

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بسمه تعالی



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه جامدات

تحلیل ترمو الاستیک استوانه های جدار کلفت چرخان FG با تغییرات

توانی خواص به کمک تئوری تغییر شکل برشی

دانشجو: عبدالکریم رستاقی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهنوئی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: شهریور ۱۳۹۱

چکیده:

پوسته ها به طور کلی، سازه های خمیده ای هستند که از لحاظ رفتاری در برابر نیروها و لنگرها، از مقاومت مطلوب ویژه ای برخوردارند. مطالعه ی این رفتارها و بکارگیری تئوری های مختلف از گذشته ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان زیادی قرار گرفته و به دلیل فراوانی کاربرد، همچنان ادامه دارد. از میان انواع پوسته ها، پوسته های استوانه ای، اهمیت ویژه تری دارند و همواره دانش پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی جداره و ماده ی این دسته از پوسته ها بوده اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر بارگذاری ها افزایش و وزن آنها را کاهش دهند. به همین منظور در این رساله سعی بر آن بوده تا به تحلیل استوانه های با ضخامت ثابت تحت بارگذاری های فشاری، دورانی و شار حرارتی با شرایط مرزی مختلف در حالت متقارن محوری بپردازیم، و تا آنجا که مقدور است اثر هر یک از این عوامل در جابه جایی ها و تنش های ایجاد شده در استوانه را مورد بررسی قرار دهیم. در ابتدا ضمن مروری بر تئوری های مربوط به این سازه ها به بررسی اجمالی کارهایی که تا کنون در این زمینه انجام شده است پرداخته و گذری به پیشینه ی پژوهش های صورت گرفته در رابطه با مواد FG خواهیم داشت. در بخش اول در ابتدا با استخراج معادلات حاکم بر استوانه های جدار ضخیم به کمک روش انرژی برای مواد ناهمگن (FG) با تغییرات توانی خواص در راستای ضخامت تحت بارگذاری فشاری و بدست آوردن معادلات نهایی، برای یک مسئله نمونه مقادیر جابه جایی شعاعی، جابه جایی محوری، تنش محوری و تنش برشی محاسبه شده و در ادامه جهت اطمینان، جواب های بدست آمده با نتایج حاصل از مدلسازی توسط نرم افزار انسیس مقایسه شده است. به منظور دست یافتن به اثر بارگذاری فشاری در این بخش نتایج حاصل از چند بارگذاری فشاری با مقادیر متفاوت نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش دوم با اضافه کردن دوران به بارگذاری فشاری اثر این عامل در جابه جایی و تنش های ایجاد شده در استوانه بررسی شده و مشابه بخش قبل پس از حل معادلات مربوطه پاسخ های حاصل از دو روش مذکور مورد مقایسه قرار گرفته است. در بخش سوم که به عنوان بخش پایانی در این رساله در نظر گرفته شده بارگذاری حرارتی را نیز به مجموعه ی بارگذاری ها اضافه می کنیم تا اثر این نوع بارگذاری نیز مورد بحث و بررسی قرار گیرد.

مقایسه نتایج بین دو روش استفاده شده نشان میدهد که تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در بارگذاری اول و دوم از دقت خوب و قابل قبولی برخوردار است، هر چند که با اضافه شدن دوران به بارگذاری فشاری در سرعت های بالا از دقت حل تحلیلی کاسته می شود ولی با اضافه شدن شار حرارتی به مجموعه ی بارگذاری از دقت حل به حدی کاسته میشود که دیگر پاسخ های این روش قابل قبول نخواهد بود. عامل اصلی که می تواند به این مسئله دامن زده باشد فاصله گرفتن جابه جایی از فرض خطی در نظر گرفته شده توسط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است، و لذا لازم است برای رسیدن به پاسخ هایی با دقت بیشتر از تئوری تغییر شکل برشی با مرتبه های بالاتر استفاده کرد.

واژگان کلیدی: استوانه های جدار ضخیم، تغییرات توانی خواص، تئوری تغییر شکل برشی

فهرست مطالب

فصل ۱: مروری بر روشهای تحلیل پوسته ها

۲	۱-۱	مقدمه
۲	۲-۱	دسته بندی پوسته ها
۴	۳-۱	تئوری پوسته های نازک
۵	۱-۳-۱	تئوری غشایی
۶	۲-۳-۱	تئوری خمشی
۹	۴-۱	تئوری پوسته های کلفت
۱۰	۱-۴-۱	تئوری الاستیسیته ی خطی
۱۱	۲-۴-۱	تئوری تغییر شکل برشی
۱۲	۵-۱	مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM)
۱۴	۱-۵-۱	ویژگیهای مواد FG
۱۵	۲-۵-۱	تاریخچه ی مواد FG
۱۷	۳-۵-۱	فرآیندهای تولید مواد FG
۱۸	۴-۵-۱	مدلسازی ریاضی مواد FG
۲۱	۶-۱	پیشینه ی پژوهش
۲۵	۷-۱	جمع بندی

فصل ۲: تحلیل الاستیک پوسته های استوانه ای FGM

۲۸	۱-۲ مقدمه
۲۸	۲-۲ تئوری تغییر شکل برشی
۳۲	۳-۲ تحلیل الاستیک استوانه های ناهمگن
۳۴	۱-۳-۲ توزیع ناهمگنی مدول الاستیسیته
۳۷	۲-۳-۲ حل الاستیک استوانه تحت بارگذاری فشاری
۴۰	۴-۲ مطالعه ی موردی
۴۰	۱-۴-۲ استوانه ی دوسر گیردار
۵۴	۲-۴-۲ استوانه ی یکسر گیردار - یکسر آزاد
۶۶	۵-۲ حل عددی استوانه های ناهمگن تحت بارگذاری فشاری
۶۷	۱-۵-۲ مقایسه ی نتایج
۷۲	۶-۲ جمع بندی

فصل ۳ : تحلیل الاستیک پوسته های استوانه ای چرخان FGM

۷۵	۱-۳ مقدمه
۷۵	۲-۳ تحلیل الاستیک استوانه های چرخان ناهمگن
۷۸	۱-۲-۳ توزیع ناهمگنی چگالی
۸۱	۲-۲-۳ حل الاستیک استوانه های چرخان تحت بارگذاری فشاری

۸۴	۳-۳ مطالعه ی موردی
۸۴	۱-۳-۳ استوانه ی دوسر گیردار
۸۸	۲-۳-۳ استوانه ی یکسر گیردار - یکسر آزاد
۹۲	۴-۳ حل عددی استوانه های چرخان ناهمگن تحت فشار داخلی
۹۳	۱-۴-۳ مقایسه ی نتایج
۹۸	۵-۳ جمع بندی

فصل ۴ : تحلیل ترموالاستیک پوسته های استوانه ای چرخان FGM

۱۰۰	۱-۴ مقدمه
۱۰۰	۲-۴ تحلیل ترموالاستیک استوانه های ناهمگن
۱۰۳	۱-۲-۴ توزیع ناهمگنی ضریب انبساط حرارتی
۱۰۵	۲-۲-۴ حل معادله ی انتقال حرارت
۱۰۹	۳-۲-۴ حل ترموالاستیک استوانه چرخان تحت بارگذاری فشاری
۱۱۱	۳-۴ مطالعه ی موردی
۱۱۲	۱-۳-۴ استوانه ی دوسر گیردار
۱۱۷	۲-۳-۴ استوانه ی یکسر گیردار - یکسر آزاد
۱۲۲	۴-۴ حل عددی استوانه های ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی
۱۲۳	۱-۴-۴ مقایسه ی نتایج

۱۲۸

۵-۴ جمع بندی

فصل ۵ : جمع بندی و نتیجه گیری

۱۳۰

۱-۵ مقدمه

۱۳۰

۲-۵ جمع بندی و نتیجه گیری

۱۳۲

حالت اول :تحلیل الاستیک پوسته های استوانه ای FGM

۱۳۳

حالت دوم :تحلیل الاستیک پوسته های استوانه ای چرخان FGM

۱۳۴

حالت سوم :تحلیل ترموالاستیک پوسته های استوانه ای چرخان FGM

۱۳۵

۳-۵ پیشنهادها

فهرست شکل ها

- شکل ۱-۱ نمای مقطع یک استخوان ۱۴
- شکل ۲-۱ مقایسه ی تغییرات خواص در مواد مختلف (۱۰) ۱۵
- شکل ۳-۱ ساختار گروههای پروژهای ساخت FGM در ژاپن (۱۲) ۱۶
- شکل ۴-۱ دسته بندی روشهای گوناگون تولید مواد FGM (۱۰) ۱۷
- شکل ۱-۲ پروفیل استوانه ی جدار ثابت ۳۰
- شکل ۲-۲ پروفیل استوانه ی جدار ثابت تحت فشار داخلی و خارجی ۳۳
- شکل ۳-۲ توزیع بی بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاعی ۳۶
- شکل ۴-۲ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x = L/2$ ۴۳
- برای حالت دوسر گیردار
- شکل ۵-۲ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x = L/2$ ۴۳
- برای حالت دوسر گیردار
- شکل 6-2 توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ - برای حالت دوسرگیردار
- شکل ۷-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x = L/2$ ۴۶
- برای حالت دوسر گیردار
- شکل ۸-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x = L/2$ ۴۶
- برای حالت دوسر گیردار
- شکل ۹-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x = L/2$ ۴۷
- برای حالت دوسر گیردار
- شکل ۱۰-۲ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار ۴۹
- شکل ۱۱-۲ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی

- ۴۹ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۱۲ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی
- ۵۰ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۱۳ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی
- ۵۰ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۱۴ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی
- ۵۱ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۱۵ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی
- ۵۱ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۱۶ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی
- ۵۲ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۱۷ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی
- ۵۲ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۱۸ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی
- ۵۳ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۱۹ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به
- ۵۳ ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۲۰ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی
- 54 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار
 شکل ۲-۲۱ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی
- ۵۴ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۲- ۲۲ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$

۵۶

برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۲۳ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$

۵۶

برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۲۴ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$ برای

حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۲۵ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$

۵۸

برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۲۶ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$

۵۸

برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۲۷ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$

۵۹

برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۲۸ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی

۶۱

به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۲۹ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی

۶۱

به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۰ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی

۶۲

به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۱ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی

۶۲ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۲ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی

63 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۳ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی

۶۳ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۴ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی

64 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۵ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار خارجی

۶۴ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۶ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی به

۶۵ ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۷ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و

۶۵ خارجی m به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۸ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

۶۶ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۳۹ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

66 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۲- ۴۰ جابه جایی شعاعی محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه تحت فشار داخلی

70 برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$

شکل ۲- ۴۱ جابه جایی شعاعی محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه تحت فشار داخلی

۷۰ برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$

شکل ۲- ۴۲ جابه جایی محوری محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه تحت فشار داخلی

۷۱ برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$

شکل ۲- ۴۳ جابه جایی شعاعی محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه تحت فشار داخلی

۷۱ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$

شکل ۲- ۴۴ جابه جایی محوری محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه تحت فشار داخلی

۷۲ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$

۷۸ شکل ۳- ۱ پروفیل استوانه ی چرخان جدار ثابت تحت بارگذاری فشاری

۸۱ شکل ۳- ۲ توزیع بی بعد چگالی در راستای شعاعی

شکل ۳- ۳ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$

۸۷ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۳-۵ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

88 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۳-۶ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

88 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۳-۷ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

89 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۳-۸ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

89 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۳-۹ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$

90 برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۳-۱۰ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$

91 برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۳-۱۱ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به

92 ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۳-۱۲ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی به

92 ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۳- ۱۳ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

۹۳ به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۳- ۱۴ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

93 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۳- ۱۵ جابه جایی شعاعی محاسبه شده با روشهای FEM و FSDT در استوانه ی چرخان تحت فشار

۹۶ داخلی برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$

شکل ۳- ۱۶ جابه جایی شعاعی محاسبه شده با روشهای FEM و FSDT در استوانه ی چرخان تحت فشار

۹۷ داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$

شکل ۳- ۱۷ جابه جایی محوری محاسبه شده با روشهای FEM و FSDT در استوانه ی چرخان تحت فشار

۹۷ داخلی برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$

شکل ۳- ۱۸ جابه جایی شعاعی محاسبه شده با روشهای FEM و FSDT در استوانه ی چرخان تحت فشار

98 داخلی برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$

شکل ۳- ۱۹ جابه جایی محوری محاسبه شده با روشهای FEM و FSDT در استوانه ی چرخان تحت فشار

۹۸ داخلی برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$

103 شکل ۴- ۱ پروفیل استوانه ی جدار ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی

۱۰۶ شکل ۴- ۲ توزیع بی بعد ضریب انبساط حرارتی در راستای شعاعی

شکل ۴-۳ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی در $x=L/2$

۱۱۵

برای حالت دوسر گیردار

شکل ۴-۴ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی در $x=L/2$

116

برای حالت دوسر گیردار

شکل ۴-۵ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

۱۱۷

به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۴-۶ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

118

به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

۱۱۸

به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۴-۸ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

۱۱۹

به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار

شکل ۴-۹ توزیع نرمال جابه جایی شعاعی در استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی در $x=L/2$

۱۲۰

برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

شکل ۴-۱۰ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی در $x=L/2$

۱۲۰

برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد

- شکل ۴- ۱۱ توزیع جابه جایی شعاعی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی
 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد
 ۱۲۲
- شکل ۴- ۱۲ توزیع جابه جایی محوری در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی
 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد
 ۱۲۲
- شکل ۴- ۱۳ توزیع تنش محیطی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی
 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد
 ۱۲۳
- شکل ۴- ۱۴ توزیع تنش برشی در لایه های مختلف استوانه ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی
 به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد
 123
- شکل ۴- ۱۵ جابه جایی شعاعی محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه بارگذاری ترکیبی
 برای حالت دوسر گیردار در $x=L/2$
 ۱۲۶
- شکل ۴- ۱۶ جابه جایی شعاعی محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی
 برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$
 ۱۲۷
- شکل ۴- ۱۷ جابه جایی محوری محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی
 برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$
 ۱۲۷
- شکل ۴- ۱۸ جابه جایی شعاعی محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی
 برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$
 ۱۲۸
- شکل ۴- ۱۹ جابه جایی محوری محاسبه شده با روشهای FEM و FSĐT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی
 برای حالت یکسر گیردار یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$
 ۱۲۸

U_r	جابجایی شعاعی
U_x	جابجایی محیطی
u, φ	مولفه های جابجایی محوری در FSDT
w, ψ	مولفه های جابجایی شعاعی در FSDT
σ_θ	تنش محیطی
τ_{xy}	تنش برشی
σ_r	تنش شعاعی
σ_x	تنش محوری
ε_θ	کرنش محیطی
γ_{xy}	کرنش برشی
ε_r	کرنش شعاعی
ε_x	کرنش محوری
E	مدول الاستیسیته
ν	نسبت پواسون
ρ	چگالی

κ	ضریب هدایت حرارتی
α	ضریب انبساط حرارتی
q_r	شار حرارتی
n	ثابت ناهماهنگی ماده
μ, λ	ثوابت لامه
P_i	فشار داخلی
P_o	فشار خارجی
ω	سرعت دورانی
T_i	دمای داخلی
T_o	دمای خارجی
T_{ref}	دمای محیط
$\Delta T(r)$	توزیع اختلاف دما
N_θ, N_x, N_z	نیروهای محوری
M_θ, M_x, M_z	لنگرهای خمشی
Q_x	نیروی برشی
M_{xz}	لنگر پیچشی

U	انرژی کرنشی
U^*	چگالی انرژی کرنشی
W	کار نیروهای خارجی
\vec{f}_{bf}	نیروهای حجمی
\vec{f}_{sf}	نیروهای سطحی
\bar{r}	نسبت شعاع به شعاع داخلی
h	ضخامت پوسته
L	طول استوانه
x	مختصات در جهت طولی استوانه
r	مختصات در جهت شعاعی استوانه
θ	مختصات در جهت محیطی استوانه
R	شعاع صفحه ی میانی استوانه
z	فاصله ی هر نقطه ی استوانه از صفحه ی میانی
$\{F\}$	بردار ناهمگنی
$[A],[B],[C]$	ماتریس های ضرایب
K	ضریب تصحیح برشی

 m_i

مقادیر ویژه

 ξ_i

بردارهای ویژه

فصل ۱

مروری بر روش‌های تحلیل پوسته‌ها

۱-۱ مقدمه

پوسته‌ها^۱ یا سازه‌های پوسته‌ای، از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین انواع سازه‌ها هستند که در دنیای فیزیکی اطراف ما پیدا می‌شوند. پوسته‌ها در اشکال طبیعی مانند جمجمه‌ی سر انسانها و حیوانات و نیز اجزای محافظ اندام جانوری مانند لاک و صدف مشاهده می‌شوند؛ در اشکال مصنوعی در صنایع مختلف: ساختمانی، نیروگاهی، خودروسازی، نظامی، هوا و فضا همانند: سقف‌ها، لوله‌ها، بدنه‌ی خودروها و هواپیماها، پرتابه‌ها و پرتاب‌کننده‌ها، موشک‌ها و سفینه‌ها تولید می‌شوند.

پوسته‌ها به طور کلی، سازه‌های خمیده هستند که از جهت کیفیت رفتاری و مقاومت در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. به تناسب مطلوبیت رفتاری، پیچیدگی تحلیل آنها نیز حائز اهمیت می‌باشد. روش‌های تحلیلی تقریبی موجود برای تحلیل پوسته‌ها بر اساس

فرضیاتی است که تئوری پوسته‌ها را تشکیل می‌دهند. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد، از اهمیت ویژه‌تری برخوردارند. مطالعه‌ی رفتار این گونه پوسته‌ها از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان بوده و همچنان ادامه دارد. دانش پژوهان پیگیر اعمال تغییرات بر روی هندسه و ماده‌ی پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آنها را در برابر انواع تنش‌های مکانیکی و حرارتی افزایش و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند.

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها از دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

الف - از دیدگاه هندسی:

پوسته‌ی حاصل از انتقال^۱: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران^۲: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک^۳: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی^۴ آن کوچکتر از $1/20$ باشد.

پوسته‌ی جدار کلفت^۵: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بزرگتر از $1/20$ باشد.

ب - از دیدگاه مادی:

پوسته‌ی همگن^۱: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

2. Shell of Translation
1. Shell of Rotation
2. Thin Shell
3. Midsurface
4. Thick Shell

پوسته‌ی ناهمگن^۲: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

پوسته‌ی همسانگرد^۳: خواص مکانیکی (E, ν) ماده‌ی پوسته در جهات مختلف مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته‌ی ناهمسانگرد^۴: خواص مکانیکی (E, ν) ماده‌ی پوسته در جهات مختلف مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

ج- از دیدگاه رفتاری:

پوسته با تغییر شکل های کوچک^۵: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییر شکل های بزرگ^۶: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک نیست (رفتار غیر خطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان^۷: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

پوسته با رفتار مومسان^۸: تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیر خطی از نظر مادی).

۱-۳ تئوری پوسته‌های نازک

در پوسته‌های نازک، نسبت ضخامت پوسته h به شعاع سطح میانی R کوچکتر از $1/20$ می‌باشد. تئوری

-
5. Homogeneous Shell
 6. Inhomogeneous (Heterogeneous) Shell
 7. Isotropic Shell
 8. Anisotropic Shell
 1. Small Deflection
 2. Large Deflection
 3. Elastic Behavior
 4. Plastic Behavior

این دسته از پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی خطی بنا شده است. به طور کلی به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر، تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی-تقریبی برای تحلیل پوسته‌های نازک به دست می‌آورند. دقت نتایج تئوری‌های ارائه شده بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته دارد. اولین فرضیات را کیرشهف (۱۸۵۰) (Kirchhoff) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط تئوری پوسته‌ها بکار گرفته شد. ارون (۱۸۷۴) (Aron) تئوری پوسته‌ها را مبتنی بر فرضیات (Kirchhoff) معرفی کرد، اما کار وی کامل نبود. لوو (۱۸۸۸) (Love) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری (Love – Kirchhoff) مشهور است. رایسنر (۱۹۱۲) (Reissner) با استفاده از فرضیات (Love) تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری^۱ را ارائه نمود. فلوگه (۱۹۳۲) (Flügge) اولین کسی است که تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه کرد. معادلات وی به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشد. با ساده‌سازی آنها تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر بدست می‌آیند. نظریات (Flügge) توسط بیرنه (۱۹۴۴) (Byrne) تکمیل شد. نقدی (۱۹۵۷) (Naghdi) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول‌بندی کرد که بکارگیری آنها مشکل می‌باشد. سندرز (۱۹۵۹) (Sanders) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلوف (۱۹۶۴) (Novozhilov) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و بدین ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

تئوری عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان بدین گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر (تئوری غشایی)^۲

۲- تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک (تئوری خمشی)^۳

۳- تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو (تئوری فلوگه)^[۱]

1. Axisymmetric Shell of Revolution
 2. Membrane Theory
 3. Bending Theory

۱-۳-۱ تئوری غشایی

غشاء^۱ از دیدگاه مکانیکی، یک تار^۲ دو بعدی است که فقط می تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی^۳ آنها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند و به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در تئوری غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسایل در حالت تنش صفحه‌ای^۴ و کرنش صفحه‌ای^۵ با چشم‌پوشی از تنش عمودی و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۲].

معادلات برای پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری (N_x, N_θ نیروهای محوری بر واحد طول):

$$\begin{cases} \frac{dN_x}{dx} = -P_x \\ \frac{N_\theta}{R} = P_r \end{cases} \quad (1-1)$$

از معادلات بالا نتیجه می‌شود که تنش طولی در مخزن استوانه‌ای تحت فشار یکنواخت داخلی p ثابت

است و تنش محیطی (تنش بیشینه) برابر است با:

$$\begin{cases} N_x = const. \\ N_\theta = PR \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} = \frac{PR}{h} \\ \sigma_x = \nu\sigma_\theta = \nu \frac{PR}{h} \end{cases} \quad (2-1)$$

و جابه‌جایی شعاعی استوانه:

$$U_r = (1-\nu^2) \frac{PR^2}{Eh} \quad (3-1)$$

-
- 4. Membrane
 - 5. String
 - 1. Bending Stiffness
 - 2. Plane Stress
 - 3. Plane Strain

۱-۳-۲ تئوری خمشی

ورق^۱ از دیدگاه مکانیکی، یک تیر^۲ دو بعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهای برشی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آنها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این تئوری تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط Navier ارائه و سپس توسط Kirchhoff در مورد ورق‌ها تعمیم داده شد و Love با همین فرضیات، تئوری خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین است. در تئوری خمشی نیز، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف می‌شود. فرضیات تئوری غشایی و تئوری خمشی (تئوری کلاسیک) را فرضیات Love – Kirchhoff می‌نامند که عبارتند از [۲]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی در مقایسه با واحد، کوچک است (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیز کوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابل چشم‌پوشی است (تنش

صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود

باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

معادلات برای پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری (N_x, N_θ) نیروهای محوری بر واحد طول، Q_x نیروی

برشی بر واحد طول و M_x لنگر خمشی بر واحد طول):

1. Plate
2. Beam

$$\begin{cases} \frac{N_x}{dx} = -P_x \\ \frac{N_\theta}{R} + \frac{dQ_x}{dx} = P_r \\ \frac{dM_x}{dx} = Q_x \end{cases} \quad (۴-۱)$$

از معادلات بالا نتیجه می شود که تنش طولی در مخزن استوانه‌ای تحت فشار یکنواخت داخلی P ، ثابت

است و تنش محیطی (تنش بیشینه) برابر است با:

$$\begin{cases} N_x = const. \\ N_\theta = \left(P - \frac{dQ_x}{dx} \right) R = \left(P - \frac{d^2 M_x}{dx^2} \right) R \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{N_\theta}{h} \\ \sigma_x = \nu \sigma_\theta = \nu \frac{N_\theta}{h} \end{cases} \quad (۵-۱)$$

$$M = D \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad D = \frac{Eh^3(x)}{12(1-\nu^2)} \quad (۶-۱)$$

D سختی خمشی و w خیز شعاعی استوانه می‌باشد. با جایگذاری در رابطه‌ی (۵-۱) نتیجه می شود:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{R^2} w = P - \nu \frac{N_x}{R} \quad (۷-۱)$$

برای یک پوسته با ضخامت ثابت، رابطه‌ی (۷-۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = P - \nu \frac{N_x}{R} \quad (۸-۱)$$

شکل ساده‌تر این معادله عبارتست از:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{P}{D} \nu \frac{N_x}{RD} \quad (۹-۱)$$

که در آن:

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4R^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2} \quad (۱۰-۱)$$

پارامتر هندسی β دارای بعد L^{-1} (معکوس طول) است. معادله‌ی (۹-۱) شرایط تغییر مکان حاکم را

برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای مدور با بارگذاری متقارن نشان می‌دهد. در حالت عدم حضور بار محوری

$N_x = 0$ است. در این حالت معادله‌ی (۹-۱) یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت می‌باشد. حل عمومی معادله‌ی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$w_h = e^{-\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \quad (11-1)$$

با فرض اینکه $f(x)$ بیانگر حل خصوصی معادله‌ی اخیر باشد. توجه شود که نتایج نظریه‌ی غشایی را همواره می‌توان به صورت حل‌های خصوصی معادلات نظریه‌ی خمشی در نظر گرفت.

۴-۱ تئوری پوسته‌های کلفت

اولین بار لامه (Lamé) (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی)^۱، حل دقیق استوانه‌های کلفت متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد [۳]، که تاکنون نیز در حل مسایل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین (۱۹۳۰) (Galerkin) روابط پوسته‌های کلفت را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد. و لاسف (۱۹۴۹) (Vlassov) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حلی برای پوسته‌های کلفت ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) (Naghdi) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی^۲ را برای پوسته‌های کلفت پایه‌گذاری نمود [۴]. میرسکی و هرمان (۱۹۵۸) (Mirsky-hermann) با بکارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای کلفت را ارائه کردند [۵]. گرینسپن (۱۹۶۰) (Greenspan) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی کلفت را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و کلفت مقایسه نمود [۶].

تئوری عمومی پوسته‌های کلفت را می‌توان بدین گونه تقسیم‌بندی کرد:

۱- تئوری الاستیسیته‌ی خطی

۲- تئوری تغییر شکل برشی

1. Plane Elasticity
2. Shear Deformation

۱-۴-۱ تئوری الاستیسیته‌ی خطی

به طور کلی در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را به دست آورد؛ معادلات عبارتند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جاب‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارتند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جاب‌جایی (بردار جاب‌جایی). تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی هرچند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به طور کامل توصیف می‌کند و منجر به حل دقیق می‌شود ولیکن حل معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به کارگیری آنها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده-شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها بکار برد. در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک، جاب‌جایی هر نقطه از پوسته، جاب‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این تئوری را Lamé برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد بکار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها بدست آورد. تئوری Lamé به تئوری کلاسیک استوانه‌های کلفت مشهور است [۷].

معادله دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌ی ضخیم جدار ثابت عبارت است از:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0 \quad \text{or} \quad r^2 u_r'' + r u_r' - u_r = 0 \quad (12-1)$$

و جاب‌جایی استوانه u_r برابر است با:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (13-1)$$

r شعاع استوانه، C_1, C_2 ثابت‌های معادله هستند که با شرایط مرزی به دست می‌آیند.

۱-۴-۲ تئوری تغییر شکل برشی

در این تئوری، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. به طور کلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (r) برابر است با شعاع سطح میانی (R) به علاوه فاصله‌ی آن نقطه از سطح میانی (z)، یعنی:

$$r = R + z, \left| \frac{z}{R} \right| < 1 \quad (14-1)$$

بر اساس تئوری لامه، جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی توخالی:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1 (R + z) + \frac{C_2}{(R + z)} \quad (15-1)$$

به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$u_r = C_1 (R + z) + \frac{C_2}{R} \left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots \right) = \left(C_1 R + \frac{C_2}{R} \right) + \left(C_1 - \frac{C_2}{R^2} \right) z + \frac{C_2}{R^3} z^2 + \dots \quad (16-1)$$

$$\Rightarrow u_r = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$$

بر اساس رابطه‌ی بالا، جابه‌جایی شعاعی را به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب z می‌توان نوشت. اگر

$z = 0$ باشد، نشانگر جابه‌جایی سطح میانی است. اگر فقط جمله‌ی اول در نظر گرفته شود $u = u_0$ ، تحلیل با

تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های کلفت می‌شود که مشابه تئوری خمشی (تئوری مرتبه‌ی یک در پوسته‌های

نازک) و اگر دو جمله در نظر گرفته شود $u = u_0 + u_1 z$ ، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی یک پوسته‌های کلفت می‌-

شود که مشابه تئوری فلوگه (تئوری مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) می‌باشد [۶].

در این تئوری، علاوه بر اثر نیروهای محوری، اثرات برش، خمش، پیچش و نیز اثرات اینرسی دورانی و

میدان حرارتی را می‌توان در نظر گرفت. تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

میرسکی-هرمان شهرت دارد که تعمیم تئوری Timoshenko در تیرها و تئوری Mindlin در ورق‌ها می‌-

باشد [۸]. میدان جابه‌جایی در این تئوری عبارت است از:

$$\begin{cases} U_x = u + \phi z \\ U_\theta = v + \theta z \Rightarrow \{U\} = \{u_0\} + \{u_1\} z \\ U_z = w + \psi z \end{cases} \quad (17-1)$$

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند اما الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. هرچند به کارگیری تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، منجر به حل دقیق مسایل می‌شود، ولیکن به دلیل اینکه تاکنون هیچ راه حل کاملی برای پوسته‌های ضخیم (به غیر از موارد خاص) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی ارائه نشده است، تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، انواع مواد، انواع بارگذاری و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری^۱، روش مناسبی می‌باشد.

۱-۵ مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM)

مواد همگن و همسانگرد به دلیل یکنواختی خواص از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی در صنایع نظامی، هوا و فضا، نفت و گاز، خودروسازی و ... ایجاد می‌کنند. از این رو دانشمندان همواره در تلاش بوده‌اند که از مواد جدید با خواص برتر استفاده کنند. ایده‌ی مواد مرکب (کامپوزیت‌ها)^۳ در پایان دهه‌ی ۱۹۴۰ و آغاز دهه‌ی ۱۹۵۰ در صنایع دریایی عملی شد. مواد مرکب از ترکیب دو یا چند ماده‌ی ناهم‌ساز به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوت و گاهی ناسازگار دارند. این عدم سنخیت رفتار مواد، باعث تمرکز تنش و ایجاد گسستگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری توأم مکانیکی و حرارتی می‌شود. کامپوزیت‌ها از دیدگاه متالورژی (میکروسکوپی)، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسکوپی)، همگن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

لخنیتسکی (۱۹۵۰) (Lekhnitskii) تئوری الاستیسیته‌ی اجسام مرکب را فرمول‌بندی کرد [۹] و پس از وی دیگران، تئوری‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی را ارائه نمودند. وینسون (۱۹۷۴) (Vinson)

1. Nonaxisymmetric
2. Functionally Graded Materials
1. Composite Material(Composites)

تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی را در تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی به کار برد و بین نتایج دو روش مقایسه‌ای انجام داد.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آنهاست که در نتیجه موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به‌ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد پی‌ریزی شد. مواد با تغییرات تابعی خواص یا مواد هدفمند (FG) در ساختار ارگانیسیم‌های زنده مانند استخوان وجود داشته است. به عنوان مثال استخوان در لایه‌ی بیرونی که نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تا شرایط مناسب برای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسته و تدریجی ایجاد می‌شود. مواد FG، ناهمگن هستند ولیکن آنها را همسانگرد در نظر می‌گیرند.



استخوان یک مقطع شکل ۱-۱ نمای

۱-۵-۱ ویژگی‌های مواد FG

مواد ناهمگن FG در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیتها) دارای ویژگی‌های به شرح زیر می‌باشند [۱۰]:

- ۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا. درحقیقت این گونه مواد با کاهش تنش‌های حرارتی، آثار منفی آنها را به نحو قابل توجهی کاهش می‌دهند. به کمک مواد FG می‌توان در نواحی که تنش‌های حرارتی به حالت بحرانی می‌رسند، آنها را کنترل کرد.

۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا. به کمک مواد FG می‌توان استحکام مواد را افزایش داد تا از ورود اجسام به ناحیه‌ی مومسان و حتی شکست^۱ تا حدود زیادی جلوگیری شود.

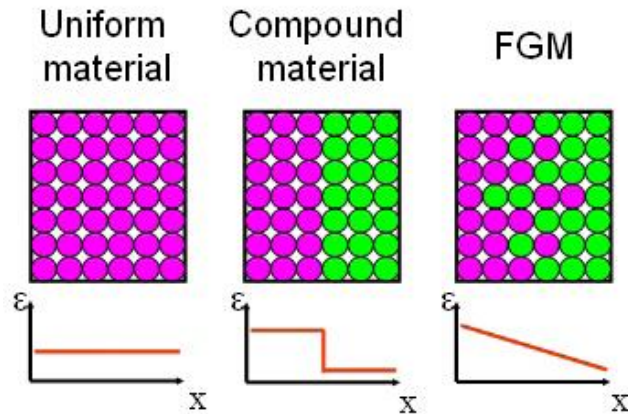
۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد FG، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود، مانند لبه‌های جسم و نزدیکی سوراخ‌ها و گشودگی‌ها. به کمک مواد FG می‌توان آثار تمرکز تنش را به صورت چشم‌گیری کاهش داد.

۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد هدفمند FG است.

۵- اگر پوشش ترد^۲ بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد FG، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد FG، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیت در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه و الیاف ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد FG، به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آنها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند. شکل (۲-۲) مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد ایزوتروپ، کامپوزیت و FGM را نشان می‌دهد.

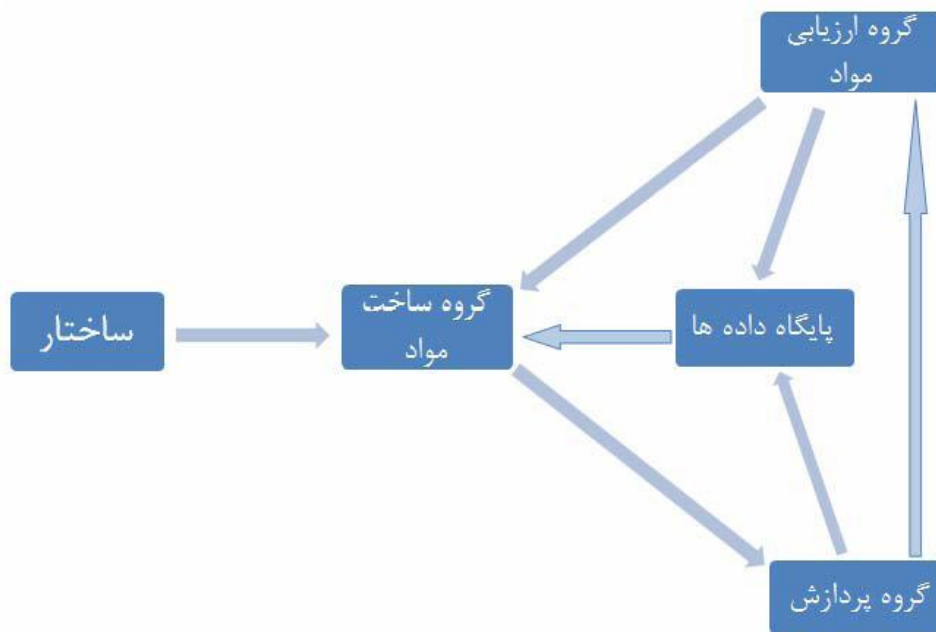
1. Fracture
1. Brittle Coating



مختلف [۱۰] مواد در خواص تغییرات شکل ۱-۲ مقایسه‌ی

۱-۵-۲ تاریخچه‌ی مواد FG

مفهوم اولیه‌ی FGM توسط نینو (Niino) و همکارانش در ۱۹۸۴ در سازمان هوا و فضای ژاپن مطرح و از ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید FGM در این کشور شروع شد [۱۱ و ۱۲]. مرحله‌ی اول پروژه‌ی ملی ((فناوری گسترش FGM)) طی سال‌های ۸۹-۱۹۸۷ در ژاپن انجام شد. در این پروژه، سه گروه: ساخت مواد، پردازش و ارزیابی مواد همکاری داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی، تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضاء شود.

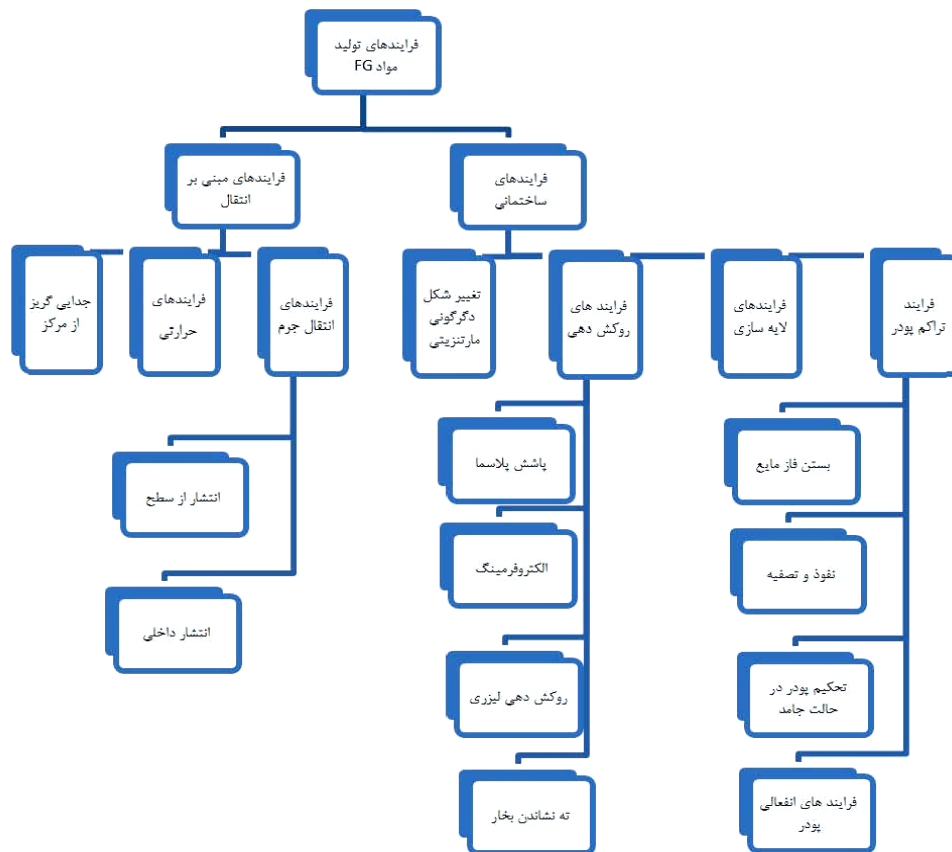


ژاپن [۱۲] در FGM ساخت پروژه‌ی گروه‌های شکل ۱-۳ ساختار

پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلیمتر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلیمتر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ درجه‌ی کلون و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ درجه‌ی کلون بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش‌های خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند. مرحله‌ی دوم پروژه‌ی ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلیمتر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلیمتر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد [۱۳]. دومین سمپوزیوم جهانی FGM، در ۱۹۹۲ برگزار و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG، و به‌ویژه تحلیل سازه‌های FGM فراگیر شد.

۱-۵-۳ فرآیندهای تولید مواد FG

تاکنون فرآیندهای تولید مواد FG در محدوده‌ی آزمایشگاه‌های تخصصی بوده و هنوز روش تولید نیمه-صنعتی با صرفه‌ی اقتصادی ارائه نشده است. به طور کلی روش‌های تولید موجود را می‌توان به دو گروه عمده تقسیم کرد [۱۰].



شکل ۱-۴ دسته‌بندی مواد تولید گوناگون روش‌های شکل ۱-۴ دسته‌بندی

گروه اول: فرایندهای تولید مواد FG به صورت لایه‌لایه، که به آن فرایندهای ساختمانی می‌گویند. این نوع فرایندها، نتیجه‌ای از پیشرفت‌های شگرف انجام شده در زمینه‌ی اتوماسیون ساخت مواد پیشرفته می‌باشد. در فرایندهای ساختمانی، تغییرات تدریجی توسط انباشته‌شدن مواد با یک روش برنامه‌ریزی شده انجام می‌شود. با روش‌های ساخت در این گروه، مدل‌های مواد FG را می‌توان به هر شکل و یا هرگونه تغییرات دلخواهی سازگار کرد. به همین دلیل هیچ‌گونه محدودیتی در چگونگی تغییرات تدریجی وجود ندارد. این نکته موجب انعطاف‌پذیری در طراحی می‌شود. با وجود نکات مثبت فراوان این روش‌ها، تولید مواد FG با آنها، بسیار پرهزینه، وقت‌گیر و دشوار است که با افزایش دقت‌ها، مشکلات آن چند برابر می‌شود. در شکل (۱-۴) روش‌های این گروه نشان داده شده است.

گروه دوم: فرایندهای تولید مواد FG مبتنی بر پدیده‌ی انتقال برای ایجاد تغییرات تدریجی در یک جزء از مواد می‌باشند. این نوع فرایندها از جریان سیال، انتشار اتمی یا انتقال حرارت برای تولید تغییرات تدریجی در ریزساختارهای محلی یا ترکیب‌های موجود بهره می‌گیرند. جریان سیال و انتشار حالت جامد در طول

فرآیند جامدسازی، پاسخ‌گوی تفکیک کریستال‌ها در ساخت مواد آلیاژی می‌باشد. به این ترتیب به گونه‌ای دیگر، روش‌هایی برای ایجاد تغییرات تدریجی به‌دست می‌آیند. روش‌های تولید فرآیند انتقال، انعطاف‌پذیری روش‌های تولید فرایندهای ساختمانی را ندارند ولی از لحاظ زمان و هزینه، بسیار مناسب‌تر از روش‌های گروه اول می‌باشند.

۱-۵-۴ مدل‌سازی ریاضی مواد FG

با توجه به اینکه مواد FG اساساً ناهمگن می‌باشند و خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی آنها به صورت پیوسته و تدریجی تغییر می‌کند، می‌توان تغییر خواص را با یک تابع پیوسته‌ی ریاضی، مدل کرد و از آن در روش‌های تحلیلی و عددی بهره گرفت. روش مرسوم در مدل‌سازی خواص مکانیکی و حرارتی مواد FG، استفاده از یک تابع توانی یا تابع نمایی برای بیان توزیع پیوسته‌ی خواص در ماده می‌باشد. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خواص، تغییرات مدول کشسانی (E) ^۱، ضریب هدایت حرارتی، ضریب انبساط حرارتی و چگالی را در نظر می‌گیرند و تغییرات نسبت پواسون (ν) ^۲، را لحاظ نمی‌کنند. دلیل آن، مقدار نسبت پواسون است که بسیار نزدیک به هم می‌باشد، به گونه‌ای که می‌توان از تغییرات ناچیز آن در جسم چشم‌پوشی کرد، یعنی ماده را ناهمگن همسانگرد (FG ایزوتروپ) در نظر گرفت.

أباتا و نودا (Obata & Noda) (۱۹۹۴) تابع توانی [۱۴]، هورگان و چان (Horgan & Chan) (۱۹۹۹) تابع توانی [۱۵]، یانگ (Yang) (۲۰۰۰) تابع توانی [۱۶]، توتونچو (Tutuncu) (۲۰۰۱) تابع توانی [۱۷]، تارن (Tarn) (۲۰۰۱) تابع توانی [۱۸]، جباری و همکاران (۲۰۰۳) تابع توانی [۱۹]، ارسلان و آکیز (۲۰۰۶) (Eraslan & Akis) تابع نمایی [۲۰] و هونگ‌جون و ژیفای (Hongjun & Zhifei) (۲۰۰۶) تابع نمایی [۲۱] را در روش‌های تحلیلی به‌کار بردند.

تابع توانی در اکثر مراجع به صورت رابطه‌ی (۱-۱۸) در نظر گرفته می‌شود:

1. Elasticity Modulus
2. Poisson's Ratio

$$P(z) = P_a \left(\frac{z}{a} \right)^n \quad (18-1)$$

P_a خاصیت ماده (مکانیکی، حرارتی و ...) در یک لایه‌ی مشخص و n ثابت ناهمگنی است.

رایج‌ترین ماده FG، تلفیق فلز-سرامیک^۱ است که با افزودن برخی عناصر آلیاژی دیگر خواص دلخواه تأمین می‌شود. پراوین و ردی (۱۹۹۸) (Praveen & Reddy)، رابطه‌ی ویژه‌ای برای یک ورق FGM با ضخامت ثابت h ارائه کردند. ایشان تغییر خواص را در ورق به صورت زیر بیان نمودند [۲۲]:

$$P(z) = (P_c - P_m)V^n + P_m \quad (19-1)$$

P_m خواص فلز، P_c خواص سرامیک و V نسبت حجمی در جسم می‌باشد.

$$V = \left(\frac{z}{h} \right) + \frac{1}{2}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (20-1)$$

اگر $n = 0$ باشد، ورق همگن سرامیک بدست می‌آید؛ اگر $z = -h/2$ باشد، خاصیت فلزی و اگر $z = h/2$ باشد، خاصیت سرامیک به دست می‌آید. این ماده در اجسامی که لبه‌ی بالایی آن در معرض گرادیان دمایی بالا و لبه‌ی پایینی آن تحت بارهای مکانیکی قرار دارند، بسیار مفید است.

رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت کلی‌تر برای دو خاصیت به شکل زیر بیان نمود:

$$P(z) = (P_1 - P_2)V^n + P_2 \quad (21-1)$$

P_1 و P_2 خواص در دو لایه‌ی مختلف می‌باشد. به عنوان مثال رابطه برای یک استوانه‌ی توخالی جدار

ثابت، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} E(r) = (E_o - E_i)V^n + E_i \\ V = \frac{r/r_i - 1}{r_o/r_i - 1} \end{cases} \quad (22-1)$$

E_i و E_o به ترتیب، مدول یانگ ماده‌ی FG در شعاع داخلی و خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۹) (Tutuncu) سه مدل تابع توانی ساده، تابع توانی مشابه تابع پراوین و ردی و نیز تابع نمایی به صورت تلفیق فلز-سرامیک ارائه کرد [۲۳]. شاو (۲۰۰۸) (Shao) برای خواص ماده‌ی ناهمگن تابع نمایی به صورت رابطه‌ی (۱-۲۳) ارائه کرد [۲۴]:

$$\begin{cases} A(R) = A_o e^{m_i (R-R_1)} \\ R_1 = \frac{r_1}{r_m}, R_2 = \frac{r_2}{r_m} \end{cases} \quad (23-1)$$

که در این رابطه m_i ثابت ناهمگنی ماده، r_1 و r_2 به ترتیب شعاع داخلی و خارجی استوانه و r_m میانگین شعاع داخلی و خارجی و A_o خواص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

توتونچو (۲۰۰۷) (Tutuncu) [۲۵] و همچین کلس و کانکر (۲۰۱۱) (Keles & Conker) [۲۶] تغییر خواص در جداره‌ی استوانه را به صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی زیر بیان نمودند:

$$A(r) = A_o e^{\beta r} \quad (24-1)$$

که در آن r شعاع استوانه، β ثابت ناهمگنی ماده و A_o نیز خواص لایه‌ی خارجی استوانه می‌باشد.

۱-۶ پیشینه‌ی پژوهش

تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلف، همان‌گونه که در بخش ۱-۴ بیان شد، دارای قدمت نسبتاً طولانی است. تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد به حدود نیم قرن پیش برمی‌گردد، ولی تحلیل استوانه‌های ناهمگن مربوط به دهه‌ی اخیر است. در این بخش، مطالعات انجام شده بر روی استوانه‌های همگن و ناهمگن در رابطه با موضوع پروژه گزارش می‌شود.

در خصوص استوانه‌های همگن: برای اولین بار Lamé در ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حل دقیق استوانه‌های ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت از مواد همگن و همسانگرد تحت فشار یکنواخت داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای را ارائه کرد [۷۳]. Galerkin در ۱۹۳۰ روابط حاکم بر پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به دست آورد. Vlassov در ۱۹۴۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل حل برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. Naghdi در ۱۹۵۶ با لحاظ اثر

برش عرضی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود [۴].

Mirsky & Hermann در ۱۹۸۵ با به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای ضخیم را ارائه کردند [۵]. در ۱۹۶۰ مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی کلفت را Greenspon با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم، محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود [۶].

Ziv & Perl در ۱۹۷۳ با به‌کارگیری تئوری میرسکی-هرمان و روش عددی تفاضل محدود، پاسخ ارتعاشی استوانه‌های نیمه بلند را به‌دست آوردند [۲۷]. Suzuki & Takahashi در ۱۹۸۱ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر استوانه‌های همگن جدار متغیر را استخراج و آنها را به کمک سری فریبینیوس حل کردند. ایشان برای همگرایی، ۵۰ جمله از سری را در نظر گرفتند [۲۸].

Takahashi & Suzuki در ۱۹۸۶ با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، معادلات ارتعاشی حاکم بر مخروط‌های همگن جدار متغیر را به‌دست آورده و آنها را به کمک سری فریبینیوس با لحاظ ۱۰۰ جمله از سری، حل کردند [۲۹]. ایپک‌چی و همکاران در ۲۰۰۳ معادلات استوانه‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات^۱ حل کردند [۳۰].

ایشان در ۲۰۰۸ معادلات مخروط‌های همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه-ی دوم، استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حل کردند [۳۱]. قناد و همکاران در ۲۰۰۹ حل عمومی پوسته‌های مخروطی شکل ناقص جدار ضخیم همگن و همسانگرد را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به کمک تئوری اغتشاشات ارائه نمودند [۳۲]. در سال ۲۰۱۰ نیز قناد و زمانی‌نژاد با استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار کلفت همگن و همسانگرد بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، دستگاه معادلات دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت حاصل را برای شرایط مرزی دوسر گیردار حل نمودند [۳۳]. ایپک‌چی در ۲۰۱۰ نیز معادلات پوسته‌های جدار ضخیم مخروطی شکل همگن و همسانگرد با جدار متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم استخراج و به کمک تئوری اغتشاشات حل کرد [۳۴].

در خصوص استوانه‌های ناهمگن: پس از اولین سمپوزیوم جهانی FGM در ۱۹۹۰،

Fukui & Yamanaka در ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار کلفت FGM تحت فشار داخلی را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و آنها را به روش عددی رانگ-کوتا حل کردند [۳۵]. Obata & Noda در ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره‌ی توخالی FGM استخراج و ماده‌ی بهینه را بدست آوردند [۱۴]. Loy & Reddy در ۱۹۹۹ ارتعاشات پوسته‌های نازک استوانه‌ای FGM را با استفاده از تئوری لوو-کیرشهف استخراج و آنها را به کمک روش ریلی-ریتز حل کردند [۳۶]. Horgan & Chan در ۱۹۹۹ معادلات حاکم بر یک استوانه‌ی توخالی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را بدست آوردند [۱۴]. ایشان در ۱۹۹۹ با همین روش، تنش‌ها را در یک دیسک دوار FGM بررسی کردند [۳۷]. Tutuncu در ۲۰۰۱ حل دقیق مخازن استوانه‌ای و کره‌ی جدار ثابت FGM با توزیع توانی مدول الاستیسیته تحت فشار یکنواخت داخلی را ارائه کردند. ایشان معادلات استوانه را در حالت کرنش صفحه‌ای به کمک تئوری لامه استخراج و توزیع تنش را به ازای ریشه‌های مثبت معادله مشخصه بدست آورد. در مقاله‌ی ایشان، رابطه و نمودار تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه است که در برخی از پژوهش‌های پسین نیز استفاده شده است [۱۷]. جبّاری و همکاران در ۲۰۰۲ تنش‌های مکانیکی و حرارتی در یک استوانه‌ی توخالی FGM تحت بارهای متقارن [۱۹] و در ۲۰۰۳ تحت بارهای نامتقارن حرارتی [۳۸] را بدست آوردند.

Hongjun & Zhifei در ۲۰۰۶ حل دقیق استوانه‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی مدول یانگ در راستای شعاعی با لایه‌های همگن ارایه کردند [۲۱]. Zhifei و همکاران در ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن تغییرات مدول کشسانی به صورت توانی و خطی، استوانه‌ی FGM را با روش چند لایه‌ای کردن، تحلیل و با حل Tutuncu مقایسه و در نتیجه به اشتباه مقاله‌ی نامبرده پی‌بردند [۳۹]. Tutuncu در ۲۰۰۷ مشابه مقاله‌ی پیشین، تحلیل استوانه‌ی FGM را در حالت کرنش صفحه‌ای ولیکن با توزیع نمایی مدول یانگ، ارائه کرد [۲۵]. Shao در ۲۰۰۸ تحلیل ترمومکانیکی استوانه‌های توخلای تشکل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص تحت بارهای مکانیکی و افزایش خطی دمای مرزی را با انتقال معادلات دیفرانسیل حاکم به حوزه‌ی لاپلاس و استفاده از روش حل به کمک سری‌ها انجام دادند [۲۴]. Tutuncu در ۲۰۰۹ نیز توزیع

میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش مربوط به دیسک، استوانه و کره‌ی توخالی FGM با تغییرات نمایی و توانی خواص ماده در راستای شعاع تحت فشار داخلی را توسط تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش تابع متمم تعیین نمود [۲۳]. زمانی‌نژاد و قناد در ۲۰۰۹ با ارائه‌ی دستگاه معادلات سه‌بعدی بر اساس تحلیل تانسوری، رفتار پوسته‌های جدار کلفت FGM حاصل از دوران با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر در راستای نصف-النهاری بررسی کردند [۴۰]. قناد و همکاران در ۲۰۱۰ حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه و اشتباه مقاله‌ی Tutuncu را نشان داده و آن را تصحیح کردند [۴۱]. ایشان در ۲۰۱۱ حلّ عمومی استوانه‌های جدار کلفت FGM را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، ارایه و نتایج آن را با حلّ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی مقایسه نمودند [۴۲]. در ۲۰۱۰ رحیمی و عارفی تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را تحت فشار داخلی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در حالت کرنش مسطح انجام دادند [۴۳]. در ۲۰۱۱ Keles & Conker حل گذرای هدایت حرارتی به صورت هذلولوی برای استوانه و کره‌ی توخالی ناهمگن تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص را ارائه نمودند [۲۶]. قربانپور و همکاران در ۲۰۱۱ اثر ناهمگنی را بر روی رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی یک استوانه‌ی چرخان جدار کلفت FGPM با تغییرات توانی خواص تحت فشار داخلی و خارجی بررسی و معادلات حاصل را برای این استوانه حل کردند [۴۴].

۷-۱ جمع‌بندی

برای تحلیل استوانه‌های کلفت همگن و ناهمگن با جدار ثابت، فشار یکنواخت و شرایط انتهایی متفاوت، به گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته‌ی دو بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و تئوری تغییر شکل برشی استفاده کرد ولیکن برای تحلیل استوانه‌های کلفت همگن و ناهمگن با جدار متغیر و یا فشار غیریکنواخت، روش مناسب، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی است. همچنین با توجه به اینکه در

تئوری تغییر شکل برشی بر خلاف تئوری الاستیسیته‌ی مستوی کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته می‌شود، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل استوانه‌ها تحت شرایط مرزی مختلف مناسب‌تر می‌باشد. به دلیل اهمیت تحلیل پوسته‌ها و همچنین ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی آن‌ها و با توجه اینکه تاکنون حل تحلیلی با استفاده از روش انرژی برای استوانه‌های جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی خواص تحت بارگذاری‌های فشاری، حرارتی و دورانی به طور همزمان ارائه نشده است، در این پژوهش با ارائه‌ی حل تحلیلی برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم با شرایط انتهایی مختلف به کمک تئوری تغییر شکل برشی، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج حل عددی به منظور بررسی صحت نتایج صورت پذیرفته است.

ابتدا در فصل اول این پژوهش، ضمن مرور تئوری پوسته‌های نازک و کلفت، مطالعات انجام شده در خصوص پوسته‌های استوانه‌ای ارائه شده است. همچنین مواد با تغییرات تابعی خواص (FGM) تعریف و ضمن بیان تاریخچه و ویژگی‌های آن‌ها، فرآیندهای تولید و مدل‌سازی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته و پیشینه‌ی پژوهشی مواد FG ارائه شده است. فصل دوم شامل استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم با استفاده از روش انرژی برای ماده‌ی FGM با تغییرات نمایی خواص تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی می‌باشد. سپس روش حل معادلات نهایی بیان و با انجام مطالعه‌ی موردی، نتایج و نمودارهای مربوط به توزیع تنش و جابه‌جایی برای شرایط مرزی مختلف آورده شده است. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از حل تحلیلی، مدل‌سازی عددی استوانه‌ی مورد نظر نیز ارائه شده و نتایج دو روش حل با یکدیگر مقایسه شده است. در فصل سوم برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های چرخان جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، ضمن ارائه‌ی حل عمومی پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری دورانی و فشاری، توزیع تنش و جابه‌جایی به صورت مطالعه‌ی موردی برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار یکنواخت داخلی و شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. نهایتاً نتایج حاصل از حل تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حل عددی مقایسه شده‌اند. در فصل چهارم نیز به منظور تحلیل

ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، پس از استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، حلّ عمومی پوسته‌های استوانه‌های تحت بارگذاری فشاری و حرارتی ارائه و به صورت مطالعه‌ی موردی برای استوانه تحت فشار داخلی و شار حرارتی یکنواخت برای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. سپس با ارائه‌ی حلّ عددی برای استوانه‌ی مورد نظر، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند. همچنین عدم قابلیت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ها نشان داده شده است. در فصل پنجم نیز به منظور تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری و شار حرارتی یکنواخت، با استخراج معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار کلفت در حالت تقارن محوری با ضخامت ثابت توسط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم، حلّ عمومی پوسته‌های استوانه‌ای برای شرایط انتهایی دوسر گیردار ارائه شده است. نهایتاً نتایج حاصل از حلّ تحلیلی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه و صحت روش حل مورد تایید قرار گرفته است. نتیجه‌گیری، جمع‌بندی نهایی و ارائه‌ی پیشنهادها در فصل ششم انجام شده است.

فصل ۲

تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

۱-۲ مقدمه

از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشند و همواره مهندسان و دانش‌پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی ضخامت و ماده‌ی این دسته از پوسته‌ها بوده‌اند تا بتوانند مقاومت آنها را در برابر نیروهای وارد شده افزایش داده و در صورت امکان، وزن آنها را کاهش دهند. استوانه‌های جدار ضخیم در مخازن تحت فشار و لوله‌های توپ استفاده می‌شوند. در این فصل ابتدا به معرفی و مقایسه‌ی تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و تئوری تغییر شکل برشی به طور مختصر پرداخته می‌شود. سپس برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، با استخراج معادلات دیفرانسیل

حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد همگن و ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، حلّ عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی و شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. نهایتاً با ارائه‌ی حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Ansys برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

۲-۲ تئوری تغییر شکل برشی

در تئوری الاستیسیته‌ی مستوی در استوانه‌ها، همان‌طور که در فصل اول نیز به آن اشاره شد فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند و تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه متقارن بوده و مقدار آنها در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی در نظر گرفته نمی‌شوند. همچنین تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به عبارت دیگر تغییر مکان شعاعی فقط تابع شعاع $U_r(r)$ می‌باشد. بنابراین به دلیل عدم وجود تنش برشی، تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی می‌باشند. در تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک فرض می‌شود که خطوط راست و عمود بر صفحه‌ی میانی، پس از تغییر شکل همچنان راست و عمود باقی می‌مانند و جابه‌جائی هر نقطه از پوسته، همان جابه‌جائی صفحه‌ی میانی در نظر گرفته می‌شود. در این تئوری نیز از تنش برشی و کرنش برشی چشم‌پوشی می‌شود. در تئوری تغییر شکل برشی، خطوط راست و عمود بر صفحه‌ی میانی، پس از تغییر شکل راست باقی می‌مانند ولی الزاما عمود نیستند، یعنی تنش و کرنش برشی لحاظ می‌شوند.

اگر مطابق شکل (۱-۲)، فاصله‌ی هر نقطه از پوسته از محور تقارن (r) را برابر با مجموع شعاع صفحه‌ی

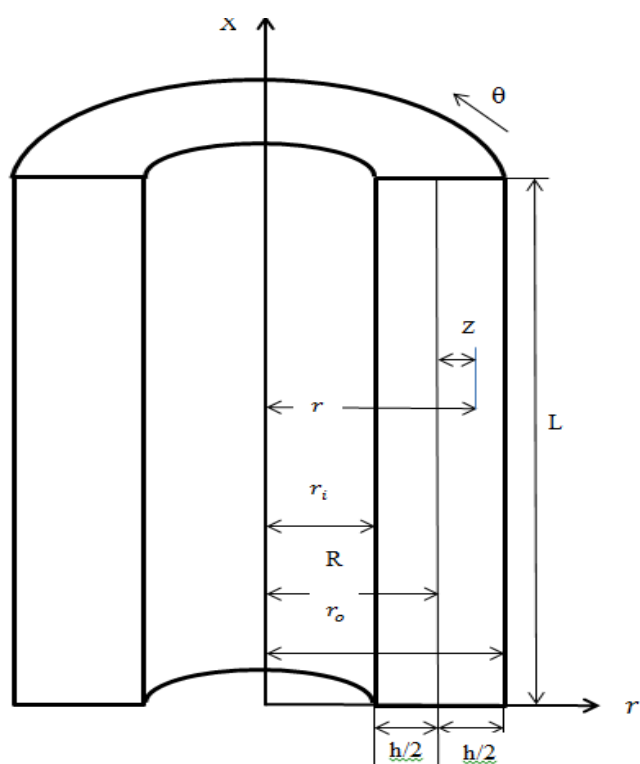
میانی (R) و فاصله‌ی آن نقطه از صفحه‌ی میانی (z) در نظر بگیریم:

$$r = R + z, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2} \quad (1-2)$$

همچنین h ضخامت و L طول استوانه باشد:

$$h = r_o - r_i \quad , \quad 0 \leq x \leq L$$

(۲-۲)



ثابت جدار استوانه‌ی شکل ۱-۲ پروفیل

بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، جابه‌جایی شعاعی استوانه برابر است با:

(۳-۲)

$$u_r = c_1 r + \frac{c_2}{r} = c_1(R+z) + \frac{c_2}{R+z}$$

با توجه به شرط $\left| \frac{z}{R} \right| < 1$ و به کمک بسط تیلور، جابه‌جائی شعاعی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_r &= c_1(R+z) + \frac{c_2}{R} \left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots \right) \\ &= \left(c_1 R + \frac{c_2}{R} \right) + \left(c_1 - \frac{c_2}{R^2} \right) z + \frac{c_2}{R^3} z^2 + \dots \end{aligned} \quad (۴-۲)$$

در نتیجه نهایتاً می‌توان نوشت:

$$u_r = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots \quad (۵-۲)$$

بر اساس رابطه‌ی (۵-۲) جابه‌جایی شعاعی استوانه را به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب z می‌توان

نوشت که حالت $z = 0$ بیانگر جابه‌جایی صفحه‌ی میانی است.

با استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی_هرمان مرتبه‌ی اول (اشاره شده در فصل اول)،

میدان جابه‌جایی برای استوانه‌ی جدار ضخیم در حالت متقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} U_x = u(x) + \phi(x)z \\ U_\theta = 0 \\ U_z = w(x) + \psi(x)z \end{cases} \quad (۶-۲)$$

همچنین مقادیر کرنش‌ها بر اساس روابط سینماتیک در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = \frac{du}{dx} + \frac{d\phi}{dx} z \\ \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r} = \frac{w}{R+z} + \frac{\psi}{R+z} z \\ \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \psi \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = \left(\phi + \frac{dw}{dx} \right) + \frac{d\psi}{dx} z \end{cases} \quad (۷-۲)$$

بر اساس روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد تنش‌ها بر حسب مقادیر کرنش عبارتند از:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{matrix} \right\} = \frac{E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{matrix} \right\} \\ \tau_{xz} = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \end{cases} \quad (8-2)$$

با تعریف پارامتر جدید λ برای خلاصه‌نویسی داریم:

$$\begin{cases} \sigma_i = \lambda E(r) [(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k)] \\ \tau_{xz} = \frac{1-2\nu}{2} \lambda E(r) \gamma_{xz} \\ \lambda = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (9-2)$$

نیروهای محوری بر حسب منته‌های تنش برابرند با:

$$\begin{cases} N_x \\ N_\theta \\ N_z \end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{cases} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{cases} dz \quad (10-2)$$

لنگرهای خمشی بر حسب منته‌های تنش برابرند با:

$$\begin{cases} M_x \\ M_\theta \\ M_z \end{cases} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{cases} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \end{cases} z dz \quad (11-2)$$

نیروی برشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$Q_x = K \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (12-2)$$

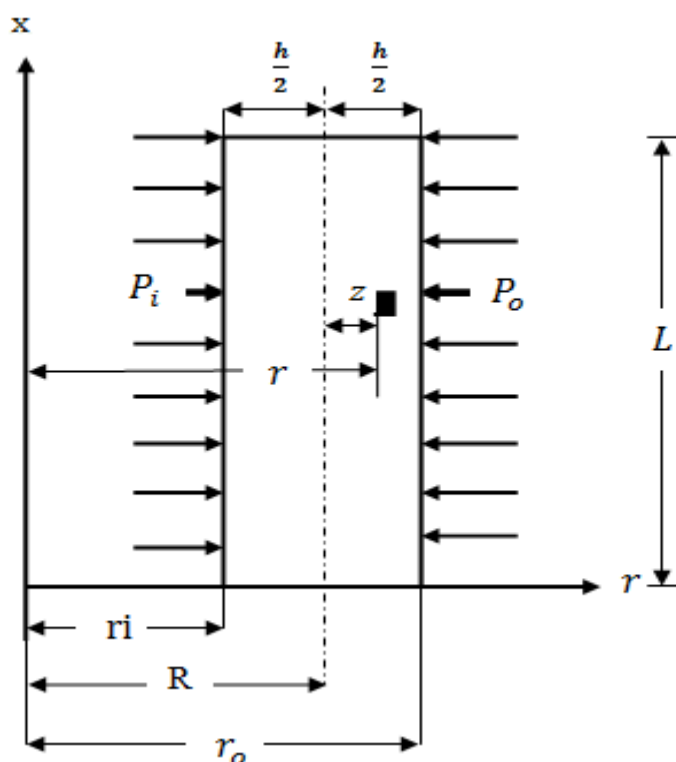
و لنگر پیچشی بر حسب تنش برشی برابر است با:

$$M_{xz} = K \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (13-2)$$

۳-۲ تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی را به صورت شکل (۲-۲) در نظر می‌-

گیریم:



ثابت تحت فشار داخلی و خارجی جدار استوانه‌ی شکل ۲-۲ پروفیل

بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \quad (۱۴-۲)$$

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \iiint_V U^* dV \\ dV &= r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* &= \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \\ &= \frac{1}{2} E(r) \lambda \left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta \varepsilon_z) + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xz}^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (15-2)$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی و خارجی:

$$\left\{ \begin{aligned} W &= \iint_S (\vec{f}_{sf} \cdot \vec{u}) dS \\ dS &= r d\theta dx = (R+z) dx d\theta \\ \Rightarrow W &= \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) U_z dx d\theta \end{aligned} \right. \quad (16-2)$$

و با انتگرالگیری در محدوده‌ی:

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (17-2)$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی

داریم:

$$\delta U = R \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \delta U^* \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx d\theta \quad (18-2)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) \delta U_z dx d\theta \quad (19-2)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^L \left[P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) - P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) \right] (\delta w + z \delta \psi) dx$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۷-۲) در روابط (۱۸-۲) و (۱۹-۲) و نیز بکارگیری اصول حساب

وردشی و اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای تحت فشار داخلی و خارجی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \quad (20-2)$$

$$\begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - RQ_x = 0 \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z = P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) \end{cases} \quad (21-2)$$

$$R [N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi]_0^L = 0 \quad (22-2)$$

روابط (21-2) همان معادلات اصلی ما را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (22-2) هم شرایط مرزی

مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در هر دو انتهای استوانه صفر باشند.

۲-۳-۱ توزیع ناهمگنی مدول الاستیسیته

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، مدول الاستیسیته E و ضریب پواسون ν توابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد \bar{r} می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع نمایی برای مدول الاستیسیته در طول جداره‌ی استوانه به صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد \bar{r} به صورت رابطه‌ی (2-23) خواهیم داشت:

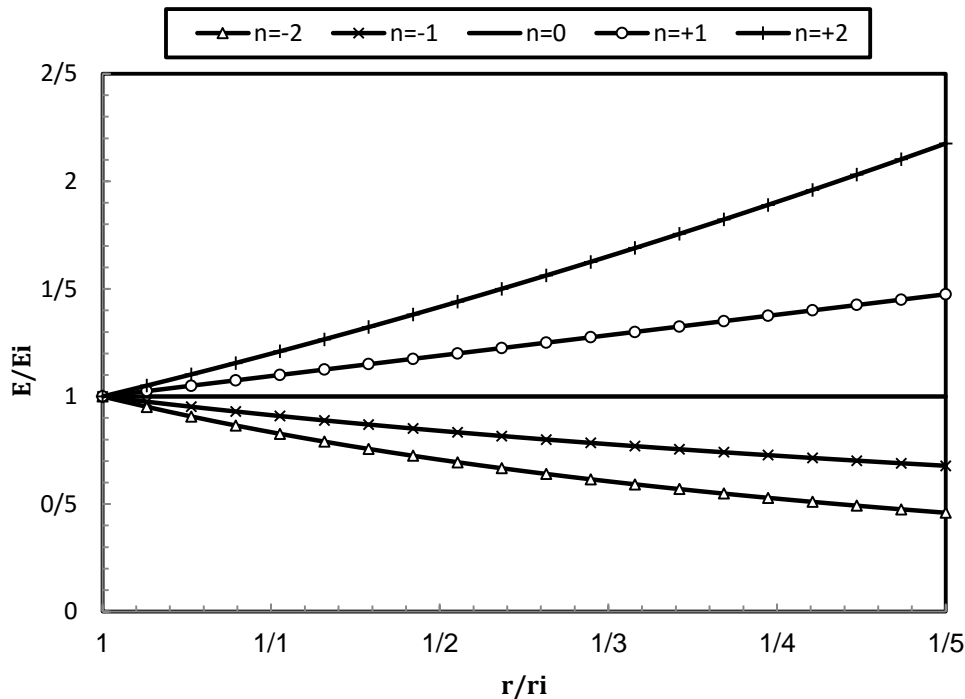
$$E(r) = E_i (\bar{r})^n \quad (23-2)$$

که در این رابطه $\bar{r} = r/r_i$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین E_i مدول الاستیسیته‌ی شعاع داخلی استوانه و n نیز ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که $n = 0$ همان ماده‌ی همگن است. با جایگذاری مقدار $r = R + z$ در رابطه‌ی (2-23) داریم:

$$E(z) = E_i \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n \quad (24-2)$$

شکل (2-3) توزیع مدول الاستیسیته‌ی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی

ناهمگن و همسانگرد به‌ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳ توزیع بی بعد مدول الاستیسیته در راستای شعاعی

معادلات (۲-۲۱) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می باشد. برای حل آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۲-۱۰) تا (۲-۱۳) به منتهی‌های تنش و با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۲۴) در روابط (۲-۹) و استفاده از روابط (۲-۹) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۲-۷) بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه ۴ معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به دست می‌آید که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \quad (۲-۲۶)$$

که در آن بردار مجهول $\{y\}$ شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی (۲-۲۷) می‌باشد:

$$\{y\} = \{u \ \phi \ w \ \psi\}^T \quad (۲-۲۷)$$

رابطه‌ی (۲-۲۸) نیز قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به صورت بردار نیروی $\{F\}$ را نشان می‌دهد.

$$\{F\} = \frac{1}{\lambda E_i} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (28-2)$$

در دستگاه معادلات (26-2) ماتریس‌های $[A]_{4 \times 4}$ و $[C]_{4 \times 4}$ متقارن و $[B]_{4 \times 4}$ پادمتقارن هستند که

در ادامه درایه‌های غیر صفر مربوط به آنها به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ آورده شده است:

$$A_{11} = (1-\nu)h \quad (29-2)$$

$$A_{22} = (1-\nu) \frac{h^3}{12} \quad (30-2)$$

$$A_{33} = \mu h \quad (31-2)$$

$$A_{44} = \mu \frac{h^3}{12} \quad (32-2)$$

$$A_{12} = A_{13} = A_{14} = A_{21} = A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = A_{42} = 0 \quad (33-2)$$

$$B_{13} = \nu\alpha = -B_{31} \quad (34-2)$$

$$B_{14} = 2h\nu - R\nu\alpha = -B_{41} \quad (35-2)$$

$$B_{23} = -\mu h + \nu(h - R\alpha) = -B_{32} \quad (36-2)$$

$$B_{24} = -\nu R(h - R\alpha) = -B_{42} \quad (37-2)$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = B_{33} = B_{34} = B_{43} = B_{44} = 0 \quad (38-2)$$

$$C_{22} = -\mu h \quad (39-2)$$

$$C_{33} = -(1-\nu)\beta \quad (40-2)$$

$$C_{34} = -\alpha + (1-\nu)R\beta = C_{43} \quad (41-2)$$

$$C_{44} = 2(R\alpha - h) - (1-\nu)R^2\beta \quad (42-2)$$

$$C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{21} = C_{23} = C_{24} = C_{31} = C_{32} = C_{41} = C_{42} = 0 \quad (43-2)$$

که پارامترهای μ, α, β به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu = K \left(\frac{1-2\nu}{2} \right) \quad (44-2)$$

$$\alpha = \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) \quad (45-2)$$

(۴۶-۲)

$$\beta = \left(\frac{h}{\left(R - \frac{h}{2}\right)\left(R + \frac{h}{2}\right)} \right)$$

K ضریب تصحیح برشی^۱ است که بسته به هندسه‌ی پوسته در عبارت تنش برشی وارد می‌شود. این

ضریب در حالت استاتیک برای استوانه $K = \frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است [۴۵].

۲-۳-۲ حل الاستیک استوانه تحت بارگذاری فشاری

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله‌ی (۲-۲۶) یک دستگاه ۴ معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به صورت ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$A \{y''''\} + B \{y''\} + C \{y\} = \{F\} \quad (۴۷-۲)$$

داریم:

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \quad (۴۸-۲)$$

برای حلّ عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\} = \{\xi\} e^{mx}$ را در معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx} [m^2 A + mB + C] \{\xi\} = \{0\} \quad (۴۹-۲)$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$|m^2 A + mB + C| = 0 \quad (۵۰-۲)$$

از حلّ معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه m_i محاسبه شده که به صورت سه جفت ریشه‌ی مزدوج حاصل می‌شوند. از این سه جفت ریشه، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر اعداد مختلط به صورت مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه حاصل در معادله‌ی (۲-۴۹)، بردارهای ویژه ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به دست می‌آیند. در نهایت حلّ عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^6 C_i \{\xi\}_i e^{m_i x} \quad (۵۱-۲)$$

1. Shear Correction Factor

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه مربوط به اعداد مختلط استفاده کرد [۴۶-۴۸].

برای حل خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۲-۲۶) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری با ضخامت ثابت و تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از x نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به دست آورد.

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \quad (۲-۵۲)$$

اما با توجه به معکوس ناپذیری (منفرد بودن) ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حل می‌شود. بدین منظور در اولین معادله از سری معادلات (۲-۲۱)، از طرفین آن انتگرال گیری کرده و خواهیم داشت:

$$RN_x = C_0 \quad (۲-۵۳)$$

همانطور که در معادلات (۲-۲۶) مشخص است، عبارت u وجود ندارد ولیکن du/dx در معادلات وجود دارد. با در نظر گرفتن du/dx به عنوان پارامتری جدیدی به نام v و انتگرال گیری از طرفین اولین معادله از سری معادلات داریم:

$$u = \int v dx + C_7 \quad (۲-۵۴)$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{v \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \end{cases} \quad (۲-۵۵)$$

که در آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرال‌گیری از طرفین اولین معادله، به صورت زیر می‌باشد:

$$\{F\} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \begin{Bmatrix} C_0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (56-2)$$

بنابراین با حل دستگاه معادلات فوق به صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مولفه‌های میدان جابه‌جایی را به دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۲-۲) توسط رابطه‌ی (۲۲-۲) بیان می‌شوند. به عبارتی باید مقادیر $\{u \ \phi \ w \ \psi\}$ و $\{N_x \ M_x \ Q_{xz} \ M_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته شوند که همواره رابطه‌ی (۲۲-۲) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول C_1, \dots, C_6 در جواب عمومی و ۲ ثابت C_0, C_7 در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به دست آوردن ثوابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مولفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۴۸-۲) بر حسب متغیرهای z, x به دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌ی (۶-۲) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به دست آورده و با استفاده از روابط (۷-۲) تا (۱۳-۲) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز محاسبه کرد.

۴-۲ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به دست آمده از نتایج حل تحلیلی، یک استوانه جدار ضخیم ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت مطابق شکل (۲-۲) به شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و توزیع نمایی مدول الاستیسیته را در نظر می‌گیریم. مدول الاستیسیته در سطح داخلی استوانه برابر $E_i = 200 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ را تحت سه حالت بارگذاری زیر در نظر می‌گیریم:

$$1- \text{ فشار یکنواخت داخلی } P_i = 80 \text{ MPa}$$

$$2- \text{ فشار یکنواخت خارجی } P_o = 80 \text{ MPa}$$

۳- فشار یکنواخت داخلی $P_i = 8 \text{ MPa}$ و خارجی $P_o = 8 \text{ MPa}$

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی (الف) دوسر گیردار و (ب) یک‌سر گیردار-یک سر آزاد انجام شده است. حل تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 11 صورت گرفته است [۴۹].

۲-۴-۱ استوانه‌ی دوسر گیردار

برای شرایط مرزی دوسر گیردار با توجه به رابطه‌ی (۲-۲۲) داریم:

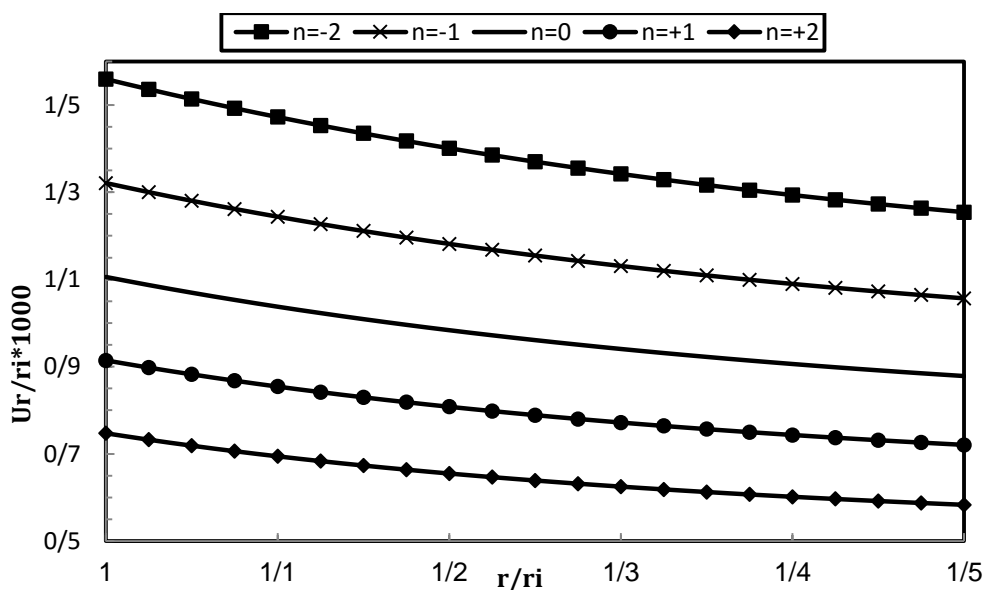
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \end{cases} \quad (2-57)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در شکل‌های (۲-۴) تا (۲-۶) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای n های مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه برای حالت دوسر گیردار نشان داده شده است.

همانطور که مشخص است به ازای n های منفی جابه‌جایی استوانه نسبت به ماده‌ی همگن از نظر مقدار بیشتر است و به ازای n های مثبت کمتر می‌باشد، ولیکن این نسبت در استوانه تحت فشار داخلی و تحت فشار خارجی در طول جداره تقریباً ثابت می‌ماند یعنی تغییرات جابه‌جایی در ماده‌ی ناهمگن مشابه تغییرات جابه‌جایی در ماده‌ی همگن است و میزان تفاوت به مقدار $|n|$ بستگی دارد. همچنین جابه‌جایی شعاعی استوانه برای فشار داخلی دارای مقادیر مثبت و در فشار خارجی دارای مقدار منفی می‌باشد. با توجه به حضور عبارات مربوط به فشار در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات (۲-۵۵)، جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز با استفاده از اصل جمع آثار^۱، از مجموع جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و تحت فشار خارجی به دست می‌آید. با توجه به شکل (۲-۶) می‌توان دریافت که اثر فشار خارجی بر فشار داخلی غلبه می‌کند یعنی به ازای n های مختلف جابه‌جایی شعاعی دارای مقادیر منفی می‌باشد. در این

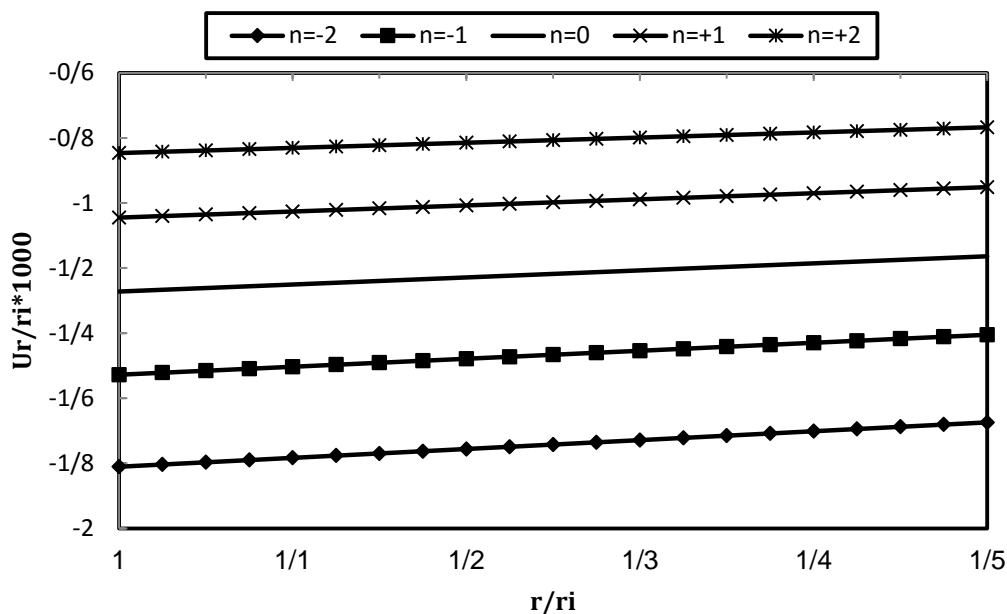
1. Superposition

نوع بارگذاری نیز به ازای n های منفی جابه‌جایی استوانه نسبت به ماده‌ی همگن از نظر مقدار بیشتر و به ازای n های مثبت کمتر می‌باشد. همچنین نسبت جابه‌جایی شعاعی به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی ثابت نمانده و در لایه‌ی خارجی نسبت به لایه‌ی داخلی دارای اختلاف بیشتری از ماده‌ی همگن می‌باشد.



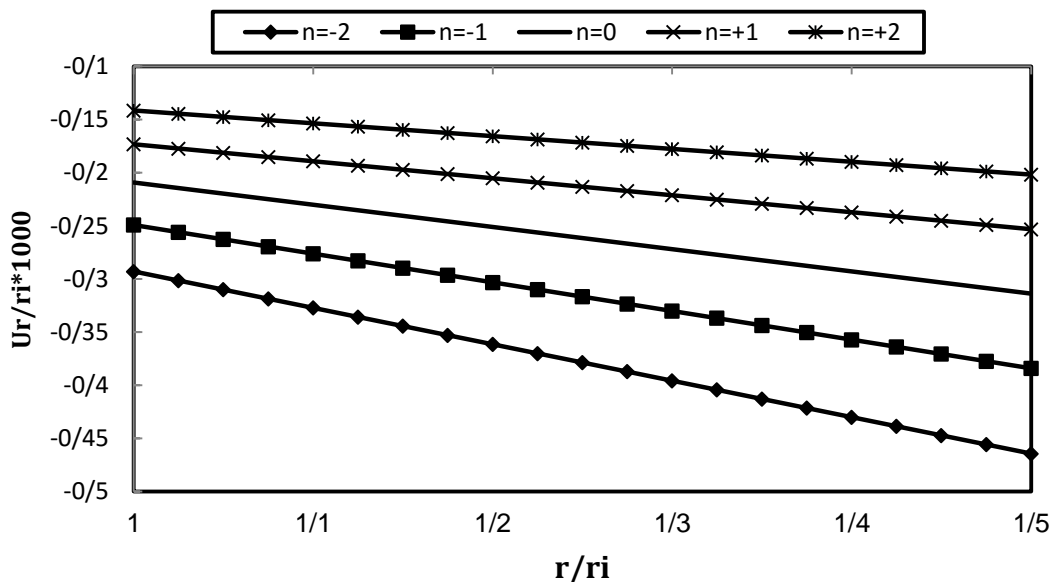
شکل ۲-۴ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در

برای حالت دوسر گیردار



شکل ۲-۵ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در

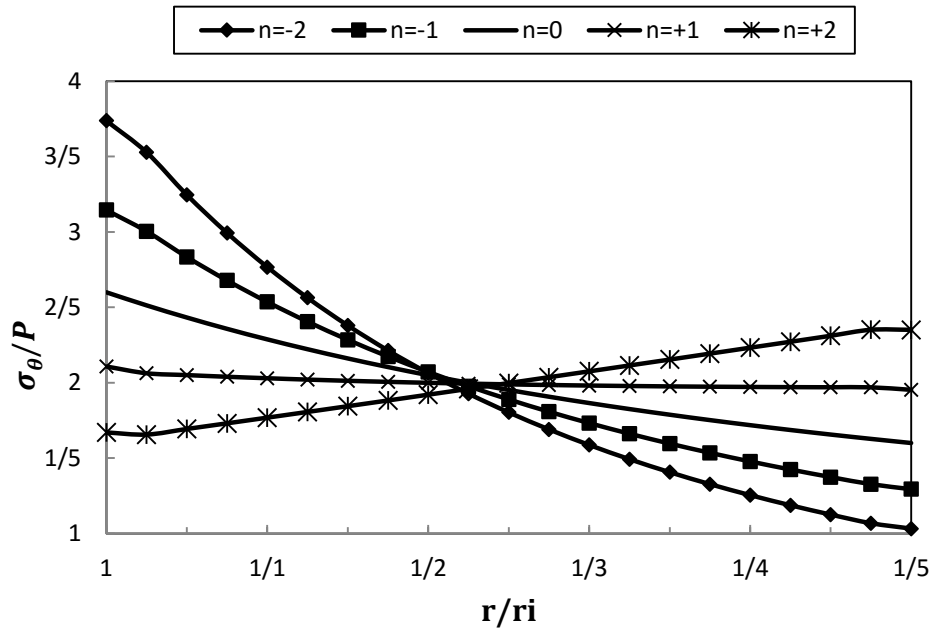
برای حالت دوسر گیردار



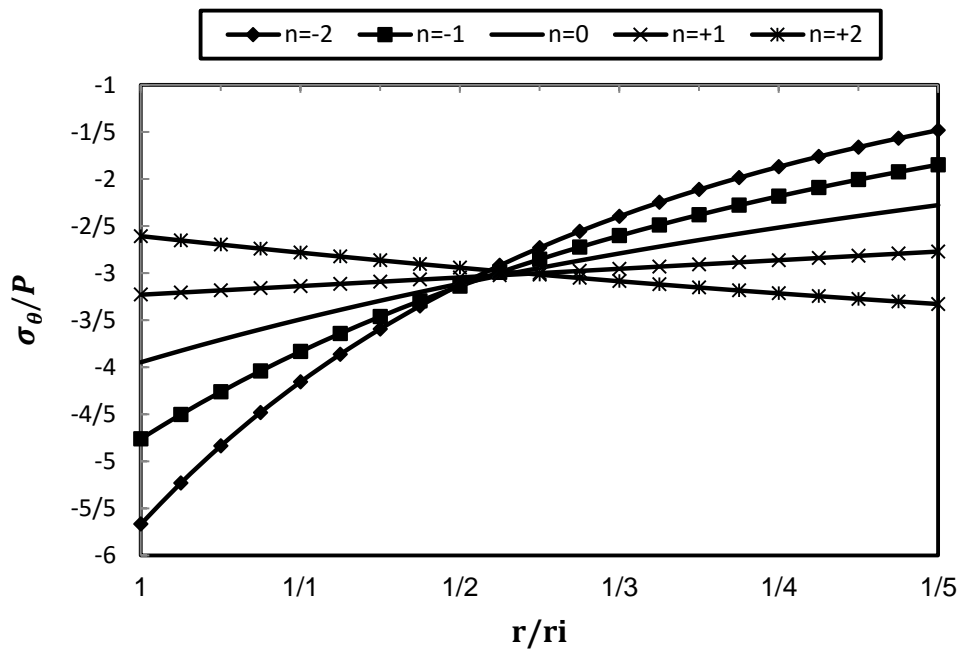
شکل ۲-۶ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در

برای حالت دوسر گیردار

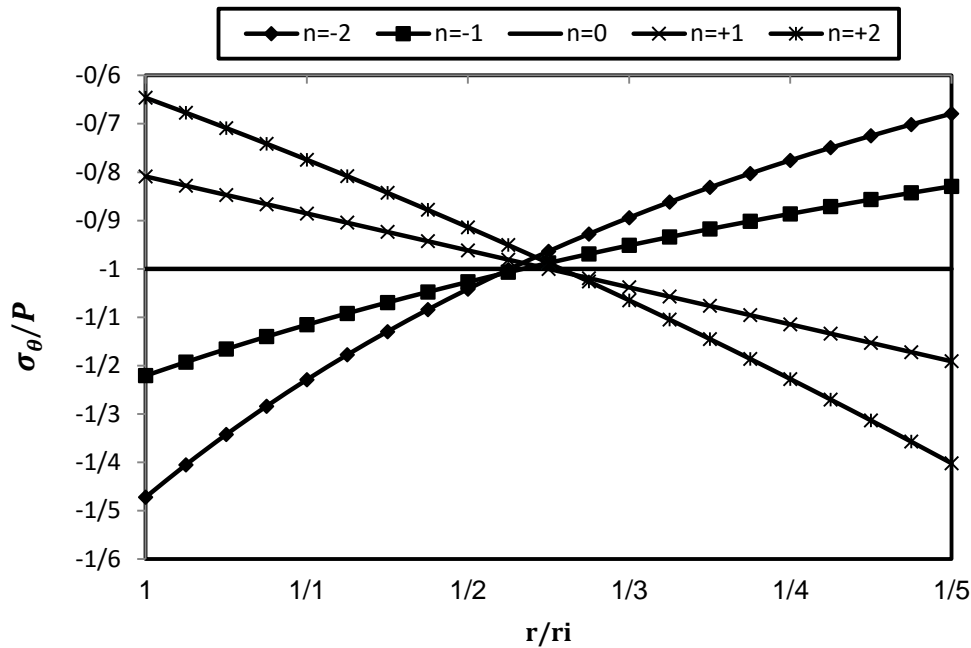
شکل‌های (۲-۷) تا (۲-۹) نیز توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه برای حالت دوسر گیردار نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است تنش محیطی استوانه تحت فشار داخلی مثبت و برای فشار خارجی دارای مقادیر منفی می‌باشد. در استوانه تحت فشار داخلی، تنش محیطی به ازای n های منفی در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، کمتر از ماده‌ی همگن می‌باشد و به ازای n های مثبت برعکس در نیمه‌ی داخلی جداره، کمتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، بیشتر از ماده‌ی همگن است. استوانه تحت فشار خارجی نیز با توجه به منفی بوده تنش محیطی، رفتار مشابهی با استوانه تحت فشار داخلی از نظر مقدار تنش محیطی به ازای n های مختلف در طول جداره از خود نشان می‌دهد. تنش محیطی برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز با استفاده از اصل جمع آثار، از مجموع تنش‌های محیطی حاصل از فشار داخلی و فشار خارجی حاصل می‌شود که فشار خارجی اثر غالب را داشته و سبب منفی شدن تنش محیطی می‌شود. در این بارگذاری نیز تنش محیطی برای n های منفی در نیمه‌ی داخلی جداره، از نظر مقدار بیشتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، کمتر از ماده‌ی همگن می‌باشد و به ازای n های مثبت برعکس در نیمه‌ی داخلی جداره، از نظر مقدار کمتر از ماده‌ی همگن و در نیمه‌ی خارجی جداره، بیشتر از ماده‌ی همگن می‌باشد. مشخص است که تنش محیطی مربوط به استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی و خارجی برابر مقدار ثابت ۱- می‌باشد. در محدوده‌ی لایه‌ی میانی استوانه، رفتار تنش محیطی ماده‌ی ناهمگن همانند رفتار ماده‌ی همگن می‌باشد. در نیمه‌ی داخلی استوانه مقادیر n مثبت و در نیمه‌ی خارجی مقادیر n منفی سبب کاهش تنش شده که با توجه به بزرگتر بودن تنش در لایه‌ی داخلی، استفاده از مواد ناهمگن با n های مثبت مناسب‌تر می‌باشد. در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز به دلیل اینکه تنش محیطی لایه‌ی داخلی و خارجی به ازای ثوابت ناهمگنی مثبت و منفی دارای مقادیر تقریباً یکسانی می‌باشند، استفاده از ماده‌ی همگن با توجه به ایجاد تنش ثابت در طول جداره‌ی استوانه توصیه می‌شود.



شکل ۷-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در
برای حالت دوسر گیردار



شکل ۸-۲ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در
برای حالت دوسر گیردار

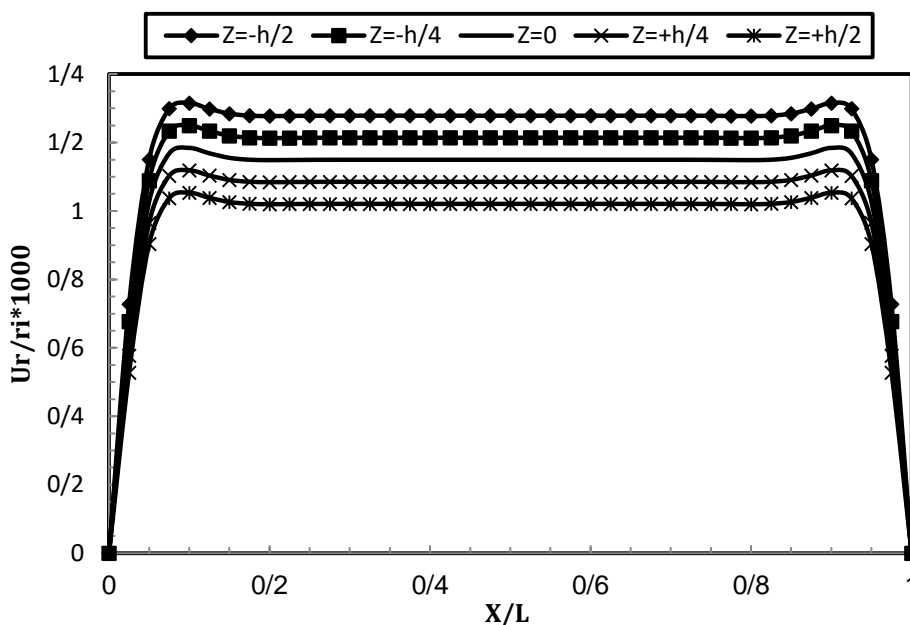


شکل ۲-۹ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در $x=L/2$

برای حالت دوسر گیردار

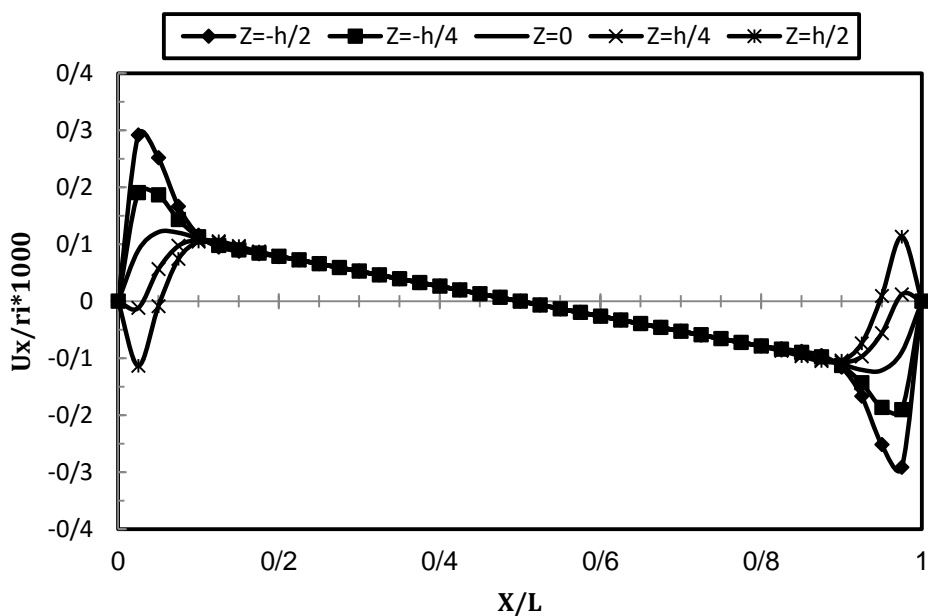
شکل‌های (۲-۱۰) تا (۲-۲۱) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را در راستای طول استوانه به‌ازای $n=(-1)$ در پنج لایه‌ی مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه برای حالت دوسر گیردار نشان می‌دهد. مقادیر جابه‌جایی و تنش محیطی برای استوانه تحت فشار داخلی و تحت فشار خارجی، از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی از نظر مقدار کاهش می‌یابد. تنش محیطی در نقاط اطراف مرز و در لایه‌های نزدیک به لایه‌ی خارجی برای استوانه تحت فشار داخلی دارای مقادیر منفی و برای استوانه تحت فشار خارجی دارای مقادیر مثبت می‌باشد. تنش محیطی در بقیه‌ی نقاط و جابه‌جایی شعاعی در کلیه‌ی نقاط استوانه تحت فشار داخلی مثبت و برای استوانه تحت فشار خارجی منفی می‌باشند؛ با توجه به این نکته و بزرگتر بودن مقادیر تنش و جابه‌جایی استوانه تحت فشار خارجی نسبت به استوانه تحت فشار داخلی، استفاده از اصل جمع آثار منجر به مقادیر جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی منفی برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی می‌شود. برآیند دو فشار داخلی و خارجی سبب می‌شود که جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی

خارجی از نظر مقدار کاهش یابد درحالیکه جابه‌جایی محوری همانند دو بارگذاری دیگر دارای حداکثر مقدار خود در لایه‌ی داخلی می‌باشد. با فاصله گرفتن از دو انتهای استوانه، جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در هر لایه دارای مقادیر ثابتی در طول پوسته‌ی استوانه‌ای می‌باشند. جابه‌جایی محوری برای نقاط دور از مرز در لایه‌های مختلف تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند؛ در حالیکه در نقاط اطراف دو انتهای استوانه، عکس این پدیده صادق است. تنش برشی در طول استوانه به غیر از نزدیکی دو انتهای آن، دارای مقادیر صفر می‌باشد. این امر نشان می‌دهد که تنش برشی در نزدیکی مرزهای انتهایی استوانه تحت تأثیر شرایط مرزی به وجود می‌آید. در استوانه تحت فشار داخلی تنش برشی در لایه‌ی داخلی دارای بیشترین مقدار است که در اطراف مرز $x=0$ تنش برشی مثبت و در نزدیکی مرز $x=L$ مقدار منفی ایجاد می‌شود؛ در حالیکه در استوانه تحت فشار خارجی تنش برشی در لایه‌ی خارجی بیشترین مقدار را دارا بوده و نزدیکی مرز $x=0$ دارای تنش برشی منفی و مرز $x=L$ دارای مقدار مثبت می‌باشد. همچنین در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی مقادیر تنش برشی در اطراف مرز $x=0$ برای لایه‌های نیمه‌ی خارجی و بخشی از نیمه‌ی داخلی منفی و برای لایه‌های نزدیک به لایه‌ی داخلی مثبت می‌باشند. در اطراف مرز $x=L$ عکس این پدیده اتفاق می‌افتد.



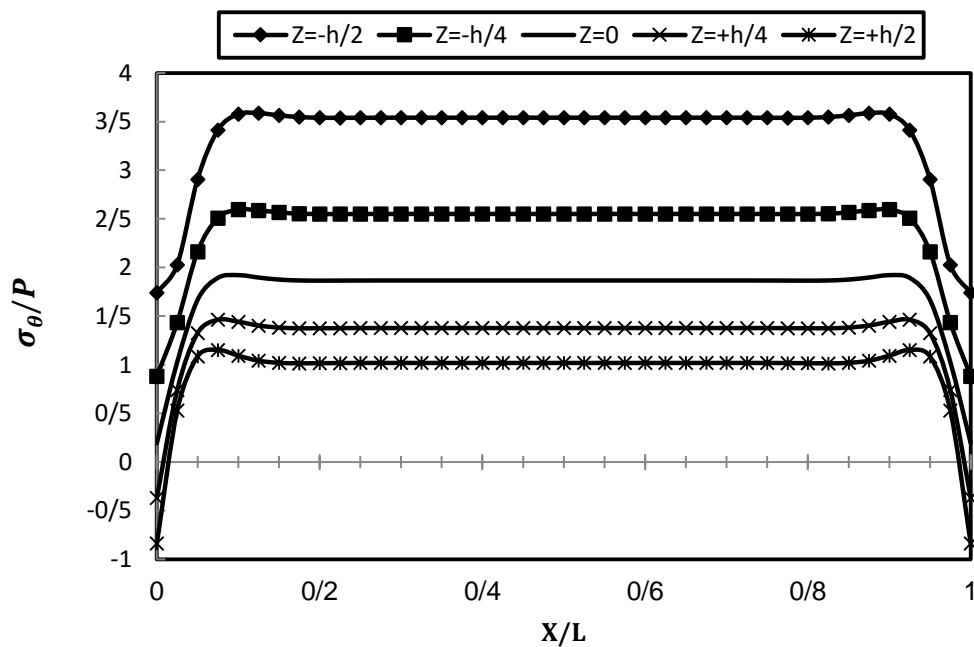
شکل ۲-۱۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی

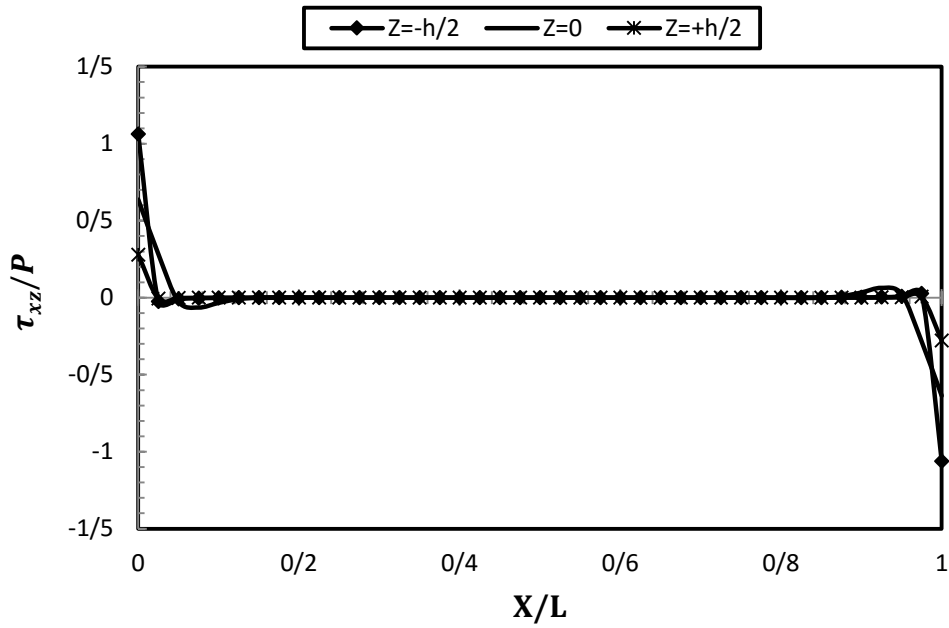


شکل ۲-۱۱ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

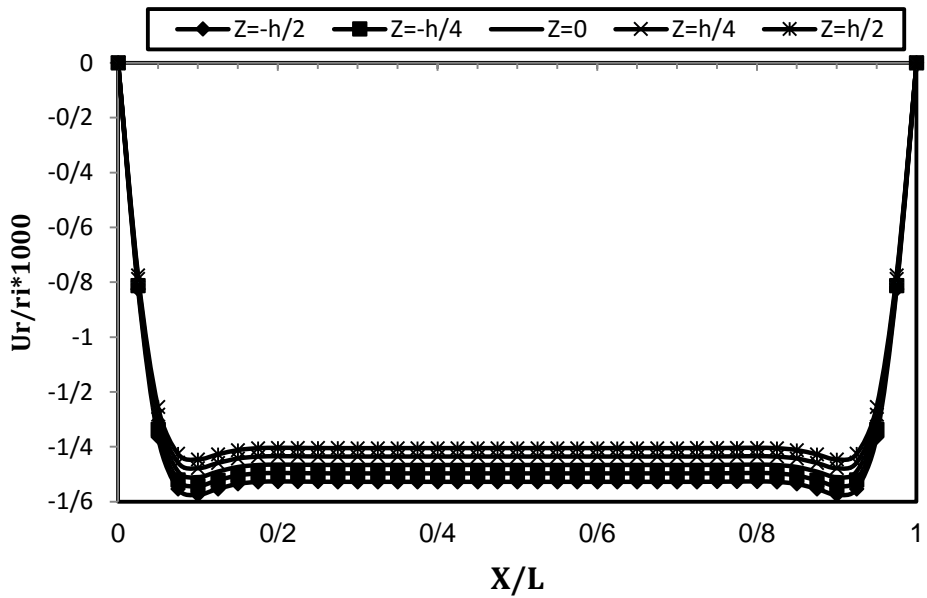
برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



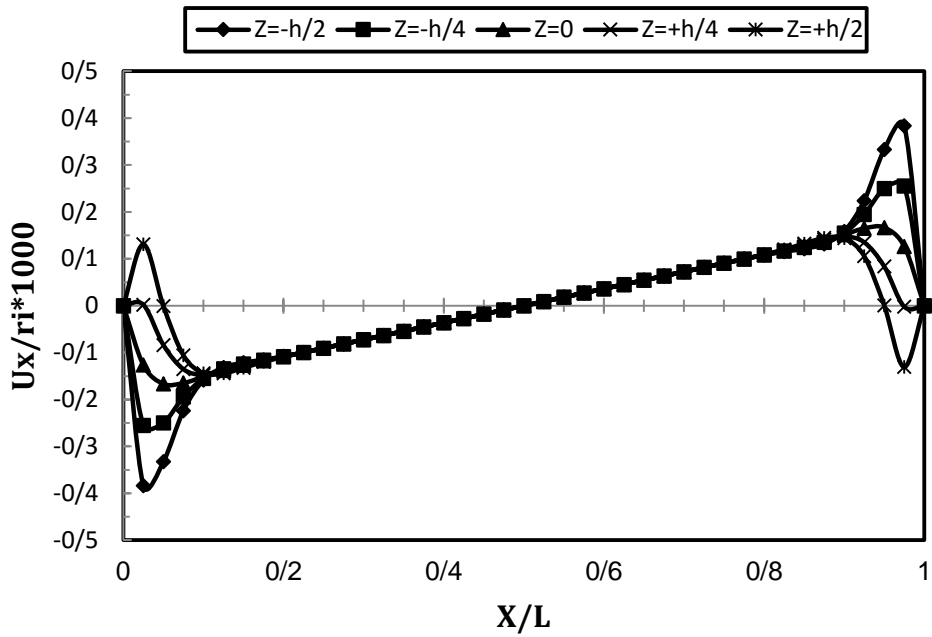
شکل ۲-۱۲ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی
 برای حالت دوسر گیردار ($n=1$) به ازای ثابت ناهمگنی



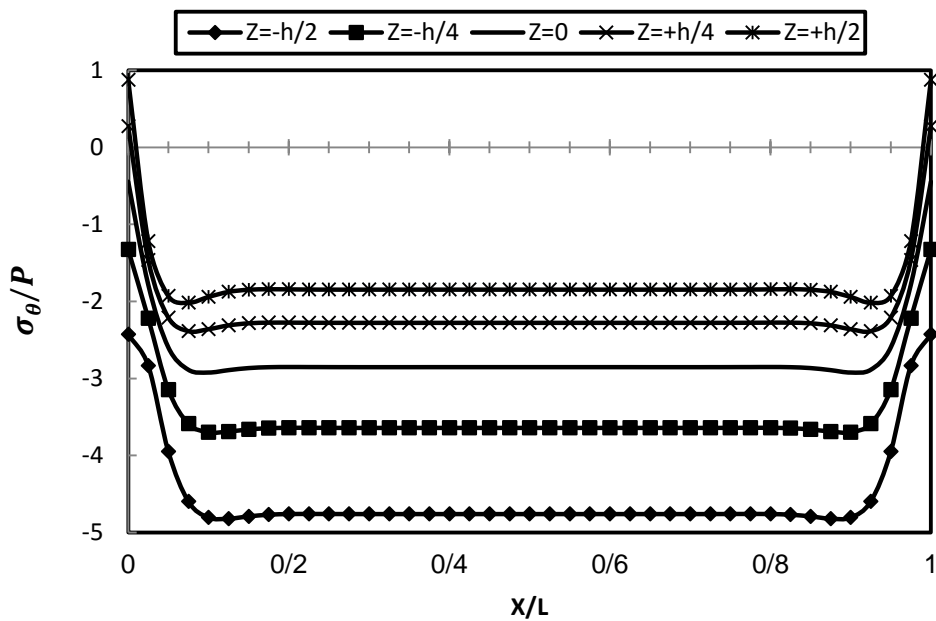
شکل ۲-۱۳ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی
 برای حالت دوسر گیردار ($n=1$) به ازای ثابت ناهمگنی



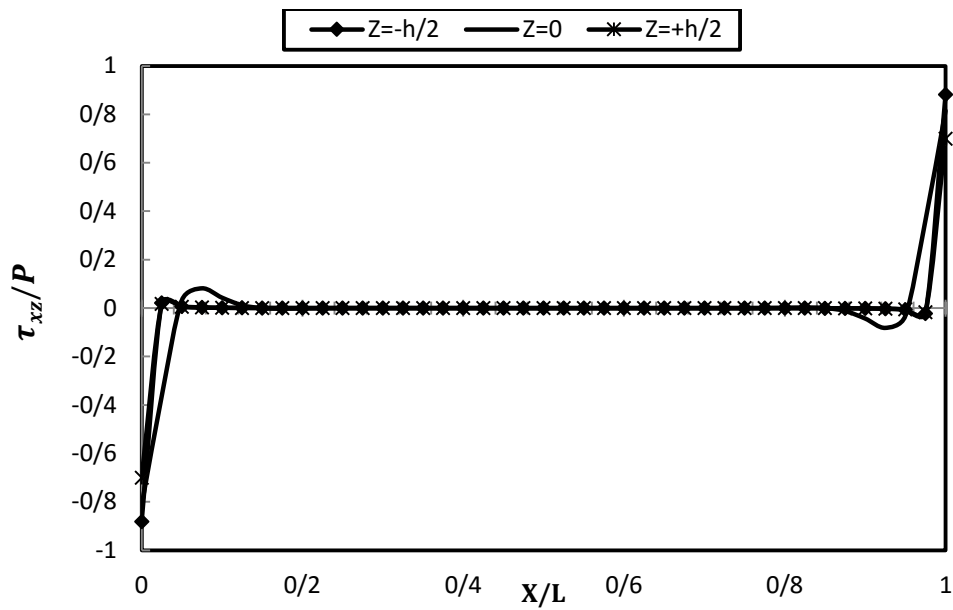
شکل ۲-۱۴ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی
 برای حالت دوسر گیردار ($n=1$) به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۲-۱۵ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی

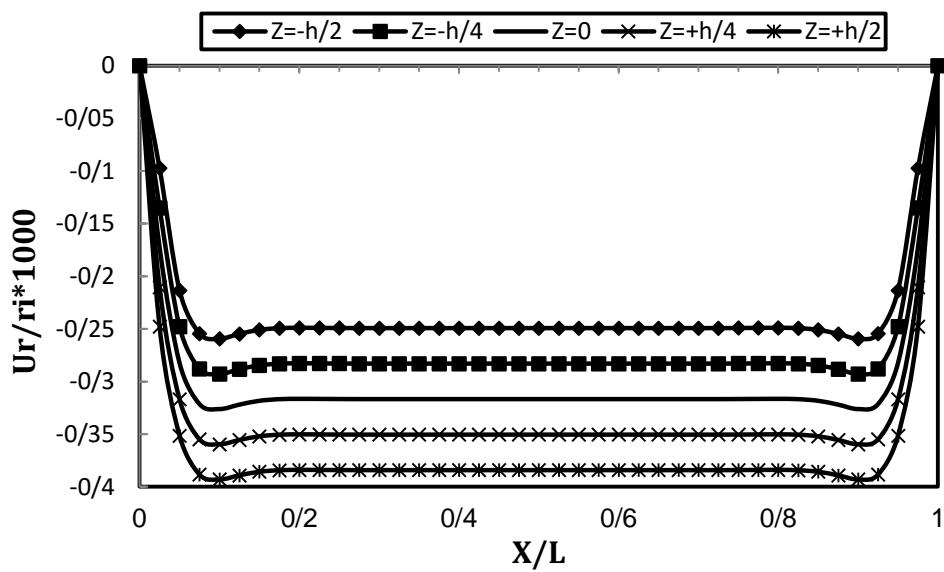


شکل ۲-۱۶ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



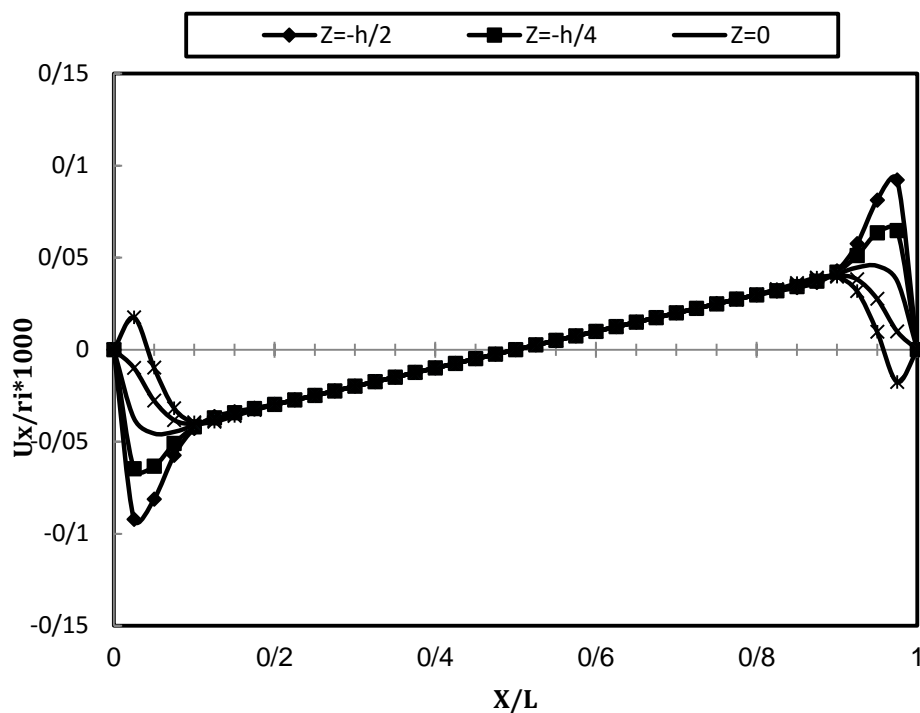
شکل ۲-۱۷ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی

برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



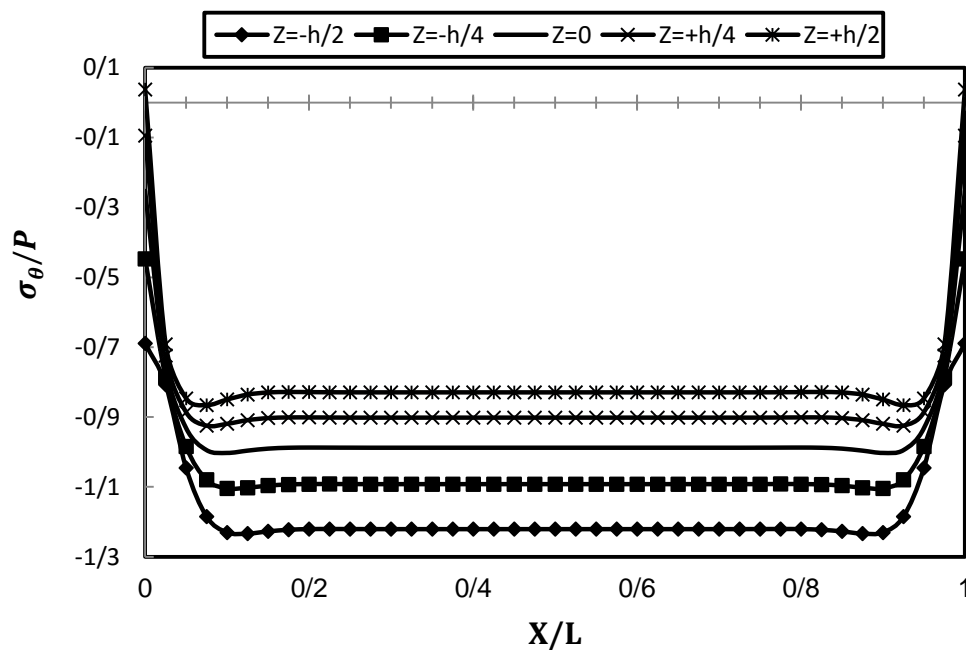
شکل ۲-۱۸ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



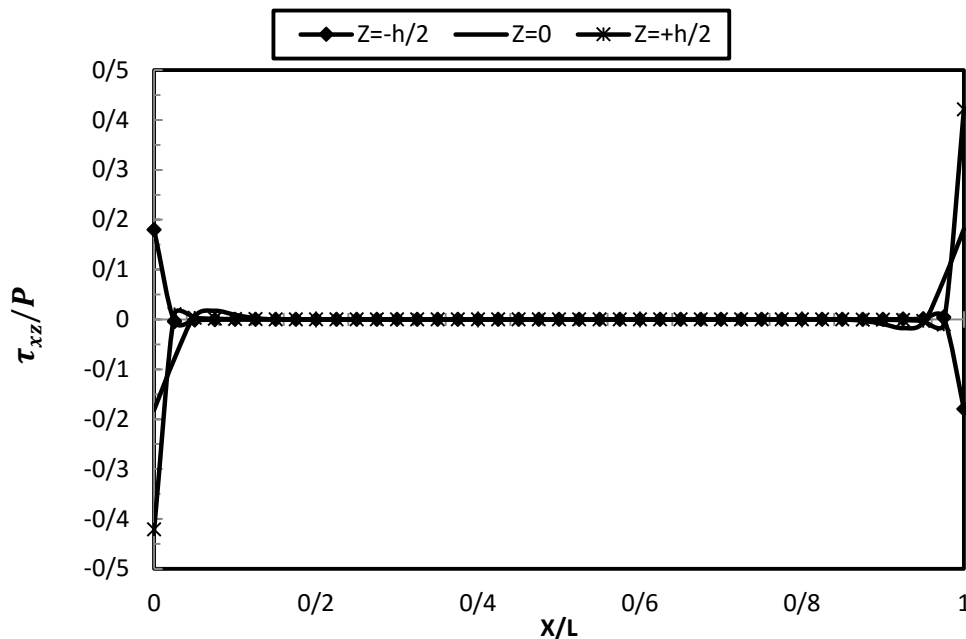
شکل ۲-۱۹ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۲۰-۲ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

برای حالت دوسر گیردار ($n=1$) به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۲۱-۲ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

برای حالت دوسر گیردار ($n=1$) به ازای ثابت ناهمگنی

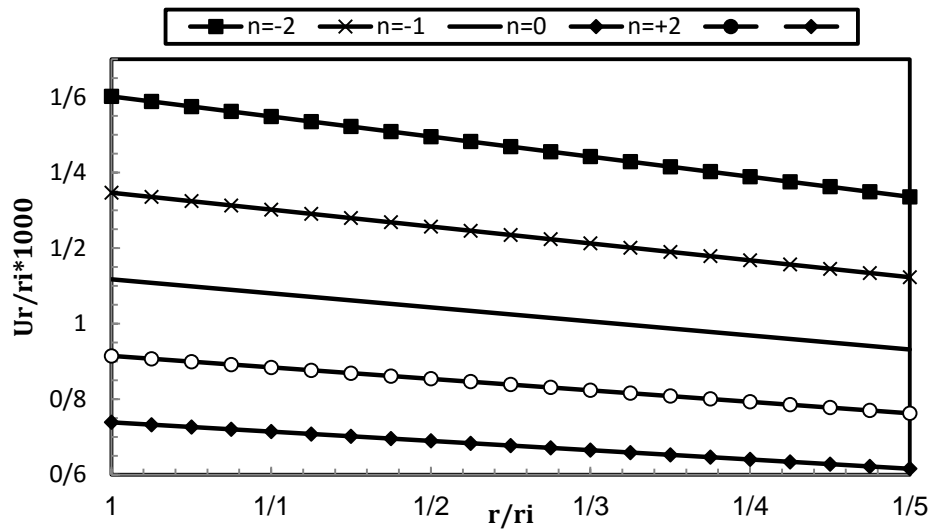
۲-۴-۲ استوانه‌ی یکسر گیردار - یکسر آزاد

برای شرایط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد با توجه به رابطه‌ی (۲۲-۲) داریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow N_x=0, M_x=0, Q_{xz}=0, M_{xz}=0 \end{cases} \quad (2-58)$$

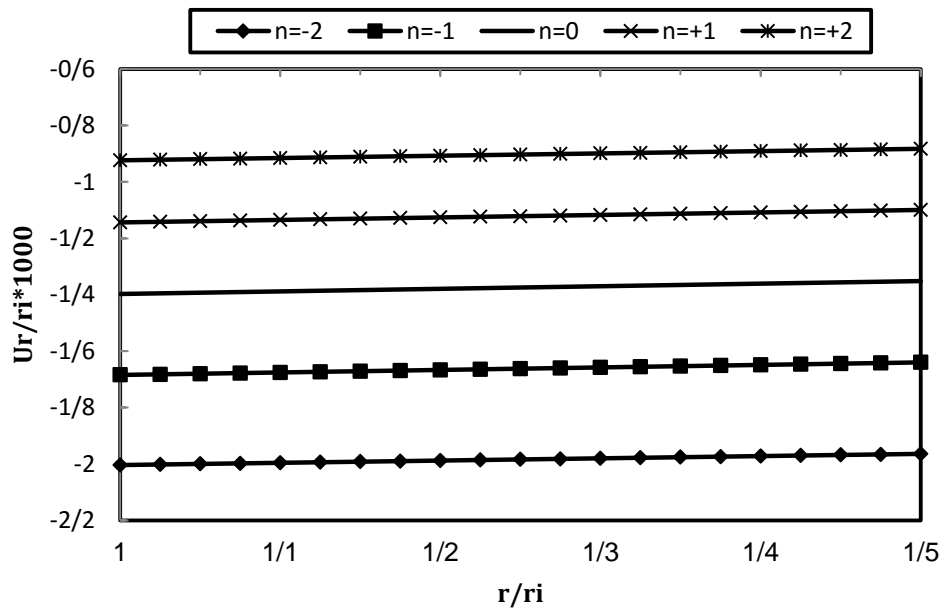
با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در شکل‌های (۲۲-۲) تا (۲۴-۲) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای n های مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که مقادیر جابه‌جایی شعاعی در وسط استوانه برای حالت یکسر گیردار - یکسر آزاد اختلاف اندکی نسبت به حالت دوسر گیردار دارد. در واقع عدم وجود قید در انتهای آزاد استوانه سبب افزایش جابه‌جایی از نظر مقدار می‌شود؛ یعنی

مقادیر جابه‌جایی شعاعی منفی مربوط به استوانه تحت فشار خارجی برای شرایط انتهایی یک‌سر گیردار -
یک‌سر آزاد نسبت به شرایط انتهایی دوسر گیردار از نظر مقدار افزایش می‌یابد ولی در رفتار استوانه تغییری
ایجاد نمی‌کند. برای استوانه تحت فشار داخلی و نیز استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز همین مطلب
صادق است.



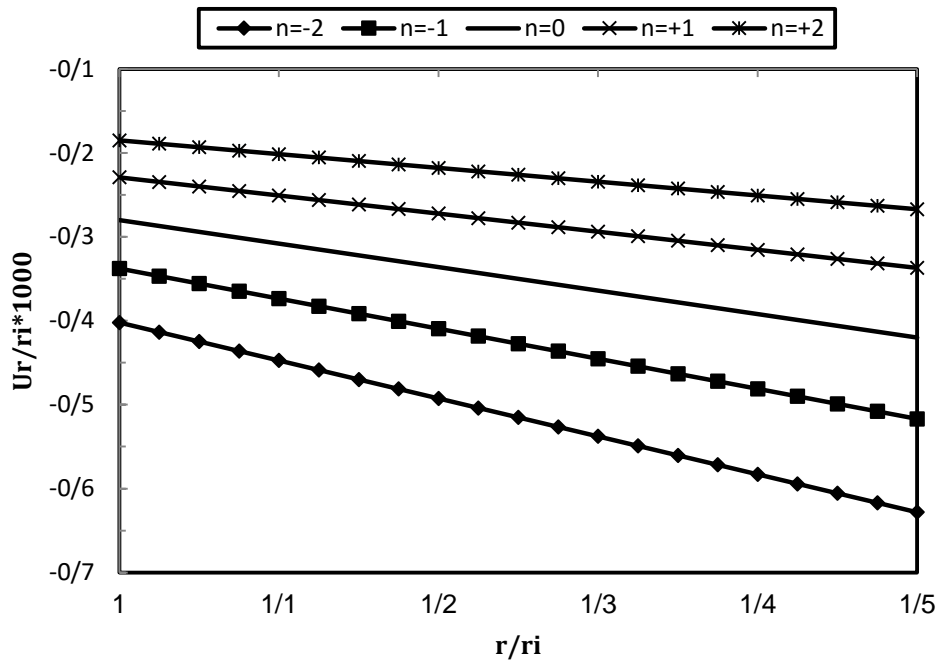
شکل ۲۲-۲ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$ برای حالت یک-

سر گیردار-یک‌سر آزاد



شکل ۲۳-۲ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$ برای حالت

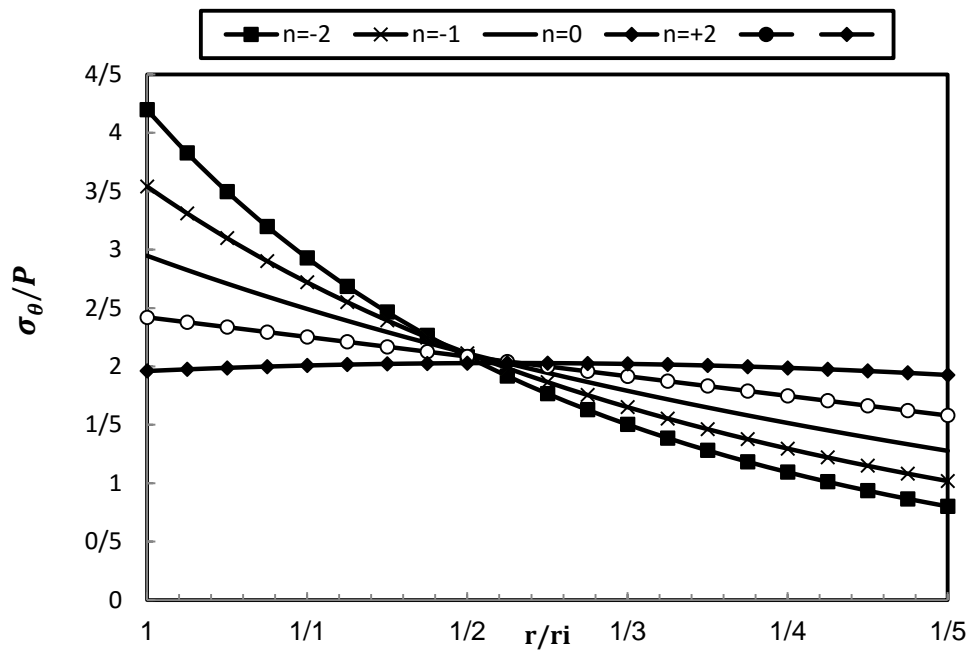
یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد



شکل ۲-۲۴ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در

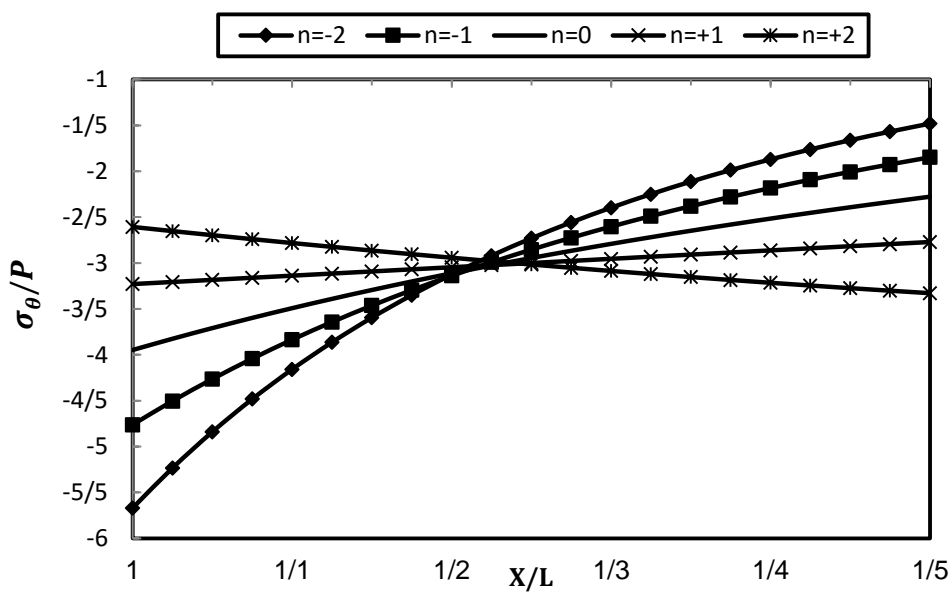
برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد

شکل‌های (۲-۲۵) تا (۲-۲۷) نیز توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه را برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد نشان می‌دهد. مشخص است که تنش‌های محیطی برای شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد نسبت به حالت دوسر گیردار اختلاف قابل ملاحظه‌ای نداشته و رفتار مشابهی نشان می‌دهند.



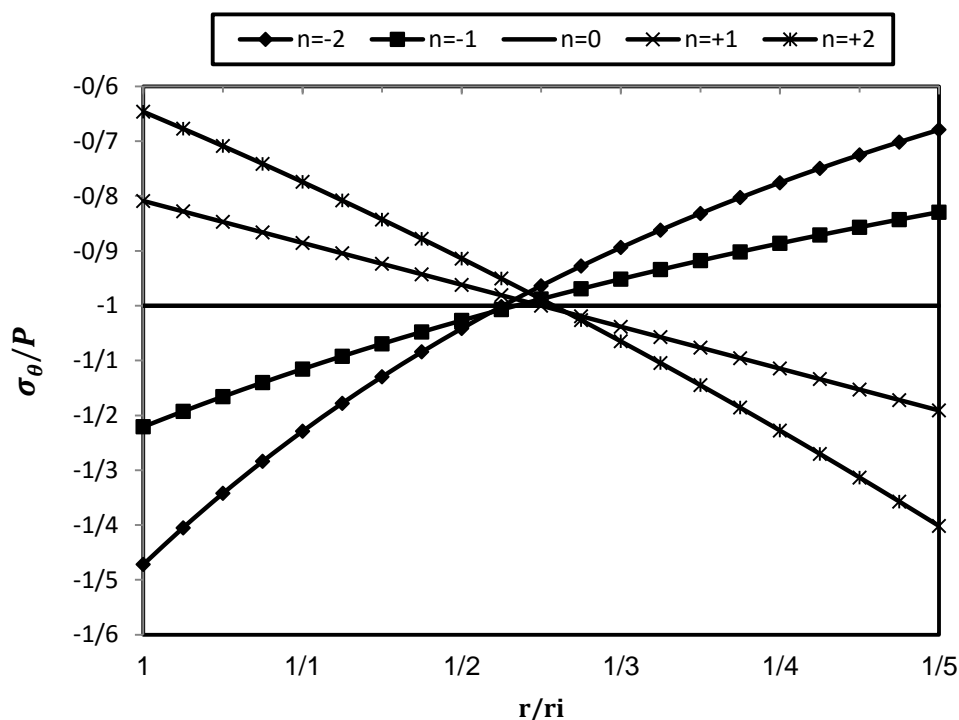
شکل ۲-۲۵ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی در $x=L/2$

برای حالت یکسر گیردار-یکسر آزاد



شکل ۲-۲۶ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی در $x=L/2$

برای حالت یکسر گیردار-یکسر آزاد

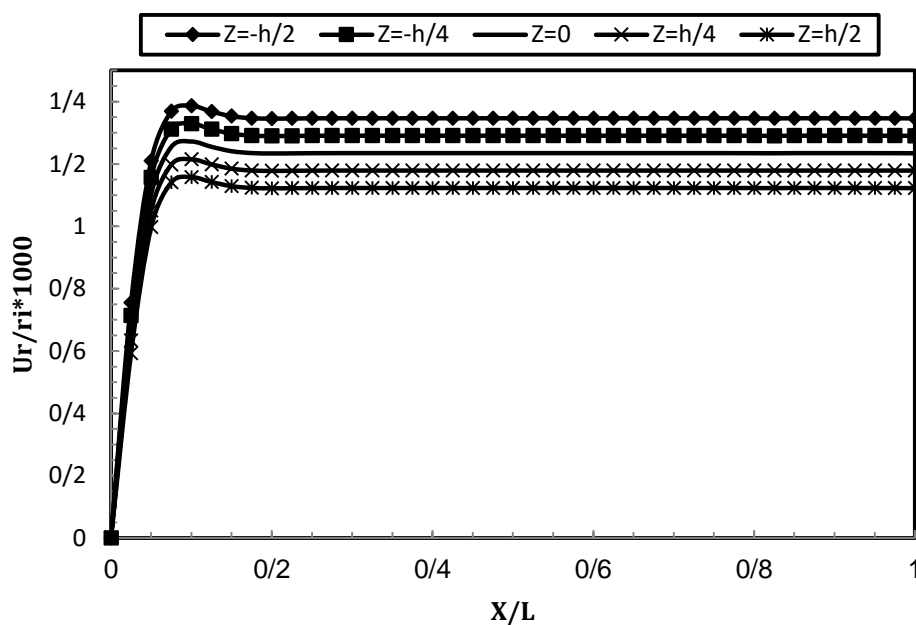


شکل ۲-۲۷ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی در

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد

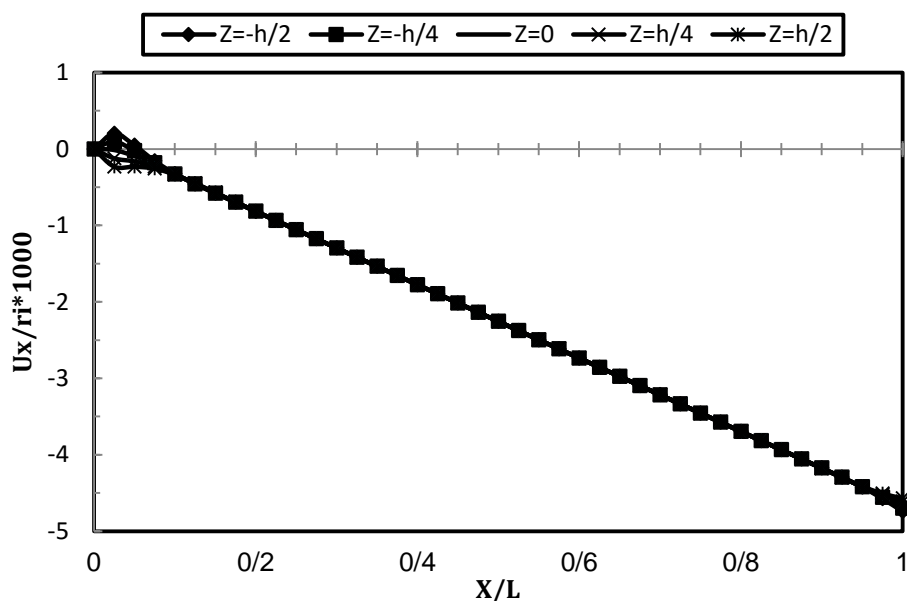
شکل‌های (۲-۲۸) تا (۲-۳۹) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را در راستای طول استوانه به ازای $n=(-1)$ در پنج لایه‌ی مختلف برای سه حالت بارگذاری ذکر شده نشان می‌دهد. جابه‌جایی شعاعی، تنش محیطی و تنش برشی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد، در طول استوانه تا نزدیکی انتهای آزاد آن و نیز در سمت گیردار استوانه مشابه شرایط دوسر گیردار می‌باشد. تئوری تغییر شکل برشی جابه‌جایی شعاعی در انتهای آزاد استوانه را تحت تأثیر تنش برشی اندک موجود در نزدیکی آن، دارای قلّه‌ای مشابه سمت گیردار (در فاصله‌ای کمتر از انتهای استوانه نسبت به سمت گیردار) نشان می‌دهد. تنش محیطی نیز به طور مشابه در سمت آزاد و در فاصله‌ای کمتر از انتهای استوانه در مقایسه با سمت گیردار نسبت به مقدار متوسط موجود در طول استوانه در هر لایه کاهش می‌یابد. رفتار جابه‌جایی محوری در انتهای گیردار استوانه همانند استوانه‌ی دوسر گیردار می‌باشد. جابه‌جایی محوری با اندکی فاصله از انتهای گیردار در طول استوانه تحت تأثیر قیود موجود در سمت گیردار آن برای

حالت فشار داخلی دارای مقادیر منفی و فشار خارجی دارای مقادیر مثبت می‌باشد که این مقادیر برای لایه-های مختلف یکسان می‌باشد. با توجه به این مطلب، جابه‌جایی محوری برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی که از برآیند جابه‌جایی‌های حاصل از فشار داخلی و فشار خارجی ایجاد می‌شود، به دلیل بزرگتر بودن مقادیر مثبت ناشی از فشار خارجی دارای مقدار مثبت یکسان برای تمام لایه‌ها می‌باشد. در انتهای آزاد استوانه مجدداً جابه‌جایی محوری لایه‌های مختلف با یکدیگر فاصله‌ی اندکی می‌گیرند. برای استوانه تحت فشار خارجی نیز به دلیل بالاتر بودن مقادیر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی و همچنین کمتر بودن تفاوت این مقادیر در لایه‌های مختلف، قله‌های ایجاد شده در توزیع جابه‌جایی شعاعی و کاهش تنش محیطی در سمت آزاد استوانه در نمودارها نامحسوس‌تر می‌باشد. در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی به دلیل ایجاد تنش برشی بسیار کم در سمت آزاد آن، جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی ایجاد شده در طول استوانه (در فاصله‌ی اندک از انتهای گیردار) تا انتهای استوانه برای هر لایه ادامه پیدا کرده و در رفتار آن تغییری ایجاد نمی‌شود.



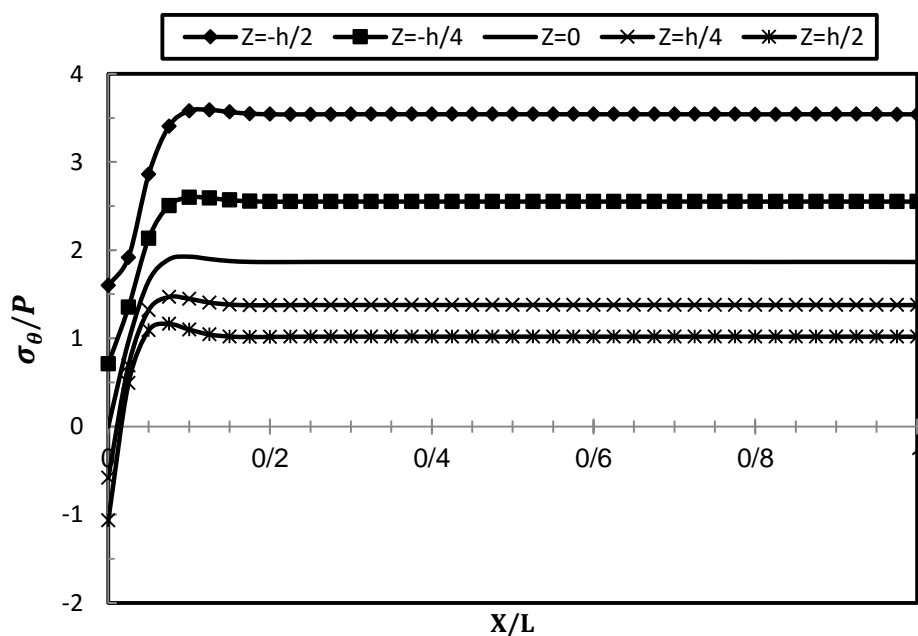
شکل ۲۸-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



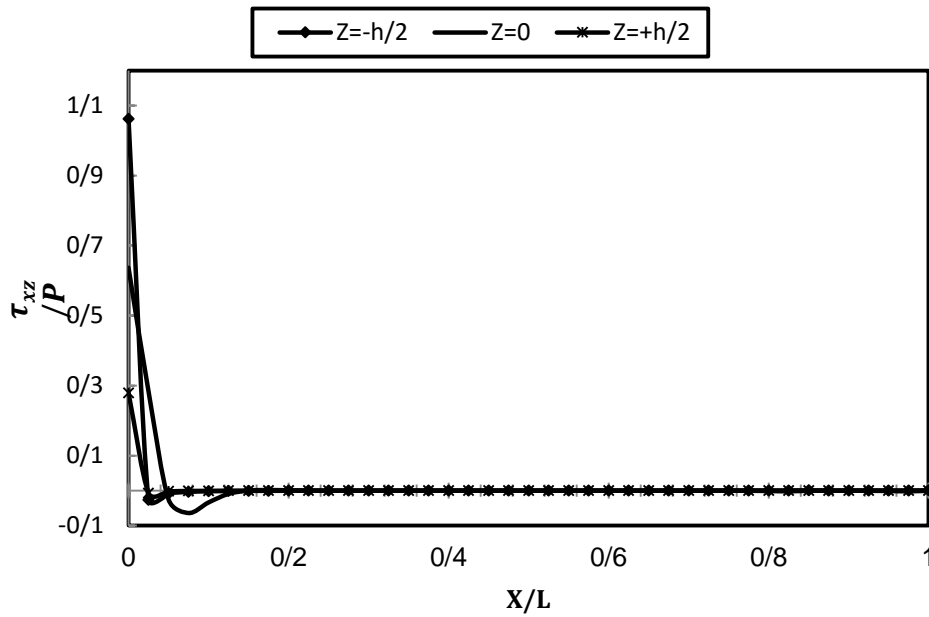
شکل ۲۹-۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



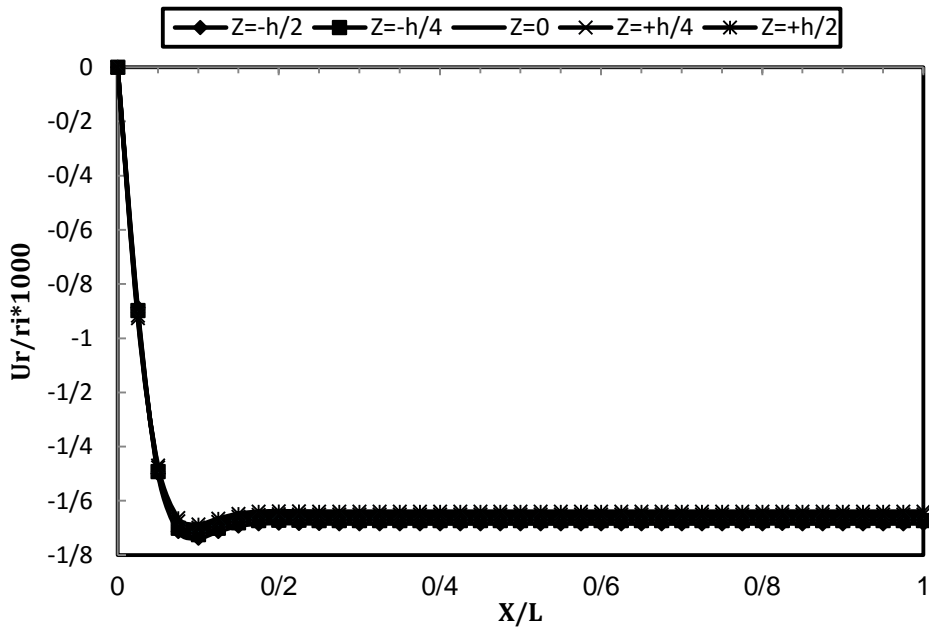
شکل ۲-۳۰ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



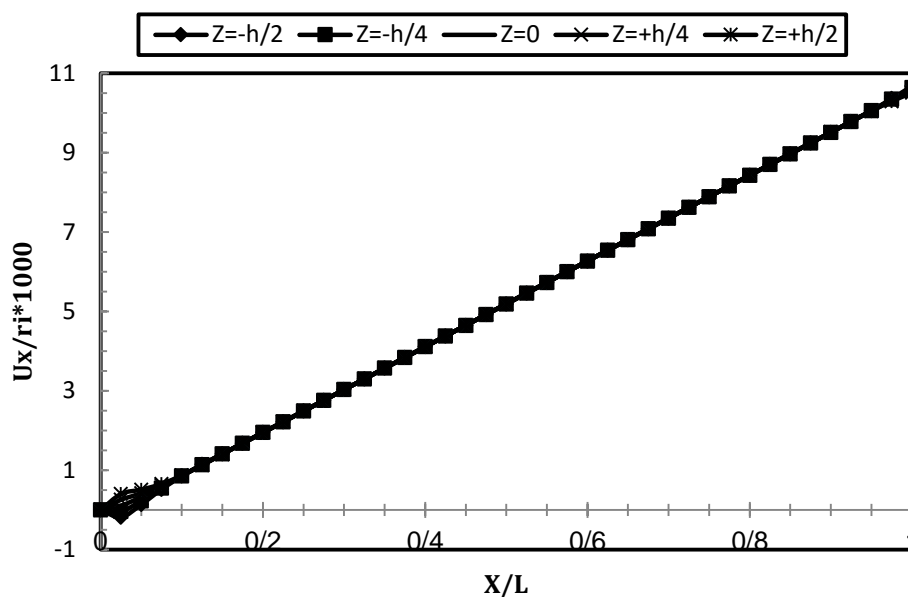
شکل ۲-۳۱ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



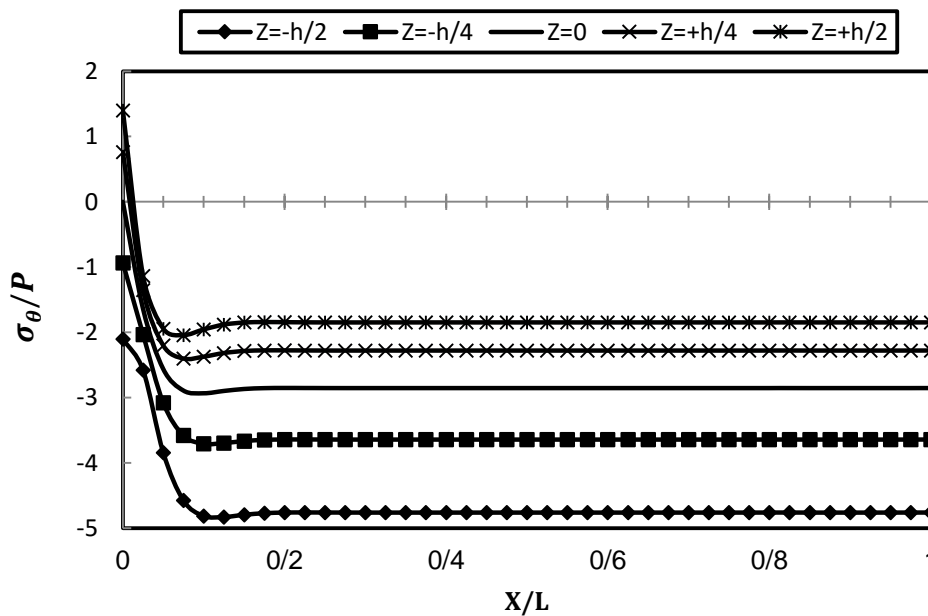
شکل ۲-۳۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



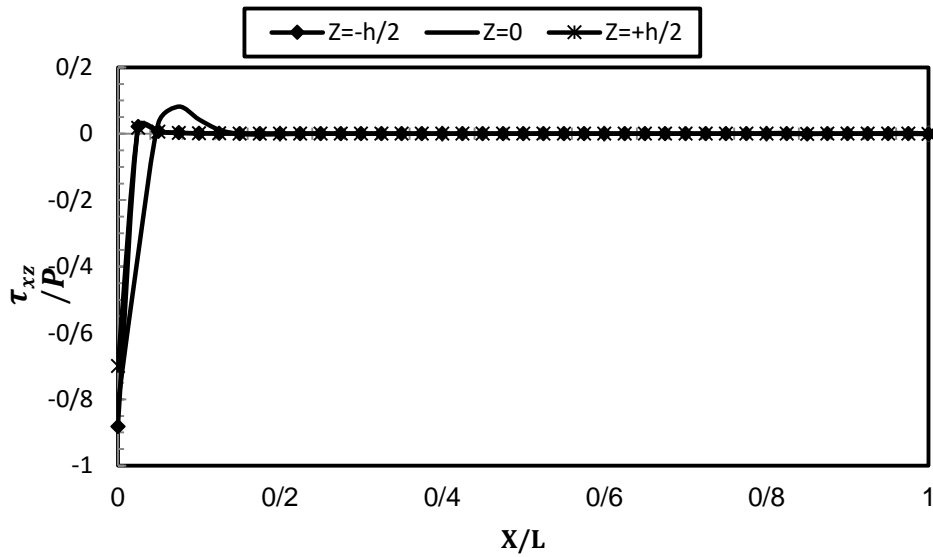
شکل ۲-۳۳ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



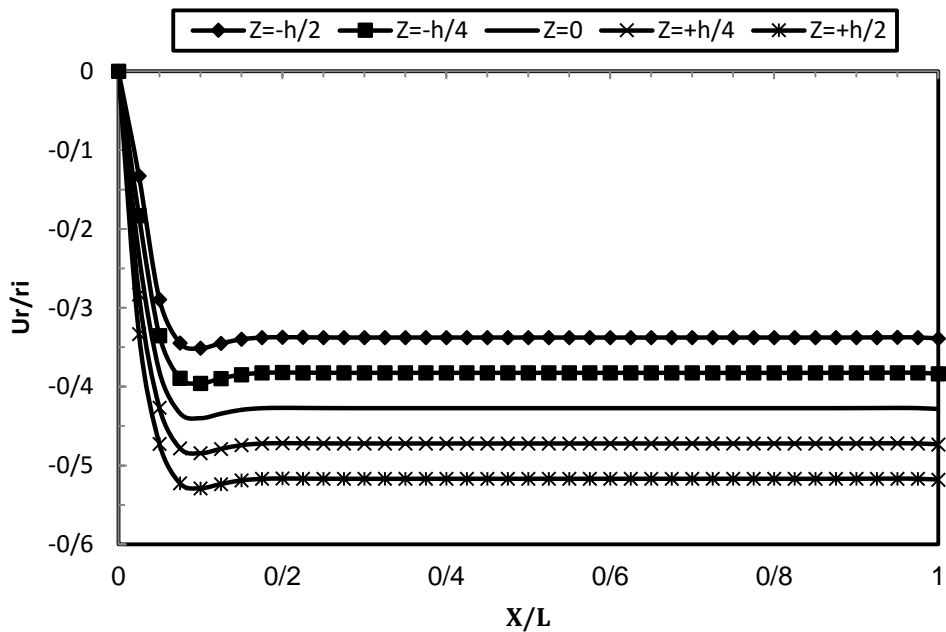
شکل ۲-۳۴ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



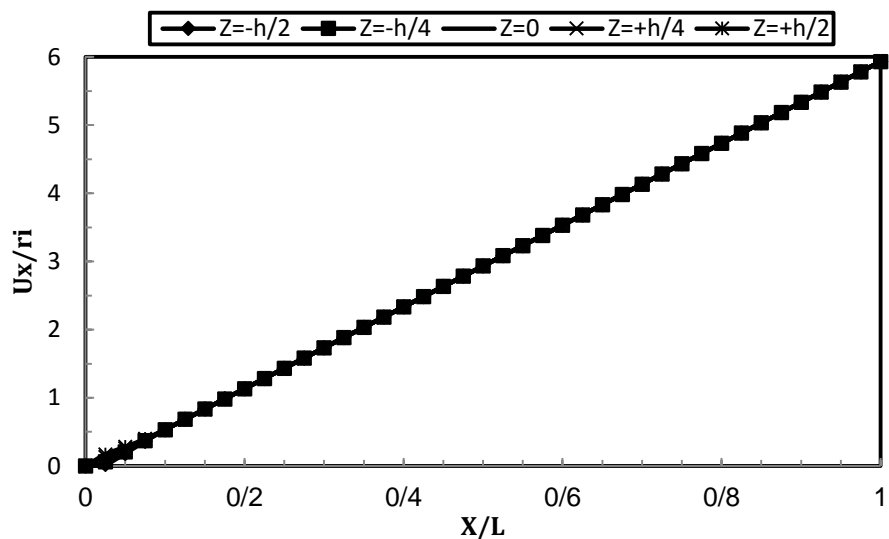
شکل ۲-۳۵ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار خارجی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی

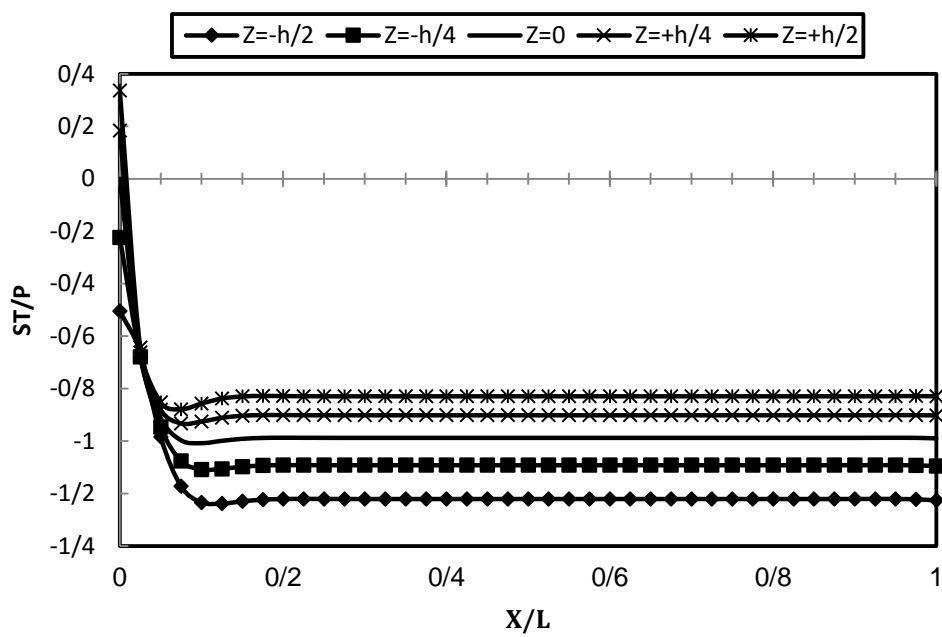


شکل ۲-۳۶ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی

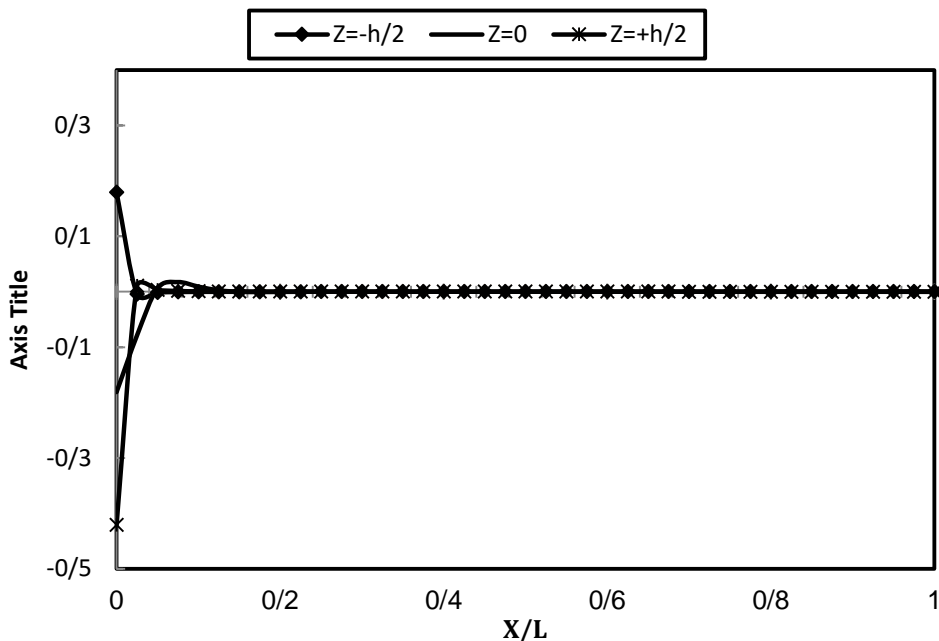


شکل ۲-۳۷ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۲-۳۸ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۲-۳۹ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی

۲-۵ حل عددی استوانه‌های ناهمگن تحت بارگذاری فشاری

روش اجزاء محدود، متکی به برنامه‌های نرم‌افزاری است که در قالب یک بسته ارائه می‌شود. یکی از این بسته‌ها که کاربرد فراوانی دارد و کاربران بسیاری از آن استفاده می‌کنند، Ansys است. در این پایان‌نامه از نرم‌افزار Ansys 11 استفاده شده است. در این بخش نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی FGM توضیح داده شده است. همچنین نتایج مربوط به حل تحلیلی توسط روش تغییر شکل برشی با نتایج عددی حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی و خارجی مقایسه شده است.

برای المان‌بندی استوانه، المان solid از نوع 82 nod 82 plane انتخاب شده است که گزینه‌ی axisymmetric مربوط به این المان فعال شده است. مقطع این المان ۴ ضلعی با اضلاع خمیده و دارای ۸ گره^۱ (۴ گره در رئوس و ۴ گره در وسط اضلاع) است که درجه‌ی آزادی هر گره، دو می‌باشد (یکی جابه-

1. Node

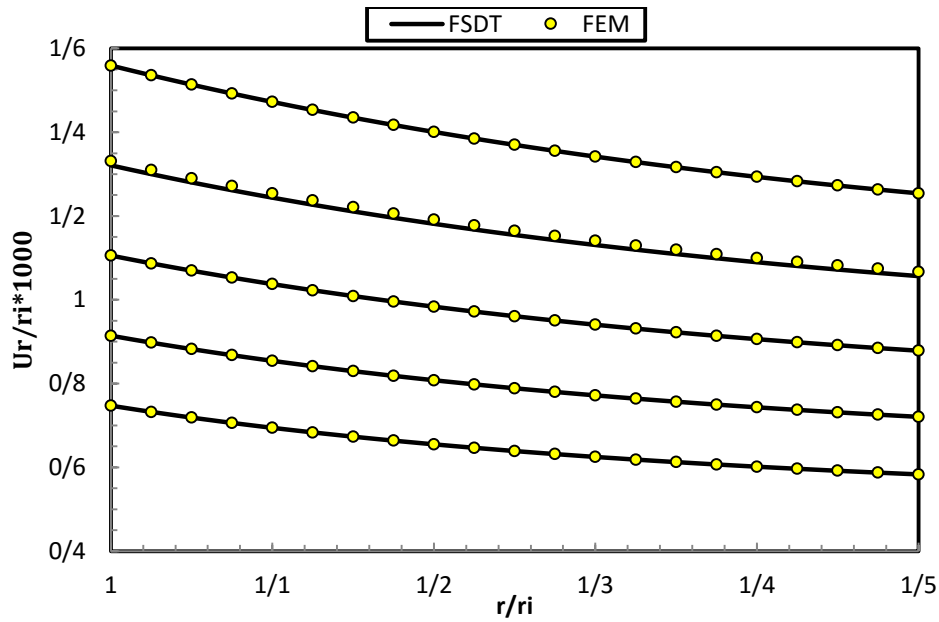
جایی در راستی شعاعی و دیگری جابه‌جایی در راستای محوری). این المان برای مسائل تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سفتی المان مذکور 16×16 می‌باشد. استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلیمتر و شعاع خارجی ۶۰ میلیمتر با جداره‌ی ثابت به طول ۸۰۰ میلیمتر به صورت یک مستطیل که نشان دهنده‌ی یک مقطع عرضی از استوانه در حالت متقارن محوری می‌باشد، مدل‌سازی شده است. برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است، با تقسیم جداره‌ی استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی به صورت تابع نمایی طبق رابطه‌ی (۲-۲۳)، نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد (ایزوتروپ) به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محل اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محل اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مزر دو لایه در نظر گرفته می‌شوند. برای اعمال شرایط مرزی موجود در دو انتهای استوانه بسته به شرایط انتهایی، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سر استوانه را مقید می‌کنیم. برای شرایط مرزی دوسر گیردار، کلیه‌ی درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در دو انتهای استوانه را مقید می‌کنیم. همچنین برای شرایط مرزی یک سر گیردار - یک سر آزاد، بدون اعمال قید بر روی گره‌های موجود در سمت آزاد استوانه، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سمت گیردار استوانه را همانند قسمت قبل مقید می‌کنیم. برای بارگذاری فشاری نیز با در نظر گرفتن گره‌های موجود در مرز داخلی و خارجی مقطع استوانه در حالت متقارن محوری، می‌توان فشار داخلی و خارجی را اعمال کرد [۵۰].

۲-۵-۱ مقایسه‌ی نتایج

در ادامه به منظور بررسی صحت نتایج حل تحلیلی، نتایج حاصل از تئوری تغییر شکل برشی و نتایج حاصل از حل عددی به کمک نرم‌افزار Ansys آورده شده است. در شکل‌های (۲-۴۰) و (۲-۴۱) نتایج جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FEM و FSĐT به ترتیب در استوانه تحت فشار داخلی و فشار خارجی به‌ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره‌ی استوانه و در $x=L/2$ برای شرایط انتهایی

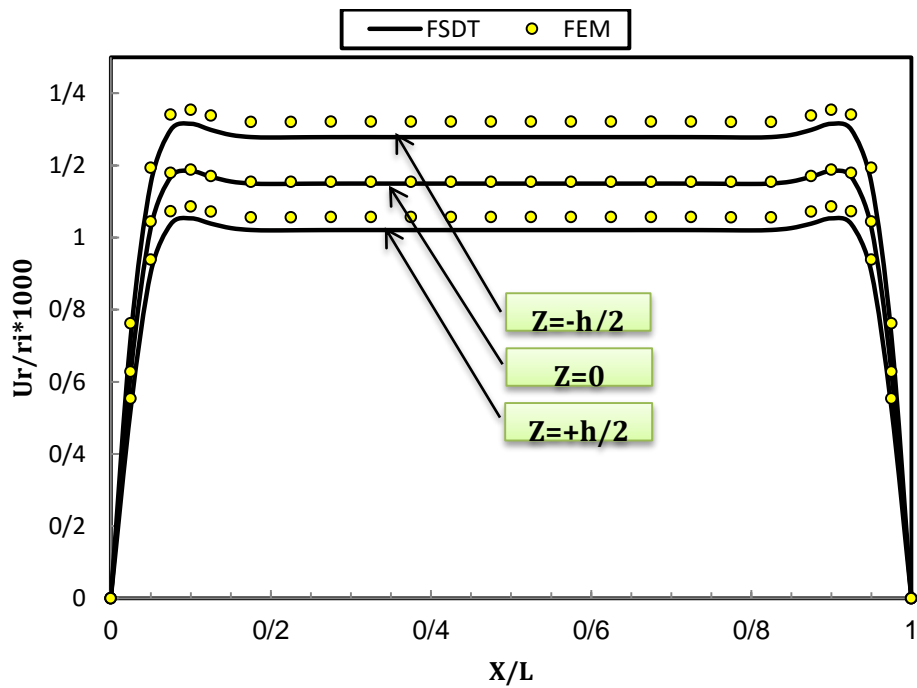
دوسرگیردار آورده شده است. همانطور که در شکل نیز مشخص است مقادیر جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده توسط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در وسط جداره‌ی استوانه به ازای n های مختلف دارای انطباق خوبی با روش عددی می‌باشد که برای n های کوچکتر این انطباق بیشتر می‌شود. شکل (۲-۴۲) نیز حاوی نتایج جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FEM و FSDT در استوانه تحت فشار داخلی برای سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی دوسرگیردار و ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ می‌باشد. توزیع جابه‌جایی محوری محاسبه شده توسط دو روش عددی و تحلیلی برای سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه‌ی دوسرگیردار تحت فشار داخلی به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ در شکل (۲-۴۳) نشان داده شده است. با توجه به این نمودارها می‌توان دریافت که در لایه‌ی میانی بیشترین انطباق بین روش‌های FEM و FSDT وجود دارد. اختلاف موجود بین دو روش در لایه‌ی داخلی بیشتر و در لایه‌ی خارجی کمتر می‌باشد. دلیل این اختلاف صرف نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور رابطه‌ی (۲-۵) به دلیل استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی_هرمان مرتبه‌ی اول می‌باشد.

در شکل‌های (۲-۴۴) و (۲-۴۵) به ترتیب توزیع جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری حاصل از دو روش FEM و FSDT در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت فشار داخلی و شرایط انتهایی یک‌سرگیردار-یک‌سر آزاد برای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ نشان داده شده است. روش FEM برای جابه‌جایی شعاعی در انتهای آزاد استوانه یک افزایش اندک را نسبت به مقدار جابه‌جایی در قسمت میانی استوانه پیش‌بینی کرده در حالیکه در روش FSDT یک افزایش و سپس کاهش مقدار جابه‌جایی را پیش‌بینی می‌کند.



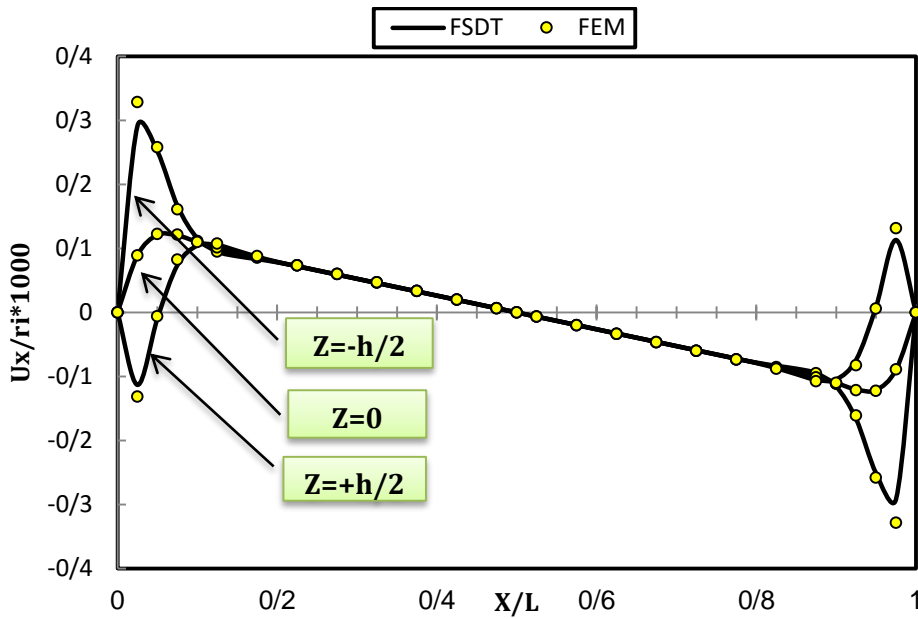
در استوانه تحت فشار داخلی FSDT و FEM شکل ۲-۴۰ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های

در حالت دوسر گیردار در $x=L/2$

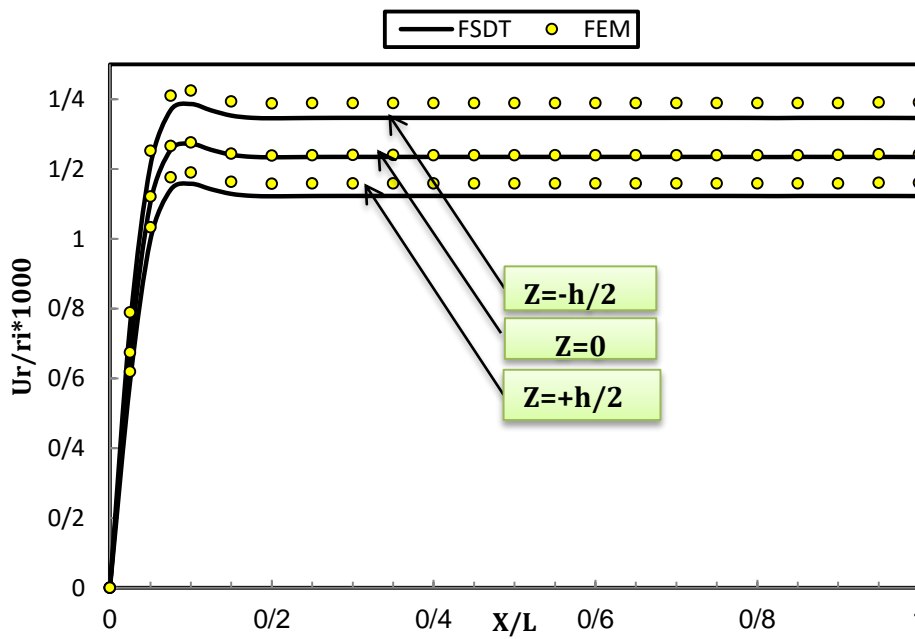


در استوانه تحت فشار داخلی FSDT و FEM شکل ۲-۴۱ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های

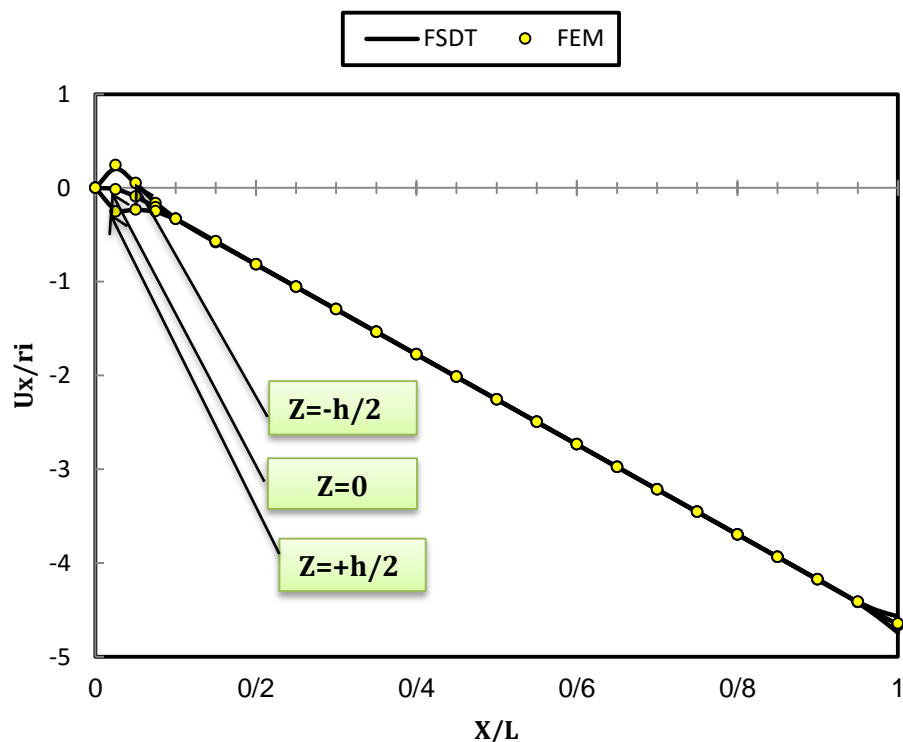
در حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$



در استوانه تحت فشار داخلی FSDT و FEM شکل ۲-۴۲ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی



در استوانه تحت فشار داخلی FSDT و FEM شکل ۲-۴۳ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های $n=(-1)$ برای حالت یکسر گیردار- یکسر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی



در استوانه تحت فشار داخلی FSDT و FEM شکل ۲-۴۴ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های

$n=(-1)$ برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی

جدول (۲-۲) و (۲-۱) حاوی نتایج تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FEM و FSDT به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در دو لایه‌ی داخلی و میانی استوانه برای دو حالت بارگذاری فشار داخلی و فشار داخلی _ فشار خارجی می‌باشد. همانطور که مشخص است اختلاف بین مقادیر تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FEM و FSDT در سطح میانی استوانه کمتر و در سطح داخلی بیشتر می‌باشد. مشاهده می‌شود که تنش محیطی در استوانه‌ی همگن تحت فشار داخلی و خارجی دارای مقدار برابر 80 - مگاپاسکال می‌باشد.

جدول ۱-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FEM و FSĐT در استوانه تحت فشار داخلی
برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$

	$\sigma_{\theta} [MPa]$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = +1$	$n = +2$
سطح داخلی $r = r_i$	FEM	۲۹۸/۹۸	۲۵۱/۵۹	۲۰۷/۹۶	۱۶۸/۵۹	۱۳۳/۶۰
	FSĐT	۳۳۵/۷۲	۲۸۳/۲۲	۲۳۵/۷۸	۱۹۳/۶۳	۱۵۶/۸۴
سطح میانی $r = R$	FEM	۱۴۴/۲۴	۱۵۱/۱۱	۱۵۶/۱۴	۱۵۹/۱۱	۱۵۹/۸۱
	FSĐT	۱۴۱/۳۵	۱۴۹/۳۰	۱۵۵/۶۲	۱۵۹/۹۹	۱۶۲/۲۵

جدول ۲-۲ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FEM و FSĐT در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی
برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$

	$\sigma_{\theta} [MPa]$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = +1$	$n = +2$
سطح داخلی $r = r_i$	FEM	-۱۰۲/۰۳	-۹۰/۴۹	-۷۹/۹۴	-۷۰/۶۳	-۶۲/۴۴
	FSĐT	-۱۱۷/۷۵۵	-۹۷/۶۶	-۸۰/۰۰	-۶۷/۷۱	-۵۱/۷۰
سطح میانی $r = R$	FEM	-۷۷/۷۳	-۷۹/۱۲	-۸۰/۰۰	-۸۰/۳۰	-۷۹/۰۴
	FSĐT	-۷۷/۰۸۷	-۷۹/۰۱۹	-۸۰/۰۰	-۸۰/۰۰	-۸۰/۰۰

۶-۲ جمع‌بندی

همانطور که در طول فصل اشاره شد، در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی شعاعی منفی در استوانه می‌شود. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت از برآیند دو بارگذاری شامل فشار داخلی و فشار خارجی حاصل می‌شود؛ بنابراین با توجه به بزرگتر بودن مقادیر جابه‌جایی و تنش ناشی از فشار خارجی نسبت به فشار داخلی، فشار خارجی اثر غالب را داشته و سبب ایجاد جابه‌جایی منفی می‌شود. در مورد تنش محیطی این بارگذاری نیز می‌توان به وضوح مشاهده کرد که تنش‌های ایجاد شده در وسط استوانه منفی می‌باشند. برای استوانه تحت هر سه حالت بارگذاری، مواد ناهمگن با مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش جابه‌جایی در استوانه نسب به ماده‌ی همگن می‌شود در حالیکه مقادیر ثابت ناهمگنی

منفی باعث افزایش جابه‌جایی نسب به ماده‌ی همگن می‌شود. در مورد تنش محیطی نیز همانطور که اشاره شد، استفاده از مواد ناهمگن با ضریب ناهمگنی مثبت در استوانه تحت فشار داخلی و استوانه تحت فشار خارجی به دلیل کاهش تنش محیطی بیشینه مناسب‌تر می‌باشد. در مورد استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز استفاده از ماده‌ی همگن سبب کاهش تنش محیطی بیشینه نسبت به ماده‌ی ناهمگن می‌شود. در استوانه تحت فشار داخلی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و برشی و همچنین جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری کاهش می‌یابد. در مورد استوانه تحت فشار خارجی نیز به غیر از تنش برشی، بقیه‌ی موارد رفتار مشابهی دارند. تنش برشی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد. برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی مقادیر تنش محیطی، تنش برشی و جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد، ولیکن در مورد جابه‌جایی محوری رفتاری مشابه دو بارگذاری دیگر نشان می‌دهد. شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد نسبت به حالت دوسر گیردار در انتهای گیردار آن تا نیمه‌ی استوانه به غیر از جابه‌جایی محوری تأثیر اندکی بر نتایج حاصل می‌گذارد. رفتار پوسته تا نزدیکی انتهای آزاد مشابه رفتار آن در نقاط دور از مرز در طول استوانه می‌باشد. به دلیل کاهش تنش برشی در سمت آزاد استوانه، در انتهای آزاد تغییر کمی در رفتار استوانه مشاهده می‌شود که تئوری تغییر شکل برشی و حلّ عددی این تغییرات را تا حدودی متفاوت پیش‌بینی می‌کنند. در مورد جابه‌جایی محوری نیز به دلیل عدم وجود قید در سمت آزاد استوانه، یک افزایش در مقدار جابه‌جایی محوری با حرکت به سمت آزاد استوانه مشاهده می‌شود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه‌ی تحت فشار وجود دارد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد. با توجه به آنچه در این فصل گفته شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل الاستیک استوانه-های جدار ضخیم تحت بار فشاری مناسب می‌باشد.

فصل ۳

تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

۳-۱ مقدمه

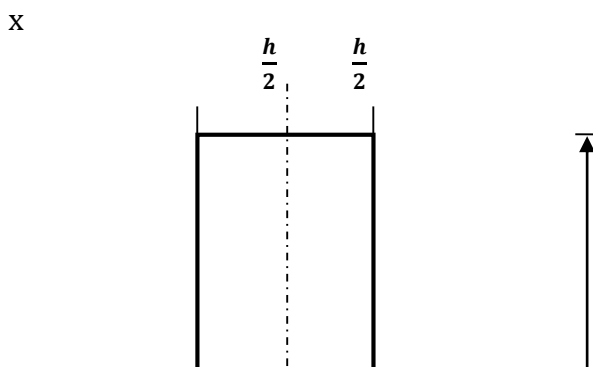
استوانه‌های دوار دارای کاربرد بسیار وسیعی در صنعت می‌باشند. لذا بررسی و تحلیل تنش در آنها در شرایط مختلف کاری از اهمیت بسزایی برخوردار است. همچنین اکثر سازه‌هایی که مواد FG در آنها استفاده می‌شوند و نیازمند به مقاومت بالا در شرایط کاری هستند از قبیل سازه‌های هوافضایی، موشک‌ها، سازه‌های دوار واقع در رآکتورهای اتمی و ... به غیر از نیروهای مکانیکی دارای دوران نیز می‌باشند؛ از اینرو تحلیل و بررسی این بارگذاری در مورد این مواد حایز اهمیت است. در اکثر محورهای استوانه‌ای توخالی یا توپر، تأثیر دوران عامل مهم ایجاد تنش در استوانه می‌باشد.

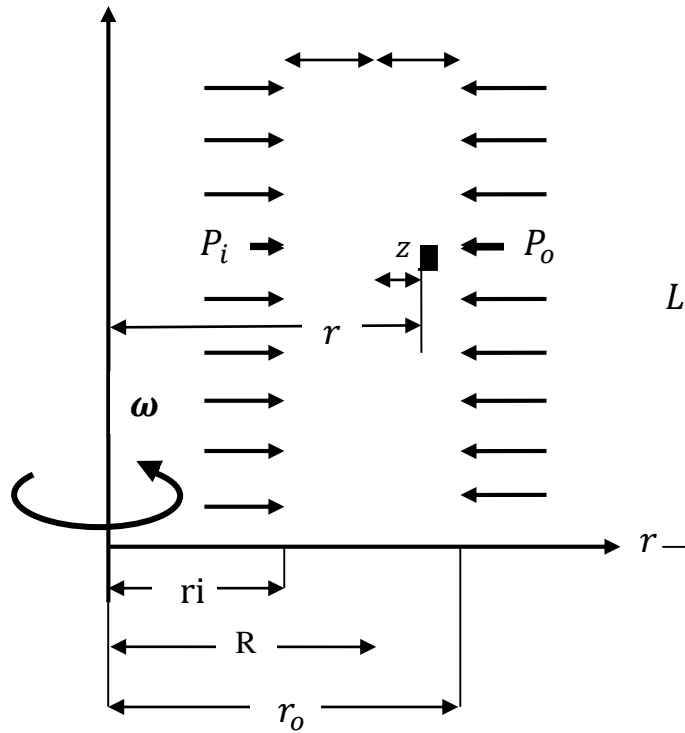
در این فصل برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های چرخان جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد همگن و ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، حلّ عمومی استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی ارائه شده است. نهایتاً با انجام حلّ عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Ansys برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

۳-۲ تحلیل الاستیک استوانه‌های چرخان ناهمگن

یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم چرخان تحت فشار داخلی و خارجی را به صورت شکل (۳-۱) در نظر می‌گیریم. همانطور که در فصل دوم نیز بیان شد بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \quad (۳-۱)$$





ثابت تحت بارگذاری فشاری جدار استوانه‌ای چرخان شکل ۱-۳ پروفیل

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \iiint_V U^* dV \\ dV &= r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* &= \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \\ &= \frac{1}{2} E(r) \lambda \left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta \varepsilon_z) + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xz}^2 \right] \end{aligned} \right. \quad (۲-۳)$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی و خارجی و سرعت دورانی:

$$\left\{ \begin{aligned} W &= \iint_S (\vec{f}_{sf} \cdot \vec{u}) dS + \iiint_V (\vec{f}_{bf} \cdot \vec{u}) dV \\ dS &= r dx d\theta = (R+z) dx d\theta \\ dV &= r d\theta dr dx = (R+z) dz dx d\theta \end{aligned} \right. \quad (۳-۳)$$

که در آن نیروی حجمی حاصل از دوران با سرعت ثابت به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{f}_{bf} = \rho(r) r \omega^2 = \rho(z) (R+z) \omega^2 \quad (۴-۳)$$

نهایتاً کار نیروهای خارجی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) U_z dx d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (R+z) \omega^2 U_z (R+z) dz dx d\theta \quad (۵-۳)$$

و با انتگرالگیری در محدوده‌ی:

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (6-3)$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه‌ی چرخان با سرعت دورانی ثابت تحت فشار داخلی و خارجی داریم:

$$\delta U = R \int_0^L \int_0^{-h/2} \int_0^{h/2} \delta U^* \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx d\theta \quad (7-3)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R \int_0^L \int_0^{-h/2} \int_0^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx$$

$$\delta W = \int_0^L \int_0^0 (P_i r_i - P_o r_o) \delta U_z dx d\theta + \int_0^L \int_0^{-h/2} \int_0^{h/2} \rho(z) (R+z)^2 \omega^2 \delta U_z dz dx d\theta \quad (8-3)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^L \left[P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) - P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) \right] (\delta w + z \delta \psi) dx + \int_0^L \int_0^{-h/2} \int_0^{h/2} \rho(z) \omega^2 (\delta w + z \delta \psi) (R+z)^2 dz dx$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۷-۲) در روابط (۷-۳) و (۸-۳) و نیز بکارگیری اصول حساب بردشی و

اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای چرخان تحت فشار داخلی و خارجی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \quad (9-3)$$

$$\begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - R Q_x = 0 \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) - \omega^2 \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (R+z)^2 dz \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - R N_z = P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2}\right) - \omega^2 \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z (R+z)^2 dz \end{cases} \quad (10-3)$$

$$R [N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi]_0^L = 0 \quad (11-3)$$

روابط (۱۰-۳) همان معادلات اصلی ما را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (۱۱-۳) نیز شرایط مرزی

مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در هر دو انتهای استوانه صدق کند.

۳-۲-۱ توزیع ناهمگنی چگالی

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، مدول الاستیسیته E ، ضریب پواسون ν و چگالی ρ توابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد \bar{r} می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی، ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن توزیع توانی برای مدول الاستیسیته و چگالی در طول جداره‌ی استوانه به صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد \bar{r} به صورت روابط (۱۲-۳) و (۱۳-۳) خواهیم داشت:

$$E(r) = E_i (\bar{r})^n \quad (12-3)$$

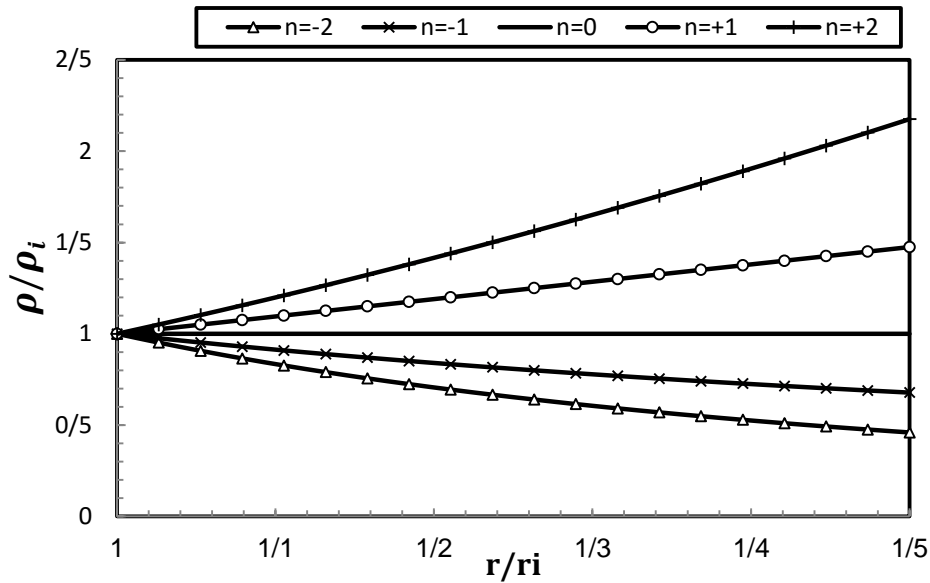
$$\rho(r) = \rho_i (\bar{r})^n \quad (13-3)$$

که در این رابطه $\bar{r} = r/r_i$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین E_i و ρ_i به ترتیب مدول الاستیسیته و چگالی در شعاع داخلی استوانه و n نیز ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که $n = 0$ همان ماده‌ی همگن است. با جایگذاری مقدار $r = R + z$ در روابط (۱۲-۳) و (۱۳-۳) داریم:

$$E(z) = E_i \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n \quad (14-3)$$

$$\rho(z) = \rho_i \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n \quad (15-3)$$

شکل (۲-۳) توزیع چگالی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی ناهمگن و همسانگرد به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۲-۳ توزیع بی‌بعد چگالی در راستای شعاعی

معادلات (۱۰-۳) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد. برای حل آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۱۰-۲) تا (۱۳-۲) به منته‌های تنش و با جایگذاری رابطه‌ی (۱۴-۳) در روابط (۹-۲) و استفاده از روابط (۹-۲) به مؤلفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۷-۲) بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه ۴ معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به دست می‌آید که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \quad (۱۷-۳)$$

که در آن بردار مجهول $\{F\}$ شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی (۲۵-۲) می‌باشد:

$$\{y\} = \{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \quad (۱۸-۳)$$

همچنین قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به صورت بردار نیروی $\{F\}$ در رابطه‌ی (۱۹-۳) نشان داده

شده است:

$$\{F\} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \left\{ \begin{array}{c} C_0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n (R+z)^2 dz \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n z(R+z)^2 dz \end{array} \right\} \quad (19-3)$$

در دستگاه معادلات (۱۷-۳) ماتریس‌های $[A]_{4 \times 4}$ و $[C]_{4 \times 4}$ متقارن و $[B]_{4 \times 4}$ پادمتقارن هستند که

در ادامه درایه‌های مربوط به آنها به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ آورده شده است:

$$A_{11} = (1-\nu)h \quad (20-3)$$

$$A_{22} = (1-\nu) \frac{h^3}{12} \quad (21-3)$$

$$A_{33} = \mu h \quad (22-3)$$

$$A_{44} = \mu \frac{h^3}{12} \quad (23-3)$$

$$A_{12} = A_{13} = A_{14} = A_{21} = A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = A_{41} = A_{42} = 0 \quad (24-3)$$

$$B_{13} = \nu \alpha = -B_{31} \quad (25-3)$$

$$B_{14} = 2h\nu - R\nu\alpha = -B_{41} \quad (26-3)$$

$$B_{23} = -\mu h + \nu(h - R\alpha) = -B_{32} \quad (27-3)$$

$$B_{24} = -\nu R(h - R\alpha) = -B_{42} \quad (28-3)$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = B_{33} = B_{34} = B_{43} = B_{44} = 0 \quad (29-3)$$

$$C_{22} = -\mu h \quad (30-3)$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = B_{33} = B_{34} = B_{43} = B_{44} = 0 \quad (31-3)$$

$$C_{33} = -(1-\nu)\beta \quad (32-3)$$

$$C_{34} = -\alpha + (1-\nu)R\beta = C_{43} \quad (33-3)$$

$$C_{44} = 2(R\alpha - h) - (1-\nu)R^2\beta \quad (34-3)$$

$$C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{21} = C_{23} = C_{24} = C_{31} = C_{32} = C_{41} = C_{42} = 0 \quad (35-3)$$

که پارامترهای μ, α, β به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu = K \left(\frac{1-2\nu}{2} \right), \alpha = \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) \quad (36-3)$$

$$\beta = \left(\frac{h}{\left(R - \frac{h}{2}\right)\left(R + \frac{h}{2}\right)} \right) \quad (37-3)$$

K ضریب تصحیح برشی است که بسته به هندسه‌ی پوسته در عبارت تنش برشی وارد می‌شود. این

ضریب در حالت استاتیک برای استوانه $K = \frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است.

۳-۲-۲ حل الاستیک استوانه‌های چرخان تحت بارگذاری فشاری

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله (۳-۱۷) یک دستگاه ۴ معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی

با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حلّ عمومی و حلّ خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به صورت

ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$A \{y''\} + B \{y'\} + C \{y\} = \{F\} \quad (38-3)$$

داریم:

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \quad (39-3)$$

برای حل عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\} = \{\xi\} e^{mx}$ را در معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx} [m^2A + mB + C] \{\xi\} = \{0\} \quad (40-3)$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$|m^2A + mB + C| = 0 \quad (41-3)$$

از حل معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه m_i محاسبه شده که به صورت سه جفت ریشه‌ی مزدوج حاصل می‌-

شوند. از این سه جفت ریشه، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر آن نیز اعداد مختلط مزدوج می‌-

باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه حاصل در معادله‌ی (۳-۴۰)، بردارهای ویژه ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی

فوق به دست می‌آیند. در نهایت حل عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^6 C_i \{\xi\}_i e^{m_i x} \quad (42-3)$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به دست آوردن بردارهای ویژه متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه مربوط به اعداد مختلط استفاده کرد.

برای حل خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۳-۱۷) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری با ضخامت ثابت و تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از x نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به دست آورد.

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \quad (۳-۴۳)$$

اما با توجه به معکوس ناپذیری (منفرد بودن) ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حل می‌شود. بدین منظور در اولین معادله از سری معادلات (۳-۱۰)، از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$RN_x = C_0 \quad (۳-۴۴)$$

همانطور که در معادلات (۳-۱۷) مشخص است، عبارت u وجود ندارد ولیکن du/dx در معادلات وجود دارد. با در نظر گرفتن du/dx به عنوان پارامتری جدیدی به نام v و انتگرال‌گیری از طرفین اولین معادله از سری معادلات داریم:

$$u = \int v dx + C_7 \quad (۳-۴۵)$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{v \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \end{cases} \quad (۳-۴۶)$$

که در آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرال‌گیری از طرفین اولین معادله، به صورت زیر می‌باشد:

$$\{F\} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \left\{ \begin{array}{c} C_0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n (R+z)^2 dz \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n z(R+z)^2 dz \end{array} \right\} \quad (47-3)$$

بنابراین با حل دستگاه معادلات فوق به صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به دست آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۱-۳) توسط رابطه‌ی (۳-۱۱) بیان می‌شوند. به عبارتی باید مقادیر $\{u \ \phi \ w \ \psi\}$ و $\{N_x \ M_x \ Q_{xz} \ M_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری در نظر گرفته شوند که همواره رابطه‌ی (۲-۲۲) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول C_1, \dots, C_6 در جواب عمومی و ۲ ثابت C_0, C_7 در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به دست آوردن ثابت مجهول، بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۲-۴۸) بر حسب متغیرهای x, z به دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌ی (۲-۶) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به دست آورده و با استفاده از روابط (۲-۷) تا (۲-۱۳) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز محاسبه کرد.

۳-۳ مطالعه‌ی موردی

به منظور مطالعه موردی، یک استوانه جدار ضخیم ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت مطابق شکل (۱-۳) به شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و توزیع توانی مدول الاستیسیته و چگالی طبق روابط (۳-۱۴) و (۳-۱۵) دارای مدول الاستیسیته و چگالی در سطح داخلی استوانه به ترتیب برابر $E_i = 200 \text{ GPa}$ و $\rho_i = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ و نسبت پواسون ثابت $\nu = 0.3$ را تحت فشار یکنواخت داخلی $P_i = 80 \text{ MPa}$ و سرعت دورانی ثابت $\omega = 10000 \text{ rpm}$ در نظر می‌گیریم.

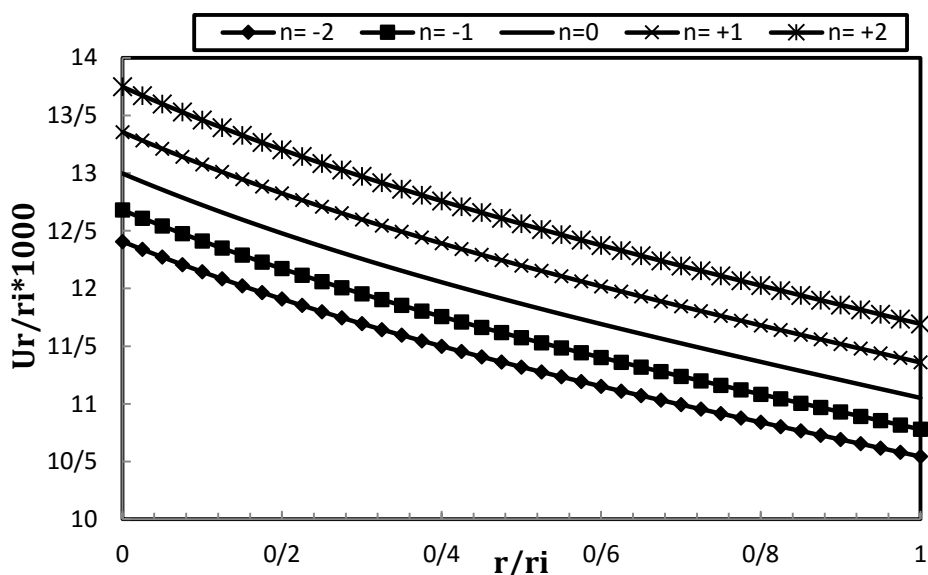
تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی (الف) دوسر گیردار و (ب) یکسر گیردار-یکسر آزاد انجام شده است. حل تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 11 صورت گرفته است.

۳-۳-۱ استوانه‌ی دوسر گیردار

برای شرایط مرزی دوسر گیردار با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۱) داریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \end{cases} \quad (3-48)$$

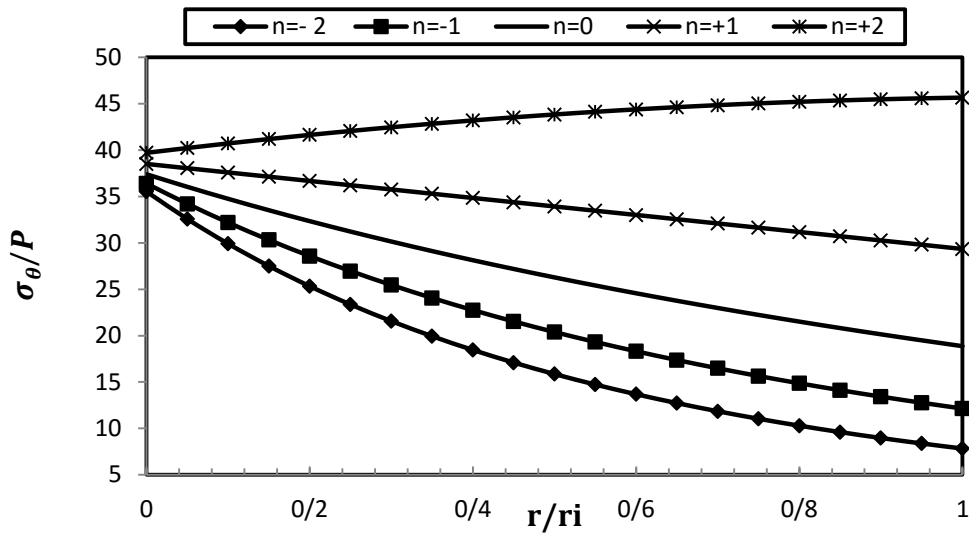
با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در شکل (۳-۳) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای n های مختلف برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی در وسط استوانه برای حالت دوسر گیردار نشان داده شده است.



شکل ۳-۳ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$

برای حالت دوسر گیردار

شکل (۳-۴) نیز توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های مختلف برای بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه برای شرایط انتهایی دوسر گیردار نشان می‌دهد.



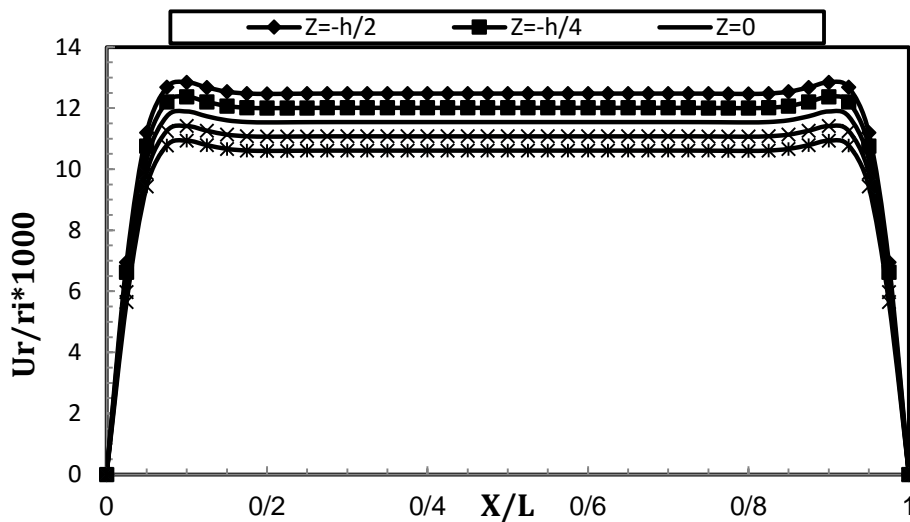
شکل ۳-۴ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در $x=L/2$

برای حالت دوسر گیردار

شکل‌های (۳-۵) تا (۳-۸) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را

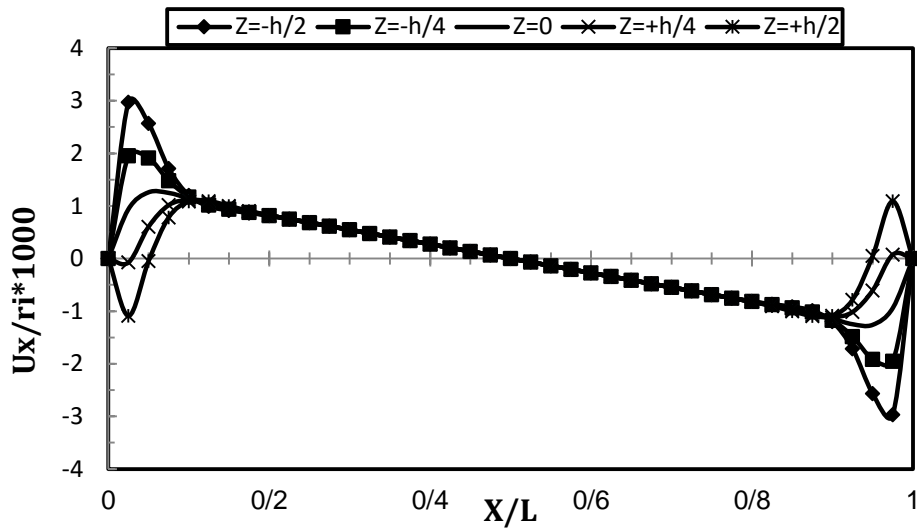
در راستای طول استوانه به ازای $n=(-1)$ در پنج لایه‌ی مختلف تحت بارگذاری فشاری و دورانی نشان می-

دهد.



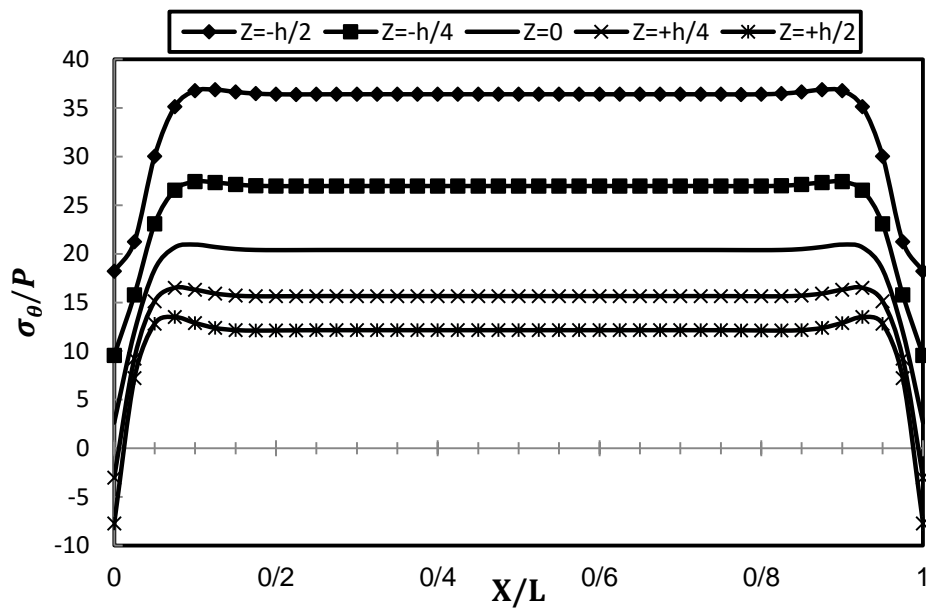
شکل ۳-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



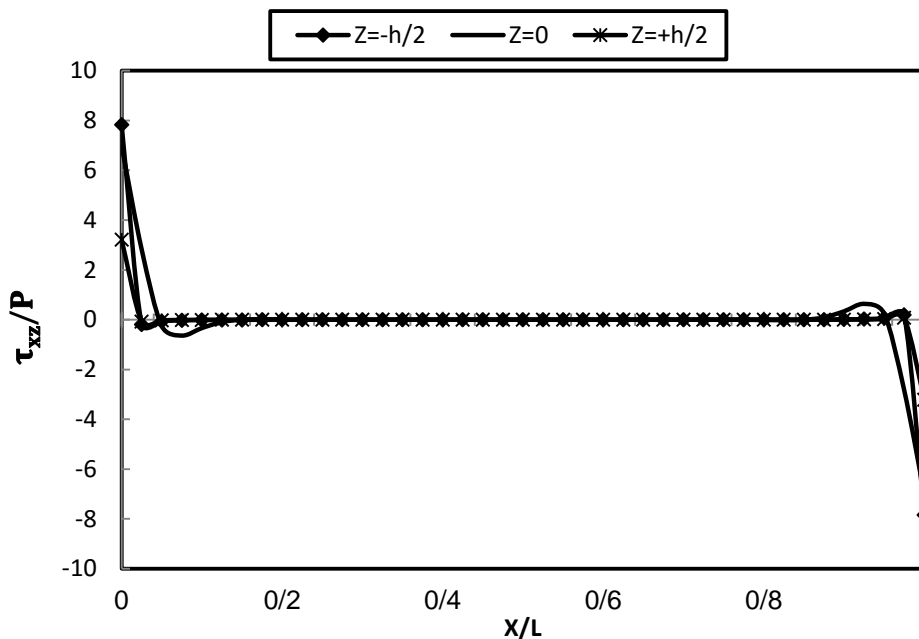
شکل ۳-۶ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۳-۷ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۳-۸ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی

۳-۳-۲ استوانه‌ی یکسر گیردار - یکسر آزاد

برای شرایط مرزی یکسر گیردار - یکسر آزاد با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۱) داریم:

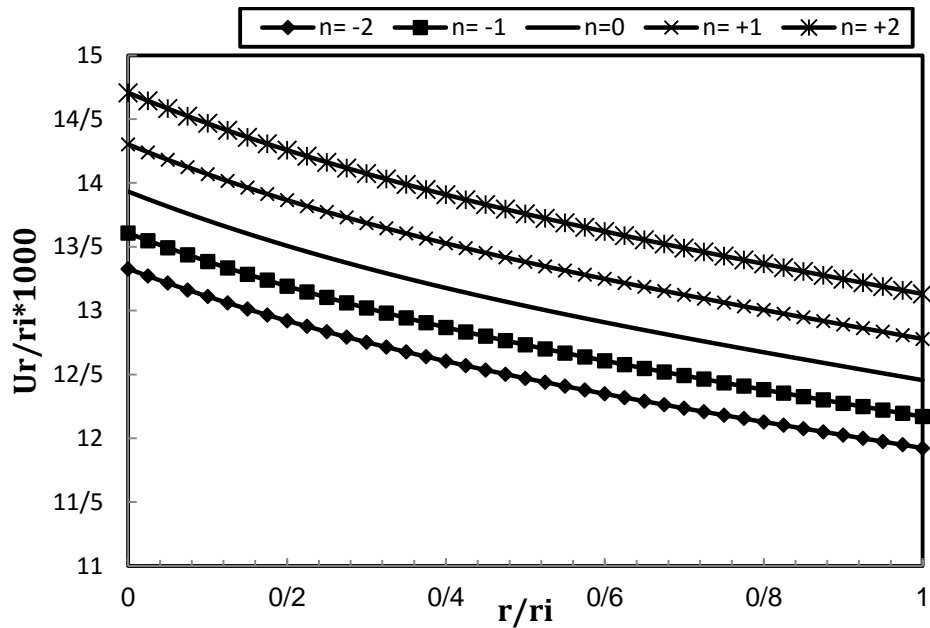
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow N_x=0, M_x=0, Q_{xz}=0, M_{xz}=0 \end{cases} \quad (۳-۴۹)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌-

آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در

شکل (۳-۹) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای n های مختلف برای بارگذاری فشاری و

دورانی در وسط استوانه برای شرایط انتهایی یکسر گیردار - یکسر آزاد نشان داده شده است.

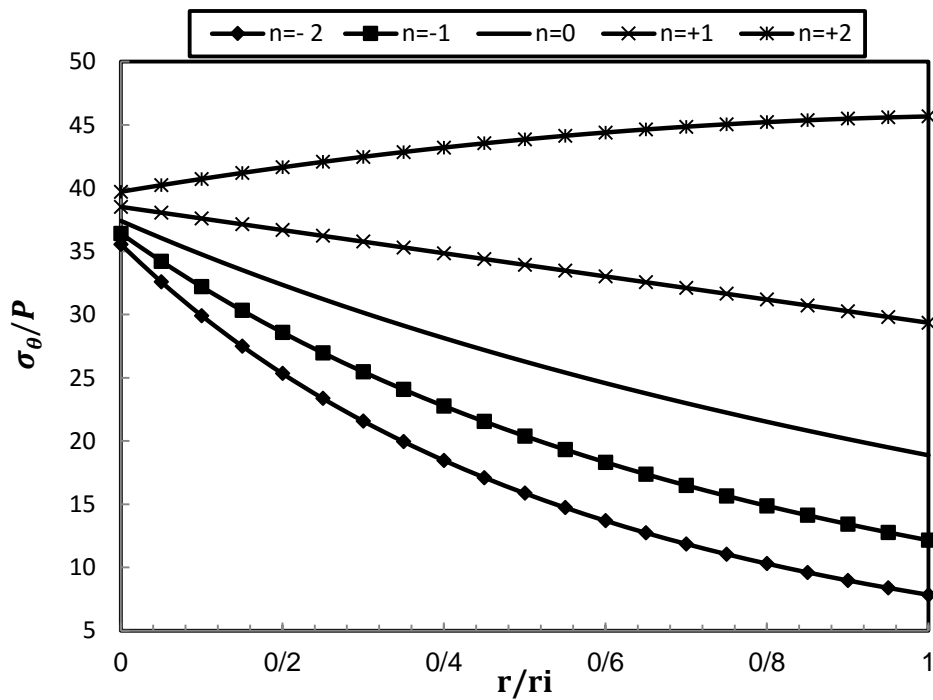


شکل ۳-۹ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد

شکل (۳-۱۰) نیز توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های

مختلف برای بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه نشان می‌دهد.

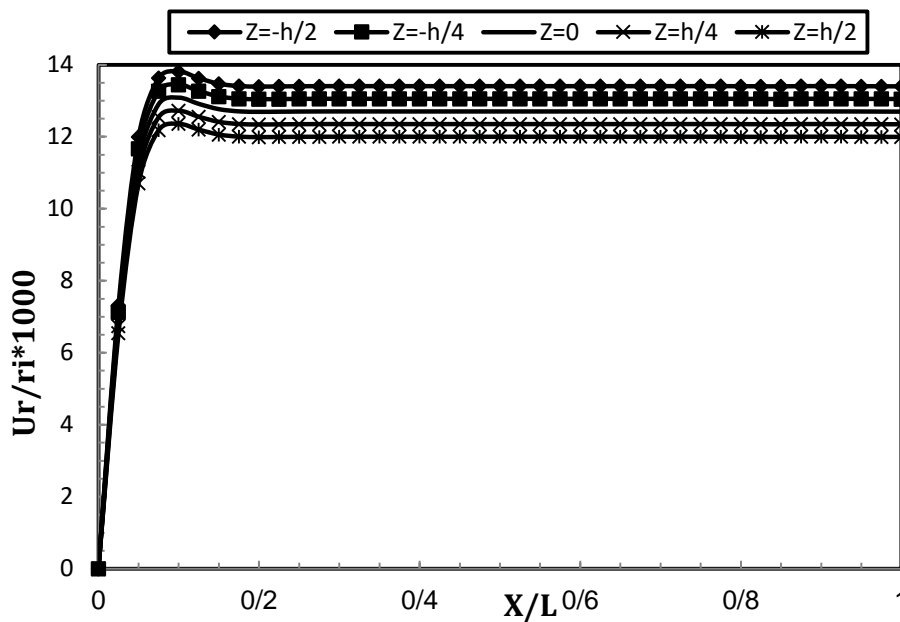


شکل ۳-۱۰ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی در

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد

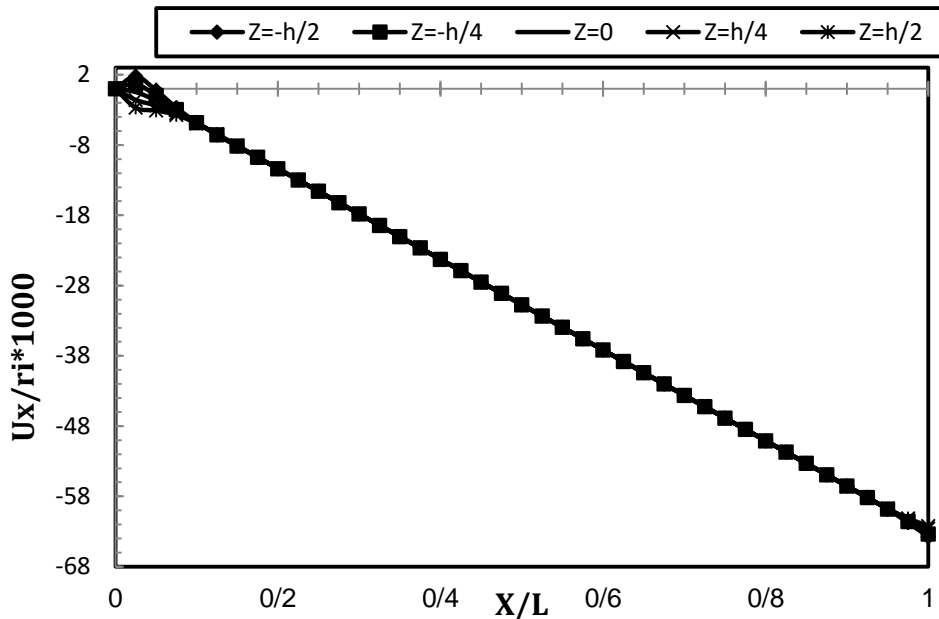
شکل‌های (۳-۱۱) تا (۳-۱۴) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی

را در راستای طول استوانه به ازای $n=(-1)$ در پنج لایه‌ی مختلف برای شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد نشان می‌دهد.

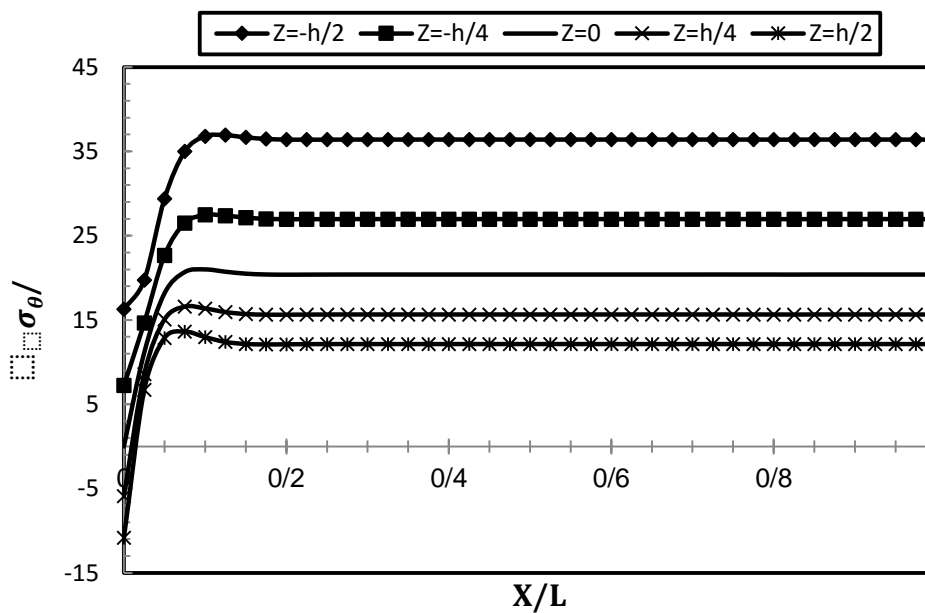


شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

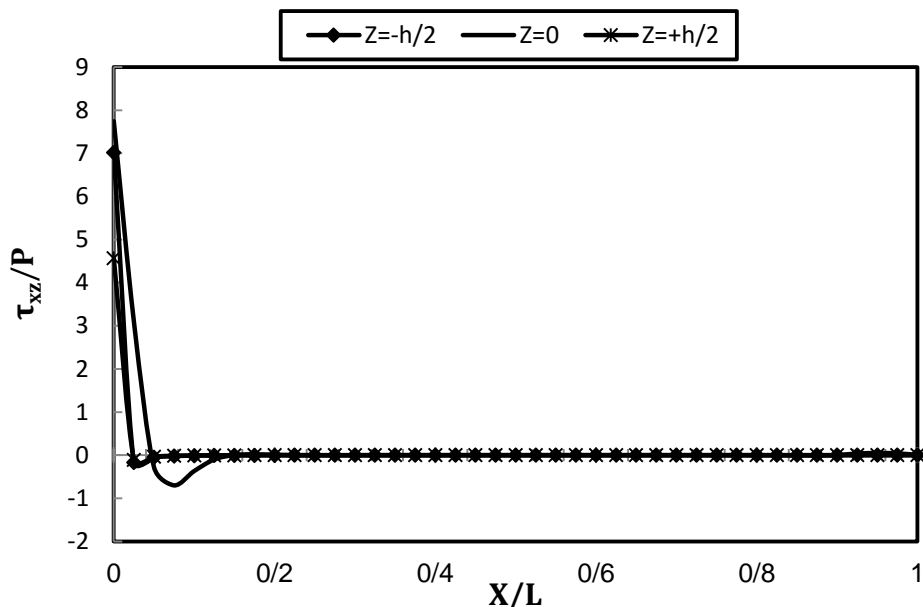
برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۳-۱۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۳-۱۴ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن چرخان تحت فشار داخلی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی

۳-۴ حل عددی استوانه‌های چرخان ناهمگن تحت فشار داخلی

در این بخش نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی FGM توضیح داده شده است. همچنین نتایج مربوط به حل تحلیلی توسط روش تغییر شکل برشی با نتایج عددی حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی دارای سرعت دورانی ثابت مقایسه شده است.

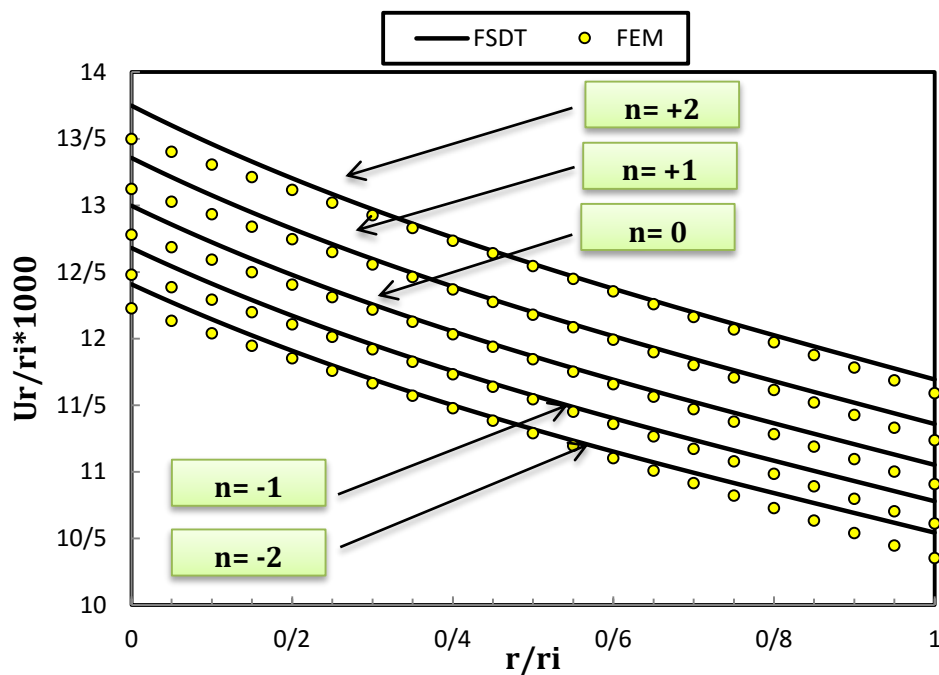
برای المان‌بندی استوانه، المان solid از نوع 82 nod 82 plane انتخاب شده است که گزینه‌ی axisymmetric مربوط به این المان فعال شده است. مقطع این المان ۴ ضلعی با اضلاع خمیده و دارای ۸ گره (۴ گره در رئوس و ۴ گره در وسط اضلاع) است که درجه‌ی آزادی هر گره، دو می‌باشد (یکی جابه‌جایی در راستی شعاعی و دیگری جابه‌جایی در راستای محوری). این المان برای مسائل تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و متقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سفتی المان مذکور 16×16 می‌باشد. استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلیمتر و شعاع خارجی ۶۰ میلیمتر با جداره‌ی ثابت به طول ۸۰۰ میلیمتر به صورت یک مستطیل که نشان دهنده‌ی یک مقطع عرضی از استوانه در حالت متقارن محوری می‌باشد، مدل‌سازی شده است. برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است، با

تقسیم جداره‌ی استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته و چگالی در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی به صورت تابع نمایی طبق روابط (۳-۱۴) و (۳-۱۵)، نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد (ایزوتروپ) به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محل اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محل اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مزر دو لایه در نظر گرفته می‌شوند. برای اعمال شرایط مرزی موجود در دو انتهای استوانه بسته به شرایط انتهایی، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سر استوانه را مقید می‌کنیم. برای شرایط مرزی دوسر گیردار، کلیه‌ی درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در دو انتهای استوانه را مقید می‌کنیم. همچنین برای شرایط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد، بدون اعمال قید بر روی گره‌های موجود در سمت آزاد استوانه، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سمت گیردار استوانه را همانند قسمت قبل مقید می‌کنیم. برای بارگذاری فشاری نیز با در نظر گرفتن گره‌های موجود در مرز داخلی مقطع استوانه در حالت متقارن محوری، می‌توان فشار داخلی را اعمال کرد. همچنین با در نظر گرفتن کل گره‌های موجود در پوسته‌ی استوانه‌ای، یک سرعت دورانی ثابت به مجموعه وارد می‌شود.

۳-۴-۱ مقایسه‌ی نتایج

در ادامه به منظور بررسی صحت روش حلّ تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل از روش تئوری تغییر شکل برشی و نتایج حاصل از حلّ عددی به کمک نرم‌افزار Ansys آورده شده است. در شکل (۳-۱۵) نتایج جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FEM و FSDT برای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره‌ی استوانه و در $x=L/2$ برای شرایط انتهایی دوسرگیردار آورده شده است. با توجه به این نمودار می‌توان دریافت که در لایه‌ی میانی همانند استوانه تحت فشار داخلی بیشترین انطباق بین روش‌های FEM و FSDT وجود دارد. همچنین اختلاف موجود بین دو روش در لایه‌ی داخلی بیشتر و در لایه‌ی خارجی کمتر می‌باشد. قابل ذکر است که میزان این اختلاف در استوانه تحت بارگذاری فشاری و دورانی بیشتر از استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. البته سرعت 10000 rpm در کاربردهای معمولی سرعت بسیار بالایی است

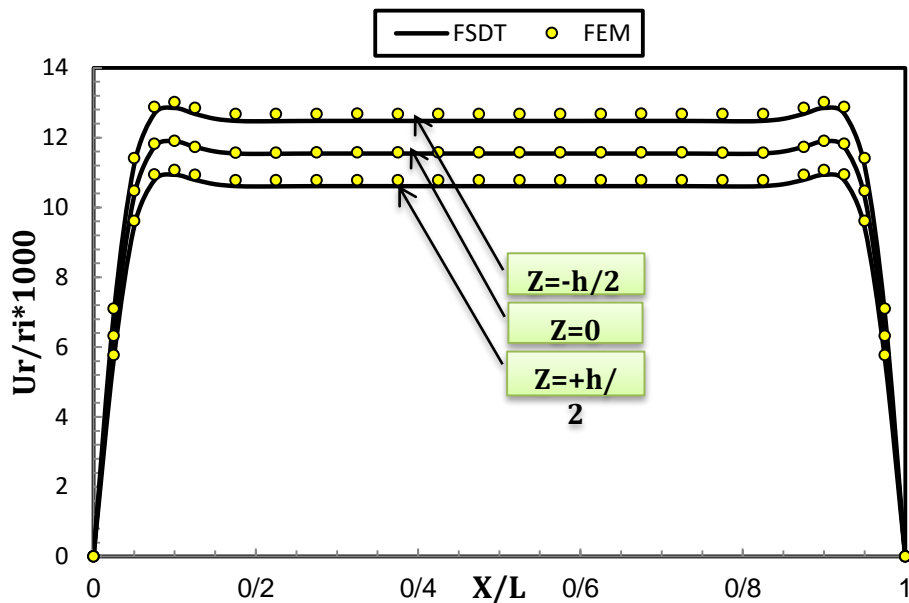
و در ادامه خواهیم دید که برای سرعت های معمولی (۱۰۰۰ و ۳۶۰۰ دور در دقیقه) اثر دوران در مقایسه با اثر فشار بسیار ناچیز بوده و رفتار استوانه مشابه فصل قبل است.



در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای FSDT و FEM شکل ۳-۱۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های

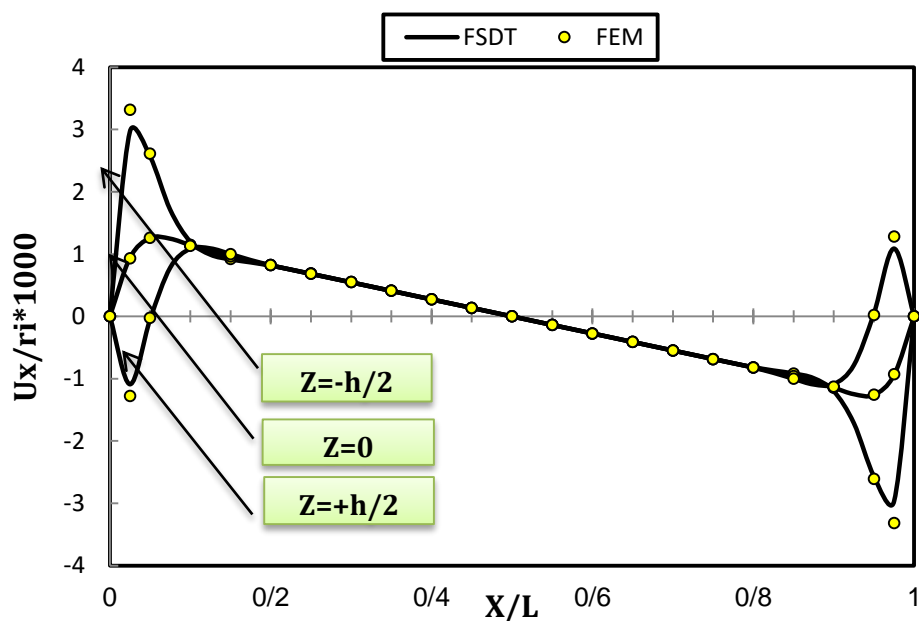
$x=L/2$ حالت دوسر گیردار در

شکل (۳-۱۶) حاوی نتایج جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FSDT و FEM در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی دوسر گیردار برای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ می‌باشد. توزیع جابه‌جایی محوری محاسبه شده توسط دو روش عددی و تحلیلی برای سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه‌ی دو-سر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ در شکل (۳-۱۷) نشان داده شده است.



در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی FSDT و FEM شکل ۳-۱۶ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های

ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی



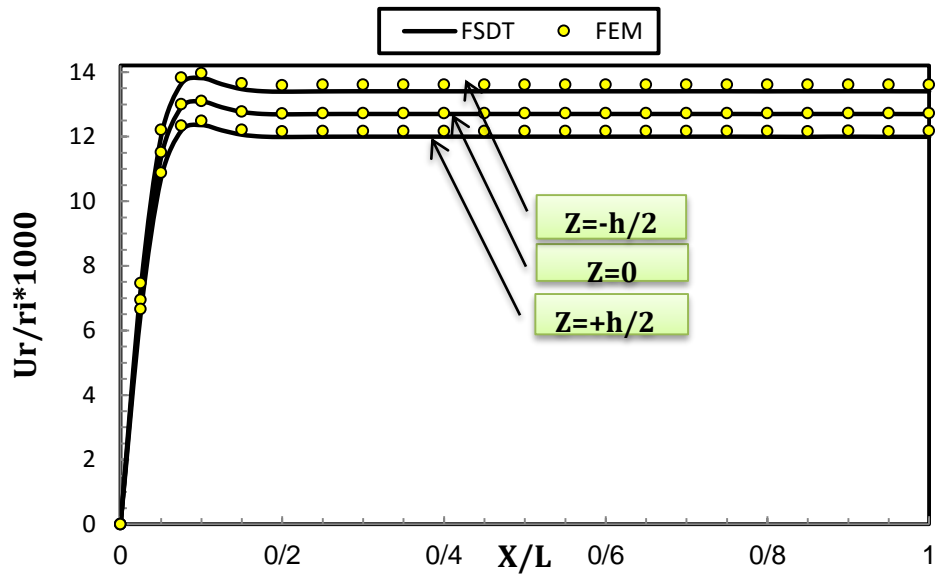
در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی FSDT و FEM شکل ۳-۱۷ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های

ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی

در شکل‌های (۳-۱۸) و (۳-۱۹) به ترتیب توزیع جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری حاصل از دو روش

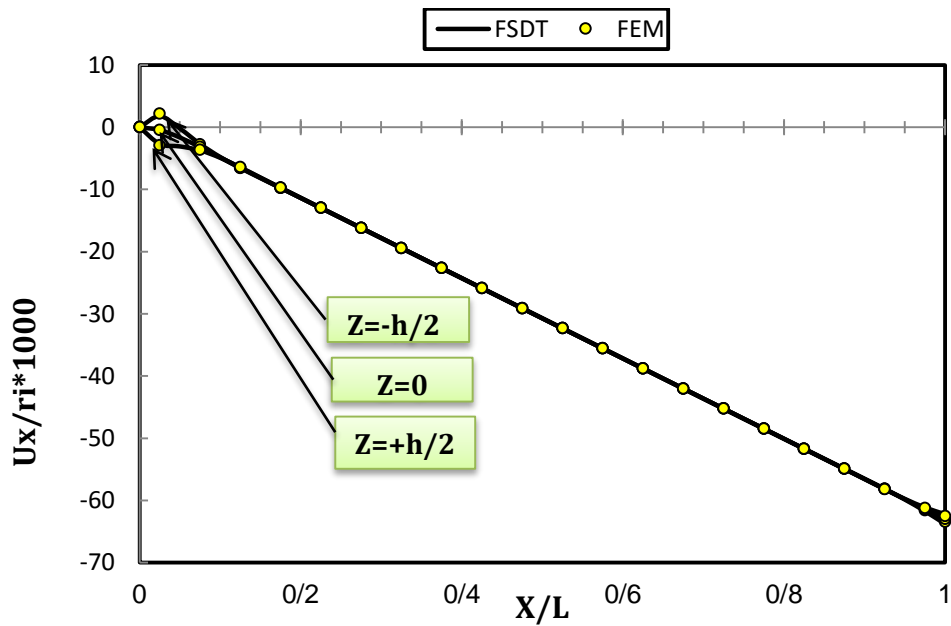
FSDT و FEM در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد برای

ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ نشان داده شده است.



در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی FSDT و FEM شکل ۳-۱۸ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های

$n=(-1)$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی



در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی FSDT و FEM شکل ۳-۱۹ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های

$n=(-1)$ برای حالت یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی

جدول (۳-۱) حاوی نتایج تنش بیشینه‌ی محاسبه شده با روش‌های FEM و FSDT به ازای ثوابت

ناهمگنی مختلف در دو لایه‌ی داخلی و میانی استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دو سرگیردار

می‌باشد. در جدول (۳-۲) مقادیر تنش محیطی حاصل از استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی و یکسان و

دوران با سرعت‌های متفاوت برای حالت دو سرگیردار توسط روش FSDT نشان داده شده است. همانطور

که مشخص است دوران با سرعت های معمول تأثیر چشمگیری در مقایسه با اثرات فشار ندارد ولی در سرعت های بالا اثر این عامل چشمگیر بوده و حتی در مواردی اثر غالب را دارد، که این مطلب با توجه به نتایج جدول (۳-۱) قابل مشاهده است.

جدول ۳-۱ تنش محیطی محاسبه شده با روش های FEM و FSDT در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$

	$\frac{\sigma_{\theta}}{P}$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = +1$	$n = +2$
سطح داخلی $r = r_i$	FEM	۳۲/۷۱	۳۳/۸۶	۳۵/۱۵	۳۶/۶۰	۳۸/۱۷
	FSDT	۳۵/۵۴	۳۶/۴۰	۳۳/۵۰	۳۸/۵۱	۳۹/۷۱
سطح میانی $r = R$	FEM	۱۶/۱۸	۲۰/۶۹	۲۱/۲۲	۳۴/۱۰	۴۳/۸۹
	FSDT	۱۵/۸۶	۲۰/۳۹	۲۱/۳۹	۳۳/۹۳	۴۳/۸۵

جدول ۳-۲ تنش محیطی محاسبه شده تحت بارگذاری های مختلف برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $x=L/2$ در $n=(-1)$

	$\frac{\sigma_{\theta}}{P}$	$n = -1$
سطح داخلی $r = r_i$	۱۰۰۰ rpm	۳/۸۷
	۳۶۰۰ rpm	۷/۷۹
	۱۰۰۰۰ rpm	۳۶/۴۰
سطح میانی $r = R$	۱۰۰۰ rpm	۲/۰۵
	۳۶۰۰ rpm	۴/۲۶
	۱۰۰۰۰ rpm	۲۰/۳۹

۳-۵ جمع بندی

با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای سرعت های نه چندان زیاد، مشاهده می شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی و فشاری مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می باشد. به عبارتی می توان از نتایج مربوط به فصل دوم برای بررسی رفتار استوانه‌ی چرخان با سرعت دورانی پایین تحت فشار استفاده کرد. همانطور که در طول فصل نیز اشاره شد، در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، دوران با

سرعت ثابت برای سرعت‌های نه چندان زیاد سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی بسیار اندکی می‌شود. به عنوان مثال، جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm در وسط استوانه برای لایه‌های داخلی، میانی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ حدود 0.05 mm می‌باشد. همچنین حداکثر مقدار تنش محیطی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm کمتر از 3 MPa می‌باشد. قابل ذکر است که میزان تنش حاصل از دوران در سطح داخلی بیشتر از سطح میانی می‌باشد. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار و دوران در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم ظاهر می‌شود، می‌توان برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های دورانی و فشاری به طور جداگانه، معادلات حاکم را حل کرده و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در حقیقت بردار ناهمگنی $\{F\}$ در نقش بردار نیرویی شامل نیروهای سطحی و حجمی ظاهر می‌شود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه تحت بارگذاری‌های دورانی و فشاری وجود دارد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد. با توجه به آنچه در این فصل گفته شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد.

فصل ۴

تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

۴-۱ مقدمه

طراحی مواد FG در ابتدا به منظور کاربردهای حرارتی آنها در شرایط ویژه بود و مقاومت منحصر به فرد استوانه‌های جدار ضخیم (FGM) در برابر بارهای حرارتی، دانشمندان را بر آن داشت تا به بررسی و تحلیل عملکرد آنها در مسائلی که به مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا نیاز دارند، بپردازند.

در این فصل برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای، با استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تشکیل شده از مواد همگن و ناهمگن بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، حلّ عمومی استوانه‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و شار حرارتی یکنواخت ارائه شده است. نهایتاً با ارائه‌ی حل عددی توسط نرم‌افزار المان محدود Ansys برای استوانه تحت فشار داخلی و شار حرارتی یکنواخت، نتایج حاصل از حلّ تحلیلی به کمک روش تغییر شکل برشی با نتایج حاصل از حلّ عددی مقایسه شده‌اند.

۲-۴ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ناهمگن

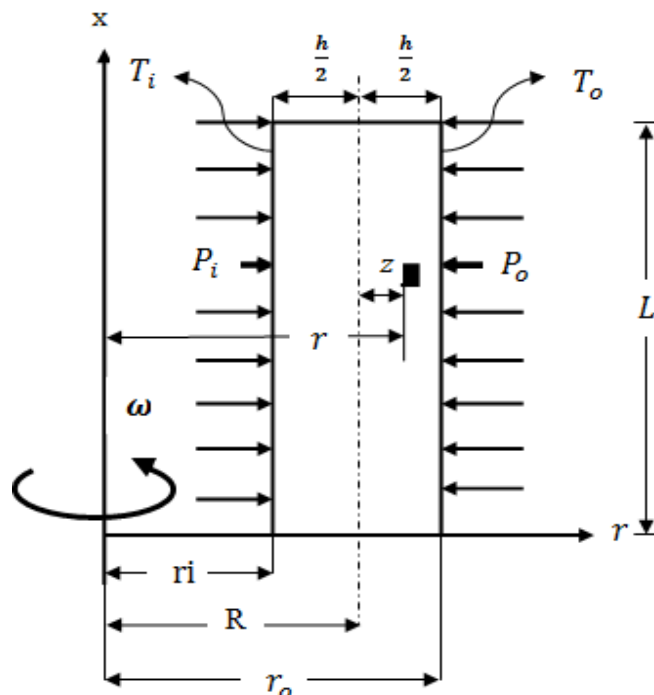
یک پوسته‌ی استوانه‌ی جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی و با حضور منبع حرارتی در شعاع داخلی و خارجی استوانه را به صورت شکل (۱-۴) در نظر می‌گیریم.

همانطور که در فصول قبلی نیز بیان شد بر اساس اصل کار مجازی، تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروهای خارجی برابر است، یعنی:

$$\delta U = \delta W \quad (1-4)$$

با تعریف انرژی کرنشی:

$$\begin{cases} U = \iiint_V U^* dV \\ dV = r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ U^* = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \end{cases} \quad (2-4)$$



ثابت تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی جدار استوانه‌ی شکل ۱-۴ پروفیل

بر اساس روابط رفتاری برای مواد ناهمگن و همسانگرد و با در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی، تنش‌ها بر

حسب مقادیر کرنش عبارتند از:

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \frac{E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} - \frac{\alpha(r)E(r)\Delta T(r)}{1-2\nu} \\ \tau_{xz} = \frac{E(r)}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \end{cases} \quad (3-4)$$

که در آن $\Delta T(r)$ تابع توزیع اختلاف دما در طول جداره‌ی استوانه بوده و $\alpha(r)$ نیز ضریب انبساط حرارتی می‌باشد. با تعریف پارامتر λ برای خلاصه‌نویسی داریم:

$$\begin{cases} \sigma_i = \lambda E(r) \left[(1-\nu)\varepsilon_i + \nu(\varepsilon_j + \varepsilon_k) - \alpha(r)(1+\nu)\Delta T(r) \right] \\ \tau_{xz} = \frac{1-2\nu}{2} \lambda E(r) \gamma_{xz} \\ \lambda = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (4-4)$$

با جایگذاری مقادیر تنش از رابطه‌ی (۴-۴) در رابطه‌ی (۲-۴) برای انرژی کرنشی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} U = \iiint_V U^* dV \\ dV = r dr d\theta dx = (R+z) dx d\theta dz \\ = \frac{1}{2} E(r) \lambda \left[(1-\nu)(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_z^2) + 2\nu(\varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta \varepsilon_z) \right. \\ \left. + \frac{1-2\nu}{2} \gamma_{xz}^2 - \alpha(r)\Delta T(r)(1+\nu)(\varepsilon_x + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right] \end{cases} \quad (5-4)$$

و تعریف کار نیروهای خارجی شامل فشار داخلی و خارجی:

$$\begin{cases} W = \iint_S (\vec{f}_{sf} \cdot \vec{u}) dS \\ dS = r d\theta dx = (R+z) dx d\theta \\ \Rightarrow W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) U_z dx d\theta \end{cases} \quad (6-4)$$

و با انتگرالگیری در محدوده‌ی:

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}, \quad 0 \leq x \leq L \quad (7-4)$$

برای تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات کار نیروهای خارجی برای استوانه‌ی تحت شار حرارتی و فشار

داخلی و خارجی یکنواخت داریم:

$$\delta U = R \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \delta U^* \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx d\theta \quad (۸-۴)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta U}{2\pi} = R \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx$$

$$\delta W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (P_i r_i - P_o r_o) \delta U_z dx d\theta \quad (۹-۴)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{2\pi} = \int_0^L \left[P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) - P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) \right] (\delta w + z \delta \psi) dx$$

با جایگذاری کرنش‌های رابطه‌ی (۷-۲) در روابط (۸-۴) و (۹-۴) و نیز بکارگیری اصول حساب بردشی و

اصل کار مجازی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای تحت شار حرارتی و فشار داخلی و خارجی خواهیم داشت:

$$\frac{\delta U}{2\pi} = \frac{\delta W}{2\pi} \quad (۱۰-۴)$$

$$\begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - R Q_x = 0 \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = -P_i \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \left(R + \frac{h}{2}\right) \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z = P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2}\right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2}\right) \end{cases} \quad (۱۱-۴)$$

$$R [N_x \delta u + M_x \delta \phi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi]_0^L = 0 \quad (۱۲-۴)$$

روابط (۱۱-۴) همان معادلات اصلی ما را تشکیل می‌دهند. رابطه‌ی کمکی (۱۲-۴) هم شرایط مرزی

مورد نظر را تبیین می‌کند که می‌بایست در هر دو انتهای استوانه صفر باشند.

۴-۲-۱ توزیع ناهمگنی ضریب انبساط حرارتی

در استوانه‌های تشکیل شده از مواد ناهمگن و همسانگرد (FGM)، مدول الاستیسیته E ، ضریب پواسون

ν و ضریب انبساط حرارتی α توابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد \bar{r} می‌باشند که در اکثر تحلیل‌ها و

بالاخص در این بررسی، به علت تغییرات جزئی ضریب پواسون ثابت در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن

توزیع توانی برای مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در طول جداره‌ی استوانه (شعاع استوانه) به صورت تابعی از مختصات شعاعی بی‌بعد \bar{r} به صورت رابطه‌ی (۲-۲۳) خواهیم داشت:

$$E(r) = E_i (\bar{r})^n \quad (۱۳-۴)$$

$$\alpha(r) = \alpha_i (\bar{r})^n \quad (۱۴-۴)$$

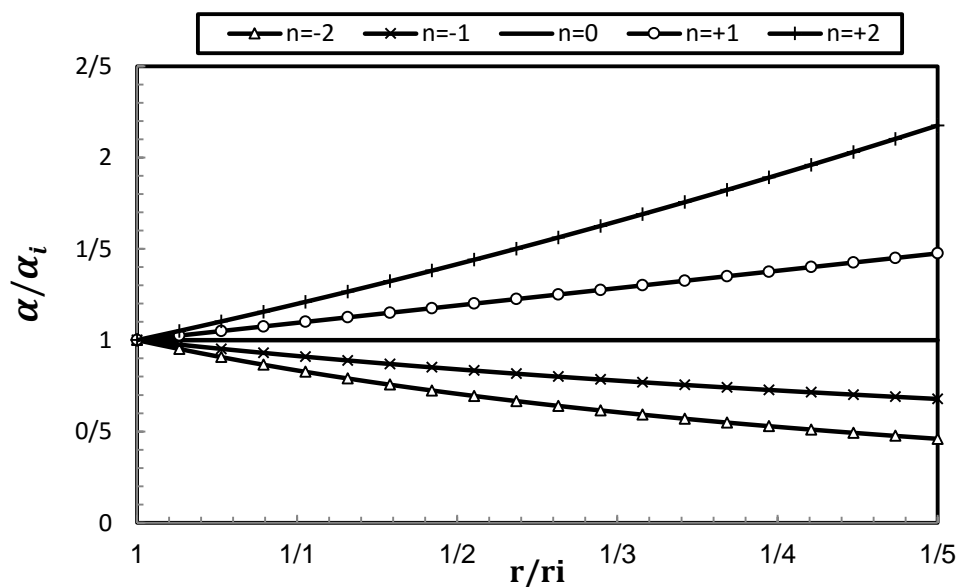
که در این رابطه $\bar{r} = r/r_i$ مختصات شعاعی بی‌بعد است. همچنین E_i و α_i به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در شعاع داخلی استوانه و n نیز ثابت ناهمگنی ماده می‌باشد که $n = 0$ همان ماده‌ی همگن است. با جایگذاری مقدار $r = R + z$ در روابط (۴-۱۳) تا (۴-۱۴) داریم:

$$E(z) = E_i \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n \quad (۱۵-۴)$$

$$\alpha(z) = \alpha_i \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n \quad (۱۶-۴)$$

شکل (۲-۲) توزیع ضریب انبساط حرارتی بی‌بعد شده را نسبت به مختصات شعاعی بی‌بعد در استوانه‌ی

ناهمگن و همسانگرد به ازای مقادیر ثابت ناهمگنی مختلف نشان می‌دهد.



شکل ۲-۴ توزیع بی‌بعد ضریب انبساط حرارتی در راستای شعاعی

۴-۲-۲ حل معادله‌ی انتقال حرارت

همانطور که در قسمت قبل توضیح داده شد، برای یک استوانه تحت تاثیر منبع حرارتی در اطراف آن مطابق شکل (۴-۱)، در نظر گرفتن انتقال حرارت به صورت هدایت در داخل جداره‌ی استوانه باعث ایجاد کرنش‌های حرارتی در داخل استوانه می‌شود. برای انجام تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی مورد نظر می‌بایست با حل معادله‌ی انتقال حرارت پوسته‌ی استوانه‌ای، تابع توزیع اختلاف دما در طول جداره‌ی استوانه تعیین شود. برای این منظور اگر یک المان در مختصات استوانه‌ای در نظر بگیریم؛ در شرایطی که تولید حرارتی و گذشت زمان وجود ندارد (شرایط یکنواخت)، با توجه به اصل پایستگی انرژی می‌بایست شار ورودی و خروجی در این المان ثابت باشد. با توجه به فرض متقارن محوری بودن بارگذاری و عدم وجود گرادیان دما در راستای ضخامت، فقط شار حرارتی در راستای شعاع وجود دارد، از این رو داریم:

$$q_r = q_{r+dr} \quad (۱۷-۴)$$

که در آن:

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr} = -k \{hrd\theta\} \frac{dT}{dr} \quad (۱۸-۴)$$

k ضریب هدایت حرارتی و h ضریب جابه‌جایی می‌باشد. از طرفی نیز داریم:

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{dq_r}{dr} dr = q_r + \frac{d}{dr} \left(k \{hrd\theta\} \frac{dT}{dr} \right) dr \quad (۱۹-۴)$$

با توجه به روابط بدست آمده، معادله‌ی انتقال حرارت را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (۲۰-۴)$$

در این تحلیل به دلیل اثر ناچیز تغییرات k در پاسخها و با ثابت فرض کردن مقدار آن، با حل

معادله‌ی دیفرانسیل (۲۰-۴) داریم:

$$T(r) = c_1 \ln(r) + c_2 \quad (۲۱-۴)$$

شرایط مرزی برای توزیع دما به نحوی است که سطح داخلی در معرض دمای T_i و سطح خارجی در

معرض دمای T_o قرار گرفته است:

$$T(r) \Big|_{r=r_i} = T_i, T(r) \Big|_{r=r_o} = T_o \quad (۲۲-۴)$$

در نهایت پس از اعمال شرایط مرزی طبق رابطه‌ی (۲۲-۴) توزیع دما در طول جداره‌ی استوانه به صورت تابعی از شعاع استوانه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$T(r) = \frac{(T_i - T_o) \ln\left(\frac{r}{r_o}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} + T_o \quad (23-4)$$

با توجه به اینکه در معادله‌ی کرنش حرارتی، عبارت توزیع اختلاف دما یعنی $\Delta T(z)$ ظاهر می‌شود،

معادله‌ی (۲۳-۴) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta T(z) &= \frac{(\Delta T_i - \Delta T_o) \ln\left(\frac{R+z}{r_o}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_o}\right)} + \Delta T_o \\ \Delta T_i &= T_i - T_{ref}, \quad \Delta T_o = T_o - T_{ref} \end{aligned} \right. \quad (24-4)$$

که در آن T_{ref} دمای محیط (مرجع) می‌باشد.

معادلات (۱۱-۴) در حقیقت یک دستگاه معادلات دیفرانسل می‌باشند. برای حل آن باید نیروها و لنگرها را با استفاده از روابط (۱۰-۲) تا (۱۳-۲) به منته‌های تنش و با جایگذاری رابطه‌ی (۱۵-۴) و (۱۶-۴) در روابط (۴-۴) و استفاده از رابطه‌ی (۲۴-۴) به مولفه‌های کرنش و سپس به کمک روابط (۷-۲) بر حسب مولفه‌های میدان جابه‌جایی نوشت. نهایتاً یک دستگاه ۴ معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت بدست می‌آید که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$[A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \quad (25-4)$$

که در آن بردار مجهول $\{y\}$ شامل مولفه‌های میدان جابه‌جایی به صورت رابطه‌ی (۲۶-۴) می‌باشد:

$$\{y\} = \{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \quad (26-4)$$

همچنین قسمت ناهمگن دستگاه معادلات به صورت بردار نیروی $\{F\}$ در رابطه‌ی (۲۷-۴) نشان داده شده

است:

$$\{F\} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \left\{ \begin{array}{c} C_0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n (R+z)^2 dz - \lambda E_i \alpha_i (1+\nu) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^{2n} \Delta T(z) dz \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n z (R+z)^2 dz - \lambda E_i \alpha_i (1+\nu) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^{2n} (R+2z) \Delta T(z) dz \end{array} \right\} \quad (27-4)$$

جملات حاصل در بردار ناهمگنی $\{F\}$ شامل دو بخش حاصل از بارگذاری حرارتی و ناشی از بارگذاری مکانیکی می‌باشند. جملات مربوط به بارگذاری حرارتی با توجه به روابط رفتاری (4-4) و در نظر گرفتن کرنش‌های حرارتی، در عبارت انرژی کرنشی وارد شده که نهایتاً در مؤلفه‌های سوم و چهارم قسمت ناهمگن دستگاه معادلات (4-25) در نقش نیروهای حجمی ظاهر می‌شوند. جملات مربوط به بارگذاری مکانیکی نیز از جملات مربوط به کار نیروهای خارجی حاصل می‌شود.

در دستگاه معادلات (4-24) ماتریس‌های $[A]_{4 \times 4}$ و $[C]_{4 \times 4}$ متقارن و $[B]_{4 \times 4}$ پادمتقارن هستند که در ادامه درایه‌های مربوط به آنها آورده شده است:

$$A_{11} = (1-\nu)h \quad (28-4)$$

$$A_{22} = (1-\nu) \frac{h^3}{12} \quad (29-4)$$

$$A_{33} = \mu h \quad (30-4)$$

$$A_{44} = \mu \frac{h^3}{12} \quad (31-4)$$

$$A_{12} = A_{13} = A_{14} = A_{21} = A_{23} = A_{24} = A_{31} = A_{32} = A_{34} = A_{41} = A_{42} = A_{43} = 0 \quad (32-4)$$

$$B_{13} = \nu \alpha = -B_{31} \quad (33-4)$$

$$B_{14} = 2h\nu - R\nu\alpha = -B_{41} \quad (34-4)$$

$$B_{23} = -\mu h + \nu(h - R\alpha) = -B_{32} \quad (35-4)$$

$$B_{24} = -\nu R(h - R\alpha) = -B_{42} \quad (36-4)$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = B_{33} = B_{34} = B_{43} = B_{44} = 0 \quad (37-4)$$

$$C_{22} = -\mu h \quad (38-4)$$

$$B_{11} = B_{12} = B_{21} = B_{22} = B_{33} = B_{34} = B_{43} = B_{44} = 0 \quad (39-4)$$

$$C_{33} = -(1-\nu)\beta \quad (40-4)$$

$$C_{34} = -\alpha + (1-\nu)R\beta = C_{43} \quad (41-4)$$

$$C_{44} = 2(R\alpha - h) - (1-\nu)R^2\beta \quad (42-4)$$

$$C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{21} = C_{23} = C_{24} = C_{31} = C_{32} = C_{41} = C_{42} = 0 \quad (43-4)$$

که پارامتر μ, α, β به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu = K \left(\frac{1-2\nu}{2} \right), \alpha = \ln \left(\frac{r_o}{r_i} \right) \quad (44-4)$$

$$\beta = \left(\frac{h}{\left(R - \frac{h}{2} \right) \left(R + \frac{h}{2} \right)} \right) \quad (45-4)$$

K ضریب تصحیح برشی است که بسته به هندسه‌ی پوسته در عبارت تنش برشی وارد می‌شود. این ضریب

در حالت استاتیک برای استوانه $K = \frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده است.

۴-۲-۳ حل ترموالاستیک استوانه چرخان تحت بارگذاری فشاری

همانطور که توضیح داده شد، دستگاه معادله‌ی (۴-۲۵) یک دستگاه ۴ معادله دیفرانسیل ناهمگن خطی

با ضرایب ثابت می‌باشد که دارای حل عمومی و حل خصوصی است. اگر این دستگاه معادلات را به صورت

ساده شده‌ی زیر بنویسیم:

$$A \{y''\} + B \{y'\} + C \{y\} = \{F\} \quad (46-4)$$

داریم:

$$\{y\} = \{y\}_g + \{y\}_p \quad (47-2)$$

برای حل عمومی دستگاه فوق مقدار $\{y\} = \{\xi\} e^{mx}$ را در معادلات آن می‌گذاریم، داریم:

$$e^{mx} [m^2A + mB + C] \{\xi\} = \{0\} \quad (48-2)$$

با توجه به اینکه $e^{mx} \neq 0$ می‌توان نوشت:

$$|m^2A + mB + C| = 0 \quad (49-2)$$

از حل معادله‌ی فوق، مقادیر ویژه m_i محاسبه شده که به صورت سه جفت ریشه‌ی مزدوج حاصل می‌شوند. از این سه جفت ریشه، یک جفت آن عدد حقیقی و دو جفت دیگر آن نیز اعداد مختلط مزدوج می‌باشند. با قرار دادن مقادیر ویژه‌ی حاصل در معادله‌ی (۴-۴۸)، بردارهای ویژه ξ_i متناظر با مقادیر ویژه‌ی فوق به دست می‌آیند. در نهایت حل عمومی عبارتست از:

$$\{y\}_g = \sum_{i=1}^6 C_i \{\xi\}_i e^{m_i x} \quad (۵۰-۴)$$

با توجه به این نکته که مقادیر ویژه‌ی حاصل شامل اعداد مختلط می‌باشند، برای به دست آوردن بردارهای ویژه‌ی متناظر با این اعداد مختلط، باید از روابط حاکم بر بردارهای ویژه‌ی مربوط به اعداد مختلط استفاده کرد.

برای حل خصوصی، قسمت ناهمگن معادلات (۴-۲۵) یعنی بردار نیروی $\{F\}$ برای یک استوانه‌ی متقارن محوری با ضخامت ثابت و تحت شار حرارتی و فشار داخلی و خارجی یکنواخت، مقدار ثابتی است، لذا جواب خصوصی تابعی از x نمی‌باشد. بنابراین می‌توان با معکوس کردن ماتریس $[C]$ طبق معادله‌ی زیر جواب خصوصی را به دست آورد.

$$[C]\{y\} = \{F\} \Rightarrow \{y\} = [C]^{-1}\{F\} \quad (۵۱-۴)$$

اما با توجه به معکوس ناپذیری (منفرد بودن) ماتریس $[C]$ به دلیل صفر بودن سطر و ستون آن، با ایجاد تغییراتی در ماتریس‌های ضرایب معادلات، این مشکل حل می‌شود. بدین منظور در اولین معادله از سری معادلات (۴-۱۱)، از طرفین آن انتگرال‌گیری کرده و خواهیم داشت:

$$RN_x = C_0 \quad (۵۲-۴)$$

همانطور که در معادلات (۴-۲۵) مشخص است، عبارت u وجود ندارد ولیکن du/dx در معادلات وجود دارد. با در نظر گرفتن du/dx به عنوان پارامتری جدیدی به نام v و انتگرال‌گیری از طرفین اولین معادله از سری معادلات داریم:

$$u = \int v dx + C_7 \quad (۵۳-۴)$$

بنابراین دستگاه معادلات قدیم به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} [A] \frac{d^2}{dx^2} \{y\} + [B] \frac{d}{dx} \{y\} + [C] \{y\} = \{F\} \\ \{y\} = \{v \quad \phi \quad w \quad \psi\}^T \end{cases} \quad (54-4)$$

که در آن بردار نیرویی $\{F\}$ با توجه به انتگرالگیری از طرفین اولین معادله، به صورت زیر می‌باشد:

$$\{F\} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \begin{pmatrix} C_0 \\ 0 \\ -P_i \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n (R+z)^2 dz - \lambda E_i \alpha_i (1+\nu) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^{2n} \Delta T(z) dz \\ P_i \frac{h}{2} \left(R - \frac{h}{2} \right) + P_o \frac{h}{2} \left(R + \frac{h}{2} \right) - \omega^2 \rho_i \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^n z (R+z)^2 dz - \lambda E_i \alpha_i (1+\nu) \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{R+z}{r_i} \right)^{2n} (R+2z) \Delta T(z) dz \end{pmatrix} \quad (55-4)$$

بنابراین با حل معادلات فوق به صورت مطالعه‌ی موردی می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی را به دست

آورد.

شرایط مرزی برای پوسته‌ی استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۴-۱) توسط رابطه‌ی (۴-۱۲) بیان می‌-

شوند. به عبارتی باید مقادیر $\{u \quad \phi \quad w \quad \psi\}$ و $\{N_x \quad M_x \quad Q_{xz} \quad M_{xz}\}$ در دو انتهای استوانه طوری

در نظر گرفته شوند که همواره رابطه‌ی (۴-۱۲) برابر صفر باشد. با داشتن ۶ مجهول C_6, \dots, C_1 در جواب

عمومی و ۲ ثابت C_7, C_0 در جواب خصوصی، می‌توان با اعمال شرایط مرزی مختلف در دو انتهای استوانه

شامل ۴ شرط مرزی در هر سمت، ۸ ثابت مجهول را محاسبه کرد. نهایتاً با به دست آوردن ثوابت مجهول،

بردار مجهول $\{y\}$ که شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی است، توسط رابطه‌ی (۲-۴۶) بر حسب متغیرهای

z, x به دست می‌آیند. با استفاده از رابطه‌ی (۲-۶) می‌توان میدان جابه‌جایی شعاعی و طولی را به دست

آورده و با استفاده از روابط (۴-۴)، (۲-۷) و (۲-۱۰) تا (۲-۱۳) مقادیر تنش، کرنش، نیرو و لنگر را نیز

محاسبه کرد.

۳-۴ مطالعه‌ی موردی

برای مطالعه‌ی موردی و بررسی نمودارهای به‌دست آمده از نتایج حل تحلیلی، یک استوانه جدار ضخیم ناهمگن و همسانگرد با ضخامت ثابت مطابق شکل (۱-۴) به شعاع داخلی $r_i = 40 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 60 \text{ mm}$ ، طول $L = 800 \text{ mm}$ و توزیع نمایی مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی طبق روابط (۱۵-۴) تا (۱۶-۴) دارای مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی استوانه به ترتیب برابر مقادیر $E_i = 200 \text{ GPa}$ و $\frac{1}{C} = 12 \times 10^{-6}$ و همچنین نسبت پواسون ثابت $\nu = 0.3$ را تحت فشار یکنواخت داخلی $P_i = 80 \text{ MPa}$ ، سرعت دورانی $\omega = 3600 \text{ rpm}$ دمای سطح داخلی 125°C و $T_i =$ دمای سطح خارجی برابر دمای محیط $T_o = 25^\circ \text{C}$ در نظر می‌گیریم.

تحلیل مورد نظر بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با شرایط انتهایی (الف) دوسر گیردار و (ب) یک‌سر گیردار - یک سر آزاد انجام شده است. حل تحلیلی از طریق برنامه‌نویسی توسط نرم‌افزار Maple 11 صورت گرفته است.

۱-۳-۴ استوانه‌ی دوسر گیردار

برای شرایط مرزی دو سر گیردار با توجه به رابطه‌ی (۱۲-۴) داریم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \end{cases} \quad (56-4)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌-

آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند.

در شکل (۳-۴) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای nهای مختلف برای بارگذاری

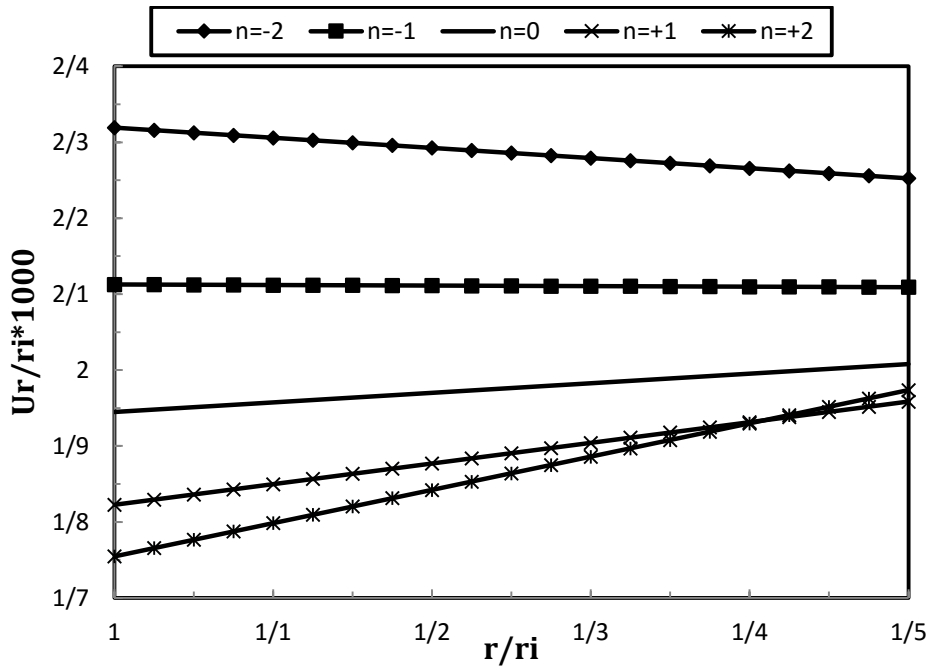
ترکیبی در وسط استوانه نشان داده شده است. همانطور که از شکل (۳-۴) مشخص است به ازای nهای

منفی جابه‌جایی استوانه نسبت به ماده‌ی همگن از نظر مقدار بیشتر است و به ازای nهای مثبت کمتر می‌-

شود. این نسبت در استوانه تحت فشار داخلی در طول جداره تقریباً ثابت می‌ماند ولیکن در استوانه تحت

بارگذاری ترکیبی در طول جداره ثابت نمی‌ماند یعنی تغییرات جابه‌جایی در ماده‌ی ناهمگن مشابه تغییرات

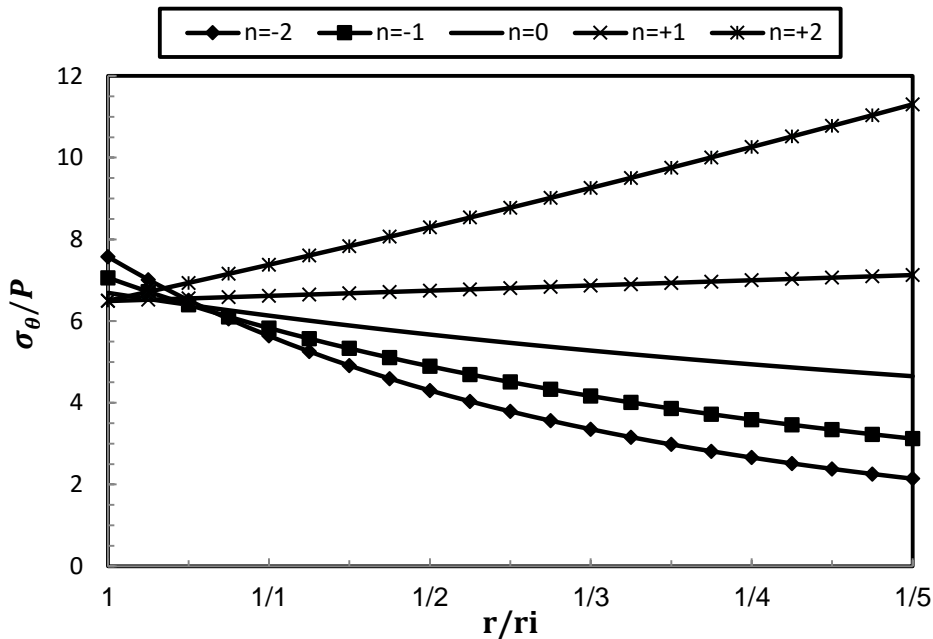
جابه‌جایی در ماده‌ی همگن نمی‌باشد.



شکل ۳-۴ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی در $x=L/2$

برای حالت دوسر گیردار

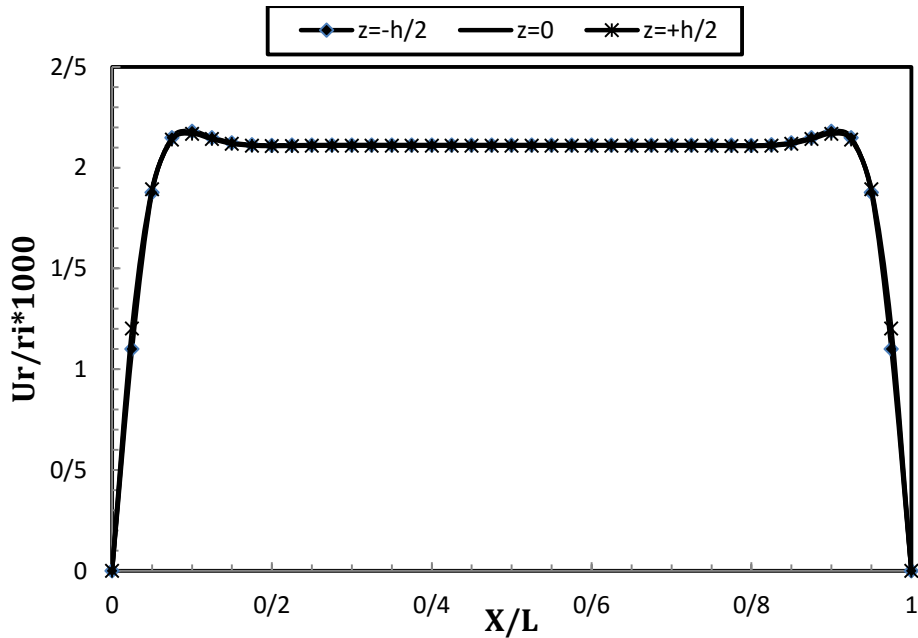
شکل (۴-۴) توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای n های مختلف برای بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه نشان می‌دهد. تنش محیطی برای n های منفی در نیمه‌ی داخلی جداره، بیشتر از ماده همگن و در نیمه خارجی کمتر از ماده همگن می‌باشد و برعکس برای n های مثبت در نیمه‌ی داخلی کمتر و در نیمه خارجی بیشتر از ماده همگن است. در نیمه‌ی داخلی استوانه مقادیر n مثبت و در نیمه‌ی خارجی مقادیر n منفی سبب کاهش تنش شده که با توجه به بزرگتر بودن تنش در لایه-ی خارجی، استفاده از مواد ناهمگن با n های منفی بر خلاف استوانه تحت بار فشاری به تنهایی مناسب‌تر می‌باشد.



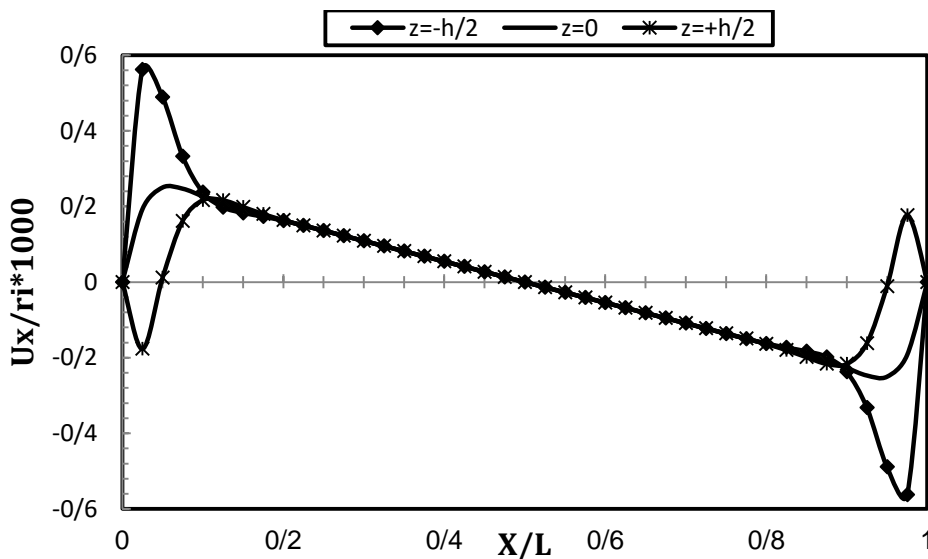
شکل ۴-۴ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی در $x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار

شکل‌های (۴-۵) تا (۴-۸) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را در راستای طول استوانه به ازای $n=(-1)$ در سه لایه‌ی مختلف برای بارگذاری ترکیبی برای شرایط انتهایی دوسر گیردار نشان می‌دهد. مقدار تنش محیطی برای استوانه تحت بارگذاری ترکیبی، از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی از نظر مقدار کاهش می‌یابد. همچنین اختلاف مقادیر جابه‌جایی شعاعی بین هر لایه برای $n=(-1)$ کمتر از بارگذاری فشاری است. تنش محیطی در نقاط اطراف مرز و در لایه‌های نزدیک به لایه‌ی داخلی برای استوانه تحت بارگذاری ترکیبی دارای مقادیر تنش مثبت می‌باشد. مقادیر جابه‌جایی شعاعی در کلیه‌ی نقاط در استوانه تحت بارگذاری ذکر شده مثبت می‌باشد. جابه‌جایی محوری همانند دو بارگذاری دیگر دارای حداکثر مقدار خود در لایه‌ی داخلی می‌باشد. با فاصله گرفتن از دو انتهای استوانه، مقادیر جابه‌جایی شعاعی و تنش محیطی در هر لایه دارای مقدار ثابتی در طول پوسته‌ی استوانه‌ای می‌باشند. جابه‌جایی محوری برای نقاط دور از مرز در لایه‌های مختلف تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند؛ در حالیکه در نقاط اطراف دو انتهای استوانه، عکس این پدیده صادق است. تنش برشی در طول استوانه به غیر از نزدیکی دو انتهای آن، دارای مقادیر صفر می‌باشند. این امر نشان می‌دهد که تنش برشی در نزدیکی

مرزهای انتهایی استوانه تحت تأثیر شرایط مرزی به وجود می‌آید که در تئوری تغییر شکل برشی این تنش-های برشی لحاظ می‌شوند..

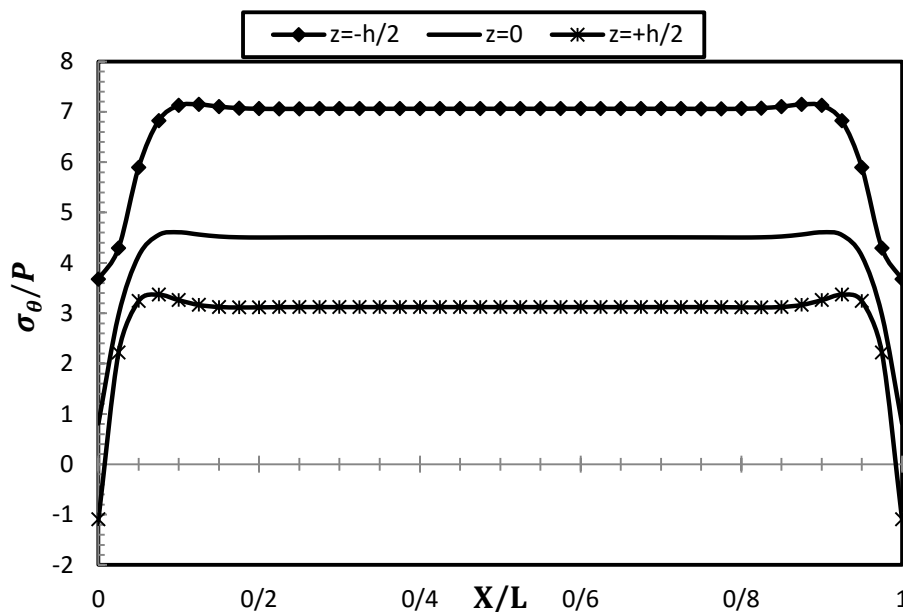


شکل ۴-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دوسر گیردار $n = (-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۴-۶ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت ناهمگنی

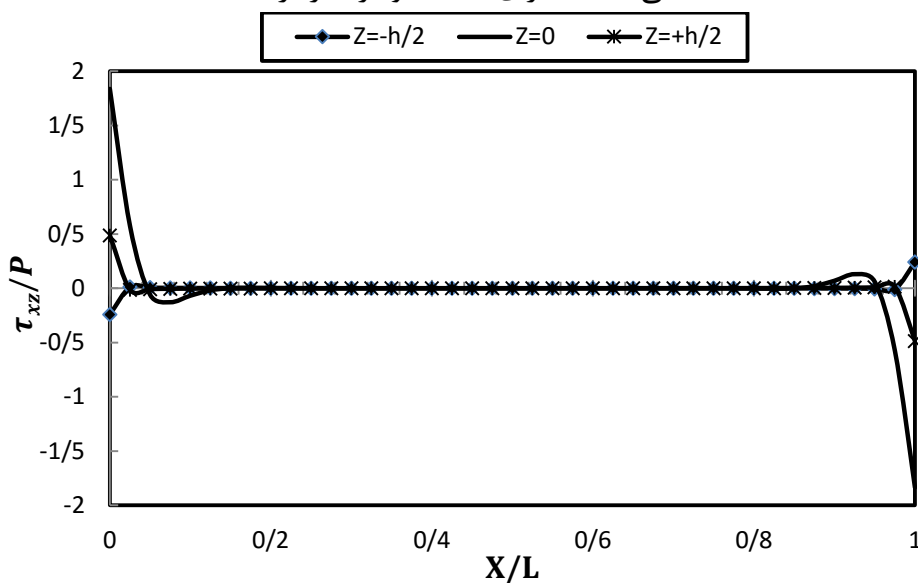
برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$



شکل

شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی به ازای ثابت

ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار



شکل ۴-۸ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

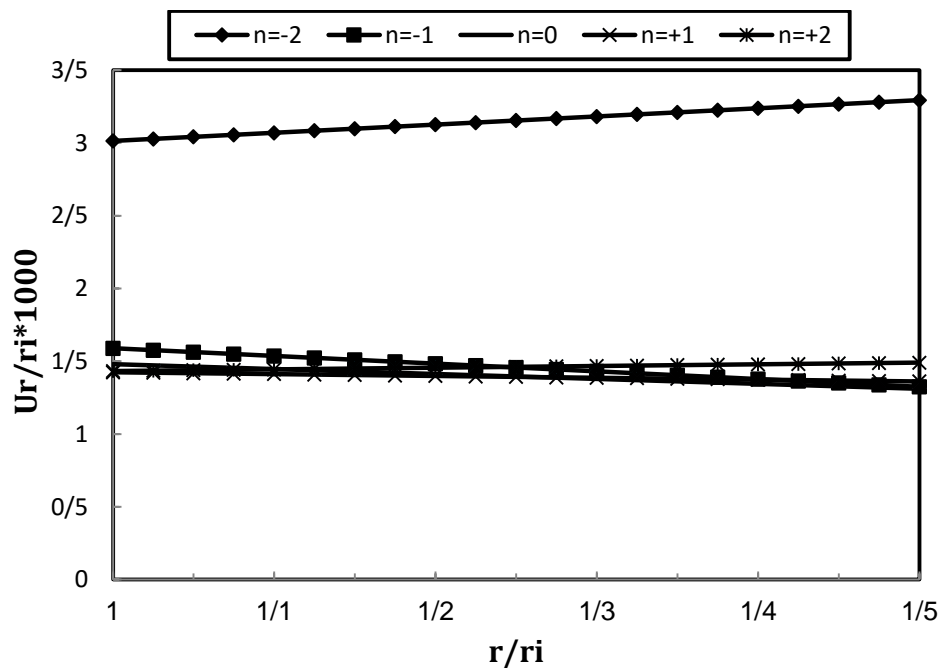
برای حالت دوسر گیردار $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی

۴-۳-۲ استوانه‌ی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد

برای شرایط مرزی یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد با توجه به رابطه‌ی (۴-۱۲) داریم:

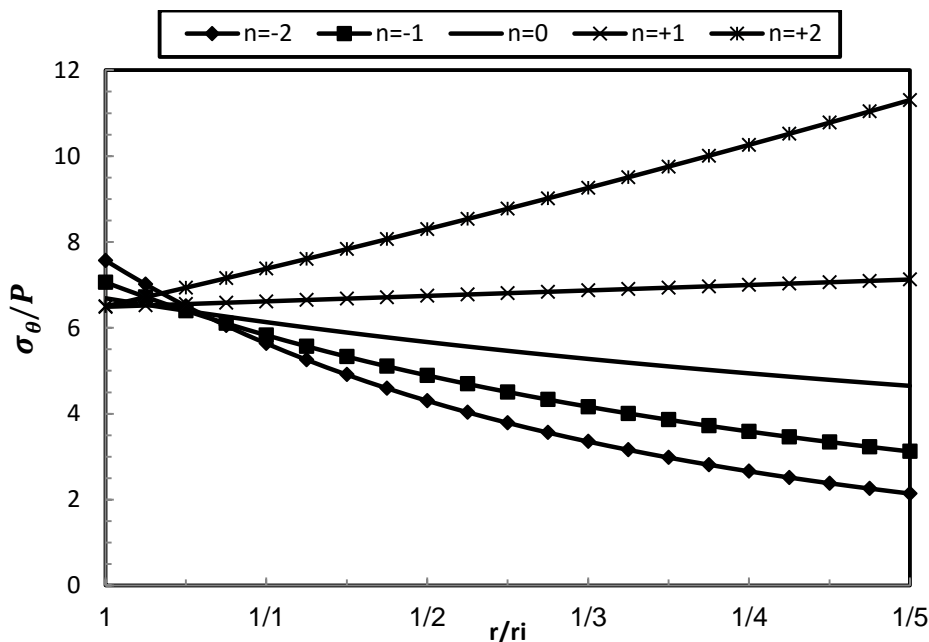
$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0, \phi=0, w=0, \psi=0 \\ x=L \Rightarrow N_x=0, M_x=0, Q_{xz}=0, M_{xz}=0 \end{cases} \quad (4-57)$$

با اعمال شرایط مرزی ذکر شده و محاسبه‌ی ثوابت مجهول، مولفه‌های میدان جابه‌جایی به دست می‌آیند. نهایتاً مقادیر جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محیطی و همچنین تنش محیطی محاسبه می‌شوند. در شکل (۴-۹) توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در راستای جداره به ازای nهای مختلف برای بارگذاری ترکیبی در وسط استوانه نشان داده شده است. شکل (۴-۱۰) نیز توزیع نرمال تنش محیطی استوانه‌ی ناهمگن را در راستای جداره به ازای nهای مختلف برای بارگذاری ذکر شده در وسط استوانه نشان می‌دهد. برخلاف فشار داخلی مشاهده می‌شود که اختلاف بین مقادیر جابه‌جایی شعاعی حاصل از دو شرط انتهایی مورد بررسی در وسط استوانه قابل توجه می‌باشد.



شکل ۴-۹ توزیع نرمال جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی در $x=L/2$

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد

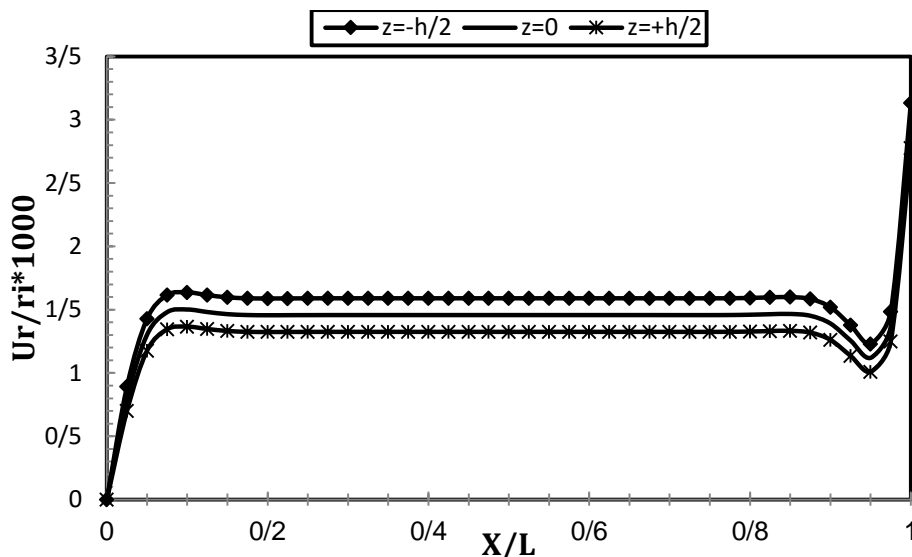


شکل ۴-۱۰ توزیع نرمال تنش محیطی در استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی در $x=L/2$

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد

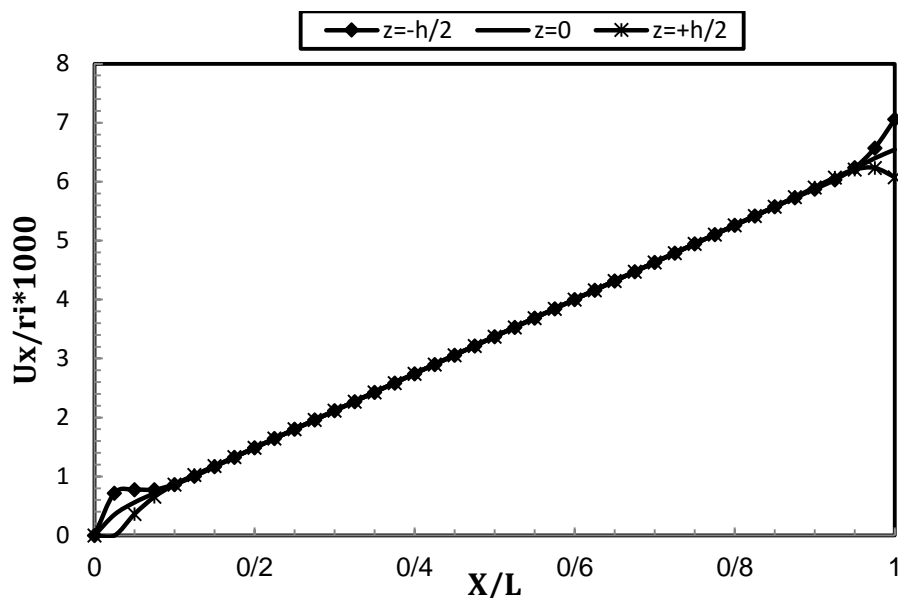
شکل‌های (۴-۱۱) تا (۴-۱۴) توزیع جابه‌جایی شعاعی، جابه‌جایی محوری، تنش محیطی و تنش برشی را در راستای طول استوانه برای بارگذاری ترکیبی به ازای $n=(-1)$ در سه لایه‌ی مختلف نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در نزدیکی انتهای آزاد استوانه برای این بارگذاری یک کاهش و سپس افزایش قابل ملاحظه در مقدار جابه‌جایی شعاعی رخ می‌دهد. تنش محیطی نیز به طور مشابه در سمت آزاد استوانه نسبت به مقدار متوسط موجود در طول استوانه در هر لایه کاهش و سپس افزایش می‌یابد. جابه‌جایی شعاعی، تنش محیطی و تنش برشی پوسته‌ی استوانه‌ای تحت شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد، در طول استوانه تا نزدیکی انتهای آزاد آن و نیز در سمت گیردار استوانه مشابه شرایط دوسر گیردار می‌باشد. جابه‌جایی محوری با اندکی فاصله از انتهای گیردار در طول استوانه تحت تأثیر قیود موجود در سمت گیردار آن برای بارگذاری ترکیبی دارای مقادیر مثبت می‌باشد که این مقادیر برای لایه‌های مختلف یکسان است. در انتهای آزاد استوانه مجدداً جابه‌جایی محوری لایه‌های مختلف با یکدیگر فاصله‌ی اندکی می‌گیرند. تنش برشی نیز در

نزدیکی انتهای آزاد استوانه برای همه‌ی لایه‌ها دارای مقدار منفی شده که نهایتاً به سمت صفر میل می‌کند.



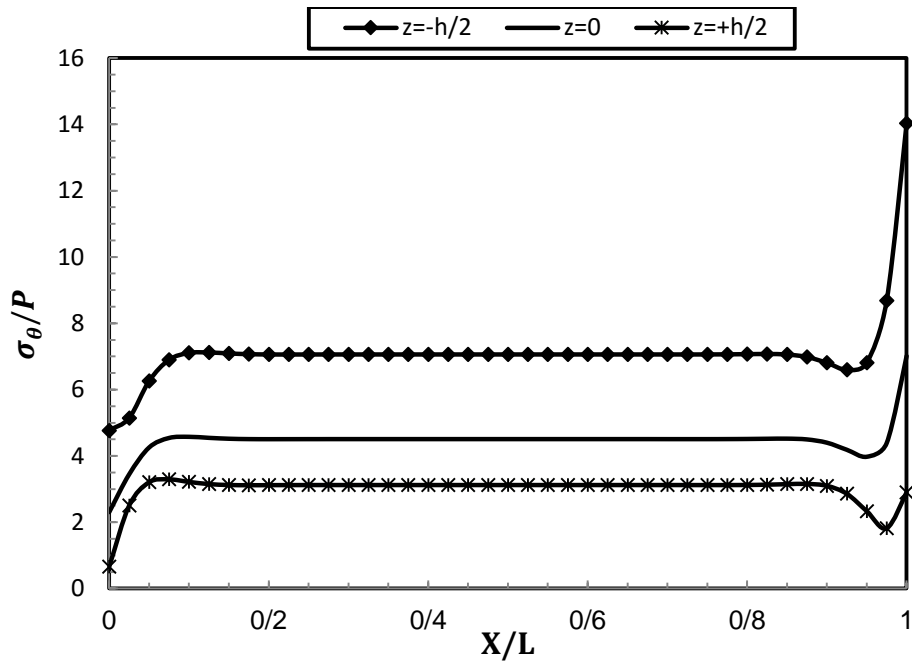
شکل ۴-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

برای حالت یکسر گیردار-یکسر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



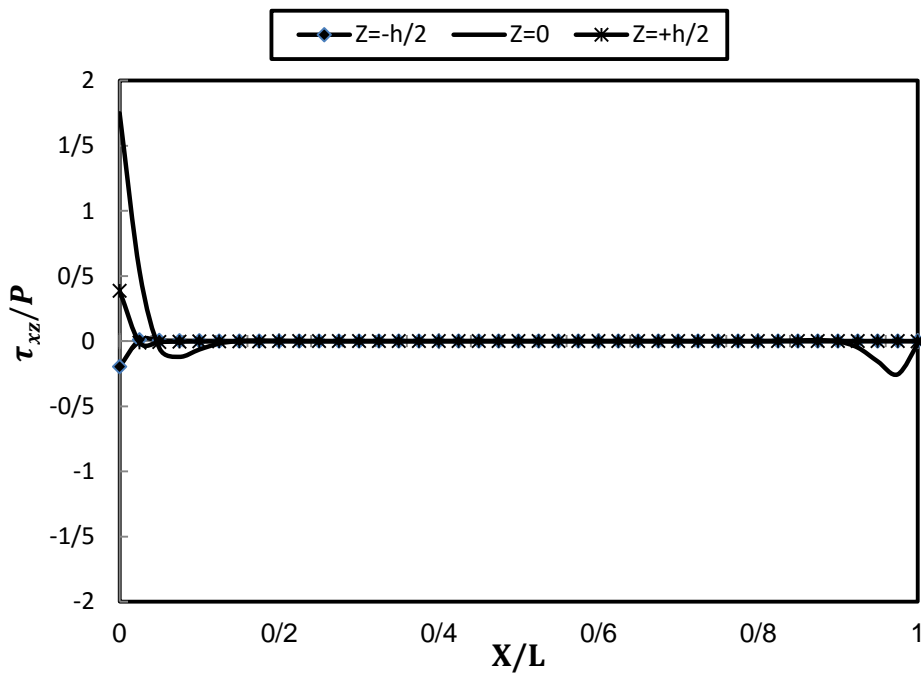
شکل ۴-۱۲ توزیع جابه‌جایی محوری در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

برای حالت یکسر گیردار-یکسر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۴-۱۳ توزیع تنش محیطی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی



شکل ۴-۱۴ توزیع تنش برشی در لایه‌های مختلف استوانه‌ی ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

برای حالت یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد $n=(-1)$ به ازای ثابت ناهمگنی

۴-۴ حلّ عددی استوانه‌های ناهمگن تحت بارگذاری ترکیبی

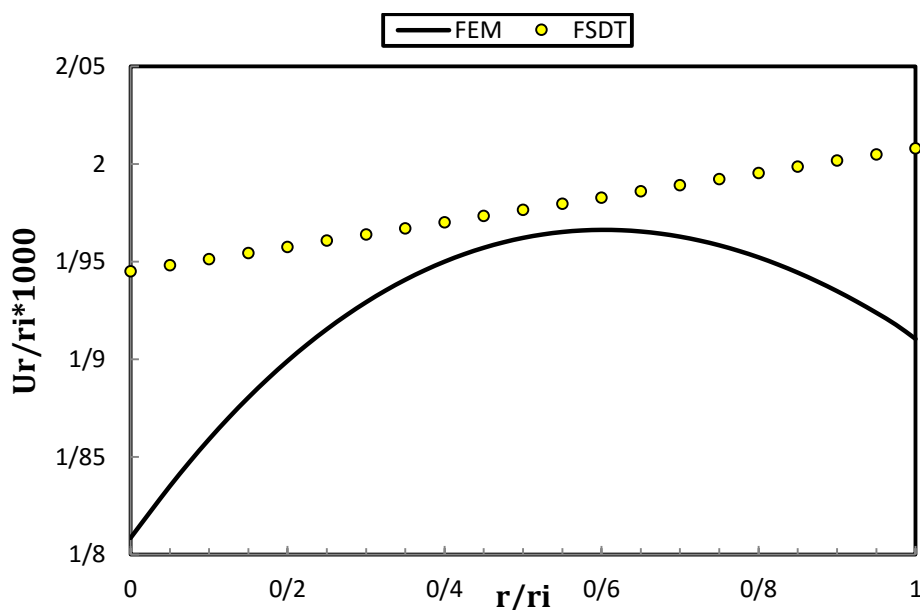
در این بخش نحوه‌ی مدل‌سازی استوانه‌ی FGM تحت بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی توضیح داده شده است. همچنین نتایج مربوط به حل تحلیلی توسط روش تغییر شکل برشی با نتایج عددی حاصل از روش اجزاء محدود در استوانه‌های همگن و ناهمگن تحت فشار داخلی ثابت و شار حرارتی یکنواخت مقایسه شده است.

برای المان‌بندی استوانه، المان solid از نوع plane 8nod 82 انتخاب شده که گزینه‌ی axisymmetric مربوط به این المان فعال شده است. مقطع این المان ۴ ضلعی با اضلاع خمیده و دارای ۸ گره (۴ گره در رؤس و ۴ گره در وسط اضلاع) است که درجه‌ی آزادی هر گره، دو می‌باشد (یکی جابه‌جایی در راستی شعاعی و دیگری جابه‌جایی در راستای محوری). این المان برای مسائل تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و مقارن محوری کاربرد دارد. ماتریس سفتی المان مذکور 16×16 می‌باشد. المان در نظر گرفته شده برای تحلیل توزیع حرارت در جداره‌ی استوانه، المان solid از نوع plane 8nod 77 با گزینه‌ی axisymmetric انتخاب شده است. استوانه به شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر و شعاع خارجی ۶۰ میلی‌متر با جداره‌ی ثابت به طول ۸۰۰ میلی‌متر به صورت یک مستطیل که نشان دهنده‌ی یک مقطع عرضی از استوانه در حالت مقارن محوری می‌باشد، مدل‌سازی شده است. برای ایجاد خواص ناهمگنی که به صورت شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ای در نظر گرفته شده است، با تقسیم جداره‌ی استوانه به تعداد ۲۰ لایه‌ی مساوی و نسبت دادن خواص مدول الاستیسیته و چگالی در هر لایه بسته به فاصله‌ی مرکز هر لایه از لایه‌ی داخلی به صورت تابع نمایی طبق روابط (۴-۱۵) و (۴-۱۶)، نهایتاً پوسته‌ی استوانه‌ای مورد نظر از ۲۰ استوانه‌ی همگن و همسانگرد (ایزوتروپ) به هم چسبیده تشکیل می‌شود. این لایه‌ها در محل اتصال به هم پیوسته‌اند و خواص در محل اتصال لایه‌ها، حد میانگین چپ و راست مزر دو لایه در نظر گرفته می‌شوند. برای اعمال شرایط مرزی موجود در دو انتهای استوانه بسته به شرایط انتهایی، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سر استوانه را مقید می‌کنیم. برای شرایط مرزی دو سر گیردار، کلیه‌ی درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در دو انتهای استوانه را مقید می‌کنیم. همچنین برای شرایط مرزی یک‌سر گیردار- یک‌سر آزاد، بدون اعمال

قید بر روی گره‌های موجود در سمت آزاد استوانه، درجات آزادی مربوط به گره‌های موجود در سمت گیردار استوانه را همانند قسمت قبل مقید می‌کنیم. برای بارگذاری فشاری نیز با در نظر گرفتن گره‌های موجود در مرز داخلی مقطع استوانه در حالت متقارن محوری، می‌توان فشار داخلی را اعمال کرد. همچنین برای اعمال شرایط دمایی موجود در سطح داخلی و خارجی پوسته‌ی استوانه‌ای، با در نظر گرفتن کل گره‌های موجود در سطوح داخلی و خارجی استوانه، مقدار اختلاف دمای مربوط به هر یک از این سطوح را با دمای محیط به عنوان بارگذاری حرارتی اعمال می‌کنیم.

۴-۴-۱ مقایسه‌ی نتایج

در ادامه به منظور بررسی صحت روش حل تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل از روش تئوری تغییر شکل برشی و نتایج حاصل از حل عددی به کمک نرم‌افزار Ansys آورده شده است. در شکل (۴-۱۵) نتایج جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد محاسبه شده با روش‌های FEM و FSDT برای ثوابت ناهمگنی مختلف در طول جداره‌ی استوانه و در $x=L/2$ آورده شده است.

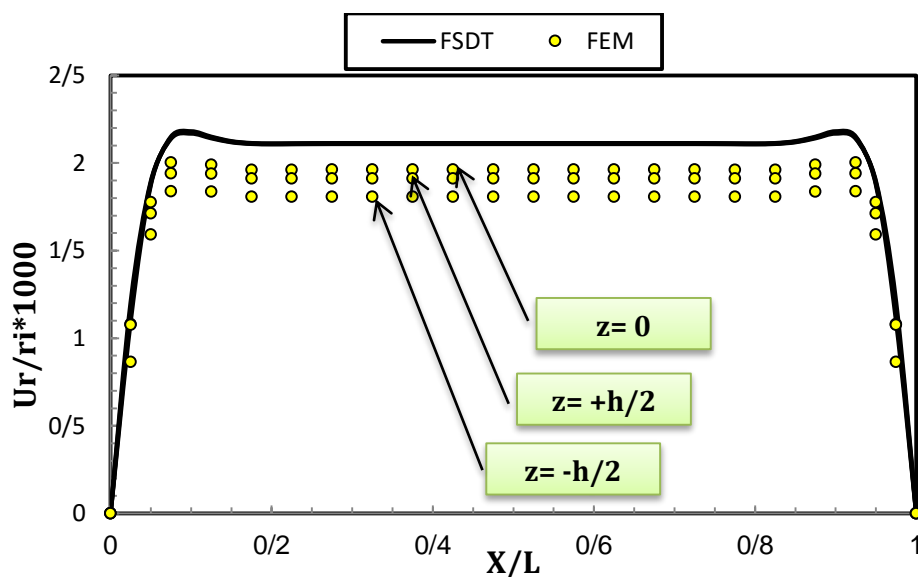


در استوانه بارگذاری ترکیبی FSDT و FEM شکل ۴-۱۵ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های

$x=L/2$ برای حالت دوسر گیردار در

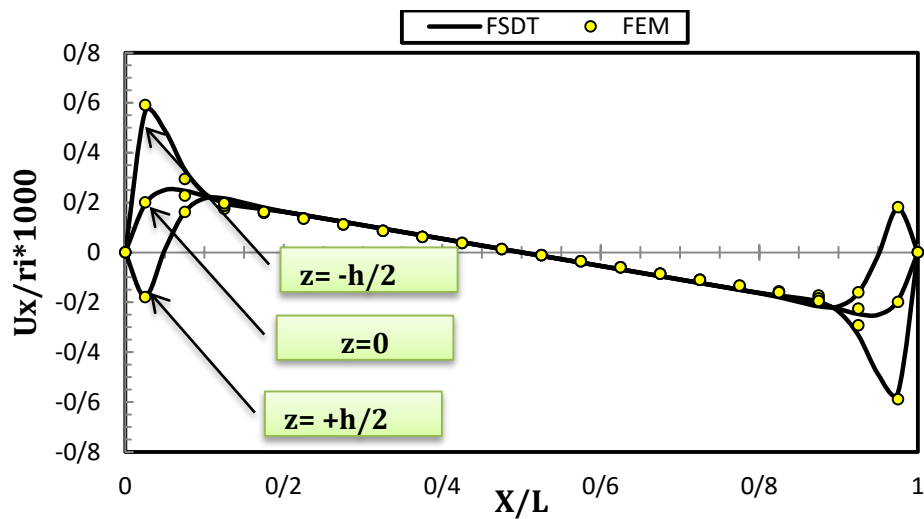
شکل (۴-۱۶) حاوی نتایج جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های FEM و FSDT در سه لایه‌ی

مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی دوسر گیردار برای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ می باشد. توزیع جابه-جایی محوری محاسبه شده توسط دو روش عددی و تحلیلی برای سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه‌ی دو-سر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ در شکل (۴-۱۷) نشان داده شده است. همانطور که قبلاً اشاره شد با توجه به نمودار (۴-۱۶) می توان دریافت که در لایه‌ی میانی کمترین اختلاف بین روش‌های FEM و FSDT وجود دارد؛ این اختلاف در لایه‌ی داخلی بیشتر از لایه‌ی خارجی می باشد. همچنین مشخص است که مقدار جابه‌جایی شعاعی حاصل از روش عددی در طول استوانه در فاصله‌ی کمی از تکیه‌گاه‌ها در لایه‌ی خارجی با جابه‌جایی ایجاد شده در لایه‌ی میانی اختلاف بسیار کمی دارند که همین عامل باعث شده تا جابه‌جایی‌های هر دو لایه در شکل (۴-۱۶) بر یکدیگر منطبق باشند. قابل ذکر است که این مقدار در لایه‌ی داخلی اندکی بیشتر می باشد. برای جابه‌جایی محوری نتایج حاصل از دو روش FEM و FSDT با یکدیگر انطباق قابل قبولی دارند که در لایه‌های داخلی و میانی در نزدیکی دو انتهای استوانه اندکی اختلاف بین دو روش مشاهده می شود.



در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی FSDT و FEM شکل ۴-۱۶ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های

ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی



در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی FSDT و FEM شکل ۴-۱۷ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های

ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ برای حالت دوسر گیردار به ازای ثابت ناهمگنی

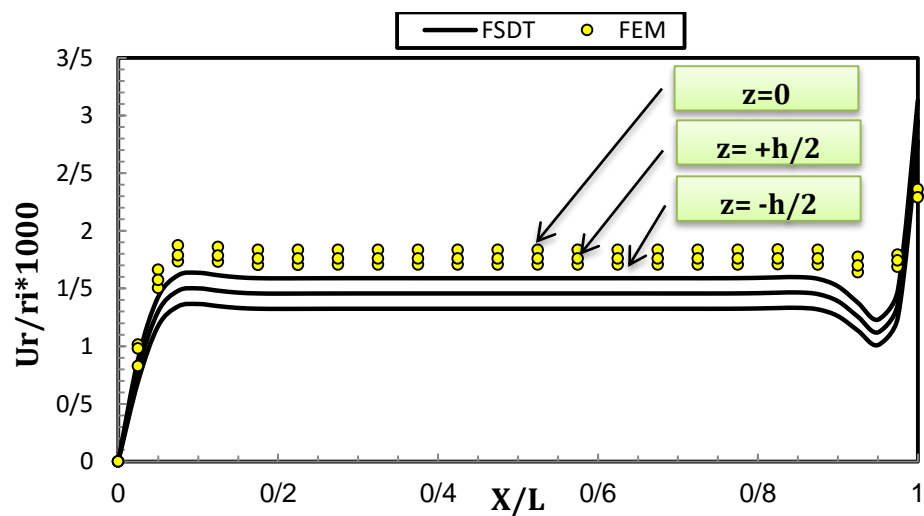
در شکل‌های (۴-۱۸) و (۴-۱۹) به ترتیب توزیع جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری حاصل از دو روش

FEM و FSDT در سه لایه‌ی مختلف در طول استوانه تحت شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد برای

ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ نشان داده شده است. در اینجا روش‌های FEM و FSDT برای جابه‌جایی شعاعی در

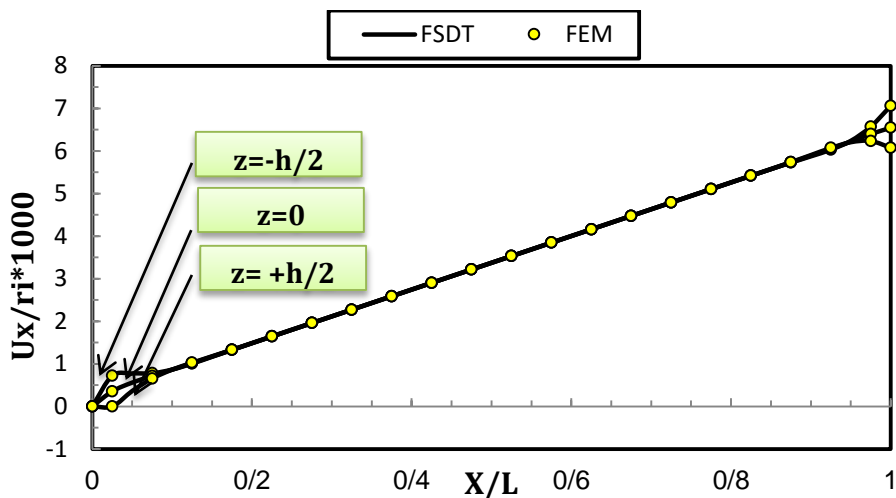
انتهای آزاد استوانه رفتار مشابهی را پیش‌بینی می‌کنند. در جابه‌جایی محوری نیز با حرکت در طول استوانه

به سمت انتهای آزاد آن، فاصله کمی بین دو روش ایجاد می‌شود.



در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی FSDT و FEM شکل ۴-۱۸ جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده با روش‌های

$n=(-1)$ برای حالت یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی



در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت FSDT و FEM شکل ۴-۱۹ جابه‌جایی محوری محاسبه شده با روش‌های

$n=(-1)$ یک‌سر گیردار - یک‌سر آزاد به ازای ثابت ناهمگنی

جدول (۴-۱) حاوی نتایج تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FSDT و FEM به ازای ثوابت ناهمگنی مختلف در دو لایه‌ی داخلی و میانی استوانه برای شرایط انتهایی دوسر گیردار می‌باشد. همانطور که مشخص است اختلاف بین مقادیر تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FSDT و FEM در سطح میانی استوانه کمتر و در سطح داخلی بیشتر می‌باشد. برای توجیه اختلاف نسبتاً زیاد بین مقادیر تنش محیطی حاصل از دو روش عددی و تحلیلی در لایه‌ی داخلی توجه به این نکات ضروری است که اولاً در استفاده از روش FSDT ابتدا مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی محاسبه شده و سپس با استفاده از روابط (۲-۷) مقادیر کرنش و نهایتاً با استفاده از روابط رفتاری توزیع تنش به دست می‌آید؛ دوماً همانطور که قبلاً اشاره شد میدان جابه‌جایی محاسبه شده توسط این روش دارای اندکی خطا به خصوص در لایه‌ی داخلی می‌باشد. در حقیقت با تبدیل جابه‌جایی به کرنش، خطای ناشی از این تبدیل در مقادیر کرنش ایجاد می‌شود، سپس مقادیر تنش با استفاده از روابط رفتاری محاسبه می‌شوند. توجه به این نکته ضروری است که عمل مشتق-گیری سبب افزایش خطا می‌شود، به همین دلیل خطای موجود در تنش‌های شعاعی و محوری بیشتر از خطای موجود در تنش‌های محیطی می‌باشد. خطای اولیه‌ی ناشی از تقریب توزیع جابه‌جایی نیز به همراه

خطای اشاره شده منشأ ایجاد اختلاف بین دو روش FEM و FSDT می‌شود.

جدول ۴-۱ تنش محیطی محاسبه شده با روش‌های FEM و FSDT در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی برای حالت دو سرگیردار در $x=L/2$

	$\sigma_{\theta} [MPa]$	$n = -2$	$n = -1$	$n = 0$	$n = +1$	$n = +2$
سطح داخلی $r = r_i$	FEM	۳۱/۴۱	۲۲/۱۲	۱۸/۰۷	۱۵/۷۸	۱۲/۳۵
	FSDT	۶۰۵/۶۴	۵۶۴/۸۵	۵۳۵/۱۹	۵۱۹/۱۹	۵۲۰/۰۶
سطح میانی $r = R$	FEM	۱۰۷/۳۲	۱۶۹/۷۳	۲۱۲/۷۲	۲۹۷/۶۵	۴۰۲/۳۳
	FSDT	۳۰۳/۰۸	۳۶۰/۵۶	۴۳۷/۲۶	۵۴۴/۶۳	۷۰۱/۸۵

۴-۵ جمع‌بندی

با توجه به آنچه در قسمت قبلی بیان شد، استفاده از روش FSDT در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان به دلیل صرف نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور رابطه‌ی (۲-۵) و استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی_هرمان مرتبه‌ی اول مناسب نمی‌باشد. در حقیقت با توجه به اینکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداره‌ی استوانه به صورت خطی در نظر می‌گیرد و توجه به این نکته که جابه‌جایی شعاعی در استوانه تحت بارگذاری ترکیبی دارای یک توزیع غیرخطی با انحنای زیادتری نسبت به استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای مناسب نمی‌باشد، در حالیکه دقت نتایج حاصل از این روش برای تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری فشاری مناسب می‌باشد. در بارگذاری حرارتی شرایط انتهایی تأثیر بیشتری نسبت به دو بارگذاری دیگر بر رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای می‌گذارد. جابه‌جایی محوری نیز در بارگذاری حرارتی همانند بارگذاری فشاری از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار دوران و شار حرارتی در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم ظاهر می‌شود، می‌توان برای استوانه‌ی تحت فشار و شار حرارتی یکنواخت با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های حرارتی و فشاری به طور جداگانه، معادلات حاکم را حل کرده و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در حقیقت بردار ناهمگنی $\{F\}$ در نقش

بردار نیرویی ظاهر می‌شود که در این میان بارگذاری حرارتی نقش غالب را دارد. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حلّ تحلیلی و حلّ عددی در استوانه تحت بارگذاری‌های حرارتی و فشاری به غیر از لایه‌ی میانی استوانه وجود ندارد. اختلاف موجود بین نتایج عددی و تحلیلی در لایه‌ی داخلی به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

فصل ۵

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

۵-۱ مقدمه

استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری، به دلیل مقاومت بالا در برابر انواع فشارهای داخلی و خارجی، نیروها و لنگرها، گرادیان دمایی و بارگذاری‌های متنوع دیگر کاربرد فراوانی در صنعت پیدا کرده‌اند. دستیابی به روش‌های مختلف تحلیل این گروه از پوسته‌ها با تغییرات هندسه، ماده و بارگذاری مورد علاقه‌ی پژوهشگران و نیاز صنعتگران می‌باشد. در همین راستا در این رساله سعی شده است تا با ارائه‌ی روش حل تحلیلی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی برای استوانه‌های جدار کلفت با ضخامت ثابت در حالت تقارن محوری تحت بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی، بارگذاری دورانی شامل چرخش با سرعت ثابت و بارگذاری حرارتی به صورت شار حرارتی یکنواخت در جداره‌ی استوانه ناشی از گرادیان دما، اثر هر یک از این بارگذاری‌ها و شرایط مرزی مختلف بر روی مقادیر تنش و جابه‌جایی پوسته‌ی استوانه‌ای بررسی شود. همچنین قابلیت‌های تئوری تغییر شکل برشی و نکات قوت و ضعف آن بیان شده است. در این فصل ضمن جمع‌بندی کارهای صورت گرفته در این رساله، نتیجه‌گیری جامعی از مباحث مربوط به هر فصل صورت پذیرفته است و نهایتاً پیشنهادهایی برای ادامه و تکمیل کار نیز ارائه شده است.

۵-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

به طور کلی تحلیل استوانه‌های جدار کلفت (با جدار ثابت یا متغیر) در حالت متقارن محوری تحت انواع بارگذاری‌ها (شامل فشار محوری، فشار شعاعی، نیروهای دورانی، حرارتی و ...) با شرایط انتهایی مختلف با استفاده از اصل کار مجازی بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی، منجر به دستگاه معادلات ناهمگن با

مجهولاتی شامل مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی می‌شود. وجود هرگونه غیریکنواختی در بارگذاری (فشار متغییر) و جداره‌ی پوسته (مخروط نقص، استوانه‌ی جدار متغیّر و ...) و همچنین ایجاد مؤلفه‌ی محوری بارگذاری منجر به دستگامعادلاتی با ضرایب متغیّر می‌شود، در غیر اینصورت دستگامعادلات ناهمگن با ضرایب ثابت حاصل می‌شود. تعداد معادلات دستگام حاصل وابسته به مرتبه‌ی تئوری تغییر شکل برشی مورد استفاده می‌باشد. استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی n منجر به یک دستگام $2(n+1)$ معادله دیفرانسیل ناهمگن شامل $4(n+1)$ مجهول می‌شود. حل دستگام معادلات دیفرانسیل حاصل با تکنیک به کار گرفته شده در این رساله برای ضرایب ثابت و یا استفاده از تئوری اغتشاشات برای ضرایب متغیّر با اعمال شرایط مرزی، منجر به محاسبه‌ی ضرایب مجهول مربوط به مسائل مقدار ویژه و نهایتاً مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی می‌شود. مقادیر ویژه‌ی حاصل از حل معادله‌ی مشخصه‌ی مربوط به جواب عمومی دستگام معادلات حاکم، به صورت جفت ریشه‌های مزدوج شامل مقادیر حقیقی و مختلط می‌باشند. استفاده از روابط سینماتیک، منجر به محاسبه‌ی مؤلفه‌های تانسور کرنش می‌شود؛ نهایتاً با استفاده از روابط رفتاری توزیع تنش در پوسته‌ی استوانه‌ای تعیین می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که در استفاده از تئوری تغییر شکل برشی، میدان جابه‌جایی به طور مستقیم محاسبه می‌شود، درحالی‌که مؤلفه‌های کرنش و تنش به طور غیر مستقیم با استفاده از روابط سینماتیک و رفتاری از میدان جابه‌جایی محاسبه شده به دست می‌آیند. در این میان مشتق‌گیری از میدان جابه‌جایی در روابط سینماتیک منشأ ایجاد خطا در محاسبه‌ی مقادیر کرنش و نهایتاً تنش می‌شود. با افزایش مرتبه‌ی تئوری تغییر شکل برشی، تقریب اولیه‌ی میدان جابه‌جایی بهبود یافته و منجر به نتایج دقیقتر می‌شود. در بارگذاری فشاری شامل فشار داخلی و خارجی و بارگذاری دورانی استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه‌ی اول دارای دقت قابل قبولی می‌باشد. در مورد بارگذاری‌های حرارتی در حالت گذرا و پایدار ناشی از شار حرارتی درون جسم، به دلیل دور شدن توزیع جابه‌جایی از حالت خطی و افزایش انحنای تابع متناظر با این توزیع، استفاده از تقریب خطی موجود در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه-ی اول سبب افزایش اختلاف بین حل دقیق و حل تحلیلی مورد نظر می‌شود. افزایش جملات مراتب بالاتر در تئوری تغییر شکل برشی سبب نزدیکتر شدن توزیع جابه‌جایی حاصل از این تئوری به توزیع حقیقی

موجود در سازه‌ی مورد نظر شامل ورق، پوسته، تیر و ... می‌شود. در ادامه نتایج مربوط به هر فصل به طور مجزاً بیان شده است.

حالت اول: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای FGM

همانطور که در فصل دوم اشاره شد، در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، فشار داخلی یکنواخت سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی مثبت و فشار خارجی یکنواخت نیز باعث ایجاد جابه‌جایی شعاعی منفی در استوانه می‌شود. استوانه تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت نیز که از برآیند دو بارگذاری شامل فشار داخلی و فشار خارجی حاصل می‌شود؛ با توجه به بزرگتر بودن مقادیر جابه‌جایی و تنش ناشی از فشار خارجی نسبت به فشار داخلی، دارای مقادیر جابه‌جایی منفی می‌باشد. برای استوانه تحت هر سه حالت بارگذاری، مواد ناهمگن با مقادیر ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش جابه‌جایی در استوانه نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود در حالیکه مقادیر ثابت ناهمگنی منفی باعث افزایش جابه‌جایی نسبت به ماده‌ی همگن می‌شود. در مورد تنش محیطی نیز استفاده از مواد ناهمگن با ضریب ناهمگنی مثبت در استوانه تحت فشار داخلی و استوانه تحت فشار خارجی به دلیل کاهش تنش محیطی بیشینه مناسب‌تر می‌باشد. در مورد استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز استفاده از ماده‌ی همگن سبب کاهش تنش محیطی بیشینه نسبت به ماده‌ی ناهمگن می‌شود. در استوانه تحت فشار داخلی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و برشی و همچنین جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری کاهش می‌یابد. در مورد استوانه تحت فشار خارجی نیز به غیر از تنش برشی، بقیه‌ی موارد رفتار مشابهی دارند. برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی مقادیر تنش محیطی، تنش برشی و جابه‌جایی شعاعی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی افزایش می‌یابد، ولیکن در مورد جابه‌جایی محوری رفتاری مشابه دو بارگذاری دیگر نشان می‌دهد. شرایط انتهایی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد نسبت به حالت دوسر گیردار در انتهای گیردار آن تا نیمه‌ی استوانه به غیر از جابه‌جایی محوری تأثیر اندکی بر نتایج حاصل می‌گذارد و باعث می‌شود رفتار پوسته تا نزدیکی انتهای آزاد مشابه رفتار آن در نقاط دور از مرز در طول استوانه باشد. در مورد جابه‌جایی محوری نیز به دلیل

عدم وجود قید در سمت آزاد استوانه، یک افزایش در مقدار جابه‌جایی محوری با حرکت به سمت آزاد استوانه مشاهده می‌شود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حل تحلیلی و حل عددی در استوانه‌ی تحت فشار وجود دارد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد.

حالت دوم: تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

با توجه با تأثیر بسیار کم بارگذاری دورانی برای سرعت‌های نه چندان زیاد، مشاهده می‌شود که رفتار استوانه تحت بارگذاری دورانی و فشاری مشابه رفتار استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد. به عبارتی می‌توان از نتایج مربوط به فصل دوم برای بررسی رفتار استوانه‌ی چرخان با سرعت دورانی پایین تحت فشار استفاده کرد. همانطور که در طول فصل نیز اشاره شد، در استوانه‌ی جدار کلفت با ضخامت ثابت، دوران با سرعت ثابت برای سرعت‌های نه چندان زیاد سبب ایجاد جابه‌جایی شعاعی بسیار اندکی می‌شود. به عنوان مثال، جابه‌جایی شعاعی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm در وسط استوانه برای لایه‌های داخلی، میانی و خارجی به ازای ثابت ناهمگنی $n=(-1)$ حدود 0.05 mm می‌باشد. همچنین حداکثر مقدار تنش محیطی ایجاد شده توسط دوران با سرعت ثابت 3600 rpm کمتر از 3 MPa می‌باشد. قابل ذکر است که میزان تنش حاصل از دوران در سطح داخلی بیشتر از سطح میانی می‌باشد. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار و دوران در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم ظاهر می‌شود، می‌توان برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های دورانی و فشاری به طور جداگانه، معادلات حاکم را حل کرده و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. با توجه به اینکه جملات مربوط به فشار و دوران در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات حاکم ظاهر می‌شود، می‌توان برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌های دورانی و فشاری به طور جداگانه در نقش بردار نیرویی شامل نیروهای سطحی و حجمی در بردار ناهمگنی معادلات حاکم، نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود. در مجموع مطابقت قابل قبولی بین حل تحلیلی و حل عددی در استوانه تحت بارگذاری‌های دورانی و فشاری در سرعت‌های دورانی پایین وجود دارد ولی این

مطابقت با افزایش سرعت دورانی کاهش می یابد. این مطابقت در لایه‌ی میانی بیشتر و در لایه‌ی داخلی کمتر می‌باشد. با توجه به آنچه در این فصل گفته شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم چرخان تحت بارگذاری فشاری در سرعت‌های دورانی پایین مناسب می‌باشد.

حالت سوم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

با توجه به آنچه در این فصل بیان شد، استفاده از روش FSDT در تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان به دلیل صرف نظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر در بسط تیلور و استفاده از تقریب مرتبه‌ی یک طبق تئوری میرسکی_هرمان مرتبه‌ی اول مناسب نمی‌باشد. در حقیقت با توجه به اینکه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول توزیع جابه‌جایی شعاعی را در طول جداره‌ی استوانه به صورت خطی در نظر می‌گیرد و توجه به این نکته که جابه‌جایی شعاعی در استوانه تحت بارگذاری حرارتی و فشاری و دورانی دارای یک توزیع غیرخطی با انحنای زیادتر نسبت به استوانه تحت بارگذاری فشاری می‌باشد، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول برای تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای مناسب نمی‌باشد. در استوانه تحت شار حرارتی از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی مقادیر تنش محیطی و برشی و همچنین جابه‌جایی شعاعی رفتار مشابهی ندارند؛ در حالیکه در استوانه تحت فشار داخلی، جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش پیدا می‌کنند.

حالت چهارم: تحلیل ترموالاستیک پوسته‌های استوانه‌ای چرخان FGM

همانطور که اشاره شد در اطراف لایه‌ی میانی روش FSDT از دقت مطلوبی برخوردار می‌باشد، ولیکن در لایه‌های داخلی و خارجی از توزیع پیش‌بینی شده توسط روش PET فاصله می‌گیرد. این مسئله در مورد استوانه تحت بارگذاری حرارتی تشدید می‌شود؛ دلیل این امر فاصله گرفتن توزیع جابه‌جایی شعاعی در جداره‌ی استوانه از حالت خطی و افزایش انحنای آن می‌باشد. در حقیقت تقریب یک تابع هذلولوی با یک

توزیع خطی منشأ خطا می‌باشد. در حالیکه در روش HSDT با در نظر گرفتن یک توزیع چند جمله‌ای برای جابه‌جایی‌های شعاعی و محوری، این تقریب بهبود بخشیده می‌شود. در حقیقت اضافه کردن هر یک از عبارت‌های $z^i u_i$ و $z^i w_i$ به جابه‌جایی‌های لایه میانی یعنی u_0 و w_0 در مولفه‌های میدان جابه‌جایی، سبب نزدیکتر شدن توزیع حاصل از تئوری تغییر شکل برشی به حل دقیق حاصل از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی می‌شود. این افزایش دقت در محاسبه‌ی جابه‌جایی‌های محوری و شعاعی سبب بهبود مقادیر تنش محیطی نیز می‌شود. دلیل این امر محاسبه‌ی مؤلفه‌های جابه‌جایی به طور مستقیم و با حل دستگاه معادلات حاکم و سپس محاسبه‌ی کرنش از روی مقادیر حاصل و نهایتاً به دست آوردن مقادیر تنش می‌باشد. در بارگذاری حرارتی مشاهده می‌شود که جابه‌جایی شعاعی به‌ازای n ‌های مختلف از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی میانی در حال افزایش می‌باشد. سپس در نیمه‌ی خارجی جداره‌ی استوانه، جابه‌جایی شعاعی از نزدیکی لایه‌ی میانی تا لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد. مقدار حداکثر جابه‌جایی در طول جداره‌ی استوانه با افزایش ثابت ناهمگنی ماده به سمت لایه‌ی خارجی میل می‌کند. با توجه به نتایج حاصل در بارگذاری ترکیبی، استفاده از ماده‌ی ناهمگن با ثابت ناهمگنی منفی که سبب کاهش تنش محیطی بیشینه‌ی در استوانه می‌شود، نسبت به ماده‌ی همگن مناسب‌تر می‌باشد درحالیکه در مورد جابه‌جایی شعاعی، استفاده از ماده با ثابت ناهمگنی مثبت سبب کاهش مقادیر جابه‌جایی درون استوانه می‌شود. در مجموع می‌توان بیان داشت که اثر هر یک از بارگذاری‌های فشاری، دورانی و حرارتی در بردار ناهمگنی دستگاه معادلات نهایی ظاهر می‌شود. بنابراین با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان هر یک از این بارگذاری‌ها را به تنهایی در نظر گرفته و در نهایت نتایج بارگذاری ترکیبی از مجموع مقادیر جابه‌جایی و تنش حاصل از هر یک از این بارگذاری‌ها به تنهایی به دست خواهد آمد. در میان انواع بارگذاری، شار حرارتی بیشترین اثر را نسبت به دو بارگذاری دیگر داشته و کمترین تأثیر را دوران بر روی نتایج نهایی می‌گذارد. با توجه به آنچه در این فصل گفته شد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا (سوم) برای تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم تحت هر یک از بارگذاری‌های حرارتی، دورانی و فشاری مناسب می‌باشد و نسبت به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میزان دقت نتایج را به خصوص در بارگذاری حرارتی افزایش می‌دهد و با حرکت از لایه‌ی میانی به سمت

لایه‌های داخلی و خارجی، این کاهش خطا ملموس‌تر می‌باشد.

۳-۵ پیشنهادها

با توجه به کارهایی که در گذشته در رابطه با موضوع این رساله انجام شده و آنچه در این پژوهش ارائه شد، می‌توان دریافت که تئوری تغییر شکل برشی دارای قابلیت بسیار فراوانی در تحلیل مسائلی است که تئوری‌های کلاسیک قادر به حل آنها نمی‌باشند. به همین منظور جهت تکمیل این بررسی‌ها و استفاده از قابلیت‌های موجود در روش انرژی با توجه به کاربرد وسیع و متنوع پوسته‌های استوانه‌ای پیشنهادات زیر ارائه می‌گردد:

۱- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت بارگذاری‌های محوری، خمشی، پیچشی و برشی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۲- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای در حالت نامتقارن محوری از نظر هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۳- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار متغیّر در طول استوانه با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۴- بررسی انتقال حرارت پوسته‌های استوانه‌ای در حالت گذرا با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

۵- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای تحت دوران با سرعت‌های بالا و دست‌یابی به رفتار این پوسته‌ها با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌های بالاتر

۶- تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای با مقاطع بیضوی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی در دستگاه بیضی‌گون

۷- بهینه‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای ناهمگن با کنترل میزان تنش و تغییر شکل‌های پلاستیک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

