

اللهم صل على محمد  
وآله الطيبين الطاهرين  
الذين هم الصالحين  
الجميعين



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی عمران

رساله دکتری مهندسی آب و سازه های هیدرولیکی

# مدل سازی معادلات ناویر استوکس در جریان غیردائمی با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین

نگارنده: محمد اکبری ماکویی

استاد راهنما

دکتر رامین امینی

شهریور ۱۳۹۷

شماره: ۹۷/۲۴۹  
تاریخ: ۹۷/۶/۳۱  
ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)  
(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای محمد اکبری ماکویی دانشجوی دکتری رشته مهندسی عمران - سازه های هیدرولیکی به شماره دانشجویی ۹۱۲۴۹۳۵ ورودی مهر ماه سال ۹۱ در تاریخ ۹۷/۶/۱۷ از رساله نظری / عملی خود با عنوان: مدل سازی معادلات ناویر استوکس در جریان غیردائمی با استفاده از روش بدون شبکه محلی بتروف-گلرکین دفاع و با اخذ نمره ..... به درجه : ..... نائل گردید.

<input type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	<input type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
	دکتر رامین امینی	استاد/ اساتید راهنما	دانشیار	
	دکتر	مشاور / مشاورین		
	دکتر پوریا اکبر زاده	استاد مدعو داخلی / خارجی	دانشیار	
	دکتر امیر عباس عابدینی	استاد مدعو داخلی / خارجی	استاد	
	دکتر عبدالرضا ظهیری	استاد مدعو داخلی / خارجی		
	دکتر مهدی عجمی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده		

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای محمد اکبری ماکویی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء مهر دانشکده:



شماره: ۵۷/۳۴۹  
 تاریخ: ۱۳۹۷/۰۶/۳۱  
 ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱-۲: ارزشیابی نهایی رساله دکتری (ویژه ورودی های مهر ۹۱ به بعد)  
 این فرم بایستی بر اساس فرم شماره ۱۰ تکمیل شود

نام و نام خانوادگی دانشجو: محمد اکبری ماکویی  
 رشته و گرایش تحصیلی: مهندسی عمران - سازه های هیدرولیکی  
 تاریخ دفاع: ۹۷/۶/۱۷  
 شماره دانشجویی: ۹۱۲۴۹۳۵  
 عنوان رساله:

مدل سازی معادلات ناویر استوکس در جریان غیردائمی با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین

ردیف	نمره از ۲۰ (فرم ۱)	پایان نامه	نمره	امضاء
استاد راهنمای اول: رامین امینی	۱۹	با مشاور نمره از ۵ بدون مشاور نمره از ۶/۲۵	۵/۹۴	
استاد راهنمای دوم: استاد مشاور:				
داوران ۱- پوریا اکبر زاده ۲- امیر عباس عابدینی ۳- عبدالرضا ظهیری	۱۹-۱ ۱۸-۲ ۱۸-۳	با مشاور نمره از ۴ برای هرداور بدون مشاور نمره از ۶/۲۵ برای هرداور	۴-۱ ۴-۲ ۴-۳	
نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه مهدی عجمی		نمره ۱: - گزارش های پیشرفت تحصیلی دانشجو (تا ۰۷/۵) - کیفیت ارائه، نحوه پاسخگویی به سئوالات، رعایت زمان (۰۷/۵)	۱	
نمره کل:	عدد: ۱۹-۴ حروف: نوزده و سه صدم			

گزارش های پیشرفت دانشجو (بر اساس فرم گزارش پیشرفت تحصیلی دانشجویان دوره دکتری) بایستی مطابق تبصره ۳ فصل ششم این نامه آموزشی دوره دکتری در دانشکده ارائه و به تایید شورای تحصیلات تکمیلی دانشکده رسیده باشد و تاییدیه های مربوطه در زمان دفاع دانشجو در اختیار نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه در جلسه دفاع از رساله دکتری قرار گیرد.

نام و نام خانوادگی رئیس (یا معاون آموزشی و پژوهشی) دانشکده:

تاریخ و امضاء مهر دانشکده:  
 وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
 دانشکده مهندسی عمران

## تقدیم اثر

تقدیم به مادر و پدرم

که از نگاهشان صلابت

از رفتارشان محبت

و از صبرشان ایستادگی را آموختم

آن دو فرشته ای که از خواسته هایشان گذشتند، سختی ها را به جان خریدند  
و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در  
آن ایستاده ام برسم.

تقدیم به مهربان فرشته زندگی:

که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت  
رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگی، مدیون حضور سبز اوست.

تقدیم به همسر عزیزم.

## تشکر و قدردانی

پروردگارا:

نه می توانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دستهای پینه بسته شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم . پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

شکر و سپاس خدا را که بزرگترین امید و یاور در لحظه لحظه زندگیست. نمی توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم و سپاس خود را در وصف استادان خویش آشکار نمایم، که هر چه گویم و سراپیم ، کم گفته ام.

## تعهد نامه

اینجانب محمد اکبری ماکویی دانشجوی دوره دکتری رشته مهندسی آب و سازه های هیدرولیکی دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه با عنوان "مدل سازی معادلات ناویر استوکس در جریان غیردائمی با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین" تحت راهنمایی دکتر رامین امینی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافت های آن ها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

### تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود. استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

شناخت رفتار سیالات و مدل‌سازی جریان سیال یکی از پرکاربردترین دامنه‌ها در علم مهندسی هیدرولیک می‌باشد. به سبب پیچیدگی و عدم دستیابی به حل تحلیلی معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر جریان سیال، استفاده از روش‌های عددی ضروری می‌باشد. یکی از روش‌های عددی نوین در تحلیل جریان شاره‌ها، روش بدون شبکه است. در این تحقیق، برای مدل‌سازی معادلات جریان سیال از روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین (MLPG) استفاده گردیده است. به این منظور برنامه‌هایی در محیط نرم‌افزار MATLAB نوشته شده است. در این راستا با استخراج انواع معادلات جریان سیال شامل جریان درون کانال، حرکت آب در خاک در حالت دائمی و غیردائمی، مطالعه‌ی شکست سد و نیز تحلیل دو بعدی و سه بعدی کامل معادلات ناویر استوکس سعی شده است با استفاده از مبانی ریاضی روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین، معادلات جریان رابطه‌سازی شود. در این روش، رابطه‌سازی معادله‌های بدون شبکه در حالت دو بعدی و سه بعدی در دستگاه مختصات قطبی انجام گردیده است. همچنین، انواع تابع پایه برای تقریب تابع میدان و روش انتگرال‌گیری محلی برای محاسبه تابع‌های اولیه به کار رفته است. به منظور صحت‌سنجی، از دیگر روش‌های عددی و یا در صورت وجود، از روش تحلیلی بهره‌جسته شده است. نتایج نشان می‌دهد روش باقی‌مانده وزنی به عنوان یک روش دقیق و به‌روز برای دستیابی به پاسخ‌های تقریبی معادله‌های دیفرانسیل در روش‌های بدون شبکه‌بندی مورد توجه قرار می‌گیرد. مقایسه‌ی نتیجه‌های حاصل از تحلیل به روش بدون شبکه با روش‌های تحلیلی و دیگر روش‌های عددی نشان می‌دهد که روش MLPG از دقت بالایی برخوردار است. کاربرد روش بدون شبکه در تحلیل مسائل دائمی و غیردائمی حاکی از آن است که این روش دارای قابلیت و کارایی بالایی در تحلیل مسائل مختلف هیدرولیکی و نیز عدم نیاز به هرگونه شبکه‌ی پیش‌زمینه و تطابق مناسب با شرایط مرزی می‌باشد.

**کلمات کلیدی:** روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین، مدل‌سازی جریان سیال، تابع پایه شعاعی، حرکت آب در خاک، جریان در کانال، شکست سد، جریان غیردائمی



## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- ۱- امینی، ر.، اکبری ماکویی، م. و موسوی نژاد، س.م.، ۱۳۹۷، مدل‌سازی جریان سیال درون کانال با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرگین بر پایه تابع شعاعی، مجله مهندسی مکانیک مدرس.
- ۲- امینی، ر.، اکبری ماکویی، م. و موسوی نژاد، س.م.، ۱۳۹۷، مدل‌سازی جریان سیال با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرگین بر پایه تابع شعاعی، مجله هیدرولیک.
- ۳- امینی، ر. و اکبری ماکویی، م.، ۱۳۹۵، استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروگلرکین برای حل جریان سیال تراکم ناپذیر، پانزدهمین کنفرانس ملی هیدرولیک ایران، قزوین، انجمن هیدرولیک ایران، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره).
- ۴- امینی، ر. و اکبری ماکویی، م.، ۱۳۹۵، حل معادله‌ی پواسون با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو گلرکین، پانزدهمین کنفرانس ملی هیدرولیک ایران، قزوین، انجمن هیدرولیک ایران، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره).

# فهرست مطالب

۱	فصل ۱: مقدمه
۲	۱-۱ پیشگفتار.....
۳	۲-۱ مقایسه کلی روش بدون شبکه و روش اجزای محدود.....
۶	۱-۲-۱ معرفی دامنه و مرز سازه.....
۶	۲-۲-۱ ساخت تابع شکل.....
۷	۳-۲-۱ تشکیل معادله‌ها حاکم بر رفتار سازه.....
۷	۴-۲-۱ حل معادله‌ها.....
۷	۳-۱ ضرورت و مقایسه.....
۸	۴-۱ اهداف.....
۸	۵-۱ فرضیات.....
۹	۶-۱ مزیت‌ها.....
۹	۷-۱ نوآوری.....
۱۰	۸-۱ سامان‌دهی رساله.....
۱۱	فصل ۲: پیشینه‌ی تحقیقات
۱۲	۱-۲ پیشگفتار.....
۱۲	۲-۲ تاریخچه.....
۱۵	۳-۲ پژوهش ساتاپرام و لودسانگ.....
۱۷	۴-۲ پژوهش کوتلاری و همکاران.....
۱۸	۵-۲ پژوهش شبیری و افشار.....

فصل ۳ : مفاهیم پایه در روش بدون شبکه

۲۱

۲۲ ..... ۱-۳ پیشگفتار

۲۲ ..... ۲-۳ روش باقی مانده وزنی

۲۴ ..... ۳-۳ تابع شکل

۲۵ ..... ۱-۳-۳ روش کمترین مربعات متحرک

۳۰ ..... ۲-۳-۳ روش بیان انتگرالی

۳۰ ..... ۳-۳-۳ روش درون یابی نقاط

۳۴ ..... ۴-۳ روش انتگرال گیری

۳۴ ..... ۱-۴-۳ روش انتگرال گیری کلی

۳۵ ..... ۲-۴-۳ روش انتگرال گیری محلی

فصل ۴ : مدل سازی مسائل هیدرولیکی به کمک روش بدون شبکه محلی و بررسی نتایج

۳۷

۳۸ ..... ۱-۴ پیشگفتار

۳۸ ..... ۲-۴ صحت سنجی

۴۱ ..... ۳-۴ مدل سازی جریان سیال درون کانال

۴۲ ..... ۱-۳-۴ رابطه سازی جریان سیال درون کانال

۴۴ ..... ۲-۳-۴ نتایج تحلیل جریان سیال درون کانال

۵۱ ..... ۴-۴ مدل سازی معادله برگرز

۵۲ ..... ۱-۴-۴ رابطه سازی معادله برگرز

۵۵ ..... ۲-۴-۴ نتایج تحلیل معادله برگرز

۵۷ ..... ۵-۴ مدل سازی جریان آب در خاک در حالت دائمی

۵۸ ..... ۱-۵-۴ رابطه سازی جریان آب در خاک در حالت دائمی

۵۹ ..... ۲-۵-۴ نتایج تحلیل جریان آب در خاک در حالت دائمی

۶-۴	مدل سازی جریان آب در خاک در حالت غیر دائمی	۶۱
۱-۶-۴	رابطه سازی جریان آب در خاک در حالت غیر دائمی	۶۲
۲-۶-۴	نتایج تحلیل جریان آب در خاک در حالت غیر دائمی	۶۳
۷-۴	مدل سازی جریان در شکست سد	۷۰
۱-۷-۴	رابطه سازی جریان در شکست سد	۷۱
۲-۷-۴	نتایج تحلیل جریان در شکست سد	۷۶
۸-۴	مدل سازی معادلات دو بعدی ناویر استوکس	۷۷
۱-۸-۴	رابطه سازی معادلات دو بعدی ناویر استوکس	۷۸
۲-۸-۴	نتایج تحلیل معادلات دو بعدی ناویر استوکس	۸۲
۹-۴	مدل سازی معادلات غیر دائمی ناویر استوکس	۹۱
۱-۹-۴	رابطه سازی معادلات غیر دائمی ناویر استوکس	۹۲
۲-۹-۴	نتایج تحلیل معادلات غیر دائمی ناویر استوکس	۹۵
۱۰-۴	مدل سازی معادلات سه بعدی ناویر استوکس	۱۱۷
۱-۱۰-۴	رابطه سازی معادلات سه بعدی ناویر استوکس	۱۲۰
۲-۱۰-۴	نتایج تحلیل معادلات سه بعدی ناویر استوکس	۱۲۴
۱۳۹	<b>فصل ۵: نتیجه گیری و پیشنهادها</b>	
۱-۵	پیشگفتار	۱۴۰
۲-۵	جمع بندی و نتیجه گیری	۱۴۱
۳-۵	پیشنهادها برای ادامه پژوهش	۱۴۳
۱۴۵	پیوست	
۱۵۱	مراجع	

## فهرست جداول

جدول ۱-۳	تابعهای پایه شعاعی.....	۳۳
جدول ۲-۳	تابعهای وزن.....	۳۶
جدول ۱-۴	مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG و خطای آن.....	۴۰
جدول ۲-۴	سرعت‌های به دست آمده از انواع تابع شکل شعاعی و خطای آن.....	۴۴
جدول ۳-۴	سرعت‌های به دست آمده از انواع تابع شکل شعاعی و خطای آن.....	۴۶
جدول ۴-۴	تأثیر تعداد گره‌ها در روش MLPG و خطای آن.....	۴۹
جدول ۵-۴	مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG و خطای آن.....	۵۶
جدول ۶-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه.....	۵۹
جدول ۷-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در روش تفاضل محدود.....	۶۱
جدول ۸-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان $t=1000s$ .....	۶۳
جدول ۹-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان $t=2000s$ .....	۶۴
جدول ۱۰-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان $t=5000s$ .....	۶۴
جدول ۱۱-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان $t=10000s$ .....	۶۴
جدول ۱۲-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان $t=20000s$ .....	۶۵
جدول ۱۳-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان $t=50000s$ .....	۶۵
جدول ۱۴-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان $t=100000s$ .....	۶۵
جدول ۱۵-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان $t=200000s$ .....	۶۶
جدول ۱۶-۴	مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان $t=500000s$ .....	۶۶
جدول ۱۷-۴	فشار حاصل از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین.....	۸۳
جدول ۱۸-۴	فشار حاصل از روش تفاضل محدود.....	۸۵
جدول ۱۹-۴	خطای سرعت‌ها و فشار در روش MLPG در مثال ۱.....	۱۰۶
جدول ۲۰-۴	خطای سرعت‌ها و فشار در روش MLPG در مثال ۲.....	۱۱۷

## فهرست اشکال

شکل ۱-۱	نحوه‌ی معرفی دامنه و مرز سازه در روش اجزای محدود و روش بدون شبکه [۱].....	۶
شکل ۲-۱	فرآیند حل مسأله به روش بدون شبکه و روش اجزای محدود.....	۷
شکل ۱-۲	کانتور فشار و میدان سرعت در مثال توانی در حالت منظم در $t=0.1s$ .....	۱۶
شکل ۲-۲	کانتور فشار و میدان سرعت در مثال مثلثاتی در حالت منظم در $t=0.1s$ .....	۱۷
شکل ۳-۲	مقادیر مختلف سرعت در زمان‌های مختلف به روش تفاضل محدود [۴۸].....	۱۸
شکل ۴-۲	موقعیت ذرات در پژوهش شبیری و افشار [۴۹].....	۱۹
شکل ۱-۳	دامنه‌های تحت پوشش در روش بدون شبکه برای ساخت تابع‌های شکل.....	۲۵
شکل ۲-۳	نمایش تابع‌های وزنی $Wx - xi$ .....	۲۸
شکل ۳-۳	تابع تقریبی $uh(x)$ و مقدارهای گره‌ای $ui$ در روش کمترین مربعات متحرک [۵۳].....	۲۹
شکل ۴-۳	نمونه‌ای از شبکه‌های پس زمینه در روش انتگرال گیری کلی.....	۳۴
شکل ۵-۳	نمونه‌ای از زیر دامنه در روش انتگرال گیری محلی.....	۳۶
شکل ۱-۴	نمونه‌ای از زیر دامنه در روش انتگرال گیری محلی.....	۳۹
شکل ۲-۴	نمونه‌ای از زیر دامنه در روش انتگرال گیری محلی.....	۴۰
شکل ۳-۴	جریان سیال داخل کانال.....	۴۱
شکل ۴-۴	ابعاد مسأله و شرایط مرزی.....	۴۱
شکل ۵-۴	کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی.....	۴۵
شکل ۶-۴	کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی گوسی.....	۴۷
شکل ۷-۴	کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی نواری.....	۴۸
شکل ۸-۴	کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی (9 گرهی).....	۵۰
شکل ۹-۴	کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی (16 گرهی).....	۵۱
شکل ۱۰-۴	مقادیر مختلف سرعت در زمان‌های مختلف به روش MLPG.....	۵۷
شکل ۱۱-۴	شماتیک مساله نشت آب از زیر تیغه آب بند.....	۵۸
شکل ۱۲-۴	شبکه بندی تفاضل محدود برای حل معادله لاپلاس.....	۶۰
شکل ۱۳-۴	خطوط هم‌پتانسیل به روش بدون شبکه از زیر آب بند.....	۶۱
شکل ۱۴-۴	خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان $t=1000s$ به روش MLPG.....	۶۷
شکل ۱۵-۴	خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان $t=2000s$ به روش MLPG.....	۶۷
شکل ۱۶-۴	خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان $t=5000s$ به روش MLPG.....	۶۸
شکل ۱۷-۴	خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان $t=10000s$ به روش MLPG.....	۶۸
شکل ۱۸-۴	خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان $t=20000s$ به روش MLPG.....	۶۸
شکل ۱۹-۴	خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان $t=50000s$ به روش MLPG.....	۶۹
شکل ۲۰-۴	خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان $t=100000s$ به روش MLPG.....	۶۹
شکل ۲۱-۴	خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان $t=200000s$ به روش MLPG.....	۶۹
شکل ۲۲-۴	خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان $t=500000s$ به روش MLPG.....	۷۰
شکل ۲۳-۴	هندسه مساله شکست سد.....	۷۰

شکل ۲۴-۴	مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد بین روش‌های حداقل مربعات و بدون شبکه در $t=0.1s$	۷۶
شکل ۲۵-۴	مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد بین روش‌های حداقل مربعات و بدون شبکه در $t=0.15s$	۷۷
شکل ۲۶-۴	ابعاد مسأله و شرایط مرزی	۷۸
شکل ۲۷-۴	شبکه بندی تفاضل محدود برای حل معادله لاپلاس	۸۴
شکل ۲۸-۴	کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۱۰	۸۶
شکل ۲۹-۴	کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۲۰	۸۶
شکل ۳۰-۴	کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۵۰	۸۷
شکل ۳۱-۴	کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۱۰۰	۸۷
شکل ۳۲-۴	کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۲۰۰	۸۷
شکل ۳۳-۴	کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۵۰۰	۸۸
شکل ۳۴-۴	کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۹۰۰	۸۸
شکل ۳۵-۴	میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۱۰	۸۹
شکل ۳۶-۴	میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۲۰	۸۹
شکل ۳۷-۴	میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۵۰	۸۹
شکل ۳۸-۴	میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۱۰۰	۹۰
شکل ۳۹-۴	میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۲۰۰	۹۰
شکل ۴۰-۴	میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۵۰۰	۹۰
شکل ۴۱-۴	میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۹۰۰	۹۱
شکل ۴۲-۴	هندسه مساله غیر دائمی ناویر استوکس	۹۱
شکل ۴۳-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.1s$	۹۶
شکل ۴۴-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.1s$	۹۶
شکل ۴۵-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.2s$	۹۷
شکل ۴۶-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.2s$	۹۷
شکل ۴۷-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.3s$	۹۸
شکل ۴۸-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.3s$	۹۸
شکل ۴۹-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.4s$	۹۹
شکل ۵۰-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.4s$	۹۹
شکل ۵۱-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.5s$	۱۰۰
شکل ۵۲-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.5s$	۱۰۰
شکل ۵۳-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.6s$	۱۰۱
شکل ۵۴-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.6s$	۱۰۱
شکل ۵۵-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.7s$	۱۰۲
شکل ۵۶-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.7s$	۱۰۲
شکل ۵۷-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.8s$	۱۰۳
شکل ۵۸-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.8s$	۱۰۳
شکل ۵۹-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.9s$	۱۰۴
شکل ۶۰-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.9s$	۱۰۴
شکل ۶۱-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=1s$	۱۰۵

شکل ۶۲-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=1s$	۱۰۵
شکل ۶۳-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.1s$	۱۰۷
شکل ۶۴-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.1s$	۱۰۷
شکل ۶۵-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.2s$	۱۰۸
شکل ۶۶-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.2s$	۱۰۸
شکل ۶۷-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.3s$	۱۰۹
شکل ۶۸-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.3s$	۱۰۹
شکل ۶۹-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.4s$	۱۱۰
شکل ۷۰-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.4s$	۱۱۰
شکل ۷۱-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.5s$	۱۱۱
شکل ۷۲-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.5s$	۱۱۲
شکل ۷۳-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.6s$	۱۱۲
شکل ۷۴-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.6s$	۱۱۲
شکل ۷۵-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.7s$	۱۱۳
شکل ۷۶-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.7s$	۱۱۳
شکل ۷۷-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.8s$	۱۱۴
شکل ۷۸-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.8s$	۱۱۴
شکل ۷۹-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=0.9s$	۱۱۵
شکل ۸۰-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=0.9s$	۱۱۵
شکل ۸۱-۴	کانتور فشار به روش MLPG در زمان $t=1s$	۱۱۶
شکل ۸۲-۴	میدان سرعت به روش MLPG در زمان $t=1s$	۱۱۶
شکل ۸۳-۴	شماتیک مساله سه بعدی	۱۱۸
شکل ۸۴-۴	پلان تانک تصفیه تماسی با هشت کامپارتمنت	۱۱۸
شکل ۸۵-۴	شماتیک سه بعدی تانک تصفیه تماسی با هشت کامپارتمنت [۷۲]	۱۱۹
شکل ۸۶-۴	نمایی از تانک تصفیه تماسی Embsay [۷۲]	۱۱۹
شکل ۸۷-۴	کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۱۰۰	۱۲۵
شکل ۸۸-۴	میدان سرعت در روش بدون شبکه در گام ۱۰۰	۱۲۵
شکل ۸۹-۴	کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۲۰۰	۱۲۶
شکل ۹۰-۴	میدان سرعت در روش MLPG در گام ۲۰۰	۱۲۶
شکل ۹۱-۴	کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۵۰۰	۱۲۷
شکل ۹۲-۴	میدان سرعت در روش بدون شبکه در گام ۵۰۰	۱۲۷
شکل ۹۳-۴	کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۱۰۰۰	۱۲۸
شکل ۹۴-۴	میدان سرعت در روش بدون شبکه در گام ۱۰۰۰	۱۲۸
شکل ۹۵-۴	کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۱۵۰۰	۱۲۹
شکل ۹۶-۴	میدان سرعت در روش بدون شبکه در گام ۱۵۰۰	۱۲۹
شکل ۹۷-۴	کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۲۰۰۰	۱۳۰
شکل ۹۸-۴	میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در گام ۲۰۰۰	۱۳۰
شکل ۹۹-۴	کانتورهای فشار در صفحه فرضی زیر سطح جریان	۱۳۱



- شکل ۴-۱۰۰ کانتورهای فشار در کف مخزن ..... ۱۳۱
- شکل ۴-۱۰۱ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در صفحه فرضی قائم میان کانال ورودی ..... ۱۳۲
- شکل ۴-۱۰۲ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در صفحه فرضی قائم میان کانال خروجی ..... ۱۳۲
- شکل ۴-۱۰۳ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در صفحه‌ی فرضی زیر جریان ..... ۱۳۳
- شکل ۴-۱۰۴ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در کف مخزن ..... ۱۳۳
- شکل ۴-۱۰۵ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت ورودی ..... ۱۳۴
- شکل ۴-۱۰۶ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در کامپارتمنت ورودی ..... ۱۳۴
- شکل ۴-۱۰۷ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت دوم ..... ۱۳۵
- شکل ۴-۱۰۸ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در کامپارتمنت دوم ..... ۱۳۵
- شکل ۴-۱۰۹ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت هفتم ..... ۱۳۶
- شکل ۴-۱۱۰ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در کامپارتمنت هفتم ..... ۱۳۶
- شکل ۴-۱۱۱ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت خروجی ..... ۱۳۷
- شکل ۴-۱۱۲ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت خروجی ..... ۱۳۷
- شکل ۵-۱ میدان سرعت با تعداد گره  $10 \times 30$  ..... ۱۴۸

## فهرست علائم

D و B	عملگر دیفرانسیلی
$f$ و $g$	تابع نیرویی
$u^h(x)$	تابع میدان تقریبی
$P$	بردار عضوهای چندجمله‌ای
$n$	تعداد عضوهای چندجمله‌ای
$R_\Omega$	باقی‌مانده‌ی مسأله در داخل دامنه
$R_\Gamma$	باقی‌مانده‌ی مسأله بر روی مرزها
$\widehat{W}_i$	تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی برای $R_\Omega$
$\widehat{V}_i$	تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی برای $R_\Gamma$
$k$	تعداد گره‌هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع شده‌اند
$u_i$	تابع میدان در $i$ امین نقطه در داخل دامنه تحت پوش
$\varphi_i(x)$	تابع شکل در $i$ امین نقطه در داخل دامنه تحت پوش
$U_s$	بردار تغییر مکان
$\Phi^T(x)$	بردار تابع شکل
$d_s$	فاصله بین گره‌ها
$B_i(x)$	تابع پایه‌ای تعریف شده در مسأله پیرامون فضای دکارتی $X^T = [x, y, x]$
$a_i(x_Q)$	ضریب تابع پایه‌ای
$R_i(x)$	تابع پایه شعاعی
$P$	فشار ( $\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$ )
$g$	شتاب جاذبه ( $\text{ms}^{-2}$ )
$u$	مؤلفه‌های سرعت در راستای $X$ ( $\text{ms}^{-1}$ )
$v$	مؤلفه‌های سرعت در راستای $Y$ ( $\text{ms}^{-1}$ )

$w$  مؤلفه‌های سرعت در راستای  $Z$  ( $\text{ms}^{-1}$ )

### علائم یونانی

$\alpha$  ضرایب چندجمله‌ای

$\alpha_s$  ضریب بدون بعد برای کنترل اندازه دامنه‌ی تحت پوشش

$\rho$  چگالی ( $\text{kgm}^{-3}$ )

$\nu$  لزجت سینماتیکی ( $\text{m}^2\text{s}^{-1}$ )



# فصل ۱: مقدمه

## ۱-۱ پیشگفتار

در مهندسی عمران از سازه‌های هیدرولیکی جهت مهار، بهره‌برداری و مدیریت منابع آب بهره‌جویی می‌نمایند. با افزایش شمار سازه‌های هیدرولیکی، اهمیت روش‌های تحلیل دقیق این نوع سازه‌ها آشکار می‌گردد. شناخت رفتار سیالات و مدل‌سازی جریان یکی از پرکاربردترین دامنه‌ها در علم مهندسی هیدرولیک می‌باشد. با توجه به پیچیدگی‌های رفتار سیالات، مدل‌سازی عددی اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. از انواع پرکاربرد روش‌های تحلیل عددی مورد استفاده، می‌توان به روش‌های المان محدود، حجم محدود و تفاضل محدود اشاره نمود. روش‌های المان محدود، به دو روش با شبکه و بدون شبکه تقسیم می‌گردد. به‌طور عمده، بررسی‌های صورت گرفته- بخصوص در حوزه مکانیک سیالات- بیشتر با استفاده از روش‌هایی مانند حجم محدود و تفاضل محدود صورت پذیرفته است، اما روش‌های بدون شبکه، با توجه به سابقه‌ی اندک شکل‌گیری، در این زمینه کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

در سیالات نیوتنی، معادلات پیوستگی و بقای اندازه حرکت با نام معادلات ناویر استوکس معرفی می‌شوند. به خاطر پیچیدگی معادلات ناویر استوکس که از نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی می‌باشند - در جریان سیال لزج، به جز در موارد ساده، در باقی موارد حل دقیق وجود ندارد، لذا استفاده از روش‌های عددی ناگزیر به نظر می‌رسد. با توجه به توسعه‌ی روزافزون رایانه‌ها، استفاده از روش‌های عددی برای حل مسأله‌های پیچیده مهندسی به طور گسترده‌ای افزایش یافت. روش‌های تفاوت‌های محدود، اجزای محدود و اجزای مرزی از جمله روش‌های عددی هستند که به‌طور متداول استفاده می‌شوند.

یکی از روش‌های عددی جدیدی که برای تحلیل سازه‌ها پیشنهاد شده است، روش بدون شبکه می‌باشد. در روش بدون شبکه، دامنه و مرزهای مساله با ایجاد گره‌هایی تعریف می‌گردد. برای برقراری ارتباط بین گره‌ها، از تابع شکل استفاده می‌شود. در محاسبه‌ی تابع اولیه، روش انتگرال‌گیری گوس به دو صورت عمومی و محلی به‌کار می‌رود. در انتگرال‌گیری عمومی نیاز به ایجاد شبکه‌بندی در پس زمینه دامنه مساله می‌باشد؛ به این سبب این شیوه یک روش بدون شبکه واقعی محسوب نمی‌گردد.

برای برطرف کردن کاستی‌های ناشی از ایجاد شبکه در پس زمینه، روش‌های مبتنی بر شیوه‌ی انتگرال‌گیری محلی نظیر روش بدون شبکه پتروف-گلرکین (MLPG) پیشنهاد گردیده است. پژوهش‌گران متعددی با بهره‌جویی از این روش، به تحلیل سازه‌ها و شاره‌های مختلف پرداخته‌اند. شمار روزافزون پژوهش‌ها در این زمینه، نشان از توانمندی روش فوق دارد.

در این رساله رابطه سازی معادله‌های بدون شبکه در حالت دو بعدی در دستگاه مختصات قطبی انجام گردیده است. برای این کار، تابع شکل پایه شعاعی از نوع چند ضلعی برای تقریب تابع میدان و روش انتگرال‌گیری محلی برای محاسبه تابع‌های اولیه به کار رفته است. مقایسه‌ی نتیجه‌های حاصل از تحلیل به روش بدون شبکه با روش‌های تحلیلی و اجزای محدود نشان می‌دهد که روش MLPG از دقت مناسبی برخوردار است. کاربرد روش بدون شبکه در تحلیل مسائل هیدرولیکی و به دست آوردن میدان‌های سرعت و کانتورهای فشار، حاکی از آن است که این روش دارای قابلیت و کارایی بالایی می‌باشد.

به منظور بهتر روشن شدن ویژگی‌های عمومی روش بدون شبکه، در این فصل روش فوق با روش اجزای محدود مقایسه می‌گردد.

## ۱-۲ مقایسه کلی روش بدون شبکه و روش اجزای محدود

در دهه ۱۹۵۰، با گسترش روش اجزای محدود پیشرفت شگرفی در زمینه‌ی روش‌های عددی رخ داد. به علت توانایی روش اجزای محدود در حل مساله‌هایی با هندسه پیچیده، رفتارهای خطی و غیرخطی، این شیوه توانست در حوزه مهندسی به صورت گسترده مورد استقبال پژوهشگران قرار گیرد. با استفاده از این شیوه می‌توان شکل‌های پیچیده را با ایجاد شبکه‌ای در دامنه‌ی مساله به جزءهای کوچکی تقسیم نمود. ارتباط بین این جزءها در این روش از طریق نقطه‌های گره‌ای در مساله میسر می‌گردد.

اما علی‌رغم توانایی بسیار خوب این فن، دارای کاستی‌هایی است که سبب شده است از روش‌های بدون شبکه در حل مساله‌های مهندسی استفاده گردد. کاستی‌های روش اجزای محدود به شرح زیر است:

یک- هزینه زیاد در ایجاد شبکه در دامنه مساله

برای استفاده از نرم‌افزارها و کدهای برنامه‌نویسی شده بر پایه‌ی روش اجزای محدود نیاز به ایجاد شبکه در دامنه مساله است. بدین سبب تحلیلگر باید زمان زیادی، برای ایجاد شبکه در مساله صرف نماید. ولی مطلوب آن است که بتوان دخالت تحلیلگر را در ایجاد شبکه به حداقل ممکن رساند و از رایانه برای ایجاد شبکه به طور کامل بهره جست؛ اما دستیابی به این هدف به ویژه در مساله‌های پیچیده‌ی سه بعدی همواره مقدور نخواهد بود.

دو- دقت پایین در تنش‌های به دست آمده در این روش

به طور معمول تنش‌های به دست آمده در روش اجزای محدود در بین جزءها به صورت ناپیوسته حاصل می‌گردد. علت این امر ناشی از خرد کردن طبیعت پیوسته مساله برای رابطه نویسی تابع تغییر مکانی در روش اجزای محدود است. به همین سبب در این روش باید فن‌های خاصی برای بهبود دقت تنش‌ها به کار برده شود.

سه- دشواری در تحلیل‌های تطبیقی

یکی از خواسته‌های مورد تقاضا در روش اجزای محدود اطمینان از صحت و دقت نتیجه‌های به دست آمده توسط این شیوه است. برای دستیابی به این خواسته باید در مساله‌های حل شده با این روش، تحلیل تطبیقی صورت پذیرد. برای رسیدن به این هدف مساله باید دوباره شبکه‌بندی شود تا از صحت نتیجه‌های به دست آمده اطمینان حاصل گردد. در مساله‌های سه بعدی ایجاد شبکه مناسب که بتواند نتیجه‌های مطلوبی را حاصل نماید، به سادگی امکان پذیر نیست. بدین سبب، در مساله‌های سه بعدی هزینه دوباره شبکه‌بندی به علت نیاز به منبع سخت‌افزاری مناسب برای تحلیل مساله‌های مهندسی خیلی زیاد است.



چهار- محدودیت در تحلیل برخی از مساله‌های مهندسی

در حل مساله‌هایی با تغییرشکل‌های بزرگ نتیجه‌های به دست آمده از این روش به علت گسسته شدن جزءها دارای دقت کمتری خواهد بود. به عنوان مثال در تحلیل و بررسی رشد ترک در مساله‌هایی که با این پدیده مواجه‌اند، به علت نامشخص بودن مسیر ترک و عدم تطبیق این مسیرها با جزءهای انتخابی این روش با دشواری‌هایی همراه است. در شبیه سازی و بررسی مساله‌های شکست مواد به علت این که پایه‌گذاری روش اجزای محدود بر اساس مکانیک پیوسته مواد صورت پذیرفته است، این شیوه با مشکلاتی روبروست. علت بروز این مشکل از این جا ناشی می‌شود که در روش اجزای محدود جزءها نمی‌توانند دارای شکاف، درز و روی هم رفتگی با جزءهای مجاور داشته باشند. عدم توجه به این نکته اساسی باعث ایجاد مسیرهای نادرست شکست مواد در حل این گونه مساله‌ها می‌گردد.

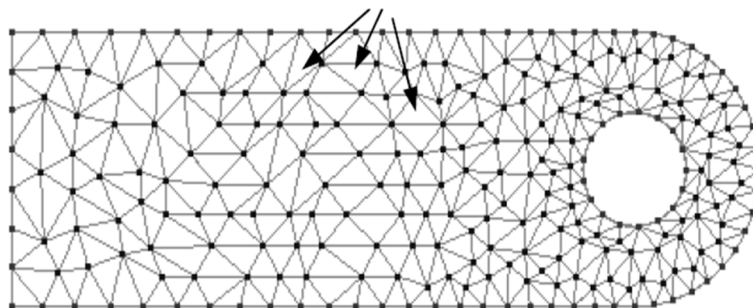
تمام مشکل‌های اشاره شده در بالا به خاطر رابطه سازی روش اجزای محدود بر اساس ایجاد جزء و شبکه‌بندی دامنه‌ی مساله است. بدین سبب، اندیشه روش‌های بدون شبکه برای رهایی از ایجاد شبکه در حل مساله‌های مهندسی شکل گرفت. روش بدون شبکه روشی است که برای بر پایی دستگاه معادله‌های جبری حاکم بر مساله نیاز به گسسته سازی و ایجاد شبکه در دامنه‌ی مساله ندارد. در این روش بدون گسسته سازی مساله، نقطه‌هایی در داخل و بر روی مرزهای آن توزیع می‌گردد که به این نقطه‌ها، نقطه‌های میدانی گفته می‌شود. برای تقریب تابع میدان در این روش، نقطه‌های میدانی در مساله هیچ ارتباط از پیش تعریف شده‌ای با یکدیگر ندارند و این نقطه‌ها در داخل مساله شبکه‌ای ایجاد نمی‌نمایند.

به منظور درک بهتر روش بدون شبکه، ویژگی‌های این روش در مقایسه با روش اجزای محدود بیان می‌شود.

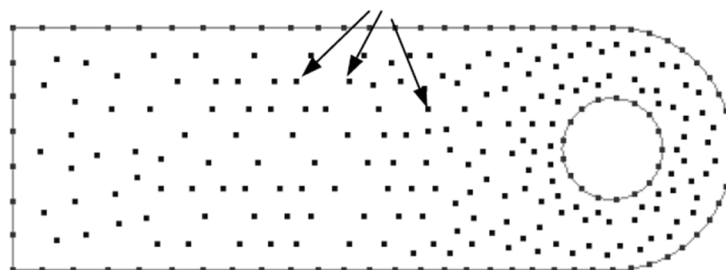
### ۱-۲-۱ معرفی دامنه و مرز سازه

در روش اجزای محدود سازه‌ی مورد تحلیل شبکه بندی می‌شود. در روش بدون شبکه، دامنه و مرزهای سازه با ایجاد گره‌هایی تعریف می‌شوند. تعداد گره‌های توزیع شده در دامنه و مرز سازه، به میزان دقت مورد نیاز بستگی دارد. نحوه توزیع گره‌ها می‌تواند به صورت منظم یا نامنظم صورت پذیرد. در شکل ۱-۱ نحوه‌ی معرفی دامنه و مرز سازه در روش بدون شبکه و روش اجزای محدود نشان داده شده است.

جزء‌های به کار رفته در روش اجزای محدود



گره‌های ایجاد شده در روش بدون شبکه



شکل ۱-۰. نحوه‌ی معرفی دامنه و مرز سازه در روش اجزای محدود و روش بدون شبکه [۱].

### ۱-۲-۲ ساخت تابع شکل

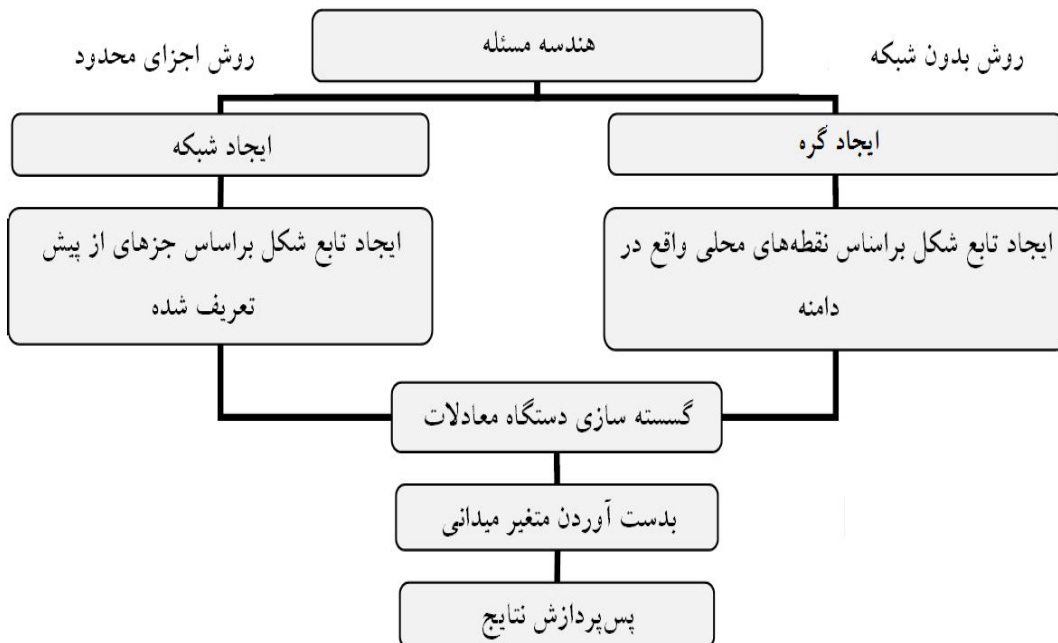
در روش اجزای محدود تابع شکل در هر جزء از قبل تعریف شده می‌باشد، ولی در روش بدون شبکه تابع شکل در دامنه تحت پوشش در حین تحلیل به دست می‌آید.

### ۳-۲-۱ تشکیل معادله‌ها حاکم بر رفتار سازه

تشکیل معادله‌ها در روش بدون شبکه مشابه روش اجزای محدود صورت می‌پذیرد. این معادله‌ها در گره‌ها به صورت ماتریسی نوشته می‌شوند و به صورت ماتریس کل مساله برهم نهی می‌گردند.

### ۴-۲-۱ حل معادله‌ها

حل معادله‌های حاکم در روش بدون شبکه همانند روش اجزای محدود صورت می‌پذیرد. در شکل ۲-۱ فرآیند تحلیل در روش‌های بدون شبکه و اجزای محدود نشان داده شده است [۱].



شکل ۲-۱. فرآیند حل مسأله به روش بدون شبکه و روش اجزای محدود

### ۳-۱ ضرورت و مقایسه

در مکانیک سیالات محاسباتی روش‌های فراوانی برای تعیین جواب تحلیلی و یا تقریبی معادلات دیفرانسیل وجود دارد. از معمول‌ترین روش‌های تقریبی می‌توان به روش اجزای محدود و روش تفاضلات محدود اشاره نمود. با مطالعات فراوانی که بر روی روش اجزای محدود صورت پذیرفته، توابع

شکل و تعیین شرایط مرزی مختلفی برای حل معادلات در نظر گرفته شده است. از آنجایی که در حل معادلات مربوط به جریان سیال شرایط مرزی مدام در حال تغییر است لذا روش‌های جز محدود از عملکرد مناسبی برخوردار نیستند. همچنین از آنجایی که تولید شبکه منجر به ایجاد نواحی کوچک‌تر با ارتباطات گره‌ای ویژه می‌گردد و عنایت به این موضوع که در هر بار تحلیل به سبب حفظ پیوستگی نیاز به شبکه بندی مجدد دامنه می‌باشد و نهایتاً وقت‌گیر بودن و امکان بروز خطا در روش اجزا محدود، استفاده از روش‌های بدون شبکه در مدل‌سازی مسائل مکانیک سیالات بیش از پیش ضروری به نظر می‌رسد.

#### ۱-۴ اهداف

در این رساله، از روش بدون شبکه پتروف-گلرکین برای تحلیل و مدل‌سازی مسائل مکانیک سیالات استفاده خواهد شد. رابطه سازی بدون شبکه‌ی معادلات حاکم بر سیال - که به معادلات ناویر استوکس معروف‌اند- هدف اصلی این رساله خواهد بود.

#### ۱-۵ فرضیات

به‌منظور رابطه سازی، مدل‌سازی و تحلیل مسائل مکانیک سیالات فرضیاتی در نظر گرفته می‌گردد. سیال نیوتنی و غیر قابل تراکم است. به سبب هم دما بودن محیط، معادله انرژی از معادلات ناویر استوکس حذف می‌گردد. جریان در هر دو حالت دائمی و غیردائمی مورد ارزیابی قرار گرفته است. ترم‌های انتقال به کمک روش بالادست مرتبه اول حل شده‌اند. در ادامه با توجه به ضرورت، فرضیات خاص در هر مساله بیان خواهد گردید.

## ۱-۶ مزیت‌ها

به‌طور کلی مزیت اصلی روش بدون شبکه محلی در این است که نیاز به هیچ‌گونه شبکه پس‌زمینه‌ای برای انتگرال‌گیری عددی در کل دامنه مسأله نیست. رهایی از ایجاد شبکه در دامنه‌ی مسأله نتیجه استفاده از این روش است. همان‌طوری که اشاره شد، در اینجا به جای تشکیل جزءهایی در دامنه‌ی مسأله، با استفاده از نقطه‌های میدانی دستگاه معادله‌های حاکم بر مسأله برپا می‌گردد. از سوی دیگر در روش اجزای محدود تابع‌های شکل برای هر جزء از پیش تعریف شده‌اند. در این روش، برای تمام جزءهای یکسان تابع شکل به کار رفته شده در دامنه‌ی مسأله مشابه خواهد بود. این در حالی است که در روش بدون شبکه به‌طور معمول تابع شکل تنها برای نقطه‌ی خاص مورد نظر، با توجه به نقطه‌های موجود در دامنه‌ی تحت پوشش آن نقطه ایجاد می‌گردد. از این رو، مقدار عددی تابع شکل با تغییر موقعیت نقطه مورد نظر در دامنه‌ی مسأله تغییر خواهد نمود. همچنین برای گسسته‌سازی دستگاه معادله‌های حاکم بر مسأله، هر دو روش دارای فرآیند یکسانی خواهند بود. فن‌های حل مورد استفاده در روش اجزای محدود در روش بدون شبکه نیز قابل استفاده است.

## ۱-۷ نوآوری

در این رساله، مواردی برای نخستین بار با استفاده از روش بدون شبکه انجام شده است. مدل‌سازی معادلات ناویر استوکس دو و سه بعدی در حالت دائمی و غیردائمی مدل‌سازی معادله برگرز، شکست سد، هموندی معادلات متناظر به روش بالادست با روش تفاضل محدود، از جمله این موارد است. در بخش دیگری از نوآوری‌های این تحقیق می‌توان به استفاده از تابع پایه شعاعی از نوع چندضلعی برای تقریب تابع میدان و نیز روش انتگرال‌گیری محلی که برای محاسبه تابع‌های اولیه به کار رفته شده است، اشاره نمود. در مثال‌های حل شده از چندین نوع تابع شکل استفاده شده است. در مقایسه

با جواب‌های دقیق، در مثال‌هایی که دارای حل تحلیلی بوده اند، تابع پایه شعاعی از نوع چندضلعی دارای دقت بالاتری نسبت به دیگر انواع توابع بوده است.

## ۱-۸ سامان‌دهی رساله

فصل اول این رساله، به بیان ویژگی‌های اساسی روش بدون شبکه در مقایسه با روش اجزای محدود، اهداف، ضرورت، نوآوری و ساختار رساله اختصاص یافته است. در فصل دوم، پیشینه تحقیق ارائه می‌گردد؛ که شامل پیدایش و سابقه‌ی کاربرد روش بدون شبکه در حوزه علوم و مهندسی است. تاریخچه کارهای انجام شده در زمینه مدل‌سازی جریان سیال از بخش‌های دیگر این فصل است. در فصل سوم مفاهیم پایه روش بدون شبکه بیان می‌شود. برای این کار، ابتدا روش باقی‌مانده وزنی برای حل معادله‌های دیفرانسیل در روش بدون شبکه مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس، روش‌های ساخت تابع شکل و چگونگی تعیین و محاسبه تابع‌های اولیه بیان می‌شود. فصل چهارم به بررسی نتایج اختصاص دارد، در ابتدای هر مساله، معادلات حاکم بر رفتار سیال بیان می‌شود. در ادامه، نحوه رابطه سازی روش بدون شبکه برای این نوع مساله ارائه می‌گردد و در نهایت با استفاده از کدهای نوشته شده در متلب نتایج نشان داده می‌شود. فصل پنجم، شامل جمع‌بندی، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای ادامه کار می‌باشد.

## فصل ۲ : پیشینه‌ی تحقیقات

## ۲-۱ پیشگفتار

بررسی معادلات ناویر استوکس یکی از مهم‌ترین بخش‌ها در حوزه‌ی هیدرودینامیک سیالات محاسباتی به شمار می‌آید. معادلات ناویر استوکس به صورت معادله‌ی دیفرانسیل بیان می‌شود. حل مستقیم این گونه معادله‌ها تنها برای تعداد کمی از مسأله‌ها با هندسه، شرایط اولیه و مرزی ساده امکان پذیر است. بدین سبب، روش‌های عددی مختلفی برای حل این مسأله‌ها پیشنهاد گردیده است، که از جمله این روش‌ها می‌توان به روش اجزای محدود که به طور گسترده در تحلیل سازه‌ها به کار برده می‌شود، اشاره نمود. روش دیگری که در یکی دو دهه اخیر، برای حل مسأله‌های مختلف در حوزه تحلیل دائمی و غیر دائمی مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است، روش بدون شبکه است. در فصل اول ویژگی‌های اساسی روش بدون شبکه در مقایسه با روش اجزای محدود بیان گردید. در این فصل، ابتدا به پیدایش و سابقه‌ی کاربرد روش بدون شبکه در حوزه علوم و مهندسی اشاره می‌شود. در ادامه، تاریخچه کارهای انجام شده در زمینه تحلیل معادلات ناویر استوکس شکل بیان می‌گردد.

## ۲-۲ تاریخچه

ایده اولیه استفاده از روش بدون شبکه به راهکار هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH)<sup>۱</sup> در مدل‌سازی پدیده‌های نجومی توسط گینگولد و موناگان بازمی‌گردد [۲]. گرایش به کاربرد روش بدون شبکه بعد از معرفی روش اجزای پراکنده<sup>۲</sup> توسط نایرولز و همکاران [۳] گسترش یافت. پس از آن، روش‌های مختلفی با استفاده از مبانی پایه روش بدون شبکه نظیر روش مستقل از جزء گلرکین<sup>۳</sup> (EFG) [۴]، روش باز تولید ذرات<sup>۴</sup> (RKPM) [۵]، روش جداگر اجزاء محدود<sup>۱</sup> (PUFEM) [۶]، روش جزء‌های

---

<sup>۱</sup> Smooth Particle Hydrodynamics

<sup>۲</sup> Diffuse Elements Method

<sup>۳</sup> Element Free Galerkin

<sup>۴</sup> Reproducing Kernel Particle Method



طبیعی<sup>۲</sup> (NEM) [۷]، روش بدون شبکه گلرکین با استفاده از تابع شعاعی<sup>۳</sup> (RBF) [۸]، معرفی شدند. تفاوت عمده این روش‌ها در نوع تابع شکل و تابع وزن مورد استفاده در فرآیند تحلیل بود. اگر چه این روش‌ها برای ساخت تابع شکل و تابع وزن نیاز به شبکه‌بندی ندارند، ولی برای انتگرال‌گیری نیاز به یک نوع شبکه‌بندی خاص موسوم به شبکه در سایه دارند. از این رو، این روش‌ها روش بدون شبکه واقعی محسوب نمی‌گردند.

در دهه اخیر، روش بدون شبکه معادلات انتگرالی مرزی<sup>۴</sup> (LBIE) و روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین<sup>۵</sup> (MLPG) [۹-۱۱] که از جمله روش‌های کاملاً بدون شبکه محسوب می‌شوند، معرفی شدند. توانایی قابل توجه روش MLPG در حل مسأله‌هایی نظیر انتشار همرفت گرما [۱۲]، معادله ناویر استوکس [۱۳]، مکانیک شکست [۱۴ و ۱۵]، تغییر شکل برشی تیرها [۱۶] و خمش صفحات [۱۷ و ۱۸] نشان داده شد. تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیر نازک با روش بدون شبکه توسط جیو و لئو [۱۹] انجام گردید. لئو و جیو [۲۰] روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین را با اجزای محدود و اجزای مرزی ترکیب کردند. ژانگ و همکاران [۲۱] تحلیل استاتیکی صفحه را با استفاده از تابع شکل شعاعی انجام دادند. با مشخص شدن توانایی و مزیت‌های روش MLPG در تحلیل معادلات دیفرانسیل، اقبال برای استفاده از این روش افزایش چشم‌گیری یافت از جمله می‌توان از تحلیل صفحه ضخیم توسط ژیاو و همکاران [۲۲]، صفحه ضخیم ساخته شده با ماده هدفمند توسط گیل‌هولی و همکاران [۲۳]، تحلیل سه بعدی صفحه ساخته شده با ماده هدفمند توسط رضایی و همکاران [۲۴]، صفحه خمشی پیزوالکتریک توسط اسلادک و همکاران [۲۵] نام برد. بنجین و همکاران [۲۶] تاریخچه کارهای انجام شده در روش بدون شبکه را بیان کردند. تحلیل سازه‌ها به صورت دو بعدی

---

<sup>۱</sup> Partition of Unity Finite Element Method

<sup>۲</sup> Natural Element Method

<sup>۳</sup> Meshless Galerkin method using Radial Basis function

<sup>۴</sup> Meshless Local Boundary integral equation

<sup>۵</sup> Meshless Local petrov-Galerkin method

(حالت تنش و کرنش مستوی) و تحلیل غیرخطی هندسی صفحه با استفاده از تابع شکل حاصل از روش درونیابی نقاط به ترتیب توسط لئو و جیو [۲۷] و ژاو و همکاران [۲۸] انجام گردید.

مدل‌سازی جریان انتقال و انتشار سیال به روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین توسط لین و آتلوری صورت گرفت [۲۹]. در این تحقیق جریان دائمی با عدد پکلت بالا با استفاده از روش جریان بالادست مورد ارزیابی قرار گرفت. شو و همکاران کاربرد روش محلی بدون شبکه را در جریان سیال تراکم ناپذیر دوبعدی نشان دادند [۳۰] همچنین بررسی جریان سیال غیر هم‌دما به روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین توسط عارف منش و همکاران صورت پذیرفت [۳۱]. همچنین شبیه‌سازی عددی جریان سیال غیر قابل تراکم در مقادیر ثانویه با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین توسط وو و همکاران [۳۲] از کارهای انجام گرفته در مدل‌سازی هیدرولیکی جریان می‌باشد.

از دیگر مطالعات انجام شده می‌توان به مدل‌سازی و مطالعه‌ی جریان نانوسیال و نانوذرات در کانال‌ها و لوله‌ها اشاره نمود. می‌توان به بررسی انتقال ترکیب نانوسیال مس و آب با استفاده از روش بولتزمن [۳۳]، تحلیل تأثیر نانوسیال با خواص متغیر بر انتقال حرارت [۳۴] و مطالعه‌ی پارامترهای انتقال حرارت برای نانوسیال نقره و آب را نام برد [۳۵]. شبیه‌سازی عددی انتقال نانوسیال آب و اکسید مس داخل یک کانال مثلی برای جریان آرام [۳۶] و نیز همین شبیه‌سازی در کانال سینوسی در محیط متخلخل [۳۷] توسط محققان صورت پذیرفت. بررسی اثر سرعت و ابعاد نانو ذرات جامد بر انتقال حرارت در نانوسیال غیر نیوتنی [۳۸] و مطالعه عددی بر روی گرمایش طبیعی در حضور میدان مغناطیسی [۳۹] از موضوعات مورد علاقه‌ی پژوهشگران بوده است. همچنین مطالعه‌ی تأثیر نسبت ابعاد در ترم انتقال حرارت برای جریان آرام در یک میکرو کانال مستطیلی دو بعدی [۴۰] و تحلیل انتقال آرام ترکیبی نانوسیال با استفاده از شبکه عصبی مصنوعی [۴۱] انجام شده است. نیز مطالعه‌ی شکست حجمی نانوذرات [۴۲] و بررسی افزایش انتقال حرارت در نانوسیال غیر نیوتنی در میکرو کانال مستطیل [۴۳] از مهم‌ترین مطالعات صورت پذیرفته شده در این حوزه می‌باشد.

از دیگر فعالیت‌های صورت پذیرفته شده در این حوزه می‌توان به مدل‌سازی جریان ویسکوز غیر

قابل تراکم با کمک مقادیر ثانویه توسط حاج محمدی اشاره کرد [۴۴]. همچنین نجفی و همکاران با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر روی جریان سیال با عدد رینولدز بالا به مطالعه پرداختند [۴۵]. از سوی دیگر امینی و همکاران با مطالعه شکست سد به کمک روش ایزوژئومتریکی به توسعه‌ی این نوع روش پرداختند [۴۶].

در ادامه این فصل به بررسی چند پژوهش مهم انجام گرفته بر روی انواع معادلات دیفرانسیل ناویر استوکس تحلیل شده با روش‌های عددی، به تفصیل پرداخته می‌شود.

## ۳-۲ پژوهش ساتاپرام و لودسانگ

در این بخش به بررسی نتیجه‌های پژوهش انجام یافته توسط ساتاپرام و لودسانگ [۴۷] بر روی معادلات دیفرانسیل ناویر استوکس با استفاده از روش بدون شبکه‌ی محلی پرداخته می‌شود. برای تقریب تابع میدان از روش ضرایب پنالتی استفاده گردیده است. معادلات (۱-۲) تا (۳-۲) معادلات حاکم را تشکیل می‌دهد.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f_x = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - f_y = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3-2)$$

در اینجا  $u$  و  $v$  به ترتیب سرعت جریان در جهت افقی و عمودی،  $f$  نیروهای بدنه و  $P$  فشار آب می‌باشد. با استفاده از گسسته سازی ترم زمانی و تعریف  $F_t$  و  $G_t$ ، معادله پواسن (۲-۶) حاصل می‌گردد.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u^{t+1}(x) - u^t(x)}{\Delta t} \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cong \frac{v^{t+1}(y) - v^t(y)}{\Delta t} \quad (5-2)$$

$$\frac{\partial^2 P^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^t}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial F_t}{\partial x} + \frac{\partial G_t}{\partial y} \right) \quad (6-2)$$

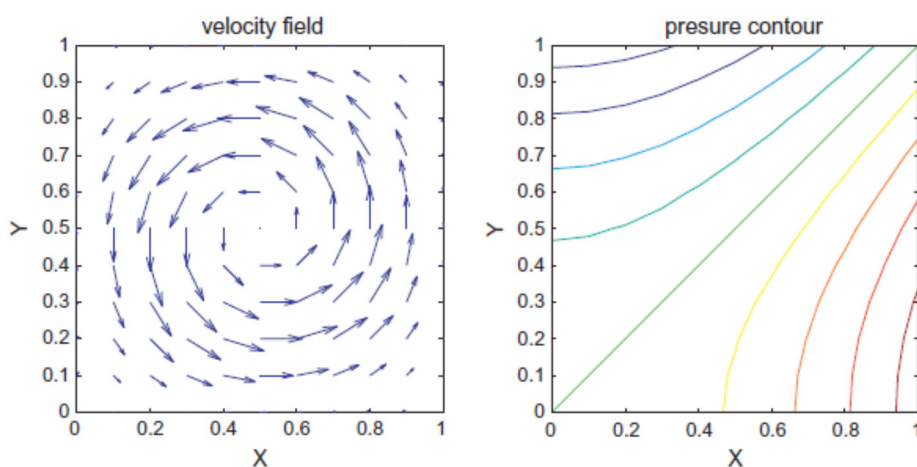
معادله (۶-۲) در واقع همان معادله پواسن است. برای حل معادله (۷۵-۴) از روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین (MLPG) بهره جسته می‌شود. شکل ضعیف معادلات ناویر استوکس در گره I با روش باقیمانده وزنی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega_s} \left[ \frac{\partial^2 P^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^t}{\partial y^2} - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial F_t}{\partial x} + \frac{\partial G_t}{\partial y} \right) \right] w d\Omega \quad (7-2)$$

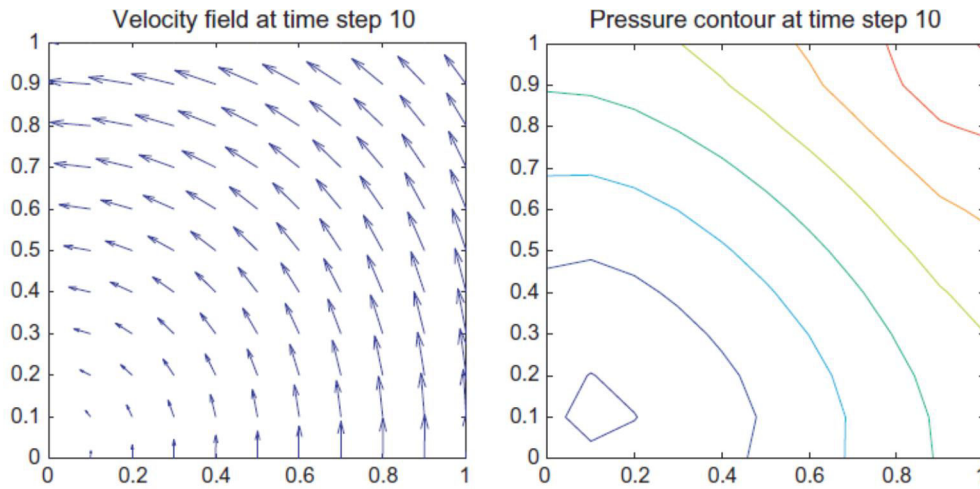
$$- \alpha \int_{\Gamma_{su}} [P^t - \bar{P}^t] w d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_{sq}} \left[ \frac{\partial P^t}{\partial n} - \bar{q}^t \right] w d\Gamma = 0$$

اینجا  $W$  تابع وزن و  $\alpha$  ضریب پنالتی است.

در ادامه جواب‌های مساله در شکل‌های ۲-۲ و ۳-۲ نمایش داده است.



شکل ۲-۱ کانتور فشار و میدان سرعت در مثال توانی در حالت منظم در  $t=0.1s$



شکل ۲-۲ کانتور فشار و میدان سرعت در مثال مثلثاتی در حالت منظم در  $t=0.1s$

## ۴-۲ پژوهش کوتلاری و همکاران

در این بخش به بررسی نتیجه‌های پژوهش انجام یافته توسط کوتلاری و همکاران [۴۸] بر روی معادلات برگرز با استفاده روش تفاضل محدود پرداخته می‌شود.

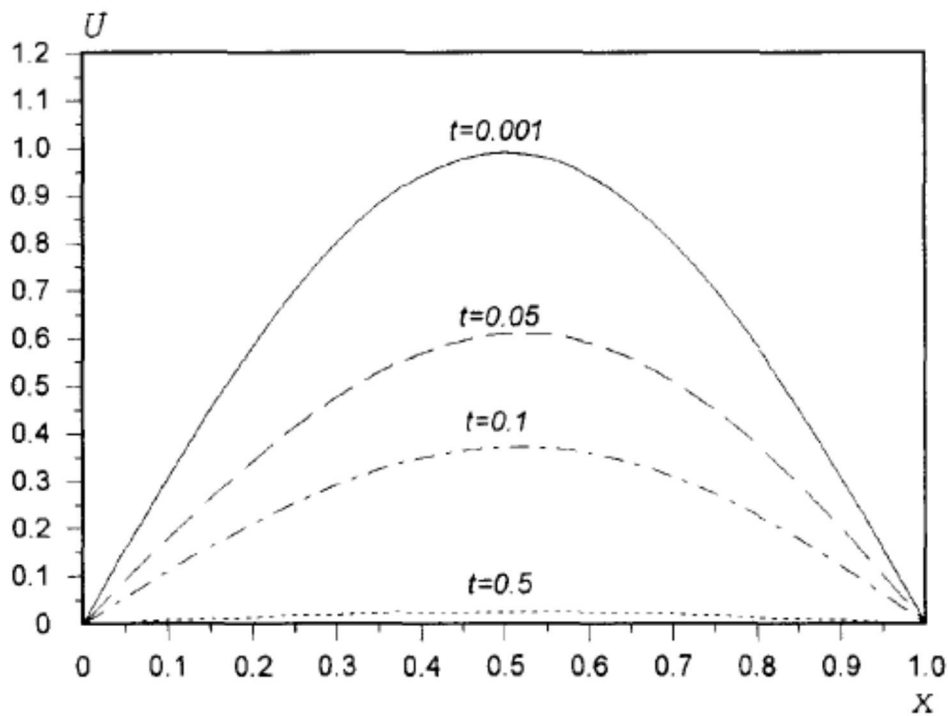
معادله‌ی غیرخطی انتقال و انتشار برگرز حاکم بر جریان آب در راستای جریان به صورت رابطه (۲-)

(۸) بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (۹-۲)$$

به منظور حل معادله فوق در اینجا روش صریح کامل بکار رفته است. همچنین نمودار جواب‌های

بدون شبکه در زمان‌های مختلف در شکل ۳-۲ نشان داده شده است.



شکل ۳-۲ مقادیر مختلف سرعت در زمان‌های مختلف به روش تفاضل محدود [۴۸]

## ۲-۵ پژوهش شبیری و افشار

در این بخش به بررسی نتیجه‌های پژوهش انجام یافته توسط شبیری و افشار [۴۹] بر روی معادلات

شکست سد با استفاده روش بدون شبکه‌ی پرداخته می‌شود.

در پژوهش فوق، از روش بدون شبکه برای برپایی معادله‌های حاکم بر مسأله بهره برده شده است.

برای تقریب تابع میدان از روش حداقل مربعات استفاده گردیده است. معادلات (۲-۹) و (۲-۱۰)

معادلات حاکم را تشکیل می‌دهد.

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \bar{u} = 0 \quad (۲-۹)$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \bar{g} = 0 \quad (۲-۱۰)$$

که در آن  $\bar{u}$  بردار سرعت،  $P$  فشار،  $\bar{g}$  بردار شتاب جاذبه،  $\rho$  چگالی و  $\frac{D}{Dt}$  عملگر مشتق مادی

می‌باشد.

در ادامه رابطه سازی با استفاده از روش باقی مانده وزنی، رابطه (۱۱-۲) حاصل می گردد:

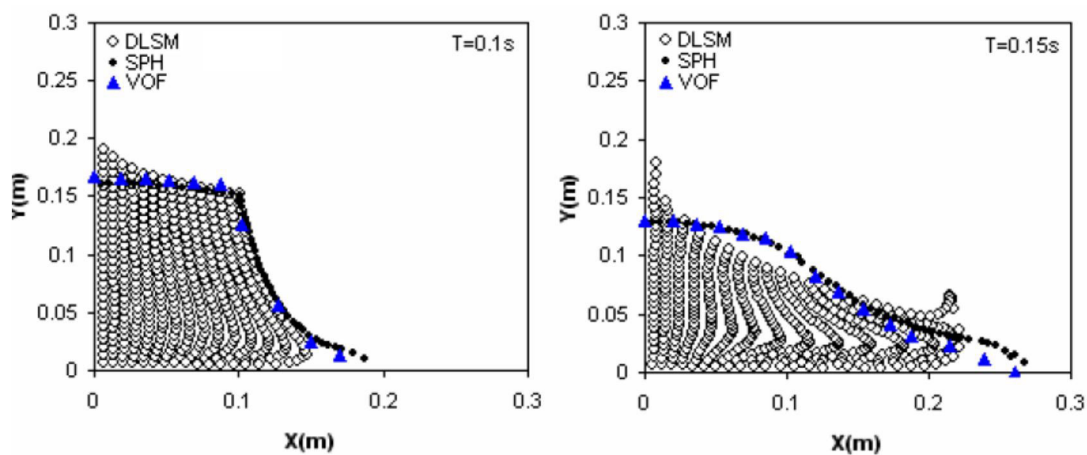
$$R^{(d)} = \nabla^2 P^{t+1} - \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla \cdot u^* = \sum_{j=1}^n \nabla^2 (N_j(x)) P_j^{t+1} - \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla \cdot u^* \quad (11-2)$$

در ادامه با استفاده از تابع حداقل مربعات باقیمانده رابطه (۱۲-۲) به دست می آید:

$$J = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^M (R_k^d)^2 + \alpha \sum_{k=1}^M (R_k^p)^2 + \beta \sum_{k=1}^M (R_k^t)^2 \right] \quad (12-2)$$

که در اینجا  $\alpha$  و  $\beta$  ضرایب پناستی حداقل مربعات هستند.

در نهایت نتایج که شامل موقعیت ذرات است، در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.



شکل ۲-۴ موقعیت ذرات در پژوهش شبیری و افشار [۴۹]





## فصل ۳ : معانیسم پایه در روش بدون شبکه

### ۱-۳ پیشگفتار

در این فصل مفاهیم پایه روش بدون شبکه بیان می‌شود. برای این کار، ابتدا روش باقی‌مانده وزنی برای حل معادله‌های دیفرانسیل در روش بدون شبکه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مرحله یک دستگاه معادله‌های جبری حاکم بر مسأله که دارای عبارت‌های انتگرالی برحسب تابع شکل می‌باشد، تشکیل می‌شود. سپس، روش‌های ساخت تابع شکل و چگونگی محاسبه عبارت‌های انتگرالی بیان می‌گردد تا امکان حل دستگاه معادله‌های حاکم بر شاره میسر گردد.

### ۲-۳ روش باقی‌مانده وزنی<sup>۱</sup>

به طور کلی، معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر رفتار سازه‌ها و شاره‌ها در داخل دامنه ( $\Omega$ ) و بر روی مرزهای آن ( $\Gamma$ )، به صورت رابطه‌های (۱-۳-الف) و (۱-۳-ب) بیان می‌گردد [۵۰].

$$D(u) - f = 0 \quad (۱-۳-الف)$$

$$B(u) - g = 0 \quad (۱-۳-ب)$$

در این رابطه‌ها  $u$  تابع میدان (پاسخ)،  $D$  و  $B$  عملگر دیفرانسیلی و  $f$  و  $g$  تابع نیرویی می‌باشند. دستیابی به مقدار دقیق تابع میدان ( $u$ ) مشکل است. از رابطه (۲-۳) می‌توان برای تقریب زدن تابع میدان استفاده کرد [۵۱].

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \alpha_i = P^T \alpha \quad (۲-۳)$$

در این رابطه،  $u^h(x)$  تابع میدان تقریبی،  $P$  بردار عضوهای چندجمله‌ای و  $\alpha$  بردار ضرایب چندجمله‌ای می‌باشد. به طور معمول برای برقراری رابطه (۲-۳) تعداد عضوهای چندجمله‌ای ( $n$ ) به کار رفته دارای شمار محدودی است، از این رو، تابع میدان به صورت تقریبی به دست می‌آید. بنابراین حل معادله‌ی حاکم بر مسأله دارای باقی‌مانده‌ی  $R_\Omega$  در داخل دامنه و  $R_\Gamma$  بر روی مرزها خواهد بود.

---

<sup>۱</sup> Weighted residual method

مقدار باقی مانده‌ی حاصل از قرار دادن تابع  $u^h$  در رابطه (۳-۱) به صورت رابطه‌های (۳-۳-الف) و (۳-۳-ب) بیان می‌شود.

$$R_\Omega = D(u^h) - f \neq 0 \quad (۳-۳-الف)$$

$$R_\Gamma = B(u^h) - g \neq 0 \quad (۳-۳-ب)$$

در روش باقی مانده وزنی با توجه به نحوه‌ی انتخاب تابع تقریبی، مقدار باقی مانده‌ی  $R_\Omega$  و  $R_\Gamma$  در مسأله تغییر می‌کند. از این رو، باید مقدار باقی مانده حاصل از تقریب تابع میدان را به حداقل ممکن رسانید. این کار با برابر شدن مجموع مقدار انتگرال باقی مانده‌های وزن دار در دامنه و بر روی مرزهای مسأله امکان پذیر خواهد بود (رابطه (۳-۴)).

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i R_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i R_\Gamma d\Gamma = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۳-۴)$$

در این رابطه  $\widehat{W}_i$  و  $\widehat{V}_i$  به ترتیب به عنوان تابع‌های وزن برای باقی مانده وزنی  $R_\Omega$  و  $R_\Gamma$  محسوب می‌گردد.

با بهره‌جویی از رابطه‌های (۳-۲) و (۳-۳-الف و ب) و همچنین قرار دادن آن‌ها در رابطه (۳-۴)، رابطه‌های (۳-۵) و (۳-۶) حاصل می‌گردد.

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i (D(u^h) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i (B(u^h) - g) d\Gamma = 0 \quad (۳-۵)$$

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \quad (۳-۶)$$

رابطه (۳-۶) یک دستگاه  $n$  معادله‌ای با  $n$  مجهول (ضرایب ثابت در بردار  $\alpha$ ) را نشان می‌دهد (رابطه (۳-۷)).

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \widehat{W}_1 (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_1 (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \widehat{W}_2 (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_2 (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \widehat{W}_n (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_n (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \end{cases} \quad (7-3)$$

در این معادله‌ها باید ابتدا تابع شکل تعیین و سپس انتگرال‌گیری انجام شود. در ادامه، روش‌های

ساخت تابع شکل و انتگرال‌گیری در روش بدون شبکه بیان می‌گردد.

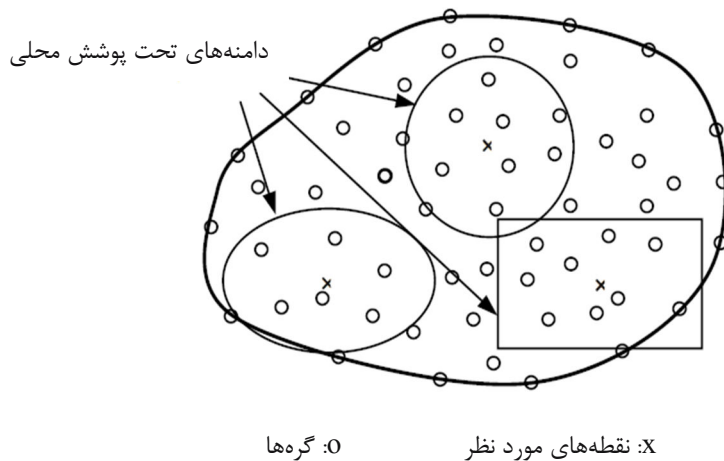
### ۳-۳ تابع شکل

انتخاب تابع شکل مناسب بر پایه توزیع گره‌های اختیاری در داخل دامنه‌ی سازه یکی از مهم‌ترین مسائلی است که در پیش روی روش بدون شبکه است. به همین سبب بدون داشتن یک تابع شکل مناسب، روش بدون شبکه دارای کارآمدی لازم نخواهد بود. تابع میدان در روش بدون شبکه با بهره‌جویی از مقدار تابع میدان در گره‌های واقع شده در دامنه‌ی تحت پوشش<sup>۱</sup> تعریف می‌گردد. با استفاده از رابطه (۸-۳) می‌توان تابع میدان را تقریب زد.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) u_i = \Phi^T(x) \times U_s \quad (8-3)$$

در این رابطه  $k$  تعداد گره‌هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع شده‌اند، و  $u_i$  و  $\varphi_i(x)$  به ترتیب تابع میدان و تابع شکل در  $i$  امین نقطه در داخل دامنه تحت پوشش و  $U_s$  و  $\Phi^T(x)$  به ترتیب بردار تغییر مکان و بردار تابع شکل می‌باشند. در شکل ۱-۳ نمونه‌ای از دامنه‌های تحت پوشش مورد استفاده در روش بدون شبکه برای ساخت تابع‌های شکل نشان داده شده است.

<sup>۱</sup> Support domain



شکل ۱-۳. دامنه‌های تحت پوشش در روش بدون شبکه برای ساخت تابع‌های شکل

همان طوری که در شکل ۱-۳ دیده می‌شود، دامنه‌ی تحت پوشش می‌تواند به صورت دایره، بیضی و مستطیل انتخاب شود. اندازه دامنه‌ی تحت پوشش، برای دستیابی به پاسخ دقیق از اهمیت به سزایی برخوردار است. اندازه دامنه‌ی تحت پوشش ( $d_s$ ) برای نقطه  $x$  به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$d_s = \alpha_s \times d_c \quad (9-3)$$

در رابطه (۹-۳)،  $\alpha_s$  ضریب بدون بعد برای کنترل اندازه دامنه‌ی تحت پوشش و  $d_c$  فاصله بین گره‌ها می‌باشد. در صورتی که گره‌ها در دامنه‌ی مسأله به صورت نامنظم توزیع گردند، این مقدار به صورت میانگین فاصله بین گره‌ها در نظر گرفته می‌شود.

برای به دست آوردن تابع شکل  $(\Phi^T(x))$ ، از روش‌های کمترین مربعات متحرک<sup>۱</sup>، بیان انتگرالی<sup>۲</sup> و درون‌یابی نقاط<sup>۳</sup> استفاده می‌شود.

### ۳-۳-۱ روش کمترین مربعات متحرک

شپارد [۵۲] از روش کمترین مربعات متحرک برای دستیابی به یک منحنی مناسب که از بین

<sup>۱</sup> Moving least squares

<sup>۲</sup> Integral representation method

<sup>۳</sup> Point interpolation method

تعدادی نقطه می‌گذرد، بهره جست. این روش توانست در گسترش روش‌های بدون شبکه نقش به سزایی را ایفا نماید. در این روش، تابع میدان تقریبی به صورت رابطه (۱۰-۳) نشان داده می‌شود [۵۳].

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j = p^T(x) a \quad (10-3)$$

در این رابطه  $p(x)$  بردار عضوهای چندجمله‌ای،  $m$  تعداد عضوهای چندجمله‌ای و  $a$  بردار ضرایب چندجمله‌ای می‌باشد، که مجهول بوده و به صورت رابطه (۱۱-۳) بیان می‌شود.

$$\mathbf{a}^T = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m] \quad (11-3)$$

تعداد عضوها  $p_j(x)$  در چندجمله‌ای به‌گونه‌ای انتخاب می‌شود که بردار  $p(x)$  دارای مرتبه کاملی باشد. این تابع‌ها در فضای یک بعدی به صورت رابطه (۱۲-۳)، در فضای دو بعدی به صورت رابطه (۱۳-۳) و برای سه بعدی به صورت رابطه (۱۴-۳) بیان می‌شوند.

$$\mathbf{P}^T(x) = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^m] \quad (12-3)$$

$$\mathbf{P}^T(x) = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2 \ \dots \ x^m \ y^m] \quad (13-3)$$

$$\mathbf{P}^T(x) = [1 \ x \ y \ z \ xy \ yz \ zx \ x^2 \ y^2 \ z^2 \ \dots \ x^m \ y^m \ z^m] \quad (14-3)$$

به منظور بهبود مقدار تابع میدان تقریبی انتخاب شده، لازم است تابع وزنی مناسبی برای آن در نظر گرفته شود. تابع وزنی دو نقش اساسی در روش کمترین مربعات متحرک ایفا می‌نماید. اولین نقش آن وزن دادن به گره‌های موجود در داخل محدوده‌ی دامنه‌ی تحت پوشش است. این تابع وزنی به صورتی انتخاب می‌گردد که به گره‌های نزدیک‌تر به گره مرکزی، وزن بیشتری و به گره‌های دورتر وزن کمتری اختصاص دهد. دومین نقش تابع وزنی این است که تابع تقریبی رفتار پیوسته‌ای در داخل دامنه‌ی تحت پوشش داشته باشد تا قابل مشتق‌گیری و انتگرال‌پذیری باشد. با توجه به

نکته‌های اشاره شده لازم است تابع وزن انتخاب شده دارای شرط‌های زیر باشد.

$$\widehat{W}(x - x_i) > 0 \quad \text{۱- در داخل دامنه } \Omega$$

$$\widehat{W}(x - x_i) = 0 \quad \text{۲- در خارج از دامنه } \Omega$$

در این رابطه‌ها  $\widehat{W}(x - x_i)$  تابع وزن در دامنه‌ی تحت پوشش و  $x_i$  نماینده مختصات گره  $i$  می‌باشد.

شرط اول به منظور مثبت بودن تابع وزن در تمام گره‌های داخل دامنه‌ی تحت پوشش به کار می‌رود. شرط دوم صفر بودن تابع وزن در خارج از دامنه تحت پوشش را بیان می‌کند. از این رو تابع‌های وزن مورد استفاده در روش‌های بدون شبکه به شکل زنگوله‌ای ایجاد می‌گردند [۵۴]. نمونه‌ای از این تابع‌های وزنی در شکل ۳-۲ نشان داده شده است. در انتخاب تابع وزن از تابع نمایی<sup>۱</sup> (رابطه (۳-۱۵))، چند جمله‌ای مرتبه سوم<sup>۲</sup> (رابطه (۳-۱۶)) و چند جمله‌ای مرتبه چهارم<sup>۳</sup> (رابطه (۳-۱۷)) بهره می‌جویند.

$$\widehat{W}(x - x_i) \equiv \widehat{W}(d) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{d}{\alpha}\right)^2} & d \leq 0 \\ 0 & d > 0 \end{cases} \quad (۳-۱۵)$$

$$\widehat{W}(x - x_i) \equiv \widehat{W}(d) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4d^2 + 4d^3 & d \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4d + 4d^2 - \frac{4}{3}d^3 & \frac{1}{2} < d < 1 \\ 0 & d \geq 1 \end{cases} \quad (۳-۱۶)$$

$$\widehat{W}(x - x_i) \equiv \widehat{W}(d) = \begin{cases} 1 - 6d^2 + 8d^3 - 3d^4 & d \leq 1 \\ 0 & d > 1 \end{cases} \quad (۳-۱۷)$$

$$d = \frac{|x - x_i|}{d_w} = \frac{r}{d_w} \quad (۳-۱۸)$$

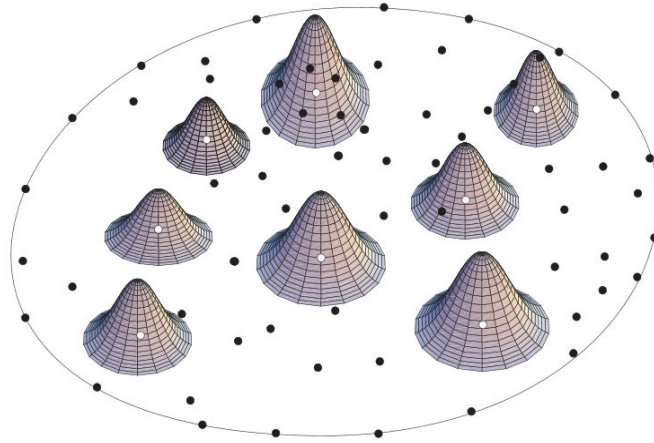
در این رابطه‌ها  $d$  معرف شعاع دامنه‌ی تحت پوشش برای نقطه  $i$ ،  $\alpha$  ضریبی ثابت و  $d_w$  اندازه

<sup>۱</sup> Exponential

<sup>۲</sup> Cubic spline

<sup>۳</sup> Quartic spline

حداکثر شعاع تابع وزن در نقطه  $i$  می‌باشد. تابع‌های وزنی  $\widehat{W}(x - x_i)$  در شکل ۳-۲ نشان داده شده است.



شکل ۳-۲ نمایش تابع‌های وزنی  $\widehat{W}(x - x_i)$

در روش کمترین مربعات متحرک، عضوهای بردار  $\mathbf{a}$  چنان محاسبه می‌شوند که مقدار تابع باقی‌مانده وزن ( $J$ ) در رابطه (۳-۱۹) کمینه گردد.

$$J = \sum_{j=1}^n \widehat{W}(x - x_i) [u^h(x_i) - u(x_i)]^2 \quad (۳-۱۹)$$

$$= \sum_{j=1}^n \widehat{W}(x - x_i) [\mathbf{P}^T(x_i) \mathbf{a} - u(x_i)]^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (۳-۲۰)$$

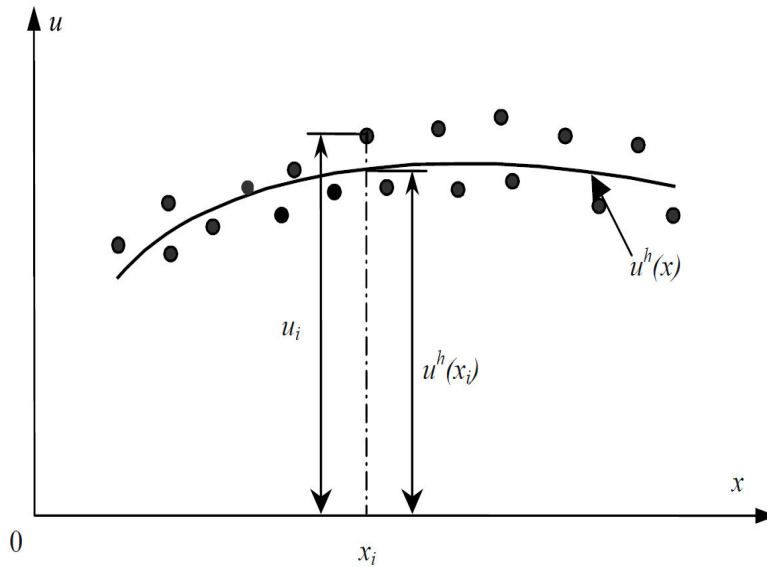
$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = 2 \sum_{j=1}^n \widehat{W}(x - x_i) \mathbf{P}^T(x_i) [\mathbf{P}^T(x_i) \mathbf{a} - u(x_i)] \quad (۳-۲۱)$$

در رابطه بالا  $n$ ، تعداد گره‌های داخل دامنه‌ی تحت پوشش می‌باشد.

رابطه (۳-۲۱) از نوع باقی‌مانده وزنی است و همان‌طور که در شکل ۳-۳ مشاهده می‌شود به علت گذشتن از میان نقطه‌ها به جای خود نقطه‌ها، دارای مقداری تقریبی است. با بهره‌جویی از رابطه‌های



(۲۲-۳) تا (۲۶-۳) می‌توان تابع شکل را در روش کمترین مربعات متحرک به صورت رابطه (۳-۲۷) در نظر گرفت [۵۵]. شکل ۳-۳ تابع تقریبی  $u^h(x)$  و مقدارهای گره‌ای  $u_i$  در روش کمترین مربعات متحرک نشان می‌دهد.



شکل ۳-۳ تابع تقریبی  $u^h(x)$  و مقدارهای گره‌ای  $u_i$  در روش کمترین مربعات متحرک [۵۳].

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{j=1}^n \widehat{W}(x - x_j) \mathbf{P}(x_j) \mathbf{P}^T(x_j) \quad (۳-۲۲)$$

$$\mathbf{B}(x) = [\widehat{W}(x - x_1)p(x_1) \quad \widehat{W}(x - x_2)p(x_2) \quad \dots \quad \widehat{W}(x - x_n)p(x_n)] \quad (۳-۲۳)$$

$$\mathbf{U}_s = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T \quad (۳-۲۴)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}(x) \times \mathbf{B}(x) \times \mathbf{U}_s \quad (۳-۲۵)$$

$$\Phi_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) \left( \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \right)_{ji} = \mathbf{P}^T(x) (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_i \quad (۳-۲۶)$$

$$\Phi^T(x) = [\Phi_i \quad \Phi_i \quad \dots \quad \Phi_i] \quad (۳-۲۷)$$

### ۳-۳-۲ روش بیان انتگرالی

در روش بدون شبکه می‌توان از تابع شکل‌های انتگرالی به عنوان تابعی تقریبی برای بیان تابع میدان  $(u(x))$  استفاده کرد. از جمله روش‌های مبتنی بر تابع شکل انتگرالی، می‌توان به روش هیدرودینامیک ذرات هموار<sup>۱</sup> [۲ و ۵۶] و روش باز تولید ذرات<sup>۲</sup> [۵] اشاره نمود. روش هیدرودینامیک ذرات هموار در ابتدا برای حل مسأله‌های نجومی در فضای سه بعدی پیشنهاد گردید. عدم پایداری و سازگاری در تقریب متغیر میدان و نیز دشواری در وارد ساختن شرایط مرزی مسأله از کاستی‌های روش هیدرودینامیک ذرات هموار می‌باشد. در این روش، تابع میدان  $u(x)$  به صورت رابطه (۳-۲۸) تعریف می‌گردد.

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\delta(x - \xi)d\xi \quad (۳-۲۸)$$

که در آن  $\delta(x)$  تابع دلتای دیراک می‌باشد.

با توجه به این‌که در روش مذکور، تابع میدان به صورت یک انتگرال نامحدود تعریف می‌گردد، امکان محاسبه عددی آن میسر نمی‌باشد. از این رو تابع شکل  $\Phi$  به صورت رابطه (۳-۲۹) در دامنه‌ی مسأله تقریب زده می‌شود.

$$\Phi = \sum_i \widehat{W}(x - x_i)\Delta V_i \quad (۳-۲۹)$$

در این رابطه  $\widehat{W}(x - x_i)$  تابع وزنی و  $\Delta V_i$  حجم می‌باشد.

### ۳-۳-۳ روش درون‌یابی نقاط

روش درون‌یابی نقاط یکی از فن‌های تقریب تابع میدان در روش بدون شبکه محسوب می‌گردد. این

---

Smooth particle hydrodynamics<sup>۱</sup>  
Reproducing kernel particle method<sup>۲</sup>

روش توسط لئو و ژئو [۵۷] برای ساخت تابع‌های شکل با بهره‌جویی از توزیع اختیاری گره‌ها در داخل دامنه‌ی مسأله پیشنهاد شد. تفاوت این روش با روش کمترین مربعات متحرک در برقرار نمودن شرط تابع دلتای کرونکر<sup>۱</sup> در مسأله می‌باشد.

یکی از روش‌های ساده و پرکاربرد در ایجاد تابع شکل، بهره‌جویی از چند جمله‌ای خیام-پاسکال به عنوان تابع‌های چندجمله‌ای می‌باشد. در این روش، تقریب تابع شکل با بهره‌جویی از مقدار تابع در گره‌های داخل دامنه‌ی تحت پوشش صورت می‌پذیرد. در روش درون‌یابی نقاط، تابع  $u^h(x)$  را با استفاده از مقدارهای گرهی در دامنه و نقطه‌ی مورد نظر  $x_Q$  درون‌یابی می‌کنند (رابطه (۳-۳۰)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n B_i(x) a_i(x_Q) \quad (3-30)$$

در این رابطه  $B_i(x)$  تابع پایه‌ای تعریف شده در فضای دکارتی  $\mathbf{X}^T = [x, y, z]$ ،  $n$  تعداد گره‌های قرار گرفته در دامنه‌ی تحت پوشش  $x_Q$  و  $a_i(x_Q)$  ضریب تابع پایه‌ای  $B_i(x)$  است. در روش درون‌یابی نقاط بر اساس نحوه‌ی انتخاب تابع پایه‌ای دو روش ابداع گردیده است. روش درون‌یابی نقاط از تابع‌های چند جمله‌ای<sup>۲</sup> [۵۷] و تابع‌های شعاعی<sup>۳</sup> [۵۸ و ۵۹] برای تقریب تابع میدان استفاده می‌کند.

### ۳-۳-۱ روش چند جمله‌ای

در این روش از تابع‌های چند جمله‌ای به عنوان تابع‌های پایه‌ای استفاده می‌شود. با جایگذاری تابع چند جمله‌ای در رابطه (۳-۳۰)، رابطه حاکم بر این روش حاصل می‌گردد (رابطه (۳-۳۱)).

<sup>۱</sup> Kronecker delta Function

<sup>۲</sup> Polynomial point interpolation methods

<sup>۳</sup> Radial point interpolation method

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n P_i(x) a_i(x_Q) \quad (31-3)$$

در این حالت تعداد ضرایب مجهول  $a_i$  با تعداد گره‌های داخل دامنه برابر می‌باشد. با قرار دادن مقادیر گره‌ای، می‌توان ضرایب مجهول را با استفاده از رابطه‌های زیر به دست آورد.

$$U_s = P_Q \times a \quad (32-3)$$

$$U_s = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \quad (33-3)$$

$$P_Q = [p^T(x_1) \ p^T(x_2) \ \dots \ p^T(x_n)] \quad (34-3)$$

$$a = P_Q^{-1} \times U_s \quad (35-3)$$

با قرار دادن رابطه (35-3) در رابطه (32-3)، تابع شکل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Phi = P^T(x) P_Q^{-1} \quad (36-3)$$

### ۲-۳-۳-۳ روش تابع‌های شعاعی

از امتیازهای استفاده از تابع شکل بر پایه چند جمله‌ای‌ها، می‌توان به سادگی و دقت مناسب روش اشاره نمود. از سوی دیگر با افزایش تعداد گره‌ها، می‌توان هر مرتبه‌ای از تابع شکل مورد نیاز را ایجاد کرد؛ اما علی‌رغم مزیت‌های فوق، در برخی حالت‌ها ماتریس  $P_Q$  در رابطه (36-3) ویژه می‌گردد. برای رفع این مشکل، روش درون‌یابی نقاط بر پایه تابع‌های شعاعی توسط وانگ و لئو [59] پیشنهاد گردید (رابطه (37-3)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i(x_Q) = R^T a(x_Q) \quad (37-3)$$

$$R^T(x) = [R_1(x) \ R_2(x) \ \dots \ R_n(x)] \quad (38-3)$$

$R_i(x)$  در رابطه (۳۸-۳) تابع پایه شعاعی است. تابع‌های مختلف پایه شعاعی توسط محققان پیشنهاد گردیده است که هر کدام ویژگی‌های خاص خود را دارد. به منظور بهره‌گیری از این تابع‌ها، در جدول ۱-۳ چهار تابع پایه شعاعی پرکاربرد ارائه گردیده است. [۶۰-۶۲]

جدول ۱-۳. تابع‌های پایه شعاعی

متغیرهای مؤثر در تابع شکل	رابطه	نام تابع شکل
$\alpha_c \geq 0, q$	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	چند ضلعی <sup>۱</sup>
$\alpha_c$	$R_i(x, y) = \exp(-\alpha_c (\frac{r_i}{d_c}))^q$	گوسی <sup>۲</sup>
$\eta$	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	نواری <sup>۳</sup>
$\eta$	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log r_i$	لگاریتمی <sup>۴</sup>

برای تقریب تابع  $u^h(x)$  با توجه به رابطه (۳۷-۳)، نیاز به محاسبه مقدار ضرایب مجهول  $a_i(x_Q)$  می‌باشد. با استفاده از رابطه‌های (۳۹-۳) تا (۴۱-۳) می‌توان ضرایب مجهول را محاسبه نمود.

$$R_Q = \begin{Bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{Bmatrix} \quad (۳۹-۳)$$

$$r_k = [(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2]^{0.5} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (۴۰-۳)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \quad (۴۱-۳)$$

با قرار دادن رابطه (۴۱-۳) در رابطه (۳۷-۳)، تابع شکل به صورت رابطه (۴۲-۳) به دست می‌آید.

<sup>۱</sup> Multiquadric  
<sup>۲</sup> Gaussian  
<sup>۳</sup> Thin plate spline  
<sup>۴</sup> Logarithmic

$$\Phi = R^T(x)R_0^{-1}$$

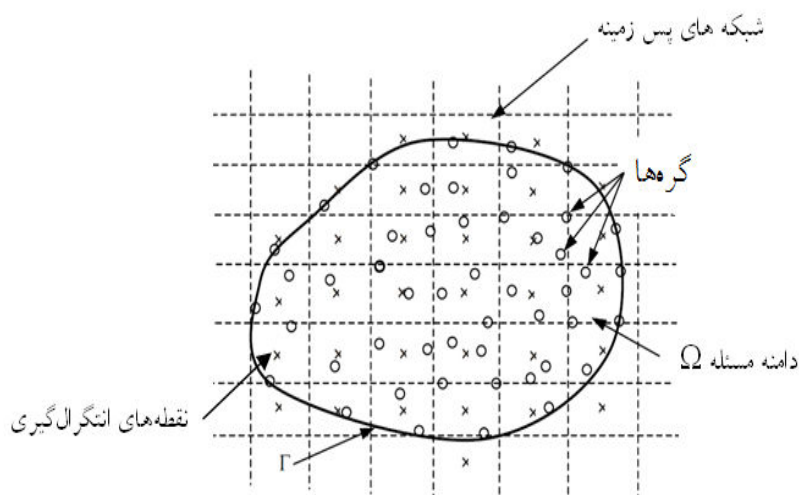
(۴۲-۳)

### ۳-۴ روش انتگرال گیری

در فرآیند تحلیل به روش بدون شبکه، پس از به دست آوردن تابع شکل نیاز به انتگرال گیری می باشد. انتگرال گیری در روش بدون شبکه به دو صورت کلی و محلی انجام می گیرد.

#### ۳-۴-۱ روش انتگرال گیری کلی

این روش برای ایجاد تابع شکل نیاز به ایجاد هیچ گونه شبکه بندی دامنه مسأله ندارد و تابع شکل در دامنه تحت پوشش محلی برپا می شود، ولی نیاز به شبکه پس زمینه در کل دامنه مسأله برای محاسبه انتگرال های عددی دارد. به این سبب روش انتگرال گیری کلی یک روش بدون شبکه واقعی محسوب نمی گردد. در شکل ۳-۴ نمونه ای از شبکه های پس زمینه در این روش نشان داده شده است.



شکل ۳-۴ نمونه ای از شبکه های پس زمینه در روش انتگرال گیری کلی

### ۳-۴-۲ روش انتگرال گیری محلی

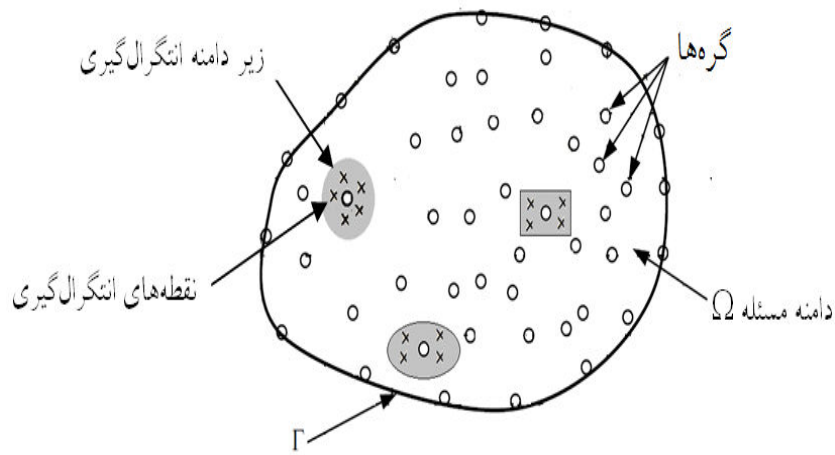
برای برطرف کردن کاستی موجود در روش انتگرال گیری کلی (روش بدون شبکه کلی)، روش انتگرال گیری محلی (روش بدون شبکه محلی) توسط آتلوری و همکاران [۶۳-۶۶] پیشنهاد گردید. این محققین برای برپایی معادله‌های حاکم از تابع شکل کمترین مربعات متحرک بهره‌جویی کردند. لئو و ژئو [۵۸] از تابع شکل پایه شعاعی برای برپایی معادله‌های حاکم در روش بدون شبکه محلی بهره جستند. علت به کارگیری تابع شکل پایه شعاعی این است که ویژگی دلتای کرونکر را برقرار می‌کند. از سوی دیگر به علت برقراری این ویژگی در مسأله، وارد ساختن شرایط مرزی به صورت راحت‌تری نسبت به روش کمترین مربعات متحرک امکان پذیر خواهد بود.

مزیت اصلی روش بدون شبکه محلی در این است که نیاز به هیچ‌گونه شبکه پس زمینه‌ای برای انتگرال گیری عددی در کل دامنه مسأله نیست. ایده اصلی در این شیوه، انتگرال گیری عددی در یک ناحیه کوچک برای هر گره به جای انتگرال گیری در کل دامنه مسأله می‌باشد. به این ناحیه کوچک که انتگرال گیری عددی در آن صورت می‌پذیرد، زیر دامنه<sup>۱</sup> گفته می‌شود.

در شکل ۳-۵ نمونه‌ای از زیر دامنه در روش انتگرال گیری محلی نشان داده شده است. این ناحیه انتگرال گیری می‌تواند دارای شکل منظم از جمله دایره، مستطیل و بیضی باشد. با توجه به ویژگی منحصر به فرد ارائه شده در بالا، این شیوه توانست به سرعت به عنوان یک شیوه کارآمد گسترش پیدا کند.

---

<sup>۱</sup> Subdomain



شکل ۳-۵ نمونه‌ای از زیر دامنه در روش انتگرال گیری محلی

برای انتگرال گیری به روش محلی نیاز به تابع وزن است. در جدول ۳-۲ چند نمونه تابع وزن پرکاربرد نشان داده شده است.

جدول ۳-۲. تابع‌های وزن

رابطه	نام تابع شکل
$W_i(x) = \begin{cases} \frac{\left\{ -\left(\frac{d_i}{c_i}\right)^{2k} \right\} - e^{-\left\{ -\left(\frac{r_i}{c_i}\right)^{2k} \right\}}}{1 - e^{-\left\{ -\left(\frac{r_i}{c_i}\right)^{2k} \right\}}} & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0 & d_i > r_i \end{cases}$	گوسی
$\hat{r}_i(x) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_i}\right) + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4 & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0 & d_i > r_i \end{cases}$	چند جمله‌ای
$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases}$	دلتای دیراک
$\widehat{W}_i = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_S \\ 0 & x \notin \Omega_S \end{cases}$	هویساید



# فصل ۴ : مدل سازی مسائل هیدرولیکی به کمک

روش بدون شبکه محلی و بررسی نتایج

#### ۱-۴ پیشگفتار

رابطه سازی در روش بدون شبکه به دو صورت کلی و محلی قابل انجام است. همان طور که در فصل سوم اشاره شد، با توجه به مزیت های روش بدون شبکه محلی در حل معادله های دیفرانسیل، در این پژوهش از این روش استفاده می گردد.

در این فصل، پس از انجام صحت سنجی ابتدا در مساله ی جریان سیال در کانال، مقدار سرعت در کانال شیب دار با جریان یکنواخت تقریب زده می شود، سپس مساله ی جریان آب در خاک به صورت دائمی و غیر دائمی مورد حل قرار می گیرد، به همین ترتیب در مساله ی شکست سد معادلات حاکم بر جریان که شامل معادلات بقای جرم و بقای ممنتوم می باشند به شکل لاگرانژی و به کمک روش تصحیح فشار حل و با نتایج دیگر روش ها مقایسه شده اند. پروفیل سطح جریان، از نتایج به دست آمده در این بخش می باشد. در نهایت حل کامل دو بعدی و سه بعدی معادلات ناویر استوکس صورت پذیرفته است.

#### ۲-۴ صحت سنجی

به منظور صحت سنجی روش MLPG در این پژوهش، ابتدا با استفاده از این روش یک حالت خاص معادله پواسن (رابطه (۱-۴)) مورد حل قرار می گیرد. از آنجایی که این معادله دارای حل تحلیلی می باشد لذا جواب های حاصل از مدل سازی با جواب های تحلیلی مقایسه می گردد. در این راستا می توان رابطه (۱-۴) را نوشت:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (1-4)$$

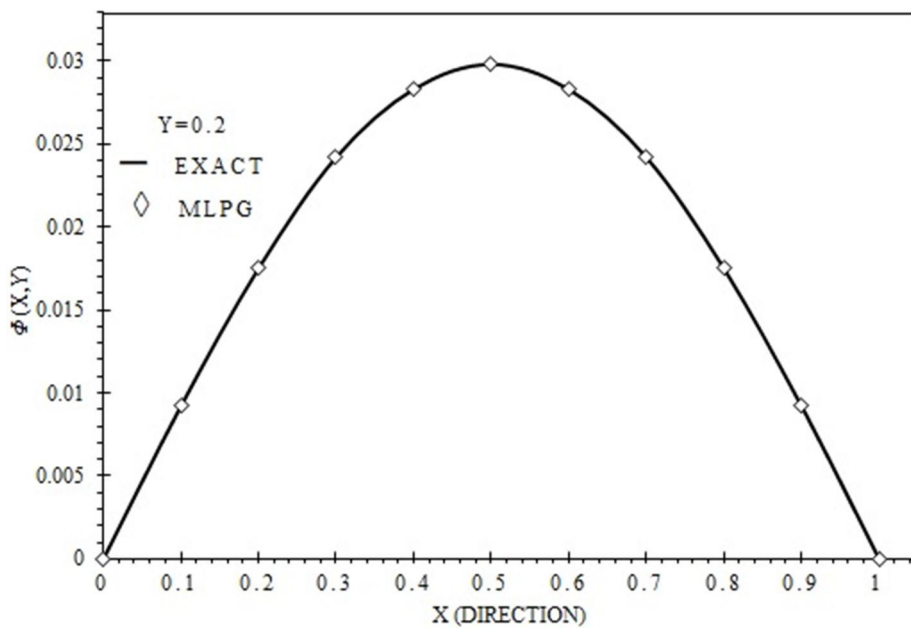
شرایط مرزی به صورت رابطه (۲-۴) برقرار است:

$$\begin{aligned} B.C.: \quad \varphi = 0 \text{ if } x = 0, \varphi = 0 \text{ if } x = 1, \\ \varphi = 0 \text{ if } y = 0, \varphi = 0 \text{ if } y = 1 \end{aligned} \quad (2-4)$$

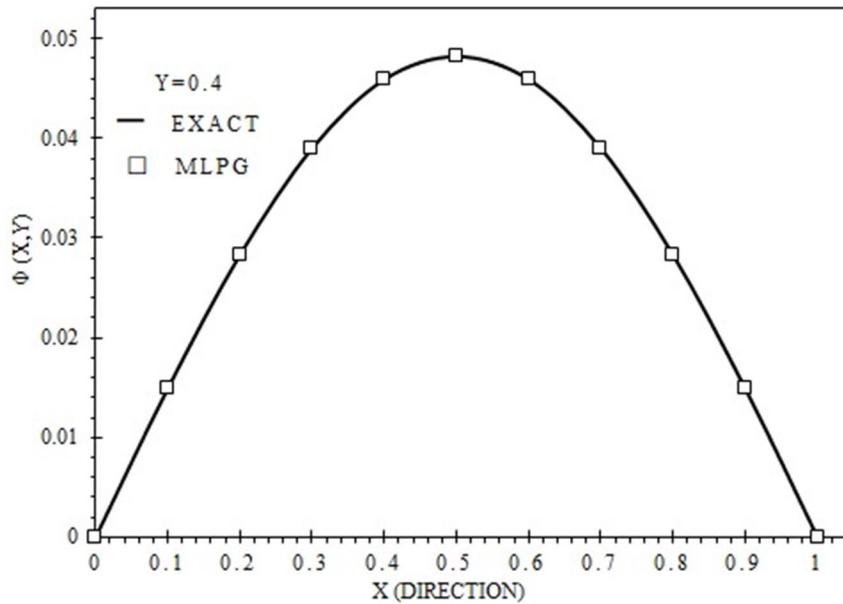
جواب تحلیلی معادله (۱-۴) به صورت رابطه (۳-۴) بیان می‌گردد:

$$\varphi^{\text{exact}} = -\frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (3-4)$$

این نوع معادله از انواع معادلات پوآسن شناخته می‌شود. جواب حل این مسأله، با استفاده از روش بدون شبکه محلی و تحلیلی در دو حالت به صورت شکل‌های ۱-۴ و ۲-۴ ارائه شده است:



شکل ۱-۴ نمونه‌ای از زیر دامنه در روش انتگرال‌گیری محلی



شکل ۴-۲ نمونه‌ای از زیر دامنه در روش انتگرال‌گیری محلی

در اینجا با هدف حل معادله، از تابع پایه شعاعی چند ضلعی برای حل عددی در روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین کمک گرفته شد. علت استفاده از این نوع تابع، دقت بسیار بالا در حل مسائل این‌چنینی بوده است. از مقایسه جواب‌ها در دو روش تحلیلی و بدون شبکه با یکدیگر می‌توان به دقت بسیار بالای روش بدون شبکه پی برد. در جدول ۴-۱ مقادیر تحلیلی، عددی و خطای به دست آمده از این روش نشان داده شده است.

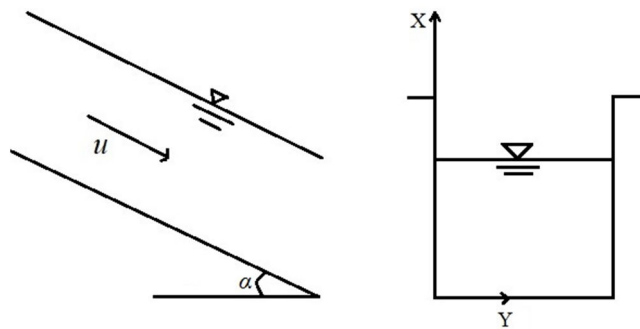
جدول ۴-۱. مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG و خطای آن

$\Phi$						X
y=0.4			y=0.2			
%خطا	بدون شبکه	دقیق	%خطا	بدون شبکه	دقیق	
0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0
0.456	0.0148	0.0149	0.370	0.0092	0.0092	0.1
0.120	0.0283	0.0283	0.389	0.0174	0.0175	0.2
0.349	0.0389	0.039	0.140	0.0242	0.0242	0.3
0.074	0.0459	0.0459	0.121	0.0283	0.0283	0.4
0.071	0.0482	0.0482	0.114	0.0299	0.0298	0.5
0.074	0.0459	0.0459	0.124	0.0282	0.0283	0.6
0.436	0.0388	0.039	0.143	0.0242	0.0242	0.7
0.240	0.0282	0.0283	0.389	0.0174	0.0175	0.8
0.456	0.0148	0.0149	0.370	0.0092	0.0092	0.9
0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	1.0

با دقت در جدول ۱-۴ و مقایسه‌ی پاسخ‌ها و خطاهای ناشی از آن، عملکرد مطلوب روش بدون شبکه و دقت کافی جواب‌ها نمایان می‌گردد.

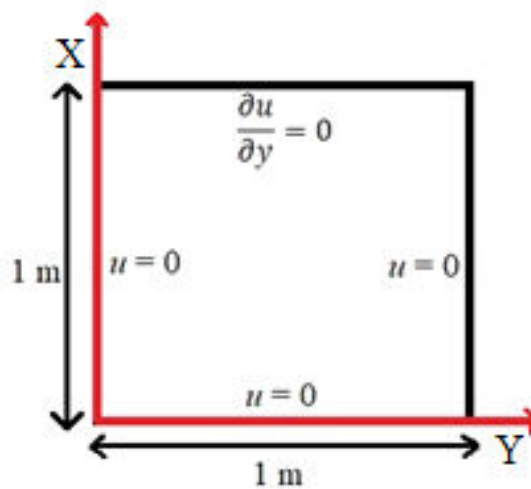
### ۳-۴ مدل‌سازی جریان سیال درون کانال

مسئله توزیع سرعت جریان داخل کانال شیب‌دار شکل ۳-۴ در حالت یکنواخت مورد بررسی قرار می‌گیرد. در اینجا  $X$  و  $Y$  به ترتیب محورهای عمودی و افقی کانال،  $u$  سرعت در مقطع کانال برحسب متر بر ثانیه و  $\alpha$  شیب کانال برحسب درجه می‌باشد.



شکل ۳-۴ جریان سیال داخل کانال

همچنین ابعاد مسئله و شرایط مرزی حاکم بر جریان یکنواخت در کانال در شکل ۴-۴ مشخص شده است.



شکل ۴-۴ ابعاد مسئله و شرایط مرزی

همان‌طور که در شکل مشخص است، سطح آب دارای شرط نیومن و بقیه‌ی مرزها دارای شرط مرزی درپشله می‌باشد.

#### ۴-۳-۱ رابطه سازی جریان سیال درون کانال

برای معادله ممنتوم حاکم بر جریان آب در کانال شیب‌دار در راستای جریان به صورت رابطه (۴-۴) بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (uw) \\ = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g \sin \alpha \end{aligned} \quad (۴-۴)$$

که در آن  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در راستای  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  و  $P$  فشار،  $g$  شتاب جاذبه،  $\rho$  چگالی،  $\alpha$  شیب کانال،  $\nu$  لزجت سینماتیکی می‌باشد. با فرض جریان یکنواخت و پایدار روابط (۴-۴) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (uv) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (uw) = 0, \quad \left( \frac{P}{\rho} \right) = 0 \end{aligned} \quad (۵-۴)$$

پس رابطه (۴-۴) به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g \sin \alpha}{\nu} \quad (۶-۴)$$

این مساله دارای حل دقیق به صورت رابطه (۷-۴) می‌باشد.

$$u(x, y) = -\frac{g \sin \alpha}{2\nu} x(x-1) \quad (۷-۴)$$

$$-\frac{g \sin \alpha}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3 \pi^3 \cosh(n\pi)} \sin(n\pi x) \cosh n\pi(y-1)$$

که در اینجا  $\alpha$  و  $g$  به ترتیب برابر است با  $1^\circ$  و  $9.81 \text{ m/s}^2$  است.

با استفاده از روش باقیمانده وزنی می‌توان رابطه (۶-۴) را به صورت زیر نوشت (رابطه (۸-۴)).

$$\int W \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \right) d\Omega = 0 \quad (۸-۴)$$

اینجا  $W$  تابع وزن است. در ادامه با انتگرال‌گیری جز به جز رابطه (۹-۴) به دست می‌آید.

$$\int W n_x \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma + \int W n_y \frac{\partial u}{\partial y} d\Gamma - \int \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega \quad (۹-۴)$$

$$- \int \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} d\Omega + \int W \frac{g \sin \alpha}{\nu} d\Omega = 0$$

دامنه کلی ( $\Omega$ ) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال‌گیری قسمت می‌شود.  $\Omega_0$  دامنه

انتگرال‌گیری برای گره I است. با استفاده از قضیه دایورژانس معادله (۹-۴) بدین صورت درمی‌آید

(رابطه (۱۰-۴)).

$$\int_{\Gamma_i} W \left( n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u d\Gamma + \int_{\Gamma_u} W \left( n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u d\Gamma \quad (۱۰-۴)$$

$$- \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u d\Omega$$

$$= - \int W \left( n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Gamma - \int W \frac{g \sin \alpha}{\nu} d\Omega$$

در اینجا  $\varphi$  عبارت است از تابع شکل. همچنین مرزهای انتگرال‌گیری کلی ( $\Gamma_Q$ ) به سه بخش  $\Gamma_Q = \Gamma_{Q_i} \cup \Gamma_{Q_u} \cup \Gamma_{Q_t}$  تقسیم می‌گردند که در اینجا  $\Gamma_{Q_i}$  مرزهای داخلی در دامنه‌ی انتگرال‌گیری که فصل مشترکی با مرزهای کلی مسأله ندارند،  $\Gamma_{Q_u}$  قسمتی از مرزهای طبیعی مسأله که با مرزهای کلی مسأله دارای فصل مشترک هستند و در نهایت  $\Gamma_{Q_t}$  قسمتی از مرزهای ضروری مسأله که با مرزهای کلی مسأله دارای فصل مشترک هستند.

#### ۴-۳-۲ نتایج تحلیل جریان سیال درون کانال

در ابتدای کار به منظور صحت‌سنجی از نتایج روش بدون شبکه برای شیب 1 درجه و لزجت گردابه‌ای ( $m^2s^{-1}$ ) 0.1 در مسأله با ابعاد شکل ۴-۴ با گره‌های منظم در مقایسه با روش دقیق، در جدول ۴-۲ آمده است.

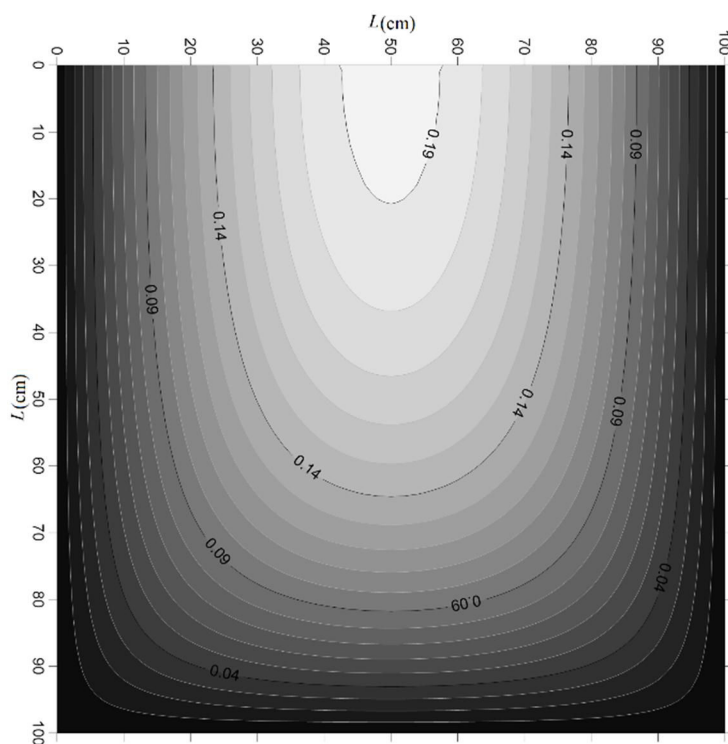
جدول ۴-۲ سرعت‌های به دست آمده از انواع تابع شکل شعاعی و خطای آن

خطای بدون شبکه %	بدون شبکه (m/sec)	دقیق (m/sec)	Y (m)	X (m)
1.662	0.0651	0.0662	0.2	0.2
0.321	0.0939	0.0936	0.2	0.4
0.310	0.0966	0.0969	0.2	0.5
0.202	0.0989	0.0991	0.4	0.2
0.059	0.1445	0.1445	0.4	0.4
0.133	0.1498	0.1500	0.4	0.5
0.086	0.1156	0.1157	0.6	0.2
0.032	0.1711	0.1711	0.6	0.4
0.022	0.1779	0.1779	0.6	0.5
0.081	0.1236	0.1235	0.8	0.2
0.018	0.1836	0.1836	0.8	0.4
0.015	0.1911	0.1911	0.8	0.5
0.015	0.1258	0.1258	1.0	0.2
0.012	0.1873	0.1873	1.0	0.4
0.011	0.1950	0.1950	1.0	0.5



در جدول ۲-۴ می‌توان کارایی روش بدون شبکه پترو-گلرکین به‌وضوح مشاهده کرد. در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برابر ۰/۱۹ می‌باشد که خطای بسیار کمی می‌باشد.

شکل ۴-۵ نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه به کمک تابع پایه شعاعی چندضلعی در کانال جریان می‌باشد.



شکل ۴-۵ کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی

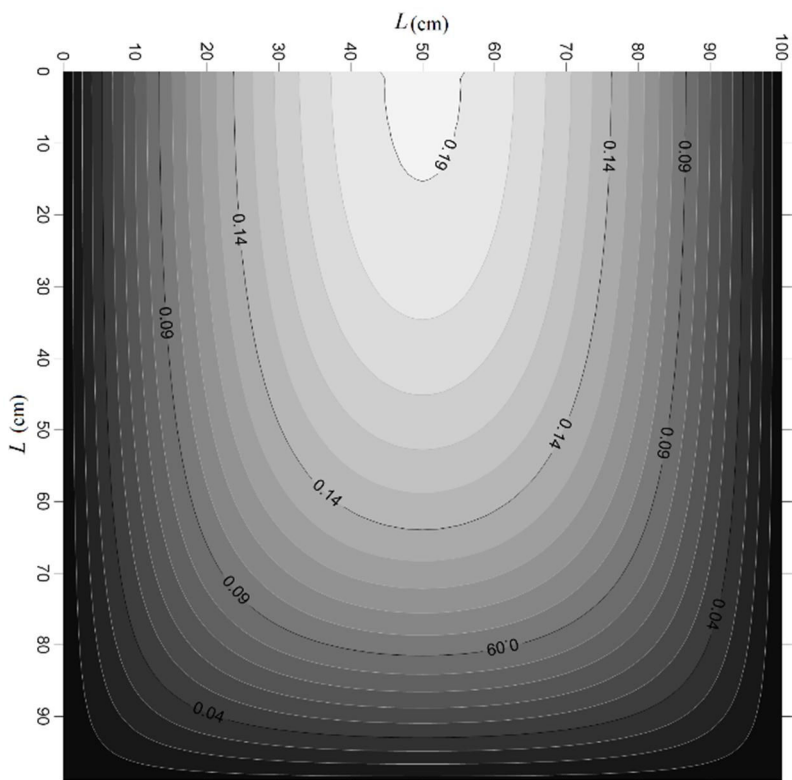
همان‌طور که قابل پیش‌بینی بود با توجه به شرایط مرزی سرعت در کف کانال و همچنین جداره‌ها به صفر می‌رسد. از سوی دیگر بیشترین سرعت در سطح کانال در قسمت میانی رخ می‌دهد. همان‌طور که در ابتدای این نوشتار بدان اشاره شد انواع تابع شکل شعاعی وجود دارد که به‌منظور مقایسه و تحلیل آن در جدول ۳-۴ مقادیر و میزان خطای تولید شده از سه تابع چندضلعی، گوسی و نواری نشان داده شده است.

جدول ۳-۴ سرعت‌های به دست آمده از انواع تابع شکل شعاعی و خطای آن

%خطا نواری	%خطا گوسی	خطا% چندضلعی	بدون شبکه نواری (m/sec)	بدون شبکه گوسی (m/sec)	Y (m)	X (m)
2.625	2.082	1.629	0.0645	0.0648	0.2	0.2
0.504	0.399	0.319	0.0931	0.0932	0.2	0.4
0.468	0.348	0.267	0.0964	0.0966	0.2	0.5
0.243	0.207	0.162	0.0989	0.0989	0.4	0.2
0.014	0.011	0.009	0.1445	0.1445	0.4	0.4
0.195	0.155	0.120	0.1497	0.1498	0.4	0.5
0.160	0.127	0.098	0.1155	0.1156	0.6	0.2
0.040	0.034	0.029	0.1710	0.1710	0.6	0.4
0.047	0.034	0.027	0.1778	0.1778	0.6	0.5
0.145	0.117	0.092	0.1233	0.1234	0.8	0.2
0.031	0.023	0.017	0.1835	0.1836	0.8	0.4
0.014	0.012	0.009	0.1911	0.1911	0.8	0.5
0.048	0.036	0.027	0.1257	0.1258	1.0	0.2
0.030	0.022	0.019	0.1872	0.1873	1.0	0.4
0.038	0.026	0.021	0.1949	0.1949	1.0	0.5

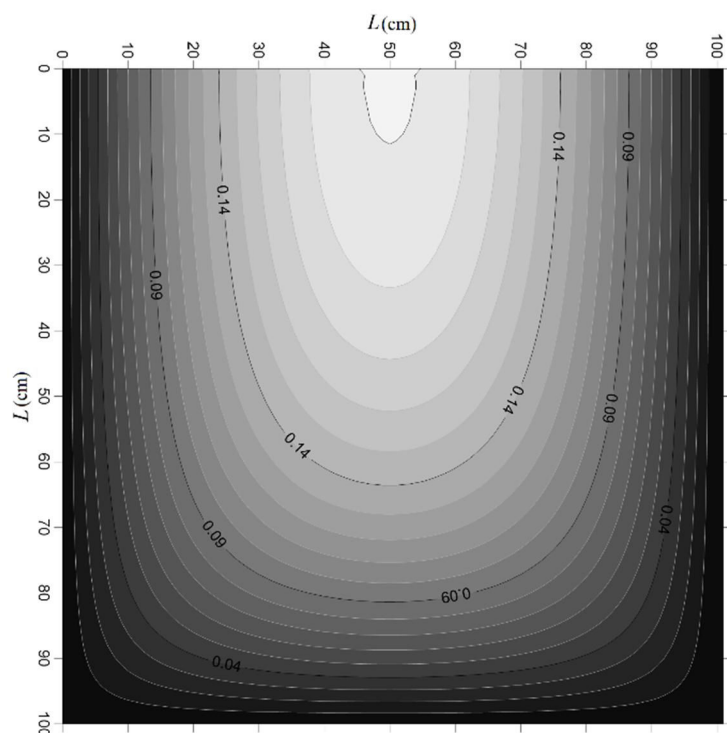
در جدول ۳-۴ می‌توان کارایی روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع شکل شعاعی در برابر انواع دیگر تابع شکل را مشاهده کرد. همان‌طور که قبلاً اشاره شد در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع شکل چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برابر ۰/۱۹ می‌باشد که خطای مناسبی می‌باشد. در حالی که در تابع پایه شعاعی گوسی درصد متوسط خطای مطلق برابر ۰/۲۵ و در تابع پایه شعاعی نواری متوسط خطای مطلق برابر ۰/۳۲ شده که افزایش خطا را نشان می‌دهد.

شکل ۴-۶ نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه به کمک تابع پایه شعاعی گوسی در کانال جریان می‌باشد.



شکل ۴-۶ کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی گوسی

همان طور که توضیح داده شد، در تابع پایه شعاعی گوسی درصد متوسط خطای مطلق به  $0.25$  می‌رسد که البته خطای قابل قبولی می‌باشد. شکل ۴-۷ نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه به کمک تابع پایه شعاعی نواری در کانال جریان می‌باشد.



شکل ۴-۷ کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی نواری

از سوی دیگر متوسط خطای مطلق در تابع پایه شعاعی نواری به  $0.32\%$  درصد می‌رسد که همچنان قابل قبول است. در مجموع به نظر می‌رسد در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی، کمترین میزان درصد متوسط خطای مطلق رخ می‌دهد.

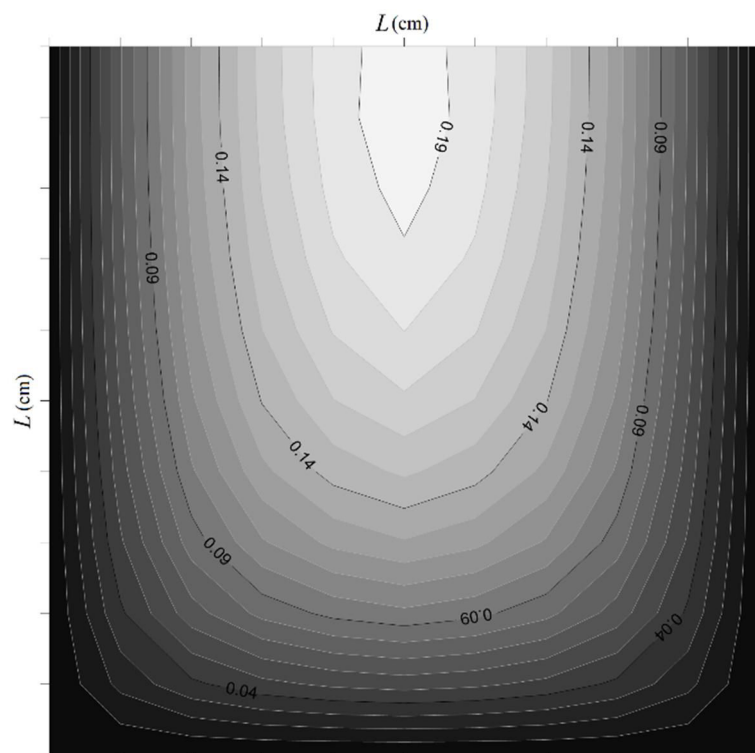
به منظور مطالعه‌ی شبکه‌ی فرضی گره‌ها و تأثیر تعداد گره‌ها بر کیفیت این روش عددی، نتایج حاصله از حل مسأله با ۹، ۱۶ و ۳۶ گره با روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصله در جدول ۴-۴ نشان داده شده است.

جدول ۴-۴ تأثیر تعداد گره‌ها در روش MLPG و خطای آن

%خطا 36 گرهی	%خطا 16 گرهی	%خطا 9 گرهی	بدون شبکه 16 گرهی (m/sec)	بدون شبکه 9 گرهی (m/sec)	Y (m)	X (m)
1.662	5.943	27.015	0.0623	0.0483	0.2	0.2
0.321	3.778	17.990	0.0901	0.0768	0.2	0.4
0.310	2.561	13.480	0.0944	0.0838	0.2	0.5
0.202	2.321	9.670	0.0968	0.0895	0.4	0.2
0.059	1.262	6.311	0.1427	0.1354	0.4	0.4
0.133	1.078	4.147	0.1484	0.1438	0.4	0.5
0.086	0.693	3.465	0.1149	0.1117	0.6	0.2
0.032	0.588	2.939	0.1701	0.1661	0.6	0.4
0.022	0.441	2.942	0.1771	0.1727	0.6	0.5
0.081	0.371	2.470	0.1230	0.1204	0.8	0.2
0.018	0.446	2.230	0.1828	0.1795	0.8	0.4
0.015	0.397	1.985	0.1903	0.1873	0.8	0.5
0.015	0.263	1.463	0.1255	0.1240	1.0	0.2
0.012	0.221	0.920	0.1869	0.1856	1.0	0.4
0.011	0.192	0.960	0.1946	0.1931	1.0	0.5

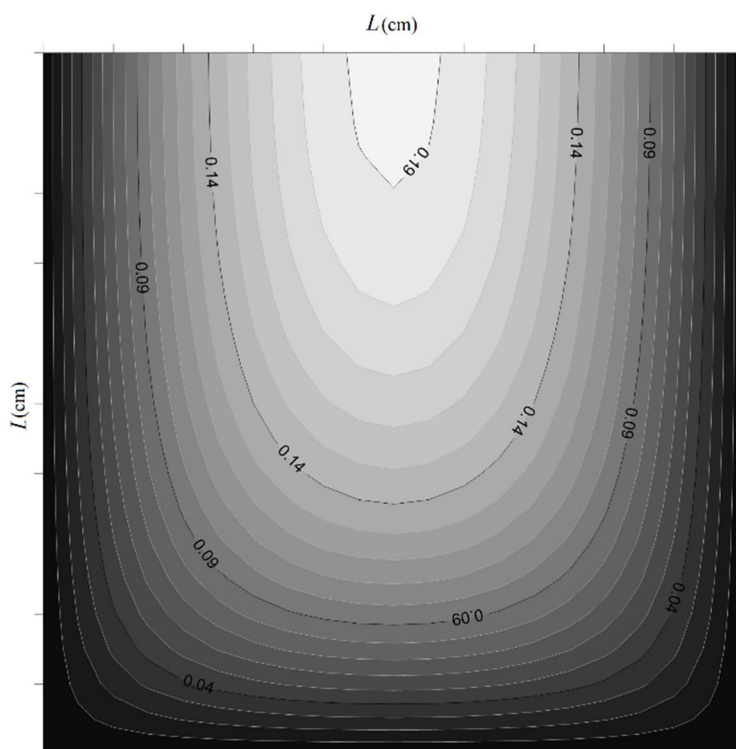
می‌توان افزایش دقت مسأله را در روش بدون شبکه در جدول ۴-۴ مشاهده کرد. در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه تابع شعاعی چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برای مسأله با ۹، ۱۶ و ۳۶ گره به ترتیب برابر ۶/۵۴، ۱/۳۸ و ۰/۱۹ می‌باشد که نشان می‌دهد با افزایش تعداد گره‌ها افزایش دقت و البته کاهش سرعت رخ می‌دهد.

شکل ۴-۸ نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه با ۹ گره را در کانال جریان می‌باشد.



شکل ۴-۸ کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی (9 گرهی)

همان طور که در شکل مشخص است، با کاهش نقاط گرهی، کاهش چشم گیر دقت و افزایش خطا رخ خواهد داد. شکستگی های خطوط هم سرعت کانتورها به این علت می تواند باشد. شکل ۴-۹ نشان دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه با ۱۶ گره را در کانال جریان می باشد.



شکل ۹-۴ کانتورهای سرعت در تابع پایه شعاعی چندضلعی (16 گرهی)

همان‌طور که از شکل‌های ۸-۴ و ۹-۴ مشخص است، متوسط خطای مطلق با افزایش گره‌ها، کاهش چشم‌گیری پیدا می‌کند.

#### ۴-۴ مدل‌سازی معادله برگرز

معادله برگرز مرتبه اول یک معادله دیفرانسیل پارابولیک غیر خطی است که حالت ساده شده‌ای از معادلات ناویر استوکس است. این معادله از این جهت مورد استفاده قرار گرفته، چرا که جواب‌های تحلیلی آن موجود است و می‌تواند برای صحت عملکرد روش MLPG مورد استفاده قرار گیرد. معادله برگرز دارای انواع متفاوت است که هر کدام دارای کاربردهای مخصوص به خود است. معادله برگرز به توصیف بعضی از پدیده‌های مرتبط با امواج غیرخطی می‌پردازد که در نظریه انتشار موج کاربرد دارد.

#### ۱-۴-۴ رابطه سازی معادله برگرز

معادله‌ی غیر خطی انتقال و انتشار برگرز حاکم بر جریان آب در راستای جریان به صورت رابطه (۴-۴) -

(۱۱) بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (۱۱-۴)$$

که در آن  $u$  مؤلفه‌های سرعت در راستای  $X$  و  $v$  لزجت سینماتیکی می‌باشد. شرایط اولیه به

صورت زیر تعریف می‌شود.

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad a < x < b \quad (۱۲-۴)$$

برای شرایط مرزی رابطه (۴-۱۳) بیان می‌گردد:

$$u(a, t) = f(t), \quad u(b, t) = g(t), \quad t > 0 \quad (۴-۱۳)$$

با استفاده از روش باقیمانده وزنی می‌توان رابطه (۴-۱۱) را به صورت زیر نوشت (رابطه (۴-۱۴)).

$$\int W \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) d\Omega = 0 \quad (۴-۴۵)$$

اینجا  $W$  تابع وزن است. با استفاده از قضیه دایورژانس رابطه (۴-۱۵) به دست می‌آید.

$$\int W \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int W u \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int v \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega - \int v W n_x \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma = 0 \quad (۴-۱۵)$$



دامنه کلی ( $\Omega$ ) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال گیری قسمت می شود.  $\Omega_Q$  دامنه انتگرال گیری برای گره I است. مرز کلی ( $\Gamma_Q$ ) مسئله به صورت  $\Gamma_Q = \Gamma_{Q_i} \cup \Gamma_{Q_u}$  به چند ناحیه تقسیم می شود می گردند که در اینجا  $\Gamma_{Q_i}$  مرزهای داخلی در دامنه ی انتگرال گیری که فصل مشترکی با مرزهای کلی مسأله ندارند،  $\Gamma_{Q_u}$  قسمتی از مرزهای طبیعی مسأله که با مرزهای کلی مسأله دارای فصل مشترک هستند. در نتیجه رابطه (۴-۱۵) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\int_{\Omega_Q} W \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_Q} Wu \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega_Q} v \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} d\Omega - \int_{\Gamma_i} vWn_x \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} vWn_x \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma = 0 \quad (۴-۱۶)$$

با جایگذاری تابع شکل در معادله (۴-۱۶)، رابطه (۴-۱۷) به دست می آید.

$$\int_{\Omega_Q} W\phi \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} d\Omega + \left( \int_{\Omega_Q} v \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega - \int_{\Gamma_i} vWn_x \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} vWn_x \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Gamma \right) \bar{u} + \int_{\Omega_Q} W\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega = 0 \quad (۴-۱۷)$$

رابطه (۴-۱۷) را می توان به صورت رابطه (۴-۱۸) خلاصه کرد.

$$C\dot{u} + Ku + K_T u^2 = 0 \quad (۴-۱۸)$$

که در رابطه (8)  $C$  و  $K$  و  $K_T$  را می‌توان به صورت رابطه‌های (۱۹-۴) تا (۲۱-۴) بیان کرد.

$$C = \int_{\Omega_Q} W \phi d\Omega \quad (۱۹-۴)$$

$$K = \int_{\Omega_Q} v \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega - \int_{\Gamma_i} v W n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} v W n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Gamma \quad (۲۰-۴)$$

$$K_T = \int_{\Omega_Q} W \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega \quad (۲۱-۴)$$

رابطه (۱۸-۴) با استفاده از تغییر متغیر  $\psi = u^{-1}$  در معادلات غیر خطی به صورت رابطه (۲۲-۴)

تبدیل می‌شود:

$$C\dot{\psi} - K\psi - K_T = 0 \quad (۲۲-۴)$$

از تبدیل لاپلاس برای حل رابطه (۵۳-۴) استفاده می‌گردد، در نتیجه رابطه (۲۳-۴) به دست

می‌آید:

$$\mathcal{L}(\psi) = \frac{\frac{K_T}{S} + C\psi_0}{Cs - K} \quad (۲۳-۴)$$

در رابطه (۲۳-۴) عملگر لاپلاس،  $S$  متغیر لاپلاس و  $\psi_0$  مقدار اولیه می‌باشد.  $\psi$  با استفاده از

رابطه (۲۴-۴) به دست می‌آید:

$$\psi = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K_T/S + C\psi_0}{Cs - K}\right) \quad (۲۴-۴)$$

روش‌های عددی زیادی برای یافتن معکوس تبدیل لاپلاس وجود دارد، که در این تحقیق از

الگوریتم تالبوت [۶۷] استفاده می‌گردد، در نتیجه رابطه‌های (۴-۲۵) به دست می‌آید:

$$\psi = \frac{2}{5t} \sum_{k=0}^{M-1} \operatorname{Re} \left( \gamma_k \left( \frac{K_T/s_k + C\psi_0}{Cs_k - K} \right) \right)$$

$$s_k = \frac{\delta_k}{t}$$

$$\delta_0 = \frac{2M}{5}$$

(۴-۲۵)

$$\delta_k = \frac{2k\pi}{5} \left( \cot(k\pi/M) + i \right), \quad 0 < k < M$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} e^{\delta_0}$$

$$\gamma_k = \left[ 1 + i \left( \cot(k\pi/M) \right) \left( 1 + \left[ \cot(k\pi/M) \right]^2 \right) - i \cot(k\pi/M) \right] e^{\delta_0}, \quad 0 < k < M$$

$$i = \sqrt{-1}$$

#### ۴-۴-۲ نتایج تحلیل معادله‌ی برگرز

به منظور مقایسه و اطمینان از پاسخ‌های روش بدون شبکه در مسائل غیر خطی، پاسخ‌ها با روش

تحلیلی [۶۸] مورد ارزیابی قرار گرفته شد. جدول ۴-۵ مقادیر سرعت و خطای آن را نمایش می‌دهد.

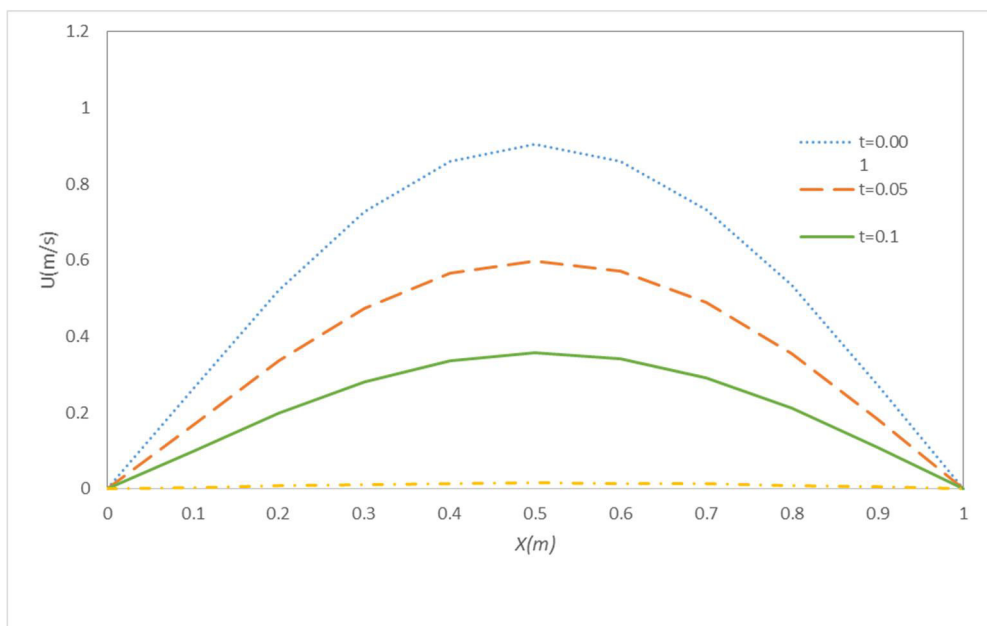
جدول ۴-۵ مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG و خطای آن

						$u$
$t=0.05$			$t=0.001$			$X$
%خطا	بدون شبکه	دقیق	%خطا	بدون شبکه	دقیق	
0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0
0.749	0.1676	0.1689	0.271	0.2633	0.2640	0.1
0.425	0.3352	0.3366	0.274	0.5209	0.5223	0.2
0.111	0.4738	0.4743	0.885	0.7276	0.7341	0.3
0.557	0.5649	0.5681	0.714	0.8590	0.8652	0.4
0.154	0.5991	0.6000	0.246	0.9046	0.9068	0.5
0.963	0.5716	0.5772	0.106	0.8595	0.8604	0.6
0.420	0.4883	0.4904	0.97	0.7327	0.7399	0.7
0.548	0.3555	0.3575	0.765	0.5334	0.5375	0.8
0.490	0.1825	0.1834	0.316	0.2740	0.2749	0.9
0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	1.0

همان‌طور که جدول ۴-۵ نشان می‌دهد، خطای روش MLPG نسبت به روش دقیق بسیار ناچیز و

حداکثر به ۰.۹۶۳٪ محدود می‌گردد. همچنین نمودار جواب‌های بدون شبکه در زمان‌های مختلف در

شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است.



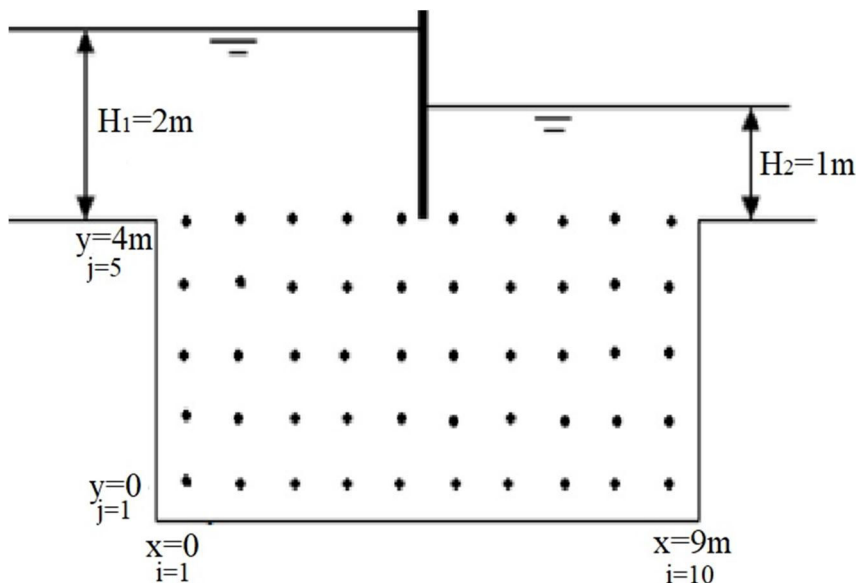
شکل ۴-۱۰ مقادیر مختلف سرعت در زمان‌های مختلف به روش MLPG

#### ۴-۵ مدل سازی جریان آب در خاک در حالت دائمی

معادله حاکم بر جریان آب در خاک با معادله لاپلاس بیان می‌شود. معادله لاپلاس برای خاک‌های غیر همسانگرد در حالت جریان پایدار به صورت رابطه (۴-۲۶) بیان می‌گردد:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (۴-۲۶)$$

در اینجا  $K_x$  و  $K_y$  به ترتیب ضریب نفوذ پذیری در جهت افقی و عمودی می‌باشد و  $h$  هد آب است. در این پژوهش مساله نشت آب در زیر بدنه برای خاک همسان در دو جهت  $x, y$  در زیر تیغه آب‌بند- شکل ۴-۱۱ در حالت جریان دائم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در اینجا عبور آب از زیر سپر قائم ارزیابی می‌گردد. ارتفاع آب در بالا دست 2m و در پایین دست 1m است. در نتیجه اختلاف هد یک متری ایجاد شده بین بالادست جریان و پایین دست، سبب جریان در خاک می‌گردد.



شکل ۱۱-۴ شماتیک مساله نشت آب از زیر تیغه آب بند

#### ۴-۵-۱ رابطه سازی جریان آب در خاک در حالت دائمی

برای حل معادله لاپلاس از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین (MLPG) بهره جسته می شود. شکل ضعیف معادله لاپلاس در گره I با روش باقیمانده وزنی به صورت رابطه (۴-۲۷) بیان می شود.

$$\int_{\Omega} W \left( K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) d\Omega = 0 \quad (۴-۲۷)$$

اینجا W تابع وزن است. دامنه کلی ( $\Omega$ ) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال گیری تقسیم

می شود. با استفاده از قضیه دایورژانس معادله (۴-۲۷) به صورت رابطه (۴-۲۸) درمی آید:

$$\int_{\Gamma} W (k_x n_x \frac{\partial h}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial h}{\partial y}) d\Gamma - \int_{\Omega} (k_x \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + k_y \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y}) d\Omega = 0 \quad (۴-۲۸)$$

دامنه کلی ( $\Omega$ ) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال گیری قسمت می شود.  $\Omega_Q$  دامنه

انتگرال گیری برای گره I است. با استفاده از تقسیم بندی مرزها معادله (۴-۲۸) به صورت رابطه (۴-۲۹) استخراج می گردد:

$$\int_{\Gamma_i} W \left( k_x n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h d\Gamma + \int_{\Gamma_u} W \left( k_x n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h d\Gamma - \int_{\Omega} \left( k_x \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_y \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h d\Omega = 0 \quad (29-4)$$

اینجا  $\varphi$  تابع شکل است که در فصل قبل بیان گردید و نیز مرز کلی ( $\Gamma_Q$ ) مسئله در اینجا به صورت  $\Gamma_Q = \Gamma_i \cup \Gamma_u$  به چند ناحیه تقسیم می شود.

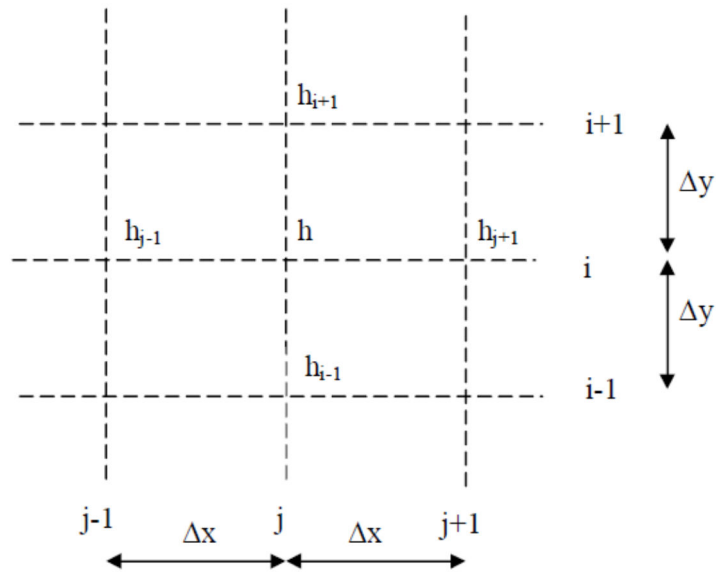
#### ۴-۵-۲ نتایج تحلیل جریان آب در خاک در حالت دائمی

نتایج حاصل از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین برای اختلاف هد ۱ متر با گره های منظم برای حالت جریان دائم در جدول ۴-۶ آمده است.

جدول ۴-۶ مقدار هد آب در گره ها در بدون شبکه

h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1.923	1.911	1.882	1.821	1.683	1.317	1.179	1.118	1.089	1.077
1.858	1.838	1.796	1.719	1.593	1.407	1.281	1.204	1.162	1.142
1.812	1.790	1.743	1.668	1.563	1.437	1.332	1.257	1.210	1.188
1.789	1.766	1.718	1.646	1.552	1.448	1.354	1.282	1.234	1.211

ارزیابی نتایج حاصل از روش بدون شبکه، به کمک روش تفاضل محدود انجام شده است. بدین منظور با استفاده از روش تفاضل محدود مطابق شکل ۴-۱۲، معادله ی ساده شده (۴-۲۶) رابطه سازی می گردد.



شکل ۴-۱۲ شبکه بندی تفاضل محدود برای حل معادله لاپلاس

در ادامه رابطه (۴-۵) به صورت رابطه (۴-۹) درمی آید:

$$\frac{h_{i-1} - 2h + h_{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{h_{j-1} - 2h + h_{j+1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (۴-۳۰)$$

در ادامه با قرار دادن  $\Delta x = \Delta y$  و ادامه عملیات جبری رابطه (۴-۱۰) به دست می آید:

$$\hat{h} = (h_{i-1} + h_{i+1} + h_{j-1} + h_{j+1})/4 \quad (۴-۳۱)$$

نتایج حاصل از روش تفاضل محدود در جدول ۴-۷ آمده است. مقایسه‌ی بین روش‌های تفاضل

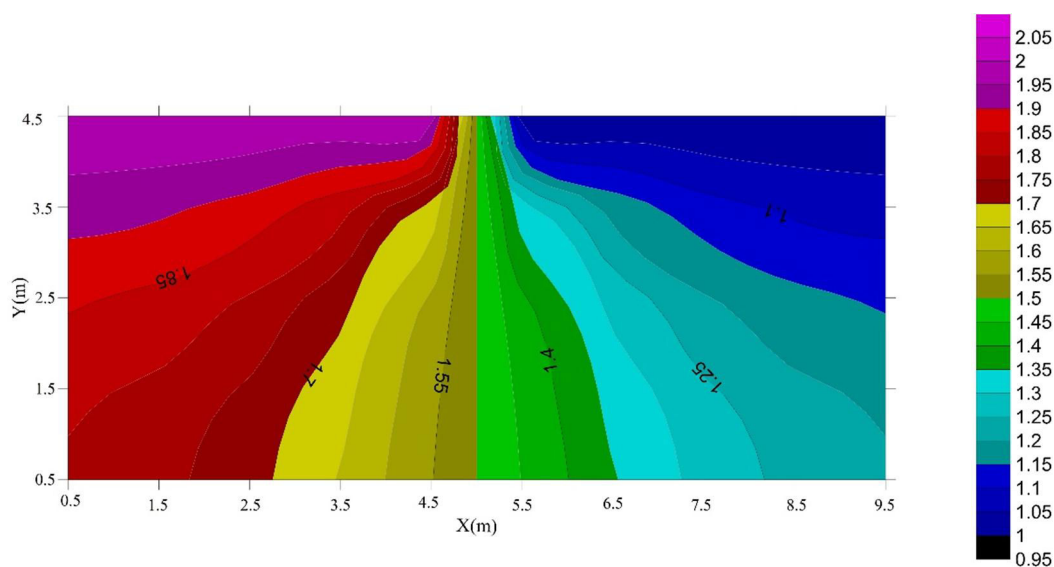
محدود و MLPG دقت بالا و سرعت بیشتر محاسبات را نشان می‌دهد.



جدول ۴-۷. مقدار هد آب در گره‌ها در روش تفاضل محدود

h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1.942	1.928	1.897	1.834	1.693	1.325	1.187	1.127	1.099	1.088
1.876	1.855	1.810	1.731	1.602	1.416	1.290	1.214	1.172	1.154
1.830	1.806	1.757	1.679	1.572	1.446	1.342	1.267	1.221	1.200
1.807	1.781	1.732	1.657	1.561	1.457	1.364	1.292	1.246	1.223

شکل ۴-۱۳ نشان دهنده‌ی خطوط هم‌پتانسیل به روش بدون شبکه از زیر بدنه می‌باشد.



شکل ۴-۱۳ خطوط هم‌پتانسیل به روش بدون شبکه از زیر آب بند

#### ۴-۶ مدل‌سازی جریان آب در خاک در حالت غیر دائمی

در این قسمت مساله نشت آب در زیر بدنه برای خاک همسان در دو جهت  $x, y$  در زیر تیغه آب‌بند- شکل ۴-۱۱ در حالت جریان غیر دائم مورد بررسی قرار می‌گیرد. ارتفاع آب در بالا دست 2m و در پایین دست 1m است. در نتیجه اختلاف هد یک متری در اینجا وجود دارد. معادله جریان آب در خاک برای خاک‌های غیر همسانگرد در حالت جریان ناپایدار به صورت رابطه

(۳۲-۴) بیان می‌گردد:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (۳۲-۴)$$

که در اینجا  $S$  نشان دهنده‌ی ذخیره‌ی ویژه‌ی خاکی می‌باشد.

#### ۴-۶-۱ رابطه‌ی سازی جریان آب در خاک در حالت غیر دائمی

برای حل معادله لاپلاس از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین (MLPG) بهره‌ی جسته می‌شود.

شکل ضعیف معادله لاپلاس در گره I با روش باقیمانده وزنی به صورت رابطه (۳۳-۴) بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega} W \left( K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - S \frac{\partial h}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \quad (۳۳-۴)$$

با استفاده از قضیه دایورژانس معادله (۳۳-۴) به صورت رابطه (۳۴-۴) درمی‌آید:

$$\int_{\Gamma} W (k_x n_x \frac{\partial h}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial h}{\partial y}) d\Gamma - \int_{\Omega} (k_x \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + k_y \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y}) d\Omega + \int_{\Omega} WS \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega = 0 \quad (۳۴-۴)$$

دامنه کلی ( $\Omega$ ) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال‌گیری قسمت می‌شود.  $\Omega_0$  دامنه

انتگرال‌گیری برای گره I است. با استفاده از تقسیم‌بندی مرزها معادله (۳۴-۴) به صورت رابطه (۴-۴)

(۳۵) استخراج می‌گردد:

$$\int_{\Gamma_i} W \left( k_x n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h d\Gamma + \int_{\Gamma_u} W \left( k_x n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h d\Gamma \quad (35-4)$$

$$- \int_{\Omega} \left( k_x \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_y \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h d\Omega - \int_{\Omega} W S \frac{\partial h}{\partial t} d\Omega = 0$$

اینجا  $\varphi$  تابع شکل است و نیز مرز کلی ( $\Gamma_Q$ ) مسئله به صورت  $\Gamma_Q = \Gamma_i \cup \Gamma_u$  به چند ناحیه تقسیم می‌شود.

#### ۴-۶-۲ نتایج تحلیل جریان آب در خاک در حالت غیر دائمی

در این قسمت مساله در حالت ناپایدار مورد ارزیابی قرار گرفته است. بدین منظور هندسه مشابه حالت دائم در فواصل مختلف زمانی با ضریب نفوذ پذیری  $K = 1e^{-5} m/s$  در دو جهت و نیز ذخیره ویژه‌ی خاکی  $S = 4e^{-4} 1/s$  مورد مدل‌سازی قرار گرفت. نتایج حاصل از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین برای اختلاف هد ۱ متر با گره‌های منظم برای حالت جریان غیر دائم در زمان‌های مختلف در جدول ۴-۸ تا جدول ۴-۱۶ آمده است.

جدول ۴-۸ مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان  $t=1000s$

h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

جدول ۹-۴ مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان  $t=2000s$

h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
0.750	0.750	0.750	0.750	0.688	0.438	0.375	0.375	0.375	0.375
0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.063	0.063	0.063	0.063	0.063
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

جدول ۱۰-۴ مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان  $t=5000s$

h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1.098	1.097	1.093	1.067	0.981	0.665	0.579	0.554	0.550	0.549
0.453	0.453	0.449	0.438	0.387	0.293	0.242	0.230	0.227	0.227
0.131	0.131	0.131	0.125	0.113	0.083	0.071	0.065	0.065	0.065
0.025	0.025	0.025	0.025	0.021	0.017	0.013	0.013	0.013	0.013

جدول ۱۱-۴ مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان  $t=10000s$

h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1.326	1.323	1.310	1.273	1.163	0.829	0.718	0.682	0.669	0.666
0.768	0.763	0.751	0.717	0.644	0.511	0.438	0.403	0.391	0.387
0.392	0.389	0.380	0.361	0.321	0.268	0.228	0.209	0.200	0.198
0.209	0.208	0.203	0.191	0.171	0.144	0.124	0.112	0.107	0.105

جدول ۱۲-۴ مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان  $t=20000s$

h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1.522	1.514	1.494	1.446	1.323	0.973	0.849	0.801	0.781	0.774
1.106	1.095	1.069	1.016	0.918	0.761	0.663	0.610	0.584	0.574
0.801	0.791	0.767	0.723	0.655	0.570	0.502	0.459	0.434	0.424
0.641	0.631	0.610	0.574	0.522	0.463	0.411	0.375	0.353	0.344

جدول ۱۳-۴ مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان  $t=50000s$

h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1.774	1.763	1.735	1.677	1.541	1.179	1.043	0.985	0.957	0.946
1.578	1.560	1.521	1.449	1.327	1.147	1.026	0.954	0.914	0.896
1.435	1.415	1.372	1.303	1.205	1.087	0.989	0.919	0.877	0.857
1.360	1.339	1.297	1.231	1.145	1.049	0.963	0.898	0.855	0.834

جدول ۱۴-۴ مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان  $t=100000s$

h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1.892	1.880	1.851	1.790	1.652	1.287	1.149	1.088	1.059	1.047
1.800	1.781	1.738	1.662	1.536	1.350	1.224	1.148	1.106	1.086
1.734	1.712	1.665	1.590	1.486	1.361	1.256	1.182	1.135	1.113
1.700	1.677	1.630	1.558	1.465	1.361	1.268	1.196	1.149	1.126

جدول ۱۵-۴ مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان  $t=200000s$

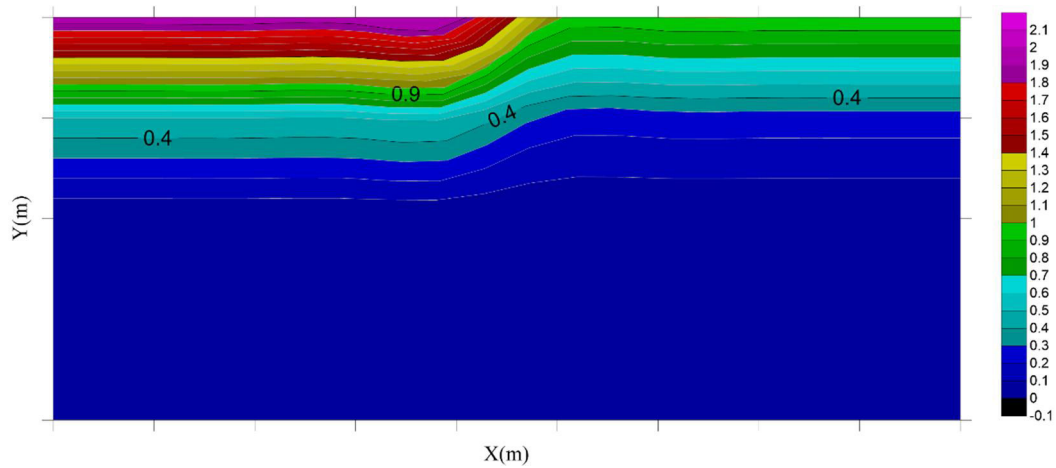
h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1.921	1.909	1.880	1.820	1.681	1.316	1.178	1.117	1.088	1.076
1.855	1.836	1.793	1.717	1.590	1.404	1.278	1.202	1.159	1.139
1.809	1.786	1.739	1.664	1.559	1.434	1.329	1.254	1.207	1.184
1.785	1.761	1.714	1.642	1.548	1.444	1.350	1.278	1.230	1.207

جدول ۱۶-۴ مقدار هد آب در گره‌ها در بدون شبکه در زمان  $t=500000s$

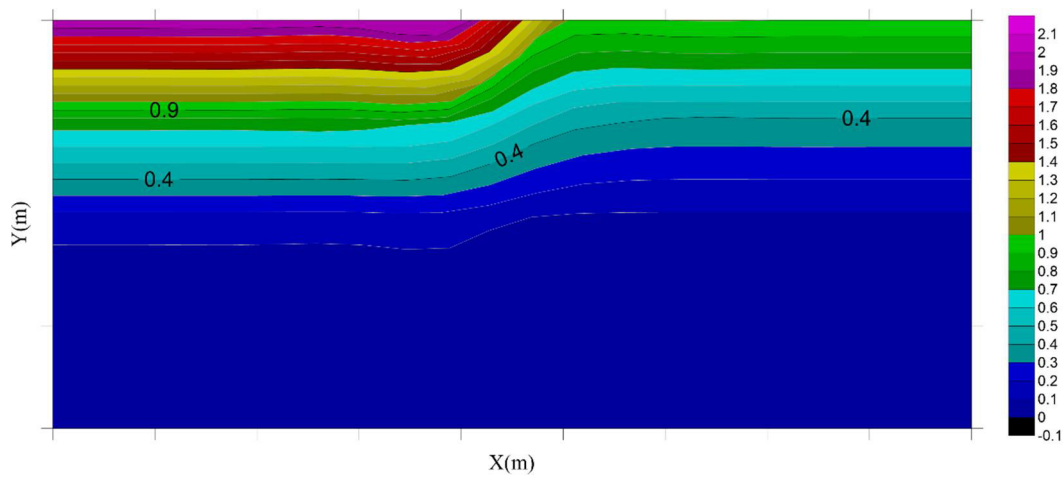
h(m)									
2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1.923	1.911	1.882	1.821	1.683	1.317	1.179	1.118	1.089	1.077
1.858	1.838	1.796	1.719	1.593	1.407	1.281	1.204	1.161	1.142
1.812	1.790	1.743	1.668	1.563	1.437	1.332	1.257	1.210	1.188
1.789	1.766	1.718	1.646	1.552	1.448	1.354	1.282	1.234	1.211

همان‌طور که از مقایسه مقادیر جدول‌ها مشخص است، با گذشت زمان جواب‌ها به یکدیگر نزدیک شده و می‌توان گفت جریان به حالت پایدار نزدیک شده است.

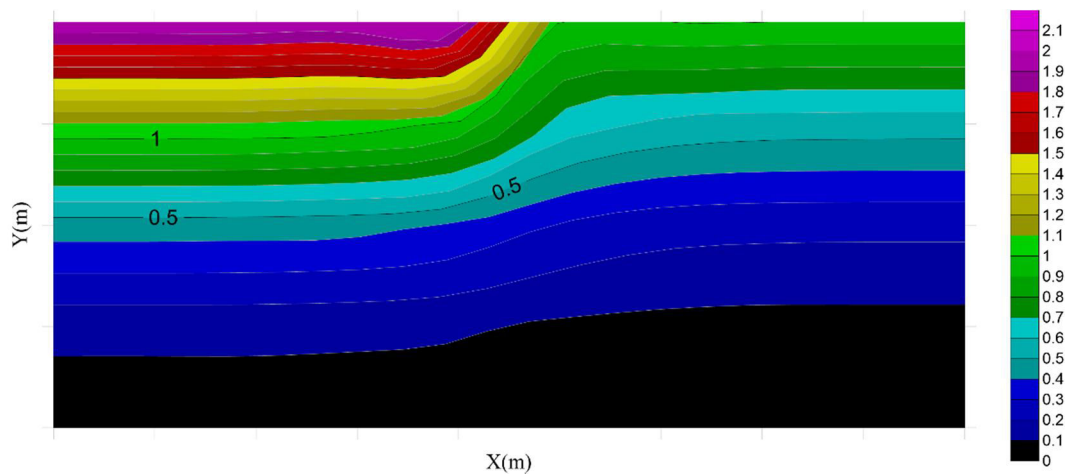
کانتورهای فشار حاصل از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین برای حالت جریان غیر دائم در زمان‌های  $t=1000s$  و  $t=2000s$  و  $t=5000s$  و  $t=10000s$  و  $t=20000s$  و  $t=50000s$  و  $t=100000s$  و  $t=200000s$  و  $t=500000s$  در شکل‌های ۱۴-۴ تا ۲۲-۴ ارائه گردیده است.



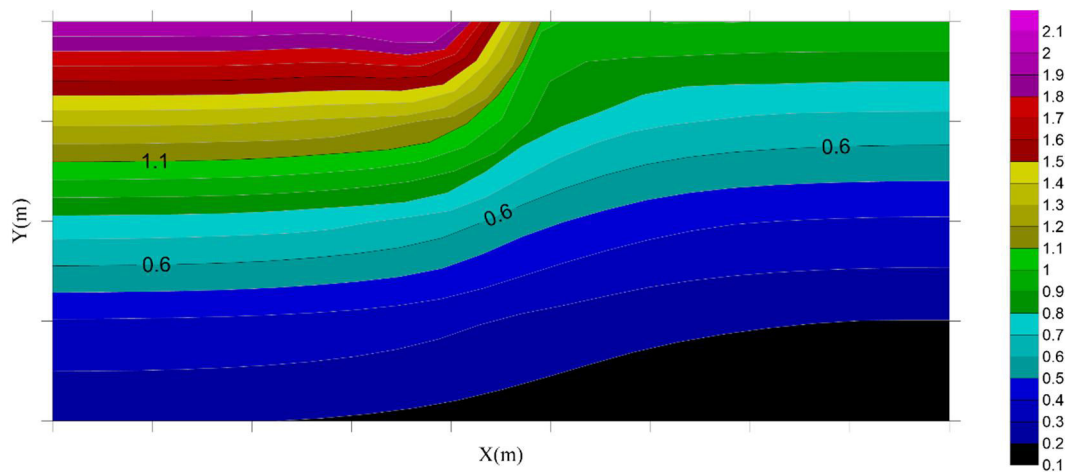
شکل ۴-۱۴ خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان  $t=1000s$  به روش MLPG



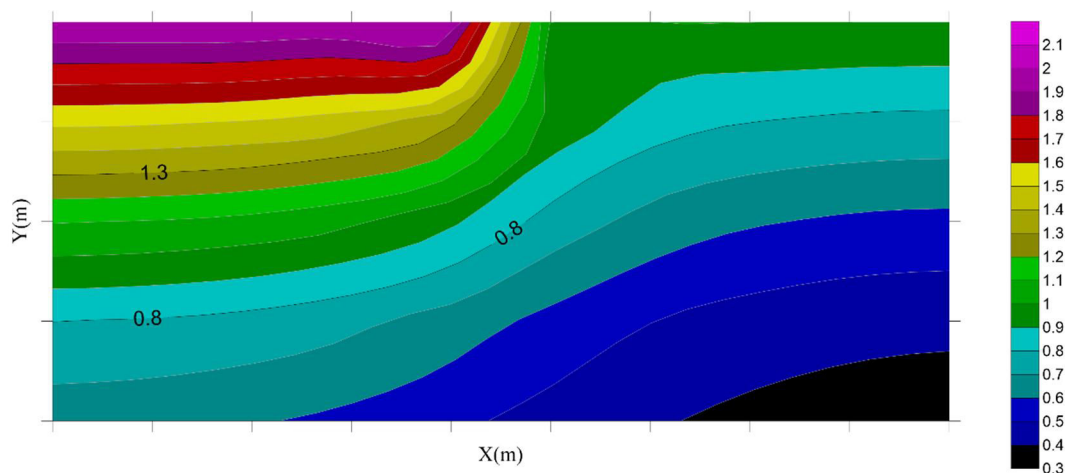
شکل ۴-۱۵ خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان  $t=2000s$  به روش MLPG



شکل ۴-۱۶ خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان  $t=5000s$  به روش MLPG

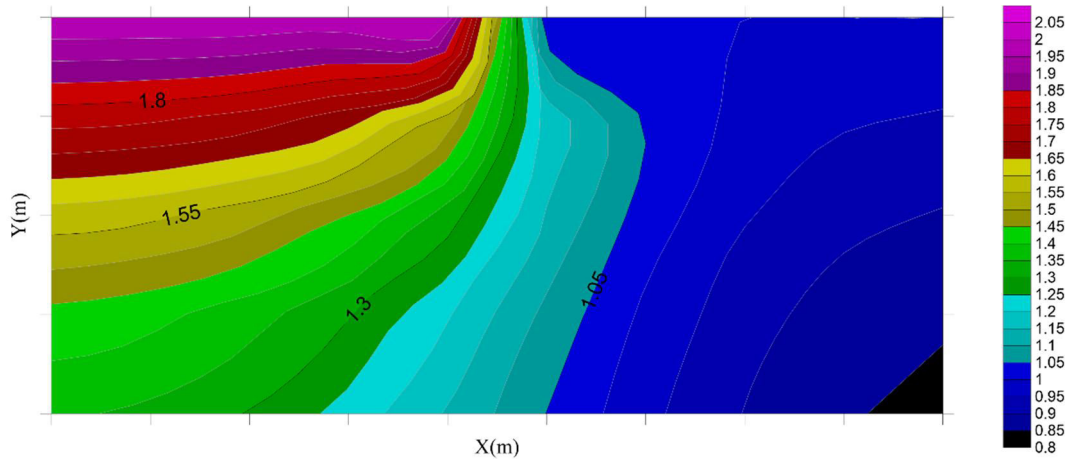


شکل ۴-۱۷ خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان  $t=10000s$  به روش MLPG

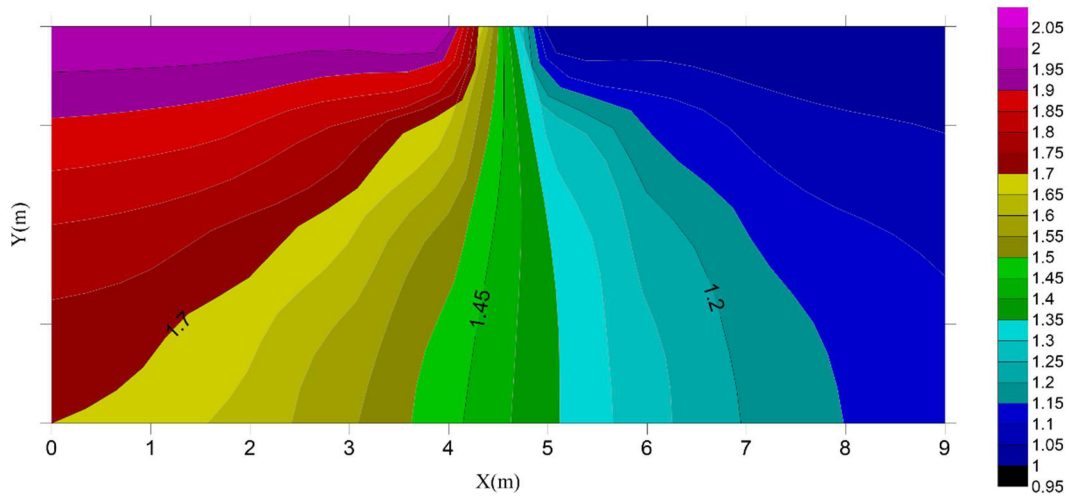


شکل ۴-۱۸ خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان  $t=20000s$  به روش MLPG

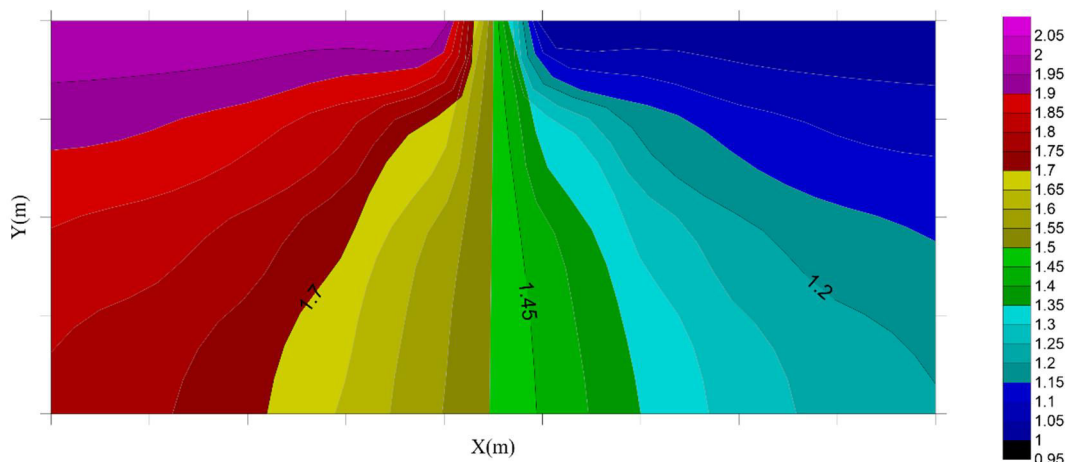




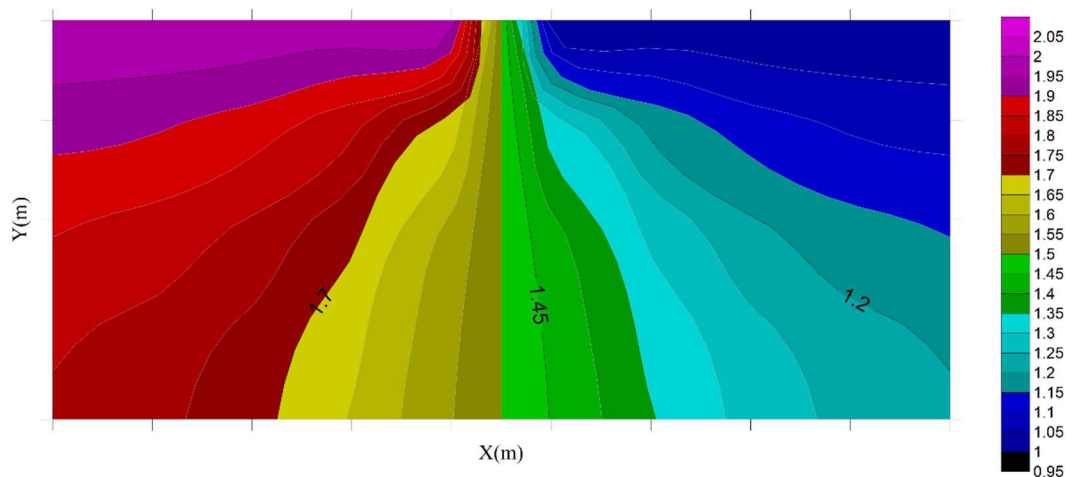
شکل ۱۹-۴ خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان  $t=50000s$  به روش MLPG



شکل ۲۰-۴ خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان  $t=100000s$  به روش MLPG



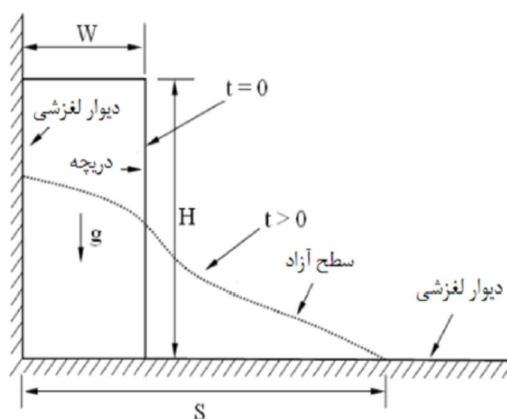
شکل ۲۱-۴ خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان  $t=200000s$  به روش MLPG



شکل ۲۲-۴ خطوط هم‌پتانسیل زیر سپر قائم برای زمان  $t=500000s$  به روش MLPG

#### ۷-۴ مدل‌سازی جریان در شکست سد

در این قسمت مساله جریان آب در مساله شکست سد مورد بررسی قرار می‌گیرد. هندسه مساله شکست سد در شکل ۲۳-۴ نشان داده شده است [۶۹]:



شکل ۲۳-۴ هندسه مساله شکست سد

ارتفاع اولیه ستون آب را  $0.2$  متر و عرض آن را  $0.1$  متر در نظر گرفته می‌شود. در این بخش به بررسی نتایج مدل‌سازی جریان آب در مساله شکست سد با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی پرداخته می‌شود و سپس مقایسه آن با نتایج روش بدون شبکه حداقل مربعات [۴۹] صورت می‌پذیرد.

#### ۴-۷-۱ رابطه سازی جریان در شکست سد

در اینجا معادلات بقای جرم و ممنتوم حاکم بر جریان سیال غیر لزج در مساله شکست سد به

صورت روابط (۴-۳۶) و (۴-۳۷) بیان می‌گردد [۴۹]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \vec{u} = 0 \quad (۴-۳۶)$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \vec{g} = 0 \quad (۴-۳۷)$$

که در آن  $\vec{u}$  بردار سرعت،  $P$  فشار،  $\vec{g}$  بردار شتاب جاذبه،  $\rho$  چگالی و  $\frac{D}{Dt}$  عملگر مشتق مادی می‌باشد.

برای فشار دو نوع شرایط مرزی متمایز در مسائل سطح آزاد وجود دارد. اولین شرط فشار اتمسفر روی سطح آزاد شرط دریشه و دومین شرط روی سطح دیوار شرط نیومن می‌باشد این دو شرط به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P = 0 \quad (۴-۳۸)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (۴-۳۹)$$

بر اساس رویکرد زینکویچ و کادینا [۷۰] گسسته‌سازی زمانی برای ترم مشتق مادی چگالی به

صورت رابطه (۴-۴۰) انجام می‌پذیرد.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^* + \rho^* - \rho^n}{\Delta t} = \frac{\Delta \rho + \Delta \rho^*}{\Delta t} \quad (۴-۴۰)$$

که در اینجا  $\rho^{n+1}$  و  $\rho^n$  به ترتیب چگالی در زمان‌های  $t$  و  $t+1$  و همچنین  $\rho^*$  چگالی در مرحله حدس می‌باشد. به همین ترتیب برای ترم مشتق مادی سرعت در قسمت گسسته‌سازی رابطه (۴۱-۴) به دست می‌آید:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{u^{n+1} - u^* + u^* - u^n}{\Delta t} = \frac{\Delta u + \Delta u^*}{\Delta t} \quad (41-4)$$

که در اینجا  $u^{n+1}$  و  $u^n$  به ترتیب سرعت در زمان‌های  $t$  و  $t+1$  و همچنین  $u^*$  سرعت در مرحله حدس می‌باشد. به همین ترتیب برای ترم مشتق مادی سرعت در قسمت گسسته‌سازی به صورت روابط (۴۲-۴) و (۴۳-۴) بیان می‌گردد:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho + \Delta \rho^*}{\Delta t} = -\nabla \cdot (u^{n+1} - u^* + u^*) \quad (42-4)$$

$$\frac{\Delta u + \Delta u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} - g \quad (43-4)$$

با استفاده از روش نیمه ضمنی حدس و تصحیح روابط (۴۲-۴) و (۴۳-۴) و بسط آن‌ها، به ترتیب روابط (۴۴-۴) و (۴۵-۴) و (۴۶-۴) و (۴۷-۴) تبدیل می‌گردد.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = -\nabla u^* \quad (44-4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho^*}{\Delta t} = -\nabla u \quad (45-4)$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} \quad (46-4)$$

$$\frac{\Delta u^*}{\Delta t} = -g \quad (47-4)$$

بر اساس رابطه‌ی (۴۷-۴) و همچنین تعریف روابط (۴۲-۴) و (۴۴-۴) به دست می‌آید [۴۹]:

$$\Delta u^* = -g \cdot \Delta t \quad (۴۸-۴)$$

$$u^* = u^t + \Delta u^* \quad (۴۹-۴)$$

$$r^* = r^t + u^* \Delta t \quad (۵۰-۴)$$

که در اینجا  $u^t$  و  $r^t$  به ترتیب سرعت و موقعیت ذره در زمان  $t$ ،  $u^*$  سرعت موقت ذره و  $\Delta u^*$  تغییر سرعت در مرحله حدس می‌باشد.

بر اساس رابطه‌ی (۴۶-۴) و در مرحله دوم که مرحله تصحیح نامیده می‌شود، عبارت فشار برای محاسبه تغییرات اصلاحی در سرعت ذره بکار برده می‌شود:

$$\Delta \dot{u} = \frac{1}{\rho} \nabla P^{n+1} \Delta t \quad (۵۱-۴)$$

$$u^{n+1} = u^* + \Delta \dot{u} \quad (۵۲-۴)$$

که در اینجا  $\Delta \dot{u}$  تغییر سرعت ذره در طی مرحله تصحیح،  $P^{n+1}$  فشار در زمان  $t+1$  می‌باشد. در ادامه با استفاده از روابط (۴۴-۴) و (۴۵-۴) و به منظور محاسبه‌ی  $\Delta \dot{u}$  رابطه (۳۴-۴) به دست می‌آید:

$$\nabla^2 P^{t+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot u^* \quad (۵۳-۴)$$

در نهایت برای محاسبه سرعت جدید ذرات می‌توان از روابط (۵۱-۴) و (۵۲-۴) استفاده کرد. موقعیت جدید ذرات به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r^{t+1} = r^t + \frac{u^{t+1} + u^t}{2} \Delta t \quad (54-4)$$

که  $r^t$  موقعیت ذره در زمان  $t$  و  $r^{t+1}$  در زمان  $t+1$  می‌باشند.

برای پایداری حل باید گام زمانی در هر مرحله کنترل شود. بدین منظور از تعریف شرایط کورانت

استفاده می‌گردد [71]:

$$\Delta t \leq 0.1 \frac{l_0}{u_{max}} \quad (55-4)$$

در اینجا  $l_0$  فاصله‌ی اولین ذره و  $u_{max}$  حداکثر سرعت ذره در محاسبات است.

طرفین معادله (53-4) را در تابع وزن ضرب کرده و پس از انتگرال‌گیری رابطه (56-4) به دست

می‌آید:

$$\int W \left( \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial y^2} - \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega = 0 \quad (56-4)$$

اینجا  $W$  تابع وزن است. در ادامه با انتگرال‌گیری جز به جز رابطه (58-4) به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega_Q} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} + W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega - \int_{\Gamma_Q} \left( W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma = 0 \quad (57-4)$$

دامنه کلی ( $\Omega$ ) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال‌گیری قسمت می‌شود.  $\Omega_Q$  دامنه

انتگرال‌گیری برای گره  $I$  است. با استفاده از تقسیم مرزها به صورت  $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qu} \cup \Gamma_{Qt}$  معادله

(57-4) بدین صورت درمی‌آید (رابطه (58-4)).

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_Q} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_i} \left( W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_u} \left( W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma_t} \left( W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left( W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{58-4}$$

با تعریف تابع شکل بر اساس تابع پایه شعاعی داریم: (رابطه ۴-۴۰).

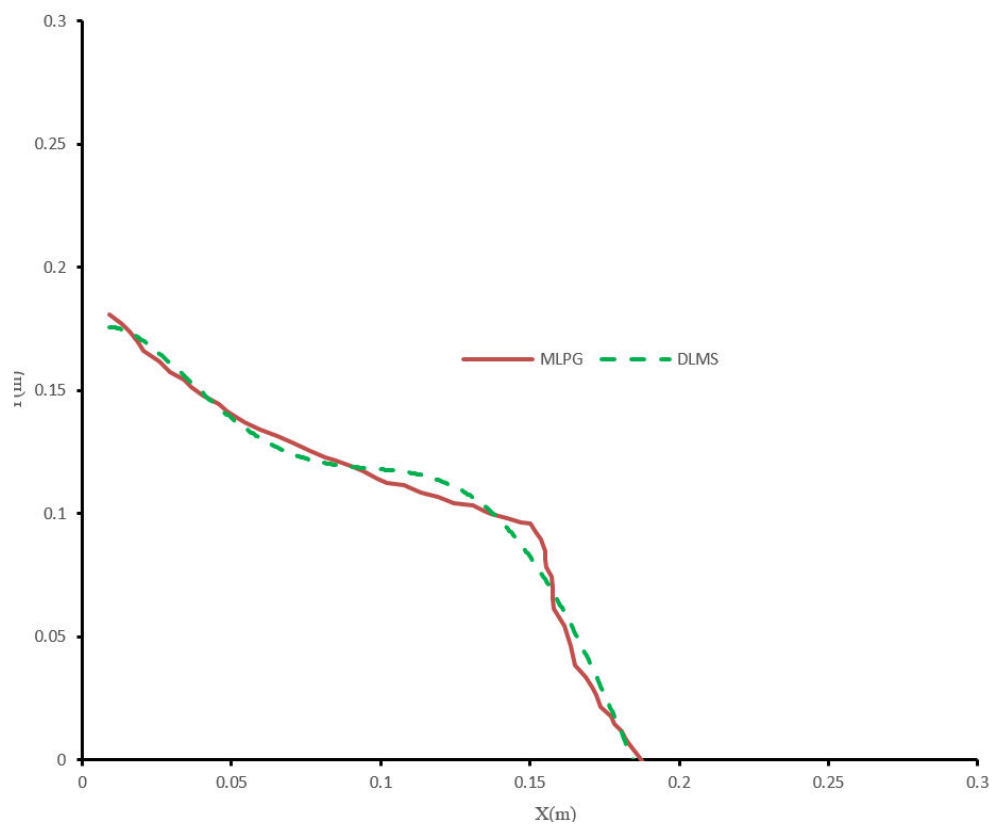
$$P^{t+1} = \sum_{i=1}^{\infty} N_i P^{t+1} \tag{59-4}$$

با جایگذاری تابع شکل در رابطه‌ی (۴-۵۷) رابطه (۴-۶۰) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_{\Omega_Q} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega \right. \\
& - \int_{\Gamma_i} \left( W n_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + W n_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Gamma \\
& \left. - \int_{\Gamma_u} \left( W n_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + W n_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Gamma \right] P^{n+1} \\
& = \int_{\Gamma_t} \left( W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left( W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{60-4}$$

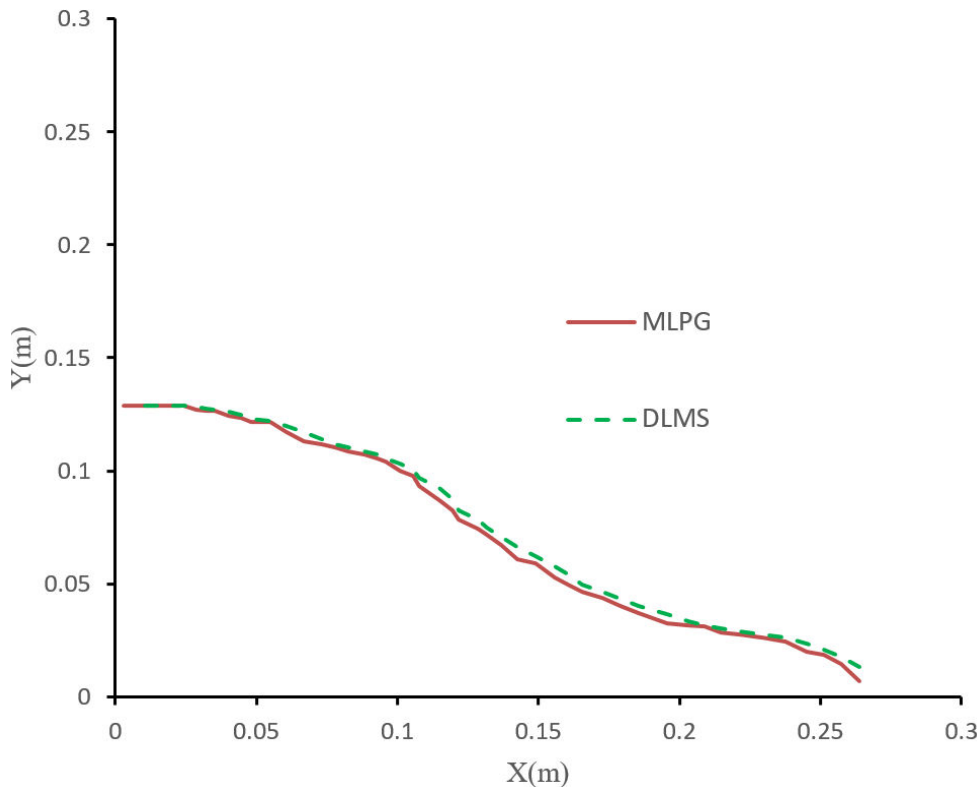
#### ۴-۷-۲ نتایج تحلیل جریان در شکست سد

پس از انجام رابطه سازی به روش MLPG به منظور مقایسه‌ی این روش با دیگر روش‌های عددی، سطح آزاد آب به دست آمده از نتایج روش بدون شبکه با تابع پایه تابع شعاعی چند جمله‌ای در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۱۵ ثانیه در مساله با ابعاد شکل ۴-۲۱ با گره‌های منظم در مقایسه با روش حداقل مربعات، در اشکال ۴-۲۴ و ۴-۲۵ مقایسه شده است [۴۹].



شکل ۴-۲۴ مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد بین روش‌های حداقل مربعات و بدون شبکه در  $t=0.1s$





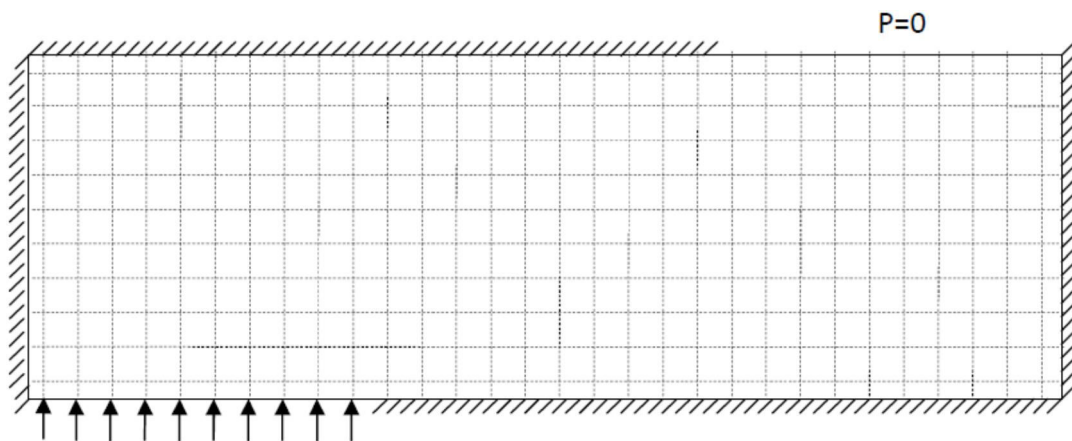
شکل ۴-۲۵ مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد بین روش‌های حداقل مربعات و بدون شبکه در  $t=0.15s$

از مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد بین دو روش بدون شبکه محلی و بدون شبکه حداقل مربعات به راحتی می‌توان متوجه شد روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی به علت دقت بالا در ایجاد ارتباط با گره‌ها، سطح آزاد را با دقت بسیار بالایی را نمایش می‌دهد، از سوی دیگر به علت ماهیت نزدیک به هم روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین با روش بدون شبکه حداقل مربعات کاملاً واضح است که نتایج از همخوانی مناسبی برخوردار باشند.

#### ۸-۴ مدل‌سازی معادلات دو بعدی ناویر استوکس

برای سیالات نیوتنی که در آن تنش‌ها با نرخ کرنش رابطه‌ی خطی دارند، معادلات پیوستگی و بقای اندازه حرکت به نام معادلات ناویر استوکس معرفی می‌شوند. این معادلات، فقط برای سیال نیوتنی

تراکم ناپذیر صادق است. متأسفانه به خاطر پیچیدگی معادلات ناویر استوکس، که از نوع معادلات دیفرانسیل درجه دوم غیر خطی می‌باشند، در جریان سیال لزج، به جز در موارد ساده، در اکثر موارد حل تحلیلی و دقیق وجود ندارد. لذا معادلات ناویر استوکس به طور کلی به عنوان معادلات دیفرانسیل حاکم در حرکت جریان غیر قابل تراکم سیال نیوتنی به حساب می‌آیند. به عنوان نمونه در کانال زیر جریان با سرعت  $1.5\text{m/s}$  وارد یک کانال دارای انحناء می‌شود و از قسمت دیگر که دارای فشار ثابت است خارج می‌گردد. تمام قسمت‌های مرزی که هاشور خورده است نشان دهنده دیواره‌های کانال می‌باشد و تمام خطوطی که به صورت خط چین نشان داده شده‌اند نشان دهنده نقاط محاسباتی می‌باشند ( شکل ۴-۲۶).



شکل ۴-۲۶ ابعاد مسأله و شرایط مرزی

#### ۴-۸-۱ رابطه سازی معادلات دو بعدی ناویر استوکس

معادله‌ی غیر خطی انتقال و انتشار برگر حاکم بر جریان آب در راستای جریان به صورت روابط (۴-۶۱)

(۶۱) تا (۴-۶۳) بیان می‌گردد: معادلات ناویر استوکس به شکل بی بعد به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + P) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (۴-۶۱)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v^2 + P) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (62-4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (63-4)$$

در اینجا  $u$  و  $v$  به ترتیب سرعت جریان در جهت افقی و عمودی می‌باشد و  $P$  فشار آب می‌باشد.

معادله ناویر استوکس بعد دار را به صورت روابط (64-4) تا (66-4) بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) = v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (64-4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) = v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (65-4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (66-4)$$

فرآیند بی بعد سازی مساله در پیوست رساله آمده است. در ادامه به منظور سهولت کار، می‌توان ترم

زمانی را بدین صورت تعریف کرد:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_t) \cong \frac{u^{t+1}(x) - u^t(x)}{\Delta t} \quad (67-4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(y, t_t) \cong \frac{v^{t+1}(y) - v^t(y)}{\Delta t} \quad (68-4)$$

با استفاده از رابطه (67-4)، مجدداً معادله (64-4) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\frac{u^{t+1} - u^t}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(uv) - v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\rangle^t \quad (69-4)$$

سپس:

$$u^{t+1} = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} + u^t - \Delta t \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (uv) - v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\rangle^t \quad (70-4)$$

سپس با تعریف  $U_{RHS}$  به دست می آید:

$$u^{t+1} = U_{RHS} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} \quad (71-4)$$

$$U_{RHS} = u^t + \Delta t \left\langle v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (uv) \right\rangle^t \quad (72-4)$$

به همین ترتیب با استفاده از رابطه (۶۸-۴) ، مجدداً معادله (۶۵-۴) به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\frac{v^{t+1} - v^t}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} - \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) - v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right\rangle^t \quad (73-4)$$

سپس:

$$v^{t+1} = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} + v^t - \Delta t \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) - v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right\rangle^t \quad (74-4)$$

سپس با تعریف  $V_{RHS}$  به دست می آید:

$$v^{t+1} = V_{RHS} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} \quad (75-4)$$

$$V_{RHS} = v^t + \Delta t \left\langle v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (uv) \right\rangle^t \quad (76-4)$$

از معادلات (۷۵-۴) و (۷۱-۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial u^{t+1}}{\partial x} = \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial x^2} \quad (۷۷-۴)$$

$$\frac{\partial v^{t+1}}{\partial y} = \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial y^2} \quad (۷۸-۴)$$

از معادلات (۷۷-۴) و (۷۸-۴) و جایگذاری آن در رابطه (۶۸-۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} \right) \quad (۷۹-۴)$$

معادله (۷۹-۴) در واقع همان معادله پوآسن است. برای حل معادله (۷۹-۴) از روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین (MLPG) بهره جسته می‌شود. از سوی دیگر برای حل ترم‌های انتقال از روش بالادست مرتبه اول استفاده می‌گردد. در این راستا روش تفاضل بالادستی، با در اختیار دادن جهت جریان مابین گره‌ها، با دقت مناسبی بخش‌های جابجایی را مدل می‌کند. در ادامه، شکل ضعیف معادلات ناویر استوکس در گره I با روش باقیمانده وزنی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega_s} \left[ \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial y^2} - \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} \right) \right] w d\Omega = 0 \quad (۸۰-۴)$$

اینجا  $W$  تابع وزن است. با استفاده از تقسیم‌بندی مرزها، رابطه (۸۱-۴) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_s} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_i} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} w n_x + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} w n_y \right] d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_u} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} w n_x + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} w n_y \right] d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma_i} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} w n_x + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} w n_y \right] d\Gamma \\
& - \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} \right) \right] w d\Omega
\end{aligned} \tag{۸۱-۴}$$

دامنه کلی ( $\Omega$ ) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال‌گیری قسمت می‌شود.  $\Omega_Q$  دامنه انتگرال‌گیری برای گره I است. با تقسیم مرزها به صورت  $\Gamma_Q = \Gamma_i \cup \Gamma_u \cup \Gamma_t$  و جایگذاری تابع شکل مناسب معادله (۸۱-۴) حل می‌گردد.

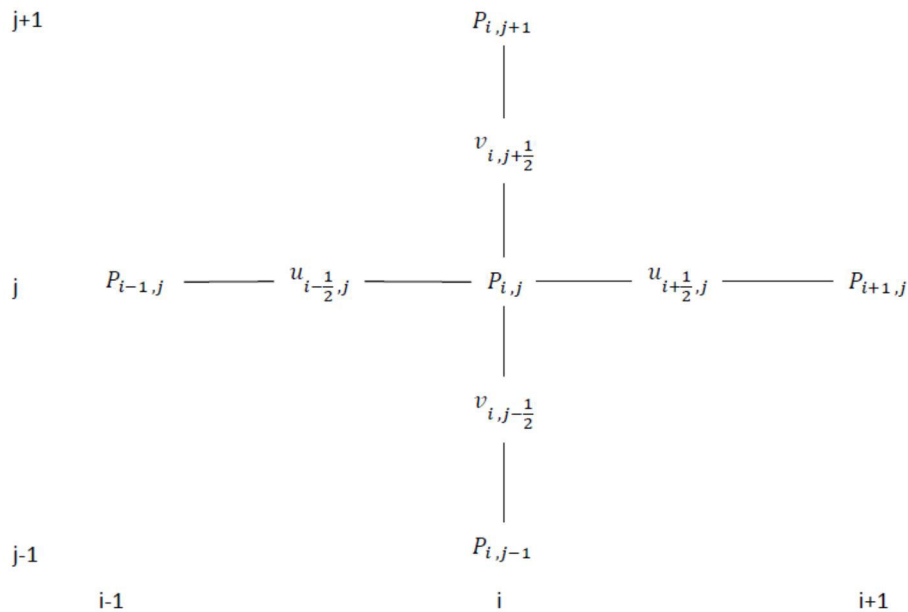
#### ۴-۸-۲ نتایج تحلیل معادلات دو بعدی ناویر استوکس

نتایج فشار حاصل از روش بدون شبکه محلی که برای نمونه در کانال مذکور که جریان با سرعت ۱/۵ (بدون واحد) وارد یک کانال دارای انحناء می‌شود و از قسمت دیگر که دارای فشار ثابت است خارج می‌گردد، برای تکرار گام زمانی ۹۰۰ در جدول ۴-۱۷ آمده است. به منظور پایداری حل مساله هر گام زمانی ۰.۰۳ ثانیه در نظر گرفته شده است.

جدول ۴-۱۷. فشار حاصل از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5947.44	5870.71	5772.24	5611.08	5451.61	5847.98	5138.85	5011.93	4940.15	5387.43
2	5916.20	5839.11	5739.24	5576.13	5414.06	5803.17	5095.21	4965.35	4890.81	5330.67
3	5828.06	5751.80	5651.71	5487.98	5324.13	5700.98	4999.83	4867.00	4789.52	5217.35
4	5686.22	5611.19	5511.38	5347.80	5182.55	5541.74	4852.59	4716.34	4635.33	5045.63
5	5494.00	5420.25	5320.65	5157.36	4990.42	5325.92	4653.23	4512.49	4426.77	4813.50
6	5255.07	5182.46	5082.56	4919.05	4749.41	5054.42	4401.63	4254.36	4161.97	4518.34
7	4974.00	4902.26	4801.19	4636.37	4462.19	4729.05	4098.07	3940.70	3838.27	4156.41
8	4656.91	4585.67	4482.30	4314.51	4133.14	4353.15	3743.61	3569.97	3451.56	3722.01
9	4312.01	4240.89	4134.00	3961.34	3769.43	3933.11	3341.23	3140.58	2994.78	3206.21
10	3949.86	3878.70	3767.54	3588.47	3382.88	3481.04	2898.69	2652.14	2452.59	2595.61
11	3583.12	3512.40	3397.66	3212.90	2993.89	3025.87	2453.18	2165.06	1928.39	1873.45
12	3225.26	3156.81	3042.63	2859.64	2640.79	2637.72	2111.00	1842.96	1636.17	1798.43
13	2887.79	2824.62	2717.91	2548.38	2348.71	2349.61	1902.85	1714.91	1596.64	1778.07
14	2577.49	2523.01	2431.05	2285.82	2119.66	2148.67	1786.33	1684.49	1661.96	1808.66
15	2294.94	2252.38	2181.44	2067.99	1941.91	2005.39	1708.27	1648.83	1647.60	1806.17
16	2034.32	2007.04	1962.64	1885.92	1801.84	1899.15	1651.44	1617.33	1621.91	1784.85
17	1783.28	1776.19	1764.92	1729.47	1687.89	1816.72	1607.55	1590.22	1596.87	1759.76
18	1521.00	1544.32	1577.23	1589.51	1591.35	1749.50	1571.41	1565.78	1573.25	1733.95
19	1210.82	1291.05	1389.49	1459.69	1506.72	1692.10	1539.58	1542.27	1550.01	1707.84
20	775.34	994.34	1198.43	1339.29	1432.19	1641.75	1509.88	1518.23	1525.85	1680.89
21	0.00	662.67	1022.80	1237.11	1369.95	1597.78	1481.21	1492.85	1500.35	1652.72
22	0.00	544.26	925.22	1170.49	1324.20	1560.17	1452.93	1466.24	1473.40	1623.22
23	0.00	507.39	887.45	1139.19	1295.34	1527.37	1422.87	1437.41	1444.23	1592.62
24	0.00	513.76	896.46	1142.14	1284.27	1498.11	1387.13	1399.83	1411.45	1562.88
25	0.00	557.83	954.29	1186.26	1298.20	1477.06	1347.02	1355.24	1380.48	1542.29
26	0.00	650.22	1076.77	1288.94	1355.18	1483.03	1308.06	1312.41	1366.68	1547.95
27	0.00	813.98	1289.79	1472.83	1479.37	1556.87	1337.18	1328.37	1401.29	1612.73
28	0.00	1084.81	1622.08	1752.30	1680.49	1702.43	1419.90	1420.60	1508.75	1765.13
29	0.00	1508.67	2088.27	2110.88	1939.70	1900.02	1554.04	1552.96	1667.71	1992.09
30	0.00	2102.62	2638.10	2471.51	2212.25	2083.25	1684.56	1674.32	1792.71	2177.07

ارزیابی نتایج حاصل از روش بدون شبکه، به کمک روش تفاضل محدود انجام شده است. بدین منظور با استفاده از روش تفاضل محدود مطابق شکل ۴-۲۷ معادلات حاکم مجدداً رابطه سازی می‌گردد.



شکل ۴-۲۷ شبکه بندی تفاضل محدود برای حل معادله لاپلاس

در ادامه رابطه‌های (۴-۶۰) تا (۴-۶۲) به صورت رابطه‌های (۴-۷۷) تا (۴-۷۹) درمی‌آید:

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{t+1} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{t+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{t+1} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{t+1}}{\Delta y} = 0 \quad (۴-۸۲)$$

$$u_{i-\frac{1}{2},j}^{t+1} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P_{i,j}^{t+1} - u_{i-1,j}^{t+1}) + URHS_{i-\frac{1}{2},j}^t \quad (۴-۸۳)$$

$$v_{i,j-\frac{1}{2}}^{t+1} = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P_{i,j}^{t+1} - u_{i,j-1}^{t+1}) + VRHS_{i,j-\frac{1}{2}}^t \quad (۴-۸۴)$$

با ادامه عملیات جبری رابطه (۴-۸۵) به دست می‌آید:



$$\begin{aligned} & \left( \frac{2}{\rho\Delta x^2} + \frac{2}{\rho\Delta y^2} \right) P_{i,j}^{t+1} \\ &= \frac{1}{\rho\Delta x^2} P_{i-1,j}^{t+1} + \frac{1}{\rho\Delta x^2} P_{i+1,j}^{t+1} + \frac{1}{\rho\Delta y^2} P_{i,j-1}^{t+1} + \frac{1}{\rho\Delta y^2} P_{i,j+1}^{t+1} \quad (۸۵-۴) \\ & - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{URHS_{i+\frac{1}{2},j}^t - URHS_{i-\frac{1}{2},j}^t}{\Delta x} + \frac{VRHS_{i,j+\frac{1}{2}}^t - VRHS_{i,j-\frac{1}{2}}^t}{\Delta y} \right) \end{aligned}$$

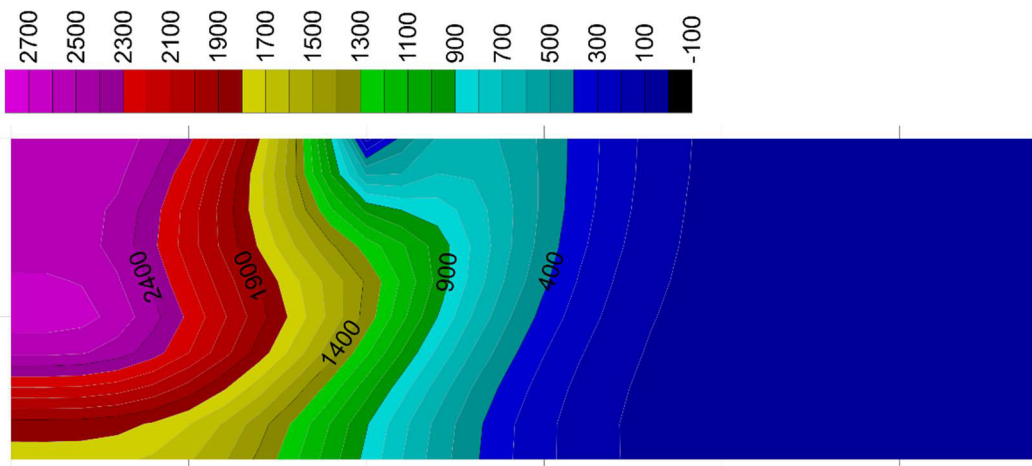
نتایج حاصل از روش تفاضل محدود در جدول ۴-۱۸ آمده است. مقایسه‌ی بین روش‌های تفاضل

محدود و MLPG دقت بالا و سرعت بیشتر محاسبات را نشان می‌دهد.

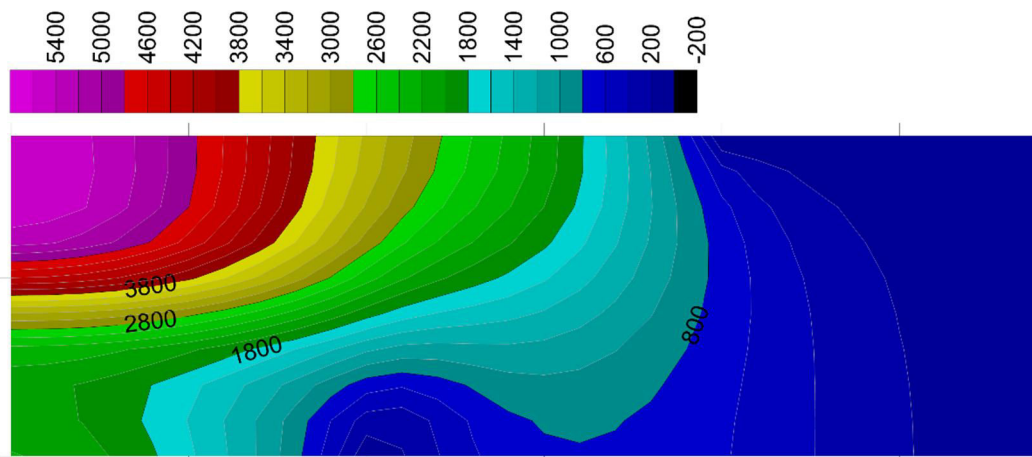
جدول ۴-۱۸ فشار حاصل از روش تفاضل محدود

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5977.33	5900.21	5783.81	5639.27	5479.01	5316.29	5164.67	5037.12	4945.09	4897.62
2	5945.93	5868.45	5750.74	5604.15	5441.27	5275.56	5120.82	4990.30	4895.71	4846.02
3	5857.34	5780.71	5663.04	5515.55	5350.88	5182.66	5024.96	4891.45	4794.32	4743.00
4	5714.79	5639.39	5522.42	5374.67	5208.59	5037.90	4876.98	4740.04	4639.97	4586.89
5	5521.61	5447.49	5331.31	5183.27	5015.50	4841.70	4676.61	4535.16	4431.20	4375.87
6	5281.48	5208.50	5092.75	4943.77	4773.28	4594.89	4423.75	4275.74	4166.14	4107.54
7	4999.00	4926.89	4810.82	4659.66	4484.62	4299.09	4118.66	3960.50	3842.11	3778.52
8	4680.32	4608.72	4491.28	4336.19	4153.91	3957.37	3762.42	3587.91	3455.02	3383.61
9	4333.68	4262.20	4142.29	3981.24	3788.38	3575.52	3358.03	3156.36	2997.77	2914.71
10	3969.71	3898.19	3775.09	3606.51	3399.88	3164.55	2913.26	2665.47	2455.04	2359.62
11	3601.13	3530.05	3404.46	3229.04	3008.93	2750.76	2465.51	2175.94	1930.32	1703.12
12	3241.47	3172.67	3048.73	2874.01	2654.06	2397.90	2121.61	1852.22	1637.81	1634.92
13	2902.30	2838.82	2723.35	2561.18	2360.51	2135.99	1912.41	1723.53	1598.24	1616.41
14	2590.44	2535.69	2435.92	2297.31	2130.31	1953.32	1795.31	1692.96	1663.62	1644.22
15	2306.47	2263.69	2185.81	2078.38	1951.67	1823.07	1716.85	1657.11	1649.25	1641.96
16	2044.55	2017.12	1966.57	1895.39	1810.90	1726.49	1659.74	1625.46	1623.53	1622.58
17	1792.24	1785.12	1768.46	1738.16	1696.37	1651.55	1615.63	1598.21	1598.46	1599.77
18	1528.64	1552.09	1580.39	1597.50	1599.35	1590.44	1579.31	1573.65	1574.83	1576.31
19	1216.91	1297.54	1392.28	1467.03	1514.30	1538.25	1547.32	1550.02	1551.56	1552.57
20	779.24	999.33	1200.83	1346.02	1439.39	1492.49	1517.47	1525.85	1527.37	1528.07
21	0.00	666.00	1024.85	1243.33	1376.84	1452.52	1488.65	1500.35	1501.86	1502.46
22	0.00	546.99	927.08	1176.37	1330.85	1418.33	1460.23	1473.61	1474.88	1475.64
23	0.00	509.94	889.22	1144.91	1301.85	1388.51	1430.02	1444.64	1445.68	1447.82
24	0.00	516.34	898.26	1147.88	1290.73	1361.91	1394.10	1406.86	1412.86	1420.79
25	0.00	560.63	956.21	1192.22	1304.72	1342.77	1353.79	1362.05	1381.86	1402.07
26	0.00	653.49	1078.93	1295.41	1361.99	1348.20	1314.63	1319.01	1368.05	1407.21
27	0.00	818.07	1292.38	1480.23	1486.81	1415.33	1343.90	1335.05	1402.70	1466.10
28	0.00	1090.27	1625.33	1761.10	1688.93	1547.65	1427.03	1427.74	1510.26	1604.65
29	0.00	1516.25	2092.45	2121.49	1949.45	1727.28	1561.85	1560.76	1669.38	1810.97
30	0.00	2113.18	2643.39	2483.93	2223.37	1893.84	1693.03	1682.73	1801.72	1979.14

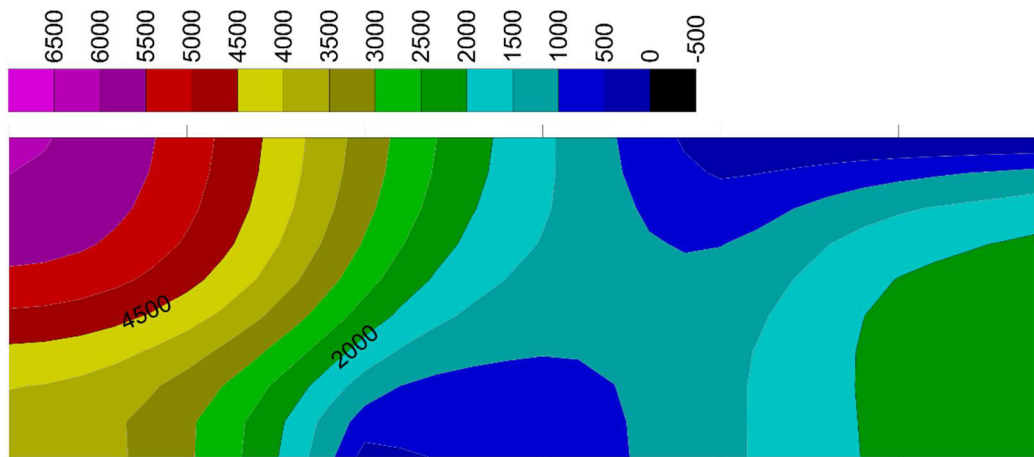
شکل‌های ۲۸-۴ تا ۳۴-۴ نشان دهنده‌ی خطوط هم‌پتانسیل فشار به روش بدون شبکه برای تکرار گام ۱۰، ۲۰، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۵۰۰ و ۹۰۰ می‌باشد.



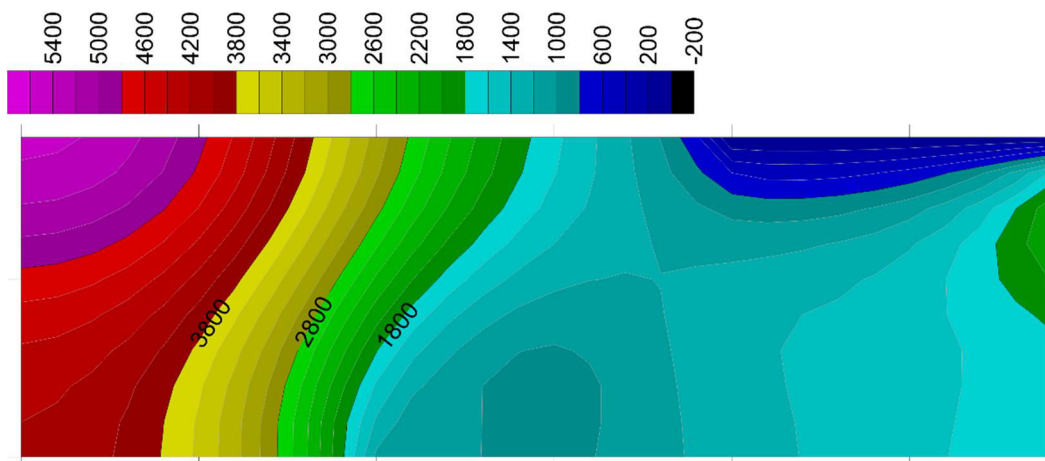
شکل ۲۸-۴ کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۱۰



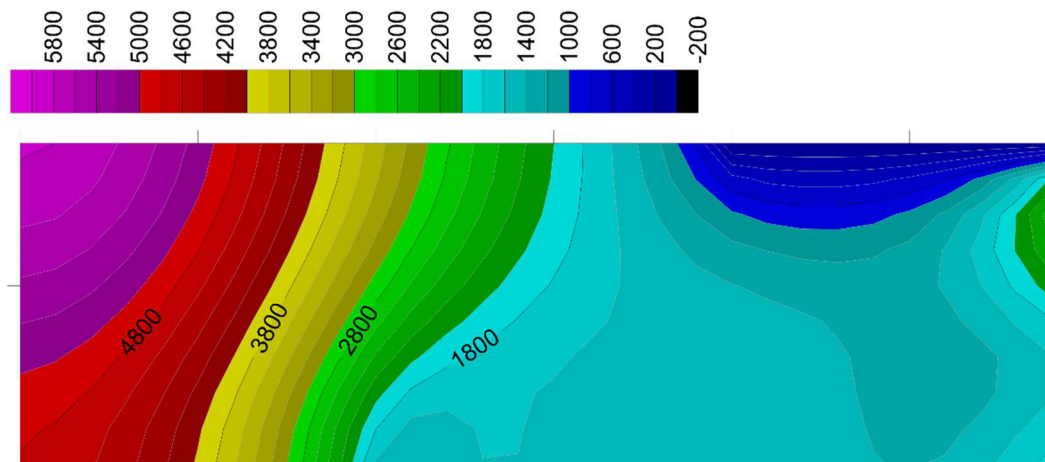
شکل ۲۹-۴ کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۲۰



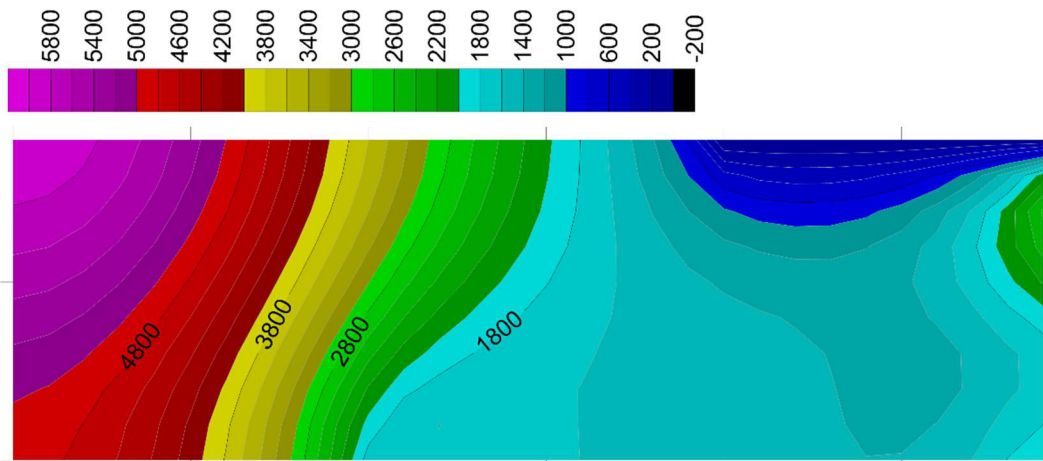
شکل ۳۰-۴ کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۵۰



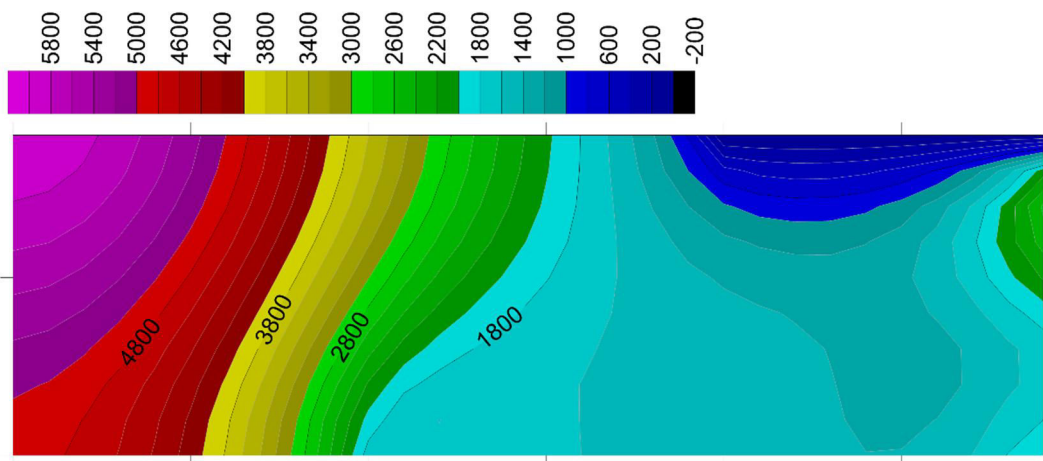
شکل ۳۱-۴ کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۱۰۰



شکل ۳۲-۴ کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۲۰۰

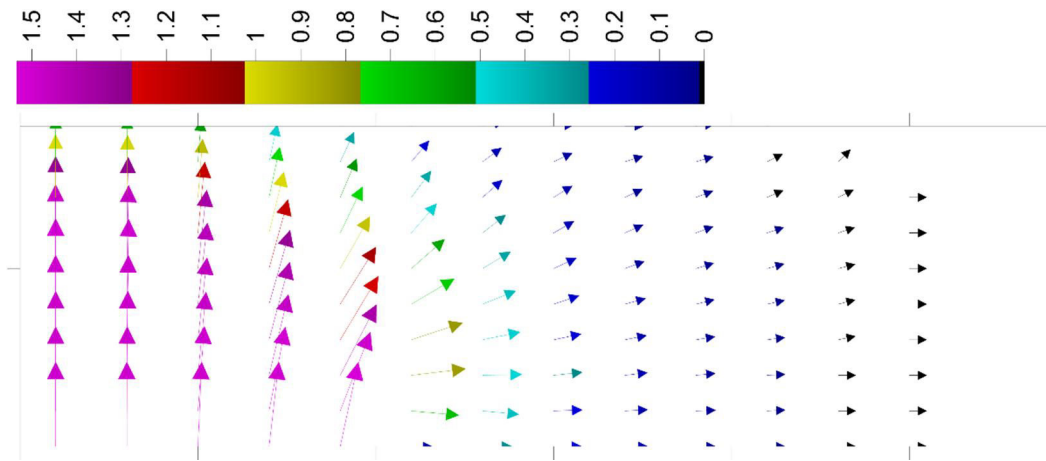


شکل ۴-۳۳ کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۵۰۰

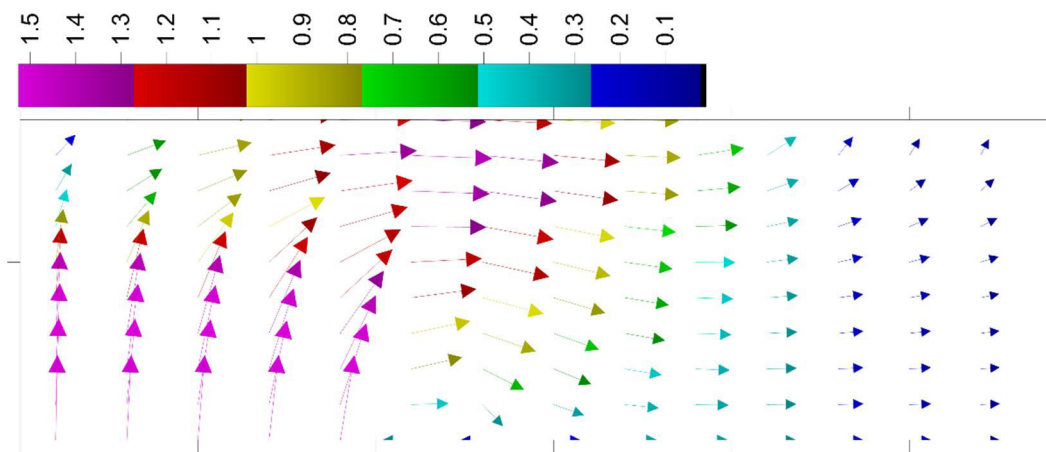


شکل ۴-۳۴ کانتورهای فشار به روش بدون شبکه در گام ۹۰۰

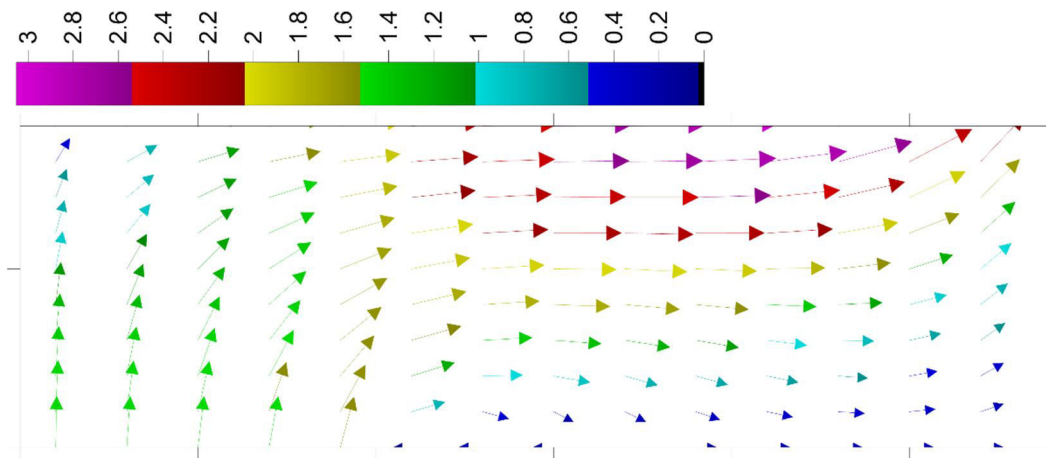
در ادامه شکل‌های ۴-۳۵ تا ۴-۴۱ نشان دهنده‌ی میدان سرعت به روش بدون شبکه برای تکرار گام ۱۰، ۲۰، ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۵۰۰ و ۹۰۰ می‌باشد.



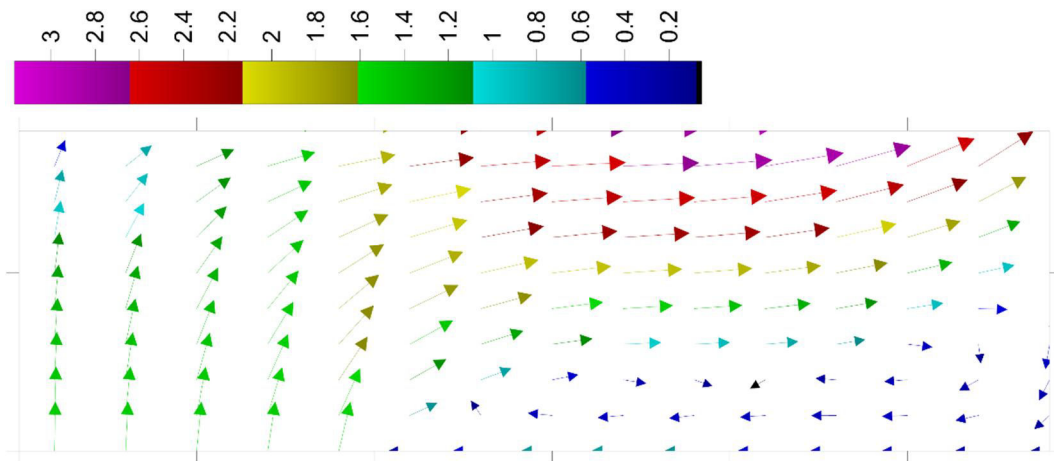
شکل ۴-۳۵ میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۱۰



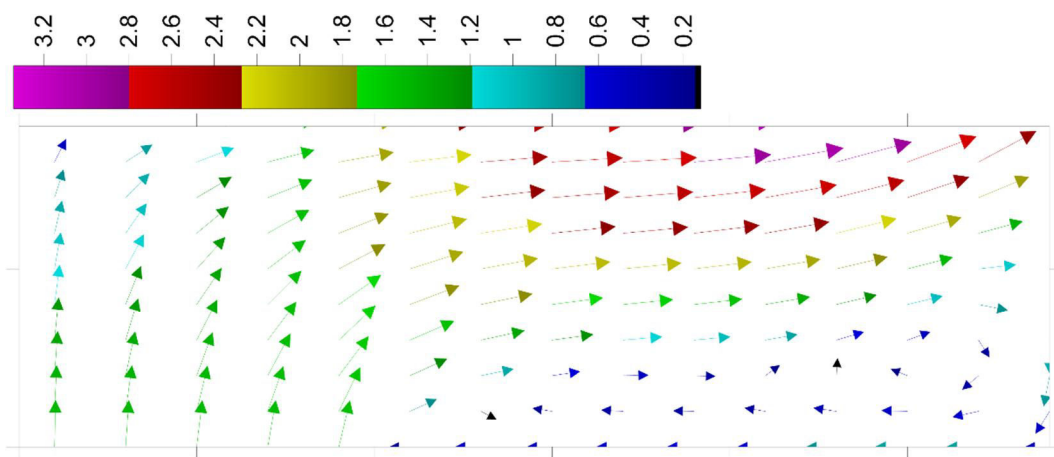
شکل ۴-۳۶ میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۲۰



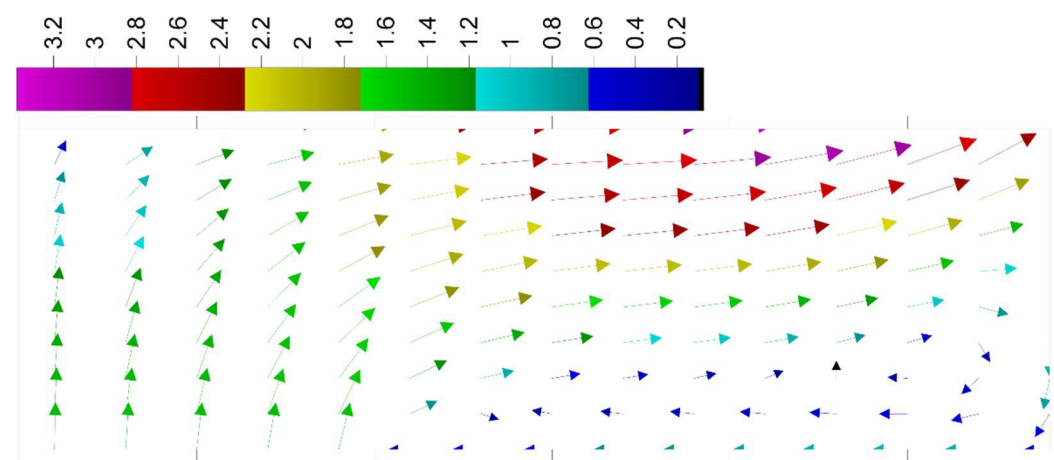
شکل ۴-۳۷ میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۵۰



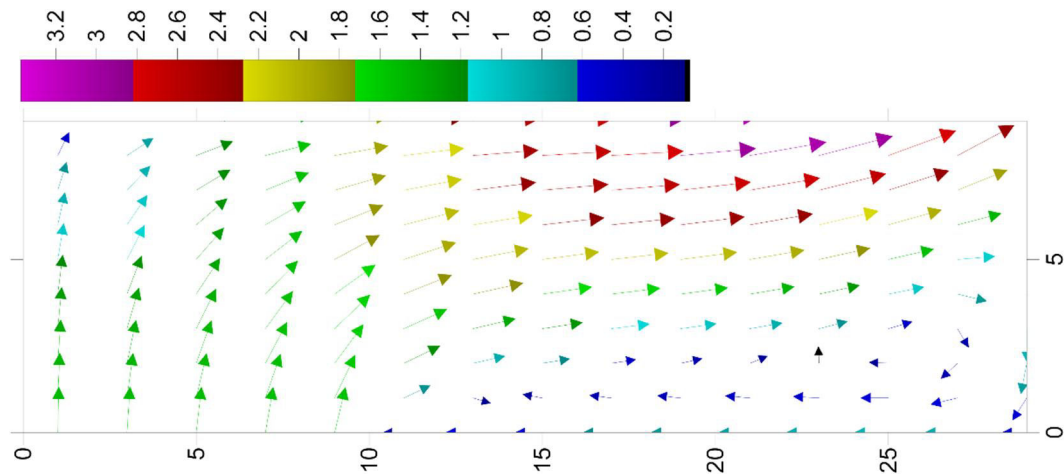
شکل ۳۸-۴ میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۱۰۰



شکل ۳۹-۴ میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۲۰۰



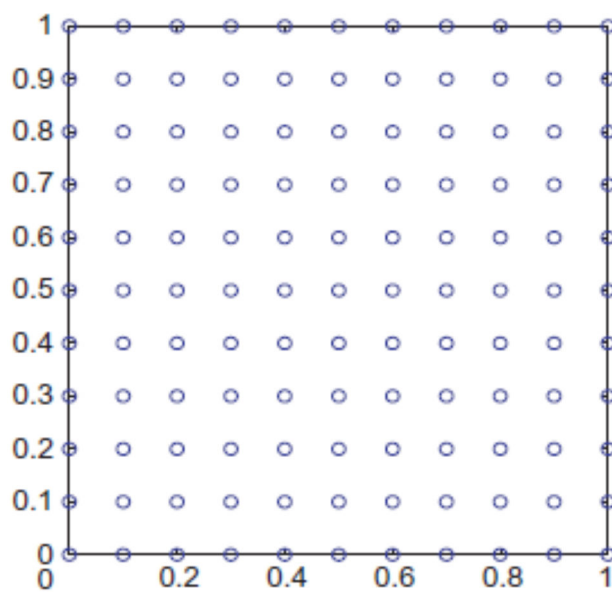
شکل ۴۰-۴ میدان سرعت حاصل از سرعت در روش MLPG در گام ۵۰۰



شکل ۴-۴۱ میدان سرعت حاصل از روش MLPG در گام ۹۰۰

#### ۴-۹ مدل سازی معادلات غیر دائمی ناویر استوکس

از آنجایی که در عمل به علت عدم توجیه فنی و وجود امکانات آزمایشگاهی هیچ مطالعه‌ای که شامل تعیین سرعت یا فشار در تمامی دامنه مساله در کل زمان جریان شود وجود ندارد پس ناچار از مثال‌های تئوریک بهره جسته می‌شود. بدین منظور در اینجا با استفاده از یک هندسه ساده  $1 \times 1$  که در شکل ۴-۳۰ مشخص است به حل معادلات غیر دائمی ناویر استوکس پرداخته می‌شود. [۴۷]



شکل ۴-۴۲ هندسه مساله غیر دائمی ناویر استوکس

#### ۴-۹-۱ رابطه سازی معادلات غیر دائمی ناویر استوکس

معادله‌ی غیر خطی حاکم بر جریان سیال به صورت روابط (۴-۸۶) تا (۴-۸۸) بیان می‌گردد: معادلات

ناویر استوکس به شکل غیر بقایی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f_x = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (۴-۸۶)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - f_y = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (۴-۸۷)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۴-۸۸)$$

در اینجا  $u$  و  $v$  به ترتیب سرعت جریان در جهت افقی و عمودی،  $f$  نیروهای بدنه و  $P$  فشار آب

می‌باشد. گسسته سازی ترم زمانی مانند قبل تعریف می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u^{t+1}(x) - u^t(x)}{\Delta t} \quad (۴-۸۹)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cong \frac{v^{t+1}(y) - v^t(y)}{\Delta t} \quad (۴-۹۰)$$

با استفاده از رابطه (۴-۸۹)، مجدداً معادله (۴-۸۶) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\frac{u^{t+1} - u^t}{\Delta t} = f_x^t - \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} - \left\langle u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right\rangle^t \quad (۴-۹۱)$$

سپس:

$$u^{t+1} = -\Delta t \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} + u^t + \Delta t \left\langle -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x \right\rangle^t \quad (۴-۹۲)$$



سپس با تعریف  $U_{RHS}$  به دست می‌آید:

$$u^{t+1} = U_{RHS} - \Delta t \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} \quad (93-4)$$

$$U_{RHS} = u^t + \Delta t \left\langle f_x + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle^t \quad (94-4)$$

به همین ترتیب با استفاده از رابطه (۹۰-۴) ، مجدداً معادله (۸۷-۴) به صورت زیر بازنویسی

می‌گردد:

$$\frac{v^{t+1} - v^t}{\Delta t} = f_y^t - \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} - \left\langle v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right\rangle^t \quad (95-4)$$

سپس:

$$v^{t+1} = -\Delta t \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} + v^t + \Delta t \left\langle -v \frac{\partial v}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y \right\rangle^t \quad (96-4)$$

سپس با تعریف  $V_{RHS}$  به دست می‌آید:

$$v^{t+1} = V_{RHS} - \Delta t \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} \quad (97-4)$$

$$V_{RHS} = v^t + \Delta t \left\langle f_y + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - v \frac{\partial v}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle^t \quad (98-4)$$

از معادلات (۹۳-۴) و (۹۷-۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial u^{t+1}}{\partial x} = \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial x^2} \quad (99-4)$$

$$\frac{\partial v^{t+1}}{\partial y} = \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} - \Delta t \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial y^2} \quad (100-4)$$

از معادلات (۹۹-۴) و (۱۰۰-۴) و جایگذاری آن در رابطه (۸۸-۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} \right) \quad (101-4)$$

برای حل معادله (۱۰۱-۴) از روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین (MLPG) بهره جسته می‌شود.

شکل ضعیف معادلات ناویر استوکس در گره I با روش باقیمانده وزنی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega_s} \left[ \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{t+1}}{\partial y^2} - \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} \right) \right] w d\Omega = 0 \quad (102-4)$$

با استفاده از تقسیم‌بندی مرزها رابطه (۱۰۳-۴) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_i} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} w n_x + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} w n_y \right] d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_u} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} w n_x + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} w n_y \right] d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_i} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} w n_x + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} w n_y \right] d\Gamma \\ & - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} \right) \right] w d\Omega \end{aligned} \quad (103-4)$$

دامنه کلی ( $\Omega$ ) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال‌گیری قسمت می‌شود.  $\Omega_Q$  دامنه

انتگرال‌گیری برای گره I است. با تقسیم مرزها به صورت  $\Gamma_Q = \Gamma_i \cup \Gamma_u \cup \Gamma_t$  و جایگذاری تابع شکل

مناسب معادله (۱۰۳-۴) حل می‌گردد.

#### ۴-۹-۲ نتایج تحلیل معادلات غیر دائمی ناویر استوکس

در اینجا نتایج حاصل از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین که به عنوان مثال ۱ در معادلات (۴-۱۰۴) تا (۴-۱۰۷) تعیین گردیده است مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

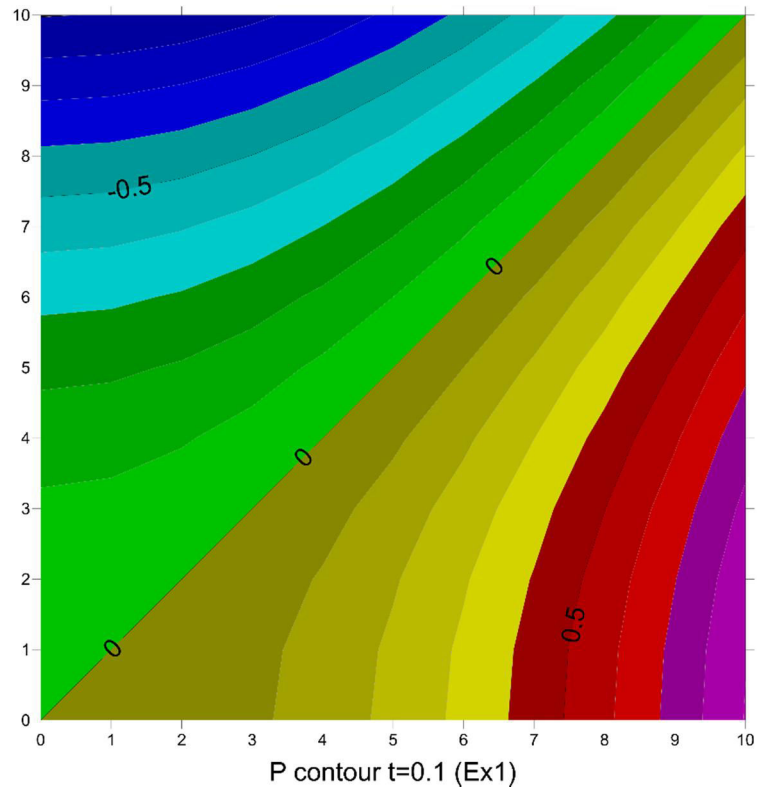
$$u(x, y, t) = 2x^2y(1-x)^2(1-y)(1-2y)e^{-t} \quad (۴-۱۰۴)$$

$$v(x, y, t) = -2xy^2(1-x)(1-2x)(1-y)^2e^{-t} \quad (۴-۱۰۵)$$

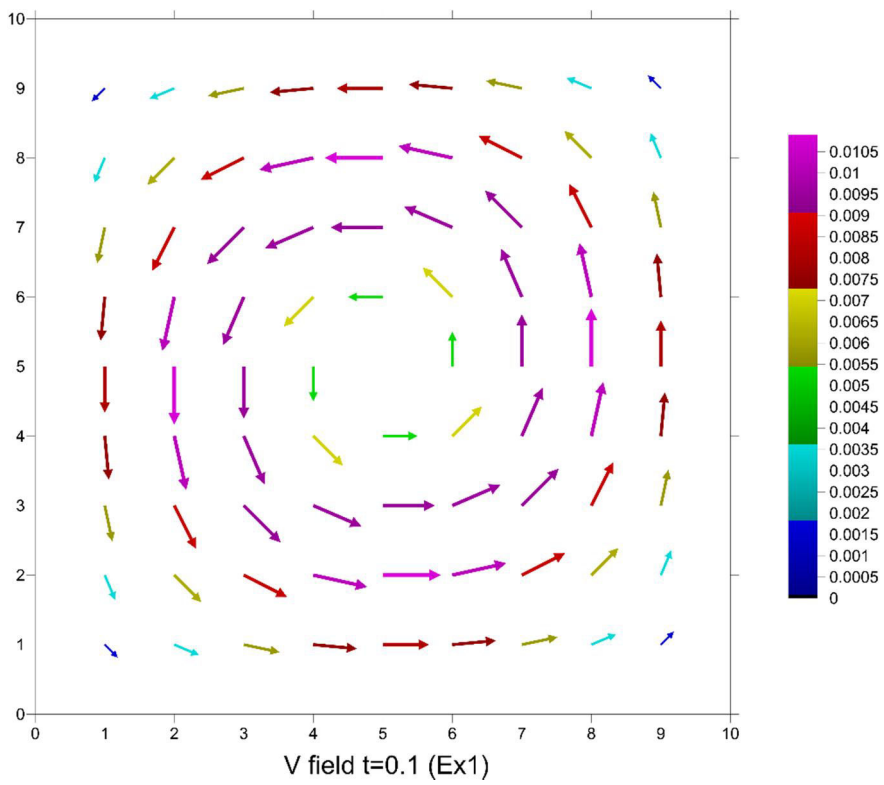
$$P(x, y, t) = (x^2 - y^2)e^{-t} \quad (۴-۱۰۶)$$

$$f(x, y, t) = 2x^2y(1-x)^2(1-y)(1-2y)e^{-t} \quad (۴-۱۰۷)$$

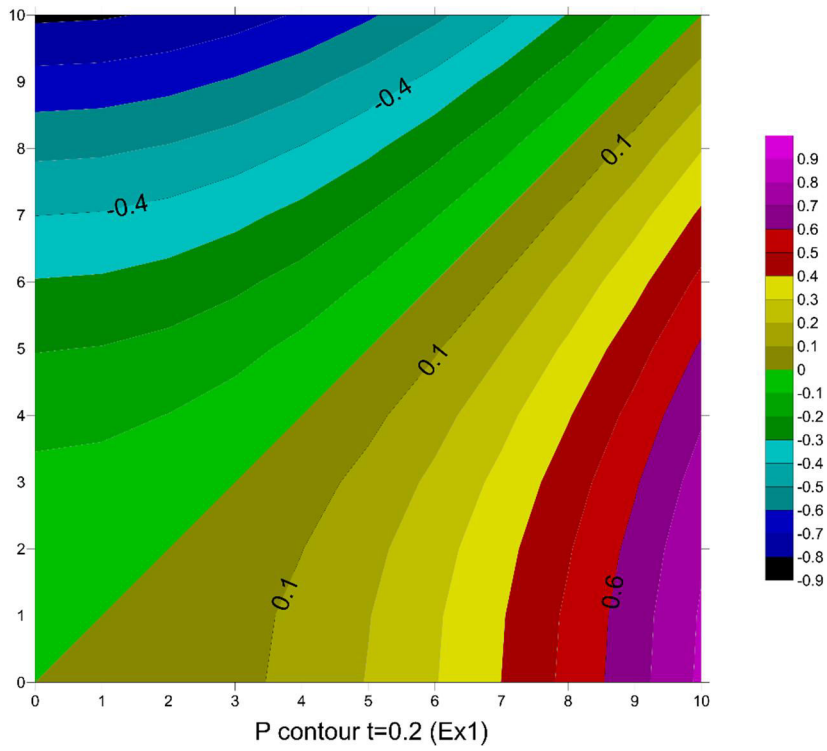
در اینجا عدد رینولدز برابر ۱۰۰ بدون واحد و گام زمانی ۰.۰۱ ثانیه در نظر گرفته شده است. با جایگذاری معادلات فوق در روابط (۴-۸۶) تا (۴-۸۸) برای فشار و میدان سرعت - در زمان‌های مختلف مقادیر دقیق به دست می‌آید. در شکل‌های ۴-۴۳ تا ۴-۶۲ نتایج حاصل از حل به روش بدون شبکه برای زمان‌های ۰.۱ ثانیه تا ۱ ثانیه ارائه شده است.



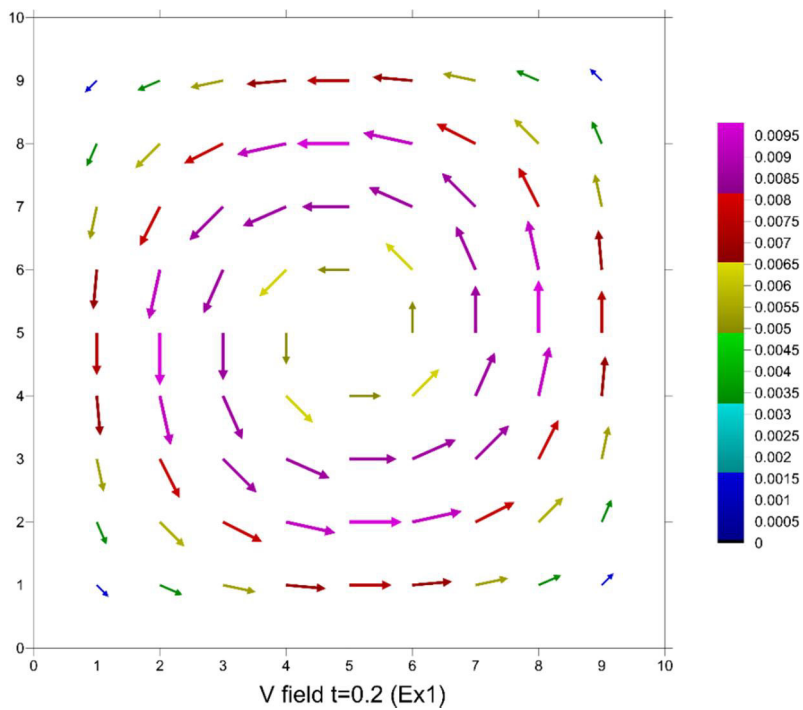
شکل ۴۳-۴ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.1s$



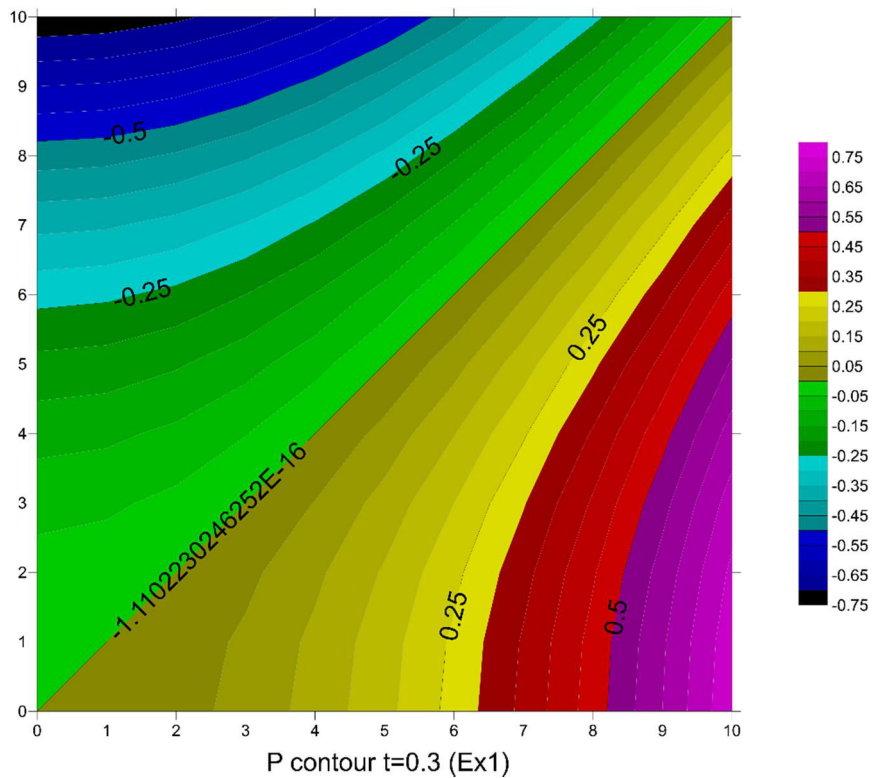
شکل ۴۴-۴ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.1s$



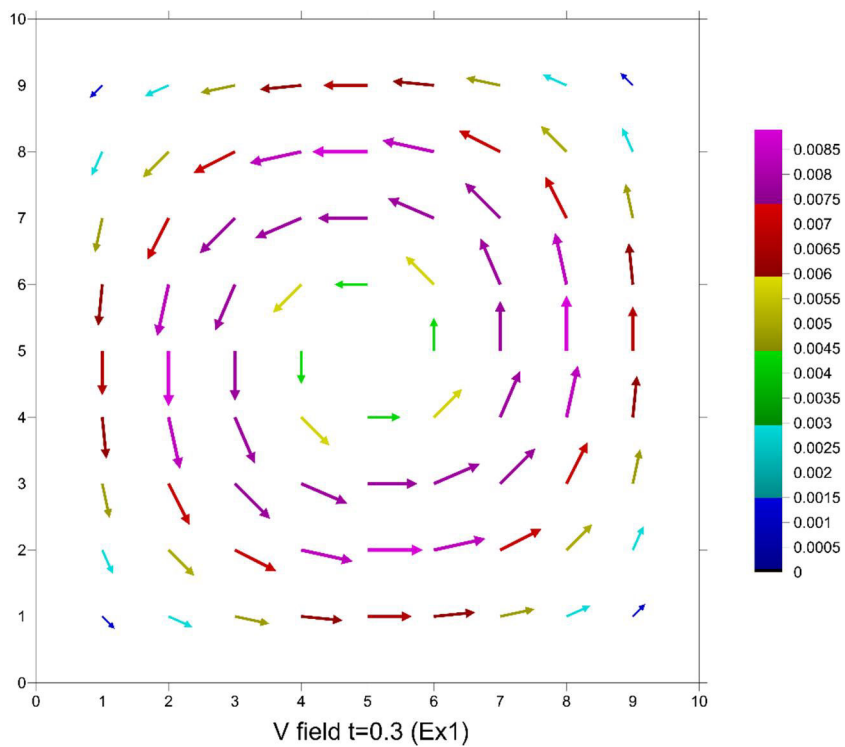
شکل ۴-۴۵ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.2s$



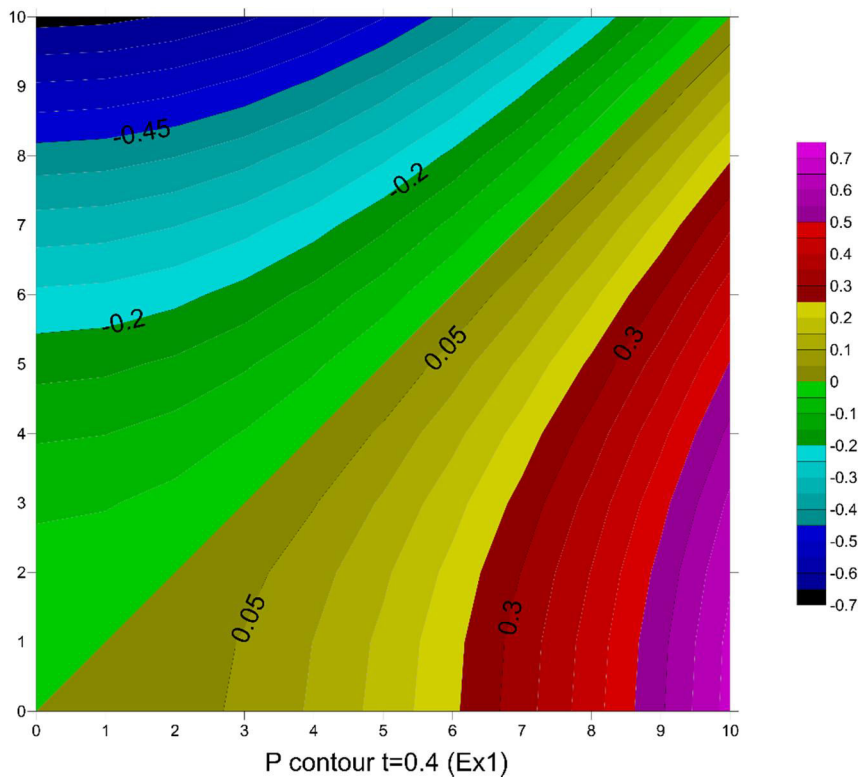
شکل ۴-۴۶ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.2s$



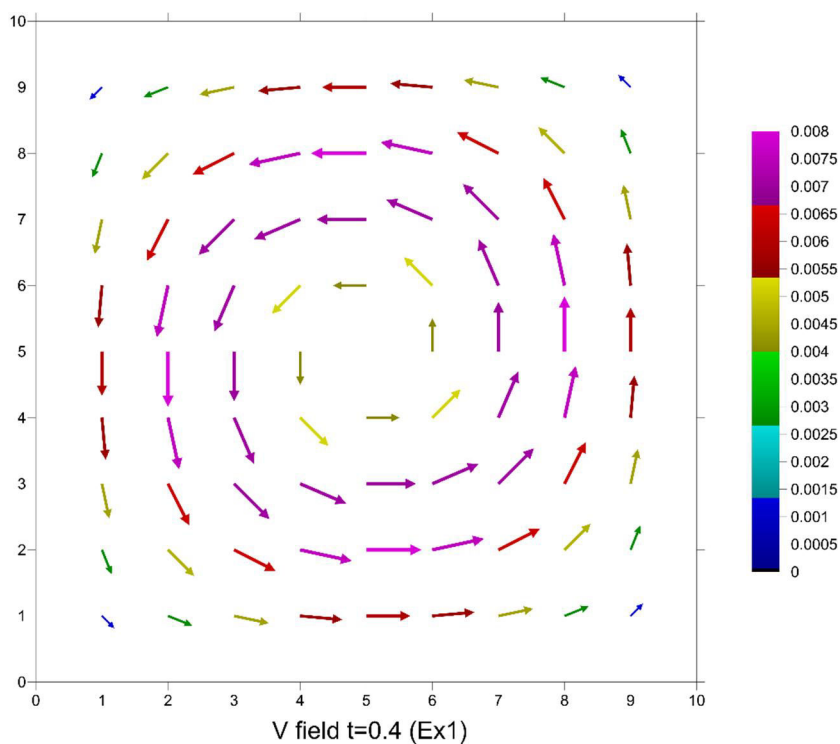
شکل ۴-۴۷ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.3s$



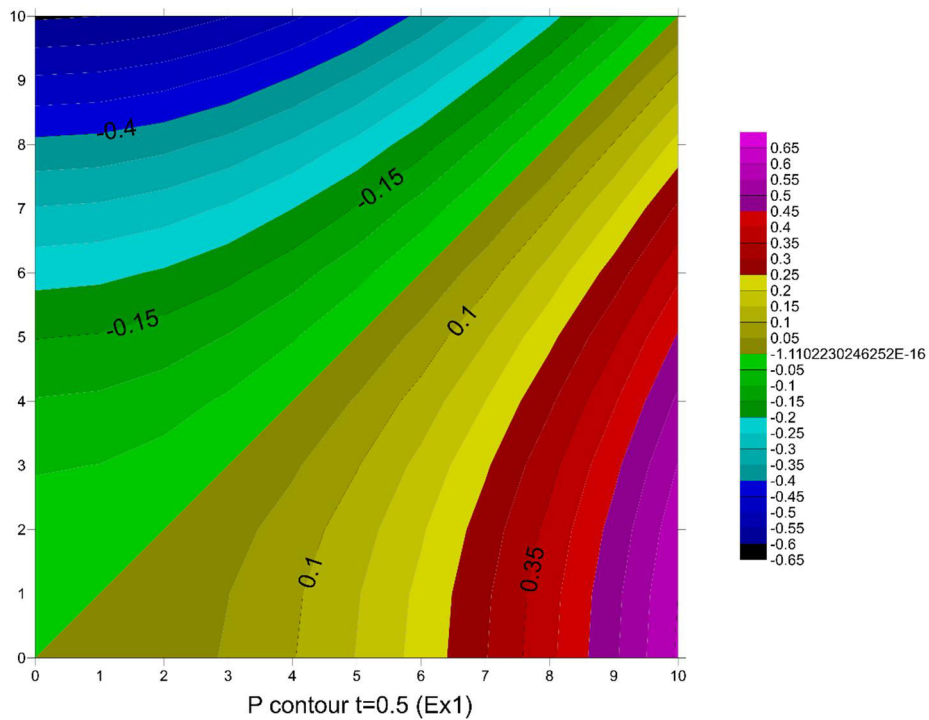
شکل ۴-۴۸ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.3s$



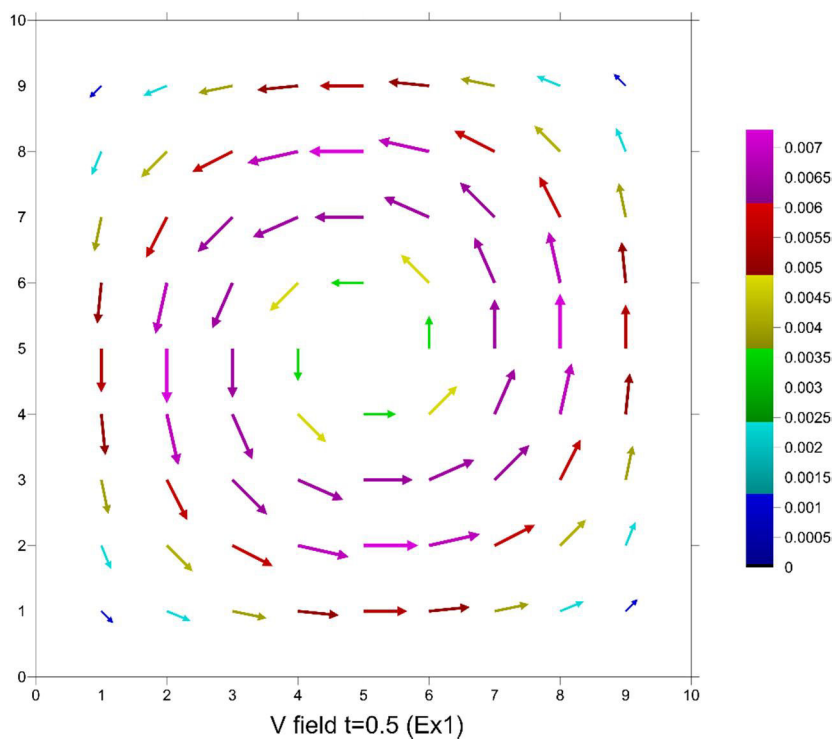
شکل ۴-۴۹ کانطور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.4s$



شکل ۴-۵۰ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.4s$

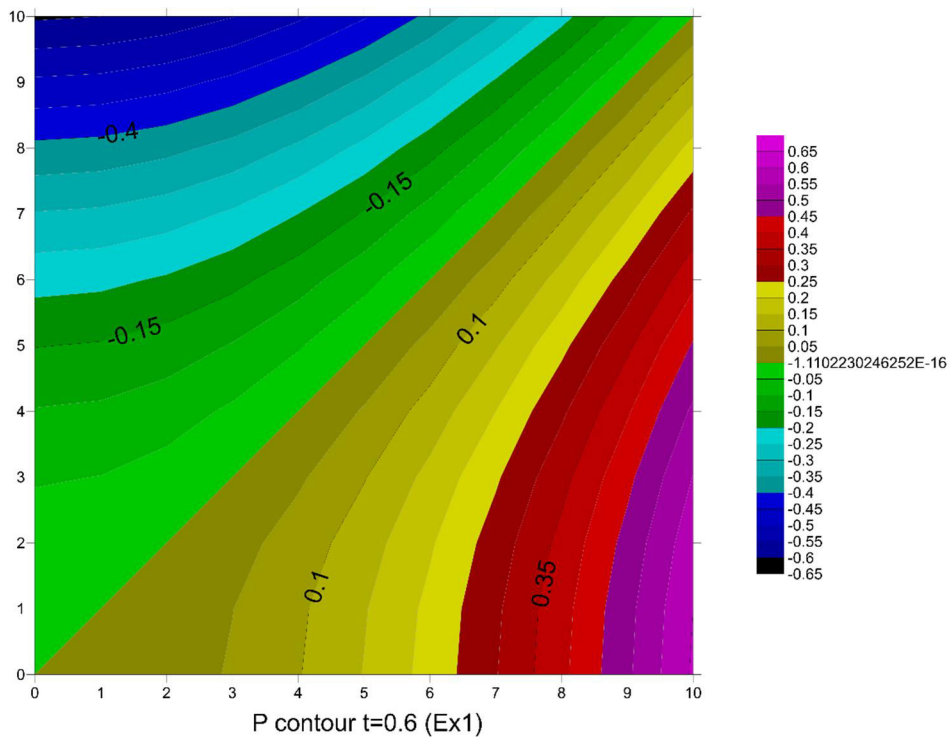


شکل ۴-۵۱ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.5s$

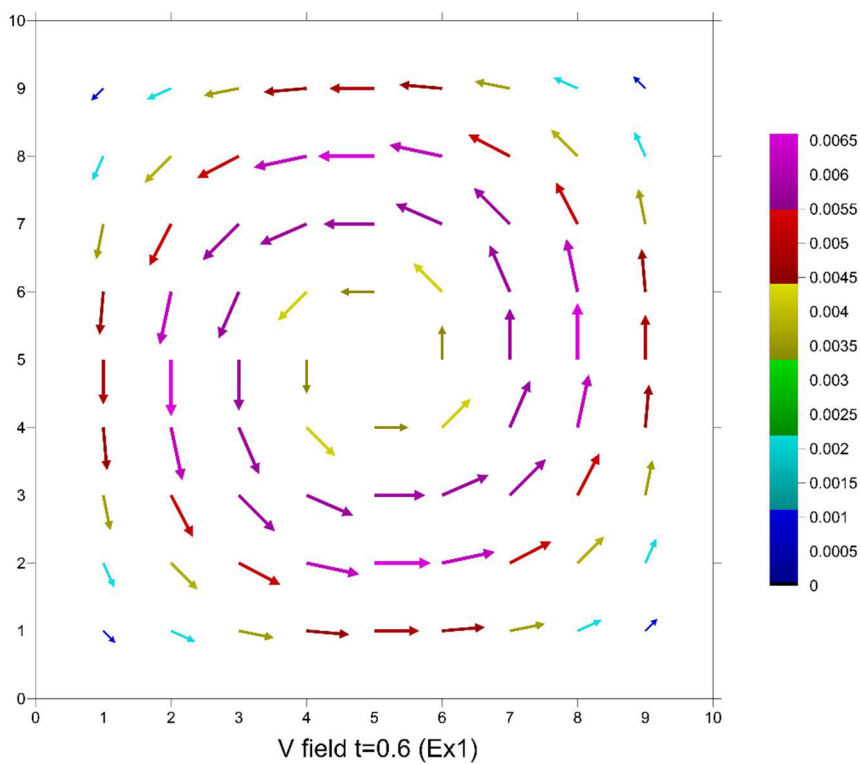


شکل ۴-۵۲ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.5s$

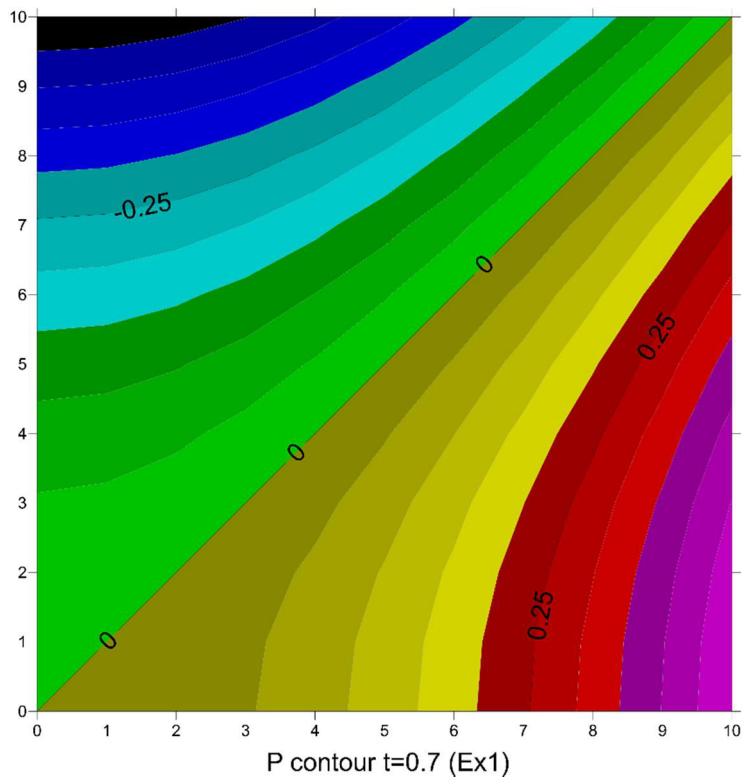




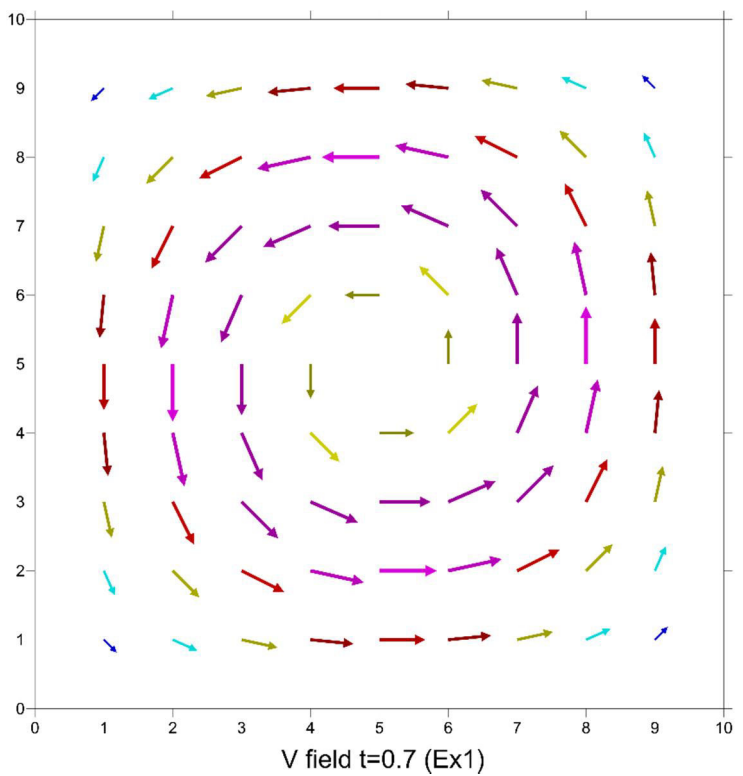
شکل ۴-۵ کانطور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.6s$



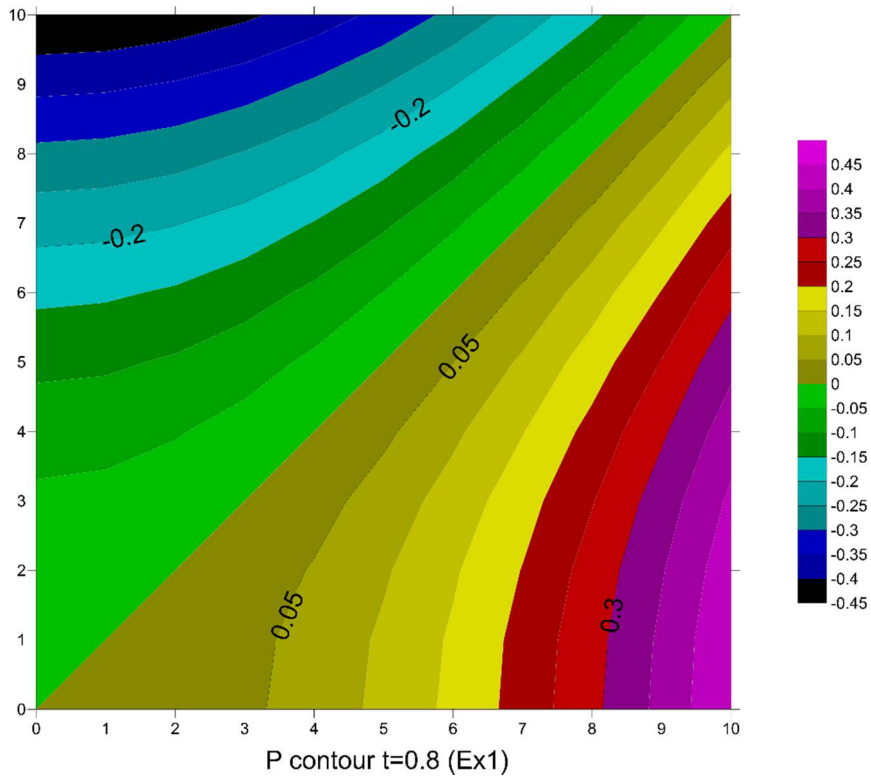
شکل ۴-۵ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.6s$



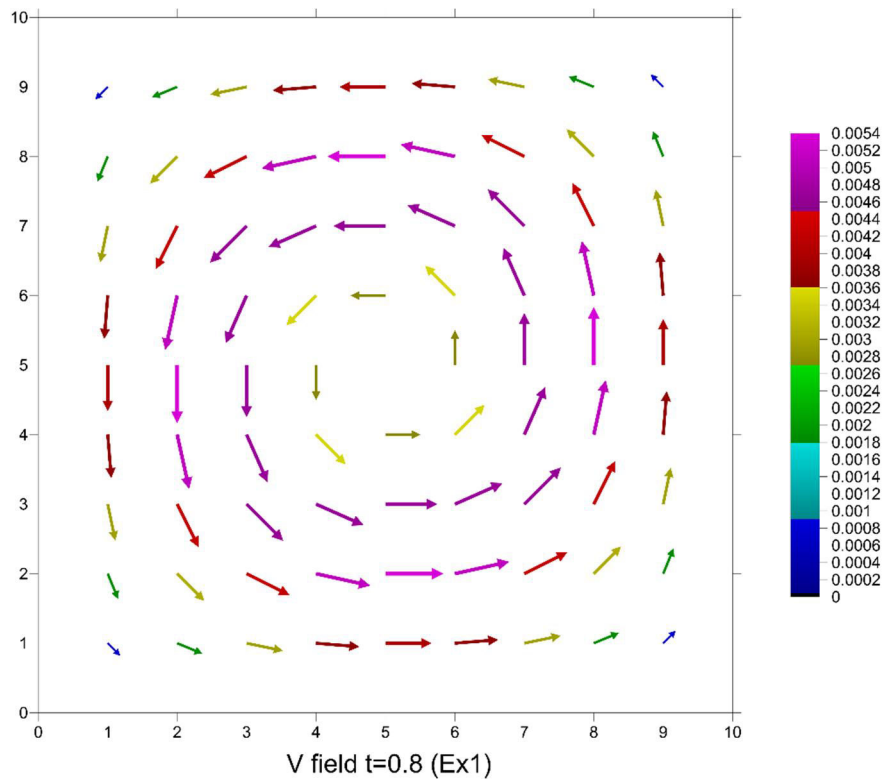
شکل ۴-۵۵ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.7s$



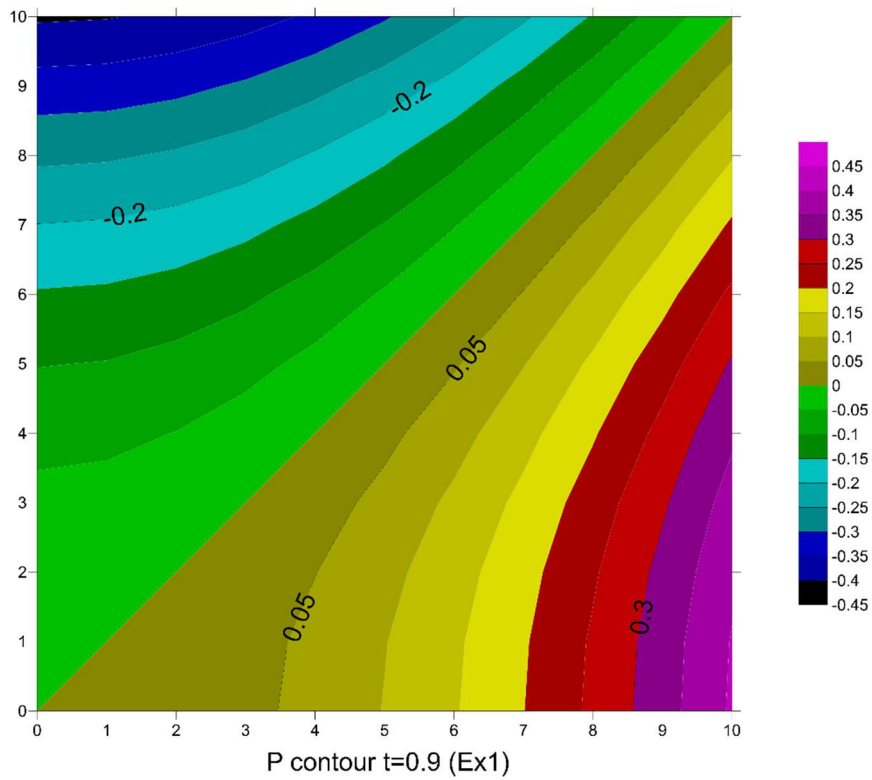
شکل ۴-۵۶ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.7s$



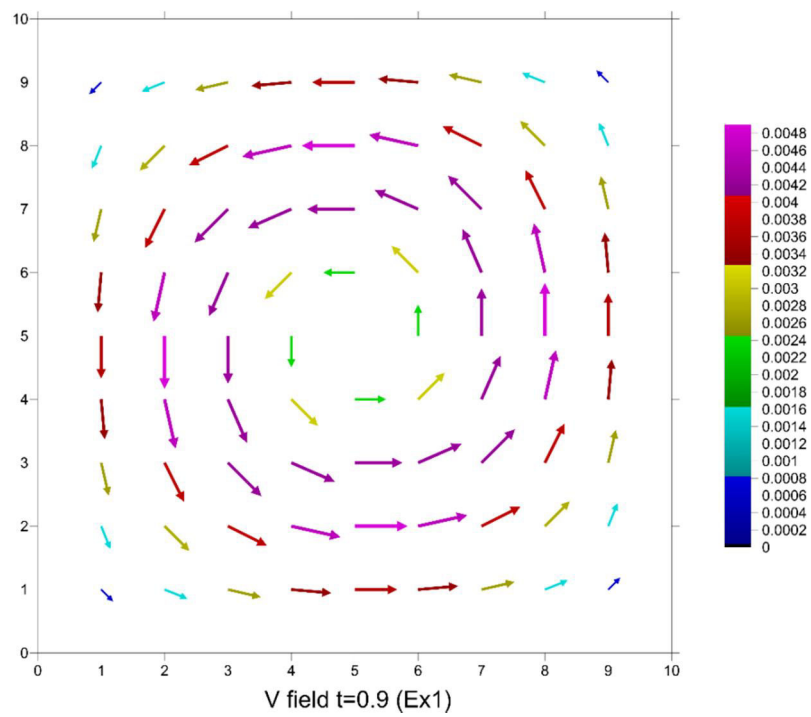
شکل ۴-۵۷ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.8s$



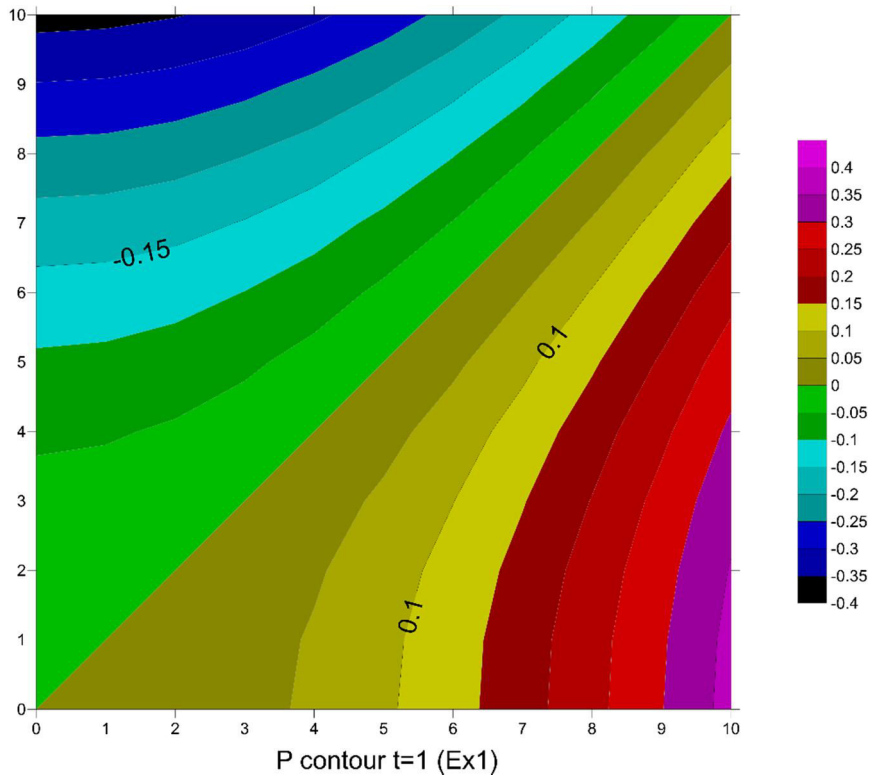
شکل ۴-۵۸ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.8s$



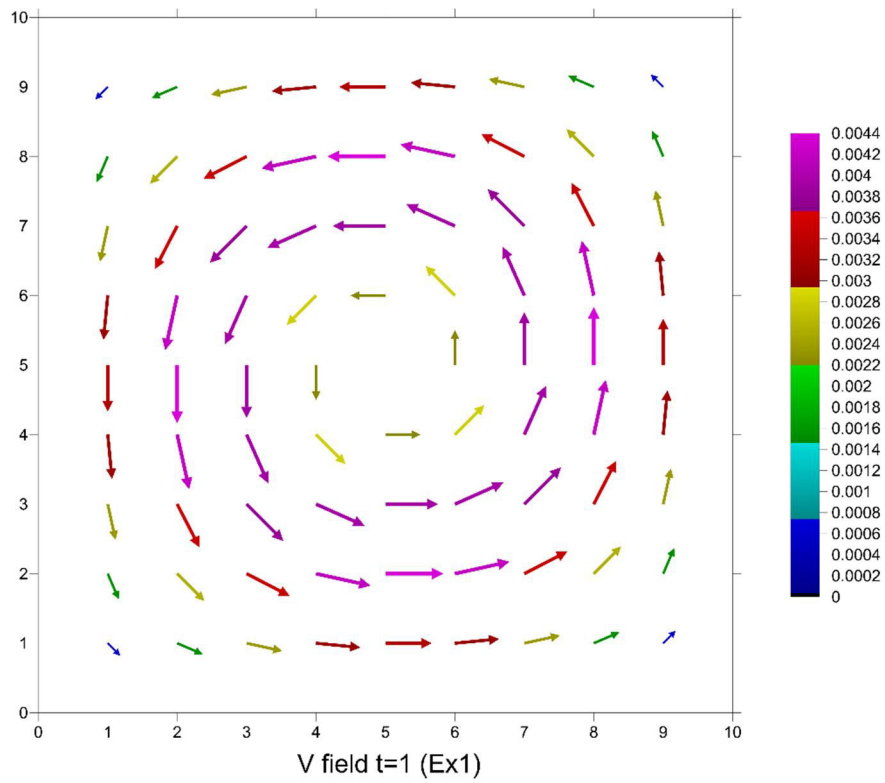
شکل ۴-۵۹ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.9s$



شکل ۴-۶۰ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.9s$



شکل ۴-۶۱ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=1s$



شکل ۴-۶۲ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=1s$

همچنین در این راستا با حل عددی معادلات به روش بدون شبکه و مقایسه با مقادیر حل تحلیلی خطای ناشی از حل عددی به دست می‌آید. جدول ۴-۱۹ مقدار خطا را نشان می‌دهد. در اینجا  $Pe$ ،  $Ue$  و  $Ve$  به ترتیب خطای فشار، خطای سرعت در راستای قائم و خطای سرعت در راستای افق است.

جدول ۴-۱۹ خطای سرعت‌ها و فشار در روش MLPG در مثال ۱

t	Ue	Ve	Pe
0.1	3.25435E-05	4.81415E-04	1.20912E-07
0.2	4.49551E-04	4.76236E-04	3.57323E-07
0.3	9.33738E-04	6.13708E-03	4.67339E-07
0.4	6.28365E-04	4.00243E-05	6.25264E-06
0.5	9.77125E-04	3.23143E-03	1.90284E-06
0.6	4.16602E-04	6.39292E-03	3.21805E-06
0.7	8.27958E-04	6.22255E-05	3.16139E-05
0.8	3.16472E-04	6.09265E-05	7.42965E-06
0.9	9.91476E-05	6.12879E-05	3.89846E-07
1	3.57295E-04	4.13336E-03	5.47973E-06

در ادامه نتایج حاصل از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین در مثال ۲ در معادلات (۴-۱۰۸) تا (۴-۱۱۰) تعیین گردیده است مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در اینجا از نیروهای بدنه صرف‌نظر شده است.

$$u(x, y, t) = -\cos(x) \sin(y) \exp(-2t/Re) \quad (۴-۱۰۸)$$

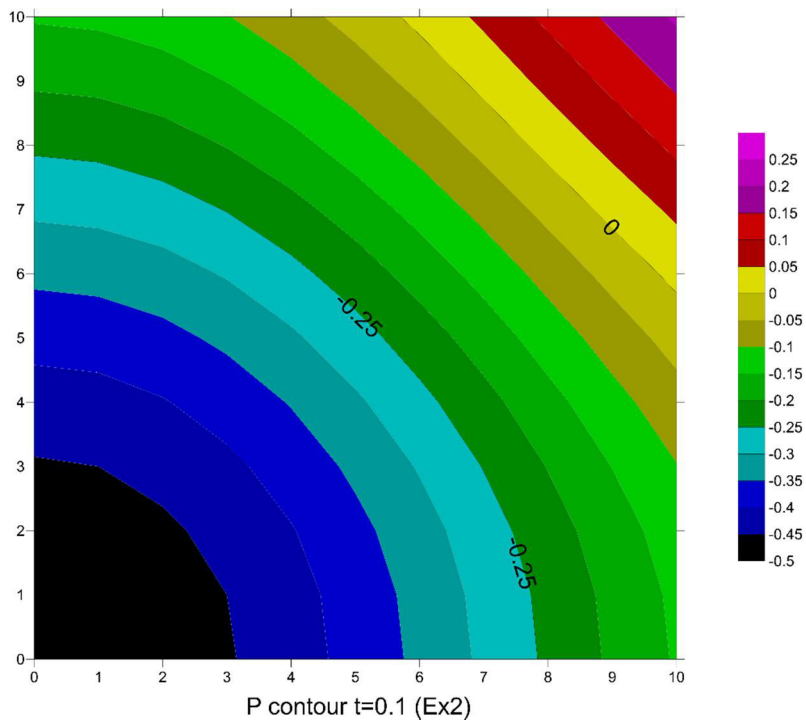
$$v(x, y, t) = \cos(y) \sin(x) \exp(-2t/Re) \quad (۴-۱۰۹)$$

$$P(x, y, t) = -0.25(\cos(2x) \sin(2y)) \exp(-4t/Re) \quad (۴-۱۱۰)$$

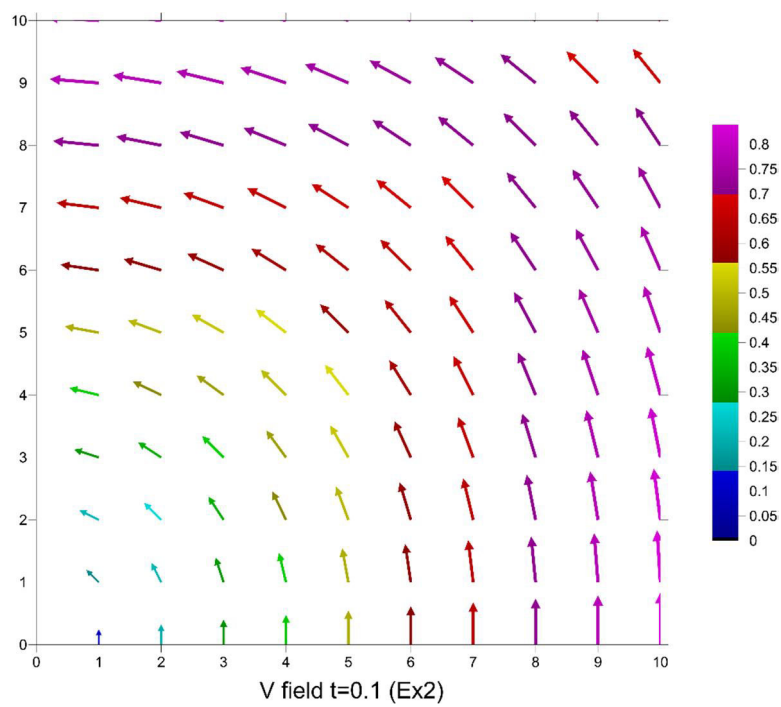
در اینجا هم عدد رینولدز برابر ۱۰۰ بدون واحد و گام زمانی ۰.۰۱ ثانیه در نظر گرفته شده است. با جایگذاری معادلات فوق در روابط (۴-۸۶) تا (۴-۸۸) برای فشار و میدان سرعت - در زمان‌های

مختلف مقادیر دقیق به دست می‌آید. در شکل‌های ۴-۶۳ تا ۴-۸۲ نتایج حاصل از حل به روش بدون

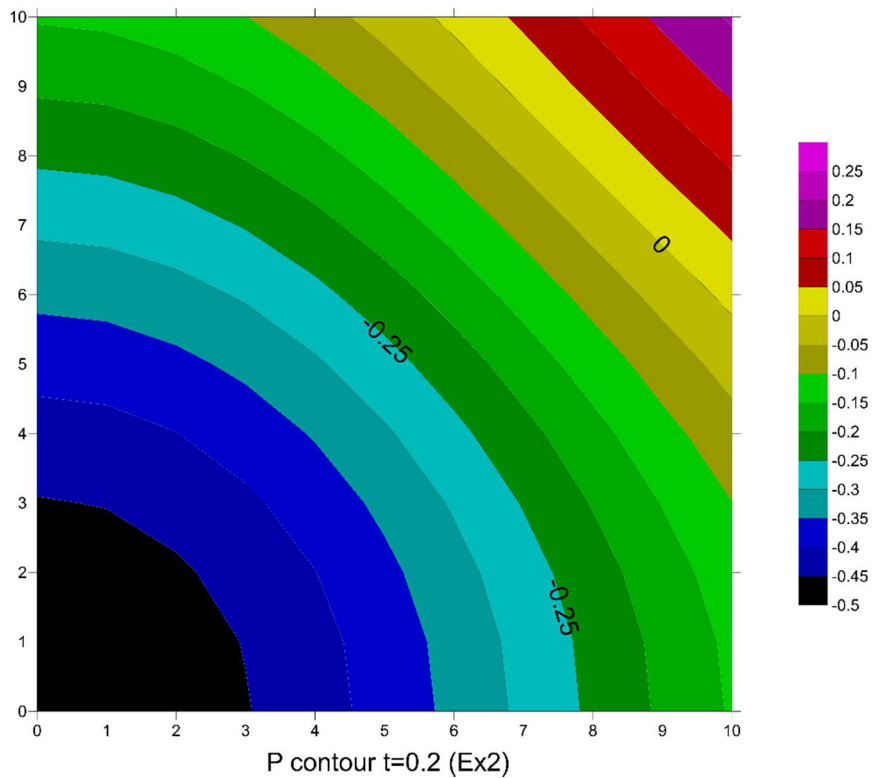
شبکه برای زمان‌های ۰.۱ ثانیه تا ۱ ثانیه ارائه شده است.



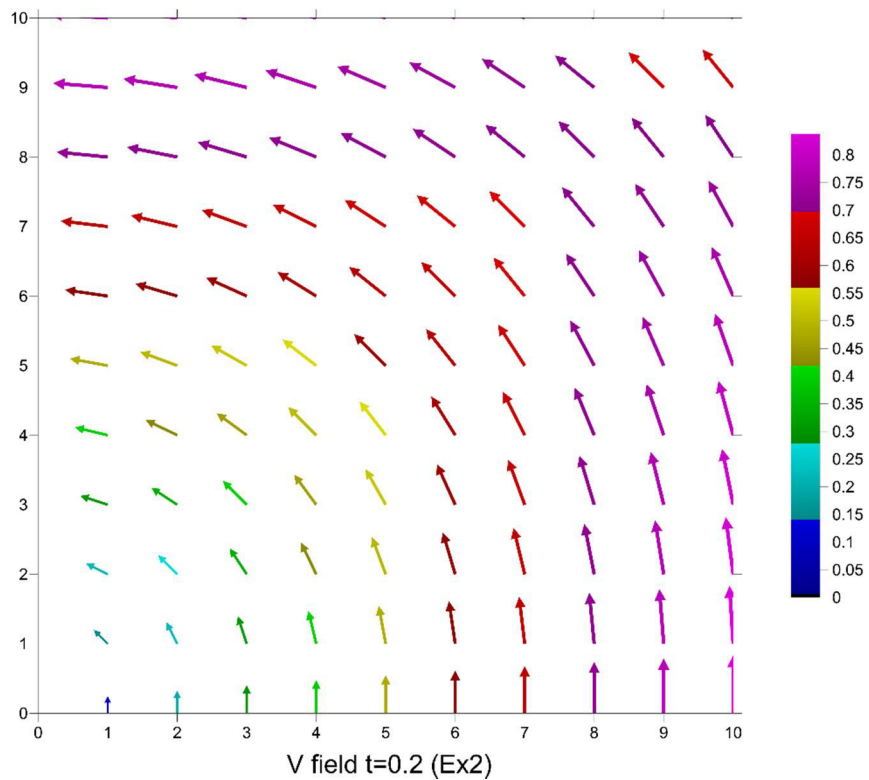
شکل ۴-۶۳ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.1s$



شکل ۴-۶۴ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.1s$

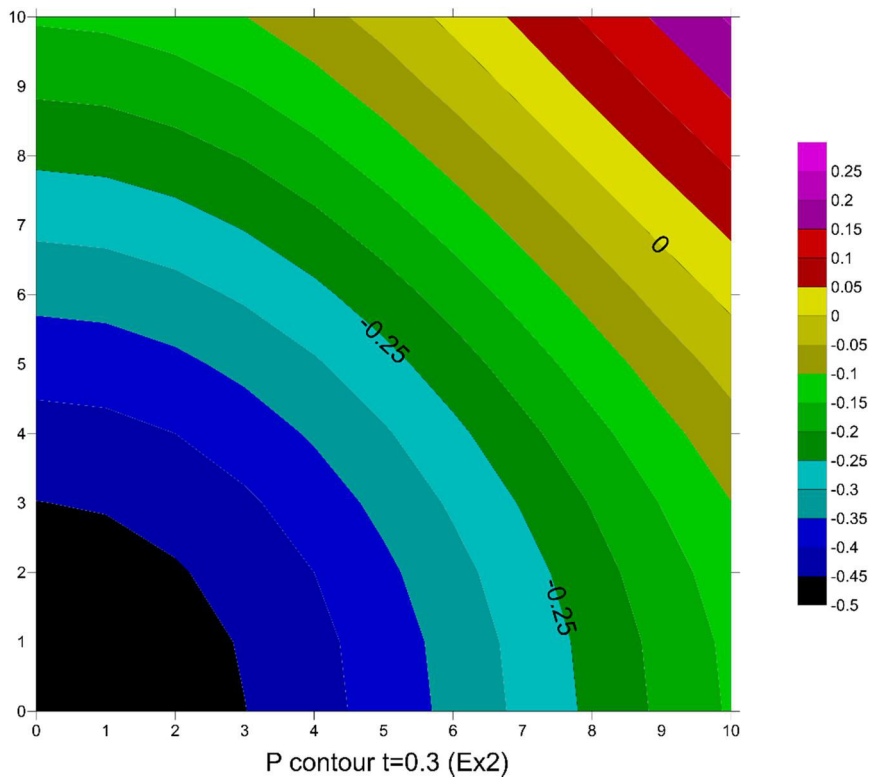


شکل ۴-۶۵ کانطور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.2s$

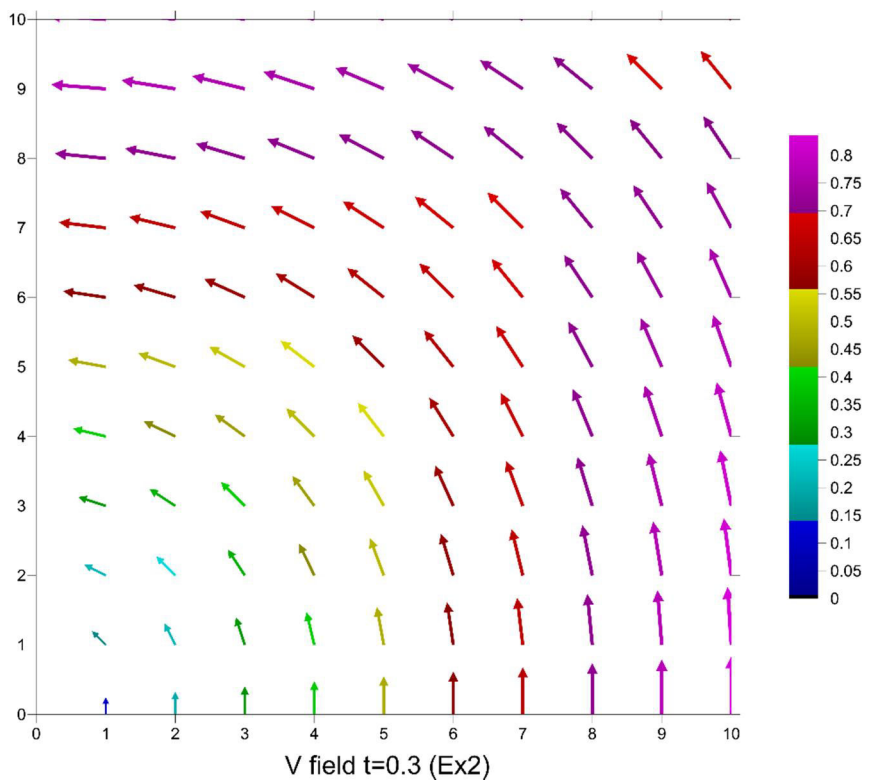


شکل ۴-۶۶ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.2s$

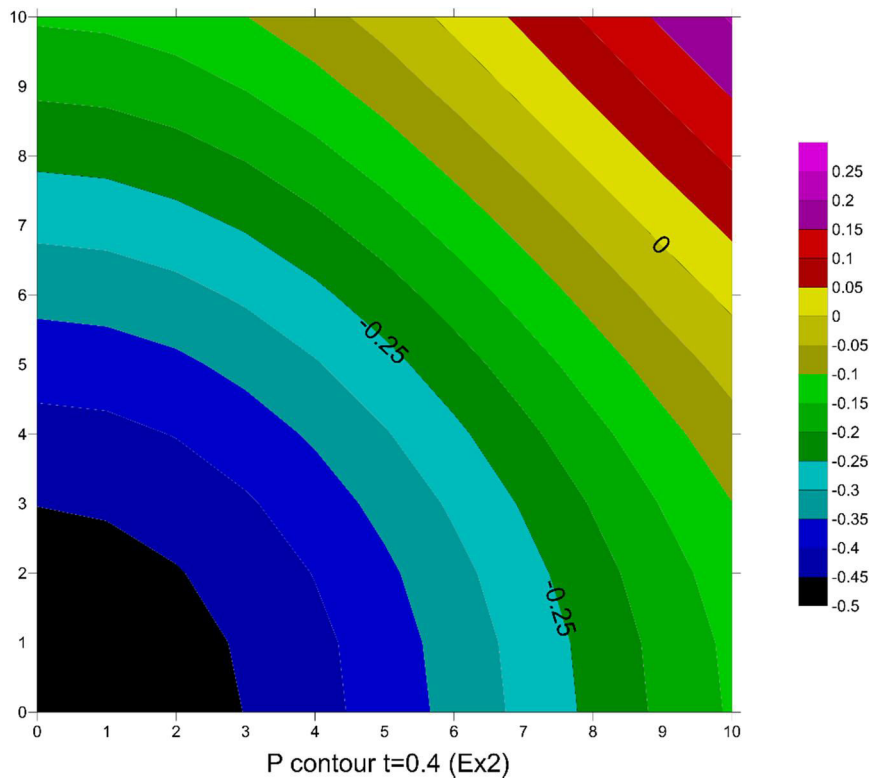




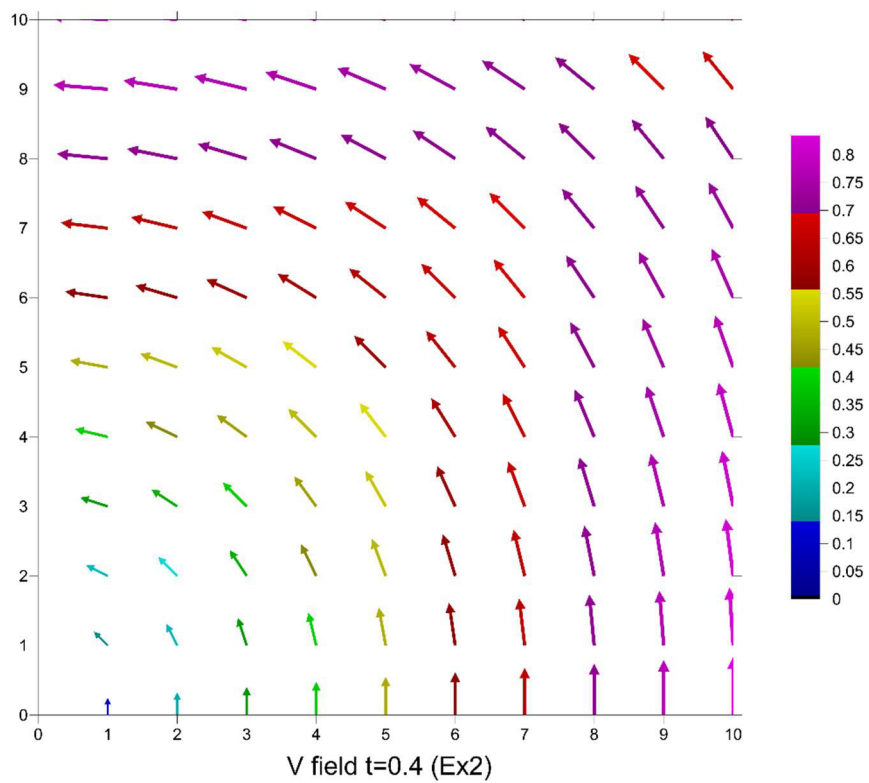
شکل ۴-۶۷ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.3s$



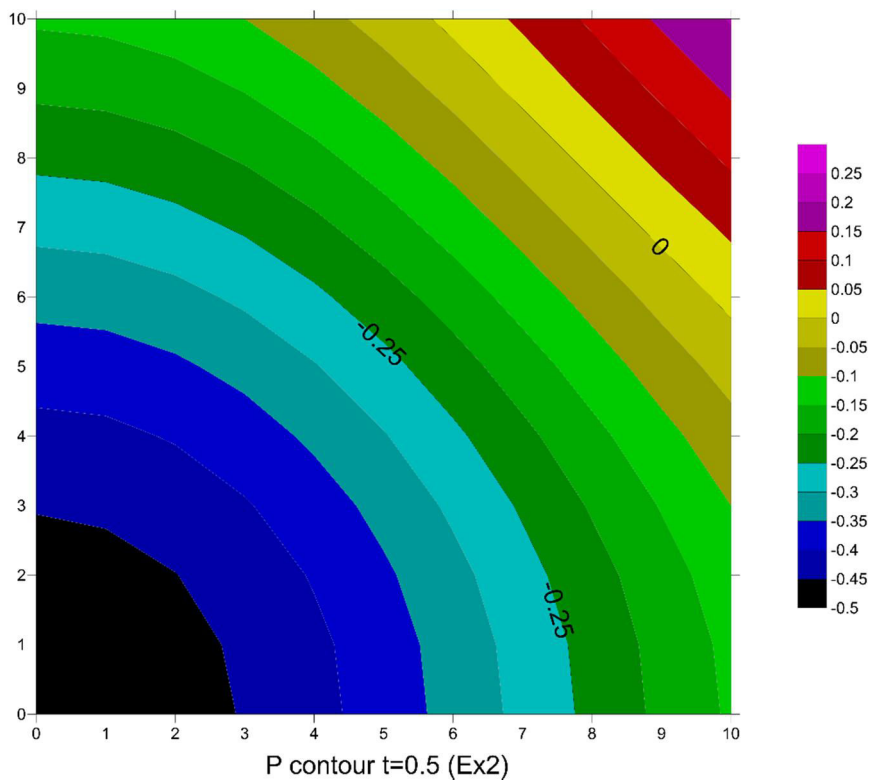
شکل ۴-۶۸ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.3s$



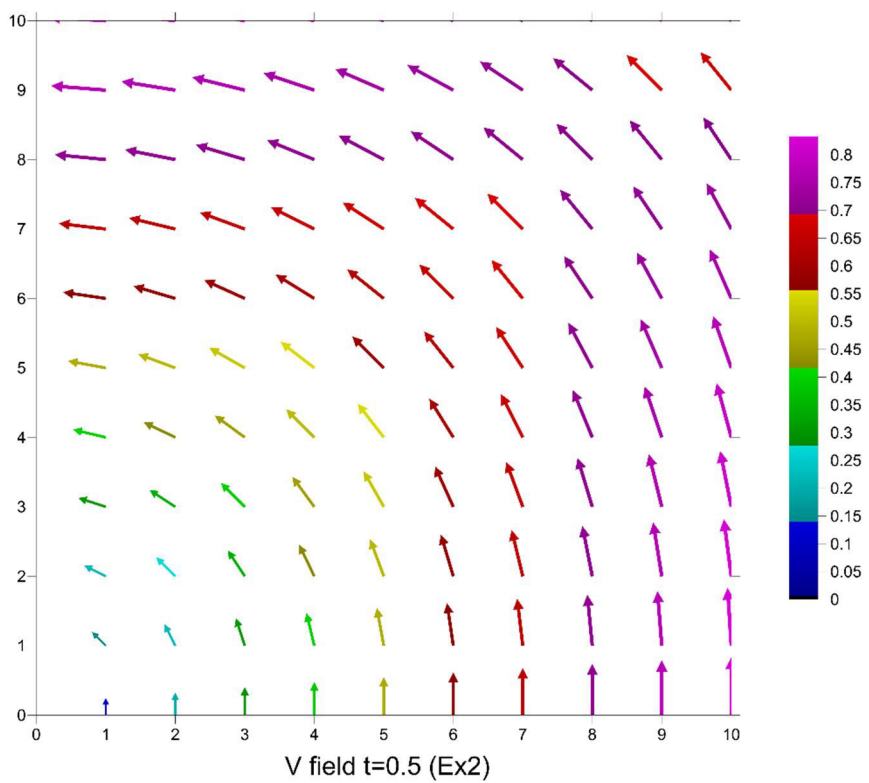
شکل ۴-۶۹ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.4s$



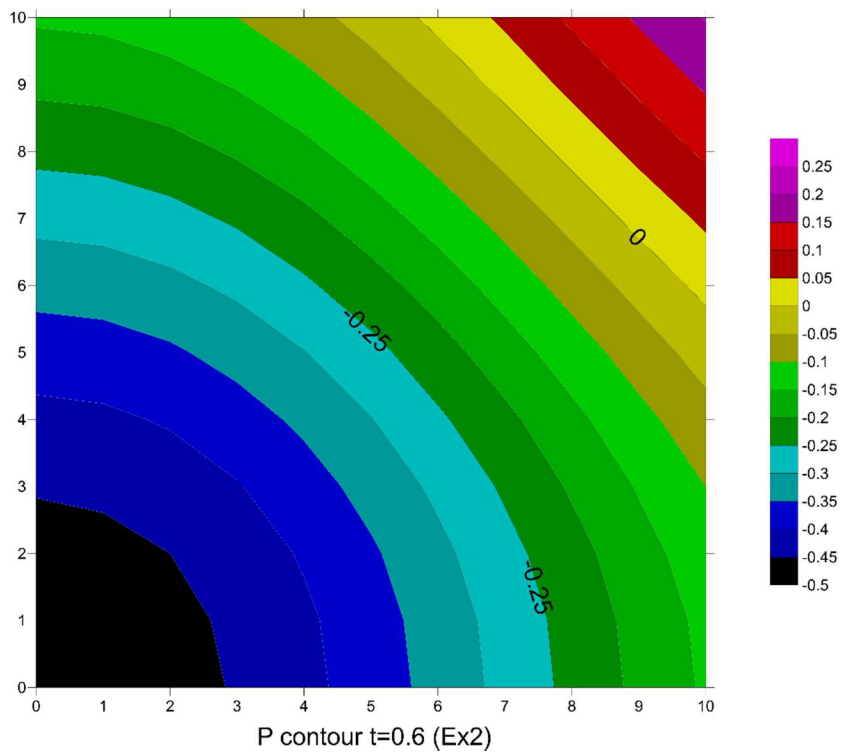
شکل ۴-۷۰ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.4s$



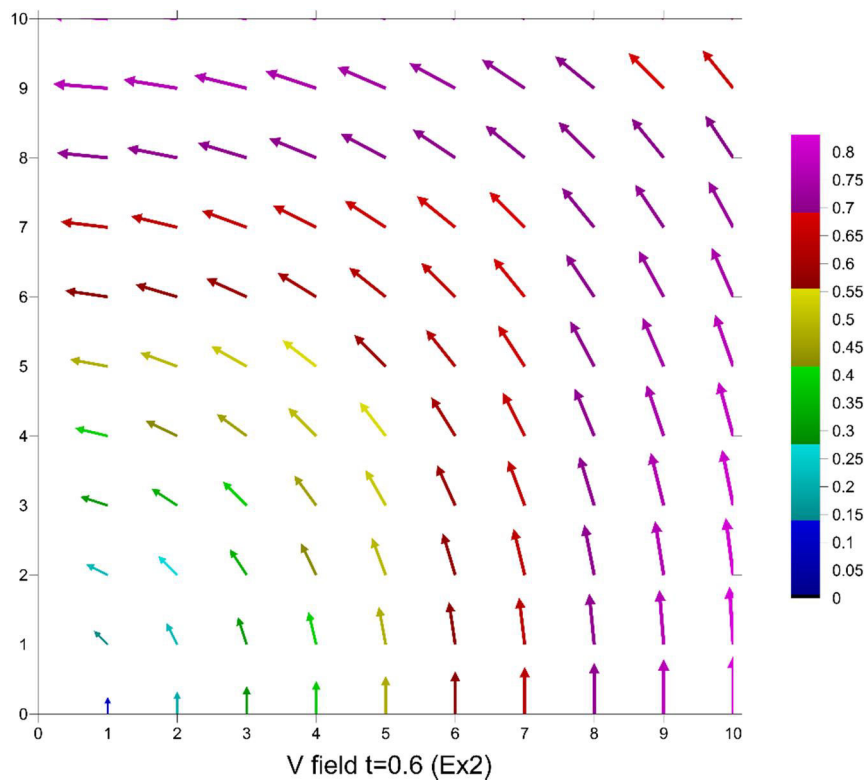
شکل ۴-۷۱ کانطور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.5s$



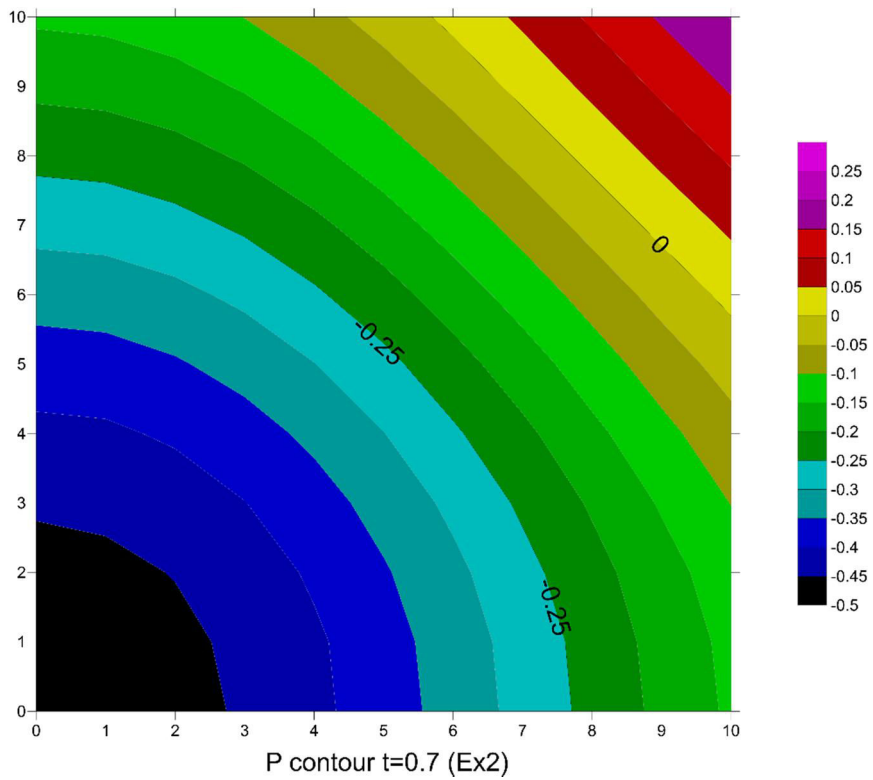
شکل ۷۲-۴ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.5s$



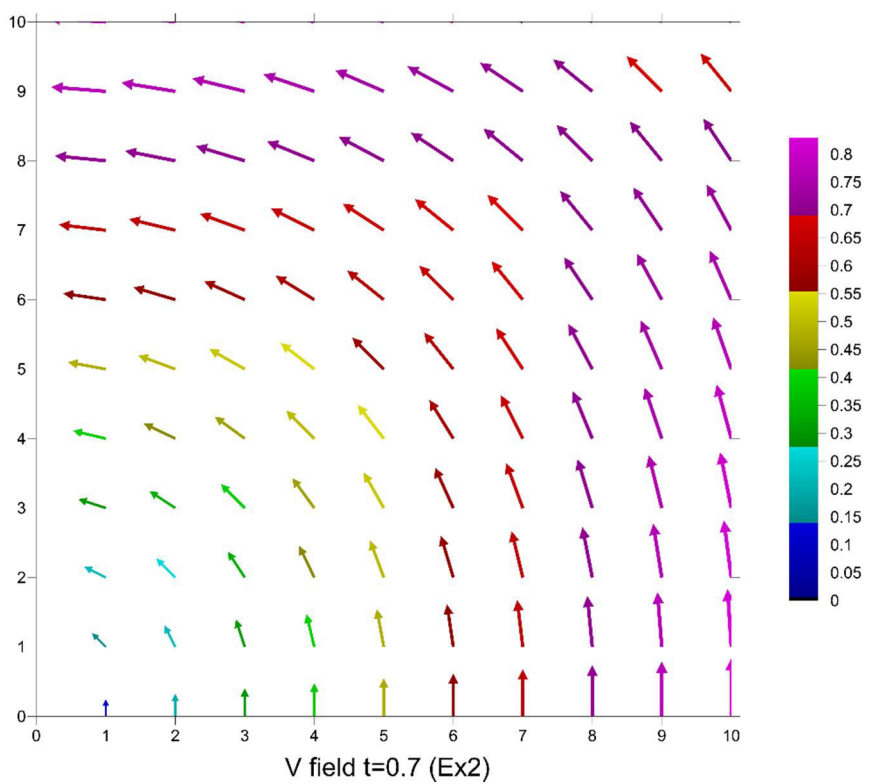
شکل ۷۳-۴ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.6s$



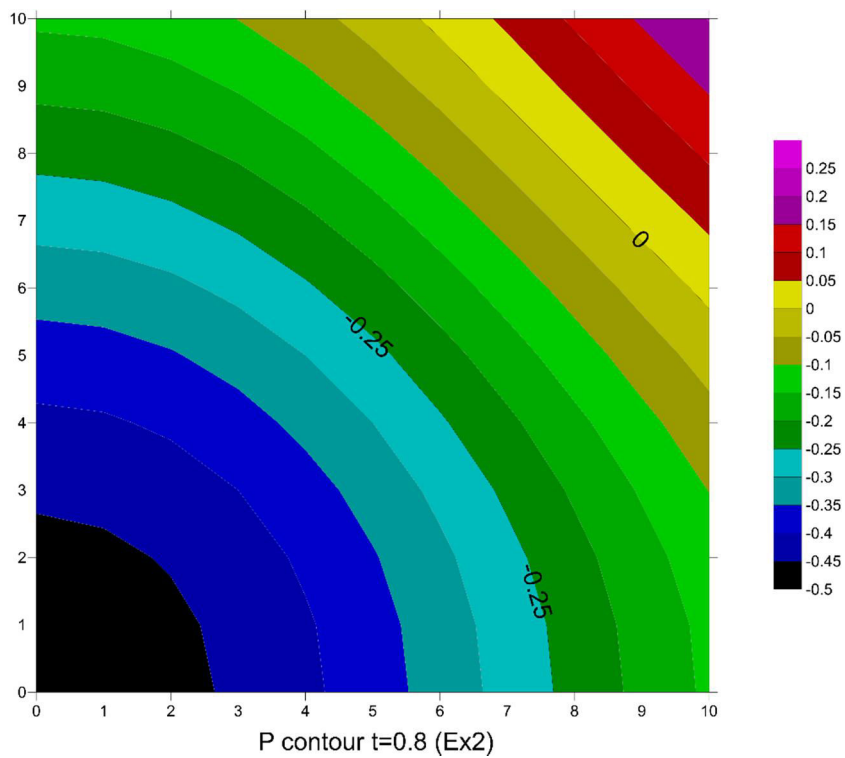
شکل ۷۴-۴ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.6s$



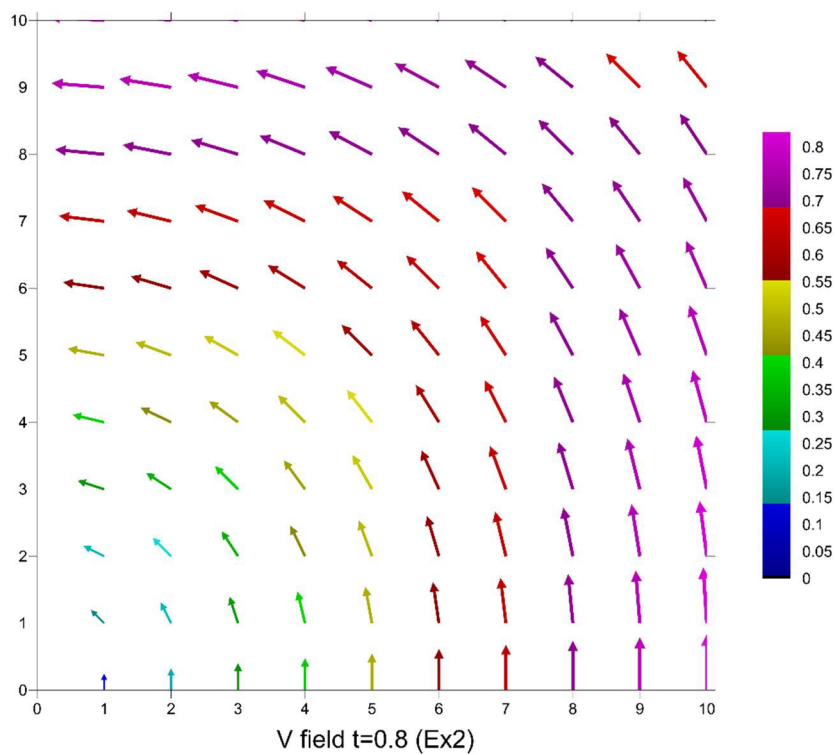
شکل ۴-۷۵ کانطور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.7s$



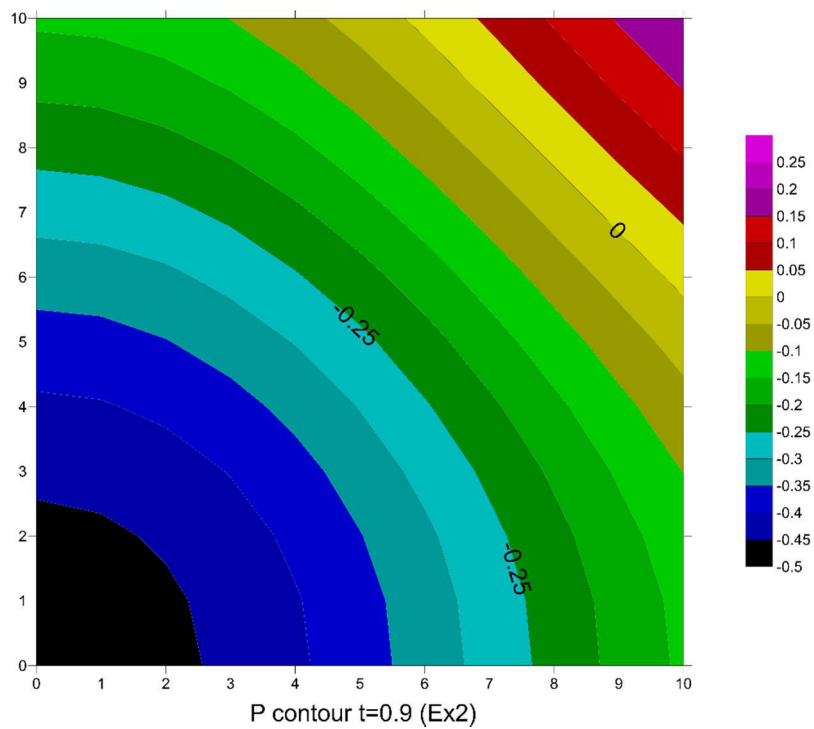
شکل ۴-۷۶ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.7s$



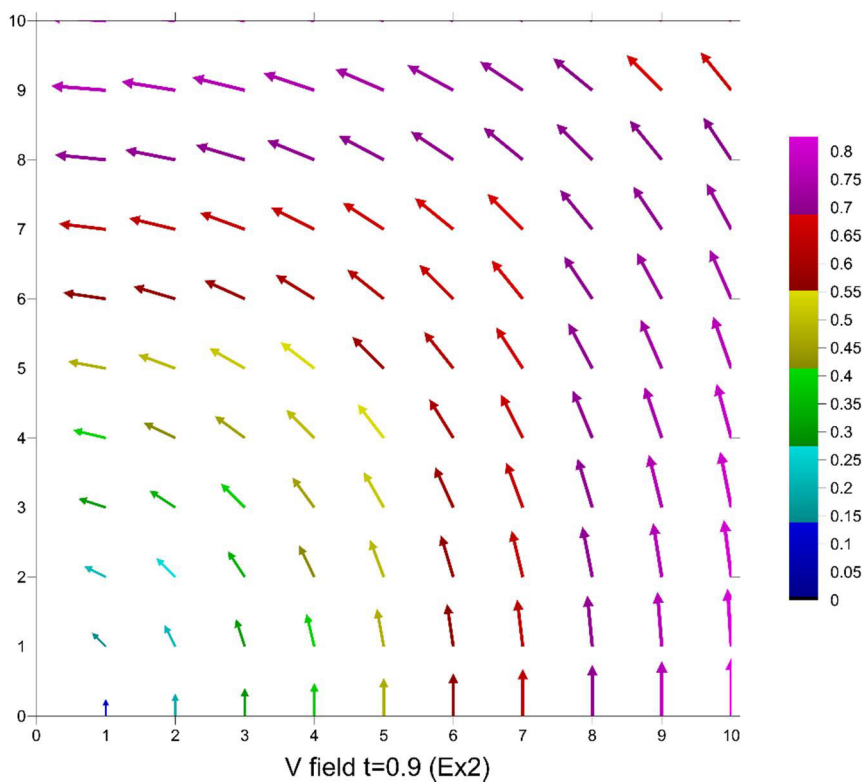
شکل ۷۷-۴ کانتور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.8s$



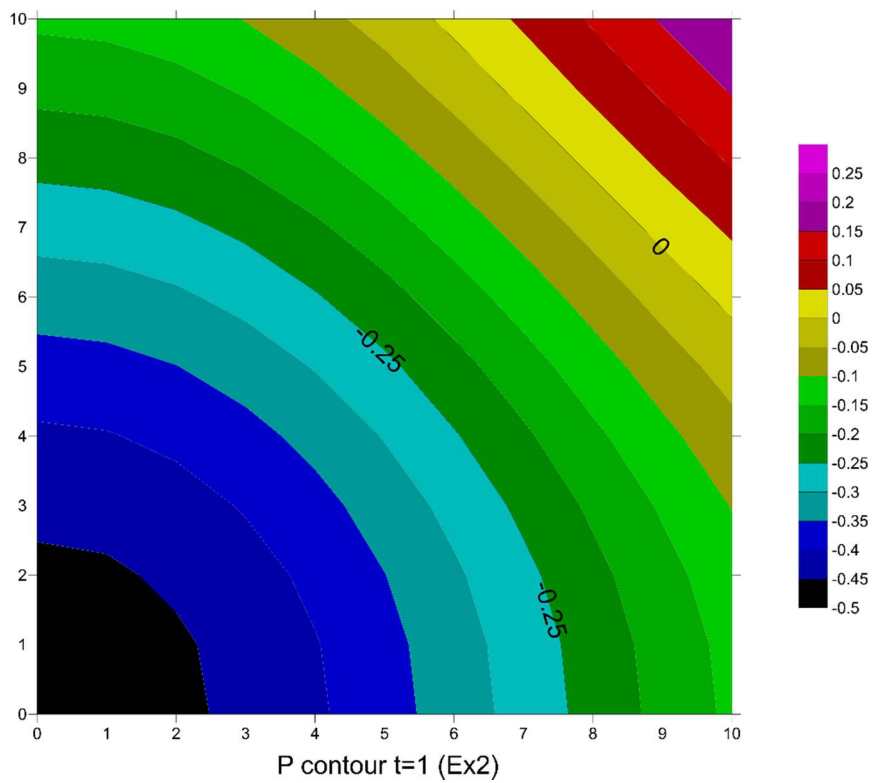
شکل ۷۸-۴ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.8s$



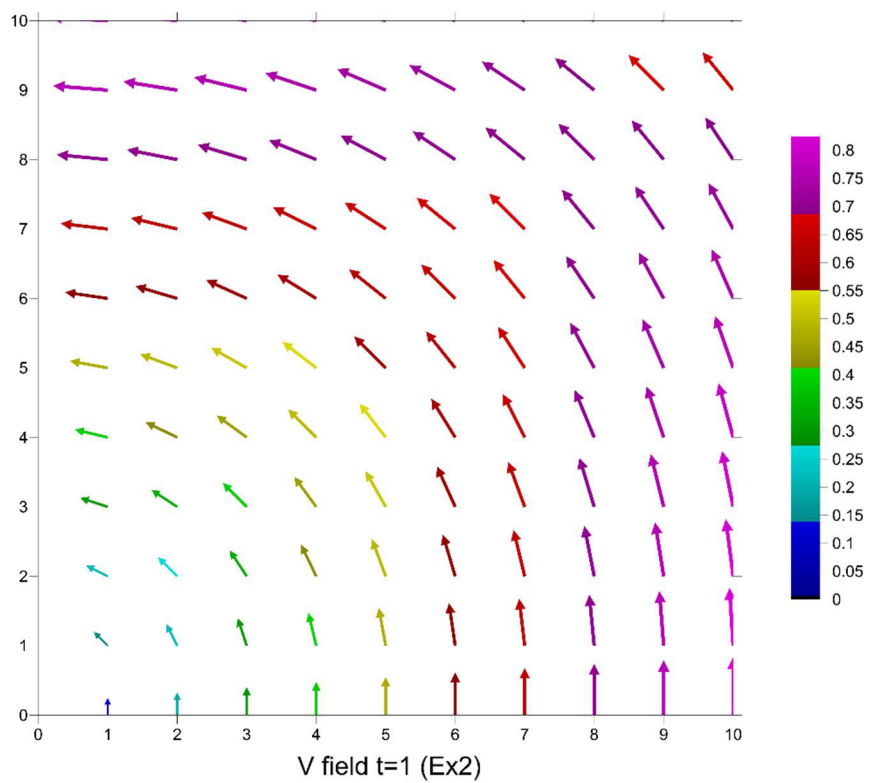
شکل ۴-۷۹ کانطور فشار به روش MLPG در زمان  $t=0.9s$



شکل ۴-۸۰ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=0.9s$



شکل ۴-۸۱ کانطور فشار به روش MLPG در زمان  $t=1s$



شکل ۴-۸۲ میدان سرعت به روش MLPG در زمان  $t=1s$



همچنین در این راستا با حل عددی معادلات به روش بدون شبکه و مقایسه با مقادیر حل تحلیلی خطای ناشی از حل عددی به دست می‌آید. جدول ۴-۲۰ مقدار خطا را نشان می‌دهد. در اینجا  $Pe$ ،  $Ue$  و  $Ve$  به ترتیب خطای فشار، خطای سرعت در راستای قائم و خطای سرعت در راستای افق است.

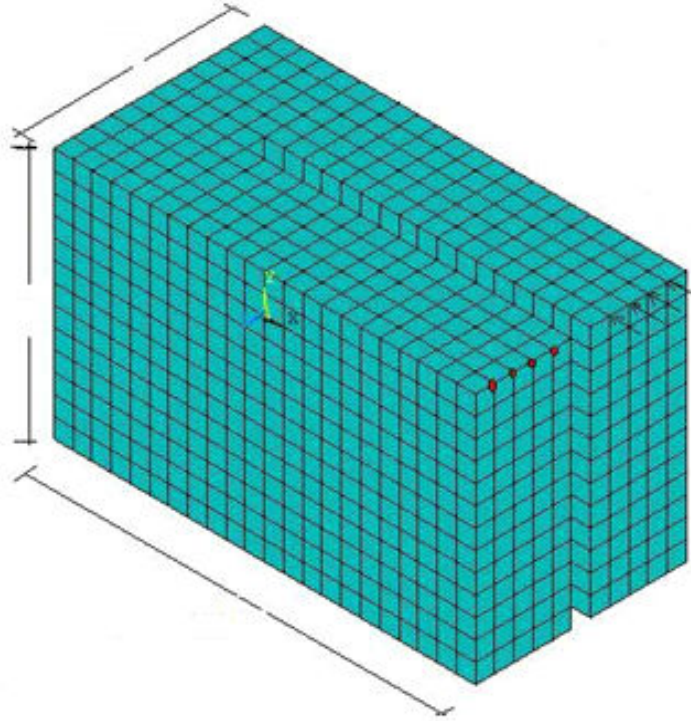
جدول ۴-۲۰ خطای سرعت‌ها و فشار در روش MLPG در مثال ۲

t	Ue	Ve	Pe
0.1	9.81765E-02	1.36538E-01	4.26649E-05
0.2	6.43829E-02	5.96621E-01	3.93822E-04
0.3	4.39168E-01	7.15573E-01	5.55082E-02
0.4	4.20697E-02	3.10919E-02	7.00673E-02
0.5	5.10063E-02	7.94137E-02	1.74544E-05
0.6	7.48949E-03	5.22576E-02	8.13023E-03
0.7	5.73996E-01	2.64335E-02	9.38632E-04
0.8	5.84092E-02	6.32381E-02	2.57336E-03
0.9	3.48097E-03	2.47668E-02	7.54135E-04
1	2.44174E-01	4.59855E-03	5.21172E-03

#### ۴-۱۰ مدل‌سازی معادلات سه بعدی ناویر استوکس

به منظور بررسی و مدل‌سازی معادلات سه بعدی ناویر استوکس، در اینجا یک مثال کاربردی و واقعی مورد ارزیابی قرار گرفته است. تانک‌های تماسی ضدفونی برای تصفیه آب به کار می‌روند. عملیات ضدفونی کردن آب به کمک تانک تصفیه تماسی یکی از روش‌های مورد استفاده در تصفیه آب آشامیدنی به منظور غیر فعل‌سازی میکرو ارگانیسم‌های موجود در آب است. این تانک‌ها باید به‌گونه‌ای طراحی گردند تا مدت زمان کافی برای تماس آب با کلر فراهم شود، بنابراین مدل‌سازی انتشار به‌صورت ردگیر در تانک تصفیه برای کنترل کارایی آن تانک در ضدفونی کردن آب لازم است. در این مطالعه ابتدا، مدل ساده‌ی سه بعدی برای شبیه‌سازی انتشار ردگیر در یک تانک تماسی بکار برده شده است. شکل زیر مدل آزمایشگاهی قسمتی از تصفیه کننده آب است که در کشور انگلیس

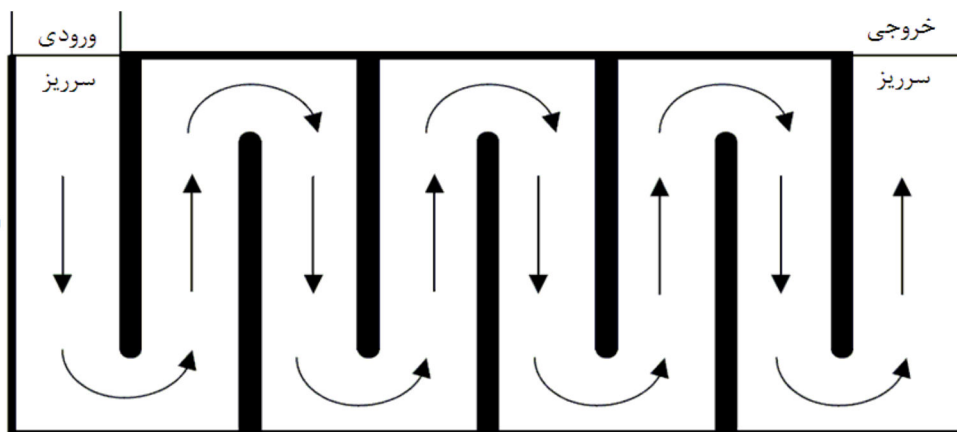
ساخته شده و در حال کار می باشد.



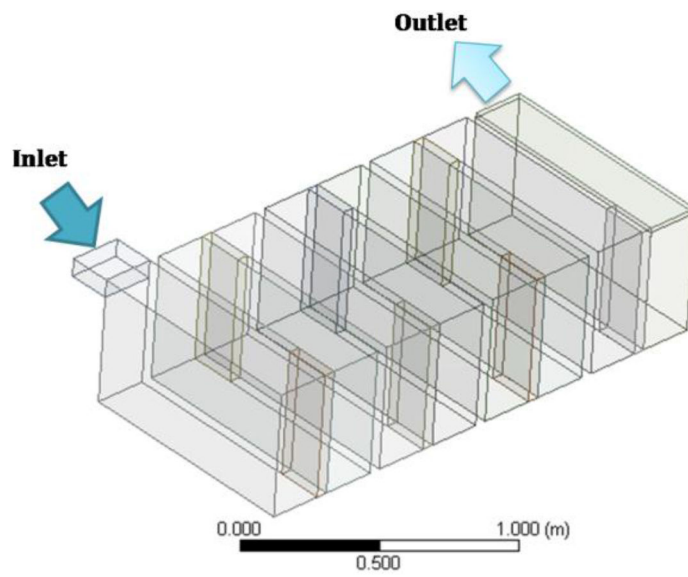
شکل ۴-۸۳ شماتیک مساله سه بعدی

در ادامه مدل واقعی تانک تصفیه تماسی با هشت کامپارتمنت مورد مطالعه قرار می گیرد [۷۲].

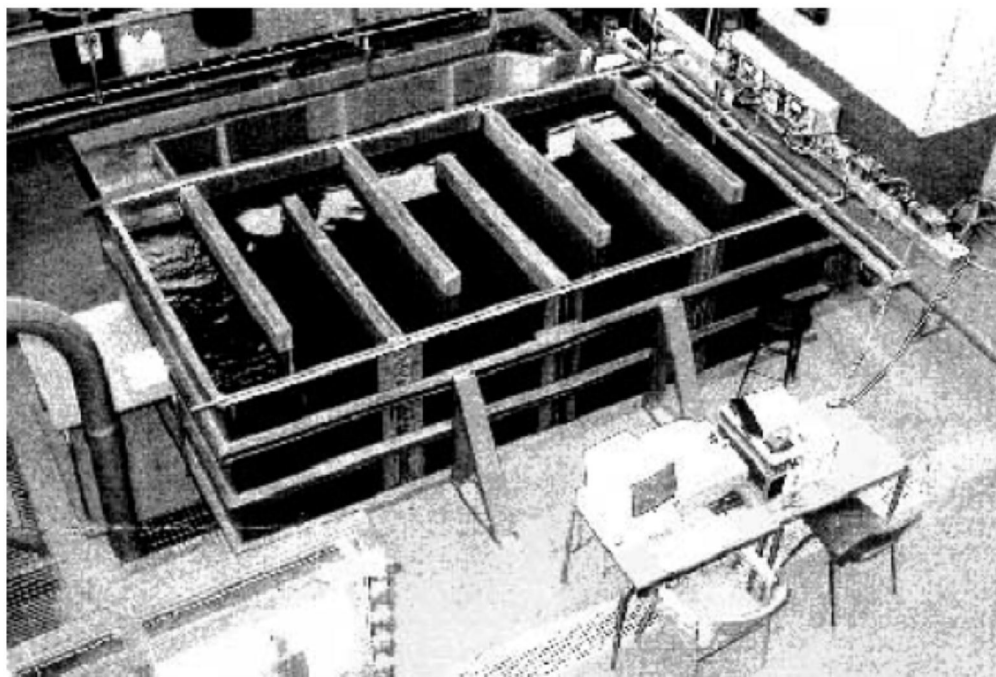
شکل های بعدی مشخص کنند هندسه مساله می باشند:



شکل ۴-۸۴ پلان تانک تصفیه تماسی با هشت کامپارتمنت



شکل ۴-۸۵ شماتیک سه بعدی تانک تصفیه تماسی با هشت کامپارتمنت [۷۲]



شکل ۴-۸۶ نمایی از تانک تصفیه تماسی Embsay [۷۲]

#### ۴-۱۰-۱ رابطه سازی معادلات سه بعدی ناویر استوکس

معادله‌ی غیر خطی انتقال و انتشار برگر حاکم بر جریان آب در راستای جریان به صورت روابط (۴-۴)

(۱۱۱) تا (۴-۱۱۴) بیان می‌گردد: معادلات ناویر استوکس به شکل با بعد به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (۴-۱۱۱)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (vw) = v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (۴-۱۱۲)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( w^2 + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (uw) + \frac{\partial}{\partial y} (vw) = v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \quad (۴-۱۱۳)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (۴-۱۱۴)$$

در اینجا  $u$  و  $v$  و  $w$  به ترتیب سرعت جریان در جهت افقی، عمودی و قائم می‌باشد،  $g$  شتاب

جاذبه و در نهایت  $P$  فشار آب می‌باشد.

برای راحتی کار می‌توان ترم‌های زمانی را بدین صورت تعریف کرد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} (x, t_t) \cong \frac{u^{t+1}(x) - u^t(x)}{\Delta t} \quad (۴-۱۱۵)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} (y, t_t) \cong \frac{v^{t+1}(y) - v^t(y)}{\Delta t} \quad (۴-۱۱۶)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} (z, t_t) \cong \frac{w^{t+1}(z) - w^t(z)}{\Delta t} \quad (۴-۱۱۷)$$

با استفاده از رابطه (۴-۱۱۵)، مجدداً معادله (۴-۱۱۱) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\frac{u^{t+1} - u^t}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) - v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right\rangle^t \quad (۴-۱۱۸)$$

سپس:

$$\begin{aligned}
 u^{t+1} = & -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} + u^t \\
 & - \Delta t \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) \right. \\
 & \left. - v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right\rangle^t
 \end{aligned} \tag{۱۱۹-۴}$$

سپس با تعریف  $U_{RHS}$  به دست می‌آید:

$$u^{t+1} = U_{RHS} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} \tag{۱۲۰-۴}$$

$$\begin{aligned}
 U_{RHS} = & u^t + \Delta t \left\langle v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} (uw) \right) - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (uv) \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial z} (uw) \right\rangle^t
 \end{aligned} \tag{۱۲۱-۴}$$

به همین ترتیب با استفاده از رابطه (۱۱۶-۴) ، مجدداً معادله (۱۱۲-۴) به صورت زیر بازنویسی

می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 \frac{v^{t+1} - v^t}{\Delta t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} \\
 & - \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (vw) - v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right\rangle^t
 \end{aligned} \tag{۱۲۲-۴}$$

سپس:

$$\begin{aligned}
 v^{t+1} = & -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} + v^t \\
 & - \Delta t \left\langle \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (vw) - v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right\rangle^t
 \end{aligned} \tag{۱۲۳-۴}$$

سپس با تعریف  $V_{RHS}$  به دست می آید:

$$v^{t+1} = V_{RHS} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} \quad (124-4)$$

$$V_{RHS} = v^t + \Delta t \left\langle v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (uv) - \frac{\partial}{\partial z} (vw) \right\rangle^t \quad (125-4)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (4-117)، مجدداً معادله (4-113) به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$\begin{aligned} \frac{w^{t+1} - w^t}{\Delta t} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial z} \\ & - \left\langle \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (uw) + \frac{\partial}{\partial y} (vw) - v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right. \\ & \left. - g \right\rangle^t \end{aligned} \quad (126-4)$$

سپس:

$$\begin{aligned} w^{t+1} = & -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial z} + w^t \\ & - \Delta t \left\langle \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (uw) + \frac{\partial}{\partial y} (vw) \right. \\ & \left. - v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - g \right\rangle^t \end{aligned} \quad (127-4)$$

سپس با تعریف  $W_{RHS}$  به دست می آید:

$$w^{t+1} = W_{RHS} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P^{t+1}}{\partial z} \quad (128-4)$$

$$\begin{aligned} W_{RHS} = & w^t + \Delta t \left\langle v \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} (uw) - \frac{\partial}{\partial y} (vw) \right. \\ & \left. - g \right\rangle^t \end{aligned} \quad (129-4)$$

از معادلات (۱۲۱-۴)، (۱۲۵-۴) و (۱۲۹-۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial u^{t+1}}{\partial x} = \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 p^{t+1}}{\partial x^2} \quad (۱۳۰-۴)$$

$$\frac{\partial v^{t+1}}{\partial y} = \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 p^{t+1}}{\partial y^2} \quad (۱۳۱-۴)$$

$$\frac{\partial w^{t+1}}{\partial z} = \frac{\partial W_{RHS}}{\partial z} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial^2 p^{t+1}}{\partial z^2} \quad (۱۳۲-۴)$$

از معادلات (۱۳۰-۴)، (۱۳۱-۴) و (۱۳۲-۴) و جایگذاری آن در رابطه (۱۳۴-۴) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 p^{t+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{t+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^{t+1}}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} + \frac{\partial W_{RHS}}{\partial z} \right) \quad (۱۳۳-۴)$$

معادله (۱۳۳-۴) در واقع همان معادله پوآسن است. برای حل معادله (۱۳۳-۴) از روش بدون شبکه محلی پتروف-گلرکین (MLPG) بهره جسته می‌شود. شکل ضعیف معادلات ناویر استوکس در گره I با روش باقیمانده وزنی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega_s} \left[ \frac{\partial^2 p^{t+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{t+1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^{t+1}}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} + \frac{\partial W_{RHS}}{\partial z} \right) \right] w d\Omega \quad (۱۳۴-۴)$$

$$= 0$$

اینجا  $w$  تابع وزن است. با استفاده از تقسیم‌بندی مرزها رابطه (۱۳۵-۴) به دست می‌آید.

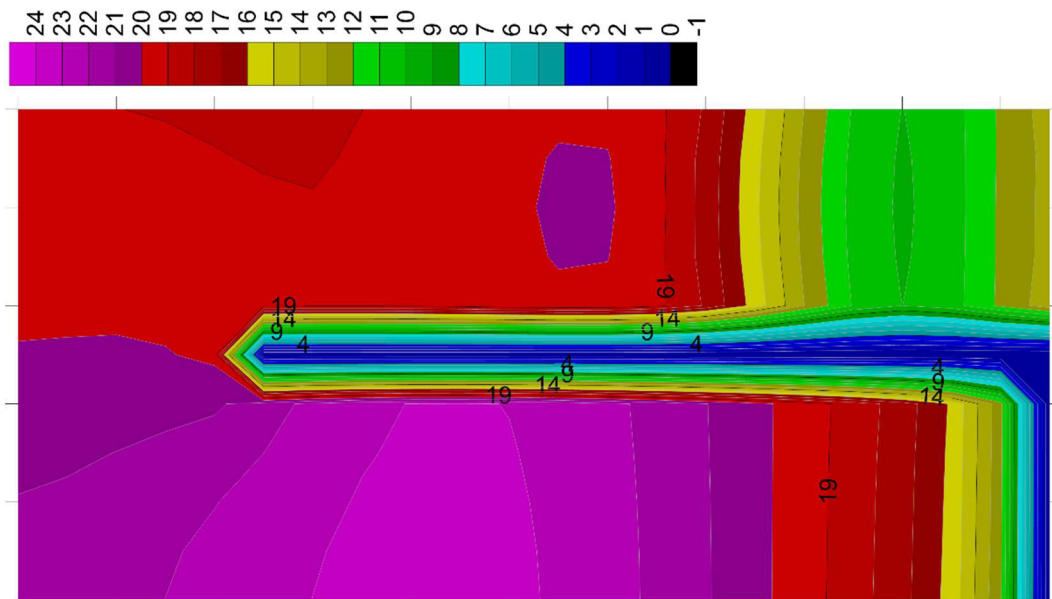
$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_s} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right] d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_i} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} w n_x + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} w n_y + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial z} w n_z \right] d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_u} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} w n_x + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} w n_y + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial z} w n_z \right] d\Gamma \quad (135-4) \\
& = \int_{\Gamma_i} \left[ \frac{\partial P^{t+1}}{\partial x} w n_x + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial y} w n_y + \frac{\partial P^{t+1}}{\partial z} w n_z \right] d\Gamma \\
& - \frac{\rho}{\Delta t} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial U_{RHS}}{\partial x} + \frac{\partial V_{RHS}}{\partial y} + \frac{\partial W_{RHS}}{\partial z} \right) \right] w d\Omega
\end{aligned}$$

دامنه کلی ( $\Omega$ ) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال گیری قسمت می شود.  $\Omega_Q$  دامنه انتگرال گیری برای گره I است. با تقسیم مرزها به صورت  $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qu} \cup \Gamma_{Qt}$  و جایگذاری تابع شکل مناسب معادله (4-135) حل می گردد.

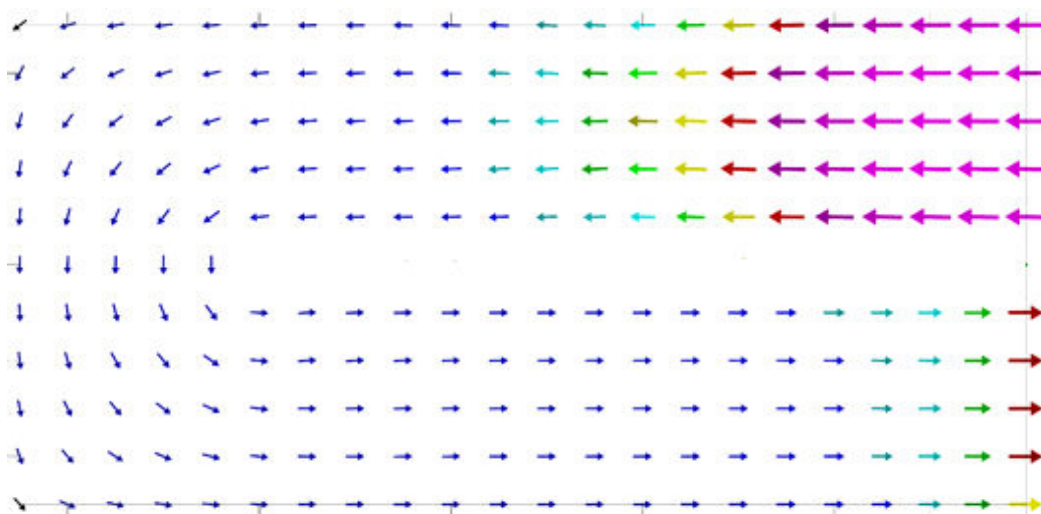
#### 4-10-2 نتایج تحلیل معادلات سه بعدی ناویر استوکس

در مخزن تصفیه مذکور، جریان با سرعت ۰.۲۵۹۱ (بدون واحد)، از قسمت فوقانی وارد یکی کانال های مخزن تصفیه شده و از سمت فوقانی از کانال مجاور که دارای فشار ثابت صفر است خارج می گردد، در اینجا تکرار گام زمانی ۲۰۰۰ بار در نظر گرفته شده است. به منظور پایداری حل مساله، هر گام زمانی ۰.۰۳ ثانیه در نظر گرفته شده است. کانتورهای فشار و میدان سرعت در سطح فوقانی مخزن حاصل از روش بدون شبکه محلی برای گام های مختلف در شکل های 4-۸۷ تا 4-۹۸ آمده است.

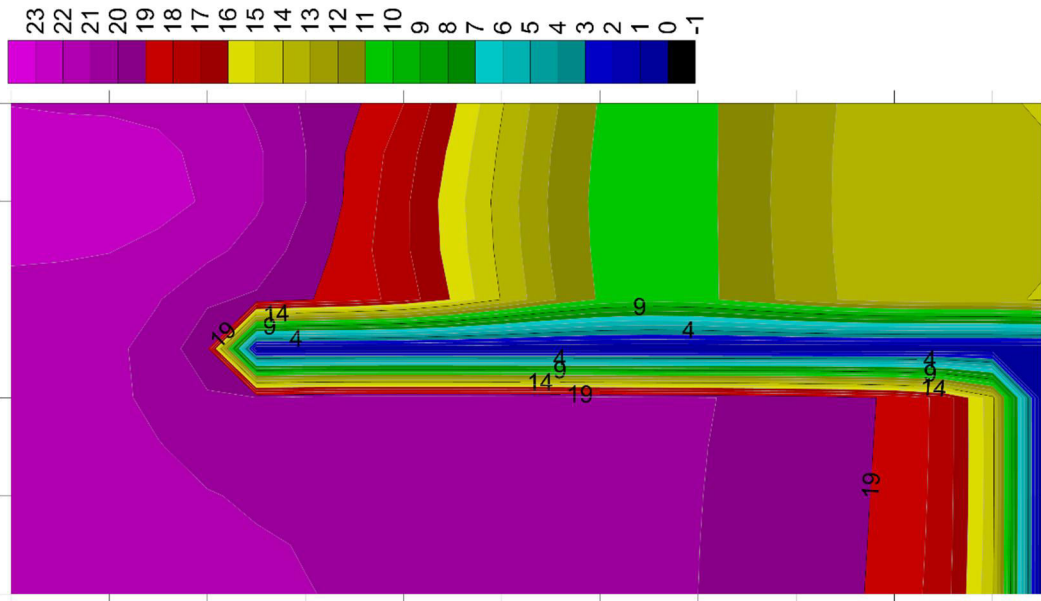




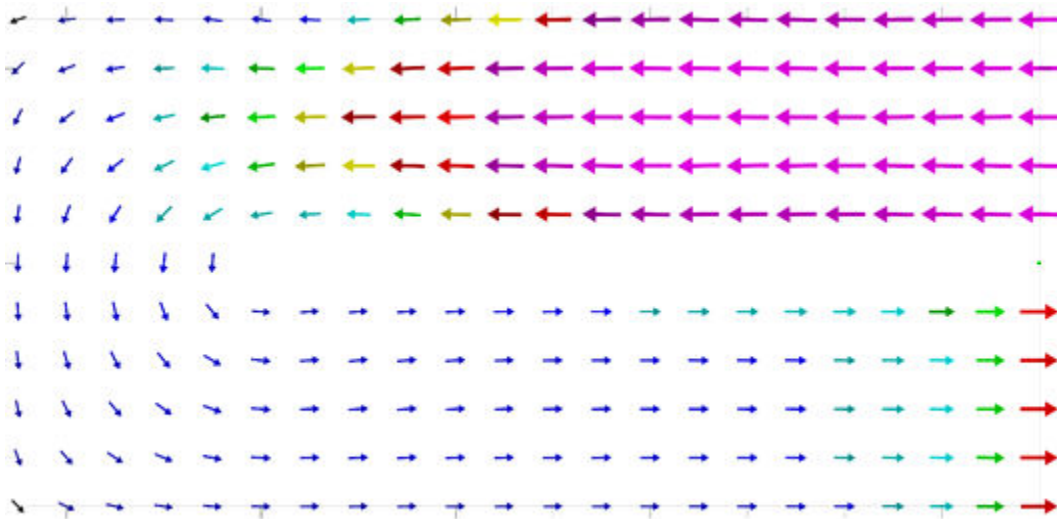
شکل ۴-۸۷ کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۱۰۰



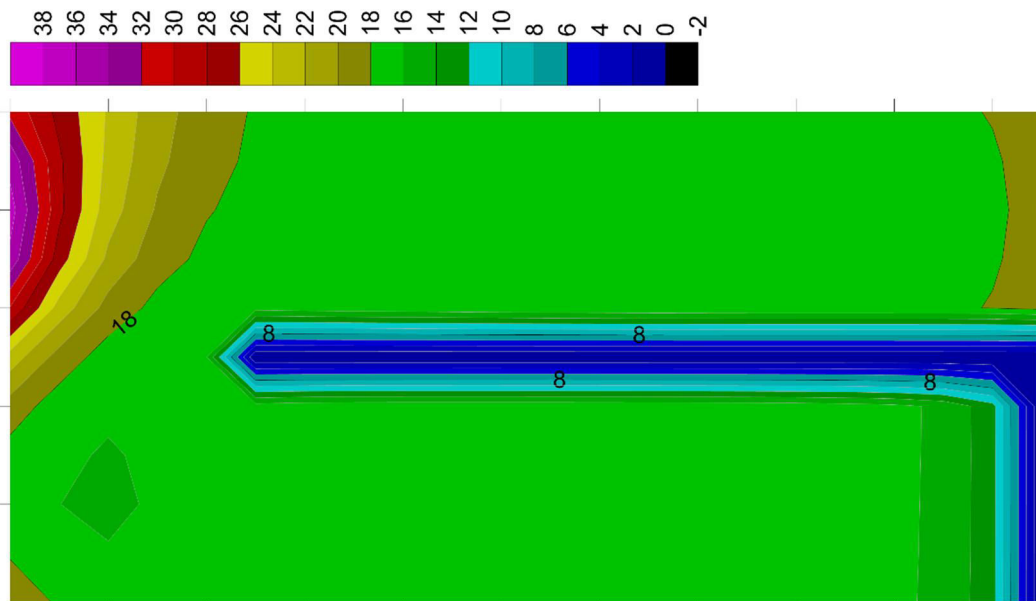
شکل ۴-۸۸ میدان سرعت در روش بدون شبکه در گام ۱۰۰



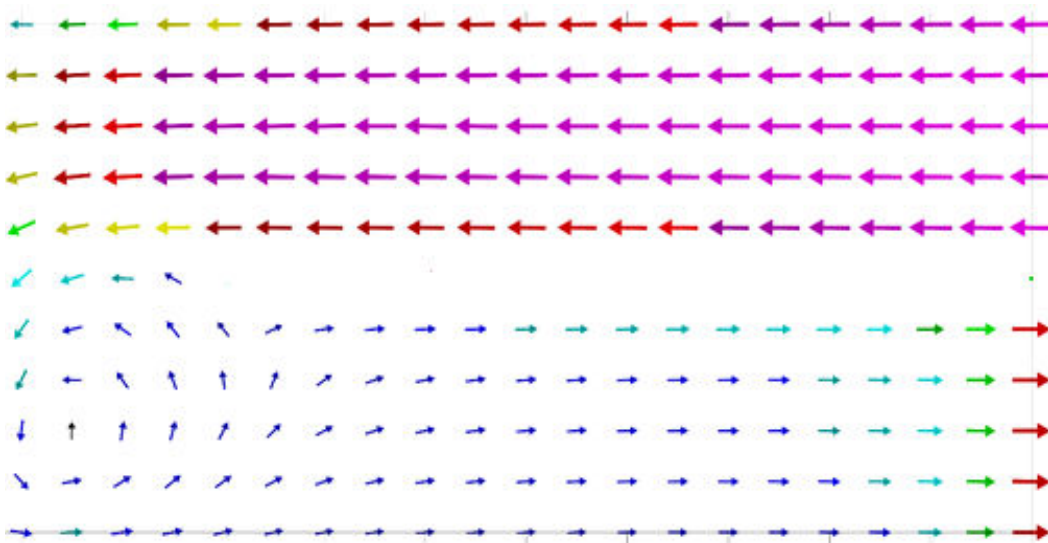
شکل ۴-۸۹ کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۲۰۰



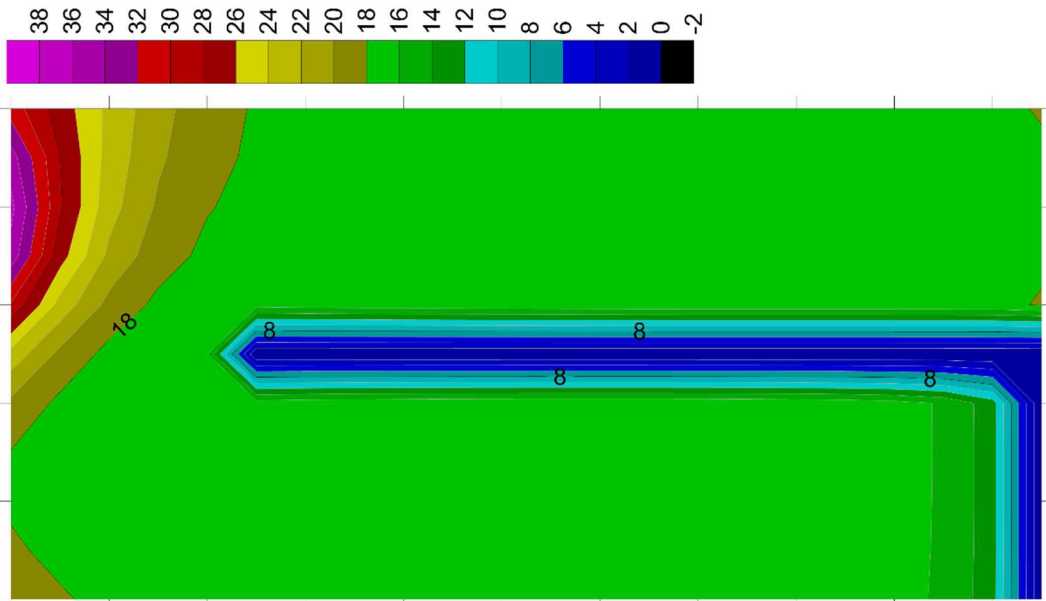
شکل ۴-۹۰ میدان سرعت در روش MLPG در گام ۲۰۰



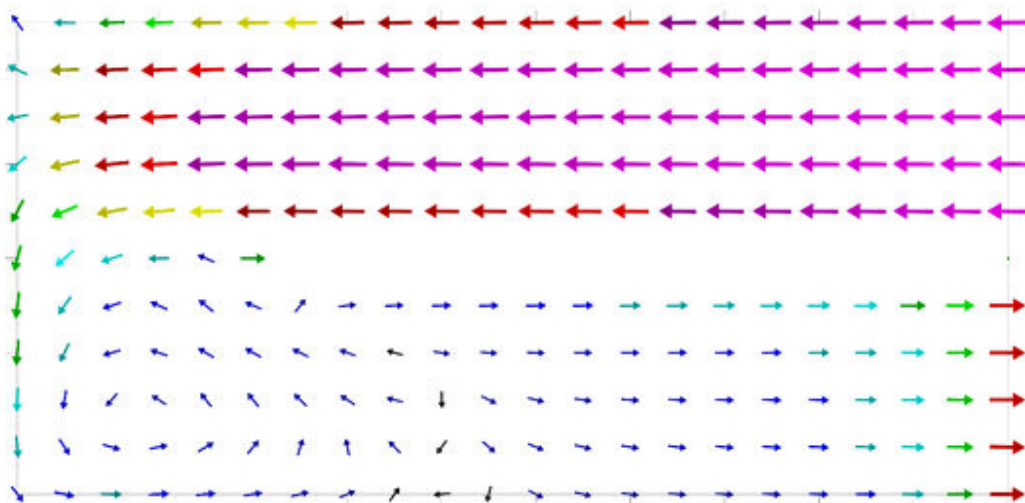
شکل ۹۱-۴ کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۵۰۰



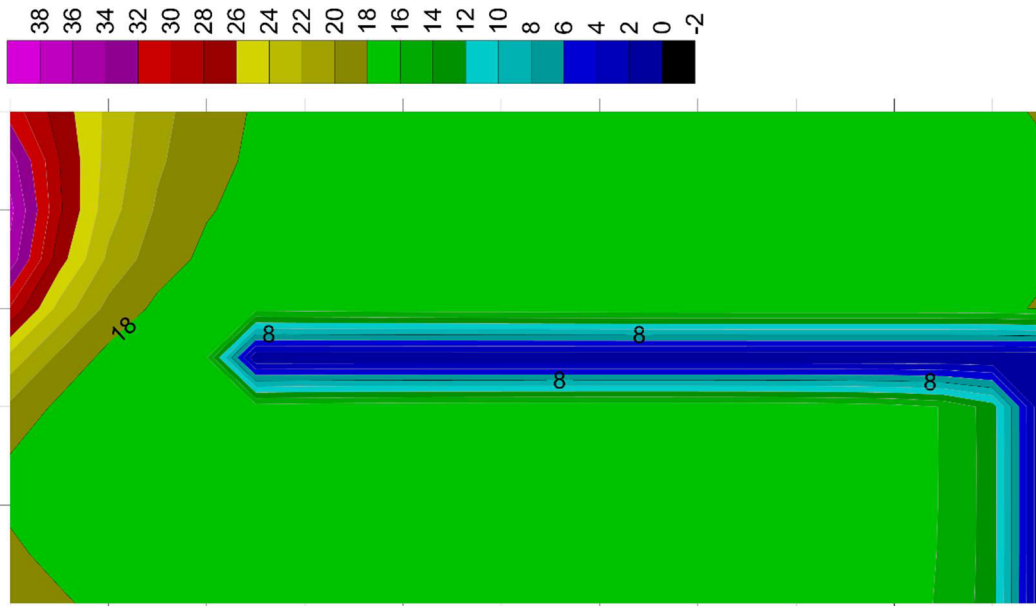
شکل ۹۲-۴ میدان سرعت در روش بدون شبکه در گام ۵۰۰



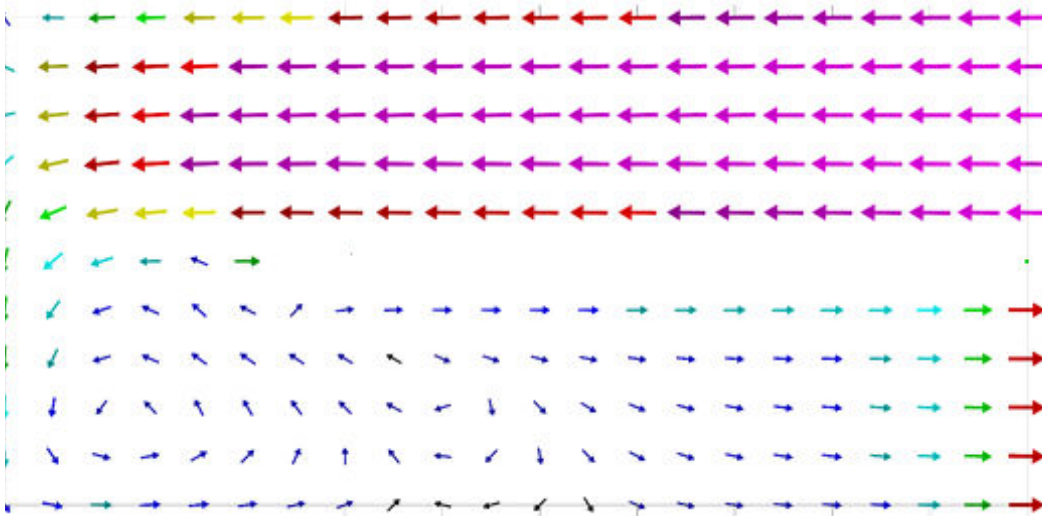
شکل ۹۳-۴ کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۱۰۰۰



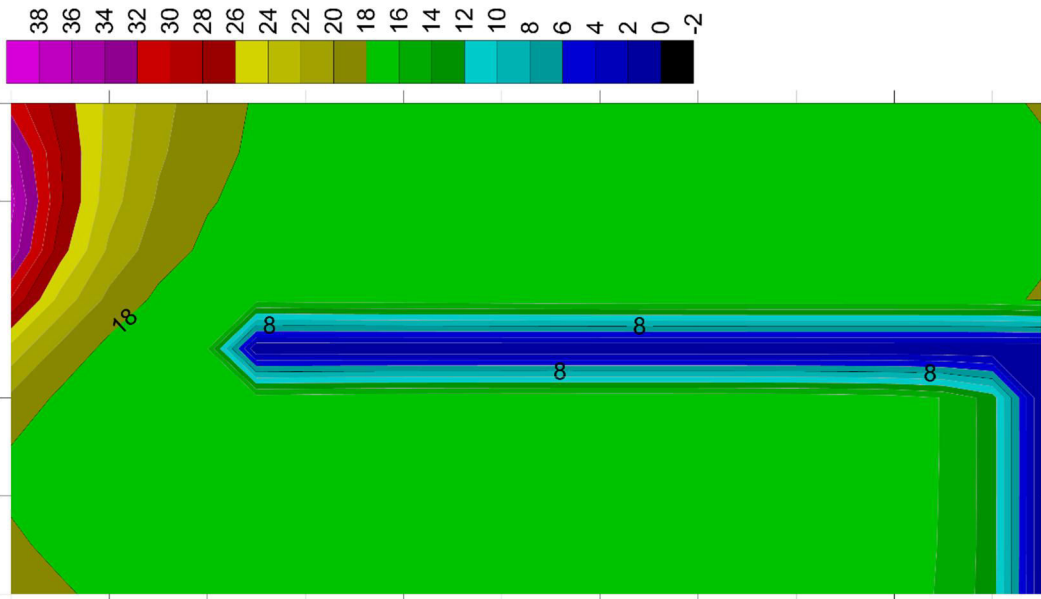
شکل ۹۴-۴ میدان سرعت در روش بدون شبکه در گام ۱۰۰۰



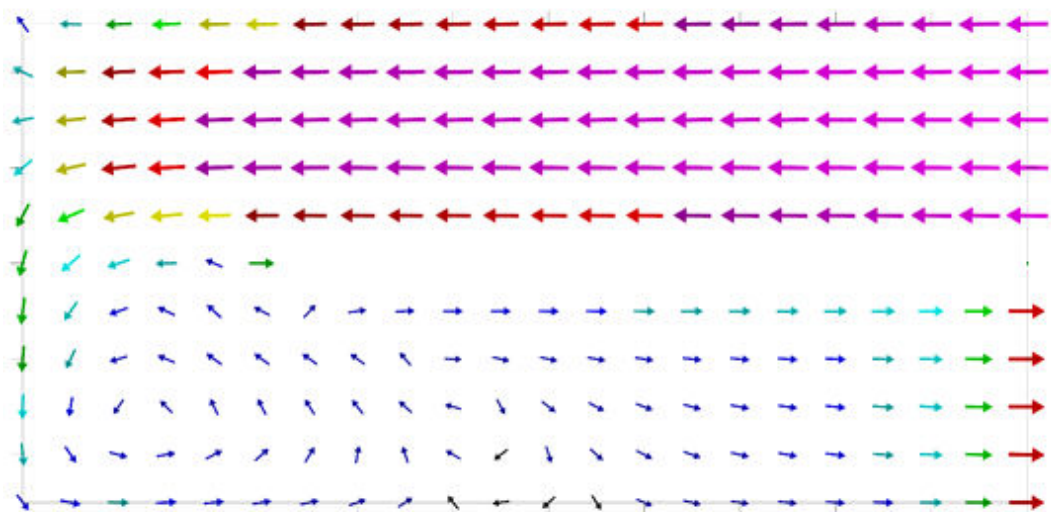
شکل ۹۵-۴ کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۱۵۰۰



شکل ۹۶-۴ میدان سرعت در روش بدون شبکه در گام ۱۵۰۰

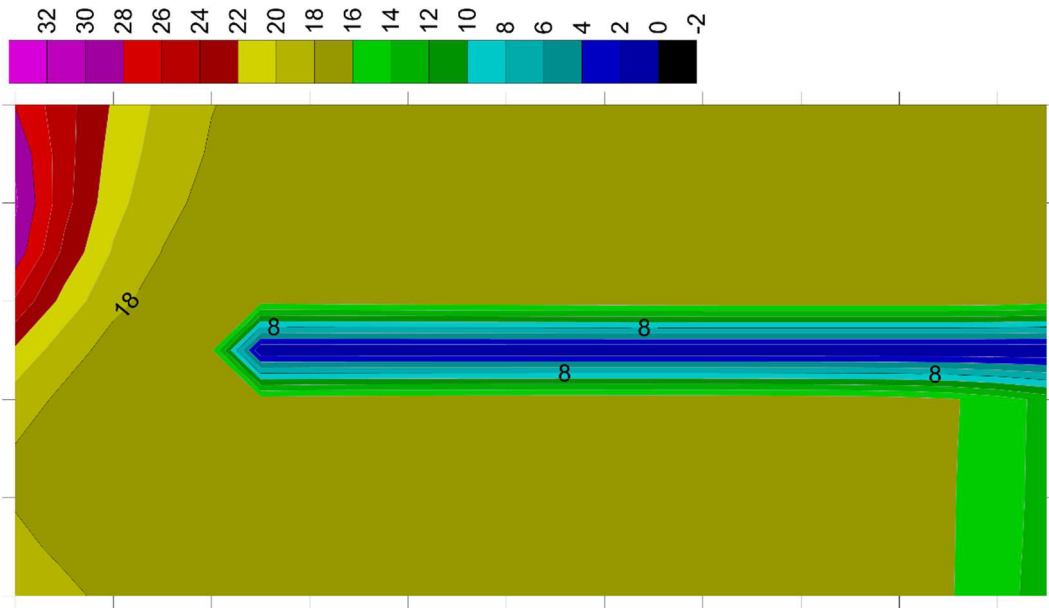


شکل ۴-۹۷ کانتورهای فشار در روش بدون شبکه در گام ۲۰۰۰

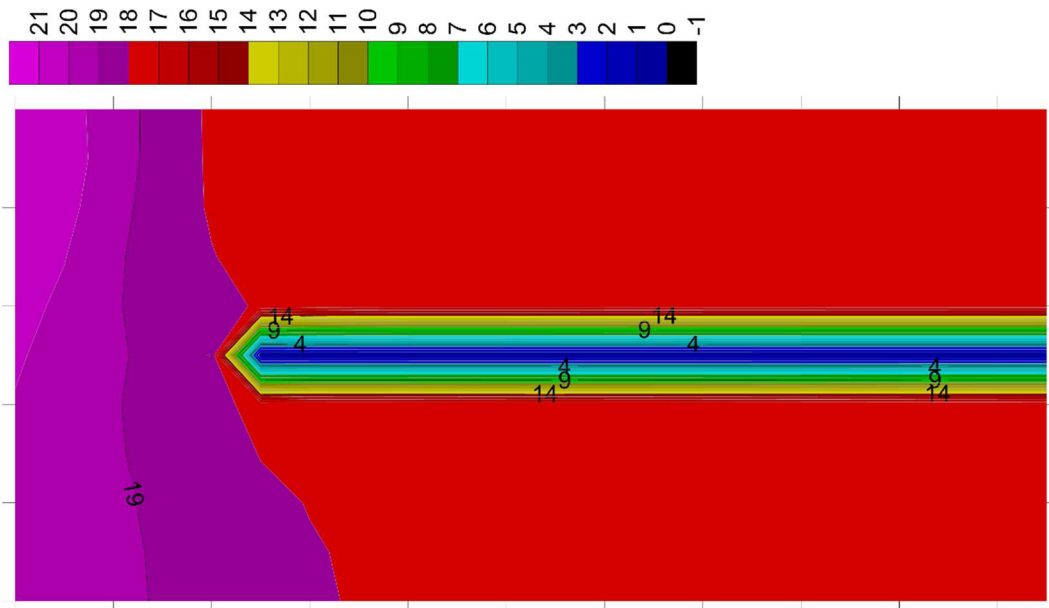


شکل ۴-۹۸ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در گام ۲۰۰۰

پس از نزدیک شدن جریان ناپایدار به جریان پایدار، در گام زمانی ۲۰۰۰، فشار و سرعت‌های حاصل از روش بدون شبکه، در دیگر مکان‌های هندسی مساله مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور فشار در صفحه‌ی فرضی زیر جریان و کف مخزن در شکل‌های ۴-۹۹ و ۴-۱۰۰ نشان داده شده است.

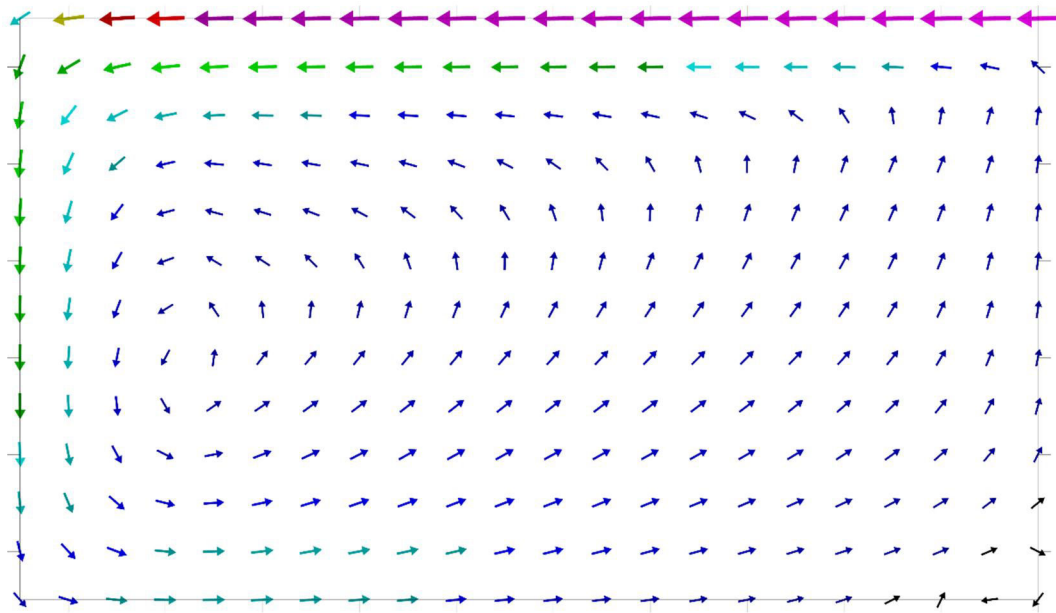


شکل ۹۹-۴ کانتورهای فشار در صفحه فرضی زیر سطح جریان

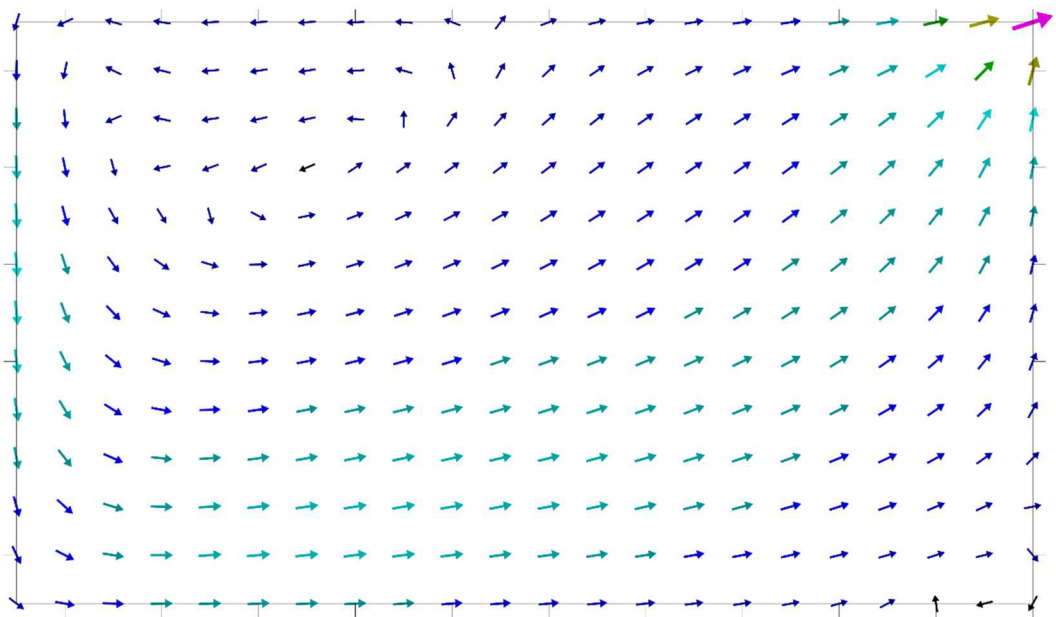


شکل ۱۰۰-۴ کانتورهای فشار در کف مخزن

در همین راستا میدان‌های سرعت در صفحه فرضی قائم میان کانال‌های ورودی و خروجی در شکل‌های ۱۰۱-۴ و ۱۰۲-۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۰۱-۴ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در صفحه فرضی قائم میان کانال ورودی

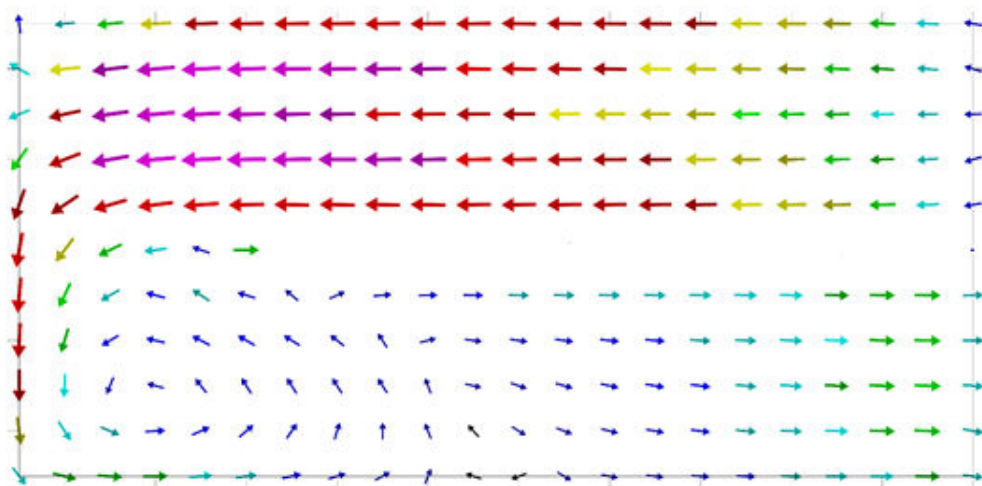


شکل ۱۰۲-۴ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در صفحه فرضی قائم میان کانال خروجی

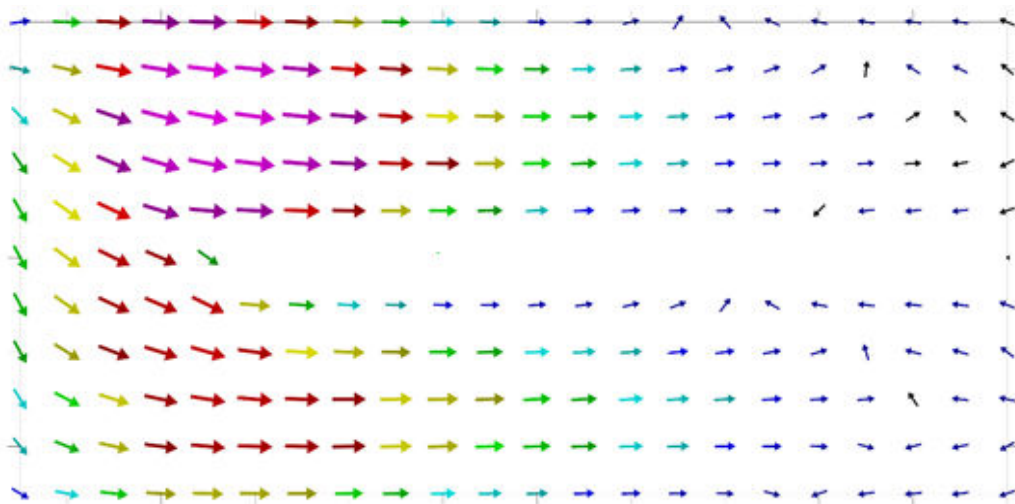
در ادامه میدان‌های سرعت در صفحه‌ی فرضی زیر جریان و کف مخزن در شکل‌های ۱۰۳-۴ و ۴-

۱۰۴ نشان داده شده است.





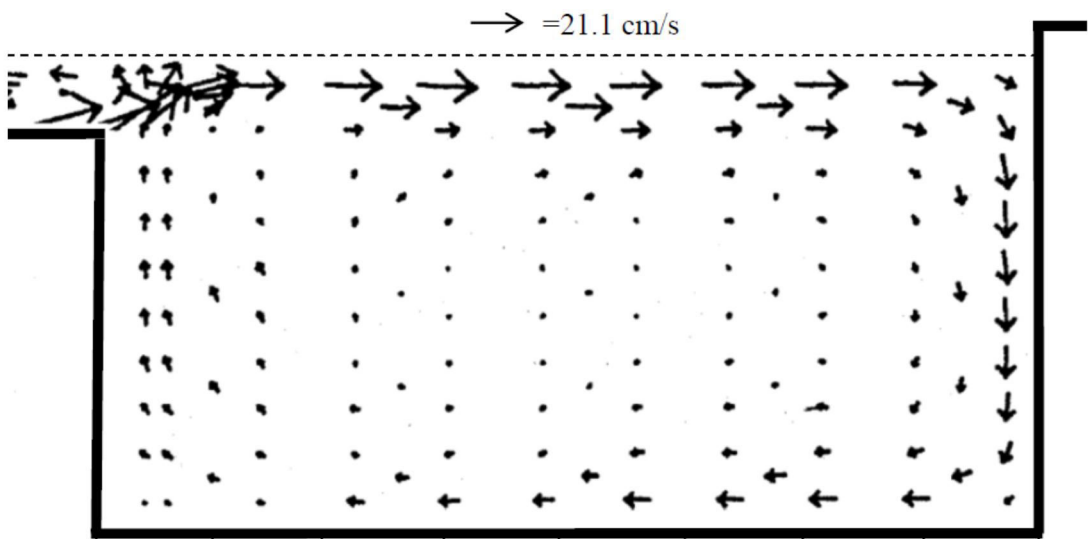
شکل ۱۰۳-۴ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در صفحه‌ی فرضی زیر جریان



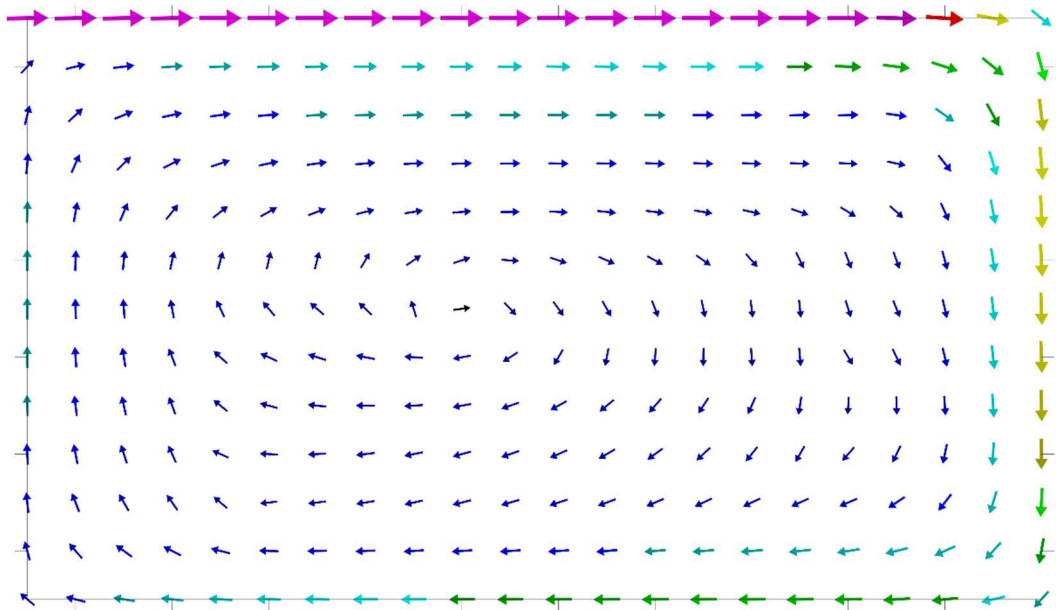
شکل ۱۰۴-۴ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در کف مخزن

پس از بررسی مدل ساده شده سه بعدی در جریان ناپایدار و جریان پایدار، فشار و سرعت‌های حاصل از روش بدون شبکه، در تانک تصفیه تماسی با هشت کامپارتمنت، به عنوان یک مثال عملی و کاربردی مورد بررسی قرار می‌گیرد [۷۲]. تقریب درپوش صلب برای مدل‌سازی سطح جریان بکار رفته است [۷۲-۷۴]. همچنین به منظور مدل‌سازی دقیق‌تر و بهینه‌تر، مطالعه‌ی شبکه‌ی صورت پذیرفته شده به پیوست آمده است، از سوی دیگر از نتایج دیگر کارهای صورت پذیرفته به منظور مطالعه‌ی

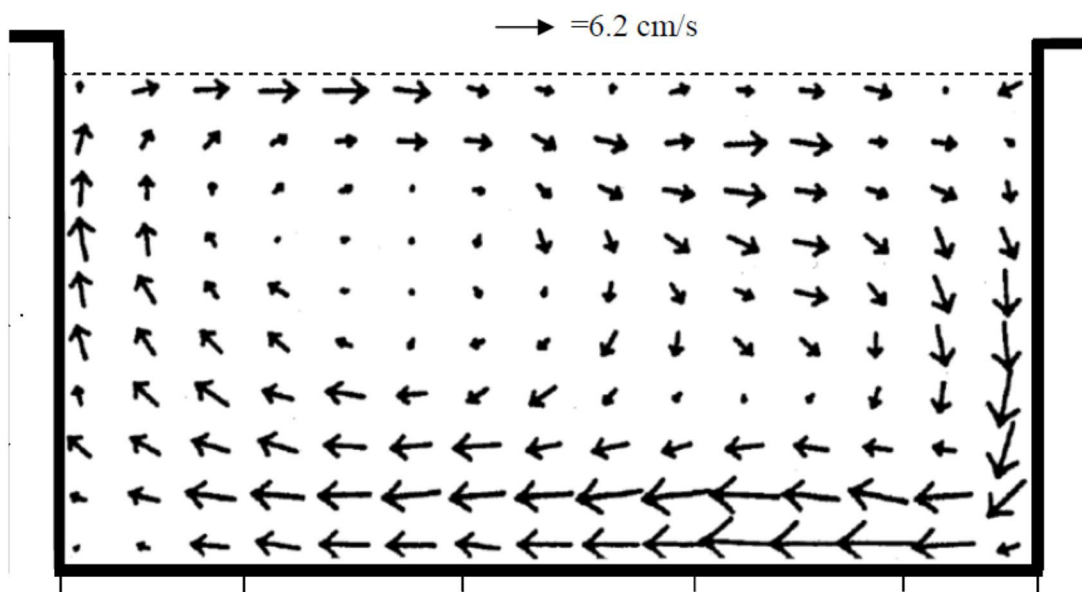
شبکه، استفاده شده است [۷۴-۸۰]. در اینجا نتایج به دست آمده از مدل‌سازی عددی و نتایج آزمایشگاهی در شکل‌های ۴-۱۰۵ تا ۴-۱۱۲ نشان داده شده است. طبق انتظار، این نتایج صحت درستی استفاده از روش بدون شبکه محلی را در جریان آرام سه بعدی در مقایسه با مدل آزمایشگاهی تانک امبسی نشان می‌دهد [۷۲ و ۸۱].



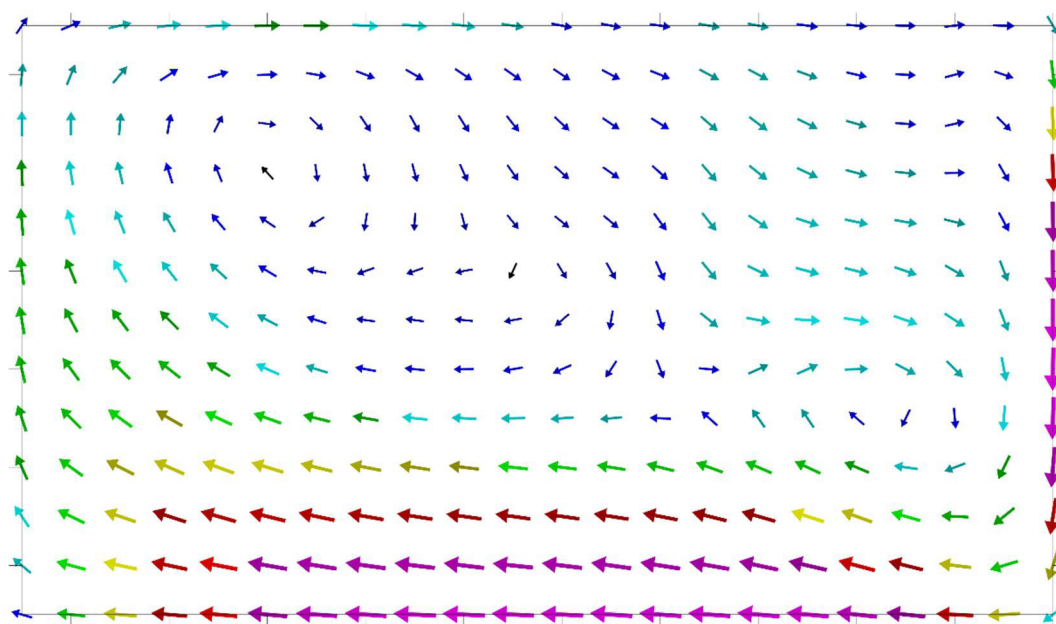
شکل ۴-۱۰۵ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت ورودی



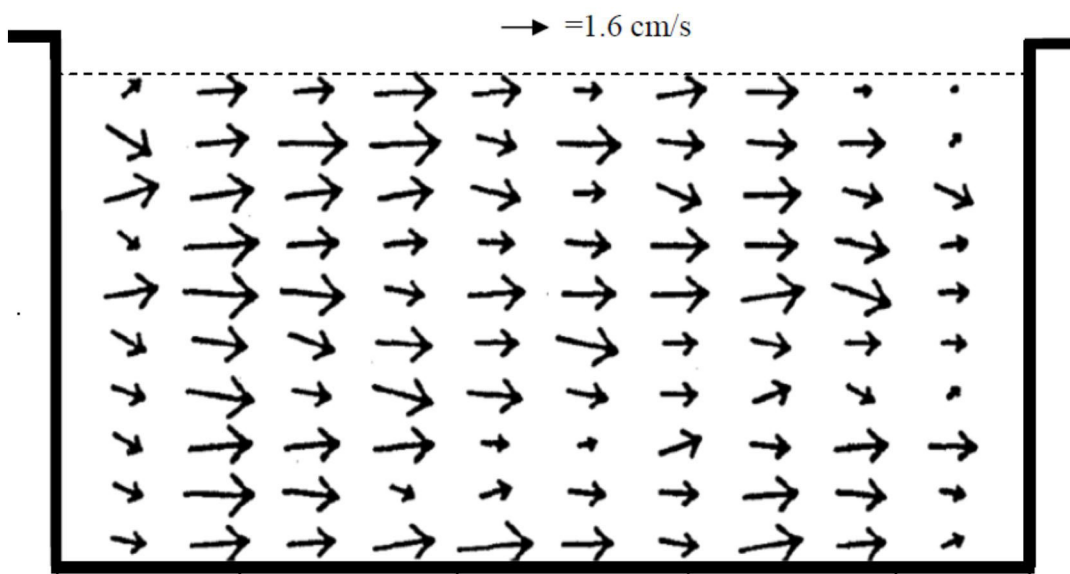
شکل ۴-۱۰۶ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در کامپارتمنت ورودی



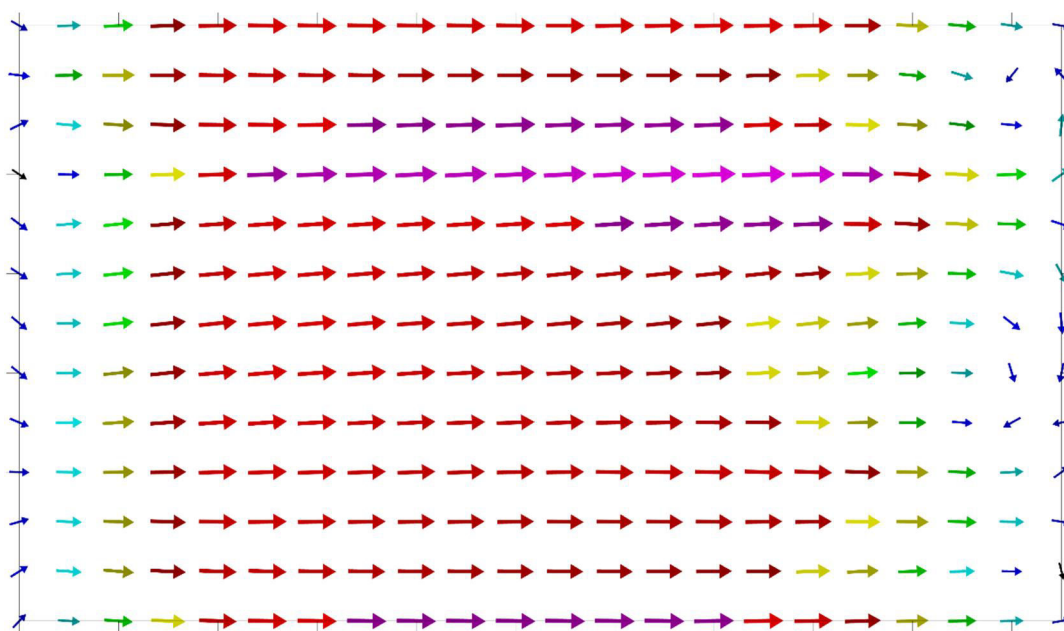
شکل ۱۰۷-۴ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت دوم



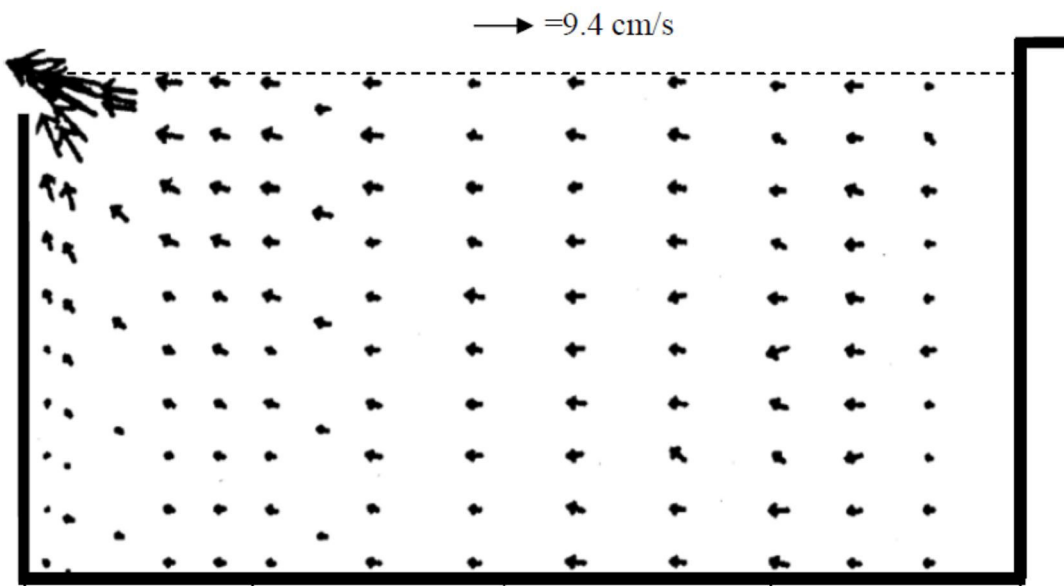
شکل ۱۰۸-۴ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در کامپارتمنت دوم



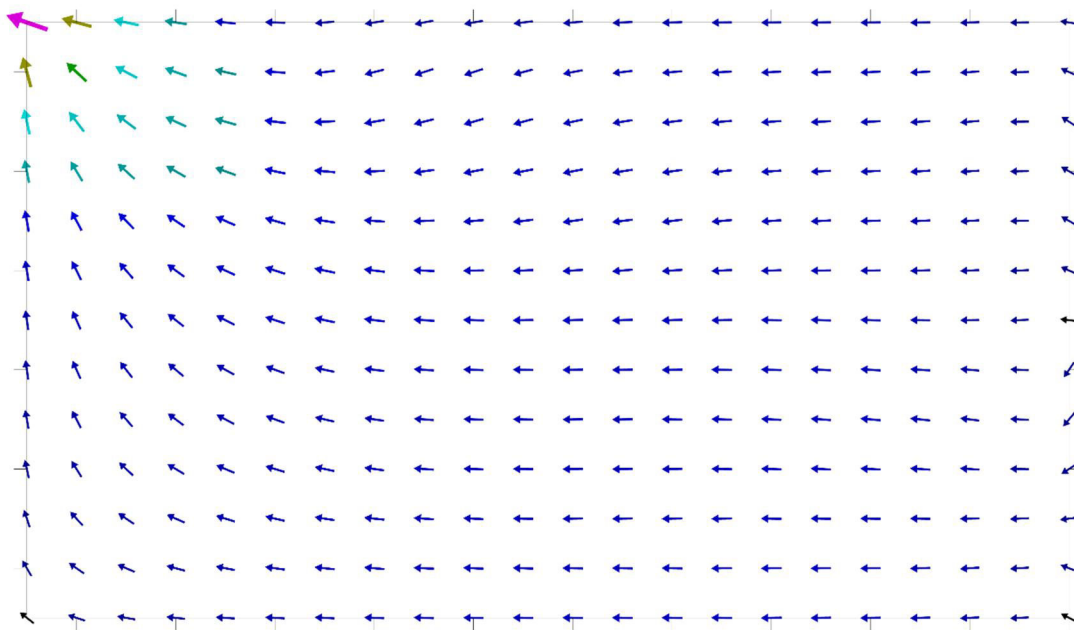
شکل ۱۰۹-۴ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت هفتم



شکل ۱۱۰-۴ میدان سرعت حاصل از روش بدون شبکه در کامپارتمنت هفتم



شکل ۱۱۱-۴ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت خروجی



شکل ۱۱۲-۴ میدان سرعت آزمایشگاهی در کامپارتمنت خروجی



# فصل ۵ : نتیجه گیری و پیشنهادها

## ۵-۱ پیشگفتار

با افزایش شمار سازه‌های هیدرولیکی، اهمیت روش‌های تحلیل دقیق این نوع سازه‌ها آشکار می‌گردد. شناخت رفتار سیالات و مدل‌سازی جریان یکی از پرکاربردترین دامنه‌ها در علم مهندسی هیدرولیک می‌باشد. با توجه به پیچیدگی‌های رفتار سیالات، مدل‌سازی عددی اجتناب ناپذیر می‌باشد.

در روش بدون شبکه، گره‌هایی در داخل و بر روی مرزهای سازه توزیع می‌گردد. برای برقراری ارتباط بین گره‌ها، نیاز به یک تابع شکل کارآمد و مناسب است. تابع‌های کمترین مربعات متحرک و پایه‌ی شعاعی از جمله‌ی پرکاربردترین تابع شکل‌های مورد استفاده در روش بدون شبکه محسوب می‌گردند. در بهره‌جویی از تابع کمترین مربعات به علت عدم عبور تابع از مقدارهای گره‌ی، این روش قادر به برقراری شرط دلتای کروئکر در دامنه مساله نمی‌باشد. این در حالی است که در تابع‌های پایه‌ی شعاعی این شرط برقرار می‌گردد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که از میان تابع‌های پایه شعاعی، نوع چند ضلعی آن برای تحلیل جریان سیال مناسب‌تر می‌باشد.

در این رساله، از روش بدون شبکه پتروف-گلرکین برای تحلیل معادلات ناویر استوکس استفاده شده است. رابطه سازی بدون شبکه‌ی معادله‌های حاکم در مسائل غیر دائمی هدف اصلی این رساله بوده است. برای این کار با هدف دستیابی به روشی دقیق و کارا، از تابع شکل پایه شعاعی از نوع چند ضلعی در رابطه سازی‌ها استفاده گردید.

در فصل اول، ویژگی‌های اساسی روش بدون شبکه در مقایسه با روش اجزای محدود بیان گردید سپس در فصل دوم، پیشینه تحقیق ارائه شد. در ادامه در فصل سوم ابتدا روش باقی‌مانده وزنی برای حل معادله‌های دیفرانسیل در روش بدون شبکه مورد بررسی قرار گرفت. سپس تابع شکل‌های کمترین مربعات متحرک، انتگرالی و درون‌یابی نقاط (روش چند جمله‌ای و تابع‌های شعاعی) معرفی شدند. روش درون‌یابی نقاط بر پایه تابع شعاعی به دلیل برقراری شرط دلتای کروئکر و سادگی در برقراری شرایط مرزی از پرکاربردترین و کارآمدترین روش برای تعیین تابع شکل می‌باشد. در ادامه، انواع روش‌های انتگرال‌گیری (روش انتگرال‌گیری کلی و محلی) برای محاسبه تابع اولیه‌ها معرفی



شدند. در نهایت در فصل چهارم به بررسی نتایج اختصاص یافت، در ابتدای هر مساله معادلات حاکم بر رفتار سیال بیان گردید. در ادامه، نحوه رابطه سازی روش بدون شبکه برای این نوع مساله ارائه گردید و در نهایت با استفاده از کدهای نوشته شده در متلب نتایج نشان داده شد. در این فصل پس از صحت سنجی، ابتدا در مساله‌ی جریان سیال در کانال، مقدار سرعت در کانال شیب‌دار با جریان یکنواخت تقریب زده شد، سپس معادله برگرز حل گردید. پس از آن مساله‌ی جریان آب در خاک به صورت دائمی و غیر دائمی مورد تحلیل قرار گرفت. به همین ترتیب در مساله‌ی شکست سد معادلات حاکم بر جریان که شامل معادلات بقای جرم و بقای ممنتوم می‌باشند به شکل لاگرانژی و به کمک روش تصحیح فشار حل و با نتایج دیگر مقایسه گردید. در نهایت حل کامل دو بعدی، غیر دائمی و سه بعدی معادلات ناویر استوکس صورت پذیرفت. فصل پنجم، شامل جمع‌بندی، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای ادامه کار می‌باشد.

## ۵-۲ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

برخی از نتیجه‌های مهم حاصل شده در این رساله به شرح زیر است:

۱- روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین ابزاری است که در مدل‌سازی مسائل با شرایط مرزی متغیر کاملاً سازگار است؛ زیرا تنها با تولید نقاط در هر مرحله تحلیل با شرایط مرزی جدید بدون نگرانی از ارتباط بین گره‌ها و رعایت پیوستگی بین آن‌ها، مدل‌سازی در کمترین زمان ممکن انجام می‌شود.

۲- در معادله هدف پواسن، به منظور صحت سنجی، حداکثر خطا، به  $0.456\%$  محدود گردید.

۳- در مدل‌سازی جریان درون کانال در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع شکل چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برابر  $0.19\%$  می‌باشد که خطای مناسبی می‌باشد. در حالی که در تابع پایه شعاعی گوسی درصد متوسط خطای مطلق برابر  $0.25\%$  و در تابع پایه شعاعی نواری متوسط

خطای مطلق برابر  $0/32$  شده که افزایش خطا را نشان می‌دهد.

۴- با توجه به ماهیت تابع پایه شعاعی چندضلعی در روش بدون شبکه پترو-گلرکین به نظر می‌رسد، در مسأله‌هایی از این دست، کمترین میزان درصد متوسط خطای مطلق به وقوع می‌پیوندد.

۵- در حل معادله برگرز، خطای روش بدون شبکه پترو-گلرکین نسبت به روش دقیق بسیار ناچیز و حداکثر به  $0/963$  محدود می‌گردد.

۶- در حل مساله دائمی جریان آب در خاک، مقایسه‌ی بین روش تفاضل محدود و روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین، دقت بالا و سرعت بیشتر محاسبات را نشان می‌دهد.

۷- در حل مساله غیردائمی جریان آب در خاک مشخص گردید، با گذشت زمان و نزدیکی جریان به حالت جریان دائمی، روش بدون شبکه همچنان پایدار است.

۸- در مدل‌سازی شکست سد، مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد نشان می‌دهد، روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی به علت دقت بالا در ایجاد ارتباط با گره‌ها، سطح آزاد را با دقت بسیار بالایی را نمایش می‌دهد.

۹- در مسائل با مرزهای غیرمسطح (منحنی) ایجاد المان‌هایی که از نظر شکل و ظاهر متناسب با فرضیات روش اجزاءمحدود باشد پیچیده بوده درحالی‌که در روش پیشنهادی این مشکل به آسانی قابل رفع می‌باشد.

۱۰- در حل دو بعدی معادلات ناویر استوکس، مقایسه‌ی بین روش تفاضل محدود و روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین، دقت بالای محاسبات را نشان می‌دهد.

۱۱- در مدل‌سازی غیر دائمی معادلات ناویر استوکس در مثال توانی خطای روش بدون شبکه پترو-گلرکین نسبت به روش دقیق بسیار ناچیز و حداکثر به  $0/023$  محدود می‌گردد. حداکثر خطا در مثال مثلثاتی به  $0/715$  می‌رسد، که البته همچنان قابل قبول است.

۱۲- در مدل‌سازی سه بعدی معادلات ناویر استوکس در مخزن تصفیه تماسی، با گذشت زمان و

توسعه زمانی جریان، روش بدون شبکه همچنان پایدار است. از سوی دیگر مقادیر سرعت و فشار در تمامی هندسه مساله و در تمام زمان‌ها قابل برداشت است.

۱۳- پس از انجام مدل‌سازی سه بعدی معادلات ناویر استوکس در مخزن تصفیه تماسی و بررسی نتایج آن، این نتیجه حاصل می‌گردد که روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین در حل مسائل عملی و واقعی کارآیی مناسبی دارد.

۱۴- به‌طور کلی روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی یک طرح هوشمند در حل مسائل شرایط هندسی متغیر است.

### ۳-۵ پیشنهادها برای ادامه پژوهش

برای ادامه پژوهش، پیشنهادهای زیر ارائه می‌شود:

- ۱- بررسی استفاده از دیگر توابع شکل و وزن در روش شبکه محلی پترو-گلرکین
- ۲- بررسی و تحلیل انواع خطا، به منظور کاهش آن در مدل‌سازی
- ۳- بررسی جریان دوفازی و سه‌فازی در روش بدون شبکه
- ۴- بررسی زمان حل مساله در روش بدون شبکه در مقایسه با دیگر روش‌های عددی
- ۵- استفاده از روش اویلری در تحلیل شکست سد



## پیوست

## بی بعد سازی مساله دوبعدی ناویر استوکس

به منظور بی بعد سازی کمیت‌های مساله، ابتدا سرعت‌ها را بر سرعت ورودی و مختصات را بر طول کانال مساله تقسیم می‌گردد.

$$X^* = \frac{x}{L}, Y^* = \frac{y}{L}, u^* = \frac{u}{u_0}, v^* = \frac{v}{u_0} \quad (\text{پ-۱})$$

در ادامه به کمک آنالیز ابعادی، کمیت‌های زمان و فشار، به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$t^* = \frac{t u_0}{L}, P^* = \frac{P u_0}{\rho L} \quad (\text{پ-۲})$$

با جایگذاری کمیت‌های به دست آمده و جایگذاری آن در معادله ممنوم ناویر استوکس کمیت بی بعد  $v$  به دست می‌آید.

$$v^* = \frac{v u_0}{L^2} \quad (\text{پ-۳})$$

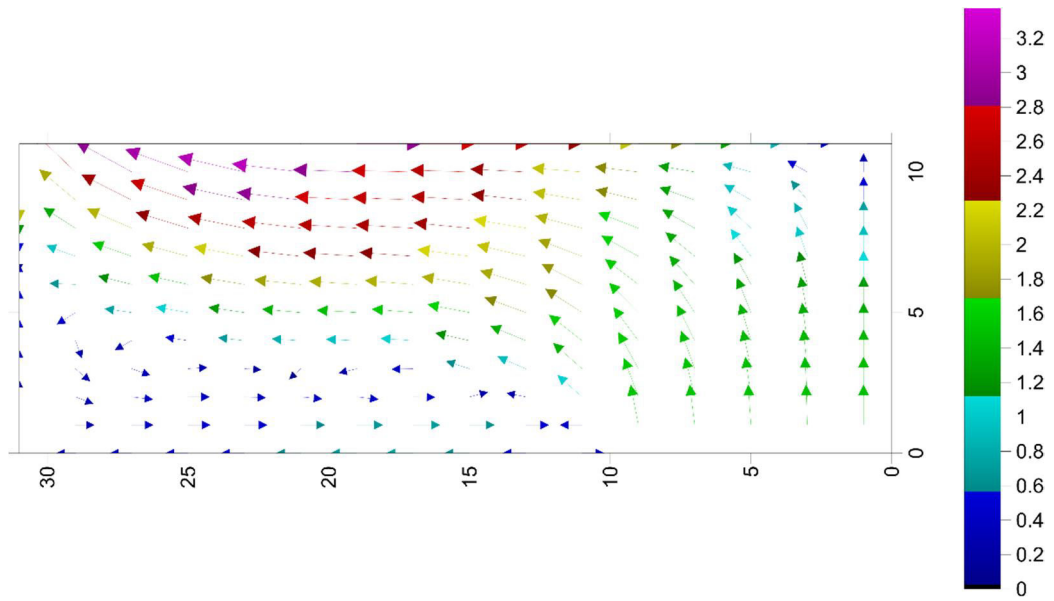
در نهایت به منظور راحتی محاسبات کلیه کمیت‌های ستاره‌دار به شکل ساده نوشته می‌شود.

## مطالعات استقلال شبکه مساله دوبعدی و سه بعدی ناویر استوکس

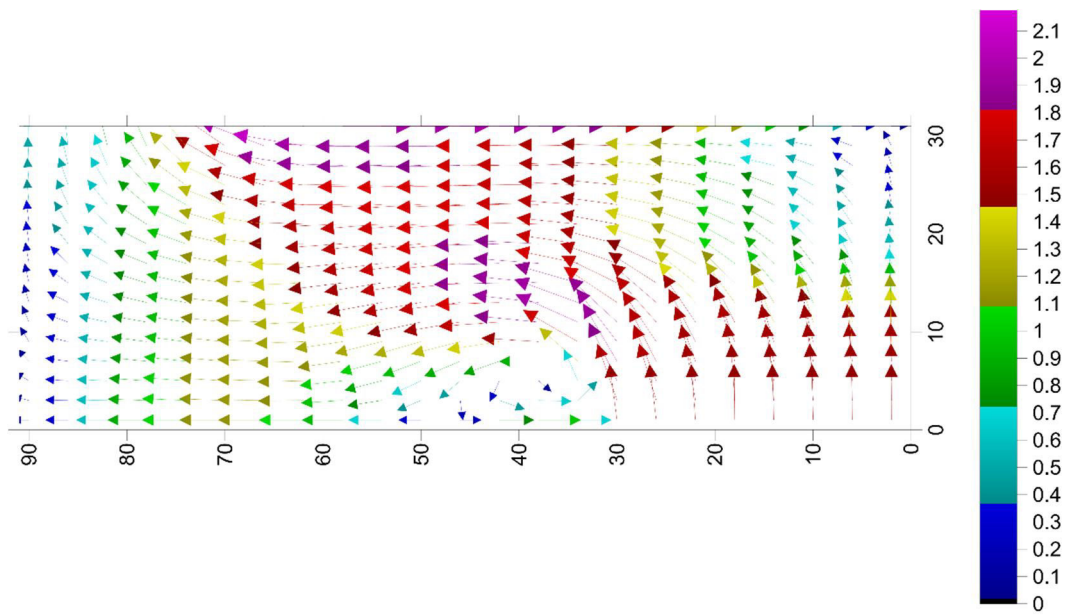
از جمله اقدامات حل مساله های CFD در رشته عمران و سایر رشته های مهندسی بررسی استقلال از شبکه است که بایستی برای هر گونه کد یا شبیه سازی عددی بررسی شود.

استقلال از شبکه به بیان ساده عبارت است از بررسی تعداد شبکه دامنه حل و نمایش عدم وابستگی نتایج به این شبکه است. به عبارتی بایستی برای دامنه حل با تعداد شبکه های مختلف حل عددی صورت گیرد و نشان داده شود که این حل برای تمام شبکه ها جوابی یکسان و نزدیک دارد و حل مورد نظر به تعداد شبکه وابستگی ندارد.

در ابتدا به منظور مطالعه استقلال شبکه در مساله دوبعدی، به مدل سازی مساله در ابعاد مختلف شبکه پرداخته می شود. در ادامه افزایش احتمالی و تدریجی دقت مساله و نیز ظاهر شدن پروفیل لایه مرزی مشاهده می گردد. در اینجا نتایج به دست آمده از مدل سازی عددی با ابعاد مختلف در شکل های پ-۱ تا پ-۳ نشان داده شده است. طبق انتظار، با افزایش گره ها در روش بدون شبکه محلی در مساله، پدیدار شدن پروفیل لایه مرزی مشاهده می گردد. [۷۴-۸۰]. ولی در ادامه با افزایش گره ها احتمالاً به علت کاهش گرافیک، پروفیل لایه مرزی محو می گردد.

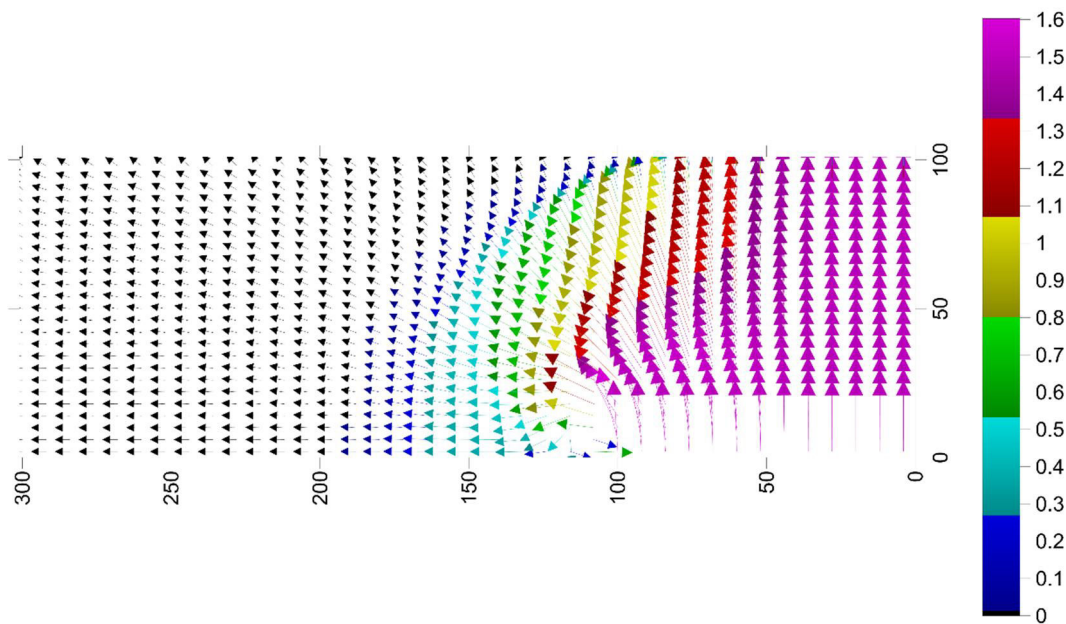


شکل ۵-پ ۱- میدان سرعت با تعداد گره  $10 \times 30$



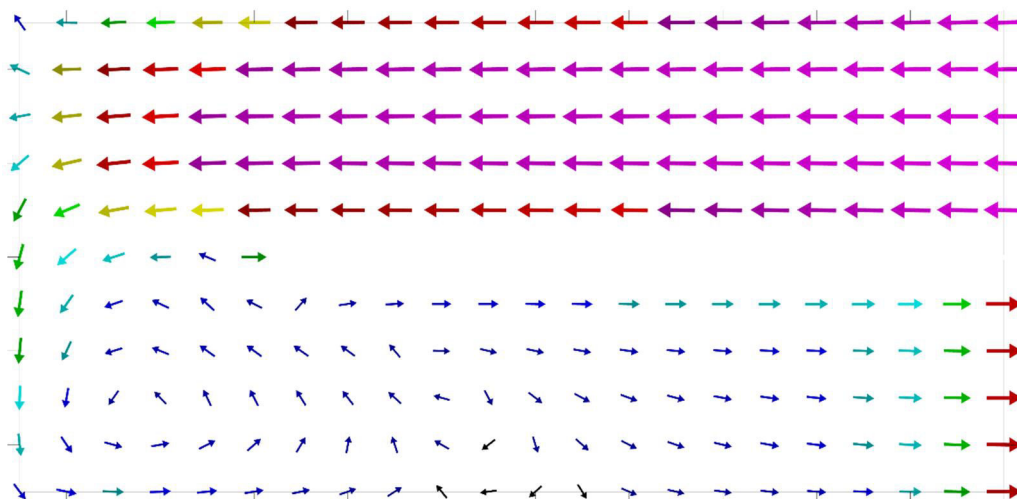
شکل ۲-پ ۲- میدان سرعت با تعداد گره  $30 \times 90$



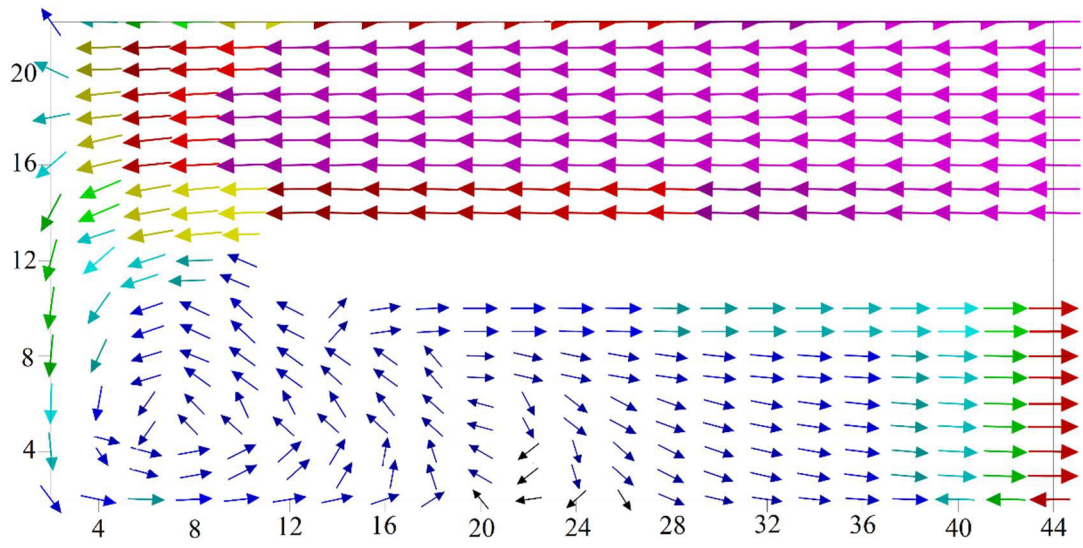


شکل ۵-۳ میدان سرعت با تعداد گره  $100 \times 300$

در نهایت برای اطمینان از درستی حل ابتدا باید استقلال از شبکه و سپس مقایسه حل‌های عددی با یکدیگر در مساله سه‌بعدی صورت گیرد. در اینجا نتایج به دست آمده از مدل‌سازی عددی با ابعاد مختلف در شکل‌های پ-۴ و پ-۵ نشان داده شده است.



شکل ۵-۴ میدان سرعت با تعداد گره  $13 \times 22 \times 11$



شکل پ-۵ میدان سرعت با تعداد گره  $26 \times 44 \times 22$

## مراجع

- [1] Liu, G.R. (2003) "Meshfree methods moving beyond the finite element method", *CRC Press*, 2003, 16, pp. 937.
- [2] Gingold, R., Monaghan, J., (1977) "Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to nonspherical stars", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181, 3, pp. 375.
- [3] Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P., (1992) "Generalizing the FEM: Diffuse approximation and diffuse elements", *Computer Methods in App. Mech. and Eng.*, 10, 5, pp. 307–318.
- [4] Belytschko, T., Lu, Y., Gu, L., (2007) "Element free Galerkin methods", *Int. Jour. for Num. Methods in Eng.*, 37, 2, pp. 229.
- [5] Liu, W.K., Jun, S., Li, S., Jonathan, A. and Belytschko, T., (1995) "Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics", *Int. Jour. for Num. Methods in Eng.*, 38, 10, pp. 1655.
- [6] Babuska, J. M., Melenk, E., (1997) "The partition of unity method", *Int. Jour. for Num. Methods in Eng.*, 40, 3, pp. 727.
- [7] Sukumar, N., Moran. B., Belytschko, T., (1998) "The natural element method in solid mechanics", *Int. Jour. for Num. Methods in Eng.* 43, 5, pp. 839.
- [8] Wendland, H., (1999) "Meshless Galerkin methods using radial basis

function" *Mathematics of Computation*. **68, 2, pp. 1521.**

- [9] Atluri, S.N. (2004) "The meshless method (MLPG) for domain & BIE discretization", *Tech. Science Press*. **pp. 677.**
- [10] Atluri, S. N., Zhu, T., (1998) "A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", *Computational Mechanics*, **22, 4, pp. 117.**
- [11] Atluri, S.N., Cho, J. Y., and Kim, H. G., (1999) "Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov–Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations", *Computational Mechanics*, **24, 1, pp. 334.**
- [12] Lin, H., Atluri, S.N., (2000) "The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for convection-diffusion problems", *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **21, pp. 45.**
- [13] Lin, H. and Atluri, S. N., " (2001) The meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method for solving incompressible Navier-Stokes equations", *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **2, 1, pp. 117.**
- [14] Kim, H.G., Atluri, S.N., (2000) "Arbitrary placement of secondary Nodes, and error control, in the meshless local Petrov–Galerkin method", *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **Vol 3, 1, pp. 11.**
- [15] Ching, H.K., Barta, R.C., (2001) "Determination of crack tip fields in linear elastostatics by meshless local Petrov–Galerkin method", *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **2, 3, pp. 273.**

- [16] Cho, J. Y., Kim, H. G. and Atluri, S. N., (2001) "Analysis of shear flexible beams, using the meshless local Petrov–Galerkin method based on locking-free formulation", *Computational Engineering and Science*, **23, 2**, pp. 1404.
- [17] Gu, Y. T. and Liu, G. R., (2001) "A meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) formulation for static and free vibration analyses of thin plates", *Computational Engineering and Science*, **4**, pp. 463.
- [18] Long, S.Y., Atluri, S.N., (2002) "A meshless local Petrov-Galerkin method for solving the bending problem of a thin plate", *Computational Engineering and Science*, **3, 1**, pp. 53.
- [19] Gu, Y. T. and Liu, G. R., (2000) "A local point interpolation method for static and dynamic analysis of thin beams", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190, 42**, pp. 5515.
- [20] Liu, G. R. and Gu, Y. T., (2000) "Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method in combination with finite element and boundary element approaches", *Computational Mechanics*, **Vol. 26, 6**, pp. 536.
- [21] Zhang, X., Song, K. Z., Lu, M. W. and Liu, X., (2000) "Meshless methods based on collocation with radial basis functions", *Computational Mechanics*, **26**, pp. 333.
- [22] Xiao, J.R., Batra, R.C., Gilhooley, D.F., Gillespie, J.W., McCarthy, M.A., (2007) "Analysis of thick plates by using a higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis function", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **196**, pp. 979.

- [23] Gilhooley, D.F., Batra, R.C., Xiao, J.R., McCarthy, M.A., Gillespie, J.W., (2007) "Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and Normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions", *Composite Structures*, **80,3**, pp. 539.
- [24] Rezaei A., Mojdehi, B., Darvizeh, A., Basti, A., Rajabi, H., (2011) "Three dimensional static and dynamic analysis of thick functionally graded plates by the meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **35, 1**, pp. 1168.
- [25] Sladek, J., Sladek, V., Stanak, P., Zhang, Ch., Wünsche, M., (2013) "Analysis of the bending of circular piezoelectric plates with functionally graded material properties by a MLPG method", *Engineering Structures*, **47**, pp. 81.
- [26] Nguyen, V. P., Rabczuk, T., Bordas, S. P. and Duflot, M., (2008) "Meshless methods: A review and computer implementation aspects", *Mathematics and Computers in Simulation*, **79, 5**, pp. 763.
- [27] Liu, G. R. and Gu, Y. T., (2001) "A point interpolation method for two-dimensional solids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50, 7**, pp. 937.
- [28] Zhao, X., Liu, G., Dai, K., Zhong, Z., Li, G. and Han, X., (2008) "Geometric Nonlinear analysis of plates and cylindrical shells via a linearly conforming radial point interpolation method", *Computational Mechanics*, **42, 3**, pp. 13.
- [29] Lin, H., & Atluri, S. N. (2000). Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for convection diffusion problems. *CMES*, **1, 2**, pp. 45.
- [30] Shu, C., Ding, H., & Yeo, K. S. (2003). Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied*

Mechanics and Engineering, **192**, 7-8, pp. 941.

- [31] Arefmanesh, A., Najafi, M., & Abdi, H. (2008). Meshless local Petrov-Galerkin method with unity test function for non-isothermal fluid flow. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **25**, 1 pp. 9.
- [32] Wu, Y. L., Liu, G. R., & Gu, Y. (2005). Application of meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach to simulation of incompressible flow. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, **48**, 5, pp. 459.
- [33] Karimipour A., Esfe M. H., Safaei M. R., Semiromi D. T., Jafari S., Kazi S. N., (2014) Mixed convection of copper–water nanofluid in a shallow inclined lid driven cavity using the lattice Boltzmann method, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **402**, 1, pp. 150.
- [34] Esfe M. H., Akbari M., Toghraie D. S., Karimiopour A., Afrand M., (2014) Effect of nanofluid variable properties on mixed convection flow and heat transfer in an inclined two-sided lid-driven cavity with sinusoidal heating on sidewalls,, *Heat Transfer Research*, **45**, 5.
- [35] Alipour H., Karimipour A., Safaei M. R., Semiromi D. T., Akbari O. A., (2017) Influence of T-semi attached rib on turbulent flow and heat transfer parameters of a silver-water nanofluid with different volume fractions in a three-dimensional trapezoidal microchannel, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, **88**, 1, pp. 60.
- [36] Aghanajafi A., Toghraie D., Mehmandoust B., (2017) Numerical simulation of laminar forced convection of water-CuO nanofluid inside a triangular duct, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, **85**, 1, pp. 103.
- [37] Nazari S., Toghraie D., (2017) Numerical simulation of heat transfer and fluid flow of water-CuO nanofluid in a sinusoidal channel with a porous

- medium, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, **87**, **1**, pp. **134**.
- [38] Akbari O. A., Toghraie D., Karimipour A., Marzban A., Ahmadi G. R., (2017) The effect of velocity and dimension of solid nanoparticles on heat transfer in non-Newtonian nanofluid, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, **86**, **1**, pp. **68**.
- [39] Afrand M., Toghraie D., Karimipour A., Wongwises S., (2017) A numerical study of natural convection in a vertical annulus filled with gallium in the presence of magnetic field, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **430**, **1**, pp. **22**.
- [40] Gravndyan Q., Akbari O. A., Toghraie D., Marzban A., Mashayekhi R., Karimi R., Pourfattah F., (2017) The effect of aspect ratios of rib on the heat transfer and laminar water/TiO<sub>2</sub> nanofluid flow in a two-dimensional rectangular microchannel, *Journal of Molecular Liquids*, **236**, **1**, pp. **254**.
- [41] Faridzadeh M., Toghraie D. S., Niroomand A., (2014) Analysis of laminar mixed convection in an inclined square lid-driven cavity with a nanofluid by using an artificial neural network, *Heat Transfer Research*, **45**, **4**,
- [42] Akbari O. A., Afrouzi H. H., Marzban A., Toghraie D., Malekzade H., Arabpour A., (2017) Investigation of volume fraction of nanoparticles effect and aspect ratio of the twisted tape in the tube, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, **129**, **3**, pp. **1911**.
- [43] Shamsi M. R., Akbari O. A., Marzban A., Toghraie D., Mashayekhi R., (2017) Increasing heat transfer of non-Newtonian nanofluid in rectangular microchannel with triangular ribs, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, **93**, **1**, pp. **167**.
- [44] Mohammadi, M. H. (2008). Stabilized meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for incompressible viscous fluid flows. CMES: Computer



Modeling in Engineering & Sciences, **29, 2, pp.75.**

- [45] Najafi, M., Arefmanesh, A., & Enjilela, V. (2012). Meshless local Petrov–Galerkin method-higher Reynolds numbers fluid flow applications. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **36, 11, pp.1671.**
- [46] Amini R., Maghsoodi R., Moghaddam N. Z., (2016) Simulating free surface problem using isogeometric analysis, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **38, 2, pp. 413.**
- [47] Sataprahm, C. and Luadsong, A., (2014) The meshless local Petrov-Galerkin method for simulating unsteady incompressible fluid flow. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **22, 3, pp.501.**
- [48] Kutluay, S., Bahadir, A. R., & Özdeş, A. (1999). Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **103, 2, pp. 251**
- [49] Shobeyri, G., & Afshar, M. H. (2010). Simulating free surface problems using discrete least squares meshless method. *Computers & Fluids*, **39, 3, pp.46.**
- [50] Nguyen, P.V., Rabczuk, T., Bordas, S. and Dufloy, M., (2008) "Meshless methods: A review and computer implementation aspects", *Mathematics and Computers in Simulation*, **79, 3, pp. 763.**
- [51] Finlayson, B.A. and Scriven, L.E., (1966) "The method of weighted residuals-a review", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 19, NO. 9, pp. 735-748.
- [52] Shepard, D., (1968) "A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data", *Proceedings of the 23rd. ACM National Conference.*

- [53] Atluri, S. N., and Zhu, T., (2000) "New concepts in meshless methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **47,1-3**, pp. 537
- [54] Lin, H. and Atluri, S. N., (2000) "Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for convection-diffusion problems", *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **1, 2**, pp. 45
- [55] Atluri S. N. and Zhu, T., (1998) "A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", *Computational Mechanics*, **22, 2**, pp. 117.
- [56] Lucy, L. B., (1977) "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *AstroNOMical Journal*, **82**, pp. 1013.
- [57] Liu, G. R. and Gu, Y. T., (2001) "A point interpolation method for two-dimensional solids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50, 4**, pp. 937.
- [58] Liu, G. R. and Gu, Y. T., (2001) "A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids", *Journal of Sound and Vibration*, **246, 1**, pp. 29.
- [59] Wang, J. G. and Liu, G. R., (2000) "Radial point interpolation method for elastoplastic problems", in *Structural conference on structural stability and dynamics*, Taipei, Taiwan.
- [60] Hardy, R. L., (1990) "Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968-1988", *Computers & Mathematics with Applications*, **19, 8-9**, pp. 163.

- [61] Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., (1996) "A finite point method in computational mechanics application to convective transport and fluid flow", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39, 22, PP. 3839.**
- [62] Liu, G. R. and Gu, Y. T., (2005) "An introduction to meshfree method and their programming", Springer,
- [63] Atluri, S. N., Zhu, T., (1998) "A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", *Computational Mechanics*, **22, pp. 117.**
- [64] Atluri, S.N., Zhu, T. L., (2000) "The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics", *Computational Mechanics*, **25, pp. 169.**
- [65] Atluri, S.N., Cho, J. Y., and Kim, H. G., (1999) "Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov–Galerkin method, with generalized moving least squares interpolations", *Computational Mechanics*, **24, pp. 334.**
- [66] Atluri, S.N. (2004) "The meshless method (MLPG) for domain & BIE discretization", Tech. Science Press.
- [67] Yavuz, M. and Ozdemir, N., (2018) "Numerical inverse Laplace homotopy technique for fractional heat equations. *Therm. Sci*, **22, 1, pp.185.**
- [68] Benton, E. R., & Platzman, G. W. (1972). A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation. *Quarterly of Applied Mathematics*, **30, 2, pp.195.**
- [69] Nithiarasu, P. (2005). An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme. *Int. Jour.*

- for Num. Methods in Fluids, **48, 12, pp. 1415.**
- [70] Zienkiewicz, O. C., & Codina, R. (1995). A general algorithm for compressible and incompressible flow—Part I. the split, characteristic-based scheme. Int. Jour. for Num. Methods in Fluids, **20, 8-9 pp.869.**
- [71] Shao, S., & Lo, E. Y. (2003). Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. Adv. in water resources, **26, 7 pp.787.**
- [72] Teixeira, E. C. (1993). Hydrodynamic processes and hydraulic efficiency of chlorine contact units (Doctoral dissertation, University of Bradford).
- [73] Falconer, R. A., & Ismail, A. I. B. M. (1997). Numerical modeling of tracer transport in a contact tank. Environment International, **23, 6, pp.763.**
- [74] Wang, H., & Falconer, R. A. (1998). Numerical modeling of flow in chlorine disinfection tanks. Journal of Hydraulic Engineering, **124, 9, pp.918.**
- [75] Wang, H., & Falconer, R. A. (1998). Simulating disinfection processes in chlorine contact tanks using various turbulence models and high-order accurate difference schemes. Water Research, **32, 5, pp.1529.**
- [76] Zhang, G., Lin, B., & Falconer, R. A. (2000). Modelling disinfection by-products in contact tanks. *Journal of Hydroinformatics*, **2, 2, pp.123.**
- [77] Shiono, K., & Teixeira, E. C. (2000). Turbulent characteristics in a baffled contact tank. Journal of Hydraulic Research, **38, 6, pp.403.**
- [78] Khan, L. A., Wicklein, E. A., & Teixeira, E. C. (2006). Validation of a three-dimensional computational fluid dynamics model of a contact tank. Journal of Hydraulic Engineering, **132, 7, pp.741.**

- [79] Rauen, W. B., Lin, B., Falconer, R. A., & Teixeira, E. C. (2008). CFD and experimental model studies for water disinfection tanks with low Reynolds number flows. *Chemical Engineering Journal*, **137**, **3**, pp.550.
- [80] Amini, R., Taghipour, R., & Mirgolbabaei, H. (2011). Numerical assessment of hydrodynamic characteristics in chlorine contact tank. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **67**, **7**, pp.885.
- [81] Taylor, Z. H., Carlston, J. S., & Venayagamoorthy, S. K. (2015). Hydraulic design of baffles in disinfection contact tanks. *Journal of Hydraulic Research*, **53**, **3**, pp.400.

## **Abstract**

Fluid flow modeling is one of the most widely used domains in hydraulic engineering science. Numerical modeling of flow is absolutely necessary because there are no analytical solutions for even very simple domains. The meshless method is one of the newest numerical method which has attracted much attention in recent decades. In this study the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) is used for fluid flow modeling. For this purpose, a MatLab code is developed. Many different types of flow including sloped channel flow, steady and unsteady flow in soils, dam break, full 2D and 3D Navier-Stokes are modeled in this study. In this method, for 2-D and 3-D analysis polar coordinates is used. Also, types of Radial Basis Function method are used for field function approximation and local integration is used to calculate the integrals. In each case numerical models were verified against analytical solutions when it existed or against finite difference method. The obtained results show the weighted residual method is one of the exact and up to date methods to obtain approximate answers in differential equations in meshless method. Comparing the results of MLPG method with analytical and other numerical methods shows that the MLPG method is highly accurate. Application of meshless local Petrov-Galerkin method in the analysis of steady and unsteady problems shows that this method has high efficiency in analyzing various hydraulic problem, independence from any background mesh and matching by boundary conditions.

**Keywords:** Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Methods, Fluid Flow Modeling, Radial Basis Function, Seepage Phenomena, Fluid Flow in Channel, Dam Breaking, Unsteady Flow



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Civil Engineering**

**Ph.D. Thesis in Water Engineering and Hydraulic Structures**

# **Navier Stokes Equations Modeling Using Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method in Unsteady Flow**

By: Mohammad Akbarimakoui

Supervisor:  
Dr. Ramin Amini

September 2018