)}_{TE} \quad (21-7)$$

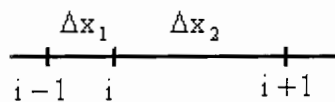
روشن است که، خطای کوتاه سازی اختاتف بین حل دقیق PDE و حل FD آن بدون خطای روند سازی می باشد و به همین دلیل مقدار دقیق از نمایش PDE در قالب FD می باشد. جدول (۷-۲) خطاهای مهم کوتاه شده FD مشتقات اول و دوم را که از روش های پیشرو، پسرو و مرکزی استفاده نموده را فهرست نموده است. واضح است که خطای عمده تفاضل های پیشرو و پسرو $O(\Delta x)$ و خطای عمده تفاضل مرکزی $O[(\Delta x)^2]$ خواهد بود. کل خطای موجود در محاسبات FD شامل خطای تجزیه کردن به علاوه خطای روند سازی می باشد. خطای تجزیه کردن با افزایش اندازه شبکه Mesh size افزایش می یابد، درحالیکه خطای روند سازی با افزایش اندازه شبکه کاهش می یابد. بنابراین انتظار می رود خطای کلی با کاهش اندازه شبکه حداقل میزان باشد.

جدول (۷-۲) طرح مختلف تفاضلی و خطاهای عمده کوتاه سازی آنها

Derivative	Finite-Difference Form	Truncated Leading Error Terms *
$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (Forward)	$-\frac{\Delta x}{2} f'' - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''$
$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$ (Backward)	$+\frac{\Delta x}{2} f'' - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''$
$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$ (Central)	$-\frac{(\Delta x)^2}{6} f'''$
$\frac{d^2f(x)}{dx^2}$	$\frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2}$ (Central)	$-\frac{(\Delta x)^2}{12} f'''$
× Primes denote differentiation with respect to x		

۷-۴ - تغییر اندازه شبکه

در بیشتر کاربردهای مهندسی، راه حل های مختلفی بخصوص برای موقعیت هایی که پروفیل آنها تغییر ناگهانی در مشتق مرتبه اول نشان می دهد، وجود خواهد داشت. بنابراین، جهت داشتن راه حل بهتر در منطقه ای که احتمالاً شیبهای آن به سرعت تغییر جهت خواهند کرد، مطلوب است که از شبکه های ریزتر در همان منطقه استفاده کنید، نه اینکه شبکه کل حوزه عوض نمایید. برای نشان دادن این موضوع ساده ترین راه حل را که شامل تغییر فاصله شبکه ها فقط در یک جهت نقطه مورد نظر در منطقه می باشد، را انتخاب کرده ایم.



شکل (۷-۳) تغییر اندازه شبکه در گره i

شکل (۷-۳) تغییر اندازه شبکه را از Δx_1 به Δx_2 در گره i نشان می دهد. می توان بسط سری تیلور در گره i را برای بدست آوردن FD استفاده کرد. یعنی، تابع $f(x)$ حول گره i به ترتیب در سری های پیشرو و پسرو بسط یافته است.

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x_2 \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \frac{(\Delta x_2)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_i + \frac{(\Delta x_2)^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_i + O[(\Delta x_2)^2] \quad \text{الف (۲۲-۷)}$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x_1 \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \frac{(\Delta x_1)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_i - \frac{(\Delta x_1)^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_i + O[(\Delta x_1)^2] \quad \text{ب (۲۲-۷)}$$

برای بدست آوردن تقریب تفاضلی مشتق مرتبه اول و دوم در گره i ، معادله (۲۲-۷) را در $(\Delta x_2 / \Delta x_1)^2$ ضرب کرده و عبارت حاصل را به معادله (۲۲-۷) تحت شرایط (۲۳-۷) اضافه می کنیم.

(۲۳-۷) الف

$$f_{i+1} + \varepsilon^2 f_{i-1} = (1 + \varepsilon^2) f_i + (1 - \varepsilon) \Delta x_2 \left. \frac{df}{dx} \right|_i + (\Delta x_2)^2 \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_i + \frac{1}{6} (\Delta x_2 - \Delta x_1) (\Delta x_2)^2 \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_i + O[(\Delta x)^4]$$

که

$$q = -k\nabla T \quad \text{ب (۲۵ - ۷)}$$

و g نرخ گرما زایی حجمی می باشد .
 ما از معادله (۲۵ - ۷) تحت یک حجم کوچک V انتگرال می گیریم .

$$\int_V \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot q dV + \int_V g dV \quad \text{ج (۲۵ - ۷)}$$

می توان به وسیله فرضیه مقدار متوسط انتگرال ها انتگرال طرف چپ را برداشت . انتگرال حجمی مربوط به واگرایی بردار شار گرمایی بوسیله فرضیه واگرایی به انتگرال روی سطح تبدیل می شود . بنابراین معادله (۲۵ - ۷) بصورت زیر نوشته می شود .

$$V\rho C_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = - \int_S q \cdot n ds + V\bar{g} \quad \text{(۲۶ - ۷)}$$

در اینجا S فضای مورد نظر برای کنترل حجم می باشد . با وارد کردن بردار شار گرمایی q از معادله (۲۵ - ۲۶) به معادله (۲۶ - ۷) ، خواهیم داشت :

$$V\rho C_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \int_S k \frac{\partial T}{\partial n} ds + V\bar{g} \quad \text{الف (۲۷ - ۷)}$$

و چون :

$$\nabla T \cdot n = \frac{\partial T}{\partial n} \quad \text{ب (۲۷ - ۷)}$$

V یک حجم کنترل کوچک ، n و $(\partial/\partial n)$ به ترتیب بردار واحد برون سو و مشتق آن نسبت به سطح حجم کنترل می باشد ، \bar{T} و \bar{g} به ترتیب میانگین های مناسب در دما و نرخ گرمایی در حجم کنترل می باشد .

در بالا یک معادله بقای انرژی حجم کنترل برای پدیده های فیزیکی در هدایت گرمایی ارائه شد . معادله های مربوط به بقای مشابه را نیز می توان برای بقای جرم یا منتهم ارائه کرد که شرایط هدایت را نیز شامل شوند .

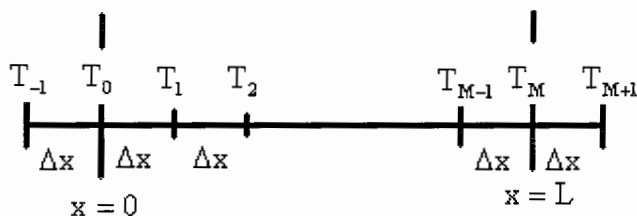
وقتی معادله بقای حجم کنترل موجود است ، معادله FD مطابق آن برای حجم کنترل را می توان با تجزیه کردن مشتقات در این معادله به سادگی بدست آورد .

رویکرد حجم کنترل برای توسعه معادلات FD از آنجایی که به راحتی برای مسائل چند بعدی ، شرایط حدی پیچیده و موقعیت های شامل شبکه های متغیر و خواص فیزیکی کاربرد دارند ، از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند . به عبارت دیگر دقت تخمین هایی که با رویکرد حجم کنترل بدست می آیند قابل مقایسه با دقت بدست آمده با روش انبساط سری های تیلور که اطلاعات را به ترتیب خطای کوتاه سازی فرآهم می آورد ، نیست .

وقتی رویکرد کنترل حجم را برای ارائه معادلات FD بکار می بریم ابتدا باید گره های FD را ایجاد و بعد حجم کنترل ها را تعیین کنیم .

۷ - ۶ - مفهوم گره های مجازی برای تجزیه شرایط مرزی

رویکرد دیگری برای توسعه FD دقیق از مرتبه دوم شرایط مرزی همرفت (۷ - ۲۸) از طریق استفاده مفهوم گره مجازی می باشد .



شکل (۷ - ۴) گره های مجازی -1 و M+1 در حرارت های فرضی T_{M+1} و T_{-1} .

شکل (۷ - ۴) منطقه $0 \leq x \leq L$ را نشان می دهد که با Δx به طرف چپ و راست کشیده شده و دو گره مجازی -1 و M+1 را با دماهای T_{M+1} و T_{-1} ایجاد کرده است . سپس فرمول تفاضل میانی مرتبه دوم (۷ - ۱۴) را بکار برده تا مشتقات اول را به ترتیب در شرایط حدی (۷ - ۲۸) بصورت زیر به وجود آورد :

$$-k \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta x} + h_0 T_0 = h_0 T_{\infty,0} \quad \text{الف (۷ - ۲۸)}$$

$$-k \frac{T_{M+1} - T_{M-1}}{2\Delta x} + h_L T_M = h_L T_{\infty,L} \quad \text{ب (۷ - ۲۸)}$$

معادله FD برای $i=1$ و $i=M$ ارزیابی شده و موارد زیر به ترتیب بدست می آید .

$$T_{-1} - 2T_0 + T_1 + \frac{(\Delta x)^2 g_0}{k} = 0 \quad \text{الف (۲۹ - ۷)}$$

$$T_{M-1} - 2T_M + T_{M+1} + \frac{(\Delta x)^2 g_0}{k} = 0 \quad \text{ب (۲۹ - ۷)}$$

با حذف T_{-1} و T_{M+1} در معادلات (۲۸ - ۷) و (۲۹ - ۷) دو معادله زیر بدست می آید .

$$2T_1 - 2\beta_0 T_0 + (2\gamma_0 + G_0) = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (i = 0) \quad \text{الف (۳۰ - ۷)}$$

$$2T_{M-1} - 2\beta_L T_{M-1} + (2\gamma_L + G_M) = 0 \quad \text{at } x = L \quad (i = M) \quad \text{ب (۳۰ - ۷)}$$

در بالا ضریب های β_0 ، β_{0L} ، γ_0 و γ_L مانند معادلات قبلی تعریف شده اند .

۷ - ۷ - روش های حل معادلات جبری همزمان

تاکنون گامهای اولیه و پایه تغییر شکل یک معادله PDE و شرایط مرزی آن را در داخل یک سیستم از معادلات جبری نشان داده ایم . روش های حل چنین سیستمی از معادلات جبری را می توان از یکی از این دو گروه باشد :

- ۱- روش های مستقیم که در آن تعداد محدود و متناهی از عملیات در راه حل آن دخیل هستند .
- ۲- روش های تکراری که در آن هرچه تعداد تکرارها افزایش یابد ، به شرط آنکه همگرایی ایجاد شود ، جواب ها نیز دقیق تر می شوند .

۷ - ۷ - ۱ - روش های مستقیم

بطور کلی ، روش های مستقیم برای سیستم هایی که شامل هندسه نسبتا ساده و شرایط مرزی هستند مطوب است . آنها بسیار موثر اند ولی نیازمند حافظه بالا کامپیوتر می باشند و در صورتیکه تعداد معادلات زیاد باشند خطای روند سازی آنها افزایش می یابد . از انواع این روش می توان به روش قانون کرامر^۱ ، روش حذفی گوس^۲ ، الگوریتم توماس^۳ و غیره اشاره کرد .

۷ - ۷ - ۲ - روش های تکراری

وقتی تعداد معادلات زیاد است ، ماتریس ضرایب پراکنده نخواهد بود ، بنابراین حافظه کامپیوتر بحرانی می شود ، در این زمان روش های تکراری به روش مستقیم ارجحیت دارد . اگر روند تکراری همگرا باشد ،

¹ Cramer's Rule

² Gauss Elimination Method

³ Thomas Algorithm

راه حل از طریق تعدادی از عملیات متناهی ولی نه از پیش تعیین شده و با دقت مشخص بدست می آید . روش های تکراری الگوریتم نسبتاً ساده ای داشته و استفاده از آنها ساده است و این روش محدود به هندسه ساده و شرایط مرزی خاصی نمی شوند . زمانیکه تعداد عملیات در محاسبات زیاد است و روش های مستقیم به خاطر تجمع خطاهای روند سازی نامناسب هستند ، مطلوب می باشند . تعدادی از روش های تکراری عبارتند از روش تکرار گوس-سایدل^۱ ، Successive Over relaxation و غیره اشاره کرد [38],[39].

¹ Gauss-Seidel Iterative

فصل هشتم

۸ - ۱ - مقدمه نتایج

در این بخش به نتایج حاصل از تحلیل حرارتی و توزیع دما در یک مخزن کامپوزیتی می پردازیم . همانطور که در فصل چهارم این پایان نامه شرح داده شد مخزن مورد بررسی در این بخش طوری انتخاب شده که هماهنگی کاملی بین نتایج این بخش و بخش تحلیل تنش ایجاد شود انتخاب مخزن به صورتی است که مخزن ، حتی الامکان با ابعاد مخزن فلزی که جهت استفاده در خودروهای سواری مناسب است یکی گرفته شده تا مقایسه نتایج با سهولت بیشتری انجام شود . این مخازن که در خودروهای سبک استفاده می شوند عمدتاً دارای قطر داخلی ۱۰ اینچ می باشند یعنی شعاع تقریبی داخلی این مخازن حدود ۱۲۷ میلیمتر است که شعاع مخزن مورد نظر برای آنالیز در محدوده قابل قبولی برای استفاده در خودروهای سواری می باشد . شعاع داخلی مخزن برابر ۱۵۱ میلیمتر و طول قسمت استوانه ای مخزن برابر ۶۰۰ میلیمتر می باشد . در واقع مشخصات مخزنی که قرار است آنالیز شود از نوع CNG-4 می باشد . مشخصه این نوع مخزن آن است که توسط رشته پیچی ماریپچ در تمام قسمتها و رشته پیچی محیطی در قسمت استوانه تولید می شود . یعنی هر یک از لایه ها دارای ضریب هدایت خاصی نسبت به مختصات خود مخزن می باشند . تعداد لایه های با پیچش ماریپچ هشت عدد و تعداد پیچش محیطی دو عدد می باشد . تعداد لایه هایی که معمولاً برای مخازن CNG-4 در نظر گرفته می شود حداقل ۶ لایه ماریپچ و یک لایه محیطی است . در این بخش همانند فصل چهارم از سه نوع چیدمان مختلف که از لحاظ طراحی مکانیکی بسیار پر اهمیت می باشد برای مقایسه بیشتر نتایج بهره گرفته شد . زاویه پیچش الیاف

θ نسبت به محور استوانه سنجیده می شود و در مراجع مختلف این قاعده رعایت می شود . که این زوایا در جدول ۸ - ۱ آورده شده است .

جدول ۸ - ۱ زاویه پیچش الیاف نسبت به محور استوانه برحسب درجه برای سه نوع چیدمان مختلف

زاویه لایه اول	زاویه لایه دوم	زاویه لایه سوم	زاویه لایه چهارم	زاویه لایه پنجم	زاویه لایه ششم	زاویه لایه هفتم	زاویه لایه هشتم	زاویه لایه نهم	زاویه لایه دهم	
۲۵/۴	۲۹/۶	۵۳/۷	۵۳/۸	۸۸	-۸۸	-۵۳/۸	-۵۳/۷	-۲۹/۶	-۲۵/۴	چیدمان A
۲۵/۴	-۲۵/۴	۲۹/۶	-۲۹/۶	۵۳/۷	-۵۳/۷	۵۳/۸	-۵۳/۸	۸۸	-۸۸	چیدمان B
-۸۸	-۵۳/۸	-۵۳/۷	-۲۹/۶	-۲۵/۴	۲۵/۴	۲۹/۶	۵۳/۷	۵۳/۸	۸۸	چیدمان C

در مراجع مختلف ضخامت لایه ها بین $0/3$ الی $2/5$ میلیمتر ذکر شده است . دو لایه با زوایای 88 و -88 درجه انتخاب شده که این انتخاب با مدارک تجربی تایید شده و علت آن حرکت مکانیزم پیچش الیاف در حین دوران ماندنرل می باشد . این بدان معنی است که پیچش الیاف با زاویه 90 درجه تقریباً غیر ممکن است و مقدار واقعی این زاویه بستگی به شعاع ماندنرل ، سرعت زاویه ای ماندنرل و سرعت حرکت خطی مکانیزم پیچش الیاف در راستای محور دوران دارد و بنابراین مقدار ثابتی نبوده و در مراجع مختلف از 87 تا $99/5$ درجه ذکر شده است . برای هر سه نوع چیدمان ضخامت هریک از لایه ها بجز 88 و -88 برابر $2/193$ میلیمتر و برای این دو لایه برابر $2/02$ میلیمتر است . این نتایج مربوط به کامپوزیت کربن/اپوکسی T300/5208 می باشد که خواص آن مکانیکی آن قبلاً شرح داده شد .

در دو سر این مخزن کُلگی هایی قرار دارد که بصورت یکپارچه و همزمان با بدنه استوانه ای مخزن تولید می شوند^۱ . در این بخش فرض می شود که از قسمتی که این کُلگی ها به بدنه استوانه متصل می شود شار حرارتی وارد یا خارج نمی شود و یا در واقع آن را عایق فرض می کنیم . این فرض به دلیل آنکه در داخل مخزن دمایی ثابت و یکنواخت داریم و به دلیل تقارن موجود در مخزن لایه ها بطور یکنواخت گرم

¹ این روش بر اساس استانداردهای جهانی فقط برای مخازنی با قطرهای محدود کاربرد دارد .

و یا سرد می شوند می توان گفت اصولاً و در حالت بارگذاری حرارتی متقارن ، حرارتی در راستای محور استوانه انتقال نمی یابد پس فرض عایق بودن در انتهای مخزن فرض درستی است .

دمای داخلی مخزن یکنواخت و برابر با ۳۵۰ درجه کلون در نظر گرفته شد . لازم به ذکر است حرارت^۱ و یا رطوبت^۲ علاوه بر تاثیرات مکانیکی و ایجاد تنش تاثیرات بسیاری بر روی خواص فیزیکی کامپوزیت و یا بصورت دقیق تر ماتریس دارد . بخصوص وقتی که این دو شرط توأم با یکدیگر^۳ به کامپوزیت وارد شود . معمولاً شرایط رطوبت را در محاسبات مکانیکی بصورت غلظت رطوبت^۴ تعریف می کنند ولی در مراجعی که مربوط به خواص کامپوزیتها بخصوص ماتریس ها می باشد این حالات را در دو صورت خشک و مرطوب بررسی می کنند . شرایط کاری که در این پایان نامه مطرح است شرایط خشک می باشد . در ادامه باید توضیح داده شود که خواص ماتریس اپوکسی تا دمای ۱۸۰ درجه سانتی گراد در حالت خشک و ۱۳۰ درجه سانتی گراد در حالت مرطوب در مسائل مهندسی ثابت فرض می کنند . [۱]

دمای محیط نیز برابر با ۲۹۷ درجه کلون در نظر گرفته شد . این اختلاف دما به دلیل واضح تر شدن نتایج است و ممکن است فقط در شرایطی خاص رخ دهد .

شرایط مرزی در بیرون مخزن بصورت انتقال حرارت جابجایی فرض شد و در ادامه این بخش به بررسی تاثیرات ضریب جابجایی بر روی توزیع دما در لایه های مخزن پرداخته می شود .

همانطور که گفته شد تحلیل این مسئله به دلیل شرایط مرزی متقارن بسیار راحت قابل بررسی است ولی برای پربار تر شدن این مجموعه علاوه بر شروط مطرح شده مسئله را در حالتی که یک منبع حرارتی تشعشی به شدت ۵۰۰ وات از بیرون به مخزن می تابد نیز ، بررسی می کنیم . در این حالت شرایط مرزی در راستای مماسی تغییر کرده و مسئله پیچیده تر می شود .

از دیگر خواص حرارتی مورد نیاز برای تحلیل مسئله ضرایب هدایتی طولی و عرضی لمینا است . این خواص همانطور که در فصل ششم مطرح شد خود تابعی از ضریب هدایت ماتریس و الیاف و همچنین

¹ Thermal effects

² Moisture effects

³ Hygrothermal effects

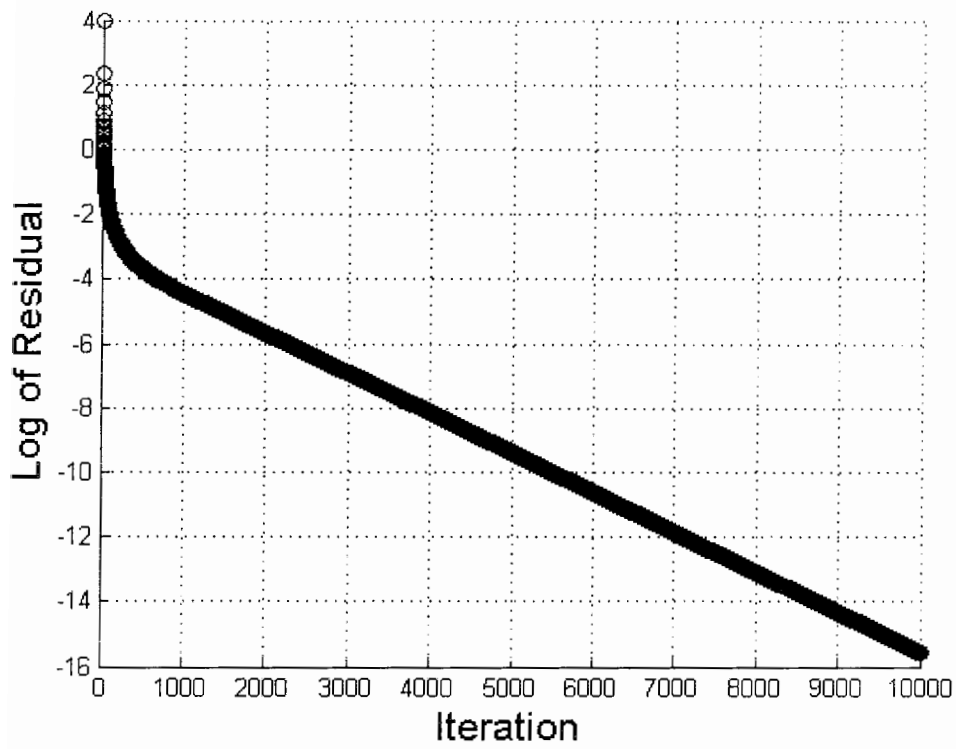
⁴ $c = \text{moisture concentration} = \text{mass of moisture in a unit volume per mass of dry material in a unit volume}$

درصد حجمی الیاف یا ماتریس^۱ است. در این پایان نامه درصد حجمی الیاف برابر با ۶۲ درصد در نظر گرفته شده^۲ و ضرایب هدایتی الیاف نیز در کتب انتقال حرارت موجود و قابل بررسی است. نکته ای که در اینجا قابل شرح است در مورد ضریب هدایتی اپوکسی است که باید بررسی شود. در حال حاضر بیش از صد نوع اپوکسی استاندارد در بازارهای بین المللی موجود است که به کمک خواص تفکیک می شوند. این ها بجز حالاتی است که مهندسين پلیمر برای مصارف تخصصی با مخلوط کردن افزودنی هایی که شرح خواص ایجاد شده برخی از آنها در مراجع پلیمری موجود است، آن را ایجاد می کنند. در این پایان نامه از یک مقدار متوسط برای ضریب هدایت اپوکسی استفاده شده. در ادامه این بخش بررسی می شود که تغییر این مقدار و در نتیجه تغییر ضریب هدایت طولی و عرضی کامپوزیت تاثیر چندانی در توزیع دما ندارد و این جواب در حوزه مسائل مهندسی قابل قبول است.

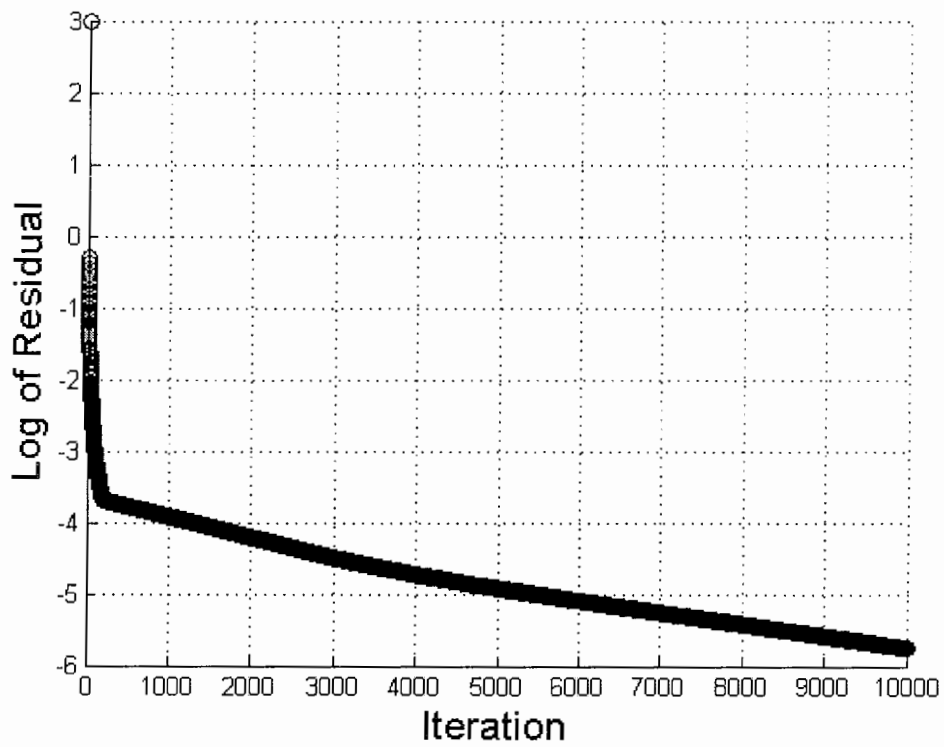
همان طور که قبلا شرح داده شد در حل این مسئله از روش عددی استفاده شده است. در حل این نوع از مسائل همگرایی پاسخ یک مسئله بسیار پر اهمیت می باشد. در فرآیند تکرار باید انتظار کاهش مقدار خطا را در پاسخ ها داشته باشیم. همچنین در این مسائل، همگرایی به عواملی از قبیل اندازه مش ها، واحدهای زمانی پیش رونده، حدس اولیه، مقادیر ضریب هدایت طولی و عرضی، مقادیر ضریب جابجایی حرارتی و ... بستگی دارد. در اشکال ۸-۱ و ۸-۲ و ۸-۳ سه نمونه از تغییرات باقیمانده یا خطا برحسب تعداد تکرار در پاسخ های این بخش آورده شده است. همانطور که مشاهده می کنید در تمامی نمودارها همگرایی ایجاد شده ولی مقدار باقیمانده متفاوت است. که با این وجود برای مسائل مهندسی قابل قبول هستند.

^۱ فرض شده است که کامپوزیت از دو جزء ماتریس و الیاف تشکیل شده است. در کاربردهایی خاص می توان از الیاف مختلف و یا زمینه هایی متفاوت برای رسیدن به خواص مورد نظر در لمینا یا لمینای استفاده نمود. در این صورت ضریب هدایتی تابعی از خواص تک تک اجزا و درصد حجمی هر یک خواهد شد.

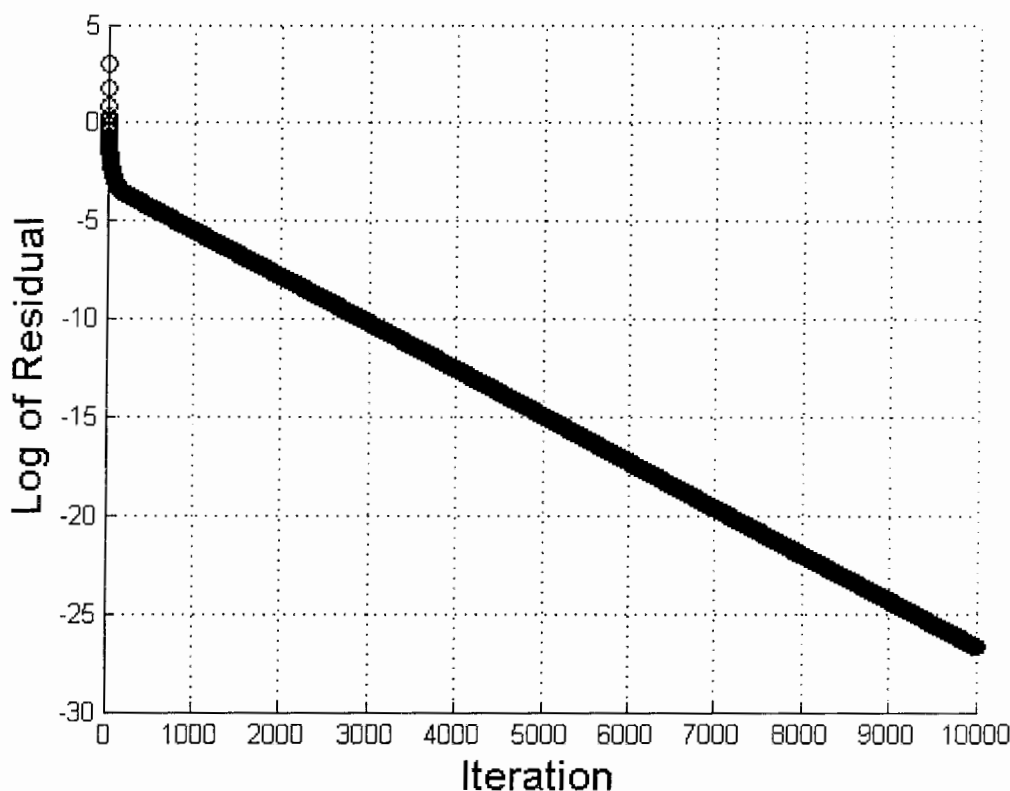
^۲ به جدول ۴-۱ مراجعه نمایید.



شکل ۸ - ۱ تغییرات باقیمانده بر حسب تعداد تکرار



شکل ۸ - ۲ تغییرات باقیمانده بر حسب تعداد تکرار



شکل ۸ - ۳ تغییرات باقیمانده برحسب تعداد تکرار

در این فصل به توزیع دما با شرایط مرزی شرح داده شده در لایه های مختلف مخزن خواهیم پرداخت . سپس شرایط مرزی را تغییر داده و شرط تشعشع را به آن اضافه خواهیم کرد و توزیع دما را بررسی می نماییم . یکی از مسائلی که در اینجا مطرح می شود تغییرات توزیع دما در زمانهای مختلف تا قبل از رسیدن به پایداری است که برای هر سه لایه چینی مطرح می شود .

در ادامه نتایج تاثیر ضریب حرارتی همرفت برای سه حالت خاص بررسی می شود . این نتایج را برای زمانهای مختلف تا رسیدن به پایداری بررسی می کنیم . در آخر تاثیر ضریب هدایت حرارتی را در سه حالت فرضی با قرار دادن دو شرط مرزی با تشعشع و بدون آن بررسی و ارائه می شود .

در اکثر نتایج بجز آنچه که در بخش ۸ - ۳ رخ می دهد توزیع دما در راستای شعاع (که برحسب متر است) نمایش داده شده و یا توزیع دما در مش هایی که در راستای شعاع هستند ارائه می شود . لازم به توضیح است به دلیل دمای یکنواخت داخل مخزن که آن را همیشه ثابت فرض می کنیم و دمای

یکنواخت محیط و انتقال حرارت جابجایی یکنواخت در اطراف مخزن و فرض عایق بودن دو سر استوانه مخزن تقارنی در مسئله ایجاد می شود که تغییرات دما در راستای محور مخزن و راستای مماسی نداریم . به همین دلیل از ارائه توزیع دما در این راستاها اجتناب کرده و فقط در بخش ۸ - ۳ به دلیل اضافه کردن شرط مرزی خاص به حالات فوق ارائه ای از توزیع دما در آن داریم .

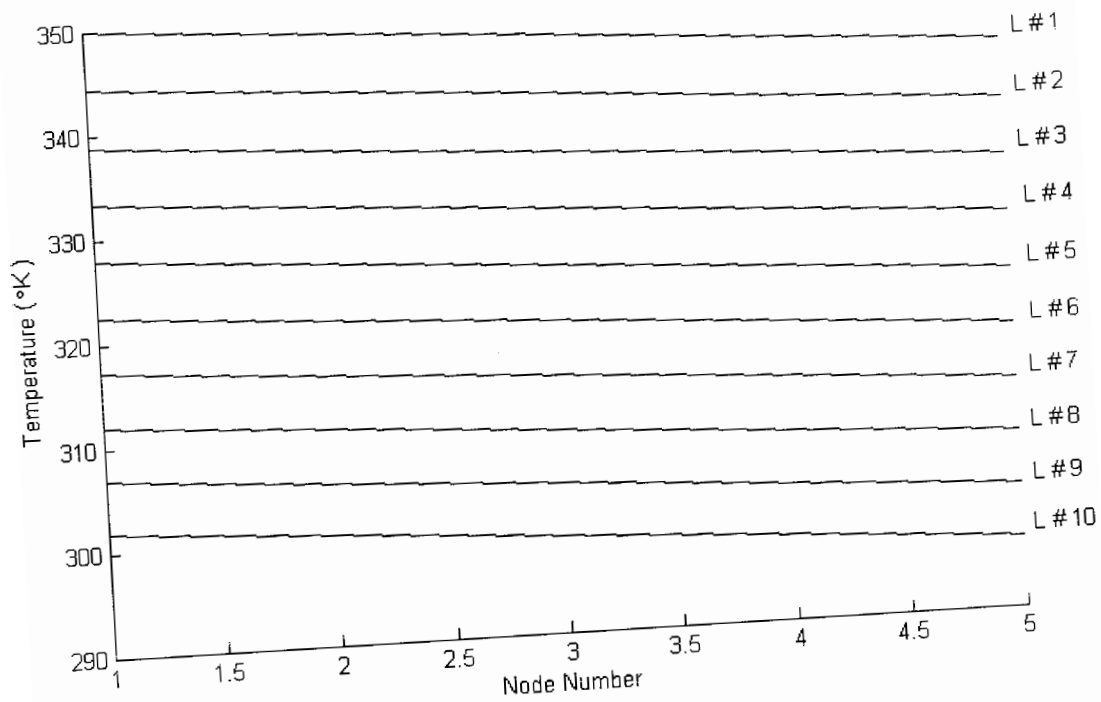
۸ - ۲ - ۱ - تاثیر چیدمان بر توزیع دما در بین لایه های مختلف مخزن

در اشکال ۸ - ۴ ، ۸ - ۵ و ۸ - ۶ توزیع دما در حالت پایدار ، در لایه های مختلف مخزن را به ترتیب برای لایه چینی نوع A ، B و C ملاحظه می کنید . تمامی توزیع دماها در این فصل^۱ برای ضریب همرفت برابر با $21 \text{ w/m}^2 \cdot \text{C}$ بدست آمده است و برحسب شماره نودهای داخل هر لایه به نمایش گذاشته شده است . کم بودن تعداد نودها به دلیل ضخامت بسیار کوچک هر لایه^۲ است . همانطور که ملاحظه می نمایید تغییر نوع چیدمان تاثیری محسوسی بر توزیع دما و فرم نمودار ندارد . در ادامه این نتایج این نکته بیشتر قابل درک می شود .

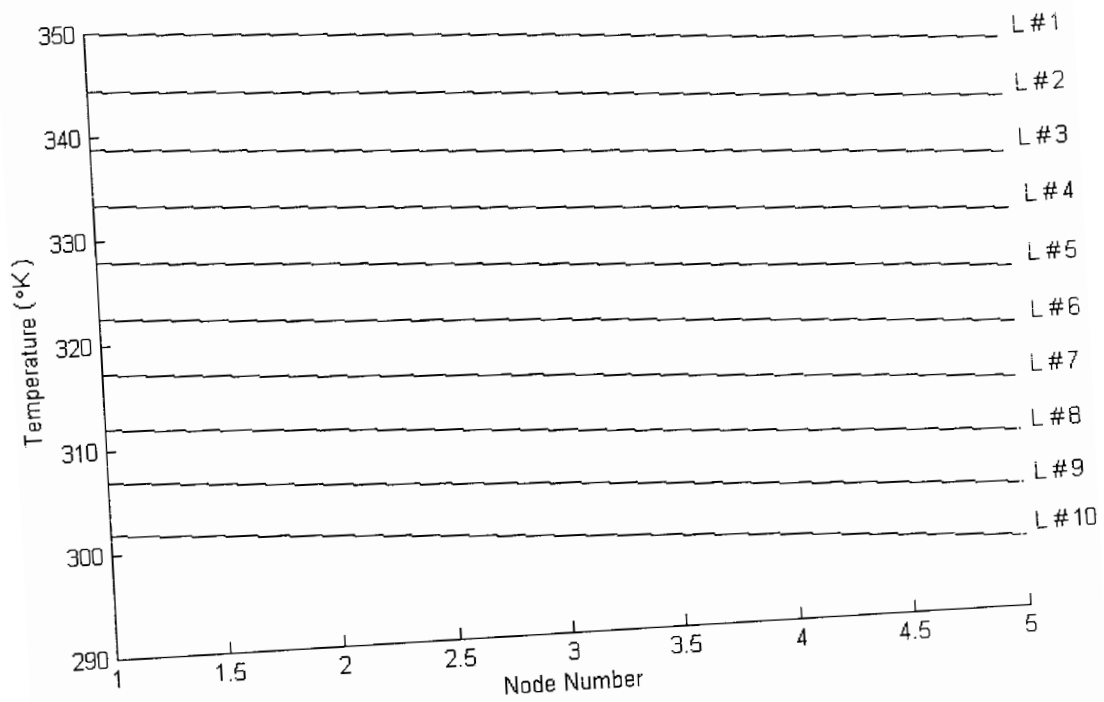
در صورتی که توزیع دما را هم در راستای مماسی و هم در راستای شعاعی بخواهیم بررسی کنیم می توان به نمودار ۸ - ۷ مراجعه نمود . در این شکل که خطوط مشکی نمایش دهنده مرزهای (شعاع داخلی و خارجی) مخزن می باشد و خطوط رنگی که بصورت دایره متحد المركز هستند خطوط هم دما هستند که نشان دهنده توزیع متقارن دما است . این شکل مربوط به یک مقطع خاص از استوانه مخزن است و بدیهی است که سایر مقاطع دارای توزیعی مشابه این حالت است . به دلیل مشابه بودن نتایج برای سه نوع چیدمان فقط به نمایش نتایج چیدمان B اکتفا شده است .

^۱ بجز آنهایی که اشاره ای به این موضوع می شود .

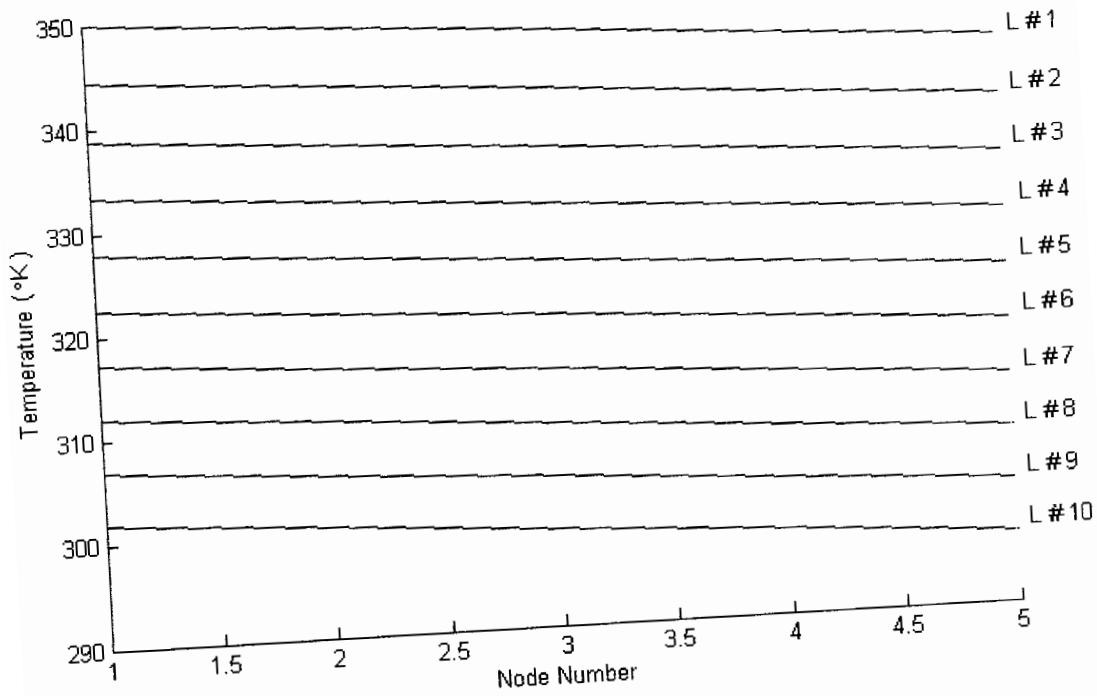
^۲ به نسبت محیط و طول مخزن بسیار کوچک است . زیاد کردن این تعداد با این شرایط موجب واگرایی پاسخ ها می شود .



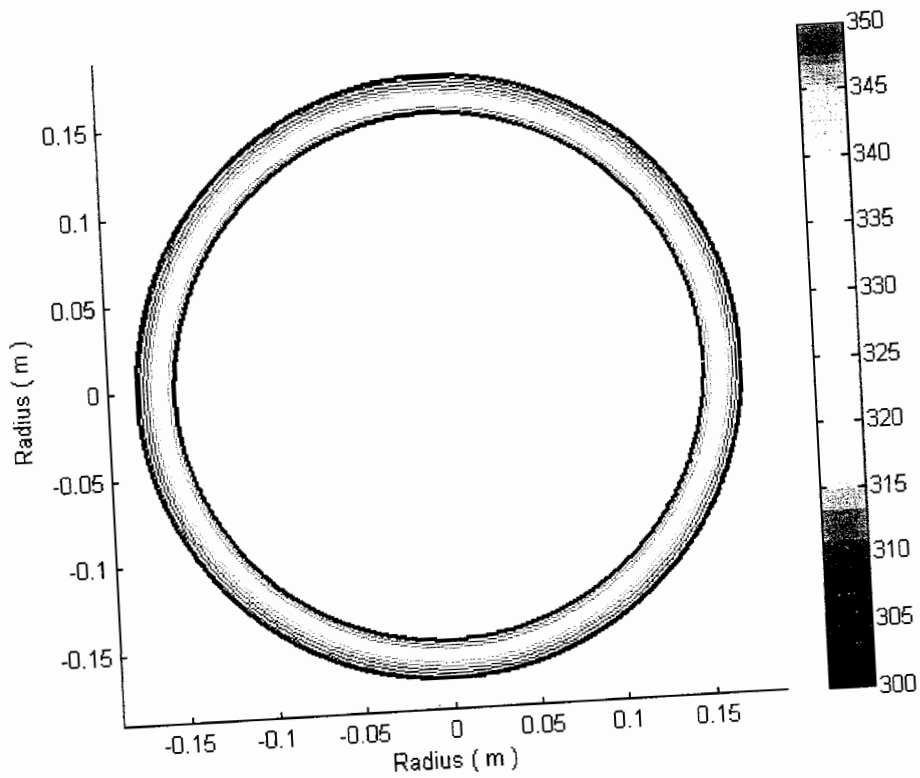
شکل ۸ - ۴ توزیع دما در نودهای هر لایه برای چیدمان نوع A



شکل ۸ - ۵ توزیع دما در نودهای هر لایه برای چیدمان نوع B



شکل ۸ - ۶ توزیع دما در نودهای هر لایه برای چیدمان نوع C

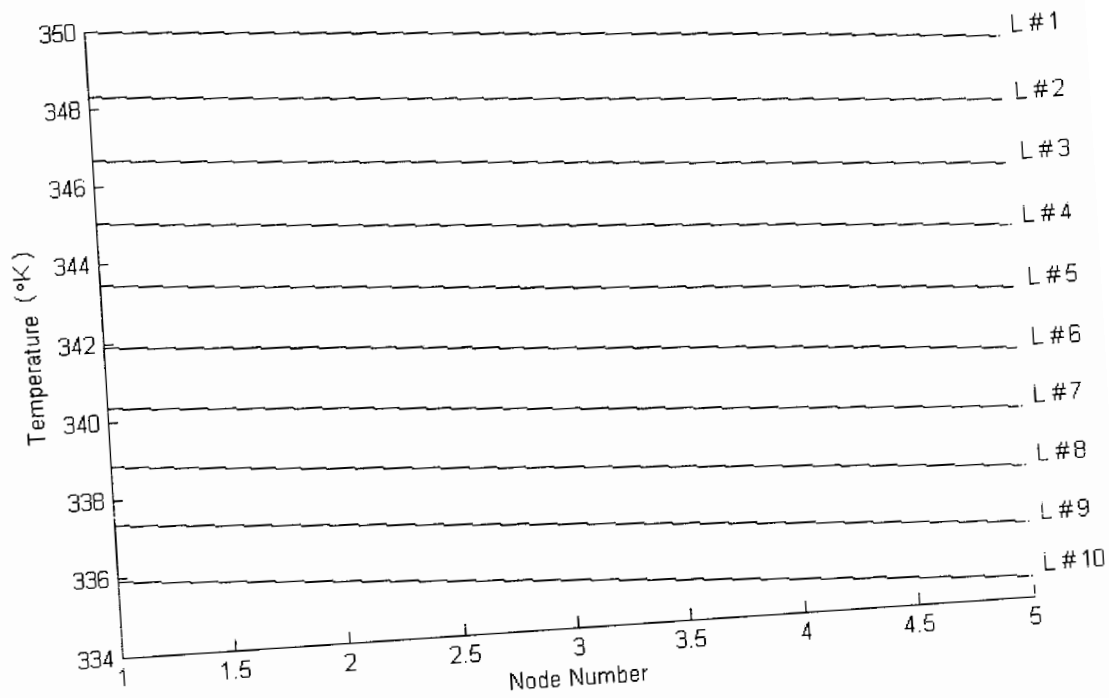


شکل ۸ - ۷ کانتور توزیع دما در لایه مخزن برای چیدمان نوع C

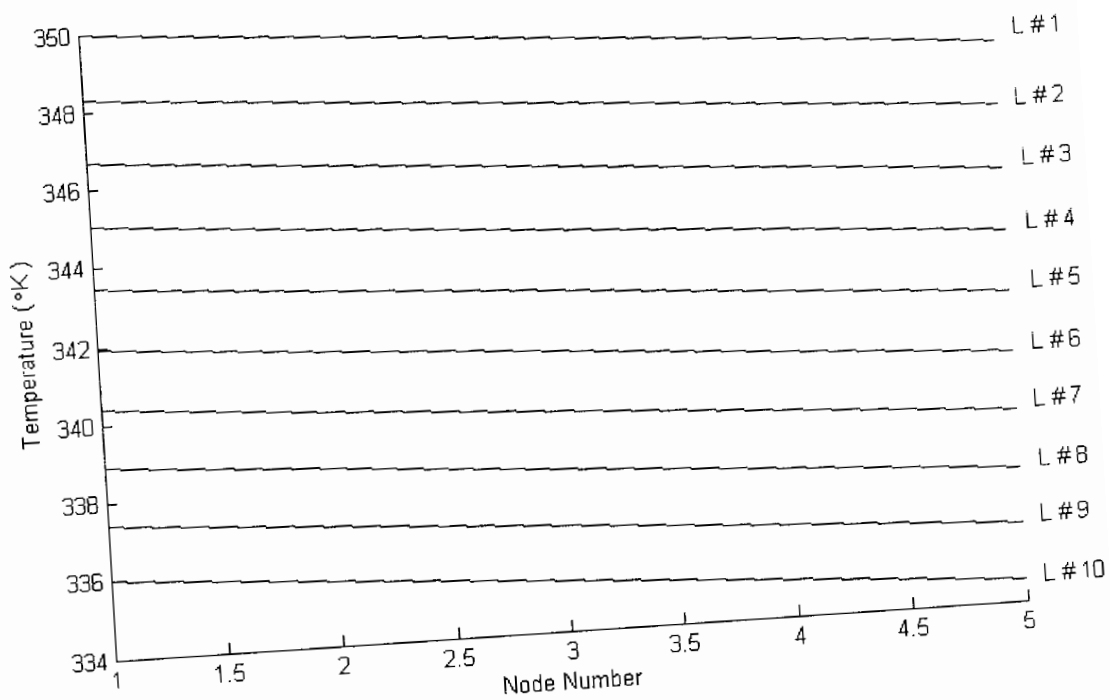
۸ - ۲ - ۲ - تاثیر چیدمان بر توزیع دما در بین لایه های مختلف مخزن با شرط مرزی تشعشع

در این حالت از شرایط مرزی ما شاهد تغییر توزیع دما در کمی بیش از نیمه مخزن که در آن تابش صورت می گیرد هستیم . مشخص است که بیشینه دما را در محلی داریم که جهت تابش و بردار نرمال سطح در یک راستا هستند . در ادامه توزیع دما را در نقطه ای که مقدار آن بیشینه است بررسی می کنیم . مشخص است که در سایر نقاطی که تشعشع در آنها وجود دارد ، مقادیر توزیع دما بین مقدار نمایش داده شده در اشکال ۸ - ۴ تا ۸ - ۶ و اشکالی که ارائه داده خواهد شد است . در نمودارهای ۸ - ۸ و ۸ - ۹ و ۸ - ۱۰ توزیع دما در لایه های مختلف مخزن برای سه نوع چیدمان مطرح شده در راستای شعاعی ارائه شده است . در شکل ۸ - ۱۱ نیز این توزیع دما در مقطعی خاص از مخزن در راستای مماسی و شعاعی نمایش داده شده است .

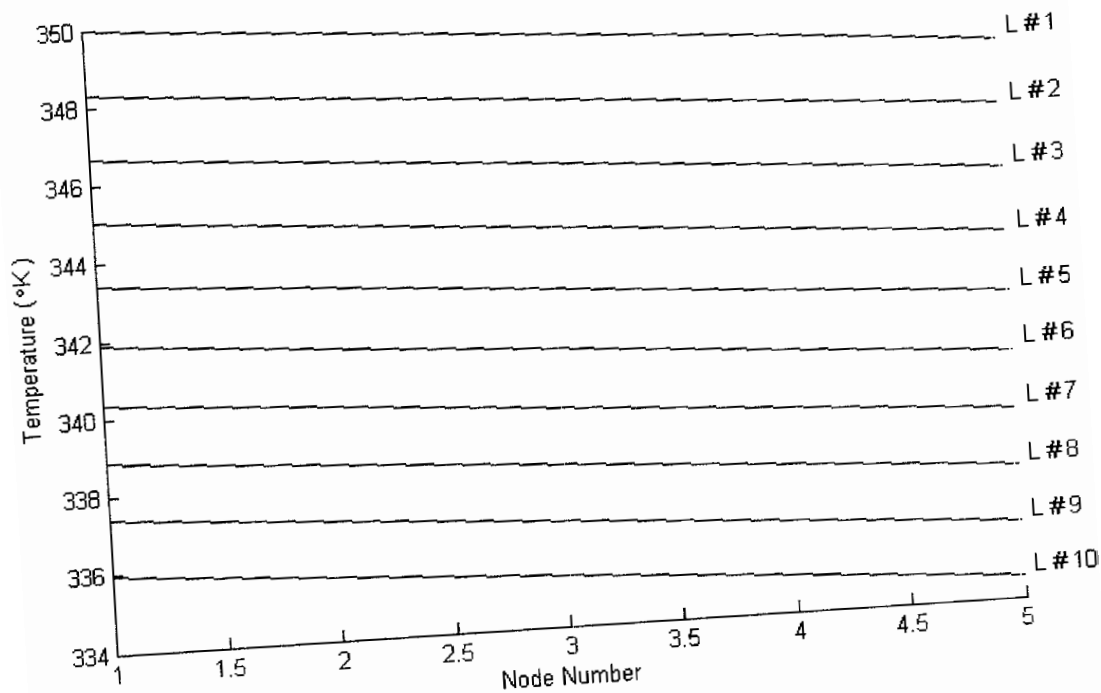
در نمودارهای ارائه شده در این بخش به بیشتر شدن مقادیر دما در نقاط ارائه شده به دلیل تابش منبع حرارتی می توان پی برد . این افزایش در لایه های مختلف در بخش بعدی مشخص تر خواهد بود . همچنین شیب پروفیل توزیع دما مقدار کمتری نسبت به حالت تشعشع دارد . لازم به توضیح است که در نیمه دیگر مخزن که در معرض تشعشع قرار ندارد توزیع دما همانند آنچه که در بخش قبل ارائه شد می باشد . این موضوع در نمودار ۸ - ۱۱ مشخص است .



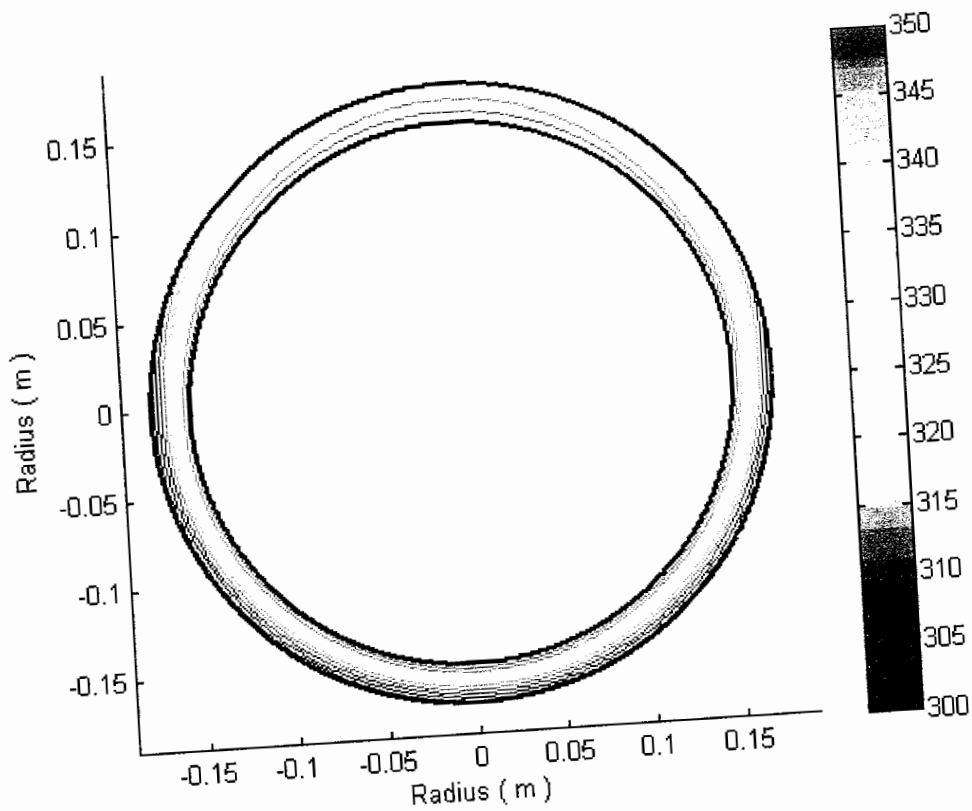
شکل ۸ - ۸ توزیع دما در نودهای هر لایه برای چیدمان نوع A



شکل ۸ - ۹ توزیع دما در نودهای هر لایه برای چیدمان نوع B



شکل ۸ - ۱۰ توزیع دما در نودهای هر لایه برای چیدمان نوع C

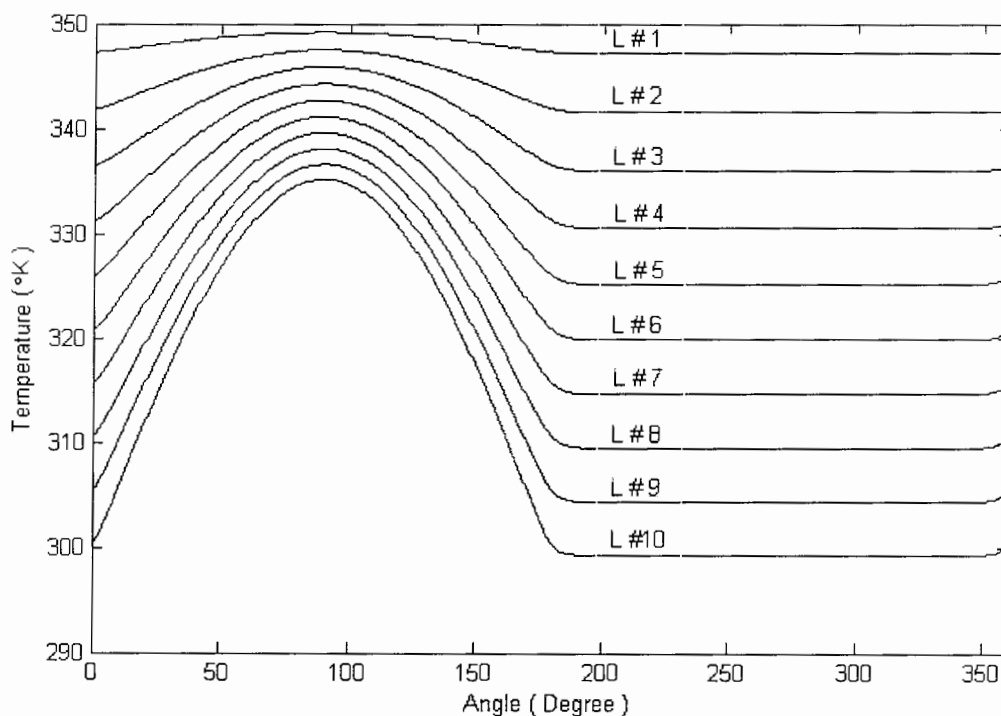


شکل ۸ - ۱۱ کانتور توزیع دما در لایه مخزن در حالت تشعشع برای چیدمان نوع C

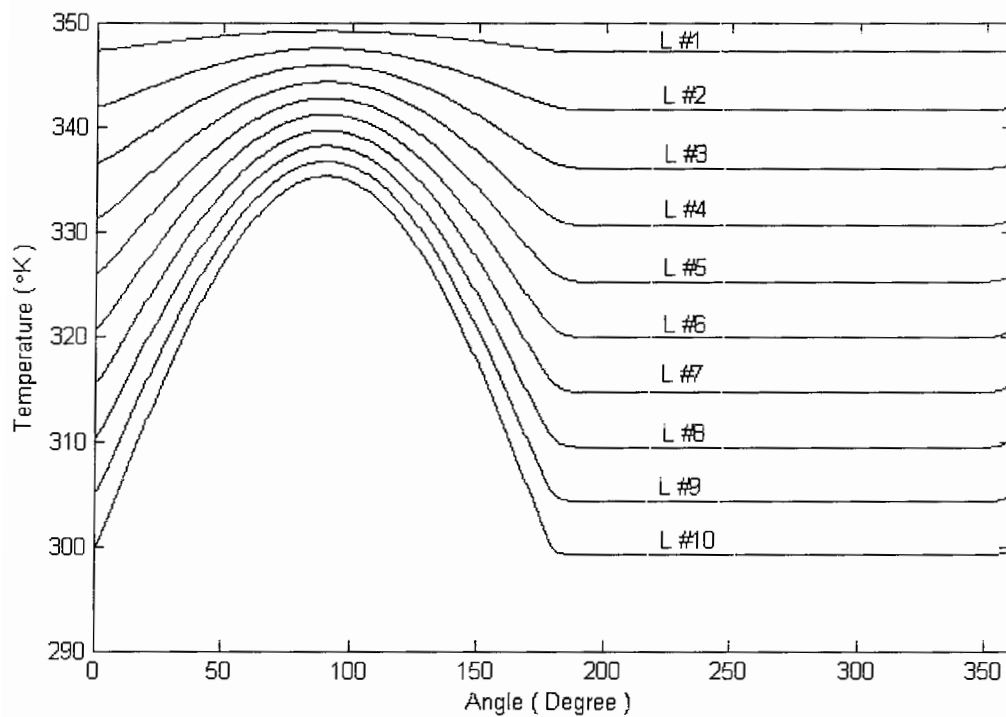
۸ - ۳ - تاثیر چیدمان بر توزیع دما در راستای مماسی در لایه های مختلف مخزن

همانطور که در بخش قبل بررسی شد با قرار دادن مخزن در معرض منبع تشعشعی توزیع دما که بصورت دوایر متحد المركز بود ، تغییر فرم داده و به صورت کانتور ۸ - ۱۱ در آمد . در این بخش بررسی دقیق تری بر روی این حالت از شرط مرزی و تاثیر لایه چینی در توزیع دما می شود .

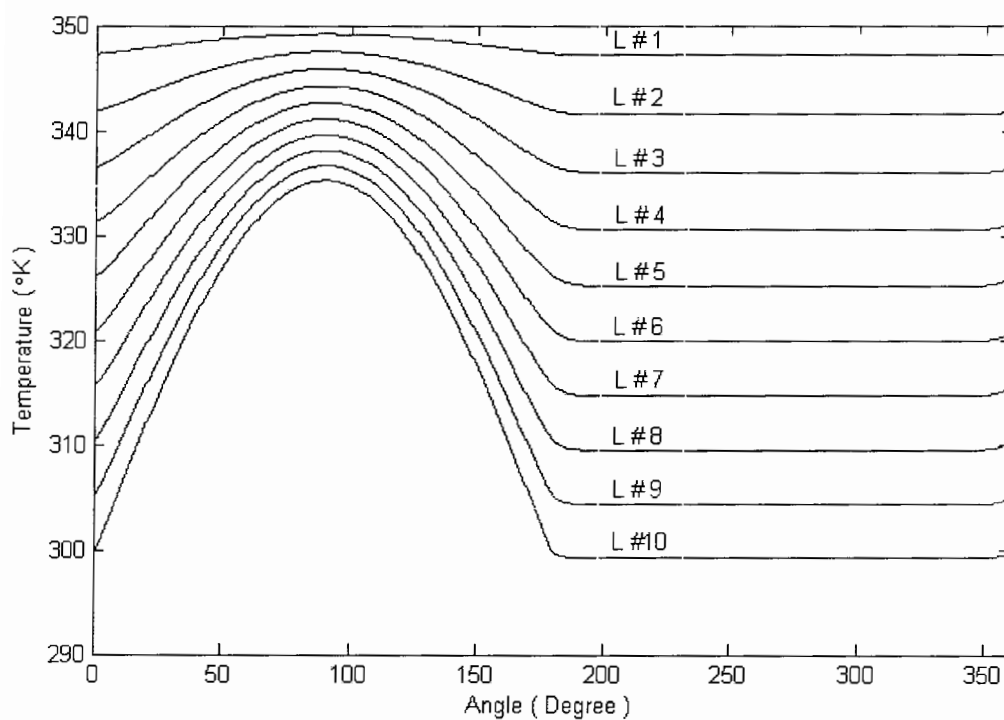
در نمودارهای ۸ - ۱۲ ، ۸ - ۱۳ و ۸ - ۱۴ تغییرات توزیع دما در نود میانی هر لایه با تغییر در راستای مماسی برای سه نوع چیدمان A ، B و C آورده شده است . همانطور که ملاحظه می کنید تشعشع ، یکنواختی دما در زوایای حدود ۱۹۰ الی ۳۵۰ درجه را تغییر داده و شاهد جهش دما در زوایای ۱۰ - الی ۱۹۰ درجه هستیم . همانطور که پیش بینی می شد مقدار بیشینه آن در ۹۰ درجه بوده و لایه های خارجی بیشترین تغییرات دمایی را دارند . نکته ای که در اینجا قابل تامل است آن است که فرم های مختلف چیدمان در اینجا نیز تاثیری بر توزیع دما نداشته و هماهنگی کاملی بین پروفیل های توزیع دما برای هر سه چیدمان داریم .



شکل ۸ - ۱۲ تغییرات توزیع دما در لایه مخزن در حالت تشعشع برای چیدمان نوع A

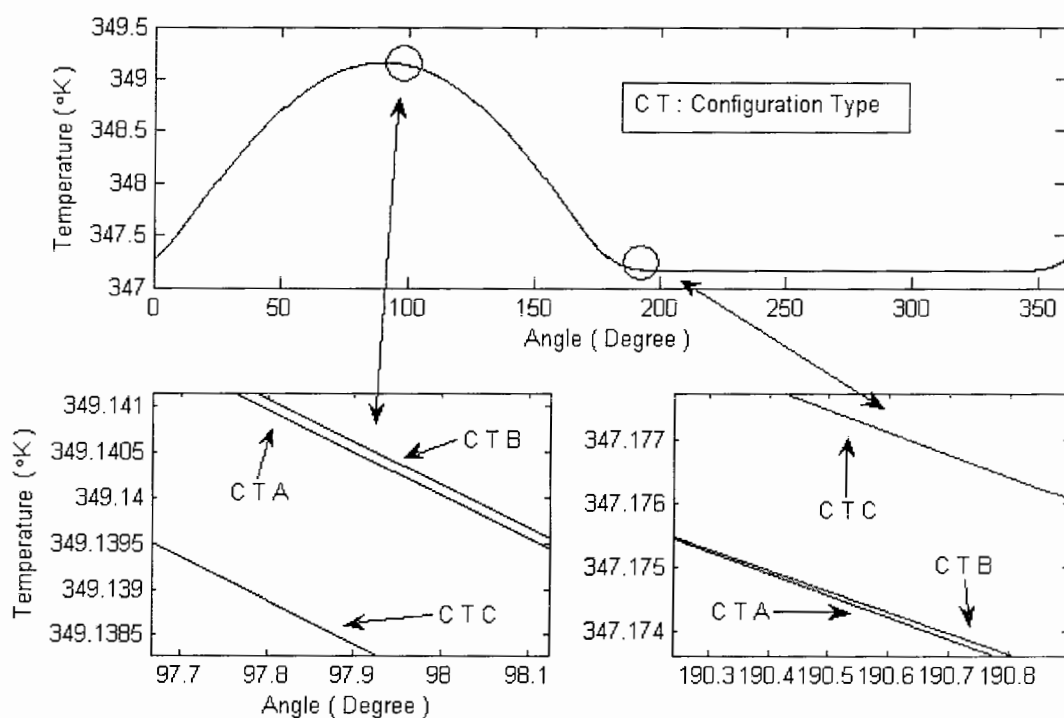


شکل ۸ - ۱۳ تغییرات توزیع دما در لایه مخزن در حالت تشعشع برای چیدمان نوع B

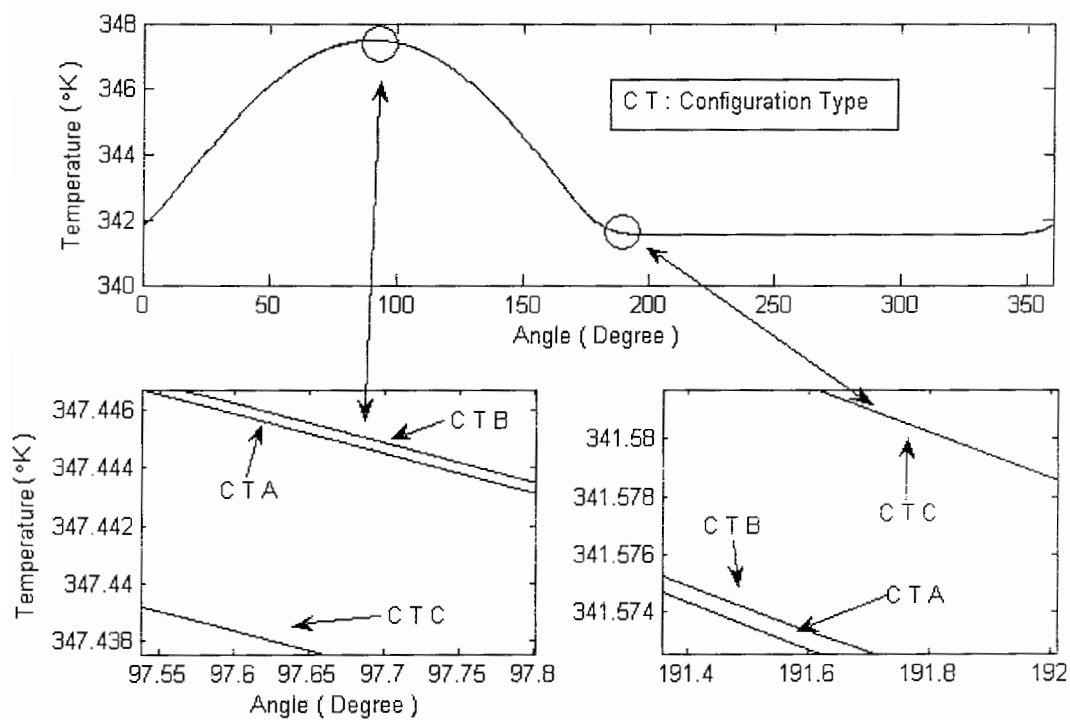


شکل ۸ - ۱۴ تغییرات توزیع دما در لایه مخزن در حالت تشعشع برای چیدمان نوع C

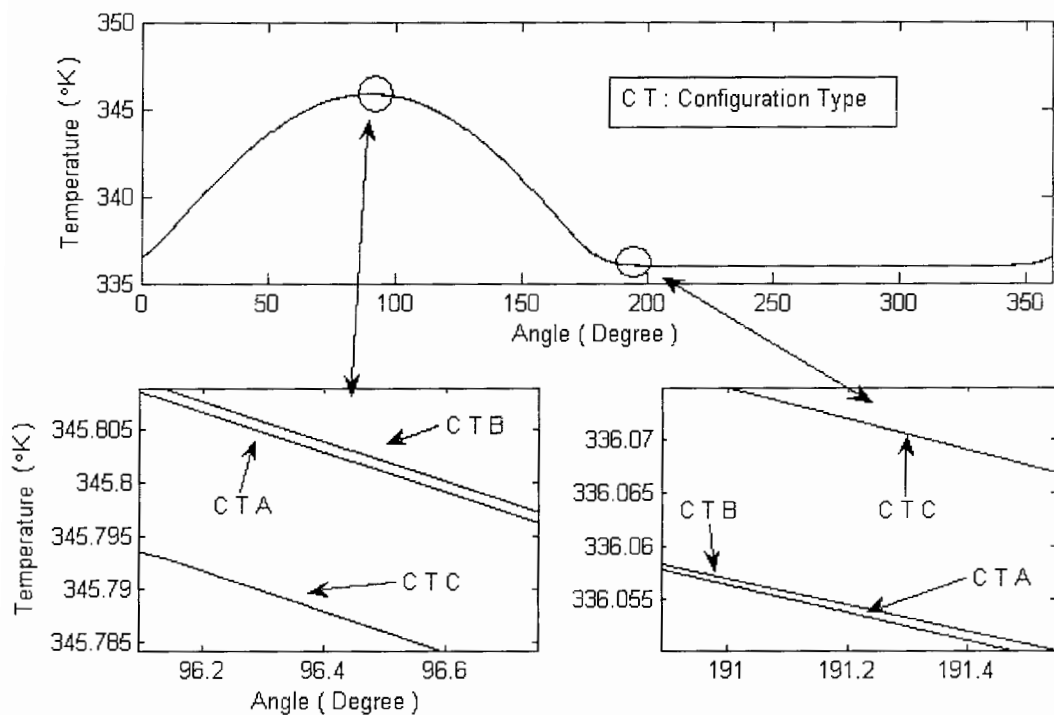
در نمودار های فوق تغییراتی که نشان دهنده تاثیر چیدمان بر توزیع دما باشد مشخص نشد ، در اینجا این سوال مطرح می شود که چیدمان چه نقشی در توزیع دما دارد . در ادامه این بخش به این موضوع پرداخته می شود . در نمودارهای ۸ - ۱۵ الی ۸ - ۲۴ توزیع دمای مربوط به یک نود خاص در راستای شعاع و محور از هر لایه برای هر سه نوع چیدمان در یک نمودار نمایش داده شده و تا حد امکان سعی شده تا با درشت کردن نقاط تصادفی به بررسی اثرات چیدمان بر توزیع دما پرداخته شود . همانطور که ملاحظه می شود چیدمان های مختلف در بیشترین نقاط اختلافی در حدود صدم درجه با یکدیگر دارند و از نظم خاصی پیروی نمی کنند بطوری که نمی توان گفت در حدود زاویه بین ۸۰ الی ۱۰۰ درجه کدام چیدمان پروفیل توزیع دمایش دارای مقداری بیش از پروفیل توزیع دمای چیدمان دیگر است . و یا پروفیل دمایی چیدمان نوع دوم همیشه از چیدمان نوع اول دارای مقدار بیشتری است . به همین دلیل در ادامه از ارائه دسته پاسخ های چیدمان های مختلف خودداری نموده و فقط یک نوع از آن را بررسی می کنیم .



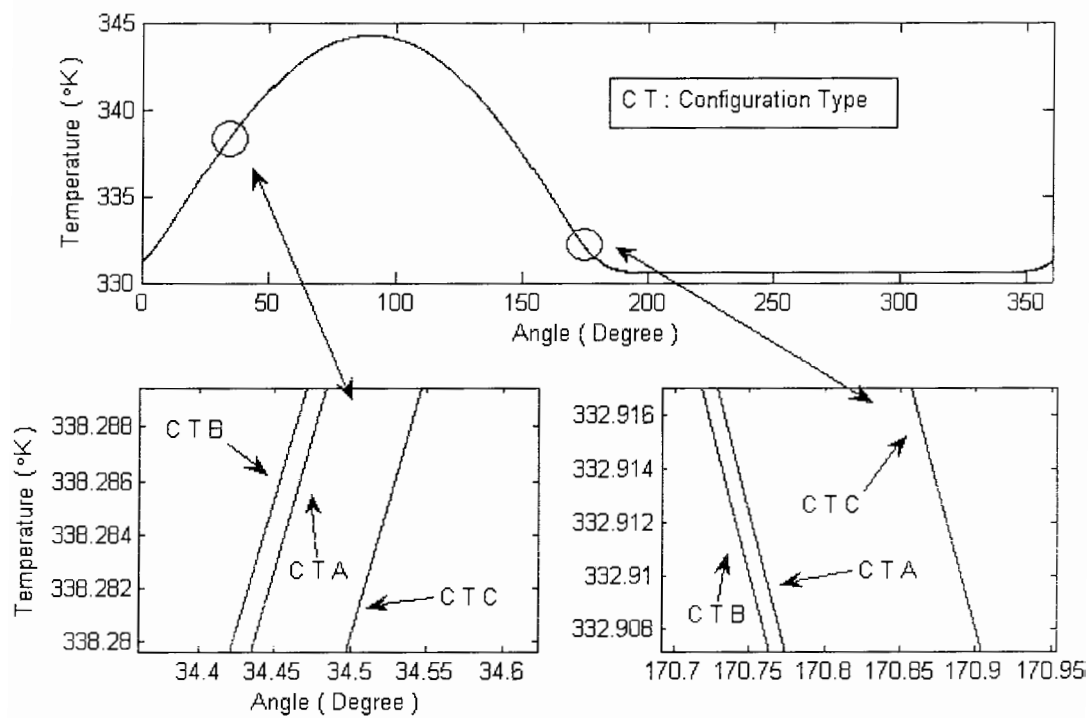
شکل ۸ - ۱۵ تغییرات توزیع دما در لایه اول مخزن در حالت تشعشع



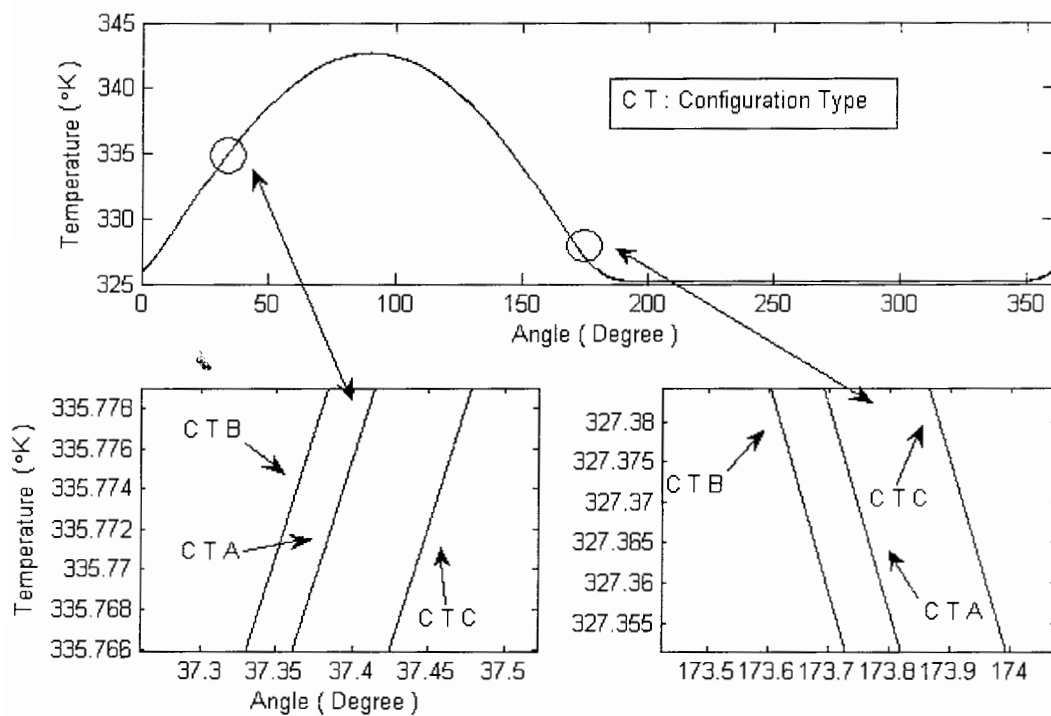
شکل ۸ - ۱۶ تغییرات توزیع دما در لایه دوم مخزن در حالت تشعشع



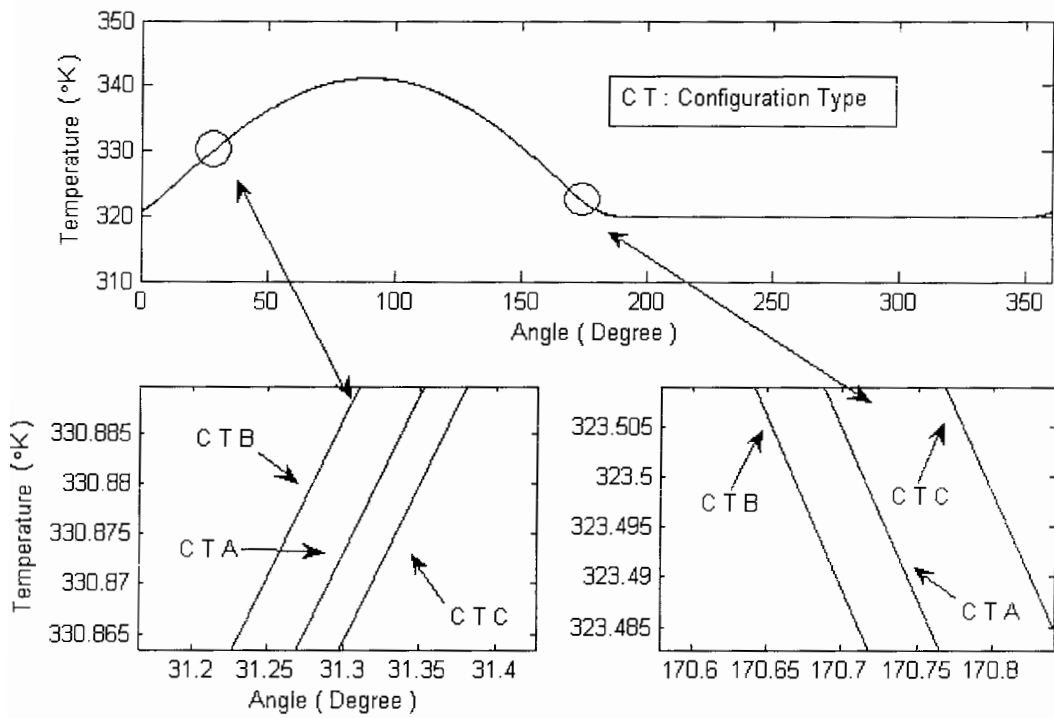
شکل ۸ - ۱۷ تغییرات توزیع دما در لایه سوم مخزن در حالت تشعشع



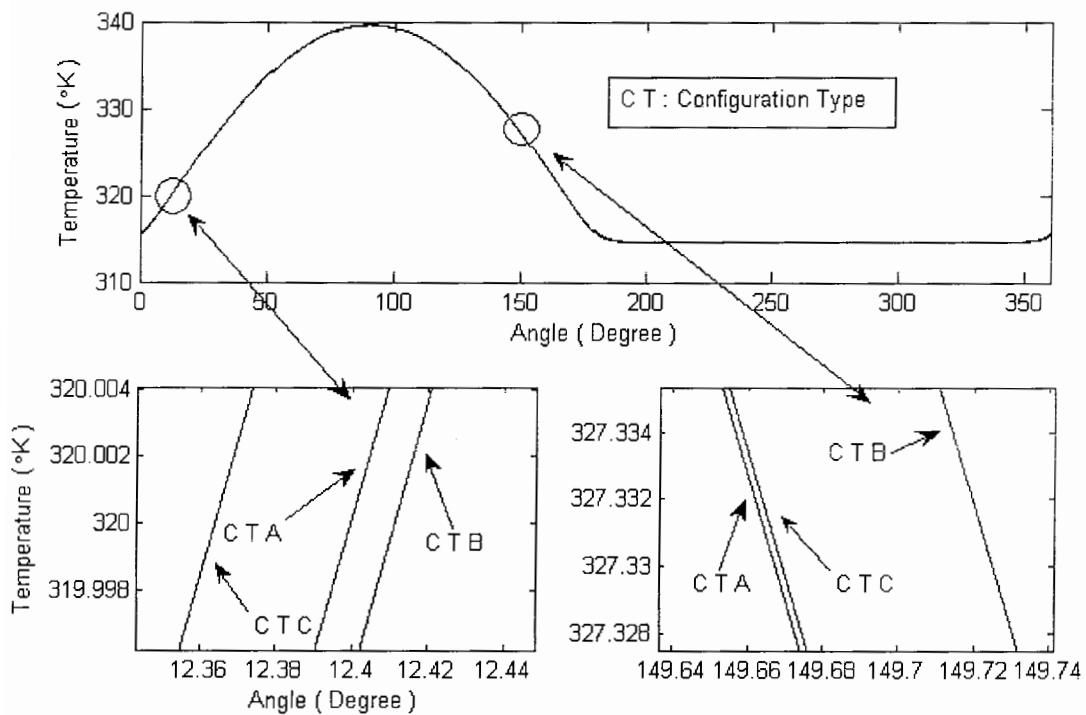
شکل ۸ - ۱۸ تغییرات توزیع دما در لایه چهارم مخزن در حالت تشعشع



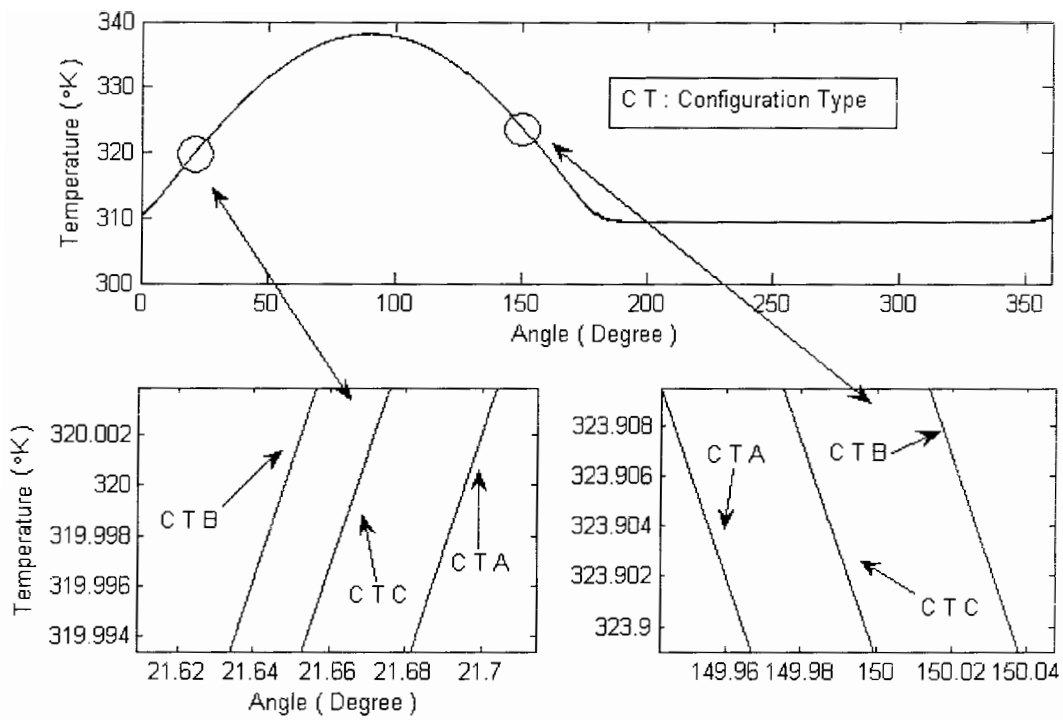
شکل ۸ - ۱۹ تغییرات توزیع دما در لایه پنجم مخزن در حالت تشعشع



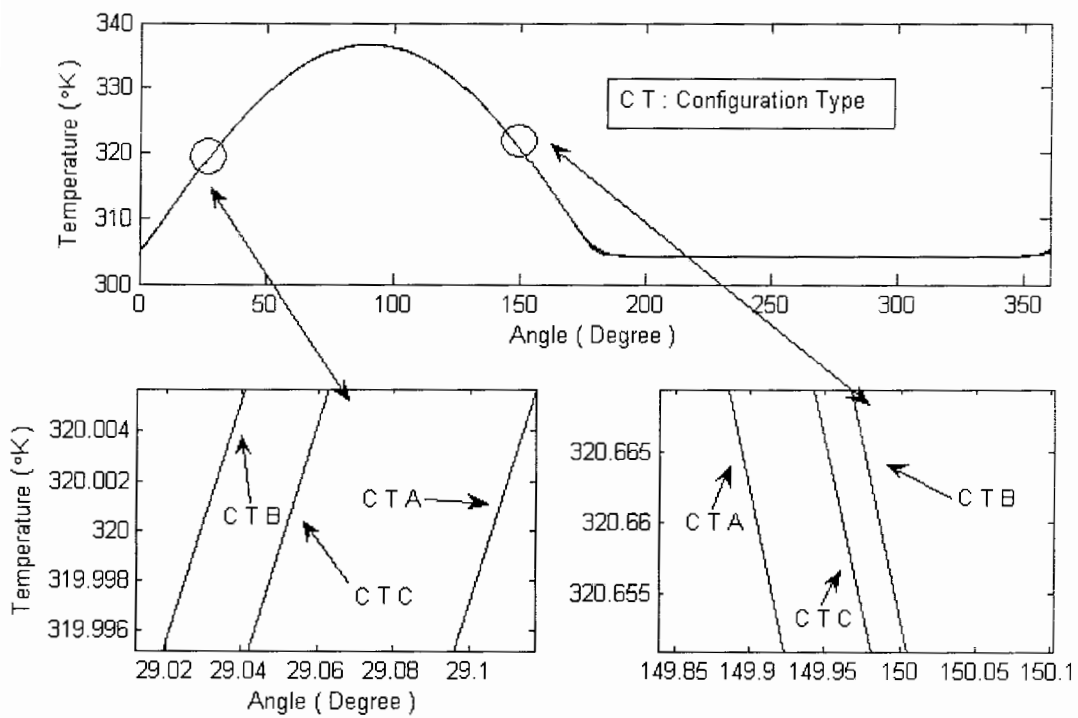
شکل ۸ - ۲۰ تغییرات توزیع دما در لایه ششم مخزن در حالت تشعشع



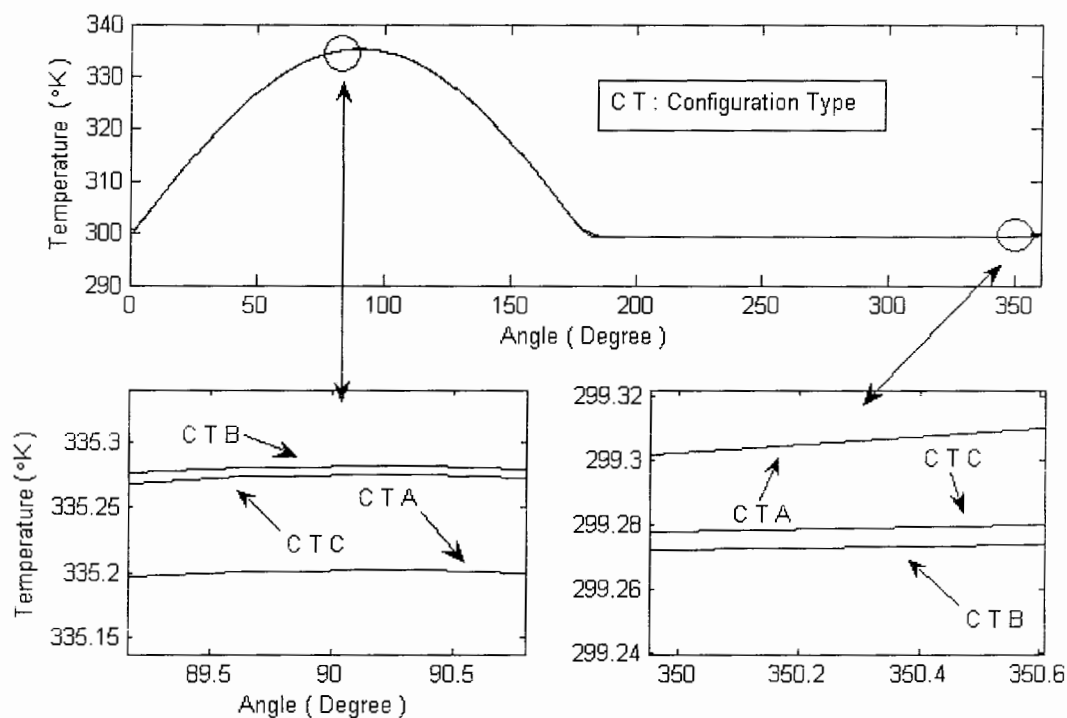
شکل ۸ - ۲۱ تغییرات توزیع دما در لایه هفتم مخزن در حالت تشعشع



شکل ۸ - ۲۲ تغییرات توزیع دما در لایه هشتم مخزن در حالت تشعشع



شکل ۸ - ۲۳ تغییرات توزیع دما در لایه نهم مخزن در حالت تشعشع



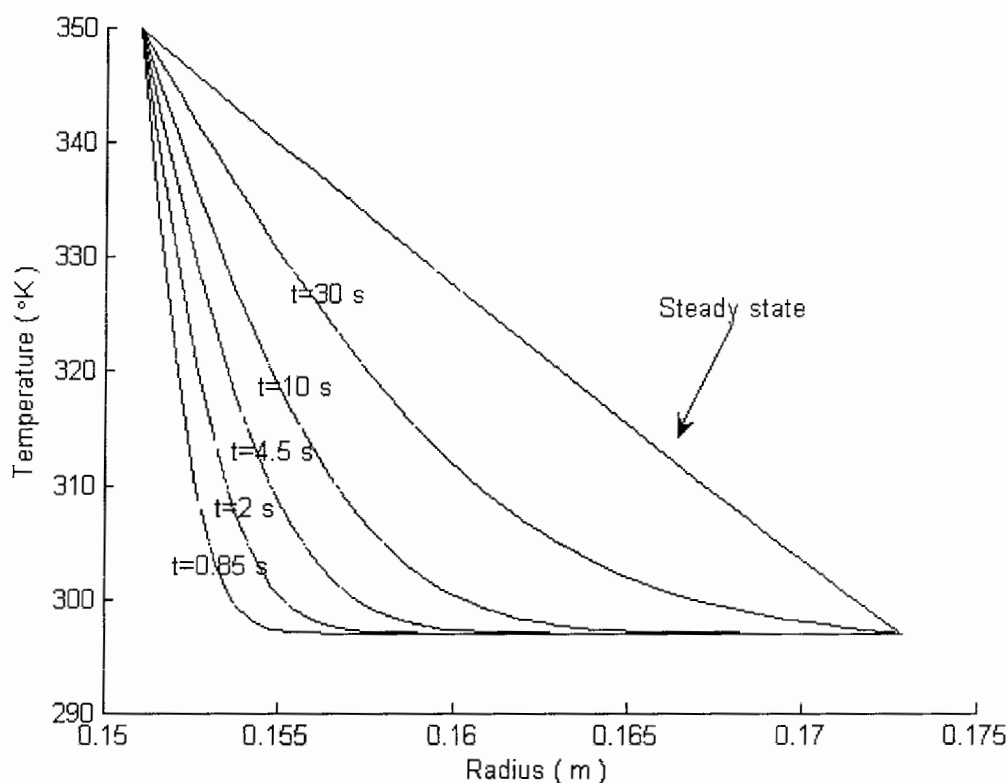
شکل ۸ - ۲۴ تغییرات توزیع دما در لایه دهم مخزن در حالت تشعشع

۸ - ۴ - توزیع دما در زمانهای مختلف قبل از رسیدن به پایداری

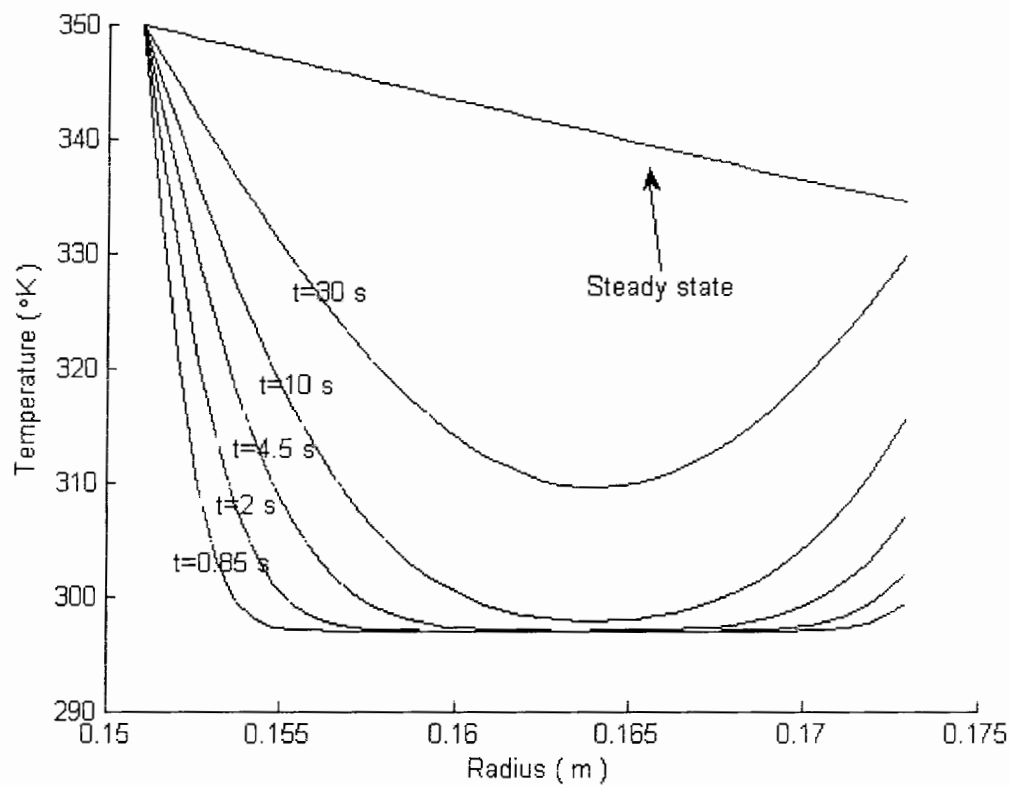
اگر حالتی را در نظر بگیریم که مخزن در محیطی با دمای ۲۹۷ درجه کلونین قرار داده شده و بالطبع کلیه لایه های مخزن را در دمای ۲۹۷ فرض نماییم در شرایطی که دمای داخلی مخزن را به ۳۵۰ درجه کلونین می رسانیم ، در مدت زمانی که لایه های مخزن به حالت پایدار می رسد این توزیع دما را بخواهیم بررسی نماییم می توان به نمودار ۸ - ۲۵ مراجعه نمود . در این نمودار برخی پروفیل های دما تا رسیدن به حالت پایدار برای چیدمان نوع A رسم شده است . ملاحظه می شود که با گذار زمان حرارت از داخل مخزن به لایه های خارجی رفته و دمای آنها افزایش می یابد از طرفی دیده می شود که مدت زمان کوتاهی^۱ طول می کشد تا لایه های مخزن به وضعیت پایدار برسد .

^۱ واژه مدت زمان کوتاه یک عبارت غیر علمی است و فقط از آن جهت استفاده شده است که این مدت زمان برای یک شرایط کاری و اینکه یک مخزن ممکن است ساعت ها در دمایی خاص و بارگذاری مکانیکی قرار گیرد کوتاه باشد ، استفاده شده است .

اگر این شرایط را برای حالتی که مخزن تحت تشعشع قرار گرفته در نقطه ای که بیشینه تابش را در آن داریم بخواهیم بررسی کنیم به نمودار ۸ - ۲۶ می توان مراجعه نمود. در این نمودار مشاهده می شود که حرارت حاصل از تابش در لایه های خارجی اثر کرده و دمای آنها با گذر زمان رو به افزایش میرود و به دلیل اختلاف دمایی بیشتر حالت پایدار با وضعیت اولیه مدت زمان بیشتری نسبت به حالت بدون تابش باید سپری شود تا به حالت پایدار برسد. البته لایه های بیرونی و درونی که یکی در معرض تشعشع و دیگری در معرض محیطی با دمای ثابت هستند زودتر از لایه های میانی به وضعیت پایدار می رسند.



شکل ۸ - ۲۵ توزیع دما در راستای شعاع مخزن تا رسیدن به حالت پایدار



شکل ۸ - ۲۶ توزیع دما در نقطه با بیشینه مقدار تشعشع در راستای شعاع مخزن تا رسیدن به حالت پایدار

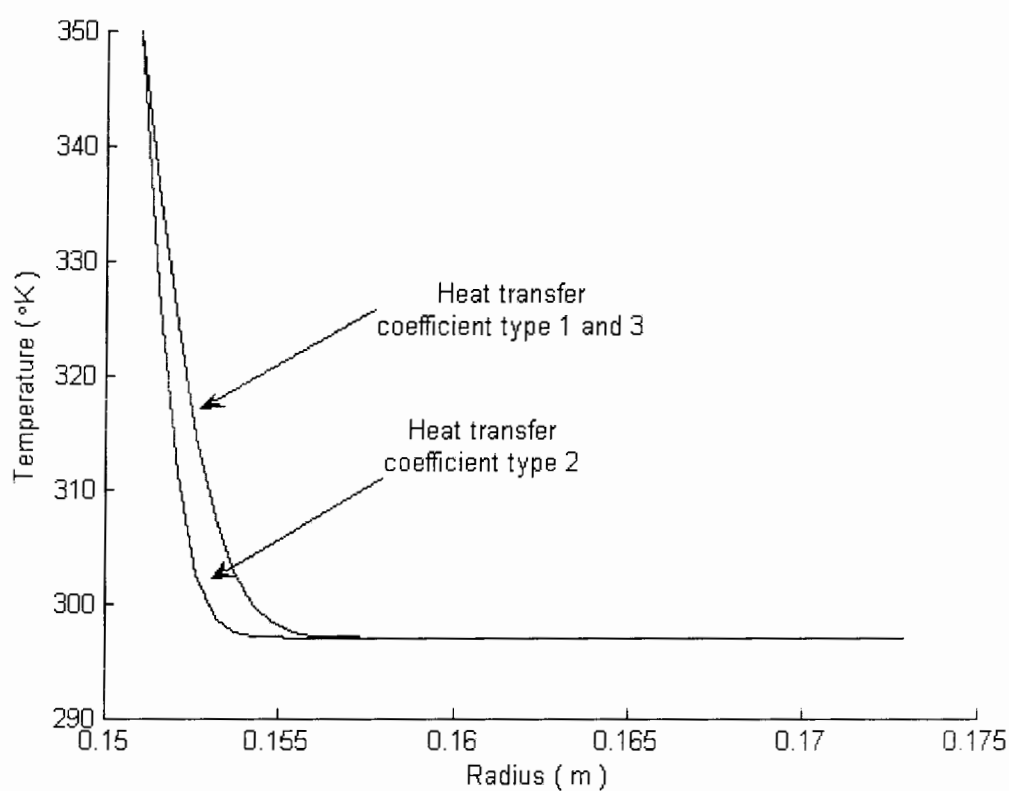
۸ - ۵ - تاثیر انتقال حرارت همرفت بر توزیع دما

همانطور که در بخش های قبل گفته شد ، مخزن در محیطی با دمای ۲۹۷ درجه کلوین قرار دارد و به آن محیط از طریق جابجایی حرارت را انتقال می دهد که در بعضی حالات اثر تشعشع را بر توزیع دما بررسی نموده ایم . یکی از پارامترهای مهم در انتقال حرارت جابجایی ضریب انتقال حرارت جابجایی می باشد . در اینجا به تاثیر این ضریب بر توزیع دمای داخل لایه های مخزن پرداخته و برای این کار سه مقدار مطابق با جدول ۸ - ۲ برای این ضریب فرض کرده و توزیع دما را بررسی می کنیم .

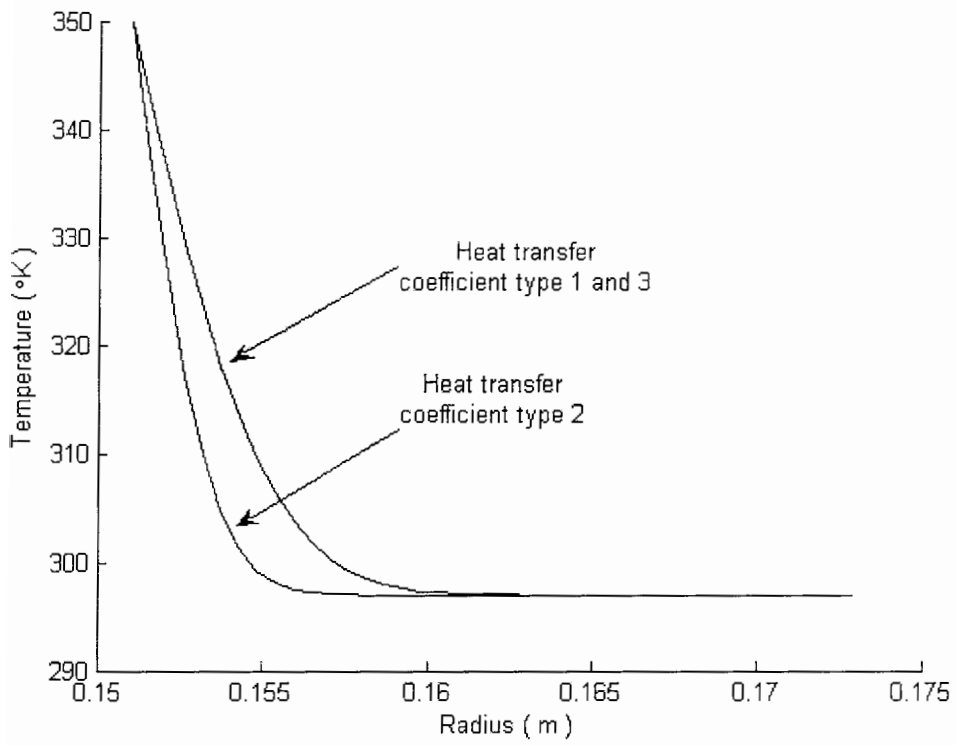
جدول ۸ - ۲ مقادیر مختلف ضریب انتقال حرارت همرفت

واحد	ضریب همرفت نوع اول	ضریب همرفت نوع دوم	ضریب همرفت نوع سوم
$w/m^2 \cdot ^\circ C$	۲۱	۱۰	۵۰

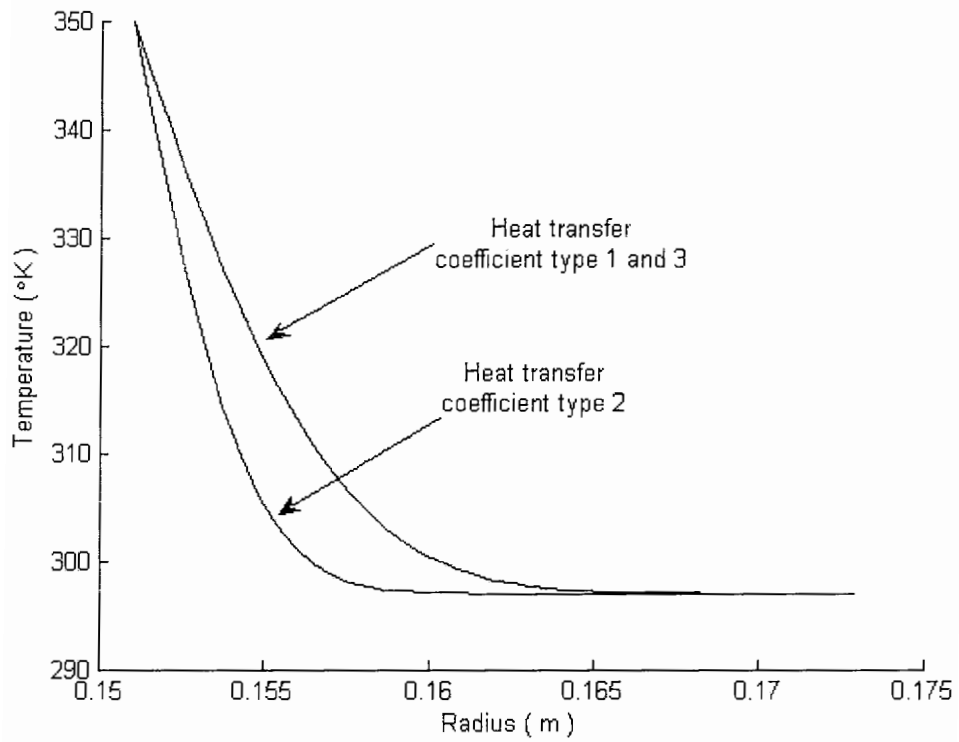
برای بررسی دقیق تر تاثیر این ضریب ، نمودارها را در زمانهای مختلف تا قبل از رسیدن به پایداری در اشکال ۸ - ۲۷ الی ۸ - ۳۲ نشان داده می شود . در نمودار ۸ - ۲۷ این تغییرات را در زمان ۱/۲۵ ثانیه پس از شرایط مطرح شده در بخش ۸ - ۴ نمایش می دهیم . همچنین لازم به توضیح است که نمودارهای ۸ - ۲۸ ، ۸ - ۲۹ ، ۸ - ۳۰ و ۸ - ۳۱ به ترتیب برای زمانهای ۴/۵ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۳۰ ثانیه و نمودار ۸ - ۳۲ برای حالت پایدار نمایش داده شده است .



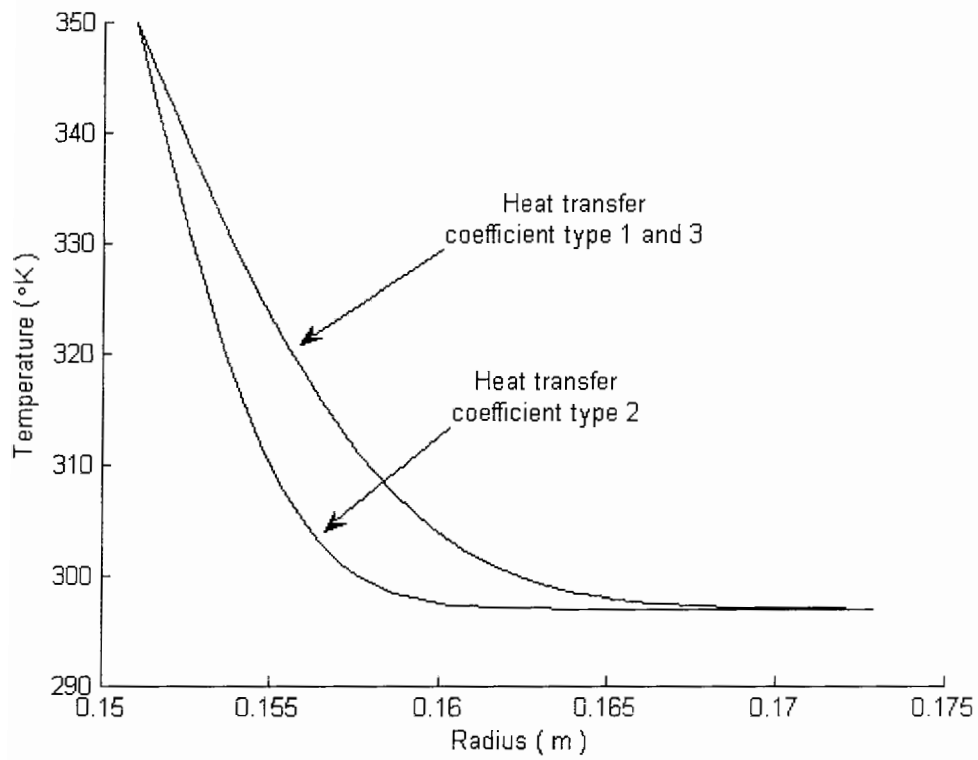
شکل ۸ - ۲۷ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۱/۲۵ ثانیه



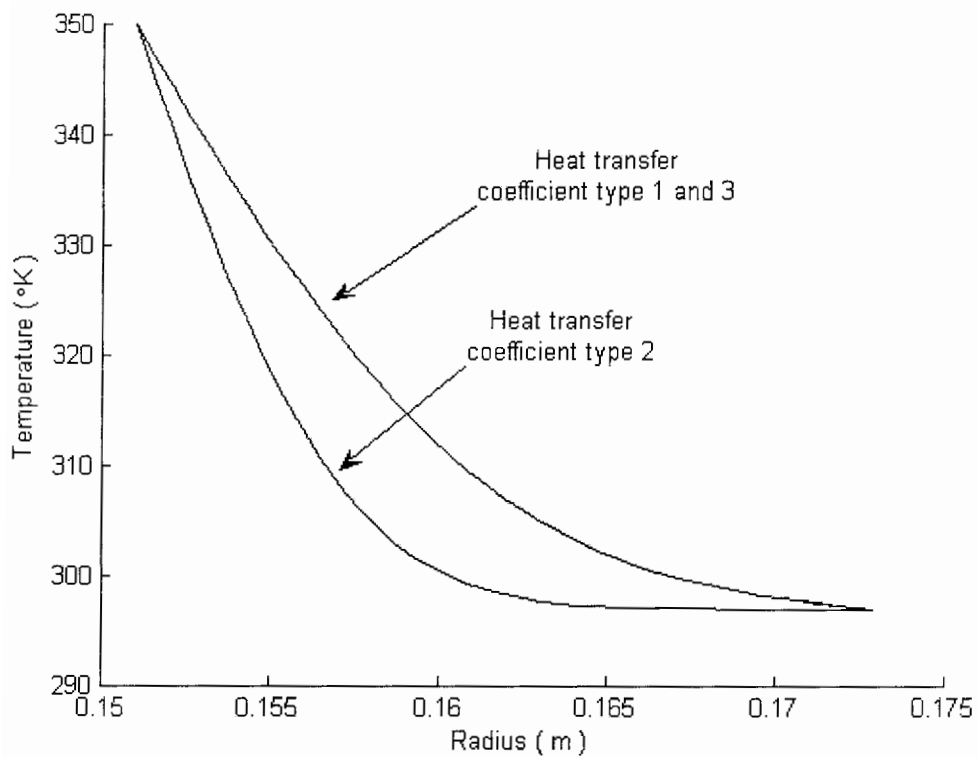
شکل ۸ - ۲۸ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۴/۵ ثانیه



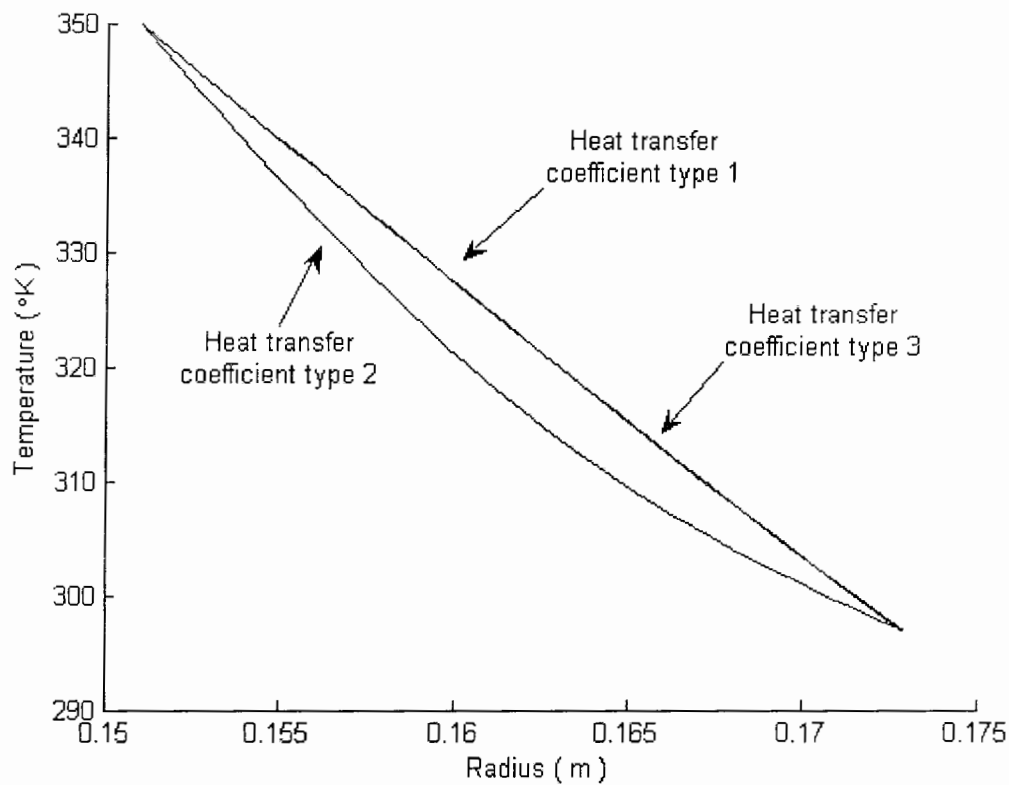
شکل ۸ - ۲۹ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۱۰ ثانیه



شکل ۸ - ۳۰ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۱۵ ثانیه



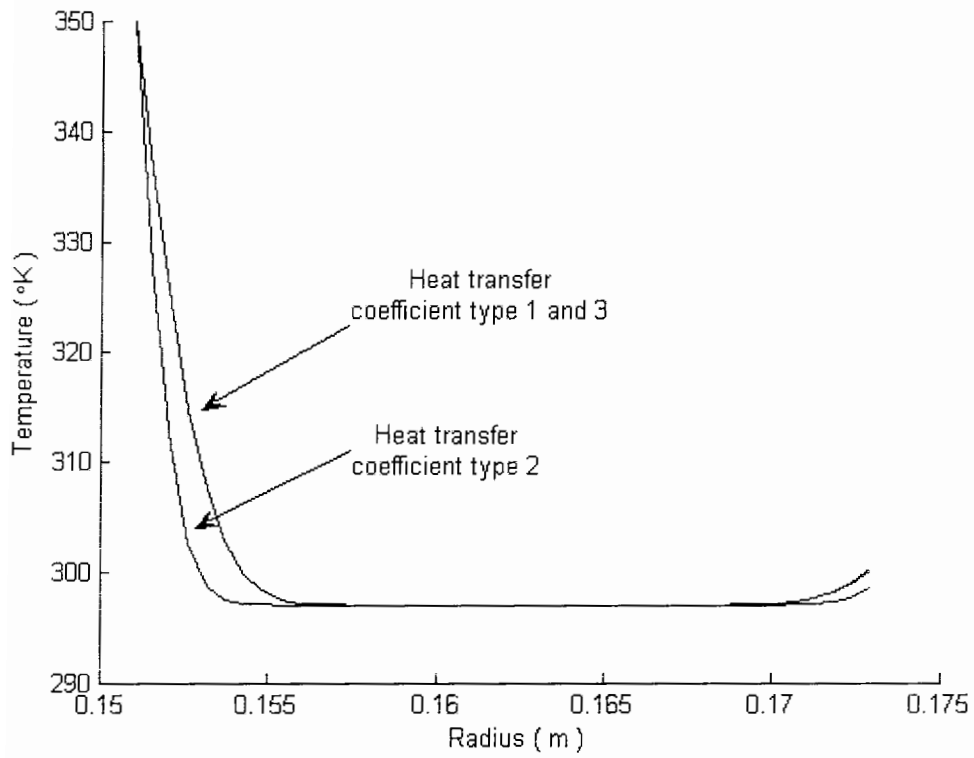
شکل ۸ - ۳۱ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۳۰ ثانیه



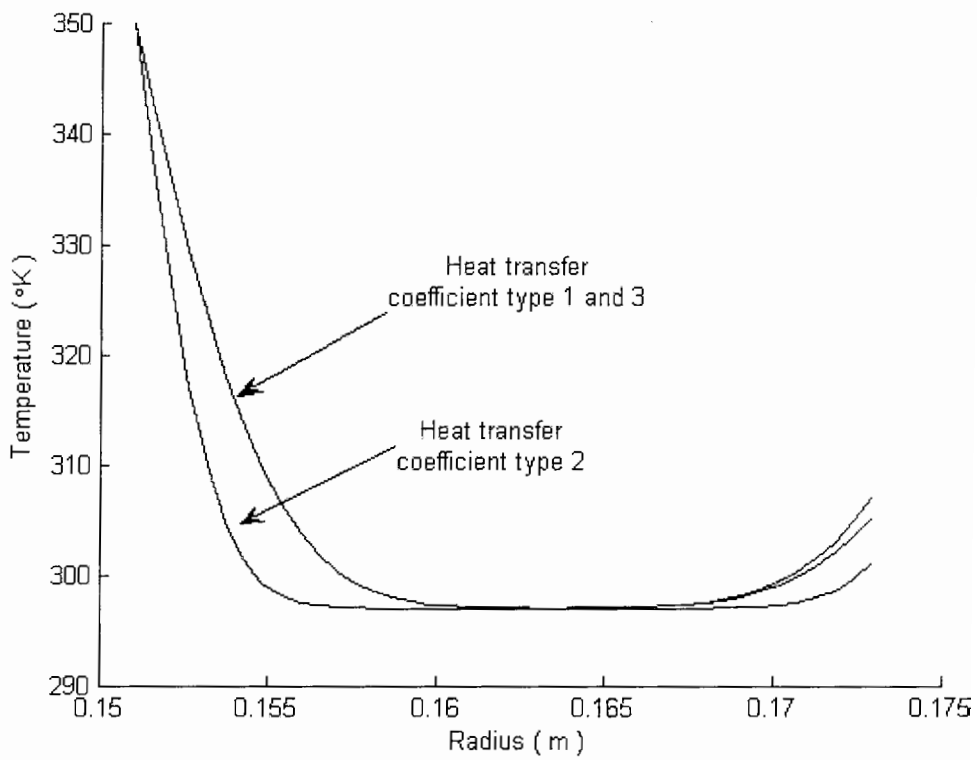
شکل ۸ - ۳۲ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در حالت پایدار

همانطور که در اشکال فوق مشاهده می شود برای حالات فرضی ضریب همرفت نوع اول و سوم تغییرات محسوسی در توزیع دما در لایه های مختلف نداریم ولی ضریب همرفت نوع دوم شکل پروفیل توزیع دما را تغییر داده و به شکلی که در نمودار ۸ - ۳۲ ملاحظه می کنید در وضعیت پایدار در می آورد .

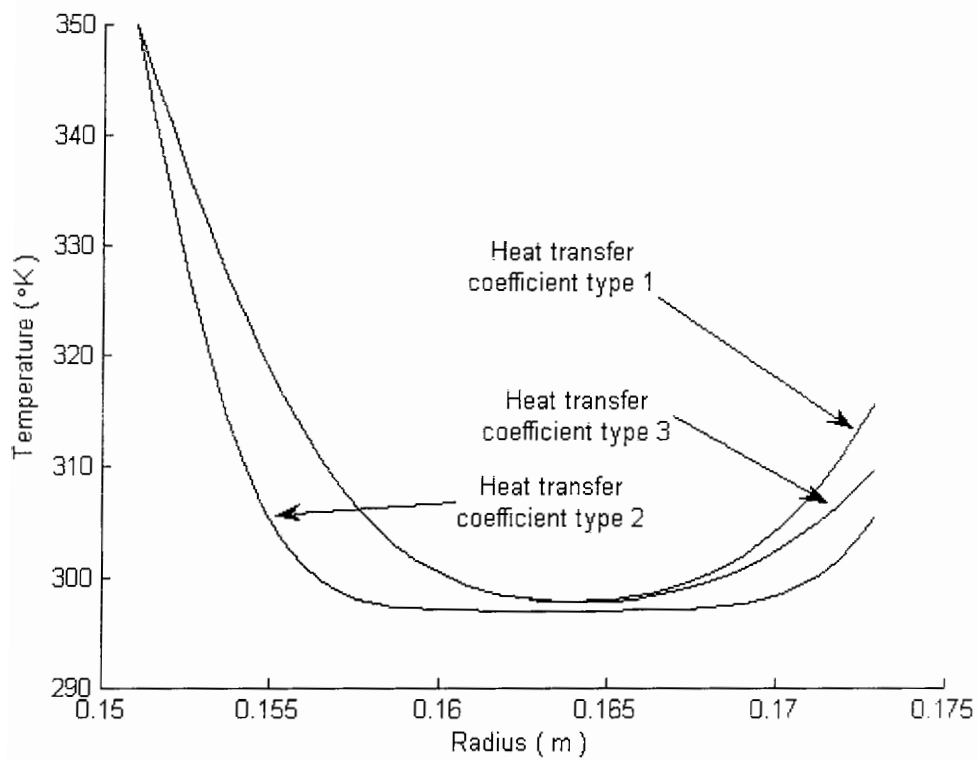
بررسی این نتایج برای حالتی که شرط مرزی تشعشع نیز اضافه می شود قابل توجه است . نمودارهای ۸ - ۳۳ ، ۸ - ۳۴ ، ۸ - ۳۵ ، ۸ - ۳۶ و ۸ - ۳۷ به ترتیب برای زمانهای $1/25$ ، $4/5$ ، 10 ، 15 ، 30 ثانیه و نمودار ۸ - ۳۸ برای حالت پایدار نمایش داده شده است .



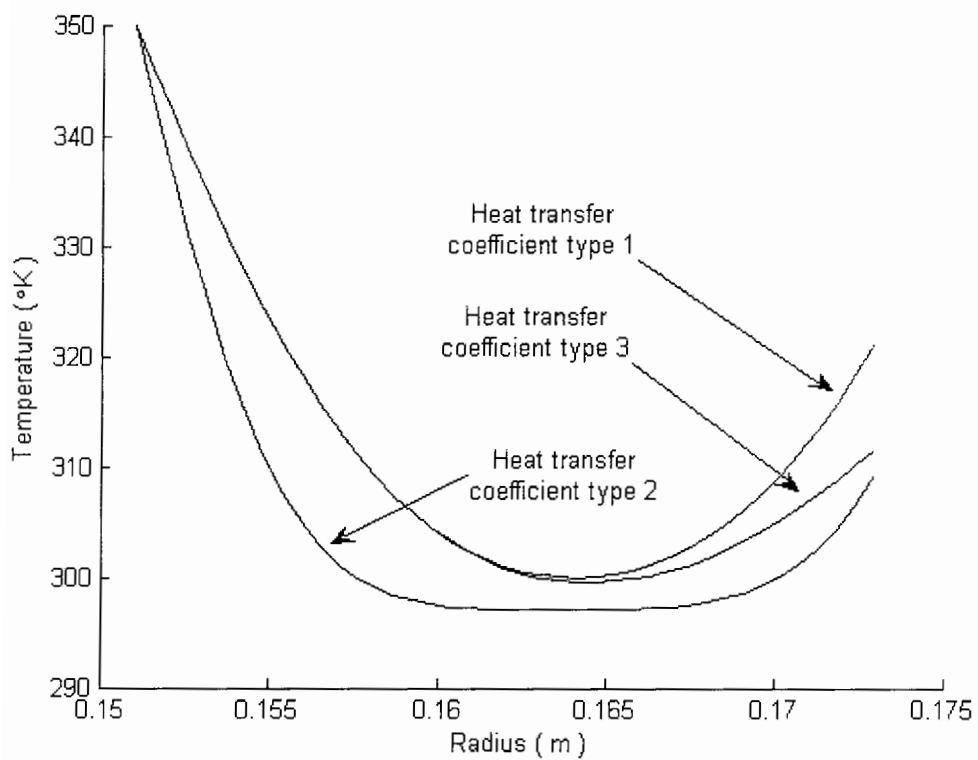
شکل ۸ - ۳۳ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۱/۲۵ ثانیه



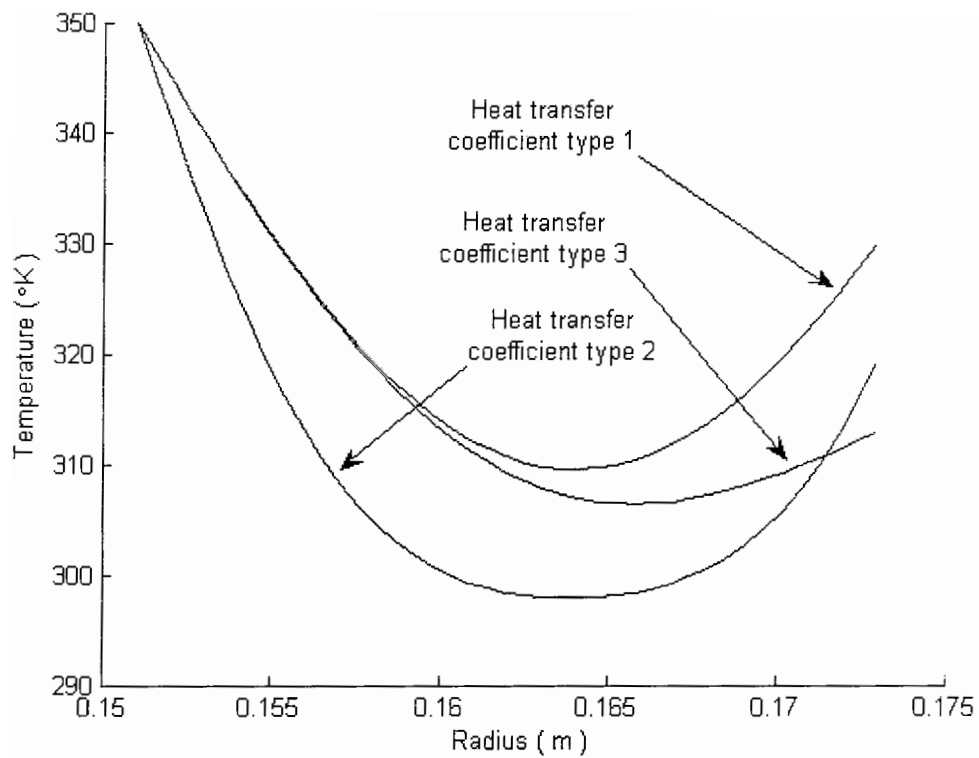
شکل ۸ - ۳۴ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۴/۵ ثانیه



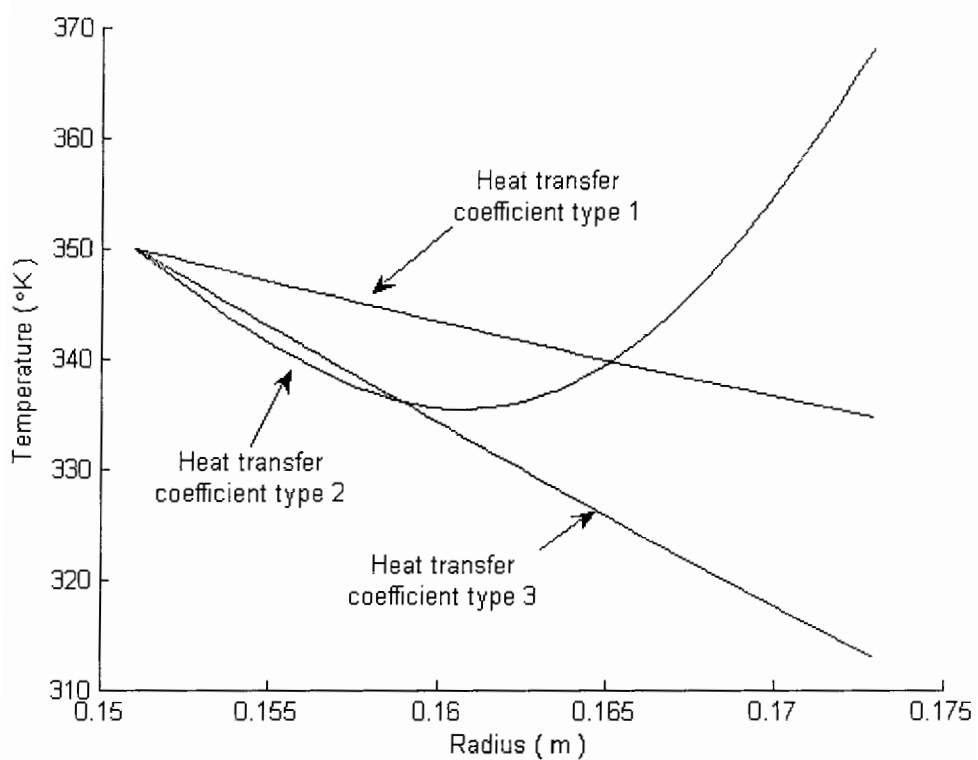
شکل ۸ - ۳۵ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۱۰ ثانیه



شکل ۸ - ۳۶ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۱۵ ثانیه

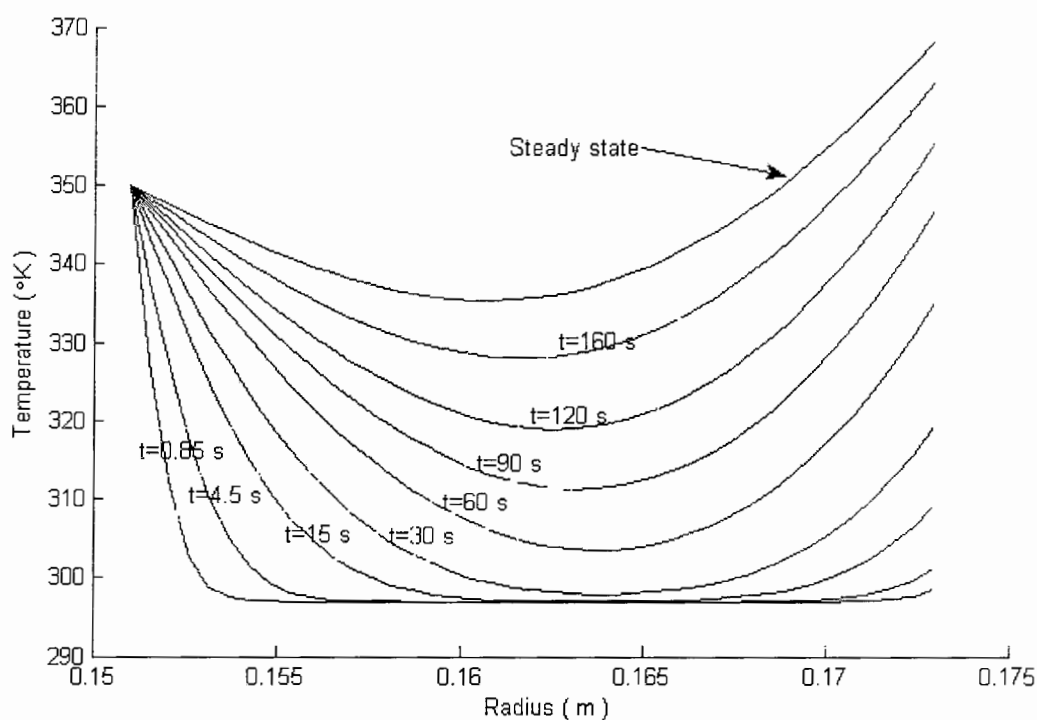


شکل ۸ - ۳۷ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در زمان ۳۰ ثانیه



شکل ۸ - ۳۸ بررسی تاثیر ضریب همرف بر توزیع دما در حالت پایدار

همانطور که در اشکال فوق مشاهده شد در ضرایب همرفت نوع اول و سوم که در حالت شرط مرزی بدون تشعشع تغییرات محسوسی در توزیع دما در لایه های مختلف نداشتیم ، با اضافه نمودن این شرط پروفیل های توزیع دما دیگر منطبق با یکدیگر نبوده و این ضریب تاثیر خود را نشان داده است . از طرف دیگر برای حالتی با ضریب همرفت نوع دوم شکل پروفیل توزیع دما انحنای بیشتری پیدا کرده که در انتها در نمودار ۸ - ۳۸ این وضعیت را برای حالت پایدار مشاهده کردید . برای بررسی بیشتر پروفیل های توزیع دما در زمانهای طولانی تر به شکل ۸ - ۳۹ مراجعه نمایید .

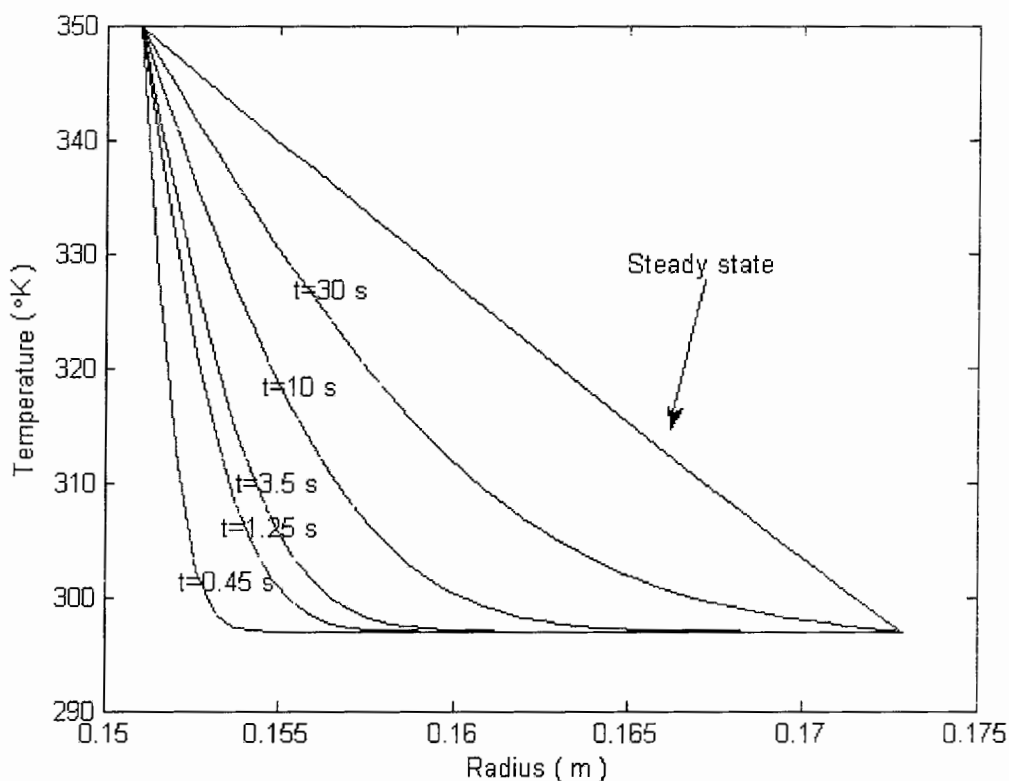


شکل ۸ - ۳۹ بررسی ضریب همرفت نوع دوم بر توزیع دما در زمانهای مختلف

۸ - ۶ - تاثیر ضریب انتقال حرارت هدایتی بر توزیع دما

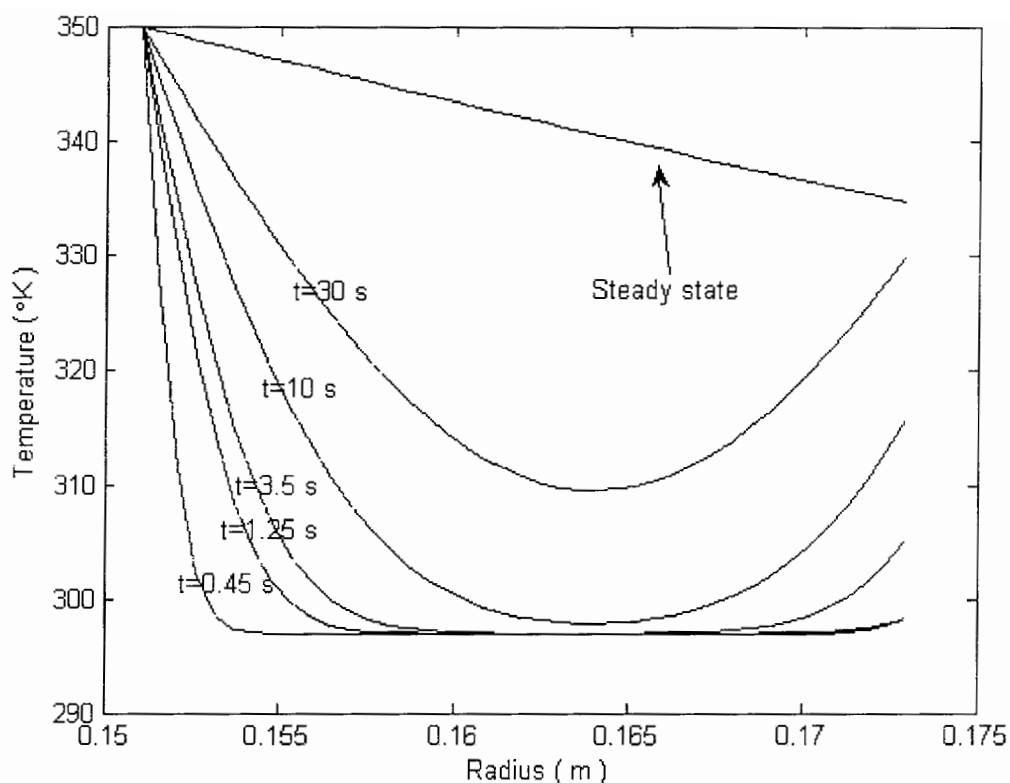
همانطور که قبلا شرح داده شد در کامپوزیت مورد بررسی ، ماتریس هدایتی وجود دارد که مولفه های آن شامل دو ضریب هدایت طولی و عرضی است و با دوران آن به سمت محورهای مختصات مورد نیاز که

در اینجا محورهای مخزن می باشد ، ماتریس هدایت جدیدی ایجاد شده و در محاسبات جایگذاری و با حل آن به نتایج فوق رسیدیم . یکی از تفاوت هایی که ر اجسام غیر ایزوتروپ با اجسام ایزوتروپ در این گونه مسائل دارند همان مولفه های ماتریس هدایت است بطوری که در اجسام ایزوتروپ کلیه مولفه های ماتریس هدایت اصلی با هم برابر هستند . اگر بخواهیم این وضعیت را بررسی کنیم می توان به نمودار ۸ - ۴۰ مراجعه نمود . در این نمودار توزیع دما در زمانهای قبل از رسیدن به پایداری را در حالتی فرضی که ضریب هدایت طولی برابر ضریب هدایت عرضی است به نمایش گذاشته شده است . همانطور که ملاحظه می کنید فرم نمودار مشابه حالت قبل است و در واقع ضریب هدایت طولی تاثیری در شکل پروفیل توزیع دما ندارد .



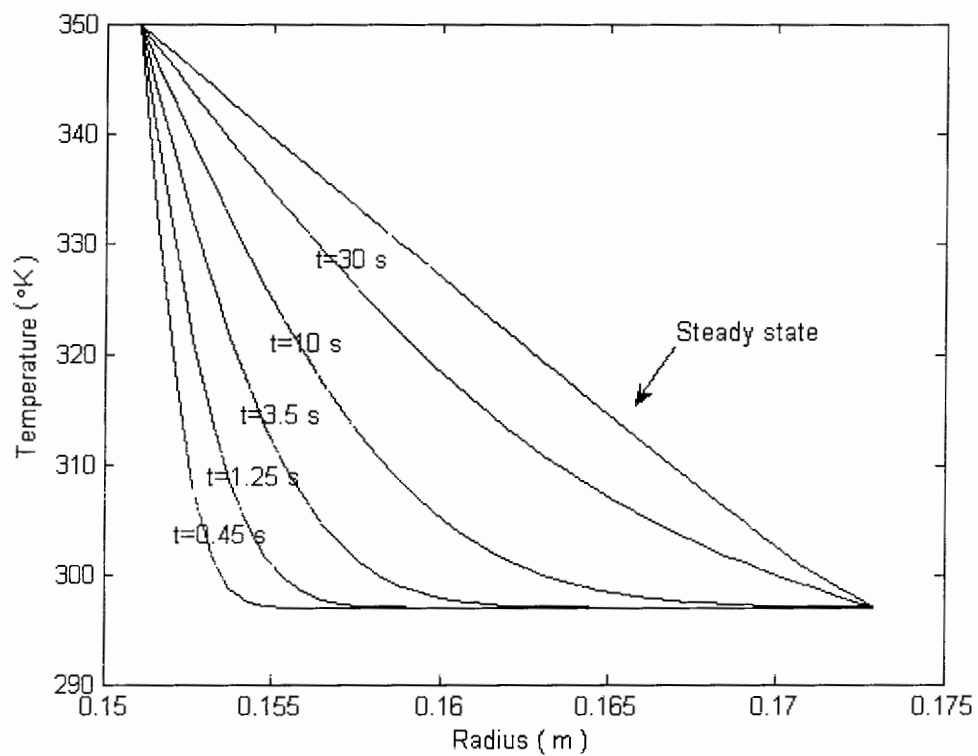
شکل ۸ - ۴۰ توزیع دما در حالت برابری ضریب هدایت طولی با عرضی

اگر شرایط فوق را در نقطه ای که بیشترین تاثیر شرط مرزی تشعشع دارد بررسی کنیم به نمودار ۸ - ۴۱ می رسیم .

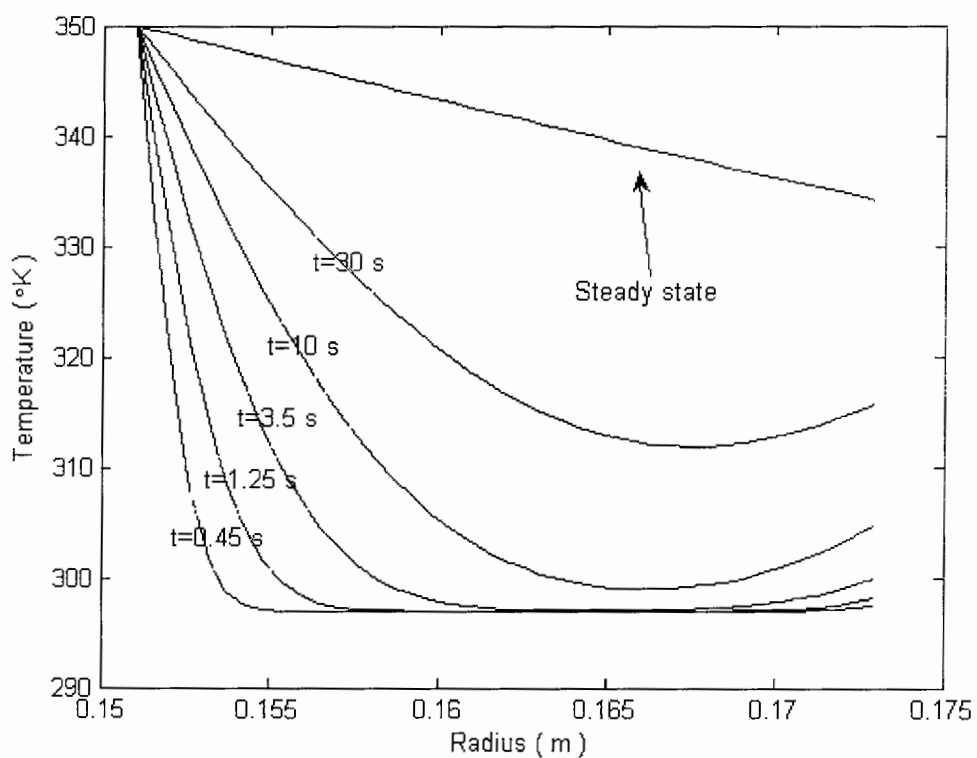


شکل ۸ - ۴۱ توزیع دما در نقطه با بیشترین تشعشع برای حالت برابری ضریب هدایت طولی با عرضی

اکنون وضعیتی را در نظر می گیریم که مقدار ضریب هدایت طولی از مقدار ضریب هدایت عرضی بیشتر باشد برای این کار جای مقادیر این دو ضریب را با هم جابجا کرده و محاسبات را انجام می دهیم . می توان نتایج را در نمودار ۸ - ۴۲ در زمانهای مختلف قبل از رسیدن به پایداری و پایداری ملاحظه نمود . مشاهده می کنید که در این حالت فرم نمودار تغییر ننموده و مشابه حالت قبل است . در نمودار ۸ - ۴۳ می توان با همین ضرایب هدایتی در نقطه ای که بیشترین تاثیر از شرط مرزی با تشعشع را داریم پروفیل های دما را بررسی نمود .

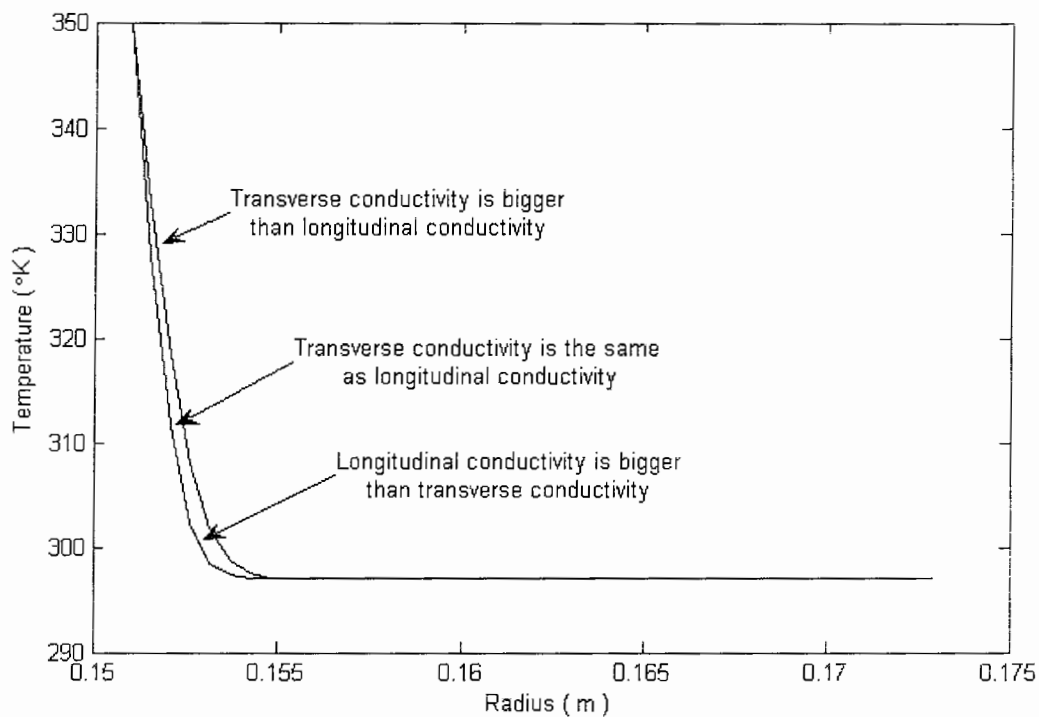


شکل ۸ - ۴۲ توزیع دما در حالت جابجایی مقدار ضریب هدایت طولی با عرضی

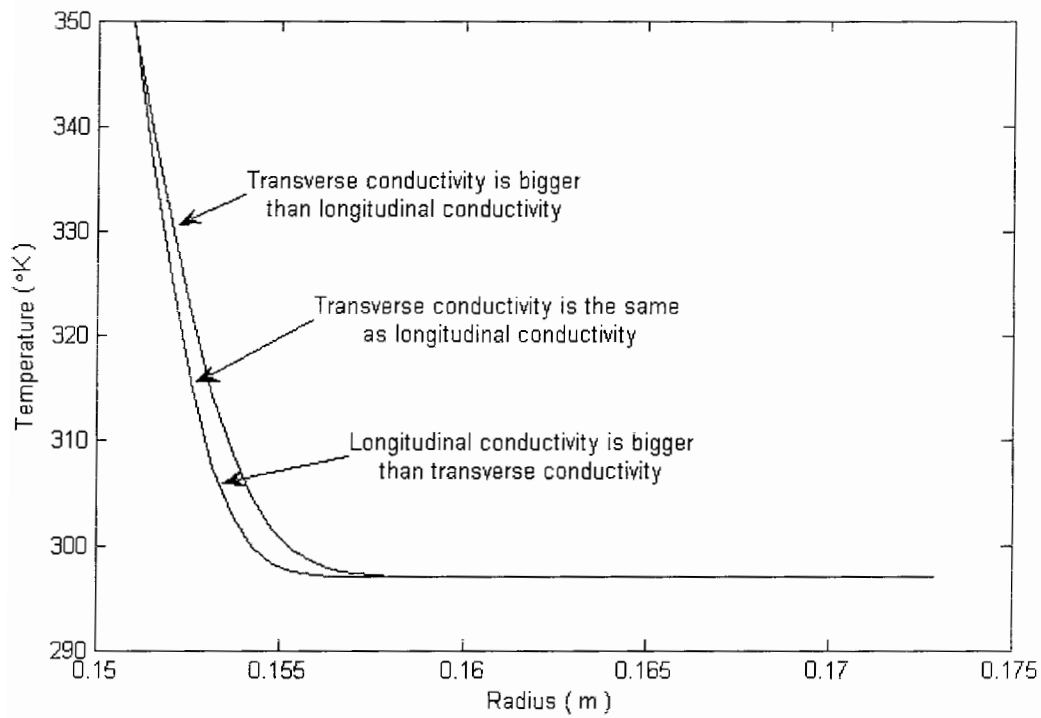


شکل ۸ - ۴۳ توزیع دما در نقطه با بیشترین تشعشع برای حالت جابجایی مقدار ضریب هدایت طولی با عرضی

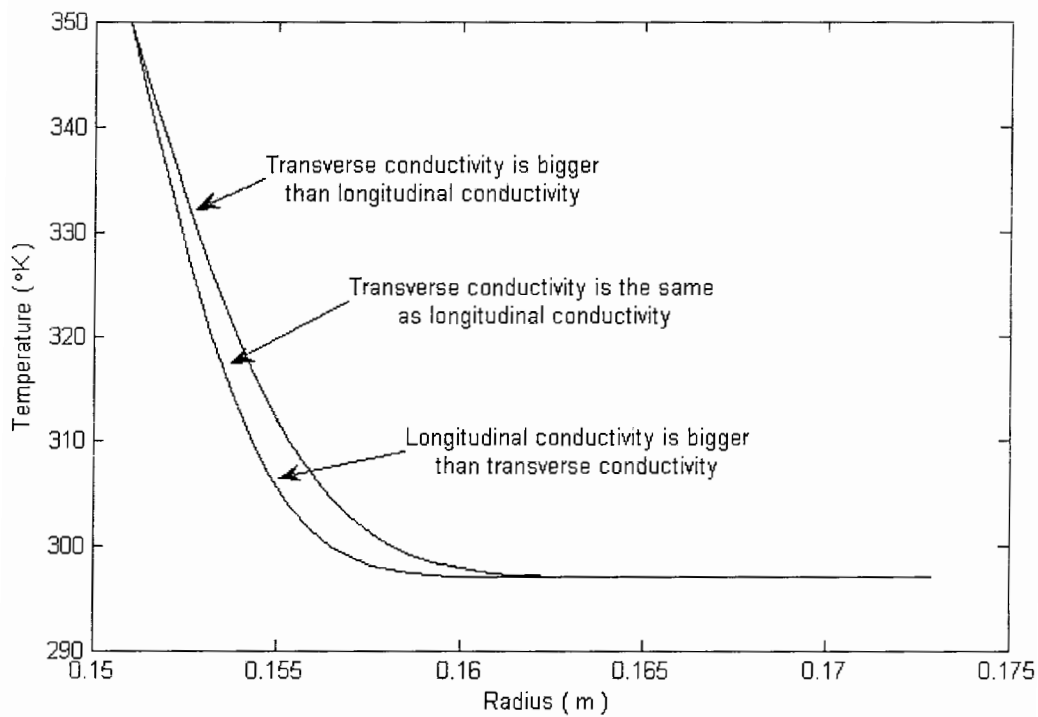
در نمودارهای فوق ملاحظه کردید که تغییر مقدار ضریب هدایت طولی و عرضی تاثیری در فرم و حالت پروفیل توزیع دما ندارد. اگر بخواهیم مقایسه ای بین این دو حالت که قبلا شرح داده شد با وضعیتی که در اصل برای مخزن اتفاق می افتد در زمانهای مختلف داشته باشیم می توان به نمودارهای ۸ - ۴۴، ۸ - ۴۵، ۸ - ۴۶، ۸ - ۴۷ و ۸ - ۴۸ که به ترتیب مربوط به زمانهای ۰/۴۵، ۱/۲۵، ۳/۵، ۱۰ و ۳۰ ثانیه و نمودار ۸ - ۴۹ برای وضعیت پایدار مراجعه نمود.



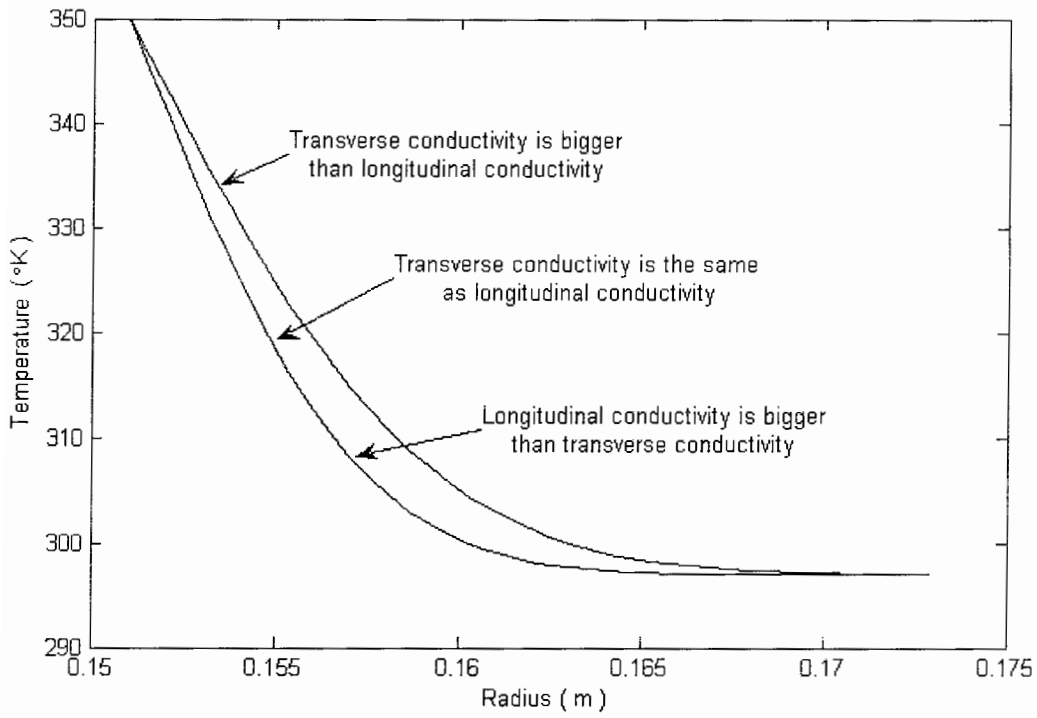
شکل ۸ - ۴۴ مقایسه توزیع دما در سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۰/۴۵ ثانیه



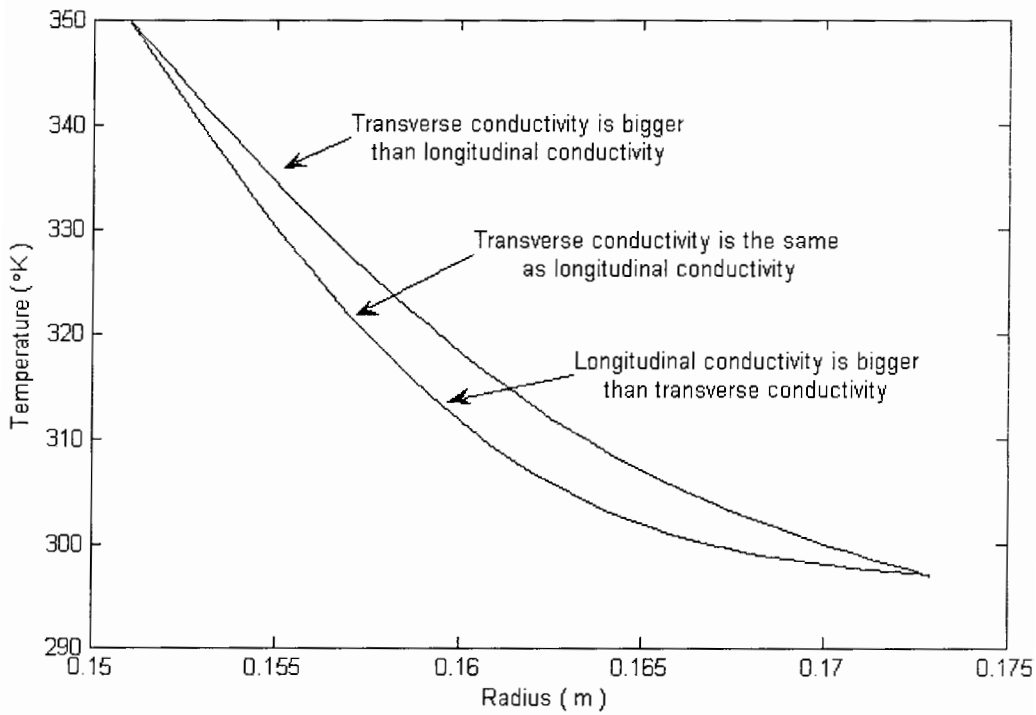
شکل ۸ - ۴۵ مقایسه توزیع دما در سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۱/۲۵ ثانیه



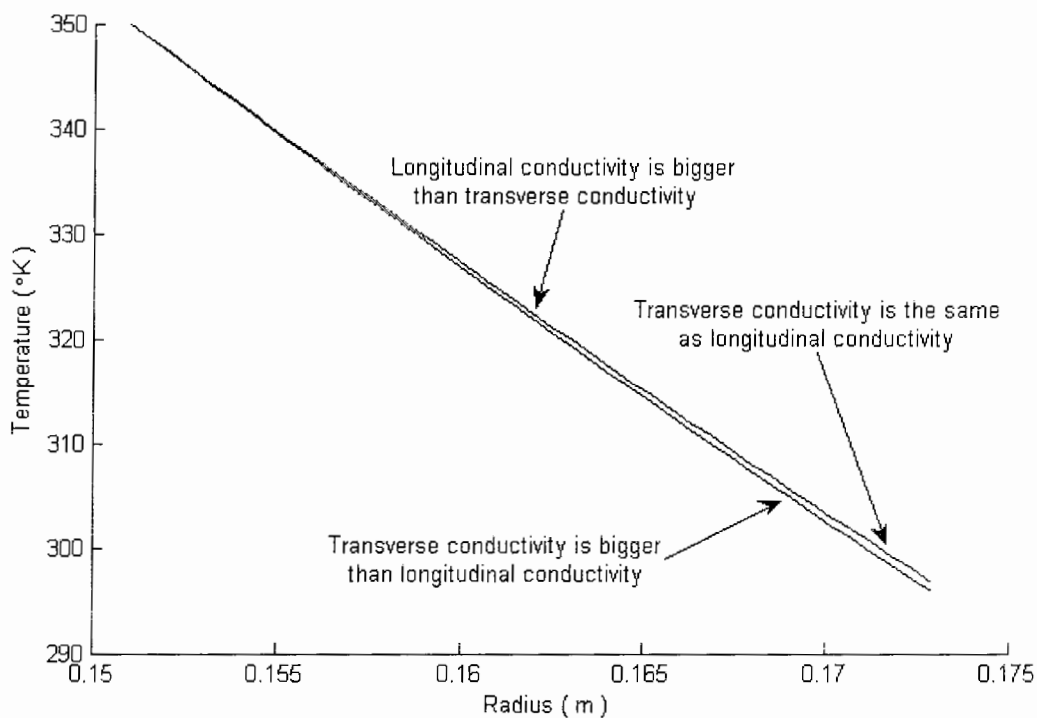
شکل ۸ - ۴۶ مقایسه توزیع دما در سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۳/۵ ثانیه



شکل ۸ - ۴۷ مقایسه توزیع دما در سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۱۰ ثانیه

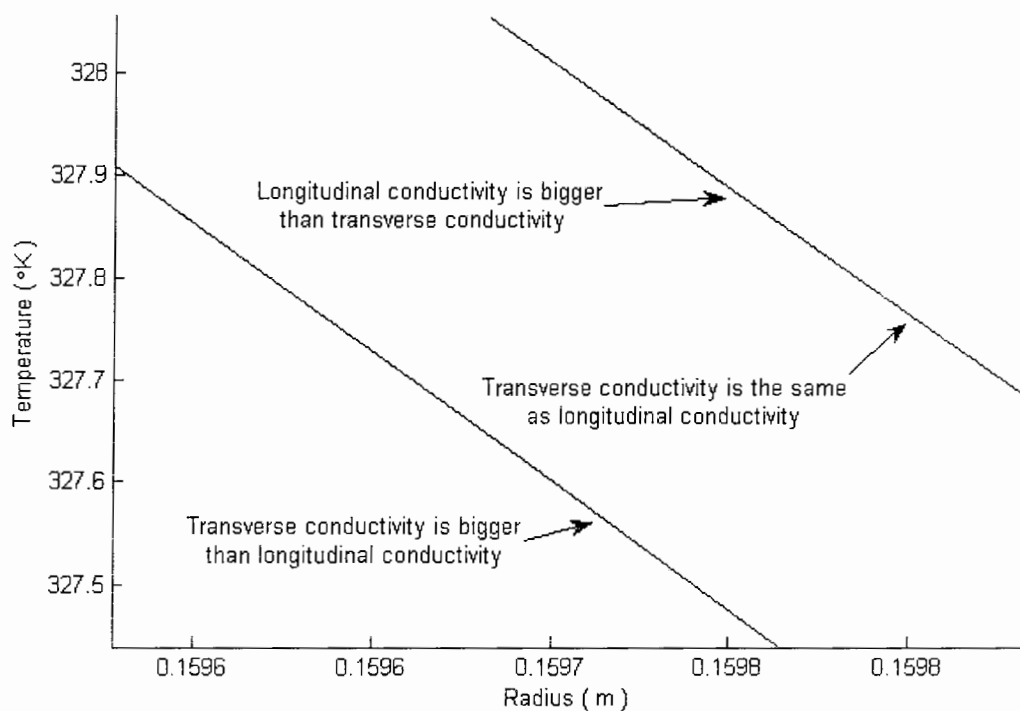


شکل ۸ - ۴۸ مقایسه توزیع دما در سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۳۰ ثانیه



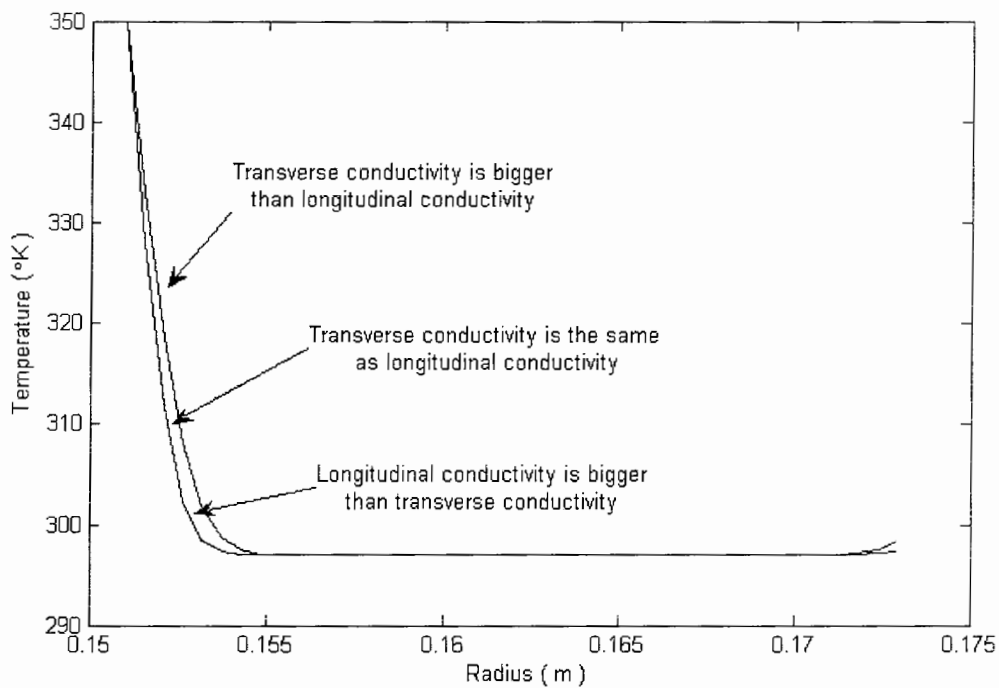
شکل ۸ - ۴۹ مقایسه توزیع دما در سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در حالت پایدار

ملاحظه می شود در صورتی که مقدار ضریب انبساط طولی را برابر با مقدار ضریب انبساط عرضی قرار دهیم اختلاف قابل ملاحظه ای در پاسخ ها مشاهده نمی کنیم . این نتیجه از آن جهت قابل تامل است که مقدار ضریب هدایت طولی در این حد تاثیر چندانی بر توزیع دما در داخل لایه های مخزن ندارد . البته با عوض کردن مقدار ضریب انبساط عرضی با طولی ما شاهد اختلافی با حالات قبل در توزیع دما خواهیم بود . می توان با درشت کردن قسمتی از نمودار ۸ - ۴۹ تحلیلی دقیق تر از این موضوع داشت . این وضعیت در نمودار ۸ - ۵۰ قابل ملاحظه است .



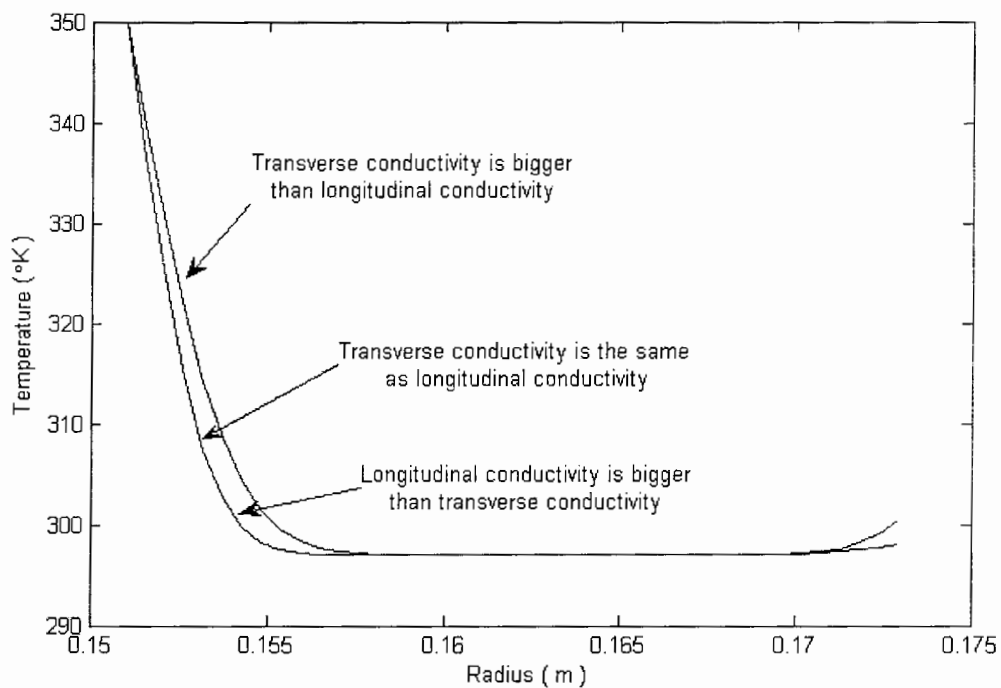
شکل ۸ - ۵۰ مقایسه توزیع دما در سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در حالت پایدار با درشت نمایی

می توان تحلیلی از آنچه که در قسمت بالا شرح داده شد در مورد نقطه از مخزن که بیشترین مقدار تابش را در حالتی که شرایط مرزی وجود دارد در نمودارهای ۸ - ۵۱ الی ۸ - ۵۵ برای زمانهای مختلف قبل از حالت پایداری ، و نمودار ۸ - ۵۶ برای وضعیت پایدار ، و درشت کردن بخشی از نمودار حالت پایدار در شکل ۸ - ۵۷ به بررسی بیشتر این موضوع پرداخت .



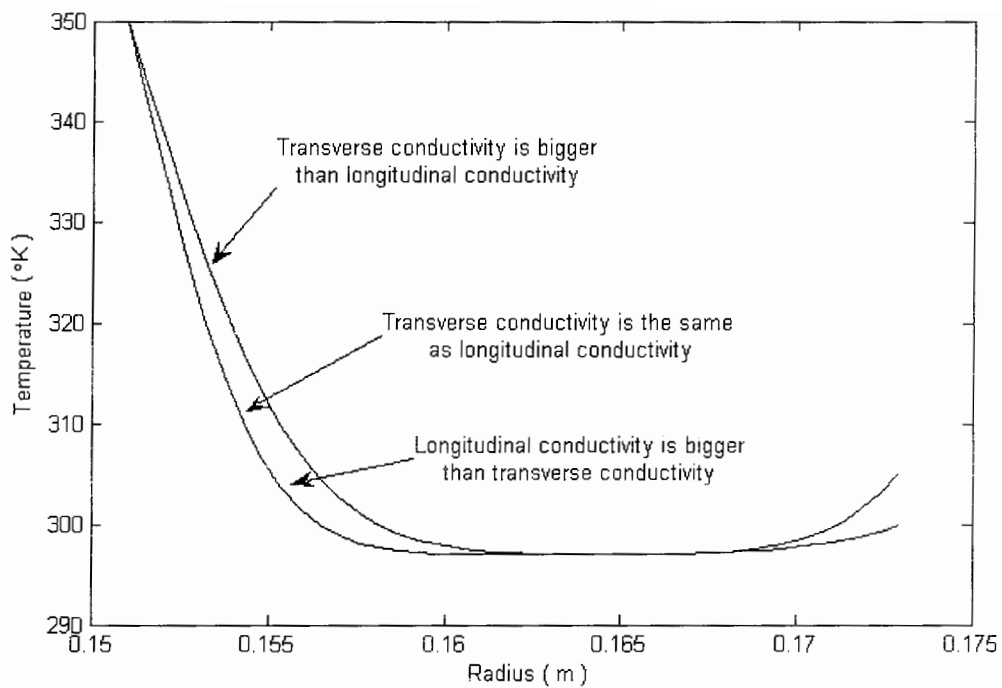
شکل ۸ - ۵۱ مقایسه توزیع دما در نقطه با بیشترین مقدار تشعشع برای سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۰/۴۵

ثانیه



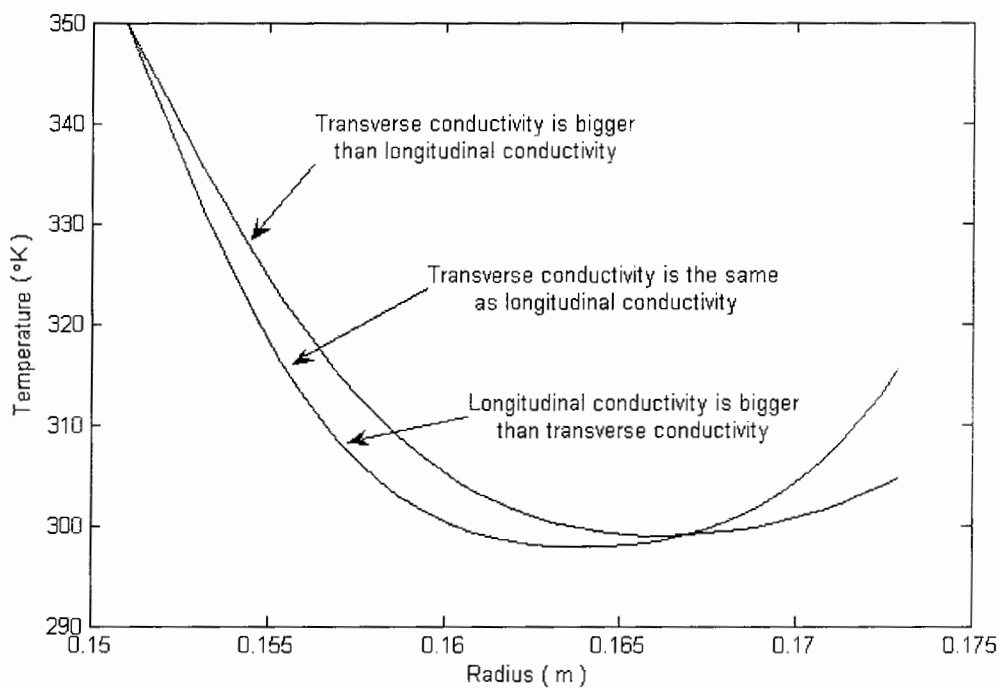
شکل ۸ - ۵۲ مقایسه توزیع دما در نقطه با بیشترین مقدار تشعشع برای سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۱/۲۵

ثانیه



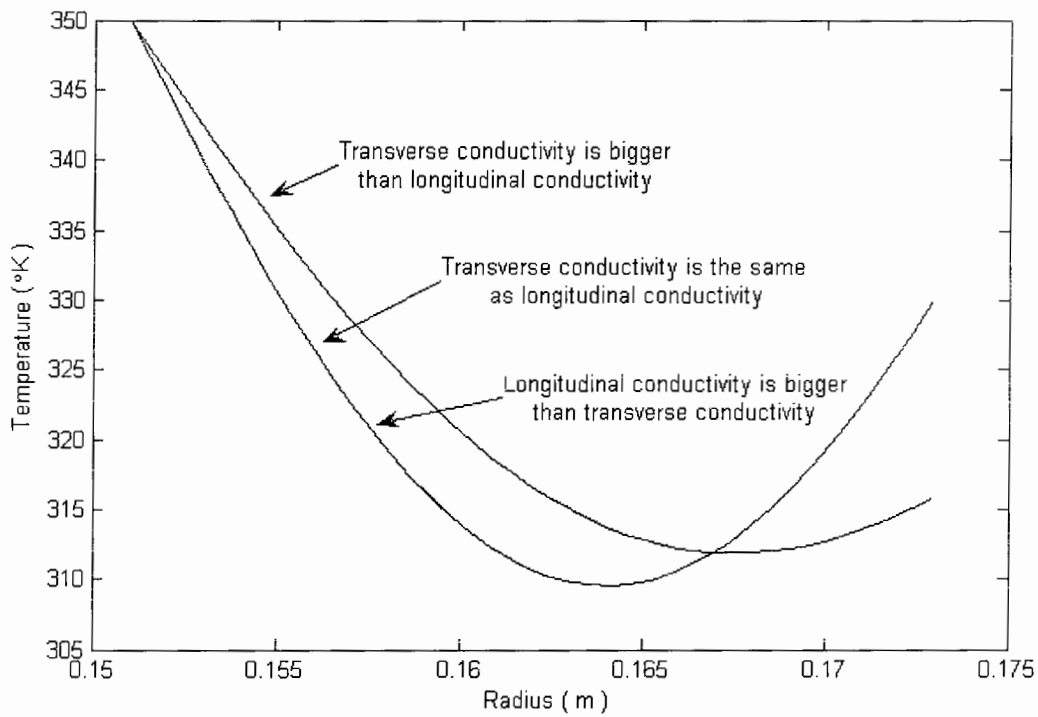
شکل ۸ - ۵۳ مقایسه توزیع دما در نقطه با بیشترین مقدار تشعشع برای سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۳/۵

ثانیه



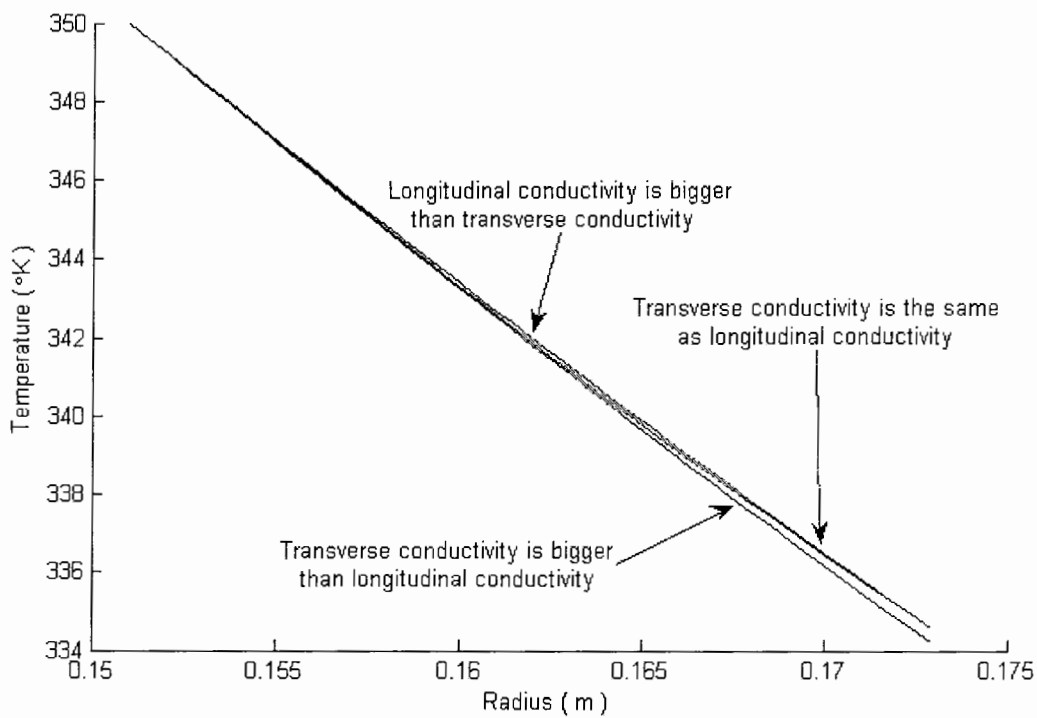
شکل ۸ - ۵۴ مقایسه توزیع دما در نقطه با بیشترین مقدار تشعشع برای سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۱۰

ثانیه

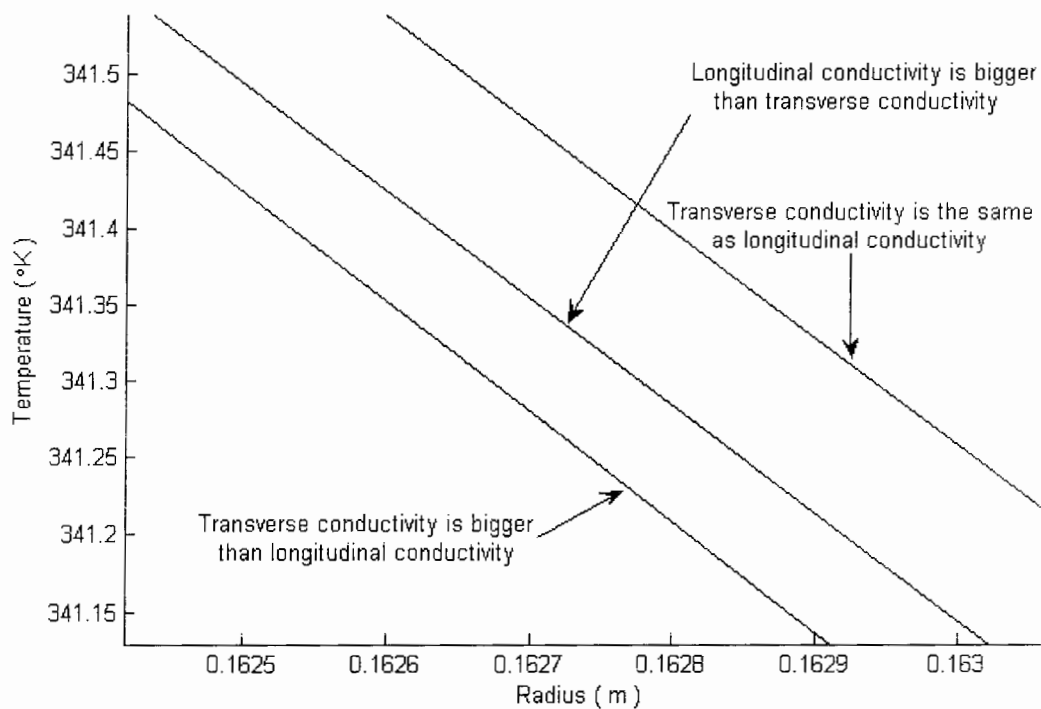


شکل ۸ - ۵۵ مقایسه توزیع دما در نقطه با بیشترین مقدار تشعشع برای سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در زمان ۳۰

ثانیه



شکل ۸ - ۵۶ مقایسه توزیع دما در نقطه با بیشترین مقدار تشعشع برای سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در حالت پایدار



شکل ۸ - ۵۷ مقایسه توزیع دما در نقطه با بیشترین مقدار تشعشع برای سه حالت مختلف ضرایب هدایتی در حالت پایدار با درشت نمایی

همانطور که در نمودارهای فوق ملاحظه نموده اید در نقطه ای که شرایط بیشترین تاثیر تشعشع در آن بررسی می شود ، برخلاف وضعیت بدون تشعشع که پروفیل توزیع دما در حالت برابری مقدار ضریب هدایت طولی با عرضی منطبق با وضعیت عادی بود ، در این حالت اختلافی در حدود ۰/۱ درجه در این شرایط دارند . از طرفی اختلاف بین حالت بزرگتر بودن ضریب هدایت طولی از ضریب هدایت عرضی با وضعیت عادی کمی بیشتر شده و این یکی از تاثیرات شرایط مرزی تشعشع بر روی توزیع دما می باشد .

- [1] Akkus N., Kawahara M., " Bending behaviors of thin composite pipe with reinforcing nodes " *Matar Sci Refs Int* , Vol . 6 , pp . 131 - 135 , 2000
- [2] Alderson K.L., " Failure mechanic during the transverse loading of filament-wound pipes under static low velocity impact condition " , *Composite* , Vol. 23 , pp. 167-173, 1992.
- [3] Nishiwaki T., Yokoyama A., Maekawa Z., Hamada H., Mori S., " A quasi-three-dimensional interal composite analysis method for a composite cylinder " , *Com Structm* Vol. 32 , pp. 293-298 , 1995
- [4] Onada Y., " Optimal laminate configurations of cylindrical shells for axial buckling " , *AIAA J*, Vol. 23 , pp. 1093-1098 , 1985
- [5] Smerdov AA., " A Computational in optimum formulation of optimization problems on laminated cylindrical shells of buckling: I. Shell under axial compression " , *Composite Sci Technology*, Vol. 60 , pp. 2057-2066 , 2000
- [6] Soden PD., Kitching R., Tse PC ,. " Experimental failure stress for 55 degree filament wound glass fiber reinforced plastic tubes under loads " *Composite* , Vol. 20 , pp. 125-135, 1989
- [7] Soden PD., Leadbetter D., Griggs PR., Eckold GC., " The strength of a filament wound composite under biaxial loading " , *Composite* , Vol. 9 , pp. 247-250 , 1978
- [8] Mistry J., Gibson AG., Wu Y-S ,. " Failure of composite cylinders under combined external pressure and axial loading " , *Comp Struct* , Vol.22 , pp. 193-200 . 1992
- [9] Hull D., Legg MJ., Spencer B., " Failure of glass/polyester filament wound pipe " *Composite* , Vol. 9 , pp. 17-24 , 1978
- [10] Rosenow MWK. " Wind angle effects in glass fiber-reinforced polyester filament wound pipes " . *Composite* , Vol. 15 , pp. 144-152 . 1984
- [11] Spencer B., Hull D., " Effect of winding angle on the failure of filament wound pipe " . *Composite* , Vol. 9 , pp. 263-271 . 1978
- [12] Uemura M., Fukunaga H., " Probabilistic burst strength of filament wound cylinders under internal pressure " . *Comp Mater* , Vol. 15 , pp. 462-480 . 1981
- [13] Barton MV., " The circular cylinder with a band of uniform pressure of a finite length of the surface " . *J Appl Mech* , Vol. 8 , pp. A97-104 , 191
- [14] Wind PM., Vickers GW ., " Analysis of filament wound cylindrical shells under combined centrifugal pressure and axial loading " *Composite Part A* 1997 , Vol. 28 , pp. 47-55
- [15] Roy Ajit K., " Response of thick laminated composite rings of thermal stress " , *Comp Struct* 1991 , Vol. 18, 125-139

- [16] Ben G., " Structural analyses of thick walled cross-ply laminated FRP cylindrical shells " , Trans Jpn Soc Mech Eng Part A 1991 , Vol. 57 , pp. 1414-1417
- [17] Kitao K., Akiyama H., " Failure of thick wall filament wound plastic pipe under internal pressure " , Trans Jpn Soc Mech Eng Part A 1994 , Vol. 43 , pp. 1134-1140
- [18] Fu L., Waas AM., " Buckling of polar and rectilinearly orthotropic annuli under uniform internal or external pressure loading " Composite Struct , Vol. 22 , pp. 47-57 , 1992
- [19] Cho H., Kardomateas AG., Valle CS., " Elastodynamic solution for the thermal shock stresses in an orthotropic thick cylindrical shell " , ASME J Appl Mech 1998 , Vol. 65 , pp. 184-193
- [20] You L., Long S., Rohr L., " Elastic plastic stress filed in a coated continuous fibrous composite subjected to thermomechanical loading " ASME J Appl Mech 1999 , Vol. 66 , pp. 750-757
- [21] Callister W.D., Jr., " Material science and engineering an introduction " , John Wiley and Sons , Inc , Third Edition 1994
- [22] Lekhnitskii SG., " Theory of elasticity of an anisotropic body " , Moscow , MIR Publishers , 1981
- [23] Xia M., Kemmochi K., Takayanagi H., " Analysis of filament wound fiber reinforced sandwich pipe under combined internal pressure and thermomechanical loading " , Vol. 51 , pp. 273-283 , 2001
- [24] Xia M., Kemmochi K., Takayanagi H., " Analysis of filament wound composite pipes under internal pressure " , Composite Structure , Vol. 53 , pp. 483-491 , 2001
- [25] Herakovich C.T., " Mechanics of fibrous composite " , John Wiley and Sons . Inc. 1998
- [26] Carpinteri A., Surace G., Sih G.C., " Advanced technology for design and fabrication of composite material and structures " , Kluwer academic publishers 1995
- [27] Gibson R.F ., " Principles of composite material mechanics " , McGraw-Hill , Inc. 1994
- [28] لشکری م . ، " آنالیز و طراحی الاستیک کپسولهای گاز طبیعی با فشار بالا CNG از جنس کامپوزیت " ، دانشگاه تربیت مدرس ۱۳۸۲
- [29] جاهد مطلق ح ر . ، نوبان م ر . ، اشراقی م ا . ، " اجزا محدود ANSYS " ، انتشارات دانشگاه تهران ۱۳۸۲ ،
- [30] شعبانعلی م ر . ، " تحلیل المان محدود به کمک ANSYS " ، انتشارات نص ، ۱۳۸۲

- [31] Incropera F.P ., Dewitt D.P ., " Introduction to heat transfer "
- [32] Ozisik M.N ., " Heat conduction " , John Wiley and Sons , Inc. 1993
- [33] Carslaw H.S ., Jaeger J.C ., " Conduction of heat in solid " , Oxford University press , 1959
- [34] Arpaci V.S ., " Conduction heat transfer " , Addison-Wesley publishing company , 1966
- [35] Onsagar.L , "Phys.Rer.37",405-426,1931,38,2265-2279
- [36] Prigogine.L , " Thermodynamic of Irreversible Processes " , Wiley-Inter science , NewYork,1981
- [37] Tsai.S.W and Hahn.H.L , " Introduction to Composite Materials " , Tecnominc 1980
- [38] W. J. Minkowycz " Handbook of Numerical Heat Transfer " , 1988 , Wiley-IEEE
- [39] Tien-Mo Shih , " Numerical Heat Transfer " , 1984 Hemisphere
- [40] Suhas Vasant Patankar . " Numerical Heat Transfer and Fluid Flow " , 1980 , Hemisphere
- [41] Chen,F. Gill,J. Harmon,D. Sullivan,T. Strong,A. Li,B. Rathore ,H & Edelstein ,D.(2006). Determination of the thermal conductivity of composite low-k dielectrics for advanced interconnect structures. Microelectronics Reliability 46,232–243
- [42] Archer, R., & Horne, R. N. (1998). Flow simulation in heterogeneous reservoirs using dual reciprocity boundary element method and the Green element method. ECMOR VI, 13.
- [43] Azcvedo, J. P. S. & Wrobel, L. C. (1988). Non-linear heat conduction in composite bodies: a boundary element formulation. International Journal of Numeric Methods and Engineering 26, 19_ 38.
- [44] Okey.Oseloka.Onyejekwe . (2002). Heat conduction in composite media: a boundary integral approach. Computers and Chemical Engineering 26 ,1621_ 1632
- [45] Miller,J.R& Weaver,P.M.(2003). Temperature profiles in composite plates subject to time-dependent complex boundary conditions. Composite Structures 59 , 267–278
- [46] Tittle WC, Robinson VL. Analytical solution of conduction problems in composite media. ASME paper 65-WA-HT, 1965.
- [47] DeMonte,F. Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach. Int J Heat Mass Trans 2000;43:3607–19.
- [48] Bulavin, P. E. & Kashcheev, V. M. (1965). Solution of the nonhomogeneous heat conduction equation for multilayered bodies. International Chemical Engineering 5, 112_ 115.

- [49] Han, L. S. & Cosner, A. A. (1981). Effective thermal conductivities of fibrous composites. ASME Journal of Heat Transactions 103, 387_ 392.
- [50] Mulholland, G. P. & Cobble, M. H. (1972). Diffusion through composite media. Journl of Heat and Mass Transactions 15,147_ 160.
- [51] Onyejekwe, O. O. (1996). Green element description of mass transfer in reacting systems. Numerical Heat Transfer Part B 30, 483_ 498.
- [52] Heisler,M.P.(1947)Temperature charts for induction and constant Heating ,Trans .ASME VOL69,227-236 temperature
- [53] Holman JP. Heat transfer. 7th ed. London: McGraw-Hill; 1992.
Eckert ERG, Drake RM. Analysis of heat and mass transfer. London : Hemisphere Publishing Corporation; 1987.
- [54] Ozisik MN. Boundary value problems of heat conduction . Scranton, PA: International Textbook; 1968.

پیوست

مقدمه ای بر اجزا محدود^۱ و نرم افزار ANSYS :

بطور کلی برای حل مسائل فیزیکی سه روش موجود است :

۱. روش تحلیلی دقیق^۲

۲. روش عددی^۳

۳. روش تجربی^۴

در حل دقیق همانطور که از نام آن مشخص است ، به محاسبه دقیق پارامتری معادلات دیفرانسیل حاکم بر میدان های فیزیکی همچون میدان حرارتی ، میدان تنش ، میدان الکتریکی و ... می پردازند . در حالیکه در روش دوم به حل تقریبی و عددی این مسائل پرداخته می شود . روش تجربی یا آزمایشگاهی نیز با توجه به اینکه مبتنی و برگرفته از خود واقعیت می باشد ، روشی مناسب محسوب می گردد .

در این میان روش حل عددی که اجزا محدود زیر مجموعه آن می باشد ، جزء یکی از پرکاربردترین روش های مورد استفاده در حل مسائل مهندسی است . از جمله مزیت های حل عددی خصوصا اجزا محدود نسبت به روش های دیگر به شرح زیر است :

¹ Finite Element Method

² Exact Solution

³ Numerical Solution

⁴ Experimental Solution

۱. ضعف عمده روش آزمایشگاهی ، پرهزینه و زمانگیر بودن آن می باشد . در حالیکه در روش عددی این چنین نیست .

۲. روش حل دقیق از تحلیل مدلها با هندسه پیچیده عاجز است و تنها روش های عددی بخصوص اجزا محدود در این زمینه کارگشا است . به عنوان مثال محاسبه تنش ماکزیمم در میل لنگ اتومبیل .

۳. در حل مسائلی که شرایط مرزی کمی پیچیده می شود نیز حل دقیق ناتوان است و تنها روش های مرسوم عددی در حل این نوع مسائل بکار می رود . همانند تحلیل استحکامی پره توربین بادی در اثر بارهای ایرودینامیکی وارد بر آن .

در این قسمت به آشنایی با روش اجزا محدود که نرم افزار ANSYS بر اساس آن می باشد خواهیم پرداخت .

روش اجزا محدود :

اصطلاح اجزا محدود برای اولین بار توسط کلاف^۱ در سال ۱۹۶۰ جهت حل مسائل الاستیسیته دو بعدی بکارگرفته شد . هر چند اولین شخصی که عملا از این روش در حل مسائل پیچیده استفاده نمود کورانت^۲ در سال ۱۹۴۳ است .

در روش اجزا محدود غالبا مسائل فیزیکی به کمک معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم و یا به کمک کمینه نمودن انرژی پتانسیل حل می شوند . روش کار بدین صورت است که کل مدل هندسی به اجزا ریزتری به نام المان تقسیم می شود . هر المان خود دارای گره هایی است که مقادیر ورودی (بارگذاری و شرایط مرزی) و خروجی (نتایج) به آنها اختصاص داده می شوند .

¹ Clough

² Courant

هر المان دارای یک رفتاری است که به آن تابع شکل می گویند و مقدار درجه آزادی (مثلا جابجایی) در هر ناحیه از المان را مشخص می کند شرط اصلی انتخاب تابع شکل مناسب قابلیت ارضا شدن شرایط مرزی توسط آن تابع است ، که می تواند این تابع درجه یک ، درجه دو و یا هر تابع دیگری باشد . قابل ذکر است نرم افزار اجزا محدود غالبا از توابع چند جمله ای یعنی $(ax^n + bx^{n-1} + \dots)$ برای تعریف تابع شکل استفاده می کنند .

آنالیز مواد مرکب :

نرم افزار ANSYS اجازه مدلسازی مواد اولیه مواد کامپوزینی را با بکارگیری المان های لایه ای¹ می دهد . المان های لایه ای می توانند در کلیه آنالیزهای سازه ای مورد استفاده قرار گیرند . اما در آنالیز های حرارتی ، مغناطیسی یا میدان الکتریکی این المان ها در دسترس نمی باشند .

مدلسازی مواد مرکب :

مدلسازی مواد مرکب از مدلسازی مواد ایزوتروپیک قدری مشکل تر است بنابراین باید در مدلسازی مواد مرکب نهایت دقت در معرفی خواص و جهات لایه ها بکار رود . زیرا هر لایه می تواند جهت و خواص اورتوتروپیک خاص خود را دارا باشد . برای مدلسازی مواد مرکب باید مراحل زیر طی شود :

- انتخاب المان لایه ای مناسب
- معرفی ساختار لایه ای ماده
- اختصاص دادن معیارهای شکست (در صورت لزوم)

¹ Layered Elements

پنج المان لایه ای SHELL 99 , SHELL 91 , SHELL 181 , SOLID 46 , SOLID191 برای مدلسازی کامپوزیت ها پیش بینی شده است . هر پنج المان قابلیت اختصاص دادن معیارهای شکست را دارا می باشد .

المان سازه ای - لایه ای خطی SHELL 99 :

یک المان پوسته ای سه بعدی است که دارای هشت گره بوده و دارای شش درجه آزادی برای هر گره می باشد و برای مدلسازی صفحات و پوسته های نازک و تا حدی ضخیم برای نسبت کناره به ضخامت¹ در حدود ۱۰ و بیشتر ، طراحی شده است . برای سازه هایی با نسبت کمتر ، استفاده از المانهای SOLID توصیه می شود . این المان پوسته ای اجازه بکارگیری تا دوپست و پنجاه لایه با ضخامت یکسان و مدلسازی یکصد و پنجاه لایه را که تغییرات خطی در ضخامت لایه موجود باشد را می دهد . اگر بیش از دوپست و پنجاه لایه مورد نیاز باشد ، کاربر می تواند ماتریس جرم مربوط مدل را وارد کند . همچنین این المان گزینه ای دارد که برای افست کردن گره ها به سطوح بالا یا پایین بکار می رود .

المان غیر خطی سازه ای - لایه ای SHELL 91 :

مشابه المان SHELL 99 است با این تفاوت که قابلیت تعریف بیش از صد لایه را ندارد اما می توان بر روی این المان رفتار غیر خطی نظیر پلاستیسیته ، رفتار غیر خطی هندسی و ... و همچنین گزینه مدلسازی مدل های ساندویچی را اعمال نمود .

المان غیر خطی سازه ای - لایه ای SHELL 181 :

¹ Side to Thickness ratio

المان پوسته ای سه بعدی چهار گره ای است که دارای شش درجه آزادی در هر گره می باشد . این المان قابلیت اعمال تمامی خواص غیر خطی به علاوه کرنش های خطی کراندار را دارا می باشد . مدلسازی تا دویست پنجاه و پنج لایه در این المان مجاز است . اطلاعات مربوط به لایه ها توسط سطح مقطع پوسته ای به جای مقادیر ثابت وارد می شود .

المان سازه ای - لایه ای SOLID 46 :

مشابه المان SOLID 45 است که خاصیت لایه ای را اضافه بر آن دارد . دارای سه درجه آزادی در هر گره می باشد . برای مدلسازی پوسته های ضخیم لایه ای یا مواد لایه ای سه بعدی (solid) بکار می رود و تا دویست و پنجاه لایه با ضخامت یکسان در هر المان و یکصد و بیست و پنج لایه با ضخامت متغیر بطور خطی در المان را می توان مدلسازی کند . از مزایای این المان آن است که کاربر می تواند چندین المان را برای مدلسازی بیش از دویست و پنجاه لایه در کنار هم قرار دهد . گزینه ماتریس ساختاری ورودی کاربر نیز در این المان فعال می باشد . این المان قابلیت تنظیم خواص مواد در جهت عرضی را برای ایجاد تنش های ثابت در جهت عرضی نیز دارا می باشد . در مقایسه با المان هشت گره ای پوسته ای ، این المان از درجه پایین تر بوده و المان بندی ریزتر و دقیقتر برای موارد پوسته ای جهت ایجاد دقت یکسان با المانهای پوسته ای مورد نیاز می باشد .

المان لایه ای - سازه ای SOLID 191 :

نوع المان سه بعدی SOLID 95 با سه درجه آزادی در هر گره می باشد که برای مدلسازی پوسته های ضخیم و مدلسازی سه بعدی لایه ای (solid) جهت مدلسازی حداکثر صد لایه در هر المان طراحی شده است . همانند المان SOLID 46 قابلیت کنار هم قرار دادن چند المان برای مدلسازی ناپیوستگی در ضخامت را دارا است و گزینه ای دارد که می تواند خواص عرضی را طوری تنظیم کند که تنش های

عرضی ثابت باشند . بر خلاف نام المان ، این المان قابلیت اعمال خواص مواد غیر خطی و یا تغییر شکل های یزرگ را دارا نیست .

به علاوه المانهای لایه ای ذکر شده در بالا ، المان SOLID 95 با گزینه های کلیدی تنظیم شده به KEYOPT(1)=1 همانند یک المان SOLID 191 تک لایه عمل خواهد کرد که قابلیت تنظیم و اعمال خواص غیر خطی مادی و هندسی و معیار شکست را نیز دارا می باشد . همچنین المان چهار گره ای SHELL 63 برای مطالعه پوسته های ساندویچی نیز بکار می رود .

روش های تعریف ساختارهای لایه ای :

به دو روش می توان خصوصیات لایه ای یک ماده مرکب را تعریف کرد .

۱. روش تعریف خصوصیات هر لایه جداگانه .

۲. تعریف ماتریس ساختاری که نیروها و ممانها را به کرنش ها و مقادیر انحنا مربوط می کند و تنها

برای دو المان SHELL 99 و SOLID 46 در دسترس می باشد .

در هر دو روش از مقادیر ثابت المان برای ورود اطلاعات لایه ها استفاده خواهد شد .

روش تعریف خصوصیات هر لایه بطور جدا از لایه های دیگر :

در این روش ساختار لایه بطور مجزا برای هر لایه از پایین به بالا تعیین می گردد . لایه پایین به عنوان لایه اول تعیین شده و لایه بعدی از پایین به بالا در جهت مثبت محور Z بر مبنای سیستم مختصات المانی چیده می شود . در صورت تقارن لایه ها ، می توان تنها نیمی از آنها را تعیین نمود . گاهی اوقات ، یک لایه فیزیکی تنها در ناحیه خاصی از مدل وجود دارد برای مدلسازی پیوسته لایه ها ، لایه مزبور را بایستی در نقاطی که موجود نیست ، با ضخامت صفر تعیین نمود .

برای هر لایه خواص زیر در بخش جدول مقادیر ثابت المان بایستی تعیین شود :

- شماره ماده مرجع تعیین شود .
- زاویه قرار گیری لایه θ تعیین شود .
- ضخامت هر لایه نیز مقدار دهی شود .

خواص ماده هر لایه می تواند ایزوتروپیک یا ارتوتروپیک باشد . جهات خواص مواد تعیین شده به موازات جهات سیستم مختصات لایه ای می باشد این سیستم بر طبق سیستم مختصات المانی و زاویه قرار گیری لایه تعیین می شود . زاویه قرار گیری لایه ای ، موقعیت سیستم مختصات لایه ای نسبت به سیستم مختصات المانی را معین می کند و زاویه ای بر حسب درجه بین محور X های دو سیستم می باشد . بطور پیش فرض ، سیستم مختصات لایه ای به موازات سیستم مختصات المانی قرار دارد . در صورت ثابت بودن ضخامت المان تنها ضخامت گره i ام را می توان تعیین نمود . در غیر این صورت ضخامت در چهار گوشه المان بایستی وارد شود . لایه های با ضخامت صفر بیان گر عدم وجود آن لایه در قسمت مربوطه می باشد .

روش تعیین ماتریس ساختاری مدل :

این روش برای المانهای SOLID 45 , SHELL 99 با گزینه کلیدی دو موجود می باشد . این ماتریس ها بیانگر رابطه بین نیرو - ممان با کرنش - انحنای برای هر المان می باشد . این روابط در محیطی خارج از نرم افزار ANSYS محاسبه می شود . از مزایای این روش می توان به موارد زیر اشاره نمود :

- بردار بارگذاری حرارتی می توان اعمال نمود .
- ماتریس ها می توانند تعداد نامتناهی لایه ها را معرفی کنند .

ترمهای ماتریسی به عنوان مقادیر ثابت المان معرفی می شوند . اثرات جرمی را می توان با اختصاص دادن چگالی متوسط در مقادیر هر المان (AVDENS) اعمال نمود .

زبان برنامه نویسی ANSYS برای طراحی های پارامتری (APDL)¹ :

APDL یک نوع زبان برنامه نویسی در محیط ANSYS می باشد که به کمک آن می توان امکانات و عملیاتی که در نرم افزار پیش بینی نشده ، تعریف و از آن استفاده نمود . دستورات این زبان را می توان به دو مجموعه تقسیم نمود :

- دستورهایی که معادل دستورهایی موجود در منوهای نرم افزار هستند . نظیر دستورات ترسیم خطوط ، نقطه کلیدی ، مش بندی و ...
- دستورهایی که برای کنترل عملیات برنامه بکار می روند . دستورات شرطی ، حلقه و ...

آنچه در این پیوست بدان پرداخته می شود آشنایی با نحوه استفاده از این زبان است و در صورت نیاز بیشتر به مراجع دیگر و Help نرم افزار باید رجوع کرد . در ادامه توضیحاتی عمومی درمورد استفاده از این روش خواهیم پرداخت .

دستورهای APDL را می توان بوسیله تایپ نمودن آنها در پنجره ANSYS INPUT اجرا نمود . این پنجره دارای یک قسمت تاریخچه² می باشد که در صورت نیاز می توان به کمک آن دستورهای تایپ شده قبلی را مشاهده و مجددا اجرا نمود .

نرم افزار ANSYS برای اجرای دستورهای مربوط به امور مختلف ، پردازشگرهای مختلفی دارد که اجرای دستورات تنها به کمک آنها ممکن می شود . هنگامی که وارد نرم افزار می گردید ، در واقع سطح شروع³

¹ ANSYS Parametric Design Language

² History Box

³ Begin Level

هستید و می توانید به سایر پردازشگرهای ANSYS که در زیر و معادل منویی هر یک که در زیر آمده دسترسی پیدا کنید :

Prep7 : Preprocessor

Solu : Solution

Post1 : General Postproc

Post26 : Time Hist Postproc

AuX 15 : -

opt : Design Opt

از پردازشگر opt برای بهینه سازی استفاده می شود . هنگامی که وارد منوی Preprocessor می شوید ، درواقع پردازشگر Prep7 فعال می گردد و هنگام بستن این منو ، دوباره به سطح شروع باز می گردید و می توانید پردازشگر دیگری را فعال نمایید . هنگامی که کاربر از طریق واسطه گرافیکی کاربر GUI¹ با نرم افزار کار می کند برای دستیابی به منوی حاوی سطور مورد نظر می بایستی ابتدا منوی پردازشگر مربوطه را فعال نماید . هنگام اجرای دستورات با زبان APDL نیز لازم است پردازشگر مربوطه فعال شود . برای این کار روش وجود دارد :

۱. می توان مستقیماً منوی مربوط به پردازشگر را باز نمود و سپس دستورهای APDL مورد نظر را

تایپ کرد . به عنوان مثال با توجه به اینکه دستور معادل :

Main Menu / Solution / Solve-Current_LS

دستور Solve می باشد . می توانید ابتدا وارد منوی Solution شده ف سپس در پنجره ANSYS

Input دستور SOLVE را تایپ نمایید سپس Enter را فشار دهید .

¹ Graphics User Interface

۲. می توانید بوسیله دستوره‌های APDL وارد پردازشگر مورد نظر خود شوید . برای این کار پس از علامت "/" ، نام پردازشگر را تایپ نمایید . مثلا تایپ دو دستور مقابل معادل روش اول می باشد

:

```
/SOLU  
SOLVE
```

لازم به تذکر است که در صورت فعال نمودن یک پردازشگر توسط دستور APDL منوی متناظر با دستوره‌های آن پردازشگر روی صفحه ظاهر نمی شود ، همچنین برای خروج از پردازشگر فعلی و ورود به پردازشگر دیگر ، ابتدا باید دستور finish اجرا شود . این دستور معادل بستن منوی پردازشگر فعال می باشد .

می توان مجموعه ای از دستورات APDL را در یک متنی تایپ کرد و سپس آن برنامه را در یک نرم افزار ANSYS اجرا نمود . برای این کار باید از دستور INPUT/ استفاده گردد که صورت کلی آن به شکل زیر است :

```
مسیر فایل ، پسوند فایل ، اسم فایل ، /INPUT
```

مجموعه ای از دستورات را می توان به عنوان یک ماکرو^۱ به نرم افزار معرفی نموده و به آن یک اسم اختصاص داد که در هنگام نیاز می توان به سادگی ماکرو مورد نظر را فراخوانی نمود .

هنگام وارد کردن پارامترهای یک دستور حتما باید بین آنها " , " قرار گیرد . وجود فاصله خالی در متن دستور اشکالی ندارد . اگر بین دو کاما چیزی تایپ نشود ، مقدار پیش فرض آن پارامتر در نظر گرفته خواهد شد . این مقدار معمولا برابر صفر است . برای مثال در دستور زیر با گرفتن سه مولفه مختصات

¹ Macro

دکارتی در یک نقطه ، یک گره در آن مکان قرار می دهد . عدد i نشانگر شماره گره می باشد . در مورد دستور N (برای ترسیم گره) و دستور مشابه آن (مثلا K برای ترسیم نقاط کلیدی) در صورتی که شماره گره یا نقطه کلیدی و ... معین نشود ، نرم افزار بطور خودکار به شماره آخرین گره ترسیم شده یک واحد می افزاید و عدد را به عنوان شماره گره جدید در نظر می گیرد .

N, i, X, Y, Z

برای مثال ، برای ترسیم یک گره در مختصات $(5,0,4)$ می توان یکی از عبارات زیر را مورد استفاده قرار داد :

$N,,5,0,4$

$N,,5,,4$

روند مدل سازی و حل مسئله به کمک نرم افزار ANSYS :

برای مدل سازی مخزن شرح داده شده در فصل چهارم برای چیدمان نوع B ابتدا دستورات زیر را در یک Notepad وارد و ذخیره نمایید .

PREP7/

$Dv=302e-3$

$Lv=600e-3$

$T1=2.193e-3$

$T2=2.02e-3$

$Tetha1=25.4$

Tetha2=-25.4

Tetha3=29.6

Tetha4=-29.6

Tetha5=53.7

Tetha6=-53.7

Tetha7=53.8

Tetha8=-53.8

Tetha9=88

Tetha10=-88

N1=70

N2=60

N3=1

ET,1,SOLID46

R,1

RMODIF,1,1,1

RMODIF,1,7,0

RMODIF,1,13,1

RMODIF,1,14,Tetha1

RMODIF,1,15,T1

R,2

RMODIF,2,1,1

RMODIF,2,7,0

RMODIF,2,13,1

RMODIF,2,14,Tetha2

RMODIF,2,15,T1

R,3

RMODIF,3,1,1
RMODIF,3,7,0
RMODIF,3,13,1
RMODIF,3,14,Tetha3
RMODIF,3,15,T1

R,4
RMODIF,4,1,1
RMODIF,4,7,0
RMODIF,4,13,1
RMODIF,4,14,Tetha4
RMODIF,4,15,T1

R,5
RMODIF,5,1,1
RMODIF,5,7,0
RMODIF,5,13,1
RMODIF,5,14,Tetha5
RMODIF,5,15,T1

R,6
RMODIF,6,1,1
RMODIF,6,7,0
RMODIF,6,13,1
RMODIF,6,14,Tetha6
RMODIF,6,15,T1

R,7
RMODIF,7,1,1
RMODIF,7,7,0

RMODIF,7,13,1

RMODIF,7,14,Tetha7

RMODIF,7,15,T1

R,8

RMODIF,8,1,1

RMODIF,8,7,0

RMODIF,8,13,1

RMODIF,8,14,Tetha8

RMODIF,8,15,T1

R,9

RMODIF,9,1,1

RMODIF,9,7,0

RMODIF,9,13,1

RMODIF,9,14,Tetha9

RMODIF,9,15,T2

R,10

RMODIF,10,1,1

RMODIF,10,7,0

RMODIF,10,13,1

RMODIF,10,14,Tetha10

RMODIF,10,15,T2

,UIMP,1,EX,EY,EZ,132e9,10.8e9,10.8e9

,UIMP,1,PRXY,PRYZ,PRXZ,.24,.59,.24

,UIMP,1,GXY,GYZ,GXZ,5.65e9,3.38e9,5.65e9

CYL4,0,0,(Dv/2),0,(Dv/2+T1),180,Lv
CYL4,0,0,(Dv/2+T1),0,(Dv/2+2*T1),180,Lv
CYL4,0,0,(Dv/2+2*T1),0,(Dv/2+3*T1),180,Lv
CYL4,0,0,(Dv/2+3*T1),0,(Dv/2+4*T1),180,Lv
CYL4,0,0,(Dv/2+4*T1),0,(Dv/2+5*T1),180,Lv
CYL4,0,0,(Dv/2+5*T1),0,(Dv/2+6*T1),180,Lv
CYL4,0,0,(Dv/2+6*T1),0,(Dv/2+7*T1),180,Lv
CYL4,0,0,(Dv/2+7*T1),0,(Dv/2+8*T1),180,Lv
CYL4,0,0,(Dv/2+8*T1),0,(Dv/2+8*T1+T2),180,Lv
CYL4,0,0,(Dv/2+8*T1+T2),0,(Dv/2+8*T1+2*T2),180,Lv

VSYMM,Y,1,10,1

VGLUE,ALL

VSEL,S,,1

VATT,1,1,1,0

VSEL,S,,21

VATT,1,2,1,0

VSEL,S,,23

VATT,1,3,1,0

VSEL,S,,24

VATT,1,4,1,0

VSEL,S,,25

VATT,1,5,1,0

VSEL,S,,26

VATT,1,6,1,0

VSEL,S,,27

VATT,1,7,1,0

VSEL,S,,28

VATT,1,8,1,0
VSEL,S,,,29
VATT,1,9,1,0
VSEL,S,,,30
VATT,1,10,1,0
VSEL,S,,,22
VATT,1,1,1,0
VSEL,S,,,31
VATT,1,2,1,0
VSEL,S,,,32
VATT,1,3,1,0
VSEL,S,,,33
VATT,1,4,1,0
VSEL,S,,,34
VATT,1,5,1,0
VSEL,S,,,35
VATT,1,6,1,0
VSEL,S,,,36
VATT,1,7,1,0
VSEL,S,,,37
VATT,1,8,1,0
VSEL,S,,,38
VATT,1,9,1,0
VSEL,S,,,39
VATT,1,10,1,0
VSEL,ALL

LSEL,S,LENGTH,,Lv
LESIZE, ALL,,,N1
LSEL,S,RADIUS,,Dv/2
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+T1

```
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+2*T1
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+3*T1
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+4*T1
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+5*T1
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+6*T1
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+7*T1
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+8*T1
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+8*T1+T2
LSEL,A,RADIUS,,Dv/2+8*T1+2*T2
LESIZE, ALL,,,N2
LSEL,S,LENGTH,,T1
LSEL,A,LENGTH,,T2
LESIZE, ALL,,,N3
LSEL,ALL
```

```
LOCAL,11,1,0,0,0
ESYS,11
```

```
VMESH,ALL
```

```
EORIENT,L,YSL,POSX,90
```

```
SFA,4,1,PRES,20E6
SFA,128,1,PRES,20E6
```

```
SOLUTION/
```

```
ASEL,S,LOC,Z,0
```


NSLA,S,1
D,ALL,ALL

ASEL,S,LOC,Z,Lv
NSLA,S,1
D,ALL,ALL

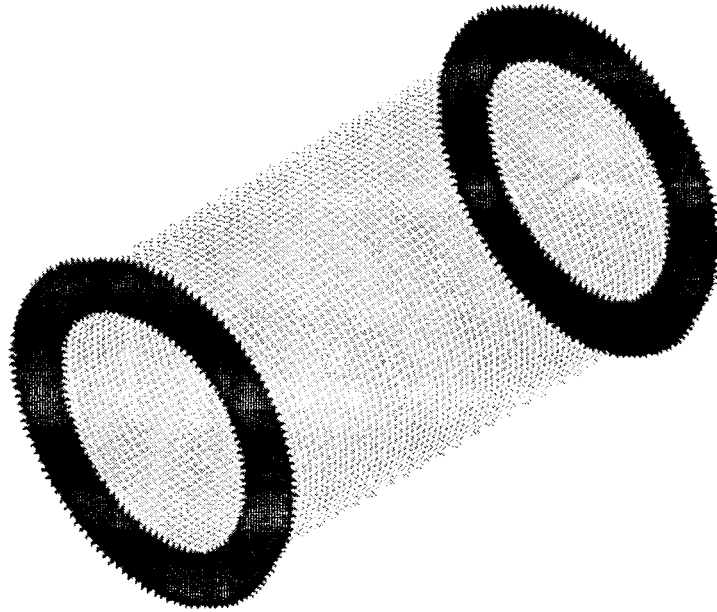
ALLSEL,ALL

بعد از اجرا کردن نرم افزار از مسیر زیر اطلاعات فوق را وارد نرم افزار نمایید .

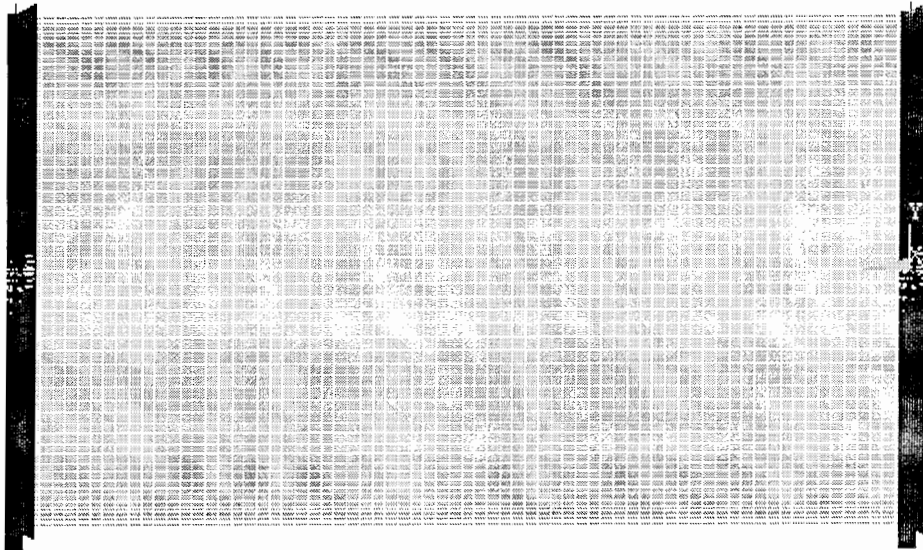
File > Read Input From File

در صورت اجرای صحیح روند فوق مدل را بصورت اشکال ۱ و ۲ می توانید بررسی کنید . در این قسمت مش بندی مناسب و شرایط مرزی که در دو طرف استوانه در اثر وجود چنبره بوجود می آید به مدل وارد می شود و اکنون نرم افزار آماده ایجاد نیروهای وارده و حل را دارد . در صورت تمایل به ایجاد تغییراتی در پارامترهای وارد هم از طریق اصلاح کد فوق و هم از طریق منوهای نرم افزار قابل ایجاد می باشد . مثلاً برای ایجاد تغییراتی در چیدمان لایه ها می توان از مسیر زیر به هدف رسید :

Preprocessor>Real Constants>Add/Edit/Delete



شکل ۱ نمای ایزومتریک از مدل



شکل ۲ نمای راست از مدل

برای بارگذاری مکانیکی و حل مسئله اکنون یک صفحه Notepad جدید ایجاد و دستورات زیر را وارد و ذخیره نمایید . همانند قبل از مسیر شرح داده شده آن را فراخوانی نمایید .

SOLUTION/

SOLVE

POST1/

RSYS,1

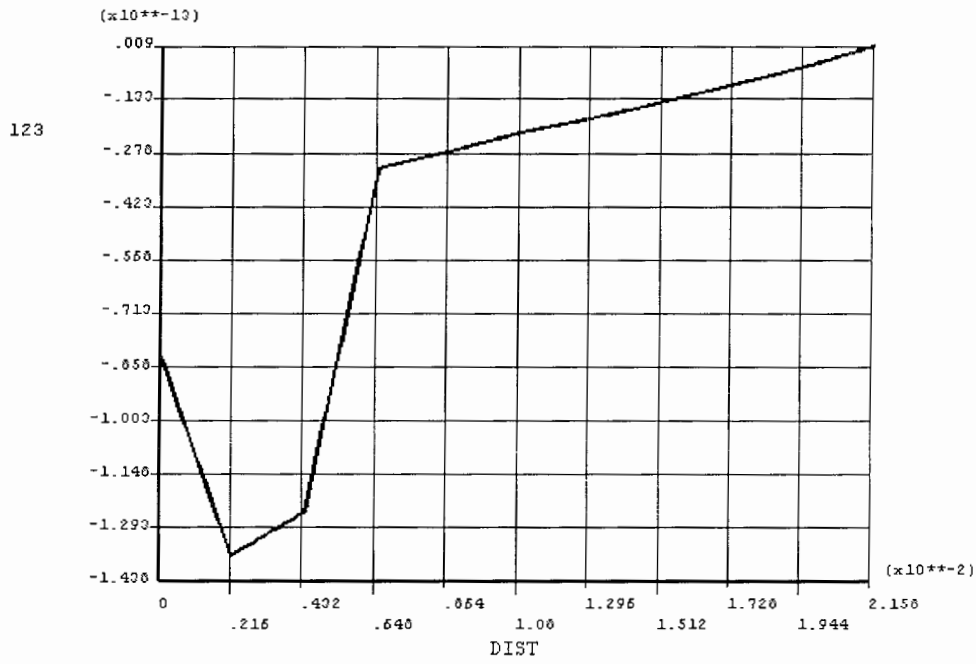
PLNSOL,S,X

PATH,AB,11
PPATH,1,4557
PPATH,2,348
PPATH,3,8888
PPATH,4,21597
PPATH,5,25928
PPATH,6,30259
PPATH,7,34590
PPATH,8,38921
PPATH,9,43252
PPATH,10,47583
PPATH,11,51914

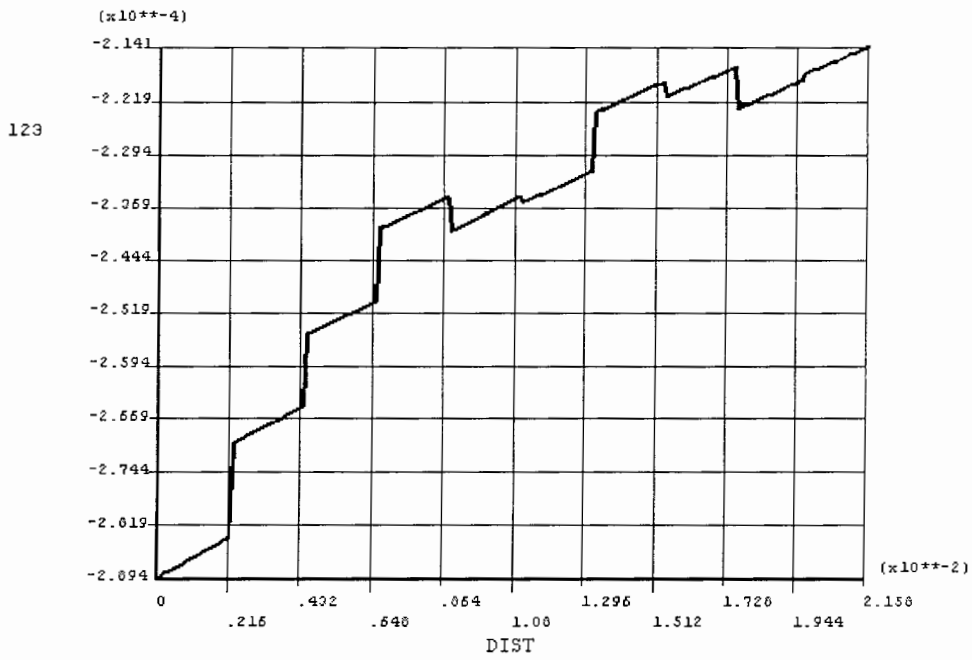
PDEF,MAPPATH,S,X,NOAVG

PLPATH,MAPPATH

اکنون نرم افزار بطور خودکار مسئله را حل و همانند روش هایی که معمول است می توانید پاسخ ها را مورد بررسی قرار دهید . در اشکال ۳ الی ۱۰ نمونه های از پاسخ را می توانید بررسی نمایید .



شکل ۳ جابجایی مماسی در اثر بارگذاری مکانیکی

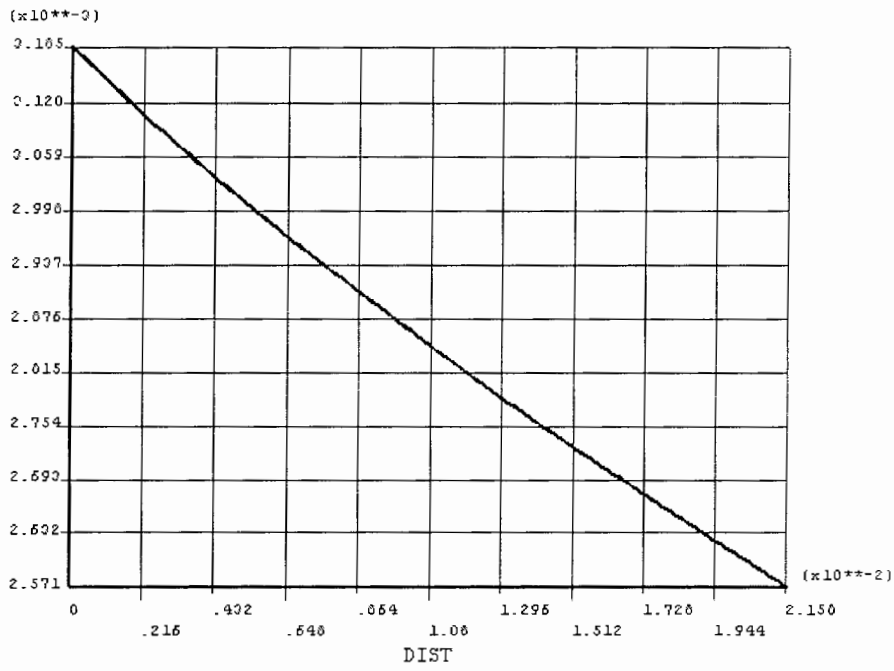


شکل ۴ جابجایی شعاعی در اثر بارگذاری مکانیکی

1



123

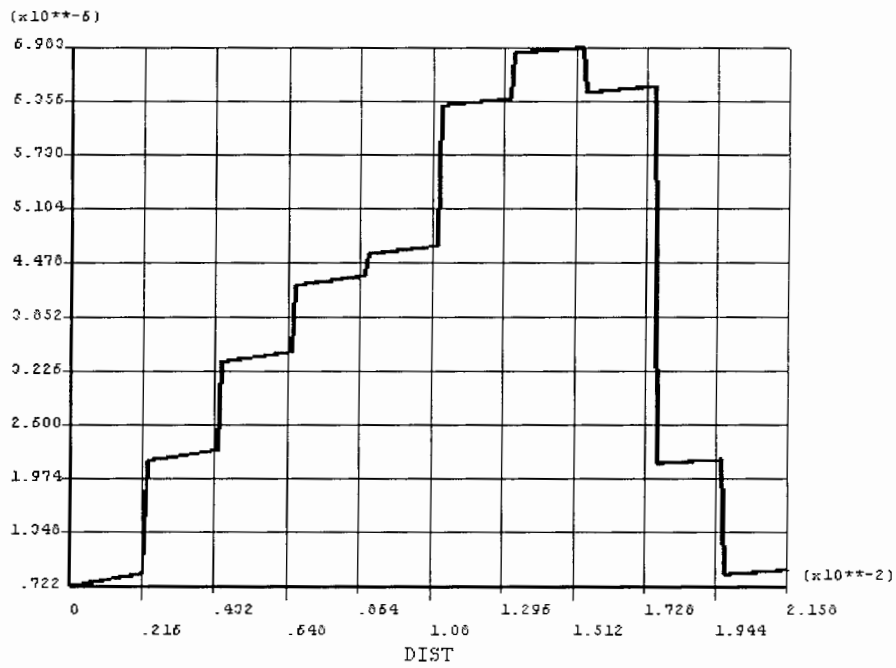


شکل ۵ کرنش مماسی در اثر بارگذاری مکانیکی

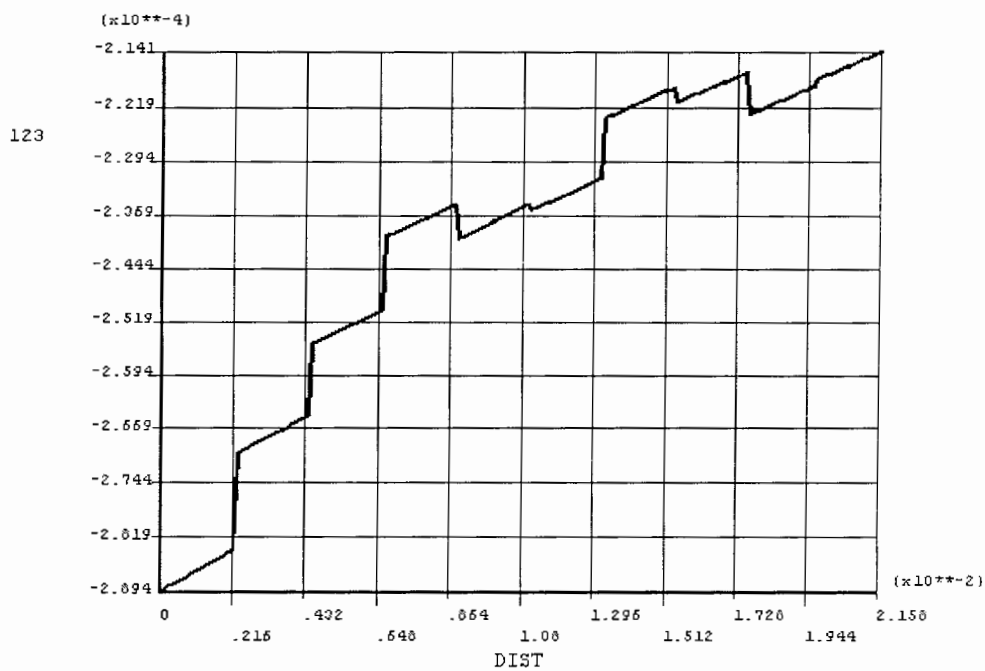
1



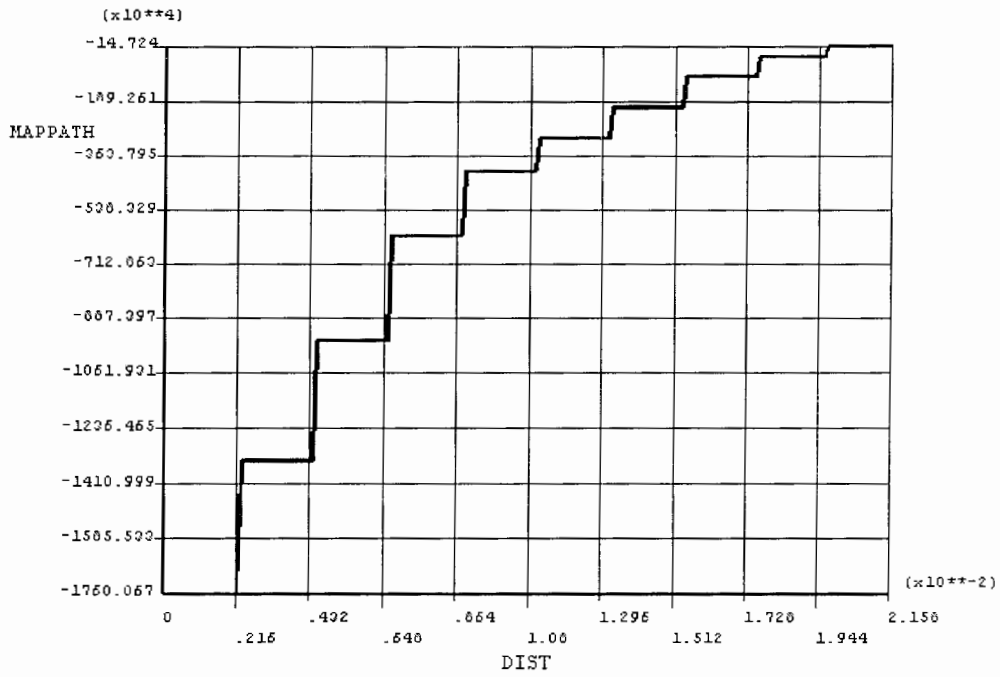
123



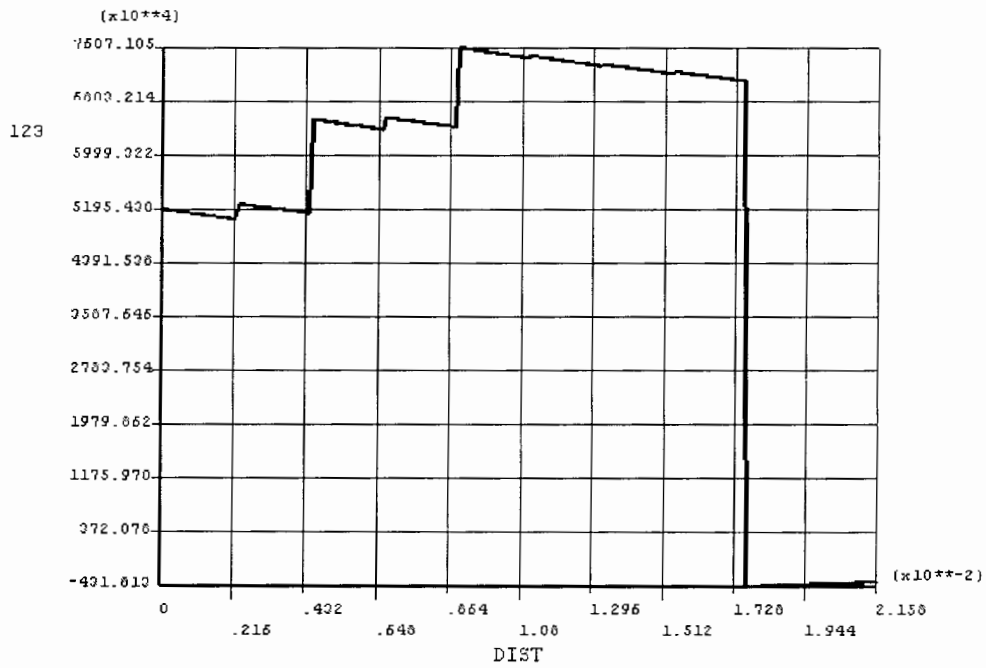
شکل ۶ کرنش برشی r_x در اثر بارگذاری مکانیکی



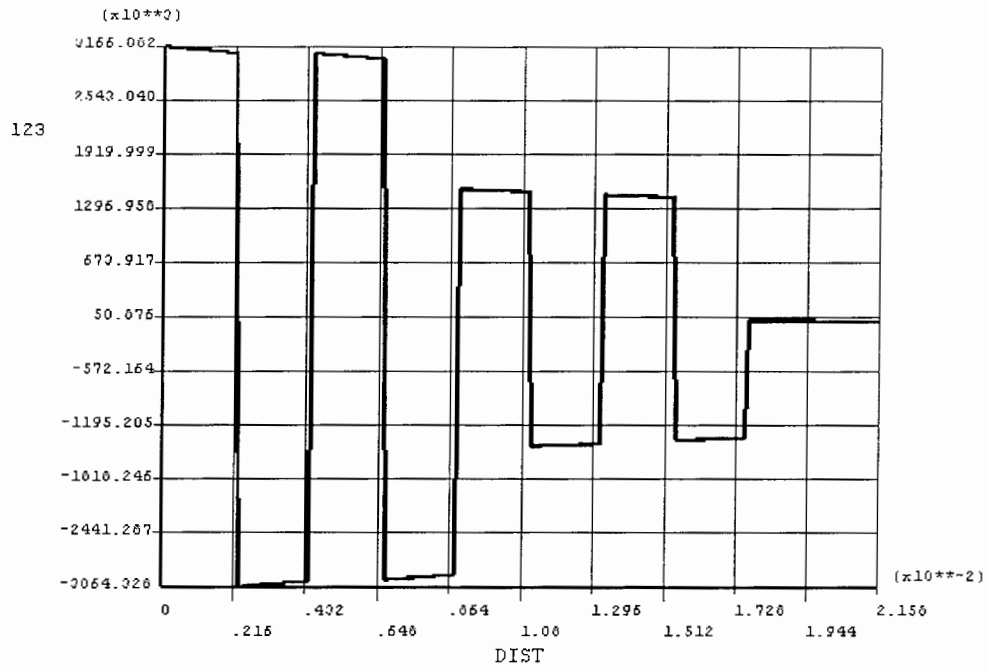
شکل ۷ کرنش برشی r_θ در اثر بارگذاری مکانیکی



شکل ۸ تنش شعاعی در اثر بارگذاری مکانیکی



شکل ۹ تنش محوری در اثر بارگذاری مکانیکی



شکل ۱۰ تنش برشی IX در اثر بارگذاری مکانیکی

Classic and elastic method along with ANSYS software are used as the representatives of limited method for stress and strain analysis, convection of three sequential layering and three mechanical, thermo mechanical and pure thermo loading in this paper. The last part of the paper represents the strain analysis and effective features of quadrupled composite layered tube with various angles.

Conductive tensor is studied in different environments and then the procedure of obtaining the matrix factors of composite laminates are offered in convection part of this paper.

To find the heat distribution in different layers of the composite tube, the thermal and energy flux equitation in non-isotropic materials are studied by using limited differential numeric method, and then the results of changing the boundary conditions of convection, adding the boundary radiant condition and thermal distribution in different periods before reaching the stable condition and at the stable condition are shown.

At the end the present paper the effect of convection coefficients in thermal distribution of three different conditions is evaluated.