

الله  
الرحمن  
الرحيم



دانشکده عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی ژئوتکنیک

مدل سازی گسترش ترک با استفاده از روش توسعه یافته گالرکین بدون المان

نگارنده : عماد صدر

استاد راهنما :

دکتر رضا نادری

شهریور ۹۶

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی عمران

گروه : مهندسی ژئوتکنیک

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای عماد صدر به شماره دانشجویی: ۹۳۱۱۰۶۴

تحت عنوان: مدل سازی گسترش ترک با استفاده از روش توسعه یافته گالرکین بدون  
المان

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد  
مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

بیاری خداوند متعال و راهبانی باو حیات های بی دریغ و همه جانبه استاد کرامیم جناب آقای دکتر رضانا ناری و خانواده عزیزم و همچنین دوستان خوبم محسن نباتی و حسین عطاردی،

افتخار دارم حاصل پژوهشم در این مقطع تحصیلی را به همه علاقه مندان و روحوان علم و عمل تقدیم نمایم.

به امید سربلندی میهن عزیزم ایران

عناصدر

## تعهد نامه

اینجانب عماد صدر دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران-ژئوتکنیک دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مدل‌سازی گسترش ترک با استفاده از روش توسعه یافته گالرکین بدون المان تحت راهنمایی جناب آقای دکتر رضا نادری متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

### تاریخ

### امضای دانشجو

## مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

ترک خوردگی و شکست مسئله بسیار مهمی در دنیای صنعتی امروز می‌باشد. در طول تاریخ فجایع زیادی از جمله سقوط هواپیماها، فروریختن ساختمان‌ها و پل‌ها، خارج شدن قطارها از ریل و ... رخ داده است که ناشی از به وجود آمدن ترک‌ها و گسترش آن‌ها در اثر بارهای وارده بوده است و باعث به وجود آمدن خسارات جانی و مالی فراوان، مختل شدن قسمتی از سیستم حمل و نقل و بسیاری مشکل‌های دیگر شده است. بنابراین درک رفتار ترک و پیش‌بینی فرآیند گسترش آن برای ساخت قطعات صنعتی، سازه‌های زیرزمینی و دیگر ابزار و اجسامی که برای بشر ارزشمند هستند، بسیار ضروری می‌باشد. علمی که به تحلیل و مطالعه این مسائل می‌پردازد، مکانیک شکست نامیده می‌شود.

با گذشت زمان و پیشرفت علم، بشر هر روز با مسائل جدیدتری در جهان حقیقی از جمله مسائل مکانیک شکست با هندسه‌های پیچیده روبرو می‌شود که تحلیل و بررسی آن‌ها با استفاده از کارهای آزمایشگاهی و میدانی بسیار دشوار و یا غیرممکن می‌باشد؛ در نتیجه نیاز به استفاده از روش‌های محاسبات عددی با دقت هر چه بیشتر، احساس می‌شود. یکی از مهم‌ترین پیشرفت‌ها در زمینه روش‌های عددی، گسترش روش اجزاء محدود بوده است که به مدت زیادی برای تحلیل مسائل مهندسی به کار رفته است. به دلیل مسیرهای دلخواهی که ترک در هر مرحله از گسترش خود تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی طی می‌کند در روش مرسوم اجزاء محدود می‌بایست در هر مرحله از رشد ترک، شبکه‌بندی مجدد صورت گیرد تا هندسه ترک با مرزهای المان‌ها منطبق شود و این نقص اصلی این روش می‌باشد.

حال با توجه به محدودیت‌های موجود در روش اجزاء محدود و دیگر روش‌های بر پایه شبکه در تحلیل مسائلی از جمله تغییرشکل‌های بزرگ و رشد ترک‌ها، در این پژوهش از روش توسعه‌یافته گالرکین بدون المان (Extended Element Free Galerkin (XEFG که یکی از روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف سراسری می‌باشد، استفاده شده است. در روش مذکور، از هیچ‌گونه المان و یا

شبکه‌ای برای تعریف دامنه مسئله استفاده نشده است و توابع تقریب فقط با استفاده از مجموعه‌ای از گره‌های توزیع شده به صورت یکنواخت در دامنه مسئله و بر روی مرزها، ساخته شده است. در این روش، توابع غنی‌سازی مناسب، به تقریب روش استاندارد گالرگین بدون المان اضافه شده است. در روش یاد شده، برای ساخت توابع شکل از تقریب حداقل مربعات متحرک Moving Least Squares (MLS) استفاده شده است و همچنین تابع وزن مورد استفاده در تابع شکل، اسپلاین درجه ۴ بوده است.

روش مجموعه تراز نیز برای مدل‌سازی و نمایش بدنه ترک و دنبال‌کردن مسیر نوک آن استفاده شده است. همچنین در پژوهش حاضر از روش انتگرال اندرکنش یا انتگرال M، برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مودهای خالص و ترکیبی استفاده شده است. مسیر رشد ترک نیز با استفاده از معیار تنش پیرامونی حداکثر در هر مرحله از رشد ترک مشخص شده است.

با استفاده از روش فوق کد مربوطه در محیط MATLAB<sup>®</sup> نوشته شده است و همچنین مثال‌هایی عددی نیز در دو بخش با نام‌های ترک‌های ساکن و گسترش ترک‌ها ارائه شده است؛ در این مثال‌ها با تغییر پارامترهای مختلف از جمله مجموعه گره‌های مورد استفاده، تاثیر آن‌ها در دقت جواب حاصله و میزان خطای آن نشان داده شده است. نهایتاً نتایج حاصل از ضرایب شدت تنش در مودهای خالص و ترکیبی و ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با نتایج موجود در پژوهش‌های محققان گذشته مقایسه شده است که صحت‌سنجی صورت گرفته، نشان از دقت و صحت کدهای نوشته شده و به طور کلی کار انجام گرفته در این پژوهش دارد.

**کلمات کلیدی:** انتگرال اندرکنش، ضرایب شدت تنش، گسترش ترک، روش توسعه‌یافته

**گالرگین بدون المان (XEFG)، روش بدون شبکه**

## فهرست مطالب

فصل اول .....	۱
۱- مقدمه .....	۲
۱-۱- ضرورت انجام پژوهش .....	۳
۱-۲- هدف از پژوهش .....	۳
۱-۳- فصل بندی پژوهش .....	۴
فصل دوم.....	۷
۲- روش های بدون شبکه و EFG .....	۸
۱-۲- مقدمه .....	۸
۲-۲- شکل ضعیف (weak form) و شکل قوی (strong form) .....	۱۰
۲-۳- نکات بنیادی روش های بدون شبکه .....	۱۳
۲-۴- مراحل معمول در روش های بدون شبکه .....	۱۴
۲-۴-۱- تولید هندسه مسئله .....	۱۵
۲-۴-۲- تقریب متغیر میدان .....	۱۶
۲-۴-۳- مجزاسازی معادله دیفرانسیل حاکم .....	۱۷
۲-۴-۴- گردآوری سیستم معادلات کلی .....	۱۷
۲-۴-۵- حل سیستم معادلات کلی .....	۱۸
۲-۴-۵-۱- روش های مستقیم .....	۱۸



۱۸	۲-۴-۵-۲- روش‌های تکرارشونده
۱۹	۲-۵- توابع شکل بدون شبکه
۲۱	۲-۶- دامنه تکیه‌گاهی یا دامنه تاثیر
۲۳	۲-۷- ساخت توابع شکل روش EFG (تقریب حداقل مربعات متحرک)
۲۳	۲-۷-۱- فرمول‌سازی توابع شکل MLS
۳۰	۲-۸- انتخاب تابع وزن
۳۳	۲-۹- روش‌های بدون شبکه بر پایه شکل‌های ضعیف سراسری
۳۴	۲-۱۰- روش گالرکین بدون المان (Element-Free Galerkin Method (EFGM)
۳۷	۲-۱۰-۱- روش‌های ارضاء شرایط مرزی اساسی
۳۷	۲-۱۰-۱-۱- روش پنالتی (Penalty Method)
۳۹	۲-۱۰-۱-۲- روش ضرایب لاگرانژ (Lagrange Multipliers)
۴۵	<b>فصل سوم</b>
۴۶	<b>۳- بررسی روش‌های گسترش ترک</b>
۴۶	۳-۱- مفاهیم پایه مکانیک شکست
۵۰	۳-۲- مودهای پایه شکست
	۳-۳- تعیین میدان‌های تغییرمکان و تنش در اطراف یک ترک در یک محیط الاستیک خطی،
۵۱	ایزوتروپیک و همگن
۵۴	۳-۴- معیارهای شکست الاستیک

۵۵	۵-۳-۵- روش‌های تعیین ضرایب شدت تنش و نرخ آزادسازی انرژی (G و K)
۵۶	۳-۵-۱- روش‌های تحلیلی (Analytical Methods)
۵۶	۳-۵-۱-۱- تئوری الاستیسیته (Elasticity Theory)
۵۶	۳-۵-۱-۲- روش‌های تطابقی و انرژی (Energy and Compliance)
۵۶	۳-۵-۲- روش تجمع محلی مرزی (Boundary Collocation Method)
۵۶	۳-۵-۳- روش‌های محاسباتی (Computational Methods)
۵۷	۳-۵-۴- روش‌های آزمایشگاهی (Experimental Methods)
۵۸	۳-۶- پایداری گسترش ترک
۶۰	۳-۷- روش‌های عددی گسترش ترک و روش‌های بدون شبکه
۶۳	۳-۸- فرآیند محاسبات عددی پژوهش حاضر
۶۴	۳-۸-۱- تقریب روش توسعه یافته گالرکین بدون المان (XEFG)
۶۶	۳-۸-۲- شکل ضعیف و سیستم معادلات مجزا
۶۸	۳-۸-۳- انتگرال تعاملی یا انتگرال اندرکنش (Interaction Integral)
۷۱	۳-۸-۴- جهت رشد ترک
۷۲	۳-۸-۵- روش مجموعه تراز Level Set Method (LSM)
۷۵	<b>فصل چهارم</b>
۷۶	۴- مدل سازی عددی ترک و گسترش آن با روش XEFG
۷۶	۴-۱- مقدمه
۷۶	۴-۲- مثال‌های عددی

۷۶	۱-۲-۴- بررسی ترک‌های ساکن.....
۷۶	۱-۱-۲-۴- ورق دارای ترک لبه‌ای ساکن تحت بارگذاری کششی.....
۷۸	۲-۱-۲-۴- ورق دارای ترک لبه‌ای ساکن تحت بارگذاری برشی.....
۸۰	۳-۱-۲-۴- ورق دارای ترک لبه دوگانه ساکن تحت بارگذاری کششی.....
۸۵	۴-۱-۲-۴- ورق دارای ترک وسط ساکن تحت بارگذاری کششی.....
۸۹	۲-۲-۴- بررسی رشد ترک‌ها.....
۸۹	۱-۲-۲-۴- رشد ترک لبه‌ای موجود در میانه جسم و در حالت بدون تکیه‌گاه.....
	۲-۲-۲-۴- رشد ترک لبه‌ای موجود در میانه جسم و در حالت بار ترکیبی به همراه تکیه-گاه.....
۹۱	.....
۹۵	۳-۲-۲-۴- رشد ترک لبه‌ای زاویه‌دار تحت بار کششی به همراه تکیه‌گاه.....
۹۸	۴-۲-۲-۴- رشد ترک لبه‌ای غیروسط‌چین با تکیه‌گاه.....
۱۰۱	<b>فصل پنجم</b> .....
۱۰۲	<b>۵- نتایج و پیشنهادها</b> .....
۱۰۲	۱-۵- مقدمه.....
۱۰۲	۲-۵- نتیجه‌گیری.....
۱۰۵	۳-۵- پیشنهادها.....
۱۰۷	<b>منابع</b> .....

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۲ مراحل اجرای روش‌های بدون شبکه ..... ۱۵
- شکل ۲-۲ دامنه محلی برای درونیابی ..... ۱۷
- شکل ۳-۲ دامنه‌های تاثیر برای نقطه  $x_q$  در مدل‌های بدون شبکه (الف) دامنه‌های تاثیر دایروی  
(ب) دامنه‌های تاثیر مستطیلی ( $\Gamma_{sx}$  و  $\Gamma_{sy}$  ابعاد دامنه تاثیر در دو جهت  $x$  و  $y$  می‌باشند). ..... ۲۲
- شکل ۴-۲ مثلث پاسکال برای دامنه‌های دو بعدی ..... ۲۴
- شکل ۵-۲ تابع تقریب  $u^h(x)$  و پارامترهای گرهی  $u_1$  در تقریب MLS ..... ۲۵
- شکل ۶-۲ توابع وزن و مشتقات درجه اول آن‌ها (W1) : اسپلاین درجه ۳ (W2) : اسپلاین درجه ۴ (W3) : تابع نمایی ( $\alpha = 0.3$ ) ..... ۳۲
- شکل ۱-۳ مقیاس‌های مختلف برای ارزیابی ترک ..... ۴۸
- شکل ۲-۳ نمایش مودهای شکست در فضا ..... ۵۰
- شکل ۳-۳ نمایش مودهای شکست در صفحه ..... ۵۱
- شکل ۴-۳ تعریف مجموعه گره‌های  $S^c$  و  $S^f$  ..... ۶۵
- شکل ۵-۳ محدوده انتگرال‌گیری انتگرال تعاملی ..... ۶۸
- شکل ۶-۳ نمایش مختصات ترک AB و نقطه P ..... ۷۳
- شکل ۷-۳ نمایش مجموعه ترازهای نرمال  $\Phi_N$  و مماسی  $\Phi_T$  ..... ۷۴
- شکل ۱-۴ ورق مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری کششی ..... ۷۷
- شکل ۲-۴ ورق مستطیلی به همراه ترک لبه‌ای تحت بارگذاری برشی ..... ۷۹
- شکل ۳-۴ ورق دارای ترک لبه دوگانه ساکن ..... ۸۱
- شکل ۴-۴ موقعیت ترک‌ها و گره‌های غنی شده اطراف آن‌ها ..... ۸۲

- شکل ۴-۵ تغییر شکل های ورق دارای ترک لبه دوگانه با مجموعه گره های  $15 \times 30$  ..... ۸۳
- شکل ۴-۶ تغییر شکل های ورق دارای ترک لبه دوگانه با مجموعه گره های  $24 \times 40$  ..... ۸۴
- شکل ۴-۷ ورق دارای ترک وسط ساکن تحت بارگذاری کششی ..... ۸۵
- شکل ۴-۸ شکل ساده شده ورق دارای ترک وسط ساکن به دلیل تقارن ..... ۸۶
- شکل ۴-۹ موقعیت ترک و گره های غنی شده اطراف آن برای حالات مختلف  $\frac{a}{w}$  ..... ۸۸
- شکل ۴-۱۰ نمایش نقاط گوسی در دامنه اطراف نوک ترک ..... ۸۹
- شکل ۴-۱۱ موقعیت ترک و گره های غنی شده اطراف آن در مراحل سوم، ششم و نهم از رشد ترک ..... ۹۰
- شکل ۴-۱۲ تغییر شکل ها در مراحل سوم، ششم و نهم از رشد ترک ..... ۹۰
- شکل ۴-۱۳ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ با طول ترک ..... ۹۱
- شکل ۴-۱۴ رشد ترک لبه ای موجود در میانه جسم با بار ترکیبی ..... ۹۲
- شکل ۴-۱۵ موقعیت ترک و گره های غنی شده اطراف آن در مراحل ۱، ۳ و ۵ از رشد ترک ..... ۹۳
- شکل ۴-۱۶ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک ..... ۹۴
- شکل ۴-۱۷ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک به دست آمده از پژوهش حاضر ..... ۹۴
- شکل ۴-۱۸ رشد ترک لبه ای زاویه دار تحت بار کششی ..... ۹۵
- شکل ۴-۱۹ موقعیت ترک و گره های غنی شده اطراف آن در مراحل ۲، ۳ و ۴ از رشد ترک ..... ۹۶
- شکل ۴-۲۰ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک ..... ۹۷
- شکل ۴-۲۱ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک به دست آمده از پژوهش حاضر ..... ۹۷
- شکل ۴-۲۲ ترک لبه ای غیر وسط چین با تکیه گاه تحت بار کششی ..... ۹۸

شکل ۲۳-۴ موقعیت ترک و گره‌های غنی شده اطراف آن در مراحل اول، سوم و پنجم از رشد ترک

۹۹ .....

شکل ۲۴-۴ تغییر شکل‌ها در مراحل اول، سوم و پنجم از رشد ترک..... ۹۹

## فهرست جدول

- جدول ۱-۲ طبقه‌بندی روش‌های درون‌یابی بدون شبکه ..... ۲۰
- جدول ۱-۳ نام و مشخصات تعدادی از روش‌های بدون شبکه مهم ..... ۶۲
- جدول ۱-۴ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود اول به‌دست‌آمده از روش XEFG با مقادیر  
تحلیلی آن ..... ۷۸
- جدول ۲-۴ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود اول به‌دست‌آمده از روش XEFG با مقدار  
تحلیلی آن ..... ۸۰
- جدول ۳-۴ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود دوم به‌دست‌آمده از روش XEFG با مقدار  
تحلیلی آن ..... ۸۰
- جدول ۴-۴ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود اول به‌دست‌آمده از روش XEFG با مقادیر  
تحلیلی آن ..... ۸۱
- جدول ۵-۴ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود اول به‌دست‌آمده از روش XEFG با مقادیر  
تحلیلی آن ..... ۸۷





## فصل اول

### مقدمه

## ۱- مقدمه

ترک‌ها یا در هنگام ساخت اجسام در داخل آن‌ها به وجود می‌آیند و یا اینکه در حین بهره‌برداری تحت بارهای وارده ایجاد می‌شوند. در طول تاریخ فجایع زیادی از جمله سقوط هواپیماها، فروریختن ساختمان‌ها و پل‌ها، خارج شدن قطارها از ریل و ... رخ داده‌اند که ناشی از به وجود آمدن ترک‌ها و گسترش آن‌ها در اثر بارهای وارده بوده‌اند و سبب کشته شدن انسان‌ها، به وجود آمدن خسارات مالی فراوان، مختل شدن قسمتی از سیستم حمل و نقل و بسیاری مشکل‌های دیگر شده‌اند.

رشد کنترل‌نشده و شدید ترک‌ها در سنگ‌ها می‌تواند سبب گسیختگی توده سنگ شود و نهایتاً منجر به زمین لغزش‌ها یا فروریختن تونل‌ها شود. ترک‌هایی که در اطراف تونل‌های ذخیره هوا یا گاز فشرده به وجود می‌آیند، می‌توانند در صورت طراحی‌های اشتباه در زمینه‌های عمق مناسب تونل، فشار گاز قابل تحمل درون تونل و ... ، به صورت پیش‌رونده‌ای به سمت سطح زمین حرکت کنند و نهایتاً منجر به آزادسازی گاز فشرده و گسیختگی به صورت پدیده بلندشدگی بشوند.

بنابراین درک رفتار ترک و پیش‌بینی فرآیند گسترش آن برای ساخت قطعات صنعتی، سازه‌های زیرزمینی و دیگر ابزار و اجسامی که برای بشر ارزشمند هستند و گسیختگی آن‌ها سبب صدمات مالی و جانی بسیاری می‌شود و تاثیرات جبران‌ناپذیری دارد، بسیار مهم و ضروری می‌باشد.

در این پژوهش با توجه به نقص‌های موجود در روش اجزاء محدود و دیگر روش‌های قدیمی، از جمله نیاز به شبکه‌بندی مجدد در هر مرحله از رشد ترک، از روش توسعه‌یافته گالرکین بدون المان که یکی از روش‌های بدون شبکه شکل ضعیف سراسری می‌باشد به همراه روش مجموعه تراز با استفاده از کدنویسی در محیط نرم افزار <sup>®</sup>MATLAB، برای مدل‌سازی هندسه ترک و بررسی روند رشد ترک در جامدات الاستیک و در حالت ۲ بعدی استفاده شده است.

قابل ذکر است که روش توسعه‌یافته گالرکین بدون المان مشابه روش اجزاء محدود توسعه‌یافته و

در ادامه راه این روش می‌باشد با این تفاوت که در روش مورد استفاده، از هیچ‌گونه المان و یا شبکه‌ای برای تعریف دامنه مسئله استفاده نمی‌شود و فقط از مجموعه‌ای از گره‌ها که به صورت یکنواخت در دامنه مسئله و بر روی مرزها توزیع شده‌اند استفاده می‌شود.

## ۱-۱- ضرورت انجام پژوهش

با وجود اینکه محدوده وسیعی از مسائل با انجام تحقیقات آزمایشگاهی و میدانی، حل و طبقه‌بندی شده‌اند و فرمول‌های تحلیلی برای آن‌ها ارائه شده‌اند، بسیاری از مسائل مکانیک شکست که شامل هندسه‌های پیچیده می‌باشند را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی موجود تقریب زد و مورد بررسی قرار داد. در نتیجه با پیشرفت علم هر روز نیاز به استفاده از روش‌های محاسبات عددی با دقت هر چه بیشتر، از جمله روش استفاده شده در این پژوهش برای مطالعه شکست و دیگر مسائل موجود در جهان حقیقی، بیشتر احساس می‌شود.

لذا در این پژوهش با مدل‌سازی عددی هندسه ترک و بررسی فرآیند و جهت انتشار آن تحت شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری‌های مختلف، سعی شده است که رفتار ترک در شرایط مختلف بررسی شود و تاثیر پارامترهای مختلف بر نحوه گسترش ترک نیز نشان داده شود.

## ۱-۲- هدف از پژوهش

هدف از پژوهش‌های مختلف در زمینه مکانیک شکست از جمله این پژوهش، طرح سوال‌هایی همچون موارد زیر و پاسخگویی به آن‌ها می‌باشد :

قسمتی از یک سازه یا یک قطعه صنعتی همچون قطعات هواپیماها، قطارها و دیگر ماشین‌آلات مکانیکی که ناخواسته دارای ترک‌های اولیه‌ای هستند تحت چه بارگذاری و تا چه زمانی با توجه به اندازه و هندسه ترک‌های موجود و دیگر شرایط حاکم می‌توانند بدون بروز مشکلی مورد استفاده قرار

گیرند؟ باید توجه داشت که تعویض یک دستگاه یا قطعه صنعتی یا تخریب یک سازه برای بازسازی آن در صورتی که با ترک‌های موجود قابل بهره‌برداری و ایمن باشند از نظر اقتصادی به صرفه نیست.

با توجه به بارهای وارده با چه سرعت و در چه جهتی ترک‌های موجود در یک قطعه گسترش پیدا می‌کنند؟ به عنوان مثال در سازه‌هایی با اهمیت بسیار بالا همچون نیروگاه‌ها و تونل‌های ذخیره گاز یا هوای فشرده که در قسمت قبل ذکر شد می‌توان شرایط طراحی را به نحوی انجام داد که ترک‌های به وجود آمده باعث خارج شدن گازها و پیامدهای ناشی از آن از جمله انفجار و یا هدر رفت انرژی نشوند که این کار در مثال‌های مذکور با افزایش ضخامت دیواره سازه یا افزایش عمق تونل به نحوی که از نظر اقتصادی بهینه و همچنین ایمن باشد می‌تواند انجام شود.

در انتهای پژوهش انجام شده مثال‌هایی عددی با تغییر هندسه و دیگر پارامترهای تاثیرگذار، مورد تحلیل قرار گرفته‌اند که مقایسه انجام شده و صحت‌سنجی صورت گرفته با مقادیر موجود در منابع نشان از دقت کار انجام شده و مناسب بودن آن دارد.

### ۱-۳- فصل بندی پژوهش

متن این پژوهش دارای بخش‌هایی است که به صورت زیر ارائه شده است :

مطالبی که در فصل اول مشاهده شد کلیاتی از پژوهش حاضر را ارائه کرد که شامل معرفی مسئله، ضرورت و هدف انجام پژوهش و توضیح مختصری از روش تحقیق بود.

در فصل دوم ابتدا به برتری روش‌های بدون شبکه نسبت به روش‌های بر پایه شبکه اشاره شده است، سپس توضیحاتی پیرامون شکل قوی و شکل ضعیف معادلات دیفرانسیل جزئی داده شده است. در مرحله بعد، به شرح مراحل معمول در روش‌های بدون شبکه پرداخته شده است؛ پس از آن ویژگی‌های توابع شکل و فرآیند ساخت توابع شکل در روش گالرکین بدون المان با استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک بیان شده است. در انتها نیز روش گالرکین بدون المان و نحوه اعمال شرایط

مرزی اساسی در این روش به طور کامل توضیح داده شده است.

در فصل سوم ابتدا مفاهیم پایه علم مکانیک شکست تعریف شده است؛ در ادامه درباره مودهای پایه شکست توضیحاتی ارائه شده است. سپس فرمول‌های مربوط به میدان‌های تنش و تغییر مکان در اطراف ترک نمایش داده شده‌اند و پس از آن معیارهای کلی برای شکست الاستیک ارائه شده است. در ادامه روش‌های مختلف تعیین ضرایب شدت تنش و نرخ آزادسازی انرژی از جمله روش‌های تحلیلی، محاسباتی و آزمایشگاهی بیان شده‌اند. در قسمت بعد برخی از روش‌های عددی گسترش ترک و روش‌های بدون شبکه ارائه شده‌اند. در انتهای این فصل نیز فرآیند محاسبات عددی استفاده شده در پژوهش حاضر شرح داده شده است که شامل فرمول‌های روش توسعه‌یافته گالرکین بدون المان، توضیح روش انتگرال اندرکنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش، شرح زاویه رشد ترک در هر مرحله و روش مجموعه تراز است.

در فصل چهارم نیز مثال‌هایی عددی برای چندین حالت ترک‌های ساکن و همچنین حالت‌های مختلف رشد ترک ارائه شده است. در این قسمت مسیر رشد ترک‌ها، گره‌های غنی شده اطراف آن‌ها و تصویر تنش‌های به وجود آمده نمایش داده شده است و ضرایب شدت تنش با مراجع مقایسه گردیده است.

در نهایت در فصل پنجم، درباره نتایج حاصل از پژوهش بحث شده است و پیشنهاداتی برای ادامه راه این پژوهش و تکمیل آن در تحقیق‌های آینده، ارائه شده است.



## فصل دوم

### روش‌های بدون شبکه و EFG

## ۲- روش‌های بدون شبکه و EFG

### ۲-۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین پیشرفت‌ها در زمینه روش‌های عددی، گسترش روش اجزاء محدود (FEM) بوده است. در این روش یک محیط پیوسته به المان‌های مجزایی تقسیم می‌شود که تشکیل یک شبکه می‌دهند. روش اجزاء محدود برای مدتی طولانی یک ابزار استاندارد برای حل عددی محدوده وسیعی از مسائل مهندسی و علمی بوده است. در مسائل واقعی روز جهان هر چه زمان بیشتری طی می‌شود، بشر با پیچیدگی‌های زیادتری روبرو می‌شود که روش اجزاء محدود به تنهایی برای تحلیل آن‌ها مناسب نمی‌باشد. در این قسمت به بعضی از محدودیت‌های این روش اشاره شده است :

- برای روش اجزاء محدود، ساخت یک شبکه با کیفیت مناسب که تطابق خوبی با هندسه مسئله داشته باشد و نیازهای خاص مسئله فیزیکی را ارضاء کند کار دشواری است. این مسئله وقتی جدی‌تر می‌شود که مسائلی با تغییر شکل‌های بزرگ مثل رشد ترک، بیرون زدگی (extrusion) و پدیده‌های فیزیک نجومی بررسی می‌شوند. به عنوان مثال در مسئله رشد ترک با مسیرهای دلخواه معمولاً به دلیل عدم تطابق این مسیرها با خطوط اصلی مش بندی المان‌ها مشکل ایجاد می‌شود.

- مش بندی تطبیق پذیر در FEM می‌تواند سبب کاهش دقت و صحت در برنامه‌های پیچیده شود. در این حالت، حل سیستم معادلات بر مبنای میلیون‌ها المان، غیرعملی می‌باشد.

- برای روش اجزاء محدود این یک امر ضروری است که شبکه مورد استفاده باید دارای درجه پیوستگی مطابق با هندسه مسئله باشد. به عنوان مثال استفاده از یک المان مثلثی خطی برای مجزاسازی یک مرز دایروی که دارای درجه دوم پیوستگی می‌باشد مناسب نیست. این امر باعث ایجاد خطا در برنامه می‌شود.



- مشبندی مجدد در مسائل اشاره شده از جمله رشد ترک باعث افزایش هزینه محاسبات، افزایش زمان محاسبات و به طور کلی پیچیدگی در حل برنامه اجزاء محدود می‌شود.

- دقت و صحت در این روش مخصوصا برای محاسبه تنش‌ها پایین می‌باشد.

تا زمانی که برای تحلیل مسائل فیزیکی با استفاده از روش اجزاء محدود از المان‌ها و شبکه‌بندی استفاده شود مشکلات ذکر شده در بالا راه حل ساده‌ای نخواهند داشت. با توجه به محدودیت‌های ذکر شده برای روش اجزاء محدود، ضروری است روش‌های عددی دیگری گسترش پیدا کنند و مورد استفاده قرار بگیرند که قابلیت تحلیل مسائل پیچیده، بدون تولید شبکه را داشته باشند. همچنین این روش‌ها می‌بایست به نحوی با معادلات حاکم رفتار کنند که پارامترهای ضروری حفظ شوند.

در نتیجه، روش‌های بدون شبکه (Meshless or Meshfree Methods) به عنوان یک روش عددی برای غلبه بر محدودیت‌های ذکر شده پیشنهاد شده‌اند. روش‌های بدون شبکه در طی دهه گذشته به نحوی گسترش یافته‌اند که اکنون برای محاسبات عددی محدوده وسیعی از مسائل مهندسی، پیشرفت قابل توجهی به دست آمده است. این روش‌های بدون شبکه برای مجزاسازی دامنه‌های مسائل نیازی به شبکه‌بندی و استفاده از المان‌ها ندارند و فقط با استفاده از مجموعه‌ای از گره‌ها یا نقاط، توابع تقریب را می‌سازند. در این قسمت، به چند نمونه از امتیازات روش‌های بدون شبکه اشاره شده است :

- هزینه محاسبات با توجه به اینکه نیازی به ساخت شبکه و المان‌ها نیست به طور قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند.

- دقت و صحت محاسبات می‌تواند با اضافه کردن مجموعه‌ای از نودها در محل‌های خاص با توجه به هندسه و مشخصات مسئله افزایش یابد.

- توابع شکل با درجه‌های بالاتر به سادگی ساخته می‌شوند.

- زمان محاسبات با توجه به عدم نیاز به تولید شبکه به طور قابل توجهی می‌تواند کاهش پیدا کند.

- در مقایسه با روش اجزاء محدود، روش‌های بدون شبکه می‌توانند به سادگی تغییرشکل‌های بزرگ و مسائل غیرخطی را مورد تحلیل و بررسی قرار دهند.

- برای شبیه‌سازی شکست مواد می‌توانند بسیار مفید باشند.

- قابلیت تحلیل مسائل برای حالت‌های مختلف مواد و دامنه‌های چندگانه را دارند.

## ۲-۲- شکل ضعیف (weak form) و شکل قوی (strong form)

در حالت کلی، روش‌های بدون شبکه بر اساس اینکه در طی روند حل از انتگرال‌گیری استفاده کنند یا استفاده نکنند به دو گروه تقسیم می‌شوند. گروه اول شامل روش‌هایی است که نیازی به انتگرال‌گیری ندارند و بر اساس شکل قوی (strong form) معادلات دیفرانسیل جزئی (PDEs) می‌باشند و گروه دوم شامل روش‌هایی است که بر مبنای شکل ضعیف (weak form) معادلات دیفرانسیل جزئی می‌باشند. همچنین روشی بدون شبکه نیز که بر مبنای ترکیب شکل قوی و شکل ضعیف می‌باشد هم گسترش پیدا کرده است که به عنوان روش بدون شبکه شکل قوی - ضعیف شناخته می‌شود. در روش‌های بدون شبکه شکل قوی، معمولاً معادلات دیفرانسیل جزئی در گره‌ها با استفاده از روش collocation مجزا می‌شوند. چند نمونه از این روش‌ها در این قسمت نام برده شده است (Li, H., & Mulay, S. S, 2013) :

- روش تفاضل محدود عمومی (Liszka and Orkisz)

- روش نقطه محدود (Oñate)

- روش hp-cloud (Liszka)

- روش collocation (Zhang)

روش بدون شبکه شکل قوی دارای چندین مزیت به شرح زیر است :

۱. سادگی در اجرا و به کارگیری روش

۲. از نظر محاسباتی موثر و کارآمد می‌باشد.

۳. به صورت حقیقی یک روش بدون شبکه است و نیازی به استفاده از هیچ شبکه ای برای تقریب متغیر میدان یا برای انتگرال گیری ندارد.

با توجه به مزایای ذکر شده، روش‌های بدون شبکه شکل قوی به شکل موفقیت‌آمیزی در علوم محاسباتی مکانیکی به خصوص برای مسائل مربوط به مکانیک سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرند. هر چند این روش‌ها دارای نقص‌هایی نیز می‌باشند؛ به عنوان مثال، این روش‌ها اغلب از نظر عددی ناپایدار بوده و از دقت کمی برخوردارند به خصوص در مواردی که معادلات دیفرانسیل جزئی با شرایط مرزی طبیعی (شرایط مرزی نیرویی یا مربوط به تنش‌ها) حاکم بر مسئله می‌باشد.

گروه دوم روش‌های بدون شبکه که بر پایه شکل‌های ضعیف معادله‌های دیفرانسیل جزئی هستند خود شامل دو نوع شکل ضعیف کلی (global) و شکل ضعیف محلی (local) می‌باشند. مثال‌هایی از روش‌های شکل ضعیف کلی در این قسمت ذکر شده است (Li, H., & Mulay, S. S, 2013) :

- روش جزء پراکنده (Nayroles)

- روش گالرکین بدون المان (Belytschko)

- روش بازسازی هسته مرکزی (Liu and Jun)

- روش درون‌یابی نقطه‌ای (Liu and Gu)

به منظور اجتناب از انتگرال‌گیری سراسری، شکل‌های ضعیف محلی برای گسترش روش‌های بدون شبکه محلی استفاده شده‌اند که به عنوان مثال می‌توان به روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین (Petrov-Galerkin) اشاره کرد. همچنین تاکنون روش‌های بدون شبکه در ترکیب با دیگر روش‌ها نیز مورد مطالعه قرار گرفته است (Gu and Liu).

روش‌های شکل ضعیف بدون شبکه به طور موفقیت‌آمیزی در مسائل مربوط به مکانیک جامدات مورد استفاده قرار می‌گیرند. هر چند این روش‌ها در مقایسه با روش اجزاء محدود معمولی (FEM) بر حسب درون‌یابی متغیرهای میدان، بدون شبکه نامیده می‌شوند اکثر آن‌ها مجبور به استفاده از سلول‌ها یا شبکه پس‌زمینه‌ای به صورت سراسری یا محلی می‌باشند تا بتوانند از شکل ضعیف معادله دیفرانسیل جزئی در دامنه سراسری مسئله یا دامنه محلی آن انتگرال‌گیری نمایند. این انتگرال‌گیری، این روش‌ها را از نظر محاسباتی گران‌قیمت می‌کند و شبکه پس‌زمینه برای انتگرال‌گیری باعث می‌شود این روش‌ها به صورت حقیقی بدون شبکه نباشند.

همچنین چندین نوع دیگر از روش‌های بدون شبکه پیشنهاد شده‌اند که به عنوان نمونه مواردی در اینجا ذکر شده است (Li, H., & Mulay, S. S, 2013) :

- روش گره مرزی (Mukherjee)

- روش تغییرات درون‌یابی نقطه محلی (Li)

روش‌های ترکیبی بین دو روش بدون شبکه یا بین یک روش بدون شبکه با دیگر روش‌های مرسوم به عنوان مثال روش ترکیبی گالرکین بدون المان با اجزاء محدود EFGM/FEM نیز تاکنون ارائه شده است.

به طور کلی می‌توان گفت هر روش بدون شبکه‌ای از نقطه نظر نوع به کارگیری روش و فرمول‌سازی آن دارای مزایا و معایب خاص خودش می‌باشد که با توجه به هندسه و ماهیت فیزیکی مسئله می‌توان یک یا چند روش را مورد استفاده قرار داد.

## ۲-۳- نکات بنیادی روش‌های بدون شبکه

در روش‌های بدون شبکه از توابع درونیایی مختلفی می‌توان برای تقریب مقادیر متغیرهای میدان در نودها استفاده کرد. در اینجا به چند ویژگی مهم یک تابع شکل<sup>۱</sup> که می‌توان در این روش‌ها مورد استفاده قرار داد اشاره شده است :

۱. تابع شکل باید شرط اتحاد یگانه را ارضاء کند :

$$\sum_{i=1}^n N_i(x) = 1 \quad (1-2)$$

در اینجا  $N_i(x)$  نشان دهنده مقدار تابع شکل نود شماره  $i$  میدان در نقطه  $x$  می‌باشد.

۲. تابع شکل باید شرط بازسازی متغیر میدان خطی را ارضاء نماید :

$$\sum_{i=1}^n N_i(x)x_i = x \quad (2-2)$$

---

1- Shape function

۳. تابع شکل بهتر است ویژگی تابع دلتای کرونیکر را داشته باشد :

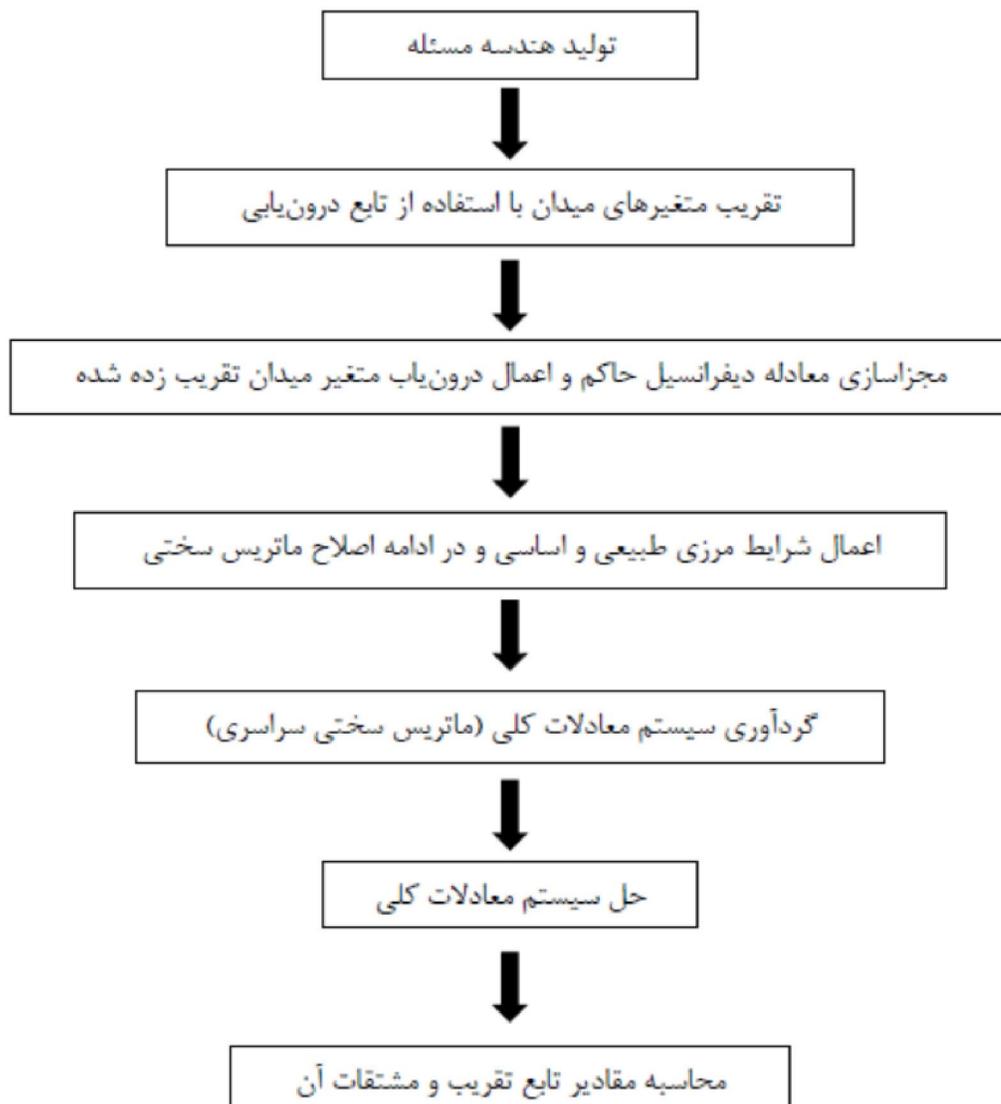
$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (۳-۲)$$

اگر توابع شکل، ویژگی تابع دلتای کرونیکر را ارضاء کنند، اعمال شرایط مرزی اساسی آسان می‌شود.

هر چند در صورت عدم ارضای این شرط، باز هم می‌توان با اتخاذ روش‌هایی، شرایط مرزی اساسی را برقرار کرد.

## ۲-۴ - مراحل معمول در روش‌های بدون شبکه

در شکل (۱-۲) مراحلی که در فرایند اجرای روش‌های بدون شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرند به نمایش گذاشته شده است :



شکل ۲-۱ مراحل اجرای روش‌های بدون شبکه (Li, H., & Mulay, S. S, 2013)

## ۲-۴-۱- توليد هندسه مسئله

در اولین مرحله، مدل هندسی مسئله می‌بایست ساخته شود. به منظور دستیابی به مختصات دامنه محاسباتی مسئله نودهایی به صورت پراکنده و نامنظم و یا به صورت یکنواخت در داخل دامنه و همچنین بر روی مرزهای مسئله تعریف می‌شوند و نهایتاً در انتهای محاسبات مقادیر متغیرهای میدان در این نودها محاسبه می‌شوند.

میزان تراکم این نودها به مقدار دقتی که از جواب مسئله بعد از تحلیل مورد نیاز است بستگی دارد.

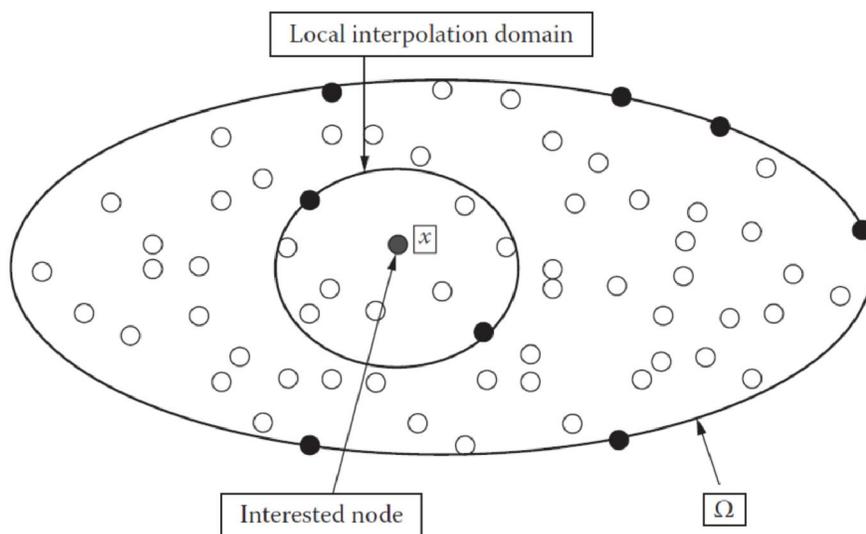
## ۲-۴-۲- تقریب متغیر میدان

ابتدا دامنه‌ای محلی در اطراف هر نود تعریف می‌شود و در ادامه نودهایی که در این دامنه محلی قرار می‌گیرند برای درون‌یابی متغیر میدان در نود مورد نظر با استفاده از یک تابع درون‌یابی مناسب به صورت زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند :

$$f^h(x_I, y_I) = \sum_{i=1}^n N_i(x_I, y_I) u_i \quad (۴-۲)$$

مقدار تابع تقریب یعنی  $f^h(x_I, y_I)$  در نود شماره I با استفاده از نودهای اطراف آن درون‌یابی می‌شود و  $N_i(x_I, y_I)$  و  $u_i$  به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر تابع شکل و پارامتر گرهی برای نود شماره i هستند. دامنه درون‌یابی محلی ذکر شده می‌تواند به هر شکلی مورد استفاده قرار بگیرد که شکل‌های دایره‌ای و مستطیلی از اشکال رایج می‌باشند. در شکل (۲-۲) این دامنه درون‌یابی محلی نمایش داده شده است :





شکل ۲-۲ دامنه محلی برای درون‌یابی (Li, H., & Mulay, S. S, 2013)

### ۲-۴-۳- مجزاسازی معادله دیفرانسیل حاکم

دو رویکرد برای مجزاسازی معادله دیفرانسیل حاکم وجود دارد که استفاده از رویکرد شکل قوی و یا شکل ضعیف می‌باشد. در روش شکل قوی به طور مستقیم و بدون انتگرال‌گیری و در روش شکل ضعیف از انتگرال‌گیری برای مجزاسازی معادله دیفرانسیل استفاده می‌شود. اغلب اعمال شرایط مرزی اساسی در روش شکل قوی دشوار می‌باشد و به طور کلی در روش شکل ضعیف برای حل انتگرال عددی از روش گوسی و نقاط گوسی استفاده می‌شود و نهایتاً نتایج حاصله در این نقاط گوسی در نودهای موجود در میدان، درون‌یابی می‌شوند.

### ۲-۴-۴- گردآوری سیستم معادلات کلی

در این مرحله ابتدا یک معادله جبری خطی به صورت محلی در هر یک از نودهای میدان با استفاده از روش بدون شبکه که بر پایه شکل ضعیف یا قوی معادله دیفرانسیل است به دست می‌آید؛ سپس همه معادلات محلی گردآوری می‌شوند تا بردار نیرو و ماتریس سختی کل به دست آیند.

$$(KU=F)$$

## ۲-۴-۵- حل سیستم معادلات کلی

سیستم معادلات نهایی را می‌توان با استفاده از دو روش مستقیم (direct) و یا تکرارشونده (iterative) حل کرد.

### ۲-۴-۵-۱- روش‌های مستقیم

چندین روش مستقیم برای حل سیستم معادلات خطی موجود است که در اینجا چند نمونه ذکر شده است :

روش حذفی گوسی، روش تجزیه LU، روش تجزیه  $LTL^T$  و روش فاکتورگیری Cholesky.

### ۲-۴-۵-۲- روش‌های تکرارشونده

برای این روش‌ها می‌توان به چند نمونه از جمله روش ژاکوبی، Gauss-Seidel، conjugate gradient و Krylov subspace اشاره کرد. این روش‌ها شامل یک حل تکرارشونده برای سیستم معادلات هستند تا زمانی که به یک جواب با دقت مطلوب دست یافته شود، به عبارت دیگر خطای محاسباتی در حل با چک کردن مقدار باقیمانده در انتهای هر تکرار، مینیمم می‌شود.

برای مسائل استاتیکی از نوع تغییر مکان، تغییر مکان‌ها در نودهای میدان به دست می‌آیند و سپس تنش‌ها و کرنش‌ها با استفاده از روابط موجود حاصل می‌شوند. برای مسائل کماتش و ارتعاش آزاد از بردارهای ویژه و مقادیر ویژه استفاده می‌شود و معادله حاصل را نیز با استفاده از یکی از روش‌های ژاکوبی، QR، Lanczos و subspace iteration می‌توان حل کرد. برای مسائل دینامیکی نیز از روش انتگرال‌گیری مستقیم و یا روش modal superposition می‌توان استفاده کرد که در انتها تغییر مکان‌ها، سرعت‌ها و شتاب‌ها به دست می‌آیند.

## ۲-۵- توابع شکل بدون شبکه

برای به دست آوردن حل تقریبی یک مسئله که معادلات دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی خاصی حاکم بر آن می‌باشند ابتدا نیاز به تقریب زدن تابع میدان مجهول با استفاده از یکسری توابع شکل است، در مرحله بعد می‌توان فرآیند فرمول‌سازی را برای مجزا کردن سیستم معادلات اعمال کرد.

این توابع شکل به صورت محلی پشتیبانی می‌شوند زیرا فقط یک مجموعه از گره‌ها که در دامنه محلی کوچکی حضور دارند برای ساخت توابع شکل استفاده می‌شوند و تابع شکل برای خارج از این محدوده استفاده نشده و یا مقدار آن در خارج از محدوده مذکور صفر می‌باشد. این دامنه محلی را دامنه پشتیبانی یا دامنه تاثیر می‌نامند.

یک روش خوب برای ساخت توابع شکل روش‌های بدون شبکه می‌بایست یکسری الزامات پایه را ارضاء کند که به مواردی در اینجا اشاره شده است :

۱. باید از نظر عددی دارای پایداری باشد.

۲. باید به نحوی انتخاب شود که برای یک توزیع دلخواه گره‌ها دارای جواب صحیح و منطقی باشد.

۳. باید پیوستگی لازم را برای به کار بردن در مراحل فرمول‌نویسی و مجزاسازی معادلات دیفرانسیل جزئی داشته باشد.

۴. باید به صورت متراکم و فشرده پشتیبانی شود به عبارت دیگر باید در خارج از محدوده دامنه تاثیر صفر باشد.

۵. تابع مجهول تقریب زده شده با استفاده از این تابع شکل می‌بایست در دامنه مسئله وقتی که از

شکل ضعیف استفاده می‌شود سازگار باشد.

۶. حالت ایده‌آل این‌گونه است که تابع شکل، شرط تابع دلتای کرونیگر را ارضاء کند یعنی تابع شکل مقدار واحد در گره مورد نظر داشته باشد و در بقیه گره‌ها واقع در دامنه تاثیر مقدار صفر را اختیار کند.

گسترش روش‌های ساخت موثر و کارآمد برای توابع شکل بدون شبکه یکی از حوزه‌های جذاب در تحقیقات مربوط به روش‌های بدون شبکه می‌باشد. چندین نوع روش فرمول‌سازی تاکنون پیشنهاد شده است. (Liu) این شیوه‌های فرمول‌سازی را به سه دسته بر حسب نوع تئوری‌های نمایش تقریب یا درونیابی تابع، طبقه‌بندی کرده است که در جدول (۱-۲) نمایش داده شده است :

جدول ۱-۲ طبقه‌بندی روش‌های درونیابی بدون شبکه (Liu, G. R., & Gu, Y. T, 2005)

روش‌های تقریب بدون شبکه	نحوه نمایش
هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) روش بازسازی ذره مرکزی (RKPM)	نمایش به صورت انتگرالی
حداقل مربعات متحرک (MLS) روش‌های درونیابی نقطه‌ای (PIM, RPIM) روش‌های اتحاد یگانه (PU)	نمایش به صورت سری
روش تفاضل محدود عمومی (GFDM)	نمایش به صورت دیفرانسیلی

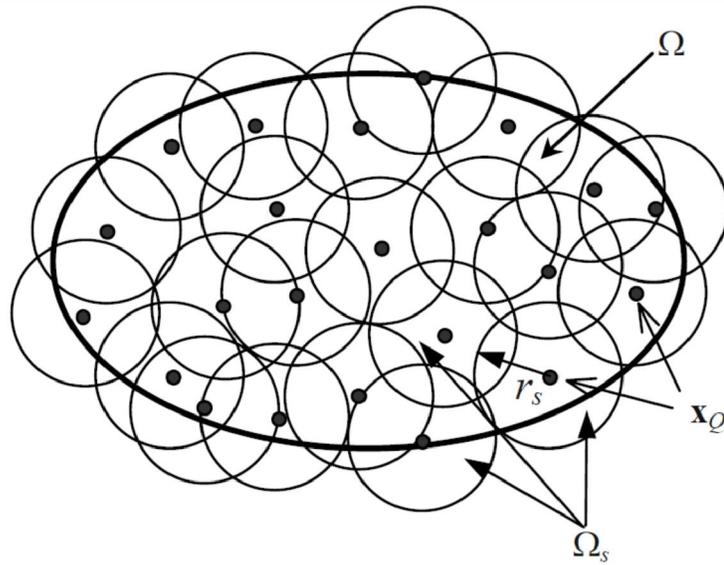
در روش نمایش به صورت انتگرالی، تابع با استفاده از اطلاعات موجود در دامنه محلی به صورت انتگرال وزن‌دار نشان داده می‌شود. پایداری و سازگار بودن در این روش با انتخاب تابع وزن مناسب

حاصل می‌شود. روش‌های نمایش به صورت سری دارای تاریخچه طولانی هستند. این روش‌ها در اجزاء محدود توسعه یافتند و اکنون در روش‌های بدون شبکه بر پایه گره‌های توزیع شده دلخواه استفاده می‌شوند. پایداری و سازگاری در این روش‌ها با انتخاب توابع پایه به صورت کامل (یعنی به کار بردن جملاتی با تمام درجات از پایین‌ترین درجه تا بالاترین درجه) حاصل می‌شود. در روش نمایش به صورت دیفرانسیلی که برای مدت زیادی در روش تفاضل محدود (FDM) مورد استفاده قرار گرفته است برای دستیابی به پایداری از تئوری سری تیلور استفاده می‌شود.

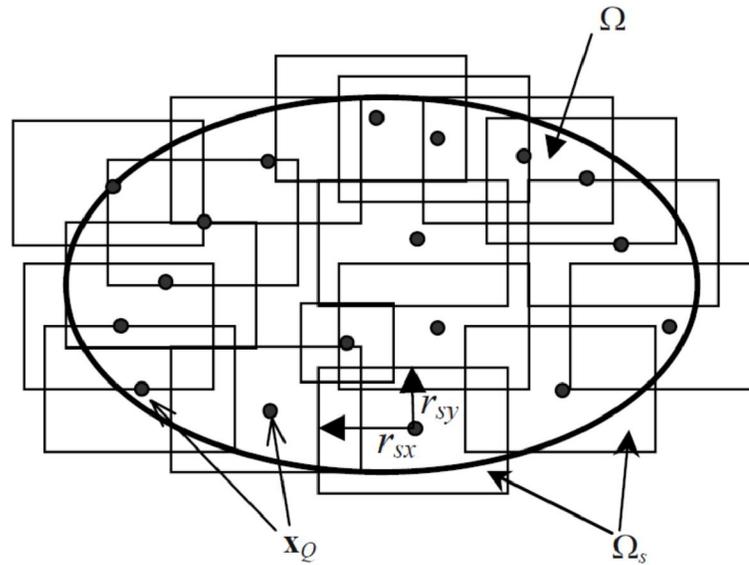
قبل از معرفی و بحث پیرامون درون‌یاب‌های روش بدون شبکه در اینجا مفهوم دامنه تکیه‌گاهی یا دامنه تاثیر به طور کامل شرح داده شده است.

## ۲-۶- دامنه تکیه‌گاهی یا دامنه تاثیر

دقت و صحت درون‌یابی برای یک نقطه مورد بحث بستگی به گره‌های موجود در دامنه تاثیر آن نقطه مورد نظر دارد؛ بنابراین یک دامنه تکیه‌گاهی باید به نحوی انتخاب شود که نهایتاً برای تابع تقریب، مقادیر صحیح و دقیقی به دست آید. دامنه تاثیر می‌تواند به شکل‌های مختلف انتخاب شود، دو نمونه مرسوم و متداول‌تر برای دامنه تاثیر شکل‌های دایروی و مستطیلی می‌باشند. در شکل (۲-۳) دامنه‌های مذکور نشان داده شده‌اند :



(الف)



(ب)

شکل ۲-۳ دامنه‌های تاثیر برای نقطه  $\mathbf{x}_Q$  در مدل‌های بدون شبکه (الف) دامنه‌های تاثیر دایروی  $\Gamma_g$  شعاع دامنه تاثیر (ب) دامنه‌های تاثیر مستطیلی  $\Gamma_{gx}$  و  $\Gamma_{gy}$  ابعاد دامنه تاثیر در دو جهت X و Y می‌باشند. (Liu, G. R., & Gu, Y. T, 2005)

برای نقطه مورد نظر  $x_Q$  که در مرکز دامنه تاثیر قرار دارد، بعد دامنه تاثیر  $d_g$  با استفاده از فرمول

زیر محاسبه می‌شود :

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (5-2)$$

در این رابطه،  $\alpha_g$  اندازه بدون بعد دامنه تکیه‌گاهی می‌باشد و  $d_c$  فاصله گرهی در نزدیکی نقطه  $x_Q$  می‌باشد.

اگر گره‌ها به صورت یکنواخت توزیع شده باشند مقدار  $d_c$  برابر با فاصله بین دو گره کنار هم است و اگر گره‌ها به صورت غیریکنواخت توزیع شده باشند، مقدار  $d_c$  را می‌توان به صورت میانگین فاصله گرهی بین نقاط داخل دامنه تاثیر تعریف کرد. مقدار اندازه بدون بعد دامنه تکیه‌گاهی ( $\alpha_g$ ) نیز با انجام آزمایش‌های عددی به دست می‌آید. به طور کلی مقدار  $\alpha_g = 2 \sim 3$  نتیجه‌های مورد قبولی را برای بسیاری از مسائلی که تاکنون مورد مطالعه قرار گرفته‌اند به همراه دارد.

## ۲-۷- ساخت توابع شکل روش EFG (تقریب حداقل مربعات متحرک)

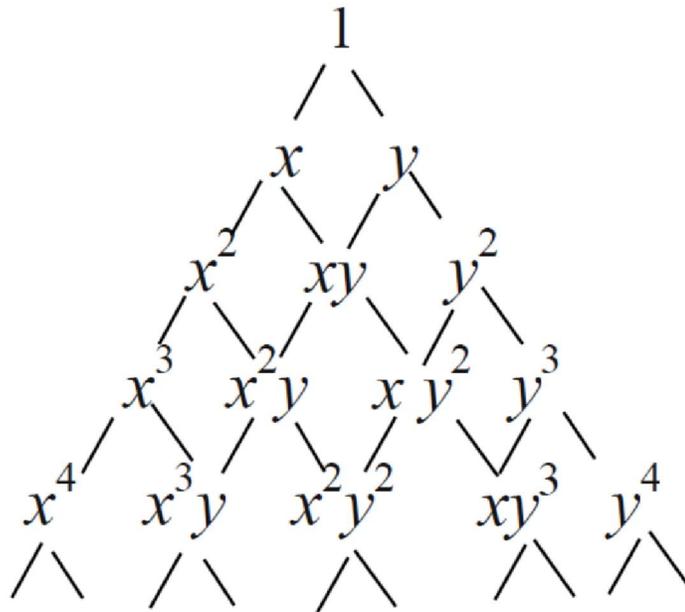
تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) Moving Least Squares توسط ریاضیدانان جهت تطبیق داده‌ها و ساخت سطوح ابداع شده است (Lancaster and Salkausdas) و این روش به عنوان یک روش نمایش به صورت سری توابع شناخته می‌شود. تقریب MLS هم‌اکنون به صورت گسترده در روش‌های بدون شبکه برای ساخت توابع شکل به کار می‌رود.

### ۲-۷-۱- فرمول‌سازی توابع شکل MLS

یک تابع مجهول از متغیر میدان  $u(x)$  در دامنه  $\Omega$  در نظر گرفته می‌شود؛ تقریب MLS برای  $u(x)$  در نقطه  $x$  به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = p^T(x) a(x) \quad (6-2)$$

در این فرمول  $p(x)$  نشان‌دهنده تابع پایه در مختصات مکانی است و  $m$  نیز تعداد توابع پایه می‌باشد. تابع پایه  $p(x)$  اغلب با استفاده از تک‌جمله‌ای‌های موجود در مثلث پاسکال ساخته می‌شود تا کامل بودن آن محقق شود یعنی تمام درجات جمله‌ها از پایین‌ترین تا بالاترین درجه را دارا باشد. در کار انجام شده در این پژوهش از توابع پایه چندجمله‌ای خالص استفاده شده است. مثلث پاسکال در شکل (۴-۲) نشان داده شده است :



شکل ۴-۲ مثلث پاسکال برای دامنه‌های دو بعدی (Liu, G. R., & Gu, Y. T, 2005)

در رابطه (۶-۲)، بردار ضرایب مجهول را نشان می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شود :

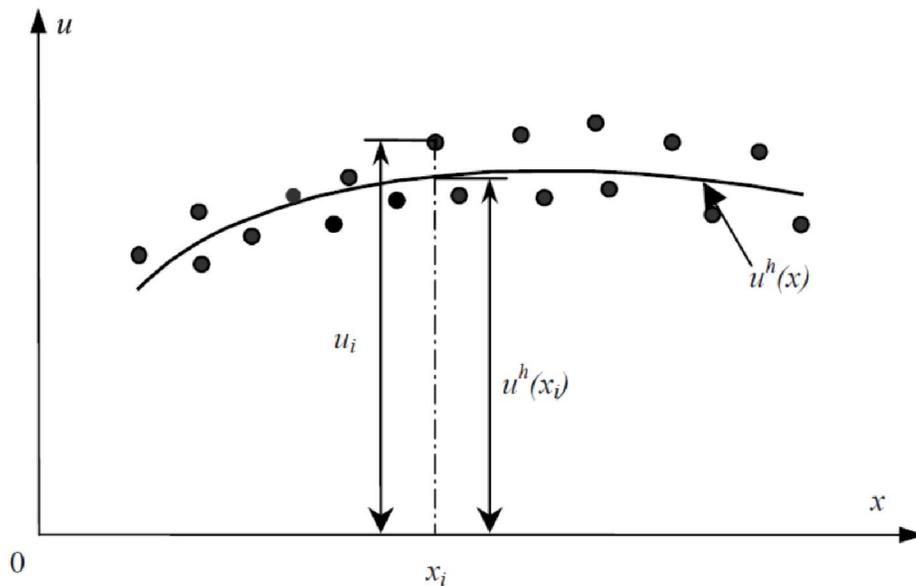
$$a^T(x) = \{a_1(x) \quad a_2(x) \quad \dots \quad a_m(x)\} \quad (7-2)$$



توجه شود که در این معادله بردار ضرایب  $a(x)$  تابعی از مقدار  $x$  هستند. ضرایب  $a$  را می‌توان با استفاده از مینیمم کردن نرم وزن دار  $J$  که به صورت زیر تعریف می‌شود به دست آورد :

$$J = \sum_{i=1}^n \widehat{W}(x - x_i) \left[ p^T(x_i) a(x) - u_i \right]^2 \quad (۸-۲)$$

در این رابطه،  $W$  تابع وزن است و  $n$  نشان‌دهنده تعداد گره‌های موجود در دامنه تاثیر نقطه  $x$  می‌باشد که تابع وزن برای آنها مخالف صفر است و  $u_i$  نیز پارامتر گرهی در نقطه  $x = x_i$  می‌باشد. با توجه به اینکه تعداد گره‌ها ( $n$ ) که در تقریب MLS به کار می‌رود معمولا بسیار بیشتر از تعداد ضرایب مجهول ( $m$ ) می‌باشد، تابع تقریب  $u^h$  از روی مقادیر گرهی عبور نمی‌کند یعنی منحنی آن در طول مسیرش بر آنها منطبق نیست. این مسئله را می‌توان در شکل (۵-۲) مشاهده کرد :



شکل ۵-۲ تابع تقریب  $u^h(x)$  و پارامترهای گرهی  $u_i$  در تقریب MLS (Liu, G. R., & Gu, Y. T, 2005)

حال با مشتق‌گیری از  $J$  نسبت به  $a$  رابطه زیر شکل می‌گیرد :

$$\partial J / \partial a = 0 \quad (9-2)$$

که این رابطه، مجموعه روابط خطی زیر را نتیجه می‌دهد :

$$A(x)a(x) = B(x)U_s \quad (10-2)$$

در اینجا  $U_s$  برداری شامل پارامترهای گرهی تابع میدان است و به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$U_s = \{u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n\}^T \quad (11-2)$$

همچنین  $A(x)$  ماتریس ممان وزن‌دار<sup>۱</sup> نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A(x) = \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i(x) p(x_i) p^T(x_i) \quad (12-2)$$

برای یک مسئله دو بعدی و با استفاده از تابع پایه خطی ( $m = 3$ )، ماتریس  $A$  یک ماتریس متقارن

و به صورت  $3 \times 3$  می‌باشد که به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\begin{aligned} A_{3 \times 3}(x) &= \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i(x) p(x_i) p^T(x_i) \\ &= \widehat{W}(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 \\ y_1 & x_1 y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + \widehat{W}(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2 y_2 \\ y_2 & x_2 y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} + \end{aligned}$$

---

1- Weighted moment matrix

$$\begin{aligned} & \cdots + \widehat{W}(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n \\ x_n & x_n^2 & x_n y_n \\ y_n & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i \widehat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \widehat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \widehat{W}_i \end{bmatrix} \quad (13-2) \end{aligned}$$

(3×3)

ماتریس B نیز در رابطه (۱۰-۲) به صورت زیر تعریف می شود :

$$B(x) = [\widehat{W}_1(x)p(x_1) \quad \widehat{W}_2(x)p(x_2) \quad \dots \quad \widehat{W}_n(x)p(x_n)] \quad (14-2)$$

که در حالت دو بعدی و با تابع پایه خطی یک ماتریس  $3 \times n$  می شود که در این قسمت مشاهده

می شود :

$$\begin{aligned} B_{3 \times n}(x) &= \left[ \widehat{W}(x - x_1) \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \widehat{W}(x - x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \widehat{W}(x - x_n) \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{W}_1 & \widehat{W}_2 & \dots & \widehat{W}_n \\ x_1 \widehat{W}_1 & x_2 \widehat{W}_2 & \dots & x_n \widehat{W}_n \\ y_1 \widehat{W}_1 & y_2 \widehat{W}_2 & \dots & y_n \widehat{W}_n \end{bmatrix} \quad (15-2) \end{aligned}$$

(3×n)

با حل رابطه (۲-۱۰) برای  $a(x)$  نتیجه زیر حاصل می‌شود :

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)U_s \quad (۱۶-۲)$$

با جایگذاری معادله بالا در معادله (۲-۶) مقدار  $u^h(x)$  به صورت زیر به دست می‌آید :

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x)u_i = \Phi^T(x)U_s \quad (۱۷-۲)$$

که در اینجا  $\Phi^T(x)$  بردار توابع شکل MLS برای تعداد  $n$  گره موجود در دامنه تاثیر نقطه  $x$  می‌باشد و به صورت زیر می‌توان آن را نشان داد :

$$\Phi^T(x) = \{\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \cdots \quad \phi_n(x)\}_{(1 \times n)} \quad (۱۸-۲)$$

تابع شکل  $\phi_i(x)$  برای گره  $i$  ام به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\phi_i(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{ji} = p^T(x)(A^{-1}B)_i \quad (۱۹-۲)$$

توابع شکل MLS تا زمانی که توابع وزن به صورت مناسب انتخاب شوند در کل دامنه پیوسته می‌باشند. برای سادگی در به دست آوردن مشتقات جزئی توابع شکل، معادله (۲-۱۹) به صورت زیر بازنویسی می‌شود :

$$\Phi^T(x) = \gamma^T(x)B(x) \quad (۲۰-۲)$$

که در اینجا  $\gamma^T$  به صورت زیر می‌باشد :

$$\gamma^T = p^T A^{-1} \quad (۲۱-۲)$$

با توجه به اینکه ماتریس  $A$  متقارن است،  $\gamma$  را می‌توان از معادله بالا به صورت زیر به دست آورد :

$$A\gamma = p \quad (22-2)$$

پس از این می‌توان مشتقات جزئی  $\gamma$  را با حل معادلات زیر به دست آورد :

$$\begin{aligned} A\gamma_{,i} &= p_{,i} - A_{,i}\gamma \\ A\gamma_{,ij} &= p_{,ij} - (A_{,i}\gamma_{,j} + A_{,j}\gamma_{,i} + A_{,ij}\gamma) \\ A\gamma_{,ijk} &= p_{,ijk} - (A_{,i}\gamma_{,jk} + A_{,j}\gamma_{,ik} + A_{,k}\gamma_{,ij} + A_{,ij}\gamma_{,k} \\ &+ A_{,ik}\gamma_{,j} + A_{,jk}\gamma_{,i} + A_{,ijk}\gamma) \end{aligned} \quad (23-2)$$

حال می‌توان با استفاده از مقادیر به دست آمده، توسط معادلات زیر مشتقات جزئی تابع شکل  $\phi$  را به دست آورد:

$$\begin{aligned} \Phi_{,i}^T &= \gamma_{,i}^T B + \gamma^T B_{,i} \\ \Phi_{,ij}^T &= \gamma_{,ij}^T B + \gamma_{,i}^T B_{,j} + \gamma_{,j}^T B_{,i} + \gamma^T B_{,ij} \\ \Phi_{,ijk}^T &= \gamma_{,ijk}^T B + \gamma_{,ij}^T B_{,k} + \gamma_{,ik}^T B_{,j} + \gamma_{,jk}^T B_{,i} \\ &+ \gamma_{,i}^T B_{,jk} + \gamma_{,j}^T B_{,ik} + \gamma_{,k}^T B_{,ij} + \gamma^T B_{,ijk} \end{aligned} \quad (24-2)$$

باید توجه داشت که تعداد گره‌های ( $n$ ) موجود در دامنه تاثیر باید به نحوی انتخاب شود که ماتریس  $A$  معکوس‌پذیر باشد. انتخاب مقدار  $n$  بستگی به توزیع گرهی و تعداد توابع پایه ( $m$ ) دارد؛ به منظور اطمینان از این که ماتریس  $A$  دارای شرایط مناسبی باشد و همچنین معکوس‌پذیر باشد معمولاً مقدار  $n$  بسیار بزرگتر از مقدار  $m$  در نظر گرفته می‌شود ( $n \gg m$ ). متأسفانه برای  $n$  بهترین مقدار تئوری وجود ندارد و مقدار آن باید با انجام آزمایشات عددی برای هر مسئله محاسبه شود.

برای تابع مجهول  $u(x)$  مقدار تقریب جابه‌جایی  $u^h(x)$  در حالت غنی‌شده<sup>۱</sup> در بخش‌های بعد ارائه شده است.

## ۲-۸- انتخاب تابع وزن

همان‌طور که در فرمول تابع شکل  $\phi$  مشاهده شد، تابع وزن نقش بسیار مهمی را در عملکرد تقریب MLS و نهایتاً در به دست آوردن حل نهایی دقیق در روش EFG بازی می‌کند؛ این تابع باید به نحوی انتخاب شود که مقادیر بزرگی را به نودهای نزدیک‌تر نسبت دهد. در اینجا بر اساس مطالعات انجام شده، ویژگی‌هایی که تابع وزن باید داشته باشد، شرح داده شده است :

- تابع وزن در محدوده دامنه تاثیر دارای مقدار مثبتی است.

- مقدار تابع وزن در خارج از محدوده تاثیر صفر می‌باشد.

- مقدار تابع وزن به طور یکنواخت و تدریجی با دور شدن از نقطه مورد نظر  $X$  کاهش می‌یابد.

در این قسمت، به توابع وزنی که بیشترین استفاده را دارند، اشاره شده است :

- تابع وزن اسپلاین درجه ۳ که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\widehat{W}_i(x) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{\xi}_i^2 + 4\bar{\xi}_i^3 & \bar{\xi}_i \leq 0.5 \\ 4/3 - 4\bar{\xi}_i + 4\bar{\xi}_i^2 - 4/3\bar{\xi}_i^3 & 0.5 < \bar{\xi}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{\xi}_i > 1 \end{cases} \quad (25-2)$$

- تابع وزن اسپلاین درجه ۴ که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{r}_i^2 + 8\bar{r}_i^3 - 3\bar{r}_i^4, & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0, & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (26-2)$$

- تابع وزن نمایی (exponential) که به صورت زیر تعریف می شود :

$$\bar{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-(\bar{r}_i/\alpha)^2} & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (27-2)$$

در اینجا  $\alpha$  ثابت پارامتر شکل می باشد. همچنین برای هر سه تابع وزن،  $\bar{r}_i$  به صورت زیر تعریف

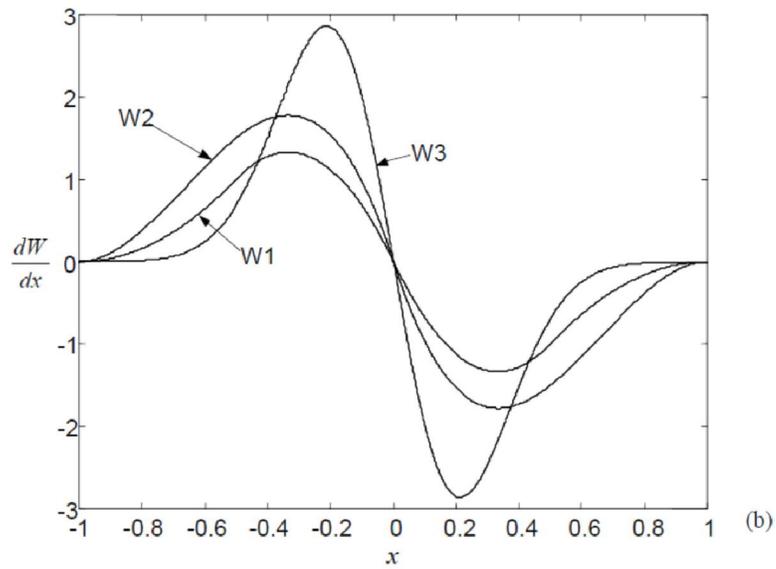
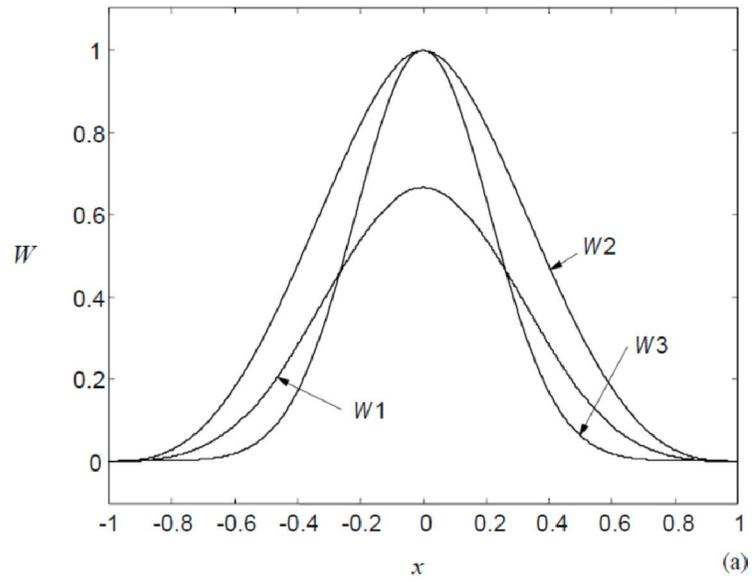
می شود:

$$\bar{r}_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{r_w} \quad (28-2)$$

مقدار  $d_i - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$  نشان دهنده فاصله گره  $\mathbf{x}_i$  تا نقطه نمونه  $\mathbf{x}$  است و  $r_w$  اندازه دامنه تاثیر برای

تابع وزن می باشد.

در شکل (2-6)، نمودار سه تابع وزن ذکر شده به همراه مشتقات اول آن ها نشان داده شده است :



شکل ۲-۶ توابع وزن و مشتقات درجه اول آنها (W1): اسپلاین درجه ۳ (W2): اسپلاین درجه ۴ (W3):  
تابع نمایی ( $\alpha = 0.3$ ) (Liu, G. R., & Gu, Y. T, 2005)

تابع وزنی که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته است تابع وزن اسپلاین درجه ۴ می باشد.



## ۲-۹- روش‌های بدون شبکه بر پایه شکل‌های ضعیف سراسری

روش‌های شکل ضعیف سراسری بدون شبکه معمولاً بر پایه شکل ضعیف گالرکین در دامنه سراسری مسئله تعریف می‌شوند که در آن‌ها از توابع شکل بدون شبکه که به صورت محلی پشتیبانی می‌شوند استفاده می‌شود.

اولین روش شکل ضعیف سراسری بدون شبکه، روش جزء پراکنده diffuse element method (DEM) بوده است که توسط Nayroles ارائه شده است. در این روش از تقریب MLS برای ساخت توابع شکل استفاده می‌شود. شکل ضعیف گالرکین نیز برای دامنه سراسری مسئله به کار گرفته می‌شود تا سیستم معادلات مجزا ساخته شوند. روش‌های درون‌یابی نقطه‌ای بدون شبکه point interpolation methods (PIM) که بر پایه شکل ضعیف گالرکین می‌باشند نیز توسط Liu and Gu ارائه شده‌اند. در روش PIM دامنه مسئله توسط گره‌هایی که به طور مناسب توزیع می‌شوند، نمایش داده می‌شود. روش درون‌یابی نقطه‌ای چند جمله‌ای برای ساخت توابع شکل در این روش فقط بر پایه مجموعه‌ای از گره‌های توزیع شده در دامنه محلی استفاده می‌شود. همچنین از سلول‌های پس‌زمینه برای حل انتگرال‌های حاصله در این روش می‌بایست استفاده شود. مشخصه اصلی این روش این است که توابع شکل آن مشخصه تابع دلتای کرونیگر را ارضا می‌کنند.

روش گالرکین بدون المان Element Free Galerkin (EFG) یکی دیگر از روش‌های بدون شبکه بر پایه شکل ضعیف سراسری می‌باشد. حال با توجه به اینکه در این پژوهش از روش گالرکین بدون المان استفاده می‌شود درباره ویژگی‌ها، مزایا، معایب و دیگر مشخصات این روش در بخش بعدی توضیحاتی ارائه شده است.

## ۲-۱۰- روش گالرکین بدون المان Element-Free Galerkin Method (EFGM)

در این روش نیز که توسط Belytschko ابداع شده است از تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) در شکل ضعیف گالرکین برای ساخت مجموعه معادلات جبری استفاده می‌شود. در روش EFG دامنه مسئله توسط مجموعه‌ای از گره‌ها که به صورت مناسب در سطح دامنه توزیع شده‌اند نمایش داده می‌شود. مجموعه‌ای از سلول‌های پس‌زمینه نیز برای محاسبه انتگرال‌هایی که به خاطر استفاده از شکل ضعیف گالرکین به وجود می‌آیند مورد نیاز می‌باشد. تقریب MLS که برای ساخت توابع شکل به کار می‌رود فقط بر پایه مجموعه‌ای از گره‌ها که به صورت دلخواه در دامنه محلی توزیع می‌شوند، ساخته می‌شود.

در اینجا به چند نکته کلیدی درباره این روش اشاره شده است :

- روش EFG بسیار دقیق می‌باشد و نرخ همگرایی روش EFG که از آزمایش‌های عددی به دست آمده است بسیار بیشتر و بهتر از روش اجزاء محدود می‌باشد.

- روش EFG برای مسائل مربوط به شکست الاستیک خطی بسیار مناسب می‌باشد.

برای روش EFG می‌توان به مزیت‌های زیر اشاره کرد :

۱. در این روش ساخت المان که در روش FEM وجود دارد حذف شده است.

۲. برای روش FEM می‌بایست پس‌پردازش بر روی کرنش‌ها و تنش‌ها صورت گیرد تا نمودارها و شکل‌های حاصله میدان به صورت هموار به دست آیند ولی در روش EFG این پس‌پردازش نیازی نیست چون این میدان‌ها خود هموار هستند.

۳. عملکرد روش EFG مستقل از نحوه آرایش گره‌ها می‌باشد.

۴. برای مواد غیرقابل فشرده شدن (incompressible) نیز بدون هیچ‌گونه اصلاحاتی روش EFG می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد.

همچنین به برخی از مشکلات و نقص‌هایی که در این روش وجود دارد و همچنان محققان در حال مطالعه بر روی این مسائل هستند در اینجا اشاره شده است :

۱. توابع شکل EFG که با استفاده از تقریب MLS ساخته می‌شوند مشخصه تابع دلتای کرونیگر را ارضاء نمی‌کنند؛ در نتیجه برای اعمال شرایط مرزی اساسی می‌بایست از روش‌های مخصوصی استفاده شود. در ادامه بحث به چند نمونه از این روش‌ها اشاره شده است.

۲. در این روش انتگرال‌گیری‌های عددی سراسری برای محاسبه سیستم معادلات مورد نیاز می‌باشد؛ به همین دلیل می‌بایست از ساختار سلول‌ها و شبکه پس‌زمینه استفاده شود که باعث پیچیده و سخت‌شدن فرآیند حل می‌شود. همچنین این موضوع سبب می‌شود این روش به صورت حقیقی یک روش بدون شبکه نباشد.

۳. روش EFG از نظر محاسباتی نسبت به روش FEM پرهزینه‌تر می‌باشد. دلایلی به شرح زیر برای این موضوع قابل ذکر است :

- مجموعه‌ای از معادلات جبری می‌بایست برای هر نقطه نمونه حل شود تا توابع شکل ساخته شوند.

- فرآیند پیدا کردن گره‌های موجود در دامنه محلی در حین ساخت توابع شکل باید انجام شود.

- سیستم ماتریس‌هایی که در نهایت به دست می‌آیند دارای ابعاد بزرگی می‌باشند که این موضوع ناشی از استفاده از گره‌های بیشتر برای ساخت توابع شکل است.

۴. عملکرد این روش بستگی زیادی به نحوه انتخاب تابع وزن دارد.

۵. در صورت استفاده از ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی اساسی نیز فرآیند حل دشوار می‌شود.

قابل ذکر است که روش EFG علاوه بر اینکه برای مسائل مربوط به رشد ترک و مکانیک شکست (Xu, Y., & Saigal, S, 1998) (Rao, B. N., & Rahman, S, 2000) بسیار مناسب می‌باشد، این روش در مسائل گوناگون دیگری نیز کاربرد دارد که به عنوان نمونه می‌توان به شکل‌دهی فلزات (Liu, G. R., Nguyen- تحلیل ارتعاش (Yanjin, G., Xin, W., Zhao, G., & Ping, L, 2009) (Thoi, T., & Lam, K. Y, 2009) و انتقال حرارت (Singh, I. V., & Jain, P. K, 2005) اشاره کرد.

در پژوهش حاضر، مسئله‌ای دو بعدی برای مکانیک جامدات با دامنه  $\Omega$  که با مرز  $\Gamma$  محصور شده است، در نظر گرفته شده است. شکل قوی سیستم معادلات که شامل معادله تعادل، شرط مرزی طبیعی و شرط مرزی اساسی است، در اینجا نمایش داده شده است:

$$L^T \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2-29)$$

$$\sigma n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t \quad (2-30)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2-31)$$

همان‌طور که در مباحث قبل بیان شد با توجه به اینکه تقریب MLS شرط تابع دلتای کرونیگر را ارضاء نمی‌کند می‌بایست از یکسری روش‌هایی برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده کرد. در این قسمت، دو روش پنالتی و ضرایب لاگرانژ برای به دست آوردن سیستم معادلات نهایی در روش EFG شرح داده شده است.

## ۲-۱۰-۱- روش‌های ارضاء شرایط مرزی اساسی

### ۲-۱۰-۱-۱ روش پنالتی (Penalty Method)

در این روش، معادله شکل ضعیف گالرکین با اعمال ضرایب پنالتی به صورت زیر می‌باشد :

$$\int_{\Omega} \delta (Lu)^T D(Lu) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (u - \bar{u})^T \alpha (u - \bar{u}) d\Gamma = 0 \quad (۳۲-۲)$$

در این فرمول،  $\alpha$  ماتریس قطری ضرایب پنالتی می‌باشد. ضرایب پنالتی  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) می‌توانند با یکدیگر تفاوت داشته و یا تابعی از مختصات باشند؛ اغلب در عمل برای این ضرایب، یک عدد مثبت بزرگ اختیار می‌شود.

با استفاده از توابع شکل MLS که توسط تعداد  $n$  گره موجود در دامنه تاثیر ساخته می‌شوند، رابطه

زیر برقرار می‌باشد :

$$u_{(2 \times 1)}^h = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \Phi_{(2 \times 2n)} u_{(2n \times 1)} \quad (۳۳-۲)$$

که در اینجا  $\phi$  ماتریسی شامل توابع شکل MLS می‌باشد. همچنین  $u_1$  و  $v_1$  پارامترهای تغییرمکان برای گره شماره ۱ می‌باشند؛ قابل ذکر است که مقدار تغییرمکان‌های گرهی با این پارامترها متفاوت هستند، دلیل این موضوع نیز این است که توابع شکل MLS شرط تابع دلتای کرونیکر را ارضاء نمی‌کنند.

با جایگذاری مقدار  $\mathbf{u}^h$  ذکر شده در فرمول بالا به جای تمام عبارات  $\mathbf{u}$  موجود در معادله شکل ضعیف (۲-۳۲) و انجام یکسری محاسبات ریاضی، نهایتاً سیستم معادلات مجزای سراسری روش EFG با به‌کارگیری روش پنالتی برای اعمال شرایط مرزی اساسی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha] \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^\alpha \quad (۲-۳۴)$$

در اینجا  $\mathbf{U}$  نشان‌دهنده بردار پارامترهای گرهی تغییرمکان برای همه گره‌های موجود در کل دامنه مسئله می‌باشد،  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی سراسری است که از گردآوری ماتریس‌های سختی گرهی حاصل می‌شود و  $\mathbf{F}$  نیز بردار نیروی خارجی وارده است که از گردآوری بردارهای نیرویی گرهی به دست می‌آید. ماتریس  $\mathbf{K}^\alpha$  ماتریس سختی پنالتی سراسری می‌باشد که با استفاده از حالت محلی آن که به شکل زیر است به دست می‌آید:

$$\mathbf{K}_{IJ}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \Phi_J d\Gamma \quad (۲-۳۵)$$

بردار نیرویی  $\mathbf{F}^\alpha$  نیز که به دلیل شرایط مرزی اساسی تولید شده است با استفاده از حالت محلی آن که به صورت زیر می‌باشد حاصل می‌شود:

$$\mathbf{F}_I^\alpha = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \bar{u} d\Gamma \quad (۲-۳۶)$$

فرآیند گالرکین سبب می‌شود ماتریس‌های  $\mathbf{K}$  و  $\mathbf{K}^\alpha$  متقارن باشند. برای محاسبه انتگرال‌ها در روش EFG نیاز به شبکه‌ای از سلول‌های پس‌زمینه می‌باشد. این سلول‌ها می‌توانند از گره‌های میدان که برای محاسبه تقریب متغیر میدان استفاده می‌شوند مستقل باشند. تعداد نقاط گوسی که برای هر سلول انتخاب می‌شود و در نتیجه کل نقاط گوسی مورد استفاده در دامنه مسئله بستگی به چگالی گره‌های موجود در مسئله دارد.

مزیت روش پنالتی این است که ماتریس سختی حاصله دارای ویژگی‌های قطعا مثبت بودن و متقارن بودن می‌باشد. با این وجود این روش دارای نقص‌هایی نیز می‌باشد که در اینجا شرح داده شده است :

- شرایط مرزی اساسی در این روش با توجه به اندازه ضرایب پنالتی انتخابی به صورت تقریبی اعمال می‌شوند. از نظر تئوری هر چه این ضرایب پنالتی بزرگ‌تر در نظر گرفته شوند اعمال شرایط مرزی اساسی با دقت و صحت بیشتری انجام می‌شود.

- انتخاب مجموعه‌ای از ضرایب پنالتی که به طور کلی قابل اعمال برای انواع مختلف مسائل موجود باشد دشوار است. انتخاب یک مقدار خیلی بزرگ برای این ضرایب نیز اغلب سبب ایجاد مشکلات عددی می‌شود.

- به طور کلی نتایج به دست آمده از این روش دارای دقت کمتری نسبت به نتایج حاصله از روش ضرایب لاگرانژ می‌باشد.

با وجود تمام نقص‌های موجود در روش پنالتی، این روش به طور گسترده در مسائل مختلف و توسط محققین زیادی از جمله Zhu and Atluri استفاده شده است.

## ۲-۱۰-۱-۲ روش ضرایب لاگرانژ (Lagrange Multipliers)

روش ضرایب لاگرانژ توسط Belytschko برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش EFG استفاده شده است. معادله شکل ضعیف گالرکین با استفاده از این روش به صورت زیر می‌باشد :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_u} \delta\lambda^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{u}^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (37-2)$$

ضرایب لاگرانژ  $\lambda$  را می‌توان به عنوان نیروهای هوشمندی در نظر گرفت که سبب می‌شوند شرط مرزی اساسی به صورت زیر ارضاء شود :

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (38-2)$$

به منظور دست‌یابی به فرمول مجزاشده نهایی، ضرایب لاگرانژ  $\lambda$  موجود در معادله شکل ضعیف بالا که توابعی مجهول از مختصات می‌باشند می‌بایست با استفاده از مقادیر گرهی آن‌ها و توابع شکل، برای گره‌های موجود بر روی مرزهای اساسی درون‌یابی شوند :

$$\lambda^h = \begin{Bmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & 0 & \dots & \mathbf{N}_{n_\lambda} & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_1 & \dots & 0 & \mathbf{N}_{n_\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{u1} \\ \lambda_{v1} \\ \vdots \\ \lambda_{un_\lambda} \\ \lambda_{vn_\lambda} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(s)_{(2 \times 2n_\lambda)} \lambda_{(2n_\lambda \times 1)} \quad (39-2)$$

در این رابطه،  $n_\lambda$  تعداد گره‌های مورد استفاده برای این درون‌یابی می‌باشد،  $\mathbf{N}_I$  تابع شکل برای گره  $I$  ام بر روی مرز اساسی است،  $s$  طول کمان بر روی مرز اساسی است و  $\lambda$  بردار ضرایب لاگرانژ گرهی بر روی مرز اساسی می‌باشد. معادله بالا را می‌توان به شکل ماتریس گرهی زیر نیز نوشت :

$$\lambda_{(2 \times 1)} = \sum_I^{n_\lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_I & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{u_i} \\ \lambda_{v_i} \end{Bmatrix} = \sum_I^n \mathbf{N}_I \lambda_I \quad (40-2)$$



در این رابطه،  $N_I$  ماتریس توابع شکل برای گره  $I$  بر روی مرز اساسی است.

در معادلات بالا تابع شکل  $N_I$  را می‌توان درون‌یاب‌های لاگرانژ مورد استفاده در روش اجزاء محدود مرسوم (FEM) در نظر گرفت. در این صورت درون‌یاب لاگرانژ درجه  $n$  را می‌توان به صورت شکل کلی زیر ارائه کرد:

$$N_k^n(s) = \frac{(s-s_0)(s-s_1)\cdots(s-s_{k-1})(s-s_{k+1})\cdots(s-s_n)}{(s_k-s_0)(s_k-s_1)\cdots(s_k-s_{k-1})(s_k-s_{k+1})\cdots(s_k-s_n)} \quad (41-2)$$

در صورتی که درون‌یاب لاگرانژ درجه یک انتخاب شود (درون‌یاب خطی)، در نتیجه  $n = 1$  می‌باشد و درون‌یاب‌های لاگرانژ در نقطه  $s = s_0$  و  $s = s_1$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$N_0(s) = \frac{(s-s_1)}{(s_0-s_1)}, \quad N_1(s) = \frac{(s-s_0)}{(s_1-s_0)} \quad (42-2)$$

تغییرات ضریب لاگرانژ به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta\lambda^h = N\delta\lambda \quad (43-2)$$

حال با استفاده از این معادله و معادله (۳۳-۲) عبارت چهارم در معادله (۳۷-۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_u} \delta \left( \sum_{I=1}^{n_\lambda} N_I \lambda_I \right)^T \sum_{J=1}^n \Phi_J u_J d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \left( \sum_{I=1}^{n_\lambda} N_I \lambda_I \right)^T \bar{u} \\
&= \sum_{I=1}^{n_\lambda} \sum_{J=1}^n \delta \lambda_I^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} N_I^T \Phi_J d\Gamma}_{-G_{IJ}^T} u_J - \sum_{I=1}^{n_\lambda} \delta \lambda_I^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} N_I^T \bar{u} d\Gamma}_{-q_I} \tag{۴۴-۲} \\
&= - \sum_{I=1}^{n_{\lambda t}} \sum_{J=1}^N \delta \lambda_I^T G_{IJ}^T u_J + \sum_{I=1}^{n_{\lambda t}} \delta \lambda_I^T q_I \\
&= \delta \Lambda^T \left( -G_{(2n_{\lambda t} \times 2N)}^T U_{s(2n_{\lambda t} \times 1)} + Q_{(2n_{\lambda t} \times 1)} \right)
\end{aligned}$$

در اینجا  $\Lambda$  بردار ضرایب لاگرانژ گرهی برای همه گره‌های میدان واقع بر روی مرزهای اساسی است،  $n_{\lambda t}$  تعداد کل گره‌های موجود بر روی مرز اساسی است و ماتریس گرهی  $G_{IJ}$  نیز به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$G_{IJ}^T = - \int_{\Gamma_u} N_I^T \Phi_J d\Gamma \tag{۴۵-۲}$$

همچنین  $q_I$  نیز برداری به شکل زیر می‌باشد :

$$q_I = - \int_{\Gamma_u} N_I^T \bar{u} d\Gamma \tag{۴۶-۲}$$

در معادله (۴۴-۲) ،  $G$  ماتریسی سراسری است که با استفاده از  $G_{IJ}$  ها به دست می‌آید و  $Q$  برداری سراسری است که توسط  $q_I$  ها حاصل می‌شود.

به طور مشابه عبارت آخر در معادله (۳۷-۲) نیز به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} (\Phi \delta u)^T \lambda d\Gamma &= \int_{\Gamma_u} \left( \sum_I^n \Phi_I \delta u_I \right)^T \left( \sum_J^{n_\lambda} N_J \lambda_J \right) d\Gamma \\ &= \sum_{I=1}^{n_\lambda} \sum_{J=1}^n \delta u_I^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} \Phi_I^T N_J d\Gamma}_{-G_{IJ}} \lambda_J \\ &= - \sum_{I=1}^{n_\lambda} \sum_{J=1}^N \delta u_I^T G_{IJ} \lambda_J \quad (47-2) \\ &= -\delta U_s^T G \Lambda \end{aligned}$$

با جایگزین کردن نتایج حاصل از معادلات (۴۴-۲) و (۴۷-۲) در معادله (۳۷-۲) نتیجه زیر حاصل

می‌شود:

$$\delta U^T [KU + G\Lambda - F] + \delta \Lambda^T (G^T U - Q) = 0 \quad (48-2)$$

در اینجا K ماتریس سختی سراسری و F بردار نیروی سراسری می‌باشد. به دلیل اینکه دو عبارت

$\delta U$  و  $\delta \Lambda$  به صورت دلخواه انتخاب می‌شوند فقط در صورتی معادله بالا ارضا می‌شود که شرایط زیر

برقرار باشد:

$$\begin{cases} KU + G\Lambda - F = 0 \\ G^T U - Q = 0 \end{cases} \quad (49-2)$$

دو معادله بالا را می‌توان به شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{(2N+2n_{\lambda t}) \times (2N+2n_{\lambda t})} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Lambda} \end{Bmatrix}_{(2N+2n_{\lambda t}) \times 1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix}_{(2N+2n_{\lambda t}) \times 1} \quad (50-2)$$

این معادله شکل نهایی سیستم معادلات مجزاشده برای روش EFG با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ می‌باشد. با حل این معادله، پارامترهای گرهی تغییرمکان مشخص می‌شوند و برای به دست آوردن تغییرمکان‌ها در هر نقطه از جمله گره‌های میدان در دامنه مسئله می‌بایست از معادله (۲-۳۳) استفاده کرد. با وجود اینکه روش ضرایب لاگرانژ، تعداد متغیرها و بعد ماتریس‌ها را افزایش می‌دهد، این روش در اعمال شرایط مرزی اساسی دارای دقت و صحت بالایی می‌باشد.

## فصل سوم

### بررسی روش‌های گسترش ترک

## ۳- بررسی روش‌های گسترش ترک

### ۳-۱- مفاهیم پایه مکانیک شکست

واضح است که شکست و گسیختگی مسئله بسیار مهمی در دنیای صنعتی امروز می‌باشد، در نتیجه، کارهای تئوری و همچنین عملی پایه‌ای می‌بایست برای مقابله با این پدیده و کنترل آن انجام شود. پیامدهای ناشی از ترک‌ها می‌توانند اندک و جزئی بوده و یا خسارات جبران‌ناپذیر گسترده‌ای داشته باشند. مکانیک شکست درباره طراحی قطعات و سازه‌ها و فرآیندهای مقابله با گسیختگی سوال‌هایی طرح کرده و به آن‌ها پاسخ می‌دهد (Zehnder, A. T, 2012).

یک سازه یا یک قطعه که دارای ترک‌های اولیه‌ای است تحت چه بارگذاری و تا چه زمانی با توجه به اندازه و هندسه ترک‌های موجود و دیگر شرایط حاکم می‌تواند بدون بروز مشکلی مورد استفاده قرار گیرد؟ با توجه به بارهای وارده با چه سرعت و در چه جهتی ترک‌های موجود در یک قطعه گسترش پیدا می‌کنند؟ در چه زمان و تحت چه تعداد سیکل بارگذاری ترک به صورت فاجعه‌باری گسترش پیدا می‌کند؟ چه اندازه‌ای از ترک اجازه داده می‌شود که در قطعه‌ای باشد و عملکرد ایمنی آن حفظ شود؟ این سوال‌ها و دیگر سوال‌های مشابه با استفاده از علم مکانیک شکست پاسخ داده می‌شوند.

مفاهیم پایه مکانیک شکست به اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم برمی‌گردد (Mohammadi, S, 2008). این شاخه از علم در حدود سال ۱۹۲۰ توسط گریفیث (Griffith, A. A, 1920) معرفی شد؛ او اولین فردی بوده است که متوجه این موضوع شد که وجود درزه و ترک‌های داخلی در اجسام نقش قابل توجهی در شروع و انتشار شکست‌ها و گسیختگی‌ها بازی می‌کنند. همچنین اولین پیشرفت‌های تئوری در تحلیل میدان‌های تنش، کرنش و تغییر مکان در اطراف ترک‌ها توسط Westergaard انجام شده است (Westergaard, H, 1939).

طی مطالعات انجام شده، مشاهده شده است که بین پیش‌بینی‌های تئوری برای مقاومت کششی در مواد ترد و شکننده و مقادیر آزمایشگاهی اندازه‌گیری شده، تفاوت‌های قابل توجهی وجود دارد؛ این تفاوت‌ها را ناشی از درزها و ترک‌های ریز موجود در قطعات و اجسام مورد بررسی می‌دانند. علمی که درباره به وجود آمدن ترک‌ها، نحوه رشد آن‌ها و دیگر مشخصات آن‌ها بحث می‌کند مکانیک شکست نامیده می‌شود. این علم به تحلیل و مطالعه درباره اندرکنش بین ناپیوستگی هندسی (ترک)، محیط پیوسته اطراف آن و گسترش این ناپیوستگی می‌پردازد.

شکست در جامدات به معنی ظاهرشدن یک سطح از ناپیوستگی در دامنه جسم مورد نظر می‌باشد؛ به عبارت دیگر اصطلاح شکست، جداشدن محلی سطح چسبندگی ماده را در بدنه یک جسم جامد توصیف می‌کند.

دو دیدگاه کلی برای یک ترک از نظر ابعاد موجود است (Kuna, M, 2013) :

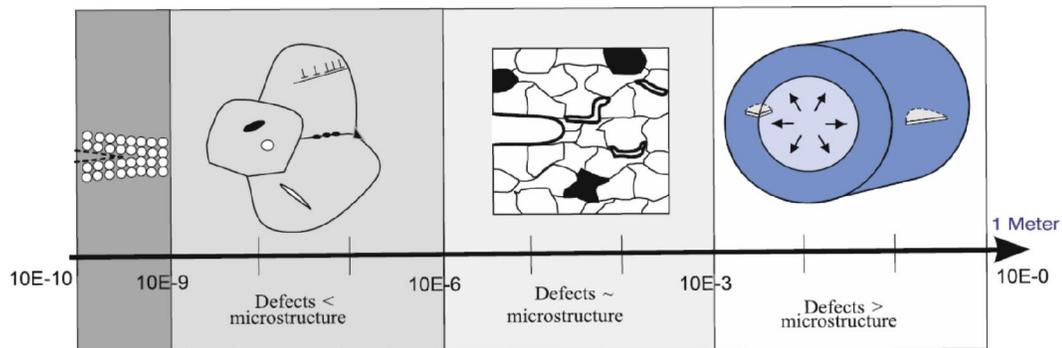
۱. دیدگاه میکروسکوپی : فرآیند شکست حقیقی به صورت محلی با استفاده از مکانیزم‌های گسیختگی مقدماتی در سطح میکروسکوپی مواد رخ می‌دهد و با مشخصات میکرو-سازه‌ای و فیزیکی مواد تعریف و بررسی می‌شود.

۲. دیدگاه ماکروسکوپی : در این حالت فرآیندهای شکست را می‌توان به طور مناسبی با استفاده از روش‌های مکانیک جامدات و مکانیک مواد توصیف کرد.

در پژوهش حاضر از نقطه نظر ماکروسکوپی درباره پارامترهای مکانیکی مواد بحث می‌شود.

فرآیندهای شکست و گسیختگی در انواع مقیاس‌های طولی ظاهر می‌شوند؛ هنگامی که مهندسان مکانیک در حال تحلیل ترک در مقیاس ماکروسکوپی می‌باشند محققین علم مواد فرآیندهایی که در مقیاس ماکروسکوپی و میکروسکوپی می‌باشند را بررسی می‌کنند. همچنین فیزیک‌دانان حالت جامد

هم ترک‌ها را به صورت اتصالات اتمی و مولکولی در ساختارهای با اندازه نانو مورد ارزیابی و مطالعه قرار می‌دهند. در شکل (۱-۳) مقیاس‌های مختلف برای ارزیابی ترک در اجسام مشاهده می‌شود که هر یک در شاخه‌ای از علم مورد تحلیل قرار می‌گیرند :



مکانیک شکست      مکانیک آسیب (damage)      میکرومکانیک      دینامیک مولکولی

شکل ۱-۳ مقیاس‌های مختلف برای ارزیابی ترک (Kuna, M, 2013)

در علم مکانیک شکست این‌گونه فرض می‌شود که در هر قطعه یا ماده حقیقی، ناچاراً درزها و ترک‌هایی وجود خواهد داشت. این درزها و ترک‌ها می‌توانند در هنگام ساخت مواد یا قطعات به وجود آیند یا در هنگام بهره‌برداری از آنها تحت بارگذاری‌های مختلف اعمالی تولید شوند.

صرف نظر از فرآیندهای شیمیایی که در تخریب مواد و سازه‌ها نقش دارند، چندین فرآیند مکانیکی مهم نیز در ایجاد گسیختگی نقش دارند (Recho, N, 2012) :

- کمانش

- گسیختگی شکل‌پذیر

- گسیختگی ترد

- گسیختگی ناشی از خستگی



- شکستگی ناشی از خزش در دمای بالا

- و ....

از دو نوع گسیختگی ترد و خستگی به عنوان عوامل بسیاری از خرابی‌های فاجعه‌آمیز در صنایع مختلف یاد می‌شود.

در حالت کلی فاکتورهای تاثیرگذار در رفتار رشد ترک و گسیختگی در مواد به دو دسته کلی مکانیکی و متالورژیکی تقسیم می‌شوند؛ ناخالصی، اندازه دانه‌ها و ... از جمله فاکتورهای متالورژیکی می‌باشند در حالی که فاکتورهای مکانیکی مربوط به حالت تغییر مکان، کرنش‌ها، تنش‌ها و شرایط محیطی از جمله دما می‌باشند.

اگرچه فاکتورهای زیادی بر روی رشد ترک تاثیر می‌گذارند اما می‌توان به سه فاکتور اصلی که رفتار سازه را در طی گسترش ترک کنترل می‌کند به صورت زیر اشاره کرد :

- مقاومت ماده نسبت به گسیختگی

- اندازه ترک یا ترک‌های موجود اولیه

- مقدار و نحوه اعمال بار و تغییرات آن

موارد ذکر شده می‌توانند به ترتیب در سه عنوان معیار گسیختگی، هندسه و شرایط مرزی طبقه‌بندی شوند.

## ۳-۲- مودهای پایه شکست

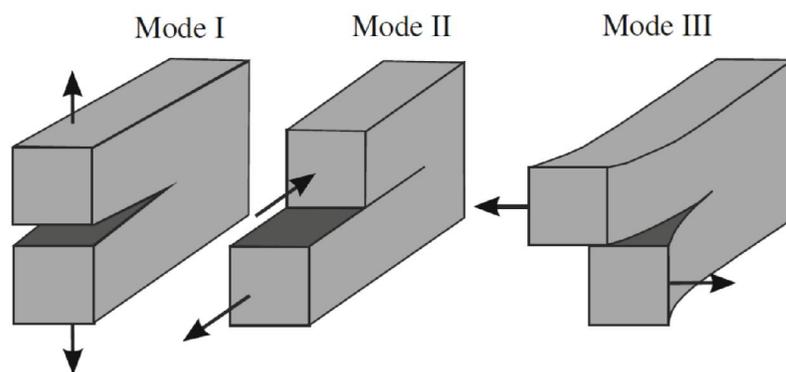
هر ترک و شکستگی را می‌توان به عنوان یکی از مودهای ساده سه‌گانه شکست یا ترکیبی از آنها نمایش داد:

۱. مود ۱ (مود بازشوندگی ترک) : در این حالت تغییر مکان‌های صفحه ترک عمود بر صفحه ترک و راستای انتشار آن می‌باشد.

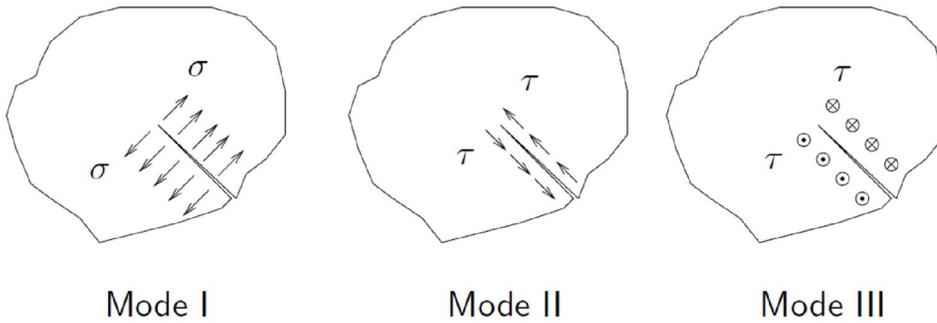
۲. مود ۲ (مود لغزشی یا برشی داخل صفحه) : در این حالت جابه‌جایی‌های سطح ترک در صفحه ترک و عمود بر نوک ترک می‌باشد.

۳. مود ۳ (مود پارگی یا برش خارج از صفحه) : در این حالت جابه‌جایی سطح ترک در صفحه ترک و موازی با نوک آن می‌باشد.

در شکل‌های (۳-۲) و (۳-۳) می‌توان مودهای مختلف ذکر شده را مشاهده کرد :



شکل ۳-۲ نمایش مودهای شکست در فضا (Kuna, M, 2013)



شکل ۳-۳ نمایش مودهای شکست در صفحه (Schreurs, P. J. G, 2012)

مود ۱ ترک اغلب در سازه‌های فلزی مشاهده شده است در صورتی که مود ۲ و مود ۳ برای مثال می‌توانند برای ترک‌های تحت تنش‌های فشاری در سنگ‌های زیرزمینی یا در زمین‌لرزه‌ها رخ دهند. همچنین مود ۲ در لایه‌لایه شدن اجسام مرکب یا عموماً در سطوح مشترک ضعیف جامدات مشاهده شده است (Bui, H. D, 2006).

### ۳-۳- تعیین میدان‌های تغییر مکان و تنش در اطراف یک ترک در یک

#### محیط الاستیک خطی، ایزوتروپیک و همگن

میدان تنش الاستیک در نزدیکی یک ترک را می‌توان به صورت سری تانسور تنش  $\sigma_{ij}$  تعریف

کرد:

$$\sigma_{ij} = r^{-1/2} \left\{ K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta) + \dots \right\} \quad (1-3)$$

در این رابطه،  $r$  و  $\theta$  موقعیت یک نقطه را در سیستم مختصات قطبی نزدیک نوک ترک نشان

می‌دهند.

Irwin مفهوم ضریب شدت تنش را به عنوان معیاری برای مقاومت تکینگی معرفی کرد.  $K_I$ ،  $K_{II}$  و

$K_{III}$  در فرمول بالا ضرایب شدت تنش برای مودهای اول تا سوم هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K_I = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sigma_{yy} \sqrt{2\pi r} \quad (2-3)$$

$$K_{II} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sigma_{xy} \sqrt{2\pi r} \quad (3-3)$$

$$K_{III} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sigma_{yz} \sqrt{2\pi r} \quad (4-3)$$

در یک سیستم کارتزین منطبق بر دامنه مسئله و با استفاده از یک سیستم مختصات قطبی در نوک ترک، مجموعه کامل میدان‌های تنش برای مود ترکیبی ۱ و ۲ در هر نقطه  $x = (r, \theta)$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (5-3)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (6-3)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (7-3)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای  $\sigma_{33} = 0$  است و در حالت کرنش صفحه‌ای نیز  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$

می‌باشد.

با استفاده از قانون رفتار الاستیک خطی می‌توان میدان کرنش را نیز به دست آورد. همچنین

میدان‌های تغییر مکان‌ها در حالت مود ترکیبی ۱ و ۲ و در راستای  $x$  و  $y$  به صورت زیر می‌باشند:

$$u = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2\chi + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (۸-۳)$$

$$v = \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2\chi + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ (2\chi - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (۹-۳)$$

که در این روابط،  $\mu$  مدول برشی می‌باشد که رابطه زیر برای آن برقرار است :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۱۰-۳)$$

برای حالت کرنش صفحه‌ای،  $\chi$  به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\chi = 3 - 4\nu \quad (۱۱-۳)$$

همچنین برای حالت تنش صفحه‌ای،  $\chi$  به صورت زیر می‌باشد :

$$\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (۱۲-۳)$$

برای به دست آوردن هر یک از موده‌های خالص ۱ یا ۲ نیز می‌توان عبارتهای مربوط به مود دلخواه خالص را حفظ کرده و عبارتهای شامل فاکتور شدت تنش دیگر را از معادلات حذف کرد.

در مود ۳ یا مود پارگی نیز فقط دو عبارت تنش غیر صفر و یک عبارت تغییرمکانی غیر صفر وجود

دارد:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0 \quad (۱۳-۳)$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (14-3)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (15-3)$$

$$u_x = u_y = 0 \quad (16-3)$$

$$u_z = \frac{K_{III}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (17-3)$$

در این پژوهش فقط از مودهای خالص ۱ و ۲ و مود ترکیبی حاصل از آنها استفاده شده است و از مود ۳ صرف نظر شده است.

### ۳-۴- معیارهای شکست الاستیک

برای نتیجه‌گیری در بحث معیار گسترش ترک، برای یک ترک که در سازه الاستیک خطی رشد می‌کند دو معیار زیر را می‌توان در نظر گرفت:

۱. یک معیار محلی بر پایه مقایسه ضریب شدت تنش<sup>۱</sup> (K) که از میدان تنش نزدیک نوک ترک به دست می‌آید با مشخصه ماده  $K_{IC}$  (سفتی شکست یا فاکتور شدت تنش بحرانی) می‌باشد. به عنوان مثال برای حالت مود ۱ شکست وقتی بارگذاری سبب شود که ضریب شدت تنش مود ۱ از سفتی شکست مود ۱ بیشتر شود در این حالت ترک رشد می‌کند:

$$K_I \geq K_{IC} \quad (18-3)$$

۲. یک رویکرد سراسری نیز بر پایه مقایسه نرخ آزادسازی انرژی (G) که از انتقال انرژی سراسری ترک

---

1- Stress intensity factor

مشخص می‌شود با مشخصه ماده  $G_C$  (نرخ آزادسازی انرژی بحرانی) است. این معیار این‌گونه بیان می‌شود که وقتی نرخ آزادسازی انرژی موجود از انرژی مورد نیاز برای گسترش ترک (سفتی مواد) بیشتر شود ترک شروع به گسترش پیدا کردن می‌کند:

$$G \geq G_C \quad (19-3)$$

برای یک ترک دو بعدی که تحت بارگذاری عمومی قرار دارد میدان‌های جابه‌جایی و تنش از ترکیب میدان‌های موده‌های ۱، ۲ و ۳ به دست می‌آید و نرخ آزادسازی انرژی به صورت زیر بر حسب ضرایب شدت تنش موده‌های مختلف تعریف می‌شود:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (20-3)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای  $E' = E$  است و در حالت کرنش صفحه‌ای  $E' = E/(1 - \nu^2)$  می‌باشد. همچنین  $\mu$  نیز مدول برشی می‌باشد.

### ۳-۵- روش‌های تعیین ضرایب شدت تنش و نرخ آزادسازی انرژی (K و G)

(G)

در این قسمت با توجه به اینکه برای موارد محدودی از مسائل، مقادیر  $k$  و  $G$  در مراجع موجود می‌باشد، به روش‌های مختلفی اشاره می‌شود (Zehnder, A. T, 2012) که می‌توان با استفاده از آن‌ها مقادیر یاد شده را محاسبه کرد.

### ۳-۵-۱- روش‌های تحلیلی (Analytical Methods) :

#### ۳-۵-۱-۱- تئوری الاستیسیته (Elasticity Theory)

معادلات الاستیسیته ۲ بعدی را می‌توان بر حسب تئوری متغیر مختلط (complex variable) فرمول‌بندی کرد، در این حالت به روش‌های قدرتمندی همچون تئوری تابع تحلیلی (analytic function) و نگاشت هم‌مدیس (conformal mapping) اجازه استفاده شدن و اجرا کردن داده می‌شود.

#### ۳-۵-۱-۲- روش‌های تطابقی و انرژی (Energy and Compliance)

این روش‌ها در صورتی مفید هستند که نمونه آزمایش یا سازه را بتوان با استفاده از تئوری ورق یا تیر (beam or plate) مدل کرد. در چنین مواردی اگر انرژی یا سختی سازه را بتوان به عنوان تابعی از طول ترک یا مساحت تعیین کرد، در این حالت می‌توان نرخ آزادسازی انرژی و ضریب شدت تنش (اگر بارگذاری در حالت مود ۱ باشد) را محاسبه کرد.

#### ۳-۵-۲- روش تجمع محلی مرزی (Boundary Collocation Method)

این روش، یک روش برای محاسبه ضرایب شدت تنش بر پایه بسط تابع ویژه (eigenfunction) برای میدان‌های تنش نوک ترک می‌باشد.

#### ۳-۵-۳- روش‌های محاسباتی (Computational Methods)

بسیاری از مسائل مکانیک شکست که شامل هندسه‌های پیچیده می‌باشند را نمی‌توان با روش‌های تحلیلی موجود تقریب زد. استفاده از روش‌های محاسباتی از جمله روش اجزاء محدود، روش اجزاء مرزی و دیگر روش‌ها برای مطالعه شکست در مسائل جهان حقیقی بسیار ارزشمند است. چندین روش در این قسمت نام برده می‌شود:



- همبستگی تغییرمکان و تنش (Stress and Displacement Correlation)

- تطابق و انرژی سراسری (Global Energy and Compliance)

- Crack Closure Integrals

- انتگرال دامنه‌ای (Domain Integral)

### ۳-۵-۴ - روش‌های آزمایشگاهی (Experimental Methods)

در برخی موارد امکان تعیین ضرایب شدت تنش با استفاده از روش‌های تحلیلی و محاسباتی وجود ندارد؛ برای مثال اگر بارگذاری مشخص نباشد یا به صورت دینامیکی باشد یا اینکه اطلاعات درباره قسمت‌های مختلف سازه که برای تحلیل با اجزاء محدود مورد نیاز است موجود نباشد. در چنین مواردی می‌توان برای تعیین ضرایب شدت تنش از روش‌های آزمایشگاهی بر پایه اندازه‌گیری‌های محلی تنش، کرنش و تغییرمکان‌ها استفاده کرد. برخی از روش‌های آزمایشگاهی در اینجا نام برده شده‌اند:

- روش گیج کرنش (Strain Gauge)

- فوتوالاستیسیته (Photoelasticity)

- همبستگی تصویر دیجیتال (Digital Image Correlation)

- روش ترموالاستیک (Thermoelastic)

این روش‌ها و برخی دیگر از روش‌های آزمایشگاهی را می‌توان در منابع (Epstein, J. S, 1993) و

(Zehnder, A. T, 2012) مشاهده کرد.

در پژوهش انجام شده از روش انتگرال اندرکنش (تعاملی) یا انتگرال M برای محاسبه ضرایب شدت تنش استفاده شده است که در بخش‌های بعد، این روش شرح داده می‌شود.

### ۳-۶- پایداری گسترش ترک

یک ویژگی مهم شکست، بحث پایداری گسترش ترک می‌باشد. در اینجا دو نوع تقسیم‌بندی موجود برای این ویژگی مشاهده می‌شود:

- ناپایدار (رشد ترک بحرانی، گسیختگی سراسری)

- پایدار (رشد ترک زیر بحرانی، گسیختگی محلی)

وقتی یک ترک به صورت شدید و ناگهانی تحت یک بارگذاری ثابت گسترش پیدا کند در این حالت گسترش ترک را ناپایدار گویند؛ حال اگر افزایش بار خارجی به منظور گسترش ترک مورد نیاز باشد این حالت گسترش ترک پایدار نامیده می‌شود.

در بحث مکانیک شکست، رفتاری که هر ماده‌ای در حین تغییر شکل از خود نشان می‌دهد را می‌توان به صورت یکی از گروه‌های سه‌گانه زیر تعریف کرد:

- رفتار الاستیک که در مکانیک شکست الاستیک خطی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

- رفتار پلاستیک که در مکانیک شکست الاستیک - پلاستیک درباره آن بحث می‌شود.

- رفتار ویسکوالاستیک/ ویسکوپلاستیک که در مکانیک شکست خزش مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

انواع گسیختگی‌هایی که می‌توان برای مواد در نظر گرفت از یکی از حالت‌های زیر پیروی می‌کند:

- خزش (شکست خزش، شکست برشی یا نرمال)

- نرم و شکل‌پذیر (شکست برشی، شکست dimple)

- ترد و شکننده (گسیختگی به صورت ورقه‌ورقه شدن و تکه‌تکه شدن)

بارگذاری‌هایی که باعث ایجاد ترک‌ها، گسترش آن‌ها و به طور کلی سبب شکست مواد می‌شوند انواع مختلفی دارند. در این قسمت انواع بارگذاری ذکر شده، ارائه شده است :

- بارگذاری شیمیایی که سبب ایجاد ترک‌ها به دلیل خوردگی و زنگ‌زدگی می‌شوند.

- بارگذاری دوره‌ای یا تناوبی که باعث گسیختگی خستگی در مواد می‌شود.

- بارگذاری دینامیکی که گسیختگی سریعی را به همراه خواهد داشت.

- بارگذاری استاتیکی که می‌توان نتیجه آن را ایجاد گسیختگی اجباری بیان کرد.

وظایف کلی مکانیک شکست را می‌توان بر حسب یک نوع تقسیم‌بندی به صورت زیر ارائه کرد :

- تحلیل شرایط بارگذاری مکانیکی در ترک‌ها بر پایه مدل‌های مکانیک پیوسته با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی.

- استخراج پارامترهای شکست مخصوص ماده و معیارهای شکست و گسیختگی مکانیکی برای آغاز ترک و فرآیند انتشار آن.

- گسترش روش‌های آزمایشگاهی برای تعیین پارامترهای مناسب ماده که مقاومت ماده در برابر رشد ترک را مشخص می‌کنند.

- استفاده از مفاهیم و معیارهای شکست و گسیختگی مکانیکی به منظور به دست آوردن روابط کمی برای مشخص شدن مقاومتی که یک جسم دارای ترک از خود نشان می‌دهد و زمانی که این جسم می‌تواند به صورت ایمن مورد بهره‌برداری قرار بگیرد.

### ۳-۷- روش‌های عددی گسترش ترک و روش‌های بدون شبکه

اگرچه کارهای تحلیلی بسیار زیادی بر روی مسائل معمول و ساده از جمله ترک‌ها برای دامنه‌های محدود و نامحدود صورت گرفته است ولی برای هندسه‌های عملی و حقیقی که تحت شرایط بارگذاری واقعی می‌باشند به دلیل پیچیدگی‌های موجود، نیاز به استفاده از روش‌های عددی است. روش‌های عددی پیشرفته به عنوان ابزاری مفید برای مدل‌سازی و شبیه‌سازی محدوده وسیعی از مسائل مهندسی محسوب می‌شوند. در این میان روشی که به صورت گسترده و به مدت زیادی برای تحلیل مسائل مهندسی به کار رفته است روش اجزاء محدود (Finite Element Method (FEM) می‌باشد. با توجه به مسیرهای دلخواهی که ترک در هر مرحله از گسترش خود تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی طی می‌کند در روش مرسوم اجزاء محدود می‌بایست در هر مرحله از رشد ترک شبکه‌بندی مجدد صورت گیرد تا هندسه ترک با مرزهای المان‌ها منطبق شود و این نقص اصلی روش FEM می‌باشد. تاکنون چندین روش بر پایه ساخت شبکه برای کاهش یا غلبه بر مشکلات موجود در مدل‌سازی مسائل مربوط به رشد ترک ارائه شده‌اند که در این میان می‌توان به روش‌های اجزاء محدود توسعه‌یافته (XFEM) (Belytschko, T., & Black, T, 1999) ، روش اجزاء محدود کلی (GFEM) (Aliabadi, (BEM) (Strouboulis, T., Babuška, I., & Copps, K, 2000) و روش اجزاء مرزی (BEM) (Aliabadi, 1997) به عنوان روش‌های شناخته‌شده‌تر اشاره کرد.

روش اجزاء مرزی (BEM) فرآیند شبکه‌بندی را به یک مقدار حداقل می‌رساند تا فقط سطح ترک نیاز به شبکه‌بندی مجدد داشته باشد. هر چند این روش برای ارزیابی شدن در یک محیط همگن الاستیک خطی نیازمند توابع Green می‌باشد که این مسئله حل مسائل مکانیک شکست غیرخطی را توسط این روش با محدودیت مواجه می‌کند.

در مقابل روش‌های بر پایه ساخت شبکه، روش‌های بدون شبکه برای غلبه بر برخی مشکلات موجود در روش‌های محاسباتی مرسوم مورد استفاده در تحلیل مکانیک جامدات معرفی شده‌اند و در طی دو دهه اخیر توسعه یافته‌اند که به طور موفقیت‌آمیزی برای مسائل متعدد مهندسی از جمله تغییرشکل‌های بزرگ، رشد ترک و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند. در روش‌های بدون شبکه به جای استفاده از المان‌ها یا شبکه از مجموعه‌ای از نقاط پراکنده برای تقریب متغیرهای میدان استفاده می‌شود. در سال‌های اخیر مدل‌های مختلفی از روش‌های بدون شبکه ارائه شده‌اند که در این میان می‌توان به روش هیدرودینامیک ذرات هموار (Gingold, R. A., & Monaghan, J. J, 1977) (SPH)، روش گالرکین بدون المان (EFG) (Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L, 1994) ، روش پترو-گالرکین محلی بدون شبکه (MLPG) (Atluri, S. N., & Zhu, T, 1998) ، روش درون‌یابی نقطه شعاعی (RPIM) (Wang, J. G., & Liu, G. R, 2002) ، روش بازسازی جزء مرکزی (Liu, W. K., Jun, S., & Zhang, Y. F, 1995) (RKPM) و دیگر روش‌ها اشاره کرد.

در جدول شماره (۱-۳)، نام، فرآیند فرمول‌نویسی و نحوه تقریب تابع محلی برای تعدادی از روش‌های بدون شبکه شناخته‌شده‌تر آورده شده است.

جدول ۳-۱ نام و مشخصات تعدادی از روش‌های بدون شبکه مهم (Liu, G. R, 2009)

نام روش	فرآیند فرمول نویسی	تقریب تابع محلی
روش المان پراکنده	شکل ضعیف گالرکین	تقریب MLS
روش EFG	شکل ضعیف گالرکین	تقریب MLS
روش MLPG	پترو-گالرکین محلی	تقریب MLS
روش PIMs	شکل‌های $W^2$ (GS-Galerkin, SC-Galerkin); پترو-گالرکین محلی	درون‌یابی نقطه‌ای با استفاده از توابع پایه شعاعی و چندجمله‌ای
روش SPH	مشابه شکل ضعیف	نمایش انتگرالی، تقریب ذره
روش GSM	مشابه شکل ضعیف	درون‌یابی نقطه‌ای و هموار کردن گرادیان
روش نقطه محدود	شکل قوی	تقریب MLS
روش FDM با استفاده از شبکه‌های نامنظم	شکل قوی	نمایش دیفرانسیلی (سری تیلور) و RBF
روش collocation محلی پایدار شده	شکل قوی منظم	درون‌یابی نقطه‌ای و RBF
روش RKPM	شکل ضعیف یا قوی	نمایش انتگرالی
روش hp-Clouds	شکل ضعیف یا قوی	اتحاد یگانه، MLS
روش اتحاد یگانه FEM	شکل ضعیف	اتحاد یگانه، MLS
روش شکل ضعیف-قوی بدون شبکه (MWS)	شکل‌های قوی و ضعیف ترکیب شده	درون‌یابی نقطه‌ای RBF، MLS
روش گره مرزی (BNM)	فرمول‌بندی انتگرال مرزی	تقریب MLS
روش BPIM	معادله انتگرال مرزی	درون‌یابی نقطه‌ای RBF
روش‌های مرزی و دامنه‌ای ترکیب شده	معادله انتگرال مرزی و شکل ضعیف	درون‌یابی نقطه‌ای RBF

### ۳-۸- فرآیند محاسبات عددی پژوهش حاضر

در این پژوهش از روش عددی توسعه یافته گالرکین بدون المان (XEFG) Extended Element (XEFG) Free Galerkin که مشابه روش XFEM و در ادامه این روش است با این تفاوت که ساخت المان‌ها و شبکه از آن حذف شده است، استفاده شده است. به این منظور در محیط نرم افزار MATLAB، برای مدل سازی هندسه ترک و روند رشد ترک شبه استاتیکی در جامدات الاستیک و در حالت ۲ بعدی، کدهایی نوشته شده است که صحت سنجی صورت گرفته با منابع موجود نشان از صحت و دقت کار انجام شده دارد. در این روش، توابع غنی سازی مناسب، به تقریب روش استاندارد گالرکین بدون شبکه (EFG) اضافه شده اند تا تاثیر ناپیوستگی های موجود در دامنه مسئله لحاظ گردد؛ تابع تقریب به صورت موثر و مناسبی با استفاده از تابع پله ای هویساید<sup>۱</sup> برای تغییر مکان ناپیوستگی ها در طول ترک و همچنین با استفاده از توابع انشعابی یا شاخه ای برای نودهای نزدیک نوک ترک، غنی سازی شده است. همچنین در روش استفاده شده برای ساخت توابع شکل از تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) استفاده شده است. قابل ذکر است که توابع شکل MLS (Lancaster, P., & Salkauskas, 1981) K، شرط دلتای کرونیگر را ارضاء نمی کنند در نتیجه می بایست از روش های مخصوصی برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده کرد. تاکنون روش های بسیار زیادی برای اعمال شرایط مرزی اساسی ارائه شده اند که می توان به روش های ضرایب لاگرانژ (Belytschko, T., Gu, L., & Lu, Y., 1994) Y، قاعده وردشی اصلاح شده<sup>۲</sup> (Lu, Y. Y., Belytschko, T., & Gu, L., 1994) ، ترکیب روش اجزاء محدود و گالرکین بدون المان (Krongauz, Y., & Belytschko, T., 1996) اشاره کرد.

---

1- Heaviside

2- Modified variational principle

روش مجموعه تراز (LSM) نیز برای نمایش هندسه ترک و دنبال کردن مرز متحرک ناپیوستگی موجود در دامنه مسئله مورد استفاده قرار گرفته است و این گونه نودهای اطراف ترک برای غنی سازی مشخص می شوند. مسیر رشد ترک نیز با استفاده از معیار تنش پیرامونی حداکثر (Duflo, M., & Nguyen-Dang, H, 2004) در هر مرحله از رشد ترک مشخص می شود. برای محاسبه ضرایب شدت تنش (SIFs) روش های مختلفی موجود است که از میان آن ها می توان به روش جابه جایی (Chan, S. (1970), K., Tuba, I. S., & Wilson, W. K., 1970), روش تنش (Watwood, V. B, 1970)، روش فرآیند مشتق سختی (Parks, D. M, 1974) و روش انتگرال J (Rice, J. R, 1968) که از روش های شناخته شده تر هستند اشاره کرد. روش های جابه جایی و تنش از اولین و ساده ترین روش های موجود برای محاسبه ضرایب شدت تنش می باشند که دقت و صحت آن ها بستگی به چگالی شبکه در روش های بر پایه شبکه و یا چگالی گره ها در روش های بدون شبکه دارد. روش انتگرال J دارای دقت خوبی است ولی در هنگام محاسبه ضرایب شدت تنش در حالت مود ترکیبی از نظر محاسباتی پرهزینه می باشد. از این رو از روش انتگرال اندرکنش یا انتگرال M که از روش انتگرال J حاصل می شود برای محاسبه ضرایب شدت تنش در مود ترکیبی به صورت گسترده استفاده می شود. در این پژوهش نیز از روش انتگرال اندرکنش برای محاسبه پارامترهای شکست در مواد همگن استفاده شده است. همچنین نتایج عددی به دست آمده از ضرایب شدت تنش (SIF) با نتایج موجود در مراجع مقایسه شده اند.

### ۳-۸-۱- تقریب روش توسعه یافته گالرکین بدون المان (XEFG)

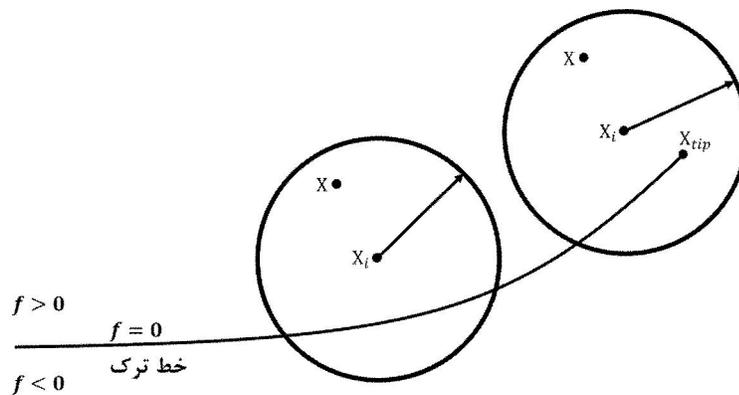
با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته (XFEM)، Extended Finite Element Method، تقریب تغییر مکان در روش XEFG بر پایه غنی سازی اتحاد یگانه خارجی به صورت زیر می باشد:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \mathcal{S}} \phi_I(\mathbf{x}) u_I + \sum_{J \in \mathcal{S}^c} \phi_J(\mathbf{x}) H(f(\mathbf{x})) a_J + \sum_{K \in \mathcal{S}^f} \phi_K(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^4 b_{K\alpha} B_K(r, \theta) \quad (21-2)$$

این فرمول همان فرمول شماره (۲-۱۷) است که در روش EFG ارائه شد با این تفاوت که این فرمول برای در نظر گرفتن ترک در دامنه مسئله توسط عبارت هایی غنی شده است.



مجموعه  $S^c$  شامل گره‌هایی است که دامنه تاثیر آن‌ها هم شامل نقطه مورد نظر  $x$  باشد و هم این که دامنه ترک را قطع کند. مجموعه  $S^f$  نیز شامل گره‌هایی است که دامنه تاثیر آن‌ها همزمان شامل نقطه مورد بررسی  $x$  و نقطه نوک ترک یعنی  $x_{tip}$  باشد. در شکل (۳-۴) می‌توان مفهوم گره‌های مربوط به این مجموعه‌ها را مشاهده کرد (Nguyen, V. P., Rabczuk, T., Bordas, S., & Duflot, M, 2008):



شکل ۳-۴ تعریف مجموعه گره‌های  $S^c$  و  $S^f$  (Nguyen, V. P., Rabczuk, T., Bordas, S., & Duflot, M, 2008)

در رابطه (۳-۲۱)،  $\Phi_I$  توابع شکل MLS می‌باشند،  $f(x)$  تابع فاصله علامت‌دار از خط ترک می‌باشد،

$H$  تابع هویساید و  $B$  نیز توابع شاخه‌ای می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$H(f(\mathbf{x})) = \begin{cases} +1, & f(\mathbf{x}) > 0 \\ -1, & f(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (۲۲-۳)$$

$$\mathbf{B}(r, \theta) = \left[ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \right] \quad (۲۳-۳)$$

در این رابطه،  $\Gamma$  و  $\theta$  مختصات قطبی در سیستم مختصات محلی مربوط به نوک ترک می‌باشند.

### ۳-۸-۲- شکل ضعیف و سیستم معادلات مجزا

در این قسمت بار دیگر شکل ضعیف گالرکین نمایش داده می‌شود تا در ادامه، سیستم معادلات مجزا برای روش توسعه‌یافته گالرکین بدون المان (XEFG) با جزئیات کامل ارائه شود.

در این پژوهش، مسئله‌ای دو بعدی برای مکانیک جامدات با دامنه  $\Omega$  که با مرز  $\Gamma$  محصور شده است در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه تقریب MLS مورد استفاده در روش EFG شرط تابع دلتای کرونیگر را ارضاء نمی‌کند می‌بایست از یکسری روش‌هایی برای اعمال شرایط مرزی اساسی استفاده کرد؛ در اینجا از روش ضرایب لاگرانژ (Lagrange multipliers) برای اعمال شرایط مرزی اساسی در روش EFG استفاده شده است. معادله شکل ضعیف گالرکین با استفاده از این روش به صورت زیر می‌باشد :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\lambda^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{u}^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (24-3)$$

به منظور دستیابی به فرمول مجزاشده نهایی، ضرایب لاگرانژ  $\lambda$  موجود در معادله شکل ضعیف بالا که توابعی مجهول از مختصات می‌باشند می‌بایست با استفاده از مقادیر گرهی آن‌ها و توابع شکل، برای گره‌های موجود بر روی مرزهای اساسی درونیابی شوند. نهایتاً با انجام یکسری محاسبات ریاضی از معادله شکل ضعیف (۲۴-۳)، سیستم معادلات زیر به دست آورده می‌شود :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (25-3)$$

این معادله شکل نهایی سیستم معادلات مجزاشده برای روش EFG با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ می‌باشد. در اینجا  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی سراسری و  $\mathbf{f}$  بردار نیروی سراسری می‌باشند؛ این پارامترها و دیگر پارامترهای موجود در این معادله به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_I d\Omega \quad (26-3)$$

$$f_I = \int_{\Gamma_t} \bar{t} \Phi_I d\Gamma_t \quad (27-3)$$

$$G_{IK} = - \int_{\Gamma_u} \Phi_I \mathbf{N}_K d\Gamma_u \quad (28-3)$$

$$q_K = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_K \bar{u} d\Gamma_u \quad (29-3)$$

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (30-3)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{کرنش صفحه‌ای} \\ (31-3) \end{array}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{تنش صفحه‌ای} \\ (32-3) \end{array}$$

در معادلات بالا تابع شکل  $\mathbf{N}_K$  همان درون‌یاب‌های لاگرانژ مورد استفاده در روش اجزاء محدود (FEM) مرسوم در نظر گرفته شده است. با حل معادله (۳-۲۵)، پارامترهای گرهی تغییرمکان مشخص می‌شوند و برای به دست آوردن تغییرمکان‌های حقیقی در هر نقطه از جمله گره‌های میدان در دامنه مسئله می‌بایست از معادله (۳-۲۱) استفاده کرد.

در روش XEFG استفاده شده در این پژوهش، در سیستم معادلات مجزایی که با فرآیند گالریکین به دست می‌آید یک تغییر ایجاد می‌شود و این تغییر در ماتریس B رخ می‌دهد که به دلیل غنی‌سازی انجام شده است و سبب بزرگتر شدن این ماتریس به شکل زیر می‌شود (Nguyen, V. P., Rabczuk, T., Bordas, S., & Duflot, M, 2008)

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}^{std} | \mathbf{B}^{enr}] \quad (3-33)$$

در اینجا  $\mathbf{B}^{std}$  نشان‌دهنده ماتریس  $B$  استاندارد است و  $\mathbf{B}^{enr}$  هم نشان‌دهنده ماتریس  $B$  غنی شده

می‌باشد :

$$\mathbf{B}_I^{enr} = \begin{bmatrix} (\phi_I)_{,x} \Psi_I + \phi_I (\Psi_I)_{,x} & 0 \\ 0 & (\phi_I)_{,y} \Psi_I + \phi_I (\Psi_I)_{,y} \\ (\phi_I)_{,y} \Psi_I + \phi_I (\Psi_I)_{,y} & (\phi_I)_{,x} \Psi_I + \phi_I (\Psi_I)_{,x} \end{bmatrix} \quad (3-34)$$

در اینجا عبارت  $\Psi_I$  می‌تواند تابع غنی‌سازی هویساید  $H(x)$  و یا توابع غنی‌سازی شاخه‌ای  $B$  را

اختیار کند.

### ۳-۸-۳- انتگرال تعاملی یا انتگرال اندرکنش (Interaction Integral)

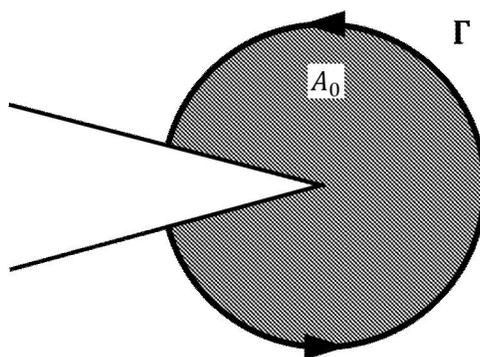
روش انتگرال تعاملی یک ابزار کارآمد برای محاسبه پارامترهای شکست در حالت مود ترکیبی است

(Rao, B. N., & Rahman, S, 2003) که از مفهوم انتگرال جی (J Integral) استفاده می‌کند. در

این بخش، این روش برای مواد همگن و برای یک جسم دارای ترک در حالت دو بعدی شرح داده شده

است. یک جسم دارای ترک همانند شکل (۳-۵) در نظر گرفته شده است که محدوده اطراف نوک

ترک توسط مرز  $\Gamma$  محصور شده است (Pant, M., Singh, I. V., & Mishra, B. K, 2013) :



شکل ۳-۵ محدوده انتگرال‌گیری انتگرال تعاملی (Pant, M., Singh, I. V., & Mishra, B. K, 2013)

انتگرال جی مستقل از مسیر به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$J = \int_{\Gamma} \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (35-3)$$

در این رابطه،  $n_j$  نشان‌دهنده عضو  $\Gamma$  از بردار یکه عمود بر مرز  $\Gamma$  در اطراف نوک ترک است و  $W$

چگالی انرژی کرنشی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$W = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (36-3)$$

به منظور بهبود یافتن انتگرال کنتور یادشده می‌توان معادله (35-3) را به یک شکل دامنه‌ای

معادل با استفاده از تئوری واگرایی تبدیل کرد :

$$J = \int_A \left( \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (37-3)$$

با توجه به این رابطه و شکل (3-5)،  $A$  مساحت داخل مرز  $\Gamma$  می‌باشد و  $q$  تابع وزنی است که دارای

مقدار واحد در نوک ترک، مقدار صفر بر روی مرز دامنه و مقادیر دلخواه در بقیه قسمت‌ها است. برای

محاسبه انتگرال تعاملی دو حالت تعادل برای جسم دارای ترک در نظر گرفته می‌شود؛ حالت ۱

نشان‌دهنده میدان‌های حقیقی مسئله به همراه شرایط مرزی آن است و حالت ۲ نشان‌دهنده

میدان‌های کمکی می‌باشد. با ترکیب دو حالت ذکر شده یک حالت تعادل دیگر حاصل می‌شود که

برای شکل دامنه‌ای انتگرال جی به صورت زیر می‌باشد :

$$J^{(S)} = \int_A \left( (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} - W^{(S)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (38-3)$$

چگالی انرژی کرنشی برای این حالت ترکیبی به صورت زیر می‌باشد :

$$W^{(S)} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \quad (39-3)$$

با بسط دادن معادله (38-3) نتیجه زیر حاصل می‌شود :

$$J^{(S)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \quad (40-3)$$

در این معادله مقدار  $M^{(1,2)}$  که انتگرال تعاملی نامیده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$M^{(1,2)} = \int_A \left( \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (41-3)$$

با توجه به اینکه برای یک جسم جامد الاستیک خطی در شرایط مود ترکیبی مقدار انتگرال جی

با نرخ آزادسازی انرژی برابر است و انجام یکسری محاسبات ریاضی، نتیجه زیر حاصل می‌شود :

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} \left[ \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \right] \quad (42-3)$$

در این معادله مقدار  $E^*$  برای حالت تنش صفحه‌ای برابر  $E$  و برای حالت کرنش صفحه‌ای برابر با

می‌باشد. حال برای محاسبه ضریب شدت تنش مود ۱ مقادیر  $K_I^{(2)} = 1$  و  $K_{II}^{(2)} = 0$  را برای

حالت کمکی اختیار کرده که نتیجه زیر حاصل می‌شود :

$$K_I^{(1)} = \frac{M^{(1,1)} E^*}{2} \quad (43-3)$$

برای محاسبه ضریب شدت تنش مود ۲ نیز به طور مشابه عمل می‌شود. حال با محاسبه مقدار

$M^{(1,2)}$  از معادله (41-3) می‌توان با استفاده از معادلات به دست آمده برای ضرایب شدت تنش،

مقادیر آن‌ها را در مودهای ۱ و ۲ محاسبه کرد.

### ۳-۸-۴- جهت رشد ترک

در این پژوهش رشد ترک در یک جسم الاستیک خطی و در دو بعد به صورت شبه‌استاتیکی بررسی شده است. معیارهای متداولی که برای تعیین جهت رشد ترک استفاده می‌شوند عبارتند از:

۱. معیار بیشینه تنش پیرامونی

۲. معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی

۳. معیار بیشینه نرخ آزادسازی انرژی

در این پژوهش از معیار بیشینه تنش پیرامونی استفاده شده است که به این صورت بیان می‌شود که ترک از نوک آن در امتداد  $\theta_m$  که تنش پیرامونی  $\sigma_{\theta\theta}$  بیشینه می‌باشد گسترش می‌یابد. برای حالت مود ترکیبی عمومی تنش، تنش‌ها در نوک ترک به صورت زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{Bmatrix} K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \\ \frac{1}{2} K_I \sin \theta + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos \theta - 1) \end{Bmatrix} \quad (۴۴-۳)$$

تنش پیرامونی در امتداد گسترش ترک یک تنش اصلی می‌باشد، در نتیجه برای به دست آوردن زاویه گسترش ترک می‌بایست تنش برشی  $\sigma_{r\theta}$  را در رابطه (۴۴-۳) برابر صفر قرار داد:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \frac{1}{2} K_I \sin \theta + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] = 0 \quad (۴۵-۳)$$

این معادله منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود :

$$K_I \sin \theta_m + K_{II} (3 \cos \theta_m - 1) = 0 \quad (3-46)$$

پس از انجام محاسبات ریاضی و حل معادله حاصل شده، نهایتاً رابطه‌ی زیر به دست می‌آید :

$$\theta_m = 2 \tan^{-1} \left[ \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \quad (3-47)$$

در اینجا  $\theta_m$  نشان‌دهنده زاویه گسترش ترک می‌باشد و در تمام عبارات بالا،  $r$  و  $\theta$  نشان‌دهنده مختصات قطبی محلی واقع در نوک ترک می‌باشند.

### ۳-۸-۵- روش مجموعه تراز (LSM) Level Set Method

روش مجموعه تراز (Osher, S., & Sethian, J. A, 1988) یک روش محاسباتی مناسب برای مدل‌کردن و دنبال‌کردن حرکت یک ناپیوستگی می‌باشد. در این روش ناپیوستگی مورد نظر با تابع مجموعه تراز نشان داده می‌شود. مقدار این تابع مجموعه تراز بر روی ناپیوستگی صفر است، در یک طرف ناپیوستگی مثبت و در طرف دیگر آن منفی می‌باشد.

روش مجموعه تراز اولین بار توسط (Stolarska, M., Chopp, D. L., Moës, N., & Belytschko, T, 2001) برای مسائل مربوط به رشد ترک مورد استفاده قرار گرفت. در این روش به طور کلی دو تابع مجموعه تراز برای تعریف موقعیت یک ترک و مدل‌سازی و دنبال‌کردن مسیر رشد ترک لازم می‌باشد، یکی از این توابع برای نمایش مسیر بدنه ترک و دیگری برای دنبال‌کردن مسیر نوک ترک است؛ اولین مجموعه تراز، مجموعه تراز نرمال  $\Phi_N$  می‌باشد که به صورت فاصله نرمال هر نقطه از دامنه از سطح ترک تعریف می‌شود. دومین مجموعه تراز، مجموعه تراز مماسی  $\Phi_T$  می‌باشد که به صورت فاصله مماسی هر نقطه از نوک ترک تعریف می‌شود. ترک AB در داخل دامنه مطابق



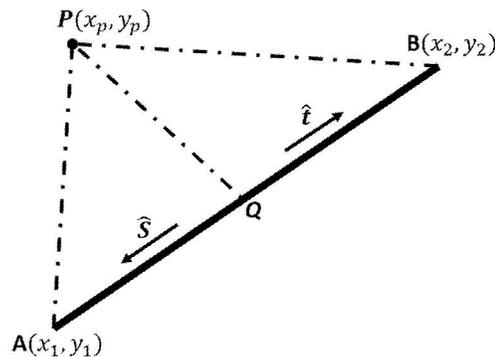
شکل (۳-۶) در نظر گرفته می‌شود به نحوی که A و B نشان‌دهنده دو نوک ترک باشند (Jameel, A., & Harmain, G. A, 2015). اگر P نشان‌دهنده هر نقطه گرهی در دامنه باشد مجموعه تراز نرمال این گره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_N = PQ = \frac{(y_1 - y_2)x_p + (x_2 - x_1)y_p + x_1y_2 - x_2y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \quad (48-3)$$

مجموعه ترازهای مماسی مربوط به دو نوک A و B نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Phi_{TB} = QB = \overline{PB} \cdot \hat{t} \quad , \quad \Phi_{TA} = QA = \overline{PA} \cdot \hat{s} \quad (49-3)$$

که در این روابط،  $\hat{t}$  و  $\hat{s}$  به ترتیب بردارهای یکه در راستای AB و BA می‌باشند.



شکل ۳-۶ نمایش مختصات ترک AB و نقطه P (Jameel, A., & Harmain, G. A, 2015)

در این شیوه، مسیر بدنه ترک با استفاده از تابع مجموعه تراز صفر  $\Phi_N$  نمایش داده می‌شود.

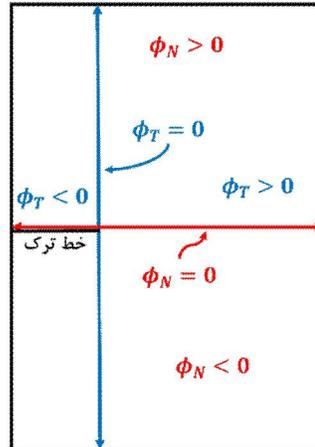
بنابراین ترک در موقعیتی است که شرایط رابطه زیر حاکم باشد:

$$\begin{cases} \Phi_N = 0 \\ \Phi_T \leq 0 \end{cases} \quad (50-3)$$

مقادیر مجموعه‌های تراز را می‌بایست بعد از هر مرحله از رشد ترک بروزرسانی کرد. نمایش ترک

به کمک روش مجموعه تراز، انتخاب گره‌های غنی‌شده را آسان می‌سازد. نمایش توابع مجموعه تراز را

برای یک ترک لبه‌ای می‌توان در شکل (۷-۳) مشاهده کرد (Jameel, A., & Harmain, G. A, 2015):



شکل ۷-۳ نمایش مجموعه ترازهای نرمال  $\phi_N$  و مماسی  $\phi_T$  (Jameel, A., & Harmain, G. A, 2015)

## فصل چهارم

مدل سازی عددی ترک و گسترش آن

با روش XEFG

## ۴- مدل سازی عددی ترک و گسترش آن با روش XEFG

### ۴-۱- مقدمه

در این فصل به تحلیل و بررسی مدل سازی ترک و روند گسترش آن پرداخته شده است؛ در ابتدا مثال‌هایی دارای شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری متفاوت برای یک ترک ساکن ارزیابی می‌شوند و در ادامه مثال‌هایی که نشان‌دهنده مسیر گسترش ترک‌ها می‌باشند نمایش داده می‌شوند. همچنین نتایج حاصل از مثال‌های ذکر شده با نتایج موجود در منابع مقایسه شده‌اند که نشان از صحت پژوهش انجام شده دارند.

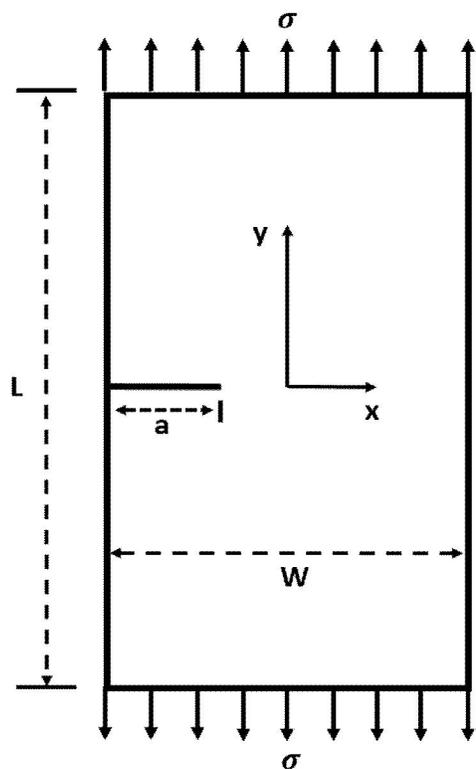
### ۴-۲- مثال‌های عددی

برای حل انتگرال‌های موجود در محاسبات از جمله ماتریس سختی و بردار نیرو از روش گوسی استفاده شده است که لازمه آن ایجاد یک شبکه پس‌زمینه در دامنه مسئله می‌باشد؛ در کار انجام شده از ۱۶ نقطه گوسی در هر سلول انتگرال‌گیری استفاده شده است. همچنین قابل ذکر است که از مجموعه نودهایی که به صورت یکنواخت در دامنه مسئله پراکنده شده‌اند در تمام مثال‌ها استفاده شده است. همه ترک‌ها شبه‌استاتیکی فرض شده‌اند.

### ۴-۲-۱- بررسی ترک‌های ساکن

#### ۴-۲-۱-۱- ورق دارای ترک لبه‌ای ساکن تحت بارگذاری کششی

یک ورق مستطیل شکل با ابعاد  $W \times L$  ( $16 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ ) که تحت بارگذاری کششی به شدت  $1 \text{ MPa}$   $\sigma = 1$  است و دارای ترک لبه‌ای در میانه خود می‌باشد، مطابق شکل (۴-۱) در نظر گرفته می‌شود (Nguyen, N. T., Bui, T. Q., Zhang, C., & Truong, T. T, 2014).



شکل ۱-۴ ورق مستطیلی دارای ترک لبه‌ای تحت بارگذاری کششی (Nguyen, N. T., Bui, T. Q., Zhang, C., & Truong, T. T, 2014)

مقدار  $a$  نشان‌دهنده طول ترک است، مدول الاستیسیته مصالح  $E = 1000 \text{ GPa}$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.3$  می‌باشند. مقادیر ضرایب شدت تنشی که در این مقاله با استفاده از روش XEFG به دست آمده است با جواب‌های تحلیلی موجود در (EE, Gdoutos, 2005) که توسط فرمول زیر حاصل می‌شوند مقایسه شده است :

$$K_I^{\text{exact}} = \sigma \sqrt{\pi a} \left[ 1.12 - 0.23 \frac{a}{W} + 10.55 \left( \frac{a}{W} \right)^2 - 21.72 \left( \frac{a}{W} \right)^3 + 30.39 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right] \quad (1-4)$$

نسبت‌های مختلف طول ترک به عرض ورق مورد بررسی قرار گرفته که نتایج حاصله از روش XEFG و فرمول تحلیلی به همراه خطای موجود در روش حاضر در جدول (۴-۱) نشان داده شده است :

جدول ۴-۱ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود اول به‌دست‌آمده از روش XEFG با مقادیر تحلیلی آن

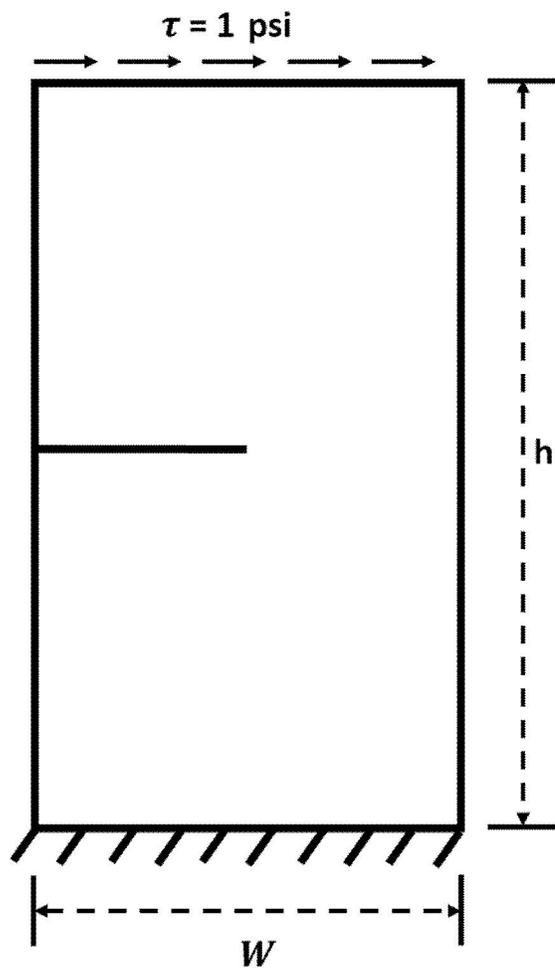
درصد خطا (%)	$K_I$ با استفاده از روش XEFG و مجموعه گره‌های ۲۴×۴۰	درصد خطا (%)	$K_I$ با استفاده از روش XEFG و مجموعه گره‌های ۱۵×۳۰	$K_I$ تحلیلی	a/w
۱۲٫۹۱	۳٫۴۶	۸٫۴۷	۳٫۳۳	۳٫۰۷	۰٫۲
۶٫۸۷	۴٫۸۷	۵٫۲۶	۴٫۸	۴٫۵۶	۰٫۳
۳٫۹۹	۶٫۹۳	۱۷٫۴۶	۷٫۸۳	۶٫۶۷	۰٫۴
۹٫۶۵	۱۰٫۹۸	۹٫۷۲	۱۰٫۹۹	۱۰٫۰۲	۰٫۵
۵٫۵۴	۱۶٫۵	۷٫۷۱	۱۶٫۸۴	۱۵٫۶۴	۰٫۶

در این جدول واحد  $K_I$  برابر  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  می‌باشد. همچنین قابل ذکر است در این مثال حالت کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.

#### ۴-۲-۱-۲-۴- ورق دارای ترک لبه‌ای ساکن تحت بارگذاری برشی

یک ورق مستطیل شکل با ابعاد  $w \times h$  (۷ in × ۱۶ in) که تحت بارگذاری برشی به شدت ۱ psi است و دارای ترک لبه‌ای در میانه خود می‌باشد، مطابق شکل (۴-۲) در نظر گرفته می‌شود. در این مثال طول ترک برابر با نصف عرض ورق اختیار شده است ( $a = \frac{w}{2} = 3.5 \text{ in}$ ).

همچنین مدول الاستیسیته مصالح  $E = 3 \times 10^4 \text{ psi}$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.25$  می‌باشند و شرایط کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.



شکل ۲-۴ ورق مستطیلی به همراه ترک لبه‌ای تحت بارگذاری برشی (Fleming, M., Chu, Y. A., Moran, B.,

Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L, 1997)

در جداول (۲-۴) و (۳-۴) مقادیر ضرایب شدت تنش برای دو مود ۱ و ۲ و دو نوع شبکه گرهی

متفاوت به همراه حل دقیق موجود در منابع برای مقایسه نتایج حاصله با آن‌ها ارائه شده‌اند :

جدول ۲-۴ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود اول به دست آمده از روش XEFG با مقدار تحلیلی آن

$K_I$ تحلیلی	$K_I$ با استفاده از روش XEFG و مجموعه گره‌های ۱۱×۲۹	درصد خطا (%)	$K_I$ با استفاده از روش XEFG و مجموعه گره‌های ۵×۱۱	درصد خطا (%)
۳۴	۳۴٫۱۱	۰٫۳۲	۳۴٫۰۲	۰٫۰۶

جدول ۳-۴ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود دوم به دست آمده از روش XEFG با مقدار تحلیلی آن

$K_{II}$ تحلیلی	$K_{II}$ با استفاده از روش XEFG و مجموعه گره‌های ۱۱×۲۹	درصد خطا (%)	$K_{II}$ با استفاده از روش XEFG و مجموعه گره‌های ۵×۱۱	درصد خطا (%)
۴٫۵۵	۵	۹٫۸۹	۴٫۸۷	۷٫۰۳

در این جداول واحد  $K_I$  و  $K_{II}$  برابر  $\text{psi}\sqrt{\text{in}}$  می‌باشد.

#### ۴-۲-۱-۳- ورق دارای ترک لبه دوگانه ساکن تحت بارگذاری کششی

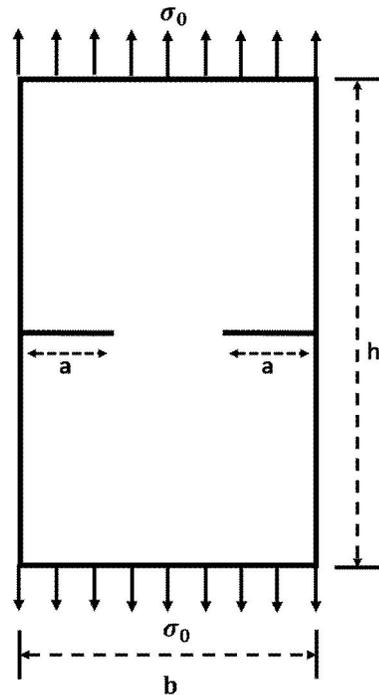
یک ورق مستطیل شکل با ابعاد  $b \times h$  (۱۶ m × ۸ m) که تحت بارگذاری کششی به شدت ۱ MPa

$\sigma =$  است و دارای دو ترک لبه‌ای در دو طرف و در میانه خود به صورت متقارن می‌باشد، مطابق شکل

(۳-۴) در نظر گرفته می‌شود. در این مثال مدول الاستیسیته مصالح  $E = 1000 \text{ GPa}$  و ضریب

پواسون  $\nu = 0/3$  می‌باشند و شرایط کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.





شکل ۳-۴ ورق دارای ترک لبه دوگانه ساکن (Mohammadi, S, 2008)

مقدار تحلیلی ضریب شدت تنش مود یک در این حالت با استفاده از فرمول (۲-۴) به دست می‌آید:

$$K_I = \left[ 1.12 + 0.43 \left( \frac{a}{b} \right) - 4.79 \left( \frac{a}{b} \right)^2 + 15.46 \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right] \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (2-4)$$

مقادیر مختلف طول ترک (a) مورد بررسی قرار گرفته است که نتایج حاصله به همراه خطای موجود

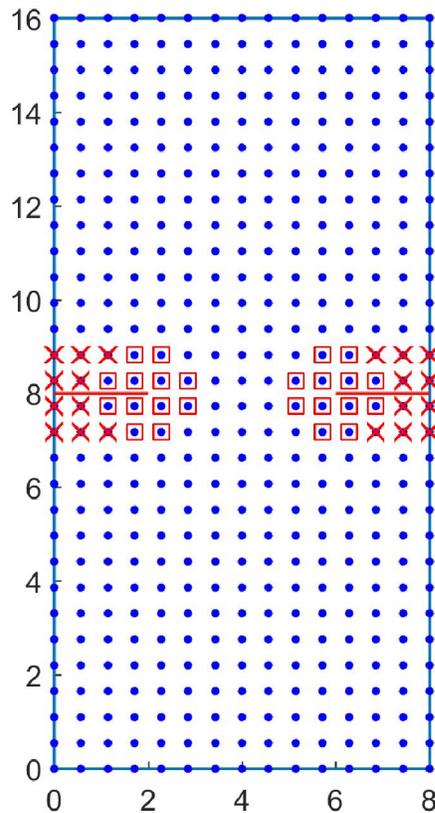
در روش حاضر برای ۲ مجموعه گره متفاوت در جدول (۴-۴) نشان داده شده است :

جدول ۴-۴ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود اول به دست آمده از روش XEFG با مقادیر تحلیلی آن

درصد خطا (%)	$K_I$ با استفاده از روش XEFG و مجموعه گره‌های ۲۴×۴۰	درصد خطا (%)	$K_I$ با استفاده از روش XEFG و مجموعه گره‌های ۱۵×۳۰	$K_I$ تحلیلی	a
۶٫۵	۲٫۱۳	۸٫۵	۲٫۱۷	۲	۱
۱۰٫۹	۲٫۷۳	۲۱٫۹	۳	۲٫۴۶	۱٫۵
۴٫۷	۳٫۰۷	۷٫۵	۳٫۱۵	۲٫۹۲	۲
۴٫۲	۳٫۶۷	۱۳	۳٫۹۸	۳٫۵۲	۲٫۵

در شکل (۴-۴) موقعیت ترک‌ها و گره‌های غنی‌شده اطراف آن‌ها برای حالتی که  $a = 2\text{m}$  می‌باشد

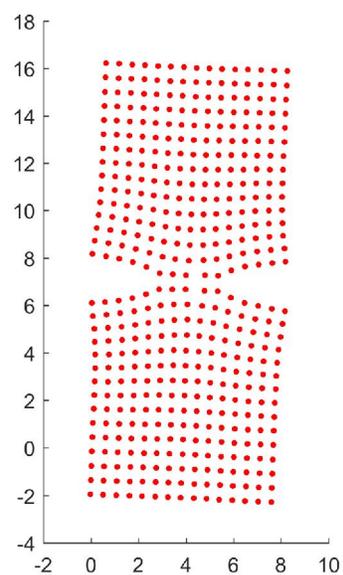
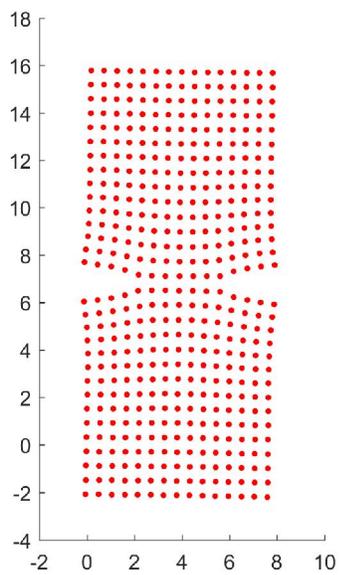
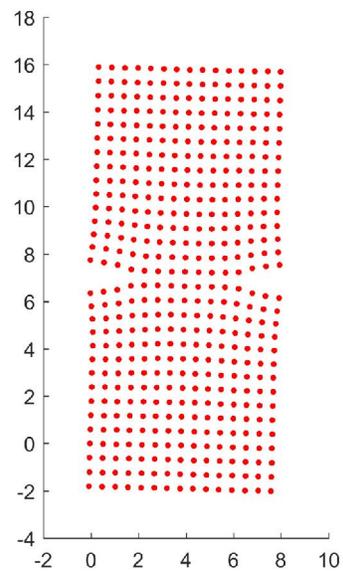
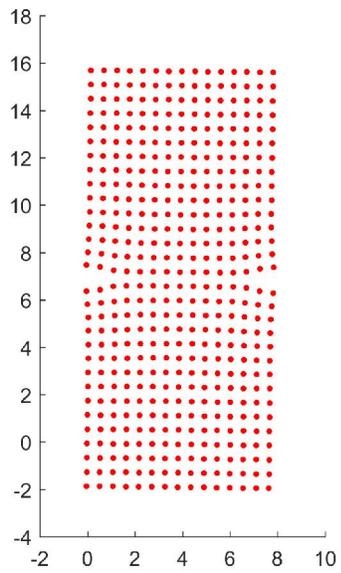
و از مجموعه گره‌های  $15 \times 30$  استفاده شده است، مشاهده می‌شود:



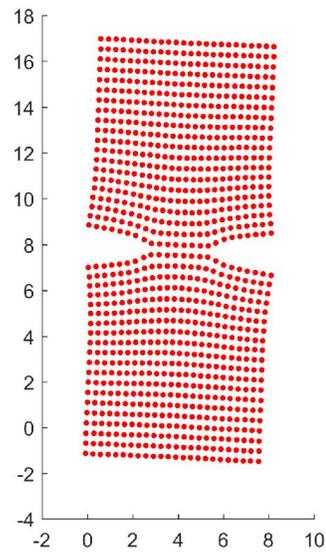
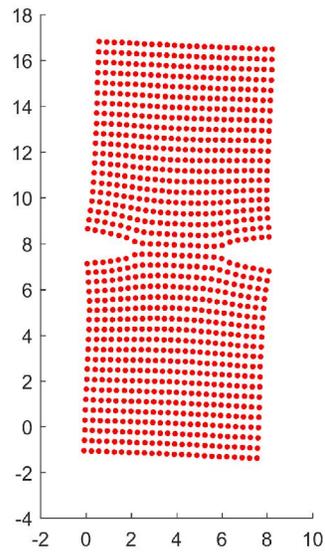
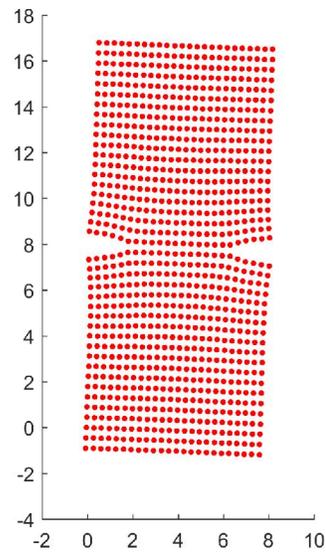
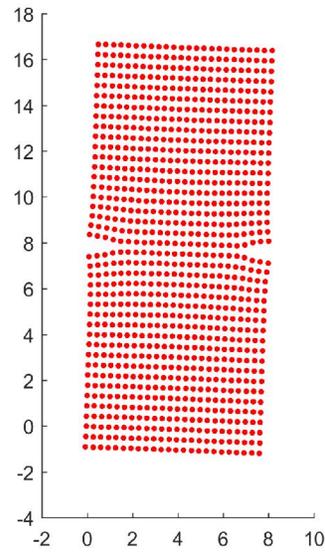
شکل ۴-۴ موقعیت ترک‌ها و گره‌های غنی‌شده اطراف آن‌ها

تغییر شکل‌های جسم نیز برای  $4$  مقدار مختلف  $a$  (ذکر شده در جدول (۴-۴))، در شکل‌های (۴-۴)

(۵) و (۶-۴) به ترتیب برای مجموعه گره‌های  $15 \times 30$  و مجموعه گره‌های  $24 \times 40$  نشان داده شده است:



شکل ۴-۵ تغییرشکل‌های ورق دارای ترک لبه دوگانه با مجموعه گره‌های  $15 \times 30$

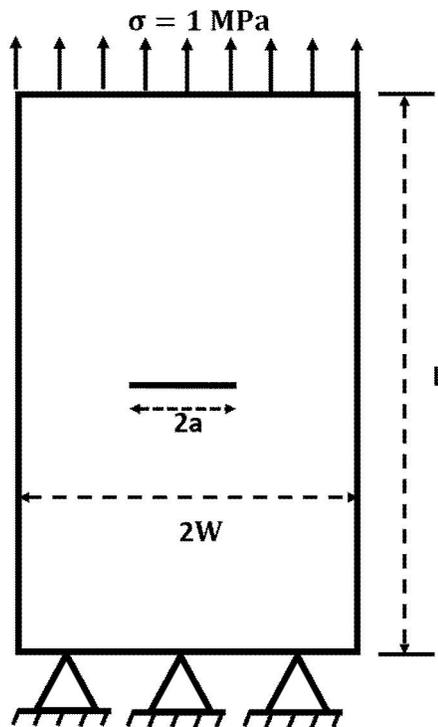


شکل ۶-۴ تغییر شکل‌های ورق دارای ترک لبه دوگانه با مجموعه گره‌های  $24 \times 40$

#### ۴-۱-۲-۴- ورق دارای ترک وسط ساکن تحت بارگذاری کششی

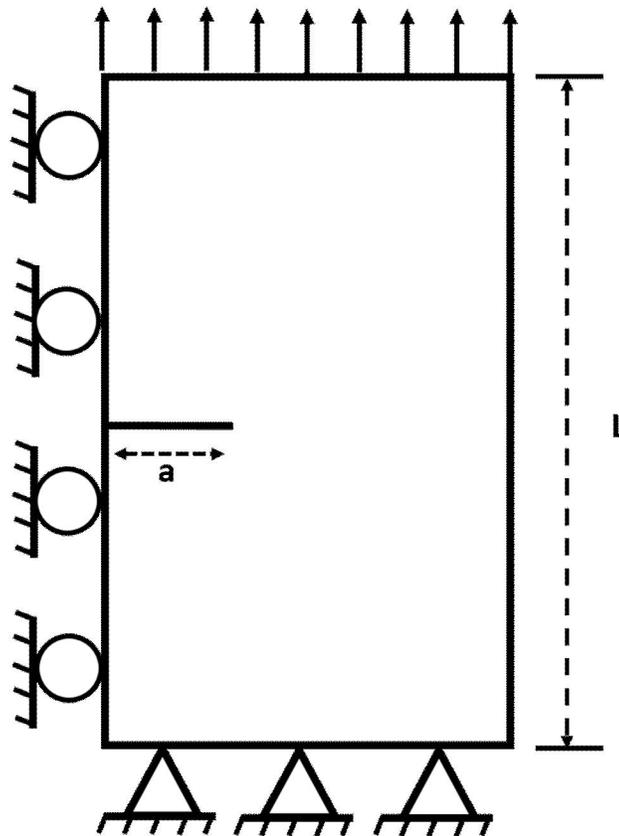
در این مثال به بررسی ترک موجود در وسط ورقی که از وجه بالایی تحت تنش کششی قرار دارد و در وجه پایین نیز دارای تکیه‌گاه می‌باشد پرداخته شده است. مقدار تنش کششی ۱ MPa می‌باشد، مدول الاستیسیته مصالح  $E = 210 \text{ GPa}$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.3$  می‌باشند و شرایط کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. همچنین برای حل این مسئله، از مجموعه نودهای  $20 \times 40$  که به صورت یکنواخت در دامنه مسئله پراکنده شده‌اند استفاده شده است.

در شکل (۷-۴) می‌توان این شرایط مرزی را مشاهده کرد :



شکل ۷-۴ ورق دارای ترک وسط ساکن تحت بارگذاری کششی (Muthu, N., Maiti, S. K., Falzon, B. G., & Guimatsia, I, 2013)

در این شکل، ابعاد ورق  $2W \times L$  ( $1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ ) می‌باشد و مقدار  $2a$  نشان‌دهنده طول ترک است. در اینجا با توجه به تقارن موجود در شکل، در مدل‌سازی انجام شده در این پژوهش، نصف شکل در نظر گرفته شده است و مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد که حالتی مشابه ترک لبه‌ای می‌باشد و فقط دارای شرایط تکیه‌گاهی متفاوت است. در شکل (۸-۴) می‌توان این موضوع را مشاهده کرد :



شکل ۸-۴ ساده شده ورق دارای ترک وسط ساکن به دلیل تقارن (Tuán, B. M., Yunfei, C, 2014)

برای نسبت‌های مختلف طول ترک به عرض ورق در شکل ساده شده ثانویه، نتایج حاصل از روش XEFG و مقادیر تحلیلی موجود در منابع به همراه خطای موجود در روش حاضر در جدول (۴-۵) نشان داده شده است :

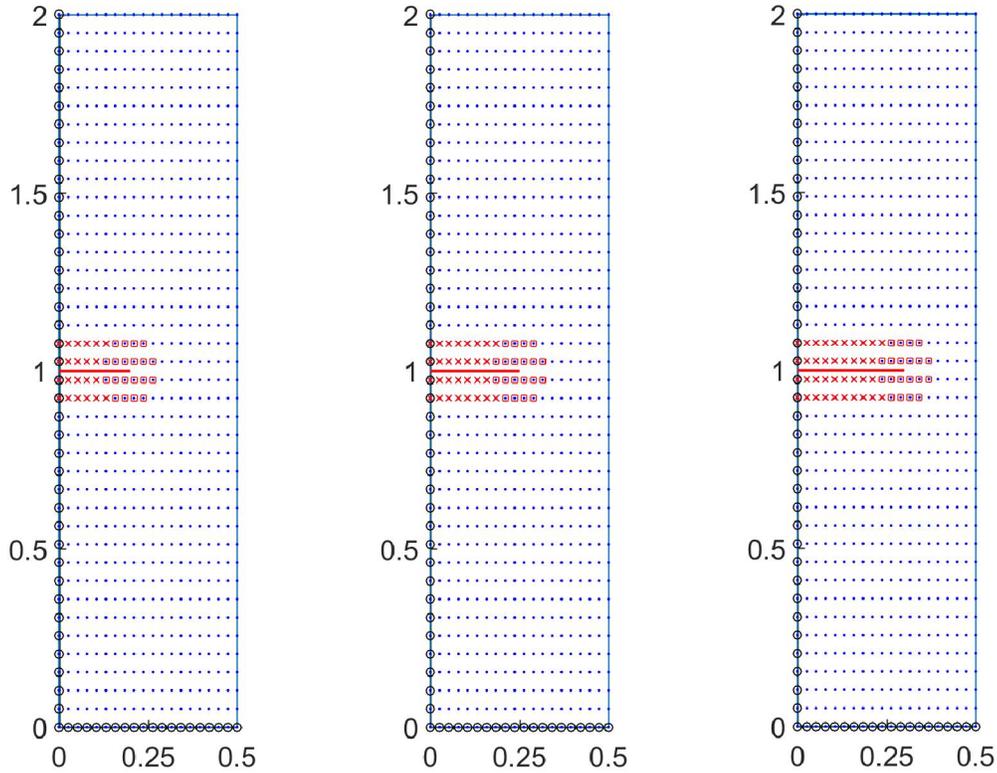
جدول ۴-۵ مقایسه مقادیر ضریب شدت تنش مود اول به دست آمده از روش XEFG با مقادیر تحلیلی آن

درصد خطا (%)	$K_I$ با استفاده از روش XEFG و مجموعه گره‌های $20 \times 40$	$K_I$ تحلیلی	$a/w$
-۱,۲۵	۰,۳۹۴	۰,۳۹۹	۰,۱
۴,۰۱	۰,۵۹۷	۰,۵۷۴	۰,۲
۰,۱۴	۰,۷۲۸	۰,۷۲۷	۰,۳
-۴,۸۹	۰,۸۳۷	۰,۸۸	۰,۴
-۱,۹۹	۱,۰۳۲	۱,۰۵۳	۰,۵
-۰,۷۹	۱,۲۵۵	۱,۲۶۵	۰,۶
-۳,۴	۱,۵۰۵	۱,۵۵۸	۰,۷

در این جدول واحد  $K_I$  برابر  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  می‌باشد.

در شکل (۴-۹) می‌توان برای مقادیر  $a/w = 0/4, 0/5, 0/6$  از ترک مذکور در حالت شکل ساده

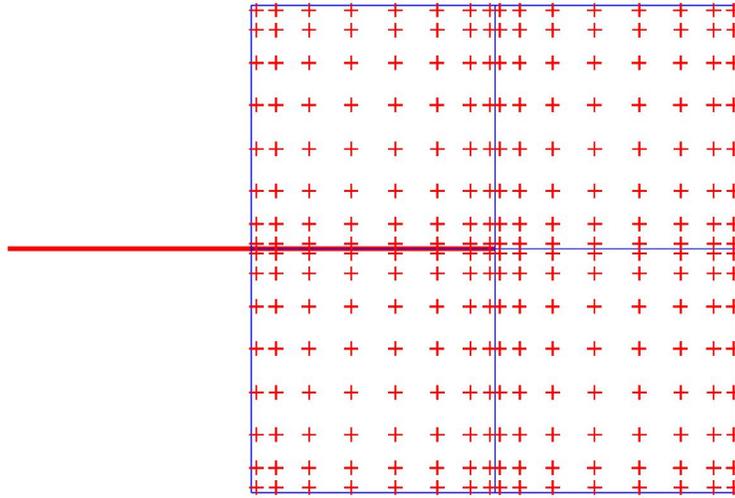
شده، موقعیت ترک را به همراه گره‌های غنی شده اطراف آن مشاهده کرد :



شکل ۴-۹ موقعیت ترک و گره‌های غنی‌شده اطراف آن برای حالات مختلف  $\frac{a}{w}$

همان‌طور که در قسمت‌های قبل ذکر شد در این پژوهش برای حل انتگرال‌های موجود در محاسبات مربوط به پارامترهای معادلات مجزای نهایی، یک شبکه پس‌زمینه ایجاد شده است؛ برای محاسبات مربوط به دامنه کلی مسئله از ۱۶ نقطه گوسی (به صورت  $4 \times 4$  نقطه گوسی) در هر سلول استفاده شده است و همچنین برای محاسبه انتگرال اندرکنش در قسمت نوک ترک از ۶۴ نقطه گوسی (به صورت  $8 \times 8$  نقطه گوسی) برای افزایش دقت جواب حاصله استفاده شده است. در شکل (۴-۱۰) دامنه‌ای که در اطراف نوک ترک برای محاسبه ضرایب شدت تنش استفاده می‌شود به همراه نقاط گوسی آن نمایش داده می‌شود :





شکل ۱۰-۴ نمایش نقاط گوسی در دامنه اطراف نوک ترک

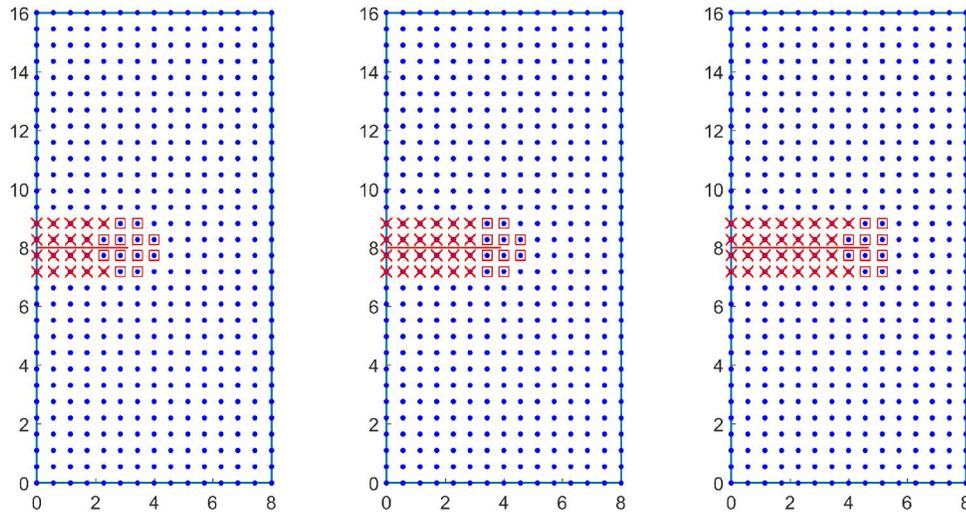
#### ۴-۲-۲- بررسی رشد ترک‌ها

##### ۴-۲-۲-۱- رشد ترک لبه‌ای موجود در میانه جسم و در حالت بدون تکیه‌گاه

در این قسمت رشد ترک لبه‌ای که در بخش ۴\_۲\_۱\_۱ ارائه شد، در حالتی که از مجموعه نوده‌های  $15 \times 30$  که به صورت یکنواخت در دامنه مسئله پراکنده شده‌اند استفاده شده است و مقدار  $a$  در ابتدا برابر  $2/6$  m می‌باشد مورد بررسی قرار گرفته است. در هر مرحله از رشد ترک ( $\Delta a = a / 10$ ) به عنوان طول رشد ترک در نظر گرفته شده است. همچنین در این مثال حالت کرنش صفحه‌ای فرض شده است. مدول الاستیسیته مصالح  $E = 1000$  GPa و ضریب پواسون  $\nu = 0/3$  می‌باشند.

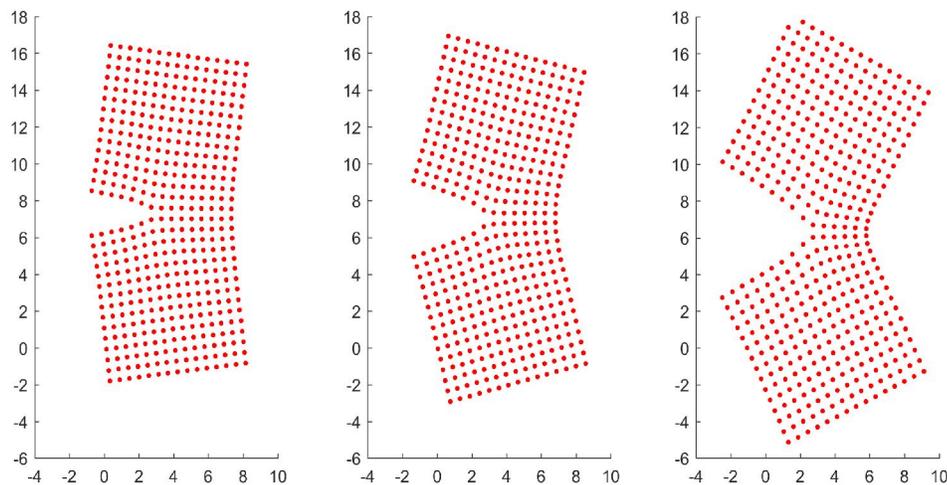
در شکل (۴-۱۱) موقعیت ترک و گره‌های غنی‌شده اطراف آن بعد از ۳، ۶ و ۹ مرحله مشاهده می‌شود:

شود:



شکل ۴-۱۱ موقعیت ترک و گره‌های غنی‌شده اطراف آن در مراحل سوم، ششم و نهم از رشد ترک

تغییرشکل‌های جسم نیز در مراحل ۳، ۶ و ۹ در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است :



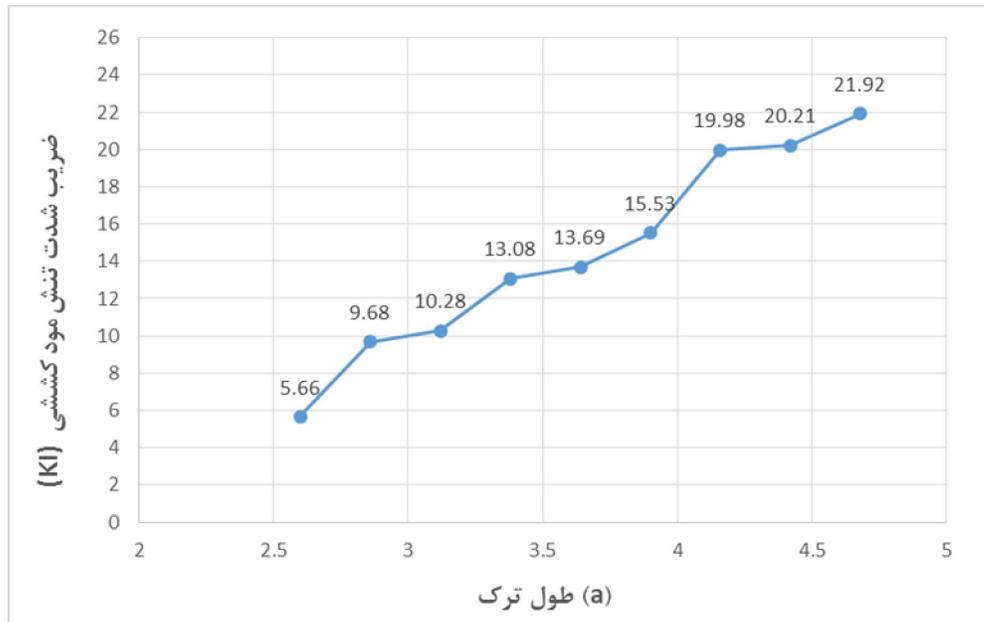
شکل ۴-۱۲ تغییرشکل‌ها در مراحل سوم، ششم و نهم از رشد ترک

با توجه به شکل واضح است که مود ترک حاکم در این مثال مود ۱ یعنی مود کششی است و در

نتیجه فقط ضریب شدت تنش مود ۱ یعنی  $K_I$  در این مثال وجود خواهد داشت.

همچنین تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ با طول ترک را نیز می‌توان در شکل (۴-۱۳) مشاهده

کرد:



شکل ۴-۱۳ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ با طول ترک

همان‌طور که از نتایج پیداست با افزایش طول ترک، ضریب شدت تنش مود ۱ ( $K_I$ ) نیز افزایش

می‌یابد و این موضوع نشان می‌دهد که این ترک ناپایدار می‌باشد و نهایتاً موجب گسیختگی نمونه

می‌شود.

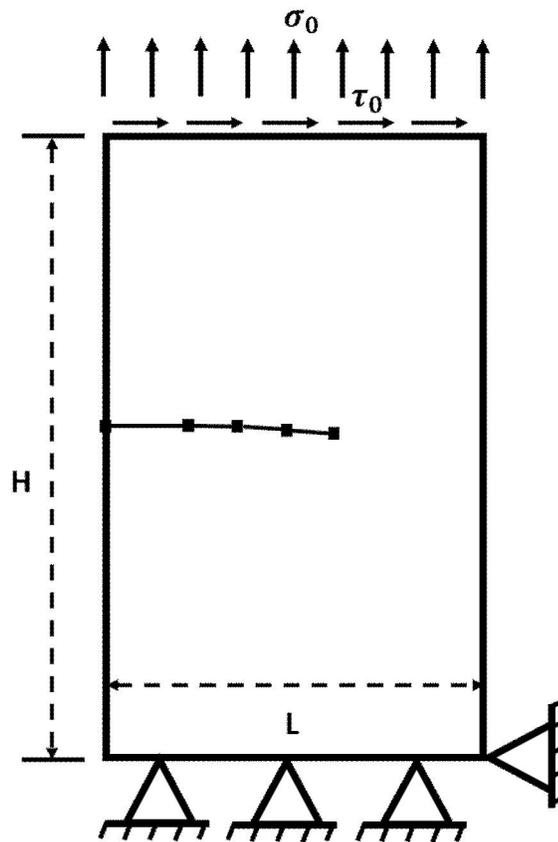
۴-۲-۲-۲-۴- رشد ترک لبه‌ای موجود در میانه جسم و در حالت بار ترکیبی به همراه تکیه‌گاه

در این قسمت به بررسی رشد ترک لبه‌ای که از وجه بالایی تحت تنش ترکیبی کششی و برشی

قرار دارد و در وجه پایین نیز دارای تکیه‌گاه می‌باشد پرداخته شده است. مقدار تنش کششی

۵۰ MPa و مقدار تنش برشی ۲۵ MPa می‌باشد. در شکل (۴-۱۴) می‌توان این شرایط مرزی را

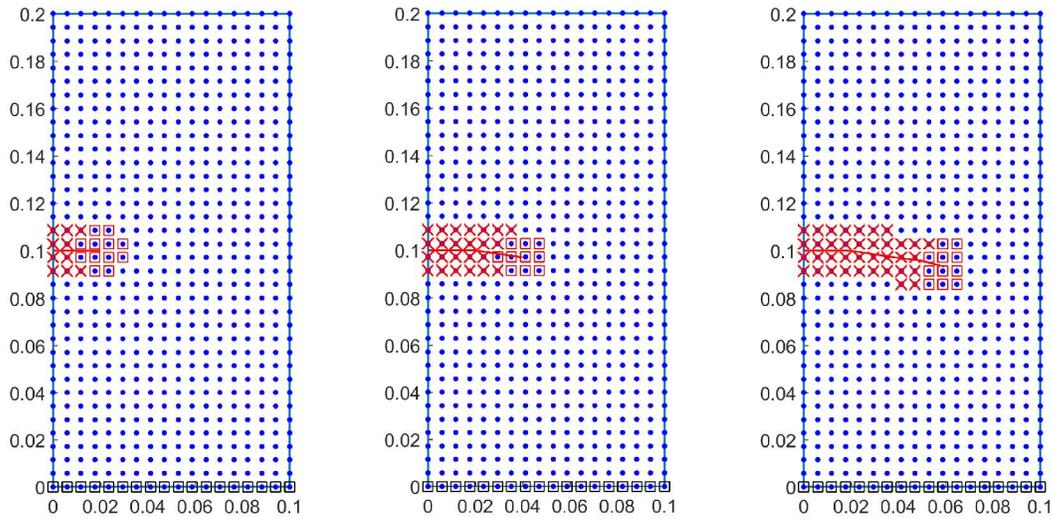
مشاهده کرد :



شکل ۴-۱۴ رشد ترک لبه‌ای موجود در میانه جسم با بار ترکیبی (Pant, M., Singh, I. V., & Mishra, B. K., 2013)

در این مثال ابعاد ورق  $L \times H$  ( $0.2 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ ) است و همچنین از مجموعه نودهای  $18 \times 36$  که به صورت یکنواخت در دامنه مسئله پراکنده شده‌اند استفاده شده است. مقدار طول اولیه ترک (a) برابر  $0.2 \text{ m}$  می‌باشد و در هر مرحله از رشد ترک،  $\Delta a = 0.01 \text{ m}$  به عنوان طول رشد ترک در نظر گرفته شده است. همچنین در این مثال مدول الاستیسیته مصالح  $E = 200 \text{ GPa}$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.3$  می‌باشند و شرایط تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.

در شکل (۴-۱۵) می‌توان در چند مرحله از رشد ترک لبه‌ای مذکور، موقعیت ترک را به همراه گره‌های غنی‌شده اطراف آن در مراحل ۱، ۳ و ۵ مشاهده کرد :



شکل ۴-۱۵ موقعیت ترک و گره‌های غنی‌شده اطراف آن در مراحل ۱، ۳ و ۵ از رشد ترک

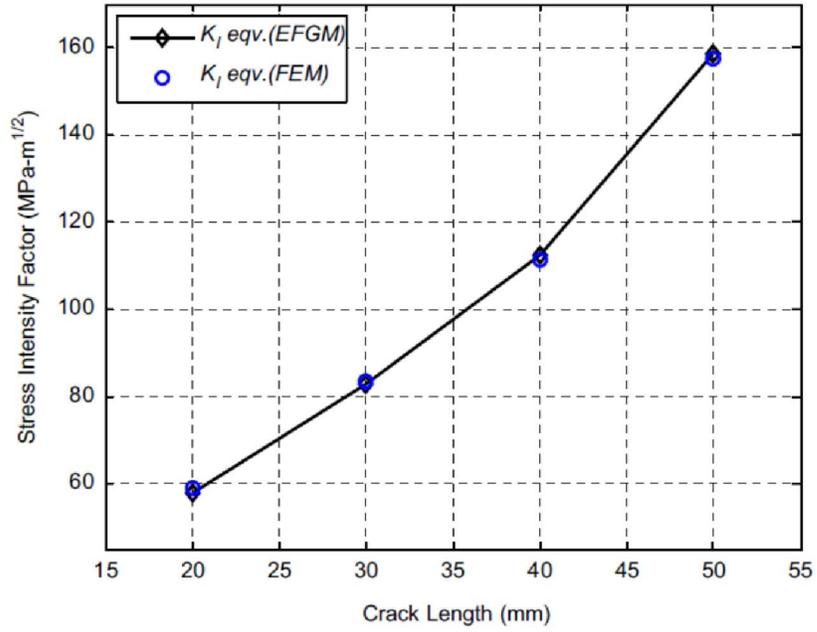
در این مثال برای مقایسه نتایج حاصله با نتایج موجود در مرجع مورد استفاده، پارامتری به نام ضریب شدت تنش مود ۱ معادل تعریف می‌شود؛ با توجه به فرمول (۳-۴۴) می‌توان مقدار  $\sigma_{\theta\theta}$  را بر حسب ضریب شدت تنش مود ۱ معادل ( $K_{Ieq}$ ) نوشت که یک معیار و اندازه واحد برای میدان تنش مود ترکیبی فراهم می‌کند:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right] = \frac{K_{Ieq}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3-4)$$

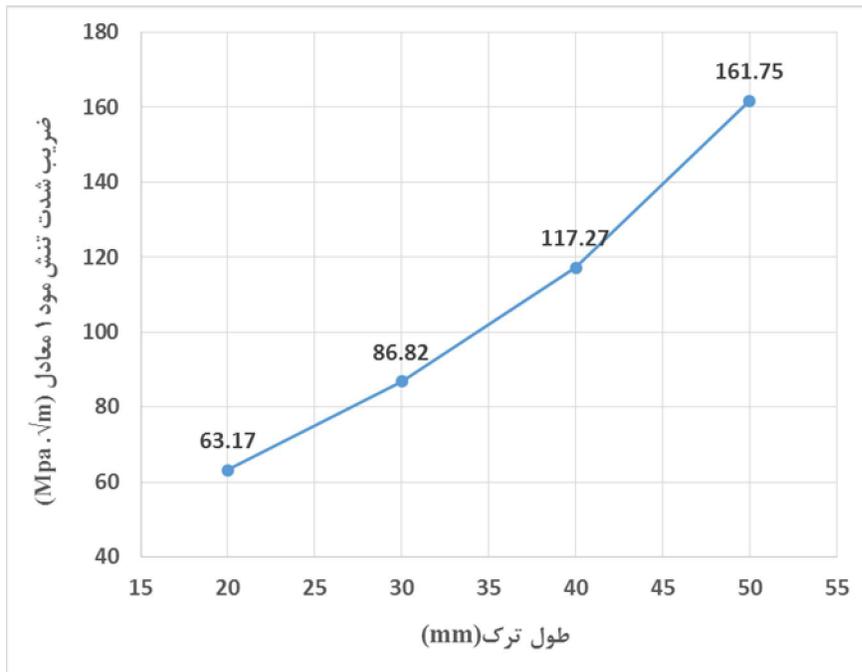
که از این رابطه نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$K_{Ieq} = K_I \cos^3\left(\frac{\theta_m}{2}\right) - 3K_{II} \cos^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_m}{2}\right) \quad (4-4)$$

تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک را می‌توان در شکل‌های (۴-۱۶) و (۴-۱۷) که به ترتیب حاصل از مرجع و پژوهش حاضر می‌باشند، مشاهده کرد که از مقایسه آن‌ها با یکدیگر می‌توان صحت پژوهش انجام شده را نشان داد:



شکل ۴-۱۶ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک (Pant, M., Singh, I. V., & Mishra, B. K, 2013)

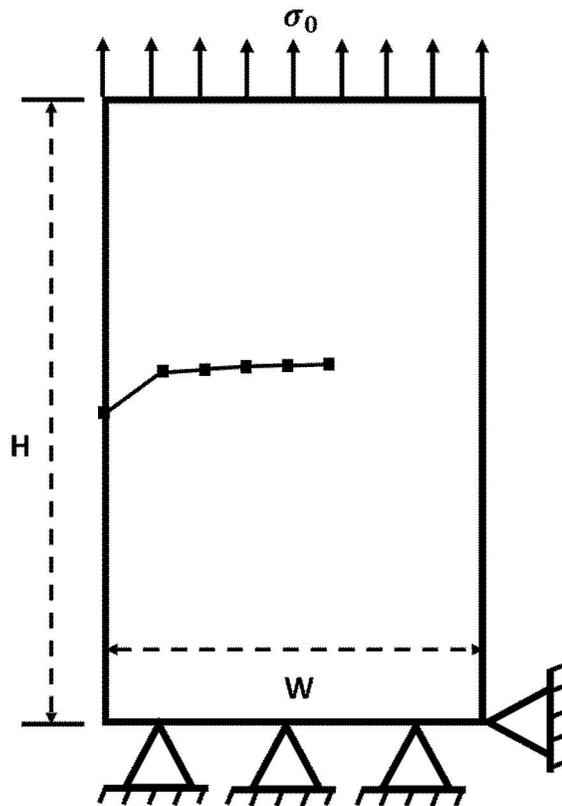


شکل ۴-۱۷ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک به دست آمده از پژوهش حاضر

#### ۴-۲-۳- رشد ترک لبه‌ای زاویه‌دار تحت بار کششی به همراه تکیه‌گاه

در این قسمت به بررسی رشد ترک لبه‌ای زاویه‌دار که از وجه بالایی تحت تنش کششی قرار دارد و در وجه پایین نیز دارای تکیه‌گاه می‌باشد پرداخته شده است. در این مثال مدول الاستیسیته مصالح  $E = 200 \text{ GPa}$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.3$  می‌باشند و شرایط تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. همچنین از مجموعه نودهای  $13 \times 35$  که به صورت یکنواخت در دامنه مسئله پراکنده شده‌اند استفاده شده است.

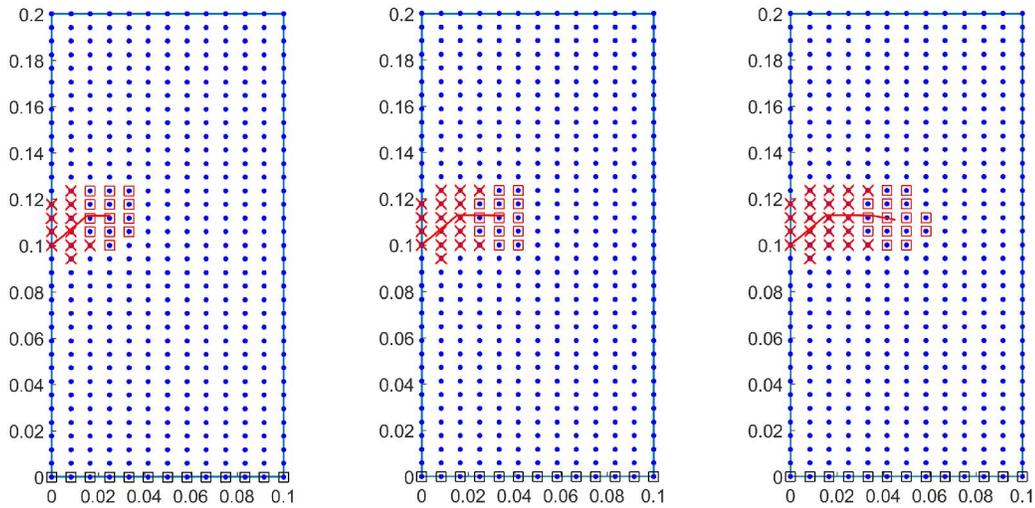
در شکل (۴-۱۸) می‌توان شرایط مرزی ذکر شده را مشاهده کرد :



شکل ۴-۱۸ رشد ترک لبه‌ای زاویه‌دار تحت بار کششی (Pant, M., Singh, I. V., & Mishra, B. K., 2013)

در این شکل ابعاد ورق  $W \times H$  ( $0.2 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ ) می‌باشد، زاویه ترک اولیه نسبت به افق  $40^\circ$  درجه است و مقدار تنش کششی  $100 \text{ MPa}$  می‌باشد؛ مقدار طول اولیه ترک (a) برابر  $0.02 \text{ m}$  است و در هر مرحله از رشد ترک،  $\Delta a = 0.01 \text{ m}$  به عنوان طول رشد ترک در نظر گرفته شده است.

در شکل (۴-۱۹) می‌توان در چند مرحله از رشد ترک لبه‌ای مذکور، موقعیت ترک را به همراه گره‌های غنی‌شده اطراف آن در مراحل ۲، ۳ و ۴ مشاهده کرد :

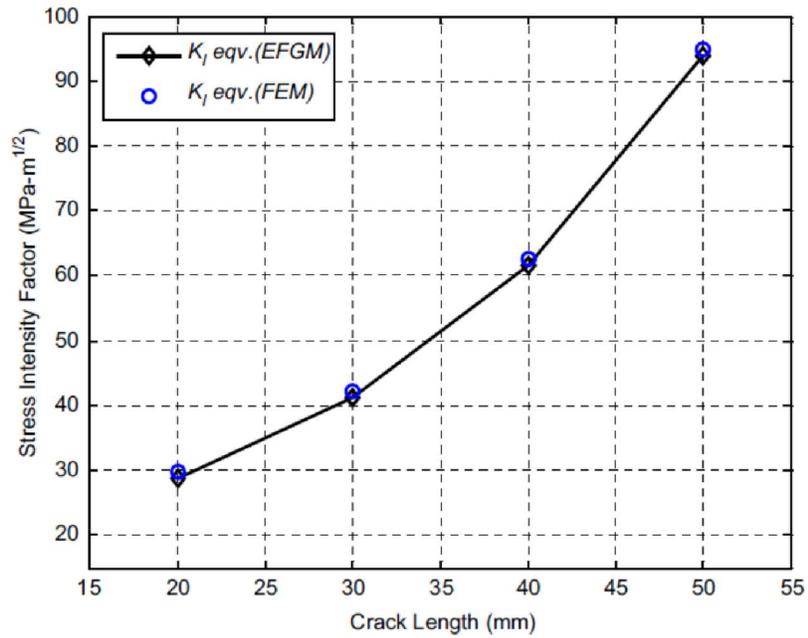


شکل ۴-۱۹ موقعیت ترک و گره‌های غنی‌شده اطراف آن در مراحل ۲، ۳ و ۴ از رشد ترک

در این مثال برای مقایسه نتایج حاصله با نتایج موجود در مرجع مورد استفاده، از پارامتر ضریب شدت تنش مود ۱ معادل ( $K_{Ieq}$ ) استفاده می‌شود.

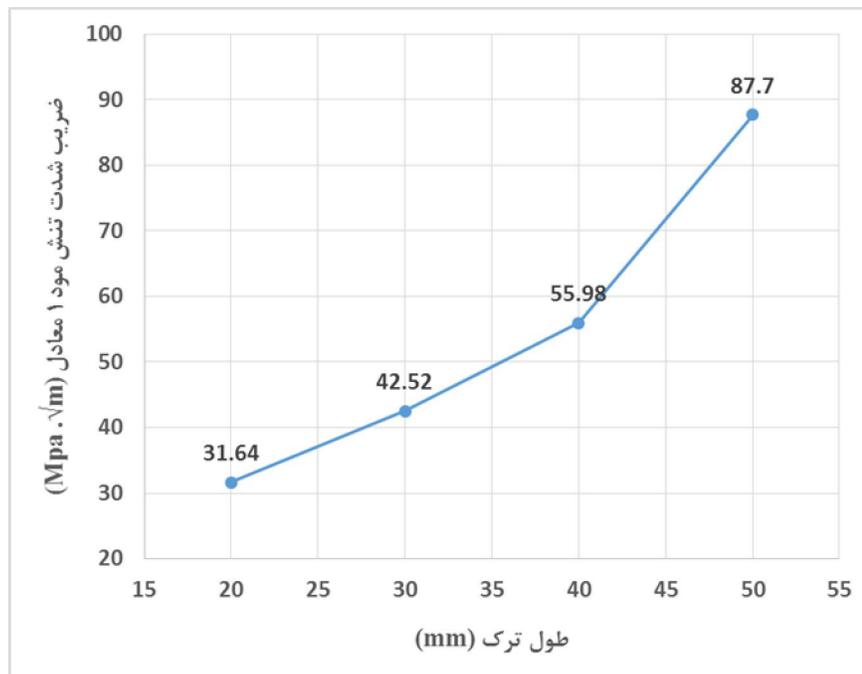
تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک را می‌توان در شکل‌های (۴-۲۰) و (۴-۲۱) که به ترتیب حاصل از مرجع و پژوهش حاضر می‌باشند، مشاهده کرد که از مقایسه آن‌ها با یکدیگر می‌توان صحت پژوهش انجام شده را نشان داد :





شکل ۴-۲۰ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک (Pant, M., Singh, I. V., & Mishra, B. K.,

2013)

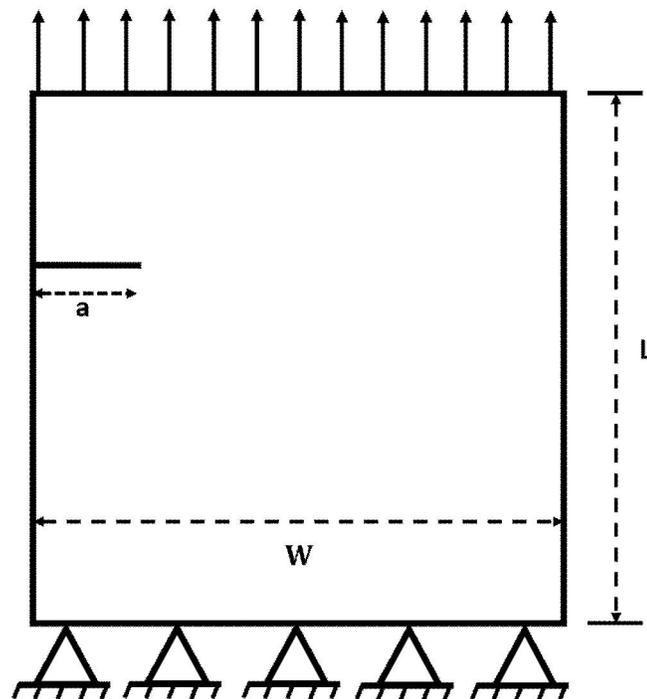


شکل ۴-۲۱ تغییرات ضریب شدت تنش مود ۱ معادل با طول ترک به دست آمده از پژوهش حاضر

#### ۴-۲-۲-۴- رشد ترک لبه‌ای غیروسطحین با تکیه‌گاه

در این بخش به بررسی رشد ترک لبه‌ای غیروسطحین که از وجه بالایی تحت تنش کششی قرار دارد و در وجه پایین دارای تکیه‌گاه است پرداخته شده است ( نادری ر. و خادم‌الرسول ع، ۱۳۹۴). در این مثال ابعاد ورق  $W \times L$  ( $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ ) است، طول اولیه ترک (a) برابر  $2 \text{ m}$  می‌باشد و از مجموعه گره‌های  $20 \times 38$  استفاده شده است. مدول الاستیسیته مصالح  $E=1000 \text{ GPa}$  و ضریب پواسون  $\nu = 0.3$  می‌باشند. همچنین در این مثال حالت کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است.

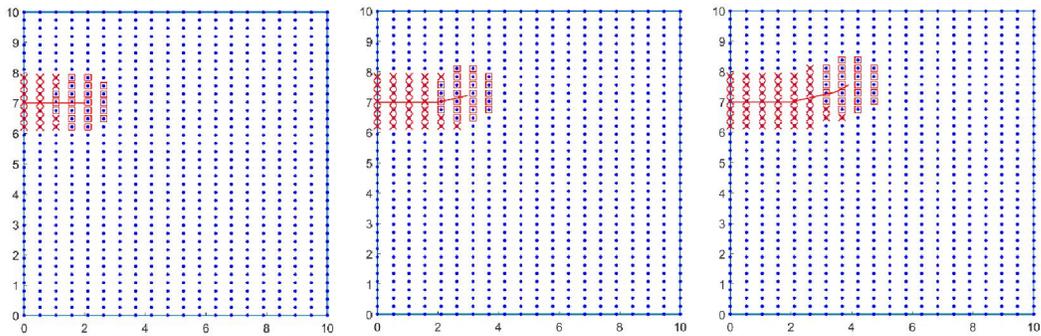
در شکل (۲۲-۴) می‌توان این شرایط مرزی را مشاهده کرد :



شکل ۲۲-۴ ترک لبه‌ای غیروسطحین با تکیه‌گاه تحت بار کششی

در شکل (۴-۲۳) می‌توان در چند مرحله از رشد ترک لبه‌ای غیروسطحین، موقعیت ترک را به

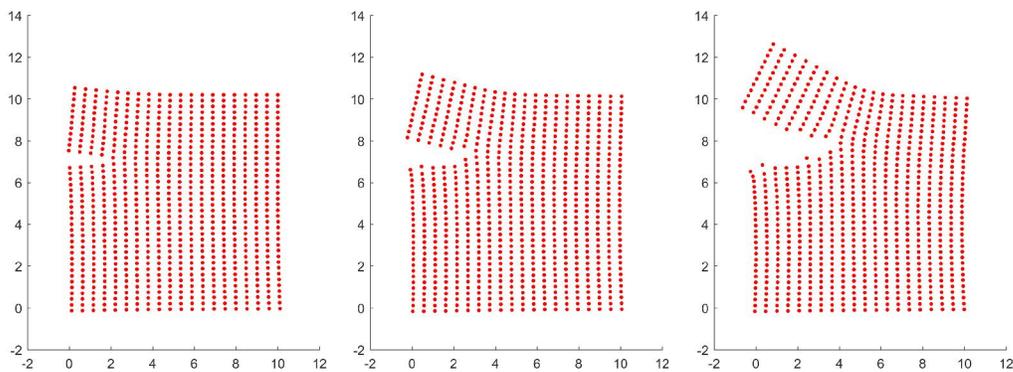
همراه گره‌های غنی‌شده اطراف آن مشاهده کرد :



شکل ۴-۲۳ موقعیت ترک و گره‌های غنی‌شده اطراف آن در مراحل اول، سوم و پنجم از رشد ترک

همچنین تغییرشکل‌ها نیز در مراحل اول، سوم و پنجم از رشد ترک در شکل (۴-۲۴) ارائه شده

است :



شکل ۴-۲۴ تغییرشکل‌ها در مراحل اول، سوم و پنجم از رشد ترک

بررسی رشد ترک لبه‌ای غیروسطحین این نکته را نشان می‌دهد که محل قرارگیری ترک در دامنه

مسئله نیز همانند نحوه بارگذاری، هندسه مسئله و زاویه و هندسه ترک می‌تواند در به وجود آوردن

مودهای مختلف ترک از جمله مود ترکیبی ۱ و ۲ تاثیرگذار باشد.



## فصل پنجم

### نتایج و پیشنهادها

## ۵- نتایج و پیشنهادات

### ۵-۱- مقدمه

در این فصل، ابتدا با توجه به مثال‌های عددی فصل ۴ و دیگر مباحث ارائه شده در فصل‌های گذشته، نتایج کلی به دست آمده بیان شده است؛ در ادامه نیز پیشنهاداتی جهت مطالعات آتی و برای ادامه راه این پژوهش به محققان ارائه شده است.

### ۵-۲- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، روش توسعه‌یافته گالرکین بدون المان که یک روش بدون شبکه شکل ضعیف سراسری می‌باشد برای مدل‌سازی ترک‌ها و تحلیل و بررسی نحوه گسترش آن‌ها برای شرایط تکیه‌گاهی و مرزی مختلف و در حالت مودهای خالص و ترکیبی به کار گرفته شده است. تحلیل‌های صورت گرفته، در ۲ بعد و در حالت‌های کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای برای جامدات الاستیک خطی ارائه شده است. به این منظور در نرم‌افزار MATLAB<sup>®</sup> کدنویسی‌های لازم انجام شده است؛ در طی فرآیند صورت گرفته، از روش انتگرال اندرکنش برای محاسبه ضرایب شدت تنش استفاده شده است. همچنین از روش مجموعه تراز برای مشخص شدن موقعیت ترک در هر لحظه و انتخاب گره‌هایی که نیاز به غنی‌سازی دارند، استفاده شده است. معیار بیشینه تنش پیرامونی نیز برای به دست آوردن زاویه رشد ترک در هر مرحله، استفاده گردیده است. در روش استفاده شده، تابع تقریب با استفاده از تابع هوپساید برای نمایش ناپیوستگی‌ها و تغییر مکان آن‌ها در طول ترک و همچنین با استفاده از توابع شاخه‌ای برای گره‌های نزدیک نوک ترک، غنی‌سازی شده است.

صحت کدهای نوشته شده توسط مقایسه نتایج به دست آمده با نتایج تحلیلی و موجود در تحقیقات محققان دیگر با ارائه مثال‌های عددی بررسی شده است. قابل ذکر است نتایج به دست آمده از پژوهش حاضر برای مقادیر ضریب شدت تنش به نتایج تحلیلی موجود در مراجع به میزان قابل

قبولی نزدیک بوده است و دارای درصد خطای پایین و مناسبی می‌باشند که این مسئله بیان‌گر دقت و صحت روش مورد استفاده در این پژوهش می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود استفاده کردن این روش از مجموعه‌ای از گره‌های توزیع شده در سطح دامنه و بر روی مرزها و عدم نیاز به استفاده از المان‌ها و شبکه‌بندی مجدد در هر مرحله از رشد ترک برتری این روش را نسبت به روش‌های بر پایه شبکه از جمله روش اجزاء محدود نشان می‌دهد؛ بنابراین از این روش می‌توان در مسائل مربوط به مکانیک شکست، تغییرشکل‌های بزرگ و دیگر مسائل مهندسی بهره جست.

در ادامه به نتیجه‌های حاصل از پژوهش حاضر اشاره شده است :

- در طی بررسی مثال‌ها و تکرار آن‌ها با مقادیر ورودی متفاوت، این نتیجه به دست آمد که در یک محدوده با افزایش دامنه انتگرال‌گیری نوک ترک جواب‌های به دست آمده برای ضرایب شدت تنش به مقادیر تحلیلی آن‌ها نزدیک‌تر می‌شود و به عبارتی دقت جواب افزایش می‌یابد.

- پارامترهای مختلفی می‌توانند در به وجود آوردن مودهای شکست خالص و ترکیبی تاثیرگذار باشند که با بررسی‌های انجام شده می‌توان به نوع، جهت و ترکیب بارگذاری‌ها، محل قرارگیری ترک اولیه در جسم، هندسه و زاویه ترک اولیه، هندسه اجسام و شرایط تکیه‌گاهی اشاره کرد.

- همان‌طور که در برخی مثال‌ها مشاهده شد گاهی با افزایش طول ترک‌ها، ضریب شدت تنش یک مود یا مود معادل به طور مداوم افزایش می‌یابد که این نوع ترک‌ها ناپایدار نامیده می‌شوند؛ در این‌گونه موارد بدون افزایش بار، ترک به صورت تدریجی گسترش می‌یابد و نهایتاً منجر به گسیختگی جسم می‌شود.

- با دوران دادن دامنه انتگرال‌گیری اطراف نوک ترک، تغییر چندانی در نتایج به دست آمده برای ضرایب شدت تنش رخ نمی‌دهد.

- در پژوهش حاضر این نتیجه حاصل شد که با افزایش دامنه تاثیر گره‌ها تا حدی، جواب حاصل

دقیق‌تر می‌شود ولی اگر تعداد گره‌های موجود در دامنه تاثیر یک گره از یک حدی بیشتر شود سبب تکینگی ماتریس ممان وزن‌دار و معکوس‌ناپذیر شدن آن می‌شود که به متوقف شدن فرآیند محاسبات منجر می‌شود؛ این اتفاق در دو حالت رخ می‌دهد که شامل افزایش تعداد کل گره‌ها در دامنه مسئله و یا افزایش دامنه هر گره به میزان زیاد می‌باشد.

- با وجود اینکه به طور کلی طبق مطالب مراجع، مقدار اندازه بدون بعد دامنه تکیه‌گاهی ( $\alpha_g$ ) نتیجه‌های مورد قبولی را در محدوده  $2 \sim 3$  برای بسیاری از مسائلی که تاکنون مورد مطالعه قرار گرفته‌اند به همراه داشته است، در این پژوهش با اختیار کردن مقدار  $\alpha_g$  در محدوده  $1/7$  تا  $1/9$  نتایج قابل قبولی مشاهده شده است.

- عملکرد تابع وزن اسپلاین درجه ۳ با تابع وزن اسپلاین درجه ۴ مقایسه شد و مشاهده شد که با افزایش درجه تابع وزن، دقت جواب‌ها نیز افزایش می‌یابد در نتیجه از تابع وزن اسپلاین درجه ۴ برای تمامی مثال‌ها استفاده شده است.

- همان‌گونه که ذکر شد برای دامنه کلی مسئله در هر سلول انتگرال‌گیری از ۱۶ نقطه گوسی استفاده شد و در دامنه انتگرال‌گیری نوک ترک جهت به دست آوردن ضرایب شدت تنش از ۶۴ نقطه گوسی در هر سلول انتگرال‌گیری برای افزایش دقت جواب حاصله استفاده شد. می‌توان این‌گونه بیان کرد که افزایش تعداد نقاط گوسی با اینکه سبب افزایش دقت جواب حاصله می‌شود ولی زمان محاسبه را به مقدار زیادی افزایش می‌دهد.

- انتخاب تعداد گره‌ها نیز تاثیری همانند نقاط گوسی دارد؛ نتیجه مثال‌های عددی این موضوع را مشخص می‌کند که در این مسائل با افزایش تعداد گره‌هایی که بر روی دامنه مسئله و مرزهای آن توزیع شده‌اند، در اکثر موارد دقت جواب حاصله افزایش می‌یابد، مقدار خطای حل به مقدار قابل توجهی کاهش پیدا می‌کند ولی زمان محاسبات نیز افزایش می‌یابد. در نتیجه میزان تراکم گره‌های



مورد استفاده، به مقدار دقتی که از جواب مسئله بعد از تحلیل مورد نیاز است بستگی دارد.

- با حذف تکیه‌گاه‌ها، شرایط مرزی اساسی حذف می‌شوند و در نتیجه پارامترهای  $G$  و  $q$  که به دلیل ارضای شرایط مرزی با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ ایجاد می‌شوند، از محاسبات خارج شده و سیستم معادلات مجزای نهایی به شکل ساده‌ای تبدیل می‌شود.

### ۵-۳- پیشنهادها

با توجه به اینکه روش توسعه‌یافته گالرکین بدون المان قابلیت‌های بالایی برای مدل‌سازی ترک‌ها و بررسی نحوه رشد آن‌ها و به طور کلی تحلیل مسائل مکانیک شکست دارد، می‌بایست با برطرف کردن نقص‌های موجود و بهبود این روش یا ترکیب آن با دیگر روش‌ها، مسائل پیچیده‌تر موجود در جهان حقیقی را مورد تحلیل و ارزیابی قرار داد.

در این قسمت برای پژوهش‌های آینده پیشنهادهایی ارائه شده است :

- همان‌طور که ملاحظه گردید در این پژوهش به تحلیل ترک در ۲ بعد پرداخته شده است که می‌توان در تحقیق‌های آتی، در حالت ۳ بعدی، ترک‌ها را مورد ارزیابی قرار داد.

- در این پژوهش ترک‌ها به صورت شبه‌استاتیکی در نظر گرفته شده‌اند، حال اینکه می‌توان بارگذاری‌های دینامیکی یا حالتی که تغییرات دما در اجسام وجود دارد و تاثیر تنش‌های ناشی از آن‌ها را بر نحوه رشد ترک نیز بررسی کرد.

- در پژوهش حاضر، به بررسی و مدل‌سازی ترک‌های واحد و نحوه گسترش آن‌ها پرداخته شد. حال اینکه در بسیاری از اجسام و قطعات، ترک‌های چندگانه وجود دارند که بررسی این‌گونه ترک‌ها و تاثیری که بر عملکرد یکدیگر می‌گذارند، می‌تواند موضوعی برای پژوهش‌های آینده باشد.

- می‌توان تاثیر وجود دیگر ناپیوستگی‌ها از جمله حضور حفره‌ها در اجسام را نیز مورد ارزیابی قرار داد.

- در این پژوهش از روش گوسی به عنوان روش انتگرال گیری عددی استفاده شده است که می توان با تغییر و یا بهبود این روش سعی کرد تا نتایج دقیق تری حاصل شود.

- روش به دست آوردن ضرایب شدت تنش را نیز می توان تغییر داد؛ به عنوان مثال می توان از روش crack closure integral یا دیگر روش های ذکر شده در پژوهش حاضر استفاده کرد.

- ترکیب این روش با روش های دیگر نیز می تواند در جهت بهبود این روش انجام شود تا با رفع نقص های موجود مثل ارضا نشدن شرط دلتای کرنیکر بتوان به روشی قوی تر و کارآمدتر دست پیدا کرد.

- حالت هایی که مجموعه گره ها در اطراف نوک ترک و یا بدنه آن افزایش پیدا کنند نیز می تواند در جهت افزایش دقت جواب حاصل از تحلیل بسیار موثر باشند. حال اینکه نحوه افزایش تعداد گره ها و محل هایی که برای این کار مناسب تر و تاثیرگذارتر هستند می بایست با انجام تحقیقاتی مشخص شوند.

- در مثال های مورد بررسی در این پژوهش فرض هایی از جمله حالت تنش صفحه ای و کرنش صفحه ای برای ساده کردن مسائل در نظر گرفته شده است که در تحقیقات آتی می توان این فرض ها را در نظر نگرفت و به بررسی دیگر حالت هایی که بیشتر در جهان حقیقی وجود دارند پرداخت.

- می توان ترک هایی که داخل آن ها با موادی پر شده اند و از داخل ترک نیروهایی بر جداره آن وارد می شود نیز مورد بررسی قرار داد؛ به عنوان مثال زمانی که آب در داخل ترک یخ می زند و افزایش حجم ناشی از آن، فشار داخلی در ترک ایجاد می کند.

## منابع

- Aliabadi M. H. (1997) "Boundary element formulations in fracture mechanics" *Applied Mechanics Reviews*, 50(2), pp. 83-96.
- Atluri S. N. and Zhu T. (1998) "A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics" *J. of Computational mechanics*, 22(2), pp. 117-127.
- Belytschko T. and Black T. (1999) "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing" *International journal for numerical methods in engineering*, 45(5), pp. 601-620.
- Belytschko T. Gu L. and Lu Y. Y. (1994) "Fracture and crack growth by element free Galerkin methods" *J. of Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2(3A), pp. 519-34.
- Belytschko T. Lu Y. Y. and Gu L. (1994) "Element-free Galerkin methods" *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2), pp. 229-256.
- Bui, H. D. (2006). "Fracture Mechanics, Inverse Problems and Solutions", Vol. 139, Springer Netherlands, Palaiseau, France, pp.375.
- Chan S. K. Tuba I. S. and Wilson W. K. (1970) "On the finite element method in linear fracture mechanics" *J. of Engineering Fracture Mechanics*, 2(1), pp. 1-17.
- Duflot M. and Nguyen-Dang H. (2004) "Fatigue crack growth analysis by an enriched meshless method" *J. of Computational and Applied Mathematics*, 168(1), pp. 155-164.
- EE, Gdoutos. (2005). "Fracture mechanics – an introduction (solid mechanics and its applications) ", 2nd ed, Springer Netherlands, The Netherlands, pp. 370.
- Epstein, J. S. (1993). "Experimental techniques in fracture". New York: Wiley-VCH.

- Fleming M. Chu Y. A. Moran B. Belytschko T. Lu Y. Y. and Gu L. (1997) “Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields” **International journal for numerical methods in engineering.**, 40(8), pp. **1483-1504**.
- Gingold R. A. and Monaghan J. J. (1977) “Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars” *Monthly notices of the royal astronomical society*, 181(3), pp. 375-389.
- Griffith A. A. (1920) “The phenomena of rupture and flow in solids”. *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character*, 221, pp. 163-198.
- Jameel A. and Harmain G. A. (2015) “Fatigue crack growth in presence of material discontinuities by EFGM” **International Journal of Fatigue.**, 81, pp. **105-116**.
- Krongauz Y. and Belytschko T. (1996) “Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements” **J. of .Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.**, 131(1-2), pp. **133-145**.
- Kuna M. (2013), “**Finite Elements in Fracture Mechanics**”, Vol. 201, Springer Netherlands, Freiberg, Germany, pp.464.
- Lancaster P. and Salkauskas K. (1981) “Surfaces generated by moving least squares methods” **J. of .Mathematics of computation.**, 37(155), pp. **141-158**.
- Li H. and Mulay S. S. (2013), “**Meshless methods and their numerical properties**”, CRC press, Boca Raton, pp.429.
- Liu G. R. (2009), “**Mesh free methods: moving beyond the finite element method**”, Second Edition, Taylor & Francis, Boca Raton, pp.773.
- Liu G. R. and Gu Y. T. (2005), “**An introduction to meshfree methods and their programming**”, Springer, Dordrecht, Netherlands, pp.496.
- Liu G. R. Nguyen-Thoi T. and Lam K. Y. (2009) “An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free and forced vibration analyses of solids” **J. of .Sound and Vibration.**, 320(4), pp. **1100-1130**.
- Liu W. K. Jun S. and Zhang Y. F. (1995) “Reproducing kernel particle methods” **International journal for numerical methods in fluids.**, 20(8-9), pp. **1081-1106**.

- Lu Y. Y. Belytschko T. and Gu L. (1994) “A new implementation of the element free Galerkin method” **J. of .Computer methods in applied mechanics and engineering.**, 113(3-4), pp. 397-414.
- Mohammadi S. (2008), “**Extended finite element method: for fracture analysis of structures**”, Blackwell Publishing Ltd, pp.277.
- Muthu N. Maiti S. K. Falzon B. G. and Guiamatsia I. (2013) “A comparison of stress intensity factors obtained through crack closure integral and other approaches using eXtended element-free Galerkin method” **J. of .Computational Mechanics**, 52(3), pp. 587-605.
- Nguyen N. T. Bui T. Q. Zhang C. and Truong T. T. (2014) “Crack growth modeling in elastic solids by the extended meshfree Galerkin radial point interpolation method” **J. of .Engineering analysis with boundary elements.**, 44, pp. 87-97.
- Nguyen V. P. Rabczuk T. Bordas S. and Duflo M. (2008) “Meshless methods: a review and computer implementation aspects” **J. of .Mathematics and computers in simulation.**, 79(3), pp. 763-813.
- Osher S. and Sethian J. A. (1988) “Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations” **J. of .computational physics.**, 79(1), pp. 12-49.
- Pant M. Singh I. V. and Mishra B. K. (2013) “A novel enrichment criterion for modeling kinked cracks using element free Galerkin method” **International Journal of Mechanical Sciences.**, 68, pp. 140-149.
- Parks D. M. (1974) “A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors” **International journal of Fracture.**, 10(4), pp. 487-502.
- Rao B. N. and Rahman S. (2000) “An efficient meshless method for fracture analysis of cracks” **J. of .Computational mechanics.**, 26(4), pp. 398-408.
- Rao B. N. and Rahman S. (2003) “Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials” **J. of .Engineering fracture mechanics.**, 70(1), pp. 1-27.
- Recho N. (2012), “**Fracture Mechanics and Crack Growth**”, ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Great Britain and the United States, pp.493.

- Rice J. R. (1968) "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks" **J. of Applied Mechanics.**, 35(2), pp. 379-386.
- Schreurs P. J. G. (2012), "**Fracture Mechanics**", Eindhoven University of Technology, pp.162.
- Singh I. V. and Jain P. K. (2005) "Parallel EFG algorithm for heat transfer problems" **J. of Advances in Engineering Software.**, 36(8), pp. 554-560.
- Stolarska M. Chopp D. L. Moës N. and Belytschko T. (2001) "Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method" **International journal for numerical methods in Engineering.**, 51(8), pp. 943-960.
- Strouboulis T. Babuška I. and Coppers K. (2000) "The design and analysis of the generalized finite element method" **J. of Computer methods in applied mechanics and engineering.**, 181(1), pp. 43-69.
- Tuán B. M. Yunfei C. (2014) "Analysis and prediction of crack propagation in plates by the enriched free Galerkin method" **International Journal of Mechanical Engineering and Applications.**, 2(6), pp. 78-86.
- Wang J. G. and Liu G. R. (2002) "A point interpolation meshless method based on radial basis functions" **International Journal for Numerical Methods in Engineering.**, 54(11), pp. 1623-1648.
- Watwood V. B. (1970) "The finite element method for prediction of crack behavior". *Nuclear Engineering and Design*, 11(2), pp. 323-332.
- Westergaard H. (1939) "Bearing Pressures and Cracks" **J. of Applied mechanics.**, 18, pp. A49-A53.
- Xu Y. and Saigal S. (1998) "An element free Galerkin formulation for stable crack growth in an elastic solid" **J. of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.**, 154(3-4), pp. 331-343.
- Yanjin G. Xin W. Zhao G. and Ping L. (2009) "A nonlinear numerical analysis for metal-forming process using the rigid-(visco) plastic element-free Galerkin method" **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology.**, 42(1-2), p. 83.

Zehnder A. T. (2012), "Fracture Mechanics", Vol. 62, Springer Netherlands, Ithaca, pp.238.

پارسا ب، (۱۳۸۷)، پایان نامه ارشد: "روش اجزاء محدود توسعه یافته (X-FEM) و کاربرد آن در مکانیک جامدات"، دانشکده عمران و معماری، دانشگاه صنعتی شاهرود.

نادری ر. و خادم الرسول ع، (۱۳۹۴) "مدل سازی خودکار گسترش ترک در اندرکنش با حفره و مرز

ناهمگن بدون مش بندی مجدد" مجله مهندسی مکانیک مدرس، شماره ۷، دوره ۱۵: صص

۲۶۱-۲۷۳.

## **Abstract**

Cracking and fracture is very important issue in today's industrial world. During history, many disasters have been occurred including airplanes crash, buildings and bridges collapsing, getting off the trains from the rail and etc which is due to creation of cracks and their propagation under incoming loads and have been caused to creation of abundant financial and human health damages, disturbing a part of transportation system and many other problems. Therefore it is very essential to understanding the behavior of crack and predicting the process of it's propagation for constructing the industrial components, underground structures and other tools and objects that are valuable for human. The branch of science which deals with analysis and study of these problems is called fracture mechanics.

With the passage of time and advancement of science, human faces newer problems in real world everyday including fracture mechanics problems with complex geometries which their analyzing and checking by using experimental and field works is very hard or impossible; So the need of using numerical computational methods with more precision is being felt. Extending the finite element method has been one of the most important developments in the field of numerical methods which has been used for a long time to analyze the engineering problems. Because of arbitrary paths that crack passes in each step of it's propagation under mixed mode loading conditions, in conventional finite element method at each step of crack propagation, remeshing must be done to lead crack geometry matches with elements boundaries which is the main defect of this method.

Now according to the existent limits in finite element method and other mesh-based methods for analyzing the problems like large deformations and cracks propagation, in this research the Extended Element Free Galerkin method (XEFG) has been used which is one of the global weak form meshfree methods. In the mentioned method, no element and no mesh have been used for defining the problem domain and approximation functions have been constructed just by using the set of uniform distributed nodes in the domain of the problem and on the boundaries. In this method, appropriate enrichment functions have been added to the approximation of standard element free galerkin method. In the mentioned method, the approximation of Moving Least Squares (MLS) has been used for constructing the shape functions and also the used weight function in the shape function has been the quartic spline.



The Level Set method has been used for modeling and showing the crack body and chasing the path of its tip. Also in this research the interaction integral or M integral has been used for calculating the stress intensity factors in pure and mixed modes. The path of crack propagation has been determined with using the maximum circumferential stress criterion in each step of crack propagation.

By using the above method, the relevant code has been written in MATLAB<sup>®</sup> environment and also the numerical examples have been presented in two sections with the names of stationary cracks and propagation of cracks; in these examples by changing the different parameters such as the used set of nodes, their effect on the accuracy of obtained solution and its error rate has been shown. Finally the obtained results from stress intensity factors in pure and mixed modes and equivalent mode-I stress intensity factor have been compared with existent results in past researchers studies which this validation indicates the accuracy and precision of the written codes and generally the work has been done in this research.

**Keywords : interaction integral, stress intensity factors, crack propagation, Extended Element Free Galerkin method, meshfree method**



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty of Civil Engineering**  
**M.Sc.Thesis Geotechnical Engineering**

**Crack propagation modeling with Extended Element-Free Galerkin  
method**

**By : Emad Sadr**

**Supervisor:**  
**Dr. R. Naderi**

**September-2017**