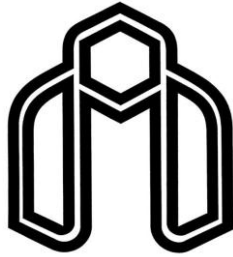


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی سازه

توسعه‌ی مدل بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها با استفاده از روش
مجموعه‌ی سطوح تراز و روش تحلیل آیزوژئومتری

نگارنده: سید امین تقوی شهری

استاد راهنما:

دکتر سید مهدی توکلی

شهریور ۱۳۹۷

تقدیم به

پدر و مادر نازنینم که دعای خیرشان، همواره بدرقه راهم بوده...

مشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از کلیه ی کسانی که من را در تدوین و نگارش این پایان نامه یاری نمودند، صمیمانه مشکر و قدردانی نمایم.

از جناب آقای دکتر سید مهدی توکلی که حقیقتاً خیلی فراتر از یک استاد راهنما در کلیه ی مراحل انجام این پژوهش با خوشرویی، یاری و راهنمایی نمود و وقت خود را بی‌منت در اختیار من گذاشتند نهایت سپاس را دارم.

هم‌چنین از تمامی اساتید گرامی و دوستانی که مراد به شمر رساندن این پایان نامه به‌مراستی کردند مشکر می‌نمایم.

تعهد نامه

اینجانب سید امین تقوی شهری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته‌ی سازه دانشکده‌ی عمران دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه توسعه‌ی مدل بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها با استفاده از روش مجموعه‌ی سطوح تراز و روش تحلیل آیزوژئومتریک تحت راهنمایی دکتر سید مهدی توکلی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه شاهرود» و یا «Shahrood University» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (با بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

بهینه‌سازی توپولوژی یکی از مهم‌ترین انواع مسائل بهینه‌سازی سازه ای است که همواره به دنبال توزیع بهینه‌ی مصالح در دامنه‌ی مورد نظر می‌باشد. در طول سال‌های گذشته همواره دو رویکرد کلی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی مطرح بوده است. در رویکرد متداول‌تر، انرژی کرنشی سازه تحت قید حجمی بهینه می‌گردد و هیچ محدودیت دیگری برای واکنش‌های سازه‌ای مثل تنش‌ها و تغییر مکان‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. در رویکرد دیگر، وزن سازه تحت قیدهای تنش مینیمم می‌شود.

هدف از انجام این تحقیق ارائه‌ی روشی جدید به منظور بهبود عملکرد بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها با روش تحلیل آیزوژئومتریک، می‌باشد. برای رسیدن به این هدف تعداد نقاط کنترلی کم برای ساختن تابع مجموعه‌ی سطوح تراز استفاده شده است. همچنین معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی به صورت عددی در فضای پارامتریک توابع پایه‌ی اسپلاین حل می‌شود. در روش مجموعه‌ی سطوح تراز، توپولوژی سازه توسط یک تابع ضمنی مرتبه بالاتر نسبت به دامنه معرفی می‌شود، که تغییرات این تابع در مراحل بهینه‌سازی می‌تواند به سادگی جدا شدن و متصل شدن مرزها را مدل‌سازی نماید، همچنین مرزهای سازه توسط تراز صفر این تابع، مشخص می‌شوند. مقادیر مثبت این تابع نشانگر وجود مصالح و مقادیر منفی نواحی خالی از مصالح در دامنه طراحی می‌باشند. در این پژوهش تابع مجموعه‌ی سطوح تراز با استفاده از توابع پایه‌ی اسپلاین که در تقریب هندسه و تغییر شکل‌ها نیز استفاده شده است، تقریب زده می‌شود. همچنین انرژی کرنشی به عنوان تابع هدف و حجم به عنوان قید مسئله‌ی بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است. به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، چندین مثال دوبعدی با استفاده از برنامه‌ی کامپیوتری تهیه شده و نتایج آن در انتها ارائه شده است.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی توپولوژی سازه، روش مجموعه‌ی سطوح تراز، تحلیل آیزوژئومتریک، فضای پارامتریک

فهرست مطالب

۱	فصل اول
۱	مقدمه و کلیات
۲	۱-۱- تاریخچه‌ی موضوع
۴	۲-۱- هدف از پژوهش
۵	۳-۱- ساختار کلی پایان‌نامه
۷	فصل دوم
۷	روش تحلیل آیزوژئومتریک
۸	۱-۲- مقدمه
۹	۲-۲- مبانی روش آیزوژئومتریک
۹	۱-۲-۲- بردارهای گره‌ای
۱۰	۲-۲-۲- توابع پایه
۱۲	۴-۲-۲- سطوح بی-اسپلین
۱۴	۳-۲- بی-اسپلین‌های نسبی غیریکنواخت (NURBS)
۱۵	۴-۲- محاسبه‌ی نقاط کنترلی بر اساس نقاط روی منحنی یا سطح مورد نظر
۱۵	۱-۴-۲- درونیابی عمومی
۲۱	۲-۴-۲- تقریب کلی
۲۳	۵-۲- تحلیل آیزوژئومتریک در مسائل تنش مسطح
۳۱	فصل سوم
۳۱	بهینه‌سازی سازه‌ها
۳۲	۱-۳- مقدمه
۳۲	۲-۳- تعاریف اولیه
۳۲	۱-۲-۳- متغیرهای طراحی
۳۳	۲-۲-۳- تابع هدف
۳۴	۳-۲-۳- قیود
۳۴	۳-۳- فرم ریاضی عمومی برای یک مسئله‌ی بهینه‌سازی:
۳۵	۴-۳- انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای:
۳۷	۵-۳- شرایط کاروش-کان-تاکر (KKT)
۳۹	فصل چهارم
۳۹	روش مجموعه‌ی
۳۹	سطوح تراز
۴۰	۱-۴- مقدمه
۴۰	۱-۱-۴- فرم صریح
۴۰	۲-۱-۴- فرم ضمنی

۴۱	۲-۴- ابزار هندسی در روش مجموعه‌ی سطوح تراز
۴۳	۳-۴- ابزار محاسبات در روش مجموعه سطوح تراز
۴۵	۴-۴- تابع فاصله‌ی علامت‌دار
۴۵	۵-۴- کاربرد روش مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها
۴۷	۶-۴- فرمول‌بندی مدل مجموعه‌ی سطوح تراز در مسائل بهینه‌سازی
۴۹	فصل پنجم
۴۹	توسعه‌ی مدل بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پیوسته به روش مجموعه‌ی سطوح تراز
۵۰	۱-۵- مقدمه
۵۰	۲-۵- تاریخچه
۵۴	۳-۵- روش مجموعه‌ی سطوح تراز و تحلیل آیزوژئومتریک
۵۸	۵-۵- آنالیز حساسیت
۵۹	۱-۵-۵- روش تحلیلی مستقیم
۶۰	۶-۵- مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم
۶۵	فصل ششم
۶۵	مثال‌های عددی
۶۶	۱-۶- مقدمه
۶۶	۲-۶- حل مثال‌های عددی بهینه‌سازی توپولوژی
۸۵	۲-۶- بررسی عملکرد روش پیشنهادی
۸۷	فصل هفتم
۸۷	نتایج و پیشنهادات
۸۸	۱-۷- مقدمه
۸۸	۲-۷- نتایج
۹۰	۳-۷- پیشنهادات
۹۱	مراجع

فهرست اشکال

- شکل (۱-۲) توابع پایه بی-اسپلاین درجه صفر، یک و دو برای بردار گرهی یکنواخت ----- ۱۰
- شکل (۲-۲) توابع پایه مکعبی بی-اسپلاین با بردار گره ----- ۱۱
- شکل (۳-۲) مشتقات اول مربوط به توابع پایه شکل (۲-۲) ----- ۱۱
- شکل (۴-۲) منحنی بی-اسپلاین و نقاط کنترلی [۱۱] ----- ۱۲
- شکل (۵-۲) سطح بی-اسپلاین برای و [۱۱] ----- ۱۳
- شکل (۶-۲) فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی شکل (۵-۲) و جدول (۱-۲) [۱۱] ----- ۱۴
- شکل (۸-۲) نقاط اولیه روی سطح مورد نظر [۱۰] ----- ۱۹
- شکل (۹-۲) درونیایی در راستای u [۱۰] ----- ۱۹
- شکل (۱۰-۲) درونیایی در راستای v [۱۰] ----- ۲۰
- شکل (۱۱-۲) تقریب نقاط کنترلی سطح مورد نظر [۱۰] ----- ۲۲
- شکل (۱۲-۲) فضای فیزیکی، فضای پارامتری و فضای انتگرال‌گیری عددی یک المان نربز [۱۱] ----- ۲۹
- شکل (۱-۳) مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه [۱۲] ----- ۳۴
- شکل (۲-۳) مسئله‌ی بهینه‌سازی ابعادی با هدف بهینه کردن سطح مقطع اعضای خرپا [۱۲] ----- ۳۶
- شکل (۳-۳) مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل با هدف پیدا کردن تابع مناسب برای توصیف شکل سازه [۱۲] ----- ۳۶
- شکل (۴-۳) بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا [۱۲] ----- ۳۷
- شکل (۵-۳) بهینه‌سازی توپولوژی تیر دو بعدی دو سر مفصل در محیط پیوسته [۱۲] ----- ۳۷
- شکل (۱-۴) بهینه‌سازی تعریف دامنه طرح دو بعدی با روش مجموعه‌ی سطوح تراز ----- ۴۱
- شکل (۲-۴) آیزوکانتورهای تابع $\phi(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 1$ ----- ۴۲
- شکل (۳-۴) تابع هویساید ----- ۴۴
- شکل (۴-۴) تابع دلتای دیراک ----- ۴۴
- شکل (۵-۴) تابع فاصله‌ی علامتدار $|\nabla\phi(x)| = 1$ ----- ۴۵
- شکل (۶-۴) روند تغییرات ϕ که موجب جدا شدن مرزها می‌گردد ----- ۴۶
- شکل (۷-۴) دامنه‌ی طرح و مدل مجموعه‌ی سطوح تراز [۲۶] ----- ۴۸
- شکل (۱-۵) بیان توپولوژی و مرز با استفاده از تابع مجموعه‌ی سطوح تراز $\phi(\mathbf{x})$ [۳۵] ----- ۵۴
- شکل (۲-۵) فضای فیزیکی مسئله ----- ۵۶
- شکل (۳-۵) فضای پارامتری مسئله ----- ۵۶
- شکل (۴-۵) روش پیش‌رونده در حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی ----- ۵۷
- شکل (۵-۵) نمودار تغییرات حجم نسبت به ضریب لاگرانژ ----- ۶۳
- شکل (۱-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول ----- ۶۷
- شکل (۳-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول با قید حجم ۴۵٪ ----- ۶۷
- شکل (۴-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول به صورت ۳ بعدی ----- ۶۷
- شکل (۵-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول ----- ۶۷
- شکل (۶-۶) طرح نهایی بهینه‌ی تیر کنسول [۳۶] ----- ۶۸
- شکل (۷-۶) طرح نهایی بهینه‌ی تیر کنسول [۳۸] ----- ۶۸
- شکل (۸-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول ----- ۶۹

- شکل (۹-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۰ حفره ----- ۶۹
- شکل (۱۰-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول با قید حجم ۴۵ درصد ----- ۶۹
- شکل (۱۱-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول ----- ۷۰
- شکل (۱۲-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول ----- ۷۰
- شکل (۱۳-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۰ حفره ----- ۷۱
- شکل (۱۴-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول با قید حجم ۴۵ درصد ----- ۷۱
- شکل (۱۵-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول ----- ۷۱
- شکل (۱۶-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول ----- ۷۲
- شکل (۱۷-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۰ حفره ----- ۷۲
- شکل (۱۸-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول با قید حجم ۴۵ درصد ----- ۷۲
- شکل (۱۹-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول ----- ۷۲
- شکل (۲۰-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر ساده ----- ۷۳
- شکل (۲۱-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۰ حفره ----- ۷۳
- شکل (۲۲-۶) طرح بهینه‌ی تیر ساده با قید حجم ۴۰ درصد ----- ۷۳
- شکل (۲۳-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر ساده ----- ۷۴
- شکل (۲۴-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر میشل ----- ۷۴
- شکل (۲۵-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۰ حفره ----- ۷۵
- شکل (۲۶-۶) طرح بهینه‌ی تیر میشل با قید حجم ۴۰ درصد ----- ۷۵
- شکل (۲۷-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر میشل ----- ۷۵
- شکل (۲۸-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول بلند ----- ۷۶
- شکل (۲۹-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۶ حفره ----- ۷۶
- شکل (۳۰-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول بلند با قید حجم ۴۰ درصد ----- ۷۶
- شکل (۳۱-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول بلند ----- ۷۷
- شکل (۳۲-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول بلند ----- ۷۷
- شکل (۳۳-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۶ حفره ----- ۷۸
- شکل (۳۴-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول بلند با قید حجم ۴۰ درصد ----- ۷۸
- شکل (۳۵-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول بلند ----- ۷۸
- شکل (۳۶-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر ال شکل ----- ۷۹
- شکل (۳۷-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل ----- ۷۹
- شکل (۳۸-۶) طرح بهینه‌ی تیر ال شکل با قید حجم ۲۵ درصد ----- ۸۰
- شکل (۳۹-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر ال شکل ----- ۸۰
- شکل (۴۰-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر ال شکل ----- ۸۱
- شکل (۴۱-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل ----- ۸۱
- شکل (۴۲-۶) طرح بهینه‌ی تیر ال شکل با قید حجم ۲۵ درصد ----- ۸۲
- شکل (۴۳-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر ال شکل ----- ۸۲
- شکل (۴۴-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر منحنی شکل ----- ۸۳
- شکل (۴۵-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل ----- ۸۳
- شکل (۴۶-۶) طرح بهینه‌ی تیر منحنی شکل با قید حجم ۳۵ درصد ----- ۸۴

- شکل (۴۷-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر منحنی شکل ----- ۸۴
- شکل (۴۸-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول مرجع [۳۵] با ۱۳۲۶ نقطه کنترلی ----- ۸۵
- شکل (۴۹-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول پژوهش موجود با ۸۶۱ نقطه کنترلی (مثال ۱) ----- ۸۵
- شکل (۵۰-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول پژوهش موجود با ۲۳۱ نقطه کنترلی (مثال ۲) ----- ۸۵
- شکل (۵۱-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول مرجع [۳۵] با ۱۳۲۶ نقطه کنترلی ----- ۸۶
- شکل (۵۲-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول پژوهش موجود با ۸۶۱ نقطه کنترلی (مثال ۳) ----- ۸۶
- شکل (۵۳-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول پژوهش موجود با ۲۳۱ نقطه کنترلی (مثال ۴) ----- ۸۶

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱-۱- تاریخچه‌ی موضوع

یکی از فاکتورهای مهم در طراحی مسائل مهندسی، رسیدن به یک طرح اقتصادی و بهینه با رعایت اصول و قواعد فنی مرتبط به آن مسئله است. بهینه‌سازی، علمی است که رفتار سازه و اقتصاد پروژه را به‌طور هم‌زمان در نظر می‌گیرد و در نهایت علاوه بر ایمنی سازه، منجر به کاهش هزینه‌های ساخت و پرهیز از اتلاف مصالح نیز می‌شود. هدف از بهینه‌سازی سازه‌ها، طراحی سازه‌هایی است که با وجود وزن حداقل، از بیشترین مقاومت و سختی در برابر نیروهای وارده برخوردار هستند. مسائل بهینه‌سازی را می‌توان در سه رده‌ی مختلف دسته‌بندی نمود که عبارتند از: بهینه‌سازی توپولوژی^۱، بهینه‌سازی شکل^۲ و بهینه‌سازی ابعاد سازه^۳. در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها هدف پیدا کردن تعداد و مکان مناسب حفره‌ها است [۱]. در بهینه‌سازی شکل سازه‌ها هدف پیدا کردن بهترین موقعیت مختصات نقاط و مرزهای سازه است. در بهینه‌سازی ابعادی هدف به‌دست آوردن حداقل سطح مقطع مورد نیاز برای هر یک از اعضای سازه است.

بهینه‌سازی توپولوژی یکی از مهم‌ترین انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای است که همواره به دنبال توزیع بهینه‌ی مصالح در دامنه‌ی مورد نظر می‌باشد. برای رسیدن به این منظور، انتخاب تابع هدف و قید مناسب از اهمیت بالایی برخوردار است. بهینه‌سازی توپولوژی، ابزاری است که به طراح در به‌دست آوردن یک طرح‌بندی اولیه‌ی مناسب برای سازه‌ی موجود، کمک بسیاری خواهد کرد. به هنگام حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی، شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی و مشخصات مصالح معلوم بوده و هدف حذف یا توزیع مجدد مصالح در دامنه‌ی تعریف شده می‌باشد به‌گونه‌ای که در انتها توپولوژی به‌دست آمده، تابع هدف^۴ مورد نظر را در مسئله‌ی بهینه‌سازی، بهینه کند. فرایند

^۱ Topology optimization

^۲ Shape optimization

^۳ Size optimization

^۴ Objective function

بهینه‌سازی توپولوژی شامل سه قسمت اصلی مدل‌سازی هندسی^۱ مسئله، تحلیل سازه^۲ و آنالیز حساسیت^۳ مسئله‌ی بهینه‌سازی می‌باشد.

در دهه‌های گذشته روش‌های بسیاری برای تحلیل مسائل مهندسی ارائه شده است که برخی از مشهورترین آن‌ها روش تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته‌ای از روش‌ها با عنوان روش‌های بدون شبکه می‌باشند. اگرچه این روش‌ها در پی یکدیگر و با هدف توانمندتر نمودن و رفع مشکلات روش‌های پیش از خود ارائه شده‌اند، اما هنوز هم نمی‌توان روشی را یافت که بتوان آن را کامل و بدون نقص نامید. از جمله‌ی این کاستی‌ها می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسائل دارای هندسه‌ی پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائل با تغییرات شدید در خواص مصالح و همچنین نیاز به تولید مکرر شبکه‌ی المان‌ها در برخی مسائل، نظیر مسائل بهینه‌سازی شکل سازه اشاره نمود. برای غلبه بر این مشکلات و بهبود روش‌های موجود، استفاده از توابع پایه‌ی اسپلاین به‌جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود در تحلیل مسائل مهندسی، اولین بار در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ توسط کیگان و هولیگ معرفی شد [۲-۴]. در سال ۲۰۰۵، این ایده با استفاده از توابع نرَبز که از توسعه‌ی توابع اسپلاین به‌دست می‌آیند، توسط هیوز و همکارانش تکامل یافت و روش تحلیل آیزوژئومتریکی نام گرفت [۵-۷]. اساس این روش را استفاده از فناوری‌های طراحی به کمک رایانه^۴ و پیشرفت‌های اخیر در زمینه‌ی گرافیک رایانه‌ای تشکیل می‌دهد. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه‌ی اسپلاین و نرَبز^۵ در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، از آن‌ها جهت درون‌یابی و تقریب‌سازی مجهولات مسئله نیز استفاده می‌گردد. از طرفی روش تحلیل آیزوژئومتریکی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

^۱ Geometric Modeling

^۲ Structural Analysis

^۳ Sensitivity analysis

^۴ Computer Aided Design (CAD)

^۵ Non Uniform Rational B-Spline(NURBS)

از زمانی که روش مجموعه‌ی سطوح تراز^۱ توسط اش^۲ و ستیان^۳ برای به‌دست آوردن مرزهای مشترک و مرزهای آزاد معرفی شد [۹،۸]، این روش در بسیاری از رشته‌ها و علوم مختلف به‌کار برده شده است. امروزه روش مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی شکل و توپولوژی بسیار مورد توجه قرار گرفته است. روش مجموعه‌ی سطوح تراز بسیار تطبیق پذیر و فراگیر می‌باشد، به طوری که به‌سادگی می‌تواند گوشه‌های تیز، جدا شدن مرزها از یکدیگر و یا ادغام مرزهای مشترک را بیان کند. این بیان ساده باعث ساده‌سازی مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل و توپولوژی می‌گردد و نیازی به پارامتری کردن مرز مشترک نمی‌باشد. در این روش هندسه‌ی سازه به‌صورت تابع ضمنی اسکالر از بعد بالاتر تعریف می‌گردد و مرز سازه توسط یک سطح تراز مشخص معرفی می‌گردد و مرز جدید از حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی^۴ به‌دست می‌آید، همچنین نواحی مثبت بیانگر وجود مصالح و نواحی منفی معرف فضاهای خالی هستند. در فصل پنجم تاریخچه‌ی روش مجموعه‌ی سطوح تراز به‌صورت کامل آورده شده است.

۱-۲- هدف از پژوهش

هدف اصلی از انجام این تحقیق کاهش تعداد نقاط کنترلی به‌وسیله‌ی اصلاح روش تفاضل محدود در حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی می‌باشد. در این رویکرد شبکه‌بندی تفاضل محدود وابسته به تعداد نقاط کنترلی نمی‌باشد. همچنین در این پژوهش انرژی کرنشی سازه به‌عنوان تابع هدف و محدودیت حجم سازه به‌عنوان قید مسئله‌ی بهینه‌سازی در نظر گرفته شده است. مسئله‌ی کمینه کردن انرژی کرنشی هم مفهوم با بیشینه کردن سختی کل سازه است.

^۱ Level Set Method

^۲ Osher

^۳ Sethian

^۴ Hamilton-Jacobi Equation

۱-۳- ساختار کلی پایان نامه

به طور کلی این پایان نامه شامل هفت فصل می باشد. در فصل حاضر به بیان کلیاتی در مورد پایان نامه پرداخته شده است. در فصل دوم روش تحلیل آیزوژئومتریک به عنوان روشی جدید و پرکاربرد بررسی شده و فرمول بندی های لازم جهت تحلیل مسائل تنش مسطح به صورت مختصر ارائه شده است.

در فصل سوم به بیان اصول و مبانی کلی بهینه سازی سازه ها می پردازیم. در فصل چهارم روش مجموعه ی سطوح تراز مورد بررسی قرار گرفته است، سپس فرمول بندی مدل مجموعه ی سطوح تراز در مسائل بهینه سازی آورده شده است. در فصل پنجم در ابتدا به بیان روش مجموعه ی سطوح تراز و تحلیل آیزوژئومتریک می پردازیم، سپس به نحوه ی کاهش تعداد نقاط کنترلی و حل معادله ی همیلتون-ژاکوبی در فضای پارامتری اشاره می شود، همچنین فرمول بندی مسئله ی بهینه سازی انرژی کرنشی تحت قید حجم بیان شده و در انتهای فصل با استفاده از آنالیز حساسیت، سرعت نرمال حاکم بر مسئله ی بهینه سازی به عنوان مهم ترین عنصر برای بهینه یابی مسائل، استخراج شده است. در فصل ششم به منظور نمایش عملکرد روش پیشنهادی مثال های عددی متنوعی حل شده و نتایج آن آورده شده است. در فصل هفتم نیز خلاصه ای از نتایج این پایان نامه و همین طور پیشنهادهایی به منظور توسعه ی برنامه های کامپیوتری، برای دانشجویان علاقه مند در این زمینه، ارائه شده است.

فصل دوم

روش تحلیل

آیزوژنومتريک

روش‌های عددی مختلفی در دهه‌های اخیر برای تحلیل سازه‌ها توسعه یافته‌اند. از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به ترتیب شکل‌گیری، به روش‌های تفاضل محدود، اجزای محدود و دسته‌ی روش‌های موسوم به روش‌های بدون مش اشاره کرد. امروزه روش اجزای محدود به‌عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و با استفاده از آن نرم‌افزارهای تجاری مختلفی تهیه شده است که در صنعت کاربردی فراوان دارد. با وجود این پیشرفت‌های قابل ملاحظه، این روش دارای نقاط ضعفی نیز می‌باشد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به نحوه‌ی تعریف مرزهای هندسی اشاره کرد. در روش اجزای محدود با توجه به تقریب هندسه، نزدیک شدن به هندسه‌ی واقعی کاملاً وابسته به نحوه‌ی شبکه‌بندی است و در برخی مسائل پیچیده از لحاظ هندسی رسیدن به آن بسیار مشکل است. از سوی دیگر بهبود حل، چه از لحاظ تقریب هندسه و یا متغیرهای مجهول، منجر به ایجاد تغییرات در شبکه‌بندی می‌شود که در نهایت سبب افزایش تعداد معادلات و بالا رفتن زمان حل می‌گردد. علاوه بر این در روش اجزای محدود حل مسائلی که در آن‌ها ساخت چندین شبکه‌ی جدید در حین حل مسئله لازم است؛ می‌تواند هزینه‌ی طرح را به‌مراتب افزایش دهد.

یکی از مواردی که همواره در تحلیل مسائل مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده است، برقراری ارتباط بین روش‌های طراحی هندسه و روش‌های تحلیل می‌باشد. تقریباً یک دهه پس از شکل‌گیری روش اجزای محدود و بین سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ و به‌دلیل توسعه‌ی رایانه‌ها، پیشرفت‌های چشم‌گیری در علم مدل‌سازی هندسه به کمک رایانه شکل گرفت. در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ ایده‌ی استفاده از توابع پایه‌ی اسپیرالین به‌جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود، به‌عنوان یکی از راهکارهای ورود تکنیک‌های طراحی به کمک رایانه در تحلیل مسائل مهندسی مطرح شد و همین امر سبب شد که روش تحلیل آیزوژئومتریکی در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش توسعه یابد.

کاهش قابل ملاحظه‌ی اندازه‌ی دستگاه معادلات، انعطاف‌پذیری و دقت بالا در تعریف هندسه و مرزهای آن، عدم نیاز به مش‌بندی مجدد در طول پروسه‌ی تحلیل و بهینه‌سازی و دقت بالا در اقتناع شرایط مرزی از جمله مزایایی است که روش تحلیل آیزوژئومتریکی را از سایر روش‌های عددی متداول، متمایز می‌کند [۷-۵]. به تعبیری می‌توان این روش را بسط و تعمیم قدرتمند روش تحلیل اجزای محدود سنتی به حساب آورد؛ مانند آنچه در روش اجزای محدود وجود دارد در این‌جا نیز از مفهومی مشابه خاصیت آیزوپارامتریکی^۱ استفاده می‌شود. به این منظور که در این‌جا نیز از همان توابعی که برای مدل کردن هندسه استفاده شده است در تقریب تابع مجهول نیز استفاده خواهد شد. از جمله معایب روش آیزوژئومتریکی می‌توان به ایجاد شبکه نقاط کنترلی که منطبق بر هندسه مسئله نیست و آسان نبودن پیدا کردن جابه‌جایی برای یک نقطه مشخص اشاره کرد.

۲-۲- مبانی روش آیزوژئومتریکی

یکی از ویژگی‌های منحصر به فرد منحنی‌ها، سطوح و احجام ساخته شده توسط توابع پایه‌ی نربز، عدم تغییرپذیری آنها تحت تبدیلات هندسی متداول همچون انتقال، دوران، تشابه و نگاشت می‌باشد، به همین دلیل توابع نربز یا همان بی-اسپلاین‌های نسبی غیریک‌نواخت امروزه در بسیاری از استانداردهای صنعتی جهان به‌عنوان یکی از ابزارهای ریاضی قدرتمند برای طراحی هندسی شناخته شده‌اند.

۲-۲-۱- بردارهای گرهی

یکی از مفاهیم اساسی برای معرفی سطوح ساخته شده توسط نربز، بردار گره‌ای^۲ است. یک بردار گره‌ای، دنباله‌ای غیرنزولی از اعداد حقیقی است که به‌صورت زیر تشکیل می‌شود [۱۰]:

^۱ Isoparametric

^۲ Knot vector

$$\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r\}, \quad \xi_{i+1} \geq \xi_i$$

$$i = 0, 1, \dots, n + p - 1 \quad (1-2)$$

که در آن ξ_i ، i امین گره، p درجه‌ی چندجمله‌ای و n تعداد تابع‌های شکل تشکیل دهنده‌ی بی-اسپلاین به‌شمار می‌روند. یکی از انواع بردارهای گرهی که در این بحث مورد استفاده قرار می‌گیرد، بردار گرهی نامتناوب (باز) است که فرم زیر را دارا می‌باشد [۱۰]:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (2-2)$$

در این نوع از بردارهای گرهی، اولین و آخرین مقدار از گره‌ها دارای $p+1$ تکرار می‌باشند

۲-۲-۲-۲- توابع پایه

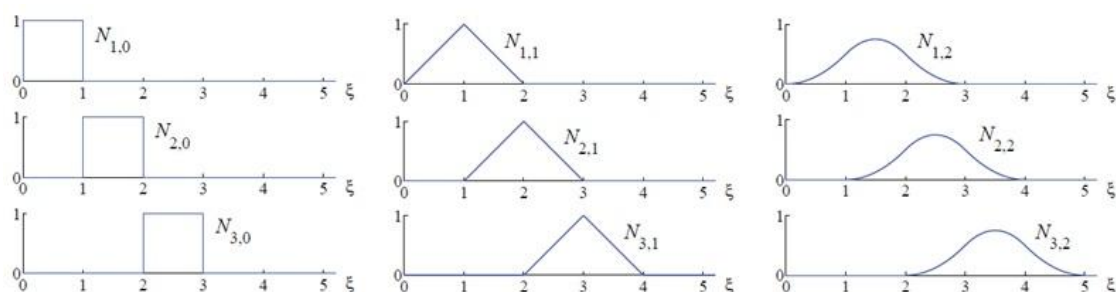
توابع پایه‌ی بی-اسپلاین به‌صورت بازگشتی با شروع از اعداد ثابت تعریف می‌شود [۱۰].

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (3-2)$$

و در ادامه برای $p=1, 2, 3, \dots$ داریم [۱۰]:

$$N_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (4-2)$$

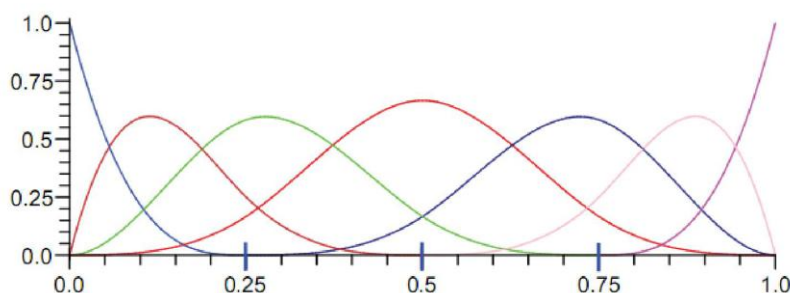
در شکل زیر توابع پایه‌ی بی-اسپلاین درجه صفر، یک و دو برای بردار گرهی یکنواخت $\Xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ مشاهده می‌شود [۱۱].



شکل (۱-۲) توابع پایه‌ی بی-اسپلاین درجه صفر، یک و دو برای بردار گرهی یکنواخت

$$\Xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

به عنوان مثال دیگر توابع پایه مکعبی بی-اسپلاین با بردار گره $\Xi = \{0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1\}$ به صورت زیر می باشد.

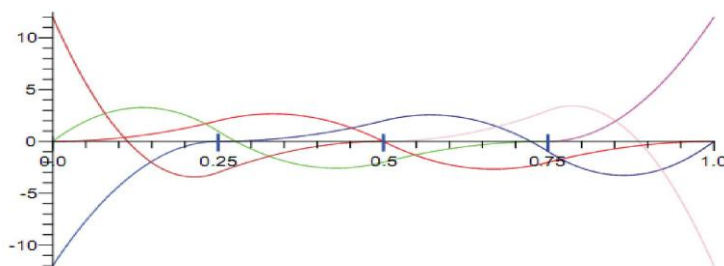


شکل (۲-۲) توابع پایه مکعبی بی-اسپلاین با بردار گره $\Xi = \{0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1\}$

مشتمق اول یک تابع پایه بی-اسپلاین از رابطه زیر به دست می آید [۱۰]:

$$N'_{i,p}(\xi) = \frac{P}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{P}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) \quad (۵-۲)$$

شکل زیر مشتقات اول مربوط به توابع پایه شکل (۲-۲) را نشان می دهد.



شکل (۳-۲) مشتقات اول مربوط به توابع پایه شکل (۲-۲)

۳-۲-۲- منحنی بی-اسپلاین

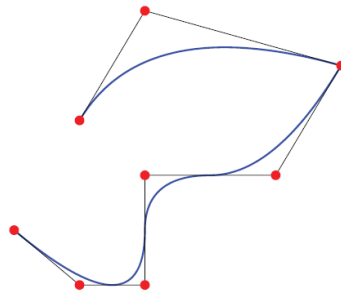
منحنی های بی-اسپلاین با استفاده از ترکیب خطی توابع پایه بی-اسپلاین ساخته می شوند. یک

منحنی بی-اسپلاین به شکل زیر تعریف می شود [۱۰]:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (۶-۲)$$

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (7-2)$$

که در آن P_i مختصات نقاط کنترلی و $N_{i,p}(\xi)$ توابع پایه بی-اسپلاین نرمال از درجه p و Ξ بردار گره‌ای می‌باشد. یک نمونه از این منحنی‌ها برای تابع پایه درجه دو در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۴-۲) منحنی بی-اسپلاین و نقاط کنترلی [۱۱]

۴-۲-۲- سطوح بی-اسپلاین

با تعریف $\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$ و $H = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$ به عنوان

بردارهای گره‌ای که به ترتیب شامل $r+1$ و $s+1$ گره هستند، فضای پارامتریک، در تحلیل آیزوژئومتریک مشخص می‌گردد. در بردارهای گره‌ای باز^۱ همواره روابط زیر برقرار می‌باشد.

$$r = n + p + 1 \quad s = m + q + 1 \quad (8-2)$$

که در آن n تعداد نقاط کنترلی در جهت Ξ و m تعداد نقاط کنترلی در جهت دیگر می‌باشد. همچنین p و q مرتبه‌های توابع بی-اسپلاین می‌باشند و تعداد گره‌های بردار گره‌ای با r و s نمایش داده می‌شود.

^۱ Open knot vector

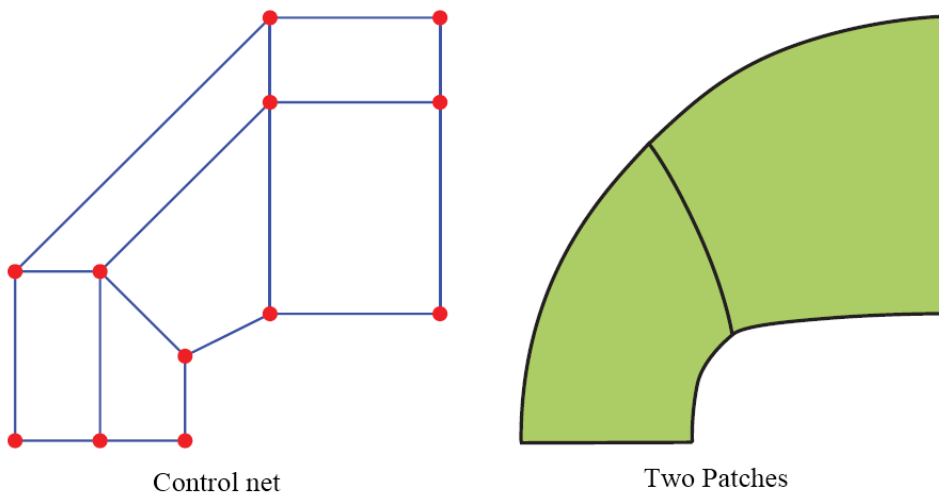
یک سطح بی-اسپلین، که در جهت ξ از درجه p و در جهت η از درجه q می‌باشد، حاصل از ضرب تانسوری به صورت زیر تعریف خواهد شد [۱۰]:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \mathbf{P}_{i,j} \quad (9-2)$$

نمونه از یک سطح ساخته شده به همراه مختصات شبکه‌ی نقاط کنترلی آن در جدول زیر نمایش داده شده است. بردارهای گره‌ای این شکل به صورت $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ و $\mathcal{H} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ می‌باشد.

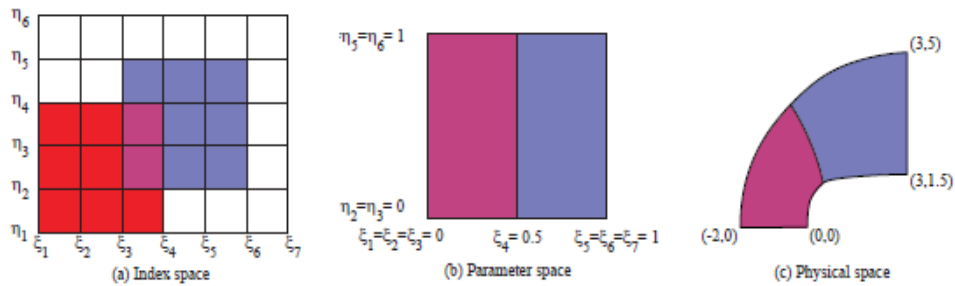
i	j	$\mathbf{P}_{i,j}$
1	1	(0, 0)
1	2	(-1, 0)
1	3	(-2, 0)
2	1	(0, 1)
2	2	(-1, 2)
2	3	(-2, 2)
3	1	(1, 1.5)
3	2	(1, 4)
3	3	(1, 5)
4	1	(3, 1.5)
4	2	(3, 4)
4	3	(3, 5)

(۱-۲) مختصات نقاط کنترلی شکل (۵-۲) [۱۱]



شکل (۵-۲) سطح بی-اسپلین برای $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ و $\mathcal{H} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ [۱۱]

در انتها فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی به شکل زیر به دست می آید:



شکل (۶-۲) فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی شکل (۵-۲) و جدول (۱-۲) [۱۱]

۲-۳- بی-اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت (NURBS)

نربز مخفف عبارت بی-اسپلاین‌های غیریکنواخت کسری به زبان انگلیسی است. عبارت غیر-یکنواخت مربوط به بردار گره‌ای است که در حالت کلی می‌تواند یکنواخت نباشد. در تعریف منحنی-های نربز، برای هر نقطه کنترلی یک مقدار وزن W در نظر گرفته می‌شود که مقدار آن بر نحوه تاثیر آن نقطه کنترلی بر شکل منحنی موثر است. یک منحنی درجه P نربز را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود [۱۰]:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) P_i \quad (10-2)$$

که در آن:

$$R_i(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (11-2)$$

چنانچه همه مقادیر وزن‌ها باهم برابر باشند، تابع پایه نربز رابطه بالا به تابع پایه بی-اسپلاین عادی تبدیل می‌شود. به عبارت دیگر تابع پایه بی-اسپلاین حالت خاصی از تابع نربز است که وزن‌ها در آن برابر هم هستند. به طور مشابه سطح ساخته شده با استفاده از توابع نربز به صورت زیر تعریف می‌شوند

[۱۰]:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}} \quad (12-2)$$

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi, \eta)P_{i,j} \quad (13-2)$$

که در آن همچنین $w_{i,j}$ وزن‌های مرتبط و $N_{i,p_1}(\xi)$ و $N_{j,p_2}(\eta)$ ، توابع پایه‌ی بی-اسپلاین نرمال از درجه‌ی p_1 و p_2 هستند.

پس از معرفی نحوه‌ی ساخت منحنی و سطح با استفاده از توابع نریز، در ادامه به نحوه‌ی محاسبه‌ی نقاط کنترلی با استفاده از نقاط روی منحنی یا سطح مورد نظر می‌پردازیم. از آنجایی که در روش مجموعه‌ی سطوح تراز در هر مرحله از بهینه‌سازی نیاز به محاسبه‌ی نقاط کنترلی جدید برای تحلیل سیستم می‌باشد، در ادامه به چند روش محاسبه‌ی نقاط کنترلی بر اساس نقاط روی منحنی یا سطح مورد نظر اشاره شده است.

۲-۴- محاسبه‌ی نقاط کنترلی بر اساس نقاط روی منحنی یا سطح مورد نظر

هدف این بخش معرفی چند روش برای به‌دست آوردن نقاط کنترلی جدید با استفاده از داده‌های روی سطح مورد نظر می‌باشد. روش‌های درون‌یابی^۱ به دو دسته‌ی کلی و جزئی تقسیم می‌شود. در روش کلی یک سیستم معادلات یا یک مسئله‌ی بهینه‌سازی حل می‌شود. روش‌های جزئی بیشتر برای به‌دست آوردن نقاط کنترلی یک بخش از منحنی یا سطح به‌کار می‌رود.

۲-۴-۱- درون‌یابی عمومی^۲

در این بخش ابتدا به معرفی روشی برای درون‌یابی نقاط کنترلی یک منحنی می‌پردازیم، سپس روش مورد نظر را برای درون‌یابی یک سطح تعمیم می‌دهیم.

^۱Interpolation

^۲Global Interpolation

فرض شود نقاط روی منحنی که در اختیار داریم به صورت مقابل معرفی شود: $\{\mathbf{Q}_k\}, k=0, \dots, n$ که در آن n تعداد نقاط روی منحنی مورد نظر می باشد. حال می خواهیم نقاط کنترلی این منحنی را با استفاده از روش کلی درون یابی کنیم. اگر ما به هر \mathbf{Q}_k یک \bar{u}_k اختصاص بدهیم و یک بردار گره ای مناسب $\mathbf{U} = \{u_0, \dots, u_m\}$ انتخاب کنیم، می توانیم با تشکیل یک سیستم معادلات خطی و حل آن، نقاط کنترلی مدنظر را به دست بیاوریم.

$$\mathbf{Q}_k = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \quad (14-2)$$

در رابطه ی بالا \mathbf{P}_i نقاط کنترلی به تعداد $n+1$ می باشد. برای محاسبه ی \bar{u}_k روش های مختلفی وجود دارد که در ادامه به آن اشاره می شود [۱۰].

• روش فضای مساوی^۱

در روش فضای مساوی، برای ساختن گره های متناظر با نقاط روی منحنی، فضای بین صفر و یک به صورت مساوی و به تعداد نقاط روی منحنی مورد نظر تقسیم می شود. این روش به دلیل اینکه توانایی ساخت اشکال پیچیده را ندارد توصیه نمی شود [۱۰].

$$\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1 \quad (15-2)$$

$$\bar{u}_k = \frac{k}{n} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (16-2)$$

• روش طول وتر^۲

در این روش از نقاط روی منحنی برای محاسبه ی \bar{u}_k استفاده می شود. این روش بیشترین کاربرد را برای گسسته سازی منحنی دارد و یک گسسته سازی یکنواخت را به وجود می آورد.

^۱Equally spaced method

^۲Chord length method

$$d = \sum_{k=1}^n |\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}| \quad (17-2)$$

$$\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1 \quad (18-2)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{|Q_k - Q_{k-1}|}{d} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (19-2)$$

که در آن d اندازه‌ی طول وتر نامیده می‌شود [۱۰].

• روش مایل به مرکز^۱

این روش جدیدترین روشی است که برای محاسبه‌ی \bar{u}_k ابداع شده است و حتی زمانی که داده‌ها دارای تغییرات سریع می‌باشند، نتایج مناسبی می‌دهد [۱۰].

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_{k-1}|} \quad (20-2)$$

$$\bar{u}_0 = 0 \quad \bar{u}_n = 1 \quad (21-2)$$

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}}{d} \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (22-2)$$

پس از به‌دست آوردن \bar{u}_k نوبت به محاسبه‌ی بردار گره‌ای مناسب می‌رسد. بردار گره‌ای با فواصل یکسان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{u}_0 = \dots = \mathbf{u}_p = \mathbf{0} \quad \mathbf{u}_{m-p} = \dots = \mathbf{u}_m = \mathbf{1} \quad (23-2)$$

$$\mathbf{u}_{j+p} = \frac{j}{n-p+1} \quad j = 1, \dots, n-p \quad (24-2)$$

به‌دست آوردن بردار گره‌ای با فواصل یکسان به‌دلیل احتمال تکین شدن دستگاه معادلات پیشنهاد نمی‌شود، به‌جای آن از روش میانگین^۲ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده می‌کنیم:

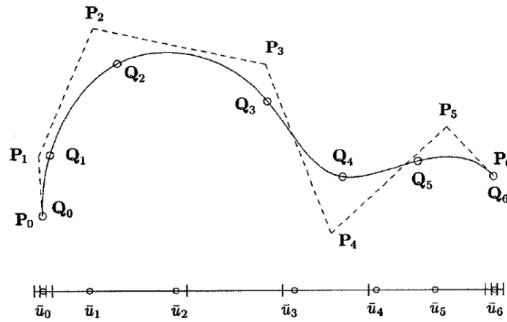
^۱Centripetal method

^۲Averaging method

$$u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1 \quad (25-2)$$

$$u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n-p \quad (26-2)$$

که در این روش بردار گره‌ای به دست آمده وابسته به توزیع \bar{u}_k می‌باشد [۱۰].



شکل (۷-۲) بردار گرهی وابسته به \bar{u}_k [۱۰]

برای به دست آوردن نقاط کنترلی یک منحنی پس از محاسبه \bar{u}_k و بردار گره‌ای مناسب معادله‌ی

زیر را حل می‌کنیم:

$$\mathbf{Q}_k = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \quad (27-2)$$

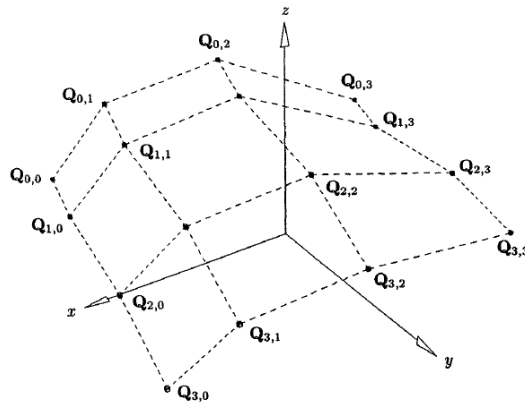
برای درونیابی کلی یک سطح، فرض شود یک دستگاه از نقاط روی سطح را به صورت زیر در اختیار

داریم:

$$\{\mathbf{Q}_{k,l}\} \quad k = 0, \dots, n ; l = 0, \dots, m \quad (28-2)$$

همانطور که قبلاً بیان شد، برای ساختن یک سطح نریز از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{Q}_{k,l} = S(\bar{u}_k, \bar{v}_l) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\bar{u}_k) N_{j,q}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{i,j} \quad (29-2)$$



شکل (۲-۸) نقاط اولیه روی سطح مورد نظر [۱۰]

مشابه با بخش درونیابی منحنی، ابتدا باید (\bar{u}_k, \bar{v}_l) متناظر با نقاط روی سطح به دست آید:

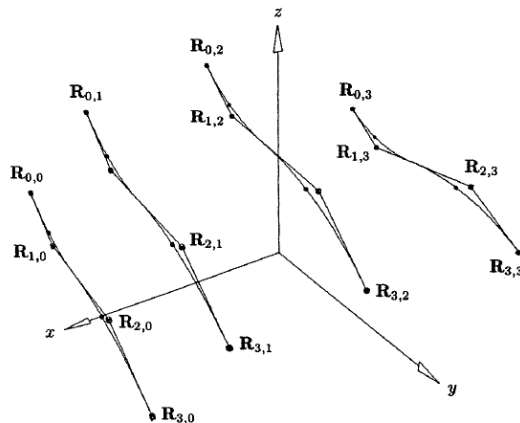
$$\bar{u}_k = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \bar{u}_k^l \quad k = 0, \dots, n \quad (30-2)$$

$$\bar{v}_l = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \bar{v}_l^k \quad l = 0, \dots, m \quad (31-2)$$

با توجه به این که سطح مورد نظر از منحنی‌های عمود برهم به وجود آمده رابطه (۲-۲۹) به صورت زیر ساده‌سازی می‌شود:

$$\mathbf{Q}_{k,l} = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \left(\sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{i,j} \right) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{R}_{i,l} \quad (32-2)$$

$$\mathbf{R}_{i,l} = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(\bar{v}_l) \mathbf{P}_{i,j} \quad (33-2)$$



شکل (۲-۹) درونیابی در راستای u [۱۰]

به عنوان مثال روابط برای راستای $l = 0$ به صورت زیر می باشد:

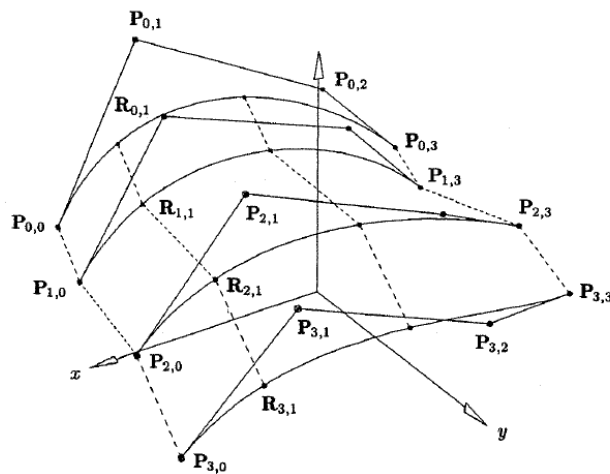
$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{0,0} \\ \mathbf{Q}_{1,0} \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_{n,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{0,p}(\bar{u}_0) & N_{1,p}(\bar{u}_0) & \dots & N_{n,p}(\bar{u}_0) \\ N_{0,p}(\bar{u}_1) & N_{1,p}(\bar{u}_1) & \dots & N_{n,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}(\bar{u}_n) & N_{1,p}(\bar{u}_n) & \dots & N_{n,p}(\bar{u}_n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,0} \\ \mathbf{R}_{2,0} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{n,0} \end{bmatrix} \quad (34-2)$$

$$\mathbf{Q}^l = N \times \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^l = N^{-1} \times \mathbf{Q}^l \quad l=0, \dots, m \quad (35-2)$$

پس از محاسبه $\mathbf{R}_{i,l}$ که $i=0, \dots, n$, $l=0, \dots, m$ نقاط کنترلی $\mathbf{P}_{i,j}$ که $i=0, \dots, n$, $j=0, \dots, m$ در راستای دیگر به صورت زیر به دست می آید. به عنوان مثال برای راستای $i = 0$ روابط به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{0,0} \\ \mathbf{R}_{0,1} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{0,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{0,q}(\bar{v}_0) & N_{1,q}(\bar{v}_0) & \dots & N_{m,q}(\bar{v}_0) \\ N_{0,q}(\bar{v}_1) & N_{1,q}(\bar{v}_1) & \dots & N_{m,q}(\bar{v}_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,q}(\bar{v}_m) & N_{1,q}(\bar{v}_m) & \dots & N_{m,q}(\bar{v}_m) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} \\ \mathbf{P}_{0,1} \\ \vdots \\ \mathbf{P}_{0,m} \end{bmatrix} \quad (36-2)$$

$$\mathbf{R}^i = N \times \mathbf{P}^i \rightarrow \mathbf{P}^i = N^{-1} \times \mathbf{R}^i \quad i=0, \dots, n \quad (37-2)$$



شکل (۱۰-۲) درونیایی در راستای $v [10]$

۲-۴-۲- تقریب کلی^۱

روش تقریب برای به دست آوردن نقاط کنترلی به مراتب سخت تر از روش درون یابی می باشد. در روش درون یابی تعداد نقاط کنترلی به صورت خودکار با در اختیار داشتن درجه ی منحنی (سطح) و تعداد داده های روی منحنی (سطح) به دست می آید. در این بخش به معرفی تقریب نقاط کنترلی با استفاده از تکنیک کمترین مربعات^۲ می پردازیم [۱۰].

فرض شود تعدادی داده اولیه که همان نقاط روی منحنی هستند را به صورت زیر در اختیار داریم:

$$Q_0, \dots, Q_m \quad m > n \quad (38-2)$$

رابطه منحنی به صورت زیر نوشته می شود:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\bar{u}_k) \mathbf{P}_i \quad u \in [0,1] \quad (39-2)$$

در ادامه برای تقریب $n+1$ نقطه کنترلی \mathbf{P}_i باید رابطه ی زیر کمینه شود:

$$\min \sum_{k=1}^{m-1} |Q_k - C(\bar{u}_k)|^2 \quad (40-2)$$

با حل مسئله بهینه سازی بالا و ساده سازی آن، روابط تقریب نقاط کنترلی برای یک منحنی به صورت زیر به دست می آید:

$$Q_0 = C(0) \quad Q_m = C(1) \quad (41-2)$$

$$R_k = Q_k - N_{0,p}(\bar{u}_k)Q_0 - N_{n,p}(\bar{u}_k)Q_m \quad k = 1, \dots, m-1 \quad (42-2)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1)R_1 + \dots + N_{1,p}(\bar{u}_{m-1})R_{m-1} \\ \vdots \\ N_{n-1,p}(\bar{u}_1)R_1 + \dots + N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1})R_{m-1} \end{bmatrix} \quad (43-2)$$

^۱ Global approximation

^۲ Least squares

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{1,p}(\bar{u}_1) & \dots & N_{n-1,p}(\bar{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{1,p}(\bar{u}_{m-1}) & \dots & N_{n-1,p}(\bar{u}_{m-1}) \end{bmatrix} \quad (44-2)$$

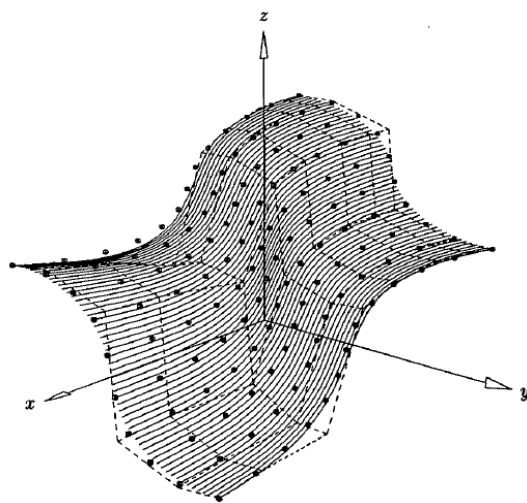
$$(\mathbf{N}^T \mathbf{N}) * \mathbf{P} = \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \end{bmatrix} \quad (45-2)$$

در روابط بالا برای محاسبه‌ی \bar{u}_k و بردار گره‌ی \mathbf{U} از روابطی که در قسمت درونیابی آورده شد استفاده می‌کنیم.

برای تقریب نقاط کنترلی یک سطح در ابتدا یک ماتریس از داده‌های اولیه با ابعاد $(s+1) \times (r+1)$ را در اختیار داریم:

$$\{\mathbf{Q}_{k,l}\} \quad k = 0, \dots, n ; l = 0, \dots, m \quad (46-2)$$

حال باید توسط روش کمترین مربعات ماتریس نقاط کنترلی با ابعاد $(m+1) \times (n+1)$ را به دست بیاوریم، برای این منظور، مشابه روش تقریب نقاط کنترلی یک منحنی عمل می‌کنیم، بدین صورت که ابتدا در یک راستا نقاط کنترلی منحنی‌ها را با استفاده از روابط ذکر شده محاسبه می‌کنیم، سپس با استفاده از نقاط کنترلی به دست آمده و روابط موجود، نقاط کنترلی سطح مورد نظر را تقریب می‌زنیم.



شکل (۱۱-۲) تقریب نقاط کنترلی سطح مورد نظر [۱۰]

۲-۵- تحلیل آیزوژئومتریکی در مسائل تنش مسطح

به منظور تحلیل الاستیک مسائل دوبعدی به روش آیزوژئومتریکی، ابتدا بایستی هندسه‌ی مسئله توسط بردارهای گره‌ی، شبکه‌ی نقاط کنترلی و در نهایت توابع پایه‌ی نریز به طور دقیق تعریف شود. سپس با استفاده از همان بردارهای گره‌ی، دامنه به شبکه‌های کوچک‌تری تقسیم می‌گردد به طوری که حد فاصل هر دو گره با مقدار متمایز در دو راستا، یک المان گره‌ی را تشکیل می‌دهد. مجموعه‌ی این المان‌ها که در محدوده‌ی دو بردار گره‌ی تعریف شده، قرار گرفته‌اند یک وصله^۱ را ایجاد خواهند کرد. در مسائل با هندسه پیچیده می‌توان از بیش از یک وصله نیز استفاده نمود. در مرحله‌ی بعد، مؤلفه‌های تابع مجهول با استفاده از توابع پایه‌ی نریز تقریب زده می‌شوند. سپس مقادیر تقریب زده شده از مرحله‌ی قبل در روابط به دست آمده از یکی از روش‌های باقی‌مانده‌ی وزن دار و یا اصل کار مجازی جایگزین می‌شوند و این امر منجر به تولید یک دستگاه معادلات خطی می‌گردد. با حل این دستگاه معادلات مقادیر مجهولات مسئله که همان مقادیر تغییرمکان‌ها هستند، به دست می‌آیند. در نهایت با داشتن مقادیر تغییرمکان‌ها، می‌توان به مقادیر کرنش‌ها و تنش‌ها در هر نقطه‌ی دلخواه از دامنه‌ی مسئله دست یافت.

در روش تحلیل آیزوژئومتریکی همانند روش اجزای محدود برای رسیدن به دستگاه معادلات خطی بایستی مقدار ماتریس ضرایب کل محاسبه گردد. بر همین اساس مقدار ماتریس ضرایب مطابق آنچه در ادامه گفته خواهد شد برای هر کدام از المان‌های گره‌ای^۲ محاسبه و سپس آسمبل می‌گردند. در صورتی که از تعداد وصله‌های بیشتری استفاده شود، ماتریس ضرایب وصله‌ها نیز با هم آسمبل می‌شوند تا معادله‌ی تعادل ($Ku=f$) حاصل گردد. در ادامه به تعریف مؤلفه‌های هندسه، $s^p=[x^p, y^p]$ و مؤلفه‌های تابع تقریب تغییرمکان روی وصله‌ی p ، $u^p=[u^p, v^p]$ پرداخته خواهد شد.

^۱ Patch

^۲ Knot element

در مقایسه با روش اجزای محدود، ماتریس ضرائب سختی در روش آیزوژئومتریکی به جای المان، برای یک وصله تشکیل می‌شود. بعد از اسمبل کردن ماتریس‌های ضرائب سختی وصله‌های مختلف، ماتریس سختی کل به دست می‌آید. در واقع تمام تقریب زدن هندسه و تابع تغییر مکان در روی یک وصله و به صورت محلی انجام می‌شود. در این قسمت با استفاده از روشی مشابه با روش اجزای محدود رابطه‌ی ماتریس سختی یک وصله ارائه می‌شود. مطابق رابطه‌ی که قبلاً بیان شد، می‌توان هندسه را با استفاده از توابع پایه‌ی بی-اسپلاین تقریب زد.

$$x^p(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) x^p_{i,j} \quad (47-2)$$

$$y^p(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) y^p_{i,j} \quad (48-2)$$

که در این روابط $R_{i,j}(\xi, \eta)$ توابع پایه‌ی نرین می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad (49-2)$$

با در نظر گرفتن تابع تغییر مکان به عنوان تابع مجهول، می‌توان تغییر مکان وصله‌ی p ، $u^p = [u, v]$ را به صورت زیر تقریب زد:

$$u^p(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) u^p_{i,j} \quad (50-2)$$

$$v^p(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) v^p_{i,j}$$

که $u^p_{i,j}$ و $v^p_{i,j}$ مؤلفه‌های مختصات نقاط کنترلی در دو راستا برای وصله‌ی p هستند. با استفاده از خاصیت بازه‌ی تأثیر محلی توابع پایه‌ی نرین که بیان می‌کند، فقط توابع پایه‌ی غیر صفر در محاسبات در نظر گرفته می‌شوند، می‌توان روابط بالا را برای هر $(\eta_j, \eta_{j+1}) \times (\xi_i, \xi_{i+1}) \in (\xi, \eta)$ ، به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$s^p(\xi, \eta) = (x^p(\xi, \eta), y^p(\xi, \eta)) = \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(\xi, \eta) X^p_{k,l} = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (51-2)$$

$$u^p(\xi, \eta) = (u^p(\xi, \eta), v^p(\xi, \eta)) = \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(\xi, \eta) U^p_{k,l} = \mathbf{R}\mathbf{U}$$

که در آن:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & 0 & \cdots & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & 0 & \cdots & R_{i,j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \cdots & 0 & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & \cdots & 0 & R_{i,j}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (52-2)$$

$$\mathbf{X} = [X_{i-p,j-q}^x \quad X_{i-p,j-q}^y \quad \cdots \quad X_{i-p,j}^x \quad X_{i-p,j}^y \quad \cdots \quad X_{i,j}^x \quad X_{i,j}^y]^T \quad (53-2)$$

$$\mathbf{U} = [U_{i-p,j-q}^x \quad U_{i-p,j-q}^y \quad \cdots \quad U_{i-p,j}^x \quad U_{i-p,j}^y \quad \cdots \quad U_{i,j}^x \quad U_{i,j}^y]^T \quad (54-2)$$

همچنین رابطه‌ی تنش- کرنش و تعریف کرنش‌ها در مسائل الاستیسیته مطابق روابط زیر است:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (55-2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{U} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (56-2)$$

که در این روابط \mathbf{C} و \mathbf{D} به ترتیب ماتریس الاستیسیته و ماتریس اپراتور دیفرانسیلی می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (57-2)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (58-2)$$

بنابراین با به کارگیری اپراتور دیفرانسیلی در رابطه‌ی (52-2) ماتریس کرنش-تغییر مکان که با \mathbf{B}

نمایش داده می‌شود، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{i-p,q-j}}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial R_{i-p,q-j}}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial R_{i-p,q-j}}{\partial y} & \frac{\partial R_{i-p,q-j}}{\partial x} & \dots \end{bmatrix} \quad (59-2)$$

بر اساس رابطه‌ی بالا، ما به مشتقات جزئی توابع پایه‌ی نریز نسبت به X و Y نیاز داریم. همانند روش اجزا محدود، برای محاسبه‌ی این مشتقات از قانون زنجیره‌ای^۱، استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (60-2)$$

فرم ماتریسی رابطه (۶۰-۲) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (61-2)$$

که ماتریس 2×2 موجود در آن، ماتریس ژاکوبین^۲ نام دارد و با \mathbf{J}_1 نمایش داده می‌شود. این ماتریس که شامل مشتقات جزئی مولفه‌های هندسه نسبت به ξ و η می‌باشد، در واقع نگاشتی از فضای پارامتری (ξ, η) به فضای فیزیکی مسئله (x, y) است. بنابر این مشتقات جزئی توابع پایه‌ی نریز نسبت به X و Y به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}| > 0} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (62-2)$$

در رابطه‌ی بالا مشتقات جزئی توابع پایه‌ی نریز نسبت به مولفه‌های (ξ, η) نیز نیاز است که در ادامه داریم:

^۱ Chain rule

^۲ Jacobian matrix

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \frac{\partial \mathbf{R}_{k,l}(\xi, \eta)}{\partial \xi} P_{k,l}^x \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \frac{\partial \mathbf{R}_{k,l}(\xi, \eta)}{\partial \eta} P_{k,l}^x \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \frac{\partial \mathbf{R}_{k,l}(\xi, \eta)}{\partial \xi} P_{k,l}^y \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \frac{\partial \mathbf{R}_{k,l}(\xi, \eta)}{\partial \eta} P_{k,l}^y \end{aligned} \quad (63-2)$$

برای محاسبه‌ی ماتریس ضرایب به‌دست آمده، می‌توان از روش انتگرال‌گیری گوسی استفاده کرد. همانند روش اجزای محدود، نقاط گوسی، نقاطی از پیش تعیین شده هستند که برای المان‌های گره‌ای مختلف، محل و وزن آن‌ها محاسبه شده است. برای این که بتوانیم از این نقاط بهره ببریم، بایستی از یک نگاهت دیگر هم استفاده کنیم به‌طوری که این نگاهت، مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه مربوط به فضای المان مادر (r, s) را به دستگاه مختصات فضای پارامتری (ξ, η) منتقل می‌کند.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} [(\xi_{i+1} - \xi_i)r + (\xi_{i+1} + \xi_i)] \\ \eta &= \frac{1}{2} [(\eta_{i+1} - \eta_i)s + (\eta_{i+1} + \eta_i)] \end{aligned} \quad (64-2)$$

این نگاهت در انتگرال‌گیری باعث ایجاد ماتریس ژاکوبین به‌صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (65-2)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{2} (\xi_{i+1} - \xi_i) \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \frac{1}{2} (\eta_{i+1} - \eta_i) \end{aligned} \quad (66-2)$$

در ادامه با استفاده از روابط تنش-کرنش و تعریف کرنش‌ها در رابطه‌ی (۲-۲۴) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\mathbf{B} = \mathbf{DR} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{BU} \quad (۲-۶۷)$$

حال با انجام یکی از روش‌های معمول مانند روش کار مجازی، می‌توان ماتریس ضرایب را به‌آسانی تشکیل داد. اگر \mathbf{b} ، نشان دهنده‌ی نیروی حجمی و $\boldsymbol{\tau}$ ، نیروی سطحی باشد، داریم:

$$\int_{V^p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{V^p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma^p} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma = 0 \quad (۲-۶۸)$$

که V^p و Γ^p به ترتیب حجم و مرز وصله‌ی P هستند. در نهایت با جایگزینی $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}$ از رابطه‌ی (۲-۶۷) و معادله‌ی $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$ در رابطه‌ی (۲-۶۸) و ساده کردن $\delta \mathbf{U}^T$ ، ماتریس ضرایب وصله را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\mathbf{K}^p = \int_{V^p} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (۲-۶۹)$$

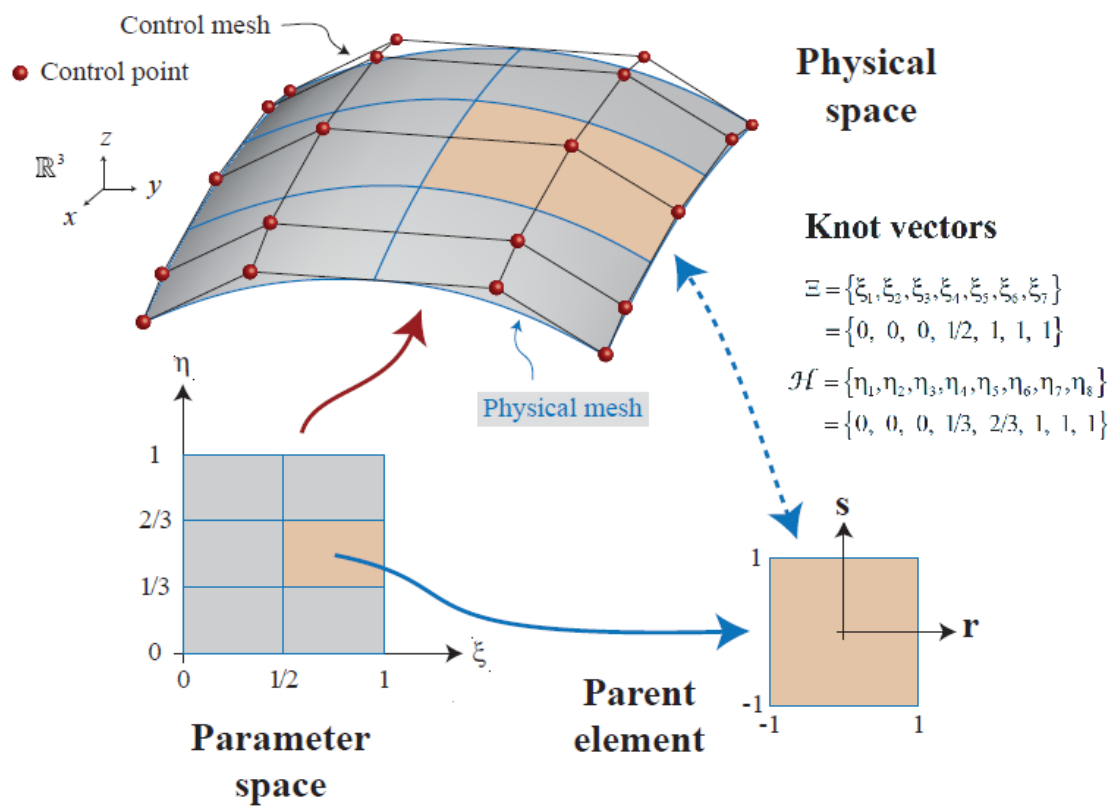
در ادامه می‌توان فرم نهایی ماتریس ضرایب را در دستگاه مختصات مربوط به فضای المان مادر، به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{K}^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi, \eta) |\mathbf{J}_1| |\mathbf{J}_2| d\xi d\eta \quad (۲-۷۰)$$

و در نهایت انتگرال ماتریس ضرایب به روش گاوس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}^p = \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} \mathbf{B}^T(\xi_i, \eta_j) \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi_i, \eta_j) |\mathbf{J}_1| |\mathbf{J}_2| w_i w_j \quad (۲-۷۱)$$

که در آن m' و n' تعداد نقاط گوسی در جهت r و s در هر المان و w_i و w_j نیز وزن نقاط گوسی می‌باشند. در شکل (۲-۱۲) فضای فیزیکی، فضای پارامتری و فضای انتگرال‌گیری عددی یک المان نرئز نشان داده شده است.



شکل (۲-۱۲) فضای فیزیکی، فضای پارامتری و فضای انتگرال گیری عددی یک المان نرَبز [۱۱]

فصل سوم

بهینه‌سازی سازه‌ها

یکی از دغدغه‌های مهمی که سالیان متمادی ذهن مهندسان را به خود مشغول کرده است، دستیابی به طرح‌هایی است که در عین رعایت اصول و قواعد فنی و مهندسی، بهینه و اقتصادی نیز باشند. به همین دلیل در طی سال‌های گذشته بهینه‌سازی جایگاه ویژه‌ای در علوم مهندسی پیدا کرده است. بهینه‌سازی سازه‌ای به معنی ایجاد بهترین ساختاری است که بتواند بارهای وارده را به تکیه‌گاه‌ها انتقال دهد. منظور از بهترین می‌تواند ساختاری با کم‌ترین وزن، بیش‌ترین سختی و یا حتی پایدارترین رفتار در مقابل کمانش باشد. به‌منظور رسیدن به هر کدام از این اهداف، ممکن است قیدهایی نیز وجود داشته باشند. در مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای، معمولاً کمیت‌هایی هم چون حجم مصالح به‌کار گرفته شده، تنش‌ها، تغییرمکان‌ها و حتی هندسه‌ی سازه به عنوان قید در نظر گرفته می‌شوند [۱۲].

بهینه‌سازی توپولوژی یکی از شاخه‌های بهینه‌سازی سازه‌ای است که به توزیع مقدار معینی از مصالح در یک دامنه‌ی مشخص می‌پردازد. به عبارت دیگر هدف از بهینه‌سازی توپولوژی تعیین تعداد، مکان و شکل حفره‌های سازه و نحوه‌ی اتصال مصالح در دامنه می‌باشد [۱].

۳-۲- تعاریف اولیه

فرمول‌بندی و شکل کلی مسائل بهینه‌سازی بر اساس چند پارامتر اصلی تعریف می‌شود که شامل متغیرهای طراحی^۱، تابع هدف^۲ و توابع قید^۳ می‌باشند و در ادامه به توضیح هر یک می‌پردازیم.

۳-۲-۱- متغیرهای طراحی

^۱ Design variables

^۲ Objective function

^۳ Constrains

متغیرهای طراحی پارامترهایی هستند که مقداری آزادی تغییر در آنها داریم و با تغییر آنها، اصلاح لازم در سازه‌ی مورد نظر را ایجاد می‌کنیم که این پارامترها معمولاً سطح مقطع اعضا و یا خصوصیات دیگری از مصالح و خواص هندسی اعضای سازه‌ی موجود هستند و به دو دسته‌ی گسسته و پیوسته تقسیم‌بندی می‌شوند.

به‌طور کلی یک سیستم سازه‌ای توسط کمیت‌هایی بیان می‌شود که بعضی از آنها را می‌توان به‌عنوان متغیرهای طراحی برای فرآیند بهینه‌سازی در نظر گرفت. کمیت‌هایی که در حین این فرآیند ثابت هستند پارامترهای از پیش تعیین شده نامیده می‌شوند. این پارامترها توسط الگوریتم‌های بهینه‌سازی تغییر نخواهند کرد. کمیت‌هایی که از پیش تعیین شده نیستند را متغیرهای طراحی می‌نامیم. مجموعه‌ی پارامترهای از پیش تعیین شده و متغیرهای طراحی، یک طرح را تشکیل می‌دهند. متغیرهای طراحی می‌توانند بیان‌کننده‌ی خواص زیر برای سازه باشند [۱۳].

۱. خواص مکانیکی یا فیزیکی مصالح سازه

۲. توپولوژی یا نحوه‌ی ارتباط اعضا یا المان‌های یک سازه

۳. هندسه یا ساختار یک سازه

۴. ابعاد یا سطح مقطع عرضی سازه

۳-۲-۲- تابع هدف

تابع هدف تابعی است که می‌توان آن را به‌عنوان معیاری جهت تعیین میزان مؤثر بودن طراحی در نظر گرفت. جهت بهینه‌سازی سازه‌ها انرژی کرنشی، وزن، تغییر مکان، تنش، فرکانس لرزش، بارهای کمانش و هزینه و یا ترکیبی از این موارد را می‌توان به‌عنوان تابع هدف در نظر گرفت. وقتی که چند تابع هدف داریم با توجه به پیچیده بودن مسئله سعی می‌کنیم که تابع هدف را کاهش دهیم که این عمل را یا با ترکیب کردن توابع هدف انجام می‌دهیم یا تابع هدفی را که از همه مهم‌تر

است انتخاب می‌کنیم. برای انتخاب بهترین طرح از میان بینهایت طرح موجود در ناحیه‌ی شدنی، نیاز به تعریف یک تابع هدف داریم. انتخاب تابع هدف گام مهمی در عملیات بهینه‌سازی است. در حالت کلی تابع هدف بیان‌کننده‌ی مهمترین ویژگی یک طرح است که باید بهینه شود.

۳-۲-۳- قیود

حدودی که برای متغیرهای طراحی وجود دارد و نمی‌توانند از آن‌ها تجاوز کنند را قیدهای طراحی می‌نامند که به دو دسته‌ی قیدهای مساوی و قیدهای نامساوی تقسیم می‌شوند. هر یک از مجموعه مقادیر متغیرهای طراحی، یک سازه را تشکیل می‌دهند. واضح است که برخی از طرح‌ها قابل استفاده و برخی دیگر به دلیل پاره‌ای ملاحظات رفتاری، غیر قابل قبول هستند. اگر یک طرح تمام الزامات خود را برآورده کند به آن طرح شدنی گفته می‌شود. برای به‌دست آوردن یک طرح شدنی محدودیت‌هایی باید برآورده شوند که به آن‌ها قید گفته می‌شود.

۳-۳- فرم ریاضی عمومی برای یک مسئله‌ی بهینه‌سازی:

بهینه‌سازی سازه‌ای به معنی ایجاد بهترین ساختاری است که بتواند بارهای وارده را به تکیه‌گاه‌ها انتقال دهد.



شکل (۳-۱) مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه [۱۲]

به‌منظور رسیدن به هر کدام از این اهداف، ممکن است قیدهایی نیز وجود داشته باشند. در مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای، معمولاً کمیت‌هایی هم‌چون حجم مصالح به‌کار گرفته شده، تنش‌ها، تغییر مکان‌ها و حتی هندسه‌ی سازه به عنوان قید در نظر گرفته می‌شوند.

به طور کلی می توان مسئله ی بهینه سازی سازه ای را در فرم عمومی زیر بیان کرد [۱۴]:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \leq 0 ; j = 1, \dots, n_g \\ \mathbf{h}_k(\mathbf{x}) = 0 ; k = 1, \dots, n_e \end{cases} \quad (۱-۳)$$

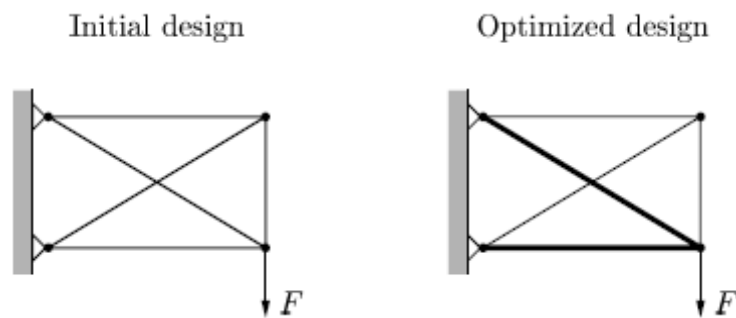
که در آن \mathbf{x}_i متغیر طراحی و $f(\mathbf{x})$ تابع هدف، $\mathbf{h}_k(\mathbf{x})$ قیدهای مساوی و $\mathbf{g}_j(\mathbf{x})$ قیدهای نامساوی هستند.

مجموعه ای از متغیرهای طراحی که همه ی قیدها را اقیان کنند، یک فضای شدنی را تشکیل می دهند. از طرفی، فضای نشدنی مجموعه ای از همه ی نقاط طراحی است که حداقل یکی از قیدها را نقض کرده باشند [۱۴]. اگر تابع هدف و قیدهای مساوی و نامساوی توابعی خطی از متغیرهای طراحی باشند، آن گاه مسئله یک مسئله ی بهینه سازی خطی خواهد بود. در یک مسئله ی بهینه سازی غیرخطی، تابع هدف یا حداقل یکی از قیدها یک تابع غیرخطی از متغیرهای طراحی است. به طور معمول مسائل بهینه سازی سازه ای جزو مسائل بهینه سازی غیرخطی می باشند.

۳-۴- انواع مسائل بهینه سازی سازه ای:

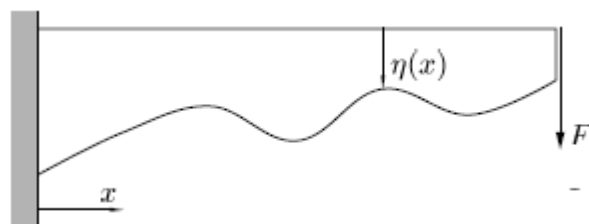
از منظر خصوصیات هندسی، می توان مسائل بهینه سازی سازه ای را در سه دسته ی زیر تقسیم بندی نمود:

(۱) بهینه سازی ابعادی: پژوهش های اولیه در بهینه سازی سازه ای، تمرکز خود را روی مسائل بهینه سازی ابعادی گذاشته اند. به عنوان مثال، پیدا کردن سطح مقطع اعضای یک خرپا یا قاب یا بهینه کردن ضخامت یک صفحه از جمله ی این مسائل هستند. در این دست از مسائل، دامنه ی طراحی ثابت است و در طول پروسه ی بهینه سازی تغییر نمی کند [۱۴، ۱۲].



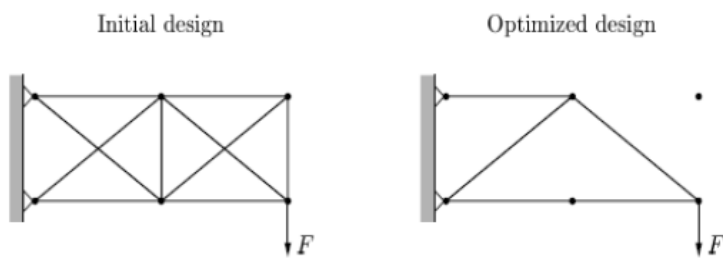
شکل (۲-۳) مسئله‌ی بهینه‌سازی ابعادی با هدف بهینه کردن سطح مقطع اعضای خرپا [۱۲]

۲) بهینه‌سازی شکل: به‌عنوان توسعه‌های بعدی در بهینه‌سازی سازه‌ای، مسئله‌ی پیدا کردن مرزهای بهینه‌ی یک سازه مطرح شده است. پیدا کردن تابع مناسب برای تعریف مرزهای یک سازه‌ی تنش مسطح و همین‌طور پیدا کردن محل اتصالات یک سازه‌ی اسکلتی جزو این دسته از مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای هستند. شکل (۳-۳) یک مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل در محیط پیوسته را نشان می‌دهد.

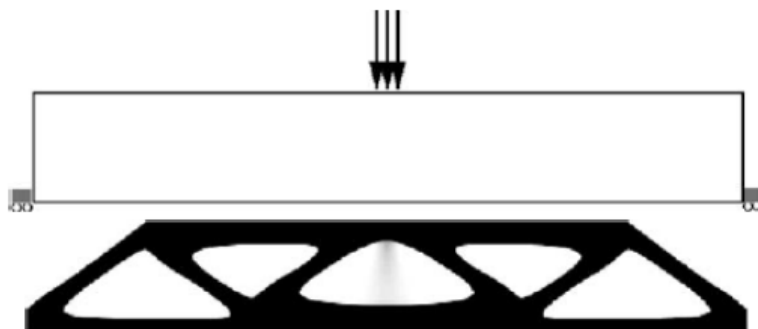


شکل (۳-۳) مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل با هدف پیدا کردن تابع مناسب برای توصیف شکل سازه [۱۲]

۳) بهینه‌سازی توپولوژی: می‌توان آن را به‌عنوان متداول‌ترین نوع بهینه‌سازی سازه‌ای مطرح نمود. در بهینه‌سازی توپولوژی مسائل گسسته مانند خرپاها، سطح مقطع اعضا به‌عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته می‌شود که مقدار آن‌ها می‌تواند صفر گردد به این معنی که این اعضا قادر هستند از خرپا حذف شوند. شکل (۴-۳) بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا را نشان می‌دهد. در بهینه‌سازی توپولوژی محیط‌های پیوسته نیز، هدف تعیین تعداد و موقعیت حفره‌ها و به عبارت دیگر توزیع مصالح در دامنه‌ی طراحی است که نمونه‌ای از آن در شکل (۵-۳) نشان داده شده است.



شکل (۳-۴) بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا [۱۲]



شکل (۳-۵) بهینه‌سازی توپولوژی تیر دو بعدی دو سر مفصل در محیط پیوسته [۱۲]

۳-۵- شرایط کاروش-کان-تاکر^۱ (KKT)

به‌منظور بررسی این‌که آیا نقطه‌ای مینیمم محلی، کلی است یا نه ملزم به استفاده از شرایط

KKT هستیم. برای این منظور لازم است ابتدا تابع لاگرانژ^۲ را تعریف کنیم:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{n_g} \lambda_k g_k(\mathbf{x}) \quad (۲-۳)$$

که در آن $f(\mathbf{x})$ تابع هدف $g_k(\mathbf{x})$ قید مسئله بهینه‌سازی و λ_k ضرایب لاگرانژ می‌باشد.

با این تعریف شرایط کاروش-کان-تاکر به شکل زیر تعریف می‌شوند [۱۵]:

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_j} \leq 0 ; x_j = x_j^{\max} \quad (۳-۳)$$

^۱ Karush-Kuhn-Tucker

^۲ Lagrangian function

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0 ; x_j^{\min} < x_j < x_j^{\max} \quad (4-3)$$

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} \geq 0 ; x_j = x_j^{\min} \quad (5-3)$$

$$\lambda_i \mathbf{g}_i(x) = 0 \quad (6-3)$$

$$\mathbf{g}_i(x) \leq 0 \quad (7-3)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (8-3)$$

مشتق جزئی L نسبت به متغیرهای طراحی برابر است با:

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_0(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{\partial \mathbf{g}_i(x)}{\partial x_j} \quad (9-3)$$

هر نقطه که شرایط بالا را ارضا کند یک نقطه‌ی کاروش-کان-تاکر (KKT) نامیده می‌شود.

فصل چهارم

روش مجموعه‌ی

سطوح تراز

راه‌های مختلفی برای نمایش ریاضی منحنی‌ها و سطوح وجود دارد. دو روش مبنایی برای این کار عبارت‌اند از: نمایش صریح. در ادامه هر یک از این روش‌ها برای نمایش منحنی به اختصار بیان می‌شوند.

۴-۱-۱- فرم صریح

فرم صریح یک منحنی ساده‌ترین و در عین حال محدودترین نحوه نمایش منحنی است. در این حالت یک مختصه به صورت تابعی از مختصه دیگر بیان می‌شود که معمولاً به صورت $y = f(x)$ نشان داده می‌شود. به عنوان مثال یک سهمی درجه دو به صورت $y = x^2 - 2$ بیان می‌شود. مزیت این روش در آسان بودن یافتن مشتقات است که در نتیجه آن ویژگی‌های هندسی مانند شیب، انحنا و غیره به سادگی مشخص می‌شوند. همچنین به سادگی می‌توان دریافت که آیا نقطه خاصی روی منحنی واقع شده است یا نه. محل برخورد دو منحنی نیز به آسانی در این نحوه نمایش به دست می‌آید. اشکال مهم این روش در این است که هر مقدار x می‌تواند تنها یک مقدار برای y داشته باشد که موجب می‌شود تنوع منحنی‌های قابل نمایش کاهش یابد. به علاوه این نحوه نمایش وابسته به محورهای مختصات است و با تغییر این محورها رابطه منحنی تغییر می‌کند.

۴-۱-۲- فرم ضمنی

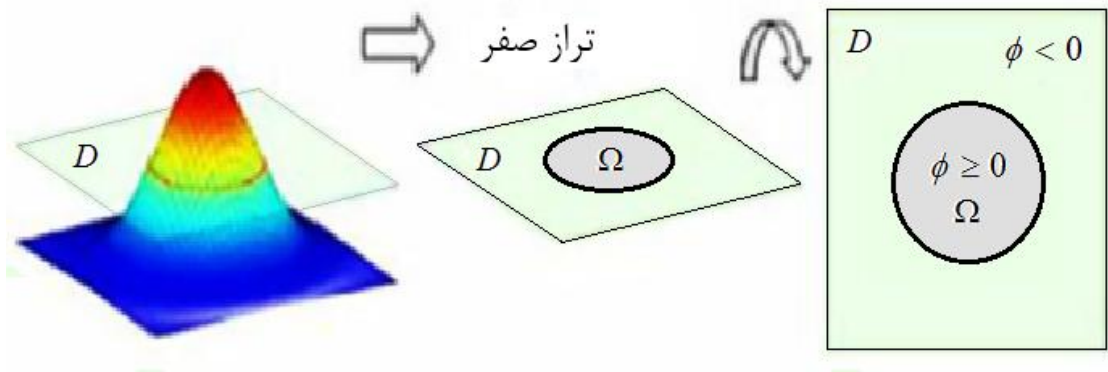
یک منحنی در شکل ضمنی، مجموعه پاسخ یک معادله به شکل $f(x, y) = 0$ است. با این فرم نمایش امکان اینکه بیش از یک نقطه، مقدار یکسان x را دارا باشند، فراهم می‌شود و در نتیجه اشکال مهم هندسی مثل دایره را می‌توان با این روش بیان نمود. به عنوان مثال معادله $x^2 + y^2 = 1$ فرم ضمنی یک دایره به شعاع واحد را نشان می‌دهد. بدیهی است که هر منحنی صریحی را می‌توان به شکل ضمنی بیان نمود در حالی که عکس آن همیشه برقرار نیست. همانند فرم صریح، امکان

تعیین اینکه نقطه‌ای روی منحنی قرار دارد یا خیر، به سادگی فراهم است. با این حال پیدا کردن محل برخورد دو منحنی در این حالت مشکل‌تر است. با وجود اینکه تنوع منحنی‌های قابل نمایش در این روش بیشتر است، اما باز هم این روش محدودیت‌هایی دارد. با این حال نمایش ضمنی در طراحی هندسه با کامپیوتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۴- ابزار هندسی در روش مجموعه‌ی سطوح تراز

در بیان ضمنی مرز مشترک ابزار هندسی قدرتمندی وجود دارد که قابل استفاده می‌باشد. به عنوان مثال هنگامی که $\phi(x) = 0$ به عنوان آیزوکانتور تشکیل دهنده‌ی مرز مشترک تعریف می‌شود، می‌توان به سادگی دریافت که نقطه‌ی x_0 در داخل مرز یا خارج یا بر روی آن قرار دارد. تنها لازم است که علامت ϕ را مورد بررسی قرار داد.

$$\begin{cases} \phi(x) > 0 \rightarrow x \in \Omega^+ \\ \phi(x) = 0 \rightarrow x \in \partial\Omega \\ \phi(x) < 0 \rightarrow x \in \Omega^- \end{cases} \quad (1-4)$$



شکل (۱-۴) بهینه‌سازی تعریف دامنه طرح دو بعدی با روش مجموعه‌ی سطوح تراز

گرایان^۱ تابع ضمنی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

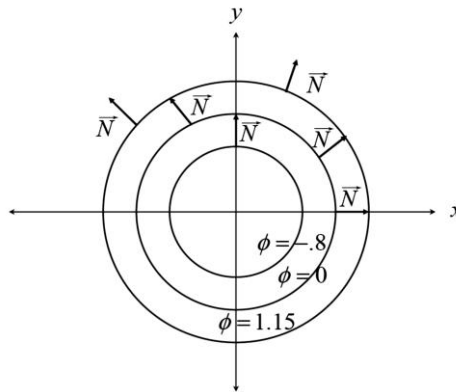
^۱ Gradient

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \quad (2-4)$$

مقدار $\nabla\phi$ در نقطه‌ی x_0 برداری است که در جهت بردار نرمال^۱ (به سمت خارج در جهت افزایش ϕ) مرز مشترک می‌باشد؛ بنابراین بردار نرمال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$N = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (3-4)$$

در شکل زیر تعدادی از آیزوکانتورهای دوبعدی $\phi(x) = x^2 + y^2 - 1$ همراه با چند بردار نرمال نشان داده شده است.



شکل (۲-۴) آیزوکانتورهای تابع $\phi(\mathbf{x}) = x^2 + y^2 - 1$

بنابراین جهت بردار N به‌ازای $x > 0$ به سمت راست و برای $x < 0$ به سمت چپ می‌باشد.

در رابطه‌ی (۲-۴) برای به‌دست آوردن مقدار مشتق می‌توان آن را تقریب زد. برای این کار روش‌های بسیاری موجود است. به‌عنوان مثال می‌توان از تفاضل پیش‌رونده‌ی^۲ مرتبه اول استفاده کرد؛ که به‌اختصار می‌توان آن را به صورت $D^+\phi$ معرفی کرد.

$$D_x^+\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (4-4)$$

$D^-\phi$ را می‌توان به‌اختصار برای تفاضل پس‌رونده‌ی^۱ مرتبه اول معرفی کرد:

^۱ Normal vector

^۲ Forward Difference

$$D_x^- \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (5-4)$$

و تفاضل مرکزی^۲ از مرتبه‌ی دو را با $D^0 \phi$ و با رابطه‌ی زیر معرفی می‌کنیم:

$$D_x^0 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (6-4)$$

۴-۳- ابزار محاسبات در روش مجموعه سطوح تراز

تابع یک‌بعدی هویساید^۳ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(\phi) = \begin{cases} 1; & \phi > 0 \\ 0; & \phi \leq 0 \end{cases} \quad (7-4)$$

این تابع به ما کمک می‌کند تا انتگرال‌گیری را فقط برای فضای خارجی مرز مشترک Ω^+ محاسبه کنیم.

با تعریف جهت برای مشتق تابع هویساید در جهت نرمال، تابع دلتای دیراک^۴ حاصل می‌شود:

$$\hat{\delta}(\phi(\mathbf{x})) = \nabla H(\phi(\mathbf{x})) \cdot N \quad (8-4)$$

توجه به این نکته لازم است که این توزیع تنها در مرز مشترک $\partial\Omega$ جایی که $\phi(x) = 0$ است؛ غیر صفر می‌شود.

در فضای یک‌بعدی، تابع دلتا به صورت مشتقی از تابع یک‌بعدی هویساید تعریف می‌شود:

$$\hat{\delta}(\phi) = H'(\phi) \quad (9-4)$$

با استفاده از تابع دلتا می‌توان انتگرال سطح هر تابع را بر روی مرز $\partial\Omega$ محاسبه کرد.

از آنجایی که $\delta(\phi(x))$ در تمام نقاط به جز مرز مشترک صفر است؛ در حل عددی تقریب مناسب

برای انتگرال به دست نمی‌آید لذا تابع هویساید را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۶]:

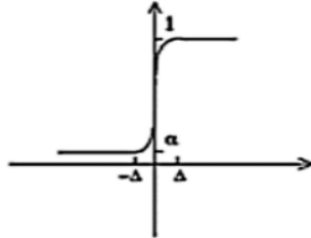
^۱ Backward Difference

^۲ Central Difference

^۳ Heaviside

^۴ Dirac delta

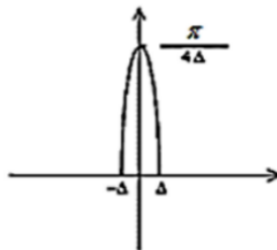
$$H(x) = \begin{cases} \alpha & , x \leq -\Delta \\ \frac{1}{2} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi x}{2\Delta}\right) \right) & , -\Delta < x < \Delta \\ 1 & , x \geq \Delta \end{cases} \quad (10-4)$$



شکل (۳-۴) تابع هویساید

همچنین تابع دلتا دیراک به صورت زیر به دست می آید [۱۶]:

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4\Delta} \cos\left(\frac{\pi x}{2\Delta}\right) & , |x| \leq \Delta \\ 0 & , |x| > \Delta \end{cases} \quad (11-4)$$



شکل (۴-۴) تابع دلتای دیراک

که در روابط بالا Δ و α مقادیر کوچک اسکالر برای تقریب تابع هویساید و تابع دلتای دیراک می-باشد.

دلتای اصلاح شده از رابطه‌ی فوق این اجازه را به ما می‌دهد که انتگرال سطح را با استفاده از روش‌های عددی معمول به دست آوریم.

۴-۴- تابع فاصله‌ی علامت‌دار^۱

برای بدست آوردن نتایج عددی با دقت بالاتر معمولاً از تابع فاصله علامت‌دار استفاده می‌شود.

تابع فاصله‌ی علامت‌دار تابعی ضمنی از ϕ است به طوری که [۱۷، ۱۸]:

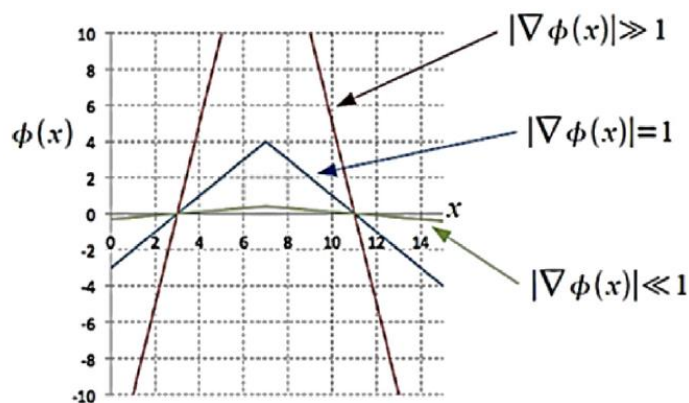
$$|\phi(x)| = d(x) \quad ; \quad x \in \Omega \quad (۴-۱۲)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \phi(x) = +d(x) \rightarrow x \in \Omega^+ \\ \phi(x) = 0 \rightarrow x \in \partial\Omega \\ \phi(x) = -d(x) \rightarrow x \in \Omega^- \end{cases} \quad (۴-۱۳)$$

مهم‌ترین ویژگی تابع فاصله علامت‌دار این است که:

$$|\nabla\phi(x)| = 1 \quad ; \quad \forall x \in D \quad (۴-۱۴)$$



شکل (۴-۵) تابع فاصله‌ی علامت‌دار $|\nabla\phi(x)| = 1$

۴-۵- کاربرد روش مجموعه‌ی سطوح تراز در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها

در حالت کلی، برای بیان رویه‌ها در مدل مجموعه‌ی سطح تراز، از تابع ضمنی اسکالر ϕ با بعد بالاتر

در یک تراز مشخص استفاده می‌شود [۲۶]:

^۱ Sign distance Function

$$\begin{aligned} \phi: R^3 &\rightarrow R \\ \phi &= \{x: \phi(x) = k\} \end{aligned} \quad (15-4)$$

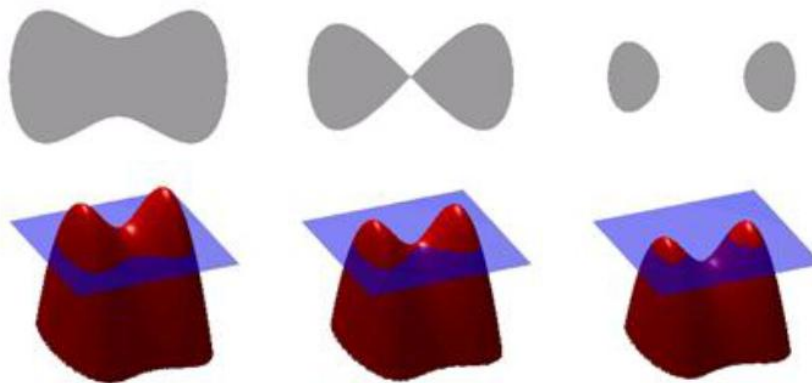
که در آن $k = 0$ ، نشان‌دهنده سطح تراز صفر رویه است. روند بهینه‌سازی می‌تواند با اجازه دادن به تغییرات دینامیکی وابسته به زمان تابع مجموعه‌ی سطح تراز، بیان شود. شکل دینامیکی تابع مجموعه‌ی سطح تراز، به صورت زیر است:

$$S(t) = \{x(t): \phi(x(t), t) = k\} \quad (16-4)$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان از دو طرف رابطه‌ی فوق و اعمال قانون مشتق‌گیری زنجیره‌ای، رابطه‌ی همیلتون ژاکوبی زیر به دست می‌آید [۲۶]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \nabla \phi(x, t) \frac{dx}{dt} &= 0 ; \\ \frac{dx}{dt} &= v(\phi(x)) \end{aligned} \quad (17-4)$$

رابطه‌ی فوق، مقادیر تابع ϕ را متناسب با زمان مسئله، تعریف می‌کند و $v(\phi(x))$ سرعت رشد مرز متحرک نامیده می‌شود.



شکل (۶-۴) روند تغییرات ϕ که موجب جدا شدن مرزها می‌گردد

۴-۶- فرمول‌بندی مدل مجموعه‌ی سطوح تراز در مسائل بهینه‌سازی

در این بخش، فرمول‌بندی روش مجموعه‌ی سطوح تراز در به‌دست آوردن طرح بهینه، برای سازه‌های ارتجاعی خطی بیان می‌شود. در ابتدا می‌بایست صورت مسئله‌ی بهینه‌سازی را تشکیل داد. در حالت کلی، مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ها به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & J(\mathbf{u}) = \int_D F(\mathbf{u}) d\Omega \\ \text{Subject to} \quad & \int_D \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_D \mathbf{b} \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial D_i} \boldsymbol{\tau} \mathbf{v} dS \\ & u|_{\partial D_u} = u_0 \quad \forall \mathbf{v} \in U \\ & \int_D d\Omega \leq V_{\max} = \zeta V_{Tot} \end{aligned} \quad (۱۸-۴)$$

در رابطه‌ی فوق $J(\mathbf{u})$ تابع هدف و $\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش می‌باشد. همچنین فضای طراحی با D و مرز آن با ∂D معرفی شده است. معادله‌ی تعادل ارتجاعی خطی به‌صورت متغیر نوشته شده که در آن \mathbf{u} تغییرمکان‌های قابل قبول سینماتیکی میدان جابه‌جایی U و \mathbf{v} تغییر مکان‌های مجازی می‌باشد. $\boldsymbol{\varepsilon}$ تانسور کرنش، \mathbf{b} نیروهای حجمی و $\boldsymbol{\tau}$ نیروهای سطحی وارد شده بر روی مرز ∂D و u_0 تغییرمکان‌های تکیه‌گاهی معین روی مرز ∂D تعریف شده‌اند.

آخرین نامساوی، بیان‌کننده‌ی محدودیت مقدار مصالح بر روی دامنه (که به مقدار V_{\max} محدود گردیده) است؛ به‌عبارت دیگر نامساوی مذکور، همان قید حجم مسئله‌ی بهینه‌سازی است.

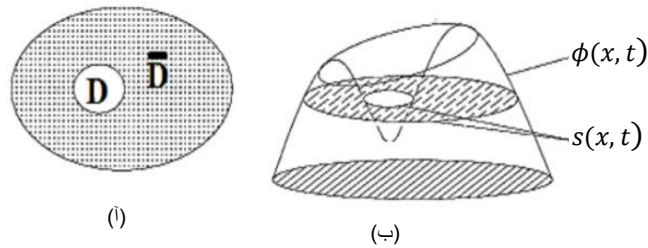
مسئله‌ی بهینه‌سازی فوق، به‌دنبال پیدا کردن مرز بهینه‌ی ∂D در فضای D است؛ بنابراین تابع هدف $J(u)$ می‌بایست برای فیزیک و هندسه‌ی خاصی که توسط تابع F تعریف شده است مینیمم گردد. برای استفاده از روش مجموعه‌ی سطح تراز در رابطه‌ی فوق، از تابع ضمنی $\phi(x)$ از درجه‌ی بالاتر، برای تعریف مرز در فضای \bar{D} که $D \subset \bar{D}$ است؛ استفاده می‌شود. در ضمن با توجه به استفاده از سطح تراز صفر ($k=0$)، برای نمایش مرز مشترک، فضای داخل و خارج منحنی به‌صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\begin{aligned} \phi(x) &> 0 \quad \forall x \in D \setminus \partial D \\ \phi(x) &< 0 \quad \forall x \in \bar{D} \setminus \partial D \end{aligned} \quad (19-4)$$

و مرز مشترک نیز به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(x) = 0 \quad \forall x \in D \cap \bar{D} \quad (20-4)$$

شکل دامنه و مدل مجموعه‌ی سطح تراز در شکل (۲-۵) مشخص شده است.



شکل (۲-۴) دامنه‌ی طرح و مدل مجموعه‌ی سطوح تراز [۲۶]

بنابراین مدل مجموعه‌ی سطح تراز برای مسئله‌ی بهینه‌سازی فوق، به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & J(u) = \int_D F(u) H(\phi) d\Omega \\ \text{Subject to} \quad & \text{Equilibrium} \\ & V(\phi) \leq V_{\max} = \zeta V_{Tot} \end{aligned} \quad (21-4)$$

در رابطه‌ی فوق $H(\phi)$ تابع هویساید^۱ می‌باشد.

^۱ Heaviside function

فصل پنجم

توسعه‌ی مدل بهینه‌سازی توپولوژی
سازه‌های پیوسته به روش مجموعه‌ی

سطوح تراز

۵-۱- مقدمه

هدف این فصل ارائه‌ی روشی جدید به‌منظور بهبود عملکرد بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها با روش تحلیل آیزوژئومتریک است. برای رسیدن به این هدف تعداد نقاط کنترلی کم برای ساختن تابع مجموعه‌ی سطوح تراز استفاده شده است. در این پژوهش مقادیر تابع مجموعه‌ی سطوح تراز به‌عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده است، در حالیکه در پژوهش گذشته مقادیر شبکه‌ی نقاط کنترلی به‌عنوان متغیر طراحی در فرآیند بهینه‌سازی تغییر می‌نمود. با در نظر گرفتن مقادیر تابع مجموعه‌ی سطوح تراز به‌عنوان متغیر طراحی این امکان فراهم می‌شود تا شبکه‌بندی تفاضل محدود هنگام حل، بدون تاثیر از شبکه نقاط کنترلی ایجاد شود. در روش مجموعه‌ی سطوح تراز، مرزهای سازه‌ای که بهینه‌سازی می‌شود، به‌صورت مدلی از مرزهای دینامیکی^۱ است که به‌وسیله‌ی یک تابع ضمنی از بعد بالاتر معرفی می‌شود. واضح است که در روند بهینه‌سازی، شکل و توپولوژی آن دست‌خوش تغییرات زیادی خواهد شد ولی تابع مجموعه‌ی سطوح تراز، توپولوژی تغییر یافته را به‌راحتی در اختیار ما قرار می‌دهد.

۵-۲- تاریخچه

یکی از مهم‌ترین موضوعات تحقیق در زمینه‌ی بهینه‌سازی سازه‌ها، بهینه‌سازی توپولوژی است. اخیراً توجه زیادی به این موضوع به‌خاطر کاربردی که در حوزه‌های صنعت دارد؛ شده است. از کارهای اولیه‌ای که توسط بندسو و کیکوچی^۲ انجام شده است [۱۹]، روش‌های زیادی در دهه‌های اخیر برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک توسعه پیدا کرده است. برای اطلاعات کامل‌تر به مرجع [۲۰] مراجعه شود.

^۱ Dynamic boundary

^۲ Bendsoe & Kikuchi

از رایج‌ترین روش‌ها می‌توان به روش همگن‌سازی^۱ [۱۹] و چگالی متغیر^۲ (SIMP) [۲۲،۲۱]

اشاره کرد. در روش‌های فوق، توپولوژی بهینه تقریباً شامل المان‌هایی است که دارای چگالی ۰ یا ۱ می‌باشد. لازم به یادآوری می‌باشد که الگوریتم‌های عددی برای این دو روش بر پایه‌ی المان هستند. چهارچوب کلی محاسبات روش‌های المان‌محور، گسسته‌سازی فضای طرح اولیه به صورت مستطیل‌های یکنواخت اجزای محدود می‌باشد و متغیرهای طراحی به صورت ثابت برای هر جزء محدود در نظر گرفته می‌شود. اگرچه محاسبات بر پایه‌ی المان تا حدودی کارآمد و موفقیت‌آمیز در حل مسائل بهینه‌سازی می‌باشد، اما هنوز پارامترهای نامطلوبی دارد. یکی از معایب بهینه‌سازی با استفاده از روش‌های المان‌محور در بیان اطلاعات مربوط به هندسه‌ی سازه می‌باشد.

به طور کل در این روش‌ها مرز بین قسمت پر و قسمت خالی دقیقاً مشخص نمی‌باشد و در بهینه‌سازی با این روش‌ها، مرزها به صورت زیگزاگ ظاهر می‌شوند. بنابراین برای دستیابی به توپولوژی که به واقعیت در عمل نزدیک باشد نیازمند عملیات دیگری از جمله بهینه‌سازی شکل برای کاهش تمرکز تنش می‌باشیم. همچنین می‌بایست مرزها را به صورت نرم‌تری درآورد که این کار بعضاً آسان نمی‌باشد و بایستی از تعداد المان‌های زیادی استفاده نمود که مستلزم هزینه زیادی می‌باشد.

برای حل مشکل‌های اشاره شده در فوق، اخیراً الگوریتم‌های بهینه‌سازی توپولوژی وابسته به هندسه‌ی بیشتری پیشنهاد شده است. بارزترین مشخصه‌ی این روش‌ها، معرفی تابع شکل و توپولوژی سازه به صورت ضمنی می‌باشد. ایده اصلی در بیان تابع توپولوژی، بر پایه‌ی روش حرکت تکاملی این تابع بر اساس حساسیت تابع هدف و قیود آن می‌باشد. بهینه‌سازی سازه‌ها به روش مجموعه‌ی سطوح تراز برای اولین بار توسط ستین و ویگمن^۳ [۲۳] آغاز شد. در کارهای اولیه، آن‌ها سعی کردند طرحی را با کمترین حجم پیدا کنند که به مقدار انرژی مشخصی نیز در همان زمان برسد. آن‌ها برای به دست

^۱ Homogenization

^۲ Solid Isotropic Material with Penalization

^۳ Sethian & Wiegmann

آوردن مرز مشترک از معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی با تابع سرعت ساخته شده‌ای استفاده کردند. در مرجع [۲۴] اشر و سانتوزا^۱، روش مجموعه‌ی سطوح تراز را برای مسائلی که شامل سیستم‌های لرزشی مانند فرکانس تشدید شده یا گپ طیفی برای بهینه‌سازی با قید حجم است استفاده کردند.

در کارهای الایر^۲ و همکارانش [۲۵]، یک چهارچوب محاسباتی برای بهینه‌سازی شکل و توپولوژی با روش مجموعه‌ی سطوح تراز معرفی شده است که از گرادیان شکل^۳ برای رشد تابع مجموعه‌ی سطوح تراز استفاده شده است و الگوریتم عددی برای حل تابع مجموعه‌ی سطوح تراز ارائه شده است. تحقیقات ونگ^۴ و همکارانش [۲۶، ۲۷] روش‌های عددی در حل را توسعه داده‌اند. در مقالات آن‌ها مثال‌های عددی زیادی حل گردیده است تا عملکرد این روش را ثابت کند و اهمیت ادامه تحقیقات در این روش را نشان می‌دهد. همچنین آن‌ها این روش را برای مواد مرکب^۵ نیز تعمیم دادند [۲۸]. تابع تعریف توپولوژی^۶ [TDF] توسط رویتر و کیولن^۷ [۲۹ و ۳۰] برای حل مسائل طرح بهینه‌ی توپولوژی استفاده گردید و روش معیار بهینگی برای پیدا کردن مقادیر بهینه به‌کار برده شد. اخیراً بلیچکو^۸ و همکارانش [۱۶] روش دیگری را در بهینه‌سازی سازه‌های پیوسته ارائه کرده‌اند. در تحقیقات ایشان مقادیر نقاط گرهی تابع ضمنی تعریف‌کننده‌ی توپولوژی و شکل سازه به‌عنوان متغیر طراحی به‌صورت مستقیم استفاده گردیده است و روش معیار بهینگی برای به‌دست آوردن مقادیر بهینه به‌کار گرفته شده است. مثال‌های عددی نیز ارائه گردیده که کارآمدی روش را اثبات می‌کند.

در مقایسه با روش‌های سنتی المان‌محور بهینه‌سازی توپولوژی، روش گره‌محور در بهینه‌سازی دارای مزایای روشنی است مثلاً تعریف هندسه‌ی سازه به‌راحتی انجام می‌پذیرد. در هر

^۱ Osher & Santoaz

^۲ Allarie

^۳ Shape Gradient

^۴ Wang

^۵ Composite

^۶ Topology Description Function

^۷ Ruiter & keulen

^۸ Belytschko

مرحله از بهینه‌سازی تمام اطلاعات هندسه‌ی سازه، در تابع ضمنی بیان‌کننده توپولوژی سازه موجود است. از آنجایی که شکل و پیکره یا شرایط مرزی در هر مرحله قابل‌دسترسی می‌باشد مزیت بسیار جالبی است. همچنین تغییرات توپولوژی سازه به راحتی انجام می‌پذیرد و پس از بهینه‌سازی نیاز به روش‌های پردازش تصویر و بهینه‌سازی شکل نمی‌باشد.

اگرچه روش نقطه‌محور با استفاده از توابع TDF برای حل مسائل بالقوه مناسب است ولی همچنان محدودیت‌هایی دارد. اولین محدودیت به حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی برای روش مجموعه‌ی سطوح تراز برمی‌گردد. محدودیت از این قرار است که همانند روش اجزای محدود، برای پایداری عمومی گام‌های زمانی، می‌بایست شرایط CFL^۱ در نظر گرفته شود. این نکته بدان معناست که در هر مرحله، مجموعه‌ی سطوح تراز می‌توانند به اندازه یک سلول شبکه حرکت کند. این محدودیت باعث کاهش سرعت در همگرایی جواب می‌گردد.

لوو و همکارانش [۳۱] یک روش برای حل معادله‌ی مجموعه‌ی سطوح تراز ارائه کردند. در کار آن‌ها از روش تقسیم عملگر تجمعی نیمه ضمنی^۲ برای حل معادله‌ی مجموعه‌ی سطوح تراز استفاده شده است. در روش آن‌ها، تغییرات توپولوژیکی به‌طور خودکار در طول روند بهینه‌سازی، بدون نیاز به روش‌های مصنوعی^۳ انجام شده است. اخیراً توکلی و همکارانش [۳۲] روش آیزوژئومتریک را برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها مورد استفاده قرار داده‌اند. آن‌ها به‌منظور بهینه‌سازی، از روش مجانب‌های پویا^۴ (MMA) استفاده کرده‌اند. همچنین ونگ و همکاران بهینه‌سازی توپولوژی را برای مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید وزن و یک قید تنش نیز تعمیمی دادند. در کار آن‌ها قید تنش موردنیاز در هر مرحله، بیشترین تنش موجود در بین تمام نقاط انتگرال‌گیری گوسی^۵ در میان کل دامنه می‌باشد [۳۳]. همچنین آلبرتو فانسلو و همکاران وزن مینیمم را با استفاده از قیود

^۱ Courant–Friedrichs–Lewy

^۲ Semi-Implicit additive operator

^۳ Artificial Schemes

^۴ Method of Moving Asymptotes

^۵ Gaussian integration points

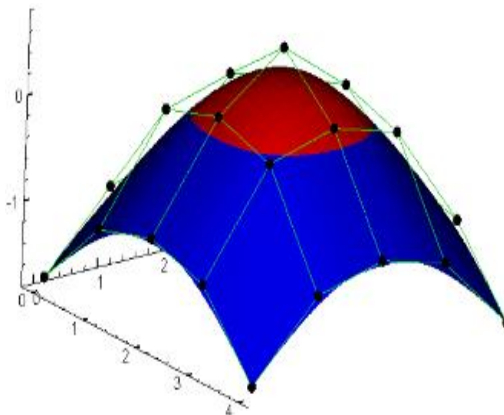
تنش محلی با استفاده از روش مجموعه‌ی سطوح تراز به‌دست آوردند [۳۴]. همچنین اخیراً توکلی و همکارانش به بررسی مسائل بهینه‌سازی توپولوژی تنش مسطح با روش مجموعه‌ی سطح تراز و تحلیل ایزوژئومتریک پرداختند. در تحقیقات آن‌ها مسائلی همچون مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم، مینیمم کردن وزن تحت قید تنش محلی و مینیمم کردن همزمان انرژی کرنشی و وزن تحت قید تنش محلی مورد بررسی قرار گرفته است [۳۵].

۵-۳- روش مجموعه‌ی سطوح تراز و تحلیل ایزوژئومتریک

برای بیان عددی تابع مجموعه‌ی سطح تراز، می‌توان از هر روش گسسته‌سازی عددی استفاده کرد. معمولاً می‌توان از شبکه‌ی ساده، با سلول‌های مستطیلی برای گسسته‌سازی پیکره‌ی سازه، استفاده کرد. با انتخاب مناسب توابع تقریب، می‌توان تابع مجموعه‌ی سطح تراز را به‌فرم زیر گسسته‌سازی نمود:

$$\phi(\xi, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(\xi) \Phi_{i,j}(t) \quad \xi = (\xi, \eta) \quad (1-5)$$

که در آن $\Phi_{i,j}$ مختصات نقاط کنترلی هستند.



شکل (۱-۵) بیان توپولوژی و مرز با استفاده از تابع مجموعه‌ی سطوح تراز $\phi(\mathbf{x})$ [۳۵]

معمولاً از خاصیت ایزوپارامتریک روش تحلیل سازه استفاده شده و از همان توابع درونیاب به‌کار رفته برای تقریب تابع مجهول و تقریب هندسی، برای تشکیل رویه‌ی سطح تراز نیز استفاده می‌شود.

به منظور حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی و تأمین پایداری حل می‌توان از روش‌ها عددی همچون روش روبه‌جلوی اولری برای تغییر ϕ در یک زمان مشخص استفاده کرد. با استفاده از روش عددی رو به‌جلوی اولری خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + v |\nabla \phi| = 0 \Rightarrow \quad (2-5)$$

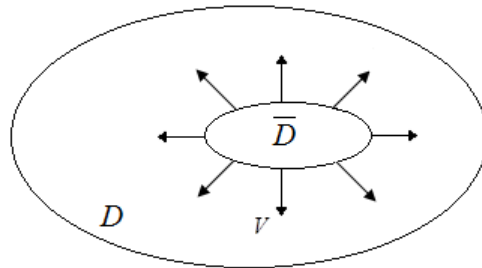
$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + v^n |\nabla \phi^n| = 0$$

برای پایداری حل می‌بایست از شرایط CFL استفاده کرد. طبق شرایط CFL هر مرحله‌ی زمانی را می‌توان به‌صورت زیر محدود کرد [۲۶].

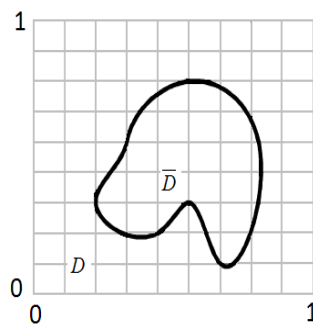
$$\Delta t < \frac{\min(\Delta x, \Delta y)}{\max\{v_n\}} \quad (3-5)$$

در مرجع [۳۵]، به دلیل این‌که شبکه‌بندی تفاضل محدود وابسته به شبکه‌ی نقاط کنترلی بود، برای حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی می‌بایست تعداد نقاط کنترلی زیاد در نظر گرفته شود، ولی در این پژوهش با توجه به اینکه حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی در فضای پارامتری انجام می‌شود، تعداد نقاط کنترلی وابسته به شبکه‌بندی روش تفاضل محدود در حل نمی‌باشد، به‌عبارت دیگر در روش حاضر شبکه‌بندی تفاضل محدود در فضای پارامتری انجام شده، که با توجه به منظم بودن آن به صورت مربع در هر وصله این شبکه‌بندی بدون مشکل انجام خواهد شد. در ادامه پس از محاسبه‌ی مرزهای جدید توسط معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی، بایستی نقاط کنترلی برای تابع مجموعه‌ی سطوح تراز جدید محاسبه شود و با استفاده از نقاط کنترلی جدید تحلیل انجام شود. برای این کار دو روش تقریب نقاط کنترلی و درونیابی نقاط کنترلی در فصل ۲ تشریح شده است. در این پایان‌نامه از روش تقریب نقاط کنترلی استفاده شده است.

هر نقطه در فضای پارامتری نمایشگر یک نقطه از فضا فیزیکی است که از این دسته می‌توان به نقاط روی مرز یا تراز صفر تابع تابع مجموعه‌ی سطوح تراز اشاره کرد. در شکل (۲-۵) به صورت شماتیک فضای فیزیکی مسئله نمایش داده شده است.

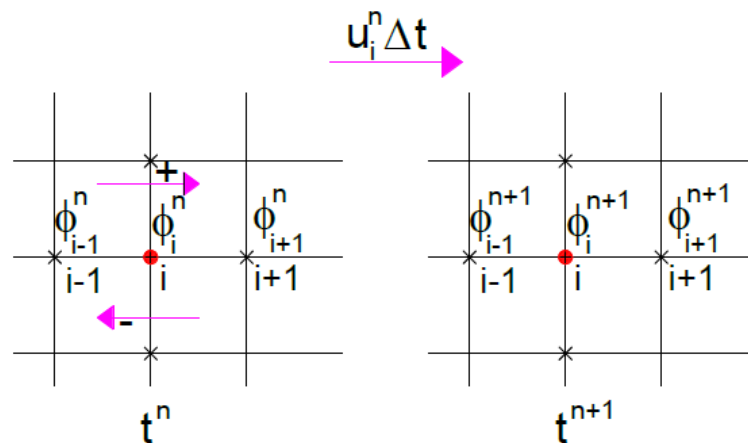


شکل (۲-۵) فضای فیزیکی مسئله



شکل (۳-۵) فضای پارامتری مسئله

در شکل بالا فضای پارامتری مسئله که معادله همیلتون-ژاکوبی روی آن حل می‌شود، نشان داده شده است.



شکل (۴-۵) روش پیش‌رونده در حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی

در هر مرحله پس از به‌روزرسانی مرزهای سازه توسط معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی، تابع، فاصله‌ی علامت‌دار خواهد شد. این معادله نیز در فضای پارامتری و روی شبکه تفاضل محدود انجام خواهد شد. به‌منظور محاسبه‌ی تابع فاصله‌ی علامت‌دار از روابط زیر استفاده می‌شود [۳۶]:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \text{Sign}(\phi)(|\nabla \phi| - 1) = 0$$

$$\text{Sign}(\phi) \approx \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + (\Delta x \cdot |\nabla \phi|)^2}} \quad (4-5)$$

۴-۵- الگوریتم بهینه‌سازی

در این قسمت الگوریتم فرایند بهینه‌سازی که در این پایان‌نامه به‌عنوان یک روش جدید ارائه شده است، تشریح می‌شود.

گام اول (مقداردهی اولیه)^۱: در این گام تابع مجموعه‌ی سطوح تراز $\phi(x, 0)$ در زمان $t = 0$ برای دامنه‌ی \bar{D} مقداردهی می‌شود. برای این منظور، از تابع فاصله‌ی علامت‌دار برای تعریف $\phi(x)$ ، روی سطح اولیه‌ی طرح D ، استفاده می‌کنیم. با این کار سعی می‌کنیم تا مجموعه‌ی سطوح تراز همواره در بازه‌ی معینی قرار گیرد. تابع فاصله‌ی علامت‌دار که با برقراری رابطه‌ی $|\nabla \phi| = 1$ در تمامی نقاط به‌دست می‌آید، علاوه بر ساده‌سازی بسیاری از فرمول‌های اشاره‌شده در این فصل از ایجاد شیب‌های بسیار تند و بسیار کند در منحنی سطح تراز جلوگیری می‌کند.

گام دوم (تحلیل سازه): در هر مرحله از بهینه‌سازی می‌بایست سازه‌ی تغییر یافته مجدداً تحلیل شده و مقادیر مجهول تغییر مکان‌ها دوباره محاسبه شوند. برای این منظور از هر یک از روش‌های اجزای محدود، ایزوژئومتریک و ... می‌توان استفاده کرد.

گام سوم (آنالیز حساسیت): در این قسمت، سرعت نرمال و ضریب لاگرانژ λ_+ ، قید حجم محاسبه

^۱ Initialization

می‌گردد. حساسیت تابع هدف و قیود، با استفاده مشتق سویی تابع هدف، به فرم لاگرانژین، نسبت به متغیرهای طراحی به دست می‌آید. در ادامه به تشریح این قسمت می‌پردازیم.

گام چهارم (به روز رسانی^۱): حل معادله‌ی همیلتون ژاکوبی به دست آمده برای تشکیل ϕ های جدید $\phi(x, t)$.

گام پنجم: محاسبه‌ی نقاط کنترلی جدید تابع مجموعه‌ی سطوح تراز با روش‌های بیان شده در فصل ۲، قسمت‌های ۲-۴-۱ و ۲-۴-۲.

گام ششم: دوباره مقداردهی^۲ مجموعه‌ی سطح تراز. در این مرحله با تعریف مجدد تابع فاصله‌ی علامت‌دار، سعی می‌شود تا مقادیر تابع مجموعه‌ی سطوح تراز همواره در بازه‌ی معینی قرار گیرد. همان‌طور که مشخص است پس از مرحله‌ی به‌روز رسانی، مقادیر تابع مجموعه‌ی سطوح تراز حالت تابع فاصله‌ی علامت‌دار خارج شده و می‌توانند مقادیر زیادی را به همراه شیب‌های زیاد به خود بگیرند لذا با استفاده از مرحله‌ی دوباره مقداردهی این نقایص را رفع می‌کنیم.

گام هفتم: تکرار مراحل دوم تا پنجم تا رسیدن به همگرایی با دقت موردنظر.

۵-۵- آنالیز حساسیت

تحلیل حساسیت را می‌توان به این شکل تعریف کرد که رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های مسئله را بررسی می‌کند. به این وسیله می‌توان میزان تغییرات خروجی‌های مسئله را بر اساس تغییرات در ورودی‌های مختلف از نظر کمی و کیفی تعیین کرد. در حقیقت تحلیل حساسیت یک پیش‌نیاز اساسی برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی به روش ریاضی می‌باشد.

در مسائل بهینه‌سازی نیاز داریم تا از تابع هدف و توابع قید برحسب متغیرهای طراحی مشتق‌گیری نماییم و اصطلاحاً حساسیت تابع هدف و توابع قید را نسبت به متغیرهای طراحی به دست

^۱ Update

^۲ Reinitialization

آوریم. اصولاً این گونه روش‌ها به دلیل انجام تحلیل حساسیت از سایر روش‌ها بسیار سودمندتر هستند و بسیار سریع‌تر پاسخ را برای ما تعیین می‌کنند؛ زیرا با تعیین مشتقات حساسیت می‌توانیم بر حسب شدت اثر تغییرات یک متغیر بر روی تابع هدف و توابع قید، متغیری را انتخاب کرده و تغییر دهیم که تغییرات در آن شدت بیشتری بر روی تابع هدف و توابع قید داشته باشد و در نتیجه خود را سریع‌تر به جواب نزدیک کنیم.

به طور کلی سه روش برای تعیین مشتقات حساسیت وجود دارد: ۱- روش تفاضل محدود ۲- روش تحلیلی ۳- روش نیمه تحلیلی.

با توجه به این که در این پژوهش از روش تحلیلی مستقیم برای آنالیز حساسیت استفاده شده است لذا تنها این روش بررسی خواهد شد.

۵-۵-۱- روش تحلیلی مستقیم

در روش مستقیم، $\frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j}$ با مشتق‌گیری از معادلات تعادل به دست می‌آید [۳۷]:

$$\frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) + K(x^k) \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} \quad (5-5)$$

که می‌توان این رابطه را به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$K(x^k) \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \quad (6-5)$$

به عبارت سمت راست معادله‌ی فوق، شبه‌بار گفته می‌شود. حال اگر فرض شود تغییرات نیرو نسبت به جابجایی ناچیز است خواهیم داشت:

$$K(x^k) \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} = - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} u(x^k) \quad (7-5)$$

در ادامه‌ی این فصل به بررسی مسئله بهینه‌سازی انرژی کرنشی تحت قید حجم می‌پردازیم. مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی فرم نسبتاً فراگیر برای مسائل بهینه‌سازی بوده که علاوه بر ماکزیمم کردن سختی^۱ کل سازه، تنش‌ها و جابجایی‌ها را نیز تا حدود زیادی اصلاح می‌کند. همچنین به‌منظور محاسبه‌ی سرعت نرمال روش مجموعه‌ی سطوح تراز، آنالیز حساسیت مسئله بهینه‌سازی انرژی کرنشی تحت قید حجم به‌طور کامل شرح داده شده است.

۵-۶- مسئله‌ی مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم

مسئله‌ی بهینه‌سازی انرژی کرنشی J با در نظر گرفتن مقدار مشخصی از مصالح V_{\max} به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{\phi(\mathbf{x})} \quad & J(\mathbf{u}, \phi(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} F(\mathbf{u}, \phi(\mathbf{x})) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \\ \text{Subject to:} \quad & \text{equilibrium} \\ & \text{volume constraint: } V \leq V_{\max} \\ & \text{design restrictions} \end{aligned} \quad (۸-۵)$$

به منظور محاسبه‌ی آنالیز حساسیت این مسئله ابتدا می‌بایست رابطه‌ی لاگرانژین مسئله‌ی فوق را به‌دست آورده سپس نسبت به متغیرهای طراحی مشتق بگیریم، لذا معادله‌ی لاگرانژین مسئله‌ی فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

$$L(\mathbf{u}, \phi) = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{u}^T \mathbf{k}^e \mathbf{u} H(\phi) d\Omega + \lambda \left(\int_D H(\phi) d\Omega - V_{\max} \right) \quad (۹-۵)$$

برای محاسبه‌ی آنالیز حساسیت در این پژوهش از روش مستقیم استفاده شده است. در این روش ابتدا مشتق جابجایی نسبت به متغیرهای طراحی محاسبه شده و سپس به‌طور مستقیم مقادیر به‌دست

^۱ Stiffness maximization

آمده در روابط جایگذاری می‌شود. برای محاسبه‌ی مشتق تغییرمکان‌ها از دو طرف رابطه‌ی تعادل مشتق می‌گیریم. لذا خواهیم داشت:

$$\mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{k}\mathbf{u})}{\partial\phi} = \frac{\partial(\mathbf{f})}{\partial\phi} \Rightarrow \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\phi}\mathbf{u} + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\phi}\mathbf{k} = \frac{\partial(\mathbf{f})}{\partial\phi} \quad (10-5)$$

با فرض عدم وابستگی بار به تغییرات متغیرهای طراحی، مقدار مشتق جابجایی نسبت متغیرهای طراحی به صورت زیر ساده‌سازی می‌شود:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\phi} = -\mathbf{k}^{-1} \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\phi} \mathbf{u} \quad (11-5)$$

با مشتق‌گیری از تابع لاگرانژین به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = \mathbf{u}^T \mathbf{k} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\phi} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\phi} \mathbf{u} + \lambda \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} \quad (12-5)$$

با جایگذاری در رابطه‌ی فوق و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial\mathbf{k}}{\partial\phi} \mathbf{u} + \lambda \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} \quad (13-5)$$

همچنین داریم:

$$V = \int_{\Omega} H(\phi) d\Omega \quad (14-5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\phi} = \int_{\Omega} \frac{\partial H(\phi)}{\partial\phi} d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\phi) |\nabla\phi| d\Omega = \int_{\Omega} 1 ds \quad (15-5)$$

به صورت مشابه مشتق ماتریس سختی نسبت به متغیر طراحی به صورت زیر است:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} H(\phi) d\Omega^e \quad (16-5)$$

$$\frac{\partial\mathbf{k}^e}{\partial\phi} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \delta(\phi) |\nabla\phi| d\Omega^e \quad (17-5)$$

با مشتق‌گیری از تابع لاگرانژین نسبت به زمان و استفاده از روش تندترین شدیدترین شیب نزولی مقدار سرعت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\frac{\partial L(\phi(\mathbf{x}))}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \phi} \cdot \left(\nabla \phi(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) < 0 \quad (18-5)$$

$$\nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad (19-5)$$

$$v_n(\mathbf{x}) = - \left(- \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \phi} \mathbf{u} + \lambda \int_{\Omega^e} \frac{\partial H(\phi)}{\partial \phi} d\Omega^e \right) \quad (20-5)$$

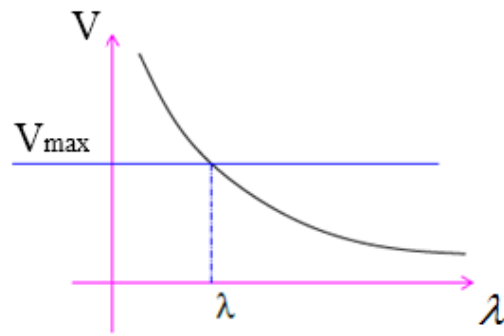
با توجه به این که هندسه و تابع مجهول تغییر مکان با استفاده از توابع پایه اسپلاین مدل‌سازی می‌گردد، استخراج سرعت‌ها نیز در فضای پارامتری صورت می‌گیرد. مقدار ضریب لاگرانژ قید حجم نیز مستقیماً بر اساس آنالیز حساسیت (مشتقات تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی)، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \phi} \mathbf{u} d\Omega + \lambda \int_{\Omega} H'(\phi) d\Omega = 0 \rightarrow \quad (21-5)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega = \lambda \int_{\Omega} \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega \rightarrow \quad (22-5)$$

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k}^e \mathbf{u} \delta(\phi) |\nabla \phi| \right) d\Omega}{\int_{\Omega} \delta(\phi) |\nabla \phi| d\Omega} \quad (23-5)$$

اگر مقدار به دست آمده برای λ_+ کوچک‌تر از صفر باشد؛ بنا به شرایط کان تا کر، می‌بایست $\lambda_+ = 0$ را در نظر گرفت. نمودار تغییرات حجم نسبت به ضریب لاگرانژ قید حجم به صورت زیر می‌باشد.



شکل (۵-۵) نمودار تغییرات حجم نسبت به ضریب لاگرانژ

فصل ششم

مثال‌های عددی

۱-۶- مقدمه

در این قسمت به منظور نمایش عملکرد بهینه‌سازی توپولوژی سازه با استفاده از روش تحلیل آیزوژئومتریکی چند مثال ارائه شده است. در تمامی مثال‌ها مدول الاستیسیته و نسبت پواسون به ترتیب pa ۱ و ۰٫۳ و بزرگی بار نقطه‌ای $p=1N$ در نظر گرفته شده است. عرض تقریبی تابع هویساید مقدار $\Delta = 0.2\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ در نظر گرفته شده است که Δx و Δy فاصله نقاط کنترلی در راستاهای x و y می‌باشد. گام زمانی برابر $\Delta t = \frac{\beta \Delta x}{|v_{\max}|}$ می‌باشد که در آن v_{\max} بیشترین سرعت حرکت مرز و β ضریب محدودیت حرکت و برابر با مقدار ۰٫۵ در نظر گرفته شده است.

۲-۶- حل مثال‌های عددی بهینه‌سازی توپولوژی

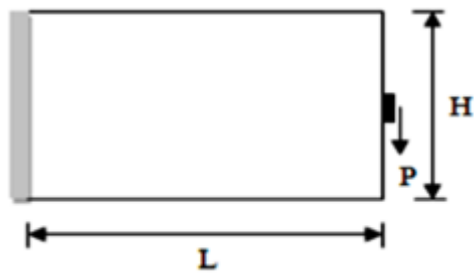
مثال (۱)

در این مثال تیر کنسول کوتاهی که بار نقطه‌ای $p=1N$ به وسط ارتفاعش وارد می‌شود، مورد بررسی قرار گرفته است. قید حجم مسئله بهینه‌سازی ۴۵٪ و نسبت ابعاد سازه ۲ می‌باشد. کل دامنه‌ی طراحی توسط ۸۶۱ نقطه‌ی کنترلی، مدل شده است. توپولوژی اولیه‌ی به کار رفته برای حل شامل ۱۰ حفره می‌باشد. بردارهای گرهی برای هر یک از راستاهای Γ و S به ترتیب به صورت زیر است:

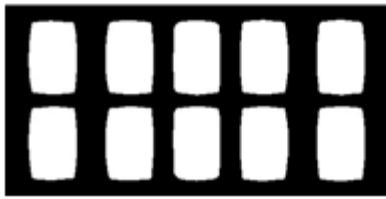
$$\xi = \{0,0,0, 0.02564, 0.05128, \dots, 0.97435, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0,0,0, 0.05263, 0.10526, \dots, 0.94736, 1, 1, 1\}$$

در شکل (۱-۶) شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری مقطع نشان داده شده است. همچنین در شکل (۲-۶) توپولوژی اولیه‌ی به کار رفته برای حل مشاهده می‌شود. نتیجه‌ی نهایی مقطع بهینه تحت قید ۴۵ درصد در شکل (۳-۶) و نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف در شکل (۵-۶) مشخص شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در طی مراحل اولیه بهینه‌سازی، حجم مصالح کاهش یافته تا قید اقصاء شده، سپس حجم ثابت مانده و انرژی کرنشی با جابه‌جا شدن نواحی پر از مصالح، کاهش می‌یابد.



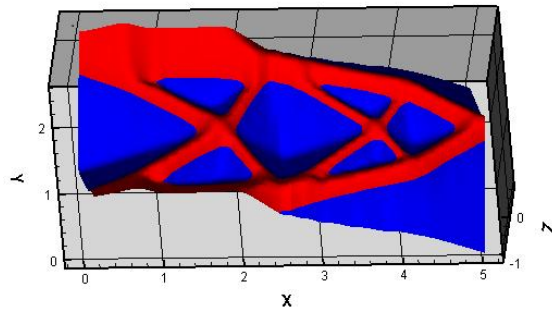
شکل (۱-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول



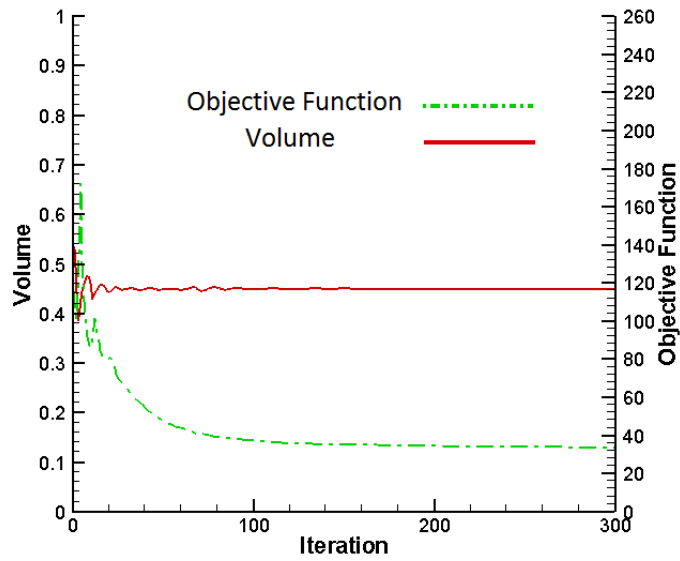
شکل (۲-۶) توپولوژی اولیه‌ی به کار رفته برای حل



شکل (۳-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول با قید حجم ۴۵٪



شکل (۴-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول به صورت ۳ بعدی

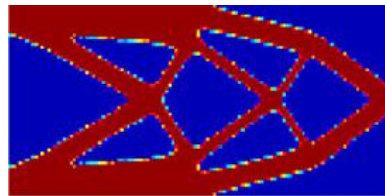


شکل (۵-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول

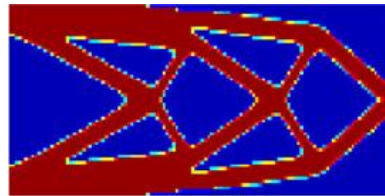
به منظور کنترل نتیجه به دست آمده در این پژوهش، مقایسه‌ای با نتایج مقاله‌های مرجع [۳۶،۳۸] در جدول (۱-۶) انجام شده است، با این تفاوت که در مقالات مرجع به منظور تحلیل سازه از روش اجزای محدود استفاده شده است.

جدول (۱-۶) مقایسه‌ی نتایج برای قید حجم ۴۵ درصد

محقق	Compliance	قید حجم
Allaire et al.(۲۰۰۴) [۳۶]	۶۵٫۸	۰٫۴۵
Wang and Wang(۲۰۰۶) [۳۸]	۶۵٫۸	۰٫۴۵
پژوهش موجود	۲*۳۳٫۷۳=۶۷٫۴۶	۰٫۴۵



شکل (۶-۶) طرح نهایی بهینه‌ی تیر کنسول [۳۶]



شکل (۷-۶) طرح نهایی بهینه‌ی تیر کنسول [۳۸]

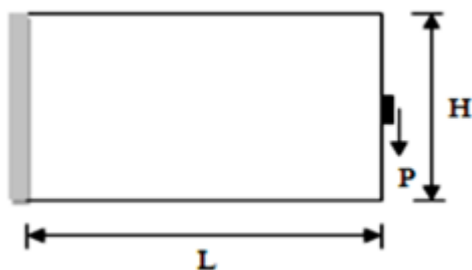
مثال (۲)

مثال قبل را با کاهش تعداد نقاط کنترلی از ۸۶۱ به ۲۳۱ دوباره حل می‌کنیم. مانند مثال قبل بار نقطه‌ای $p=1 N$ به وسط ارتفاع وارد می‌شود. قید حجم مسئله بهینه‌سازی ۴۵٪ و نسبت ابعاد سازه ۲ می‌باشد. کل دامنه‌ی طراحی توسط ۲۳۱ نقطه‌ی کنترلی، مدل شده است. توپولوژی اولیه‌ی به کار رفته برای حل شامل ۱۰ حفره می‌باشد. بردارهای گرهی برای هر یک از راستاهای I و S به ترتیب به صورت زیر است:

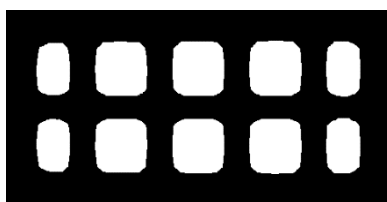
$$\xi = \{0,0,0, 0.05263, 0.10526, \dots, 0.94736, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0,0,0, 0.1111, 0.2222, \dots, 0.9999, 1, 1, 1\}$$

در شکل (۸-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۰-۶) و (۱۱-۶) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



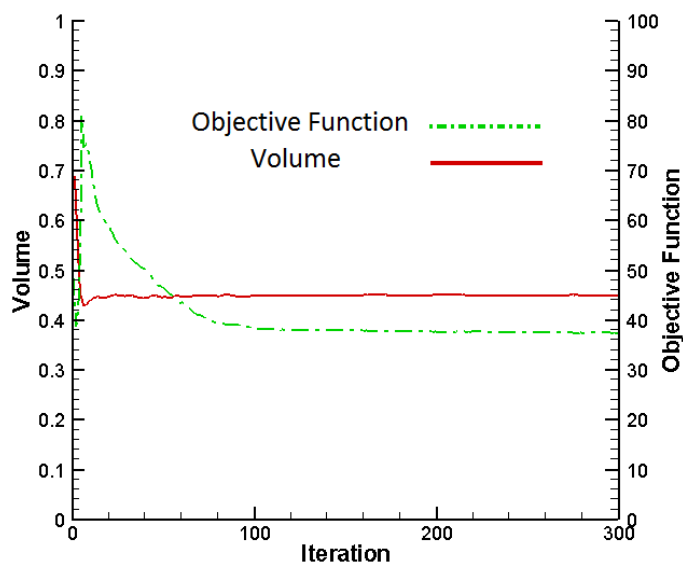
شکل (۸-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول



شکل (۹-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۰ حفره



شکل (۱۰-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول با قید حجم ۴۵ درصد

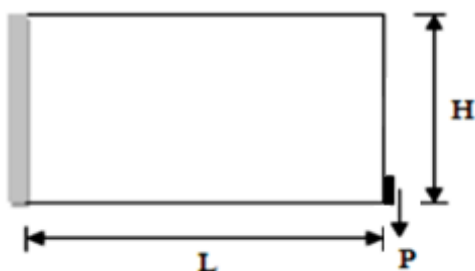


شکل (۱۱-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول

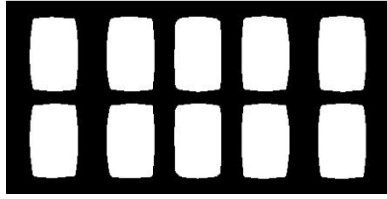
با مقایسه‌ی نتایج مثال ۱ و مثال ۲ به این نتیجه می‌رسیم که کاهش زیاد نقاط کنترلی بر توپولوژی نهایی مسئله تاثیر می‌گذارد. همچنین انرژی کرنشی در مثال با تعداد نقاط کنترلی بیشتر، نسبت به مثال با تعداد نقاط کنترلی کمتر مقدار کمتری دارد.

مثال ۳

در این مثال تیر کنسول کوتاهی که نسبت ابعاد آن ۲ می‌باشد، با ۸۶۱ نقطه‌ی کنترلی مدل شده و بار نقطه‌ای $p=1N$ به پایین ارتفاعش وارد می‌شود. همچنین قید حجم مسئله بهینه‌سازی ۴۵٪ می‌باشد. بردارهای گرهی به کار رفته همانند مثال ۱ است. در شکل (۱۲-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و در اشکال (۱۴-۶) و (۱۵-۶) توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال نشان داده شده است.



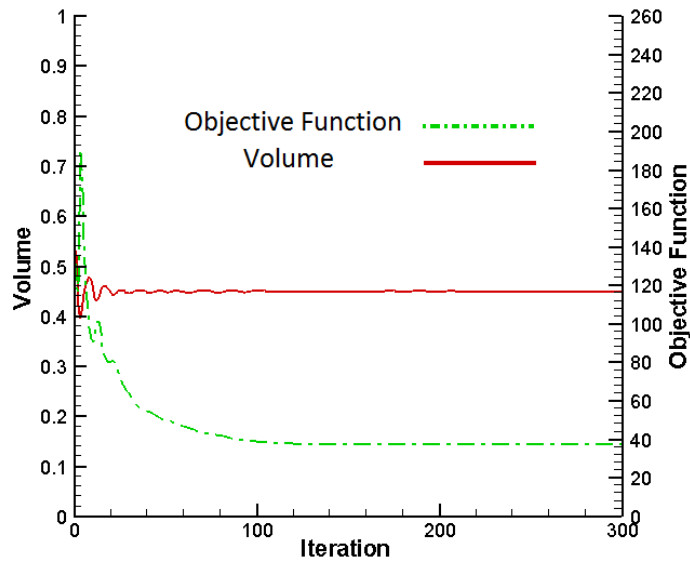
شکل (۱۲-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول



شکل (۶-۱۳) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۰ حفره



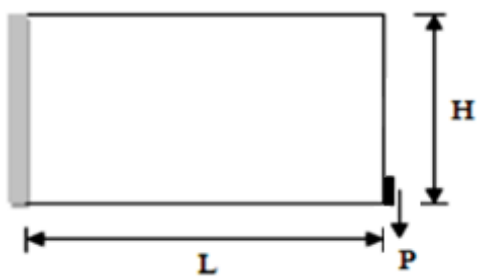
شکل (۶-۱۴) طرح بهینه‌ی تیر کنسول با قید حجم ۴۵ درصد



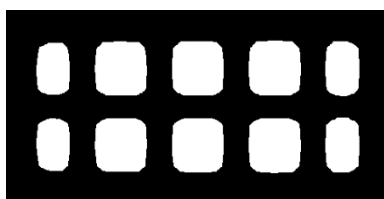
شکل (۶-۱۵) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول

مثال (۴)

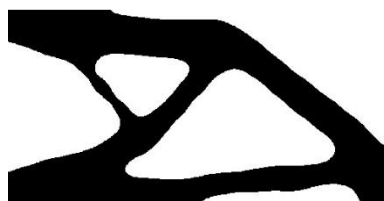
در این مثال هندسه‌ی مسئله توسط ۲۳۱ نقطه کنترلی مدل شده و بار واحد به پایین ارتفاع وارد می‌شود. قید حجم ۴۵٪ و توپولوژی اولیه شامل ۱۰ حفره می‌شود. شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله و همچنین توپولوژی نهایی و روند همگرایی را در اشکال زیر مشاهده می‌کنید.



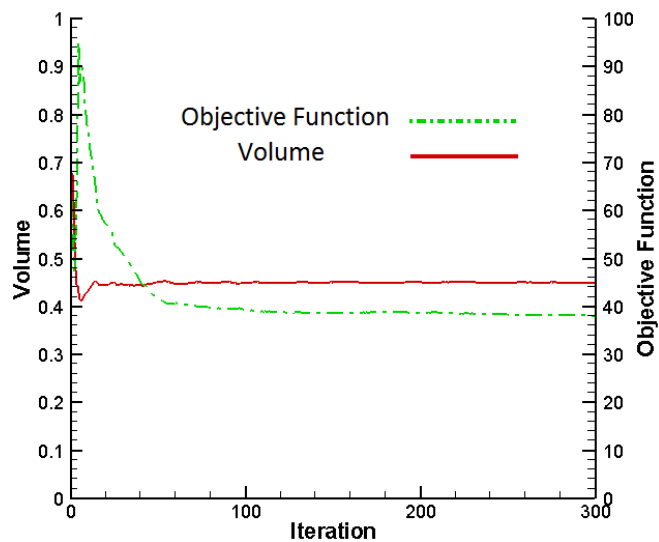
شکل (۶-۱۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول



شکل (۶-۱۷) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۰ حفره



شکل (۶-۱۸) طرح بهینه‌ی تیر کنسول با قید حجم ۴۵ درصد



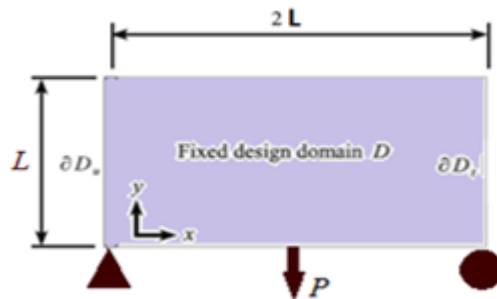
شکل (۶-۱۹) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول

مثال ۵

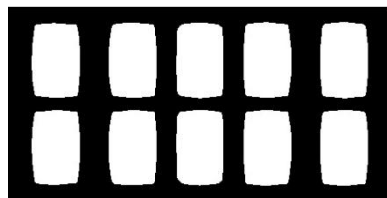
در شکل (۶-۲۰) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر ساده زیر مشاهده می‌شود. در این مثال از ۸۶۱ نقطه‌ی کنترلی برای مدل‌سازی هندسه‌ی مسئله استفاده شده است. قید حجم مسئله‌ی بهینه‌سازی ۴۰٪ می‌باشد. توپولوژی نهایی و روند همگرایی را در اشکال (۶-۲۲) و (۶-۲۳) مشاهده می‌کنید. بردارهای گرهی برای هر یک از راستاهای Γ و S به ترتیب به صورت زیر است:

$$\xi = \{0,0,0, 0.02564, 0.05128, \dots, 0.97435, 1,1,1\}$$

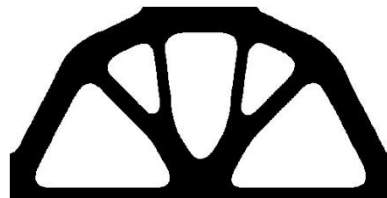
$$\eta = \{0,0,0, 0.05263, 0.10526, \dots, 0.94736, 1,1,1\}$$



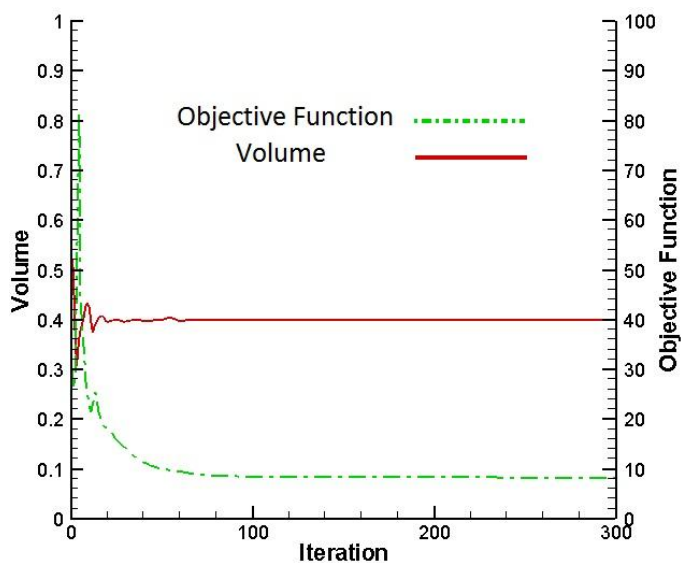
شکل (۶-۲۰) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر ساده



شکل (۶-۲۱) توپولوژی اولیه‌ی به کار رفته برای حل با ۱۰ حفره



شکل (۶-۲۲) طرح بهینه‌ی تیر ساده با قید حجم ۴۰ درصد



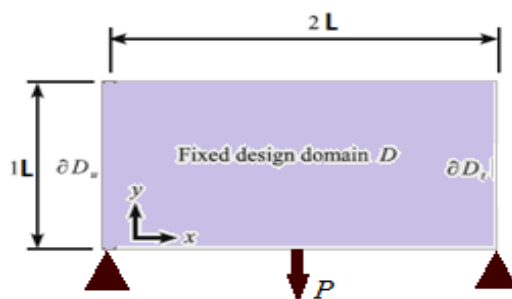
شکل (۶-۲۳) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر ساده

مثال ۶

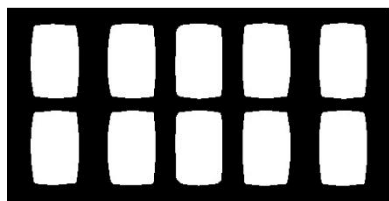
در شکل (۶-۲۴) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر میشل نمایش داده شده است. تعداد نقاط کنترلی به‌کار رفته ۸۶۱ می‌باشد. نسبت ابعاد سازه ۲ و قید حجم ۴۰٪ می‌باشد. توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال در ادامه آورده شده است. بردارهای گرهی برای هر یک از راستاهای Γ و S به‌ترتیب به‌صورت زیر است:

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.02564, 0.05128, \dots, 0.97435, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 0.05263, 0.10526, \dots, 0.94736, 1, 1, 1\}$$



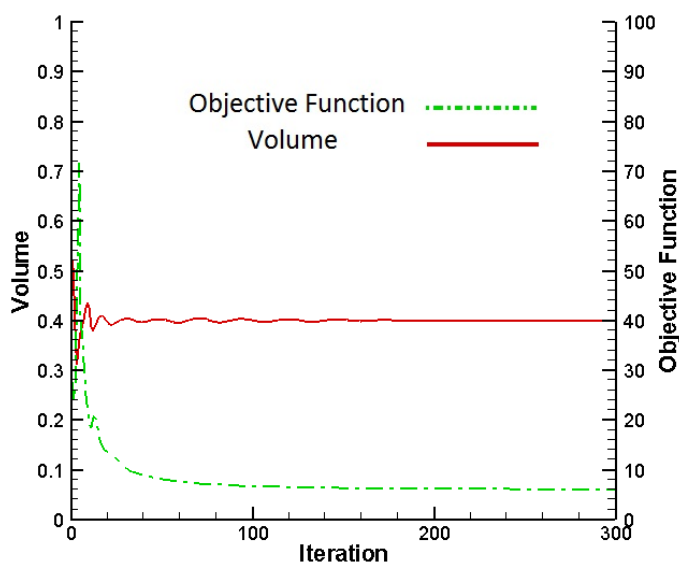
شکل (۶-۲۴) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر میشل



شکل (۶-۲۵) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۰ حفره



شکل (۶-۲۶) طرح بهینه‌ی تیر میشل با قید حجم ۴۰ درصد



شکل (۶-۲۷) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر میشل

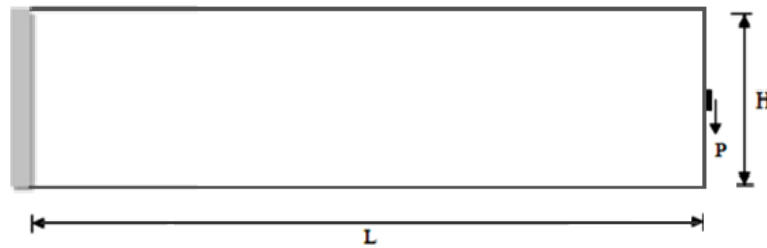
مثال (۷)

در این مثال تیر کنسولی بلندی با نسبت ابعاد ۴ که بار نقطه‌ای $p=1N$ به وسط ارتفاعش وارد می‌شود، مورد بررسی قرار گرفته است. کل دامنه‌ی طراحی با ۱۳۸۷ نقطه‌ی کنترلی، مدل شده است. قید حجم مسئله بهینه‌سازی ۴۰٪ و توپولوژی اولیه‌ی شامل ۱۶ حفره می‌باشد. بردارهای گرهی برای راستای I و راستای S برابر مقادیر زیر در نظر گرفته شده است.

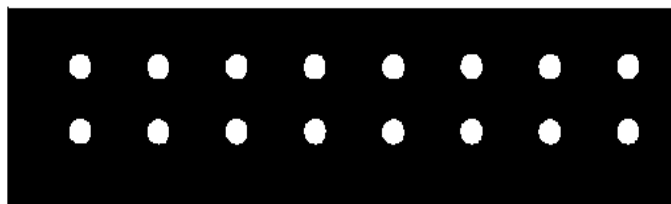
$$\xi = \{0,0,0,0.014085,0.028169,\dots,0.985915,1,1,1\}$$

$$\eta = \{0,0,0,0.058824,0.117647,\dots,0.941176,1,1,1\}$$

در شکل (۲۹-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل مشاهده می‌شود. نتیجه‌ی نهایی مقطع بهینه تحت قید ۴۰ درصد در شکل (۳۰-۶) و نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف در شکل (۳۱-۶) مشخص شده است.



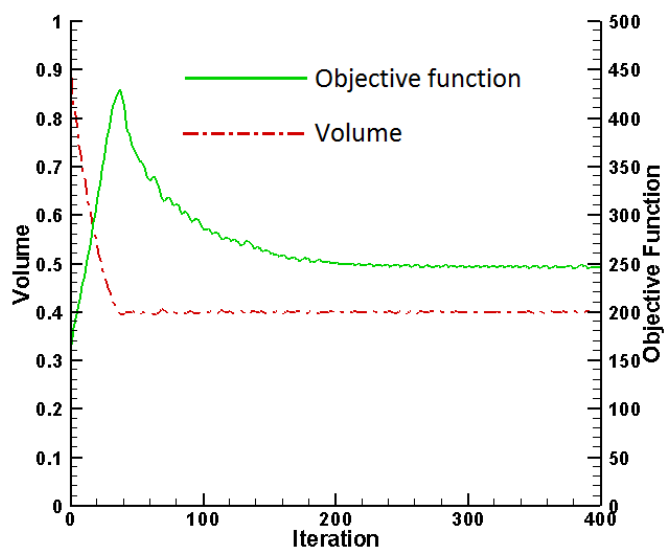
شکل (۲۸-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول بلند



شکل (۲۹-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۶ حفره



شکل (۳۰-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول بلند با قید حجم ۴۰ درصد



شکل (۳۱-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول بلند

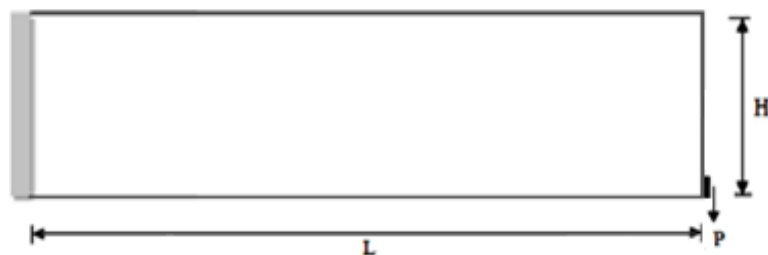
مثال ۸

در این مثال تیر کنسولی بلندی با نسبت ابعاد ۴ که بار نقطه‌ای $p=1N$ به پایین ارتفاعش وارد می‌شود، مورد بررسی قرار گرفته است. کل دامنه‌ی طراحی با ۱۳۸۷ نقطه‌ی کنترلی، مدل شده است. قید حجم مسئله بهینه‌سازی ۴۰٪ و توپولوژی اولیه‌ی شامل ۱۶ حفره می‌باشد. بردارهای گرهی برای راستای x و راستای y برابر مقادیر زیر در نظر گرفته شده است.

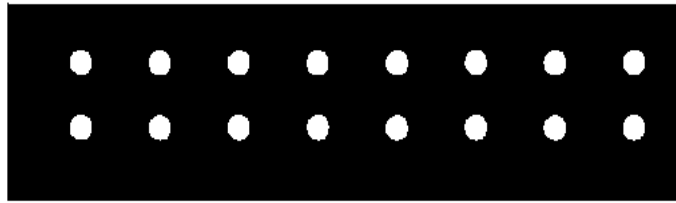
$$\xi = \{0,0,0,0.014085,0.028169,\dots,0.985915,1,1,1\}$$

$$\eta = \{0,0,0,0.058824,0.117647,\dots,0.941176,1,1,1\}$$

در شکل (۳۳-۶) توپولوژی اولیه‌ی به کار رفته برای حل مشاهده می‌شود. نتیجه‌ی نهایی مقطع بهینه تحت قید ۴۰ درصد در شکل (۳۴-۶) و نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف در شکل (۳۵-۶) مشخص شده است.



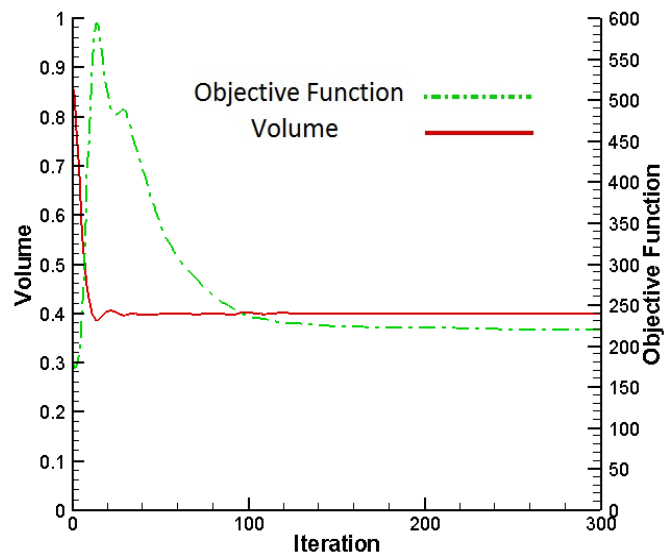
شکل (۳۲-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر کنسول بلند



شکل (۳۳-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل با ۱۶ حفره



شکل (۳۴-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول بلند با قید حجم ۴۰ درصد



شکل (۳۵-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر کنسول بلند

مثال (۹)

در این مثال تیر ال شکلی که بار نقطه‌ای $p=1N$ به وسط ارتفاعش وارد می‌شود، مورد بررسی قرار گرفته است. کل دامنه با ۴۵۱ نقطه‌ی کنترلی که توسط دو وصله‌ی نرَبز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت مدل شده همچنین قید حجم ۲۵٪ می‌باشد. برای وصله‌ی اول مقادیر بردارهای گرهی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.1111, 0.2222, \dots, 0.7777, 0.8888, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 0.0416, 0.08333, \dots, 0.8571, 0.9285, 1, 1, 1\}$$

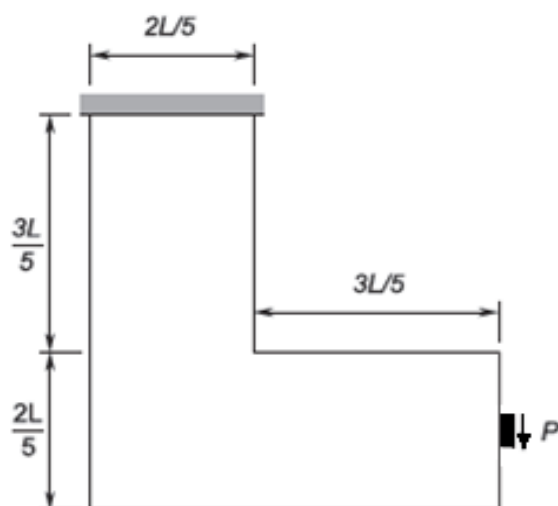
همچنین برای وصله‌ی دوم مقادیر بردارهای گره‌ی به صورت زیر خواهد بود.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.0714, 0.1428, \dots, 0.8571, 0.9285, 1, 1, 1\}$$

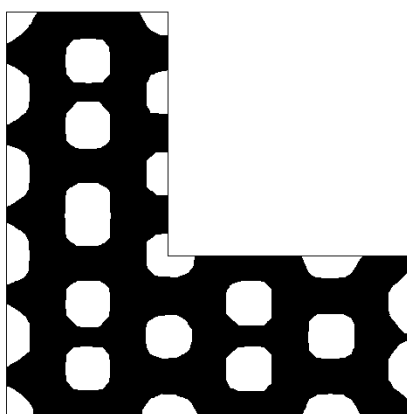
$$\eta = \{0, 0, 0, 0.1111, 0.2222, \dots, 0.7777, 0.8888, 1, 1, 1\}$$

در شکل (۳۶-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر میشل نمایش داده شده است. توپولوژی بهینه و

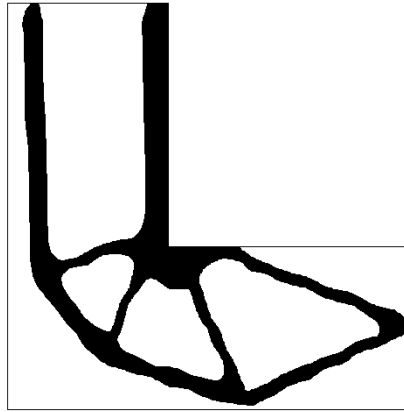
نمودار روند همگرایی به ترتیب در اشکال (۳۸-۶) و (۳۹-۶) آورده شده است.



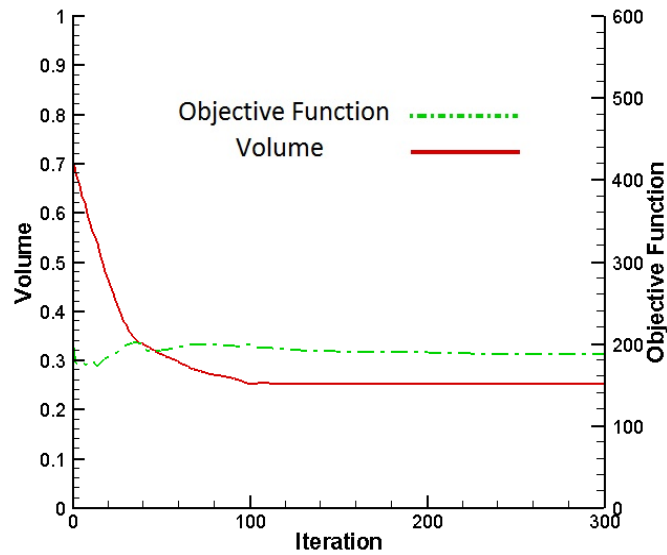
شکل (۳۶-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر ال شکل



شکل (۳۷-۶) توپولوژی اولیه‌ی به کار رفته برای حل



شکل (۶-۳۸) طرح بهینه‌ی تیر ال شکل با قید حجم ۲۵ درصد



شکل (۶-۳۹) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر ال شکل

مثال (۱۰)

در این مثال تیر ال شکلی که بار نقطه‌ای $p=1N$ به بالا ارتفاعش وارد می‌شود، مورد بررسی قرار گرفته است. کل دامنه با ۴۵۱ نقطه‌ی کنترلی که توسط دو وصله‌ی نریز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت مدل شده همچنین قید حجم ۲۵٪ می‌باشد. برای وصله‌ی اول مقادیر بردارهای گرهی به صورت زیر می‌باشد:

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.1111, 0.2222, \dots, 0.7777, 0.8888, 1, 1, 1\}$$

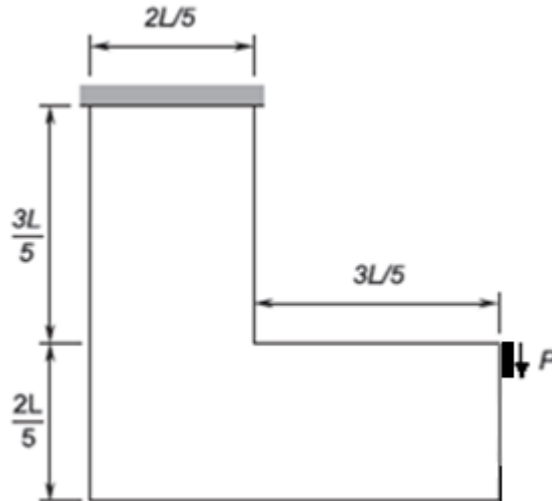
$$\eta = \{0, 0, 0, 0.0416, 0.08333, \dots, 0.8571, 0.9285, 1, 1, 1\}$$

همچنین برای وصله‌ی دوم مقادیر بردارهای گرهی به صورت زیر خواهد بود.

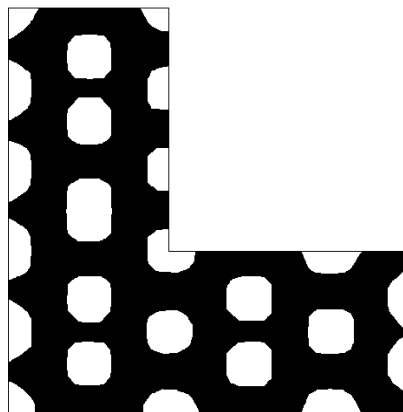
$$\xi = \{0, 0, 0, 0.0714, 0.1428, \dots, 0.8571, 0.9285, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 0.1111, 0.2222, \dots, 0.7777, 0.8888, 1, 1, 1\}$$

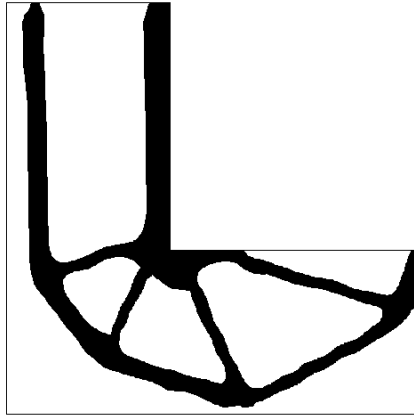
توپولوژی بهینه و نمودار روند همگرایی این مثال در ادامه آورده شده است.



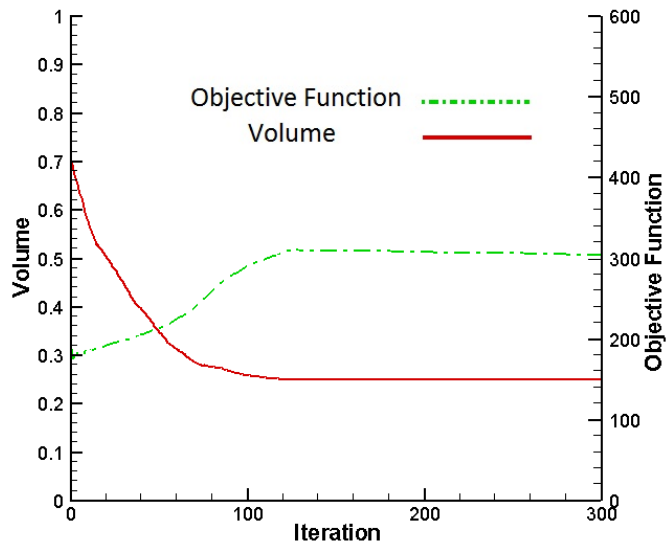
شکل (۶-۴۰) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر ال شکل



شکل (۶-۴۱) توپولوژی اولیه‌ی به کار رفته برای حل



شکل (۴۲-۶) طرح بهینه‌ی تیر ال شکل با قید حجم ۲۵ درصد



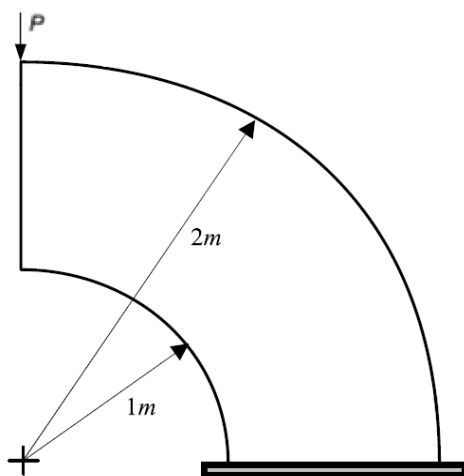
شکل (۴۳-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر ال شکل

مثال (۱)

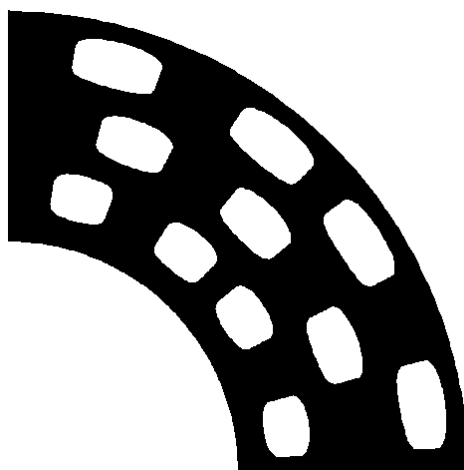
در این مثال یک تیر منحنی شکل مورد بررسی قرار گرفته است. کل دامنه با ۳۳۶ نقطه‌ی کنترلی مدل شده، همچنین قید حجم ۳۵٪ می‌باشد. بردارهای گرهی برای راستای I و راستای S برابر مقادیر زیر در نظر گرفته شده است.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.0526, 0.1052, \dots, 0.8947, 0.9473, 1, 1, 1\}$$

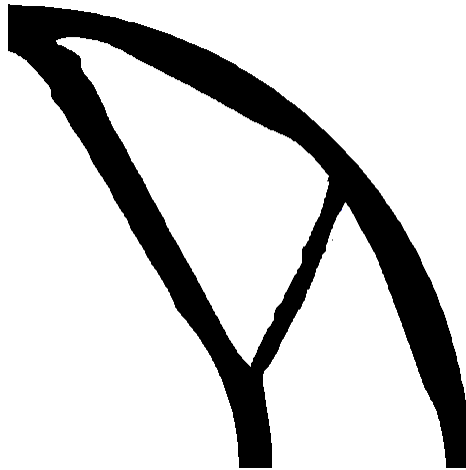
$$\eta = \{0, 0, 0, 0.0714, 0.1428, \dots, 0.8571, 0.9285, 1, 1, 1\}$$



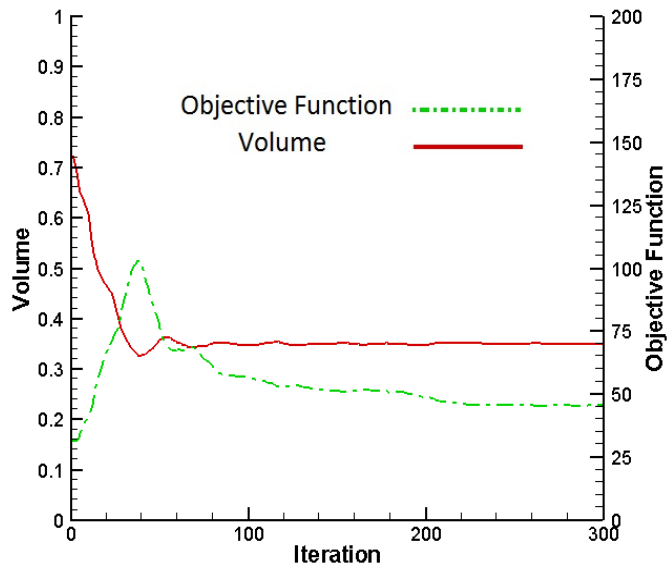
شکل (۴۴-۶) شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر منحنی شکل



شکل (۴۵-۶) توپولوژی اولیه‌ی به‌کار رفته برای حل



شکل (۴۶-۶) طرح بهینه‌ی تیر منحنی شکل با قید حجم ۳۵ درصد



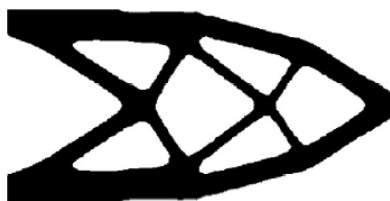
شکل (۴۷-۶) نمودار روند همگرایی قید حجم و تابع هدف تیر منحنی شکل

۲-۶- بررسی عملکرد روش پیشنهادی

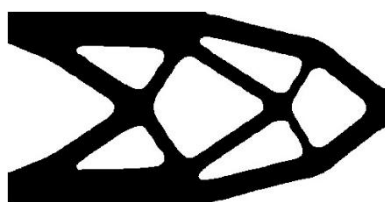
در این قسمت به منظور نمایش عملکرد روش پیشنهادی در این پایان نامه با پژوهش انجام شده در مرجع [۳۵]، مقایسه‌ای آورده شده است. در هر دو پژوهش، تابع هدف مسئله‌ی بهینه‌سازی انرژی کرنشی و قید مسئله حجم می‌باشد. در مثال اول تیر کنسول کوتاهی که بار واحد به وسط ارتفاعش وارد می‌شود مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این مقایسه به صورت خلاصه در جدول (۲-۶) آورده شده است.

جدول (۲-۶) مقایسه‌ی نتایج برای تیر کنسول که بار به وسط ارتفاعش وارد می‌شود

محقق	تعداد نقاط کنترلی	قید حجم	Compliance
مرجع [۳۵]	۱۳۲۶	۰,۴۵	۶۴,۴
پژوهش موجود (مثال ۱)	۸۶۱	۰,۴۵	$2 * 33,73 = 67,46$
پژوهش موجود (مثال ۲)	۲۳۱	۰,۴۵	$2 * 37,41 = 74,82$



شکل (۴۸-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول مرجع [۳۵] با ۱۳۲۶ نقطه کنترلی



شکل (۴۹-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول پژوهش موجود با ۸۶۱ نقطه کنترلی (مثال ۱)



شکل (۵۰-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول پژوهش موجود با ۲۳۱ نقطه کنترلی (مثال ۲)

به منظور مقایسه‌ای دیگر، نتایج مسئله‌ی بهینه‌سازی انرژی کرنشی تحت قید حجم برای تیر کنسول کوتاهی که بار واحد به پایین ارتفاعش وارد می‌شود، آورده شده است. نتایج این مقایسه به صورت خلاصه در جدول (۳-۶) آورده شده است.

جدول (۳-۶) مقایسه‌ی نتایج برای تیر کنسول که بار به پایین ارتفاعش وارد می‌شود

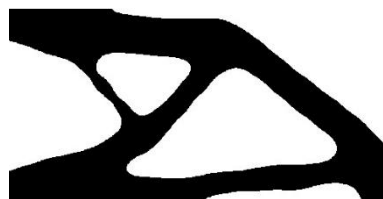
Compliance	قید حجم	تعداد نقاط کنترلی	محقق
۸۴	۰,۴۵	۱۳۲۶	مرجع [۳۵]
$۲*۳۷,۳۷=۷۴,۷۴$	۰,۴۵	۸۶۱	پژوهش موجود (مثال ۳)
$۲*۳۸,۱۲=۷۶,۲۴$	۰,۴۵	۲۳۱	پژوهش موجود (مثال ۴)



شکل (۵۱-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول مرجع [۳۵] با ۱۳۲۶ نقطه کنترلی



شکل (۵۲-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول پژوهش موجود با ۸۶۱ نقطه کنترلی (مثال ۳)



شکل (۵۳-۶) طرح بهینه‌ی تیر کنسول پژوهش موجود با ۲۳۱ نقطه کنترلی (مثال ۴)

فصل هفتم

نتایج و پیشنهادات

۷-۱- مقدمه

در فصل های قبلی این پایان نامه، به بررسی کامل روند تحلیل ایزوژئومتریکی مسائل تنش مسطح و فرمول بندی حاکم بر آن پرداختیم. سپس مسائل بهینه سازی توپولوژی سازه ها با استفاده از روش مجموعه ی سطوح تراز و آنالیز حساسیت مسئله بهینه سازی انرژی کرنشی را مورد بررسی قرار دادیم. در نهایت برای بررسی صحت و کارایی الگوریتم و روش های استفاده شده و همین طور برنامه ی کامپیوتری تهیه شده، مثال های متعددی را مورد مطالعه قرار دادیم. در این فصل، نتایج نهایی حاصل از این مطالعات را به صورت خلاصه بیان خواهیم کرد. در پایان نیز پیشنهادهایی جهت توسعه ی برنامه ی نوشته شده برای دانشجویان علاقه مند در این زمینه ارائه خواهد شد.

۷-۲- نتایج

در این پژوهش از تحلیل ایزوژئومتریکی برای بهینه سازی توپولوژی سازه استفاده شده است. تابع مجموعه ی سطوح تراز توسط توابع پایه ای نریز که برای تحلیل سیستم نیز به کار رفته، گسسته سازی می شود. مقادیر تابع مجموعه ی سطوح تراز به عنوان متغیر طراحی مسئله ی بهینه سازی در نظر گرفته شده است. در هر مرحله از بهینه سازی متغیر طراحی در فضای پارامتریکی و توسط حل معادله ی همیلتون-ژاکوبی به روزرسانی می شود. حل معادله ی همیلتون-ژاکوبی در فضای پارامتریکی این امکان را به ما می دهد که از نقاط کنترلی کمتری در مدل سازی مسئله استفاده کنیم، هر چند که کاهش زیاد تعداد نقاط کنترلی باعث تغییر در توپولوژی نهایی برخی از مسائل می شود که می توان نتیجه گیری کرد که همواره برای مدل سازی هندسه و تحلیل سازه به یک حداقل تعداد نقطه ی کنترلی که دامنه ی مسئله را به طور کامل پوشش دهد، نیاز است. در کارهای گذشته به دلیل استفاده از شبکه ی نقاط کنترلی به عنوان شبکه بندی تفاضل محدود برای حل معادله ی همیلتون-ژاکوبی، ملزم به استفاده از تعداد نقاط کنترلی بیشتری برای حفظ دقت حل مسئله بودند که این مسئله با حل معادله همیلتون-ژاکوبی در فضای پارامتری از بین رفته است. در روش ارائه شده در هر مرحله برای محاسبه

نقاط کنترلی به دلیل استفاده از روش‌های تقریب مقداری خطا وارد محاسبات می‌شود که این خطا را می‌توان با استفاده از روش‌های اشاره شده در فصل دوم هنگام انتخاب بردار گرهی منتاظر با نقاط روی منحنی یا سطح مورد نظر به حداقل رساند.

استفاده از روش تحلیل آیزوژئومتریک به جای تحلیل اجزا محدود به دلیل تعریف هندسه توسط توابع نریز باعث ایجاد مرز هموارتری در سازه می‌شود. از دیگر ویژگی‌های روش آیزوژئومتریک نسبت به روش اجزای محدود می‌توان به امکان مدل‌سازی هندسه و توپولوژی سازه، با استفاده از تعداد نقاط کنترلی کمتری نسبت به تعداد گره مورد نیاز در روش اجزای محدود به دلیل انعطاف‌پذیری اسپلاین‌ها اشاره کرد که باعث کاهش حجم محاسبات می‌شود.

در روش آیزوژئومتریک نقاط کنترلی سطوح حل، لزوماً بر هندسه و فیزیک حل منطبق نیستند و بنابراین، دو مفهوم شبکه‌ی کنترلی و فیزیکی در این روش مطرح است. نقاط کنترلی، شبکه‌ی کنترلی را ایجاد می‌کنند. یکی دیگر از مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های متداول که از روش اجزای محدود استفاده می‌کنند؛ حذف مرحله‌ی ساخت شبکه‌ی اجزای محدود در حین مراحل بهینه‌سازی است. این کار سبب کاهش قابل‌ملاحظه‌ی حجم محاسبات به‌ویژه در مسائل سه‌بعدی می‌شود.

با استفاده از نریزها تعریف هندسه‌ی مسئله با دقت بسیار بالا انجام می‌شود، لذا می‌توان با استفاده از این مزیت شکل مرزها را به‌صورت مناسبی و با دقت بالا مدل کرد. ضمن اینکه به کمک نریزها امکان مدل‌سازی اشکالی همچون دایره و بیضی در حالت دوبعدی و کره و بیضی‌گون در حالت سه‌بعدی با دقت بالایی وجود دارد. بدیهی است در روش اجزای محدود برای تولید این نوع اشکال بایستی از تعداد المان‌های زیاد برای تقریب هندسه استفاده نمود که سبب افزایش هزینه‌ی محاسبات خواهد شد.

۷-۳- پیشنهادات

در این پایان نامه به توسعه‌ی مدل بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها با روش مجموعه‌ی سطوح تراز و روش تحلیل ایزوژئومتریك پرداخته شده که در آن انرژی کرنشی به‌عنوان تابع هدف و حجم به‌عنوان قید طراحی در نظر گرفته شده است. در ادامه پیشنهادهایی در جهت انجام فعالیت‌های آتی مطرح می‌شود که عبارتند از:

- بررسی وزن سازه به عنوان تابع هدف تحت قید تنش با توجه به روش ارائه شده در این پایان نامه
- بررسی اثر همزمان وزن و انرژی کرنشی تحت قید تنش به‌عنوان یک مسئله‌ی بهینه‌سازی چند هدفه
- استفاده از توابع پایه تی-اسپلاین در تحلیل ایزوژئومتریك به منظور تولید هندسه با استفاده از شبکه‌ی کنترلی نامنظم

1. Bendsøe M. P. and Sigmund O. (2003), "Topology Optimization; Theory, Methods and Applications", Springer, Germany, pp. 1-84.
2. Kagan P., Fischer A. and Bar-Yoseph P. Z. (1998), "New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 41, 3, pp. 435-458.
3. Hollig K., Reif U. and Wipper J. (2001), "Weighted extended B-Spline approximation of dirichlet problems", Siam J. Numer. Anal., 39, 2, pp. 442-462.
4. Kagan P., Fischer A. and Bar-Yoseph P. Z. (2003), "Mechanically based models: adaptive refinement for B-Spline finite element", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 57, 8, pp. 1145-1175.
5. Hughes T. J. R., Cottrell J. A. and Bazilevs Y. (2005), "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 194, 39-41, pp. 4135-4195.
6. Bazilevs Y. Beirao Da Veiga L., Cottrell J. A., Hughes T. J. R. and Sangalli G. (2006), "Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes", Math. Models Methods Appl. Sci., 16, 7, pp. 1031-1090.
7. Cottrell J. A., Reali A., Bazilevs Y., and Hughes T. J. R. (2006), "Isogeometric analysis of structural vibrations", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 195, pp. 5257-5296.
8. Sethian JA, Wiegmann A., 2000, Structural boundary design via level set and immersed interface methods. Journal of Computational Physics, Vol.163 489-528.
9. Osher SJ, Santosa F., 2001, Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints I. Frequence of a two density inhomogeneous drum. Journal of Computational Physics, Vol. 171 272-288.
10. Piegl L. and Tiller W. (1995), "The NURBS Book", 2th ed., Springer, Germany, pp. 1-138.
11. T.J.R. Hughes, J. Cottrel and Y. Bazilevs (2009), "Isogeometric Analysis Toward integration of CAD and FEA", Wiley.
12. Christensen P. W. and Klarbring A. (2009), "An Introduction to Structural Optimization", Springer, Sweden, pp. 1-7.

13. Fleury C., Braibant V., 1986, Structural optimization - a new dual method using mixed variable, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 23,409-428
14. Hassani B. and Hinton E. (1998), “Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software”, Springer, London, pp. 1-7.
15. Arora J. (2011), “Introduction to optimum design”, 3th ed.,
16. Belytschko T, Xiao SP and Parimi C., 2003, Topology optimization with implicit functions and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol., 57 1177-1196.
17. Osher S., Fedkiw R. 2002, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, New York: Springer, Verlag.
18. Sussman M., Smereka P., Osher S. 1994; A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *Comput. Phys.*, Vol. 114, No. 1, pp. 146–159.
19. Bendsoe, M.P.; Kikuchi, N. 1988, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2, 197–224.
20. Eschenauer HA, Olhoff N., 2001, Topology optimization of continuum structures: A review, *Applied Mechanics Review*, Vol. 54 331-390.
21. Rozvany GIN, Zhou M and Birker T., 1992, Generalized shape optimization without homogenization. *Structural Optimization*, Vol. 4 250-252.
22. Bendsoe, M.P. 1989, Optimal shape design as a material distribution problem, *Struct. Optim.* 1, 193–202.
23. Sethian JA, Wiegmann A., 2000, Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *Journal of Computational Physics*, Vol.163 489-528.
24. Osher SJ, Santosa F., 2001, Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints I. Frequence of a two density inhomogeneous drum. *Journal of Computational Physics*, Vol. 171 272-288.
25. Allaire G, Jouve F and Toader AM., 2002, A level set method for shape optimization. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie I*, Vol. 334 1125-1130.
26. Wang MY, Wang XM and Guo DM., 2003, A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192 227-246.

27. Wang X, Wang MY and Guo D., 2004, Structural shape and topology optimization in a level-set framework of region representation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27 1-19.
28. Wang MY, Wang XM., 2004, “Color” level sets: A multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193 469 – 496.
29. Petersen NL., 2000, Maximization of Eigenvalues using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20 2-12.
30. de Ruiter MJ, van Keulen F., 2004, Topology optimization using a topology description function, *Struct Multidisc Optim.*
31. Luo J., Luo Z., Chen L., Tong L., Wang M.Y. 2008, A semi-implicit level set method for structural shape and topology optimization, *Journal of Computational Physics*, 227:5561–5581.
32. Tavakkoli S.M., Hassani B., Ghasemnejad H. 2013, ISOGEOMETRIC TOPOLOGY OPTIMIZATION OF STRUCTURES BY USING MMA, *Int. J. Optim. Civil Eng*; 3(2):313-326.
33. Xu Guo, Wei Sheng Zhang, Michael Yu Wang, Peng Wei (2011); Stress-related topology optimization via level set approach, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 3439–3452.
34. Hélio Emmendoerfer Jr., Fancello EA, Barcellos CS. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. *Int. J. Numer. Meth. Engng* (2014); DOI: 10.1002/nme.4676.
35. Jahangiry, H. A. and Tavakkoli, S. M. (2017), “An isogeometrical approach to structural level set topology optimization,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 319, pp. 240–257, Jun..
36. Allaire G., Gournay F., Jouve F., Toader A.M. 2004; Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method, Internal Report 555, Ecole Polytechnique, France.
37. Zafer Gurdal, R. T. Haftka Raphael T. Haftka (1991), “Elements of Structural Optimization”, 3th ed.
38. S.Wang, M.Y.Wang (2006), Radial basis functions and level set method for structural topology optimization, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 65 47 2060–2090.

Abstract

Topology optimization is one of the most important kinds of structural optimization problems, aims to find the optimum distribution of materials in a certain domain. During the last decade, two general approaches on topology optimization problems have been developed. In more common approach, the compliance or energy of deformation is minimized for a given amount of materials. The other approach is to minimize the weight of structures under stress or displacement constraints.

The purpose of this research is to provide a new method for improving the performance of topology optimization of structures by using isogeometric analysis. To receive this goal, less control points have been used to make level set function. The Hamilton–Jacobi equation is also numerically solved in the parametric space of the spline basis functions. In the level set method, the topology of structure is introduced by a higher-order implicit function over the domain that any changes in this function during the optimization process can easily model boundaries. Zero level provides the boundaries of the structure. The positive values of this function indicate the presence of materials and the negative values indicate the areas empty of materials in the design domain. In this research, the same basis functions are employed for approximating the level set function, deformations and geometry modeling. At the end, several examples are demonstrated to show the performance of the proposed method.

Keywords: structural topology optimization, Level set method, Isogeometric Analysis, Parametric space



Shahrood University of Technology

Faculty of Civil Engineering

M.Sc. Thesis in Structural Engineering

*A Further Development on Isogeometrical
Level set topology optimization*

By: S. A. Taqavi Shahri

Supervisor:

Dr. S. M. Tavakkoli

Date: September 2018