بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی عمران

رساله دکتری مهندسی سازه

تحلیل عددی مسائل ویسکوالاستیک و الاستواستاتیک با توابع شکل پیشنهادی جدید با استفاده از روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی

نگارنده

سید علی قاضی میرسعید (۹۱۲۵۵۶۵)

استاد راهنما

دکتر وحیدرضا کلات‌جاری

بهمن ۱۳۹۷

تصویب‌نامه مطابق پیوست شماره ۲

تقدیم به پدرم

مهندس سید شعیب قاضی میرسعید

و

مادرم

تشکر و قدردانی

خداوند متعال را شکر می‌گویم که تا کنون این بنده‌ی کوچک خویش را در تمام مراحل زندگی تنها نگذاشته است. بی‌تردید نخستین منبعی که توان، انگیزه و انرژی برای تلاش کردن و جنگیدن را از دوران سخت کودکی تا کنون به من داده است، اوست. پیش از هر فردی، بر خود واجب می‌دانم که از زحمات و حمایت‌های استاد گرانقدر خود جناب آقای دکتر کلات‌جاری تشکر و قدردانی نمایم. ایشان در تمام مراحل انجام این پژوهش که کوتاه هم نبود، بزرگترین حامی و معلم من بودند و از ایشان بسیار آموختم. همینطور از خداوند متعال سپاسگزارم که ایشان را در مسیر زندگی من قرار داد. از جناب آقای دکتر رضا نادری که در طول انجام این پژوهش با انجام مباحثه‌های علمیِ بسیار سبب ارتقا کیفیت علمی این پژوهش شدند، بسیار سپاسگزارم. از ایشان نیز، هم در طول دوره‌ی آموزشی و هم پژوهشی بسیار آموختم. سپس از پدرم که همچون یک دوست همواره کنارم بوده است و همینطور حامی من در تمام مراحل زندگی بوده است سپاسگزارم و خداوند متعال را برای داشتن چنین پدری شاکرم. در ادامه از حمایت‌های برادرم احمد که عزیزترین فرد در زندگی‌ام است و همینطور مادرم در طول این سال‌ها تشکر و قدردانی می‌نمایم.

تعهد نامه

اینجانب **سید علی قاضی میرسعید** دانشجوی دوره دکتری تخصصی رشته مهندسی عمران گرایش مهندسی سازه دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله با موضوع **تحلیل عددی مسائل ویسکوالاستیک و الاستواستاتیک با توابع شکل پیشنهادی جدید با استفاده از روش‌های اجزای محدود و اجزای مرزی** تحت راهنمایی دکتر وحیدرضا کلات‌جاری متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در رساله تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام **دانشگاه صنعتی شاهرود** و یا **Shahrood University of Technology** به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ:

امضا دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن(مقالات، مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات نتایج موجود در رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

اگر مردم به سادگی ریاضیات اعتقاد ندارند، تنها به این دلیل است که به عمق پیچیدگی زندگی پی نبرده‌اند.

جان فان نیومن

چکیده

در این رساله به تحلیل عددی سازه‌های ویسکوالاستیک و الاستیک خطی پرداخته شده است. به طور مشخص از روش عددی اجزای محدود در تحلیل مسائل ویسکوالاستیک و روش عددی اجزای مرزی در تحلیل مسائل الاستواستاتیک استفاده شده است. بدین‌منظور با استفاده از فرآیند بدست آوردن توابع شکل در روش درون‌یابی نقطه‌ای از طریق توابع پایه شعاعی (RPIM) که یک روش بدون شبکه برای تحلیل عددی سازه‌ها می‌باشد، برای بدست آوردن المان‌های جدید به منظور استفاده در روش‌های بر پایه‌ی المان استفاده شده است. به طور مشخص، با استفاده از فرآیند بدست آوردن توابع شکل در روش RPIM به کمک توابع پایه شعاعی مختلط فوریه، گاوسین-فوریه و چندربعی تعمیم یافته (XMQ)، المان‌های چهاروجهی صفحه‌ای Q9,Q8 بدست آمده است. توابع شکل در این المان‌ها دارای کلیه‌ی خصوصیات لازم شامل دلتای کرونیکر، افراز واحد و پیوستگی از مرتبه‌ی بی‌نهایت هستند. تمامی این المان‌ها تست وصله، شامل تست وصله‌ی جابجایی و نیرو را برآورده می‌کنند. از این المان‌های بدست آمده، در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیسیته تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای استفاده شده است. مثال‌های عددی مختلفی با استفاده از این المان‌ها حل شده است. نتایج حاصل از این المان‌ها با نتایج بدست آمده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 و همینطور حل تحلیلی مقایسه شده است. المان‌های نوین بکارگرفته شده و پیشنهادی در این رساله در مقایسه با المان‌های کلاسیک لاگرانژی بسیار سریع‌تر به حل تحلیلی در مسائل ویسکوالاستیک همگرا می‌شوند. سپس با توجه به توانمندی المان‌های مختلط فوریه در حل مسائل ویسکوالاستیک صفحه‌ای، از توابع پایه شعاعی مختلط فوریه در المان‌های ورق برای تحلیل اجزای محدود ورق‌های نازک ویسکوالاستیک استفاده شده است. المان‌های

ورق جدید پیشنهادی که با تقویت المان‌های ورق تئوری کیرشوف گسسته (DKT) با توابع پایه شعاعی مختلط فوریه بدست آمد، المان ورق فوریه تئوری کیرشوف گسسته (DKFT) نامیده شده است. نتایج حاصل از المان‌های پیشنهادی DKFT در تحلیل اجزای محدود ورق‌های نازک ویسکوالاستیک نسبت به المان‌های ورق کلاسیک و DKT بسیار سریع‌تر به حل تحلیلی همگرا می‌شود. در ادامه از المان‌های جدید یک بعدی چندربعی تعمیم یافته پیشنهادی برای تحلیل اجزای مرزی مسائل الاستواستاتیک استفاده شده است و نتایج حاصل با المان‌های کلاسیک لاگرانژی مقایسه شده است. این مقایسه، مُؤید برتری توابع شکل چندربعی تعمیم‌یافته نسبت به توابع شکل کلاسیک لاگرانژی در تحلیل اجزای مرزی مسائل الاستواستاتیک است.

واژگان کلیدی: تحلیل عددی، روش اجزای محدود، روش اجزای مرزی، سازه‌های ویسکوالاستیک، مسائل الاستواستاتیک، روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی.

لیست مقالات مستخرج از رساله

مقالات ژورنالی

[1] Seyed Ali Ghazi Mirsaeed and Vahidreza Kalatjari, "An Enhanced Finite Element method for Two Dimensional Linear Viscoelasticity using Complex Fourier Elements", **Journal of Computational Applied Mechanics**, accepted article, 2018.

[۲] سید علی قاضی میرسعید و وحیدرضا کلات‌جاری، " المان های جدید DKFT برای تحلیل اجزای محدود ورق های نازک ویسکوالاستیک"، **روش‌های عددی در مهندسی**، مجله علمی پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۹۷.

[۳] وحیدرضا کلات‌جاری و سید علی قاضی میرسعید، " تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک خطی با استفاده از توابع شکل پیشنهادی گاوسین – فوریه"، **عمران شریف**، مجله علمی پژوهشی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۹۷.

مقالات کنفرانسی

[1] Seyed Ali Ghazi Mirsaeed and Vahidreza Kalatjari, "A Proposed Approach to find shape parameters in Spherical Hankel Elements for Finite Element Analysis of Viscoelasticity Problems", *Third Iranian Conference on Mathematical Physics*, Qom University of Technology, Qom, Janurary 3rd, 2019.

[۲] سید علی قاضی میرسعید و وحیدرضا کلات‌جاری، " تحلیل المان مرزی مسائل الاستواستاتیک با استفاده از المان های چندربعی تعمیم یافته"، *اولین کنفرانس ملی مدلسازی ریاضی در علم، فناوری و سیستم‌های هوشمند*، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ۱۱ بهمن ۱۳۹۷.

[۳] سید علی قاضی میرسعید و وحیدرضا کلات‌جاری، " پیشنهاد المان های چندربعی تعمیم یافته دو بعدی برای تحلیل مسائل ویسکوالاستیک خطی با استفاده از روش اجزای محدود"، *اولین کنفرانس ملی مدلسازی ریاضی در علم، فناوری و سیستم‌های هوشمند*، دانشگاه علم و فناوری مازندران، بهشهر، ۱۱ بهمن ۱۳۹۷.

فهرست مطالب

عنوان...........صفحه

فصل چهارم: المان‌های نوین و استفاده از آن‌ها در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیسیته

فصل پنجم: تحلیل المان مرزی مسائل الاستواستاتیک با استفاده از المان‌های XMQ

فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای کارهای آینده

منابع

فهرست شکل‌ها

عنوان...صفحه

فهرست جدول‌ها

عنوان...صفحه

فهرست علائم و اختصارات

A	مساحت صفحه میانی ورق	$\mathbf{R}(r)$	بردار توابع پایه شعاعی
$\mathbf{a}$	بردار ضرایب مجهول توابع پایه شعاعی	$\mathbf{R}_0$	ماتریس تناوب
$\mathbf{B}$	ماتریس تبدیل انحنا- جابجایی	R_ε	نرخ تغییرات کرنش در یک گام زمانی
$\mathbf{b}$	بردار ضرایب میدان توابع چندجمله ای	R_κ	نرخ تغییرات انحنا در یک گام زمانی
C_q	ثابت فنر در المان qام ماکسول	r	نُرم اقلیدسی
C_{ijkl}	تانسور مرتبه چهار مدول استراحت	w,v,u	جابجایی در راستای z,y,x
$\mathbf{d}$	بردار درجات آزادی گرهی	α	پارامتر شکل
$\{F\}$	بردار نیروی کلی	β_y,β_x	زاویه بین نرمال صفحه قبل و بعد از خمش
$\{f_1^e\}$	بردار نیروی المان ناشی از نیروی حجمی	Γ_2	مرز سازه تحت ترکشن سطحی
$\{f_2^e\}$	بردار نیروی المان ناشی از ترکشن سطحی	$\{\Delta d\}$	بردار تغییرات جابجایی گرهی در یک المان
$\{f_3^e\}$	بردار نیروی المان ناشی از لنگر در ابتدای بازه زمانی	$\Delta t, \Delta\tau$	گام زمانی
$\{f_4^e\}$	بردار نیروی المان ناشی از تغییرات لنگر در طول بازه زمانی	$\{\Delta U\}$	بردار تغییرات جابجایی کلی
$\mathbf{H}_y,\mathbf{H}_x$	بردارهای ۹ مولفه ای توابع شکل جدید	ε_{kl}	تانسور کرنش
$H(t)$	تابع هویساید	η_m	ضریب میراگر در المان m ام ماکسول
h	ضخامت	θ_y,θ_x	دوران نرمال صفحه xz و yz
$\mathbf{J}$	ماتریس ژاکوبین	$\boldsymbol{\kappa}$	بردار انحنا
$\mathbf{K}^e$	ماتریس سختی المان	υ	نسبت پوآسون
$[K]$	ماتریس سختی کلی	ρ_m	زمان استراحت در المان m ام ماکسول
M_{xy},M_y,M_x	لنگر خمشی و پیچشی	σ_{ij}	تانسور تنش
m	تعداد جملات پایه ی چندجمله ای	ϕ_k	تابع شکل متناظر با گره k ام
N_i	توابع شکل مختلط فوریه	$\boldsymbol{\varphi}$	ماتریس توابع شکل
n	تعداد گره‌ها در یک المان	Ω	دامنه‌ی سازه
P	بار متمرکز	ω	پارامتر شکل
$\mathbf{P}(x,y)$	بردار میدان توابع چندجمله ای	$[\partial]$	ماتریس اپراتور مشتق

فصل اول: مقدمه

۱-۱- مقدمه

درک دقیق واژگان در بستر زبان کمک می‌کند که مخاطب یک گزارش تحقیقاتی به خوبی با حوزه‌ی تحقیق مورد نظر ارتباط برقرار کند، بنابراین آغاز کردن رساله با بحثی در مورد تعریف دقیق موضوع آن بسیار مفید به نظر می‌رسد. براساس آنچه بیان شد، شاید بهترین روش برای بازکردن بحث، ارائه‌ی توضیحاتی تکمیلی در مورد عنوان رساله باشد. بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را می‌توان با استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۱] توصیف کرد. یک دسته از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در مسائل کاربردی و مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند به معادلات ریاضی فیزیک موسوم‌اند. از معروف‌ترین معادلات ریاضی فیزیک می‌توان به معادله‌ی موج، معادله‌ی گرما، معادله‌ی لاپلاس[۲]، معادله‌ی پوآسون[۳] و معادله‌ی هلمهولتز[۴] اشاره کرد. از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی که در مهندسی سازه و سازه‌های هیدرولیکی از اهمیت بسیاری برخوردار است، می‌توان به معادله‌ی ناویه[۵] (کوشی[۶]) و معادله‌ی ناویه-استوکس[۷] اشاره کرد. در کاربردهای مهندسی اغلب اوقات به منظور پیش‌بینی رفتار در یک پدیده‌ی فیزیکی بایستی به حل مسائل شامل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پرداخت. منظور از یک مسئله در معادلات با مشتقات جزئی، یافتن جوابی برای یک معادله با مشتقات جزئی است که در برخی شرایط فیزیکی مفروض صدق کند. شرایط فیزیکی اصولاً طوری انتخاب می‌شوند که نتیجه حل مسئله به جوابی یکتا منجر شود. جواب برخی معادلات همچون جواب معادله‌ی موج با دانستن مقدار میدان مجهول $u(\mathbf{x},t)$ روی مرز Γ و مقدار اولیه میدان مجهول $u(\mathbf{x},0)$ و سرعت آن در لحظه‌ی اولیه $\dot{u}(\mathbf{x},0)$ به طور یکتا در دامنه‌ی Ω مشخص می‌شوند. چنین مسائلی را

---

[1] Partial Differential Equations (PDEs)
[2] Laplace equation
[3] Poisson's equation
[4] Helmholtz equation
[5] Navier equation
[6] Cauchy
[7] Navier-Stokes equation

مسائل با مقدار اولیه و مرزی[8] می‌نامند. مسائلی که جواب معادله با مشخص بودن مقدار میدان مجهول $u(\mathbf{x})$ بر روی مرز Γ یا مقدار مشتق میدان مجهول در امتداد قائم بر مرز Γ یعنی $u_n(\mathbf{x})=\dfrac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n}$ به طور یکتا در دامنه‌ی Ω مشخص می‌شود، به مسائل مقدار مرزی[9] موسوم‌اند. به عنوان مثال مسئله‌ی لاپلاس، مسئله‌ای از این نوع است. البته مسائلی نیز وجود دارند که پاسخ معادله، تنها با دانستن مقدار اولیه میدان مجهول مشخص می‌شوند. چنین مسائلی به مسائل مقدار اولیه[10] موسوم‌اند [۱]. مسائل ویسکوالاستیک ذکر شده در عنوان رساله را می‌توان با یک مسئله‌ی با مقدار اولیه و مرزی تعریف کرد که معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر آن، معادله‌ی تعادل است. این مسئله‌ی با مقدار اولیه و مرزی در فصل بعد به طور کامل توضیح داده شده است. مسائل الاستواستاتیک را نیز می‌توان با یک مسئله‌ی مقدار مرزی تعریف کرد که معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر آن، معادله‌ی ناویه در حالت استاتیکی است. این مسئله‌ی مقدار مرزی در فصل پنجم بیان شده است. معادله‌ی ناویه در حالت استاتیکی نیز در حقیقت معادله‌ی تعادل در جامدات همگن ایزوتروپ (همسانگرد) الاستیک خطی[11] است. پس هدف در این رساله حل مسئله‌ی مقدار اولیه و مرزی و همین‌طور مسئله‌ی مقدار مرزی توضیح داده شده است.

روش‌های مختلفی برای حل تحلیلی مسائل مقدار اولیه و مرزی پیشنهاد شده است. اما این روش‌ها به حل مسائل با هندسه و شرایط مرزی ساده محدود می‌شود. از متداول‌ترین روش‌های تحلیلی برای حل مسائل مقدار اولیه و مرزی می‌توان به روش جداسازی متغیرها[12] اشاره کرد. روش‌های حل تحلیلی برای مسائل الاستواستاتیک و ویسکوالاستیک در مراجع تئوری الاستیسیته [۳-۲] و ویسکوالاستیسیته [۸-۴] بحث شده است. روش‌های تحلیلی ارائه شده در مراجع ذکر شده اغلب برای حل مسائل

[8] Initial Boundary Value Problems (IBVP)

[9] Boundary Value Problems (BVP)

[10] Initial Value Problems (IVP)

[11] Linear Elastic Isotropic Homogeneous

[12] Seperation of variables

ویسکوالاستیک و الاستواستاتیک با هندسه و بارگذاری پیچیده قابل استفاده نیست. از آن جایی که اکثر مسائل کاربردی مهندسی دارای هندسه و بارگذاری پیچیده هستند، روش‌های عددی برای تحلیل این مسائل پیشنهاد می‌شود. از این‌رو روش‌های عددی بسیاری برای حل مسائل ویسکوالاستیک و الاستواستاتیک با هندسه و بارگذاری پیچیده با پیشرفت سریع رایانه‌ها ایجاد شده است. از یک نقطه نظر می‌توان روش‌های عددی تحلیل سازه‌ها را به دو دسته‌ی روش‌های بدون شبکه[13] و روش‌های بر پایه‌ی المان تقسیم بندی کرد. از معروف‌ترین روش‌های بر پایه‌ی المان می‌توان به روش اجزای محدود[14] و روش اجزای مرزی[15] و روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده[16] اشاره کرد. در این رساله برای حل مسائل ویسکوالاستیک از روش عددی اجزای محدود و برای حل مسائل الاستواستاتیک از روش عددی اجزای مرزی استفاده خواهد شد. در تحلیل عددی، درون یابی[17] یک مفهوم اساسی است. در روش‌های عددی بر پایه‌ی المان، درون‌یابی عبارت از تخمین مقادیر میدان‌های مجهول در هر نقطه دلخواه از یک المان با استفاده از مقادیر میدان در گره‌های المان می‌باشد. ابزاری که برای این مقصود مورد استفاده قرار می‌گیرد، توابع شکل یا توابع درون‌یابی هستند، که یکی از متداول‌ترین انواع آن‌ها توابع شکل کلاسیک لاگرانژی[18] می‌باشند. نسل جدیدی از توابع شکل نوین با استفاده از روش درون‌یابی نقطه‌ای از طریق توابع پایه شعاعی[19] [۹] معرفی خواهد شد. در این رساله، از این توابع شکل نوین در تحلیل عددی مسائل ویسکوالاستیک با استفاده از روش اجزای محدود و مسائل الاستواستاتیک با استفاده از روش اجزای مرزی استفاده خواهد شد. تا اینجا توضیح کاملی در مورد عنوان رساله ارائه شد. در ادامه توضیحاتی در مورد ماده ویسکوالاستیک مورد بحث در این رساله ضروری به نظر می‌رسد.

---

13 Mesh-free methods

14 Finite Element Method (FEM)

15 Boundary Element Method (BEM)

16 Scaled Boundary Finite Element Method (SBFEM)

17 Interpolation

18 Classical Lagrangian Shape functions

19 Radial Point Interpolation Method based on radial basis functions

منظور از ماده‌ی ویسکوالاستیک مورد بحث در این رساله "ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی" است. صفت ویسکوالاستیک در عبارت "ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی" به رابطه‌ی تنش-کرنش در ماده اشاره دارد. در ماده‌ی ویسکوالاستیک تنش در لحظه به کل تاریخچه‌ی کرنش بستگی دارد.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left\{\varepsilon_{kl}\right\} \tag{۱-۱}$$

در رابطه‌ی (۱-۱)، σ_{ij} تانسور[20] تنش و ε_{kl} تانسور کرنش است.

صفت خطی در عبارت "ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی" به پاسخ ماده به محرک اشاره دارد. در صورتی که روابط (۱-۲) و (۱-۳) برقرار باشد، رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک، خطی خواهد بود.

$$\sigma_{ij}\left\{c\,\varepsilon_{kl}\right\} = c\,\sigma_{ij}\left\{\varepsilon_{kl}\right\};\quad c = \text{constant} \tag{۲-۱}$$

$$\sigma_{ij}\left\{\varepsilon_{kl}^{1} + \varepsilon_{kl}^{2}\right\} = \sigma_{ij}\left\{\varepsilon_{kl}^{1}\right\} + \sigma_{ij}\left\{\varepsilon_{kl}^{2}\right\} \tag{۳-۱}$$

در رابطه‌ی (۱-۲)، c عدد ثابت است و در رابطه‌ی (۱-۳)، $\varepsilon_{kl}^{2}, \varepsilon_{kl}^{1}$ تاریخچه‌ی کرنش‌های ورودی هستند.

۱-۲- ضرورت انجام پژوهش

پیش بینی پاسخ مواد ویسکوالاستیک با روش‌های تحلیلی به دلیل پیچیدگی رفتاری این مواد، تنها برای مسائل ساده از نظر شرایط مرزی و هندسی قابل دستیابی است. بنابراین استفاده از روش‌های عددی به خصوص روش اجزای محدود برای مدل‌سازی رفتار مواد ویسکوالاستیک اجتناب ناپذیر است. استفاده از روش‌های عددی در حل مسائل به دلیل طبیعت تقریب در آن‌ها، همواره با مقداری خطا همراه است . بنابراین پژوهشگران همواره در جستجوی روش های عددی با کارآیی بیشتر و دقت بالاتر که منجر به خطا و هزینه‌ی محاسباتی کمتر می‌شود، می‌باشند.

[20] Tensor

۱-۳- بیان مسئله، اهداف پژوهش و روش تحقیق

هدف از این پژوهش مدل سازی عددی رفتار مواد ویسکوالاستیک با استفاده از توابع شکل مدرن شامل مختلط فوریه، گاوسین-فوریه و چندربعی تعمیم‌یافته با کمک روش اجزای محدود می‌باشد. بنابراین از روش اجزای محدود برای گسسته‌سازی و فرموله کردن معادلات حاکم بر ماده، که دارای رفتار ویسکوالاستیک می‌باشد، استفاده خواهد شد. جهت شبیه‌سازی رفتار مواد ویسکوالاستیک مدل‌های مختلفی پیشنهاد شده است که از جامع‌ترینِ آن‌ها می‌توان به مدل‌های ماکسول تعمیم یافته و کلوین تعمیم یافته اشاره کرد. برای بیان ریاضی مدول مصالح ویسکوالاستیک در این مدل‌ها از سری پرونی استفاده خواهد شد. جهت گسسته سازی زمانی رفتار ویسکوالاستیک ماده نیز روش‌های نموی متعددی استفاده شده است که از مهمترین آن‌ها می‌توان به روش زوکر و همکاران [۱۱،۱۰] و همچنین روش قزلان و همکاران [۵۴] اشاره نمود، که از میان آن‌ها روش زوکر از مدول استراحت و روش قزلان از مدول خزش در فرآیند روش نموی استفاده می‌کند. در این رساله از مدل ماکسول تعمیم‌یافته و از روش نموی زوکر استفاده شده است. هدف این پژوهش استفاده از روشی کارا، با پاسخ های دقیق‌تر و هزینه محاسباتی کمتر است.

در این تحقیق با استفاده از روش عددی اجزای محدود و با کمک توابع شکل توانمند مدرن، کُد کامپیوتری نوشته شده‌است که قادر است رفتار مواد ویسکوالاستیک را آنالیز کند. به منظور نشان دادن کارآیی و دقت روش حاضر، نتایج عددی حاصل از چندین مثال نمونه با استفاده از کُد نوشته شده، با سایر نتایج عددی گزارش شده در پیشینه تحقیقات علمی که با روش المان محدود کلاسیک به دست آمده اند و نیز حل تحلیلی (در صورت وجود) که بهترین مرجع برای کنترل نتایج و تعیین حالت بهینگی است و همینطور نتایج حاصل از مدل‌سازی این مثال‌ها با نرم افزارهای اجزای محدود تجاری موجود مانند آباکوس، مقایسه شده است. سپس با بکارگیری روش اجزای مرزی کُد کامپیوتری دیگری نوشته شده است که قادر است مسائل الاستواستاتیک را با استفاده از توابع شکل چندربعی تعمیم یافته حل کند و نتایج حاصل از این کُد با نتایج تحلیلی و نتایج حاصل از توابع شکل کلاسیک مقایسه شده است.

۱-۴- ساختار رساله

با توجه به توضیحات داده شده در قسمت‌های قبل و اهداف پژوهش، این رساله در شش فصل تنظیم شده است. در ادامه، در فصل دوم به بررسی تئوری ویسکوالاستیسیته و تاریخچه‌ی آن پرداخته خواهد شد. سپس به بررسی منابع علمی و پیشینه تحقیقات علمی مرتبط با نحوه‌ی فرمول‌بندی اجزای محدود پیشنهاد شده برای حل مسائل ویسکوالاستیسیته پرداخته خواهد شد. در نهایت فرمولاسیون پیشنهادی زوکر و همکاران [۱۱،۱۰] که در این رساله استفاده شده است، بطور کامل شرح داده خواهد شد. در فصل سوم، توابع پایه شعاعی[21] معرفی خواهند شد و روش درون‌یابی نقطه‌ای از طریق توابع پایه شعاعی که توسط وانگ و لیو پیشنهاد شده است بیان خواهد شد. سپس در فصل چهارم، المان‌های مختلط فوریه[22]، المان ورق DKFT[23] ، المان گاوسین-فوریه،[24] المان چندربعی تعمیم یافته[25] با استفاده از فرآیند تعیین توابع شکل در این روش، بدست آمده و از آن‌ها در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیسیته استفاده خواهد شد. در فصل پنجم از توابع شکل چندربعی تعمیم یافته که در فصل چهارم بدست آمد، در تحلیل اجزای مرزی مسائل الاستواستاتیک استفاده خواهد شد و در نهایت بخش ششم به نتیجه‌گیری اختصاص خواهد داشت.

---

[21] Radial Basis Functions (RBFs)

[22] Complex Fourier Elements

[23] Discrete Kirchhoff (Fourier) Theory Plate Elements

[24] Gaussian-Fourier

[25] Extended Multi-quadric elements (XMQ)

فصل دوم: ویسکوالاستیسیته

۲-۱- مقدمه

رفتار بیشتر مواد جامد در کرنش‌های کوچک با قانون هوک[26] الاستیسیته‌ی خطی توصیف می‌شود. براساس این قانون مقدار تنش σ با مقدار کرنش ε تناسب خطی دارد. قانون هوک در مسائل یک بعدی به صورت زیر بیان می‌شود [۲]:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (۲-۱)$$

در رابطه‌ی (۲-۱)، E مدول الاستیسیته است که مدول یانگ[27] نیز نامیده می‌شود.

قانون هوک برای مواد الاستیک را می‌توان براساس مدول نرمی[28] J نیز بیان کرد:

$$\varepsilon = J\sigma \qquad (۲-۲)$$

با استفاده از روابط (۲-۱) و (۲-۲) می‌توان دریافت که مدول نرمی J در مواد الاستیک، معکوس مدول یانگ E است:

$$J = \frac{1}{E} \qquad (۲-۳)$$

در مقایسه با مواد الاستیک، یک سیال ویسکوز تحت تنش برشی از رابطه‌ی $\sigma = \eta \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ پیروی می‌کند که در این رابطه، η ویسکوزیته سیال است. در واقعیت، رفتار تمامی مواد از قانون هوک به طرق مختلف تَعَدّی می‌کند و به عنوان مثال خصوصیات الاستیک و شبه ویسکوز را بطور همزمان از خود نمایش می‌دهند. مواد ویسکوالاستیک، موادی هستند که رابطه‌ی تنش و کرنش در آن ها به زمان وابسته است. سختی و مقاومت مواد معمولاً با منحنی تنش-کرنش نمایش داده می‌شود، که با اعمال نرخ کرنش ثابت بر یک میله ساخته شده از این ماده بدست می‌آید. اگر ماده الاستیک خطی باشد، منحنی تنش-کرنش یک خط راست است که شیب آن متناسب با مدول الاستیک است [۵] (خط برجسته در دیاگرام سمت راست شکل ۲-۱). در یک مقدار مشخصی از تنش برابر با تنش جاری شدن ماده σ_y، همانطور که در

---

[26] Hooke's law

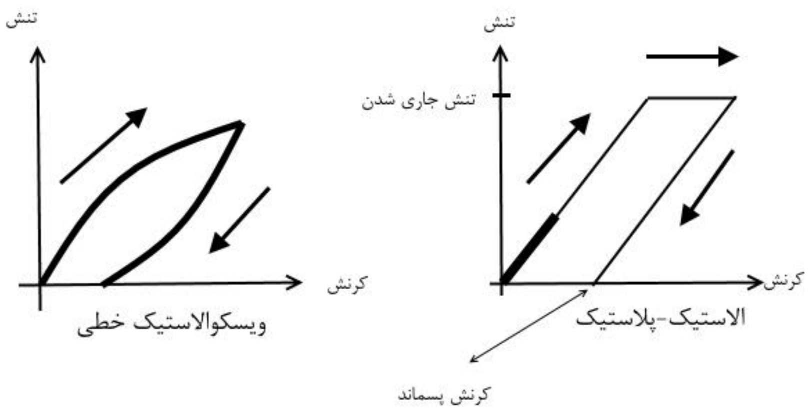
[27] Young's modulus

[28] Compliance

نمودار سمت راست شکل ۲-۱ نمایش داده شده است، ماده الاستیک خطی دچار پدیده‌ی جاری شدن می‌شود، که این پدیده، یک پدیده‌ی آستانه‌ای است.

در مقایسه، در یک ماده ویسکوالاستیک خطی، دیاگرام تنش-کرنش بصورت منحنی صعودی است همانطور که در نمودار سمت چپ شکل ۲-۱ نمایش داده شده است. دلیل این منحنی صعودی آنست که در تغییر شکل با نرخ کرنش ثابت، زمان و کرنش با همدیگر زیاد می‌شوند. ماده ویسکوالاستیک به زمان حساس است. بنابراین با افزایش کرنش، شیب منحنی سمت چپ شکل ۲-۱ کمتر خواهد شد.

در یک جامد ویسکوالاستیک پس از باربرداری، کرنش در نهایت به صفر باز می‌گردد و کرنشی به عنوان کرنش پس‌ماند در جسم باقی نمی‌ماند، اما در یک سیال ویسکوالاستیک کرنش پس‌ماند دائمی باقی خواهد ماند. رفتار مواد الاستیک-پلاستیک به زمان وابسته نیست اما این مواد دارای یک تنش آستانه هستند که تنش جاری شدن[۲۹] σ_y نامیده می‌شود. اگر تنش وارده در این مواد از تنش جاری شدن تجاوز کند، پس از برداشته شدن بارگذاری همواره یک کرنش پس‌ماند[۳۰] ε_r در جسم باقی خواهد ماند.



شکل ۲-۱: منحنی تنش-کرنش برای تغییرشکل در نرخ کرنش ثابت همراه با باربرداری؛ شکل سمت چپ رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی را نشان می‌دهد و شکل سمت راست رفتار ماده‌ی الاستیک-پلاستیک را نمایش می‌دهد [۵]

[29] Yield stress

[30] Residual stress

در بررسی رفتار مواد ویسکوالاستیک در آزمایشگاه، اعمال تنش پله‌ای یا کرنش پله‌ای نسبت به زمان به اعمال بار رمپ[۳۱] یا نرخ کرنش ثابت ترجیح داده می‌شود، چرا که از این طریق تاثیر زمان از هرگونه غیرخطی شدن محفوظ خواهد ماند. در مواد ویسکوالاستیک پاسخ به کرنش پله‌ای، وادادگی تنش[۳۲] و پاسخ به تنش پله‌ای، خزش[۳۳] نامیده می‌شود [۵].

برخی پدیده‌ها که در مواد ویسکوالاستیک اتفاق می‌افتند عبارتند از:

۱- اگر تنش ثابت باقی بماند، کرنش با گذر زمان افزایش می‌یابد (خزش).

۲- اگر کرنش ثابت باقی بماند، تنش با گذر زمان کاهش می‌یابد (وادادگی تنش).

۳- سختی موثر به نرخ اعمال بارگذاری بستگی دارد.

۴- اگر بارگذاری تناوبی اعمال شود، هیستریسیز یا یک تاخیر فاز اتفاق می‌افتد که منجر به اتلاف انرژی مکانیکی می‌شود.

۵- موج های صوتی در عبور از مواد ویسکوالاستیک دچار کاهش می‌شوند.

۶- بازگشت یک جسم ویسکوالاستیک پس از ضربه کمتر از صد در صد است.

۷- در زمان نورد کردنِ مواد ویسکوالاستیک مقاومت اصطکاکی به وجود می‌آید.

تمامی مواد تا حدی از خود پاسخ ویسکوالاستیک نشان می‌دهند. در فلزات متداول مانند فولاد یا آلومینیوم، همینطور کوارتز، در دمای اتاق و تحت کرنش کوچک، رفتار چندان از رفتار مواد الاستیک خطی منحرف نمی‌شود. پلیمرهای مصنوعی، چوب و بافت های بدن انسان همانند فلزات در دمای بالا، از خود رفتار ویسکوالاستیک قابل توجهی نشان می‌دهند [۶-۵].

---

31 Ramp

32 Stress relaxation

33 Creep

در برخی کاربری‌ها، حتی یک پاسخ ویسکوالاستیک کوچک می‌تواند تاثیرات قابل توجهی ایجاد کند. بنابراین به منظور تحلیل و طراحی دقیق و درست در کاربری‌هایی که از این مواد استفاده می‌شود بایستی رفتار ویسکوالاستیک آن‌ها در نظر گرفته شود [۵].

اندازه گیری، پایه‌ی دانش پاسخ ویسکوالاستیک یک ماده است. در حال حاضر علیرغم اینکه پیشرفت‌های بسیاری در درک مکانیزم معمول رفتار ویسکوالاستیک صورت گرفته است، امکان محاسبه‌ی پاسخ ویسکوالاستیک از مدل براساس مدل‌های مولکولی و اتمی به تنهایی وجود ندارد [۱۲].

۲-۲- انگیزه‌های مطالعه‌ی ویسکوالاستیسیته

مطالعه‌ی رفتار ویسکوالاستیک در زمینه‌های متنوعی مورد توجه قرار گرفته است. اول آنکه، موادی که برای کاربردهای عملی سازه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند، ممکن است از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان دهند که این مطلب می‌تواند تاثیر عمیقی بر عملکرد ماده داشته باشد. موادی که در کاربری‌های مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند ممکن است به عنوان یک اثر جانبی ناخواسته از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان دهند. از طرف دیگر، در فرآیند طراحی می‌توان رفتار ویسکوالاستیک یک ماده را در نظر گرفت و از آن برای رسیدن به یک هدف مشخص بهره برد. دوم آنکه، ریاضیاتی که در تئوری ویسکوالاستیسیته بر پایه‌ی آن است، در میان جامعه ریاضی کاربردی بسیار مورد توجه قرار دارد. سوم آنکه، از آنجایی که ویسکوالاستیسیته به فرآیندهای میکروفیزیکی مختلفی مرتبط است در برخی از شاخه های علم مواد، متالورژی و فیزیک حالت جامد نیز مورد توجه قرار دارد، چرا که به فرآیندهای میکروفیزیکی مختلفی مرتبط است و می‌تواند به عنوان یک کاوش تجربی از این فرآیندها مورد استفاده قرار گیرد. چهارم آنکه، بین ویسکوالاستیسیته و میکروسازه ها نیز ارتباط برقرار است. از این رابطه در استفاده از تست‌های ویسکوالاستیک به عنوان ابزار بازرسی و همینطور در طراحی مواد بهره برده می‌شود [۵].

۲-۳- مقدمه و مروری بر تحقیقات گذشته در حل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک

روش اجزای محدود بی‌شک یکی از بهترین روش‌های موجود برای حل عددی مسائلی است که حل تحلیلی برای آن‌ها در دسترس نیست، خصوصاً برای مسائلی که دارای شرایط مرزی غیرمعمول یا تاریخچه بارگذاری پیچیده هستند. به بیان ساده، روش اجزای محدود یک روش به منظور حل مسائل مقدار مرزی / اولیه می‌باشد. با استفاده از این روش دامنه‌ی تعریف مسئله به تعداد محدودی زیر دامنه (المان) تقسیم می‌شود و انتگرال‌هایی که از فرمول بندی تغییراتی مسئله‌ی مقدار مرزی / اولیه ایجاد می‌شوند بصورت المان به المان تکه‌ای، حل می‌شوند.

استفاده از روش اجزای محدود برای حل مسائل مقادیر مرزی / اولیه شامل موادی که از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهند در طی سال‌ها پیشرفت قابل توجهی کرده است. دو چالش مهندسی برای اولین بار سبب شد توجه محققان به حل مسائل ویسکوالاستیک با روش اجزای محدود جلب شود. یکی از آن چالش‌ها در رشته مهندسی عمران / هسته ای، طراحی مخزن تحت فشار بتنی بزرگی برای استفاده در نیروگاه‌های هسته ای بود. چالش دیگر در رشته‌ی مهندسی هوا و فضا، طراحی راکت های احتراق جامد بود. با پیشرفت کامپیوترهای مجهز به پردازنده‌ی سریع و حافظه‌ی قوی، استفاده از روش اجزای محدود برای حل عددی مسائل ویسکوالاستیک امکان پذیر شد [۱۱].

دو گروه روش برای حل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک وجود دارد.

گروه اول بر اساس تئوری ویسکوالاستیک خطی می‌باشد و در آن‌ها از فرم انتگرالی معادلات متشکله استفاده می‌شود. این گروه روش، حاصل از الزامات حل یک گروه معادلات انتگرالی از نوع وُلتِرا[۳۴] می‌باشد.

گروه دوم روش‌های بر مبنای آنالیز خزش یا تئوری ویسکوپلاستیسیته هستند و در آن‌ها از شکل دیفرانسیل معمولی ایجاد می‌شود که بایستی بطور همزمان حل شوند. با شناخت این دو نوع روش، در

[34] Volterra

بازبینی مطالعات گذشته مشخص خواهد شد که در هرکدام از این مقالات از کدامیک از این دو روش استفاده شده است [۱۱].

نخستین بار لی و راجرز [۳۱] حل مستقیمی برای تحلیل تنش مسائل ویسکوالاستیک با استفاده از حل عددی انتگرال وُلتِرا ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از انتگرال گیری مرحله به مرحله تفاضل محدود نسبت به زمان توانستند به این موفقیت دست یابند.

برای یک مسئله‌ی تحلیل تنش متفاوت، هاپکینز و همینگ [۳۲] پیش‌تر محاسباتی مشابه با مقاله‌ی لی و راجرز [۳۱] با روش تفاضل محدود[35] انجام داده بودند که در مقاله‌ای در خصوص رابطه‌ی داخلیِ مدول خزش[36] تک محوری و مدول استراحت[37] آن را ارائه کرده بودند. در هیچکدام از این دو مقاله از روش اجزای محدود استفاده نشده بود. اهمیت این دو مقاله در این تحقیق آن است که، روش تفاضل محدودی که آن ها استفاده کرده اند در برخی آنالیزهای اجزای محدود اولیه نیز بکار گرفته شده است. اگرچه این دو مقاله راه را برای حل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک آماده کردند اما از نقص‌های شدیدی رنج می‌بردند که می‌بایست به این ضعف ها غلبه می‌شد. آن‌ها شامل روابط بازگشتی[38] نبودند و بنابراین به منظور یافتن یک جواب در مرحله‌ی زمانی فعلی می‌بایست نتایج حاصل از تمامی مراحل زمانی قبلی در حافظه نگهداری می‌شد. این الزام، این روش را برای حل مسائل با تعداد درجات آزادی کم محدود می‌کرد و بنابراین جواب‌ها تنها برای بازه زمانی کوتاه بطور عملی قابل استفاده بود.

اولین کُد اجزای محدود برای حل مسائل ویسکوالاستیک توسط کینگ [۳۳] نوشته شد. این برنامه قابل استفاده برای مسائل تنش صفحه ای و کرنش صفحه‌ای بود. در فرمولاسیون این برنامه، معادلات متشکله انتگرالی بصورت تابعی از مدول خزش در نظر گرفته شده بودند. کینگ [۳۳] فرض کرد که ماده ویسکوالاستیک یک پاسخ الاستیک اولیه از خود نشان می‌دهد و سپس یک کرنش خزشی اتفاق می‌افتد

[35] Finite Difference Method (FDM)

[36] Creep compliance

[37] Relaxation modulus

[38] Recursive

که این کرنش خزشی به میزان تنش و زمان بستگی دارد. این بدین مفهوم است که مدول خزش می‌تواند به دو بخش، شامل بخش الاستیک و بخش خزش تقسیم شود. سه حالت تحلیلی مختلف برای مدول خزش تک محوری توسط کینگ [۳۳] بررسی شده بود.

روندی که کینگ برای تحلیل اجزای محدود استفاده کرده است به صورت زیر است:

فرض می‌شود که سازه در طول یک بازه زمانی Δt در محل جابجا شده‌ی خود باقی می‌ماند. همینطور فرض می‌شود که تنش ها در هر المان در طول بازه زمانی Δt بر طبق تابع خزش تعیین شده تغییر می‌کنند. این تغییرات تنش سپس به بارهای خارجی ساختگی برای بازه زمانی بعدی تبدیل می‌شوند. اگر بارگذاری خارجی خودش وابسته به زمان باشد، تغییرات ایجاد شده در بارها که در طول بازه زمانی Δt اتفاق می‌افتد، بایستی به این بارهای خارجی ساختگی اضافه شوند. سپس سیستم در زمان $t+\Delta t$ حل می‌شود و جابجایی ها و کرنش ها در گام زمانی بعدی بدست می‌آید. سپس نمو تنش محاسبه می‌شود و به مقدار تنش در ابتدای بازه زمانی اضافه می‌شود. این روند برای Δt بعدی تکرار می‌شود.

تایلور و چانگ [۳۴] یک روند اجزای محدود به منظور حل مسائل متقارن محوری در مواد ایزوتروپیک ایجاد کردند. آن‌ها معادلات متشکله را به فرم انتگرالی و بصورت تابعی از زمان کاهش یافته بیان کردند. هسته در این معادلات مدول استراحت بود. سپس از روش کار مجازی برای بدست آوردن یک سری معادلات انتگرالی به شکل زیر استفاده کردند. با حل این معادلات انتگرالی پاسخ جسم حاصل می‌شد.

$$\int_{-\infty}^{\tau} K_{mn}\left(\tau-\tau'\right)\frac{\partial u_n}{\partial \tau'}\,d\tau' = R_m\left(\tau\right) \qquad (۵-۲)$$

به منظور حل این مجموعه از معادلات یک روند انتگرال گیری مرحله‌ای پیش رونده استفاده می‌شد. روند حل، شامل ایجاد و حل یک مجموعه معادلات سختی جدید برای هر گامِ زمانی بود. پاسخ ها برای تمامی گام‌های زمانی ذخیره سازی می‌شدند و به منظور ایجاد بردارهای نیروی جدید که شامل جمع همگی آن‌ها تا مبدأ زمانی است، استفاده می‌شدند. بنابراین این روش برای حوزه زمانی بزرگ و تعداد زیاد درجات آزادی نیازمند مقدار زیادی حافظه بود.

چانگ [۳۵] روش خود را برای حل مسائل دو بعدی نیز تعمیم داد. در این کار چانگ دو شرط را مورد بحث قرار داد که تحت این شرایط می‌توان از الزام نگهداری کلیه‌ی پاسخ‌های پیشین صرف نظر کرد.

تایلور، پیستِر و گودریو [۳۶] روش ارائه شده در دو منبع قبلی را تکمیل کردند. در این مقاله، نویسندگان یک رابطه بازگشتی توانمند تهیه کردند که با استفاده از آن حل مسائل بزرگ ممکن می‌شد.

زینکویچ و واتسون [۳۷] یک کُد اجزای محدود برای حل مسائل ایزوتروپیک ویسکوالاستیک خطی دو بعدی ایجاد کردند. در این کُد، اثر گرما به همراه اثر طول عمر ماده در نظر گرفته شده بود. به عبارت دیگر ماده پیرشونده در نظر گرفته شده بود. تئوری بر حسب مدول خزش تهیه شده بود. آن ها نیز مانند کینگ در ابتدا مدول خزش را به دو بخش تقسیم کردند که شامل قسمت الاستیک و قسمت خزش بود. بخش خزش سرانجام بر حسب مدل کلوین بیان می‌شد. پاسخ مسئله با یک روش گام به گام با استفاده از بازه‌های زمانی کوچک بدست می‌آمد. فرق روش پیشنهادی آن‌ها با روش کینگ این بود که آن‌ها در هر گام زمانی تنش را ثابت در نظر گرفته بودند، در حالی که کینگ مقدار کرنش ها را دربازه‌های زمانی ثابت در نظر گرفته بود. سپس تغییرات کرنش خزشی که در طول یک بازه‌ی زمانی اتفاق می‌افتند محاسبه می‌شدند. این تغییرات یک کرنش ویژه یا همان کرنش اولیه در نظر گرفته می‌شوند که بایستی در انتهای بازه زمانی در پاسخ الاستیک اجزای محدود استفاده شوند. این فرآیند تکرار می‌شود تا یک کرنش ویژه‌ی جدید برای استفاده در گام زمانی بعدی حاصل شود. اگر بارگذاری درطول زمان ثابت نباشد، آن نیز بایستی در محاسبات لحاظ شود. شایان ذکر است که این فرآیند اساساً یک روش کرنش اولیه است، در حالی که روند استفاده شده توسط کینگ را می‌توان یک روش تنش اولیه نامید.

راشد و راکنهایزر [۳۸]، یک برنامه کامپیوتری اجزای محدود برای تحلیل مخازن تحت فشار بتنی پیش تنیده ایجاد کردند. در این کار، تنها از یک معادله‌ی متشکله انتگرالی که بر حسب مدول استراحت بود استفاده شده بود. فرمولاسیون اجزای محدود یک سری معادلات انتگرالی وُلتِرای خطی درگیر بصورت رابطه‌ی (۲-۶۴) ایجاد می‌کرد که تعداد آن‌ها برابر تعداد درجات آزادی مجهول مسئله بود. این مجموعه

معادلات از طریق روش تفاضل محدودی که پیش‌تر توسط لی و راجرز بکار گرفته شده بود، حل می‌شدند.

اگرچه زاک [۳۹] از روش تفاضل محدود برای حل معادله‌ی حاکم بر مسئله‌ی ویسکوالاستیک خود، استفاده کرده است اما لازم است در اینجا به مقاله‌ی او نیز اشاره شود. او نیز همانند لی و راجرز [۳۱] از یک روش انتگرال‌گیری گام به گام در طول زمان استفاده کرد. اما کار او با روش لی و راجرز یک تفاوت اساسی داشت که مشکل حجم بالای حافظه‌ی مورد نیاز را کم می‌کرد. در روش زاک تنها یک سری از کمیت‌ها از بازه زمانی قبلی، نیاز بود که نگهداری شوند چرا که از یک رابطه‌ی بازگشتی استفاده می‌شد. کلید موفقیت این روش، استفاده از سری دیریکله-پرونی[39] برای بیان هسته[40]ی معادله‌ی انتگرال وُلتِرا بود. در این مقاله از مدل کلوین استفاده شده بود.

در برنامه‌ای که وایت [۴۰] ایجاد کرد، رابطه‌ی بازگشتی زاک [۳۹] به عنوان یک انتخاب در برنامه اجزای محدود قرار داده شده بود. اگر این حالت توسط کاربر انتخاب نمی‌شد، انتگرال گیری زمانی با روش لی و راجرز [۳۱] پیش می‌رفت.

زینکویچ و همکاران [۴۱] یک کُد جامع اجزای محدود دو بُعدی ایجاد کردند که قادر بود تحلیل تنش مسائل شامل مواد ویسکوالاستیک خطی ایزوتروپیک با خصوصیت دمای ثابت یا به همراه متغیر دما را انجام دهد. معادلات متشکله با فرم دیفرانسیلی بیان می‌شدند و از مدل کلوین استفاده شده بود. استفاده از مدل کلوین سبب می‌شد که نویسندگان بتوانند بر مشکل حافظه‌ی زیاد مورد نیاز، غلبه کنند. در این کار از یک روش کرنش اولیه برای تخمین تفاضل محدود استفاده شده بود.

گِرینباون و رابین اِشتاین [۴۲] نیز یک برنامه‌ی کامپیوتری بر اساس استفاده از معادلات متشکله دیفرانسیلی و روش کرنش اولیه ایجاد کردند.

---

[39] Dirichlet-Prony series

[40] Kernel

مقاله‌ای که توسط وِبر [۴۳] ارائه شد یک خصوصیت ویژه داشت و آن عبارت بود از اینکه برنامه‌ی اجزای محدودی تهیه کرد که شامل انتگرال گیری مستقیم گام به گام در طول زمان نبود. بطور جایگزین، او فرمول بندی اجزاء محدود را با اصل تطابق ویسکوالاستیک استاندارد ترکیب کرد تا پاسخ انتگرال وُلتِرا نسبت به زمان را بدست بیاورد. کلید این روش استفاده از ساده ترین المان‌ها، به عنوان مثال المان مثلثی با کرنش ثابت، بود. در یک کد اجزای محدود که در آن از المان‌های ساده استفاده شده است، ماتریس سختی المان و بردارهای نیرو می‌توانند به فرم بسته نوشته شوند. بنابراین انتگرال گیری نسبت به مکان بصورت تحلیلی انجام می‌شد. با تبدیل لاپلاس گیری از آن‌ها و قرار دادن تبدیل کارسون[۴۱] $E(t)$ و $\upsilon(t)$ به جای E و υ یک مجموعه معادلات برای تبدیل لاپلاس پاسخ ویسکوالاستیک حاصل می‌شد. با حل کردن این مجموعه معادلات و معکوس لاپلاس گرفتن، جابجایی های ویسکوالاستیک در حوزه‌ی زمان محاسبه می‌شد. روش پیشنهادی وِبر، روشی زیرکانه ولی دارای محدودیت است. این روش به مسائل کرنش مسطح که شامل محیط ویسکوالاستیک خطی هستند و رفتار تنش – کرنش با مدل ماکسول بیان می‌شود، محدود می‌شود.

لینچ [۴۴] یک روش اجزای محدود برای تحلیل مسائل ویسکوالاستیک خطی حالت پایدار ایجاد کرد. اولین قدم در ایجاد این روش، تبدیل کردن معادلات متشکله‌ای که به فُرم انتگرالی بر حسب مدول استراحت بودند به فُرم عددی بود. برای اینکار از روش تفاضل محدود استفاده می‌شد. سپس فرآیند اجزای محدود ادامه داده می‌شد که منجر به یک سری معادلات کلی به صورت $K\tau = R$ می‌شد. این معادلات توسط روش تکرار گاوس- سایدل[۴۲] حل می‌شدند.

با نگاهی کلی به مقالات ذکر شده تا اینجا در می‌یابیم، اول آنکه تنها مقالات زینکویچ، واتسون و کینگ [۴۱] و گِرینباون و رابین اِشتاین [۴۲] از فرم دیفرانسیلی معادلات متشکله استفاده کرده‌اند. دوم آنکه

[41] Carson transform

[42] Gauss-Seidel method

از میان مقالاتی که از معادلات متشکله با فرم انتگرال های موروثی استفاده کرده‌اند تنها در مقالات زاک [۳۹] و کینگ [۳۳] از مدول خزش (در مقابل مدول استراحت) به عنوان هسته استفاده شده است.

سوم آنکه در مقالات تایلور و چانگ [۳۴] و همینطور راشد و راکنهایزر [۳۸] و گِرینباون و رابین اِشتاین [۴۲] از روابط بازگشتی استفاده نشده است، بنابراین از روش‌های پیشنهادی آن‌ها تنها می‌توان در حل مسائل کوچک استفاده کرد چرا که این روش‌ها به حجم زیادی حافظه نیاز دارند. سایر مقالات باقی مانده که به آن‌ها اشاره شد یا از روابط بازگشتی استفاده کرده‌اند یا استفاده از روابط بازگشتی را مورد بحث قرار داده‌اند.

چهارم آنکه ایده‌ی استفاده از سِری دیریکله- پرونی به عنوان هسته، استفاده از مدل کلوین تعمیم یافته و یا مدل ماکسول تعمیم یافته، به مقالات زاک [۳۹] و تایلور، پیستِر و گودریو [۳۶] نسبت می‌دهند. این در حالی است که مقالات کینگ [۳۳] و چانگ [۳۵] و همینطور زینکویچ و واتسون [۳۷] پیش از این دو مقاله به چاپ رسیده اند و در آن ها از سِری دیریکله- پرونی و همین طور روابط بازگشتی استفاده شده است و یا توضیح داده شده است که چگونه از آن‌ها استفاده شود.

همان طور که گفته شد زینکویچ، واتسون و کینگ [۴۱] و گِرینباون و رابین اِشتاین [۴۲] از روش کرنش اولیه برای سازگار کردن روش اجزاء محدود برای حل مسائل ویسکوالاستیک استفاده کرده‌اند. این روش ویژگی بسیار جذابی داشت که آن عبارت بود از اینکه، ماتریس سختی مستقل از زمان بود، پس نیاز نبود در هر گام زمانی، ماتریس سختی دوباره باز تولید شود، ولی این روش به اندازه‌ی بازه‌ی زمانی بسیار حساس بود. این حساسیت بطور مستقیم از این فرض حاصل می‌شد که اساساً تنش در بازه‌ی زمانی Δt ثابت است. به منظور سازگاری با این فرض، بازه‌های زمانی خیلی کوچک شاید نیاز باشد.

سیر و تِتِر [۴۵]، کیم و کایلِمِیر [۴۶] و همینطور کریشناسوامی و همکاران [۴۷، ۴۸] اصلاحاتی در روش کرنش اولیه پایه ارائه کردند که در آن از یک سختی متغیر استفاده می‌شد. این روش‌ها بسیار پایدارتر بودند اما ماتریس سختی با زمان تغییر می‌کرد.

روش استفاده شده توسط لینچ [۴۴] در تحلیل مسائل ویسکوالاستیک حالت پایدار توسط باتارا، لِوینسون و بِتز [۴۹] و بِتز [۵۰] و همینطور پوروشواوتامان و همکاران [۵۱] ادامه پیدا کرد.

سِریناتا و لوئیس [۵۲، ۵۳] یک کُد اجزای محدود دو بعدی برای آنالیز تِرموویسکوالاستیک ایجاد کردند که قادر بود تراکم ناپذیری ماده را نیز در نظر بگیرد. این برنامه برای مواد ایزوتروپیک همگن ویسکوالاستیک خطی نوشته شده بود. معادلات متشکله به شکل انتگرال‌های موروثی که برحسب مدول استراحت بودند بیان شده بود. در این مقاله انتگرال گیری عددی نسبت به زمان با استفاده از روش تفاضل محدود ذوزنقه‌ای، که توسط زاک [۳۹] ارائه شده بود، انجام می‌شد.

۲-۴- فرمولاسیون پیشنهادی زوکر و همکاران [۱۰، ۱۱]

در این رساله به منظور تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیسیته خطی از فرمولاسیون پیشنهادی زوکر و همکاران [۱۰، ۱۱] استفاده می‌شود. در این بخش، این فرمولاسیون بطور کامل توضیح داده می‌شود.

در حقیقت، در این قسمت یک مسئله‌ی مقادیر اولیه و مرزی مکانیک محیط پیوسته با استفاده از روش اجزای محدود فرمول بندی می‌شود. این مسئله دارای ۱۵ مجهول است که شامل ۳ مولفه‌ی جابجایی u_i ، ۶ مولفه‌ی تنش σ_{ij} و ۶ مولفه‌ی کرنش ε_{ij} است و همینطور شامل ۱۵ معادله است که در زیر بیان می‌شود.

معادلات تعادل:

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i = 0 \qquad (۲-۶)$$

معادلات کرنش-جابجایی:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (۲-۷)$$

رابطه‌ی تنش-کرنش (معادله متشکله[43]) در مصالح ویسکوالاستیک خطی:

---
[43] Constitutive equation

$$\sigma_{ij}\left(\tau\right)=\int_0^{\tau} C_{ijkl}\left(\tau-\tau'\right)\frac{\partial \varepsilon_{kl}\left(\tau'\right)}{\partial \tau'}d\tau' \qquad (۸-۲)$$

در روابط بالا، $\sigma_{ij}\left(\tau\right)$ و $\varepsilon_{kl}\left(\tau\right)$ تانسورهای تنش و کرنش در لحظه‌ی τ هستند. ρ جرم واحد حجم، f_i مولفه های نیروی حجمی، u_i مولفه های بردار جابجایی، C_{ijkl} تانسور مرتبه چهارم مدول استراحت است که تنش را به کرنش مرتبط می‌سازد. معادله‌ی متشکله‌ی انتگرالی رابطه‌ی (۲-۸) را می‌توان به شکل نموی به صورت رابطه‌ی (۲-۹) بیان کرد.

$$\Delta\sigma_{ij}=\bar{C}_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl}+\Delta\sigma_{ij}^{R} \qquad (۹-۲)$$

در رابطه‌ی (۲-۹)، پارامترهای $\bar{C}_{ijkl}$ و $\Delta\varepsilon_{kl}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{C}_{ijkl}=C_{ijkl_\infty}+\frac{1}{\Delta\tau}\sum_{m=1}^{M}\eta_{ijkl_m}\left(1-e^{\frac{-\Delta\tau}{\rho_{ijkl_m}}}\right) \qquad (۱۰-۲)$$

$$\Delta\varepsilon_{kl}=R_{\varepsilon}\,\Delta\tau \qquad (۱۱-۲)$$

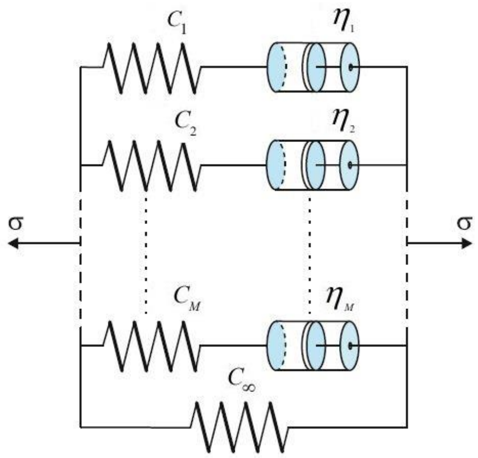
در رابطه‌ی (۲-۱۰)، ρ_{ijkl_m} زمان استراحت المان m -ام ماکسول در مدل ویچرت است که با رابطه‌ی (۲-۱۲) تعریف می‌شود:

$$\rho_{ijkl_m}=\frac{\eta_{ijkl_m}}{C_{ijkl_m}} \qquad (۱۲-۲)$$

شایان ذکر است که از رابطه‌ی (۲-۱۰) به بعد در این فصل، اندیس‌های k,j,i و l از قرارداد جمع اندیسیِ انیشتین[۴۴] پیروی نمی‌کنند. در معادلات (۲-۱۰) تا (۲-۱۲)، $\Delta\tau$ گام زمانی، C_{ijkl_m} ثابت فنر، η_{ijkl_m} ضریب میرایی و همانطور که پیش‌تر اشاره شد، ρ_{ijkl_m} زمان استراحت، همگی در المان m -ام ماکسول و C_{ijkl_∞} ثابت فنر مجزا در مدل ویچرت هستند. M تعداد المان‌های موازی ماکسول است که در مدل ویچرت وجود دارد. مدل ویچرت در شکل ۲-۲ نمایش داده شده است. شایان ذکر است که

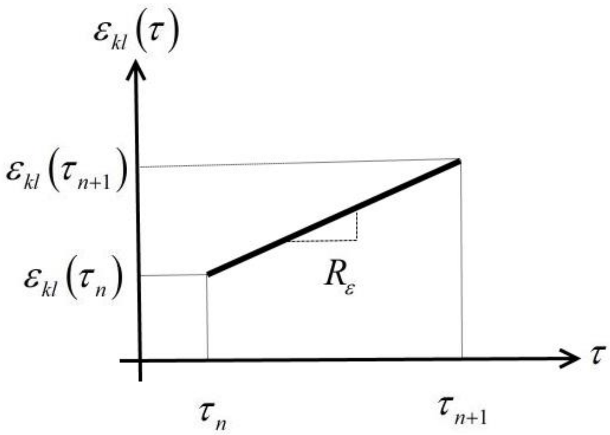
[44] Einstein's summation convention

مدل ویچرت با تنها یک المانِ ماکسول $(M=1)$ به مدل جامد استاندارد[45] تبدیل می‌شود که ساده‌ترین مدل موجود برای مدل سازی رفتار جامدات ویسکوالاستیک است [۵۶].



شکل ۲-۲: مدل ویچرت [۴]

فرض می‌شود که خط زمانی به بازه‌های گسسته تقسیم شده است بطوری که مقدار تنش در ابتدای بازه یعنی در لحظه‌ی τ_n مشخص است. پارامتر R_ε در رابطه‌ی (۲-۱۱) نرخ تغییرات کرنش در بازه‌ی زمانی $\Delta\tau=\tau_{n+1}-\tau_n$ است که ثابت فرض می‌شود و از گام زمانی قبلی بدست می‌آید.



شکل ۲-۳: نرخ تغییرات کرنش در بازه زمانی $\Delta\tau$ [۱۱،۱۰]

در رابطه‌ی (۲-۹)، $\Delta\sigma_{ij}^R$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta\sigma_{ij}^R=-\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}Q_{ijkl} \qquad (۱۳-۲)$$

---

45 Standard Linear Solid (SLS) model

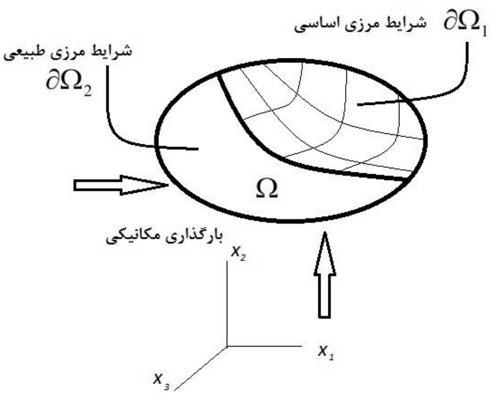
در رابطه‌ی (۲-۱۳):

$$Q_{ijkl} = \sum_{m=1}^{M} \left(1 - e^{-\Delta\tau / \rho_{ijkl_m}}\right) P_{ijkl_m}\left(\tau_n\right) \qquad (۱۴-۲)$$

$$P_{ijkl_m}\left(\tau_n\right) = e^{-\Delta\tau / \rho_{ijkl_m}} P_{ijkl_m}\left(\tau_n - \Delta\tau\right) + \eta_{ijkl_m} R_\varepsilon \left(1 - e^{-\Delta\tau / \rho_{ijkl_m}}\right) \qquad (۱۵-۲)$$

این بیان نموی معادله‌ی متشکله، برای استفاده در کُد اجزای محدود کاملاً مناسب است. با اعمال روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار[۴۶] بر معادله‌ی تعادل به عنوان معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله و بهره گرفتن از بیان نموی معادله‌ی متشکله یعنی رابطه‌ی (۲-۹)، فرمولاسیون اجزای محدود برای یک المان حاصل می‌شود.

هندسه‌ی این مسئله‌ی مکانیک محیط پیوسته به صورت یک دامنه‌ی سه بعدی Ω که با سطح $\partial\Omega$ محدود شده است و تحت بارگذاری مکانیکی قرار گرفته است در نظر گرفته می‌شود. این هندسه در شکل ۲-۴ نمایش داده شده است.



شکل ۲-۴: هندسه کلی مسئله‌ی مقادیر اولیه/مرزی [۱۱]

شرایط مرزی اساسی برای این مسئله‌ی مکانیک محیط پیوسته به صورت زیر می‌باشد:

$$u_i = \hat{u}_i \quad on \quad \partial\Omega_1 \qquad (۱۶-۲)$$

و شرایط مرزی طبیعی برای این مسئله به صورت (۲-۱۷) تعریف می‌شود:

$$T_i = \sigma_{ji}\, n_j = \hat{T}_i \quad on \quad \partial\Omega_2 \qquad (۱۷-۲)$$

46 Weighted residual method

بر روی مرز جسم شرایط زیر برقرار است:

$$\begin{cases}\partial\Omega_1 \bigcup \partial\Omega_2 = \partial\Omega \\ \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2 = \varnothing\end{cases} \tag{۱۸-۲}$$

شرایط اولیه برای این مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases}u_i(\tau) = 0, & \tau = 0 \\ \sigma_{ij}(\tau) = 0, & \tau = 0\end{cases} \tag{۱۹-۲}$$

داده‌های مسئله نیز شامل شرایط هندسی، نیروهای حجمی f_i ، نیروهای سطحی $\hat{T}_i$ و شرایط مرزی اساسی $\hat{u}_i$ هستند.

در حقیقت می‌توان گفت که قدرت روش اجزای محدود برگرفته از این موضوع است که، می‌توان یک معادله‌ی دیفرانسیل حاکم که برخی پدیده‌های فیزیکی را شبیه‌سازی می‌کند به یک معادله انتگرالی تبدیل کرد و سپس آن را به صورت تکه‌ای، المان به المان حل کرد. بنابراین با اعمال روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار، معادله‌ی تعادل حاکم به فُرم انتگرالی تبدیل می‌شود:

$$\int_{\Omega_e} \left(\sigma_{ji,j} + \rho f_i\right) \delta u_i \, dV = 0 \tag{۲۰-۲}$$

در رابطه‌ی (۲-۲۰)، Ω_e یک زیر دامنه از دامنه‌ی کُل Ω است و δu_i تابع وزن یا همان تغییر مکان مجازی است و $dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$ می‌باشد. این معادله در حقیقت بیان تغییراتی معادله دیفرانسیل حاکم است.

$$\int_{\Omega_e} \left(\sigma_{ji,j}\, \delta u_i + \rho f_i\, \delta u_i\right) dV = 0 \tag{۲۱-۲}$$

با اعمال انتگرال جزء به جزء[۴۷] بر رابطه‌ی (۲-۲۱)، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\int_{\partial\Omega_e} \sigma_{ji}\, \delta u_i\, n_j \, dS - \int_{\Omega_e} \sigma_{ji}\, \delta u_{i,j} \, dV + \int_{\Omega_e} \rho f_i\, \delta u_i \, dV = 0 \tag{۲۲-۲}$$

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ji}\, \delta u_{i,j} \, dV = \int_{\Omega_e} \rho f_i\, \delta u_i \, dV + \int_{\partial\Omega_e} \sigma_{ji} n_j\, \delta u_i \, dS \tag{۲۳-۲}$$

[47] Integration by parts

در رابطه‌های (۲-۲۲) و (۲-۲۳)، dS بیانگر سطحی است که تحت تِرَکشِن[۴۸] قرار دارد و ترکشن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \quad (۲-۲۴)$$

با اعمال رابطه‌ی (۲-۲۴) در معادله‌ی (۲-۲۳)، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ji}\, \delta u_{i,j}\, dV = \int_{\Omega_e} \rho f_i\, \delta u_i\, dV + \int_{\partial\Omega_e} T_i\, \delta u_i\, dS \quad (۲-۲۵)$$

عبارت زیر انتگرال سمت چپ معادله‌ی (۲-۲۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}\, \delta u_{i,j} &= \sigma_{ji} \left[\frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}\right) + \frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j} - \delta u_{j,i}\right) \right] \\ \sigma_{ji}\, \delta u_{i,j} &= \sigma_{ji} \left[\delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij} \right] = \sigma_{ji}\, \delta\varepsilon_{ij} + \sigma_{ji}\, \delta\omega_{ij} \end{aligned} \quad (۲-۲۶)$$

در رابطه‌ی (۲-۲۶)، $\delta\omega_{ij}$ تانسور دوران خطی[۴۹] است که یک تانسور پادمتقارن است. از آنجایی که حاصل ضرب یک تانسور متقارن[۵۰] با یک تانسور پادمتقارن[۵۱] است، پس حاصل این جمله $\sigma_{ji}\, \delta\omega_{ij}$ صفر می‌باشد. بنابراین رابطه‌ی (۲-۲۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ji}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV = \int_{\Omega_e} \rho f_i\, \delta u_i\, dV + \int_{\partial\Omega_e} T_i\, \delta u_i\, dS \quad (۲-۲۷)$$

با در نظر گرفتن مشارکت تمامی دامنه‌ها Ω_e ، رابطه‌ی (۲-۲۷) به صورت (۲-۲۸) در می‌آید.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ji}\, \delta\varepsilon_{ij}\, dV = \int_{\Omega} \rho f_i\, \delta u_i\, dV + \int_{\partial\Omega_2} T_i\, \delta u_i\, dS \quad (۲-۲۸)$$

رابطه‌ی (۲-۲۸)، همان اصل کار مجازی است. این اصل توسط بسیاری از مهندسان به عنوان نقطه‌ی آغازی برای بدست آوردن فرمول بندی اجزای محدود در نظر گرفته شده است.

تا این مرحله نقش زمان در فرمول بندی در نظر گرفته نشده بود. در این مرحله زمان به فرمولاسیون اضافه می‌شود. برای اینکار خط زمانی به بازه‌های مجزای گسسته تقسیم می‌شود بطوری که گام زمانی n -ام از رابطه‌ی (۲-۲۹) بدست می‌آید.

---

[48] Traction

[49] Linear rotation tensor

[50] Symmetry

[51] Anti-symmetry

$$\Delta\tau_n = \tau_{n+1} - \tau_n \qquad (۲-۲۹)$$

با فرض مشخص بودن مقدار تنش در لحظه‌ی τ_n ، هدف یافتن مقدار تنش در لحظه‌ی τ_{n+1} است.

اصل کار مجازیِ رابطه‌ی (۲-۲۸) در لحظه‌ی τ_{n+1} به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_\Omega \sigma_{ji}^{n+1}\,\delta\varepsilon_{ij}^{n+1}\,dV = \int_\Omega \rho\, f_i^{\,n+1}\,\delta u_i^{n+1}\,dV + \int_{\partial\Omega_2} T_i^{\,n+1}\,\delta u_i^{n+1}\,dS \qquad (۲-۳۰)$$

در رابطه‌ی (۲-۳۰)، $n+1$ نمایانگرِ رابطه در لحظه‌ی τ_{n+1} است.

همانطور که رابطه‌ی تنش-کرنش یا همان معادله‌ی متشکله با استفاده از رابطه‌ی (۲-۹) به صورت نموی بیان شد، بایستی رابطه‌ی انتگرالی (۲-۳۰) نیز در طول زمان به صورت نموی بیان شود. روابط زیر برای این منظور تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&\Delta\sigma_{ji} = \sigma_{ji}^{n+1} - \sigma_{ji}^{n} \to \sigma_{ji}^{n+1} = \sigma_{ji}^{n} + \Delta\sigma_{ji}\\
&\Delta\,\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}^{n+1} - \delta\varepsilon_{ij}^{n} \to \delta\varepsilon_{ij}^{n+1} = \delta\varepsilon_{ij}^{n} + \Delta\delta\varepsilon_{ij}\\
&\Delta u_i = u_i^{n+1} - u_i^{n} \to u_i^{n+1} = u_i^{n} + \Delta u_i\\
&\Delta\,\delta u_i = \delta u_i^{n+1} - \delta u_i^{n} \to \delta u_i^{n+1} = \delta u_i^{n} + \Delta\,\delta u_i
\end{aligned} \qquad (۲-۳۱)$$

از آن جایی که تغییر مکان در لحظه‌ی τ_n یعنی u_i^n مشخص است، بنابراین کرنش مجازی $\delta\varepsilon_{ij}^n$ و تغییر مکان مجازی δu_i^n در لحظه‌ی τ_n برابر صفر است. با استفاده از روابط (۲-۳۱)، رابطه‌ی (۲-۳۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\sigma_{ji}^{n} + \Delta\sigma_{ji}\right)\Delta\delta\varepsilon_{ij}\,dV = \int_\Omega \rho\, f_i^{\,n+1}\,\Delta\delta u_i\,dV + \int_{\partial\Omega_2} T_i^{\,n+1}\,\Delta\delta u_i\,dS\\
&\int_\Omega \Delta\sigma_{ji}\,\Delta\delta\varepsilon_{ij}\,dV = \int_\Omega \rho\, f_i^{\,n+1}\Delta\delta u_i\,dV + \int_{\partial\Omega_2} T_i^{\,n+1}\Delta\delta u_i\,dS - \int_\Omega \sigma_{ji}^{n}\,\Delta\delta\varepsilon_{ij}\,dV
\end{aligned} \qquad (۲-۳۲)$$

با قرار دادن بیان نموی معادلات متشکله یعنی رابطه‌ی (۲-۹) در رابطه‌ی (۲-۳۲)، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[\bar{C}_{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl} + \Delta\sigma_{ij}^{R}\right]\Delta\delta\varepsilon_{ij}\,dV = &\int_\Omega \rho\, f_i\Delta\delta u_i\,dV\\
&+ \int_{\partial\Omega_2} T_i^{\,n+1}\Delta\delta u_i\,dS - \int_\Omega \sigma_{ji}^{n}\Delta\delta\varepsilon_{ij}\,dV
\end{aligned} \qquad (۲-۳۳)$$

در رابطه‌ی (۲-۳۳)، $\Delta\varepsilon_{kl}$ تابعی از تغییر مکان حقیقی u_i است در حالی که $\Delta\delta\varepsilon_{ij}$ تابعی از تغییر مکان مجازی δu_i است. به عبارت دیگر:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)$$
$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}\right) \tag{۳۴-۲}$$

بنابراین رابطه‌ی (۲-۳۳) به صورت معادله‌ی (۲-۳۵) بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \bar{C}_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl} \Delta\delta\varepsilon_{ij}\, dV &= \int_{\Omega} \rho f_i^{n+1} \Delta\delta u_i\, dV + \int_{\partial\Omega_2} T_i^{n+1} \Delta\delta u_i\, dS \\ &- \int_{\Omega} \sigma_{ji}^{n} \Delta\delta\varepsilon_{ij}\, dV - \int_{\Omega} \Delta\sigma_{ij}^{R} \Delta\delta\varepsilon_{ij}\, dV\end{aligned} \tag{۳۵-۲}$$

به منظور یافتن فرمول بندی اجزای محدود، بایستی رابطه‌ی (۲-۳۵) به شکل ماتریسی بیان شود. برای این کار ابتدا لازم است ماتریس‌های زیر تعریف شوند.

ماتریس تغییرات تنش در طول بازه زمانی $\Delta\tau_n$ که با رابطه‌ی (۲-۳۶) تعریف می‌شود:

$$[\Delta\sigma] = \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\sigma_3 \\ \Delta\sigma_4 \\ \Delta\sigma_5 \\ \Delta\sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{xx} \\ \Delta\sigma_{yy} \\ \Delta\sigma_{zz} \\ \Delta\sigma_{yz} \\ \Delta\sigma_{xz} \\ \Delta\sigma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۳۶-۲}$$

ماتریس تغییرات کرنش در طول بازه‌ی زمانی $\Delta\tau_n$ که از طریق رابطه‌ی (۲-۳۷) بیان می‌شود:

$$[\Delta\varepsilon] = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\varepsilon_3 \\ \Delta\varepsilon_4 \\ \Delta\varepsilon_5 \\ \Delta\varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{xx} \\ \Delta\varepsilon_{yy} \\ \Delta\varepsilon_{zz} \\ \Delta\varepsilon_{yz} \\ \Delta\varepsilon_{xz} \\ \Delta\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{۳۷-۲}$$

ماتریس تغییرات جابجایی حقیقی در طول بازه‌ی زمانی $\Delta\tau_n$ که به وسیله‌ی رابطه‌ی (۲-۳۸) تعریف می‌شود:

$$[\Delta u] = \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{Bmatrix} \tag{۳۸-۲}$$

ماتریس تغییرات جابجایی مجازی در بازه‌ی زمانی $\Delta\tau_n$ که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\Delta\delta u]=\begin{Bmatrix}\Delta\delta u_1\\ \Delta\delta u_2\\ \Delta\delta u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Delta\delta u_x\\ \Delta\delta u_y\\ \Delta\delta u_z\end{Bmatrix} \tag{۳۹-۲}$$

ماتریس اُپراتور رابط کرنش ـ میدان تغییر مکان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[D]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\end{bmatrix} \tag{۴۰-۲}$$

همانطور که پیش‌تر بیان شد مدول استراحت از رابطه‌ی (۲-۱۰) بدست می‌آید.

شکل ماتریسی مدول استراحت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\bar{C}]=\begin{bmatrix}\bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & \bar{C}_{14} & \bar{C}_{15} & \bar{C}_{16}\\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{24} & \bar{C}_{25} & \bar{C}_{26}\\ \bar{C}_{31} & \bar{C}_{32} & \bar{C}_{33} & \bar{C}_{34} & \bar{C}_{35} & \bar{C}_{36}\\ \bar{C}_{41} & \bar{C}_{42} & \bar{C}_{43} & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{46}\\ \bar{C}_{51} & \bar{C}_{52} & \bar{C}_{53} & \bar{C}_{54} & \bar{C}_{55} & \bar{C}_{56}\\ \bar{C}_{61} & \bar{C}_{62} & \bar{C}_{63} & \bar{C}_{64} & \bar{C}_{65} & \bar{C}_{66}\end{bmatrix} \tag{۴۱-۲}$$

شکل ماتریسی نیروهای حجمی (در واحد جرم) در لحظه‌ی τ_{n+1} به صورت زیر است:

$$[f^{n+1}]=\begin{Bmatrix}f_1^{n+1}\\ f_2^{n+1}\\ f_3^{n+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_x^{n+1}\\ f_y^{n+1}\\ f_z^{n+1}\end{Bmatrix} \tag{۴۲-۲}$$

شکل ماتریسی نیروی سطحی در زمان τ_{n+1} به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left[T^{n+1}\right]=\begin{Bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} T_x^{n+1} \\ T_y^{n+1} \\ T_z^{n+1} \end{Bmatrix} \tag{۴۳-۲}$$

ماتریس تنش در لحظه‌ی τ_n با رابطه‌ی (۲-۴۴) بیان می‌شود:

$$\left[\sigma^n\right]=\begin{bmatrix} \sigma_1^n \\ \sigma_2^n \\ \sigma_3^n \\ \sigma_4^n \\ \sigma_5^n \\ \sigma_6^n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^n \\ \sigma_{yy}^n \\ \sigma_{zz}^n \\ \sigma_{yz}^n \\ \sigma_{xz}^n \\ \sigma_{xy}^n \end{bmatrix} \tag{۴۴-۲}$$

همانطور که قبلاً گفته شد، $\Delta\sigma_{ij}^R$ از رابطه‌ی (۲-۱۳) بدست می‌آید. بیان ماتریسی این پارامتر به صورت زیر است:

$$\left[\Delta\sigma^R\right]=\begin{bmatrix} \Delta\sigma_1^R \\ \Delta\sigma_2^R \\ \Delta\sigma_3^R \\ \Delta\sigma_4^R \\ \Delta\sigma_5^R \\ \Delta\sigma_6^R \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Delta\sigma_{xx}^R \\ \Delta\sigma_{yy}^R \\ \Delta\sigma_{zz}^R \\ \Delta\sigma_{yz}^R \\ \Delta\sigma_{xz}^R \\ \Delta\sigma_{xy}^R \end{bmatrix} \tag{۴۵-۲}$$

ماتریسِ شرایط مرزی اساسی نیز به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left[\hat{u}\right]=\begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{Bmatrix} \tag{۴۶-۲}$$

با استفاده از ماتریس‌های معرفی شده در روابط (۲-۲۶) تا (۲-۴۶)، می‌توان $\Delta\varepsilon_{kl}$ و $\Delta\delta\varepsilon_{ij}$ را به صورت ماتریسی بیان کرد:

$$\Delta\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}\left(\Delta u_{k,l}+\Delta u_{l,k}\right)\rightarrow\left[\Delta\varepsilon\right]=\left[D\right]\left[\Delta u\right] \tag{۴۷-۲}$$

$$\Delta\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Delta\delta u_{i,j} + \Delta\delta u_{j,i}\right) \rightarrow [\Delta\delta\varepsilon] = [D][\Delta\delta u] \tag{۴۸-۲}$$

با بازنویسی معادله‌ی انتگرالی (۲-۳۵) به صورت (۲-۴۹)، به راحتی می‌توان این معادله را به فُرم ماتریسی بیان نمود.

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta\delta\varepsilon_{ij}\bar{C}_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}\, dV = \int_\Omega \Delta\delta u_i \rho f_i^{n+1}\, dV + \int_{\partial\Omega_2} \Delta\delta u_i T_i^{n+1}\, dS \\ - \int_\Omega \Delta\delta\varepsilon_{ij}\sigma_{ji}^n\, dV - \int_\Omega \Delta\delta\varepsilon_{ij}\Delta\sigma_{ij}^R\, dV \end{aligned} \tag{۴۹-۲}$$

بیان ماتریسیِ رابطه‌ی انتگرالی (۲-۴۹) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left([D][\Delta\delta u]\right)^T \left[\bar{C}\right]\left([D][\Delta u]\right) dV = \int_\Omega [\Delta\delta u]^T \rho\left[f^{n+1}\right] dV \\ + \int_{\partial\Omega_2} [\Delta\delta u]^T \left[T^{n+1}\right] dS \\ - \int_\Omega \left([D][\Delta\delta u]\right)^T \left[\sigma^n\right] dV \\ - \int_\Omega \left([D][\Delta\delta u]\right)^T \left[\Delta\sigma^R\right] dV \end{aligned} \tag{۵۰-۲}$$

با تعریف توابع پایه ϕ می‌توان تغییرات جابجایی حقیقی Δu_i و تغییرات جابجایی مجازی $\Delta\delta u_i$ را بر حسب آن‌ها به صورت زیر بیان کرد:

$$\Delta u_i^N\left(x, y, z, \tau\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i\left(x, y, z, \tau\right) \tag{۵۱-۲}$$

$$\Delta\delta u_j^N\left(x, y, z, \tau\right) = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \phi_j\left(x, y, z, \tau\right) \tag{۵۲-۲}$$

در روابط (۲-۵۱) و (۲-۵۲)، ϕ توابع پایه انتخابی و γ, α ضرایب مجهول هستند. به تقریب تغییرمکان از این طریق، تخمین گالرکین گفته می‌شود. روش اجزای محدود یک روش کلی و سیستماتیک برای تعیین توابع پایه در تخمین گالرکین ارائه می‌کند. ایده اصلی آن است که توابع پایه ϕ_i می‌توانند به صورت تکه‌ای در زیر بازه‌هایی از دامنه تحت عنوان اجزای محدود تعریف شوند. سپس در هر زیر دامنه، ϕ_i می‌تواند یک تابع ساده مانند چند جمله‌ای با درجه‌ی کوچک انتخاب شود. با این روش، توابع پایه

با ترکیب کردن توابع ساده با هم تشکیل می‌شود و توابع شکل نامیده می‌شود که بر روی یک المان تعریف شده است.

بنابراین تخمین اجزای محدود برای Δu_i و $\Delta\delta u_i$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta u_{ih}^{e}\left(x,y,z,\tau\right)=\sum_{I=1}^{N_e}\Delta u_i^I\psi_I^e\left(x,y,z,\tau\right) \tag{۵۳-۲}$$

$$\Delta\delta u_{jh}^{e}\left(x,y,z,\tau\right)=\sum_{J=1}^{N_e}\Delta\delta u_j^J\psi_J^e\left(x,y,z,\tau\right) \tag{۵۴-۲}$$

در روابط (۲-۵۳) و (۲-۵۴)، حدود تغییرات j,i بین یک تا سه است و $\delta u_j^J, u_i^I$ بیانگر بردارهای تغییر مکان در گره‌های J,I هستند. N_e تعدادتوابع شکل ψ که برای تخمین تغییرات جابجایی در المان استفاده شده است، می‌باشد که با تعداد گره‌ها در المان برابر است.

با قراردادن پاسخ‌های تقریبی (۲-۵۳) و (۲-۵۴) در معادله‌ی انتگرالی (۲-۵۰)، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\left([D][\Delta\delta u_h]\right)^T\left[\bar{C}\right]\left([D][\Delta u_h]\right)dV=&\int_{\Omega}\left[\Delta\delta u_h\right]^T\rho\left[f^{n+1}\right]dV\\&+\int_{\partial\Omega_2}\left[\Delta\delta u_h\right]^T\left[T^{n+1}\right]dS\\&-\int_{\Omega}\left([D][\Delta\delta u_h]\right)^T\left[\sigma^n\right]dV\\&-\int_{\Omega}\left([D][\Delta\delta u_h]\right)^T\left[\Delta\sigma^R\right]dV\end{aligned} \tag{۵۵-۲}$$

پس از گسسته سازی دامنه‌ی تعریف مسئله به المان‌های محدود با دامنه‌ی Ω_e ، معادله‌ی انتگرالی (۲-۵۵) برای یک المان به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e}\left([D]\left[\Delta\delta u_h^e\right]\right)^T\left[\bar{C}^e\right]\left([D]\left[\Delta u_h^e\right]\right)dV=&\int_{\Omega_e}\left[\Delta\delta u_h^e\right]^T\rho\left[f^{n+1}\right]dV\\&+\int_{\partial\Omega_{2e}}\left[\Delta\delta u_h^e\right]^T\left[T^{n+1}\right]dS\\&-\int_{\Omega_e}\left([D]\left[\Delta\delta u_h^e\right]\right)^T\left[\sigma^n\right]dV\\&-\int_{\Omega_e}\left([D]\left[\Delta\delta u_h^e\right]\right)^T\left[\Delta\sigma^R\right]dV\end{aligned} \tag{۵۶-۲}$$

شکل ماتریسی تخمین‌های $\left[\Delta u_h^e\right],\left[\Delta\delta u_h^e\right]$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\left[\Delta u_h^e\right]&=\left[\psi^e\right]\left[\Delta u^e\right]\\ \left[\Delta\delta u_h^e\right]&=\left[\psi^e\right]\left[\Delta\delta u^e\right]\end{aligned} \tag{۵۷-۲}$$

که در این رابطه :

$$\left[\psi^e\right]=\begin{bmatrix}\psi_1^e & 0 & 0 & \psi_2^e & 0 & 0 & \dots & \psi_{N_e}^e & 0 & 0\\ 0 & \psi_1^e & 0 & 0 & \psi_2^e & 0 & \dots & 0 & \psi_{N_e}^e & 0\\ 0 & 0 & \psi_1^e & 0 & 0 & \psi_2^e & \dots & 0 & 0 & \psi_{N_e}^e\end{bmatrix} \tag{۵۸-۲}$$

$$\left[\Delta u^e\right]=\begin{Bmatrix}\Delta u_{x1}^e\\ \Delta u_{y1}^e\\ \Delta u_{z1}^e\\ \Delta u_{x2}^e\\ \Delta u_{y2}^e\\ \Delta u_{z2}^e\\ \vdots\end{Bmatrix}\qquad \left[\Delta\delta u^e\right]=\begin{Bmatrix}\Delta\delta u_{x1}^e\\ \Delta\delta u_{y1}^e\\ \Delta\delta u_{z1}^e\\ \Delta\delta u_{x2}^e\\ \Delta\delta u_{y2}^e\\ \Delta\delta u_{z2}^e\\ \vdots\end{Bmatrix} \tag{۵۹-۲}$$

اعضای ماتریس‌های $\left[\Delta u^e\right],\left[\Delta\delta u^e\right]$ ، مولفه‌های تغییر مکان‌های گرهی هستند.

حال ماتریس $\left[B^e\right]$ که کرنش را به تغییر مکان گرهی مرتبط می‌سازد، به صورت رابطه‌ی (۲-۶۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}[D]\left[\Delta u_h^e\right]&=[D]\left[\psi^e\right]\left[\Delta u^e\right]=\left[B^e\right]\left[\Delta u^e\right]\\ [D]\left[\Delta\delta u_h^e\right]&=[D]\left[\psi^e\right]\left[\Delta\delta u^e\right]=\left[B^e\right]\left[\Delta\delta u^e\right]\end{aligned} \tag{۶۰-۲}$$

$$[B^e]=[D][\psi^e]$$

$$[B^e]=\begin{bmatrix} \frac{\partial\psi_1^e}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial\psi_2^e}{\partial x} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial\psi_{N_e}^e}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\psi_1^e}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial\psi_2^e}{\partial y} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial\psi_{N_e}^e}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial\psi_1^e}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial\psi_2^e}{\partial z} & \cdots & 0 & 0 & \frac{\partial\psi_{N_e}^e}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial\psi_1^e}{\partial z} & \frac{\partial\psi_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial\psi_2^e}{\partial z} & \frac{\partial\psi_2^e}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial\psi_{N_e}^e}{\partial z} & \frac{\partial\psi_{N_e}^e}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_1^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial\psi_1^e}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial\psi_2^e}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial\psi_{N_e}^e}{\partial z} & 0 & \frac{\partial\psi_{N_e}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi_1^e}{\partial y} & \frac{\partial\psi_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial\psi_2^e}{\partial y} & \frac{\partial\psi_2^e}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial\psi_{N_e}^e}{\partial y} & \frac{\partial\psi_{N_e}^e}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{۶۱-۲}$$

با استفاده از روابط بالا می‌توان معادله انتگرالی (۲-۵۶) را برای یک المان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e}\left([B^e][\Delta\delta u^e]\right)^T[\bar{C}^e]\left([B^e][\Delta u^e]\right)dV &= \int_{\Omega_e}\left([\psi^e][\Delta\delta u^e]\right)^T\rho[f^{n+1}]dV \\ &+\int_{\partial\Omega_{2e}}\left([\psi^e][\Delta\delta u^e]\right)^T[T^{n+1}]dS \\ &-\int_{\Omega_e}\left([B^e][\Delta\delta u^e]\right)^T[\sigma^n]dV \\ &-\int_{\Omega_e}\left([B^e][\Delta\delta u^e]\right)^T[\Delta\delta^R]dV \\ \int_{\Omega_e}[\Delta\delta u^e]^T[B^e]^T[\bar{C}^e]\left([B^e][\Delta u^e]\right)dV &= \int_{\Omega_e}[\Delta\delta u^e]^T[\psi^e]^T\rho[f^{n+1}]dV \\ &+\int_{\partial\Omega_{2e}}[\Delta\delta u^e]^T[\psi^e]^T[T^{n+1}]dS \\ &-\int_{\Omega_e}[\Delta\delta u^e]^T[B^e]^T[\sigma^n]dV \\ &-\int_{\Omega_e}[\Delta\delta u^e]^T[B^e]^T[\Delta\sigma^R]dV \end{aligned} \tag{۶۲-۲}$$

روابط (۲-۶۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$[\Delta\delta u^e]^T\left\{\begin{matrix}\left(\int_{\Omega_e}[B^e]^T[\bar{C}^e][B^e]dV\right)[\Delta u^e]+ \\ -\int_{\Omega_e}[\psi^e]^T\rho[f^{n+1}]dV-\int_{\partial\Omega_{2e}}[\psi^e]^T[T^{n+1}]dS+ \\ +\int_{\Omega_e}[B^e]^T[\sigma^n]dV+\int_{\Omega_e}[B^e]^T[\Delta\sigma^R]dV\end{matrix}\right\}=0 \tag{۶۳-۲}$$

از آنجایی که تغییر مکان مجازی $\left[\Delta\delta u^e\right]^T$ اختیاری است پس عبارت درون براکت بایستی برابر صفر باشد.

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega_e}\left[B^e\right]^T\left[\bar{C}^e\right]\left[B^e\right]dV\right)\left[\Delta u^e\right] &= \int_{\Omega_e}\left[\psi^e\right]^T\rho\left[f^{n+1}\right]dV \\ &+\int_{\partial\Omega_{2e}}\left[\psi^e\right]^T\left[T^{n+1}\right]dS \\ &-\int_{\Omega_e}\left[B^e\right]^T\left[\sigma^n\right]dV \\ &-\int_{\Omega_e}\left[B^e\right]^T\left[\Delta\sigma^R\right]dV\end{aligned} \qquad (۶۴-۲)$$

رابطه‌ی (۲-۶۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left[K^e\right]\left[\Delta u^e\right]=\left[f_1^e\right]+\left[f_2^e\right]-\left[f_3^e\right]-\left[f_4^e\right] \qquad (۶۵-۲)$$

ماتریس‌های موجود در رابطه‌ی (۲-۶۵) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\left[K^e\right] &= \int_{\Omega_e}\left[B^e\right]^T\left[\bar{C}^e\right]\left[B^e\right]dV \\ \left[f_1^e\right] &= \int_{\Omega_e}\left[\psi^e\right]^T\rho\left[f^{n+1}\right]dV \\ \left[f_2^e\right] &= \int_{\partial\Omega_{2e}}\left[\psi^e\right]^T\left[T^{n+1}\right]dS \\ \left[f_3^e\right] &= \int_{\Omega_e}\left[B^e\right]^T\left[\sigma^n\right]dV \\ \left[f_4^e\right] &= \int_{\Omega_e}\left[B^e\right]^T\left[\Delta\sigma^R\right]dV\end{aligned} \qquad (۶۶-۲)$$

در روابط (۲-۶۵) و (۲-۶۶)، $\left[K^e\right]$ ماتریس سختی المان[۵۲] است. $\left[f_1^e\right]$ بردار بار المان ناشی از نیروهای حجمی، $\left[f_2^e\right]$ بردار بار المان ناشی از نیروهای سطحی، $\left[f_3^e\right]$ بردار بار المان ناشی از تنش‌ها در ابتدای بازه زمانی و $\left[f_4^e\right]$ بردار بار المان ناشی از تغییرات تنش در طول بازه زمانی است.

با جمع کردن مشارکت تمامی المان‌ها (اسمبلی[۵۳])، معادله‌ی مشهور (۲-۶۷) حاصل خواهد شد.

$$\left[K\right]\left\{\Delta u\right\}=\left\{F\right\} \qquad (۶۷-۲)$$

[52] Element stiffness matrix

[53] Assembly

در رابطه‌ی (۲-۶۷)، $[K]$ ماتریس سختی کلی[54]، $\{F\}$ بردار بار کلی و $\{\Delta u\}$ بردار تغییرات جابجایی در طول بازه زمانی است. ماتریس سختی کلی و بردار بار کلی از طریق اسمبلی مشارکت تمامیِ المان‌ها بدست می‌آید. معادله‌ی $[K]\{\Delta u\}=\{F\}$ یک سیستم معادلات جبری خطی است که می‌تواند توسط روش حذفی گاوس[55] حل شود [۱۰، ۱۱].

---

54 Global stiffness matrix

55 Gauss elimination

فصل سوم: توابع پایه شعاعی و فرآیند بدست آوردن توابع شکل در روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی

۳-۱- مقدمه‌ای بر توابع پایه شعاعی[56]

با بررسی تاریخچه‌ی توابع پایه شعاعی می‌توان دریافت که از این توابع ابتدا در روش‌های تقریبی برازش منحنی‌ها و سطوح[57] استفاده می‌شده است. در دهه‌های اخیر کاربرد توابع پایه شعاعی در محاسبات عددی و ریاضیات مهندسی افزایش یافته است. توابع پایه شعاعی نخستین بار در سال ۱۹۷۱ توسط هاردی [۵۷] معرفی شدند. فِرانکی [۵۸] با انتشار مقاله‌ای در سال ۱۹۸۲ یک درک ریاضی از توابع پایه شعاعی ایجاد کرد. فرانکی در این مقاله روش‌های مختلف درون‌یابی داده‌ها را با استفاده از توابع پایه شعاعی با هم مقایسه کرد. توابع پایه شعاعی فضای چند بعدی را به فضای یک بعدی می‌نگارد. به عبارت دیگر، توابع پایه شعاعی، توابع چند متغیره را به توابع اسکالر کاهش می‌دهند که این منجر به روشی کارآمد، دقیق، پایدار، با استفاده آسان می‌شود. امروزه استفاده از توابع پایه شعاعی در روش‌های تقریب بسیار گسترش یافته است. از کاربری‌های توابع پایه شعاعی می‌توان به گرافیک‌های کامپیوتری، بازسازی سطحی، شبکه‌های عصبی، پردازش تصویر و روتوش کردن عکس، کاربردهای پزشکی، مسائل مهندسی و غیره اشاره کرد. اگرچه توابع پایه شعاعی حدود نیم قرن تاریخچه دارند اما تاریخچه‌ی استفاده از آن ها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بسیار کمتر است. برای نخستین بار از توابع پایه شعاعی برای حل معادلات ناویه- استوکس برای جریان سیال توسط کانسا [۵۹] استفاده شد. او معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ناویه- استوکس را با استفاده از توابع پایه شعاعی چندربعی بطور مستقیم بر روی گره های بدون ساختار گسسته سازی کرد. روش پیشنهادی او بسیار شبیه به روش تفاضلات محدود بود با این تفاوت که برای هر توزیع پراکندگی دلخواه از گره ها مناسب بود. وانگ و لیو [۶۰] در مقاله ای به منظور حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یک روش بدون المان درونیابی نقطه‌ای[58]

---

[56] Radial basis functions (RBFs)

[57] Curve/surface fitting

[58] Point Interpolation meshless method

با استفاده از توابع پایه شعاعی[59] پیشنهاد دادند. در این مقاله به طور مشخص از توابع پایه شعاعی چندربعی[60] و گاوسین[61] استفاده شده بود.

از یک نقطه نظر می‌توان توابع پایه‌ی شعاعی را به دو دسته‌ی کلی و محلی تقسیم کرد. از جمله توابع پایه شعاعی کلی می‌توان به توابع مخروطی[62] [۶۴-۶۲]، اسپلاین صفحه نازک[63] [۷۰-۶۴]، گاوسین [۷۱]، چند ربعی [۷۲، ۷۳]، چندربعی معکوس[64]، سینوسی[65] [۷۴]، حقیقی فوریه[66] [۷۵]، مختلط فوریه[67] [۷۶، ۷۷]، بسل نوع اول[68] [۷۸] و از دسته توابع پایه‌ی شعاعی محلی به توابع تکیه‌گاه فشرده[69] [۸۳-۷۹] اشاره کرد. از یک نقطه نظر دیگر، توابع پایه شعاعی را می‌توان به دو دسته‌ی نوسانی[70] و غیر نوسانی[71] تقسیم کرد. توابع پایه شعاعی مخروطی [۶۴-۶۲، ۸۴]، اسپلاین صفحه نازک [۶۴، ۶۹-۶۸]، گاوسین [۷۱]، چند ربعی [۷۲، ۸۵]، چند ربعی معکوس [۸۶] و تکیه‌گاه فشرده [۸۳-۷۹] غیر نوسانی هستند و توابع پایه شعاعی حقیقی و مختلط فوریه [۷۷-۷۵]، بسل نوع اول [۷۸] و هنکل کروی[72] [۸۹-۸۷] نوسانی هستند.

در سال ۱۹۹۶، آگنانتیاریس و همکاران [۶۵] نشان دادند که توابع پایه شعاعی مخروطی در مقایسه با توابع اسپلاین صفحه نازک نتایج دقیق‌تری در حل مسائل الاستودینامیک دو بعدی ارائه می‌دهد در حالی که تا قبل از آن، نتایج بررسی محققان از جمله بریجز و روبل [۶۶] حاکی از این بود که توابع

---

[59] Based on Radial Basis functions

[60] Multiquadric (MQ)

[61] Gaussian (EXP)

[62] Conical

[63] Thin plate spline

[64] Inverse Multiquadric

[65] Sinusoidal

[66] Fourier

[67] Complex Fourier

[68] First kind Bessel

[69] Compact supported

[70] Oscillatory

[71] Non-oscillatory

[72] Spehrical Hankel

اسپلاین صفحه نازک دقت نتایج را به شدت بهبود می‌بخشد. مهرآیین و نورزاد [۷۰] برای حل مسائل الاستودینامیک دو بعدی از جمله بحث دیوارهای برشی با بازشو یک تابع پایه‌ی شعاعی معرفی کرده‌اند که ترکیبی از توابع مخروطی و اسپلاین صفحه نازک است. راشد [۷۱]، نیز تابع گاوسین را به عنوان تابع پایه شعاعی استفاده کرد و از آن در تقریب ترم اینرسی مسائل الاستودینامیک بهره جست. در سال ۲۰۰۱، آگنانتیاریس و همکاران [۸۵] استفاده از توابع پایه شعاعی چندربعی را در حل ارتعاش آزاد سازه‌های متقارن محوری و غیر متقارن محوری سه بعدی پیشنهاد کردند. همچنین سامان و راشد [۷۲] از این توابع برای مسائل الاستودینامیک متغیر با زمان دو بعدی استفاده کردند و سپس آنها این فرمول-بندی را در مسائل ارتعاش آزاد بکار بردند [۷۳]. کاربرد نوعی از توابع پایه شعاعی نوسانی که از فرم تابع سینوسی پیروی می‌کردند، در حل مسائل ارتعاش آزاد دو بعدی توسط راشد [۷۴] ارائه گردید.

در سال ۲۰۱۱ حمزه‌جواران و همکاران [۷۵] از تابع پایه شعاعی حقیقی فوریه، دارای خاصیت نوسانی، در تقریب ترم اینرسی مسائل الاستودینامیک دو بعدی استفاده کردند و نشان دادند که در مقایسه با سایر توابع پایه شعاعی نتایج دقیق‌تری حاصل می‌شود. آنها [۷۵] در همان سال نیز نوع دیگری از توابع پایه‌ی شعاعی نوسانی، که قبلاً توسط یک ریاضیدان به نام فورنبِرگ [۹۰] ارائه شده بود، در حل ارتعاش اجباری مسائل الاستودینامیک پیشنهاد کردند و فرمول‌بندی روش تقابل دوگانه را بر مبنای این تابع نوسانی که در آن تابع بسل نوع اول نقش اساسی را ایفا می‌کرد تغییر دادند. در ادامه، در سال ۲۰۱۴ حمزه‌جواران و خاجی [۷۷] فرم مختلط تابع پایه شعاعی فوریه را نیز ارائه کردند و با استفاده از آن‌ها که فرم مختلط و فشرده‌تری نسبت به حالت حقیقی فوریه داشتند، هسته‌های فرضی جابجایی و ترکشن به صورت بسته بدست آورده شد.

در سال ۱۹۹۵ رایج ترین توابع پایه شعاعی تکیه‌گاه فشرده توسط وِندلند [۷۹] پیشنهاد شد. در ادامه محققین بسیاری از این توابع در کاربردهای گوناگونی استفاده کردند:

- چِن و بِربِیا [۸۰] از این توابع در روش تقابل دوگانه برای معادله‌ی پوآسون استفاده کردند و نشان دادند که توابع پایه شعاعی تکیه‌گاه فشرده می‌تواند موثرتر از اسپلاین‌های صفحه نازک باشند.
- گولبِرگ و همکاران [۸۱] استفاده از این توابع را در حل مسائل پتانسیل سه بعدی گسترش دادند.
- راشِد [۸۲] از چهار کلاس توابع پایه شعاعی تکیه‌گاه فشرده در حل مسائل الاستودینامیک متغیر با زمان استفاده و پیشنهاداتی برای انتخاب بهترین مقدار پارامتر شعاع تکیه‌گاه فشرده ارائه کرد.
- سامان و همکاران [۸۳] در سال ۲۰۰۷، کارایی این توابع را در مسائل ارتعاش آزاد دو بعدی نشان دادند.

۳-۲- تعریف ریاضی توابع پایه شعاعی

تابع پایه شعاعی $B:\mathbf{R}^{+}\rightarrow\mathbf{R}$ یک تابع تک متغیره است که به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\Phi(x,y)=B(r)\qquad for\ \ x,y\in\mathbf{R}^{d} \tag{۳-۱}$$

که در آن $\Phi:\mathbf{R}^{d}\times\mathbf{R}^{d}\rightarrow\mathbf{R}$ یک تابع چند متغیره متقارن است که هسته مرتبط نامیده می‌شود و r بیانگر شعاع یا نُرم اقلیدوسی در میان داده‌های نقطه‌ای می‌باشد:

$$r=\|x-y\| \tag{۳-۲}$$

که برای راحتی از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$B_i(r)=B(\|x-x_i\|) \tag{۳-۳}$$

در جدول ۳-۱ تعدادی از متعارف ترین توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه کلی ارائه شده است.

جدول۳-۱: چند نوع از توابع پایه شعاعی متعارف

توابع پایه شعاعی	$B(r)$
اسپلاین صفحه نازک	$r^2 \log(r)$
اسپلاین مکعبی	r^3
چندربعی	$\sqrt{r^2+R^2}$
چندربعی معکوس	$1/\sqrt{r^2+R^2}$
گاوسین	e^{-cr^2}
بِسِل نوع اول	$\phi_d(r)=\dfrac{J_{d/2-1}(\varepsilon r)}{(\varepsilon r)^{d/2-1}} \quad d=1,2,...,$
فوریه	$\zeta+\kappa\sin(\omega r+\alpha)$
مختلط فوریه	$\alpha e^{i\omega r}$

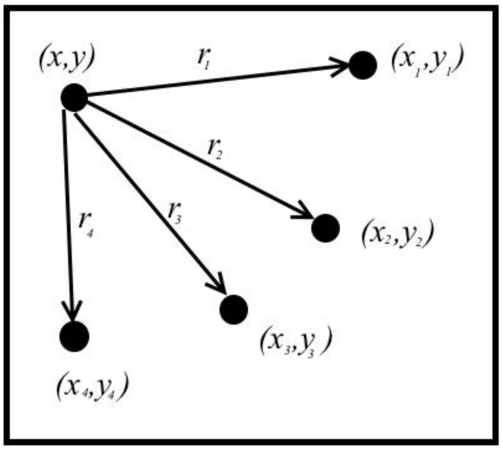
در جدول بالا $c,\varepsilon,\zeta,\kappa,\omega,\alpha$ و R بیانگر اعداد ثابتی هستند که می‌تواند در جهت افزایش دقت، انتخاب شود و پارامتر شکل نامیده می‌شوند.

۳-۳- درون‌یابی و تقریب با استفاده از توابع پایه شعاعی

از نقطه نظر تاریخی روش‌های تقریب از طریق توابع پایه شعاعی ابتدا به منظور برازش منحنی‌ها و صفحات به وجود آمدند. به منظور نشان دادن کاربری توابع پایه شعاعی در برازش و درون‌یابی، یک مجموعه متناهی دو بعدی از n داده‌ی نقطه‌ای پراکنده با مختصات (x_i, y_i) بطوری که $i=1,\dots,n$ در نظر گرفته می‌شود که این نقاط مرکز یا نقاط درون‌یابی نامیده می‌شوند. فرض می‌شود که مقادیر تابع مورد نظر f در این نقاط مشخص و برابر $f(x_i, y_i)$ است. بر پایه این داده‌های معلوم، هدف تقریب یک تابع است که بر مقادیر تابع $f(x_i, y_i)$ منطبق شود. با استفاده از توابع پایه شعاعی می‌توان یک ترکیب خطی که تابع f را تقریب بزند، پیدا کرد.

$$f(x,y)=\hat{f}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i B_i(r) \qquad (۳-۴)$$

که در آن $\{\alpha_i\}$ ضرایب مجهول هستند که باید مشخص شوند. با استفاده از شکل ۳-۱ می‌توان دریافت که فاصله‌های قابل اندازه‌گیری در میان n مرکز وجود دارد.



شکل۳-۱: ارائه‌ی فاصله‌های بین n مرکز $(n=5)$ در حالت دو بعدی

برای محاسبه‌ی ضرایب مجهول $\{\alpha_i\}$ در معادله‌ی (۳-۴)، ابتدا مختصات مرکز i ام در تابع پایه شعاعی انتخابی برای درون‌یابی $B_i(r)$ قرار داده می‌شود و یک ترکیب خطی برای تخمین تابع مورد نظر f با یک تابع پایه شعاعی انتخابی حاصل می‌شود. سپس با برابر قرار دادن مقدار تابع f در مرکز j ام با مختصات (x_j,y_j) با ترکیب خطی از مقادیر تابع پایه شعاعی در این نقطه $B_i(r_j)$ ، یک دستگاه از n معادله خطی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$A\bar{\alpha}=\bar{f} \qquad (۳-۵)$$

در رابطه‌ی (۳-۵)، A ماتریس ضرایب متقارن $n\times n$ دستگاه معادلات خطی و $\bar{\alpha}$ بردار ضرایب مجهول مرتبط و $\bar{f}$ بردار مقدار تابع مورد نظر به ازای مقادیر مختلف مختصات مراکز است. در صورتی که معکوس ماتریس ضرایب A قابل دستیابی باشد، ضرایب مجهول $\{\alpha_i\}$ به صورت رابطه‌ی (۳-۶) بدست می‌آیند:

$$\bar{\alpha}=A^{-1}\bar{f} \qquad (۳-۶)$$

۳-۴- توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده[۷۳]

توابع پایه شعاعی که در جدول ۳-۱ ارائه شدند، از نوع توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه کلی[۷۴] می‌باشند. این نوع از توابع پایه شعاعی گاهی در فرآیند درون‌یابی منجر به ماتریس‌های درون‌یابی متراکم که بسیار بد رفتار هستند، می‌شوند. این امر در مسائل بزرگ مقیاس و خصوصاً در مسائلی با تعداد زیادی نقطه‌ی درون‌یابی روبرو هستند محسوس‌تر می‌باشد. به منظور غلبه بر این بدرفتاری، بکارگیری توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده که نخستین بار توسط وِندلَند [۷۹] ارائه شدند، پیشنهاد می‌شود. توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده منجر به ماتریس‌های درون‌یابی پراکنده که بسیار خوش رفتار هستند، می‌شود. توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده چندجمله‌ای‌هایی پیوسته‌ی تکه‌ای هستند که با استفاده از رابطه‌ی (۳-۷) تعریف می‌شوند.

$$(1-r)_+^n = \begin{cases} (1-r)^n & 0 \le r \le 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \tag{۳-۷}$$

در رابطه‌ی (۳-۷)، مقدار n بایستی به گونه‌ای انتخاب شود که عضو اعداد طبیعی باشد.

جدول ۳-۲: توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده ارائه شده توسط وندلند

$B(r)$	تابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده
$(1-r)_+^2$	وندلند نوع اول
$\left((1-r)_+^4\right)(4r+1)$	وندلند نوع دوم
$\left((1-r)_+^6\right)(35r^2+18r+3)$	وندلند نوع سوم
$\left((1-r)_+^8\right)(32r^3+25r^2+8r+1)$	وندلند نوع چهارم

---

[73] Compactly supported RBFs

[74] Globally supported RBFs

در توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده دقت به صورت قابل توجهی بستگی به اندازه‌ی تکیه‌گاه دارد. در جدول ۳-۲ ، تکیه‌گاه همه‌ی توابع پایه شعاعی وندلند به بازه‌ی $[0,1]$ نرمال شده است. شایان ذکر است که به راحتی می‌توان این توابع را برای هر اندازه‌ی دلخواه تکیه‌گاه بازنویسی کرد. به عنوان نمونه این توابع را می‌توان با شعاع r_o به صورت $B\left(\frac{r}{r_o}\right)$ برای هر مقدار دلخواه $r_0 > 0$ تغییر مقیاس داد. در صورت وجود تعداد زیادی نقطه‌ی درون‌یابی که داخل حوزه فشرده شده‌اند، مقدار r_o بایستی کوچک انتخاب شود. زیرا برای مقادیر کوچک r_o ، ماتریس درون‌یابی پراکنده خواهد شد. از طرف دیگر، در صورت وجود تعداد کمی نقطه‌ی درون‌یابی، مقدار r_o باید بزرگ در نظر گرفته شود چرا که مقادیر بزرگ r_o سبب می‌شود توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده به توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه کلی میل کنند.

۳-۵- کاربرد توابع پایه شعاعی در حل عددی مسائل مهندسی

با بررسی منابع علمی مرتبط با توابع پایه شعاعی می‌توان دریافت که در گذشته این توابع برای حل عددی مسائل مهندسی تنها در روش‌های بدون شبکه بکار گرفته می‌شدند. پیش‌تر از توابع پایه شعاعی در روش‌های حل‌های خصوصی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و روش تقابل دوگانه در الاستودینامیک استفاده شده است. از جمله مقالات چاپ شده در این زمینه می‌توان به مقاله‌ی جواران و همکاران که برای اولین بار تابع پایه شعاعی مختلط فوریه به منظور تخمین ترم اینرسی در مسائل الاستودینامیک به کمک روش تقابل دوگانه پیشنهاد شد، اشاره کرد [۷۷]. در ادامه این محققان بر آن آمدند تا به نحوی بتوانند از این توابع پایه شعاعی در روش‌های با المان استفاده کنند که این مهم را از طریق غنی کردن تابع پایه شعاعی در المان‌های طبیعی ارائه دادند [۷۶].

۳-۵-۱- فرآیند بدست آوردن توابع شکل در روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی [۶۰]

وانگ و لیو [۶۰] در سال ۲۰۰۲، روش درون‌یابی نقطه‌ای از طریق توابع پایه شعاعی را به منظور استفاده در روش‌های بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پیشنهاد دادند. آن ها در این روشِ پیشنهادی بطور مشخص از توابع پایه شعاعی چندربعی و گاوسین استفاده کرده بودند.

روش پیشنهادی آن ها به منظور غلبه بر دو مشکل اساسی بود که در روش های بدون شبکه‌ی پیشین وجود داشت. این دو مشکل اساسی عبارت بودند از:

۱- عدم برآورده کردن خاصیت تابع دلتا توسط توابع شکل، اعمال شرایط مرزی اساسی را در روش‌های بدون شبکه دچار مشکلاتی می‌کرد.

۲- الگوریتم‌های عددی برای محاسبه‌ی توابع شکل و مشتقات آن‌ها پیچیده بود.

پیش‌تر به منظور از بین بردن هریک از مشکلات ذکر شده روش‌های دیگری نیز پیشنهاد شده بود. به عنوان مثال برای حل مشکل اول تمهیداتی مختلفی مانند لاگرانژی [۹۱]، پنالتی [۹۲] و کالوکِیشِن [۹۳] پیشنهاد شده است و برای حل مشکل دوم الگوریتم‌های کاربردی مختلفی همچون انتگرال‌گیری تحلیلی [۹۴]، روش بازگشتی [۹۵] و محاسباتی موازی [۹۶] پیشنهاد شده است.

در روش درون‌یابی نقطه‌ای براساس توابع پایه شعاعی، به منظور پیشگیری از مشکل تکینگی که در روش‌های درون یابی نقطه‌ای براساس توابع پایه چند جمله‌ای برای برخی آرایش گره‌ها ممکن است اتفاق بیفتد، در فرآیند درون‌یابی میدان توابع پایه شعاعی به میدان توابع پایه چند جمله‌ای اضافه می‌شود. در ادامه این روش بطور خلاصه توضیح داده می‌شود:

تابع تقریب $u(\mathbf{x})$ در یک دامنه‌ی تاثیر با تعدادی گره که دارای توزیع دلخواه می‌باشد $P_i(\mathbf{x}_i),(i=1,2,\ldots,n)$ ، در نظر گرفته می‌شود. n تعداد گره‌ها در دامنه‌ی تاثیر $\mathbf{x}$ می‌باشد [۶۰].

مقدار گرهیِ تابع تقریب $u(x)$ در گره x_i برابر u_i فرض می‌شود. در روش درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی، تابع تقریب $u(\mathbf{x})$ به گونه‌ای ساخته می‌شود که از تمامیِ نقاط گرهی موجود در دامنه‌ی تاثیر با استفاده از توابع پایه شعاعی $B_i(\mathbf{x})$ و توابع پایه چندجمله‌ای $P_j(\mathbf{x})$ عبور کند [۹۷].

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} B_i(\mathbf{x}) a_i + \sum_{j=1}^{m} P_j(\mathbf{x}) b_j = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{b} \tag{۸-۳}$$

در رابطه‌ی (۳-۸)، a_i ضریب مجهول تابع پایه شعاعی $B_i(\mathbf{x})$ و b_j ضریب مجهول تابع پایه چندجمله‌ای $P_j(\mathbf{x})$ است. شایان ذکر است که در رابطه‌ی (۳-۸) به منظور تضمین همگرایی جواب بایستی شرط $m < n$ برقرار باشد. به عبارت دیگر، بایستی تعداد جملات پایه چندجمله‌ای از پایه شعاعی کمتر باشد. بردارهای موجود در رابطه‌ی (۳-۸) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^{\mathrm{T}} &= [a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n] \\
\mathbf{b}^{\mathrm{T}} &= [b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m] \\
\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) &= [B_1(\mathbf{x}), B_2(\mathbf{x}), B_3(\mathbf{x}), \cdots, B_n(\mathbf{x})] \\
\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) &= [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \cdots, p_m(\mathbf{x})]
\end{aligned} \tag{۹-۳}$$

توابع پایه در مسائل دو بُعدی معمولاً توابعی از مختصات گرهی $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [x, y]$ هستند. یک تابع پایه شعاعی دارای فُرم کلی زیر است:

$$B_i(\mathbf{x}) = B_i(r_i) = B_i(x, y) \tag{۱۰-۳}$$

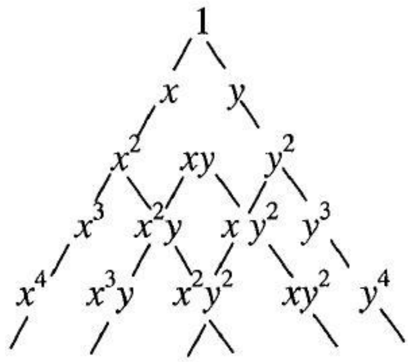
در رابطه‌ی (۳-۱۰)، r_i فاصله‌ی بین نقطه درون‌یابی (x, y) و گره (x_i, y_i) است. این فاصله در فضای دو بعدی اقلیدسی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \tag{۱۱-۳}$$

توابع پایه چندجمله‌ای از ترکیب خطی تک جمله‌هایی با ترتیب زیر ساخته می‌شوند:

$$\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \cdots] \tag{۱۲-۳}$$

توابع پایه چندجمله‌ای از مثلث خیام-پاسکال پیروی می‌کند. مثلث خیام-پاسکال در شکل ۳-۲ نمایش داده شده است.



شکل ۳-۲: مثلث خیام-پاسکال [۹۸]

ضرایب a_i و b_j در معادله‌ی (۳-۸) با اجبار عبور تابع درون‌یابی از کلیه‌ی n نقطه گرهی موجود در دامنه‌ی تاثیر بدست می‌آیند. بنابراین مقدار تابع درون‌یابی در نقطه‌ی k -ام به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u_k = u\left(x_k, y_k\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i B_i\left(x_k, y_k\right) + \sum_{j=1}^{m} b_j P_j\left(x_k, y_k\right) \ , \ k = 1, 2, 3, \cdots, n \qquad (۱۳-۳)$$

از آنجا که در معادله‌ی (۳-۱۳) تعداد مجهولات از معادلات بیشتر است، به منظور اینکه یکتایی جواب تضمین شود، معمولاً قید زیر اعمال می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} P_j\left(x_i, y_i\right) a_i = 0 \ , \ \ j = 1, 2, 3, \cdots, m \qquad (۱۴-۳)$$

معادلات (۳-۱۳) و (۳-۱۴) را می‌توان به صورت یک سیستم معادلات با استفاده از بیان ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_0^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \qquad (۱۵-۳)$$

در رابطه‌ی (۳-۱۵) بردار مقادیر گرهی تابع تقریب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u}^e = \left[u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n\right]^{\mathrm{T}} \tag{۳-۱۶}$$

به علاوه ماتریس‌های $\mathbf{B}_0$ و $\mathbf{P}_0$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} B_1(x_1,y_1) & B_2(x_1,y_1) & \cdots & B_n(x_1,y_1) \\ B_1(x_2,y_2) & B_2(x_2,y_2) & \cdots & B_n(x_2,y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(x_n,y_n) & B_2(x_n,y_n) & \cdots & B_n(x_n,y_n) \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{۳-۱۷}$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} P_1(x_1,y_1) & P_2(x_1,y_1) & \cdots & P_m(x_1,y_1) \\ P_1(x_2,y_2) & P_2(x_2,y_2) & \cdots & P_m(x_2,y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n,y_n) & P_2(x_n,y_n) & \cdots & P_m(x_n,y_n) \end{bmatrix}_{n\times m} \tag{۳-۱۸}$$

از آنجایی که فاصله بدون بُعد است، بنابراین $B_k(x_i,y_i) = B_i(x_k,y_k)$ است، بدین مفهوم که ماتریس $\mathbf{B}_0$ متقارن است. پاسخ یکتا تنها زمانی بدست می‌آید که معکوس ماتریس $\mathbf{B}_0$ وجود داشته باشد. بنابراین ضرایب مجهول به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{۳-۱۹}$$

در نهایت تابع درون‌یابی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\right]\mathbf{G}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})\mathbf{u}^e \tag{۳-۲۰}$$

از آنجایی که در رابطه‌ی (۳-۲۰)، عبارت $\left[\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\right]\mathbf{G}^{-1}$ ، میدان جابجایی را به بردار جابجایی گرهی مرتبط می‌سازد، طبق تعریف $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ ماتریس توابع شکل می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \left[\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \varphi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi_i(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \varphi_n(\mathbf{x})\right] \tag{۳-۲۱}$$

در رابطه‌ی (۳-۲۱)، تابع شکل متناظر با گره k -ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} B_i(\mathbf{x})\bar{\mathrm{G}}_{i,k} + \sum_{j=1}^{m} P_j(\mathbf{x})\bar{\mathrm{G}}_{n+j,k} \tag{۳-۲۲}$$

در معادله‌ی (۳-۲۲)، پارامتر $\bar{G}_{i,k}$ درایه‌ی (i,k) ماتریس $\mathbf{G}^{-1}$ می‌باشد. بنابراین با انتخاب نوع تابع پایه شعاعی، تابع پایه چندجمله‌ای به آن افزوده شده و تابع شکل در نهایت تنها به مختصات گره‌ها بستگی خواهد داشت. با بدست آوردن معکوس ماتریس $\mathbf{G}$ ، مشتق توابع شکل نسبت به x و y با استفاده از رابطه‌ی (۳-۲۳) به راحتی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial x} \bar{G}_{i,k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial P_j}{\partial x} \bar{G}_{n+j,k} \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial y} \bar{G}_{i,k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial P_j}{\partial y} \bar{G}_{n+j,k} \end{aligned} \quad (۳-۲۳)$$

۳-۵-۲- خصوصیات توابع شکل بدست آمده با استفاده از توابع پایه شعاعی

توابع شکل $\varphi_i(\mathbf{x})$ بدست آمده با استفاده از توابع پایه شعاعی پس از محاسبه‌ی کلیه‌ی توابع پایه، تنها به مختصات گرهی بستگی خواهند داشت. این توابع شکل بطور کلی مستقل از نوع توابع پایه شعاعی استفاده شده در محاسبه‌ی آن‌ها دارای خصوصیات زیر هستند:

۱- توابع شکل مورد بحث در دامنه‌ی تاثیر خود مستقل خطی است، زیرا توابع پایه در دامنه‌ی تاثیر خود مستقل خطی هستند. اگر $\mathbf{B}_0^{-1}$ و $\mathbf{G}^{-1}$ برای هر توزیع گرهی دلخواه موجود باشند، آن‌گاه توابع شکل و توابع پایه در فضای تابع معادل هستند. پاول [۹۷] نشان داد که برای تابع پایه شعاعی گاوسین، مستقل از مقدار پارامتر شکل، همواره معکوس تابع پایه شعاعی موجود است. این مزیت اصلی توابع پایه شعاعی نسبت به توابع پایه چندجمله‌ای است.

۲- این توابع شکل دارای خاصیت تابع دلتا هستند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_i\left(\mathbf{x} = \mathbf{x}_j\right) = \begin{cases} 1, & i = j, \ \ j = 1, 2, \ldots, n \\ 0, & i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots, n \end{cases} \quad (۳-۲۴)$$

مقدار گرهی میدان در گره i -ام مستقل از تابع شکل در این گره $\varphi_i(\mathbf{x})$ است. با قرار دادن مقدار صفر برای مقدار گرهی میدان برای تمامی گره‌ها به جز گره i -ام و قرار دادن مقدار جابجایی گرهی u_i برای

گره i -ام یعنی با در نظر گرفتن بردار $u^e = [0 \quad \dots \quad u_i \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ به عنوان جابجایی گرهی، رابطه‌ی (۳-۲۴) به راحتی بدست خواهد آمد.

۳- $\varphi_i(\mathbf{x})$ دارای خاصیت افراز واحد است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{x}) = 1 \qquad (۳-۲۵)$$

شایان ذکر است که الزامی ندارد که مقدار تابع شکل بین صفر و یک باشد یعنی $0 \le \varphi_i(\mathbf{x}) \le 1$.

۴- $\varphi_i(\mathbf{x})$ دارای خاصیت بازتولید است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{x}) x_i = \mathbf{x} \qquad (۳-۲۶)$$

روابط (۳-۲۵) و (۳-۲۶) همواره برقرار است اگر توابع پایه حداقل شامل توابع پایه چندجمله‌ای مرتبه‌ی اول باشد. بنابراین اگر در دامنه‌ی دو بعدی توابع پایه چندجمله‌ای شامل $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = [1, x, y]$ باشد، توابع شکلِ حاصل بطور قطعی روابط (۳-۲۵) و (۳-۲۶) را ارضا خواهند کرد.

۵- $\varphi_i(\mathbf{x})$ قطعاً پیوسته و مشتق پذیر است و با استفاده از رابطه‌ی (۳-۲۳) به راحتی می‌توان مشتق آن را محاسبه کرد.

همانطور که قبلاً ابیان شد، وانگ و لیو [۶۰] برای تحلیل مسائل الاستواستاتیک بطور مشخص از توابع پایه شعاعی کلاسیک و معروفِ چندربعی و گاوسین در روش بدون شبکه‌ی درون‌یابی نقطه‌ای از طریق توابع پایه شعاعی استفاده کردند.

تابع پایه شعاعی چندربعی توسط هاردی [۹۹] پیشنهاد شد. از این تابع پایه شعاعی در برازش سطوح و حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بسیار استفاده شده است. تابع پایه شعاعی چندربعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(r) = \left(r^2 + R^2\right)^{1/2} \qquad (۳-۲۷)$$

بطور مشابه تابع پایه شعاعی معکوس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(r) = \left(r^2 + R^2\right)^{-1/2} \tag{۳-۲۸}$$

در روابط (۳-۲۷) و (۳-۲۸)، r نُرم اقلیدسی میان داده‌های نقطه‌ای و R پارامتر شکل[۷۵] است.

می‌توان یک حالت کلی برای توابع پایه شعاعی چندربعی تعریف کرد که چندربعی تعمیم یافته[۷۶] نامیده می‌شود و از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$B(r) = \left(r^2 + R^2\right)^{q} \tag{۳-۲۹}$$

تابع پایه شعاعی چندربعی تعمیم یافته، همانطور که از رابطه‌ی (۳-۲۹)، مشخص است دارای دو پارامتر شکل است (q, R) و با قرار دادن مقادیر ثابت $q = 0.5$ به چندربعی و $q = -0.5$ به چندربعی معکوس قابل تبدیل است. مشتق تابع پایه شعاعی چندربعی تعمیم یافته از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial x} &= 2q\left(r_i^2 + R^2\right)^{q-1}\left(x - x_i\right) \\ \frac{\partial B_i}{\partial y} &= 2q\left(r_i^2 + R^2\right)^{q-1}\left(y - y_i\right) \end{aligned} \tag{۳-۳۰}$$

تابع پایه شعاعی گاوسین نیز بسیار پرکاربرد است [۹۷، ۱۰۰]. این توابع پایه شعاعی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B(r) = e^{-cr^2} \tag{۳-۳۱}$$

در رابطه‌ی (۳-۳۱)، c پارامتر شکل است. مشتق تابع پایه شعاعی گاوسین از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial x} &= -2c\, B_i\left(x, y\right)\left(x - x_i\right) \\ \frac{\partial B_i}{\partial y} &= -2c\, B_i\left(x, y\right)\left(y - y_i\right) \end{aligned} \tag{۳-۳۲}$$

---

[75] Shape parameter

[76] Extended Multiquadric (XMQ)

۳-۶- توابع پایه شعاعی حقیقی فوریه

هر تابع متناوب پیوسته‌ی تکه‌ای $B(r)$ را با استفاده از تعریف سری فوریه می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۷۵] :

$$B(r)=a_0+\sum_{i=1}^{n}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}r\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}r\right)\right) \qquad (۳-۳۳)$$

رابطه‌ی (۳-۳۳) را می‌توان در حالت فازی به صورت (۳-۳۴) بیان کرد:

$$B(r)=a_0+\sum_{i=1}^{n}\left(c_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}r+\alpha_n\right)\right) \qquad (۳-۳۴)$$

در روابط (۳-۳۳) و (۳-۳۴)، $a_0, a_n, b_n, c_n, \alpha_n$ و l پارامترهای متداول در سری فوریه هستند.

با تخمین تابع متناوب پیوسته‌ی تکه‌ای مورد نظر تنها با جمله‌ی اول سری فوریه‌ی رابطه‌ی (۳-۳۴) یعنی $n=1$، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$B(r)=a_0+c_1\sin\left(\frac{\pi}{l}r+\alpha_1\right) \qquad (۳-۳۵)$$

رابطه‌ی (۳-۳۵) را می‌توان به صورت (۳-۳۶) بازنویسی کرد:

$$B(r)=\zeta+\kappa\sin(\omega r+\alpha) \qquad (۳-۳۶)$$

در رابطه‌ی (۳-۳۶)، ω,κ,ζ و α پارامترهای شکل تابع پایه شعاعی حقیقی فوریه هستند.

در حقیقت هدف از پیشنهاد تابع پایه شعاعی حقیقی فوریه، یافتن تابعی بود که بتوان تمامی توابع پایه شعاعی پیشین را با استفاده از آن تخمین زد. به عنوان مثال نحوه‌ی تقریب سه نوع معروف از توابع پایه شعاعی با کمک تابع پایه شعاعی فوریه در زیر آمده است [۷۵].

- تابع پایه شعاعی مخروطی

$$
\begin{aligned}
&B(r)=c+r\\
&a_0=c+\frac{1}{2}r_{\max}\\
&a_1=0\\
&b_1=-\frac{1}{\pi}r_{\max}\\
&\Rightarrow B(r)=c+r\approx c+\frac{1}{2}r_{\max}-\frac{1}{\pi}r_{\max}\sin\left(\frac{2\pi}{r_{\max}}r\right)
\end{aligned}
\tag{۳۷-۳}
$$

- تابع پایه شعاعی اسپلاین مکعبی

$$
\begin{aligned}
&B(r)=r^3\\
&a_0=\frac{1}{4}r_{\max}\\
&a_1=\frac{3}{2\pi^2}r_{\max}^3\\
&b_1=\frac{3-2\pi^2}{2\pi^3}r_{\max}^3\\
&\Rightarrow B(r)=r^3\approx\frac{1}{4}r_{\max}+\frac{\sqrt{4\pi^4-3\pi^2+9}}{2\pi^3}r_{\max}^3\sin\left(2\pi\frac{r}{r_{\max}}+\tan^{-1}\left(\frac{3\pi}{3-2\pi^2}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{۳۸-۳}
$$

- تابع پایه شعاعی وندلند نوع اول

$$
\begin{aligned}
&B(r)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{r}{r_o}\right)^2 & r<r_o\\ 0 & r_o\le r\le r_{\max}\end{cases}\\
&a_0=\frac{r_o}{3r_{\max}}\\
&a_1=\frac{r_{\max}}{2r_o^2\pi^3}\left(2\pi r_o-r_{\max}\sin\left(2\pi\frac{r_o}{r_{\max}}\right)\right)\\
&b_1=\frac{1}{r_o^2\pi^3}\left(r_o^2\pi^2-r_{\max}^2\sin^2\left(\pi\frac{r_o}{r_{\max}}\right)\right)\\
&\Rightarrow B(r)\approx\frac{r_o}{3r_{\max}}+\frac{r_{\max}}{2r_o^2\pi^3}\left(2\pi r_o-r_{\max}\sin\left(2\pi\frac{r_o}{r_{\max}}\right)\right)\cos\left(2\pi\frac{r}{r_{\max}}\right)\\
&\qquad+\frac{1}{r_o^2\pi^3}\left(r_o^2\pi^2-r_{\max}^2\sin^2\left(\pi\frac{r_o}{r_{\max}}\right)\right)\sin\left(2\pi\frac{r}{r_{\max}}\right)
\end{aligned}
\tag{۳۹-۳}
$$

۳-۷- توابع پایه شعاعی مختلط فوریه

به کارگیری اعداد مختلط در مسائل اعداد حقیقی سبب کاهش محاسبات، حجم نوشته‌ها و فرمول‌ها می‌شود. این مزیت ایده‌ی استفاده از بیان مختلط سری فوریه را ایجاد نمود [۷۷]. بنابراین با کمک مفهومِ سری مختلط فوریه هر تابع متناوب پیوسته‌ی تکه‌ای $B(r)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۷۷].

$$B(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}r} \qquad (۳-۴۰)$$

در رابطه‌ی (۳-۴۰)، c_n و l پارامترهای متداول سری مختلط فوریه است.

حال با در نظر گرفتن تنها یک جمله از سریِ رابطه‌ی (۳-۴۰) ، تابع پایه شعاعی مختلط فوریه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$B(r) = \alpha e^{i\omega r} \qquad (۳-۴۱)$$

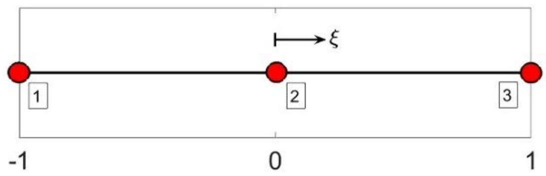
در رابطه‌ی (۳-۴۱) ، α و ω پارامترهای شکل تابع پایه شعاعی مختلط فوریه هستند [۷۷].

فصل چهارم: المان‌های نوین و استفاده از آن‌ها در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیسیته

۴-۱- المان‌های مختلط فوریه

۴-۱-۱- تعریف

با اعمال فرآیند بدست آوردن توابع شکل در روش درون‌یابی نقطه‌ای از طریق توابع پایه شعاعی که در فصل سوم توضیح داده شد، بر یک المان یک بعدی سه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی ξ و استفاده از توابع پایه شعاعی مختلط فوریه، توابع شکل برای المان سه گرهی مختلط فوریه یک بعدی که در شکل ۴-۱ نمایش داده شده است، به صورت زیر بدست می‌آید [۷۶].



شکل ۴-۱: المان سه گرهی یک بعدی در دستگاه مختصات طبیعی ξ

بردار توابع پایه شعاعی مختلط فوریه برای المان سه گرهی یک بعدی در دستگاه مختصات طبیعی ξ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{B}(r)=\begin{Bmatrix} \alpha\, e^{i\omega|\xi+1|} \\ \alpha\, e^{i\omega|\xi|} \\ \alpha\, e^{i\omega|\xi-1|} \end{Bmatrix} = \alpha \begin{Bmatrix} e^{i\omega(1+\xi)} \\ e^{i\omega\xi\,\mathrm{sgn}(\xi)} \\ e^{i\omega(1-\xi)} \end{Bmatrix} \qquad (۴\text{-}۱)$$

در رابطه‌ی (۴-۱)، $\mathrm{sgn}(\xi)$ نشان دهنده‌ی تابع علامت است. از آنجا که تعداد گره‌ها برابر سه است $(n=3)$، بنابراین حداکثر می‌توان از میدان خطی به عنوان توابع پایه چندجمله‌ای استفاده کرد $(m=2)$.

$$\mathbf{P}(\xi)=\begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \end{Bmatrix} \qquad (۴\text{-}۲)$$

ماتریس‌های $\mathbf{B}_0$ و $\mathbf{P}_0$ معرفی شده در رابطه‌های (۳-۱۷) و (۳-۱۸)، برای المان شکل ۴-۱ با استفاده از توابع پایه شعاعی مختلط فوریه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} B_1(r_1) & B_2(r_1) & B_3(r_1) \\ B_1(r_2) & B_2(r_2) & B_3(r_2) \\ B_1(r_3) & B_2(r_3) & B_3(r_3) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & e^{i\omega} & e^{2i\omega} \\ e^{i\omega} & 1 & e^{i\omega} \\ e^{2i\omega} & e^{i\omega} & 1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۴)$$

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1) \\ P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2) \\ P_1(\xi_3) & P_2(\xi_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۴-۴)$$

در نهایت توابع شکل المان مختلط فوریه سه‌گرهی در دستگاه مختصات طبیعی ξ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}(\xi) = \left[\varphi_1(\xi) \quad \varphi_2(\xi) \quad \varphi_3(\xi)\right] \\ &\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2}\left(-\xi + c + h(\xi)\right) \\ &\varphi_2(\xi) = (1-c) - h(\xi) \\ &\varphi_3(\xi) = \frac{1}{2}\left(\xi + c + h(\xi)\right) \end{aligned} \qquad (۵-۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۵)، ثابت مختلط c و تابع مختلط $h(\xi)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} &c = \frac{2}{3-e^{i\omega}} \\ &h(\xi) = \frac{e^{i\omega|\xi+1|} - 2e^{i\omega|\xi|} + e^{i\omega|\xi-1|}}{(1-e^{i\omega})(3-e^{i\omega})} = \frac{e^{i\omega(1+\xi)} - 2e^{i\omega\xi\,\mathrm{sgn}(\xi)} + e^{i\omega(1-\xi)}}{(1-e^{i\omega})(3-e^{i\omega})} \end{aligned} \qquad (۶-۴)$$

پیش‌تر از این توابع شکل در تحلیل المان مرزی مسائل پتانسیل توسط خاجی و همکاران استفاده شده است [۷۶].

۴-۱-۲- خصوصیات توابع شکل مختلط فوریه

۱- خاصیت دلتای کرونیکر

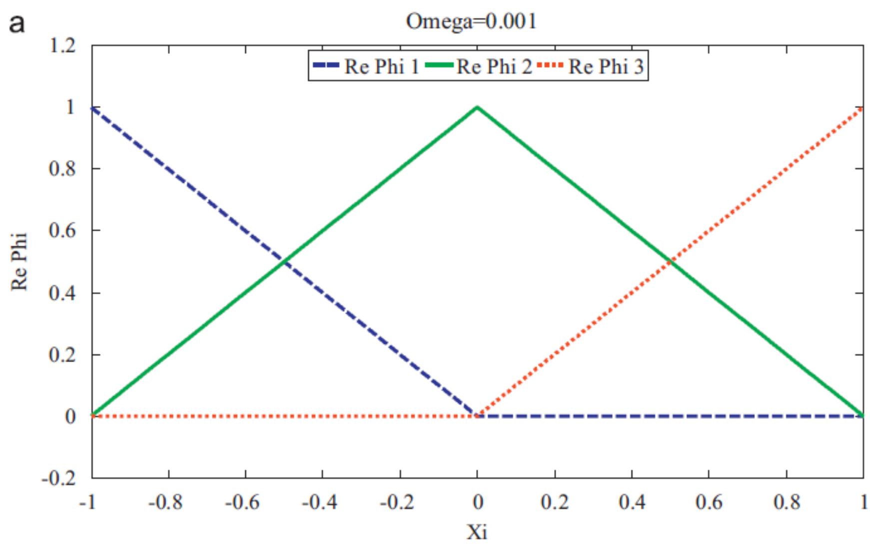
همانطور که از جدول زیر مشخص است، توابع شکل مختلط فوریه دارای خاصیت دلتای کرونیکر هستند. مقادیر جدول ۴-۱ برای هر مقدار دلخواه ω صادق است.

$$\varphi_m(\xi_n) = \delta_{mn}\,(1) \qquad (۷-۴)$$

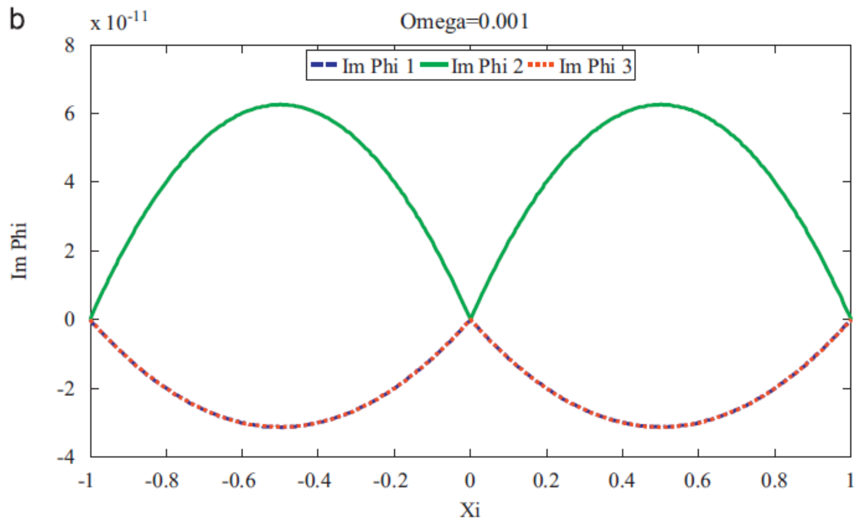
جدول ۴-۱: مقادیر حقیقی و موهومی گرهی در توابع شکل مختلط فوریه

شماره گره	مختصات ξ	حقیقی φ_1	حقیقی φ_2	حقیقی φ_3	موهومی φ_1	موهومی φ_2	موهومی φ_3
1	-1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0

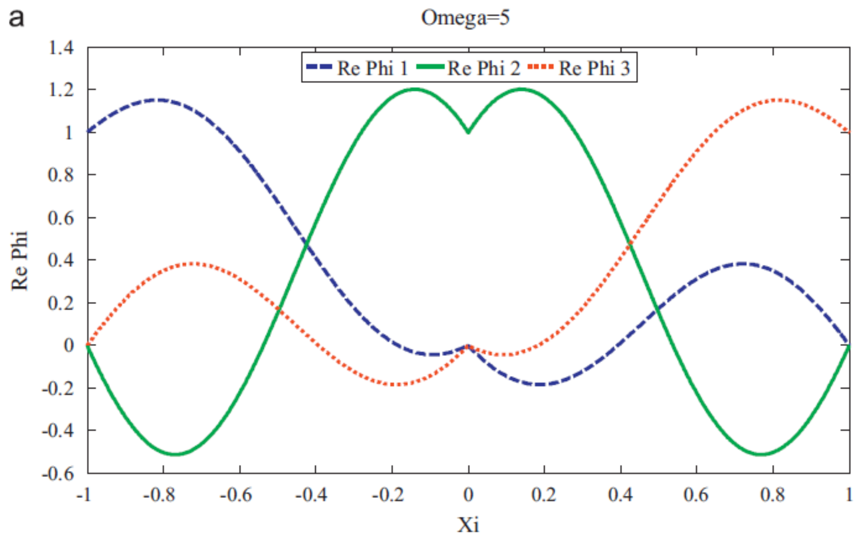
شکل‌های ۴-۲ تا ۴-۱۳، توابع شکل مختلط فوریه را در یک المان سه گرهی برای مقادیر مختلف پارامتر شکل ω نمایش می‌دهد.



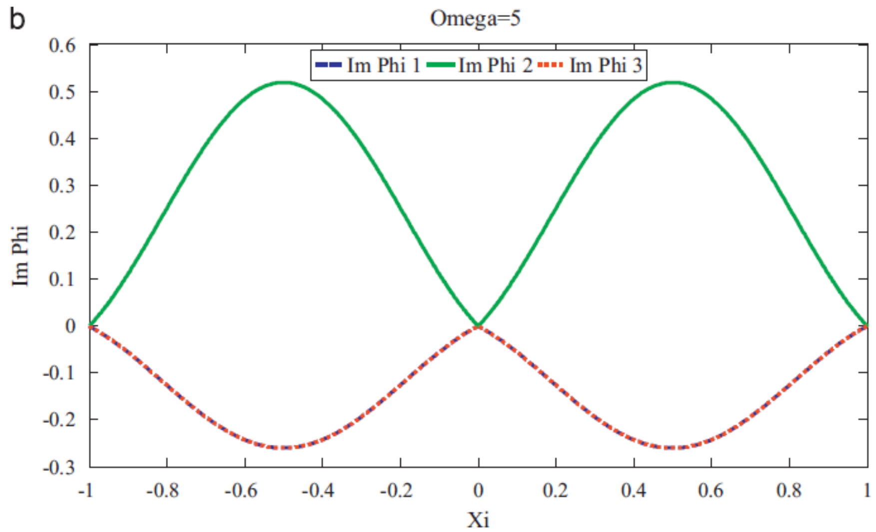
شکل ۴-۲: قسمت حقیقی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 0.001$ [۷۶]



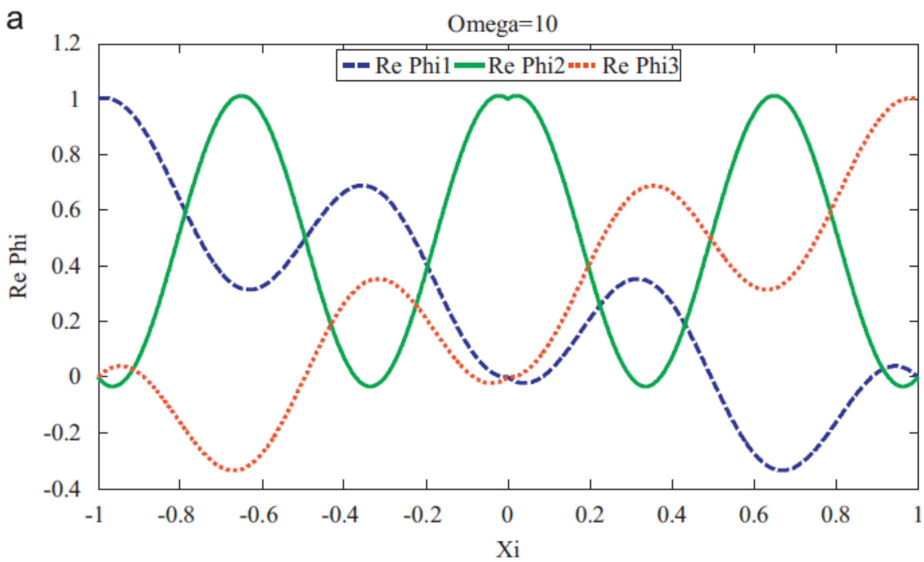
شکل ۴-۳: قسمت موهومی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 0.001$ [۷۶]



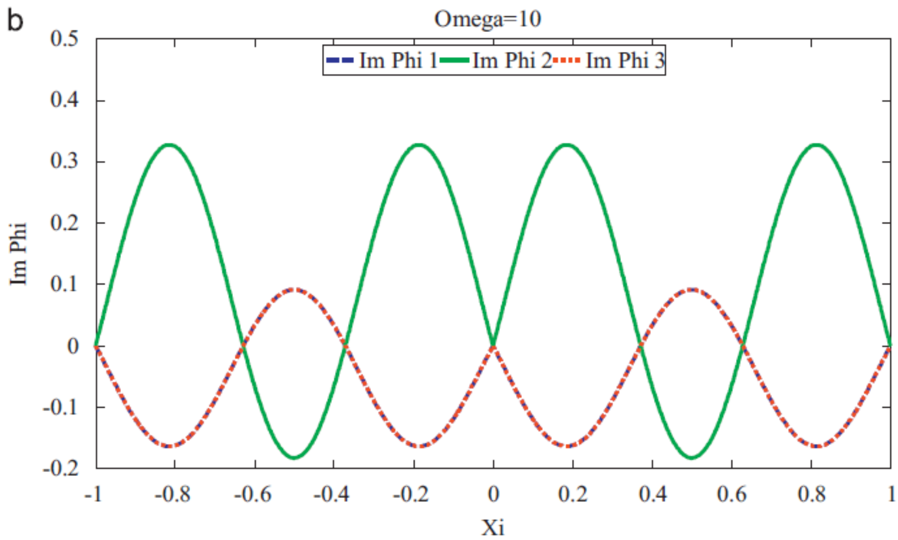
شکل ۴-۴: قسمت حقیقی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 5$ [۷۶]



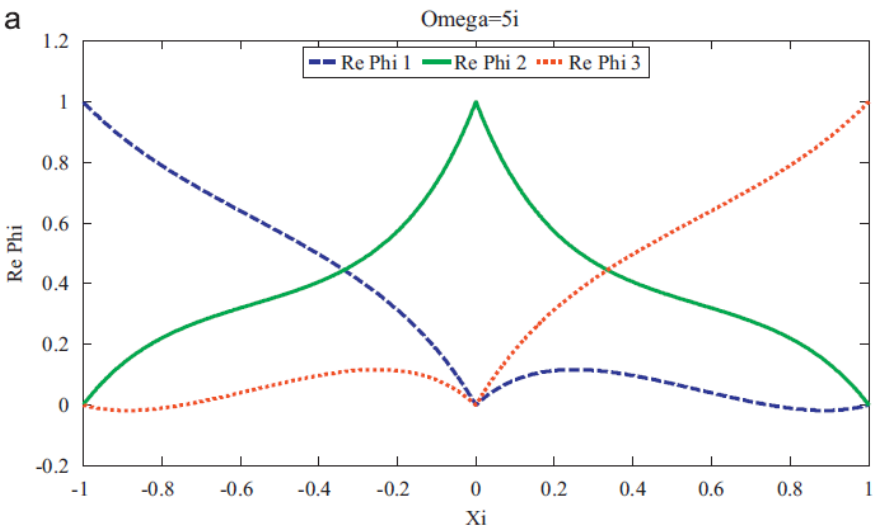
شکل ۴-۵: قسمت موهومی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 5$ [۷۶]



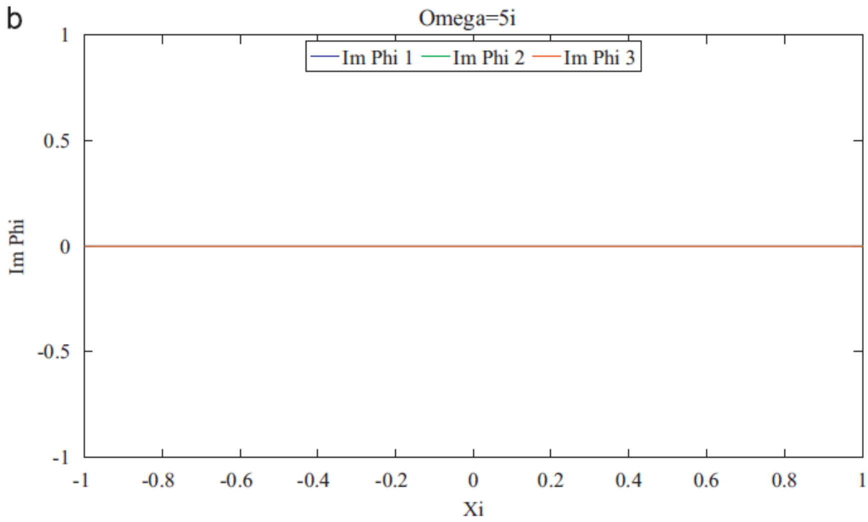
شکل ۴-۶: قسمت حقیقی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 10$ [۷۶]



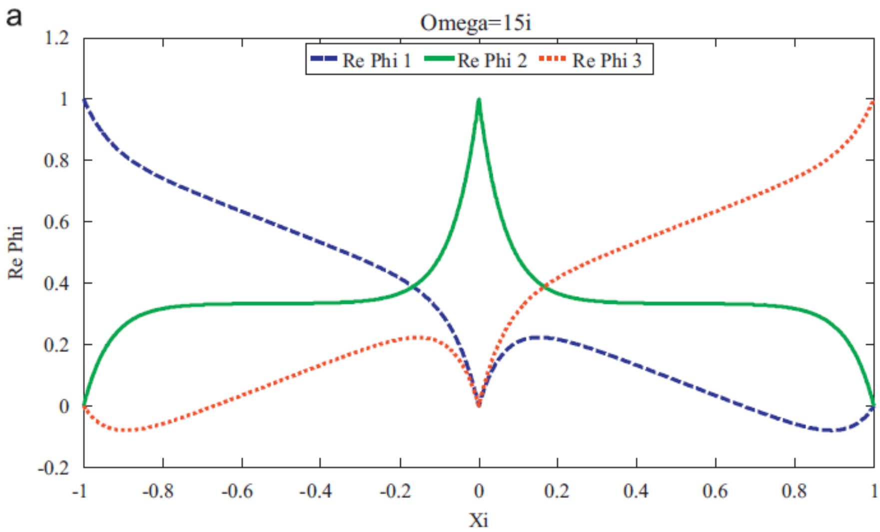
شکل ۴-۷: قسمت موهومی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 10$ [۷۶]



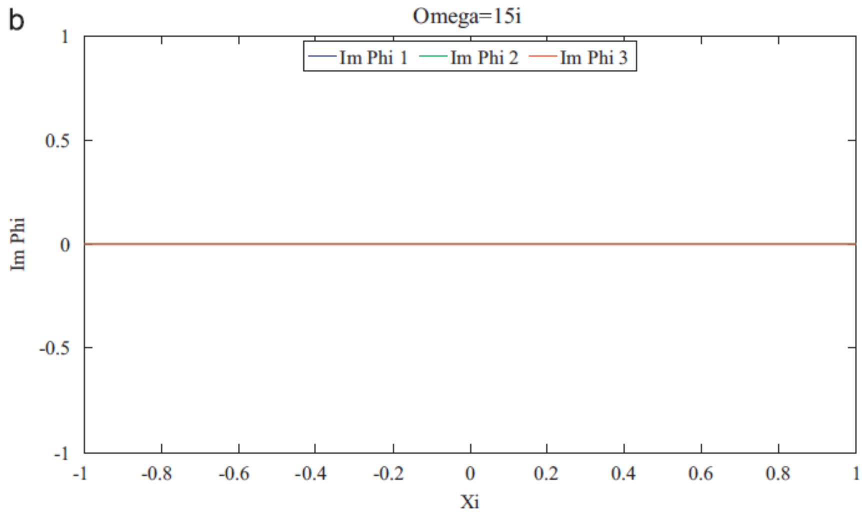
شکل ۴-۸: قسمت حقیقی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 5i$ [۷۶]



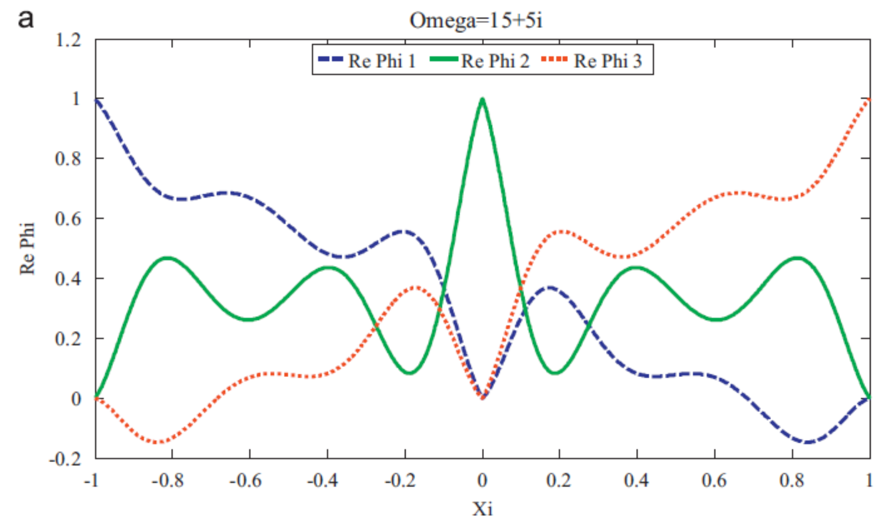
شکل ۴-۹: قسمت موهومی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 5i$ [۷۶]



شکل ۴-۱۰: قسمت حقیقی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 15i$ [۷۶]

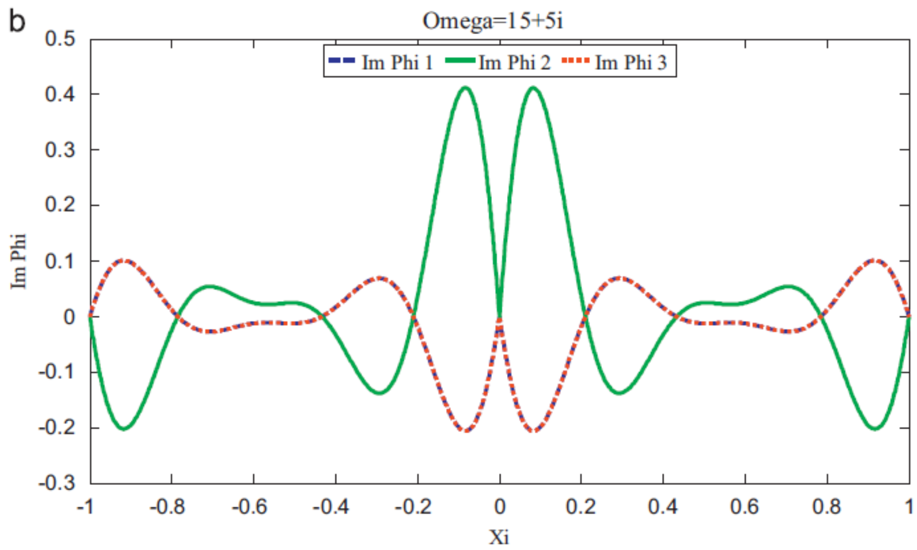


شکل ۴-۱۱: قسمت موهومی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega = 15i$ [۷۶]



شکل ۴-۱۲: قسمت حقیقی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega=15+5i$

[۷۶]



شکل ۴-۱۳: قسمت موهومی توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان سه گرهی به ازای $\omega=15+5i$

[۷۶]

همان طور که از نمودارها مشخص است هرچه قسمت حقیقی پارامتر شکل ω بیشتر باشد نوسانی بودن توابع شکل بیشتر است زیرا قسمت حقیقی سهم توابع مثلثاتی را در بر دارد و از طرفی هر چه قسمت موهومی پارامتر شکل بیشتر باشد، توابع شکل به سمت توابع نمایی میل می‌کنند [۷۶].

۲- خاصیت افراز واحد:

اگر تعداد گره‌های المان فوریه با n نشان داده شود، می‌توان نشان داد که:

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\left(\xi\right)=1 \tag{۴-۸}$$

به عبارت دیگر توابع شکل مختلط فوریه خاصیت جابجایی جسم صلب را دارا می‌باشد.

۳- خاصیت قطعه قطعه پیوسته از مرتبه بینهایت: یعنی توابع شکل مختلط فوریه تا بینهایت بار قطعه قطعه مشتق‌پذیرند.

$$\begin{array}{lll}
\varphi_1(\xi)=\dfrac{1}{2}\left(-\xi+c+h(\xi)\right) & \varphi_2(\xi)=(1-c)-h(\xi) & \varphi_3(\xi)=\dfrac{1}{2}\left(\xi+c+h(\xi)\right)\\
\varphi_1'(\xi)=\dfrac{1}{2}\left(-1+h'(\xi)\right) & \varphi_2'(\xi)=-h'(\xi) & \varphi_3'(\xi)=\dfrac{1}{2}\left(1+h'(\xi)\right)\\
\varphi_1''(\xi)=\dfrac{h''(\xi)}{2} & \varphi_2''(\xi)=-h''(\xi) & \varphi_3''(\xi)=\dfrac{h''(\xi)}{2}\\
\varphi_1'''(\xi)=\dfrac{h'''(\xi)}{2} & \varphi_2'''(\xi)=-h'''(\xi) & \varphi_3'''(\xi)=\dfrac{h'''(\xi)}{2}\\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array} \tag{۴-۹}$$

به خاطر خاصیت توابع نمایی حقیقی-مختلط یک رابطه بازگشتی بین مشتقات تابع $h(\xi)$ به صورت زیر برقرار است.

$$h^{(n)}(\xi)=-\omega^2h^{(n-2)}(\xi) \tag{۴-۱۰}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۱) مشتق تابع مختلط $h(\xi)$ تا مرتبه‌ی چهارم بدست آمده است.

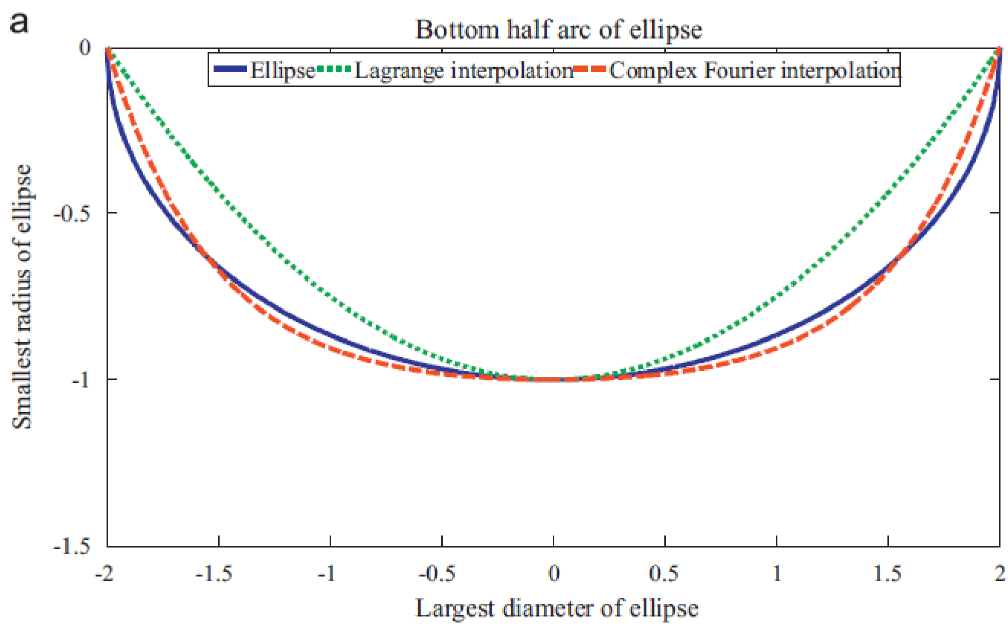
$$
\begin{aligned}
h(\xi) &= \frac{e^{i\omega(1+\xi)} - 2e^{i\omega|\xi|} + e^{i\omega(1-\xi)}}{\left(e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 3\right)} \\
h'(\xi) &= \frac{i\omega\left[e^{i\omega(1+\xi)} - 2\left(H(\xi) - H(-\xi)\right)e^{i\omega|\xi|} - e^{i\omega(1-\xi)}\right]}{\left(e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 3\right)} \\
h''(\xi) &= \frac{-\omega^2\left[e^{i\omega(1+\xi)} - 2\left(H(\xi) + H(-\xi)\right)e^{i\omega|\xi|} + e^{i\omega(1-\xi)}\right]}{\left(e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 3\right)} \\
h'''(\xi) &= \frac{-i\omega^3\left[e^{i\omega(1+\xi)} - 2\left(H(\xi) - H(-\xi)\right)e^{i\omega|\xi|} - e^{i\omega(1-\xi)}\right]}{\left(e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 3\right)} \\
h^{(4)}(\xi) &= \frac{\omega^4\left[e^{i\omega(1+\xi)} - 2\left(H(\xi) + H(-\xi)\right)e^{i\omega|\xi|} + e^{i\omega(1-\xi)}\right]}{\left(e^{2i\omega} - 4e^{i\omega} + 3\right)}
\end{aligned}
\qquad (۱۱\text{-}۴)
$$

در رابطه‌ی (۴-۱۱)، H تابع هویساید است.

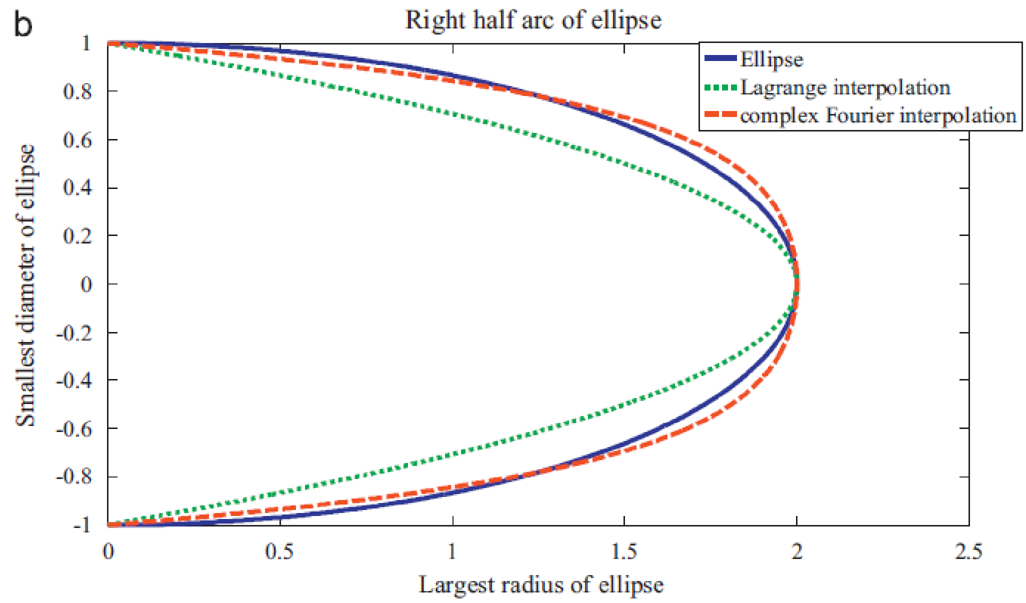
۴- وجود پارامتر شکل ω در توابع شکل مختلط فوریه:

همانطور که پیش‌تر ذکر شد یکی از مزیت‌های تابع شکل مختلط فوریه، وجود تابع مختلط $h(\xi)$ است که می‌تواند با توجه به پارامتر شکلی که در خود جای داده است در بهبود دقت موثر باشد. به بیان دیگر همانطور که در پیشینه تحقیقات علمی پارامترهای شکل توابع پایه شعاعی می‌توانند خود را با شرایط بهینه وفق دهد، تابع شکل مختلط فوریه هم با وجود تابع مختلط $h(\xi)$ می‌تواند خود را با تابع شکل بهینه وفق دهد. همان‌طور که قبلا هم ذکر شد این پارامتر شکل می‌تواند مقادیر مختلط هم داشته باشد بطوریکه قسمت حقیقی آن سهم توابع مثلثاتی و قسمت موهومی آن سهم توابع نمایی را در تابع شکل مختلط فوریه معین می‌کند.

به منظور بررسی دقت توابع شکل پیشنهادی، همانطور که در شکل‌های ۴-۱۴ و ۴-۱۵ نمایش داده شده است، مرز یک بیضی با شعاع بزرگ ۲ و شعاع کوچک ۱ با استفاده از درونیابی کلاسیک لاگرانژ و درونیابی پیشنهادی بازتولید شده است [۷۶]. همانطور که از گراف‌ها پیداست نتایج حاصل از توابع شکل پیشنهادی تقریبا منطبق بر مرز واقعی بیضی است در حالیکه نتایج حاصل از توابع شکل لاگرانژ تفاوت زیادی با مرز واقعی بیضی دارند.



شکل ۴-۱۴: بازتولید نیم کمان پایینی مرز بیضی با استفاده از درونیابی کلاسیک لاگرانژ و مختلط فوریه [۷۶]



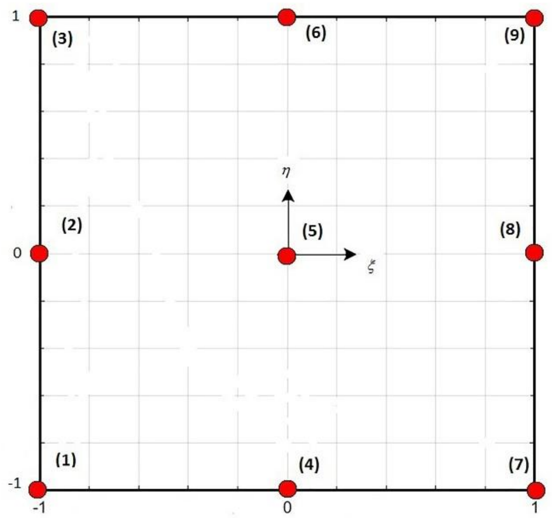
شکل ۴-۱۵: بازتولید نیم کمان سمت راست مرز بیضی با استفاده از درونیابی کلاسیک لاگرانژ و مختلط فوریه [۷۶]

۵- دارا بودن همزمان میدان‌های توابع چندجمله‌ای، مثلثاتی و نمایی:

در توابع شکل لاگرانژی تنها میدان توابع چندجمله‌ای اقناع می‌شود، در حالیکه در توابع شکل مختلط فوریه علاوه بر میدان توابع چندجمله‌ای، از توابع نمایی حقیقی-مختلط که در تابع مختلط $h(\xi)$ ظاهر می‌شوند نیز استفاده شده است.

۴-۱-۳- المان دو بعدی چهار وجهی لاگرانژی مختلط فوریه نُه گرهی (Q9)

به منظور بدست آوردن توابع شکل در المان صفحه‌ای چهار وجهی لاگرانژیِ مختلط فوریه Q9 ، ۹ گره در دستگاه مختصات طبیعی صفحه‌ای (ξ,η) در نظر گرفته می‌شود بطوری که فاصله‌ی هر گره با گره‌های مجاورش در هر دو راستای ξ و η برابر واحد باشد، همانطور که در شکل ۴-۱۶ نمایش داده شده است.



شکل ۴-۱۶: المان چهار وجهی صفحه‌ای لاگرانژی نه گرهی (Q9)

برای بدست آوردن توابع شکل متناظر با هر گره در المان مورد نظر می‌توان توابع شکل را در هر دو راستای دستگاه مختصات طبیعی یعنی ξ و η بدست آورد و سپس توابع شکل متناظر با هر گره را در دو راستای متعامد در هم ضرب کرد. به عبارت دیگر می‌توان تابع شکل متناظر با هر گره را در این المان با استفاده از رابطه‌ی زیر بدست آورد:

$$\varphi_{3(m-1)+n}(\xi,\eta)=\phi_m(\xi)\phi_n(\eta) \qquad (۴\text{-}۱۲)$$

در رابطه‌ی (۴-۱۲)، m شماره‌ی گره‌ها در در دستگاه مختصات طبیعی ξ از چپ به راست و n شماره‌ی گره‌ها در دستگاه مختصات طبیعی η از پایین به بالا است. همانطور که برای المان یک بعدی سه گرهی بدست آمد، توابع شکل در دو راستای ξ و η به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\phi_1(\xi)=\frac{1}{2}\left(-\xi+c+h(\xi)\right) && \phi_1(\eta)=\frac{1}{2}\left(-\eta+c+h(\eta)\right)\\
&\phi_2(\xi)=(1-c)-h(\xi) && \phi_2(\eta)=(1-c)-h(\eta)\\
&\phi_3(\xi)=\frac{1}{2}\left(\xi+c+h(\xi)\right) && \phi_3(\eta)=\frac{1}{2}\left(\eta+c+h(\eta)\right)
\end{aligned}
\tag{۱۳-۴}
$$

در رابطه‌ی (۴-۱۳)، پارامتر مختلط c و توابع مختلط $h(\xi)$ و $h(\eta)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
h(\xi)&=\frac{e^{i\omega(1+\xi)}-2e^{i\omega\xi\,\mathrm{sgn}(\xi)}+e^{i\omega(1-\xi)}}{\left(1-e^{i\omega}\right)\left(3-e^{i\omega}\right)}\\
h(\eta)&=\frac{e^{i\omega(1+\eta)}-2e^{i\omega\eta\,\mathrm{sgn}(\eta)}+e^{i\omega(1-\eta)}}{\left(1-e^{i\omega}\right)\left(3-e^{i\omega}\right)}\\
c&=\frac{2}{3-e^{i\omega}}
\end{aligned}
\tag{۱۴-۴}
$$

در نهایت توابع شکل متناظر با هر گره در المان مختلط فوریه Q9 به صورت زیر حاصل می‌شود [۱۰۱]:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(\xi,\eta)=\phi_1(\xi)\phi_1(\eta)=\frac{1}{4}(-\xi+c+h(\xi))(-\eta+c+h(\eta))\\
&\varphi_2(\xi,\eta)=\phi_1(\xi)\phi_2(\eta)=\frac{1}{2}(-\xi+c+h(\xi))(\overline{c}-h(\eta))\\
&\varphi_3(\xi,\eta)=\phi_1(\xi)\phi_3(\eta)=\frac{1}{4}(-\xi+c+h(\xi))(\eta+c+h(\eta))\\
&\varphi_4(\xi,\eta)=\phi_2(\xi)\phi_1(\eta)=\frac{1}{2}(\overline{c}-h(\xi))(-\eta+c+h(\eta))\\
&\varphi_5(\xi,\eta)=\phi_2(\xi)\phi_2(\eta)=(\overline{c}-h(\xi))(\overline{c}-h(\eta))\\
&\varphi_6(\xi,\eta)=\phi_2(\xi)\phi_3(\eta)=\frac{1}{2}(\overline{c}-h(\xi))(\eta+c+h(\eta))\\
&\varphi_7(\xi,\eta)=\phi_3(\xi)\phi_1(\eta)=\frac{1}{4}(\xi+c+h(\xi))(-\eta+c+h(\eta))\\
&\varphi_8(\xi,\eta)=\phi_3(\xi)\phi_2(\eta)=\frac{1}{2}(\xi+c+h(\xi))(\overline{c}-h(\eta))\\
&\varphi_9(\xi,\eta)=\phi_3(\xi)\phi_3(\eta)=\frac{1}{4}(\xi+c+h(\xi))(\eta+c+h(\eta))
\end{aligned}
\tag{۱۵-۴}
$$

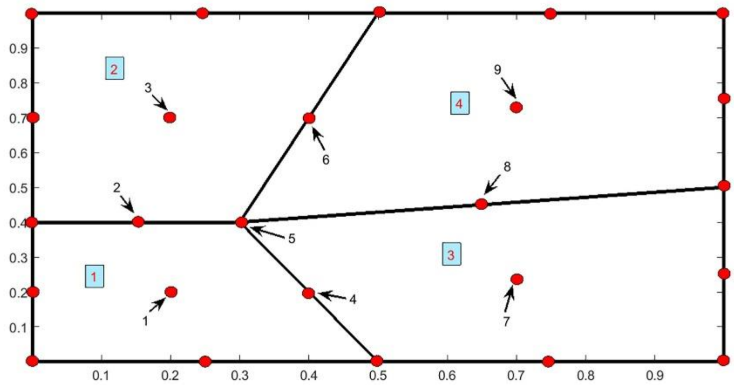
در رابطه‌ی (۴-۱۵)، $\overline{c}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
\overline{c}=1-c \tag{۱۶-۴}
$$

۴-۱-۴- تست وصله[77] در المان مختلط فوریه Q9

۴-۱-۴-۱- تست وصله‌ی جابجایی

به منظور تضمین همگرایی پاسخ در تحلیل اجزای محدود یک سازه لازم است که المان‌هایی که در مدل اجزای محدود آن مسئله استفاده می‌شوند بتوانند تست وصله را ارضا کنند [۱۰۲]. تست وصله براساس ملزومات یک المان در تحلیل اجزای محدود یک سازه طراحی شده است. از آن‌جایی که در یک سازه حرکت جسم صلب و حالت کرنش ثابت امکان وقوع دارد، با استفاده از تست وصله اطمینان حاصل می‌شود که المان بکار گرفته شده در تحلیل اجزای محدود یک سازه قادر است هر دوی این پدیده‌ها را در صورت وقوع شبیه سازی کند. بنابراین اگر یک المان تست وصله را ارضا کند همگرایی جواب قطعی خواهد بود. به منظور کنترل تست وصله در المان صفحه‌ای لاگرانژی ۹ گرهی مختلط فوریه یک کُد اجزای محدود نوشته شد. تست وصله با فرض یک مدل اجزای محدود، متشکل از ۴ المان نامنظم ساخته شده از مواد همگن ایزوتروپیک الاستیک خطی یکسان با حداقل یک گره درون وصله که گره‌های وصله نامیده می‌شوند، همانطور که در شکل زیر نمایش داده شده است، انجام می‌شود. در این مثال همانطور که در شکل زیر ملاحظه می‌شود، ۹ گره وصله وجود دارد.



شکل ۴-۱۷: مثال وصله‌ی ساخته شده از ۴ المان چهار وجهی مختلط فوریه Q9 مورد استفاده برای تست وصله‌ی جابجایی [۱۰۲]

---
[77] Patch test

حرکت جسم صلب به سه صورت ممکن است اتفاق بیفتد که عبارتند از انتقال در راستای X ، انتقال در راستای Y و انتقال قطری در جهت $X-Y$ که در هر سه این حالات نباید کرنشی در المان‌ها به وجود بیاید. به منظور بررسی حرکت جسم صلب به صورت انتقال در راستای X در المان‌های مختلط فوریه، جابجایی گرهی در تمام گره‌های مرزی در راستای X برابر یک و در راستای Y برابر صفر قرار داده شد به علاوه مقدار نیروهای گرهی در هر دو راستای X و Y در تمامی گره‌ها برابر صفر قرار داده شد. سپس معادلات اجزای محدود برای جابجایی گره‌های درون وصله با استفاده از روش سختی حل شد. پس از حل، مقدار جابجایی گرهی در گره‌های وصله در راستای X برابر یک و در راستای Y برابر صفر بدست آمد که نشان‌دهنده‌ی آنست که المان‌های مختلط فوریه انتقال در راستای X را در حرکت جسم صلب، به خوبی مدل می‌کنند. به منظور بررسی حرکت جسم صلب به صورت انتقال در راستای Y در المان‌های مختلط فوریه روند پیشین تکرار شد با این تفاوت که جابجایی گرهی در تمام گره‌های مرزی در راستای X برابر صفر و در راستای Y برابر یک قرار داده شد. پس از حل معادلات اجزای محدود، مقدار جابجایی گرهی در گره‌های درون وصله در راستای X برابر صفر و در راستای Y برابر یک بدست آمد. براساس این نتایج می‌توان نتیجه گرفت که المان‌های مختلط فوریه توانایی نمایش انتقال در راستای Y در حرکت جسم صلب را نیز دارند. با قرار دادن مقدار واحد برای جابجایی گرهی در تمام گره‌های مرزی در در هر دو راستای X و Y و تکرار روند توضیح داده شده، جابجایی گرهی در گره‌های وصله در هر دو راستای X و Y برابر یک بدست آمد که مُبیّن آنست که حرکت جسم صلب به صورت قطری را نیز المان‌های مختلط فوریه به خوبی نمایش می‌دهند. به علاوه در هر سه مرحله، کرنش در هر چهار المان محاسبه شد و تمامی مولفه‌های کرنش در تمامی المان‌ها صفر بدست آمد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که المان‌های مختلط فوریه قادرند حرکت جسم صلب را نمایش دهند.

به منظور بررسی توانایی المان‌های مختلط فوریه Q9 در نمایش حالت کرنش ثابت به صورت زیر عمل شد:

براساس تعریف کرنش در تغییر مکان های کوچک که همان مشتق جابجایی است، شرایط کرنش ثابت زمانی حاصل می‌شود که تابع میدان جابجایی به‌صورت چند جمله‌ای خطی باشد. بنابراین به منظور اینکه مولفه‌ی نرمال کرنش در راستای X مقداری ثابت مثلاً واحد باشد،یعنی:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \gamma_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \qquad (۱۷-۴)$$

بایستی میدان جایجایی در راستای X و Y بایستی به‌صورت زیر تعریف شود:

$$u(x) = x \quad , \quad v(x) = 0 \qquad (۱۸-۴)$$

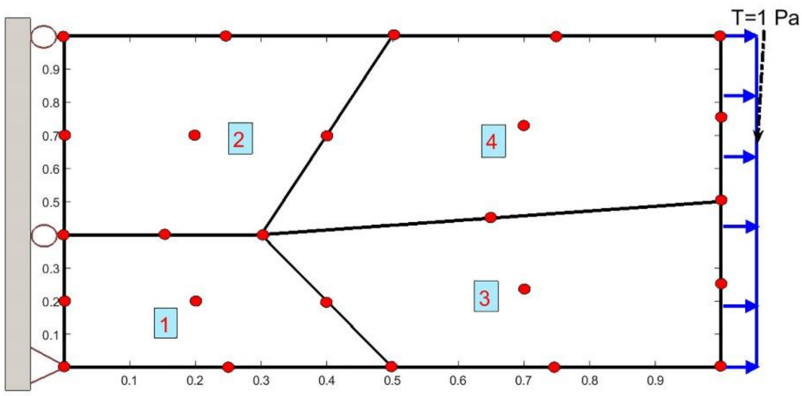
به طور مشابه شرط مولفه‌ی نرمال کرنش در راستای Y مقداری ثابت مثلاً واحد، زمانی اتفاق می‌افتد که $u(y) = 0, v(y) = y$ ، به همین صورت شرط مولفه‌ی برشی کرنش ثابت منجر به میدان جابجایی به‌صورت $u(y) = y, v(x) = x$ می‌شود.

با توجه به آنچه گفته شد، به منظور بررسی شرط کرنش ثابت برای ε_x ، در کُد تهیه شده مقادیر مولفه‌های جابجایی در گره‌های مرزی در راستای X برابر مختصات این گره‌ها در راستای X و در راستای Y برابر صفر قرار داده شد. پس از حل، مقدار مولفه‌های جابجایی گرهی در گره‌های داخلی در راستای X برابر مختصات این گره‌ها در راستای X و در راستای Y برابر صفر بدست آمد. پس می‌توان نتیجه گرفت که المان‌های مختلط فوریه شرط کرنش ثابت را برای ε_x به خوبی نمایش می‌دهند. روند مشابهی به منظور بررسی شرط کرنش ثابت برای ε_y و γ_{xy} تکرار شد که منجر به نتایج مطلوب در گره‌های داخلی وصله شد. بنابراین در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که المان‌های مختلط فوریه Q9 حالت کرنش ثابت را مدل می‌کنند.

۴-۱-۴-۲- تست وصله نیرو

تست وصله نیرو تضمین می‌کند که خطاهای مرتبط با بارهای وارده در تحلیل اجزای محدود با استفاده از المان‌های مختلط فوریه اتفاق نمی‌افتد. کُد اجزای محدود نوشته شده می‌تواند علاوه بر تست وصله

جابجایی، تست وصله نیرو را نیز برای المان‌های مختلط فوریه Q9 انجام دهد. به منظور انجام تست وصله نیرو یک مسئله تنش صفحه‌ای ساخته شده از یک ماده‌ی ایزوتروپیک همگن الاستیک خطی که در شکل ۴-۱۸ زیر نمایش داده شده است، در نظر گرفته شد. همانطور که در شکل ۴-۱۸ نشان داده شده است، فرض می‌شود که وجه سمت راست وصله تحت تنش یکنواخت قرار دارد در حالیکه تکیه‌گاه کافی در وجه سمت چپ وصله پیش‌بینی شده است تا از حرکت جسم صلب جلوگیری شود. با حل معادلات اجزای محدود با استفاده از روش سختی، جابجایی‌های گرهی و سپس مولفه‌های تنش در هر المان بدست آمد. نتایج حاصل نشان داد که مقدار تنش در هر المان با تنش یکنواخت وارده بر وجه سمت راست وصله برابر است، در حالی که سایر مولفه‌های تنش در المان‌ها صفر است. شایان ذکر است که این نتایج مستقل از پارامتر شکل است و برای هر مقدار دلخواه پارامتر شکل برقرار است.



شکل ۴-۱۸: وصله‌ی متشکل از ۴ المان مختلط فوریه Q9 استفاده شده برای تست وصله نیرو [۱۰۲]

در نتیجه المان مختلط فوریه Q9 تست وصله را برآورده می‌کند، بنابراین، این المانِ پیشنهادی دارای خصوصیات زیر است:

۱. المان مختلط فوریه Q9 می‌تواند حرکت جسم صلب بدون کرنش را پیش بینی کند.

۲. این المان قادر است حالت کرنش ثابت را در صورت وقوع پیش‌بینی کند.

۳. سازگاری بین المان‌های مجاور در حالت کرنش ثابت وجود دارد.

از آنجایی که این الزامات توسط المان مختلط فوریه Q9 برآورده شد، می‌توان ضمانت کرد که هر مِش متشکل از المان‌های مختلط فوریه Q9 با ریز شدن‌های متوالی حتماً به سمت پاسخ مسئله همگرا خواهد شد. بنابراین المان‌های مورد بحث خصوصیات ضروری برای همگرایی به پاسخ را دارا هستند.

۴-۲- پارامتر شکل

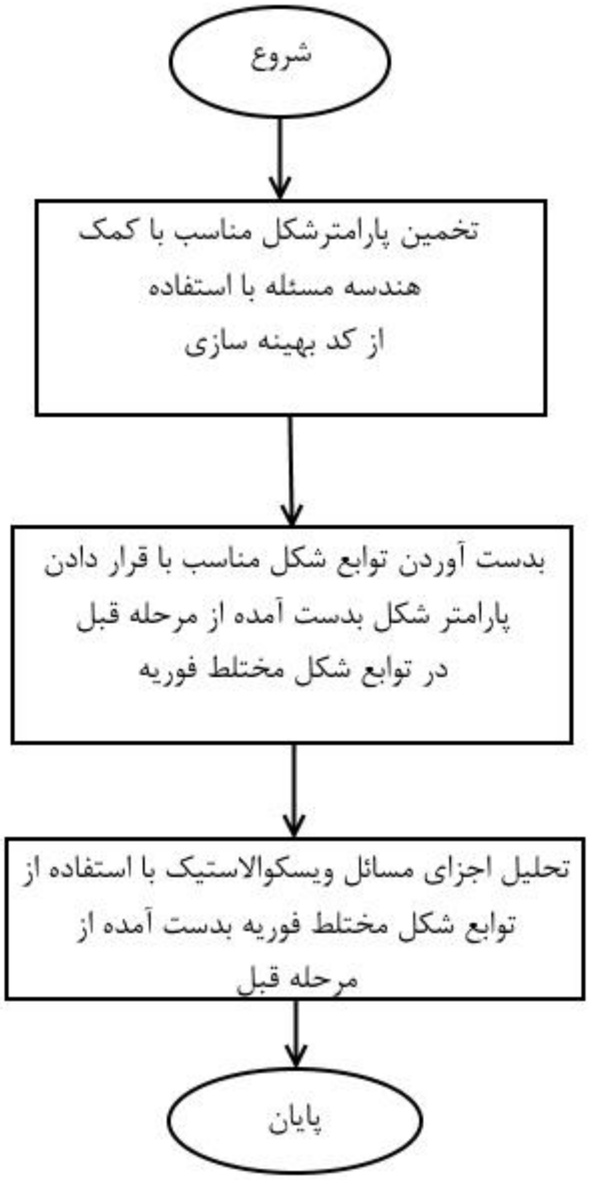
با نگاهی به منابع علمی می‌توان دریافت که توابع پایه شعاعی معمولاً دارای تعدادی پارامتر شکل هستند، که این تعداد برای توابع پایه شعاعی مختلف بین یک تا چهار متغیر است [۷۶]. بطور کلی در بحث بازتولید یک منحنی یا سطح از طریق نقاط محدود داده شده بر روی آن، با استفاده از یک تابع پایه شعاعی مشخص که دارای تعدادی پارامتر شکل است، استفاده از این پارامترهای شکل متغیر می‌تواند دقت نتایج تقریب را بطور قابل توجهی افزایش دهد. بطور مشابه، در تقریب پاسخ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، پارامتر شکل معمولا اعداد ثابت نامشخصی را نمایندگی می‌کنند که به منظور افزایش دقت توابع پایه شعاعی در یک مسئله‌ی مشخص بکار گرفته می‌شوند. به بیان دیگر، برای یک تابع پایه شعاعی مشخص که در حل یک مسئله استفاده شده است، مناسب‌ترین مقدار پارامتر شکل براساس نوع تحلیل، بارهای وارده و غیره، تغییر خواهد کرد. این بدین معناست که کاربران توابع پایه شعاعی همواره به دنبال مقدار پارامتر شکل مشخصی هستند که بهترین پاسخ را برای مسئله مورد نظرشان به ارمغان بیاورد. بنابراین پارامتر شکل مناسب برای یک مسئله‌ی مشخص معمولاً با روش آزمون و خطا انتخاب می‌شود. یک روش جایگزین برای پیدا کردن مقدار مناسب پارامتر شکل در توابع پایه شعاعی، تعریف یک مسئله‌ی بهینه‌سازی است که پاسخ دقیق مسئله مورد نظر در صورت وجود به عنوان هدف مسئله‌ی بهینه سازی در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که برای بسیاری مسائل کاربردی مهندسی پاسخ دقیق مسئله موجود نیست، استفاده از این روش برای یافتن پارامتر شکل مناسب به مسائل بسیار کمی محدود می‌شود [۷۶].

در این رساله به منظور بهره گیری از انتگرال گیریِ عددی گاوسی از فرمولاسیون ایزوپارامتریک اجزای محدود در کُدهای نوشته شده، استفاده شده است. براساس تعریف، در فرمولاسیون ایزوپارامتریک[۷۸] به منظور تعریف هندسه المان و همینطور تخمین جابجایی درون المان از توابع شکل یکسان استفاده می‌شود.

در این رساله به منظور تخمین مقدار مناسب پارامتر شکل موجود در توابع شکل مختلط فوریه برای هر مسئله‌ی مشخص، براساس تجربه نویسنده پیشنهاد می‌شود که یک مسئله بهینه سازی[۷۹] تعریف شود که هدف آن بهترین تخمین هندسه مسئله با کمک المان مختلط فوریه است. برای این منظور یک کُد بهینه سازی با استفاده از روش بهینه‌سازی ازدحام ذرات نوشته شد تا پارامترهای شکل مناسب را تعیین کند. به این ترتیب در روش پیشنهادی، پیش از حل اجزای محدود مسئله، به منظور تخمین مقدار مناسب پارامتر شکل در توابع شکل پیشنهادی بایستی یک مسئله بهینه‌سازی حل شود. فرآیند بهینه‌سازی با تولید یک سری نقطه بر روی مرز هندسه‌ی مسئله انجام می‌شود. تابع هدف، خطای تخمین هندسه‌ی مسئله با استفاده از یک المان مختلط فوریه Q9 دو بعدی است که به صورت $Error=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\left(x_i-\overline{x}_i\right)^2+\left(y_i-\overline{y}_i\right)^2}$ تعریف می‌شود. در این رابطه، n تعداد نقاط در نظر گرفته شده بر روی مرز هندسه‌ی مسئله است. $\left(x_i,y_i\right)$ مختصات دقیق نقطه‌ی i-ام روی مرز هندسه‌ی مسئله است که با استفاده از معادله‌ی اضلاع هندسه‌ی مسئله بدست می‌آید. $\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)$مختصات نقطه‌ی i-ام روی مرز هندسه‌ی مسئله است که با استفاده از بازتولید هندسه‌ی مسئله با استفاده از یک المان مختلط فوریه دو بعدی برای یک مقدار مشخص پارامتر شکل ω بدست می‌آید. بر این اساس پارامتر شکل ω می‌بایست به نحوی تعیین شود که تابع هدف خطا $Error$ کمینه[۸۰] شود. سپس با قرار دادن پارامتر شکل بدست آمده از کُد بهینه‌سازی در توابع شکل مختلط فوریه، از این توابع شکل در تحلیل اجزای

[78] Isoparametric
[79] Optimization
[80] Minimum

محدود مسائل ویسکوالاستیک استفاده خواهد شد. در شکل ۴-۱۹ فلوچارت روش پیشنهادی برای محاسبه پارامتر شکل نمایش داده شده است.



شکل ۴-۱۹: فلوچارت روش پیشنهادی برای تعیین پارامتر شکل در المان چهاروجهی صفحه‌ای مختلط فوریه

۴-۳- استفاده از المان‌های مختلط فوریه در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیسیته

۴-۳-۱- مقدمه

در این بخش به منظور بررسی توانمندی المان‌های مختلط فوریه Q9 در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیسیته خطی، چند مثال حل خواهد شد و حداقل تعداد المان‌های لازم برای همگرایی[81] به پاسخ قابل قبول مسئله بدست آمده است. در تمامی این مثال‌ها از فرمولاسیون اجزای محدود پیشنهادی زوکر و همکاران که در فصل دوم بطور کامل توضیح داده شد، استفاده شده است. پاسخ تحلیلی برای برخی از این مثال‌ها وجود دارد. در مثال‌هایی که دارای پاسخ تحلیلی هستند این پاسخ به عنوان پاسخ قابل قبول در نظر گرفته شده است. برای مسائلی که پاسخ تحلیلی موجود ندارند از نرم افزار تجاری آباکوس[82] برای بدست آوردن پاسخ قابل قبول استفاده شده است. سپس حداقل تعداد المان‌های مختلط فوریه مورد نیاز با حداقل تعداد المان‌های کلاسیک همتای آن‌ها برای همگرایی به این پاسخ مقایسه شده است. همینطور زمان لازم برای تحلیل اجزای محدود هر مسئله در یک رایانه‌ی شخصی واحد با استفاده از المان‌های مختلط فوریه با المان‌های کلاسیک لاگرانژی مقایسه شده است و به صورت یک نسبت بیان شده است. شایان ذکر است که نرم افزار تجاری آباکوس برای تحلیل مسائل ویسکوالاستیسیته از فرمولاسیون پیشنهادی زوکر و همکاران استفاده نمی‌کند. در مرجع [۱۰۳] این رساله فرمولاسیون اجزای محدود استفاده شده توسط این نرم افزار برای حل مسائل ویسکوالاستیسیته بطور خلاصه بیان شده است.

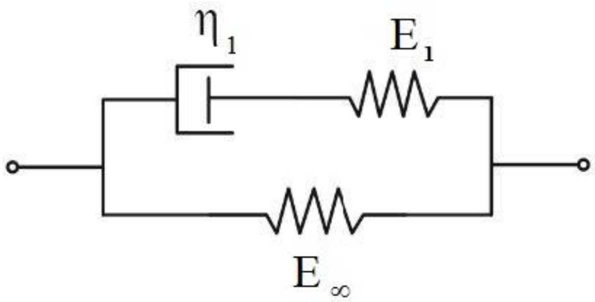
[81] Convergence

[82] ABAQUS

در کلیه‌ی مثال‌ها فرض شده است که سازه‌ها از سیستم ماده‌ی همگن ایزوتوپیک ویسکوالاستیک خطی یکسانی ساخته شده‌اند. مدول استراحت تک محوری سیستم ماده‌ی مورد استفاده از رابطه‌ی (۴-۱۹) بدست می‌آید:

$$E(t) = E_{\infty} + E_1 e^{\frac{-t}{\rho_1}} \tag{۴-۱۹}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۹)، $E(t)$ مدول استراحت در لحظه‌ی t و $\rho_1 = \frac{\eta_1}{E_1}$ زمان استراحت المان اول ماکسول است که برابر یک در نظر گرفته شده است. ثابت فنر E_1 و ضریب میرایی η_1 در میراگر در المان اول ماکسول برابر ۰/۴ و ثابت فنر موازیِ تنها E_{∞} برابر ۰/۱ فرض شده است. شایان ذکر است که مدول استراحت سیستم ماده‌ی مورد نظر به فُرم جامد خطی استاندارد است که همان مدل ویچرت است که از یک المان ماکسول و یک المان فنر تنها بطور موازی تشکیل شده است که در شکل ۴-۲۰ نمایش داده شده است. نسبت پوآسون ماده‌ی مورد نظر ثابت و برابر ۰/۳ فرض شده است. در جدول ۴-۲ ثوابت ماتریس ویسکوالاستیسیته برای مدل ویچرت ماده‌ی مورد نظر آورده شده است.



شکل ۴-۲۰: مدل جامد خطی استاندارد (SLS)

جدول ۴-۲: ثوابت ویچرت برای مدل ماده‌ی فرض شده [۱۰]

ثوابت ماده	ij	k	C_{ij_k}	η_{ij_k}
	۳۳،۲۲،۱۱	∞	۱۳۴۶۱۵	----
		۱	۵۳۸۴۶۲	۵۳۸۴۶۲
	۶۶،۵۵،۴۴	∞	۳۸۴۶۲	----
		۱	۱۵۳۸۴۶	۱۵۳۸۴۶
	۲۳،۱۳،۱۲	∞	۵۷۶۹۲	----
		۱	۲۳۰۷۶۹	۲۳۰۷۶۹

۴-۳-۲- مثال اول: تیر طُرّه[۸۳] تحت بار متمرکز در نوک آن

یک تیر طره با طول L برابر ۲۰ متر و ارتفاع D برابر یک متر همانطور که در شکل ۴-۲۱ نمایش داده شده است، به عنوان مثال اول در نظر گرفته شده است. ضخامت تیر برابر واحد فرض شده است، بنابراین می‌توان این مسئله را به صورت یک مسئله‌ی تنش صفحه‌ای در نظر گرفت. این تیر تحت یک بار متمرکز در نوک آن قرار دارد که با رابطه‌ی (۴-۲۰) تعریف می‌شود:

$$P = P_0\left[H(t) - H(t-t_1)\right]; \quad 0 \le t \le 40\,\mathrm{s} \tag{۲۰-۴}$$

$H(t)$ تابع هویساید است. در رابطه‌ی (۴-۲۰)، $P_0 = 1\mathrm{N}$ و $t_1 = 10\mathrm{s}$ می‌باشد. هدف بدست آوردن جابجایی w_L در نوک تیر است. این شرایط بارگذاری مشابه تست خزش و ریکاوری[۸۴] است، با این تفاوت که تنش و کرنش نسبت به مکان تغییر می‌کنند. با اعمال اصل تطابق بر پاسخ الاستیک برای خیز نوک تیر که به راحتی در مقاومت مصالح بدست آمده است، پاسخ تحلیلی برای این مسئله بدست می‌آید [۳، ۴]. با استفاده از این اصل، رابطه‌ی (۴-۲۱) برای جابجایی نوک تیر بدست می‌آید:

$$w_L = \frac{P_0 L^3}{3I}\left[D(t) - D(t-t_1)H(t-t_1)\right] \tag{۲۱-۴}$$

---
[83] Cantilevered Beam
[84] Recovery

در رابطه‌ی (۴-۲۱)، I ممان اینرسی[85] مقطع تیر و $D(t)$ مدول خزش می‌باشد. مدول خزش را به راحتی می‌توان از بیان سری پرونیِ مدول استراحت بدست آورد که به صورت رابطه‌ی (۴-۲۲) حاصل می‌شود:

$$D(t) = D_0 + D_1\left(1 - e^{\frac{-t}{\lambda_1}}\right) \qquad (۴\text{-}۲۲)$$

در رابطه‌ی (۴-۲۲):

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{E_0}, \quad E_0 = E_\infty + E_1, \\ D_1 &= \left(\frac{1}{E_\infty} - \frac{1}{E_0}\right), \quad \lambda_1 = \frac{E_0\,\rho_1}{E_\infty} \end{aligned} \qquad (۴\text{-}۲۳)$$

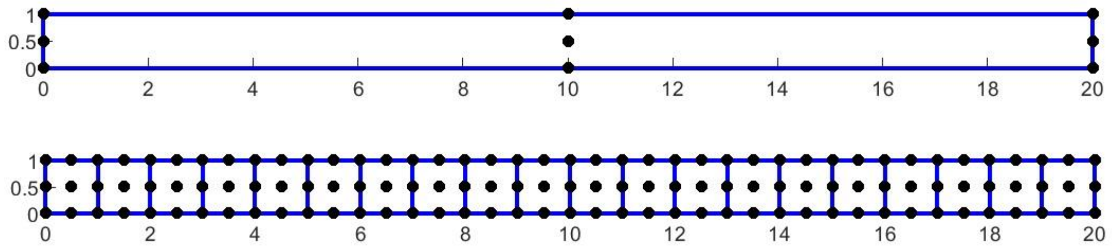
شایان ذکر است که علیرغم اینکه پاسخ مقاومت مصالح استفاده شده برای حل الاستیک مسئله دقیق نیست، اما می‌توان آن را برای یک تیر با نسبت ابعاد ۱:۲۰ به عنوان یک تقریب بسیار خوب از پاسخ دقیق پذیرفت.

شکل ۴-۲۱: هندسه تیر طره‌ی مثال اول [۱۰]

مِش‌های متشکل از المان‌های Q9 استفاده شده در حل المان محدود این مسئله در شکل ۴-۲۲ نمایش داده شده است. در شکل ۴-۲۳ نتایج تحلیلی با نتایج اجزای محدود مقایسه شده است. همینطور در شکل ۴-۲۳ نتایج اجزای محدود در صورت استفاده از یک المان مختلط فوریه Q9 و یک و بیست المان کلاسیک لاگرانژی Q9 نشان داده شده است. حداقل تعداد المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 مورد نیاز برای همگرایی به جواب تحلیلی در این مثال، ۲۰ المان است. با توجه به شکل ۴-۲۳ کاملاً

[85] Moment of inertia

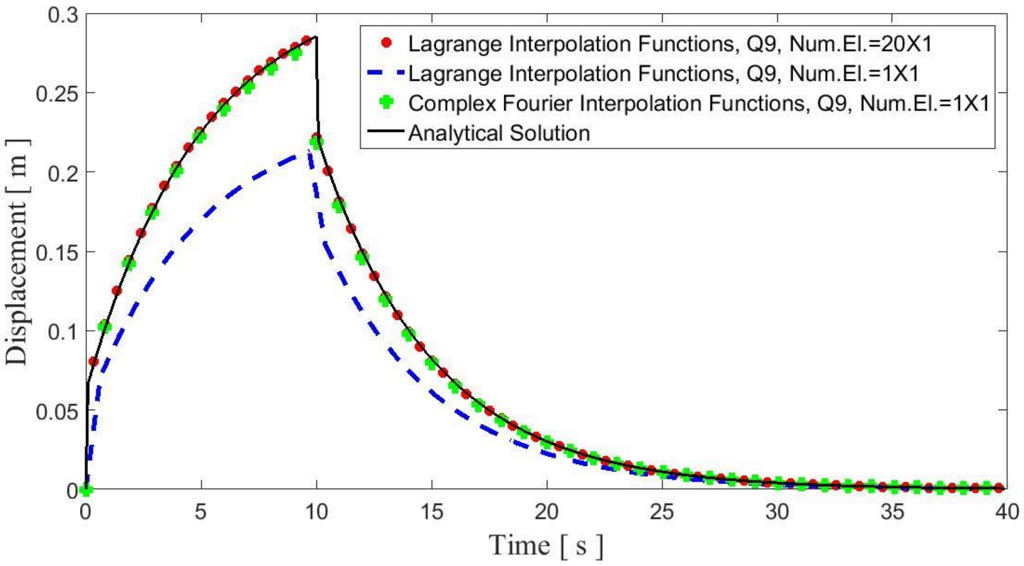
مشخص است که تعداد المان‌های مورد نیاز برای همگرایی به جواب تحلیلی با استفاده از توابع شکل مختلط فوریه ۰/۰۵ توابع شکل کلاسیک لاگرانژی است. این مطلب را می‌توان به توانمندی توابع شکل مختلط فوریه نسبت داد. در جدول ۴-۳ جابجایی نوک تیر در لحظه‌ی $t = 10\mathrm{s}$ با استفاده از دو مش مختلف متشکل از یک و بیست المان کلاسیک لاگرانژی Q9 و مش متشکل از یک المان مختلط فوریه Q9 با مقدار جواب تحلیلی به صورت کَمّی مقایسه شده است.



شکل ۴-۲۲: مش‌های اجزای محدود Q9 استفاده شده در حل مثال اول

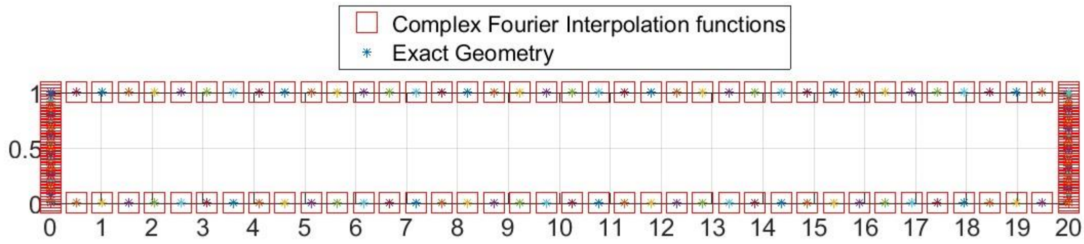
جدول ۴-۳: مقایسه‌ی جابجایی عمودی نوک تیر در لحظه‌ی $t = 10\mathrm{s}$ در مثال اول

حالت	تعداد گره	تعداد المان	نوع المان	خیز نوک تیر mm (خطا٪)
۱	۹	۱	کلاسیک لاگرانژی	۲۱۴/۸ (۲۴/۷۲۴)
۲	۱۲۳	۲۰	کلاسیک لاگرانژی	۲۸۵/۹ (۰/۱۹۳)
۳	۹	۱	مختلط فوریه	۲۸۱/۹ (۱/۲۰۹)
حل تحلیلی				۲۸۵/۳۵



شکل ۴-۲۳: نتایج تحلیلی و نتایج اجزای محدود با استفاده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی و مختلط فوریه Q9 برای مثال تیر طره (جابجایی نوک تیر)

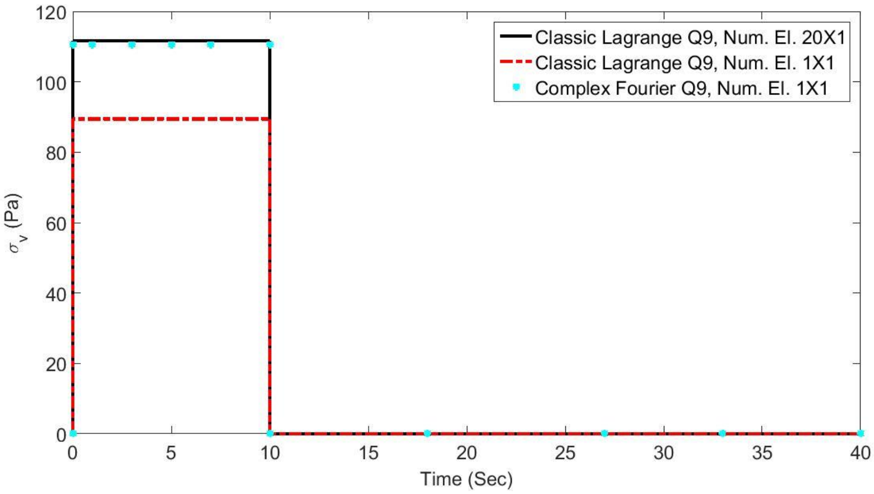
همانطور که در جدول ۴-۳ ملاحظه می‌شود، مقدار پاسخ اجزای محدود حاصل از مش درشت تشکیل شده از تنها یک المان مختلط فوریه تطابق بسیار خوبی با مقدار پاسخ تحلیلی دارد. در این مثال مقدار پارامتر شکل برای المان مختلط فوریه Q9 با استفاده از تقریب هندسه مسئله، همانطور که در بخش ۴-۲ توضیح داده شد، برابر $\omega = -9i$ بدست آمد (شکل ۴-۲۴). در این مثال، گام زمانی Δt برابر ۰/۱ ثانیه در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است که نسبت زمان حل کُد اجزای محدود با بکارگیری یک کامپیوتر شخصی واحد برای بدست آوردن جواب قابل قبول با استفاده از المان کلاسیک لاگرانژی به المان مختلط فوریه ۱۰/۶۹ بدست آمد که نشان دهنده‌ی آنست که استفاده از المان‌های مختلط فوریه نسبت به المان‌های کلاسیک لاگرانژی از نظر هزینه محاسباتی بطور قابل توجهی مقرون به صرفه است حتی با وجود اینکه پیش از حل اجزای محدود بایستی پارامتر شکل مناسب تخمین زده شود.



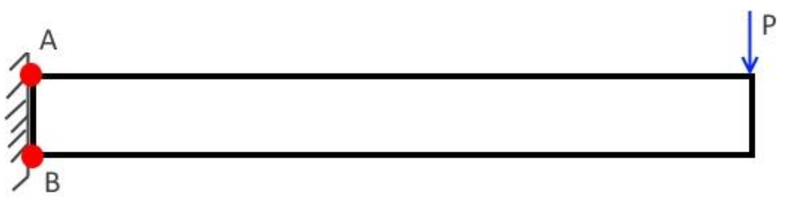
شکل ۴-۲۴: هندسه‌ی دقیق و تقریب هندسه‌ی مثال تیر طره با استفاده از المان مختلط فوریه با پارامتر شکل

$$\omega = -9i$$

در شکل ۴-۲۵ تنش فون مایسز[۸۶] حاصل از مش‌های نمایش داده شده در شکل ۴-۲۲ در گره‌های B,A مقایسه شده است. گره‌های B,A در شکل ۴-۲۶ مشخص شده است.



شکل ۴-۲۵: مقایسه تنش فون مایسز در مثال اول با استفاده از مش‌های نمایش داده شده در شکل ۴-۲۲



شکل ۴-۲۶: نمایش گره‌های B,A در مثال اول

[86] Von Mises

۴-۳-۳- مثال دوم: مخزن تحت فشار مُحاط با یک قاب صلب[87]

مثال دوم مورد انتخاب که هندسه‌ی آن در شکل ۴-۲۷ نمایش داده شده است، عبارت است از یک مخزن استوانه‌ای طویل ویسکوالاستیک تحت فشار داخلیِ یکنواخت P که در یک پوسته‌ی با سختی بی‌نهایت قرار گرفته است [۱۰]. شکل ۴-۲۷ نمایش دهنده‌ی موتور پیشرانه جامد یک موشک[88] است که در آن سیلندر ویسکوالاستیک نشان دهنده‌ی سوخت و پوسته‌ی سخت نشان دهنده‌ی قاب موتور موشک است. هندسه‌ی مسئله به گونه‌ای است که می‌توان آن را یک مسئله کرنش صفحه‌ای فرض کرد. فشار داخلی P به مانند تست خزش با یک بار پله‌ای[89] تعریف می‌شود که بیان ریاضی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = P_0 H(t); \quad 0 \le t \le 40\,\mathrm{s} \qquad (۴\text{-}۲۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۲۴)، $H(t)$ تابع هویساید و P_0 بزرگای بار پله‌ای وارده است. پاسخ تحلیلی این مسئله با کمک اصل تطابق ویسکوالاستیک بدست می‌آید. پاسخ تحلیلی برای جابجایی شعاعی[90] u_r با استفاده از این اصل به صورت رابطه‌ی (۴-۲۵) بدست می‌آید [۴-۸]:

$$u_r(r,t) = \frac{P_0\, a^2 b (1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{a^2 + (1-2\upsilon) b^2} \left(\frac{b}{r} - \frac{r}{b} \right) D(t) \qquad (۴\text{-}۲۵)$$

برای مسئله مورد نظر مقادیر کَمّی مرتبط با هندسه و بارگذاری به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\begin{aligned} &a = 2\,\mathrm{m}, \quad b = 4\,\mathrm{m} \\ &P_0 = 100\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \qquad (۴\text{-}۲۶)$$

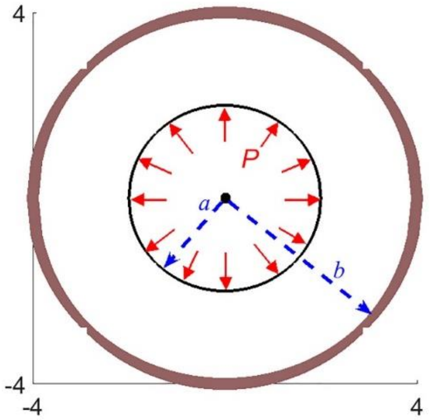
---

87 Encased cylinder

88 Solid propellant rocket motor

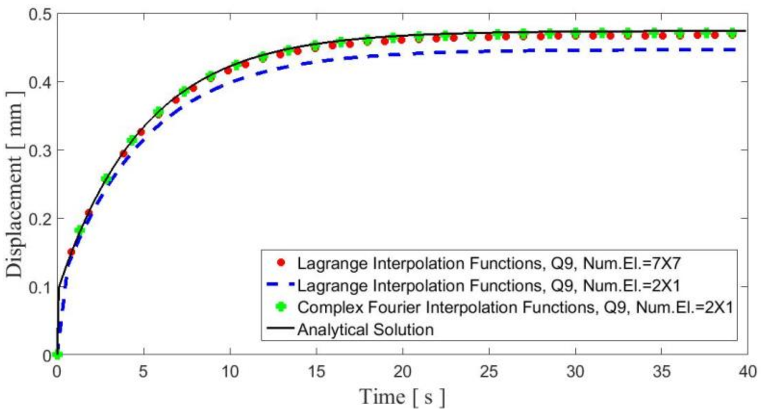
89 Unit step load

90 Radial displacement



شکل ۴-۲۷: هندسه و بارگذاریِ مخزن تحت فشار مثال دوم [۱۰]

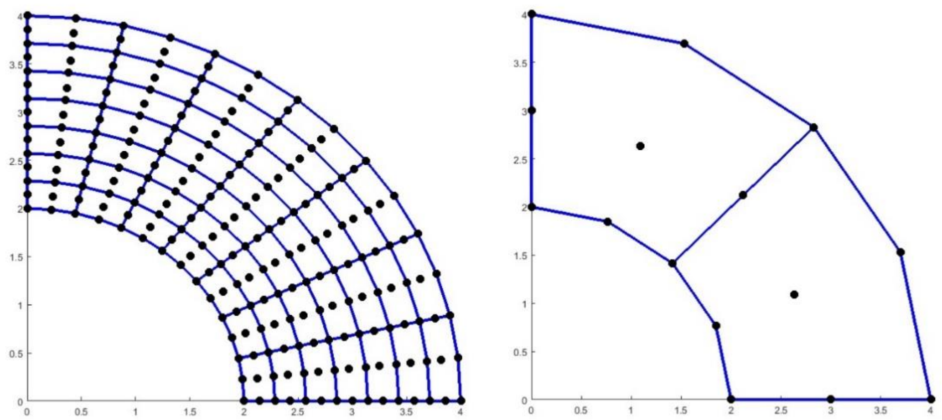
نتایج تحلیلی و اجزای محدود برای جابجایی شعاعی یک نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی سیلندر در شکل ۴-۲۸ نمایش داده شده است. به علاوه در شکل ۴-۲۸ نتایج اجزای محدود با استفاده از دو نوع مش از المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 با المان‌های مختلط فوریه Q9 پیشنهادی مقایسه شده است.



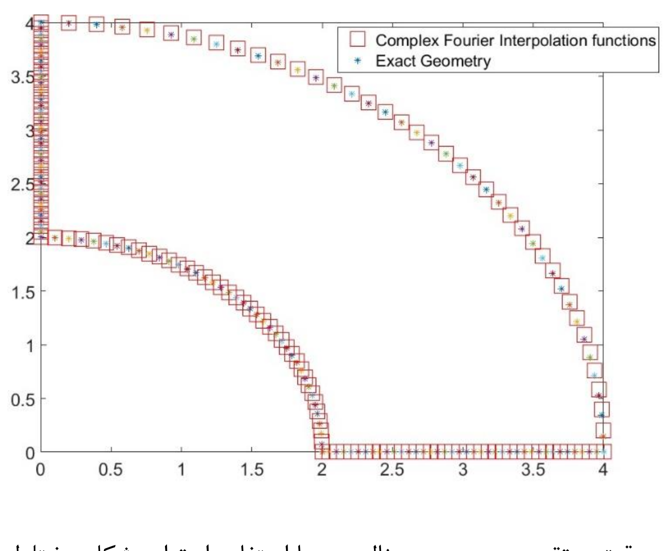
شکل ۴-۲۸: مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و نتایج اجزای محدود با استفاده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی و مختلط فوریه برای مثال دوم (جابجایی شعاعی یک نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی مخزن تحت فشار)

مش‌های استفاده شده در این مثال در شکل ۴-۲۹ نشان داده شده است. با بهره‌گیری از تقارن مسئله، می‌توان تنها رُبع مسئله را مُدل کرد. حداقل تعداد المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 مورد نیاز برای همگرایی پاسخ اجزای محدود به پاسخ تحلیلی ۴۹ المان بدست آمد در حالی که با استفاده از تنها دو المان مختلط فوریه Q9 پاسخ اجزای محدود به پاسخ تحلیلی همگرا شد. در تست خزش حداکثر مقدار

جابجایی در انتهای زمان بارگذاری اتفاق می‌افتد. در جدول ۴-۴ حداکثر مقدار جابجایی شعاعی یک نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی سیلندر در لحظه‌ی $t = 40\text{s}$، حاصل از تحلیل اجزای محدود با استفاده از ۴۹ المان کلاسیک لاگرانژی با نتایج حاصل از ۲ المان مختلط فوریه و کلاسیک لاگرانژی مقایسه شده است. در محاسبات اجزای محدود گام زمانی Δt مانند مثال قبل برابر ۰/۱ ثانیه در نظر گرفته شده است. پارامتر شکل در این مثال با استفاده از تخمین هندسه‌ی مسئله با المان مختلط فوریه برابر $\omega = -1.66i - 0.65$ در نظر گرفته شده است. در شکل ۴-۳۰ هندسه‌ی واقعی مسئله با تخمین هندسه‌ی مسئله با کمک المان مختلط فوریه با پارامتر شکل $\omega = -1.66i - 0.65$ مقایسه شده است.



شکل ۴-۲۹: مش‌های اجزای محدود Q9 استفاده شده در حل مثال دوم



شکل ۴-۳۰: هندسه‌ی دقیق و تقریب هندسه‌ی مثال دوم با استفاده از توابع شکل مختلط فوریه با پارامتر شکل

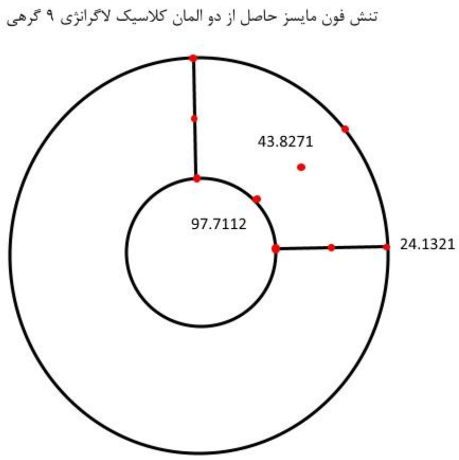
$\omega = -1.66i - 0.65$

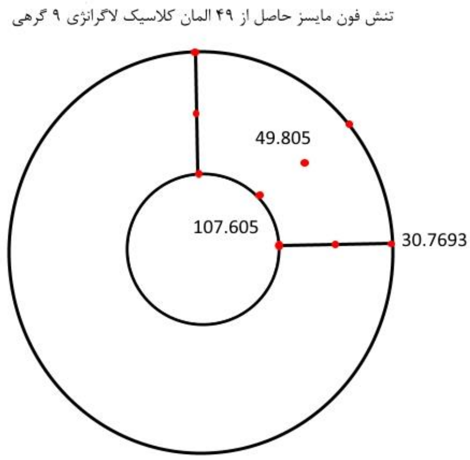
همانطور که در شکل ۴-۲۸ نمایش داده شده است نتایج اجزای محدود حاصل از المان‌های مختلط فوریه پیشنهادی تطابق بسیار خوبی با پاسخ تحلیلی دارد با وجود آنکه در این تحلیل از مش درشتی متشکل از ۲ المان استفاده شده است. از آن جایی که با بکارگیری المان مختلط فوریه در تحلیل اجزای محدود برای رسیدن به پاسخ قابل قبول به تعداد المان‌های به مراتب کمتری نسبت به المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 نیاز است، بدیهی است که زمان اجرای برنامه نیز بسیار کمتر خواهد بود و بطور قابل توجهی در هزینه‌ی محاسباتی صرفه‌جویی می‌شود. برای رسیدن به پاسخ قابل قبول مسئله، نسبت زمان اجرای کُد اجزای محدود تهیه شده در یک کامپیوتر شخصیِ واحد برای المان کلاسیک لاگرانژی Q9 به المان مختلط فوریه متناظرش ۱۰/۵۱ بدست آمد.

جدول ۴-۴: مقایسه جابجایی شعاعی هر نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی سیلندر در لحظه‌ی $t = 40\text{s}$

حالت	تعداد گره	تعداد المان	نوع المان	جابجایی شعاعی $@r = 3\text{mm}$ (خطا٪)
۱	۱۵	۲	کلاسیک لاگرانژی	(۴/۳۳)۰/۴۴۶۳
۲	۲۲۵	۴۹	کلاسیک لاگرانژی	(۰/۲۱)۰/۴۶۷۵
۳	۱۵	۲	مختلط فوریه	(۱/۲۲)۰/۴۷۲۲
حل تحلیلی				۰/۴۶۶۵

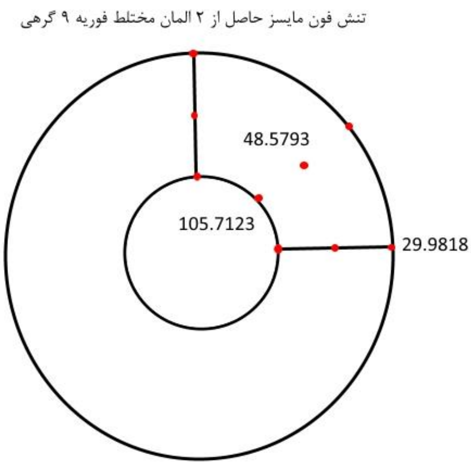
در شکل ۴-۳۱ کانتور تنش فون مایسز در لحظه‌ی t که بصورت $0 < t \le 40\text{s}$ تعریف می‌شود، حاصل از مش‌های نمایش داده شده در شکل ۴- ۲۹ متشکل از المان‌های کلاسیک لاگرانژی نمایش داده شده است.





شکل ۴-۳۱: کانتور تنش فون مایسز با استفاده از دو و ۴۹ المان کلاسیک لاگرانژی Q9

همینطور در شکل ۴-۳۲ کانتور تنش فون مایسز در لحظه‌ی t حاصل از دو المان مختلط فوریه نشان داده شده است.



شکل ۴-۳۲: کانتور تنش فون مایسز با استفاده از دو المان مختلط فوریه Q9

۴-۳-۴- مثال سوم: پوسته‌ی بیضوی شکل[91] تحت فشار خارجیِ برون‌سو

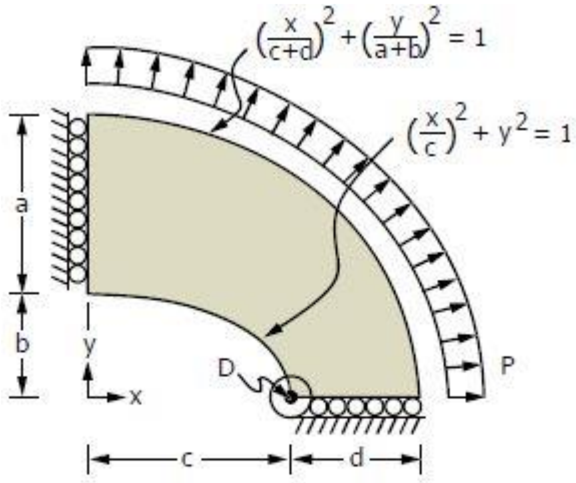
یک پوسته‌ی بیضوی شکل ویسکوالاستیک با ضخامت h که تحت یک فشار گسترده‌ی یکنواخت برون‌سو در سطح خارجی خود قرار دارد به عنوان مثال سوم در نظر گرفته شده است. به دلیل تقارن

[91] Elliptic membrane

می‌توان تنها یک چهارم این سازه را مدل کرد که در شکل ۴-۳۳ نمایش داده شده است. فشار برون‌سوی وارده بر سطح خارجی این سازه از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\mathrm{P} = P_0\left[H(t)-H(t-t_1)\right]; \quad 0 \le t \le 30\,\mathrm{s}; \quad t_1 = 10\,\mathrm{s} \tag{۴-۲۷}$$

این مسئله را می‌توان به عنوان یک مسئله‌ی تنش صفحه‌ای در نظر گرفت. در حل اجزای محدود این مثال گام زمانی Δt برابر ۰/۱ ثانیه در نظر گرفته شده است.



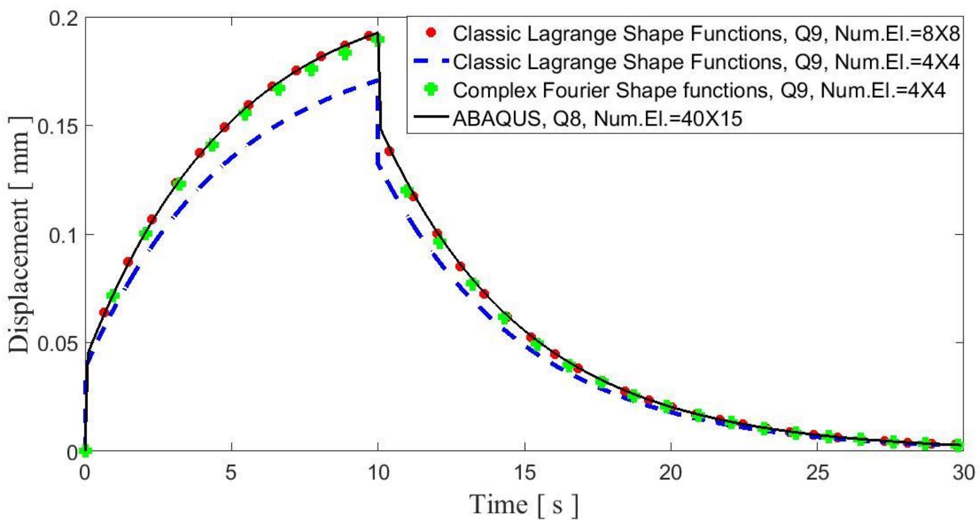
شکل ۴-۳۳: هندسه‌ی پوسته‌ی بیضوی شکل مثال سوم [۱۰۴]

بزرگای بارگذاری و مقادیر عددی پارامترهای نشان داده شده در هندسه‌ی مسئله ،در جدول ۴-۵ نمایش داده شده است.

جدول ۴-۵: مقادیر بزرگای بارگذاری و پارامترهای هندسی پوسته‌ی بیضوی شکل مثال سوم

بزرگای بارگذاری	پارامترهای هندسی
	$\mathrm{a} = 1.75\,\mathrm{m}$
	$\mathrm{b} = 1.0\,\mathrm{m}$
$P_0 = -10\,\mathrm{MPa}$	$\mathrm{c} = 2.0\,\mathrm{m}$
	$\mathrm{d} = 1.25\,\mathrm{m}$
	$\mathrm{h} = 0.1\,\mathrm{m}$

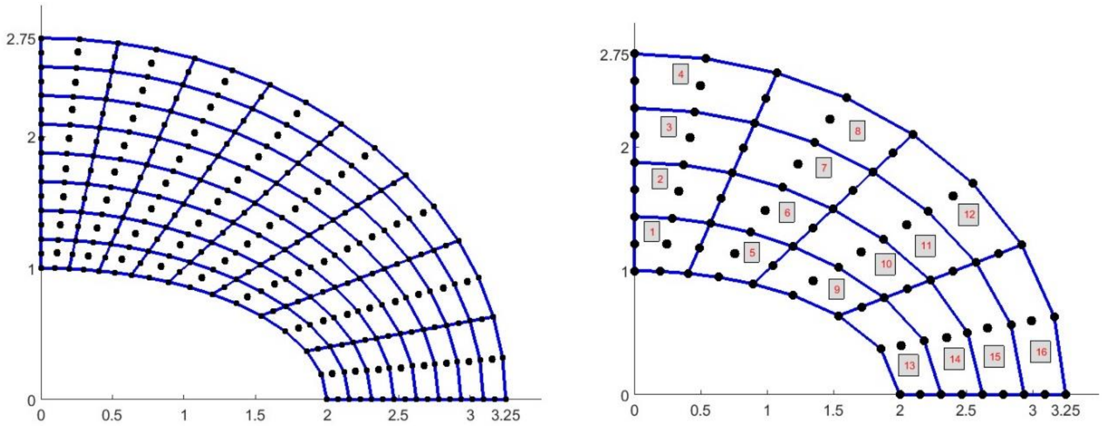
نتایج تحلیل اجزای محدود برای جابجایی افقی نقطه‌ی D در شکل ۴-۳۴ نشان داده شده است. شایان ذکر است که نقطه‌ی D در شکل ۴-۳۳ مشخص شده است. یکی از نمودارهای نشان داده شده در شکل ۴-۳۴ با کمک نرم افزار تجاری آباکوس و با استفاده از ۶۰۰ المان کلاسیک چهاروجهی با گره میانی که در واقع همان المان سرندیپیتی کلاسیک Q8 است، بدست آمده است. مش استفاده شده در مدل آباکوس این مسئله در شکل ۴-۳۶ نمایش داده شده است. از آنجایی که حل تحلیلی برای این مثال در دسترس نیست، از این نمودار به عنوان پاسخ قابل قبول در این مثال استفاده می‌شود. شایان ذکر است که در حل مسئله با کمک نرم‌افزار تجاری آباکوس مستقل بودن پاسخ نهایی از مش مورد استفاده بررسی شده است. پارامتر شکل در این مسئله برابر $\omega=-0.5i+0.98$ بدست آمد. مش‌های استفاده در این مسئله برای تحلیل اجزای محدود در شکل ۴-۳۵ نمایش داده شده است.



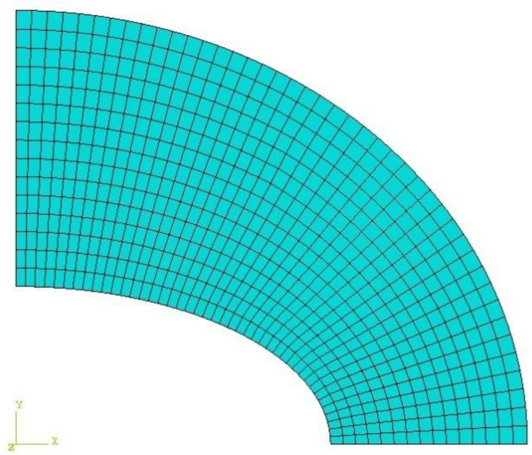
شکل ۴-۳۴: مقایسه‌ی نتایج اجزای محدود برای جابجایی افقی نقطه‌ی D با استفاده از دو نوع مش مختلف متشکل از المان‌های کلاسیک لاگرانژی و مختلط فوریه با پاسخ قابل قبول بدست آمده با نرم‌افزار آباکوس برای پوسته‌ی بیضوی شکل مثال سوم

همانطور که در شکل ۴-۳۴ مشخص است، نتایج اجزای محدود با بکارگیری شبکه‌ای متشکل از تنها ۱۶ المان مختلط فوریه Q9 به پاسخ قابل قبول همگرا می‌شود، در حالی که به شبکه‌ای متشکل از حداقل ۶۴ المان کلاسیک لاگرانژی Q9 برای همگرایی به پاسخ قابل قبول نیاز است. نسبت زمان

اجرای کُد اجزای محدود تهیه شده برای المان کلاسیک لاگرانژی $Q9$ به المان مختلط فوریه متناظرش، به منظور همگرایی به پاسخ قابل قبول در یک کامپیوتر شخصیِ واحد ۱/۸۹۳۹ بدست آمد. بنابراین استفاده از المان مختلط فوریه هزینه‌ی محاسباتی را نسبت به المان‌های کلاسیک لاگرانژی کاهش داده است.



شکل ۴-۳۵: مش‌های اجزای محدود متشکل از المان‌های مختلط فوریه و کلاسیک لاگرانژی $Q9$ استفاده شده در حل پوسته‌ی بیضوی شکل مثال سوم



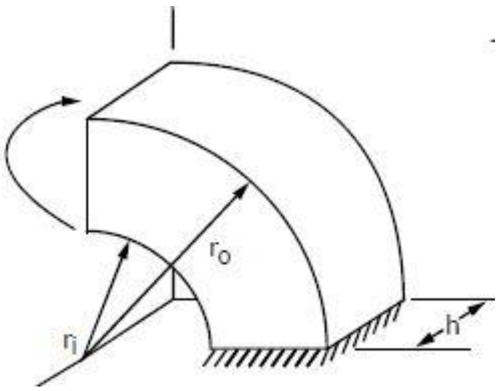
شکل ۴-۳۶: مش اجزای محدود متشکل از المان‌های سرندیپیتی کلاسیک $Q8$ استفاده شده در مدل آباکوس مثال پوسته‌ی بیضوی شکل

۴-۳-۵- مثال چهارم: تیر منحنی[92] شکل تحت خمش

یک تیر منحنی شکل ویسکوالاستیک با انحنای ۹۰ درجه که در شکل ۴-۳۷ نمایش داده شده است به عنوان مثال چهارم در نظر گرفته شده است. همانطور که در شکل ۴-۳۷ مشخص است، یک سر تیر منحنی شکل آزاد و سر دیگر آن گیردار در نظر گرفته شده است. تیر منحنی شکل تحت یک لنگر خمشی ساعتگرد M در انتهای آزاد خود قرار دارد. جزئیات بارگذاری و هندسه‌ی این مثال در جدول ۴-۶ ارائه شده است. لنگر خمشی وارده بر انتهای آزاد تیر منحنی شکل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{M}=M_0\left[H(t)-H(t-t_1)\right];\quad 0\le t\le 10\mathrm{s};\ \ t_1=4\mathrm{s} \qquad (۴\text{-}۲۸)$$

در رابطه‌ی (۴-۲۸)، $H(t)$ تابع هویساید است و M_0 بزرگای لنگر خمشی وارده است. این مثال را می‌توان به عنوان یک مسئله‌ی تنش صفحه‌ای در نظر گرفت.



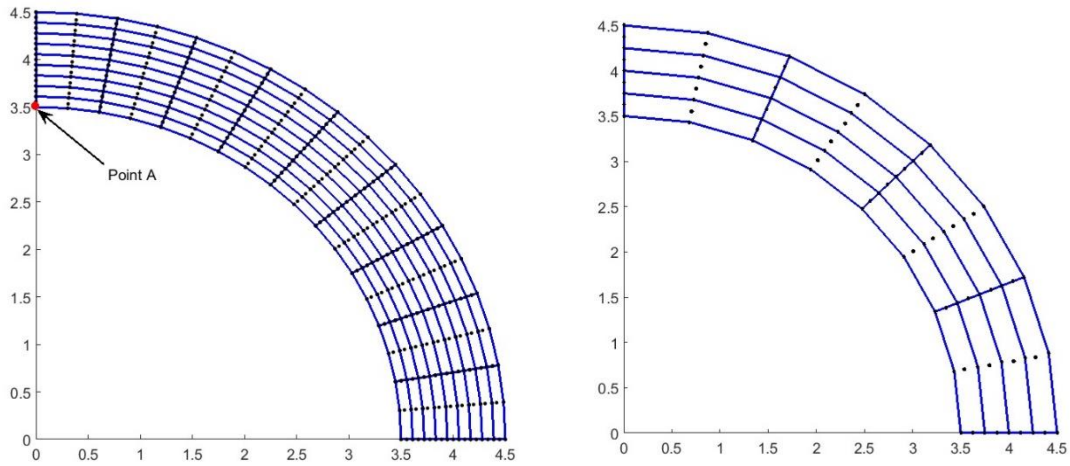
شکل ۴-۳۷: هندسه‌ی تیر منحنی شکل مثال چهارم تحت لنگر خمشی [۲]

جدول ۴-۶: مقادیر بزرگای لنگر و پارامترهای هندسی تیر منحنی شکل مثال چهارم

بزرگای لنگر	پارامترهای هندسی
$M_0=100\,\mathrm{N.m}$	$\mathrm{r_i}=3.5\mathrm{m}$ $\mathrm{r_o}=4.5\mathrm{m}$ $\mathrm{h}=1.0\mathrm{m}$

[92] Curved beam

مش‌های متشکل از المان‌های مختلط فوریه و کلاسیک لاگرانژی Q9 که در کُد نوشته شده برای حل این مثال استفاده شده است، در شکل ۴-۳۸ نشان داده شده است. جابجایی نقطه‌ی A که در شکل ۴-۳۸ مشخص شده است، مد نظر قرار دارد.

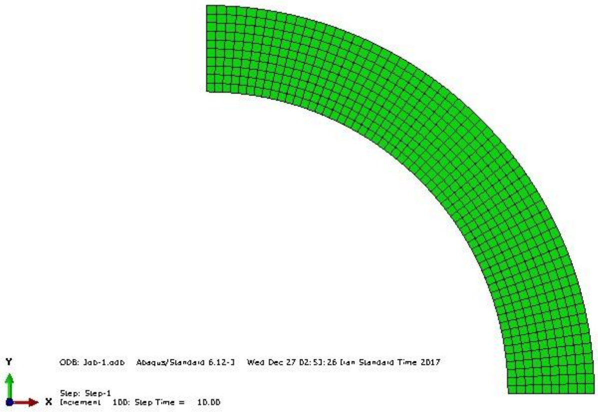


شکل ۴-۳۸: مش‌های متشکل از المان‌های مختلط فوریه و کلاسیک لاگرانژی Q9 در تحلیل اجزای محدود تیر منحنی شکل مثال چهارم

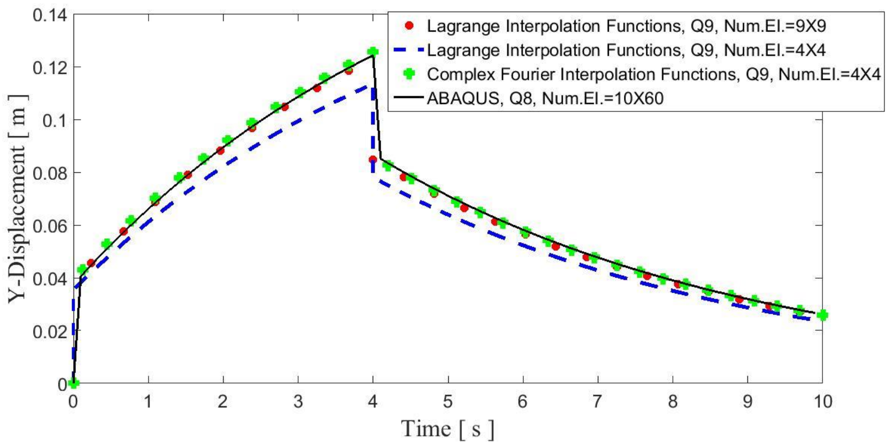
در این مثال نیز همانند مثال قبل، از نرم‌افزار تجاری آباکوس برای بدست آوردن یک پاسخ قابل قبول استفاده شده است. مش استفاده شده در مدل آباکوس این مثال که شامل ۶۰۰ المان سرندیپیتی کلاسیک Q8 است، در شکل ۴-۳۹ نمایش داده شده است. نتایج بدست آمده به عنوان پاسخ قابل قبول مستقل از مش هستند.

نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود با استفاده از کُد نوشته شده با بکارگیری ۱۶ المان مختلط فوریه و کلاسیک لاگرانژی Q9 و همینطور ۸۱ المان کلاسیک لاگرانژی Q9 در شکل‌های ۴-۴۰ و ۴-۴۱ با پاسخ قابل قبول حاصل از نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. پارامتر شکل در این مسئله برابر

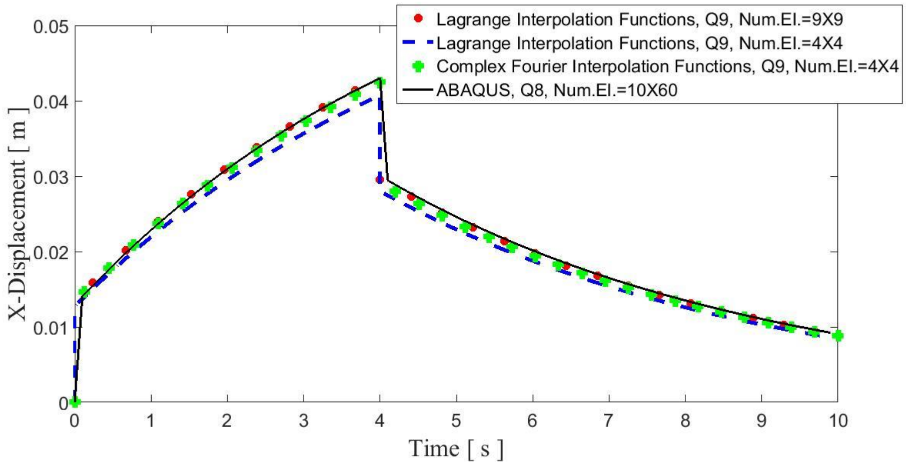
$\omega = -1.66i - 0.65$ بدست آمده است. در تحلیل اجزای محدود از گام زمانی $\Delta t = 0.1\text{s}$ استفاده شده است.



شکل ۴-۳۹: مش استفاده شده در مدل آباکوس تیر منحنی شکل مثال چهارم



شکل ۴-۴۰: مقایسه‌ی نتایج برای جابجایی قائم نقطه‌ی A حاصل از تحلیل اجزای محدود با استفاده از المان‌های مختلط فوریه $\mathrm{Q9}$ و کلاسیک لاگرانژی $\mathrm{Q9}$ با نتایج حاصل از نرم‌افزار تجاری آباکوس



شکل ۴-۴۱: مقایسه‌ی نتایج برای جابجایی افقی نقطه‌ی A حاصل از تحلیل اجزای محدود با استفاده از المان‌های مختلط فوریه $Q9$ و کلاسیک لاگرانژی $Q9$ با نتایج حاصل از نرم‌افزار تجاری آباکوس

با مشاهده‌ی شکل‌های ۴-۴۰ و ۴-۴۱ می‌توان دریافت که با استفاده از مشِ درشتی شامل ۱۶ المان مختلط فوریه $Q9$ می‌توان به پاسخ قابل قبول در این مثال همگرا شد. این در حالی است که در صورت استفاده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی $Q9$ حداقل به مشی شامل ۸۱ المان برای همگرایی به پاسخ قابل قبول نیاز است. نسبت زمان اجرای برنامه برای المان کلاسیک لاگرانژی $Q9$ به المان مختلط فوریه $Q9$ به منظور رسیدن به پاسخ قابل قبول در یک یارانه‌ی شخصی واحد در این مثال برابر ۲/۴۵ بدست آمد، که این نسبت خود شاهدی بر این مطلب است که المان‌های مختلط فوریه از نظر هزینه‌ی محاسباتی نسبت به المان‌های کلاسیک بسیار مقرون به صرفه‌تر هستند. این امر در مسائل بزرگ و پیچیده می‌تواند بطور قابل توجهی تاثیرگذار باشد.

۴-۴- المان ورق مثلثی فوریه تئوری کیرشوف گسسته[93] (DKFT)

۴-۴-۱- مقدمه

صفحه‌ها یا ورق‌ها[94] یکی از پرکاربردترین المان‌های سازه ای در بسیاری از سازه‌های متداولِ مورد بحث در مهندسی عمران، مکانیک و هوا فضا هستند [۱۰۵]. از اینرو مطالعات زیادی در زمینه‌ی تحلیل مسائل ورق تا کنون صورت گرفته است [۱۰۶]. براساس نوع مواد تشکیل دهنده و ضخامت ورق، تئوری‌های مختلفی برای خمش ورق‌ها پیشنهاد شده است. در تئوری ورق کیرشوف که در مورد ورق‌های نازکی که تحت تغییر شکل های کوچک قرار دارند صادق است، از تغییر شکل برشی جانبی ورق صرفنظر می‌شود. فرض اساسی در این تئوری آنست که یک خط صاف و نرمال به صفحه میانی ورق پیش از خمش، پس از خمش نیز به صورت خط صاف و نرمال بر صفحه میانی ورقِ تغییر شکل یافته باقی می‌ماند. در حالیکه در تئوری ورق میندلین[95] تغییر شکل برشی جانبی ورق در نظر گرفته می‌شود، بنابراین فرض می‌شود که هر نقطه دلخواه بر روی خط صاف و نرمال بر صفحه میانی ورق پیش از خمش، پس از خمش نیز بر روی خط صاف باقی می‌ماند ولی آن خط لزوماً نرمال بر صفحه میانی ورقِ تغییر شکل یافته باقی نمانده است [۱۰۷].

۴-۴-۲- المان ورق تئوری کیرشوف گسسته (DKT)

در ابتدا از تئوری ورق شامل تغییر شکل های برشی جانبی (تئوری ورقِ میندلین) برای بدست آوردن فرمولاسیون المان (DKT) برای خمش ورق‌های نازک استفاده می‌شود. در این حالت کمیت‌های مستقل شامل خیز w و دوران‌های β_y, β_x است و فقط الزامات پیوستگی C^0 بایستی برآورده شود. سپس از انرژی کرنشی برشی جانبی صرف نظر می‌شود و نظریه‌ی کیرشوف در طول لبه‌های المان به

[93] Discrete Kirchhoff theorem Fourier element

[94] Plates

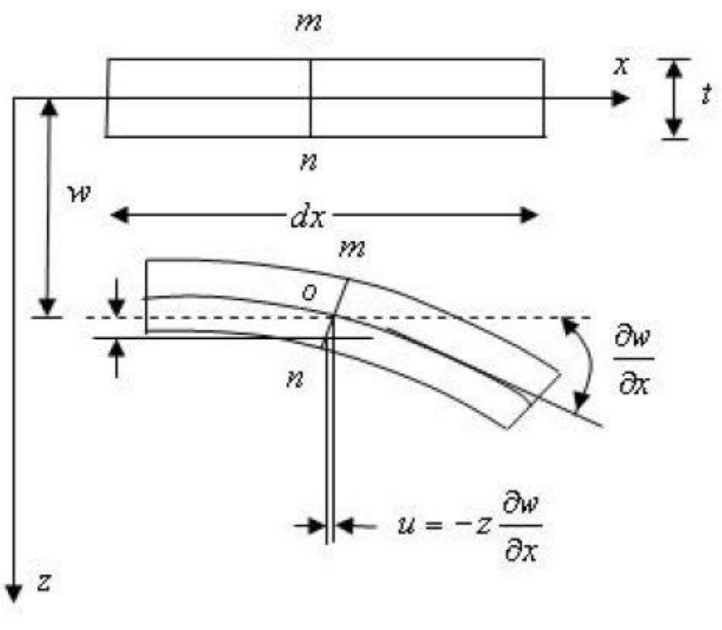
[95] Mindlin

منظور مرتبط کردنِ دوران‌ها و جابجایی‌های جانبی به صورت گسسته اعمال می‌شود. با این روش المان خمشی مثلثی موثری با ۹ درجه آزادی فرمول‌بندی می‌شود که به حل ورق نازک کلاسیک به خوبی همگرا می‌شود که DKT نامیده می‌شود. در تئوری خمش ورق‌ها با تغییر شکل‌های کوچک، مولفه‌های جابجایی هر نقطه با مختصات (x,y,z) از رابطه‌ی (۴-۲۹) بدست می‌آید.

$$u = z\beta_x(x,y), v = z\beta_y(x,y), \; w = w(x,y) \qquad (۲۹\text{-}۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۲۹)، w جابجایی جانبی در راستای z و β_y, β_x دوران نرمالِ صفحه میانی ورق تغییر شکل نیافته در صفحات $x-z$ و $y-z$ است. شایان ذکر است که در تئوری ورق کیرشوف همانطور که در شکل ۴-۴۲ نشان داده شده است، مقادیر β_y, β_x وابسته به w است و از رابطه‌ی (۴-۳۰) بدست می‌آید.

$$\beta_x = -w_{,x} \, , \; \beta_y = -w_{,y} \qquad (۳۰\text{-}۴)$$



شکل ۴-۴۲: خمش در ورق براساس تئوری کیرشوف [۱۰۸]

۴-۴-۳- ماتریس گرادیان B (انحنا- جابجایی) در المان ورق DKFT

در ورق‌های نازک، بردار انحنا $\boldsymbol{\kappa}$ از رابطه‌ی (۴-۳۱) بدست می‌آید:

$$\mathbf{\kappa} = \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix} \tag{۳۱-۴}$$

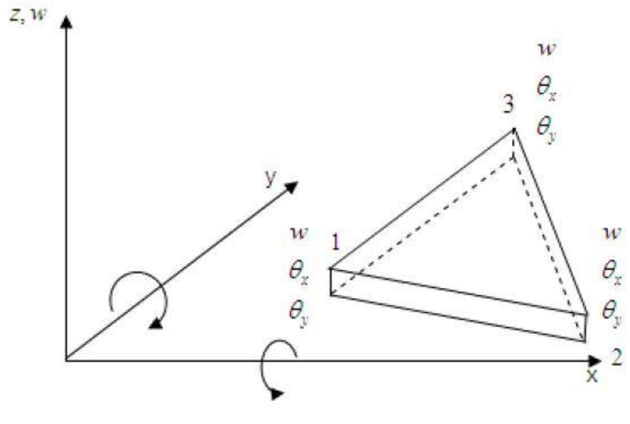
رابطه‌ی (۴-۳۱) تنها شامل مشتقات مرتبه‌ی اول β_y, β_x است، بنابراین یافتن توابع شکلی که الزامات سازگاری را برآورده کند آسان است. با این حال، از آنجایی که β_y, β_x در رابطه‌ی (۴-۳۱) متغیر هستند، ضروری است که دَوَران نرمال صفحه‌ی میانی به جابجایی جانبی w که در رابطه‌ی (۴-۳۱) پدیدار نشده است مرتبط شود. بدین منظور فرض های زیر در نظر گرفته می‌شود:

۱. المان‌های مثلثی بایستی ۹ درجه آزادی داشته باشد که عبارتند از جابجایی w و دوران‌های θ_y, θ_x در سه گره گوشه ای (شکل ۴-۴۳).

۲. از آنجایی که به دنبال حل کیرشوف ورق نازک هستیم، دوران نقاط گرهی بایستی به صورت $\theta_y = -w_{,x}, \theta_x = +w_{,y}$ تعریف شود تا شرایط مرزی کیرشوف ارضا شود.

۳. از آنجایی که برای مدل کردن ورق‌های نازک از المانی که تئوری ورق کیرشوف بر آن حاکم است استفاده شده است، فرض‌های تئوری ورق کیرشوف می‌تواند در هر نقطه به صورت گسسته اعمال شود.

۴. شرایط سازگاری در دوران‌های β_y, β_x نباید از دست برود.



شکل ۴-۴۳: المان DKFT [۱۰۸]

در المان پیشنهادی DKFT فرض‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

الف. دوران‌های β_y , β_x بر روی المان با توابع درون یابی مختلط فوریه تخمین زده می‌شود (شکل ۴-۴۴).

$$\beta_x = \sum_{i=1}^{6} N_i \, \beta_{x_i} , \; \beta_y = \sum_{i=1}^{6} N_i \, \beta_{y_i} \qquad (۴-۳۲)$$

در رابطه‌ی (۴-۳۲)، $\beta_{y_i} , \beta_{x_i}$ مقادیر گرهی در گره‌های میانی و گوشه‌ی المان است و $N_i\left(\xi,\eta\right)$ توابع شکل مختلط فوریه برای المان مثلثی ۶ گرهی است که در بخش ۴-۴-۴ بدست آمده است.

ب. نظریه‌ی کیرشوف در گره ها به صورت زیر اعمال می‌شود (شکل ۴-۴۵):

۱. گره‌های گوشه (در گره‌های ۱و۲و۳)

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{bmatrix} \qquad (۴-۳۳)$$

۲. در گره‌های میانی (در جهت پادساعتگرد حول مرز المان تعریف می‌شود)

$$\beta_{s_k} + w_{,s_k} = 0; \qquad k = 4,5,6 \qquad (۴-۳۴)$$

ج. تغییرات w در طول اضلاع المان، درجه سه است.

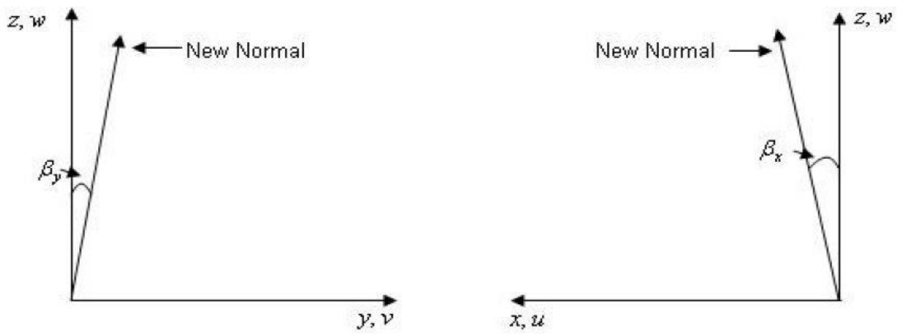
$$w_{,s_k} = -\frac{3}{2l_{ij}} w_i - \frac{1}{4} w_{,s_i} + \frac{3}{2l_{ij}} w_j - \frac{1}{4} w_{,s_j} = 0 \qquad (۴-۳۵)$$

در رابطه‌ی (۴-۳۵)، k گره میانی ضلع ij را نمایش می‌دهد و l_{ij} طول ضلع ij است.

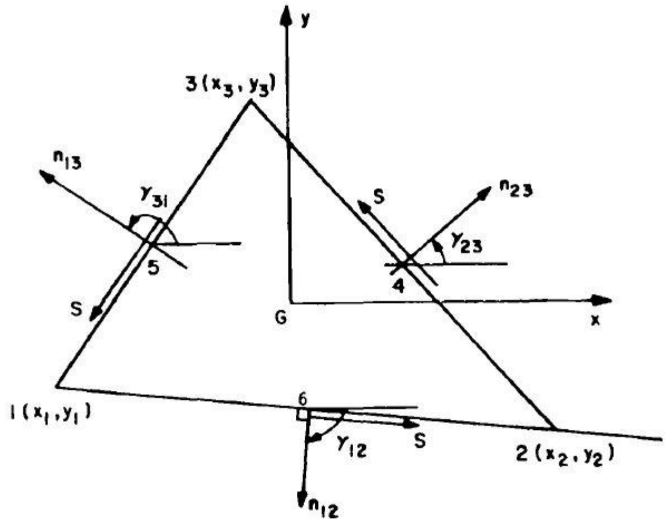
د. تغییرات β_n در طول اضلاع به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود:

$$\beta_{n_k} = \frac{1}{2}\left(\beta_{n_i} + \beta_{n_j}\right) \qquad (۴-۳۶)$$

در رابطه‌ی (۴-۳۶)، $k = 1,2,3$ به ترتیب نشان دهنده‌ی گره‌های میانی اضلاع $23, 31, 12$ می‌باشد.



شکل ۴-۴۴: جهات مثبت β_y , β_x [۱۰۸]



شکل ۴-۴۵: هندسه‌ی المان مثلثی [۱۰۹]

به منظور محاسبه‌ی β_y , β_x براساس درجات آزادی گرهی

$$\mathbf{d}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_{x_1} & \theta_{y_1} & w_2 & \theta_{x_2} & \theta_{y_2} & w_3 & \theta_{x_3} & \theta_{y_3} \end{bmatrix} \qquad (۳۷-۴)$$

در هر ضلع روابط هندسی زیر بایستی برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{bmatrix} \qquad (۳۸-۴)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{,s} \\ \omega_{,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \qquad (۳۹-۴)$$

در روابط (۴-۳۸) و (۴-۳۹)، c و s با استفاده از رابطه‌ی (۴-۴۰) تعریف می‌شوند.

$$c=\cos(\vec{x},\vec{n}_{ij}),\ \ s=\sin(\vec{x},\vec{n}_{ij}) \tag{۴۰-۴}$$

با استفاده از روابط (۴-۳۳) تا (۴-۴۰)، عبارات زیر برای β_y,β_x بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\beta_x&=\mathbf{H}_x^T\left(\xi,\eta\right)\mathbf{d}\\ \beta_y&=\mathbf{H}_y^T\left(\xi,\eta\right)\mathbf{d}\end{aligned} \tag{۴۱-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۴۱)، $\mathbf{H}_y,\mathbf{H}_x$ بردارهای ۹ مولفه‌ایِ توابع شکل جدید هستند که مولفه‌های آن تابعی از $N_i,(i=1,2,\ldots,6)$ یعنی توابع شکل مختلط فوریه در المان ۶ گرهی مثلثی که از رابطه‌ی (۴-۶۰) بدست می‌آید و مختصات گرهی هستند.

$$\mathbf{H}_x\left(\xi,\eta\right)=\begin{bmatrix}1.5\left(a_6N_6-a_5N_5\right)\\ b_5N_5+b_6N_6\\ N_1-c_5N_5-c_6N_6\\ 1.5\left(a_4N_4-a_6N_6\right)\\ b_6N_6+b_4N_4\\ N_2-c_6N_6-c_4N_4\\ 1.5\left(a_5N_5-a_4N_4\right)\\ b_4N_4+b_5N_5\\ N_3-c_4N_4-c_5N_5\end{bmatrix}\qquad \mathbf{H}_y\left(\xi,\eta\right)=\begin{bmatrix}1.5\left(d_6N_6-d_5N_5\right)\\ -N_1+e_5N_5+e_6N_6\\ -b_5N_5-b_6N_6\\ 1.5\left(d_4N_4-d_6N_6\right)\\ -N_2+e_6N_6+e_4N_4\\ -b_6N_6-b_4N_4\\ 1.5\left(d_5N_5-d_4N_4\right)\\ -N_3+e_4N_4+e_5N_5\\ -b_4N_4-b_5N_5\end{bmatrix} \tag{۴۲-۴}$$

پارامترهای مرتبط با مختصات گرهی در رابطه‌ی (۴-۴۲) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{gathered}a_k=\frac{-x_{ij}}{l_{ij}^2},\ b_k=\frac{0.75\,x_{ij}\,y_{ij}}{l_{ij}^2},\ c_k=\frac{\left(0.25\,x_{ij}^2-0.5\,y_{ij}^2\right)}{l_{ij}^2}\\ d_k=\frac{-y_{ij}}{l_{ij}^2},\ e_k=\frac{\left(0.25\,y_{ij}^2-0.5\,x_{ij}^2\right)}{l_{ij}^2},\ l_{ij}^2=\left(x_{ij}^2+y_{ij}^2\right)\\ x_{ij}=x_i-x_j,\ y_{ij}=y_i-y_j\end{gathered} \tag{۴۳-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۴۳) اندیس‌های $k=4,5,6$ مربوط به اضلاع به ترتیب $ij=23,31,12$ می‌باشند (شکل ۴-۴۵). با استفاده از روابط (۴-۳۱) و (۴-۴۱) رابطه‌ی بین بردار انحنا و بردار درجات آزادی گرهی به صورت رابطه‌ی (۴-۴۴) بدست می‌آید.

$$\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{B}\,\mathbf{d} \tag{۴۴-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۴۴) ماتریس $\mathbf{B}$ ، ماتریس گرادیان یا تبدیل انحنا-جابجایی است. از آنجایی که از فرمولاسیون ایزوپارامتریک استفاده شده است، ماتریس $\mathbf{B}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{gathered} X = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 + N_5x_5 + N_6x_6 \\ Y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 + N_5y_5 + N_6y_6 \\ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{gathered} \quad (۴-۴۵)$$

در رابطه‌ی (۴-۴۵)، (x_i, y_i) مختصات نقاط گرهی هر المان در دستگاه مختصات کلی است و $\mathbf{J}$ ماتریس ژاکوبین[۹۶] نامیده می‌شود که دستگاه مختصات سطحی[۹۷] را با دستگاه مختصات کلی مرتبط می‌کند. $N_i, (i = 1, 2, \ldots, 6)$ توابع شکل مختلط فوریه هستند که از رابطه‌ی (۴-۶۰) بدست می‌آیند و در دستگاه مختصات سطحی (ξ, η) تعریف شده‌اند.

$$\begin{gathered} \mathbf{B} = [\partial]\begin{bmatrix} \mathbf{H}_x & \mathbf{H}_y \end{bmatrix}^T \\ [\partial] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial X}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{gathered} \quad (۴-۴۶)$$

در رابطه‌ی (۴-۴۶)، $[\partial]$ ماتریس اپراتور[۹۸] مشتق در دستگاه مختصات کلی است و بردارهای $\mathbf{H}_x(\xi,\eta)$ و $\mathbf{H}_y(\xi,\eta)$ در رابطه‌ی (۴-۴۲) تعریف شده است. $|\mathbf{J}|$ دترمینان ماتریس ژاکوبین است. با استفاده از رابطه‌ی (۴-۴۶) ماتریس $\mathbf{B}$ بدست می‌آید و با قرار دادن در رابطه‌ی (۴-۹۷) ماتریس سختی المان DKFT حاصل می‌شود.

---

[96] Jacobian

[97] Area coordinate system

[98] Operator

۴-۴-۴- المان مثلثی ۶ گرهی مختلط فوریه

اگر تابع میدان جابجایی را با استفاده از یک ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی تقریب زده شود، رابطه‌ی (۴-۴۷) حاصل می‌شود:

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{n} R_i(r)a_i=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(r)\mathbf{a} \tag{۴-۴۷}$$

در رابطه‌ی (۴-۴۷)، $u(x,y)$ تابع میدان جابجایی، n تعداد نقاط گرهی در دامنه‌ی (x,y)، $R_i(r)$ تابع پایه شعاعی متناظر با گره i- ام، a_i ضریب مجهول متناظر با گره i- ام است. همینطور $\mathbf{R}$ بردار توابع پایه شعاعی و $\mathbf{a}$ بردار ضرایب مجهول است. r نُرم اقلیدسی میان نقاط گرهی است که برای گره k در دامنه ی دو بُعدی (x,y) با رابطه‌ی (۴-۴۸) تعریف می‌شود:

$$r_k=\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_k\right\|=\sqrt{\left(x-x_k\right)^2+\left(y-y_k\right)^2} \tag{۴-۴۸}$$

حال به منظور غنی سازی[۹۹] توابع پایه شعاعی، میدان توابع چند جمله‌ای ، به بسط تابعی که در آن فقط از توابع پایه شعاعی برای تقریب استفاده شده بود اضافه می‌شود.

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{n} R_i(r)a_i+\sum_{j=1}^{m} P_j(x,y)b_j=\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(r)\mathbf{a}+\mathbf{P}^{\mathrm{T}}(x,y)\mathbf{b} \tag{۴-۴۹}$$

در رابطه‌ی (۴-۴۹)، m تعداد جملات پایه‌ی چند جمله‌ای است. b_j ضریب مجهول متناظر با چند جمله‌ای پایه‌ی j - ام است. اگر مختصات نقاط گرهی را در رابطه‌ی (۴-۴۹) قرار دهیم، معادله‌ی ماتریسی (۴-۵۰) حاصل می‌شود.

$$\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{R}_0\,\mathbf{a}+\mathbf{P}_0\,\mathbf{b} \tag{۴-۵۰}$$

در رابطه‌ی (۴-۵۰) :

---
[99] Enrichment

(۵۱-۴)

$$\mathbf{R_0}=\begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad \mathbf{P_0}=\begin{bmatrix} P_1(x_1,y_1) & P_2(x_1,y_1) & \cdots & P_m(x_1,y_1) \\ P_1(x_2,y_2) & P_2(x_2,y_2) & \cdots & P_m(x_2,y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_1(x_n,y_n) & P_2(x_n,y_n) & \cdots & P_m(x_n,y_n) \end{bmatrix}_{n\times m}$$

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{bmatrix}^T$$

$\hat{\mathbf{u}}$ بردار مقادیر تابع میدان جابجایی در نقاط گرهی یا همان بردار جابجایی گرهی است. در معادله‌ی (۴-۴۹) معمولاً $m<n$ فرض می‌شود تا همگرایی جواب تضمین شود [۶۰]. از آنجا که در معادله‌ی (۴-۴۹) تعداد معادلات n و تعداد مجهولات $m+n$ است، معادله‌ی (۴-۵۲) به عنوان الزامات اضافی بر جملات پایه چند جمله‌ای اعمال می‌شود تا یکتایی جواب تضمین شود.

$$\sum_{i=1}^{n} P_j(x_i,y_i)a_i=0, \quad \mathbf{P_0^T a}=0 \qquad (۵۲-۴)$$

با حل معادله ماتریسیِ (۴-۵۳)، اگر معکوس ماتریس متقارن $\mathbf{R_0}$ موجود باشد، ضرایب مجهول $\mathbf{b,a}$ با استفاده از رابطه‌ی (۴-۵۴) بدست می‌آیند.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R_0} & \mathbf{P_0} \\ \mathbf{P_0^T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad or \quad \mathbf{G}\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \qquad (۵۳-۴)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1}\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \qquad (۵۴-۴)$$

در نهایت رابطه‌ی درونیابیِ تابع میدان جابجایی به صورت معادله‌ی (۴-۵۵) حاصل می‌شود:

$$u(x,y)=\begin{bmatrix} \mathbf{R^T}(r) & \mathbf{P^T}(x,y) \end{bmatrix}\mathbf{G^{-1}}\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}=\boldsymbol{\varphi}(x,y)\hat{\mathbf{u}} \qquad (۵۵-۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۵۵)، $\boldsymbol{\varphi}(x,y)=\begin{bmatrix} \phi_1(x,y) & \phi_2(x,y) & \cdots & \phi_n(x,y) \end{bmatrix}$ ماتریس توابع شکل است که میدان جابجایی را به جابجایی‌های گرهی مرتبط می‌سازد. همانطور که پیش‌تر بیان شد، این فرمولاسیون

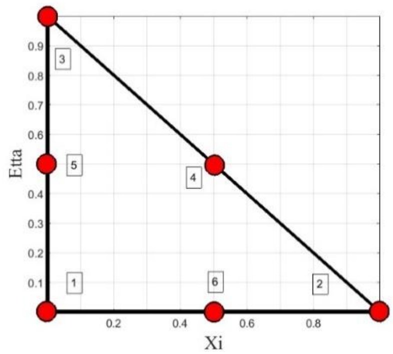
اولین بار برای استفاده در روش‌های بدون المان تحت عنوان روش بدون المان درونیابی نقطه‌ای شعاعی توسط وانگ و لیو [۶۰] ارائه شد.

توابع پایه شعاعی مختلط فوریه [۷۶، ۱۱۰] به صورت رابطه‌ی (۴-۵۶) تعریف می‌شوند.

$$R(r)=\alpha e^{i\omega r} \tag{۴-۵۶}$$

در رابطه‌ی (۴-۵۶)، ω,α پارامتر شکل هستند. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، پارامتر شکل در توابع پایه شعاعی، ثوابتی هستند که به منظور افزایش دقت درونیابی انتخاب می‌شوند. به علاوه در این رابطه، i واحد موهومی[۱۰۰] است.

با اعمال فرآیند بدست آوردن توابع شکل در روش RPIM [۱۰۱] پیشنهادی وانگ [۶۰] بر المان مثلثی ۶ گرهی نمایش داده شده در شکل ۴-۴۶ در دستگاه مختصات سطحی و بهره گیری از توابع شکل مختلط فوریه [۷۶] المان مثلثی ۶ گرهی مختلط فوریه در این بخش ارائه می‌شود.



شکل ۴-۴۶: المان مثلثی ۶ گرهی

با استفاده از توابع پایه شعاعی مختلط فوریه و میدان توابع چند جمله‌ای با ۵ جمله $(m=5)$در یک المان مثلثیِ ۶ گرهی در دستگاه مختصات سطحی، روابط (۴-۴۹) تا (۴-۵۵) به صورت زیر بدست می‌آیند:

100 Imaginary unit

101 Radial point interpolation method

$$\mathbf{R}(r)=\begin{Bmatrix} R_1(r)\\ R_2(r)\\ R_3(r)\\ R_4(r)\\ R_5(r)\\ R_6(r)\end{Bmatrix}=\alpha\begin{Bmatrix} e^{i\omega\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{(\xi-1)^2+\eta^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{\xi^2+(\eta-1)^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{(\xi-0.5)^2+(\eta-0.5)^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{\xi^2+(\eta-0.5)^2}}\\ e^{i\omega\sqrt{(\xi-0.5)^2+\eta^2}}\end{Bmatrix} \qquad \mathbf{P}(\xi,\eta)=\begin{Bmatrix}1\\ \xi\\ \eta\\ \xi^2\\ \xi\eta\end{Bmatrix} \tag{۵۷-۴}$$

$$\mathbf{R_0}=\begin{bmatrix} 1 & \varsigma^2 & \varsigma^2 & \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma & \varsigma\\ \varsigma^2 & 1 & 2\varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma^{\sqrt{5}} & \varsigma\\ \varsigma^2 & 2\varsigma^{\sqrt{2}} & 1 & \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma & \varsigma^{\sqrt{5}}\\ \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma^{\sqrt{2}} & \varsigma^{\sqrt{2}} & 1 & \varsigma & \varsigma\\ \varsigma & \varsigma^{\sqrt{5}} & \varsigma & \varsigma & 1 & \varsigma^{\sqrt{2}}\\ \varsigma & \varsigma & \varsigma^{\sqrt{5}} & \varsigma & \varsigma^{\sqrt{2}} & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{P_0}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0.5 & 0.5 & 0.25 & 0.25\\ 1 & 0 & 0.5 & 0 & 0\\ 1 & 0.5 & 0 & 0.25 & 0\end{bmatrix} \tag{۵۸-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۵۸)، پارامتر $\varsigma=e^{\omega/2}$ می‌باشد. با قرار دادن روابط (۴-۵۸) در معادله‌ی (۴-۵۹)، ماتریس $\mathbf{G}$ بدست می‌آید.

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{R_0} & \mathbf{P_0}\\ \mathbf{P_0^T} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{۵۹-۴}$$

در نهایت با قرار دادن معکوس ماتریس $\mathbf{G}$ و روابط (۴-۵۷) در معادله‌ی (۴-۶۰) توابع شکل مختلط فوریه برای یک المان مثلثی ۶ گرهی در دستگاه مختصات سطحی (ξ,η) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(\xi,\eta)&=\left[N_1(\xi,\eta)\quad N_2(\xi,\eta)\quad N_3(\xi,\eta)\quad N_4(\xi,\eta)\quad N_5(\xi,\eta)\quad N_6(\xi,\eta)\right]\\ \boldsymbol{\varphi}(\xi,\eta)&=\left[\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\xi,\eta)\quad \mathbf{P}^{\mathrm{T}}(\xi,\eta)\right]\mathbf{G^{-1}}\end{aligned} \tag{۶۰-۴}$$

که همانطور که قبلاً بیان شد، با جایگذاری توابع شکل مختلط فوریه $N_i(\xi,\eta),(i=1,\ldots,6)$ بدست آمده از رابطه‌ی (۴-۶۰) در رابطه‌ی (۴-۴۲)، توابع شکل جدیدی برای المان‌های ورق پیشنهاد می‌شود که در این رساله المان ورق "مثلثی فوریه تئوری کیرشوف گسسته" یا به اختصار DKFT نامگذاری می‌شود. شایان ذکر است که این المان‌های ورق برای نخستین بار در این رساله ارائه می‌شود.

در اینجا بیانِ سه نکته در مورد این المان‌ها ضروری است:

۱. توابع شکل در المان DKFT پیشنهادی، کلیه‌ی خواص لازم برای یک تابع شکل شامل: خاصیت دلتای کرونیکر ، خاصیت افراز واحد و خاصیت پیوسته تکه‌ای از مرتبه بی‌نهایت که تضمین کننده‌ی مشتق پذیری آنست، را دارا می‌باشند.

۲. المان DKFT پیشنهادی تست وصله جابجایی را ارضا می‌کند پس قادر است پدیده‌هایی مانند جابجایی جسم صلب و حالت کرنش ثابت را نشان دهد، و تست وصله‌ی نیرو را نیز با بدست آمدن لنگرهای خمشی ثابت M_y, M_x در هر المان با اعمال تست در راستاهای خمش حول محورهای x و y، و لنگر پیچشی ثابت M_{xy} با اعمال تست در راستای پیچش ارضا می‌کند، بنابراین همگرایی جواب در این المان‌ها تضمین می‌شود.

۳. توابع شکل در المان DKFT تنها دارای یک پارامتر شکل یعنی ω می‌باشند، چرا که در فرآیند غنی سازی توابع پایه شعاعی مختلط فوریه، پارامتر شکلِ α حذف می‌شود.

۴-۴-۵- بیان نموی رابطه‌ی لنگر-انحنا[۱۰۲] در یک ورق نازک ویسکوالاستیک

همانطور که در فصل دوم بیان شد، رابطه‌ی تنش و کرنش در یک ماده‌ی همگن ایزوتروپیک[۱۰۳] ویسکوالاستیک خطی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t C_{ijkl}(t-t')\frac{\partial \varepsilon_{kl}(t')}{\partial t'}dt' \tag{۶۱-۴}$$

در رابطه‌ی (۶۱-۴)، $\varepsilon_{kl}, \sigma_{ij}$ به ترتیب تانسور تنش و کرنش در لحظه‌ی t می‌باشد و C_{ijkl} تانسور مرتبه چهارم مدول استراحت است که تنش و کرنش را به هم مرتبط می‌کند.

102 Moment-curvature
103 Isotropic

با فرض حالت تنش صفحه‌ای، لنگر خمشی در یک ورق نازک ویسکوالاستیک از رابطه‌ی (۴-۶۲) بدست می‌آید:

$$M_{ij}\left(t\right)=\int_{z}\sigma_{ij}\left(z,t\right)z\,dz \quad \left(i,j=1,2\right) \tag{۴-۶۲}$$

کرنش در هر نقطه‌ی دلخواه ورق نازک کیرشوف ویسکوالاستیک از رابطه‌ی (۴-۶۳) بدست می‌آید:

$$\varepsilon_{kl}\left(z,t\right)=z\,\kappa_{kl}\left(t\right) \quad \left(k,l=1,2\right) \tag{۴-۶۳}$$

در رابطه‌ی (۴-۶۳)، κ_{kl} تانسور انحنا است. با قرار دادن روابط (۴-۶۱) و (۴-۶۳) در رابطه‌ی (۴-۶۲)، فرم انتگرالی رابطه‌ی لنگر- انحنا در یک ورق کیرشوف نازک ویسکوالاستیک با ضخامت ثابت h بدست می‌آید.

$$M_{ij}\left(t\right)=\frac{h^{3}}{12}\int_{0}^{t}C_{ijkl}\left(t-t'\right)\frac{\partial\kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'}dt' \tag{۴-۶۴}$$

به منظور تبدیل رابطه‌ی (۴-۶۴) به فرم نموی، خط زمانی t به بازه‌های زمانی مجزا مانند $t_{n+1}=t_{n}+\Delta t$ تفکیک می‌شود و فرض می‌شود که لنگر در لحظه‌ی t_{n} مشخص است. با استفاده از رابطه‌ی (۴-۶۴) لنگر در لحظه‌ی t_{n+1} به صورت زیر بدست می‌آید:

$$M_{ij}\left(t_{n+1}\right)=\frac{h^{3}}{12}\int_{0}^{t_{n+1}}C_{ijkl}\left(t_{n+1}-t'\right)\frac{\partial\kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'}dt' \tag{۴-۶۵}$$

رابطه‌ی (۴-۶۵) را می‌توان به صورت (۴-۶۶) بازنویسی کرد:

$$M_{ij}\left(t_{n+1}\right)=\frac{h^{3}}{12}\left\{\int_{0}^{t_{n}}C_{ijkl}\left(t_{n+1}-t'\right)\frac{\partial\kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'}dt'+\int_{t_{n}}^{t_{n+1}}C_{ijkl}\left(t_{n+1}-t'\right)\frac{\partial\kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'}dt'\right\} \tag{۴-۶۶}$$

با تعریف ΔC_{ijkl} و ΔM_{ij} به ترتیب با رابطه‌های (۴-۶۷) و (۴-۶۸) و با قرار دادن رابطه‌ی (۴-۶۶) در (۴-۶۸) و بکارگیری رابطه‌ی (۴-۶۷)، ΔM_{ij} به صورت رابطه‌ی (۴-۶۹) بدست می‌آید.

$$\Delta C_{ijkl}=C_{ijkl}\left(t_{n+1}-t'\right)-C_{ijkl}\left(t_{n}-t'\right) \tag{۴-۶۷}$$

$$\Delta M_{ij}=M_{ij}\left(t_{n+1}\right)-M_{ij}\left(t_{n}\right) \tag{۴-۶۸}$$

$$\Delta M_{ij}=\frac{h^3}{12}\left\{\int_{t_n}^{t_{n+1}}C_{ijkl}\left(t_n-t'\right)\frac{\partial \kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'}dt'+\Delta M_{ij}^R\right\} \tag{۶۹-۴}$$

در رابطه ی (۴-۶۹)، ΔM_{ij}^Rبه صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta M_{ij}^R=\int_0^{t_n}\Delta C_{ijkl}\frac{\partial \kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'}dt' \tag{۷۰-۴}$$

مدول استراحت در لحظه‌ی t_{n+1} با بکارگیری مدل ویچرت با استفاده از سری پرونی به صورت رابطه‌ی (۴-۷۱) بیان می‌شود:

$$C_{ijkl}\left(t_{n+1}-t'\right)=C_\infty+\sum_{q=1}^{Q}C_q\,e^{-\frac{\left(t_{n+1}-t'\right)}{\rho_q}} \tag{۷۱-۴}$$

$$\rho_q=\frac{\eta_q}{C_q} \tag{۷۲-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۷۱)، ρ_q زمان استراحت المان q -ام ماکسول و Q تعداد کل المان‌های ماکسول و C_∞ ثابت فنر تنها، در مدل ویچرت است. در رابطه‌ی (۴-۷۲)، η_q ضریب میراگر و C_q ثابت فنر در المان q -ام ماکسول در مدل ویچرت است.

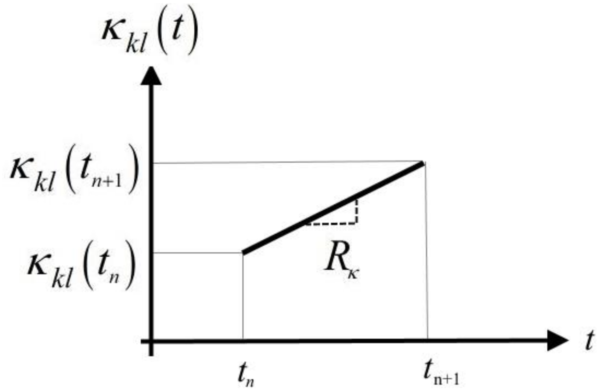
در روش‌های نیمه تحلیلی انتگرال گیری زمانی در مواد ویسکوالاستیک ایده آل سازی تاریخچه بارگذاری بسیار متداول است، برای این کار معمولاً تغییرات کرنش در یک گام زمانی به صورت ساده‌سازی شده فرض می‌شود [۱۱۱]. ساده ترین تقریب برای بدست آوردن انتگرال زمانی به صورت تحلیلی آن است که کرنش در کل یک گام زمانی ثابت فرض می‌شود. این روش توسط زینکویچ و همکاران [۴۱] برای اولین بار پیشنهاد شد. یک تقریب بهتر برای بدست آوردن انتگرال زمانی به صورت تحلیلی آن است که مقدار کرنش در یک گام زمانی به تکه‌های ثابت تقسیم می‌شود [۱۱۲، ۱۱۳]. به جای آنکه کرنش در یک گام زمانی به صورت ثابت تقریب زده شود، نرخ کرنش نسبت به زمان در یک گام زمانی می‌تواند به صورت ثابت فرض شود. این روش به تیلور و همکاران [۳۶] نسبت داده شده است. در این رساله همانطور که در فصل دوم بیان شد، فرض شده است که در یک گام زمانی نرخ تغییرات کرنش نسبت به زمان

می‌تواند به صورت ثابت در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر مقدار کرنش در بازه‌ی زمانی $t_n \le t \le t_{n+1}$ با رابطه‌ی (۴-۷۳) تخمین زده می‌شود.

$$\varepsilon_{kl}\left(t\right)=\varepsilon_{kl}\left(t_n\right)+R_\varepsilon\left(t-t_n\right)H\left(t-t_n\right) \qquad (۴\text{-}۷۳)$$

در رابطه‌ی (۴-۷۳)، R_ε نرخ تغییرات کرنش در طول بازه‌ی زمانی است و $H\left(t-t_n\right)$ تابع هویساید است. با استفاده از رابطه‌ی (۴-۷۳) می‌توان دریافت که با این تخمین، نرخ تغییرات انحنا در یک گام زمانی را نیز می‌توان به صورت ثابت فرض کرد. در شکل ۴-۴۷ تقریب انحنا در یک گام زمانی ترسیم شده است.

$$\Delta\kappa_{kl}=R_\kappa\,\Delta t \qquad (۴\text{-}۷۴)$$



شکل ۴-۴۷: تقریب انحنا در بازه زمانی Δt

در رابطه‌ی (۴-۷۴)، $\Delta\kappa$ بردار تغییرات انحنا در یک گام زمانی $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ است و R_κ نرخ تغییرات انحنا نسبت به زمان در طول گام زمانی است. با استفاده از این تقریب انتگرال گیری زمانی نیمه تحلیلی از رابطه‌ی (۴-۶۹) ممکن می‌شود.

$$\Delta M_{ij}=\frac{h^3}{12}\left\{C'_{ijkl}\,\Delta\kappa_{kl}+\Delta M_{ij}^R\right\} \qquad (۴\text{-}۷۵)$$

در رابطه‌ی (۴-۷۵):

$$C'_{ijkl}=C_\infty+\frac{1}{\Delta t}\sum_{q=1}^{Q}\eta_q\left(1-e^{-\frac{\Delta t}{\rho_q}}\right) \qquad (۴\text{-}۷۶)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۴-۷۱) در (۴-۶۷)، ΔC_{ijkl} به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta C_{ijkl} = -\sum_{q=1}^{Q} C_q \, e^{\frac{-(t_n - t')}{\rho_q}} \left(1 - e^{\frac{-\Delta t}{\rho_q}}\right) \tag{۷۷-۴}$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۴-۷۷) در (۴-۷۰)، ΔM_{ij}^{R} به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Delta M_{ij}^{R} = -\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} A_{ijkl} \quad \left(\text{no sum on } i, j\right) \tag{۷۸-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۷۸)، A_{ijkl} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{ijkl} = \sum_{q=1}^{Q} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\rho_q}}\right) S_{ijkl_q}\left(t_n\right) \tag{۷۹-۴}$$

S_q در رابطه‌ی (۴-۷۹) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$S_{ijkl_q}\left(t_n\right) = \int_0^{t_n} C_{ijkl_q} \left(e^{\frac{-(t_n - t')}{\rho_q}}\right) \frac{\partial \kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'} dt' \tag{۸۰-۴}$$

همانطور که پیش‌تر اشاره شد، در رابطه‌ی (۴-۸۰)، نرخ تغییرات انحنا نسبت به زمان را می‌توان به صورت زیر تخمین زد:

$$\frac{\partial \kappa_{kl}\left(t'\right)}{\partial t'} \approx R_{\kappa} = \frac{\Delta \kappa_{kl}}{\Delta t} \qquad \left(t_n - \Delta t \le t' \le t_n\right) \tag{۸۱-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۸۱)، $\frac{\Delta \kappa_{kl}}{\Delta t}$ از گام زمانی پیشین بدست می‌آید. بنابراین رابطه‌ی بازگشتی زیر برای S_{ijkl_q} حاصل می‌شود:

$$S_{ijkl_q}\left(t_n\right) = e^{\frac{-\Delta t}{\rho_q}} S_{ijkl_q}\left(t_n - \Delta t\right) + \eta_q R_{\kappa} \left(1 - e^{\frac{-\Delta t}{\rho_q}}\right) \tag{۸۲-۴}$$

۴-۴-۶- فرمولاسیون اجزای محدود برای ورق نازک ویسکوالاستیک

همانطور که در فصل دوم بطور کامل توضیح داده شد، با اعمال روش باقی مانده‌های وزن دار بر معادله‌ی تعادل و سپس اعمال انتگرال جزء به جزء، معادله‌ی انتگرالی زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ji}\, \delta\varepsilon_{ij}\, d\Omega = \int_{\Omega} \rho\, f_i\, \delta u_i\, d\Omega + \int_{\Gamma_2} T_i\, \delta u_i\, d\Gamma \qquad (۸۳-۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۸۳)، δu_i تغییر شکل مجازی، $\delta\varepsilon_{ij}$ کرنش ناشی از تغییر شکل مجازی، ρ جرم واحد حجم، f_i نیروی حجمی، T_i ترکشن سطحی، Ω دامنه سازه و Γ_2 مرزی از سازه است که تحت نیروی ترکشن قرار دارد.

رابطه‌ی (۴-۸۳) را می‌توان به صورت زیر برای یک ورق کیرشوف نازک بازنویسی کرد:

$$\int_{\Omega} M_{ji}\, \delta\kappa_{ij}\, d\Omega = \int_{\Omega} \rho\, f_i\, \delta u_i\, d\Omega + \int_{\Gamma_2} T_i\, \delta u_i\, d\Gamma \qquad (۸۴-۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۸۴)، M_{ji} ماتریس لنگر، $\delta\kappa_{ij}$ ماتریس انحنای مجازی در ورق نازک کیرشوف است.

با توجه به اینکه فرض می‌شود جابجایی در لحظه‌ی t_n معلوم است، رابطه‌ی (۴-۸۴) در لحظه‌ی t_{n+1} به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega} M_{ji}^{n+1}\, \delta\kappa_{ij}^{n+1}\, d\Omega = \int_{\Omega} \rho\, f_i^{n+1}\, \delta u_i^{n+1}\, d\Omega + \int_{\Gamma_2} T_i^{n+1}\, \delta u_i^{n+1}\, d\Gamma \qquad (۸۵-۴)$$

با استفاده از بیان نموی رابطه‌ی تغییرات لنگر- انحنا که در رابطه‌ی (۴-۷۵) بدست آمد، می‌توان رابطه‌ی (۴-۸۵) را نیز به فرم نموی تبدیل کرد. مقدار لنگر، انحنای مجازی، تغییر شکل و تغییر شکل مجازی در لحظه‌ی t_{n+1} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\Delta M_{ji} = M_{ji}^{n+1} - M_{ji}^{n} \rightarrow M_{ji}^{n+1} = M_{ji}^{n} + \Delta M_{ji} \\
&\Delta\delta\kappa_{ij} = \delta\kappa_{ij}^{n+1} - \delta\kappa_{ij}^{n} \rightarrow \delta\kappa_{ij}^{n+1} = \delta\kappa_{ij}^{n} + \Delta\delta\kappa_{ij} \\
&\Delta\delta u_i = \delta u_i^{n+1} - \delta u_i^{n} \rightarrow \delta u_i^{n+1} = \delta u_i^{n} + \Delta\delta u_i \\
&\Delta u_i = u_i^{n+1} - u_i^{n} \rightarrow u_i^{n+1} = u_i^{n} + \Delta u_i
\end{aligned} \qquad (۸۶-۴)$$

از آنجایی که فرض شده است مقدار جابجایی در لحظه‌ی t_n مشخص است، می‌توان نتیجه گرفت که جابجایی مجازی δu_i^n و انحنای مجازی $\delta\kappa_{ij}^n$ در لحظه‌ی t_n صفر است. با قرار دادن رابطه‌ی (۴-۸۶) در رابطه‌ی (۴-۸۵)، این معادله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_{\Omega}\left(M_{ji}^{n}+\Delta M_{ji}\right)\left(\Delta\delta\kappa_{ij}\right)d\Omega=\int_{\Omega}\rho f_i^{n+1}\,\Delta\delta u_i\,d\Omega+\int_{\Gamma_2}T_i^{n+1}\Delta\delta u_i\,d\Gamma \qquad (۴\text{-}۸۷)$$

رابطه‌ی (۴-۸۷) را می‌توان به صورت (۴-۸۸) بیان کرد:

$$\int_{\Omega}\Delta M_{ji}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,d\Omega=\int_{\Omega}\rho f_i^{n+1}\,\Delta\delta u_i\,d\Omega+\int_{\Gamma_2}T_i^{n+1}\,\Delta\delta u_i\,d\Gamma-\int_{\Omega}M_{ji}^{n}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,d\Omega \qquad (۴\text{-}۸۸)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۴-۷۵) در (۴-۸۸) رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{h^3}{12}\int_A C'_{ijkl}\,\Delta\kappa_{kl}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,dA&=\int_A\rho f_i^{n+1}\Delta\delta u_i\,dA+\int_{S_2}T_i^{n+1}\Delta\delta u_i\,dS\\&-\int_A M_{ji}^{n}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,dA-\frac{h^3}{12}\int_A\Delta M_{ji}^{R}\,\Delta\delta\kappa_{ij}\,dA\end{aligned} \qquad (۴\text{-}۸۹)$$

در رابطه‌ی (۴-۸۹)، h ضخامت ورق است که ثابت فرض شده است، C'_{ijkl} و ΔM_{ij}^{R} به ترتیب از رابطه‌های (۴-۷۶) و (۴-۷۸) بدست می‌آیند. A سطح مقطع صفحه‌ی میانی ورق است و S_2 مرزی از ورق است که تحت ترکشن قرار دارد.

رابطه‌ی بردارهای تغییرات انحنا $\Delta\delta\kappa,\Delta\kappa$ و بردارهای تغییرات جابجایی گرهی $\Delta\delta d,\Delta d$ در یک المان ورق DKFT به صورت (۴-۹۰) و (۴-۹۱) بیان می‌شود:

$$[\Delta\kappa]=[B][\Delta d] \qquad (۴\text{-}۹۰)$$

$$[\Delta\delta\kappa]=[B][\Delta\delta d] \qquad (۴\text{-}۹۱)$$

در رابطه‌ی (۴-۹۰) و (۴-۹۱)، $[B]$ ماتریس گرادیان یا تبدیل انحنا- جابجایی است که از رابطه‌ی (۴-۴۶) بدست می‌آید و $[\Delta\delta d],[\Delta d]$ بردارهای تغییرات جابجایی گرهی در یک المان ورق DKFT هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[\Delta d]^T = \langle \Delta w_1 \quad \Delta\theta_{x_1} \quad \Delta\theta_{y_1} \quad \Delta w_2 \quad \Delta\theta_{x_2} \quad \Delta\theta_{y_2} \quad \Delta w_3 \quad \Delta\theta_{x_3} \quad \Delta\theta_{y_3} \rangle \tag{۹۲-۴}$$

(۹۳-۴)

$$[\Delta \delta d]^T = \langle \Delta\delta w_1 \quad \Delta\delta\theta_{x_1} \quad \Delta\delta\theta_{y_1} \quad \Delta\delta w_2 \quad \Delta\delta\theta_{x_2} \quad \Delta\delta\theta_{y_2} \quad \Delta\delta w_3 \quad \Delta\delta\theta_{x_3} \quad \Delta\delta\theta_{y_3} \rangle$$

با قرار دادن رابطه‌های (۴-۹۰) و (۴-۹۱) در (۴-۸۹)، این معادله برای یک المان به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{h^3}{12}\int_{A^e}\left([B][\Delta\delta d]\right)^T [C']\left([B][\Delta d]\right) dA^e = &\int_{A^e}\rho\left(\begin{bmatrix} H_x & H_y \end{bmatrix}[\Delta\delta d]\right)^T \left[f^{n+1}\right] dA^e \\ &+\int_{S_2^e}\left(\begin{bmatrix} H_x & H_y \end{bmatrix}[\Delta\delta d]\right)^T \left[T^{n+1}\right] dS^e \\ &-\int_{A^e}\left([B][\Delta\delta d]\right)^T \left[M^n\right] dA^e \\ &-\frac{h^3}{12}\int_{A^e}\left([B][\Delta\delta d]\right)^T \left[\Delta M^R\right] dA^e\end{aligned} \tag{۹۴-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۹۴)، مولفه‌های ماتریس $\begin{bmatrix} H_x & H_y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ با قرار دادن مولفه‌های رابطه‌ی (۴-۶۰) در رابطه‌ی (۴-۴۲) بدست می‌آیند. از آنجایی که $[\Delta\delta d]^{\mathrm{T}}$ تغییرات جابجایی گرهی مجازی است، رابطه‌ی (۴-۹۴) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{h^3}{12}\left(\int_{A^e}[B]^T[C'][B]dA^e\right)[\Delta d] = &\int_{A^e}\left(\rho\begin{bmatrix} H_x & H_y \end{bmatrix}^T\left[f^{n+1}\right]\right)dA^e \\ &+\int_{S_2^e}\left(\begin{bmatrix} H_x & H_y \end{bmatrix}^T\left[T^{n+1}\right]\right)dS^e \\ &-\int_{A^e}\left([B]^T\left[M^n\right]\right)dA^e \\ &-\frac{h^3}{12}\int_{A^e}\left([B]^T\left[\Delta M^R\right]\right)dA^e\end{aligned} \tag{۹۵-۴}$$

رابطه‌ی (۴-۹۵) را می‌توان به صورت (۴-۹۶) بازنویسی کرد:

$$\left[K^e\right]\{\Delta d\} = \left\{f_1^e\right\} + \left\{f_2^e\right\} - \left\{f_3^e\right\} - \left\{f_4^e\right\} \tag{۹۶-۴}$$

ماتریس و بردارهای موجود در رابطه‌ی (۴-۹۶) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
\left[K^{e}\right] &= \frac{h^{3}}{12}\int_{A^{e}} [B]^{T}[C'][B]\,dA^{e} \\
\left\{f_{1}^{e}\right\} &= \int_{A^{e}} \rho\left[H_{x} \quad H_{y}\right]^{T}\left\{f^{n+1}\right\} dA^{e} \\
\left\{f_{2}^{e}\right\} &= \int_{S_{2}^{e}} \left[H_{x} \quad H_{y}\right]^{T}\left\{T^{n+1}\right\} dS \\
\left\{f_{3}^{e}\right\} &= \int_{A^{e}} [B]^{T}\left[M^{n}\right] dA^{e} \\
\left\{f_{4}^{e}\right\} &= \frac{h^{3}}{12}\int_{A^{e}} [B]^{T}\left[\Delta M^{R}\right] dA^{e}
\end{aligned} \tag{۹۷-۴}
$$

در رابطه‌ی (۴-۹۷)، $\left[K^{e}\right]$ ماتریس سختی المان ورق DKFT است، $\left\{f_{1}^{e}\right\}$ بردار نیروی المان ناشی از نیروی حجمی، $\left\{f_{2}^{e}\right\}$ بردار نیروی المان ناشی از ترکشن سطحی، $\left\{f_{3}^{e}\right\}$ بردار نیروی المان ناشی از لنگر در ابتدای بازه زمانی و $\left\{f_{4}^{e}\right\}$ بردار نیروی المان ناشی از تغییرات لنگر در طول بازه زمانی است. به علاوه $\{\Delta d\}$ بردار تغییرات جابجایی گرهی در یک المان است.

با در نظر گرفتن مشارکت تمامیِ المان‌ها، پس از اسمبلی رابطه‌ی کُلی به صورت رابطه‌ی (۴-۹۸) حاصل می‌شود.

$$
[K]\{\Delta U\} = \{F\} \tag{۹۸-۴}
$$

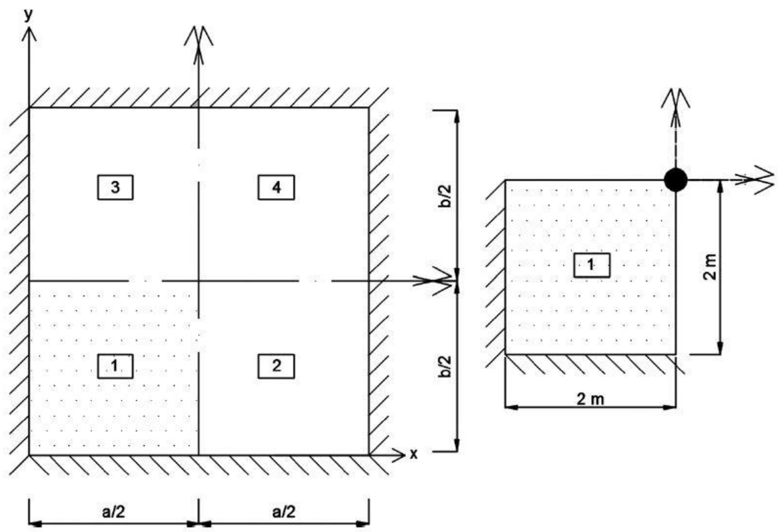
در رابطه‌ی (۴-۹۸)، $[K]$ ماتریس سختی کلی، $\{F\}$ بردار نیروی کلی و $\{\Delta U\}$ بردار تغییرات جابجایی گرهی کلی در طول گام زمانی Δt است. رابطه‌ی (۴-۹۸)، یک دستگاه معادلات خطی است که با روش حذفی گاوس می‌تواند حل شود.

در اینجا به منظور بررسی عملکرد المان‌های ورق DKFT پیشنهادی در مسائل ویسکوالاستیک و دقت این المان‌ها در مش‌های درشت چند مثال ارائه می‌شود و در مورد مقدار پارامتر شکلِ ω در ورق های ویسکوالاستیک بیضوی با نسبت‌های قطر بزرگ به کوچک مختلف بحث می‌شود.

۴-۷-۴- مثال‌های عددی

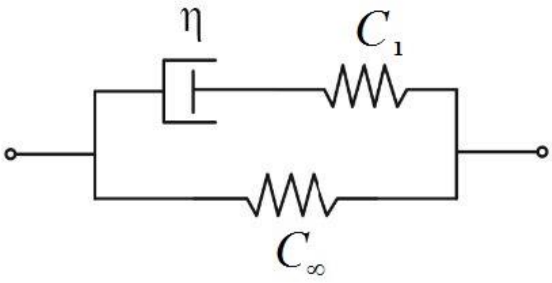
۴-۷-۴-۱- مثال اول: ورق مربعی ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه ساده تحت بار متمرکز مرکزی

در این مثال ابتدا به منظور صحت‌سنجی کُد اجزای محدودِ ویسکوالاستیک نوشته شده و سپس کارآمدیِ المان پیشنهادی، یک ورق مربعی ویسکوالاستیک با تکیه گاه ساده با طول $a=4\,\mathrm{m}$ و عرض $b=4\,\mathrm{m}$ و ضخامت $h=0.1\mathrm{m}$ تحت بار متمرکز پله‌ای با اندازه‌ی $P=100H(t)\ \mathrm{kN},\ (0\leq t\leq 12\mathrm{s})$ در مرکز آن در نظر گرفته شده است. $H(t)$ نشان دهنده‌ی تابع هویساید می‌باشد. هندسه‌ی این مسئله در شکل ۴-۴۸ نمایش داده شده است. به دلیل متقارن بودن مسئله، می‌توان تنها یک چهارم آن را مدل کرد.



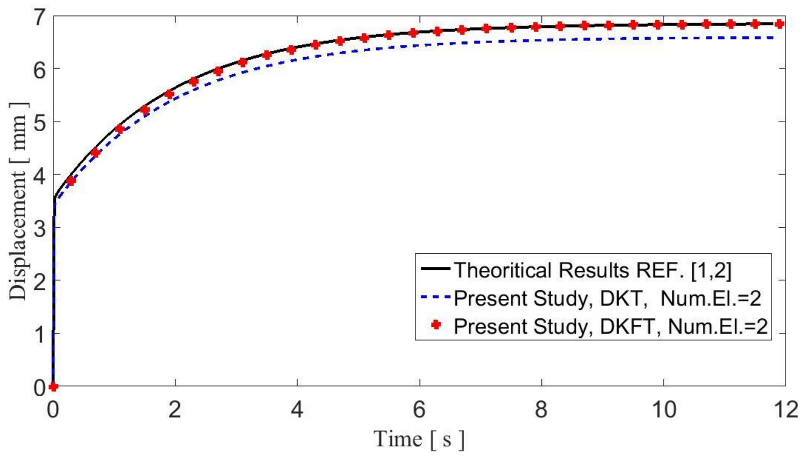
شکل ۴-۴۸: ورق مربعی با تکیه گاه ساده (هندسه‌ی مثال اول) [۱۰۵]

در این مثال خصوصیات ماده ویسکوالاستیک با مدل ماکسول-ویچرت سه المانی نمایش داده شده در شکل ۴-۴۹ توصیف می‌شود که در واقع همان بیان ماکسول مدل جامد استاندارد خطی (SLS) است. ثوابت فنرها در این مدل $C_1=C_\infty=3\times10^7\ \mathrm{kPa}$ و ضریب میراگر $\eta=3\times10^7\ \mathrm{kPa\,s}$ و نسبت پوآسون ثابت $\upsilon=0.3$ در نظر گرفته شده است.



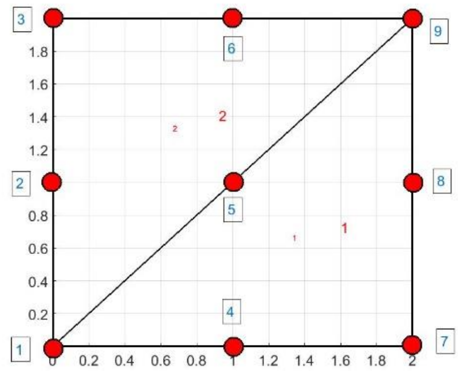
شکل ۴-۴۹: مدل ماکسول-ویچرت سه المانی

در شکل ۴-۵۰ مقادیر خیز برای مرکز ورق ویسکوالاستیک w برای حل اجزای محدود با المان DKT و المان پیشنهادی DKFT با پاسخ تحلیلی مسئله [۱۰۵، ۱۰۶] با استفاده از مدل ماکسول-ویچرت مقایسه شده است.



شکل ۴-۵۰: مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و اجزای محدود برای جابجایی مرکز ورق ویسکوالاستیک مربعی در مثال اول

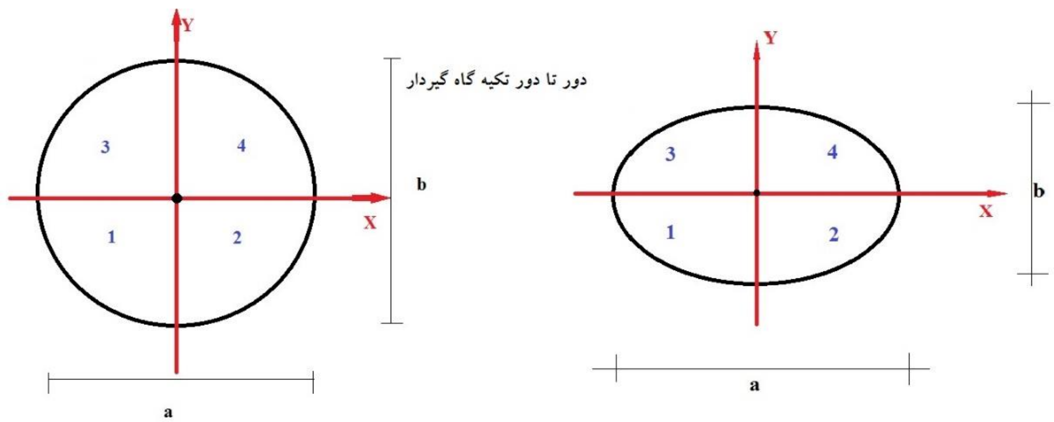
همانطور که در شکل ۴-۵۰ مشخص است نتایج اجزای محدود حاصل از کُد نوشته شده، با دقت بالایی با حل تحلیلی و نتایج مرجع [۱۰۵، ۱۰۶] تطابق دارد که این مطلب کارآمديِ برنامه کامپیوتری نوشته شده را تایید می‌کند. با مقایسه‌ی نتایج اجزای محدود در شکل ۴-۵۰ می‌توان دریافت که المان DKFT پیشنهادی توانمندتر از المان DKT می‌باشد چرا که با مِشِ درشتی شامل تنها دو المان به پاسخ تحلیلی همگرا می‌شود. مش استفاده شده در تحلیل اجزای محدود این مسئله در شکل ۴-۵۱ نمایش داده شده است. پارامتر شکل در این مسئله $\omega = 1i + 1.9$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۵۱: مش بکاربرده شده در تحلیل اجزای محدود مثال اول

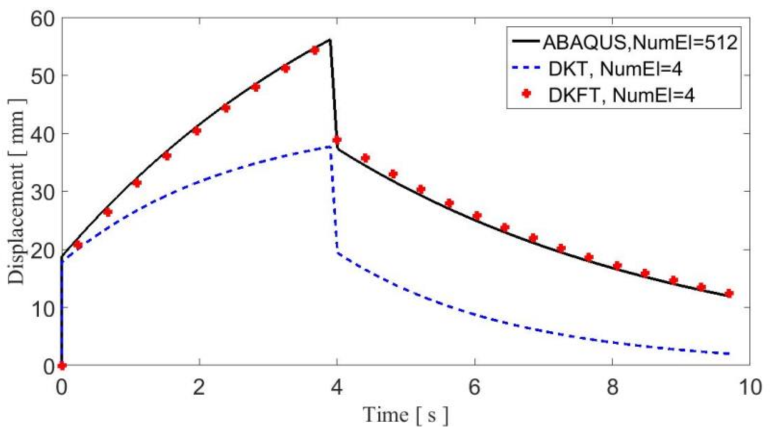
۴-۴-۷-۲- مثال دوم: ورق نازک بیضوی ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه گیردار تحت بار متمرکز مرکزی

در مثال دوم، یک ورق ویسکوالاستیک بیضوی با تکیه گاه گیردار با نسبت قطر بزرگ a به قطر کوچک b مختلف و ضخامت $h=0.1\text{m}$ تحت بار متمرکز ضربه‌ایِ مستطیلی با اندازه‌ی $P=10\left(H(t)-H(t-t_0)\right)\text{N},\left(0\le t\le 10\text{s}\ ,t_0=4\text{s}\right)$ در مرکز آن در نظر گرفته شده است. $H(t)$ نشان دهنده ی تابع هویساید می‌باشد. هندسه‌ی مثال دوم در شکل ۴-۵۲ نمایش داده شده است. در شکل ۴-۵۲ قطر بزرگ با a و قطر کوچک با b نشان داده شده است.

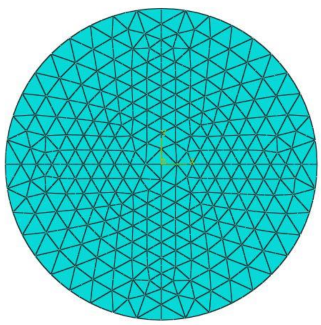


شکل ۴-۵۲: ورق دایره‌ای و بیضوی با تکیه گاه گیردار (هندسه‌ی مثال دوم)

در این مثال نیز خصوصیات ماده ویسکوالاستیک با مدل ماکسول-ویچرت سه المانی که در شکل ۴-۴۹ نشان داده شد توصیف می‌شود. ثوابت فنرها در این مدل $C_{\infty}=0.1\text{MPa}, C_1=0.4\text{MPa}$ و ضریب میراگر $\eta=0.4\text{MPa s}$ و نسبت پوآسون ثابت $\upsilon=0.3$ در نظر گرفته شده است [۱۰]. در شکل ۴-۵۳ مقادیر خیز w برای مرکز ورق ویسکوالاستیک دایره ای با شعاع $\text{a}=\text{b}=4\text{m}$ برای حل اجزای محدود با المان DKT و المان پیشنهادی DKFT به وسیله کُد نوشته شده با نتایج حاصل از مدل سازیِ مسئله در نرم افزار تجاری آباکوس مقایسه شده است. مش استفاده شده در حل این مثال با نرم افزار تجاری آباکوس در شکل ۴-۵۴ نمایش داده شده است. پارامتر شکل در المان DKFT برابر $\omega=0.5i+4.1$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۴-۵۳: مقایسه‌ی نتایج اجزای محدود با ۴ المان **DKT** و **DKFT** با نتایج آباکوس برای جابجایی عمودی مرکز ورق ویسکوالاستیک دایره‌ای با شعاع ۲ متر تحت بار پله‌ای متمرکز در مرکز ورق



شکل ۴-۵۴: مش استفاده شده در حل ورق ویسکوالاستیک دایره‌ای با نرم افزار آباکوس شامل ۵۱۲ المان ورق مثلثی مرتبه دوم

در جدول ۴-۷ مقادیر جابجایی عمودی w مرکز ورق ویسکوالاستیک بیضوی در لحظه‌ی $t = 4\mathrm{s}$ برای نسبت‌های مختلف قطر بزرگ به قطر کوچک، با استفاده از ۴ المان DKT و DKFT بدست آمده در این مطالعه با نتایج حاصل از مدل سازیِ مسائل در نرم‌افزار تجاری آباکوس مقایسه شده است. همینطور در جدول ۴-۷ مقادیر پیشنهادی پارامتر شکل ω برای حل ورق بیضوی ویسکوالاستیک مورد نظر با نسبت قطر بزرگ به کوچک مختلف تنها با چهار المان DKFT ارائه شده است.

جدول ۴-۷: مقایسه‌ی نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود ورق بیضوی با نسبت قطر بزرگ به کوچک مختلف در لحظه‌ی $t = 4\mathrm{s}$ برای $\mathrm{b} = 4\mathrm{m}$ (مثال دوم)

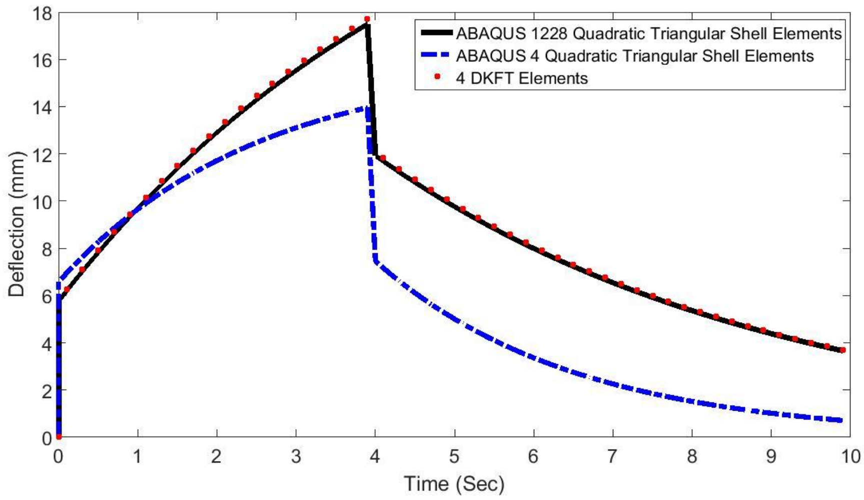
نسبت قطر بزرگ به کوچک در ورق بیضوی $\frac{a}{b}$	مقدار پارامتر شکل ω	تعداد المان‌های پوسته مثلثی با گره میانی در مدل آباکوس	خیز مرکز ورق بیضوی ویسکوالاستیک در لحظه‌ی $t = 4\mathrm{s}$ با استفاده از آباکوس (mm)	خیز مرکز ورق بیضوی ویسکوالاستیک در لحظه‌ی $t = 4\mathrm{s}$ با استفاده از ۴ المان DKFT (خطا ٪)	خیز مرکز ورق بیضوی ویسکوالاستیک در لحظه‌ی $t = 4\mathrm{s}$ با استفاده از ۴ المان DKT (خطا ٪)
1.0	$4.1 + 0.5i$	512	56.175	(0.863)55.69	(32.87)37.71
1.1	$3.7 + 0.001i$	1216	61.1252	(1.20)60.39	(35.80)39.24
1.2	$5.45 + 0.1i$	1176	65.0902	(1.44)64.15	(39.71)40.22
1.3	$3.3 + 0.1i$	1148	68.1732	(0.826)67.61	(40.17)40.79
1.4	$3.3 + 0.1i$	1102	70.5531	(1.082)69.79	(41.77)41.08
1.5	$3.3 + 0.1i$	1088	72.3745	(1.11)71.57	(43.11)41.17
1.6	$3.3 + 0.1i$	1038	73.7956	(1.308)72.83	(44.28)41.12
1.7	$3.3 + 0.1i$	1018	74.8993	(1.641)73.67	(45.27)40.99
1.8	$3.3 + 0.1i$	964	75.7754	(1.01)75.01	(46.17)40.79
1.9	$3.3 + 0.1i$	938	76.4548	(0.817)75.83	(46.96)40.55
2.0	$3.3 + 0.1i$	898	77.0801	(0.765)76.49	(47.74)40.28

همانطور که از نتایج ارائه شده در جدول ۴-۷ مشخص است، با بهره‌گیری از المان DKFT پیشنهادی در این فصل تنها با استفاده از مشی متشکل از ۴ المان می‌توان به پاسخ مسئله همگرا شد، که این

مطلب نمایانگر توانمندی المان‌های ورق پیشنهادی در حل مسائل ویسکوالاستیسیته است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از این المان‌ها هزینه محاسباتی را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد و از نظر مدت زمان تحلیل اجزای محدود مسئله نیز نسبت به المان‌های ورق کلاسیک بسیار مقرون به صرفه است. با توجه به جدول ۴-۷ می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر شکل $\omega = 0.1i + 3.3$ را می‌توان به عنوان مبنا برای مسائل خمش ورق‌های نازک بیضوی ویسکوالاستیک تحت بار متمرکز در مرکز آن، در تحلیل اجزای محدود با المان DKFT در نظر گرفت.

۴-۴-۷-۳- مثال سوم: ورق نازک دایره‌ای ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه گیردار تحت بار پله‌ای گسترده‌ی یکنواختِ یک نیوتن بر متر مربع

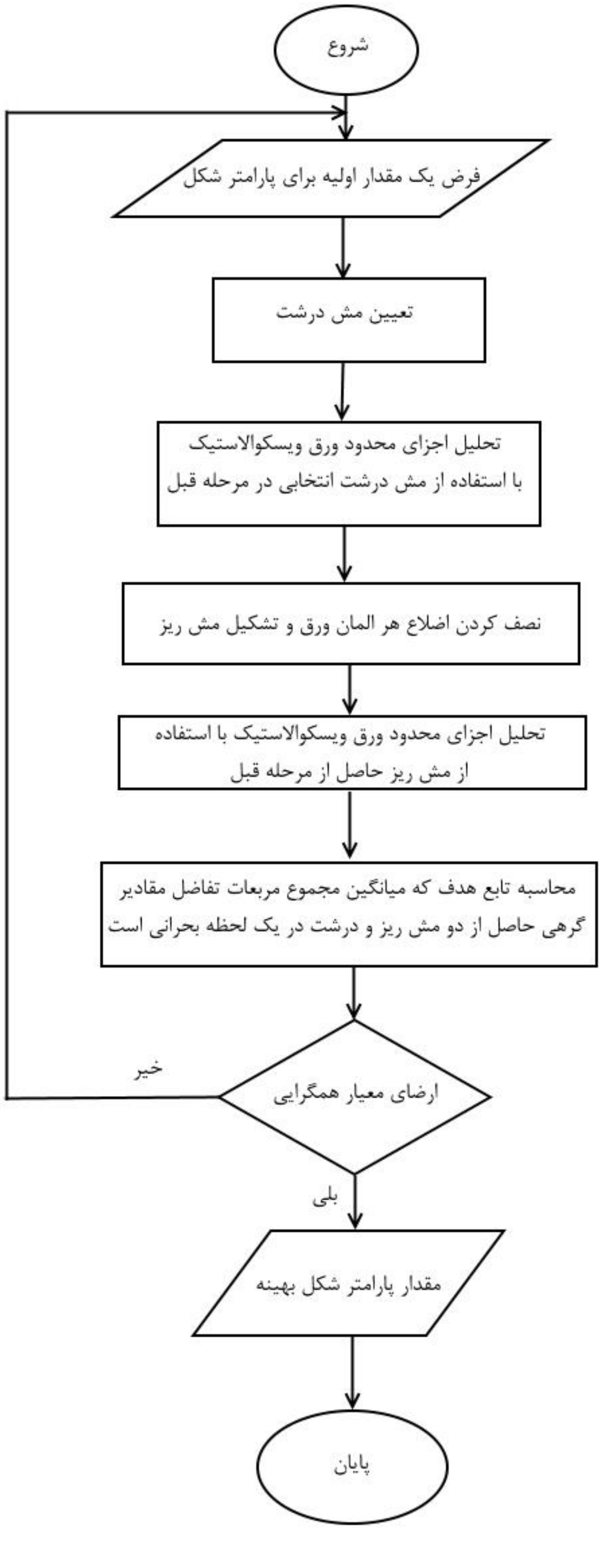
هندسه و خصوصیات ماده در مثال سوم دقیقاً مشابه حالت دایره‌ایِ مثال دوم با شعاع ۲ متر در نظر گرفته شده است، در حالی که تحت بار پله‌ایِ گسترده‌ی یکنواخت یک نیوتن بر متر مربع به صورت $q = 1\left(H(t) - H(t - t_0)\right)\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2},\ \left(0 \le t \le 10\mathrm{s}, t_0 = 4\mathrm{s}\right)$ قرار دارد. پارامتر شکل در این مثال برای المان ورق DKFT برابر $\omega = 0.8i + 2.7$ در نظر گرفته شده است. جابجایی عمودی مرکز ورق دایره‌ای ویسکوالاستیک برای این مثال در شکل ۴-۵۵ نمایش داده شده است. همانطور که در شکل ۴-۵۵ مشخص است، تنها با چهار المان پیشنهادی DKFT حل اجزای محدود به پاسخ مسئله همگرا شده است. در این شکل پاسخ مسئله، با حل اجزای محدود با استفاده از چهار المان پوسته‌ی مثلثیِ مرتبه‌ی دوم در نرم افزار تجاری آباکوس نیز مقایسه شده است. با بهره‌گیری از نتایج مثال‌های حل شده می‌توان دریافت که المان ورق مثلثی خمشی DKFT پیشنهادی، خصوصاً در مقایسه با المان‌های ورق مثلثی خمشی کلاسیک، المان بسیار توانمندی است چرا که در حالی که دقت بالایی دارد، هزینه محاسباتی را نیز بطور قابل توجهی کاهش می‌دهد. شایان ذکر است که این روش به راحتی قابل تعمیم برای بدست آوردن المان ورق چهار ضلعی است که المان DKFQ نامیده می‌شود.



شکل ۴-۵۵: مقایسه‌ی نتایج اجزای محدود با ۴ المان **DKFT** با نتایج آباکوس برای جابجایی عمودی مرکز ورق ویسکوالاستیک دایره ای با شعاع ۲ متر تحت بار پله‌ای گسترده‌ی یکنواخت یکه بر واحد سطح

۴-۴-۸- پارامتر شکل در المان ورق DKFT

برای بدست آوردن پارامتر شکل ω در المان ورق DKFT برای مسائلی که حل تحلیلی موجود ندارند به عنوان مثال ورق دایره‌ای شکل در مثال دوم و سوم، پیشنهاد می‌شود که مسئله با فرض مجهول بودن پارامتر شکل با یک المان DKFT حل شود. سپس هر ضلع المان مثلثی DKFT را به دو قسمت تقسیم کرده و این نقاط به هم وصل شود. بدین صورت ۴ المان DKFT حاصل می‌شود. دوباره مسئله با استفاده از این ۴ المان با مجهول فرض کردن پارامتر شکل حل می‌شود. تابع هدف میانگین مجموع مربعات تفاضل مقادیر گرهی $\text{Objective Function} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}_i\right)^2$ در یک لحظه‌ی مشخص مثلاً $t = 4\text{s}$ در مثال دوم و سوم، در نظر گرفته می‌شود. هر پارامتر شکل ω که تابع هدف در دو مش متوالی را حداقل کند، منجر به دقیق‌ترین پاسخ می‌شود. شایان ذکر است که مقادیر گرهی در مش اول در نقاطی که گره وجود ندارد با درون‌یابی بدست می‌آید و n تعداد گره‌ها در مش دوم است. در شکل زیر فلوچارت روش پیشنهادی برای تعیین پارامتر شکل در المان ورق DKFT نمایش داده شده است.



شکل ۴-۵۶: فلوچارت روش پیشنهادی برای محاسبه پارامتر شکل در المان ورق DKFT

۴-۵- المان گاوسین-فوریه پیشنهادی

۴-۵-۱- معرفی

توابع پایه شعاعی گاوسین-فوریه با الهام گرفتن از توابع پایه شعاعی گاوسین و توابع پایه شعاعی مختلط فوریه برای نخستین بار در این رساله به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$B(r) = \alpha\, e^{-i\omega r^2} \tag{۴-۹۹}$$

در این رابطه نیز r نُرم اقلیدسی میان داده‌های نقطه‌ای را نمایش می‌دهد و ثوابت α و ω پارامترهای شکل هستند که به منظور افزایش دقت درونیابی انتخاب می‌شوند.

با اعمال فرآیند بدست آوردن توابع شکل در روش درون‌یابی نقطه‌ای از طریق توابع پایه شعاعی RPIM بر یک المان سه گرهی یک بُعدی در دستگاه مختصات طبیعی ξ و استفاده از توابع پایه شعاعی گاوسین-فوریه، توابع شکل گاوسین-فوریه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= \frac{1}{2}\left(h(\xi) - \xi + d\right) \\ \phi_2(\xi) &= -h(\xi) + (1-d) \\ \phi_3(\xi) &= \frac{1}{2}\left(h(\xi) + \xi + d\right) \end{aligned} \tag{۴-۱۰۰}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۰۰):

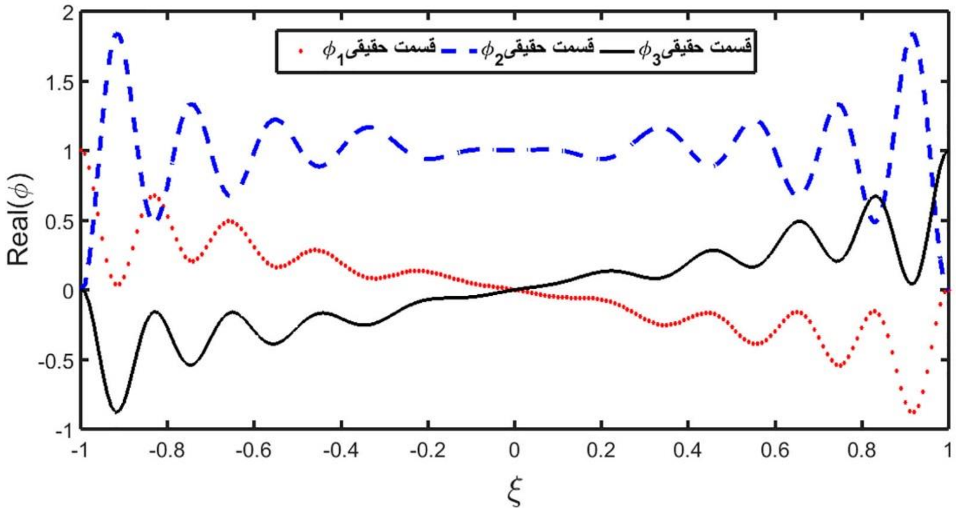
$$\begin{aligned} h(\xi) &= c\left[e^{-i\omega(1-\xi)^2} - 2e^{-i\omega(\xi)^2} + e^{-i\omega(1+\xi)^2}\right] \\ c &= \frac{e^{4i\omega}}{1-4e^{3i\omega}+3e^{4i\omega}} \\ d &= \frac{-2e^{3i\omega}}{-3e^{3i\omega}+e^{2i\omega}+e^{i\omega}+1} \end{aligned} \tag{۴-۱۰۱}$$

اَشکال ۴-۵۷ تا ۴-۶۱ توابع شکل گاوسین- فوریه را در یک المان سه گرهی یک بعدی در دستگاه مختصات طبیعی ξ به ازای مقادیر مختلف پارامتر شکل ω نمایش می‌دهد. در این اشکال، قسمت

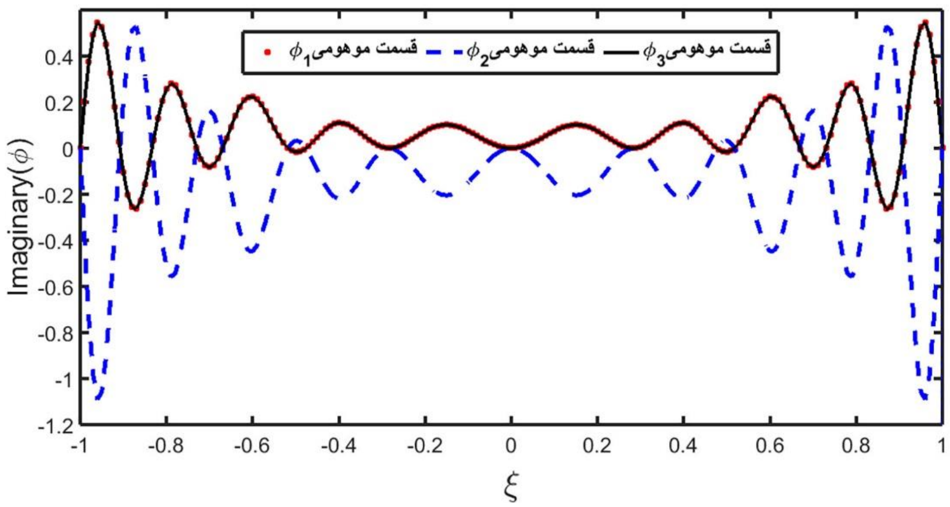
حقیقی و قسمت موهومی توابع شکل به صورت مجزا نشان داده شده است. براساس این اشکال کاملاً مشخص است که توابع شکل گاوسین- فوریه پیشنهادی، خاصیت دلتای کرونیکر را برآورده می‌کنند.

$$\omega=1i+10$$

(الف)



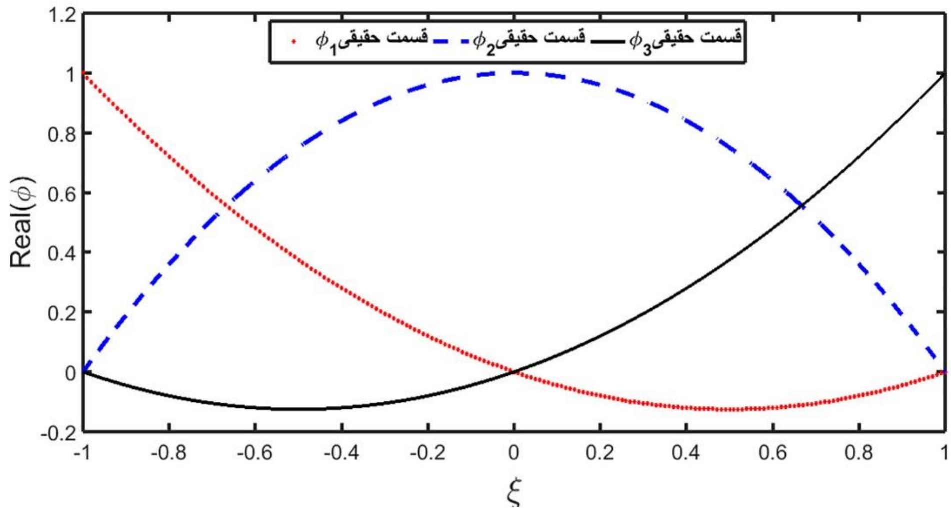
(ب)



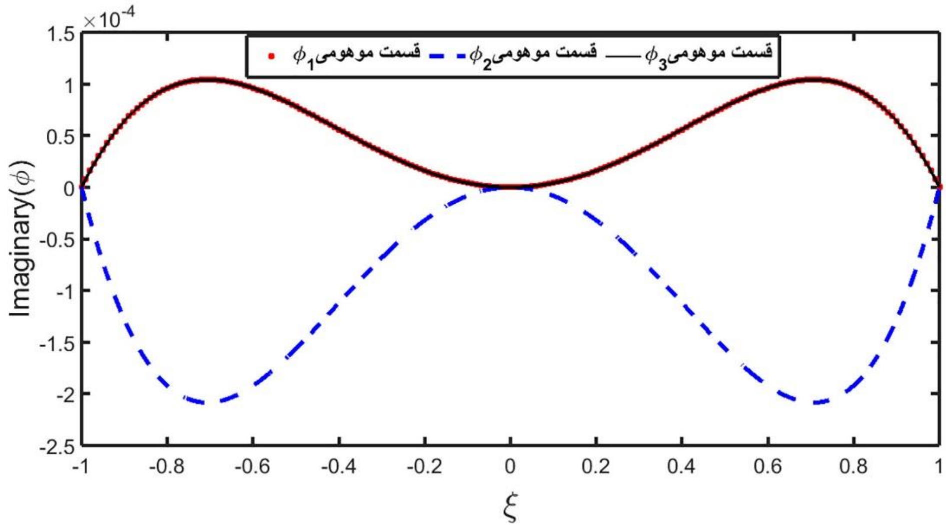
شکل ۴-۵۷: توابع شکل گاوسین- فوریه پیشنهادی برای المان یک بعدی سه گرهی با $\omega=1i+10$، (الف) قسمت حقیقی (ب) قسمت موهومی

$$\underline{\omega = 0.001i + 0.001}$$

(الف)



(ب)

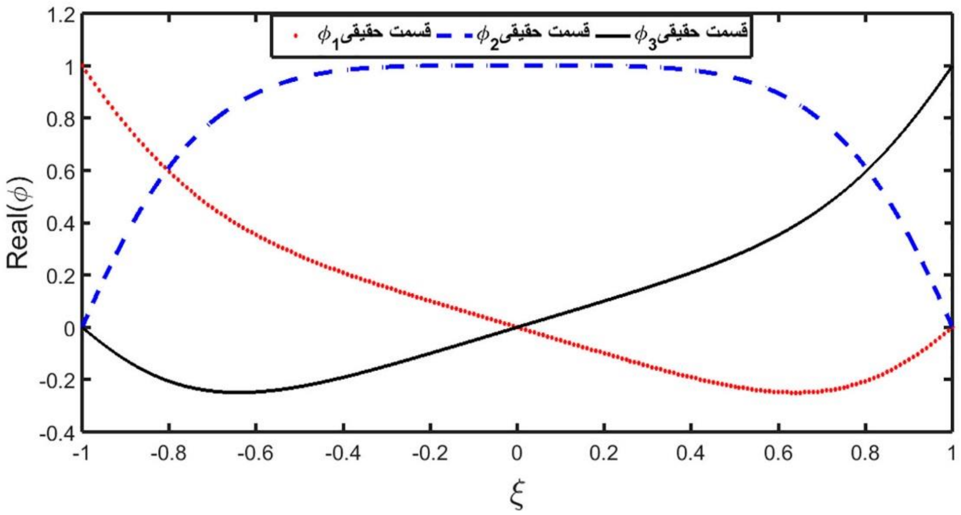


شکل ۴-۵۸: توابع شکل گاوسین- فوریه پیشنهادی برای المان یک بعدی سه گرهی با $\omega = 0.001(1i+1)$،

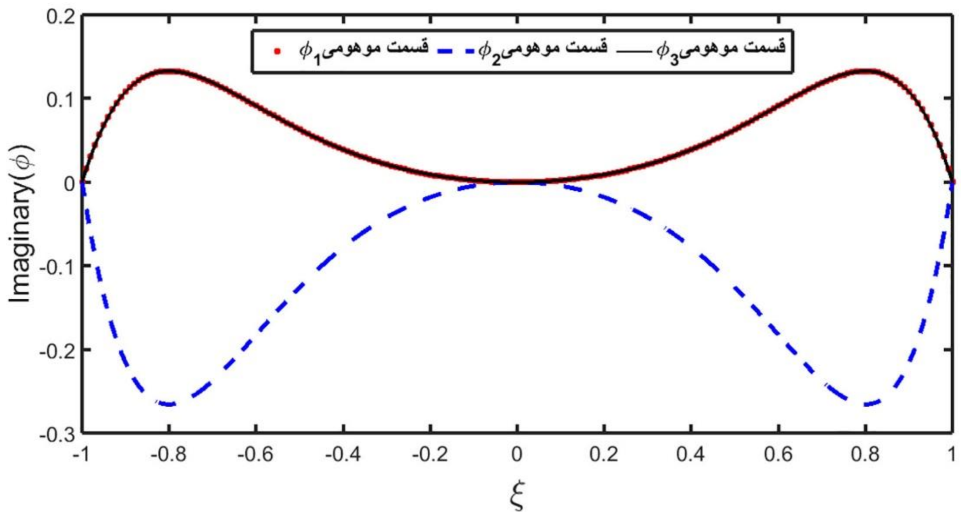
(الف) قسمت حقیقی (ب) قسمت موهومی

$\omega = 1i + 1$

(الف)



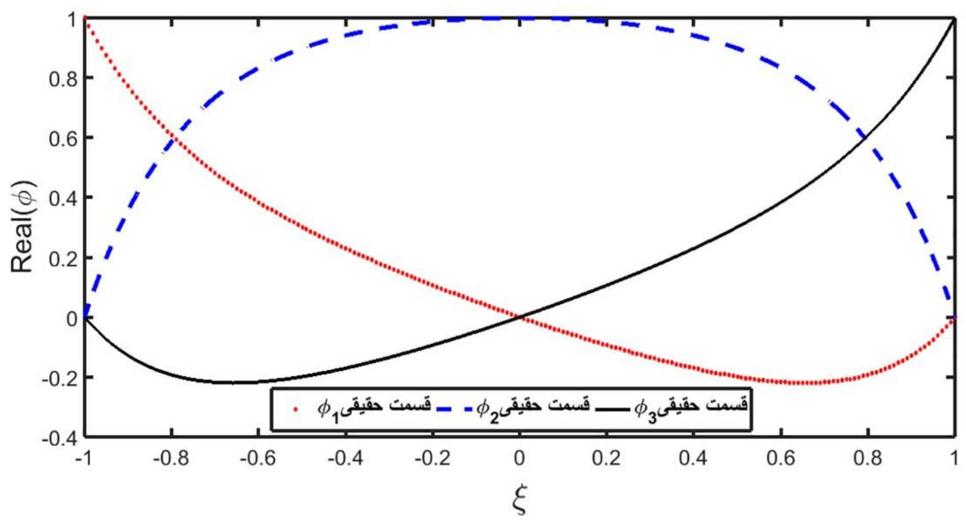
(ب)



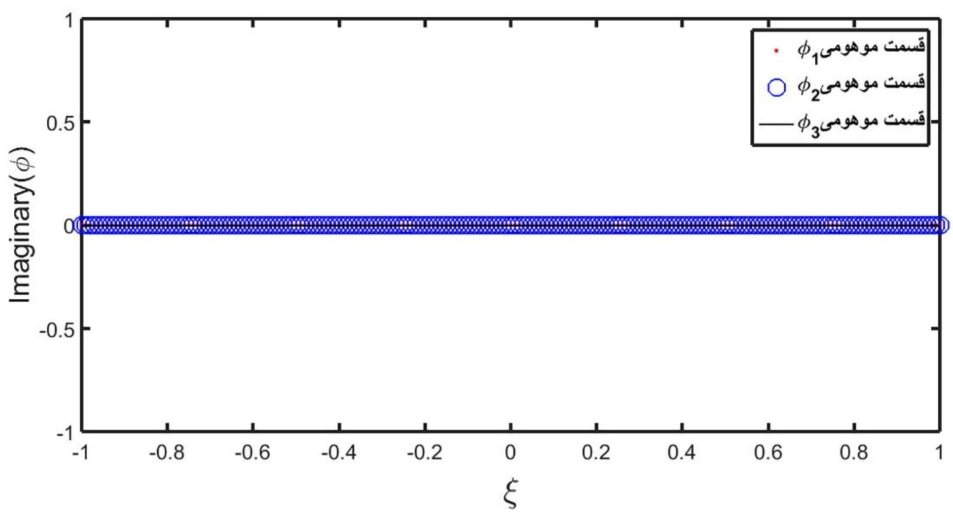
شکل ۴-۵۹: توابع شکل گاوسین- فوریه پیشنهادی برای المان یک بعدی سه گرهی با $\omega = 1i + 1$، (الف) قسمت حقیقی (ب) قسمت موهومی

$\omega = 1i$

(الف)



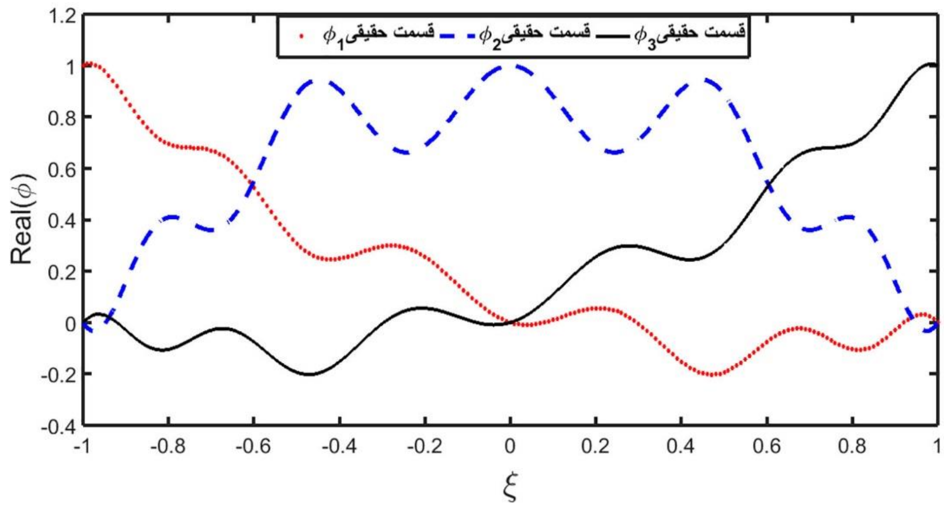
(ب)



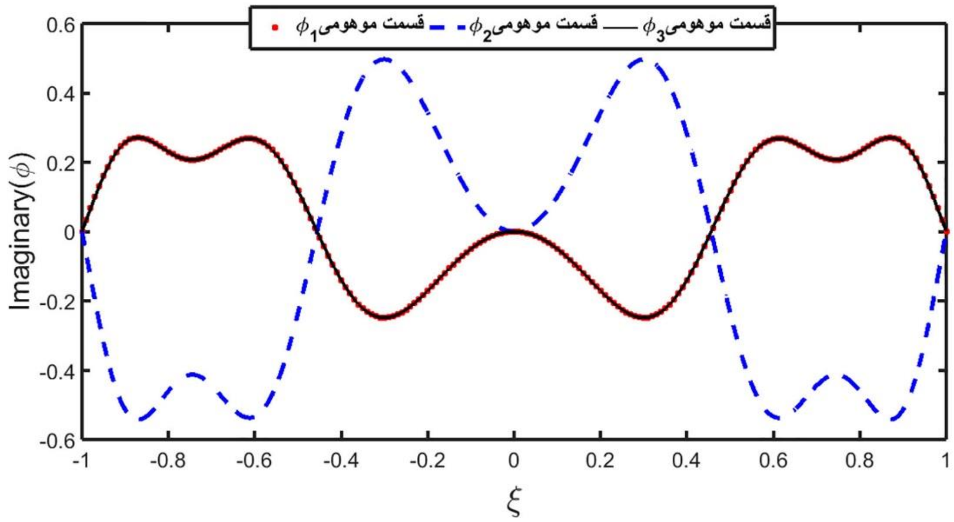
شکل ۴-۶۰: توابع شکل گاوسین- فوریه پیشنهادی برای المان یک بعدی سه گرهی با $\omega = 1i$، (الف) قسمت حقیقی (ب) قسمت موهومی

$\omega = 5$

(الف)



(ب)



شکل ۴-۶۱: توابع شکل گاوسین- فوریه پیشنهادی برای المان یک بعدی سه گرهی با $\omega = 5$، (الف) قسمت حقیقی (ب) قسمت موهومی

از دیگر خصوصیات توابع شکل گاوسین-فوریه می‌توان به خاصیت افراز واحد و خاصیت پیوستگی تکه‌ای از مرتبه‌ی بی‌نهایت اشاره کرد.

مشتق توابع شکل گاوسین-فوریه در یک المان یک بعدی سه گرهی از روابط زیر به راحتی قابل دستیابی است:

$$\begin{aligned} &\phi_1'(\xi)=\frac{1}{2}\left(h'(\xi)-1\right), && \phi_1^{(n)}(\xi)=\frac{1}{2}h^{(n)}(\xi),\; n=2,3,\ldots \\ &\phi_2^{(n)}(\xi)=-h^{(n)}(\xi), && n=1,2,\ldots \\ &\phi_3'(\xi)=\frac{1}{2}\left(h'(\xi)+1\right), && \phi_3^{(n)}(\xi)=\frac{1}{2}h^{(n)}(\xi),\; n=2,3,\ldots \end{aligned} \tag{۱۰۲-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۰۲)، $h'(\xi)$ و $h^{(n)}(\xi)$ به ترتیب مشتق مرتبه‌ی اول و مشتق مرتبه‌ی n-ام تابع $h(\xi)$ هستند. شایان ذکر است که تابع $h(\xi)$ از رابطه‌ی (۴-۱۰۱) بدست می‌آید.

۴-۵-۲- المان‌های دو بعدی چهاروجهی گاوسین- فوریه

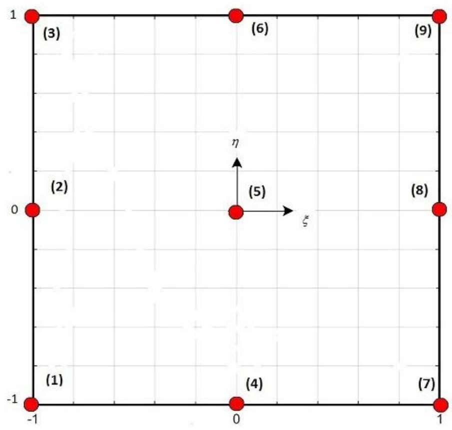
در این بخش، پیش از بدست آوردن توابع شکل گاوسین-فوریه در المان‌های دو بعدی چهاروجهی، بیان یک نکته ضروری به نظر می‌رسد. هدف از این تحقیق مقایسه‌ی توانمندی توابع شکل پیشنهادی گاوسین-فوریه با توابع شکل کلاسیک یا متداول که بر پایه‌ی میدان توابع چند جمله‌ای بدست می‌آیند، در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیسیته‌ی خطی دو بعدی است. برای رسیدن به این هدف، می‌توان از المان‌های لاگرانژی دو بعدی و یا المان‌های سرندیپیتی دو بعدی استفاده کرد. از آن جایی که المان لاگرانژی ۴ گرهی دو بعدی Q4 با استفاده از توابع شکل گاوسین-فوریه قابل ارائه نیست، در این بخش برای مقایسه‌ی توابع شکل کلاسیک و گاوسین-فوریه از المان لاگرانژی دو بعدی با ۹ گره Q9 که کمترین تعداد گره ممکن را پس از Q4 در بین المان‌های چهاروجهی دارد و المان سرندیپیتی با کمترین تعداد گره یعنی Q8 استفاده شده است. المان لاگرانژی ۴ گرهی دو بعدی Q4 با استفاده از توابع شکل گاوسین-فوریه قابل دستیابی نیست، چرا که این توابع شکل از طریق غنی سازی توابع پایه شعاعی با میدان توابع چند جمله‌ای با حداکثر دو درجه کمتر از تعداد گره‌های المان در هر راستای دستگاه مختصات طبیعی بدست می آیند $(m<n)$. از آن جایی که تعداد گره‌ها در المان Q4 در هر راستا، دو گره است یعنی $n=2$ ، پس حداکثر مقدار $m=n-2$ برابر صفر خواهد بود. $m=0$ بیانگر

اضافه کردن میدان توابع چند جمله‌ای درجه‌ی صفر یا به عبارت دیگر یک عدد ثابت به توابع پایه شعاعی است. در نهایت توابع شکل متناظر با هر گره در المان گاوسین-فوریه Q9 نشان داده شده در شکل ۴-۶۲ به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\big(h(\xi)-\xi+d\big)\big(h(\eta)-\eta+d\big)\\
\Phi_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\big(h(\xi)-\xi+d\big)\big(-h(\eta)+\bar{d}\big)\\
\Phi_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\big(h(\xi)-\xi+d\big)\big(h(\eta)+\eta+d\big)\\
\Phi_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\big(-h(\xi)+\bar{d}\big)\big(h(\eta)-\eta+d\big)\\
\Phi_5(\xi,\eta) &= \big(-h(\xi)+\bar{d}\big)\big(-h(\eta)+\bar{d}\big)\\
\Phi_6(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\big(-h(\xi)+\bar{d}\big)\big(h(\eta)+\eta+d\big)\\
\Phi_7(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\big(h(\xi)+\xi+d\big)\big(h(\eta)-\eta+d\big)\\
\Phi_8(\xi,\eta) &= \frac{1}{2}\big(h(\xi)+\xi+d\big)\big(-h(\eta)+\bar{d}\big)\\
\Phi_9(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\big(h(\xi)+\xi+d\big)\big(h(\eta)+\eta+d\big)
\end{aligned}
\tag{۱۰۳-۴}
$$

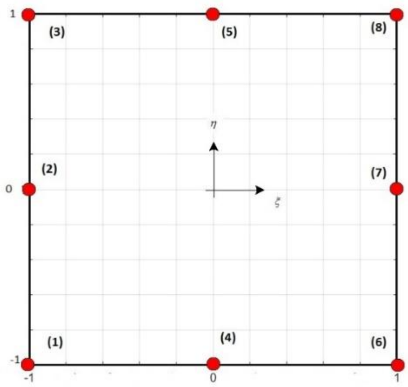
در رابطه‌ی (۴-۱۰۳):

$$
\begin{aligned}
h(\xi) &= c\left\{e^{-i\omega(1-\xi)^2}-2e^{-i\omega(\xi)^2}+e^{-i\omega(1+\xi)^2}\right\}\\
h(\eta) &= c\left\{e^{-i\omega(1-\eta)^2}-2e^{-i\omega(\eta)^2}+e^{-i\omega(1+\eta)^2}\right\}\\
c &= \frac{e^{4i\omega}}{1-4e^{3i\omega}+3e^{4i\omega}}\\
d &= \frac{-2e^{3i\omega}}{-3e^{3i\omega}+e^{2i\omega}+e^{i\omega}+1}\\
\bar{d} &= 1-d
\end{aligned}
\tag{۱۰۴-۴}
$$



شکل ۴-۶۲: المان صفحه‌ای لاگرانژیِ گاوسین- فوریه Q9 در دستگاه مختصات طبیعی (ξ,η)

به منظور مقایسه‌ی توابع شکل گاوسین-فوریه پیشنهادی با توابع شکل متناظر کلاسیکشان در حل مسائل ویسکوالاستیک خطی می‌توان از المان سرندیپیتی با کمترین تعداد گره یعنی Q8 نیز استفاده کرد. توابع شکل گاوسین-فوریه در المان‌های سرندیپیتی دو بعدی را نمی‌توان همانند المان‌های لاگرانژی دو بعدی از حاصل ضرب توابع شکل متناظر با هر گره، در هر راستای دستگاه مختصات طبیعی یعنی ξ و η بدست آورد. در المان‌های سرندیپیتی گاوسین-فوریه، بایستی هر دو میدان توابع پایه شعاعی و چند جمله‌ای، از ابتدای فرآیند غنی‌سازی در دستگاه مختصات طبیعی دو بعدی در نظر گرفته شوند. با اعمال فرآیند بدست آوردن توابع شکل در روش RPIM بر المان سرندیپیتی Q8 نشان داده شده در شکل ۴-۶۳، توابع شکل گاوسین-فوریه متناظر با هر گره به صورت رابطه‌ی (۴-۱۰۵) حاصل می‌شوند:



شکل ۴-۶۳: المان سرندیپیتی گاوسین- فوریه Q8 در دستگاه مختصات طبیعی (ξ,η)

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(\xi^2+\eta^2+\xi\eta-c_1(\xi+\eta)+2c_3h_1-1\right)\\
\Phi_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(-2\eta^2-c_2\xi+2c_3h_2+2\right)\\
\Phi_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(\xi^2+\eta^2-\xi\eta-c_1(\xi-\eta)+2c_3h_3-1\right)\\
\Phi_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(-2\xi^2-c_2\eta+2c_3h_4+2\right)\\
\Phi_5(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(-2\xi^2+c_2\eta-2c_3h_4+2\right)\\
\Phi_6(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(\xi^2+\eta^2-\xi\eta+c_1(\xi-\eta)-2c_3h_3-1\right)\\
\Phi_7(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(-2\eta^2+c_2\xi-2c_3h_2+2\right)\\
\Phi_8(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}\left(\xi^2+\eta^2+\xi\eta+c_1(\xi+\eta)-2c_3h_1-1\right)
\end{aligned}
\tag{۱۰۵-۴}
$$

در رابطه‌ی (۴-۱۰۵):

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 2c_3\left(-1+e^{-i\omega}+e^{-4i\omega}-e^{-5i\omega}\right)\\
c_2 &= 2c_3\left(-1+2e^{-i\omega}-2e^{-5i\omega}+e^{-8i\omega}\right)\\
c_3 &= \frac{e^{8i\omega}}{1-4e^{3i\omega}+2e^{4i\omega}+4e^{7i\omega}-3e^{8i\omega}}
\end{aligned}
\tag{۱۰۶-۴}
$$

$$
\begin{aligned}
h_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{\alpha}\left(-B_1+B_2+B_4-B_5-B_7+B_8\right)\\
h_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{\alpha}\left(B_1-2B_2+B_3-B_6+2B_7-B_8\right)\\
h_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{\alpha}\left(B_2-B_3-B_4+B_5+B_6-B_7\right)\\
h_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{\alpha}\left(B_1-B_3-2B_4+2B_5+B_6-B_8\right)
\end{aligned}
\tag{۱۰۷-۴}
$$

در رابطه‌ی (۴-۱۰۷)، $B_i\left(i=1,\ldots,8\right)$ مولفه‌های بردار توابع پایه شعاعی گاوسین-فوریه است که به صورت رابطه‌ی (۴-۱۰۸) تعریف می‌شود:

$$B(\xi,\eta)=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} e^{-i\omega\left[(\xi+1)^2+(\eta+1)^2\right]} \\ e^{-i\omega\left[(\xi+1)^2+(\eta)^2\right]} \\ e^{-i\omega\left[(\xi+1)^2+(\eta-1)^2\right]} \\ e^{-i\omega\left[(\xi)^2+(\eta+1)^2\right]} \\ e^{-i\omega\left[(\xi)^2+(\eta-1)^2\right]} \\ e^{-i\omega\left[(\xi-1)^2+(\eta+1)^2\right]} \\ e^{-i\omega\left[(\xi-1)^2+(\eta)^2\right]} \\ e^{-i\omega\left[(\xi-1)^2+(\eta-1)^2\right]} \end{bmatrix} \qquad (۱۰۸-۴)$$

در روابط (۴-۱۰۷) و (۴-۱۰۸)، α و ω پارامتر شکل هستند، که در نهایت پس از ساده‌سازی تنها پارامتر شکل ω باقی می‌ماند. شایان ذکر است که کلیه‌ی خصوصیات توابع شکل المان یک بعدی گاوسین- فوریه در المان دو بعدی نیز برقرار است. المان‌های صفحه‌ای گاوسین-فوریه Q8 و Q9 تست وصله‌ی نیرو و جابجایی را ارضا می‌کنند.

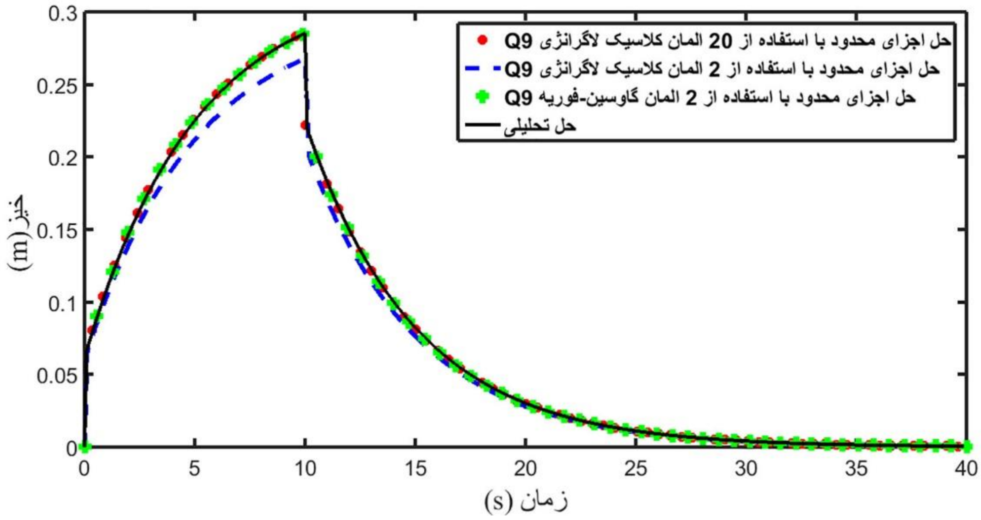
۴-۵-۳- مثال‌های عددی

۴-۵-۳-۱- مقدمه

در این بخش دقت و توانمندی المان‌های پیشنهادی گاوسین- فوریه در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک خطی از طریق دو مثال عددی بررسی می‌شود. خصوصیات ماده دقیقاً همانند بخش مثال‌های عددی المان‌های مختلط فوریه Q9 در نظر گرفته می‌شود. بطور مشخص ماده‌ی ویسکوالاستیک توسط بیان ماکسول جامد خطی استاندارد (SLS) مدل می‌شود. در این مدل ثابت فنر و ضریب میرایی در المان ماکسول برابر ۰/۴ و ثابت فنر در موازی تنها برابر ۰/۱ فرض شده است. نسبت پوآسون ماده‌ی مورد نظر ثابت و برابر ۰/۳ فرض شده است. در این مثال‌ها از فرمولاسیون پیشنهادی زوکر و همکاران [۱۰] که پیش‌تر بیان شد، برای تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک استفاده شده است و گام زمانی در تحلیل اجزای محدود $\Delta t = 0.1\text{s}$ در نظر گرفته شده است.

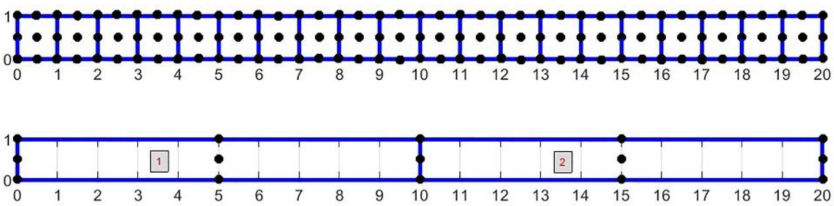
۴-۵-۳-۲- مثال اول: تیر کنسول تحت بار متمرکز

یک تیر کنسول با طول ۲۰ متر و ارتفاع یک متر همانند مثال اول بخش المان صفحه‌ای مختلط فوریه، تحت بار متمرکز $P=1\left[H\left(t\right)-H\left(t-t_1\right)\right];\left(0\le t\le 40\mathrm{s},t_1=10\mathrm{s}\right)$ در نوک تیر به عنوان مثال اول در نظر گرفته شده است. مقایسه‌ی نتایج تحلیل اجزای محدود برای جابجایی قائم نوک تیر با حل تحلیلی در شکل ۴-۶۴ نمایش داده شده است.



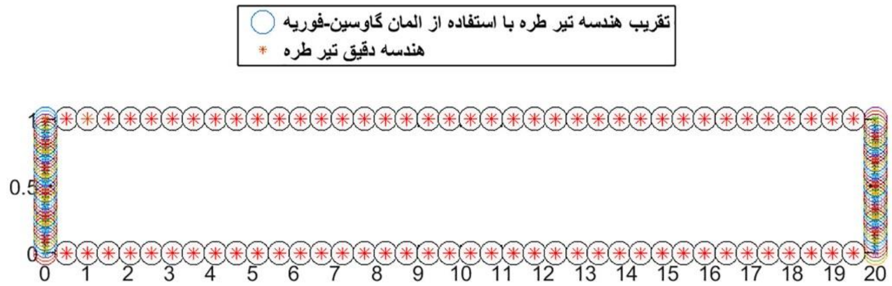
شکل ۴-۶۴: نتایج تحلیلی و نتایج اجزای محدود با استفاده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی و گاوسین- فوریه Q9 برای مثال اول (جابجایی نوک تیر)

مش‌های Q9 استفاده شده در تحلیل اجزای محدود که منجر به نتایج نشان داده شده در شکل ۴-۶۴ می‌شود در شکل ۴-۶۵ نمایش داده شده است.



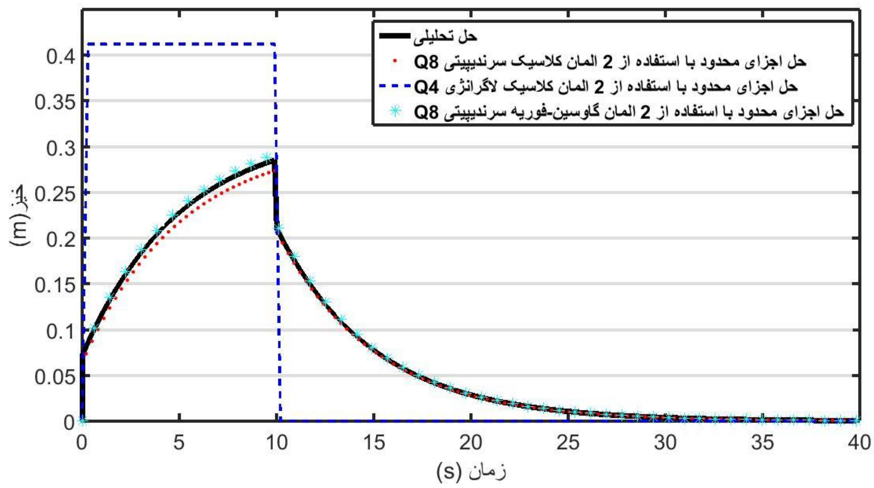
شکل ۴-۶۵: مش‌های اجزای محدود Q9 استفاده شده در حل مثال اول

مقدار پارامتر شکل در این مثال برای المان‌های گاوسین-فوریه با استفاده از تقریب هندسه‌ی مسئله با یک المان گاوسین-فوریه Q9 برابر $\omega = 1.8i$ بدست آمد. مشابه بخش المان‌های صفحه‌ای مختلط فوریه، این تقریب با استفاده از یک کُد بهینه‌سازی با روش ازدحام ذرات بدست آمد و در شکل ۴-۶۶ نمایش داده شده است. شایان ذکر است که نسبت زمان حل کُد اجزای محدود برای این مثال با بکارگیری یک رایانه شخصی واحد برای بدست آوردن جواب قابل قبول با استفاده از المان کلاسیک لاگرانژی Q9 به المان گاوسین- فوریه Q9 ، ۵/۴۴۰۶ بدست آمد که نشان دهنده‌ی آنست که استفاده از المان‌های گاوسین- فوریه نسبت به المان‌های کلاسیک لاگرانژی از نظر هزینه محاسباتی بطور قابل توجهی مقرون به صرفه است حتی با وجود اینکه پیش از حل اجزای محدود بایستی پارامتر شکل مناسب تخمین زده شود.



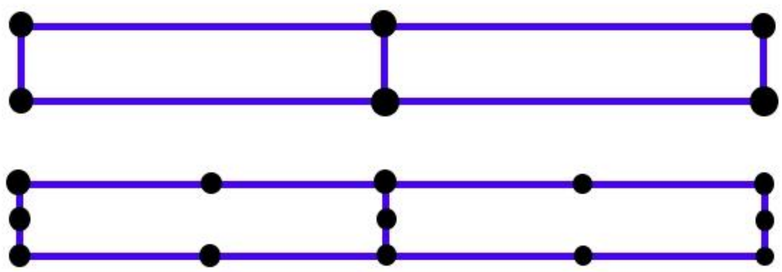
شکل ۴-۶۶: هندسه‌ی دقیق و تقریب هندسه‌ی مثال اول با استفاده از المان لاگرانژی گاوسین- فوریه با پارامتر شکل $\omega = 1.8i$

به منظور مقایسه‌ی عملکرد المان‌های سرندیپیتی گاوسین-فوریه Q8 با المان‌های سرندیپیتی کلاسیک یا متداول Q8 ، تحلیل اجزای محدود مثال اول با استفاده از این المان‌ها نیز انجام شده و نتایج عددی با حل تحلیلی در شکل ۴-۶۷ مقایسه شده است.



شکل ۴-۶۷: مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و نتایج اجزای محدود با استفاده از شبکه‌ای شامل دو المان از نوع سرندیپیتی کلاسیک و سرندیپیتی گاوسین- فوریه $\mathrm{Q8}$ و المان لاگرانژی کلاسیک $\mathrm{Q4}$ برای مثال اول (جابجایی نوک تیر)

شکل ۴-۶۸، شبکه‌هایی متشکل از دو المان از نوع $\mathrm{Q8}$ و $\mathrm{Q4}$ که نمودارهای شکل ۴-۶۷ با استفاده از آن‌ها حاصل شده اند را نمایش می‌دهد.

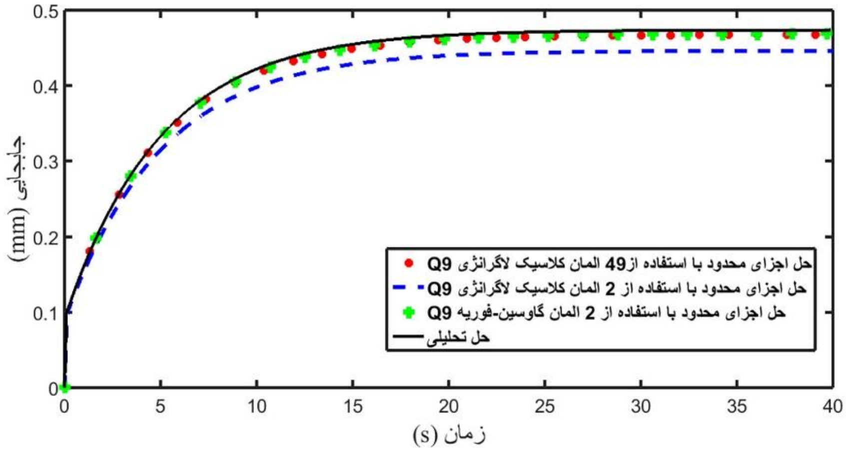


شکل ۴-۶۸: مش‌های متشکل از دو المان از نوع $\mathrm{Q8}$ و $\mathrm{Q4}$ که منجر به نتایج نشان داده شده در نمودارهای شکل ۴-۶۳ شده است برای مثال اول

شایان ذکر است، مقدار پارامتر شکل در المان سرندیپیتی گاوسین-فوریه $\mathrm{Q8}$ با روش بهینه‌سازی هندسه‌ی پیشنهادی در بخش المان‌های صفحه‌ای مختلط فوریه، در این مثال برابر $\omega = 2.7i + 1.1$ بدست آمد.

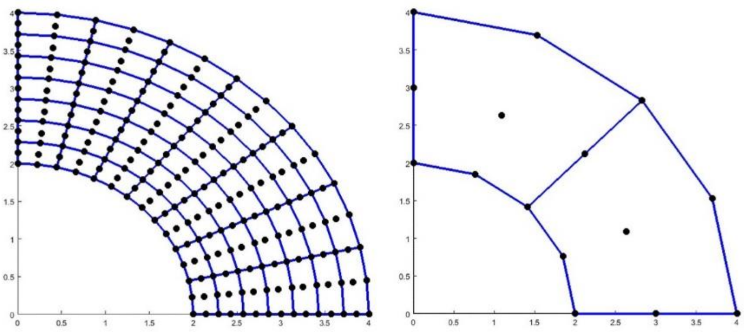
۴-۵-۳-۳- مثال دوم: سیلندر تحت فشار محاط با روکش صلب

یک سیلندر طویل ویسکوالاستیک با شعاع داخلی ۲ متر و شعاع خارجی ۴ متر تحت فشار داخلی $P = 100H(t)\ \text{Pa}\ ;(0 \le t \le 40\text{s})$ در یک پوسته‌ی صلب همانند بخش المان صفحه‌ای مختلط فوریه به عنوان مثال دوم در نظر گرفته شده است. نتایج تحلیلی و اجزای محدود با استفاده از المان گاوسین-فوریه Q9 و کلاسیک لاگرانژی Q9 برای جابجایی شعاعی یک نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی سیلندر در شکل ۴-۶۹ نمایش داده شده است.



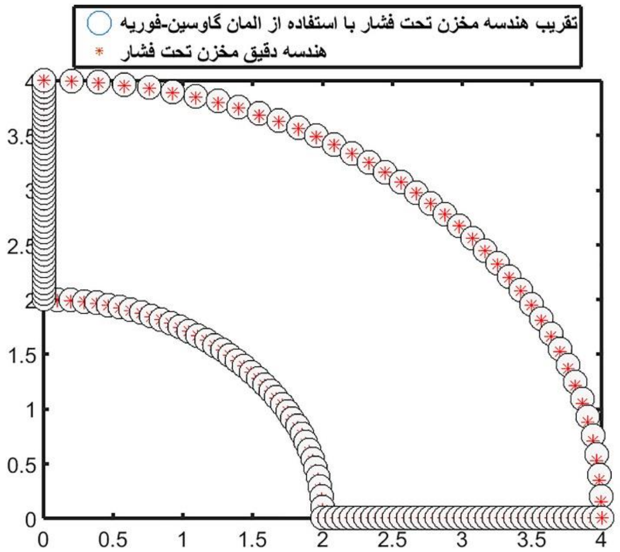
شکل ۴-۶۹: مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و نتایج اجزای محدود با استفاده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 و گاوسین- فوریه Q9 برای مثال دوم (جابجایی شعاعی یک نقطه‌ی دلخواه بر روی ضخامت میانی سیلندر)

مش‌های استفاده شده در حل اجزای محدود این مسئله که نتایج نشان داده شده در شکل ۴-۶۹ از طریق آن‌ها بدست آمده است، در شکل ۴-۷۰ نمایش داده شده است.



شکل ۴-۷۰: مش‌های اجزای محدود Q9 استفاده شده در حل مثال دوم

پارامتر شکل در این مثال با استفاده از تخمین هندسه‌ی مسئله با یک المان گاوسین- فوریه برابر $\omega = 0.1(1i+1)$ در نظر گرفته شده است (شکل (۴-۷۱)).



شکل ۴-۷۱: هندسه‌ی دقیق و تقریب هندسه‌ی مثال دوم با استفاده از توابع شکل گاوسین- فوریه با پارامتر شکل

$$\omega = 0.1(1i+1)$$

برای رسیدن به پاسخ قابل قبول مسئله، نسبت زمان اجرای کُد اجزای محدود تهیه شده در یک کامپیوتر شخصیِ واحد برای المان کلاسیک لاگرانژی Q9 به المان گاوسین- فوریه متناظر پیشنهادی ۱۰/۰۴۰۹ بدست آمد.

با مقایسه‌ی نتایج می‌توان دریافت که المان‌های گاوسین-فوریه پیشنهادی نسبت به المان‌های کلاسیک لاگرانژی و سرندیپیتی همتای خود در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک بسیار توانمندتر هستند، چرا که با تعداد المان‌های به مراتب کمتری به پاسخ‌های تحلیلی همگرا می‌شوند. از طرف دیگر، المان‌های مختلط فوریه در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک در مقایسه با المان‌های گاوسین-فوریه پیشنهادی توانمندتر هستند.

۴-۶- المان چندربعی تعمیم یافته پیشنهادی (XMQ)

۴-۶-۱- معرفی

تابع پایه شعاعی چندربعی تعمیم یافته [۶۰] به صورت رابطه (۴-۱۰۹) تعریف می‌شود.

$$B(r)=\left(c^2+r^2\right)^q \tag{۴-۱۰۹}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۰۹)، r نُرم اقلیدسی میان داده‌های نقطه‌ای و c و q ثوابت حقیقی هستند که پارامتر شکل نامیده می‌شوند و به صورتی انتخاب می‌شوند که دقت تقریب را بالا ببرند.

با استفاده از فرآیند تعیین توابع شکل در روش درون‌یابی نقطه‌ای با استفاده از توابع پایه شعاعی (RPIM) در یک المان سه گرهی یک بُعدی در دستگاه مختصات طبیعی ξ و استفاده از توابع پایه شعاعی چندربعی تعمیم‌یافته، توابع شکل چندربعی تعمیم‌یافته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi)&=\frac{1}{2g}\left(h(\xi)-\xi g+2e\right)\\
\phi_2(\xi)&=\frac{-1}{g}\left(h(\xi)-g+2e\right)\\
\phi_3(\xi)&=\frac{1}{2g}\left(h(\xi)+\xi g+2e\right)
\end{aligned} \tag{۴-۱۱۰}$$

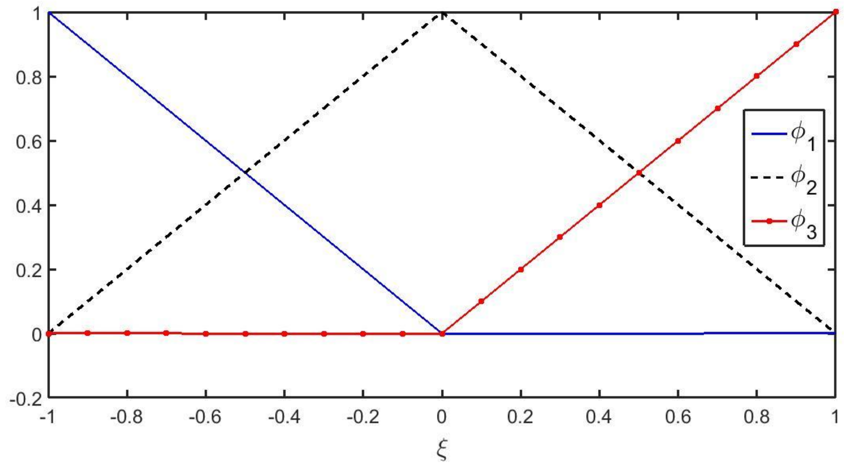
در رابطه‌ی (۴-۱۱۰):

$$\begin{aligned}
h(\xi)&=\left(\left(1-\xi\right)^2+c^2\right)^q+\left(\left(1+\xi\right)^2+c^2\right)^q-2\left(\xi^2+c^2\right)\\
g&=3\left(c^2\right)^q-4\left(1+c^2\right)^q+\left(4+c^2\right)^q\\
e&=\left(c^2\right)^q-\left(1+c^2\right)^q
\end{aligned} \tag{۴-۱۱۱}$$

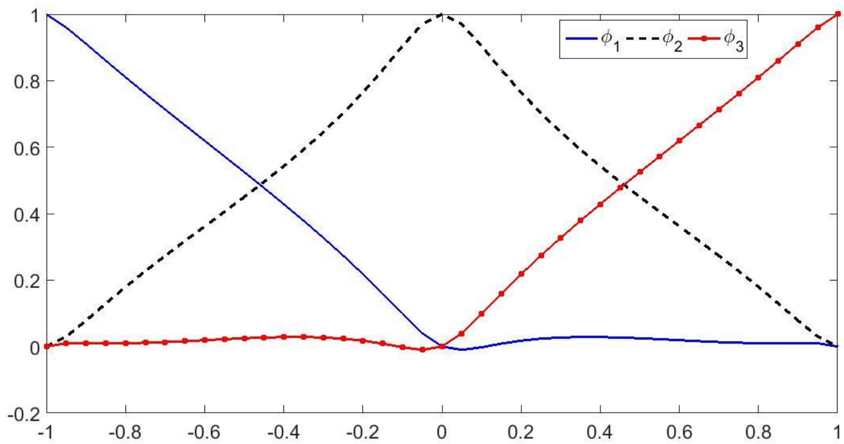
شایان ذکر است که المان‌های چند ربعی تعمیم‌یافته برای نخستین بار در این رساله بدست آمده است.

به راحتی می‌توان نشان داد که توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته، کلیه‌ی خصوصیات لازم برای توابع شکل شامل خاصیت دلتای کرونیکر، خاصیت افراز واحد، پیوسته بودن تکه‌ای از مرتبه بی‌نهایت و غیره

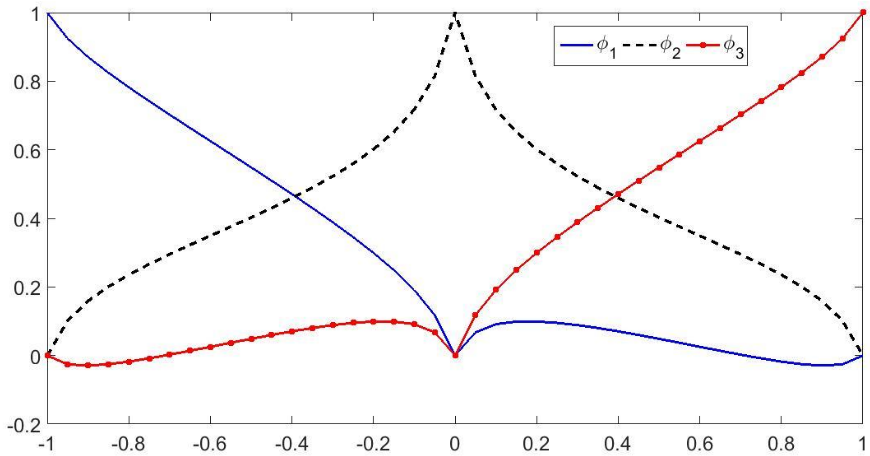
را دارا می‌باشند. در شکل‌های ۴-۷۲ تا ۴-۸۱، توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته در یک المان مرزی سه گرهی برای مقادیر مختلف پارامترهای شکل نمایش داده شده است.



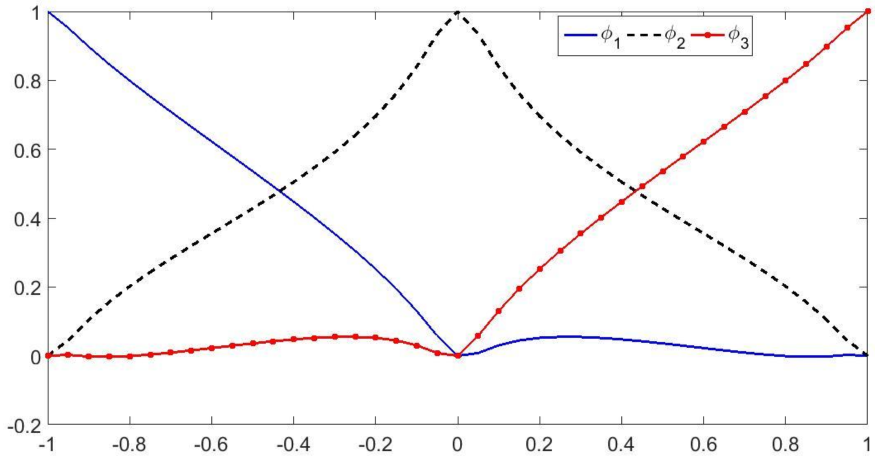
شکل ۴-۷۲: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q=0.5, c=0.001$



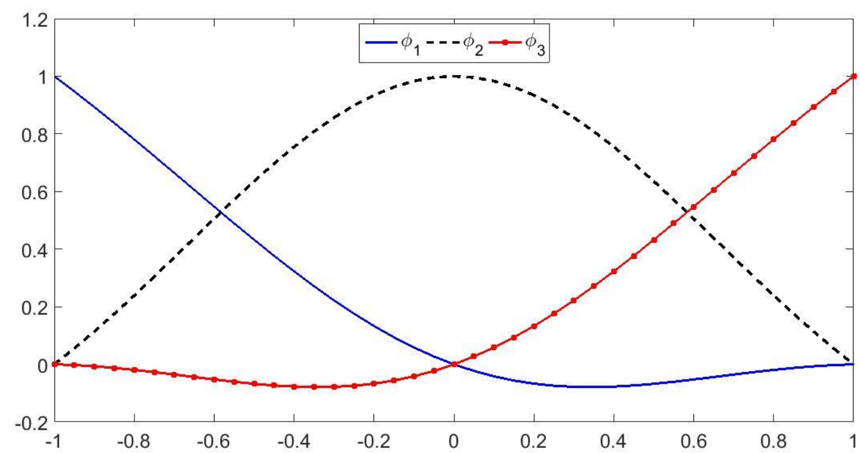
شکل ۴-۷۳: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q=0.1, c=0.1$



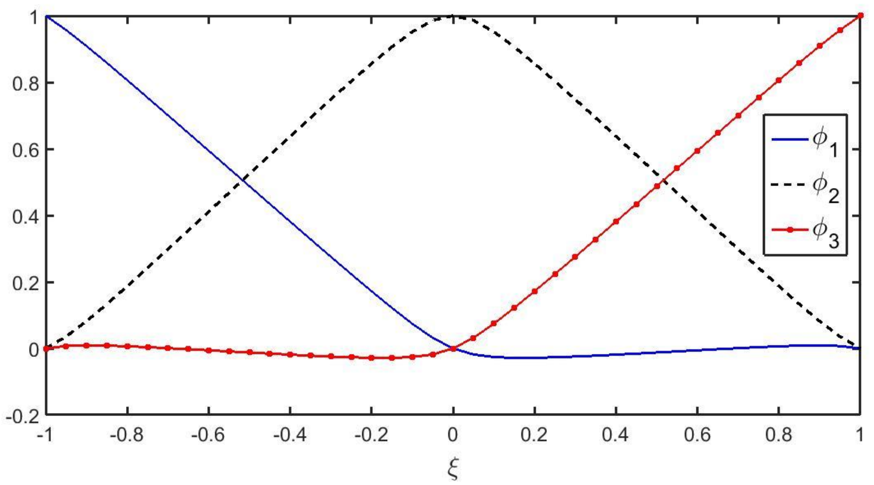
شکل ۴-۷۴: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q=0.1, c=0.01$



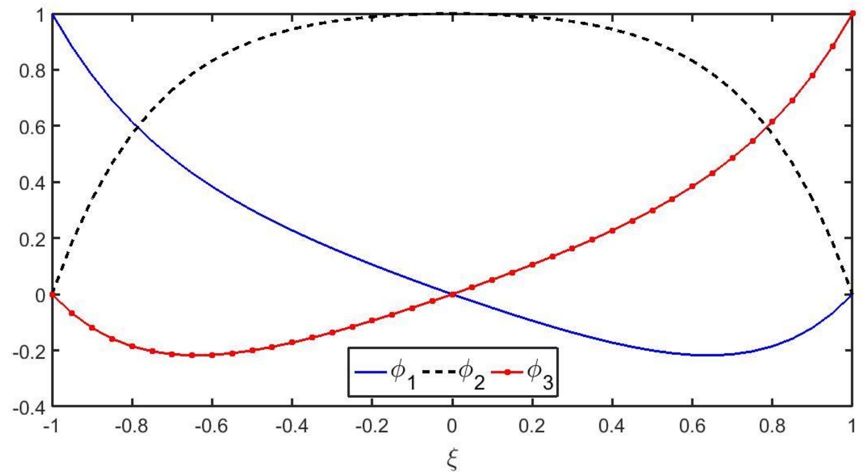
شکل ۴-۷۵: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q=0.1, c=0.05$



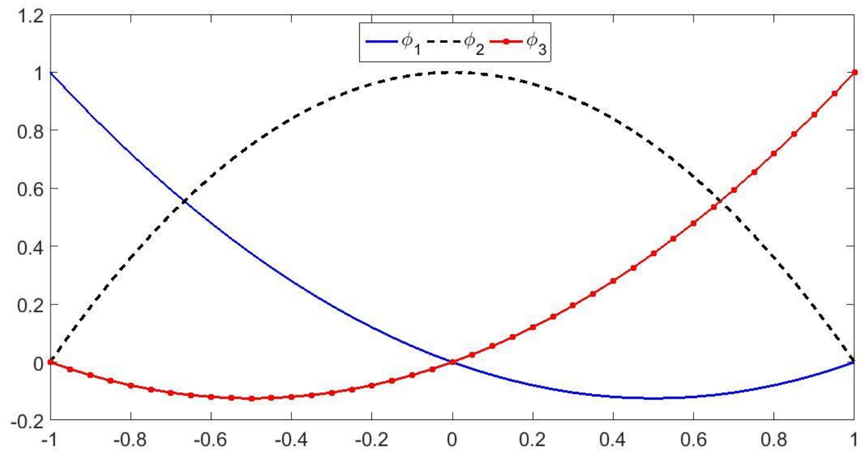
شکل ۴-۷۶: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q=0.1, c=1$



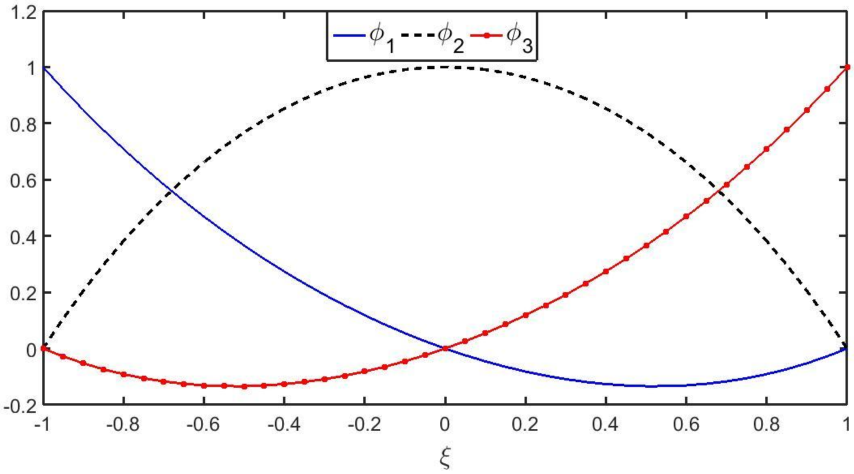
شکل ۴-۷۷: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q = 0.5, c = 0.1$



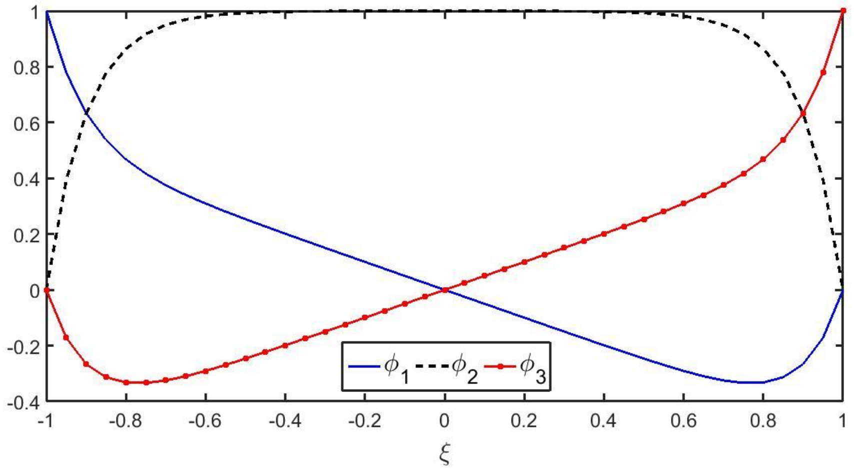
شکل ۴-۷۸: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q = 5, c = 1$



شکل ۴-۷۹: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q = 2, c = 1$



شکل ۴-۸۰: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q = 5, c = 5$



شکل ۴-۸۱: توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته برای یک المان سه گرهی یک بعدی برای $q = 20, c = 2$

برای یک المان سه گرهی چند ربعی تعمیم‌یافته مشتق اول توابع شکل در هر گره با استفاده از رابطه (۴-۱۱۲) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi_1'(\xi) &= \frac{1}{2g}\left(h'(\xi) - g\right) \\ \phi_2'(\xi) &= \frac{-1}{g}\left(h'(\xi)\right) \\ \phi_3'(\xi) &= \frac{1}{2g}\left(h'(\xi) + g\right) \end{aligned} \qquad (۴\text{-}۱۱۲)$$

در رابطه‌ی (۴-۱۱۲)، $h'(\xi)$ مشتق اول تابع $h(\xi)$ است که در رابطه (۴-۱۱۱) تعریف شده است.

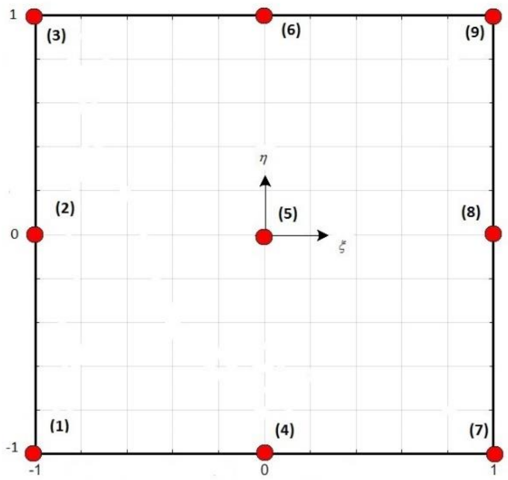
مشتق n- ام توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته در یک المان سه گرهی یک بعدی از رابطه‌ی (۴-۱۱۳) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\phi_1^{(n)}(\xi) &= \frac{1}{2g}\left(h^{(n)}(\xi)\right) \\
\phi_2^{(n)}(\xi) &= \frac{-1}{g}\left(h^{(n)}(\xi)\right) \\
\phi_3^{(n)}(\xi) &= \frac{1}{2g}\left(h^{(n)}(\xi)\right)
\end{aligned} \tag{۱۱۳-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۱۳)، $h^{(n)}(\xi); (n=2,3,\ldots)$ مشتق n- ام تابع $h(\xi)$ است.

۴-۶-۲- المان صفحه‌ای چهاروجهی چندربعی تعمیم‌یافته (XMQ)

توابع شکل متناظر با هر گره در المان چندربعی تعمیم‌یافته Q9 در دستگاه مختصات طبیعی (ξ,η) نشان داده شده در شکل ۴-۸۲ به صورت زیر بدست می‌آید:



شکل ۴-۸۲: المان دو بعدی لاگرانژی چندربعی تعمیم یافته Q9 در دستگاه مختصات طبیعی (ξ,η)

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4g^2}\big(h(\xi)-\xi g+2e\big)\big(h(\eta)-\eta g+2e\big)\\
\varphi_2(\xi,\eta) &= \frac{-1}{2g^2}\big(h(\xi)-\xi g+2e\big)\big(h(\eta)-g+2e\big)\\
\varphi_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4g^2}\big(h(\xi)-\xi g+2e\big)\big(h(\eta)+\eta g+2e\big)\\
\varphi_4(\xi,\eta) &= \frac{-1}{2g^2}\big(h(\xi)-g+2e\big)\big(h(\eta)-\eta g+2e\big)\\
\varphi_5(\xi,\eta) &= \frac{1}{g^2}\big(h(\xi)-g+2e\big)\big(h(\eta)-g+2e\big)\\
\varphi_6(\xi,\eta) &= \frac{-1}{2g^2}\big(h(\xi)-g+2e\big)\big(h(\eta)+\eta g+2e\big)\\
\varphi_7(\xi,\eta) &= \frac{1}{4g^2}\big(h(\xi)+\xi g+2e\big)\big(h(\eta)-\eta g+2e\big)\\
\varphi_8(\xi,\eta) &= \frac{-1}{2g^2}\big(h(\xi)+\xi g+2e\big)\big(h(\eta)-g+2e\big)\\
\varphi_9(\xi,\eta) &= \frac{1}{4g^2}\big(h(\xi)+\xi g+2e\big)\big(h(\eta)+\eta g+2e\big)
\end{aligned}
\tag{۱۱۴-۴}
$$

تابع h و ثوابت g و e در رابطه‌ی (۴-۱۱۱) تعریف شده اند. به سادگی می‌توان نشان داد که این المان چندربعی تعمیم‌یافته Q9 پیشنهادی، تست وصله شامل تست وصله جابجایی و تست وصله نیرو را برآورده می‌کند، بنابراین شرط همگرایی جواب در روش المان محدود را دارا می‌باشد.

در بخش بعد، دو مثال عددی ویسکوالاستیک که پاسخ تحلیلی آن‌ها در دسترس است، با استفاده از المان‌های چندربعی تعمیم یافته Q9 پیشنهادی حل شده است. در این مسائل تعداد المان‌های چندربعی تعمیم یافته Q9 و کلاسیک لاگرانژی Q9 مورد نیاز در حل اجزای محدود برای رسیدن به پاسخ تحلیلی و همینطور زمان تحلیل مقایسه شده است.

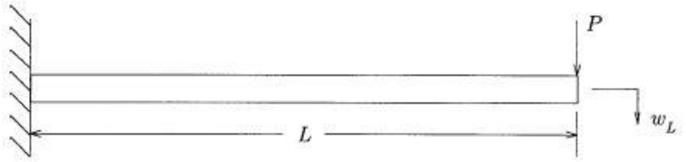
۴-۶-۳- مثال‌های عددی

۴-۶-۳-۱- مقدمه

در این بخش، دو مسئله‌ی ویسکوالاستیک که پیش‌تر با استفاده از المان‌های صفحه‌ای مختلط فوریه و گاوسین-فوریه حل شد، با استفاده از المان‌های چندربعی تعمیم‌یافته Q9 حل خواهد شد و با المان‌های صفحه‌ای کلاسیک لاگرانژی Q9 مقایسه خواهد شد. خصوصیات ماده مطابق بخش‌های قبل با استفاده از بیان ماکسول مدل جامد خطی (SLS) ، با ثوابت فنر برابر با ۰/۴ و ۰/۱ به ترتیب برای فنر در المان ماکسول و فنر موازی تنها و ضریب میرایی در میراگر موجود مدل ماکسول برابر ۰/۴ تعریف می‌شود. همینطور نسبت پوآسون ثابت و برابر با ۰/۳ فرض شده است. مانند بخش‌های قبل از فرمولاسیون پیشنهادی زوکر و همکاران در تحلیل اجزای محدود این مثال‌ها استفاده خواهد شد و گام زمانی $\Delta t = 0.1\mathrm{s}$ در نظر گرفته شده است.

۴-۶-۳-۲- مثال اول: تیر طره تحت بار متمرکز در نوک آن

شکل ۴-۸۳ یک تیر طره با طول $L = 20\,\mathrm{m}$، با سطح مقطع مربعی شکل با عمق و ضخامت یک متر تحت یک بار متمرکز در نوک آن که از رابطه‌ی (۴-۱۱۵) تبعیت می‌کند را نمایش می‌دهد.

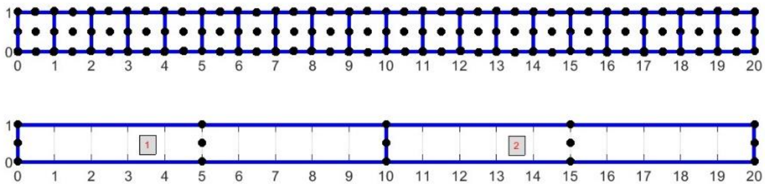


شکل ۴-۸۳: هندسه و بارگذاری تیر کنسول در مثال اول [۱۰]

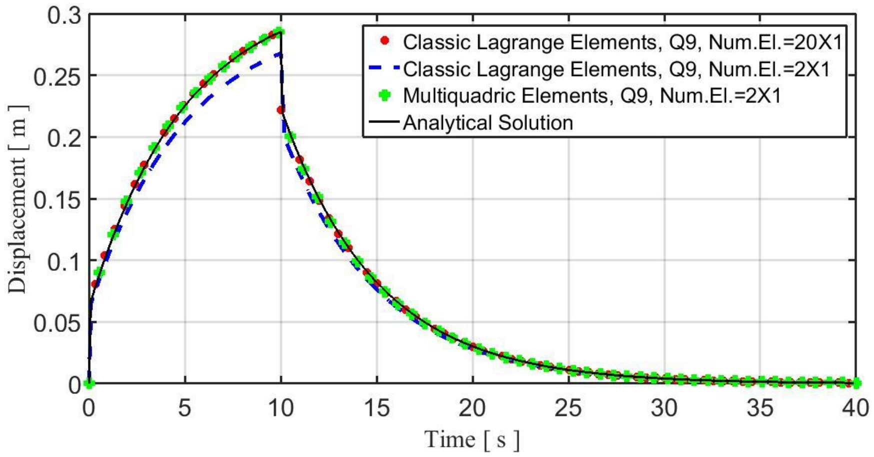
$$P = 1\left[H(t) - H(t - t_1)\right]\ \mathrm{N};\ \left(0 \le t \le 40\,\mathrm{s}, t_1 = 10\,\mathrm{s}\right) \qquad (۱۱۵\text{-}۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۱۱۵)، $H(t)$ تابع پله واحد یا هویساید می‌باشد. خیز در نوک تیر که با w_L نمایش داده شده است به عنوان مجهول در نظر گرفته شده است. شبکه‌هایی از المان‌های کلاسیک لاگرانژی

Q9 و چندربعی تعمیم‌یافته Q9 که در تحلیل اجزای محدود این مثال استفاده شده است در شکل ۴-۸۴ نشان داده شده است و در شکل ۴-۸۵ نتایج تحلیلی با نتایج اجزای محدود مقایسه شده است.

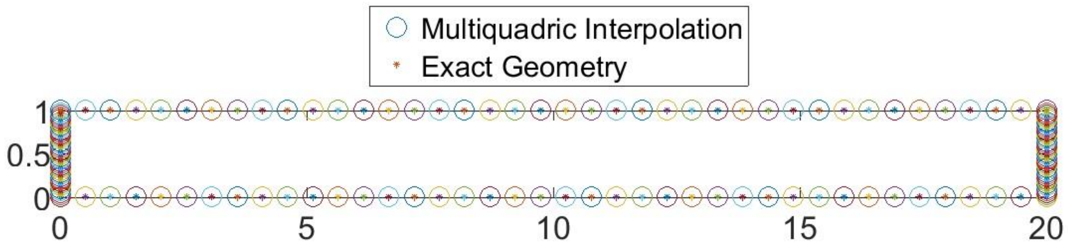


شکل ۴-۸۴: مش‌های اجزای محدود متشکل از المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 و چندربعی تعمیم‌یافته Q9 استفاده شده در حل مثال تیر طره



شکل ۴-۸۵: مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و اجزای محدود با استفاده از المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 و چندربعی تعمیم‌یافته Q9 برای تیر طره مثال اول

پارامترهای شکل در این مثال با استفاده از تقریب هندسه‌ی مسئله با یک المان چندربعی تعمیم‌یافته تخمین زده شد و مقدار آن‌ها $q=11, c=1.52$ در نظر گرفته شد. شکل ۴-۸۶ تقریب هندسه‌ی مثال اول با استفاده از المان چندربعی تعمیم‌یافته پیشنهادی با پارامترهای شکل ذکر شده را نمایش می‌دهد.

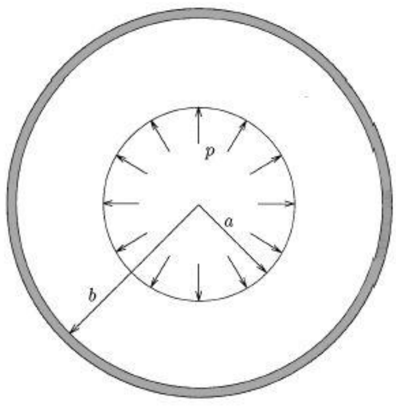


شکل ۴-۸۶: هندسه دقیق و بازتولید هندسه مثال تیر کنسول با استفاده از المان چندربعی تعمیم‌یافته Q9 با پارامتر شکل $q=11, c=1.52$

در اینجا بیان این مطلب ضروری به نظر می‌رسد که، نسبت زمان حل کُد اجزای محدود با بکارگیری یک کامپیوتر شخصی واحد به منظور رسیدن به یک پاسخ قابل قبول با استفاده از المان کلاسیک لاگرانژی Q9 به المان چندربعی تعمیم‌یافته Q9 برابر با ۴/۴۶۷۱ بدست آمد که نشان دهنده‌ی آنست که استفاده از المان‌های چندربعی تعمیم‌یافته Q9 در تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک در مقایسه با المان‌های کلاسیک لاگرانژی از نظر زمان محاسبات بطور قابل توجهی مقرون به صرفه است.

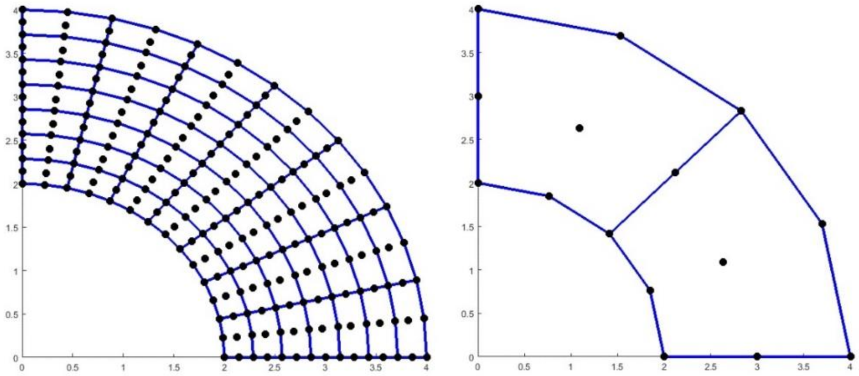
۴-۶-۳-۳- مثال دوم: سیلندر تحت فشار مُحاط با یک استوانه‌ی صلب

در شکل ۴-۸۷ یک مخزن استوانه‌ای طویل ویسکوالاستیک با شعاع داخلی ۲ متر و شعاع خارجی ۴ متر تحت فشار داخلی $P=100H(t)\ \mathrm{Pa};\ (0\le t\le 40\mathrm{s})$ که در یک پوسته‌ی صلب قرار گرفته است، نمایش داده شده است.



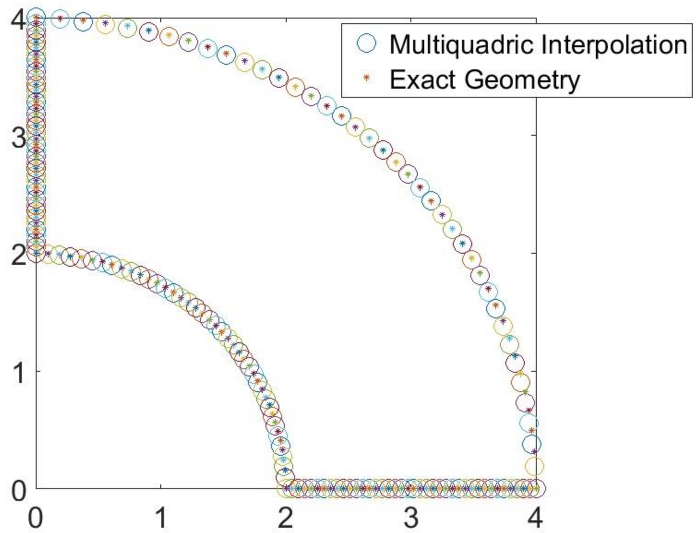
شکل ۴-۸۷: هندسه و بارگذاری مخزن تحت فشار مثال دوم [۱۰]

مش‌های اجزای محدود استفاده شده در تحلیل این مثال در شکل ۴-۸۸ نمایش داده شده است.



شکل ۴-۸۸: شبکه‌های اجزای محدود متشکل از المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 و چندربعی تعمیم‌یافته Q9 بکارگرفته شده در حل مثال دوم

پارامترهای شکل در این مثال با استفاده از تخمین هندسه مسئله با یک المان چندربعی تعمیم‌یافته Q9 برابر $q=4, c=4$ بدست آمده است. در شکل ۴-۸۹، هندسه‌ی دقیق مخزن تحت فشار با تخمین هندسه مسئله با کمک المان چندربعی تعمیم‌یافته Q9 با پارامترشکل $q=4, c=4$ مقایسه شده است.



شکل ۴-۸۹: هندسه‌ی دقیق و بازتولید هندسه‌ی مثال مخزن تحت فشار با استفاده از المان چندربعی تعمیم‌یافته Q9 با پارامتر شکل $q=4, c=4$

از آن‌جایی که با بکارگیری المان چندربعی تعمیم یافته Q9 در تحلیل اجزای محدود برای رسیدن به پاسخ قابل قبول به تعداد المان‌های به مراتب کمتری نسبت به المان‌های کلاسیک لاگرانژی Q9 نیاز است، بدیهی است که زمان اجرای برنامه نیز بسیار کمتر خواهد بود و بطور قابل توجهی در هزینه‌ی محاسباتی صرفه‌جویی می‌شود. برای همگرایی به حل تحلیلی مسئله، نسبت زمان اجرای کُد اجزای محدود نوشته شده در یک رایانه شخصی واحد برای المان کلاسیک لاگرانژی Q9 به المان چندربعی تعمیم‌یافته Q9 پیشنهادی ۱۱/۲۲۲۵ بدست آمد. از طرف دیگر، با مقایسه‌ی نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود مسائل ویسکوالاستیک خطی با استفاده از المان‌های چندربعی تعمیم‌یافته Q9 و المان‌های مختلط فوریه Q9 ، می‌توان دریافت که المان‌های مختلط فوریه Q9 توانمندتر هستند.

فصل پنجم: تحلیل المان مرزی مسائل الاستواستاتیک با استفاده از المان‌های چندربعی تعمیم‌یافته

۵-۱- مقدمه

یافتن حل تحلیلی برای بسیاری از مسائل کاربردی مکانیک محیط‌های پیوسته دشوار است و برای مسائل با هندسه و بارگذاری پیچیده می‌تواند غیر ممکن باشد، از اینرو با پیشرفت سریع رایانه‌ها، روش‌های عددی بسیاری برای حل عددی مسائل مهندسی سازه ایجاد شده است. در دهه های اخیر یکی از روش‌های عددی غالب، روش اجزای محدود بوده است. این روش می‌تواند با گسسته سازی دامنه به المان‌های کوچک و بکارگیری توابع شکل برای تخمین مشارکت متغیرهای حالت مانند جابجایی و تنش برای حل بسیاری از مسائل مهندسی سازه بکار گرفته شود [۱۱۴]. در فصل‌های قبل از این روش برای تحلیل سازه‌های ویسکوالاستیک استفاده شد. روش المان مرزی به عنوان یک روش عددی جایگزین قدرتمند و فراگیر برای روش المان محدود، به خصوص در مواردی که روش اجزای محدود از دقت کافی برخوردار نیست مانند تمرکز تنش و مسائل با حوزه بی‌نهایت، شناخته شده است [۱۱۵]. روش المان مرزی نیز مانند روش المان محدود می‌تواند در حل مسائل مهندسی متنوعی مانند الاستواستاتیک، الاستودینامیک، ویسکوالاستیک، ارتعاشات، انتقال حرارت، سیالات، مکانیک شکست، پلاستیسیته و غیره بکار گرفته شود. برتری روش المان مرزی نسبت به روش المان محدود آنست که در این روش تنها به گسسته‌سازی مرز مسئله نیاز است که این موضوع سبب ایجاد المان‌های کمتر و استفاده ساده‌تر نسبت به روش المان محدود می‌شود. با مطالعه ادبیات فنی می‌توان دریافت که در ایجاد فرمولاسیون روش المان مرزی از دو رویکرد شامل فرمولاسیون مستقیم و غیر مستقیم استفاده شده است. فرضیات تئوری معادله انتگرالی مستقیم اولین بار توسط کوپرادزه [۱۱۶] بحث شد. اما فرمولاسیون المان مرزی مستقیم به منظور استفاده در مسائل مهندسی اولین بار توسط ریتزو [۱۱۷] در سال ۱۹۶۷ با استفاده از اتحاد سومیگلیانا[۱۰۴] اثبات شد. در این فرمولاسیون، مجهولات جابجایی ها و ترکشن ها روی مرزها است، و تنش ها و جابجایی های درون حوزه از طریق انتگرال‌گیری عددی ترکشن ها و جابجایی‌های

[104] Somigliana

مرزی بدست می آید. جاسوان، مایتی و سیم [۱۱۸] از فرمولاسیون مستقیم با کمک تابع تنش ایری برای حل مسائل الاستواستاتیک دو بعدی استفاده کردند. سپس کروس [۱۱۹] از این فرمولاسیون المان مرزی برای حل مسائل الاستواستاتیک سه بعدی استفاده کرد. اولین بار حل مسائل الاستودینامیک با استفاده از این فرمولاسیون توسط کروس و ریتزو [۱۲۰] ارائه شد. لاچات [۱۲۱] نخستین بار المان‌های درجات بالا را در این فرمولاسیون بکار گرفت.

در فرمولاسیون المان مرزی با روش غیر مستقیم، مجهولات مجازی در سیستم معادلات تعریف می‌شوند که هیچ مفهوم فیزیکی مستقیمی ندارند. در این روش ابتدا مجهولات مجازی بدست می‌آیند و سپس تنش ها و جابجایی های حقیقی با انتگرال گیری مجهولات مجازی بر روی مرز محاسبه می‌شوند. از نخستین پژوهش های مرتبط با روش غیر مستقیم می‌توان به کارهای کوپرادزه [۱۱۶] و همینطور ماسونت و اولیویرا [۱۲۲، ۱۲۳] اشاره کرد. در مراجع [۱۲۶-۱۲۴] روند تکامل فرمولاسیون روش غیر مستقیم بیان شده است. فرمولاسیون المان مرزی مستقیم نسبت به غیر مستقیم از نظر ایده و استفاده ساده تر است، به همین دلیل استفاده از آن در کاربردهای مختلف متداول‌تر است.

پرکاربردترین حل اساسی[۱۰۵] مورد استفاده در الاستواستاتیک، حل کلوین است. برخی دیگر از حل‌های اساسی الاستواستاتیک برای برخی کاربردهای ویژه استفاده می‌شود که منجر به دقت و کارآمدی بیشتر در حل مسئله می‌شود. از آن جمله می توان به حل نیم صفحه بی‌نهایت اشاره کرد که توسط تِلِس و بِرِبیا [۱۲۷] پیشنهاد و در مسائل ژئومکانیک با موفقیت استفاده شده است. حل اساسی ویژه دیگری که توسط اِسنایدِر و کروس [۱۲۸] پیشنهاد شده است در مسائل ترک کاربرد دارد.

در فصل سوم از این رساله، المان‌های چندربعی تعمیم‌یافته (XMQ) سه گرهی در دستگاه مختصات طبیعی ξ برای نخستین بار پیشنهاد شد و خصوصیات توابع شکل چندربعی تعمیم‌یافته در المان

[105] Fundamental solution

پیشنهادی بیان شد. در این بخش از این المان‌های پیشنهادی در تحلیل المان مرزی مسائل الاستواستاتیک دو بعدی استفاده خواهد شد.

۵-۲- فرمولاسیون مسائل الاستواستاتیک

معادله‌ی حاکم بر مسائل الاستواستاتیک، معادله‌ی تعادل است که برای یک جسم همسانگرد همگن الاستیک خطی در حالت عدم وجود نیروهای حجمی[۱۰۶] به صورت زیر تعریف می‌شود. برای هر نقطه دلخواه با مختصات $\mathbf{x}$ در یک سازه دو بعدی با دامنه‌ی Ω و مرز Γ معادله‌ی تعادل در حالت عدم وجود نیروی حجمی به صورت رابطه‌ی (۴-۱) بیان می‌شود [۱۲۹].

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} = 0; \qquad (i = 1,2\ ;\ j = 1,2) \tag{۵-۱}$$

رابطه‌ی (۵-۱) از قرارداد جمع انیشتین تبعیت می‌کند. در این رابطه $u_j = u_j(\mathbf{x})$ میدان جابجایی را در نقطه با مختصات $\mathbf{x}$ نمایش می‌دهد. λ و μ ثوابت لامه[۱۰۷] هستند و کاما نشان دهنده مشتق نسبت به مختصات مکانی یک نقطه در دامنه است.

۵-۳- فرمولاسیون معادلات انتگرالی مرزی برای مسائل الاستواستاتیک

با اعمال روش باقی مانده‌های وزن دار بر معادله‌ی (۵-۱)، معادله‌ی حاکم بر مسئله به فُرم انتگرالی در می‌آید. متداول ترین تابع وزن مورد استفاده در روش المان مرزی، حل اساسی یا تابع گرین[۱۰۸] متناظر با بردار نیروی واحد وارد بر حوزه‌ی بی‌نهایت است. با اعمال اتحاد گرین بر معادله انتگرالی بر روی دامنه Ω ، معادله انتگرالی مرزی به صورت رابطه‌ی (۵-۲) بدست می‌آید [۱۳۰] .

$$c_{\mathbf{k}}(\xi) u_{\mathbf{k}}(\xi) + \int_{\Gamma} p_{\mathbf{k}}^{*} u_{\mathbf{k}}\, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma} u_{\mathbf{k}}^{*} p_{\mathbf{k}}\, \mathrm{d}\Gamma \tag{۵-۲}$$

---

[106] Body forces

[107] Lame' constants

[108] Green's function

ضریب $c_{\mathbf{k}}(\xi)$ در رابطه‌ی (۵-۲) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} c_{\mathbf{k}}(\xi) &= 0 \qquad \xi \notin \Omega \\ c_{\mathbf{k}}(\xi) &= \delta_{lk} \qquad \xi \in \Omega \\ c_{\mathbf{k}}(\xi) &= \frac{1}{2}\delta_{lk} \quad \xi \in \Gamma \text{ smooth boundary} \end{aligned} \tag{۵-۳}$$

به علاوه برای نقطه‌ی منبع ξ و نقطه میدانی $\mathbf{x}$، $u_{\mathbf{k}}^{*} = u_{\mathbf{k}}^{*}(\xi,\mathbf{x})$ حل اساسی جابجایی و $p_{\mathbf{k}}^{*} = p_{\mathbf{k}}^{*}(\xi,\mathbf{x})$ حل اساسی ترکشن دو نقطه ای است. در رابطه‌ی (۴-۲) ، $u_{\mathbf{k}}$ نشان دهنده‌ی جابجایی و $p_{\mathbf{k}}$ بردار تنش یا ترکشن است.

از آن جایی که تمامی جملات انتگرالی در رابطه‌ی (۵-۲) بر روی مرز تعریف شده است، از آن می‌توان به عنوان معادله‌ی پایه برای بدست آوردن فرمولاسیون المان مرزی استفاده کرد.

۵-۴- گسسته سازی معادله‌ی انتگرالی

حال معادله‌ی انتگرالی (۵-۲) به عنوان معادله‌ی پایه برای استفاده از المان‌های چند ربعی تعمیم یافته در روش المان مرزی در نظر گرفته می‌شود. بدین منظور مرز دامنه مسئله توسط یک سری المان‌های مرزی چند ربعی تعمیم یافته گسسته سازی می‌شود. سپس مقادیر جابجایی و ترکشن در طول هر المان چندربعی تعمیم یافته بر حسب مقادیر گرهی آن‌ها نوشته می‌شود. برای هر نقطه‌ی مرزی i ، معادله‌ی انتگرالی (۵-۲) پس از گسسته سازی به صورت رابطه‌ی (۵-۴) نوشته می‌شود [۱۳۰] .

$$c^{i}u^{i} + \sum_{j=1}^{NE}\left(\int_{\Gamma_j} p^{*}\mathbf{\Phi}\, d\Gamma\right)\mathbf{u}^{j} = \sum_{j=1}^{NE}\left(\int_{\Gamma_j} u^{*}\mathbf{\Phi}\, d\Gamma\right)\mathbf{q}^{j} \tag{۵-۴}$$

در رابطه‌ی (۵-۴)، NE تعداد المان‌های چند ربعی تعمیم یافته و $\mathbf{\Phi}$ ماتریس توابع شکل است که در رابطه‌ی (۵-۵) ارائه شده است و درایه‌های آن از رابطه‌ی (۵-۶) بدست می‌آیند.

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi) & 0 & \phi_2(\xi) & 0 & \phi_3(\xi) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi) & 0 & \phi_2(\xi) & 0 & \phi_3(\xi) \end{bmatrix}_{2\times 6} \tag{۵-۵}$$

$$\phi_1(\xi)=\frac{1}{2g}\left(h(\xi)-\xi g+2e\right)$$
$$\phi_2(\xi)=\frac{-1}{g}\left(h(\xi)-g+2e\right) \qquad (۶-۵)$$
$$\phi_3(\xi)=\frac{1}{2g}\left(h(\xi)+\xi g+2e\right)$$

تابع $h(\xi)$ و پارامترهای g,e در فصل سوم تعریف شدند. در اینجا نیز برای یادآوری تکرار می‌شوند:

$$h(\xi)=\left((1-\xi)^2+c^2\right)^q+\left((1+\xi)^2+c^2\right)^q-2\left(\xi^2+c^2\right)$$
$$g=3\left(c^2\right)^q-4\left(1+c^2\right)^q+\left(4+c^2\right)^q \qquad (۷-۵)$$
$$e=\left(c^2\right)^q-\left(1+c^2\right)^q$$

در رابطه‌ی (۵-۷)، q,c پارامترهای شکلِ توابع شکلِ چندربعی تعمیم یافته هستند.

پس از محاسبه‌ی انتگرال‌های مرزی موجود در رابطه‌ی (۵-۴)، این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۳۰].

$$\sum_{j=1}^{N}\mathbf{H}^{ij}\,\mathbf{u}^j=\sum_{j=1}^{N}\mathbf{G}^{ij}\,\mathbf{p}^j \qquad (۸-۵)$$

در رابطه‌ی (۵-۸)، N تعداد گره‌های مرزی است. i و j شماره گره‌های مرزی هستند، $\mathbf{u}^j$ بردار جابجایی و $\mathbf{p}^j$ بردار ترکشن در گره j-ام هستند. $\mathbf{H}^{ij}$ و $\mathbf{G}^{ij}$ ماتریس‌های معمول المان مرزی هستند که گره‌های i و j را به هم مرتبط می‌کنند. معادله‌ی (۵-۸) را می‌توان برای تمامی گره های مرزی براساس ماتریس‌های کلی نوشت، تا سیستم کامل معادلات به صورت رابطه (۵-۹) حاصل شود [۱۳۰].

$$\mathbf{Hu}=\mathbf{Gp} \qquad (۹-۵)$$

در رابطه‌ی (۵-۹)، $\mathbf{H}$ و $\mathbf{G}$ ماتریس‌های معمول المان مرزی هستند. معادله‌ی (۵-۹)، معادلات تعادل استاتیکی در شرایط عدم وجود نیروی حجمی را نمایش می‌دهدکه با اعمال شرایط مرزی بر آن به صورت $\mathbf{AX}=\mathbf{F}$ در می‌آید. در این رابطه، $\mathbf{F}$ بردار معلومات که حاصل ضرب شرایط مرزی موجود در

ضرایب متناظرشان در ماتریس‌های $\mathbf{H}$ و $\mathbf{G}$ است. $\mathbf{A}$ ماتریس ضرایب و $\mathbf{X}$ بردار مجهولات شامل جابجایی ها و ترکشن های مجهول در گره‌های مرزی است. معادله‌ی $\mathbf{AX=F}$ یک سیستم از معادلات جبری خطی است که می‌تواند با روش حذفی گاوس حل شود.

۵-۵- پارامتر شکل

در فصل سوم روش‌هایی برای بدست آوردن پارامتر شکل موجود در توابع درون‌یابی برای روش اجزای محدود پیشنهاد شد. در این فصل برای بدست آوردن پارامترهای شکل مناسب در روش اجزای مرزی برای هر مسئله از یک روش آزمون و خطا مبتنی بر دو مش بندی متوالی استفاده شده است. در این روش ابتدا مقادیر مجهولات گرهی مسئله با یک مش درشت بدست می‌آید. سپس هر المان در مش اول به دو المان تقسیم شده و مجدداً مقادیر مجهولات گرهی محاسبه می‌شود. معیار همگرایی جمع مربعات تفاوت مقادیر گرهی در دو مش متوالی است. شایان ذکر است، در جایی که در مش اول گرهی وجود ندارد، مقدار مجهولات در آن نقطه با درون یابی بدست می‌آید. در فرآیند آزمون و خطا هر پارامتر شکلی که منجر به کمترین مقدار معیار همگرایی شود، به عنوان پارامتر شکل مناسب برای آن مسئله انتخاب می‌شود [۷۶].

۵-۶- مثال های عددی

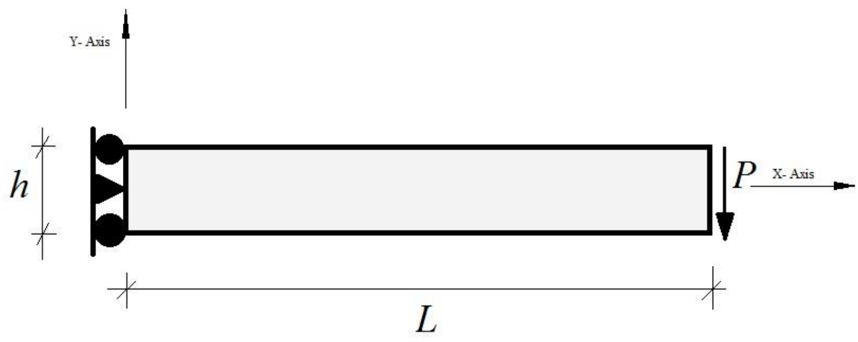
۵-۶-۱- مقدمه

در این قسمت به منظور بررسی دقت و توانایی توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته (XMQ) در تحلیل مسائل الاستواستاتیک با استفاده از روش المان مرزی سه مثال عددی ارائه شده است و نتایج حاصل از المان‌های مرزی چند ربعی تعمیم یافته با المان مرزی کلاسیک لاگرانژی و حل تحلیلی مقایسه شده است. ثوابت مورد نیاز برای تعریف خصوصیات ماده‌ی الاستیک برای هر سه مثال به صورت، مدول یانگ

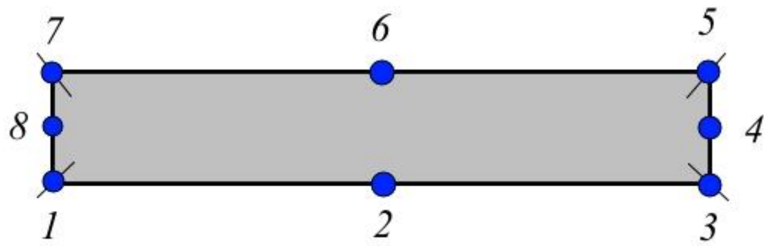
$E=2\times10^5$ و نسبت پوآسون $\upsilon=0.25$ در نظر گرفته شده است. در هر سه مثال فرض شده است که کلیه‌ی مقادیر عددی از نظر ابعاد از یک سیستم سازگار پیروی می‌کنند.

۵-۶-۲- مثال اول: تیر کنسول تحت بار برشی در رأس آن

تیر کنسول نشان داده شده در شکل ۵-۱ به عنوان مثال اول در نظر گرفته شده است. طول تیر برابر $L=20$ و عمق آن برابر $h=4$ فرض شده است و رأس تیر تحت یک بار برشی $P=4$ قرار دارد [۱۰۱]. مش استفاده شده در حل المان مرزی این مثال در شکل ۵-۲ نشان داده شده است.



شکل ۵-۱: هندسه و بارگذاری تیر کنسول تحت بار برشی مربوط به مثال اول [۱۰۱]



شکل ۵-۲: مش المان مرزی استفاده شده در مثال اول و دوم [۱۰۱]

حل تحلیلی این مسئله در حالت تنش صفحه‌ای از مقاومت مصالح به راحتی برای میدان جابجایی و تنش به صورت زیر بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
u_x &= \frac{Py}{6EI_z}\left[\left(6L-3x\right)x+\left(2+\upsilon\right)\left(y^2-\frac{h^2}{4}\right)\right] \\
u_y &= -\frac{P}{6EI_z}\left[3\upsilon y^2\left(L-x\right)+\left(4+5\upsilon\right)\frac{h^2x}{4}+\left(3L-x\right)x^2\right] \\
\sigma_{xx} &= \frac{P\left(L-x\right)y}{I_z};\ \ \sigma_{yy}=0;\ \ \sigma_{xy}=\frac{P}{2I_z}\left(y^2-\frac{h^2}{4}\right)
\end{aligned}
\tag{۱۰-۵}
$$

در رابطه‌ی (۵-۱۰)، I_z ممان اینرسی مقطع تیر حول محور خمش z با عرض واحد است. با در نظر گرفتن مسئله به صورت یک مسئله کرنش صفحه‌ای، حل تحلیلی با جایگزینی مدول یانگ E با $\frac{E}{1-\upsilon^2}$ و نسبت پوآسون υ با $\frac{\upsilon}{1-\upsilon}$ در رابطه‌ی (۵-۱۰) بدست می‌آید. در جدول ۵-۱ نتایج بدست آمده برای مقادیر مجهول گرهی با استفاده از المان‌های مرزی سه گرهی چند ربعی تعمیم یافته و کلاسیک لاگرانژی با حل تحلیلی مقایسه شده است. با استفاده از جدول ۵-۱ می‌توان دریافت که نتایج حاصل از توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته در مقایسه با توابع شکل کلاسیک لاگرانژی تطابق بسیار بهتری با حل تحلیلی دارد، به طوری که در تمامی گره ها خطا به مقدار قابل توجهی نسبت به المان‌های کلاسیک کاهش پیدا کرده است. پارامترهای شکل در این مثال $q=2.5, c=1$ در نظر گرفته شده است.

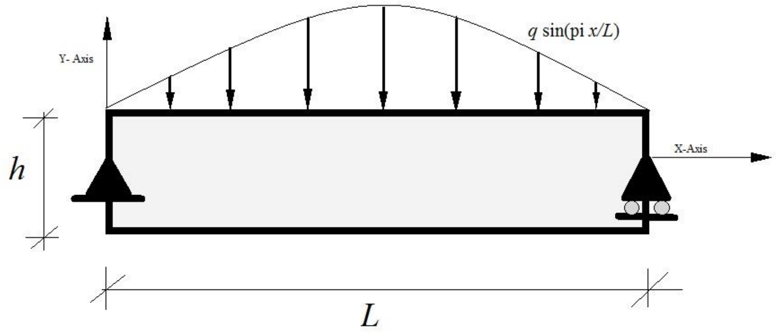
جدول ۵-۱: مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل المان مرزی با استفاده از ۴ المان مرزی سه گرهی چند ربعی تعمیم یافته و کلاسیک لاگرانژی با حل تحلیلی در مثال تیر طره

شماره گره	راستا	پارامتر گرهی مجهول	المان مرزی کلاسیک لاگرانژی(خطا ٪)	المان مرزی چند ربعی تعمیم یافته (خطا ٪)	حل تحلیلی
۱	x	σ_{xx}	۱۴/۹۰۹۵ (۵۰/۳۰)	۲۹/۳۰۰۱ (۲/۳۳۳)	۳۰
	y	u_y	-۰/۰۰۰۰۱۷۰۷۸ (۶۳/۵۷)	-۰/۰۰۰۰۵۱۱۳۴ (۹/۰۸۵)	-۰/۰۰۰۰۴۶۸۷۵
۲	x	u_x	-۰/۰۰۰۴۱۷۳۴۳ (۶۰/۴۳)	-۰/۰۰۰۹۴۴۳۷۵ (۱۰/۴۶)	-۰/۰۰۱۰۵۴۶۸۸
	y	u_y	-۰/۰۰۱۲۰۳۶۷۷ (۶۰/۹۹)	-۰/۰۰۲۷۴۱۰۴۷ (۱۱/۱۸)	-۰/۰۰۳۰۸۵۹۳۸
۳	x	u_x	-۰/۰۰۰۶۹۸۸۸۵ (۵۰/۳۰)	-۰/۰۰۱۶۱۵۹۵۸ (۱۴/۹۱)	-۰/۰۰۱۴۰۶۲۵۰

	y	u_y	-۰/۰۰۴۱۳۷۴۸۹ (۵۷/۰۸)	-۰/۰۰۹۴۰۱۹۱ (۲/۴۸)	-۰/۰۰۹۶۴۰۶۲۵
۴	x	u_x	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰
	y	u_y	-۰/۰۰۴۱۳۱۲۷۰ (۵۷/۱۵)	-۰/۰۰۹۳۵۷۰۹۴ (۲/۹۴)	-۰/۰۰۹۶۴۰۶۲۵
۵	x	u_x	۰/۰۰۰۶۹۸۸۸۵ (۵۰/۳۰)	۰/۰۰۱۶۱۵۹۵۸۸ (۱۴/۹۱)	۰/۰۰۱۴۰۶۲۵۰
	y	u_y	-۰/۰۰۴۱۳۷۴۸۹ (۵۷/۰۸)	-۰/۰۰۹۴۰۱۹۱ (۲/۰۴)	-۰/۰۰۹۶۴۰۶۲۵
۶	x	u_x	۰/۰۰۰۴۱۷۳۴۳ (۶۰/۴۳)	۰/۰۰۰۹۴۴۳۷۵ (۱۰/۴۶)	۰/۰۰۱۰۵۴۶۸۸
	y	u_y	-۰/۰۰۱۲۰۳۶۷۷ (۶۰/۹۹)	-۰/۰۰۲۷۴۱۰۴ (۱۱/۱۸)	-۰/۰۰۳۰۸۵۹۳۸
۷	x	σ_{xx}	-۱۴/۹۰۹۵ (۵۰/۳۰)	-۲۹/۳۰۰۱ (۲/۳۳۳)	-۳۰
	y	u_y	-۰/۰۰۰۰۱۷۰۷۸ (۶۳/۵۷)	-۰/۰۰۰۰۵۱۱۳۴ (۹/۰۸۵)	-۰/۰۰۰۰۴۶۸۷۵
۸	x	σ_{xx}	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰
	y	σ_{xy}	۱/۴۹ (۰/۶۷)	۱/۴۹ (۰/۶۷)	۱/۵

۵-۶-۳- مثال دوم: تیر دو سر ساده تحت بار گسترده سینوسی

تیر دو سر ساده نمایش داده شده در شکل ۵-۳ به عنوان مثال دوم در نظر گرفته شده است. همانند مثال قبل طول تیر برابر $L = 20$ و عمق تیر $h = 4$ فرض شده است. تیر مورد نظر تحت بار گسترده‌ی سینوسی به صورت $q' \sin\left(\pi x / L\right)$ قرار دارد که در آن $q' = 1.5$ در نظر گرفته شده است [۱۰۱]. مش استفاده شده در حل المان مرزی مثال دوم مشابه مثال اول است و در شکل ۵-۲ نمایش داده شده است.



شکل ۵-۳: هندسه و بارگذاری تیر دو سر ساده‌ی تحت بار گسترده سینوسی مربوط به مثال دوم [۱۰۱]

حل تحلیلی برای مثال دوم به صورت رابطه‌ی (۵-۱۱) می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
u_x &= -\frac{\theta}{E}\cos(\theta x)\{A(1+\upsilon)\sinh(\theta y)+B(1+\upsilon)\cosh(\theta y) \\
&\quad +C\left[(1+\upsilon)\theta y\sinh(\theta y)+2\cosh(\theta y)\right] \\
&\quad +D\left[(1+\upsilon)\theta y\cosh(\theta y)+2\sinh(\theta y)\right]\}-\omega_0 y+u_{x0} \\
u_y &= -\frac{\theta}{E}\sin(\theta x)\{A(1+\upsilon)\cosh(\theta y)+B(1+\upsilon)\sinh(\theta y) \\
&\quad +C\left[(1+\upsilon)\theta y\cosh(\theta y)-(1+\upsilon)\sinh(\theta y)\right] \\
&\quad +D\left[(1+\upsilon)\theta y\sinh(\theta y)-(1-\upsilon)\cosh(\theta y)\right]\}+\omega_0 y+u_{y0} \\
\sigma_{xx} &= \theta^2\sin(\theta x)\{A\sinh(\theta y)+B\cosh(\theta y) \\
&\quad +C\left[\theta y\sin(\theta y)+2\cosh(\theta y)\right]+D\left[\theta y\cosh(\theta y)+2\sinh(\theta y)\right]\} \\
\sigma_{yy} &= -\theta^2\sin(\theta x)\{\left[A+C\,\theta y\right]\sinh(\theta y)+\left[B+D\,\theta y\right]\cosh(\theta y)\} \\
\sigma_{xy} &= -\theta^2\cos(\theta x)\{A\cosh(\theta y)+B\sinh(\theta y) \\
&\quad +C\left[\theta y\cosh(\theta y)+\sinh(\theta y)\right]+D\left[\theta y\sinh(\theta y)+\cosh(\theta y)\right]\}
\end{aligned}
\tag{۵-۱۱}
$$

همانند مثال قبل، با در نظر گرفتن مسئله به صورت یک مسئله کرنش صفحه ای، حل تحلیلی با جایگزینی مدول یانگ E با $\frac{E}{1-\upsilon^2}$ و نسبت پوآسون υ با $\frac{\upsilon}{1-\upsilon}$ در رابطه‌ی (۵-۱۱) بدست می‌آید.

در رابطه‌ی (۵-۱۱):

$$D=\frac{q\cosh\left(\theta h/2\right)}{2\theta^2\left[\frac{\theta h}{2}-\sinh\left(\theta h/2\right)\cosh\left(\theta h/2\right)\right]};\qquad \theta=\frac{\pi}{L}$$
$$C=\frac{-q\sinh\left(\theta h/2\right)}{2\theta^2\left[\frac{\theta h}{2}+\sinh\left(\theta h/2\right)\cosh\left(\theta h/2\right)\right]};\qquad u_{x0}=\frac{\theta}{E}\left[B\left(1+\upsilon\right)+2C\right] \tag{۱۲-۵}$$
$$A=-D\left[\frac{\theta h}{2}\tanh\left(\theta h/2\right)+1\right];\qquad u_{y0}=\omega_0=0$$
$$B=-C\left[\frac{\theta h}{2}\coth\left(\theta h/2\right)+1\right]$$

در جدول ۵-۲ نتایج حاصل از توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته و کلاسیک لاگرانژی و همینطور حل تحلیلی ارائه شده است. با مقایسه‌ی مقادیر مجهول گرهی حاصل از المان‌های مرزی سه گرهی چند ربعی تعمیم یافته و کلاسیک لاگرانژی کاملاً مشخص است که استفاده از المان‌های چند ربعی تعمیم یافته منجر به کاهش خطا می‌شود. در این مثال از پارامترهای شکل $q=1.9, c=2.21$ استفاده شده است.

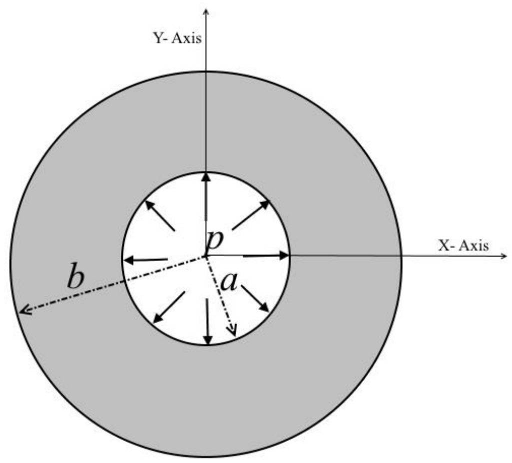
جدول ۵-۲: مقایسه‌ی نتایج حاصل از تحلیل المان مرزی با استفاده از ۴ المان مرزی سه گرهی چند ربعی تعمیم یافته و کلاسیک لاگرانژی با حل تحلیلی در مثال دوم

شماره گره	راستا	پارامتر گرهی مجهول	المان مرزی کلاسیک لاگرانژی(خطا ٪)	المان مرزی چند ربعی تعمیم یافته (خطا ٪)	حل تحلیلی
۱	x	u_x	-۰/۰۰۰۴۶۳۵۹۱ (۳۱/۹۱)	-۰/۰۰۰۵۹۱۲۹ (۱۳/۱)	-۰/۰۰۰۶۸۰۸۵۲
	y	u_y	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰
۲	x	u_x	۰/۰۰۰۰۰۷۳۹۲ (۵/۴۴)	۰/۰۰۰۰۰۷۷۱۶ (۱/۲۹)	۰/۰۰۰۰۰۷۸۱۷
	y	u_y	-۰/۰۰۱۳۶۸۲۲۴ (۴۱/۲۹)	-۰/۰۰۲۲۱۷۸۹ (۴/۸۲)	-۰/۰۰۲۳۳۰۳۳۶
۳	x	u_x	۰/۰۰۰۴۷۸۳۷۵ (۳۱/۳۲)	۰/۰۰۰۷۳۹۸۳۲ (۶/۲۲)	۰/۰۰۰۶۹۶۴۸۷
	y	u_y	۰/۰۰۰۰۰۱۵۷۵	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰

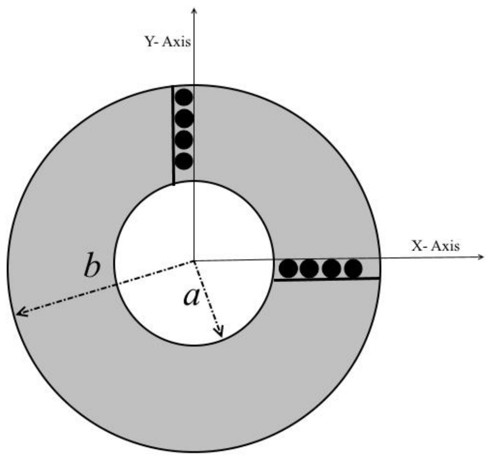
۴	x	u_x	۰/۰۰۰۰۱۴۷۸۵ (۵/۴۴)	۰/۰۰۰۰۱۶۱۰۸ (۳/۰۳)	۰/۰۰۰۰۱۵۶۳۴
	y	σ_{xy}	(۲/۷۹) ۳/۴۶۹۴	(۱/۱۸)۳/۵۲۶۷	۳/۵۶۹۱
۵	x	u_x	−۰/۰۰۰۴۵۰۴۹۳ (۳۲/۵۰)	−۰/۰۰۶۳۹۷۶۵ (۴/۱۳)	−۰/۰۰۶۶۷۳۸۵
	y	u_y	۰/۰۰۰۰۰۱۳۸۲	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰
۶	x	u_x	۰/۰۰۰۰۰۷۳۹۲ (۵/۴۴)	۰/۰۰۰۰۰۷۷۱۶ (۱/۲۹)	۰/۰۰۰۰۰۷۸۱۷
	y	u_y	−۰/۰۰۱۳۸۲۱۷۳ (۴۱/۱۶)	−۰/۰۰۲۱۲۸۹۲ (۹/۳۷)	−۰/۰۰۲۳۴۹۰۸۲
۷	x	u_x	۰/۰۰۰۴۶۵۲۷۷ (۳۱/۸۸)	۰/۰۰۰۶۴۹۹۵۱ (۴/۸۴)	۰/۰۰۰۶۸۳۰۱۹
	y	u_y	۰/۰۰۰۰۰۱۳۸۲	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰
۸	x	σ_{xx}	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰
	y	σ_{xy}	(۲/۷۹) ۳/۴۶۹۴	(۱/۱۸)۳/۵۲۶۷	۳/۵۶۹۱

۵-۶-۴- مثال سوم: سیلندر تحت فشار داخلی p

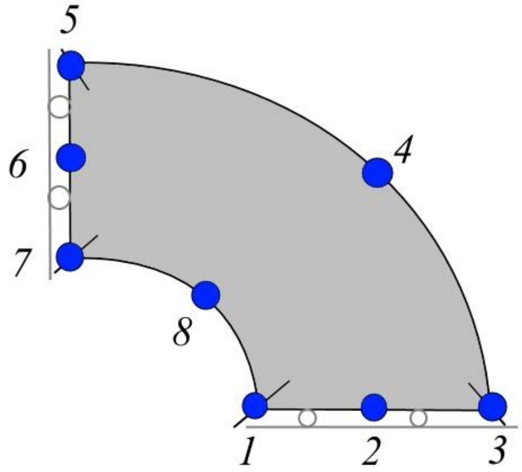
سیلندر استوانه‌ای نمایش داده شده در شکل ۵-۴ به عنوان مثال سوم در نظر گرفته شده است. شعاع داخلی سیلندر $a=10$ و شعاع خارجی آن $b=25$ فرض شده است و سیلندر مورد نظر تحت فشار داخلی $p=100$ قرار دارد [۱۰۱]. شایان ذکر است که به دلیل تقارن تنها لازم است ربع هندسه مسئله مدل شود (شکل ۵-۵). مش بندی مرزی استفاده شده در حل مثال سوم در شکل ۵-۶ نشان داده شده است.



شکل ۵-۴: هندسه و بارگذاری سیلندر تحت فشار داخلی مربوط به مثال سوم [۱۰۱]



شکل ۵-۵: اعمال شرایط تقارن در مسئله سیلندر تحت فشار برای مثال سوم [۱۰۱]



شکل ۵-۶: مش المان مرزی استفاده شده در مثال سوم [۱۰۱]

حل تحلیلی این مثال به عنوان یک مثال کلاسیک الاستیسیته به راحتی با استفاده از تابع تنش اِیری[۱۰۹] به صورت رابطه‌ی (۵-۱۳) قابل دستیابی است.

$$
\begin{aligned}
&u_r = Ar + \frac{B}{r} \\
&u_\theta = 0 \\
&\sigma_{rr} = C - \frac{D}{r^2} \\
&\sigma_{\theta\theta} = C + \frac{D}{r^2} \\
&\sigma_{r\theta} = 0
\end{aligned}
\qquad (۵\text{-}۱۳)
$$

ضرایب مجهول D,C,B,A در رابطه‌ی (۵-۱۳) به صورت رابطه‌ی (۵-۱۴) بدست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&A = \frac{pa^2}{2\left(b^2 - a^2\right)\left(\lambda + \mu\right)} \\
&B = \frac{pa^2 b^2}{2\left(b^2 - a^2\right)\mu} \\
&C = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \\
&D = \frac{pa^2 b^2}{b^2 - a^2}
\end{aligned}
\qquad (۵\text{-}۱۴)
$$

در رابطه‌ی (۵-۱۴)، λ و μ ثوابت لامه هستند. همانند مثال‌های قبل، نتایج حاصل از حل المان مرزی و تحلیلی برای مقادیر مجهول گرهی در جدول ۵-۳ ارائه شده است. با مقایسه‌ی نتایج حاصل از توابع شکل چند ربعی تعمیم یافته با توابع شکل کلاسیک لاگرانژی می‌توان دریافت که استفاده از المان‌های چند ربعی تعمیم یافته بطور موثری منجر به کاهش خطا می‌شوند و تطابق بهتری با مقادیر حل تحلیلی دارند. مقادیر پارامتر شکل در این مثال $q=-0.5, c=3$ در نظر گرفته شده است.

---

[109] Airy stress function

جدول ۵-۳: مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل المان مرزی با استفاده از ۴ المان مرزی سه گرهی چند ربعی تعمیم یافته و کلاسیک لاگرانژی با حل تحلیلی در مثال سوم

شماره گره	راستا	پارامتر گرهی مجهول	المان مرزی کلاسیک لاگرانژی(خطا ٪)	المان مرزی چند ربعی تعمیم یافته (خطا ٪)	حل تحلیلی
۱	x	u_x	۰/۰۰۷۸۷۸۱۶ (۱/۹۶)	۰/۰۰۷۹۱۳۵۰۵ (۱/۵۰)	۰/۰۰۸۰۳۴۰۵
	y	σ_{yy}	-۱۲۷/۴۷۹۷ (۷/۶۹)	-۱۳۸/۱۴۰۳۹ (۰/۴۷)	-۱۳۸/۰۹۵۲
۲	x	u_x	۰/۰۰۵۱۶۶۹۲ (۲/۳۹)	۰/۰۰۵۱۷۱۲۴۷ (۲/۲۹)	۰/۰۰۵۲۹۳۳۷
	y	σ_{yy}	-۵۸/۲۷۵۱ (۰/۶۱)	-۵۷/۷۳۶۳ (۰/۱۹)	-۵۷/۹۲۰۳
۳	x	u_x	۰/۰۰۴۳۸۹۵۹ (۱/۶۷)	۰/۰۰۴۴۳۴۷۸ (۰/۶۶)	۰/۰۰۴۴۶۴۲۹
	y	σ_{yy}	-۳۵/۸۱۲۰ (۵/۹۹)	-۳۸/۶۵۳۹۷ (۱/۴۶)	-۳۸/۰۹۵۲
۴	x	u_x	۰/۰۰۳۱۵۳۴ (۱/۶۳)	۰/۰۰۳۱۵۷۱ (۰/۰۱۵)	۰/۰۰۳۱۵۶۷۳
	y	u_y	۰/۰۰۳۱۵۳۴ (۱/۶۳)	۰/۰۰۳۱۵۷۱ (۰/۰۱۵)	۰/۰۰۳۱۵۶۷۳
۵	x	σ_{xx}	-۳۵/۸۱۲۰ (۵/۹۹)	-۳۸/۶۵۳۹۷ (۱/۴۶)	-۳۸/۰۹۵۲
	y	u_y	۰/۰۰۴۳۸۹۵۹ (۱/۶۷)	۰/۰۰۴۴۳۴۷۸ (۰/۶۶)	۰/۰۰۴۴۶۴۲۰
۶	x	σ_{xx}	-۵۸/۲۷۵۱ (۰/۶۱)	-۵۷/۷۳۶۳ (۰/۱۹)	-۵۷/۹۲۰۳
	y	u_y	۰/۰۰۵۱۶۶۹۲ (۲/۳۹)	۰/۰۰۵۱۷۱۲۴۷ (۲/۲۹)	۰/۰۰۵۲۹۳۳۷
۷	x	σ_{xx}	-۱۲۷/۴۷۹۷ (۷/۶۹)	-۱۳۸/۱۴۰۳۹ (۰/۴۷)	-۱۳۸/۰۹۵۲
	y	u_y	۰/۰۰۷۸۷۸۱۶ (۱/۹۶)	۰/۰۰۷۹۱۳۵۰۵ (۱/۵۰)	۰/۰۰۸۰۳۵۷۱
۸	x	u_x	۰/۰۰۵۵۹۱۴۹ (۱/۵۹)	۰/۰۰۵۶۱۴۲۰ (۱/۱۹)	۰/۰۰۵۶۸۲۱۱
	y	u_y	۰/۰۰۵۵۹۱۴۹ (۱/۵۹)	۰/۰۰۵۶۱۴۲۰ (۱/۱۹)	۰/۰۰۵۶۸۲۱۱

فصل ششم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای کارهای آینده

۶-۱- نتیجه‌گیری

در این رساله با بهره‌گیری از فرآیند بدست آوردن توابع شکل در روش درون‌یابی نقطه‌ای از طریق توابع پایه شعاعی (RPIM) که یک روش بدون شبکه است، المان‌های جدیدی در دستگاه مختصات طبیعی برای استفاده در روش‌های بر پایه المان ارائه شد. سپس از این المان‌های نوین در تحلیل اجزای محدود سازه‌های ویسکوالاستیک و تحلیل اجزای مرزی سازه‌های الاستیک استفاده شد و نتایج حاصل از این المان‌ها با نتایج حاصل از المان‌های متداول کلاسیک بر پایه توابع شکل چند جمله‌ای مقایسه شد. بطور مشخص با بکارگیری توابع پایه شعاعی مختلط فوریه، گاوسین-فوریه و چندربعی تعمیم‌یافته (XMQ) ، توابع شکل در المان‌های چهاروجهی صفحه‌ای نه گرهی (Q9) بدست آمد و از آن‌ها برای حل مسائل ویسکوالاستیک تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای استفاده شد. با مقایسه‌ی نتایج اجزای محدود در مثال‌های عددی حل شده، مشخص شد که المان‌های مدرن ارائه شده نسبت به المان‌های متداول کلاسیک از نقطه نظر سرعت همگرایی به پاسخ تحلیلی و هزینه محاسباتی و زمان تحلیل در حل مسائل ویسکوالاستیک توانمندتر بودند. همچنین با مقایسه‌ی نتایج مشخص شد که المان مختلط فوریه بر دو المان مدرن پیشنهادی گاوسین-فوریه و چندربعی تعمیم یافته در حل این کلاس از مسائل برتری دارد. بنابراین از توابع پایه شعاعی مختلط فوریه برای تقویت المان‌های ورق به منظور تحلیل اجزای محدود ورق‌های نازک ویسکوالاستیک استفاده شد. بطور مشخص، المان‌های ورق تئوری کیرشوف گسسته (DKT) با توابع پایه شعاعی تقویت شد و این المان‌های جدید المان ورق فوریه تئوری کیرشوف گسسته (DKFT) نامیده شد. نتایج حاصل از مثال‌های عددی نشان داد که این المان‌های پیشنهادی نسبت به المان‌های متداول همتای خود (DKT) و المان‌های کلاسیک ورق، هزینه محاسباتی را به میزان قابل توجهی کاهش می‌دهند.

در ادامه از المان‌های نوین پیشنهادی چندربعی تعمیم یافته در یک روش عددی بر پایه المان دیگر یعنی روش اجزای مرزی استفاده شد. تحلیل اجزای مرزی مسائل الاستواستاتیک با کمک توابع شکل

چندربعی تعمیم یافته مؤید توانمندی این توابع شکل و برتری آن‌ها در مقایسه با توابع شکل کلاسیک لاگرانژی بود.

۶-۲- پیشنهادات و کارهای آینده

بکارگیری توابع شکل نوین بر پایه‌ی توابع پایه شعاعی در حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش‌های بر پایه المان عرصه‌ای جدید و نوپا در پژوهش است و می‌تواند به توانمندتر کردن این روش‌ها و رفع نقاط ضعف آن‌ها کمک کند.

در ادامه‌ی این رساله، در حوزه‌ی مهندسی سازه و مکانیک جامدات تحقیقات متنوعی قابل انجام است که به برخی از آن‌ها در زیر اشاره می‌شود.

۱- استفاده از این المان‌ها در روش‌های بر پایه المان دیگر مانند روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده (SBFEM)

۲- استفاده از المان‌های نوین در تحلیل المان مرزی مسائل ویسکوالاستیک خطی

۳- استفاده از المان‌های نوین در تحلیل المان محدود مسائل مکانیک شکست

۴- استفاده از المان‌های نوین پیشنهادی در تحلیل المان محدود مسائل دینامیک پیشرو (با نرخ کرنش بالا مانند ضربه و انفجار (Explicit Dynamics))

۵- استفاده از المان‌های نوین پیشنهادی در حل عددی مسائل با تغییر شکل‌های بزرگ (غیر خطی هندسی)

۶- استفاده از المان‌های نوین پیشنهادی در حل عددی مسائل پلاستیک (غیر خطی مادی) و ویسکوپلاستیک

منابع:

[۱] شیدفر ع، (۱۳۸۶) "**ریاضیات مهندسی: سری‌ها، انتگرال‌ها و تبدیلات فوریه، معادلات با مشتقات جزئی ، توابع مختلط**" چاپ دوازدهم، انتشارات دالفک، تهران، ص ۶۹.

[2] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. (**1987**) "**Theory of Elasticity**", Third Edition, Mc Graw-Hill, New York, USA.

[3] Sadd, M. H. (**2014**) "**Elasticity: Theory, Applications and Numerics**", Third Edition, Academic Press, USA.

[4] Brinson, H. F. and Brinson, L. C. (**2015**) "**Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction**", Second Edition, Springer, New York, USA.

[5] Lakes, R. (**2009**) "**Viscoelastic Materials**", Cambridge University Press, New York, USA.

[6] Tschoegl, N. W. (**1989**) "**The Phenomenological Theory of linear Viscoelastic Behavior: An Introduction**", Springer-Verlag, Berlin, Germany.

[7] Christensen, R. (**2012**) "**Theory of Viscoelasticity: An Introduction**", Elsevier Science, USA.

[8] Flugge, W. (**2013**) "**Viscoelasticity**", Springer, Berlin, Germany.

[9] Wang, J. and Liu, G. (2002) "A point interpolation meshless method based on radial basis functions, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 54, 11, pp. 1623-1648.

[10] Zocher, M. A., Groves, S. and Allen, D. H. (1997), "A three dimensional finite element formulation for thermoviscoelastic orthotropic media" **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 40, 12, pp. 2267-2288.

[11] Zocher, M. A. (1995), Ph.D. Dissertation, "A thermoviscoelastic finite element formulation for the analysis of composites", Aerospace Engineering Department., Texas A&M University, USA.

[12] Plunkett, R. (1992), Damping Analysis: An Historical Perspective, pp. 562-569, In: "**M^{3}D: Mechanics and Mechanisms of Material Damping**", ASTM STP 1169, Kinra V. K. and Wolfenden A., Philadelphia, USA.

[13] Coulomb, C. A. (1784) Recherches theoretiques et experimentales sur la force de torsion et sur l'elasticite des fils de metal, Acad. Sci., Paris, France.

[14] Timoshenko, S. P. (**1983**) "**History of Strength of Materials**", Dover, New York, USA.

[15] Vicat, L. T. (1834), "Note sur l'allgnemet progressif du fil de fer soumis a diverses tensions", Annales, Ponts et chausees, **Memoires et Documents**, 7.

[16] Weber, W. (1835), "Uber die Elastizitat der Seidenfaden", **Annalen der Physik und Chemie (Poggendorf's)**, 34, pp. 247-257.

[17] Kohlrausch, R. (1847), "Ueber das Dellmann'sche Elektrometer", **Annalen der Physik (Leipzig),** 72, pp. 353-405.

[18] Zener, C. (**1948**), "**Elasticity and Anelasticity of Metals**", University of Chicago Press, Chicago, USA.

[19] Weber, W. (1841), "Uber die Elastizitat fester korper", **Annalen der Physik und Chemie (Poggendorf's),** 54, pp. 247-257.

[20] Scher, H., Shlesinger M. F. and Bendler J. T. (1991), "Time-Scale Invariance in Transport and Relaxation", **Physics Today**, 44, pp. 26-34.

[21] Maxwell, J. C. (1867), "On the Dynamical Theory of Gases", **Philosophical Transactions of the Royal Society London , Series A,** 157, pp.49-88.

[22] Boltzmann, L. (1874), "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkunan", sitzungsber., **Kaiserlich Akad Wissen Math**., Naturwissen, 70, pp. 275-306.

[23] Markovitz, H. (1977), "Boltzmann and Beginnings of Linear Viscoelasticity", **Transactions of the Society of Rheology**, 21, pp. 381-398.

[24] Volterra, V. (1959), "**Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations**", Dover, New York, USA.

[25] Leaderman, H. (**1943**), "**Elastic and creep properties of Filamentous materials and other High Polymers**", The Textile Foundation, Washington DC, USA.

[26] Tobolsky, A.V. and Andrews, R. D. (1945), "Systems manifesting Superposed Elastic and Viscous Behavior", **Journal of Chemical Physics**, 13, pp. 3-27.

[27] Ferry, J. D. (1950), "Mechanical Properties of Substances of High Molecular Weight. VI. Dispersion in Concentrated Polymer Solutions and Its Dependence on Temperature and Concentration", **Journal of American Chemical Society**, 72, pp. 3746–3752.

[28] Plazek, D. J. (1996), "Oh, Thermorheological Simplicity, Wherefore Art Thou?" **Journal of Rheology**, 40, pp. 987–1014.

[29] Maxwell, J. C. (1877), "Constitution of Bodies", **Scientific Papers**, pp. 616–624.

[30] Volterra, V. (1928), "Sur la Theorie Mathematique des Phenomenes Her editaires", **Journal de Mathematiques Pures et Appliquees**, 7, pp. 249–298.

[31] Lee, E. H. and Rogers, T. G. (1963) "Solution of Viscoelastic stress analysis problems using measured creep or relaxation functions", **Journal of Applied Mechanics**, 30, 1, pp. 127-133.

[32] Hopkins, I. L. and Hamming, R. W. (1957) "On Creep and Relaxation", **Journal of Applied Physics**, 28, 8, pp. 906-909.

[33] King, I. P., (1965), Ph.D. Dissertation, "On the Finite Element Analysis of two-dimensional stress problems with time dependent properties", University of California, Berkeley, CA, USA.

[34] Taylor, R. L. and Chang, T. Y. (1966) "An approximation method for Thermoviscoelastic stress analysis", **Nuclear Engineering and Design**, 4, 1, pp. 21-28.

[35] Chang, T. Y., (1966), Ph.D. Dissertation, "Approximate solutions in linear Viscoelasticity", University of California, Berkeley, CA, USA.

[36] Taylor, R. L., Pister, K. S. and Goudreau, G. L. (1970) "Thermomechanical analysis of Viscoelastic solids", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2, 1, pp. 45-59.

[37] Zienkiewicz, O. C. and Watson, M. (1966) “Some Creep effects in stress analysis with particular reference to concrete pressure vessels”, **Nuclear Engineering and Design**, 4, 4, pp. 406-412.

[38] Rashid, Y. R. and Rockenhauser, W. (1967) “Pressure Vessel analysis by Finite Element Techniques”, Conference on Prestressed Concrete Pressure Vessels, The Institution of Civil Engineers, pp. 375-383, London, UK.

[39] Zak, A. R. (1968) “Structural analysis of realistic solid-propellant materials”, **Journal of Spacecraft and Rockets**, 5, 3, pp. 270-275.

[40] White, J. L. (1968) “Finite Elements in linear Viscoelasticity”, Proceedings of the second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, pp. 489-516, Dayton, OH, USA.

[41] Zienkiewicz, O. C., Watson, M. and King, I. P. (1968) “A numerical method of Viscoelastic stress Analysis”, **International Journal of Mechanical Sciences**, 10, 10, pp. 807-827.

[42] Greenbaun, G. A. and Rubinstein, M. F. (1968) “Creep analysis of axisymmetric bodies using Finite Elements”, **Nuclear Engineering and Design**, 7, 4, pp. 379-397.

[43] Webber, J. P. H. (1969) “Stress analysis in Viscoelastic bodies using Finite Elements and a correspondence rule with Elasticity”, **Journal of Strain Analysis**, 4, 3, pp. 236-243.

[44] Lynch, F. S. (1969) “A Finite Element Method of Viscoelastic stress analysis with application to Rolling contact problems”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1, 4, pp. 379-394.

[45] Cyr, N. A. and Teter, R. D. (1973) “Finite Element Elastic-Plastic-Creep analysis of two dimensional continuum with temperature dependent material properties”, **Computers and Structures**, 3, 4, pp. 849-863.

[46] Kim, H. O. and Kyhlemeyer, R. L. (1977) “A Finite Element formulation for Creep analysis”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 11, 12, pp. 1865-1877.

[47] Krishnaswamy, P., Tuttle, M. E., Emery, A. F. and Ahmad, J. (1990) "Finite Element modeling of crack tip behavior in Viscoelastic materials. Part I: Linear Behavior", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 30, 2, pp. 371-387.

[48] Krishnaswamy, P., Tuttle, M. E., Emery, A. F. and Ahmad, J. (1992) "Finite Element modeling of the time-dependent behavior of nonlinear ductile polymers", **Polymer Engineering and Science**, 32, 16, pp. 1086-1096.

[49] Batara, R. C., Levinson, M. and Betz, E. (1976) "Rubber covered Rolls-The Thermoviscoelastic problem. A Finite Element Solution", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 10, 4, pp. 767-785.

[50] Batara, R. C. (1977) "Cold sheet rolling, the Thermoviscoelastic problem, a Numerical Solution", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 11, 4, pp. 671-682.

[51] Purushothaman, N., Moore, I. D. and Heaton, B. S. (1988) "Finite Element analysis of Viscoelastic solids responding to periodic disturbances", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 26, 7, pp. 1471-1483.

[52] Srinatha, H. R. and Lewis, R. W. (1981) "A Finite Element Method for Thermoviscoelastic analysis of plane problems", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 25, 1, pp. 21-33.

[53] Srinatha, H. R. and Lewis, R. W. (1982) "A Finite Element Formulation of uncopled Thermoviscoelastic response of plane problems for all admissible values of Poisson's ratio", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 18, 5, pp. 765-774.

[54] Ghazlan, G., Caperaa, S. and Petit, C. (1995) "An Incremental formulation for the linear analysis of thin viscoelastic structures using generalized variables", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 38, pp. 3315-3333.

[55] Zocher M .A. (1995), A thermoviscoelastic finite element formulation for the analysis of composites, Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, College Station, Texas, USA.

[56] https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_linear_solid_model

[57] Hardy, R. L. (1971) “Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces”, **Journal of Geology and Mining Research**, 76, 8, pp.1905-1915.

[58] Franke, R. (1982) “Scattered data interpolation: test of some methods”, **Mathematics of Computation**, 38,157, pp.181-200.

[59] Kansa, E. J. (1990) “A scattered data approximation scheme with application to computational fluid-dynamics I and II”, **Computers & Mathematics with Applications**, 19, 8-9, pp.147-161.

[60] Wang, J. G. and Liu, G. R. (2002) “A point interpolation meshless method based on radial basis functions”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 54, 11, pp.1623-1648.

[61] Nardini, D. and Brebbia, C. A. (1983) “A new approach to free vibration analysis using boundary elements”, **Applied Mathematical Modelling**, 7, 3, pp. 157–162.

[62] Brebbia, C. A. and Nardini, D. (1983) “Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary elements procedure”, **International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2, 4, pp. 228–233.

[63] Nardini, D. and Brebbia, C. A. (1985). Boundary integral formulation of mass matrices of dynamic analysis, In: **“Topics in Boundary Element Research”**, Brebbia C.A., Springer, Berlin.

[64] Golberg, M. A. and Chen, C. S. (1994) “The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations”, **Boundary Elements Communications**, 5, 2, pp. 57–61.

[65] Agnantiaris, J. P., Polyzos, D. and Beskos, D. E. (1996) “Some studies on dual reciprocity BEM for elastodynamic analysis”, **Computational Mechanics**, 17, pp. 270–277.

[66] Bridges, T. R. and Wrobel, L. C., (1994) “On the calculation of natural frequencies of microstructures using DRBEM”, Proceedings of the Boundary Element Method (BEM) XVI Conference, pp. 529–536.

[67] Golberg, M. A. (1995) “The numerical evaluation of particular solutions in the BEM–a review”, **Boundary Elements Communications**, 6, 3, pp. 99–106.

[68] Chen, C. S. (1995) “The method of fundamental solution for non-linear thermal explosions”, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 11, pp. 675–681.

[69] Karur, S. R. and Ramachandran, P. A. (1995) “Augmented thin plate spline approximation in DRM”, **Boundary Elements Communications**, 6, 2, pp. 55–58.

[70] Mehraeen, S. and Noorzad, A. (2001) “Application of radial basis functions on dual reciprocity BEM for dynamic analysis of pierced shear wall”, **International Series on Advances in Boundary Elements**, 10, pp. 299–308.

[71] Rashed, Y. F. (2002) “Transient dynamic boundary element analysis using Gaussian based mass matrix”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 26, pp. 265–279.

[72] Samaan, M. F. and Rashed, Y. F. (2007) “BEM for transient 2D elastodynamics using multiquadric functions”, **International Journal of Solids and Structures**, 44, pp. 8517–8531.

[73] Samaan, M. F. and Rashed, Y. F. (2009) “Free vibration multiquadric boundary elements applied to plane elasticity”, **Applied Mathematical Modelling**, 33, pp. 2421–2432.

[74] Rashed, Y. F. (2008) “Free Vibration of Structures with Trigonometric SIN(R) Function in the Dual Reciprocity Boundary Element Analysis”, **Advances in Structural Engineering**, 11, 4, pp. 397–409.

[75] Hamzeh Javaran, S., Khaji, N. and Moharrami, H. (2011) “A dual reciprocity BEM approach using new Fourier radial basis functions applied to 2D elastodynamic transient analysis”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 35, pp. 85-95.

[76] Khaji, N. and Hamzei Javaran, S. (2013) “Complex Fourier Shape functions for analysis of two-dimensional potential problems using boundary element method”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 37, pp. 260-272.

[77] Hamzehei Javaran, S. and Khaji, N. (2014) “Dynamic analysis of plane elasticity with new complex Fourier radial basis functions in the dual reciprocity boundary element method”, **Applied Mathematical Modelling**, 38, pp. 3641–3651.

[78] Hamzeh Javaran, S., Khaji, N. and Noorzad, A. (2011) “First kind Bessel function (J-Bessel) as radial basis function for plane dynamic analysis using dual reciprocity boundary element method”, **Acta Mechanica**, 218, pp. 247–258.

[79] Wendland, H. (1995) “Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree”, **Advances in Computational Mathematics**, 4, pp. 389–396.

[80] Chen, C. S. and Brebbia, C. A. (1999) “Power H. Dual reciprocity method using compactly supported radial basis functions”, **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 15, pp. 137–150.

[81] Golberg, M. A., Chen, C. S. and Ganesh, M. (2000) “Particular solutions of 3D Helmholtz-type equations using compactly supported radial basis functions”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 24, pp. 539–547.

[82] Rashed, Y. F. (2002) “BEM for dynamic analysis using compact supported radial basis functions”, **Computer and Structures**, 80, pp. 1351–1367.

[83] Samaan, M. F., Rashed, Y. F. and Ahmed, M. A. (2007) “The dual reciprocity method applied to free vibrations of 2D structures using compact supported radial basis functions”, **Computational Mechanics**, 41, 1, pp. 85–106.

[84] Farcas, A., Elliott, L., Ingham, D. B. and Lesnic, D. (2003) “The dual reciprocity boundary element method for solving Cauchy problems associated to the Poisson equation”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 27, pp. 955–962.

[85] Agnantiaris, J. P., Polyzos, D. and Beskos, D. E. (2001) “Free vibration analysis of nonaxisymmetric and axisymmetric structures by the dual reciprocity BEM”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 25, pp. 713–723.

[86] Hamzehei Javaran, S. and Khaji, N. (2012), “Inverse multiquadric (IMQ) function as radial basis function for plane dynamic analysis using dual reciprocity boundary element method” 15th World Conference on Earthquake Engineering, Lisbon, Portugal.

[87] Hamzehei Javaran, S. and Shojaee, S. (2017) “The solution of elasto static and dynamic problems using the boundary element method based on spherical Hankel

element framework", **International Journal for Numerical methods in engineering**, 112, 13, pp. 2067-2086.

[88] Farmani, S., Ghaeini-Hessaroeyeh, M. and Hamzehei Javaran S. (2017) "The improvement of numerical modeling in the solution of incompressible viscous flow problems using Finite Element Method based on spherical Hankel shape functions", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 87, 2, pp. 70-89.

[89] Bahrampour, M., Hamzehei-Javaran, S., and Shojaee, S. (2018). "New Insight into Viscoelastic Finite Element Modeling of Time- Dependent Material Creep Problems Using Spherical Hankel Element Framework", **International Journal of Applied Mechanics**, *in press*. doi:10.1142/S1758825118500850.

[90] Fornberg, B., Larsson, E. and Wright, G. (2006) "A new class of oscillatory radial basis functions", **Computers and Mathematics with Applications**, 51, pp. 1209–1222.

[91] Lu, Y., Belytschko, T. and Gu, L. (1994) "A new implementation of the element-free Galerkin method", **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 113, pp. 397– 414.

[92] Zhu, T. and Atluri, S. N. (1998) "A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method", **Computational Mechanics**, 21, pp. 211–222.

[93] Wagner, G. J. and Liu, W. K. (2000) "Application of essential boundary conditions in mesh-free methods: a corrected collocation method", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 47, 8, pp. 1367–1379.

[94] Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. F. (1995) "Reproducing kernel particle methods", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, 20, pp. 1081–1106.

[95] Breitkopf, P., Rassineux, A., Touzot, G. and Villon, P. (2000) "Explicit form and efficient computation of MLS shape functions and their derivatives", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 48, 3, pp. 451– 466.

[96] Danielson, K. T., Hao, S., Liu, W. K., Aziz Uras, R. and Li, S. (2000) "Parallel computation of meshless methods for explicit dynamic analysis" **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 47, 7, pp. 1323–1341.

[97] Powell, M. J. D. (1992) “The theory of radial basis function approximation in 1990” , In Advances in Numerical Analysis, Light FW (ed.), Oxford: Clarendon Press, pp. 105–203.

[98] Liu, G. R. and Gu, Y. T. (2001) “A point interpolation method for two-dimensional solids”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 50, pp. 937-951.

[99] Hardy, R. L. (1990) “Theory and applications of the multiquadrics Biharmonic method (20 years of discovery 1968–1988)”, **Computers and Mathematics with Applications**, 19, pp. 163–208.

[100] Coleman, C. J. (1996) “On the use of radial basis functions in the solution of elliptic boundary value problems”, **Computational Mechanics**, 17, pp. 418–422.

[۱۰۱] حمزه جواران، ص. (۱۳۹۲)، پیشنهاد توابع پایه مختلط فوریه در روش المان‌های مرزی، رساله دوره دکتری مهندسی عمران-سازه، دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

[102] Logan, D. L. (2012) “**A first course in the Finite Element Method**”, Cengage Learning Engineering, 5th edition, Connecticut, USA.

[103] Simulia, ABAQUS CAE Software (2014), Theories Manual, ABAQUS Inc.

[104] Barlow, J. and Davis, G. A. O. (1986) “Selected FE benchmarks in structural and thermal analysis”, Test No. LE1, NAFEMS Report FEBSTA.

[105] Akoz, A. Y., Kadioglu, F., and Tekin, G. (2015) “Quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic plates”, **Mechanics of Time-Dependent Materials**, 19, pp. 483-503.

[106] Kadioglu, F. and Tekin, G. (2017) “Analysis of plates under point load using Zener material model”, **International Journal of Computer Electrical Engineering**, 9, pp. 484-491.

[107] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. (**1959**) “**Theory of Plates and Shells**”, McGraw-Hill, 2nd edition, New York, USA.

[108] Kansara, K., (2004) “Development of membrane, plate and flat shell elements in Java”, M.Sc. Thesis, Virginia Polytechnic Institute & State University, Blacksburg, Virginia, USA.

[109] Batoz, J. L., Bathe, K. J. and Ho, L. W. (1980) “A study of three-node triangular plate bending elements”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 15, pp. 1771-1812.

[110] Hamzehei-Javaran, S. (2018) “Approximation of the state variables of Navier’s differential equation in transient dynamic problems using finite element method based on complex Fourier shape functions”, **Asian Journal of Civil Engineering**, 19, pp. 431-450.

[111] Sorvari, J. and Hamalainen, J. (2010) “Time Integration in linear viscoelasticity- a comparative study”, **Mechanics of Time-Dependent Materials**, 14, pp. 307-328.

[112] Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. (**1998**) “**Computational Inelasticity**”, Springer, New York, USA.

[113] Feng, W.W. (1992) “A recurrence formula for viscoelastic constitutive equations”, **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 27, pp. 675-678.

[114] Zhao, Z. (**1991**) “**Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization using the Boundary Element Method**”, Springer- Verlag Berlin, Heildelberg, Germany.

[115] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. (**1984**) “**Boundary Element Technique: Theory and Applications in Engineering**”, Springer-Verlag Berlin, Heildelberg, Germany.

[116] Kupradze, V. D. (**1965**) “**Potential Methods in the Theory of Elasticity**”, *Oldbourne Press*, UK.

[117] Rizzo, F. J. (1967) “An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics”, **Applied Mathematics**, 25, pp. 83- 95.

[118] Jaswon, M. A., Maiti, M. and Symm, G. T. (1967) “Numerical Biharmonic Analysis and some Applications”, **International Journal of Solids and Structures**, 3, pp. 309-332.

[119] Cruse, T. A. (1969) “Numerical Solutions in Three Dimensional Elastostatics”, **International Journa of Solids and Structures**, 5, pp. 1259- 1274.

[120] Cruse, T. A. and Rizzo, F. J. (1968) “A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elasto- Dynamic Problem”, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 22.

[121] Lachat, J. C. (1975) A Further Development of the Boundary Integral techniques for Elastostatics, Ph.D. Thesis, University of Southampton, UK.

[122] Massonnet, C. E. (1965) “Numerical Use of Integral Procedures, Stress Analysis”, (eds. O. C. Zienkiewicz, G. S. Holister), *Wiley*, UK.

[123] Oliveira, E. R. A. (1968) “Plane Stress Analysis by a General Integral Method”, **Journal of the Engineering Mechanics Division**, *ASCE*, pp. 79- 85.

[124] Beniumea, R. and Sikarskie, D. L. (1972) “On the Solution of Plane Orthotropic Elasticity Problems by an Integral Method”, **Journal of Applied Mechanics**, 39, pp. 801-808.

[125] Crouch, S. L. (1976) “Solution of Plane Elasticity Problems by the Displacement Discontinuity Method”, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 10, pp. 301- 343.

[126] Banerjee, P. K. (1976) “Integral Equation Methods for Analysis of Piece-Wise Non-Homogeneous Three-Dimensional Elastic Solids of Arbitrary Shape”, **International Journal of Mechanical Sciences**, 18, pp. 293- 303.

[127] Telles, J. C. and Brebbia, C. A. (1981) “Boundary Element Solutions for Half-Plane Problems”, **International Journal of Solids and Structures**, 17, pp. 1149- 1158.

[128] Snyder, M. D. and Cruse, T. A. (1975) “Boundary Integral Equation Analysis of Cracked Anisotropic Plates”, **International Journal of Fracture**, 11, pp. 315- 328.

[129] Dominguez, J. (**1993**), **Boundary Element in Dynamics, London: Computational Mechanics Publications**, Elsevier Applied Science, Southampton, UK.

[130] Brebbia, C. A. and Dominguez, J. (**1992**), **Boundary Elements: An Introductory Course**, Second Edition, WIT/ Computational Mechanics Publications, Southampton, UK.

Abstract

This dissertation deals with the numerical analysis of viscoelastic and elastic structures. In particular, Finite Element Method (FEM) has been utilized in the analysis of viscoelastic structures, and the analysis of elastic structures have been performed by Boundary Element Method (BEM). The main motivation behind this research has been to enable accurate analysis of structures subjected to mechanical loading with the reduction in computational cost compared with conventional methods. In order to achieve this goal, it is proposed that the novel elements have been substituted for classical elements in the analysis. In particular, complex Fourier elements have been employed in the FE analysis of viscoelastic structures. Moreover, Extended Multiquadric (XMQ) elements and Gaussian-Fourier elements have been introduced and utilized in the FE analysis of 2D viscoelastic problems. In addition, FE analysis of thin viscoelastic plates has been performed by proposing new plate elements which are called Discrete Kirchhoff- Fourier Triangular (DKFT) plate elements. And finally, XMQ elements have been used in the BE analysis of Elastostatics problmes. Point interpolation method based on radial basis functions (RPIM) has been employed in order to obtain shape functions in these new elements.

Keywords: Numerical analysis, Finite Element Method, Boundary Element Method, Viscoelastic structures, Elastostatic problems, Radial_Polynomial Point Interpolation Method.

Faculty of Civil Engineering

Ph.D. Thesis in Structural Engineering

Numerical Analysis of Viscoelastic and Elastostatic problems incorporating novel proposed interpolation functions using FEM and BEM

By:

Seyed Ali Ghazi Mirsaeed

Supervisor:

Dr. Vahidreza Kalatjari

February 2019