به نام خداوند جان و خرد

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه تبدیل انرژی

بررسی عددی و تحلیل جریان لایه مرزی در سیالات غیر نیوتنی

دانشجو:

آیدین ناظمی

استاد راهنما:

دکتر علی جباری مقدم

استاد مشاور:

دکتر محمود نوروزی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

زمستان **۱۳۹۱**

دانشگاه صنعتی شاهرود

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشدآقای **آیدین ناظمی** رشته **مکانیک** گرایش **تبدیل انرژی** تحت عنوان« **بررسی عددی و تحلیلی جریان لایه مرزی سیال غیر نیوتنی روی صفحه تخت**» که در تاریخ **۱۳۹۱/۱۱/۳۰** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸٫۴۴) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) **۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)**

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) **۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)**

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنمای اول	علی جباری مقدم	استادیار	
۱ـ استاد راهنمای دوم			
۲ـ استاد مشاور	محمود نوروزی	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	پوریا اکبرزاده	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	محسن نظری	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	علی سرشته داری	استادیار	

قناد کهتویی - رئیس دانشکده مکانیک

دانشکده مکانیک
دانشگاه صنعتی شاهرود

تقدیم

به

مادر و پدر

عزیزم

تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران خداوند، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به‌ویژه اساتید محترم آقای دکتر علی جباری مقدم و آقای دکتر محمود نوروزی که با راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

تعهد نامه

اینجانب **آیدین ناظمی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی مکانیک- گرایش تبدیل انرژی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه با عنوان **"بررسی عددی و تحلیل جریان لایه مرزی سیالات غیر نیوتنی"** تحت راهنمائی دکتر **علی جباری مقدم و دکتر محمود نوروزی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده‌است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده‌است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده‌است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده‌است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

مطالعه جریان لایه مرزی یکی از مسائل بنیادی در مکانیک سیالات بشمار می‌رود، که از دیرباز مورد توجه پژوهشگران این رشته قرار داشته است. تا کنون تحقیقات بسیار زیادی روی جریان لایه مرزی صورت گرفته است که اکثر آنها در خصوص سیالات نیوتنی بوده و سهم اندکی از آنها به سیالات غیر نیوتنی و به ویژه سیالات ویسکوالاستیک پرداخته‌اند. هدف اصلی این پژوهش شناخت بهتر اثرات خواص ویسکوالاستیک، بر مشخصه‌های لایه مرزی می‌باشد.

در این تحقیق با دو رویکرد عددی و تحلیلی به لایه مرزی ایجاد شده توسط جریان ویسکوالاستیک روی یک صفحه تخت پرداخته شده است. در رویکرد عددی، برای شبیه سازی این جریان، از نرم افزار منبع باز OpenFOAM، که یک جعبه ابزار دینامیک سیالات محاسباتی(CFD) می‌باشد، استفاده شده است. این نرم افزار از شیوه عددی حجم محدود (FVM) برای حل معادلات با مشتقات جزئی استفاده می‌کند. در حل عددی از مدل گزیکس، به عنوان مدل ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. جهت اطمینان از پاسخ‌های روش عددی، استقلال نتایج از شبکه محاسباتی بررسی شده و همچنین پاسخ‌ها در حالت نیوتنی با حل بلاسیوس مقایسه شده اند. در رویکرد تحلیلی از اصول روش انتگرالی فون کارمن، که یک روش تقریبی در بررسی لایه مرزی سیالات نیوتنی می‌باشد، استفاده شده است و سعی گردیده روش فوق به سیالات ویسکوالاستیک نیز تعمیم داده شود. برای این‌کار از مدل CEF برای شبیه‌سازی میدان تنش استفاده شده است. نتایج بدست آمده در هر دو روش مبنی بر ایجاد یک ضخامت محدود در نقطه ابتدایی صفحه بر اثر خاصیت الاستیک، در سیال ویسکوالاستیک می‌باشد. همچنین ضخامت لایه مرزی و میزان تنش برشی روی صفحه در سیال ویسکوالاستیک کمتر از سیال نیونی می‌باشد. در حل عددی نشان داده شد که با افزایش عدد الاستیک میزان تنش برشی و اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم روی دیواره کاهش می‌یابد و ضرایب

درگ در اعداد الاستیک مختلف گزارش شده است. تاثیر ضریب تحرک پذیری در مدل گزیکس روی مشخصه‌های لایه مرزی نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: لایه مرزی، صفحه تخت، گزیکس، فون کارمن، روش عددی، ویسکوالاستیک

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فهرست علائم

ضریب درگ	C_D
عدد دبورا	De
عدد الاستیک	En
اختلاف تنش نرمال اول	N1
اختلاف تنش نرمال دوم	N2
فشار	P
عدد رینولدز	Re
سرعت جریان آزاد	U_∞
ضریب تحرک پذیری در مدل گزیکس	α
ضخامت لایه مرزی	δ
ضخامت جابجایی	δ^*
نرخ برش	$\dot{\gamma}$
ویسکوزیته حلال	η_S
ویسکوزیته پلیمری	η_P
زمان رهایی از تنش	λ
لزجت دینامیکی	μ
لزجت سینماتیکی	ν
ضخامت ممنتوم	θ
چگالی	ρ
ضریب اختلاف تنش نرمال اول	ψ_1
ضریب اختلاف تنش نرمال دوم	ψ_2

فصل ۱.

مقدمه

در این فصل، مروری کوتاه بر مفهوم کلی لایه مرزی در عموم سیالات صورت می‌گیرد و سپس به معرفی اجمالی مکانیک سیالات غیرنیوتنی مخصوصا سیالات ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. در ادامه مروری بر تحقیقات انجام شده بر روی مسئله لایه مرزی در زمینه سیالات نیوتنی و غیر نیوتنی و سیالات ویسکوالاستیک انجام شده و در انتها ضرورت تحقیق حاضر بیان می‌شود.

۱-۱- مفهوم لایه مرزی

اغلب مطالعات صورت گرفته در زمینه دینامیک سیالات مبتنی بر مفهوم سیال ایده‌آل(بدون اصطکاک و غیر قابل تراکم) می‌باشد. در حرکت چنین سیالی دو لایه مجاور هیچ نیروی مماسی (تنش برشی) تجربه نمی‌کنند، بلکه نیروهای عمود بر یکدیگر وارد می‌کنند. نظریه سیال ایده‌آل از لحاظ ریاضی بسیار کامل است و در بسیاری حالات توضیح توضیح رضایت بخشی از حرکت‌های واقعی از قبیل حرکت امواج سطحی یا تشکیل جت‌های مایع ارائه می‌دهد. از سوی دیگر نظریه سیال ایده‌آل چیزی در مورد نیروی مقاوم یک جسم نمی‌گوید و در این رابطه می‌توان گفت که وقتی جسمی به طور یکنواخت در داخل سیالی که تا بی‌نهایت ادامه دارد حرکت می‌کند، هیچ نیروی مقاومی بر آن وارد نمی‌شود.

این نتیجه غیر قابل قبول از تئوری سیال کامل بدست می‌آید به این واقعیت منجر می‌شود که لایه-های داخلی یک سیال واقعی تنش‌های مماسی و همچنین عمودی منتقل می‌کنند. این امر در مجاورت یک دیوار جامد که به وسیله یک سیال تر شده نیز صادق است. این نیروهای مماسی یا اصطکاکی در یک سیال واقعی به وسیله خاصیتی که لزجت سیال نامیده می‌شود به یکدیگر مرتبطند.

به علت وجود نیروهای مماسی در مرز بین یک سیال ایده‌آل و یک دیوار جامد، در حالت کلی سرعت-های مماسی با یکدیگر اختلاف دارند و در نتیجه سرعت روی سطح صفر نیست. از سوی دیگر در سیالات واقعی تنش‌های برشی باعث می‌شوند که سیال به دیواره جامد بچسبد.

وجود تنش‌های مماسی و شرط عدم لغزش در نزدیکی دیواره ها اختلاف عمده یک سیال ایده‌آل و یک سیال واقعی را تشکیل می‌دهد.

در مواردی از حرکت سیال که توزیع فشار تجربی تقریبا با نظریه سیال ایده‌آل مطابقت دارد تاثیر ویسکوزیته در اعداد رینولدز بالا به یک لایه بسیار نازک در مجاورت دیوار جامد محدود می‌شود. اگر شرط عدم لغزش در جداره در مورد یک سیال واقعی تحقق پیدا نمی‌کرد، اختلاف قابل ملاحظه‌ای بین میدان جریان در یک سیال واقعی و یک سیال ایده‌آل وجود نداشت. این حقیقت که در دیوار، سیال به جداره میچسبد بدین معنی است که نیروهای اصطکاکی در لایه نازکی در نزدیکی دیوار باعث کندی حرکت می‌شوند. در این لایه نازک سرعت سیال از صفر روی دیواره افزایش می‌یابد و تدریجا به مقدار کامل خود می‌رسد که مربوط به جریان بدون بدون اصطکاک خارجی است. لایه مورد نظر اصطلاحا لایه مرزی خوانده می‌شود.

۱-۲- طبقه بندی سیالات غیر نیوتنی

سیال نیوتنی سیالی است که اولا تنش تسلیم نداشته باشد و ثانیا تنش برشی آن با نرخ برش رابطه خطی داشته باشد. نسبت تغییرات تنش به نرخ برش که برای سیال نیوتنی همواره مقداری ثابت می-باشد لزجت نامیده می‌شود. سیال غیرنیوتنی نیز به سیالی گفته می‌شود که حداقل یکی از شرایط سیال نیوتنی را نداشته باشد. این سیالات به سه گروه زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

- سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان
- سیالات غیرنیوتنی وابسته به زمان
- سیالات ویسکوالاستیک

سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان، سیالاتی هستند که رابطه تنش برشی و لزجت در آن‌ها به‌صورت غیرخطی می‌باشد. در حالت‌های خاصی این گروه از سیالات دارای تنش تسلیم نیز هستند. در این گونه از مواد، برای اینکه ماده جریان پیدا کند این است که تنش به حد خاصی برسد و در تنش‌های

کمتر از این مقدار مانند یک جامد عمل می‌کند و تنش را تحمل می‌کند. پلاستیک بینگهام یکی از معروفترین موادی است که دارای تنش تسلیم می‌باشد. خمیردندان یک مثال ساده برای سیالات دارای تنش تسلیم می‌باشد که باید تنش برشی از حد مشخصی بیشتر شود که آن جریان پیدا کند.

سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان که بدون تنش تسلیم هستند به نام سیالات نیوتنی تعمیم‌یافته معروف هستند و به دو گروه تقسیم می‌شوند:

سیالات شبه‌پلاستیک

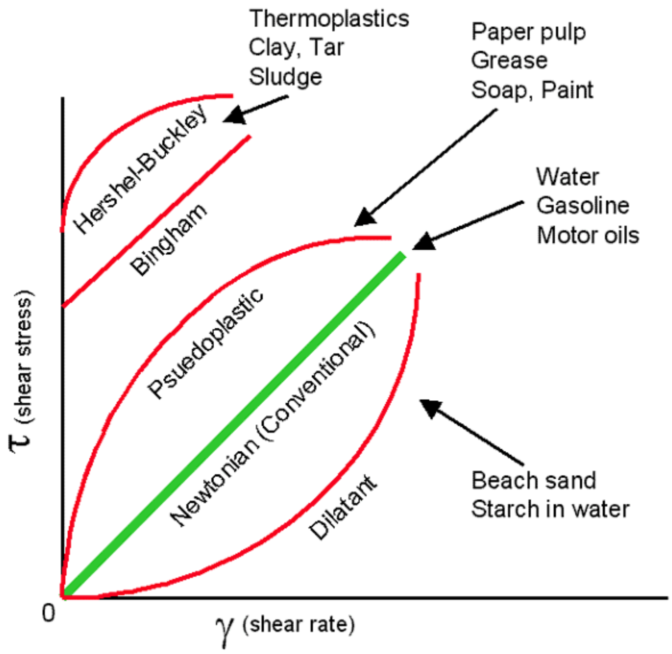
سیالات دایلاتنت

لزجت این مواد به‌صورت یک تابع از نرخ برش سیال می‌باشد. مدل‌های زیادی برای ارائه این رابطه بین لزجت و نرخ برش ارائه شده است. یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین این مدل‌ها، مدل توانی است که در آن لزجت به عنوان یک تابع توانی نرخ برش در نظر گرفته می‌شود [1]. یکی از اشکالات این مدل، این است که لزجت در نرخ برش صفر برابر مقداری نامحدود می‌شود. البته عکس این قضیه نیز صادق است، یعنی لزجت در نرخ برش‌های بزرگ بسیار کوچک می‌شود. مدل‌های دیگری نیز مانند مدل کراس، مدل کاریو-یاسودا و مدل راینر- فیلیپوف از جمله مدل‌های نیوتنی تعمیم‌یافته هستند که مشکل مدل توانی را ندارند[2] . در این مدل‌ها، لزجت در نرخ برش صفر و لزجت در نرخ برش‌های بالا معمولا مقداری ثابت به‌دست می‌آید که آن‌ها را به‌ترتیب با (η_0) و (η_∞) نمایش می‌دهند. معمولا با افزایش ثابت‌های مدل‌های غیرنیوتنی، رفتار تنش وابسته به نرخ برش بهتر مدل می‌شود.

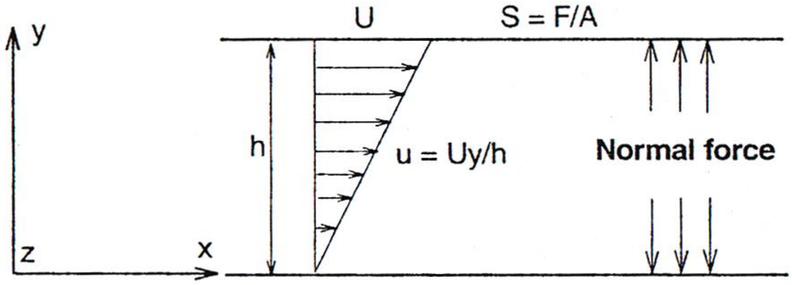
سیالات شبه‌پلاستیک، سیالاتی هستند که افزایش نرخ برش باعث کاهش لزجت آن‌ها می‌شود. سیالات دایلاتنت رفتاری عکس این حالت از خود نشان می‌دهند. در اکثر مدل‌های غیرنیوتنی به‌ازای اندیس توانی کوچکتر از ۱ $(n<1)$ رفتار شبه‌پلاستیک و به‌ازای اندیس توانی بزرگتر از ۱ $(n>1)$ رفتار دایلاتنت دارند. شایان ذکر است برای $n=1$ سیال رفتار نیوتنی از خود نشان می‌دهد. شکل (۱-۱) رفتار تنش در برابر نرخ برش را برای انواع سیالات نمایش می‌دهد.

در سیالات غیرنیوتنی تابع زمان، لزجت تابعی از نرخ برش و زمان می‌باشد. در این مواد، با اعمال نرخ

برش، ساختمان ماده مدام تغییر می‌کند (لزجت نیز تغییر می‌کند) تا اینکه لزجت به یک مقدار ثابتی برسد. گروه سوم از سیالات غیرنیوتنی، سیالات ویسکوالاستیک هستند که همزمان خواص ویسکوز سیال و الاستیک جامد را دارا می‌باشند. ساده‌ترین آزمایشی که در مورد رفتار سیال ویسکوالاستیک می‌توان به آن اشاره کرد، آزمایش جریان برشی ساده می‌باشد. جریان سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی را در نظر بگیرید (شکل) ۱-۲(را ببینید) که صفحه بالایی با سرعت U حرکت می‌کند. اگر صفحه بالایی ناگهان متوقف شود تنش به‌طور آنی صفر نمی‌شود. این در حالی است که برای سیال نیوتنی تنش سریعا صفر می‌شود[3] . پس از توقف صفحه بالایی در جریان برش سیال ویسکوالاستیک، این صفحه کمی عقب برمی‌گردد. این بازگشت، به خاصیت الاستیک سیال برمی-گردد.



شکل (۱-۱) منحنی های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات مستقل از زمان[3] .



شکل (۱-۲) طرح شماتیک جریان برشی ساده (جریان کوئت)[3] .

خاصیت دیگر سیالات ویسکوالاستیک این است که این مواد معمولا هنگامی که سیلان پیدا کنند، تنش‌های عمودی نابرابر پیدا می‌کنند. در جریان برشی ساده سیال نیوتنی، تنش عمودی همواره مقداری ثابت است که برابر با فشار استاتیکی می‌باشد. این در حالی است که در جریان برشی سیال ویسکوالاستیک، بین تنش‌های عمودی اختلاف وجود دارد. در جریان برش ساده، اگر جهت جریان را جهت x و راستای تغییرات سرعت را جهت y بنامیم، اختلاف تنش عمودی به‌صورت زیر تعریف می-شود[2] :

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \qquad (۱-۱)$$

حال، اگر جهت راستگرد عمود بر جهت‌های x و y را جهت z بنامیم، می‌توان اختلاف تنش عمودی دوم را نیز به‌صورت زیر تعریف کرد[2] :

$$N_1 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \qquad (۲-۱)$$

ثابت‌های اختلاف تنش عمودی نیز بر اساس روابط (۱-۱(و (۱-۲(به‌دست می‌آیند[2] :

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} \qquad (۳-۱)$$

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} \qquad (۴-۱)$$

که در آن، Ψ_1 و Ψ_2 ثابت‌های تنش عمودی اول و دوم و $\dot{\gamma}$ نرخ برش می‌باشد. همانطور که قبلا

اشاره شد لزجت در سیالات غیرنیوتنی تابعی از نرخ برش می‌باشد. بنابراین برای سیال ویسکوالاستیک می‌توان بر اساس تنش برشی و نرخ برش، لزجت سیال ویسکوالاستیک را به‌دست آورد[2] :

$$\eta = \frac{\sigma_{xy}}{\dot{\gamma}} \tag{۱-۵}$$

بر اساس روابط مذکور، لزجت، اختلاف تنش عمودی اول و دوم در سیال ویسکوالاستیک همگی تابعی از نرخ برش می‌باشد.

۱-۲-۱- پارامترهای مهم در جریان سیالات ویسکوالاستیک

معمولا برای بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک، از دو عدد بی‌بعد دبورا و وایزنبرگ استفاده می‌کنند. عدد دبورا، بر اساس نسبت زمان آسودگی از تنش به زمان مشخصه تعریف می‌شود. نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی حاصل از لزجت سیال را نیز به‌صورت عدد وایزنبرگ نمایش می‌دهند[4] :

$$De = \lambda\omega = \lambda / T \tag{۱-۶}$$

$$Wi = \lambda\dot{\gamma} \tag{۱-۷}$$

که در آن، λ زمان مشخصه ماده (زمان آسودگی از تنش)، T زمان مشخصه جریان، ω فرکانس مشخصه جریان و $\dot{\gamma}$ نرخ برش جریان می‌باشد. هر چه اعداد دبورا و وایزنبرگ برای یک ماده کوچکتر باشد ماده شانس جریان یافتن بیشتری پیدا می‌کند.

۱-۲-۲- معادلات متشکله مواد و سیالات ویسکوالاستیک

منظور از معادله متشکله، معادله‌ای است که قادر به بیان رابطه بین تنش و تغییر شکل یک ماده مشخص باشد. در این بخش مروری اجمالی بر معادلات متشکله سیالات ویسکوالاستیک صورت می‌گیرد. معادله متشکله سیال نیوتنی توسط اسحاق نیوتن بیان شد [5].

قانون پایه یک سیال نیوتنی به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau_{ij} = (-P + \lambda \dot{\varepsilon}_{kk})\delta_{ij} + 2\eta \dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (۸-۱)$$

در رابطه (۱-۸)، P فشار استاتیکی، $\dot{\varepsilon}$ نرخ برش و λ و η ثابتهای ویسکوز هستند.

به‌طور کلی برای مواد ویسکوالاستیک می‌توان بی‌نهایت معادله متشکله در نظر گرفت! این معادلات می‌توانند به اشکال متنوعی رابطه‌ای بین بسط مشتقات و انتگرال‌های تنش و نرخ برش را در بر بگیرند.

می‌توان معادلات متشکله را به دو دسته معادلات خطی و غیر خطی نیز تقسیم نمود. در ادامه در مورد این معادلات بحث شده و تعدادی از معروف‌ترین این معادلات معرفی می‌شوند.

۱-۲-۳- مدل‌های ویسکوالاستیک خطی

مدل‌های ویسکوالاستیک خطی بر پایه تلفیق خواص جامدات خطی و سیالات نیوتنی ارائه شده‌اند. به‌عبارتی این مدل‌ها از ترکیب‌های مختلف مجموعه‌ای از فنرها و دمپرهای خطی حاصل شده‌اند. لذا معادله متشکله هر مدل ویسکوالاستیک خطی به شکل زیر قابل بیان است [6][7] :

$$(1+\lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial^n}{\partial t^n})\tau_{ij} = \eta_0 (1+\xi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ldots + \xi_m \frac{\partial^m}{\partial t^m})\gamma_{ij} \qquad (۹-۱)$$

در رابطه (۱-۹) ، مقادیر λ_i و ξ_i به‌ترتیب زمان آسودگی از تنش و زمان تاخیر سیال از مرتبه i بوده و η_0 لزجت در نرخ برش صفر، τ_{ij} تنش برشی و γ_{ij} نرخ برش است. همچنین مقادیر m و n بصورت $n=m$ یا $n=m+1$ با هم رابطه دارند. بنابراین با انتخاب اختیاری مقادیر n و m می‌توان مدل ویسکوالاستیک جدیدی را برای یک ماده تشکیل داد. در اینجا ثابت‌های زمانی مرتبه پایین از ثابت‌های زمانی مرتبه بالا غالب‌تر هستند. همچنین به ازای $\lambda_i = \xi_i = 0$ مدل مشابه سیالات نیوتنی خواهد بود. مقدار نرخ برش (γ_{ij}) نیز به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \qquad (۱۰-۱)$$

که در رابطه (۱-۱۰)، u سرعت و x جهت مختصات است. مدل‌های ویسکوالاستیک خطی بـرای شبیه‌سازی جریان محلول‌های رقیق پلیمری و سوسپانسیون‌های رقیق ذرات کروی جامد در سیالات نیوتنی بسیار مناسب هستند. اصولاً پاسخ این مدل‌ها برای تغییر شکل‌های کوچک با فیزیک جریـان سازگار بوده اما پاسخ آن برای تغییر شکل‌های بزرگ پرخطا است. استفاده از این مدل‌ها در محاسبات مربوط به تجهیزات رئومتری و برای تغییر شکل‌های کوچک متداول است.

یکی از اولین و معروفترین مدل‌های ویسکوالاستیک خطی مدل ماکسول است. در ایـن مـدل قـانون پایه بر اساس یک فنر و دمپر سری تعریف می‌شود. مدل ماکسول به شکل زیر تعریف شده است[3] :

$$\tau_{ij} + \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \eta \gamma_{ij} \qquad (۱۱-۱)$$

در رابطه (۱-۱۱)، η لزجت و μ مدول برشی ماده است. مطابق مدل ماکسول ماده دارای زمان آسودگی از تنش و فاقد زمان رهایی از تغییر شکل است. در این مدل با توقف برش‌دهی، نرخ تغییر شکل در سرتاسر ماده به‌طور آنی صفر خواهد شد. بنابراین مدل ماکسول برای تغییر شکل‌های کوچک محلولهای پلیمری رقیق (مواد ویسکوالاستیک دارای خواص ویسکوز و الاستیک تقریباً خطی) که دارای زمان رهایی از تغییر شکل کوچک هستند، مناسب است.

در مدل کلوین-ویت، رفتار سیال ویسکوالاستیک بر اساس یک فنر و دمپر موازی خطی شبیه‌سازی شده است.

رابطه بین تنش و نرخ برش در این مدل به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \mu(\gamma_{ij} + \frac{\eta}{\mu}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}) \qquad (۱۲-۱)$$

رفتار این مدل بر عکس(۱-۱۲) مدل ماکسول است و هرچند در این مدل یکی از زمان‌های رهایی از تغییر شکل لحاظ شده اما مدل دارای زمان آسودگی از تنش نیست.

در مدل برگرز یک المان ماکسول با یک المان کلوین-ویت سری شده است.

مدل برگرز به شکل زیر قابل بیان است:

$$\tau_{ij} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial t^2} = (\eta_1 + \eta_2)\gamma_{ij} + (\lambda_1 \eta_2 + \lambda_2 \eta_1)\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \qquad (۱۳-۱)$$

مسلم است که مدل برگرز رفتار کاملتری را از یک ماده ویسکوالاستیک ارائه می‌کند. در حالت خاصی از مدل برگرز، چنانچه یکی از فنرها یا دمپرهای المان ماکسول حذف شود، مدل جدیدی به نام مدل جفریز به‌دست می‌آید[4] :

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} = \eta(\gamma_{ij} + \lambda_2 \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}) \qquad (۱۴-۱)$$

مدل جفریز مدل ساده و نسبتاً مناسبی برای بررسی رفتار یک ماده ویسکوالاستیک است زیرا در آن یک زمان آسودگی از تنش و یک زمان رهایی از تغییر شکل لحاظ شده است.

مدل ماکسول توسعه‌یافته از طریق موازی کردن تعداد متناهی از المان‌های ماکسول به‌دست می‌آید. اصولاً یک ماده پلیمری از تعداد زیادی از مولکول‌های رشته‌ای با طول‌های مختلف و احیاناً ساختارهای فضایی متنوع تشکیل شده که سبب ایجاد زمان‌های مختلف آسودگی از تنش در این مواد می‌شود. به‌همین دلیل این مدل برای ایجاد زمان‌های متعدد آسودگی از تنش ایجاد شده است.

می‌توان نشان داد که در مدل ماکسول توسعه‌یافته ضریب الاستیک و لزجت معادل (تابعی از زمان هستند) به شکل زیر قابل بیان می‌باشد[3] :

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \exp(-t/\lambda_i) \qquad (۱۵-۱)$$

$$\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i (1 - \exp(-t/\lambda_i)) \qquad (۱۶-۱)$$

به‌طور مشابه، مدل کلوین-ویت توسعه‌یافته نیز از طریق سری کردن المان‌های کلوین-ویت قابل تعریف است (جهت ایجاد زمان‌های رهایی از تغییر شکل مختلف).

۱-۲-۴- مدل‌های ویسکوالاستیک غیر خطی

هر چند که مدل‌های ویسکوالاستیک خطی روابط دیفرانسیلی ساده‌ای را بین تنش و نرخ برش پیش‌بینی می‌کنند، اما این مدل‌ها دارای مشکلاتی هستند.

یکی از معروفترین مدل‌های تبیین رفتار سیالات ویسکوالاستیک، خانواده مدل‌های اولدروید است. خانواده اولدروید مبحث مفصلی از مکانیک محیط‌های پیوسته است که پرداختن به آن از حوصله این بحث خارج است و در اینجا تنها به نتایج حاصل از آن (معادلات متشکله‌ای که در زمینه مدل‌سازی جریان سیالات ویسکوالاستیک کاربرد دارند) پرداخته می‌شود. مدل‌های اولدروید نیاز به محاسبه مشتق زمانی همرفتی همبسته و نیز مشتق زمانی همرفتی پاد همبسته تانسور تنش دارند که این مشتقات به‌ترتیب در روابط (۱-۱۷(تا (۱-۲۰(آمده‌اند[2] .

$$\tau^{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot\tau + \tau\cdot(\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۱-۱۷}$$

$$\vdots$$

$$\tau^{(n)} = \frac{D\tau_{(n-1)}}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot\tau^{(n-1)} + \tau^{(n-1)}\cdot(\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۱-۱۸}$$

$$\tau_{(1)} = \frac{D\tau}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot\tau + \tau\cdot(\nabla V)\right\} \tag{۱-۱۹}$$

$$\vdots$$

$$\tau_{(n)} = \frac{D\tau_{(n-1)}}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot\tau_{(n-1)} + \tau_{(n-1)}\cdot(\nabla V)\right\} \tag{۱-۲۰}$$

در روابط بالا، τ تانسور تنش، V بردار سرعت و T نیز نماد ترانهاده تانسور است. همچنین مشتقات زمانی همرفتی همبسته و مشتقات زمانی همرفتی پاد همبسته نرخ برش نیز به‌ترتیب به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\gamma^{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^{\mathrm{T}} \tag{۱-۲۱}$$

$$\gamma^{(2)} = \frac{D\gamma^{(1)}}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot\gamma^{(1)} + \gamma^{(1)}\cdot(\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۱-۲۲}$$

$$\vdots$$

$$\gamma^{(n)} = \frac{D\gamma^{(n-1)}}{Dt} + \left\{(\nabla V)\cdot\gamma^{(n-1)} + \gamma^{(n-1)}\cdot(\nabla V)^{\mathrm{T}}\right\} \tag{۱-۲۳}$$

$$\gamma_{(1)} = \nabla V + (\nabla V)^{\mathrm{T}} \tag{۱-۲۴}$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot\gamma_{(1)} + \gamma_{(1)}\cdot(\nabla V)\right\} \tag{۱-۲۵}$$

$$\vdots$$

$$\gamma_{(n)} = \frac{D\gamma_{(n-1)}}{Dt} - \left\{(\nabla V)^{\mathrm{T}}\cdot\gamma_{(n-1)} + \gamma_{(n-1)}\cdot(\nabla V)\right\} \tag{۱-۲۶}$$

در میان مدل‌های اولدروید، دو مدل اولدروید-ای و اولدروید-بی از همه معروفتر هستندکه معادله متشکله این دو مدل به‌ترتیب در روابط (۱-۲۷) و (۱-۲۸) آمده است :

$$\tau + \lambda_1\tau^{(1)} = \eta_0(\gamma^{(1)} + \lambda_2\gamma^{(2)}) \tag{۱-۲۷}$$

$$\tau + \lambda_1\tau_{(1)} = \eta_0(\gamma_{(1)} + \lambda_2\gamma_{(2)}) \tag{۱-۲۸}$$

هرچند این دو مدل به‌خوبی اصول مکانیک محیط‌های پیوسته را ارضا می‌کنند اما در زمینه تعیین اختلاف تنش عمودی دوم دارای ضعف‌هایی هستند. رابطه (۱-۲۷)، معادله متشکله مدل اولدروید-ای بوده که در آن ثابت تنش عمودی دوم قرینه ثابت تنش عمودی اول است ($\Psi_2 = -\Psi_1$)، درحالیکه در مدل اولدروید-بی ثابت اختلاف تنش عمودی اول وجود داشته اما ثابت تنش عمودی دوم برابر صفر است ($\Psi_1 > 0$ و $\Psi_2 = 0$). از آنجا که در اکثر سیالات ویسکوالاستیک اختلاف تنش عمودی دوم دارای مقداری نسبتاً کوچک و حداکثر ۲۰٪ اختلاف تنش عمودی اول است بنابراین به نظر می‌رسد که پاسخ‌های مدل اولدروید-بی به واقعیت نزدیک است. به‌همین دلیل استفاده از مدل اولدروید-ای چندان رایج نبوده، حال آنکه تحقیقات عددی و تحلیلی فراوانی بر اساس مدل اولدروید-بی انجام شده

است. مدل اولدروید-بی به مدل همرفتی جفریز نیز معروف است. این مدل در حالت‌های خاصی به مدل‌های دیگری ساده می‌شود:

اگر $\lambda_2 = 0$ باشد، دراینصورت مدل فوق همرفتی ماکسول (UCM) به‌دست می‌آید:

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = \eta_0 \gamma_{(1)} \qquad (۲۹-۱)$$

اگر $\lambda_1 = 0$ شود، مدل اولدروید-بی به مدل سیال مرتبه دو تبدیل می‌گردد:

$$\tau = \eta_0 (\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)}) \qquad (۳۰-۱)$$

اگر $\lambda_1 = \lambda_2$ باشد، این مدل به سیال نیوتنی با لزجت η_0 ساده می‌شود.

به‌طور کلی صورت عمومی مدل اولدروید، مدل هشت ثابته اولدروید است که در سال ۱۹۵۸ ارائه شده است[8] :

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} + \frac{\lambda_3}{2}(\tau\gamma_1 + \gamma_1\tau) + \frac{\lambda_5}{2}[tr(\tau)]\gamma_1 + \frac{\lambda_6}{2}[tr(\tau\gamma_1)]I = -\eta_0\left(\gamma_{(1)} + \lambda_2\gamma_{(2)} + \lambda_4{\gamma_{(1)}}^2 + \frac{\lambda_7}{2}\left[tr\left({\gamma_{(1)}}^2\right)\right]I\right) \qquad (۳۱-۱)$$

این مدل قادر به ارائه رفتار بسیار کاملی از یک سیال ویسکوالاستیک است ولی بسیار پیچیده و ناپایداری عددی آن بالا می‌باشد.

مدل راینر-ریولین یکی از مدل‌های غیرخطی ساده برای بررسی جریان‌های برشی سیالات ویسکوالاستیک است. معادله متشکله مدل راینر-ریولین در حالت کلی به‌شکل زیر است[2] :

$$\tau = \eta(II, III)\gamma + \Psi_2(II, III)\gamma\cdot\gamma \qquad (۳۲-۱)$$

در رابطه(۱-۳۲)، γ تانسور نرخ برش، η لزجت و Ψ_2 ثابت اختلاف تنش‌های عمودی دوم است. همچنین مقادیر II و III ناوردایی‌های دوم و سوم تانسور نرخ برش هستند.

مدل کریمینال اریکسون فیلبی (CEF) مدل مناسبی برای شبیه‌سازی جریان‌های برشی دائمی سیالات ویسکوالاستیک است. معادله متشکله این مدل به‌شکل زیر است[2] :

$$\tau=\eta(\dot{\gamma})\gamma_{(1)}-\frac{1}{2}\Psi_1(\dot{\gamma})\gamma_{(2)}+\Psi_2(\dot{\gamma})\left\{\gamma_{(1)}.\gamma_{(1)}\right\} \quad (۳۳-۱)$$

از جمله مزایای این مدل می‌توان به امکان اعمال مستقیم توابع رئولوژیک وابسته به نرخ برش تعمیم-یافته (شامل لزجت و ثابت‌های اختلاف تنش عمودی اول و دوم) در مدل اشاره نمود. پاسخ‌های این مدل در ناحیه اعداد دبورای کوچک و محدوده وسیعی از اعداد وایزنبرگ دقیق بوده و استفاده از آن جهت محاسبات صنعتی رایج است. در تحقیق حاضر از این مدل به عنوان معادله متشکله استفاده شده است.

مدل چهار ثابته فان-تین-تنر (PTT) در اصل بر اساس تئوری شبکه برای مذاب‌های پلیمری طراحی شده است. صورت عمومی این مدل به‌شکل زیر است[9] :

$$g\tau+\lambda\tau_{(1)}+\frac{1}{2}\xi\lambda\left(\gamma.\tau-\tau.\gamma\right)=\eta_0\gamma \quad (۳۴-۱)$$

در رابطه فوق g تابعی از ناوردایی اول تانسور نرخ برش است:

$$g=\exp\left[-\varepsilon\left(\lambda/\eta_0\right)tr(\tau)\right]\approx 1-\varepsilon\left(\lambda/\eta_0\right)tr(\tau) \quad (۳۵-۱)$$

از صورت اصلاح‌شده مدل فان-تین-تنر (MPTT) می‌توان برای مدل‌سازی رفتار محلول‌های پلیمری استفاده نمود. در مدل MPTT صورت کلی تنش به‌صورت مجموع تنش ویسکوز ناشی از ماده حلال نیوتنی و تنش ویسکوالاستیک ماده حل‌شونده تعریف می‌شود:

$$\sigma_{total}=-PI+\eta_N\gamma+\tau \quad (۳۶-۱)$$

در رابطه فوق، P فشار استاتیکی، $\eta_N\gamma$ نشان‌دهنده تنش ناشی از ماده حلال نیوتنی و τ تنش ویسکوالاستیک ماده حل‌شونده بوده و η_N لزجت ماده حلال نیوتنی و γ تانسور نرخ برش است. معادله متشکله مدل MPTT به‌شکل زیر است[9] :

$$g\tau+\lambda\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}+V.\nabla\tau-L\tau-\tau L^{T}\right)=\eta_m\gamma \quad (۳۷-۱)$$

در رابطه (۱-۳۷)، مقادیر g، L و η_m به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$g = 1 - \frac{\lambda \varepsilon}{\eta_{m0}} tr(\tau) \qquad (۳۸-۱)$$

$$L = \nabla V^{\mathrm{T}} - \xi \gamma / 2 \qquad (۳۹-۱)$$

$$\eta_m = \eta_{m0} \frac{1 + \xi(2-\xi)\lambda^2 \dot{\gamma}^2}{\left(1 + \Gamma^2 \dot{\gamma}^2\right)^{(1-n)/2}} \qquad (۴۰-۱)$$

در روابط فوق، λ زمان آسودگی از تنش، ε عدد وایزنبرگ، ξ از ثابت‌های ماده، η_m لزجت ماده حل‌شونده، η_{m0} لزجت ماده حل‌شونده در نرخ برش صفر، n توان نمایی برای ماده حل‌شونده (جهت مدل‌سازی لزجت تابع نرخ برش برای ماده حل‌شونده) و $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم‌یافته است. همچنین Γ یک پارامتر زمانی است که معمولاً برابر زمان آسودگی از تنش (λ) فرض می‌شود. به‌این ترتیب لزجت برای کل محلول در نرخ برش صفر به شکل $\eta_0 = \eta_N + \eta_{m0}$ به‌دست می‌آید. بنابراین با تعریف پارامتر $\beta = \eta_{m0} / \eta_0$، مقدار لزجت حلال را می‌توان به شکل $\eta_N = (1-\beta)\eta_0$ نمایش داد. در این حالت مقدار تنش کل و معادله متشکله مدل MPTT به‌صورت زیر خواهد بود[9] :

$$\sigma_{total} = -PI + (1-\beta)\eta_0 \gamma + \tau \qquad (۴۱-۱)$$

$$\lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla \cdot (V\,\tau) \right) = \mu \beta \eta_0 \gamma + \lambda \left(L\tau + \tau L^{\mathrm{T}} \right) - g\,\tau \qquad (۴۲-۱)$$

که μ در رابطه فوق به‌شکل زیر خواهد بود :

$$\mu = \frac{1 + \xi(2-\xi)\lambda^2 \dot{\gamma}^2}{\left(1 + \Gamma^2 \dot{\gamma}^2\right)^{(1-n)/2}} \qquad (۴۳-۱)$$

در پایان خاطر نشان می‌شود که یکی از روش‌های رایج در طبقه‌بندی سیالات ویسکوالاستیک، طبقه‌بندی یک سیال بر اساس مدل ویسکوالاستیکی است که به‌نحو بهتری نسبت به سایر مدل‌ها قادر به ارائه رفتار آن سیال باشد. به‌همین دلیل برخی از سیالات ویسکوالاستیک به‌صورت سیال اولدروید-بی، سیال ماکسول، سیال فان-تین-تنر و ... نامگذاری می‌شوند.

۱-۳- پیشینه تحقیق

در این قسمت، گزارش مختصری از برخی مطالعات قبلی انجام شده در زمینه جریان لایه مرزی که شامل حل‌های عددی و تحلیلی می‌شود، ارائه می‌گردد. این مطالعات، شامل جریان سیال‌های نیوتنی، غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک می‌باشد.

۱-۳-۱- جریان لایه مرزی در سیالات نیوتنی

جریان لایه مرزی روی صفحه تخت یکی از مسائل کلاسیک و بنیادی در مکانیک سیالات محسوب می‌شود که از دیرباز مورد توجه محققین و دانشمندان این رشته، بوده است.

در حرکت سیال بر روی یک جسم می‌توان جریان سیال را به دو قسمت مجزا از یکدیگر تقسیم کرد، اولین بار پرانتل، بخشی از جریان که تحت تأثیر برخورد جسم جامد با سیال قرار گرفته است را تحت عنوان " لایه مرزی" نامگذاری نمود [10]. طبق تئوری پرانتل که در سال ۱۹۰۴ ارائه شد، جریان حول یک جسم به دوناحیه‌ی لزج و غیر لزج تقسیم می‌شود. در ناحیه لزج که یک لایه بسیار نازک در نزدیکی دیواره می‌باشد سرعت به طور قابل ملاحظه‌ای کمتر از سرعت در فاصله بیشتری از صفحه می‌باشد. در ناحیه لزج یعنی داخل لایه مرزی نیروهای اصطکاکی قابل ملاحظه می‌باشند و باید در نظر گرفته شوند اما در خارج از لایه مرزی نیروهای اصطکاکی بسیار کوچک و قابل صرف نظرند و در این ناحیه می‌توان با دقت خوبی از فرض سیال ایده‌آل استفاده نمود.

پرانتل[1][11] نقش مهم ویسکوزیته در جریان‌های با عدد رینولدز بالا را روشن نمود و نشان داد چگونه معادلات ناویر استوکز را می‌توان ساده کرد و حل‌های تقریبی برای این حالت بدست آورد. معادلات پرانتل که حاصل از ساده سازی معادلات ناویراستوکز برای جریان لایه مرزی می‌باشد به صورت زیر بیان می‌شود[10] :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\,\frac{\partial u}{\partial x}+v\,\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (۱-۴۴)$$

[1] Prandtel

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (۴۵-۱)$$

با شرایط مرزی زیر:

$$y=0\rightarrow u=0, v=0; y=\infty\rightarrow u=U(x,t) \qquad (۴۶-۱)$$

گرچه معادلات لایه مرزی پرانتل تا حدود زیادی ساده شده‌اند، معذالک از نقطه نظر ریاضی همچنان معادلات مشکلی محسوب می‌شوند.قابل توجه است که معادلات ناویر استوکز از نوع بیضوی بوده، در حالی که معادلات لایه مرزی از نوع سهموی می‌باشند.به لحاظ تاریخی اولین مسئله‌ای که اهمیت معادلات لایه مرزی پرانتل را پدیدار نمود، جریان لایه مرزی روی صفحه تخت می‌باشد. این مسئله توسط بلاسیوس [12] در سال ۱۹۰۸ مورد بحث قرار گرفت و در حل مسئله فوق با فرض جریان یکنواخت و سرعت جریان آزاد ثابت و برابر U_∞ معادله(۱-44) به صورت زیر ساده می‌شوند.

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (۴۷-۱)$$

با تعریف مختصه بدون بعد $\eta=\frac{y}{\delta}$ به صورت زیر:

$$\eta=y\sqrt{\frac{U_\infty}{\upsilon x}} \qquad (۴۸-۱)$$

و همچنین تابع جریان به صورت:

$$\psi=\sqrt{\upsilon x U_\infty}f(\eta) \qquad (۴۹-۱)$$

بعد از جایگذاری در معادلات لایه مرزی و ساده سازی به یک معادله دیفرانسیل معمولی به شکل زیر خواهیم رسید:

$$ff''+2f'''=0 \qquad (۵۰-۱)$$

که شرایط مرزی آن به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

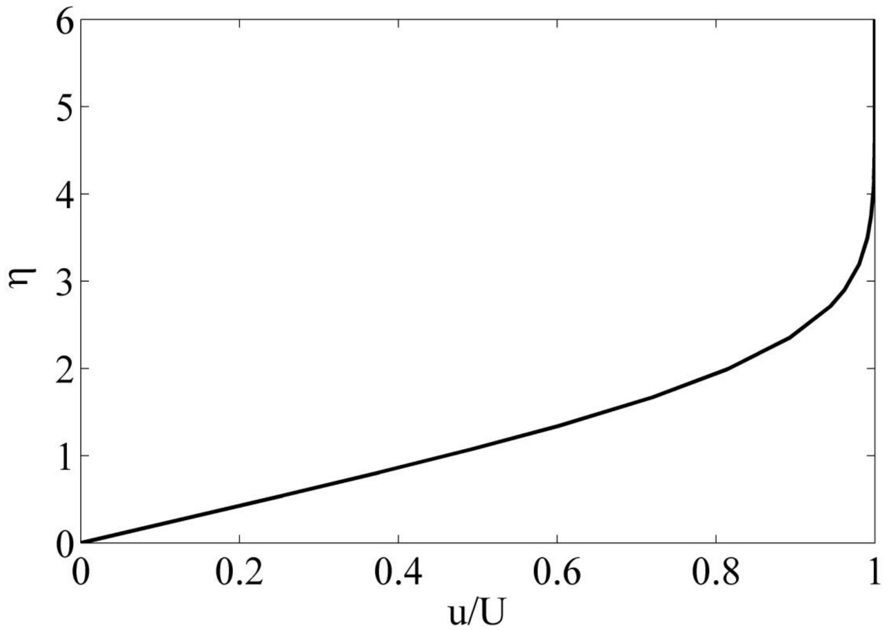
$$\eta = 0 \rightarrow f = 0, f' = 0; \eta = \infty \rightarrow f' = 1 \quad (۵۱-۱)$$

برای حل معادله (۱-50) یا باید روش‌های کاملا عددی را بکار گرفت ویا از وسیله‌ی بسط سریها استفاده نمود. بلاسیوس [12] حل معادله فوق را به صورت بسط یک سری نمایی حول $\eta = 0$ و یک بسط مجانبی برای $\eta = \infty$ ارائه نمود.در اینجا بدون اشاره به جزئیات حل، به ارائه نتیجه آن در قالب روابط و شکل زیر میپردازیم.

$$\delta = 4.98\sqrt{\frac{\upsilon x}{U_\infty}} \quad (۵۲-۱)$$

$$\delta^* = 1.73\sqrt{\frac{\upsilon x}{U_\infty}} \quad (۵۳-۱)$$

$$\theta = 0.664\sqrt{\frac{\upsilon x}{U_\infty}} \quad (۵۴-۱)$$



شکل (۱-۳) حل دقیق لایه مرزی توسط بلاسیوس [12]

۱-۳-۲- جریان لایه مرزی در سیالات غیرنیوتنی

یکی از مهمترین گروه از سیالات غیرنیوتنی، سیالات توانی یا پاور- لو (Power law) می‌باشند. با

توجه به کاربرد وسیع این دسته از سیالات و همچنین سادگی معادلات ساختاری در آنها، اکثر مطالعات بروی لایه مرزی سیالات غیرنیوتنی، گروه سیالات توانی را مورد بررسی قرار داده اند.

اولین بار آکریوس[1] [13] در سال ۱۹۶۰ معادلات لایه مرزی سیالات توانی را به صورت عددی حل نمود. نتایج حاصل از این حل عددی نشانگر تغییرات در ضخامت لایه مرزی و همچنین سایر پارامترهای لایه مرزی بر اثر تغییر اندیس توانی بود. از مهمترین نتایج ارائه شده می‌توان به کاهش ضخامت لایه مرزی بر اثر افزایش اندیس توانی اشاره نمود. اکریوس[13] و همکارانش نشان دادند، سیالاتی که ویسکوزیته آنها با افزایش نرخ برش کاهش می‌یابد، دارای ضخامت لایه مرزی و ضریب اصطکاک کمتری در مقایسه با سیالات نیوتنی می‌باشند.

در فصل هفتم از کتاب سیالات غیرنیوتنی و رئولوژی کاربردی[14] به ارائه روش حل تقریبی با استفاده از معادله انتگرالی فون-کارمن در لایه مرزی سیالات توانی پرداخته است. در این روش با حدس پروفیل درجه ۳ برای توزیع سرعت و تعریف عدد رینولدز تعمیم یافته به صورت $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho U_\infty^{2-n}x^n}{m}$، که در آن n اندیس توانی و m ضریب ویسکوزیته در سیالات توانی می‌باشد، نتایج زیر را برای پارامترهای مختلف لایه مرزی بدست می‌آیند.

$$\frac{\delta}{x}=F(n)\,\mathrm{Re}^{-1/(n+1)} \qquad (۵۵-۱)$$

که در آن

$$F(n)=\left[\frac{280}{39}(n+1)(\frac{3}{2})^n\right]^{1/(n+1)} \qquad (۵۶-۱)$$

همچنین ضریب درگ نیز به صورت تابعی از اندیس توانی به صورت زیر ارائه شده است.

$$C_D=2(n+1)\left[\frac{3}{2F(n)}\right]^n \mathrm{Re}^{-1/(n+1)} \qquad (۵۷-۱)$$

[1] Acrivos

سپس به مقایسه نتایج بدست آمده برای ضریب درگ، حاصل از روش تقریبی با نتایج عددی اکریوس [13] به صورت زیر پرداخته است.

جدول (۱-۱) مقایسه مقادیر ضریب درگ در حل عددی و تقریبی در سیالات توانی[14]

n	مقادیر C_D	
	نتایج حاصل از حل عددی اکریوس	نتایج حاصل از حل تقریبی
۰.۱	۲.۱۳۲	۱.۸۹۲
۰.۲	۲.۰۹۴	۱.۷۹۴
۰.۳	۱.۹۰۵	۱.۷۰۳
۰.۵	۱.۷۲۷	۱.۵۵۴
۱	۱.۳۲۸	۱.۲۹۲
۱.۵	۱.۰۹۵	۱.۱۲۸
۲	۰.۹۶۷	۱.۰۱۴

نتایج ارائه شده نشان می‌دهد که مقادیر بدست آمده از روش انتگرالی فون-کارمن با دقت حدودا ۱۰ درصدی توسط حل عددی تائید می‌شوند. در نتایج جدول(۱-۱) مقادیری که از حل تقریبی ذکر شده اند حاصل از حدس پروفیل سرعت به صورت یک چند جمله‌ای درجه ۳ می‌باشد. همچنین اسکلند[۱] [15] نشان داد در حل تقریبی به روش انتگرالی فون-کارمن، نتایج وابستگی چندانی به نوع تابع پروفیل و یا توان چند جمله‌ای مورد استفاده جهت توزیع سرعت ندارند.

در زمینه حل تحلیلی و دقیق معادله لایه مرزی سیالات توانی تلاش‌های متعددی توسط محققین صورت پذیرفته است. در اکثر تحقیقات سعی بر ارائه حل‌های تشابهی از معادله لایه مرزی سیالات توانی بوده است که از آن جمله می‌توان به مراجع[16] و[17] اشاره نمود.

یکی از جامع‌ترین مقالاتی که به بحث، بررسی و مقایسه نتایج حاصل از حل تحلیلی به روش تشابهی و همچنین حل‌های تقریبی در لایه مرزی سیالات توانی پرداخته است، مقاله‌ی میرز[۲][18] ، ارائه شده در سال ۲۰۰۵ می‌باشد. نویسندگان در مرجع مذکور با اعمال تغییراتی در پارامتر تشابهی استفاده

[1] Skelland
[2] Myers

شده در حل معادله لایه مرزی نیوتنی توسط بلاسیوس، به یک معادله اصلاح شده بلاسیوس جهت سیالات توانی دست یافته‌اند. همچنین در تحقیق فوق علاوه بر حل تشابهی معادله لایه مرزی، معادله ممنتوم نیز به همین روش و بوسیله پارامتر تشابهی مشابه حل شده است. در ادامه به اختصار به روند حل ونتایج ارائه شده، اشاره خواهد شد.

$$\rho \frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u(U_\infty - u)dy = \left(\left[\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}\right)^n \qquad (۵۸-۱)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (۵۹-۱)$$

معادلات (۱-۵۸) و (۱-۵۹) به ترتیب معادله انتگرالی ممنتوم و معادله لایه مرزی سیالات توانی می-باشند. معادلات به کمک پارامترهای زیر بی بعد شده‌اند و n بیانگر اندیس توانی می‌باشد.

$$u = U_\infty \bar{u}; v = \frac{U_\infty}{\mathrm{Re}^{1/(n+1)}}\bar{v}; x = L\bar{x} \qquad (۶۰-۱)$$

$$y = \frac{L}{\mathrm{Re}^{1/(n+1)}}\bar{y}; \mathrm{Re} = \frac{\rho U_\infty^{2-n} L^n}{m} \qquad (۶۱-۱)$$

در این تحقیق از پارامتر تشابهی زیر جهت حل معادلات (۱-۵۸) و (۱-۵۹) استفاده شده است.

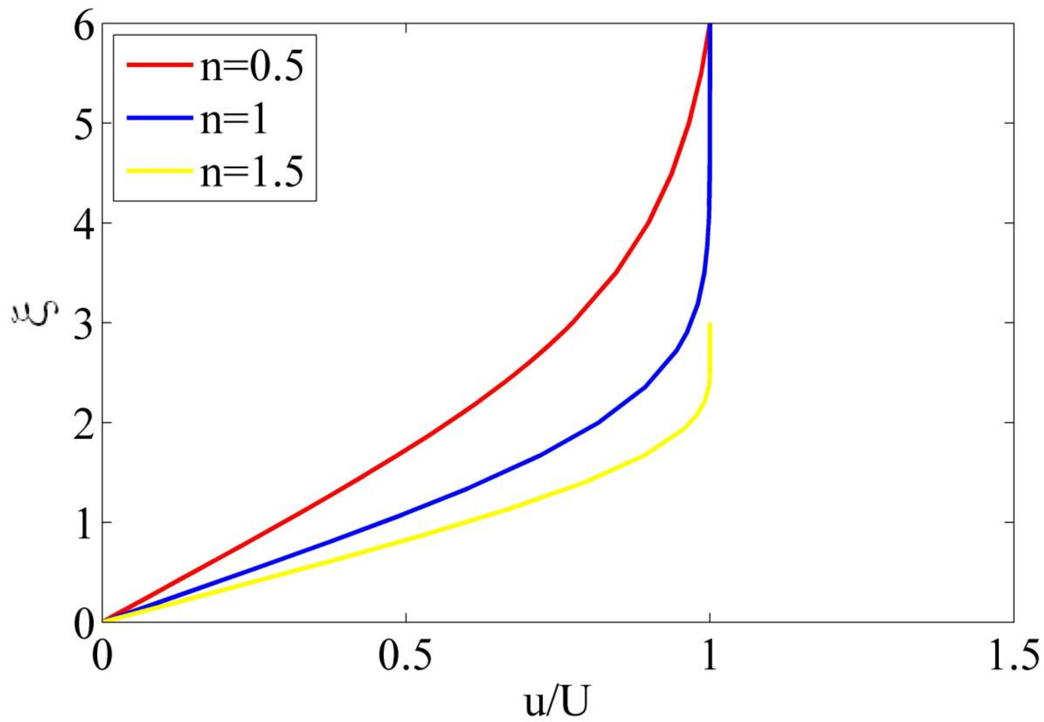
$$\xi = \frac{y}{(n(n+1)x)^{1/(n+1)}} \qquad (۶۲-۱)$$

حال بدون ذکر جزئیات ادامه حل، معادله اصلاح شده بلاسیوس برای سیالات توانی، مندرج در تحقیق فوق ارائه می‌شود.

$$\frac{\partial^3 g}{\partial \xi^3} + g\left(\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2}\right)^{2-n} = 0 \qquad (۶۳-۱)$$

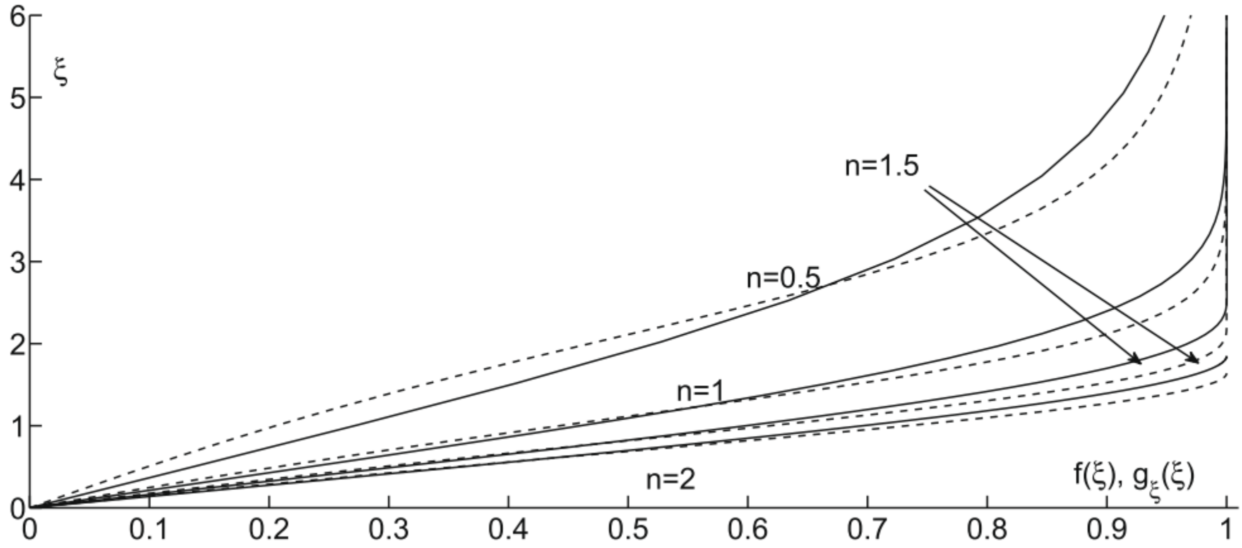
در معادله (۱-۶۳)، $g_\xi(\xi)$ بیانگر $\frac{u}{U_\infty}$ می‌باشد. معادله (۱-۶۴) نیز حاصل حل تشابهی معادله

انتگرالی ممنتوم می‌باشد، که در آن $f\ (\xi)$ نشان دهنده $\frac{u}{U_\infty}$ است. همچنین شایان ذکر است که در معادلات بالا در صورتیکه اندیس توانی برابر ۱ قرار گیرد، معادل سیال نیوتنی بوده و معادله (۱-۶۳) نیز مشابه معادله بلاسیوس خواهد بود. حاصل حل معادلات بالا، که با روش‌های عددی بدست آمده است در شکل(۱-۲) نشان داده شده است.

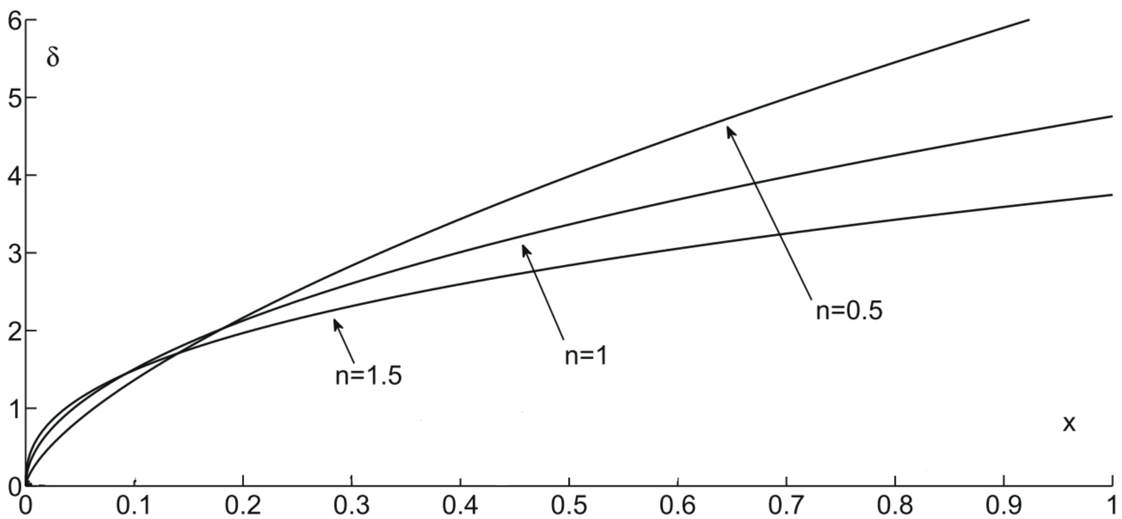


شکل (۱-۴) حل معادله اصلاح شده بلاسیوس[18] در اندیس های توانی مختلف برای سیال پاورلو

شکل (۱-۳) به مقایسه حل معادله اصلاح شده بلاسیوس و مقایسه پاسخ آن با حل تقریبی معادله انتگرالی ممنتوم پرداخته است. شکل (۱-۲) و(۱-۳) نشان دهنده کاهش ضخامت لایه مرزی بر اثر افزایش اندیس توانی نیز می‌باشد. این موضوع در شکل (۱-۴) با وضوح بیشتری قابل مشاهده است. مشخص است که به جز ناحیه ابتدایی صفحه، در بقیه نقاط ضخامت لایه مرزی با اندیس توانی در سیال پاورلو نسبت عکس دارند.



شکل (۱-۵) مقایسه‌ی حل تشابهی معادله لایه مرزی و معادله انتگرالی ممنتوم در اندیس‌های توانی مختلف[18]



شکل (۱-۶) مقایسه میزان رشد لایه مرزی در اندیس‌های توانی مختلف[18]

در تحقیق میرز[18] همچنین تلاشی جهت بهینه سازی روش تقریبی یا همان روش انتگرالی فون-کارمن صورت گرفته است. در این تحقیق علاوه بر استفاده از چند جمله‌ای های کلاسیک درجه ۴ و

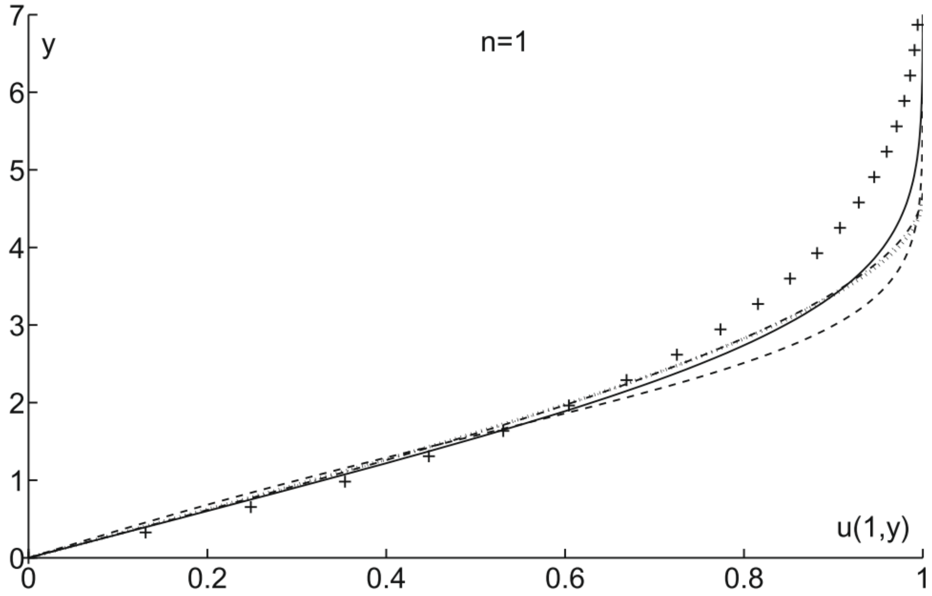
درجه ۳ که به ترتیب توسط پولهاسن[1] [19] و چابرا[2] [20] پیشنهاد شده اند، با استفاده از یه تقریب جدید برای سرعت که در معادله(۱-۶۴) قابل مشاهده است، اقدام به تلاش برای بهینه کردن توان چند جمله‌ای استفاده شده جهت پروفیل سرعت کرده‌اند.

$$u = a_0 + a_1(1-\frac{y}{\delta}) + a_2(1-\frac{y}{\delta})^2 + a_p(1-\frac{y}{\delta})^p \qquad (۱-۶۴)$$

این بهینه سازی از طریق کمینه کردن خطای معادله انتگرالی ممنتوم یعنی معادله(۱-۶۵) به شکل بی بعد، صورت پذیرفته است. مقدار خطای مورد بحث به صورت معادله زیر ارائه شده است.

$$Error = \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial (u(1-u))}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) dy \qquad (۱-۶۵)$$

مقدار p بهینه برای سیال نیوتنی برابر با عدد غیر صحیح ۳,۴۸ گزارش شده و نتایج به صورت شکل زیر باهم مقایسه شده‌اند.

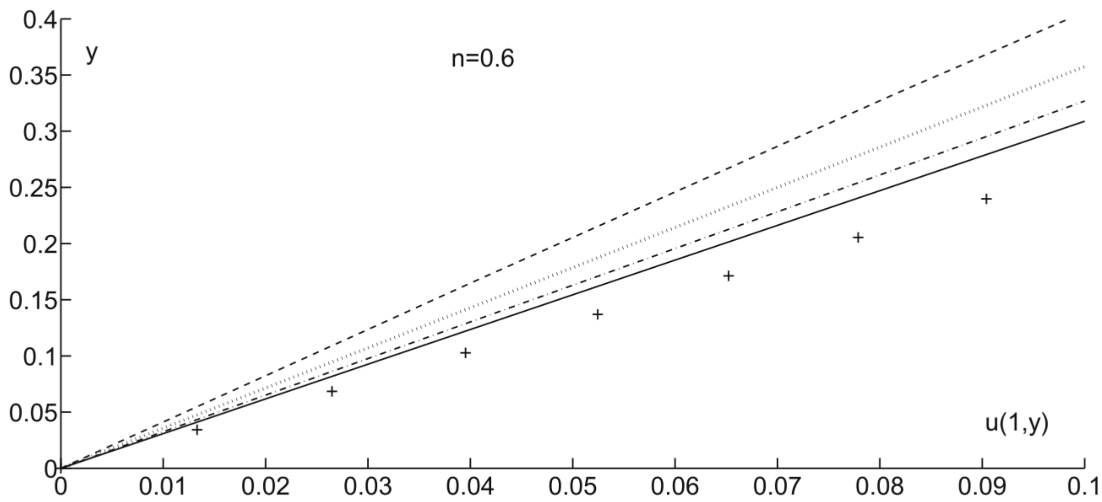


شکل (۱-۷) مقایسه دقت پاسخ‌های تقریبی، بلاسیوس(خط ممتد)، چابرا(خط منقطع)، p=3 (نقطه‌چین)، p=3.48(نقطه خط)، پولهاسن(+)[18]

روند فوق برای اندیس توانی ۰,۶ نیز انجام شده است، و مقدار p بهینه برابر با ۱۰,۰۱۶ گزارش

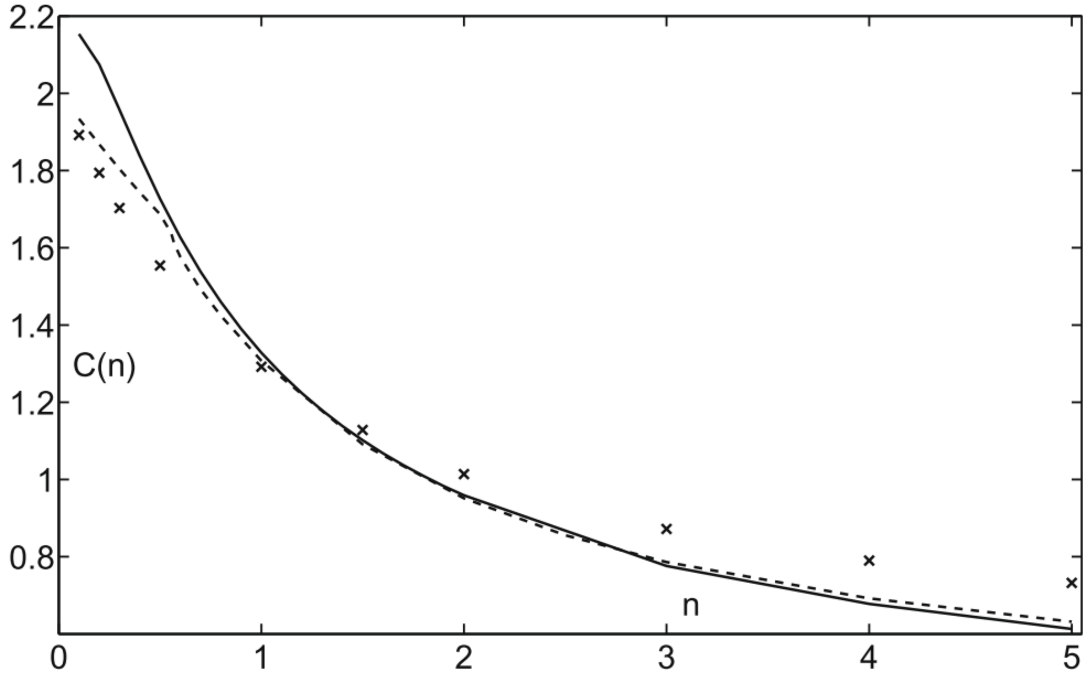
---
[1] Pohlhausen
[2] chhabra

شده است و مقایسه نتایج با پاسخ معادله اصلاح شده بلاسیوس به صورت شکل زیر ارائه شده است.



شکل (۱-۸) مقایسه دقت پاسخ‌های تقریبی، بلاسیوس اصلاح شده(خط ممتد)، چابرا(خط منقطع)، p=3 (نقطه‌چین)، p=۱۰,۰۲(نقطه خط)، پولهاسن(+) [18]

در این تحقیق همچنین به مقایسه دقت پاسخ‌های تقریبی با حل تشابهی در محاسبه ضریب درگ نیز پرداخته است، که نتایج به صورت شکل زیر ارائه شده‌اند. شکل نشان می‌دهد که در سیالاتی با اندیس توانی نزدیک به صفر دقت روش‌های تقریبی کمتر است، همچنین بازه‌ای از n که بیشترین هماهنگی بین پاسخ حل‌های تشابهی و تقریبی برقرار می‌شود را در شکل می‌توان مشخص نمود. کاهش ضریب درگ بر افزایش اندیس توانی نیز در نمودار قابل مشاهده است.



شکل (۱-۹) ضریب درگ بر حسب اندیس توانی،حل تشابهی(خط ممتد)،حل تقریبی با p بهینه(خط منقطع)،حل پولهاسن(+) [18]

۱-۳-۳- جریان لایه مرزی سیالات ویسکوالاستیک

با توجه به غامض بودن و پیچیدگی بسیار زیاد، در اکثر مدل های سیالات ویسکوالاستیک، تعدد کارهای تحقیقاتی انجام شده در بروی لایه مرزی این گروه از سیالات بسیار پایین‌تر از انواع دیگر سیالات غیر نیوتنی می‌باشد. نکته‌ی قابل توجه در تحقیقات محدود انجام شده در زمینه، ارائه نتایج بعضا متناقض با یکدیگر و همچنین عدم تائید بعضی از نتایج بوسیله‌ی مشاهدات آزمایشگاهی می-باشد.

از میان انواع مختلف سیالات ویسکوالاستیک، سیال مرتبه ۲ را می‌توان به تعبیری جزو ساده ترین مدل های رئولوژیک بشمار آورد. این مدل به کرات در مباحث مربوط به سیالات ویسکوالاستیک بکار رفته و می‌رود. والتر و برد[21] لایه مرزی یک سیال مرتبه ۲ را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه غیر مترقبه رسیدند که برای چنین سیالی، سرعت در داخل لایه مرزی باید بیشتر از خارج لایه

مرزی گردد. پیش‌بینی آنها در این تحقیق هنوز پس از گذشت سالها از طریق آزمایشگاهی تأیید نشده است. هریس[1] [22] با استفاده از انتگرال ممنتوم استدلال نمود که در لایه مرزی یک سیال ویسکوالاستیک، خواص الاستیک موجب افزایش ضخامت لایه مرزی و نیز ضریب اصطکاک نسبت به حالت نیوتنی می‌شود.

صادقی [23] جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک از نوع مرتبه ۲ را روی صفحه تخت در نظر گرفته و تاثیر الاستیسیته سیال بر روی ضریب اصطکاک پوسته‌ای را بررسی نموده است. در این تحقیق با استفاده از یک متغیر تشابهی، معادلات لایه مرزی از فرم PDE به یک معادله دیفرانسیل معمولی از نوع ODE ساده شده اند. با توجه به پدیدار شدن متغیر مکانی در معادلات، حل از نوع تشابهی موضعی خواهد بود. برای حل معادلات از ترکیبی از روش تفاضل محدود و پرتابه‌ای استفاده شده است. نتایج این تحقیق حاکی از آن است که اگر خاصیت الاستیک سیال به حد کافی بالا باشد، سرعت در داخل لایه مرزی ممکن است از سرعت خارج از آن بالاتر باشد.

در تحقیق فوق عدد بدون بعد K به صورت زیر تعریف شده که در آن α ضریبی در ارتباط با الاستیسیته سیال، U_∞ سرعت جریان آزاد، υ ویسکوزیته سیتماتیکی و x متغیر مکانی است.

$$K = \frac{\alpha U_\infty}{\upsilon x} \qquad (۶۶-۱)$$

در تحقیق مذکور از پارامتر تشابهی و تابع جریان، که به صورت زیر تعریف شده‌اند، استفاده شده و یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی مرتبه ۴ به شکل معادله(۱-۶۹) از معادلات لایه مرزی استخراج شده است.

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\upsilon x}} \qquad (۶۷-۱)$$

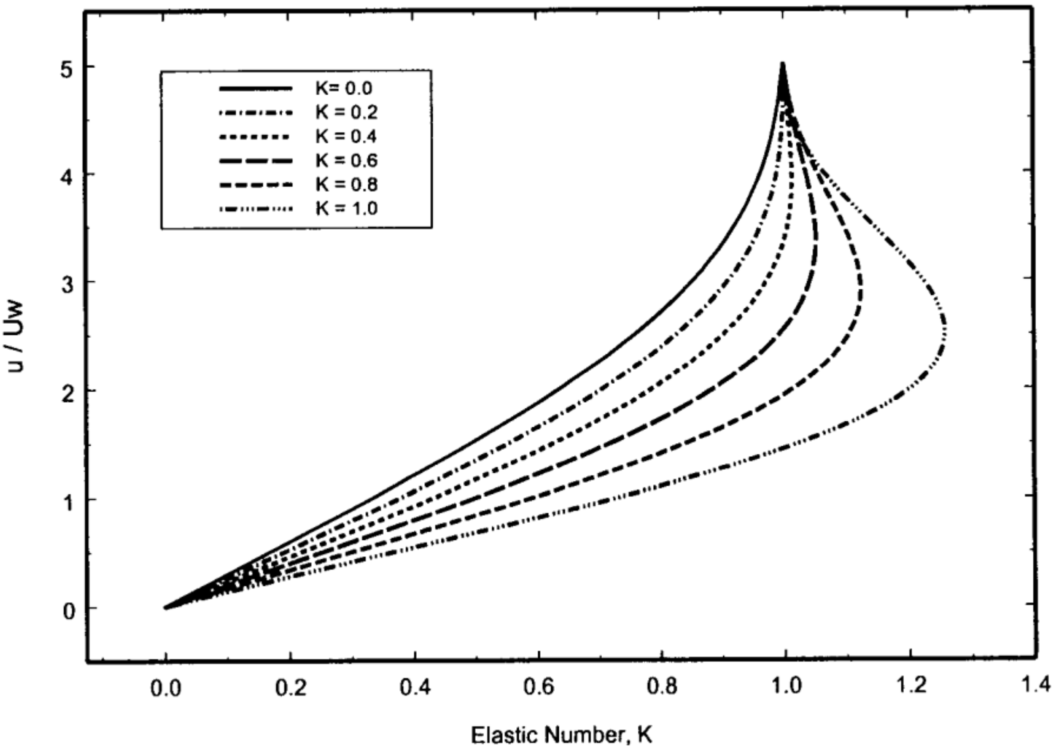
$$\psi = f(\eta)\sqrt{\upsilon x U_\infty} \qquad (۶۸-۱)$$

---

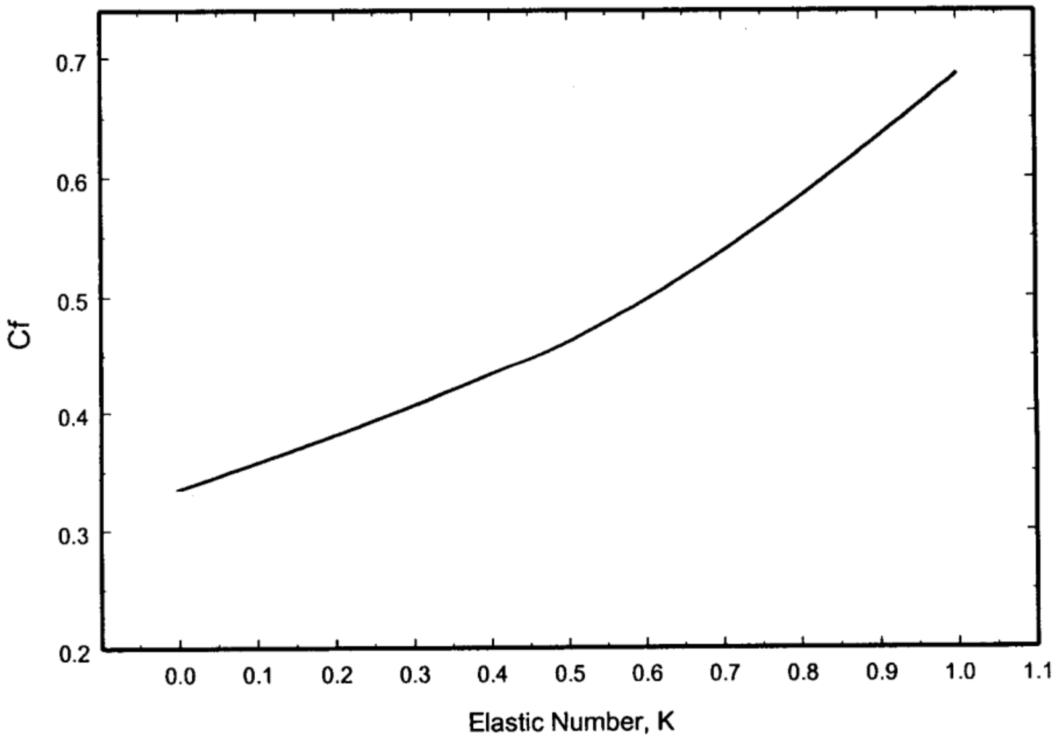
[1] Harris

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' + \frac{K}{2}(f f^{iv} + 2 f' f''' - f''^2) = 0 \qquad (۶۹-۱)$$

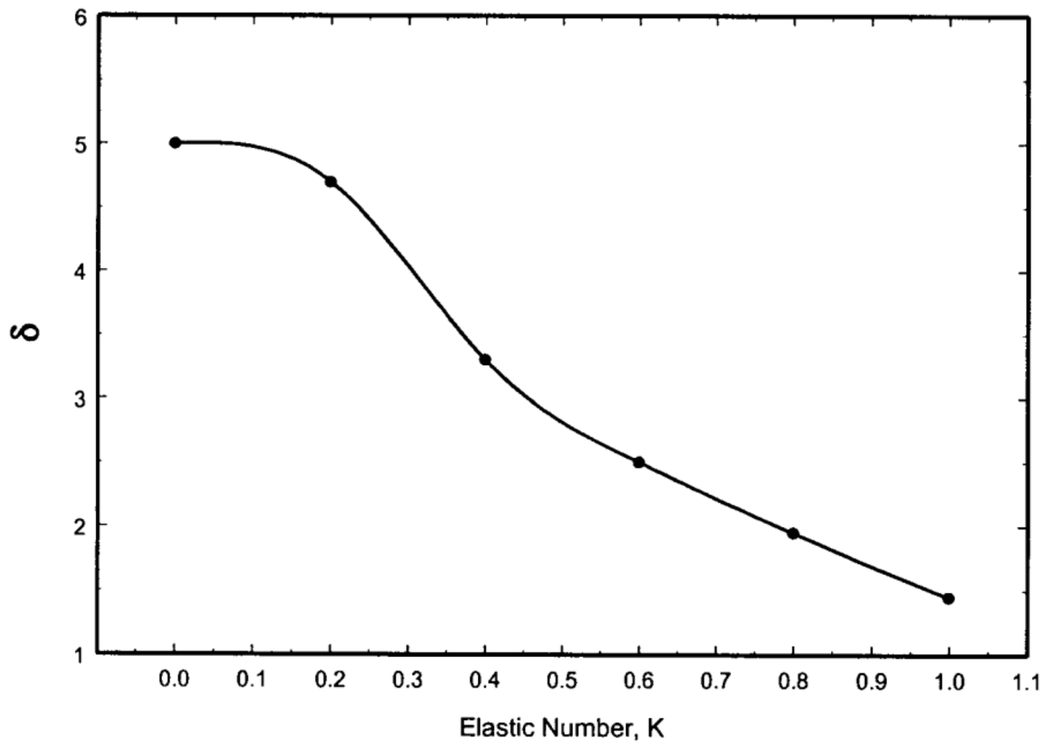
نتایج به صورت سه شکل زیر در مرجع [23] نمایش داده شده‌اند.



شکل (۱-۱۰) پروفیل سرعت در مقادیر مختلف عدد الاستیک K [23]



شکل (۱-۱۱) اثر عدد الاستیک K بر ضریب اصطکاک [23]



شکل (۱-۱۲) تاثیر عدد الاستیک K بر ضخامت لایه مرزی(به صورت بدون بعد) [23]

رناردی[1] [24] تحقیقی مشابه را روی سیالات ویسکوالاستیک از نوع UCM[2] انجام داده است. در این تحقیق روی لایه مرزی سیالات UCM با عدد وایزنبرگ بالا بحث شده است و معادلات لایه مرزی با استفاده روش تشابهی به یک مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده اند. معادلات حاصل دارای حل صریح نمی‌باشند و تنها از روش های عددی قابل حل می‌باشند.

همچنین توسط محقق مذکور تحقیق مشابهی روی سیالات گزیکس و پی‌تی‌تی انجام گرفته است [25]. در این تحقیق نیز که فرض بر بالا بودن عدد وایزنبرگ می‌باشد، با استفاده از پارامترهای تشابهی، از معادلات لایه مرزی، یک مجموعه معادله دیفرانسیل معمولی، برای هر یک مدل های گزیکس و پی‌تی‌تی استخراج شده است.

[1] Renardy

[2] Upper convected Maxwell

برای سیال FENE-P یک حل تشابهی در مرجع[26] انجام شده که در محدوده خاصی از اعداد وایزنبرگ معتبر است. در این تحقیق رابطه‌ای مشابه با رابطه بلاسیوس برای این نوع از سیالات ارائه گردیده و معادله مذکور از با روش پرتابه‌ای از طریق عددی حل شده است.

۱-۴- ضرورت تحقیق حاضر

تحقیقات نگارنده نشان می‌دهد که اکثر پژوهش‌های صورت گرفته روی جریان لایه مرزی سیالات غیر نیوتنی، محدود به سیالات توانی می‌باشد و این مدل قادر به شبیه‌سازی بسیاری از سیالات غیر نیوتنی، من جمله سیالات ویسکوالاستیک نمی‌باشد. تحقیقات صورت گرفته در زمینه سیالات ویسکوالاستیک نیز محدود به مدل‌های خاص و ساده‌تر این سیالات می‌باشد و اکثرا محدود به ناحیه خاصی از اعداد وایزنبرگ می‌باشد. از جنبه‌های نوآوری تحقیق حاضر استفاده از مدل گزیکس[1][27] در شبیه‌سازی جریان لایه مرزی می‌باشد. این مدل غیر خطی توانایی برجسته‌ای در توصیف ویسکوزیته در ناحیه توانی و همچنین اثر اختلاف تنش‌های نرمال برخوردار است.

همچنین استفاده از روش انتگرال ممنتوم در حل تحلیلی و استفاده از مدل CEF[2] در آن دیگر رویکرد جدید در نظر گرفته شده در این پژوهش می‌باشد.

[1] Giesekus

[2] Criminale–Eriksen–Filbey

فصل ۲.

معادلات حاکم بر جریان

این فصل شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول معادلات حاکم بر جریان ویسکوالاستیک بکار رفته در حل عددی ارائه شده‌اند و در بخش دوم معادلات بکار رفته در حل تحلیلی ذکر شده‌اند. لازم به ذکر می‌باشد که در بخش عددی از مدل گزیکس و در بخش تحلیلی از مدل CEF جهت شبیه سازی جریان ویسکوالاستیک استفاده شده است. نتایج بدست آمده در هر کدام از دو بخش، در فصل پنجم ارائه شده‌اند.

۲-۱- حل عددی

در این بخش معادلات حاکم، هندسه مسئله، اعداد بی بعد بکار رفته در حل و همچنین فرضیات لحاظ شده در حل عددی ارائه شده اند.

۲-۱-۱- معادلات حاکم بر جریان در حل عددی

معادلات حاکم برای جریان آرام تراکم ناپذیر سیال ویسکوالاستیک، شامل معادله پیوستگی و معادله بقای ممنتوم می‌باشد که به ترتیب در ادامه ارائه شده اند.

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad (۲-۱)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla(u) = -\nabla p + \nabla.\tau \qquad (۲-۲)$$

در معادلات فوق، u بردار سرعت، p معرف فشار بر واحد چگالی و τ مجموع تنش حلال نیوتنی و ماده پلیمری بر واحد چگالی می‌باشد. سهم تنش ناشی از حلال نیوتنی τ_S و تنش ناشی از خاصیت الاستیک ماده پلیمری τ_P را می‌توان به صورت زیر از یکدیگر تفکیک نمود[27] :

$$\tau = \tau_S + \tau_P \qquad (۲-۳)$$

معادله ساختاری برای توصیف رابطه بین تنش و نرخ برش در حلال نیونتی به صورت معادله(۲-۴)

خواهد بود.

$$\tau_S = \eta_S \dot{\gamma} \tag{۴-۲}$$

که در آن η_S ویسکوزیته حلال نیوتنی و $\dot{\gamma}$ تانسور نرخ برش است، و به صورت معادله (۲-۵) بیان می‌شود.

$$\dot{\gamma} = \nabla u + |\nabla u|^T \tag{۵-۲}$$

در بخش حل عددی این تحقیق سهم ناشی از خاصیت ویسکوالاستیک با استفاده از حل معادله ساختاری گزیکس یعنی رابطه (۲-۶) در نظر گرفته شده است.

$$\tau_P + \lambda_1 \tau_{P(1)} + \alpha \frac{\lambda_1}{\eta_P}(\tau_P . \tau_P) = \eta_P \dot{\gamma} \tag{۶-۲}$$

در معادله فوق، $\tau_{P(1)}$ مشتق همرفتی تانسور[۱] τ_P ، λ_1 زمان آسودگی از تنش[۲] و η_P ویسکوزیته‌ی ماده پلیمری در نرخ برش صفر می‌باشد. همچنین α ضریب پویایی یا تحرک[۳] در سیال ویسکوالاستیک می‌باشد که بیانگر رفتار غیر ایزوتروپیک برونی در هیدرودینامیک مولکولی ماده ویسکوالاستیک است. مشتق فوق همرفتی برای تانسور تنش پلیمری به صورت رابطه (۲-۷) بیان می‌شود.

$$\tau_{P(1)} = \frac{D}{Dt}\tau_P - [\nabla u^T . \tau_P] - [\tau_P . \nabla u] \tag{۷-۲}$$

که در آن $(D/Dt)\tau_P$ مشتق مادی[۴] برای تنش پلیمری است که به صورت رابطه (۲-۸) بیان می‌شود.

$$\frac{D}{Dt}\tau_P = \frac{\partial}{\partial t}\tau_P + u.\nabla \tau_P \tag{۸-۲}$$

---

[1] Upper convected derivative
[2] Relaxation Time
[3] Mobility factor
[4] Material derivative

با قرار دادن $\tau_P = \tau - \tau_S = \tau + \eta_S \dot{\gamma}$ در معادله (۲-۶)، می‌توان این معادله را به فرم رابطه (۲-۹) بازنویسی نمود.

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} + a\frac{\lambda_1}{\eta_0}\{\tau.\tau\} - a\lambda_2\{\gamma_{(1)}.\tau + \tau.\gamma_{(1)}\} = \eta_0\left[\gamma_{(1)} + \lambda_{(2)}\gamma_{(2)} - a\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}\{\gamma_{(1)}.\gamma_{(1)}\}\right] \tag{۹-۲}$$

در رابطه فوق، $\gamma_{(2)}$ و $\gamma_{(2)}$ معرف مشتقات مرتبه اول و دوم همرفتی پاد همبسته تانسور نرخ برش[1] هستند، که به ترتیب به صورت روابط (۲-۱۰) و (۲-۱۱) بیان می‌شوند.

$$\gamma_{(1)} = \nabla u + \nabla u^T \tag{۱۰-۲}$$

$$\gamma_{(2)} = \frac{D\gamma_{(1)}}{Dt} - \left\{(\nabla u)^T .\gamma_{(1)} + \gamma_{(1)}(\nabla u)\right\} \tag{۱۱-۲}$$

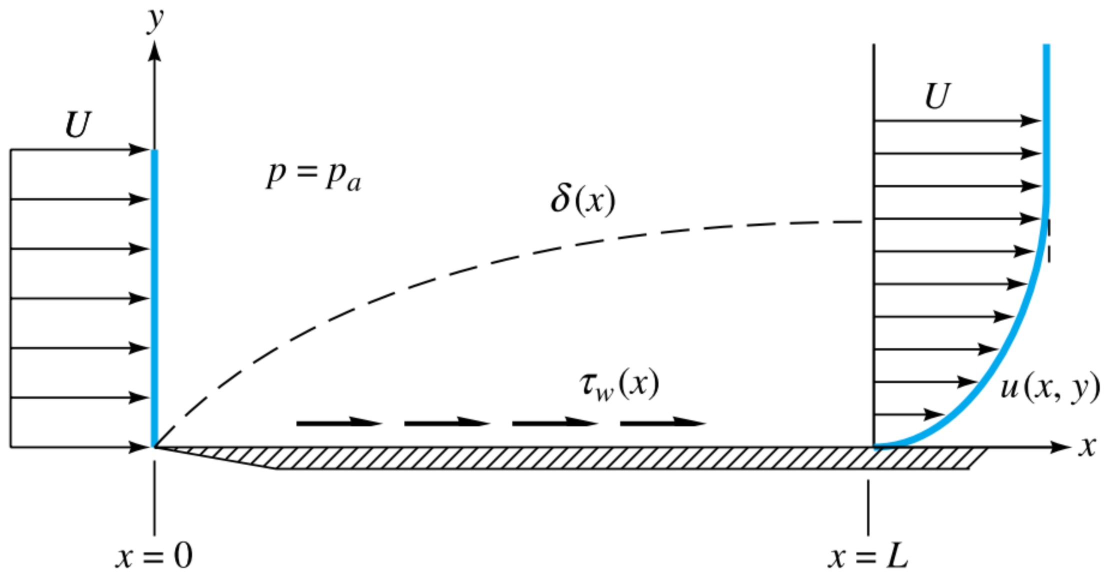
بنابراین می‌توان ویسکوزیته در نرخ برش η_0 ،زمان رهایی از تنش λ_2 [2]و پارامتر پویایی بهبود یافته a را، بر حسب η_p, η_S, α به صورت روابط (۲-۱۲) بیان نمود.

$$\eta_0 = \eta_S + \eta_P; \quad \lambda_2 = \lambda_1\frac{\eta_S}{\eta_P}; \quad a = \frac{\alpha}{1-(\lambda_2/\lambda_1)} \tag{۱۲-۲}$$

۲-۱-۲- هندسه مسئله

مطابق شکل (۲-۱) هندسه بکار رفته در این پژوهش، همان هندسه مشهور و کلاسیک مسئله لایه مرزی در سیالات نیوتنی می‌باشد. در شکل مشخص است که طول صفحه تخت برابر با L و سرعت جریان آزاد، U می‌باشد. همانطور که در شکل مشهود است جریان به صورت کاملا یکنواخت به به صفحه برخورد می‌کند، همچنین لایه مرزی ایجاد شده روی صفحه تخت و پروفیل سرعت در انتهای صفحه به صورت فرضی و شماتیک نمایش داده شده اند.

[1] The first and second contravariant convected derivative of the shear rate tesnsor
[2] Retardation Time



شکل(۲-۱) نمایه شماتیک هندسه مسئله

۲-۱-۳- اعداد بدون بعد

در این پژوهش جهت تعیین نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی ویسکوز از پارامتر بی بعد عدد الاستیک که نسبت عدد رینولدز به عدد وایزنبرگ است استفاده شده و به منظور تعیین نسبت نیروی اینرسی به نیروی ویسکوز، از عدد رینولدز استفاده شده است. تعریف این اعداد در روابط (۲-۱۳) بیان شده اند.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_\infty L}{\eta_0}; \quad We = \frac{\lambda_1 U_\infty}{L}; \quad En = \frac{We}{\mathrm{Re}} \qquad (۱۳-۲)$$

۲-۱-۴- فرضیات مسئله

به منظور حل عددی جریان لایه مرزی روی صفحه تخت، تعدادی فرضیات به منظور ساده‌سازی حل ضروری می‌باشد. به طور کلی می‌توان فرضیات اصلی در نظر گرفته شده در این پژوهش را به شرح زیر بیان نمود:

۱- جریان دو بعدی و آرام است.

۲- سیال ویسکوالاستیک و تراکم ناپذیر می‌باشد.

۳- دما ثابت در نظر گرفته شده است و ویسکوزیته مستقل از دماست.

۴- از اثرات شتاب جاذبه و نیروهای حجمی صرفه نظر شده است.

۲-۲- حل تحلیلی

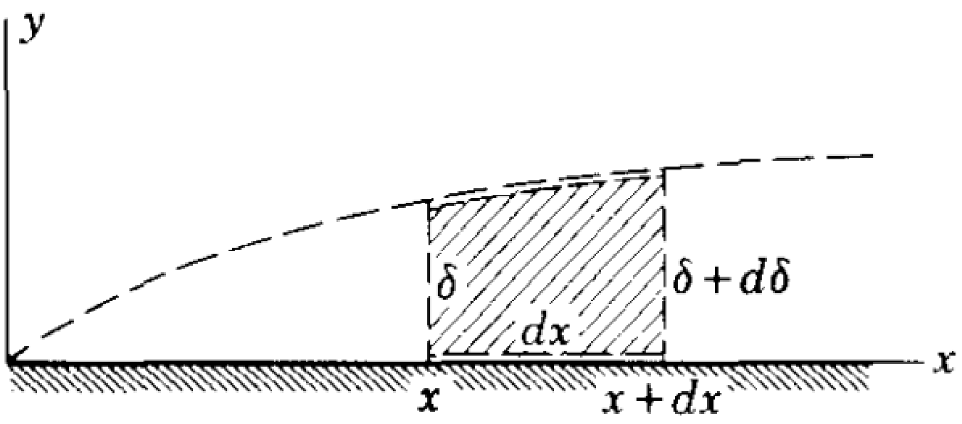
در این بخش به تشریح روش انتگرالی فون-کارمن، که در حل تحلیلی بکار رفته است و همچنین مدل CEF که برای شبیه‌سازی میدان تنش استفاده شده پرداخته می‌شود.

۲-۲-۱- تشریح روش انتگرالی فون-کارمن

در این بخش به معرفی روش انتگرالی فون-کارمن در سیال نیوتنی پرداخته می‌شود[29] . در فصل بعدی چگونگی تعمیم این روش به سیالات ویسکوالاستیک بیان خواهد شد.

یک جریان تراکم ناپذیر با چگالی ρ روی یک صفحه تخت در نظر گرفته می‌شود. سرعت جریان آزاد برابر با U_0 است. لایه مرزی به ضخامت δ روی صفحه تخت تشکیل می‌شود. یک حجم کنترل، مطابق شکل (۲-۲) در نظر گرفته می‌شود.

معادله انتگرالی ممنتوم را میتوان ازطریق معادلات لایه مرزی[18] ویا بررسی تعادل جرم و ممنتوم[14] بدست آورد.



شکل(۲-۲) حجم کنترل بکار رفته در روش فون-کارمن

در حجم کنترل قابل مشاهده در شکل (۲-۲)، اختلاف ممنتوم ورودی و خروجی از حجم کنترل برابر با مجموع نیروهای خارجی قرار داده شده است، که با فرض w به عنوان عرض حجم کنترل، منجر به معادله (۲-۱۴) می‌شود.

$$w\,\rho U_0^2 \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta}(1-\frac{u}{U_0})\frac{u}{U_0}dy\right]dx = \sum F_x \qquad (۱۴-۲)$$

با توجه به شکل (۲-۲) در حالت نیوتنی تنها نیروی خارجی وارد بر حجم کنترل تنش برشی دیواره می‌باشد،که جایگذاری آن در معادله (۲-۱۴)، فرم مشهور معادله انتگرالی فون کارمن را برای سیالات نیوتنی را بدست خواهد داد.

$$\rho U_0^2 \frac{d}{dx}\int_0^{\delta}(1-\frac{u}{U_0})\frac{u}{U_0}dy = -\tau_w \qquad (۱۵-۲)$$

در اثبات معادله انتگرالی ممنتوم هیچ‌گونه فرضی پیرامون طبیعت سیال صورت نمی‌پذیرد، لذا می-توان از آن علاوه بر سیالات نیوتنی در انواع سیالات غیر نیوتنی نیز استفاده کرد.

۲-۲-۲- معرفی مدل CEF

در این تحقیق، برای روش تحلیلی از مدل کریمینال-اریکسون-فیلبی (CEF) به عنوان معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. از دلایل انتخاب مدل CEF می‌توان به مناسب بودن این مدل برای شبیه‌سازی جریانات برشی دائمی اشاره کرد[30] . همچنین شبیه سازی صریح میدان تنش در این مدل، جهت استفاده از آن در روش تقریبی مفید خواهد بود. معادله متشکله کریمینال-اریکسون-فیلبی تعمیم‌یافته معروف به مدل CEF به‌صورت زیر تعریف می‌شود[31] [32] :

$$\tilde{\tau} = \tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}_{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}_{(2)} + \tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}})\left\{\tilde{\gamma}_{(1)}.\tilde{\gamma}_{(1)}\right\} \tag{۱۶-۲}$$

که در آن، جملات $\tilde{\gamma}_{(1)}$ و $\tilde{\gamma}_{(2)}$ معرف مشتقات مرتبه اول و دوم همرفتی پاد همبسته تانسور نرخ برش می‌باشند که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\tilde{\gamma}_{(1)} = \nabla\tilde{V} + \nabla\tilde{V}^{T} \tag{۱۷-۲}$$

$$\tilde{\gamma}_{(2)} = \frac{D\tilde{\gamma}_{(1)}}{D\tilde{t}} - \left\{\left(\nabla\tilde{V}\right)^{T}.\tilde{\gamma}_{(1)} + \tilde{\gamma}_{(1)}.\left(\nabla\tilde{V}\right)\right\} \tag{۱۸-۲}$$

توابع ویسکومتریک در این مدل، لزجت ($\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})$) و اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم ($\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})$ و $\tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}})$) به‌صورت توابعی از نرخ برش تعمیم‌یافته منظور شده‌اند. نرخ برش تعمیم‌یافته نیز برابر با مانای دوم تانسور نرخ برش می‌باشد:

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{2}II} = \sqrt{\frac{1}{2}tr\left(\tilde{\gamma}_{(1)}.\tilde{\gamma}_{(1)}\right)} \tag{۱۹-۲}$$

معادله متشکله CEF برحسب مشتقات زمانی مرتبه اول و دوم همرفتی همبسته تانسور نرخ برش نیز قابل بیان می‌باشد:

$$\tilde{\gamma}^{(1)} = \nabla\tilde{V} + \left(\nabla\tilde{V}\right)^{T} \tag{۲۰-۲}$$

$$\tilde{\gamma}^{(2)} = \frac{D\tilde{\gamma}^{(1)}}{Dt} + \left\{\left(\nabla\tilde{V}\right)\cdot\tilde{\gamma}^{(1)} + \tilde{\gamma}^{(1)}\cdot\left(\nabla\tilde{V}\right)^{T}\right\} \tag{۲۱-۲}$$

با توجه به معادله فوق، مقدار مشتق مادی نرخ برش به صورت زیر تعریف می‌شود[۲]:

$$\frac{D\tilde{\gamma}^{(1)}}{D\tilde{t}}=\tilde{\gamma}^{(2)}-\left\{\left(\nabla\tilde{V}\right)\cdot\tilde{\gamma}^{(1)}+\tilde{\gamma}^{(1)}\cdot\left(\nabla\tilde{V}\right)^{T}\right\} \qquad (۲-۲۲)$$

طبق تعریف مقدار $\gamma^{(1)}$ با $\tilde{\gamma}_{(1)}$ برابر است، بنابراین می‌توان $\tilde{\gamma}_{(1)}$ را به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\tilde{\gamma}_{(2)}=\tilde{\gamma}^{(2)}-\left\{\left((\nabla\tilde{V})+(\nabla\tilde{V})^{T}\right)\cdot\tilde{\gamma}^{(1)}+\tilde{\gamma}^{(1)}\cdot\left((\nabla\tilde{V})+(\nabla\tilde{V})^{T}\right)\right\} \qquad (۲-۲۳)$$

بنابراین:

$$\tilde{\gamma}_{(2)}=\gamma^{(2)}-2\left\{\gamma^{(1)}.\gamma^{(1)}\right\} \qquad (۲-۲۴)$$

بنابراین چنانچه مقدار $\tilde{\gamma}_{(2)}$ از معادله فوق در معادله (۲-۳۰) جایگزین شود و با توجه به برابری مقدار $\tilde{\gamma}_{(1)}$ با $\tilde{\gamma}^{(1)}$، تنش سیال ویسکوالاستیک (مدل CEF) می‌شود:

$$\tilde{\tau}=\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}^{(1)}-\frac{1}{2}\tilde{\Psi}_{1}(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}^{(2)}+\left(\tilde{\Psi}_{1}(\dot{\tilde{\gamma}})+\tilde{\Psi}_{2}(\dot{\tilde{\gamma}})\right)\left\{\tilde{\gamma}^{(1)}.\tilde{\gamma}^{(1)}\right\} \qquad (۲-۲۵)$$

معادله فوق، شکل معادله متشکله سیال CEF برحسب مشتقات زمانی همرفتی همبسته تانسور نرخ برش می‌باشد که در برخی از مراجع مورد استفاده شده است.

معادله متشکله CEF بر اساس بسط مشتقات نرخ برش (مشتقات بر مبنای ضرایب زمان‌های تاخیر سیال) توسعه داده شده است. در تحقیق بریس و همکاران[33] نشان داده شد که پاسخ معادله ساختاری CEF در اعداد دبورای کوچک با پاسخ سایر مدل‌های ویسکوالاستیک (مانند مدل وایت متزنر) یکسان می‌باشد. دقیق‌ترین پاسخ‌های مدل CEF مربوط به جریان‌دائمی برش سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد. این مدل، در حالت‌های زیر به مدل‌های دیگری تبدیل می‌شود:

- اگر $\tilde{\eta}$، $\tilde{\Psi}_1$ و $\tilde{\Psi}_2$ مستقل از نرخ برش باشند ($\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})=\tilde{\eta}_0, \tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})=\tilde{\Psi}_{1,0}, \tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}})=\tilde{\Psi}_{2,0}$)، معادله CEF به مدل سیال مرتبه دو قابل تبدیل است.
- اگر $\tilde{\Psi}_1=0$، معادله CEF به مدل سیال راینر-ریولین ساده می‌شود.
- اگر $\tilde{\eta}=\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}}),\ \tilde{\Psi}_1=0,\ \tilde{\Psi}_2=0$، معادله CEF به سیال نیوتنی تعمیم‌یافته تبدیل می‌شود.

- اگر $\tilde{\eta}=\tilde{\eta}_0,\ \tilde{\Psi}_1=0,\ \tilde{\Psi}_2=0$، مدل به سیال نیوتنی ساده می‌شود.

۲-۲-۳- توابع ویسکومتریک

در اکثر مواد ویسکوالاستیک (به‌ویژه در محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری)، وابستگی لزجت به نرخ برش به‌صورت رقیق‌شونده است (کمتر شدن لزجت با ازدیاد نرخ برش). حالت غلیظ‌شوندگی لزجت بسیار کمیاب می‌باشد. به‌همین دلیل، بسیاری از توابع ویسکومتریک به‌صورت رقیق‌شونده در نظر گرفته شده‌اند. یکی از ساده ترین مدل‌های ویسکومتریک، مدل نمایی یا Power-law می‌باشد. در این مدل توابع ویسکومتریک برای لزجت و ضرایب اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم به شکل زیر قابل بیان هستند.

$$\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})=m(\dot{\tilde{\gamma}})^{n-1} \tag{۲-۲۶}$$

$$\Psi_1(\dot{\tilde{\gamma}})=m'(\dot{\tilde{\gamma}})^{n'-2} \tag{۲-۲۷}$$

$$\Psi_2(\dot{\tilde{\gamma}})=-\chi\Psi_1(\dot{\tilde{\gamma}}) \tag{۲-۲۸}$$

که در آن n و n' اندیس نمایی و m و m' ثابت‌های مدل power-law می‌باشند و مقادیر آنها برای مواد گوناگون از طریق مرجع[28] قابل مشاهده می‌باشد.

یکی دیگر از مدل‌های ویسکومتریک مهم، مدل کاریو-یاسودا می‌باشد. در این مدل، توابع ویسکومتریک به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\frac{\tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})-\tilde{\eta}_\infty}{\tilde{\eta}_0-\tilde{\eta}_\infty}=\left[1+(\lambda\dot{\tilde{\gamma}})^a\right]^{(n-1)/a} \tag{۲-۲۹}$$

$$\Psi_1(\dot{\tilde{\gamma}})=2\lambda_1(\tilde{\eta}_0-\tilde{\eta}_\infty)\left[1+(\lambda\dot{\tilde{\gamma}})^a\right]^{(n-1)/a} \tag{۲-۳۰}$$

$$\Psi_2(\dot{\tilde{\gamma}})=-\chi\Psi_1(\dot{\tilde{\gamma}}) \tag{۲-۳۱}$$

که در آن، $\tilde{\eta}_0$ لزجت در نرخ برش صفر، $\tilde{\eta}_\infty$ لزجت در نرخ برش بی‌نهایت، λ ثابت زمانی مدل، λ_1 ثابت زمانی تاخیر سیال، χ نسبت اختلاف تنش‌های عمودی اول و دوم، n توان نمایی و a ثابت

بی‌بعدی است که ناحیه انتقال بین نرخ برش صفر و ناحیه نمایی را بیان می‌کند. مقدار a برای بسیاری از محلول‌های پلیمری برابر ۲ اعلام شده است. همچنین در اکثر محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری مقدار $\tilde{\eta}_{\infty}$ حدود 10^1 تا 10^4 بار از $\tilde{\eta}_0$ کوچکتر در نظر گرفته شده است. به همین دلیل، در برخی از کاربردهای مهندسی مقدار $\tilde{\eta}_{\infty}$ برابر صفر فرض شده است. $\tilde{\eta}_{\infty}$ در واقع بیانگر بخش نیوتنی رفتار ماده می‌باشد که معمولاً در محلول های پلیمری مقدار آن کوچک می‌باشد. در اکثر آزمایشات رئولوژیکی از اندازه‌گیری مستقیم مقدار اختلاف تنش دوم صرفنظر می‌شود و این مقدار تنها به‌صورت نسبتی از اختلاف تنش عمودی اول در نظر گرفته می‌شود. در اینجا نیز چنین کاری انجام شده و ضریب χ به‌عنوان نسبت اختلاف تنش‌های عمودی منظور شده است. در بیشتر مواد ویسکوالاستیک، اختلاف تنش عمودی دوم دارای مقداری منفی می‌باشد، در حالی که همیشه مقادیر مثبتی برای اختلاف تنش عمودی اول اعلام شده است. در اکثر مواد ویسکوالاستیک مقدار اختلاف تنش عمودی دوم از ۲۰٪ اختلاف تنش عمودی اول کمتر بوده ($\chi < 0.2$) و در بسیاری از محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری نیز مقدار اختلاف تنش دوم حدود ۱۰ ٪ اختلاف تنش عمودی اول گزارش شده است ($\chi \approx 0.1$). مدل کاریو-یاسودا یک مدل چند ثابته است که از انعطاف پذیری کافی برای برازش مناسب بر روی توابع ویسکومتریک بسیاری از مواد ویسکوالاستیک برخوردار است. به‌طور کلی پس از جمع‌آوری داده‌های کافی آزمایشگاهی از رفتار رئولوژیکی ماده، می‌توان این مدل را بر روی داده‌ها برازش داد و ضرایب مربوطه را تعیین نمود. مدل کاریو-یاسودا در واقع حالت تعمیم‌یافته مدل معروف کراس می‌باشد[34] :

$$\tilde{\eta}(\dot{\gamma}) = \tilde{\eta}_{\infty} + \left(\tilde{\eta}_0 - \tilde{\eta}_{\infty}\right) / \left[1 + \lambda \dot{\gamma}^{(1-n)}\right] \tag{۳۲-۲}$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = 2\lambda_1 (\tilde{\eta}_0 - \tilde{\eta}_{\infty}) / \left[1 + \lambda \dot{\gamma}^{(1-n)}\right] \tag{۳۳-۲}$$

در مدل کراس، لزجت در نرخ برش صفر برابر $\tilde{\eta}_0$ و در نرخ برش بی‌نهایت برابر $\tilde{\eta}_{\infty}$ در نظر گرفته می‌شود و بین این دو مقدار حدی، مدل کراس به مدل نمایی نزدیک می‌شود. از مزایای مدل کاریو-

یاسودا نسبت به مدل کراس این است که در این مدل رفتار رئولوژیکی غیرخطی به شکل دقیق‌تری محاسبه می‌شود. مزیت دیگر هر دو مدل نسبت به مدل نمایی، امکان محاسبه $\tilde{\eta}_{\infty}$ در این مدل‌ها می‌باشد (در مدل نمایی مقدار $\tilde{\eta}_{\infty}$ همواره برابر صفر محاسبه می‌شود).

در این تحقیق، برای روش تحلیلی از مدل نمایی یا Power-law جهت تعریف توابع ویسکومتریک استفاده شده است.

فصل ۳.

روش حل

مطالب ارائه شده در این فصل شامل دو بخش می‌باشند. در بخش اول به تشریح حل عددی پرداخته خواهد شد و در بخش بعدی حل تحلیلی انجام شده در این پژوهش ارائه می‌شود. در حل عددی از نرم افزار منبع باز Open FOAM استفاده شده است، در این فصل معرفی این نرم افزار و همچنین توضیح چگونگی مدل سازی و حل عددی جریان لایه مرزی در آن به تفضیل بیان می‌شود. حل تحلیلی انجام شده در این تحقیق نیز به تعمیم روش تقریبی معادله انتگرالی فون کارمن در سیالات ویسکوالاستیک پرداخته است که روند حل مذکور در بخش حل تحلیلی ارائه خواهد شد.

۳-۱- روش حل عددی

برای حل عددی در این تحقیق از نرم افزار منبع باز Open FOAM استفاده شده است. در ابتدا به معرفی و توصیف اجمالی در خصوص این نرم افزار پرداخته و در ادامه توضیحاتی در زمینه الگوریتم حل و روش بکار رفته در آن ارائه خواهد شد. در انتها شبکه محاسباتی استفاده شده، شرایط مرزی و همچنین چگونگی استفاده از نرم افزار برای مدل سازی جریان لایه مرزی بیان می‌شوند.

۳-۱-۱- معرفی نرم افزار منبع باز Open FOAM

دینامیک سیالات محاسباتی به عنوان یکی از قسمت های مهم و ضروری در زمینه ابزارهای مهندسی به منظور مدل‌سازی فرایندهای مختلف، خود را به اثبات رسانیده و در حال حاضر، برای اهداف گوناگونی هم در صنعت و هم د محیط های آکادمیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. مدل‌سازی پدیده‌های جریان سیالات به مهندسان و محققان این اجازه را می‌دهد که فرایندهای گوناگونی را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و در صدد رفع نواقص احتمالی آن برآیند. شایان ذکر است که تقریبا اکثر نرم افار های موجود در زمینه دینامیک سیالامت محاسباتی تحت مجوز شرکت خاصی بوده و بسیار گران قیمت نیز می‌باشند. علاوه بر آن، دستیابی کامل به کد عددی این گونه از نرم افزارها و اعمال تغییر و ویرایش آن توسط کاربر تقریبا غیر ممکن می‌باشد. از این رو، بهترین راه حل به منظور مرتفع

کردن محدودیت های پیش رو، استفاده از نرم افزارهای منبع باز در رابطه با دینامیک سیالات محاسباتی می‌باشد. نرم افزار های کد باز، این اجازه را به کاربران می‌دهند که به کد عددی مدل خود دسترسی کامل داشته و بدون پرداخت هیچ گونه هزینه‌ای ، آن را در زمینه کاری خود ارتقا داده و با نام خود، آن را در اختیار عموم قرار دهند. در واقع، نرم افزارهای کد باز، یک جعبه ابزار می‌باشند که به کاربر اجازه دستکاری و اعمال تغییرات در آن داده می‌شود. در این میان، نرم افزار Open FOAM یک جعبه ابزار دینامیک سیالات محاسباتی است که قادر به مدل‌سازی هر نوع مسئله شامل معادلات دیفرانسیل جزئی، از جمله حل عددی جریان سیال از مسائل ساده تا بسیار پیچیده می‌باشد. از نمونه موارد قابل مدل‌سازی توسط این نرم افزار می‌توان مسئله های مربوط به جریان های آرام و آشفته، تک فاز و چند فاز، انتقال حرکت، واکنش شیمیایی، الکترومغناطیس و مکانیک جامدات و همچنین به مسئله های مربوط به معادلات اقتصادی، نظیر قیمت گذاری و مالی اشاره نمود. شایان ذکر است که این نرم افزار، شامل کتابخانه های از پیش تعیین شده با کلید واژه های با معنا جهت فراخوانی هر یک از فرایندهای حل می‌باشد. ساختار این نرم افزار بر پایه حل مسائل سه بعدی بنا نهاده شده و از تانسور با مرتبه های مختلف برای توصیف مشخصات فیزیکی مسئله استفاده می‌کند. دیدگاه نرم افزار Open FOAM ایجاد یک نمونه مطالعاتی و حل آن با استفاده از حل گری از پیش تعیین شده است که متناسب با نیاز کاربر، قابل تغییر می‌باشد.

هسته انعطاف پذیر و کارآمد Open FOAM ، از مجموعه‌ای از کد های نوشته شده توسط ++C ایجاد شده است. این مجموعه ها در ایجاد حل گر هایی برای شبیه سازی مسائل مطرح در مهندسی مکانیک و یا ایجاد کاربردها برای اعمال پیش پردازش و پس پردازش، همچنین به وجود آوردن کتابخانه هایی به منظور ایجاد جعبه ابزارهایی که در حل گر ها/کاربردها قابل دسترسی باشند و یا برای مدل فیزیکی، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این نرم افزار با تعدادی حل گر از پیش ساخته، مثال های کاربردی و کتابخانه ها ارائه گردیده که می‌تواند به عنوان یک بسته شبیه سازی معمولی مورد استفاده قرار گیرد. در حالی که علاوه بر باز و آزاد بودن کد منبع آن، قابلیت توسعه در ساختار و

سلسله مراتب حل گرها، مثال های کاربردی و کتابخانه ها را نیز دارا می‌باشد.

این نرم افزار با سیستم عامل ویندوز سازگار نسیت و برای استفاده از آن لازم است از سیستم عامل های پایه لینوکس (Linux-based) استفاده نمود. به منظور استفاده همزمان از محیط ویندوز می‌توان از نرم افزار های مجازی که امکان استفاده از چندین سیستم عامل را میسر می‌کنند، بهره جست.در این میان نرم افزار VMware®Workstation به عنوان محبوب ترین نرم افزار به منظور برقراری همزمان دو یا چند سیستم عامل شناخته شده است. در این پژوهش از توزیع لینوکس کوبنتو (Kubuntu) که نسخه OpenFOAM-1.5 نرم افزار به صورت پیش فرض بر روی آن نصب شده، استفاده شده است. این مطلب بدان معناست که پس از ورود به محیط کاری لینوکس، نیازی به نصب برنامه OpenFOAM وجود ندارد [35].

جهت دستیابی به نسخه مورد نظر لینوکس، می‌توان با استفاده از شبکه جهانی اینترنت به صورت رایگان آن را دریافت نمود[36] . لازم به ذکر است توضیحات کامل در ارتباط با این نرم افزار و ابزارهای موجود در آن، در راهنماهای منتشر شده توسط OpenCFD Limited موجود می‌باشد[37] . همچنین به منظور آشنایی بیشتر با این نرم افزار می‌توان به کتاب " مدل‌سازی جریان سیالات و انتقال حرارت با استفاده از نرم افزار OpenFOAM " [38] نیز مراجعه نمود.

۳-۱-۲- گسسته سازی معادلات و الگوریتم حل

در دینامیک سیالات محاسباتی از روش های مختلفی برای تقریب معادلات حاکم استفاده می‌شود که از آنها می‌توان به روش تفاضل محدود یا روش حجم محدود و یا روش اجزای محدود اشاره نمود. نرم افزار OpenFOAM از روش حجم محدود جهت گسسته سازی معادلات استفاده می‌شود. به طور کلی در روش حجم محدود حل معادلات در قالب چهار مرحله زیر انجام می‌شود:

۱- انتگرال گیری از معادلات حاکم بر جریان سیال روی حجم کنترل.

۲- گسسته سازی، که شامل جایگذاری نوعی از تقریب ها برای فرایندهای جریان مثل جابجایی، نفوذ

و چشمه در داخل معادله انتگرالی می‌شود. این عمل معادلات انتگرالی را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کند.

۳- انتخاب روش حل برای معادلات اساسی حاکم بر جریان (معادلات ناویر- استوکس و پیوستگی)

۴-حل دستگاه معادلات جبری.

مرحله اول، یعنی انتگرال گیری بر روی حجم کنترل، روش حجم محدود را از سایر روش های دینامیک سیالات محاسباتی متمایز می‌کند. رابطه روشن ببن الگوریتم عددی و قواعد کلی بقاء فیزیکی، یکی از جاذبه های روش حجم محدود بوده و درک آن را برای مهندسین ساده تر از سایر روش ها می‌کند.

برای حل مجموع معادلات ناویر- استوکس و پیوستگی دو روش کلی وجود دارد که شامل حل همزمان معادلات و حل غیر همزمان آنها می‌شود. در روش اول، تمام متغیرهای جریان (سرعت و فشار) در یک دستگاه جبری قرار گرفته و محاسبه می‌شوند[39] . این کار هزینه محاسباتی بالایی داشته و امکان سخت افزاری مناسب خود را می‌طلبد. در رویکرد حل غیر همزمان معادلات حاکم، میدان سرعت و فشار در یک حلقه محاسبه شده و هر یک از معادلات به صورت جداگانه حل می‌شود. حل جداگانه معادلات مستلزم ارتباط عددی صحیح مؤلفه های جریان می‌باشد. یکی از رایج ترین الگوریتم ها جهت کوپل میدان سرعت و فشار الگوریتم SIMPLE می‌باشد. شرح کامل این الگوریتم در مراجع متعدد دینامیک سیالات محاسباتی موجود است [40].

الگوریتم حلی که در این تحقیق به کمک نرم افزار OpenFOAM به اجرا در آمده است، الگوریتم پیزو (PISO) می‌باشد [40]. این الگوریتم، یک روش محاسبه سرعت-فشار می‌باشد که اساسا برای محاسبه غیر تکراری جریان های تراکم پذیر بکار می‌رود. این روش بطور موفقیت آمیز برای حل تکراری مسائل تراکم ناپذیر نیز سازگار می‌باشد. از آنجایی که نرم افزار OpenFOAM تمامی مسائل را بصورت پیش فرض گذرا در نظر می‌گیرد، این الگوریتم روش مناسبی برای استفاده از این نرم افزار می‌باشد. PISO دارای یک مرحله پیش‌بینی و دو مرحله تصحیح می‌باشد و در واقع بسط روش SIMPLE با یک

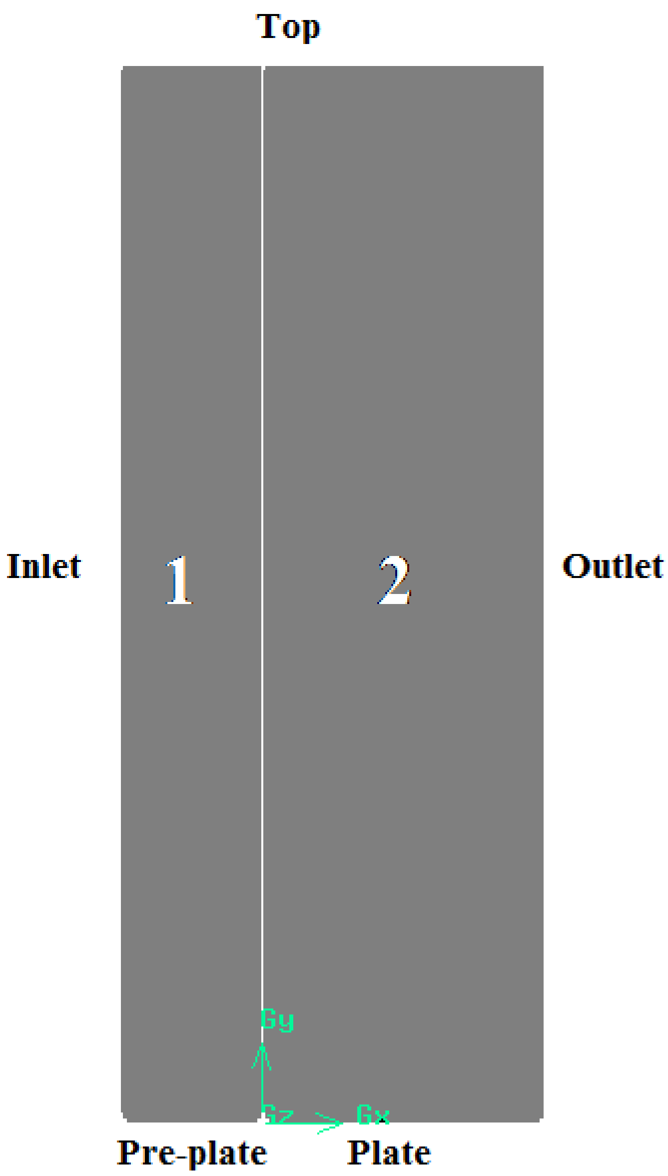
مرحله تصحیح اضافه می‌باشد.

۳-۱-۳- دامنه محاسباتی و شرایط مرزی

شکل (۳-۱) ساختار کلی دامنه محاسباتی بکار رفته در این تحقیق، که جهت مدل‌سازی جریان لایه مرزی استفاده شده است را نشان می‌دهد. این شبکه توسط نرم افزار Gambit ساخته شده است. این شبکه از نوع ساختار یافته[1] و متعامد[2] می‌باشد. ناحیه محاسباتی مطابق شکل می‌توان به دو بخش تقسیم نمود. قسمت اول، ناحیه‌ی قبل از برخورد جریان به صفحه تخت را در برمیگیرد و قسمت دوم ناحیه فوقانی صفحه تخت می‌باشد. در نظر گرفتن ناحیه قبل از صفحه در مدل سازی به دلیل اطمینان از مدل کردن یک جریان کاملا یکنواخت قبل از صفحه تخت می‌باشد. همچنین سعی شده است فاصله صفحات از صفحه تخت طوری انتخاب گردد که هیچگونه اثری بر جریان لایه مرزی ایجاد شده روی صفحه تخت نداشته باشند. فاصله زیاد صفحه بالایی تا صفحه تخت به دلیل فوق‌الذکر در نظر گرفته شده است.

[1] Structured

[2] Orthogonal



شکل(۳-۱) نمایش ناحیه محاسباتی در نظر گرفته شده

همانطور که در شکل مشخص است صفحات مختلف در شبکه محاسباتی، با عناوین گوناگونی نامگذاری شده اند. شرایط مرزی اعمال شده بر روی هر کدام از صفحات مشخصات شده در شکل به شرح زیر می‌باشد:

- شرط مرزی روی صفحه تخت(Plate)

بروی صفحه تخت از شرط عدم لغزش استفاده شده است و همچنین گرادیان فشار و تنش بر روی آن صفر می‌باشد.

$$U = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial n} = 0 \qquad (۱-۳)$$

- شرط مرزی روی صفحه ورودی(Inlet)

در مرز ورودی فرض بر این است که جریان با سرعت یکنواخت وارد شده و میدان تنش و گرادیان فشار در آن صفر می‌باشد.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0; \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad U = U_{\infty} = cte \qquad (۲-۳)$$

- شرط مرزی روی صفحه خروجی(Outlet)

در مرز خروجی جریان، گرادیان سرعت و تنش برابر صفر و فشار برابر فشار اتمسفری در نظر گرفته شده است.

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial n} = 0; \quad p = p_{atm} = cte \qquad (۳-۳)$$

- شرط مرزی روی صفحه فوقانی(Top)

در صفحه فوقانی از شرط سرعت ثابت استفاده شده است همچنین گرادیان فشار و تنش بر روی آن صفر در نظر گرفته شده است. دلایل اعمال چنین شرایط مرزی روی صفحه بالایی را می‌توان اینگونه بیان کرد که، هدف مدل کردن جریانی با مرزهای بینهایت می‌باشد و این شرایط باعث کاهش تاثیر گذاری مرز بالایی روی جریان و همچنین جلوگیری از تشکیل لایه مرزی روی صفحه بالایی می‌شود.

$$U = U_{\infty} = cte; \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial n} = 0 \qquad (۴-۳)$$

- شرط مرزی روی صفحه قبل از صفحه تخت(Pre-plate)

با توجه به اینکه مطلوب این است که جریان قبل از برخورد به صفحه تخت، تحت تاثیر هیچگونه عاملی قرار نگیرد، برای صفحه‌ای که قبل از صفحه تخت در نظر گرفته شده، شرط تقارن یا لغزش

اعمال شده است. در واقع اعمال شرط تقارن جهت عدم تاثیر گذاری این صفحه روی جریان لحاظ شده است.

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0;\quad \frac{\partial p}{\partial n}=0;\quad \frac{\partial \tau}{\partial n}=0 \qquad (۵-۳)$$

در ادامه همین فصل چگونگی اعمال شرایط مرزی مذکور، در نرم افزار OpenFOAM بیان خواهد شد.

۳-۱-۴- فرایند حل در نرم افزار Open FOAM

فرایند حل هر مسئله در سه مرحله پیش پردازش (Pre-processing)، اجرا (Run) و پس پردازش (Post-processing) صورت می‌گیرد. طرح‌واره گام های کلی تحلیل یک مسئله در شکل (۳-۲) آورده شده است. در ادامه به اختصار، به توضیح هر یک از این مراحل پرداخته می‌شود.

شکل(۳-۲) گام های اصلی در شبیه سازی عددی

- **پیش پردازش(pre-processing)**

این مرحله از حل به عملیات مقدماتی از جمله تعریف شبکه محاسباتی، شرایط مرزی و اولیه، خواص فیزیکی و متغیرهای محاسباتی مربوط می‌شود. به طور خلاصه، یک نمونه مطالعاتی در نرم افزار Open FOAM شامل سه پوشه به نام های "0" ، "constant" و "System" می‌باشد. در پوشه 0 مقادیر اولیه میدان های متغیر حل و همچنین مقادیر مرزی برای هر یک از صفحات مرزی اعمال می‌شود. در پوشه constant تنظیماتی خصوص خواص فیزیکی سیال و محیط انجام می‌شود. در پوشه system اطلاعات مورد نیاز حل‌گر یعنی گام زمانی، زمان شروع و زمان نهایی حل، تلرانس، روش حل دستگاه و نحوه گسسته سازی هر یک از عما گرهای دیفرانسیلی اعمال می‌گردد.

- **پردازش(solving)**

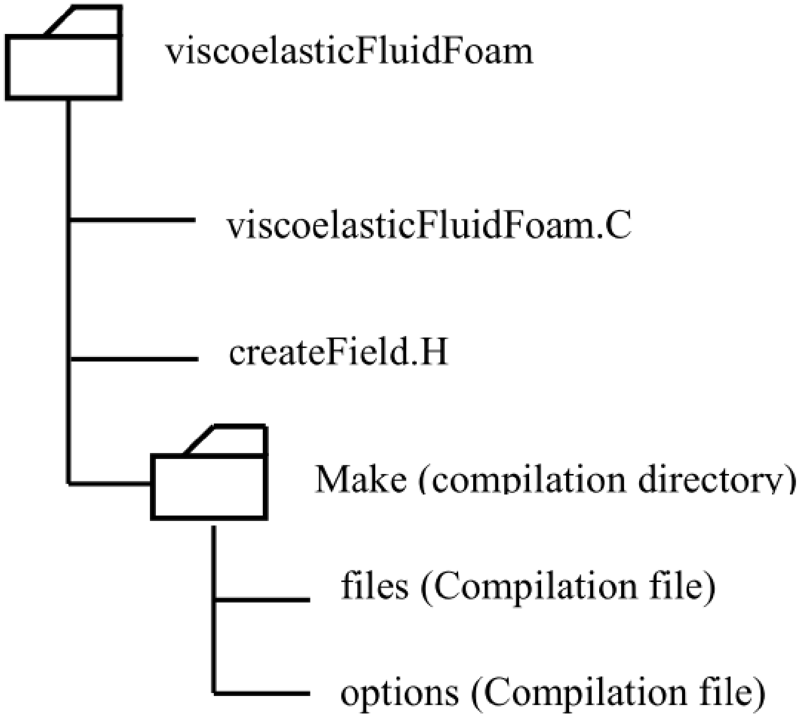
در این مرحله، محاسبات تکرار در هر گام زمانی برای میدان های متغییر انجام می‌شود. حل‌گر های متفاوتی برای جریان های مختلف به صورت پیش‌فرض و استاندارد در نرم افزار وجود دارد. در این تحقیق از حل‌گر viscoelasticFluidFoam به منظور مدل‌سازی جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است.

- **پس پردازش(post-processing)**

در این مرحله، اطلاعات حاصل از حل به نرم افزار هایی که توانایی نمایش اطلاعات به صورت گرافیکی را دارا می‌باشند، انتقال داده می‌شود. این کار در نرم افزار OpenFOAM از دو طریق قابل انجام می‌باشد. یک روش که مرسوم ترین و پرکاربردترین روش برای نمایش اطلاعات حاصل از حل نیز محسوب می‌شود، استفاده از نرم افزار paraview است، که در نسخه لینوکس به کار گرفته شده در این پژوهش به صورت پیش‌فرض نصب می‌باشد. روش دیگر، استفاده از ابزار sample که با استفاده از آن می‌توان اطلاعات حاصل از حل را به نرم افزار های دیگر منتقل نمود.

۳-۱-۵- معرفی حل‌گر مورد استفاده در این پژوهش

همانطور که قبلا اشاره شد، در این تحقیق به منظور مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک از حل‌گر viscoelasticFluidFoam استفاده شده است. حل‌گر مذکور شامل یک فایل اصلی به نام viscoelasticFluidFoam.C و یک فایل فرعی به نام createField.H می‌باشد که در کد اصلی فراخوانده می‌شود. در این فایل، میدان های حل و مدل رئولوژیکی سیال ویسکوالاستیک خوانده می‌-شود. ساختار این حل‌گر در شکل (۳-۳) نشان داده شده است.



شکل(۳-۳) ساختار حل گر viscoelasticFluidFoam

این حل‌گر که برای حل جریان آرام ناپایای یک سیال ویسکوالاستیک کاربرد دارد، در نرم افزار به آدرس زیر موجود می‌باشد.

$FOAM_APP/solvers/viscoelastic/viscoelasticFluidFoam

لازم به ذکر است که نحوه تعریف عملیات ریاضی و همچنین عمل‌گرهای دیفرانسیلی در مرجع [35] موجود می‌باشد.

معادلات حاکم در مسئله عبارتند از قانون پیوستگی، معادله ممنتوم و معادله ساختاری. معادله پیوستگی برای جریان تراکم ناپذیر ناپایا عبارت است از:

$$\nabla . U = 0 \quad (۳-۶)$$

تعریف معادله پیوستگی در نرم افزارOpenFOAM به صورت زیر می‌باشد.

```
fvc: :div (phi)
```

این کد در فایل continuityErrs.H قرار دارد و این فایل در کد اصلی فراخوانده می‌شود. آدرس قرار گیری این فایل در نرم افزار به صورت زیر است.

```
$FOAM_SRC/finiteVolume/cfdTools/incompressible
```

تعریف معادله اندازه حرکت برای جریان سیال ویسکوالاستیک به صورت رابطه (۳-۶) می‌باشد.

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla.(\rho U U) = -\nabla p + \nabla.\tau_S + \nabla.\tau_P \quad (۳-۷)$$

تعریف معادله اندازه حرکت در نرم فزار OpenFOAM به صورت زیر می‌باشد.

```
tmp<fvVectorMatrix> UEqn
            (
                fvm::ddt(U)
              + fvm::div(phi, U)
              - visco.divTau(U)
            );


            UEqn().relax();


            solve(UEqn() == -fvc::grad(p));
```

این کد در فایل viscoelasticFluidFoam.C واقع شده و در آدرس زیر قرار دارد.

```
$FOAM_APP/solvers/viscoelastic/viscoelasticFluidFoam
```

همانطور که در فصل قبل ذکر شد، مدل رئولوژیکی استفاده شده در این تحقیق، گزیکس می‌باشد، کد تعریف کننده معادله ساختاری این مدل در فایل Giesekus.C می‌باشد و این فایل در آدرس زیر در نرم افزار قرار داشته که در کد اصلی فرا خوانده می‌شد.

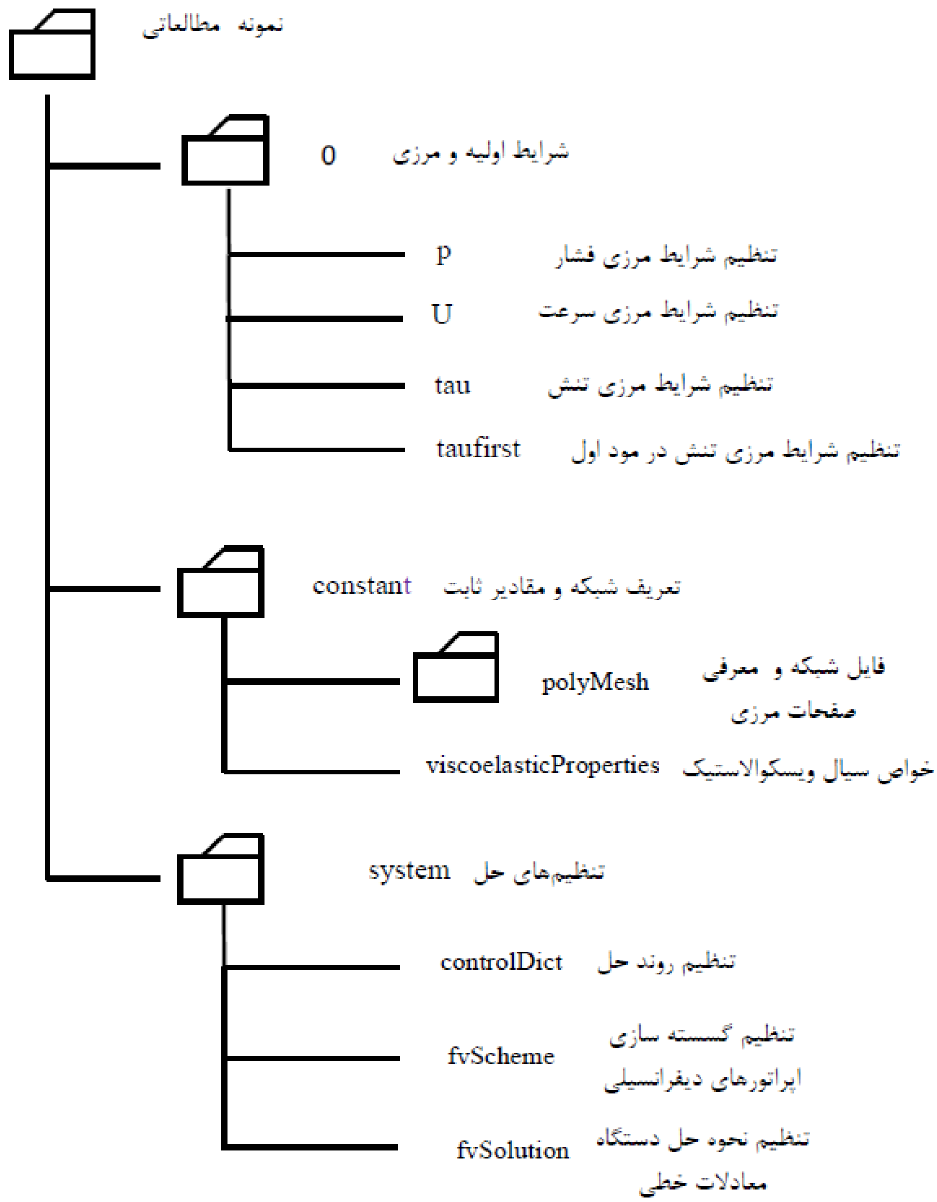
FOAM_SRC/transportModels/viscoelastic/viscoelasticLaws/Giesekus

۳-۱-۶- ساختار نمونه مطالعاتی در این تحقیق

نمونه مطالعاتی بکار گرفته شده در این مسئله که بوسیله آن جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک شبیه‌سازی شده است، نمونه Giesekus می‌باشد. این نمونه در نرم افزار به آدرس زیر قابل دستیابی می‌باشد.

$FOAM_TUTORISLS/viscoelasticFluidFoam/Giesekus

در داخل پوشه Giesekus سه زیر پوشه به نام‌های 0 و constant و system وجود دارند که بعد از انجام مدل‌سازی، مطابق تنظیم هایی که در مسئله صورت گرفته، زیر پوشه‌هایی با نام‌های زمانی حل ایجاد خواهد شد. هر کدام از زیر پوشه ها یی که با اعداد نام‌گذاری می‌شوند، نمایانگر مقادیر پارامترهای حاصل از حل عددی در آن زمان می‌باشد. در نمودار درختی شکل (۳-۴) زیر پوشه های نمونه مطالعاتی Giesekus را نشان داده شده است. حل‌گر viscoelasticFluidFoam فایل های موجود در پوشه Giesekus را خوانده و حل را مطابق تنظیم‌هایی که در آن صورت گرفته است، اجرا می‌کند. در ادامه به اختصار به بررسی هر یک از این پوشه ها و فایل های موجود در آن پرداخته می-شود.



شکل(۳-۴) نمودار درختی نمونه مطالعاتی Giesekus

➢ پوشه 0، اعمال شرایط مرزی و اولیه

برای حل مسئله نیاز به تعیین شرایط مرزی برای تمامی صفحات مرزی می‌باشد. تعیین شرایط مرزی در نرم افزار Open FOAM در پوشه 0 انجام می‌شود. در این پوشه ۴ فایل موجود است، که در هر فایل مقادیر اولیه و مرزی یکی از پارامتر ها تعیین می‌شود. این فایل ها عبارتند از : p فشار، U سرعت، tau تنش، taufirst تنش در مود اول.

لازم به ذکر است که معرفی انواع شرایط مرزی در نرم افزار OpenFOAM در مرجع [38] ارائه شده است. چگونگی اعمال شرایط مرزی ذکر شده در قسمت قبلی، در پوشه 0 همراه با ارائه‌ی کدهای مربوطه در قسمت پیوست بیان می‌شوند.

➢ پوشه constant، تعریف شبکه و خواص سیال

این پوشه از یک زیر پوشه به نام polyMesh و یک فایل تحت عنوان viscoelasticProperties تشکیل شده است. در فایل مذکور خواص رئولوژیکی سیال ویسکوالاستیک شامل ویسکوزیته حلال نیوتنی etaS، ویسکوزیته افزودنی پلیمری etaP، زمان رهایی از تنش lamda، و همچنین ضریب تحرک پذیری مدل گزیکس alpha، تعیین می‌شود. متن کد مورد اشاره در قسمت پیوست ارائه می‌شود.

در پوشه polyMesh اطلاعات شبکه وارد شده و نوع شرط مرزی هر یک از مرزها تعیین می-گردد. لازم به ذکر است، در این پژوهش از نرم افزار Gambit برای ایجاد شبکه استفاده شده است. تعیین نوع شرط مرزی و همچنین نام‌گذاری صفحات، در فایل boundary انجام می‌شود که بعد از فراخوانی شبکه در این پوشه ایجاد می‌گردد. کد این فایل در قسمت پیوست موجود است.

➢ پوشه system، تنظیم‌های حل

این پوشه شامل سه فایل به نام های controlDict و fvSchemes و fvSolution می‌باشد که برای تنظیم‌های فرایند حل به کار گرفته می‌شوند. در فایل controlDict تنظیماتی مانند زمان شروع و پایان حل، فاصله زمانی بین هر بار ثبت اطلاعات و گام زمانی تعیین می‌شود. قسمتی از کد فایل مذکور به شکل زیر است.

```
application     viscoelasticFluidFoam;
startFrom       startTime;
startTime       0;
```

```
stopAt          endTime;
endTime         8;
deltaT          1e-3;
writeInterval   0.1;
```

طبق تنظیمات انجام شده در کد بالا، در این مسئله زمان شروع از صفر، زمان پایان در ۸ ثانیه و گام زمانی ۰,۰۰۱ ثانیه تعیین شده است و هر ۰,۱ ثانیه اطلاعات حاصل از حل ذخیره سازی می‌شود.

فایل fvScheme برای تعیین روش‌هاش گسسته سازی هر یک از عمل‌گرهای دیفرانسیلی از قبیل گرادیان، دیورژانس، لاپلاسین و کرل بکار می‌رود. در جدول (۳-۱) می‌توان لیست کلید واژه های موجود در OpenFOAM برای تعریف هر یک از عمل گرهای دیفرانسیلی مشاهده نمود.

برای گسسته سازی هریک از عمل‌گر ها از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود. به عنوان مثال در این تحقیق که جهت گسسته‌سازی هریک از عمل‌گر ها از تنظیمات پیش‌فرض OpenFOAM استفاده شده است، برای مشتق زمانی از روش کرانک نیکلسون، در جملات شامل سرعت و فشار از روش گوس خطی، در جملات شامل عمل‌گر دیورژانس از روش گوس بالا دست (Gauss upwind) و در جملات شامل عمل‌گر لاپلاسین از روش گوش خطی تصحیح شده(Gauss linear corrected) استفاده شده است. در ادامه نمونه کد فایل fvScheme همراه با تنظیمات بالا ارائه می‌شود.

جدول (۳-۱) تعریف عمل‌گرهای دیفرانسیلی در نرم افزار OpenFOAM

کلید واژه	عمل‌گرهای ریاضی
مقادیر درونیابی نقطه به نقطه	interpolationShemes
مولفه گرادیان عمود بر سطح هر سلول	snGradSchemes
گرادیان	gradSchemes
دیورژانس	divSchemes
لاپلاسین	laplacianShemes
مشتق زمانی مرتبه اول و دوم	timeSchemes
میدان مورد نیاز برای تولید جریان	fluxRequired

```
ddtSchemes
{
    default          CrankNicholson 1;
}

gradSchemes
{
    default          Gauss linear;
    grad(p)          Gauss linear;
    grad(U)          Gauss linear;

}

divSchemes
{
    default                   none;
    div(phi,U)                Gauss upwind;
    div(phi,taufirst)         Gauss upwind;
    div(tau)                  Gauss linear;
}

laplacianSchemes
{
    default                       none;
    laplacian(etaPEff,U)          Gauss linear corrected;
    laplacian(etaPEff+etaS,U)     Gauss linear corrected;
    laplacian((1|A(U)),p)         Gauss linear corrected;
}
```

در فایل fvSolution تنظیم های مربوط به حل‌گر و همچنین تعیین روش حل دستگاه معادلات خطی برای هریک از میدان های حل، انجام می‌شود. کلید واژه های انواع روش‌های حل دستگاه در OpenFOAM در مرجع [38] ارائه شده است. در این تحقیق از روش‌های پیش فرض نرم افزار برای حل دستگاه‌های معادلات استفاده شده است.

از تنظیمات مهم دیگری که در فایل fvSolution صورت می‌گیرد، تعیین ضرایب تخفیف در الگوریتم حل PISO می‌باشد. همانطور که در کد زیر مشخص است، ضرایب تخفیف لحاظ شده در میدان فشار، تنش و سرعت بر حسب میزان همگرایی مسئله قابل تغییر می‌باشند.

```
PISO
{
    momentumPredictor yes;
    nCorrectors     2;
    nNonOrthogonalCorrectors 1;
    pRefCell          0;
    pRefValue         0;
}

relaxationFactors
{
    p                 0.3;
    U                 0.5;
    taufirst          0.3;
}
```

۳-۲- روش تحلیلی

در این قسمت به تشریح حل تحلیلی انجام شده در این پژوهش پرداخته می‌شود. مبنای حل تحلیلی صورت گرفته، تعمیم روش انتگرالی فون کارمن برای سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد. همانطور که در فصل دوم نیز اشاره شد، این روش در سیالات نیوتنی، در سال توسط ارئه گردید و پاسخ‌های قابل قبولی نیز در مقایسه با حل بلاسیوس ارائه شد.برای تعمیم این روش به سیالات ویسکوالاستیک احتیاج به استفاده از یک مدل جهت شبیه سازی میدان تنش در جریان لایه مرزی خواهد بود. برای این منظور همانطور که در فصل قبل نیز بیان شد مدل CEF انتخاب شده است، زیرا در این مدل میدان تنش به صورت صریح ارائه شده است.

۳-۲-۱- محاسبه میدان تنش

همانطور که در فصل قبل بیان شد، معادله متشکله مدل CEF به صورت زیر می‌باشد.

$$\tilde{\tau} = \tilde{\eta}(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}_{(1)} - \frac{1}{2}\tilde{\Psi}_1(\dot{\tilde{\gamma}})\tilde{\gamma}_{(2)} + \tilde{\Psi}_2(\dot{\tilde{\gamma}})\left\{\tilde{\gamma}_{(1)}.\tilde{\gamma}_{(1)}\right\} \tag{۸-۳}$$

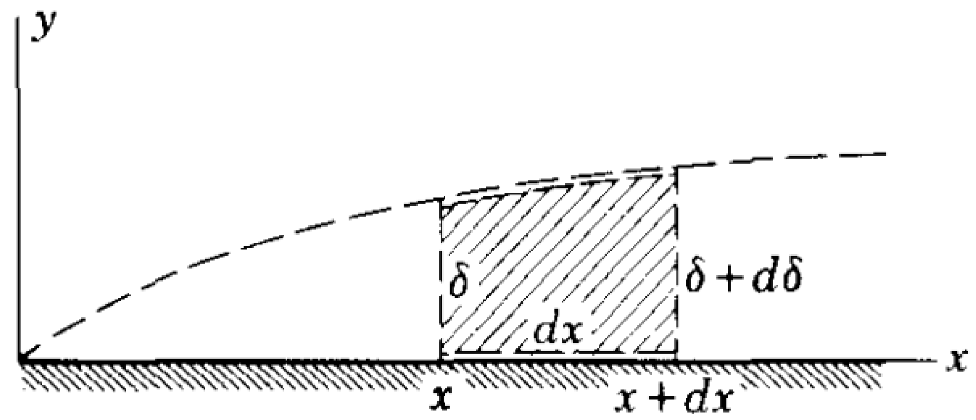
$$\tilde{\gamma}_{(1)} = \nabla\tilde{V} + \nabla\tilde{V}^{T} \tag{۹-۳}$$

$$\tilde{\gamma}_{(2)} = \frac{D\tilde{\gamma}_{(1)}}{D\tilde{t}} - \left\{\left(\nabla\tilde{V}\right)^{T}.\tilde{\gamma}_{(1)} + \tilde{\gamma}_{(1)}.\left(\nabla\tilde{V}\right)\right\} \tag{۱۰-۳}$$

تانسور گرادیان سرعت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{۱۱-۳}$$

حجم کنترلی که میدان تنش سیال ویسکوالاستیک با معادلات فوق‌الذکر باید در آن محاسبه شود در شکل (۳-۵) نمایش داده شده است.



شکل(۳-۵) حجم کنترل در نظر گرفته شده در حل تحلیلی

مقدار $\nabla\tilde{V}$ را در داخل حجم کنترل شکل (۳-۵) دارای اهمیت می‌باشد، لذا امکان ساده سازی ترم های موجود در معادله (۳-۱۱) با توجه به نظریه لایه مرزی [11] وجود خواهد داشت. با در نظر گرفتن فرض های مورد استفاده برای ساده کردن معادلات ناویر-استوکس به معادلات لایه مرزی [10]، می‌توان مولفه های $\nabla\tilde{V}$ را با توجه به مرتبه بزرگی آنها با یکدیگر مقایسه نمود. اگر L یک بعد خطی نامشخص از صفحه و δ ضخامت فرضی لایه مرزی باشد، پس $\delta \ll L$ و آنگاه استفاده از روش مرتبه بزرگی [10] منجر به مقایسه مولفه های معادله (۳-۱۱) به صورت زیر می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{\delta} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\delta}{1} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\delta}{\delta} \end{cases} \tag{۱۲-۳}$$

پس از اعمال روش مرتبه بزرگی و همچنین با توجه به فرض دو بعدی بودن جریان، مقدار $\nabla\tilde{V}$ به صورت زیر ساده خواهد شد.

$$\tilde{\gamma}_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۱۳-۳}$$

جهت بدست آوردن میدان تنش باید $\gamma_{(2)}$ محاسبه شود، جهت این کار باید $\dfrac{D\gamma_{(1)}}{Dt}$ را بیابیم، که با توجه به رابطه مشتق مادی برابر است با:

$$\frac{D\gamma_{(1)}}{Dt}=\frac{\partial\gamma_{(1)}}{\partial t}+u\,\frac{\partial\gamma_{(1)}}{\partial x}+v\,\frac{\partial\gamma_{(1)}}{\partial y}+w\,\frac{\partial\gamma_{(1)}}{\partial z} \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

با توجه به فرض پایا بودن جریان $\frac{\partial\gamma_{(1)}}{\partial t}$ را برابر صفر شده و $\frac{D\gamma_{(1)}}{Dt}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{D\gamma_{(1)}}{Dt}=\begin{pmatrix} 0 & u\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} & 0 \\ u\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & v\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 \\ v\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & u\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}+v\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 \\ u\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}+v\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

برای محاسبه $\gamma_{(2)}$ احتیاج به بدست آوردن ترم‌های $(\nabla v)^T.\gamma_{(1)}$ و $\gamma_{(1)}.(\nabla v)$ نیز می‌باشد، که به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$(\nabla v)^T.\gamma_{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\frac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

$$\gamma_{(1)}.(\nabla v)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\frac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

در نتیجه، $\gamma_{(2)}$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\Rightarrow \gamma_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & u\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 \\ u\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

$$\begin{pmatrix} -2(\dfrac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(\dfrac{\partial u}{\partial y})^2 & u\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 \\ u\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + v\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۱۸-۳)$$

در معادله (۴-۸) ترم $\gamma_{(1)}.\gamma_{(1)}$ نیز موجود است که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\gamma_{(1)}.\gamma_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\dfrac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\dfrac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۱۹-۳)$$

در نتیجه میدان تنش به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\tau=\begin{pmatrix} 0 & m(\frac{\partial u}{\partial y})^n & 0 \\ m(\frac{\partial u}{\partial y})^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -\psi_1(\frac{\partial u}{\partial y})^2 & \frac{1}{2}\psi_1 u\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}+\frac{1}{2}\psi_1 v\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2}\psi_1 u\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}+\frac{1}{2}\psi_1 v\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \psi_2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{۳-۲۰}$$

با توجه به معادله (۳-۲۰) مولفه های میدان تنش به صورت زیر قابل مشاهده است.

$$\tau_{xx}=\psi_1(\frac{\partial u}{\partial y})^2+\psi_2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 \tag{۳-۲۱}$$

$$\tau_{xy}=\eta\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{2}\psi_1 u\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}-\frac{1}{2}\psi_1 v\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial y} \tag{۳-۲۲}$$

$$\tau_{yy}=\psi_2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 \tag{۳-۲۳}$$

همانطور که از معادلات بالا مشهود است، در سیال ویسکوالاستیک، علاوه بر τ_{xy} ، که در سیال نیوتنی نیز ایجاد خواهد شد، τ_{xx} و τ_{yy} نیز حاصل از اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم در حجم کنترل شکل (۳-۵) بوجود می‌آیند.

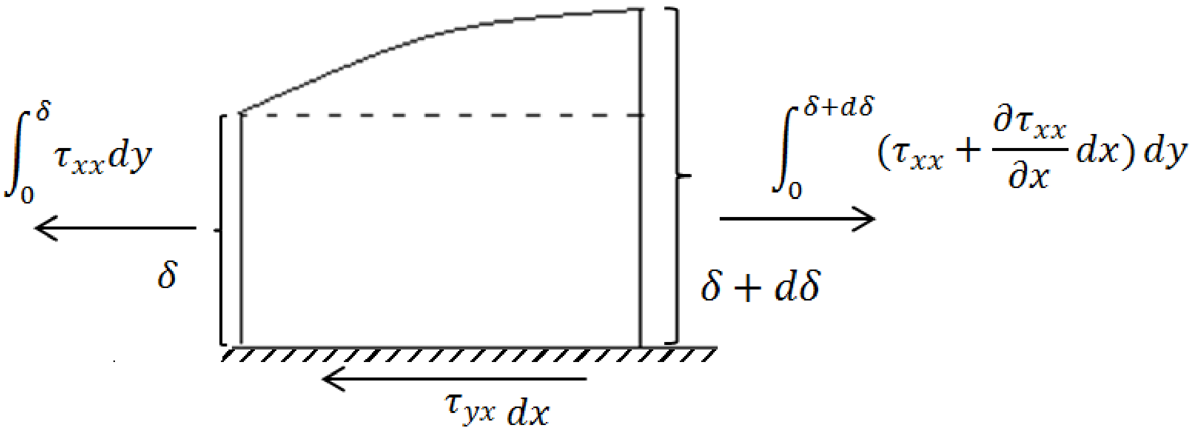
۳-۲-۲- تعمیم روش فون کارمن

همانطور که در فصل قبل گفته شد، مطابق با روش انتگرالی فون کارمن، اختلاف ممنتوم ورودی و

خروجی از حجم کنترل در راستای x برابر با مجموع نیروهای خارجی وارد بر حجم کنترل در همین راستا می‌شود، که اگر عرض حجم کنترل برابر w باشد منجر به معادله (۳-۲۴) خواهد شد.

$$w\,\rho U_0^2 \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta}(1-\frac{u}{U_0})\frac{u}{U_0}dy\right]dx=\sum F_x \qquad (۲۴-۳)$$

نیروهای وارد بر حجم کنترل مذبور در راستای x در شکل (۳-۶) نمایش داده شده‌اند.



شکل(۳-۶) نمایش نیروهای وارد بر حجم کنترل در سیال ویسکوالاستیک

در شکل (۳-۶) قابل توجه است که میزان τ_{xx} روی مرز بالایی صفر خواهد بود، زیرا $\frac{\partial u}{\partial y}$ یا گرادیان سرعت روی لایه مرزی برابر صفر است. همچنین با توجه به معادله (۳-۲۲) میزان تنش τ_{xy} روی سطح با حالت نیوتنی برابر است، چراکه مقدار u و v روی سطح برابر صفر بوده و از معادله تنش τ_{xy} فقط بخش نیوتنی آن باقی می‌ماند.

در نتیجه مجموع نیروهای وارد به حجم کنترل به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$\sum F_x=w\left[\int_0^{\delta+d\delta}(\tau_{xx}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}dx)dy-\int_0^{\delta}\tau_{xx}dy-\tau_{yx}\big|_{y=0}dx\right] \qquad (۲۵-۳)$$

$$\sum F_x = w\left[\int_0^{\delta}(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx)dy + \int_{\delta}^{\delta+d\delta}(\tau_{xx}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx)dy - \tau_{yx}\Big|_{y=0}dx\right] \qquad (۳-۲۶)$$

۳-۲-۳- حدس پروفیل سرعت

برای محاسبه دو طرف معادله (۳-۲۴) احتیاج به حدس یک پروفیل مناسب برای سرعت می‌باشد. با توجه به اینکه چابرا [14]، با حدس پروفیل سرعت به صورت چند جمله ای درجه ۳، در حالت نیوتنی به پاسخهای نسبتا دقیقی برای پارامتر های مختلف لایه مرزی دست یافته است، در این تحقیق نیز برای تقریب پروفیل سرعت از چند جمله ای استاندارد درجه ۳ استفاده شده است، که در معادله (۳-۲۷) ارائه شده است. سپس با اعمال شرایط مرزی که عبارتند از $u=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ در $y=0$ و $u=U_0$ و $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ در $y=\delta$ ، منجر به معادله (۳-۲۸) به عنوان پروفیل تقریبی سرعت خواهد شد.

$$\frac{u}{U_\infty} = a + b\left(\frac{y}{\delta}\right) + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + d\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (۳-۲۷)$$

$$\frac{u}{U_0} = \frac{3}{2}(\frac{y}{\delta}) - \frac{1}{2}(\frac{y}{\delta})^3 \qquad (۳-۲۸)$$

با توجه به پروفیل سرعت بدست آمده در معادله (۳-۲۸)، میزان تنش‌ها را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\tau_{xx} = \psi_1(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + \psi_2(\frac{\partial u}{\partial y})^2 \qquad (۳-۲۹)$$

$$\tau_{xx} = \psi_1(\frac{3U_0}{2\delta} - \frac{3U_0 y^2}{2\delta^3})^2 + \psi_2(\frac{3U_0}{2\delta} - \frac{3U_0 y^2}{2\delta^3})^2 \qquad (۳-۳۰)$$

$$\tau_{xy}\Big|_{y=0} = \eta \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} \quad (۳۱-۳)$$

همچنین معادله (۳-۲۴) با اعمال پروفیل سرعت به شکل زیر بدست می‌آید.

$$w\left[\int_0^{\delta}(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx)dy + \int_{\delta}^{\delta+d\delta}(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx)dy - \tau_{yx}\Big|_{y=0}dx\right] =$$
$$w\,\rho U_0^2 \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta}(1-\frac{u}{U_0})\frac{u}{U_0}dy\right]dx \quad (۳۲-۳)$$

$$\left[\int_0^{\delta}(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx)dy + \int_{\delta}^{\delta+d\delta}(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}dx)dy - \tau_{yx}\Big|_{y=0}dx\right] = \frac{39}{280}\rho U_0^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (۳۳-۳)$$

حال با اعمال تنش‌های بدست آمده در معادلات (۳-۳۰) و (۳-۳۱) در رابطه (۳-۳۳) می‌توان به روابط مفیدی برای پروفیل لایه مرزی دستیافت که در فصل چهارم بیان می‌شوند.

فصل ۴.

بررسی نتایج

این فصل نیز، مانند فصل‌های سوم و چهارم شامل دو بخش می‌باشد. در بخش اول نتایج حاصل از حل عددی ارائه خواهد شد و در بخش دوم نتایج حال تحلیلی بیان می‌شود.

۴-۱- نتایج حل عددی

در این بخش، نتایج حاصل از حل عددی برای شبیه سازی جریان ویسکوالاستیک عبوری از روی صفحه تخت، ارائه می‌شود. به دلیل ضرورت بررسی پارامترهای لایه مرزی در تحلیل نتایج، تمرکز اصلی بر روی ناحیه بسیار نزدیک به صفحه تخت خواهد بود.

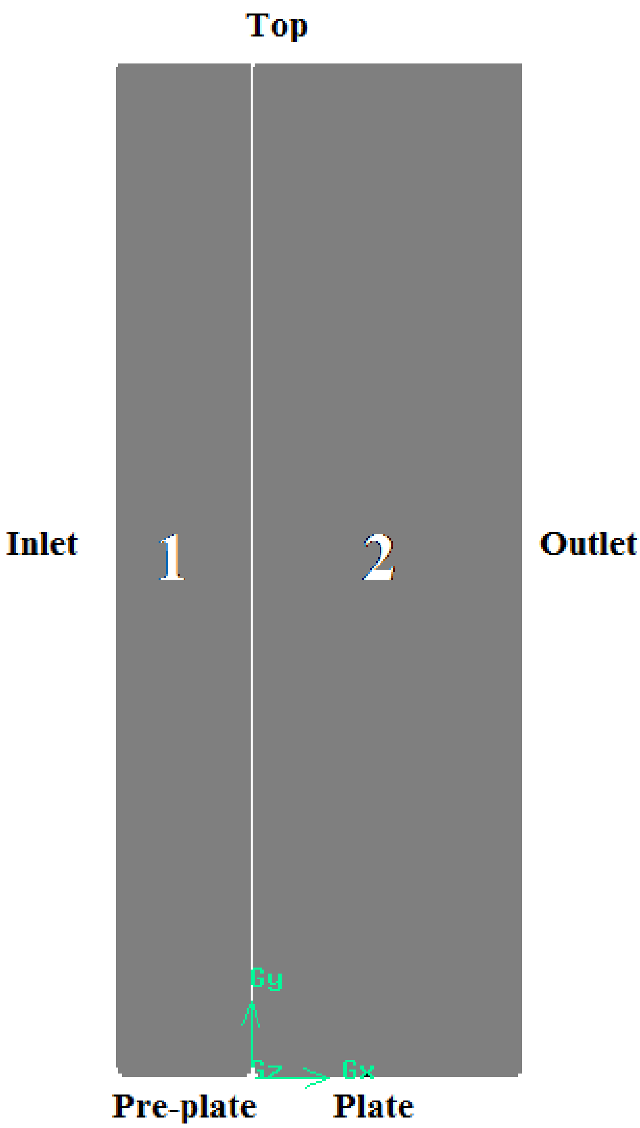
در ابتدای این فصل، استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی بررسی شده و صحت نتایج حاصل از حل عددی ارزیابی می‌گردد. بر اساس اطلاعات نگارنده، جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک با مدل گزیکس تا کنون با هیچکدام از روش های عددی، تحلیل و یا آزمایشگاهی مورد بررسی قرار نگرفته است. لذا جهت بررسی صحت نتایج، به مقایسه پاسخ های حاصل از حل عددی با نتایج تحلیلی سیال نیوتنی،یعنی حل بلازیوس [12] اکتفا شده است.

در ادامه، اثر پارامترهای مختلفی نظیر عدد رینولدز، عدد الاستیک و ضریب تحرک پذیری در مدل گزیکس مورد بررسی قرار گرفته است.

۴-۱-۱- مطالعه استقلال حل عددی از شبکه و صحت نتایج

استقلال و عدم وابستگی حل به شبکه محاسباتی جهت مطالعه جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک، در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور تعیین میزان حساسیت و همچنین دستیابی به شبکه ای مطلوب برای حل، سه شبکه محاسباتی به کار گرفته شده و نتایج حاصل از حل هر یک از آنها با یکدیگر مقایسه شده است. ابعاد هندسه مسئله، که در آن ناحیه محاسباتی به دو بخش مجزا تحت عنوان ناحیه های یک و دو نامگذاری شده اند، در شکل(۴-۱)

نمایش داده شده است. جهت جریان در راستای x در نظر گرفته شده و دستگاه مختصات مرجع در ابتدای صفحه تخت واقع شده است. همانطور که در فصل قبلی نیز اشاره شد، موقعیت قرارگیری و فاصله صفحات مرزی نسبت به صفحه تخت طوری انتخاب گردیده است، تا کمترین تأثیر را بر روی جریان داشته باشد. در نظر گرفتن یک ناحیه پیش ورودی، قبل از برخورد جریان با صفحه تخت نیز با رویکرد مشابه لحاظ گردیده است.



شکل(۴-۱) نمایی از شبکه محاسباتی

مشخصات شبکه‌های محاسباتی، با تفکیک تعداد مش در هر ناحیه در جدول(۴-۱) ارائه شده است.

جدول (۴-۱) مشخصات شبکه های محاسباتی

شبکه	تعداد سلول در ناحیه ۱	تعداد سلول در ناحیه ۲	تعداد کل سلول ها
M1	۱۲۰۰۰	۲۱۰۰۰	۳۳۰۰۰
M2	۳۰۰۰۰	۵۰۰۰۰	۸۰۰۰۰
M3	۴۹۸۷۵	۱۰۰۱۲۵	۱۵۰۰۰۰

یکی از پارامترهای مهم و کاربردی در مطالعه لایه مرزی سیالات، میزان نیروی وارد بر دیواره بر اثر حرکت سیال می‌باشد. میزان نیروی مذکور از طریق محاسبه پارامتر دیگری تحت عنوان ضریب درگ، که از رابطه $C_D = \frac{F_D}{0.5\rho U^2 A}$ قابل دستیابی است، مشخص می‌شود. در رابطه فوق، U سرعت جریان آزاد، A مساحت سطح تر شده، ρ چگالی سیال و F_D میزان نیروی وارد بر سطح می‌باشد. مقدار محاسبه شده ضریب درگ در سیال نیوتنی، بوسیله شبکه های محاسباتی مختلف و مقایسه آنها با حل تحلیلی، معیار مناسبی جهت سنجش استقلال حل عددی از نوع شبکه بندی می‌باشد.

یافتن میزان ضریب درگ در روش عددی، از طریق محاسبه تنش برشی روی دیواره در مقاطع متعدد، و انتگرال گیری از آنها در طول دیواره امکان پذیر می‌باشد. محاسبه تنش برشی نیز با موجود بودن اطلاعات سرعت حاصل از حل عددی، از طریق رابطه $\tau_w = \mu \partial u / \partial y$ میسر می‌شود.

نتایج بدست آمده برای ضریب درگ، با هر سه شبکه محاسباتی و مقایسه آنها با حل تحلیلی بلاسیوس [12] در جدول (۴-۲) ارائه شده‌اند. نتایج برای چهار رینولدز گوناگون ارائه شده اند و عدد رینولدز به صورت $\mathrm{Re} = \frac{U_\infty L}{\upsilon}$ تعریف شده است که در آن L طول صفحه می‌باشد.

جدول (۴-۲) مقایسه ضریب درگ برای هر سه نوع شبکه بندی

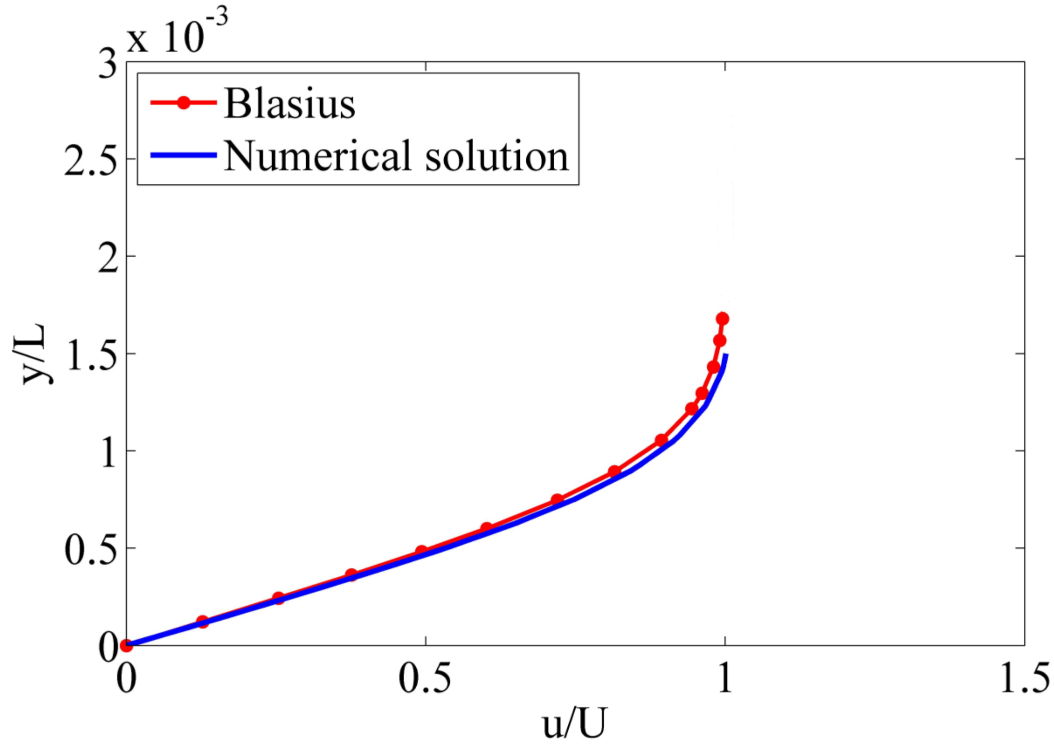
Re	M1	M2	M3	حل بلاسیوس	E(M1)%	E(M2)%	E(M3)%
۵	۰.۶۲۶۶	۰.۶۲۳۶	۰.۶۱۷۷	۰.۵۹۳۹	۵.۵	۵	۴
۵۰	۰.۱۹۵۳	۰.۱۹۴۴	۰.۱۹۲۵	۰.۱۸۷۸	۴	۳.۵	۲.۵
۵۰۰	۰.۰۶۱۸	۰.۰۶۱۲	۰.۰۶۰۳	۰.۰۵۹۴	۴	۳	۱.۵
۱۰۰۰	۰.۰۴۳۵	۰.۰۴۳۱	۰.۰۴۲۴	۰.۰۴۲	۳.۵	۲.۵	۱

با توجه به جدول بالا می‌توان دریافت که مقادیر ضریب درگ حاصل از شبکه های M1 و M2 و M3 به سمت مقدار واقعی ضریب درگ، حاصل از حل تحلیلی میل می‌کنند. با توجه به تاثیر گذاری دیگر مشخصه های لایه مرزی، از جمله ضخامت لایه مرزی و پروفیل سرعت روی مقدار ضریب درگ، می-توان پارامتر ضریب درگ را کمیت جامعی، جهت سنجش عدم وابستگی حل عددی به نوع شبکه بندی دانست. بدیهی است که با افزایش تعداد سلول ها در شبکه محاسباتی، میزان دقت در پاسخ های روش عددی بیشتر شده و مقدار خطای آنها نسبت به حل تحلیلی کاهش می‌یابد. مقادیر جدول فوق نیز مبین همین موضوع است. اما باید به این موضوع نیز توجه داشت که افزایش تعداد سلول ها در شبکه محاسباتی، منجر بالا رفتن شدید زمان و حجم محاسبات خواهد شد. در این تحقیق با توجه به قابل قبول بودن دقت پاسخ در هر سه شبکه محاسباتی، شبکه M2، مبنای محاسبات آتی قرار گرفته است.

جهت اطمینان بیشتر از صحت نتایج، بعضی دیگر از نتایج بدست آمده از حل عددی با نتایج تحلیلی بلاسیوس مقایسه می‌شود.

در شکل(۴-۲) شکل پروفیل سرعت در یک مقطع خاص از صفحه تخت، به کمک حل عددی و حل بلاسیوس رسم شده اند. در رسم پروفیل به روش بلاسیوس، در واقع معادله $ff''+2f'''=0$ ، که به

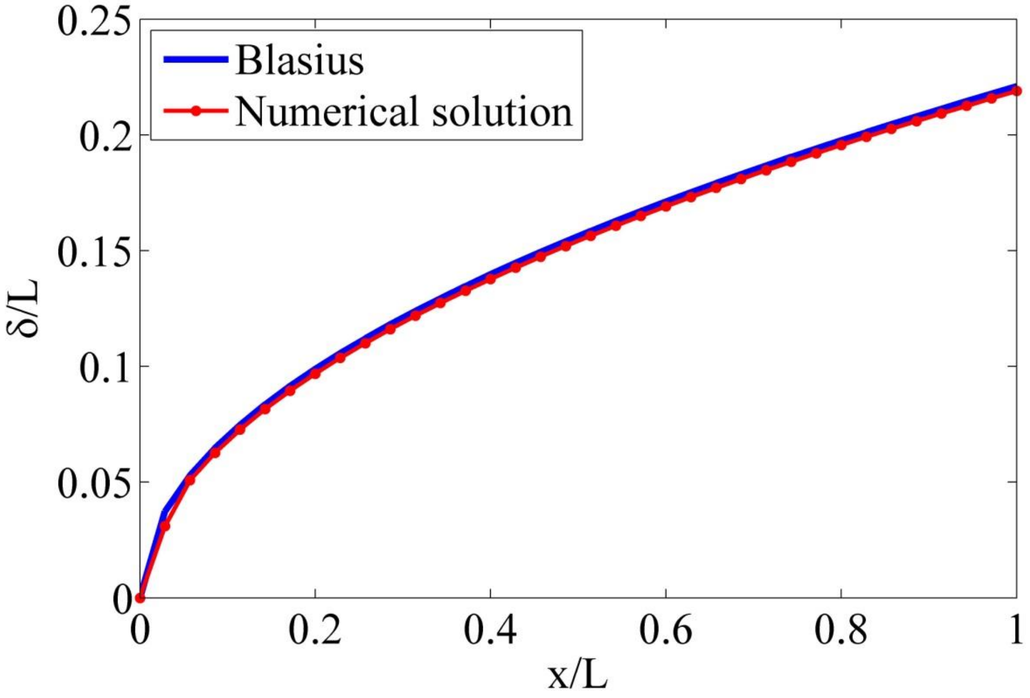
معادله بلاسیوس معروف است، به کمک روش های عددی از طریق نرم افزار متلب[1] حل گردیده است.



شکل(۴-۲) مقایسه پروفیل سرعت در حل عددی و بلاسیوس [۱۲]

پارامتر دیگری که جهت اطمینان از صحت نتایج، استفاده خواهد شد، ضخامت لایه مرزی می‌باشد. ضخامت لایه مرزی که با δ نمایش داده می‌شود، عبارتست از مکان هندسی نقاطی که در آنها سرعت سیال به ۹۹ درصد مقدار سرعت جریان آزاد می‌رسد. نمودار پاسخ بلاسیوس از طریق رابطه معروف $\delta = 4.98\sqrt{\frac{\upsilon x}{U_\infty}}$ که از حل بلاسیوس بدست می‌آید، رسم شده است. نمودار روش عددی نیز از طریق استخراج اطلاعات سرعت در مقاطع متعدد از صفحه و سپس یافتن نقطه ای در هر مقطع است، که در آن سرعت با ۹۹ درصد مقدار سرعت جریان آزاد برابر می‌شود. با به هم پیوستن نقاط مذکور نمودار لایه مرزی، حاصل از حل عددی رسم خواهد شد.

[1] MATLAB



شکل(۴-۳) مقایسه پروفیل لایه مرزی در حل عددی و بلاسیوس [۱۲]

در شکل(۴-۳) پروفیل لایه مرزی حاصل از هر دو روش با یکدیگر مقایسه شده اند. در این شکل سرعت جریان آزاد برابر ۰,۵ متر بر ثانیه انتخاب شده است و در رسم پروفیل به روش عددی، فاصله‌ی در نظر گرفته شده بین مقاطعی که با استفاده از داده های سرعت آنها پروفیل رسم گردیده است، ۵ میلیمتر در نظر گرفته شده است. در شکل مشهود است که دو نمودار هماهنگی قابل قبولی با یکدیگر دارند.

دو پارامتر مهم دیگری که جهت حصول اطمینان از صحت پاسخ های روش عددی به آنها پرداخته خواهد شد، عبارتند از ضخامت جابجایی[1] و ضخامت ممنتوم[2]. جهت محاسبه میزان ضخامت جابجایی و ضخامت ممنتوم حاصل از عددی، که به ترتیب آنها را با δ^* و θ نمایش می‌هند، باید از معادلات(۴-۱) و (۴-۲) استفاده نمود. در هر مقطع از صفحه با استفاده از اطلاعات سرعت و انتگرال-گیری عددی، می‌توان ضخامت ممنتوم و جابجایی را در آن مقطع محاسبه نمود. جهت درک بهتر

[1]Displacement thickness
[2] Momentum thickness

ماهیت فیزیکی ضخامت ممنتوم و ضخامت جابجایی می‌توان از مرجع [10] استفاده نمود.

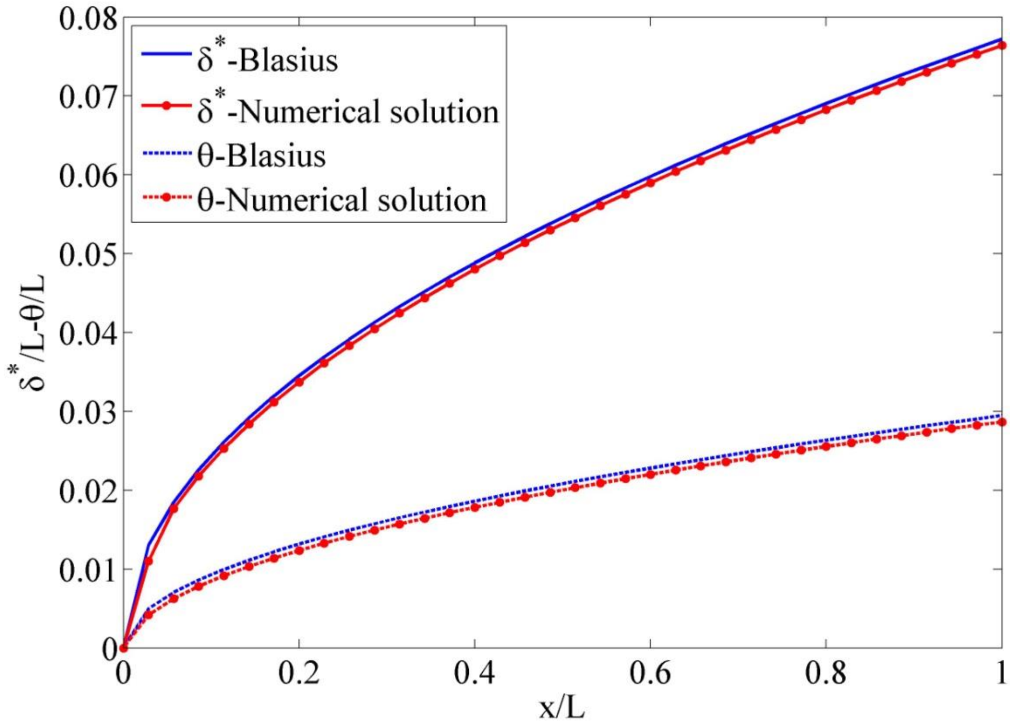
$$\delta^* = \int_{y=0}^{\infty} (1-\frac{u}{U_\infty})dy \quad (۱-۴)$$

$$\theta = \int_{y=0}^{\infty} \frac{u}{U_\infty}(1-\frac{u}{U_\infty})dy \quad (۲-۴)$$

قابل توجه است که بلاسیوس [12] معادلات زیر را برای تعیین ضخامت ممنتوم و جابجایی ارائه کرده است.

$$\delta^* = 1.73\sqrt{\frac{\upsilon x}{U_\infty}} \quad (۳-۴)$$

$$\theta = 0.664\sqrt{\frac{\upsilon x}{U_\infty}} \quad (۴-۴)$$



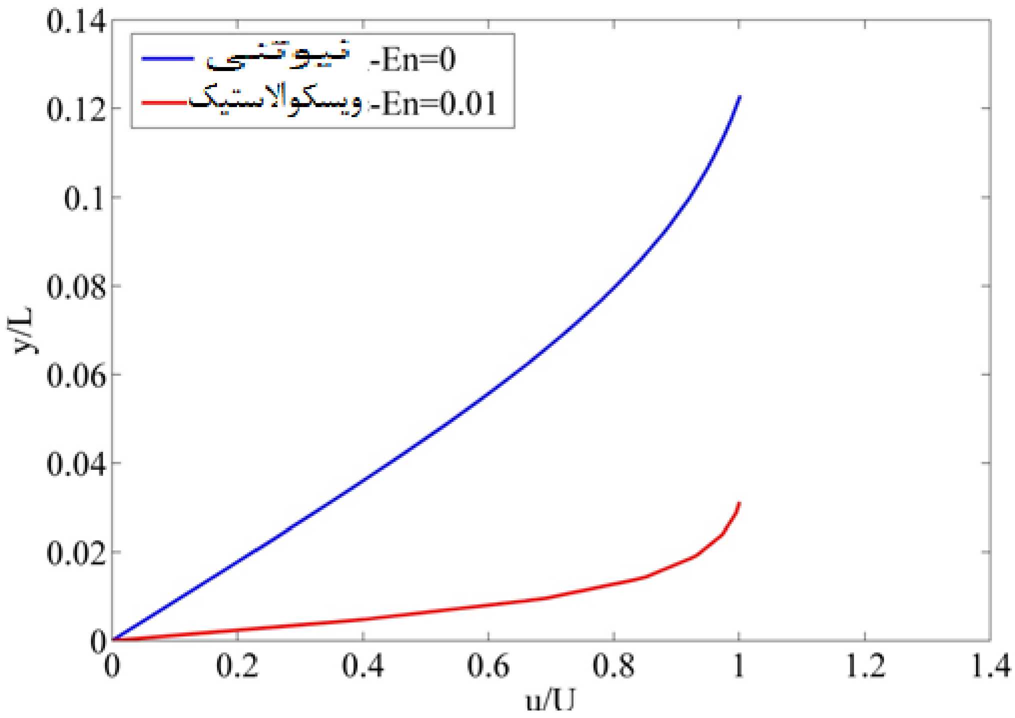
شکل(۴-۴) مقایسه ضخامت جابجایی و ضخامت ممنتوم در حل عددی و بلاسیوس [۱۲]

انطباق قابل قبول پاسخ ها در شکل(۴-۴) نیز قابل مشاهده می‌باشد.

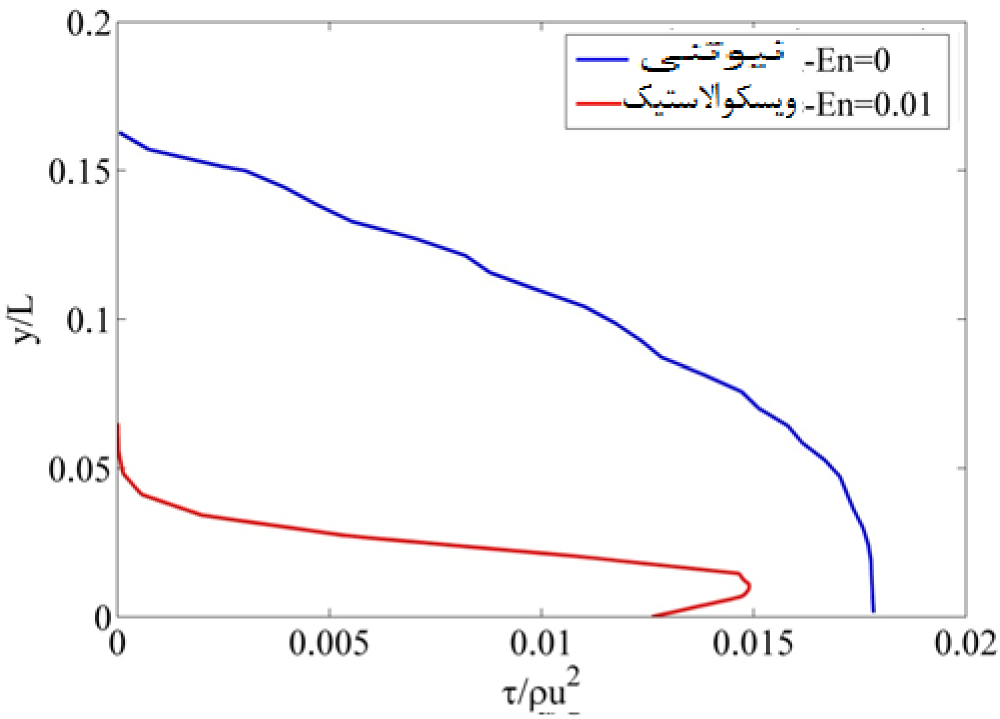
۴-۱-۲- مقایسه لایه مرزی در سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

در این بخش، پارامترهای گوناگون لایه مرزی بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک با یکدیگر مقایسه خواهند شد. جهت مقایسه بین دو سیال از جریان با $\mathrm{Re}_L = 500$ استفاده شده است. تفاوت دو سیال در عدد الاستیک آنها می‌باشد. عدد الاستیک که معرف نسبت دو عدد بی بعد وایزنبرگ و رینولدز می‌باشد، به صورت $ElasticNumber = {}^{We}\!/_{\mathrm{Re}}$ تعریف می‌شود. خاصیت عدد بی بعد الاستیک، که موجب شده در این تحقیق به عنوان مرجع برای سنجش خاصیت الاستیک سیال قرار بگیرد، وابسته نبودن این عدد به میدان جریان است. در واقع عدد الاستیک تنها تابع جنس سیال و هندسه جریان می‌باشد. در سیال نیوتنی عدد الاستیک برابر با صفر در نظر گرفته شده است و در سیال ویسکوالاستیک عدد الاستیک برابر ۰,۰۱ لحاظ شده است. برای شروع مقایسه، در شکل(۴-۴)، پروفیل سرعت در دو نوع سیال در یک مقطع خاص از صفحه تخت، که $\frac{x}{L} = 0.5$ می‌باشد، با یکدیگر مقایسه می‌شود.

در شکل مشهود است که خاصیت الاستیک سیال موجب شده سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی، زودتر به مقدار بیشینه سرعت خود، که همان سرعت جریان آزاد است، برسد.



شکل(۴-۵)   مقایسه پروفیل سرعت در سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در یک مقطع از صفحه

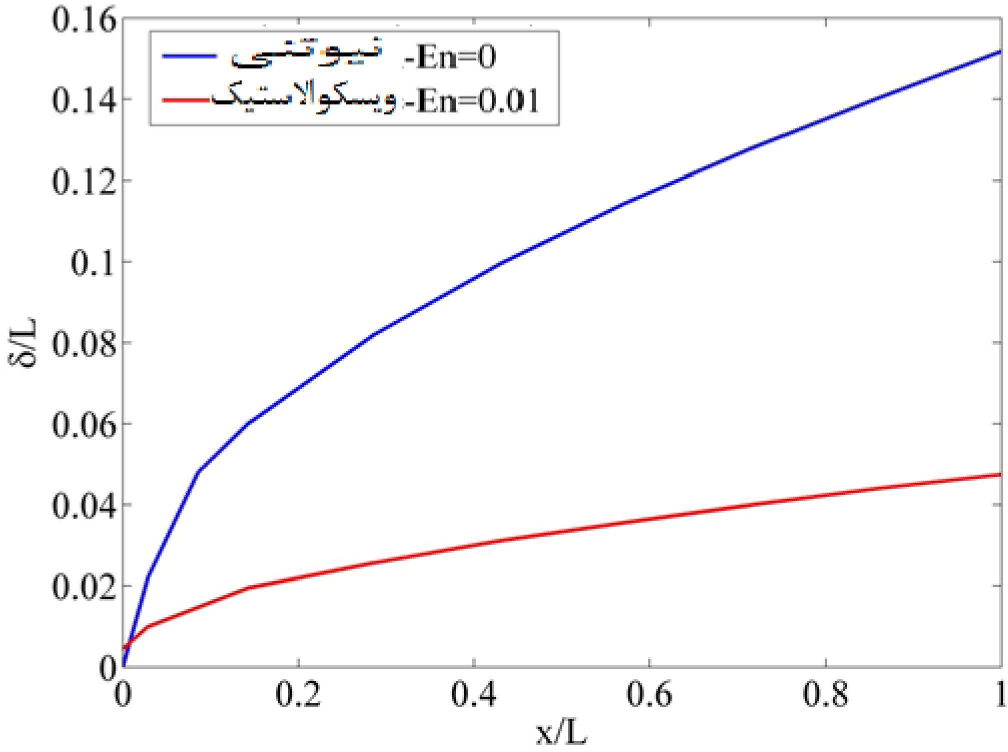


شکل(۴-۶)   مقایسه تنش برشی در دو سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در یک مقطع

در شکل(۴-۵) مقدار بی بعد شده‌ی تنش برشی، در دو سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک با هم مقایسه شده اند. مقطع انتخاب شده برای این شکل نیز مشابه شکل(۴-۴) می‌باشد، که $\frac{x}{L} = 0.5$ است.

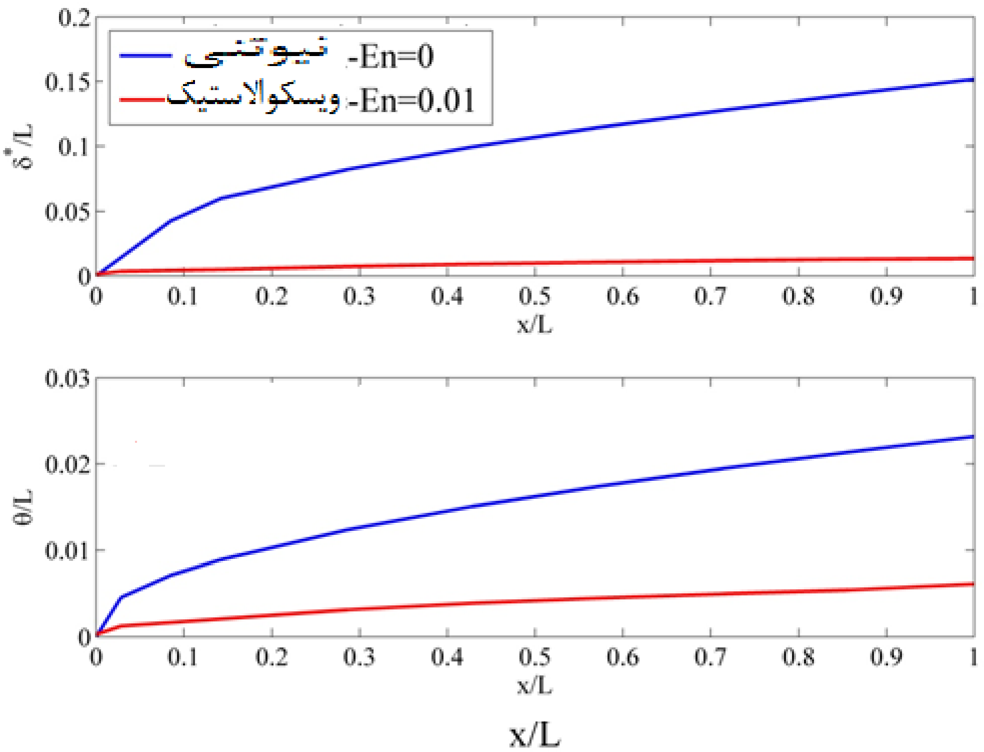
در توضیح شکل(۴-۵)، بدیهی است که میزان تنش برشی روی دیواره، برای سیال نیوتنی در تمام مقاطع سیال مقدار ماکزیمم خود را نسبت به سایر نقاط جریان داراست. اما در سیال ویسکوالاستیک به دلیل خاصیت باریک شوندگی ویسکوزیته، که به معنی رابطه عکس بین ویسکوزیته و نرخ برش می‌باشد، مقدار ماکزیمم تنش روی دیواره رخ نداده است. چرا که نرخ برش نزدیک دیواره بیشتر و در نتیجه میزان ویسکوزیته در این ناحیه کمتر خواهد بود.

در سیال نیوتنی میزان تنش برشی، تنها از رابطه بدست می‌آید، در حالیکه برای سیال ویسکوالاستیک مجموع تنش های نیوتنی و غیر نیوتنی لحاظ شده است. در شکل های بالا میزان ویسکوزیته سیال نیوتنی، $\eta = 0.031$ در نظر گرفته شده است، و در سیال ویسکوالاستیک از این مقدار، ویسکوزیته‌ی نیوتنی،$\eta_S = 0.001$ و $\eta_P = 0.0$ برای ویسکوزیته‌ی بخش پلیمری یا غیر نیوتنی سیال لحاظ شده است. همچنین برای سیال ویسکوالاستیک، میزان زمان رهایی از تنش، $\lambda = 0.4s$ در نظر گرفته شده است، و بدیهی است که این میزان برای سیال نیوتنی مقداری بسیار نزدیک به صفر لحاظ شده است. در شکل(۴-۵) مشهود است که میزان تنش برشی، در سیال ویسکوالاستیک، به میزان قابل توجهی کمتر از سیال نیوتنی می‌باشد. این موضوع را نیز می‌توان به رفتار باریک شونده ویسکوزیته نسبت به نرخ برش در سیال ویسکوالاستیک نسبت داد. در واقع این خاصیت ویسکوزیته در سیالات ویسکوالاستیک موجب کاهش نفوذ لایه مرزی به داخل جریان سیال می‌شود.شکل(۴-۶) نشان دهنده موضوع فوق‌الذکر می‌باشد، در شکل مشهود است که خاصیت الاستیک سیال موجب کاهش در میزان ضخامت لایه مرزی خواهد شد.



شکل(۴-۷) مقایسه ضخامت لایه مرزی بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

کاهش ضخامت لایه مرزی بر اثر خاصیت الاستیک، کاملا در شکل(۴-۷) مشهود می‌باشد. نکته‌ی قابل توجه دیگر در این شکل وجود یک ضخامت بسیار کوچک، در نقطه $x = 0$، یعنی در ابتدای صفحه برای سیال ویسکوالاستیک است. ایجاد این ضخامت بسیار کوچک در ابتدای صفحه، که بر اثر خاصیت الاستیک سیال بوجود می‌آید، در مرجع [28] نیز گزارش شده است.



شکل(۴-۸) مقایسه ضخامت جابجایی و ضخامت ممنتوم بین سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

مشخصه بسیار مهم دیگری که با اضافه شدن خاصیت الاستیک، دستخوش تغییر خواهد شد ضریب درگ خواهد بود. همانطور که در شکل(۴-۶) کاملا مشخص است، میزان تنش برشی اعمال شده بر صفحه در سیال ویسکوالاستیک به طور کاملا محسوسی کمتر از سیال نیوتنی می‌باشد.

در مورد بررسی شده‌ی این تحقیق با توجه به اینکه عدد رینولدز برابر ۵۰۰ می‌باشد، ضریب درگ در سیال نیوتنی برابر با ۰,۰۵۹۴ بوده که این مقدار در سیال ویسکوالاستیک با عدد الاستیک ۰,۰۱ به ۰,۰۴۴۳ تقلیل یافته است.

۴-۱-۳- بررسی اثر پارامتر های مختلف بر مشخصه های لایه مرزی

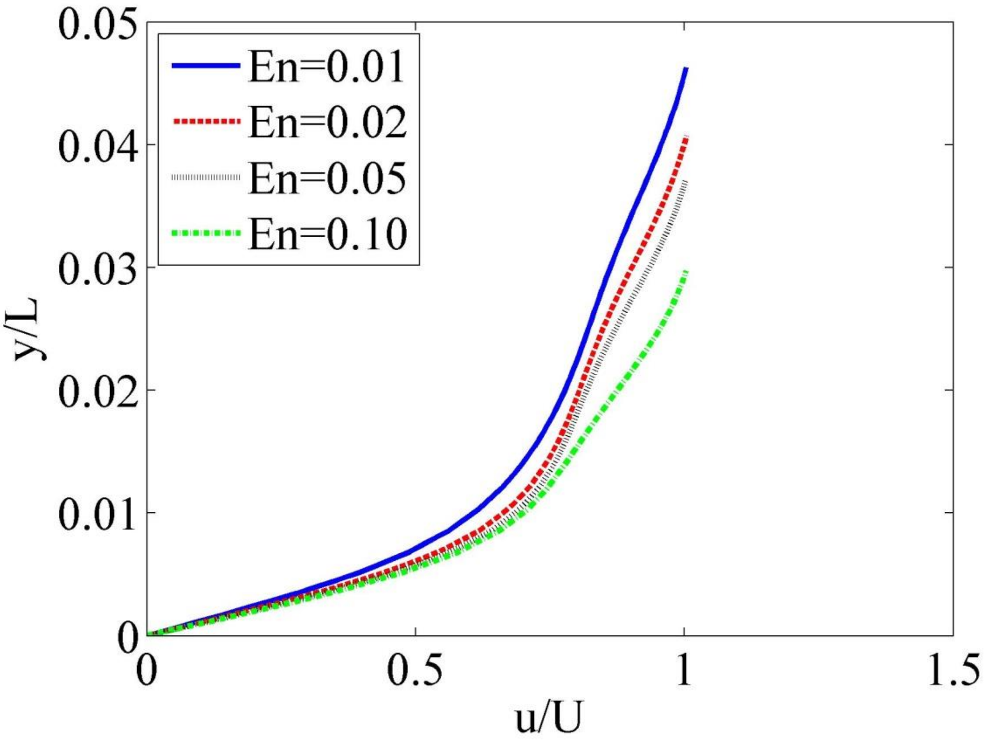
در این بخش به بررسی چگونکی تاثیر گذاری پارامتر های مختلف، همچون عدد الاستیک، عدد رینولدز و ضریب تحرک در مدل گزیکس، بر مشخصه های لایه مرزی پرداخته می‌شود. در بررسی تاثیر گذاری هر یک از این پارامتر ها، سایر پارامتر ها ثابت نگه داشته شده است.

۴-۱-۴- بررسی اثر تغییرات عدد الاستیک بر مشخصه های لایه مرزی

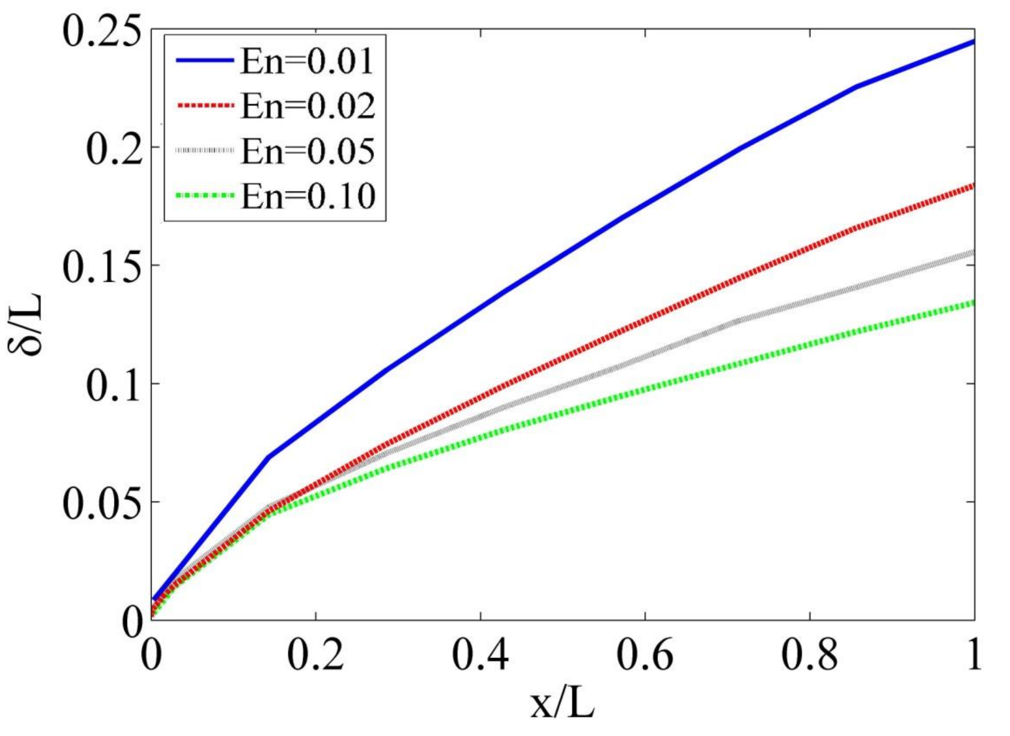
در این بخش به تاثیر تغییرات میزان خاصیت الاستیک سیال بر مشخصه های لایه مرزی پرداخته می‌شود. جهت دستیابی به هدف مذکور، عدد رینولدز ثابت و برابر با ۵۰ در نظر گرفته شده و سرعت جریان آزاد ۰,۰۴۵متر بر ثانیه می‌باشد. ضریب تحرک پذیری در مدل گزیکس ثابت و برابر با ۰,۵ در نظر گرفته شده و نتایج بدست آمده در اثر اعمال تغییرات در عدد الاستیک گزارش می‌شوند. جهت ایجاد تغییرات در عدد الاستیک، مقدار زمان رهایی از تنش از $\lambda = 0.4s$ تا $\lambda = 8s$ در نظر گرفته شده است.

در ابتدا، به بررسی تاثیر گذاری تغییر عدد الاستیک بر روی پروفیل سرعت در یک مقطع از صفحه تخت و سپس به چگونگی تغییرات ضخامت لایه مرزی، در قالب شکل‌های(۴-۹) و (۴-۱۰) پرداخته می‌شود.

در شکل مشهود است که ازدیاد خاصیت الاستیک موجب کاهش میزان لایه مرزی خواهد شد.



شکل(۴-۹) پروفیل سرعت در اعداد الاستیک مختلف Re=500

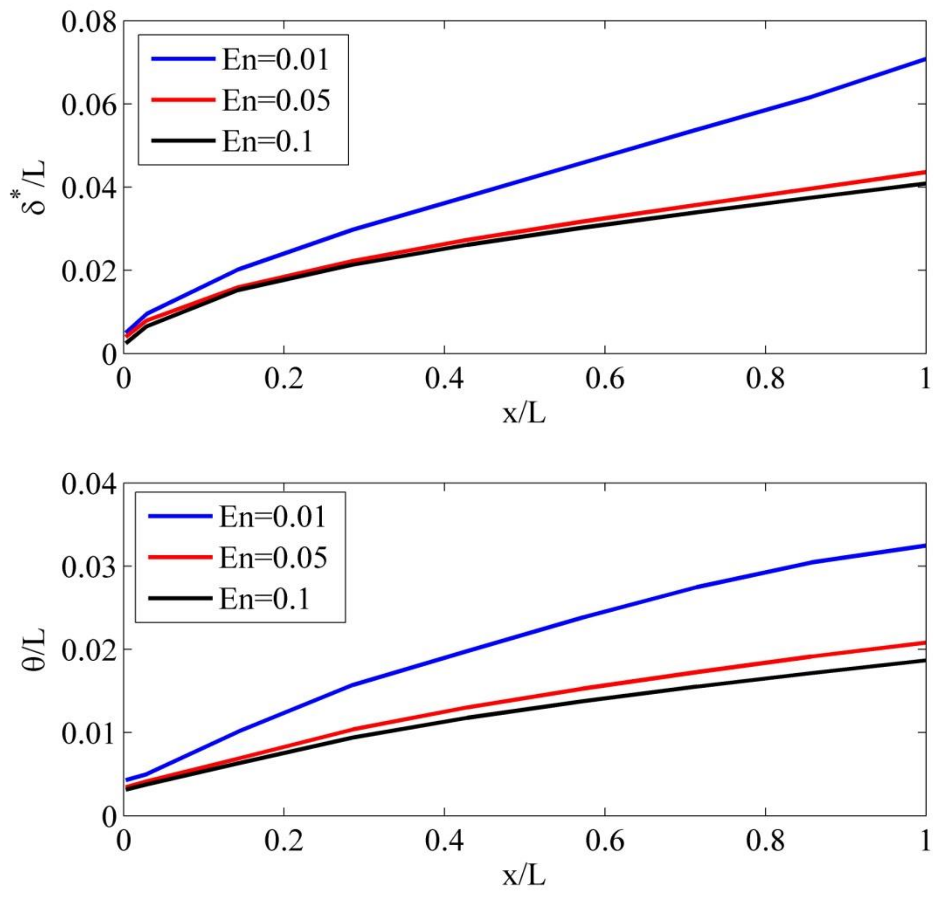


شکل(۴-۱۰) تاثیر عدد الاستیک روی ضخامت لایه مرزی Re=500

با توجه به شباهت جریان لایه مرزی به جریان برشی، می‌توان چگونگی تاثیر گذاری تغییرات عدد الاستیک بر ضخامت لایه مرزی را از طریق مراجعه به معادلات ساختاری مدل گزیکس، که در یک جریان برشی دائم، به صورت زیر ارائه شده است[41] ، توجیه نمود.

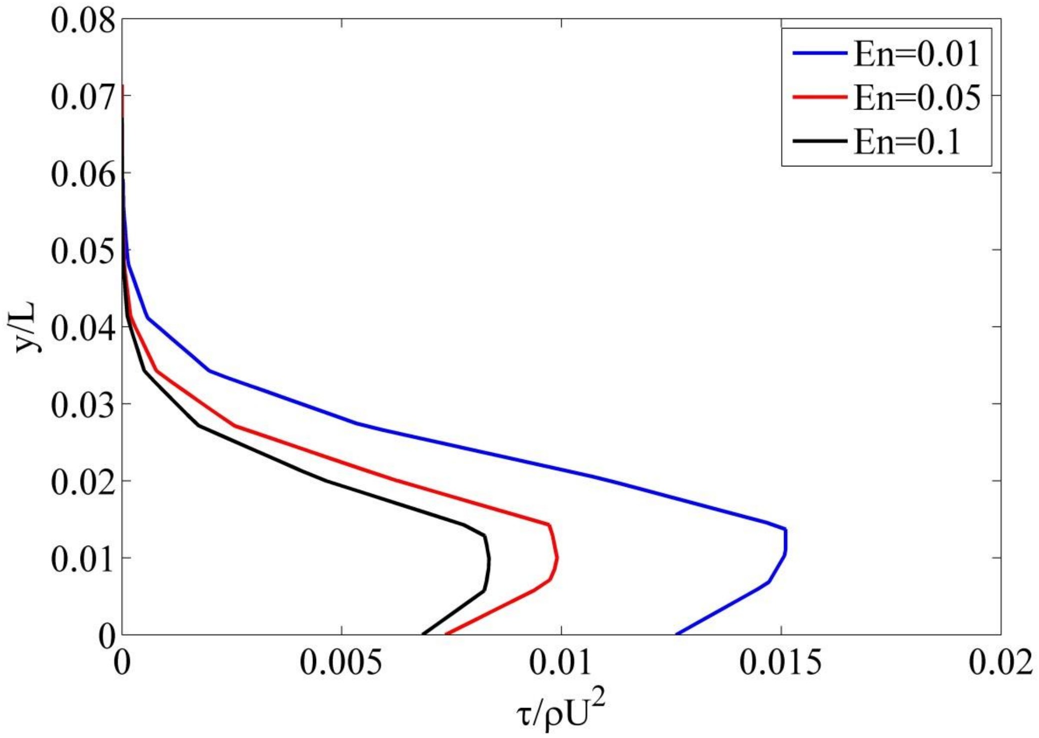
$$\eta \approx \sqrt{(1-\alpha)/\alpha}\,\frac{\eta_s+\eta_p}{\lambda_1\dot{\gamma}} \tag{۵-۴}$$

توجه به معادله(۴-۵) نشان می‌دهد که افزایش زمان رهایی از تنش(λ)، موجب کاهش ویسکوزیته ظاهری سیال می‌شود. کاهش ویسکوزیته نیز باعث کمتر شدن نفوذ لایه مرزی به جریان سیال شده و این موضوع کاهش ضخامت لایه مرزی را به دنبال خواهد داشت. در شکل(۴-۱۰) تغییرات ضخامت جابجایی و ضخامت ممنتوم بر اثر تغییر عدد الاستیک نمایش داده شده اند.



شکل(۴-۱۱) تاثیر عدد الاستیک روی ضخامت جابجایی و ضخامت ممنتوم

کاهش ویسکوزیته ظاهری سیال بر اثر افزایش عدد الاستیک، بر میزان تنش برشی نیز تاثیر گذار خواهد بود. در شکل(۴-۱۱) تغییرات تنش برشی در راستای عمود بر جریان، در یک مقطع خاص از صفحه(x/L=0.5)، در عدد های الاستیک مختلف رسم شده است.



شکل(۴-۱۲) تنش برشی در مقطع(x/L=0.5) در عددهای الاستیک مختلف،Re=500

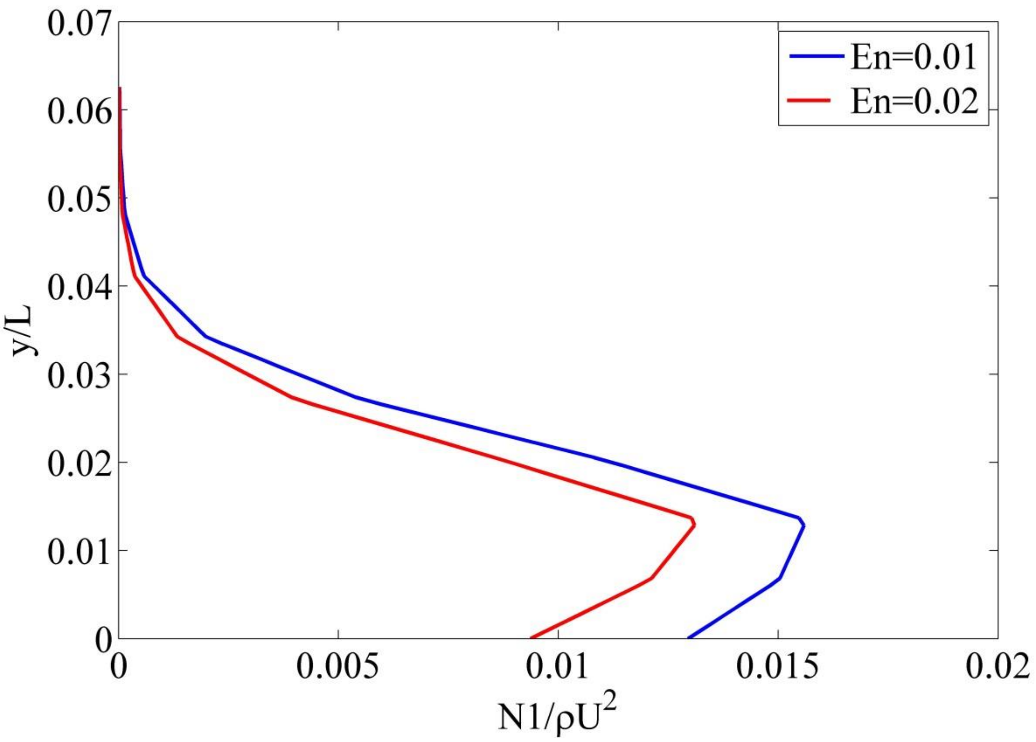
لازم به ذکر است، تنش لحاظ شده در شکل(۴-۱۱)، میزان کل تنش برشی می‌باشد، که برابر با مجموع تنش نیوتنی و پلیمری در یک سیال ویسکوالاستیک می‌باشد.

وجود خاصیت الاستیک در سیال ویسکوالاستیک باعث بوجود آمدن اختلاف تنش های نرمال می‌شود. در شکل(۴-۱۲) اختلاف تنش نرمال اول، در دو عدد الاستیک نمایش داده شده‌اند. مشهود است که افزایش عدد الاستیک، موجب کاهش اختلاف تنش های اول و دوم می‌شود. با توجه به اینکه افزایش عدد الاستیک، از طریق بالا بردن زمان رهایی از تنش(λ) صورت پذیرفته است، جهت توجیه تغییرات مذکور، می‌توان به معادلات ساختاری مدل گزیکس در یک جریان برشی اشاره نمود[41] .

$$\psi_1 \approx \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\left(\alpha\left(1-\alpha\right)\right)^{1/4}\frac{\left(\eta_s+\eta_p\right)\lambda_1}{\left(\lambda_1\gamma\right)^{3/2}} \tag{۴-۶}$$

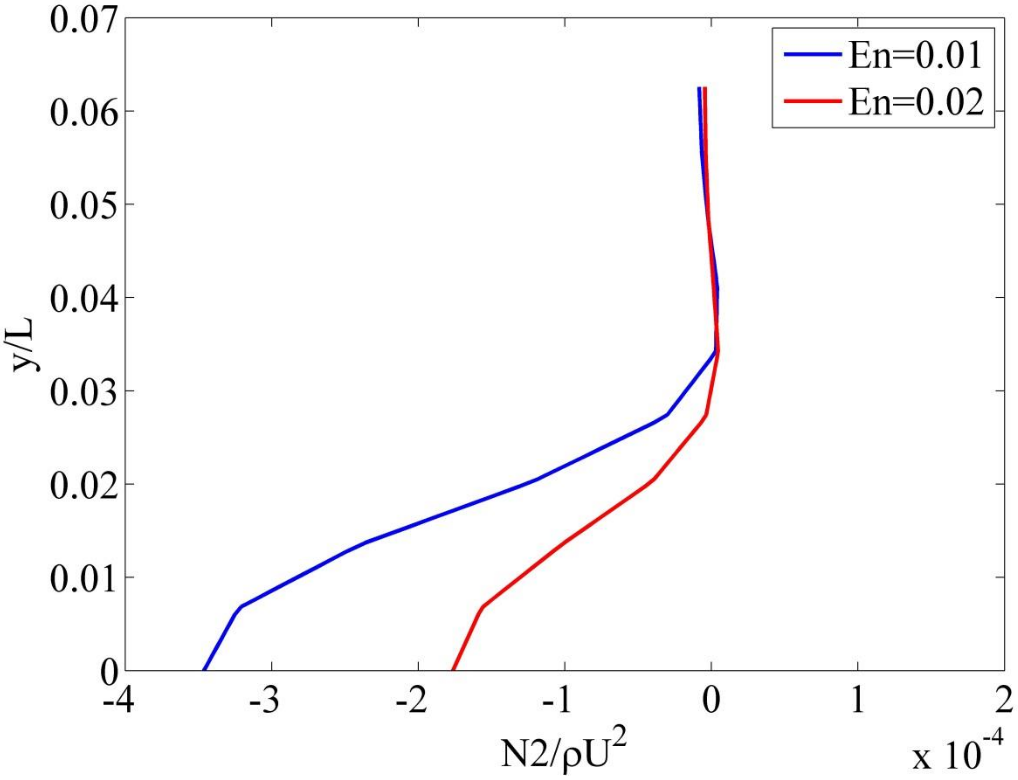
$$\psi_2 \approx -\frac{\left(\eta_s+\eta_p\right)\lambda_1}{\left(\lambda_1\gamma\right)^{2}} \tag{۴-۷}$$

توجه به معادلات بالا نشانگر آن است که در یک جریان برشی، افزایش زمان رهایی از تنش موجب کاهش در میزان ثابت های تنش نرمال اول و دوم می‌شود. با توجه به شباهت جریان برشی و جریان مدل شده در این تحقیق، می‌توان انتظار رفتاری مشابه را در نتایج این تحقیق نیز داشت.



شکل(۴-۱۳) مقایسه اختلاف تنش های نرمال اول در دو عدد الاستیک

شکل (۴-۱۴) اختلاف تنش نرمال دوم را در دو عدد الاستیک نشان داده است، که با توجه به رابطه (۴-۷) می‌توان انتظار داشت که با افزایش عدد الاستیک، اختلاف تنش نرمال دوم نیز کاهش یابد.



شکل(۴-۱۴) مقایسه اختلاف تنش نرمال دوم در دو عدد الاستیک، Re=500

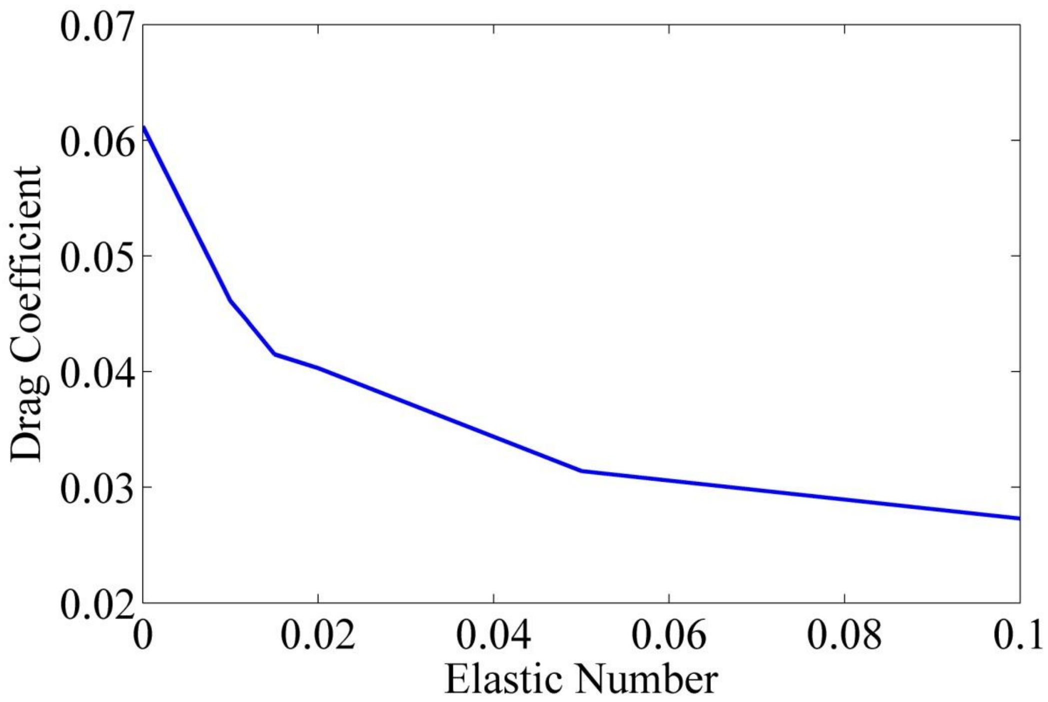
با توجه تاثیر ازدیاد خاصیت الاستیک بر روی تنش برشی که تا کنون مشاهده گردید، به سادگی قابل پیش‌بینی است که تغییرات در عدد الاستیک بروی ضریب درگ سیال ویسکوالاستیک نیز مؤثر باشد. برای مشاهده چگونگی این تغییرات، میزان ضریب درگ در اعداد الاستیک مختلف از $E_n = 0$ (سیال نیوتنی) تا $E_n = 0.1$ محاسبه شده است، که نتایج آن در جدول(۴-۳) قابل مشاهده می‌باشد.

جهت تشخیص بهتر چگونگی تغییرات، میزان تنش نیوتنی(τ_S) و پلیمری(τ_P) به طور مجزا در جدول ارائه شده است. لازم به ذکر است محاسبه ضریب درگ، از طریق پیدا کردن مقدار تنش برشی در مقاطع متعددی از صفحه، انتگرال گیری عددی از آنها در طول صفحه میسر گردیده است.

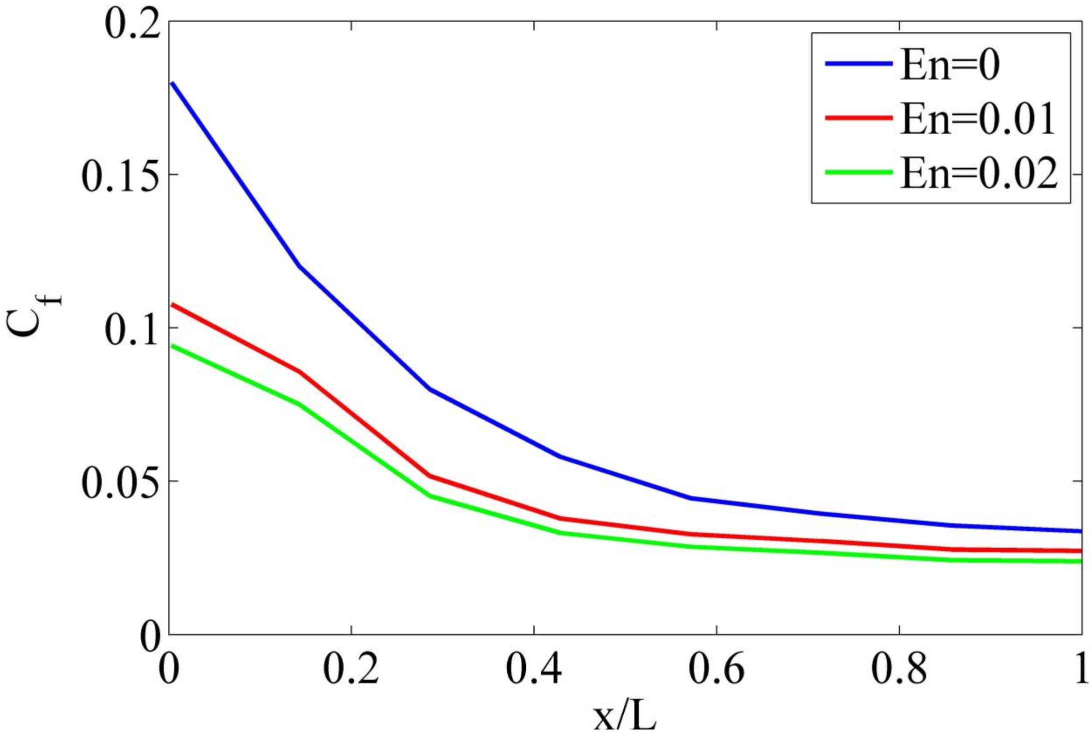
جدول (۴-۳) اثر افزایش عدد الاستیک بر ضریب درگ

Re=۵۰۰				
عدد الاستیک	$\frac{1}{L}\int_0^L \tau_s\,dx$ (pa)	$\frac{1}{L}\int_0^L \tau_p\,dx$ (pa)	$\frac{1}{L}\int_0^L \tau_T\,dx$ (pa)	C_D
۰	۶.۱۹۶	۰	۶.۱۹۶	۰.۰۶۱۲
۰.۰۱	۱.۲۰۲	۳.۶۰۵	۴.۶۵۱	۰.۰۴۶۱
۰.۰۱۲	۱.۱۲۸	۳.۳۶	۴.۴۸۸	۰.۰۴۴۳
۰.۰۱۵	۱.۰۴۲	۳.۱۶۲	۴.۲۰۲	۰.۰۴۱۵
۰.۰۲	۱.۰۲۸	۲.۸۸۵	۴.۰۸۲	۰.۰۴۰۳
۰.۰۵	۰.۹۷۷	۲.۲۰۱	۳.۱۷۱	۰.۰۳۱۴
۰.۱	۰.۹۶۸	۱.۸۰۲	۲.۷۶۲	۰.۰۲۷۳

جهت درک بهتر چگونگی تغییرات، اطلاعات جدول بالا در شکل (۵-15) نیز نمایش داده شده اند.



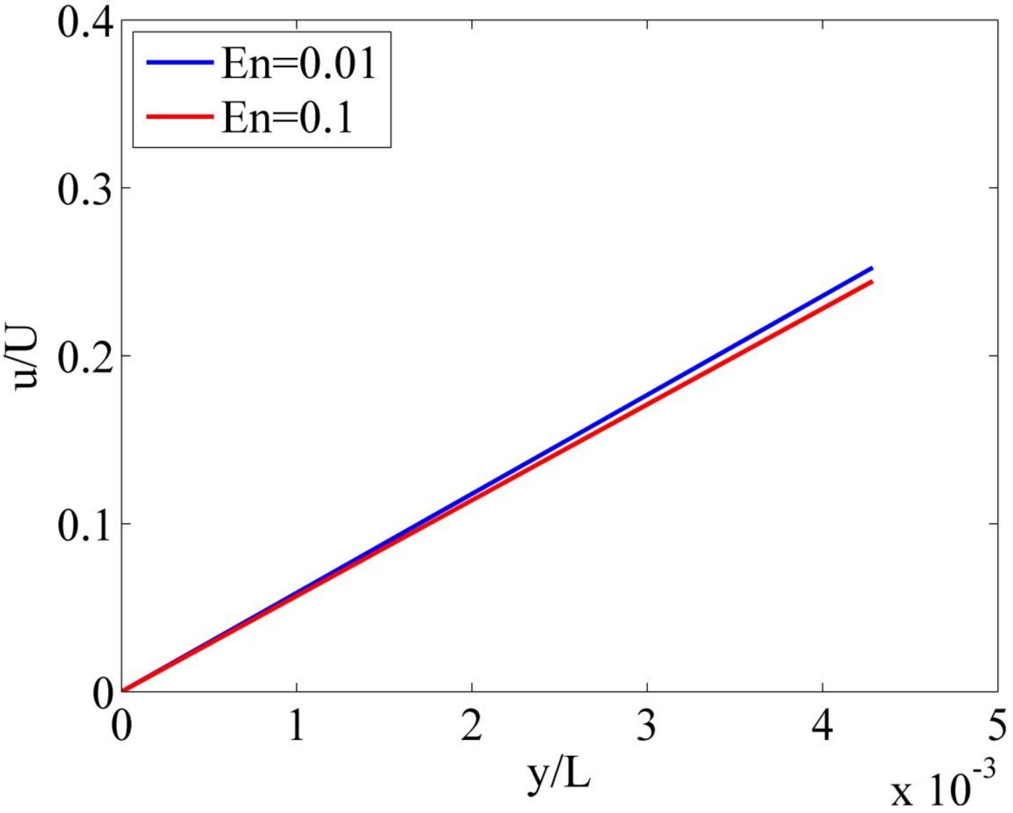
شکل(۴-۱۵) ضریب درگ بر حسب عدد الاستیک در Re=500



شکل(۴-۱۶) مقدار ضریب درگ محلی در طول صفحه در اعداد الاستیک مختلف برای Re=500

در شکل (۴-۱۶) میزان ضریب درگ محلی در طول صفحه نشان داده شده است. همانطور که قابل پیش‌بینی است در این شکل میزان ضریب درگ در اوایل صفحه، که گرادیان سرعت در لایه مرزی بالاتر است، مقدار بیشتری دارد.

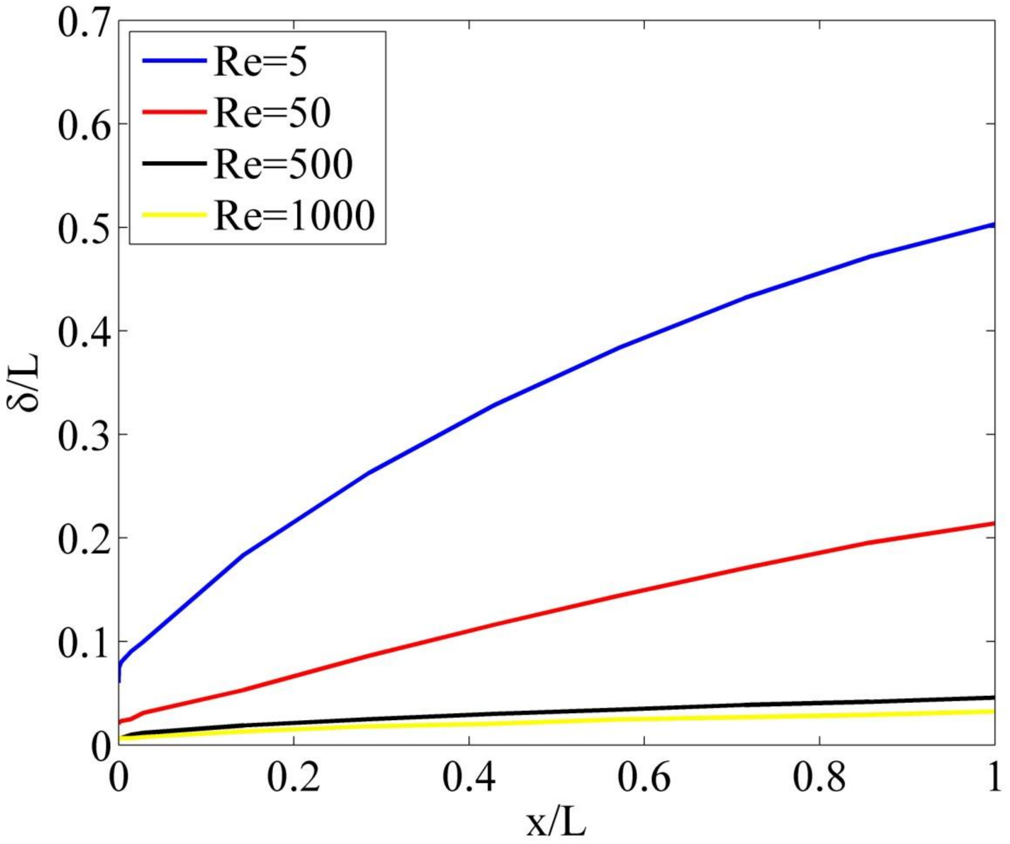
همانطور که در جدول(۴-۳) قابل مشاهده می‌باشد، علاوه کاهش تنش پلیمری، تنش نیوتنی نیز با افزایش عدد الاستیک، کاهش می‌یابد. دلیل این موضوع را می‌توان در تغییر ایجاد شده در پروفیل سرعت، بر اثر افزایش عدد الاستیک، در ناحیه‌ی بسیار نزدیک به صفحه تخت جستجو نمود. برای اینکار در شکل(۴-۱۷) پروفیل سرعت در مقطع x/L=0.5 ، در دو عدد الاستیک رسم شده و با بزرگنمایی ناحیه نزدیک به صفحه نشان داده شده است که افزایش عدد الاستیک باعث کاهش در میزان $\dot{\gamma}$ یا $\frac{\partial u}{\partial y}$ خواهد شد و همین امر کاهش در تنش نیوتنی را به دنبال خواهد داشت.



شکل(۴-۱۷) مقایسه پروفیل سرعت در ناحیه بسیار نزدیک به صفحه در مقطع x/L=0.5

۴-۱-۵- بررسی اثر تغییرات عدد رینولدز بر مشخصه های لایه مرزی

در این بخش چگونگی اثر گذاری تغییرات عدد رینولدز را بر ضخامت لایه مرزی و ضریب درگ سیال ویسکوالاستیک بررسی خواهد شد. ابتدا در شکل(۴-۱۴) ضخامت لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک در اعداد رینولدز گوناگون با یکدیگر مقایسه شده‌اند. عدد الاستیک در این شکل ۰,۰۲ در نظر گرفته شده است.



شکل(۴-۱۸) پروفیل لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک(En=0.02) در اعداد رینولدز مختلف

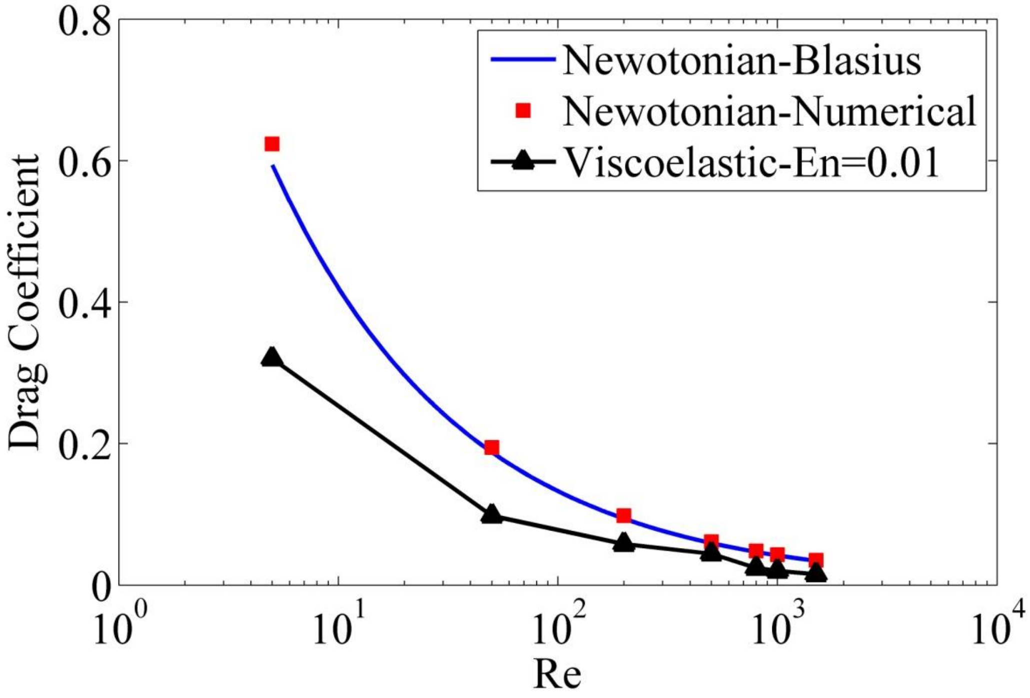
قابل مشاهده است که مشابه با سیال نیوتنی، در سیال ویسکو الاستیک هم با افزایش عدد رینولدز لایه مرزی کاهش می‌یابد.

تغییرات ضریب درگ سیال ویسکوالاستیک با افزایش عدد رینولدز، روندی مشابه سیال نیوتنی را نشان می‌دهد. در جدول (۴-۴) چگونگی ایجاد این تغییرات با تفکیک میزان تنش نیوتنی و پلیمری ذکر شده است. در این جدول عدد الاستیک ثابت و برابر با ۰,۰۱ در نظر گرفته شده است.

جدول (۴-۴) اثر افزایش عدد رینولدز بر ضریب درگ سیال ویسکوالاستیک

En=۰.۰۱				
عدد رینولدز	$1/_L \int_0^L \tau_s \, dx$ (pa)	$1/_L \int_0^L \tau_p \, dx$ (pa)	$1/_L \int_0^L \tau_T \, dx$ (pa)	C_D
۵	۰.۰۰۱	۰.۰۰۲۲	۰.۰۰۳۲	۰.۳۲۱
۵۰	۰.۰۳۱	۰.۰۶۸	۰.۰۹۹	۰.۰۹۸
۲۰۰	۰.۲۷۶	۰.۵۶۲	۰.۸۳۸	۰.۰۵۸
۵۰۰	۱.۱۲۸	۳.۳۶	۴.۴۸۸	۰.۰۴۴۳
۸۰۰	۲.۳۸۴	۳.۵۲۲	۵.۹۰۱	۰.۰۲۴۱
۱۰۰۰	۳.۰۶۵	۶.۹۸۵	۱۰.۰۴۵	۰.۰۲۰۱
۱۵۰۰	۴.۰۹۱	۹.۲۳۵	۱۳.۳۲۹	۰.۰۱۵۳

جهت مشاهده بهتر روند تغییرات ضریب درگ، و همچنین مقایسه آن با سیال نیوتنی در شکل (۴-۱۹)، ضریب درگ بر حسب عدد رینولدز رسم شده است. در شکل برای سیال نیوتنی علاوه بر نمودار حل تحلیلی بلاسیوس[12] ، مقادیر حاصل از حل عددی نیز نشان داده شده است.



شکل(۴-۱۹) مقایسه تغییرات ضریب درگ بر حسب رینولدز در سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

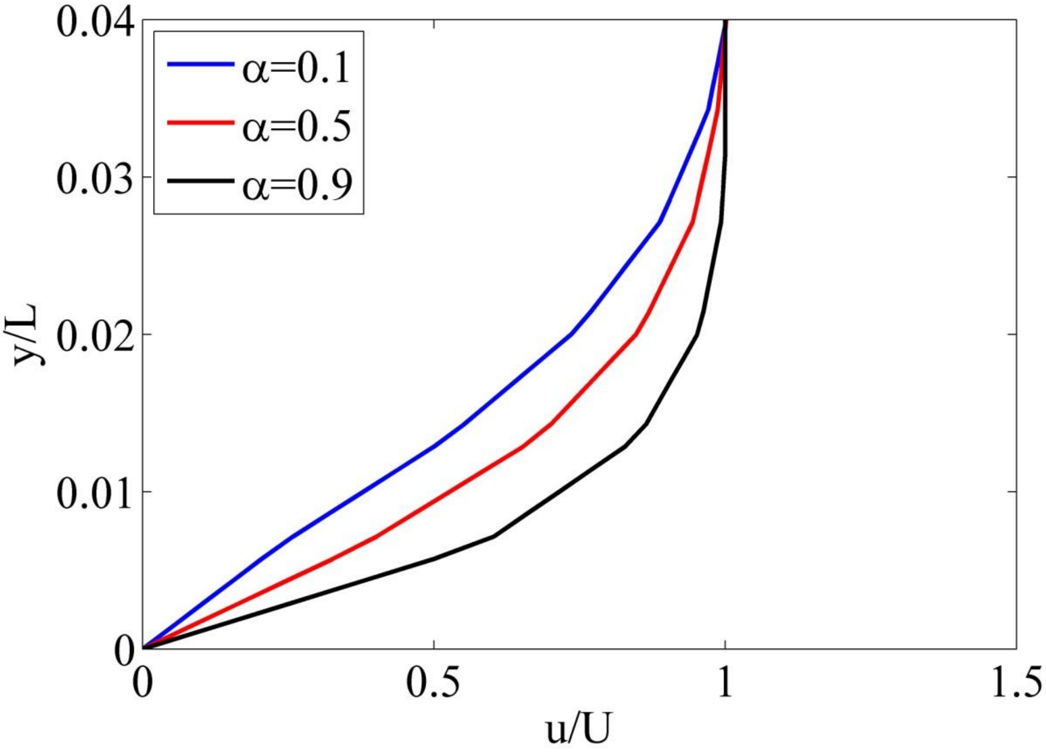
۴-۱-۶- بررسی اثر تغییرات ضریب تحرک پذیری مدل گزیکس بر مشخصه های لایه مرزی

جریان برشی در مواد ویسکوالاستیک، آرایش و موقعیت مولکول‌ها را تحت تاثیر قرار داده و کشیدگی و همراستا شدن مولکول‌های طویل پلیمری در راستای خطوط جریان در پی دارد، که این امر سبب بروز خواص غیر ایزوتروپیک در سیال می‌شود. لذا جهت حفظ این انحراف، میدان تنش نیز تحت تاثیر قرار گرفته و اختلاف تنش‌های نرمال پدید می‌آیند.

از آنجایی که ضریب پویایی یا تحرک در مدل گزیکس رفتار غیر ایزوتروپیک برونی در هیدرودینامیک مولکولی ماده ویسکوالاستیک را لحاظ می‌کنند، لذا در این قسمت از تحقیق به بررسی اثرات این ویژگی از سیالات ویسکوالاستیک بر مشخصه‌های لایه مرزی پرداخته می‌شود. برای این منظور با استفاده از جریان سیال ویسکوالاستیک با مشخصات $\mathrm{Re}=500; E_n=0.1$ ، مقدار ضریب تحرک که

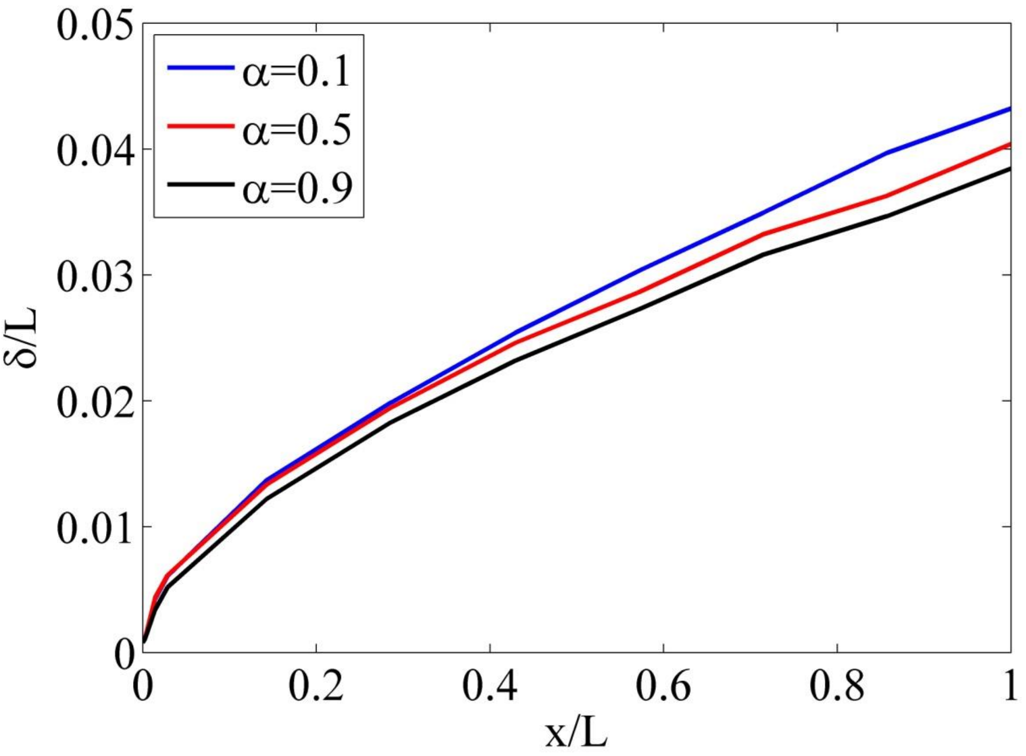
در مدل گزیکس در محدوده بین صفر و یک تعریف می‌شود، تغییر داده شده و تاثیر آن روی پارامتر های لایه مرزی مورد بررسی قرار گرفته است.

در ابتدا تاثیر تغییرات این ضریب روی پروفیل سرعت در مقطع (x/L=0.5) در قالب شکل (۴-۲۰) مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل(۴-۲۰)	تاثیرگذاری ضریب تحرک پذیری روی پروفیل سرعت

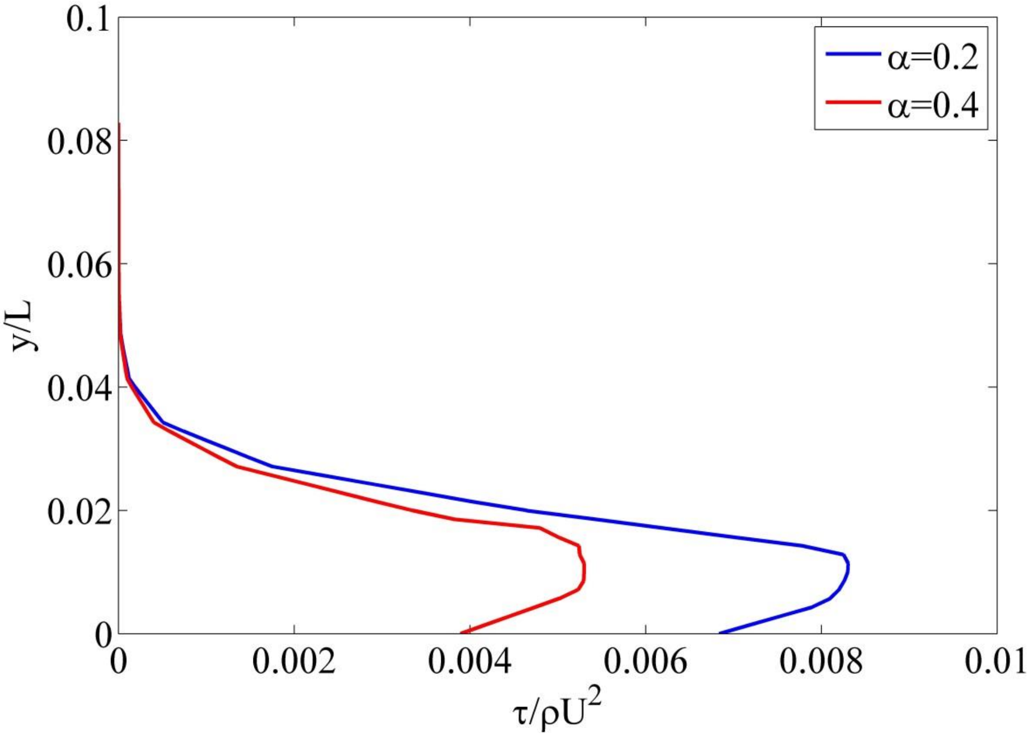
در شکل (۴-۲۱) چگونگی تاثیر ضریب تحرک پذیری روی ضخامت لایه مرزی نمایش داده شده است.



شکل(۴-۲۱)   تاثیرگذاری ضریب تحرک پذیری روی پروفیل سرعت در مقطع (x/L=0.5)

کاهش ضخامت لایه مرزی بر اثر افزایش ضریب تحرک پذیری در دو شکل بالا کاملا مشهود است. همچنین با توجه به ثابت بودن عدد رینولدز، دلیل کاهش لایه مرزی را می‌توان به کاهش ویسکوزیته ظاهری سیال ویسکوالاستیک نسبت داد. توجه مجدد به معادله (۴-۵) چگونگی تاثیرگذاری ضریب تحرک را بر ویسکوزیته ظاهری سیال، در یک جریان برشی ساده را مشخص می‌کند. این معادله مشخص می‌کند که افزایش در ضریب تحرک پذیری در مدل گزیکس، در یک جریان برشی ساده موجب کاهش در ویسکوزیته ظاهری می‌شود. می‌توان انتظار داشت که در جریان روی صفحه تخت نیز روندی مشابه با جریان برشی ساده رخ بدهد.

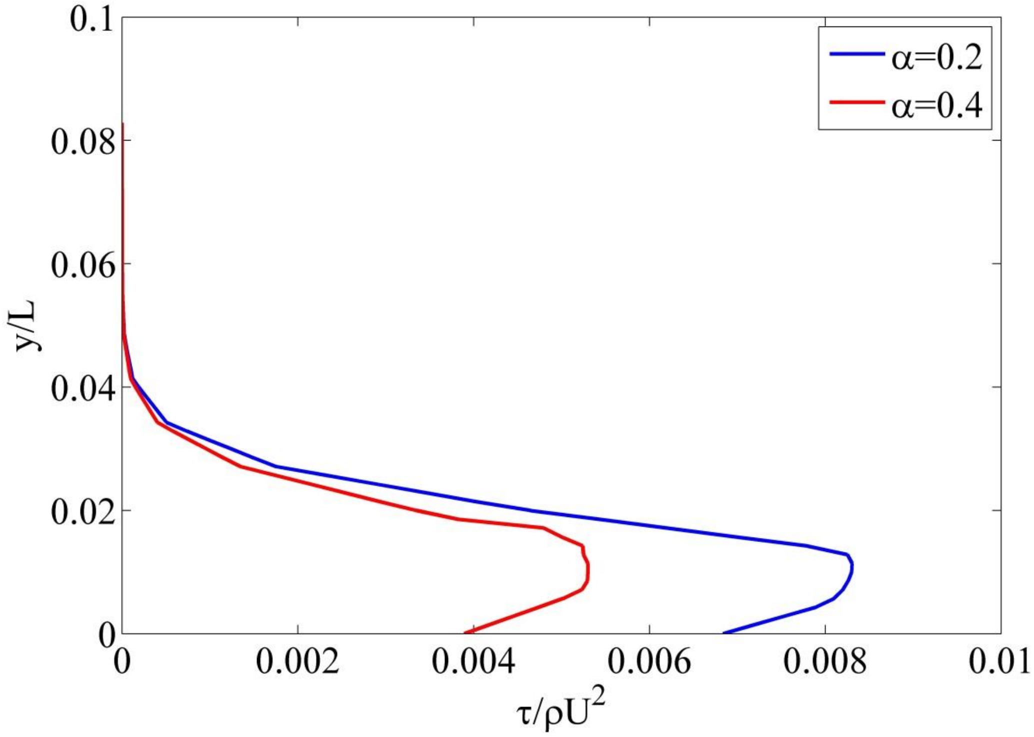
شکل (۴-۲۲) تغییرات میزان تنش برشی(مجموع تنش نیوتنی و پلیمری) در مقطع میانی صفحه، بر اثر افزایش ضریب تحرک را نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که کاهش ویسکوزیته ظاهری، منجر به کاهش تنش برشی شده است.



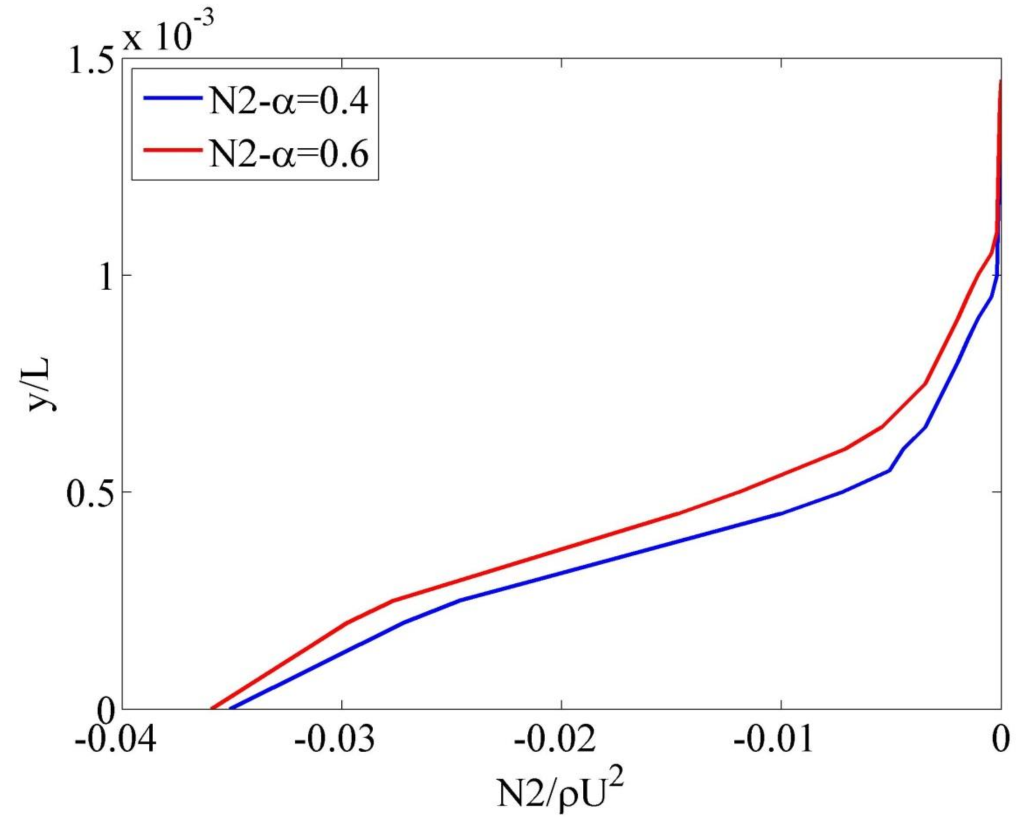
شکل(۴-۲۲) اثر تغییر ضریب تحرک پذیری بروی تنش برشی در مقطع(x/L=0.5)

شکل‌های (۴-۲۳) و (۴-۲۴) به بررسی تاثیر پارامتر ضریب تحرک پذیری در مدل گزیکس، بر میزان اختلاف تنش های نرمال می‌پردازند. در این شکل‌ها که اختلاف تنش نرمال اول و دوم سیال در مقطع میانی صفحه تخت رسم شده است.

مشاهده می‌شود که افزایش ضریب تحرک موجب کاهش اختلاف تنش نرمال اول می‌شود، اما تاثیر چندانی بر میزان اختلاف تنش نرمال دوم ندارد. این موضوع با نتایج تحلیلی بدست آمده در مدل گزیکس برای جریان برشی ساده همخوانی دارد. این نتایج به صورت معادلات (۴-۶) و (۴-۷) پیش‌تر بیان شده اند.



شکل(۴-۲۳)　　تاثیر ضریب تحرک بر اختلاف تنش نرمال اول(x/L=0.5)



شکل(۴-۲۴)　　تاثیر ضریب تحرک بر اختلاف تنش نرمال دوم(x/L=0.5)

با توجه به تاثیرگذاری ضریب تحرک پذیری روی تنش برشی، جدول (۴-۵) چگونگی تاثیر این پارامتر را بر ضریب درگ نشان می‌دهد.

جدول (۴-۵) تغییرات ضریب درگ بر حسب ضریب تحرک پذیری

Re=۵۰۰,En=۰.۱				
ضریب تحرک	$\frac{1}{L}\int_0^L \tau_s\,dx$ (pa)	$\frac{1}{L}\int_0^L \tau_p\,dx$ (pa)	$\frac{1}{L}\int_0^L \tau_T\,dx$ (pa)	C_D
۰.۱	۰.۹۷۱	۲.۵۹۳	۳.۵۶۴	۰.۰۳۵۲
۰.۵	۰.۹۶۸	۱.۸۰۲	۲.۷۶۲	۰.۰۲۷۳
۰.۹	۰.۹۶۲	۱.۰۹۳	۲.۰۵۵	۰.۰۲۰۳

۴-۲- نتایج حل تحلیلی

در این بخش نتایج بدست آمده حاصل از حل تحلیلی بیان خواهند شد. نتایج در ۴ بخش مجزا ارائه به صورت زیر ارائه می‌شوند.

۱- اگر ψ_1 و ψ_2 برابر با صفر و η مستقل از $\dot{\gamma}$ یا نرخ برش باشد:

در این حالت سیال تبدیل به سیال نیوتنی خواهد شد و به نتایج چابرا[20] در حل تقریبی معادله لایه مرزی در سیال نیوتنی منجر خواهد شد.

$$\frac{\delta}{x} = 4.64\,\mathrm{Re}^{(-1/2)} \qquad (۴-۸)$$

قابل ملاحظه است که حل تقریبی با حل بلاسیوس که از رابطه $\frac{\delta}{x} = 4.98\,\mathrm{Re}^{(-1/2)}$ پیروی می‌کند، اختلاف ناچیزی دارد.

۲- اگر ψ_1 و ψ_2 صفر و η وابسته به $\dot{\gamma}$ با تابعیت توانی(power-law) باشد:

در این حالت سیال معادل با سیال توانی خواهد بود و حاصل مشابه با نتایج مندرج در مرجع[14] خواهد بود:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{x} = F(n)\,\mathrm{Re}_x^{\,(-1/n+1)} \\
&F(n) = [\frac{280}{39}(n+1)(\frac{3}{2})^n]^{-1/(n+1)} \\
&\mathrm{Re}_x = \frac{\rho U_0^{\,2-n} x^n}{m}
\end{aligned} \tag{۹-۴}$$

تحلیل نتایج فوق و مقایسه آن با دیگر نتایج را برای سیالات توانی در مرجع[18] قابل مشاهده است.

۳- اگر ψ_1 و ψ_2 و η ثابت و مستقل از نرخ برش باشند :

در این حالت سیال تبدیل به سیال مرتبه ۲ خواهد شد و حاصل محاسبات منجر به معادله (۴-۱۰) خواهد شد.

$$\frac{39}{280}\rho U_0^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{6}{5}\frac{U_0^2(\psi_1+\psi_2)}{\delta^2}\frac{d\delta}{dx} + \eta(\frac{3U_0}{2\delta}) \tag{۱۰-۴}$$

با توجه به اینکه این گروه از سیالات(مرتبه ۲)، در دسته‌ی سیالات ویسکوالاستیک قرار میگیرند، همانطور که قبلا نیز ذکر شد، وجود اثرات الاستیک در آنها موجب ایجاد یک ضخامت محدود در شروع صفحه یعنی در نقطه $x=0$ خواهد شد[14] . در ادامه انتگرال‌گیری از طرفین معادله(۴-۱۰) منجر به معادله (۴-۱۱) خواهد شد، که در آن ضخامت لایه مرزی در $x=0$ با δ_0 نشان داده شده است.

$$\frac{39}{280}\rho U_0 \frac{1}{2}(\delta^2 - \delta_0^2) - \frac{6}{5}U_0(\psi_1+\psi_2)\ln\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{3}{2}\eta x + c \tag{۱۱-۴}$$

با در نظر گرفتن $\delta=\delta_0$ در نقطه $x=0$ ثابت انتگرال گیری برابر با صفر خواهد شد. سپس با اعمال پارامترهای بدون بعد زیر و حذف علامت * معادله (۴-۱۲) بدست خواهد آمد.

$$\delta^* = \frac{\delta}{L}; \quad x^* = \frac{x}{L}$$
$$\psi_1^* = \frac{\psi_1 U_0}{\eta L}; \quad \psi_2^* = \frac{\psi_2 U_0}{\eta L} \qquad (۱۲-۴)$$
$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho U_0 L}{\eta}$$

$$\frac{39}{280}\mathrm{Re}\frac{1}{2}(\delta^2 - \delta_0^2) - \frac{6}{5}(\psi_1 + \psi_2)\ln\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{3}{2}x \qquad (۱۳-۴)$$

مقدار δ_0 باید طوری انتخاب شود که $\frac{d\delta}{dx} > 0$ باشد، برای رسیدن به این هدف از طریق مشتق گیری از رابطه (۴-۱۳)، معادله (۴-۱۴) برای یافتن δ_0 بدست می‌آید.

$$\delta_0 = \left(\frac{1680}{195}\frac{(\psi_1 + \psi_2)}{\mathrm{Re}}\right)^{0.5} \qquad (۱۴-۴)$$

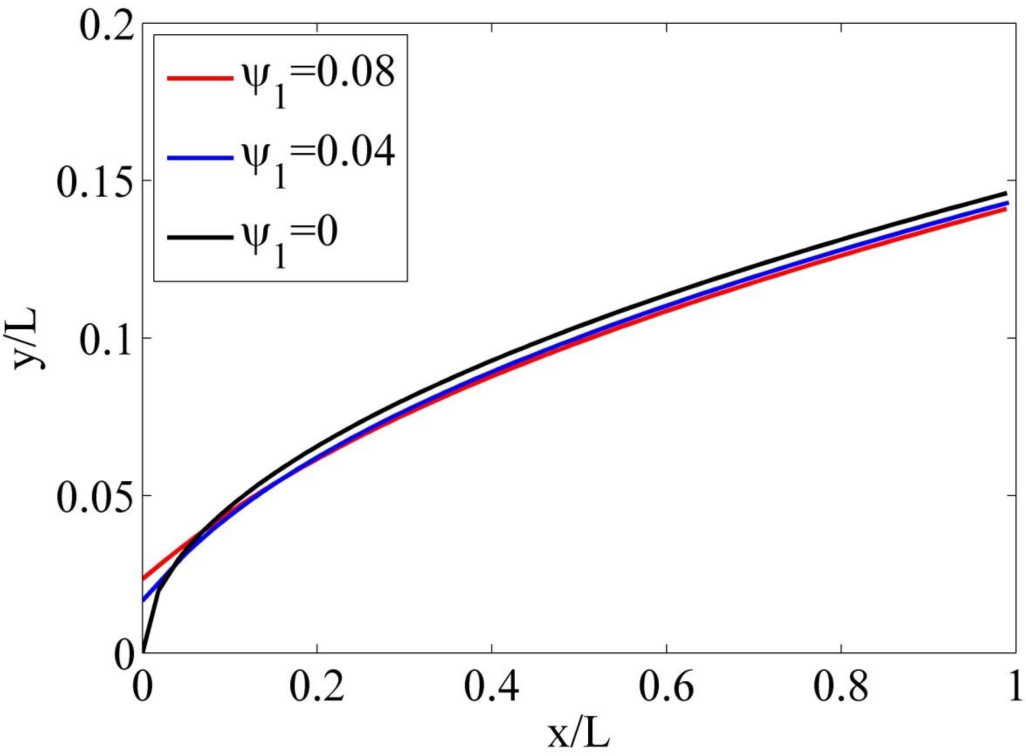
از معادله (۴-۱۴) می‌توان در یافت که میزان δ_0 با ضرایب اختلاف تنش نرمال رابطه مستقیم و با عدد رینولدز رابطه عکس دارد. مقادیر بدست آمده برای δ_0 را در دو رینولدز مختلف، در جدول (۴-۶) ارئه شده اند. مقادیر ارائه شده در این جدول به صورت بی بعد می‌باشند.

جدول (۴-۶) مقادیر δ_0 بر حسب ضرایب اختلاف تنش نرمال

$Re = 100 \quad \psi_2 = -0.2\psi_1$						
ψ_1	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
δ_0	0	0.0371	0.0525	0.0643	0.0743	0.083
$Re = 500 \quad \psi_2 = -0.2\psi_1$						
ψ_1	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1
δ_0	0	0.0166	0.0235	0.0288	0.0332	0.0371

شکل (۴-۲۱) پروفیل لایه مرزی را در مقادیر مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در شکل مشهود است افزایش خاصیت الاستیک در سیال مرتبه ۲ باعث کاهش ضخامت لایه مرزی خواهد شد، این

موضوع با پیش‌بینی صادقی[23] در تطابق است، اما با نتایج هریس[22] در تضاد می‌باشد. در این شکل نمودار $\psi_1 = 0$ مربوط به سیال نیوتنی می‌باشد و منطبق بر حل تقریبی چابرا[14] با حدس پروفیل چند جمله‌ای درجه ۳ می‌باشد.



شکل(۴-۲۵) اثر اختلاف تنش نرمال بر ضخامت لایه مرزی

همانطور که دیده شد ظهور و ازدیاد خاصیت الاستیک در سیال مرتبه ۲ باعث کاهش ضخامت لایه مرزی گردیده است، این موضوع با حل عددی انجام شده در این پژوهش برای سیال گزیکس که در آن افزایش خاصیت الاستیک موجب کاهش لایه مرزی می‌شود نیز تائید می‌شود. جهت توجیه موضوع فوق می‌توان اینگونه استدلال نمود که در سیالات ویسکوالاستیک، خاصیت الاستیک موجب ایجاد تنش‌های قائم می‌شوند. این تنش‌ها می‌توانند موجب شتاب دادن به ذات سیال شوند و این موضوع موجب کاهش ضخامت لایه مرزی خواهد شد.همچنین در سیالات ویسکوالاستیک همان مکانیزم‌هایی که موجب ظهور خاصیت الاستیک در سیال می‌شوند به طور خودکار موجب کاهش ویسکوزیته بر اثر

افزایش نرخ برش نیز می‌گردند(خاصیت باریک شوندگی ویسکوزیته). لذا با توجه به اینکه در سیال مرتبه ۲ ویسکوزیته مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شود و از این لحاظ مدل چندان واقع بینانه‌ای برای سیالات ویسکوالاستیک به شمار نمی‌رود، در واقع در شکل (۴-۲۵) اثر خاصیت الاستیک به طور کاملا خالص بر لایه مرزی مشاهده می‌شود.

۴- اگر ψ_1 و ψ_2 و η وابسته به $\dot{\gamma}$ باشند:

این حالت،که کلی ترین شکل در نظر گرفته شده در این تحقیق می‌باشد سیال از نوع CEF می‌باشد و توابع ویسکومتریک اعمال شده از مدل توانی می‌باشد. جهت یادآوری توابع ویسکومتریک در مدل توانی به صورت زیر می‌باشد.

$$\tilde{\eta}(\dot{\gamma}) = m(\dot{\gamma})^{n-1} \tag{۴-۱۵}$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma}) = m'(\dot{\gamma})^{n'-2} \tag{۴-۱۶}$$

$$\Psi_2(\dot{\gamma}) = -\chi\Psi_1(\dot{\gamma}) \tag{۴-۱۷}$$

در این بخش ادامه محاسبات منجر به معادله(۴-۱۵) خواهد شد.

$$\frac{39}{280}\rho U_0^2\frac{d\delta}{dx} = \frac{0.9m'n'^n}{\delta}\underbrace{\int_0^{\delta}\frac{(-1.5U_0(-\delta^2+y^2))^{n'}(-\delta^2+3y^2)}{(-\delta^2+y^2)\delta^{3n'}}dy}_{A} + m(\frac{3U_0}{2\delta})^n \tag{۴-۱۸}$$

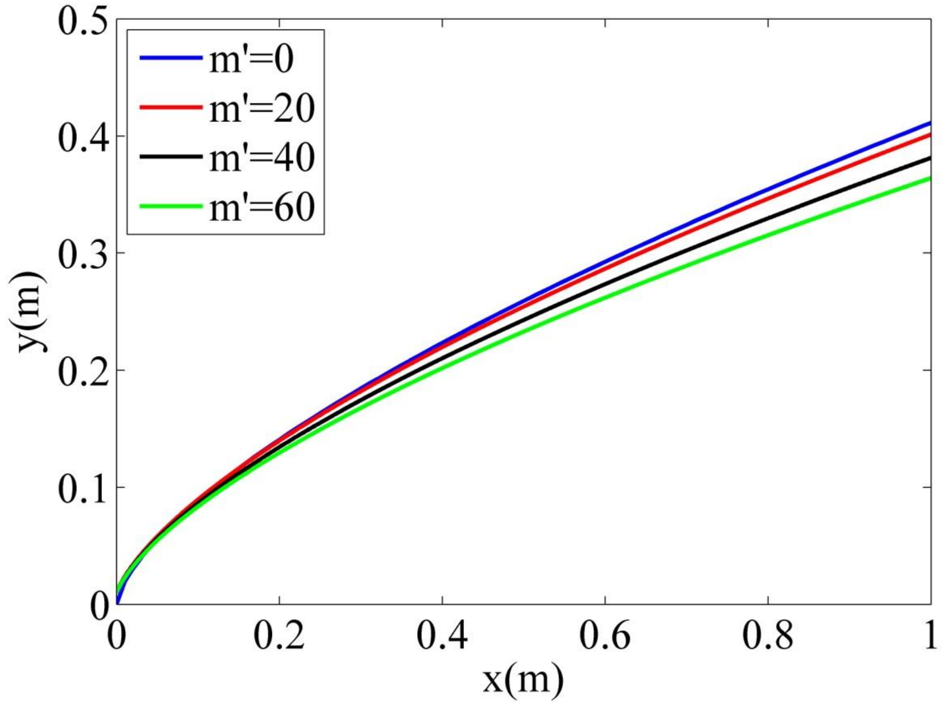
در رابطه (۴-۱۸) انتگرالی که با حرف A مشخص شده است، به صورت تحلیلی قابل حل نمی‌باشد. برای حل این انتگرال از روش‌های عددی با استفاده از نرم افزار متلب[1] استفاده شده است. با حل انتگرال فوق به صورت عددی، می‌توان مقدار $\frac{d\delta}{dx}$ را در هر δ و x فرضی پیدا کرد. حال، جهت

[1] MATLAB

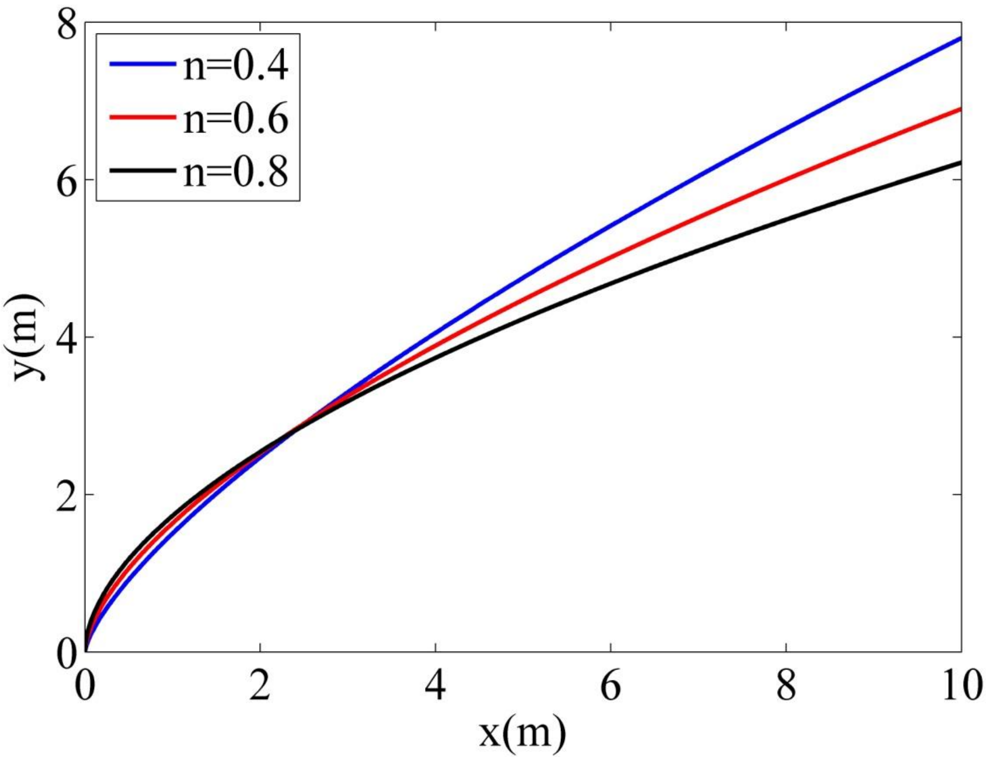
یافتن چگونگی تاثیر گذاری تاثیر پارامترهای مختلف بر ضخامت لایه مرزی، با در نظر گرفتن مقداری برای δ_0 در نقطه $x=0$ ، می‌توان لایه مرزی را رسم نمود. در تمامی اشکال این بخش، $\delta_0=0.001$ در نظر گرفته شده است.

در شکل (۴-۲۶) می‌توان تاثیر خاصیت الاستیک را بر ضخامت لایه مرزی مشاهده نمود. در این شکل با ازدیاد ضریب اختلاف تنش نرمال اول در مدل ویسکومتریک power-law یعنی مقدار m' در رابطه (۴-۱۸) در واقع بر خاصیت الاستیک افزوده شده است، که باعث کاهش لایه مرزی می‌شود. در این شکل مقدار m یعنی ضریب ویسکوزیته در مدل توانی برابر $20\ pa.s^n$ ، n و n' هردو برابر 0.5 در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است که زمانی که m' برابر صفر باشد، سیال معادل یک سیال توانی می‌باشد و پروفیل لایه مرزی رسم شده معادل با مرجع[14] می‌باشد. واحد m' در شکل زیر $pa.s^{n'}$ می‌باشد.

شکل (۴-۲۶) تاثیر اندیس توانی n را بر ضخامت لایه مرزی نشان می‌دهد. قابل مشاهده است که افزایش اندیس توانی n موجب کاهش در ضخامت لایه مرزی می‌شود. این تغییرات مشابه رفتار سیال توانی می‌باشد[18] . در این شکل نیز مقدار $m'=40pa.s^{n'}$ ، $m=20\,pa.s^n$ و $n'=0.5$ در نظر گرفته شده اند.

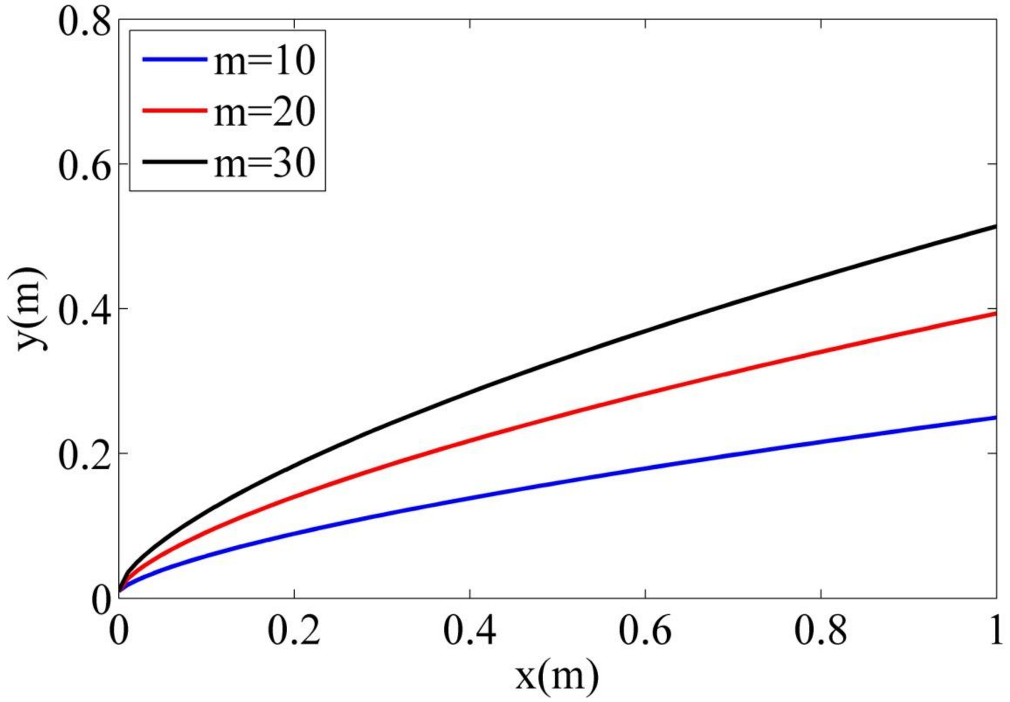


شکل(۴-۲۶) تاثیر ازدیاد خاصیت الاستیک روی ضخامت لایه مرزی در مدل CEF ($U_0 = 1m / s$)



شکل(۴-۲۷) تاثر گذاری اندیس توانی n بر ضخامت لایه مرزی($U_0 = 0.1m / s$)

شکل (۴-۲۶) نشان دهنده تاثیر ضریب ویسکوزیته(m)، بر ضخامت لایه مرزی می‌باشد. قابل پیشبینی است که افزایش موجب افزایش ویسکوزیته، و این امر سبب افزایش ضخامت لایه مرزی گردد. در این شکل مقدار $m' = 40 pa.s^{n'}$ ، $n = 0.5$ و $n' = 0.5$ در نظر گرفته شده اند. همچنین واحد m برابر $pa.s^{n}$ می‌باشد.



شکل(۴-۲۸) تاثیر ضریب ویسکوزیته بر ضخامت لایه مرزی سیال CEF($U_0 = 1 m/s$)

فصل ۵.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۵-۱- نتیجه‌گیری

در این بخش به مرور کلی نتایج حاصل از تحقیق حاضر برای جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک روی صفحه تخت پرداخته می‌شود. همانطور که پیش‌تر نیز اشاره گردید، مطالعه جریان لایه مرزی از جمله مسائل کلاسیک و پایه‌ای در مکانیک سیالات محسوب می‌شود، که دارای کاربردهای عملی بسیار مهمی می‌باشد. تا کنون تحقیقات جامع و متنوعی در این زمینه بر روی سیالات نیوتنی صورت پذیرفته است، اما کمبود این تحقیقات در زمینه سیالات غیر نیوتنی و به طریق اولی سیالات ویسکوالاستیک غیر قابل کتمان است. هدف اصلی این پژوهش، شناخت اثرات ویسکوالاستیک بر روی پارامترهای لایه مرزی می‌باشد.

به این منظور از دو رویکرد عددی و تحلیلی استفاده گردید، در رویکرد عددی از نرم افزار منبع باز OpenFOAM که یک جعبه ابزار دینامیک سیالات محاسباتی می‌باشد استفاده گردید. این نرم افزار از شیوه عددی حجم محدود برای حل معادلات استفاده می‌کند. در این تحقیق برای نخستین بار جهت بررسی جریان لایه مرزی سیال ویسکوالاستیک، از مدل گزیکس به عنوان معادله ساختاری سیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. این مدل غیر خطی از توانایی برجسته‌ای در توصیف ویسکوزیته در ناحیه توانی و همچنین اثر اختلاف تنش‌های نرمال برخوردار است. صحت نتایج شبیه‌سازی عددی از طریق بررسی استقلال پاسخ ها از شبکه و همچنین مقایسه نتایج در حالت نیوتنی با حل تحلیلی ارزیابی گردید. در شبیه سازی عددی اثر پارامترهای عدد رینولدز، عدد الاستیک و همچنین ضریب تحرک بر مشخصه های لایه مرزی مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که افزایش خاصیت الاستیک موجب کاهش ضخامت لایه مرزی و میزان ضریب درگ خواهد شد. در رویکرد تحلیلی با تقریب جریان لایه مرزی به یک جریان برشی، حل انتگرالی فون کارمن در سیال نیوتنی به سیالات ویسکوالاستیک تعمیم داده شد و در این حل برای شبیه سازی میدان تنش از مدل CEF استفاده شد. نشان داده شد ایجاد تنش های نرمال حاصل از خاصیت الاستیک موجب شتاب دادن به ذرات

سیال در درون لایه مرزی شده و این موضوع سبب کاهش ضخامت لایه مرزی می‌شود.

به طور کلی نتایج بدست آمده از تحقیق حاضر را می‌توان به طور خلاصه به صورت زیر بیان نمود:

۱- در حل عددی نشان داده شد که افزایش خاصیت الاستیک موجب کاهش لایه مرزی خواهد شد. این کاهش را می‌توان به دو عامل نسبت داد. عامل اول کاهش ویسکوزیته بر اثر خاصیت باریک شوندگی و عامل دوم وجود اختلاف تنش‌های نرمال که احتمالا باعث شتاب دادن به ذرات سیال درون لایه مرزی می‌شوند.

۲- افزایش عدد الاستیک موجب کاهش تنش برشی روی دیواره و در نتیجه کاهش ضریب درگ خواهد شد.

۳- در سیالات ویسکوالاستیک بر خلاف سیالات نیوتنی، حداکثر تنش برشی بر روی دیواره رخ نمی-دهد، که به دلیل آن ماکزیمم بودن نرخ برش در نزدیکی دیواره و رابطه عکس بین ویسکوزیته و نرخ برش در این سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد.

۴- روند تغییرات ضخامت لایه مرزی و ضریب درگ بر اثر افزایش عدد رینولدز، روندی مشابه با سیال نیوتنی می‌باشد.

۵- افزایش ضریب تحرک پذیری در مدل گزیکس باعث کاهش ضخامت لایه مرزی، تنش برشی، ضریب درگ و اختلاف تنش نرمال اول می‌شود. اما بر اختلاف تنش نرمال دوم تقریبا بی تاثیر است.

۶- در روش تحلیلی نشان داده شد که در سیال ویسکوالاستیک، بر خلاف سیالات نیوتنی، علاوه بر تنش برشی، تنش‌های نرمال نیز در معادله انتگرالی فون کارمن وارد می‌شوند.

۷- در حل تحلیلی برای سیال مرتبه ۲ نشان داده شد که افزایش خاصیت الاستیک موجب کاهش

ضخامت لایه مرزی می‌گردد و با توجه به ثابت بودن ویسکوزیته در این نوع سیال، این کاهش ضخامت تنها می‌توان حاصل از اختلاف تنش‌های نرمال دانست.

۸- نتایج حل تحلیلی برای سیال CEF نیز مشابه روش عددی برای سیال گزیکس، بر کاهش ضخامت لایه مرزی بر اثر افزایش خاصیت الاستیک صحه گذاشته است.

۵-۲- پیشنهادات

موارد زیر جهت ادامه تحقیقات بر روی لایه مرزی سیالات غیر نیوتنی پیشنهاد می‌گردد:

۱- استفاده از مدل‌های رئولوژیکی دیگر مانند PTT و مقایسه نتایج با این پژوهش.

۲- افزایش محدوده عدد الاستیک در تحقیقات آتی.

۳- استفاده از مدل کاریو یاسودا و کراس در تعریف توابع ویسکومتریک برای مدل CEF در حل تحلیلی.

۴- بهبود نوع تقریب پروفیل سرعت در روش تقریبی

پیوست ها

پیوست الف- چگونگی اعمال شرایط مرزی در نرم افزار OpenFOAM

- اعمال شرایط مرزی و اولیه فشار:

در این مسئله، مقدار اولیه فشار برابر فشار اتمسفر تعیین شده و در همچنین شرایط مرزی برای هر یک از صفحات نشان داده شده در شکل (۳-۱) که در قسمت قبلی به زبان ریاضی ذکر شده، به صورت زیر در کد فایل p اعمال می‌گردد.

```
dimensions       [0 2 -2 0 0 0 0];

internalField   uniform 0;

boundaryField
{
top
    {
        type             zeroGradient;

    }
    outlet
    {
        type             fixedValue;
        value            uniform 0;
    }
    plat
    {
        type             zeroGradient;
    }
    pre-plate
    {
        type             symmetryPlane;
    }
    inlet
    {
        type             zeroGradient;
    }
    frontAndBackPlanes
    {
        type             empty;

    }
}
```

لازم به ذکر است که شرط symmetryplane به معنی اعمال شرط تقارن در تمامی کمیت ها روی یک صفحه می‌باشد. همانطور که در قسمت قبلی ذکر شد این شرط برای صفحه‌ای که قبل از صفحه تخت قرار دارد اعمال شده است.

۲- اعمال شرایط مرزی و اولیه سرعت:

مقدار اولیه سرعت در تمامی دامنه محاسباتی برابر صفر در نظر گرفته شده است. اعمال بقیه شرایط مرزی در فایل u به صورت زیر انجام می‌پذیرد.

```
dimensions      [0 1 -1 0 0 0 0];

internalField   uniform (0 0 0);

boundaryField
{
top
    {
        type            fixedValue;
        value           uniform (0.045 0 0);

    }
    outlet
    {
        type            zeroGradient;
    }
    plat
    {
        type            fixedValue;
        value           uniform (0 0 0);
    }
    pre-plate
    {
        type            symmetryPlane;
    }
    inlet
    {
        type            fixedValue;
        value           uniform (0.045 0 0);
    }
    frontAndBackPlanes
    {
        type            empty;

    }
}
```

۳- اعمال شرایط مرزی و اولیه تنش:

دو فایل tau و taufirst برای اعمال شرایط مربوط به تنش و تنش در مود اول موجود است که تنظیمات هر دو به صورت مشابه و به شکل زیر انجام می‌شود. مقدار اولیه میدان تنش نیز در تمام دامنه محاسباتی برابر صفر لحاظ شده است.

```
dimensions       [1 -1 -2 0 0 0 0];

internalField   uniform (0 0 0 0 0 0);

boundaryField
{
top
    {
        type            zeroGradient;

    }
    outlet
    {
        type            zeroGradient;
    }
    plat
    {
        type            zeroGradient;
    }
    pre-plate
    {
        type            symmetryPlane;
    }
    inlet
    {
        type            fixedValue;
        value           uniform (0 0 0 0 0 0);
    }
    frontAndBackPlanes
    {
        type            empty;

    }
}
```

پیوست ب- چگونگی اعمال خواص سیال در نرم افزار OpenFOAM

در این کد خواص رئولوژیکی سیال ویسکوالاستیک شامل ویسکوزیته حلال نیوتنی etaS، ویسکوزیته افزودنی پلیمری etaP، زمان رهایی از تنش lamda، و همچنین ضریب تحرک پذیری مدل گزیکس alpha، تعیین می‌شود. متن کد مورد اشاره در قسمت پیوست ارائه می‌شود.

```
rheology
{

        type multiMode;

        models
        (
            first
            {
            type Giesekus;
            rho                 rho [1 -3 0 0 0 0 0] 1000;
            etaS                etaS [1 -1 -1 0 0 0 0] 0.001;
            etaP                etaP [1 -1 -1 0 0 0 0] 0.03;
            lambda              lambda [0 0 1 0 0 0 0] 0.5;
            alpha               alpha [0 0 0 0 0 0 0] 0.8;
            }



        );

}
```

پیوست ج- چگونگی اعمال خواص شبکه در نرم افزار OpenFOAM

برای صفحه تخت و صفحه فوقانی از شرط مرزی wall استفاده شده است. انتخاب این شرط مرزی در OpenFOAM بدان معناست که از آن سطح هیچ جریانی وارد یا خارج نمی‌گردد. برای صفحه‌ی قرار گرفته قبل صفحه تخت شرط symmetryPlane انتخاب شده است و نوع شرط مرزی برای بقیه صفحات patch می‌باشد. شرط patch برای صفحات مرزی که به عنوان ورودی و خروجی لحاظ می‌شوند در OpenFOAM تعریف می‌شود.

```
(
    top
    {
        type            wall;
        nFaces          165;
        startFace       65635;
    }
    outlet
    {
        type            patch;
        nFaces          200;
        startFace       65800;
    }
    plat
    {
        type            wall;
        nFaces          105;
        startFace       66000;
    }
    pre-plate
    {
        type            symmetryPlane;
        nFaces          60;
        startFace       66105;
    }
    inlet
    {
        type            patch;
        nFaces          200;
        startFace       66165;
    }
    frontAndBackPlanes
    {
        type            empty;
        nFaces          66000;
        startFace       66365;
    }
)
```

مراجع

[1] ش .نارانی ,بررسی خواص، جریان و انتقال حرارت و اختلاط سیالات غیرنیوتنی ,تهران :جهاد دانشگاهی صنعتی امیرکبیر .1371 ,

[2] B. B. R., Armstrong R.C. and Hassager O., Dynamics of Polymer Liquids, 2nd ed., vol. 1, John Wiely & sons, 1987.

[3] Phan-Thien, Understanding Viscoelasticity, First ed., Berlin: Springer, 2002.

[4] M. A, Rheology Fundamentals, First ed., Toronto: Chem. Tech. Publishing, 2002.

[5] ن .م ,پایان نامه دکتری":بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده دارای مقطع مستطیلی ایستا و چرخان ,"دانشگاه صنعتی شاهرود :دانشکده مهندسی مکانیک , 1388.

[6] ل .م ,رابین دو کرمپل مترجم:شعرباف غ ر ,مقدمه ای بر مکانیک محیط های پیوسته ,تهران : انتشارات دانشگاه تربیت مدرس .1378 ,

[7] L. R. G, Constitute Equation for Polymer Melts and Solution, 2nd ed., vol. 2, John Wiley & Sons, 1988.

[8] O. J. G, Non-Newotonian rffects in steady motion of some idealized elasticoviscous fluids, london: Proc. Roy.Soc, 1985, pp. 278-297.

[9] Phan-Thien and Tanner, "A new constitute equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility," *Non-Newotonian Fluid,* pp. 353-365, 1977.

[10] ه .شلیختینگ مترجم:مظفر علی مهرابیان ,نظریه لایه مرزی ,انتشارات دانشگاه باهنر کرمان , 1384.

[11] L. Prandtel, Uber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Heidelberg, 1904.

[12] H. Blasius, "Grenzschichten in Flussigkeiten mit kleiner Reibung," 1908.

[13] A. Acrivos, " AIChE J.6," p. 584, 1960.

[14] R. P. Chhabra and J. F. Richardson, Non-Newotonian flow and Applied rheology, Engineering Application, 2008, pp. 343-357.

[15] Skelland, Non-Newtonian Flow and Heat Transfer, New York : Wiley, 1967.

[16] G. Cossali, "Similarity solutions of energy and momentum boundary layer equations for a power-law shear driven flow," *European Journal of Mechanics B/Fluids,* pp. 18-32, 2005.

[17] L. Zheng and X.X. Zhang, "Skin friction and heat transfer in power-law fluid laminar boundary layer along a moving surface," *International Journal of Heat and Mass Transfer,* p. 2667–2672, 2002.

[18] T. Myers, "An approximate solution method for boundary layer flow of a power law fluid over a flat plate," *International Journal of Heat and Mass Transfer,* p. 2337–2346, 2010.

[19] K. Pohhausen, "Zur naherungsweisen Integration der Differntialgeleichung der laminaren," *ZAMM*, 1921.

[20] R. Chhabra, " Laminar boundary layer heat transfer to power law fluids: an approximate analytical solution," *Chem. Eng. Jpn*, pp. 812-816, 1999.

[21] B. D. W and Walters K, "Elastico-viscus boundary layet flows," *proc camb phil soc* , vol. 60, p. 667.

[22] Harris, Rheology and non-newotonian flow, Longman, 1977.

[23] ک .صادقی ،م. شریفی" ,حل دقیق معادلات لایه مرزی برای یک سیال ویسکوالاستیک مرتبه دوم در جریان بالای یک صفحه ساکن ",*نشریه دانشکده فنی* .pp. 123-132, 1382 ,

[24] M. Renardy, " High Weissenberg number boundary layers for the upper convected Maxwell fluid," *Non-Newtonain fluid*, pp. 125-132, 1997.

[25] T. Hagen and Michael Renardy, "Boundary layer analysis of the Phan-Thien-Tanner and," *Non-Newtonian Fluid Mech*, pp. 181-189, 1997.

[26] D. O. Olagunju, "Local similarity solutions for boundary layer flow of a FENE-P fluid," *Applied Mathematics and Computation*, pp. 593-602, 2006.

[27] H. Giesekus, "A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility," *Non-newtonian Fluid Mech*, vol. 11, pp. 69-109, 1982.

[28] R. B. Bird and J. M. Wiest, "“Constitutive equations for polymeric liquids," *Annu. Rev. Fluid Mech*, pp. 169-193, 1995.

[29] T. v. Karman, "Uber Laminar and turbulent Reibung," *NACA Tech*, 1921.

[30] M. Norouzi, M.R.H. Nobari, M.H. Kayhani and F. Talebi, "Instability investigation of creeping viscoelastic flow in a curved duct with rectangular cross-section," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, pp. 14-25, 2012.

[31] C. W.O, E. J. L and Filbey G.L, "Steady shear flow of Non-Newotonian fluids," *Arc. Rat. Mech.* , pp. 410-417.

[32] E. J.L and B. J. T, Viscoelaticity:Phenomenological Aspects, 1nd ed., vol. 13, 1958, pp. 410-417.

[33] A. A. R. C. a. B. R. A. Berds, "Perturbation theory for viscoelastic fluids between eccentric rotating cylinders," *Non-Newtonian Fluid Mech*, pp. 109-148, 1983 .

[34] M. M. Cross, "Rheology of non-Newtonian Fluids: A New Flow Equation for Pseudoplastic Systems," *Journal of Colloid Science*, vol. 20, pp. 417-437, 1965.

[35] س .ر .واردی ,پایان نامه کارشناسی ارشد :بررسی عددی جریان ویسکوالاستیک حول سیلندر , 1390.

[36] H. j. H. Nilsson, " OpenFOAM extensions," [Online]. Available: http://www.sourceforge.net/projects/openfoam-extend/files/.

[37] The Open Source CFD Toolbox OpenFOAM, “User Guide ”, GNU Free Documentation License,, 2010.

[38] ع. سر رشته داری، س.ر. واردی ,مدلسازی جریان سیالات و انتقال حرارت با استفاده نرم افزار OpenFOAM,انتشارات دانشگاه صنعتی شاهرود .1390 ,

[39] V. S, ""Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive

variables," *of computational physics,* pp. 138-158, 1986.

[40] و .ورستیگ م .سکرا مترجم:محمد حسن شجاعی فرد ,مقدمه ای بر دینامیک سیالات محاسباتی .1379 ,

[41] R. B. Bird, Dynamic of polymeric liquids, 2nd ed., pp. 420-480.

Abstract

Boundary layer flow is considered as one of the fundamentals in fluid mechanic Engineering, so it has been attended by researchers for a long period. Up to this day a great number of investigations have been done focusing on this subject that most of them have been about Newtonian Fluids and just a few numbers of them have been out of this circle and about viscoelastic fluids. Main purpose of this research is to better understanding of viscoelastic effect on boundary layer characteristics.

In this research, we investigated boundary layer made by viscoelastic flow on a flat plate using both numerical and analytical approaches. In numerical approach, we used OpenFOAM software which is a Calculation Fluid Dynamics tool box (CFD) to simulate this flow. this software uses finite volume method (FVM) to solve equations using Partial derivatives. we also applied Giesekus model in our numerical solution as constitutive equation. Then to be able to trust on numerical method outcomes, result independencies have been investigated. Also, results in Newtonian fluid have been compared with Blasius solution. We used "Von-Karman" integral based method basics which is a Approximate method in Newtonian boundary layer studings in analytical approach,. We tried to generalize this method to viscoelastic fluids. Results obtained by both methods illustrated making a limited thickness at the leading edge (x=0) because of elastic effects in viscoelastic fluids. Numerical approach illustrated that increases in elastic number decreases shear stress and normal stress differences and also drag coefficient was reported in different elastic numbers.

Keywords: Boundary layer, Flat plate, Giesekus, Von-Karman, Numerical solution, viscoelastic

Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

Numerical and analytical investigation of boundary layer flow of non-Newtonian fluids

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science (M.Sc)

Aidin Nazemi

Supervisors

Dr. A. Jabbari moghadam

Dr. M. Norouzi

Date: January 2013