

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران و معماری

گروه مهندسی عمران - گرایش سازه های هیدرولیکی  
بررسی بکارگیری الگوریتم تک دم در مش های هم مکان

دانشجو: عالیه مبارکی

استاد راهنما:

جناب آقای دکتر رامین امینی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد



دانشکده صنعتی شاهرود  
دانشکده عمران و معماری  
گروه مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد عالیہ مبارکی  
تحت عنوان:

**بررسی بکارگیری الگوریتم مک در مش های هم مکان**

در تاریخ  
بدرجه پذیرش قرار گرفت.  
توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و

اساتید راهنما	امضا
نام و نام خانوادگی: دکتر رامین امینی	

اساتید داور	امضا	نمایندہ تحصیلات تکمیلی	امضا
نام و نام خانوادگی: دکتر احمد احمدی		نام و نام خانوادگی: دکتر سید علی حسینی	
نام و نام خانوادگی: دکتر امیرعباس عابدینی			
نام و نام خانوادگی:			
نام و نام خانوادگی:			

## تشکر و قدردانی

اکنون که به مهر پروردگار و لطف و عنایت اساتید عزیز و گرامی، مراحل علمی پایان نامه ام به اتمام رسیده است، بر خود لازم می دانم که از تمام کسانی که در این راه، راهبر و هدایت گر بنده بوده اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. بخصوص از آقای دکتر رامین امینی که به عنوان استاد راهنما از تجارب و راهنمایی های ارزنده شان فراوان استفاده کرده ام، هم چنین از کلیه دوستانم که بی دریغ اطلاعاتشان را در اختیارم گذاشته اند صمیمانه سپاسگزارم.

باشد که این تحقیق هر چند ناچیز، مورد استفاده دیگران که در این زمینه فعالیت خواهند کرد قرار بگیرد.

## تعهدنامه

اینجانب عالییه مبارکی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران – گرایش سازه های هیدرولیکی دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه "بررسی بکارگیری الگوریتم مک در مش های هم مکان" تحت راهنمایی آقای دکتر رامین امینی به عنوان استاد راهنما متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه صنعتی شاهرود" و یا "Shahrood University of Technology" به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ :

امضای دانشجو

## مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

هدف از علم دینامیک سیالات محاسباتی (سی-اف-دی)<sup>۱</sup> تحلیل سیستم های شامل جریان سیال، انتقال حرارت و پدیده های همراه، بر اساس شبیه سازی کامپیوتری می باشد.

در این علم، معادلات حاکم بر جریان سیال، معادله پیوستگی و ناویر-استوکس است و هدف گسسته سازی آن می باشد. روش مک یکی از معتبرترین روش های حل عددی جریان در سی-اف-دی می باشد که در این تحقیق به آن پرداخته شده است.

برای حل جریان کانال معمولاً یکی از دو نوع مش جابجا شده<sup>۲</sup> یا مش هم مکان<sup>۳</sup> مورد استفاده قرار می گیرند. در مش جا به جا شده، فشار در مرکز تقاطع مش ها ذخیره می شود و مقادیر سرعت در جهت  $X, Y, Z$  به ترتیب به اندازه نصف اندازه مش در جهت های مزبور جا به جا می گردند. در حالی که در مش هم مکان، تمام پارامترهای سرعت و فشار در یک موقعیت و در مرکز گره قرار می گیرند و لذا حل معادلات حاکم آسان تر خواهند بود. الگوریتم مک در منابع مختلف روی مش جا به جا شده به مقدار زیاد به کار گرفته شده است، هدف این پایان نامه بررسی نحوه به کارگیری الگوریتم مک در مش هم مکان می باشد. نتایج برای مش هم مکان با نتایج مش جا به جا شده و هم چنین با استفاده از نرم افزار Open Foam و ANSYS مقایسه و تطابق قابل قبولی به دست آمده است.

الگوریتم مک برای مش های هم مکان ابتدا برای فرم تفاضل محدود به صورت دو بعدی و سه بعدی در فصل چهارم برنامه نویسی گردید و سپس در فصل پنجم در حالت حجم های محدود نیز کدنویسی انجام گرفت. برنامه نویسی با استفاده از زبان ++C انجام گرفته است و در ضمیمه ارائه شده است.

## کلمات کلیدی:

دینامیک سیالات محاسباتی، معادلات ناویر-استوکس، روش مک در مش های هم مکان، روش مک در مش های جابجا شده، حجم محدود

<sup>۱</sup> - Computational fluid dynamics-CFD

<sup>۲</sup> - Staggered

<sup>۳</sup> - Colocated

## مقالات ارائه شده:

- ۱- بررسی بکارگیری الگوریتم مک در مش های Colocated - دانشگاه آزاد اسلامی، لشت- نشاء، زیباکنار، ۲۷ بهمن ۱۳۹۰ (مورد پذیرش قرار گرفت).
- ۲- مدلسازی سه بعدی جریان با روش حجم های محدود- دانشگاه آزاد اسلامی، لشت- نشاء، زیباکنار، ۲۷ بهمن ۱۳۹۰ (مورد پذیرش قرار گرفت).
- ۳- الگوریتم مک در مش های هم مکان و آزمایشات عملکرد مدل- اصفهان - ۲۱ اردیبهشت ۱۳۹۱ (به صورت پوستری)
- ۴- بررسی الگوریتم مک با روش مش هم مکان و مقایسه آن با مش جابجا شده- یازدهمین کنفرانس هیدرولیک ایران- ارومیه - آبان ۱۳۹۱ (ارائه شده است).



## فصل اول : معرفی دینامیک محاسباتی سیالات یا سی اف دی

- ۱-۱- تاریخچه ..... ۲
- ۲-۱- شاخه های اصلی CFD ..... ۳
- ۳-۱- کاربرد ها ..... ۴
- ۴-۱- یک برنامه CFD چگونه کار می کند؟ ..... ۵
- ۱-۴-۱- پیش پردازنده ..... ۵
- ۲-۴-۱- حل کننده ..... ۶
- ۱-۲-۴-۱- روش های اختلاف محدود ..... ۶
- ۲-۲-۴-۱- روش عناصر محدود ..... ۷
- ۳-۲-۴-۱- روشهای طیفی ..... ۸
- ۴-۲-۴-۱- روش حجم محدود ..... ۸
- ۳-۴-۱- پس پردازنده ..... ۹

## فصل دوم : معادلات حاکم بر جریان سیال و انتقال حرارت

- ۱-۲- معادلات حاکم ..... ۱۴
- ۱-۱-۲- بقای جرم در حالت سه بعدی ..... ۱۵
- ۲-۱-۲- نرخ های تغییر مربوط به یک ذره سیال و یک المان سیال ..... ۱۷
- ۳-۱-۲- معادله اندازه حرکت در حالت سه بعدی ..... ۱۹
- ۲-۲- معادلات حالت ..... ۲۲
- ۳-۲- صورت های دیفرانسیلی و انتگرالی معادلات کلی انتقال ..... ۲۳
- ۴-۲- طبقه بندی رفتار فیزیکی ..... ۲۵
- ۵-۲- روش طبقه بندی معادلات دیفرانسیلی جزئی ساده ..... ۲۷

## فصل سوم: بررسی روش MAC

۳۱	.....	۱-۳- مقدمه
۳۱	.....	۲-۳- معرفی
۳۲	.....	۳-۳- مقدمه ای از روش Marker and cell
۳۴	.....	۴-۳- مروری بر تکنیک های اثرات لایه ای
۳۷	.....	۵-۳- تأکید بر مسائل گفته شده
۳۷	.....	۶-۳- شرایط مرزی
۳۷	.....	۷-۳- شرایط سطح آزاد و واسطه
۳۸	.....	۸-۳- روش های عددی
۳۹	.....	۹-۳- روش گام زمانی
۴۱	.....	۱۰-۳- تقریب سازی تفاضل محدود ترم انتقال گرما
۴۱	.....	۱۱-۳- حذف موج
۴۳	.....	۱-۱۱-۳- محاسبات بردار نرمال
۴۳	.....	۲-۱۱-۳- مراحل بالانس رئوس
۴۴	.....	۳-۱۱-۳- مراحل حذف موج
۴۶	.....	۱۲-۳- محاسبات انحنا
۴۷	.....	۱-۱۲-۳- تقریب سازی بردار نرمال
۴۷	.....	۲-۱۲-۳- تقریب انحنا
۴۸	.....	۱۳-۳- زاویه تماس دینامیکی
۵۱	.....	۱۴-۳- اطلاعات سازمانی و سیستم محیطی
۵۲	.....	۱۵-۳- کاربرد
۵۲	.....	۱-۱۵-۳- کمانش جت
۵۵	.....	۲-۱۵-۳- ترشح قطرات

۵۶ ..... ۳-۱۵-۳ پرش هیدرولیکی

۵۷ ..... ۳-۱۵-۴ تولید حباب

۵۸ ..... ۳-۱۵-۵ پر کردن مخزن

### فصل چهارم: بررسی نحوه به کارگیری الگوریتم مک در مش های هم مکان

۶۰ ..... ۴-۱-۱ معرفی

۶۲ ..... ۴-۲-۲ فرم تفاضل محدود معادلات ناویر- استوکس به روش مک

۶۲ ..... ۴-۲-۱-۱ الگوریتم مک برای روش مش جابجا شده

۶۵ ..... ۴-۲-۲-۲ شرایط مرزی

۶۵ ..... ۴-۲-۲-۱-۱ شرایط مرزی در دیواره ها

۶۶ ..... ۴-۲-۲-۲-۲ شرایط مرزی در ورودی

۶۷ ..... ۴-۲-۲-۳-۱ شرایط مرزی در خروجی

۶۸ ..... ۴-۲-۳-۱ نحوه محاسبه  $RHSU_{i-1/2,j}$

۶۸ ..... ۴-۲-۳-۱-۱ نحوه محاسبه  $v(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$

۶۹ ..... ۴-۲-۳-۲-۱ نحوه محاسبه  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

۶۹ ..... ۴-۲-۳-۳-۱ نحوه محاسبه  $\frac{\partial(uv)}{\partial y}$

۷۰ ..... ۴-۲-۴ الگوریتم برنامه نویسی

۷۰ ..... ۴-۲-۵ نحوه نوشتن Subroutine های مختلف برای برنامه دوبعدی جریان در یک

۷۱ ..... کانال

۷۱ ..... Subroutine Prescof - ۴-۲-۵-۱

۷۱ ..... Subroutine rhs - ۴-۲-۵-۲

۷۲ ..... Subroutine solve - ۴-۲-۵-۳

۷۲	..... Subroutine Bound -۴-۵-۲-۴
۷۳	..... Subroutine Surfdat -۵-۵-۲-۴
۷۴	..... الگوریتم مک برای مش هم مکان -۳-۴
۷۷	..... آزمایشات عمل کرد مدل -۴-۴
۷۸	..... جریان در کانال به صورت دو بعدی -۱-۴-۴
۸۰	..... نتایج کانال u شکل در حالت سه بعدی -۲-۴-۴
۸۴	..... مقایسه نتایج مش هم مکان و جایجا شده -۳-۴-۴
۸۶	..... مقایسه نمودار سرعت افقی در روش های مش جایجا شده و هم مکان -۱-۳-۴-۴
۸۶	..... Lid-driven Cavity- ۴-۴-۴
۹۱	..... پروفیل عرضی سرعت در کانال -۵-۴-۴
۹۲	..... جریان در روش پله پشت به جریان -۶-۴-۴
۹۳	..... بحث و نتایج - ۵-۴

#### فصل پنجم: برنامه نویسی با روش حجم محدود

۹۵	..... بسط فرمول ناویر- استوکس -۱-۵
۹۹	..... شرایط مرزی -۲-۵
۹۹	..... شرایط مرزی دیوار -۱-۲-۵
۱۰۰	..... شرایط در ورودی -۲-۲-۵
۱۰۰	..... شرایط در خروجی -۳-۲-۵
۱۰۰	..... مش سازی -۱-۳-۵
۱۰۷	..... نحوه محاسبه مراکز سلول ها و ضرایب انترپوله -۲-۳-۵
۱۰۸	..... نحوه محاسبه تصاویر سطحها در سه جهت -۳-۳-۵
۱۰۹	..... نحوه محاسبه دیفیوژن اصلی و ثانویه -۴-۳-۵

- ۱۱۱ ..... ۵-۳-۴-۱- اثبات نحوه تغییرات یک متغیر در جهت  $n$  عمود بر سطح
- ۱۱۴ ..... ۵-۳-۵- نحوه محاسبه حجم المان
- ۱۱۴ ..... ۴-۵- سایر پارامترهای مورد استفاده در برنامه
- ۱۱۵ ..... ۵-۵- کدنویسی برنامه به روش حجم محدود
- ۱۱۵ ..... ۵-۵-۱- Subroutine Geometry
- ۱۱۷ ..... ۵-۵-۲- subroutine solver
- ۱۲۳ ..... ۵-۶- نتایج بردارهای سرعت در مقاطع مختلف با استفاده از روش حجم های محدود
- ۱۲۴ ..... ۵-۷- بحث و نتایج

### فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادات

- ۱۲۶ ..... ۶-۱- نتیجه گیری
- ۱۲۸ ..... ۶-۲- پیشنهادات

### پیوست ها

- ۱۲۹ ..... پیوست الف: کدنویسی، حل جریان کانال به روش مش هم مکان به صورت دو بعدی
- ۱۳۵ ..... پیوست ب: کدنویسی، حل جریان کانال به روش مش هم مکان به صورت سه بعدی
- ۱۴۱ ..... پیوست ج: کدنویسی، حل جریان کانال با نرم افزار انسیس به صورت دو بعدی
- ۱۴۲ ..... پیوست د: کدنویسی، حل جریان کانال با نرم افزار انسیس به صورت سه بعدی
- ۱۴۴ ..... پیوست و: کدنویسی، حل جریان کانال به روش حجم محدود
- ۱۶۰ ..... منابع

### چکیده انگلیسی

## فهرست اشکال

- شکل ۱-۲- المان سیال مربوط به قوانین بقاء ..... ۱۴
- شکل ۲-۲- جریان های جرمی ورودی و خروجی از المان سیال ..... ۱۶
- شکل ۳-۲- مؤلفه های تنش روی المان سیال ..... ۲۰
- شکل ۴-۲- مؤلفه های تنش در جهت X ..... ۲۰
- شکل ۵-۲- توزیع درجه حرارت حالت دائم در یک میله عایق ..... ۲۷
- شکل ۱-۳- راس و موقعیت ستاره قرار گرفته در صفحه  $\pi$  ..... ۴۲
- شکل ۲-۳- موقعیت رئوس ستاره قبل و بعد از تعادل ..... ۴۴
- شکل ۳-۳- مراحل حذف موج در هر گوشه و ستاره مربوطه ..... ۴۵
- شکل ۴-۳- مدل تقریب سازی سطوح تماس ..... ۴۹
- شکل ۵-۳- شبیه سازی مدل سه بعدی جت استوانه ای کمانش یافته در زمان های مختلف ..... ۵۳
- شکل ۶-۳- شبیه سازی مدل سه بعدی جت صفحه ای کمانش یافته در زمان های مختلف ..... ۵۴
- شکل ۷-۳- شبیه سازی مدل سه بعدی ترشح قطره در زمان های مختلف ..... ۵۵
- شکل ۸-۳- شبیه سازی مدل سه بعدی پرش هیدرولیکی در زمان های مختلف ..... ۵۶
- شکل ۹-۳- شبیه سازی مدل دو حباب در مایع دوفازی در زمان های مختلف ..... ۵۷
- شکل ۱۰-۳- شبیه سازی مراحل پر شدن یک مخزن ذوزنقه ای در زمان های مختلف ..... ۵۸
- شکل ۱-۴- نمایش مش هم مکان ..... ۶۱
- شکل ۲-۴- نمایش مش جابجا شده ..... ۶۱
- شکل ۳-۴- نمایی از روش تفکیک سازی ..... ۶۳
- شکل ۴-۴- نحوه اعمال شرایط مرزی در دیوارها ..... ۶۵
- شکل ۵-۴- نحوه اعمال شرایط مرزی در ورودی ..... ۶۷
- شکل ۶-۴- نحوه اعمال شرایط مرزی در خروجی ..... ۶۸

- شکل ۴-۷- نحوه محاسبه دیفیوژن در معادله مومنتوم  $X$  در مکان  $i=1, j=2$  ..... ۶۸
- شکل ۴-۸- نحوه محاسبه ترم  $\frac{\partial(uv)}{\partial y}$  ..... ۶۹
- شکل ۴-۹- جریان در کانال دارای انحنا ..... ۷۱
- شکل ۴-۱۰- تنظیمات برای ترسیم بردارهای سرعت در برنامه *surfer* ..... ۷۴
- شکل ۴-۱۱- تنظیمات مربوط به *scaling* ..... ۷۴
- شکل ۴-۱۲- نمایی از مش هم مکان ..... ۷۵
- شکل ۴-۱۳- نمایش هندسی جریان در کانال با مش هم مکان ..... ۷۸
- شکل ۴-۱۴- تست کانال- مقایسه پروفیل سرعت در مش هم مکان، نرم افزار این فوم و انسیس ..... ۷۹
- شکل ۴-۱۵- هندسه و ابعاد تانک تصفیه آب ..... ۸۰
- شکل ۴-۱۶- مقایسه بردارهای سرعت در مقطع  $4dy$  در مش هم مکان، جابجا شده و نرم افزار انسیس ..... ۸۱
- شکل ۴-۱۷- مقایسه بردارهای سرعت در مقطع  $9dy$  در مش هم مکان، جابجا شده و نرم افزار انسیس ..... ۸۲
- شکل ۴-۱۸- مقایسه بردارهای سرعت در مقطع  $13dz$  در مش هم مکان، جابجا شده و نرم افزار انسیس ..... ۸۳
- شکل ۴-۱۹- تست کانال- مقایسه پروفیل سرعت در مش جابجا شده و هم مکان ..... ۸۴
- شکل ۴-۲۰- نحوه محاسبه بردار سرعت در مکان  $i, j$  در یک مش جابجا شده برای ترسیم بردارهای سرعت .. ۸۵
- شکل ۴-۲۱- نحوه محاسبه بردار سرعت در مکان  $i, j$  در یک مش هم مکان برای ترسیم بردارهای سرعت ..... ۸۵
- شکل ۴-۲۲- مقایسه نوع مش هم مکان و جابجا شده در سرعت افقی ..... ۸۶
- شکل ۴-۲۳- تست *lid-driven cavity* ..... ۸۷
- شکل ۴-۲۴- مقایسه سرعت افقی در مش جابجا شده و هم مکان و روش *Ghia* ..... ۸۸
- شکل ۴-۲۵- مقایسه سرعت عمودی در مش جابجا شده و هم مکان و روش *Ghia* ..... ۸۹
- شکل ۴-۲۶- استقلال خطوط شبکه در مش هم مکان در راستای  $X$  ..... ۹۰
- شکل ۴-۲۷- استقلال خطوط شبکه در مش هم مکان در راستای  $Y$  ..... ۹۰

- شکل ۴-۲۸- تست کانال- مقایسهٔ پروفیل سرعت در مش جابجا شده و هم مکان و حل آنالیزی ..... ۹۱
- شکل ۴-۲۹- هندسهٔ تست پلهٔ پشت به جریان ..... ۹۲
- شکل ۴-۳۰- مقایسهٔ نقطهٔ چسبندگی در مش جابجا شده و هم مکان و روش *Armaly* ..... ۹۲
- شکل ۵-۱- نمایش مش های سازمان یافته دوبعدی (a) کارترین (b) کارترین کشیده (c) منحنی (d) منحنی فشرده ..... ۱۰۲
- شکل ۵-۲- نمایش مش های بی سازمان دوبعدی (a) عمومی- (b) قطری یک سویه- (c) قطری دو سویه ..... ۱۰۲
- شکل ۵-۳- نمایش مش های سازمان یافته سه بعدی (a) کارترین (b) منحنی فشرده ..... ۱۰۳
- شکل ۵-۴- نمایش مش های بی سازمان سه بعدی ..... ۱۰۳
- شکل ۵-۵- هندسه مسئله در حالت دوبعدی ..... ۱۰۴
- شکل ۵-۶- مش مسئله در حالت دوبعدی ..... ۱۰۴
- شکل ۵-۷- نقاط  $h, l$  در میان صفحه و نحوه انترپوله کردن آن ها ..... ۱۰۵
- شکل ۵-۸- نقطه  $f$  در میان صفحه و نحوه انترپوله کردن آن ..... ۱۰۶
- شکل ۵-۹- شماره گذاری و ترتیب نقاط ..... ۱۰۶
- شکل ۵-۱۰- نحوه محاسبه تغییرات عمود بر سطح برای سطح بین دو المان ..... ۱۰۷
- شکل ۵-۱۱- نمای کلی المان و نحوه محاسبه تصویر سطح ..... ۱۰۸
- شکل ۵-۱۲- نحوه محاسبه تغییرات عمود بر سطح ..... ۱۰۹
- شکل ۵-۱۳- محورهای  $X, Y, Z$  راستگرد به همراه جهت های مثبت قراردادی برای سطوح ..... ۱۱۸
- شکل ۵-۱۴- نحوه محاسبه ترم های انتقال ..... ۱۱۸
- شکل ۵-۱۵- نمونهٔ مدل شده با روش حجم محدود ..... ۱۲۲
- شکل ۵-۱۶- بردار سرعت در  $i=1$  ..... ۱۲۳
- شکل ۵-۱۷- بردار سرعت در  $i=ie/2$  ..... ۱۲۳
- شکل ۵-۱۸- بردار سرعت در  $j=1$  ..... ۱۲۳



## فهرست جداول

جدول ۱-۲ - پارامترهای معادله حاکم بر سیالات ..... ۱۸

## فصل اول

# دینامیک سیالات محاسباتی

## ۱-۱ - معرفی: دینامیک محاسباتی سیالات یا سی اف دی

<sup>۱</sup>Computational fluid dynamics

یکی از بزرگ‌ترین زمینه‌هایی است که مکانیک قدیم (مکانیک کلاسیک<sup>۲</sup>) را به علوم رایانه و توانمندی‌های نوین محاسباتی آن در نیمه دوم قرن بیستم و در سده جدید میلادی وصل می‌کند.

CFD عبارت از تحلیل سیستم‌های شامل جریان سیال، انتقال حرارت و پدیده‌های همراه نظیر واکنش‌های شیمیایی، بر اساس شبیه‌سازی کامپیوتری است. CFD روش بسیار توانائی می‌باشد، به طوری که طیف وسیعی از کاربرد‌های صنعتی و غیر صنعتی را در بر می‌گیرد.

**تاریخچه:** استفاده از دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) برای پیش‌بینی جریان‌های داخلی و خارجی در دهه گذشته پیشرفت چشمگیری داشته است. در دهه ۱۹۸۰ حل مسائل جریان سیال توسط CFD موضوع حوزه تحقیقات بسیاری از محققین فوق دکتری، دانشجویان دکترا و یا متخصصین شبیه‌سازی که چندین سال به طور اصولی دوره دیده بودند، در آمده بود. قابلیت وسیع موقعیت‌های کاری مهندسی توأم با الگوریتم‌های حل مؤثر و پیشرفته شدن امکانات پیش‌پردازنده و پس‌پردازنده امکان استفاده از برنامه‌های CFD تجاری را برای فارغ‌التحصیلان مهندسی به منظور تحقیق، توسعه و طراحی در صنعت فراهم کرده است.

در حالی که برنامه‌های تجاری CFD بر اساس المان محدود اخیراً رو به ضعف و نزول می‌باشد، بازار به طور مستمر در اختیار برنامه‌های FLUENT, CFX, FLOW<sup>۳</sup>D و FLUID<sup>۱</sup>۴۲ قرار گرفته است، که همه آنها بر اساس حجم محدود می‌باشند. در حال حاضر برنامه CFX که برنامه Ansys را در اختیار دارد معتبرترین برنامه در این زمینه می‌باشد.

سرگذشت پیدایش و گسترش دینامیک محاسباتی سیالات را نمی‌توان جدای از تاریخ اختراع، رواج و تکامل کامپیوترهای دیجیتال نقل کرد. تا حدود انتهای جنگ جهانی دوم، بیشتر شیوه‌های مربوط به حل مسائل دینامیک سیالات از طبیعتی تحلیلی یا تجربی برخوردار بودند. هم چون تمامی نوآوری‌های

<sup>۱</sup> - CFD<sup>۲</sup> - mechanics classical

برجسته علمی، در این مورد هم اشاره به زمان دقیق آغاز دینامیک محاسباتی سیالات نامیوسر است. در اغلب موارد، نخستین کار با اهمیت در این رشته را به ریچاردسون نسبت می‌دهند، که در سال ۱۹۱۰ میلادی محاسبات مربوط به نحوه پخش تنش<sup>۱</sup> در یک سد ساخته شده از مصالح بنایی را به انجام رسانید. [۱]

ریچاردسون در این کار از روشی تازه موسوم به رهاسازی<sup>۲</sup> برای حل معادله لاپلاس استفاده نمود. او در این شیوه حل عددی، داده‌های فراهم آمده از مرحله پیشین تکرار<sup>۳</sup> را برای تازه‌سازی تمامی مقادیر مجهول در گام جدید به کار گرفت.

توضیحات: در این روش با تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر سیالات به معادلات جبری امکان حل عددی این معادلات فراهم می‌شود. با تقسیم ناحیه مورد نظر برای تحلیل به المان‌های کوچک‌تر و اعمال شرایط مرزی برای گره‌های مرزی با اعمال تقریب‌هایی یک دستگاه معادلات خطی به دست می‌آید که با حل این دستگاه معادلات جبری، میدان سرعت، فشار و دما در ناحیه مورد نظر به دست می‌آید. با استفاده از نتایج به دست آمده از حل معادلات می‌توان برآیند نیروهای وارد بر سطوح، ضرایب برا و پسا و ضریب انتقال حرارت را محاسبه نمود. در دینامیک محاسباتی سیالات (CFD) از روش‌ها و الگوریتم‌های مختلفی جهت رسیدن به جواب بهره می‌برند، ولی در تمامی موارد، دامنۀ مسئله را به تعداد زیادی اجزاء کوچک تقسیم می‌کنند و برای هر یک از این اجزاء مسئله را حل می‌کنند.

## ۱-۲- شاخه‌های اصلی CFD

برای حل مسائل سیالات به روش دینامیک سیالات محاسباتی از یکی از روش‌های زیر استفاده می‌گردد:

- روش تفاضلات محدود، Finite Difference Method یا FDM
- روش حجم محدود، Finite Volume Method یا FVM
- روش المان محدود یا Finite Element Method یا FEM

---

<sup>۱</sup> - stress distribution  
<sup>۲</sup> - relaxation  
<sup>۳</sup> - iteration

دینامیک سیالات شامل بررسی موارد زیر می باشد:

- معادلات حاکم بر جریان های سیال لزج
- شرایط مرزی
- فیزیک آشفتگی
- مدل کردن آشفتگی در CFD

### ۱-۳- کاربرد ها

اکنون روش دینامیک سیالات محاسباتی جای خود را در میان روش های آزمایشگاهی و تحلیلی برای تحلیل مسائل سیالات و انتقال حرارت باز کرده است و استفاده از این روش ها برای انجام تحلیل های مهندسی امری عادی شده است. دینامیک سیالات محاسباتی به صورت گسترده در زمینه های مختلف صنعتی مرتبط با سیالات، انتقال حرارت و انتقال مواد به کمک سیال به کار گرفته می شود. از جمله این موارد می توان به صنایع خودروسازی، صنایع هوافضا، توربوماشین ها، صنایع هسته ای، صنایع نظامی، صنایع نفت و گاز و انرژی و بسیاری موارد گسترده صنعتی دیگر اشاره نمود که دانش دینامیک سیالات محاسباتی به عنوان گره گشای مسائل صنعتی مرتبط تبدیل شده است. برخی مثال ها عبارتند از:

- آئرو دینامیک هواپیما و وسائط نقلیه: برآ و پسا
- هیدرو دینامیک کشتی ها
- نیروگاه: احتراق در موتورهای IC و توربین های گاز
- توربو ماشین: جریان های داخل گذرگاه های دوار، پخش کننده ها و غیره
- مهندسی برق و الکترونیک: خنک کاری دستگاه هایی که دارای مدارهای ریز می باشند.
- مهندسی فرآیند شیمیایی: اختلاط، جداسازی، شکل گیری پلیمر
- محیط خارجی و داخلی ساختمان ها: بارگذاری باد و گرمایش / تهویه
- مهندسی دریا: بارهای روی ساختمان های ساحلی

از سالهای ۱۹۶۰ به بعد صنعت هوافضا روش های CFD را در طراحی، تحقیق، توسعه و ساخت موتورهای هواپیما و جت به کار گرفته است.

هدف نهائی توسعه و پیشرفت در زمینه CFD رسیدن به توانایی قابل مقایسه با ابزارهای CAE (مهندسی به کمک کامپیوتر) نظیر برنامه های تحلیل تنش می باشد. دلیل اصلی این که چرا CFD به کندی پیشرفت کرده است، در حقیقت پیچیدگی زیاد رفتار اساسی آن و عدم بحث جریان سیال در رابطه با مسائل اقتصادی و مقرون به صرفه بودن آن است.

#### ۱-۴- یک برنامه CFD چگونه کار می کند؟

ساختار برنامه های CFD روش عددی است، به طوری که مسائل جریان سیال با استفاده از این روش قابل حل می باشند. به منظور فراهم آمدن دسترسی آسان به توان حل آن ها، تمام بسته های نرم افزاری تجاری CFD شامل واسطه های کاربری پیچیده ای جهت ورود پارامترهای مسائل و تحلیل نتایج می باشند. از این رو تمام برنامه ها شامل سه جزء اصلی می باشند:

(i) پیش پردازنده، (ii) حل کننده، (iii) پس پردازنده.

#### ۱-۴-۱- پیش پردازنده

پیش پردازنده عبارت است از ورودی مسئله جریان به یک برنامه CFD با استفاده از یک واسطه عملگر ساده و سپس تبدیل این ورودی به یک شکل مناسب برای استفاده توسط حل کننده. وظایف کاربر در مرحله پیش پردازنده شامل موارد زیر است:

- تعریف هندسه ناحیه مورد نظر: میدان محاسباتی
- تولید شبکه یا تقسیم بخش های کوچک به نواحی کوچک تر، بدون هم پوشانی (روی هم قرار گرفتن) زیر محدوده ها: شبکه (یا مش) سلول ها (یا حجم های کنترل یا عناصر)
- انتخاب مجموعه پدیده های فیزیکی و شیمیایی که باید مدل شوند.
- تعریف خواص سیال

حل یک مسئله جریان (سرعت، فشار، دما و غیره) در گره های داخلی هر سلول صورت می گیرد. دقت مربوط به یک حل CFD از تعداد سلول های موجود در شبکه پیروی می کند. در حالت کلی، تعداد سلول های زیاد دارای دقت حل بهتری می باشند. دقت حل، قیمت، هم چنین سخت افزار محاسباتی مورد نیاز و زمان محاسبه بستگی به ظرافت شبکه دارد. شبکه های مطلوب اغلب غیر یکنواخت می باشند. در جایی که تغییرات از نقطه ای به نقطه دیگر زیاد است، شبکه بندی ریز تر و در نواحی با تغییرات نسبتاً کم، درشت تر است.

#### ۱-۴-۲- حل کننده

چندین روش مجزا برای روش های حل عددی وجود دارد: اختلاف محدود، عناصر محدود و روش های طیفی. سر فصل روش های حل عددی که پایه حل کننده را تشکیل می دهد به شرح زیر است:

- تقریب متغیرهای مجهول جریان، با استفاده از توابع ساده
- گسسته سازی با استفاده از جای گذاری تقریب ها در معادلات حاکم بر جریان و سپس انجام تغییرات ریاضی
- حل معادلات جبری

تفاوت های اصلی میان سه روش وجود دارد. این تفاوت ها به روشی که در آن متغیرهای جریان تقریب می خورد و فرآیند گسسته سازی صورت می گیرد، مربوط می شوند.

۱-۴-۲-۱- روش های اختلاف محدود: روش های اختلاف محدود، یکی از روش های عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل است که مجهولات  $\emptyset$  مسئله جریان را با استفاده از همسایه های هر نقطه در نقاط گره مربوط به شبکه خطوط مختصات تعیین می کنند. اغلب از بسط های سری تیلور منقطع برای به دست آوردن تقریب های اختلاف محدود مشتقات  $\emptyset$  در عبارات همسایه های نقطه  $\emptyset$  در هر گره شبکه و در همسایه های آن استفاده می شود. بنابراین مشتقات ظاهر شده در معادلات حاکم توسط اختلاف محدود جایگذاری شده و یک معادله جبری برای مقادیر  $\emptyset$  در هر نقطه از شبکه را می دهند. اسمیت [۲] (۱۹۸۵) مفهوم جامعی از تمام جنبه های روش اختلاف محدود ارائه کرد. در این

روش مشتق توابع با تفاضلات معادل آن‌ها تقریب زده می‌شود. به طور مثال مشتق تابع  $f$  بر اساس تعریف به صورت زیر است:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

که در روش تفاضلات محدود یک تقریب مناسب برای این تابع بصورت زیر خواهد بود:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

۱-۴-۲- روش عناصر محدود: که به اختصار FEM نامیده می‌شود، روشی است عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی و نیز حل انتگرال‌ها. اساس کار این روش حذف کامل معادلات دیفرانسیل یا ساده سازی آنها به معادلات دیفرانسیل معمولی، که با روش‌های عددی مثل اویلر حل می‌شوند، می‌باشد. در حل معادلات دیفرانسیل جزئی، مسئله مهم این است که به معادله ساده‌ای که از نظر عددی پایدار است - به این معنا که خطا در داده‌های اولیه و در حین حل آن قدر نباشد که به نتایج نا مفهوم منتهی شود - برسیم. روش‌هایی با مزایا و معایب مختلف برای این امر وجود دارد، که روش اجزاء محدود یکی از بهترین آنهاست. این روش در حل معادلات دیفرانسیل جزئی روی دامنه‌های پیچیده (مانند وسایل نقلیه و لوله‌های انتقال نفت)، یا هنگامی که دامنه متغیر است، یا وقتی که دقت بالا در همه جای دامنه الزامی نیست و یا اگر نتایج همبستگی و یکنواختی کافی را ندارند، بسیار مفید می‌باشد.

در روش‌های عناصر محدود از توابع تکه ای ساده (خطی یا درجه دوم) که برای عناصر ارزش داشته باشد، به منظور شرح تغییرات محلی متغیرهای مجهول جریان  $\emptyset$ ، استفاده می‌شود. معادلات حاکم با استفاده از حل دقیق  $\emptyset$  کاملاً ارضاء می‌شوند. اگر توابع تقریب تکه ای برای  $\emptyset$ ، در معادله جایگذاری شوند، معادله دقیقاً ارضاء نخواهد شد و یک باقی مانده برای اندازه گیری خطاها تعریف می‌شود. سپس باقی مانده‌ها (و در نتیجه خطاها) در برخی جهات توسط ضرب آنها در یک مجموعه ای از توابع وزنی و انتگرال گیری، به حداقل می‌رسند. در نتیجه ما یک مجموعه ای از معادلات جبری برای ضرایب



مجهول توابع تقریب به دست می آوریم. تئوری عناصر محدود اولین بار برای تحلیل تنش سازه ای بیان شد. از جمله کارهای استاندارد ارائه شده برای کاربرد عناصر محدود در سیالات می توان زینکوویچ [۳] و تیلور [۴] (۱۹۹۱) را نام برد.

۱-۴-۲-۳- روش های طیفی: روش های طیفی فوریه برای حل دقیق معادلات دیفرانسیل پاره ای تحت دامنه های تناوبی در بعد مکان مورد استفاده قرار می گیرد. این روش ها با تبدیل و انتقال سریع مقادیر (گسسته) توابع از فضای فیزیکی مسئله داده شده به فضای فوریه، انجام آسان و سریع پردازش های مورد نیاز در آن جا، و سپس، تبدیل سریع و معکوس فوریه به فضای فیزیکی اجراء می گردد.

روش های طیفی مجهولات را با استفاده از سری های قطع شده فوریه یا سری های چند جمله ای چپی شف تقریب می زنند. برخلاف روش اختلاف محدود یا عناصر محدود، تقریب ها محلی نیستند و برای تمام ناحیه محاسباتی معتبر می باشند. در این روش، مجهولات در معادله حاکم حاصل از سری های قطع شده جایگذاری می شوند. تغییراتی که منجر به معادلات جبری برای ضرایب سری های فوریه و چپی شف می شود در حقیقت همان مفاهیم باقیمانده های وزنی (متعادل کننده) در روش عناصر محدود و یا توابع تقریبی منطبق بر حل دقیق در تعدادی از نقاط شبکه را نتیجه می دهد. اطلاعات تخصصی بیشتر در زمینه این روش را می توان در اورزاگ و گوت لیب [۵] (۱۹۷۷) پیدا کرد.

۱-۴-۲-۴- روش حجم محدود: روش حجم محدود ابتدا به عنوان یک فرمول بندی اختلاف محدود ویژه توسعه یافت. الگوریتم های عددی شامل مراحل زیر می باشند:

- انتگرال کلی معادلات حاکم جریان سیال روی تمام (یا قسمت محدود) حجم های کنترل مربوط به میدان حل
- گسسته سازی، شامل جایگذاری نوعی از تقریب های اختلاف محدود برای عبارت های داخل معادله انتگرالی می باشد که فرآیندهای جریان مثل انتقال، پخش و چشمه ها را نشان می دهد. این عمل، معادلات انتگرالی را به یک سیستم معادلات جبری تبدیل می کند.
- حل معادلات جبری با استفاده از یک روش تکرار.

## ۱-۴-۳- پس پردازنده

مانند پیش پردازنده، اخیراً مقدار زیادی از کار در محیط پس پردازنده صورت می گیرد. به دلیل افزایش تنوع نیازهای مهندسی، بسیاری از آن ها دارای توانایی های ترسیمی بالایی هستند. راهنمای بسته های CFD در حال حاضر با ابزارهای مجسم سازی مجهز شده اند که عبارتند از:

- نمایش میدان هندسی و شبکه
- ترسیمات بردار
- ترسیمات خط و سایه هم تراز
- ترسیمات سطح دو بعدی و سه بعدی
- مسیر حرکت ذره

قبل از تنظیم و اجراء یک شبیه سازی CFD یک مرحله از معرفی و فرمول بندی مسئله جریان، مرحله‌ای شامل پدیده های فیزیکی و شیمیایی وجود دارد که باید مورد بررسی قرار گیرد. نمونه ای از تصمیمات که لازم است اتخاذ گردد عبارت است از این که آیا یک مسئله دو بعدی یا سه بعدی است، در نظر نگرفتن اثرات محدود تغییرات فشار و دما روی چگالی جریان هوا، انتخاب معادلات جریان آشفته و یا چشم پوشی از اثرات حباب های ریز هوای محلول در آب.

فهم مناسب الگوریتم حل عددی نیز یک مسئله مهم است. سه ایده ریاضی در مشخص کردن کارایی یا عدم کارایی هر یک از الگوریتم ها مفید است که عبارتند از: همگرایی<sup>۱</sup>، سازگاری<sup>۲</sup> و پایداری<sup>۳</sup>. همگرایی خاصیتی از روش عددی برای به دست آوردن جوابی است که به حل دقیق نزدیک می باشد وقتی که فاصله شبکه، اندازه حجم کنترل یا المان به صفر میل می کند. طرح های عددی سازگار، دستگاهی از معاملات جبری را ایجاد می کنند که می توان نشان داد با معادله حاکم اصلی زمانی که فاصله شبکه به

---

<sup>۱</sup>-Convergence  
<sup>۲</sup>-Consistency  
<sup>۳</sup>-Stability

سمت صفر میل می کند، معادل می باشد. پایداری در روش عددی با میرایی خطاها همراه می باشد. یک روش عددی در صورتی پایدار است که خطای ناشی از حل معادله تفاضل محدود بزرگ نشود. پاتانکار<sup>۱</sup> [۶] (۱۹۸۰) قوانینی را بیان کرده است که طبق آن طرح های وسیعی از محاسبه حجم محدود را در اختیار ما قرار می دهد. در اینجا سه خاصیت بارز این روش ها را بیان می نماییم. بقاء<sup>۲</sup>، محدودیت<sup>۳</sup>، انتقال<sup>۴</sup>. از دیدگاه حجم محدود، بقاء محلی، هر خاصیت از سیال مانند  $\emptyset$  را برای هر حجم کنترل تضمین می کند. طرح های عددی دارای خاصیت بقاء نیز بقاء عمومی خواص سیال را برای تمام ناحیه تضمین می کنند. اهمیت این مسئله از نظر فیزیکی کاملاً آشکار می باشد، لذا به وسیله عوامل مشخص کننده ای برای شارهای  $\emptyset$  عبوری از وجوه سلول حجم های کنترل مجاور به دست آمده است. خاصیت محدودیت، از نوع پایداری بوده و لازم است که در مسائل خطی بدون چشمه، حل مسائل به وسیله مرزهای مقادیر حداکثر و حداقل متغیرهای جریان مسئله محدود گردد.

یک CFD خوب شامل تعادل بین حل دقیق و پایداری جواب می باشد. کاربر به یک ارزیابی دقیق از «بقاء»، «محدودیت» و «انتقال» که به وسیله برنامه CFD ساده شده است، نیاز دارد.

محاسبه CFD احتیاج به مهارت های استفاده کننده نیز دارد. تعیین هندسه میدان و طراحی شبکه، وظیفه اصلی در وهله اول می باشد که منجر به شبیه سازی مناسبی برای کاربر می گردد. دو وجهی که این نتایج را می دهند عبارتند از هم گرایی فرآیند تکرار و استقلال شبکه. الگوریتم حل به صورت طبیعی تکراری است و در یک حل همگرا باقی مانده ها (مقادیر کلی بقا خواص میدان) خیلی کوچک هستند. حل همگرا می تواند با یک انتخاب مناسب و تنظیم ضرایب مختلف صورت گیرد. هیچ روش مناسبی برای به دست آوردن این انتخاب ها که وابسته به مسائل هستند، وجود ندارد. بهبود سرعت حل نیز نیاز به تجربه زیاد کار با برنامه دارد، که می تواند با تکرار تأمین گردد. راهی جهت تخمین خطای حاصل از طراحی شبکه نامناسب برای جریان عمومی معرفی نشده است. طرح اولیه خوب برای شبکه،

<sup>۱</sup> -Patankar

<sup>۲</sup> -Conservativeness

<sup>۳</sup> -boundedness

<sup>۴</sup> -Transportiveness

نیاز به اطلاع از خواص جریان دارد. یک شناخت اولیه از دینامیک سیال در یک مسئله خاص به خوبی می تواند به کاربر کمک کند و تجربه شبکه بندی مربوط به مسائل مشابه نیز با ارزش است. تنها راه حذف خطاهای ناشی از درستی شبکه، انجام مطالعات مربوط به شبکه است که عبارتند از بهبود اولیه یک شبکه درشت تا رسیدن به مرحله ای که نتایج کلیدی تغییر نکنند، آن گاه شبیه سازی مستقل از شبکه خواهد بود. الگوهای خطا را فقط می توان براساس اطلاعات دقیق از الگوریتم ها حدس زد. در پایان شبیه سازی، استفاده کننده باید خود قضاوت کند که آیا نتایج تا حد کافی قابل قبول هستند یاخیر. تشخیص اعتبار مدل های فیزیکی و شیمیایی بسته به پیچیدگی مسئله CFD و یا دقت نتایج نهایی آن به هر دلیل، جز مقایسه با نتایج علمی، غیر ممکن می باشد. هر کاربری که می خواهد از CFD به طور جدی استفاده کند باید بداند که این روش نمی تواند جایگزین آزمایش گردد ولی یک ابزار پر قدرت برای حل مسائل است. بررسی اعتبار CFD نیازمند اطلاعات بالا در جزئیات مربوط به شرایط مرزی مسئله و به دست آوردن حجم بالایی از نتایج است. برای بررسی اعتبار از یک راه معنی دار ضروری است که داده های تجربی در یک میدان متشابه بدست آیند. این امر ممکن است مستلزم طرح اندازه گیری های سرعت جریان باشد. به هر حال اگر در جایی آزمایشگاه دقیق نبوده و یا به راحتی در دسترس نباشد، اندازه گیری های فشار استاتیکی یا درجه حرارت را با لوله کاوشگر استاتیک می توان کامل کرد که برای بررسی اعتبار گزارش های موجود در مسائل بزرگ، در برخی از جنبه های میدان جریان مفید است.

در مواردی ممکن است هیچ گونه تسهیلاتی جهت آزمایش در دسترس نباشد. در چنین مواردی استفاده کننده از CFD بر موارد زیر تکیه می کند: آزمایش قبلی، مقایسه بین حل تحلیلی جریان های مشابه ولی ساده تر، مقایسه داده های با کیفیت بالا. محاسبه CFD مستلزم ایجاد دستگاهی از اعداد است که یک تقریب خوب از یک سیستم واقعی را تشکیل می دهد. یکی از امتیازات CFD آن است که استفاده کننده تقریباً انتخاب های نامحدودی از سطح جزئیات نتایج دارد.

هدف این است که مبانی مورد نیاز برای یک شبیه سازی خوب از جریان های سیال به وسیله روش حجم محدود را ارائه دهیم. ابتدا، در زمینه مبانی جریان های سیال در حالت دو بعدی بحث می کنیم. بحث با مشتق گیری از معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر جریان های سیال در دستگاه مختصات دکارتی آغاز می گردد. تلاش داریم که معادلات بقاء را عمومیت بخشیده و به معادله ای برسیم که معادله حمل نام دارد و یک شکل اولیه برای توسعه الگوریتم های عددی که بعداً مورد بحث قرار خواهند گرفت، می باشد. به علاوه به شرایط کمکی لازم برای ساده سازی مسائل، از نمای عمومی نظری می اندازیم و یک سری شرایط مرزی و تعدادی از نتایج بدست آمده را که در عمل برای CFD مفید بوده است پوشش می دهیم.

## فصل دوم

# معادلات حاکم بر جریان سیال و انتقال حرارت

## ۱-۲- معادلات حاکم بر جریان سیال و انتقال حرارت

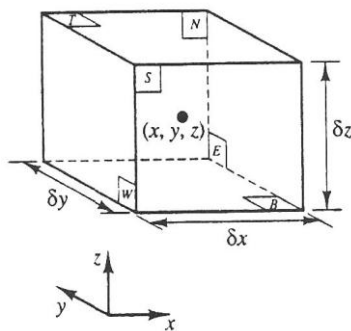
معادلات حاکم بر جریان سیال بیانگر قوانین فیزیکی بقاء به صورت عبارات ریاضی می باشد که برخی از

این قوانین عبارتند از:

- جرم سیال همواره ثابت می باشد.
- نرخ تغییر اندازه حرکت با برآیند نیروهای وارد روی ذره سیال برابر است. (قانون دوم نیوتن)
- نرخ تغییر انرژی با مجموع نرخ افزایش حرارت سیستم و نرخ کار انجام شده روی ذره سیال برابر است. (قانون اول ترمودینامیک)

سیال به صورت پیوسته در نظر گرفته می شود. برای تحلیل جریان سیال در مقیاس طولی میکروسکوپی (برای طول های  $1\ \mu\text{m}$  و بیشتر) ساختار مولکولی مواد و حرکت مولکولی ممکن است نادیده گرفته شود. در اینجا رفتار سیال را در قالب عبارات بیان کننده خواص ماکروسکوپی مانند سرعت، فشار، چگالی، درجه حرارت و مشتقات زمانی و مکانی آن ها بررسی و توصیف می نماییم. این را می توان به صورت میانگین روی تعداد زیادی از مولکول ها در نظر گرفت. یک ذره سیال یا نقطه ای در درون سیال، کوچک ترین المان ممکن سیال است که خواص ماکروسکوپی آن به وسیله سایر مولکول ها تحت تأثیر قرار نمی گیرد.

در اینجا یک المان سیال با ابعاد  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  را در نظر می گیریم. (شکل ۱-۲)



شکل ۱-۲- المان سیال مربوط به قوانین بقاء

و جوه شش گانه المان را با حروف N, S, E, W, T, B به ترتیب برای شمال، جنوب، شرق، غرب، بالا و

پائین نام گذاری می نماییم.

تمامی خواص سیال توابعی از مکان و زمان هستند، لذا نیاز داریم که کلیه خواص سیال مانند چگالی، فشار، دما و تابع برداری سرعت را به صورت  $T(x,y,z,t)$ ,  $P(x,y,z,t)$ ,  $\rho(x,y,z,t)$  و  $u(x,y,z,t)$  بنویسیم. برای راحتی کار از نوشتن عبارات داخل پرانتز صرف نظر می کنیم. برای مثال چگالی در مرکز المان سیال  $(x, y, z)$  در زمان  $t$  توسط  $\rho$  نشان داده شده است و مشتق فشار نسبت به  $x$  در زمان  $t$  با  $\frac{\partial p}{\partial x}$  نشان داده می شود. این کار برای سایر خواص سیال قابل فرض است.

المان فرض شده به اندازه کافی کوچک است که بتوان خواص سیال در وجوه مکعب را با دقت بالایی به وسیله دو جمله اول بسط تیلور محاسبه نمود. برای مثال، فشار در وجوه  $W, E$  که هر دوی این وجوه به فاصله  $\frac{1}{2}\partial x$  از مرکز المان هستند می تواند به صورت زیر محاسبه گردد:

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \partial x \quad \text{و} \quad p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \partial x$$

### ۲-۱-۱- بقای جرم در حالت سه بعدی

گام نخست برای مشتق گیری از معادله بقاء جرم، نوشتن تعادل جرم برای المان سیال می باشد.

نرخ خالص جریان جرم ورودی به المان سیال = نرخ افزایش جرم در المان سیال

نرخ افزایش جرم در المان سیال عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} (\delta x \delta y \delta z) \quad (1-2)$$

سپس برای محاسبه نرخ جریان سیال عبوری از وجوه المان که توسط تولید چگالی داده شده است، به سطح و مؤلفه عمود بر سطح سرعت نیاز داریم. از شکل (۲-۲) ملاحظه می گردد که نرخ خالص جریان جرمی ورودی به داخل المان از مرزهای عرضی آن توسط رابطه زیر داده می شود:

$$\begin{aligned} & \left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z \\ & + \left( \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z - \left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left( \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y - \\ & \left( \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \end{aligned} \quad (2-2)$$



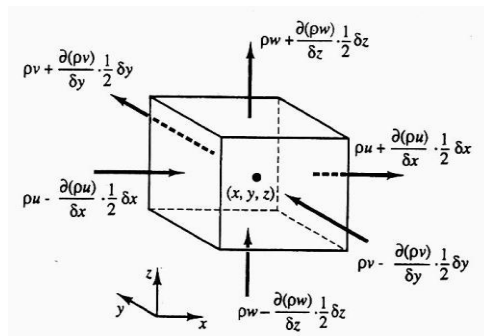
جریان هایی که به داخل المان وارد و باعث تولید و افزایش جرم در المان می شوند با علامت مثبت و جریان هایی که المان را ترک می کنند با علامت منفی نشان داده می شود.

نرخ افزایش جرم در داخل المان (۱-۲) بدین ترتیب با نرخ خالص جریان جرمی عبوری از وجوه آن (۲-۲) برابر است. تمام جملات هم علامت حاصل از تعادل جرم در سمت چپ مرتب گردیده و با تقسیم بر حجم المان ( $\delta x \delta y \delta z$ ) به صورت زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = \cdot \quad (۳-۲)$$

یا در حالت برداری به طور خلاصه داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = \cdot \quad (۴-۲)$$



شکل ۲-۲- جریان های جرمی ورودی و خروجی از المان سیال

معادله (۴-۲) رابطه غیر دائمی بقاء جرم در حالت سه بعدی یا معادله پیوستگی در یک نقطه از یک سیال قابل تراکم است. جمله اول در سمت چپ، نرخ تغییرات چگالی در واحد زمان (جرم واحد حجم) می باشد. جمله دوم بیانگر جریان جرمی خالص خروجی از مرزهای المان به بیرون است، که عبارت انتقال نامیده می شود. برای سیالات غیر قابل تراکم (به عنوان مثال مایعات) چگالی  $\rho$  ثابت بوده و معادله (۴-۲) به صورت زیر در می آید:

$$\text{div } \mathbf{u} = \cdot \quad (۵-۲)$$

یا به صورت بازتر می توان نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (۶-۲)$$

## ۲-۱-۲- نرخ های تغییر مربوط به یک ذره سیال و یک المان سیال

قوانین بقاء اندازه حرکت و انرژی جملاتی را پدید می آورند که تغییرات خواص مربوط به یک ذره سیال در آن بیان شده است. هر خاصیت در ذره تابعی است از موقعیت مکانی  $(x, y, z)$  ذره و زمان  $t$ . مقدار هر خاصیت در واحد جرم با  $\phi$  نشان داده می شود. مشتق  $\phi$  نسبت به زمان بصورت  $D\phi/Dt$  نوشته می شود که عبارت است از:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

از آنجا که یک ذره سیال از جریان تبعیت می کند، لذا داریم:  $dx/dt=u, dz/dt=w, dy/dt=v$ ، بنابراین مشتق کلی  $\phi$  را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\phi \quad (۷-۲)$$

$D\phi/Dt$  بیانگر نرخ تغییرات خاصیت  $\phi$  در واحد جرم است. معادلات را همانند معادله بقاء جرم توسعه داده و تغییرات آن ها را در واحد حجم به دست می آوریم. نرخ تغییرات خاصیت  $\phi$  در واحد حجم برای یک ذره سیال به صورت حاصل ضرب  $D\phi/Dt$  در  $\rho$  می باشد. بنابراین:

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\phi \right) \quad (۸-۲)$$

مفید ترین شکل قوانین بقاء برای محاسبه جریان سیال با تغییرات خاصیت جریان برای المانی که در فضا ساکن است، در نظر گرفته شده است. حال رابطه، بین مشتق  $\phi$  که مربوط به یک ذره سیال می باشد و نرخ تغییر  $\phi$  برای یک المان سیال توسعه یافته است. معادله بقاء جرم، شامل مقدار جرم بر واحد حجم (یعنی چگالی) به عنوان یک کمیت بقاء می باشد. مجموع نرخ تغییرات چگالی و عبارت انتقال در معادله بقاء جرم (۴-۲) برای یک المان سیال عبارت است از:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u})$$

حالت عمومی این عبارت برای یک خاصیت بقائی اختیاری، عبارت است:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) \quad (9-2)$$

رابطه (9-2) بیان گر نرخ تغییرات  $\phi$  در واحد حجم به اضافه جریان خالص  $\phi$  خروجی از المان سیال در واحد حجم می باشد.

اکنون برای نشان دادن ارتباط آن با مشتق  $\phi$  رابطه را به صورت زیر بازنویسی می نماییم:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \rho \left[ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\phi \right] + \phi \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) \right] = \rho \frac{D\phi}{Dt} \quad (10-2)$$

با توجه به بقاء جرم مشخص است که مقدار  $\phi \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) \right]$  برابر صفر است. به عبارت دیگر رابطه (10-2) بیان می کند که:

$$\begin{aligned} & \text{نرخ خالص جریان } \phi \text{ خروجی از المان سیال} + \text{نرخ افزایش } \phi \text{ برای المان سیال} \\ & = \text{افزایش } \phi \text{ برای یک ذره سیال} \end{aligned}$$

برای ساختن سه مؤلفه معادله اندازه حرکت و معادله انرژی، ورودی های مناسب برای  $\phi$  ها و نرخ تغییرات آن ها در واحد حجم تعریف شده در روابط (8-2) و (10-2) می تواند به صورت زیر باشد:

جدول 1-2- پارامترهای معادله حاکم بر سیالات

ممنتوم x-	u	$\rho \frac{Du}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \mathbf{u})$
ممنتوم y-	v	$\rho \frac{Dv}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \mathbf{u})$
ممنتوم z-	w	$\rho \frac{Dw}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \mathbf{u})$
انرژی	E	$\rho \frac{DE}{Dt}$	$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E \mathbf{u})$

هر دو شکل بقایی و غیر بقایی نرخ تغییرات می تواند به صورت متناوب برای بیان کمیات فیزیکی مورد استفاده قرار گیرد.

## ۲-۱-۳- معادله اندازه حرکت در حالت سه بعدی

قانون دوم نیوتن بیان می کند که نرخ تغییر اندازه حرکت یک ذره سیال برابر با برآیند نیروهای وارد شده بر ذره است.

برآیند نیروهای مؤثر بر ذره سیال = نرخ افزایش اندازه حرکت ذره سیال

نرخ افزایش اندازه حرکت در جهات سه گانه  $x$  - و  $y$  - و  $z$  - در واحد حجم ذره سیال به صورت زیر داده شده است:

$$\rho \frac{Du}{Dt} \quad \rho \frac{Dv}{Dt} \quad \rho \frac{Dw}{Dt} \quad (2-11)$$

حال دو نوع از نیروهایی که بر ذره سیال وارد می شود مشخص می نماییم:

- نیروهای سطحی
- نیروهای فشاری
- نیروهای لزج
- نیروهای بدنه ای
- نیروهای گرانشی
- نیروهای گریز از مرکز
- نیروی کریولیس
- نیروهای الکترومغناطیسی

نمایش نیروهای سطحی به صورت جملات جداگانه در معادله اندازه حرکت، برای نشان دادن نقش آن ها و نیز وارد کردن اثرات نیروهای بدنه به صورت عبارت های چشمه، امر رایجی است.

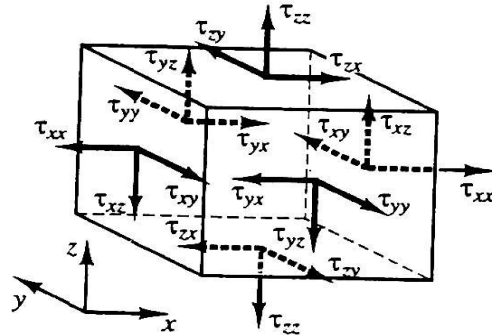
حالت تنش یک المان سیال در عبارت های مربوط به فشار بیان می شود و مؤلفه های نه گانه تنش لزجت در شکل (۲-۳) نشان داده شده است. فشار، که یک تنش عمودی است، با  $p$  نشان داده می شود.

تنش های لزج با  $\tau$  نشان داده شده است. عبارت رایج  $\tau_{ij}$  به منظور بیان جهت تنش های برشی به کار رفته است. پانویس های  $i$  و  $j$  در  $\tau_{ij}$  بیانگر آن هستند که مؤلفه تنش در جهت  $j$  و روی صفحه ای عمود

بر جهت  $i$  عمل می نماید. ابتدا مؤلفه های نیروهای ناشی از فشار  $P$  و مؤلفه های تنش  $\tau_{zx}$ ،  $\tau_{yx}$ ،  $\tau_{xx}$  که

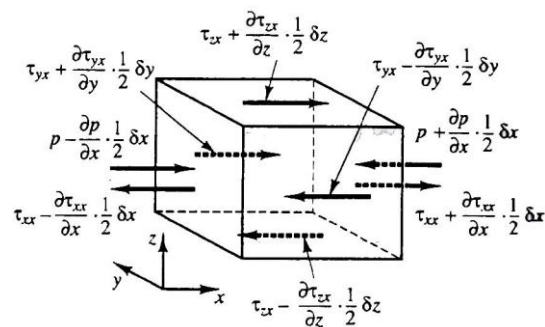
در شکل (۲-۴) نشان داده شده اند، در نظر می گیریم. اندازه نیروی حاصل از تنش سطحی عبارت است از

حاصل ضرب تنش در اندازه سطح. نیروهایی که در جهت مثبت محورهای مختصات هستند علامت مثبت و نیروهایی که در جهت مخالف می باشند علامت منفی می گیرند.



شکل ۲-۳- مؤلفه های تنش روی المان سیال

نیروی خالص در جهت X برابر است با برآیند مؤلفه های نیروهایی که در همان جهت روی المان سیال عمل می کنند.



شکل ۲-۴- مؤلفه های تنش در جهت X

روی دو وجه (E, W) داریم:

(۱۲-۲ a)

$$\left[ \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z + \left[ - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = \left( - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z$$

همچنین نیروی خالص در جهت X بر روی دو وجه (N, S) عبارت است از:

$$- \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (12-2 b)$$

در نهایت نیروی خالص در جهت X بر روی دو وجه (B, T) را به صورت زیر می توان نشان داد:

$$-\left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z\right) \delta x \delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z\right) \delta x \delta y = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (12-2 \text{ c})$$

نیروی کل در واحد حجم روی سیال، که ناشی از تنش های سطحی می باشد، از تقسیم مجموع روابط (12-2 a)، (12-2 b) و (12-2 c) بر  $\delta x \delta y \delta z$  به دست می آید:

$$\frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (13-2)$$

بدون در نظر گرفتن جزئیات دقیق نیروهای بدنه، تأثیر کلی این نیروها را می توان به صورت یک چشمه  $S_{Mx}$  برای اندازه حرکت در جهت X در واحد حجم و واحد زمان در نظر گرفت.

مؤلفه X معادله اندازه حرکت، با مساوی قرار دادن نرخ تغییرات اندازه حرکت ذره سیال (2-11) با نیروی کلی در جهت X ناشی از تنش سطحی (2-13) به علاوه نرخ افزایش اندازه حرکت ناشی از چشمه ها به دست آید.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p+\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx} \quad (14-2 \text{ a})$$

و بدین طریق خیلی مشکل نیست که بگوئیم مؤلفه Y معادله اندازه حرکت نیز می تواند بصورت زیر باشد:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial(-p+\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{My} \quad (14-2 \text{ b})$$

و مؤلفه Z معادله اندازه حرکت عبارت است از:

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial(-p+\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + S_{Mz} \quad (14-2 \text{ c})$$

علامت فشار مخالف علامت تنش عمودی لزج می باشد، زیرا طبق قرار داد برای تنش کششی عمودی علامت مثبت در نظر می گیرند و در نتیجه فشار ناشی از تنش عمودی تراکمی علامت منفی خواهد داشت. تأثیرات تنش های سطحی برای تصریح عبارت های چشمه  $S_{Mz}$ ,  $S_{My}$ ,  $S_{Mx}$  در روابط (14-2 a - c) که فقط ناشی از اثرات نیروهای بدنه می باشد، در نظر گرفته شده است. به طور مثال نیروی بدنه ناشی از گرانش با استفاده از  $S_{Mx}=0$ ,  $S_{Mz}=-\rho g$ ,  $S_{My}=0$  مدل می شود.

## ۲-۲- معادلات حالت

حرکت سیال در جهت های سه گانه توسط یک دستگاه شامل پنج معادله دیفرانسیل جزئی بیان می گردد که عبارتند از: معادله بقاء جرم، معادله اندازه حرکت در جهات  $x, y, z$  (a-c ۲-۱۴) و معادله انرژی. در میان مجهولات چهار متغیر ترمودینامیکی  $\rho, P, i$  و  $T$  به چشم می خورد. در این بحث مختصر رابطه بین این چهار متغیر را مورد بررسی قرار می دهیم. ارتباط بین متغیرهای ترمودینامیکی می تواند با استفاده از فرض تعادل ترمودینامیکی به دست آید. سرعت سیال ممکن است زیاد باشد، ولی معمولاً به اندازه کافی کوچک است، به طوری که وقتی خواص ذره سیال از مکانی به مکان دیگر با سرعت تغییر می کند، سیال می تواند از نظر ترمودینامیکی سریعاً خود را با شرایط جدید سازگار کند، طوری که تغییرات به طور مؤثر هم زمان باشد، بنابراین سیال همواره در تعادل ترمودینامیکی می باشد. تنها استثناءها جریان های مشخصی با موج های ضربه ای قوی می باشند، اما حتی بعضی از آنها نیز اغلب با فرض های تعادل مناسبی تقریب زده می شوند.

می توانیم حالت یک ماده را در تعادل ترمودینامیکی با استفاده از حداقل دو متغیر حالت بیان کنیم. معادلات حالت، متغیرهای دیگر را با این دو متغیر مرتبط می سازند. اگر ما از  $\rho$  و  $T$  به عنوان متغیرهای حالت استفاده کنیم، معادلات حالت برای فشار  $P$  و انرژی داخلی مخصوص  $i$  بصورت زیر به دست می آید:

$$i = i(\rho, T) \quad p = p(\rho, T) \quad (۱۵-۲)$$

برای یک گاز کامل روابط معروف زیر می توانند مفید باشند:

$$\rho = PRT \quad i = CT \quad (۱۶-۲)$$

در جریان سیالات قابل تراکم، معادلات حالت رابطه ای را بین معادله انرژی در یک طرف و بقاء جرم و معادله اندازه حرکت در طرف دیگر بوجود می آورد. این ارتباط از طریق امکان تغییرات چگالی که در نتیجه تغییرات فشار و دما در میدان جریان به وجود می آید، برقرار می شود.

مایعات و گازها در سرعت های پایین از روابط سیالات غیر قابل تراکم پیروی می نمایند. بدون تغییرات چگالی هیچ ارتباطی بین معادله انرژی و بقاء جرم و معادله اندازه حرکت به وجود نخواهد آمد. میدان

جریان می تواند تنها با توجه به بقاء انرژی و معادله اندازه حرکت حل گردد ولی برای حل معادله انرژی اگر مسأله انتقال حرارت داشته باشیم به معادلات دیگری در کنار آن نیاز داریم.

### ۲-۳- صورت های دیفرانسیلی و انتگرالی معادلات کلی انتقال

وجه اشتراک زیادی بین معادلات مختلف وجود دارد. اگر شکل بقاء تمامی معادلات جریان سیال از جمله معادلات مربوط به کمیت های مقیاسی مانند درجه حرارت، تمرکز آلودگی و غیره را با متغیر کلی  $\phi$  معرفی نماییم، می توان آن را به صورت مفید به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma\text{grad}\phi) + S_\phi \quad (17-2)$$

به عبارت دیگر:

$$= \text{نرخ افزایش } \phi \text{ ناشی از چشمه ها} + \text{نرخ افزایش } \phi \text{ ناشی از پخش}$$

$$\text{نرخ خالص جریان } \phi \text{ خروجی از المان} + \text{نرخ افزایش } \phi \text{ در المان سیال}$$

معادله (۱۷-۲) معادله حمل خاصیت  $\phi$  نامیده می شود و به روشنی فرآیند های مختلف حمل را بیان می کند: عبارت نرخ تغییر و عبارت انتقال در سمت چپ رابطه و عبارت پخش (ضریب پخش  $\Gamma$ ) و عبارت چشمه به ترتیب در سمت راست رابطه قرار دارد. برای استخراج رفتار عمومی این رابطه، باید عباراتی را که بیانگر چشمه بوده و در معادلات سهیم نشده اند حذف کنیم. توجه داشته باشید که می توان با تبدیل  $\mathbf{i}$  به  $\mathbf{T}$  با استفاده از یک معادله حالت، رابطه (۱۷-۲) را طوری تغییر داد که برای معادله انرژی داخلی نیز به کار رود.

معادله (۱۷-۲) به عنوان نقطه آغاز برای روش های محاسباتی در روش حجم محدود به حساب می آید. با قرار دادن  $\phi$  برابر با  $u, v, w, l$  و  $i$  (یا  $h_0$ ) و انتخاب مقادیر مناسب برای ضریب پخش ( $\Gamma$ ) و عبارت های چشمه، شکل های ویژه ای برای هر یک از معادلات دیفرانسیلی جزئی جرم، اندازه حرکت و بقاء انرژی به دست می آید. قدم کلیدی روش حجم محدود، عبارت است از انتگرال گیری رابطه (۱۷-۲) روی حجم کنترل سه بعدی که به صورت زیر می باشد:



$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dv + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\mathbf{u})dv = \int_{CV} \text{div}(\Gamma\text{grad}\phi)dv + \int_{CV} S_\phi dv \quad (18-2)$$

انتگرال های حجم در جمله دوم سمت چپ، عبارت انتقال و جمله نخست سمت راست عبارت پخش است، که با انتگرال گیری روی تمام سطح مرزی حجم کنترل با استفاده از قضیه دیورژانس-گوس<sup>۱</sup> بازنویسی می گردد. برای بردار  $\mathbf{a}$  این قضیه نشان می دهد:

$$\int_{CV} \text{div} \mathbf{a} dv = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA \quad (19-2)$$

تعبیر فیزیکی  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$  عبارت است از مؤلفه بردار  $\mathbf{a}$  در جهت بردار  $\mathbf{n}$  که عمود بر سطح المان  $dA$  می باشد. بنابراین انتگرال دیورژانس بردار  $\mathbf{a}$  روی یک حجم کنترل برابر است با مؤلفه  $\mathbf{a}$  در جهت عمود بر سطحی که محدود به حجم جمع شده (انتگرال گیری شده) روی تمام سطح مرزی  $A$  می باشد. با به کار بردن قضیه دیورژانس-گوس می توان رابطه (۱۸-۲) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} \rho\phi dv \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad}\phi) dA + \int_{CV} S_\phi dv \quad (20-2)$$

جمله اول سمت چپ نرخ تغییر مقدار کل خاصیت  $\phi$  سیال در حجم کنترل را نشان می دهد. حاصلضرب  $\mathbf{n} \cdot (\rho\phi\mathbf{u})$  بیانگر مؤلفه شار خاصیت  $\phi$  ناشی از جریان سیال در جهت بردار عمود بیرونی  $\mathbf{n}$  است. بنابراین جمله دوم سمت چپ (۲۰-۲) یعنی جمله انتقال، بیانگر نرخ کاهش خاصیت  $\phi$  المان سیال به دلیل جابجائی می باشد.

شار پخش در جهت گرادیان منفی خاصیت  $\phi$ ، مثبت است، یعنی در جهت  $-\text{grad}\phi$  برای نمونه، حرارت در جهت منفی گرادیان دما هدایت می یابد. بنابراین حاصل ضرب  $\mathbf{n} \cdot (-\Gamma\text{grad}\phi)$  مؤلفه شار پخش در راستای بردار نرمال بیرونی بوده و به طرف بیرون المان است. به طور مشابه حاصل ضرب  $\mathbf{n} \cdot (\Gamma\text{grad}\phi)$  که برابر  $\Gamma(-\mathbf{n} \cdot (-\text{grad}\phi))$  می باشد، می تواند به صورت شار پخش مثبت در جهت بردار نرمال داخلی  $(-\mathbf{n})$  یا به عبارت دیگر به داخل المان سیال بیان گردد. جمله نخست سمت راست رابطه (۲۰-۲)، جمله پخش است، لذا با یک شار به طرف داخل المان همراه بوده و برای بیان نرخ خالص افزایش خاصیت  $\phi$

<sup>۱</sup> -Gauss Diergence Theorem

ناشی از پخش در المان سیال، به کار می رود. جمله پایانی سمت راست این معادله نرخ افزایش خاصیت  $\Phi$  را به صورت چشمه های داخل المان سیال به ما می دهد.

به عبارت دیگر رابطه (۲-۲۰) برای سیال داخل یک حجم کنترل به صورت زیر می تواند بیان گردد:

$$= \text{نرخ خالص تولید } \Phi + \text{نرخ افزایش } \Phi \text{ به دلیل نفوذ عرض مرزها}$$

$$\text{نرخ خالص کاهش } \Phi \text{ به دلیل جابجایی عرضی مرزها} + \text{نرخ افزایش } \Phi$$

این بحث بیان می کند که انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل جزئی، عبارتی را برای بقاء یک خاصیت سیال در یک حجم کنترل به اندازه محدود (ماکروسکپی) به ما می دهد.

در مسائل حالت دائم، عبارت نرخ تغییر (۲-۲۰) برابر صفر است، که منجر به شکل انتگرالی معادله انتقال دائم می گردد:

$$\int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad} \phi) dA + \int_{CV} S_\phi dv \quad (2-21)$$

در مسائل وابسته به زمان هم چنین لازم است که روی یک فاصله کوتاه  $Dt$  یعنی از  $t$  تا  $t+Dt$  نسبت به زمان  $t$  انتگرال گرفته شود. به طوری که شکل کلی انتگرالی معادله انتقال زیر نتیجه می شود:

$$\int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} (\rho \phi) dv \right) + \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA dt = \int_{\Delta t} \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma_\phi \text{grad} \phi) dA dt + \int_{\Delta t} \int_{CV} S_\phi dv dt \quad (2-22)$$

#### ۲-۴- طبقه بندی رفتار فیزیکی

تا اینجا معادله بقاء جریان های سیال را به دست آورده ایم، اینک زمان آن است که توجه خود را به شرایط اولیه و مرزی معطوف بنماییم، که برای همگامی با معادلات به دست آمده، جهت ارائه یک مدل مناسب ریاضی از جریان سیال مورد نیاز است. ابتدا دو گروه اصلی از رفتارهای فیزیکی را جدا می کنیم:

- مسائل تعادل

- مسائل نفوذ

## مسائل تعادل

مسائل گروه اول دارای حالت دائم هستند، مثل توزیع حالت دائم درجه حرارت در یک میله جامد، توزیع تنش یکسان در یک جسم جامد که تحت یک بار اعمالی قرار دارد و هم چنین خیلی از جریان های دائم سیال. این گونه مسائل و بسیاری از مسائل حالت پایدار با معادلات بیضوی<sup>۱</sup> بررسی می گردند. نمونه بارز معادله بیضوی، معادله لاپلاس می باشد که جریان غیر چرخشی در سیال غیر قابل تراکم و انتقال حرارت هدایتی حالت دائم را بیان می کند. در حالت دو بعدی داریم:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2-23)$$

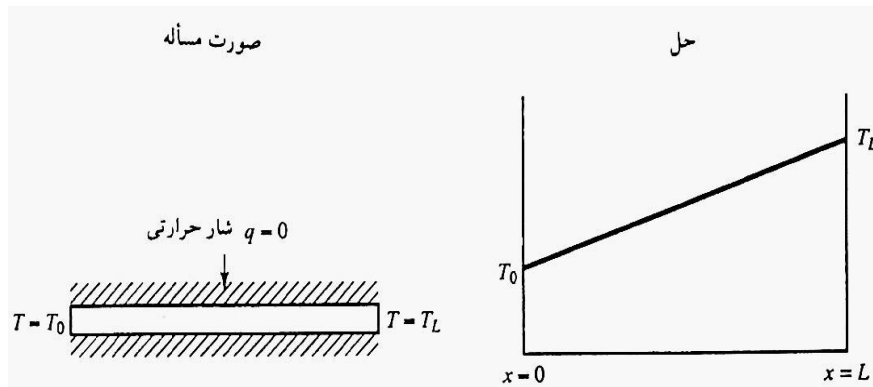
یک مثال خیلی ساده از مسئله تعادل، هدایت حرارت حالت دائم که در معادله (2-23) داریم،  $(\phi = T)$  یک میله فلزی عایق بندی شده است که دو انتهای آن در  $x=0$  و  $x=L$  در دو درجه حرارت ثابت ولی متفاوت  $T_0$  و  $T_L$  می باشد. (شکل 2-5 را ببینید).

این مسأله یک بعدی است و از معادله  $kd^2T/dx^2 = 0$  پیروی می کند. با شرایط مرزی داده شده، توزیع درجه حرارت در جهت  $X$  به شکل خط مستقیم خواهد بود. حل این مسئله و تمام مسائل بیضوی به تنهایی، با استفاده از تعریف متغیرهای وابسته (در اینجا حرارت یا مشتق نرمال آن، و شار حرارتی) روی تمام مرزهای ناحیه حل امکان پذیر است و مسائلی وجود دارند که نیاز به داده هایی روی تمام مرز دارند که « مسائل مقدار مرزی » نامیده می شوند.

شکل مهمی از مسائل بیضوی در جایی است که در آنها یک اغتشاش در داخل حل، برای مثال تغییر درجه حرارت ناشی از بروز ناگهانی چشمه حرارتی کوچک محلی، حل ما را می تواند در هر جای دیگر تغییر دهد. علائم اغتشاش در تمام جهات درون حل حرکت می کند.

---

<sup>۱</sup> -Elliptic equations



شکل ۲-۵- توزیع درجه حرارت حالت دائم در یک میله عایق

در نتیجه حل مسائل فیزیکی که با معادلات بیضوی توصیف می شوند همیشه ساده است، حتی اگر شرایط مرزی ناپیوسته باشند، که یک مزیت قابل توجه برای طراحی روش های عددی می باشد. برای اطمینان از این که اطلاعات در تمامی جهات پخش شده اند، روش های عددی مسائل بیضوی باید اجازه دهند که هر نقطه تحت تأثیر نقاط همسایه قرار گیرد.

## ۲-۵- روش طبقه بندی معادلات دیفرانسیلی جزئی ساده

یک روش عملی طبقه بندی PDE ها برای PDE مرتبه دوم عمومی در دو مختصه  $x, y$  ارائه می شود.

در نظر بگیرید:

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0 \quad (2-24)$$

در ابتدا فرض خواهیم کرد که معادله خطی است و  $a, b, c, d, e, f$  و  $g$  ثابت هستند. طبقه بندی یک PDE به وسیله رفتار بالاترین مرتبه مشتقات حاکم بر آن انجام می شود. طبقه یک PDE مرتبه دوم می تواند به وسیله جستجوی جواب های موج ساده معرفی شود.

اگر این جواب ها وجود داشته باشند، بیانگر یک معادله هذلولی است. در غیر این صورت، معادله سهموی یا بیضوی خواهد بود.

اگر معادله مشخصه (۲-۲۴) دو ریشه حقیقی داشته باشد معادله موج ساده اتفاق می افتد.

$$a \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - b \left( \frac{dy}{dx} \right) + c = 0 \quad (2-25)$$

- چنانچه  $b^2 - 4ac > 0$  معادله از نوع هذلولوی بوده و دو مشخصه واقعی دارد.
- چنانچه  $b^2 - 4ac = 0$  معادله از نوع سهموی بوده و یک مشخصه واقعی دارد.
- چنانچه  $b^2 - 4ac < 0$  معادله از نوع بیضوی بوده و مشخصه واقعی ندارد.

روش طبقه بندی به وسیله جستجوی ریشه های معادله مشخصه نیز، اگر ضرایب  $a, b, c$  توابعی از  $x, y$  یا معادله غیر خطی باشد، اعمال می شود. در حالت بعد  $a, b, c$  ممکن است توابعی از متغیر وابسته  $f$  یا مشتقات اول آن باشند. اکنون ممکن است که نوع معادله در نواحی مختلف حوزه حل با هم تفاوت داشته باشند. به عنوان مثال معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$y \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2-26)$$

به رفتار معادله در محدوده  $-1 < y < 1$  توجه شود. از آنجایی که  $a = a(x, y) = y, b = 0, c = 1$  مقدار  $b^2 - 4ac$  برابر  $-4y$  می باشد، حال سه حالت مجزای زیر را بررسی می کنیم:

- چنانچه  $b^2 - 4ac > 0$  و  $y < 0$  معادله از نوع هذلولوی است.
- چنانچه  $b^2 - 4ac = 0$  و  $y = 0$  معادله از نوع سهموی است.
- چنانچه  $b^2 - 4ac < 0$  و  $y > 0$  معادله از نوع بیضوی است.

معادله (2-26) از نوع مختلط است. به طور محلی، هذلولی، بیضوی یا سهموی بودن معادله به مقدار  $y$  بستگی دارد. برای حالت غیر خطی مشابه به طریق مشابه عمل می کنیم. طبقه بندی PDE به مقادیر محلی  $a, b, c$  بستگی دارد.

PDE های مرتبه دوم در  $N$  متغیر مستقل  $(x^1, x^2, \dots, x^N)$  می توانند در وهله اول با بازنویسی آن ها به شکل  $A_{jk} = A_{kj}$  طبقه بندی گردند.

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{jk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} + H = 0 \quad (2-27)$$

فلتچر<sup>۱</sup> [۷] نشان داد که معادله می تواند بر اساس مقادیر ویژه یک ماتریس مثل  $A_{jk}$  طبقه بندی گردد. از این رو مقادیر مربوط به  $\lambda$  را توسط رابطه زیر بدست می آوریم.

$$\det[A_{jk} - \lambda I] = 0 \quad (2-28)$$

بنابراین قوانین طبقه بندی شده عبارتند از:

- اگر هر مقدار ویژه  $\lambda = 0$  باشد، آن گاه معادله سهموی خواهد بود.
- اگر همه مقادیر ویژه  $\lambda \neq 0$  باشد و همه آن ها هم علامت باشند، معادله بیضوی خواهد بود.
- اگر همه مقادیر ویژه  $\lambda \neq 0$  باشد و همه آن ها غیر از یکی هم علامت باشند، معادله هذلولوی خواهد بود.

درمورد معادله لاپلاس می توان به سادگی ثابت کرد که معادله نفوذ و معادله موج در این روش منجر به همان نتیجه حل معادله مشخصه (۲-۲۵) می گردد.

---

<sup>۱</sup>-Fletcher

## فصل سوم

# بررسی تاریخچه روش MAC

۳-۱- مقدمه: در این بخش پیشرفت های اخیر در زمینه روش MAC<sup>۱</sup> مورد بررسی قرار می گیرد. نخستین بار از روش مک در دهه ۱۹۶۰ و در آزمایشگاه Alamos استفاده گردید. این بخش با رجوعی به تاریخچه روش مک شروع شده سپس در مورد سایر تکنیک های مرتبط نیز به بحث می پردازد. روش های MAC و SMAC<sup>۲</sup> شامل گام زمانی خودکار و شبکه گرادیان همبست برای حل معادله پواسون و جهت محاسبه پتانسیل سرعت می باشد که باعث افزایش شبکه ذرات (markers) و ذرات نزدیک به سطح، ارائه تقریب مناسبی از شرایط مرزی، هم چنین افزایش دقت روش upwind برای ترم های انتقال گرما (توانایی حل برای اعداد رینولدز بالا) و شرایط جریان دینامیکی گردید. تکنیک های مؤثری نیز برای جریان های سطحی و لایه ای و هم چنین جهت بررسی اثرات سطحی و لایه ای، شامل حرکت زاویه تماس پایه گذاری شده است. این مبحث به بررسی حالت سه بعدی روش SMAC می پردازد.

### ۳-۲- معرفی

هدف این بخش بررسی پیشرفت های اخیر روش MAC می باشد. تکنولوژی این روش به دهه ۱۹۶۰ بر می گردد. روش دارای توان قابل توجهی برای تخمین های محاسباتی مطلوب، هم چنین شیوه ای مؤثر برای حل جریان های سطحی آزاد می باشد که به خوبی با سایر متدها نیز رقابت می کند. هم چنین روش تقریب سازی upwind با دقت بالا برای ترم های اینرسی در جریان های با اعداد رینولدز بالا مناسب است و با شبیه سازی پدیده پرش هیدرولیکی توصیف خواهد گردید. جریان جت ویسکوز نیز مطالعه خواهد شد، مثال هایی از مخزن پرشده ارائه می شود و ترشح قطرات مایع به یک سیال ساکن نیز شبیه سازی خواهد شد. در نهایت نشان خواهیم داد که چگونه روش MAC را برای جریان های ویسکوالاستیک می توان به کار گرفت.

<sup>۱</sup> - marker and cell

<sup>۲</sup> - Simplified MAC



### ۳-۳- مقدمه ای از روش Marker and cell

پیشرفت های زیادی در زمینه علم دینامیک سیالات محاسباتی از سال ۱۹۵۸ تا دهه ۱۹۶۰ صورت گرفته است. این پیشرفت عمدتاً نتیجه تلاش و پشتکار [۸] Francis Harlow بوده است. وی در سال ۱۹۵۸ کد ذرات پایه در سلول<sup>۱</sup> را گسترش داد، این روش از ذرات جرمی استفاده می کند که موقعیت مواد، جرم و اطلاعات ذرات را حمل می کند. صرف نظر از این توانایی خاص، روش PIC، قادر به ارائه راه حل مناسب در حالت عمومی نیست و دلیل آن انتقال اطلاعات بین ذرات و قرار گرفتن شبکه واقعی در ترم پخش عددی می باشد. حدود ۲۰ سال پیش در دهه ۱۹۸۰ محققان به روش های ذره ای علاقه مند شدند که منجر به روش [۹] FLIP شد. روش FLIP بر مشکلات ناشی از پخش عددی به مقدار زیادی غلبه کرد.

کاربرد اولیه روش FLIP در جریان های مغناطیسی، میدان مغناطیسی زمین و جریان های خورشیدی بود. روش MAC ابتدا در سال ۱۹۶۵ ابداع شد و به وسیله Welch, Harlow [۱۰] گسترش پیدا کرد. کاربرد اصلی آن جریان های سطحی با استفاده از زیر برنامه PIC می باشد.

بر اساس سیستم شبکه بندی درجا Eulerian، روش مک در واقع یک تکنیک حل تفاضل محدود برای بررسی دینامیکی جریان های ویسکوز نا متراکم می باشد. متغیرهای اولیه سرعت و فشار در این روش به کار گرفته می شوند. یکی از پارامترهای اصلی، استفاده از مختصات ذرات در سیستم لاگرانژ می باشد که مقادیر آن ها در میدان سرعت تغییر می کند. چنان چه یک سلول شامل ذره باشد می توان گفت که سیال در آن وجود دارد و این یک تصور بصری از سطح آزاد را خواهد داد.

در سال ۱۹۷۰ Harlow, Amsden [۱۱] روش MAC ساده شده<sup>۲</sup> را گسترش دادند. این روش بر مشکلات روش های اولیه که شامل جدا کردن سیکل محاسبات بود غلبه کرد؛ این مشکلات عبارتند از انتخاب یک میدان سرعت فرضی که به وسیله یک تابع پتانسیل کمکی، مقادیر سرعت را اصلاح می کند.

<sup>۱</sup> - Original Particle in Cell -PIC

<sup>۲</sup> - Simple Marcer And Cell-SMAC

در این گزارش Harlow, Amsden برنامه ویژه ZUNI را معرفی کردند که نمایان گر روش SMAC است. این کد برای جریان های دو بعدی در سیستم مختصات استوانه ای یا مستطیلی به کار می رود. فرض جریان آزاد و لغزش آزاد یا شرط بدون لغزش نیز روی مرزهای صلب برقرار است. هم چنین فرضیات برای جریان داخلی یا خارجی قرار گرفته در مانع مستطیلی در میدان جریان نیز برقرار است. اساساً چنین فرض می شود که دامنه جریان مستطیلی باشد و دامنه به دو بعدی محدود گردد.

به دلیل محدودیت اندازه گام زمانی، افراد مختلفی چون [۱۲] Golafshani, [۱۳] Pracht, Deville [۱۴] روش های ضمنی ارائه داده اند. Pracht یک روش ضمنی برای سرعت معرفی کرد که مشابه با روش ضمنی اوایلر (ICE) [۱۵] از مش محاسباتی اوایلر- لاگرانژ (ALE) بهره می برد. در واقع این روش، محاسبات جریان را در شرایط مرزی متحرک یا منحنی نیز در برمی گیرد. برای مطالعه بیشتر در این مورد مراجعه کنید به [۱۶] Nichols, Shannon, Hirt. ایده اولیه انتشار بین المللی این کد، گروه SOLA بود که توسط [۱۶] Nichols, Hirt و دیگران نوشته شد. این برنامه دو مایع مخلوط نشدنی را در برمی گرفت. کد SOLA-VOF [۱۷] یکی از زیر برنامه های گروه SOLA، شامل کد SOLA-DF بود که رفتار چند فازی سیال را بررسی می کرد. در همان زمان، Rivard, Butler [۱۸] کد واکنشی بنام RICE را گسترش دادند که خود شامل سه زیر گروه APACHE-CONCHAS, KIVA [۱۹] بود.

قبل از دهه ۱۹۶۰، نیز Harlow و همکارانش بر روی مدل های عددی توربولانس کار کرده اند. آن ها مدل k-ε را به کار گرفتند، روشی که اکنون به طور گسترده استفاده می شود. روش SMAC در دهه ۱۹۶۰ کاربردهای فراوانی داشته است. Hirt, Sicilian [۲۰] کد پیش بینی اتمسفریک درون واره مخزن<sup>۱</sup> را با استفاده از کد PIC برای مدل کردن جریان یک مخزن به کار گرفتند. [۲۱] Nishimura, Miyata از

<sup>۱</sup> - containment Atmosphere prediction-CAP

کد SMAC برای تخمین امواج آب ایجاد شده توسط کشتی موج شکن ها در یک بدنه بیضوی و دایروی استفاده کردند.

در همان زمان، صنعت الکتروسیته UK (و سپس انجمن مرکزی تولید الکتروسیته) علاقه مندی خود را به استفاده از روش مک نشان داد.

Rutter, Mcquee [۲۲] و Proctor, Markham [۲۳] توصیفات را برای مایع اصلی با کد ZUNI جهت عملکرد بهتر ارائه کردند. آن ها یک روش تکرار گام زمانی و پردازنده همبست برای حل معادله پواسون در یک میدان مستطیلی به کار بردند.

در دهه ۱۹۹۰، محققان روش های متفاوت اما مرتبط مثل حجم محدود به کار گرفتند.

بازیابی روش MAC، اخیراً توسط یک گروه محقق برزیلی انجام پذیرفت.

طی چندین سال مدل های جامد Solid برای افزایش دقت داده های ورودی و خروجی گسترش یافته اند. هندسه متقارن، جهت تخمین آزمایشات تیلور بر روی جت داخل شده به یک مایع ساکن استفاده شده است. مدل سه بعدی و تکنیک تفاضل پسرو برای شبیه سازی پرش هیدرولیکی به کار رفته است. هم چنین کد مزبور قادر به تخمین تأثیرات دو ورتکس در لایه های انتقالی نیز می باشد.

اخیراً کد GENSMAC برای جریان های نیوتنی در حالت های دو بعدی و سه بعدی گسترش یافته است. بررسی اثرات تنش سطحی و یا تنش لایه ای نیز در مدل های سه بعدی کد بررسی شده که خود شامل محاسبات نرمال و خم سطح آزاد در تعدادی نقاط می باشد. این کد روشی مؤثر برای جریان های آزاد می باشد.

### ۳-۴- مروری بر تکنیک های اثرات لایه ای

روش MAC برای شبکه اویلر و جریان های سطح آزاد با توجه به وجود یا عدم وجود مایع توصیف گردید. گفته می شود که سلول شامل مایع است چنان چه شامل یک یا تعداد بیشتر ذره (maker) باشد و سلول خالی از مایع است چنان چه داخل آن ذره ای وجود نداشته باشد.

روش Marker and cell اکنون پیشرفت قابل توجهی داشته و تخمین صحیح نرمال سطح<sup>۱</sup> و خم سطحی<sup>۲</sup> [۲۴] باعث افزایش دقت آن شده است.

وقتی مسئله تنش سطحی مطرح باشد، این موضوع اهمیت بیشتری پیدا می کند، به عبارتی الگوریتم باید قادر به جفت کردن، هم بست کردن و جداسازی معادلات باشد. برای تعداد زیادتر نقاط مطلوب است که از شیوه های تفاضل پیشرو، حجم مایع، روش های سطحی و روش های مختلط استفاده کنیم.

محاسبات پیشرفته تر در مجاورت سطح و در یک شبکه نا منظم انجام گرفت.

محققانی که این روش را برای رژیم های مختلف جریان بررسی کرده اند؛ عبارتند از: Peskin [۲۵] و Moretti [۲۶], Darip [۲۷], Tryggvason [۲۸] و همکارانش از روش پیشرو<sup>۳</sup> برای تعیین تغییر شکل حباب استفاده کردند. اخیراً Galaktionov [۲۹] تکنیکی مناسب بر اساس آنالیز کشش سطحی و انحنای سطح، برای تغییرات داخل حجم مایع ارائه داده است.

بعد از به کارگیری تکنیک ذرات Marker، روش های حجم محدود (VOF) شامل به کارگیری بخشی از حجم  $F(w,t)$  جهت سطح آزاد و واسطه معرفی شد. یک سلول محاسباتی  $w_{ij}$  به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$w_{ij} = \{x_j; x_i < x < x_{i+1}\}$$

اگر  $F(w,t) = 0$  باشد مایعی درون سلول وجود ندارد و چنانچه  $0 \leq F(w,t) \leq 1$  سلول شامل مایع است. مزیت وجود سطح آزاد به عنوان بخشی از حجم این است که می توان الگوریتم مناسبی برای انتقال گرما در حجم در نظر بگیریم، طوری که جرم همواره پایسته بوده و نمایان گر سطح آزاد نیز باشد. اشکال روش حجم محدود، سختی محاسبه انحنای موضعی بخش حجمی می باشد. [۳۰] Lie از روش VOF برای حباب های در معرض برش بین دو صفحه استفاده کرد.

اخیراً روش های VOF توسط Lee, kim [۳۱] و Fuchs, Lorstad [۳۲] گسترش یافته است. روش های

<sup>۱</sup> -surface normal  
<sup>۲</sup> -curvature  
<sup>۳</sup> -front tracking

VOF با درجه های بالاتر جهت مش های اصلاحی به منظور افزایش دقت روش، نیز مطرح شده اند. روش دیگری که جدیداً مطرح شده است روش سطحی<sup>۱</sup> است. در این روش سطح به وسیله خطوط هم تراز می که از نوع توابع اسکالر می باشند محصور شده اند. این ایده توسط [Sethian, Osher ۳۳] معرفی شد.

تاکنون، این روش برای جریان های لایه ای در دینامیک سیالات، تولید شبکه و در مهندسی مواد استفاده شده است. در این روش، یک تابع هموار که تابع سطح نامیده می شود برای ارائه سطح آزاد به کار می رود. لایه مایع، لایه ای است که  $\varphi(x, t) > 0$  واسطه، (یا سطح آزاد) نقاطی هستند که  $\varphi(x, t) = 0$ . مهم ترین ویژگی این روش سادگی آن است به ویژه وقتی هدف محاسبه انحنای سطح آزاد متحرک باشد. با ارائه سطح آزاد در این روش، بردار یکه نرمال سطح  $n$  و متوسط انحنا  $k$  به این صورت تعریف می شوند.

$$n = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \quad (۱-۳)$$

$$k = \nabla \cdot \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|} \quad (۲-۳)$$

هدف گسسته سازی معادله زیر است:

$$\varphi_t + u \cdot \nabla\varphi = 0 \quad (۳-۳)$$

که  $u = [u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)]$ . روش انتگرال گیری از مرز، شیوه ای دیگر جهت حل شرایط سطح آزاد است بخصوص وقتی که نیروهای اینرسی قابل چشم پوشی باشند، این روش می تواند مؤثر باشد.

در این روش، معادلات مایع، دامنه مایع مخلوط نشدنی تا سطح آزاد را در بر می گیرد و آن ها را گسسته سازی می کند، این عمل باعث کاهش بعد مسئله خواهد شد. (مش های محاسباتی فقط در سطح گسسته می شوند).

<sup>۱</sup> - Level set method

محققانی چون Moore, Bake [۳۵], Miksis, Tsai [۳۴] این روش را برای حل حباب های متقارن به کار بردند.

### ۳-۵- تأکید بر مسائل ذکر شده

با ارائه پیش زمینه ای از روش MAC، هدف این تحقیق توصیف روش Cell and Maker با ارائه جزئیات کافی می باشد، در این بخش عموماً در رابطه با این مطلب بحث می کنیم. این مسئله در رابطه با تقریب سازی مرزهای منحنی وار نیز صحیح است.

### ۳-۶- شرایط مرزی

شرایط مرزی در مش مرزی می تواند انواع مختلفی داشته باشد: بدون لغزش، لغزش آزاد، جریان وارد شده و جریان خروجی.

$u_n, u_1, u_m$  را به عنوان سرعت های مماسی و عمودی بر سطح در نظر می گیریم.

• برای مرز صلب بدون لغزش خواهیم داشت:  $u_n = 0, u_m = 0, u_1 = 0$

• برای جریان داخلی تجویز شده<sup>۱</sup>:  $u_n = u_{inf}, u_m = 0, u_1 = 0$

زیر نویس  $n, 1, m$  اشاره به جهات نرمال و دو مماس بر مرز دارد. چنان چه سطح صلب دارای سرعت چرخشی و انتقالی باشد، باز هم توسط شرط بدون لغزش قابل توصیف می باشد. برای معادلات پواسون، تابع پتانسیل  $q$ ، شرایط مرزی دیریشیله در سطح آزاد و شرایط مرزی نیومن در مرز صلب را باید داشته باشیم.

### ۳-۷- شرایط سطح آزاد و واسطه

روش های اشاره شده، برای مایعات با چگالی کم در دو حالت مفید می باشد:

به عنوان یکی از فازهای مایع یا به عنوان یک فاز ساکن، لذا یک شرط مرزی با حرکت آزاد را توصیف می کند. در سطح آزاد شرایط مرزی فشار و سرعت صفر در نظر گرفته می شوند.

$$(\sigma \cdot n) \cdot n = P_{cap}, \quad (\sigma \cdot n) \cdot l = 0, \quad (\sigma \cdot n) \cdot m = 0 \quad (۳-۴)$$

<sup>۱</sup> - prescribed inflow

$m, l, n$  نرمال و مماس محلی بر سطح آزاد می باشند. تانسور تنش ویسکوز در مورد مایع نیوتنی عبارت خواهد بود از:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{2\mu}{Re} \mathbf{D} \quad (5-3)$$

$P_{cap} = \sigma k We^{-1}$  عبارت است از فشار کاپیلاری، که به دلیل تأثیر تنش سطحی  $\sigma$  تولید می شود.

$We = UL^{-1}\lambda_1$  عدد وایسباخ و  $Re = \rho \cdot UL\mu^{-1}$  عدد رینولدز می باشد.

### ۳-۸- روش های عددی

روش عددی بر اساس GENSMAc<sup>2004</sup> در حالت سه بعدی می باشد و هم چنین ایده اصلی الگوریتم SMAC را نیز تشکیل می دهد. فرض می شود که سرعت جریان  $u(x, t)$  در زمان  $t$  داده شده است و شرایط مرزی سرعت و فشار نیز معلوم می باشند.

سرعت اصلاح شده در زمان  $t = t + \Delta t$  بر اساس الگوریتم زیر داده می شود:

- گام اول: فرض کنید  $\tilde{p}(x, t)$  میدان فشاری باشد که شرایط فشار مطلق را روی سطح آزاد ارضاء می کند این میدان فشار بر اساس شرایط تنش مرزی محاسبه می گردد.
- گام دوم: سرعت متوسط  $\tilde{u}(x, t)$  با گسسته سازی صریح مومنتم به دست می آید.

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{\rho Re} \nabla \cdot 2\mu \mathbf{D} + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} - \frac{\sigma k}{\rho \omega_e} \nabla H \quad (6-3)$$

با قراردادن  $\tilde{u}(x, t) = u(x, t)$  و به کار بردن شرایط مرزی صحیح برای  $u(x, t)$  می توان نشان داد که  $u(x, t)$  مقادیر صحیح سرعت را در زمان  $t$  می دهد. با این وجود  $\tilde{u}(x, t)$  در حالت کلی معادله پیوستگی را ارضاء نمی کند. قرار می دهیم:

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) - \frac{1}{\rho} \nabla \psi(x, t) \quad (7-3)$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla \psi(x, t) \right) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(x, t) \quad (8-3)$$

که  $u(x, t)$  پیوستگی را ارضاء خواهد کرد و سرعت بدون تغییر خواهد ماند.

بنابراین  $u(x, t)$  به عنوان سرعت اصلاحی در زمان  $t$  معرفی می گردد.

- گام سوم: معادله بیضوی (۸-۳) حل شود.
- گام چهارم: فشار با معادله (۷-۳) تخمین زده شود.
- گام پنجم: فشار با معادله زیر محاسبه می گردد.

$$p(x, t) = \tilde{p}(x, t) + \frac{\psi(x, t)}{\Delta t} \quad (9-3)$$

- گام ششم: موقعیت ذرات marker با حل  $x^\circ = u(x, t)$  با روش اویلر یا سایر روش های صریح مشابه حل شود. آخرین گام شامل حرکت ذرات به موقعیت جدید آن ها می باشد. موقعیت ذرات ذخیره شده و در هر گام زمانی با حل معادله دیفرانسیل  $\frac{dx}{dt} = u(x, t)$  محاسبه می گردد که موقعیت جدید هر ذره را نشان داده و می توان بررسی کرد که آیا ذره به موقعیت جدید حرکت کرده یا خیر. معادله بیضوی (۸-۳) با روش گرادیان هم بست<sup>۱</sup> حل می شود و از سرعت های قبل طبق مفروضات اولیه استفاده می کند. هنگامی که تغییرات چگالی در طول سطح واسطه افزایش می یابد، تکرار بیشتری برای حصول همگرایی لازم است. [۳۶]

در چنین مواردی، توصیه می شود که از روش های قطری جهت افزایش همگرایی روش گرادیان هم بست استفاده کنیم. در روش های عددی بایستی فرضیاتی در زمینه سیالات نیوتنی در نظر بگیریم. مراحل الگوریتم برای سیالات غیر نیوتنی نیز قابلیت کاربرد دارد. [۳۷]

معادله (۸-۳) با روش تفاضل محدود در یک روش همساز، منجر به حل معادلات ناویر- استوکس خواهد شد.

### ۹-۳ - روش گام زمانی<sup>۲</sup>

مراحل پردازش گام زمانی برای تخمین اندازه گام زمانی برای هر سیکل باید انجام گیرد. این امر بر اساس شرایط پایداری است (که به صورت بدون بعد مطابق زیر است):

<sup>۱</sup> - conjugate gradient method

<sup>۲</sup> - Time-stepping procedure



$$\Delta t < \frac{\Delta x}{||u||} \quad (10-3)$$

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2 \Delta y^2 \Delta z^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta z^2 + \Delta y^2 \Delta z^2} \frac{Re}{2} \quad (11-3)$$

از معادله اول همسازی دریافت می گردد. محدودیت معادله (10-3) بدین دلیل است که هیچ ذره ای نباید بیشتر از یک سلول مرزی در یک زمان داخلی عبور کند. محدودیت معادله (11-3) از گسسته-سازی صریح معادله ناویر-استوکس حاصل می شود و بیانگر پایداری ون-نیومن است. تا زمانی که مقدار عدد رینولدز جریان  $0 \leq Re \leq 10$  باشد معادله (11-3) اثر محدود کننده تری دارد.

اکنون  $\Delta t^n$  را به عنوان گام زمانی جهت سیکل محاسباتی در نظر گرفته و مفاهیم زیر را تعریف می کنیم:

$$\Delta t_{visc} = 1/2 \frac{\Delta x^2 \Delta y^2 \Delta z^2}{\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta z^2 + \Delta y^2 \Delta z^2} \frac{Re}{2} \quad (12-3)$$

$$\Delta t_u = \lambda_1 \cdot 1/2 \frac{\Delta x}{|\bar{u}_{max}|} \quad (13-3)$$

$$\Delta t_v = \lambda_2 \cdot 1/2 \frac{\Delta y}{|\bar{v}_{max}|} \quad (14-3)$$

$$\Delta t_w = \lambda_3 \cdot 1/2 \frac{\Delta z}{|\bar{w}_{max}|} \quad (15-3)$$

که  $|\bar{u}_{man}|, |\bar{v}_{man}|, |\bar{w}_{man}|$  ماکزیمم سه مولفه محاسباتی معادله (3-6) بوده و  $0 \leq \lambda_i \leq 1$   $i = 1, 2, 3$  ضریب 0/5 در معادله (13-3) تا (15-3) به عنوان یک ضریب تناسب در نظر گرفته می شود و به منظور اطمینان از آنالیز پایداری موضعی می باشد.

گام زمانی در نظر گرفته شده در محاسبات از مقادیر زیر به دست می آید:

$$\Delta t^{n+1} = \lambda \cdot \min\{\Delta t_{visc}, \Delta t_u, \Delta t_v, \Delta t_w\} \quad (16-3)$$

که  $0 \leq \lambda \leq 1$ . فاکتور  $\lambda$  در معادله (16-3) تا زمانی که مقادیر  $|w_{max}^{n+1}|, |v_{max}^{n+1}|, |u_{max}^{n+1}|$  در ابتدای سیکل محاسبات مجهول هستند، استفاده می شود. از نظر محاسباتی، مفید است که سه مولفه سرعت را با فاکتور  $\lambda$  به عنوان یک مقدار جبرانی  $|w_{max}^{n+1}|, |v_{max}^{n+1}|, |u_{max}^{n+1}|$  استفاده کنیم. با این حال

اگر  $\Delta t_u, \Delta t_v, \Delta t_w$  کمتر از  $\Delta t^n$  باشند مولفه های سرعت مجدداً محاسبه می شوند و مقدار گام زمانی اصلاح می گردد.

این مراحل اصلاح گام زمانی، یک روش خودکار موثر برای یافتن اندازه مقدار گام زمان خواهد بود.

### ۳-۱۰- تقریب سازی تفاضل محدود ترم انتقال گرما

برای اعداد رینولدز بالا ( $Re \approx 1000$ ) ترم های انتقال، باید با استفاده از روش های Upwind با دقت بالا تخمین زده شود.

در روش Upwind از متد Bergeles و Varonos [۳۸] (به عنوان VONOS شناخته شده) استفاده می کنیم.

روش های متعدد دیگری نیز وجود دارد، اما این روش بخصوص در مورد مسئله پرش هیدرولیکی مؤثرتر است. یک نوع تقریب سازی برای ترم انتقال گرما  $\Delta(uu)$  لازم است. در جهت X تقریب سازی تفاضل محدود با دقت بالا استفاده می شود:

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}$$

### ۳-۱۱- حذف موج

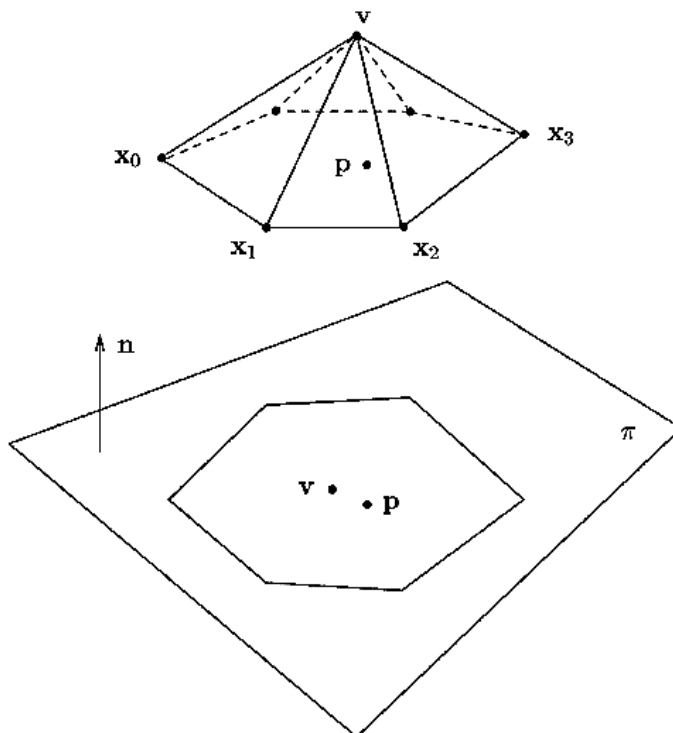
محاسبات تنش سطحی و واسطه<sup>۱</sup> در دو مرحله انجام می گیرد. اولی در سطح شبکه پایه که موج های کوچک در جلو محو می شود (سطح واسطه و آزاد) و دومی در سطح سلول که انحنا در هر سلول سطحی و واسطه تخمین زده می شود.

این تقریب سازی با اصلاح شرایط مرزی فشار در سطح آزاد در محاسبات نیروهای داخلی بحث می شود. در بسیاری موارد به ویژه وقتی عدد رینولدز خیلی بالا است (بزرگتر از ۵۰) موج های کوچکی در سطح آزاد تشکیل می گردد. این امر ناشی از تغییرات سرعت از یک سلول به سلول دیگر است و در بخشی که در سطح آزاد جمع می شود، تقویت خواهد شد.

<sup>۱</sup> - interfacial tension

این امواج توسط اثر ترکیبی تنش سطحی و ویسکوزیته به طور فیزیکی، حرکت می کنند. روش های متعددی جهت جلوگیری از ایجاد چنین امواج غیر فیزیکی مانند روش گاوس وجود دارد. در هر صورت، در شبیه سازی های جریان سیالات ضروری است که هر روشی که استفاده می شود جرم را تغییر ندهد. (در مورد جریانات تراکم ناپذیر، حجم نباید تغییر کند) روش هایی چون 3D-TSUR (حذف امواج شبکه دوزنقه ای<sup>۱</sup> جهت پایستاری حجم (یا جرم)) به کار می روند.

این روش برای مش های بی سازمان نیز به کار می رود. شکل (۳-۱) رأس  $V$  و ستاره متناظر آن را که با رئوس  $x_i, i=0,1,\dots,n$  ایجاد شده، نشان می دهد. این رئوس با گوشه های  $(V, x_i)$  و  $(V, x_{i+1})$  سطوح  $(x_i, V, x_{i+1})$  که  $n$  و ... و  $i=0$  و  $x_{n+1}$  به عنوان  $x$  تفسیر می شود، به هم متصلند. نقطه  $P$  را به عنوان یک نقطه مرزی در نظر بگیرید. حجم ستاره با رئوس  $V, P$ ، حجم محصور به وسیله سطح  $x_i, V, x_{i+1}$  که  $i=0,1,\dots,n$  می باشد.



شکل ۳-۱- راس و موقعیت ستاره قرار گرفته در صفحه  $\pi$

<sup>۱</sup> - Trapezoidal sub-grid undulation Removal

## ۳-۱۱-۱- محاسبات بردار نرمال

هر دو پروسه، توازن رئوس و حذف امواج نیازمند یک جهت نرمال هستند که بایستی از رئوس مجاور  $x_i$  تعیین شوند.  $V$  را به عنوان رأس واسطه و  $S(V)$  را ستارهٔ مربوط به  $V$  فرض کنید.  $P$  متوسط رئوس در  $S(V)$  با فرمول زیر داده می شود:

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (۱۷-۳)$$

که  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S(V)$  می باشند. می توان فرض کرد که بردار نرمال با متوسط بردار نرمال در سطح  $(x_i, P, x_{i+1})$  بدست می آید که :

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - p) * (x_{i+1} - p) + (x_n - p) * (x_n - p)}{|\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - p) * (x_{i+1} - p) + (x_n - p) * (x_n - p)|} \quad (۱۸-۳)$$

که  $n$  بردار عرضی است. توجه کنیم که میانگین وزنی انجام می گیرد: نرمال های مربوط به سطوحی که سطح بزرگتری دارند، وزن بزرگ تری خواهند داد. این معادله بردار نرمال را به دست می دهد.

## ۳-۱۱-۲- مراحل بالانس رئوس

توازن هر رأس با حرکت هر رأس به موقعیت جدید روی خط گذرنده از  $P$  که با معادله (۱۷-۳) داده می شود و در جهت  $n$  از معادله (۱۸-۳) حاصل می شود.

$\pi$  را به عنوان صفحه شامل  $P$  با نرمال  $n$  در نظر بگیرید. اگر  $P$  داخل  $S(V)$  به سمت  $\pi$  باشد، موقعیت جدید  $V$  را با فرمول زیر محاسبه می کنیم:

$$v_{\text{new}} = p + nh \quad (۱۹-۳)$$

$h$  به گونه ای تعیین می شود که حجم محلی پایستار باشد. این امر در صورتی محقق می شود که:

$$V = hV_1 \quad \text{or} \quad h = \frac{V}{V_1} \quad (۲۰-۳)$$

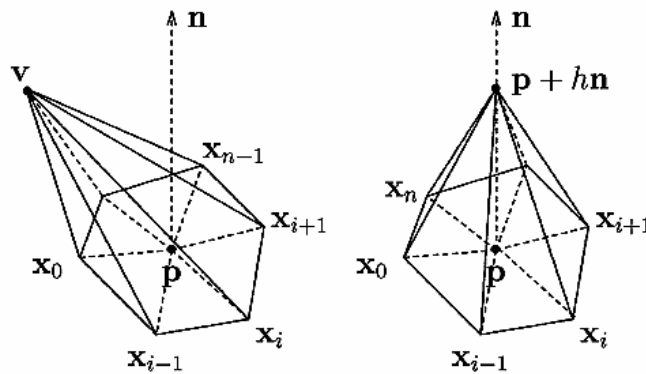
$V$  حجم چند وجهی است  $(V, x_1, x_2, \dots, x_n, P)$  حجم چند وجهی واحد می باشد.

$(P + n, x_0, x_1, \dots, x_n, P)$  این پروسه ادامه می یابد تا وقتی که حجم چند وجهی  $(P + hn, x_0, x_1, \dots, x_n, P)$  برابر حجم چند وجهی واحد باشد.  $(P + n, x_0, x_1, \dots, x_n, P)$  حجم چهار وجهی  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  با فرمول زیر داده می شود.

$$V = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) & (x_4 - x_1) \\ (y_2 - y_1) & (y_3 - y_1) & (y_4 - y_1) \\ (z_2 - z_1) & (z_3 - z_1) & (z_4 - z_1) \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

$i = 1, 2, 3, 4$  حجم هر شش وجهی جمع حجم چهار وجهی ها می باشد.

همان گونه که از شکل (2-3) می توان دید، این پروسه، رئوس را به موقعیت جدید حرکت می دهد. این امر جهت اصلاح مش سطحی برای پایستاری حجم محلی مناسب است.



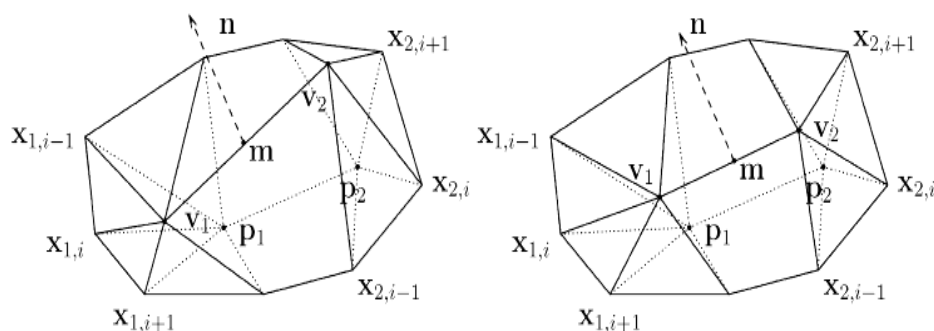
شکل 2-3- موقعیت رئوس ستاره قبل و بعد از تعادل

### 3-11-3- مراحل حذف موج

مراحل توازن رئوس به گونه ای طراحی شده که یک شبکه بی سازمان هموزن برای سطح آزاد و واسطه تولید گردد.  $e$  را به عنوان قسمتی از سطح و  $V_1$  و  $V_2$  را رئوس آن در نظر می گیریم. (مطابق شکل 3-3) پروسه مذکور موقعیت  $V_1$  و  $V_2$  را چنان تغییر می دهد که حجم محلی هم چنان پایستار باشد.  $n_1$  و  $n_2$  را بردارهای نرمال از معادله (3-18) در نظر می گیریم که در رئوس  $V_1$  و  $V_2$  موجودند.

بردار نرمال بر  $e$  را با میانگین  $n_1$  و  $n_2$  به صورت زیر فرض می کنیم:

$$n = \frac{n_1 + n_2}{\|n_1 + n_2\|_r}$$



شکل ۳-۳- مراحل حذف موج در هر گوشه و ستاره مربوطه

اکنون  $m = \frac{1}{2}(V_2 + V_1)$  متوسط رئوس  $e$  می باشد، ارتفاع  $h_1$  و  $h_2$  را در جهت این بردار نرمال با معادله زیر تعیین می کنیم:

$$h_1 = \langle V_1 - m, n \rangle, \quad h_2 = \langle V_2 - m, n \rangle \quad (22-3)$$

که (۰ و ۰) نقطه داخلی است سپس نقاط  $P_1, P_2$  به صورت زیر به دست می آیند.

$$p_1 = v_1 - h_1 n, \quad p_2 = v_2 - h_2 n \quad (23-3)$$

لذا دو شش وجهی  $(V_1, x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}, P)$  با حجم  $V_1$  و  $(V_2, x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}, P_2)$  با حجم  $V_2$  که  $(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n}) \in S(V_1), (x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n}) \in S(V_2)$  می باشد. (شکل ۳-۳)

باید ارتفاع جدید  $h$  را در جهت  $n$  طوری که پایستاری حجم موضعی رعایت گردد، تعیین کنیم. از خطی سازی بین حجم های شش وجهی و ارتفاع آنها استفاده می کنیم:

$$V_1 + V_2 = V_1 \left( \frac{h}{h_1} \right) + V_2 \left( \frac{h}{h_2} \right) \quad (24-3)$$

$$h = \frac{V_1 + V_2}{\left( \frac{V_1}{h_1} \right) + \left( \frac{V_2}{h_2} \right)} \quad (25-3)$$

موقعیت جدید رئوس  $V_1$  و  $V_2$  به صورت زیر خواهند بود:

$$v_1 = p_1 + h_1 n \quad v_2 = p_2 + h_2 n \quad (26-3)$$

این مراحل حذف موج به طور پرویودیک برای تمام گوشه های مش سطحی به کار می رود و پرویود به گونه ای انتخاب می گردد که سطح به اندازه کافی هموار بوده و امواج با دامنه بالا تأثیر زیادی بر موج نداشته باشد. تکرار مراحل بستگی به شرایط خاص مسئله دارد.

مراحل حذف موج در جریان های غیر نیوتنی با اعداد رینولدز پایین، بخصوص هنگامی که سطح تنش تغییر می پذیرد به روش های دیگری انجام می شود.

### ۳-۱۲- محاسبات انحنا

انحنا توسط سطحی تقریب زده می شود که بهترین جایگزین نقاط در سلول و سلول های موجود در همسایگی آن باشد. آنالیز های عددی [۳۹] تقریب سازی سهموی زیر را پیشنهاد می کنند:

$$\pi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad (۳-۲۷)$$

جهت این تقریب سازی لازم است که بردار نرمال در مرکز سلول تعیین گردد. می توان شیوه تقریب سازی انحنا را با گام های زیر دنبال کرد:

- یک سطح دلخواه در سلول میانی فرض کنید، همه نقاط را داخل کره  $S_\delta$  در نظر بگیرید که مرکز آن در مرکز سلول و شعاع  $\delta$  می باشد.
- صفحه ای بر این نقاط بگذرانید و نرمال آن را محاسبه کنید.
- یک سیستم مختصات جدید عمود بر سطح بگیرید و نرمال محاسباتی گام دو را به کار برید.
- یک کره جدید  $S_\varepsilon$  که در مرکز سلول قرار گرفته و شعاع آن  $\varepsilon$  است در نظر بگیرید، نقطه را در این کره و در موقعیت جدید قرار دهید.
- در این سیستم مختصات جدید ضرایب سطح داده شده توسط معادله (۳-۲۷) را محاسبه کنید.
- موقعیت انحنای سطح را با سطح تنظیم شده با معادله زیر پیدا کنید:

$$A = \frac{\frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \xi^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \xi}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{\frac{\partial^2 \hat{\pi}}{\partial \eta^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial \eta}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (۳-۲۸)$$

$\hat{\pi}$  سطحی است که توسط معادله (۳-۲۷) داده می شود و  $(\xi, \lambda, \zeta)$  مختصات در دستگاه مختصات جدید می باشند. توجه کنید که محور  $\zeta$  موازی بردار نرمال می باشد.

در این روش، کیفیت تقریب سازی مستقیماً به شعاع  $\delta, \varepsilon$  وابسته است، در حالت کلی  $\delta$  به صورت ضربی از اندازه سلول  $\varepsilon$  و  $1/5$  برابر بزرگتر انتخاب می گردد.

### ۳-۱۲-۱- تقریب سازی بردار نرمال

محدوده  $S_\delta$  که با سلول  $S$  همراه است شامل تعدادی نقاط (مختصات ذرات) می باشد.

تعداد را معادل  $m = m(\delta)$  در نظر می گیریم که  $x_i = (x_i, y_i, z_i)$ ،  $i = 1, 2, \dots, m_\delta$

تعداد نقاط داخل  $S_\delta$  است و بنابراین تعداد نقاط در سلول  $S$  و سلول های مجاور نیز  $S_\delta$  می باشد.

معادله صفحه  $z = f(x, y)$ ،  $y = f(x, z)$  یا  $x = f(y, z)$  مطابق با ماکسیمم مقدار ترکیبات بردار

نرمال سلول خواهد بود. برای مثال اگر

$$|\langle n_c, (0, 0, 1) \rangle| > |\langle n_c, (1, 0, 0) \rangle| \text{ و}$$

$$|\langle n_c, (0, 0, 1) \rangle| > |\langle n_c, (0, 1, 0) \rangle| \text{ و}$$

که  $(0, 0)$  نقطه داخلی است معادله صفحه با  $z = f(x, y) = ax + by + c$  داده می شود و ضرایب  $a, b, c$  بر

اساس بهترین حداقل مربعات در نقاط داده شده تعیین می شوند.

بردار نرمال بر صفحه  $z = ax + by + c$  با فرمول زیر قابل حل است:

$$n_s = \frac{(a, b, -1)}{|(a, b, -1)|_2} \quad (۳-۲۹)$$

سایر پارامترها به طریق مشابه تعیین می گردند. این پروسه مقدار  $n_s$  را تعیین می کند، اما علامت صحیح

با مقایسه  $n_s$  با نرمال بر سلول مرکزی  $n_s$  تعیین می شود  $n_c$ .

اگر  $(n_c, n_s) > 0$  علامت صحیح است در غیر این صورت علامت عکس خواهد شد.

### ۳-۱۲-۲- تقریب انحنا

فرض کنید  $x_i = (x_i, y_i, z_i)$  و  $i = 1, 2, \dots, m$  نقاط قرار گرفته در  $S_\varepsilon$ ، با بردار نرمال  $n_s$  که توسط



صفحه مناسب که از معادله بخش قبل به دست آمد، باشند. دو بردار مماسی دیگر در سطح که بردار عمود را تشکیل می دهند، در نظر بگیرید. در ابتدا ۲ بردار از بردارهای متعارف  $e_1 = (1, 0, 0)$  و  $e_2 = (0, 1, 0)$  یا  $e_3 = (1, 0, 1)$  را انتخاب می کنیم طوری که مقدار آن در جهت بردار  $n_s$  کم ترین باشد. دوم: با استفاده از روش Gram Schmidt پایه اورتونرمال Orthonormal به دست می آید، سپس یک سیستم مختصات جدید در نقطه  $X_i$  خواهیم داشت که در این سیستم مختصات جدید به صورت  $\xi_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  قابل توصیف است. این امر امکان می دهد که معادله سهموی را به صورت زیر بنویسیم:

$$\hat{\pi}(\varepsilon, n) = a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 + d\xi + e\eta + f$$

این فرمول بهترین مقدار برای  $f, e, d, c, b, a$  به دست می دهد و از آنجا مقدار انحنای را بر اساس فرمول زیر می توان محاسبه کرد.

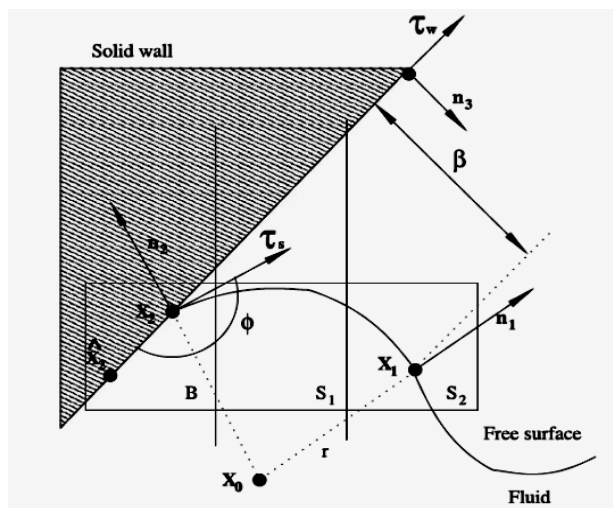
$$k = -2\left(\frac{a}{(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b}{(1+e^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (3-30)$$

### ۳-۱۳- زاویه تماس دینامیکی

هنگامی که دو فاز، در موضوع بحث ما، آب و هوا، در سطح جامد با یکدیگر برخورد کنند، زاویه ای که عموماً عمود بر سطح نیست ایجاد خواهد شد که به عنوان زاویه برخورد نامیده می شود و چنانچه مایعات ساکن نباشند، این زاویه حرکت خواهد کرد. این بخش در مورد این که چگونه روش MAC به بررسی حرکت این زاویه می پردازد، بحث می کند.

زاویه تماس، به بررسی تأثیر اثرات انحنای در سلول مجاور سلول مرزی می پردازد. لذا این سلول ها مستقیماً در محاسبات انحنای وارد نمی شوند.

در مقابل انحنای با استفاده از بردار نرمال  $n_1$  محاسبه شده و در نقطه  $x_1$  از سطح در مجاورت سلول کنار دیواره بر اساس بردار نرمال بر سطح آزاد دیواره (که در مورد زاویه ثابت بیان شد) و فاصله نرمال  $\beta$  از  $x_1$  محاسبه می گردد. جزئیات این روش با مراجعه به شکل (۳-۴) واضح تر خواهد بود. برای روشی دو مسئله بی بعد ارائه می شود.



شکل ۳-۴- مدل تقریب سازی سطوح تماس

مجدداً برای سادگی عبارت، محدودیت ها را به مسائل دو بعدی معطوف می کنیم. عمومیت دادن مسئله به حالت سه بعدی نیز کاملاً واضح است.

$S_1$  را سطح سلول مجاور به سلول مرزی  $B$  در نظر می گیریم که هدف محاسبه فشار کاپیلاری آن است.  $n_1$  را سطح آزاد با نرمال واحد در نظر می گیریم که در نقطه  $x_1$  مرکز سلول  $S_2$  محاسبه شده است.  $n_2$  نرمال واحد جداره و  $n_3$  بردار نرمال سطح آزاد در نقطه تماس می باشد که با جمع زاویه تماس  $\phi$  به زاویه دیواره به دست می آید.  $\tau_w$  بردار مماس واحد بر سطح آزاد در نقطه تماس  $x_2$  در زمان  $t$  می باشد. نقطه تماس در زمان قبل  $\hat{t} = t - \Delta t$  به  $x_2$  اشاره دارد.

اگر جهت بردار نرمال خروجی مشخص باشد، یک دایره با شعاع  $r$  و یک نقطه روی محیط آن در نظر بگیرد. دایره از  $x_1$  ,  $x_2$  با شعاع  $r$  می گذرد.

اگر بردار نرمال واحد خروجی در  $x_1$  معادل  $n_1$  باشد، مرکز دایره بر اساس  $x$  تعیین می شود. دو پارامتر زیر را معرفی می کنیم:

$$\begin{aligned} x_1 - x_c &= r n_1 & x_2 - x_c &= r n_2 \\ x_1 - x_2 &= r(n_1 - n_2) \end{aligned} \quad (3-31)$$

از طرف دیگر  $\beta$  فاصله نرمال از  $x_1$  نسبت به دیواره است لذا خواهیم داشت :

$$\beta = (x_1 - x_2) \cdot n_2 \quad (3-32)$$

با جایگزینی (۳۱-۳) در معادله (۳۲-۳) بدست می آوریم:

$$r(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3 = \beta \quad (33-3)$$

$$k = \frac{1}{r} = \frac{(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3}{\beta} \quad (34-3)$$

برای سلول های B مجاور به سلول S شرط مرزی عدم لغزش را به کار می بریم و فرض می کنیم که فشار کاپیلاری محاسباتی در سلول S به کار می رود.

این امر ناشی از بخش لغزشی است که به صورت یک محدودیت میکروسکوپی جهت تخمین نقطه تماس تفسیر می گردد. در بیشتر سلول های B شرایط عدم لغزش غالب است.

لذا موقعیت ذرات که با استفاده از سرعت نقطه تماس اصلاح می شود، در نزدیکی جداره صحیح نخواهد بود. برای آنالیز نتایج، موقعیت سطح داده شده در نقاط تاثیر در نزدیک ترین سلول به دیواره تقریبی خواهد بود. اثرات گسترش سطح آزاد و نقطه تماس با تقریب سازی در این بخش توصیف شده است. پروسه فوق کاملاً عمومی است و با اعمال هر گونه زاویه تماس قابلیت کاربرد دارد.

در مورد یک زاویه تماس دینامیکی، مقدار زاویه تماس با استفاده از قانون Tanner [۴۰] تعیین می گردد.

$$u_c = F(\varphi) \quad (35-3)$$

$u_c$  سرعت نقطه تماس در جهت دیواره و زاویه تماس مرتبط با سطح و دیواره است:

$$\cos(\varphi) = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 \quad (36-3)$$

یک تقریب سازی ساده برای  $F(\varphi)$  به صورت زیر می باشد.

$$F(\varphi) = \alpha_0 + \alpha_1 \varphi \quad (37-3)$$

مقادیر  $\alpha_0$  و  $\alpha_1$  داده شده اند.

$\hat{x}_r$  موقعیت نقطه تماس در زمان قبلی است،  $(t - \Delta t)$  و سرعت نقطه تماس  $u_c$  با تقریب سازی مرتبه اول

به صورت زیر تخمین زده می شود.

$$u_c = \frac{(x_r - \hat{x}_r) \cdot \tau_w}{\Delta t} \quad (38-3)$$

جهت  $\tau_w$  با قرار دادن  $\tau_w \cdot n > 0$  تعیین می شود و انحنای حل معادلات (۳-۳۳) تا (۳-۳۷) محاسبه می گردد. یک روش ساده در ذیل آورده شده است:

ابتدا  $\beta$  را مستقیماً از (۳-۳۳) حل کنید. مقدار قبلی  $u_c$  را به عنوان حدس اولیه بکار برده و  $\phi$  را از رابطه (۳-۳۵) با معادله (۳-۳۷) بدست آورید. معادله (۳-۳۳) و (۳-۳۶) را جهت تعیین  $n_2 = \frac{1}{k}$  به کار ببرید. اکنون معادله (۳-۳۴) برای کنترل به کار می رود.

چنانچه معادله ارضاء نگردد الگوریتم دیگری استفاده می شود تا  $u_c$  با دقت کافی پیدا شود. معادله (۳-۳۸) جهت محاسبه  $x_2$  به کار می رود. برای شبیه سازی اعداد رینولدز کم وقتی  $\Delta t$  نیز کوچک است، به دلیل محدودیت پایداری ویسکوزیته، گام های اصلاحی لازم نیست.

### ۳-۱۴- اطلاعات سازمانی و سیستم محیطی

در یک جریان سه بعدی دو سری اطلاعات لازم است. اطلاعات مستقیم و اطلاعات غیر مستقیم. اولین دسته بندی شامل اطلاعاتی راجع به دامنه، سرعت، فشار، سلول، پارامترهای شبیه ساز، هم چنین هندسه مدل موجود می باشد.

اطلاعات استاتیکی شامل توصیفات مربوط به دامنه، گسسته سازی، پارامترهای بدون بعد، مشخصات مستقل از زمان مایع (مثل ویسکوزیته) می باشد. اطلاعات دینامیکی شامل سرعت، فشار، نوع سلول و هندسه سازه می باشد. سرعت و فشار به صورت ماتریس ذخیره می شوند.

سلول هایی که توسط ماتریس بیان می شوند و هم چنین سلول هایی که شامل مایع یا شرایط مرزی می باشد در یک سلول شبیه درخت ذخیره می گردد.

گروه سلول I,B,S,F جهت توصیف کد به کار رفته و لذا برای ذخیره درختی مناسب تر هستند. از طرف دیگر برای دسترسی به تمام سلول ها یا سلول های مجاور استفاده از یک ماتریس راحت تر خواهد بود. اطلاعات دیگر هم جهت اصلاح عملکرد کد می توان به درخت اضافه کرد.

برای مثال، چنانچه برای یک سلول مرزی تقاطع خطوط شبکه با سطح مخزن لازم باشد، برای سلول S بردار نرمال بایستی ذخیره گردد.

موضوعات هندسی، سطح های تقریبی با سطوح خطی قطعه ای هستند و لذا به وسیله یک سری اطلاعات سازمانی ارائه می گردند که B-Rep نام دارد. (متغیر مرزی Rep) این سازه جهت معرفی سطح، گوشه، رئوس و ارتباط بین آنها استفاده می شود که جهت طراحی مدل های جامد صلب بر اساس سطوح آن ها به کار می رود.

اطلاعات سازمانی جهت طبقه بندی اطلاعات غیر مستقیم، با اشاره به سه نکته زیر معرفی می گردد:

هندسه سازه با سطوح آن ها، عملکرد الگوریتم شبیه ساز، مینیمم کردن وابستگی اطلاعات.

اطلاعات غیر مستقیم شامل دو نوع داخلی و خارجی می باشد.

اطلاعات سازه ای شامل هندسه (B-Rep) نوع شرایط مرزی و اطلاعات ذخیره شده در درخت سازه در رابطه با سلول هایی که مخزن و زیر شاخه های آن را معرفی می کنند، می باشد.

### ۳-۱۵- کاربرد

این بخش به ارائه شبیه سازی عددی جریان های سه بعدی با سطح آزاد می پردازد.

### ۳-۱۵-۱- کمانش جت

هنگامی که جت استوانه ای به داخل یک سطح صلب جریان می یابد، اگر عدد رینولدز کمتر از مقدار محاسباتی باشد پدیده ای به نام کمانش یا ضربه جت اتفاق می افتد.

این پدیده توجه بسیاری از محققین را جلب کرده و به صورت آزمایشگاهی و عددی مورد مطالعه قرار گرفته است. افرادی همچون Munson, Cruickshank [۴۱], این پدیده را بررسی کرده اند.

آن ها نتایج آزمایشگاهی و عددی خود را برای جت نیوتنی ارائه داده اند.

تخمین هایی را نیز برای زمان وقوع کمانش به دست آوردند که بر اساس عدد رینولدز، نسبت  $\frac{H}{D}$  می باشد. ارتفاع دریچه به صفحه صلب و  $D$  قطر جت است.

برای یک جت متقارن مشاهده شد که اگر شرایط  $Re < ۱.۲$  و  $\frac{H}{D} > ۷$  برقرار شود، جت کمانش خواهد کرد. به منظور شبیه سازی این مسئله یک جت استوانه ای با قطر  $6 \text{ mm}$  در نظر می گیریم.

$u = 1 \text{ m/s}$  به داخل صفحه صلب جریان می یابد. سرعت ورودی یکنواختی با  $\left(\frac{H}{D} \cong 8.33\right) H = 5 \text{ cm}$

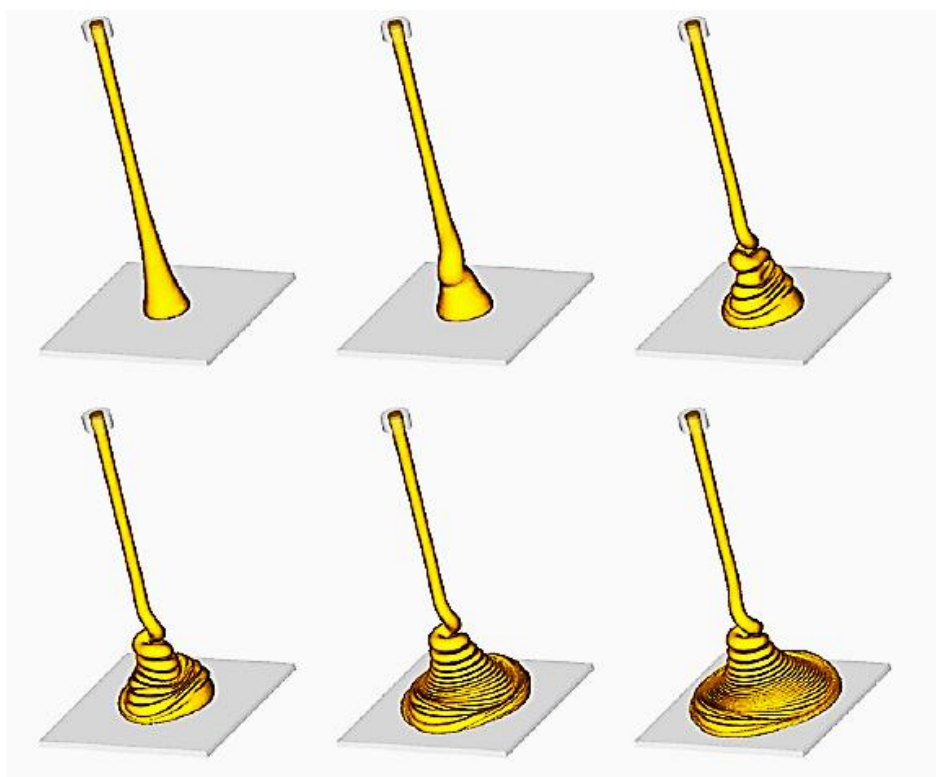
به دهانه وارد می شود، ویسکوزیته مایع  $\nu = 0.012 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  می باشد.

از تنش سطحی چشم پوشی می شود، پارامترهای مقیاس  $\nu, D, U$  می باشند.  $Re = 0.5$ ,

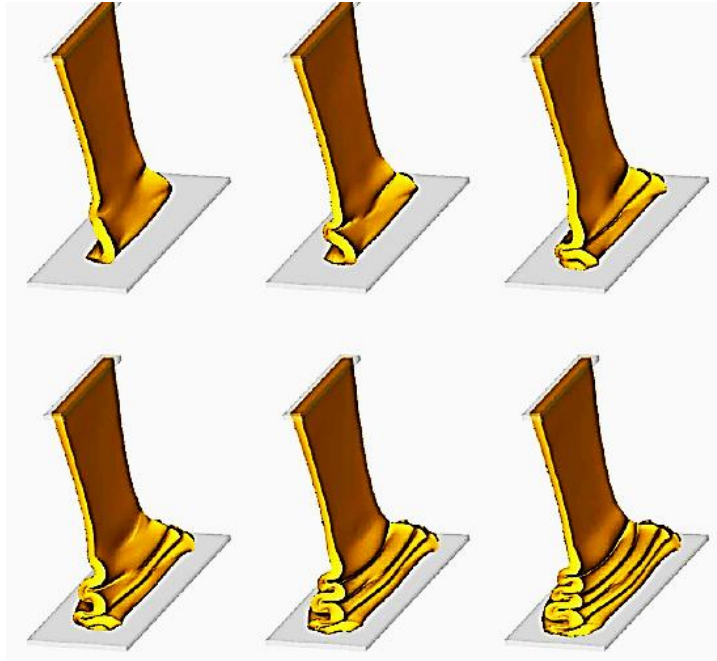
$\frac{1}{Fr^2} = 0.24261$  اندازه مش  $85 * 85 * 85$  و  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.01 \text{ mm}$  انتخاب شده است.

شکل (۳-۵) ظاهر جریان مایع را در زمان های مختلف نشان می دهد. شکل (۳-۶) ملاحظات مایع

معادل را برای جت نشان می دهد.



شکل ۳-۵- شبیه سازی مدل سه بعدی جت استوانه ای کمانش یافته در زمان های مختلف



شکل ۳-۶- شبیه سازی مدل سه بعدی جت صفحه ای کمانش یافته در زمان های مختلف

## ۳-۱۵-۲- ترشح قطرات

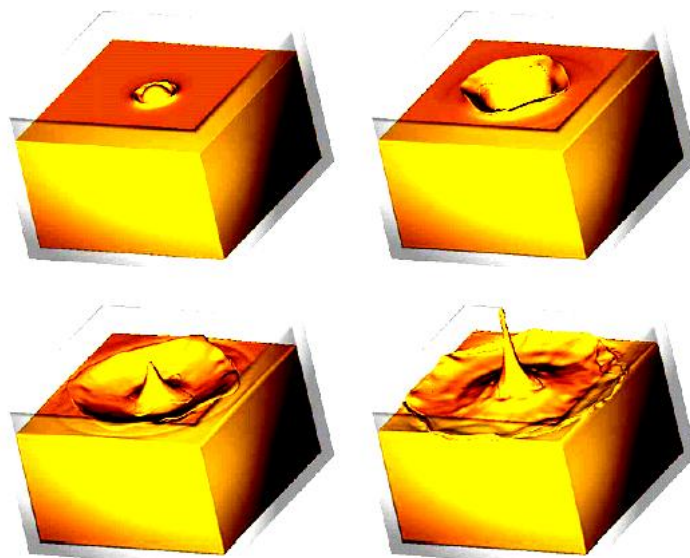
یک قطرهٔ کروی مایع با قطر  $D=10\text{mm}$  با سرعت اولیهٔ  $V=1\text{m/s}$  داده شده است و از ارتفاع  $4\text{cm}$  بالای مخزن مربعی که شامل یک مایع ساکن است رها شده است.

مقدار ویسکوزیته  $\nu = 10^{-6}\text{m}^2\text{s}^{-1}$  بوده و عدد رینولدز  $Re = \frac{UD}{\nu} = 10000$  می باشد. مش به کار رفته  $100 \times 100 \times 100$  سلول ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1.0\text{mm}$ ) خواهد بود.

فرورفتگی اولیه با تشکیل یک موج مشاهده می گردد. فشار زیادی زیر قسمت فرورفتگی باعث حرکت مایع به سمت بالا خواهد شد. (به شکل یک لکه)

لکه به نقطه اوج خود می رسد و می توانیم امواج سطحی که به کناره مخزن منعکس می شوند مشاهده کنیم (شکل ۳-۷)

در مورد این مسئله تنش سطحی نا چیز بوده و صرف نظر می گردد.

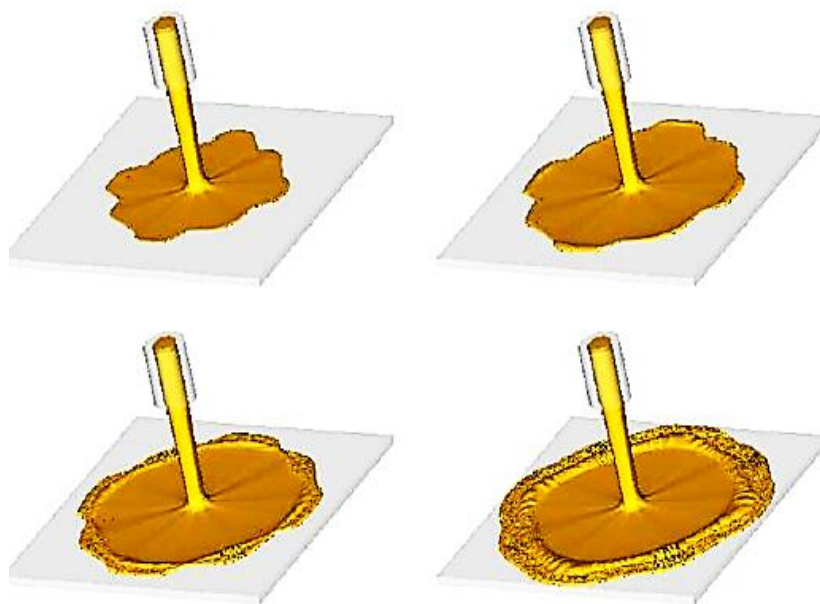


شکل ۳-۷- شبیه سازی مدل سه بعدی ترشح قطره در زمان های مختلف



## ۳-۱۵-۳- پرش هیدرولیکی

کد جریان سه بعدی جهت شبیه سازی پرش هیدرولیکی به کار می رود. یک جت استوانه ای با مایع ویسکوز که به سرعت به یک سطح افقی صلب برخورد می کند، در نظر می گیریم. پارامترهای بدون بعد عبارتند از:  $Re=400$  ,  $Fr=1.875$  پارامترهای مقیاس عبارتند از: سرعت داخلی  $U=0.5m/s$  قطر داخلی  $D=8mm$  و ویسکوزیته جنبشی  $\nu=10^{-5}m^2s^{-1}$  گرانش در جهت  $Z$  با مقدار  $g=9.81ms^{-2}$  عمل خواهد کرد. مش استفاده شده در این مسئله  $100*100*100$  ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1.0mm$ ) می باشد. کد جریان آزاد سه بعدی با اطلاعات اولیه جهت حل این مسئله به کار رفته است. شکل (۳-۸) تصویری از این جریان را در زمان مشخص نشان می دهد. تنش سطحی چشم پوشی شده است.



شکل ۳-۸- شبیه سازی مدل سه بعدی پرش هیدرولیکی در زمان های مختلف

## ۳-۱۵-۴- تولید حباب

این مثال، شبیه سازی جریان مایع سه فازی شامل دو حباب با چگالی، قطر و ویسکوزیته متفاوت را نشان می دهد که در فاز سوم دارای چگالی بزرگ تر می باشد.

حباب های ایجاد شده ناشی از نیروهای شناوری می باشند. پارامترهای بی بعد عبارتند از:  $Re=55,75$

$$\mu_f = 0.0125 \frac{Ns}{m^2}, \quad \rho_f = 88 \frac{kg}{m^3} \quad \text{برای فاز پیوسته } \omega_e=4,6, Fr=1$$

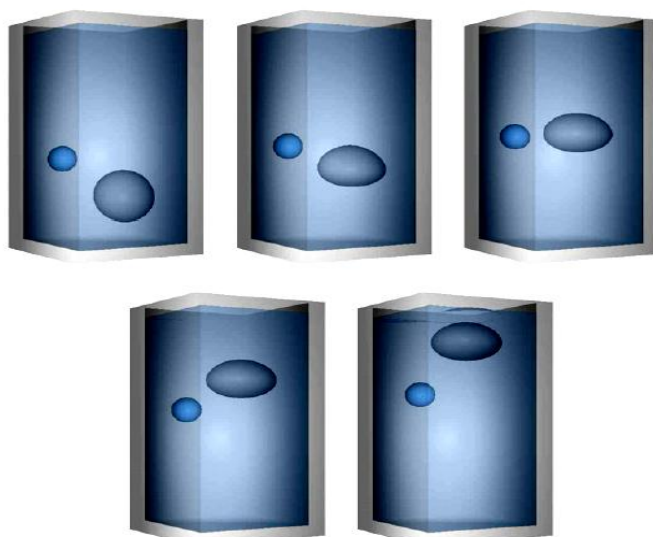
$$\text{برای حباب های بزرگ تر } D_1 = 4mm \quad \rho_1 = 88 \frac{kg}{m^3}, \quad \mu_1 = 0.0125 \frac{Ns}{m^2}, \quad E_{o1}=4,6$$

$$\text{سرانجام برای حباب های کوچک تر } D_2 = 2mm \quad \rho_2 = 176 \frac{kg}{m^3}, \quad \mu_2 = 0.025 \frac{Ns}{m^2}, \quad E_{o2}=1,15$$

ضریب تنش سطحی برای تمام سطوح مقدار  $\sigma_1 = 0.03N/m$  فرض شده است طول ها و سرعت ها با  $u = \sqrt{gD_1}, D_1 = 4mm$  بی بعد شده اند.

شبکه استفاده شده در این مثال  $32*32*64$  سلول می باشد. شکل (۳-۹) زمان ایجاد جریان را نشان می دهد. دیده می شود که حباب های بزرگ تر، تغییر شکل های بزرگ تری را نسبت به حباب های کوچکتر تحمل می کنند و این ناشی از عدد  $Eötvös$  و  $Eo = \rho g d^2 \sigma^{-1}$  می باشد.

تغییر شکل کوچک تر در خط سیر حباب های کوچک تر در نتیجه عکس العمل با حباب های بزرگ تر هنگامی که از آن عبور می کند، ایجاد می شود.

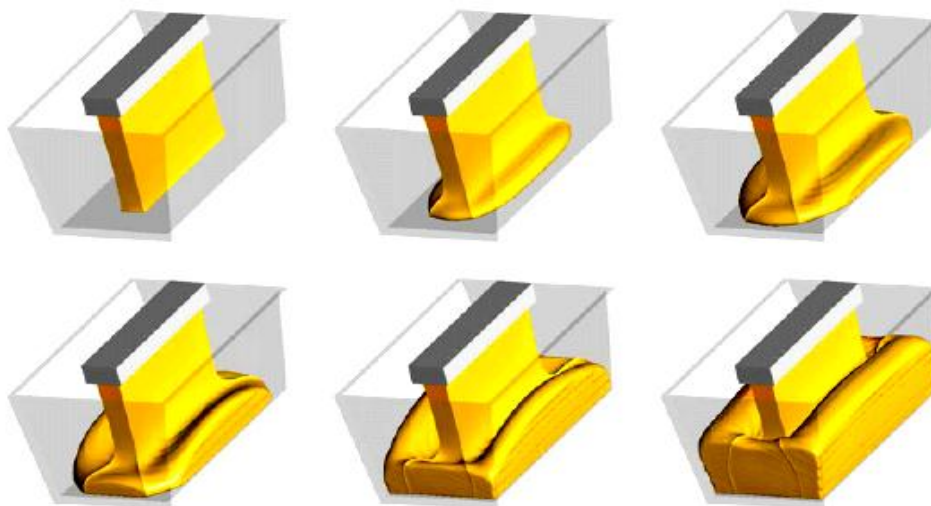


شکل ۳-۹- شبیه سازی مدل دو حباب در مایع دوفازی در زمان های مختلف

## ۳-۱۵-۵- پر کردن مخزن

محاسباتی نیز جهت شبیه سازی رفتار پر شدن یک مخزن دوزنقه ای ارائه می دهیم که شامل یک نازل مستطیلی می باشد. اطلاعات اولیه مورد نیاز عبارتند از: پارامترهای بی بعد شامل:  $Re=7.5$  و  $Fr=2.9146$  پارامترهای مقیاس، مقدار سرعت مرجع  $u=1\text{m/s}$  (سرعت مایع در نازل)، مقدار طول مرجع  $l=12\text{ mm}$  (جت در جهت X) و ویسکوزیته جنبشی  $\nu=1.6 \times 10^{-3}\text{ m}^2\text{ s}^{-1}$ ، شتاب جاذبه در جهت Z و مقدار آن  $g=-9.81\text{ m/s}^2$  در نظر گرفته شده است.

مش استفاده شده در این مسئله  $80 \times 120 \times 70$  با  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1\text{ mm}$  می باشد. جریان سه بعدی این مسئله با اطلاعات فوق داده شده است. شکل (۳-۱۰) تصویری از این جریان را نشان می دهد.



شکل ۳-۱۰- شبیه سازی مراحل پر شدن یک مخزن دوزنقه ای در زمان های مختلف

## فصل چهارم

بررسی نحوه به کارگیری الگوریتم MAC در  
مش های هم مکان

۴-۱- مقدمه : در فصل قبل چگونگی پیدایش و گسترش روش MAC بررسی گردید. در این فصل به بررسی نحوه به کارگیری الگوریتم مک در مش های هم مکان<sup>۱</sup> می پردازیم که هدف اصلی پایان نامه می باشد. برای حصول به این امر ابتدا الگوریتم مک در مش های جابجا<sup>۲</sup> شده که حالت متداول آن است، بررسی می گردد و سپس کاربرد همین الگوریتم در مش هم مکان بیان می گردد.

در جریان سیال غیر قابل تراکم، معادلات مومنتم (ناویر- استوکس) و پیوستگی چهار معادله به وجود می آورند. حل صریح و هم زمان این معادلات برای به دست آوردن چهار مجهول  $u, v, w, p$  به راحتی امکان پذیر نیست به همین منظور حل عددی این معادلات مطرح گردیده است. این کار با روش های مختلفی از جمله اختلاف محدود و المان محدود انجام می پذیرد.

روش های مرسوم پیش بینی و شناسایی نیروهای وارد بر اجسام مختلف که در معرض جریان سیال قرار دارند شامل روش های تجربی، تحلیلی و عددی یا آمیخته ای از این روش ها می باشد. از آن جا که روش های تحلیلی صرفاً در مورد جریان های با پیچیدگی کم و هندسه های ساده قابل اعمال می باشند، در فرایندهای معمول طراحی کاربرد چندانی ندارند. روش های تجربی که از قدیمی ترین روش ها می باشند و جواب های نسبتاً دقیقی تولید می کنند متأسفانه به سرمایه گذاری اولیه زیاد و هزینه بالای انجام آزمایشات نیاز دارند. به کمک روش های عددی از صرف هزینه های زیاد برای انجام آزمایش ها جلوگیری می شود. در روش های عددی، حل یک مسئله جریان (سرعت، فشار، دما و ...) در گره های داخلی هر سلول انجام می گیرد. دقت مربوط به یک حل عددی از تعداد سلول های موجود در شبکه پیروی می کند. در حالت کلی تعداد سلول های زیاد دارای دقت حل بهتری می باشند اما قیمت، سخت افزار مورد نیاز و زمان محاسبه نیز بستگی به ظرافت شبکه دارد. در پروژه حاضر در پی حل معادلات ناویر- استوکس هستیم. سیستم حل شامل مراحل زیر است:

- در نظر گرفتن معادلات پیوستگی و مومنتم
- گسسته سازی معادلات و تبدیل آن ها به سیستم معادلات جبری

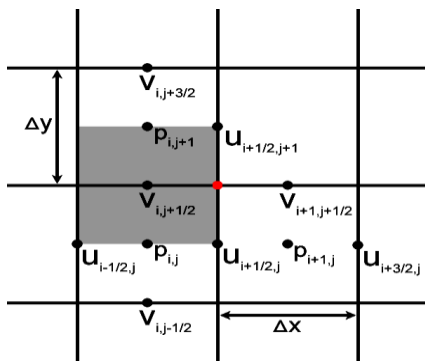
<sup>۱</sup> - Colocated  
<sup>۲</sup> - Staggered

- به دست آوردن رابطه ای برای سرعت ها و فشار با استفاده از مقادیر همین پارامترها در

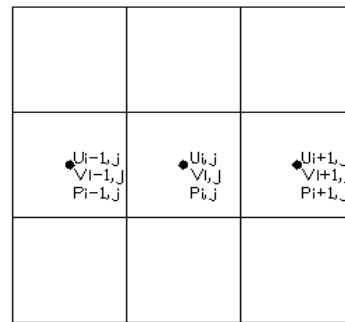
## سلول های مجاور

در این بخش به بررسی دو نوع مش جابجا شده و مش هم مکان که برای حل جریان کانال مورد استفاده قرار می گیرند، می پردازیم. در مش جا به جا شده، فشار در مرکز تقاطع مش ها ذخیره می شود و مقادیر سرعت در جهت  $X, Y, Z$  به ترتیب به اندازه نصف اندازه مش در جهت های مزبور جا به جا می گردند. در حالی که در مش هم مکان، تمام پارامترهای سرعت و فشار در یک موقعیت و در مرکز گره قرار می گیرند و لذا حل معادلات حاکم آسان تر خواهند بود.

در شکل زیر نحوه شبکه بندی مش هم مکان و جابجا شده مقایسه شده است.



شکل ۴-۲- نمایش مش جابجا شده



شکل ۴-۱- نمایش مش هم مکان

در ادامه، مقایسه نتایج بین این دو نوع مش برای چند مسئله معروف سی اف دی مثل جریان درون یک حفره با مرز متحرک<sup>۱</sup>، در کانال و در پله پشت به جریان<sup>۲</sup>، برای اطلاعات بیشتر ارائه گردیده است. همچنین در این پایان نامه مدل سازی جریان به صورت دو بعدی و سه بعدی در کانال ها با استفاده از مش هم مکان صورت گرفته است.

باید توجه داشت که معادلات حاکم اساساً برای جریان های ورقه ای، صحیح می باشند.

<sup>۱</sup> - lid driven cavity

<sup>۲</sup> - backward facing step

باین حال، جریان های آشفته و توربولانس نیز با استفاده از متدهای میانگین گیری زمانی از این معادلات قابل حل می باشند. از پرهزینه ترین مدل های توربولانس می توان به حالت های کلاسیک، شبیه ساز ادی های<sup>۱</sup> بزرگ<sup>۲</sup> و مدل های حل عددی مستقیم<sup>۳</sup> اشاره نمود.

مدل های کلاسیک از روش متوسط گیری نسبت به زمان رینولدز<sup>۴</sup> در معادلات ناویر- استوکس استفاده می کنند.

پیچیدگی تخمین مراحل شبیه سازی جریان های آشفته ناپایدار ناشی از تعداد زیاد نقاط شبکه است که باید برای مقیاس طولی بزرگی حل شود. در روش DNS تمام مقیاس ها به صورت غیر دائمی و مکانی حل می شوند. در روش LES معادلات برای ادی های بزرگ و کوچک مجزا شده اند. در این مدل ها چنین فرض می گردد که بزرگ ترین ادی ها، قویاً با جریان متوسط، مرتبط بوده و شامل انرژی زیادی می باشند، بنابراین اثر توربولانس در این روش، به درستی مدل خواهد گردید. در ادامه فرم تفاضل محدود دو نوع مش ذکر شده ارائه می گردد.

#### ۴-۲- فرم تفاضل محدود معادلات ناویر- استوکس به روش MAC

##### ۴-۲-۱- الگوریتم مک برای مش جابجا شده

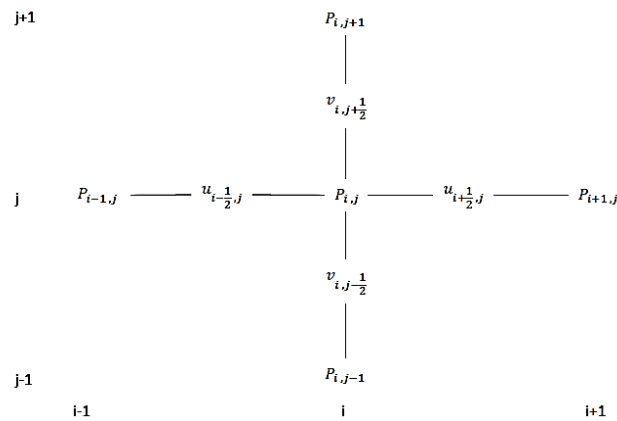
در این قسمت، ابتدا حالت معمول روش مک که برای مش های جابجا شده استفاده می گردد، بیان می شود.

<sup>۱</sup> - eddy

<sup>۲</sup> - large eddy simulation-LES

<sup>۳</sup> - direct numerical simulation-DNS

<sup>۴</sup> - Reynolds Averaged Navier-Stokes equation-RANS



شکل ۴-۳- نمایشی از روش تفکیک سازی

معادلات ناویر-استوکس به شکل بی بعد (بقیایی) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \cdot \quad (۱-۴)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^r + P) + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^r u \quad (۲-۴)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(v^r + P) = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^r v \quad (۳-۴)$$

معادلات ناویر - استوکس به شکل با بعد (بقیایی) به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \cdot \quad (۴-۴)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u^r + \frac{P}{\rho}\right) + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = v\left(\frac{\partial^r u}{\partial x^r} + \frac{\partial^r u}{\partial y^r}\right) \quad (۵-۴)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^r + \frac{P}{\rho}\right) = v\left(\frac{\partial^r v}{\partial x^r} + \frac{\partial^r v}{\partial y^r}\right) \quad (۶-۴)$$

این معادلات را به شکل زیر گسسته می کنیم:

$$\frac{u^{n+1}_{i+1/2,j} - u^{n+1}_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{v^{n+1}_{i,j+1/2} - v^{n+1}_{i,j-1/2}}{\Delta y} = \cdot \quad (۷-۴)$$

$$\frac{u^{n+1}_{i-1/2,j} - u^n_{i-1/2,j}}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \frac{P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x} = \left(-\frac{\partial u^r}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + v\left(\frac{\partial^r u}{\partial x^r} + \frac{\partial^r u}{\partial y^r}\right)\right)_{i-1/2,j}^n$$

$$u^{n+1}_{i-1/2,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i-1,j}) + u^n_{i-1/2,j} + \Delta t \left(-\frac{\partial u^r}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + v\left(\frac{\partial^r u}{\partial x^r} + \frac{\partial^r u}{\partial y^r}\right)\right)_{i-1/2,j}^n$$

$$u^{n+1}_{i-1/2,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i-1,j}) + RHSU_{i-1/2,j} \quad (۸-۴)$$



به همین ترتیب برای سایر مولفه های سرعت نیز می توان نوشت:

$$\frac{v^{n+1}_{i,j-1/2} - v^n_{i,j-1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \frac{P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta y} = \left( -\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^r}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^r v}{\partial x^r} + \frac{\partial^r v}{\partial y^r} \right) \right)^n_{i,j-1/2}$$

$$v^{n+1}_{i,j-1/2} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i,j-1}) + v^n_{i,j-1/2} + \Delta t \left( -\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^r}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^r v}{\partial x^r} + \frac{\partial^r v}{\partial y^r} \right) \right)^n_{i,j-1/2}$$

$$v^{n+1}_{i,j-1/2} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i,j-1}) + RHSV_{i,j-1/2} \quad (9-4)$$

اگر معادله مومنتم  $v$  ,  $u$  برای مکان های  $i+1/2, j$  و  $i, j+1/2$  نوشته شوند، خواهیم داشت:

$$u^{n+1}_{i+1/2, j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i+1, j} - P^{n+1}_{i, j}) + RHSU_{i+1/2, j} \quad (10-4)$$

$$v^{n+1}_{i, j+1/2} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i, j+1} - P^{n+1}_{i, j}) + RHSV_{i, j+1/2} \quad (11-4)$$

جای گذاری معادلات (4-8) الی (4-11) در معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\Delta x} \left( -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i+1, j} - P^{n+1}_{i, j}) + RHSU_{i+1/2, j} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i, j} - P^{n+1}_{i-1, j}) - RHSU_{i-1/2, j} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left( -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i, j+1} - P^{n+1}_{i, j}) + RHSV_{i, j+1/2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i, j} - P^{n+1}_{i, j-1}) - RHSV_{i, j-1/2} \right) = 0$$

که پس از مرتب کردن خواهیم داشت:

$$\frac{P^{n+1}_{i-1, j} - 2P^{n+1}_{i, j} + P^{n+1}_{i+1, j}}{\rho \Delta x^2} + \frac{P^{n+1}_{i, j-1} - 2P^{n+1}_{i, j} + P^{n+1}_{i, j+1}}{\rho \Delta y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{RHSU_{i+1/2, j} - RHSU_{i-1/2, j}}{\Delta x} + \frac{RHSV_{i, j+1/2} - RHSV_{i, j-1/2}}{\Delta y} \right) \quad (12-4)$$

و با کمی عملیات جبری خواهیم داشت:

$$\left( \frac{2}{\rho \Delta x^2} + \frac{2}{\rho \Delta y^2} \right) P^{n+1}_{i, j} = \frac{1}{\rho \Delta x^2} P^{n+1}_{i-1, j} + \frac{1}{\rho \Delta x^2} P^{n+1}_{i+1, j} + \frac{1}{\rho \Delta y^2} P^{n+1}_{i, j-1} + \frac{1}{\rho \Delta y^2} P^{n+1}_{i, j+1} - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{RHSU_{i+1/2, j} - RHSU_{i-1/2, j}}{\Delta x} + \frac{RHSV_{i, j+1/2} - RHSV_{i, j-1/2}}{\Delta y} \right) \quad (13-4)$$

همان طور که معادله فوق نشان می دهد، می توان در نظر گرفت که ضریب فشار مرکزی در این معادله برابر جمع ضرایب فشار همسایگانش می باشد. در برنامه نویسی ضرایب فشار مرکزی و همسایگانش،

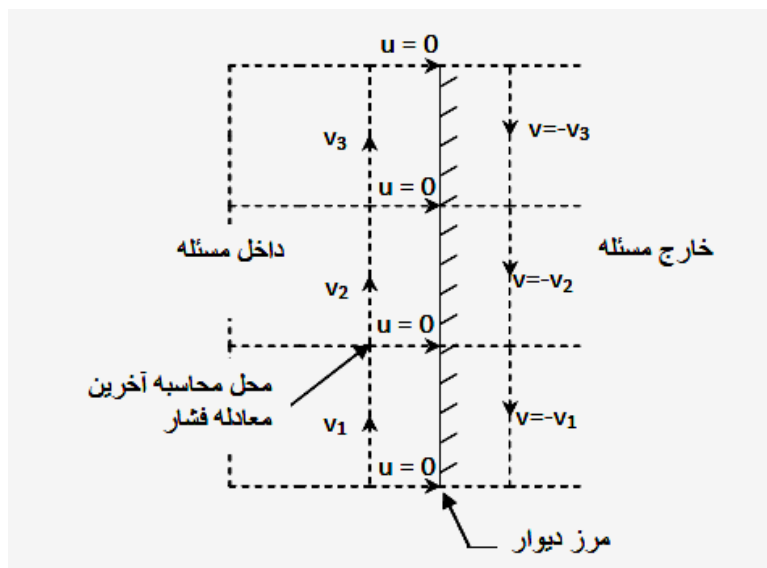
شمالی، جنوبی، شرقی و غربی و طرف راست معادلات فوق را به ترتیب در بردارهای دوبعدی  $ap_n, ap$ ,  $bp, ape, apw, aps$ , قرار می دهیم.

#### ۴-۲-۲- شرایط مرزی

شرایط مرزی در حل بسیار مهم هستند و درست اعمال نکردن آن ها باعث بسیاری از ناموفقیت ها در محاسبات CFD می باشد. در واقع جواب های داخل حوزه نتیجه اعمال شرایط مرزی می باشد و محاسبات CFD را در واقع می توان به نوعی یک انتروپوله دانست که جواب های داخلی را بر حسب مقادیر مرزی تعیین می نماید و روابطی که کار انتروپوله را انجام می دهند در واقع روابط مومنتم و پیوستگی می باشند. برای حل مسئله نیاز به سه دسته شرایط مرزی داریم که به ترتیب عبارتند از: ۱- دیوارها ۲- ورودی ۳- خروجی.

#### ۴-۲-۲-۱- شرایط مرزی در دیواره ها

جریان در دیواره های صلب لغزش ندارد (NO Slip). بنابراین می توان گفت که سرعت جریان برابر سرعت دیوار است که معمولاً برابر صفر می باشد مگر آن که دیوار نیز در حال حرکت باشد. شکل نحوه اعمال شرایط مرزی در دیوار سمت راست معادله را نشان می دهد.



شکل ۴-۴- نحوه اعمال شرایط مرزی در دیوارها

همان طور که شکل نشان می دهد، سرعت در جهت عمود بر دیوار  $u=0$  در نظر گرفته شده است. سرعت مماسی  $v$  نیز به طریقی برابر صفر گرفته شده است. برای انجام این کار پس از هر پله زمانی مقادیر سرعت در خارج از مرز، منفی مقدار آن در داخل مرز گرفته می شود تا به این ترتیب سرعت مماسی در مرز نیز برابر صفر گردد. این نحوه اعمال شرایط مرزی برای حل مسئله به صورت ورقه ای مناسب است. برای جریان های آشفته در مرزها از رابطه توزیع سرعت لگاریتمی<sup>۱</sup> استفاده می گردد. آخرین معادله مومنتم در جهت  $x$  از مقدار  $u=0$  در مرز به صورت مستقیم برای محاسبه طرف راست این معادله استفاده می نماید. معادله فشار (۴-۱۳) در این قسمت به صورت ساده ای تغییر می یابد. اگر معادله (۴-۷) را که برای تعیین فشار به کار رفت مجدداً در نظر بگیریم:

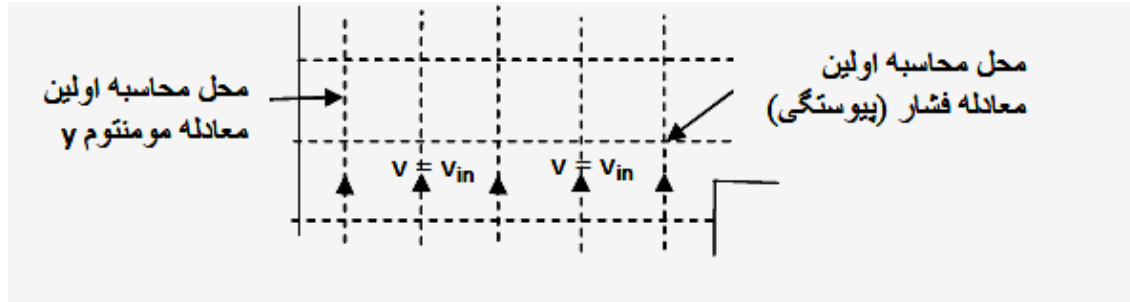
$$\frac{u^{n+1}_{i+1/2,j} - u^{n+1}_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{v^{n+1}_{i,j+1/2} - v^{n+1}_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0$$

برای دیوار سمت راست مسئله که در شکل (۴-۴) نشان داده شده است، می توان مقدار  $u^{n+1}_{i+1/2,j} = 0$  قرار داد و به جای سایر مقادیر سرعت از روابط ۸، ۹ و ۱۱ استفاده نمود. اگر کل این عملیات انجام گیرد مفهوم نهایی آن است که در معادله، فشار شرقی دیگر ظاهر نمی گردد و هم چنین ضریب فشار مرکزی باز هم برابر جمع فشار همسایگانش می باشد. بنابراین در برنامه نویسی فقط ضریب فشار شرقی را برای معادله فشاری که در کنار مرز واقع شده برابر صفر می گیریم و ضریب فشار مرکزی مطابق معمول برابر جمع ضرایب فشار همسایگانش خواهد بود و RHSU برای معادله مومنتم  $x$  ای که مرکزش بر روی مرز واقع است برابر صفر در نظر می گیریم تا شرایط مرزی به خوبی اعمال گردد.

#### ۴-۲-۲-۲-۴- شرایط مرزی در ورودی

در ورودی سرعت در جهت عمود بر مرز را برابر سرعت ورودی می گیریم که معلوم می باشد. شکل زیر شرایط در ورودی مسئله را نشان می دهد:

۱ - log law velocity



شکل ۴-۵- نحوه اعمال شرایط مرزی در ورودی

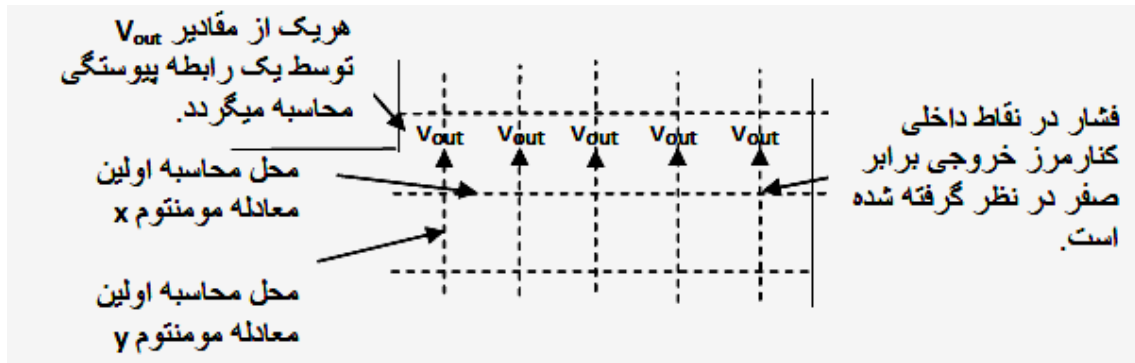
اولین معادله مومنتم در جهت  $Y$  از مقدار  $v = v_{in}$  در مرز به صورت مستقیم برای محاسبه طرف راست این معادله استفاده می نماید. معادله فشار (۴-۱۳) در این قسمت به صورت ساده ای تغییر می یابد. اگر معادله (۴-۷) را که برای تعیین معادله فشار به کار رفت، مجدداً در نظر بگیریم:

$$\frac{u^{n+1}_{i+1/2,j} - u^{n+1}_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{v^{n+1}_{i,j+1/2} - v^{n+1}_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0$$

برای ورودی که در پایین شکل (۴-۵) نشان داده شده است می توان مقدار  $v^{n+1}_{i,j-1/2} = v_{in}$  قرار داد و به جای سایر مقادیر سرعت از معادلات ۸، ۱۰ و ۱۱ استفاده نمود. اگرکل این عملیات انجام گیرد، مفهوم نهایی آن است که در معادله، فشار جنوبی ظاهر نمی گردد و هم چنین ضرایب فشار مرکزی باز هم برابر جمع سایر ضرایب فشار های همسایگانش خواهد بود. بنابراین در برنامه نویسی فقط ضریب فشار جنوبی را برای معادله فشاری که در کنار مرز واقع شده برابر صفر می گیریم و ضریب فشار مرکزی مطابق معمول برابر جمع ضرایب فشار همسایگانش خواهد بود. RHSV برای معادله مومنتم  $Y$  ای که مرکزش بر روی مرز واقع است برابر  $v_{in}$  در نظر می گیریم تا شرایط مرزی به خوبی اعمال گردد.

#### ۴-۲-۲-۳- شرایط مرزی در خروجی

در خروجی، فشار برابر صفر در نظر گرفته شده است. برای راحتی در برنامه نویسی و سادگی کار در نظر می گیریم که فشار روی گره های داخلی کنار مرز خروجی برابر صفر است (نه گره های خارجی).



شکل ۴-۶- نحوه اعمال شرایط مرزی در خروجی

در مرزهای خروجی، اولین معادلات مومنتوم  $X, Y$  در کنار مرز به راحتی و بدون مشکل قابل محاسبه می باشند. با توجه به آن که مقادیر فشار در گره های کنار مرز در تمام مدت محاسبات باید برابر صفر باشند، باید در شروع محاسبات مقادیر فشار را در این نقاط برابر صفر قرار دهیم و کاری کنیم که معادله (۴-۱۳) در این ناحیه از کار بیفتد و مقادیر فشار در این نقاط تغییر نیابند. برای انجام این کار می توان ضرایب فشار همسایگان و هم چنین طرف راست این معادلات را برابر صفر قرار داد. برای این که در این نقاط پیوستگی برقرار باشد، می توان در شروع هر پله زمانی مقدار  $v_{out}$  ها را به صورت مستقیم از رابطه پیوستگی (۴-۷) محاسبه نمود.

۴-۲-۳- نحوه محاسبه  $RHSU_{i-1/2,j}$  در معادله (۴-۸)

$$۴-۲-۳-۱- \text{ نحوه محاسبه } v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

این ترم به سادگی به روش مرکزی قابل محاسبه است. داریم:

$$\begin{array}{c} u_{i-\frac{1}{2},j+1} \\ | \\ u_{i-\frac{3}{2},j} \quad \text{---} \quad u_{i-\frac{1}{2},j} \quad \text{---} \quad u_{i+\frac{1}{2},j} \\ | \\ u_{i-\frac{1}{2},j-1} \end{array}$$

شکل ۴-۷- نحوه محاسبه دیفیوژن در معادله مومنتوم  $X$  در مکان  $i-1/2, j$

$$v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = v \left( \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - 2u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-\frac{1}{2},j-1} - 2u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j+1}}{\Delta y^2} \right)$$

۲-۳-۲-۴ نحوه محاسبه  $\frac{\partial u^2}{\partial x}$

این ترم به طرق بسیار متنوعی قابل محاسبه است. ساده ترین روش محاسبه به شکل مرکزی است، ولی مرکزی محاسبه کردن این ترم سبب می گردد که مقدار  $\Delta t$  به لحاظ پایداری بسیار کوچک گردد. روش های دیگری مثل upwind مرتبه اول، دوم، سوم، مک کورمک و... موجود است که در زیر نحوه محاسبه این ترم به روش upwind مرتبه اول و به شکل بقایی توضیح داده می شود.

$$u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}$$

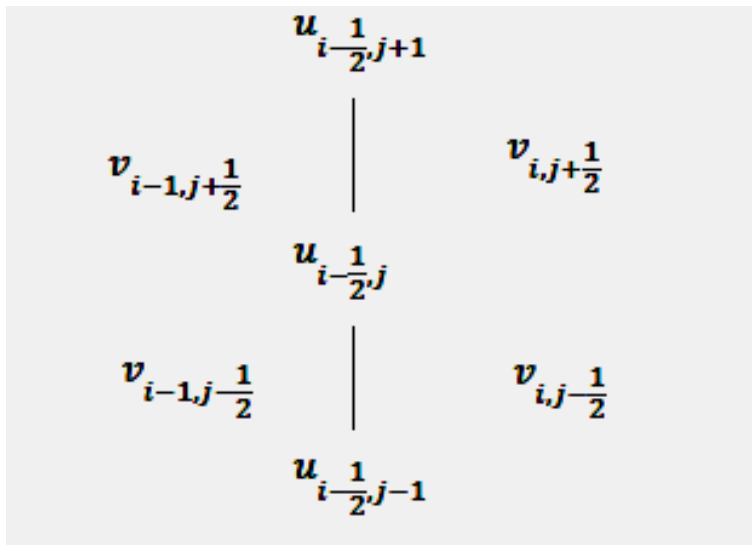
$$ua_2 = \left( u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j} \right) / 2 \quad \text{if}(ua_2 > \cdot) u_2 = u_{i-\frac{1}{2},j} \text{ else } u_2 = u_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$ua_1 = \left( u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} \right) / 2 \quad \text{if}(ua_1 > \cdot) u_1 = u_{i-\frac{1}{2},j} \text{ else } u_1 = u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{ua_2 \cdot u_2 - ua_1 \cdot u_1}{\Delta x}$$

۳-۳-۲-۴ نحوه محاسبه  $\frac{\partial(uv)}{\partial y}$

نحوه محاسبه این ترم به صورت upwind مرتبه اول شرح داده می شود:



شکل ۴-۸- نحوه محاسبه ترم  $\frac{\partial(uv)}{\partial y}$

$$va_2 = (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}) / 2 \quad \text{if}(va_2 > \cdot) u_2 = u_{i-\frac{1}{2},j} \text{ else } u_2 = u_{i-\frac{1}{2},j+1}$$

$$va_1 = (v_{i,j-\frac{1}{2}} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}}) / 2 \quad \text{if}(va_1 > \cdot) u_1 = u_{i-\frac{1}{2},j-1} \text{ else } u_1 = u_{i-\frac{1}{2},j}$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial y} = \frac{va_2 \cdot u_2 - va_1 \cdot u_1}{\Delta y}$$

مراحل ارائه شده مربوط به جهت X می باشد، برای جهت Y نیز به طریق مشابه عمل می گردد.

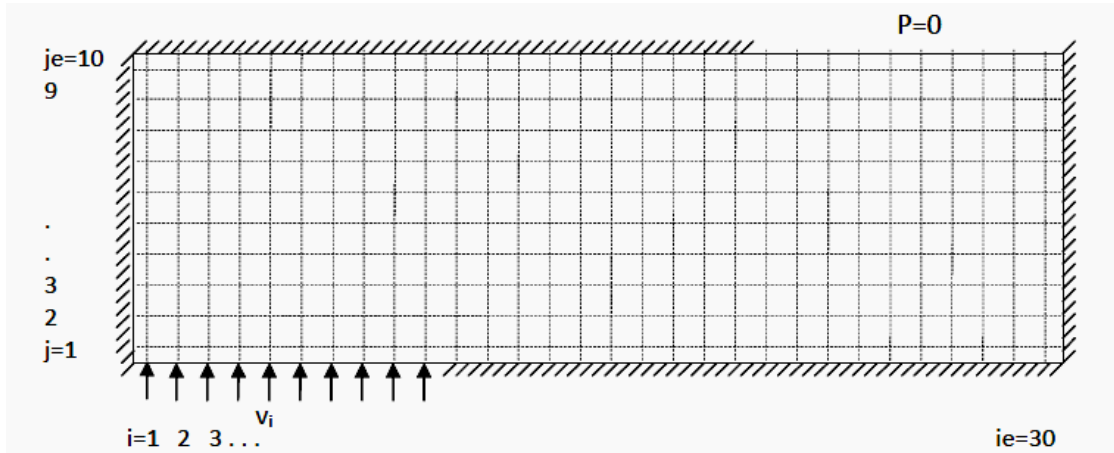
#### ۴-۲-۴- الگوریتم برنامه نویسی

- نیاز به شامل کردن دو فایل math.h و stdio.h می باشد.
- مقادیر صحیح ie, je, ninp به صورت ثابت در ابتدای برنامه داده شوند.
- مقادیر با دقت اعشاری دویل dx, dy, eta, ro, vinp, pout, pi, dt به صورت ثابت در ابتدای برنامه داده می شود.
- بردارهای دو بعدی با دقت اعشاری دویل u, v, p باید معرفی گردند و گنجایش آن ها باید ie+2 در جهت x و je+2 در جهت y باشد.
- هم چنین بردارهای دو بعدی با دقت اعشاری دویل rhsu و rhsv باید معرفی گردند تا بتوان در آن ها مقادیر طرف راست معادلات مومنتم در جهت x, y را نگه داشت.
- بردارهای دو بعدی برای نگهداری ضرایب فشار باید معرفی گردند. این بردارها شامل ap, apn, aps, ape, apw, bp می باشد که به ترتیب شامل مقدار مرکزی، ضریب فشار شمالی، جنوبی، شرقی و غربی و طرف راست معادله فشار (۴-۱۳) می باشد. اندازه این بردارها می تواند ie+1 در جهت x و je+1 در جهت y باشد.
- نیاز به توابع init برای ایجاد شرایط اولیه، prescoff برای ایجاد ضرایب معادلات فشار، rhs برای تعیین طرف راست معادلات مومنتم x و y، solver برای حل کردن معادلات فشار، bound برای اثر دادن شرایط مرزی، surfdat برای نوشتن جواب های نهایی داریم. هم چنین تمام این توابع را از داخل تابع main صدا می زنیم.

### ۴-۲-۵- نحوه نوشتن Subroutine های مختلف برای برنامه دو بعدی جریان در یک کانال

#### Subroutine Prescof - ۱-۴-۲-۵

باید روی نقاط داخلی حرکت کرد.



شکل ۴-۹- جریان در کانال دارای انحنای

مقادیر  $ape = apw = \frac{1}{\rho \Delta x^2}$  و  $aps = apn = \frac{1}{\rho \Delta y^2}$  قرار داده شود.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\tau}{\rho \Delta x^2} + \frac{\tau}{\rho \Delta y^2} \right) P^{n+1}_{i,j} \\ &= \frac{1}{\rho \Delta x^2} P^{n+1}_{i-1,j} + \frac{1}{\rho \Delta x^2} P^{n+1}_{i+1,j} + \frac{1}{\rho \Delta y^2} P^{n+1}_{i,j-1} + \frac{1}{\rho \Delta y^2} P^{n+1}_{i,j+1} \\ & - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{RHSU_{i+1/2,j} - RHSU_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{RHSV_{i,j+1/2} - RHSV_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right) \end{aligned}$$

دوباره روی کل نقاط حرکت کرد و مقدار  $ap$  مرکزی را از جمع  $aps, apn, ape, apw$  به دست آورد و

دوباره همه همسایگان را بر  $ap$  تقسیم کرد. روی نقاط مرزی فشار باید مقادیر فوق را برابر صفر قرار داد.

#### Subroutine rhs - ۲-۵-۲-۴

این Subroutine از دو قسمت تشکیل شده است، قسمتی که  $rhsu$  را می سازد و قسمتی که  $rhsv$  را

می سازد. برای درست کردن  $rhsu$  باید روی نقاط مناسب که مرکز معادلات مومنتم  $x$  است، حرکت کرد.

$$RHSU_{i-1/2,j} = u^n_{i-1/2,j} + \Delta t \left( -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right)_{i-1/2,j}$$



ترم های انتقال باید به روش Upwind Conservative گفته شده، نوشته شوند و ترم های انتشار نیز باید به صورت مرکزی نوشته شوند.

برای درست کردن rhsv باید روی نقاط مناسب که مرکز معادلات مومنتم  $v$  است، حرکت کرد.

$$RHSV_{i,j-1/2} = v^n_{i,j-1/2} + \Delta t \left( -\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right)_{i,j-1/2}$$

بعد از تمام شدن rhsu و rhsv برای کل حوزه باید bp را به وسیله فرمول زیر محاسبه نمود.

$$bp_{i,j} = -\frac{1}{\Delta t} \left( \frac{RHSU_{i+1/2,j} - RHSU_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{RHSV_{i,j+1/2} - RHSV_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right) / ap_{i,j}$$

در ادامه باید در نقاط با فشار ثابت، مقدار bp برابر pout قرار داده شود.

#### Subroutine solve -۳-۵-۲-۴

باید روی تمام نقاط تقاطع داخلی حرکت کرد و هر  $\rho$  را از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$P_{i,j} = P_{i-1,j} * ap_w + P_{i+1,j} * ap_e + P_{i,j-1} * ap_s + P_{i,j+1} * ap_n + bp_{i,j}$$

باید روی تمام نقاطی که در آن ها U قابل محاسبه است، حرکت کرد و هر U از رابطه زیر محاسبه شود:

$$u_{i,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P_{i,j} - P_{i-1,j}) + RHSU_{i,j}$$

باید روی تمام نقاطی که در آن ها V قابل محاسبه است، حرکت کرد و هر V از رابطه زیر محاسبه شود:

$$v_{i,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P_{i,j} - P_{i,j-1}) + RHSV_{i,j}$$

#### Subroutine Bound -۴-۵-۲-۴

در این قسمت شرایط مرزی اعمال می گردند. باید روی تمام مرزهای دیوار حرکت کرد و سرعت خارجی

را برابر منفی سرعت داخلی قرار داد.

باید روی تمام نقاط فشار ثابت حرکت نمود و مقدار سرعت V خروجی را به صورت مستقیم از رابطه

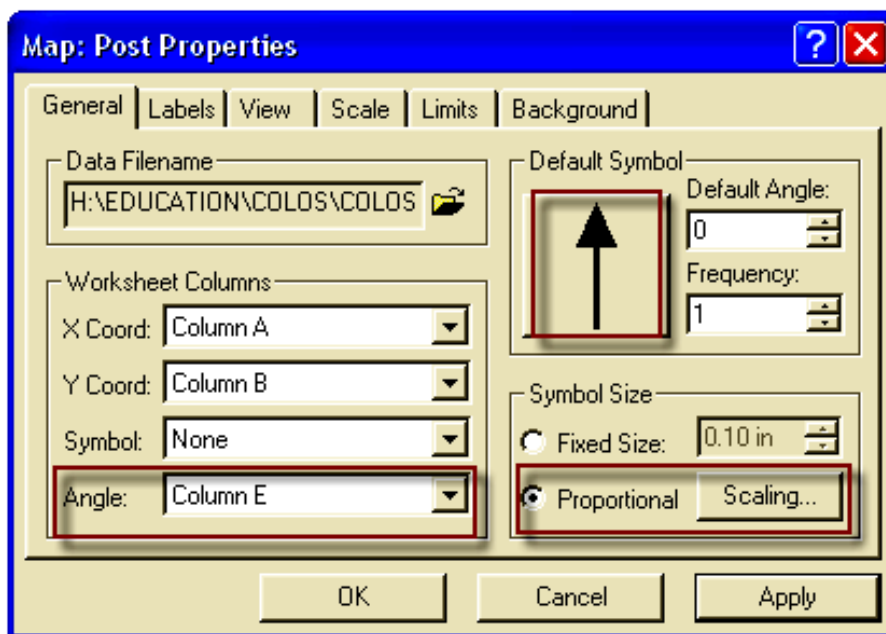
پیوستگی تعیین نمود.

## Subroutine Surfdat - ۵-۵-۲-۴

باید فایل‌ها به اسم Velocity.txt, Pressure.txt برای نوشتن جواب های سرعت و فشار ایجاد نمود.

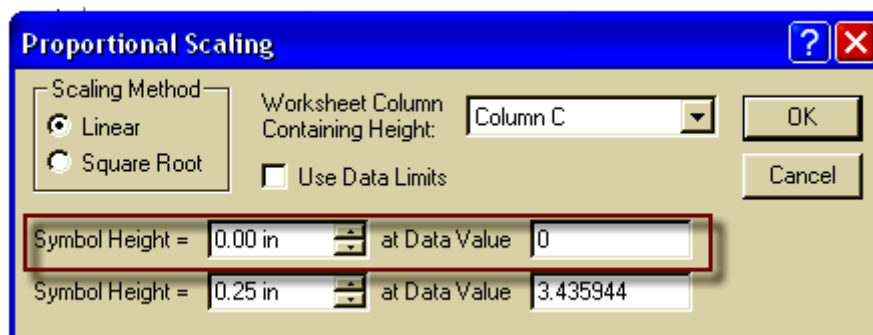
باید روی نقاط تقاطع داخلی حرکت کرد و

- سرعت متوسط در جهت (um) x و هم چنین سرعت متوسط در جهت (vm) y را محاسبه نمود.
  - سرعت کل را از جذر مجموع مربعات um و vm تعیین نمود (vt). دستور sqrt برای این کار مناسب است.
  - زاویه مربوط به سرعت را از رابطه  $\text{atan} r(\text{vm}, \text{um})$  به دست آورد و سپس آن را از رادیان تبدیل به درجه کرد و از ۹۰ درجه کم کرد. (ang)
  - در فایل سرعت ها باید در هر خط به ترتیب ang, vt, z, i را با فرمت مناسب نوشت و بین هر دو مقدار یک فاصله قرار داد.
  - باید در فایل فشار، فشار به شکل مناسب نوشته شود.
- برای استفاده از زیربرنامه surfdat کل شاخه surfur را نصب می کنیم. در منوی map گزینه post را انتخاب می کنیم. در این زمان نام فایل ورودی را برنامه می پرسد که باید فایل Velocity.txt به برنامه معرفی شود. تنظیمات مربوط به گزینه ها در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۰- تنظیمات برای ترسیم بردارهای سرعت در برنامه surfer

هم چنین در منوی فوق باید کلید Scaling انتخاب گردد تا منوی دیگری به صورت زیر ظاهر شود و در آن Scale مناسب برای ترسیم بردارها به صورت زیر تنظیم شود.



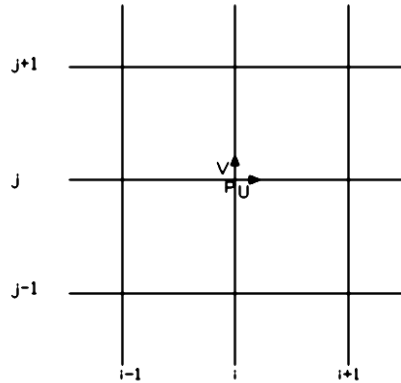
شکل ۴-۱۱- تنظیمات مربوط به scaling

به این ترتیب گراف سرعت ها ترسیم می گردد.

#### ۴-۳- الگوریتم مک برای مش هم مکان

همان طور که گفته شد، این قسمت موضوع اصلی این پایان نامه می باشد. در این قسمت نحوه به کارگیری الگوریتم مک برای مش های هم مکان ارائه می گردد. قبلاً ذکر شد که در مش های

هم مکان، متغیرهای فشار، سرعت در جهت  $X$  و  $Y$  در یک محل و در محل تقاطع مش ها مطابق شکل زیر ذخیره می گردند.



شکل ۴-۱۲- نمایی از مش هم مکان

فرم تفاضل محدود معادلات ناویر - استوکس را همانند روش قبل، به صورت زیر بیان می کنیم:

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (14-4)$$

فرم بقایی معادله مومنتم در جهت  $X$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (15-4)$$

فرم بقایی معادله مومنتم در جهت  $Y$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 + \frac{P}{\rho} \right) = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (16-4)$$

اکنون معادلات را با توجه به موقعیت مش ها به صورت زیر گسسته می کنیم:

فرم گسسته معادله پیوستگی

$$\frac{u^{n+1}_{i+1/2,j} - u^{n+1}_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{v^{n+1}_{i,j+1/2} - v^{n+1}_{i,j-1/2}}{\Delta y} = 0 \quad (17-4)$$

فرم گسسته معادله مومنتم در جهت  $X$ :

$$\frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \frac{P^{n+1}_{i+1,j} - P^{n+1}_{i-1,j}}{\Delta x} = \left( -\frac{\partial u^r}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right)^n_{i,j} \quad (18-4)$$

$$u^{n+1}_{i,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i+1,j} - P^{n+1}_{i-1,j}) + u^n_{i,j} + \Delta t \left( -\frac{\partial u^r}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right)^n_{i,j}$$

سمت راست معادله فوق را RHS می نامیم، لذا خواهیم داشت:

$$u^{n+1}_{i,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i+1,j} - P^{n+1}_{i-1,j}) + RHSU_{i,j} \quad (19-4)$$

و به همین ترتیب سایر معادلات محاسبه خواهند شد:

$$\frac{v^{n+1}_{i,j} - v^n_{i,j}}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \frac{P^{n+1}_{i,j+1} - P^{n+1}_{i,j-1}}{\Delta y} = \left( -\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^r}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right)^n_{i,j} \quad (20-4)$$

$$v^{n+1}_{i,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i,j+1} - P^{n+1}_{i,j-1}) + v^n_{i,j} + \Delta t \left( -\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial v^r}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right)^n_{i,j}$$

$$v^{n+1}_{i,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i,j+1} - P^{n+1}_{i,j-1}) + RHSV_{i,j} \quad (21-4)$$

هم چنین روابط زیر توسط [۴۲] Rhie & Chow پیشنهاد شده اند. بر طبق نظر ایشان، روابط مومنتم قابل

انترپوله کردن هستند و می توان از روابط مومنتمی که در مرکز گره ها  $RHSU$  و  $RHSV$  آن ها محاسبه

شده است، استفاده نمود و روابط مومنتم را در مکان های دیگر مثل  $i + \frac{1}{2}, j$  و  $i, j + \frac{1}{2}$  انترپوله کرد.

$$u^{n+1}_{i+1/2,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i+1,j} - P^{n+1}_{i,j}) + \frac{RHSU_{i+1,j} + RHSU_{i,j}}{2} \quad (22-4)$$

$$u^{n+1}_{i-1/2,j} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i-1,j}) + \frac{RHSU_{i-1,j} + RHSU_{i,j}}{2} \quad (23-4)$$

$$v^{n+1}_{i,j+1/2} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i,j+1} - P^{n+1}_{i,j}) + \frac{RHSV_{i,j+1} + RHSV_{i,j}}{2} \quad (24-4)$$

$$v^{n+1}_{i,j-1/2} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i,j-1}) + \frac{RHSV_{i,j-1} + RHSV_{i,j}}{2} \quad (25-4)$$

با جای گذاری روابط (۲۲-۴) الی (۲۵-۴) در معادله پیوستگی (۱۷-۴) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\Delta x} \left( -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i+1,j} - P^{n+1}_{i,j}) + \frac{RHSU_{i+1,j} + RHSU_{i,j}}{2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i-1,j}) - \frac{RHSU_{i-1,j} + RHSU_{i,j}}{2} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left( -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i,j+1} - P^{n+1}_{i,j}) + \frac{RHSV_{i,j+1} + RHSV_{i,j}}{2} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P^{n+1}_{i,j} - P^{n+1}_{i,j-1}) - \frac{RHSV_{i,j-1} + RHSV_{i,j}}{2} \right) = 0 \quad (26-4)$$

که پس از مرتب کردن خواهیم داشت:

$$\frac{P^{n+1}_{i-1,j} - 2P^{n+1}_{i,j} + P^{n+1}_{i+1,j}}{\rho \Delta x^2} + \frac{P^{n+1}_{i,j-1} - 2P^{n+1}_{i,j} + P^{n+1}_{i,j+1}}{\rho \Delta y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{RHSU_{i+1,j} + RHSU_{i-1,j}}{2 \Delta x} + \frac{RHSV_{i,j+1} + RHSV_{i,j-1}}{2 \Delta y} \right) \quad (27-4)$$

سرانجام معادله فشار برای هر گره به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\left( \frac{2}{\rho \Delta x^2} + \frac{2}{\rho \Delta y^2} \right) P^{n+1}_{i,j} = \frac{1}{\rho \Delta x^2} P^{n+1}_{i-1,j} + \frac{1}{\rho \Delta x^2} P^{n+1}_{i+1,j} + \frac{1}{\rho \Delta y^2} P^{n+1}_{i,j-1} + \frac{1}{\rho \Delta y^2} P^{n+1}_{i,j+1} - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{RHSU_{i+1,j} - RHSU_{i-1,j}}{2 \Delta x} + \frac{RHSV_{i,j+1} - RHSV_{i,j-1}}{2 \Delta y} \right) \quad (28-4)$$

بدین ترتیب مقدار فشار در هر گره با توجه به مقادیر فشار در نقاط همسایه آن به دست خواهد آمد.

بررسی شرایط مرزی، طرف راست معادلات و ... مشابه روش مش جابجا شده است و از ذکر مجدد آن خودداری می گردد.

با مقایسه رابطه (4-13) برای مش جابجا شده و رابطه (4-28) برای مش هم مکان، می توان تفاوت این دو نوع مش را دریافت. در مش جابجا شده، مقادیر طرف راست معادلات مومنتم X یعنی RHSU در مکان

های  $i - \frac{1}{2}, j$  و  $i + \frac{1}{2}, j$  محاسبه و به صورت  $\frac{RHSU_{i+1/2,j} - RHSU_{i-1/2,j}}{\Delta x}$  با هم ترکیب می گردند،

در صورتی که در مش هم مکان مقادیر RHSU در مکان های  $i - 1, j$  و  $i + 1, j$  محاسبه و به

صورت  $\frac{RHSU_{i+1,j} - RHSU_{i-1,j}}{2 \Delta x}$  ترکیب می گردند. همین مطلب برای معادلات طرف راست جهت Y نیز

صحیح می باشد.

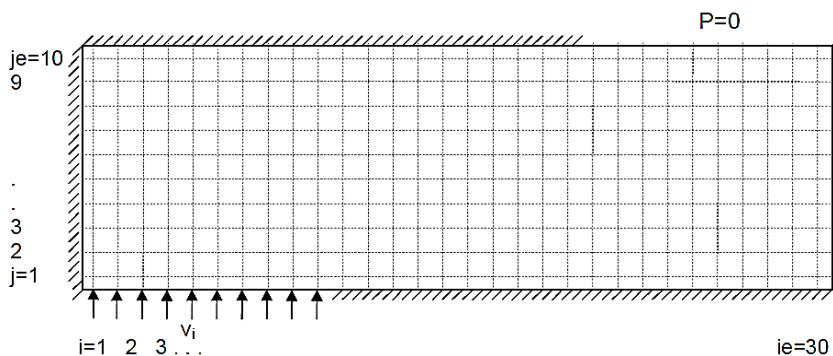
برنامه مدل سازی جریان به روش مش هم مکان در پیوست الف ارائه گردیده است.

#### 4-4- آزمایشات عملکرد مدل

در این قسمت ابتدا نتایج عددی حاصل از مدل سازی به روش مش هم مکان برای یک مسئله نمونه، با نرم افزارهای انسیس و این فوم مقایسه می گردند و سپس سایر مطالعات انجام شده با استفاده از برخی تست های استاندارد بر روی مش جابجا شده و هم مکان و مقایسه بین آن ها صورت می پذیرد.

## ۴-۴-۱- جریان در کانال به صورت دو بعدی

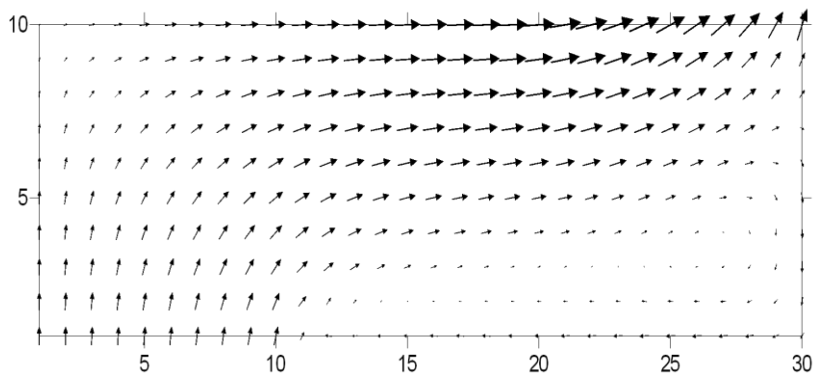
در این قسمت حل جریان در یک کانال دو بعدی با مش هم مکان ارائه می گردد. تعداد مش ها در جهت  $X$ ،  $30$  و در جهت  $Y$ ،  $10$  مش در نظر گرفته شده است.



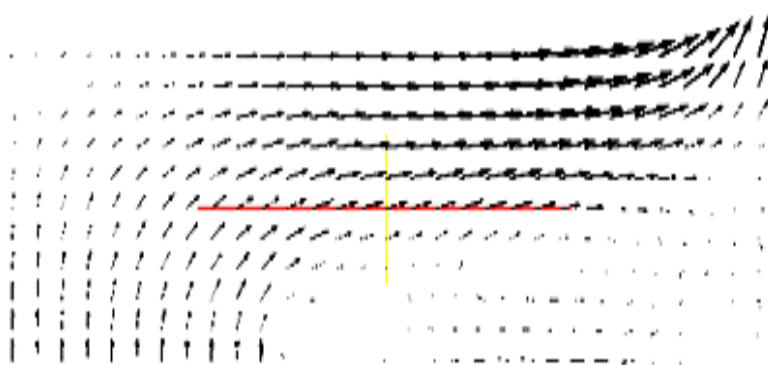
شکل ۴-۱۳- نمایش هندسی جریان در کانال با مش هم مکان

سرعت در ورودی کانال  $u = 1.5 \text{ m/s}$  و فشار خروجی  $p=0$  می باشد. شرط عدم لغزش روی دیواره ها برقرار است. شرایط مرزی جداره ها در هر دو روش نیز یکسان می باشد.

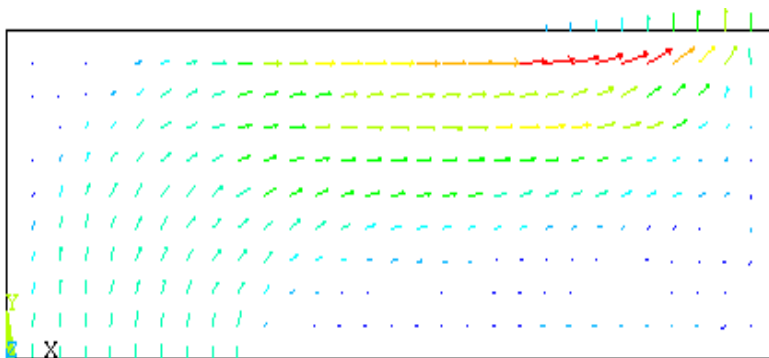
شکل ۴-۱۴- a و ۴-۱۴- b و ۴-۱۴- c نتایج کانتورهای سرعت را با روش مش هم مکان، نرم افزار اپن فوم و انسیس نشان می دهد.



شکل ۴-۱۴-ا - نمایش کانتور سرعت در مش هم مکان



شکل ۴-۱۴-ب - نتایج بردارهای سرعت با استفاده از نرم افزار این فوم برای کانال (مش ۳۰\*۱۰)



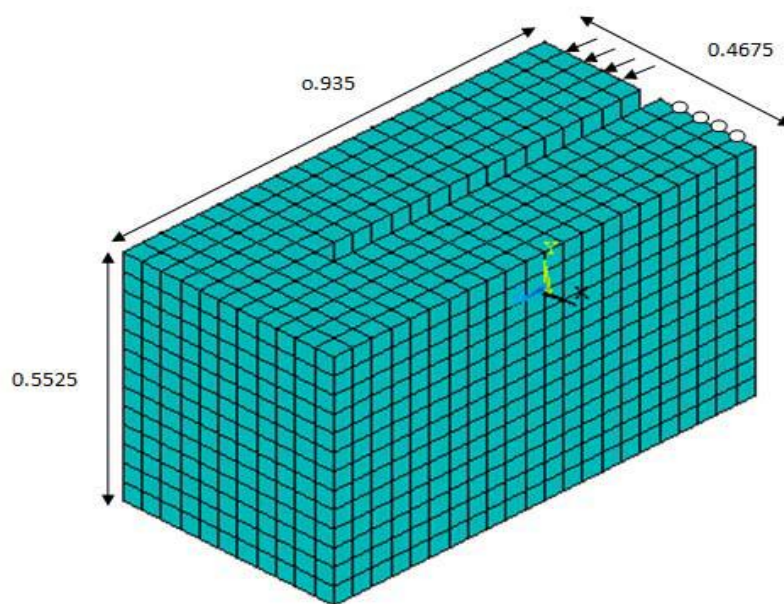
شکل ۴-۱۴-ج - نتایج بردارهای سرعت با استفاده از نرم افزار انسیس برای کانال

شکل ۱۴-تست کانال - مقایسه پروفیل سرعت در مش هم مکان، نرم افزار این فوم و انسیس

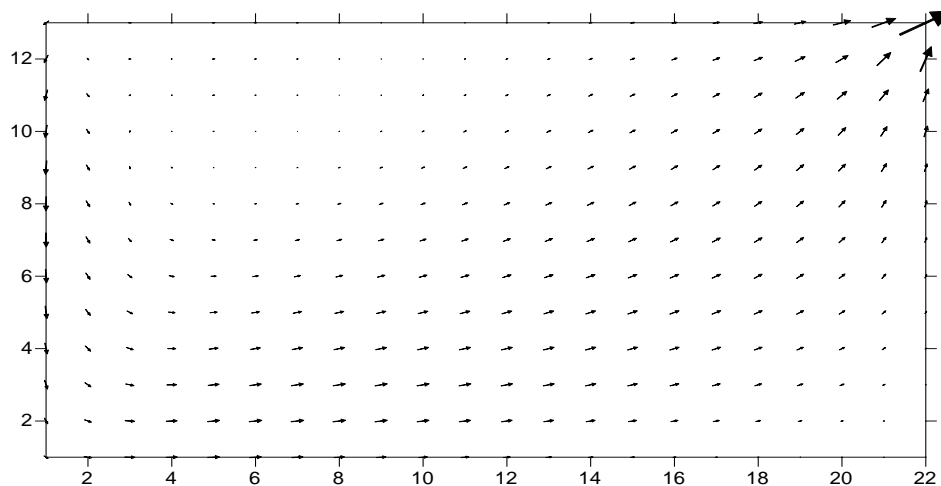
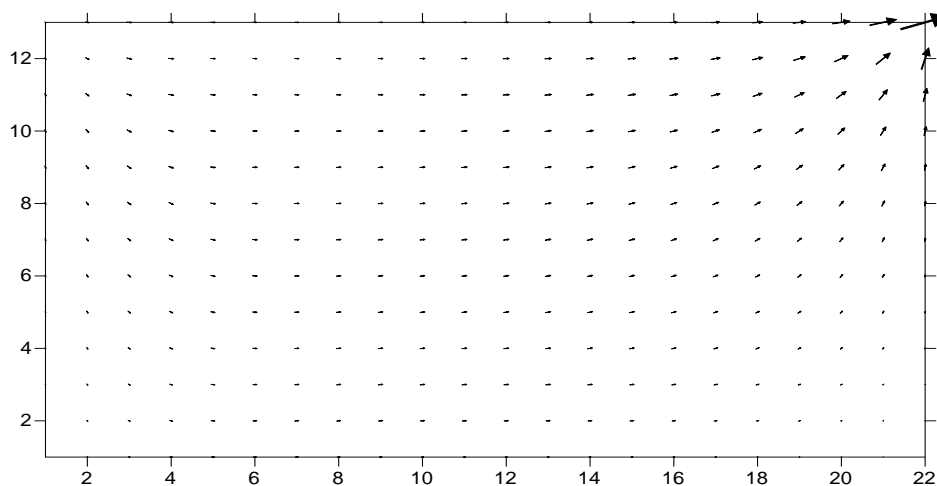
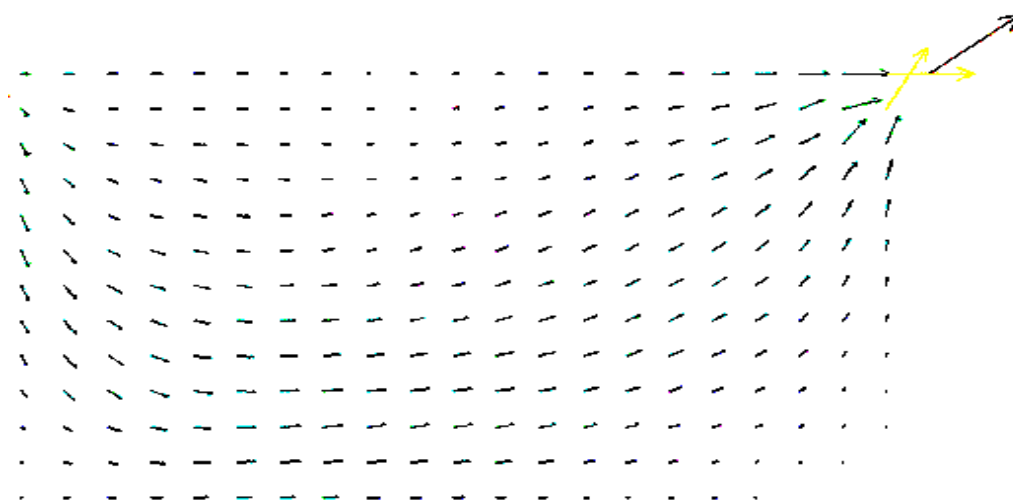


## ۲-۴-۴- نتایج کانال u شکل در حالت سه بعدی

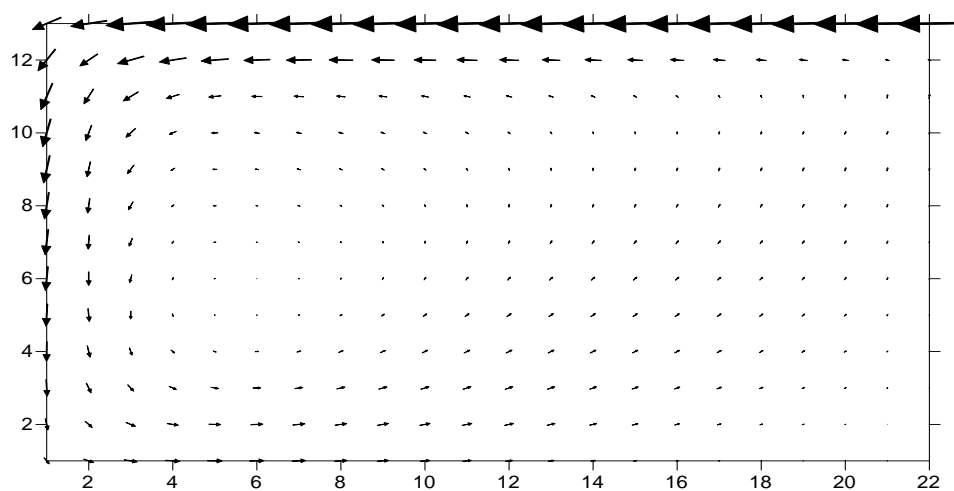
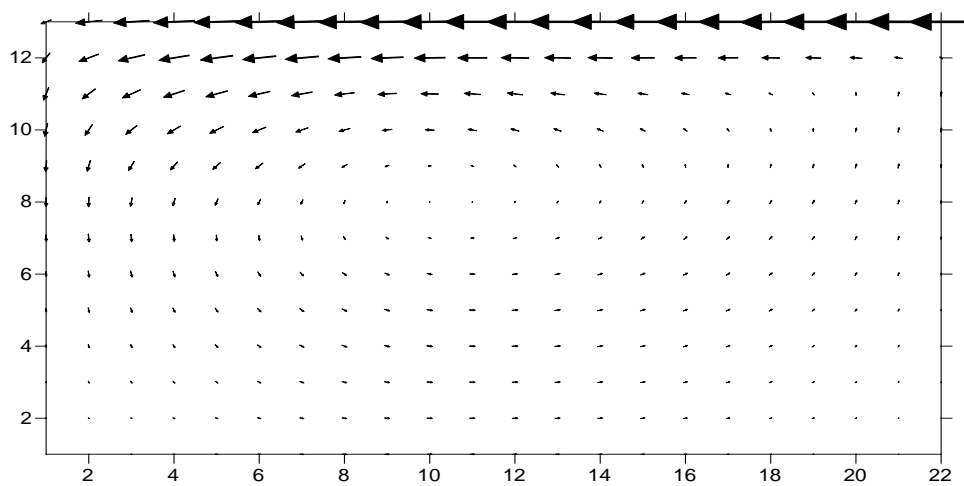
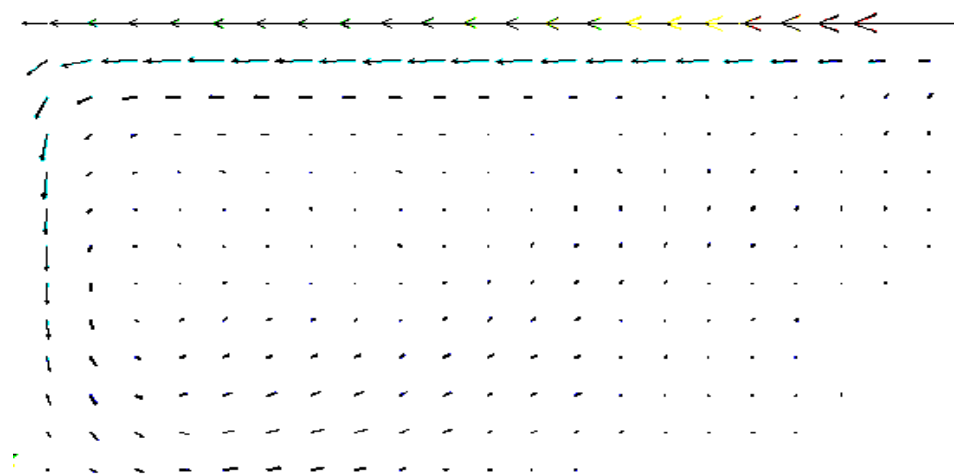
مدل سازی در یک کانال تصفیه آب u شکل انجام گرفته است. ابعاد تانک در جهت X, Y, Z به ترتیب ۹۳/۵, ۵۵/۲۵ و ۴۶/۷۵ سانتی متر است که با در نظر گرفتن اندازه مش ها معادل ۰/۰۴۲۵ در هر سه جهت، شبکه سازی با سازمان انجام پذیرفته است. نتایج حاصل از برنامه نویسی با نرم افزار انسیس کنترل شده و نتایج تطابق قابل قبولی را نشان می دهند. در اشکال زیر مقادیر سرعت در سه مقطع ذکر شده نشان داده شده است.



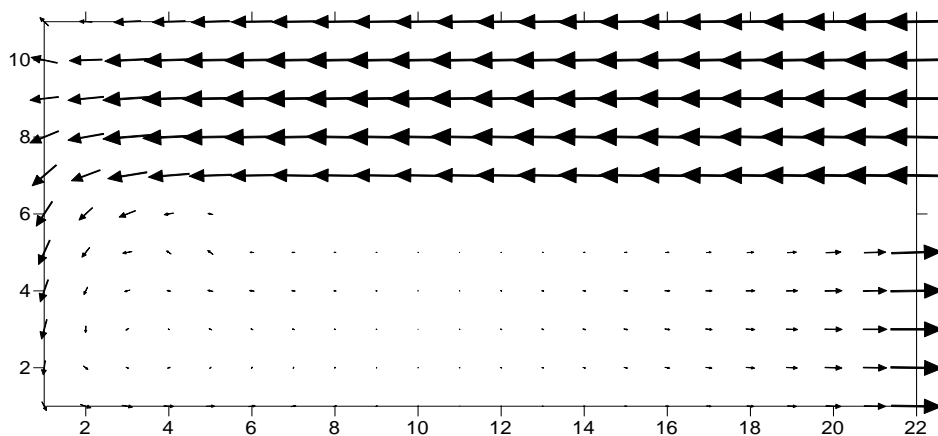
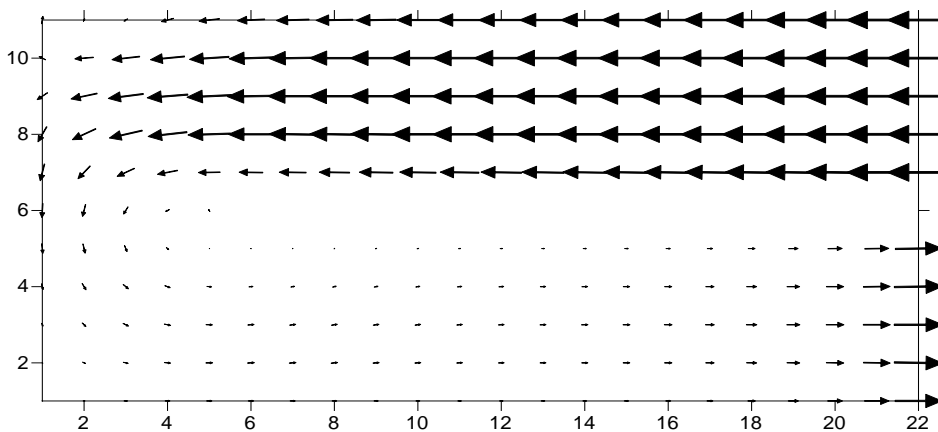
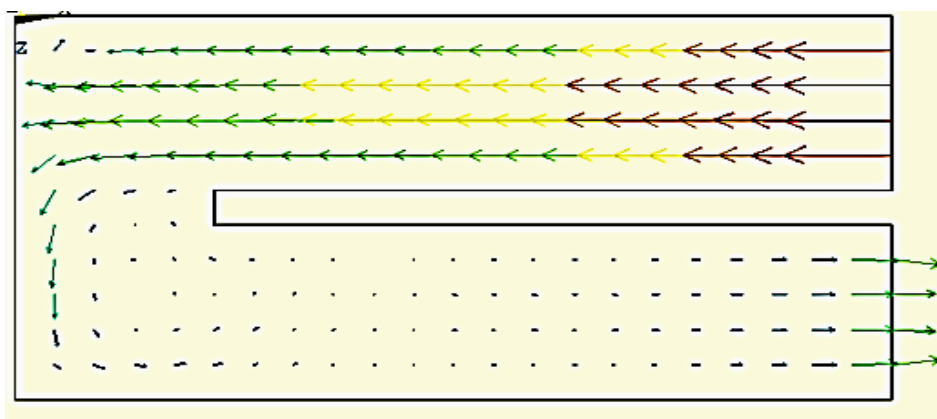
شکل ۴-۱۵- هندسه و ابعاد تانک تصفیه آب

شکل ۴-۱۶-ا بردارهای سرعت در مقطع  $4dy$  در مش هم مکانشکل ۴-۱۶-ب بردارهای سرعت در مقطع  $4dy$  در مش جابجا شدهشکل ۴-۱۶-ج بردارهای سرعت در مقطع  $4dy$  در نرم افزار انسیس

شکل ۴-۱۶ - مقایسه بردارهای سرعت در مقطع  $4dy$  در مش هم مکان، جابجا شده و نرم افزار انسیس

شکل ۴-۱۷-ا- بردارهای سرعت در مقطع  $9dy$  در مش هم مکانشکل ۴-۱۷-ب- بردارهای سرعت در مقطع  $9dy$  در مش جابجا شدهشکل ۴-۱۷-ج- بردارهای سرعت در مقطع  $9dy$  در نرم افزار انسیس

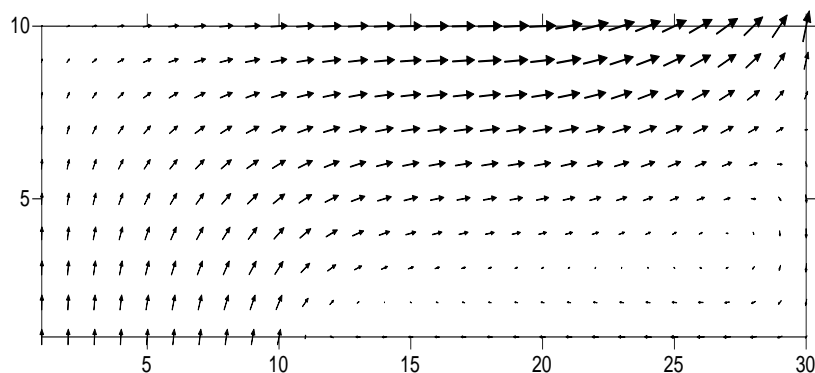
شکل ۴-۱۷- مقایسه بردارهای سرعت در مقطع  $9dy$  در مش هم مکان، جابجا شده و نرم افزار انسیس

شکل ۴-۱۸-ا- بردارهای سرعت در مقطع  $z=13$  در مش هم مکانشکل ۴-۱۸-ب- بردارهای سرعت در مقطع  $z=13$  در مش جابجا شدهشکل ۴-۱۸-ج- بردارهای سرعت در مقطع  $z=13$  در نرم افزار انسیس

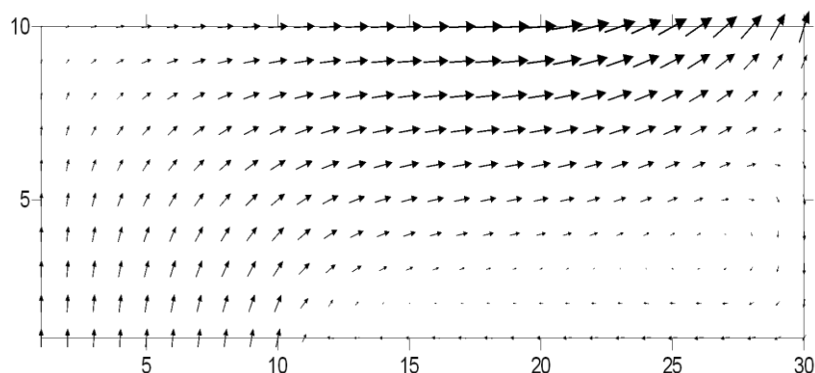
شکل ۴-۱۸ - مقایسه بردارهای سرعت در مقطع  $z=13$  در مش هم مکان، جابجا شده و نرم افزار انسیس

## ۳-۴-۴- مقایسه نتایج مش هم مکان و جابجا شده

اکنون در این قسمت ابتدا نتایج عددی حاصل از مدل سازی به روش مش جابجا شده و مش هم مکان برای مسئله نمونه دوبعدی، با هم مقایسه می گردند و سپس سایر مطالعات انجام شده با استفاده از برخی تست های استاندارد بر روی این دو مش و مقایسه بین آن ها صورت می پذیرد.



۴-۱۹-۲- نمایش کانتور سرعت در مش جابجا شده



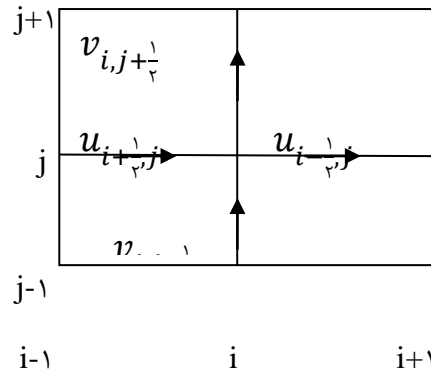
۴-۱۹-۳- نمایش کانتور سرعت در مش هم مکان

شکل ۱۹- تست کانال- مقایسه پروفیل سرعت در مش جابجا شده و هم مکان

لازم به ذکر است برای ترسیم شکل ۴-۱۹-a، با توجه به این که مش جابجا شده است، برای ترسیم مقادیر سرعت از مقدار  $v_t$  ارائه شده در فرمول زیر استفاده شده است:

$$v_m = \frac{v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}}{2} \quad \text{و} \quad u_m = \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{2}$$

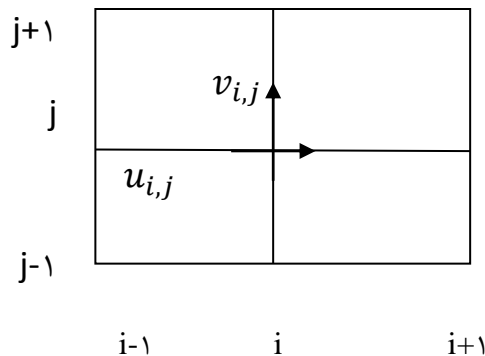
$$v_t = \sqrt{(u_m^2 + v_m^2)}$$



شکل ۴-۲۰- نحوه محاسبه بردار سرعت در مکان  $i, j$  در یک مش جابجا شده برای ترسیم بردارهای سرعت

در مش هم مکان، مقادیر  $v$  مطابق شکل زیر تعیین می گردد:

$$v_t = \sqrt{(u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2)}$$



شکل ۴-۲۱- نحوه محاسبه بردار سرعت در مکان  $i, j$  در یک مش هم مکان برای ترسیم بردارهای سرعت

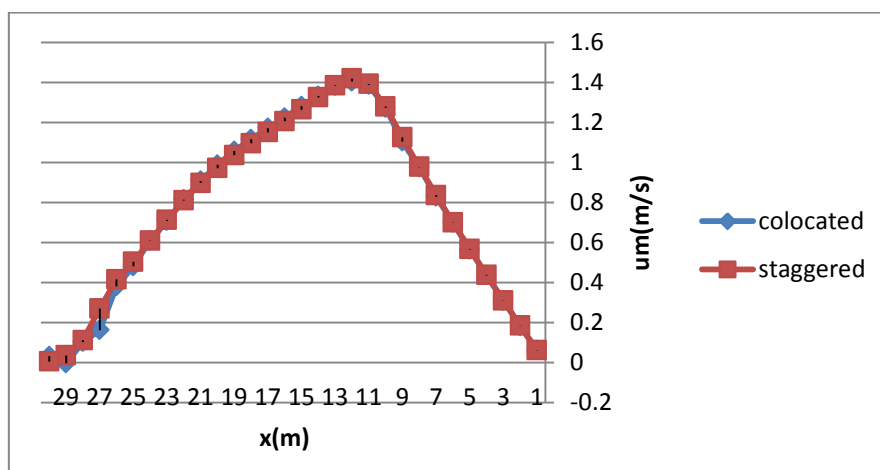
همین تفاوت ها در نحوه ارائه جواب های نهایی، مسلماً در ایجاد تغییر در جواب ها موثر می باشد. با این حال مقایسه دو شکل ۴-۱۹-a و ۴-۱۹-b تفاوت جدی و مهمی را نشان نمی دهد. لیست کد برنامه نوشته شده به زبان ++C برای این مش برای این مثال برای مش هم مکان در پیوست الف ضمیمه گردیده است.

همچنین برنامه مربوط به کانال سه بعدی در پیوست ب با مش هم مکان ارائه گردیده است.

در ادامه برنامه مربوط به کانال دو بعدی با نرم افزار انسیس در پیوست ج و کانال سه بعدی در پیوست و ارائه گردیده است.

#### ۴-۳-۱- مقایسه نمودار سرعت افقی در روش مش جابجا شده و هم مکان

با همان تعداد ۳۰ مش جهت X، و ۱۰ مش در جهت Y، نمودار سرعت افقی در مقطع  $z=4$  جهت مقایسه ارائه شده است.



شکل ۴-۲۲- مقایسه نوع مش هم مکان و جابجا شده در سرعت افقی

همان گونه که نمودار نشان می دهد، سرعت ها به طور قابل ملاحظه ای بر هم منطبق هستند. گراف شکل ۴-۱۹ نیز به خوبی این مطلب را نشان می دهد.

در ادامه نتایج مدل سازی با استفاده از مش هم مکان و جابجا شده و مقایسه نتایج این دو مش برای مسائل معروف سی-اف-دی آورده شده است.

#### ۴-۴-۴- Lid-driven Cavity

جریان مایع، در یک مخزن مستطیلی که در اثر حرکت مماسی یکی از سطوح آن ایجاد می شود، lid-driven cavity نامیده می شود. مرز فوقانی با سرعت  $u$  در حال حرکت است و سایر دیواره ها ساکن می باشند. به دلیل سادگی هندسه و شرایط مرزی آن، این جریان، مدلی پایه برای ورتکس های دینامیکی در سیستم های بسته و بررسی جریانات تراکم ناپذیر می باشد. محققانی که مطالعات فراوانی در این زمینه انجام داده اند، به قرار زیرند:

- حالت پایدار

Eturk et al[۴۳], Barragy et al[۴۴], Schreiber et al[۴۵], Ghia et al[۴۶]

- حالت انتقالی با آنالیز پایداری ترمودینامیک

Fortin et al[۴۷], Geravis et al[۴۸], Sahin et al[۴۹], Abouhamza et al [۵۰]

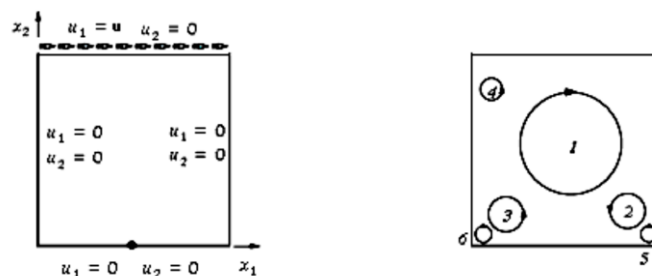
- حالت انتقالی با مدل های DNS

Auteri et al[۵۱], Peng et al[۵۲], Tiesinga et al [۵۳], Poliashenko et al[۵۴]

- تست های آزمایشی

Shankar et al[۵۵], Koseff et al[۵۶], Koseff et al[۵۷], Prasad et al[۵۸].

در این قسمت، روش حل جریان درون مرزمتحرک ارائه شده است. هندسه مسئله شامل شرایط مرزی، سرعت و ادی های متوالی است که در شکل (a-۲۳-۴) و (b-۲۳-۴) نشان داده شده است.



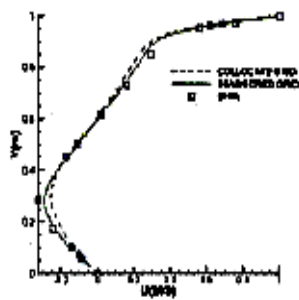
(a) شرایط مرزی

(b) ترتیب قرارگیری ادی ها

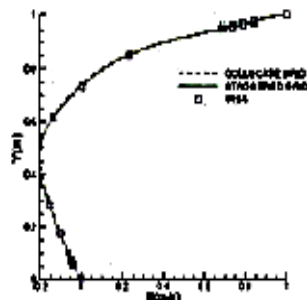
شکل ۴-۲۳ - تست lid-driven cavity

حل مسئله توسط Ghia[۵۹] و همکارانش انجام شده است. حل آنها یک روش مناسب برای این مسئله است. شکل (۴-۲۴) و (۴-۲۵) سرعت های افقی و عمودی با عددهای رینولدز متفاوت در رنج [۱۰۰-۱۰۰۰۰] را در مقایسه با روش Ghia نشان می دهد.

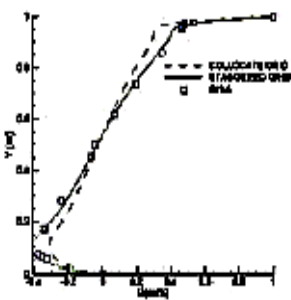




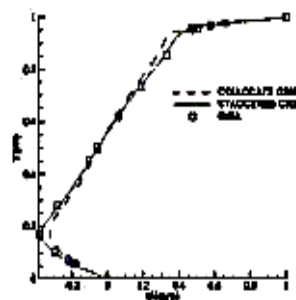
RE=400



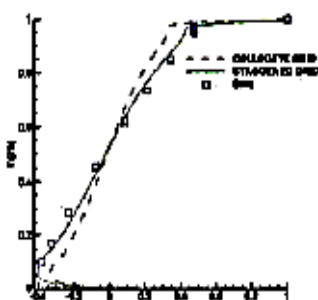
RE=100



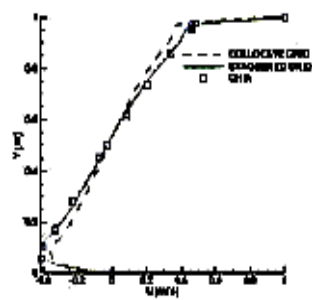
RE=3200



RE=1000



RE=10000



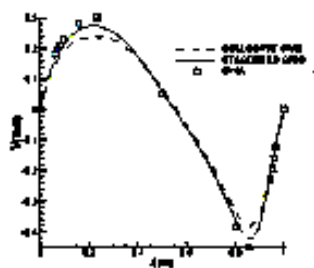
RE=5000

شکل ۴-۲۴- مقایسه سرعت افقی در مش جابجا شده و هم مکان و روش Ghia

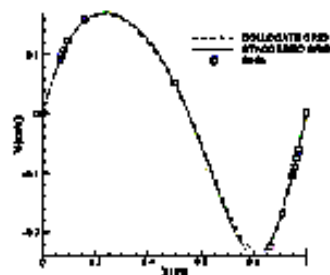
Collocated grid - - - -

Staggered \_\_\_\_\_

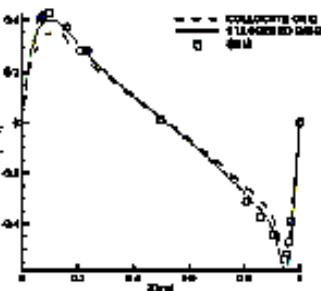
Ghia □ □ □



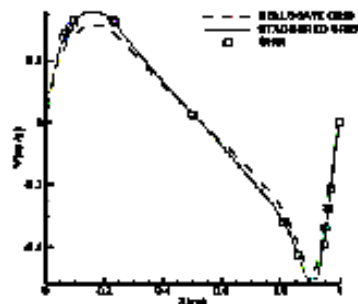
RE=400



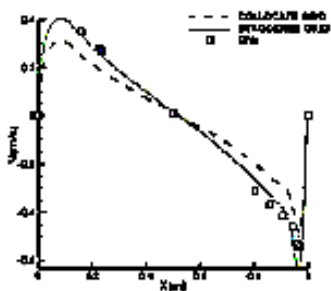
RE=100



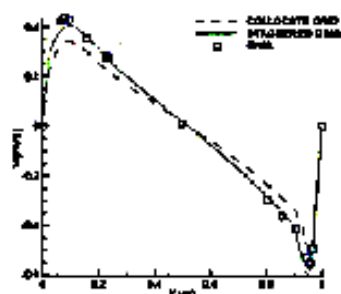
RE=3200



RE=1000



RE=10000



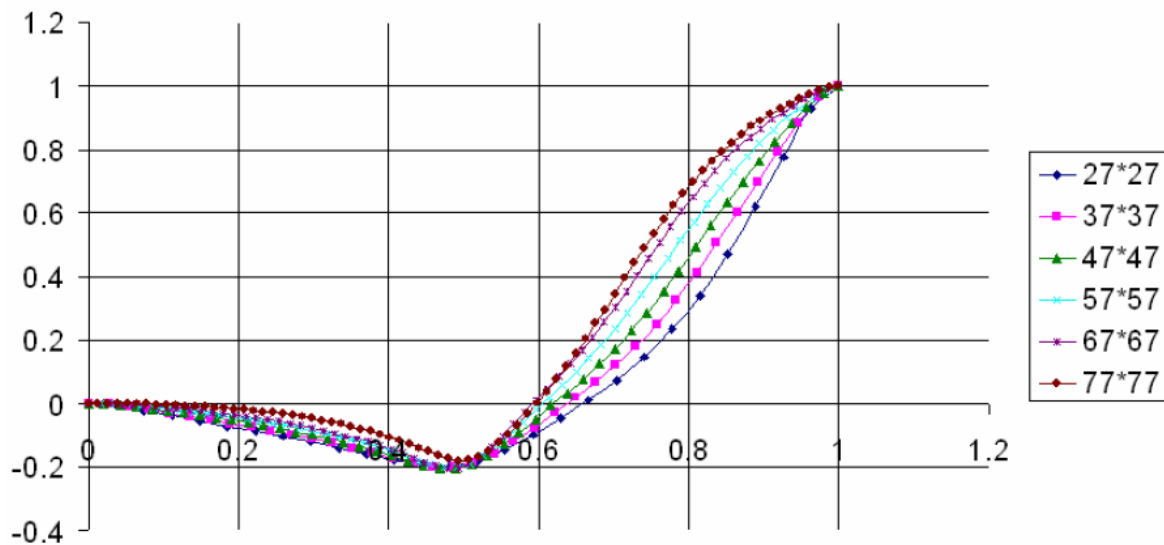
RE=5000

شکل ۴-۲۵- مقایسه سرعت عمودی در مش جابجا شده و هم مکان وروش Ghia

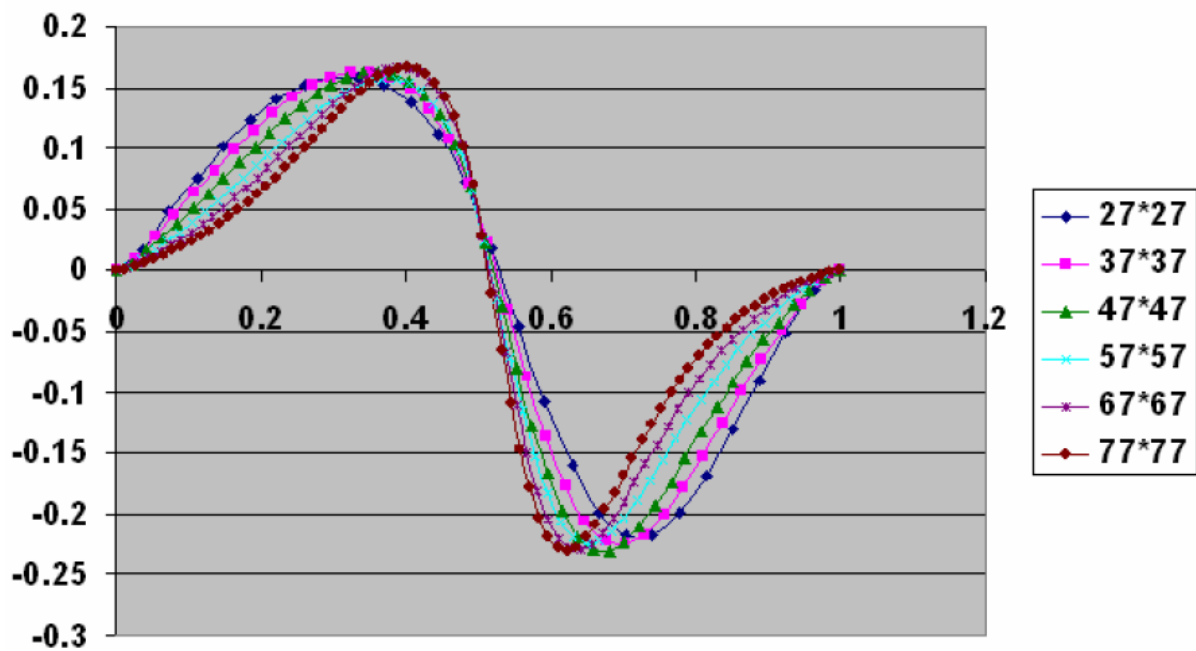
همان طور که از نمودارها دیده می شود، سرعت های افقی و عمودی در اعداد رینولدز کم در روش هم مکان و مش جابجا شده با دقت مناسبی، قابل پیش بینی هستند. (مثلاً برای  $Re=100$ ) با افزایش عدد رینولدز، عدم پیوستگی بین نتایج بیشتر خواهد شد، به طوری که روش جابجا شده به نتایج روش Ghia نزدیک تر خواهد شد. این اختلاف در دامنه بالادست و پایین دست بیشتر خواهد بود. اما در نقاط میانی شبکه، دوروش، جابجا شده و هم مکان با اعداد رینولدز متفاوت با دقت خوبی قابل پیش بینی می باشند.

همچنین می توان نشان داد که توزیع سرعت مستقل از شبکه بندی است. در شکل زیر نیز استقلال نمودار سرعت از تعداد مش بندی نشان داده شده است.

برای سرعت در راستای  $\gamma, X$  خواهیم داشت:



شکل ۴-۲۶- استقلال خطوط شبکه در مش هم مکان در راستای X



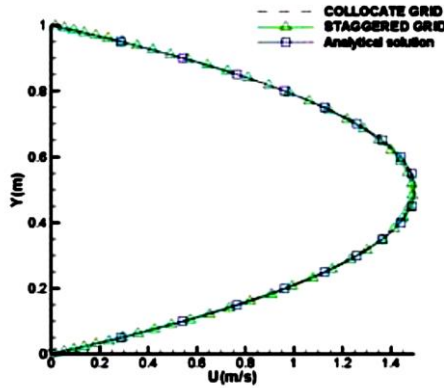
شکل ۴-۲۷- استقلال خطوط شبکه در مش هم مکان در راستای Y

این نمودارها به خوبی نشان می دهند که با افزایش تعداد گره ها به تدریج نمودارهای سرعت بر هم منطبق می شوند. با توجه به استقلال حل از گره ها در هر دو راستا و برای سرعت در هر دو راستا می توان نتیجه گرفت که نتیجه، مستقل از شبکه بندی است.

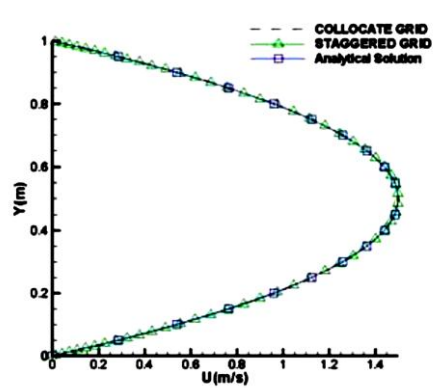
## ۴-۵- پروفیل عرضی سرعت در کانال

در این قسمت حل جریان کانال ارائه شده است. کانال به اندازه کافی طولانی فرض می گردد به صورتی که جریان کاملاً گسترش می یابد. طول و ارتفاع کانال به صورت زیر انتخاب شده است:  $h=1\text{ m}, L=40\text{ m}$ . هم چنین سرعت در ورودی کانال  $u=1\text{ m/s}$  می باشد.

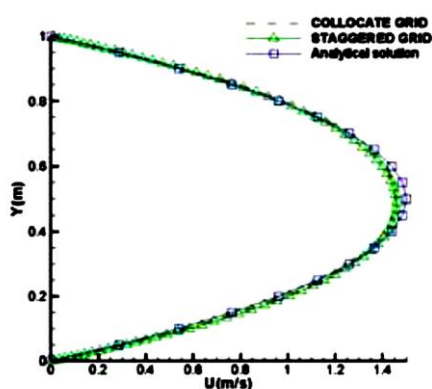
سرعت در انتهای کانال بر اساس مش جابجا شده و هم مکان با اعداد رینولدز متفاوت در رنج [۱۰۰-۱۰۰۰۰] اندازه گیری شده است. شکل (۴-۲۸) مقایسه نتایج این دو روش را ارائه می دهد. این اشکال صحت نتایج را در مقایسه با روش آنالیز تحلیلی با فرمول  $u=6(y-\frac{y^2}{2})$  نشان می دهد.



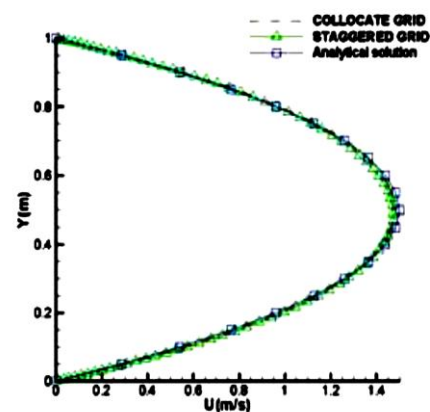
RE=۴۰۰



RE=۱۰۰



RE=۱۰۰۰

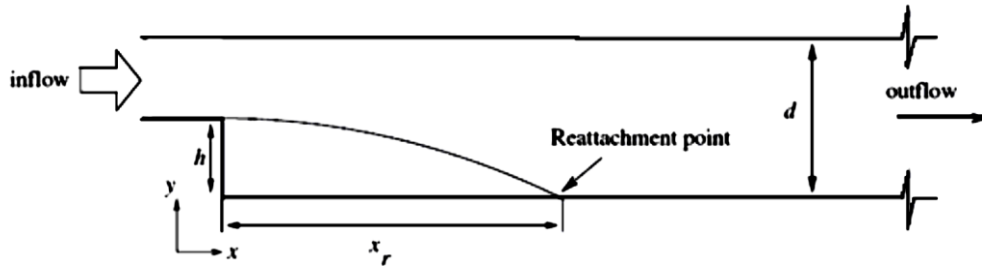


RE=۸۰۰

شکل ۴-۲۸- تست کانال - مقایسه پروفیل سرعت در مش جابجا شده و هم مکان و حل آنالیزی

## ۴-۴-۶- جریان در روش پله پشت به جریان

جریان در یک پله پشت به جریان، یک آزمایش مناسب برای آنالیزهای عددی می باشد. طرح دو بعدی از این روش در شکل (۴-۲۹) نشان داده شده است.

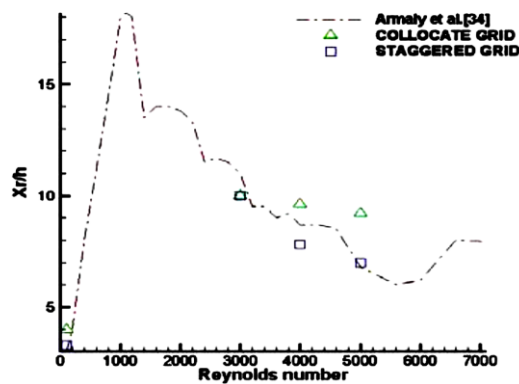


شکل ۴-۲۹- هندسه تست پله پشت به جریان

در این شکل،  $d$  عمق آب در کانال،  $h$  ارتفاع پله و  $x_r$  طول پیوستگی است.

رژیم جریان در روش فوق، برای  $Re < 400$ ,  $400 < Re < 3400$ ,  $Re > 3400$  (به ترتیب) خطی، انتقالی و توربولانس می باشد. برای  $Re < 1000$  یک ادی در پایین دست مشاهده می شود.

چنانچه عدد رینولدز افزایش یابد، ادی های سطحی ثانویه در بالا دست ایجاد می شوند بنابراین طول پیوستگی کاهش می یابد. در این قسمت، روش های عددی و روش [۶۰] Armaly ارائه شده است. شکل (۴-۳۰) این مقایسه را نشان می دهد.



شکل ۴-۳۰- مقایسه نقطه چسبندگی در مش جابجا شده و هم مکان و روش Armaly

از شکل واضح است که نتایج روش جابجا شده بهتر از مش هم مکان است. اما این نتایج برای تمام اعداد رینولدز صحیح نیست. برای مثال در  $Re=5000$ ، نتایج مش جابجا شده صحیح تر است اما در  $Re=4000$  نتایج این دو روش با روش Armaly تطبیق ندارد. [۶۱]

#### ۴-۵- بحث و نتایج

در این فصل، ابتدا نحوه بکارگیری الگوریتم مک برای مش های جابجا شده که حالت معمول این روش است، بیان گردید، سپس در ادامه، نحوه بکارگیری همین الگوریتم برای مش های هم مکان بررسی گردید. روشی ارائه شد که به خوبی این الگوریتم را برای مش های هم مکان به کار می گیرد. برای ارائه این روش از مفهوم انترپوله کردن مومنتم استفاده شد. بر طبق پیشنهاد Rhie & Chow چنان چه مثلاً معادله مومنتم  $X$  را در دو مکان داشته باشیم، می توان رابطه ای برای مومنتم  $X$  برای هر نقطه دلخواه بین آن ها با استفاده از انترپولاسیون به دست آورد. نتایج مش هم مکان و مش جابجا شده برای مسئله در کانال دو و سه بعدی مقایسه گردید و مشخص شد که تفاوت محسوسی بین آن ها وجود ندارد که به نظر منطقی می رسد. هم چنین برای این مسئله از نرم افزارهای Ansys و Open Foam نیز استفاده گردید که نتایج آن ها نیز مشابه و تایید کننده مدل سازی می باشد. در ادامه، نتایج مش هم مکان و جابجا شده برای چند مسئله آزمایشی معروف سی-اف-دی مثل جریان درون یک حفره در اثر حرکت درپوش، پله پشت به جریان و جریان عرضی درون یک کانال ارائه گردید.

از آزمایشات انجام شده می توان دریافت که در روش جریان درون حفره با درپوش متحرک، در اعداد رینولدز کم، نتایج دو روش یکسان می باشند ولی در اعداد رینولدز بالا به نظر می رسد که نتایج مش جابجا شده، تطابق بیشتری دارد.

## فصل پنجم

برنامه نویسی با روش حجم محدود

همان گونه که گفته شد، برای حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره ای در مکانیک سیالات، مشتق های پاره ای را باید تقریب زد. با این تقریب ها، مشتق های پاره ای به عبارت های تفاضل محدودی تبدیل می شوند که معادلات دیفرانسیل پاره ای را به معادلات جبری تبدیل می کنند. این معادلات جبری را در شبکه ایجاد شده در قلمرو مورد نظر حل می کنیم. بنابراین در داخل قلمرو و روی مرزهای آن مجموعه ای از نقاط شبکه باید مشخص شود، سپس همانند روش تفاضل محدود رابطه ای برای فشار بر اساس نقاط همسایگی به دست خواهیم آورد.

در این فصل از پایان نامه به تشریح برنامه نویسی و اصول کلی حاکم بر آن برای حل معادلات ناویر- استوکس با استفاده از روش حجم محدود می پردازیم.

### ۵-۱- بسط فرمول ناویر- استوکس

در این فصل هدف برنامه نویسی، گسسته سازی معادله ناویر- استوکس و سپس حل آن با روش حجم محدود می باشد. اکنون معادلات اصلی معرفی شده و سپس به گسسته سازی آن می پردازیم:

معادلات مومنتم در جهات X,Y,Z در فرمول ناویر- استوکس به فرم بسیط به صورت ذیل نوشته می شوند:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (۱-۵)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} + \frac{\partial \rho v w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (۲-۵)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho u w}{\partial x} + \frac{\partial \rho v w}{\partial y} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (۳-۵)$$

این معادلات را می توان به شکل دیورژانسی و به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \text{div}(\rho u \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) \quad (۴-۵)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \text{div}(\rho v \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) \quad (۵-۵)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t} + \text{div}(\rho w \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } w) \quad (۶-۵)$$

با انتگرال گیری روی حجم هر المان داریم:



$$\int \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV + \int \text{div}(\rho u \vec{u}) dV = \int -\frac{\partial p}{\partial x} dV + \int \text{div}(\mu \text{grad } u) dV \quad (7-5)$$

$$\int \frac{\partial \rho v}{\partial t} dV + \int \text{div}(\rho v \vec{u}) dV = \int -\frac{\partial p}{\partial y} dV + \int \text{div}(\mu \text{grad } v) dV \quad (8-5)$$

$$\int \frac{\partial \rho w}{\partial t} dV + \int \text{div}(\rho w \vec{u}) dV = \int -\frac{\partial p}{\partial z} dV + \int \text{div}(\mu \text{grad } w) dV \quad (9-5)$$

با در نظر گرفتن  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z}$  به صورت متوسط برای هر المان داریم:

$$\int \frac{\partial \rho u}{\partial t} dV + \int \text{div}(\rho u \vec{u}) dV = -\frac{\partial p}{\partial x} V_e + \int \text{div}(\mu \text{grad } u) dV \quad (10-5)$$

$$\int \frac{\partial \rho v}{\partial t} dV + \int \text{div}(\rho v \vec{u}) dV = -\frac{\partial p}{\partial y} V_e + \int \text{div}(\mu \text{grad } v) dV \quad (11-5)$$

$$\int \frac{\partial \rho w}{\partial t} dV + \int \text{div}(\rho w \vec{u}) dV = -\frac{\partial p}{\partial z} V_e + \int \text{div}(\mu \text{grad } w) dV \quad (12-5)$$

با به کارگیری قضیه دیورژانس برای ترم‌های انتقال و پخش داریم:

$$\rho \frac{\Delta u}{\Delta t} V_e + \int \rho u \vec{u} \cdot \vec{dA} = -\frac{\partial p}{\partial x} V_e + \int \mu \text{grad } u \cdot \vec{dA} \quad (13-5)$$

$$\rho \frac{\Delta v}{\Delta t} V_e + \int \rho v \vec{u} \cdot \vec{dA} = -\frac{\partial p}{\partial y} V_e + \int \mu \text{grad } v \cdot \vec{dA} \quad (14-5)$$

$$\rho \frac{\Delta w}{\Delta t} V_e + \int \rho w \vec{u} \cdot \vec{dA} = -\frac{\partial p}{\partial z} V_e + \int \mu \text{grad } w \cdot \vec{dA} \quad (15-5)$$

مقدار  $\vec{u}$  روی هر سطح المان ثابت در نظر گرفته می‌شود، هم چنین  $\int \vec{u} \cdot \vec{dA}$  نشان دهنده دبی گذرنده

از سطح می‌باشد و در نتیجه  $\int \rho \vec{u} \cdot \vec{dA}$  نشان دهنده دبی جرمی عبوری از سطح می‌باشد که اگر آن را با

M نشان دهیم داریم:

$$\rho \frac{\Delta u}{\Delta t} V_e + \sum u M = -\frac{\partial p}{\partial x} V_e + \int \mu \text{grad } u \cdot \vec{dA} \quad (16-5)$$

$$\rho \frac{\Delta v}{\Delta t} V_e + \sum v M = -\frac{\partial p}{\partial y} V_e + \int \mu \text{grad } v \cdot \vec{dA} \quad (17-5)$$

$$\rho \frac{\Delta w}{\Delta t} V_e + \sum w M = -\frac{\partial p}{\partial z} V_e + \int \mu \text{grad } w \cdot \vec{dA} \quad (18-5)$$

باید توجه گردد که اگر جهت بردار سرعت  $\vec{u}$  هم جهت با بردار سطح  $\vec{dA}$  باشد مقدار M مثبت محاسبه

می‌گردد.

مقادیر  $\text{grad } u$ ,  $\text{grad } v$ ,  $\text{grad } w$  روی هر سطح المان ثابت در نظر گرفته می‌شوند. در نتیجه:

$$\rho \frac{\Delta u}{\Delta t} \nabla_e + \sum uM = -\frac{\partial p}{\partial x} \nabla_e + \sum \mu \text{grad } u \cdot \vec{A} \quad (19-5)$$

$$\rho \frac{\Delta v}{\Delta t} \nabla_e + \sum vM = -\frac{\partial p}{\partial y} \nabla_e + \sum \mu \text{grad } v \cdot \vec{A} \quad (20-5)$$

$$\rho \frac{\Delta w}{\Delta t} \nabla_e + \sum wM = -\frac{\partial p}{\partial z} \nabla_e + \sum \mu \text{grad } w \cdot \vec{A} \quad (21-5)$$

اگر جهت  $n$  را عمود بر سطح در نظر بگیریم، داریم:

$$\rho \frac{\Delta u}{\Delta t} \nabla_e + \sum uM = -\frac{\partial p}{\partial x} \nabla_e + \sum \mu A \frac{\partial u}{\partial n} \quad (22-5)$$

$$\rho \frac{\Delta v}{\Delta t} \nabla_e + \sum vM = -\frac{\partial p}{\partial y} \nabla_e + \sum \mu A \frac{\partial v}{\partial n} \quad (23-5)$$

$$\rho \frac{\Delta w}{\Delta t} \nabla_e + \sum wM = -\frac{\partial p}{\partial z} \nabla_e + \sum \mu A \frac{\partial w}{\partial n} \quad (24-5)$$

حال معادلات به شکل جبری درآمده است و می توان با محاسبه ضرائب آنها را به شکل زیر به دست آورد

$$u = \bar{u} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\nabla_e}{a_p} \quad (25-5)$$

$$v = \bar{v} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\nabla_e}{a_p} \quad (26-5)$$

$$w = \bar{w} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\nabla_e}{a_p} \quad (27-5)$$

در این رابطه  $a_p$  ضریب سرعت مرکزی و  $\bar{v}, \bar{u}, \bar{w}$  مقادیر ثابتی هستند که برای معادلات مومنتم  $X, Y, Z$

قابل محاسبه می باشند. توجه شود که ضریب  $a_p$  برای هر سه معادله یکی است. این یک نکته مهم است

که روند محاسبات را بسیار کاهش می دهد و با دقت به معادلات دلیل آن مشخص می گردد.

اگر  $\vec{n}$  بردار عمود بر سطح بین دو المان باشد، می توان نوشت:

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

اگر  $n_x$  در معادله مومنتم  $X$ ,  $n_y$  در معادله مومنتم  $Y$  و  $n_z$  در معادله مومنتم  $Z$  ضرب شوند و این سه

معادله با هم جمع گردند، خواهیم داشت:

$$v = \bar{v} - \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\nabla_e}{a_p}$$

اگر المان ۱ و ۲ دارای سطح مشترک با عمود بر سطح  $\vec{n}$  باشند و معادله فوق را یک بار برای المان ۱ و یک بار برای المان ۲ بنویسیم خواهیم داشت:

$$v_1 = \bar{v}_1 - \frac{\partial p \nabla_{e1}}{\partial n a_{p1}}$$

$$v_2 = \bar{v}_2 - \frac{\partial p \nabla_{e2}}{\partial n a_{p2}}$$

معادلات فوق برای مرکز المان‌های ۱ و ۲ نوشته شده اند. اگر بخواهیم بدانیم سرعت عمود بر سطح در محل سطح مشترک دو المان چه اندازه است می توان از انتروپولاسیون کردن معادلات مومنتم در محل سطح این کار را انجام داد. ساده‌ترین شکل انتروپولاسیون متوسط‌گیری از دو معادله به شکل زیر است:

$$v_f = \bar{v}_f - \frac{\partial p \nabla_f}{\partial n a_f}$$

که در معادله فوق  $v_f$  سرعت در محل سطح مشترک می‌باشد و مقادیر  $\bar{v}_f$  و  $a_f$  به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$a_f = \frac{a_{p1} + a_{p2}}{2}$$

$$\bar{v}_f = \frac{\bar{v}_{e1} + \bar{v}_{e2}}{2}$$

مقدار  $\bar{v}_f$  از انتروپوله دو مقدار  $\bar{v}_1$ ،  $\bar{v}_2$  در دو طرف سطح روی مرکز سطح با استفاده از ic ها (ضریب انتروپولاسیون) به دست می‌آید.

مقدار دبی عبوری از ضرب این معادله در سطح مشترک به دست می‌آید، در نتیجه:

$$v_f A = \bar{v}_f A - \frac{\partial p \nabla_f}{\partial n a_f} A$$

اما  $\frac{\partial p \nabla_f}{\partial n a_f} A$  به صورت زیر قابل تعیین می‌باشد:

$$\frac{\partial p \nabla_f}{\partial n a_f} A = \frac{d_p(p_E - p_C) + d_s(p_b - p_d) + d_t(p_d - p_C)}{a_f} \quad (28-5)$$

که در آن  $d_p$  ضریب دیفیوژن<sup>۱</sup> اصلی و  $d_s, d_t$  ضرائب دیفیوژن در دو جهت دیگر می‌باشند و دارای اهمیت کمتری می‌باشند. اثبات این فرمول در ادامه ذکر می‌گردد.

اگر این رابطه را در رابطه اصلی قرار دهیم خواهیم داشت:

$$V_f A = \bar{V}_f A - \frac{d_p(p_E - p_C) + d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f} .$$

$$V_f A = \bar{V}_f A + \frac{d_p}{a_f} (p_{in} - p_{out}) - \frac{d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f} \quad (29-5)$$

اگر جمع دبی‌های عبوری از کل سطوح یک المان محاسبه شود خواهیم داشت:

$$\sum v_i A_i = \sum \left( \bar{v}_{fi} A_{fi} - \frac{d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f} \right) + \sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}} (P_{in} - P_{out}) = 0 .$$

و در نهایت مقدار فشار از فرمول زیر به دست خواهد آمد:

$$P_{in} = \left( \sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}} P_{out} - \sum \left( \bar{v}_{fi} A_{fi} - \frac{d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f} \right) \right) / \sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}} \quad (30-5)$$

اکنون به تشریح برخی از شرایط و پارامترهای مورد نیاز برنامه نویسی که در فرمول‌های فوق بیان گردیده‌اند، می‌پردازیم. همان‌گونه که قبلاً گفته شد، شرایط مرزی اثری تاثیرگذار بر برنامه دارند و درست اعمال نکردن آنها موجب ایجاد واگرایی در نتایج خواهد شد. مباحث مربوطه در فصل چهارم به صورت تفاضل محدودی به طور مبسوط انجام شده و از توضیح مجدد آن خودداری می‌گردد، در این قسمت فقط راجع به نکات برنامه نویسی برای حجم‌های محدود و کلیات اصول توضیحاتی ارائه می‌شود.

## ۵-۲- شرایط مرزی

### ۵-۲-۱- شرایط مرزی دیوار

مواردی که در این شرط مرزی بایستی رعایت گردند به قرار زیر می‌باشند:

- سرعت‌های خارجی در تمام جهتها باید منفی سرعت‌های داخلی باشند.

<sup>۱</sup> - diffusion

- فاصله مرکز المان‌های خارجی تا سطح پیرامون مسئله باید برابر فاصله مرکز المان‌های داخلی تا سطح پیرامون مسئله باشد.

- مقدار ثابت دبی ورودی روی مرزها که مربوط به معادله پیوستگی است باید صفر باشد.

#### ۵-۲-۲- شرایط در ورودی

- سرعت‌های خارجی باید برابر مؤلفه‌های سرعت ورودی در هر پله زمانی قرار داده شوند.
- ضریب فشار باید برابر صفر باشد تا ارتباط فشار داخل و خارج قطع گردد.
- مقدار ثابت دبی ورودی که مربوط به معادله پیوستگی است باید برابر حاصل ضرب سرعت در سطح قرار داده شود.

#### ۵-۲-۳- شرایط در خروجی

- سرعت‌های خارجی در تمام جهات باید برابر سرعت‌های داخلی باشند.
- ضریب فشار روی سطح باید از مقادیر المان داخلی تعیین گردد.

- ۵-۳- در این قسمت در مورد نحوه مش بندی و بعضی محاسبات مورد نیاز برنامه جهت تسهیل امر برنامه نویسی توضیحاتی ارائه می شود:

#### ۵-۳-۱- مش سازی

کدهای حجم محدود در CFD توسط مش‌های مختلف قابل تعریف است. مش‌های عمومی به عنوان مش‌های غیر یکنواخت که انواع توپولوژی مش را در برمی گیرد در نظر گرفته می‌شوند. اغلب از مش‌های ساده‌تر نیز در برنامه نویسی استفاده می‌گردد. انواع مش بندی که برای برنامه نویسی به کار می‌رود در دو حالت دو بعدی و سه بعدی به صورت با سازمان<sup>۱</sup> و بی سازمان و مش‌های غیر یکنواخت که خود ترکیبی از مش با سازمان و بی سازمان است، در نظر گرفته می‌شوند.

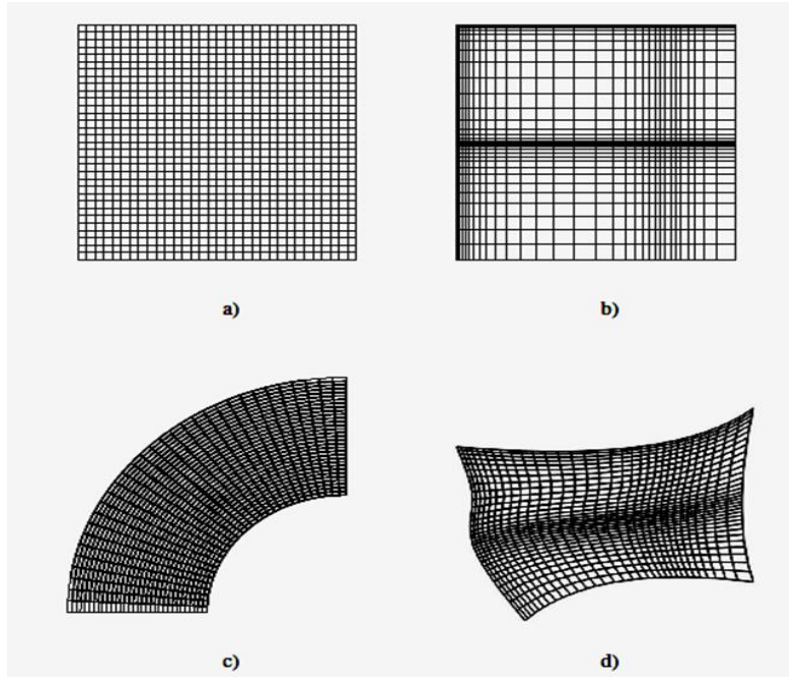
برای تعیین نقاط شبکه فرض‌های زیر به کار برده می‌شود:

- نگاشت باید یک به یک باشد، یعنی خطوط شبکه هم خانواده نباید یکدیگر را قطع کنند.

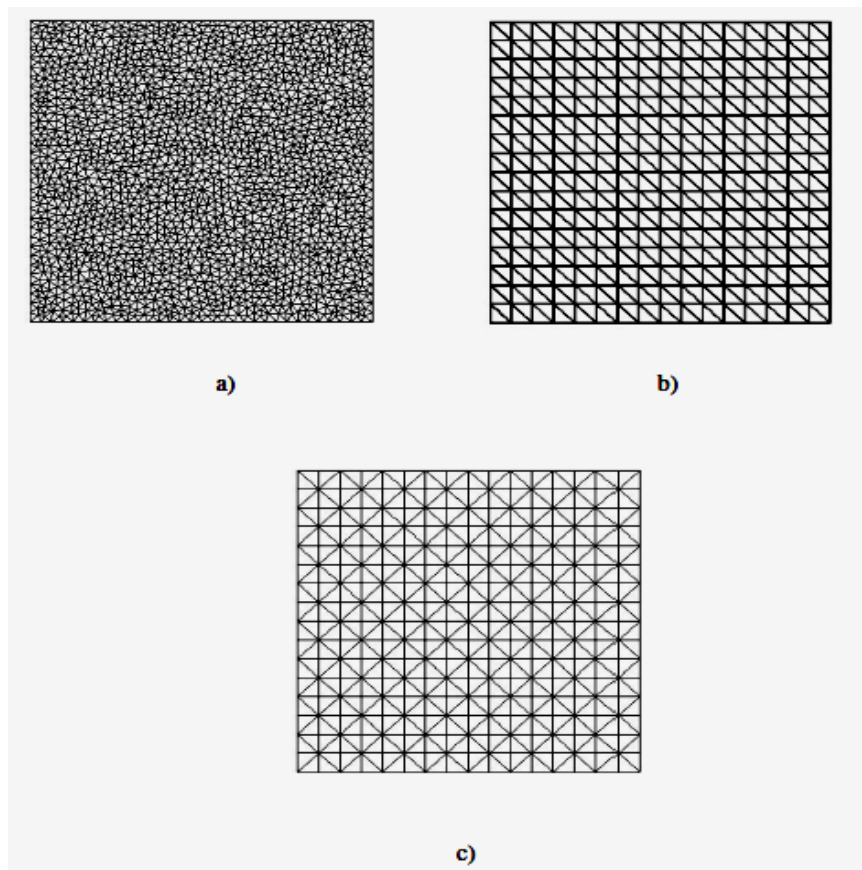
<sup>۱</sup> - canformal mapping

- از نقطه نظر عددی، در مناطقی که گرادیان های شدید جریان وجود دارد باید توزیع نقاط شبکه هموار و اعوجاج خطوط شبکه کم باشد. هم چنین، خطوط شبکه باید متعامد یا تقریباً متعامد باشند. روشن است که فراهم کردن همه این موارد به صورت یک جا با یک روش خاص ایجاد شبکه امکان پذیر نیست.

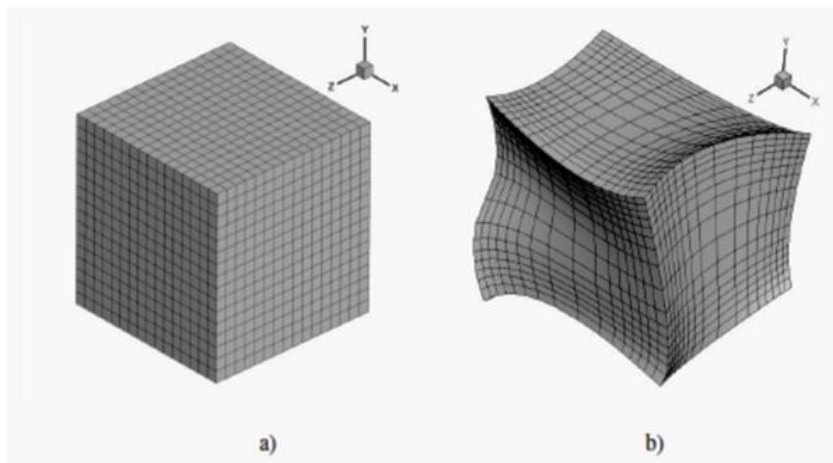
در شکل زیر انواع مختلف مش های دو بعدی و سه بعدی که در کد نویسی قابل استفاده اند، مشاهده می گردد.



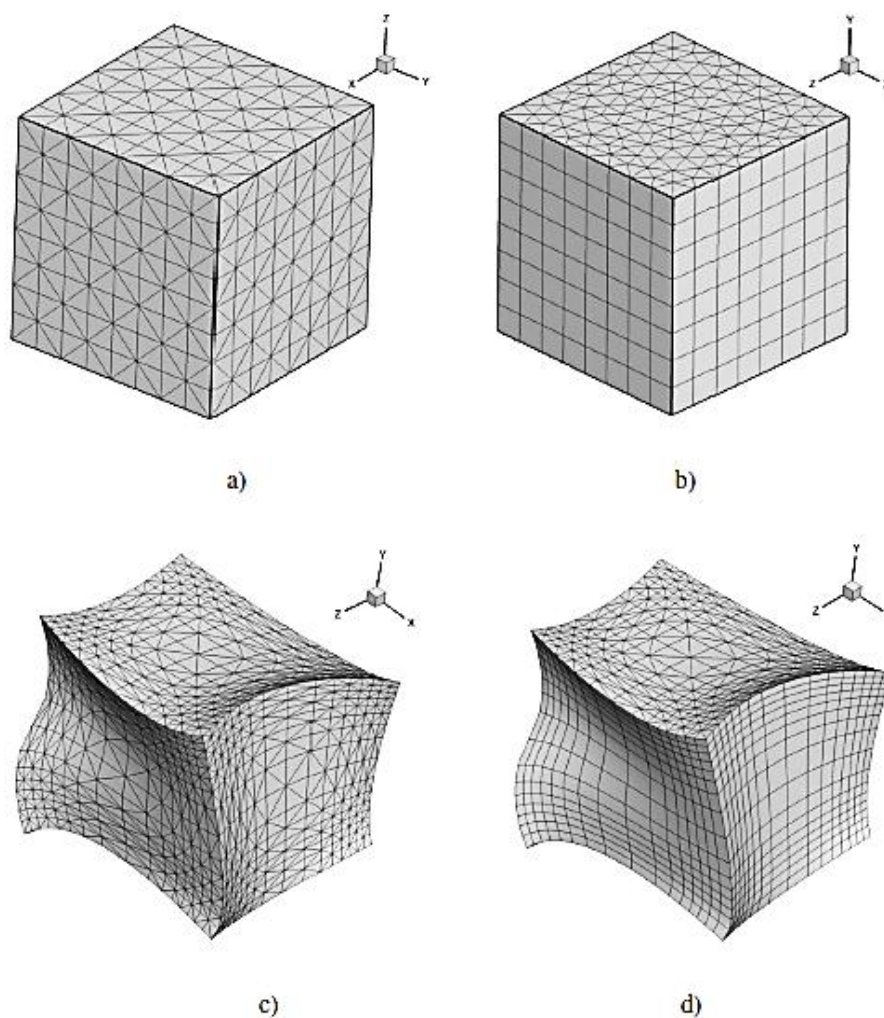
شکل ۵-۱- نمایش مش های سازمان یافته دوبعدی (a) کارتیزین (b) کارتیزین کشیده (c) منحنی (d) منحنی فشرده



شکل ۵-۲- نمایش مش های بی سازمان دوبعدی (a) عمومی- (b) قطری یک سویه- (c) قطری دو سویه



شکل ۳-۵- نمایش مش های سازمان یافته سه بعدی (a) کارترین (b) منحنی فشرده



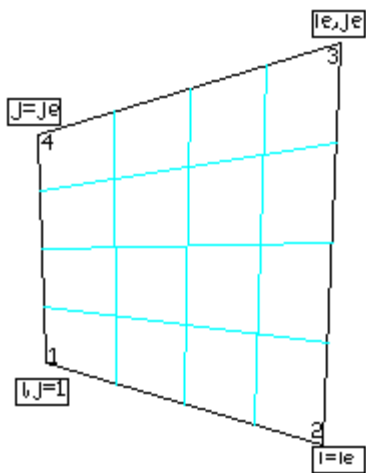
شکل ۴-۵- نمایش مش های بی سازمان سه بعدی

(a) مش بی سازمان با سلول های چهار ضلعی- (b) مش بی سازمان با سلول های منشوری

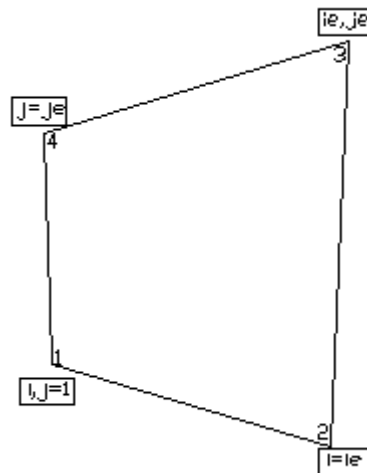
(c) مش بی سازمان با سلول های چهار ضلعی فشرده- (d) مش بی سازمان با سلول های چهار ضلعی بسیار فشرده



در فصل گذشته از مش های چهار ضلعی سازمان یافته برای مش هم مکان استفاده گردید، در این فصل مش های شش وجهی برای مسائل سه بعدی استفاده می شود. ابتدا روش مش سازی دو بعدی تشریح می گردد و سپس آن را برای مسائل سه بعدی تعمیم خواهیم داد. برای یک شکل دلخواه مطابق شکل (۵-۵) خطوط در جهت محور X را با بردار کمکی  $\mathbf{i}$  و در جهت محور Y را با بردار کمکی  $\mathbf{j}$  در نظر می گیریم. فاصله خطوط یکسان و مش سازمان یافته است.



شکل ۵-۶- مش مسئله در حالت دو بعدی



شکل ۵-۵- هندسه مسئله در حالت دو بعدی

در واقع باید یک رابطه خطی بین نقاط به دست آوریم طوری که مختصه  $X$  هر نقطه را بتوان از نقاط مجاور آن محاسبه نمود و به همین ترتیب مختصه  $Y$  نقاط محاسبه می گردد. مثلاً اگر گره مورد نظر روی خط  $j=1$  قرار گرفته باشد با نوشتن معادله خط و تناسب بین نقاط می توان مختصات سایر گره های مرتبط را محاسبه نمود:

$$\frac{x-x_1}{i-1} = \frac{x_f-x_1}{i_e-1} \rightarrow x = \frac{i-1}{i_e-1} (x_f - x_1) + x_1 \quad (31-5)$$

به همین ترتیب سایر محاسبات انجام می شود، روی خط  $j = j_e$  خواهیم داشت:

$$\frac{x-x_f}{i-1} = \frac{x_f-x_f}{i_e-1} \rightarrow x = \frac{i-1}{i_e-1} (x_f - x_f) + x_f \quad (32-5)$$

روی خط  $i = 1$  خواهیم داشت:

$$\frac{x-x_1}{j-1} = \frac{x_f-x_1}{j_e-1} \rightarrow x = \frac{j-1}{j_e-1} (x_f - x_1) + x_1 \quad (33-5)$$

روی خط  $i = i_e$  خواهیم داشت:

$$\frac{x - x_r}{j-1} = \frac{x_r - x_r}{j_e-1} \rightarrow x = \frac{j-1}{j_e-1} (x_r - x_r) + x_r \quad (34-5)$$

اکنون چنانچه خواهیم مختصات نقاط میانی را پیدا کنیم، بایستی از انترپولاسیون بین نقاط بهره جوییم. در مثال زیر نحوه محاسبه گرهی که در محل تقاطع  $j=3$ ,  $i=2$  قرار گرفته است را نشان می دهد. برای این کار باید از مختصات  $x[2][j_e]$ ,  $x[2][1]$  کمک بگیریم.

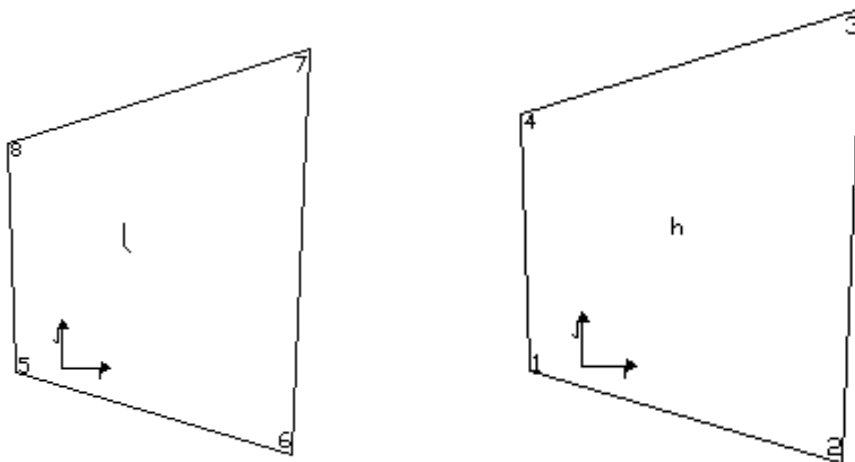
فرض می کنیم که:  $x[2][1] = x_\delta$ ,  $x[2][j_e] = x_\epsilon$

$$\frac{x_h - x_\delta}{j-1} = \frac{x_\epsilon - x_\delta}{j_e-1} \rightarrow x_h = \frac{j-1}{j_e-1} (x_\epsilon - x_\delta) + x_\delta \rightarrow \quad (35-5)$$

$$x_h = \frac{j-1}{j_e-1} \left\{ \frac{i-1}{i_e-1} (x_r - x_r) + x_r - \frac{i-1}{i_e-1} (x_r - x_1) - x_1 \right\} + \frac{i-1}{i_e-1} (x_r - x_1) + x_1$$

این عملیات برای تمام نقاط گرهی انجام می گیرد.

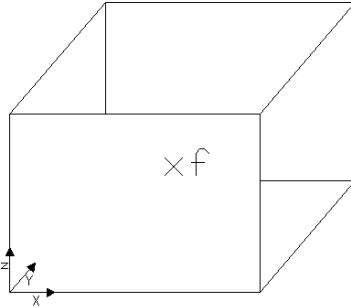
اکنون می توان مش بندی را برای حالت سه بعدی تعمیم داد. برای یک گره درونی مانند  $f$  اگر  $h$  در صفحه گره های ۱، ۲، ۳ و ۴ و ۱ در صفحه گره های ۵، ۶، ۷ و ۸ فرض گردد، با انجام محاسبات جبری همانند حالت دو بعدی به نتایج زیر خواهیم رسید:



شکل ۵-۷- نقاط  $h$ ,  $l$  در میان صفحه و نحوه انترپوله کردن آن ها

$$x_h = \frac{i-1}{i_{e-1}} \left\{ \frac{j-1}{j_{e-1}} (x_r - x_f + x_1 - x_2) + (x_r - x_1) \right\} + \frac{j-1}{j_{e-1}} (x_f - x_1) + x_1 \quad (36-5)$$

$$x_l = \frac{i-1}{i_{e-1}} \left\{ \frac{j-1}{j_{e-1}} (x_v - x_\lambda + x_\delta - x_f) + (x_f - x_\delta) \right\} + \frac{j-1}{j_{e-1}} (x_\lambda - x_\delta) + x_\delta \quad (37-5)$$

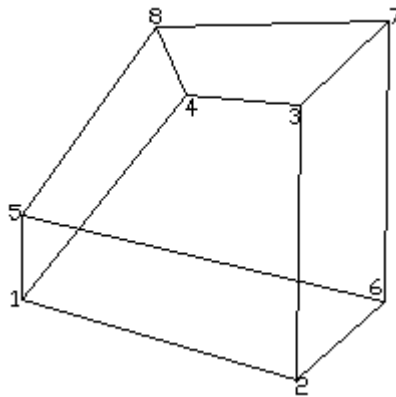


شکل ۵-۸- نقطه f در میان صفحه و نحوه انترپوله کردن آن

$$\frac{x_f - x_h}{k-1} = \frac{x_l - x_h}{k_e - 1} \rightarrow x_f = \frac{k-1}{k_e - 1} (x_l - x_h) + x_h \rightarrow$$

$$x_f = \frac{k-1}{k_e - 1} \left\{ \frac{j-1}{j_{e-1}} \left( \frac{i-1}{i_{e-1}} (x_v - x_\lambda) + x_\lambda - \frac{i-1}{i_{e-1}} (x_f - x_\delta) - x_\delta \right) + \frac{i-1}{i_{e-1}} (x_f - x_\delta) + x_\delta - \frac{j-1}{j_{e-1}} \left( \frac{i-1}{i_{e-1}} (x_r - x_f) + x_f - \frac{i-1}{i_{e-1}} (x_r - x_1) - x_1 \right) - \frac{i-1}{i_{e-1}} (x_r - x_1) - x_1 \right\} + \frac{j-1}{j_{e-1}} \left\{ \frac{i-1}{i_{e-1}} (x_r - x_f) + x_f - \frac{i-1}{i_{e-1}} (x_r - x_1) - x_1 \right\} + \frac{i-1}{i_{e-1}} (x_r - x_1) + x_1 \quad (38-5)$$

در برنامه موجود برای مش‌سازی از هشت نقطه اولیه که کل حجم شش وجهی مسئله را می‌سازند استفاده گردید. نقاط مش داخلی بر حسب  $ie, je, ke$  که تعداد المان‌ها در جهات ۱ و ۲ و ۳ می‌باشند، به صورت خطی به دست می‌آید. شکل و ترتیب این نقاط در شکل زیر نشان داده شده است.



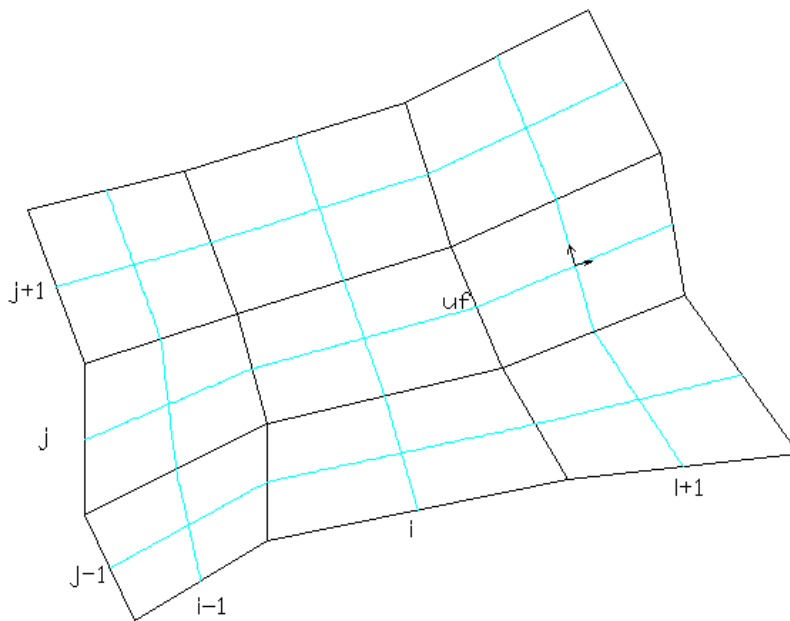
روی هر یک از سطوح نقاط باید در یک سطح قرار داشته باشند (Coplaner)

شکل ۵-۹- شماره گذاری و ترتیب نقاط

۵-۳-۲- نحوه محاسبه مراکز سلول ها و ضرایب انترپوله<sup>۱</sup>

ic ها محل نگهداری تمام پارامترها (u,v,w,p) در مرکز المان ها می باشند. برای به دست آوردن مقادیر پارامترها روی وسط سطح المان ها از این ضرائب استفاده می گردد. این همان کاری است که در مورد انترپولاسیون انجام می دهیم. برای هر المان ic شش عضو دارد که مربوط به شش سطح دور المان است (ic[i][j][k][۶]). به طور قرارداد ۱ برای دیوار غربی، ۲ برای دیوار شرقی، ۳ برای دیوار جنوبی، ۴ برای دیوار شمالی، ۵ برای دیوار پائین و ۶ برای سطح بالائی است و در شکل زیر کاربرد آنها نشان داده شده است. به عنوان نمونه برای تعیین  $u_f$  در شکل زیر می توان به طریق زیر عمل نمود:

$$Uf = u[i][j][k] * ic[i][j][k][۲] + u[i + ۱][i][k] * ic[i + ۱][j][k][۱] \quad (۳۹-۵)$$



شکل ۵-۱۰- نمای کلی المان ها و نحوه انترپوله کردن مقادیر روی سطوح المان از مقادیر در مرکز هر المان

برای محاسبه مراکز المان ها بایستی از مختصات هشت گوشه المان، میانگین گیری ساده انجام شود.

$$x_{mt} = (x[i][j][k] + x[i + ۱][j][k] + x[i][j + ۱][k] + x[i + ۱][j + ۱][k] + x[i][j][k + ۱] + x[i + ۱][j][k + ۱] + x[i][j + ۱][k + ۱] + x[i + ۱][j + ۱][k + ۱]) / ۸ \quad (۴۰-۵)$$

به همین ترتیب مختصه  $y$  و  $z$  هر المان محاسبه می گردد.

<sup>۱</sup> - interpolation coefficient-ic

اکنون برای محاسبه ضرایب انترپوله، باید فاصله مرکز هر سطح (غربی، شرقی، جنوبی، شمالی، پایینی، بالایی) تا مرکز المان محاسبه گردد. مرکز هر المان نیز از میانگین گیری مختصات چهار گوشه آن المان به دست می آید. برای المان غربی محاسبات انجام می گردد. سایر سطوح نیز به طریق مشابه عمل می شود.

$$x_t = (x[i][j][k] + x[i][j+1][k] + x[i][j+1][k+1] + x[i][j][k+1]) / 4 - x_{mt}$$

$$ic[i][j][k][1] = \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2} \quad (41-5)$$

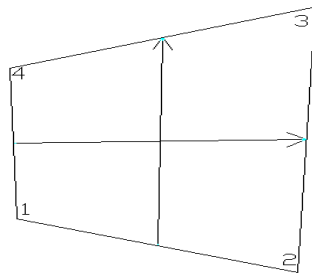
در خارج حوزه (مش های تصنعی) نیز باید نقاط کمکی  $x_m, y_m, z_m$  ایجاد گردد. برای ایجاد آنها باید نقطه مرکزی المان به مرکز سطح متصل و در همان امتداد به همان طول ادامه یابد. همچنین  $ic$  باید برای مرزهای خارجی محاسبه گردد. ( برای هر شش سطح)

$$x_{m[\cdot][j][k]} = (x[1][j][k] + x[1][j+1][k] + x[1][j][k+1] + x[1][j+1][k+1]) / 4 -$$

$$x_{m[1][j][k]} \quad (42-5)$$

### ۵-۳-۳- نحوه محاسبه تصاویر سطحها در سه جهت

در برنامه نویسی نیاز به محاسبه تصویر سطحها در سه جهت می باشد. سطح ۱ سطح عمود بر محور  $x$  سطح ۲ عمود بر محور  $y$  و سطح ۳ عمود بر محور  $z$  می باشد. در زیر نحوه محاسبه برای تصویر در جهت  $z$  نشان داده شده است که از ضرب خارجی دو بردار به دست می آید. این بردارها از اتصال وسط های اضلاع به دست آمده اند.



شکل ۵-۱۱- نمای کلی المان و نحوه محاسبه تصویر سطح

$$\Delta\eta = \left( \frac{x_3 + x_2}{2} - \frac{x_4 + x_1}{2} \right) i + \left( \frac{y_3 + y_2}{2} - \frac{y_4 + y_1}{2} \right) j$$

$$\Delta\xi = \left( \frac{x_3 + x_4}{2} - \frac{x_2 + x_1}{2} \right) i + \left( \frac{y_3 + y_4}{2} - \frac{y_2 + y_1}{2} \right) j$$

$$\Delta\eta \times \Delta\xi = (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)/2 \quad (43-5)$$

برای سایر بردارها نیز می توان به فرمول های متشابهی دست یافت.

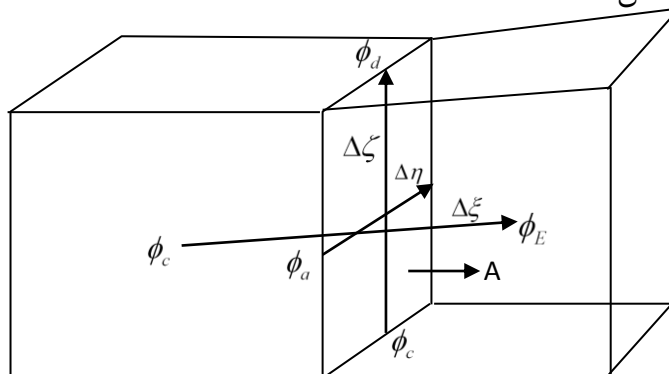
### ۵-۳-۴- نحوه محاسبه دیفیوژن اصلی و ثانویه

یکی از چالش های موجود در گسترش الگوریتم های برنامه نویسی بخصوص در رابطه با مش بندی بی سازمان، فرمول سازی سازگار و صحیح ترم دیفیوژن می باشد. معمولاً دقت مرتبه دوم در انواع مختلف مش بندی با سازمان و بی سازمان برای رفتار ترم دیفیوژن منظور می گردد. هم چنین دقت عملگر دیفیوژن به کیفیت مش نیز بستگی دارد.

کل مقدار دیفیوژن عبوری از هر سطح بین دو المان بر طبق فرمول (۴۴-۵) قابل محاسبه می باشد و اثبات آن متعاقباً ذکر خواهد شد.

$$-\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\Gamma A^2}{\Delta\xi_A} (\phi_E - \phi_c) - \frac{\Gamma A \cdot (\Delta\zeta \times \Delta\xi)}{\Delta\eta \cdot (\Delta\zeta \times \Delta\xi)} (\phi_b - \phi_a) - \frac{\Gamma A \cdot (\Delta\xi \times \Delta\eta)}{\Delta\zeta \cdot (\Delta\xi \times \Delta\eta)} (\phi_d - \phi_c) \quad (44-5)$$

در فرمول فوق  $\phi$  می تواند هر یک از مقادیر  $u, v, w$  باشد. همچنین پارامترهای مورد استفاده در این فرمول در شکل (۱۲-۵) نشان داده شده اند.



شکل ۱۲-۵- نحوه محاسبه تغییرات عمود بر سطح برای سطح بین دو المان نشان داده شده و جهت های مورد استفاده در فرمول. جهت  $n$  نیز مشابه  $A$  عمود بر سطح بین دو المان می باشد.

اولین عبارت سمت راست فرمول، دیفیوژن اصلی را نشان می‌دهد و دو عبارت بعدی دیفیوژن‌های ثانویه را در دو جهت جانبی نشان می‌دهند. هر چه  $\Delta \xi$  بر سطح عمودتر باشد مقدار دیفیوژن‌های جانبی کم اهمیت‌تر می‌شوند.

هم چنین اگر سطح نشان داده شده را در جهت ۱ (عمود بر محور X ها) در نظر گرفته و پارامترهای زیر را در نظر بگیریم:

$$d\dot{1}p = \frac{\Gamma A^2}{\Delta \xi \cdot A} \quad d\dot{1}s = \frac{\Gamma A \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)}{\Delta \eta \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)} \quad d\dot{1}t = \frac{\Gamma A \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)}{\Delta \zeta \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)}$$

آنگاه فرمول (۴۴-۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$-\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial n} = -d\dot{1}p(\phi_E - \phi_C) - d\dot{1}s(\phi_b - \phi_a) - d\dot{1}t(\phi_d - \phi_c) \quad (45-5)$$

که در برنامه نیز از همین پارامترهای  $d\dot{1}p$ ،  $d\dot{1}s$ ،  $d\dot{1}t$  استفاده شده است.

در این فرمول  $d\dot{1}p$ ،  $d\dot{1}s$ ،  $d\dot{1}t$  ضرایب دیفیوژن در هر سطح می‌باشند، مقدار دیفیوژن اصلی در روی هر سطح برابر است با

$$\frac{\Gamma A^2}{\Delta \xi \cdot A}$$

با توجه به این که جهت سطوح  $A$  و جهت بردار  $\Delta \xi$  طوری است که ضرب داخلی آنها مثبت می‌گردد، این یک ضریب مثبت است و در نتیجه می‌توان جریان خروجی دیفیوژن از هر المان را به صورت زیر محاسبه نمود، که واحد نیرو را دارد.

$$d\dot{1}p(\phi_{in} - \phi_{out})$$

در فرمول فوق  $\phi$  می‌تواند هر یک از مقادیر  $u, w, v$  باشد.

ضرائب دیفیوژن جانبی در هر سطح می‌باشند که به شکل زیر محاسبه می‌گردند:

$$\frac{\Gamma A \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)}{\Delta \eta \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)}$$

ضرائب دیفیوژن جانبی در سطح می‌باشند که به شکل زیر محاسبه می‌گردند:

$$\frac{\Gamma A \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)}{\Delta \zeta \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)}$$

به همین ترتیب در برنامه نویسی نیاز به معرفی مقادیر فشار اصلی و ثانویه است که متشابهاً اثبات می گردند.

ضرائب فشار اصلی که نظیر دیفیوژن اصلی می باشند و برای افزایش سرعت برنامه ایجاد شده اند و به شکل زیر محاسبه می گردند:

$$\frac{\bar{V}A^2}{\Delta\xi \cdot A}$$

ضرائب فشار ثانویه در جهت  $\eta$  می باشند که نظیر دیفیوژن ثانویه می باشند و به شکل زیر محاسبه می گردند:

$$\frac{\bar{V}A \cdot (\Delta\zeta \times \Delta\xi)}{\Delta\eta \cdot (\Delta\zeta \times \Delta\xi)}$$

ضرائب فشار ثانویه در جهت  $\zeta$  می باشند که نظیر دیفیوژن ثانویه می باشند و به شکل زیر محاسبه می گردند:

$$\frac{\bar{V}A \cdot (\Delta\xi \times \Delta\eta)}{\Delta\zeta \cdot (\Delta\xi \times \Delta\eta)}$$

### ۵-۳-۴-۱- اثبات نحوه تغییرات یک متغیر در جهت $n$ عمود بر سطح

تعیین تغییرات فشار در جهت عمود بر سطح (بردار  $n$  عمود بر سطح است) بر حسب تغییرات آن در سه جهت  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  که در آن  $\zeta$ ,  $\eta$  در داخل صفحه مطابق با شکل (۵-۱۲) می باشد و  $\xi$  از ارتباط دو مرکز المان دو طرف سطح به دست می آید.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} n_z \quad (۴۶-۵)$$

بر اساس قوانین مشتق زنجیره ای می توان هر ترم را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad (۴۷-۵)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (۴۸-۵)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \zeta} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (۴۹-۵)$$



و ژاکوبین تبدیل عبارت است از: (بر اساس سطر اول)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix} = \xi_x(\eta_y \zeta_z - \eta_z \zeta_y) + \xi_y(\eta_z \zeta_x - \eta_x \zeta_z) + \xi_z(\eta_x \zeta_y - \eta_y \zeta_x) = \mathbf{e}_\xi \cdot (\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\eta) \quad (50-5)$$

هم چنین این عبارت را می توان بر اساس سطر دوم نیز به طریق مشابه محاسبه نمود:

$$J = \eta_x(\zeta_y \xi_z - \zeta_z \xi_y) + \eta_y(\zeta_z \xi_x - \zeta_x \xi_z) + \eta_z(\zeta_x \xi_y - \zeta_y \xi_x) = \mathbf{e}_\eta \cdot (\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\xi) = \mathbf{e}_\zeta \cdot (\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta) \quad (51-5)$$

اکنون بر اساس موارد فوق، هر یک از پارامترهای فرمول (5-44) را بر اساس ژاکوبین می نویسیم:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial p}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}}{J} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} & \xi_y & \xi_z \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} & \eta_y & \eta_z \\ \frac{\partial p}{\partial \zeta} & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix}}{J} = \frac{\frac{\partial p}{\partial \xi}(\eta_y \zeta_z - \eta_z \zeta_y) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(\zeta_y \xi_z - \zeta_z \xi_y) + \frac{\partial p}{\partial \zeta}(\xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y)}{J} \quad (52-5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial p}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial p}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial p}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}}{J} = \frac{\begin{vmatrix} \xi_x & \frac{\partial p}{\partial \xi} & \xi_z \\ \eta_x & \frac{\partial p}{\partial \eta} & \eta_z \\ \zeta_x & \frac{\partial p}{\partial \zeta} & \zeta_z \end{vmatrix}}{J} = \frac{\frac{\partial p}{\partial \xi}(\eta_z \zeta_x - \eta_x \zeta_z) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(\zeta_z \xi_x - \zeta_x \xi_z) + \frac{\partial p}{\partial \zeta}(\xi_z \eta_x - \xi_x \eta_z)}{J} \quad (53-5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial p}{\partial \zeta} \end{vmatrix}}{J} = \frac{\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \eta_x & \eta_y & \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ \zeta_x & \zeta_y & \frac{\partial p}{\partial \zeta} \end{vmatrix}}{J} = \frac{\frac{\partial p}{\partial \xi}(\eta_x \zeta_y - \eta_y \zeta_x) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(\zeta_x \xi_y - \zeta_y \xi_x) + \frac{\partial p}{\partial \zeta}(\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)}{J} \quad (54-5)$$

اکنون معادله (5-44) بر اساس ترم های آن نوشته می شود.

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\frac{\partial p}{\partial \xi}(\eta_y \zeta_z - \eta_z \zeta_y) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(\xi_z \zeta_y - \xi_y \zeta_z) + \frac{\partial p}{\partial \zeta}(\xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y)}{J} n_x +$$

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial \xi}(\eta_z \zeta_x - \eta_x \zeta_z) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(\xi_x \zeta_z - \xi_z \zeta_x) + \frac{\partial p}{\partial \zeta}(\xi_z \eta_x - \xi_x \eta_z)}{J} n_y +$$

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial \xi}(\eta_x \zeta_y - \eta_y \zeta_x) + \frac{\partial p}{\partial \eta}(\xi_y \zeta_x - \xi_x \zeta_y) + \frac{\partial p}{\partial \zeta}(\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x)}{J} n_z \quad (55-5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{(\eta_y \zeta_z - \eta_z \zeta_y) n_x + (\eta_z \zeta_x - \eta_x \zeta_z) n_y + (\eta_x \zeta_y - \eta_y \zeta_x) n_z}{J} \frac{\partial p}{\partial \xi} +$$

$$\frac{(\zeta_y \xi_z - \zeta_z \xi_y) n_x + (\zeta_z \xi_x - \zeta_x \xi_z) n_y + (\zeta_x \xi_y - \zeta_y \xi_x) n_z}{J} \frac{\partial p}{\partial \eta} +$$

$$\frac{(\xi_y \eta_z - \xi_z \eta_y) n_x + (\xi_z \eta_x - \xi_x \eta_z) n_y + (\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x) n_z}{J} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \quad (56-5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta)}{\mathbf{e}_\xi \cdot (\mathbf{e}_\eta \times \mathbf{e}_\zeta)} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\xi)}{\mathbf{e}_\xi \cdot (\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\xi)} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta)}{\mathbf{e}_\zeta \cdot (\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta)} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \quad (57-5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{n}} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\xi)}{\mathbf{e}_\eta \cdot (\mathbf{e}_\zeta \times \mathbf{e}_\xi)} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta)}{\mathbf{e}_\zeta \cdot (\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta)} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \quad (58-5)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{A}{\Delta \xi \cdot A} (p_E - p_C) + \frac{\mathbf{n} \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)}{\Delta \eta \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)} (p_b - p_a) + \frac{\mathbf{n} \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)}{\Delta \zeta \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)} (p_d - p_c) \quad (59-5)$$

با ضرب کردن طرفین معادله در عبارت  $\frac{\nabla_f A}{a_f^n} -$  خواهیم داشت:

$$-\frac{\nabla_f A}{a_f^n} \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\nabla_f A}{a_f^n} \frac{A}{\Delta \xi \cdot A} (p_E - p_C) - \frac{\nabla_f A}{a_f^n} \frac{\mathbf{n} \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)}{\Delta \eta \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)} (p_b - p_a) -$$

$$\frac{\nabla_f A}{a_f^n} \frac{\mathbf{n} \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)}{\Delta \zeta \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)} (p_d - p_c) \quad (60-5)$$

هم چنین عبارت زیر را در نظر می گیریم:

$$V_f = \hat{V}_f^n - \frac{\Delta Y_f}{a_f^n} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (61-5)$$

با ضرب کردن طرفین معادله در سطح، خواهیم داشت:

$$V_f A = \hat{V}_f^n A - \frac{\Delta Y_f}{a_f^n} \left( \frac{A^\tau}{\Delta \xi \cdot A} (p_E - p_C) + \frac{A \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)}{\Delta \eta \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)} (p_b - p_a) + \frac{A \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)}{\Delta \zeta \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)} (p_d - p_c) \right) \quad (62-5)$$

$$V_f A = \hat{V}_f^n A - \frac{\Delta Y_f}{a_f^n} \left( \frac{A \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)}{\Delta \eta \cdot (\Delta \zeta \times \Delta \xi)} (p_b - p_a) + \frac{A \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)}{\Delta \zeta \cdot (\Delta \xi \times \Delta \eta)} (p_d - p_c) - \frac{\Delta Y_f A^\tau}{a_f^n \Delta \xi \cdot A} (p_E - p_C) \right) \quad (63-5)$$

در نهایت با جمع روی المان ها خواهیم داشت:

$$\sum V_i A_i = \sum \hat{V}_i A_i + \sum \frac{p_{ip}}{a_{fi}^n} (P_{in} - P_{out}) = \cdot \quad (64-5)$$

$$P_{in} = (\sum \frac{p_{ip}}{a_{fi}^n} P_{out} - \sum \hat{V}_{fi} A_{fi}) / \sum \frac{p_{ip}}{a_{fi}^n} \quad (65-5)$$

با این فرمول مقدار فشار به دست می آید، در برنامه نیز به همین صورت استفاده شده است.

### ۵-۳-۵- نحوه محاسبه حجم المان

برای محاسبه حجم هر المان، ابتدا فاصله هر المان تا المان بعدی محاسبه شده و سپس مقدار حاصله را در تصویر مربوطه هر سطح ضرب می کنیم. (محاسبه دترمینان حاصل ضرب سه بردار)

$$\begin{aligned} xt &= x[i+1][j+1][k+1] - x[i][j][k] \\ ve[i][j][k] &= (xt * a1x[i+1][j][k] + yt * a1y[i+1][j][k] + zt * \\ &a1z[i+1][j][k] + xt * a2x[i][j+1][k] + yt * a2y[i][j+1][k] + zt * \\ &a2z[i][j+1][k] + xt * a3x[i][j][k+1] + yt * a3y[i][j][k+1] + zt * \\ &a3z[i][j][k+1]) / 3 \end{aligned} \quad (66-5)$$

سایر موارد محاسباتی در برنامه آورده شده است.

### ۵-۴- لیست سایر پارامترهای مورد استفاده در برنامه

$Ve$ : حجم هر المان می باشد و از ضرب ماتریس ها محاسبه می گردد.

$X, Y, Z$ : مختصات گوشه های المان ها است که طریقه محاسبه آن توضیح داده شد.

$u, v, w$ : مقادیر سرعت در جهات  $X, Y, Z$  در وسط المان ها

$P$ : مقدار فشار در وسط المان ها

$r_u, r_v, r_w$ : مقادیر طرف راست معادلات مومنتم در جهات  $X, Y, Z$  می باشند.

۲- پارامترهایی که برای هر سطح محاسبه می گردند:

$a_1, a_2, a_3$ : مقدار سطح برای سطوح در امتداد ۱ و ۲ و ۳

$a_{1x}, a_{1y}, a_{1z}$ : تصاویر در جهت  $x, y, z$  سطوح در امتداد ۱

$a_{2x}, a_{2y}, a_{2z}$ : تصاویر در جهت  $x, y, z$  سطوح در امتداد ۲

$a_{3x}, a_{3y}, a_{3z}$ : تصاویر در جهت  $x, y, z$  سطوح در امتداد ۳

$m_1, m_2, m_3$ : مقادیر دبی جرمی عبوری از سطوح ۱ و ۲ و ۳ که نشان دهنده جریان *convective* می باشند.

$cp_1, cp_2, cp_3$ : از تقسیم  $p_1/p, p_2/p, p_3/p$  بر  $ap$  ضریب مرکزی  $\emptyset$  به دست می آیند.

$vf_1, vf_2, vf_3$ : مقادیر دبی خروجی از سطوح ۱، ۲ و ۳ برای معادله پیوستگی که در واقع مقدار  $\hat{v}_{fi} A_{fi}$  در آخرین فرمول این نوشته می باشند.

$pa_1, pa_2, pa_3$ : نشان دهنده فشار انترپوله شده روی سطوح ۱ و ۲ و ۳ می باشند.

$d_{1u}, d_{2u}, d_{3u}$ : مقدار کل دیفیوژن جانبی برای  $u$  روی سطوح ۱ و ۲ و ۳ می باشند.

$d_{1v}, d_{2v}, d_{3v}$ : مقدار کلی دیفیوژن جانبی برای  $v$  سطوح ۱ و ۲ و ۳ می باشند.

$d_{1w}, d_{2w}, d_{3w}$ : مقدار کلی دیفیوژن جانبی برای  $w$  روی سطوح ۱ و ۲ و ۳ می باشند.

### ۵-۵- کدنویسی برنامه به روش حجم محدود

در این قسمت به تحلیل برنامه پرداخته و گام های حل پروژه ارائه می گردد. برنامه شامل دو قسمت اصلی است: بخشی که هندسه مسئله را می سازد و بخش دیگر که حل کننده است.

### ۵-۱- Subroutine Geometry

کارهایی که در برنامه نویسی در این قسمت برای ساخت هندسه بایستی انجام شود، به قرار زیرند:

۱- مش سازی انجام گردد و مقادیر  $x[i][j][k], y[i][j][k], z[i][j][k]$  مقدار دهی شوند.

روی المان‌ها حرکت شود و مرکز هر المان محاسبه و در  $xm[i][j][k], ym[i][j][k], zm[i][j][k]$  ذخیره گردد و سپس مقادیر  $ic[i][j][k][6]$  برای هر المان محاسبه گردد. برای به دست آوردن مقادیر پارامترها روی وسط سطح المان‌ها از ضرایب انترپوله  $ic$  استفاده می‌گردد. در شکل (۵-۱۲) کاربرد آنها نشان داده شده است.

۲- روی سطوح ۱ حرکت شود و مقادیر  $a1[i][j][k], a1x[i][j][k], a1y[i][j][k], a1z[i][j][k]$  محاسبه گردند که این مقادیر به ترتیب تصویر سطح ۱ در امتدادهای  $Z$  و  $Y$  و  $X$  هم چنین مقدار سطح ۱ می‌باشند و سپس مقادیر  $d1p[i][j][k], d1s[i][j][k], d1t[i][j][k]$  محاسبه گردند.

۳- روی سطوح ۲ حرکت شود و مقادیر  $a2[i][j][k], a2x[i][j][k], a2y[i][j][k], a2z[i][j][k]$  محاسبه گردند که این مقادیر به ترتیب تصویر سطح ۲ در امتدادهای  $Z$  و  $Y$  و  $X$  و هم چنین مقدار سطح ۲ می‌باشند و سپس مقادیر  $d2p[i][j][k], d2s[i][j][k], d2t[i][j][k]$  محاسبه گردند.

۴- روی سطوح ۳ حرکت شود و مقادیر  $a3[i][j][k], a3x[i][j][k], a3y[i][j][k], a3z[i][j][k]$  محاسبه گردند که این مقادیر به ترتیب تصویر سطح ۳ در امتدادهای  $Z$  و  $Y$  و  $X$  و همچنین مقدار سطح ۳ می‌باشند و سپس مقادیر  $d3p[i][j][k], d3s[i][j][k], d3t[i][j][k]$  محاسبه گردند.

۵- روی المان‌ها حرکت شود و مقادیر حجم هر المان محاسبه و در  $ve[i][j][k]$  ذخیره گردد. حجم هر المان با استفاده از قانون ضرب ماتریس‌ها محاسبه می‌گردد.

۶- روی سطوح ۱ حرکت شود و مقادیر  $p1p[i][j][k], p1s[i][j][k], p1t[i][j][k]$  محاسبه گردند. این مقادیر قابل تعیین از  $d1p, d1s, d1t$  می‌باشند و به صورت زیر محاسبه می‌گردند.

$$p1p = \frac{V_f A^2}{\Delta \xi . A} \quad p1s = \frac{V_f A . (\Delta \zeta \times \Delta \xi)}{\Delta \eta . (\Delta \zeta \times \Delta \xi)} \quad p1t = \frac{V_f A . (\Delta \xi \times \Delta \eta)}{\Delta \zeta . (\Delta \xi \times \Delta \eta)}$$

۷- روی سطوح ۲ حرکت شود و مقادیر  $p2p[i][j][k], p2s[i][j][k], p2t[i][j][k]$  محاسبه گردند.

۸- روی سطوح ۳ حرکت شود و مقادیر  $p3p[i][j][k], p3s[i][j][k], p3t[i][j][k]$  محاسبه گردند.

۹- شرایط مرزی در ورودی و خروجی ایجاد گردد.

**subroutine solver -۲-۵-۵**

کارهایی که باید در subroutine solver صورت گیرد عبارتند از:

۱- روی سطوح ۱ حرکت شود و مقادیر سرعت در سه جهت روی مرکز سطح محاسبه شود  
( $u_t, v_t, w_t$ ) و سپس مقدار جرم عبوری از مرکز سطح توسط رابطه زیر محاسبه گردد.

$$m \backslash [i][j][k] = (u_t \times a \backslash x[i][j][k] + v_t \times a \backslash y[i][j][k] + w_t \times a \backslash z[i][j][k]) \times r_o$$

مقادیر دیفیوژن ثانویه مربوط به سرعت های  $u, v, w$  که مربوط به ترم های دیفیوژن در معادلات ناویر-استوکس می باشد را به صورت زیر محاسبه می نماییم:

$$d \backslash u[i][j][k] = d \backslash s[i][j][k] (u_b - u_a) - d \backslash t[i][j][k] (u_d - u_c)$$

$$d \backslash v[i][j][k] = d \backslash s[i][j][k] (v_b - v_a) - d \backslash t[i][j][k] (v_d - v_c)$$

$$d \backslash w[i][j][k] = d \backslash s[i][j][k] (w_b - w_a) - d \backslash t[i][j][k] (w_d - w_c)$$

در این روابط منظور از محل های  $a, b, c, d$  در شکل (۵-۱۲) مشخص است.

۲- روی سطوح ۲ حرکت شود و عین کارهای گفته شده در بند ۱ روی سطوح ۲ نیز انجام گیرد.

۳- روی سطوح ۳ حرکت شود و عین کارهای گفته شده در بند ۱ روی سطوح ۳ نیز انجام گیرد.

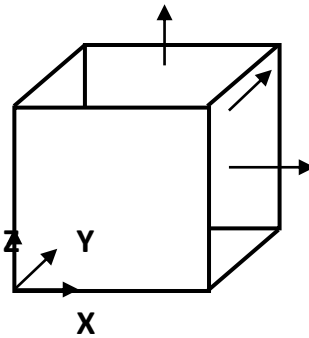
۴- روی المان ها حرکت شود و ضریب سرعت مرکزی  $ap$  و همچنین طرف راست های معادلات مومنتم  $X, Y, Z$  تعیین گردد.

۴-۱- مقدار ضریب سرعت مرکزی در متغیر  $ap[i][j][k]$  و مقادیر طرف راست معادلات  $X, Y, Z$  در متغیرهای به ترتیب  $rw[i][j][k]$  و  $rv[i][j][k]$  و  $ru[i][j][k]$  که به تعداد المان ها می باشند ذخیره می گردند.

۴-۲- موقع محاسبه سطوح و تصاویر آنها جهت های  $\Delta \zeta, \Delta \eta$  طوری انتخاب می شوند که جهت بردار سطح که از حاصل ضرب خارجی آنها به دست می آید به وسیله قانون دست راست قابل تعیین است و در نتیجه می شود فهمید که تصاویر حاصل ضرب خارجی در جهت های  $X, Y, Z$  سطح مثبت می گردند یا منفی. قرارداد می نماییم که بردارهای  $\Delta \zeta, \Delta \eta$  روی سطوح ۱ و ۲ و ۳ طوری انتخاب شده اند که حاصل ضرب خارجی آنها برای مکعبی که در جهات  $X, Y, Z$  قرار دارد، در جهات مثبت

محورهای  $X, Y, Z$  به ترتیب برای سطوح ۱ و ۲ و ۳ قرار خواهد گرفت. شکل (۵-۱۳) این مطلب را نشان

می دهد.



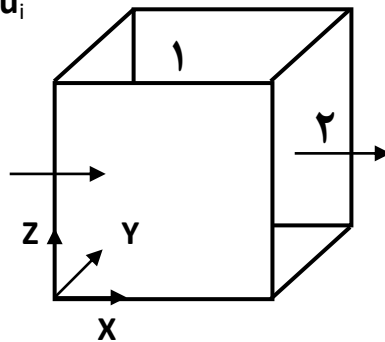
شکل ۵-۱۳- محورهای  $X, Y, Z$  راستگرد به همراه جهت های مثبت قراردادی برای سطوح

۳-۴- برای ترم های انتقال<sup>۱</sup> باید از روش Upwind استفاده نمود تا الگوریتم همگرا شود. بنابراین اگر

مثلاً در شکل (۵-۱۴) برای المان نشان داده شده بخواهیم جریان انتقالی از صفحه ۱ المان را بوسیله

$Mu$  حساب کنیم باید به سبک زیر عمل نمائیم.

if ( $M > 0$ )  $\rightarrow Mu_{i-1}$  else  $Mu_i$



شکل ۵-۱۴- نحوه محاسبه ترم های انتقال

بنابراین اگر  $M$  مثبت باشد معنی آن این است که در جهت مثبت سطح ۱ دبی جرمی داریم که با خود

$u_{i-1}$  را می آورد و در نتیجه  $Mu_{i-1}$  مقداری مثبت خواهد شد که نشان می دهد چیزی به المان اضافه

می شود و می توان  $Mu_{i-1}$  را به عنوان طرف راست معادله مومنتم  $X$  در نظر گرفت اما اگر  $M$  منفی

باشد معنی آن این است که در جهت منفی سطح ۱ دبی جرمی داریم که در نتیجه با خود  $u_i$  را می برد و

حاصل  $Mu_i$  منفی شده نشان دهنده آن است که چیزی از المان کم می شود و هم چنین حال می توان

$-M$  را به عنوان ضریب مرکزی سرعت در نظر گرفت. (چون طرف چپ معادله است)

<sup>۱</sup> - advection

دقت شود که  $M$  مثبت روی سطح ۱ باعث می شود که  $Mu_{i-1}$  به عنوان طرف راست معادله مومنتم  $X$  در نظر گرفته شود در حالی که  $M$  منفی روی سطح ۱ باعث می شود که  $-M$  به عنوان ضریب  $u_i$  در نظر گرفته شود.

اگر سطح ۲ را برای المان در نظر بگیریم قضایا کمی تغییر می یابد. داریم.

$$\text{if } (M > 0) \rightarrow Mu_i \text{ else } Mu_{i+1}$$

و حالا می توان گفت که  $M$  مثبت روی سطح ۲ باعث می شود که  $M$  به عنوان ضریب سرعت مرکزی در نظر گرفته شود و  $M$  منفی روی سطح ۲ باعث می شود  $-Mu_{i+1}$  به طرف راست معادله مومنتم  $X$  اضافه گردد. در هر صورت در این قسمت توجه به علامت ها بسیار مهم می باشد و می تواند باعث واگرایی جواب ها شود. این که ضریب سرعت مرکزی در طرف چپ معادله است و چیزهایی غیر از ضریب مرکزی در طرف راست معادله می باشند قابل توجه است و هم چنین باید در نظر گرفته شود که با توجه به جهت جریان نسبت به المان چیزی به المان اضافه می شود یا از آن کم می شود. با ترتیب گفته شده می توان روی ۶ سطح اطراف المان حرکت نمود و مقادیری را به ضریب سرعت مرکزی اضافه نمود و یا به طرف راست معادلات مومنتم های  $X, Y, Z$  اضافه نمود.

۴-۴- محاسبه ضریب سرعت مرکزی به خاطر ترم تغییر نسبت به زمان کاری ساده است و فقط کافی است  $\rho \frac{\forall e}{\Delta t}$  به ضریب سرعت مرکزی اضافه شود.

۴-۵- اثر ترم های دیفیوژن روی ضریب سرعت مرکزی به سادگی با اضافه کردن  $d^3p[i][j][k]$  و  $d^2p[i][j][k]$  و  $d^1p[i][j][k]$  های سطح اطراف المان به ضریب سرعت مرکزی انجام می گیرد. این مقادیر چون ثابت هستند و تغییری ندارند قبلاً در Subroutine Geometry حساب شده اند.

۴-۶- اثر ترم های دیفیوژن روی طرف راست های معادلات مومنتم  $X, Y, Z$  با ضرب کردن  $d^3p[i][j][k]$  و  $d^2p[i][j][k]$  و  $d^1p[i][j][k]$  های هر سطح در  $u, v, p$  طرف همان سطح و اضافه کردن به طرف راست میسر است.



۴-۷- هم چنین لازم است روی کلیه مرزهای خارجی کل حوزه حرکت نموده و ضرایب سرعت مرکزی المان های مصنوعی خارجی را برابر ضرایب سرعت مرکزی المان های مجاورشان قرار داد.

۵- روی سطوح ۱ حرکت شود و مقادیر ضرایب فشار  $cp^1[i][j][k]$  و مقدار ثابت معادله فشار  $vf^1[i][j][k]$  را تعیین می گردد.

این دو مقدار در رابطه زیر دیده می شوند:

$$P_{in} = \left( \sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}} P_{out} - \sum \left( \bar{v}_{fi} A_{fi} - \frac{d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f} \right) \right) / \sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}}$$

که مقدار  $cp^1[i][j][k]$  مقدار  $d_{pi}/a_{fi}$  را نشان می دهد و توسط فرمول زیر تعیین می گردد.

$$Cp^1[i][j][k] = p^1[i][j][k] / (ap^{i-1}[j][k] + ap^i[j][k]) / 2$$

و  $vf^1[i][j][k]$  نیز قرار است مقدار زیر را در خود نگه دارد:

$$\bar{v}_{fi} A_{fi} - \frac{d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f}$$

برای تعیین  $vf^1[i][j][k]$  بر طبق فرمول با داشتن مقادیر  $rw$  ,  $rv$  ,  $ru$  در دو طرف سطح مقدار  $ru$  ,  $rv$  ,  $rw$  در مرکز سطح با استفاده از انترپولاسیون تعیین می گردد. حال مقادیر انترپوله شده مربوطه در مقادیر تصاویر سطح  $a1x$  ,  $a1y$  ,  $a1z$  ضرب و با هم جمع می شود تا ضرب داخلی این دو به دست آید. هم چنین طبق فرمول دیفیوژن ثانویه فشارها نیز همین جا به مقدار  $vf^1[i][j][k]$  اضافه می شود. مقادیر دیفیوژن ثانویه فشار در واقع طبق فرمول زیر محاسبه می گردند:

$$\frac{d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f}$$

مقادیر  $vf^1$  و  $cp^1$  در محل های  $i=1$  و  $i=i+1$  باید صفر باشند.

۶- روی سطوح ۲ و ۳ حرکت شود و عین کارهای گفته شده در بند ۵ برای این سطوح نیز انجام گیرد تا مقادیر  $cp^2(i)[j][k]$  و  $vf^2(i)[j][k]$  نیز تعیین گردند.

۷- روی المان ها حرکت شود و مقادیر فشار جدید از رابطه زیر تعیین گردد:

$$P_{in} = \left( \sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}} P_{out} - \sum \left( \bar{v}_{fi} A_{fi} - \frac{d_s(p_b - p_a) + d_t(p_d - p_c)}{a_f} \right) \right) / \sum \frac{d_{pi}}{a_{fi}}$$

۸- روی مرزهای حوزه حرکت شود و مقادیر فشارهای مصنوعی مرزی برابر مقادیر داخل حوزه مجاور

قرار گرفته و در مرز مجاور خروجی نیز فشارها برابر  $p_{out}$  قرار گیرد.

۹- روی سطوح ۱، ۲ و ۳ حرکت نموده و مقادیر  $pa_1, pa_2, pa_3$  که نشان دهنده فشار در مرکز

سطوح است با استفاده از انترپوله تعیین شود.

۱۰- روی المان ها حرکت شود و مقادیر  $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$  متوسط برای هر المان از ضرب مقادیر فشار

انترپوله شده روی سطوح به دست آمده از مرحله قبلی در تصاویر سطوح به ترتیب در جهت  $X, Y$

$Z$  به دست آید.

۱۱- مقادیر  $u, v, w$  های جدید از رابطه زیر تعیین گردد.

$$u = \bar{u} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{V_e}{a_p}$$

$$v = \bar{v} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{V_e}{a_p}$$

$$w = \bar{w} - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{V_e}{a_p}$$

۱۲- شرایط مرزی بر روی مدل اعمال شود. برای این کار در کلیه مرزهای دیوار، سرعت های خارجی

مصنعی باید منفی سرعت های داخلی باشند. در محل مرز فشار ثابت سرعت های خارجی باید برابر

سرعت های داخلی در نظر گرفته شوند.

در مراحل فوق، اصول برنامه نویسی به روش حجم محدود جهت حل کانال ارائه گردید. اکنون به حل

جریان یک کانال با استفاده از روش حجم محدود می پردازیم. باید توجه داشت که مزیت اصلی روش

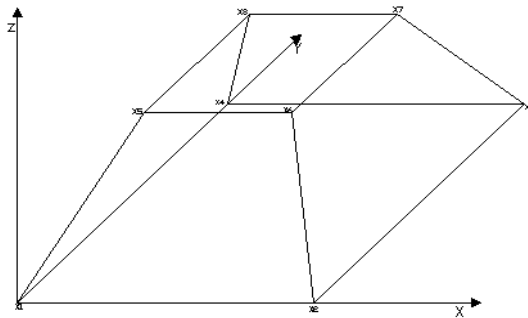
حجم محدود، توانایی مدل کردن شکل های نامنظم می باشد. کانال مدل شده به صورت یک هرم ناقص

است که شامل ۱۰ مش در جهت  $X$ ، ۱۵ مش در جهت  $Y$ ، ۵ مش در جهت  $Z$  می باشد. ۲ مش نیز در

مکان  $k=0$  برای جریان ورودی با سرعت  $v = 1.5 \text{ m/s}$  در نظر گرفته شده است. فشار خروجی در مکان  $p(i,j,k) = p_{out}$  می باشد.

مختصات نقاط مدل به قرار زیر می باشد:

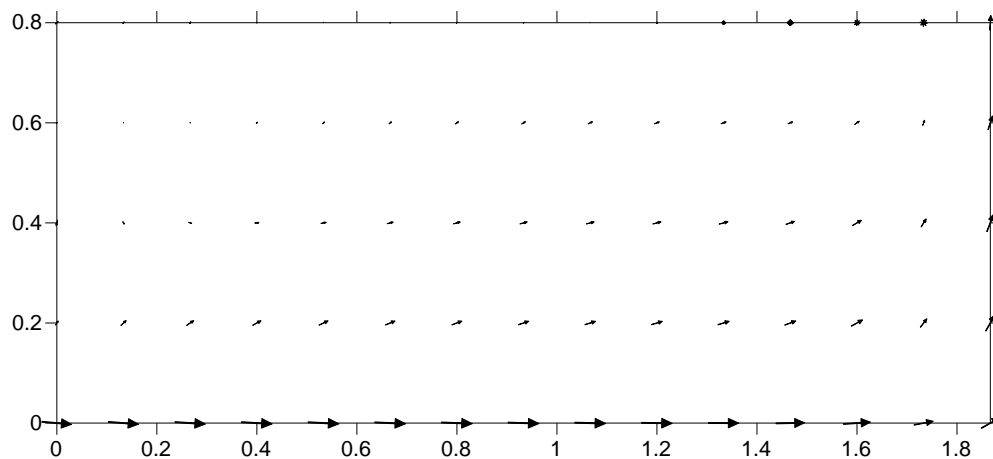
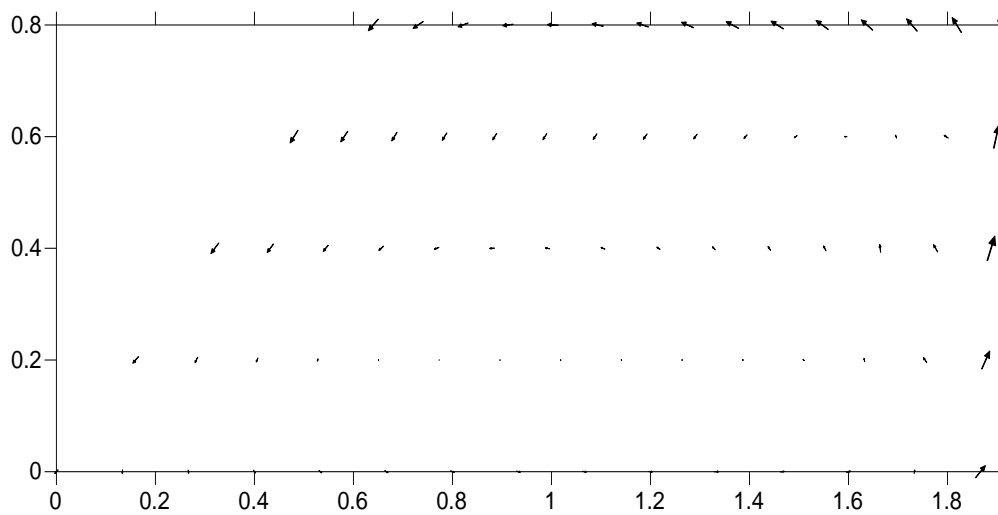
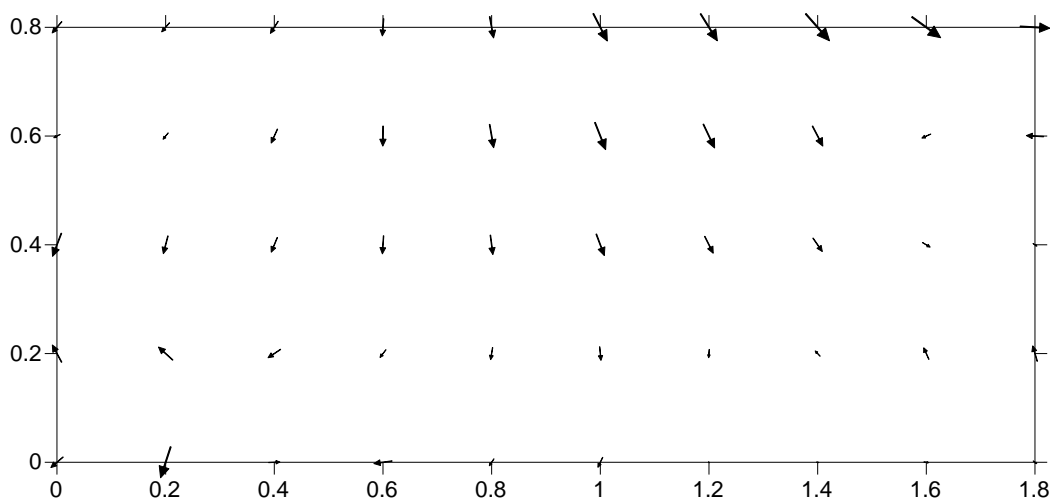
$$\begin{aligned} x_1=0, y_1=0, z_1=0, x_2=2, y_2=0, z_2=0, x_3=2, y_3=2, z_3=0, x_4=0, y_4=2, z_4=0; \\ x_5=0, y_5=0, z_5=1, x_6=1, y_6=0, z_6=1, x_7=1, y_7=1, z_7=1, \\ x_8=0, y_8=1, z_8=1 \end{aligned}$$



شکل ۵-۱۵- نمونه مدل شده با روش حجم محدود

کد نویسی با زبان برنامه نویسی C++ انجام پذیرفته است. برنامه مربوطه در پیوست ج ارائه گردیده است. در ذیل چند نمونه از بردارهای سرعت در مقاطع مختلف ارائه شده است.

۵-۶- نتایج بردارهای سرعت در مقاطع مختلف با استفاده از روش حجم های محدود

شکل ۵-۱۶- بردار سرعت در  $i=1$ شکل ۵-۱۷- بردار سرعت در  $i=ie/2$ شکل ۵-۱۸- بردار سرعت در  $j=1$ 

## ۷-۵- بحث و نتایج

در این قسمت از پایان نامه، نحوه به کارگیری الگوریتم مک در مش های هم مکان به روش حجم محدود بیان گردید. در اینجا نیز ابتدا روابط مومنتم  $x, y, z$  در مراکز هر حجم کنترل تعیین شدند سپس با استفاده از انترپوله خطی روابط مومنتم در روی سطوح مشترک بین حجم های محدود به دست آمد. با معلوم بودن روابط برای سطوح، مقدار دبی عبوری از هر سطح مشخص گردید. در روش حجم های محدود نیز شکل کار مشابه روش تفاضل محدود می باشد و کاربرد آن در حل مسائل مربوط به شکل های دلخواه سه بعدی می باشد. در این روش نیز مانند روش تفاضلات محدود، شرایط مرزی بسیار مهم هستند و عدم دقت در اعمال درست آن ها می تواند باعث واگرایی جواب ها گردد. جهت مش بندی مسئله جریان، از مش سازمان یافته جهت سهولت کار استفاده گردید. جهت مش سازی از انترپوله خطی بین نقاط استفاده شد. محاسبه سرعت در روی سطوح نیز با ضرایب انترپوله IC انجام گرفت. جهت محاسبه مقادیر سرعت مولفه های سرعت روی سطوح محاسبه گردید. هم چنین به بررسی ترم دیفیوژن که در مقادیر سرعت نقش اساسی دارند، پرداخته شد. ترم های انتقال با روش پسر مدل سازی گردیدند و این که مقادیر جرم های انتقالی با توجه به جهت تاثیرشان در معادله وارد شدند.

## فصل ششم

# نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه، روشی برای استفاده از الگوریتم مک در مش های هم مکان ارائه گردید. بر پایه مطالب ارائه شده در فصول مختلف این پایان نامه، می توان نتیجه گیری های زیر را ارائه نمود:

### ۶-۱- نتیجه گیری

۱- ابتدا حالت ساده و عمومی الگوریتم مک به صورت مش جابجا شده بررسی گردید و سپس نحوه به کار گیری این الگوریتم در مش های هم مکان، بررسی گردید. برای به کارگیری این الگوریتم در مش های هم مکان مشخص گردید که نظریه Rhie & Chow در مورد درون یابی رابطه مومنت می تواند مفید باشد. بر طبق نظر Rhie & Chow می توان رابطه مومنت را در نقاط تقاطع مش ها محاسبه نمود و سپس مومنت را در فواصل بین هر دو نقطه با درون یابی تعیین نمود.

۲- رابطه فشار بین نقاط همسایه در مش جابجا شده به صورت:

$$\left(\frac{\tau}{\rho\Delta x^2} + \frac{\tau}{\rho\Delta y^2}\right) P^{n+1}_{i,j} = \frac{1}{\rho\Delta x^2} P^{n+1}_{i-1,j} + \frac{1}{\rho\Delta x^2} P^{n+1}_{i+1,j} + \frac{1}{\rho\Delta y^2} P^{n+1}_{i,j-1} + \frac{1}{\rho\Delta y^2} P^{n+1}_{i,j+1} - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{RHSU_{i+1/2,j} - RHSU_{i-1/2,j}}{\Delta x} + \frac{RHSV_{i,j+1/2} - RHSV_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right)$$

و در مش هم مکان به فرمول زیر ظاهر گردید:

$$\left(\frac{\tau}{\rho\Delta x^2} + \frac{\tau}{\rho\Delta y^2}\right) P^{n+1}_{i,j} = \frac{1}{\rho\Delta x^2} P^{n+1}_{i-1,j} + \frac{1}{\rho\Delta x^2} P^{n+1}_{i+1,j} + \frac{1}{\rho\Delta y^2} P^{n+1}_{i,j-1} + \frac{1}{\rho\Delta y^2} P^{n+1}_{i,j+1} - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{RHSU_{i+1,j} - RHSU_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{RHSV_{i,j+1} - RHSV_{i,j-1}}{2\Delta y} \right)$$

با مقایسه دو رابطه فوق مشاهده می گردد که تفاوت دو روش در نحوه محاسبه طرف های راست دو معادله می باشد.

۳- همچنین محاسبه سرعت در مش جابجا شده با  $v_t$  با استفاده از مولفه های سرعت،  $v_m$  و  $u_m$  با

ترکیب:

$$v_m = \frac{v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}}{2} \quad \text{و} \quad u_m = \frac{u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{2}$$

$$v_t = \sqrt{(u_m^2 + v_m^2)}$$

و در مش هم مکان با رابطه ذیل برقرار است:

$$v_t = \sqrt{(u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2)}$$

وجود همین تفاوت ها در نحوه ارائه جواب های نهایی، در ایجاد تغییر در جواب ها موثر می باشند.

۴- برای بررسی دقت روش مش هم مکان جریان در یک کانل دوبعدی و همچنین یک کانال سه بعدی  $U$  شکل با مش هم مکان مدل سازی گردید. نتایج و نمودارهای حاصله تطابق قابل قبولی با نتایج نرم افزار انسیس که خود نوعی نرم افزار اجزا محدود است، و نیز با نرم افزار این فوم نشان داد. همچنین مقایسه نتایج بین مش های هم مکان و جابجا شده نیز تطابق خوبی نشان داد. مسایل و آزمایشات معروف سی-اف-دی نیز همچون جریان درون حفره با مرز متحرک، پله پشت به جریان و پروفیل عرضی کانال نیز صحت و قابل قبول بودن نتایج مش هم مکان را در مقایسه با مش جابجا شده و آنالیزهای تحلیلی و روش های تجربی به خوبی نشان می دهند.

۵- از آنجایی که در مش هم مکان تمام مقادیر پارامترهای مورد نظر شامل مولفه های سرعت و فشار همه در محل تقاطع گره ها قرار می گیرند لذا حل مسایل مربوط به معادلات حاکم بر جریان سیال شامل معادلات ناویر- استوکس آسان تر خواهد بود. بایستی توجه داشت که همانند هر مسئله سی-اف-دی، اندازه مش ها تاثیر فراوانی بر نتایج دارد در عین حال که افزایش مش باعث افزایش دقت می شود، مسائل مربوط به هزینه بیشتر و صرف وقت بالاتر نیز بایستی مد نظر قرار بگیرد.

همچنین حل معادلات حاکم بر جریان سیال که همان معادلات ناویر- استوکس می باشند، با استفاده از روش حجم محدود به صورت سه بعدی انجام گرفت که نکات مربوط به این مدل سازی نیز شامل موارد زیر می گردد:

۶- گرادیان های مقادیر فشار در مرزهای بین دو المان لازم است در جهت عمود بر سطح محاسبه گردد و در نتیجه لازم است تبدیل از مختصات  $x, y, z$  به  $\xi, \eta, \zeta$  داشته باشیم. این امر لزوم استفاده از ژاکوبین را روشن می سازد که نحوه به کار گیری آن در فصل پنجم بیان شده است.



۷- در مسائل حجم محدود علاوه بر دیفیوژن های اصلی، دیفیوژن های ثانویه نیز ایجاد می گردند که بایستی به صورت دقیق محاسبه گردند. نحوه محاسبه آن ها در فصل پنجم با جزییات شرح داده شده است.

۸- محاسبه سرعت در روی سطوح نیز با ضرایب انتروپوله  $iC$  بین المان ها انجام گرفت. هم چنین جهت محاسبه مولفه های سرعت تصاویر سطوح روی محورها به دست آمد.

### ۲-۶- پیشنهادات

با توجه به مطالب ارائه شده در این پایان نامه، موارد زیر برای کارهای پژوهش آینده توصیه می گردد:

۱- همان گونه که ذکر شد، در روش حجم محدود مسئله با مش سازمان یافته بررسی شده است، مدل سازی برای مش های بدون سازمان در مسائل با مرزهای کاملاً نامنظم نیز پیشنهاد می گردد.

۲- در تحقیق حاضر از روش ادی ویسکوزیته ثابت برای مدل سازی آشفتگی استفاده گردیده است، استفاده از سایر مدل های آشفتگی همراه با مش هم مکان برای بررسی جریان در کانال ها توصیه می گردد.

۳- در خاتمه بایستی ذکر گردد که برای استفاده از روش های اجزای محدود برای مسائل عددی در مهندسی عمران، داشتن اطلاعات پایه ریاضی و آشنایی با یک زبان برنامه نویسی لازم است.

## پیوست ها

## پیوست (الف)

کدنویسی، حل جریان کانال به روش مش هم مکان به صورت دو بعدی

```

/*upwind for colocated mesh*/

#include<math.h>
#include<stdio.h>

/* initial condition*/
const int ie=۳۰,je=۱۰,ninp=۱۰;
const double dx=۰,۱,dy=۰,۱,eta=۱e-۴,ro=۱۰۰۰;
const double vinp=۱,۰,pout=۰,pi=۳,۱۴۱۵,dt=۰,۰۰۲;

double u[ie+۲][je+۲],v[ie+۲][je+۲],p[ie+۲][je+۲];
double rhsu[ie+۲][je+۲],rhsv[ie+۲][je+۲];
double ap[ie+۱][je+۱],apn[ie+۱][je+۱],ape[ie+۱][je+۱];
double aps[ie+۱][je+۱],apw[ie+۱][je+۱],bp[ie+۱][je+۱];

void init();
void prescof();
void rhs();
void solver();
void bound();
void surfdat();

long t;
int i,j;

/* void main*/
void main(){

    FILE *res;
    res=fopen("Res.txt","w");
    fprintf(res,"ie=%i, je=%i, ninp=%i",ie,je,ninp);
    fprintf(res,", dt=%f, dx=%f, dy=%f, ETA=%f, RO=%f, vinp=%f,
pout=%f",dt,dx,dy,eta,ro,vinp,pout);
    fprintf(res,"\nStep      p[%i][۱]      \tv[%i][%i]\n",ninp/۲,ie-
ninp/۲,je);
    init();

```

```

prescof();

for(t=1;t<100;t++){
    printf("\nTry=%i",t);
    rhs();
    solver();
    bound();
    fprintf(res,"%i    %f    %f\n",t,p[ninp/2][1],v[ie-
ninp/2][je]);
};
surfdat();
fclose (res);
}
/* void init */
void init(){
    for(i=0;i<ie+2;i++){
        for(j=0;j<je+2;j++){
            p[i][j]=pout;
            v[i][j]=0;
            u[i][j]=0;
            rhsu[i][j]=0;
            rhsv[i][j]=0;
        };
    };

/* entrance & departing */
    for(i=1;i<ninp+1;i++)v[i][0]=vinp;rhsv[i][0]=vinp;
    for(i=ie-ninp+1;i<ie+1;i++)p[i][je+1]=pout;
}
/* void prescof */
void prescof(){
    for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++){
        apn[i][j]=1/(ro*dy*dy);
        ape[i][j]=1/(ro*dx*dx);
        aps[i][j]=1/(ro*dy*dy);
        apw[i][j]=1/(ro*dx*dx);
    };

    for(i=1;i<ie+1;i++)aps[i][1]=0;
    for (i=1;i<ie-ninp+1;i++)apn[i][je]=0;

```

```

for(j=\;j<j+1;j++) apw[\][j]=0;ape[ie][j]=0;

for(i=\;i<ie+1;i++) for(j=\;j<j+1;j++) {
    ap[i][j]=apn[i][j]+ape[i][j]+aps[i][j]+apw[i][j];
    apn[i][j]=apn[i][j]/ap[i][j];
    ape[i][j]=ape[i][j]/ap[i][j];
    aps[i][j]=aps[i][j]/ap[i][j];
    apw[i][j]=apw[i][j]/ap[i][j];
};
}

/* void rsh */
void rhs() {
    double ua,va,tp;
/*rhsu*/
    for(i=\;i<ie+1;i++) for(j=\;j<j+1;j++) {
        ua=(u[i-1][j]+u[i][j])/2;
        if(ua>0) tp=-ua*u[i-1][j]/dx;else tp=-ua*u[i][j]/dx;

        ua=(u[i][j]+u[i+1][j])/2;
        if(ua>0) tp=tp+ua*u[i][j]/dx;else tp=tp+ua*u[i+1][j]/dx;

        va=(v[i][j-1]+v[i][j])/2;
        if(va>0) tp=tp-va*u[i][j-1]/dy;else tp=tp-va*u[i][j]/dy;

        va=(v[i][j]+v[i][j+1])/2;
        if(va>0) tp=tp+va*u[i][j]/dy;else tp=tp+va*u[i][j+1]/dy;

        rhsu[i][j]=u[i][j]-dt*tp
        +eta*dt/(dx*dx)*(u[i-1][j]-2*u[i][j]+u[i+1][j])
        +eta*dt/(dy*dy)*(u[i][j-1]-2*u[i][j]+u[i][j+1]);

/* rhsv */
        ua=(u[i][j]+u[i-1][j])/2;
        if(ua>0) tp=-ua*v[i-1][j]/dx;else tp=-ua*v[i][j]/dx;

        ua=(u[i][j]+u[i+1][j])/2;
        if(ua>0) tp=tp+ua*v[i][j]/dx;else tp=tp+ua*v[i+1][j]/dx;

        va=(v[i][j-1]+v[i][j])/2;

```

```

        if(va>0)tp=tp-va*v[i][j-1]/dy;else tp=tp-va*v[i][j]/dy;

        va=(v[i][j]+v[i][j+1])/۲;
        if(va>0)tp=tp+va*v[i][j]/dy;else tp=tp+va*v[i][j+1]/dy;

        rhsv[i][j]=v[i][j]-dt*tp
        +eta*dt/(dx*dx)*(v[i-1][j]-۲*v[i][j]+v[i+1][j])
        +eta*dt/(dy*dy)*(v[i][j-1]-۲*v[i][j]+v[i][j+1]);
    };

    for(i=۱;i<ie+۱;i++)for(j=۱;j<j+۱;j++){
        bp[i][j]=-((rhsu[i+۱][j]-rhsu[i-
۱][j])/(۲*dx)+(rhsv[i][j+۱]-rhsv[i][j-۱])/(۲*dy))/(dt*ap[i][j]);
    }

/* DEFINITION OF VOID SOLVER*/
void solver(){
    for(i=۱;i<ie+۱;i++){
        for(j=۱;j<j+۱;j++){
            p[i][j]=p[i-۱][j]*apw[i][j]+p[i+۱][j]*ape[i][j]+p[i][j-
۱]*aps[i][j]+p[i][j+۱]*apn[i][j]+bp[i][j];
        };
    };

    for(j=۱;j<j+۱;j++)p[۰][j]=p[۱][j];p[ie+۱][j]=p[ie][j];
    for(i=۱;i<ie+۱;i++)p[i][۰]=p[i][۱];
    for(i=۱;i<ie-ninp+۱;i++)p[i][j+۱]=p[i][je];

    for(j=۱;j<j+۱;j++){
        for(i=۱;i<ie+۱;i++){
            u[i][j]=- (dt/(۲*ro*dx))*(p[i+۱][j]-p[i-۱][j])+rhsu[i][j];
        };
    };

    for(i=۱;i<ie+۱;i++){
        for(j=۱;j<j+۱;j++){
            v[i][j]=- (dt/(۲*ro*dy))*(p[i][j+۱]-p[i][j-۱])+rhsv[i][j];
        };
    };
}

```

```

/* DEFINITION OF VOID BOUND*/
void bound() {
    for(i=ninp+1;i<ie+1;i++) u[i][0]=-u[i][1],rhsv[i][0]=-
rhsv[i][1],v[i][0]=-v[i][1];
    for(i=1;i<ie-ninp+1;i++) u[i][je+1]=-u[i][je],rhsv[i][je+1]=-
rhsv[i][je],v[i][je+1]=-v[i][je];
    for(j=1;j<je+1;j++) {
        rhsu[0][j]=-rhsu[1][j],u[0][j]=-u[1][j],u[ie+1][j]=-u[ie][j];
        v[ie+1][j]=-v[ie][j],v[0][j]=-v[1][j],rhsu[ie+1][j]=-
rhsu[0][j];
    };

    for(i=ie-ninp+1;i<ie+1;i++)
rhsv[i][je+1]=rhsv[i][je],u[i][je+1]=u[i][je];v[i][je+1]=v[i][je];

/* DEFINITION OF VOID SURFDAT*/
void surfdat() {
    double Um,Vm,Vt;
    FILE *velocities;
    velocities=fopen("velocities.txt","w");
    FILE *pressure;
    pressure=fopen("pressure.xls","w");
    for(j=je;j>0;j--){
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            Um=(u[i][j]+u[i+1][j])/2;
            Vm=(v[i][j]+v[i][j+1])/2;
            Vt=sqrt(Vm*Vm+Um*Um);
            Ang=(atan2(Vm,Um)*180/pi)-90;
            fprintf(velocities,"%i\t\t%i\t\t%f\t\t\t
%.0,.0f\n",i,j,Vt,Ang);
            fprintf(pressure,"%e,\tf\t\t",p[i][j]);
        };
        fprintf(pressure,"\n\r");
    };
    fclose(velocities);
    fclose(pressure);
}

```

## پیوست (ب)

کدنویسی، حل جریان کانال با روش مش هم مکان به صورت سه بعدی

```
// Upwind for convective terms (Conservative)
// ۳D flow in Embsay contact tank with ۲ compartments
#include<math.h>
#include<stdio.h>
const int ie=۲۲,ke=۱۳,ninp=۵,je=۲*ninp+۱;
const double dx=۰,۰۴۲۵,dy=۰,۰۴۲۵,dz=۰,۰۴۲۵,eta=۱e-
۴,ro=۱۰۰۰,vinp=۰,۲۵۹۱,pi=۳,۱۴۱۵,dt=۰,۱۲,pout=۰;
double
u[ie+۲][je+۲][ke+۲],v[ie+۲][je+۲][ke+۲],w[ie+۲][je+۲][ke+۲],p[ie+۲][je
+۲][ke+۲];
double
rhsu[ie+۲][je+۲][ke+۲],rhsv[ie+۲][je+۲][ke+۲],rhsw[ie+۲][je+۲][ke+۲];
double
ap[ie+۱][je+۱][ke+۱],apn[ie+۱][je+۱][ke+۱],ape[ie+۱][je+۱][ke+۱],aps[i
e+۱][je+۱][ke+۱],apw[ie+۱][je+۱][ke+۱],bp[ie+۱][je+۱][ke+۱];
double apt[ie+۱][je+۱][ke+۱],apb[ie+۱][je+۱][ke+۱];
void init();
void prescof();
void rhs();
void solver();
void bound();
void surfdat();
long t;
/*-----void MAIN-----*/
void main(){
FILE *res;
res=fopen("Res.txt","w");
fprintf(res,"ie=%i, je=%i, ke=%i, ninp=%i",ie,je,ke,ninp);
fprintf(res,", dt=%f, dx=%f, dy=%f, dz=%f, ETA=%f, RO=%f,
vinp=%f, pout=%f",dt,dx,dy,dz,eta,ro,vinp,pout);
fprintf(res,"\nStep      p[%i][%i][%i]
u[%i][%i][%i]\n",ie,je-ninp/۲,ke,ie+۱,ninp/۲,ke);
init();
prescof();
for(t=۱;t<۱۰۰۰۰;t++){
printf("\nTry=%i",t);
rhs();
solver();
bound();
fprintf(res,"%i   %f   %f\n",t,p[ie][je-
ninp/۲][ke],u[ie+۱][ninp/۲][ke]);
};
surfdat();
fclose (res);
}
/*-----void INIT-----*/
void init(){
int i,j,k;
for(i=۰;i<ie+۲;i++){
for(j=۰;j<je+۲;j++){
for(k=۰;k<ke+۲;k++){
p[i][j][k]=۰;
u[i][j][k]=۰;
v[i][j][k]=۰;
}
```



```

        w[i][j][k]=0;
        rhsu[i][j][k]=0;
        rhsv[i][j][k]=0;
        rhsw[i][j][k]=0;
    };
};
};
for(j=je-ninp+1;j<je+1;j++){u[ie+1][j][ke]=-
vinp;rhsu[ie+1][j][ke]=-vinp;};
for(j=1;j<ninp+1;j++)p[ie][j][ke]=pout;
}
/*-----void PRESCOF-----*/
void prescof(){
    int i,j,k;
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){
        apt[i][j][k]=1/(ro*dz*dz);
        apb[i][j][k]=1/(ro*dz*dz);
        apn[i][j][k]=1/(ro*dy*dy);
        aps[i][j][k]=1/(ro*dy*dy);
        ape[i][j][k]=1/(ro*dx*dx);
        apw[i][j][k]=1/(ro*dx*dx);
    };
/*-----condition of surface for ap(s)-----*/
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++){apt[i][j][ke]=0;apb[i][j][
1]=0;};
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++){aps[i][1][k]=0;apn[i][je][
k]=0;};
    for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){apw[1][j][k]=0;ape[ie][j][
k]=0;};
    for(j=1;j<ninp+1;j++)ape[ie][j][ke]=1/(ro*dx*dx);
    for(i=ninp+1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++){aps[i][ninp+2][k]=0;
apn[i][ninp][k]=0;};
    for(k=1;k<ke+1;k++)ape[ninp][ninp+1][k]=0;
/*-----ap-----*/
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){
        ap[i][j][k]=apt[i][j][k]+apb[i][j][k]+apn[i][j][k]+aps[i][j][k]+
ape[i][j][k]+apw[i][j][k];
        apt[i][j][k]=apt[i][j][k]/ap[i][j][k];
        apb[i][j][k]=apb[i][j][k]/ap[i][j][k];
        apn[i][j][k]=apn[i][j][k]/ap[i][j][k];
        aps[i][j][k]=aps[i][j][k]/ap[i][j][k];
        ape[i][j][k]=ape[i][j][k]/ap[i][j][k];
        apw[i][j][k]=apw[i][j][k]/ap[i][j][k];
    };
}
/*-----void RHS-----*/
void rhs(){
    int i,j,k,ien;
    double ua,va,wa,tp;
    for(j=1;j<je+1;j++){
        if(j==ninp+1)ien=ninp;else ien=ie;
        for(i=1;i<ien+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++){
//-----rhsu-----
            ua=(u[i][j][k]+u[i-1][j][k])/2;
            if(ua>0)tp=-ua*u[i-1][j][k]/dx;else tp=-
ua*u[i][j][k]/dx;
            ua=(u[i][j][k]+u[i+1][j][k])/2;
            if(ua>0)tp=tp+ua*u[i][j][k]/dx;else
tp=tp+ua*u[i+1][j][k]/dx;

```

```

        va=(v[i][j][k]+v[i][j-1][k])/۲;
        if(va>. )tp=tp-va*u[i][j-1][k]/dy;else tp=tp-
va*u[i][j][k]/dy;
        va=(v[i][j][k]+v[i][j+1][k])/۲;
        if(va>. )tp=tp+va*u[i][j][k]/dy;else
tp=tp+va*u[i][j+1][k]/dy;
        wa=(w[i][j][k]+w[i][j][k-1])/۲;
        if(wa>. )tp=tp-wa*u[i][j][k-1]/dz;else tp=tp-
wa*u[i][j][k]/dz;
        wa=(w[i][j][k]+w[i][j][k+1])/۲;
        if(wa>. )tp=tp+wa*u[i][j][k]/dz;else
tp=tp+wa*u[i][j][k+1]/dz;

        rhsu[i][j][k]=u[i][j][k]-dt*tp
        +eta*dt/(dx*dx)*(u[i-1][j][k]-
۲*u[i][j][k]+u[i+1][j][k])
        +eta*dt/(dy*dy)*(u[i][j-1][k]-
۲*u[i][j][k]+u[i][j+1][k])
        +eta*dt/(dz*dz)*(u[i][j][k-1]-
۲*u[i][j][k]+u[i][j][k+1]);
// _____ rhsv _____
        ua=(u[i][j][k]+u[i-1][j][k])/۲;
        if(ua>. )tp=-ua*v[i-1][j][k]/dx;else tp=-
ua*v[i][j][k]/dx;
        ua=(u[i][j][k]+u[i+1][j][k])/۲;
        if(ua>. )tp=tp+ua*v[i][j][k]/dx;else
tp=tp+ua*v[i+1][j][k]/dx;
        va=(v[i][j][k]+v[i][j-1][k])/۲;
        if(va>. )tp=tp-va*v[i][j-1][k]/dy;else tp=tp-
va*v[i][j][k]/dy;
        va=(v[i][j][k]+v[i][j+1][k])/۲;
        if(va>. )tp=tp+va*v[i][j][k]/dy;else
tp=tp+va*v[i][j+1][k]/dy;
        wa=(w[i][j][k]+w[i][j][k-1])/۲;
        if(wa>. )tp=tp-wa*v[i][j][k-1]/dz;else tp=tp-
wa*v[i][j][k]/dz;
        wa=(w[i][j][k]+w[i][j][k+1])/۲;
        if(wa>. )tp=tp+wa*v[i][j][k]/dz;else
tp=tp+wa*v[i][j][k+1]/dz;

        rhsv[i][j][k]=v[i][j][k]-dt*tp
        +eta*dt/(dx*dx)*(v[i-1][j][k]-
۲*v[i][j][k]+v[i+1][j][k])
        +eta*dt/(dy*dy)*(v[i][j-1][k]-
۲*v[i][j][k]+v[i][j+1][k])
        +eta*dt/(dz*dz)*(v[i][j][k-1]-
۲*v[i][j][k]+v[i][j][k+1]);
// _____ rhsw _____
        ua=(u[i][j][k]+u[i-1][j][k])/۲;
        if(ua>. )tp=-ua*w[i-1][j][k]/dx;else tp=-
ua*w[i][j][k]/dx;
        ua=(u[i][j][k]+u[i+1][j][k])/۲;
        if(ua>. )tp=tp+ua*w[i][j][k]/dx;else
tp=tp+ua*w[i+1][j][k]/dx;
        va=(v[i][j][k]+v[i][j-1][k])/۲;
        if(va>. )tp=tp-va*w[i][j-1][k]/dy;else tp=tp-
va*w[i][j][k]/dy;
        va=(v[i][j][k]+v[i][j+1][k])/۲;
        if(va>. )tp=tp+va*w[i][j][k]/dy;else
tp=tp+va*w[i][j+1][k]/dy;

```

```

        wa=(w[i][j][k]+w[i][j][k-1])/۲;
        if(wa>۰)tp=tp-wa*w[i][j][k-1]/dz;else tp=tp-
wa*w[i][j][k]/dz;
        wa=(w[i][j][k]+w[i][j][k+1])/۲;
        if(wa>۰)tp=tp+wa*w[i][j][k]/dz;else
tp=tp+wa*w[i][j][k+1]/dz;

        rhsw[i][j][k]=w[i][j][k]-dt*tp
        +eta*dt/(dx*dx)*(w[i-1][j][k]-
۲*w[i][j][k]+w[i+1][j][k])
        +eta*dt/(dy*dy)*(w[i][j-1][k]-
۲*w[i][j][k]+w[i][j+1][k])
        +eta*dt/(dz*dz)*(w[i][j][k-1]-
۲*w[i][j][k]+w[i][j][k+1]);
    };
    if(j==ninp-
۱)for(i=ninp+۱;i<ie+۱;i++)for(k=۱;k<ke+۱;k++){u[i][ninp+۱][k]=-
u[i][ninp][k];v[i][ninp+۱][k]=-v[i][ninp][k];w[i][ninp+۱][k]=-
w[i][ninp][k];};
    if(j==ninp)for(k=۱;k<ke+۱;k++){u[ninp+۱][ninp+۱][k]=-
u[ninp][ninp+۱][k];v[ninp+۱][ninp+۱][k]=-
v[ninp][ninp+۱][k];w[ninp+۱][ninp+۱][k]=-w[ninp][ninp+۱][k];};

    if(j==ninp+۱)for(i=ninp+۱;i<ie+۱;i++)for(k=۱;k<ke+۱;k++){u[i][ni
np+۱][k]=-u[i][ninp+۲][k];v[i][ninp+۱][k]=-
v[i][ninp+۲][k];w[i][ninp+۱][k]=-w[i][ninp+۲][k];};
    };

    for(i=۱;i<ie+۱;i++)for(j=۱;j<je+۱;j++){rhsw[i][j][۰]=-
rhsw[i][j][۱];rhsw[i][j][ke+۱]=-rhsw[i][j][ke];};
    for(i=۱;i<ie+۱;i++)for(k=۱;k<ke+۱;k++){rhsv[i][۰][k]=-
rhsv[i][۱][k];rhsv[i][je+۱][k]=-rhsv[i][je][k];};
    for(j=۱;j<je+۱;j++)for(k=۱;k<ke+۱;k++){rhsu[۰][j][k]=-
rhsu[۱][j][k];rhsu[ie+۱][j][k]=-rhsu[ie][j][k];};
    for(j=۱;j<ninp+۱;j++)rhsu[ie+۱][j][ke]=rhsu[ie][j][ke];
    for(j=ninp+۲;j<je+۱;j++)rhsu[ie+۱][j][ke]=-vinp;
    for(j=۱;j<je+۱;j++){
        if(j==ninp+۱)ien=ninp;else ien=ie;
        for(i=۱;i<ien+۱;i++)for(k=۱;k<ke+۱;k++)bp[i][j][k]=-
((rhsu[i+۱][j][k]-rhsu[i-۱][j][k])/dx+(rhsv[i][j+۱][k]-rhsv[i][j-
۱][k])/dy
            +(rhsw[i][j][k+۱]-rhsw[i][j][k-
۱])/dz)/(۲*dt*ap[i][j][k]);
        if(j==ninp-
۱)for(i=ninp+۱;i<ie+۱;i++)for(k=۱;k<ke+۱;k++)rhsv[i][ninp+۱][k]=-
rhsv[i][ninp][k];
        if(j==ninp)for(k=۱;k<ke+۱;k++)rhsu[ninp+۱][ninp+۱][k]=-
rhsu[ninp][ninp+۱][k];

        if(j==ninp+۱)for(i=ninp+۱;i<ie+۱;i++)for(k=۱;k<ke+۱;k++)rhsv[i][
ninp+۱][k]=-rhsv[i][ninp+۲][k];
    };
}
/*-----void SOLVER-----*/
void solver(){
    int i,j,k,ien;
    for(j=۱;j<je+۱;j++){
        if(j==ninp+۱)ien=ninp;else ien=ie;
        for(i=۱;i<ien+۱;i++)for(k=۱;k<ke+۱;k++){

```

```

                p[i][j][k]=
ape[i][j][k]*p[i+1][j][k]+apw[i][j][k]*p[i-1][j][k]

                +apn[i][j][k]*p[i][j+1][k]+aps[i][j][k]*p[i][j-1][k]

                +apt[i][j][k]*p[i][j][k+1]+apb[i][j][k]*p[i][j][k-
1]+bp[i][j][k];
            };
        };
        for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++){p[i][j][0]=p[i][j][1];p[i
][j][ke+1]=p[i][j][ke];};
        for(i=1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++){p[i][0][k]=p[i][1][k];p[i
][je+1][k]=p[i][je][k];};
        for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){p[0][j][k]=p[1][j][k];p[i
e+1][j][k]=p[ie][j][k];};
        for(j=1;j<ninp+1;j++)p[ie+1][j][ke]=pout;
        for(j=1;j<je+1;j++){
            if(j==ninp+1)ien=ninp;else ien=ie;
            for(i=1;i<ien+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++){
                u[i][j][k]=-dt/(r*ro*dx)*(p[i+1][j][k]-p[i-
1][j][k])+rhsu[i][j][k];
                v[i][j][k]=-dt/(r*ro*dy)*(p[i][j+1][k]-p[i][j-
1][k])+rhsv[i][j][k];
                w[i][j][k]=-dt/(r*ro*dz)*(p[i][j][k+1]-p[i][j][k-
1])+rhsw[i][j][k];
            };
            if(j==ninp-
1) for(i=ninp+1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++)p[i][ninp+1][k]=p[i][ninp
][k];

            if(j==ninp) for(k=1;k<ke+1;k++)p[ninp+1][ninp+1][k]=p[ninp][ninp+
1][k];

            if(j==ninp+1) for(i=ninp+1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++)p[i][nin
p+1][k]=p[i][ninp+r][k];
        };
    }
/*-----void BOUND-----*/
void bound(){
    int i,j,k;
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++){u[i][0][k]=-
u[i][1][k];u[i][je+1][k]=-u[i][je][k];

v[i][0][k]=-v[i][1][k];v[i][je+1][k]=-v[i][je][k];

w[i][0][k]=-w[i][1][k];w[i][je+1][k]=-w[i][je][k];};
    for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){u[0][j][k]=-
u[1][j][k];u[ie+1][j][k]=-u[ie][j][k];

v[0][j][k]=-v[1][j][k];v[ie+1][j][k]=-v[ie][j][k];

w[0][j][k]=-w[1][j][k];w[ie+1][j][k]=-w[ie][j][k];};
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++){u[i][j][0]=-
u[i][j][1];u[i][j][ke+1]=u[i][j][ke];

v[i][j][0]=-v[i][j][1];v[i][j][ke+1]=v[i][j][ke];

w[i][j][0]=-w[i][j][1];w[i][j][ke+1]=-w[i][j][ke];};
    for(j=ninp+r;j<je+1;j++){u[ie+1][j][ke]=-
vinp;v[ie+1][j][ke]=0;w[ie+1][j][ke]=0;};

```

```

    for(j=\;j<ninp+\;j++){u[ie+\][j][ke]=u[ie][j][ke];v[ie+\][j][ke]
=v[ie][j][ke];w[ie+\][j][ke]=w[ie][j][ke];}
}
/*-----void SURFDAT-----*/
void surfdat(){
    FILE *vel_j\,*vel_j\,*vel_top,*pt;
    vel_j\=fopen("Vel_j\ .txt","w");
    vel_j\=fopen("Vel_j\ .txt","w");
    vel_top=fopen("Vel_top.txt","w");
    pt=fopen("Pressures.txt","w");
    int i,j,k,ang,j\=2,j\=9;
    float um,vm,wm,vt;
    for(i=ninp+\;i<ie+\;i++)for(k=\;k<ke+\;k++){u[i][ninp+\][k]=0;v[
i][ninp+\][k]=0;v[i][ninp+\][k]=0;};
    for(j=j\;j>0;j--){
        for(i=\;i<ie+\;i++){
            um=u[i][j][ke];
            vm=v[i][j][ke];
            vt=sqrt(um*um+vm*vm);
            ang=atan2(vm,um)*180/pi-90;
            fprintf(vel_top,"%d %d %f
%d\n",i,j,vt,ang);
            fprintf(pt,"%f ",p[i][j][ke]);
        };
        fprintf(pt,"\n");
    };
    for(i=\;i<ie+\;i++)for(k=\;k<ke+\;k++){
        um=u[i][j\][k];
        wm=w[i][j\][k];
        vt=sqrt(um*um+wm*wm);
        ang=atan2(wm,um)*180/pi-90;
        fprintf(vel_j\,"%d %d %f
%d\n",i,k,vt,ang);
        um=u[i][j\][k];
        wm=w[i][j\][k];
        vt=sqrt(um*um+wm*wm);
        ang=atan2(wm,um)*180/pi-90;
        fprintf(vel_j\,"%d %d %f
%d\n",i,k,vt,ang);
    };
    fclose(vel_j\);
    fclose(vel_j\);
    fclose(vel_top);
    fclose(pt);
}

```

## پیوست (ج)

## کدنویسی، حل جریان کانال با نرم افزار انسیس به صورت دو بعدی

```

!2D flow in a bend channel - Steady - Laminar
FINISH
/CLEAR
/SYS,DEL file.RFL
/PREP7
/TITLE, 2D flow in a bend channel
ET,1,FLUID141
!
! Modelling and Meshing
RECTNG,0,1,0,1
K,1,2,0
K,1,2,1
K,1,3,0
K,1,3,1
A,2,0,6,3
A,0,7,8,6
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,1
ESIZE,0,10,
AMESH,ALL
!
! Initial and Boundary Conditions
LSEL,S,,,3,0
LSEL,A,,,7,9
DL,ALL,,VX,0,1
DL,ALL,,VY,0,1
DL,1,,VY,1,0
DL,1,,VX,0
DL,10,,PRES,0
DL,10,,VX,0
LSEL,ALL
!
! Flatron data
FLDATA,ITER,EXEC,20
FLDATA,NOMI,DENS,1e+3
FLDATA,NOMI,VISC,1e-1
!
! Solution
/SOLU
SOLVE
!
FINISH
/POST1
SET,LAST
*ask,ans,"Do you want to see next results?(Y / anything else)"(
*if,ans,EQ,Y):gohere
PLVECT,V, , , ,VECT,ELEM,ON,0
:gohere

```

## پیوست (د)

## کدنویسی، حل جریان کانال با نرم افزار انسیس به صورت سه بعدی

```

!      3D flow in a water purification model - Steady - Laminar
FINISH
/CLEAR
/SYS,DEL file.RFL
/PREP7
/TITLE, 3D flow in a Water Purification Model
ET,1,FLUID142

!      Modelling and Meshing
volume
BLOCK,0,0,2120,0,0,0,0,0,0,0,0,2120,
BLOCK,0,2120,0,930,0,0,0,0,0,0,0,2120,
BLOCK,0,0,2120,0,0,0,0,0,0,2120,0,200,
BLOCK,0,0,2120,0,0,0,0,0,0,200,0,4670,
BLOCK,0,2120,0,930,0,0,0,0,0,200,0,4670,
VSEL,S,,,1,0
VGLUE,ALL
ESIZE,0,0,420,0,
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,ALL

!Initial and Boundary Conditons
DL,23,,VY,0,1          !INPUT WATER
DL,23,,VZ,0,1
DL,23,,VX,-0,2091,0
DL,09,,PRES,0          !LINE PRESSURE
DL,09,,VY,0,1          !OUTPUT WATER
DL,09,,VZ,0,1
LSEL,ALL
!
DA,46,,VY,0,0          !BOTTOM AREA
DA,38,,VY,0,0
!
DA,41,,VY,0,1          !BOTTOM AREA
DA,33,,VY,0,1
DA,4,,VY,0,1
!
DA,30,,VY,0,1          !FRONT AREA
DA,30,,VX,0,0
DA,30,,VZ,0,1
DA,12,,VY,0,1
DA,12,,VX,0,0
DA,12,,VZ,0,1
!
ASEL,S,,,44
ASEL,A,,,20
ASEL,A,,,30

```

```

ASEL,A,,,1                !AREAS
ASEL,A,,,5
ASEL,A,,,34
ASEL,A,,,42
ASEL,A,,,43
ASEL,A,,,36
ASEL,A,,,32
ASEL,A,,,37
ASEL,A,,,31
ASEL,A,,,3
ASEL,A,,,39
ASEL,A,,,45
DA,ALL,VX,0.1
DA,ALL,VY,0.1
DA,ALL,VZ,0.1

!
ASELL,ALL

!           Flatron data
FLDATA,ITER,EXEC,20
FLDATA,NOMI,DENS,1e3
FLDATA,NOMI,VISC,1e-1
!           Solution
/SOLU
SOLVE
!
FINISH
/POST1
SET,LAST

*ask,ans,"Do you want to see next results?(\ / anything else"(
*if,ans,EQ,1,:gohere
NSEL,S,LOC,Z,1*0.0425
  PLVECT,V, , , ,VECT,ELEM,ON

*ask,ans,"Do you want to see next results?(\ / anything else"(
*if,ans,EQ,1,:gohere
NSEL,S,LOC,Z,9*0.0425
  PLVECT,V, , , ,VECT,ELEM,ON

PLNSOL, PRES, , .
/VIEW, , , \
/ ANG, \
/ REP,FAST

*ask,ans,"Do you want to see next results?(\ / anything else"(
*if,ans,EQ,1,:gohere
/VIEW, , , \
/ ANG, \
/ REP,FAST
NSEL,S,LOC,Y,13*0.0425
  PLVECT,V, , , ,VECT,ELEM,ON

```



## پیوست (و)

## کدنویسی، حل جریان کانال به روش حجم محدود

```

/*finite volume*/
#include<math.h>
#include<stdio.h>
const int ie=۱۰, je=۱۵, ke=۵, ninp=۲;

const float eta=۱e-
۴, ro=۱۰۰۰, vinp=۱, ۵, pout=۰, pi=۳, ۱۴۱۵, dt=۰, ۲, g=۹, ۸۱, gama=۰, ۰۰۱;

const double
x۱=۰, y۱=۰, z۱=۰, x۲=۲, y۲=۰, z۲=۰, x۳=۲, y۳=۲, z۳=۰, x۴=۰, y۴=۲, z۴=۰;
const double
x۵=۰, ۵, y۵=۰, ۵, z۵=۱, x۶=۱, ۵, y۶=۰, ۵, z۶=۱, x۷=۱, ۵, y۷=۱, ۵, z۷=۱, x۸=۰, ۵, y۸=۱, ۵,
z۸=۱;

double x[ie+۲][je+۲][ke+۲], y[ie+۲][je+۲][ke+۲], z[ie+۲][je+۲][ke+۲];
double
u[ie+۲][je+۲][ke+۲], v[ie+۲][je+۲][ke+۲], w[ie+۲][je+۲][ke+۲], p[ie+۲][je
+۲][ke+۲];
double ve[ie+۱][je+۱][ke+۱], ic[ie+۲][je+۲][ke+۲][۱];

double
a۱[ie+۲][je+۱][ke+۱], a۱x[ie+۲][je+۱][ke+۱], a۱y[ie+۲][je+۱][ke+۱], a۱z[i
e+۲][je+۱][ke+۱];
double
a۲[ie+۱][je+۲][ke+۱], a۲x[ie+۱][je+۲][ke+۱], a۲y[ie+۱][je+۲][ke+۱], a۲z[i
e+۱][je+۲][ke+۱];
double
a۳[ie+۱][je+۱][ke+۲], a۳x[ie+۱][je+۱][ke+۲], a۳y[ie+۱][je+۱][ke+۲], a۳z[i
e+۱][je+۱][ke+۲];

double
d۱p[ie+۲][je+۱][ke+۱], d۱t[ie+۲][je+۱][ke+۱], d۱s[ie+۲][je+۱][ke+۱];
double
d۲p[ie+۱][je+۲][ke+۱], d۲t[ie+۱][je+۲][ke+۱], d۲s[ie+۱][je+۲][ke+۱];
double
d۳p[ie+۱][je+۱][ke+۲], d۳t[ie+۱][je+۱][ke+۲], d۳s[ie+۱][je+۱][ke+۲];

double
p۱p[ie+۲][je+۱][ke+۱], p۱t[ie+۲][je+۱][ke+۱], p۱s[ie+۲][je+۱][ke+۱];
double
p۲p[ie+۱][je+۲][ke+۱], p۲t[ie+۱][je+۲][ke+۱], p۲s[ie+۱][je+۲][ke+۱];
double
p۳p[ie+۱][je+۱][ke+۲], p۳t[ie+۱][je+۱][ke+۲], p۳s[ie+۱][je+۱][ke+۲];

double m۱[ie+۲][je+۱][ke+۱], m۲[ie+۱][je+۲][ke+۱], m۳[ie+۱][je+۱][ke+۲];
double
cp۱[ie+۲][je+۱][ke+۱], cp۲[ie+۱][je+۲][ke+۱], cp۳[ie+۱][je+۱][ke+۲];
double
vf۱[ie+۲][je+۱][ke+۲], vf۲[ie+۱][je+۲][ke+۱], vf۳[ie+۱][je+۱][ke+۲];

double
pa۱[ie+۲][je+۱][ke+۱], pa۲[ie+۱][je+۲][ke+۱], pa۳[ie+۱][je+۱][ke+۲];

```

```

double
d\u[ie+۲][je+۱][ke+۱],d\v[ie+۲][je+۱][ke+۱],d\w[ie+۲][je+۱][ke+۱];
double
d۲u[ie+۱][je+۲][ke+۱],d۲v[ie+۱][je+۲][ke+۱],d۲w[ie+۱][je+۲][ke+۱];
double
d۳u[ie+۱][je+۱][ke+۲],d۳v[ie+۱][je+۱][ke+۲],d۳w[ie+۱][je+۱][ke+۲];

double
ap[ie+۲][je+۲][ke+۲],ru[ie+۲][je+۲][ke+۲],rv[ie+۲][je+۲][ke+۲],rw[ie+۲][je+۲][ke+۲];

double xm[ie+۲][je+۲][ke+۲],ym[ie+۲][je+۲][ke+۲],zm[ie+۲][je+۲][ke+۲];
double xt,yt,zt,xmt,ymt,zmt,c\;
double kx,ky,kz,ex,ey,ez,zx,zy,zz;
double ut,vt,wt,tp,tpu,tpv,tpw;

/*
float
dpx[ie+۲][je+۲][ke+۲],dpy[ie+۲][je+۲][ke+۲],dpz[ie+۲][je+۲][ke+۲];
*/

void geometry();
void solver();
void surfdat();

int i,j,k;
long t;

/*-----void MAIN-----*/
void main(){
    FILE *res;
    res=fopen("Res.txt","w");
    fprintf(res,"ie=%i, je=%i, ke=%i, ninp=%i, dt=%f, gama=%f,
RO=%f, vinp=%f, pout=%f",ie,je,ke,ninp,dt,gama,ro,vinp,pout);
    fprintf(res,"\nStep      p[\ ][\ ][\ ]
v[%i][%i][%i]\n",ie,je,ke);
    geometry();
    for(t=\;t<\۵۰۰۰;t++){
        printf("\nTry=%i",t);
        solver();
        fprintf(res,"%i %f %f\n",t,p[\ ][\ ][\ ],v[ie][je][ke]);
    };
    surfdat();
    fclose (res);
}

/*-----void GEOMETRY-----*/
void geometry(){
/*generation of nodes in x,y,z direction STEP(\/\)*/
int i,j,k;
    double xt,yt,zt,xmt,ymt,zmt,c\;
    double kx,ky,kz,ex,ey,ez,zx,zy,zz;

    for(k=\;k<ke+۲;k++) for(j=\;j<je+۲;j++) for(i=\;i<ie+۲;i++){

        x[i][j][k]=(k-۱)/ke*((j-۱)/je*((i-۱)/ie*(x۷-x۸)+x۸-(i-۱)/ie*(x۱-
x۵)-x۵)+(i-۱)/ie*(x۱-x۵)+x۵
                    -(j-۱)/je*((i-۱)/ie*(x۲-x۶)+x۶-(i-۱)/ie*(x۲-
x۱)-x۱)-(i-۱)/ie*(x۲-x۱)-x۱)+

```

```

                (j-1)/je*((i-1)/ie*(x3-x4)+x4-(i-1)/ie*(x2-
x1)-x1)+(i-1)/ie*(x2-x1)+x1;

        y[i][j][k]=(k-1)/ke*((j-1)/je*((i-1)/ie*(y4-y5)+y5-(i-1)/ie*(y1-
y0)-y0)+(i-1)/ie*(y1-y0)+y0
                -(j-1)/je*((i-1)/ie*(y3-y4)+x4-(i-1)/ie*(y2-
y1)-y1)-(i-1)/ie*(y2-y1)-y1)+
                (j-1)/je*((i-1)/ie*(y3-y4)+y4-(i-1)/ie*(y2-
y1)-y1)+(i-1)/ie*(y2-y1)+y1;

        z[i][j][k]=(k-1)/ke*((j-1)/je*((i-1)/ie*(z4-z5)+z5-(i-1)/ie*(z1-
z0)-z0)+(i-1)/ie*(z1-z0)+z0
                -(j-1)/je*((i-1)/ie*(z3-z4)+z4-(i-1)/ie*(z2-
z1)-z1)-(i-1)/ie*(z2-z1)-z1)+
                (j-1)/je*((i-1)/ie*(z3-z4)+z4-(i-1)/ie*(z2-
z1)-z1)+(i-1)/ie*(z2-z1)+z1;
    }

/*generation of middle points in x,y,z direction STEP(2/1)*/
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {

        xmt=(x[i][j][k]+x[i+1][j][k]+x[i][j+1][k]+x[i+1][j+1][k]+x[i][j]
[k+1]+x[i+1][j][k+1]+x[i][j+1][k+1]+x[i+1][j+1][k+1])/8;

        ymt=(y[i][j][k]+y[i+1][j][k]+y[i][j+1][k]+y[i+1][j+1][k]+y[i][j]
[k+1]+y[i+1][j][k+1]+y[i][j+1][k+1]+y[i+1][j+1][k+1])/8;

        zmt=(z[i][j][k]+z[i+1][j][k]+z[i][j+1][k]+z[i+1][j+1][k]+z[i][j]
[k+1]+z[i+1][j][k+1]+z[i][j+1][k+1]+z[i+1][j+1][k+1])/8;

        /*west & east */

        xt=(x[i][j][k]+x[i][j+1][k]+x[i][j][k+1]+x[i][j+1][k+1])/4-xmt;
        yt=(y[i][j][k]+y[i][j+1][k]+y[i][j][k+1]+y[i][j+1][k+1])/4-ymt;
        zt=(z[i][j][k]+z[i][j+1][k]+z[i][j][k+1]+z[i][j+1][k+1])/4-zmt;
        ic[i][j][k][1]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);

        xt=(x[i+1][j][k]+x[i+1][j+1][k]+x[i+1][j][k+1]+x[i+1][j+1][k+1])
/4-xmt;
        yt=(y[i+1][j][k]+y[i+1][j+1][k]+y[i+1][j][k+1]+y[i+1][j+1][k+1])
/4-ymt;
        zt=(z[i+1][j][k]+z[i+1][j+1][k]+z[i+1][j][k+1]+z[i+1][j+1][k+1])
/4-zmt;
        ic[i][j][k][2]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);

        /* south & north*/

        xt=(x[i][j][k]+x[i+1][j][k]+x[i][j][k+1]+x[i+1][j][k+1])/4-xmt;
        yt=(y[i][j][k]+y[i+1][j][k]+y[i][j][k+1]+y[i+1][j][k+1])/4-ymt;
        zt=(z[i][j][k]+z[i+1][j][k]+z[i][j][k+1]+z[i+1][j][k+1])/4-zmt;
        ic[i][j][k][3]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);

```

```

        xt=(x[i][j+1][k]+x[i+1][j+1][k]+x[i][j+1][k+1]+x[i+1][j+1][k+1])
/ε-xmt;

        yt=(y[i][j+1][k]+y[i+1][j+1][k]+y[i][j+1][k+1]+y[i+1][j+1][k+1])
/ε-ymt;

        zt=(z[i][j+1][k]+z[i+1][j+1][k]+z[i][j+1][k+1]+z[i+1][j+1][k+1])
/ε-zmt;
        ic[i][j][k][ε]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);

        /* top & bot*/

        xt=(x[i][j][k]+x[i+1][j][k]+x[i][j+1][k]+x[i+1][j+1][k])/ε-xmt;

        yt=(y[i][j][k]+y[i+1][j][k]+y[i][j+1][k]+y[i+1][j+1][k])/ε-ymt;

        zt=(z[i][j][k]+z[i+1][j][k]+z[i][j+1][k]+z[i+1][j+1][k])/ε-zmt;
        ic[i][j][k][ο]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);

        xt=(x[i][j][k+1]+x[i+1][j][k+1]+x[i][j+1][k+1]+x[i+1][j+1][k+1])
/ε-xmt;

        yt=(y[i][j][k+1]+y[i+1][j][k+1]+y[i][j+1][k+1]+y[i+1][j+1][k+1])
/ε-ymt;

        zt=(z[i][j][k+1]+z[i+1][j][k+1]+z[i][j+1][k+1]+z[i+1][j+1][k+1])
/ε-zmt;
        ic[i][j][k][ι]=sqrt(xt*xt+yt*yt+zt*zt);

        xm[i][j][k]=xmt;
        ym[i][j][k]=ymt;
        zm[i][j][k]=zmt;
};

/*generation of interpolation coefficient x,y,z direction (ic)
STEP(ε/ι)*/
for(i=ι;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
    xt=ic[i][j][k][ι];
    ic[i][j][k][ι]=ic[i-1][j][k][ι]/(xt+ic[i-1][j][k][ι]);
    ic[i-1][j][k][ι]=xt/(xt+ic[i-1][j][k][ι]);};

for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {

    ic[ι][j][k][ι]=0,0;ic[0][j][k][ι]=0,0;ic[ie][j][k][ι]=0,0;ic[ie+
1][j][k][ι]=0,0;

    xm[0][j][k]=(x[ι][j][k]+x[ι][j+1][k]+x[ι][j][k+1]+x[ι][j+1][k+1])
/ι-xm[ι][j][k];

    ym[0][j][k]=(y[ι][j][k]+y[ι][j+1][k]+y[ι][j][k+1]+y[ι][j+1][k+1])
/ι-ym[ι][j][k];

    zm[0][j][k]=(z[ι][j][k]+z[ι][j+1][k]+z[ι][j][k+1]+z[ι][j+1][k+1])
/ι-zm[ι][j][k];

    xm[ie+1][j][k]=(x[ie+1][j][k]+x[ie+1][j+1][k]+x[ie+1][j][k+1]+x[
ie+1][j+1][k+1])/ι-xm[ie][j][k];

```

```

        ym[ie+1][j][k]=(y[ie+1][j][k]+y[ie+1][j+1][k]+y[ie+1][j][k+1]+y[
ie+1][j+1][k+1])/۲-ym[ie][j][k];

        zm[ie+1][j][k]=(z[ie+1][j][k]+z[ie+1][j+1][k]+z[ie+1][j][k+1]+z[
ie+1][j+1][k+1])/۲-zm[ie][j][k];
    };

    for(i=۱;i<ie+۱;i++) for(j=۲;j<je+۱;j++) for(k=۱;k<ke+۱;k++) {xt=ic[
i][j][k][۳];
        ic[i][j][k][۳]=ic[i][j-۱][k][۳]/(xt+ic[i][j-
۱][k][۳]);ic[i][j-۱][k][۳]=xt/(xt+ic[i][j-۱][k][۳]);};
        for(i=۱;i<ie+۱;i++) for(k=۱;k<ke+۱;k++) {

            ic[i][۱][k][۳]=۰,۰;ic[i][۰][k][۳]=۰,۰;ic[i][je][k][۳]=۰,۰;ic[i][
je+۱][k][۳]=۰,۰;

            xm[i][۰][k]=(x[i][۱][k]+x[i+۱][۱][k]+x[i][۱][k+۱]+x[i+۱][۱][k+۱]
)/۲-xm[i][۱][k];

            ym[i][۰][k]=(y[i][۱][k]+y[i+۱][۱][k]+y[i][۱][k+۱]+y[i+۱][۱][k+۱]
)/۲-ym[i][۱][k];

            zm[i][۰][k]=(z[i][۱][k]+z[i+۱][۱][k]+z[i][۱][k+۱]+z[i+۱][۱][k+۱]
)/۲-zm[i][۱][k];

            xm[i][je+۱][k]=(x[i][je+۱][k]+x[i+۱][je+۱][k]+x[i][je+۱][k+۱]+x[
i+۱][je+۱][k+۱])/۲-xm[i][je][k];

            ym[i][je+۱][k]=(y[i][je+۱][k]+y[i+۱][je+۱][k]+y[i][je+۱][k+۱]+y[
i+۱][je+۱][k+۱])/۲-ym[i][je][k];

            zm[i][je+۱][k]=(z[i][je+۱][k]+z[i+۱][je+۱][k]+z[i][je+۱][k+۱]+z[
i+۱][je+۱][k+۱])/۲-zm[i][je][k];
        };

        for(i=۱;i<ie+۱;i++) for(j=۱;j<je+۱;j++) for(k=۲;k<ke+۱;k++) {xt=ic[
i][j][k][۰];
            ic[i][j][k][۰]=ic[i][j][k-۱][۱]/(xt+ic[i][j][k-
۱][۱]);ic[i][j][k-۱][۱]=xt/(xt+ic[i][j][k-۱][۱]);};
            for(i=۱;i<ie+۱;i++) for(j=۱;j<je+۱;j++) {

                ic[i][j][۱][۰]=۰,۰;ic[i][j][۰][۱]=۰,۰;ic[i][j][ke][۱]=۰,۰;ic[i][
j][ke+۱][۰]=۰,۰;

                xm[i][j][۰]=(x[i][j][۱]+x[i+۱][j][۱]+x[i][j+۱][۱]+x[i+۱][j+۱][۱]
)/۲-xm[i][j][۱];

                ym[i][j][۰]=(y[i][j][۱]+y[i+۱][j][۱]+y[i][j+۱][۱]+y[i+۱][j+۱][۱]
)/۲-ym[i][j][۱];

                zm[i][j][۰]=(z[i][j][۱]+z[i+۱][j][۱]+z[i][j+۱][۱]+z[i+۱][j+۱][۱]
)/۲-zm[i][j][۱];

                xm[i][j][ke+۱]=(x[i][j][ke+۱]+x[i+۱][j][ke+۱]+x[i][j+۱][ke+۱]+x[
i+۱][j+۱][ke+۱])/۲-xm[i][j][ke];

```

```

        ym[i][j][ke+1]=(y[i][j][ke+1]+y[i+1][j][ke+1]+y[i][j+1][ke+1]+y[
i+1][j+1][ke+1])/۲-ym[i][j][ke];

        zm[i][j][ke+1]=(z[i][j][ke+1]+z[i+1][j][ke+1]+z[i][j+1][ke+1]+z[
i+1][j+1][ke+1])/۲-zm[i][j][ke];
    };

/*generation of area in x,y,z direction AREA\ STEP(۲)*/
for(i=۱;i<ie+۲;i++) for(j=۱;j<j+۱;j++) for(k=۱;k<ke+۱;k++) {

        kx=xm[i][j][k]-xm[i-۱][j][k];
        ky=ym[i][j][k]-ym[i-۱][j][k];
        kz=zm[i][j][k]-zm[i-۱][j][k];

        ex=(x[i][j+۱][k]+x[i][j+۱][k+۱]-x[i][j][k]-
x[i][j][k+۱])/۲;
        ey=(y[i][j+۱][k]+y[i][j+۱][k+۱]-y[i][j][k]-
y[i][j][k+۱])/۲;
        ez=(z[i][j+۱][k]+z[i][j+۱][k+۱]-z[i][j][k]-
z[i][j][k+۱])/۲;

        zx=(x[i][j][k+۱]+x[i][j+۱][k+۱]-x[i][j][k]-
x[i][j+۱][k])/۲;
        zy=(y[i][j][k+۱]+y[i][j+۱][k+۱]-y[i][j][k]-
y[i][j+۱][k])/۲;
        zz=(z[i][j][k+۱]+z[i][j+۱][k+۱]-z[i][j][k]-
z[i][j+۱][k])/۲;

        a\x[i][j][k]= ey*zz-ez*zy;
        a\y[i][j][k]=-ex*zz+ez*zx;
        a\z[i][j][k]= ex*zy-ey*zx;

        a\[i][j][k]=sqrt(a\x[i][j][k]*a\x[i][j][k]+a\y[i][j][k]*a\y[i][j
][k]+a\z[i][j][k]*a\z[i][j][k]);

/*generation of main diffusion ,multiplication of vectors AREA\*/

        d\p[i][j][k]=a\[i][j][k]*a\[i][j][k]*gama/(a\x[i][j][k]*kx+a\y[i
][j][k]*ky+a\z[i][j][k]*kz);

/*generation of second diffusion*/
        d\s[i][j][k]=((zy*kz-zz*ky)*a\x[i][j][k]+(zz*kx-
zx*kz)*a\y[i][j][k]+(zx*ky-zy*kx)*a\z[i][j][k])*gama/
        (((zy*kz-zz*ky)*ex+(zz*kx-zx*kz)*ey+(zx*ky-zy*kx)*ez)*ε);

/*generation of tangant diffusion*/
        d\t[i][j][k]=((ky*ez-kz*ey)*a\x[i][j][k]+(kz*ex-
kx*ez)*a\y[i][j][k]+(kx*ey-ky*ex)*a\z[i][j][k])*gama/
        (((ky*ez-kz*ey)*zx+(kz*ex-kx*ez)*zy+(kx*ey-ky*ex)*zz)*ε);
    };

/*generation of area in x,y,z direction AREA\ STEP(۲)*/
for(i=۱;i<ie+۱;i++) for(j=۱;j<j+۲;j++) for(k=۱;k<ke+۱;k++) {

        kx=xm[i][j][k]-xm[i][j-۱][k];
        ky=ym[i][j][k]-ym[i][j-۱][k];
        kz=zm[i][j][k]-zm[i][j-۱][k];

```

```

ex=(x[i+1][j][k]+x[i+1][j][k+1]-x[i][j][k]-
x[i][j][k+1])/۲;
ey=(y[i+1][j][k]+y[i+1][j][k+1]-y[i][j][k]-
y[i][j][k+1])/۲;
ez=(z[i+1][j][k]+z[i+1][j][k+1]-z[i][j][k]-
z[i][j][k+1])/۲;

zx=(x[i][j][k+1]+x[i+1][j][k+1]-x[i][j][k]-
x[i+1][j][k])/۲;
zy=(y[i][j][k+1]+y[i+1][j][k+1]-y[i][j][k]-
y[i+1][j][k])/۲;
zz=(z[i][j][k+1]+z[i+1][j][k+1]-z[i][j][k]-
z[i+1][j][k])/۲;

a۲x[i][j][k]=-ey*zz+ez*zy;
a۲y[i][j][k]= ex*zz-ez*zx;
a۲z[i][j][k]=-ex*zy+ey*zx;

a۲[i][j][k]=sqrt(a۲x[i][j][k]*a۲x[i][j][k]+a۲y[i][j][k]*a۲y[i][j][k]+a۲z[i][j][k]*a۲z[i][j][k]);

/*generation of main diffusion ,multiplication of vectors AREA۲*/

d۲p[i][j][k]=a۲[i][j][k]*a۲[i][j][k]*gama/(a۲x[i][j][k]*kx+a۲y[i][j][k]*ky+a۲z[i][j][k]*kz);

/*generation of second diffusion*/
d۲s[i][j][k]=( (zy*kz-zz*ky)*a۲x[i][j][k]+(zz*kx-
zx*kz)*a۲y[i][j][k]+(zx*ky-zy*kx)*a۲z[i][j][k])*gama/
((zy*kz-zz*ky)*ex+(zz*kx-zx*kz)*ey+(zx*ky-zy*kx)*ez)*ε);

/*generation of tangant diffusion*/
d۲t[i][j][k]=( (ky*ez-kz*ey)*a۲x[i][j][k]+(kz*ex-
kx*ez)*a۲y[i][j][k]+(kx*ey-ky*ex)*a۲z[i][j][k])*gama/
(((ky*ez-kz*ey)*zx+(kz*ex-kx*ez)*zy+(kx*ey-ky*ex)*zz)*ε);
};

/*generation of area in x,y,z direction AREA۲ STEP(ε)*/
for(i=۱;i<ie+۱;i++) for(j=۱;j<je+۱;j++) for(k=۱;k<ke+۱;k++) {

kx=xm[i][j][k]-xm[i][j][k-۱];
ky=ym[i][j][k]-ym[i][j][k-۱];
kz=zm[i][j][k]-zm[i][j][k-۱];

ex=(x[i+۱][j][k]+x[i+۱][j+۱][k]-x[i][j][k]-
x[i][j+۱][k])/۲;
ey=(y[i+۱][j][k]+y[i+۱][j+۱][k]-y[i][j][k]-
y[i][j+۱][k])/۲;
ez=(z[i+۱][j][k]+z[i+۱][j+۱][k]-z[i][j][k]-
z[i][j+۱][k])/۲;

zx=(x[i][j+۱][k]+x[i+۱][j+۱][k]-x[i][j][k]-
x[i+۱][j][k])/۲;
zy=(y[i][j+۱][k]+y[i+۱][j+۱][k]-y[i][j][k]-
y[i+۱][j][k])/۲;
zz=(z[i][j+۱][k]+z[i+۱][j+۱][k]-z[i][j][k]-
z[i+۱][j][k])/۲;

a۲x[i][j][k]= ey*zz-ez*zy;

```

```

aʀy[i][j][k]=-ex*zz+ez*zx;
aʀz[i][j][k]= ex*zy-ey*zx;

aʀ[i][j][k]=sqrt(aʀx[i][j][k]*aʀx[i][j][k]+aʀy[i][j][k]*aʀy[i][j][k]+aʀz[i][j][k]*aʀz[i][j][k]);

/*generation of main diffusion ,multiplication of vectors AREAʀ*/

dʀp[i][j][k]=aʀ[i][j][k]*aʀ[i][j][k]*gama/(aʀx[i][j][k]*kx+aʀy[i][j][k]*ky+aʀz[i][j][k]*kz);

/*generation of second diffusion*/
dʀs[i][j][k]=( (zy*kz-zz*ky)*aʀx[i][j][k]+(zz*kx-zx*kz)*aʀy[i][j][k]+(zx*ky-zy*kx)*aʀz[i][j][k])*gama/
((zy*kz-zz*ky)*ex+(zz*kx-zx*kz)*ey+(zx*ky-zy*kx)*ez)*ε);

/*generation of tangant diffusion*/
dʀt[i][j][k]=( (ky*ez-kz*ey)*aʀx[i][j][k]+(kz*ex-kx*ez)*aʀy[i][j][k]+(kx*ey-ky*ex)*aʀz[i][j][k])*gama/
((ky*ez-kz*ey)*zx+(kz*ex-kx*ez)*zy+(kx*ey-ky*ex)*zz)*ε);
};

/*generation of volume in each cell STEP(๐)*/
for(i=๑;i<ie+๑;i++) for(j=๑;j<je+๑;j++) for(k=๑;k<ke+๑;k++) {
xt=x[i+๑][j+๑][k+๑]-x[i][j][k];
yt=y[i+๑][j+๑][k+๑]-y[i][j][k];
zt=z[i+๑][j+๑][k+๑]-z[i][j][k];

ve[i][j][k]=(xt*aʀx[i+๑][j][k]+yt*aʀy[i+๑][j][k]+zt*aʀz[i+๑][j][k]
+xt*aʀx[i][j+๑][k]+yt*aʀy[i][j+๑][k]+zt*aʀz[i][j+๑][k]
+xt*aʀx[i][j][k+๑]+yt*aʀy[i][j][k+๑]+zt*aʀz[i][j][k+๑])/๓;
};

/*generation of pressure coefficient for Area(๑) STEP(๑)*/
for(k=๑;k<ke+๑;k++) for(j=๑;j<je+๑;j++) for(i=๒;i<ie+๑;i++) {
c๑=(ve[i][j][k]+ve[i-๑][j][k])/๒;
p๑p[i][j][k]=d๑p[i][j][k]/gama*c๑;
p๑s[i][j][k]=d๑s[i][j][k]/gama*c๑;
p๑t[i][j][k]=d๑t[i][j][k]/gama*c๑;
};

/*generation of pressure coefficient for Area(๒) STEP(๒)*/
for(k=๑;k<ke+๑;k++) for(j=๒;j<je+๑;j++) for(i=๑;i<ie+๑;i++) {
c๒=(ve[i][j][k]+ve[i][j-๑][k])/๒;
p๒p[i][j][k]=d๒p[i][j][k]/gama*c๒;
p๒s[i][j][k]=d๒s[i][j][k]/gama*c๒;
p๒t[i][j][k]=d๒t[i][j][k]/gama*c๒;

for(i=ie-
ninp+๑;i<ie+๑;i++)p๒p[i][j+๑][ke]=d๒p[i][j+๑][ke]/gama*ve[i][j+๑][ke]
;
};

/*generation of pressure coefficient for Area(๓) STEP(๓)*/
for(k=๒;k<ke+๑;k++) for(j=๑;j<je+๑;j++) for(i=๑;i<ie+๑;i++) {
c๓=(ve[i][j][k]+ve[i][j][k-๑])/๒;
p๓p[i][j][k]=d๓p[i][j][k]/gama*c๓;
p๓s[i][j][k]=d๓s[i][j][k]/gama*c๓;

```



```

prt[i][j][k]=drt[i][j][k]/gama*c\;

};

/*generation of condition in external and entrance STEP(۱)*/
for(i=\;i<ninp\;i++){
    u[i][۰][\]=vimp*a۲x[i][\][\]/a۲[i][\][\];
    v[i][۰][\]=vimp*a۲y[i][\][\]/a۲[i][\][\];
    w[i][۰][\]=vimp*a۲z[i][\][\]/a۲[i][\][\];
}
for(i=ie-ninp\;i<ie\;i++)p[i][je+\][ke]=pout;

};

/*-----void SOLVER-----*/
void solver(){
/*calculation of velocity in face \ STEP(\)*/
for(i=\;i<ie+\;i++) for(j=\;j<je+\;j++) for(k=\;k<ke+\;k++){

    ut=u[i][j][k]*ic[i][j][k][\]+u[i-\][j][k]*ic[i-\][j][k][۲];
    vt=v[i][j][k]*ic[i][j][k][\]+v[i-\][j][k]*ic[i-\][j][k][۲];
    wt=w[i][j][k]*ic[i][j][k][\]+w[i-\][j][k]*ic[i-\][j][k][۲];

/*calculation of m*/
    m\ [i][j][k]=(ut*a۲x[i][j][k]+vt*a۲y[i][j][k]+a۲z[i][j][k])*ro;

/*calculation of secondary diffusion for u,v,w */
    d\ u[i][j][k]=-d\s[i][j][k]*(u[i][j+\][k]+u[i-\][j+\][k]-u[i][j-\][k]-u[i-\][j-\][k])
        -d\t[i][j][k]*(u[i][j][k+\]+u[i-\][j][k+\]-u[i][j][k-\]-u[i-\][j][k-\]);

    d\ v[i][j][k]=-d\s[i][j][k]*(v[i][j+\][k]+v[i-\][j+\][k]-v[i][j-\][k]-v[i-\][j-\][k])
        -d\t[i][j][k]*(v[i][j][k+\]+v[i-\][j][k+\]-v[i][j][k-\]-v[i-\][j][k-\]);

    d\ w[i][j][k]=-d\s[i][j][k]*(w[i][j+\][k]+w[i-\][j+\][k]-w[i][j-\][k]-w[i-\][j-\][k])
        -d\t[i][j][k]*(w[i][j][k+\]+w[i-\][j][k+\]-w[i][j][k-\]-w[i-\][j][k-\]);
    };

/*calculation of velocity in face ۲ STEP(۲)*/
for(i=\;i<ie+\;i++) for(j=\;j<je+\;j++) for(k=\;k<ke+\;k++){

    ut=u[i][j][k]*ic[i][j][k][۲]+u[i][j-\][k]*ic[i][j-\][k][۴];
    vt=v[i][j][k]*ic[i][j][k][۲]+v[i][j-\][k]*ic[i][j-\][k][۴];
    wt=w[i][j][k]*ic[i][j][k][۲]+w[i][j-\][k]*ic[i][j-\][k][۴];

/*calculation of m*/
    m۲ [i][j][k]=(ut*a۲x[i][j][k]+vt*a۲y[i][j][k]+a۲z[i][j][k])*ro;

/*calculation of secondary diffusion for u,v,w */
    d۲ u[i][j][k]=-d۲ s[i][j][k]*(u[i+\][j][k]+u[i+\][j-\][k]-u[i-\][j][k]-u[i-\][j-\][k])
        -d۲ t[i][j][k]*(u[i][j][k+\]+u[i][j-\][k+\]-u[i][j][k-\]-u[i][j-\][k-\]);
}

```

```

        d2v[i][j][k]=-d2s[i][j][k]*(v[i+1][j][k]+v[i+1][j-1][k]-v[i-1][j][k]-v[i-1][j-1][k])
                    -d2t[i][j][k]*(v[i][j][k+1]+v[i][j-1][k+1]-v[i][j][k-1]-v[i][j-1][k-1]);

        d2w[i][j][k]=-d2s[i][j][k]*(w[i+1][j][k]+w[i+1][j-1][k]-w[i-1][j][k]-w[i-1][j-1][k])
                    -d2t[i][j][k]*(w[i][j][k+1]+w[i][j-1][k+1]-w[i][j][k-1]-w[i][j-1][k-1]);
    };

/*calculation of velocity in face ۳ STEP(۳)*/
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+۲;k++){

    ut=u[i][j][k]*ic[i][j][k][۰]+u[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][۱];
    vt=v[i][j][k]*ic[i][j][k][۰]+v[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][۱];
    wt=w[i][j][k]*ic[i][j][k][۰]+w[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][۱];

/*calculation of m*/
    m۳[i][j][k]=(ut*a۳x[i][j][k]+vt*a۳y[i][j][k]+a۳z[i][j][k])*ro;

/*calculation of secondary diffusion for u,v,w */
    d۳u[i][j][k]=-d۳s[i][j][k]*(u[i+1][j][k]+u[i+1][j][k-1]-u[i-1][j][k]-u[i-1][j][k-1])
                -
    d۳t[i][j][k]*(u[i][j+1][k]+u[i][j+1][k-1]-u[i][j-1][k]-u[i][j-1][k-1]);

    d۳v[i][j][k]=-d۳s[i][j][k]*(v[i+1][j][k]+v[i+1][j][k-1]-v[i-1][j][k]-v[i-1][j][k-1])
                -
    d۳t[i][j][k]*(v[i][j+1][k]+v[i][j+1][k-1]-v[i][j-1][k]-v[i][j-1][k-1]);

    d۳w[i][j][k]=-d۳s[i][j][k]*(w[i+1][j][k]+w[i+1][j][k-1]-w[i-1][j][k]-w[i-1][j][k-1])
                -
    d۳t[i][j][k]*(w[i][j+1][k]+w[i][j+1][k-1]-w[i][j-1][k]-w[i][j-1][k-1]);
    };

/*calculation of right hand side & ap STEP(۴)*/
/*for area۱*/
for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++){

/*initial amount to parameters STEP(۱/۴)*/
    tp=۰;tpu=۰;tpv=۰;tpw=۰;

/*for Area۱ no:۱ STEP(۲/۴)*/
    if(m۱[i][j][k]>۰){
        tpu=m۱[i][j][k]*u[i-1][j][k];
        tpv=m۱[i][j][k]*v[i-1][j][k];
        tpw=m۱[i][j][k]*w[i-1][j][k];
    }
    else tp=-m۱[i][j][k];

/*for Area۱ no:۲ STEP(۳/۴)*/
    if(m۱[i+1][j][k]>۰)tp=tp+m۱[i+1][j][k];
    else {tpu=tpu-m۱[i+1][j][k]*u[i+1][j][k];
        tpv=tpv-m۱[i+1][j][k]*v[i+1][j][k];
    }
}

```

```

tpw=tpw-m\ [i+1] [j] [k]*w[i+1] [j] [k];
};

/*for Area2 no:\ STEP(2/ε)*/
if(m2 [i] [j] [k]>0){
    tpu=tpu+m2 [i] [j] [k]*u[i] [j-1] [k];
    tpv=tpv+m2 [i] [j] [k]*v[i] [j-1] [k];
    tpw=tpw+m2 [i] [j] [k]*w[i] [j-1] [k];
}
else tp=tp-m2 [i] [j] [k];

/*for Area2 no:2 STEP(2/ε)*/
if(m2 [i] [j+1] [k]>0)
    tp=tp+m2 [i] [j+1] [k];
else {
    tpu=tpu-m2 [i] [j+1] [k]*u[i] [j+1] [k];
    tpv=tpv-m2 [i] [j+1] [k]*v[i] [j+1] [k];
    tpw=tpw-m2 [i] [j+1] [k]*w[i] [j+1] [k];
};

/*for Area3 no:\ STEP(2/ε)*/
if(m3 [i] [j] [k]>0){
    tpu=tpu+m3 [i] [j] [k]*u[i] [j] [k-1];
    tpv=tpv+m3 [i] [j] [k]*v[i] [j] [k-1];
    tpw=tpw+m3 [i] [j] [k]*w[i] [j] [k-1];
}
else tp=tp-m3 [i] [j] [k];

/*for Area3 no:2 STEP(2/ε)*/
if(m3 [i] [j] [k+1]>0)
    tp=tp+m3 [i] [j] [k+1];
else {
    tpu=tpu-m3 [i] [j] [k+1]*u[i] [j] [k+1];
    tpv=tpv-m3 [i] [j] [k+1]*v[i] [j] [k+1];
    tpw=tpw-m3 [i] [j] [k+1]*w[i] [j] [k+1];
};

/*calculation of ap STEP(ε/ε)*/

ap[i] [j] [k]=ve[i] [j] [k]/dt*ro+d\p[i] [j] [k]+d\p[i+1] [j] [k]+d\p[i] [j] [k]+d\p[i] [j+1] [k]+d\p[i] [j] [k]+d\p[i] [j] [k+1]+tp;

/*the effect of diffusion terms on ap STEP(0/ε)*/
ut=d\u[i] [j] [k]+d2u[i] [j] [k]+d3u[i] [j] [k]-d\u[i+1] [j] [k]-
d2u[i] [j+1] [k]-d3u[i] [j] [k+1];
vt=d\v[i] [j] [k]+d2v[i] [j] [k]+d3v[i] [j] [k]-d\v[i+1] [j] [k]-
d2v[i] [j+1] [k]-d3v[i] [j] [k+1];
wt=d\w[i] [j] [k]+d2w[i] [j] [k]+d3w[i] [j] [k]-d\w[i+1] [j] [k]-
d2w[i] [j+1] [k]-d3w[i] [j] [k+1];

/*the effect of diffusion terms on right & side STEP(1/ε)*/

ru[i] [j] [k]=(ve[i] [j] [k]/dt*ro*u[i] [j] [k]+tpu+d\p[i] [j] [k]*u[i-1] [j] [k]+d\p[i+1] [j] [k]*u[i+1] [j] [k]+d\p[i] [j] [k]*u[i] [j-1] [k]+d\p[i] [j+1] [k]*u[i] [j+1] [k]+d\p[i] [j] [k]*u[i] [j] [k-1]+d\p[i] [j] [k+1]*u[i] [j] [k+1]-ut)/ap[i] [j] [k];

rv[i] [j] [k]=(ve[i] [j] [k]/dt*ro*v[i] [j] [k]+tpv+d\p[i] [j] [k]*v[i-1] [j] [k]+d\p[i+1] [j] [k]*v[i+1] [j] [k]

```

```

+dxp[i][j][k]*v[i][j-
\][k]+dxp[i][j+1][k]*v[i][j+1][k]+dxp[i][j][k]*v[i][j][k-
\]+dxp[i][j][k+1]*v[i][j][k+1]-vt)/ap[i][j][k];

rw[i][j][k]=(ve[i][j][k]/dt*ro*w[i][j][k]+tpw+d\p[i][j][k]*w[i-
\][j][k]+d\p[i+1][j][k]*w[i+1][j][k]
+dxp[i][j][k]*w[i][j-
\][k]+dxp[i][j+1][k]*w[i][j+1][k]+dxp[i][j][k]*w[i][j][k-
\]+dxp[i][j][k+1]*w[i][j][k+1]-wt)/ap[i][j][k];
};

/*calculation of diffusion on right &side STEP(v/ε)*/
for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++){ap[i][j][·]=ap[i][j][1];a
p[i][j][ke+1]=ap[i][j][k];};
for(i=1;i<ie+1;i++)for(k=1;k<ke+1;k++){ap[i][·][k]=ap[i][1][k];a
p[i][je+1][k]=ap[i][je][k];};
for(j=1;j<je+1;j++)for(k=1;k<ke+1;k++){ap[·][j][k]=ap[1][j][k];a
p[ie+1][j][k]=ap[ie][j][k];};

/*calculation of cp & vf on face\ (STEPo)*/
for(i=2;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++)for(k=1;k<ke+1;k++){
c1=2/(ap[i-1][j][k]+ap[i][j][k]);
cp\[i][j][k]=p\[i][j][k]*c1;

ut=ru[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+ru[i-1][j][k]*ic[i-
1][j][k][2];
vt=rv[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+rv[i-1][j][k]*ic[i-
1][j][k][2];
wt=rw[i][j][k]*ic[i][j][k][1]+rw[i-1][j][k]*ic[i-
1][j][k][2];
vf\[i][j][k]=
ut*a\[x[i][j][k]+vt*a\[y[i][j][k]+wt*a\[z[i][j][k]
-p\[s[i][j][k]*c1*(p[i][j+1][k]+p[i-
1][j+1][k]-p[i][j-1][k]-p[i-1][j-1][k])
-p\[t[i][j][k]*c1*(p[i][j][k+1]+p[i-
1][j][k+1]-p[i][j][k-1]-p[i-1][j][k-1]);
};
for(j=1;j<je+1;j++)for(k=1;k<ke+1;k++){
cp\[1][j][k]=0;
cp\[ie+1][j][k]=0;
vf\[1][j][k]=0;
vf\[ie+1][j][k]=0;};

/*calculation of cp & vf on face2 (STEP1)*/
for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=2;j<je+1;j++)for(k=1;k<ke+1;k++){
c1=2/(ap[i][j][k]+ap[i][j-1][k]);
cp2[i][j][k]=p2[i][j][k]*c1;
ut=ru[i][j][k]*ic[i][j][k][2]+ru[i][j-1][k]*ic[i][j-
1][k][ε];
vt=rv[i][j][k]*ic[i][j][k][2]+rv[i][j-1][k]*ic[i][j-
1][k][ε];
wt=rw[i][j][k]*ic[i][j][k][2]+rw[i][j-1][k]*ic[i][j-
1][k][ε];
vf2[i][j][k]=
ut*a2[x[i][j][k]+vt*a2[y[i][j][k]+wt*a2[z[i][j][k]
-p2[s[i][j][k]*c1*(p[i+1][j][k]+p[i+1][j-1][k]-p[i-1][j][k]-p[i-1][j-
1][k])
-p2[t[i][j][k]*c1*(p[i][j][k+1]+p[i][j-
1][k+1]-p[i][j][k-1]-p[i][j-1][k-1]);

```

```

};
for (i=1;i<ie+1;i++) for (k=1;k<ke+1;k++) {
    cp[i][1][k]=0;
    cp[i][je+1][k]=0;
    vf[i][1][k]=0;
    vf[i][je+1][k]=0;
};
for (i=ie-ninp+1;i<ie+1;i++) {
    cp[i][je+1][ke]=p[i][je+1][ke]/ap[i][je][ke];

    vf[i][je+1][ke]=ru[i][je][ke]*ax[i][je+1][ke]+rv[i][je][ke]*ay[i][je+1][ke]+rw[i][je][ke]*az[i][je+1][ke];};
    for (i=1;i<ninp+1;i++) vf[i][1][1]=vinp*ax[i][1][1];

/*calculation of cp & vf on face (STEPV)*/
for (i=1;i<ie+1;i++) for (j=1;j<je+1;j++) for (k=2;k<ke+1;k++) {
    c=2/(ap[i][j][k-1]+ap[i][j][k]);

    cp[i][j][k]=p[i][j][k]*c;
    ut=ru[i][j][k]*ic[i][j][k][0]+ru[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][1];
    vt=rv[i][j][k]*ic[i][j][k][0]+rv[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][1];
    wt=rw[i][j][k]*ic[i][j][k][0]+rw[i][j][k-1]*ic[i][j][k-1][1];

    vf[i][j][k]=
    ut*ax[i][j][k]+vt*ay[i][j][k]+wt*az[i][j][k]
    -
    p[i+1][j][k]*c*(p[i+1][j][k]+p[i+1][j][k-1]-p[i-1][j][k]-p[i-1][j][k-1])
    -
    p[i][j+1][k]*c*(p[i][j+1][k]+p[i][j+1][k-1]-p[i][j-1][k]-p[i][j-1][k-1]);
};
for (i=1;i<ie+1;i++) for (j=1;j<je+1;j++) {cp[i][j][1]=0;cp[i][j][ke+1]=0;vf[i][j][1]=0;vf[i][j][ke+1]=0;};

/*calculation of new pressure on elements (STEP8)*/
for (i=1;i<ie+1;i++) for (j=1;j<je+1;j++) for (k=1;k<ke+1;k++)
    p[i][j][k]=(p[i+1][j][k]*cp[i+1][j][k]+p[i-1][j][k]*cp[i-1][j][k]+p[i][j+1][k]*cp[i][j+1][k]
    +p[i][j-1][k]*cp[i][j-1][k]+p[i][j][k+1]*cp[i][j][k+1]+p[i][j][k-1]*cp[i][j][k-1]
    +vf[i][j][k]+vf[i][j][k]+vf[i][j][k]-
    vf[i+1][j][k]-vf[i][j+1][k]-vf[i][j][k+1])/
    (cp[i][j][k]+cp[i][j][k]+cp[i][j][k]+cp[i+1][j][k]+cp[i-1][j][k]+cp[i][j+1][k]+cp[i][j][k+1]);

/*calculation of pressure on boundary elements (STEP9)*/
for (i=1;i<ie+1;i++) for (j=1;j<je+1;j++) {p[i][j][0]=p[i][j][1];p[i][j][ke+1]=p[i][j][ke];};
for (i=1;i<ie+1;i++) for (k=1;k<ke+1;k++) {p[i][0][k]=p[i][1][k];p[i][je+1][k]=p[i][je][k];};
for (j=1;j<je+1;j++) for (k=1;k<ke+1;k++) {p[0][j][k]=p[1][j][k];p[ie+1][j][k]=p[ie][j][k];};

```

```

    for(i=ie-ninp+1;i<ie+1;i++)p[i][je+1][ke]=pout;

/*calculation of ap(s) on elements (STEP\1)*/
    for(i=1;i<ie+2;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++)pa\ [i] [
j] [k]=p[i] [j] [k]*ic[i] [j] [k] [\]+p[i-1] [j] [k]*ic[i-1] [j] [k] [2];
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+2;j++) for(k=1;k<ke+1;k++)pa2 [i] [
j] [k]=p[i] [j] [k]*ic[i] [j] [k] [2]+p[i] [j-1] [k]*ic[i] [j-1] [k] [3];
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+2;k++)pa3 [i] [
j] [k]=p[i] [j] [k]*ic[i] [j] [k] [0]+p[i] [j] [k-1]*ic[i] [j] [k-1] [1];

/*calculation of delta(p)/delta(x) on elements (STEP\1)*/
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
        ut=-
(pa\ [i] [j] [k]*a\ x[i] [j] [k]+pa2 [i] [j] [k]*a2 x[i] [j] [k]+pa3 [i] [j] [k]*a3 x[
i] [j] [k]
        -pa\ [i+1] [j] [k]*a\ x[i+1] [j] [k]-
pa2 [i] [j+1] [k]*a2 x[i] [j+1] [k]-pa3 [i] [j] [k+1]*a3 x[i] [j] [k+1]);
        vt=-
(pa\ [i] [j] [k]*a\ y[i] [j] [k]+pa2 [i] [j] [k]*a2 y[i] [j] [k]+pa3 [i] [j] [k]*a3 y[
i] [j] [k]
        -pa\ [i+1] [j] [k]*a\ y[i+1] [j] [k]-
pa2 [i] [j+1] [k]*a2 y[i] [j+1] [k]-pa3 [i] [j] [k+1]*a3 y[i] [j] [k+1]);
        wt=-
(pa\ [i] [j] [k]*a\ z[i] [j] [k]+pa2 [i] [j] [k]*a2 z[i] [j] [k]+pa3 [i] [j] [k]*a3 z[
i] [j] [k]
        -pa\ [i+1] [j] [k]*a\ z[i+1] [j] [k]-
pa2 [i] [j+1] [k]*a2 z[i] [j+1] [k]-pa3 [i] [j] [k+1]*a3 z[i] [j] [k+1]);

/*calculation of new u v w (STEP\2)*/
        u[i] [j] [k]=ru[i] [j] [k]-ut/ap[i] [j] [k];
        v[i] [j] [k]=rv[i] [j] [k]-vt/ap[i] [j] [k];
        w[i] [j] [k]=rw[i] [j] [k]-wt/ap[i] [j] [k];
    };

/*entering of boundary condition (STEP\3)*/
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) {
        u[i] [j] [0]=-u[i] [j] [1];v[i] [j] [0]=-v[i] [j] [1];w[i] [j] [0]=-
w[i] [j] [1];
        u[i] [j] [ke+1]=-u[i] [j] [ke];v[i] [j] [ke+1]=-
v[i] [j] [ke];w[i] [j] [ke+1]=-w[i] [j] [ke];
    };
    for(j=1;j<je+1;j++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
        u[0] [j] [k]=-u[1] [j] [k];v[0] [j] [k]=-v[1] [j] [k];w[0] [j] [k]=-
w[1] [j] [k];
        u[ie+1] [j] [k]=-u[ie] [j] [k];v[ie+1] [j] [k]=-
v[ie] [j] [k];w[ie+1] [j] [k]=-w[ie] [j] [k];
    };
    for(i=1;i<ie+1;i++) for(k=1;k<ke+1;k++) {
        u[i] [0] [k]=-u[i] [1] [k];v[i] [0] [k]=-v[i] [1] [k];w[i] [0] [k]=-
w[i] [1] [k];
        u[i] [je+1] [k]=-u[i] [je] [k];v[i] [je+1] [k]=-
v[i] [je] [k];w[i] [je+1] [k]=-w[i] [je] [k];
    };
    for(i=ie-ninp+1;i<ie+1;i++) {
        u[i] [je+1] [ke]=u[i] [je] [ke];
        v[i] [je+1] [ke]=v[i] [je] [ke];
        w[i] [je+1] [ke]=w[i] [je] [ke];
    };
};

```

```

    for(i=\;i<ninp+\;i++) {u[i][\][\]=vinp*a $\gamma$ x[i][\][\]/a $\gamma$ [i][\][\];v
[i][\][\]=vinp*a $\gamma$ y[i][\][\]/a $\gamma$ [i][\][\];w[i][\][\]=vinp*a $\gamma$ z[i][\][\]/a
 $\gamma$ [i][\][\];};
}
/*-----void SURFDAT-----*/
void surfdat() {
    FILE *vx\,*vx $\gamma$ ,*vx $\gamma$ ,*vy\,*vy $\gamma$ ,*vy $\gamma$ ,*vz\,*vz $\gamma$ ,*vz $\gamma$ ,*pt;
    vx\=fopen("Vx\ .txt","w");
    vx $\gamma$ =fopen("Vx $\gamma$  .txt","w");
    vx $\gamma$ =fopen("Vx $\gamma$  .txt","w");
    vy\=fopen("Vy\ .txt","w");
    vy $\gamma$ =fopen("Vy $\gamma$  .txt","w");
    vy $\gamma$ =fopen("Vy $\gamma$  .txt","w");
    vz\=fopen("Vz\ .txt","w");
    vz $\gamma$ =fopen("Vz $\gamma$  .txt","w");
    vz $\gamma$ =fopen("Vz $\gamma$  .txt","w");
    pt=fopen("Pressures.csv","w");

    int i,j,k,ang;

    i=\;ang=atan $\gamma$ (w[i][j][k],v[i][j][k])* $\gamma$  $\gamma$  $\gamma$ /pi- $\gamma$  $\gamma$ ;

    for(j=\;j<j $\gamma$ +1;j++) for(k=\;k<k $\gamma$ +1;k++) fprintf(vx\,"%f %f %f
%f\n",y[i][j][k],z[i][j][k]

, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan $\gamma$ (w[i][j]
[k],v[i][j][k])* $\gamma$  $\gamma$  $\gamma$ /pi- $\gamma$  $\gamma$ );

    i=ie/ $\gamma$ ;for(j=\;j<j $\gamma$ +1;j++) for(k=\;k<k $\gamma$ +1;k++) fprintf(vx $\gamma$ ,"%f
%f %f %f\n",y[i][j][k],z[i][j][k]

, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan $\gamma$ (w[i][j]
[k],v[i][j][k])* $\gamma$  $\gamma$  $\gamma$ /pi- $\gamma$  $\gamma$ );

    i=ie;for(j=\;j<j $\gamma$ +1;j++) for(k=\;k<k $\gamma$ +1;k++) fprintf(vx $\gamma$ ,"%f %f
%f %f\n",y[i][j][k],z[i][j][k]

, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan $\gamma$ (w[i][j]
[k],v[i][j][k])* $\gamma$  $\gamma$  $\gamma$ /pi- $\gamma$  $\gamma$ );
    j=\;for(i=\;i<ie+1;i++) for(k=\;k<k $\gamma$ +1;k++) fprintf(vy\,"%f %f
%f %f\n",x[i][j][k],z[i][j][k]

, sqrt(u[i][j][k]*u[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan $\gamma$ (w[i][j]
[k],u[i][j][k])* $\gamma$  $\gamma$  $\gamma$ /pi- $\gamma$  $\gamma$ );

    j=je/ $\gamma$ ;for(i=\;i<ie+1;i++) for(k=\;k<k $\gamma$ +1;k++) fprintf(vy $\gamma$ ,"%f
%f %f %f\n",x[i][j][k],z[i][j][k]

, sqrt(u[i][j][k]*u[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan $\gamma$ (w[i][j]
[k],u[i][j][k])* $\gamma$  $\gamma$  $\gamma$ /pi- $\gamma$  $\gamma$ );

    j=je;for(i=\;i<ie+1;i++) for(k=\;k<k $\gamma$ +1;k++) fprintf(vy $\gamma$ ,"%f %f
%f %f\n",x[i][j][k],z[i][j][k]

, sqrt(u[i][j][k]*u[i][j][k]+w[i][j][k]*w[i][j][k]),atan $\gamma$ (w[i][j]
[k],u[i][j][k])* $\gamma$  $\gamma$  $\gamma$ /pi- $\gamma$  $\gamma$ );

    k=\;for(i=\;i<ie+1;i++) for(j=\;j<j $\gamma$ +1;j++) fprintf(vz\,"%f %f
%f %f\n",x[i][j][k],y[i][j][k]

```

```

, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+u[i][j][k]*u[i][j][k]), atan(v[i][j]
[k],u[i][j][k])*180/pi-90);

k=ke/2; for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) fprintf(vz2,"%f
%f %f %f\n",x[i][j][k],y[i][j][k]

, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+u[i][j][k]*u[i][j][k]), atan(v[i][j]
[k],u[i][j][k])*180/pi-90);

k=ke; for(i=1;i<ie+1;i++) for(j=1;j<je+1;j++) fprintf(vz3,"%f %f
%f %f\n",x[i][j][k],y[i][j][k]

, sqrt(v[i][j][k]*v[i][j][k]+u[i][j][k]*u[i][j][k]), atan(v[i][j]
[k],u[i][j][k])*180/pi-90);

for(k=ke;k>0;k--){
    fprintf(pt,"\nk=%i\nj/i",k);
    for(i=1;i<ie+1;i++) fprintf(pt,"%i",i);
    for(j=je;j>0;j--){
        fprintf(pt,"\n%i",j);
        for(i=1;i<ie+1;i++){
            fprintf(pt,"%f",p[i][j][k]);
        };
    };
};
fclose
(vx1), (vx2), (vx3), (vy1), (vy2), (vy3), (vz1), (vz2), (vz3), (pt);
};

```



- ١- Jayathi Y. Murthy ,**Numerical Methods in Heat, Mass, and Momentum Transfer**
- ٢- Smith ,G.D.(١٩٨٥) ,**Numerical Solution of Partial Differential Equations:Finite Difference Method,of Partial Differential Equations:Finite Difference Method** ,Clarendon Press, Oxford.
- ٣-Zienkiewicz ,O.C and Taylor, R .L .(١٩٩١) ,**The Finite Element Method – vol ٢:Solid and Fluid Mechanics**, Mc Graw- Hill, New York.
- ٤-Taylor & Francis (١٩٩٧), Anderson, Dale .**A Computational Fluid Mechanics And Heat Transfer.**
- ٥-Gottlieb, D and Orszag, S,A(١٩٧٧) ,**Numerical Analysis of Spectral Methods:Theory and application**, SIAM,Philadelphia.
- ٦-Patankar,S.V.(١٩٨٠) ,**Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, **Hemisphere Publishing Corporation**,Taylor & Francis Group,New York.
- ٧-Fletcher, C.A.J(١٩٩١) ,**Incompressible Fluid Dynamics:some fundamental Formulation Issues**,Annu.Rev.Fluid Mech,Vol.٢٣,pp.٤١٣-٤٥٣
- ٨-Evans MW, Harlow FH. (١٩٥٧) ,**The particle-in-cell method for hydrodynamic calculations**. Los Alamos National Laboratory Report LA.
- ٩-Brackbill JU, Ruppel HM. FLIP,(١٩٨٦)**a method for adaptively zoned, particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions**. J Comput Phys

- ١٠- Harlow F, Welch JE(١٩٦٥) ,**Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface.** Phys Fluids.
- ١١-Amsden A, Harlow F(١٩٧٠),**The SMAC method: a numerical technique for calculating incompressible fluid flows.** Technical Report LA-٤٣٧٠, Los Alamos National Laboratory.
- ١٢-Golafshani M. (١٩٨٨) ,**A simple numerical technique for transient creep flows with free surfaces.** Int J Numer Methods Fluids;.
- ١٣-Deville MO(١٩٧٤), **Numerical experiments on the MAC code for slow flow.** J Comput Phys
- ١٤-Pracht WE. (١٩٧١) , **A Numerical method for calculating transient creeping flows.** J Comput Phys
- ١٥-Harlow FH, Welch JE. (١٩٨١) ,**A fast ICE solution procedure for flows with largely invariant compressibility.** J Comput Phys.
- ١٦-Hirt CW, Shannon JP(١٩٦٨) ,**Free-surface stress conditions for incompressible- flow calculations.** J Comput Phys
- ١٧-Hirt CW, Nichols BD, Romero NC(١٩٧٢) ,**SOLA–A numerical solution algorithm for transient fluid flows.** Los Alamos National Laboratory.

- ١٨-Butler TD, O'Rourke PJ. (١٩٧٦) ,**A numerical method for two-dimensional unsteady reacting flows**. In: Sixteenth international symposium on combustion.
- ١٩-Ramshaw JD, Dukowicz JK. (١٩٧٩) ,**APACHE: a generalized-mesh Eulerian computer code for multicomponent chemically reactive fluid flow**. Los Alamos National Laboratory Report
- ٢٠-Sicilian JM, Hirt CW(١٩٨٤) ,**An efficient computation scheme for tracking contaminant concentrations in fluid flows**. J Comput Phys.
- ٢١-Miyata H, Nishimura S. (١٩٨٥) ,**Finite-difference simulation of nonlinear waves generated by ships of arbitrary three-dimensional configuration**. J Comput Phys
- ٢٢-McQueen JF, Rutter P(١٩٨١) ,**Outline description of a recently implemented fluid flow code ZUNI**. C.E.G.B. report LM/PHYS/٢٥٨,
- ٢٣-Markham G, Proctor MV(١٩٨٣) ,**Modifications to the two-dimensional incompressible fluid flow code ZUNI to provide enhanced performance**. C.E.G.B. report TPRD/L/٠٠٦٣/M٨٢
- ٢٤-Sousa FS, Mangiavacchi N, Nonato LG, Castelo A, Tome´ MF, McKee S. (٢٠٠٤) ,**A front-tracking/front-capturing method for the simulation of ٣D multi-fluid flows with free surfaces**. J Comput Phys.

- ٢٥-Peskin CS(١٩٧٧) ,**Numerical analysis of blood flow in the heart.** J Comput Phys
- ٢٦-Moretti G(١٩٨٧) ,**Computation of flows with shocks.** Annual Rev Fluid Mech
- ٢٧-Darip P, Glimm J, Lindquist B, Maesumi M, McBryan O; (١٩٨٨) ,**On the simulation of heterogeneous petroleum reservoirs.** In: Wheeler M, editor. Numerical simulation in oil recovery. New York: Springer Verlag.
- ٢٨-Ervin EA, Tryggvason G.(١٩٩٧) ,**The rise of bubbles in a vertical shear flow.** J Fluid Eng Trans ASME
- ٢٩-Galaktionov OS, Anderson PD, Peters GWM, Van de Vosse FN.(٢٠٠٠) ,**An adaptive front tracking technique for three-dimensional transient flows.** Int J Numer Methods Fluids
- ٣٠-Li J, Renardy YY, Renardy M(٢٠٠٠) ,**Numerical simulation of breakup of a viscous drop in simple shear flow through a volume-of-fluid method.** Phys Fluids
- ٣١-Kim MS, Park JS, Lee WI(٢٠٠٣) , **A new VOF-based numerical scheme for the simulation of fluid flow with free surface.** Part II: application to cavity filling and sloshing problems. Int J Numer Methods the Fluids
- ٣٢-Lorstad D, Fuchs L(٢٠٠٤) , **High-order surface tension VOF-model for ٣D bubble flows with high density ratio.** J Comput Phys.

- ٣٣-Osher S, Sethian JA(١٩٨٨) ,**Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations.** J Comput Phys.
- ٣٤-Tsai TM, Miksis MJ(١٩٩٤) ,**Dynamics of a drop in a constricted capillary tube.** J Fluid Mech.
- ٣٥-Baker GR, Moore DW(١٩٨٩) ,**The rise and distortion of a twodimensional gas bubble in an inviscid liquid.** Phys Fluids A.
- ٣٦-Tome´ MF, Castelo A, Cuminato JA, McKee S(٢٠٠١)**GENSMAC3D: a numerical method for solving unsteady three-dimensional free surfaces flows.** Int J Numer Methods Fluids.
- ٣٧-Tome´ MF, Grossi L, Castelo A, Cuminato JA, Mangiavacchi N, Ferreira VG, et al(٢٠٠٤) ,**A numerical method for solving three-dimensional generalized Newtonian free surface flows.** J Non-Newton Fluid Mech.
- ٣٨-Varonos A, Bergeles G(١٩٩٨) ,**Development and assessment of a variableorder non-oscillatory scheme for convection term discretization.** Int J Numer Methods Fluids
- ٣٩-Sousa FS, Mangiavacchi N, Nonato LG, Castelo A, Tome´ MF, McKee S(٢٠٠٤) ,**A front-tracking/front-capturing method for the simulation of 3D multi-fluid flows with free surfaces.** J Comput Phys
- ٤٠-Tanner LH(١٩٧٩). **The spreading of silicone oil on horizontal surfaces.** J Phys D

٤١-Cruickshank JO, Munson BR(١٩٨١). **Viscous-fluid buckling of plane and axisymmetric jets.** J Fluid Mech

٤٢- C.M. Rhie and W.L. Chow. **Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation.**(١٩٨٣)

٤٣-Eturk, E., Corke, T.C. and Gokcol, C., (٢٠٠٥), “**Numerical Solution of ٢-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers,**” International Journal for Numerical Methods in Fluids, (٢٠٠٥).

٤٤-Barragy, E. and Carey, G.F., (١٩٩٧), “**Stream Function-Vorticity Driven Cavity Solutions Using p Finite Elements,**” Computer and Fluids, ٢٦, pp ٤٥٣-٤٦٨.

٤٥-Schreiber, R. and Keller, H.B., (١٩٨٣), “**Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Techniques,**” Journal of Computational Physics, ٤٩, pp ٣١٠-٣٣٣.

٤٦-Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., (١٩٨٢), “**High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier- Stokes Equations and a Multigrid Method,**” Journal of Computational Physics, ٤٨, pp ٣٨٧-٤١١

٤٧-Fortin, A., Jardak, M., Gervais, J.J. and Pierre, R., (١٩٩٧), “**Localization of Hopf Bifurcations in Fluid Flow Problems,**” International Journal for Numerical Methods in Fluids, ٢٤, pp ١١٨٥-١٢١٠

٤٨-Geravis, J.J., Lemelin, D. and Pierre, R., (١٩٩٧), **“Some Experiments with Stability Analysis of Discrete Incompressible Flows in the Lid Driven Cavity,”** International Journal for Numerical Methods in Fluids, ٢٤, pp٤٧٧-٤٩٢

٤٩-Sahin, M. and Owens, R.G., (٢٠٠٣), **“A Novel Fully-Implicit Finite Volume Method Applied to the Lid Driven Cavity Problem. Part II. Linear Stability Analysis,”** International Journal for Numerical Methods in Fluids, ٤٢, pp٧٩-٨٨

٥٠-Abouhamza, A. and Pierre, R., (٢٠٠٣), **“A Neutral Stability Curve for Incompressible Flows in a Rectangular Driven Cavity,”** Mathematical and Computer Modeling, ٣٨, pp ١٤١-١٥٧.

٥١-Auteri, F., Parolini, N. and Quartapelle, L., (٢٠٠٢), **“Numerical Investigation on the Stability of Singular Driven Cavity Flow,”** Journal of Computational Physics, ١٨٣, pp ١-٢٥.

٥٢-Peng, Y.F., Shiau, Y.H. and Hwang, R.R., (٢٠٠٣), **“Transition in a ٢-D Lid-Driven Cavity Flow,”** Computers and Fluids, ٣٢, pp٣٣٧-٣٥٢

٥٣-Tiesinga, G., Wubs, F.W. and Veldman, A.E.P., (٢٠٠٢), **“Bifurcation Analysis of Incompressible Flow in a Driven Cavity by the Newton-Picard method,”** Journal of Computational and Applied Mathematics, ١٤٠, pp ٧٥١-٧٧٢

٥٤-Poliashenko , M. and Aidun, C.K. , (١٩٩٥), **“A Direct Method for Computation of Simple Bifurcations,”** Journal of Computational Physics, ١٢١, pp ٢٤٦-٢٦٠

٥٥-Shankar, P.N. and Deshpande, M.D., (٢٠٠٠), **“Fluid Mechanics in the Driven Cavity,”** Annual Review of Fluid Mechanics, ٣٢, pp ٩٣-١٣٦.

٥٦-Koseff , J.R. and Street, R.L., (١٩٨٤), **“The Lid-Driven Cavity Flow: A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observations,”** ASME, Journal of Fluids Engineering, ١٠٦, pp ٣٩٠-٣٩٨.

٥٧-Koseff , J.R. and Street, R.L. ,(١٩٨٤), **“On end wall effects in a Lid driven cavity flow,”** ASME, Journal of Fluids Engineering ١٠٦, pp ٣٨٥-٣٨٩

٥٨-Prasad , A.K. and Koseff, J.R. , (١٩٨٩), **“Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow,”** Physics of Fluids ١(٢), pp ٢٠٨-٢١٨

٥٩-Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., (١٩٨٢), **“High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier- Stokes Equations and a Multigrid Method,”** Journal of Computational Physics, ٤٨, pp ٣٨٧-٤١١.

٦٠-Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F. and Schonung, B., (١٩٨٣) **“Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow,”** International journal of Fluid mechanics, ١٢٧, pp ٤٧٣-٤٩٦.



٦١-M. J. Ketabdari, H. Saghi, H. Rezaei, **Comparison of Staggered and Collocated grids for solving Navier-Stokes Equations** .5th National Congress on Civil Engineering. May ٤-٦, ٢٠١٠, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

## Abstract

The aim of Computational Fluid Dynamics (CFD) is to analyse systems such as flow current, heat transfer and other chemical phenomena with computer programming . CFD is very capable for technological and non-technological usage. It has been developed very much during several years.

MAC is one of the well- known methods for modeling of flows in CFD.

For fluid flow the governing equations can be solved using numerical methods. Bases of these equations are Momentum and Continuity leading to Navier-Stokes equations.

There are several methods such as Simple, PISO and Fractional Step for solving these equations. In solution procedure, it needs to decide where to store pressure and velocity components. Two type of meshes, namely staggered and colocated grids can be used. On staggered grid, the velocity components are stored at the cell face and the scalar variables such as pressure are stored at the central nodes. However on colocated grids, all parameters are defined at the same location at the central nodes.

The aim of this project is to study using of MAC method by colocated mesh for modeling flow in channels. Also the results of colocated mesh is compared with staggered mesh and with Open Foam and Ansys results.

Using MAC algorithm for colocated meshes is first studied for finite difference in chapter four and then is studied for finite volume method in chapter ۵. All codes are written by visual C++ language and they all are attached in appendix part of this thesis.

Keywords: Navier-Stokes Equations, Staggered grid, Colocated grid, MAC algorithm, Finite volume.



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty of Civil and Architecture Engineering**

## **Mac Algorithm for Co- Located Girds**

**Aliyeh Mobaraki**

**Supervisor: Dr. Ramin Amini**

**July 2012**