

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی ژئوتکنیک

# مدل سازی عددی تغییر شکل های بزرگ و گسیختگی در خاک با استفاده از روش SPH

نگارنده: امیر حاجی سلیمی

استاد راهنما

دکتر رضا نادری

شهریور ۱۳۹۵





## تقدیم اثر

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام‌بخش  
آلام زمینی‌ام است

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پرمهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان مهربان مادرم

به همراهان همیشگیم، برادران و خواهر عزیزم،

که هرچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره‌ای از  
دریای بی‌کران مهربانیتان را سپاس نتوانم بگویم.

## تقدیم به همسر

به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و معرفت که محیطی سرشار از

سلامت و امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است

امروز هستی‌ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما

ره‌آوردی گران‌سنگ‌تر از این ارزان‌نداشتم تا به خاک پایتان نثار کنم،

باشد که حاصل تلاشم نسیم گونه غبار خستگی‌تان را بزداید.

بوسه بر دستان پرمهرتان

## تشکر و قدردانی

سپاس پروردگار یکتا را که در همه احوال مشمول لطف و رحمتش هستیم، پروردگاری که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و همواره ما را از مواهب ارزشمند تفکر و پژوهش بهره‌مند ساخت.

سپاس از استاد گرامی و فرهیخته جناب آقای دکتر رضا نادری که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننموده‌اند و بی‌شک بدون راهنمایی‌های ارزشمندشان انجام این پژوهش، امری ناممکن بود.

سپاس و تقدیر از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر امیر بذرافشان مقدم و جناب آقای دکتر سیدمهدی توکلی که زحمت داوری پایان‌نامه اینجانب را متقبل شدند.

و با تشکر خالصانه از تمامی کسانی که در مراحل انجام این تحقیق، انگیزه‌بخش بوده‌اند و به‌نحوی مرا در به پایان رساندن پژوهش یاری و همراهی کرده‌اند. باشد که این کمترین سپاس‌گوی بخش کوچکی از مهربانی‌شان باشم.

## تعهد نامه

اینجانب امیر حاجی سلیمی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران - ژئوتکنیک دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مدل سازی عددی تغییر شکل های بزرگ و گسیختگی در خاک با استفاده از روش SPH تحت راهنمایی جناب

آقای دکتر رضا نادری متعهد می شوم

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

### تاریخ

### امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

تئوری‌های تغییرشکل محدود در آنالیز تغییرشکل‌های مرسوم انواع مصالح بطور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش اجزای محدود (FEM) اغلب بعنوان یکی از روش‌های عددی در مدل‌سازی‌های کامپیوتری استفاده می‌شود. با این حال، مدل‌سازی گسیختگی و تغییرشکل‌های بزرگ برای روش FEM کار پیچیده‌ای است، زیرا که این روش در طول مدل‌سازی دچار انحراف مش شدید می‌شود.

اخیراً، روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) کاربرد زیادی در مدل‌سازی عددی پیدا کرده و خود را بعنوان یک روش عددی استاندارد و جایگزینی قدرتمند برای روش اجزای محدود در مسائل مربوط به تغییرشکل بزرگ و گسیختگی نشان داده است. روش SPH یک روش ذره‌ای برپایه توصیف لاگرانژی بوده و یکی از روش‌های عددی امیدبخش در زمینه مهندسی ژئوتکنیک محسوب می‌شود. از این رو، این روش می‌تواند کل پروسه تغییرشکل خاک را از نواحی دارای کرنش کوچک تا نواحی که دچار تغییر شکل بزرگ می‌شوند، نشان دهد.

در این پایان‌نامه، ابتدا، تئوری پایه‌ای و فرمول‌بندی روش SPH برپایه مکانیک سیالات آورده شده است. سپس فرمول‌بندی جامداتی SPH را که از آن بمنظور توسعه کد هیدرودینامیکی استفاده کرده‌ایم، بیان می‌شود. این کد شامل مدل ساختاری الاستو-پلاستیک برای خاک و مدلی برپایه معادله ناویر-استوکس برای آب می‌باشد. همچنین، از مدل دراگر-پراگر بمنظور توصیف رفتار الاستو-پلاستیک خاک در کد SPH استفاده شده است. تمامی پارامترهای استفاده شده دارای مفهوم فیزیکی در مکانیک خاک بوده و براحتی توسط روابط مرسوم مکانیک خاک قابل محاسبه هستند. در پایان، دو مثال عددی از شیروانی با خاک چسبنده و یک مثال برای گسیختگی شیروانی با مصالح دانه‌ای بمنظور کنترل کد توسعه‌یافته SPH در مدل‌سازی تغییرشکل بزرگ و گسیختگی شیروانی آنالیز شده است. همچنین بمنظور اعتبارسنجی بیشتر این کد، سطوح گسیختگی تشکیل شده در شیروانی‌ها با خروجی‌های نرم‌افزار Geo-Studio نیز مقایسه شد. مشاهده گردید که سطوح لغزش بحرانی ایجاد شده در خروجی‌های گرافیکی کرنش پلاستیک منطقی می‌باشند. بر اساس خروجی‌های گرافیکی برخی متغیرها همانند تغییرشکل، سرعت، تنش و کرنش پلاستیک اثربخشی کد SPH را در مسائل

مهندسی ژئوتکنیک نشان داد. تطبیق خوبی بین نتایج مدل سازی و راه حل های تئوری بدست آمد. بنابراین کد جامداتی توسعه یافته SPH می تواند تغییر شکل های بزرگ و گسیختگی خاک را با دقت بالایی مدل سازی کرده و در حل طیف وسیعی از مسائل کاربردی مهندسی ژئوتکنیک مورد استفاده قرار گیرد.

**واژگان کلیدی:** مدل سازی عددی؛ تغییر شکل بزرگ؛ روش هیدرودینامیک ذرات هموار؛ گسیختگی شيروانی؛ روش های بدون شبکه؛ مدل الاستو-پلاستیک

# فهرست مطالب

فصل ۱ مقدمه.....	۱
۱-۱- کلیات .....	۲
۱-۲- ضرورت انجام تحقیق .....	۳
۱-۳- هدف انجام تحقیق .....	۴
۱-۴- سازمان‌بندی پایان‌نامه .....	۴
فصل ۲ روش‌های عددی بدون شبکه .....	۷
۲-۱- مقدمه .....	۸
۲-۲- محدودیت‌های روش اجزا محدود .....	۸
۲-۳- تفاوت روش‌های بدون شبکه با روش اجزا محدود .....	۹
۲-۴- انواع روش‌های پر کاربرد بدون شبکه .....	۱۰
۲-۴-۱- روش اجزای پراکنده (DEM) .....	۱۰
۲-۴-۲- روش بدون شبکه گالرکین (EFG) .....	۱۱
۲-۴-۳- روش المان‌های محدود بدون شبکه‌بندی (MFEM) .....	۱۲
۲-۴-۴- روش بدون شبکه پتروگالرکین (MLPG) .....	۱۲
۲-۴-۵- روش درون‌یاب نقطه‌ای (PIM) .....	۱۳
۲-۴-۶- روش المان طبیعی (NEM) .....	۱۳
۲-۴-۷- روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) .....	۱۳
۲-۴-۸- روش تکثیر ذرات (RKPM) .....	۱۴
۲-۴-۹- روش حرکت ذرات نیمه ضمنی (MPS) .....	۱۴
۲-۵- مزایا و معایب روش SPH .....	۱۷
۲-۶- موارد کاربرد SPH .....	۲۱
۲-۶-۱- شکست موج و مهندسی ساحل .....	۲۲
۲-۶-۲- روانگرایی .....	۲۴
۲-۶-۳- تراوش .....	۲۴
۲-۶-۴- فرسایش دینامیکی .....	۲۵
۲-۶-۵- انفجارهای زیرزمینی .....	۲۶
۲-۶-۶- شکست سنگ .....	۲۸
۲-۶-۷- گسیختگی شیروانی و لغزش زمین .....	۲۹
فصل ۳ روش هیدرودینامیک ذرات هموار .....	۳۵

۳۶	..... ۱-۳- مفاهیم اولیه SPH
۳۸	..... ۲-۳- تقریب SPH
۳۹	----- ۱-۲-۳- تقریب کرنلی
۴۱	----- ۲-۲-۳- تقریب ذرات
۴۲	..... ۳-۳- مدل هیدرودینامیکی SPH
۴۲	----- ۱-۳-۳- معادلات حاکم
۴۳	----- ۲-۳-۳- فرمول بندی SPH برای معادلات حالت
۴۴	----- ۳-۳-۳- مدل ساختاری سیال نیوتنی
۴۵	----- ۴-۳-۳- فرمول بندی SPH برای معادله پواسون
۴۹	<b>..... فصل ۴ روش هیدرودینامیک ذرات هموار در جامدات</b>
۵۰	..... ۱-۴- معادلات حاکم
۵۰	----- ۱-۱-۴- تقریب SPH معادله پیوستگی
۵۱	----- ۲-۱-۴- تقریب SPH معادله مومنتوم
۵۳	..... ۲-۴- مدل ساختاری الاستو-پلاستیک
۵۳	----- ۱-۲-۴- روابط تنش-کرنش
۵۸	----- ۲-۲-۴- نرخ تنش جاومن
۵۹	..... ۳-۴- جنبه های عددی مدل SPH
۵۹	----- ۱-۳-۴- تنظیمات اولیه
۶۰	----- ۲-۳-۴- الگوریتم جستجوی ذرات همسایه
۶۲	----- ۳-۳-۴- تابع کرنل
۷۰	----- ۴-۳-۴- رفتار مرز سطح آزاد
۷۰	----- ۵-۳-۴- میانگین سرعت میدانی
۷۱	----- ۶-۳-۴- رفتار مرز جامد
۷۳	----- ۷-۳-۴- محاسبه شتاب
۷۳	----- ۸-۳-۴- روش ادغام
۷۴	----- ۹-۳-۴- خروجی محاسبات
۷۴	..... ۴-۴- خلاصه
۷۷	<b>..... فصل ۵ مدل سازی عددی در مهندسی ژئوتکنیک</b>
۷۸	..... ۱-۵- مقدمه
۷۸	..... ۲-۵- فلوجارت SPH
۸۰	..... ۳-۵- زبان برنامه نویسی
۸۰	..... ۴-۵- نرم افزارهای بصری



۵-۵- مدلسازی عددی..... ۸۱

۵-۵-۱ مدلسازی شیروانی خاکی ۱ ----- ۸۱

۵-۵-۲ مدلسازی شیروانی خاکی ۲ ----- ۹۰

۵-۵-۳ مدلسازی شیروانی خاکی ۳ ----- ۹۸

۵-۶- اعتبارسنجی ..... ۱۰۷

۵-۷- محدودیت‌ها ..... ۱۰۹

## فصل ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهاد ..... ۱۱۱

۶-۱- خلاصه‌ای از پایان‌نامه ..... ۱۱۲

۶-۲- نتایج ..... ۱۱۲

۶-۳- پیشنهادها برای مطالعات آتی ..... ۱۱۳

# فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ نمونه‌ای از گسیختگی شیروانی خاکی ..... ۲
- شکل ۱-۲ مقایسه روش اجزا محدود و روش بدون شبکه ..... ۱۰
- شکل ۲-۲ توابع شکل برخی روش‌های عددی ..... ۱۶
- شکل ۳-۲ مش‌بندی ترکیبی ذرات SPH و المان‌های FEM ..... ۲۷
- شکل ۱-۳ مفهوم روش SPH ..... ۳۸
- شکل ۱-۴ الگوریتم روش لیست همسایگی سلول مرتبط ..... ۶۱
- شکل ۲-۴ الگوریتم روش لیست همسایگی ورلت ..... ۶۲
- شکل ۳-۴ تابع زنگوله شکل و مشتق مرتبه اول آن ..... ۶۳
- شکل ۴-۴ تابع گوسی و مشتق مرتبه اول آن ..... ۶۴
- شکل ۵-۴ تابع اسپیلاین مکعبی و مشتق مرتبه اول آن ..... ۶۵
- شکل ۶-۴ تابع بی-اسپیلاین و مشتق مرتبه اول آن ..... ۶۶
- شکل ۷-۴ تابع کوارتیک و مشتق مرتبه اول آن ..... ۶۷
- شکل ۸-۴ تابع کوینتیک و مشتق مرتبه اول آن ..... ۶۸
- شکل ۹-۴ تابع کوادراتیک و مشتق مرتبه اول آن ..... ۶۸
- شکل ۱۰-۴ تابع سوپرگوسی و مشتق مرتبه اول آن ..... ۶۹
- شکل ۱۱-۴ تقریب ذره SPH برای فضای یک‌بعدی ..... ۷۱
- شکل ۱-۵ فلوجارت اصلی برنامه هیدرودینامیکی SPH ..... ۷۹
- شکل ۲-۵ هندسه و شرایط مرزی شیروانی خاکی ۱ ..... ۸۲
- شکل ۳-۵ توزیع تنش افقی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۱ ..... ۸۴
- شکل ۴-۵ توزیع تنش عمودی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۱ ..... ۸۵
- شکل ۵-۵ توزیع تنش برشی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۱ ..... ۸۶
- شکل ۶-۵ توزیع سرعت در جهت افقی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۱ ..... ۸۷
- شکل ۷-۵ توزیع کرنش پلاستیک در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۱ ..... ۸۸

- شکل ۵-۸ تغییر شکل نهایی شیروانی پس از گسیختگی شیروانی خاکی ۱ ..... ۸۹
- شکل ۵-۹ هندسه و شرایط مرزی شیروانی خاکی ۲ ..... ۹۰
- شکل ۵-۱۰ توزیع تنش عمودی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۲ ..... ۹۲
- شکل ۵-۱۱ توزیع تنش افقی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۲ ..... ۹۳
- شکل ۵-۱۲ توزیع تنش برشی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۲ ..... ۹۴
- شکل ۵-۱۳ توزیع سرعت در جهت افقی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۲ ..... ۹۵
- شکل ۵-۱۴ توزیع کرنش پلاستیک در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۲ ..... ۹۶
- شکل ۵-۱۵ تغییر شکل نهایی شیروانی پس از گسیختگی شیروانی خاکی ۲ ..... ۹۷
- شکل ۵-۱۶ هندسه و شرایط مرزی شیروانی خاکی ۳ ..... ۹۸
- شکل ۵-۱۷ توزیع تنش برشی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۳ ..... ۱۰۱
- شکل ۵-۱۸ توزیع تنش افقی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۳ ..... ۱۰۲
- شکل ۵-۱۹ توزیع تنش عمودی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۳ ..... ۱۰۳
- شکل ۵-۲۰ توزیع سرعت در جهت افقی در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۳ ..... ۱۰۴
- شکل ۵-۲۱ توزیع کرنش پلاستیک در زمان‌های مختلف برای شیروانی خاکی ۳ ..... ۱۰۵
- شکل ۵-۲۲ بردار سرعت در جهت افقی در ثانیه دوم برای شیروانی خاکی ۳ ..... ۱۰۶
- شکل ۵-۲۳ تغییر شکل نهایی شیروانی پس از گسیختگی شیروانی خاکی ۳ ..... ۱۰۶
- شکل ۵-۲۴ مقایسه سطوح گسیختگی حاصل از نرم‌افزار Geo-Studio و کد SPH ..... ۱۰۸

## فهرست جداول

- جدول ۱-۲ دسته‌بندی روش‌های بدون شبکه ..... ۱۶
- جدول ۱-۵ پارامترهای محاسباتی بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۱ ..... ۸۳
- جدول ۲-۵ خواص فیزیکی خاک بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۱ ..... ۸۳
- جدول ۳-۵ پارامترهای محاسباتی بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۲ ..... ۹۱
- جدول ۴-۵ خواص فیزیکی خاک بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۲ ..... ۹۱
- جدول ۵-۵ پارامترهای محاسباتی بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۳ ..... ۹۹
- جدول ۶-۵ خواص فیزیکی خاک بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۳ ..... ۹۹

# فصل ۱ مقدمه

## ۱-۱- کلیات

در سال‌های اخیر مسائل ژئوتکنیکی بخاطر پدیده‌های طبیعی که در اطراف ما رخ می‌دهد اهمیت بسزایی پیدا کرده است. وقوع پدیده‌هایی همچون گسیختگی شیروانی‌ها، ریزش ترانشه‌ها، گسیختگی فونداسیون سازه‌ها و... خسارت‌های مالی و جانی چشمگیری برجا گذاشته است. بهمین خاطر بررسی این‌گونه مسائل که از زیرمجموعه‌های مهندسی ژئوتکنیک محسوب می‌شود امری واجب تلقی می‌شود. شکل ۱-۱ نمونه‌ای از یک گسیختگی شیروانی خاکی را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱ نمونه‌ای از گسیختگی شیروانی خاکی

اتفاقاتی از این دست، محققان علم ژئوتکنیک را بر آن داشت که روش‌های مناسبی برای تحلیل این‌گونه مسائل و پیش‌بینی اتفاق‌ها ارائه بدهند. از جمله این روش‌ها، روش آزمایشگاهی است که در آن با مدل‌سازی بزرگ مقیاس پدیده‌ها در آزمایشگاه و بررسی و آنالیز خروجی‌ها همراه است. این روش در برخی موارد بخاطر خطاهای آزمایشگاهی و عدم توانایی در شبیه‌سازی کامل مدل واقعی در آزمایشگاه دارای اشتباهاتی می‌باشد. همچنین تهیه دستگاه‌هایی که بتوان با استفاده از آن‌ها این پدیده‌ها را مدل کرد بسیار هزینه‌بر خواهد بود. بهمین خاطر پژوهشگران تمایل به استفاده از نرم‌افزارهای شبیه‌ساز ژئوتکنیکی و همچنین روش‌های عددی مناسب پیدا کردند.

روش اجزای محدود (FEM) یکی از روش‌های عددی پرکاربرد و توانمند در علم مهندسی طی سال‌های اخیر محسوب می‌شود. این روش در علوم مختلف مهندسی از جمله مکانیک جامدات استفاده زیادی داشته است. در تقسیم‌بندی روش‌های عددی، روش اجزای محدود جزء روش‌های همراه با شبکه

محسوب می‌شود. این بدان معنی است که با ایجاد شبکه در مدل کامپیوتری پدیده‌ها، رفتار مدل را تحت بارگذاری‌های متعدد براحتی پیش‌بینی می‌کند. اما این روش در برخی از مسائل مهندسی ژئوتکنیک جایگاهی ندارد. دلیل آن هم این است که پدیده‌هایی که در ژئوتکنیک رخ می‌دهد اغلب دارای تغییرشکل‌های بزرگ هستند. گسیختگی شیروانی‌های خاکی، تراوش، گسیختگی خاک بدلیل روانگرایی، زمین لغزش و... از جمله مسائلی هستند که در آن خاک دچار جابجایی و تغییرشکل‌های چشمگیری می‌شوند. همین تغییرشکل بزرگ باعث انحراف و اعوجاج شدید مش در روش FEM می‌شود. در نتیجه در طول مدل‌سازی نیازمند مش‌بندی مجدد در گام‌های زمانی مختلف می‌باشد که این امر برنامه کامپیوتری را دچار پیچیدگی کرده و از اعتبار نتایج نیز می‌کاهد. بمنظور رفع این مشکل، می‌بایست از روش‌های بدون شبکه استفاده نمود. در روش‌های بدون شبکه، دیگر مش وجود ندارد و از یکسری گره برای تقریب متغیرها استفاده می‌شود. روش‌های بدون شبکه برپایه تقریب نقاط استوار است که باعث عدم وابستگی مدل به شبکه می‌شود. مزیت این روش‌ها در مقایسه با روش مبتنی با شبکه FEM، این است که بدلیل عدم وجود شبکه دیگر انحراف مش در طول مدل‌سازی نداریم که این امر دقت نتایج را بالا برده و از هزینه‌های محاسباتی بشدت می‌کاهد.

## ۱-۲- ضرورت انجام تحقیق

در بین روش‌های بدون شبکه، اخیراً روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) محبوبیت زیادی در مدل‌سازی مسائلی که دارای تغییرشکل‌های بزرگ هستند پیدا کرده است. ابتدا این روش بطور جدی در مدل‌سازی مسائل مکانیک سیالات همانند شکست موج، روگذری موج، اندرکنش جریان و موج و... مورد استفاده قرار گرفت. اساس این روش در مباحث سیالاتی حل معادلات ناویر-استوکس می‌باشد. محققان و گروه‌های تحقیقاتی بسیاری، کد مربوط به این پدیده‌ها را توسعه و آنرا بصورت عمومی و رایگان در اختیار سایر محققین علاقمند قرار داده‌اند. محققین دانشگاه منچستر از جمله گروه‌هایی هستند که کد سیالاتی SPH را تحت عنوان SPHysics در اختیار پژوهش‌گران بصورت رایگان قرار داده‌اند. این امر کار را برای پژوهش در زمینه مسائل سیالاتی با کمک روش SPH راحتتر کرده است. همانطور که گفته شد بررسی مسائل ژئوتکنیکی همچون گسیختگی شیروانی بدلیل جلوگیری از ایجاد خسارت‌های زیاد مالی و جانی دارای اهمیت بسزایی هستند. این مسائل جز مسائل با تغییر شکل‌های

بزرگ محسوب می‌شوند. روش SPH یکی از روش‌های عددی است که بدلیل خصوصیت بدون شبکه بودن آن می‌تواند کمک شایانی در مدل‌سازی این دست مسائل کند. اما همانطور که بیان شد روش SPH برپایه مسائل سیالاتی و هیدرودینامیکی استوار است و کدهای مربوطه آن صرفاً جنبه سیالاتی داشته است. در سال‌های اخیر تعدادی از گروه‌های تحقیقاتی در برخی دانشگاه‌های جهان اقدام به توسعه دادن کد هیدرودینامیکی SPH به کد جامداتی SPH کردند و توانستند مسائل جامداتی ژئوتکنیک را نیز بخوبی با آن مدل‌سازی کنند. اما این گروه‌های تحقیقاتی بدلیل تعهداتی که در گروه تخصصی خود داشته و همچنین بدلیل ادامه توسعه و گسترش این کد جامداتی، حاضر به عمومی کردن کد نبوده و کد جامداتی SPH را در اختیار سایر محققین قرار نمی‌دهند. بهمین دلیل کار در حیطه مسائل ژئوتکنیکی همراه با تغییرشکل‌های بزرگ با روش SPH دشوار می‌شود.

### ۱-۳- هدف انجام تحقیق

همانطور که گفته شد بدلیل در اختیار نبودن کد جامداتی روش SPH بصورت عمومی و اینکه تنها در دسترس گروه محدودی از محققان می‌باشد، در این پایان‌نامه سعی بر این شد که کد سیالاتی SPH را توسعه داده و با اضافه کردن بخش جامداتی به آن بتوان مسائلی همچون گسیختگی شیروانی‌های خاکی را که دارای تغییرشکل بزرگ هستند، مدل‌سازی کرده و با کمک روش SPH تخمین دقیق‌تری از این پدیده‌ها داشته باشیم. این نتایج می‌تواند در پیش‌بینی پدیده‌های ژئوتکنیکی کمک شایانی کند.

### ۱-۴- سازمان‌بندی پایان‌نامه

این پایان‌نامه شامل ۶ فصل می‌باشد. در فصل اول کلیاتی در مورد مسائلی در مهندسی ژئوتکنیک که دارای تغییرشکل‌های بزرگ بوده و نیز روش‌های بررسی این‌گونه مسائل ارائه شده است. در فصل دوم انواع روش‌های عددی بدون شبکه‌ای که در مدل‌سازی پدیده‌های مهندسی استفاده می‌شود بیان و تفاوت این روش‌ها با روش‌های عددی مبتنی بر شبکه ذکر خواهد شد. همچنین در ادامه این فصل توضیح اجمالی در مورد مزایا و معایب و همچنین موارد کاربرد روش بدون شبکه هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH)، که اساس این پایان‌نامه است، بیان خواهد شد. در فصل سوم توضیح کاملی در مورد فرمول‌بندی بخش هیدرودینامیکی روش SPH داده می‌شود. در فصل چهارم این پایان‌نامه



فرمول‌بندی بخش جامداتی SPH که به قسمت هیدرودینامیکی روش SPH اضافه شده است بطور مفصل بیان خواهد شد. در ابتدای فصل پنجم نگاه اجمالی به فلوچارت کد روش SPH شده و سپس چند مثال از مسائل مربوط به گسیختگی شیروانی خاکی به همراه خروجی‌های آن آورده شده است. در فصل ششم نتیجه‌گیری پژوهش انجام شده و پیشنهادهایی برای مطالعات آینده بیان شده است.



# فصل ۲ روش‌های عددی بدون شبکه

## ۲-۱- مقدمه

روش‌های عددی مبتنی بر شبکه<sup>۱</sup> همانند روش اجزا محدود (FEM)<sup>۲</sup> ابزار بسیار توانمندی برای آنالیز عددی پدیده‌های مهندسی در قرن بیستم بوده و توانسته تعداد زیادی مسائل مهندسی و علوم دیگر را حل کند. بهر حال روش اجزا محدود هنوز برای مسائلی همچون گسترش دینامیکی ترک، تغییر شکل فلزات، ضربه با سرعت زیاد، گسیختگی مواد، فرسایش، نفوذ و تغییر شکل‌های بزرگ دارای مشکلاتی است. در تغییر شکل‌های بزرگ این روش مشکلاتی همچون درهم‌رفتگی، چرخیدن و اعوجاج شدید مش را داراست. در نتیجه، در طول مدلسازی نیازمند مش‌بندی مجدد می‌باشد که این کار عموماً پیچیدگی برنامه‌های کامپیوتری را افزایش داده و از طرفی ارزش محاسبات را پایین می‌آورد. برای اجتناب از این مسائل عددی، روش‌های بدون مش<sup>۳</sup> در سال‌های اخیر توسعه یافت. در مقایسه با روش‌های مبتنی بر شبکه، این روش‌ها بر پایه تقریب نقاط استوار است. این امر می‌تواند بطور کامل و یا تا قسمتی وابستگی به شبکه را از بین ببرد. بدین اساس، روش بدون مش هزینه‌های بسیاری برای آنالیز تغییر شکل‌های بزرگ با در نظر گرفتن بحث دقت و کارایی را داراست. ایده اساسی این است که از یکسری گره‌هایی (اعضایی) با توزیع تصادفی بجای شبکه، بمنظور حل کردن معادلات انتگرالی گوناگون یا معادلات دیفرانسیلی با شرایط مرزی متفاوت استفاده می‌شود. این گره‌ها یا اعضا احتیاجی به اتصال توسط شبکه را ندارند.

## ۲-۲- محدودیت‌های روش اجزا محدود

روش اجزا محدود (FEM) یک ابزار قدرتمند برای حل مسائل استاتیکی، دینامیکی، خطی و غیرخطی در شاخه مکانیک محاسباتی است. بطوری که اغلب مسائل مهندسی مرتبط به مکانیک جامدات، سازه و... توسط سیستم‌های نرم افزاری پیشرفته قابل تحلیل هستند. با این حال روش اجزا محدود، محدودیت‌هایی دارد که در زیر به آنها پرداخته شده است.

<sup>۱</sup> Grid-based numerical methods

<sup>۲</sup> Finite Element Method

<sup>۳</sup> Mesh-free methods

تولید شبکه برای ناحیه مسئله یک مرحله اساسی در روش اجزا محدود است که وقت زیادی را از تحلیل‌گر برای تولید یک شبکه مناسب صرف می‌کند. در ارتباط با تغییر شکل‌های بزرگ، دقت قابل توجهی با تغییر شکل المان‌ها از دست می‌رود که همین امر باعث شد در این پایان‌نامه برای حل مسائل دارای تغییر شکل بزرگ از روش بدون شبکه SPH استفاده شود.

مدل‌سازی گسترش ترک، تغییر فاز (تبدیل جامد به مایع) به علت وجود ناپیوستگی و این‌که این ناپیوستگی در جهت خط واصل گره‌های المان نیست با مشکل روبرو است. مدل‌سازی شکست مواد به قطعات کوچکتر در روش اجزا محدود بسیار مشکل است، چون اساساً روش اجزا محدود براساس مکانیک محیط‌های پیوسته بنا شده است در نتیجه فرمول‌بندی المان‌ها قابل جداسازی نیست. این امر غالباً باعث بوجود آمدن خطاهای بزرگی در حل می‌شود.

شبکه بندی مجدد روشی است که می‌توان در مسائل با وجود ناپیوستگی یا گسترش ترک بکار برد. در این روش با هماهنگ کردن ناپیوستگی با خط واصل گره‌ها در المان‌ها می‌توان به جواب همگرا رسید، اما این یک روش وقت‌گیر است که نتایج آن تنها در حالت دو بعدی قابل توجه است.

## ۲-۳- تفاوت روش‌های بدون شبکه با روش اجزا محدود

شباهت و تفاوت روش‌های بدون شبکه و اجزا محدود به صورت کلی در شکل ۲-۱ آورده شده است. تفاوت اصلی این دو روش در مرحله تولید شبکه است، که این نکته منجر به ساخت توابع شکل با اصولی متفاوت در این دو روش می‌شود. در روش اجزا محدود توابع شکل با استفاده از المان‌ها ساخته می‌شوند و این توابع شکل برای المان‌های مختلف یکسان بوده و قبل از اینکه تحلیل مسأله آغاز شود، توابع شکل ساخته می‌شوند. اما در روش‌های بدون شبکه این توابع همزمان با تحلیل مسأله در گره مورد نظر ساخته می‌شود، و با تغییر موقعیت گره این توابع نیز تغییر می‌نمایند. هنگامی که سیستم معادلات جبری براساس معادله حاکم حاصل شد مابقی روند حل مسئله در روش اجزا محدود و روش‌های بدون شبکه یکسان است. بنابراین بسیاری از تکنیک‌هایی که در روش اجزا محدود مرسوم است در روش‌های بدون شبکه نیز قابل کاربرد می‌باشد.



شکل ۲-۱ مقایسه روش اجزا محدود و روش بدون شبکه

## ۲-۴- انواع روش‌های پر کاربرد بدون شبکه

روش‌های بدون شبکه خاص و معروفی که در حرکت توام با تغییرشکل‌های بزرگ هستند به شکل زیر دسته‌بندی می‌شوند:

### ۲-۴-۱ روش اجزای پراکنده (DEM)<sup>۱</sup>

Shepard (۱۹۶۸)، یک درون‌یاب بدون شبکه برای داده‌های فضایی ارائه کرد. بعد از معرفی روش تقریب<sup>۱</sup> MLS توسط Leinster (۱۹۸۱)، یک فرم محلی از این تقریب برای حل عددی معادلات

<sup>۱</sup> Diffuse Element Method

دیفرانسیل با مشتقات جزئی با توابع وزن غیرمنفرد ارائه شد. با وجود این مشکل که باید مشتقات کامل توابع پایه پیدا می‌شد، به نتایج قابل قبولی رسیدند و آنرا روش اجزای پراکنده (DEM) نامگذاری کردند. این روش براساس فرم ضعیف بدست می‌آید.

روش DEM دارای خصوصیتی همچون: محلی بودن روش اجزا محدود، افزایش دادن درجه نرمی تقریب، جلوگیری از اتلاف وقت برای تولید شبکه، تقریب براساس پخش نامنظم گره‌ها و وابستگی مستقیم درجه نرمی (همواری) تقریب به درجه نرمی وزن می‌باشد.

## ۲-۴-۲ روش بدون شبکه گالرکین (EFG<sup>۱</sup>)

(Belytschko et al. ۱۹۹۴) با ارتقای DEM، روش EFG را ارائه کردند. در این روش نیز از تقریب MLS استفاده شده است. ابداع و ابتکار DEM و بعد از آن EFG کمک شایانی به توسعه روش‌های بدون شبکه کرد. مهمترین خصوصیات روش EFG به شرح زیر است:

همانطور که گفته شد در این روش از تقریب حداقل مربعات متحرک برای ساختن توابع شکل استفاده می‌شود. روش EFG براساس حل معادلات دیفرانسیل با شکل ضعیف استوار است. با استفاده از شکل ضعیف برای حل معادلات دیفرانسیل و با کاهش مرتبه توابع میدانی، تقارن معادلات جبری حاصل می‌شود، یعنی به توابع شکل با پیوستگی کمتر نیاز خواهد بود. در روش بدون المان گالرکین شرایط مرزی نیومن (طبیعی) در آن اعمال می‌شود ولی برای شرایط مرزی دریشله (اساسی) نمی‌توان از جایگذاری پارامترهای گره‌ای بصورت مستقیم استفاده کرد، زیرا تابع شکل MLS شرط دلتای کرونگر را ارضا نمی‌کند. در روش بدون شبکه گالرکین، جهت محاسبه انتگرال‌های لازم برای بدست آوردن ماتریس سختی و ماتریس بارگذاری، لازم است از یک شبکه پس زمینه‌ای و نقاط گوس داخل شبکه پس زمینه‌ای استفاده کنیم. برای بدست آوردن نتایج درست، شبکه اجزا باید به اندازه کافی ریز و نقاط انتگرال‌گیری به تعداد کافی باشد. به هر حال در روش EFG برای انتگرال‌گیری در محاسبه ماتریس سختی یک شبکه پس زمینه‌ای لازم است. بنابراین، باید یک شبکه پس زمینه‌ای با تراکم

<sup>۱</sup> Moving Least Squares

<sup>۲</sup> Element Free Galerkin

مناسب برای بدست آوردن نتایج خوب طراحی شود. این کار با بررسی رابطه بین تراکم گره‌ها و تراکم شبکه پس‌زمینه میسر می‌باشد.

### ۲-۴-۳ روش المان‌های محدود بدون شبکه‌بندی (MFEM)<sup>۱</sup>

در این روش سیال را می‌توان به مجموعه‌ای از نقاط که در واقع ذرات سیال هستند، تقسیم‌بندی کرد. هرکدام از این ذرات پارامترهایی مانند سرعت، جرم، چگالی و... را با خود همراه دارند. معادلات حاکم بر جریان سیال یعنی معادلات ناویر-استوکس با یک روش پیش‌بینی اصلاح شده حل می‌شوند. بدین صورت که در مرحله پیش‌بینی، مشخصات جریان از قبیل چگالی، سرعت و موقعیت ذرات در گام زمانی بعدی تخمین زده می‌شوند و سپس در مرحله تصحیح بر اساس فرضیات موجود در معادلات حاکم یک معادله پوآسون فشار بدست می‌آید که با حل آن می‌توان این مقادیر را تصحیح کرد. معادله لاپلاسی فشار ناشی از تجزیه معادلات، با استفاده از یک روش اجزایمحدود به نام MFEM حل می‌شوند. علاوه بر این دامنه محاسباتی نیز در این روش با روش اجزایمحدود گسسته می‌شود و این کار در زمان‌های مختلف با تغییر میدان جریان تکرار می‌شوند. این روش را از آن جهت MFEM می‌نامند که هم یک روش اجزایمحدود است و هم یک روش بدون شبکه‌بندی. این روش توانسته است مسائل مربوط به جریان‌های با سطح آزاد را با دقت قابل قبولی شبیه‌سازی نماید.

### ۲-۴-۴ روش بدون شبکه پتروگالرکین (MLPG)<sup>۲</sup>

روش بدون شبکه پتروگالرکین که توسط Atluri and Zhu (۱۹۹۸) معرفی شد، یک راه متفاوت در ساخت روش بدون شبکه است. این روش از جابجایی حداقل مربعات برای تولید توابع شکل استفاده می‌کند. بطور خلاصه عملکرد آن بدین صورت است که ابتدا، توابع آزمایشی را با درون‌یاب‌های بدون المان از جمله MLS ساخته می‌شود. در مرحله دوم، فرم ضعیف محلی معادلات دیفرانسیل را ایجاد می‌کند. با جایگزین کردن با فرم ضعیف کلی، انتگرال به یک دامنه محلی که به آن زیردامنه گفته می‌شود محدود خواهد شد. با توجه به این تعریف روش MLPG را می‌توان بعنوان یک روش باقیمانده وزن‌دار محلی دانست. شکل زیردامنه می‌تواند بصورت دایره، بیضی یا مستطیلی برای حالت دوبعدی

<sup>۱</sup> Mesh-less Finite Element Method

<sup>۲</sup> Meshless Local Petro-Galerkin



باشد. در مرحله سوم، بخاطر استفاده از فرم پتروگالرکین، تابع وزن در فضای متفاوت از تابع آزمایشی ساخته می‌شود. از این‌رو فرمولاسیون آن کلی‌تر است.

### ۲-۴-۵ روش درون‌یاب نقطه‌ای (PIM)

روش درون‌یاب نقطه‌ای از تکنیک درون‌یابی چندجمله‌ای برای ساخت تقریب استفاده می‌کند. این روش توسط (Liu and Gui ۲۰۰۱) ارائه شد و جایگزینی برای روش جابجایی حداقل مربعات بود. جذاب‌ترین خصوصیت این روش این است که تابع شکل آن از تابع دلتای کرومر پیروی می‌کند. از این‌رو شرایط مرزی اساسی بصورت مستقیم و موثر در آن اعمال می‌شود. روش درون‌یاب نقطه‌ای براساس روش گالرکین بوده و از مشکلات آن تکینی بودن ماتریس درون‌یاب است. همچنین مشکل دیگر این روش این است که تضمینی برای پیوستگی تابع تقریب آن وجود ندارد. برای حل این مشکلات در سال ۲۰۰۲ روش اصلاحی PIM توسط Liu and Gui برای بهبود خواص ماتریس و جلوگیری از تکینی شدن نقاط ارائه شد.

### ۲-۴-۶ روش المان طبیعی (NEM)

این روش براساس مفهوم همجوار طبیعی برای توابع شکل در فرم ضعیف اولین بار توسط Sukumar استفاده شد. از مزایای این روش نسبت به سایر روش‌های بدون شبکه می‌توان به استفاده از دیاگرام ورونی برای تعریف توابع شکل اشاره کرد که این دیاگرام، پایداری را نتیجه می‌دهد. همچنین دیگر مزیت این روش توانایی برای درون‌یابی داده‌های هر گره است که این ویژگی به معنی اعمال شرایط مرزی اساسی می‌باشد.

### ۲-۴-۷ روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH)

روش هیدرودینامیک ذرات هموار SPH یک روش کاملاً لاگرانژی است. این روش برای اولین بار توسط Lucy در سال ۱۹۷۷ در زمینه مسائل اخترشناسی به‌کار گرفته شد. Gingold and Monaghan در همان سال (۱۹۷۷) علاوه بر مسائل اخترشناسی برای اولین بار از این روش برای تحلیل جریان با

<sup>۱</sup> Point Interpolation Method

<sup>۲</sup> Natural Element Method

<sup>۳</sup> Smooth Particle Hydrodynamics

سطح آزاد استفاده کردند و نتایج قابل قبولی نیز کسب کردند. اساس و پایه این روش بر تئوری درون یابی انتگرالی بنیان نهاده شده است. بواسطه استفاده روش SPH از درون‌یابی انتگرالی، متغیرهای وابسته میدانی به شکل انتگرالی بیان می‌شوند، که این انتگرال‌ها بصورت مجموع درون‌یابی بر روی ذرات موجود در دامنه همسایگی ذره مورد نظر تبدیل می‌شود. بدین معنی که در روش SPH برای برآورد کمیت یک پارامتر در یک نقطه معین فرض می‌شود که نقاط مجاور هرکدام با توجه به یک تابع درون‌یابی مناسب، سهمی در تخمین مقدار این پارامتر در نقطه مورد نظر دارند.

دو دیدگاه تراکم پذیر و تراکم ناپذیر برای مدل‌سازی جریان های با سطح آزاد با روش SPH توسعه داده شده است. در روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده تراکم پذیر، فشار ذرات با حل یک معادله حالت به شکل صریح برآورد می‌شود، در حالیکه در روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده تراکم ناپذیر، فشار ذرات با حل معادله پواسون بدست می‌آید. هر دو رویکرد به طور موفقیت‌آمیزی برای مدل‌سازی مسائل مختلف جریان‌های سطح آزاد بکار گرفته شده است. در این پایان‌نامه نیز با توسعه این روش در بخش جامدات مخصوصاً برای حل مسائل ژئوتکنیکی، دامنه بکارگیری این روش را در مهندسی ژئوتکنیک وسیع‌تر کرده‌ایم.

## ۲-۴-۸ روش تکثیر ذرات (RKPM<sup>۱</sup>)

Liu (۱۹۹۵) روش RKPM را برای جبران مشکل کمبود ثبات که در روش SPH مقدماتی در مسائل گوناگونی از جمله تحلیل‌های لرزه‌ای و هیدرودینامیک و... وجود داشت، پیشنهاد کرد. تقریب توابع در این روش همانند روش SPH می‌باشد.

## ۲-۴-۹ روش حرکت ذرات نیمه ضمنی (MPS<sup>۲</sup>)

روش MPS یک روش لاگرانژی است که اخیراً توسط Koshizuka et al. پیشنهاد شده است. در این روش، معادلات حاکم بر جریان سطح آزاد (معادلات ناویر-استوکس) بر اساس رفتار لاگرانژی ذرات سیال حل می‌گردند. در این روش یکسری نقاط درون‌یابی با توزیع دلخواه وجود دارند که در واقع

<sup>۱</sup> Reproducing kernel particle Method

<sup>۲</sup> Moving Particle Semi-implicit

همان ذرات سیال هستند. کلیه متغیرهای مساله بوسیله این نقاط درون‌یابی و همچنین توسط یک تابع درون‌یابی محاسبه می‌گردند. همچنین در این روش از یک روش با دوگام زمانی برای تجزیه معادلات حاکم استفاده می‌شود. گام اول زمانی است مجازی و در آن متغیرهای مورد نظر در زمان بعدی تخمین زده می‌شوند و مقادیر تصحیح شده این مقادیر با توجه به مقادیر آن متغیرها در گام زمانی قبلی و گام زمانی مجازی و اعمال قیده‌های موجود در معادلات حاکم محاسبه می‌گردند.

روش MPS را می‌توان ترکیبی از دوروش MFEM و SPH دانست. وجه تشابه روش MPS با روش MFEM در الگوریتم تجزیه معادلات حاکم و استفاده از روش دوگام زمانی است و وجه تشابه این روش با روش SPH در استفاده از یک تابع درون‌یابی برای تبدیل معادلات حاکم به فرم انتگرالی است. این توابع انتگرالی یک تخمین مرکزی از متغیرهای ناحیه در یک نقطه را بدست می‌آورند. اطلاعات تنها در یکسری نقاط مجزا مشخص است و انتگرال‌ها بوسیله جمع‌زدن بر روی یکسری نقاط مجاور هم محاسبه می‌شوند.

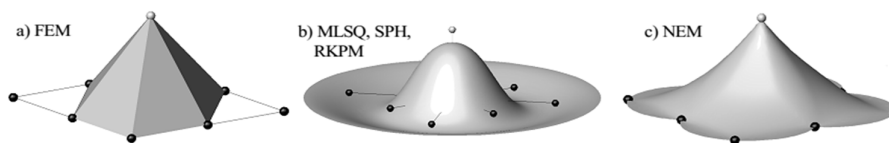
این روش قابلیت شبیه‌سازی انواع جریان‌های با سطح آزاد در هردو حالت تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر را دارا می‌باشد و می‌تواند تغییرشکل‌ها و ناپیوستگی‌های شدید را بخوبی مدل کند. علی‌رغم پیشرفت‌هایی که این روش در سال‌های اخیر برای شبیه‌سازی سیالات در حالات مختلف داشته است، با این وجود هنوز پایداری این روش یک مساله مهم است و نسبت به پارامترهای موجود در این روش حساس است. اخیراً تلاش‌هایی برای بهبود و اصلاح این روش صورت گرفته است و نتایج قابل قبولی نیز بدست آمده است. در این روش مشتق اول توابع پیوسته نمی‌باشند، بنابراین نوسانات موجود در حل عددی این روش بیشتر از روش SPH می‌باشد.

روش‌های بدون شبکه متعددی وجود دارند که در جدول ۲-۱ به تعدادی از آنها اشاره شده است. تمامی این روش‌ها در یک جنبه باهم مشترک هستند که عبارتست از استفاده نکردن آنها از شبکه‌های از پیش تعیین شده برای درون‌یابی میدان متغیرها. اسامی روش‌های مختلف بدون شبکه هنوز موضوع بحث است. از آنجا که اصول این روش‌ها همچنان بسرعت توسعه می‌یابد، نام‌های جدیدی نیز بصورت پیوسته پیشنهاد می‌شوند. ممکن است مدتی طول بکشد تا تمام روش‌ها بصورت مناسبی دسته‌بندی و متحد شوند تا از پراکندگی در این مجموعه اجتناب شود.

جدول ۱-۲ دسته‌بندی روش‌های بدون شبکه

Method	System equation	Method of function approximation	Ref.
Smoothed Particle Hydrodynamics	Strong form	Integral representation	Lucy ۱۹۷۷; Gingold and Monaghan ۱۹۷۷
Finite Point Method	Strong form	Finite differential Representation; MLS	Liszka and Orkisz ۱۹۸۰; Jensen ۱۹۸۰; Onate et al. ۱۹۹۶
Diffuse Element Method	Weak form	MLS, Galerkin method	Nayroles et al. ۱۹۹۲
Reproducing kernel Particle Method	Strong and weak form	Integral representation	W. K. Liu ۱۹۹۳
Hp-clouds	Weak form	Partition of unity, MLS	Oden and Abani ۱۹۹۴; Armando and Oden ۱۹۹۵
Element Free Galerkin Method	Weak form	MLS; Galerkin method	Belytshko et al. ۱۹۹۴
Partition of Unity FEM	Weak form	Partition of unity, MLS	Babuska and Melenk ۱۹۹۵
Boundary Node Methods	Weak form and local weak form	MLS	Mukherjee ۱۹۹۷
Meshless Local Petrov-Galerkin Method	Local weak form	MLS, Petrov-Galerkin method	Atluri and Zhu ۱۹۹۸
Pint Interpolating Method	Weak form and local weak form	Point interpolation	G. R. Liu and Gu ۱۹۹۹, ۲۰۰۰
Boundary Point Interpolating Methods	Weak form and local weak form	Point interpolation	G. R. Liu and Gu ۲۰۰۰, ۲۰۰۱

در شکل ۲-۲ توابع شکل سه گروه از روش‌های عددی آورده شده است:



شکل ۲-۲ توابع شکل برخی روش‌های عددی

توابع شکل در روش المان طبیعی (NEM) دارای خواص همواری بیشتری نسبت به توابع شکل در روش اجزای محدود است. همچنین تقریب توابع در روش SPH که بصورت ارائه انتگرالی می‌باشد نسبت

به روش اجزای محدود و المان طبیعی هموارتر می‌باشد که این امر دقت مقادیر خروجی را در این روش بالاتر می‌برد.

## ۲-۵- مزایا و معایب روش SPH

روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) که در این پایان‌نامه معرفی و شرح داده شده است، یک روش مبتنی بر روش بدون شبکه بر اساس توصیف لاگرانژی است. این روش می‌تواند انواع معادلات ساختاری مواد را برای توصیف خواص مکانیکی وارد کند. اساس اصلی این روش، گسسته‌سازی جریان‌های مداوم به یکسری از ذرات توزیعی دلخواه که حامل متغیرهایی بوده و سپس رفتار مکانیکی دامنه مسئله را توسط تحلیل خط مسیر اعضا و اثر متقابل آن‌ها بر یکدیگر بررسی می‌کند. SPH اولین بار برای حل مسائل اخترشناسی در فضای سه بعدی توسط Lucy (۱۹۷۷)، Gingold (۱۹۷۷) و Monaghan (۱۹۷۷) استفاده شد. از آن‌جا که حرکت جمعی این اعضا شبیه به جریان مایع یا گاز است، محققان توانستند از معادلات حاکم بر هیدرودینامیک کلاسیک نیوتنی<sup>۱</sup> استفاده کنند. مزایای استفاده از روش SPH نسبت به روش‌های عددی مبتنی بر شبکه سنتی به شرح ذیل است:

(۱) بدلیل خاصیت لاگرانژی<sup>۲</sup>، حرکت ذرات SPH می‌تواند پیش‌بینی شود و ویژگی‌های سیستم فیزیکی براحتی بدست می‌آید. بنابراین روش لاگرانژی در مقایسه با روش اویلری<sup>۳</sup> در شناسایی سطوح آزاد، مرزهای قابل تغییر، رابط‌های متحرک و ... بسیار بهتر است. تاریخچه زمانی متغیرهای محیطی (مانند سرعت و جابجایی) در هر نقطه از ماده در فرآیند مدل‌سازی بدست می‌آید. علاوه بر آن، بعنوان یک روش لاگرانژی، SPH ساده‌تر از روش‌های مبتنی بر شبکه است و قاعدتا بایستی سریعتر نیز باشد زیرا که در این روش هیچ بخش ارتباطی در معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی مربوطه وجود ندارد.

(۲) با توجه به خصوصیت روش بدون شبکه، یک شیء که در مدل SPH در دست بررسی است می‌تواند به یکسری گره، بدون استفاده از شبکه تبدیل شود. بنابراین، در مقایسه با روش‌های مبتنی بر شبکه، این روش می‌تواند اعوجاج‌های محلی بزرگتری را پردازش کند. زیرا در روش‌های مبتنی بر

<sup>۱</sup> Classical Newtonian hydrodynamics

<sup>۲</sup> Lagrangian property

<sup>۳</sup> Eulerian methods

شبکه بدلیل اتصال بین ذرات و تغییر آن با گذر زمان قادر به پردازش اعوجاج‌های زیاد نیست. این ویژگی در بسیاری از برنامه‌های کاربردی مکانیک جامدات همانند انفجارهای زیر زمینی، تغییر شکل فلزات، ضربه با سرعت بالا، رشد ترک و ریز شدن قطعات استفاده می‌شود.

(۳) بعنوان یک روش ذره‌ای، گسسته‌سازی هندسه‌های پیچیده ساده‌تر است، زیرا تنها یک گسسته‌سازی اولیه نیاز است و همچنین بازنشاسایی ذرات بسیار راحت‌تر از بازنشاسایی شبکه است.

(۴) SPH اصل بقای جرم<sup>۱</sup> را بدون محاسبات اضافی تعیین می‌کند، زیرا که ذرات نشان‌دهنده جرم هستند. فشار با کمک سهم وزنی ذرات مجاور محاسبه می‌شود و نیازی به حل سیستم‌های خطی معادلات نیست.

(۵) SPH برای مسائلی که در آن مواد پیوسته نیستند مناسب است و بنابراین یک ابزار ارزشمند برای مدل‌سازی عددی مسائل زیستی نانو مهندسی در مقیاس میکرو و نانو می‌باشد.

اگرچه ویژگی‌های مطلوب روش SPH و کاربردهای آن در مهندسی ژئوتکنیک ذکر شد، با این حال این روش دارای اشکالاتی نیز هست. از جمله این اشکالات می‌توان به ناسازگاری، بی ثباتی کششی و حالت‌های انرژی صفر اشاره کرد که در ادامه به توضیحی از این موارد اشاره می‌شود:

#### (۱) ناسازگاری<sup>۲</sup>

روش SPH در فرم پیوسته خود در نزدیکی مرزها ناسازگار است و دلیل این امر پشتیبانی کرنلی ناقص است. (۱۹۹۶) Morris و (۱۹۹۶) Belytschko et al. مشکل ناسازگاری ذرات را شناسایی کردند که می‌توانست راه‌حل SPH را کم دقت کند. راه‌حل‌های متعددی بمنظور بازگردانی ثبات و افزایش دقت SPH مطرح شده است. (۱۹۹۶) Randles و (۲۰۰۰) Libersky از ناسازگاری بمنظور تقریب وزن تابع هموارساز و مشتقات آن برای خنثی کردن ناسازگاری در تقریب تابع محیطی و مشتقات آن استفاده کردند. (۲۰۰۰) Vignjevic et al. نرمال‌سازی کرنلی و اصلاح در روش

<sup>۱</sup> Conservation of Mass

<sup>۲</sup> Inconsistency

هیدرودینامیک ذرات هموار نرمالیزه و اصلاح شده (CNSPH)<sup>۱</sup> را ارائه نمود که سازگاری مرتبه اول را داراست.

این تغییرات پیشنهادی بر پایه تقریب کرنلی<sup>۲</sup> و تقریب اعضا<sup>۳</sup> استوار است. اخیراً، Chen and Beraun (۲۰۰۰) روش ذرات هموار اصلاح شده (CSPM)<sup>۴</sup> را ارائه داده‌اند که بر پایه بسط سری تیلور تقریب تابع SPH می‌باشد. (Liu et al. ۲۰۰۳) CSPM را توسعه و روش SPH ناپیوسته (DSPH)<sup>۵</sup> را بمنظور حل مسائل گسسته همانند نشر موج ارائه دادند. از سایر روش‌های اصلاحی SPH که همگی سازگاری مرتبه اول را دارا هستند می‌توان به EFG، روش اعضا کرنلی بازتولیدی، RKPM<sup>۶</sup>، و روش پترو-گاکرلین بدون المان محلی، و MLPG<sup>۷</sup> اشاره نمود. این روش‌ها همگی اجازه ترمیم سازگاری هر مرتبه‌ای را توسط توابع اصلاحی می‌دهند.

## ۲) ناپایداری کششی<sup>۸</sup>

ناپایداری کششی یک مشکل عددی است که در روش SPH معمولی ظاهر می‌شود و این امر می‌تواند این روش را در حل مسائل زمین‌شناسی مهندسی و ... محدود سازد. این ناپایداری زمانی که مجموعه‌ای از اعضا تحت تنش کششی هستند خود را نشان می‌دهد.

(Swegle et al. ۱۹۹۵) اولین بار این پدیده و معیارهای پایداری را ارائه داد و متذکر شد که ناپایداری کششی مرتبط با مشتق دوم تابع کرنلی هموارساز است. روش‌های متعددی برای حل این مشکل ارائه شد. (Dyka and Lngel ۱۹۹۵) و (Dyka et al. ۱۹۹۷) یکسری نقاط تنشی اضافه به غیر از اعضای عادی در الگوریتم تک بعدی در دامنه‌ی تاثیر اضافه کردند تا ناپایداری کششی را حذف کنند. (Randles and Libersky ۲۰۰۰, ۲۰۰۵) از این نقاط تنشی بمنظور پایداری همه اعضا SPH استفاده کردند و این رویکرد را در فضای چند بعدی نیز گسترش دادند. (Monaghan ۲۰۰۰) ناپایداری کششی را با استفاده از ایجاد تنش مصنوعی از بین برد. این روش بصورت گسترده در حل مسائل

<sup>۱</sup> Corrected Normalized Smooth Particle Hydrodynamics

<sup>۲</sup> Kernel approximation

<sup>۳</sup> Particle approximation

<sup>۴</sup> Corrective Smoothed Particle Method

<sup>۵</sup> Discontinuous SPH

<sup>۶</sup> Reproducing Kernel Particle Method

<sup>۷</sup> Meshless Local Petrov-Galerkin

<sup>۸</sup> Tensile instability

ژئوتکنیکی مورد استفاده قرار گرفت ( Bui et al. ۲۰۱۰; Das and Clearly ۲۰۱۰; Karekul et al. ۲۰۱۱). (۲۰۰۸). (۲۰۰۱) Bonet and Kulasegaram در مورد ناپایداری کششی روش SPH بیان کرد که این ناپایداری یکی از خصوصیات پیوستگی است، جایی که تانسور تنش ایزوتروپیک است و فشار تابعی از چگالی است. آن‌ها نشان دادند که راه‌حل پایدار می‌تواند با استفاده از CSPH لاگرانژی بدون احتیاج به ویسکوزیته مصنوعی بدست آید. اخیراً، روش جدیدی نیز برای جلوگیری از ناپایداری کششی ارائه شده است که در آن از دو دسته گره اصلی و فرعی استفاده می‌شود ( Blanc and Pastor ۲۰۱۲). (۲۰۱۳).

### ۳) حالت صفر انرژی<sup>۱</sup>

حالت صفر انرژی، برای اولین بار توسط Swegle در سال ۱۹۹۴ در یک راه‌حل SPH معرفی گردید. این امر نشان‌دهنده حالت‌های تغییر شکل توسط الگوی جابه‌جایی گره است که باعث تولید انرژی کرنش صفر می‌شود. این مشکل می‌تواند نوسانات کاذب تولید نماید و راه‌حل را با مشکل مواجه کند. علت این امر این است که تمام متغیرهای محیطی و مشتقات آن‌ها در محل‌های مشابه‌ای محاسبه می‌شوند، بنابراین متغیر محیطی دیگری (متناوب) در اعضا گرادیان صفر دارند. دو راه‌حل برای این امر بیان شد: اتلاف (پراکندگی) حالت کاذب و یک گسسته‌سازی جایگزین که متغیرها و مشتقات آن‌ها را در نقاط یکسانی ارزیابی نکند. برای مثال، یک تنش مصنوعی برای جلوگیری از ناپایداری استفاده شود (Randles and Libersky, ۲۰۰۰).

علاوه بر کاستی‌های عمده‌ای که برای روش SPH در بالا ذکر شد، این روش دارای نواقص دیگری نیز است. برای مثال، از روش مرسوم تنها برای مدلسازی سیال تراکم‌پذیر می‌توان استفاده نمود که این امر توسط SPH با تراکم‌پذیری کم (WCSPH)<sup>۲</sup> و تراکم‌ناپذیر (ISPH)<sup>۳</sup> حل شد. مشکل شناخته دیگر این روش این است که میزان هموارسازی مورد نیاز برای پایدارسازی ممکن است طول موج کوتاه سازه را تقلیل داده (Hicks and Liebrock ۱۹۹۹) و موج‌های قوی را هموار سازد. این مشکل می‌تواند در مسائل ژئوتکنیکی خاص که با موج شدید در ارتباط است زیان‌بار باشد. فرمول‌بندی

<sup>۱</sup> Zero-energy modes

<sup>۲</sup> Weakly Compressible SPH

<sup>۳</sup> Incompressible SPH



مجددی برای شوک‌های قوی توسط Monaghan (۱۹۹۷) ، Cha and Inutsuka (۲۰۰۲) و Whitworth (۲۰۰۳) ارائه شد. مشخصه عمومی این روش‌ها ترکیب SPH استاندارد و روش حل ریمان است. اخیراً، Siyalotti et al. (۲۰۰۹) روش SPH قابل تطبیق (ASPH)<sup>۱</sup> را برای شوک‌های قوی ارائه کرده است. این روش متکی بر الگوریتم تخمین کرنلی چگالی قابل تطبیق (ADKE)<sup>۲</sup> می‌باشد که اجازه می‌دهد طول هموارساز بصورت محلی در زمان و فضا متناوب باشد بطوری‌که حداقل همواری مورد نیاز در نواحی با چگالی کم اعمال شود.

## ۲-۶- موارد کاربرد SPH

در اوایل از SPH در مسائل ستاره‌شناسی و هیدرودینامیک استفاده می‌شد. در ستاره‌شناسی، در شرح مسائل پیچیده همچون برخورد ستاره‌ای (Benz ۱۹۹۲; Monaghan ۱۹۹۲; Frederic and James ۱۹۹۹) شکل‌گیری و فروپاشی کهکشان (Monaghan and Lattanzio ۱۹۹۱; Berczik and Kolesnik (۱۹۹۳، ۱۹۹۸) و (Lee, ۲۰۰۰)، انقراض سیاه‌چاله‌ها با ستاره‌های نوترونی (Mohanghan, ۱۹۹۸) و حتی تکامل جهان (Berczik, ۲۰۰۰) به کار گرفته می‌شد. در هیدرودینامیک، برنامه‌های کاربردی SPH شامل مواردی همچون جریان الاستیک، دینامیک سیالات مغناطیسی، جریان چندفازی، جریان شبه‌تراکم‌ناپذیر، جریان گرانشی در محیط متخلخل، انتقال حرارت، مدلسازی ضربه، انتقال گرما و بسیاری موارد دیگر بودند.

روش SPH امروزه هم در مکانیک سیالات و هم در مکانیک جامدات بسیار گسترش پیدا کرده است. این امر بواسطه قدرت زیاد این روش در تبدیل مفاهیم فیزیکی به فرمول‌بندی SPH صورت می‌پذیرد. برخی از موارد کاربرد SPH در زمینه پدیده‌های عمرانی و جغرافیایی می‌باشد. از جمله این موارد می‌توان به شکست سد، مهندسی ساحل، پایداری شیروانی، رانش زمین، گسترش جانی خاک روانگرا شده، گسیختگی ناشی از تراوش، فرسایش دینامیکی، انفجار زیر زمینی، شکست سنگ و ... اشاره نمود. امکان‌سنجی و قابلیت اطمینان این روش از طریق مقایسه این روش با مدل آزمایشگاهی،

<sup>۱</sup> Adaptive SPH

<sup>۲</sup> Adaptive Density Kernel Estimation

راه‌حل‌های تحلیلی، مدلسازی با روش‌های عددی دیگر و ... به اثبات رسیده است. در ادامه کاربرد این روش را در برخی پدیده‌ها بررسی می‌کنیم.

## ۲-۶-۱ شکست موج و مهندسی ساحل

با توجه به برنامه‌های موفق که SPH در زمینه هیدرودینامیک داشته است، اغلب مدلسازی‌های SPH متمرکز بر مسائل مربوط به دینامیک سیالات همانند شکست سد و مهندسی ساحل می‌باشد. پس از شکست سد حجم زیادی آب ذخیره شده در سد به سمت پایین‌دست سد جاری شده و این امر خسارات زیادی را بر جا خواهد گذاشت. برای جلوگیری از خسارات مالی و جانی پدیده شکست سد می‌بایست اثرات جریان فاجعه‌بار سیل ناشی از سد را پیش‌بینی کرد. با توجه به شرایط و خصوصیات روش بدون مش، لاگرانژی بودن و عملکرد اعضا، SPH بطور گسترده در مطالعات مرتبط با پدیده شکست سد مورد استفاده قرار گرفته است. بسیاری از جوانب مرتبط با پدیده شکست سد بررسی شده است. این جوانب عبارتند از رفتار جریان سطح آزاد (Chang et al., ۲۰۱۱; Koh et al., ۲۰۱۲)، شرایط مرزی (Crespo et al., ۲۰۰۷; Ata and Soulaïmani, ۲۰۰۵)، ارزیابی سه بعدی پدیده شکست سد (Ferrari et al., ۲۰۱۰; Roubtsova and Kohawita, ۲۰۰۶)، تفاوت بین جریان نیوتنی و غیر نیوتنی (Shao and Lo, ۲۰۰۳)، آنالیز جریان چند فازی (Landrini and Colagrossi, ۲۰۰۳) و مدل‌های چند فازی برای جریان‌های بسیار مخرب (Shakibaeinia and Jin, ۲۰۱۱). در این مدل‌سازی‌ها، مزایای SPH در مواجهه با سطوح آزاد و مسائل جابجایی مرزها تجسم شد. Wang and Shen (۱۹۹۹) جزء محققان پیشگام در مدل‌سازی جریان‌های غیرلزج شکست سد و آنالیز آب‌های با عمق متوسط هستند. ویژگی این مدل‌ها تغییر در طول هموارسازی اجزای گسسته با تغییر شرایط جریان است که این کار این مدل‌ها را در برابر مسائل با حرکات شدید بسیار سازگار و مناسب می‌کند.

برخی از امواج مهیب دریا با شکستن در نزدیکی سواحل با ساحل برخورد کرده و مسیری را در ساحل طی می‌کند که باعث تخریب زیرساخت‌های ساحلی می‌شوند. بنابراین تلاش بر این است که بتوان نحوه انتشار موج، انتشار فراساحلی موج، انتشار در خط ساحلی، افزایش ارتفاع آب و شکست موج را پیش‌بینی نمود. روش‌های موفق مدلسازی SPH در شکست سد و موج را برای ارائه روش‌ها و مدل‌هایی برای مسائل اندرکنش آب-سازه در مهندسی ساحل فراهم کرد.

ابتدا یک مدل عددی در قالب SPH برای آنالیز امواج روگذر در حضور کشتی‌ها و سکوه‌های دریایی انجام شد (Gomez-Gesteria et al., ۲۰۰۵). برخی از مسائل پیچیده در این جا با موفقیت مدل‌سازی شد. این مسائل شامل جریان پیوسته اولیه، از هم‌پاشیدگی جریان پس از برخورد با عرشه، رفتار امواج در بالا و پایین عرشه، تشکیل جت آبی پس از روگذری و موج برگشتی می‌باشد. تمامی مدل‌سازی‌ها با مدل‌های آزمایشگاهی مقایسه شده و نتایج انطباق خوبی را میان این دو مدل نشان داده است. تلاقی بین امواج و سازه‌های ساحلی با کمک SPH توسط (Mutsuda et al., ۲۰۰۸) مورد مطالعه قرار گرفت. در این مدل‌سازی مرز جامد توسط ذرات دارای هم‌پوشانی تعریف شد. روند گسیختگی و تغییر شکل سازه‌های ساحلی بخاطر ضربه امواج دریا به آن‌ها با دقت بسیار خوبی محاسبه شد. یک روش برای شبیه‌سازی گرداب‌های بزرگ (LES)<sup>۱</sup> نیز در جهت مطالعه مکانیزم امواج ساحلی و مسائل مرتبط با جذر و مد امواج در برابر دیوارهای قائم ارائه شد (Lo and Shao, ۲۰۰۲). پس از آن یک مدل برای حل مسائل مربوط به آشفته‌گی امواج با شکست موج آغاز شد (Shao et al., ۲۰۰۶). در این مدل ساختار و رفتارهای امواج روگذر انواع موج‌ها (همانند سرعت و توزیع ویسکوزیته گرداب آشفته) پیش‌بینی شده است.

اخیراً، نیروی اصطکاک به معادلات ناویر-استوکس در غالب روش SPH بمنظور بررسی جریان اصطکاک در محیط متخلخل و مرز بین موج و موج‌شکن که توسط مصالح مربوطه پوشانده شده، اضافه شده است (Shaw, ۲۰۱۰). این روش برای مدل‌سازی میرایی امواج منفرد و متوالی در بستر متخلخل گسترش یافت و سپس برای یک موج در حال برخورد با یک موج‌شکن پوشانده شده با مصالح متخلخل اعمال شد. با کمک روش SPH بسیاری از مشکلات مهندسی ساحل همانند جریان آزاد، حرکت مرزها و مرزهای جامد-سیال حل شد. پدیده‌های شکست موج، دینامیک امواج (انتشار موج، شکست موج و اندرکنش با سازه) و گسیختگی موج‌شکن و فونداسیون آن‌ها با دقت خوبی آنالیز شد. این نتایج اساس طراحی سازه‌های فراساحلی و ارزیابی شکست موج و یا پدیده‌ی سونامی بود.

---

<sup>۱</sup> large Eddy Simulation

## ۲-۶-۲ روانگرایی

پدیده‌ی روانگرایی اغلب برای ماسه‌های اشباع سست در طی وقوع زلزله و بارش رخ می‌دهد. جابجایی جانبی خاک بستر پس از روانگرایی باعث تخریب سازه‌های احداثی آن محل و همچنین تونل‌ها و بسیاری از زیرساخت‌های دیگر می‌شود. روش SPH می‌تواند برای مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ ناشی از جابجایی‌های جانبی خاک روانگرا شده مورد استفاده قرار گیرد. برای مثال، یک مدل دوبعدی بر پایه‌ی SPH در غالب دینامیک سیالات برای آنالیز گسترش و جابجایی جانبی ایجاد شده بخاطر پدیده‌ی روانگرایی ارائه شده است (Naili et al., ۲۰۰۵). یک بستر روانگرا شده به عنوان یک سیال غیرنیوتنی توسط مدل سیال بینگهام<sup>۱</sup> در نظر گرفته شد. بر اساس این فرضیه، خاک قادر به مقاومت در برابر هر برش کمتر از حد تسلیم تعریف شده توسط مقاومت برشی باقیمانده خواهد بود. توانایی و دقت این روش بمنظور تعیین شکل سطح آزاد و بدست آوردن تاریخچه زمانی سرعت جریان با مقایسه با آزمایش میز لرزه<sup>۲</sup> صحت‌سنجی شده است. از طریق این مدل منحنی سرعت-زمان، ضخامت لایه روانگرا شده و شیب سطح زمین پیش‌بینی شد. پس از آن، جریان خاک روانگرا شده در اطراف یک شمع مدل‌سازی شد و نیروی کششی اعمال شده توسط جریان روانگرایی محاسبه شد (Naili et al., ۲۰۰۵). در این مدل، شمع توسط یکسری عضوهای اعمال‌کننده پتانسیل لونارد-جونز<sup>۳</sup> در محیط اطراف مدل شده است. خاک روانگرا شده مجدد به عنوان یک جریان بینگهام فرض شد و یک مدل دوخطی بمنظور در نظر گرفتن بازیابی سختی معرفی گردید. مدل پیشنهادی توانست پیکربندی خارجی خاک پس از روانگرایی، توزیع سرعت جریان و تنش و کرنش خاک روانگرا شده در اطراف شمع را بازیابی نماید.

## ۲-۶-۳ تراوش

تغییر شکل بزرگ‌مقیاس و فروپاشی هیدرولیکی زمین ناشی از جریان آب در زمین در بی‌ثباتی فونداسیون سدها در طول تراوش، روانگرایی و سایر رخداد‌های فاجعه‌بار قابل توجه است. بمنظور آنالیز این پدیده، محققان ژاپنی روش SPH را راهی برای ترکیب تکنیک‌های پیوسته و گسسته در جهت

<sup>۱</sup> Bingham fluid model

<sup>۲</sup> Shake table

<sup>۳</sup> Lennard-Jones potential

آنالیز گسیختگی مرتبط با تراوش معرفی نمودند (Maeda and Sakai, ۲۰۰۴). یک مدل SPH دارای سه فاز خاک، آب و هوا بمنظور مدل‌سازی گسیختگی ناشی از تراوش در خاک ارائه گردید. در این مدل خاک و جریان آب در لایه‌های محاسباتی مختلف توزیع شده‌اند. بخاطر وجود لایه‌های مختلف و همچنین اختلاف سرعت بین فازهای مجاور تئوری مخلوط<sup>۱</sup> برای محاسبه نیروهای اصطکاک بین این دو فاز استفاده شد. کاربرد این روش منجر به مدل‌سازی عددی پروسه تراوش در اطراف شیت‌پایل شد. تشکیل و گسترش حباب هوا در طول تراوش و تغییر شکل و گسیختگی زمین بخاطر این حباب‌های هوا بخوبی پیش‌بینی شد. همچنین بعدها برخی دیگر از پیشرفت‌های SPH در این زمینه مطرح شد. از جمله این‌ها می‌توان به روش جدید برای محاسبه چگالی مواد مختلف برای یک فاز خاک و هموارسازی مسائلی که با مواد ژئولوژیکی<sup>۲</sup> مختلف در یک نمونه خاک مواجه هستیم، اشاره نمود. همچنین در مواجهه با آب، خاک و حباب‌های هوا، توزیع گاز و خروج حباب‌های هوا که اغلب در پدیده شکست‌های ناشی از تراوش دیده می‌شوند از SPH کمک گرفته شده است.

## ۲-۶-۴ فرسایش دینامیکی

فرسایش دینامیکی شامل انتقال خاک و سنگ از سطح زمین بخاطر وجود عوامل خارجی نظیر جریان آب به نقاط دیگر و رسوب شدن در آن‌جا می‌باشد. فرسایش بیش از حد می‌تواند اثرات منفی زیست‌محیطی از قبیل بیابان‌زایی و کاهش بهره‌وری کشاورزی بخاطر از دست دادن لایه‌های غنی خاک ایجاد کند. بخاطر توانایی‌هایی که روش SPH در مدل‌سازی جریان‌های سریع، تغییرشکل‌های بزرگ، سطوح آزاد و جابجایی مرزها دارد براحتی می‌توان از این روش در مسائل مربوط به فرسایش دینامیکی بهره گرفت.

یک مدل سه بعدی فرسایش هیدرولیکی بر اساس دینامیک سیال توسط Kristof et al. (۲۰۰۹) ارائه شد. در این مدل از فرسایش فیزیکی بهره گرفته شده است. در این‌جا از یکسری ذرات مرزی برای بهبود اندرکنش‌ها همچون اصطکاک و فرسایش رسوبات استفاده شده است. دو مثال عددی شامل فرسایش خاک در دریاچه و همچنین فرسایش لایه‌های زیر آبشار مدل‌سازی و آنالیز شد. مدل SPH

<sup>۱</sup> Mixture theory

<sup>۲</sup> Geologic materials

بمنظور بررسی ویژگی‌های فرسایش هیدرولیکی سدها و خاکریزها در مواجهه با طوفان سیل ایجاد شد (Chen et al., ۲۰۱۱). در مدل‌سازی رفتار سیال با معادله ناویر-استوکس و زمین به عنوان یک محیط منقطع ارتفاعی ارائه شد. توابع فرسایش با تنش برشی بحرانی بمنظور تعریف تنش برشی حداقل بوجود آمده در ذرات خاک توسط جریان آب که می‌تواند نتیجه فرسایش باشد، بیان گردید. این مدل با مدل‌سازی آزمایشگاهی و فیزیکی صحت‌سنجی شده است. تشکیل یک مجرا و کاریز بر روی یک خاکریز بخاطر جریان آب روی آن می‌تواند بهتر مفهوم فرسایش را نشان داده و اطلاعات خوبی را برای مسائل مربوط به مهندسی خاکریز ارائه دهد. اخیراً، (Manenti et al., ۲۰۱۲) مدل عددی را بر اساس SPH برای پیش‌بینی دینامیک آب-رسوب ناشی از جریان سریع آب در یک مخزن مصنوعی مطرح کرده است. در این مدل، آب و خاک بعنوان سیال ویسکوز با تراکم‌پذیری کم فرض شده‌اند که در آن معادلات ناویر-استوکس حاکم است. دو معیار فرسایش برای توصیف مکانیزم گسیختگی رسوبی معرفی شد که یکی معیار تسلیم موهر-کولمب<sup>۱</sup> و دیگری تئوری شیلد<sup>۲</sup> می‌باشد. این مدل با مدل آزمایشگاهی مقایسه و صحت‌سنجی شده است.

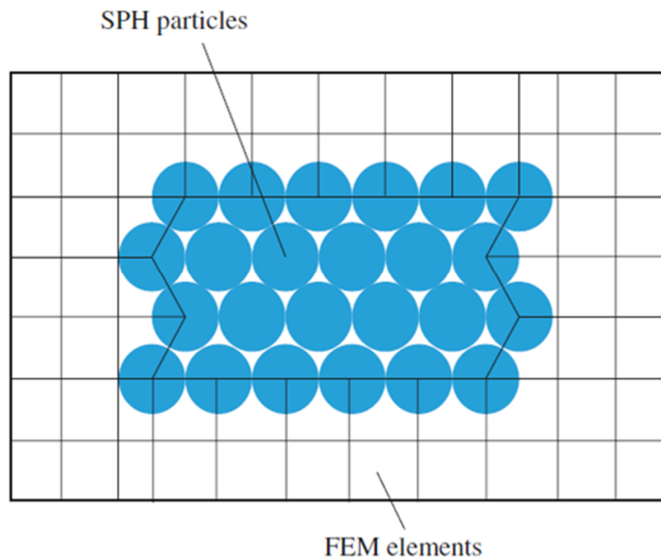
## ۲-۶-۵ انفجارهای زیرزمینی

وقوع انفجارهای تصادفی، انفجارهای ناشی از حفاری در زمین و یا حملات مسلحانه همگی می‌توانند تغییرشکل‌های بزرگی در خاک و سنگ ایجاد کرده و باعث خسارت‌های چشم‌گیری به سازه‌های اطراف شود. بنابراین مطالعه در مورد پاسخ خاک و سازه‌های اطراف به این انفجارها دارای اهمیت خاص خود است. بدلیل اینکه انفجارها بسیار بزرگ مقیاس بوده و یا دارای شرایط دشوار و خاص در مدل آزمایشگاهی هستند، مدل‌سازی عددی در این پدیده بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این حال، مدل‌سازی این پدیده نیز بخاطر تغییر شکل‌های بسیار بزرگ و اندرکنش بین مواد منفجره، خاک و سازه‌های اطراف کار آسانی نیست. این مشکلات محققان را راغب به استفاده از روش SPH کرد. یک روش ترکیبی از SPH و FEM برای شبیه‌سازی پاسخ خاک و سازه‌های اطراف به بارگذاری ناشی از انفجار پیشنهاد شد (Wang et al., ۲۰۰۵). در این مدل‌سازی تغییرشکل‌های بزرگ خاک در

<sup>۱</sup> Mohr-Coulomb yield criterion

<sup>۲</sup> Shields theory

اطراف محل انفجار با SPH و محل‌هایی که دارای تغییرشکل‌های کوچکتری هستند با روش FEM مدل‌سازی شده‌اند. ذرات SPH و المان‌های FEM در مرزی که در شکل ۲-۳ نشان داده شده به هم متصل شده‌اند. بر این اساس، مدل دو بعدی انفجار به مدل سه بعدی توسعه یافت (Lu et al., ۲۰۰۵) و پاسخ‌های دریافتی در این دو مدل با هم مقایسه شد. در مدل سه بعدی انتشار موج انفجار در گوشه‌ها و لبه‌ها بسیار دشوارتر از مدل دوبعدی آن بود. اخیراً، این مدل در آنالیز مکانیزم روانگرایی ناشی از موج‌های شوک و بررسی اثر روانگرایی خاک در سازه‌های ساخته شده به کار گرفته شده است (Wang et al., ۲۰۱۱). یک مدل خاکی سه فاز برای بارگذاری شوک پیشنهاد شده است و یک سطح کاملاً پیوسته برای مدل اندرکنش مرزهای بین مواد منفجره، خاک و سازه مورد استفاده قرار گرفته است. دیگرام زمان-فشار آب حفره‌ای ترسیم شد و در آن محدوده وقوع روانگرایی پیش‌بینی شد که این نواحی با نتایج تجربی یکسان بود. در این مدل به این نتیجه رسیدند که سازه‌های ساخته شده در سطح زمین در صورتیکه محدوده‌ی روانگرایی به سمت ناحیه‌ی فونداسیون آن‌ها گسترش نیابد پایدار باقی خواهند ماند و فقط دچار مقداری نشست دائمی و محدود خواهند شد.



شکل ۲-۳ مش‌بندی ترکیبی ذرات SPH و المان‌های FEM (Wang et al., ۲۰۰۵)

(۲۰۰۸) Xu and Liu مدل ترکیبی SPH-FEM را با بهره‌گیری از الگوریتم کل-جزء<sup>۱</sup> پیشنهادی از (۲۰۰۵) De Vuyst et al., را برای تماس ذرات SPH با المان‌های FEM گزارش کرد. معادله حالت جونز-ویلیکینز-لی (JWL<sup>۲</sup>) برای آنالیز انفجارهای بزرگ استفاده شد. این مدل برای شبیه‌سازی انفجار تحت‌العرضی، انتشار موج و دریافت پاسخ سازه مورد استفاده قرار گرفته است. استفاده از SPH در انفجارهای زیرزمینی نتایج قابل توجهی حاصل نمود. این نتایج شامل موارد زیر می‌باشد:

- (۱) دستیابی به مدل ترکیبی SPH-FEM برای بهبود پاسخ دینامیکی خاک و سازه
  - (۲) تکنیک مدل سه‌فازی خاک بمنظور شبیه‌سازی توزیع داخلی تنش‌ها میان اجزای خاک و توصیف تغییرات فشار آب حفره‌ای
  - (۳) مدل‌سازی مکانیزم روانگرایی خاک بعلاوه بارگذاری ناشی از انفجار و اثر خاک روانگرا شده بر سازه‌های اطراف
  - (۴) معیار پایداری سازه‌های احداثی در سطح زمین در طی انفجارهای زیرزمینی
- این نتایج در طراحی سیستم حفاظت انفجارهای زیرزمینی و کاهش خسارات ناشی از لرزش آن به سازه‌های اطراف بسیار نقش کلیدی دارد.

## ۲-۶-۶ شکست سنگ

حفاری سنگ نیز جزء مسائل تغییرشکل بزرگ محسوب می‌شود که اغلب نتیجه ترک‌های بسیار عمیق و قطعه قطعه شدن سنگ‌ها می‌باشد. یک راه‌حل با کمک روش SPH برای تغییرشکل‌های جامد الاستیک در ترکیب با حالت آسیب اصلاح‌شده بر اساس تاریخچه تنش محلی و توزیع حفره ارائه شده است. این راه‌حل بمنظور شبیه‌سازی پروسه حفاری سنگ استفاده شد. (Karekal et al., ۲۰۱۱) موفقیت‌هایی از جمله (۱) شناسایی تغییرشکل سنگ، شکل‌گیری ترک و فرآیند قطعه قطعه شدن آن که منجر به فروپاشی سخت تونل و ... می‌شود؛ (۲) توصیف سطح ترک در محدوده‌ی

<sup>۱</sup> Master-slave algorithm

<sup>۲</sup> Jones-Wilkins-Lee



مشخص؛ (۳) ارائه رفتار مواد الاستیک-شکننده و مواد الاستیک-پلاستیک توده‌ی سنگ؛ را داشته است. مدل‌سازی ترکیبی SPH-FEM حفاری سنگ بعنوان بخشی از این تحقیقات بسیار مفید و کارآمد بوده است.

(Das and Cleary (۲۰۱۰) یک مدل آسیب پیوسته<sup>۱</sup> در غالب SPH بمنظور مدل‌سازی شکست سنگ تحت اثر ضربه ارائه داده‌اند. مقاومت فشاری محصور نشده بعنوان اثبات مدل آسیب برای پیش‌بینی ترک سنگ مدل‌سازی شد. این مدل تطبیق خوبی با نتایج آزمایشگاهی داشت. پس از آن این مدل بمنظور پیش‌بینی ترک ترد نمونه‌های سنگ در اشکال مختلف در طی فرآیند ضربه مورد استفاده قرار گرفت. نتیجه این کار این بود که شکل سنگ تاثیر بسزایی در پروسه ترک، اندازه قطعات، اتلاف انرژی و حرکت قطعات پس از ترک دارد.

ویژگی‌های مکانیکی و پروسه شکست سنگ‌های ناهمگن شبیه موادی است که در طی مدل‌سازی SPH آزمایش‌های فشار تک‌محوره و دومحوره مورد مطالعه قرار گرفته است (Ma et al., ۲۰۱۱). تاثیر ناهمگنی مواد و شرایط بارگذاری همه‌جانبه مورد بررسی قرار گرفت. فرآیند مدل‌سازی شکست سنگ در روش SPH نشان از برتری این روش در شبیه‌سازی فرآیندهای فیزیکی غیرخطی همانند ترک و قطعه‌قطعه شدن مواد دارد. پیش‌بینی خصوصیات شکست سنگ کمک شایانی در فهم اصول گسیختگی محیط‌های سنگی و بهبود طراحی سازه‌های مرتبط می‌کند.

## ۲-۶-۷ گسیختگی شیروانی و لغزش زمین

دامنه‌ها و شیروانی‌های طبیعی با حضور انسان‌ها و کشیده شدن فعالیت‌ها و ساخت و سازهای انسانی به نواحی کوهستانی بسیار آسیب‌پذیرتر شده‌اند. درک مکانیزم گسیختگی و رفتار شیروانی پس از گسیختگی برای تعیین مناطق دارای پتانسیل گسیختگی و ترسیم نقشه مناطق پرخطر دارای اهمیت زیادی است. روش SPH ابزار بسیار توانمند و موثری در مدل‌سازی شیروانی‌های خاکی می‌باشد. برای مثال Bui et al. (۲۰۰۸) یک مدل بر اساس روش SPH بمنظور آنالیز پایداری یک شیروانی با وجود شمع ارائه دادند. آنها برای حل مشکل اندرکنش خاک و سازه از شرایط ترکیبی در مرز بین خاک و

<sup>۱</sup> Continuum damage model

شمع استفاده کردند. براین اساس برای اعضای که در نزدیکی مرز بین خاک و شمع بودند از نیروی پینالتهی استفاده نمودند. این مدل می‌تواند برای بررسی چهار پدیده استفاده شود و مکانیزم آنها را آنالیز کند. این چهار مورد عبارتند از:

(۱) توسعه نواحی برشی بوسیله نمایش کرنش‌های پلاستیک کل؛ (۲) ناپیوستگی کلی خاک پس از گسیختگی؛ (۳) توزیع تنش در شمع مسلح؛ (۴) مکانیزم خمش شمع مسلح. همانطور که گفته شد نکته بارز این مدل ارائه الگوریتم برای حل مشکل موجود در مرز خاک و سازه بود که تا قبل از آن در مسائل ژئوتکنیکی محققین را دچار مشکل می‌کرد. این اولین مدلی بود که در آن خاک بصورت الاستو-پلاستیک در نظر گرفته شد و با استفاده از مدل دراگر-پراگر با قانون جریان غیر مرتبط رفتار پلاستیک خاک را در قالب روش SPH توصیف نمود. با این حال کمبود ذرات در نزدیکی مرز جامد ممکن است یکی از سخت‌ترین مشکلات مدل‌سازی مواد الاستوپلاستیک با استفاده از روش SPH باشد. با اینکه در این مدل راه‌حلهایی ارائه شده ولی فقدان پوشش کافی اعضا در نزدیکی مرز جامد بایستی در مطالعات بعدی مورد بررسی بیشتری قرار گیرد تا دقت کار بیشتر شود.

رانش زمین یا زمین لغزش به حرکت ناگهانی یا آرام و یکنواخت توده خاک و سنگ روی شیب دامنه گفته می‌شود. این پدیده زمین‌شناسی گستره وسیعی از حرکات نظیر ریزش قطعات و بلوکه‌های سنگی، تخریب عمیق شیب‌ها و جریان‌های کم عمق واریزه را شامل می‌شود. نیروی ثقل انرژی لازم را برای حرکت واریزه‌ها به سمت پایین شیب فراهم می‌کند. آب نیز بعنوان یکی از نیروهای اثرگذار دیگر بر این پدیده، به نیروی ثقل کمک کرده و کار آنها آسان‌تر می‌کند. وقتی زمین از آب اشباع شد لغزش زمین همانند یک جریان بوده که این امر برای اقدامات حفاظتی و مدیریت بحران بسیار دارای اهمیت است. یک مدل عددی برای آنالیز دینامیکی حرکت سریع زمین لغزش بصورت سه بعدی توسعه پیدا کرد (Mc Dougall and Hungr, ۲۰۰۴). معادلات انتگرالی بمنظور دستیابی به تعادل جرمی و مومنتومی توده مصالح محرک همراه با زمین لغزش مورد استفاده قرار گرفت. این مدل با راه‌حل‌های تحلیلی مسائل شکست موج و همچنین یکسری مدل‌های آزمایشگاهی تست شد. سپس این مدل برای آنالیز لغزش ناحیه فرانک در کانادا استفاده شد و نتایج امیدوارکننده‌ای حاصل شد. این مدل

<sup>۱</sup> Drucker-Prager model with a non-associated flow rule

ویژگی‌های منحصربه‌فردی همچون توانایی در محاسبه حالت تنش داخلی ناهمسانگرد و غیرهیدرواستاتیکی<sup>۱</sup>، اختلاط مواد در طول مسیر لغزش و بررسی تغییرات جریان مواد در سیال بوجود آمده (رئولوژی) را داراست. الگوریتم اختلاط مواد در مسیر با جزییات کامل توسط Mc Dougall and Hungr (۲۰۰۵) توضیح داده شده است و اهمیت این مدل با آنالیز زمین لغزش حوالی رودخانه نوماش در سال ۱۹۹۹ در کانادا بیشتر مشخص شده است. از آن پس مدل‌های انتگرالی بصورت مکرر در شبیه‌سازی زمین لغزش‌ها مورد استفاده قرار گرفت که این کار مورد توجه خاص گروه کاری Pastoretal (۲۰۰۹) نیز بود. آن‌ها مدل ترکیبی انتگرال عمیق را با روش SPH برای شبیه‌سازی انتشار زمین لغزش‌های فاجعه‌بار پیشنهاد کردند. نسخه سرعت-فشار مدل بیوت-زینکوویچ<sup>۲</sup> برای در نظر گرفتن اثر توام فار جامد با سیال معرفی شد. بعنوان مثال از این نسخه در مدل‌سازی انتشار زمین لغزش ناحیه توستولو در منطقه کامپانیای ایتالیا در سال ۱۹۹۸ استفاده شد. این مدل همزمان با نتایج میدانی در دسترس مقایسه می‌شد. بعدها از این مدل در شبیه‌سازی زمین لغزش لاهار مکزیک بکار گرفته شد (Hadda et al., ۲۰۱۰). خط مسیر، سرعت، عمق و مسافت ران‌اوت<sup>۳</sup> سیال بخوبی پیش‌بینی شد. حساسیت مدل پیشنهادی به پارامترهای ژئولوژیکی مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان‌دهنده این بود که ویسکوزیته تاثیر بسزایی بر سرعت جریان داشته درحالی که مقاومت تسلیم عمدتاً بر فاصله ران‌اوت تاثیرگذار است.

بهمن صخره‌ها خطرات مهیبی برای موجودات زنده و انسان‌های ساکن محیط‌های کوهستانی دارد. Sosio et al. (۲۰۱۲) حرکت بهمن‌های سنگی و آوارها را در محیط‌های یخبندان با استفاده از روش SPH پیشنهادی توسط Mc Dougall (۲۰۰۶) بررسی کرد. نحوه انتشار، سرعت جریان، عمق فرسایش و ضخامت رسوبات مدل‌سازی شد. یک مقایسه کمی بین نتایج مدل‌سازی و اطلاعات میدانی انجام شد که نتایج بسیار خوبی حاصل گردید. علاوه بر این، پارامترهای کالیبره شده در این مدل توسط تجزیه و تحلیل‌ها قبلی مقداردهی شده بود.

<sup>۱</sup> Nonhydrostatic and anisotropic internal stress states

<sup>۲</sup> Biot-Zienkiewicz model

<sup>۳</sup> Runout

رانش زمین در بستر دریا می‌تواند باعث تولید موج شده که این امر باعث بخطر افتادن سازه‌های ساحلی و جان انسان شود. پیش‌بینی مشخصات این امواج می‌تواند در تشخیص و ارزیابی جاری شدن سیل و سونامی مهم باشد. مدل‌سازی امواج سطحی ایجاد شده پس از لغزش زمین بخاطر حرکت پیچیده شیروانی زیر آب و اندرکنش آن با آب کار دشواری است. همانطور که قبلاً ذکر شد روش SPH بدلیل راحتی کار در مدل‌سازی سطوح آزاد، جابجایی مرزها و تغییرشکل‌های بزرگ گزینه مناسبی برای شبیه‌سازی موج‌های ناگهانی که در اثر لغزش بستر تشکیل می‌شوند می‌باشد. برای مثال، یک مدل SPH بمنظور شبیه‌سازی لغزش و زلزله کیتویا و ایجاد سونامی در آلاسکا ارائه شد (Schwaiger and Higman, ۲۰۰۷). در این مدل صخره و آب بترتیب بعنوان سیال ویسکوز و غیرلزج در نظر گرفته شدند و از اثر هوا نیز صرف‌نظر شد. یک مدل دوبعدی SPH برای سیال غیرلزج بمنظور شبیه‌سازی امواج ناشی از زمین لغزش و پیش‌بینی انتشار آب با رضایت‌مندی خوبی مورد استفاده قرار گرفت (Qiu, ۲۰۰۸). مدل‌سازی عددی تولید موج سونامی نیز توسط (Das et al. ۲۰۰۹) انجام گرفت. الگوهای پیچیده جریان برای پیش‌بینی پروفیل سطح آزاد جریان، سیر تکاملی خط ساحلی و سرعت جریان ارائه شده که با نتایج آزمایشگاهی تطابق خوبی داشتند، استفاده شد. یک مدل SPH ژئولوژیکی توسط (Capone et al. ۲۰۱۰) بمنظور اندرکنش سیال-جامد، تولید و انتشار سونامی بعلت لغزش زمین در زیرآب بررسی شده است.

بمنظور افزایش دقت و ثبات روش SPH معمولی که در محاسبه حرکت سیال تراکم‌پذیر استفاده می‌شد به دو روش آنرا به سیال تراکم‌ناپذیر یا نزدیک به تراکم‌پذیری صفر توسعه دادند. اولین روش، روش WCSPH است که در آن سیال بصورت تراکم‌پذیر همراه با سرعت صوت بیشتر از سرعت جریان بالک<sup>۱</sup> در نظر گرفته می‌شود. یک معادله حالت سختی بمنظور محاسبه فشار اعضا استفاده می‌شود (Monaghan, ۱۹۹۴). این روش بصورت اصلاح شده در شبیه‌سازی موج ضربه‌ای تولید شده بر اثر لغزش زیرآب بکار گرفته شد (Ataei-Ashtiani and Mansour-Rezaei, ۲۰۰۹). این روش در کدنویسی کمی راحت است زیرا فشار مستقیماً از یک معادله ترمودینامیکی جبری قابل محاسبه است (Monaghan, ۱۹۹۴). با این وجود برخی مشکلات نیز وجود دارد. اولاً، تراکم مصنوعی می‌تواند باعث

<sup>۱</sup> Bulk flow

ایجاد مشکلاتی در بازتاب موج صدا در مناطق مرزی شود (Shao and Lo, ۲۰۰۳). دوما، گام‌های زمانی محدودی دارد، زیرا سرعت صوت خیلی بزرگتر از سرعت حداکثر است (Lee et al. ۲۰۰۸). این مشکلات باعث شد که از روش دیگری بنام ISPH استفاده شود. در این شیوه با استفاده از حل معادلات حاکم، گام‌های جزئی اصلاح را بدست می‌آورد. فشار دیگر یک متغیر وابسته نبوده اما می‌تواند از معادله پواسون فشار که شرایط تراکم‌ناپذیری را ارضا می‌کند بدست آید. مزیت اصلی ISPH ساده و موثر بودن در ردیابی سطوح آزاد است که مانند مرزهای دیواری رفتار می‌کند. برای مثال Shao and Lo (۲۰۰۳) یک روش ISPH ارائه دادند که با مساله شکست سد برای جریان نیوتنی و غیرنیوتنی آزمایش شد. نتایج با داده‌های آزمایشگاهی هم‌خوانی خوبی داشت. یک مدل ISPH برای شبیه‌سازی موج‌های انفرادی که بخاطر افتادن یک جعبه سنگین بر روی آب ایجاد می‌شد ارائه گردید (Ataei-Ashtiani and Shobeyri, ۲۰۰۸). همچنین لغزش یک قطعه سخت مستغرق در یک سطح شیبدار با این روش مدل‌سازی شد. نتایج محاسباتی ISPH در این مورد نیز با داده‌های آزمایشگاهی تطبیق مناسبی داشت. مدل پیشنهادی در مدل‌سازی لغزش یک جریان توده شن روی یک صفحه شیبدار مورد استفاده قرار گرفت. اخیراً، یک تکنیک مشابه گام جزئی که اولین بار توسط Chorin (۱۹۶۸) پیشنهاد شده بود در قالب روش ISPH بمنظور حل مسائل ژئومکانیک ارائه شده است (Blanc and Poster, ۲۰۱۱; Blanc Poster, ۲۰۱۲). مقایسه‌ای بین الگوریتم ISPH با روش WCSPH کلاسیک توسط Lee et al. (۲۰۰۸) انجام شد. در این مقایسه نشان داده شد که نتایج در محدوده تسلیم ISPH قابل اعتمادتر از روش WCSPH است. اخیراً (Shadloo et al. ۲۰۱۲) یک مطالعه مقایسه‌ای بین دو روش WCSPH و ISPH انجام دادند که در آن یک راه‌حل عددی برای جریان سیال از یک مانع مربع شکل ارائه شده است. آنها نشان دادند که نتایج عددی خروجی از WCSPH همانند نتایج ISPH دارای دقت بوده و قابل اطمینان است. (Szewc et al. ۲۰۱۲) یک مقایسه کاملی از این دو رفتار تراکم‌ناپذیری بیان نمودند. نتایج آنها نشان داد که ISPH دارای خطای تجمع چگالی بوده، بنابراین اصلاحاتی برای افزایش دقت و رفع این خطاها اعمال نمود. تا الان مقایسه مستقیمی بین روش معمول SPH با این دو رفتار تراکم‌ناپذیری ارائه نشده است و از این رو نمی‌توان درباره مزایا و معایب WCSPH و ISPH نسبت به SPH اظهار نظر کرد.

برخلاف روش‌های عددی قدیمی بر پایه مکانیک جامدات، مدل‌های SPH ذکر شده تغییر شکل‌های بزرگ و رفتار گسیختگی پس از آن بر روی شیروانی را بر پایه مکانیک سیالات آنالیز می‌کند و یک رویکرد کاملاً جدید و موثر برای پیش‌بینی جریان‌ها در مقایسه با روش‌های تجربی ارائه می‌دهد. در شبیه‌سازی‌های فوق مدل‌های ساختاری پیچیده ژئومتریالی<sup>۱</sup> همانند مدل دراگر-پراگر و مدل جریان بینگهام به قالب SPH وارد گردید. یک روش نیمه تجربی ساده براساس مفهوم "سیال معادل"<sup>۲</sup> در مدل جدید SPH توسط (Mc Dougall and Hungr (۲۰۰۴) برای مطالعات زمین لغزش ارائه شد. مواد زمین لغزش توسط یک ژئولوژی ساده و پارامترهای آن با کمک زمین لغزش با مقیاس واقعی بیان گردید. ادغام این مدل‌های ساختاری با قالب SPH باعث توسعه روش SPH شد. علاوه بر این، در شبیه‌سازی زمین لغزش فراساحلی، اندرکنش مایعات مختلف نیز در نظر گرفته شد.

---

<sup>۱</sup> Geomaterial

<sup>۲</sup> Equivalent fluid

# فصل ۳ روش هیدرو دینامیک ذرات هموار

روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) یکی از روش‌های بدون مش با توصیف لاگرانژی می‌باشد. این روش امروزه بطور وسیعی در بسیاری از مسائل مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این فصل روند توسعه، مفاهیم اولیه و روابط اساسی SPH معرفی می‌گردد. معادلات حاکم و قوانین ساختاری گنجانده شده در قالب SPH برای آنالیز مسائل مختلف بر پایه تحقیقات اخیر ارائه می‌شود.

### ۳-۱- مفاهیم اولیه SPH

SPH یک روش بدون مش و بر پایه توصیف لاگرانژی است که اولین بار بمنظور حل مسائل اختریفی یکی در فضای باز سه بعدی بویژه چندوجهی‌ها بکار گرفته شد (Lucy, ۱۹۷۷; Gingold and Monaghan, ۱۹۷۷).

بعدها (Monaghan and Lattanzio ۱۹۸۵) مفاهیم اولیه گسسته‌سازی برای معادلات حاکم از جمله پیوستگی، مومنتوم و انرژی را بطور خلاصه ارائه دادند. انتخاب توابع کرنلی هموار و تکنیک‌های استفاده شده در روابط SPH برای معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی پیچیده (PDEs)<sup>۱</sup> مورد بحث و بررسی قرار گرفت. با توجه به ناپایداری راه‌حل‌های عددی SPH (Dyka, ۱۹۹۹), Chen et al. (۱۹۹۵), Swegle et al. (۱۹۹۴)) طرحی برای پایدارسازی روش SPH ارائه شد. Johnson and Beissel (۱۹۹۶) یک روش محاسبه تنش را مطرح نمودند.

هسته اصلی این روش در خود نام SPH یعنی هیدرودینامیک ذرات هموار آمده است. "هموار"<sup>۲</sup> نشان‌دهنده ذرات تقریب هموار با کمک میانگین وزنی اعضای مجاور برای پایداری است. "ذرات"<sup>۳</sup> نشان‌دهنده این است که این روش بر پایه تئوری اعضای بدون مش استوار است. در دامنه محاسباتی از اعضای گسسته بجای اعضای پیوسته استفاده می‌شود. "هیدرودینامیک"<sup>۴</sup> به این واقعیت اشاره می‌کند که روش SPH ابتدا برای مسائل هیدرودینامیکی استفاده می‌شد.

<sup>۱</sup> Partial Differential Equations

<sup>۲</sup> Smoothed

<sup>۳</sup> Particle

<sup>۴</sup> Hydrodynamics



مفهوم اساسی SPH این است که یک سیال پیوسته توسط یکسری اعضا با توزیع دلخواه نشان داده می‌شود. ذرات محرک نشان‌دهنده خواص مواد هستند. با ارائه راه‌حل‌های عددی پایدار و با دقت برای معادلات هیدرودینامیکی و نمایش حرکت هریک از ذرات، این روش می‌تواند رفتار مکانیکی کل سیستم را توصیف کند. بنابراین، جنبه کلیدی SPH چگونگی حل معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی، با استفاده از یکسری ذرات با توزیع دلخواه که حامل متغیرهای محیطی همانند جرم، چگالی، انرژی و تانسور تنش هستند، می‌باشد. در یک شرایط واقعی، معمولاً بدست آوردن راه‌حل تحلیلی، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی است. سپس احتیاج به تقریب توابع متغیر و مشتقات آنها برای ذرات دلخواه می‌باشد. در نهایت توابع تقریب به معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی بمنظور بدست آوردن یکسری معادلات دیفرانسیلی معمولی گسسته (ODEs)<sup>۱</sup> که تنها وابسته به زمان اند اعمال می‌شود.

اساس و پایه روش SPH را می‌توان بطور خلاصه به این ترتیب بیان کرد:

(۱) در روش SPH، دامنه مساله با یکسری ذرات توزیع دلخواه جایگزین می‌شوند. در اینجا هیچ ارتباطی بین ذرات نبوده که این منعکس‌کننده ماهیت بدون مش بودن روش SPH است. نگرانی اصلی این روش چگونگی اطمینان از پایداری راه‌حل‌های عددی بویژه در اعمال ذرات با توزیع دلخواه بمنظور حل مسائل با شرایط مرزی می‌باشد.

(۲) یکی از گام‌های مهم، ارائه یک تابع در فرم پیوسته بعنوان ارائه انتگرالی با استفاده از توابع درون‌یاب است. این گام به تقریب کرنلی<sup>۲</sup> معروف است. این انتگرال یک اثر هموار شبیه معادلات فرم ضعیف<sup>۳</sup> دارد. در واقعیت، تقریب کرنلی محاسبات عددی SPH را پایدار می‌سازد.

(۳) گام مهم دیگر SPH این است که مقادیر تابع در ذره محاسباتی با استفاده از میانگین مقادیر تابع کلیه ذرات مجاور آن ذره بدست می‌آید. این گام تقریب ذرات<sup>۴</sup> نامیده می‌شود. نقش این تقریب تولید ماتریس‌های نواری<sup>۱</sup> یا پراکنده سیستم گسسته<sup>۲</sup> است که در محاسبات نقش بسزایی دارد.

<sup>۱</sup> Ordinary Differential Equations

<sup>۲</sup> Kernel approximation

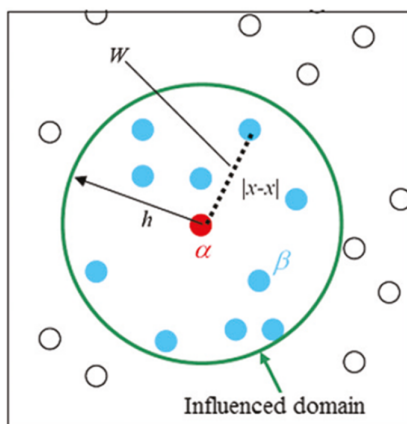
<sup>۳</sup> Weak form equations

<sup>۴</sup> Particle approximation

(۴) استفاده از یک الگوریتم انتگرالی آشکار برای حل معادلات دیفرانسیلی می‌تواند در سریعترین گام زمانی بدست آید. تاریخچه زمانی تمام متغیرهای محیطی برای همه ذرات قابل مشاهده است. یک روش مناسب برای گام زمانی در روش SPH بایستی انتخاب شود. بطور خلاصه، روش SPH بعنوان یک روش بدون مش، انطباق پذیر، پایدار و با توصیف لاگرانژی است که بعنوان یک راه حل مسائل دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### ۳-۲- تقریب SPH

روش SPH براساس تئوری درونیابی<sup>۳</sup> با دو جنبه اساسی بنا شده است. اولین جنبه، تقریب هموار یا کرنلی است که یک تابع را در فرم پیوسته بعنوان ارائه انتگرالی<sup>۴</sup> ارائه می‌دهد. جنبه دیگر تقریب ذرات است که دامنه مساله را با استفاده از ذرات گسسته در داخل دامنه تاثیر بمنظور تخمین متغیرهای محیطی برای ذره مورد نظر ارائه می‌دهد. مقدار یک تابع در ذره محاسباتی  $a$  با استفاده از میانگین وزنی مقادیر ذرات موجود در دامنه تاثیر ذره  $a$  توسط تابع هموارساز قابل محاسبه است. شعاع دامنه تاثیر با  $h$  نشان داده می‌شود که اندازه آن بستگی به دقت مساله دارد. همانطور که در شکل ۱-۳ نشان داده شده است،  $W$  تابع کرنلی هموارساز،  $a$  ذره محاسباتی مورد نظر و  $\beta$  ذرات مجاور می‌باشد.



شکل ۱-۳ مفهوم روش SPH (Huang et al., ۲۰۱۱)

<sup>۱</sup> Banded matrices

<sup>۲</sup> Sparse discretized system matrices

<sup>۳</sup> Interpolation theory

<sup>۴</sup> Integral representation

### ۳-۲-۱ تقریب کرنلی

ارائه انتگرالی یک تابع  $f(x)$  که در روش SPH استفاده می‌شود را می‌توان بصورت فرم پیوسته بازنگری کرد:

$$f(x) = \int_D f(x') \delta(x - x') dx', \quad (1-3)$$

که در آن  $f(x)$  یک تابع با موقعیت سه بعدی  $x$ ،  $D$  حجم انتگرال که شامل  $x$  می‌باشد و  $\delta(x - x')$  تابع دلتای دیراک<sup>۱</sup> است که توسط رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 1 & , x = x' \\ 0 & , x \neq x' \end{cases} \quad (2-3)$$

اگر  $f(x)$  یک تابع پیوسته در  $D$  تعریف شود، معادله (۱-۳) دقیق است. اگر تابع دلتای دیراک  $\delta(x - x')$  با تابع کرنلی هموارساز  $W(x - x', h)$  جایگزین شود، ارائه انتگرالی  $f(x)$  توسط رابطه زیر تقریب زده می‌شود:

$$f(x) \approx \int_D f(x') W(x - x', h) dx'. \quad (3-3)$$

تابع کرنلی هموارساز بعنوان تابع کرنلی درون‌یاب شناخته می‌شود و دارای دو ویژگی است:

$$\int_D W(x - x', h) dx' = 1, \quad (4-3)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x - x', h) = \delta(x - x'). \quad (5-3)$$

$W$  با توجه به نیازهای مساله انتخاب شده و بایستی یک تابع زوج مشتق‌پذیر باشد. کرنل گوسی، کرنل بی-اسپیلاین، تابع اسپیلاین مکعبی، تابع اسپیلاین زنگوله‌ای و تابع اسپیلاین کوارتیک از جمله توابع کرنلی هموارساز معروف هستند.

در بالا تقریب کرنلی توصیف شد که در اینجا با استفاده از براکت  $\langle \rangle$  نشان داده می‌شود. از این‌رو معادله (۳-۳) می‌تواند بصورت زیر نوشته شود:

<sup>۱</sup> Dirac delta function

$$\langle f(x) \rangle = \int_D f(x') W(x - x', h) dx' = \int_D f(x') W(r, h) dx'. \quad (۶-۳)$$

واضح است که معادله (۴-۳) در واقع همان شرط واحد بودن<sup>۱</sup> است. معادله (۵-۳) مقدار  $W$  را در نقطه  $x = x'$  در نظر می‌گیرد و آن تابعی است که بطور ناگهانی مقدارش تغییر می‌کند. اگر  $|x - x'| > h$  باشد، مقدار  $W$  صفر می‌شود. اگر  $h$  میل به صفر کند  $W$  همان تابع کرنل دلتا دیراک  $\delta(x - x')$  می‌شود و می‌تواند بصورت  $\langle f(x) \rangle = f(x)$  در  $\lim_{h \rightarrow 0}$  ارائه شود.  $\langle f(x) \rangle$  یک تقریب کرنلی  $f(x)$  است که می‌تواند بعنوان هموارساز یا فیلتر برای  $W(x - x', h)$  در نظر گرفته شود و نوسانات محلی  $W(x - x', h)$  را فیلتر کند.

معادله (۶-۳) یک بیان استاندارد تقریب کرنل یک تابع است. تقریب مشتق فضایی  $\nabla f(x)$  براحتی با جایگزینی  $f(x)$  با  $\nabla f(x)$  در معادله (۶-۳) قابل تعیین است که بصورت زیر است:

$$\langle \nabla f(x) \rangle = \int_D \nabla f(x') W(x - x', h) dx' = \int_D \nabla f(x') W(r, h) dx'. \quad (۷-۳)$$

بخاطر اینکه معادله بالا بطور مستقیم قابل محاسبه نیست تغییرات زیر بایستی اعمال شود:

$$[\nabla f(x')] W(x - x', h) = \nabla [f(x') W(x - x', h)] - f(x') \nabla W(x - x', h). \quad (۸-۳)$$

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x) \rangle &= \int_D \nabla [f(x') W(x - x', h)] dx' - \int_D f(x') \nabla W(x - x', h) dx' \\ &= \int_S f(x') W(x - x', h) n ds - \int_D f(x') \nabla W(x - x', h) dx', \end{aligned} \quad (۹-۳)$$

که در آن  $S$  سطح مرزی حجم انتگرال و  $n$  بردار نرمال واحد بر سطح  $S$  است. بخاطر شرط فشردگی<sup>۲</sup>  $W$ ، انتگرال سطحی معادله (۵-۳) در دامنه تاثیر  $D$  صفر است. سپس معادله (۹-۳) می‌تواند بصورت زیر بازنویسی شود:

$$\langle \nabla f(x) \rangle \approx - \int_D f(x') \nabla W(x - x', h) dx'. \quad (۱۰-۳)$$

معادله (۱۰-۳) اغلب بصورت تقریب تابع برای  $\nabla f(x)$  استفاده می‌شود.

<sup>۱</sup> Unity condition

<sup>۲</sup> Compact support condition

### ۳-۲-۲ تقریب ذرات

اگر تابع کرنل  $W$  تابع دیفرانسیلی  $n$  مرتبه باشد، می‌توان اثبات کرد که  $\langle \nabla f(x) \rangle$  نیز به همان صورت است. اگر سیال با چگالی  $\rho(x)$  در جریان باشد، سیال به  $N$  المان حجمی تقسیم می‌شود. جرم المان‌های حجمی به ترتیب با  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$  مکان مرکز جرم المان‌ها نیز به ترتیب با  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  نشان داده می‌شود. ارائه انتگرالی SPH پیوسته برای  $f(x)$  می‌تواند بصورت تقریب اجزای گسسته<sup>۱</sup> زیر نوشته شود:

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j(x')}{\rho_j} w(x - x', h), \quad (11-3)$$

بر اساس معادلات (۳-۶)، (۳-۱۰)، و (۳-۱۱) می‌توان نوشت:

$$\langle f_i(x) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j(x') w(x - x', h), \quad (12-3)$$

$$\langle \nabla f_i(x) \rangle = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j(x') \nabla w(x - x', h). \quad (13-3)$$

بر اساس همین استدلال، تقریب ذرات برای مشتقات فضایی<sup>۲</sup> تابع بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f(x) \rangle}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int f_j(x') w(x - x', h) dx' \\ &= \int f_j(x') \frac{\partial w(x - x', h)}{\partial x_i} dx' \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f_j(x') \frac{\partial w(x - x', h)}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (14-3)$$

در اینجا از  $\rho(x)$  بجای  $f(x)$  می‌توان استفاده نمود. از معادله (۳-۱۱) می‌توان  $\rho(x)$  را بصورت زیر نوشت:

<sup>۱</sup> Discretized particle approximation

<sup>۲</sup> Spatial derivative

$$\langle \rho_i(x) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j w(x - x', h). \quad (15-3)$$

این بیان می‌کند که چگالی یک ذره می‌تواند با میانگین وزنی چگالی ذراتی که در دامنه تاثیر آن ذره هستند تقریب زده شود. این همان مفهوم "ذرات هموار" است.

### ۳-۳-۳ مدل هیدرودینامیکی SPH

#### ۳-۳-۱-۱ معادلات حاکم

معادلات ناویر-استوکس در این بخش بعنوان معادلات حالت برای توصیف جریان نیوتنی تراکم‌ناپذیر معرفی می‌شود.

#### معادلات پیوستگی<sup>۱</sup>

معادله پیوستگی برپایه اصل بقای جرم استوار است که بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta}. \quad (16-3)$$

در رابطه فوق  $\rho$  چگالی،  $t$  زمان،  $u$  بردار سرعت و اندیس  $\beta$  جهات مختصاتی (همانند اندیس  $\alpha$  که در روابط بعدی می‌آید) می‌باشد. معادله بالا می‌تواند به این صورت نوشته شود:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial(\rho u^\beta)}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta}. \quad (17-3)$$

#### معادله حرکت<sup>۲</sup>

عموماً، معادله حرکت در قالب رابطه زیر است:

$$\frac{du^\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + F. \quad (18-3)$$

<sup>۱</sup> Equation of Continuity

<sup>۲</sup> Equation of Motion

که در آن  $\sigma$  تانسور تنش و  $F$  بردار نیروی خارجی است. اولین بخش از سمت راست معادله (۳-۱۸) را می‌توان بصورت زیر گسترش داد:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \right) + \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta}. \quad (19-3)$$

### معادله انرژی<sup>۱</sup>

معادله انرژی بر پایه اصل بقای انرژی استوار است که نشان‌دهنده قانون اول ترمودینامیک است.

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\sigma^{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (20-3)$$

### ۳-۳-۲ فرمول‌بندی SPH برای معادلات حالت

استفاده از تقریب هموارساز و تقریب ذرات ذکر شده در بخش‌های قبلی بیان شد. معادلات حاکم SPH می‌تواند بشرح ذیل بیان گردد.

معادله پیوستگی:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j (u_i^\beta - u_j^\beta) \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i^\beta}, \quad (21-3)$$

معادله حرکت:

$$\frac{du_i^\alpha}{dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left[ \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{(\rho_i)^\gamma} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{(\rho_j)^\gamma} \right] \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_j^\beta} + F_i, \quad (22-3)$$

معادله انرژی:

$$\frac{De_i}{Dt} = \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\rho_i + \rho_j}{\rho_i \rho_j} \right) v_{ij}^\beta \frac{\partial w_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{\mu_i}{\gamma \rho_i} \varepsilon_i^{\alpha\beta} \varepsilon_j^{\alpha\beta}, \quad (23-3)$$

در روابط فوق  $w_{ij}$  تابع هموارساز عضو  $i$  متأثر از عضو  $j$  بوده و مقدار آن رابطه مستقیمی با مقدار  $h$  دارد.

<sup>۱</sup> Equation of Energy

$$w_{ij} = w(x_i - x_j, h) = w(R_{ij}, h), \quad (24-3)$$

که در آن  $R_{ij} = \frac{r_{ij}}{h} = \frac{|x_i - x_j|}{h}$  می‌باشد که همان فاصله نسبی دو عضو  $i$  و  $j$  بوده و  $r_{ij}$  نیز فاصله بین دو عضو است.

با ثابت در نظر گرفتن دمای خاک، انرژی در معادله (۲۳-۳) در نظر گرفته نمی‌شود.

### ۳-۳-۳ مدل ساختاری سیال نیوتنی

تانسور تنش سیال نیوتنی بصورت زیر است:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \xi D_{kk}\delta_{ij} + \eta D_{ij}, \quad (25-3)$$

که در آن:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (26-3)$$

که  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش،  $P$  فشار،  $\delta_{ij}$  تابع دلتای کرونیکر<sup>۱</sup>،  $\xi$  ضریب ویسکوزیته دوم،  $\eta$  ضریب ویسکوزیته و  $D_{ij}$  تانسور کرنش برشی می‌باشد.

طبق فرضیه استوکس<sup>۲</sup> داریم:

$$\xi + \frac{2}{3}\eta = 0, \quad (27-3)$$

سپس معادله (۲۵-۳) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} - \frac{2}{3}\eta D_{ij}\delta_{ij} + \eta D_{ij}. \quad (28-3)$$

<sup>۱</sup> Kronecker delta function

<sup>۲</sup> Stokes hypothesis



### ۳-۳-۴ فرمول بندی SPH برای معادله پوآسون

بمنظور حل معادلات ناویر-استوکس، ابتدا می‌بایست فشار را با حل معادله پوآسون بدست آوریم. با استفاده از پارامترهای سرعت  $u_k$ ، فشار  $P_k$  و نیروی خارجی  $F_k$ ، پارامتر جدید سرعت مجازی  $u^*$  بمنظور ساخت معادله معرفی می‌شود. سپس معادلات ناویر-استوکس بایستی بدست آید. از معادلات (۳-۱۸)، (۳-۲۶) و (۳-۲۸) معادله حاکم ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر برای معادله مومنتوم بصورت زیر می‌شود:

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + F_i. \quad (3-29)$$

همچنین:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P + \nu \nabla^2 u + F. \quad (3-30)$$

$u^*$  نیز بصورت زیر معرفی می‌شود:

$$u^* = u^k + \Delta t \left( -\frac{1}{\rho} \text{grad } P^k + \nu \nabla^2 u^k + F^k \right). \quad (3-31)$$

همچنین  $u^k$  و  $P^k$  به این صورت تعریف می‌شود:

$$u^{k+1} = u^k + u', \quad (3-32)$$

$$P^{k+1} = P^k + P'. \quad (3-33)$$

با اضافه کردن معادله (۳-۳۱) به معادله (۳-۳۲) داریم:

$$\begin{aligned} (u_i^\alpha)^{k+1} &= (u_i^\alpha)^k + \Delta t \left( -\frac{1}{\rho} \text{grad } (P^\alpha)^{k+1} + \nu \nabla^2 (u_i^\alpha)^k + F^k \right) \\ &= (u_i^\alpha)^* - \Delta t \left( -\frac{1}{\rho} \text{grad } (P^\alpha)^k + \nu \nabla^2 (u_i^\alpha)^k + F^k \right) \\ &\quad + \Delta t \left( -\frac{1}{\rho} \text{grad } (P^\alpha)^{k+1} + \nu \nabla^2 (u_i^\alpha)^k + F^k \right) \\ &= (u_i^\alpha)^* + \Delta t \frac{1}{\rho} (\text{grad } (P^\alpha)^k - \text{grad } (P^\alpha)^{k+1}), \end{aligned} \quad (3-34)$$

<sup>1</sup> Virtual velocity

$$\begin{aligned}(u_i^\alpha)^{k+1} &= (u_i^\alpha)^k + \Delta t \left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{k+1}}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 (u_i^\alpha)^k}{\partial x_j^2} + F^k \right) \\ &= (u_i^\alpha)^* - \Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i},\end{aligned}\quad (۳۵-۳)$$

که  $\alpha$  ذره محاسباتی در مرکز می‌باشد. همچنین  $\beta$  که در روابط بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، نشان‌دهنده ذرات همسایگی داخل دامنه موثر ذره  $\alpha$  می‌باشد.

مشق معادله (۳۵-۳) عبارتست از:

$$\frac{\partial (u_i^\alpha)^{k+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial (u_i^\alpha)^*}{\partial x_i} - \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho^\alpha} \nabla(P'^\alpha) \right), \quad (۳۶-۳)$$

همچنین:

$$\frac{\partial (u_i^\alpha)^{k+1}}{\partial x_i} = \text{div}(u_i^\alpha)^{k+1} = \dots \quad (۳۷-۳)$$

بهمین ترتیب معادله (۳۶-۳) می‌تواند بازنویسی شود:

$$\frac{\partial (u_i^\alpha)^*}{\partial x_i} = \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho^\alpha} \nabla(P'^\alpha) \right). \quad (۳۸-۳)$$

از معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \cdot \nabla u = \dots \quad (۳۹-۳)$$

بخاطر اینکه چگالی سیال  $\rho$  متناسب با تعداد ذرات  $n$  می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{n} \frac{Dn}{Dt} + \nabla \cdot u = \dots \quad (۴۰-۳)$$

از تعریف تابع هموارساز می‌توان  $n^*$  را بصورت زیر تعریف کرد:

$$n^* = \sum_{\alpha \neq \beta}^N W^{\alpha\beta}, \quad (۴۱-۳)$$

$$\frac{1}{n} \frac{Dn}{Dt} - \frac{Dn^*}{Dt} + \nabla \cdot u = \dots \quad (۴۲-۳)$$

$n^*$  نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$n^* = n^{k+1} = n^* + n'. \quad (۴۳-۳)$$

با کمک معادلات (۳۸-۳)، (۴۲-۳) و (۴۳-۳) می‌توان نوشت:

$$\nabla u = -\frac{n^* - n^*}{n^* \Delta t} = \Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho^\alpha} \nabla(P'^\alpha) \right). \quad (۴۴-۳)$$

سپس معادله پواسون تعیین می‌شود:

$$\nabla \left( \frac{1}{\rho^\alpha} \nabla(P'^\alpha)^{k+1} \right) = -\frac{n^* - n^*}{n^* \Delta t^\gamma}. \quad (۴۵-۳)$$

با توجه به فرمول بندی SPH ارائه شده توسط Monaghan and Cleary (۱۹۹۹) داریم:

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (K \nabla T) = \frac{\partial U^\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta}^N \frac{f m^\beta}{\rho^\alpha \rho^\beta} \frac{K^\alpha K^\beta}{K^\alpha + K^\beta} \frac{(T^\alpha - T^\beta)(x^\alpha - x^\beta) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i}}{(x^\alpha - x^\beta)^\gamma + (y^\alpha - y^\beta)^\gamma}. \quad (۴۶-۳)$$

با اعمال معادلات گسسته SPH به طرف چپ معادله پواسون می‌توان رابطه زیر را بیان کرد:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho^\alpha} \nabla(P'^\alpha) \right) &= \sum_{\beta}^N \frac{f m^\beta}{\rho^\beta} \frac{\frac{1}{\rho^\alpha} \frac{1}{\rho^\beta}}{\frac{1}{\rho^\alpha} + \frac{1}{\rho^\beta}} \frac{((P'^\alpha) - (P'^\beta))(x_i^\alpha - x_i^\beta) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i}}{(x^\alpha - x^\beta)^\gamma + (y^\alpha - y^\beta)^\gamma} \\ &= \sum_{\beta}^N \frac{f m^\beta}{\rho^\beta} \frac{1}{\rho^\alpha + \rho^\beta} \frac{((P'^\alpha) - (P'^\beta))(x_i^\alpha - x_i^\beta) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i}}{(x^\alpha - x^\beta)^\gamma + (y^\alpha - y^\beta)^\gamma}. \end{aligned} \quad (۴۷-۳)$$

معادله پواسون دوبعدی بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho^\alpha} \nabla(P'^\alpha) \right) &= \sum_{\beta}^N \frac{f m^\beta}{\rho^\beta} \frac{1}{\rho^\alpha + \rho^\beta} \frac{((P'^\alpha) - (P'^\beta))(x^\alpha - x^\beta) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x}}{(x^\alpha - x^\beta)^\gamma + (y^\alpha - y^\beta)^\gamma} \\ &+ \sum_{\beta}^N \frac{f m^\beta}{\rho^\beta} \frac{1}{\rho^\alpha + \rho^\beta} \frac{((P'^\alpha) - (P'^\beta))(y^\alpha - y^\beta) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial y}}{(x^\alpha - x^\beta)^\gamma + (y^\alpha - y^\beta)^\gamma} \\ &= \sum_{\beta}^N \frac{f m^\beta}{\rho^\beta} \frac{1}{\rho^\alpha + \rho^\beta} \left( \frac{(x^\alpha - x^\beta) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x} + (y^\alpha - y^\beta) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial y}}{(x^\alpha - x^\beta)^\gamma + (y^\alpha - y^\beta)^\gamma} \right) [(P'^\alpha) - (P'^\beta)]. \end{aligned} \quad (۴۸-۳)$$

$$-\frac{n^* - n^*}{n \cdot \Delta t^\gamma} = \sum_{\beta}^N \frac{f m^{\beta}}{\rho^{\beta}} \frac{1}{\rho^{\alpha} + \rho^{\beta}} \left( \frac{(x^{\alpha} - x^{\beta}) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x} + (y^{\alpha} - y^{\beta}) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial y}}{(x^{\alpha} - x^{\beta})^{\gamma} + (y^{\alpha} - y^{\beta})^{\gamma}} \right) [(P'^{\alpha}) - (P'^{\beta})]. \quad (۴۹-۳)$$

:۴۵

$$\begin{aligned} &-\frac{n^* - n^*}{n \cdot \Delta t^\gamma} \\ &= \sum_{\beta}^N \frac{f m^{\beta}}{\rho^{\beta}} \frac{1}{\rho^{\alpha} + \rho^{\beta}} \left( \frac{(x^{\alpha} - x^{\beta}) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x} + (y^{\alpha} - y^{\beta}) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial y}}{(x^{\alpha} - x^{\beta})^{\gamma} + (y^{\alpha} - y^{\beta})^{\gamma}} \right) (P'^{\alpha}) \quad (۵۰-۳) \\ &- \sum_{\beta}^N \frac{f m^{\beta}}{\rho^{\beta}} \frac{1}{\rho^{\alpha} + \rho^{\beta}} \left( \frac{(x^{\alpha} - x^{\beta}) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x} + (y^{\alpha} - y^{\beta}) \cdot \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial y}}{(x^{\alpha} - x^{\beta})^{\gamma} + (y^{\alpha} - y^{\beta})^{\gamma}} \right) (P'^{\beta}). \end{aligned}$$

معادله فوق می تواند توسط روش (ICCG)<sup>۱</sup> حل شود.<sup>۱</sup> Incomplete Cholesky decomposition Conjugate Gradient

# **فصل ۴ روش هیدرودینامیک ذرات هموار در جامدات**

در مقایسه با روش‌های عددی دیگر، SPH مزیت‌های متمایزی در حل مسائل با تغییرشکل‌های بزرگ دارد. این روش بطور وسیع در بسیاری از گرایش‌ها استفاده می‌شود. این روش از قالب هیدرودینامیکی به سمت قالب مکانیکی توسعه و تکامل یافته است. در این فصل فرمول‌بندی بخش جامدات روش SPH بطور کامل شرح داده می‌شود. در واقع با اضافه کردن این روابط به قالب SPH هیدرودینامیکی توانستیم از این روش در مدل‌سازی مسائل جامداتی ژئوتکنیک همچون گسیختگی شیروانی خاکی بهره ببریم.

## ۴-۱- معادلات حاکم

### ۴-۱-۱- تقریب SPH معادله پیوستگی

برای استفاده روش SPH بمنظور محاسبه مسائل مکانیک و مواد الاستو-پلاستیک می‌بایست معادله پیوستگی موجود در فرمول‌بندی SPH اصلاح و بازنویسی شود.

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j \cdot w_{ij} . \quad (1-4)$$

همچنین معادله (۲-۴) برای سطوح آزاد و مرز مواد استفاده می‌شود:

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^N m_j \cdot w_{ij}}{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \cdot w_{ij}} . \quad (2-4)$$

معادله (۳-۴) در واقع معادله بقای جرم در قالب توصیف اولری می‌باشد. در یک توصیف لاگرانژی می‌توان معادله (۴-۴) را ارائه داد. بنابراین فرمول‌بندی دیگر SPH برای معادله پیوستگی در معادله (۵-۴) آمده است:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 , \quad (3-4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} , \quad (4-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= - \sum_{\beta}^N \frac{m^{\beta}}{\rho^{\beta}} \rho^{\beta} v_i^{\beta} \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i} + v_i \sum_{\beta}^N \frac{m^{\beta}}{\rho^{\beta}} \rho^{\beta} \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i} \\ &= \sum_{\beta}^N m^{\beta} (v_i^{\alpha} - v_i^{\beta}) \frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial x_i^{\beta}}, \end{aligned} \quad (۵-۴)$$

#### ۴-۱-۲ تقریب SPH معادله مومنتوم

معادله مومنتوم برای مدل الاستو-پلاستیک SPH شبیه به معادله مومنتوم برای دینامیک سیالات است.

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad (۶-۴)$$

جاییکه  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش و  $F_i$  نیروی حجمی<sup>۱</sup> است.

با ارزیابی اولین بخش از طرف راست معادله (۶-۴) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \right) = \frac{\rho \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \sigma_{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}}{\rho^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \right) + \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}. \quad (۷-۴)$$

با جایگزینی معادله (۷-۴) در معادله (۶-۴) داریم:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \right) + \frac{\sigma_{ij}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + F_i. \quad (۸-۴)$$

با استفاده از تقریب ذرات و تقریب هموارساز، فرمول‌بندی معادله مومنتوم در مدل الاستو-پلاستیک SPH بصورت زیر توصیف می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{Dv_i^{\alpha}}{Dt} &= \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^{\gamma}} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + F_i \\ &= \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^{\gamma}} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^{\gamma}} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^{\beta}} + F_i. \end{aligned} \quad (۹-۴)$$

<sup>۱</sup> Body force

معمولا یک ویسکوزیته مصنوعی<sup>۱</sup> در بخش‌های فشار معادله حرکت بمنظور تبدیل انرژی جنبشی به گرما آورده می‌شود (Monaghan and Gingold, ۱۹۸۳). این ویسکوزیته مصنوعی در معادله (۴-۱۰) آورده شده است. با این روش از نوسان عددی جلوگیری شده و همچنین مقاومتی در برابر نفوذ ذرات بوجود می‌آید.

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^\gamma} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^\gamma} - \delta^{\alpha\beta} \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + F_i. \quad (10-4)$$

این ویسکوزیته توسط فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\Pi_{ij} = \frac{-a\bar{c}\mu_{ij} + b(\mu_{ij})^\gamma}{\rho^{\alpha\beta}}, \quad (11-4)$$

$$\mu_{ij} = \frac{h(v_i - v_j) \sqrt{(x_i - x_j)^\gamma + (y_i - y_j)^\gamma}}{(x_i - x_j)^\gamma + (y_i - y_j)^\gamma + kh^\gamma}, \quad (12-4)$$

$$\bar{c} = \frac{1}{\gamma} (c_i - c_j), \quad (13-4)$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\gamma} (\rho_i - \rho_j), \quad (14-4)$$

که در آن  $a$  و  $b$  پارامترهای ثابتی هستند (اغلب ۱ انتخاب می‌شوند) که پایداری عددی کد را بهبود می‌بخشد (Monaghan, ۱۹۸۸; Evard, ۱۹۸۸).  $K$  پارامتر آزادی است که برای اجتناب از ایجاد اختلاف عددی بوده و وقتی که ذرات بهم نزدیک می‌شوند به معادله اضافه می‌شود.  $K$  را می‌توان ۰,۰۱ در نظر گرفت (Liu and Liu, ۲۰۰۳).  $c_j$  و  $c_i$  بترتیب سرعت صوت در نقاط  $i$  و  $j$  هستند.

<sup>۱</sup> Artificial viscosity



## ۴-۲- مدل ساختاری الاستو-پلاستیک

### ۴-۲-۱ روابط تنش- کرنش

برای مواد الاستو-پلاستیک، مدل ساختاری در فرم (جاومن)<sup>۱</sup> نرخ تنش بمنظور ایجاد رابطه‌ای بین حالت‌های تنش و حرکت ذره استفاده می‌شود. در مسائلی که در آن تغییر شکل‌های بزرگ اتفاق می‌افتد، تغییر شکل کل را می‌توان به دو قسمت تغییر شکل الاستیک<sup>۲</sup> و تغییر شکل پلاستیک<sup>۳</sup> تجزیه کرد که مقدار تغییر شکل الاستیک به نسبت کوچکتر است.

در مکانیک الاستیک، رابطه تنش کرنش تغییر شکل‌های الاستیک می‌تواند بصورت زیر ارائه شود:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}^e, \quad (15-4)$$

که  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش الاستیک،  $D_{ijkl}^e$  ماتریس ضریب الاستیک مرتبه چهار و  $\varepsilon_{kl}^e$  کرنش الاستیک است. فرم افزایشی رابطه تنش-کرنش الاستیک بصورت زیر می‌باشد:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^e, \quad (16-4)$$

$$D^e = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{bmatrix}, \quad (17-4)$$

که پارامترهای  $\lambda$  و  $\mu$  برابر است با:

$$\lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)}, \quad (18-4)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)}, \quad (19-4)$$

که  $E$  مدول یانگ و  $\nu$  ضریب پواسون است.

با ترکیب معادلات (۱۶-۴) و (۱۷-۴)، ماتریس تنش-کرنش بصورت زیر ارائه می‌شود:

<sup>۱</sup> Jaumann

<sup>۲</sup> Elastic deformations

<sup>۳</sup> Plastic deformations

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & \mu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu & \lambda + 2\mu & \mu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu & \mu & \lambda + 2\mu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^e \\ \varepsilon_{yy}^e \\ \varepsilon_{zz}^e \\ \varepsilon_{xy}^e \\ \varepsilon_{yz}^e \\ \varepsilon_{zx}^e \end{bmatrix} \quad (20-4)$$

در مسئله کرنش صفحه‌ای<sup>۱</sup>،  $\sigma_{yz}$ ،  $\sigma_{zx}$ ،  $\varepsilon_{zz}$ ،  $\varepsilon_{yz}$  و  $\varepsilon_{zx}$  همگی برابر صفر هستند. بنابراین  $D_{ijkl}^e$  بصورت زیر می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & \cdot \\ \mu & \lambda + 2\mu & \cdot \\ \mu & \mu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^e \\ \varepsilon_{yy}^e \\ \varepsilon_{xy}^e \end{bmatrix} \quad (21-4)$$

برای نوشتن مدل ساختاری الاستو-پلاستیک بایستی سه مساله را در نظر گرفت. اولین مساله تابع پتانسیل پلاستیک<sup>۲</sup> (تعیین‌کننده جهت کرنش پلاستیک) است. دومین مساله تابع تسلیم<sup>۳</sup> است که تعیین می‌کند آیا کرنش پلاستیک رخ می‌دهد یا خیر. سومین مساله معادله سازگاری<sup>۴</sup> (تعیین‌کننده مقدار کرنش پلاستیک) است. با مراجعه به تئوری‌های پلاستیک، به یک معیار تسلیم و قانون جریان احتیاج است. معیار تسلیم حالت تنش را وقتی جریان پلاستیک اتفاق می‌افتد تعیین می‌کند و قانون جریان چگونگی افزایش کرنش پلاستیک را وقتی تسلیم اتفاق می‌افتد شرح می‌دهد. همانطور که می‌دانید معیارهای تسلیم متعددی در مکانیک جامدات وجود دارد. معیار تسلیم ون-میسز<sup>۵</sup>، معیار تسلیم موهر-کولمب<sup>۶</sup>، معیار تسلیم ترسکا<sup>۷</sup> و معیار تسلیم دراگر-پراگر<sup>۸</sup> از جمله معیارهای تسلیم پرکاربرد هستند. معیار تسلیم ون-میسز، ترکیبی از تنش‌های برشی را معیار خود برای گسیختگی قرار می‌دهد. معیار تسلیم ترسکا تنش برشی ماکزیمم را ملاک قرار می‌دهد. معیار تسلیم موهر-کولمب بیشتر شبیه به معیار ترسکا می‌باشد، با این تفاوت که این معیار برای مصالحی که مقاومت تسلیم فشاری و کششی آن‌ها باهم متفاوت هستند نیز کاربرد دارد. از این نوع مصالح می‌توان به

<sup>۱</sup> Plain strain

<sup>۲</sup> Plastic potential function

<sup>۳</sup> Yield function

<sup>۴</sup> Compatibility equation

<sup>۵</sup> Von Mises yield function

<sup>۶</sup> Mohr-Coulomb yield function

<sup>۷</sup> Tresca yield function

<sup>۸</sup> Drucker-Prager yield function

خاک، بتن، مصالح دانه‌ای و ... اشاره نمود. معیار تسلیم دراکر-پراگر نیز شباهت زیادی به معیار ون-میسز دارد، با این تفاوت که از این معیار می‌توان برای مصالحی که مقاومت تسلیم فشاری و کششی آن‌ها باهم متفاوت هستند نیز استفاده نمود. مصالح گوناگون دارای رفتارهای متفاوتی هستند. برخی از مصالح دارای رفتار الاستیک-کاملاً پلاستیک<sup>۱</sup> هستند که فولادهای نرم را می‌توان بصورت ایده‌آل در این دسته مواد قرار داد. ولی برخی از مواد دارای سختی بوده و در اثر باربرداری و بارگذاری متعدد ضعیف‌تر یا قوی‌تر می‌شوند که اصطلاحاً این مواد دارای رفتار سخت‌شوندگی<sup>۲</sup> هستند. در این پایان‌نامه رفتار مصالح خاکی را الاستو-پلاستیک فرض کرده و برای توصیف آن از معیار تسلیم دراکر-پراگر استفاده می‌کنیم.

نتایج‌های آزمایش کششی ساده نشان داد که کرنش تسلیم  $\varepsilon_{ij}$  متشکل از دو قسمت کرنش الاستیک  $\varepsilon^e$  و کرنش پلاستیک  $\varepsilon^p$  است.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (22-4)$$

دیفرانسیل معادله (۲۲-۴) بصورت زیر است:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad (23-4)$$

همچنین می‌توان معادله فوق را بگونه‌ای دیگر نوشت:

$$d\varepsilon_{ij}^e = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p, \quad (24-4)$$

با قرار دادن معادله فوق در معادله (۱۶-۴) داریم:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e (d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p). \quad (25-4)$$

قانون جریان کرنش پلاستیک بصورت زیر می‌باشد:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (d\lambda \geq 0), \quad (26-4)$$

جاییکه  $d\lambda$  وابسته به موقعیت ذره و سطح بارگذاری می‌باشد. این ویژگی مواد پلاستیک را نشان می‌دهد و می‌تواند مقدار کرنش پلاستیک را تعیین کند.  $g$  تابع پتانسیل پلاستیک است. وقتی سطح

<sup>۱</sup> Elastic-Perfectly plastic

<sup>۲</sup> Hardening behavior

تسلیم منطبق با سطح پتانسیل پلاستیک باشد، تابع تسلیم می‌تواند بعنوان تابع پتانسیل پلاستیک عمل کند که این تابع بصورت زیر است:

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & (d\lambda \geq 0), \\ f = g \end{cases} \quad (27-4)$$

بخاطر تغییرشکل پلاستیک،  $g$  نه تنها به حالت تنش بلکه به تاریخچه بارگذاری نیز مرتبط است. در اینجا، پارامتر سخت‌شوندگی برای نشان دادن این تاریخچه معرفی می‌گردد. سپس، تابع تسلیم  $f$  بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(\sigma_{ij}, L) = 0, \quad (28-4)$$

مشتق کلی معادله بالا بصورت زیر می‌باشد:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}^P} d\varepsilon_{ij}^P = 0, \quad (29-4)$$

با جایگذاری معادله (۲۵-۴) در معادله فوق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^P) + \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{ij}^P} d\varepsilon_{ij}^P = 0. \quad (30-4)$$

این معادله می‌تواند بصورت زیر بازنویسی شود:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e - \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{kl}^P} \right) d\varepsilon_{kl}^P. \quad (31-4)$$

با جایگذاری معادله (۲۷-۴) در معادله فوق داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl} = \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e - \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{kl}^P} \right) d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}. \quad (32-4)$$

در اینجا  $d\lambda$  را می‌توان از معادله زیر بدست آورد:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} D_{ijkl}^e - \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{kl}^P} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}. \quad (33-4)$$

با جایگذاری معادله (۴-۲۷) در معادله (۴-۲۵) داریم:

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e \left( d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right). \quad (۴-۳۴)$$

از معادله بالا رابطه تنش- کرنش مواد الاستو-پلاستیک بصورت زیر بیان می‌شود:

$$d\sigma_{ij} = \left( D_{ijkl}^e - \left( d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) \frac{D_{ijmnl}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{ijkl}^e}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} D_{mnpq}^e - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}} \right) d\varepsilon_{kl}. \quad (۴-۳۵)$$

شرایط دراگر-پراگر تابع تسلیم بصورت:

$$f = q + \alpha p - k, \quad (۴-۳۶)$$

می‌باشد که p و q از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad (۴-۳۷)$$

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad (۴-۳۸)$$

جایی که  $s_{ij}$  تنش انحرافی<sup>۱</sup> بوده و رابطه آن بصورت زیر است:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}, \quad (۴-۳۹)$$

پارامترهای  $\alpha$  و  $K$  که ثابت‌های بدون بعد هستند، در تابع تسلیم استفاده می‌شوند. در اینجا  $\alpha$  و  $K$  را

از روابط انتخابی زیر بدست می‌آوریم:

$$\alpha = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}, \quad (۴-۴۰)$$

$$k = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}, \quad (۴-۴۱)$$

که c چسبندگی و  $\varphi$  زاویه اصطکاک داخلی است.

<sup>۱</sup> Deviatoric stress

## ۴-۲-۲ نرخ تنش جاومن<sup>۱</sup>

در روش SPH، تغییرشکل و حرکت جسم پیوسته فضایی توسط حرکت ذرات گسسته نشان داده می‌شود. یکی از ویژگی‌های متمایز نرخ تنش جاومن این است که می‌تواند یک رابطه بین تانسورهای تنش و نرخ کرنش ایجاد کند.

$$\hat{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ik}\omega_{kj} - \omega_{ik}\sigma_{kj}, \quad (42-4)$$

$\omega_{ij}$  تانسور چرخش<sup>۲</sup> و  $\dot{\sigma}_{ij}$  تانسور نرخ تنش کوشی<sup>۳</sup> می‌باشد. این دو متغیر از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (43-4)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{dt}, \quad (44-4)$$

برای نرخ تنش جاومن نیز رابطه زیر را داریم:

$$\hat{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}D_{kl}, \quad (45-4)$$

که  $E_{ijkl}$  ماتریس مرتبه چهارم است که ماتریس سختی الاستیک را نشان می‌دهد.  $D_{ij}$  نیز تانسور اتساع<sup>۴</sup> است.

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (46-4)$$

پس از تقریب SPH،  $D_{ij}$  را می‌توان در فرم گسسته نوشت:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} \left[ (v_x^j - v_x^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} + (v_y^j - v_y^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} \right]. \quad (47-4)$$

بطور مشابه، فرم گسسته SPH برای معادله (۴۳-۴) عبارتست از:

<sup>۱</sup> Jaumann Stress Rate

<sup>۲</sup> Rotation tensor

<sup>۳</sup> Cauchy stress rate tensor

<sup>۴</sup> Stretch tensor

$$\omega_{ij} = \frac{1}{\bar{v}} \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} \left[ (v_x^j - v_x^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} - (v_y^j - v_y^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} \right]. \quad (48-4)$$

نرخ تنش دوبعدی جاومن، تانسور اتساع، و تانسور چرخش می‌توانند بصورت زیر بیان شوند:

$$\dot{\sigma}_{xx} = \hat{\sigma}_{xx} + 2\omega_{xy}\sigma_{yx}, \quad (49-4)$$

$$\dot{\sigma}_{yy} = \hat{\sigma}_{yy} - 2\sigma_{xy}\omega_{xy}, \quad (50-4)$$

$$\dot{\sigma}_{xy} = \hat{\sigma}_{xy} - \sigma_{xx}\omega_{xy} + \sigma_{yy}\omega_{xy}, \quad (51-4)$$

$$D_{xx} = \frac{1}{\bar{v}} \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} \left[ (v_x^j - v_x^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} \right], \quad (52-4)$$

$$D_{yy} = \frac{1}{\bar{v}} \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} \left[ (v_y^j - v_y^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} \right], \quad (53-4)$$

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{1}{\bar{v}} \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} \left[ (v_x^j - v_x^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} + (v_y^j - v_y^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} \right], \quad (54-4)$$

$$\omega_{xx} = \frac{1}{\bar{v}} \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} \left[ (v_x^j - v_x^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} - (v_y^j - v_y^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} \right], \quad (55-4)$$

$$\omega_{yy} = \frac{1}{\bar{v}} \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} \left[ (v_x^j - v_x^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} - (v_y^j - v_y^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} \right], \quad (56-4)$$

$$\omega_{xy} = -\omega_{yx} = \frac{1}{\bar{v}} \sum_j^N \frac{m_j}{\rho_j} \left[ (v_x^j - v_x^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} - (v_y^j - v_y^i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} \right]. \quad (57-4)$$

### ۳-۴- جنبه‌های عددی مدل SPH

#### ۳-۴-۱ تنظیمات اولیه

تنظیمات اولیه مناسب بایستی برای مسائل عددی مختلف انجام شود. برای نیازهای خاص موارد محاسباتی مختلف، حالت اولیه از جمله تابع کرنل، نوع ذرات و مختصات آن‌ها، فاصله اولیه ذرات، چگالی، فشار و سرعت بایستی در شروع محاسبات تعیین شوند. گام زمانی واحد از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\Delta t = \min\left(0.4 \frac{h}{c}, 0.25 \sqrt{\frac{h}{f}}, 0.125 \frac{h^2}{v}\right), \quad (58-4)$$

C سرعت صوت، f نیروی خارجی، و  $v$  ضریب ویسکوزیته هستند و ۰،۴، ۰،۲۵، و ۰،۱۲۵ ضریب‌های اطمینان می‌باشند که از طریق تجربه و آزمایش بدست آمده‌اند.

### ۴-۳-۲ الگوریتم جستجوی ذرات همسایه<sup>۱</sup>

همانطور که گفته شد، SPH یک روش بدون مش است که براساس اندرکنش بین نزدیک‌ترین ذرات همسایه است. در طول جابجایی هر ذره، موقعیت فضایی دائماً در حال تغییر است. بنابراین، موقعیت ذراتی که در همسایگی قرار دارند در هرگام زمانی دستخوش تغییر می‌شوند. بنابراین داشتن لیستی از همسایگی برای افزایش کارایی و عملکرد کد نقش بسزایی دارد. راندمان مدل SPH بطور قطع وابسته به ساختار و نحوه استفاده از این لیست است.

در این مورد اخیراً دو روش برای تعیین ناحیه جستجو در روش بدون مش مطرح شده است: روش لیست همسایگی ورلت<sup>۲</sup> و روش لیست همسایگی سلول مرتبط<sup>۳</sup>. در روش همسایگی ورلت ابتدا یک حد فاصله‌ای تعریف می‌شود، سپس فاصله نسبی ذرات از هم محاسبه می‌شود. اگر فاصله نسبی بین ذرات کمتر از آن حد فاصله تعریف شده باشد آن ذره بعنوان ذره همسایگی انتخاب می‌شود. دامنه محاسباتی دوبعدی هر ذره دارای شکل هندسی دایره‌ای است. در روش همسایگی سلول مرتبط، یک مش مجازی تولید می‌شود و مقدار محاسباتی توسط محدود کردن تعداد شبکه‌های نزدیک تعیین می‌شود. دامنه محاسباتی این روش در حالت دوبعدی برای هر ذره دارای شکل هندسی مستطیلی است.

### روش لیست همسایگی سلول مرتبط

روش لیست همسایگی سلول مرتبط (Allen and Tildesley, ۱۹۹۰) یک روش جستجوی ذره می‌باشد که تعیین حیطه جستجو هدف اصلی آن است. بزرگترین مزیت آن این است که پیچیدگی آن به‌جای مرتبه  $N^2$ ، مرتبه  $N$  می‌باشد. همانطور که در شکل ۴-۱ مشاهده می‌شود، تمامی سطح

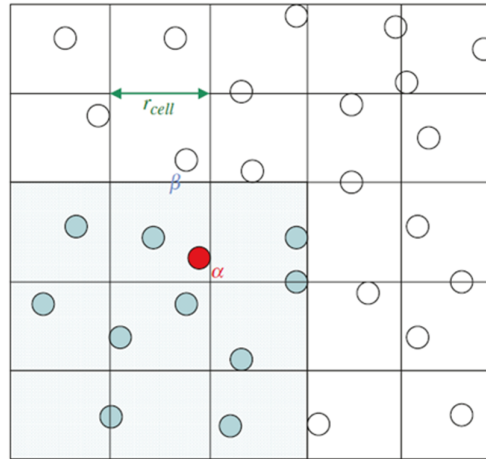
<sup>۱</sup> Neighboring Particle Searching Algorithm

<sup>۲</sup> Verlet neighbor list method

<sup>۳</sup> Linked-cell neighbor list method



محاسباتی به چندین شبکه مستطیلی تقسیم شده است. هر یک از اعضا با توجه به مختصات که داشتند در هریک از این شبکه‌ها قرار گرفته اند.



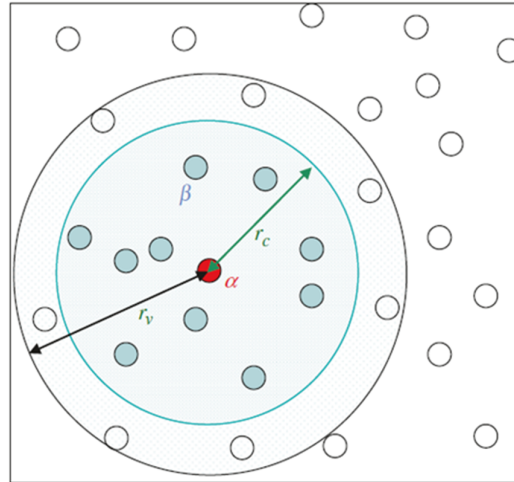
شکل ۴-۱ الگوریتم روش لیست همسایگی سلول مرتبط (Dominguez et al., ۲۰۱۱)

طول  $r_{cell}$  تعیین‌کننده اندازه اضلاع این شبکه‌هاست که مقدار آن مستقیم بستگی به دقت و اثربخشی روش دارد. پس از اینکه تمام ذرات داخل این شبکه‌ها قرار گرفتند، اطلاعات حرکتی آنها در لیست‌های مختلفی ذخیره شده و با یکدیگر مرتبط می‌شوند. برای مثال، در صورت انتخاب یک ذره در لیست، اطلاعات تمامی ذرات دیگری که در آن لیست هستند بدست می‌آید. برای تمامی مسائل پیچیدگی الگوریتم جستجو ذرات همسایگی همواره مرتبه  $N$  است. در طول جستجو ذره، مقدار محاسباتی با تغییر تعداد ذره بصورت خطی ذخیره می‌شود. به هر حال، این روش نیازمند حافظه بالایی در کامپیوتر می‌باشد.

### روش لیست همسایگی ورلت

روش لیست همسایگی ورلت پس از پیشنهاد این روش توسط (Loup Verlet (۱۹۶۷ به این اسم، نام‌گذاری شد. خلاصه این الگوریتم در شکل ۴-۲ نشان داده شده است. اولین باری که از این روش استفاده شد، سرعت محاسباتی را برای اندرکنش ذرات در یک محیط کوچک به شدت افزایش داد. حال اساس کاری این روش شرح داده می‌شود. ابتدا، فاصله بین هر جفت ذره محاسبه می‌شود، سپس یک لیست همسایگی احتمالی ساخته شده که در آن فاصله جفت ذرات همگی در یک لایه

"پوستی"<sup>۱</sup> با شعاع  $r_v$  قرار دارند. در این لیست، تنها جفت ذرات داخل شعاع برش  $r_c$ ، باهم تداخل دارند و نتیجه در لیست دیگری آورده می‌شود.



شکل ۴-۲ الگوریتم روش لیست همسایگی ورلت (Dai et al., ۲۰۱۴)

لیست همسایگی در هر گام زمانی به‌روز می‌شود، در حالی که لیست همسایگی احتمالی برای هر گره در  $N$  گام زمانی به‌روز می‌شود. مقدار  $N$ ،  $\gamma$  پیشنهاد شده است (Dominguez et al., ۲۰۱۱). با توجه به مقاله اصلی ورلت (Verlet, ۱۹۶۷)،  $r_c$  و  $r_v$  را می‌توان به ترتیب  $2.5r$  و  $3.2r$  در نظر گرفت که در آن شعاع برهم کنش ذرات می‌باشد.

شکل‌های ۴-۱ و ۴-۲ تفاوت بین دو روش را وقتی محیط محاسباتی برای یک مساله خاص تقسیم‌بندی می‌شود را نشان می‌دهد. هر روش دارای نکاتی بود که به برخی از آن‌ها اشاره شد.

### ۴-۳-۳ تابع کرنل<sup>۲</sup>

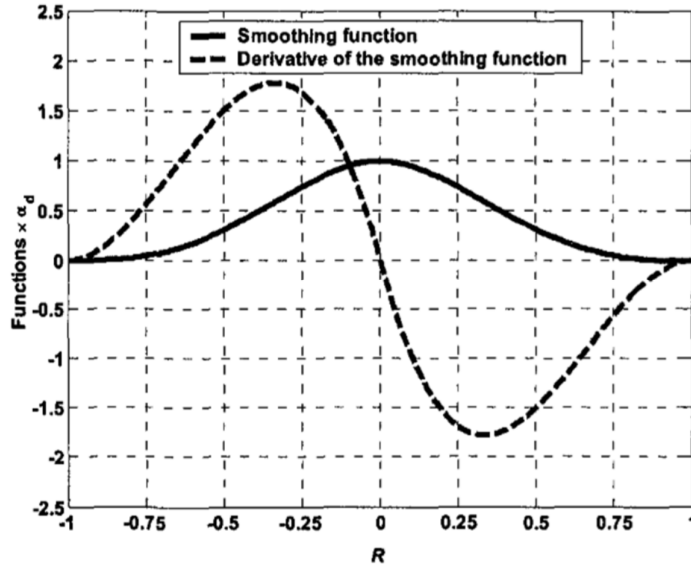
همانطور که قبلاً بیان شد، تابع کرنل در ایجاد معادله حاکم نقش بسزایی دارند. تابع کرنل تعیین‌کننده دقت و اعتبار تقریب تابع زمینه است. درجه، تقارن و پایداری تابع درون‌یاب بایستی در هنگام انتخاب تابع کرنلی مورد توجه قرار گیرد. در زیر لیستی از پرکاربردترین توابع کرنل در روش SPH ذکر می‌شود.

<sup>۱</sup> Skin layer  
<sup>۲</sup> Kernel Function

(۱) تابع زنگوله شکل<sup>۱</sup> (Lucy, ۱۹۷۷)

Lucy در مقاله SPH خود از این تابع بعنوان تابع کرنلی استفاده نمود. این تابع در شکل ۳-۴ نشان داده شده است:

$$W(x - x', h) = W(R, h) = \alpha_d \begin{cases} (1 + 3R)(1 - R)^3 & R \leq 1 \\ 0 & R > 1 \end{cases} \quad (۵۹-۴)$$



شکل ۳-۴ تابع زنگوله شکل و مشتق مرتبه اول آن (Lucy, ۱۹۷۷)

در رابطه فوق،  $\alpha_d$  در فضای یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی بترتیب  $\frac{5}{4h}$ ،  $\frac{5}{\pi h^2}$  و  $\frac{105}{16\pi h^3}$  می باشد. خصوصیت واحد بودن برای هر سه بعد ذکر شده صادق است. در معادله (۵۹-۴)،  $R$  فاصله نسبی بین ذرات در نقاط  $x$  و  $x'$  بوده و از رابطه زیر بدست آید:

$$R = \frac{r}{h} = \frac{|x - x'|}{h} \quad (۶۰-۴)$$

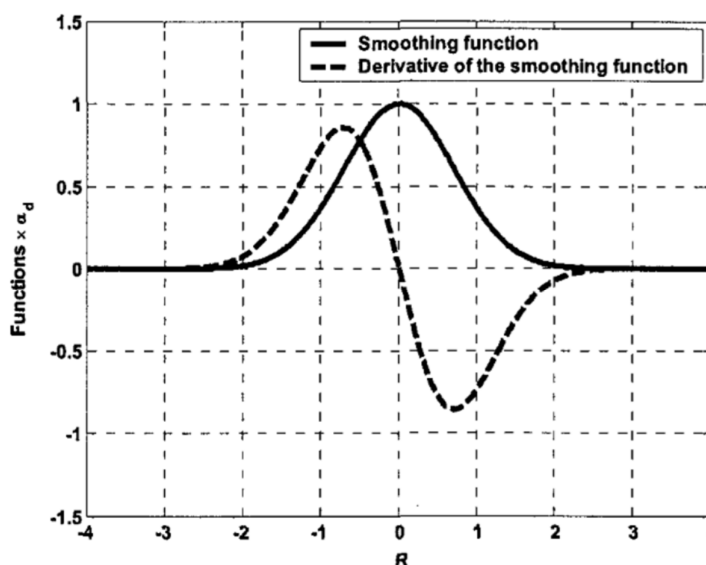
که  $r$  فاصله بین دو ذره است.

<sup>۱</sup> Bell-shaped function

(۲) تابع گوسی<sup>۱</sup> (Monaghan, ۱۹۹۲)

Monaghan اظهار داشت که برای یافتن درون‌یابی فیزیکی یک معادله SPH، همواره بهتر است که از تابع کرنلی گوسی استفاده شود. (Gingold and Monaghan (۱۹۷۷) در مقاله خود از تابع گوسی شکل ۴-۴ بمنظور مدل‌سازی ستاره‌های غیرکروی استفاده کردند.

$$W(R, h) = \alpha_d e^{-R^\gamma}, \quad (۴-۶)$$



شکل ۴-۴ تابع گوسی و مشتق مرتبه اول آن (Monaghan, ۱۹۹۲)

که برای فضای یک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی بترتیب  $\frac{1}{\pi^{1/2}h}$ ،  $\frac{1}{\pi h^2}$  و  $\frac{1}{\pi^{3/2}h^3}$  می‌باشد. این تابع می‌تواند یک انتخاب مناسب باشد زیرا این تابع حتی برای ذرات نامنظم هم بسیار دقیق و پایدار است. ولی این تابع شرط فشردگی را بخوبی ارضا نمی‌کند مگر این‌که از لحاظ تئوری R به سمت بی‌نهایت میل کند. از آنجا که این تابع از نظر عددی به سرعت به صفر می‌رسد، عملاً فشردگی دارد. توجه داشته باشید برای رسیدن کرنل به صفر نیاز به طی کردن فاصله بیشتری می‌باشد که این امر مخصوصاً در درجات بالاتر مشتق تابع هموارساز، از نظر حجم محاسباتی کار را سنگین می‌کند. همچنین این امر نیازمند دامنه پوششی بزرگتری است که باعث دربرگرفتن ذرات بیشتری می‌شود و نیاز به ماتریس گسسته بزرگتری خواهد بود.

<sup>۱</sup> Gaussian kernel function

(۳) تابع نمایی<sup>۱</sup>

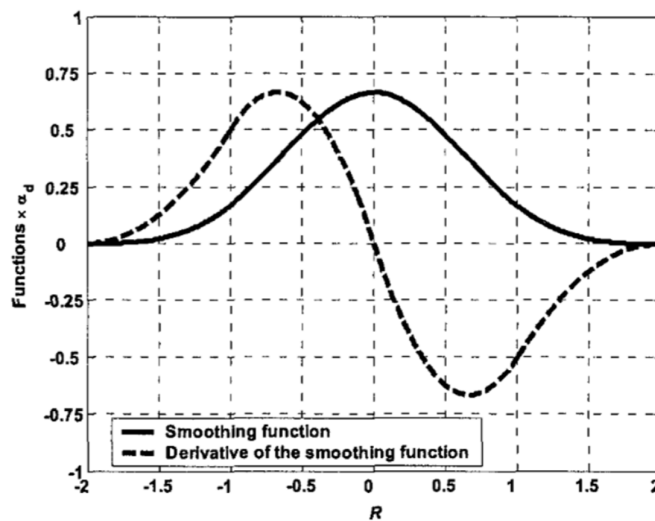
این تابع از دیگر توابع کرنلی می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(R, h) = \frac{1}{\lambda \pi h^3} e^{-R} \quad (۴-۶۲)$$

(۴) تابع اسپیلاین مکعبی<sup>۲</sup>

تابع اسپیلاین مکعبی بصورت زیر می‌باشد (شکل ۴-۵):

$$W(R, h) = \frac{c}{h^d} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}R^2 + \frac{3}{4}R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{4}(2-R)^2 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases} \quad (۴-۶۳)$$



شکل ۴-۵ تابع اسپیلاین مکعبی و مشتق مرتبه اول آن

در اینجا برای فضاهای یک‌بعدی، دوبعدی و سه‌بعدی مقدار  $c$  بترتیب برابر با  $\frac{2}{3}$ ،  $\frac{10}{\sqrt{\pi}}$  و  $\frac{1}{\pi}$  می‌باشد.

تابع اسپیلاین مکعبی، در گذشته یکی از پرکاربردترین توابع کرنلی در مقاله‌های SPH بوده است. این تابع شبیه به تابع گوسی بوده با این تفاوت که دارای دامنه فشردگی باریک‌تری است. علاوه بر این، تابع

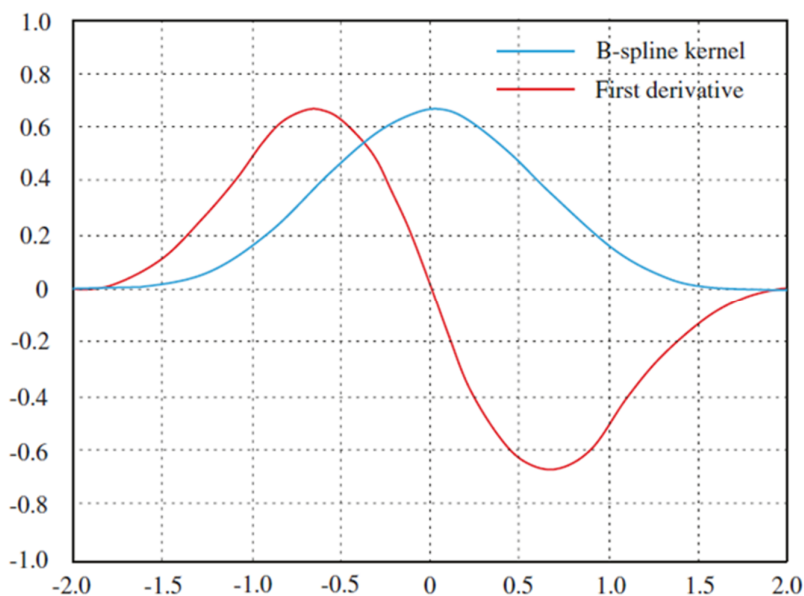
<sup>۱</sup> Exponential kernel<sup>۲</sup> Cubic spline function

کرنلی در چند قطعه می‌باشد که این امر کار را نسبت به توابع یک‌قطعه‌ای دشوارتر می‌کند. در این پایان‌نامه از این تابع کرنلی استفاده زیادی شده و نتایج قابل قبولی را به همراه داشته است.

(۵) تابع بی-اسپلاین<sup>۱</sup> (Monaghan and Lattanzio, ۱۹۸۵)

Monaghan and Lattanzio تابع هموارساز زیر را که بر پایه تابع اسپلاین مکعبی بوده و به تابع بی-اسپلاین معروف است را پیشنهاد دادند (شکل ۴-۶).

$$W(R, h) = \alpha_d * \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{6}R^3 & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6}(2-R)^3 & 1 \leq R < 2 \\ 0 & R \geq 2 \end{cases} \quad (۴-۶)$$



شکل ۴-۶ تابع بی-اسپلاین و مشتق مرتبه اول آن (Monaghan and Lattanzio, ۱۹۸۵)

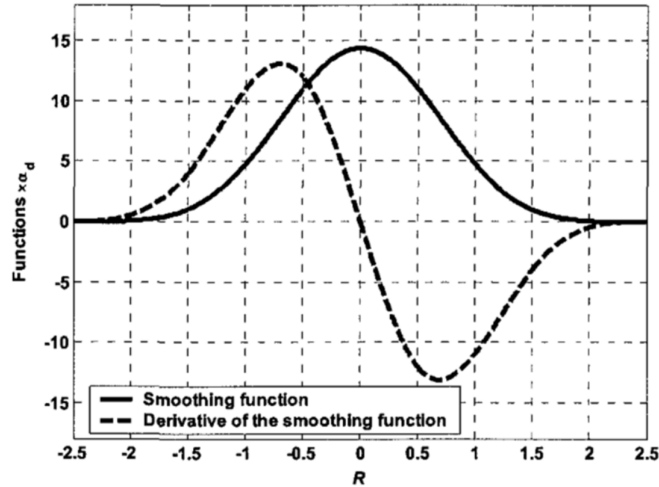
که در فضاها یک بعدی، دو بعدی، و سه بعدی  $\alpha_d$  بترتیب برابر با  $\frac{1}{h}$ ،  $\frac{15}{\sqrt{\pi}h^2}$  و  $\frac{3}{2\pi h^3}$  می‌باشد.

(۶) تابع کوارتیک<sup>۲</sup> (Morris, ۱۹۹۴)

Morris تابع اسپلاین کوارتیک مرتبه بالا را که بیشتر شبیه به یک تابع گوسی پایدار است را معرفی نمود. این تابع بصورت زیر می‌باشد (شکل ۴-۷).

<sup>۱</sup> B-spline kernel function  
<sup>۲</sup> Quartic kernel function

$$W(R, h) = \alpha_d * \begin{cases} (R + 2.5)^4 - 5(R + 1.5)^4 + 10(R + 0.5)^4 & 0 \leq R < 0.5 \\ (2.5 - R)^4 - 5(1.5 - R)^4 & 0.5 \leq R < 1.5 \\ (2.5 - R)^4 & 1.5 \leq R < 2.5 \\ 0 & R > 2.5 \end{cases} \quad (65-4)$$



شکل ۴-۷ تابع کواریتیک و مشتق مرتبه اول آن (Morris, ۱۹۹۴)

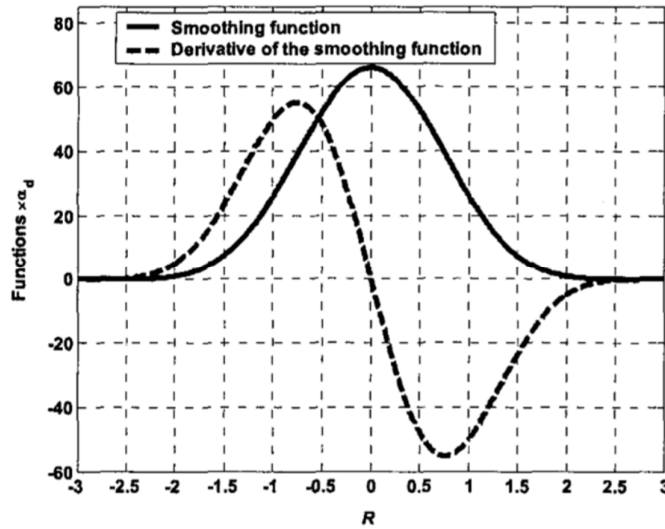
که  $\alpha_d$  در فضای یک بعدی برابر با  $\frac{1}{24h}$  است.

(۷) تابع کوینتیک<sup>۱</sup> (Morris, ۱۹۹۶)

این تابع را می توان در شکل ۴-۸ مشاهده نمود و رابطه آن بصورت زیر است:

$$W(R, h) = \alpha_d * \begin{cases} (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5 + 15(1 - R)^5 & 0 \leq R < 1 \\ (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5 & 1 \leq R < 2 \\ (3 - R)^5 & 2 \leq R < 3 \\ 0 & R > 3 \end{cases} \quad (66-4)$$

<sup>۱</sup> Quintic kernel function



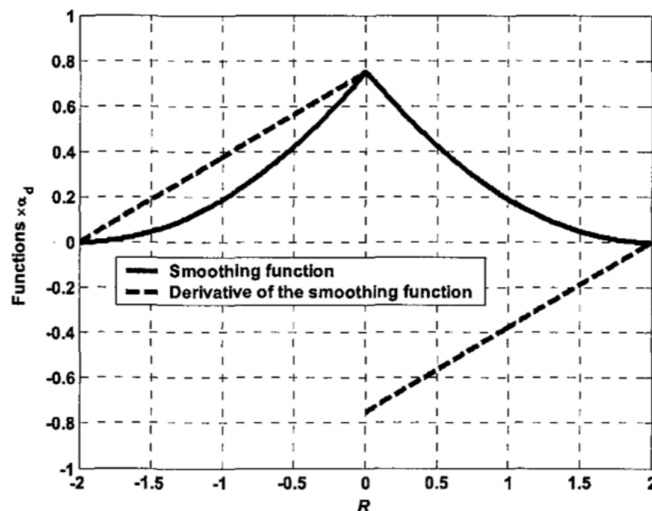
شکل ۴-۸ تابع کوینتیک و مشتق مرتبه اول آن (Morris, ۱۹۹۶)

که در فضاهاى یک بعدی، دو بعدی، و سه بعدی  $\alpha_d$  بترتیب برابر با  $\frac{120}{h}$ ،  $\frac{7}{478\pi h^2}$ ، و  $\frac{3}{359\pi h^3}$  می باشد.

(۸) تابع کوادراتیک<sup>۱</sup> (Johnson et al., ۱۹۹۶)

Johnson et al. از تابع هموارساز کوادراتیک زیر (شکل ۴-۹) برای شبیه سازی مسائل با سرعت ضربه بالا استفاده کردند.

$$W(R, h) = \alpha_d \left( \frac{3}{16} R^2 - \frac{3}{4} R + \frac{3}{4} \right) \quad 0 \leq R \leq 2, \quad (۴-۶۷)$$



شکل ۴-۹ تابع کوادراتیک و مشتق مرتبه اول آن (Johnson et al., ۱۹۹۶)

<sup>۱</sup> Quadratic kernel function

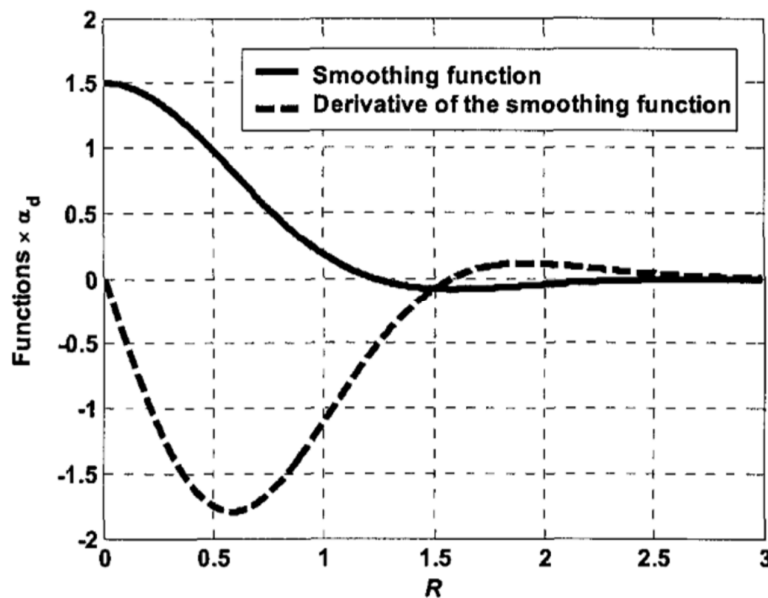


که در فضاهای یک‌بعدی، دوبعدی، و سه‌بعدی  $\alpha_d$  بترتیب برابر با  $\frac{1}{h}$ ،  $\frac{2}{\pi h^2}$ ، و  $\frac{5}{4\pi h^3}$  می‌باشد. برخلاف دیگر توابع کرنلی هموارساز، مشتق تابع کوادراتیک همواره با نزدیک شدن ذرات افزایش و با جدا شدن آن‌ها کاهش می‌یابد.

(۹) تابع سوپر-گوسی<sup>۱</sup> (Monaghan and Lattanzio, ۱۹۸۵)

برخی از توابع هموارساز درجه بالاتر از طریق فرم‌های درجه پایین‌تر ساخته شده‌اند، همانند تابع سوپرگوسی که بصورت زیر است (شکل ۴-۱۰):

$$W(R, h) = \alpha_d \left( \frac{3}{2} - R^2 \right) e^{-R^2} \quad 0 \leq R \leq 2, \quad (۴-۶۸)$$



شکل ۴-۱۰ تابع سوپرگوسی و مشتق مرتبه اول آن (Monaghan and Lattanzio, ۱۹۸۵)

که  $\alpha_d$  برای فضای یک‌بعدی برابر با  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  است.

یکی از معایب تابع هموارساز از مرتبه بالا این است که مقدار تابع در نقاطی مقدار منفی دارد. این امر ممکن است منجر به نتایج غیرفیزیکی برای مسائل هیدرودینامیکی شود (fulk, ۱۹۹۴). بعنوان نمونه، مشتق تابع کرنلی بی-اسپیلاین بصورت زیر می‌شود:

<sup>۱</sup> Super-Gaussian kernel function

$$\begin{aligned} \nabla_x \omega &= \frac{\partial \omega}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\ &= \alpha_d * \begin{cases} (-2R + \frac{3}{r} R^2) (\frac{1}{h}) (\frac{x-x'}{r}) & 0 \leq R < 1 \\ (-\frac{1}{r} (2-R)^2) (\frac{1}{h}) (\frac{x-x'}{r}) & 1 \leq R < 2 \\ & R \geq 2 \end{cases} \quad (69-4) \end{aligned}$$

### ۴-۳-۴ رفتار مرز سطح آزاد<sup>۱</sup>

در روش SPH، در حالت دینامیک سیالات شناخت و تشخیص مرزهای سطح آزاد مهم است. اگر چگالی ذره در رابطه زیر صادق باشد آن ذره بعنوان ذره سطح آزاد شناخته می‌شود:

$$\rho < \beta \rho. \quad (70-4)$$

در رابطه فوق  $\rho$  چگالی واقعی سیال و  $\beta$  پارامتری است که مقدار آن کمتر از ۱ و حدوداً بین ۰٫۸ تا ۰٫۹۸ است که مقدار دقیق آنرا می‌توان بصورت تجربی بدست آورد. در حالت مکانیک جامدات SPH از یکسری علائم متمایزی برای ذرات استفاده می‌شود و در مجموعه‌های مختلف آورده می‌شود تا تعیین شود که آیا این ذره در این محاسبه نقشی دارد یا خیر. برای مثال،  $N$  بعنوان علامت متمایز شناخته می‌شود. اگر  $N=1$  باشد یعنی این ذره در جهت  $x$  ثابت است و اگر  $N=2$  باشد یعنی ذره در جهت  $y$  ثابت است؛ همچنین اگر  $N=3$  باشد یعنی ذره در هر دو جهت  $x$  و  $y$  ثابت شده است.

### ۴-۳-۵ میانگین سرعت میدانی<sup>۲</sup>

در یک روش لاگرانژی، موقعیت یک ذره از انتگرال زمانی سرعت در هر لحظه بدست می‌آید. نوع دیگری از روش SPH بمنظور اصلاح و هموارسازی حرکت ذره ارائه شده که به آن XSPH گفته می‌شود. با این حال، معادله شتاب بدون تغییر باقی می‌ماند. سرعت هموار توسط میانگین سرعت ذرات همسایگی تعریف شده است (Monaghan, ۱۹۹۲).

$$v_i = v_i + \mathcal{X} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_{ij}} (v_j - v_i) W_{ij}, \quad (71-4)$$

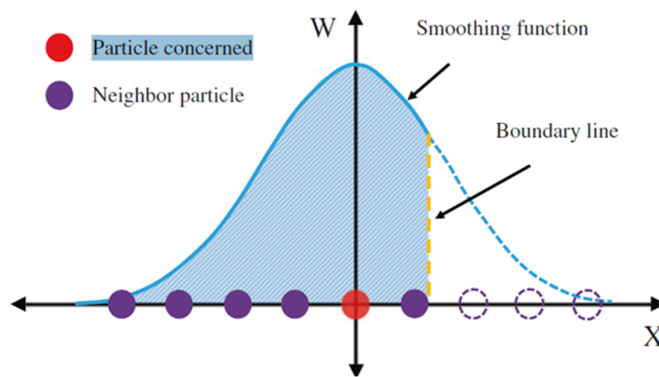
<sup>۱</sup> Free-Surface Boundary Treatment

<sup>۲</sup> Averaging the Velocity Field

که در رابطه فوق  $\mathcal{X}$  مقداری ثابت و مقدار آن بین صفر تا یک است. آزمایش‌های عددی نشان دادند که  $\mathcal{X} = 0.5$  در هموارسازی نوسانات محلی سرعت موثرتر است (Monaghan, ۲۰۰۲).  $\rho_{ij}$  نشان‌دهنده چگالی متوسط ذرات  $i$  و  $j$  است.

### ۴-۳-۶ رفتار مرز جامد

در نزدیکی مرز، تنها ذراتی که داخل مرز هستند در روابط SPH و درون‌یابی لحاظ می‌شوند؛ زیرا در خارج از مرز هیچ ذره‌ای وجود ندارد تا در روابط مشارکت کند (شکل ۴-۱۱). بنابراین، مدل‌سازی SPH در نزدیکی مرزها دچار کمبود ذره خواهد شد و این امر دقت راه‌حل را در آن محدوده پایین می‌آورد.



شکل ۴-۱۱ تقریب ذره SPH برای فضای یک‌بعدی

بمنظور حل این مشکل، برخی اصلاحات در محدوده مرزی پیشنهاد شده است. در میان این روش‌ها، مرزهای لغزش آزاد<sup>۱</sup> بطور وسیع در مدل‌سازی SPH برای جریان‌های سطح آزاد استفاده شده است. در این مدل‌سازی از یکسری ذرات مرزی بمنظور اعمال نیروی دافعه قوی استفاده می‌شود تا اینکه از نفوذ ذرات SPH در سطح جامد جلوگیری کند (Monaghan, ۱۹۹۴). این ذرات مرزی در محاسبه چگالی ذرات آزاد SPH هیچگونه دخالتی ندارند.

<sup>۱</sup> Free-slip boundaries

Libersky et al. (۱۹۹۳) ذرات مجازی<sup>۱</sup> با سرعت مخالف را بمنظور بازتاب کردن یک شرط مرزی با سطح متقارن معرفی کردند. پس از آن، یک راه حل جامع تری پیشنهاد شد که در آن تمامی ذرات مجازی همانند دیگر متغیرهای مرزی در محاسبه مقادیر ذرات داخلی مشارکت می کنند (Randles and Libersky, ۱۹۹۶). در این راستا یک شرط مرزی بدون لغزش اولین بار توسط Morris et al. (۱۹۹۷) ارائه شد. شکل ۴-۱۱ مفهوم اصلی برای یک مرز منحنی را نشان می دهد. خط چین زرد رنگ نشان داده شده همان خط مرزی است. ذره قرمز رنگ، ذره مورد نظر است. ذرات مرزی مجازی (بنفش رنگ) در خارج از خط مرزی بکار گرفته شده است. این ذرات در محاسبه چگالی ذرات جریان نقش دارند تا با این روش مشکل کمبود ذره در نزدیکی مرز جامد حل شود. یک صفحه مماس بر سطح مرزی تعریف می شود و سپس فاصله نرمال ذره سیال و ذره مرزی صفحه مماس محاسبه می شود و بترتیب  $d_B$  و  $d_A$  نامیده می شوند. سرعت ذره A در سراسر صفحه مماس، با فرض سرعت صفر در خود صفحه (بدون لغزش) برون یابی می شود. سپس سرعت هر ذره مرزی توسط رابطه زیر محاسبه می شود:

$$V_B = -\left(\frac{d_B}{d_A}\right) \cdot V_A, \quad (۷۲-۴)$$

سرعت های مصنوعی در اینجا بمنظور محاسبه نیروی ویسکوز، بجای برورسانی موقعیت های ذرات مرزی استفاده می شود. سرعت های نسبی بین ذرات سیال و ذرات مرزی،  $V_{AB}$ ، بصورت زیر تعریف می شود:

$$V_{AB} = V_A - V_B = \left(1 + \frac{d_B}{d_A}\right) \cdot V_A, \quad (۷۳-۴)$$

نیروهای ویسکوز از مرز جامد را می توان با استفاده از سرعت های نسبی بدست آورد (Morris et al., ۱۹۹۷). بمنظور جلوگیری از اعمال نیروی زیاد ویسکوز بخاطر نزدیک شدن ذرات سیال به سطح مرزی، مقدار  $V_{AB}$  بایستی توسط روابط زیر محدود شود:

$$V_B = \beta \cdot V_A, \quad (۷۴-۴)$$

<sup>۱</sup> Ghost particles

$$\beta = \min(\beta_{max}, 1 + \frac{d_B}{d_A}), \quad (75-4)$$

در روابط فوق  $\beta$  ضریب اطمینان و  $\beta_{max}$  ضریب تجربی می‌باشد که اغلب ۱,۵ انتخاب می‌شود.

### ۴-۳-۷ محاسبه شتاب

شتاب در ذرات در اثر نیروهای داخلی و خارجی تولید می‌شود. در مدل سیالاتی، چگالی ذره بایستی با استفاده از معادله پیوستگی در ابتدا محاسبه شود. سپس، باید چگالی ذرات سطح آزاد اصلاح شود و پس از آن فشار با معادله حالت محاسبه شده و شتاب در اثر نیروهای خارجی ایجاد می‌شود. شتاب نهایی نیز با کمک معادله مومنتوم تعیین می‌شود. برای مدل جامداتی، از نرخ تنش جاومن برای محاسبه تغییر تنش و کرنش ذرات استفاده می‌شود. سپس، شتاب نهایی توسط جمع کردن آن‌ها از نیروهای خارجی و داخلی تعیین می‌شود.

### ۴-۳-۸ روش ادغام<sup>۱</sup>

برای محاسبه نیروهای وارد بر ذرات SPH پس از گسسته‌سازی، یک لیست همسایگی برای هر ذره ساخته می‌شود. در محاسبات بعدی، باتوجه به همان لیست، نیروی کل وارد بر ذره می‌تواند تعیین شود. از آنجاکه روش SPH، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیلی معمولی کاهش می‌دهد، هر الگوریتم مربوط به گام زمانی پایدار می‌تواند برای معادلات دیفرانسیلی معمولی معرفی گردد. الگوریتم سرعت ورلت (Ercolessi, ۱۹۹۷)، مشابه با روش لیپفراگ<sup>۲</sup>، از روش‌هایی است که می‌توان برای زمان بمنظور بروزرسانی موقعیت‌ها، سرعت‌ها و شتاب‌ها استفاده نمود. این الگوریتم عبارتست از:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}a(t)\Delta t^2, \quad (76-4)$$

$$v\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = v(t) + \frac{1}{2}a(t)\Delta t, \quad (77-4)$$

$$v(t + \Delta t) = v\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{1}{2}a(t + \Delta t)\Delta t, \quad (78-4)$$

<sup>۱</sup> Integration Schemes

<sup>۲</sup> Leapfrog method

$$a(t) = \frac{1}{\rho} f(t), \quad (۷۹-۴)$$

### ۴-۳-۹ خروجی محاسبات

باتوجه به خصوصیت لاگرانژی روش SPH، اطلاعات مربوط به هر ذره، مانند چگالی، موقعیت، سرعت و فشار را می‌توان برای هرگام زمانی برداشت نمود. باتوجه به نیازهای واقعی یک مطالعه، مقادیر متغیرها می‌تواند بطور انتخابی بصورت فایل خروجی درآید و همچنین این اطلاعات براحتی مشاهده، سرعت آنالیز، و به‌آسانی بصورت منحنی‌های زمانی بدست آورده شوند.

### ۴-۴ - خلاصه

روش SPH، یک روش بدون مش نوین است که برپایه توصیف لاگرانژی خالص استوار است. اساس اصلی این روش ارائه سیال پیوسته توسط یکسری ذرات گسسته با توزیع دلخواه است. با ارائه یک راه‌حل عددی پایدار و دقیق برای معادلات هیدرودینامیکی و ردیابی حرکت هر ذره، رفتار مکانیکی کل سیستم را می‌توان تعیین کرد. SPH با داشتن خصوصیات همچون توصیف لاگرانژی، فاقد مش بودن، و تطبیق‌پذیری براحتی می‌تواند مسائلی که دارای سطوح آزاد و تغییرشکل‌های بزرگ هستند را شبیه‌سازی نماید.

SPH می‌تواند تا زمانی که تعداد کافی از ذرات وجود داشته باشد، پروسه‌های مکانیکی مختلف را توصیف نماید. گرچه که دقت نتایج بستگی به آرایش ذرات دارد ولی رعایت این آرایش، بمراتب راحت‌تر از الزامات روش‌های با شبکه است. در روش بدون شبکه، هیچ اتصالی بین ذرات وجود ندارد. بنابراین، هیچ انحراف مشی برای تغییر شکل‌های بزرگ رخ نخواهد داد، که این دقت کار را بسیار بالا می‌برد. علاوه براین، SPH براحتی می‌تواند مرز بین مواد مختلف را مدل‌سازی کند. از دیگر مزیت‌های روش SPH، توصیف لاگرانژی آن است که از دشواری‌های مرتبط با شبکه و ماده اجتناب می‌شود. از این‌رو، روش SPH مناسبی برای حل مسائل جریان‌های پیچیده می‌باشد. بطور خاص این روش دارای مزیت‌های زیر است: (۱) این روش در مدل‌سازی مسائل دارای تغییرشکل‌های بزرگ همچون گسیختگی شیروانی بخاطر نبود شبکه دچار انحراف مش نشده و براحتی آنرا مدل می‌کند؛ (۲) ردیابی

تاریخچه زمانی برای تمامی ذرات و برای تمامی متغیرهای محیطی براحتی امکان‌پذیر است؛ (۳) شرایط مرزی بطور خودکار بمنظور ردیابی سطوح آزاد، مرزهای مواد و جابجایی مرزها اعمال می‌شود؛ (۴) مدل‌سازی اشکال هندسی پیچیده و نامنظم براحتی انجام می‌شود. بنابراین SPH یک روش نوین و امیدوارکننده‌ای برای محاسبات مکانیک سیالات و جامدات می‌باشد.

بطور خلاصه، نکات اصلی زیر در دو فصل قبل پوشش داده شد:

(۱) خلاصه‌ای از مفهوم اصلی روش SPH بیان شد. همچنین دو تقریب اصلی، یکی تقریب کرنلی و دیگری تقریب ذرات بطور مفصل ذکر شد.

(۲) براساس تئوری‌های اساسی SPH، فرمول‌بندی‌های SPH برای معادلات ناویر-استوکس در یک توصیف لاگرانژی بوجود آمد. این نکته ذکر شد که دقت کار در نزدیکی مرزهای آزاد و مرزهای مواد برای ارزیابی حالت‌های مختلف تقریب نقش کلیدی را ایفا می‌کنند.

(۳) موضوع اصلی برای ایجاد فرمول‌بندی‌های SPH برای رفتار مواد الاستو-پلاستیک در مسائل جامداتی، آنالیز رابطه ساختاری بین تنش-کرنش مواد و حرکت ذرات داخلی می‌باشد. براساس مدل ساختاری در قالب نرخ تنش جاومن، مدل SPH می‌تواند برای انواع مختلف مواد اعمال شود.

(۴) الگوریتم معادله پوآسون بمنظور محاسبه فشار در SPH می‌تواند دقت و پایداری را برای راه‌حل عددی مدل دینامیک سیالاتی افزایش دهد.

(۵) کارآیی و دقت محاسباتی ملاک‌های اصلی برای ارزیابی روش مدل‌سازی عددی هستند. متناسب با روش بدون مش، تکنیک‌های منحصربفرد در روش SPH، شامل راه‌حل‌های خاص در روش حل، روش‌های مرتبط با جستجوی ذرات و انتخاب تابع کرنل هموارساز به کارآیی و دقت آنالیز مسائل فیزیکی با SPH کمک شایانی می‌کند.





# فصل ۵ مدل سازی عددی در مهندسی ژئوتکنیک

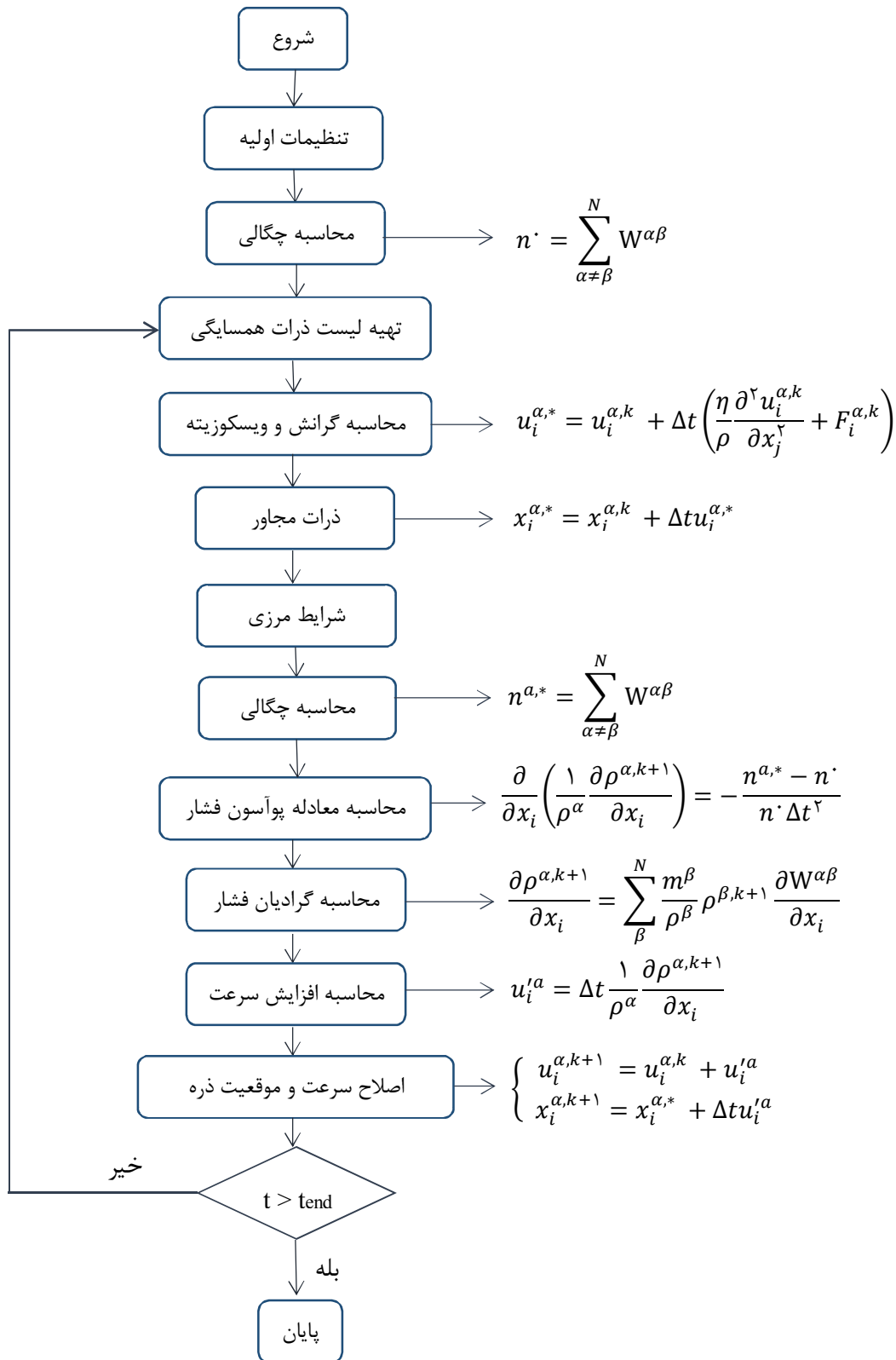
## ۵-۱- مقدمه

در فصل‌های گذشته، معادلات حاکم به فرم هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) تبدیل شد. قوانین ساختاری در هیدرودینامیک و مکانیک الاستو-پلاستیک گنجانده شد. در این فصل، پروسه کامپیوتری که برای مدل‌سازی تغییرشکل‌های بزرگ بکار گرفته شده شرح داده می‌شود. این پروسه در قالب برنامه‌نویسی کامپیوتری آورده شده است. فلوجارت استفاده شده در برنامه‌نویسی شرح داده خواهد شد. در ادامه راجع به نرم‌افزارهای مورد استفاده جهت تهیه فایل خروجی بصورت اشکال بصری توضیحی داده می‌شود. این نرم‌افزارها می‌تواند عملکرد روش SPH را در مدل‌سازی تغییرشکل‌های بزرگ بخوبی ارائه دهد. در نهایت چند مثال عددی از گسیختگی شیروانی با کمک نرم‌افزارهای بصری کد SPH و همچنین صحت‌سنجی آن‌ها با نرم‌افزار ۲۰۱۲ Geo-Studio آورده شده است.

## ۵-۲- فلوجارت SPH

روند SPH براساس روابط حاکم بر مکانیک سیالات بنا شده و توسعه آن برای مکانیک جامدات و مواد الاستو-پلاستیک در نظر گرفته شده است. تبدیل این روابط حاکم به مدل‌سازی مسائل دارای تغییرشکل بزرگ دارای مراحل می‌باشد که بایستی با طی کردن این روند بصورت گام‌به‌گام به نتایج مورد نیاز رسید.

فلوجارت اصلی روش SPH در شکل ۵-۱ نشان داده شده است. مراحل مختلف حل بصورت گام به گام در فلوجارت آورده شده است. روابطی که در هر مرحله مورد استفاده قرار می‌گیرد بطور کامل در فصل‌های قبلی شرح داده شده است. همانطور که گفته شد روابط SPH به دو قسمت هیدرودینامیکی و جامداتی تقسیم‌بندی شده‌اند. هر کدام از این روابط را نیز می‌توان در دو فلوجارت اصلی و ماژول‌های مربوط به هر کدام آورد. شرح کامل و مرحله به مرحله این فلوجارت‌ها را می‌توانید در پیوست پایان‌نامه مشاهده نمایید.



شکل ۵-۱ فلوجارت اصلی برنامه هیدرودینامیکی SPH

## ۵-۳- زبان برنامه‌نویسی

ابتدا برای شروع کار کد اولیه Liu که به زبان فرترن نوشته شده است مورد بررسی قرار گرفت. با کمک نرم‌افزار Visual Studio ۲۰۰۸ کد مربوطه بررسی و خطایابی شد. با وجود خطاهای متعددی که در کد مربوطه وجود داشت در نهایت کد و مثال‌های آن که عموماً برای فاز سیال و گاز بود اصلاح و اجرا شد. اما این کد بخاطر ابتدایی بودن و لحاظ نکردن معادلات مربوط به فاز جامد و مواد الاستو-پلاستیک همچون خاک قابل توسعه نبود. بنابراین با کمک گرفتن از کد پایه‌ای و ترکیبی Bui و DualSPHysics و توسعه آن، مسائل مربوط به تغییرشکل‌های بزرگ و گسیختگی خاک مدل‌سازی شد. لازم به ذکر است که در این بین کدهای متعددی به زبان‌های ++C، Fortran، و Python مورد مطالعه قرار گرفت. سختی اصلی موجود در این مرحله از کار که باعث صرف زمان و انرژی بسیار زیادی شد، عدم دسترسی به کد جامداتی پایه SPH بود که برخلاف کدهای سیالاتی موجود، بصورت عموم در دسترس نبود. در این راستا و برای حل این موضوع مکاتبات و همفکری‌های متعددی با اساتید صاحب نظر در دانشگاه‌های مطرح شرق آسیا و اروپا صورت گرفت.

## ۵-۴- نرم‌افزارهای بصری

دربخش قبلی، برنامه SPH که براساس روابط هیدرودینامیک و مکانیک الاستو-پلاستیک است برای مسائل دارای تغییرشکل‌های بزرگ برای مسائل خاکی توسعه یافت. با این حال مدل‌سازی عددی مرسوم، دارای اشکالاتی از قبیل زمان‌بر بودن و ایجاد خطاهایی در هنگام مدل‌سازی هندسی، نوشتن برنامه کامپیوتری پیچیده و آنالیز برنامه می‌شود. به این خاطر با توسعه تکنولوژی‌های کامپیوتری، نرم‌افزارهای بصری در تحقیقات امروزه دارای اهمیت زیادی می‌باشد. نرم‌افزارهای بصری و تصویرسازی می‌توانند نتایج کامپیوتری پیچیده را به گرافیک واضح و رنگی و بعضاً متحرک تبدیل نماید که این امر کمک شایانی در افزایش درک کاربران از اطلاعات و خروجی‌های پیچیده کد و برنامه‌نویسی کامپیوتری می‌کند. همچنین این نرم‌افزارها از تکرارهای بی‌مورد در مدل‌سازی جلوگیری کرده و بهره‌وری تحقیقات علمی را افزایش می‌دهد. بنابراین، تصویرسازی مسائل مربوط به تغییرشکل‌های بزرگ برای مواد خاکی نقش بسزایی دارد.

از جمله نرم‌افزارهای بصری مورد استفاده در مسائل SPH می‌توان به نرم‌افزارهای Paraview، Tecplot، LsDyna، VTK، CMake، و ... نام برد. در طی فرآیند مدل‌سازی، نتایج حاصل با سه نرم‌افزار Paraview، Tecplot، و VTK بررسی و تطابق خوبی بین آن‌ها مشاهده شد.

## ۵-۵- مدل‌سازی عددی

در بخش قبل، نرم‌افزارهای کاربردی مورد استفاده در مدل‌سازی مسائل مربوط به تغییر شکل‌های بزرگ و همچنین فلوجارت مربوط به SPH بیان گردید. در این بخش مثال‌هایی از مدل‌سازی تغییرشکل و گسیختگی چند شیروانی خاکی، که جزء مسائل ژئوتکنیکی با تغییر شکل‌های بزرگ هستند، با ابعاد و مشخصات ژئوتکنیکی متفاوت و با کمک کد SPH توسعه یافته آورده شده است. خروجی این مدل‌ها توسط نرم‌افزارهای بصری مختلف همچون paraview و tecplot گرفته شده است. این خروجی‌ها نشان‌دهنده پروسه گسیختگی در زمان‌های مختلف می‌باشند. همچنین جهت صحت‌سنجی بیشتر کد توسعه یافته SPH، مثال‌های ذکر شده با نرم‌افزار ۲۰۱۲ Geo-Studio نیز مدل‌سازی شد و مشاهده گردید که سطوح گسیختگی حاصل از این نرم‌افزار و خروجی کد SPH تطبیق بسیار خوبی با یکدیگر دارند.

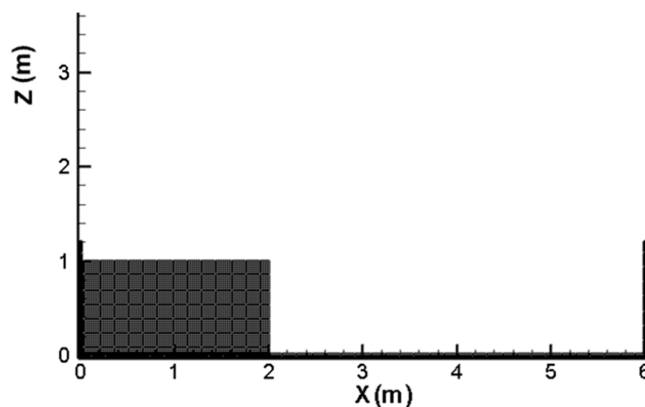
## ۵-۵-۱ مدل‌سازی شیروانی خاکی ۱

### توصیف مساله

دامنه‌ها و شیروانی‌های طبیعی بخاطر وجود عوامل مختلفی همچون ساخت‌وسازها و فعالیت‌های غیرمهندسی انسان‌ها بسیار آسیب‌پذیرتر شده‌اند. درک مکانیزم گسیختگی و رفتار شیروانی پس از گسیختگی برای تعیین مناطق دارای پتانسیل گسیختگی و ترسیم نقشه مناطق پرخطر دارای اهمیت زیادی است. روش SPH ابزار بسیار توانمند و موثری در مدل‌سازی شیروانی‌های خاکی می‌باشد. زیرا که با گسیخته شدن یک شیروانی خاکی، خاک دچار تغییرشکل‌های بزرگ شده که این امر براحتی می‌تواند با روش SPH مدل‌سازی شود. در این بخش یک مثال از شیروانی خاکی با مصالح دانه‌ای به کمک کدنویسی در محیط ویژوال استودیو و بهره گرفتن از نرم‌افزارهای بصری مدل‌سازی شده است.

### پارامترهای مدل‌سازی

در این مثال یک شیروانی خاکی با مصالح دانه‌ای به طول ۲ متر در ارتفاع ۱ متر در نظر گرفته شده است. هندسه اولیه این مدل را می‌توان در شکل ۵-۲ مشاهده نمود. در هندسه اولیه، شیروانی خاکی در یک باکس پیرامونی قرار گرفته است.



شکل ۵-۲ هندسه و شرایط مرزی شیروانی خاکی ۱

در این مدل از خاک دانه‌ای با چسبندگی صفر استفاده شده است. ذرات شیروانی در حالت اولیه بصورت منظم و در فواصل مساوی ۰,۰۲۵ متر، هم در راستای افقی و هم در راستای عمودی قرار گرفته‌اند. سرعت و فشار اولیه این ذرات صفر در نظر گرفته شده است. با توضیحات داده شده، تعداد کل ذراتی که در این شبیه‌سازی بکار می‌روند برابر با ۴۵۵۶ ذره است که از این تعداد ۱۳۵۶ عضو برای مرز جامد، که همان دیواره می‌باشد، و ۳۲۰۰ عضو برای ذرات شیروانی است. پارامترهای محاسباتی دیگر در این شبیه‌سازی در جدول ۵-۱ نشان داده شده است.

جدول ۱-۵ پارامترهای محاسباتی بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۱

پارامتر	واحد	مقدار
تعداد ذرات خاک	-	۳۲۰۰
تعداد ذرات دیواره	-	۱۳۵۶
تعداد کل ذرات	-	۴۵۵۶
فاصله اولیه ذرات	m	۰,۰۲۵
تعداد گام زمانی	-	۲۰
فاصله گام‌های زمانی	Sec	۰,۱

همچنین در جدول ۲-۵ می‌توان خواص فیزیکی خاک بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۱ را مشاهده نمود:

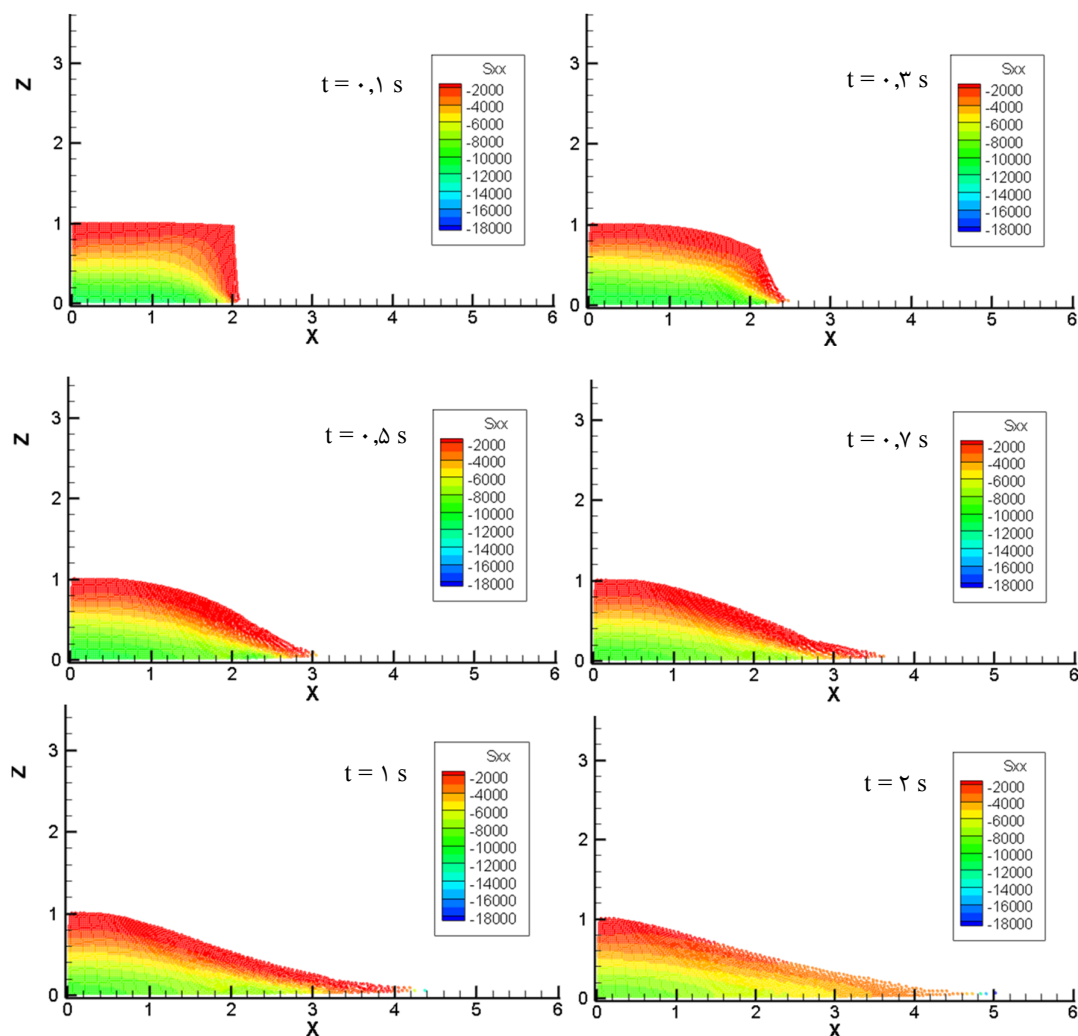
جدول ۲-۵ خواص فیزیکی خاک بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۱

پارامتر	واحد	مقدار
چگالی اولیه ذرات	Kg/m <sup>۳</sup>	۲۰۸۰
نیروی جاذبه وارد بر ذرات	m/s <sup>۲</sup>	-۹,۸۱
چسبندگی خاک	Kpa	۰
زاویه اصطکاک داخلی	degree	۲۰
ضریب پواسون	-	۰,۳
مدول یانگ	Mpa	۰,۸

ذرات شیروانی خاکی تحت اثر وزن خود قرار داشته و در واقع دارای بارگذاری گرانشی می‌باشند. روش جستجوی ذرات همسایگی در این مدل روش ولت می‌باشد. همچنین تابع هموارساز استفاده شده در شبیه‌سازی تابع اسپیلاین مکعبی است. همانطور که ذکر شد در این مدل در طرفین و همچنین مرز پایینی شیروانی از مرز ثابت به منظور مدل‌سازی دیواره استفاده شده است، که برای مدل‌سازی این دیواره از ۱۳۵۶ ذره استفاده شده است.

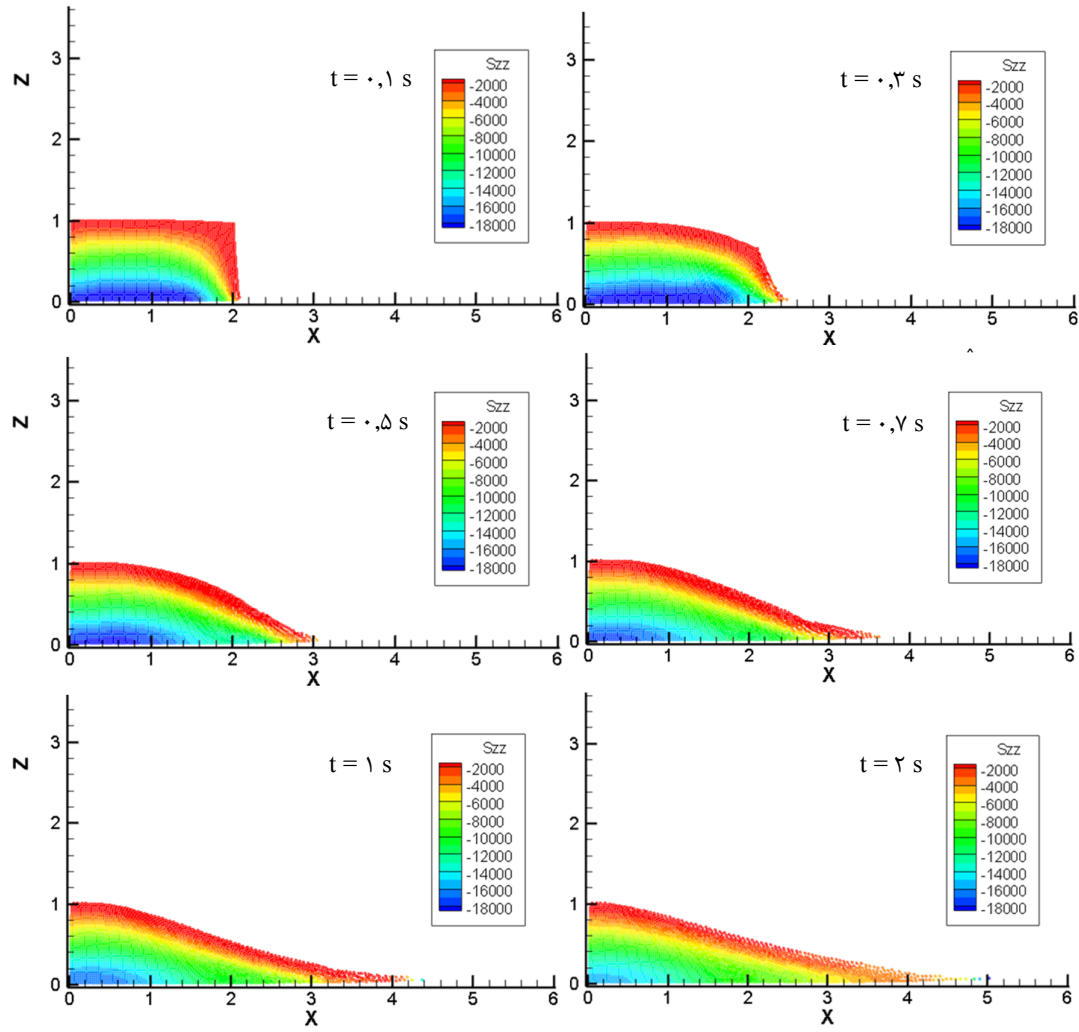
## نتایج مدل‌سازی

بمنظور نمایش نتایج حاصل از شبیه‌سازی گسیختگی شیروانی خاکی تحت اثر بار وزنی ذرات، خروجی متغیرهای مساله همچون تنش، سرعت، کرنش پلاستیک و... در زمان‌های مختلف به تصویر کشیده می‌شود. در شکل‌های ۵-۳، ۵-۴، ۵-۵ توزیع تنش را در زمان‌های مختلف و تحت بارگذاری وزنی می‌توان مشاهده نمود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، تنش وارده بر ذرات در روی سطح آزاد شیروانی خاکی در حدود صفر بوده و با افزایش عمق تنش وارده بر ذرات افزایش می‌یابد، بطوریکه با افزایش عمق میزان تنش افزایش یافته و حداکثر تنش در لایه زیرین خاک می‌باشد. میزان تنش‌های بدست آمده در کانتورهای تنش تطابق مناسبی با قوانین مکانیکی دارد که این امر صحت کد نوشته شده را تایید می‌نماید.

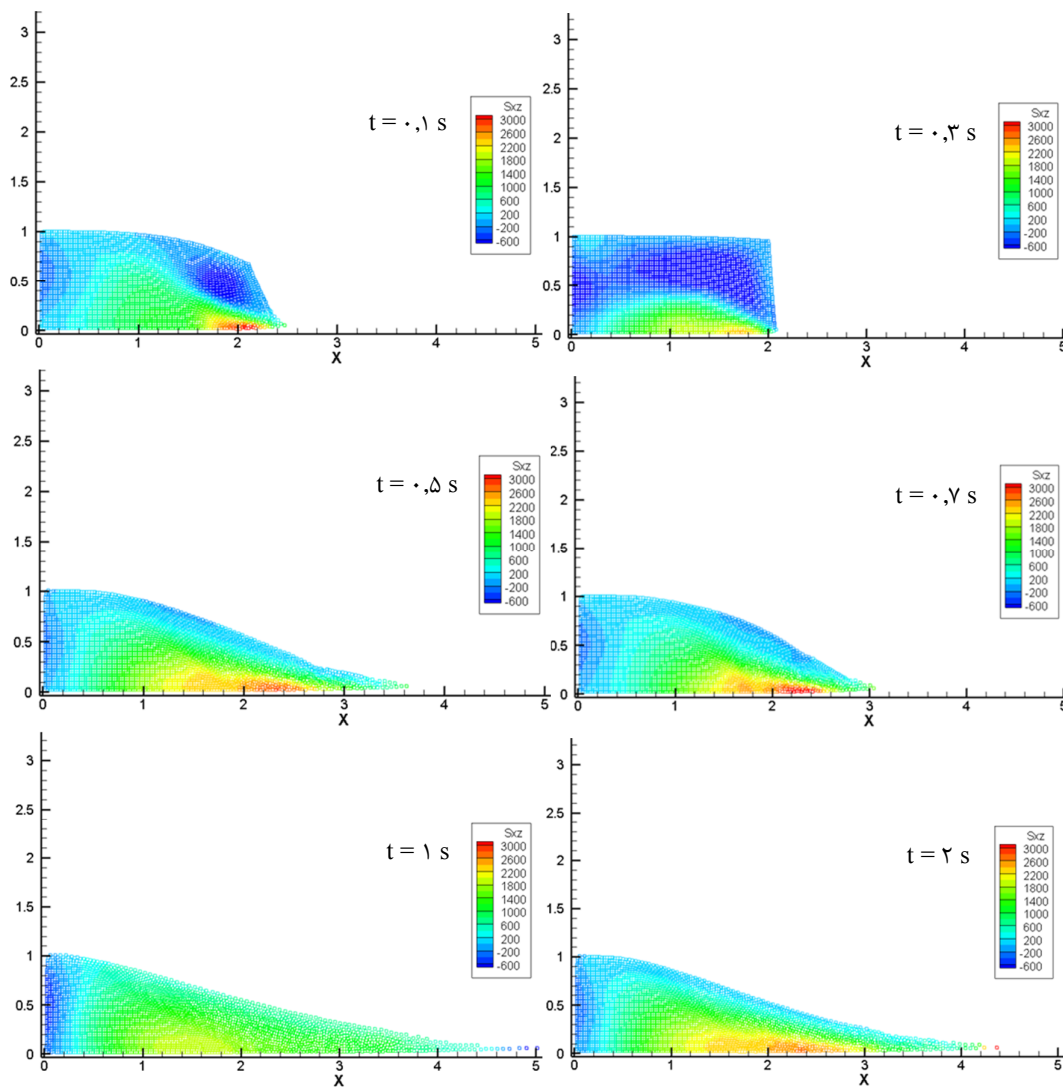


شکل ۵-۳ توزیع تنش افقی ( $N/m^2$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۱



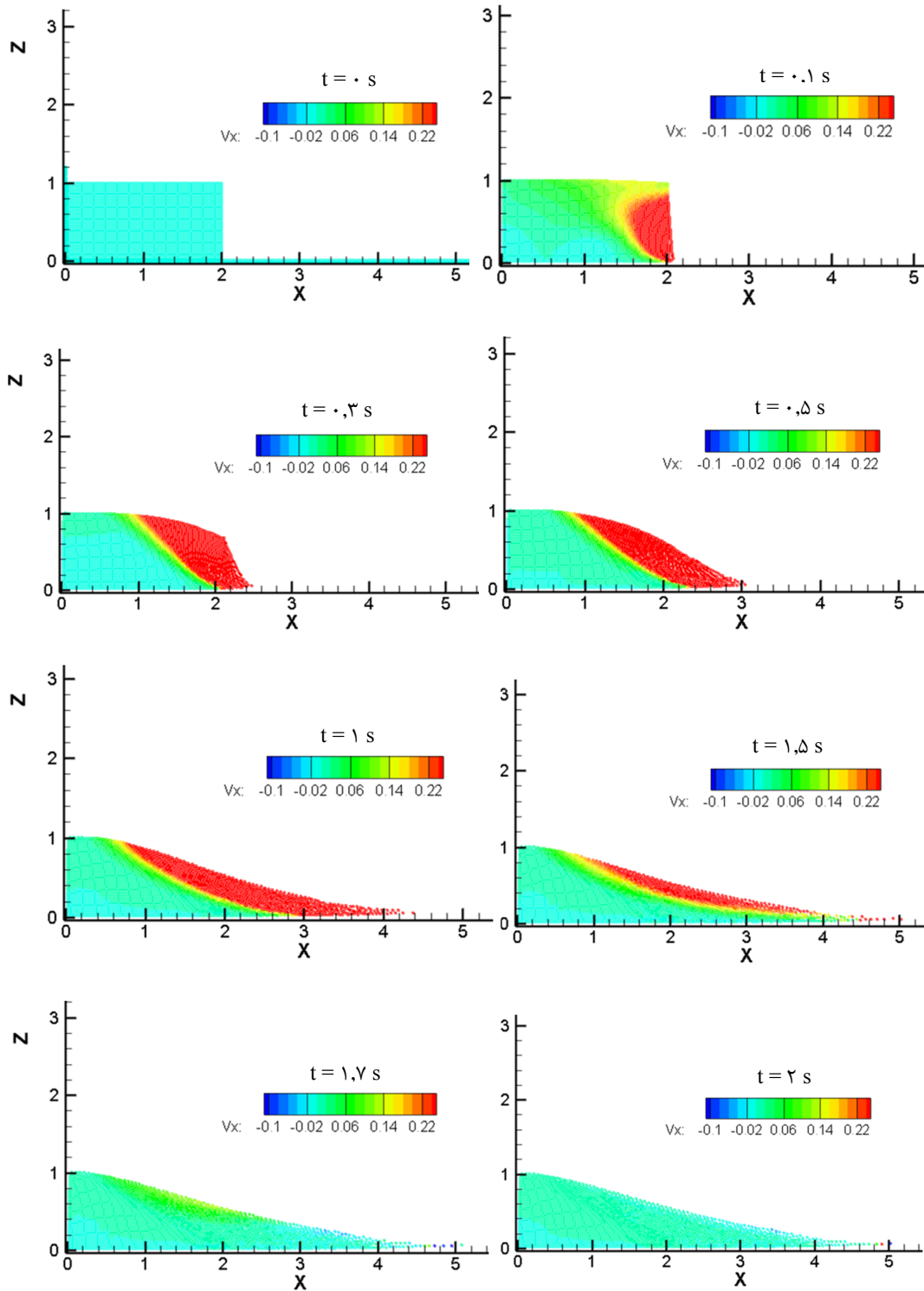


شکل ۴-۵ توزیع تنش عمودی ( $N/m^2$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۱



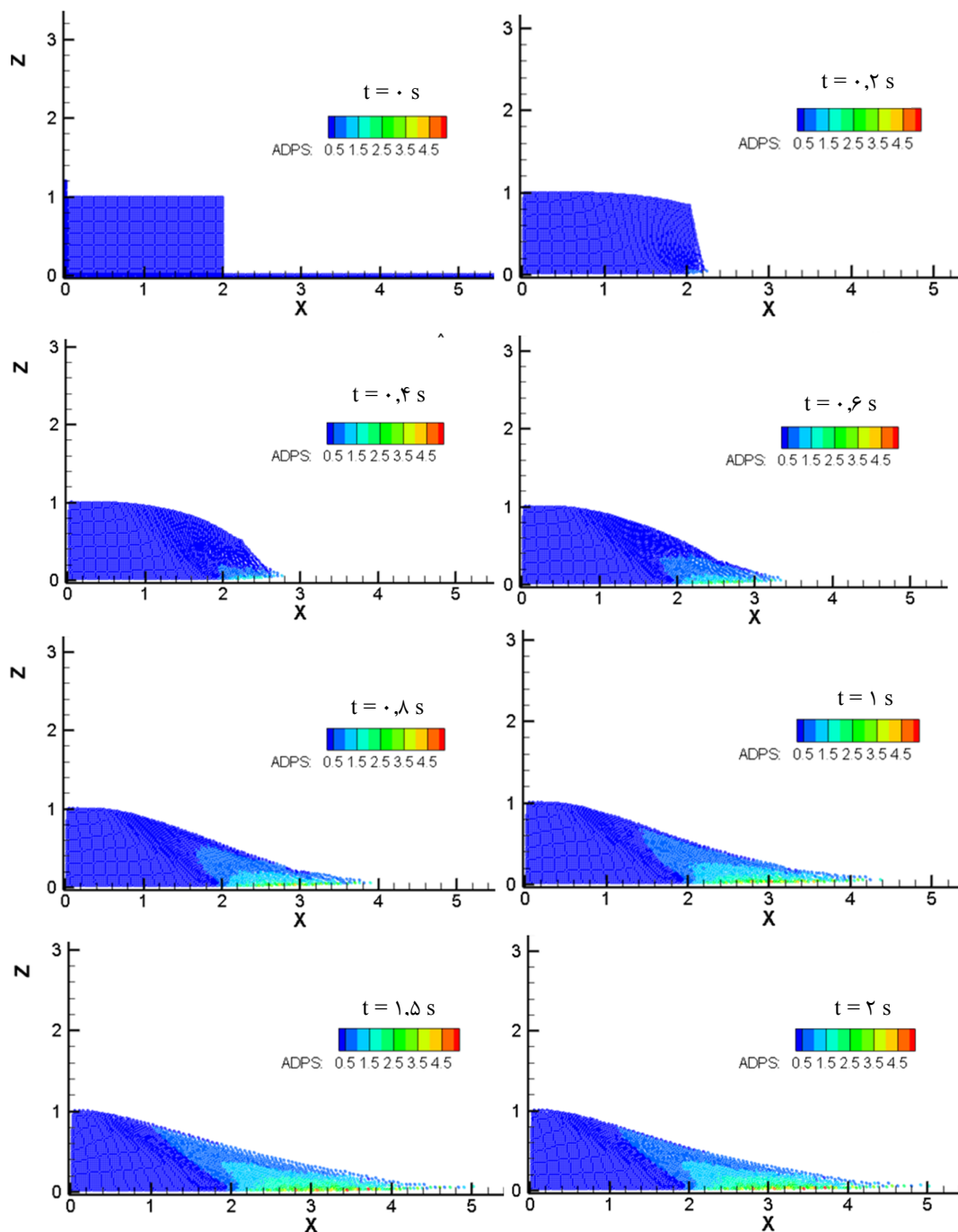
شکل ۵-۵ توزیع تنش برشی ( $N/m^2$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۱

در شکل ۵-۶ موقعیت و سرعت ذرات در جهت افقی را در زمان‌های مختلف می‌توانید مشاهده نمایید. همانطور که مشاهده می‌شود در لحظه ابتدایی ذرات ساکن بوده و سرعت تمامی ذرات صفر است. با شروع مدل‌سازی و گذشت زمان ذرات موجود در سطح شیب‌دار بخاطر وجود نیروی گرانشی اعمالی شروع به حرکت می‌کنند و به سمت راست و پایین جابجا می‌شوند. همانطور که مشخص است، ذرات پس از رسیدن به حداکثر سرعت خود شروع به کاهش سرعت کرده و در نهایت سطح شیب‌دار به حالت تعادل خود رسیده و ذرات ساکن می‌شوند.



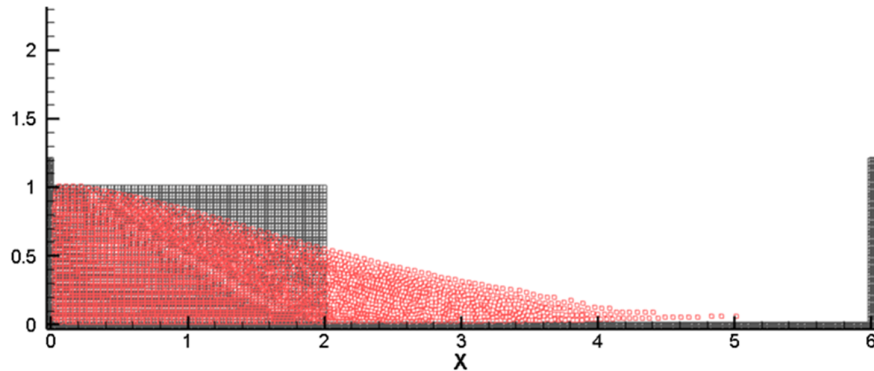
شکل ۵-۶ توزیع سرعت در جهت افقی ( $m/s$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شيروانی خاکی ۱

شکل ۵-۷ توزیع کرنش پلاستیک در شیروانی خاکی را نشان می‌دهد. همانطور که پیش‌بینی می‌شد خاک از قسمت آزاد یعنی سمت راست شروع به گسیختگی می‌کند. همانطور که در شکل ۵-۷ مشخص است شیروانی بطور طبیعی گسیخته می‌شود. این رویداد نیز نمونه‌ای دیگر از تغییر شکل بزرگ و گسیختگی در خاک می‌باشد.



شکل ۵-۷ توزیع کرنش پلاستیک در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۱

شکل ۵-۸ شیروانی خاکی را در دو حالت قبل و پس از گسیختگی با هم مقایسه می‌کند. رنگ مشکی نشان‌دهنده وضعیت شیروانی در ابتدای مدل و رنگ قرمز رنگ شیروانی را پس از گسیختگی نشان می‌دهد. تغییر شکل ایجاد شده با کمک روش SPH منطقی بنظر می‌رسد. این مثال باز هم نشان‌دهنده این امر است که SPH جایگزین بسیار خوبی در حل مسائل با تغییرشکل‌های بزرگ بجای روش‌های با مش همانند FEM بوده و کد توسعه یافته در این پایان‌نامه دارای دقت قابل قبولی می‌باشد.

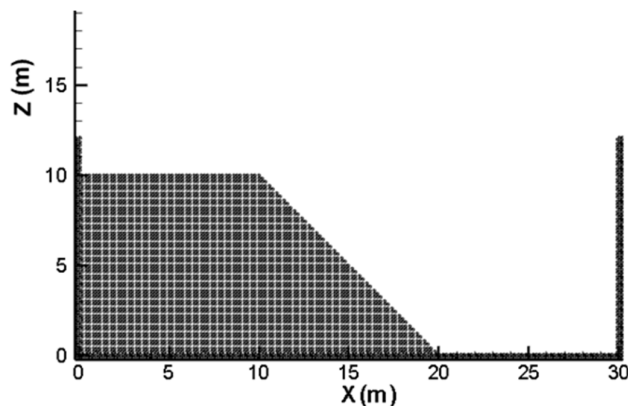


شکل ۵-۸ تغییر شکل نهایی شیروانی پس از گسیختگی شیروانی خاکی ۱

## ۵-۵-۲ مدل‌سازی شیروانی خاکی ۲

### پارامترهای مدل‌سازی

در این مثال کمی مدل را تغییر داده و در هندسه شیروانی یک سطح شیبدار در نظر گرفته‌ایم. در اینجا شیروانی خاکی با مصالح خاکی چسبنده به طول ۲۰ متر در ۱۰ متر در نظر گرفته شده است. هندسه اولیه این مدل را می‌توان در شکل ۵-۹ مشاهده نمود.



شکل ۵-۹ هندسه و شرایط مرزی شیروانی خاکی ۲

در این مدل از ۴۸۱۷ عضو استفاده شده است که ازین تعداد ۱۰۹۲ عضو برای مرز جامد، که همان دیواره می‌باشد، و ۳۷۲۵ عضو برای ذرات شیروانی است. مدل انجام شده در ۸۰ گام زمانی صورت گرفته است. با پیچیده‌تر شدن هندسه و اضافه شدن چسبندگی زمان مدل‌سازی افزایش یافته است. ذرات شیروانی در حالت اولیه بصورت منظم و در فواصل مساوی ۰,۲ متر قرار گرفته‌اند. سرعت و فشار اولیه این ذرات صفر در نظر گرفته شده است. پارامترهای محاسباتی دیگر در این شبیه‌سازی در جدول ۵-۳ نشان داده شده است.

جدول ۳-۵ پارامترهای محاسباتی بکارگرفته شده در شبیه سازی شیروانی خاکی ۲

پارامتر	واحد	مقدار
تعداد ذرات خاک	-	۳۷۲۵
تعداد ذرات دیواره	-	۱۰۹۲
تعداد کل ذرات	-	۴۸۱۷
فاصله اولیه ذرات	m	۰,۲
تعداد گام زمانی	-	۸۰
فاصله گام های زمانی	Sec	۰,۱

همچنین در جدول ۴-۵ می توان خواص فیزیکی خاک بکارگرفته شده در شبیه سازی شیروانی خاکی ۲ را مشاهده نمود:

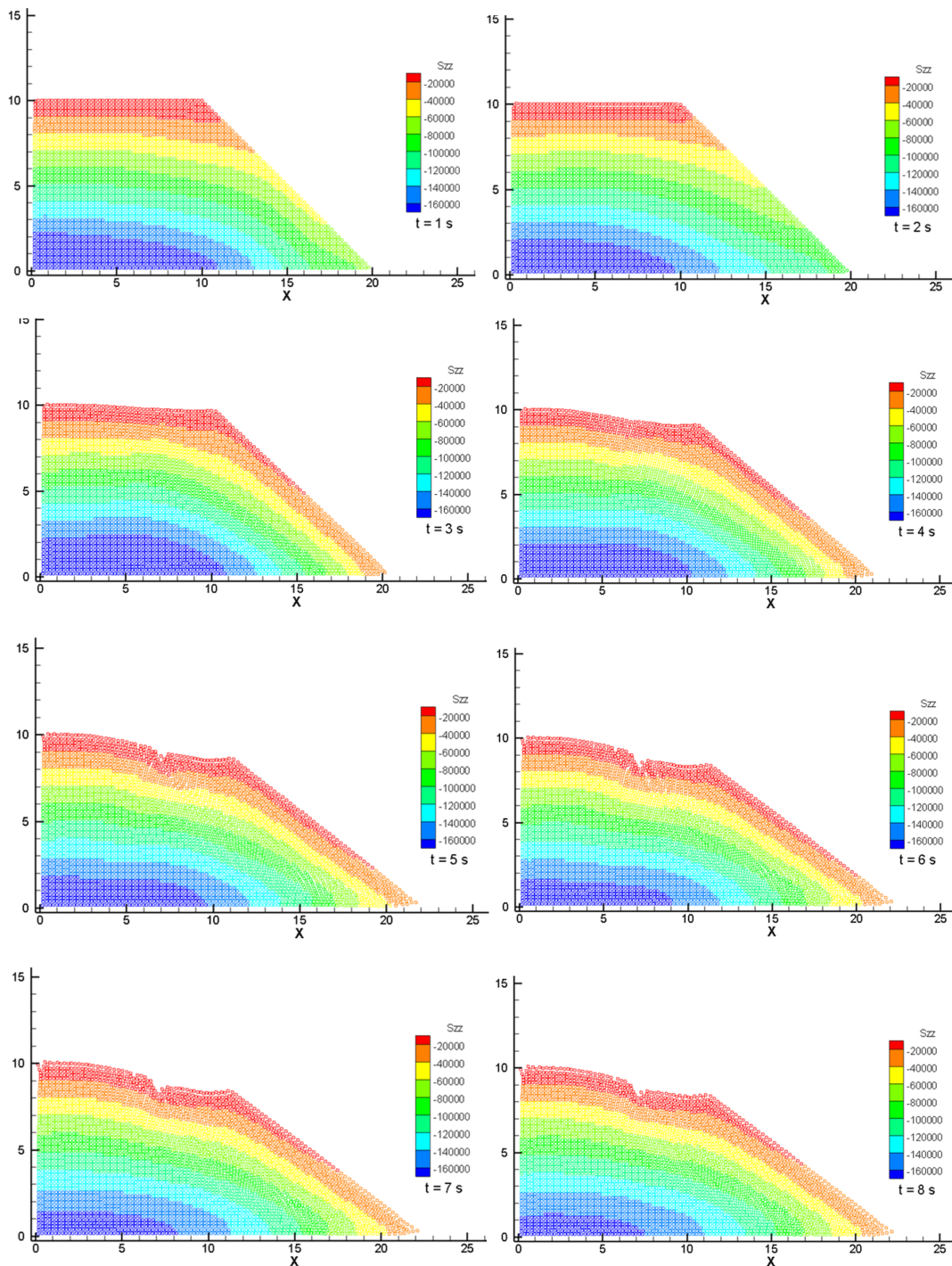
جدول ۴-۵ خواص فیزیکی خاک بکارگرفته شده در شبیه سازی شیروانی خاکی ۲

پارامتر	واحد	مقدار
چگالی اولیه ذرات	Kg/m <sup>۳</sup>	۲۱۰۰
نیروی جاذبه وارد بر ذرات	m/s <sup>۲</sup>	-۹,۸۱
چسبندگی خاک	Kpa	۱۱
زاویه اصطکاک داخلی	degree	۲۰
ضریب پواسون	-	۰,۲۵
مدول یانگ	Mpa	۱۵

ذرات شیروانی خاکی تحت اثر وزن خود قرار داشته و در واقع دارای بارگذاری گرانشی می باشند. روش جستجوی ذرات همسایگی در این مدل روش ولت می باشد. همچنین تابع هموارساز استفاده شده در شبیه سازی تابع اسپیلاین مکعبی است. همانطور که ذکر شد در این مدل در طرفین شیروانی و همچنین مرز پایینی شیروانی از مرز ثابت به منظور مدل سازی دیواره استفاده شده است. همچنین همانطور که گفته شد از ۱۰۹۲ ذره برای مدل سازی این دیواره بکار گرفته شده است.

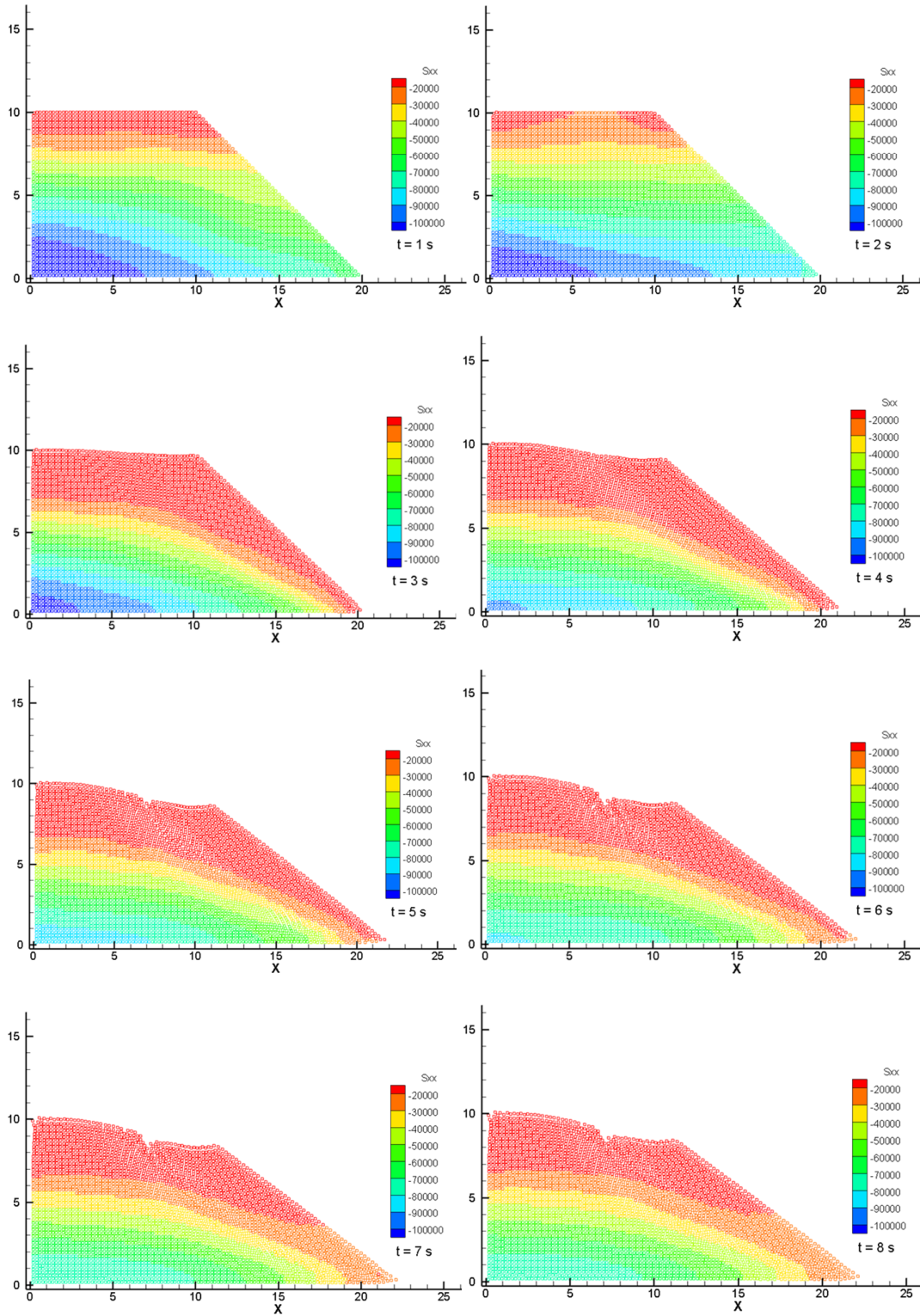
## نتایج مدل‌سازی

شکل‌های ۵-۱۰، ۵-۱۱، ۵-۱۲ توزیع تنش را در زمان‌های مختلف و تحت بارگذاری وزنی نشان می‌دهند. تنش‌های بدست آمده تطابق مناسبی از نظر ظاهری و محاسباتی با مدل‌های واقعی دارد.

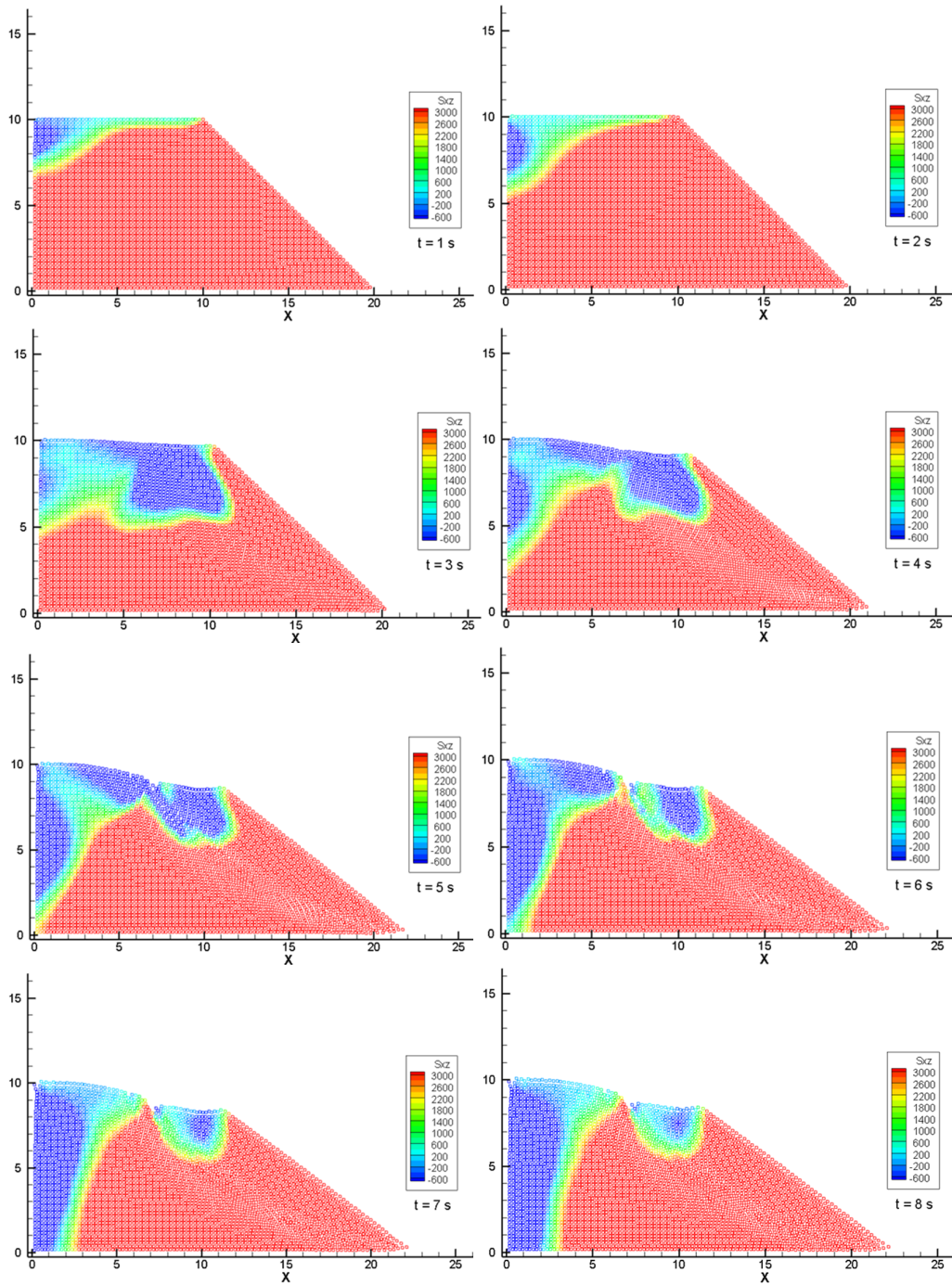


شکل ۵-۱۰ توزیع تنش عمودی ( $N/m^2$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۲



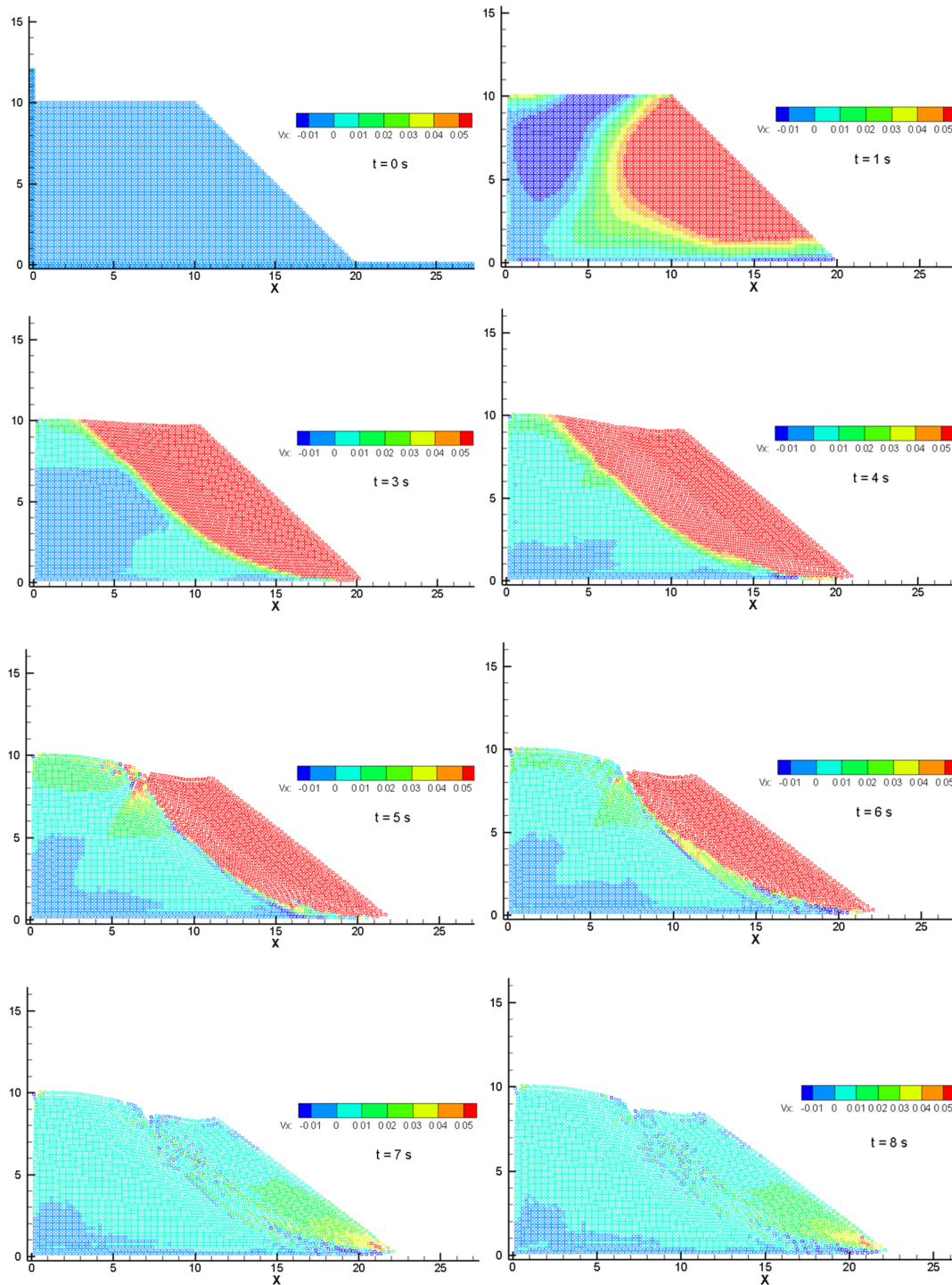


شکل ۵-۱۱ توزیع تنش افقی ( $N/m^2$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۲



شکل ۵-۱۲ توزیع تنش برشی در زمان های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۲

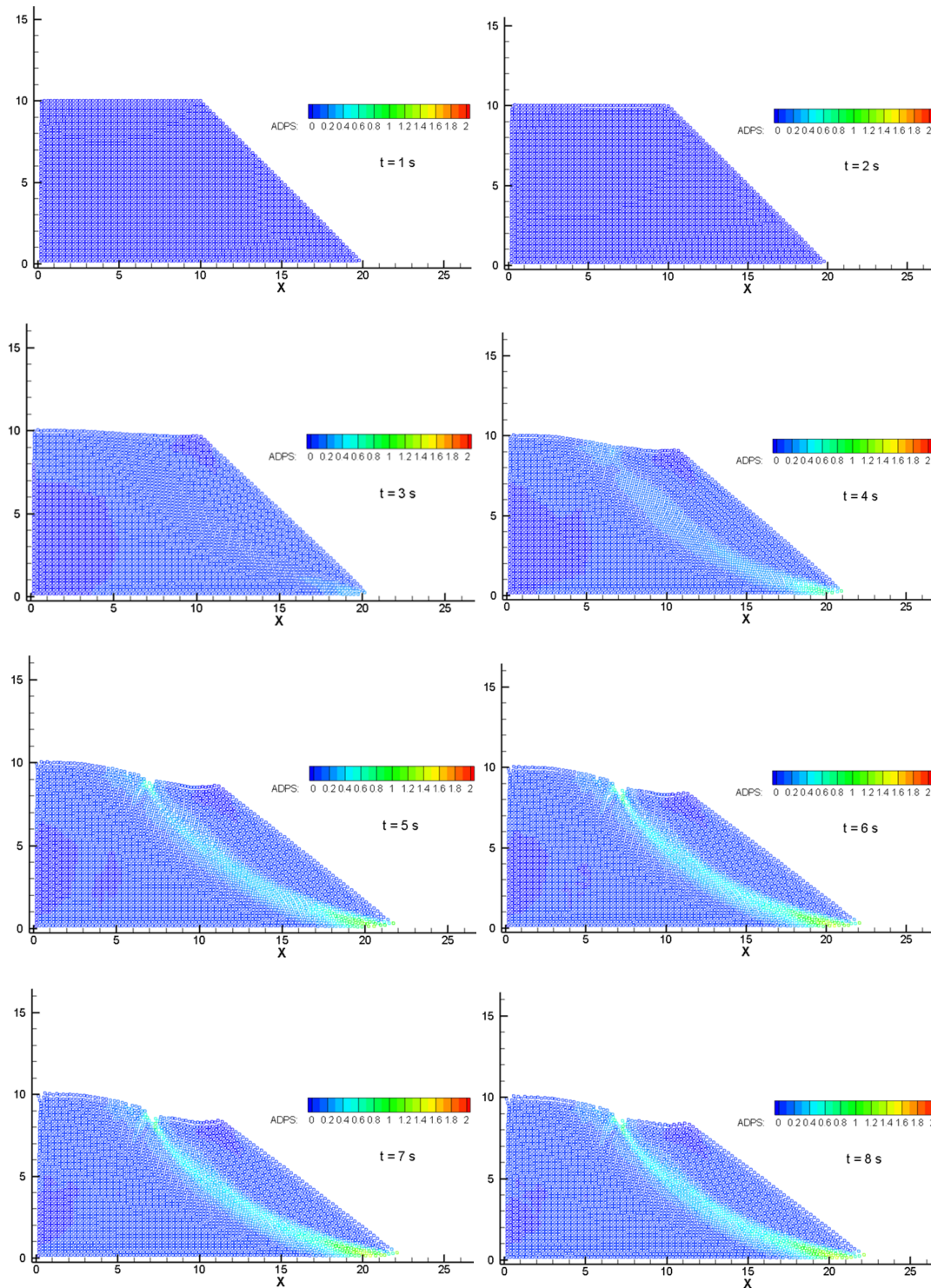
شکل ۵-۱۳ نشان‌دهنده میدان سرعت در شیروانی در زمان‌های مختلف است. همانطور که پیش‌بینی می‌شد پس از تشکیل سطح گسیختگی، ذرات موجود در بالای سطح گسیختگی دارای سرعت بیشتری هستند.



شکل ۵-۱۳ توزیع سرعت در جهت افقی ( $m/s$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۲

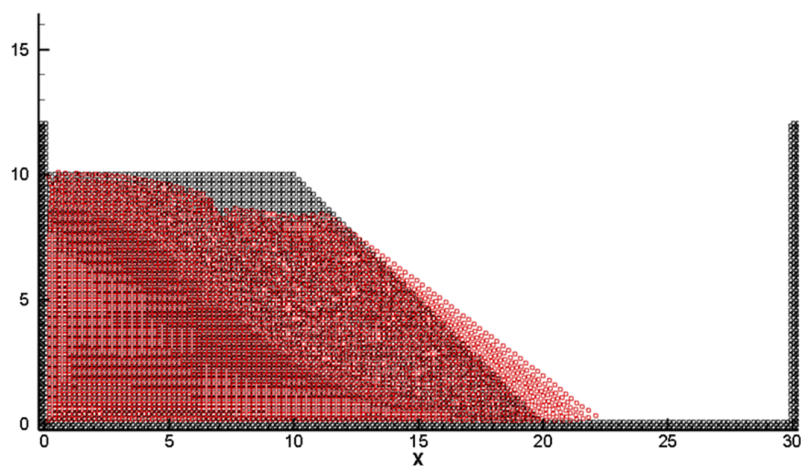


شکل ۵-۱۴ توزیع کرنش پلاستیک در شیروانی خاکی را نشان می دهد. همانطور که پیش بینی می شد خاک از قسمت آزاد یعنی سمت راست شروع به گسیختگی می کند.



شکل ۵-۱۴ توزیع کرنش پلاستیک در زمان های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۲

شکل ۵-۱۵ نحوه تغییر شکل شیروانی را قبل و پس از گسیختگی با هم مقایسه می‌کند. رنگ مشکی نشان‌دهنده وضعیت شیروانی در ابتدای مدل و رنگ قرمز قرمز شیروانی را پس از گسیختگی نشان می‌دهد. تغییر شکل ایجاد شده با کمک روش SPH منطقی بنظر می‌رسد.

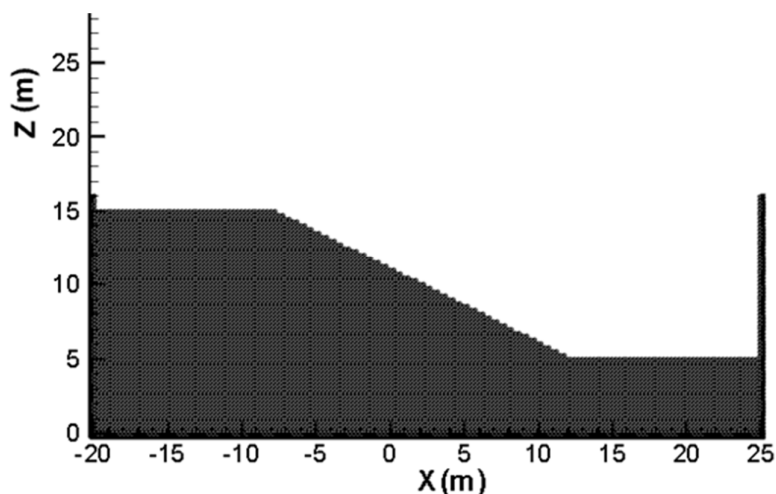


شکل ۵-۱۵ تغییر شکل نهایی شیروانی پس از گسیختگی شیروانی خاکی ۲

### ۳-۵-۵ مدل‌سازی شیروانی خاکی ۳

#### پارامترهای مدل‌سازی

در این مثال در پایین دست شیروانی نیز یک لایه افقی با عمق ۵ متر در نظر گرفته شده تا هندسه مثال کمی تغییر کرده و پیچیده‌تر شود. در اینجا یک شیروانی خاکی با مصالح خاکی چسبنده به طول ۴۵ متر در ارتفاع ۱۵ متر در نظر گرفته شده است. هندسه اولیه این مدل را می‌توان در شکل ۳-۵ مشاهده نمود. در هندسه اولیه، شیروانی خاکی در یک باکس پیرامونی قرار گرفته است. فاصله این باکس پیرامونی تا شیروانی خاکی به اندازه کافی زیاد بوده تا تاثیری در نتایج نداشته باشد.



شکل ۳-۵ هندسه و شرایط مرزی شیروانی خاکی ۳

ذرات شیروانی در حالت اولیه بصورت منظم و در فواصل مساوی ۰,۲۵ متر، هم در راستای افقی و هم در راستای عمودی قرار گرفته‌اند. سرعت و فشار اولیه این ذرات صفر در نظر گرفته شده است. اندازه ذرات دیواره‌های جانبی که در ۴ لایه چیده شده‌اند نیز مشابه ذرات خاک انتخاب شده است. با توضیحات داده شده، تعداد کل ذراتی که در این شبیه‌سازی بکار می‌روند برابر با ۸۳۴۴ ذره است که ازین تعداد ۱۲۴۴ عضو برای مرز جامد، که همان دیواره می‌باشد، و ۷۱۰۰ عضو برای ذرات شیروانی است. همانطور که مشخص است در این مثال نیز بدلیل پیچیده‌تر شدن مدل، زمان مدل‌سازی افزایش یافته است. پارامترهای محاسباتی دیگر در این شبیه‌سازی در جدول ۳-۵ نشان داده شده است.

جدول ۵-۵ پارامترهای محاسباتی بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۳

پارامتر	واحد	مقدار
تعداد ذرات خاک	-	۷۱۰۰
تعداد ذرات دیواره	-	۱۲۴۴
تعداد کل ذرات	-	۸۳۴۴
فاصله اولیه ذرات	m	۰,۲۵
تعداد گام زمانی	-	۶۰
فاصله گام‌های زمانی	Sec	۱

همچنین در جدول ۵-۶ می‌توان خواص فیزیکی خاک بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۳ را مشاهده نمود:

جدول ۵-۶ خواص فیزیکی خاک بکارگرفته شده در شبیه‌سازی شیروانی خاکی ۳

پارامتر	واحد	مقدار
چگالی اولیه ذرات	Kg/m <sup>۳</sup>	۲۱۰۰
نیروی جاذبه وارد بر ذرات	m/s <sup>۲</sup>	-۹,۸۱
چسبندگی خاک	Kpa	۱۰
زاویه اصطکاک داخلی	degree	۲۰
ضریب پواسون	-	۰,۳
مدول یانگ	Mpa	۱۰۰

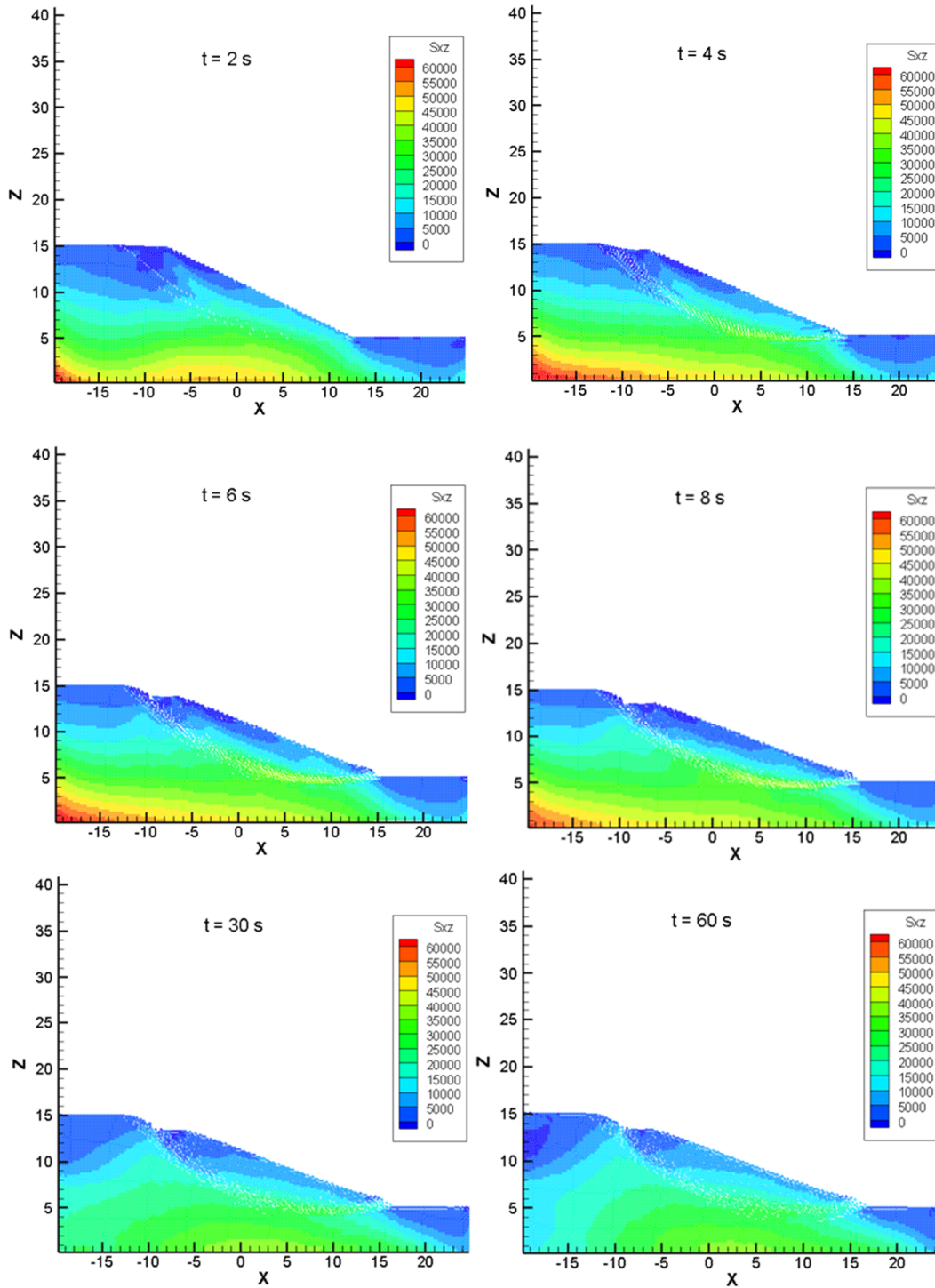
ذرات شیروانی خاکی تحت اثر وزن خود قرار داشته و در واقع دارای بارگذاری گرانشی می‌باشند. روش جستجوی ذرات همسایگی در این مدل روش ورتل می‌باشد. همچنین تابع هموارساز استفاده شده در شبیه‌سازی تابع اسپیلاین مکعبی است. همانطور که ذکر شد در این مدل در طرفین و همچنین مرز

پایینی شیروانی از مرز ثابت به منظور مدل‌سازی دیواره استفاده شده است. همانطور که گفته شد از ۱۲۴۴ ذره برای مدل‌سازی این دیواره بکار گرفته شده است.

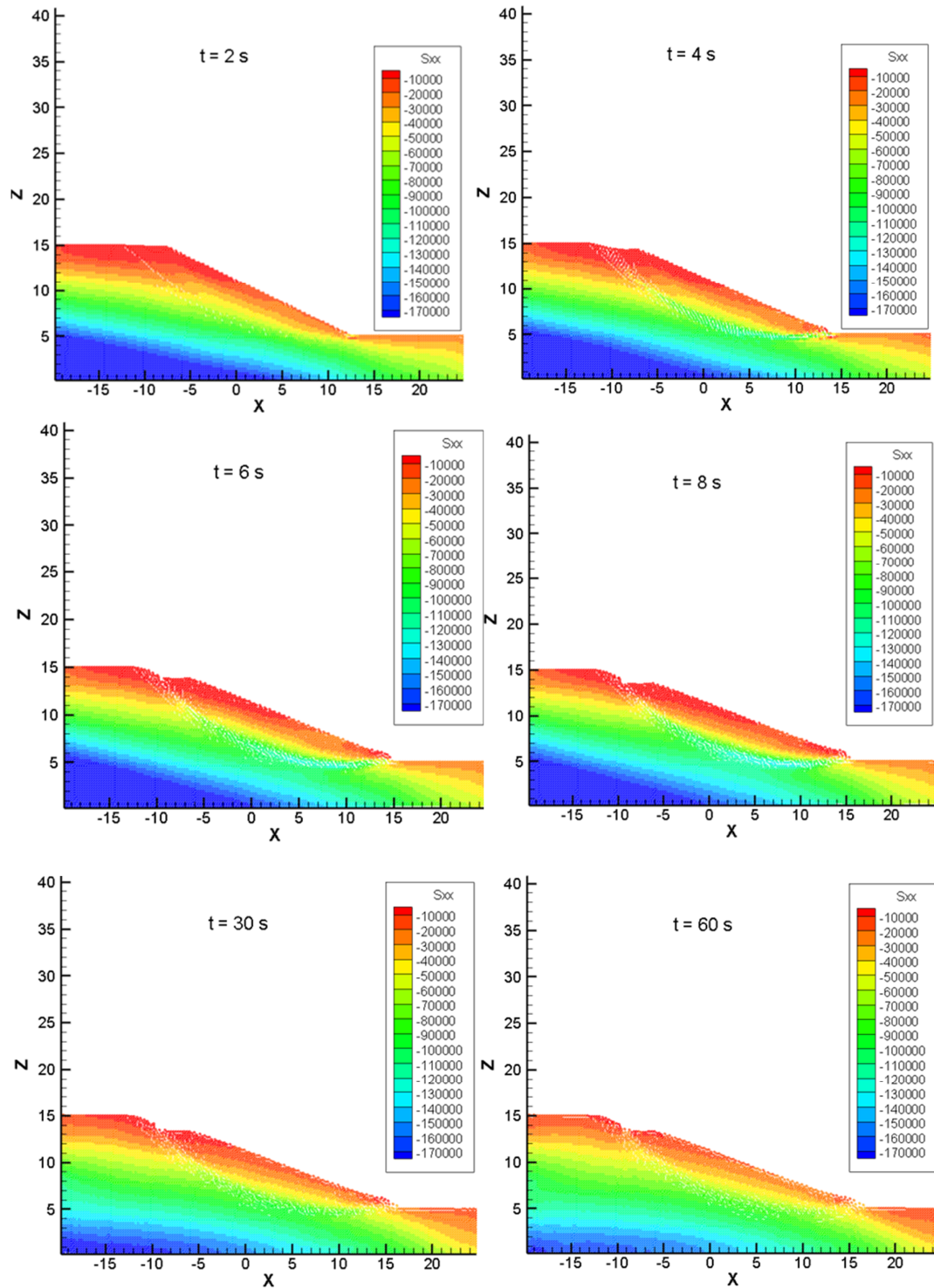
### نتایج مدل‌سازی

بمنظور نمایش نتایج حاصل از شبیه‌سازی گسیختگی شیروانی خاکی تحت اثر بار وزنی ذرات، خروجی متغیرهای مساله همچون تنش، سرعت، کرنش پلاستیک و... در زمان‌های مختلف به تصویر کشیده شده است. در شکل‌های ۵-۱۷، ۵-۱۸، ۵-۱۹ توزیع تنش را در زمان‌های مختلف و تحت بارگذاری وزنی می‌توان مشاهده نمود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، تنش وارده بر ذرات در روی سطح آزاد شیروانی خاکی در حدود صفر بوده و با افزایش عمق، تنش وارده بر ذرات افزایش می‌یابد. میزان تنش‌های بدست آمده در کانتورهای تنش تطابق مناسبی با قوانین مکانیکی دارد.

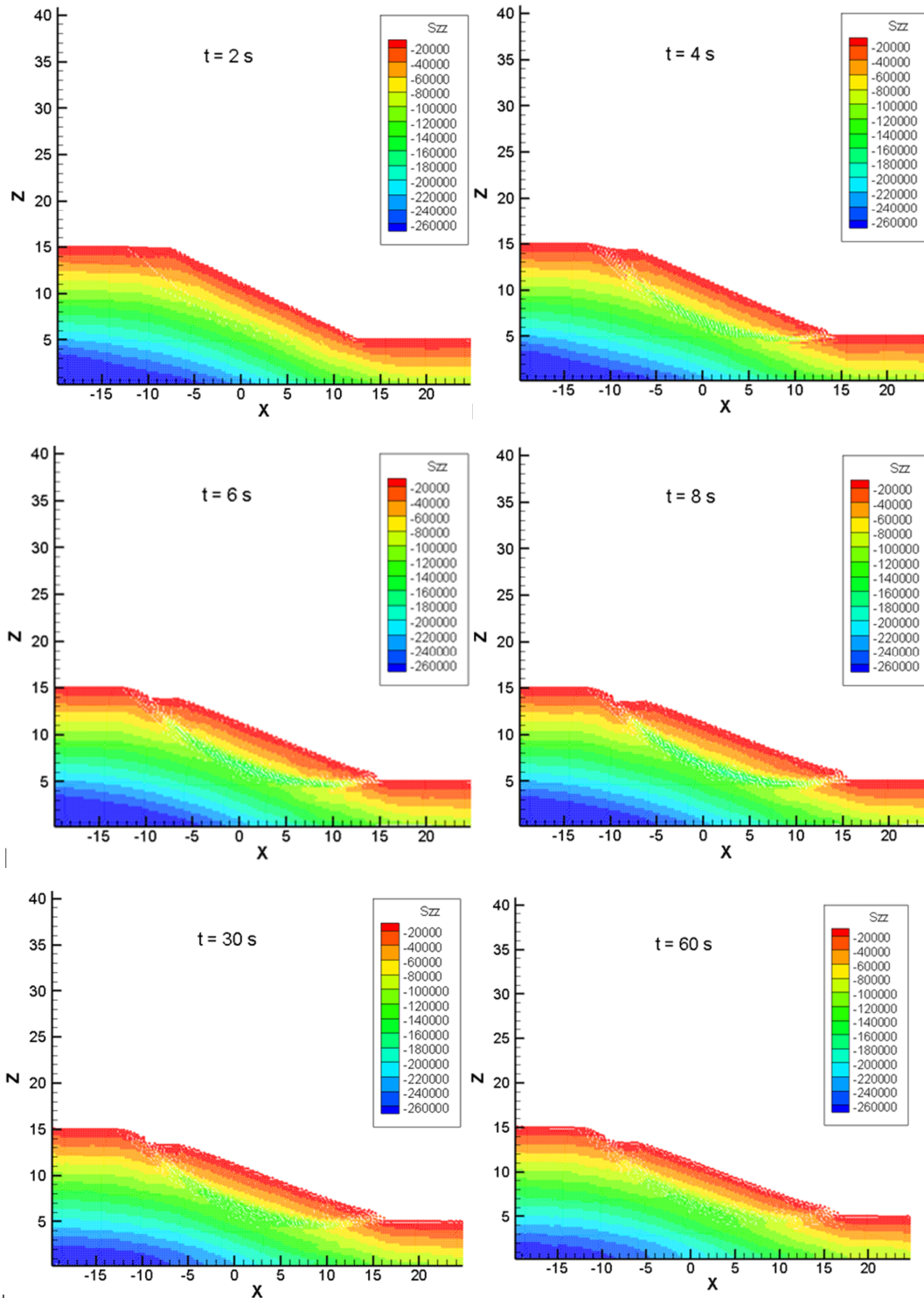




شکل ۵-۱۷ توزیع تنش برشی ( $N/m^2$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۳

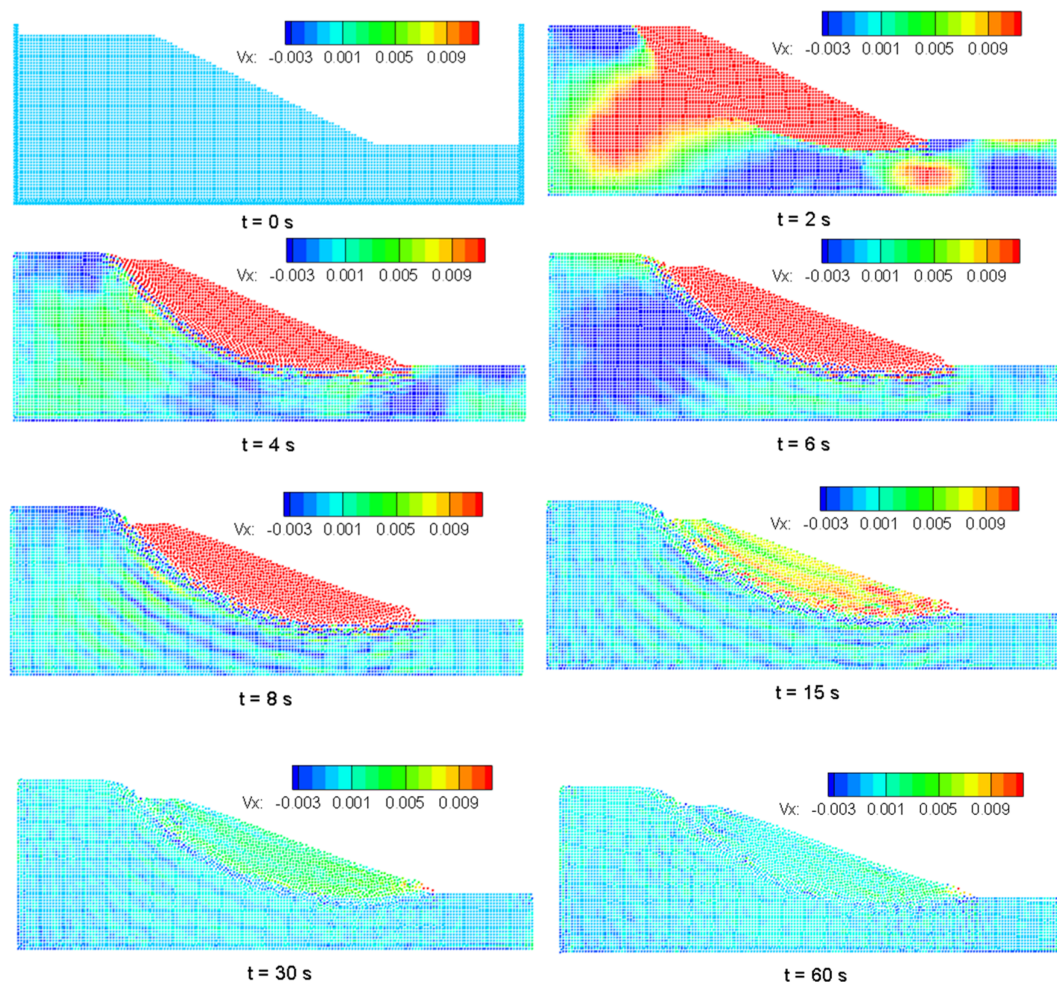


شکل ۵-۱۸ توزیع تنش افقی ( $N/m^2$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۳



شکل ۵-۱۹ توزیع تنش عمودی ( $N/m^2$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۳

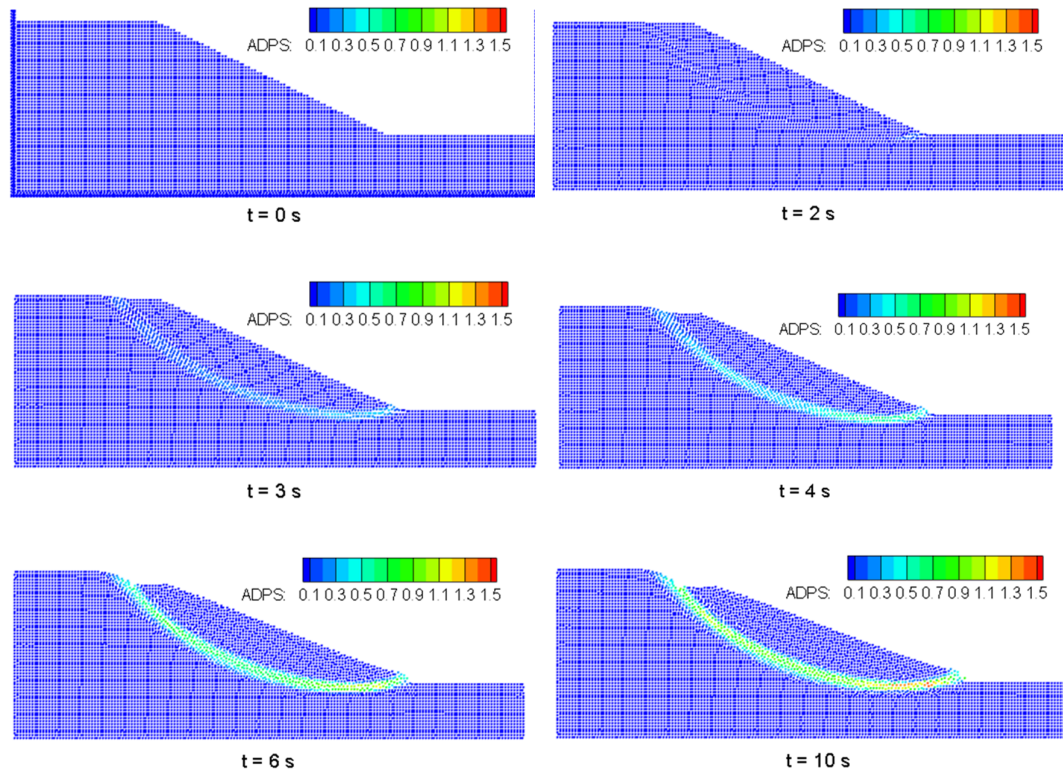
در شکل ۵-۲۰ موقعیت و سرعت ذرات در جهت افقی را در زمان‌های مختلف می‌توانید مشاهده نمایید. همانطور که مشاهده می‌شود در لحظه ابتدایی ذرات ساکن بوده و سرعت تمامی ذرات صفر است. با شروع مدل‌سازی و گذشت زمان ذرات موجود در سطح شیب‌دار بخاطر وجود نیروی گرانشی اعمالی شروع به حرکت می‌کنند و به سمت راست و پایین جابجا می‌شوند. تا ثانیه هشتم ذرات به حداکثر سرعت خود می‌رسند و از آن زمان به بعد سرعت آن‌ها کاهش یافته و در نهایت سطح شیب‌دار به حالت تعادل خود رسیده و ذرات ساکن می‌شوند.



شکل ۵-۲۰ توزیع سرعت در جهت افقی ( $m/s$ ) در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۳

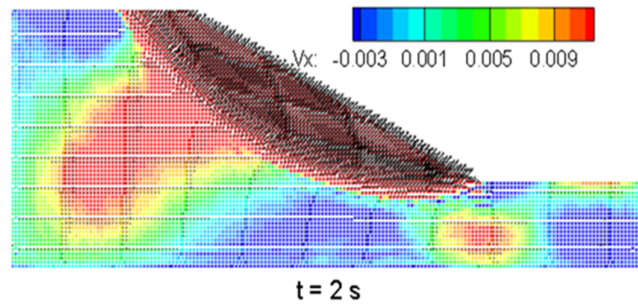


شکل ۵-۲۱ توزیع کرنش پلاستیک در شیروانی خاکی را نشان می‌دهد. همانطور که از شکل پیداست سطح گسیختگی بصورت یک منحنی ظاهر می‌شود. در این پروسه از ثانیه دوم گسیختگی شروع شده و در گام‌های زمانی بعدی سطح گسیختگی بطور کامل ظاهر می‌شود. همانطور که در شکل ۵-۲۱ مشخص است شیروانی بطور طبیعی گسیخته می‌شود. پروسه گسیختگی از پنجه شیروانی شروع شده و تا تاج شیروانی ادامه می‌یابد. پس از آنکه سطح لغزش پیوسته تشکیل شد حجم خاک بالای این سطح لغزش به سمت پایین و راست حرکت می‌کند تا به یک موقعیت متعادل برسد. این رویداد همان تغییر شکل بزرگ می‌باشد.



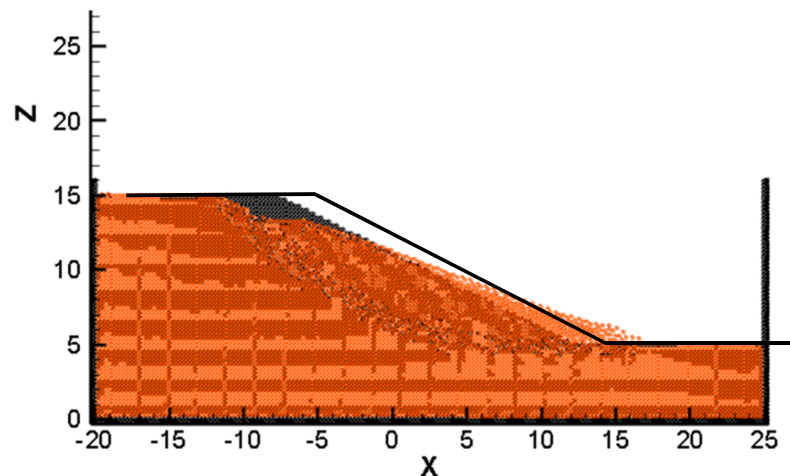
شکل ۵-۲۱ توزیع کرنش پلاستیک در زمان‌های مختلف (Sec) برای شیروانی خاکی ۲

شکل ۵-۲۲ بردار سرعت را در شیروانی نشان می‌دهد. همانطور که گفته شد خاک موجود در شیروانی تحت اثر وزن خود قرار دارد و در واقع دارای بارگذاری گرانشی می‌باشد، بنابراین جاذبه بصورت عمودی به ذرات اعمال شده است. ولی همانطور که از جهت بردارهای سرعت پیداست جهت حرکت ذرات خاکی در دو جهت پایین و راست شیروانی می‌باشد.



شکل ۵-۲۲ بردار سرعت در جهت افقی ( $m/s$ ) در ثانیه دوم برای شیروانی خاکی ۳

شکل ۵-۲۳ شیروانی را در دو حالت قبل و پس از گسیختگی با هم مقایسه می‌کند. رنگ مشکی نشان‌دهنده وضعیت شیروانی در ابتدای مدل و رنگ قهوه‌ای شیروانی را پس از گسیختگی نشان می‌دهد. تغییر شکل ایجاد شده با کمک روش SPH منطقی بنظر می‌رسد. اگر خاک به یک موقعیت متعادل نرسد همانند یک سیال جریان پیدا می‌کند. این مثال باز هم نشان‌دهنده این امر است که SPH جایگزین بسیار خوبی در حل مسائل با تغییر شکل‌های بزرگ بجای روش‌های با مش همانند FEM می‌باشد. همچنین کد توسعه یافته به حالت جامدات با روش SPH، در این مثال نیز عملکرد خوبی از خود نشان داده است.

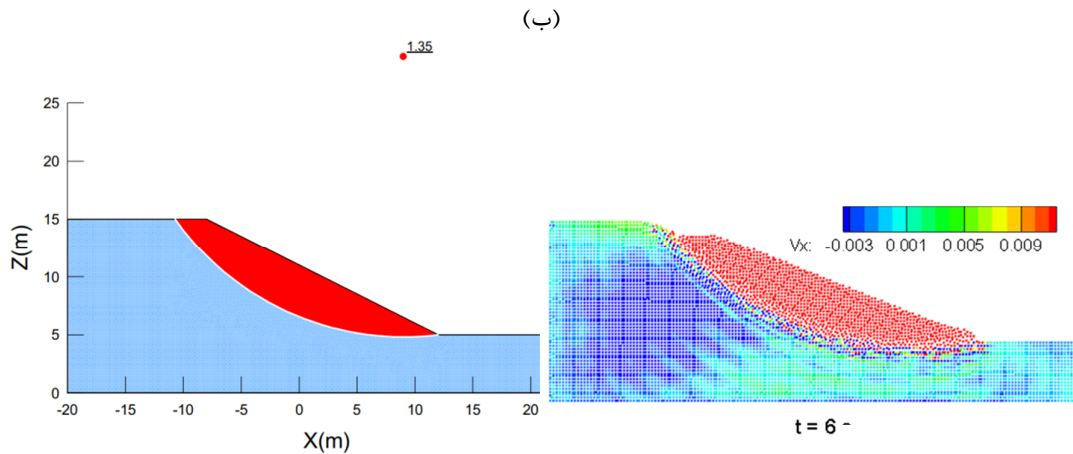
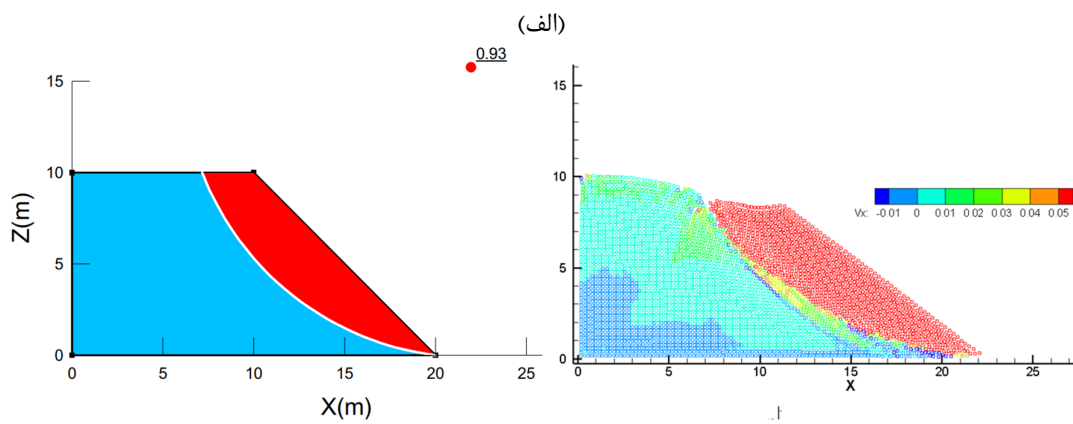
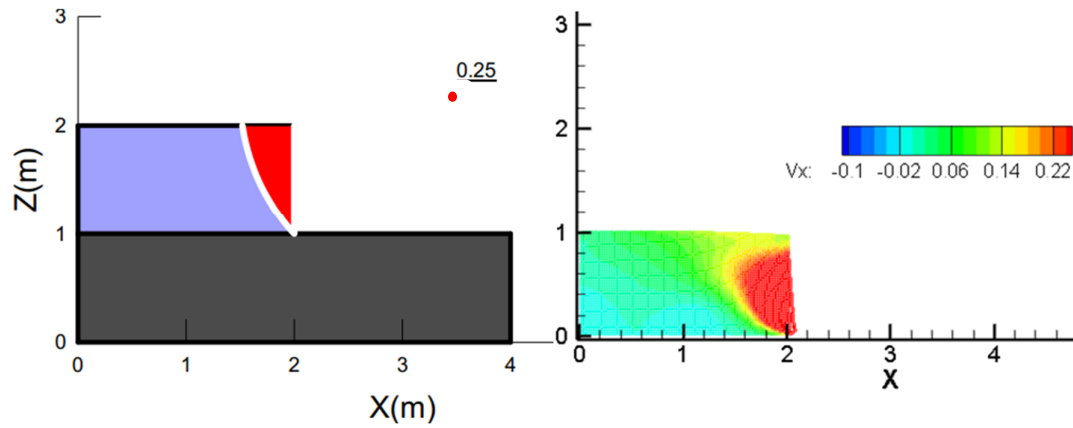


شکل ۵-۲۳ تغییر شکل نهایی شیروانی پس از گسیختگی شیروانی خاکی ۳

## ۵-۶- اعتبارسنجی

جهت اعتبارسنجی بیشتر کد توسعه‌یافته SPH، مثال‌های ذکر شده در بخش قبلی با استفاده از نرم‌افزار ۲۰۱۲ Geo-Studio نیز مدل‌سازی شدند که در ادامه نتایج حاصل از آن آورده شده است. این نرم‌افزار جهت انجام تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی با استفاده از روش تعادل حدی کاربرد و محبوبیت بسیار زیادی مخصوصاً در بین مهندسين ژئوتکنیک دارد. لازم به یادآوری است که خروجی‌های نرم‌افزارهای بصری که در بخش‌های قبلی دیده شد، همگی مطابقت قابل‌قبولی با قوانین مکانیکی داشته و نتایج منطقی‌ای حاصل شد که این خود نشان‌دهنده صحت کد توسعه‌یافته می‌باشد. اما به جهت اعتبارسنجی هرچه بیشتر این کد، مثال‌های ذکر شده با نرم‌افزار Geo-Studio نیز مدل‌سازی شدند تا بتوان سطوح گسیختگی حاصل از این دو را باهم مقایسه نمود. سطح گسیختگی حاصل از این نرم‌افزار، بحرانی‌ترین سطح گسیختگی برای شیروانی مورد نظر است.

همانطور که در شکل ۵-۲۴ مشاهده می‌شود، سطوح گسیختگی حاصل از نرم‌افزار Geo-Studio و کد توسعه‌یافته SPH برای هر سه شیروانی از نقاط یکسانی شروع و خاتمه می‌یابند. سطوح گسیختگی در هر دو خروجی، بصورت منحنی بوده و از پای شیروانی می‌گذرند. همچنین فاصله بین نقطه پایانی سطوح گسیختگی در بالای شیروانی تا تاج شیروانی در هر دو خروجی یکسان است. برای وضوح بیشتر سطح گسیختگی تشکیل شده حاصل از کد و مقایسه بهتر آن با خروجی نرم‌افزار، کانتور سرعت در جهت افقی انتخاب شده است. در شکل (الف) بدلیل جلوگیری از ایجاد خطا در نرم‌افزار Geo-Studio، یک لایه خاک سخت در بستر شیروانی تعریف شده است. مقایسه این دو خروجی و مطالب ذکر شده، نشان از تطبیق قابل قبول خروجی کد SPH با خروجی نرم‌افزار Geo-Studio دارد که این امر اعتبار کد SPH را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۲۴ مقایسه سطوح گسیختگی حاصل از Geo-Studio (سمت چپ) و کد SPH (سمت راست):

(الف) شیروانی خاکی ۱، (ب) شیروانی خاکی ۲، (ج) شیروانی خاکی ۳



## ۵-۷- محدودیت‌ها

همانطور که در بخش‌های قبل بیان شد، محدودیت اصلی این پژوهش که باعث صرف زمان و انرژی بسیار زیادی شد، عدم دسترسی به کد جامداتی پایه SPH بود که برخلاف کدهای سیالاتی موجود، بصورت عموم در دسترس نبود. همچنین کدهای پایه موجود یا بسیار ابتدایی بوده، همچون کد اولیه Liu که به زبان فرترن نوشته شده است، یا مربوط به فاز سیال و گاز بودند. همچنین این کدها دارای زبان برنامه نویسی واحدی نبودند، بنابراین با یکدیگر سازگار نبوده و همین امر کار را بسیار دشوار کرده بود. بنابراین برای بررسی و تحلیل هر یک از این کدهای پایه زمان و انرژی بسیار زیادی گذاشته شد. در این راستا و برای حل این موضوعات مکاتبات و همفکری‌های متعددی نیز با اساتید صاحب نظر در دانشگاه‌های مطرح شرق آسیا و اروپا صورت گرفت.



## **فصل ۶ نتیجه‌گیری و پیشنهاد**

## ۶-۱- خلاصه‌ای از پایان‌نامه

همانطور که ذکر شد مدل‌سازی عددی مسائل با تغییرشکل بزرگ همانند گسیختگی شیروانی، با روش‌های دارای مش، همانند FEM، دارای مشکلاتی می‌باشد. روش FEM بخاطر داشتن شبکه در تغییرشکل‌های بزرگ دچار انحراف مش می‌شود، بنابراین نمی‌تواند این مسائل را مدل‌سازی نماید. بهمین خاطر برای مدل‌سازی اینگونه مسائل از روش‌های بدون مش همچون SPH استفاده شده است. پس از آن به معرفی روش‌های متعددی که برپایه روش SPH هیدرودینامیکی بود پرداخته شد. همانطور که بیان شد، روش SPH یک روش بدون مش، بر مبنای ذرات بوده و لاگرانژی است.

در فصل بعدی به چگونگی فرمول‌بندی SPH اشاره شد. نحوه تبدیل معادلات دیفرانسیل حاکم بر پدیده‌های مهندسی به قالب کاری SPH ذکر شد. این امر براساس ارائه انتگرالی توابع بود. سپس معادلات ناویر-استوکس بمنظور استفاده از آن در روش SPH در قالب لاگرانژی نوشته شد. پس از آن برای تبدیل کد هیدرودینامیکی موجود به کد جامداتی روابط حاکم بر بخش جامد روش SPH در فصل بعدی بیان گردید. فرمول‌بندی معادلاتی همچون مومنتوم و پیوستگی در ادامه آن شرح داده شد. در انتهای آن فصل نیز روش‌های جستجوی ذرات همسایگی که از اصول و مفاهیم پایه‌ای روش SPH است ذکر شد. کد جامداتی توسعه یافته بر مبنای روش SPH با مدل‌سازی چند مثال از گسیختگی شیروانی و مقایسه آن‌ها با مدل ۲۰۱۲ Geo-Studio برای خاک‌های دانه‌ای و چسبنده صحت‌سنجی شد. نتایج حاصل شده گویای دقت قابل قبول مدل‌سازی‌های انجام شده بود.

## ۶-۲- نتایج

پس از آنکه روش SPH بخوبی شرح داده شد، کد جامداتی تهیه شده با مدل‌سازی مسائلی همچون گسیختگی شیروانی خاکی که از مسائل دارای تغییرشکل بزرگ محسوب می‌شوند، صحت‌سنجی شد. متغیرهای خروجی مربوط به هر مسئله بصورت کانتور نشان داده شد. کد مربوطه با سه مثال آزمایش شد. مثال‌های مدل شده مربوط به شیروانی خاکی بودند که هرکدام هندسه و مشخصات فیزیکی خاص خود را داشتند. خروجی‌های بدست آمده اعم از تنش‌های نرمال و برشی، سرعت، جابجایی، کرنش پلاستیک و ... و همچنین مقایسه سطوح گسیختگی با خروجی نرم‌افزار Geo-Studio همگی

گویای این مساله بودند که کد مربوطه دارای دقت قابل قبولی برای شبیه‌سازی مسائلی از این دست می‌باشد.

### ۶-۳- پیشنهادها برای مطالعات آتی

- (۱) توسعه کد جامداتی SPH برای مدل‌سازی مسائل دیگری همچون شبیه‌سازی پی، گودبرداری، اندرکنش خاک و سازه و ...
- (۲) بدست آوردن الگوریتم جدید حل، برای کاهش دادن زمان مدل‌سازی بدون کاهش دقت نتایج
- (۳) بررسی اثر پارامترهای مکانیکی خاک بر روی نتایج شبیه‌سازی مسائل گوناگون
- (۴) تهیه الگوی جدید جستجوی ذرات همسایگی برای افزایش بیش از پیش دقت مدل
- (۵) بررسی تاثیر عواملی همچون تابع هموارساز انتخابی، طول هموارسازی، و ... بر روی نتایج
- (۶) بررسی تاثیر شکل دانه‌های خاک بر نتایج حاصل از SPH

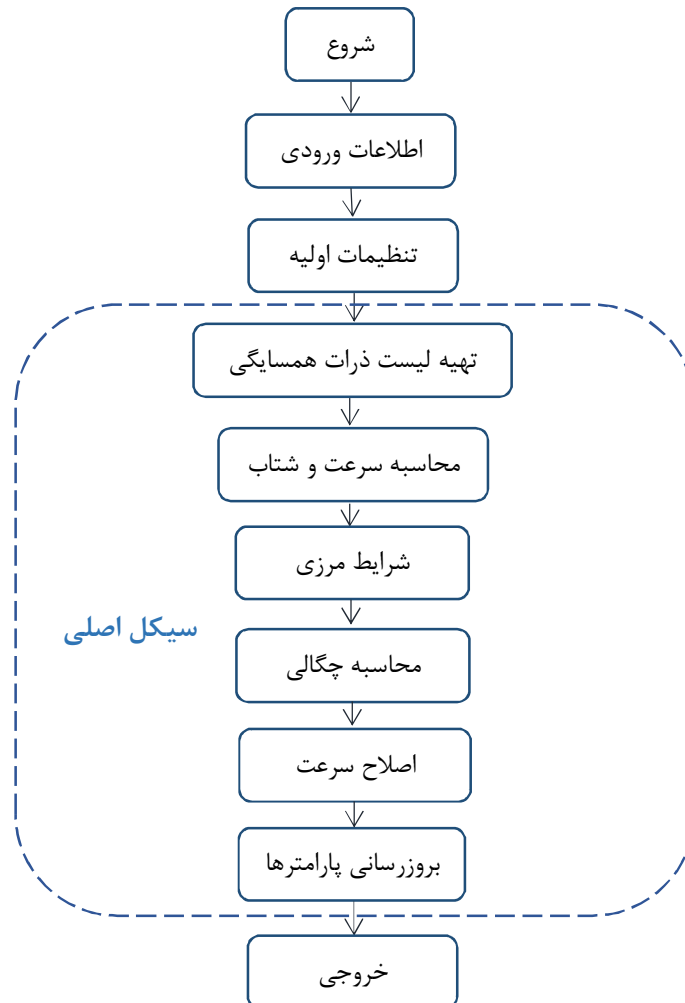
## پیوست ۱ فلوجارت روند هیدرودینامیکی SPH

مرحله اول: اطلاعات ورودی

علائم شناسایی اطلاعات ورودی مسائل از قبیل پارامترهای چگالی، سرعت، نیروی داخلی و ... در این مرحله وارد می‌شوند.

مرحله دوم: تنظیمات اولیه

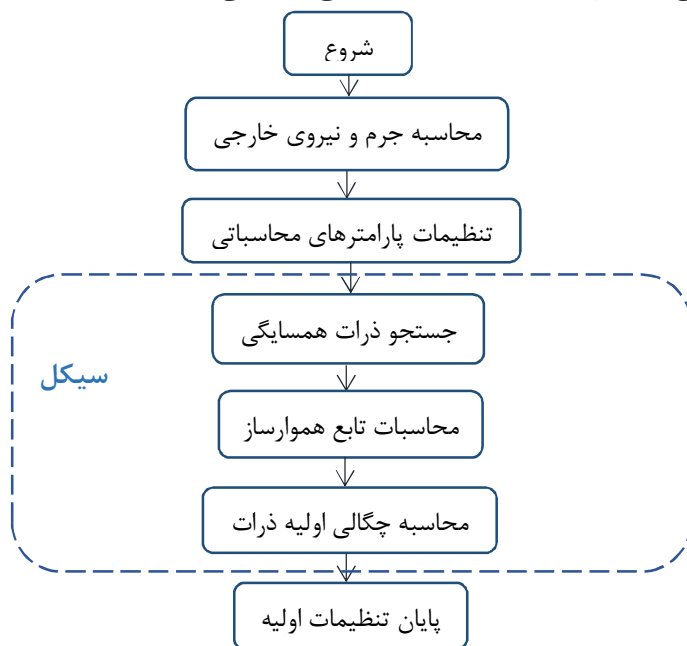
این مرحله شامل محاسبه جرم ذرات، نیروهای خارجی، تنظیم پارامترهای محاسباتی، محاسبه چگالی اولیه و تنظیم مرزهای اولیه آزاد می‌باشد. فلوجارت این مرحله در زیر آورده شده است.



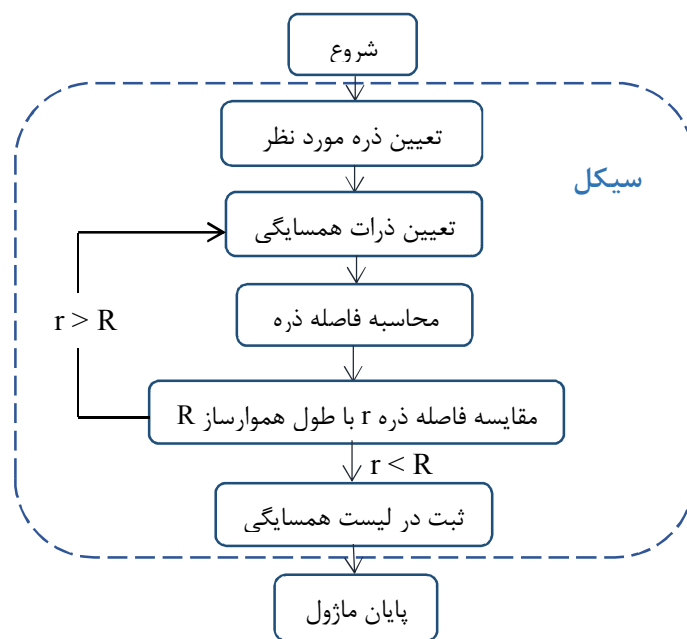
فلوجارت اصلی برنامه هیدرودینامیکی SPH

مرحله سوم: جستجوی ذرات همسایگی

همانطور که قبلا ذکر شد برای تعیین پارامترهای مختلف یک ذره بایستی از ذرات مجاوری که در دامنه تاثیر ذره محاسباتی هستند کمک گرفت. در این مرحله ذرات همسایگی که در دامنه تاثیر هستند تعیین می شود و پس از آن لیست همسایگی تهیه می شود.



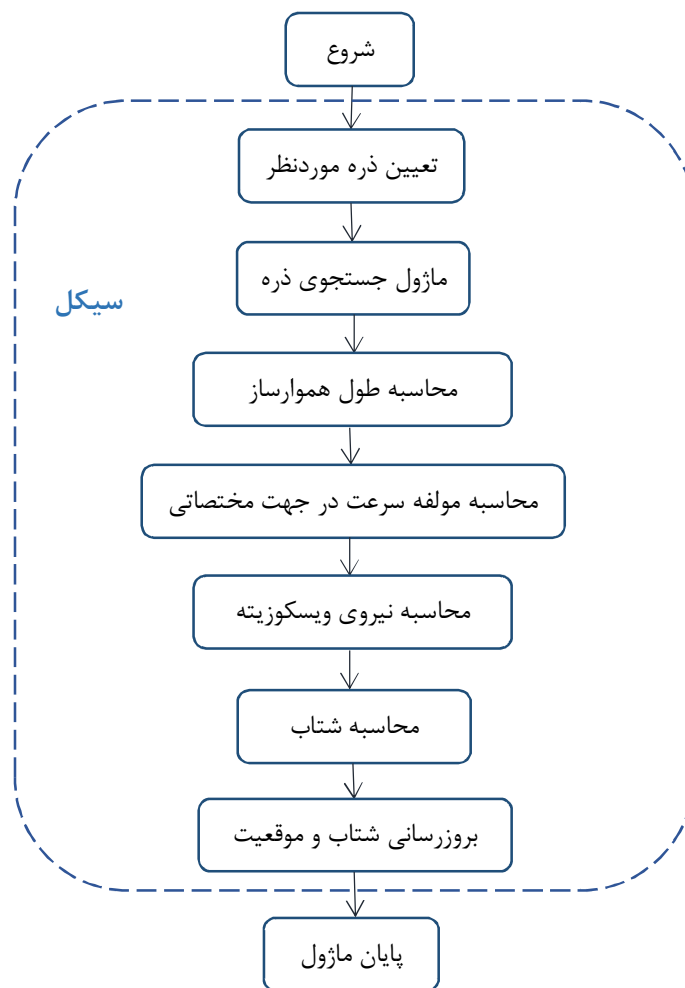
فلوجارت تنظیمات اولیه



فلوجارت جستجو ذرات

مرحله چهارم: محاسبه سرعت، شتاب و موقعیت ذرات

جابجایی ذرات همسایگی باعث ایجاد نیروی ویسکوز بر روی ذره محاسباتی مورد نظر می شود. این نیرو بر سرعت، شتاب و موقعیت آن ذره اثرگذار است. در این مرحله این پارامترها محاسبه می شود.

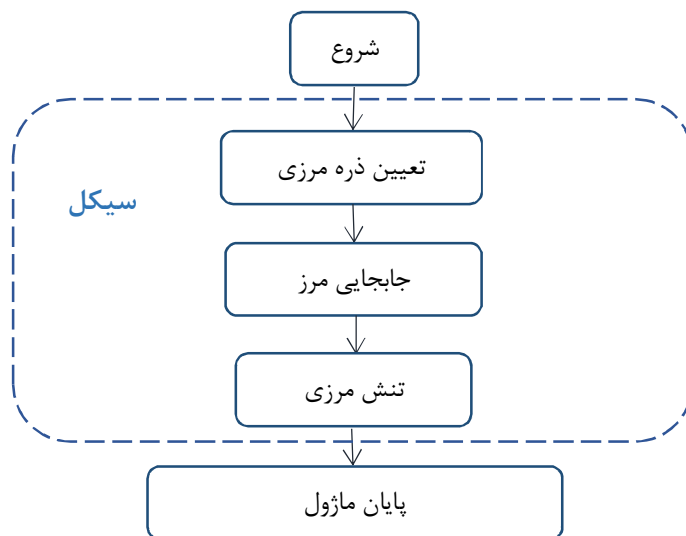


فلوجارت محاسبه سرعت، شتاب و موقعیت



مرحله پنجم: تنظیمات مرزی

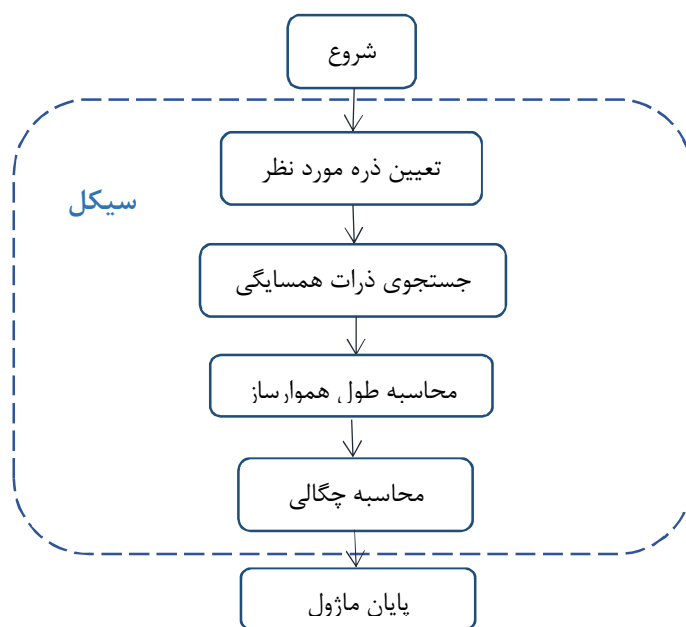
تنظیم شرایط محاسباتی شامل درجه آزادی ذرات مرزی و ذرات محرک در این مرحله صورت می‌گیرد.



فلوجارت تنظیمات مرزی

مرحله ششم: محاسبه چگالی

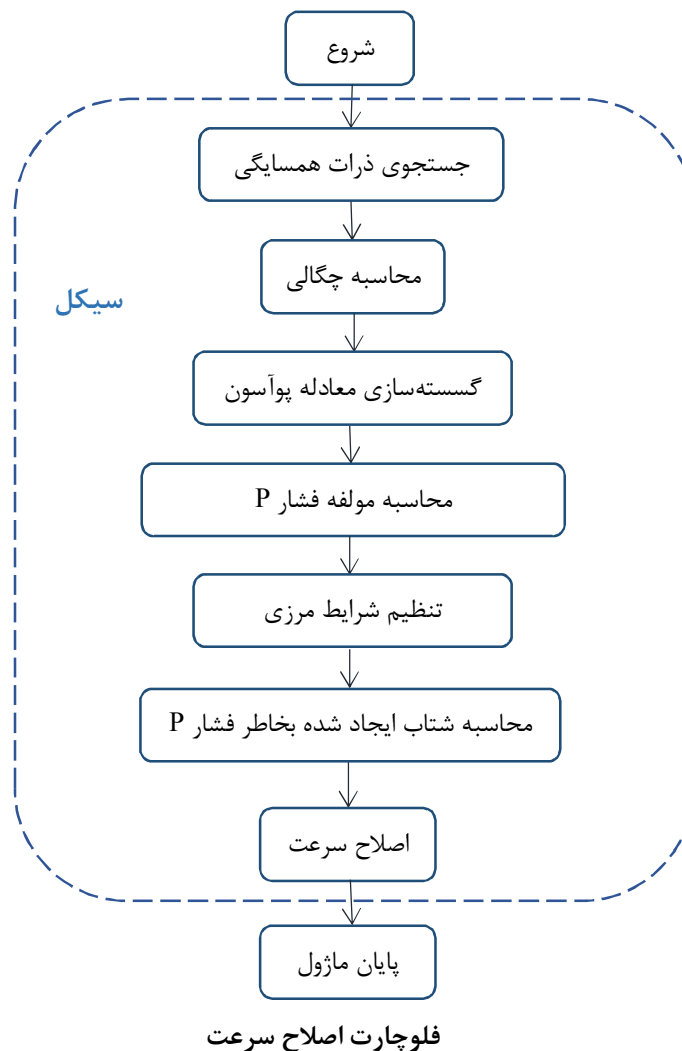
در این گام، چگالی ذره محاسبه شده و ذرات موجود در سطح آزاد در هر گام زمانی مشخص می‌شود.



فلوجارت محاسبه چگالی

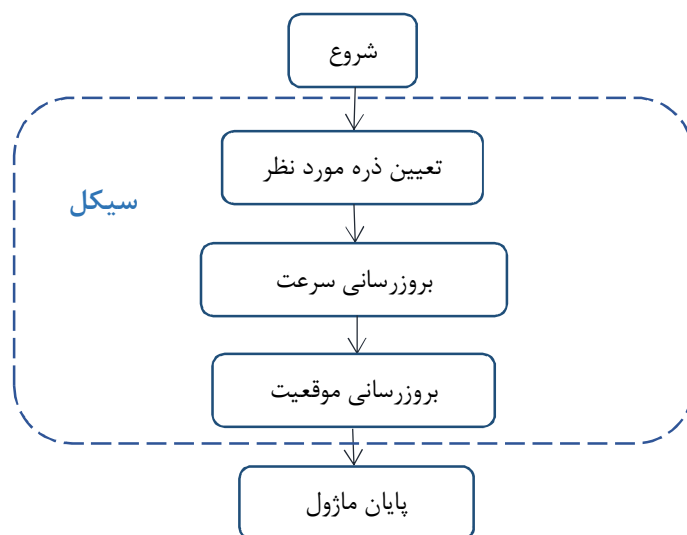
مرحله هفتم: اصلاح سرعت

در این مرحله ابتدا اختلاف فشار ایجاد شده در ذره مورد نظر محاسبه می‌شود. این اختلاف فشار بخاطر تغییر در تعداد ذرات همسایگی موجود در دامنه محاسباتی می‌باشد. سپس اثر این تغییر در شتاب ذره محاسبه شده و سرعت آن اصلاح می‌گردد.



مرحله هشتم: بروزرسانی اطلاعات

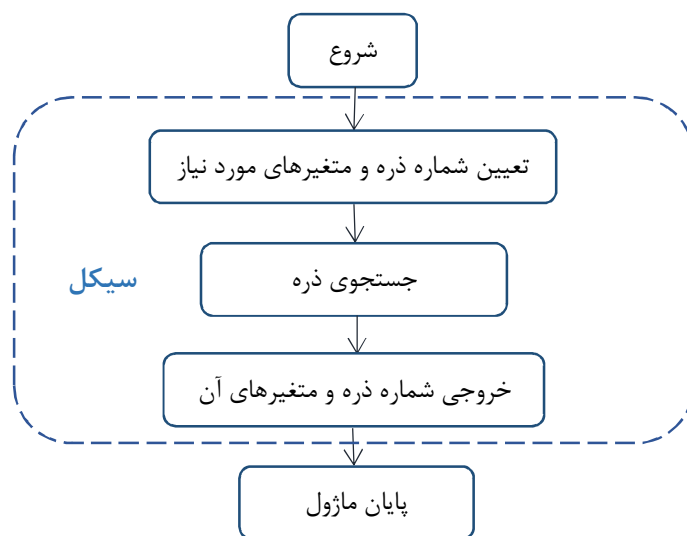
پس از هر سیکل محاسباتی مختصات، سرعت و شتاب هر ذره محاسبه می‌شود. سپس مختصات و سرعت هر ذره بعنوان ورودی مرحله بعدی لحاظ می‌شود.



فلوجارت بروزرسانی اطلاعات

مرحله نهم: خروجی اطلاعات

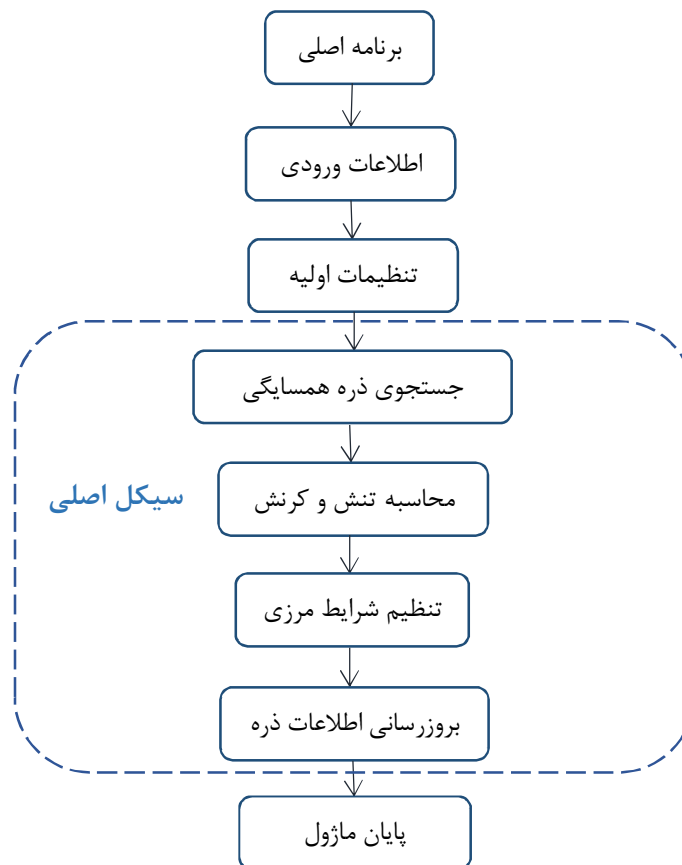
تمامی مقادیر هر ذره در این مرحله بعنوان فایل خروجی ارائه می‌شود.



فلوجارت خروجی اطلاعات

## پیوست ۲ فلوجارت روند جامداتی SPH

در مدل‌سازی مسائل تغییرشکل‌های بزرگ، از مواد الاستو-پلاستیک نیز استفاده شده است. بنابراین برای وارد کردن روابط مربوط به مکانیک الاستو-پلاستیک به محیط برنامه‌نویسی از فلوجارت اصلی زیر استفاده شده است.



فلوجارت اصلی برنامه الاستو-پلاستیک SPH

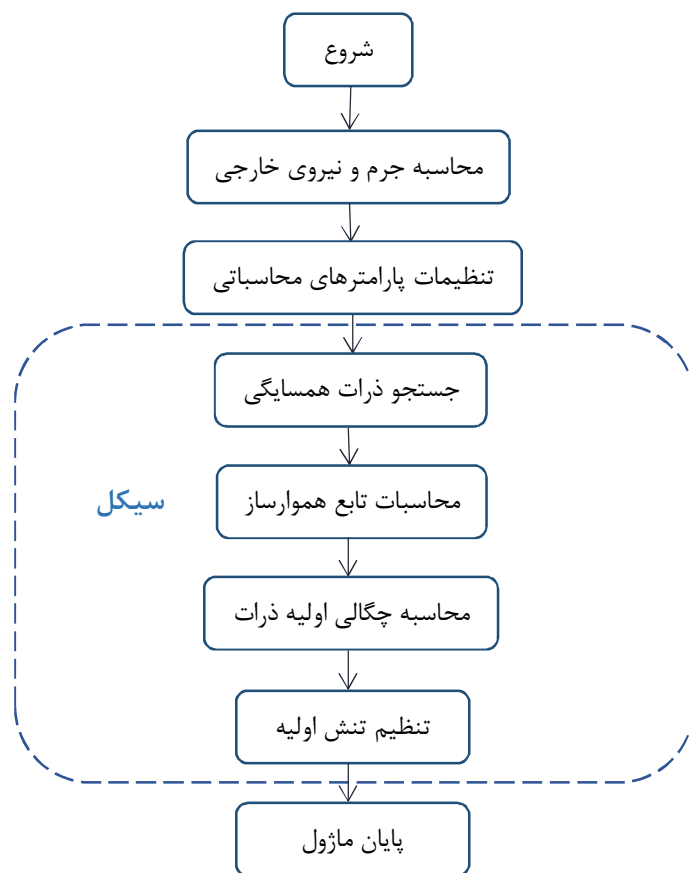
مراحل مختلف این فلوجارت بشرح ذیل می باشد:

گام اول: ورودی اطلاعات

در این مرحله همانند گام اول فلوجارت هیدرودینامیکی SPH، علائم شناسایی پارامترهایی همچون چگالی، سرعت، نیروی خارجی، مدل های تغییر شکل خاک از قبیل مدل دراگر-پراگر و ... مشخص می شود.

مرحله دوم: تنظیمات اولیه

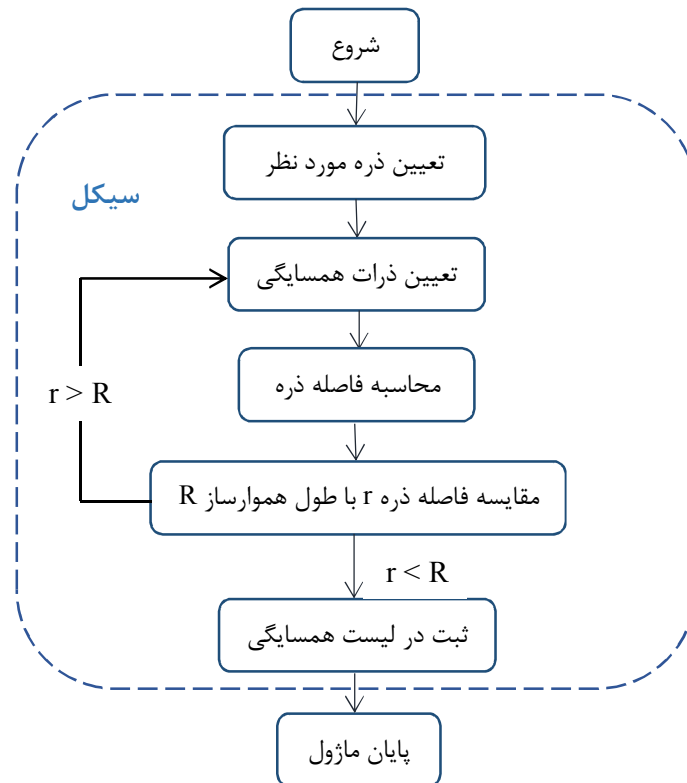
در این مرحله مقادیر اولیه پارامترهای ذره محاسبه شده و پارامترهای محاسباتی تنظیم می شود. سپس حالت تنش اولیه ذرات تنظیم می شود.



فلوجارت تنظیمات اولیه

مرحله سوم: جستجوی ذرات همسایگی

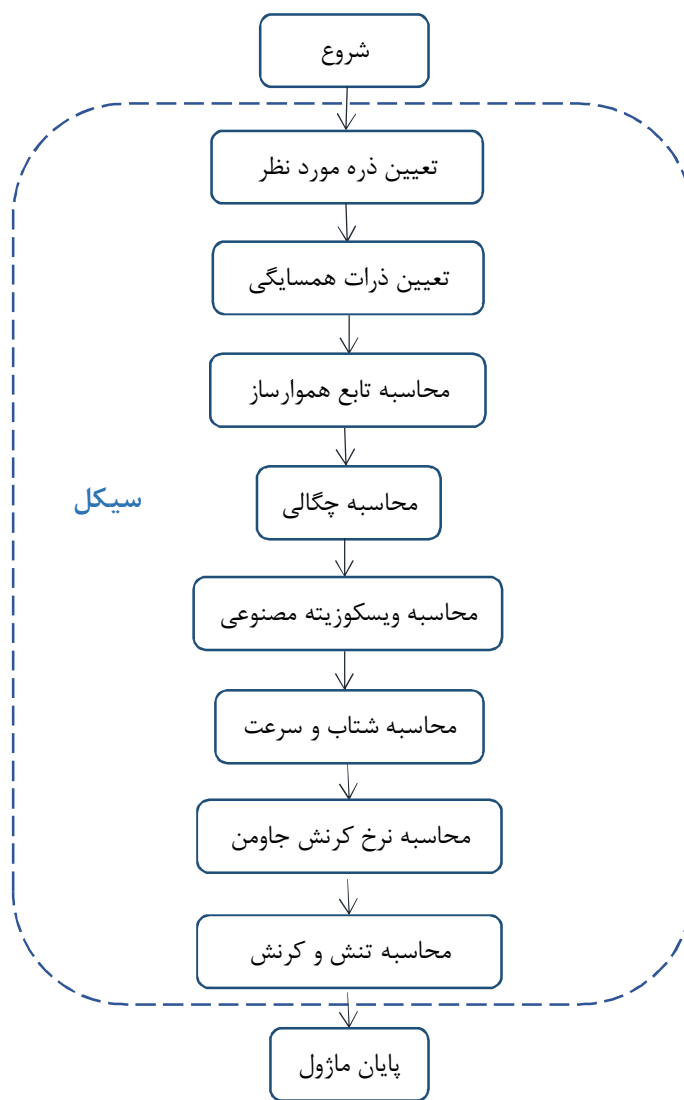
این مرحله همانند مرحله سوم برنامه هیدرودینامیکی SPH می‌باشد. با این تفاوت که طول هموارسازی انتخابی فرق می‌کند.



فلوجارت جستجو ذرات

مرحله چهارم: محاسبه تنش و کرنش

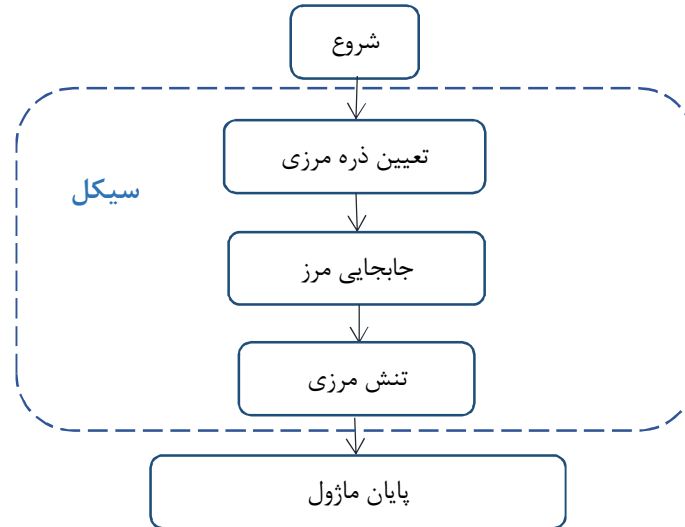
یکی از قسمت‌های اصلی که بمنظور تهیه کد جامداتی به کد هیدرودینامیکی اضافه شده است، فلوجارت تنش و کرنش می‌باشد. مقادیر تنش و کرنش ذرات بایستی طبق فلوجارت زیر محاسبه شوند.



فلوجارت محاسبه تنش و کرنش

مرحله پنجم: تنظیمات مرزی

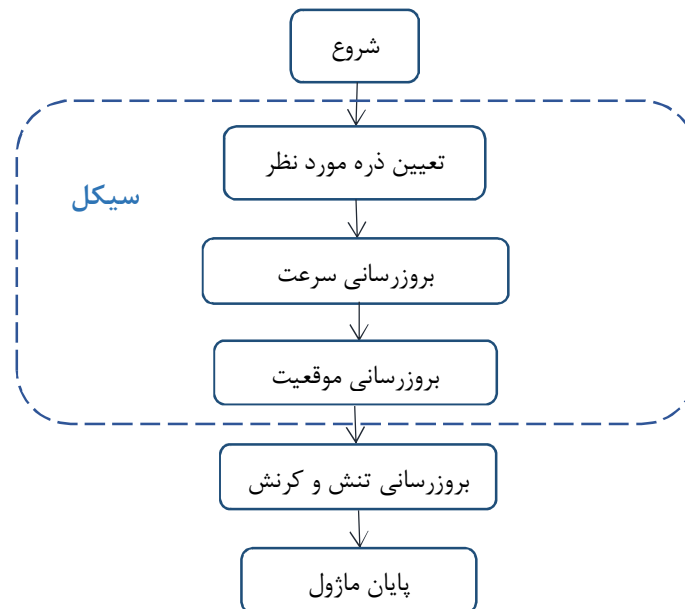
تنظیم شرایط محاسباتی شامل درجه آزادی ذرات مرزی و ذرات محرک در این مرحله صورت می‌گیرد.



فلوجارت تنظیمات مرزی

مرحله ششم: بروزرسانی اطلاعات

پس از هر سیکل محاسباتی مختصات، سرعت و شتاب هر ذره محاسبه می‌شود. سپس مختصات و سرعت هر ذره بعنوان ورودی مرحله بعدی لحاظ می‌شود.

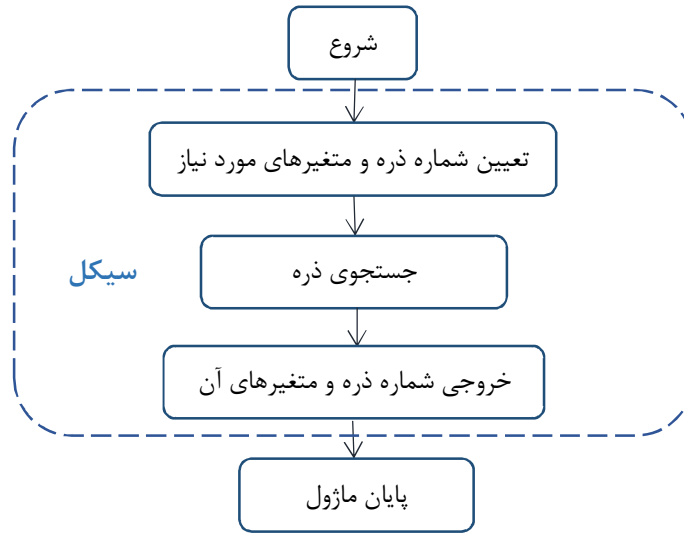


فلوجارت بروزرسانی اطلاعات



مرحله هفتم: خروجی اطلاعات

تمامی مقادیر هر ذره در این مرحله بعنوان فایل خروجی ارائه می‌شوند.



فلوجارت خروجی اطلاعات

## منابع

- Balsara, D. (۱۹۹۵). von Neumann stability analysis of smoothed particle hydrodynamics-suggestions for optional algorithms. *J.Comput.Phys*, ۳۵۷-۳۷۲.
- Bui HH, F. R. (۲۰۱۳). An improvement of SPH for saturated soils and its application to investigate the mechanisms of embankment failure: Case of hydrostatic pore-water pressure. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* ۳۷(۱), ۳۱-۵۰.
- Bui HH, S. K. (۲۰۰۸). SPH-based numerical simulations for large deformation of geomaterial considering soil-structure interaction. In ۱۲th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics. *Goa, India*, ۵۷۰-۵۷۸.
- Bui, H. ,. (۲۰۰۸). Lagrangian meshfree particles method (SPH) for large deformation and failure flows of geomaterial using elastic-plastic soil constitutive model. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* ۳۲ (۱۲), ۱۵۳۷-۱۵۷۰.
- Bui, H. F. (۲۰۱۱). Slope stability analysis and discontinuous slope failure simulation by elasto-plastic smoothed particle hydrodynamics (SPH). *Geotechnique* ۶۱(۷), ۵۶۵-۵۷۴.
- Cai Z, B. R. (۱۹۹۵). Seismic response analysis of geosynthetic reinforced soil segmental retaining wall by finite element method. *Computers and Geotechnics* ۱۷(۴), ۵۲۳-۵۴۶.
- Chen W, Q. T. (۲۰۱۱). Numerical simulations for large deformation of granular materials using smoothed particle hydrodynamics method. *Int J Geomech* ۱۲(۲), ۱۲۷-۱۳۵.
- Chen, W. &. (۲۰۱۴). Simulation of earthquake-induced slope deformation using SPH method. *Int. J. Numer. Analyt. Methods Geomech.* ۳۸, No. ۳, ۲۹۷-۳۳۰.
- Colagrossi A, L. M. (۲۰۰۳). Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *J Comput Phys* ۱۹۱(۲), ۴۴۸-۴۷۵.

- Cui, P. Z. (2009). The 12 May Wenchuan earthquake-induced landslide lakes: Distribution and preliminary risk evaluation. *Landslides*, 209-203.
- Dyka, C. ,. (1995). An approach for tension instability in smoothed particle hydrodynamics (SPH). *Comput. Struct.* 57, 573-580.
- Gingold, R. M. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 111, 375-389.
- Gomez-Gesteira M, R. B. (2010). State-of-the-art of classical SPH for free-surface flows. *J Hydraul Res* 48(S1), 6-27.
- Gray JP, M. J. (2001). SPH elastic dynamics. *Comput Methods Appl Mech Eng* 190(49), 6641-6662.
- Griffiths, D. V. (2007). Three-dimensional slope stability analysis by elasto-plastic finite elements. *Géotechnique* 57, No. 6, 537-546.
- Griffiths, D. V. (1999). Slope stability analysis by finite elements. *Geotechnique* 49, 387-403.
- Hu Y, R. M. (1998). A practical numerical approach for large deformation problems in soil. *Int J Numer Anal Meth Geomech* 22(5), 327-350.
- Hu, M. L. (2015). Three-dimensional run-out analysis and prediction of flow-like landslides using smoothed particle hydrodynamics. *Environ. Earth Sci.* 73, No. 4, 1629-1640.
- Huang, R. Q. (2009). Analysis of the geo-disasters triggered by the 12 May 2008 Wenchuan Earthquake, China. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 68(3), 363-371.
- Huang, Y. ,. (2009). Numerical simulation of large deformation of soil flow based on SPH method. *Chinese J. Geotech. Eng.* 31 (10), 1520-1524.
- Janbu, N. (1968). *Slope stability computation, Soil Mechanics and Foundation Engineering Report*. Trondheim: Technical University of Norway.
- JJ., M. (2003). SPH elastic dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 6641-6662.

- Libersky, L. D. (1993). High strain Lagrangian hydrodynamics: a three dimensional SPH code for dynamic material response. *J. Comput. Phys.* 109, 67-75.
- Liu MB, L. G. (2003). Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology. *Comput Fluids* 32(3), 305-322.
- Liu, G. L. (2003). *Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method*. Singapore : World Scientific.
- Manenti, S. ,. (2012). SPH simulation of sediment flushing induced by a rapid water flow. *J. Hydraul. Eng.* 138 (3), 272-284.
- Monaghan, J. G. (1983). Shock simulation by the particle method SPH. *J. Comput. Phys.* 52, 374-389.
- Monaghan, J. J. (1994). Simulating free surface flows with SPH. *J. Comput. Phys.* 110, No. 2, 399-406.
- Monaghan, J. J. (2005). Smoothed particle hydrodynamics. *Rep. Prog. Phys.* 68, No. 4, 1703-1759.
- Murakami A, S. T. (2005). Mesh-free method for soil-water coupled problem within finite strain and its numerical validity. *Soils and Foundations* 45(2), 145-154.
- Pastor, M. H. (2009). A depth-integrated, coupled SPH model for flow-like landslides and related phenomena. *Int. J. Numer. Analyt. Methods Geomech.* 33, No. 2, 143-172.
- Peng C, W. W. (2015). Three-dimensional simulations of tensile cracks in geomaterials by coupling meshless and finite element method. *Int J Numer Anal Meth Geomech* 39(2), 135-154.
- Rabczuk T, B. T. (2007). A three-dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks. *Comput Methods Appl Mech Eng* 196(29), 2777-2799.
- Shao, S. ,. (2003). Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. *Adv. Water Resour.* 26 (7), 787-800.
- Shao, S. (2012). Incompressible smoothed particle hydrodynamics simulation of multifluid flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 69 (11), 1715-1735.

- Sulsky, D. Z. (1995). Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Computer Physics Communications* 117, 236-252.
- Swegle, J. H. (1995). Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *J. Comput. Phys.* 116(1), 123-134.
- V, S. (2010). Smoothed particle hydrodynamics in astrophysics. *Ann Rev Astron Astrophys* 48, 391-430.
- Vacondio, R. ,. (2013). 3D SPH numerical simulation of the wave generated by the Vajont rockslide. *Adv. Water Resour.* 59, 146-156.
- Verlet, L. ,. (1967). Computer experiments on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules. *Phys. Rev.* 159, 98-103.
- Wang XT, W. W. (2011). An update hypoplastic constitutive model, its implementation and application. In: Wan R, Alsaleh A, Nghiem L (eds) *Bifurcations, instabilities and degradations in geomaterials. Springer, Berlin*, 133-143.
- Wu CT, C. J. (2001). Lagrangian meshfree formulation for analysis of geotechnical materials. *J Eng Mech* 127(8), 440-449.
- Wu W, B. E. (1996). Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials. *Mech Mater* 23(1), 45-69.
- Xu XY, O. J. (2013). SPH simulations of three-dimensional non-newtonian free surface flows. *Comput Methods Appl Mech Eng* 256, 101-116.

## Abstract

The finite deformation theories have been widely used in conventional deformation analysis of geomaterials. The finite element method (FEM) is often used as a numerical method in computational modelling. However, dealing with the large deformation and failure is generally a difficult task for FEM since this method is suffered from tough grid distortions.

The method of smoothed particle hydrodynamics (SPH) has recently been applied to computational modelling and has been shown to be a powerful alternative to the standard numerical method, that is, the finite element method, for handling large deformation and post-failure of geomaterials. This method is a kind of particle method based on the mesh-free Lagrangian scheme, and is one of the promising numerical methods in the field of geotechnical engineering. Therefore, the method can represent the entire deformation process of soil from the small strain region to the large deformation region.

In this thesis, first, basic theory and formulation of the SPH method based on fluid mechanics are summarized. Then formulations of solid mechanic that we used to develop of hydrodynamics code are discussed. This code includes an elasto–plastic constitutive model for soil and a Navier–Stokes equation based model for water. Also, the Drucker–Prager model is implemented into the SPH code to describe elastic–plastic soil behavior. All parameters have their physical meaning in soil mechanics and can be obtained from conventional soil mechanics experiments directly. Finally, two numerical examples analysis of cohesive soil slope in stability and an example for collapse of a granular slope are shown to check the capability of developed SPH code for modelling large deformation of slope failure. Logical critical slip surfaces are determined from a contour plot of accumulated plastic strain. Based on the output contour plot of some variable like deformation, velocity, stress and plastic strain, the effectiveness of the code of SPH is discussed from the point of view of geotechnical engineering. Good agreement with the results of simulations and theoretical solutions is obtained. So, this developed solid SPH code can simulate large deformation and post-failure of soil with high accuracy, and can thereby treat a wide range of applications in geotechnical problems.

**Keywords:** Numerical modelling; large deformation; smoothed particle hydrodynamics (SPH) method; slope failure, meshless methods, elasto-plastic model



**Shahrood University of Technology**

Faculty of Civil Engineering

M.Sc. Thesis in Geotechnical Engineering

# **Numerical Modeling of Large Deformation and Failure in Soil using SPH Method**

By: Amir Hajisalimi

Supervisor:  
Dr. Reza Naderi

August ۲۰۱۶