

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: عمران و معماری

گروه: عمران - سازه

عنوان:

توسعه یک روش مناسب برای بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریک

دانشجو: عادل عبدالهی

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

استاد مشاور:

مهندس احمد گنجعلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تابستان ۱۳۹۰



مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صور تجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای: **عادل علیاچی**

رشته: **مکان** گرایش: **دمازه**

تحت عنوان: **توسعه یک روش مناسب برای بازیافت نیتروژن در تحلیل ایزوتوپ**

که در تاریخ **۹۰/۲/۳۱** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است:

قبول (با درجه: **بسیار خوب** امتیاز **۱۸.۷**) دفاع مجدد مردود

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)

۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	مهرز حسینی	۱- استاد راهنما
	مربی	احمد کتبی	۲- استاد مشاور
	مربی	سید علی حسینی	۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	استادیار	رضا نادر	۴- استاد ممتحن
	استادیار	سید علی کتبی	۵- استاد ممتحن

رئیس دانشکده:

تقدیم به

روح پاک پدرم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم.

شکر و قدردانی

اعتراف می‌کنم که نه زبان شکر تو را دارم و نه توان شکر از بندگان تو، و اما بر حسب وظیفه از کلیه اساتید ارجمندم در طول سالهای تحصیل کمال شکر را دارم. از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر بهروز حسینی که در طول تحقیق مشوق اینجانب بوده و همواره از ایده‌های خوب ایشان بهره‌مند گردیده‌ام، خاضعانه سپاسگزارم و آرزوی صحت و سلامتی برای ایشان را خداوند منان را خواستارم. همچنین از زحمات فراوان و بی‌دریغ جناب آقای مهندس احمد کججلی نیز شکر نموده و امیدوارم در تمام مراحل زندگی موفق و پیروز باشند.

تعهد نامه

اینجانب عادل عبدالهی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته عمران - سازه دانشکده عمران و معماری دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه توسعه یک روش مناسب برای بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریکی تحت راهنمایی دکتر بهروز حسنی متعهد می شوم:

- ❖ تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.
- ❖ در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استنایان نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرکی استفاده نشده است.
- ❖ کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد
- ❖ در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته و یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

۱۳۹۰/۶/۳۱

چکیده:

در این پایان نامه ابتدا به بررسی و معرفی برخی روشهای بازیافت تنش در اجزای محدود پرداخته شده است. پس از بررسی روشهای موجود روش LP در مقایسه با برخی روشهای متعارف بازیافت تنش در اجزای محدود، به منظور توسعه در تحلیل ایزوژئومتریکی انتخاب گردید. دلیل این امر کارایی بالا و استفاده از قید باقیمانده معادله تعادل است که برای استفاده در روش تحلیل ایزوژئومتریکی مناسب به نظر می‌رسد. در این راستا اصول تحلیل در روش ایزوژئومتریکی و توابع پایه نریز که از ملزومات تحلیل در این محیط می‌باشد، بطور خلاصه معرفی شده است. سپس روابط و معادلات استفاده شده در روش LP سازگار با تحلیل ایزوژئومتریکی بازنویسی می‌شوند. در این مرحله در تعریف میدان تنش بازیافتی، بدست آوردن نرم خطا، نوشتن معادله تعادل، تابع خطا و مشتق‌گیری از روابط، بطور دقیق از اصول تحلیل ایزوژئومتریکی پیروی شده است. پس از تعیین روابط، کد نویسی روش مربوطه در محیط برنامه نویسی انجام شده و به برنامه اصلی تحلیل ایزوژئومتریکی اضافه شده است. برای مقایسه کارایی و صحت روش از سه مثال شناخته شده که حل دقیق آنها در دسترس می‌باشد، استفاده گردید. مثالهای بررسی شده عبارتند از: (۱) تیر طره تحت بار وارده در انتهای آن (۲) صفحه تحت کشش و دارای حفره در مرکز آن (۳) صفحه ترکدار تحت کشش. نتایج حاصل از برنامه به روش LP با روش بازیافت SPR در محیط ایزوژئومتریکی مقایسه شده است. برای مقایسه از پارامترهای نرم خطای انرژی، شاخص تاثیر و بررسی تنش بازیافتی در برخی نقاط استفاده شده است. در بررسی خروجیهای برنامه بهبود در نتایج نسبت به روش SPR مشاهده شده است. در انتها درجه مناسب توابع نریز به منظور بازیافت تنش در محیط ایزوژئومتریکی برای مثالهای ذکر شده به روش LP تعیین گردید.

کلمات کلیدی: اجزای محدود، تخمین خطا، بازیافت تنش، شاخص تاثیر، تحلیل ایزوژئومتریکی، نرم

خطای انرژی

فهرست مطالب

مقدمه

- ۲ معرفی
- ۳ خطاها در روش اجزای محدود
- ۴ پیشینه علمی برآورد خطا

فصل اول: تخمین خطا و بازیافت تنش در اجزای محدود

- ۹ ۱-۱- مقدمه
- ۱۰ ۲-۱- روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان)
- ۱۱ ۱-۲-۱- روش میانگین گیری
- ۱۲ ۲-۲-۱- روش تصویر L_2
- ۱۲ ۳-۲-۱- روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق هم گرا SPR
- ۱۴ ۴-۲-۱- روش بازیافت تنش بر مبنای تعادل در زیر دامنهها REP
- ۱۶ ۴-۱- معیارهای بیان خطا
- ۱۶ ۱-۴-۱- مفهوم نرم
- ۱۷ ۲-۴-۱- معیار انرژی
- ۱۸ ۳-۴-۱- درصد خطای نسبی η
- ۱۸ ۴-۴-۱- معیار L_2
- ۱۹ ۵-۴-۱- جذر مجموع مربعات خطا
- ۱۹ ۶-۴-۱- شاخص تأثیر θ

فصل دوم: روشهای بازیافت تنش در اجزای محدود

- ۲۲ ۱-۲- مقدمه
- ۲۳ ۲-۲- روش بازیافت درونیابی مینیمم مربعات متحرک (MLSI)
- ۲۳ ۱-۲-۲- معرفی
- ۲۳ ۲-۲-۲- روش بازیافت
- ۲۶ ۳-۲-۲- مثال های عددی:

۲۷ مسئله تیر یک بعدی ۱-۳-۲-۲
۲۸ مسئله لاپلاس ۲-۳-۲-۲
۳۰ تیر کنسول ۳-۳-۲-۲
۳۲ مسئله ترک ۴-۳-۲-۲
۳۴ روش بازیافت تنش LP ۳-۲
۳۴ معرفی ۱-۳-۲
۳۵ روش بازیافت تنش LP ۲-۳-۲
۳۹ مثال های عددی: ۳-۳-۲
۳۹ مسئله یک بعدی ۱-۳-۳-۲
۴۴ مسئله دو بعدی ۲-۳-۳-۲
۴۷ صفحه با حفره‌ایی در مرکز آن ۳-۳-۳-۲
۴۹ مقایسه روشهای بازیافت ۴-۲
۴۹ معرفی ۱-۴-۲
۵۰ موارد ارزیابی روشها ۲-۴-۲
۵۱ عوامل تاثیرگذار بر دقت میدان تنش بازیافت ۳-۴-۲
۵۲ مثال های عددی: ۴-۴-۲
۵۳ حدود مقایسه و کاربرد بعضی از جزئیات ۱-۴-۴-۲
۵۴ نتایج مطالعات عددی ۲-۴-۴-۲
۶۲ نتیجه گیری و جمع بندی ۵-۲

فصل سوم: روش تحلیل ایزوژئومتریکی

۶۵ مقدمه ۱-۳
۶۵ روش ایزوژئومتریکی ۲-۳
۶۷ بی-اسپلین و نریز ۱-۲-۳
۷۱ فرمول بندی روش ایزوژئومتریکی ۲-۲-۳

فصل چهارم: توسعه روش بازیافت تنش LP در تحلیل ایزوژئومتریکی

۸۰ مقدمه ۱-۴
۸۰ تعریف میدان تنش بازیافت ۲-۴

۸۱	۳-۴- توسعه فرمول بندی روش بازیافت در محیط ایزوژئومتریکی
۸۴	۴-۴- تعیین جملات معادله بازیافت
۸۵	۱-۴-۴ پارامتر \bar{A}
۸۶	۲-۴-۴ پارامتر \bar{C}
۸۸	۳-۴-۴ پارامتر \bar{E}
۸۸	۴-۴-۴ پارامتر \bar{B}
۸۸	۵-۴-۴ پارامتر \bar{D}
۹۰	۶-۴-۴ پارامتر \bar{F}
۹۰	۵-۴- تعیین مجهولات

فصل پنجم: ارایه نتایج

۹۲	۱-۵۵- مقدمه
۹۳	۲-۵- تیر طره تیموشنکو
۹۳	۱-۲-۵ بررسی فرضیات حل مسئله در روش تحلیل ایزوژئومتریکی
۹۵	۲-۲-۵ بررسی شاخص تاثیر در روشهای بازیافت LP و SPR
۱۰۲	۳-۲-۵ نمایش و مقایسه کانتورهای نرم خطا برای حالات مختلف تحلیل
۱۰۵	۴-۲-۵ تعیین درجه بهینه به منظور بازیافت تنش به روش LP
۱۰۹	۳-۵- صفحه نامحدود سوراخدار
۱۱۰	۱-۳-۵ بررسی فرضیات حل مسئله در محیط تحلیل ایزوژئومتریکی
۱۱۲	۲-۳-۵ بررسی شاخص تاثیر در روشهای بازیافت LP و SPR
۱۱۴	۳-۳-۵ نمایش و مقایسه کانتورهای نرم خطا برای دو روش بازیافت
۱۲۰	۴-۳-۵ تعیین درجه بهینه به منظور بازیافت تنش به روش LP
۱۲۳	۴-۵- صفحه ترکدار تحت تنش
۱۲۵	۱-۴-۵ بررسی فرضیات حل مسئله صفحه ترکدار در تحلیل ایزوژئومتریکی
۱۲۷	۲-۴-۵ بررسی شاخص تاثیر در روشهای بازیافت LP و SPR
۱۳۰	۳-۴-۵ نمایش و مقایسه کانتورهای نرم خطا برای دو روش بازیافت
۱۳۲	۴-۴-۵ تعیین درجه بهینه به منظور بازیافت تنش به روش LP

۵-۵- نتیجه‌گیری و آرایه پیشنهادات ۱۳۸

۵-۵-۱- نتایج بدست آمده از روش بازیافت ۱۳۸

۵-۵-۲- ارائه پیشنهادات ۱۳۹

پیوست

أ. دیاگرام روش بازیافت تنش LP ۱۴۱

ب. مراجع ۱۴۲

فهرست اشکال

- شکل ۱-۲ محاسبه سهم گره‌ها..... ۱۴
- شکل ۱-۲ ناحیه محلی مشخص شده بمنظور محاسبه مشتق..... ۲۴
- شکل ۲-۲ سرعت همگرایی روشها..... ۲۸
- شکل ۳-۲ مقایسه کرنش در طول تیر..... ۲۸
- شکل ۴-۲ سرعت همگرایی روشها..... ۲۹
- شکل ۵-۲ مقایسه کرنش در جهت y ۲۹
- شکل ۶-۲ میزان وابستگی بهبود روش به ضریب α ۳۰
- شکل ۷-۲ مقایسه سرعت همگرایی در حالت P درجه دو..... ۳۰
- شکل ۸-۲ مشخصات تیر با مش 4×16 المان چهارگره‌ای..... ۳۰
- شکل ۹-۲ سرعت همگرایی با المان چهارگره‌ای..... ۳۱
- شکل ۱۰-۲ کرنش برشی در $x=6$ برای حالت 24 المان..... ۳۱
- شکل ۱۱-۲ سرعت همگرایی و دقت با المان مثلثی..... ۳۲
- شکل ۱۲-۲ مش‌بندی ناحیه نزدیک ترک با المان چهارگره‌ای..... ۳۳
- شکل ۱۳-۲ نمودار سه مولفه کرنش برای سه روش FE, DI, AN..... ۳۴
- شکل ۱۴-۲ نمایش نقاط در المان..... ۳۶
- شکل ۱۵-۲ توزیع تنش..... ۴۱
- شکل ۱۶-۲ سرعت همگرایی در $x=1$ ۴۲
- شکل ۱۷-۲ توزیع تنش بازیافتی و تحلیل اجزای محدود..... ۴۳
- شکل ۱۸-۲ سرعت همگرایی بازیافت تنش برای المان درجه دو در گره $x=1$ برای حالت حل دقیق درجه ۳..... ۴۳
- شکل ۱۹-۲ سرعت همگرایی بازیافت تنش المان درجه دو برای حالت استفاده از حل دقیق درجه دو..... ۴۴
- شکل ۲۰-۲ میدان تنش دقیق درجه دو..... ۴۵
- شکل ۲۱-۲ سرعت همگرایی بازیافت تنش مولفه σ_{xx} ۴۶

- شکل ۲-۲۲ سرعت همگرایی بازیافت تنش مولفه σ_{yy} ۴۶
- شکل ۲-۲۳ سرعت همگرایی بازیافت تنش مولفه σ_{xy} ۴۷
- شکل ۲-۲۴ هندسه صفحه مربع مسئله با بار وارده ۴۷
- شکل ۲-۲۵ مش های استفاده شده در تحلیل مسئله ۴۸
- شکل ۲-۲۶ سرعت همگرایی مولفه های تنش در نقطه داخلی با تغییر نوع مش ۴۸
- شکل ۲-۲۷ سرعت همگرایی مولفه تنش σ_{xx} در نقطه مرزی با تغییر نوع مش ۴۹
- شکل ۲-۲۸ نحوه مش بندی صفحه سوراخدار ۵۴
- شکل ۲-۲۹ نحوه مش بندی صفحه ترکدار ۵۵
- شکل ۲-۳۰ سرعت همگرایی در صفحه ترکدار به روش REP ۵۶
- شکل ۲-۳۱ سرعت همگرایی در صفحه ترکدار به روش LP ۵۸
- شکل ۳-۱ نحوه مدل نمودن مرز در تحلیل ایزوژئومتریکی و اجزای محدود ۶۶
- شکل ۳-۲ شبکه نقاط کنترلی و سطح نریز مربوط به آن با توابع پایه درجه دو ۷۱
- شکل ۳-۳ المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای نریز ۷۶
- شکل ۵-۱ تیر طره در شرایط تنش مستوی ۹۳
- شکل ۵-۲ آرایش نقاط کنترل مورد استفاده در مدلسازی تیر طره ۹۴
- شکل ۵-۳ بردارهای گرهی مورد استفاده در مدلسازی تیر طره ۹۵
- شکل ۵-۴ کانتور نرم خطا برای ۷۶ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس ۱۰۳
- شکل ۵-۵ کانتور نرم خطا برای ۷۶ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس ۱۰۳
- شکل ۵-۶ کانتور نرم خطا برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس ۱۰۴
- شکل ۵-۷ کانتور نرم خطا برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس ۱۰۴
- شکل ۵-۸ کانتور نرم خطا برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=3$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۱۶ نقاط گاوس ۱۰۵
- شکل ۵-۹ نمودار تنش بازیافت و حل دقیق برای سه درجه توابع پایه در حالت استفاده از ۷۶ نقطه کنترل ۱۰۷
- شکل ۵-۱۰ نمودار تنش بازیافت و حل دقیق برای سه درجه توابع پایه در حالت استفاده از ۱۰۵ نقطه کنترل ۱۰۸
- شکل ۵-۱۱ نمودار صفحه نامحدود سوراخدار تحت تنش واحد در جهت X ۱۰۹
- شکل ۵-۱۲ مشخصات و شرایط مرزی دامنه مدلسازی شده صفحه نامحدود سوراخدار ۱۰۹

- شکل ۵-۱۳ آرایش ۶۳ نقطه کنترلی مورد استفاده در مدلسازی صفحه سوراخدار..... ۱۱۱
- شکل ۵-۱۴ آرایش ۹۰ نقطه کنترلی مورد استفاده در مدلسازی صفحه سوراخدار..... ۱۱۱
- شکل ۵-۱۵ بردارهای گرهی مورد استفاده در مدلسازی صفحه سوراخدار..... ۱۱۲
- شکل ۵-۱۶ کانتور نرم خطا برای ۶۳ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس..... ۱۱۵
- شکل ۵-۱۷ کانتور نرم خطا برای ۶۳ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس..... ۱۱۶
- شکل ۵-۱۸ کانتور نرم خطا برای ۹۰ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس..... ۱۱۷
- شکل ۵-۱۹ کانتور نرم خطا برای ۹۰ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس..... ۱۱۸
- شکل ۵-۲۰ کانتور نرم خطا برای ۹۰ نقطه کنترل و درجه $p=3$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۱۶ نقاط گاوس..... ۱۱۹
- شکل ۵-۲۱ نمودار تنش بازیافت و حل دقیق برای سه درجه توابع پایه در حالت استفاده از ۶۳ نقطه کنترل..... ۱۲۱
- شکل ۵-۲۲ نمودار تنش بازیافت و حل دقیق برای سه درجه توابع پایه در حالت استفاده از ۹۰ نقطه کنترل..... ۱۲۳
- شکل ۵-۲۳ صفحه مربعی ترکدار تحت تنش کششی قائم..... ۱۲۴
- شکل ۵-۲۴ نحوه قرارگیری ۶۶ نقطه کنترل در تحلیل به روش ایزوژئومتریکی در صفحه ترکدار..... ۱۲۵
- شکل ۵-۲۵ نحوه قرارگیری ۹۱ نقطه کنترل در تحلیل به روش ایزوژئومتریکی در صفحه ترکدار..... ۱۲۵
- شکل ۵-۲۶ نحوه قرارگیری ۱۲۰ نقطه کنترل در تحلیل به روش ایزوژئومتریکی در صفحه ترکدار..... ۱۲۶
- شکل ۵-۲۷ نحوه قرارگیری ۱۹۰ نقطه کنترل در تحلیل به روش ایزوژئومتریکی در صفحه ترکدار..... ۱۲۶
- شکل ۵-۲۸ چهار ترکیب بردارهای گرهی مورد استفاده در مدلسازی صفحه ترکدار..... ۱۲۷
- شکل ۵-۲۹ نحوه اعمال شرایط مرزی در تحلیل به روش ایزوژئومتریکی با ۶۶ نقطه کنترل..... ۱۲۷
- شکل ۵-۳۰ نمودار تاثیر افزایش درجه توابع پایه بر درصد افزایش شاخص تاثیر..... ۱۲۹
- شکل ۵-۳۱ کانتور نرم خطا برای ۶۶ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس..... ۱۳۰
- شکل ۵-۳۲ کانتور نرم خطا برای ۹۱ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس..... ۱۳۱
- شکل ۵-۳۳ کانتور نرم خطا برای ۱۲۰ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس..... ۱۳۱
- شکل ۵-۳۴ کانتور نرم خطا برای ۱۹۰ نقطه کنترل و درجه $p=3$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۱۶ نقاط گاوس..... ۱۳۲
- شکل ۵-۳۵ نمودار تنش بازیافت و تنش تحلیلی در نقطه $(x=5, y=4.9)$ با استفاده از ۶۶ نقطه کنترل..... ۱۳۴
- شکل ۵-۳۶ نمودار تنش بازیافت و تنش تحلیلی در نقطه $(x=5, y=4.9)$ با استفاده از ۹۰ نقطه کنترل..... ۱۳۵
- شکل ۵-۳۷ نمودار تنش بازیافت و تنش تحلیلی در نقطه $(x=5, y=4.9)$ با استفاده از ۱۲۰ نقطه کنترل..... ۱۳۶
- شکل ۵-۳۸ نمودار تنش بازیافت و تنش تحلیلی در نقطه $(x=5, y=4.9)$ با استفاده از ۱۹۰ نقطه کنترل..... ۱۳۷

فهرست جداول

- جدول ۱-۲ حالت‌های مختلف حل مسایل با دو روش LP و REP..... ۵۴
- جدول ۲-۲ درصد کلی پارامتر همگرایی $R(\eta^*)$ در مسئله ۱ با استفاده از دو روش SPR و LP..... ۵۷
- جدول ۳-۲ تاثیر شرایط مرزی در دو روش بر پارامتر خطای نسبی η^* ۵۹
- جدول ۴-۲ مقایسه سه روش توسط پارامتر خطای نسبی η^* بدون ناحیه مرزی..... ۶۰
- جدول ۵-۲ مقایسه سه روش توسط پارامتر خطای نسبی η^* برای آخرین مش‌بندی، بدون ناحیه مرزی با مشخص نمودن بهترین جواب..... ۶۱
- جدول ۶-۲ شاخص تاثیر برای حالت مختلف..... ۶۲
- جدول ۱-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۷۶ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس..... ۹۷
- جدول ۲-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۷۶ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس..... ۹۸
- جدول ۳-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس..... ۹۹
- جدول ۴-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=3$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۱۶ نقاط گاوس..... ۱۰۰
- جدول ۵-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس..... ۱۰۱
- جدول ۶-۵ درصد رشد شاخص تاثیر برای روش LP نسبت به SPR در تیر طره..... ۱۰۲
- جدول ۷-۵ مقادیر حداکثر نرم خطا در تیر طره..... ۱۰۵
- جدول ۸-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۶۳ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس..... ۱۱۳

- جدول ۹-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در شش حالت، برای هر دو روش بازیافت تنش در کل دامنه ۱۱۴
- جدول ۱۰-۵ مقادیر حداکثر نرم خطا در صفحه سوراخدار ۱۲۰
- جدول ۱۱-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۶۶ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس ۱۲۸
- جدول ۱۲-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در ۱۲ حالت، برای هر دو روش بازیافت تنش در کل دامنه ۱۲۹
- جدول ۱۳-۵ تعداد المانهای تشکیل شده در فضای نریز ۱۳۳

مقدمه

• معرفی

همگام با رشد علوم و فناوری، مسائل مهندسی نیز روز به روز پیچیده تر می‌شوند. با پیچیده تر شدن مسائل و لزوم حل سریعتر و دقیق تر آنها، روشهای تحلیلی دیگر جوابگوی نیازهای روز افزون جوامع نیستند. با چنین نگرشی، محققان همواره سعی کرده‌اند در کنار توسعه مبانی علوم، روشهای عددی را نیز توسعه بخشند.

در این مسیر، روشهای متعددی توسط محققین ابداع گشته است. از مهمترین اینها می‌توان به روش تفاضلهای محدود، روش اجزای محدود، روش احجام محدود، روش المانهای مرزی و همچنین روش ایزوژئومتریک که از جمله جدیدترین روشها است، اشاره کرد. هر کدام از این روشها موارد کاربرد خاص خود را دارند و هنوز هم محققان درصدد رشد و توسعه این روشها و ابداع روشهای جدید هستند. روش اجزای محدود یکی از روشهایی است که کاربرد فراوانی در حل مسائل بسیاری از رشته‌های مهندسی و به خصوص مسائل مکانیک جامدات دارد. ریشه‌های توسعه این روش را باید در اوائل دهه ۱۹۴۰ میلادی جستجو کرد. در سال ۱۹۴۳ کورانت معادله پواسون پیچش را توسط آنچه امروز المانهای مثلثی خطی نامیده می‌شود، حل کرد، اما کارهای وی مدتها ناشناخته ماند. روش اجزای محدود به شکل امروزی آن، ریشه در کارهای ترنر و همکاران وی در سال ۱۹۵۷ دارد. در سال ۱۹۶۰، کلاف نام «اجزای محدود» را بر این روش نهاد؛ و کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در سال ۱۹۶۵ توسط زینکویچ^۱ پیشنهاد شد [۱].

^۱ Zienkiewicz

تاکنون مقالات و کتابهای فراوانی در زمینه اجزای محدود نوشته شده‌اند و هنوز روشها و تکنیکهای جدیدی در این زمینه مطرح می‌شوند؛ اما از همان آغاز مدل سازی رخدادهای فیزیکی توسط کامپیوتر و شکل گیری مبانی اجزای محدود وجود خطاهای عددی در محاسبات و گسسته‌سازی محیط پیوسته منشأ اصلی نگرانی بوده است.

چگونه ممکن است که بتوان خطا را اندازه گرفت، کنترل کرد و بطور موثر و قابل توجه مقدار آنرا کم کرد؟

سوالی که از آغاز بکارگیری روشهای عددی در مسائل مختلف علوم و مهندسی، متخصصان این رشته‌ها با آن روبرو بوده اند این است که چگونه می‌توان خطا را اندازه گرفت، کنترل کرد و مقدار آن را کاهش داد.

با توجه به اینکه روش ایزوژئومتریکی روشی نوظهور است که در چند سال اخیر توسط آقای هیوز مطرح شده است، به همین دلیل بر روی تخمین خطا در این روش کار چندانی صورت نگرفته است. روش ایزوژئومتریکی همانند روش اجزای محدود در زمره روشهای عددی قرار دارد و می‌توان از کارهای انجام شده در زمینه تخمین خطا در اجزای محدود استفاده کرده و در روش تحلیل ایزوژئومتریکی پیاده سازی نمود. به همین دلیل در ادامه کلیاتی درباره‌ی تاریخچه تخمین خطا و خطاها در اجزای محدود مطرح می‌گردد.

• خطاها در روش اجزای محدود

روش اجزای محدود یک روش تقریبی است. با توجه به آنچه در قسمت قبل آمد، منابع خطا در روش اجرای محدود را می‌توان به سه گروه عمده تقسیم کرد [۲]:

۱- **خطای ناشی از تقریب زدن دامنه حل مسأله** : این خطا از آنجا ناشی می‌شود که در حالت کلی نمی‌توان دامنه حل مسأله را با المانهای مورد نظر به طور کامل پوشانید. برای مثال، یک صفحه دایره‌ای شکل را هیچگاه نمی‌توان با المانهای مثلثی خطی به طور کامل مدل نمود، هر

چند با ریزتر نمودن شبکه اجزای محدود می توان تا حد لازم به هندسه دقیق مسئله نزدیک شد.

۲- خطای ناشی از گرد کردن اعداد : این دسته از خطاها بستگی به سخت افزار و نرم افزار مورد استفاده برای محاسبات دارد. از آنجا که تعداد محدودی از ارقام یک عدد در رایانه ذخیره می شود، استفاده از این عدد در محاسبات باعث ایجاد خطا خواهد شد و به علت اینکه محاسبات معمولاً به صورت زنجیروار به نتایج مراحل قبل وابسته است، این موضوع باعث گسترش خطا در تمامی حل می گردد. بر خلاف سایر انواع خطاها، ریزتر نمودن شبکه المان بندی معمولاً این دسته از خطاها را تشدید می کند. برای کاهش این دسته از خطاها، باید به صورت سخت افزاری و یا نرم افزاری تعداد ارقامی از یک عدد را که در رایانه نگهداری می شود، افزایش داد که این کار با افزایش حافظه مورد نیاز و همچنین بالا رفتن زمان حل همراه است.

۳- خطای ناشی از گسسته سازی : عمده ترین منبع خطا در روش اجزای محدود بوده و ناشی از تقریب زدن میدان جابجایی به وسیله توابع شکل می باشد. این دسته از خطاها نیز با ریزتر کردن شبکه المان بندی و بالا بردن درجه توابع شکل مورد استفاده، کاهش می یابد.

این سه دسته خطا در حل عددی معادلات دیفرانسیل از آن جمله در حل معادلات الاستیسیته به روش تغییر مکان برای بدست آوردن مقدار جابجایی هر گره وارد می شود.

آنچه از این پس در این تحقیق به عنوان خطا مورد بحث قرار خواهد گرفت، خطای ناشی از گسسته سازی است و بنابراین همواره فرض بر آن خواهد بود که دامنه حل به طور کامل توسط المانهای مورد استفاده پوشیده شده و محاسبات نیز به صورت کاملاً دقیق انجام می گیرد.

• پیشینه علمی بر آورد خطا

از اولین مقاله هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شد، مقاله هایی است که توسط ریچاردسون^۱ در سال ۱۹۱۰ نوشته شده است.

^۱L.F. Richardson

حد فاصل سالهای ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ ارایه تکنیکهای مختلف بازیافت آغاز شد. روش تصویر L_2^1 از اولین روشها در این زمینه می باشد که در آن با استفاده از تابع مینیمم مربعات خطای میدان تنش در کل دامنه تعیین می گردد. این روش در نزدیک مرزها از کارآیی کمی برخوردار می باشد [۳-۶].

معمولا کیفیت و درستی روشهای تخمین خطا به وسیله مقایسه بین معیار خاصی از خطای واقعی و خطای تقریبی بررسی می گردد. البته امکان محاسبه خطای دقیق برای یک سری مسائل خاص که حل دقیق آنها در دسترس است، وجود دارد. در این راستا، نسبت خطای تقریبی به خطای واقعی شاخص تأثیر^۲ نامیده می شود که این نسبت اولین بار توسط بابوشکا^۳ در سال ۱۹۸۱ ارائه شد [۷].

در سال ۱۹۸۹ روشی توسط زینکویچ و زو^۴ ارایه گردید که روش ZZ (Zienkiewicz and Zhu) نامیده شد. آنها طی مقاله ای با تقریب خطا در مسائل خمش صفحه، روشی را برای اصلاح المان بندی مثلثی که طی آن بعد المانها ریزتر می شد بر مبنای آنالیز تطبیقی ارائه کردند. از این پس این دو محقق تحقیقات زیادی در آنالیز تطبیقی، انجام دادند و در سال ۱۹۹۲ روش SPR^5 را در برآورد خطای حل المانهای محدود و آنالیز تطبیقی، طی دو مقاله معروف ارائه کردند. در ۱۹۹۳ ادن و همکارانش^۶ روش مانده ها در برآورد خطا را با اضافه کردن قیود تعادل اصلاح کردند. در واقع روش SPR همان روش ZZ می باشد، که در این تحقیق از هر دو این نامها برای این روش استفاده شده است [۸-۱۱].

بلافاصله بعد از روش ZZ ویبرگ و عبدالوهاب^۷ یک روش بازیافت که در آن مربعات باقیمانده تعادل بعنوان پارامتر خطا به معادلات روش ZZ اضافه می گردد، را با نام WA (Wiberg and Abdulvhab) ارایه نمودند. برای المان یک و دو بعدی چند جمله ایی با درجات بالاتر نسبت به روش ZZ انتخاب شده و باعث افزایش صحت و سرعت همگرایی در این روش می گردد [۱۲-۱۳].

¹ L_2 Projection Method

² Effectivity Index

³ Babuska

⁴ Zienkiewicz-Zhu

⁵ Superconvergent Patch Recovery

⁶ Ainsworth and Oden

⁷ Wiberg and Abdulvhab

بلیکر و بلیتشکو^۱ یک روش بازیافت تنش مشابه روش WA را ارائه دادند، که در آن بجای استفاده از درجات بالاتر چند جمله ایی استفاده از نقاط مشترک در چند جمله ایی جواب را بهبود می بخشد. سپس تسلا^۲ روشی را ارائه نمود که میدان تنش توسط گرادیان نقاط گره ایی هموار می گردد [۱۴]. در ۱۹۹۷ برومند و زینکوویچ روش قدرتمند دیگری در برآورد خطا ارائه کردند که نسبت به روشهای قبلی دارای هیچ محدودیتی نبود. این روش قابل استفاده در اکثر مسائل به ویژه مسائل پلاستیک است که این ویژگی یک مزیت مهم به شمار می آید [۱۶-۱۵]. در ادامه روشی با نام LP^۳ در سال ۱۹۹۷ توسط لی و همکاران ارائه می گردد [۱۷].

• هدف و تشریح مسأله در این تحقیق

با توجه به اینکه در عصر حاضر روشهای عددی به ویژه روش اجزای محدود گستردگی زیادی در علوم مختلف و صنعت پیدا کرده است، در صورتی که نتوان به نتایجی که از آن بدست می آید، اعتماد کرد، صحت تمام کارهایی که از اجزای محدود در آنها استفاده شده است با مشکل مواجه شده و باعث تردید و سردرگمی می گردد. از اینرو در کنار فراگیری علم اجزای محدود و ایزوژئومتریک پرداختن به روشهایی که به کمک آنها بتوان خطای موجود را تخمین زد و میزان آنرا کاهش داد ضروری به نظر می رسد.

در این تحقیق در فصل اول تقسیم بندی برآورد کننده های خطا و کلیاتی در مورد هر کدام از آنها ارائه می گردد. در ادامه فصل برخی روشهای معروف که در مقدمه به آنها اشاره شد و مقالات زیادی درباره آنها مطرح گردیده، بطور خلاصه شرح داده می شود و معیارهایی برای بیان کارایی و کنترل تاثیر روشهای بازیافت در حل مسئله ارائه می گردد. در فصل دوم به معرفی و شرح تفصیلی روش بازیافت مینیمم مربعات متحرک و روش بازیافت LP پرداخته می شود. در انتهای فصل دوم روش LP

¹Blacker and Belytschko

²Tessler

³Lee & Park

با برخی روشهای معروف و موثر تخمین خطا مقایسه و کارآیی و صحت آن تایید شده است. با توجه به تایید کارآیی آن بعنوان روشی مناسب به منظور توسعه در روش تحلیل ایزوژئومتریکی انتخاب می‌گردد. در فصل سوم به معرفی مختصری در ارتباط با تاریخچه تحلیل ایزوژئومتریکی پرداخته و سپس منحنی و سطوح بی-اسپلاین و نرئز معرفی شده است، که در محیط ایزوژئومتریکی بعنوان توابع پایه کاربرد دارند. در ادامه فصل روش تحلیل ایزوژئومتریکی مطرح و فرمول بندی روش و نحوه ماتریسی نمودن روابط جهت برنامه نویسی شرح داده شده است. در فصل چهارم روش بازیافت LP در محیط ایزوژئومتریکی ارایه و تمام معادلات مربوط به روش بازیافت تنش جهت استفاده در تحلیل ایزوژئومتریکی بیان شده است. در ادامه الگوریتم و فلوچارتی برای روش بازیافت تنش در تحلیل ایزوژئومتریکی ارایه شده است. پس از تهیه کد نرم‌افزاری برای روش بازیافت LP، در فصل پنجم مثالهایی با این برنامه حل شده و کارآیی آن با پارامترها و بررسی خروجیها تایید می‌شود. مقایسه‌ایی با روش SPR که در تحقیقات قبلی در محیط ایزوژئومتریکی توسعه یافته است، صورت گرفته و بهبود در نتایج مشاهده شده است. در آخر نیز نتیجه گیری کلی و ارایه پیشنهاد جهت تحقیقات در آینده ارایه شده است، که امید است برای کسانی که علاقمند به کار در این زمینه هستند قابل استفاده باشد.

فصل اول

تخمین خطا و بازیافت تنش در

اجزای محدود

۱-۱- مقدمه

از نظر یک تقسیم بندی برآورد کننده‌های خطا در دو دسته پسین^۱ و پیشین^۲ قرار می‌گیرند که از بین آنها موضوع برآورد پسین خطا به صورت یکی از جنبه‌های بسیار مهم در کاربرد روش اجزای محدود، در آمده است [۱۸]. در این نوع برآورد، پس از هر بار حل مسأله با روش اجزای محدود، با استفاده از مقادیر محاسبه شده، خطا برآورد می‌شود. در صورتی که برآورد پیشین خطا، اطلاعاتی درباره همگرایی و پایداری حل‌های مختلف ارائه می‌دهد. همچنین اطلاعاتی اجمالی درباره رفتار خطا، مادامی که متغیرهای شبکه تغییر می‌کند، ارائه می‌دهد اما هیچ اطلاعات کمی درباره مقدار خطا در یک مسئله خاص ارائه نمی‌کند.

در تقسیم بندی مشابه روشهای تخمین خطا در دو دسته عمده زیر قرار می‌گیرند :

۱- **استقرایی:** این دسته از برآورد کننده‌های خطا قبل از حل مسأله، بر اساس خواص حل دقیق آن مانند هموار بودن و غیره، اطلاعاتی در مورد نرخ حدی همگرایی (حالی که ابعاد المانهای به کار رفته به سمت صفر میل می‌کند) فراهم می‌آورند. به لحاظ کاربرد محدود، این دسته از برآورد کننده‌های خطا بیشتر در تحقیقات نظری به کار برده می‌شوند.

۲- **استنتاجی:** این دسته از برآوردکننده‌های خطا، با استفاده از نتایج یک حل اجزای محدود و با استفاده از فرضیات اولیه، تخمینی از توزیع خطای یک کمیت در دامنه حل مسأله ارائه می‌دهند. برآوردکننده‌های خطای استنتاجی امروزه نقش عمده‌ای در کاربردهای عملی مهندسی ایفا می‌کنند، از این رو در این تحقیق تنها این دسته از برآوردکننده‌های خطا مورد توجه قرار گرفته است.

در برآورد خطا به روش استنتاجی، دو رویکرد عمده وجود دارد. اولین اینها تخمین خطا بر اساس روشهای باقیمانده است که ادامه کار بابوشکا می‌باشد. روش دیگر که امروزه تأکید بر استفاده از آن

^۱ posteriori estimation of error

^۲ priori estimation of error

می‌باشد، استفاده از روش وصله‌های خود تعادلی^۱ است، که در این زمینه انس ورس و آدن^۲ پیش‌تاز می‌باشند. روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) نیز در این دسته قرار می‌گیرند [۱۹].

۱-۲- روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان)

پس از حل معادله دیفرانسیل الاستیسیته توسط روش اجزای محدود و به دست آوردن مقادیر جابجایی در هر گره، در صورتی که به دست آوردن مقادیر دقیق تنش (گرادیان میدان) مورد نظر باشد، باید از روشهای بازیافت تنش استفاده نمود. برای مثال در هر گره که چهار المان مربعی شکل به آن متصل باشد، فقط یک مقدار جابجایی پس از حل معادله دیفرانسیل به وسیله اجزای محدود موجود بوده، ولی برای مشتق اول و تنش، به دلیل ناپیوسته بودن شیب در آن گره، از هر المان متصل به گره مذکور مقداری متفاوت، یعنی در مجموع چهار مقدار مختلف برای آن گره وجود خواهد داشت. این موضوع برای کلیه مرزهای المانها نیز صادق می‌باشد. از اینجا می‌توان به اهمیت بحث بازیافت تنش پی برد. زیرا قاعدتا باید فقط یک مقدار مشخص، نزدیک به حل دقیق، برای مشتق اول یا تنش در هر گره موجود باشد که به دست آوردن این مقدار، با استفاده از عملیات تکمیلی بازیافت تنش به روی نتایج حاصل از حل روش اجزای محدود مقدور می‌باشد، که خود شامل روشهای مختلفی است.

به طور کلی بازیافت تنش روشی به منظور بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش یا گرادیان میدان به دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش با استفاده از حل روش اجزای محدود، یک جواب نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقاط دلخواه روی دامنه محاسبه می‌شود که دقت بالاتری نسبت به حل اولیه اجزای محدود دارد.

این میدان تنش بهبود یافته، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^* = N\bar{\sigma}^* \quad (9-1)$$

که در آن $\bar{\sigma}^*$ مقادیر گره‌ای این میدان و N توابع شکل مورد استفاده در المانها است. با استفاده از این

¹ self-equilibrating patches

² Ainsworth and Oden

میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{\sigma}^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (10-1)$$

که در رابطه بالا σ_h تنش ناشی از اجزای محدود می‌باشد. روشهای متعددی برای بازیافت تنش برای حل اجزای محدود وجود دارد. در ادامه این فصل، برخی از روشهای متعارف و شناخته شده بطور مختصر ارایه می‌شود.

۱-۲-۱- روش میانگین گیری^۱

روشی که توسط هینتن و کمپبل^۲ در سال ۱۹۷۴ برای بازیابی تنش استفاده شده است، در حال حاضر نیز در برخی نرم افزارهای اجزای محدود برای به دست آوردن یک مقدار واحد تنش در گره‌ها به کار می‌رود [۲۰].

برای آن دو روش سراسری و موضعی پیشنهاد شده است. در روش موضعی پیشنهاد شده ابتدا مقادیر تنش در نقاط گوسی به وسیله روش اجزای محدود به دست آمده و پس از آن با استفاده از برونابی در هر المان مربعی با چهار نقطه گوسی، مقادیر تنش در گره‌ها به دست می‌آید. میانگین تنش حاصل از المانهای متصل به هر گره پس از عمل برونابی به عنوان مقدار بهبود یافته آن تعریف می‌گردد و مطابق رابطه داریم:

$$\bar{\sigma}_i^* = \frac{1}{\rho_i} \sum_{\tau \in \xi_i} \sigma_h^{\tau} \Big|_{X_i} \quad (11-1)$$

که در آن σ_h^{τ} تنش محاسبه شده در المان τ در محل گره i ام بعد از عمل برونابی و ρ_i تعداد المانهای متصل به گره i ام می‌باشد. این روش با وجود سادگی و سرعت بالا در مسائل ساده که شبکه المان بندی منظم است، از کارایی قابل قبولی برخوردار می‌باشد.

¹ Averaging Method

² Hinton and Campbell

۱-۲-۲- روش تصویر L_2

اودن و براچلی^۱ در سال ۱۹۷۱ روش تصویر L_2 را پیشنهاد کردند [۲۱]. این روش از اولین روشهای بازیافت تنش محسوب می‌شود. در این روش با کمینه کردن عبارت زیر :

$$\Pi = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h)^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega \quad (۱۲-۱)$$

روی دامنه حل، مقادیر گرهی میدان تنش بازیافتی به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{A}^{-1} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right) \bar{\mathbf{u}}_h \quad (۱۳-۱)$$

که در آن :

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (۱۴-۱)$$

و $\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بازیافتی و $\boldsymbol{\sigma}_h$ تنش به دست آمده از حل اجزای محدود و Ω دامنه حل می‌باشد. البته این روش کارایی محدودی داشته و با ابداع روشهای جدیدتر به ندرت از آن استفاده می‌شود.

۱-۲-۳- روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق هم گرا SPR

این روش بازیافت تنش در سال ۱۹۹۲ توسط زینکویچ و زو ابداع شد و گام بسیار بلندی در بازیافت تنش برداشته شد [۹]. امروزه این روش به عنوان یکی از بهترین و موثرترین روشها برای برآورد خطا در مسائل مهندسی بکار می‌رود. اساس این روش بر مبنای استفاده از نقاطی است که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می‌باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می‌رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می‌شود که اولین بار توسط بارلو^۲ مطرح شده است [۲].

در این روش با برازش یک میدان به صورت چند جمله‌ای با ضرایب مجهول بر روی گرادیان حاصل از

¹ Oden and Brauchli

² Barlow

روش اجزای محدود در گروه المانهای متصل به هر گره^۱، میدان گرادیان بهبود یافته تعیین می‌شود. این میدان به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\sigma_p^* = Pa \quad (15-1)$$

در روابط فوق σ_p^* تنش بهبود یافته، P مجموعه تک جمله‌ای‌های حداکثر هم درجه با توابع شکل المان و a ضرایب مجهول هستند، با کمینه کردن تابع (۱۶-۱) مقادیر مجهول مطابق رابطه (۱۷-۱) بدست می‌آید.

$$F(a) = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma_h(x_i, y_i) - p(x_i, y_i)a)^2 \quad (16-1)$$

$$a = A^{-1}b \quad (17-1)$$

در رابطه (۱۷-۱) A و b به صورت زیر تعریف می‌شوند:

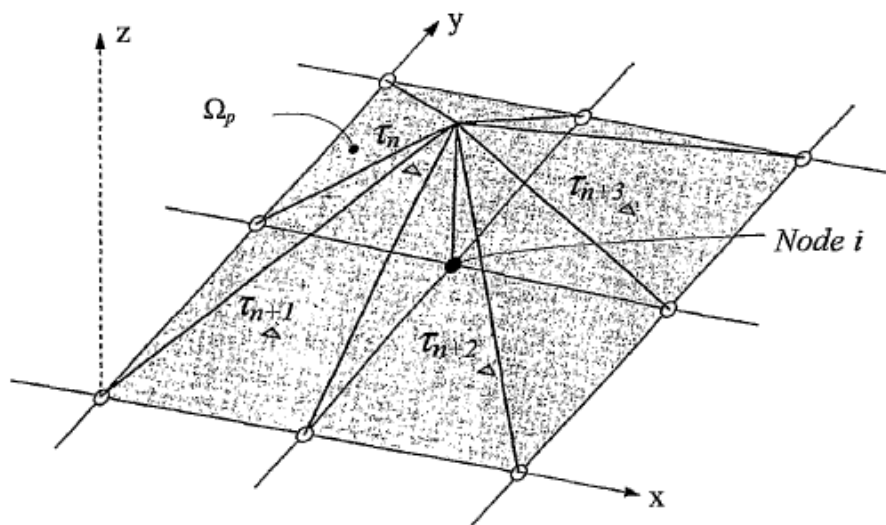
$$A = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i)P(x_i, y_i) \quad (18-1)$$

$$b = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i)\sigma_h(x_i, y_i) \quad (19-1)$$

در این روابط، σ_h تنش به دست آمده از روش اجزای محدود، x_i و y_i مختصات نقاط فوق همگرا یا نقاط بهینه نمونه گیری گرادیان در Ω_p و n تعداد المانهای موجود در هر ناحیه^۲ است.

پس از محاسبه a ، سهم گره‌های موجود در Ω_p از رابطه (۱۵-۱) به وسیله یک تابع شکل خطی که مرکز آن بروی گره i ام است، محاسبه می‌شود (شکل ۱-۲). واضح است که این سهم برای گره اصلی برابر واحد و برای سایر گره‌ها گوشه‌ای برابر صفر می‌باشد. عملیات فوق برای گره‌های میانی، یعنی گره‌هایی که در رئوس واقع نشده‌اند انجام نمی‌گیرد و سهم حاصل از عملیات به روی گره‌های گوشه‌ای برای آنها منظور می‌گردد.

¹ node
² patch



شکل ۱-۱ محاسبه سهم گره‌ها

۱-۲-۴- روش بازیافت تنش بر مبنای تعادل در زیر دامنه‌ها REP

این روش بازیافت در سال ۱۹۹۷ توسط برومند و زینکویچ ابداع شد [۱۵]. در این روش بر خلاف روش SPR احتیاج به مشخص نمودن نقاط فوق همگرا در المان نیست. اساس کار در این روش، معادل قرار دادن نیروهای عمل کننده بر یک گروه از المانها برای میدان تنش حاصل از روش اجزای محدود و میدان تنش بهبود یافته^۱ است. اگر مانند روش SPR حول گره i (واقع در گوشه هر المان) یک زیر دامنه Ω_p در نظر گرفته شود، برآیند نیروهای عمل کننده بر آن را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$F_p = \int_{\Omega_p} B^T \sigma_h d\Omega \quad (20-1)$$

در رابطه بالا، F_p برآیند اثر نیروهای باقیمانده دامنه و نیز اثر نیروهای حجمی بر این گروه از المانها است. همین کمیت را می‌توان برای میدان تنش بازیافتی تعریف نمود:

¹ Improved Stress Field

$$F_p^* = \int_{\Omega_p} B^T \sigma^* d\Omega \quad (21-1)$$

در این روش میدان تنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^* = Pa = \begin{bmatrix} p & & & \\ & p & & \\ & & \ddots & \\ & & & p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{D_\sigma} \end{Bmatrix} \quad (22-1)$$

که در آن p مجموعه تک جمله‌ایهای هم درجه با توابع شکل به کار رفته در المان و D_σ بعد میدان تنش است. به منظور برابر قراردادن دو کمیت F_p و F_p^* به صورت تقریبی تابعی همانند ۱-۲۳ تعریف شده و با کمینه کردن آن می‌توان ضرایب مجهول را محاسبه نمود.

$$\Pi = \left(\int_{\Omega_p} B^T \sigma^* d\Omega - \int_{\Omega_p} B^T \sigma_h d\Omega \right)^T \left(\int_{\Omega_p} B^T \sigma^* d\Omega - \int_{\Omega_p} B^T \sigma_h d\Omega \right) \quad (23-1)$$

اگر تابع فوق به صورت زیر نوشته شود:

$$\Pi = (Ha - F_p)^T (Ha - F_p) \quad (24-1)$$

که در آن:

$$H = \int_{\Omega_p} B^T P d\Omega \quad (25-1)$$

با کمینه کردن رابطه (۱-۲۴)، ضرایب مجهول به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$a = (H^T H)^{-1} H^T F_p \quad (26-1)$$

اما از آنجایی که گاهی تعداد معادلات نهفته در کمینه کردن رابطه (۱-۲۴) کمتر از تعداد مجهولات است، محاسبه a از رابطه فوق امکان پذیر نیست. به همین منظور، رابطه بالا به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$a = \left(H^T H + \sum_{\tau \in \rho_i} H^{\tau T} H^\tau \right)^{-1} \left(H^T F_p + \sum_{\tau \in \rho_i} H^{\tau T} F^\tau \right)_p \quad (27-1)$$

که در آن F^τ (نیروهای عمل کننده بر روی المان τ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$F^r = \int_{\Omega^r} B^T \sigma_h^r d\Omega \quad (28-1)$$

کارآیی این روش قابل مقایسه با روش قبل (استفاده از نقاط فوق همگرا) است.

۴-۱- معیارهای بیان خطا

در حالت کلی، خطا عبارت است از اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی که به روشی بدست آمده است. بنابراین خطای حل تنش در اجزای محدود بصورت زیر بدست می‌آید:

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (29-1)$$

که در آن σ میدان تنش دقیق است. اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می‌توان از میدان تنش بهبود یافته استفاده نمود که این میدان تنش جدید توسط یکی از روشهای بازیافت تنش بدست آمده است. بنابراین خطای تقریبی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{e}_\sigma = \sigma^* - \sigma_h \quad (30-1)$$

رابطهٔ اخیر مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می‌کند ضمن اینکه این مقدار ممکن است از نظر عددی، کوچکتر از صفر باشد. بنابراین برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری برای بیان آن استفاده می‌شود.

مهمترین معیارهای بیان خطا عبارتند از [۲]:

۱- معیار خطای انرژی^۱

۲- معیار خطای L_2

۴-۱-۱- مفهوم نرم

برای پی بردن به مفهوم نرم، ابتدا ضرب داخلی توابع f و g را بر روی بازه (a,b) به ازای تابع مفروض $w(x) \geq 0$ را در نظر می‌گیریم.

¹ Energy Norm

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) \cdot g(x) w(x) dx \quad (31-1)$$

با ایده گرفتن از فضای سه بعدی و رابطه ضرب داخلی با طول بردارها در آنجا، در اینجا نیز همراه با ضرب داخلی، مفهوم نرم (تعمیم مفهوم طول) بردارها را مطرح می‌کنیم [۲۲]:

نرم بردار f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (32-1)$$

۱-۴-۲- معیار انرژی

اگر مجدداً معادله دیفرانسیل (۱-۱) را در نظر بگیریم

$$Lu + b = 0 \text{ on } \Omega \quad (33-1)$$

طبق تعریف، نرم انرژی برای مسائل الاستیسیته با معادله رفتاری فوق به کمک رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\|U\| = \left[\int_{\Omega} u^T Lu d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\Omega} u^T (S^T DS) u d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (34-1)$$

$$\|U\| = \left[\int_{\Omega} (Su)^T D(Su) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (35-1)$$

$$= \left[\int_{\Omega} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (36-1)$$

$$= \left[\int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (37-1)$$

و نرم انرژی برای خطاها برای یک مسئله الاستیسیته خطی توسط روابط زیر بیان می‌شود [۲]:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} e^T L e d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\Omega} (u - u_h)^T L (u - u_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38-1)$$

$$= \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon_h)^T D (\varepsilon - \varepsilon_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (39-1)$$

$$= \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon_h)^T (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (40-1)$$

$$= \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (41-1)$$

۱-۴-۳- درصد خطای نسبی η

بیان خطا به صورت مقدار مطلق، عملاً شاخص مناسبی برای درک آن نمی‌باشد و لذا معمولاً خطا به صورت نسبتی از مقدار کل بیان می‌شود. درصد خطای نسبی نرم انرژی با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|U\|} \times 100 \% \quad (42-1)$$

از طرفی همانطور که قبلاً بحث شد، میدان تنش، کرنش و یا جابجایی به طور دقیق در دست نیست، پس در محاسبه معیار خطا بایستی از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد:

$$\|e\| \approx \|e^-\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma^* - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (43-1)$$

۱-۴-۴- معیار L_2

نرم L_2 برای خطای تغییر مکان، تنش و کرنش به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\|e_u\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (u - u_h)^T (u - u_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (44-1)$$

$$\|e_\sigma\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (45-1)$$

$$\|e_\varepsilon\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon_h)^T (\varepsilon - \varepsilon_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (46-1)$$

بنابراین نرمهای تعریف شده در روابط (۴۴-۱) و (۴۵-۱) و (۴۶-۱) به ما این اجازه را می‌دهند که توجه خود را روی کمیت مورد نظر متمرکز نمائیم.

۱-۴-۵- جذر مجموع مربعات^۱ خطا

اگر جذر مجموع مربعات خطای تنش به صورت نرمالیزه شده برای یک ناحیه Ω مورد نظر باشد مقدار آن از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد [۲].

$$\Delta\sigma = \|e_\sigma\|_{RMS} = \left[\frac{\|e_\sigma\|_{L_2}^2}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴۷-۱)$$

$$\|\sigma\|_{RMS} = \left[\frac{\int_\Omega \sigma^T \sigma d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴۸-۱)$$

خطای نسبی نرمالیزه شده تنش عبارت است از:

$$\eta = \frac{\|e_\sigma\|_{RMS}}{\|\sigma\|_{RMS}} \times 100 \% \quad (۴۹-۱)$$

هر یک از نرمهای بالا می‌توانند بر روی کل دامنه، جزئی از دامنه و یا فقط یک المان محاسبه شوند در این صورت خطای کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e\|_i^2 \quad (۵۰-۱)$$

که در آن m تعداد اجزای شبکه می‌باشد.

۱-۴-۶- شاخص تأثیر θ

برای بعضی مسائل خاص که حل دقیق مسئله موجود است می‌توان معیار خطای دقیق و تقریبی را بدست آورد. نسبت معیار خطای تقریبی به معیار خطای واقعی، بیانگر همگرایی به سمت حل واقعی

^۱Root mean square

است و معیاری برای بیان دقت محاسبه گر خطا می باشد که این نسبت شاخص تأثیر نامیده می شود.

$$\theta = \frac{\|e\|}{\|e\|} \quad (55-1)$$

هنگامی یک محاسبه گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تأثیر به سمت واحد میل نماید. در این تحقیق بیشتر از نرم خطای انرژی و شاخص تأثیر برای محاسبه خطا و مقایسه روشها و ارزیابی آنها استفاده شده است.

فصل دوم

روشهای بازیافت تنش در

اجزای محدود

۲-۱- مقدمه

با توجه به اینکه در عصر حاضر روشهای عددی به ویژه روش اجزای محدود گستردگی زیادی در علوم مختلف و صنعت پیدا کرده است، در صورتی که نتوان به نتایجی که از آن بدست می آید، اعتماد کرد، صحت تمام کارهایی که از اجزای محدود در آنها استفاده شده است با مشکل مواجه می شود و باعث تردید و سردرگمی می گردد. از اینرو در کنار فراگیری علم اجزای محدود پرداختن به روشهایی که به کمک آنها بتوان خطای موجود را تخمین زد و نیز میزان آنرا کاهش داد ضروری به نظر می رسد.

با توجه به قدمت اجزای محدود نسبت به روش ایزوژئومتری که می توان از روشهای تخمین خطا و بازیافت اجزای محدود استفاده نموده و روشهای مناسب را جهت پیاده سازی در روش تحلیل ایزوژئومتریک انتخاب نمود.

در این فصل به مطالعه برخی از روشهای مرسوم بازیافت تنش خواهیم پرداخت. سپس کارآیی روشها را با هم مقایسه نموده و یک روش جهت توسعه در محیط تحلیل ایزوژئومتریک انتخاب می گردد. دو روش بازیافت درونیابی مینیمم مربعات متحرک^۱ (MLSI) و روش لی و پارک (LP) بعنوان روشهای بازیافت معرفی شده و مقایسه با جزئیات میان سه روش بازیافت توسط نقاط فوق همگرا (SPR)، بازیافت توسط تعادل ناحیه محلی (REP) و روش بازیافت LP انجام می شود.

هدف از این مقایسه تایید کارآیی روش LP در اجزای محدود و انتخاب آن بعنوان روش مناسب جهت توسعه در تحلیل ایزوژئومتریک می باشد.

^۱Moving least square interpolants (MLSI)

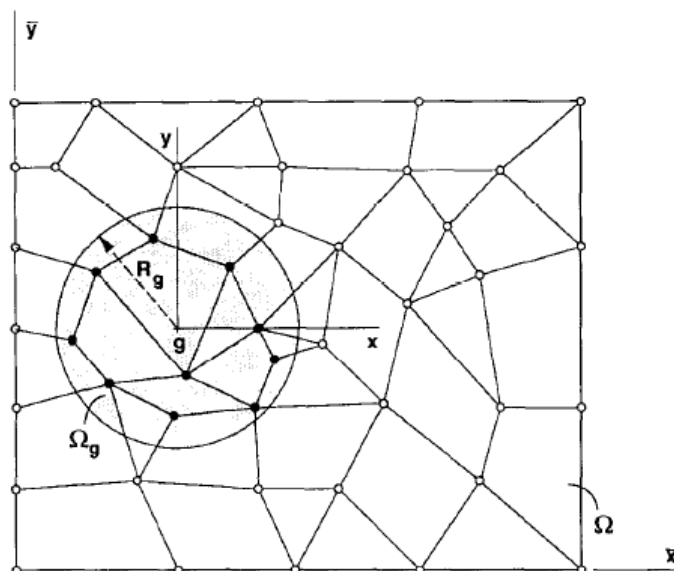
۲-۲- روش بازیافت درونیابی مینیمم مربعات متحرک (MLSI)

۲-۲-۱- معرفی

روش مینیمم مربعات متحرک یک تکنیک ساده و دقیق به منظور بازیافت تغییرمکان و مشتقات آن مانند کرنش می‌باشد. این تکنیک مبتنی بر درونیابی محلی با استفاده از تغییر مکانهای گرهی می‌باشد. در بسیاری از موارد همگرایی کرنش در آن حاصل می‌گردد. تجربیات و آزمونهای عددی بر روی روش مینیمم مربعات متحرک در مسایل حوزه های مختلف کارآیی آن را تایید می‌نمایند. برای سالهای زیادی برای هموار کردن شکستگی در آنالیز تنش بطور گسترده از تکنیک های میانگین گیری استفاده می‌گردید، همانند روش هینتن و کامبل [۴] و تصویر عمومی L_2 که توسط ادن و براکلی ارائه شد [۵]. بعد از آن زینکوویچ و زو تکنیکی ارائه دادند که در آن بازیافت تنش و کرنش توسط انطباق چندجمله‌ایها در ناحیه های محلی بوسیله نقاط فوق همگرا صورت می‌پذیرفت [۹]. درونیابی مینیمم مربعات متحرک، به منظور انطباق میدان تغییرمکان محلی بر مش بندی اجزای محدود می‌باشد. کرنشها از گرادیان مقادیر درونیابی شده تغییر مکان بدست می‌آیند [۲۳].

۲-۲-۲- روش بازیافت

به منظور شرح روش، مسئله ای با میدان Ω و مرز Γ را در نظر می‌گیریم. گسسته سازی توسط روشهای اجزا محدود انجام گرفته است. یک مش فرضی همانند شکل (۱-۲) در نظر گرفته و در آن سیستم مختصات عمومی با (\bar{x}, \bar{y}) مشخص شده است. برای محاسبه مشتق یک ناحیه محلی Ω_g با مرکز \bar{x}_g و شعاع دامنه R_g در نظر می‌گیریم، که مختصات محلی (x, y) همانند شکل (۱-۲) تعریف شده است.



شکل ۱-۲ ناحیه محلی مشخص شده بمنظور محاسبه مشتق

$u^*(x)$ تغییر مکان درونیابی شده در دامنه می‌باشد. اساس روش مینیمم مربعات متحرک انطباق توسط مینیمم مربعات وزن دار بر طبق رابطه (۱-۲) می‌باشد.

$$u_i^*(x) = P(x)a_i(x) \quad (۱-۲)$$

$P(x)$: جملات چند جمله ایی و a : شامل ضرایبی وابسته به x می‌باشد. برای مثال در حالت خطی رابطه (۲-۲) و در حالت درجه دو در رابطه (۳-۲)، ماتریسهای P و a نشان داده شده است.

$$P = [1 \quad x \quad y \quad xy] \quad , a_i^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]_i \quad (۲-۲)$$

$$P = [1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2] \quad , a_i^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6]_i \quad (۳-۲)$$

اندیس i در درایه های ماتریس a شماره ناحیه ایی است که تغییر مکان آن در حل استفاده شده است. استفاده از مینیمم مربعات وزن دار در بدست آوردن ضرایب a ، رابطه (۴-۲) را نتیجه می‌دهد، که در آن N تعداد گره ها در ناحیه محلی Ω_g و $w(x)$ تابع وزن می‌باشد.

$$S(a_i(x)) = \sum_{i=1}^N w(x_i)(P(x_i)a_i(x) - u_{ii}^h)^2 \quad (۴-۲)$$

$u_{ii}^h(x)$ تغییر مکان جزء i در گره I بوده و تمام $u_{ii}^h(x)$ در ناحیه محلی Ω_g می‌باشند. تابع وزن می‌بایست تابعی مثبت باشد، که مقدار ماکزیمم در مرکز \bar{x}_g رخ می‌دهد و با فاصله گرفتن از مرکز

\bar{x}_g بطور یکنواخت کاهش می‌یابد. به طور مثال در این مطالعه تابع وزنی همانند رابطه (۲-۵) در نظر گرفته شده است.

$$w(x) = e^{-c^2[(x/x_m)^2 + (y/y_m)^2]} \quad (۲-۵)$$

که در آن $x_m = \max |x_I|$ ، $y_m = \max |y_I|$ و $x_I, y_I (I=1, \dots, N)$ مختصات گره در ناحیه محلی می‌باشد. ضریب c در رابطه تابع وزن سرعت کاهش آن را کنترل می‌کند، که در این مسئله $c=3$ در نظر گرفته شده است.

با مینیمم نمودن تابع $S(a_i(x))$ مقادیر $a_i(x)$ از رابطه (۲-۶) تعیین می‌گردد.

$$a_i(x) = A^{-1}(x)b_i(x) \quad (۲-۶)$$

که در آن:

$$A = \sum_{i=1}^N w(x_I)P^T(x_I)P(x_I), \quad b_i(x) = \sum_{i=1}^N w(x_I)P^T(x_I)u_{il}^h \quad (۲-۷)$$

رتبه ماتریس A در رابطه (۲-۷) وابسته به تعداد گره‌های موجود در ناحیه محلی می‌باشد. شرط داشتن جواب برای ماتریس A وجود حداقل تعداد گره در ناحیه محلی به اندازه N_c (تعداد ضرایب $a_i(x)$) می‌باشد. هر چند شرط بالا برای داشتن معکوس ماتریس A لازم می‌باشد اما کافی نیست، زیرا ممکن است، گره‌ها در یک امتداد قرار گرفته باشند. برای حالت خطی و درجه دو N_c بترتیب ۴ و ۶ می‌باشد. لازم بذکر می‌باشد در محاسبات مشتق از وابستگی a به x با توجه به تاثیر ناچیز آن صرف نظر شده است.

در حل بالا محدودیتی در انتخاب ناحیه محلی و مرکز آن وجود ندارد. حال با مشتق گیری از u بدست آمده، همانند تحلیل اجزای محدود مطابق رابطه ۲-۹ کرنش تعیین می‌گردد.

$$\varepsilon^*(x) = Du^*(x) \quad ۲-۹$$

در رابطه بالا D اپراتور دیفراسیل و $u^*(x)$ تغییر مکان درونیایی شده می‌باشد.

برای روشن شدن روش مینیمم مربعات متحرک در ادامه چند مسئله را بررسی می‌نماییم.

۲-۲-۳- مثال های عددی:

در این بخش مقایسه ای مابین کرنش بدست آمده از تحلیل اجزای محدود $\varepsilon^h(x)$ و کرنش حاصل از درونیابی مینیمم مربعات متحرک $\varepsilon^*(x)$ انجام می‌گردد.

در همه مثالها R_g توسط ضریب α و اندازه المانی که \bar{x}_g در آن قرار دارد (h) مطابق رابطه (۲-۱۰) تعریف شده است.

$$R_g = \alpha h \quad (۲-۱۰)$$

ضرب α در رابطه (۲-۱۰) کنترل کران پایین به منظور جلوگیری از یکتایی ماتریس A و کنترل کران بالا در حفظ فاصله از مرکز ناحیه را بر عهده دارد. بدین منظور در مسائل مطرح شده در این بخش $\alpha = 2$ در نظر گرفته شده است.

خطای المان i در ناحیه محلی توسط روابط (۲-۱۱) به روش تصویر L_2 بترتیب برای تحلیل اجزای محدود و حل بازیافت تعیین می‌شود.

$$e_i^h = \left[\int_{\Omega_i} (\varepsilon - \varepsilon^h)^T (\varepsilon - \varepsilon^h) d\Omega \right]^{1/2} \quad e_i^* = \left[\int_{\Omega_i} (\varepsilon - \varepsilon^*)^T (\varepsilon - \varepsilon^*) d\Omega \right]^{1/2} \quad (۲-۱۱)$$

که ε مربوط به حل دقیق مسئله می‌باشد.

خطای کلی مشبندی با تعداد المان M طبق رابطه های (۲-۱۱) و (۳-۱۲) بترتیب برای تحلیل اجزای محدود و حل بازیافت تعیین می‌گردد.

$$e^* = \left[\sum_{i=1}^M (e_i^*)^2 \right]^{1/2} \quad e^h = \left[\sum_{i=1}^M (e_i^h)^2 \right]^{1/2} \quad (۲-۱۲)$$

با توجه به اینکه در تکنیک بازیافت مینیمم مربعات متحرک، درونیابی تغییر مکان صورت می‌پذیرد، نرم خطا L_2 طبق روابط (۲-۱۳) و (۲-۱۴) بترتیب برای تحلیل اجزای محدود و حل بازیافت تعیین شده است.

$$\bar{e}_i^h = \left[\int_{\Omega_i} (u - u^h)^T (u - u^h) d\Omega \right]^{1/2} \quad \bar{e}^h = \left[\sum_{i=1}^M (\bar{e}_i^h)^2 \right]^{1/2} \quad (۲-۱۳)$$

$$\bar{e}_i^* = \left[\int_{\Omega_i} (u - u^*)^T (u - u^*) d\Omega \right]^{1/2} \quad \bar{e}^* = \left[\sum_{i=1}^M (\bar{e}_i^*)^2 \right]^{1/2} \quad (14-2)$$

در ادامه برای مقایسه روشها از علائم ذیل استفاده می‌گردد.

¹FE: تحلیل اجزای محدود ZZ: روش بازیافت توسط نقاط فوق همگرا زینکوویچ و زو
²AN: برای حل دقیق تجربی DI³: روش بازیافت توسط درونیابی مینیمم مربعات متحرک

۲-۳-۱- مسئله تیر یک بعدی

تیری بطول ۳ متر در راستای X با معادله نشان داده شده در رابطه (۲-۱۵) را در نظر می‌گیریم، که شرایط مرزی آن همانند رابطه (۲-۱۶) می‌باشد.

$$\frac{d^2u}{dx^2} + b = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (15-3)$$

$$u(0) = 0, u(L) = 52 \quad \text{on } \Gamma \quad (16-3)$$

حل دقیق مسئله مطابق رابطه (۲-۱۷) می‌باشد.

$$u(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{34}{3}x \quad (17-2)$$

در این مسئله $D = [d/dx]$, $u = [u]$ را در نظر گرفته شده است.

چند جمله‌ای استفاده شده در مینیمم مربعات متحرک بعلت یک بعدی بودن مسئله همانگونه که در رابطه (۲-۱۸) نشان داده شده است، وابسته به X می‌باشد.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \quad (18-2)$$

سه حالت مشبندی با تعداد اعضای ۳، ۶ و ۱۲ استفاده شده است. همگرایی و سرعت همگرایی برای دو حالت بازیافت و اجزای محدود را در شکل (۲-۲) مشاهده می‌نمایید. کرنش های بدست آمده از

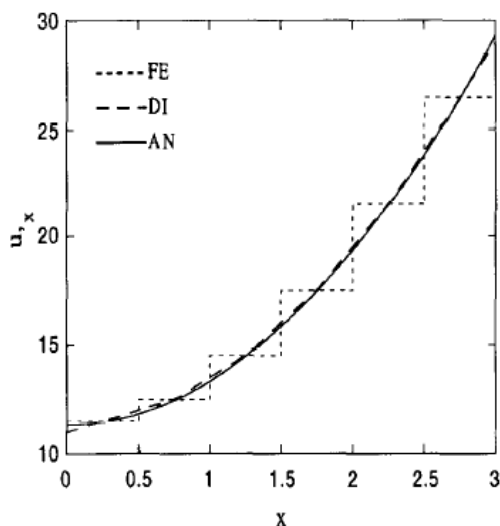
¹Finite element

²Analytical

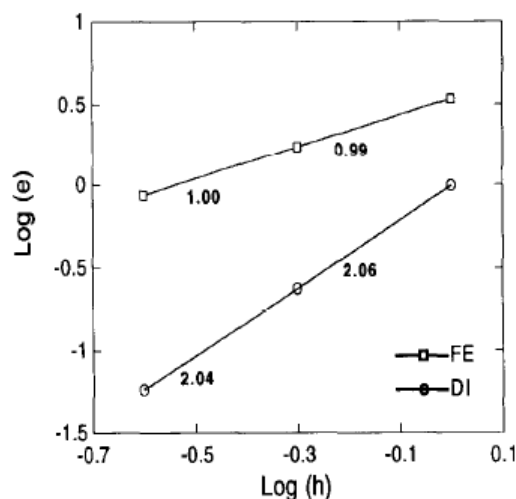
³Displacement interpolation

روش DI از دقت بالاتری نسبت به روش FE برخوردار بوده و سرعت همگرایی آن نیز یک درجه بالاتر می باشد.

شکل (۲-۳) نیز نمودار کرنش برای حالت مش بندی با ۶ المان را نشان می دهد. همانگونه که در شکل ملاحظه می نمایید، کرنش DI حتی در نقاط مرزی نیز بسیار به حل دقیق نزدیک می باشد.



شکل ۲-۳ مقایسه کرنش در طول تیر



شکل ۲-۲ سرعت همگرایی روشها

۲-۲-۳-۲- مسئله لاپلاس

معادله دو بعدی لاپلاس با میدان مربعی واحد مطابق رابطه (۲-۱۹) را در نظر گرفته و تنها شرط مرزی مسئله در رابطه (۲-۲۰) آورده شده است.

$$u_{,xx} + u_{,yy} + b = 0 \quad \text{on } \Omega \quad (۲-۱۹)$$

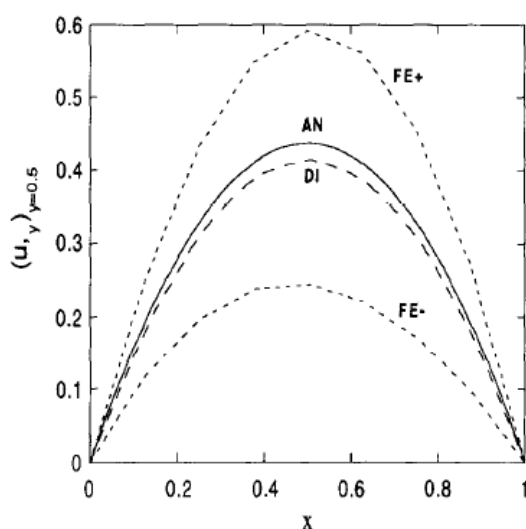
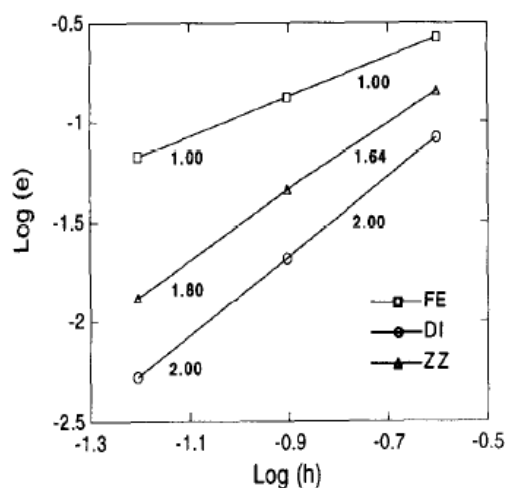
$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (۲-۲۰)$$

حل دقیق معادله لاپلاس همانند رابطه (۲-۲۱) می باشد.

$$u(x, y) = x(1-x)y(1-y)(1+2x+7y) \quad (۲-۲۱)$$

در این مسئله دو بعدی برای هر گره یک درجه آزادی در نظر گرفته شده است. مشها شامل المان چهارگرمی چهارضلعی می باشند. سه مش منظم با تعداد المان ۴، ۸ و ۱۶ در دو جهت بکار رفته است.

چند جمله ایی $P = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2]$ برای حل استفاده شده است. در شکل (۲-۴) دقت و سرعت روش بازیافت با روش ZZ مقایسه شده است. شکل (۲-۴) نمودار کرنش در جهت y در امتداد $y=0.5$ برای مش با h المان نشان می‌دهد. با توجه به گسسته بودن مشتق در اجزای محدود، مقدار مشتق در مرز المان گره داخلی با FE^- برای مقدار کمتر از $y=0.5$ و FE^+ برای مقدار بیشتر از $y=0.5$ در شکل مشخص می‌باشد. همانگونه که در شکل ملاحظه می‌نمایید، مقادیر DI پیوسته و بسیار نزدیک به حل دقیق می‌باشند.

شکل ۲-۵ مقایسه کرنش در جهت y 

شکل ۲-۴ سرعت همگرایی روشها

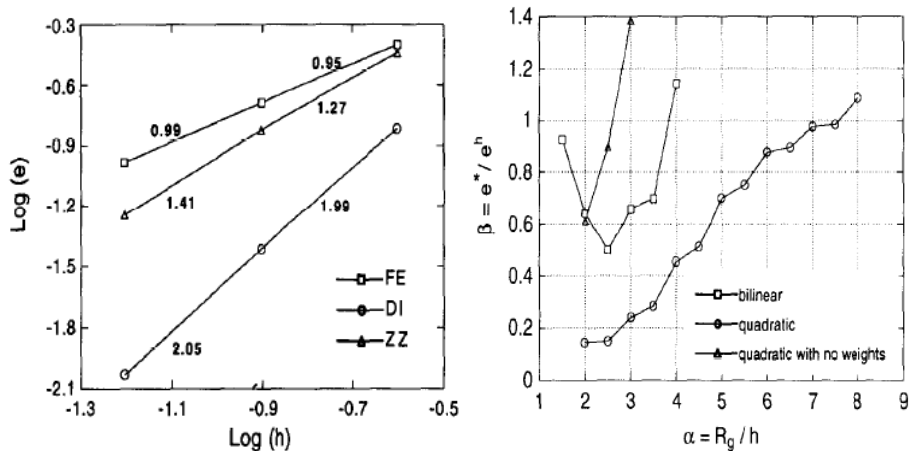
در ادامه برای حالت مش‌بندی با h المان تاثیر ضریب α در روش بازیافت بررسی می‌شود. بدین منظور پارامتر β را مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$\beta = \frac{e^*}{e^h} \quad (2-22)$$

هر چه مقدار پارامتر β به ۱ نزدیک باشد، نشان از ضعف روش بازیافت می‌باشد. شکل (۲-۶) مقدار پارامتر β را برای حالت‌های مختلف چندجمله‌ای نشان می‌دهد. در حالت $\alpha = 2.5$ به حالت بهینه رسیده و مقدار $\beta = 0.5$ خواهد شد.

در حالت استفاده از P درجه دوم سرعت همگرایی در شکل (۲-۷) نشان داده شده است. بهبود سرعت

همگرایی DI نسبت به دو روش دیگر قابل ملاحظه می باشد.



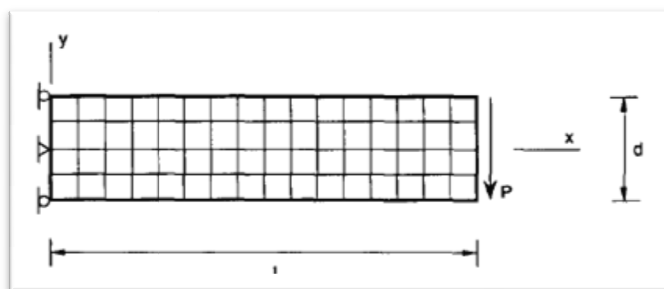
شکل ۲-۷ مقایسه سرعت همگرایی در حالت P درجه دو

شکل ۲-۶ میزان وابستگی بهبود روش به ضریب alpha

۲-۳-۳-۲ تیر کنسول

تیر ایزوتروپیک با مدول الاستیسیته $E = 3 \times 10^7$ ، ضریب پواسون $\nu = 0.3$ ، طول $L=48$ ، عمق $d=12$ و بار وارده P در شکل (۲-۸) را ملاحظه می نمایید. در این مسئله بردار تغییر مکان، اپراتور دیفرانسیل و بردار کرنش مطابق رابطه (۲-۲۳) می باشد.

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (2-23)$$



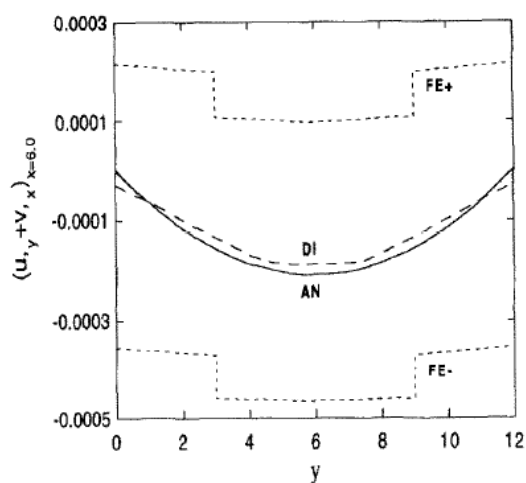
شکل ۲-۸ مشخصات تیر با مش 4×16 المان چهارگره‌ای

حل دقیق میدان تنش مسئله در زیر نشان داده شده است.

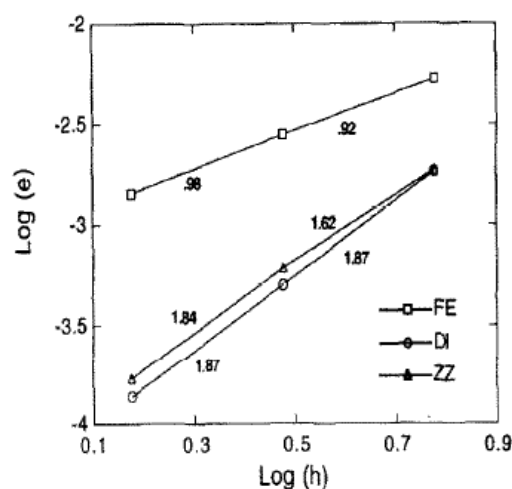
$$\sigma_{xx} = -\frac{12P\gamma}{d^3}(L-x), \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = \frac{6P}{d^3}\left(\frac{1}{4}d^2 - y^2\right) \quad (2-24)$$

در تحلیل اجزای محدود می‌بایست ویژگی المان بگونه‌ای باشد که بتواند شرایط مرزی را ارضا نماید. در این مسئله P با درجه دو و سه نوع مش‌بندی 2×8 ، 4×16 ، 8×32 با المان چهارگره‌ی بطور شبکه مربعی استفاده شده است. شکل (۲-۹) نشان می‌دهد، که سرعت همگرایی روش DI بهتر از FE و مقدار ناچیزی از روش ZZ بهتر می‌باشد. در شکل (۲-۱۰) کرنش برشی برای حالت 4×16 در عمق $x=6$ نشان داده شده است. کرنش برشی روش DI حتی در سطح آزاد بسیار نزدیک به حل دقیق می‌باشد.

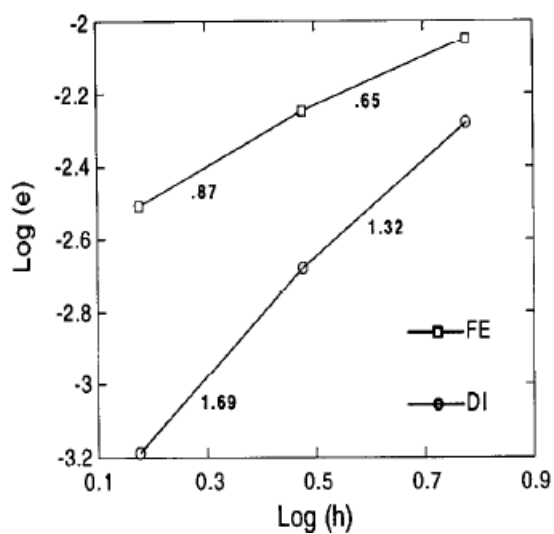
المان مثلثی خطی نیز در حل استفاده می‌گردد، که با تبدیل هر المان چهارگره‌ی به دو المان مثلثی صورت می‌پذیرد. با استفاده از P درجه دوم سرعت همگرایی در شکل (۲-۱۱) نشان داده شده است. دقت و سرعت همگرایی DI نسبت به روش FE قابل ملاحظه می‌باشد.



شکل ۲-۱۰ کرنش برشی در $x=6$ برای حالت ۲۴ المان



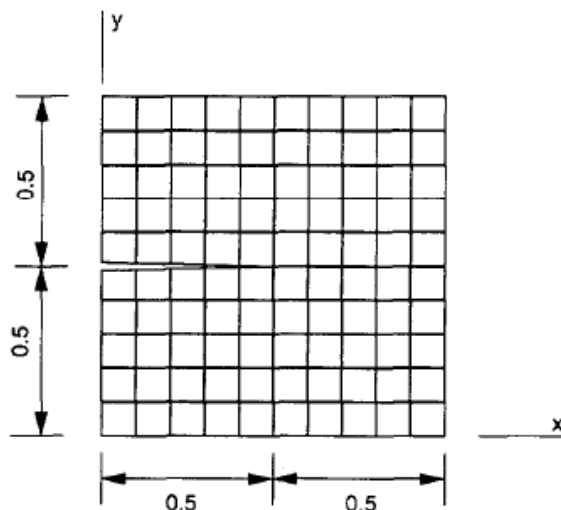
شکل ۲-۹ سرعت همگرایی با المان چهارگره‌ی



شکل ۲-۱۱ سرعت همگرایی و دقت با المان مثلثی

۲-۲-۳-۴- مسئله ترک

مسئله ترک با فرض الاستیک خطی در دامنه مربعی $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ در نظر گرفته شده است. گسسته‌سازی همانگونه که در شکل (۲-۱۲) مشاهده می‌گردد، بصورت یکنواخت 10×10 انجام گرفته است.



شکل ۲-۱۲ مشبندی ناحیه نزدیک ترک با المان چهارگرهی

با استفاده از نیروهای معادل گرهی در مرزها و استفاده از مد I در تحلیل ترک، نتایج حل تجربی و دقیق آن در سیستم مختصات قطبی (r, θ) با مرکز $(x = 0.5, y = 0.5)$ در رابطه (۲۵-۲) آورده شده است.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma_{yy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right), \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2},\end{aligned}\quad (25-2)$$

تابع درونیایی مطابق روابط (۲۶-۲) می باشد،

$$P = [1 \quad x \quad y \quad xy \quad f(r, \theta)],$$

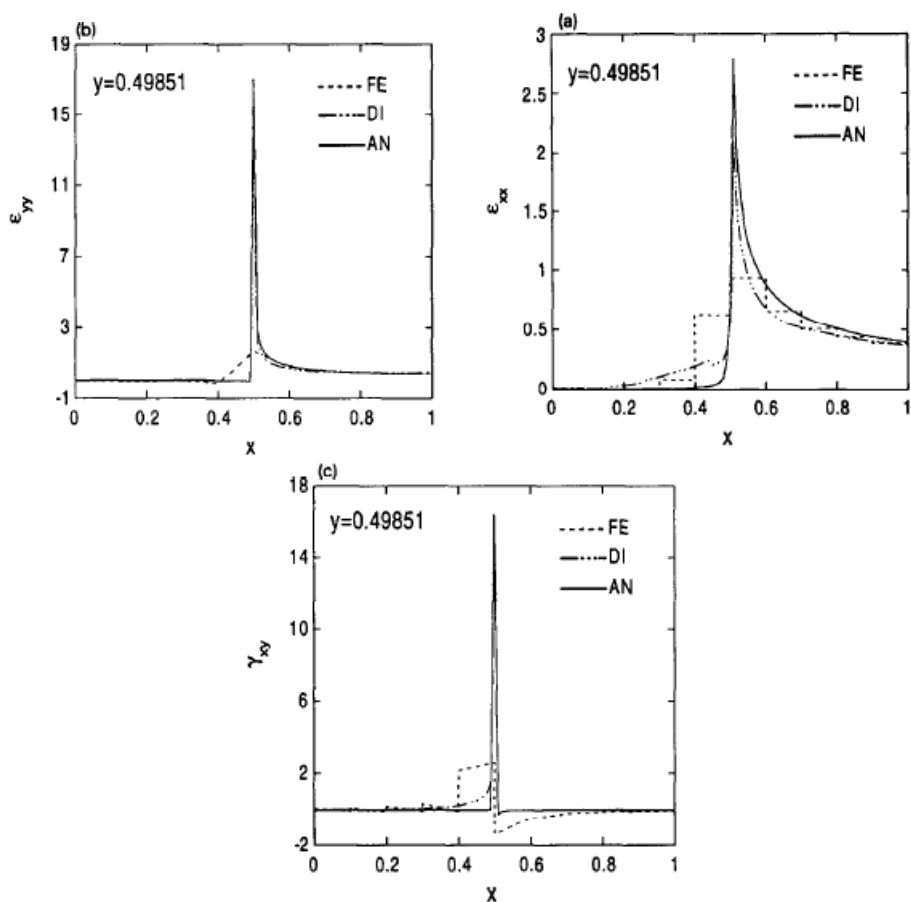
$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \left[\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{for } u \quad (26-2)$$

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \left[\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{for } v$$

که در آن $\mu = E / 2(1 + \nu)$ و برای حالت تنش مسطح $\kappa = (3 - 4\nu) / (1 + \nu)$ می باشد. مشبندی

استفاده شده در حل مسئله همانند شکل (۲-۱۲) می‌باشد، و مقادیر $\nu = 0.3$ و $\alpha = 5.5, E = 1.0$ برای پارامترها در نظر گرفته شده است.

مولفه های کرنش سه روش در شکل (۲-۱۳) نشان داده شده است. از آنجا که در حل دقیق مسئله ترک یکتایی رخ می‌دهد، بمنظور جلوگیری از آن $y = 0.499$ بجای $y = 0.5$ در حل استفاده شده است. کرنش بازیافت از تطابق خوبی با حل دقیق در تمام دامنه برخوردار می‌باشد.



شکل ۲-۱۳ نمودار سه مولفه کرنش برای سه روش FE, DI, AN

۲-۳- روش بازیافت تنش LP

۲-۳-۱- معرفی

در این روش بازیافت از مقادیر تنش تحلیل اجزای محدود در گره‌ها استفاده می‌شود. در روش حاضر میدان تنش بازیافتی با استفاده از تابع مینیمم مربعات در نقطه‌های گسسته فوق همگرا و استفاده از

باقیمانده معادله تعادل در روش کار مجازی در هر ناحیه تعیین می‌گردد. در واقع تنش اجزا محدود گسسته می‌باشد و در مرزها دقت بالایی ندارد. در اکثر موارد این ضعف به این دلیل است که اتصال قسمتهای مختلف توسط المانهای مرزی رخ می‌دهد و خطا در محاسبات وارد می‌نماید که روش ارایه شده در این بخش تا حدودی آنرا کاهش می‌دهد.

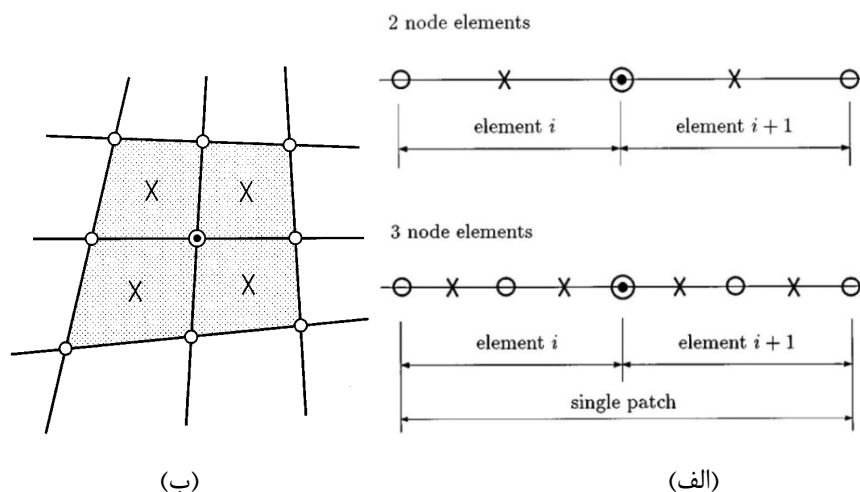
در این بخش روشی با نام LP ارایه می‌گردد، که در سال ۱۹۹۷ توسط لی و همکاران پیشنهاد شده است [۱۷]. در ادامه این بخش بعد از معرفی روش کارآیی آن در مقایسه با روشهای ZZ و WA ارزیابی شده است. هر چند در روش WA می‌توان برای هر ناحیه اختیاری معادلات تعادل را به روش کار مجازی تشکیل داد اما نتایج صحت و کارآیی روش LP را نسبت به WA نشان می‌دهد [۲۴].

۲-۳-۲- روش بازیافت تنش LP

تنشهای اجزای محدود در برخی نقاط که به نقاط فوق همگرا معروف هستند از دقت بالایی برخوردار هستند. همانطور که اشاره شد، در روش ZZ بازیافت تنش در ناحیه‌هایی با همپوشانی که توسط نقاط فوق همگرا ساخته شده تعیین می‌شود. ناحیه‌های محلی با استفاده از نقاط فوق همگرا واقع در اطراف آن ساخته می‌شوند. بعنوان مثال در شکل (۲-۱۴) برای دو المان خطی و چهار ضلعی دوبعدی نقاط گره‌ای، نقاط گاوس و نقاط فوق همگرا به منظور ساخت ناحیه مشخص شده است. تنش بازیافت همانند رابطه زیر تعریف می‌گردد.

$$\sigma_p = Pa \quad (2-27)$$

در رابطه بالا P تابع چندجمله‌ای با درجه مشخص و a بردار ضرایب که مجهول می‌باشد. در حالت یک بعدی که تنش دارای یک مولفه می‌باشد، P مانند رابطه (۲-۲۸) و در حالت دو بعدی که دارای سه مولفه تنش می‌باشد، همانند رابطه (۲-۲۹) خواهد بود.



شکل ۱۴-۲ نمایش نقاط در المان (نقطه گره‌ایی O، نقطه گاوس X، نقطه اتصال ناحیه \odot) (الف) ناحیه المان در حالت یک بعدی (ب) ۲ ناحیه المان چهارگره‌ی

$$P = [1, x, x^2, x^3, \dots, x^p] \quad (28-2)$$

$$P = \begin{bmatrix} \bar{p} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{p} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{p} \end{bmatrix} \quad (29-2)$$

که در آن \bar{P} برای حالت دو بعدی برابر مقدار ذیل می‌باشد.

$$\bar{P} = [1, x, y, x^2, xy, \dots, x^p, x^{p-1}y, \dots, xy^{p-1}, y^p]$$

بهتر است با انتخاب میدان تنش مناسب از تمام جملات P استفاده شود.

ضرایب مجهول بردار a با استفاده از روش مینیمم مربعات و نوشتن تعادل در نقاط فوق همگرا و

تفاضل آن با معادله تعادل تعیین می‌شود. ابتدا با استفاده از رابطه (۳۰-۲) خطا تعیین می‌شود.

$$e_i = \sigma_p(x_i, y_i) - \sigma_h(x_i, y_i) = P(x_i, y_i) - \sigma_h(x_i, y_i) \quad (30-2)$$

در رابطه بالا σ_h تنش اجزای محدود و σ_p تنش منتسب به ناحیه و e_i خطای نقاط گسسته فوق

همگرا خواهد بود.

در حالت کلی درجات بالاتر چند جمله‌ایی نمی‌تواند معادله تعادل را ارضا نماید، به همین دلیل قید معادله تعادل به روش کار مجازی همانند رابطه (۳۱-۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$\delta \Pi = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV - \int_S \delta u^T T dS - \int_V \delta u^T f dV = 0 \quad (31-2)$$

که در آن:

$\delta \varepsilon$: بردار کرنش مجازی δu : بردار تغییر مکان مجازی f : بردار نیروی پیکره

T : بردار نیروی سطحی V : حجم S : سطح مرز

حال اگر بجای σ در معادله بالا σ_p را قرار دهیم باقیمانده معادله تعادل بدست می‌آید:

$$\delta \Pi_{residual} = \int_{V_p} \delta \varepsilon^T \sigma_p dV - \int_{S_p} \delta u^T T dS - \int_{V_p} \delta u^T f dV = 0 \quad (32-2)$$

که در آن:

$\delta \varepsilon$: بردار کرنش مجازی δu : بردار تغییر مکان مجازی f : بردار نیروی پیکره

T : بردار نیروی سطحی V_p : حجم ناحیه S_p : سطح مرز ناحیه

رابطه میان تغییر مکان مجازی و کرنش مجازی توسط روابط (۳۱-۲) مشخص می‌گردد.

$$\delta u = N \delta q_p \quad (33-2)$$

$$\delta \varepsilon = B \delta q_p$$

در روابط بالا δq_p بردار تغییر مکان مجازی گره‌ها، B ماتریس کرنش-تغییر مکان و N ماتریس تابع

شکل می‌باشد.

حال جمله‌های معادله (۳۲-۲) را جداگانه تعیین می‌نماییم:

جمله اول معادله اینگونه تعیین شده است.

$$\int_{V_p} \delta \varepsilon^T \sigma_p dV = \delta q_p^T \left(\int_{V_p} B^T P dV \right) a = \delta q_p^T C a \quad (34-2)$$

$$C = \int_{V_p} B^T P dV$$

جمله دوم و سوم معادله همانند رابطه (35-2) خواهد شد.

(35-2)

$$\int_{S_p} \delta u^T T dS + \int_{V_p} \delta u^T f dV = \delta q_p^T F_p$$

$$F_p = \int_{S_p} \tilde{N}^T T dS + \int_{V_p} N^T f dV$$

که در آن:

\tilde{N} : ماتریس تابع شکل تعریف شده بر روی سطح در مرز ناحیه

F_p : بردار نیروی که از حل اجزای محدود تعیین می‌گردد.

با جایگزینی روابط (34-2) و (35-2) در عبارت باقیمانده معادله تعادل رابطه (36-2) را نتیجه می‌دهد.

$$\delta \Pi_{residual} = \delta q_p^T (C a - F_p) = \delta q_p^T R_{eq} \quad (36-2)$$

$$R_{eq} = C a - F_p$$

به منظور محاسبه ضرایب مجهول در بردار a با تعریف باقیمانده تنش e_i برای هر نقطه و تعادل

باقیمانده R_{eq} از روش مینیمم مربعات، تابع $F(a)$ همانند زیر تعریف می‌شود:

$$F(a) = \sum_{i=1}^n e_i^T e_i + \beta R_{eq}^T R_{eq} \quad (37-2)$$

$$= \sum_{i=1}^n (Pa - \sigma_h)^T (Pa - \sigma_h) + \beta (Ca - F_p)^T (Ca - F_p)$$

که در آن n تعداد نقاط نمونه برداری و β : پارامتر خطا می باشد که نسبت به روش ZZ جمله مربوط به آن اضافه شده است.

به منظور محاسبه ضرایب می بایست رابطه (۳۷-۲) مینموم گردد، بدین منظور مشتق گرفته و معادله (۳۸-۲) را نتیجه خواهد داد:

$$\frac{dF(a)}{da} = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^n P^T P + \beta C^T C \right) a = \sum_{i=1}^n P^T \sigma_h + \beta C^T F_p \quad (38-2)$$

ماتریس ضرایب a با استفاده از با روشهای حل معادله همانند روش حذفی گاوس قابل محاسبه خواهد بود. با محاسبه ماتریس ضرایب a ، با جاگذاری در رابطه (۲۷-۲) میدان تنش بازیافتی تعیین می شود.

۲-۳-۳- مثال های عددی:

چهار مثال عملی به منظور ارزیابی کارایی روش LP در مقایسه با روش ZZ انتخاب شده است. مسایل یک بعدی و دو بعدی که حل دقیق آنها موجود می باشد. المانهای خطی دو گرهی و سه گرهی برای مسئله یک بعدی و المانهای ۴ گرهی خطی برای مسئله دو بعدی در نظر گرفته شده است. پارامتر خطا برای مسائل مقدار واحد ($\beta=1$) در نظر گرفته شده است. برای مسئله دوم از نتایج روش WA نیز استفاده شده است.

۲-۳-۳-۱- مسئله یک بعدی

معادله یک بعدی با شرایط مرزی در زیر را بعنوان مثال اول بررسی می نماییم:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) + f = 0 \quad \text{on } I = I(0,1) \quad (39-2)$$

$$u(0) = 0 \quad \text{and} \quad u(1) = \bar{u}$$

با توجه به تعریف تنش رابطه (۲-۴۰) برای چهار حالت مختلف برای \bar{f} و \bar{u} چهار حل دقیق خطی، درجه دو، درجه سه و درجه چهار رابطه (۲-۴۱) نشان داده شده است.

$$\sigma = \frac{du}{dx} \quad (40-2)$$

$$\sigma_{exact} = 5x + 5$$

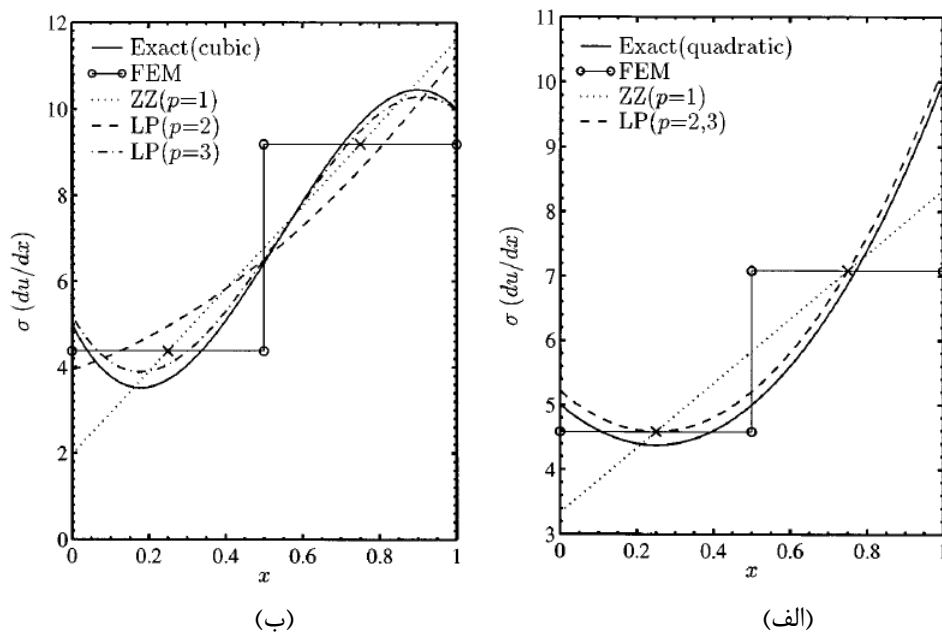
$$\sigma_{exact} = 10x^2 - 5x + 5$$

$$\sigma_{exact} = -37x^3 + 59.8x^2 - 17.8x + 5$$

$$\sigma_{exact} = -127x^4 + 236x^3 - 125x^2 + 21x + 5 \quad (41-2)$$

نتایج المان خطی:

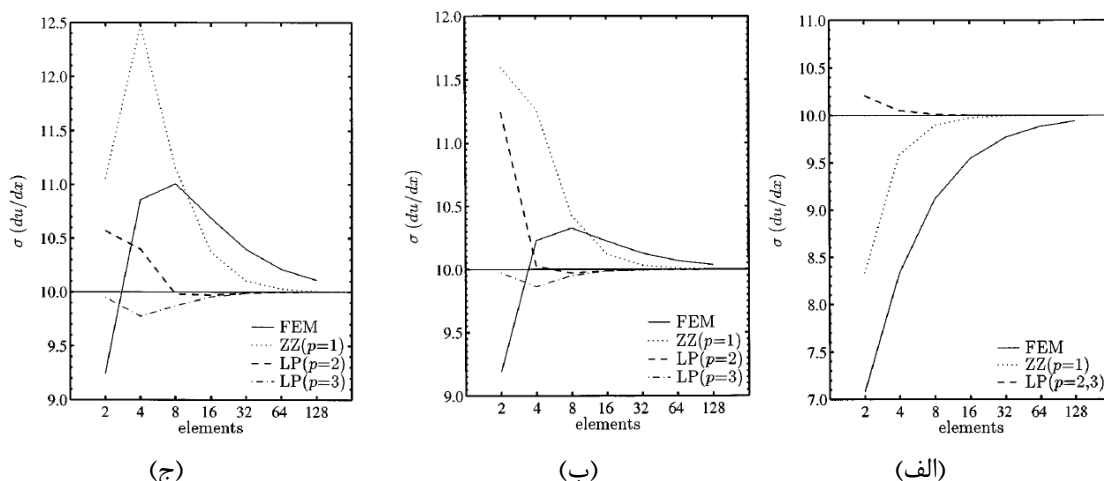
با توجه به اینکه در المان دو گرهی خطی یک نقطه فوق همگرا وجود دارد، برای حل به روش ZZ میدان تنش خطی در نظر گرفته شده است. در صورتیکه برای حل به روش LP می‌توان از چند جمله‌ای با درجه بالاتر (دو یا سه) استفاده شود. در حالت خطی روشهای LP و ZZ دارای نتایج قابل قبول می‌باشند. بدین منظور در این بخش مقایسه میان درجات دو، سه و چهار صورت گرفته است. به منظور مشاهده تفاوت میان روشهای ZZ و LP دو المان در دامنه I در نظر گرفته شده است، که از این دامنه می‌توان نتایج را به کل دامنه گسترش داد. هر دو شکل مش یکنواخت و غیریکنواخت در حل استفاده شده است. برای حالت غیر یکنواخت طول المان اول دو برابر المان دوم می‌باشد. شکلهای (۲-۱۵) توزیع تنش روش های ZZ و LP در حالت مش یکنواخت به همراه توزیع تنش اجزای محدود در حالت درجه دو و سه را نشان می‌دهند.



شکل ۲-۱۵ توزیع تنش الف) در حالت درجه ۲ ب) در حالت درجه ۳

در روش LP با توجه به اینکه چندجمله‌ای با درجات بالاتر از روش ZZ انتخاب می‌شود، نتایج بهتری بدست می‌آید. برای حل درجه دو با توجه به تفاوت اندک میان حالت $p=2$ و $p=3$ یکی از آنها نمایش داده شده است. با توجه به اینکه در حالت مش غیریکنواخت نیز همین نتایج بدست می‌آید، از نمایش آنها صرف‌نظر شده است.

شکل (۲-۱۶) سرعت همگرایی بازیافت تنش در نقطه مرزی $x=1$ در حالت ریز نمودن مش‌ها برای حل دقیق درجه دو، سه و چهار را نشان می‌دهد. با توجه به شکلها سرعت همگرایی در روش LP بیشتر از روش ZZ می‌باشد، لازم بذکر می‌باشد که اندازه ریز نمودن مش‌ها برای هر سه حالت برابر می‌باشد. در حل دقیق درجه دو تفاوت زیادی مابین حالت‌های $p=2$ و $p=3$ دیده نمی‌شود.



شکل ۲-۱۶ سرعت همگرایی در $x=1$ (الف) در حالت درجه ۲ (ب) در حالت درجه ۳ (ج) در حالت درجه ۴

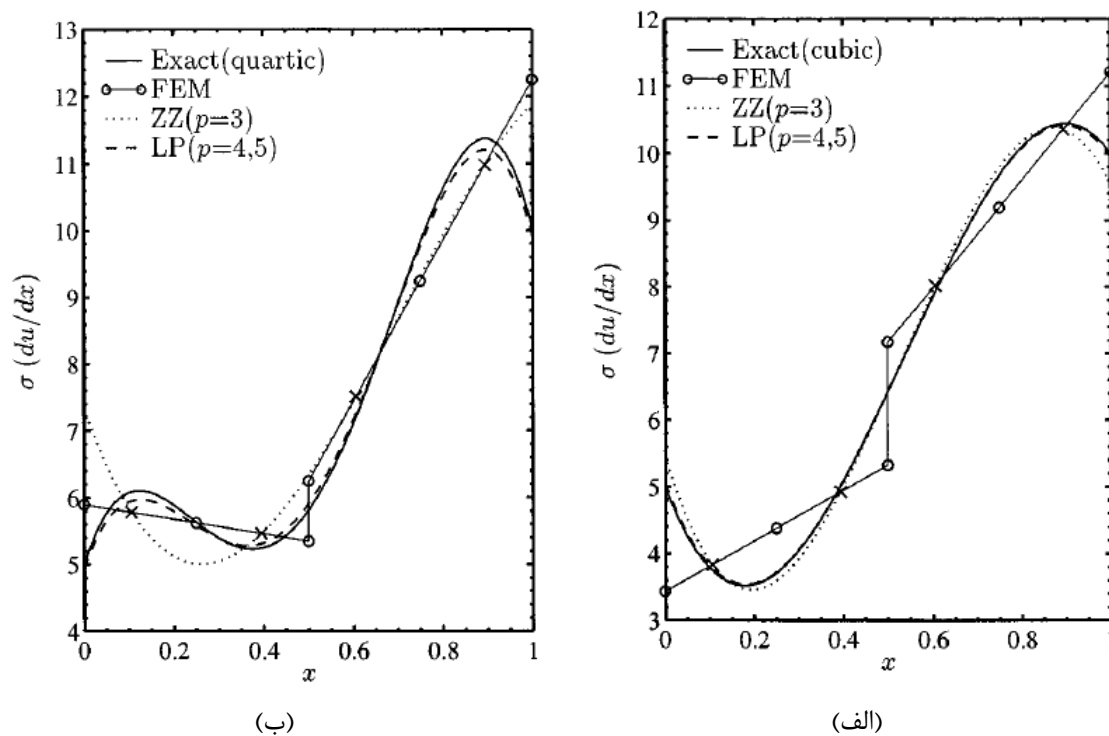
نتایج المان درجه دو

در این حالت دو نقطه فوق همگرا در المان وجود دارد. مطابق روش ZZ می‌توان یک چند جمله‌ای درجه سه بر روی المان در نظر گرفت. با توجه به اینکه در روش LP می‌توان از درجات بالاتر استفاده نمود، در این حالت درجه سه و چهار برای میدان تنش استفاده می‌شود. در هر دو روش در استفاده از حل خطی و درجه دو نتایج قابل قبول می‌باشد. به همین دلیل در اینجا درجات سه و چهار بررسی شده است.

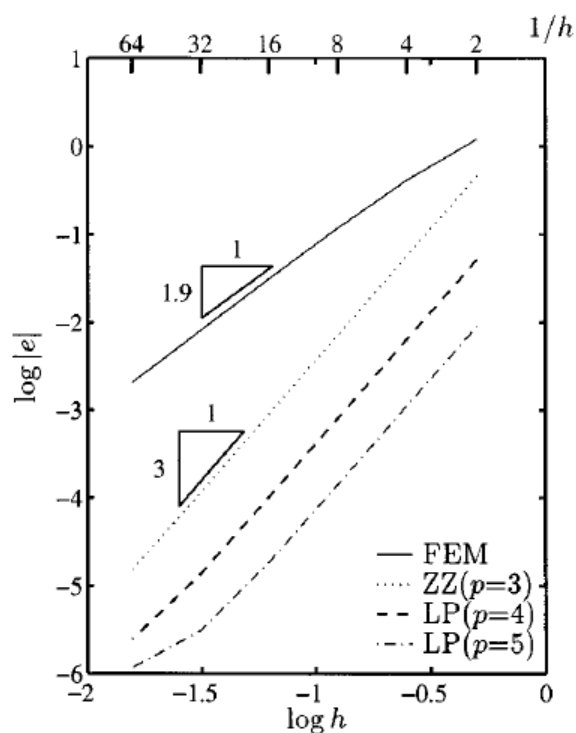
تفاوت توزیع تنش بازیافت با حل دقیق و تحلیل اجزای محدود در روشهای LP و ZZ برای المان دو بعدی در شکل (۲-۱۷) نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود نتایج روش LP بهتر از روش ZZ می‌باشد. در روش LP تفاوت چندانی میان $P=4$ و $p=5$ وجود ندارد.

شکل (۲-۱۸) سرعت همگرایی در حالت حل دقیق درجه ۳، در یک نقطه مرزی و شکل (۲-۱۹) سرعت همگرایی در حالت حل دقیق درجه دو در دو نقطه را نشان می‌دهد.

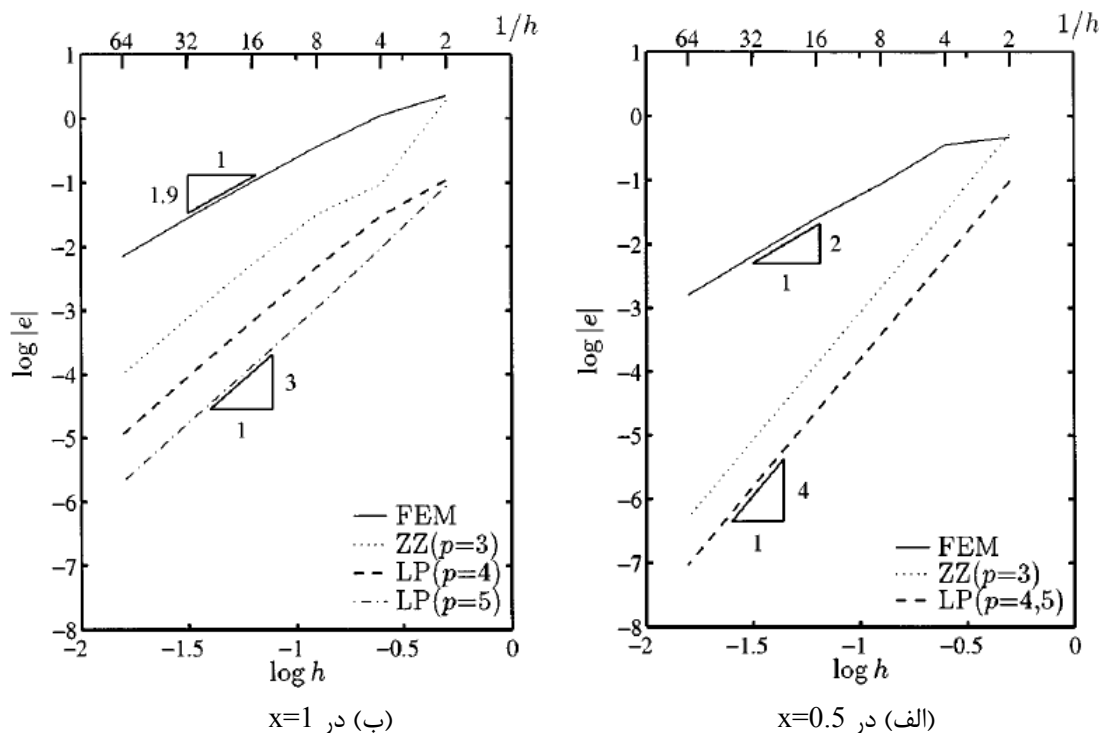
همانگونه در شکلها مشخص می‌باشد میزان خطا در روش LP کمتر می‌باشد. بعلاوه با بالا رفتن درجه چندجمله‌ای میزان خطا کاهش می‌یابد، که در حالت درجه چهار نسبت به درجه پنج مشخص می‌باشد.



شکل ۱۷-۲ توزیع تنش بازیافتی و تحلیل اجزای محدود (الف) در حالت حل دقیق درجه ۳ (ب) در حالت حل دقیق درجه ۲



شکل ۱۸-۲ سرعت همگرایی بازیافت تنش برای المان درجه دو در گره $x=1$ برای حالت حل دقیق درجه ۳



شکل ۲-۱۹ سرعت همگرایی بازیافت تنش المان درجه دو برای حالت استفاده از حل دقیق درجه دو

۲-۳-۳-۲ مسئله دو بعدی

مسئله دو بعدی با معادله تعادل و تابع تنش ایری را بعنوان مسئله دوم در دامنه $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ بررسی می‌نماییم. تابع تنش ایری در رابطه (۲-۴۰) آورده شده است.

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (۲-۴۲)$$

شرایط مرزی در دامنه مربع واحد را در ذیل ملاحظه می‌نمایید:

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} \quad \text{along } x = 0, y = 0$$

$$\sigma_{xx} = \bar{\sigma}_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \bar{\sigma}_{yy}, \quad \sigma_{xy} = \bar{\sigma}_{xy} \quad \text{along } x = 1, y = 1 \quad (۲-۴۳)$$

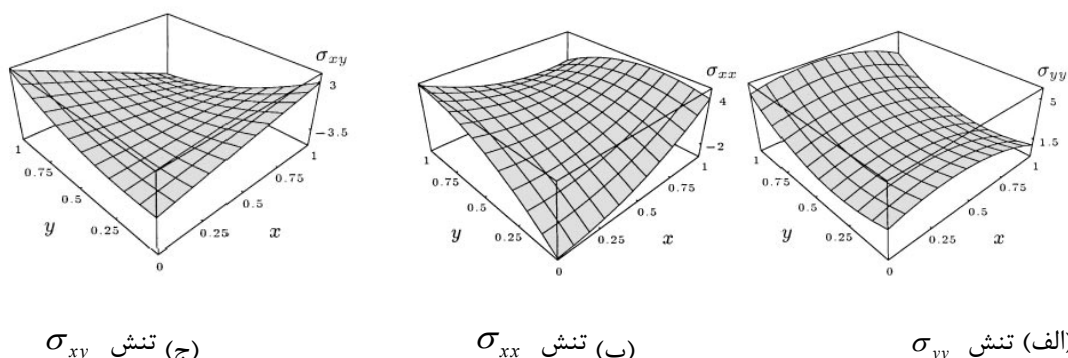
مولفه های تنش توسط تابع تنش ایری بدست آمده و در رابطه (۲-۴۴) نشان داده شده است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (۴۴-۲)$$

با توجه به تنش صفحه ایی مسئله، تابع تنش ایری مسئله به شرح ذیل خواهد بود:

$$\begin{aligned} \Phi = & 1.19x^2 + 1.06xy - 1.78y^2 + 0.64x^3 - 2.08x^2y + 3.09y^2x + 2.82y^3 \\ & - 0.44x^4 + 0.037x^3y + 3.39x^2y^2 - 1.93xy^3 - 0.69y^4 \end{aligned} \quad (۴۵-۲)$$

تنش های حل دقیق بدست آمده از تابع تنش ایری در شکل (۲۵-۲) نشان داده شده است.

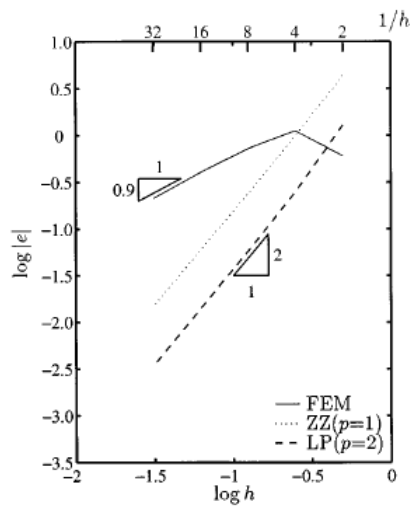


شکل ۲-۲۰ میدان تنش دقیق درجه دو

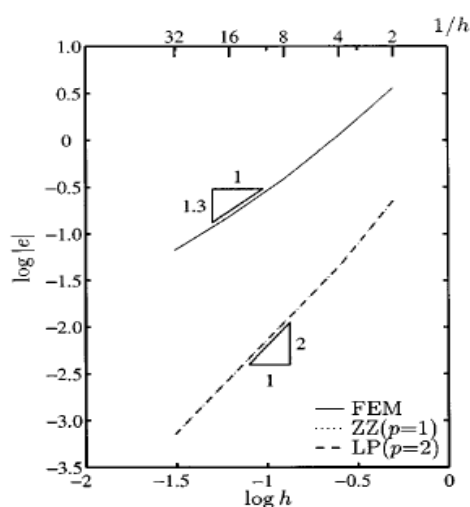
در این مسئله المان خطی چهارگره‌ای با مش‌های یکنواخت با تعداد المانهای برابر ۲، ۴، ۸، ۱۶ و ۳۲ در راستای x, y استفاده شده است. میدان تنش بازیافت برای روش ZZ خطی و برای روش LP درجه دو در نظر گرفته شده است.

سرعت همگرایی برای سه مولفه تنش در شکل‌های (۲۱-۲) الی (۲۳-۲) نشان داده شده است. برای نقطه داخلی (0.5,0.5) برای هر سه مولفه تنش سرعت همگرایی برای دو روش یکسان می‌باشد. میزان خطا در این نقطه بغیر از مولفه σ_{xy} یکسان می‌باشد. برای نقطه مرزی (1,1) در روش LP سرعت همگرایی نسبت به روش ZZ بالاتر می‌باشد. میزان خطای روش LP در مقایسه با روش ZZ بغیر از

مولفه σ_{yy} در مشبندی درشت (تعداد دو المان در هر راستا)، کمتر می‌باشد.

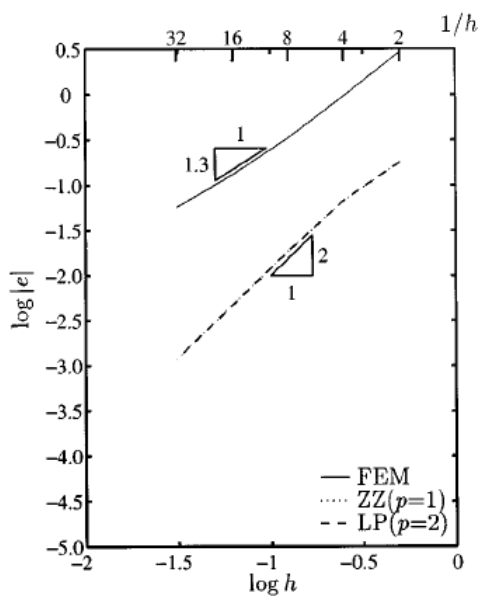


(ب) در نقطه (1,1)

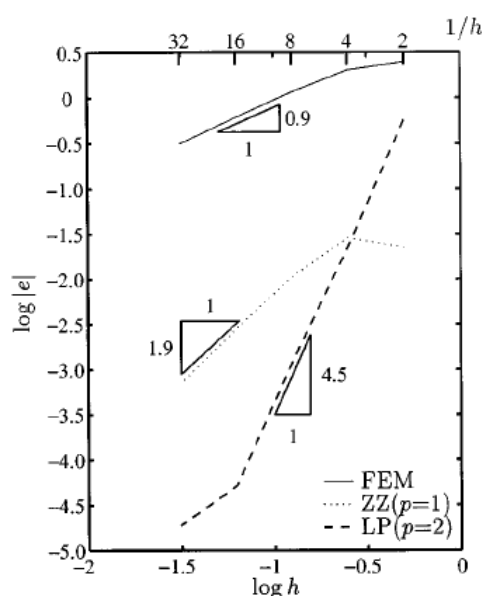


(الف) در نقطه (0.5,0.5)

شکل ۲۱-۲ سرعت همگرایی بازیافت تنش مولفه σ_{xx}

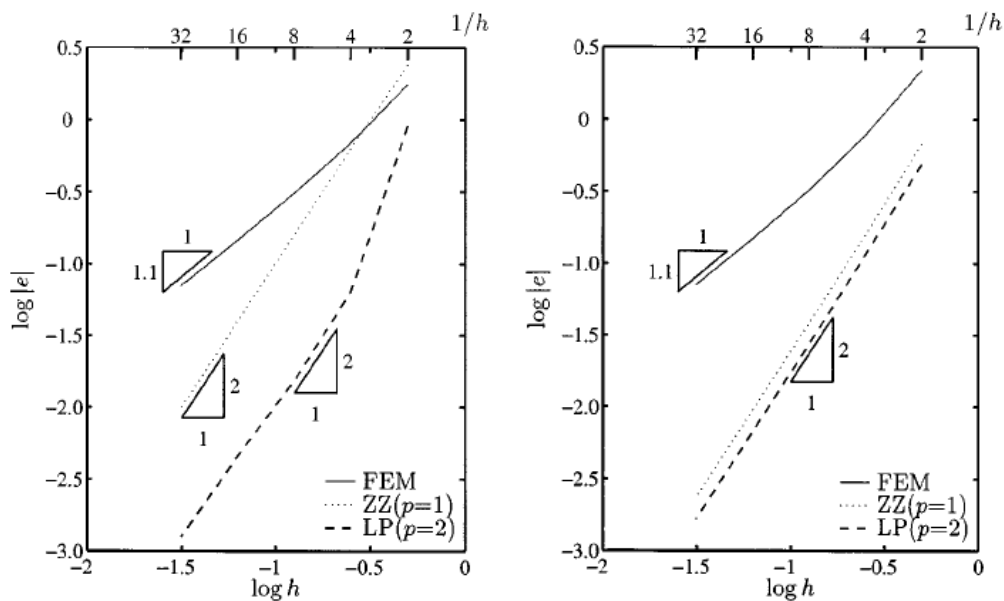


(ب) در نقطه (1,1)



(الف) در نقطه (0.5,0.5)

شکل ۲۲-۲ سرعت همگرایی بازیافت تنش مولفه σ_{yy}



(ب) در نقطه (1,1)

(الف) در نقطه (0.5,0.5)

شکل ۲۳-۲ سرعت همگرایی بازیافت تنش مولفه σ_{xy}

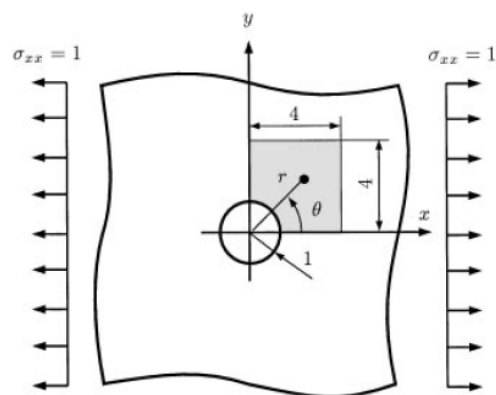
۲-۳-۳- صفحه با حفره‌ایی در مرکز آن

مسئله دو بعدی که در شکل (۲۴-۲) نشان داده شده است، یک صفحه بینهایت با یک حفره با شعاع

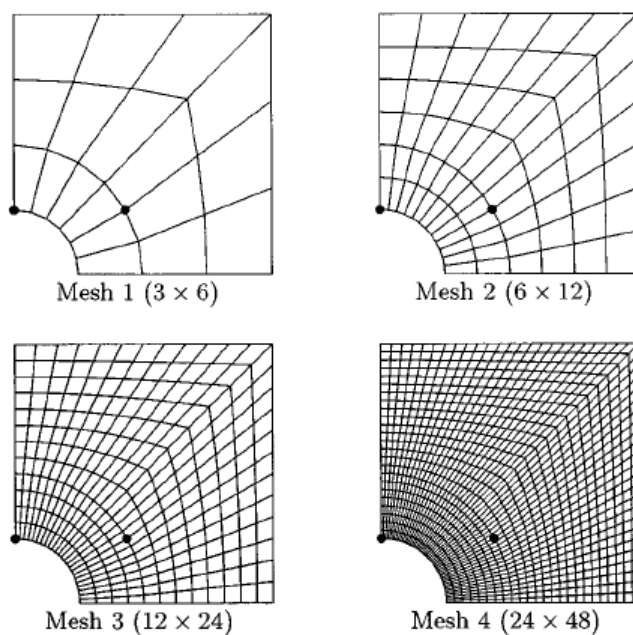
a در مرکز آن می‌باشد، که تنش کششی واحد در راستای X بر آن وارد می‌شود.

چهار نوع مش‌بندی همانند شکل (۲۵-۲) در حل مسئله استفاده شده است. میدان تنش بازیافت برای

روش ZZ خطی و برای روش LP درجه دو در نظر گرفته شده است.

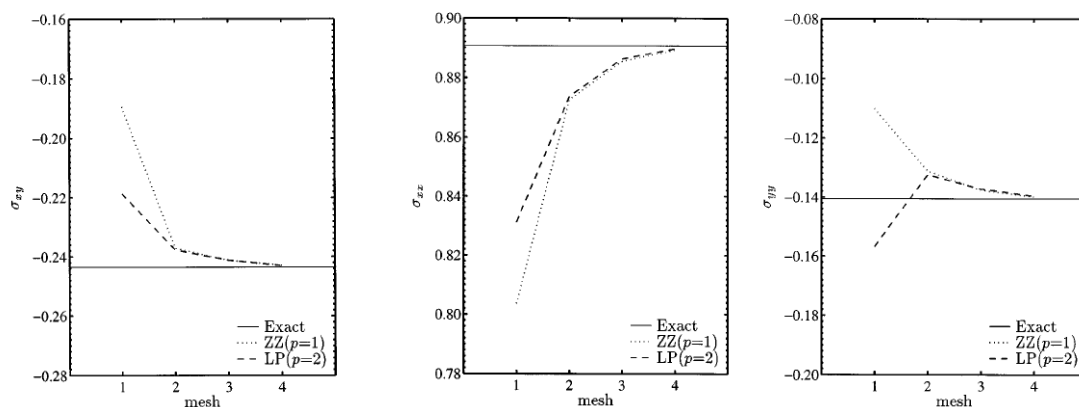


شکل ۲۴-۲ هندسه صفحه مربع مسئله با بار وارده



شکل ۲۵-۲ مش های استفاده شده در تحلیل مسئله (●: نقاط برای مطالعه همگرایی)

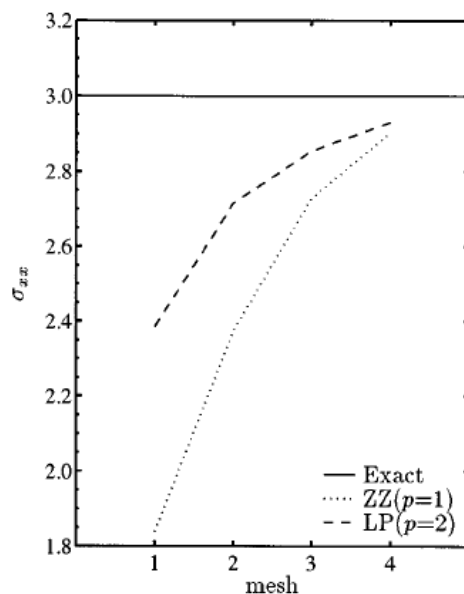
برای مقایسه و کنترل تنش بازیافت از نقطه داخلی با مختصات $(x=1.73205, y=1)$ و نقطه مرزی با مختصات $(x=0, y=1)$ استفاده شده است. مقدار دقیق تنش در نقطه داخلی و در نقطه مرزی بترتیب برابر $\{\sigma_{xx} = 0.891 \quad \sigma_{yy} = -0.141 \quad \sigma_{xy} = -0.244\}$ و $\{\sigma_{xx} = 3 \quad \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0\}$ می باشد. شکل (۲-۳۰) سرعت همگرایی تنش را در نقطه داخلی برای چهار نوع مش بندی را نشان می دهد.



شکل ۲۶-۲ سرعت همگرایی مولفه های تنش در نقطه داخلی با تغییر نوع مش

شکل (۲-۲۷) سرعت همگرایی مقدار تنش در راستای X برای نقطه مرزی با چهار نوع مش بندی را نشان می دهد، همانطور که ملاحظه می شود، همگرایی در روش LP نسبت به روش ZZ سریعتر رخ

می دهد.



شکل ۲-۲۷ سرعت همگرایی مولفه تنش σ_{xx} در نقطه مرزی با تغییر نوع مش

۲-۴- مقایسه روشهای بازیافت

۲-۴-۱- معرفی

در این بخش بررسی تفاوت کارایی سه روش بازیافت توسط نقاط فوق همگرا (SPR) که همان روش زینکویچ و زو (ZZ)، بازیافت توسط تعادل ناحیه (REP) و روش بازیافت لی و پارک (LP) که از مهمترین و موثرترین روشهای بازیافت تنش در اجزای محدود می باشند، صورت می پذیرد. مسایل مختلف دو بعدی الاستیک بررسی شده تا رفتار و کارایی روشها بطور مناسب ارزیابی شود. با انجام یک سری مطالعات عددی بر روی سه روش REP, SPR, LP کارایی و تاثیر این روشها در بازیافت تنش مقایسه شده است. با توجه به اینکه نحوه انجام هر روش در این تحقیق و تحقیقات ذکر شده در مرجع بیان شده است، از ذکر مجدد آنها در این بخش صرفنظر می نمایم.

۲-۴-۲- موارد ارزیابی روشها

(۱) مرتبه چند جمله‌ای استفاده شده در روش بازیافت تنش

در این قسمت برای سه طرح بازیافت، درجه چند جمله‌ای استفاده شده به منظور تولید میدان تنش بازیافت را q در نظر می‌گیریم. که می‌بایست حداقل برابر p ، تعداد جملات توابع درونیایی تغییر مکان در المان در حالت چندجمله‌ای کامل می‌باشد، بطور مثال سه ترم برای المان‌های خطی و شش ترم برای المان‌های چهار ضلعی خواهد شد.

به علت محدود نمودن تعداد نقاط نمونه برداری در روش SPR در یک ناحیه q معمولاً برابر با p در نظر گرفته می‌شود. نتایج عددی پیشنهاد می‌کند در دو روش REP و LP اگر تعداد نقاط بگونه‌ای باشد که مقدار q ۱ یا ۲ واحد بیشتر از مقدار P باشد، می‌تواند دقت و سرعت همگرایی را افزایش دهد (برای مثال ۶ ترم برای حالت سه گرهی خطی و چهارضلعی).

(۲) پایداری ماتریس بازیافت:

با توجه به تجربیات قبلی وقتی در روش محل نقاط نمونه برداری مناسب نباشد شکل ماتریس بازیافت بگونه ایست که باعث می‌شود ماتریس ضرایب یکتا گردد. به همین خاطر تعداد نقاط می‌بایست بگونه‌ای باشند که ماتریس ضرایب دارای جواب باشد.

در روش REP پایداری مسئله در اکثر مسائل رخ می‌دهد، اما یک شرط ضروری برای پایداری ماتریس بازیافت این است که تعداد المان‌های کافی در ناحیه قرار گرفته باشد. برای روش LP تعداد المان‌ها تاثیر در ارضا معادله دارد، در این حالت به ندرت پیش می‌آید که ماتریس بازیافت یکتا شود، حتی زمانی که q دو درجه از p بزرگتر باشد. آخرین نکته از پایداری ماتریس این است که در محاسبات واقعی بهر حال در روش بازیافت ترانسفورماسیون مختصات محلی و مرتبه آن می‌بایست کنترل گردد. از قابل اعتماد بودن تنش بازیافت اطمینان حاصل شود و هرگاه ماتریس یکتا شد، می‌بایست اندازه ناحیه محلی یا تعداد نقاط موجود در ناحیه افزایش یابد.

(۳) شکل ناحیه

یک معیار پذیرفته شده شکل ناحیه برای همه روشهای بازیافت وجود حداقل تعداد المان در ناحیه می‌باشد. بدین منظور ناحیه را جدا کرده و شرایط لازم پایداری ماتریس بازیافت را کنترل نمائیم. برای المان های چهار ضلعی ناحیه‌ها فقط شامل گره‌ها، گوشه‌ها باشد و ناحیه از گره میانی عبور نکند. بنابراین وابسته به نوع المان استفاده شده، گاهی اوقات برای دقت و صحت بهتر میدان تنش بازیافت هر ناحیه را نمی‌توانیم در نظر بگیریم. برای گره‌ها روی مرز برونیابی از نقاط درونی انجام می‌شود. به همین دلیل شرایط پایداری می‌بایست ارضا گردد.

۲-۴-۳- عوامل تاثیرگذار بر دقت میدان تنش بازیافت

(۱) روش *SPR*

دقت و سرعت همگرایی میدان تنش وابسته به تنش اجزای محدود و نقاط نمونه برداری در ناحیه می‌باشد. همگرایی میدان تنش اجزای محدود به منظور انتخاب بهینه نقاط نمونه برداری در ساخت میدان تنش بازیافت ضروری می‌باشد. با استفاده از مقادیر بزرگتر q برای درجه تنش بازیافتی سرعت همگرایی نسبت به اجزای محدود تغییر نمی‌کند. در حالت کلی استفاده از معادلات تعادل اضافه و نیروهای مرزی می‌توان صحت میدان تنش بازیافت را افزایش داد. در روش بازیافت، استفاده از مینیمم مربعات نقاط نمونه برداری بمنظور انطباق ضروری است، زیرا این نقاط در هر حال سبب افزایش سرعت همگرایی تنش بازیافت، بویژه زمانی که نقاط نمونه برداری فقط نقاط فوق همگرا باشند، می‌شوند.

(۲) روش *REP*

وقتی روشهای محلی بازیافت استفاده می‌شود، صحت و همگرایی میدان تنش بازیافت وابسته به استفاده از معادلات تعادل و قیود مرزی خواهد بود. اما وابسته به موارد ذیل نیز می‌باشد.

- مش اجزای محدود و هموار بودن حل دقیق
 - ترم های استفاده شده در چند جمله ای به منظور انطباق به روش کمترین مربعات
 - اندازه ناحیه مورد استفاده
- وقتی روش REP استفاده می‌گردد، موارد بالا بر روی یکدیگر تاثیر می‌گذارند.
- در حالت کلی در این روش به جای استفاده از مقادیر بالای q در ناحیه های بزرگ، با استفاده از مقادیر کوچک q در ناحیه های کوچک می‌توان دقت و کارایی روش بازیافت را بهبود بخشید.

(۳) روش LP

از آنجاییکه در روش بازیافت نقاط نمونه برداری از تنش اجزای محدود می‌باشد، سرعت همگرایی تنش بازیافت وابسته به میزان همگرایی تنش‌های نمونه برداری می‌باشد. یک موردی که می‌توان انتظار داشت اگر q برابر p باشد رفتار روش LP، بویژه در سرعت همگرایی بازیافت تنش شبیه به SPR می‌شود. در این حال اگر q افزایش پیدا کند، سرعت همگرایی نیز ممکن است افزایش یابد. دقت روش LP در مقایسه با روش REP کمتر به مش‌بندی وابسته است.

۲-۴-۴- مثال های عددی:

از آنجا که بدون شک مسئله تنش دو بعدی یکی از مسئله های عمومی سازگار با روش تحلیل اجزای محدود می‌باشد، برای مطالعه عددی انتخاب شده است.

از دلایل اصلی مطالعات عددی می‌توان موارد زیر را برشمرد:

- (۱) ارزیابی کارایی سه روش وقتی پارامترهای مختلف بازیافت استفاده می‌گردد.
- (۲) تاثیر همواری جواب دقیق بر صحت و سرعت همگرایی روشهای بازیافت تنش در

روشهای REP و LP

(۳) اثر نوع مش‌بندی در روش

برای مقایسه علاوه بر استفاده پارامتر η^* ، پارامتر دیگری که اثر روش بازیافت و سرعت همگرایی آن را نشان می‌دهد، استفاده از سرعت همگرایی مش‌بندی آم می‌باشد، که مطابق رابطه زیر تعیین می‌گردد.

$$\eta^* = \frac{\|e^*\|_{\Omega}}{\|u\|_{\Omega}}, \quad \|e^*\|_{\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} (\sigma^* - \sigma)^T D^{-1} (\sigma^* - \sigma) d\Omega}, \quad \|u\|_{\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega}.$$

$$R(\eta^*) = \frac{\log(\eta_i^* / \eta_{i+1}^*)}{\log(NADOF_{i+1} / NADOF_i)} \quad (2-46)$$

که در آن $NADOF_i$: تعداد درجات آزادی فعال مش‌بندی آم می‌باشد.

در حالت کلی نسبت سرعت همگرایی برای هرگام کوچک نمودن اندازه مش‌بندی مقدار ثابت نخواهد بود.

مدلهای استفاده شده برای مقایسه: (۱) صفحه سوراخدار (۲) صفحه ترکدار تحت کشش

۲-۴-۴-۱- حدود مقایسه و کاربرد بعضی از جزئیات

در این مقایسه عددی چهار نوع المان T3: المان مثلثی خطی، Q4: المان چهارگره‌ای، T6: چهار ضلعی (۶گره‌ای) و L9: المان ۹ گرهی استفاده شده است. المان‌های انتخاب شده بدون شک معروفترین المان‌ها در مسائل دو بعدی می‌باشند. بنابراین نقاط بهینه نمونه برداری برای المان‌ها کاملاً مشخص می‌باشند.

برای روشها پارامترهای متفاوتی برای ارزیابی کارایی بازیافت تنش استفاده می‌شود. برای هر نوع المان ترم‌های چندجمله‌ای کامل استفاده شده برای سه مقدار متفاوت q که $q=p, p+1, p+2$ مورد امتحان قرار گرفته است. بعلاوه برای درجه‌های مختلف چندجمله‌ای، دو حالت استفاده و یا عدم استفاده از ناحیه‌های مرزی در نظر گرفته شده است. برای حل اجزا محدود در استفاده از مرز و سه درجه مورد استفاده برای چند جمله‌ای ۶ حالت مختلف بازیافت خواهد شد. برای روش SPR از مرز استفاده نمی‌شود.

پارامترهای استفاده شده در روش های LP و REP در جدول (۱-۲) آورده شده است.

جدول ۱-۲- حالت های مختلف حل مسایل با دو روش LP و REP

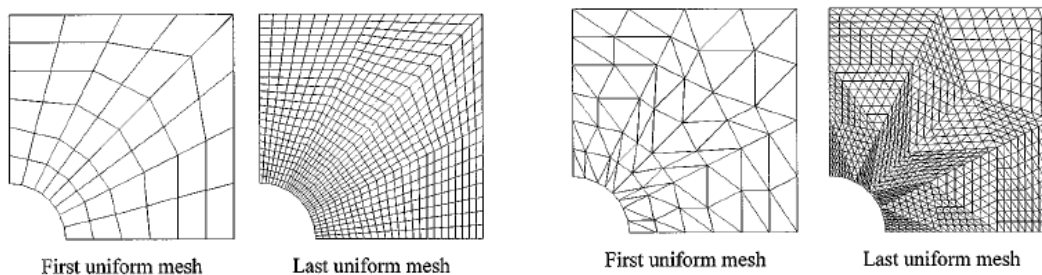
Scheme	Order of poly.	Boundary patch	No. of terms in \tilde{P}	
			T3 and Q4	T6 and L9
1	p	No	3	6
2	$p + 1$	No	6	10
3	$p + 2$	No	10	15
4	p	Yes	3	6
5	$p + 1$	Yes	6	10
6	$p + 2$	Yes	10	15

۲-۴-۴-۲- نتایج مطالعات عددی

برای هر دو مسئله مش یکنواخت و مش سازگار تطبیقی استفاده شده است. برای هر نوع المان ۴ نوع

مش استفاده شده است، که اولین و آخرین حالت را برای دو مسئله در شکل های (۲-۲۸) و (۲-۲۹)

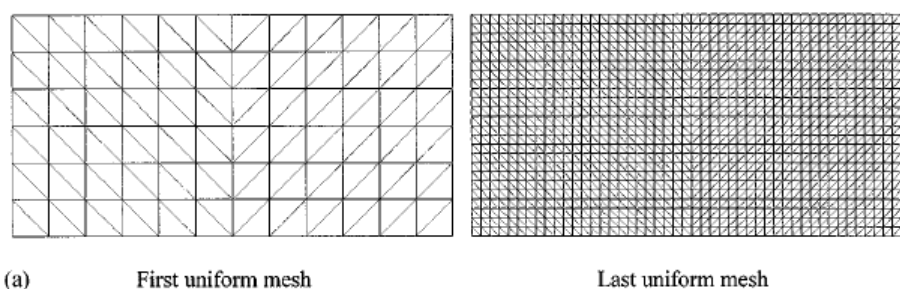
نشان داده شده است.



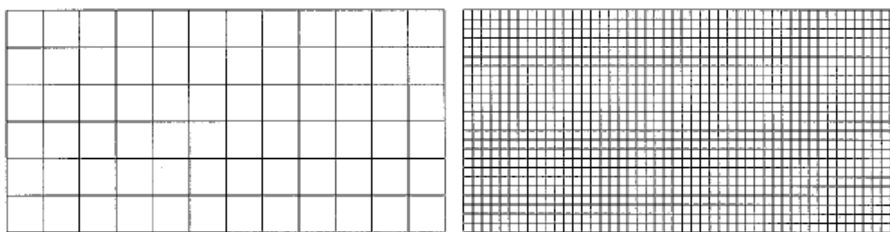
(ب) مش بندی المان ۴ گرهی

(الف) مش بندی المان مثلثی

شکل ۲-۲۸ نحوه مش بندی صفحه سوراخدار



(الف) مش بندی المان مثلثی



(b) First uniform mesh

Last uniform mesh

(ب) مش بندی المان ۴ گرهی

شکل ۲-۲۹ نحوه مش بندی صفحه ترکدار

به منظور مقایسه کارایی روشها با مش بندی های مشابه، مش های تحلیل اجزای محدود برای بازیافت تنش نیز استفاده شده است. برای تعیین نرم خطا در هر مرحله از حل تقریبی اجزای محدود استفاده شده است. برای هر روش مش بندی یکنواخت و تطبیقی، نرم خطا برای حالت های مختلف تعیین می گردد.

(۱) تاثیر درجه چند جمله ای q بر روی روش LP و REP

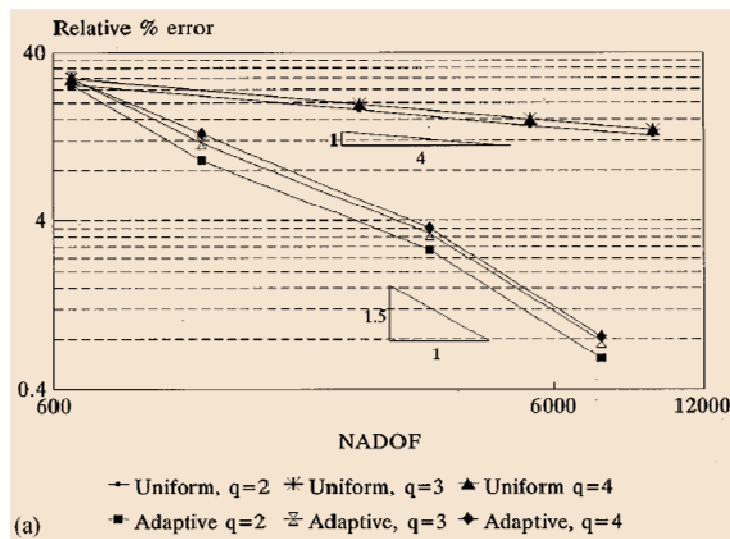
• روش REP

نتایج نشان می دهد برای مسئله ۱ که حل دقیق هموار می باشد برای همه المانها صحت مش بازیافتی با افزایش q بدون توجه به نوع مش بندی می تواند بهبود یابد، تنها در المان $T3$ مقادیر بالای q دقت را کاهش داده است. مقادیر بهینه q وابسته به نوع المان و مش بندی مورد استفاده می باشد. وقتی $q=p$ باشد، می بایست از المان $T3$ استفاده نمود. برای هر دو المان $L9$ و $Q4$ مقدار $q=p+1$ مقادیر بهتری را نتیجه می دهد.

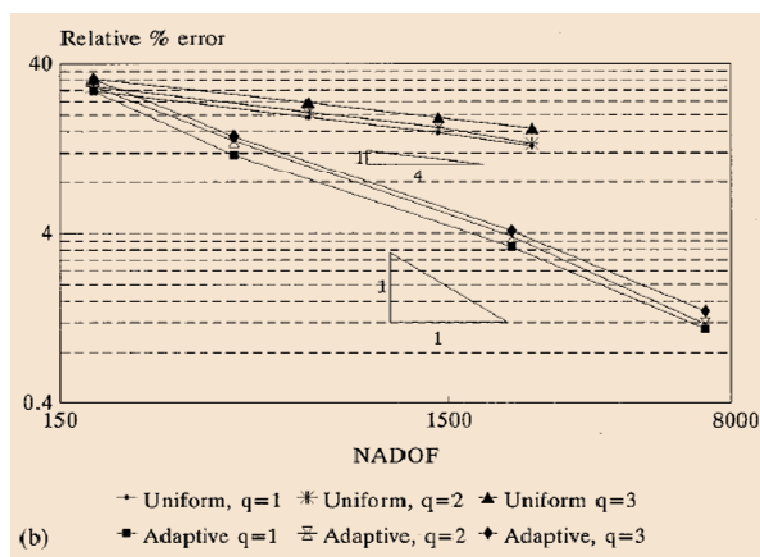
در حالت استفاده از المان $T6$ نتایج وابسته به نوع مش بندی می باشد. برای مش یکنواخت $q=p+2$ نتایج بهتری مشاهده می شود. برای مش تطبیقی $q=p$ بهترین نتایج را داده و در بازیافت تنش با المان مثلثی، q بزرگتر از p بهبود قابل توجه در سرعت همگرایی را نشان می دهد.

هر چند این افزایشها در سرعت همگرایی می تواند در المان $Q4$ نیز در مقادیر بزرگتر q مشاهده شود. برای مسئله ۲ نقطه تکین در داخل دامنه مسئله قرار دارد. استفاده از مقادیر بزرگتر q بهبود قابل

توجهی در دقت و سرعت همگرایی دارد. سرعت همگرایی صفحه سوراخدار در حل به روش REP در شکل (۲-۳۰) نشان داده شده است.



(الف) با المان T6 (چهار ضلعی ۶ گرهی)



(ب) با المان Q4 (چهار گرهی)

شکل ۲-۳۰ سرعت همگرایی در صفحه ترکدار به روش REP

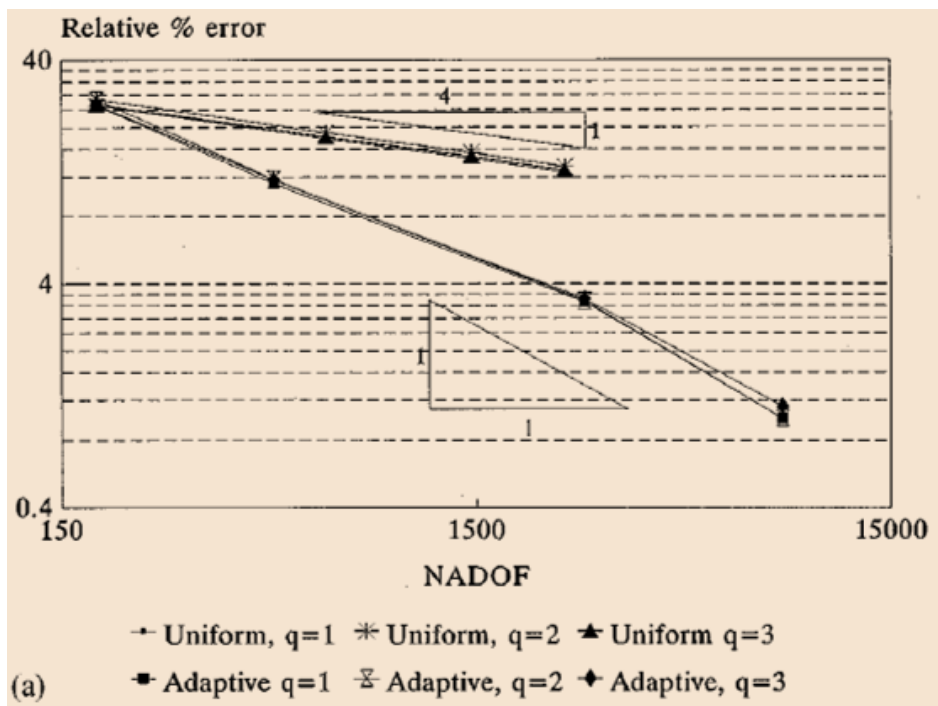
• روش LP:

نتایج برای صفحه سوراخدار در حالت کلی صرف نظر از نوع المان افزایش در صحت بازیافت تنش با بالا بردن مقدار p نشان می‌دهد. برای همه المان‌ها آزمایش شده $q=p+1$ نتیجه بهتری برای هر دو حالت مش یکنواخت و تطبیقی دارد. بعلاوه در برخی از حالات در المانهای خطی سرعت همگرایی کم

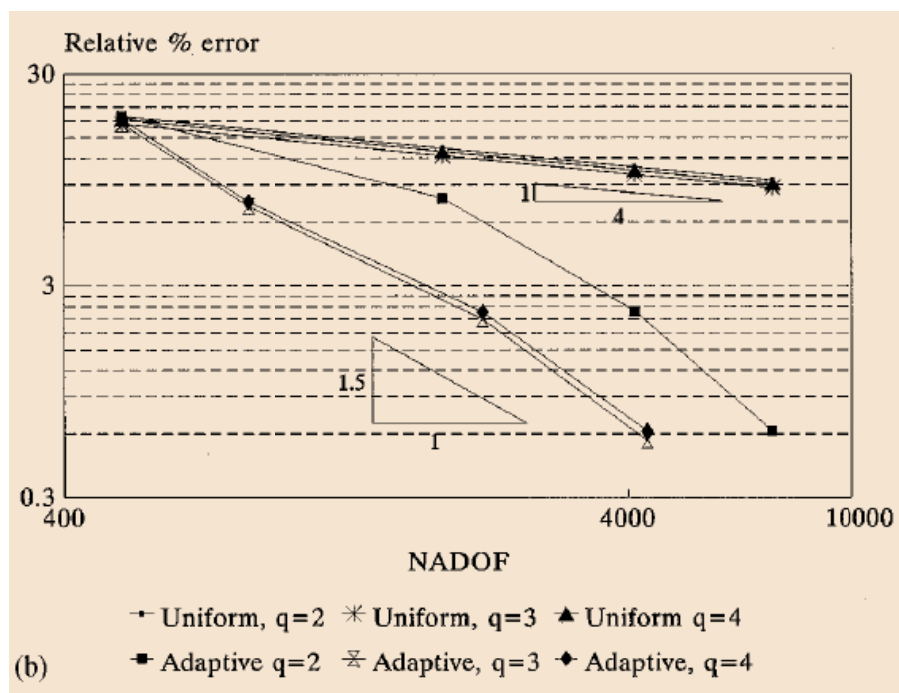
شده و برای المان چهار ضلعی اینگونه نیست. سرعت همگرایی دو مسئله برای مش یکنواخت و تطبیقی به روش LP در مقایسه با روش SPR در جدول (۲-۲) نشان داده شده است. همانند روش REP در صفحه ترکدار هنگامی که از مش یکنواخت استفاده می‌گردد مقدار q تاثیری بر سرعت همگرایی میدان تنش بازیافتی ندارد و سرعت همگرایی به 0.25 کاهش می‌یابد. سرعت همگرایی با مش تطبیقی بهبود می‌یابد، هرچند در این روش سرعت همگرایی بالا با مقادیر بزرگتر q بدست می‌آید. سرعت همگرایی در صفحه ترکدار به روش LP در شکل (۲-۳۱) نمایش داده شده است.

جدول ۲-۲ درصد کلی پارامتر همگرایی $R(\eta^*)$ در مسئله ۱ با استفاده از دو روش SPR و LP

Elements	Overall $R(\eta^*)$			
	$q = p$	$q = p$	$q = p + 1$	$q = p + 2$
	SPR	LP procedure, uniform refinement, no boundary patches are used		
T3	0.692	0.71	0.78	0.43
Q4	0.641	0.82	0.85	0.91
T6	1.189	1.28	1.17	1.26
L9	1.515	1.60	1.67	1.30
	SPR	LP procedure adaptive refinement, boundary patches are used		
T3	1.025	0.86	0.93	0.76
Q4	0.968	0.90	1.14	1.01
T6	1.857	1.92	1.71	1.90
L9	1.757	1.70	1.47	1.62



(الف) با المان L9 (المان ۹ گرهی)



(ب) با المان T3 (المان مثلثی خطی)

شکل ۲-۳۱ سرعت همگرایی در صفحه ترکدار به روش LP

۲) تاثیر استفاده از ناحیه مرزی در تنش بازیافت

استفاده از ناحیه‌های مرزی بتنهایی تاثیری در جواب نمی‌گذارد. با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که در حالت کلی نوع المان و نرمی حل دقیق تاثیر زیادی در مقابل طرح مورد استفاده بر جواب دارد. در صفحه سوراخدار در استفاده از المان درجه دو و ناحیه مرزی مقدار بهبود ناچیز در تنش بازیافت رخ می‌دهد. ممکن است دلیلش کوچک بودن سائز ناحیه در اطراف مرز باشد، که در جدول (۳-۲) قابل مشاهده خواهد بود.

جدول ۳-۲ تاثیر شرایط مرزی در دو روش بر پارامتر خطای نسبی η^*

Boundary patch	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$
Problem 1, L9 elements, last uniform mesh			
No	0.0740	0.0372	0.0613
Yes	0.0350	0.0364	0.0445
Problem 2, L9 elements, last adaptive mesh			
No	13.3216	11.6861	13.4937
Yes	13.5415	13.0137	13.4457

۳) مقایسه میان سه روش بازیافت SPR , REP و LP

زمانیکه $q=p$ استفاده می‌شود، سرعت همگرایی همه روشها بسیار شبیه به یکدیگر می‌باشد. در حالتی که حل دقیق هموار می‌باشد، سرعت همگرایی در روشهای REP و LP مقدار کمی افزایش می‌یابد. هرچند وقتی مش تطبیقی استفاده شود میدان تنش فوق همگرا برای همه روشها بدست می‌آید. همگرایی سه روش وابسته به مقدار q می‌باشد. از نتایج عددی می‌توان نتیجه گرفت که نرم خطا در روش REP اغلب بیشتر از روش های LP و SPR می‌باشد، بویژه زمانیکه که $q > p$ باشد و مش یکنواخت استفاده شود. نتایج در جدول (۴-۲) را مشاهده می‌نمائید. نتایج عددی نشان می‌دهند وقتی $q=p$ استفاده می‌گردد، در صفحه سوراخدار روش LP بهتر از دو روش دیگر می‌باشد، دقت میدان تنش در روش SPR بهتر از روش REP می‌باشد.

در صفحه ترکدار نتایج بدست آمده از دو روش SPR و LP بسیار شبیه به یکدیگر می‌باشد و از کارایی

و دقت بهتری نسبت به روش REP برخوردار می‌باشند. جدول (۲-۵) خلاصه حالت $q=p$ را نشان داده و در هر حالت بهترین جواب مشخص شده است.

جدول ۲-۴ مقایسه سه روش توسط پارامتر خطای نسبی η^* بدون ناحیه مرزی

Recovery procedures	$q = p$	$q = p + 1$	$q = p + 2$
Problem 1, T3 elements, last uniform mesh			
REP	2.2779	2.9473	5.0731
LP	1.3469	1.0307	2.6515
SPR	1.7833		
Problem 1, L9 elements, last adaptive mesh			
REP	0.0926	0.0334	0.1065
LP	0.0507	0.0226	0.0332
SPR	0.0398		
Problem 2, T6 elements, last uniform mesh			
REP	16.4079	13.6238	13.6387
LP	7.7963	7.2529	9.4410
SPR	7.7987		
Problem 2, Q4 elements, last adaptive mesh			
REP	1.0800	1.1727	1.2253
LP	1.0633	0.9180	1.0416
SPR	1.0398		

وقتی مقادیر بزرگتر p برای صفحه سوراخدار استفاده شود با ترکیب مناسب درجه چند جمله‌ای و استفاده از ناحیه‌های مرزی، روش LP در اکثر موارد می‌تواند باعث بهبود جواب شود. برای روش REP نسبت به دقت و سرعت همگرایی برتری سیستماتیک نسبت به SPR مشاهده نمی‌شود. برای صفحه ترکدار برتری محسوسی در استفاده از روش REP در مقابل SPR مشاهده نشده در حالیکه در برخی موارد بهبودهای قابل توجهی در روش LP مشاهده می‌شود.

شایان ذکر می‌باشد که برای هر سه روش در حالت $q=p$ می‌توان، تخمین خطا با قابلیت اعتماد بالا برای تحلیل اجزای محدود انجام شود.

به منظور ارزیابی کارایی روش و اینکه بتوان از روش بعنوان تخمین کننده استفاده شود شاخص تاثیر Θ را مطابق رابطه (۲-۴۷) تعریف می‌شود.

$$\Theta = \frac{\|\bar{e}\|_{\Omega}}{\|e\|_{\Omega}} \quad (47-2)$$

که در آن $\|\bar{e}\|_{\Omega}$: نرم خطای حل اجزای محدود و $\|e\|_{\Omega}$: نرم خطای حل دقیق می‌باشند. در اکثر موارد Θ نزدیک به یک می‌باشد. در جدول (۶-۲) مقادیر Θ برای حالت های مختلف نشان داده شده است.

جدول ۵-۲ مقایسه سه روش توسط پارامتر خطای نسبی η^* برای آخرین مش بندی، بدون ناحیه مرزی با مشخص نمودن بهترین جواب

Problem no.	Refinement	Element used	LP	SPR	REP
1	Uniform	T3	1-3469	1-7883	2-2779
		T6	0-0798	0-1067	0-1882
		Q4	0-9078	1-5207	0-9635
		L9	0-0740	0-0508	0-0950
1	Adaptive	T3	0-0909	0-0882	0-1273
		T6	0-0200	0-0226	0-0614
		Q4	0-1400	0-1428	0-1460
		L9	0-0507	0-0398	0-0926
2	Uniform	T3	12-5635	12-9378	12-4163
		T6	7-7963	7-9787	16-4079
		Q4	13-3216	13-0978	13-4619
		L9	9-5050	8-4688	10-5844
2	Adaptive	T3	1-0099	1-0272	1-0422
		T6	0-4439	0-4421	0-6206
		Q4	1-0633	1-0398	1-0800
		L9	0-6746	0-6041	0-7639

در انتها محاسبات مورد نیاز برای روش‌ها نشان می‌دهد که جزئیات انجام روش برای یک درجه مشابه برای چند جمله ایها روش SPR نسبت به دو روش دیگر سریعتر می‌باشد. به بیان دیگر در این حالت روش LP ۲۰٪ و REP ۳۰٪ بیشتر از SPR نیاز به استفاده از مرکز محاسبات کامپیوتر (CPU) هستند. در نتیجه به همان نسبت زمان محاسبات افزایش می‌یابد.

جدول ۲-۶ شاخص تاثیر برای حالت مختلف

Mesh	Recovery scheme		
	LP	SPR	REP
Problem 1, Q4 elements, uniform refinement, boundary patches are used			
U1	1.09	0.90	1.16
U2	1.06	1.08	1.09
U3	1.05	1.04	1.06
U4	1.04	1.03	1.03
Problem 1, T6 elements, adaptive refinement, no boundary patches are used			
Initial = U1	0.91	0.89	1.28
A1	0.97	1.05	1.21
A2	0.99	1.04	1.11
A3	1.01	1.04	1.06
Problem 2, L9 elements, adaptive refinement, no boundary patches are used			
Initial = U1	1.18	1.11	1.42
A1	1.18	1.13	1.41
A2	1.29	1.22	1.57
A3	1.15	1.09	1.39

۲-۵- نتیجه گیری و جمع بندی

در این فصل دو روش بازیافت تنش LP و مینیمم مربعات متحرک معرفی شد، که هر دو روش از روشهای موثری در بازیافت تنش می باشند. با توجه به اینکه در روش LP با دو روش معروف و پرکاربرد مقایسه شده و نتایج قابل قبولی داشته می تواند انتخاب مناسبی جهت توسعه در تحلیل ایزوژئومتریک باشد.

هر سه روش بازیافت تنش مقایسه شده در بخش آخر کارکردی شبیه یکدیگر دارند. در استفاده از درجات بالاتر چندجمله ای روش LP از نظر دقت و صحت به دو روش دیگر ترجیح داده می شود. در مسائلی با حل دقیق هموار دو روش REP و LP میدان تنش بازیافت دقیقی نسبت به روش SPR ایجاد می نمایند. صحت تنش بازیافتی در درجات پائین تر SPR شبیه به روش LP با استفاده از درجات بالا می باشد. هر دو روش SPR و LP می تواند انتخاب مناسبی باشد. به عبارت دیگر اگر مرتبه بالاتر چند جمله ای ها را استفاده نماییم روش LP ترجیح داده می شود. با توجه به اینکه روش SPR در

تحقیقات قبلی در محیط تحلیل ایزوژئومتریکی توسعه یافته است، روش LP با توجه به نتایج مقایسه و استفاده از باقیمانده معادله تعادل، بعنوان روش مناسب جهت توسعه در محیط ایزوژئومتریکی انتخاب می‌گردد.

فصل سوم

روش تحلیل ایزوژئومتریکی

۳-۱- مقدمه

در این فصل به توضیح روش تحلیل ایزوژئومتریکی بعنوان یک روش نوپا در روشهای عددی پرداخته می‌شود. علی‌رغم جدید بودن روش، روشی گسترده با تعاریف و جزئیات فراوان می‌باشد که پرداختن به صورت کامل بر مفاهیم آن در این تحقیق مورد نظر نمی‌باشد.

در این فصل بصورت کلی به توضیح روش ایزوژئومتریکی پرداخته می‌شود و در برخی موارد که برای روش بازیافت لازم می‌باشد، به جزئیات نیز پرداخته می‌شود. کلیاتی در مورد محیط تحلیل، منحنی‌ها و سطوح مورد استفاده در روش ارایه شده و نحوه استفاده از این سطوح در تحلیل بیان می‌شود. در آخر نحوه بکارگیری روش کار مجازی برای تحلیل ایزوژئومتریکی ارایه شده و فرمول بندی روش برای تحلیل مشخص می‌گردد.

در این فصل به بررسی مفاهیم مورد استفاده در روش تحلیل ایزوژئومتریکی که به نوعی در ارتباط با روش بازیافت می‌باشد، پرداخته می‌شود.

۳-۲- روش ایزوژئومتریکی

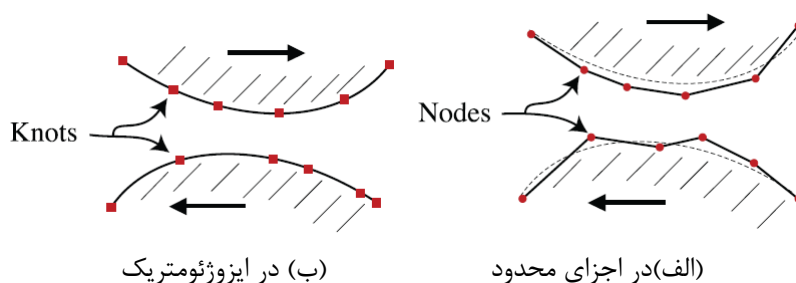
با پیشرفت سریع علوم و تکنولوژی، روشهای عددی توسعه و تنوع چشمگیری یافته‌اند. از جمله جدیدترین این روشها می‌توان «روش تحلیل ایزوژئومتریکی» را نام برد. مفهوم تحلیل ایزوژئومتریکی برگرفته از روشهای هندسه کامپیوتری، روش اجرای محدود و روش تفاضل محدود می‌باشد. زمان طولانی نیست که کامپیوتر وارد طراحی‌ها شده است. قبل از ورود کامپیوتر ابتدا طرح‌ها روی کاغذ پیاده شده و سپس تحلیل روی آن انجام می‌گرفت. با ورود کامپیوتر، ایده مهندسی به کمک کامپیوتر^۱ مطرح شد و فایل‌های مناسب برای تحلیل در کامپیوتر آماده گردید. در حال حاضر این مرحله ۸۰٪ زمان طراحی را بخود اختصاص می‌دهد و در مسایلی با هندسه پیچیده تر این زمان بیشتر می‌باشد.

^۱ Computer Aided Engineering

یکی از ایده‌های ایجاد روش ایزوژئومتریکی انجام دو مرحله تولید و تحلیل طرح در یک مرحله می‌باشد. بدون داشتن طرح دقیق از مدل و مش بندی تطبیقی رسیدن به جواب با دقت بالا غیر ممکن می‌باشد و می‌بایست طرح و تحلیل با هم ارتباط دو سویه داشته باشند [۲۵].

در سال ۲۰۰۵ ایده روش ایزوژئومتریکی توسط هیوز و همکارانش مطرح گردید [۲۶]. با توجه به رابطه طرح و تحلیل این روش مورد استقبال قرار گرفت و تحقیقات و پژوهش‌های زیادی بر روی آن بویژه در اروپا صورت گرفت. هدف اصلی تحقیقات پر نمودن گپ میان طراحی و تحلیل بود، بطوریکه در مدت ۵ سال مبلغ ۵ میلیون دلار صرف پروژهای با عنوان ^۱ ICADA که انجام توامان طراحی و تحلیل توسط کامپیوتر بود، هزینه شد. سرانجام با توجه به قابلیت اعتماد و دقت بالا مورد پذیرش قرار گرفت [۲۵].

تحلیل ایزوژئومتریکی، بالقوه دارای ویژگی‌های منحصر به فرد و مناسبی است که شاید در آینده‌ای نه چندان دور بتواند جایگزین روشهای عددی متداول نظیر اجزای محدود و نقاط محدود شود. وجود برخی معایب در روش اجزای محدود، از جمله وجود خطا در تعریف مرزهای مسائل با هندسه پیچیده، تغییرات شدید در بارگذاری، تغییرات خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المانها در برخی مسائل از جمله علل ابداع این روش می‌باشد. بعنوان نمونه شکل ۳-۱ تفاوت تعریف مرز در اجزای محدود و ایزوژئومتریکی را برای مرزی دارای انحنا را نشان می‌دهد، همانگونه که ملاحظه می‌گردد در تحلیل ایزوژئومتریکی دقت بالایی در مرزهای پیچیده‌تر وجود دارد.



شکل ۳-۱ نحوه مدل نمودن مرز در تحلیل ایزوژئومتریکی و اجزای محدود [۲۶]

^۱ Integrated Computer Aided Design and Analysis

روش ایزوژئومتریک دارای بعضی مفاهیم مشترک با روش اجزای محدود می‌باشد که می‌تواند برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم در حوزه‌های مختلف علوم و مهندسی، از جمله الاستیسیته، به کار رود. در این روش از تکنیکهای طراحی به کمک کامپیوتر استفاده شده است. دلیل اینکه روشهای طراحی به کمک کامپیوتر تاکنون در روش اجزای محدود به صورت گسترده وارد نشده است مربوط به اختلاف زمانی، در پیدایش این دو نسبت به یکدیگر می‌باشد. آغاز پیدایش روشهای اجزای محدود در سالهای ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ میلادی بوده است در حالی که روشهای طراحی به کمک کامپیوتر بعدها در حدود سالهای ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ شکل گرفته اند [۲۶].

ایده‌ای که در این روش معرفی شده است بر اساس بی-اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت^۱ می‌باشد. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه بی-اسپلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها و سطوح، از آنها جهت درونیابی و تقریب سازی نیز استفاده می‌شود. در ادامه جهت آشنایی بیشتر با مفاهیم روش ایزوژئومتریک، به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی-اسپلاین و نربز و همچنین فرمولبندی روش ایزوژئومتریک پرداخته می‌شود.

۳-۲-۱- بی-اسپلاین و نربز

در این بخش به طور خلاصه و در حد نیاز، به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی-اسپلاین و نربز پرداخته می‌شود. برای آشنایی بیشتر، مراجعه به مراجع [۲۷] پیشنهاد می‌شود. همانطور که می‌دانیم اغلب منحنی‌ها را با یک چندجمله‌ای با درجه معلوم نمایش داده می‌شوند، که اینگونه نمایش داری معایبی می‌باشند، بطور مثال هنگامی که از تعداد زیادی نقطه قصد برازش منحنی داشته باشیم و یا در اشکال پیچیده‌تر می‌بایست از درجات بالاتر استفاده نماییم. که این امر باعث افزایش حجم محاسبات خواهد بود. در ضمن قابلیت کنترل محلی در این منحنی‌ها براحتی قابل انجام نمی‌باشد.

^۱ Non-Uniform Rational B-splines(NURBS)

نریزها از بی- اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند. بی- اسپلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه)^۱ تعریف می‌شوند. نواحی مذکور دامنه مدلسازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می‌کنند. یک بردار گرهی^۲ در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به صورت زیر تشکیل می‌شود [۲۷].

$$\Xi = \left\{ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1} \right\}, \xi_{i+1} \geq \xi_i \quad i = 1, 2, \dots, n+p+1 \quad (1-3)$$

که در آن ξ_i آمین گره، p درجه چند جمله ای و n تعداد توابع شکل تشکیل دهنده بی- اسپلاین به شمار می‌رود. انواع مختلفی از بردارهای گره ای وجود دارد ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گره ای بنام بردارهای گره ای نامتناوب^۳ (یا باز^۴) استفاده می‌کنیم. این نوع بردارها به فرم زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a_1, \dots, a_p}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b_1, \dots, b_p}_{p+1} \right\} \quad (2-3)$$

در این صورت آمین تابع پایه ای بی-اسپلاین از درجه p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌شود [۳۶]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3-3)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی- اسپلاین از درجه P بصورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

¹ Patch

² Knot Vector

³ Nonperiodic knot vector

⁴ Open

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (4-3)$$

$C(\xi)$ یک منحنی چند جمله ای قطعه ای^۱ است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین هستند، که روی بردار گره ای نامتناوبی بصورت رابطه (۳-۲) با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می شوند.

اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره ها باشند، آنگاه می توان رابطه $m = n + p + 1$ را برای آنها نوشت. برای سطوح نیز رابطه در هر دو جهت برقرار می باشد. به طرز مشابهی سطوح بی-اسپلاین بصورت زیر تعریف می شود [۲۷]:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (5-3)$$

که در آن:

$$H = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}, \Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \quad (6-3)$$

بطوری که بردار گره ای Ξ دارای $r+1$ گره و \mathcal{H} دارای $s+1$ گره می باشد.

یک منحنی نریز از درجه p بصورت زیر تعریف می شود [۲۷]:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad a \leq \xi \leq b \quad (7-3)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره ای بصورت رابطه (۳-۲) تعریف می شوند.

¹ Piecewise polynomial curve

و در نهایت، یک سطح نریز که در جهت ξ از درجه p ، و در جهت η از درجه q باشد، بصورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (۸-۳)$$

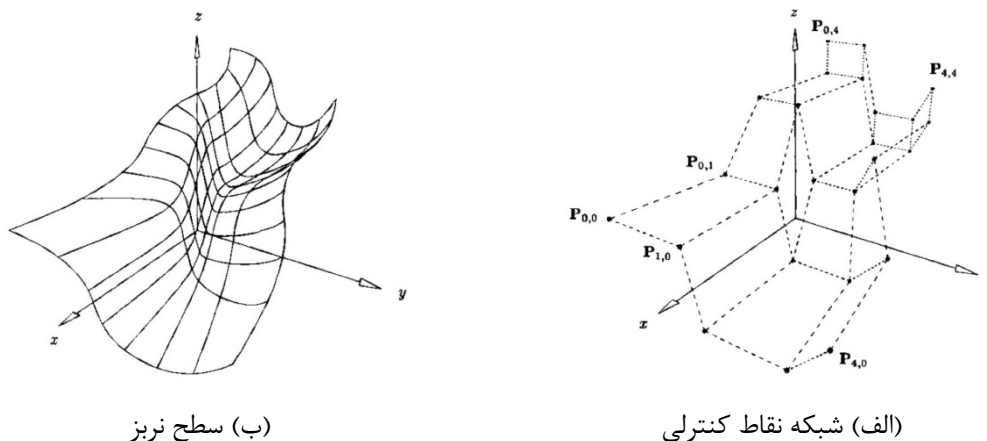
در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می باشد که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین وزن‌ها $\{w_{i,j}\}$ و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره ای به صورت رابطه (۳-۶) تعریف شده اند. در رابطه (۳-۸) اگر توابع پایه ای نسبی قطعه‌ای را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (۹-۳)$$

خواهیم داشت:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (۱۰-۳)$$

در شکل ۱-۳ شبکه نقاط کنترلی و سطح نریز بدست آمده از آن با توابع پایه درجه دو در جهت x و y مشاهده می‌شود.



شکل ۳-۲ شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز مربوط به آن با توابع پایه درجه دو [۲۶].

۳-۲-۲- فرمول‌بندی روش ایزوژئومتری

به منظور تحلیل یک محیط پیوسته در ایزوژئومتری، باید آن محیط را به یک محیط گسسته تبدیل نمود، این عمل در روش ایزوژئومتری با استفاده از نقاط کنترلی نربز صورت می‌پذیرد.

همانطور که در بخش قبل اشاره شد، سطوح نربز از یکسری توابع پایه به همراه نقاط کنترلی و بردارهای گره‌ای تشکیل شده است. نقاط کنترلی تشکیل دهنده شبکه‌ای از نقاط هستند و یک رویه نربز را در صورت معلوم بودن بردارهای گره‌ای، با مشخص نمودن نقاط کنترلی آن می‌توان تعریف نمود.

بطور کلی در روش ایزوژئومتری مقدار مجهول مسئله (تغییر مکان)، در نقاط کنترلی محاسبه و سپس به وسیله توابع پایه‌ای نربز برای بقیه نقاط محاسبه می‌شود.

در این روش نقاط کنترلی طوری انتخاب می‌شوند که مولفه‌های اول و دوم مختصات این نقاط (P_x, P_y) ، بتوانند هندسه مسئله را برآورد کنند؛ در اینصورت مولفه سوم مختصات این نقاط (P_z) طوری محاسبه می‌شود که درونیابی بین این نقاط به وسیله توابع پایه‌ای نربز، نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد؛ در حقیقت می‌توان رویه‌ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه xy نشان دهنده هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه (z) نسبت به صفحه xy نشان دهنده مجهول مسئله در آن نقطه (تغییر مکان) باشد.

اگر هر مولفه تغییر مکان در دامنه مسئله به صورت یک صفحه در نظر گرفته شود در اینصورت با استفاده از مفهوم نریز می توان صفحه مربوط به هر مولفه تغییر مکان را در حالت دو بعدی به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_i \sum_j R_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} \quad (11-3)$$

در رابطه بالا $\mathbf{P}_{i,j}$ بردار مولفه های سوم مختصات نقاط کنترلی نریز در جهت u و v می باشد که به عنوان تنها پارامتر مجهول برای تعیین صفحه هر مولفه تغییر مکان به شمار می رود. $R_{i,j}$ ، توابع پایه ای نریز هستند که عملکردی شبیه توابع شکل در اجزای محدود دارند. همچنین با در نظر گرفتن دستگاه مختصات نرمال ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$) داریم:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u i,j} \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v i,j} \end{Bmatrix} \quad (12-3)$$

به دلیل خاصیت بازه تاثیر توابع نریز، تنها تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می باشند؛ در اینصورت رابطه (12-3) معادل است با:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{u k,l} \\ \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{v k,l} \end{Bmatrix} \quad (13-3)$$

فرم ماتریسی رابطه (13-3) به صورت زیر می باشد:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} \quad (14-3)$$

در رابطه بالا $\bar{\mathbf{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان های نقاط کنترلی، $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه ای نسبی نریز

و \bar{P} ماتریس ستونی نقاط کنترلی به صورت زیر می‌باشند:

$$\bar{u}^{i,j} = [u_{i,j} \quad v_{i,j}]^T \quad (15-3)$$

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi,\eta) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(\xi,\eta) & 0 & \dots & R_{i,j}(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi,\eta) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(\xi,\eta) & \dots & 0 & R_{i,j}(\xi,\eta) \end{bmatrix} \quad (16-3)$$

$$\bar{P} = [P_{u \ i-p,j-q} \quad P_{v \ i-p,j-q} \quad \dots \quad P_{u \ i-p,j} \quad P_{v \ i-p,j} \quad \dots \quad P_{u \ i,j} \quad P_{v \ i,j}]^T \quad (17-3)$$

بعد از محاسبه تغییر مکانها ماتریس کرنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (18-3)$$

در این رابطه \mathbf{u} بردار تغییر مکان و \mathbf{L} عملگر دیفرانسیل می‌باشد که برای مسائل دو بعدی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (19-3)$$

با جایگذاری رابطه (۱۴-۳) ماتریس کرنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon = \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}} \quad (20-3)$$

که در آن $\mathbf{B} = \mathbf{L} \bar{\mathbf{R}}$ می‌باشد.

همچنین با فرض وجود رفتار خطی کشسان، رابطه بین تنش‌ها و کرنش‌ها خطی و بصورت زیر

محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (21-3)$$

در رابطه (21-3) σ_0 تنش پسماند، ε_0 کرنش اولیه و \mathbf{D} ماتریس کشسانی است که برای مسائل تنش مسطح به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (22-3)$$

در ادامه همانند روش اجزای محدود با استفاده از رهیافت کار مجازی به تشکیل ماتریس سختی می‌پردازیم.

در صورتی که Γ مرزهای مسئله مورد نظر با دامنه Ω ، \mathbf{b} نیروهای کالبدی و \mathbf{t} نیروهای سطحی باشد، با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (23-3)$$

با جایگذاری روابط (14-3) و (20-3) داریم:

$$\int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{B}^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (24-3)$$

همچنین با حذف $\delta \bar{\mathbf{P}}$ و استفاده از رابطه (21-3) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \varepsilon_0 d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma_0 d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (25-3)$$

و با جایگذاری رابطه (20-3) داریم:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \varepsilon_0 d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma_0 d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (26-3)$$

در صورت عدم وجود تنش و کرنش اولیه رابطه (26-3) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (27-3)$$

که در آن \mathbf{K} ماتریس ضرایب (سختی)، \mathbf{U} مجهولات مسئله (تغییر مکان‌ها) و \mathbf{F} نیروهای خارجی وارده بر زیر دامنه می‌باشند؛ که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (28-3)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (29-3)$$

و در نهایت با حل دستگاه معادلات (27-3) مجهولات مسئله (تغییر مکان‌ها) محاسبه می‌شوند.

در روش ایزوژئومتری از توابع شکل مشابهی برای تقریب هندسه و تحلیل مسئله استفاده می‌شود. در این صورت، نقاط کنترلی و بردار گرهی یکسانی برای مدلسازی هندسی مسئله و همچنین تقریب تابع مجهول به کار می‌رود. بنابراین هندسه مسئله نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

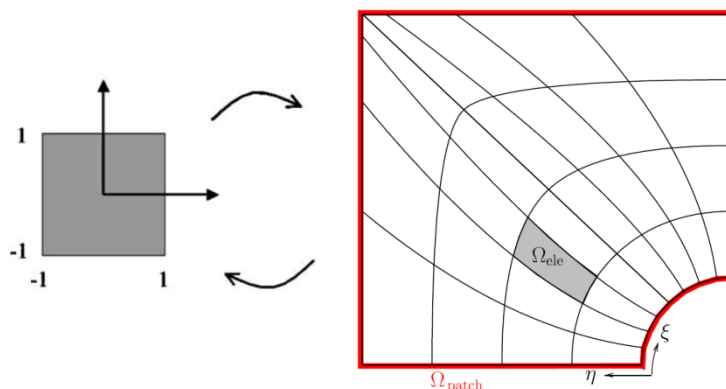
$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{x i,j} \quad (30-3)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{y i,j}$$

که در آن ξ, η مولفه‌های مختصات نرمال هستند ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$)، و $P_{y i,j}, P_{x i,j}$ به ترتیب اولین و دومین مؤلفه‌های مختصات نقاط کنترلی می‌باشند.

در این روش برای حل عددی انتگرال ماتریس سختی از روش انتگرال گیری گوس استفاده می‌شود.

بدین منظور نیاز به المان بندی دامنه مسئله داریم، تا بتوانیم از نقاط گوس و وزن های ارائه شده برای المان های چهارضلعی استفاده کنیم. عمل المان بندی در ایزوژئومتری با استفاده از دهانه های گره ای نرَبز انجام می پذیرد. بطوری که هر زیر مجموعه بصورت $[\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\xi_i, \xi_{i+1}]$ یک المان نرَبز نامیده می شود. در شکل ۳-۳ نمونه ای از این المان بندی نشان داده شده است.



شکل ۳-۳ المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای نرَبز [۲۶]

مطابق رابطه (۳-۲۸) ماتریس سختی هر زیر دامنه بصورت زیر ارائه می شود:

$$K_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} B^T(\xi, \eta) DB(\xi, \eta) d\Omega \quad (3-31)$$

که در آن $B(\xi, \eta)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$B = L\bar{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

بنابراین برای حل انتگرال ماتریس سختی به مشتقات R نسبت به x, y در دستگاه مختصات کلی نیاز داریم؛ که برای ارتباط بین دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری نرَبز، ژاکوبین زیر را تعریف می کنیم:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (33-3)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (34-3)$$

که در آن $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi}$ و $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}$ مشتقات جزئی توابع پایه ای نریز می‌باشند. بنابراین می‌توان رابطه (31-3) را بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{K}_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}(\xi, \eta) \det \mathbf{J}_1 d\xi d\eta \quad (35-3)$$

در اینصورت نیاز به مقدار تابع داخل انتگرال در نقاط گوس می‌باشد. در المان‌های چهار ضلعی نقاط گوس در دستگاه مختصات نرمال یا سرندیپیتی^۱ مشخص شده است، بنابراین نیاز به یک نگاشت می‌باشد که مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه سرندیپیتی المان نام را به دستگاه مختصات نرمال زیردامنه نریز (ξ, η) منتقل کند. این نگاشت در انتگرال‌گیری باعث ایجاد ژاکوبینی بصورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad d\xi d\eta = \mathbf{J}_2 dr ds \quad (36-3)$$

^۱- Serendipity coordinate

که در آن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i) & , & & \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0 & , & & \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_i) \end{aligned} \quad (37-3)$$

بنابراین رابطه ماتریس سختی (3-35) به فرم نهایی زیر در دستگاه مختصات سرندییتی المان نوشته می‌شود:

$$\mathbf{K}_{patch} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(r,s) \mathbf{DB}(r,s) \det \mathbf{J}_1 \det \mathbf{J}_2 dr ds \quad (38-3)$$

فصل چهارم

توسعه روش بازیافت تنش LP در

تحلیل ایزوژئومتریک

۴-۱- مقدمه

در این فصل به شرح توسعه یک روش بازیافت تنش در محیط تحلیل ایزوژئومتریکی پرداخته می‌شود. ایده این روش برگرفته شده از روش LP در اجزای محدود می باشد. روش LP در اجزای محدود بطور کامل در فصل دوم شرح داده شد. دلایل انتخاب این روش در فصل دوم بررسی گردید. در این فصل به توسعه روش و فرمول‌بندی آن در تحلیل ایزوژئومتریکی پرداخته می‌شود. در این روش میدان تنشی از ضرب توابع پایه‌ایی نریز در پارامترهای مجهول تنش بازیافتی در نظر می‌گیریم. این میدان تنش در ناحیه‌هایی (که توسط المانها ساخته می‌شود) با استفاده از مینیمم نمودن تابعی که از دو جز تشکیل شده است تعیین می‌شود. یک جز این تابع مجموع مربعات اختلاف تنش ایزوژئومتریکی با تنش بازیافت و جز دیگر، باقیمانده معادله تعادل در روش کارمجازی می‌باشد. با مینیمم نمودن تابع مذکور پارامترهای مجهول تعیین می‌شود. با مشخص شدن پارامترها با توجه به رابطه‌ایی که برای میدان تنش بازیافت ارایه می‌گردد، تنش بازیافتی در هر نقطه در دامنه مسئله برای ما مشخص خواهد شد.

۴-۲- تعریف میدان تنش بازیافت

ابتدا می‌بایست تنش بازیافتی را در محیط ایزوژئومتریکی تعریف نماییم. به همین منظور سه مولفه

تنش در محیط ایزوژئومتریک همانند رابطه ۴-۱ تعریف می‌گردد.

$$\sigma_x^* = \sum_{i=1}^{n_x+1} \sum_{j=1}^{n_y+1} R_{i,j}(u,v) P_{x_{i,j}}$$

$$\sigma_y^* = \sum_{i=1}^{n_x+1} \sum_{j=1}^{n_y+1} R_{i,j}(u,v) P_{y_{i,j}} \quad (1-4)$$

$$\sigma_{xy}^* = \sum_{i=1}^{n_x+1} \sum_{j=1}^{n_y+1} R_{i,j}(u,v) P_{xy_{i,j}}$$

در روابط بالا (n_x+1) تعداد نقاط کنترل در راستای x و (n_y+1) تعداد نقاط کنترل در راستای y در هر ناحیه، R توابع پایه‌ای (همان توابع شکل) نریز و P_x ، P_y و P_{xy} به ترتیب مولفه سوم نقاط کنترل مربوط به هر مولفه تنش در جهت x و y و xy می‌باشند. در رابطه بالا هر نقطه کنترل دارای سه مولفه می‌باشد، که دو مولفه اول آن موقعیت نقاط کنترل را نشان داده و مولفه سوم با قرار گرفتن در روابط بالا سطح تنش در آن راستا را ایجاد می‌نماید. با توجه به موقعیت هندسی نقاط بخشی از نقاط کنترل در بدست آوردن تنش در آن نقطه تاثیر گذار بوده و همه نقاط کنترل در تعیین تنش در آن نقطه استفاده نمی‌شود. در روابط بالا توابع پایه نریز و محل نقاط کنترلی معلوم می‌باشد و در هر کدام از روابط مولفه سوم نقاط کنترل مجهول می‌باشد. با مشخص شدن سه مولفه تنش برای هر نقطه کنترل (مجهولات) میدان تنش برای سه جهت تعیین می‌شود.

۴-۳- توسعه فرمول بندی روش بازیافت در محیط ایزوژئومتریک

برای شروع بازیافت تنش ابتدا مسئله در محیط ایزوژئومتریک توسط برنامه نوشته شده حل شده و تنش‌ها تعیین می‌شوند، در ادامه عمل بازیافت بر روی میدان تنش حاصل انجام می‌شود. پس از تعیین مقادیر تنش و تعریف میدان تنش بازیافت روند بازیافت و فرمول بندی روش ارایه می‌شود. با توجه به در اختیار داشتن تنش ایزوژئومتریک، خطا در نقاط فوق‌همگرا از رابطه ۴-۲ بدست می‌آید.

$$e_i = \sigma^*(x_i, y_i) - \sigma_{iso}(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n_x+1} \sum_{j=1}^{n_y+1} R_{i,j}(u,v) P_{i,j} - \sigma_{iso}(x_i, y_i) \quad (2-4)$$

که در آن تنش ایزوژئومتریکی و σ^* تنش بازیافت منتسب به ناحیه و e_i خطای نقاط گسسته فوق همگرا خواهد بود. همچنین در رابطه بالا (n_x+1) و (n_y+1) بترتیب تعداد نقاط کنترل در راستای x و y برای هر ناحیه و x_i و y_i نیز مختصات نقاط گوس می‌باشند. رابطه بالا می‌بایست برای تمام نقاط فوق همگرا واقع در ناحیه محاسبه شود. با بالا رفتن درجه توابع پایه تنش بازیافتی در برخی حالات عدم ارضای معادله تعادل مشاهده شده و در نتیجه شرط باقیمانده معادله تعادل نیز در تعیین تنش بازیافت وارد مسئله می‌شود [۱۷]. با استفاده از روش کار مجازی و انرژی پتانسیل کمینه عبارت رابطه ۳-۴ برابر با صفر قرار داده می‌شود.

$$\delta \Pi = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV - \int_S \delta u^T T dS - \int_V \delta u^T f dV = 0 \quad (3-4)$$

حال با جاگذاری میدان تنش بازیافتی تعریف شده به جای تنش در رابطه بالا و در نظر گرفتن جابجایی و کرنش مجازی رابطه ۳-۴ بازنویسی شده و همانند رابطه ۴-۴ خواهد شد.

$$\delta \Pi_{residual} = \int_{V_p} \delta \varepsilon^T \sigma^* dV - \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \int_{V_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV \quad (4-4)$$

که در آن:

$\delta \varepsilon$: بردار کرنش مجازی $\delta \mathbf{u}$: بردار تغییر مکان مجازی \mathbf{f} : بردار نیروی پیکره

\mathbf{T} : بردار نیروی سطحی V_p : حجم ناحیه S_p : سطح مرز ناحیه

رابطه میان تغییر مکان مجازی و کرنش مجازی در محیط توابع پایه‌ای نریز توسط روابط (۴-۵) مشخص می‌گردد.

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{R} \delta \mathbf{q}_p \quad (5-4)$$

$$\delta \varepsilon = \mathbf{B} \delta \mathbf{q}_p$$

که در روابط بالا $\delta \mathbf{q}_p$ بردار تغییر مکان مجازی در نقاط کنترل، \mathbf{B} بردار عملگر دیفرانسیل بر روی

توابع پایه‌ایی نریز ، \mathbf{R} بردار توابع پایه‌ایی نریز و $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ کرنش در نقطه مورد نظر می‌باشند. رابطه ۴-۴ در دو ترم تعیین می‌گردد، بطوریکه جمله اول را بعنوان ترم اول و مجموع جملات دوم و سوم را بعنوان ترم دوم در نظر گرفته می‌شوند. ترم اول رابطه با جاگذاری رابطه ۴-۵ و تنش بازیافتی بصورت رابطه ۴-۶ خواهد بود.

$$\int_{V_p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}^* dV = \delta \mathbf{q}_p^T \left(\int_{V_p} \mathbf{B}^T \mathbf{R} dV \right) \mathbf{P} = \delta \mathbf{q}_p^T \mathbf{C} \mathbf{P} \quad (۴-۶)$$

$$\mathbf{C} = \int_{V_p} \mathbf{B}^T \mathbf{R} dV$$

در ادامه ترم دوم رابطه ۴-۴ با قراردادن رابطه ۴-۵ در مجموع جملات دوم و سوم رابطه (۴-۷) تعیین می‌گردد:

$$\int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{T} dS + \int_{V_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} dV = \delta \mathbf{q}_p^T \mathbf{F}_p \quad (۴-۷)$$

$$\mathbf{F}_p = \int_{S_p} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{T} dS + \int_{V_p} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV$$

رابطه ارایه شده برای \mathbf{F}_p مطابق با رابطه مقاله روش LP می‌باشد [۱۷]. برای تعیین \mathbf{F}_p در محیط ایزوژئومتریک از رابطه ارایه شده در مقاله آقای برومند در این زمینه، مطابق رابطه ۴-۸ استفاده می‌شود [۱۵].

$$\mathbf{F}_p = \int_{V_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{iso} dV \quad (۴-۸)$$

حال پس از تعیین دو ترم رابطه ۴-۴ و جاگذاری آنها در باقیمانده معادله تعادل و پس از مرتب نمودن رابطه نتیجه بصورت رابطه زیر در می‌آید:

$$\delta \Pi_{residual} = \delta \mathbf{q}_p^T (\mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{F}_p) = \delta \mathbf{q}_p^T \mathbf{R}_{eq} \Rightarrow \mathbf{R}_{eq} = \mathbf{C} \mathbf{P} - \mathbf{F}_p \quad (۴-۹)$$

حال می‌بایست تابعی تعریف گردد که در آن مجموع خطا در رابطه ۴-۲ و باقیمانده معادله تعادل در آن مینیمم گردد. در نتیجه مجموع باقیمانده معادله تعادل با ضریب بتا و مجموع مربعات خطا در

نقاط گسسته گاوس را بعنوان تابع در نظر گرفته می‌شود. تابع \mathbf{F} که در رابطه ۴-۱۰ آورده شده است می‌بایست مینیمم شود. تنها مجهول در این تابع مولفه سوم نقاط کنترل می‌باشد که با شرط مینیمم شدن تابع مذکور تعیین می‌شود.

$$\mathbf{F}(P_{i,j}) = \sum_{i=1}^n e_i^T e_i + \beta \mathbf{R}_{eq}^T \mathbf{R}_{eq} \quad (10-4)$$

در رابطه بالا n تعداد نقاط گاوس در هر دو راستای X و Y می‌باشد، که از ضرب تعداد مقادیر نقاط گاوس در هر راستا تعیین می‌شود. حال اگر از رابطه بالا نسبت به مولفه سوم نقاط کنترل $(P_{i,j})$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم. پس از مشتق گیری و مرتب نمودن جملات با توجه به مجهول مسئله نتیجه همانند رابطه ۴-۱۱ خواهد شد.

$$\left(\sum_{k=1}^n R_{i,j}^T R_{i,j} + \beta \mathbf{C}^T \mathbf{C} \right) \mathbf{P} = \sum_{k=1}^n R_{i,j}^T \sigma_{iso} + \beta \mathbf{C}^T \mathbf{F}_p \quad (11-4)$$

برای بدست آوردن مجهولات میدان تنش بازیافتی چهار جمله معادله بالا در محیط تحلیل ایزوژئومتریک برای هر مولفه تنش تعیین می‌شود. پس از تعیین قسمت سمت چپ معادله و معکوس نمودن و ضرب در سمت راست معادله مجهولات بدست می‌آیند. به همین منظور جملات معادله در فرم ماتریسی نوشته شده و محاسبه می‌شوند.

۴-۴- تعیین جملات معادله بازیافت

معادله رابطه ۴-۱۱ را بصورت پارامتری همانند زیر نوشته و در ادامه شیوه تعیین پارامترها را شرح داده می‌شود.

$$(\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{P} = (\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{D}}) \gg \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{P} \bar{\mathbf{F}} \gg \begin{cases} \bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{D}} \end{cases} \quad 12-4$$

در ادامه چهار پارامتر موجود در رابطه بالا جداگانه تعیین شده و در رابطه قرار داده می‌شود. ابتدا نحوه

تعیین پارامترهای سمت چپ معادله و سپس پارامترهای سمت راست آن بیان می‌شود.

۴-۴-۱- پارامتر \bar{A}

ابتدا جمله اول رابطه بالا که مربوط به هندسه تحلیل و توابع پایه‌ای نریز تعیین می‌گردد. با توجه به اینکه \bar{A} با استفاده از مقادیر توابع پایه نریز در نقاط گاوس بدست می‌آید، بنابراین برای هر سه جهت تنش یکسان می‌باشد. این جمله می‌بایست برای تمام نقاط کنترل تعیین و در نقاط گاوس انتگرالگیری صورت پذیرد.

حال اگر تمام $R_{i,j}$ در یک ماتریس سطری نوشته شود، ماتریس \bar{R} همانند رابطه ۴-۱۳ خواهد بود.

$$\bar{R} = \left[R_{1,1}, R_{1,2}, \dots, R_{1,(n_x+1)}, R_{2,1}, R_{2,2}, \dots, R_{2,(n_x+1)}, \dots, R_{((n_x+1),(n_y+1))} \right] \quad (4-13)$$

ذکر این نکته ضروری است که برای محاسبه ماتریس \bar{A} ، ضرب ترانهاده ماتریس \bar{R} در ماتریس \bar{R} برای تمام نقاط گاوس در هر ناحیه صورت پذیرد. همانگونه که در فصل قبل اشاره شد به دلیل وجود خاصیت بازه تاثیر توابع نریز، تنها تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می‌باشند و ماتریس \bar{R} نیز در هر نقطه گاوس برای مقادیر غیر صفر محاسبه می‌شود. تعداد عناصر غیر صفر برای هر نقطه گاوس وابسته به درجات توابع پایه نریز در مسئله بوده و برابر $(P_x+1)*(P_y+1)$ می‌باشد، با توجه به اینکه ماتریس \bar{A} از ضرب ماتریس \bar{R} در ترانهاده آن بدست می‌آید، تعداد $[(P_x+1)*(P_y+1) \times (P_x+1)*(P_y+1)]$ از عناصر ماتریس \bar{A} دستخوش تغییر می‌شود، به همین ترتیب کل دامنه مسئله طی شده و ماتریس \bar{A} کامل می‌شود.

در واقع برای هر نقطه گاوس تعداد $(p_x+1)*(p_y+1)$ از عناصر ماتریس \bar{R} غیر صفر هستند و در تولید ماتریس \bar{A} موثر خواهند بود. که (p_x+1) و (p_y+1) بترتیب مرتبه توابع پایه‌ای نریز در راستای x و y می‌باشند. بدین ترتیب با محاسبه عناصر ماتریسها برای همه نقاط گاوس در تمامی المانها ماتریس \bar{A} کامل می‌گردد.

$$\bar{A} = \sum_{i=1}^N \bar{R}^T \bar{R} \quad (4-14)$$

در رابطه بالا N از ضرب تعداد نقاط گاوس در دو راستای فضای انتگرالگیری در هر ناحیه تعیین می‌شود، که تعداد نقاط گاوس در هر راستا با توجه به تعداد المان و تعداد نقاط گاوس مورد استفاده برای انتگرالگیری در هر المان تعیین می‌شود.

ذکر این نکته ضروری است که در هر نقطه از فرم کامل ماتریس $\bar{\mathbf{R}}$ استفاده شده و سپس با استفاده از حاصل ضرب ترانزاده ماتریس در خودش، مقادیر درایه‌های مشترک ماتریس با مقادیر قبلی آن جمع می‌شوند. با تکرار عملیات محاسبه ماتریس $\bar{\mathbf{A}}$ برای تمام نقاط گاوس در ناحیه، ماتریس $\bar{\mathbf{A}}$ بتدریج کامل می‌شود.

۴-۴-۲- پارامتر $\bar{\mathbf{C}}$

برای محاسبه $\bar{\mathbf{C}}$ نیاز به محاسبه ماتریس \mathbf{C} می‌باشد. که مقدار آن در حالت دو بعدی برای هر مولفه تنش برابر $\mathbf{C} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{R} d\Omega$ خواهد بود، جهت محاسبه انتگرال به روش گاوس لازم است که مقدار حاصلضرب $\mathbf{B}^T \mathbf{R}$ در نقاط گاوس محاسبه شود. همانگونه که در فصل قبل اشاره شد، ماتریس \mathbf{B} از اعمال عملگر دیفرانسیل بر روی توابع پایه نریز تعیین می‌گردد.

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{R}} \quad 15-4$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i,j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i,j}(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$

در رابطه بالا i و j شمارنده بازه بردار گرهی است در جهت ξ, η در فضای نریز که، نقطه گاوس مربوطه در آن بازه قرار دارد. برای محاسبه ماتریس \mathbf{C} برای هر یک از مولفه های تنش به صورت زیر روابط را تعریف می‌کنیم. در ابتدا ماتریس \mathbf{R}_{local} مطابق رابطه (۴-۱۷) در برنامه تعریف شده و مقادیر غیر صفر توابع پایه‌ای نریز برای هر نقطه گاوس در آن ذخیره می‌شود. مطابق رابطه (۴-۱۵)

ماتریس **B** به صورت رابطه ۴-۱۶ در برنامه تحلیل ایزوژئومتریکی دو بعدی تشکیل می‌گردد. با اعمال عملگر دیفرانسیل در برنامه برای هر نقطه مقادیر غیر صفر وارد محاسبات می‌شوند. در واقع مقادیر بصورت محلی برای هر نقطه گاوس تعیین شده و سپس در ماتریس کلی **C** برای هر ناحیه در درایه مربوط به آن قرار داده می‌شود.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial}{\partial x} R_{i,j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial}{\partial y} R_{i,j}(\xi, \eta) \\ \frac{\partial}{\partial y} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \frac{\partial}{\partial x} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \dots & \dots & \frac{\partial}{\partial y} R_{i,j}(\xi, \eta) & \frac{\partial}{\partial x} R_{i,j}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad ۱۶-۴$$

پس از مشخص شدن ماتریس **B**، با ضرب ترانزپوز شده سطر اول، دوم و سوم آن در \mathbf{R}_{local} به ترتیب ماتریس C_x ، C_y و C_{xy} محلی محاسبه می‌شود. در نهایت مقادیر محلی محاسبه شده در ماتریس سراسری **C** مربوط به هر مولفه تنش قرار می‌گیرند.

$$\mathbf{R}_{local} = \left[R_{i-p_x, j-p_y}, R_{i-p_x+1, j-p_y}, \dots, R_{i, j-p_y}, \dots, R_{i, j} \right] \quad ۱۷-۴$$

پس از ضرب ماتریسها، ماتریس **C** برای سه جهت تعیین می‌شود.

پس از تعیین ماتریس سراسری **C** در سه جهت، ماتریس \bar{C} برای سه جهت از روابط ۴-۱۸ بدست می‌آید.

$$\bar{C}_x = \beta * C_x^T * C_x, \bar{C}_y = \beta * C_y^T * C_y, \bar{C}_{xy} = \beta * C_{xy}^T * C_{xy} \quad ۱۸-۴$$

۴-۴-۳- پارامتر \bar{E}

با بدست آمدن ماتریس‌های \bar{A} و \bar{C} سمت چپ معادله ۴-۱۱ را می‌توان از روابط زیر بدست آورد که برابر با جمع دو ترم اول رابطه برای سه جهت است.

$$\begin{aligned}\bar{E}_x(i, j) &= \bar{A}(i, j) + \bar{C}_x(i, j) \\ \bar{E}_y(i, j) &= \bar{A}(i, j) + \bar{C}_y(i, j) \\ \bar{E}_{xy}(i, j) &= \bar{A}(i, j) + \bar{C}_{xy}(i, j)\end{aligned}\quad ۱۹-۴$$

۴-۴-۴- پارامتر \bar{B}

جهت ذخیره‌سازی جمله اول سمت راست معادله ۴-۱۱ ماتریس \bar{B} تعریف شده است. برای بدست آوردن درایه‌های ماتریس نیاز به مقادیر تنش ایزوژئومتریکی نقاط و توابع پایه‌ای نریز در نقاط گاوس می‌باشد. با توجه به تعریفی که در رابطه ۴-۱۳ برای \bar{R} ارایه شد، نمونه برداری از حل ایزوژئومتریکی و استفاده از برنامه‌های نوشته شده در این زمینه می‌توان از روابط ۴-۲۰ برای تعیین ماتریس \bar{B} استفاده نمود.

$$\bar{B}_x = \bar{R}^T * \sigma_{x iso} \quad \langle \rangle \quad \bar{B}_y = \bar{R}^T * \sigma_{y iso} \quad \langle \rangle \quad \bar{B}_{xy} = \bar{R}^T * \sigma_{xy iso} \quad ۲۰-۴$$

۴-۴-۵- پارامتر \bar{D}

در معادله ۴-۱۱ نوبت تعیین قسمت آخر معادله می‌رسد، با توجه به اینکه ماتریس C در قسمت‌های قبلی تعیین شده است، برای تعیین \bar{D} تنها نیاز به بدست آوردن F_p می‌باشد. همانطور که در ابتدای فصل نیز اشاره شد، با استفاده از مقالات و تحقیقات در زمینه بازیافت توسط تعادل ناحیه مقدار F_p را می‌توان از رابطه زیر تعیین نمود.

$$F_p = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma_{iso} d\Omega \quad ۲۱-۴$$

ماتریس \mathbf{B}^T در هر بازه از محیط تحلیل ایزوژئومتریکی در برنامه تحلیل دو بعدی ایزوژئومتریکی بصورت رابطه ۴-۲۳ می‌باشد، که در ماتریس تنش‌های بدست آمده برای نقاط گاوس در هر المان ضرب می‌

شود. که با ازای هر نقطه گاوس در هر المان مقادیر جدید با مقادیر قبلی جمع می شوند، لازم بذکر است تعداد $2*(P_x+1)*(P_y+1)$ از درایه های ماتریس F_p دستخوش تغییر خواهد شد، که با طی نمودن کل دامنه مرتبه ماتریس F_p برابر $2*(n_x+1)*(n_y+1)$ خواهد بود. در انتها برای نقاط کنترل دو مولفه نیرو تعیین می گردد.

$$B^T = \begin{bmatrix} B(0, j_0) & 0 & B(2, j_0) \\ 0 & B(1, h_0) & B(2, h_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B(0, j_{(P_x+1)*(P_y+1)-1}) & 0 & B(2, j_{(P_x+1)*(P_y+1)-1}) \\ 0 & B(1, h_{(P_x+1)*(P_y+1)-1}) & B(2, h_{(P_x+1)*(P_y+1)-1}) \end{bmatrix} \quad ۲۲-۴$$

برخی از درایه های ماتریس B^T در رابطه ۲۴-۴ آورده شده است.

$$B(2, h_0) = \frac{\partial}{\partial x} R_{i-p, j-q}(\xi, \eta) \quad B(0, j_0) = \frac{\partial}{\partial x} R_{i-p, j-q}(\xi, \eta) \quad ۲۳-۴$$

$$B(2, j_0) = \frac{\partial}{\partial y} R_{i-p, j-q}(\xi, \eta) \quad B(1, h_0) = \frac{\partial}{\partial y} R_{i-p, j-q}(\xi, \eta)$$

با محاسبه ماتریس F_p از روابط ذیل ماتریس \bar{D} در سه جهت تعیین می گردد:

$$\bar{D}_x = \beta * C_x^T * F_p, \bar{D}_y = \beta * C_y^T * F_p, \bar{D}_{xy} = \beta * C_{xy}^T * F_p \quad ۲۴-۴$$

۴-۴-۶- پارامتر \bar{F}

حال مجموع دو ترم سمت راست معادله ۴-۱۱ در ماتریس \bar{F} ذخیره می‌گردد، همانگونه که در رابطه ۴-۲۵ مشاهده می‌شود درایه‌های دو ماتریس با هم جمع شده و در درایه‌های ماتریس \bar{F} برای هر جهت ذخیره می‌شود.

$$\bar{F}_x(i, j) = \bar{B}_x(i, j) + \bar{D}_x(i, j)$$

$$\bar{F}_y(i, j) = \bar{B}_y(i, j) + \bar{D}_y(i, j)$$

۲۵-۴

$$\bar{F}_{xy}(i, j) = \bar{B}_{xy}(i, j) + \bar{D}_{xy}(i, j)$$

۴-۵- تعیین مجهولات

با تعیین جملات معادله ۴-۱۱ نوبت به محاسبه مجهولات می‌رسد. برای محاسبه پارامترهای مجهول از روابط ۴-۲۶ استفاده می‌گردد.

$$\bar{P}_x = \bar{E}_x^{-1} \times \bar{F}_x$$

$$\bar{P}_y = \bar{E}_y^{-1} \times \bar{F}_y$$

۲۶-۴

$$\bar{P}_{xy} = \bar{E}_{xy}^{-1} \times \bar{F}_{xy}$$

ماتریس مجهولات که همانند ذیل می‌باشد، توسط رابطه ۴-۲۶ برای هر جهت مشخص می‌شود.

$$\bar{P} = [P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,n}, P_{2,1}, P_{2,2}, \dots, P_{2,n}, \dots, P_{m,n}]^T$$

۲۷-۴

با بدست آوردن مجهولات و با داشتن مختصات هندسی هر نقطه تنش بازیافتی توسط روابط ۴-۱ در آن نقطه محاسبه می‌شود.

فصل پنجم

ارایه نتایج

۵۵-۱- مقدمه

در این فصل به بررسی کارآیی روش بازیافت تنش LP به عنوان یک روش توسعه یافته جهت بهبود میدان تنش در تحلیل ایزوژئومتریک پرداخته می‌شود. همانطور که در فصول قبل نیز اشاره شد روش تخمین کننده خطای LP در دسته روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) قرار دارد. به منظور بررسی کارآیی روش، مثالهایی در نظر گرفته شده است که حل تئوری آنها در تحلیل الاستیسیته موجود می‌باشد.

از پارامترهای نرم خطای تقریبی، نرم خطای دقیق، شاخص تاثیر و مولفه تنش مسطح برای مقایسه استفاده شده است. در ارتباط با روش بازیافت LP بهترین درجه چندجمله‌ایی برای تحلیل ایزوژئومتریک و بازیافت تنش آن در هر مثال تعیین می‌شود.

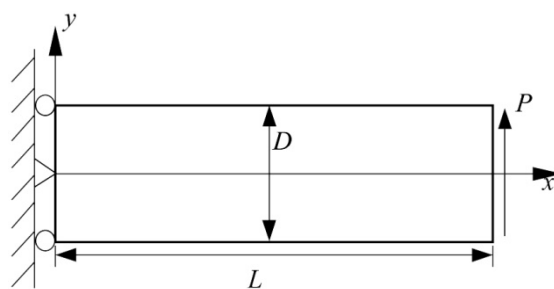
برای مقایسه کارآیی و صحت روش از سه مثال شناخته شده که حل دقیق آنها در دسترس می‌باشد، استفاده شده است. مثالهای بررسی شده عبارتند از: (۱) تیر طره تحت بار وارده در انتهای آن (۲) صفحه تحت کشش و دارای حفره در مرکز آن (۳) صفحه ترکدار تحت کشش. نتایج هر یک از مسایل بطور جداگانه ارایه شده و درجه مناسب به منظور بازیافت تنش تعیین می‌شود. در انتها نیز نتیجه‌گیری کلی و برخی پیشنهادات در راستای ادامه تحقیق ارایه شده است.

۵-۲- تیر طره تیموشنکو

در این قسمت به بررسی نتایج گرفته شده از مدلسازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک در شرایط تنش مستوی توسط تحلیل ایزوژئومتریکی و بازیابی تنش‌های آن برای چند حالت پرداخته می‌شود. مدل هندسی تیر در شکل ۱-۵ نشان داده شده است.

پارامترهای مربوط به مصالح و هندسه تیر طره در این آنالیز به صورت در نظر گرفته شده است:

$$L=10, \quad D=2, \quad P=300, \quad E=1500, \quad \nu=0.15$$



شکل ۱-۵ تیر طره در شرایط تنش مستوی

تنش‌های دقیق مسئله با توجه به حل تحلیلی آن توسط تیموشنکو و گودیر^۱ به صورت زیر ارایه شده است [۲۸].

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I} \quad (۱-۵)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (۲-۵)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right) \quad (۳-۵)$$

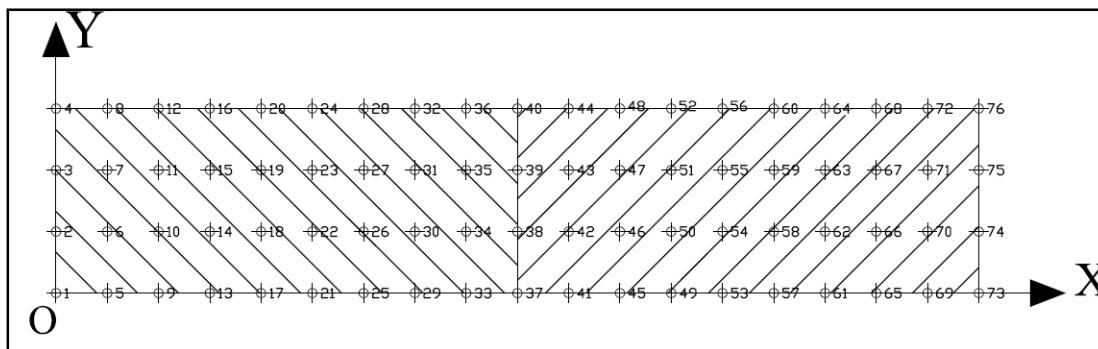
که در آن $I = \frac{D^3}{12}$ می‌باشد.

۵-۲-۱- بررسی فرضیات حل مسئله در روش تحلیل ایزوژئومتریکی

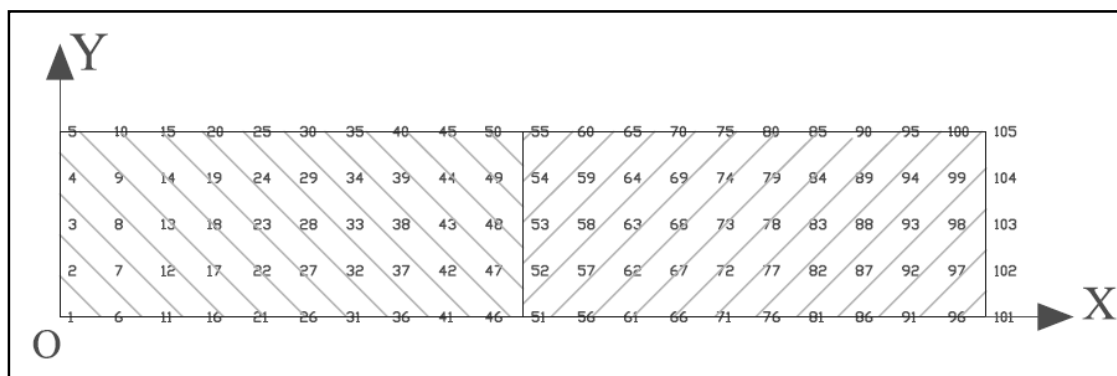
برای مدلسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریکی از دو نوع آرایش نقاط کنترلی با تعداد ۷۶ و ۱۰۵ در دو ناحیه مشابه همانند شکل ۲-۵ استفاده شده است.

¹ Timonshenko and Goodier

همچنین برای تحلیل ایزوژئومتریک از سه درجه متفاوت $p=1$ ، $p=2$ و $p=3$ برای توابع پایه‌ایی نریز استفاده شده و برای هر درجه توابع پایه‌ایی نریز از تعداد نقاط گاوس مشخص استفاده شده است. به این ترتیب برای درجه $p=1$ از چهار نقطه گاوس، برای درجه $p=2$ از نه نقطه گاوس و برای درجه $p=3$ از شانزده نقطه گاوس استفاده شده است.



الف) ۷۶ نقطه کنترل



ب) ۱۰۵ نقطه کنترل

شکل ۵-۲ آرایش نقاط کنترل مورد استفاده در مدلسازی تیر طره

با توجه به اینکه آرایش، تعداد نقاط کنترل و همچنین درجه استفاده شده برای توابع پایه‌ایی نریز بر روی بردارهای گرهی در جهات η و ξ تاثیر می‌گذارد، در نتیجه شش آرایش مختلف برای بردارهای گرهی به صورتی که در اشکال ۵-۴ و ۵-۵ بترتیب برای ۷۶ و ۱۰۵ نقطه کنترل مشاهده می‌شود، وجود دارد. تعداد مولفه بردارهای گرهی با استفاده رابطه ۵-۴ در هر جهت تعیین می‌شود.

$$m = n + p + 1$$

۴-۵

که در رابطه بالا $n+1$, p , $m+1$ بترتیب تعداد بردارهای گرهی، درجه توابع پایه‌ایی نریز و تعداد نقاط

کنترل در هر راستا می‌باشد، با توجه به مشخص بودن تعداد نقاط کنترل و درجه توابع پایه تعداد مولفه‌های بردارهای گرهی در هر جهت در محیط نریز تعیین می‌شود.

$$u = \{0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1\}, v = \{0 \ 0 \ 0.3 \ 0.7 \ 1 \ 1\}$$

(۱)

$$u = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1\}, v = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

(۲)

$$u = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.15 \ 0.3 \ 0.45 \ 0.6 \ 0.75 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}, v = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

(۳)

الف) ۷۶ نقطه کنترل (۱) درجه ۱ توابع پایه (۲) درجه ۲ توابع پایه (۳) درجه ۳ توابع پایه

$$u = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1\}, v = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.7 \ 1 \ 1\}$$

(۱)

$$u = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.125 \ 0.25 \ 0.375 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.625 \ 0.750 \ 0.875 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

$$v = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.335 \ 0.665 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

(۲)

$$u = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}, v = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$$

(۳)

ب) ۱۰۵ نقطه کنترل (۱) درجه ۱ توابع پایه (۲) درجه ۲ توابع پایه (۳) درجه ۳ توابع پایه

شکل ۳-۵ بردارهای گرهی مورد استفاده در مدلسازی تیر طره

شرایط مرزی تکیه گاهی بر طبق آرایش نقاط کنترلی و درجات آزادی مربوط به نقاط کنترل موجود در مرز اشکال ۲-۵ و ۳-۵ اعمال می‌شود. نیروی خارجی وارده P نیز مابین درجات آزادی نقاط کنترل انتهایی تیر توزیع شده و جمع نیروهای وارد بر نقاط کنترل انتهایی تیر برابر با مقدار P می‌شود.

۵-۲-۲- بررسی شاخص تاثیر در روشهای بازیافت LP و SPR

در جدول ۱-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر هر المان برای هر دو روش

بازیافت تنش و همچنین برای کل هندسه مسئله نشان داده شده است. شاخص تاثیر نسبت نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق می‌باشد که بیانگر همگرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه گر خطا به شمار می‌رود. هر مقدار که این شاخص به سمت یک میل نماید، نشان از مناسب و کارا بودن روش بازیافت خواهد بود. همانگونه که مشاهده می‌شود، در حالت استفاده از ۷۶ نقطه کنترل با درجه ۱ بهبود ۱٪ در نتایج کلی حاصل شده است.

جداول ۲-۵ الی ۵-۵ نرمهای خطا و شاخص تاثیر برای حالت‌های دیگر تیر طره را نشان می‌دهد، همانطور که ملاحظه می‌شود در تمام حالتها افزایش مقدار شاخص تاثیر و نزدیک شدن آن به سمت یک مشاهده می‌شود.

در حالت استفاده از ۱۰۵ نقطه کنترل با توابع پایه نربز درجه ۳ بیشترین افزایش در شاخص تاثیر مشاهده می‌شود. اما مقدار شاخص تاثیر برای این حالت پایین می‌باشد. در واقع ذکر این نکته ضروری است که در انتخاب روش بازیافت علاوه بر درصد افزایش شاخص تاثیر به میزان قابل قبول بودن آن نیز می‌بایست توجه نمود.

در جدول ۵-۶ درصد افزایش شاخص تاثیر در روش LP نسبت به روش SPR را برای پنج حالت تحلیل نشان می‌دهد. همانطور که اشاره شد در همه موارد افزایش مقدار شاخص تاثیر دیده می‌شود.

جدول ۵-۱ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۷۶ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس

شماره المان	Exact	LP		SPR	
	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ
1	28.35	11.34	0.400	9.13	0.322
2	33.35	34.47	1.034	34.04	1.021
3	48.40	28.34	0.586	30.03	0.620
4	46.50	24.77	0.533	23.15	0.498
5	10.01	14.35	1.433	14.46	1.444
6	37.82	10.83	0.286	12.05	0.319
7	19.60	13.21	0.674	13.64	0.696
8	11.33	11.95	1.055	12.11	1.068
9	16.08	12.78	0.795	13.11	0.815
10	11.75	9.74	0.829	9.62	0.819
11	11.07	11.15	1.007	11.11	1.003
12	10.54	12.04	1.142	11.95	1.134
13	10.14	9.83	0.969	9.86	0.972
14	10.37	10.34	0.998	10.35	0.999
15	10.61	11.02	1.038	11.04	1.040
16	9.41	9.47	1.006	9.46	1.005
17	9.57	9.63	1.006	9.63	1.006
18	9.76	9.78	1.002	9.77	1.001
19	8.78	8.64	0.984	8.64	0.984
20	8.83	8.64	0.979	8.64	0.979
21	8.90	8.67	0.974	8.67	0.974
22	8.04	8.74	1.087	8.74	1.087
23	8.04	8.73	1.085	8.73	1.085
24	8.06	8.72	1.082	8.72	1.082
25	7.30	4.77	0.653	4.77	0.653
26	7.30	4.76	0.653	4.76	0.653
27	7.30	4.76	0.652	4.76	0.652
28	6.53	5.62	0.860	4.13	0.633
29	6.53	4.95	0.758	4.00	0.612
30	6.53	7.14	1.094	4.13	0.633
31	5.75	6.00	1.043	6.43	1.119
32	5.74	6.17	1.074	6.43	1.119
33	5.75	5.59	0.972	6.43	1.119
34	5.00	4.93	0.986	4.81	0.963
35	4.99	4.88	0.977	4.81	0.963
36	5.00	5.04	1.008	4.81	0.963
37	4.22	4.24	1.005	4.27	1.013
38	4.21	4.24	1.008	4.26	1.012
39	4.22	4.21	0.998	4.27	1.013
40	3.46	3.45	0.997	3.44	0.994
41	3.46	3.45	0.999	3.45	0.997
42	3.46	3.46	0.999	3.44	0.994
43	2.68	2.70	1.006	2.70	1.007
44	2.68	2.66	0.993	2.66	0.994
45	2.68	2.70	1.005	2.70	1.007
46	2.59	1.87	0.724	1.87	0.724
47	1.91	2.01	1.053	2.01	1.053
48	2.59	1.87	0.725	1.87	0.724
49	2.48	1.72	0.696	1.72	0.696
50	0.99	2.12	2.155	2.12	2.155
51	2.48	1.72	0.696	1.72	0.696
52	3.93	1.86	0.475	1.86	0.475
53	0.68	1.95	2.866	1.95	2.866
54	3.93	1.86	0.475	1.86	0.475
مجموع	521.67	419.90	0.805	415.14	0.796

جدول ۵-۲ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۷۶ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس

شماره المان	Exact		LP		SPR	
	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در هر المان
1	82	38.56	0.470	31.55	0.385	
2	102.96	46.36	0.450	32.39	0.315	
3	45.75	18.77	0.410	10.23	0.224	
4	50.70	17.00	0.335	13.13	0.259	
5	14.02	5.77	0.412	3.43	0.245	
6	10.63	7.86	0.740	7.25	0.682	
7	4.74	5.99	1.263	4.08	0.861	
8	5.21	2.01	0.386	3.56	0.684	
9	4.04	4.16	1.028	3.94	0.973	
10	3.95	4.53	1.147	4.25	1.076	
11	2.96	2.95	0.997	3.02	1.020	
12	2.99	3.53	1.180	3.41	1.142	
13	3.07	2.63	0.854	2.70	0.878	
14	2.95	2.81	0.951	2.82	0.954	
15	6.81	3.09	0.453	3.18	0.466	
16	6.84	3.30	0.483	3.28	0.480	
17	6.23	4.06	0.651	3.47	0.557	
18	6.23	3.68	0.590	3.47	0.556	
19	3.44	3.12	0.908	2.50	0.728	
20	3.44	2.35	0.685	2.50	0.728	
21	2.24	2.04	0.908	1.87	0.835	
22	2.24	1.88	0.838	1.87	0.835	
23	2.73	2.49	0.913	2.32	0.850	
24	2.73	2.26	0.828	2.32	0.850	
25	2.85	2.06	0.725	2.08	0.729	
26	2.85	2.09	0.734	2.08	0.729	
27	2.41	1.73	0.719	1.73	0.718	
28	2.41	1.73	0.718	1.73	0.718	
29	2.35	1.84	0.782	1.84	0.783	
30	2.35	1.84	0.784	1.84	0.783	
31	4.16	3.03	0.729	3.03	0.728	
32	4.16	3.03	0.728	3.03	0.728	
مجموع	402.45	208.54	0.518	169.90	0.422	

جدول ۵-۳ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس

شماره المان	Exact	LP		SPR	
	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ
1	35.77	22.48	0.629	20.88	0.584
2	30.85	22.53	0.730	21.32	0.691
3	30.85	20.96	0.679	21.32	0.691
4	35.77	23.52	0.658	20.88	0.584
5	16.17	16.50	1.021	17.51	1.083
6	13.06	8.60	0.658	9.34	0.715
7	13.06	7.87	0.602	9.34	0.715
8	16.17	17.10	1.058	17.51	1.083
9	9.31	7.25	0.779	6.98	0.750
10	8.81	10.40	1.180	10.20	1.158
11	8.81	10.60	1.202	10.20	1.158
12	9.31	7.09	0.762	6.98	0.750
13	8.41	8.77	1.042	8.84	1.051
14	8.55	8.34	0.976	8.39	0.982
15	8.55	8.29	0.970	8.39	0.982
16	8.41	8.81	1.047	8.84	1.051
17	7.97	7.89	0.990	7.87	0.988
18	8.00	8.04	1.005	8.02	1.003
19	8.00	8.05	1.007	8.02	1.003
20	7.97	7.88	0.989	7.87	0.988
21	7.47	7.49	1.002	7.49	1.003
22	7.47	7.45	0.996	7.45	0.997
23	7.47	7.44	0.996	7.45	0.997
24	7.47	7.49	1.003	7.49	1.003
25	6.96	6.99	1.004	6.98	1.004
26	6.96	7.00	1.006	7.00	1.006
27	6.96	7.00	1.006	7.00	1.006
28	6.96	6.99	1.004	6.98	1.004
29	6.44	6.31	0.979	6.31	0.979
30	6.44	6.30	0.979	6.31	0.979
31	6.44	6.30	0.979	6.31	0.979
32	6.44	6.31	0.979	6.31	0.979
33	5.93	6.43	1.085	6.43	1.085
34	5.93	6.43	1.085	6.43	1.085
35	5.93	6.43	1.085	6.43	1.085
36	5.93	6.43	1.085	6.43	1.085
37	5.41	3.52	0.651	3.52	0.651
38	5.41	3.52	0.651	3.52	0.651
39	5.41	3.52	0.651	3.52	0.651
40	5.41	3.52	0.651	3.52	0.651
41	4.90	4.81	0.982	3.06	0.625
42	4.90	4.13	0.843	3.01	0.615
43	4.90	5.05	1.032	3.01	0.615
44	4.90	3.59	0.733	3.06	0.625
45	4.38	4.40	1.005	4.89	1.115
46	4.38	4.59	1.047	4.89	1.115
47	4.38	4.34	0.990	4.89	1.115
48	4.38	4.73	1.080	4.89	1.115
49	3.86	3.86	0.998	3.73	0.965
50	3.86	3.81	0.986	3.73	0.965
51	3.86	3.88	1.003	3.73	0.965
52	3.86	3.77	0.976	3.73	0.965
53	3.35	3.35	1.000	3.39	1.011
54	3.35	3.36	1.004	3.39	1.011
55	3.35	3.35	0.999	3.39	1.011
56	3.35	3.37	1.007	3.39	1.011
57	2.83	2.83	1.000	2.83	0.997
58	2.83	2.83	0.998	2.82	0.996

Exact		LP		SPR	
شماره المان	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ
59	2.83	2.83	1.000	2.82	0.996
60	2.83	2.83	0.998	2.82	0.997
61	2.32	2.32	0.999	2.32	1.000
62	2.32	2.32	1.001	2.32	1.002
63	2.32	2.32	1.001	2.32	1.002
64	2.32	2.32	1.000	2.32	1.000
65	1.83	1.81	0.988	1.81	0.987
66	1.80	1.80	0.996	1.80	0.996
67	1.80	1.80	0.997	1.80	0.996
68	1.83	1.81	0.987	1.81	0.987
69	1.79	1.26	0.704	1.26	0.704
70	1.28	1.43	1.118	1.43	1.118
71	1.28	1.43	1.118	1.43	1.118
72	1.79	1.26	0.704	1.26	0.704
73	1.78	1.19	0.670	1.19	0.670
74	0.72	1.17	1.612	1.17	1.612
75	0.72	1.17	1.612	1.17	1.612
76	1.78	1.19	0.670	1.19	0.670
77	2.21	1.11	0.502	1.11	0.502
78	0.95	1.10	1.153	1.10	1.153
79	0.95	1.10	1.153	1.10	1.153
80	2.21	1.11	0.502	1.11	0.502
مجموع	533.91	470.54	0.881	464.04	0.869

جدول ۴-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=3$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۱۶ نقاط گاوس

Exact		LP		SPR	
شمار ه	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ
1	95.89	20.50	0.214	18.64	0.194
2	95.89	29.01	0.303	18.64	0.194
3	18.46	12.26	0.664	12.11	0.656
4	18.46	13.18	0.714	12.11	0.656
5	5.81	7.50	1.291	7.62	1.312
6	5.81	6.88	1.184	7.62	1.312
7	3.35	6.74	2.011	6.83	2.036
8	3.35	6.24	1.861	6.83	2.036
9	1.98	3.80	1.918	3.84	1.937
10	1.98	3.61	1.821	3.84	1.937
11	1.68	1.59	0.946	1.62	0.966
12	1.68	1.56	0.930	1.62	0.966
13	2.16	1.95	0.899	1.98	0.915
14	2.16	1.95	0.902	1.98	0.915
15	5.23	2.79	0.533	2.83	0.541
16	5.23	2.83	0.540	2.83	0.541
17	5.28	4.24	0.803	2.67	0.506
18	5.28	2.95	0.560	2.67	0.506
19	2.14	1.52	0.710	1.53	0.713
20	2.14	1.83	0.854	1.53	0.713
21	1.68	0.66	0.395	0.88	0.520
22	1.68	1.06	0.632	0.88	0.520
23	1.96	0.65	0.330	0.85	0.435
24	1.96	0.99	0.505	0.85	0.435
25	1.97	0.15	0.077	0.21	0.107
26	1.97	0.27	0.136	0.21	0.107
27	1.49	0.14	0.093	0.17	0.111
28	1.49	0.18	0.124	0.17	0.111
29	1.81	0.14	0.077	0.15	0.085
30	1.81	0.16	0.088	0.15	0.085
31	2.53	0.20	0.080	0.21	0.085
32	2.53	0.21	0.084	0.21	0.085
مجموع	306.88	137.75	0.449	124.27	0.405

جدول ۵-۵ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس

شماره المان	Exact	LP		SPR	
	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ
1	49.96	18.14	0.363	16.94	0.339
2	65.83	12.87	0.196	13.37	0.203
3	49.96	25.77	0.516	16.94	0.339
4	17.61	11.33	0.643	10.99	0.624
5	16.98	4.34	0.255	4.49	0.264
6	17.61	7.85	0.446	10.99	0.624
7	3.70	5.14	1.389	4.96	1.340
8	3.57	4.35	1.220	4.77	1.338
9	3.70	3.63	0.981	4.96	1.340
10	7.17	5.36	0.747	5.29	0.737
11	5.52	5.91	1.072	6.07	1.101
12	7.17	4.80	0.669	5.29	0.737
13	6.81	6.35	0.932	6.32	0.928
14	5.50	3.85	0.701	3.79	0.689
15	6.81	6.06	0.891	6.32	0.928
16	2.71	1.75	0.646	1.76	0.648
17	2.82	1.75	0.622	1.77	0.628
18	2.71	1.81	0.669	1.76	0.648
19	2.53	1.70	0.674	1.70	0.674
20	1.05	1.35	1.285	1.35	1.287
21	2.53	1.70	0.675	1.70	0.674
22	4.75	1.57	0.331	1.57	0.330
23	4.46	1.17	0.263	1.17	0.262
24	4.75	1.56	0.328	1.57	0.331
25	4.65	2.18	0.468	1.91	0.410
26	3.52	1.67	0.475	1.62	0.460
27	4.65	3.07	0.660	1.91	0.410
28	2.11	2.37	1.127	1.81	0.861
29	2.07	1.54	0.741	1.51	0.730
30	2.11	1.53	0.727	1.81	0.861
31	1.91	0.80	0.417	0.72	0.377
32	0.36	0.64	1.770	0.63	1.745
33	1.91	0.69	0.362	0.72	0.377
34	2.66	1.58	0.596	1.63	0.614
35	2.47	1.51	0.611	1.51	0.613
36	2.66	1.68	0.633	1.63	0.615
37	2.51	2.09	0.832	2.05	0.818
38	1.80	1.90	1.056	1.89	1.055
39	2.51	2.03	0.811	2.05	0.817
40	1.63	0.72	0.442	0.73	0.447
41	1.31	0.78	0.596	0.78	0.597
42	1.63	0.73	0.449	0.73	0.447
43	1.56	0.49	0.314	0.49	0.314
44	1.08	0.64	0.593	0.64	0.593
45	1.56	0.49	0.314	0.49	0.314
46	1.88	0.68	0.358	0.68	0.358
47	1.20	1.01	0.844	1.01	0.844
48	1.88	0.67	0.358	0.68	0.358
مجموع	347.80	171.62	0.493	165.47	0.476

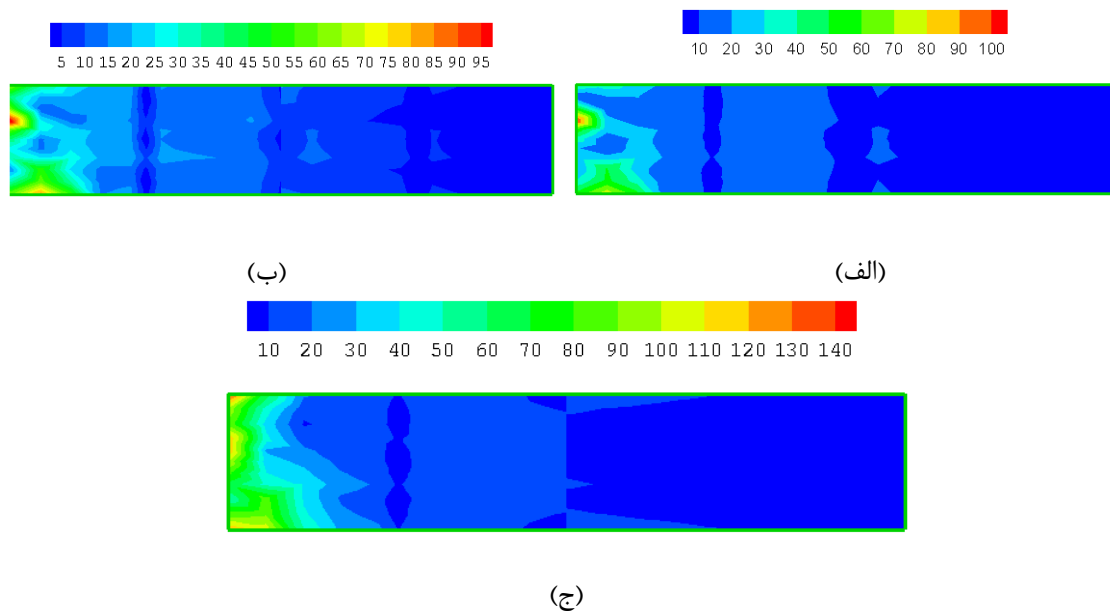
جدول ۵-۶ درصد رشد شاخص تاثیر برای روش LP نسبت به SPR در تیر طره

حالت تحلیل و بازیافت	Exact	SPR		LP		درصد افزایش شاخص تایید در روش LP نسبت به روش SPR
	نرم خطای دقیق در کل دامنه	نرم خطای تقریبی در کل دامنه	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در کل دامنه	شاخص تاثیر θ	
1 p=1,g.p=4,C.p=76	521.666	415.145	0.796	419.897	0.805	1%
2 p=2,g.p=9,C.p=76	402.447	169.896	0.422	208.537	0.518	23%
3 p=1,g.p=4,C.p=105	533.906	464.037	0.869	470.540	0.881	1%
4 p=2,g.p=9,C.p=105	347.801	165.466	0.476	171.619	0.493	4%
5 p=3,g.p=16,C.p=105	306.877	124.267	0.405	137.752	0.449	11%

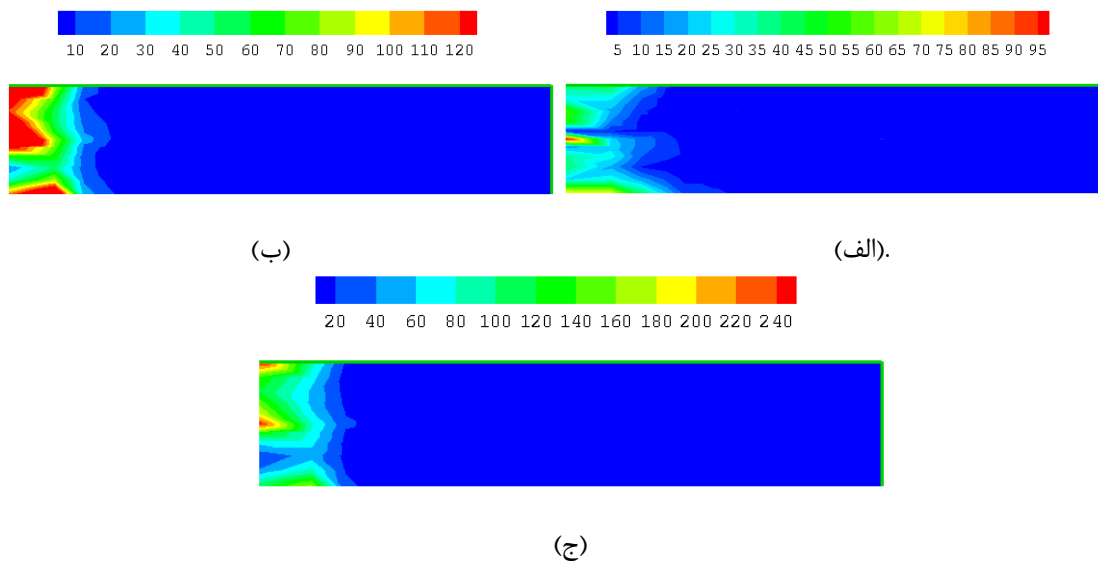
در جدول p درجه توابع پایه، g.p تعداد نقاط گاوس انتگرالگیری و C.P تعداد نقاط کنترل مورد استفاده در مدل نمودن مسئله می‌باشند.

۵-۲-۳- نمایش و مقایسه کانتورهای نرم خطا برای حالات مختلف تحلیل

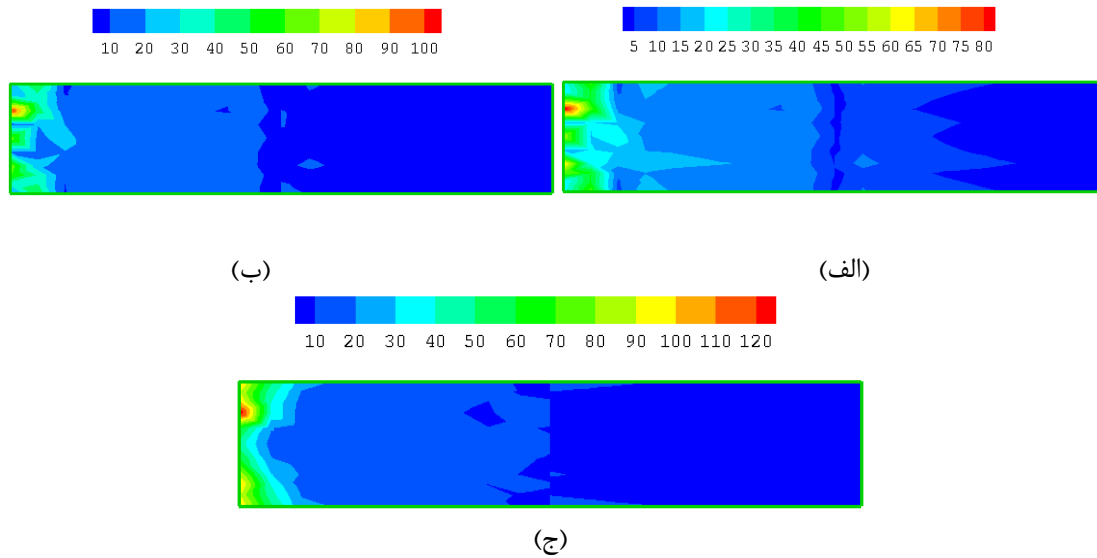
پس از بررسی شاخص تاثیر به بررسی کانتور نرم خطای انرژی در دامنه هندسه مسئله پرداخته می‌شود. نرم خطای تقریبی به روش LP، نرم خطای تقریبی به روش SPR و نرم خطای دقیق در نقاط نمونه‌برداری تعیین می‌گردند. به منظور برداشت نقاط از هندسه مسئله در هر بازه بردار گرهی برای هر ناحیه در هر جهت ۱۱ نقطه در نظر گرفته می‌شود، که برای هر ناحیه ۱۲۱ نقطه و در کل ۲۴۲ نقطه نمونه‌برداری شده برای هندسه مسئله خواهد شد. با استفاده از این نقاط و انجام عملیات مثلث‌بندی و درونیابی کانتورهای مربوط به هر حالت ترسیم شده‌اند. برای پنج حالت در نظر گرفته شده در تیر طره کانتورهای نرم خطای انرژی در اشکال ۵-۴ الی ۵-۸ آورده شده است.



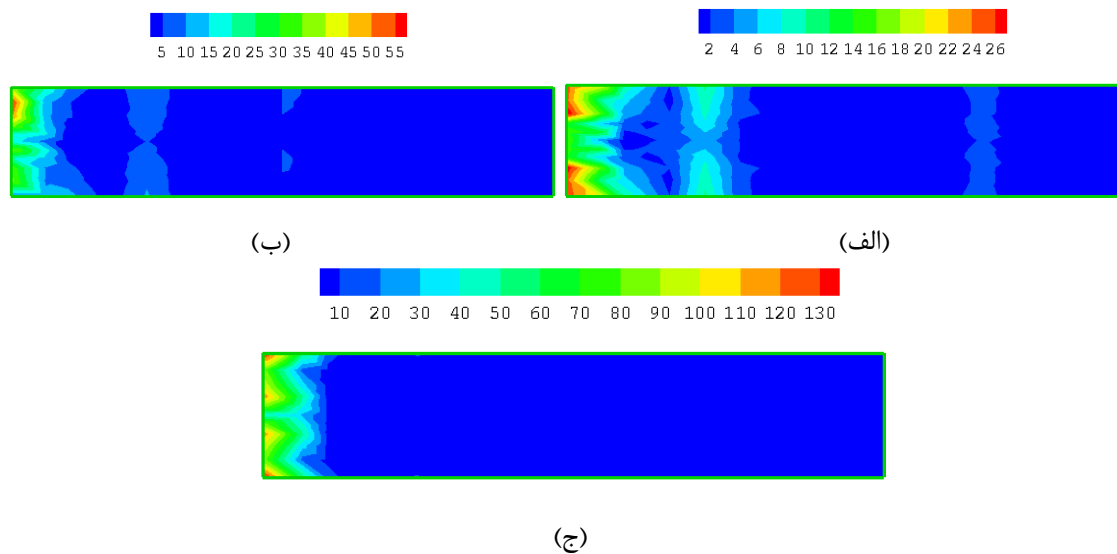
شکل ۴-۵ کانتور نرم خطا برای ۷۶ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



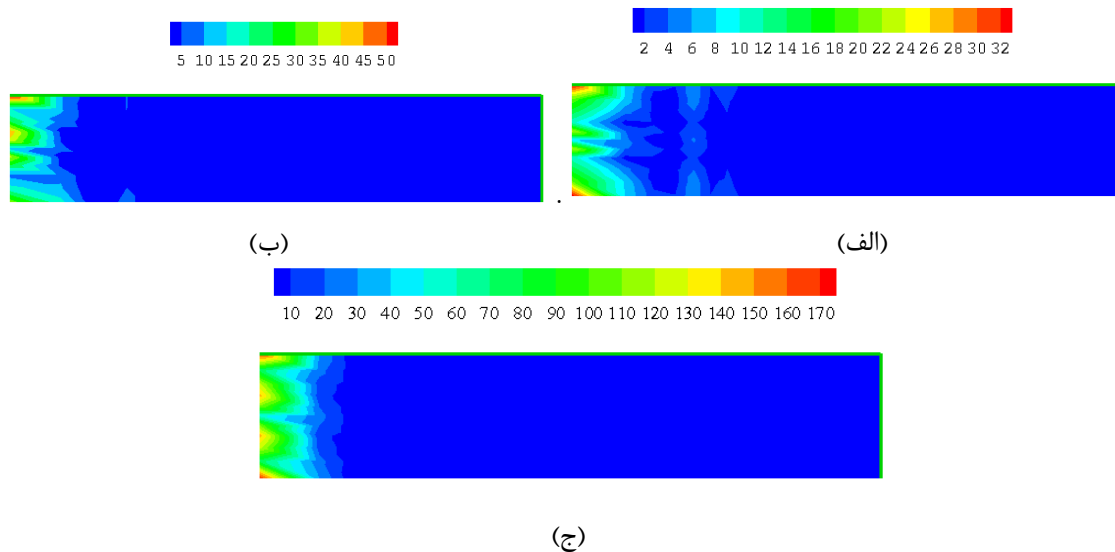
شکل ۵-۵ کانتور نرم خطا برای ۷۶ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



شکل ۵-۶ کانتور نرم خطا برای 10^5 نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



شکل ۵-۷ کانتور نرم خطا برای 10^5 نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



شکل ۵-۸ کانتور نرم خطا برای ۱۰۵ نقطه کنترل و درجه $p=3$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۱۶ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق

همانطور که در اشکال ۵-۴ الی ۵-۹ ملاحظه می‌شود، در تشخیص محل خطا و مقدار آن کانتورهای روش LP به نرم خطای دقیق نسبت به روش SPR نزدیک شده است. مقادیر حداکثر نرم خطا و بازه مقادیر خطا در روش LP به حالت دقیق میل می‌کند. به منظور روشن شدن موضوع مقادیر حداکثر و درصد کاهش مقدار فاصله با حل دقیق در جدول زیر نشان داده شده است. در همه موارد بغیر از مورد اول بهبود حل مشاهده می‌شود.

جدول ۵-۷ مقادیر حداکثر نرم خطا در تیر طره

حالت تحلیل و بازیافت	حداکثر مقدار خطای تحلیل ایزوژنومتریک			درصد کاهش فاصله با حل دقیق در روش LP نسبت به روش SPR
	Exact	SPR	LP	
1 $p=1, g, p=4, C, p=76$	140	100	95	113%
2 $p=2, g, p=9, C, p=76$	240	95	120	83%
3 $p=1, g, p=4, C, p=105$	120	80	100	50%
4 $p=2, g, p=9, C, p=105$	130	26	55	72%
5 $p=3, g, p=16, C, p=105$	170	32	50	87%

۵-۲-۴- تعیین درجه بهینه به منظور بازیافت تنش به روش LP

در این بخش به تعیین درجه بهینه برای بازیافت تنش در تیر طره پرداخته می‌شود. به همین منظور چند نقطه نمونه برداری از تیر طره برای مقایسه انتخاب می‌شود. با مراجعه به منابع به این نتیجه

می‌توان دست یافت، که وسط تیر یعنی $y=1$ در مدل مسئله می‌تواند انتخاب مناسبی باشد [۲۳].

بنابراین ۸ نقطه نمونه‌برداری با مختصاتهای زیر برای بررسی انتخاب می‌شود:

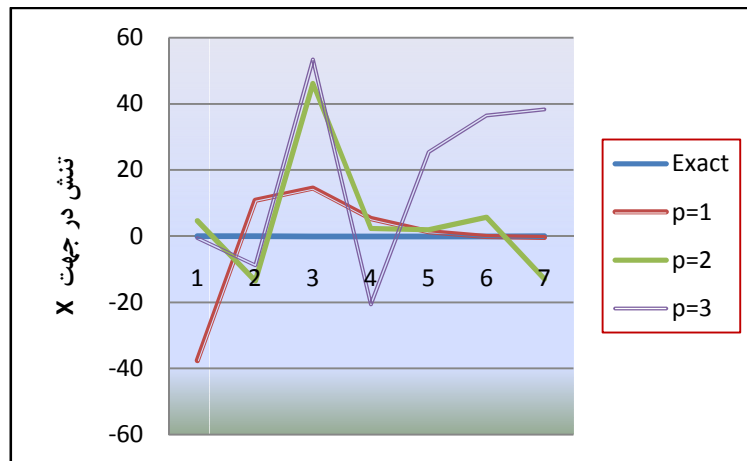
$$1: (2,1) \quad 2: (2.5,1) \quad 3: (3,1) \quad 4: (3.5,1) \quad 5: (4,1) \quad 6: (4.5,1) \quad 7: (5,1)$$

پس از انتخاب نقاط مناسب نمونه‌برداری، نوبت به تعیین درجه مناسب توابع پایه برای دو حالت استفاده از ۷۶ و ۱۰۵ نقطه کنترل می‌رسد. در این نقاط مقادیر تنش از مدل سه بعدی بدست آمده از کانتور تنش استخراج می‌شود. قابل ذکر می‌باشد که در نمودارها شماره نقاط نشان دهنده موقعیت هندسی آنها می‌باشد.

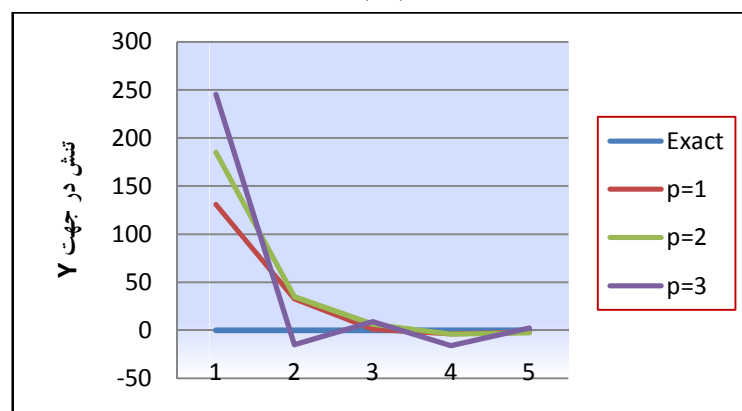
حالت اول) استفاده از ۷۶ نقطه کنترل: در شکل ۵-۹ برای تنش x همانگونه که ملاحظه می‌شود، با جمع نمودن قدر مطلق مقادیر اختلاف تنش بازیافت با حل دقیق، برای درجه ۱ توابع پایه‌ای نریز مقدار کمتری بدست آمده و جوابهای بهتری از دو درجه دیگر دارد. با بررسی تنش در راستاهای y و xy نیز مشاهده می‌گردد، که در حالت استفاده از توابع درجه ۱ نسبت به درجه‌های ۲ و ۳ تنش بازیافت به حل دقیق نزدیک‌تر می‌باشد.

حالت دوم) استفاده از ۱۰۵ نقطه کنترل: برای این حالت نیز همانند حالت استفاده از ۷۶ نقطه کنترل، استفاده از درجه ۱ توابع پایه‌ای نریز همانگونه که در شکل ۵-۱۵ ملاحظه می‌شود، نتایج همگراتر به حل دقیق نسبت به درجه ۲ و ۳ را دارد.

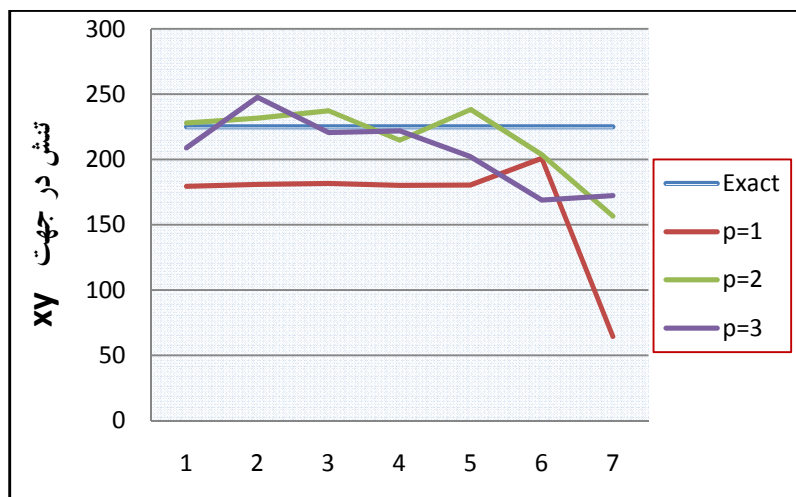
از حالت‌های بررسی شده می‌توان نتیجه گرفت، برای تیر طره استفاده از روش LP بهتر است از توابع پایه‌ای نریز با درجه ۱ استفاده شود.



(الف)

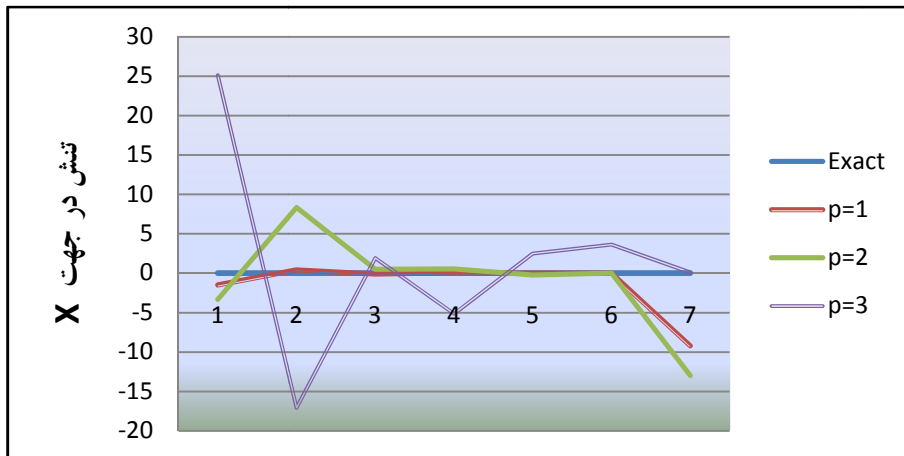


(ب)

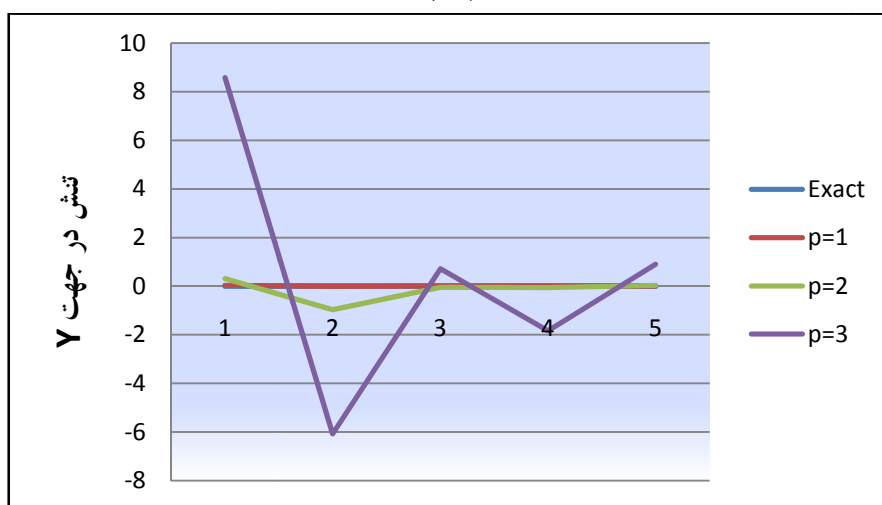


(ج)

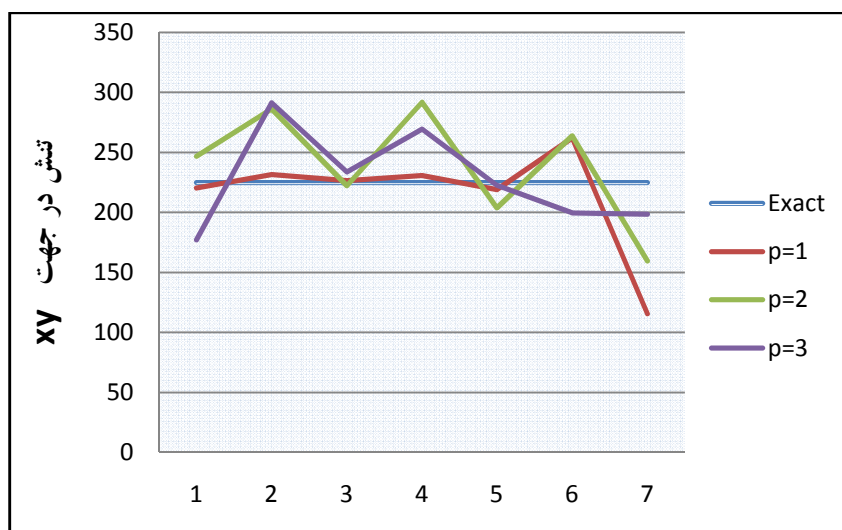
شکل ۵-۹ نمودار تنش بازیافت و حل دقیق برای سه درجه توابع پایه در حالت استفاده از ۷۶ نقطه کنترل. الف) تنش در راستای X ب) تنش در راستای Y ج) تنش در راستای XY



(الف)



(ب)

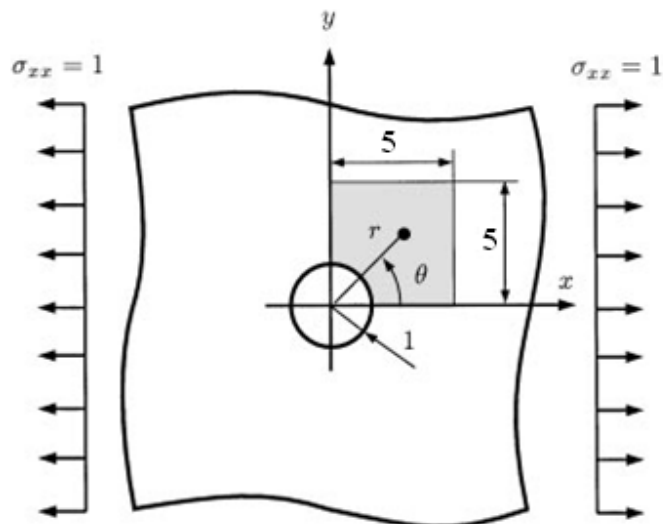


(ج)

شکل ۵-۱۰ نمودار تنش بازیافت و حل دقیق برای سه درجه توابع پایه در حالت استفاده از ۱۰۵ نقطه کنترل. الف) تنش در راستای X ب) تنش در راستای Y ج) تنش در راستای XY

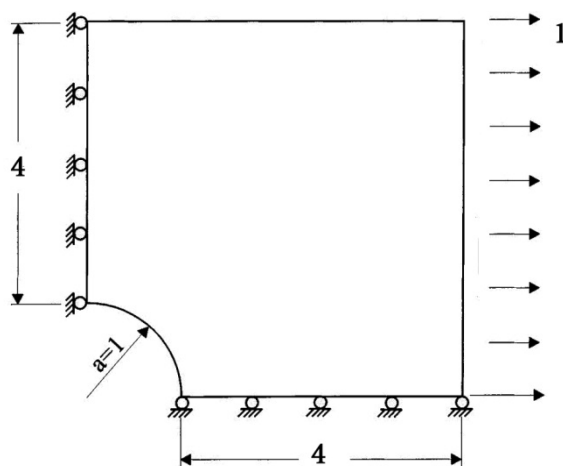
۵-۳- صفحه نامحدود سوراخدار

در این قسمت به بررسی نتایج گرفته شده از مدلسازی یک صفحه نامحدود دارای یک حفره دایره‌ای در شکل در وسط آن، همانند شکل ۵-۱۰ که از دو طرف تحت تنش واحد کشیده شده پرداخته می‌شود.



شکل ۵-۱۱ صفحه نامحدود سوراخدار تحت تنش واحد در جهت X

با فرضیات انجام شده در تحلیل الاستیسیته در صورت استفاده از خاصیت تقارن در دو جهت X و Y با دقت خوبی می‌توان یک مربع به ضلع ۵ واحد با حفره‌ای ربع دایره به شعاع واحد در گوشه آن همانند شکل ۵-۱۱ با مدل صفحه بی‌نهایت جایگزین نمود.



شکل ۵-۱۲ مشخصات و شرایط مرزی دامنه مدلسازی شده صفحه نامحدود سوراخدار

این صفحه تحت تنش کششی $\sigma = 1$ در جهت X قرار گرفته و با فرض شرایط تنش مسطح جوابهای

مسئله تعیین شده است. مصالح به صورت الاستیک خطی ایزوتروپیک با ضریب یانگ $E=1000$ و ضریب پواسون $\nu=0.3$ در نظر گرفته شده است. با توجه به فرضیات و نوع مصالح مدل حل دقیق آن در مختصات قطبی در ذیل آورده شده است [۲۸].

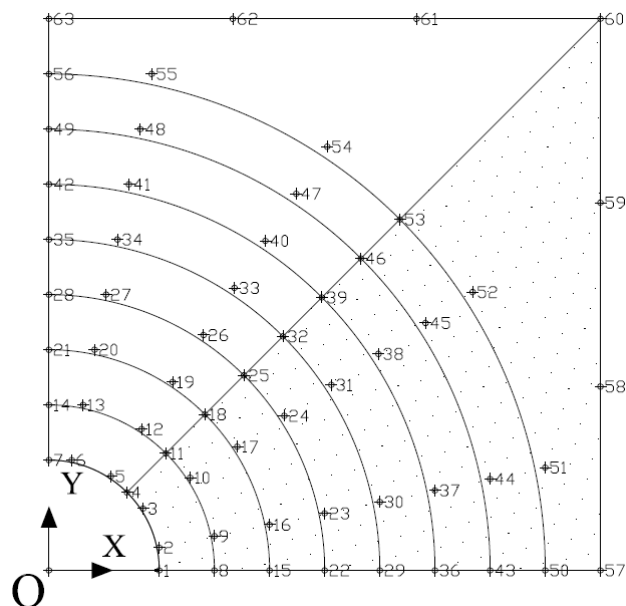
$$\sigma_x = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \quad (5-5)$$

$$\sigma_y = -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos 4\theta \quad (6-5)$$

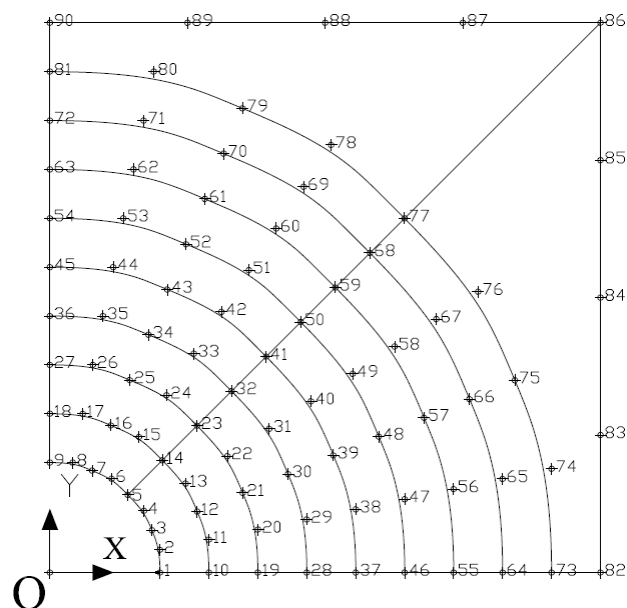
$$\sigma_{xy} = -\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin 4\theta \quad (7-5)$$

۵-۳-۱- بررسی فرضیات حل مسئله در محیط تحلیل ایزوژئومتریکی

برای مدلسازی و تحلیل صفحه سوراخدار در محیط تحلیل ایزوژئومتریکی از دو نوع آرایش نقاط کنترلی با تعداد ۶۳ و ۹۰ در دو ناحیه مشابه همانند اشکال ۵-۱۳ و ۵-۱۴ استفاده شده است. سه درجه متفاوت $p=1$ ، $p=2$ و $p=3$ برای توابع پایه‌ایی نربز در نظر گرفته شده و برای درجه $p=1$ از چهار نقطه گاوس، درجه $p=2$ از نه نقطه گاوس و درجه $p=3$ از شانزده نقطه گاوس استفاده شده است. با توجه به اینکه تحلیل ایزوژئومتریکی صفحه سوراخدار برای دو دسته از نقاط کنترل و سه درجه متفاوت توابع پایه‌ایی نربز صورت می‌پذیرد، در آخر خروجی‌های برنامه بازیافت تنش و تحلیل تنش در محیط ایزوژئومتریکی شش حالت خواهد بود.



شکل ۵-۱۳ آرایش ۶۳ نقطه کنترلی مورد استفاده در مدلسازی صفحه سوراخدار



شکل ۵-۱۴ آرایش ۹۰ نقطه کنترلی مورد استفاده در مدلسازی صفحه سوراخدار

با توجه به اینکه آرایش و تعداد نقاط کنترل و همچنین درجه استفاده شده برای توابع پایه‌ایی نریز بر روی بردارهای گرهی در جهات η و ξ تاثیر می‌گذارد، در نتیجه سه آرایش مختلف بردارهای گرهی برای ۶۳ نقطه کنترل و سه آرایش برای ۹۰ نقطه کنترل همانند شکل ۵-۱۵ و ۶-۱۵ خواهیم داشت. تعداد بردارهای گرهی از رابطه ۵-۴ در هر جهت مشخص می‌شود.

$$u = \{0 \ 0 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 1 \ 1\} , v = \{0 \ 0 \ 0.3 \ 0.7 \ 1 \ 1\} \quad (1)$$

$$u = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1\} , v = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1\} \quad (2)$$

$$u = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} , v = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} \quad (3)$$

الف) ۶۳ نقطه کنترل. (۱) درجه ۱ توابع پایه (۲) درجه ۲ توابع پایه (۳) درجه ۳ توابع پایه

$$u = \{0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1\} , v = \{0 \ 0 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.7 \ 1 \ 1\} \quad (1)$$

$$u = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.5 \ 0.7 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1\} , v = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.3 \ 0.7 \ 1 \ 1 \ 1\} \quad (2)$$

$$u = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 0.9 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} , v = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} \quad (3)$$

ب) ۹۰ نقطه کنترل. (۱) درجه ۱ توابع پایه (۲) درجه ۲ توابع پایه (۳) درجه ۳ توابع پایه

شکل ۵-۱۵ بردارهای گرهی مورد استفاده در مدلسازی صفحه سوراخدار

۵-۳-۲- بررسی شاخص تاثیر در روشهای بازیافت LP و SPR

در جدول ۵-۸ نرم خطای انرژی در حالت دقیق، تقریبی و شاخص تاثیر برای هر دو روش بازیافت تنش در هر المان و همچنین برای کل دامنه مسئله نشان داده شده است. هر مقدار که این شاخص به سمت یک نزدیک شود، نشان از کارا بودن روش بازیافت خواهد بود. در حالت استفاده از ۶۳ نقطه کنترل با بکار بردن توابع پایه درجه ۱ بهبود شاخص تاثیر از مقدار ۰.۷۲۲ به ۰.۸۳۳ مشاهده می‌شود. در ادامه نتایج نهایی شاخص تاثیر کل برای حالت‌های دیگر حل مسئله در صفحه سوراخدار را نشان می‌دهد. در تمام حالتها افزایش شاخص تاثیر و میل آن و نزدیک شدن به سمت مقدار ۱ مشاهده می‌گردد.

جدول ۵-۸ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۶۳ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس

شماره المان	Exact	LP		SPR	
	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ
1	0.0031	0.0036	1.178	0.0025	0.819
2	0.0050	0.0043	0.862	0.0045	0.902
3	0.0013	0.0022	1.724	0.0011	0.850
4	0.0024	0.0018	0.779	0.0020	0.833
5	0.0008	0.0005	0.616	0.0005	0.562
6	0.0018	0.0019	1.043	0.0018	0.983
7	0.0021	0.0020	0.939	0.0020	0.949
8	0.0008	0.0006	0.741	0.0004	0.534
9	0.0015	0.0014	0.916	0.0014	0.938
10	0.0018	0.0017	0.935	0.0017	0.932
11	0.0006	0.0003	0.488	0.0004	0.548
12	0.0013	0.0012	0.923	0.0012	0.916
13	0.0016	0.0014	0.913	0.0014	0.914
14	0.0005	0.0003	0.620	0.0003	0.593
15	0.0013	0.0011	0.812	0.0011	0.814
16	0.0013	0.0013	0.959	0.0013	0.959
17	0.0004	0.0003	0.831	0.0003	0.824
18	0.0016	0.0008	0.525	0.0008	0.525
19	0.0003	0.0003	1.061	0.0003	1.063
20	0.0022	0.0006	0.268	0.0006	0.268
21	0.0031	0.0011	0.346	0.0011	0.346
22	0.0013	0.0007	0.548	0.0007	0.548
23	0.0023	0.0012	0.508	0.0013	0.543
24	0.0056	0.0043	0.778	0.0027	0.492
25	0.0020	0.0032	1.59	0.0013	0.625
26	0.0005	0.0014	2.691	0.0011	2.183
27	0.0016	0.0018	1.116	0.0012	0.711
28	0.0013	0.0013	0.950	0.0011	0.830
29	0.0013	0.0012	0.912	0.0013	0.956
30	0.0011	0.0011	0.945	0.0010	0.892
31	0.0010	0.0010	1.061	0.0010	1.068
32	0.0010	0.0009	0.871	0.0009	0.888
33	0.0009	0.0009	1.051	0.0009	1.049
34	0.0010	0.0008	0.822	0.0008	0.817
35	0.0003	0.0003	0.968	0.0003	0.966
36	0.0006	0.0010	1.846	0.0010	1.847
37	0.0012	0.0006	0.532	0.0006	0.533
38	0.0008	0.0003	0.315	0.0003	0.315
39	0.0014	0.0005	0.332	0.0005	0.332
40	0.0019	0.0004	0.215	0.0004	0.215
مجموع	0.0621	0.0518	0.833	0.05	0.727

در انتخاب روش بازیافت در برخی موارد تشخیص خطا ملاک می باشد، در این مواقع پس از بازیافت نیز خطا قابل چشم پوشی نبوده و می بایست با استفاده از روشهایی در قسمتهایی که خطا از حد مجاز بیشتر بوده، میزان خطا را کاهش داده و به حد مجاز برسانیم.

همانگونه در جدول ۵-۹ مشاهده می شود، در همه حالات روش LP سبب بهبود شاخص تاثیر در کل دامنه شده است. در حالت اول مقدار شاخص تاثیر در هر دو روش از میزان قابل قبولی برخوردار است، میزان افزایش در این حالت ۱۵٪ می باشد که با توجه به مقدار بالای شاخص تاثیر، روش بازیافت در این

حالت از کارآیی بالایی برخوردار می‌باشد. در حالت کلی با افزایش درجه توابع پایه‌ایی نریز مقدار شاخص تاثیر کاهش می‌یابد، که یکی از دلایل آن بالا رفتن دقت حل ایزوژئومتریکی و نزدیک شدن مقادیر آن به حل دقیق باشد.

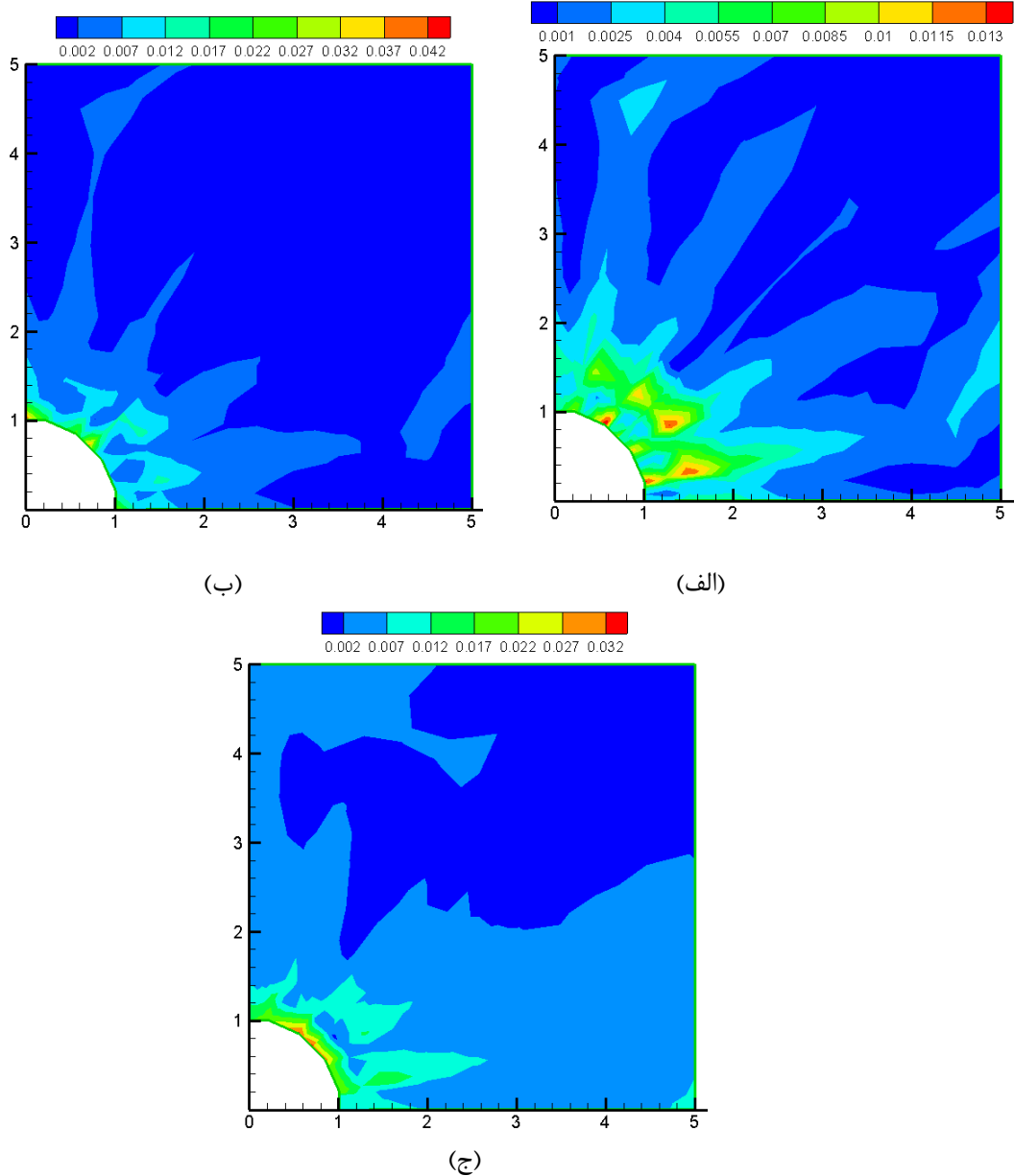
جدول ۵-۹ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در شش حالت، برای هر دو روش بازیافت تنش در کل دامنه

حالت تحلیل و بازیافت	Exact	SPR		LP		در صد افزایش شاخص تاثیر در روش LP نسبت به روش SPR
	نرم خطای دقیق در کل دامنه	نرم خطای تقریبی در کل دامنه	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در کل	شاخص تاثیر θ	
1 p=1,g,p=4, C.p=63	0.062	0.045	0.727	0.052	0.833	15%
2 p=2,g,p=9,C.p=63	0.064	0.013	0.204	0.017	0.258	26%
3 p=3,g,p=16,C.p=63	0.202	0.015	0.075	0.038	0.189	151%
4 p=1,g,p=4,C.p=90	0.203	0.061	0.299	0.065	0.318	6%
5 p=2,g,p=9,C.p=90	0.225	0.037	0.163	0.049	0.219	34%
6 p=3,g,p=16,C.p=90	0.163	0.029	0.177	0.038	0.233	32%

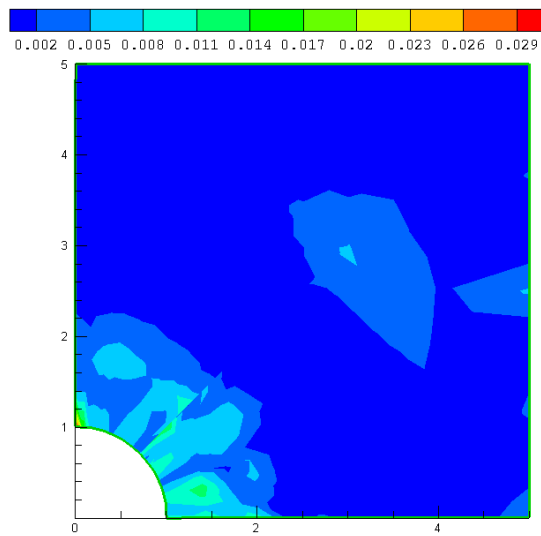
در انتخاب روش مناسب بازیافت توسط معیار شاخص تاثیر علاوه بر در نظر گرفتن میزان افزایش شاخص تاثیر، مقدار شاخص تاثیر نیز می‌بایست در نظر گرفته شود. بطور مثال در مورد سوم جدول ۵-۹ با استفاده از ۶۳ نقطه کنترل و بکارگیری توابع پایه نریز از درجه ۳ در روش LP افزایش ۱۵۱٪ شاخص تاثیر مشاهده می‌شود، اما با توجه به مقدار کم شاخص تاثیر می‌بایست دیگر موارد را نیز به منظور انتخاب بهترین حالت بازیافت در نظر گرفت.

۵-۳-۳- نمایش و مقایسه کانتورهای نرم خطا برای دو روش بازیافت

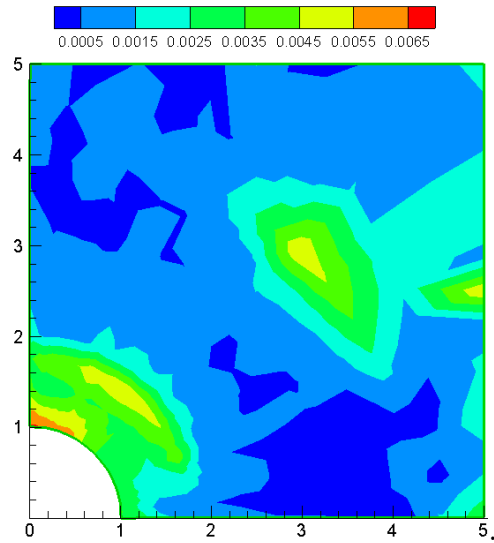
بعد از بررسی شاخص تاثیر در صفحه سوراخدار برای المانهای در نظر گرفته شده، به بررسی کانتور و نرم خطای انرژی برای حالت تقریبی و دقیق در کل دامنه مسئله پرداخته می‌شود. نرم خطای تقریبی به روش LP، نرم خطای تقریبی به روش SPR و نرم خطای دقیق در نقاط نمونه‌برداری تعیین می‌شوند. پنج حالت در نظر گرفته شده در صفحه سوراخدار کانتور نرم خطا که از مثلث‌بندی و درونیابی در نقاط نمونه‌برداری ایجاد شده، در اشکال ۵-۱۶ الی ۵-۲۰ نشان داده شده است.



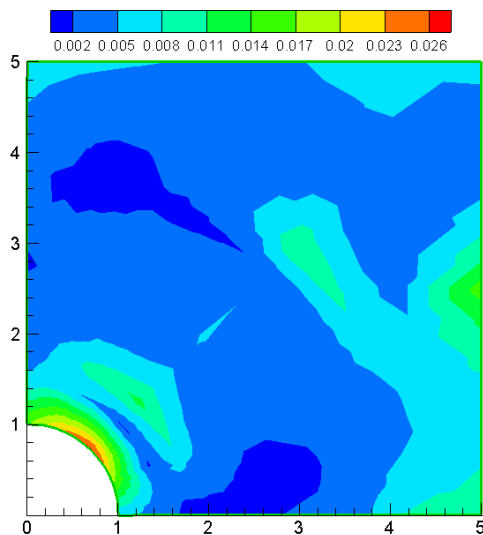
شکل ۵-۱۶ کانتور نرم خطا برای ۶۳ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



(ب)

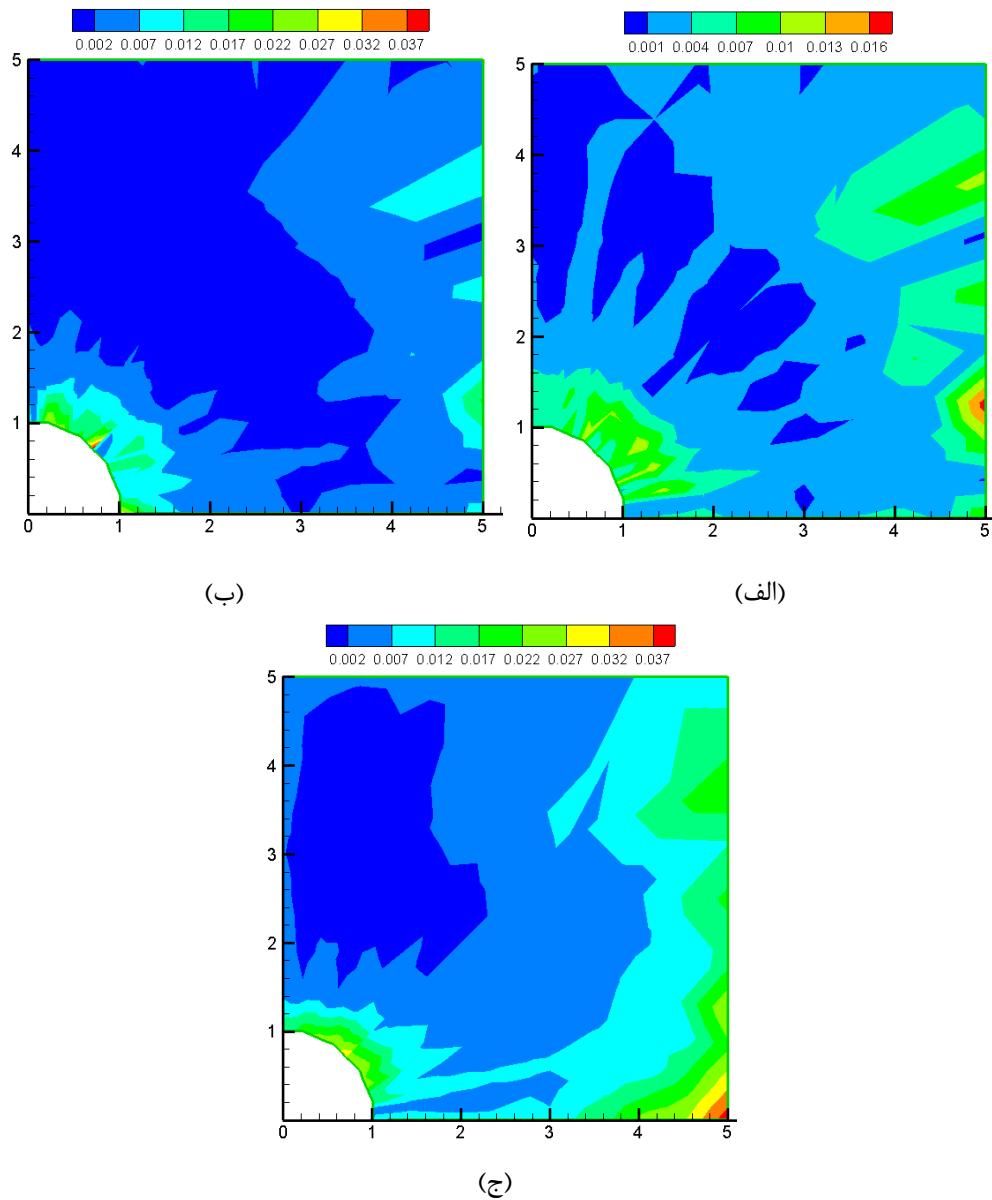


(الف)

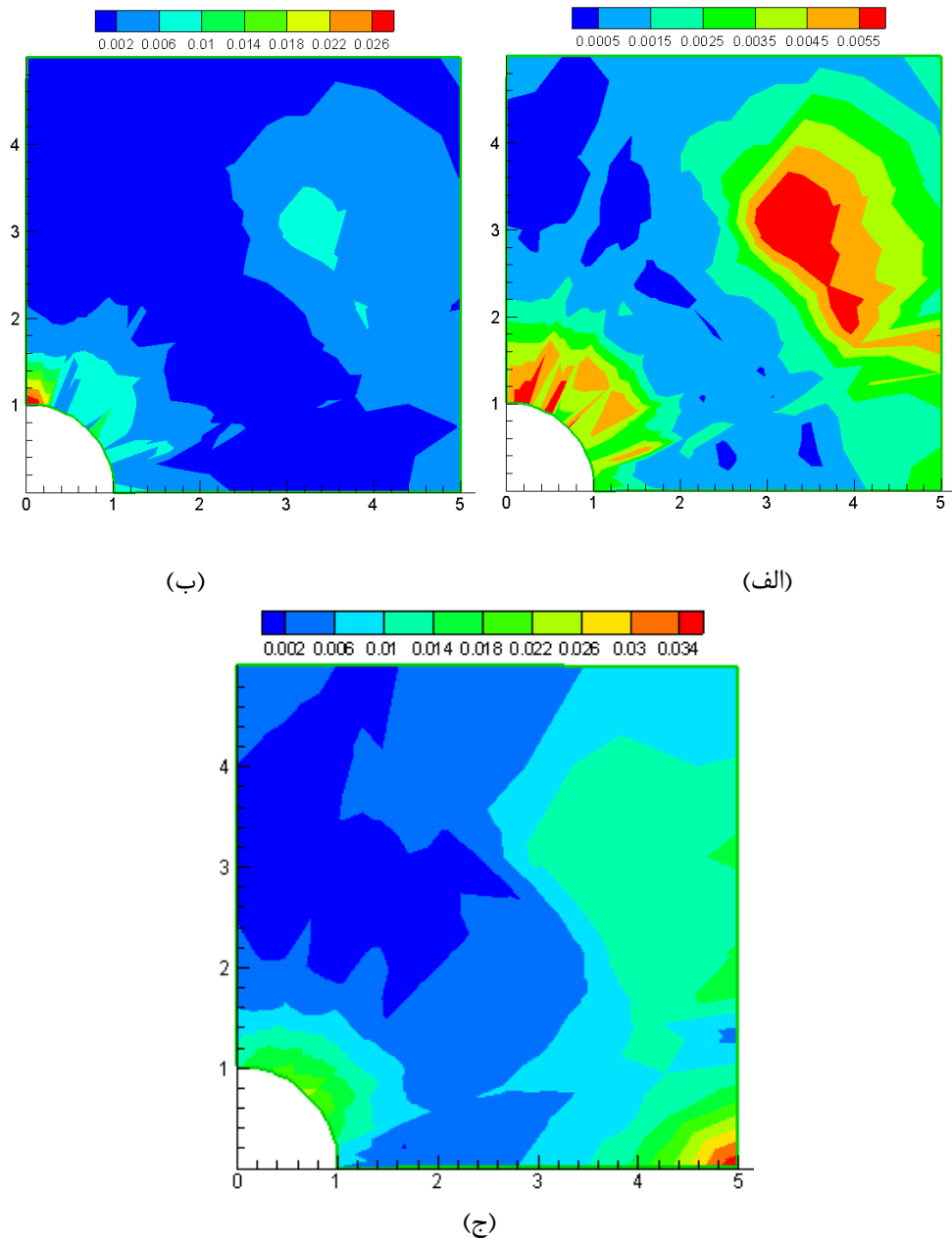


(ج)

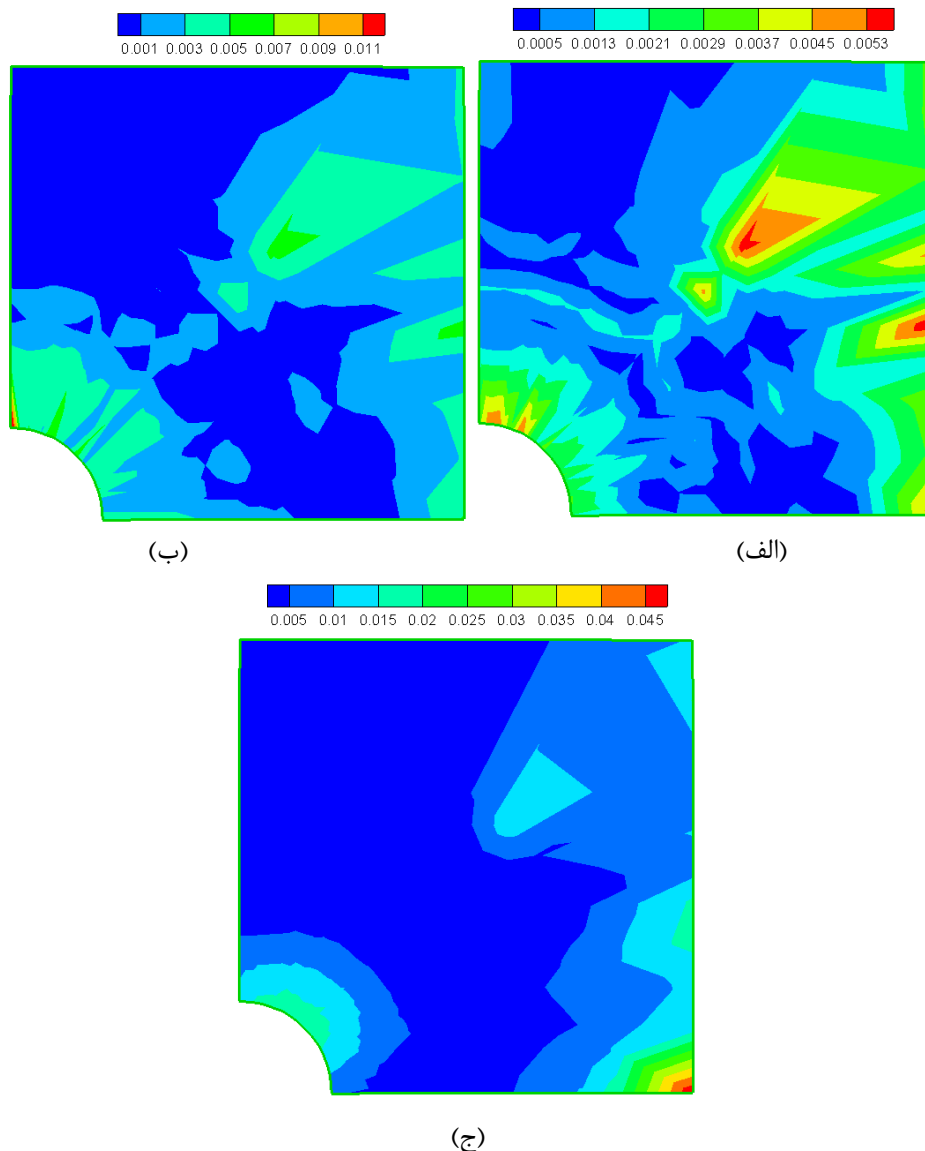
شکل ۵-۱۷ کانتور نرم خطا برای ۶۳ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



شکل ۵-۱۸ کانتور نرم خطا برای ۹۰ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



شکل ۵-۱۹ کانتور نرم خطا برای ۹۰ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



شکل ۵-۲۰ کانتور نرم خطا برای ۹۰ نقطه کنترل و درجه $p=3$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۱۶ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق

همانطور که در اشکال ملاحظه می‌شود در تشخیص محل خطا و همچنین مقدار آن روش LP نسبت به روش SPR بهبود داشته است. در حالت استفاده از روش بازیافت LP مقادیر حداکثر نرم خطا و طیف بدست آمده برای مقادیر نرم خطا به مقادیر نرم خطا در حالت دقیق نزدیک شده است. حداکثر خطا و درصد کاهش مقدار فاصله با حل دقیق در جدول ۵-۱۰ نشان داده شده است. در همه موارد کاهش فاصله مشاهده می‌شود، در موارد ۱ و ۲ علاوه بر کاهش جهت خطا نیز تغییر یافته و در مورد ۳ فاصله مقادیر حداکثر صفر شده است.

جدول ۵-۱۰ مقادیر حداکثر نرم خطا در صفحه سوراخدار

حالت تحلیل و بازیافت	حداکثر مقدار خطای تحلیل ایزوژنومتریک			درصد کاهش فاصله با حل دقیق در روش LP نسبت به روش SPR
	Exact	SPR	LP	
1 p=1,g.p=4, C.p=76	0.032	0.013	0.042	-53%
2 p=2,g.p=9,C.p=76	0.026	0.009	0.029	-17%
3 p=1,g.p=4,C.p=105	0.037	0.016	0.037	0%
4 p=2,g.p=9,C.p=105	0.034	0.006	0.026	28%
5 p=3,g.p=16,C.p=105	0.045	0.005	0.011	86%

۵-۳-۴- تعیین درجه بهینه به منظور بازیافت تنش به روش LP

حال پس از بررسی صحت و کارایی روش بازیافت LP در صفحه سوراخدار نوبت به تعیین درجه بهینه برای بازیافت می‌رسد. به همین منظور چند نقطه نمونه‌برداری از صفحه سوراخدار برای مقایسه انتخاب می‌شود. به منظور مقایسه نقاط بر روی نیمساز ربع اول یعنی $y=x$ می‌تواند انتخاب مناسبی باشد [۲۳].

بنابراین ۷ نقطه نمونه‌برداری با مختصاتهای زیر بر روی نیمساز ربع اول برای بررسی انتخاب می‌گردد:

$$1(1,1) \quad 2(1.5,1.5) \quad 3(2,2) \quad 4(2.5,2.5) \quad 5(3,3) \quad 6(3.5,3.5) \quad 7(4,4)$$

با استفاده از مقادیر تنش بازیافتی در نقاط نمونه‌برداری درجه مناسب توابع پایه برای دو حالت استفاده از ۶۳ و ۹۰ نقطه کنترل تعیین می‌شود. مقادیر تنش از مدل سه بعدی آن استخراج می‌شود.

حالت اول) استفاده از ۶۳ نقطه کنترل: در شکل ۵-۲۱ برای تنش x همانگونه که ملاحظه

می‌گردد، استفاده از درجه ۱ توابع پایه‌ای نریز جوابهای بهتری از دو درجه دیگر دارد. در مورد تنش در

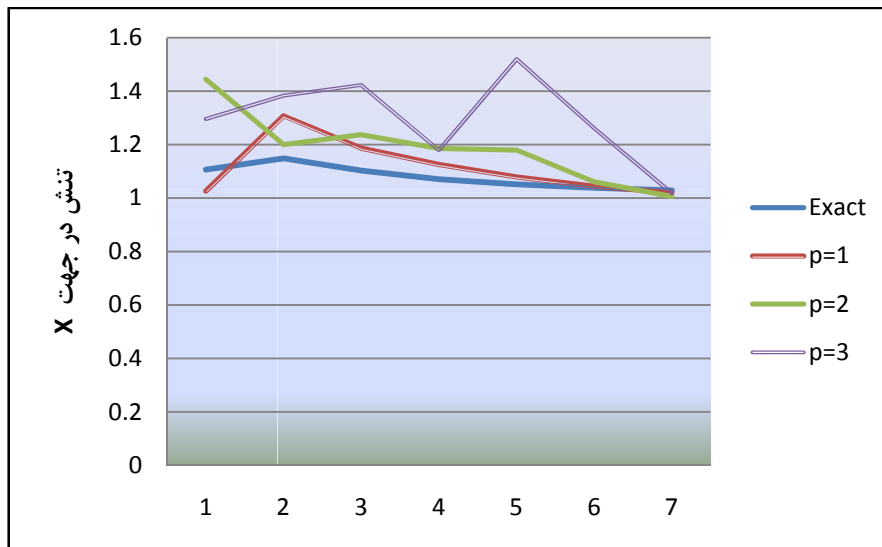
راستای y نیز در استفاده از توابع پایه‌ای با درجه ۱ جوابها به حل دقیق نزدیکتر از سایر مراتب

می‌باشد، که در شکل ۵-۳۲ نمایش داده شده است. نتایج تنش در راستای xy برای درجه ۱ نیز دارای

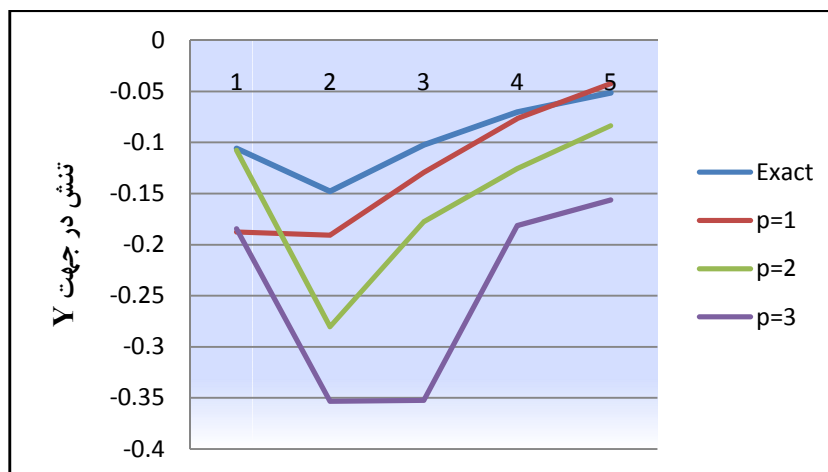
مقادیر بهتر و همگرا به حل دقیق می‌باشد. در استفاده از ۶۳ نقطه کنترل استفاده از توابع پایه‌ای

درجه ۱ همانگونه که در بررسی شاخص تاثیر نیز نتیجه گرفته شد، دارای نتایج بهتری از سایر

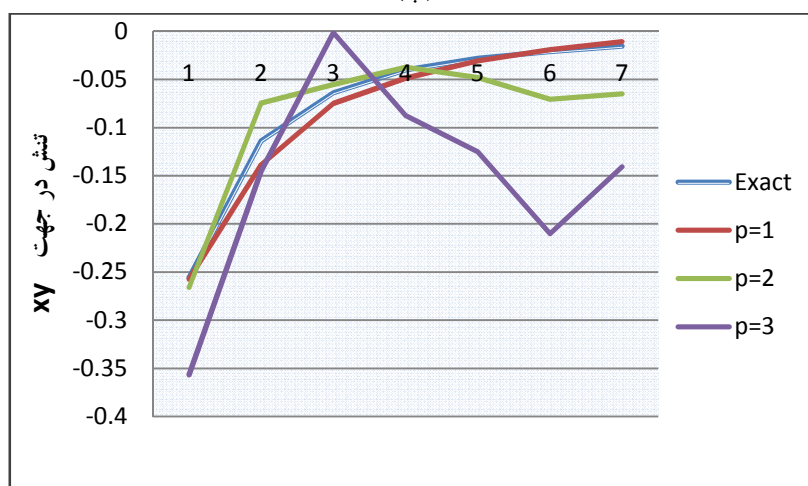
درجه‌های توابع نریز می‌باشد.



(الف)



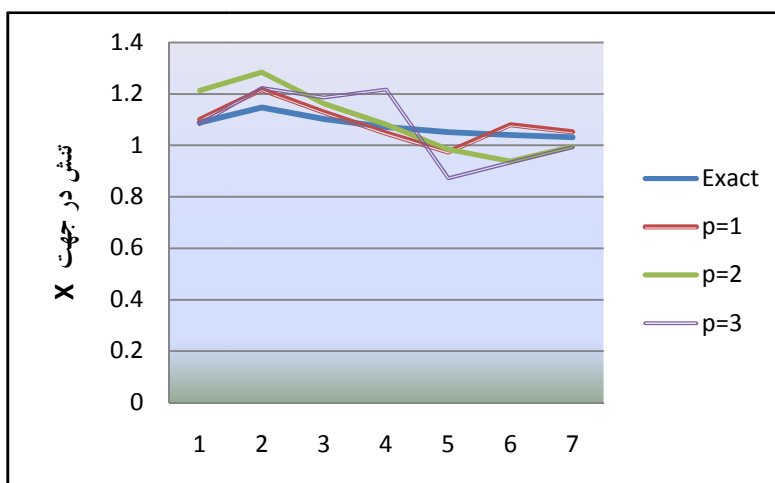
(ب)



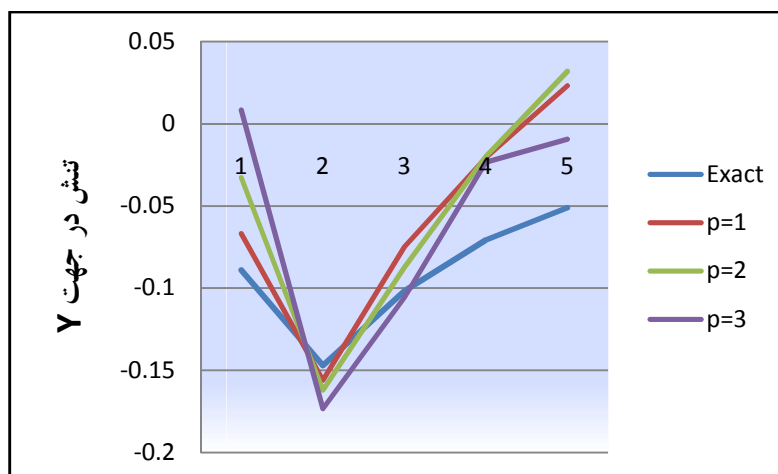
(ج)

شکل ۵- ۲۱ نمودار تنش بازیافت و حل دقیق برای سه درجه توابع پایه در حالت استفاده از ۶۳ نقطه کنترل. الف) تنش در راستای X ب) تنش در راستای Y ج) تنش در راستای XY

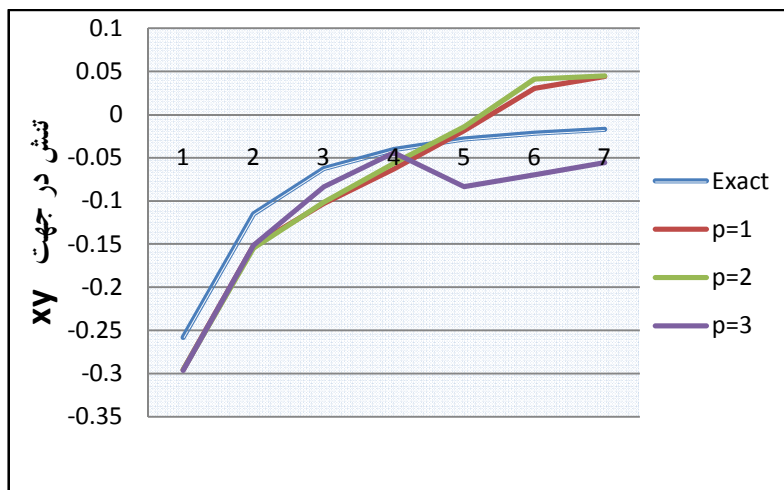
حالت دوم) استفاده از ۹۰ نقطه کنترل: برای این حالت نیز نمودارهای تنش در سه جهت در نقاط نمونه برداری بررسی شده و در شکل ۵-۲۳ نشان داده شده است. نتایج تنش در جهت X برای درجه ۱ همگرا به حل دقیق نسبت به درجه ۲ و ۳ می باشد. در تنش های Y و XY در حالت درجه ۳ مقادیر به حل دقیق نزدیک می باشد. از حالت های بررسی شده می توان نتیجه گرفت، برای صفحه سوراخدار استفاده از روش LP برای ۶۳ نقطه کنترل توابع پایه ایی نریز با درجه ۱ و ۹۰ نقطه کنترل درجه ۳ مناسب به نظر می رسد.



(الف)



(ب)



(ج)

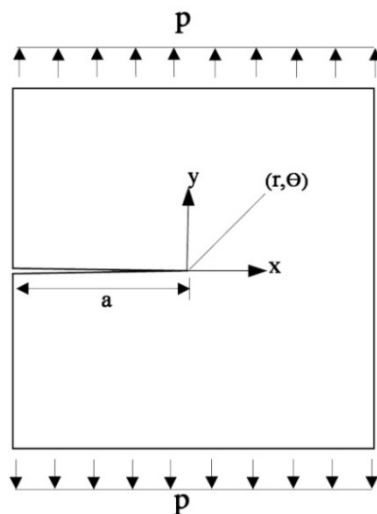
شکل ۵-۲۲ نمودار تنش بازیافت و حل دقیق برای سه درجه توابع پایه در حالت استفاده از ۹۰ نقطه کنترل. الف) تنش در راستای X ب) تنش در راستای Y ج) تنش در راستای XY

۵-۴- صفحه ترکدار تحت تنش

در این قسمت نتایج گرفته شده از مدلسازی صفحه ترکدار همانند شکل ۵-۲۳ بررسی می‌گردد. در این مثال رفتار تخمین کننده خطا، در برآورد خطای بدست آمده از تحلیل مسئله‌ای که دارای یک نقطه تکین است، در محیط تحلیل ایزوژئومتریکی بررسی می‌گردد. معمولاً مسائل با نقطه تکین، به علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی جهت بررسی کارایی تخمین کننده های خطا به شمار نمی‌روند؛ اما هدف از این مثال همان طور که گفته شد، بررسی رفتار تخمین کننده خطا می‌باشد. با توجه به این نکته که نوک ترک به عنوان یک نقطه تکین، دارای خطای زیادی نسبت به سایر نقاط است، لذا یک تخمین کننده خطای مناسب باید به طور نسبی قادر به نمایش این توزیع خطا باشد. در صورتی که بهبود شبکه با توجه به نتایج بدست آمده از تخمین کننده خطا مورد نظر باشد، تخمین کننده خطایی که دارای رفتاری مناسب باشد می‌تواند برنامه را در هر مرحله به بهبود محلی شبکه در اطراف نوک ترک راهنمایی کند [۳۰].

در شکل ۵-۲۴ مشخصات صفحه مربعی تحت تنش کششی P مشاهده می‌شود. اضلاع این مربع به طول $2a$ و گسترش ترک به میزان a فرض شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود ترک از وسط

صفحه شروع و تا انتهای صفحه پیش می‌رود.



شکل ۵-۲۳ صفحه مربعی ترکدار تحت تنش کششی قائم

بازشدگی ترک در مد اول و بر اساس سیستم مختصات قطبی نشان داده شده در شکل ۵-۲۳ نتایج

تحلیلی آن به صورت زیر می‌باشد [۲۹].

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (۸-۵)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (۹-۵)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (۱۰-۵)$$

که در آن فاکتور شدت تنش K_I به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_I = P\sqrt{\pi a} \quad (۱۱-۵)$$

جهت مدلسازی عددی، به علت تقارن تنها نیمی از دامنه مورد تحلیل قرار می‌گیرد. پارامترهای به کار

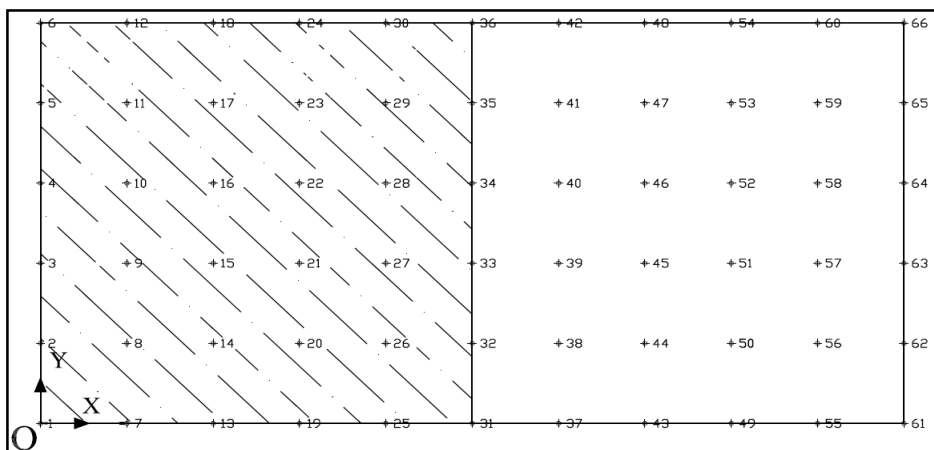
رفته در حل مسئله به صورت زیر می‌باشند.

$$P = 10 \quad ; \quad E = 1000 \quad ; \quad \nu = 0.3 \quad ; \quad 2a = 10 = \text{طول ضلع مربع}$$

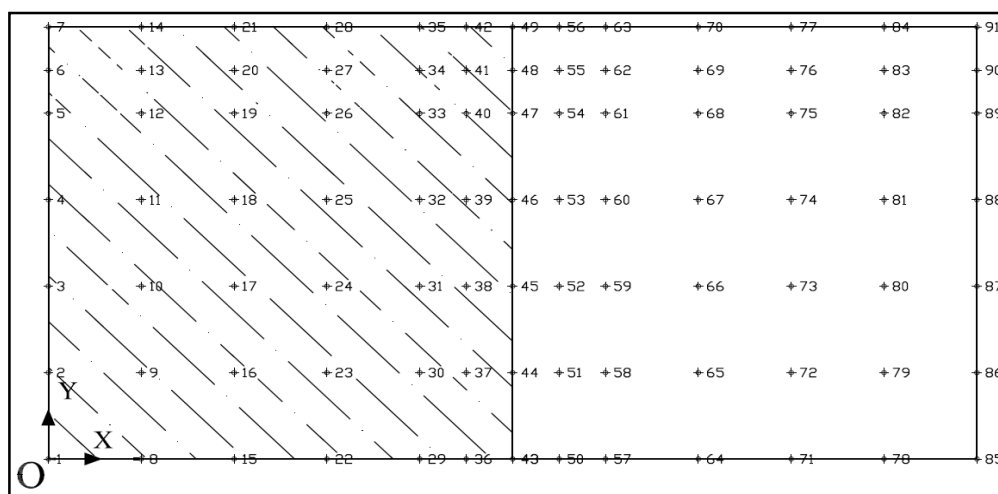
۵-۴-۱- بررسی فرضیات حل مسئله صفحه تر کردار در تحلیل ایزوژئومتریکی

تحلیل مسئله با روش ایزوژئومتریکی برای توابع پایه‌ایی نریز درجه یک، دو و سه صورت پذیرفته است. در تحلیل با روش ایزوژئومتریکی از چهار آرایش نقاط کنترل، همانند اشکال ۵-۲۴ الی ۵-۲۷ استفاده شده است.

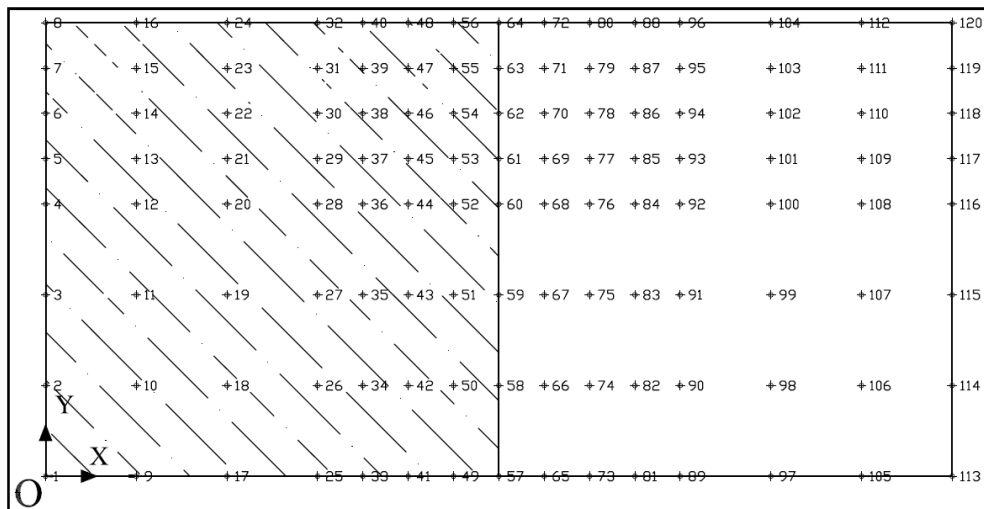
برای بررسی اثر افزایش درجه توابع شکل در کارایی تخمین کننده خطا، تعداد نقاط کنترل را در هر چهار مدل ثابت فرض می‌شود؛ لذا با توجه به رابطه $m=P+n+1$ با افزایش درجه توابع شکل (P) و با توجه به اینکه تعداد تکرار عضوهای صفر و یک بردار گرهی، برابر با $P+1$ می‌باشد، با توجه به ثابت بودن تعداد نقاط کنترل، از تعداد عضوهای غیر صفر بردار گرهی در هر دو جهت یکی کاهش می‌یابد.



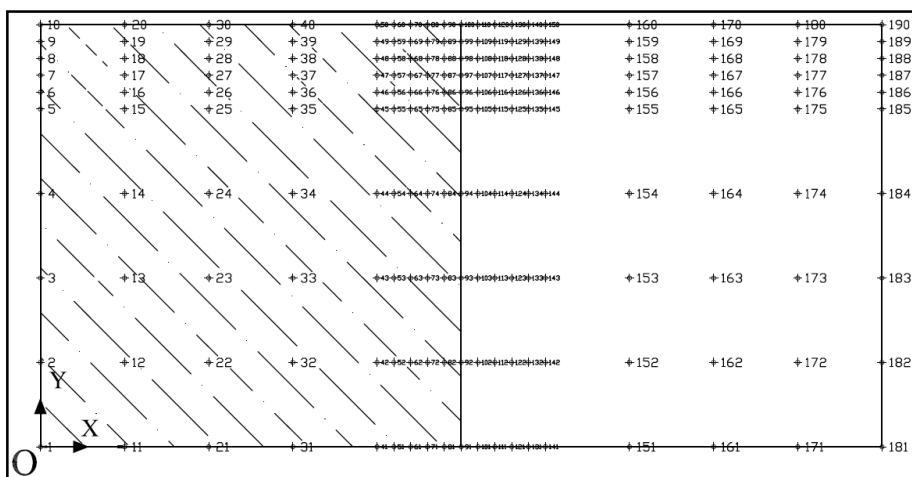
شکل ۵-۲۴ نحوه قرارگیری ۶۶ نقطه کنترل در تحلیل به روش ایزوژئومتریکی در صفحه تر کردار



شکل ۵-۲۵ نحوه قرارگیری ۹۱ نقطه کنترل در تحلیل به روش ایزوژئومتریکی در صفحه تر کردار



شکل ۵-۲۶ نحوه قرارگیری ۱۲۰ نقطه کنترل در تحلیل به روش ایزوژئومتریک در صفحه ترکدار



شکل ۵-۲۷ نحوه قرارگیری ۱۹۰ نقطه کنترل در تحلیل به روش ایزوژئومتریک در صفحه ترکدار

همانطور که در اشکال مشاهده می‌شود، افزایش نقاط کنترلی در نزدیکی نوک ترک که دارای خطای بیشتری نسبت به سایر نقاط می‌باشد، انجام شده است.

از سه درجه ۱، ۲ و ۳ توابع شکل نربز در دو ناحیه استفاده شده است. با توجه به اینکه آرایش و تعداد نقاط کنترل و همچنین درجه استفاده شده برای توابع پایه‌ایی نربز بر روی بردارهای گرهی در جهات η و ξ تاثیر گذاشته و برای هر تعداد نقطه کنترل سه دسته بردار گرهی ایجاد می‌شود. در شکل ۵-۲۸ بعضی از حالات بردارهای گرهی نشان داده شده است. درجه توابع پایه‌ایی نربز و تعداد نقاط کنترل در هر راستا تعداد مولفه‌های بردارهای گرهی را تعیین می‌کند.

$$u = \{000.20.40.60.811\}, v = \{000.20.40.60.811\}$$

(الف)

$$u = \{0000.20.40.60.8111\}, v = \{0000.20.40.60.8111\}$$

(ب)

$$u = \{00000.20.40.60.81111\}, v = \{00000.20.40.60.81111\}$$

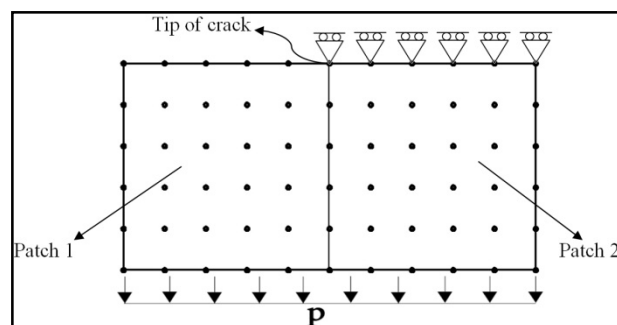
(ج)

$$u = \{000.20.30.40.50.60.70.80.911\}, v = \{000.20.30.40.50.60.70.80.911\}$$

(د)

شکل ۵-۲۸ چهار ترکیب بردارهای گرهی مورد استفاده در مدل‌سازی صفحه ترکدار. الف) تعداد نقطه کنترل ۶۶ و درجه ۱ (ب) تعداد نقطه کنترل ۹۱ و درجه ۲ (ج) تعداد نقطه کنترل ۱۲۰ و درجه ۳ (د) تعداد نقطه کنترل ۱۹۰ و درجه ۴

به منظور اعمال شرایط مرزی تکیه‌گاهی و وارد نمودن نیروی خارجی از نقاط کنترل واقع در مرز استفاده شده است. بعنوان نمونه در حالت تحلیل با ۶۶ نقطه کنترل همانند شکل ۵-۳۰ از نقاط کنترل مرزی به منظور اعمال شرایط تکیه‌گاهی استفاده شده است.



شکل ۵-۲۹ نحوه اعمال شرایط مرزی در تحلیل به روش ایزوژئومتری با ۶۶ نقطه کنترل

۵-۴-۲- بررسی شاخص تاثیر در روشهای بازیافت LP و SPR

در جدول ۵-۱۱ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر هر المان برای هر دو روش بازیافت تنش و همچنین برای کل هندسه مسئله نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، در حالت استفاده از ۶۶ نقطه کنترل با درجه ۱ بهبود شاخص تاثیر از مقدار ۰.۱۹۷ به ۰.۲۱۲ در جدول مشاهده می‌شود. برای سایر حالات مورد استفاده در تحلیل ایزوژئومتری، شاخص تاثیر کل دامنه مسئله در جدول ۵-۱۲ نشان داده شده است.

جدول ۵-۱۱ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر برای ۶۶ نقطه کنترل و درجه $p=1$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۴ نقاط گاوس

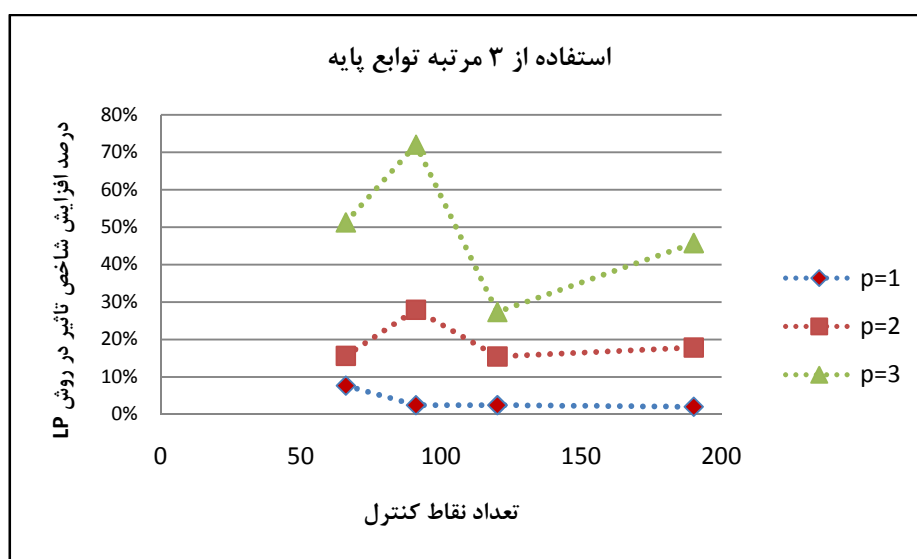
شماره المان	Exact	LP		SPR	
	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر θ
1	0.0142	0.0033	0.235	0.0041	0.289
2	0.0346	0.0086	0.248	0.0066	0.192
3	0.0354	0.0095	0.269	0.0057	0.162
4	0.0196	0.0105	0.538	0.0080	0.407
5	0.0293	0.0061	0.208	0.0055	0.188
6	0.0585	0.0055	0.094	0.0057	0.098
7	0.0680	0.0021	0.031	0.0026	0.038
8	0.0479	0.0106	0.220	0.0098	0.205
9	0.0378	0.0103	0.273	0.0103	0.272
10	0.0697	0.0122	0.175	0.0121	0.174
11	0.0920	0.0075	0.081	0.0078	0.084
12	0.1098	0.0266	0.242	0.0268	0.244
13	0.0352	0.0310	0.880	0.0309	0.878
14	0.0362	0.0088	0.243	0.0088	0.244
15	0.0580	0.0078	0.134	0.0078	0.134
16	0.0826	0.0132	0.160	0.0131	0.159
17	0.1302	0.0085	0.066	0.0085	0.065
18	0.2257	0.0299	0.132	0.0299	0.132
19	0.0276	0.0165	0.597	0.0098	0.356
20	0.0346	0.0184	0.532	0.0102	0.296
21	0.0369	0.0204	0.552	0.0136	0.369
22	0.0454	0.0205	0.451	0.0175	0.385
23	0.0461	0.0154	0.335	0.0174	0.377
24	0.0347	0.0148	0.427	0.0130	0.374
25	0.0603	0.0151	0.250	0.0139	0.231
26	0.0739	0.0165	0.223	0.0161	0.218
27	0.0784	0.0282	0.359	0.0267	0.340
28	0.0577	0.0104	0.181	0.0100	0.173
29	0.0329	0.0065	0.199	0.0059	0.180
30	0.0667	0.0072	0.108	0.0075	0.113
31	0.0825	0.0046	0.055	0.0047	0.057
32	0.0800	0.0124	0.155	0.0120	0.150
33	0.0645	0.0114	0.176	0.0115	0.178
34	0.0202	0.0049	0.241	0.0050	0.249
35	0.0507	0.0090	0.177	0.0088	0.173
36	0.0669	0.0078	0.116	0.0076	0.113
37	0.0723	0.0155	0.214	0.0156	0.216
38	0.0626	0.0083	0.133	0.0083	0.132
39	0.0146	0.0054	0.372	0.0054	0.370
40	0.0243	0.0081	0.333	0.0081	0.333
41	0.0311	0.0101	0.324	0.0100	0.323
42	0.0493	0.0095	0.192	0.0095	0.192
مجموع	2.3990	0.5087	0.212	0.4723	0.197

جدول ۵-۱۲ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در ۱۲ حالت، برای هر دو روش بازیافت تنش در کل دامنه

حالت تحلیل و بازیافت	Exact	SPR		LP		درصد افزایش شاخص تأثیر در روش LP نسبت به روش SPR
	نرم خطای دقیق در کل دامنه	نرم خطای تقریبی در کل دامنه	شاخص تاثیر θ	نرم خطای تقریبی در کل دامنه	شاخص تاثیر θ	
1 p=1,g.p=4,C.p=66	2.399	0.472	0.197	0.509	0.212	8%
2 p=2,g.p=9,C.p=66	2.834	0.328	0.116	0.379	0.134	16%
3 p=3,g.p=16,C.p=66	3.005	0.342	0.114	0.517	0.172	51%
4 p=1,g.p=4,C.p=91	2.992	0.562	0.188	0.576	0.193	3%
5 p=2,g.p=9,C.p=91	3.871	0.270	0.070	0.345	0.089	28%
6 p=3,g.p=16,C.p=91	4.252	0.202	0.048	0.348	0.082	72%
7 p=1,g.p=4,C.p=120	3.619	0.586	0.162	0.601	0.166	2%
8 p=2,g.p=9,C.p=120	4.741	0.357	0.075	0.412	0.087	15%
9 p=3,g.p=16,C.p=120	5.328	0.330	0.062	0.420	0.079	27%
10 p=1,g.p=4,C.p=190	4.384	0.672	0.153	0.686	0.156	2%
11 p=2,g.p=9,C.p=190	5.990	0.403	0.067	0.475	0.079	18%
12 p=3,g.p=16,C.p=190	6.960	0.279	0.040	0.406	0.058	46%

همانطور که در جدول ۵-۱۰ ملاحظه می‌گردد مقادیر شاخص تاثیر برای صفحه ترکدار نسبت به مثالهای دیگر کمتر می‌باشند. در هر حال در روش LP نسبت به روش SPR مقدار شاخص تاثیر برای همه حالات مشاهده می‌شود.

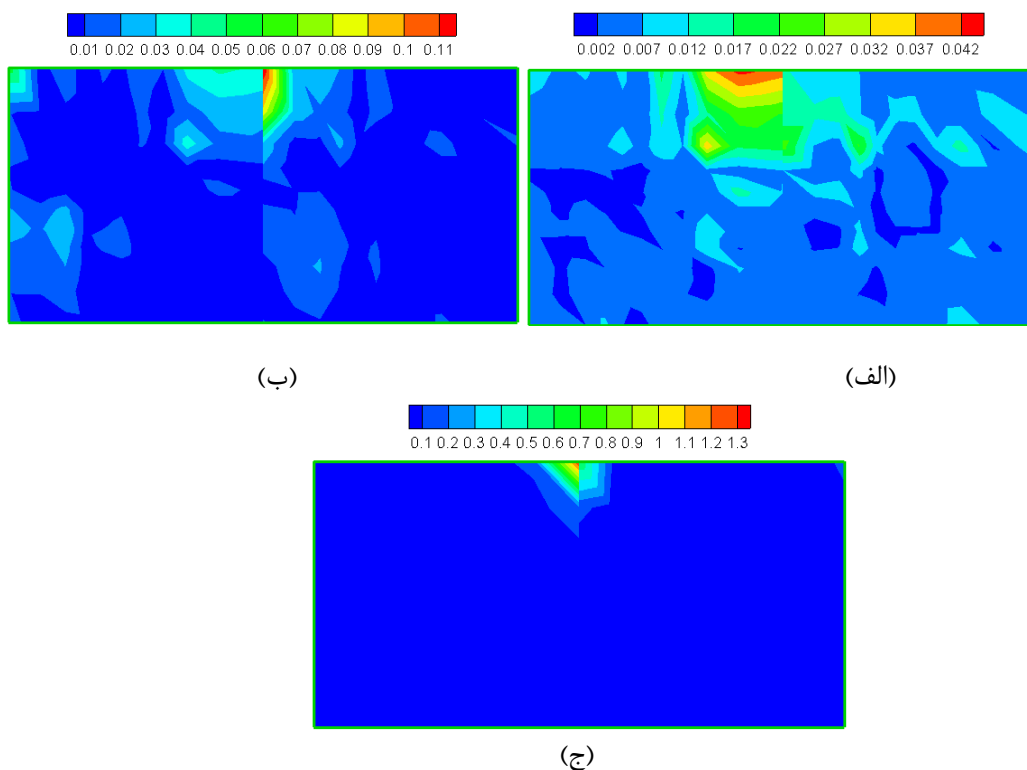
در شکل ۵-۳۰ تاثیر افزایش درجه توابع پایه نرئز در مقدار شاخص تاثیر برای ۴ حالت آرایش نقاط کنترل آورده شده است. در هر حالت با افزایش درجه توابع پایه درصد افزایش مقادیر شاخص تاثیر نیز افزایش می‌یابد.



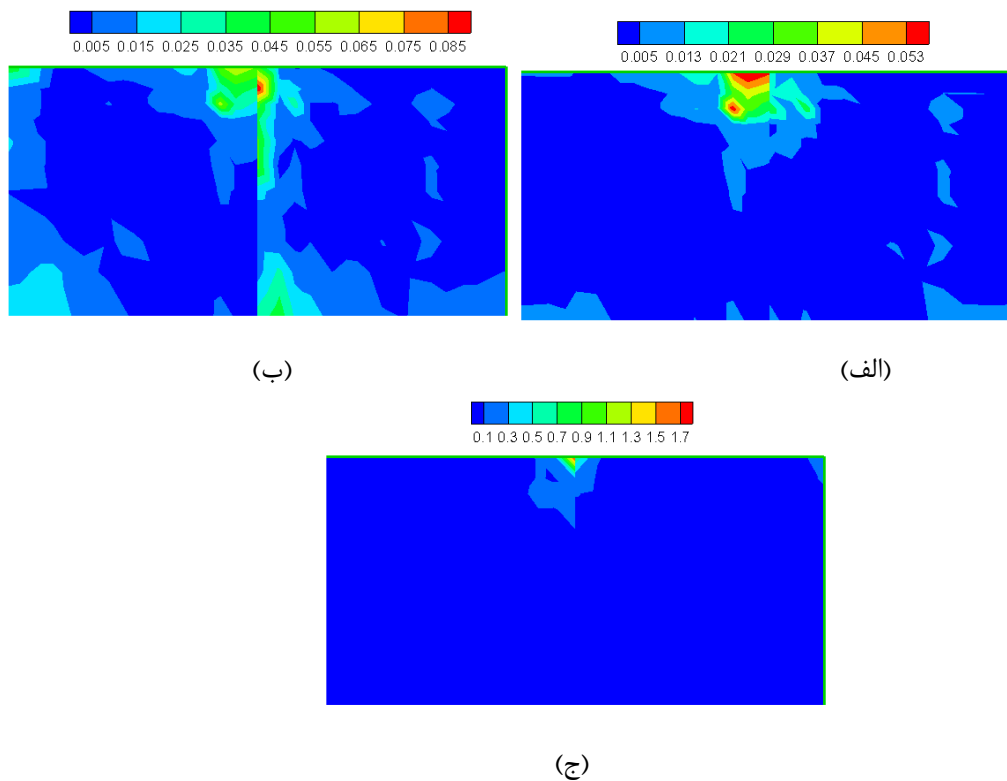
شکل ۵-۳۰ نمودار تاثیر افزایش درجه توابع پایه بر درصد افزایش شاخص تاثیر

۵-۴-۳- نمایش و مقایسه کانتورهای نرم خطا برای دو روش بازیافت

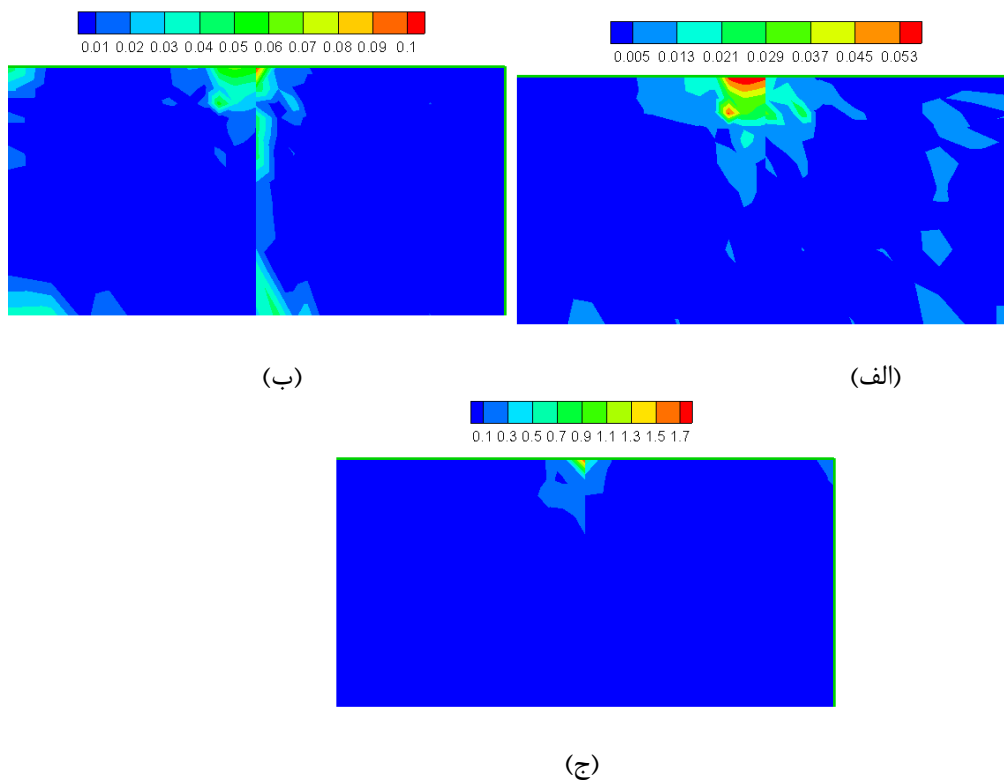
بررسی کانتور نرم خطا در صفحه ترکدار، برای سه حالت نرم خطای تقریبی به روش LP، نرم خطای تقریبی به روش SPR و نرم خطای دقیق در نقاط نمونه برداری تعیین می‌شوند. به منظور برداشت نقاط در این مسئله نیز برای هر ناحیه ۱۲۱ نقطه و در کل ۲۴۲ نقطه نمونه برداری شده در هندسه مسئله در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه موارد حل در صفحه ترکدار زیاد می‌باشد، در این قسمت کانتور برخی از حالات بررسی شده است.



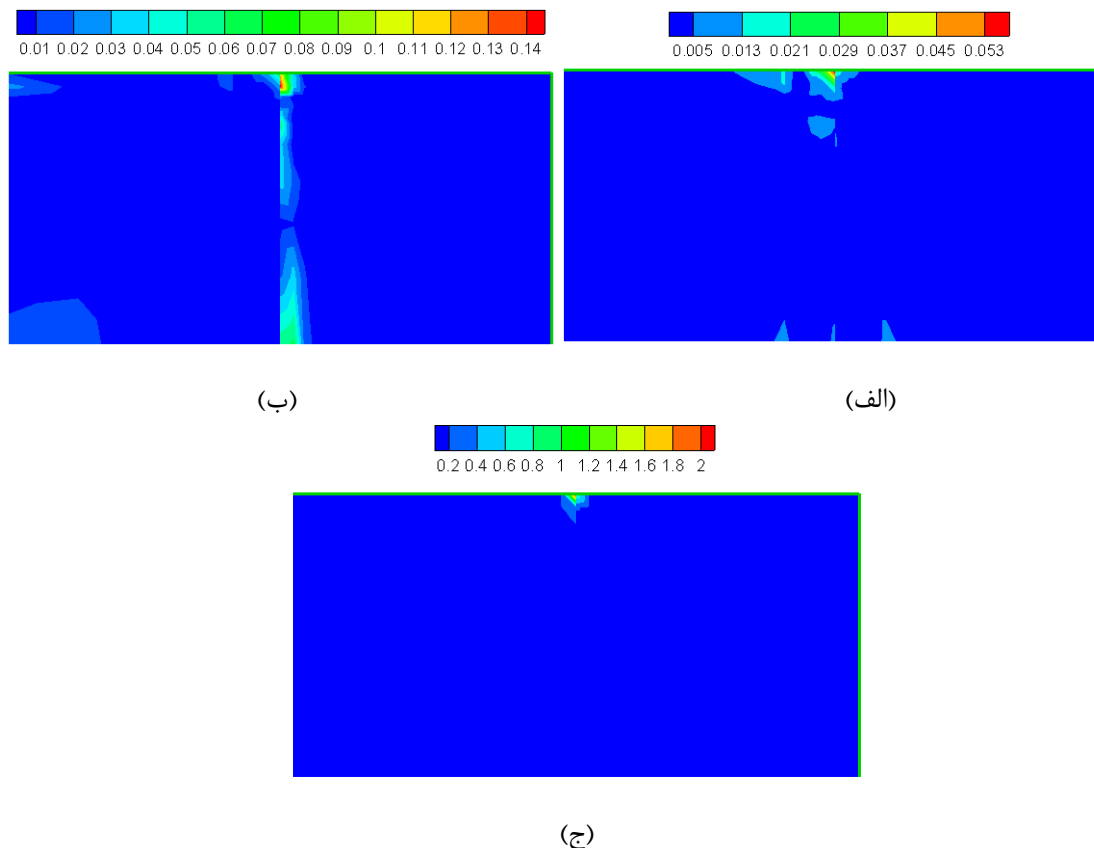
شکل ۵-۳۱- کانتور نرم خطا برای ۶۶ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



شکل ۵-۳۲ کانتور نرم خطا برای ۹۱ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گaus (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



شکل ۵-۳۳ کانتور نرم خطا برای ۱۲۰ نقطه کنترل و درجه $p=2$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۹ نقاط گaus (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق



شکل ۵-۳۴ کانتور نرم خطا برای ۱۹۰ نقطه کنترل و درجه $p=3$ برای هر دو روش بازیافت تنش برای ۱۶ نقاط گاوس (الف) نرم خطای تقریبی به روش SPR، (ب) نرم خطای تقریبی به روش LP، (ج) نرم خطای دقیق

به منظور تعیین کارایی روش بازیافت با استفاده از کانتور نرم خطا، می‌توان مواردی همانند: نزدیکی حداکثر خطای روش بازیافت به حداکثر خطای حل دقیق، نزدیکی بازه‌های تغییر در کانتور نرم خطا و تشخیص نقاطی که دارای خطای زیادی باشد را مد نظر قرار داد.

۵-۴-۴- تعیین درجه بهینه به منظور بازیافت تنش به روش LP

حال پس از بررسی صحت و کارایی روش بازیافت LP، به تعیین درجه بهینه برای بازیافت تنش در صفحه ترکدار به روش LP پرداخته می‌شود. به همین منظور چند نقطه نمونه‌برداری از صفحه ترکدار برای مقایسه انتخاب می‌گردد. در این مسئله خطی نزدیکی ترک و موازی محور x در مدل مسئله می‌تواند انتخاب مناسبی به منظور انجام نمونه‌برداری باشد [۲۳].

حال پس از انتخاب ناحیه مناسب نمونه‌برداری درجه مناسب توابع پایه برای چهار حالت استفاده از ۶۶،

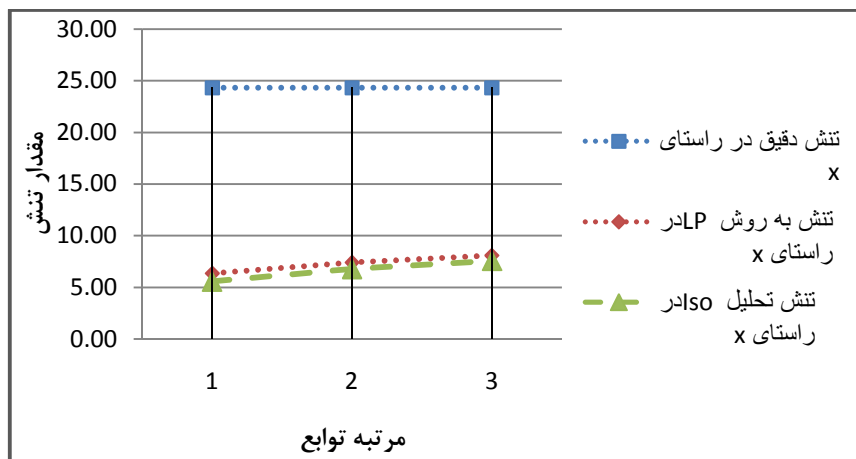
۹۱، ۱۲۰ و ۱۹۰ نقطه کنترل تعیین می‌شود. در جدول ۵-۱۱ تعداد المانها در فضای نربز با توجه به تعداد نقاط کنترل و درجه توابع پایه‌ایی نربز نشان داده شده است.

جدول ۵-۱۳ تعداد المانهای تشکیل شده در فضای نربز

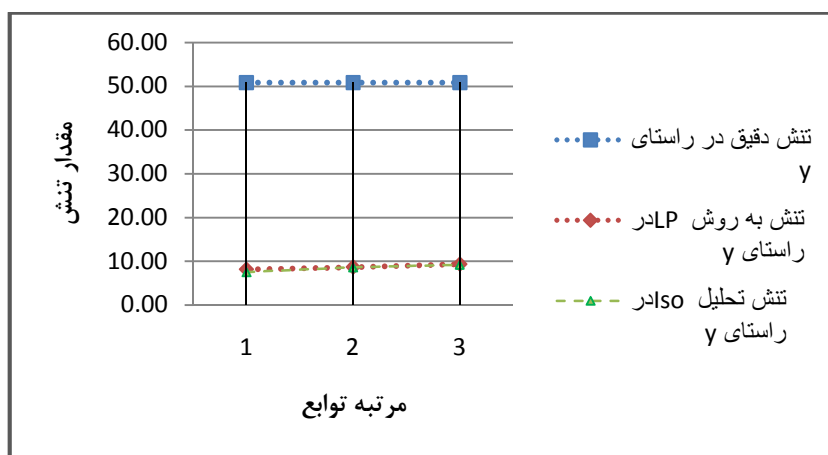
تعداد المانهای ایجاد شده در فضای نربز	تعداد نقاط کنترل		تعداد بازه ها در		
	راستای η	در راستای ξ	راستای η	راستای ξ	
1 $p=1, C.p=66$	11	6	10	5	50
2 $p=2, C.p=66$	11	6	8	4	32
3 $p=3, C.p=66$	11	6	6	3	18
4 $p=1, C.p=91$	13	7	12	6	72
5 $p=2, C.p=91$	13	7	10	5	50
6 $p=3, C.p=91$	13	7	8	4	32
7 $p=1, C.p=120$	15	8	14	7	98
2 $p=2, C.p=120$	15	8	12	6	72
3 $p=3, C.p=120$	15	8	10	5	50
4 $p=1, C.p=190$	19	10	18	9	162
5 $p=2, C.p=190$	19	10	16	8	128
6 $p=3, C.p=190$	19	10	14	7	98

همانگونه که در جدول ملاحظه می‌گردد، با افزایش درجه توابع پایه بدلیل کاهش بازه ها در فضای نربز از تعداد المانها کاسته می‌شود، که در مقایسه حالات مختلف این نکته در نظر گرفته می‌شود. حال به بررسی حالات مختلف استفاده از نقاط کنترل و بررسی تنشها پرداخته می‌شود.

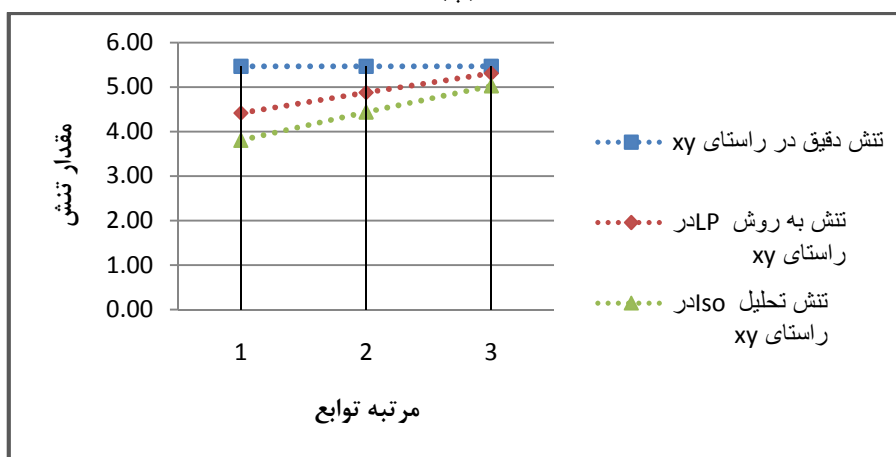
حالت اول) استفاده از ۶۶ نقطه کنترل: برای این حالت نقطه‌ایی با مختصات $(x=5, y=4.9)$ در سیستم مختصات xy در نظر گرفته شده است. نمودار تنش در سه جهت x, y و xy برای سه درجه توابع پایه‌ایی نربز در شکل ۵-۳۵ نشان داده شده است. همانگونه که در شکل ۵-۳۵ ملاحظه می‌گردد، برای هر سه جهت تنش با افزایش درجه مقدار تنش تحلیل ایزوژئومتریکی بهبود یافته و به مقدار دقیق آن نزدیک می‌شود. در این حالت استفاده از توابع پایه درجه ۳ نتایج بهتری را نسبت به دو درجه دیگر دارد. با توجه به شکل می‌توان دریافت که با افزایش درجه توابع پایه نربز مقادیر تحلیل ایزوژئومتریکی نیز به مقادیر دقیق نزدیک می‌شوند.



(الف)



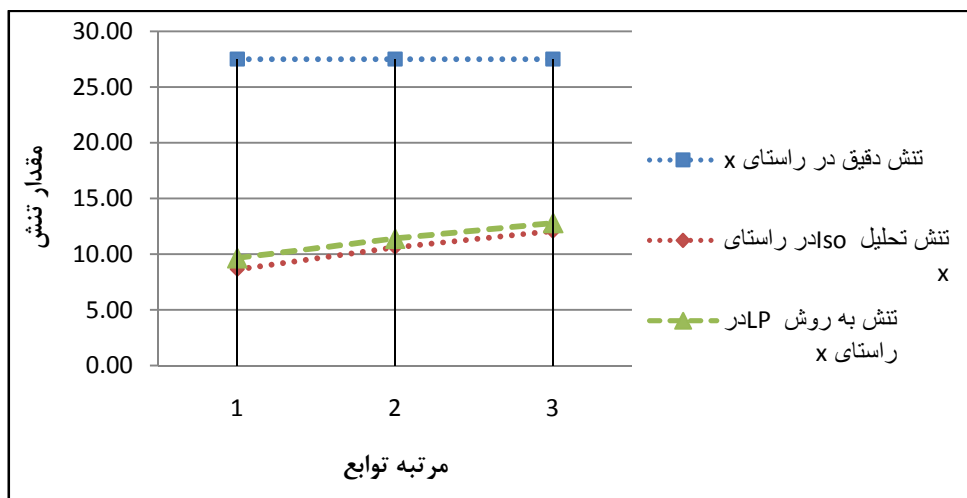
(ب)



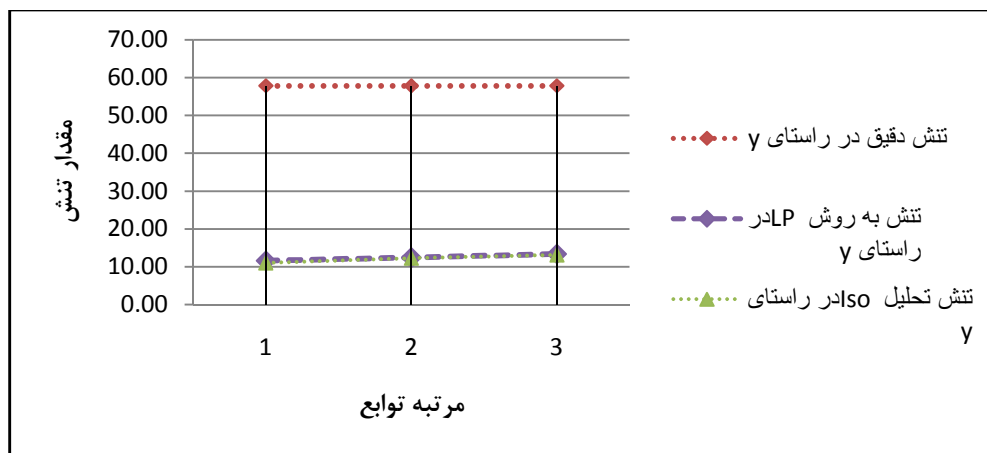
(ج)

شکل ۵-۳۵ نمودار تنش بازیافت و تنش تحلیلی در نقطه $(x=5, y=4.9)$ با استفاده از ۶۶ نقطه کنترل (الف) تنش در جهت x ، (ب) تنش در جهت y ، (ج) تنش در جهت xy

حالت دوم) استفاده از ۹۰ نقطه کنترل: برای این حالت نقطه‌ای با مختصات $(x=5, y=4.9)$ در سیستم مختصات xy در نظر گرفته شده است. همانگونه که در شکل ۵-۳۶ ملاحظه می‌گردد، برای تنش در جهات x با افزایش درجه مقدار تنش در نقطه به مقدار دقیق نزدیک شده است. اما برای تنش در جهت y تفاوت چندان قابل ملاحظه‌ایی میان تنش سه درجه مورد استفاده در تحلیل دیده نمی‌شود. در این حالت استفاده از توابع پایه درجه ۳ نتایج بهتری را نسبت به دو درجه دیگر دارد.



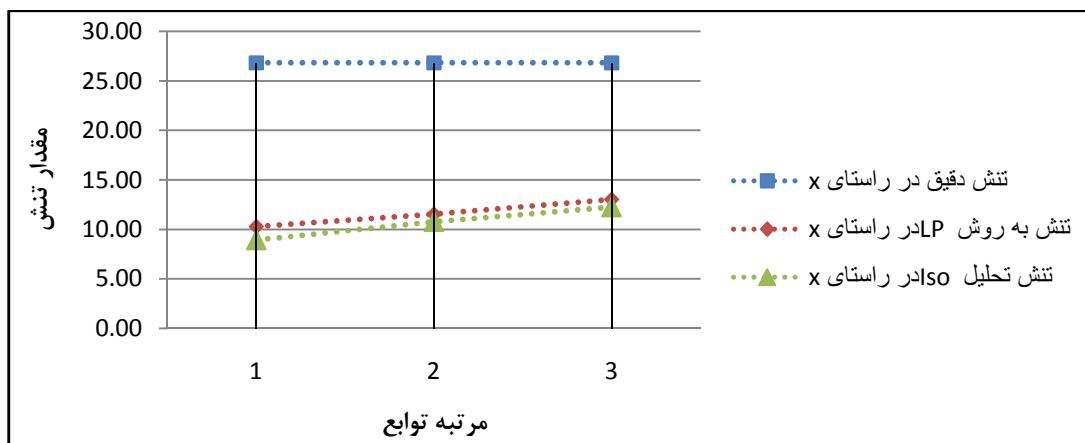
(الف)



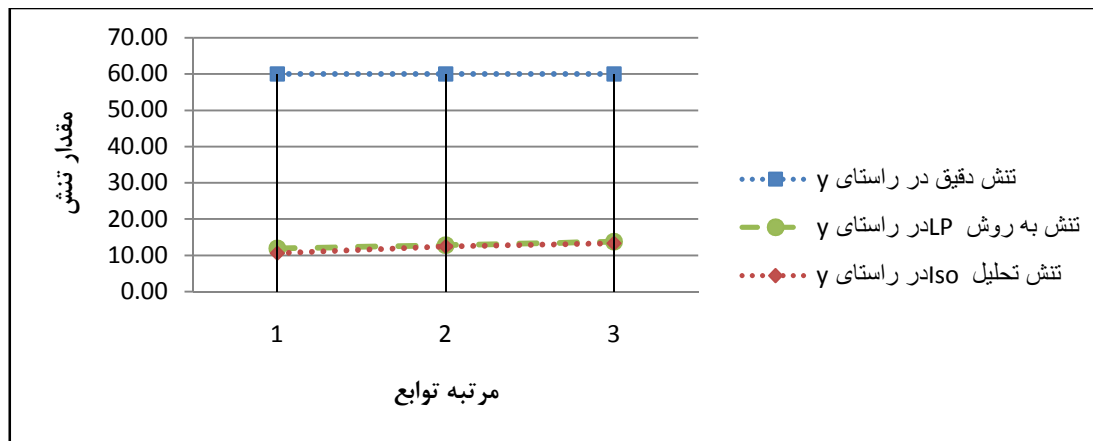
(ب)

شکل ۵-۳۶ نمودار تنش بازیافت و تنش تحلیلی در نقطه $(x=5, y=4.9)$ با استفاده از ۹۰ نقطه کنترل (الف) تنش در جهت x ، (ب) تنش در جهت y

حالت سوم) استفاده از ۱۲۰ نقطه کنترل: برای این حالت نقطه‌ای با مختصات $(x=5, y=4.9)$ در سیستم مختصات xy در نظر گرفته شده است. در شکل ۵-۳۷ برای تنش در جهات x و y با افزایش درجه مقدار تنش به مقدار دقیق نزدیک شده است. اما برای تنش در جهت y نتایج استفاده از درجه ۱ توابع پایه‌ای بهتر از درجه ۲ و ۳ می‌باشد. در این حالت استفاده از توابع پایه‌ای درجه ۳ نتایج بهتری را نسبت به دو درجه دیگر در بر خواهد داشت.



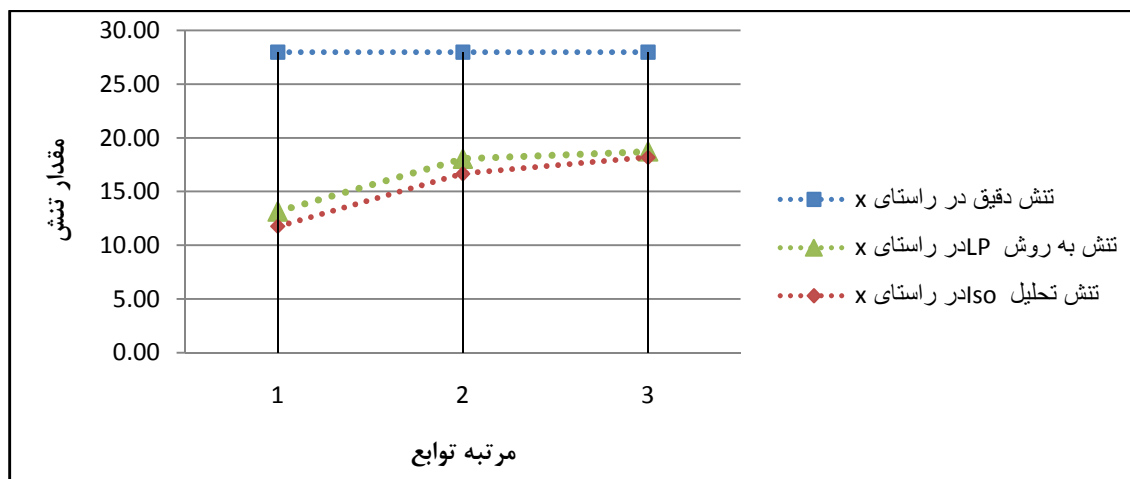
(الف)



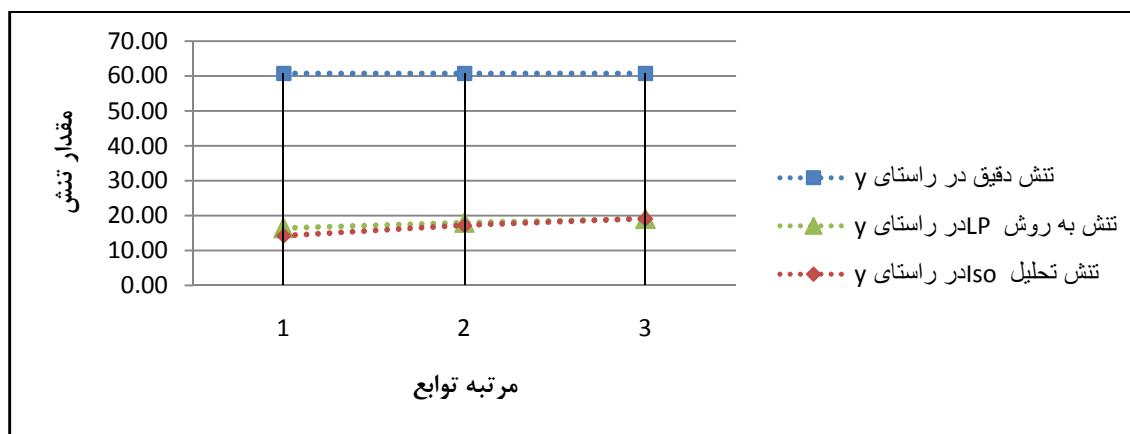
(ب)

شکل ۵-۳۷ نمودار تنش بازیافت و تنش تحلیلی در نقطه $(x=5, y=4.9)$ با استفاده از ۱۲۰ نقطه کنترل (الف) تنش در جهت x ، (ب) تنش در جهت y

حالت چهارم) استفاده از ۱۹۰ نقطه کنترل: برای این حالت نقطه‌ای با مختصات $(x=5, y=4.9)$ در سیستم مختصات xy در نظر گرفته شده است. نمودار تنش در سه جهت x و y برای سه درجه توابع پایه‌ای نربز در شکل ۵-۳۸ نشان داده شده است. برای تنش در جهات x و y با افزایش درجه مقدار تنش به مقدار دقیق نزدیک می‌شود. در این حالت استفاده از توابع پایه‌ای درجه ۳ نتایج بهتری را نسبت به دو درجه دیگر را در بر خواهد داشت.



(الف)



(ب)

شکل ۵-۳۸ نمودار تنش بازیافت و تنش تحلیلی در نقطه $(x=5, y=4.9)$ با استفاده از ۱۹۰ نقطه کنترل (الف) تنش در جهت x ، (ب) تنش در جهت y

۵-۵- نتیجه‌گیری و ارایه پیشنهادات

در این بخش به جمع بندی و بیان خلاصه نتایج حاصل از این پژوهش پرداخته شده است. همچنین در انتها چندین پیشنهاد جهت ادامه پژوهش در زمینه تخمین خطا و بازیافت تنش در روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک ارائه شده است.

۵-۵-۱- نتایج بدست آمده از روش بازیافت

در این پژوهش اصول به کار رفته در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک معرفی شد و توسعه یک روش جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش بدست آمده از این روش پرداخته شد. با توجه به اینکه روش ایزوژئومتریکی از روشهای جدید در تحلیل سازه‌ها به شمار می‌رود و بالقوه دارای ویژگی‌های منحصر به فرد و مناسبی است که به نظر می‌رسد در آینده‌ای نه چندان دور بتواند جایگزین روشهای عددی متداول نظیر اجزای محدود و نقاط محدود گردد لذا نتایج بدست آمده از روش بازیافت دارای اهمیت بالایی است.

به طور خلاصه نتایج بدست آمده به صورت زیر می‌باشد:

۱- در بیشتر موارد شاخص تاثیر در روش LP نسبت به روش SPR رشد داشته و به مقدار یک نزدیک شده است.

۲- در تیر طره شاخص تاثیر کل در بهترین حالت ۰/۸۰۵ می‌باشد و در همه حالات همانگونه که در جدول ۵-۶ نیز نشان داده شده است افزایش شاخص تاثیر نسبت به روش دیگر دیده می‌شود. کانتور نرم خطای تقریبی با نرم خطای دقیق تشابه قابل قبولی دارد. مقادیر حداکثر خطا نیز نسبت به روش SPR به مقادیر دقیق حداکثر خطا نزدیک می‌باشد. برای استفاده از روش بازیافت در تیر طره بکاربردن توابع پایه نرئز از درجه ۱ توصیه می‌شود.

۳- در مسئله صفحه سوراخدار بازه تغییر مقادیر شاخص تاثیر از ۰/۱۸۹ الی ۰/۸۳۳ بوده و میزان رشد نیز از ۶٪ تا ۱۵۱٪ می‌باشد. در این مسئله نیز تطابق و تشابه قابل قبولی در نرم خطا و

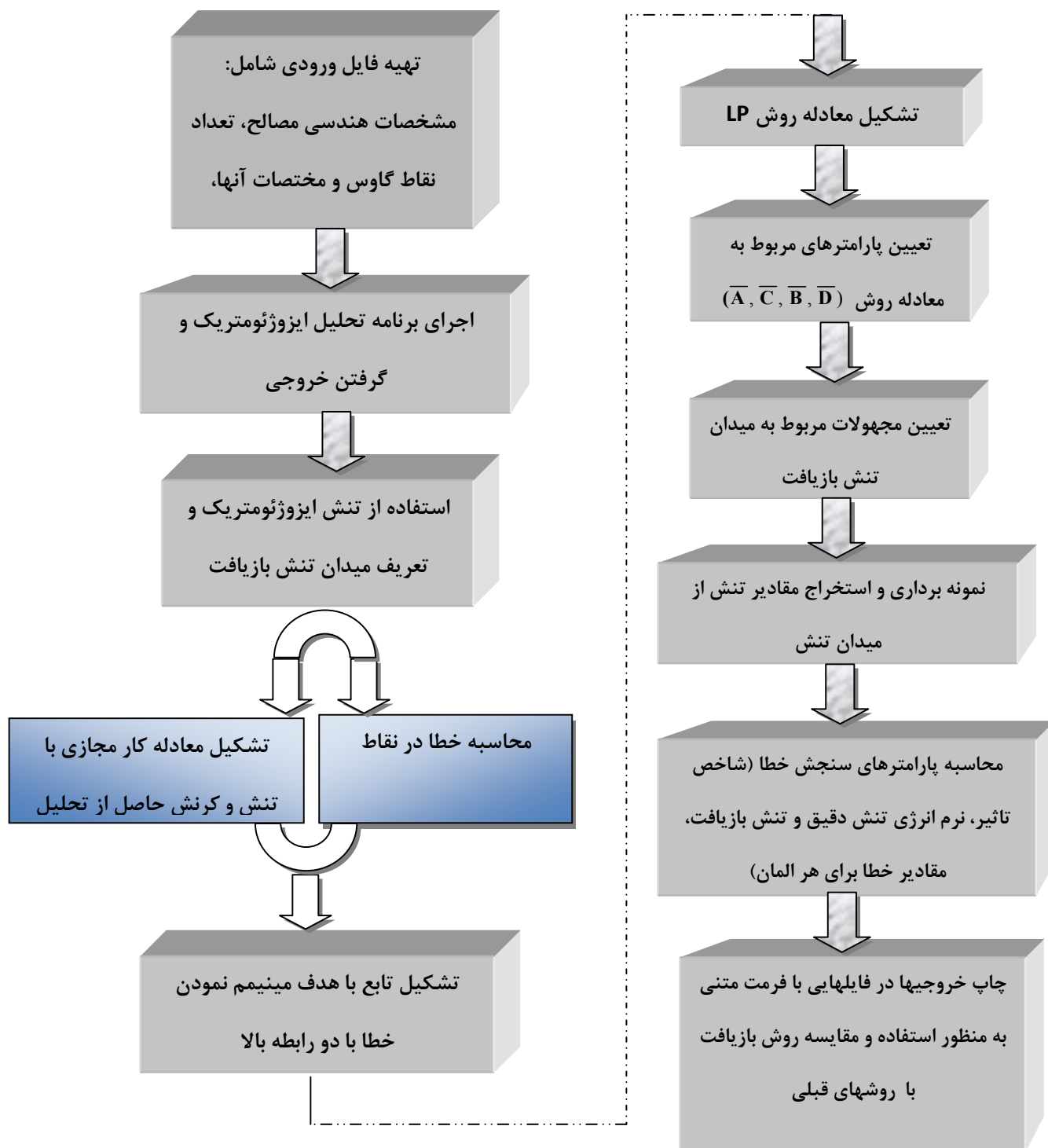
برای تعیین پارامترهای مجهول تنش بازیافت.

- ۲- استفاده از روشهای دیگر تخمین خطا در اجزای محدود و توسعه آن در تحلیل ایزوژئومتریکی.
- ۳- در حالتی که نقاط کنترل منطبق بر روی مرز نباشد، اعمال شرایط مرزی چگونه صورت پذیرد.
- ۴- استفاده از توابع T-Spline به جای توابع پایه نرَبز، جهت داشتن امکان بهبود محلی شبکه تحلیل ایزوژئومتریکی.

۵- بررسی تاثیر تعداد و نحوه آرایش نقاط کنترل بر روی تنش بازیافت.

۶- بررسی تاثیر هموار بودن میدان تنش بر روی کارایی روش بازیافت تنش.

فلوچارت برنامه و روند کلی انجام بازیافت تنش



- [1] Zienkiewicz, O.C. (2000), “**Achievements and some unsolved problems of the finite element method**”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, pp.28.
- [2] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and J.Z. Zhu. (2005), “**The Finite Element Method**” 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [3] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu, “**A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis**”, *Int. j. numer. methods eng.*, 24, 337{357 (1987).
- [4] E. Hinton and J. S. Campbell, “**Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method**”, *Int. j. numer. methods eng.*, 8, 461{480 (1974).
- [5] J. T. Oden and H. J. Brauchli, “**On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations**”, *Int. j. numer. methods eng.*, 3, 317{325 (1971).
- [6] J. T. Oden and J. N. Reddy, “**Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements**”, *Int. j. numer. methods eng.*, 6, 55{61 (1973).
- [7] Babuska, I. and Rheinboldt, W.C. (1981), “**A-posteriori error analysis of finite element solution for one-dimension problems**”, *SIAM J Num. Anal.*, Vol. 18, pp. 565-589.
- [8] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1989), “**Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems**”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 2839-2853.
- [9] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1992), “**The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique**”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1331-1364.
- [10] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1992), “**The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity**”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1365-1382.

- [11] Ainsworth, M. and Oden, J. T. (1993), “**A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods**”, *Numer. Math.*, Vol. 65, pp.23-50.
- [12] N.-E. Wiberg and F. Abdulwahab, “**Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium**”, *Int. j. numer.methods eng.*, 36, 2703{2724 (1993).
- [13] N.-E. Wiberg, F. Abdulwahab and S. Ziukas, “**Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions**”, *Int. j. numer. methods eng.*, 37, 3417{3440 (1994).
- [14] T. Blacker and T. Belytschko, “**Superconvergent patch recovery with equilibrium and conjoint interpolant enhancements**”, *Int. j. numer. methods eng.*, 37, 517{536 (1994).
- [15] Boroomand, B. and Zienkiewicz, o.c. (1997), “**Recovery by equilibrium in patches (REP)**”, *ernational Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, pp. 137-164.
- [16] Boroomand, B. and Zienkiewicz, O. C. (1997), “**An Improved REP Recovery and effectivity Robustness Test**”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 40, pp. 3247-3277.
- [17] Taeoh, Lee. Hoon C. Park, Sung W. Lee , “**A superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint**” *international journal for numerical methods in engineering*, vol. 40, 1139{1160 (1997).
- [18] I. Babuska, T. strouboulis, C.S. Upadhyay and S.K Gangaraj, (1994), “**A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patch wise uniform grids of triangles**”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*114,307-378.
- [19] Zienkiewicz, O. c. (2006), “**The background of error estimation and adaptivity in finite element computations**” , *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 195 207–213
- [20] Hinton, E. and Campbell J.(1974), “**Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method**”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 8, pp.461-480.
- [21] Oden, T. J. and Brauchli J.(1971), “**On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation**”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 3, pp. 317-325.
- [22] George Arfken.(1985), “**Mathematical Methods for Physicst**” , *Miami University Ohio,Academic Press.*

- [23] Tabbara, M., Blacker, T. Belytschko, T. "Finite element derivative recovery by moving least square Interpolants", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 117 (1994) 211-223.
- [24] LO, S. H. LEE, C. K. "On using different recovery procedures for the construction of smoothed stress in finite element method", *International journal for numerical methods in engineering* *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* 43, 1223-1252 (1998)
- [25] J. Austin Cottrell, Thomas J. R. Hughes, Yuri Bazilevs (2009), "Isogeometric Analysis" first published 2009 John Wiley & Sons, Ltd.
- [26] Hughes T.G.R, Cottrell J.A., Bazilevs Y., (2005), "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Comput. Method Appl. Mech. Engrg*, 194 4135-4195.
- [27] Piegl L., Tiller W., (1997), "The NURBS Book," 2nd ed., Springer-Verlag, new York.
- [28] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, (1977), "Theory of Elasticity," McGraw-Hill, New York.
- [29] T.L. Anderson, Fracture Mechanics. (1991), "Fundamentals and Applications, first ed. ", CRC Press, Boca Raton.

- [۳۰] گنجعلی ا، (۱۳۸۸)، پایان نامه ارشد " تخمین خطا و حل تطبیقی سازه‌های دو بعدی در اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک " دانشکده عمران و معماری، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۳۱] دکتر سعادت پور م. (۱۳۸۵)، " مبانی تئوری الاستسیته ". اصفهان: مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان.
- [۳۲] چاندروپاتلا، تیروپاتی، ۱۹۴۴-زکوی، جاوید، مترجم (۱۳۷۹) "مقدمه‌ای بر المانهای محدود در مهندسی" نشر شیخ صفی‌الدین، دانشگاه محقق اردبیلی.
- [۳۳] حمید صفاری. (۱۳۸۳)، "کتاب آموزشی Visual Fortran". تهران: انتشارات سیمای دانش.
- [۳۴] دکتر رحیمیان م، دکتر اسکندری قادی م. (۱۳۷۹)، " تئوری ارتجاعی ". تهران: انتشارات دانشگاه تهران

Abstract

In this thesis, first some methods of Stress Recovery in Finite Elements are surveyed & introduced. After surveying existing methods, the LP method was chosen comparing to some common Stress Recovery methods in Finite Elements, in order of development in Isogeometric Analysis. The reason of this is high efficiency & using the residual of equilibrium equation term that seems to be appropriate for using in Isogeometric Analysis method. For this purpose, the basics of Isogeometric analysis & NURBS basic functions which are the essentials in this environment are introduced briefly. Then the relations & equations used in LP method are re-written compatible to Isogeometric Analysis. After determining the relations, coding method was done in programming environment & was added to basic program of Isogeometric analysis.

In order to compare efficiency & veracity of the method, three known examples which their accurate solutions were available were used.

- 1) Cantilever beam
- 2) Hole in infinite plate
- 3) Fracture problem

The results of LP method program are compared to SPR recovery method in Isogeometric environment. In the comparison, Energy Error Norm, Effectivity Index & surveying recovery stress parameters at some parts are used. In surveying the program's outputs, an improvement in results is observed comparing to SPR method. At the end appropriate degree of NURBS functions was defined with LP method, in order to recovery stress in Isogeometric environment for mentioned examples.

Key Words: Finite elements, Error estimation, Stress recovery, Efficiency index, Isogeometric analysis, Energy error norm.