
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده عمران و معماری
گروه عمران

عنوان:

تخمین خطا و حل تطبیقی سازه‌های دو بعدی در اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک

دانشجو : **احمد گنجعلی**

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

مشاور:

مهندس ناصر ظریف

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد سازه

تیرماه ۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران و معماری

گروه عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای احمد گنجعلی

تحت عنوان: تخمین خطا و حل تطبیقی سازه های دوبعدی در اجزای محدود و تحلیل ایزوژئومتریک

در تاریخ ۸۸/۴/۲۴ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

استاد راهنما	امضاء	مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر بهروز حسنی		نام و نام خانوادگی : ناصر ظریف مقدم	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر رضا نادری		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی : دکتر علی کیهانی			

... در هر حرفه‌ای که هستید نه اجازه بدهید که به بدبینیهای بی حاصل آلوده شوید و نه بگذارید که بعضی لحضات تاسف بار، که برای هر ملتی پیش می‌آید، شما را به یاس و ناامیدی بکشاند. در آرامش حاکم بر آزمایشگاهها و کتابخانه‌هایتان زندگی کنید. نخست از خود بپرسید «برای یادگیری و خود آموزی چه کرده‌ام؟» سپس همچنان که پیشتر می‌روید، بپرسید «من برای کشورم، چه کرده‌ام؟» و این پرسش را آنقدر تکرار کنید تا با این احساس شاد بخش و هیجان انگیز برسید که شاید سهم کوچکی در پیشرفت و اعتلای بشریت داشته‌اید. اما هر پاداشی که زندگی به تلاشهایمان بدهد یا ندهد هنگامی که به پایان تلاشهایمان نزدیک می‌شویم هر کدام مان باید حق آن را داشته باشیم که با صدای بلند بگوییم «من آنچه در توان داشته‌ام انجام داده‌ام.»

لوئی پاستور

(۱۸۲۲-۱۸۹۵)

تقدیم به

رهروان علم و دانش

و آنهایی که با وجود مشکلات فراوان در میدان علم و دانش با دشمن جهل نبرد می‌کنند.

قدردانی

فراز و فرودهایی که در سلوک علمی پیش روی دانشجوست، گاه چنان سهمناک می‌نماید که بی مدد استاد و اشارت‌های راهبردی او کار به انجام نخواهد رسید.

این پایان نامه، پس از عنایت حق بیش از هر چیز، وامدار لطف، درایت و تذکرهای کارگشای استاد ارجمندم جناب آقای دکتر بهروز حسنی است.

با اخلاص تمام از ایشان که بر من حق حیات معنوی دارند، سپاسگزاری می کنم و از خداوند می خواهم سایه شان را بر سر فرهنگ، علم و پویندگان دانش در این مرز و بوم مستدام بدارد.

همچنین از همکاری مهندس مهدی توکلی که با کمال صمیمیت، رضایت خود را در استفاده از برنامه کامپیوتری خود را در این پژوهش ابراز داشتند، کمال قدردانی به عمل می آید.

تعهد نامه

اینجانب **احمد گنجعلی** دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکدهٔ عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **تخمین خطا و حل تطبیقی سازه های دو بعدی در اجزای محدود و تحلیل ایزوژئومتریک** تحت راهنمایی دکتر بهروز حسنی متهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام (دانشگاه صنعتی شاهرود) و یا (Shahrood University of Technology) به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ:

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزاها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

در این پایان نامه به بررسی و معرفی روشهای تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود و همچنین اصول به کار رفته در روش ایزوژئومتریک پرداخته شده است. در روش اجزای محدود، به تهیه برنامه کامپیوتری به زبان فرترن پرداخته شده است که قادر به تحلیل مسائل دو بعدی به کمک تخمین خطا و حل تطبیقی می باشد. جهت تخمین خطای تحلیل اجزای محدود از روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا (SPR) استفاده شده است. همچنین حل تطبیقی با المان بندی دوباره در هر مرحله جهت بهبود شبکه اجزای محدود صورت پذیرفته است. با مقایسه نتایج بدست آمده برای فاکتور شدت تنش صفحهٔ ترکدار تحت کشش حاصل از این برنامه و نرم افزار Ansys با حل تئوری، صحت و دقت آن در برآورد خطای اجزای محدود و حل تطبیقی بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که این برنامه از کارایی کاملا رضایت بخشی برخوردار است و علاوه بر آن روش تخمین خطا و حل تطبیقی به کار رفته در آن نسبت به روش مورد استفاده در نرم افزار Ansys، دارای دقت بیشتر و هزینه کمتری می‌باشد. همچنین در این پایان نامه به تشریح روشی ابداعی جهت بهبود میدان تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتریک و تخمین خطای موجود در آن پرداخته شده است. این تخمین کننده خطا، در دستهٔ روشهای برآورد خطای مبتنی بر بازیافت تنش قرار می گیرد. در این روش، با استفاده از نقاط فوق‌همگرا، برای تابع مقادیر هریک از مؤلفه‌های میدان تنش در هر ناحیه، یک سطح فرضی ساخته می شود. به منظور تعریف این سطح از همان توابع شکل نربزی استفاده می‌کنیم که در روش ایزوژئومتریک برای تقریب زدن تابع جابجایی به کار گرفته می‌شوند. از مقایسه نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی، مشاهده می‌شود که تخمین کننده خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی جهت برآورد خطای موجود در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک برخوردار است.

کلمات کلیدی: اجزای محدود، تخمین خطا، حل تطبیقی، فاکتور شدت تنش، تحلیل ایزوژئومتریک، بازیافت تنش

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه وکلیات

فصل دوم: برآورد کننده‌های خطا

فصل سوم حل تطبیقی در اجزای محدود

فصل چهارم: برنامه تحلیل سازه‌های دو بعدی به کمک تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود

فصل پنجم: بررسی صحت و دقت برنامه با تعیین فاکتور شدت تنش صفحهٔ ترکدار تحت کشش

فصل ششم: تخمین خطا و بهبود میدان تنش حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک

فصل هفتم: نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات

ضمیمه ۱: نقاط فوق همگرا در برآورد خطای اجزای محدود

ضمیمه ۲: روش جبهه پیش رونده برای تولید شبکه اجزای محدود

ضمیمه ۳

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه

همگام با رشد علوم و فناوری، مسائل مهندسی نیز روز به روز پیچیده تر می‌شوند. با پیچیده تر شدن مسائل ولزوم حل سریعتر و دقیق تر آنها، روشهای تحلیلی دیگر جوابگوی نیازهای روز افزون جوامع نیستند. با چنین نگرشی، محققان همواره سعی کردند در کنار توسعه مبانی علوم، روشهای عددی را نیز توسعه بخشند.

دراین مسیر، روشهای متعددی توسط محققین ابداع گشته است. از مهمترین اینها می‌توان به روش تفاضلهای محدود، روش اجزای محدود، روش احجام محدود، روش المانهای مرزی و همچنین روش ایزوژئومتریک که از جملهٔ جدید ترین روش ها است، اشاره کرد. هر کدام از این روشها موارد کاربرد خاص خود را دارند وهنوز هم محققان درصدد رشد و توسعه این روشها و ابداع روشهای جدید هستند. روش اجزای محدود یکی از روشهایی است که کاربرد فراوانی در حل مسائل بسیاری از رشته‌های مهندسی وبه خصوص مسائل مکانیک جامدات دارد. ریشه‌های توسعه این روش را باید در اوائل دهه ۱۹۴۰ میلادی جستجو کرد. در سال ۱۹۴۳ کورانت معادله پواسون پیچش را توسط آنچه امروز المانهای مثلثی خطی نامیده می‌شود، حل کرد، اما کارهای وی مدتها ناشناخته ماند. روشهای اجزای محدود به شکل امروزی آن، ریشه در کارهای ترنر و همکاران وی در سال ۱۹۵۷ دارد. در سال ۱۹۶۰، کلاف نام اجزای محدود را بر این روش نهاد؛ و کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای درسال ۱۹۶۵ توسط زینکویچ و چونگ پیشنهاد شد[۱].

تاکنون مقالات وکتابهای فراوانی در زمینه اجزای محدود نوشته شده‌اند و هنوز روشها و تکنیکهای جدیدی در این زمینه مطرح می‌شوند؛ اما از همان آغاز مدل سازی رخدادهای فیزیکی توسط کامپیوتر و شکل گیری مبانی اجزای محدود وجود خطاهای عددی درمحاسبات منشأ اصلی نگرانی بوده است؛ زیرا در فرایند جزء بندی یک محیط پیوسته و تبدیل آن به یک مسأ له کامپیوتری قابل مدیریت، یقینا نمی‌توان تمام اطلاعات موجود در مدل را که بوسیله معادلات دیفرانسیل پاره‌ای یا معادلات

انتگرالی مشخص و توصیف شده است، در بر گرفت.

خطای تقریبی در چنین شبیه سازیهایی چقدر است؟

چگونه ممکن است که بتوان خطا را اندازه گرفت، کنترل کرد وبطور موثر و قابل توجه مقدارآنرا کم کرد؟

اینها سوالاتی است که از آغاز بکارگیری روشهای عددی در مسائل مختلف علوم و مهندسی، متخصصان این رشته‌ها را با خود روبرو کرده است.

امید است که در پایان این تحقیق به این سوالات پاسخ داده شود، وراه برای تحقیقات بعدی آسانتر شده باشد.

۱-۲- روش اجزای محدود

روش کلاسیک تحلیل یک محیط پیوسته بدین قرار است که یک تابع تنش یا تغییرشکل که معادلات دیفرانسیل تعادل، روابط تنش- کرنش، و شرایط سازگاری را در هر نقطه از محیط پیوسته شامل شرایط مرزی برآورده سازد، تعیین می‌شود. با توجه به قیدهای معمولا پیچیده، تعداد حل‌های کلاسیک موجود، بسیارمحدود می‌باشد. به علاوه اکثر نتایج بدست آمده از روش‌های کلاسیک به صورت سریهای نا متناهی می‌باشد که در محاسبات علمی فقط چند جمله اول آنها به کار گرفته می‌شود که نتیجه آن ایجاد یک تقریب در نتایج است. در صورت عدم تعیین یک تابع صریح، می‌توان معادله دیفرانسیل تعادل را به کمک روش تفاوتهای محدود[۱] حل نمود، لیکن این روش نیز ایراداتی دارد که عدم ارضاء شرایط مرزی و عدم دقت در نتایج بدست آمده از جمله آن‌ها است[۲].

روش تقریبی دیگری که امروزه به عنوان یک ابزار قوی برای حل عددی محدوده وسیعی از مسائل هندسی است، روش اجزای محدود[۲] می‌باشد. در روش اجزای محدود، محیط پیوسته به اجزای هندسی ساده وکوچکتری که (جزء محدود) نامیده می‌شود، تقسیم می‌گردد. این عمل را جزء بندی کردن[۳] می‌گویند. سپس با انتخاب یک تابع شکل[۴] تغییر مکان، مشخصات مصالح وتنشهای داخلی برحسب تغییر مکانهای مجهول گره‌های هر یک از این اجزاء تعریف می‌گردد. با توجه به ترتیب قرارگیری اجزاء در کنار یکدیگر، معادلات آنها بر هم سوار شده و با منظور کردن نیروهای خارجی وشرایط تکیه گاهی درمحل گرها، معادلات تعادل کل سیستم بدست می‌آید. این معادلات نیروهای گرهی را به تغییر مکانهای گرهی ربط می‌دهند و ثابتهای آنها مشخصات هندسی و الاستیک اجزای محدود می‌باشد. با حل این معادلات تغییر مکانهای گرهی و با استفاده از آنها تنشهای داخلی محاسبه می‌شوند[۲].

---

۱ *Finite difference*

۲ *Finite Element*

۳ *Discretizing*

۴ *Shape Function*

با توجه به اینکه استفاده از تکنیکهای تابع تغییر شکل متداول است، در ادامه به شرح روابط حاکم بر معادله دیفرانسیل مربوط به یک مسئله الاستیسیته خطی می‌پردازیم[۲].

$$Lu + b \equiv S^T DSu + b = 0 \qquad on \qquad \Omega \tag{۱-۱}$$

$$u = \bar{u} \qquad on \qquad \Gamma_u \tag{۱-۲}$$

$$GDSu = t = \bar{t} \qquad on \qquad \Gamma_t \tag{۱-۳}$$

$$\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma \tag{۱-۴}$$

که L معرف عملگر دیفرانسیل خطی، S عملگر دیفرانسیل کرنش و D ماتریس الاستیسیته می‌باشد.

در روش اجزای محدود (روش متکی بر تغییر مکانها) معمولا جواب دقیق مسئله (u) با استفاده از روش گالرکین به کمک روابط زیر تقریب زده می‌شود.

میدان تغییر مکان $$u \approx u_h = N\bar{u} \tag{۱-۵}$$

در رابطه بالا:

$u =$ جواب دقیق مسئله

$u_h =$ جواب تقریبی مسئله یا جواب ناشی از حل اجزای محدود

$N =$ توابع شکل

$\bar{u} =$ تغییر مکانهای گرهی شبکه جزء بندی شده

برای هر جزء انتخابی، روابط کرنش- تغییر مکان و تنش- کرنش به صورت زیر خواهد بود.

میدان کرنش $$\varepsilon_h = Su_h = SN\bar{u} = B\bar{u} \tag{۱-۶}$$

میدان تنش $$\sigma_h = D\varepsilon_h = DB\bar{u} \tag{۱-۷}$$

در روابط فوق :

$\varepsilon_h =$ کرنش ناشی از حل اجزای محدود

$\sigma_h =$ تنش ناشی از حل اجزای محدود

$B=$ ماتریس کرنش- تغییر مکان، که به ماتریس B معروف است.

با استفاده از اصل کار مجازی، سختی و بارهای گرهی معادل برای هر کدام از اجزاء انتخابی طبق روابط زیر بدست می‌آید.

اصل کار مجازی
$$K\bar{u}-f=0 \quad (۱-۸)$$

ماتریس سختی
$$K=\int_{\Omega}B^{T}DB\ \ d\Omega \quad (۱-۹)$$

بردار بارهای گرهی معادل
$$f=\int_{\Omega}N^{T}b\ \ d\Omega+\int_{\Gamma}N^{T}t\ \ d\Gamma \quad (۱-۱۰)$$

در روابط فوق :

$b=$نیروی حجمی اجزاء

$t=$نیروی سطحی اجزاء

که پس از سوار کردن ماتریس سختی کلیه المانها و همچنین تشکیل بردار گرهی f با حل چند معادله چند مجهول مقادیر $\bar{u}$ و u_h محاسبه می‌شوند و همچنین تنش ناشی از حل اجزای محدود از رابطه زیر بدست می‌آید :

$$\sigma_h=DB\bar{u} \quad (۱-۱۱)$$

برای خیلی از انواع اجزای محدود، انتگرال گیری صریح برای تعیین ماتریس سختی و بارهای گرهی معادل امکان پذیر نیست. در چنین مواقعی لازم می‌شود که از تکنیک‌های انتگرال گیری عددی استفاده شود. یکی از دقیق ترین و مناسب ترین روشها، روش انتگرال گیری عددی گاوس می‌باشد.

$$\iint f(x,y)dxdy=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_jR_kf(\xi_j,\eta_k).\left|J(\xi_j,\eta_k)\right| \quad (۱-۱۲)$$

که در آن R_j و R_kضرایب وزنی[۱] برای نقطه انتگرال گیری[۲] (ξ_j,η_k) می‌باشد.

[۱] *Weighting factor*
[۲] *Integration Point*

۱-۳- خطاها در روش اجزای محدود

واضح است که روش اجزای محدود یک روش تقریبی است. با توجه به آنچه در قسمت قبل آمد، منابع خطا در روش اجرای محدود را می‌توان به سه گروه عمده تقسیم کرد [۳]:

۱- خطای ناشی از تقریب زدن دامنه حل مسأله : این خطا از آنجا ناشی می‌شود که درحالت کلی نمی‌توان دامنه حل مسأله را با المانهای مورد نظر به طور کامل پوشانید. برای مثال، یک صفحه دایره‌ای شکل را هیچگاه نمی‌توان با المانهای مثلثی خطی به طور کامل مدل نمود، هر چند این کار با هر دقت دلخواه با ریز تر کردن شبکه المان بندی امکان پذیر است.

۲- **خطای ناشی از گرد کردن اعداد** : این گروه از خطاها بستگی به سخت افزار و نرم افزار مورد استفاده برای محاسبات دارد. از آنجا که تعداد محدودی از ارقام یک عدد در رایانه ذخیره می‌شود، استفاده از این عدد در محاسبات باعث ایجاد خطا خواهد شد و به علت اینکه محاسبات معمولا به صورت زنجیروار به نتایج مراحل قبل وابسته است، این موضوع باعث گسترش خطا در تمامی حل می‌گردد. بر خلاف سایر انواع خطاها، ریز تر نمودن شبکه المان بندی معمولا این گروه از خطاها را تشدید می‌کند. برای کاهش این گروه از خطاها، باید به صورت سخت افزاری و یا نرم افزاری تعداد ارقامی از یک عدد را که در رایانه نگهداری می‌شود، افزایش داد که این کار با افزایش حافظه مورد نیاز و همچنین بالا رفتن زمان حل همراه است.

۳- خطای ناشی از گسسته سازی : این گروه از خطاها، عمده ترین منبع خطا در روش اجزای محدود بوده و ناشی از تقریب زدن میدان جابجایی به وسیله توابع شکل می‌باشد. این گروه ازخطاها نیز با ریزتر کردن شبکه المان بندی و بالا بردن درجه توابع شکل مورد استفاده، کاهش می‌یابد.

این سه گروه خطا در حل عددی معادله دیفرانسیل و برای مثال در معادلات الاستیسیته در بدست آوردن مقدار جابجایی u هر گره وارد می‌شود.

آنچه از این پس در این تحقیق به عنوان خطا مورد بحث قرار خواهد گرفت، خطای ناشی از گسسته

سازی است و بنابراین همواره فرض بر آن خواهد بود که دامنه حل به طور کامل توسط المانهای مورد استفاده پوشیده شده و محاسبات نیز به صورت کاملا دقیق انجام می‌گیرد.

۱-۴- پیشینه علمی برآورد خطا و آنالیز تطبیقی در اجزای محدود

از اولین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شد، مقاله‌هایی است که توسط ریچاردسون[۱] در سال ۱۹۱۰ نوشته شده است.

اصولا روش ریچاردسون در تخمین خطا از این حقیقت پیروی می‌کند که خطا در هر طرحی از تفاوت محدود معمولا به اندازه مش‌های مورد استفاده (یا امروزه اندازه جزء محدود) بستگی دارد[۴].

کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ و توسط بابوشکا[۲] و رینبولت[۳] آغاز شد. روش آنها بر این اساس بود، که دقت باقیمانده را در یک گروه از المانها و یا یک المان تنها مورد بررسی قرار داده وبه کمک آن می‌توانستند خطا را تخمین بزنند[۴].

معمولا کیفیت ودرستی روشهای تخمین خطا به وسیله مقایسه بین معیار خاصی از خطای واقعی و خطای تقریبی بررسی می‌گردد. البته امکان محاسبه خطای دقیق برای یک سری مسائل خاص که حل دقیق آنها در دسترس است، وجود دارد. در این راستا، نسبت خطای تقریبی به خطای واقعی شاخص تأثیر[۴] نامیده می‌شود که این نسبت اولین بار توسط بابوشکا در سال ۱۹۸۱ ارائه شد[۵].

حل جدید روشهای تعیین خطا هنگامی بر حل دقیق منطبق می‌گردد که شاخص تأ ثیر واحد گردد.

در سال ۱۹۸۴ یک کنفرانس مهمی پیرامون اصلاح وفقی و تخمین خطاها در لیسبون برگزار شد. در این کنفرانس پیشرفتهای جدیدی در زمینه برآوردکننده‌ها ارائه شدکه یکی ازاین پیشرفتها روش المان بازیافت بود. روش فوق توسط دمکوویز[۵] ارائه شد وبرای بسیاری از مسائل فیزیک و مکانیک قابل

---

۱ L.F. Richardson

۲ I. Babŭska

۳ C. Rheinboldt

۴ Effectivity Index

۵ *Demkowicz*

اجرا بود و سرانجام روند مشابهی توسط بنک[۱] و وزر[۲] ارائه گردید که منظور اصلی آنها ارائه روش آنالیز ریاضی بر مسائل بیضوی دو بعدی بود.

بابوشکا و همکارانش در ۱۹۸۶ برای اولین بار شبکه المان بهینه را شبکه‌ای با توزیع یکنواخت معیار خطای انرژی[۳] روی کل دامنه، برای مسائل یک بعدی تعریف کردند[۶]. از این پس این تعریف در همهٔ روشهای آنالیز تطبیقی مورد استفاده قرار گرفت.

در سال ۱۹۸۷ زینکویچ و زو روش بازیافت تنشها را در برآورد خطا ابداع کردند. و در همان سال روش ساده‌ای برای تخمین خطای کلی و محلی در حل المانهای محدود و شکلی ساده از آنالیز تطبیقی به روش h را ابداع کردند[۷].

در سال ۱۹۸۹ زینکویچ و زو طی مقاله‌ای با تقریب خطا در مسائل خمش صفحه، روشی را برای اصلاح المان بندی مثلثی که طی آن بعد المانها ریزتر می‌شد بر مبنای آنالیز تطبیقی ارائه کردند[۸]. از این پس این دو محقق تحقیقات زیادی در آنالیز تطبیقی، انجام دادند و در سال ۱۹۹۲ روش SPR [۴] را در برآورد خطای حل المانهای محدود وآنالیز تطبیقی، طی دو مقاله معروف ارائه کردند [۹ و۱۰].

در ۱۹۹۳ ادن و همکارانش روش مانده‌ها در برآورد خطا را با اضافه کردن قیود تعادل اصلاح کردند[۱۱].

در سال ۱۹۹۳ بوگدا[۵] و اولیور یک روش کلی در بهبود خطا در حل مسائل دو بعدی سازی شکل با استفاده از آنالیز تطبیقی ارائه کردند[۱۲].

در ۱۹۹۷ برومند و زینکویچ روش قدرتمند دیگری در برآورد خطا ارائه کردند که نسبت به روشهای قبلی دارای هیچ محدودیتی نبود[۱۳و۱۴]. این روش قابل استفاده در اکثر مسائل به ویژه مسائل

---

۱ *Bank*
۲ *Weiser*
۳ Energy error norm
۴ Superconvergent Pach Recovery
۵ Bugeda

پلاستیک است که این ویژگی یک مزیت مهم به شمار می‌آید.

۱-۵- هدف و تشریح مسأله در این تحقیق

با توجه به اینکه در عصر حاضر روشهای عددی به ویژه روش اجزای محدود گستردگی زیادی در علوم مختلف و صنعت پیدا کرده است، در صورتی که نتوان به نتایجی که از آن بدست می‌آید، اعتماد کرد، صحت تمام کارهایی که از اجزای محدود در آنها استفاده شده است با مشکل مواجه می‌شود وباعث تردید و سردرگمی می‌گردد؛ از اینرو در کنار فراگیری علم اجزای محدود پرداختن به روشهایی که به کمک آنها بتوان خطای موجود را تخمین زد ونیز میزان آنرا کاهش داد ضروری به نظر می‌رسد.

پژوهش شکل گرفته در قالب این پایان نامه از دو بخش کلی زیر تشکیل شده است.

در بخش اول، سعی شده است تا خواننده را با انواع روشهای برآورد خطا آشنا سازد و همچنین چگونگی حل تطبیقی در روش اجزای محدود را بیان کند و در نهایت با انتخاب روشی مناسب در تخمین خطا و بهبود شبکه اجزای محدود، به تهیه یک برنامه کامپیوتری جهت تحلیل مسائل دو بعدی الاستیسیته پرداخته شده است. صحت و دقت نتایج بدست آمده از این برنامه کامپیوتری به وسیله مقایسه آن با نتایج حاصل از تحلیل تئوری و نرم افزار تجاری Ansys بررسی شده است. مسئله مورد استفاده جهت این مقایسه، تعیین فاکتور شدت تنش صفحهٔ ترکدار تحت کشش می‌باشد. اهمیت نتایج نیز از این جهت مورد تاکید است که تبیین فاکتورشدت تنش به صورت یک معادله ریاضی برای ترکی دلخواه در یک سازه پیچیده و تحت بارگذاری دلخواه، مشکل وگاهی غیر ممکن است؛ لذا استفاده از یک روش عددی با قابلیت اطمینان بالا درحل اینگونه مسائل الزامی می‌باشد.

در بخش دوم، به طور خلاصه اصول به کار گرفته شده در تحلیل ایزوژئومتریک بیان شده است و به تشریح یک روش ابداعی جهت بهبود میدان تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتریک و تخمین خطای موجود در آن پرداخته می‌شود. روش تخمین کننده خطایی که به آن اشاره خواهد شد در دستهٔ روشهای برآورد خطا، مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) قرار می‌گیرد. از مقایسه نرم خطای انرژی

دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی برای دو مسئله نمونه معروف که معمولا جهت بررسی کارایی برآوردکننده‌های خطا به کار می‌روند، مشاهده می‌شود که تخمین کننده خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی جهت برآورد خطای موجود در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک برخوردار است.

فصل دوم

برآوردکننده‌های خطا

۲-۱- مقدمه

از نظر یک تقسیم بندی برآورد کننده‌های خطا در دو دسته پسرونده[1] وپیشرونده[2] قرار می‌گیرند که از بین آنها موضوع برآورد پسرونده خطا به صورت یکی از جنبه‌های بسیار مهم در کاربرد روش اجزای محدود، در آمده است. در این نوع برآورد، پس از هر بار حل مسأله با روش اجزای محدود، با استفاده از مقادیر محاسبه شده، خطا برآورد می‌شود. در صورتی که برآورد پیشرونده خطا، اطلاعاتی درباره همگرایی وپایداری حل‌های مختلف ارائه می‌دهد. همچنین اطلاعاتی اجمالی درباره رفتار خطا، مادامی که متغیرهای شبکه تغییر می‌کند، ارائه می‌دهد اما هیچ اطلاعات کمی درباره مقدار خطا در یک مسئله خاص ارائه نمی‌کند[۱۵].

در تقسیم بندی مشابه روشهای تخمین خطا در دو گروه عمده زیر قرار می‌گیرند :

۱- **استقرایی**: این گروه از برآورد کننده‌های خطا قبل از حل مسأله، بر اساس خواص حل دقیق آن مانند هموار بودن و غیره، اطلاعاتی در مورد نرخ حدی همگرایی (حالتی که ابعاد المانهای به کار رفته به سمت صفر میل می‌کند) فراهم می‌آورند. به لحاظ کاربرد محدود، این گروه از برآورد کننده‌های خطا بیشتر در تحقیقات تئوری به کار برده می‌شوند.

۲- **استنتاجی:** این گروه از برآوردکننده‌های خطا، با استفاده از نتایج یک حل اجزاء محدود و با استفاده از فرضیات اولیه، تخمینی از توزیع خطای یک کمیت در دامنه حل مسأله ارائه می‌دهند. برآوردکننده‌های خطای استنتاجی امروزه نقش عمده‌ای در کاربردهای عملی مهندسی ایفا می‌کنند، از این رو در این تحقیق تنها این گروه از برآوردکننده‌های خطا مورد توجه قرار گرفته است.

در برآورد خطا به روش استنتاجی، دو رویکرد عمده وجود دارد. اولین اینها تخمین خطا بر اساس روشهای باقیمانده است که از ادامه کار بابوشکا می‌باشد. و دومین که امروزه تأکید بر استفاده از آن

---
[1] posteriori estimation of error
[2] priori estimation of error

می‌باشد، استفاده از روشها، با وصله‌های خود تعادلی[1] است، که در این زمینه انس ورس و اُدن[2] پیشتاز می‌باشند. روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) نیز در این دسته قرار می‌گیرند[۴].

در ادامه این فصل به شرح و توضیح این دو رویکرد می‌پروازیم.

۲-۲- روشهای برآورد خطا مبتنی بر محاسبه مانده‌ها

از آنجا که حل اجزای محدود یک معادله دیفرانسیل با حل دقیق آن متفاوت است، واضح است که حل اجزای محدود، معادله دیفرانسیل را به طور کامل ارضا نمی‌نماید. همچنین در یک حل اجزای محدود، اصولا تنها میدان متغیر اصلی معادله (u) دارای پیوستگی درلبه المانها می‌باشد و میدان گرادیان آن، (σ) گسسته است. این موضوع، اساس تخمین خطا در این دسته از روشها است. در اینجا با قرار دادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادله دیفرانسیل اولیه و محاسبه مانده آن و نیز محاسبه پرش میدان گرادیان در لبه المانها، تخمینی از خطای حل اجزای محدود به دست می‌آید.

این روش نخستین تلاش برای محاسبه خطا در روش اجزای محدود بوده است. این روش ونیز ایده تعیین خطاها در روش اجزای محدود اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط بابوشکا و رینبولت مطرح شد[۱].

در ادامه به شرح مختصری از این روش می‌پردازیم[۲]:

فرض کنید معادله دیفرانسیل حاکم بر یک مسئله الاستیسیته با شرایط مرزی معلوم به صورت زیر است

$$LU + P = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \qquad (۱-۲)$$

$$L_0 U + P_0 = 0 \qquad \text{in} \quad \Gamma$$

که در آن L_0و L اپراتورهای خطی و U میدان جابجایی است. منظور از Ω کل ناحیه و Γ مرز است.

اکنون با استفاده از روشهایی مثل روش گالرکین می‌توان یک میدان جابجایی پیشنهادی $\hat{U}$ بدست

[1] self-equilibrating patches
[2] Ainsworth and Oden

آورد. اگر این میدان جابجایی تقریبی در معادله (۲-۱) قرار داده شود، طرف دوم این معادله به علت وجود خطای گسسته سازی صفر نخواهد شد. این مقدار را مانده می‌گویند وآن را با r نمایش می‌دهند.

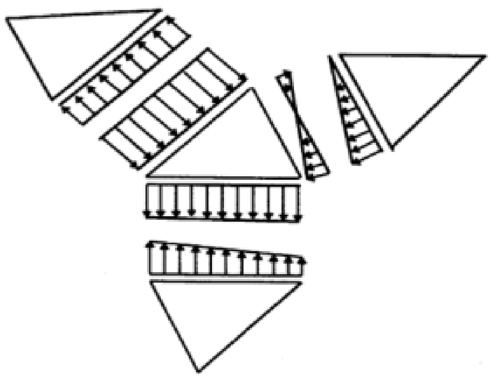
$$r = L\hat{U} + P \tag{۲-۲}$$

با استفاده از این رابطه مقدار خطا در هر نقطه قابل محاسبه است. بنابراین می‌توان مقدار خطا را برای هر المان با انتگرال گیری روی المان به صورت زیر محاسبه نمود

$$\left\| e_i^{\,2} \right\| = \int_{\Omega_e} r^2 d\Omega \tag{۳-۲}$$

که در این رابطه e_i شاخص خطا و Ω_e سطح المان i ام است. البته مقدار خطایی که از رابطه فوق به دست می‌آید قسمتی از خطای کل المان است.

اگر یک مسئله الاستیسیته از نوع C^0 مطرح باشد، پیوستگی در تغییر مکان وجود دارد ولی در مشتق و یا شیب آن پیوستگی وجود ندارد واین بدان معنی است که تنشها در مرز المان با تنشهای مرزی المان مجاور خود تفاوت دارند. شکل ۲-۱ این موضوع را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱ عدم پیوستگی شیب در مرز المان

با توجه به مطالب فوق شاخص خطا به صورت زیر اصلاح می‌گردد

$$\left\| e^2 \right\| = c_1 \int_{\Omega} r^2 d\Omega + c_2 \int_{\Gamma} J^2 d\Gamma \tag{۴-۲}$$

در رابطه فوق J مقدار پرش در مرز المانها و Γ مرز بین کل المانهاست. برای یک المان تنها در حالت دو بعدی ضرایب c_1 و c_2 محاسبه شده است. این ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$c_1 = \frac{h^2}{24\kappa p^2} \qquad (۵-۲)$$

$$c_2 = \frac{h}{24\kappa p}$$

در این روابط h اندازه المان، p درجه یا توان توابع شکل و κ ضریبی است که بستگی به معادله دیفرانسیل حاکم دارد. مثلا برای مسائل تنش وکرنش مستوی ضریب κ به صورت زیر بدست آمده است.

$$\kappa = \frac{E}{1-\nu} \qquad (۶-۲)$$

که E مدول یانگ و ν ضریب پواسون است. بنابراین مقدار خطا برای هر المان به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\left\| e_i^{\,2} \right\| = \frac{h^2}{24\kappa p^2} \int_{\Omega_i} r^2 d\Omega + \frac{h}{24\kappa p} \int_{r_i} J^2 d\Gamma \qquad (۷-۲)$$

در نتیجه خطا روی کل محیط برابر است با

$$\left\| e^2 \right\|_{total} = \sum_{i=1}^{m} \left\| e_i^{\,2} \right\| \qquad (۸-۲)$$

در رابطه بالا m تعداد کل المانهاست.

در تحقیقاتی که بابوشکا همراه با یک تیم تحقیقاتی به سرپرستی پروفسور استروبولیس[1] از دانشگاه تگزاس، انجام دادند، روشی ابداع شد که به کمک آن می‌توان مقایسه‌ای بین روشهای تخمین خطا انجام داد. این روش آزمون وصله بابوشکا نام گرفت و بر اساس آن پی برده شد که روشهای بازیافتی در مقایسه با روشهای باقیمانده‌ای از دقت و همگرایی بهتری برخوردار می‌باشند[۴]. لذا در این تحقیق از بررسی بیشتر این دسته از برآورد کننده‌ها صرف نظر می‌شود.

[1] Strouboulis

۲-۳- روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان)

پس از حل معادله دیفرانسیل الاستیسیته توسط روش اجزای محدود وبه دست آوردن مقادیر جابجایی در هر گره، در صورتی که به دست آوردن مقادیر دقیق تنش (گرادیان میدان) در گره‌ها، روی مرز المانها و یا هر جای دیگر از دامنه مورد نظر باشد، در آن صورت باید از روش‌های بازیافت تنش استفاده نمود. زیرا اگر مسألهٔ تغییراتی، از درجات پایین، مانند C^0 باشد، تنها تابع جابجایی در نقاط گرهی و مرز المانها پیوسته بوده و تنش یا گرادیان میدان در آن نقاط گسسته و همراه با پرش می‌باشد. برای مثال در هر گره که چهار المان مربعی شکل به آن متصل باشد، فقط یک مقدار جابجایی پس از حل معادلهٔ دیفرانسیل به وسیلهٔ اجزای محدود موجود بوده، ولی برای مشتق اول و تنش، به دلیل ناپیوسته بودن شیب در آن گره، از هر المان متصل به گره مذکور مقداری متفاوت، یعنی در مجموع چهار مقدار مختلف برای آن گره وجود خواهد داشت. این موضوع برای کلیهٔ مرزهای المانها نیز صادق می‌باشد. از اینجا می‌توان به اهمیت بحث بازیافت تنش پی برد. زیرا قاعدتا باید فقط یک مقدارمشخص، نزدیک به حل دقیق، برای مشتق اول یا تنش در هر گره موجود باشدکه به دست آوردن این مقدار، با استفاده از عملیات تکمیلی بازیافت تنش به روی نتایج حاصل از حل روش اجزای محدود مقدور می‌باشد، که خود شامل روشهای مختلفی است.

به طور کلی بازیافت تنش روشی به منظور بالا بردن دقت، وپیوسته و هموار نمودن میدان تنش یا گرادیان میدان به دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش با استفاده از حل روش اجزای محدود، یک جواب نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقاط دلخواه روی دامنه محاسبه شده که دقت بالاتری نسبت به حل اولیهٔ اجزای محدود داشته است.

این میدان تنش بهبود یافته، به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \qquad (۲-۹)$$

که در آن $\bar{\sigma}^*$ مقادیر گرهی این میدان و N توابع شکل مورد استفاده در المانها است. با استفاده از این

میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\mathbf{e}^*_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h \tag{۲-۱۰}$$

که در رابطه بالا σ_h تنش ناشی از اجزای محدود می‌باشد. روشهای متعددی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد. واضح است که کارایی روند بازیافت نقش عمده‌ای در کارایی این گروه از برآورد کننده‌های خطا دارد. در ادامه این فصل، مهمترین این روشها بررسی خواهد شد.

۲-۳-۱- روش میانگین گیری[1]

روشی که توسط هینتن و کمپبل[2] در سال ۱۹۷۴ برای بازیابی تنش به کار برده شده است، که در حال حاضر نیز در برخی نرم افزارهای اجزای محدود برای به دست آوردن یک مقدار واحد تنش در گره‌ها به کار می‌رود[۱۶].

در این مقاله دو متد سراسری و موضعی پیشنهاد شده است. در روش موضعی پیشنهاد شده ابتدا مقادیر تنش در نقاط گوسی به وسیله روش اجزای محدود به دست آمده وپس از آن با استفاده از برونیابی در هر المان مربعی با چهار نقطه گوسی، مقادیر تنش در گره‌ها به دست می‌آید. میانگین تنش حاصل از المانهای متصل به هر گره پس از عمل برونیابی به عنوان مقدار بهبود یافتۀ آن تعریف می‌گردد و مطابق رابطه داریم :

$$\overline{\sigma}_i^{\,*} = \frac{1}{\rho_i} \sum_{\tau \in \xi_i} \sigma_h^{\tau} \Big|_{X_i} \tag{۲-۱۱}$$

که در آن σ_h^{τ} تنش محاسبه شده در المان τ در محل گره i ام بعد از عمل برونیابی و ρ_i تعداد المانهای متصل به گره i ام می‌باشد. این روش با وجود سادگی وسرعت بالا در مسائل ساده که شبکه المان بندی منظم است، کارایی قابل قبولی دارد.

---
[1] Averaging Method
[2] Hinton and Campbell

۲-۳-۲- روش تصویر L_2 [1]

اودن و براچلی[2] در سال ۱۹۷۱ روش تصویر L_2 را پیشنهاد کردند[۱۷]. این روش از اولین روشهای بازیافت تنش محسوب می‌شود. در این روش با کمینه کردن عبارت زیر :

$$\Pi = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h})^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}) d\Omega \qquad (۲-۱۲)$$

روی دامنه حل، مقادیر گرهی میدان تنش بازیافتی به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{A}^{-1} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{DB} d\Omega \right) \bar{\mathbf{u}}_h \qquad (۲-۱۳)$$

که در آن :

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \qquad (۲-۱۴)$$

و $\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بازیافتی و $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}$ تنش به دست آمده از حل اجزای محدود و Ω دامنهٔ حل می‌باشد. البته این روش کارایی محدودی داشته و با ابداع روشهای جدیدتر به ندرت از آن استفاده می‌شود.

۲-۳-۳- روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق هم گرا SPR [3]

این روش بازیافت تنش در سال ۱۹۹۲ توسط زینکویچ و زو ابداع شد و گام بسیار بلندی در بازیافت تنش برداشته شد[۹]. امروزه این روش به عنوان یکی از بهترین و موثرترین روشها برای برآورد خطا در مسائل مهندسی به کارمی‌رود. اساس این روش برمبنای استفاده ازنقاطی که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است[۲]. لازم به ذکر است که در ضمیمهٔ ۱ به طور کامل به تشریح مفهوم نقاط فوق

---
[1] *L2* Projection Method
[2] Oden and Brauchli
[3] Superconvergent patch recovery

همگرا در برآورد خطای تحلیل اجزای محدود پرداخته شده است.

دراین روش با برازش یک میدان به صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی گروه المانهای متصل به هر گره[1]، میدان گرادیان بهبود یافته تعیین می‌شود. این میدان به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\sigma_p^* = Pa \tag{۱۵-۲}$$

در روابط فوق σ_p^*، تنش بهبود یافته، P مجموعهٔ تک جمله‌ای‌های حداکثر هم درجه با توابع شکل المان و a مقادیر ثابت مجهول هستند، با کمینه کردن تابع (۲-۱۶) مقادیر مجهول مطابق رابطهٔ (۲-۱۷) به دست می‌آید.

$$F(a) = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_h(x_i, y_i) - p(x_i, y_i)a)^2 \tag{۱۶-۲}$$

$$a = A^{-1}b \tag{۱۷-۲}$$

در رابطهٔ (۲-۱۷) A و b به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \sum_{i=1}^{n} P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \tag{۱۸-۲}$$

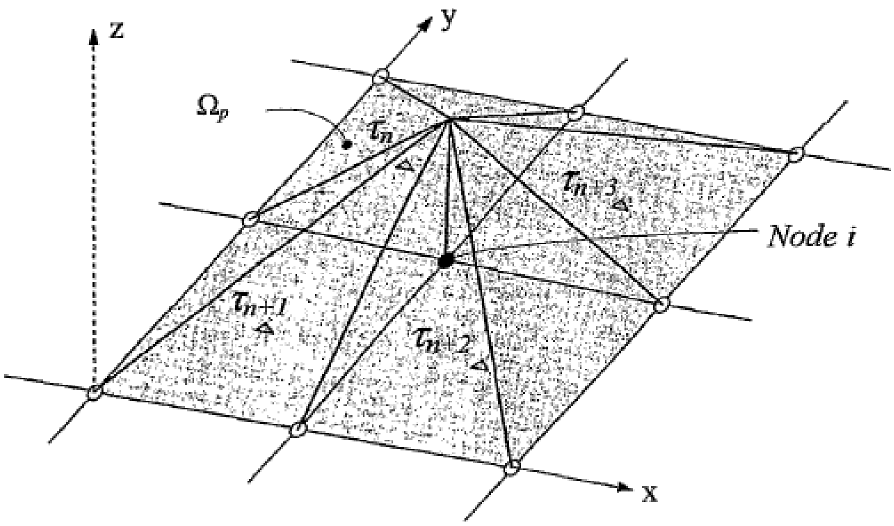
$$b = \sum_{i=1}^{n} P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \tag{۱۹-۲}$$

در این روابط، σ_h تنش به دست آمده از روش اجزای محدود، x_i و y_i مختصات نقاط فوق همگرا یا نقاط بهینه نمونه گیری گرادیان در Ω_p و n تعداد المانهای موجود در هر ناحیه[2] است.

پس از محاسبه a، سهم گره‌های موجود در Ω_p از رابطهٔ (۲-۱۵) به وسیلهٔ یک تابع شکل خطی که مرکز آن بروی گره i ام است، محاسبه می‌شود(شکل ۲-۲). واضح است که این سهم برای گره اصلی برابر واحد و برای سایر گره‌ها گوشه‌ای برابر صفر می‌باشد. عملیات فوق برای گره‌های میانی، یعنی گره‌هایی که در رئوس واقع نشده‌اند انجام نمی‌گیرد و سهم حاصل از عملیات به روی گره‌های گوشه‌ای

[1] patch
[2] patch

برای آنها منظور می‌گردد.



شکل ۲- ۲ محاسبهٔ سهم گره‌ها

۲-۳-۴- روش بازیافت تنش بر مبنای تعادل در زیر دامنه‌ها، REP [1]

این روش بازیافت در سال ۱۹۹۷ توسط برومند و زینکویچ ابداع شد [۱۳]. در این روش بر خلاف روش SPR احتیاج به مشخص نمودن نقاط فوق همگرا در المان نیست. اساس کار در این روش، معادل قرار دادن نیروهای عمل کننده بر یک گروه از المانها برای میدان تنش حاصل از روش اجزای محدود و میدان تنش بهبود یافته[۲] است. اگر مانند روش SPR حول گره i (واقع در گوشه هر المان) یک زیر دامنهٔ Ω_p در نظر گرفته شود، برآیند نیروهای عمل کننده بر آن را می‌توان به صورت زیر به دست آورد :

$$F_p = \int_{\Omega_p} B^T \sigma_h d\Omega \qquad (۲-۲۰)$$

در رابطه بالا، F_p برآیند اثر نیروهای باقیمانده دامنه و نیز اثر نیروهای بدنه بر این گروه از المانها است. همین کمیت را می‌توان برای میدان تنش بازیافتی تعریف نمود :

[1] Recovery by Equilibrium in Patches
[2] Improved Stress Field

$$F_p^* = \int_{\Omega_p} B^T \sigma^* d\Omega \qquad (۲-۲۱)$$

در این روش میدان تنش به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\sigma^* = Pa = \begin{bmatrix} p & & & \\ & p & & \\ & & \ddots & \\ & & & p \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{D_\sigma} \end{Bmatrix} \qquad (۲-۲۲)$$

که در آن p مجموعه تک جمله‌ایهای هم درجه با توابع شکل به کار رفته در المان و D_σ بعد میدان تنش است. از آنجا که تعداد معادلات و مجهولات به احتمال زیاد با هم برابر نیست، سعی می‌شود دو کمیت F_p و F_p^* به صورت تقریبی برابر قرار داده شوند. به این منظور، با کمینه کردن تابع زیر:

$$\Pi = \left(\int_{\Omega_p} B^T \sigma^* d\Omega - \int_{\Omega_p} B^T \sigma_h \, d\Omega \right)^T \left(\int_{\Omega_p} B^T \sigma^* d\Omega - \int_{\Omega_p} B^T \sigma_h \, d\Omega \right) \qquad (۲-۲۳)$$

می‌توان ضرایب مجهول را محاسبه نمود. اگر تابع فوق به صورت زیر نوشته شود:

$$\Pi = (Ha - F_p)^T (Ha - F_p) \qquad (۲-۲۴)$$

که در آن:

$$H = \int_{\Omega_p} B^T P \, d\Omega \qquad (۲-۲۵)$$

با کمینه کردن رابطه (۲-۲۴)، ضرایب مجهول به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$a = \left(H^T H \right)^{-1} H^T F_p \qquad (۲-۲۶)$$

اما از آنجایی که گاهی تعداد معادلات نهفته در کمینه کردن رابطه (۲-۲۴) کمتر از تعداد مجهولات است، محاسبه a از رابطه فوق امکان پذیر نیست. به همین منظور، رابطه بالا به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$a = \left(H^T H + \sum_{\tau \in \rho_i} H^{\tau T} H^\tau \right)^{-1} \left(H^T F_p + \sum_{\tau \in \rho_i} H^{\tau T} F^\tau \right)_p \qquad (۲-۲۷)$$

که در آن F^τ (نیروهای عمل کننده بر روی المان τ) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$F^{\tau} = \int_{\Omega^{\tau}} B^{T} \sigma_h^{\tau} \, d\Omega \qquad (۲۸-۲)$$

کارایی این روش قابل مقایسه با روش قبل (استفاده از نقاط فوق همگرا) است.

۲-۴- معیارهای بیان خطا

در حالت کلی، خطا عبارت است از اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی که به روش اجزای محدود بدست آمده است. بنابراین خطای حل تنش بصورت زیر بدست می‌آید:

$$e_{\sigma} = \sigma - \sigma_h \qquad (۲۹-۲)$$

که در آن σ میدان تنش دقیق است. اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می‌توان از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد که این میدان تنش جدید توسط یکی از روشهای بازیافت تنش بدست آمده است. بنابراین خطای تقریبی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{e}_{\sigma} = \sigma^{*} - \sigma_h \qquad (۳۰-۲)$$

رابطهٔ اخیر مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می‌کند ضمن اینکه این مقدار ممکن است از نظر عددی، کوچکتر از صفر باشد. بنابراین برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری برای بیان آن استفاده می‌شود.

مهمترین معیارهای بیان خطا عبارتند از[۳و۲]:

۱- معیار خطای انرژی[1]

۲- معیار خطای L_2

۲-۴-۱- مفهوم نرم

برای پی بردن به مفهوم نرم، ابتدا ضرب داخلی توابع f و g را بر روی بازه (a,b) به ازای تابع مفروض $w(x) \geq 0$ را در نظر می‌گیریم[۱۹] .

[1] Energy Norm

$$\langle f , g \rangle_w = \int_a^b f(x).g(x)w(x)\,dx \qquad (۳۱-۲)$$

با ایده گرفتن از فضای سه بعدی و رابطه ضرب داخلی با طول بردارها در آنجا، در اینجا نیز همراه با ضرب داخلی، مفهوم نرم (تعمیم مفهوم طول) بردارها را مطرح می‌کنیم[۱۹] :

نرم بردار f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\| = \langle f , f \rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۲-۲)$$

به ازای هر بردار f از فضا، شرایط اساسی نرم به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\|f\| \ge 0 \\ &\|f + g\| \le \|f\| + \|g\| \\ &\|\alpha f\| = \|\alpha\|.\|f\| \\ &f = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0 \end{aligned} \qquad (۳۳-۲)$$

۲-۴-۲- معیار انرژی

اگر مجددا معادله دیفرانسیل (۱-۱) را در نظر بگیریم

$$Lu + b = 0 \;\; on \;\; \Omega \qquad (۳۴-۲)$$

طبق تعریف، نرم انرژی برای مسائل الاستیسیته با معادله رفتاری فوق به کمک رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\|U\| = \left[\int_\Omega u^T L u \, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_\Omega u^T (S^T D S) u \, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۵-۲)$$

$$\|U\| = \left[\int_\Omega (Su)^T D (Su) \, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۶-۲)$$

$$= \left[\int_\Omega \varepsilon^T D \varepsilon \, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۷-۲)$$

$$=\left[\int_{\Omega}\sigma^{T}D^{-1}\sigma\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۲-۳۸}$$

و نرم انرژی برای خطاها برای یک مسئله الاستیسیته خطی توسط روابط زیر بیان می‌شود[۲] :

$$\|e\|=\left[\int_{\Omega}e^{T}Le\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\int_{\Omega}(u-u_h)^{T}L(u-u_h)\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۲-۳۹}$$

$$=\left[\int_{\Omega}(\varepsilon-\varepsilon_h)^{T}D(\varepsilon-\varepsilon_h)\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۲-۴۰}$$

$$=\left[\int_{\Omega}(\varepsilon-\varepsilon_h)^{T}(\sigma-\sigma_h)\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۲-۴۱}$$

$$=\left[\int_{\Omega}(\sigma-\sigma_h)^{T}D^{-1}(\sigma-\sigma_h)\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۲-۴۲}$$

۲-۴-۳- درصد خطای نسبی η

بیان خطا به صورت مقدار مطلق، عملا شاخص مناسبی برای درک آن نمی‌باشد و لذا معمولا خطا به صورت نسبتی از مقدار کل بیان می‌شود. درصد خطای نسبی نرم انرژی با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$\eta=\frac{\|e\|}{\|U\|}\times 100\quad\% \tag{۲-۴۳}$$

از طرفی همانطور که قبلا بحث شد، میدان تنش، کرنش و یا جابجایی به طور دقیق در دست نیست، پس در محاسبه معیار خطا بایستی از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد:

$$\|e\|\approx\|\bar{e}\|=\left[\int_{\Omega}(\sigma^{*}-\sigma_h)^{T}D^{-1}(\sigma^{*}-\sigma_h)\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۲-۴۴}$$

در نتیجه درصد خطای نسبی نیز به صورت تقریبی و با توجه به حل اصلاح شده بیان می‌شود:

$$\bar{\eta}=\frac{\|\bar{e}\|}{\|\bar{u}\|} \tag{۲-۴۵}$$

که در رابطهٔ فوق $\bar{u}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|\bar{u}\| = \left[\|u^*\|^2 + \|\bar{e}\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۴۶-۲}$$

$$\|u^*\| = \left[\int_\Omega \sigma^* D^{-1} \sigma^* \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۴۷-۲}$$

چنانچه خطای نسبی قابل قبول در یک مسئله را $\hat{\eta}$بنامیم، بنابراین شرط یک حل قابل قبول توسط روش اجزای محدود این است که:

$$\eta \le \hat{\eta} \tag{۴۸-۲}$$

مقدار $\hat{\eta}$ معمولا در کارهای عملی کمتر از ۵ درصد در نظر گرفته می‌شود[۲] .

۲-۴-۴- معیار L_2

نرم L_2برای خطای تغییر مکان، تنش و کرنش به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\|e_u\|_{L_2} = \left[\int_\Omega (u - u_h)^T (u - u_h) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۴۹-۲}$$

$$\|e_\sigma\|_{L_2} = \left[\int_\Omega (\sigma - \sigma_h)^T (\sigma - \sigma_h) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۵۰-۲}$$

$$\|e_\varepsilon\|_{L_2} = \left[\int_\Omega (\varepsilon - \varepsilon_h)^T (\varepsilon - \varepsilon_h) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۵۱-۲}$$

مشاهده می‌شود که رابطه (۲-۵۰) مشابه رابطه نرم انرژی است با این تفاوت که تابع وزنی D^{-1} را ندارد.

بنابراین نرمهای تعریف شده در روابط (۲-۴۹) و (۲-۵۰) و (۲-۵۱) به ما این اجازه را می‌دهند که توجه خود را روی کمیت مورد نظر متمرکز نمائیم.

درصد خطای نسبی برای معیار L_2 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left\| \sigma^* \right\|_{L_2} = \left[\frac{\int_\Omega \sigma^{*T} \sigma^* \, d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۵۲-۲}$$

$$\left\| e_\sigma^* \right\| = \left[\frac{\int_\Omega (\sigma^* - \sigma_h)^T (\sigma^* - \sigma_h) \, d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۵۳-۲}$$

$$\eta = \left[\frac{\left\| e_\sigma^* \right\|^2}{\left\| \sigma^* \right\|_{L_2}^2 + \left\| e_\sigma^* \right\|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۵۴-۲}$$

۲-۴-۵- جذر مجموع مربعات[1] خطا

اگر جذر مجموع مربعات خطای تنش به صورت نرمالیزه شده برای یک ناحیهٔ Ω مورد نظر باشد مقدار آن از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد[۲] .

$$\Delta\sigma = \left\| e_\sigma \right\|_{RMS} = \left[\frac{\left\| e_\sigma \right\|_{L_2}^2}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۵۵-۲}$$

$$\left\| \sigma \right\|_{RMS} = \left[\frac{\int_\Omega \sigma^T \sigma \, d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۵۶-۲}$$

خطای نسبی نرمالیزه شده تنش عبارت است از:

$$\eta = \frac{\left\| e_\sigma \right\|_{RMS}}{\left\| \sigma \right\|_{RMS}} \times 100 \ \% \tag{۵۷-۲}$$

هر یک از نرمهای بالا می‌توانند بر روی کل دامنه، جزئی از دامنه ویا فقط یک المان محاسبه شوند در این صورت خطای کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left\| e \right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left\| e \right\|_i^2 \tag{۵۸-۲}$$

[1]Root mean square

که در آن m تعداد اجزای شبکه می‌باشد.

۲-۴-۶- شاخص تأثیر θ

برای بعضی مسائل خاص که حل دقیق مسئله موجود است می‌توان معیار خطای دقیق و تقریبی را بدست آورد. نسبت معیار خطای تقریبی به معیار خطای واقعی، بیانگر همگرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه گر خطا می‌باشد که این نسبت شاخص تأثیر نامیده می‌شود.

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \qquad (۲-۵۹)$$

هنگامی یک محاسبه گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تاثیر به سمت واحد میل نماید.

۲-۴-۷- تعریف شاخص ξ_i

همان طور که در بخش ۲-۴-۳ بیان شد، با محاسبه η و مقایسه آن با $\hat{\eta}$ می‌توان به قابل قبول بودن خطای اتفاق افتاده در تحلیل به روش اجزای محدود برای محیط جزء بندی شده پی برد. به طوری که اگر $\eta \langle \hat{\eta}$ باشد، خطاهای اتفاق افتاده قابل قبول بوده و چنانچه $\hat{\eta} \langle \eta$ باشد، خطای اتفاق افتاده بیش از مقدار مجاز بوده و برای رسیدن به جواب قابل قبول باید شبکه جزء بندی شده اصلاح گردد.

اما سئوالی که در اینجا مطرح است، این است که شبکه جزء بندی شده چگونه باید اصلاح شود[۲] .

برای اصلاح شبکه جزءبندی شده اولین راه حلی که به نظر می‌رسد کوچکتر نمودن کلیه المانها تا حصول $\eta \langle \hat{\eta}$ می‌باشد. اما راه حل فوق یک راه حل اقتصادی نیست و موجب می‌شود که حجم مسئله بسیاد بزرگ شده و حل آن نیازمند نرم افزارهای با ظرفیت بالا می‌باشد. اما راه حلی که به نظر می‌آید از کارایی بیشتری برخوردار بوده و موجب کمترین افزایش حجم مسئله می‌گردد، کوچکتر نمودن موضعی مسئله می‌باشد. یعنی در جاهایی که خطا بیش از خطای مجاز می‌باشد، عملیات اصلاحی اعمال شود ودر جاهایی که خطای اتفاق افتاده کمتر از خطای مجاز می‌باشد، دست نخورده

باقی بماند، روش اخیر به اصلاح وفقی معروف است که در فصل سوم به تفصیل مورد بحث قرار خواهد گرفت. اما در روش اخیر نیازمند ابزار یا پارامتری هستیم، که بتوان به کمک آن خطای موضعی کلیه اجزاء را محاسبه نمود. این پارامتربه ξ_i معروف است که در ادامه به نحوهٔ محاسبهٔ آن می‌پردازیم.

برای آنکه یک معیاری داشته باشیم تا بتوانیم بگوییم که در کجاها خطا بیشتر است، شاخص ξ_i را برای تک تک اجزاء به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به منظور تعمیم خطای نسبی نرمها برای تک تک اجزاء مطابق تعریف بابوشکا فرض می‌شود که درصد خطا به طور یکنواخت بین کلیه اجزاء توزیع شده است. پس خواهیم داشت[۲]:

$$\left\|e^*\right\|^2=\sum_{i=1}^{m}\left\|e^*\right\|_i^2 \qquad (۶۰-۲)$$

$$\left\|e^*\right\|^2=m.\left\|e^*\right\|_i^2 \qquad (۶۱-۲)$$

که درآن m تعداد اجزاء در کل ناحیه Ω می‌باشد.

$$\eta=\left[\frac{\left\|e^*\right\|^2}{\left\|u^*\right\|^2+\left\|e^*\right\|^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{m.\left\|e^*\right\|_i^2}{\left\|u^*\right\|^2+\left\|e^*\right\|^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۶۲-۲)$$

چنانچه خطای مجاز[1] را با $\left\|e^*\right\|_{per}$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\eta=\hat{\eta}\Rightarrow\left\|e^*\right\|_i=\left\|e^*\right\|_{per} \qquad (۶۳-۲)$$

$$\hat{\eta}^2=\frac{m\left\|e^*\right\|_{per}^2}{\left\|u^*\right\|^2+\left\|e^*\right\|^2} \qquad (۶۴-۲)$$

$$\left\|e\right\|_{per}=\frac{\hat{\eta}}{\sqrt{m}}\left[\left\|u^*\right\|^2+\left\|e^*\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۶۵-۲)$$

طبق تعریف شاخص ξ_i عبارت خواهد بود با:

[1] *Permissible*

$$\xi_i = \frac{\left\| e^* \right\|_i}{\left\| e \right\|_{per}} \tag{۶۶-۲}$$

بنابراین به عنوان یک معیار چنانچه $\xi_i \rangle 1$ باشد، خطای جزء مورد نظر (iام) مورد قبول بوده و چنانچه $\xi_i \langle 1$ باشد، خطای جزء فوق بیش از مقدار مجاز خواهد بود.

فصل سوم

حل تطبیقی در اجزای محدود

۳-۱- مقدمه

اصلاح وفقی در حل اجزای محدود موضوعی است که در این فصل به آن می‌پردازیم. برای درک بهتر مسئله ، ابتدا دو سئوال اساسی زیر را مطرح می‌کنیم.

الف) در یک حل انجام شده به روش اجزای محدود خطای اتفاق افتاده چگونه تعیین می‌شود.[1]

ب) بهترین روش اصلاحی حل اجزای محدود برای رسیدن به نتایج قابل قبول، به طوری که اقتصادی نیز باشد، چه روشی است.

به طور کلی اندر کنش پرسشهای (الف) و (ب) موضوع اصلاح وفقی را تشکیل می‌دهند[۳].

در فصل قبل، در مورد پرسش اول به طور مفصل بحث شد و معلوم گردید که چگونه از یک حل اجزای محدود می‌توان خطا را تخمین زد.

در مورد پرسش دوم اغلب کاربرها دوست دارند که شبکهٔ جزء بندی اولیه را حفظ کرده و عملیات اصلاحی به طور موضعی صورت گیرد. که بررسی انواع روشهای اصلاح موضعی شبکه اجزای محدود به طور مفصل در این فصل مورد بحث قرار خواهد گرفت.

اولین روشهای حل تطبیقی توسط بابوشکا و رینبولت در سال ۱۹۷۰ میلادی صورت گرفت[۲] .

در حقیقت حل تطبیقی به آن دسته از فرآیندهایی گفته می‌شود که درآن همواره در هر مرحله، نیازمند به جوابها در مرحله قبل می‌باشد[۲] . در این فرآیند حل اولیه به روش اجزای محدود عادی نقش بسیار مهمی در تقریب حل و مقدار خطای محاسبه شده دارد.

یکی از اهداف مهم روش آنالیز تطبیقی پیدا کردن شبکه المان بهینه است. منظور از شبکه المان بهینه شبکه ای است که با تعداد المانهای ثابت، حداقل خطای حل به روش اجزای محدود را داشته باشد. اولین تلاش برای رسیدن به شبکه المان بهینه توسط نایس و مارکال[2] در سال ۱۹۷۴ صورت گرفت[۲۰] . در این روش موقعیت گره‌ها به صورت نامعلوم در نظر گرفته می‌شود و سپس با استفاده

---

[1] *A posteriori error estimate*
[2] Neice and Marcal

از حداقل نمودن انرژی پتانسیل می‌توان موقعیت گره‌ها را تعیین نمود. در روشهای آنالیز تطبیقی شبکه المانی بهینه است که معیار خطای انرژی به صورت یکنواخت روی کل ناحیه توزیع شده باشد. این تعریف اولین بار در مورد مسائل یک بعدی صورت گرفت[۷,۵]. و در حال حاضر این تعریف درهمه روشهای آنالیز تطبیقی استفاده می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که اگر از معیار خطای دیگری استفاده شود، شبکه المان بهینه تغییر خواهد نمود. به عبارت دیگر تعریف شبکه المان بهینه منحصر به فرد نیست.

در ادامه به بررسی انواع روشهای آنالیز تطبیقی در اجزای محدود می‌پردازیم. بیشتر مطالب و تمام اشکال موجود در این بخش برگرفته از مرجع [۲] می‌باشد.

۳-۲- انواع روشهای آنالیز تطبیقی

روشهای مختلفی برای حل تطبیقی در اجزای محدود وجود دارد. در زیر دو نوع گروه کلی که بیشتر مورد مورد استفاده قرار می‌گیرند معرفی می‌شوند.

۱) روش اصلاح شبکه h[۱]: در این روش از المانها با مرتبه یکسان استفاده می‌شود، و برای دستیابی به نتایج مطلوب، اندازه المانها تغییر می‌کند.

۲) روش اصلاح شبکه P[۲]: در این روش ما از المانهایی با اندازه یکسان استفاده می‌کنیم و با افزایش مرتبه المانهایی که دارای، خطایی بیشتر از معیار تعیین شده هستند به بهبود شبکه و کاهش خطای ناشی از حل اجزای محدود می‌پردازیم.

هر یک از روشهای بالا خود به چند نوع تقسیم می‌شوند که در ادامه به معرفی آنها می‌پردازیم.

۳-۲-۱- انواع روشهای اصلاح شبکه h

۳-۲-۱-۱- روش تقسیم المان‌ها (غنی سازی)[۳]: در این روش هر المان که دارای خطایی بیشتر از

[1] h-refinement
[2] p-refinement
[3] element subdivision (enrichment)

معیار تعیین شده می‌باشد به دو بخش تقسیم می‌شود، به طوری که مرزهای المان ابتدایی دست نخورده باقی می‌ماند. یکی از معایب این روش تولید یک گره میانی در المانی که به دو بخش تقسیم می‌شود می‌باشد، در اینصورت یک المان با گره میانی متصل به المان خطی بدون گره میانی تولید می‌شود. در این موارد باید محدودیتهایی برای آن گره میانی تعیین کرد که در نتیجه محاسبات بیشتر و پیچیده تر می‌شود که تا حدودی باعث غیر اقتصادی شدن این روش می‌شود، با این حال این روش یکی از پر کاربردترین روشهای آنالیز تطبیقی به شمار می‌رود.

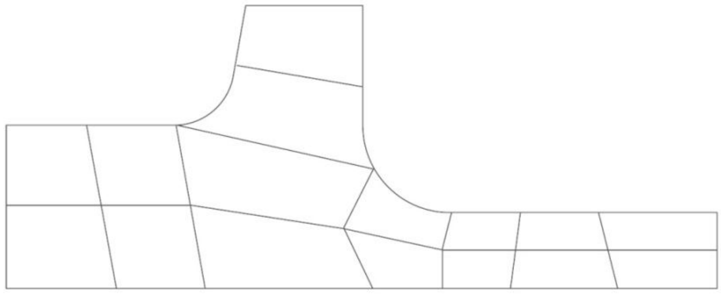
۳-۲-۱-۲- روش تولیدکامل المانها (المانبندی دوباره)[1]: در این روش بر روی کل دامنه مورد استفاده برای حل اجزای محدود، المانهایی با اندازه جدید تولید می‌شود و برای بهبود دوبارهٔ شبکه، کل المانهای اولیه پاک می‌شوند و دامنه دوباره المان بندی می‌شود.

این روش تا حدودی گران و غیر اقتصادی می‌باشد. مخصوصا در مسائل سه بعدی که تولید مش برای بعضی از المانها مشکل می‌باشد. مشکل بعدی که در این روش وجود دارد، انتقال نتایج و داده‌های ناشی از مش‌های اولیه به مشهای ثانویه می‌باشد. با وجود این، نتایج بدست آمده از این روش بسیار عالی بوده است و برای مسائل کاربردی- مهندسی زیادی، مخصوصا مسائلی که شکل المانها در طول آنالیز تغییر می‌کند، بهترین روش برای حل تطبیقی به شمار می‌رود.

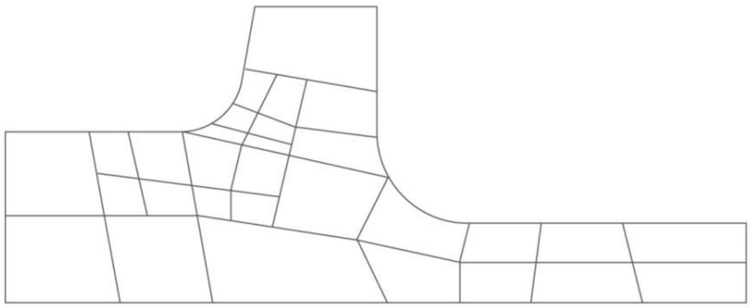
۳-۲-۱-۳- اصلاح شبکه به روش r[2]: در این روش تعداد کل گره‌های تولید شده از مش بندی مسئله ثابت باقی می‌ماند و برای رسیدن به بهترین تقریب، موقعیت گره‌ها در روی دامنه تغییر می‌کند. اگر چه این روش ازنظرتئوری جالب به نظرمی‌رسد، امااستفاده از آن در عمل مشکل می‌باشد و پیشنهادهای کمی برای پیاده سازی این روش وجود دارد. بعلاوه این روش را نمی‌توان به عنوان یک روش صحیح اصلاح شبکه به شمار آورد زیرا نمی‌توان برای آن یک دقت از پیش تعیین شده مشخص کرد تا بعد از اصلاح شبکه به آن دقت برسیم.

[1] mesh regeneration or remeshing
[2] r-refinement

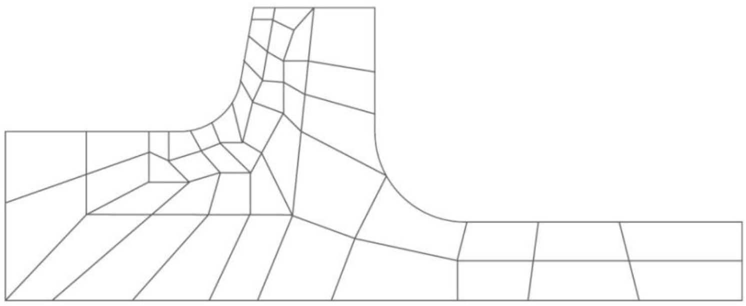
در شکل ۳-۱ روشهای مختلف اصلاح شبکه به روش h را می‌توان مشاهده کرد.



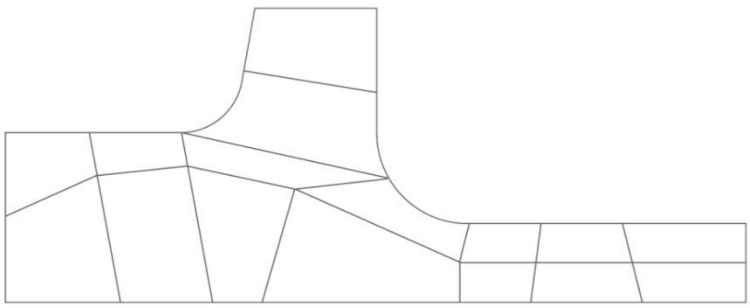
الف) شبکه اولیه



ب) افزایش مش با تقسیم مجدد مش اولیه (غنی سازی)



ج) اصلاح شبکه با تولید دوباره مش جدید



د) اصلاح شبکه به روش **r** با جابجایی موقعیت نقاط

شکل ۳-۱ شیوه‌های مختلف اصلاح شبکه به روش **h**

۳-۲-۲- رویکردهای مهم در اصلاح شبکه به روش P

در اصلاح شبکه به روش P دو رویکرد مهم وجود دارد که عبارتند از:

۱) افزایش درجه المانها به طور یکسان در تمام دامنه

۲) افزایش درجه المانها به طور موضعی با استفاده از اصلاح سلسله مراتبی[1]

هیچکدام از روشهایی که ذکر شد، دارای یک دستور عمل مستقیمی برای دستیابی به بهترین اصلاح شبکه برای یک معیار مشخص از خطا نیستند. این روشها معمولا نیاز به اطلاعات زیادی دارند، در نتیجه روشهای پر خرجی به شمار می‌روند اما به هر حال سرعت همگرایی برای متغیرهای داده شده به روش اصلاح P بسیار بالاتر می‌باشد و پیشنهادهای زیادی برای اعمال این روش داده شده است.

روش دیگری که از آن برای اصلاح شبکه اجزای محدود استفاده می‌شود، روش hp می‌باشد که در آن اصلاح شبکه به روش p و h به طور همزمان صورت می‌پذیرد. در این روش اندازه المانها h، و نیز درجه چند جمله‌ای استفاده شده در توابع شکل p، تغییر می‌کنند. تحقیقات زیادی در مورد این روش توسط بابوشکا و ادن گزارش شده است که برای اطلاعات بیشتر می‌توان به مراجع [۶و۲۱] رجوع کرد و همچنین در قسمت ۳-۴ به جزئیاتی از روش اصلاح hp که توسط زینکویچ ، زو و گونگ[2] توسعه داده شده است اشاره می‌کنیم.

۳-۳- مثالهایی برای اصلاح شبکه به روش h

۳-۳-۱- تولید مش

در مقدمه این فصل، چندین روش اصلاح شبکه به روش h را نام بردیم و بیان کردیم که تأثیر روش اصلاح شبکه با تولید مش دوباره در کل دامنه،نسبت به دیگر روشها، بیشتر است.در این روش ما اجازه می‌دهیم که المانها در اندازه‌های متفاوت تولید شوند و همواره آغاز تحلیل در هر مرحله، با اندازهٔ

[1] hierarchical refinement
[2] Gong

مشخصی از المان، که برای هر نقطه از مش قبلی تعریف شده است، شروع می‌شود. به کمک درونیابی، می‌توان اندازهٔ المان مورد استفاده در هر گره از دامنه را تعیین کرد که در ادامه به جزئیات آن اشاره خواهد شد.

در اصلاح شبکه، برای کاهش تعداد المانها، توانایی تعریف اندازه مش یا چگالی آن در هر نقطه از دامنه، اهمیت زیادی دارد. اولین تولید کننده مش که توانایی تعیین تعداد المانها در هر نقطه، با توجه به چگالی آن را داشت در اواسط سال ۱۹۸۰ میلادی به وجود آمد[۲] واین تولید کننده‌های مش، اولین بار در سال ۱۹۸۷ توسط پریر[1] و همکارانش در زمینهٔ محاسبات مهندسی هوافضا و مکانیک سیالات مورد استفاده قرار گرفت[۲۲]. کلیات این روش، بر اساس روش تولید مش فرونتال[2] می‌باشد که این روش تولید مش اولین بار توسط کاوندیش و لوو[3] و با استفاده از المانهای مثلثی توسعه داده شده بود[۲۳و۲۴].

بعدها این تولید کننده‌های مش در فضای سه بعدی و با المانهای چهاروجهی[4]، توسعه داده شدند اما گسترش آن به المانهای چهار ضلعی و مکعب، به هیچ وجه آسان نبود. اولین روش برای تولید المانهای چهار ضلعی در مسائل دو بعدی بوجود آمد که کارهای انجام شده توسط زینکویچ، زو و رانک در این زمینه قابل توجه می‌باشد به طوری که اساس کار آنها با پیوستن دو المان مثلثی به یکدیگر و تولید یک المان چهار ضلعی صورت می‌پذیرد[۲۵و۲۶].

تاکنون هیچ روشی در حل تطبیقی برای تولید المانهای مکعبی در فضای سه بعدی به وجود نیامده است تا به کمک آن بتوان برای هر نقطه از دامنه چگالی مش تعریف کرد و به اصلاح شبکه پرداخت[۲] .

به عقیده زینکویچ، هیچ روش تولید مش مؤثر برای مش مکعبی که به کمک آن بتوان به حل تطبیقی

---

1 Peraire
2 frontal
3 J.C. Cavendish & S.H. Lo
4 tetrahedral

پرداخت وجود ندارد[۲] اما به هر حال کوششهای فراوانی برای آن صورت پذیرفته است که در منابع [۲۷و۲۸] به آن اشاره شده است.

۳-۳-۲- پیشگویی اندازه المان مورد نیاز در اصلاح شبکه به روش h

تخمین کننده‌های خطایی که در فصل قبل به آن اشاره شدند به ما این توانایی را می‌دهند که نرم انرژی خطا را بدست آوریم و خطای هر المان را با دقت خوب محاسبه کنیم. واضح است که حل تطبیقی زمانی پایان می‌پذیرد که این خطاها را بتوان به کمک یک تحلیلگر، محدود کرد. خیلی اوقات این محدودیت در هر المان ارضا نمی‌شود و در نتیجه اصلاح شبکه ضروری می‌شود. سؤالی که در این بخش به آن پاسخ خواهیم داد این است که چگونه بهترین و مؤثرترین اصلاح شبکه بدست می‌آید.

در ساده ترین حالت، باید به دنبال ساختن رابطه‌ای بین درصد خطای نرم انرژی η و یک مقدار مشخصی از آن $\bar{\eta}$، برای هر المان باشیم که این مقدار مشخص در مسائل مهندسی کمتر از 5% می‌باشد. بنابراین رابطهٔ زیر بدست می‌آید.

$$\eta \le \bar{\eta} \qquad (۳-۱)$$

در یک مش بهینه مطلوب است که، خطای نرم انرژی در بین تمام المانها به طور یکسان تقسیم شود بنابراین اگر کل خطای مجاز به صورت زیر تعیین شود

$$\text{خطای مجاز} \equiv \bar{\eta}\|u\| \approx \bar{\eta}\left(\|\hat{u}\|^2 + \|e\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۳-۲)$$

که در آن $\|e\|$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|e\|^2 = \|u\|^2 - \|\hat{u}\|^2 \qquad (۳-۳)$$

آنگاه می‌توان گفت که خطا در هر المان باید کمتر از رابطهٔ (۳-۴) باشد.

$$\|e\|_k \langle \bar{\eta}\left(\frac{\|\hat{u}\|^2 + \|e\|^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \bar{e}_m \qquad (۳-۴)$$

که m تعداد المانهای موجود در دامنهٔ حل مسئله می‌باشد.

در نتیجه المانهایی که خطا در آنها از مقدار تعیین شده در رابطهٔ (۳-۴) تجاوز کند، باید اصلاح شوند. بنابراین اگر نسبت زیر را تعریف کنیم

$$\frac{\|e\|_k}{\bar{e}_m} = \xi_k \qquad (۳-۵)$$

آنگاه برای هر المان، عملیات اصلاح زمانی انجام می‌پذیرد که $\xi_k \rangle 1$ باشد.

بنابراین عملیات اصلاح شبکه می‌تواند به طور پیشرونده، بر روی تعداد مشخصی از المانهایی که ξ در آنها از میزان مشخصی بیشتر می‌شود، صورت پذیرد.

در اصلاح شبکه به روش h این المانها به دو نیم تقسیم می‌شوند که این نوع تقسیم مجدد شبکه، به غنی سازی شبکه معروف می‌باشد. اگر چه این روش برای اصلاح شبکه در نهایت می‌تواند به شبکه بهینه با تعداد درجات آزادی کمتر، نسبت به حالتی که کل المانها اصلاح شوند، دست یابد اما در حالت کلی روشی غیر اقتصادی می‌باشد زیرا ممکن است تعداد سعی‌ها برای رسیدن به جواب خیلی زیاد شوند.

راه حل بهتر برای رفع این مشکل تشکیل یک شبکه جدید بر روی کل دامنه می‌باشد که دراین شبکه جدید رابطهٔ $\xi \leq 1$ ارضا شود. برای این منظور باید توزیع المانها در شبکه بندی جدید را پیشگویی کرد که این پیشگویی با فرمول بندی که در ادامه خواهیم داشت امکان پذیر می‌شود.

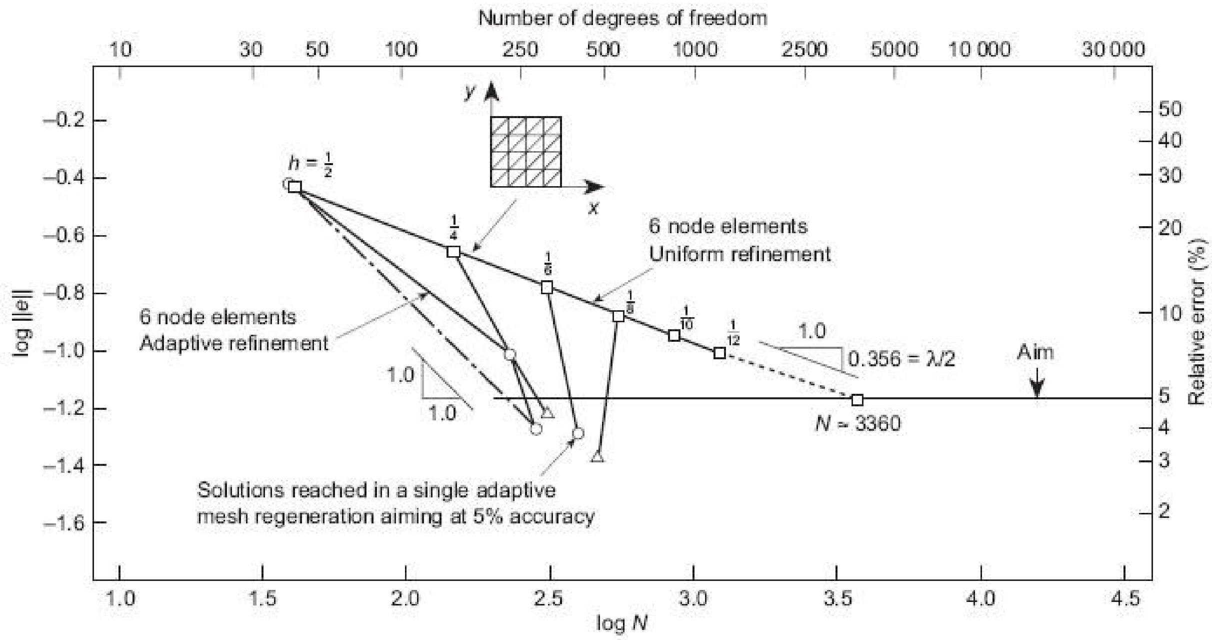
اگر فرض کنیم که:

$$\|e\|_k \propto h_k^p \qquad (۳-۶)$$

که در آن h_k اندازهٔ المان شمارهٔ k فعلی، و p مرتبهٔ چند جمله‌ای مورد استفاده در تقریب می‌باشد. آنگاه برای ارضای معادلهٔ (۳-۴) اندازهٔ المان جدید تولید شده نباید از مقدار زیر بزرگتر شود.

$$h_{new} = \xi_k^{\frac{-1}{p}} h_k \qquad (۳-۷)$$

در ادامه، در شکلها نشان داده شده است که چطور با یک مش اولیه نسبتا درشت می‌توان به یک دقت تقریبا خوبی که از پیش تعیین شده دست یافت.



شکل ۳-۲ تأثیر مش اولیه در سرعت همگرایی اصلاح شبکه به روش **h**. حل تطبیقی با استفاده از المانهای مثلثی درجهٔ دوم

درشکل ۳-۲ تأثیر شبکهٔ اولیه بر سرعت همگرایی برای یک تیر طره کوتاه با دو نقطهٔ منفرد در گوشه‌های آن که متصل به یک دیوار صلب می‌باشد، نشان داده شده است، به طوری که برای رسیدن به دقت 5% از یک مش یکنواخت برای مرحله اولیه استفاده شده است و همان طور که مشاهده می‌شود اگر مش اولیه از $h=\frac{1}{8}$ ریزتر شود محاسبات اصلاح شبکه کاهش چشمگیری می‌یابد.

در مسائل با نقاط منفرد، برای در نظر گرفتن اثر این نقاط، روابط (۳-۶) و (۳-۷) به صورت زیر اصلاح می‌شوند.

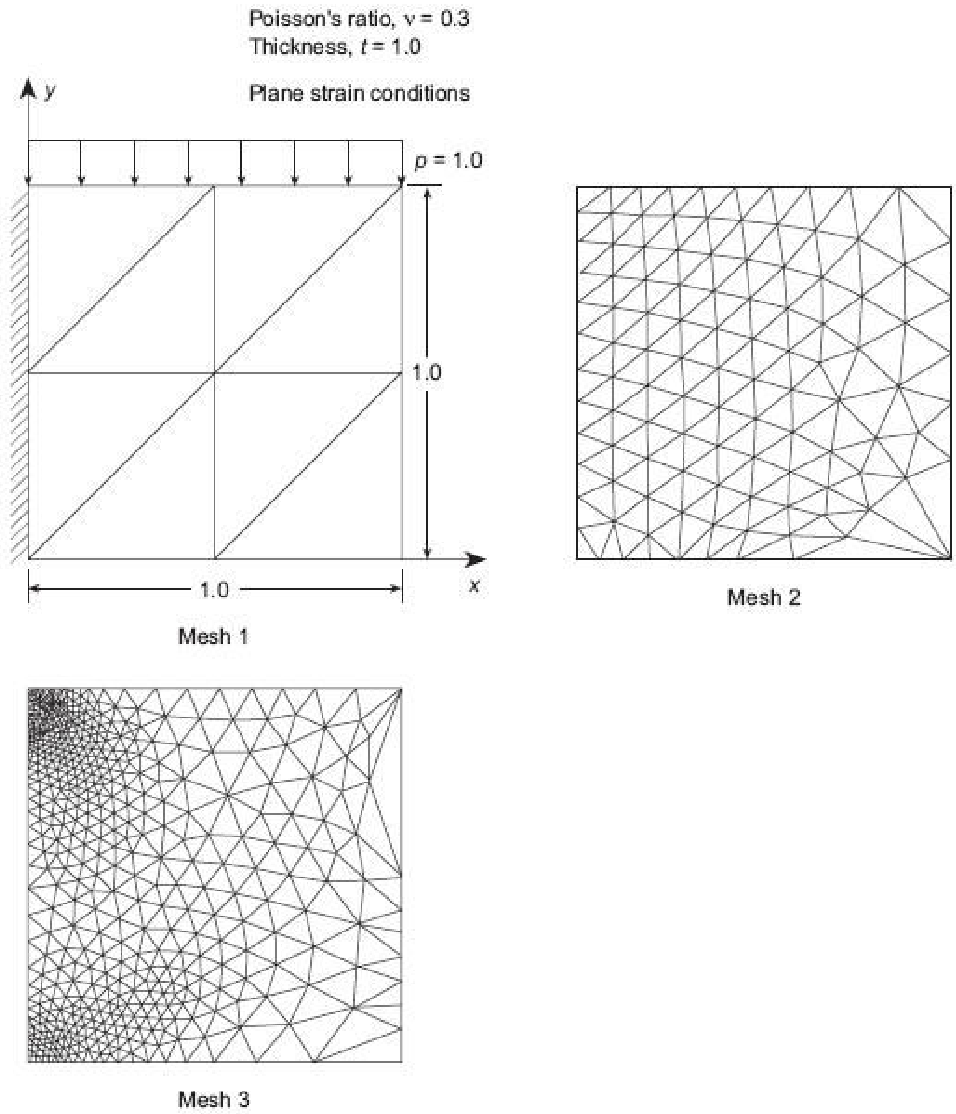
$$\|e\|_k \propto h_k^{\lambda} \qquad (۸-۳)$$

$$h_{new} = \xi_k^{\frac{-1}{\lambda}} h_k \qquad (۹-۳)$$

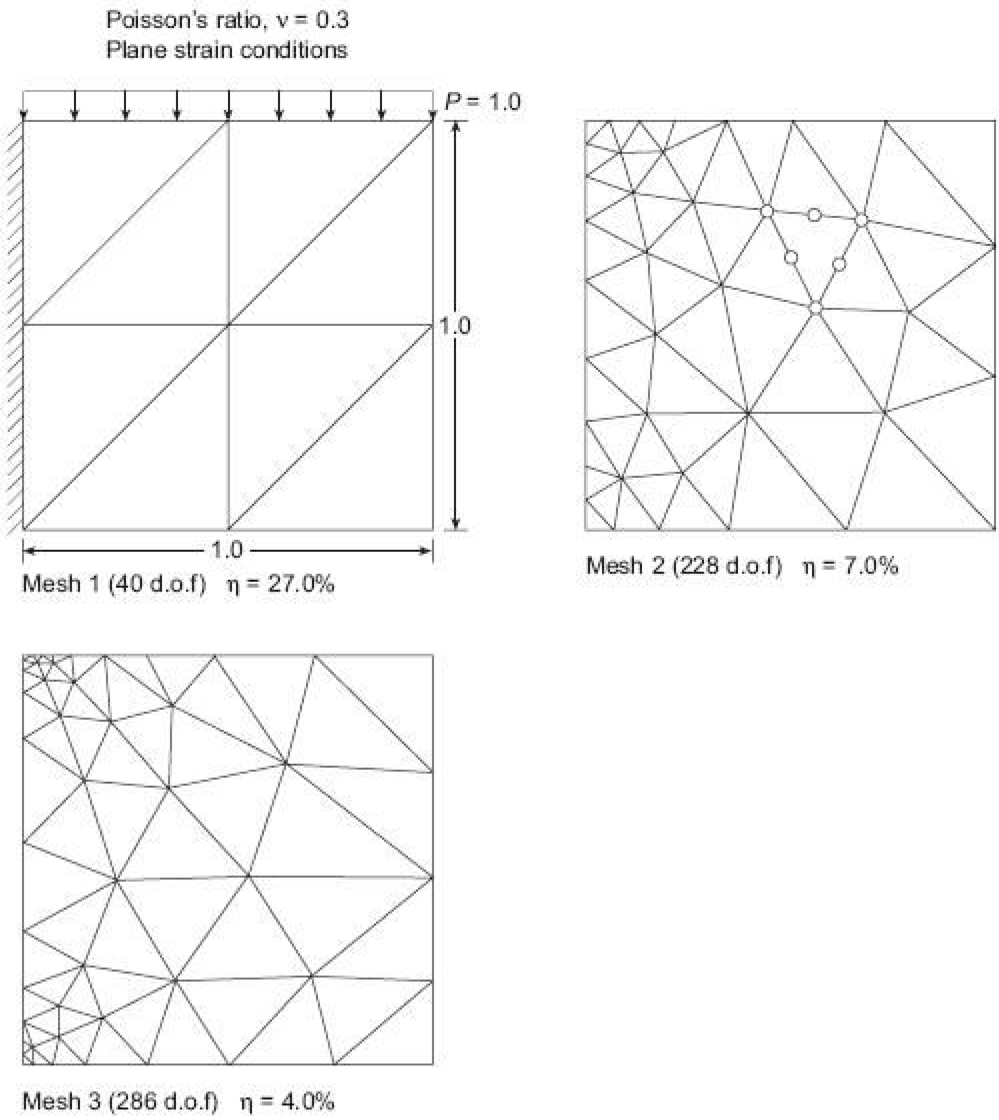
در این روابط λ پارمتری است که شدت منفرد بودن مسئله را بیان می‌کند. در اکثر مسائل مهندسی λ بین ۱/۰- ۰/۵ می‌باشد که در اینجا یک انتخاب مناسب برای این پارامتر ۰/۵ می‌باشد.

در شکل ۳-۲ برای تعیین مش اولیه، از هر دو رابطهٔ (۳-۷) و (۳-۹) استفاده شده است[۲۹].

در شکلهای ۳-۳ و ۳-۴ سه مرحله از حل تطبیقی برای یک تیر طره، با دو نوع المان مثلثی خطی و درجه دوم، نشان داده شده است و همان طور که مشاهده می‌شود در مسئله با المان مرتبه بالاتر، تعداد المان کمتری برای رسیدن به یک میزان دقت لازم است.



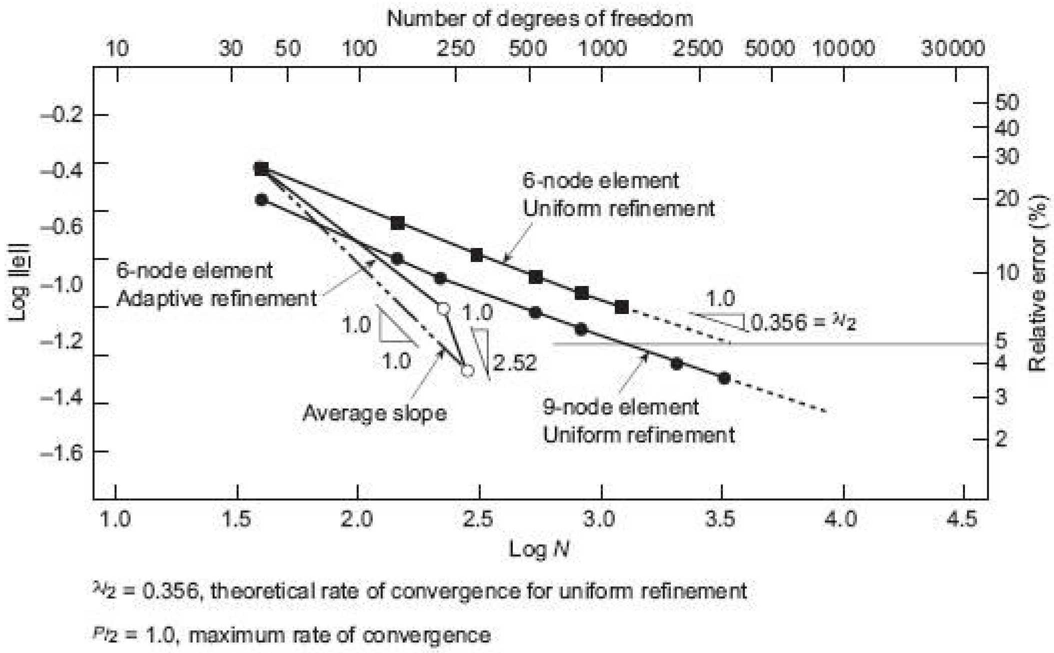
شکل ۳-۳ اصلاح شبکه تیر طره کوتاه با المانهای خطی مثلثی



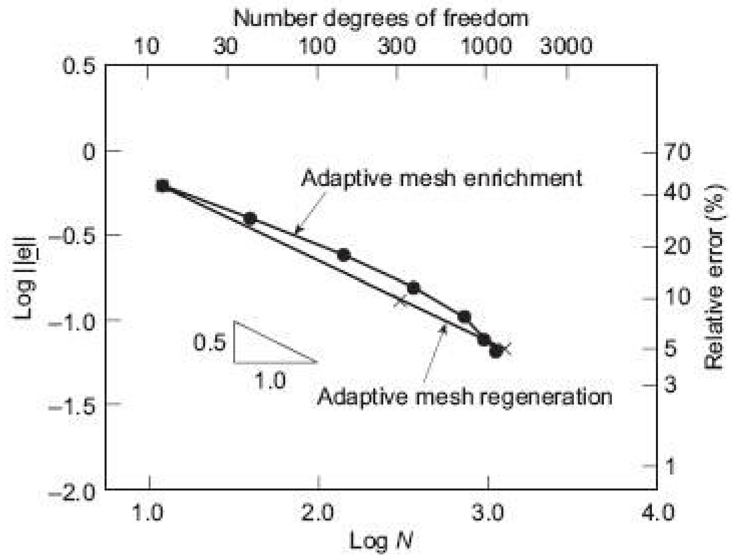
شکل ۳-۴ اصلاح شبکه تیر طره کوتاه با المانهای مثلثی درجه دوم

در شکل ۳-۵ مقایسهٔ سرعت همگرایی بین اصلاح شبکه با المانهای یکنواخت و اصلاح، به کمک کوچک کردن موضعی المانها صورت گرفته است که نتیجهٔ آن سرعت همگرایی بالا، همراه با درجهٔ آزادی کمتر برای اصلاح موضعی می‌باشد. همچنین در شکل ۳-۶ مسئلهٔ مشابهی توسط دو نوع اصلاح شبکه نشان داده شده است که نوع اول، اصلاح با استفاده از روش غنی سازی و دوم، با استفاده از تولید دوبارهٔ المانها می‌باشد. در هر دو مسئله المانهای چهار ضلعی خطی برای رسیدن به دقت ۵٪ به کاربرده شده است و همان طور که در شکل ۳-۷ نیز نشان داده شده است، در روش غنی سازی،

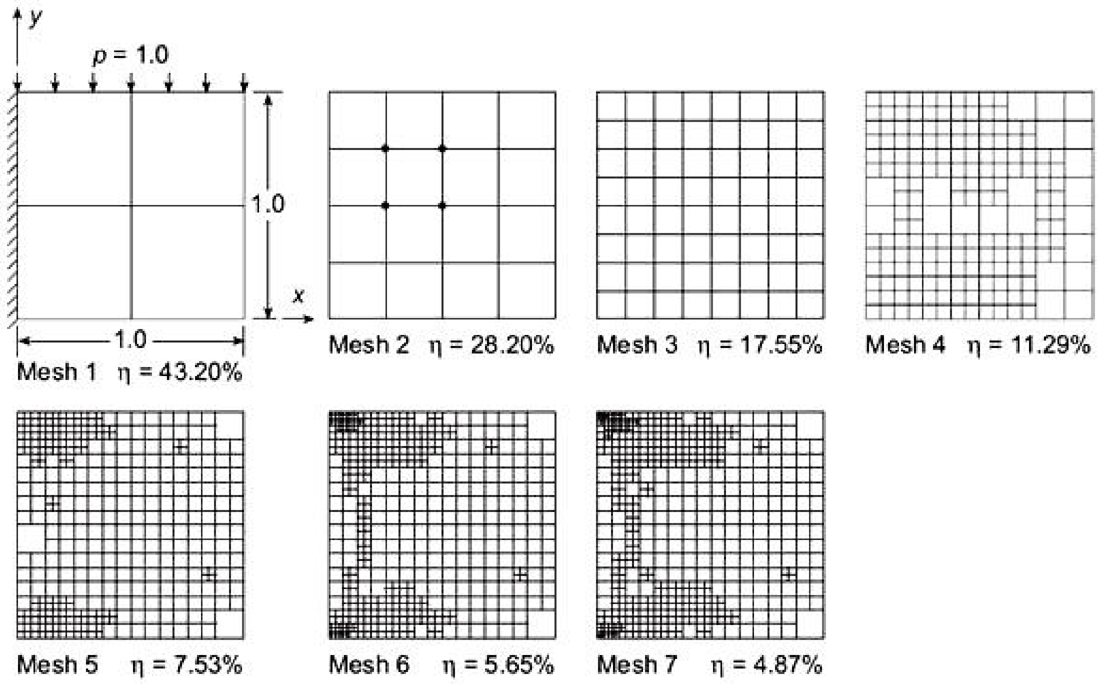
هفت اصلاح برای رسیدن به دقت %۵ نیاز می‌باشد در حالی که در روش، با تولید دوبارهٔ المانها، تنها با سه اصلاح به این دقت می‌رسیم(شکل ۳-۸).



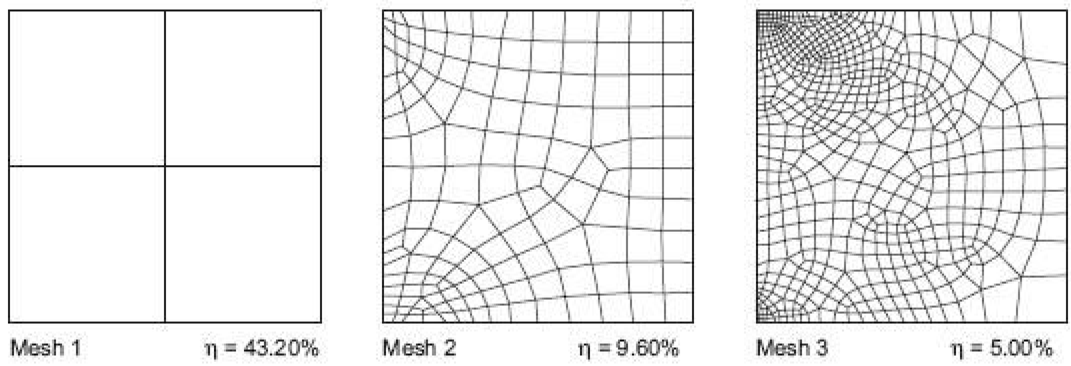
شکل ۳-۵ سرعت همگرایی بدست آمده از نتایج تجربی برای تیر طره کوتاه



شکل ۳-۶ تیر طره کوتاه. غنی سازی مش در مقابل تولید دوبارهٔ مش با استفاده از المانهای چهار ضلعی خطی

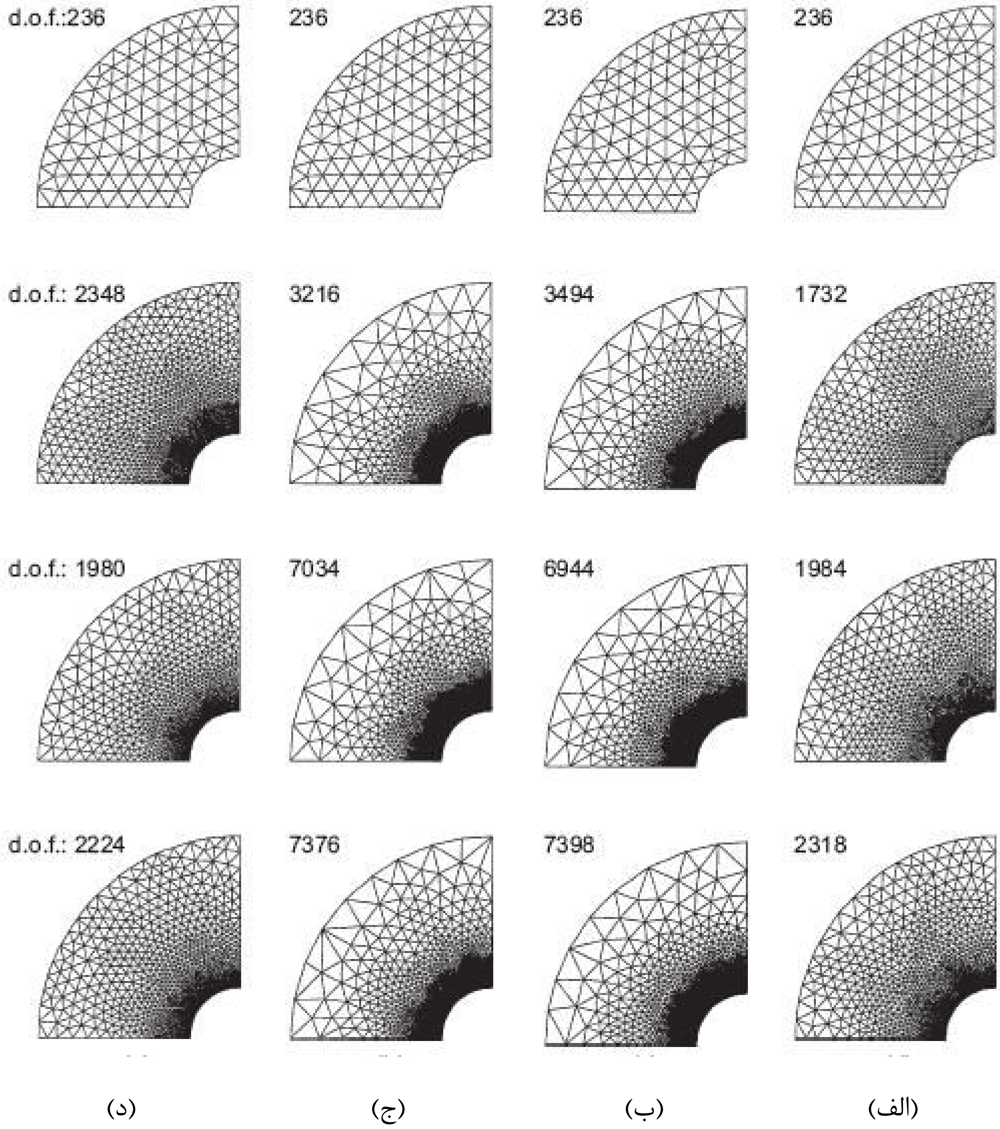


شکل ۳-۷ حل تطبیقی تیر طرۀ کوتاه با غنی سازی مش‌ها و استفاده از المانهای مربعی خطی



شکل ۳-۸ حل تطبیقی تیر طرۀ کوتاه با تولید دوبارۀ مش‌ها و استفاده از المانهای چهار ضلعی خطی

در شکل ۳-۹ اصلاح شبکه برای یک سیلندر تحت تنش، با استفاده از معیارهای مختلف نشان داده شده است و همان طور که مشاهده می‌شود، در حالت کلی، معیار توزیع یکسان چگالی نرم انرژی بین المانها، با تعداد درجات آزادی کمتری نسبت به دیگر معیارها به دقت مورد نظر ٪۵ می‌رسد.



شکل ۳-۹ مراحل مختلف اصلاح شبکه بر اساس

الف) توزیع یکنواخت نرم خطای انرژی بین تمام المانها؛ ب) توزیع یکنواخت چگالی خطای انرژی بین المانها؛ ج) توزیع یکنواخت بیشترین خطای تنشها در هر نقطه بین المانها و د) توزیع یکنواخت بیشترین درصد خطای تنشها در هر نقطه بین المانها. تمام شبکه‌های نهایی دارای کمتر از ۵٪ نرم خطای انرژی می‌باشند.

۳-۳-۳- حل تطبیقی به روش h با استفاده از شبکه بندی مجدد در هر مرحله

در این بخش به مثالهای بیشتری از حل تطبیقی به روش h می‌پردازیم که در تمام آنها از شبکه بندی مجدد در هر مر حله استفاده شده است.

۳-۳-۳-۱- صفحهٔ L شکل تحت تنش مسطح

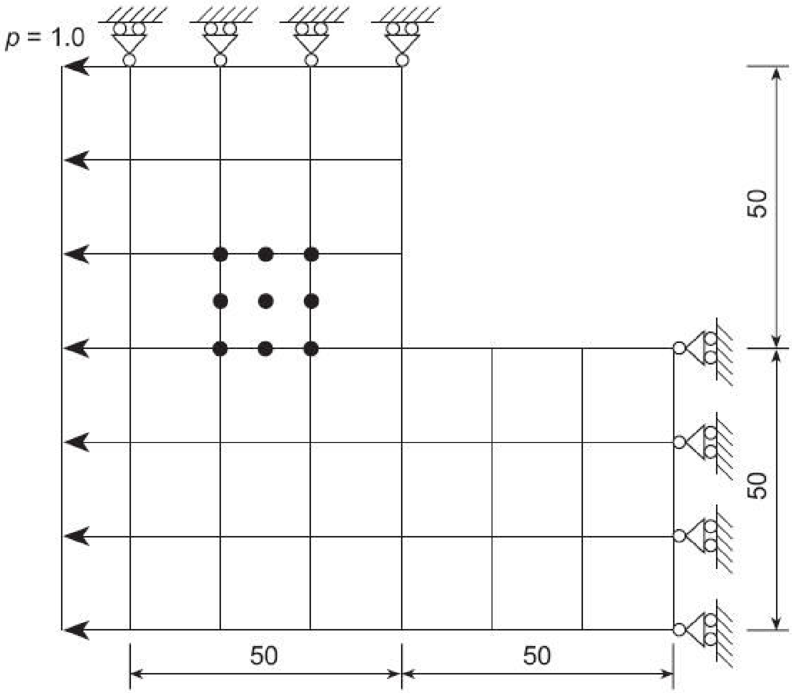
نتایج نشان داده شده در شکل ۳-۱۰ برگرفته از تحلیل یک صفحهٔ L شکل، تحت تنش مسطح است که در آن از المانهای مربعی درجه دو ایزوپارامتریک استفاده شده است. در اینجا یک مرحله از اصلاح شبکه همراه با نتایج مربوط به سرعت همگرایی نشان داده شده است.

۳-۳-۳-۲- قطعه مکانیکی تحت کرنش مسطح

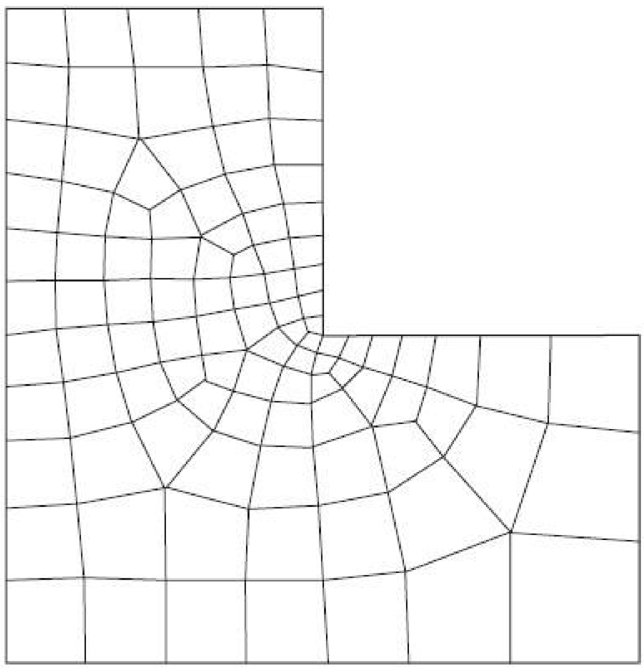
در این مسئله فرضیات مربوط به کرنش مسطح، همراه با المانهای خطی مربعی به کار گرفته شده است. همان طور که در شکل ۳-۱۱ مشاهده می‌شود با یک مرحله اصلاح شبکه، مسئله به دقت ۵٪ خطای نسبی رسیده است که نتایج مربوط به همگرایی تنش برشی τ_{xy} در این شکل نشان داده شده است.

۳-۳-۳-۳- سد وزنی سوراخ دار

آخرین مثال در این بخش مربوط به یک مسئله کاربردی مهندسی نشان داده شده در شکل ۳-۱۲ می‌باشد. در تحلیل ابتدایی که برای این سد انجام شده است، مهندس طراح تشخیص داده است که از المانهای مثلثی درجه دو برای شبکه بندی این سد استفاده کند. شکل (۳-۱۲ الف) مش اولیه انتخاب شده را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود با اینکه از المان با مرتبهٔ بالا برای تحلیل این سد استفاده شده است، اما خطا دارای میزان نسبتا بالایی (حدود ۱۷٪) می‌باشد. با یک مرحله اصلاح شبکه همان طور که در شکل (۳-۱۲ ب) مشاهده می‌شود به میزان تعیین شده ۵٪ خطای نرم انرژی می‌رسیم. این مثال به صورت آشکار مزیت استفاده از حل تطبیقی را نشان می‌دهد که چگونه تنها با یک مرحله اصلاح به دقت بسیار قابل قبولی خواهیم رسید.

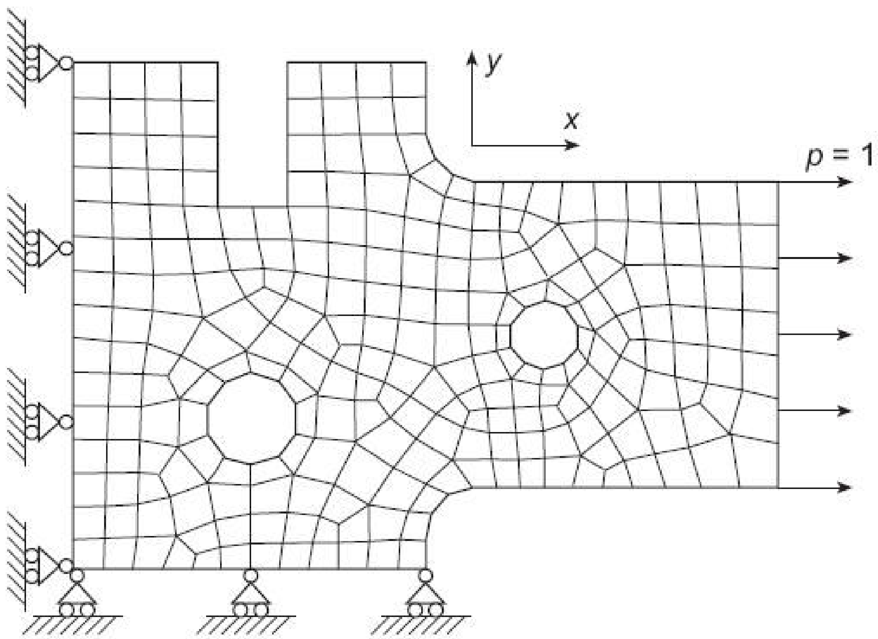


Mesh 1: 27 elements (252 DOF)
η = 8.3%, θ^* = 1.110

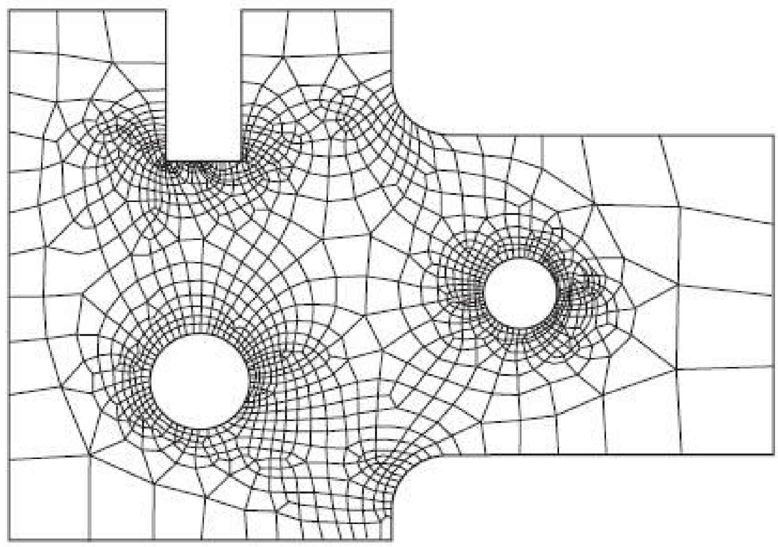


Mesh 2: 101 elements (876 DOF)
η = 3.1%, θ^* = 1.057

شکل ۳-۱۰ اصلاح شبکه صفحهٔ **L** شکل تحت تنش مسطح



Mesh 1 (565 d.o.f.) η = 9.75%



Mesh 2 (3155 d.o.f.) η = 4.85%

شکل ۳-۱۱ حل تطبیقی قطعهٔ مکانیکی تحت کرنش مسطح با استفاده از المانهای خطی مربعی

۳-۴- اصلاح شبکه به روش p و hp

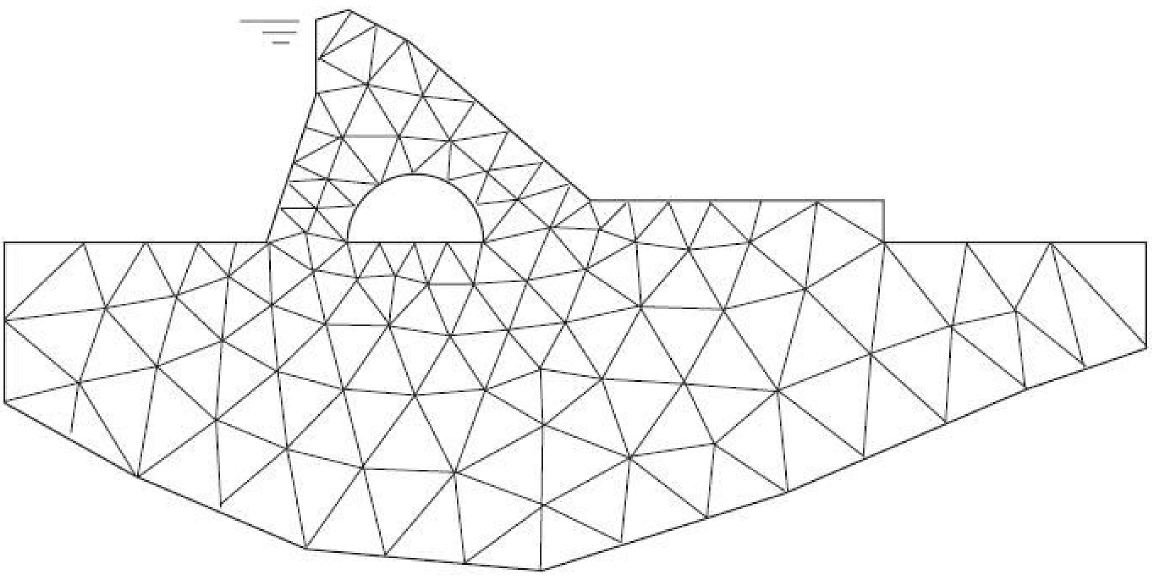
استفاده از روش اصلاح شبکه p به صورت موضعی در صورتی امکان پذیر می‌باشد که از توابع شکل سلسله مراتبی در حل اجزای محدود استفاده کنیم. اولین استفاده از این توابع در سال ۱۹۸۳ میلادی صورت گرفته است. در حالت کلی استفاده از این روش مشکل است و نیاز به فرضیات زیادی برای کاهش خطای اجزای محدود دارد. در این روش مراحل اصلاح شبکه نسبت به روش h بیشتر است و به ندرت می‌توان با یک مرحله اصلاح شبکه به دقت مورد نیاز مسئله دست پیدا کرد. در شکل ۳-۱۶ اصلاح شبکه سد وزنی سوراخ دار به روش p نشان داده شده است.

اصلاح شبکه به روش hp، روش مشابه دیگری است که برای حل تطبیقی به کار می‌رود. در این بخش تنها به یک نوع کاربردی از این روش می‌پردازیم که بسیار مؤثر و ساده است. این روش در ابتدا توسط زینکویچ و همکارانش در سال ۱۹۸۹ ابداع شد[۳۰]. در ادامه دو مرحله اساسی که دراین روش صورت می‌پذیرد را بیان می‌کنیم.

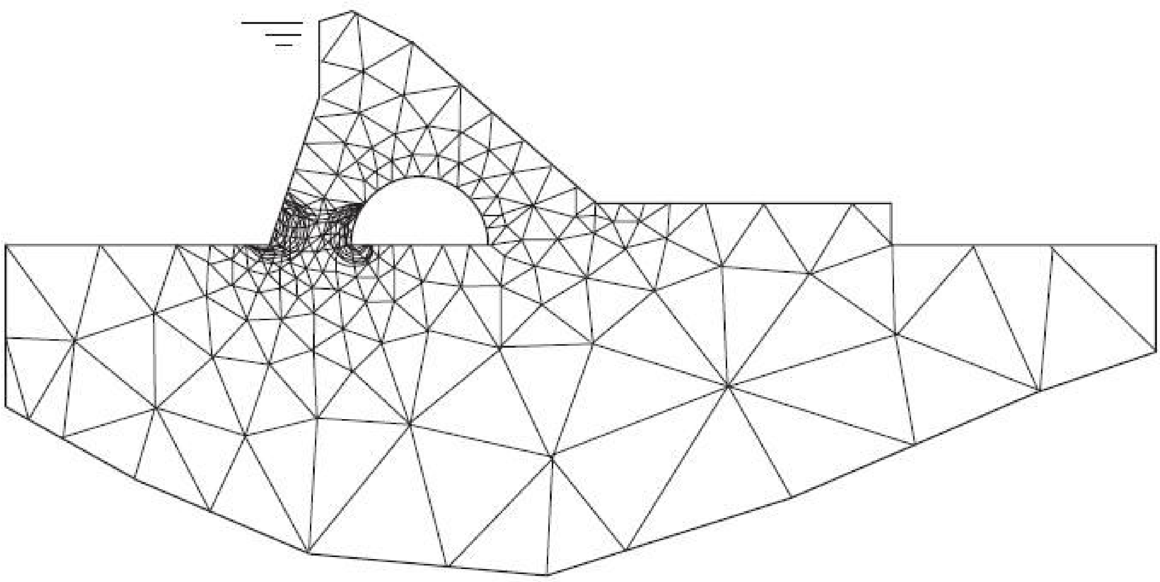
۱) اولین مرحله استفاده از یک اصلاح به روش h با المانهای مرتبهٔ پایین (در مسائل مهندسی بیشتر از المانهای خطی و درجه دو استفاده می‌شود) برای رسیدن به دقت ۵٪ می‌باشد. در این مرحله خطای نرم انرژی تقریبا به طور یکسان بین تمام المانها توزیع می‌شود.

۲) مرحلهٔ دوم استفاده از یک اصلاح p بر روی کل دامنه می‌باشد. به طوری که از یک مرتبهٔ یکسان p برای تمام المانها استفاده می‌شود. مزیت اساسی و مهم این روش این است که به آسانی قابل برنامه نویسی و اجرا می‌باشد مخصوصا وقتی که از توابع شکل سلسله مراتبی استفاده شده باشد.

با استفاده از اصلاح کل دامنه به روش p می‌توان به کمک سه پاسخ پی در پی، خطای نرم انرژی سراسری را به طور تقریبی برنیابی کرد که در ادامه به آن پرداخته می‌شود[۳۱].

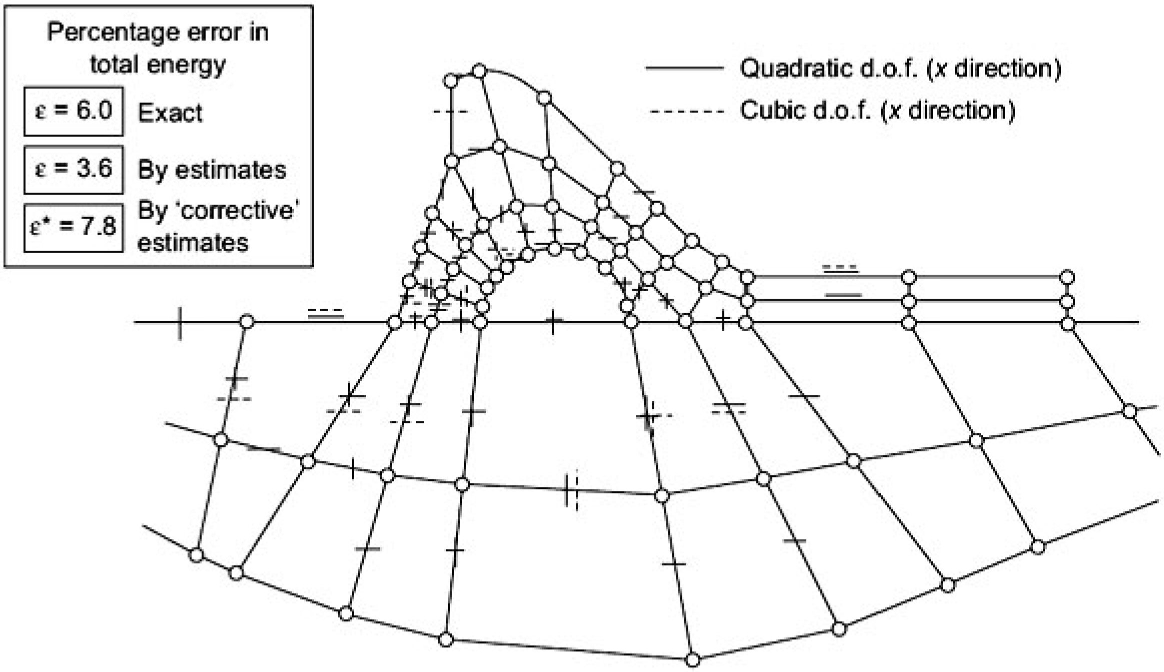


(الف)

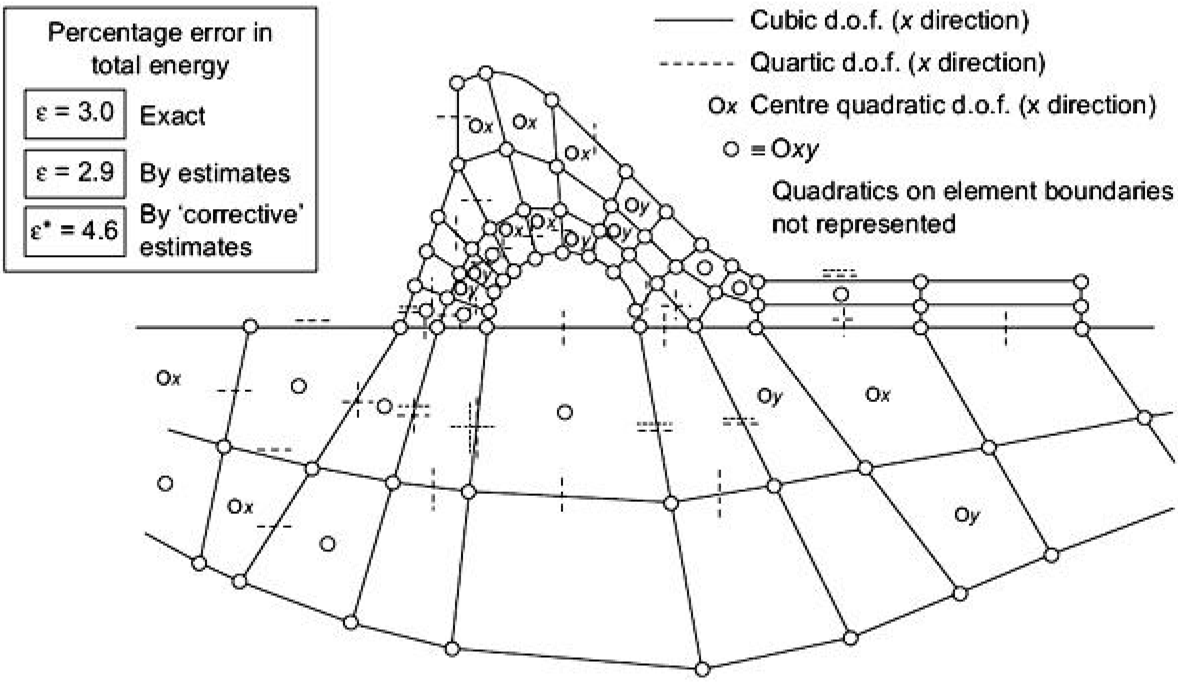


(ب)

شکل ۳- ۱۲ حل تطبیقی سد وزنی سوراخ دار تحت بارگذاری آب و استفاده از المانهای مثلثی درجه دو با فرض کرنش مسطح تا رسیدن به دقت ۵٪



(الف)



(ب)

شکل ۳-۱۳ حل تطبیقی سد وزنی سوراخدار به روش **p**. الف) مرحلهٔ سوم با ۲۰۶ درجهٔ آزادی ب) مرحلهٔ چهارم با ۳۶۵ درجهٔ آزادی

در اصلاح شبکه به روش p، همگرایی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود[۳۲]

$$\|e\| \le CN^{-\beta} \tag{۳-۱۰}$$

C, β ثابتهای مثبتی هستند که به جوابهای مسئله بستگی دارند و N تعداد درجات آزادی می‌باشد.

اگر فرض کنیم که برای هر اصلاح شبکه خطا به صورت رابطه (۳-۳) بیان شود آنگاه خواهیم داشت:

$$\|u\|^2 - \left\|\bar{u}_q\right\|^2 = CN_q^{-2\beta} \tag{۳-۱۱}$$

با $q = p-2, p-1, p$ سه پاسخ از معادله بالا تشکیل می‌شود که با حذف ثابتهای C وβ از آنها، $\|u\|^2$ به کمک حل معادله زیر بدست می‌آید

$$\frac{\|u\|^2 - \left\|u_p\right\|^2}{\|u\|^2 - \left\|\hat{u}_{p-1}\right\|^2} = \left(\frac{\|u\|^2 - \left\|u_{p-1}\right\|^2}{\|u\|^2 - \left\|\hat{u}_{p-2}\right\|^2}\right)^{\frac{\log(N_{P-1}/N_P)}{\log(N_{P-2}/N_{P-1})}} \tag{۳-۱۲}$$

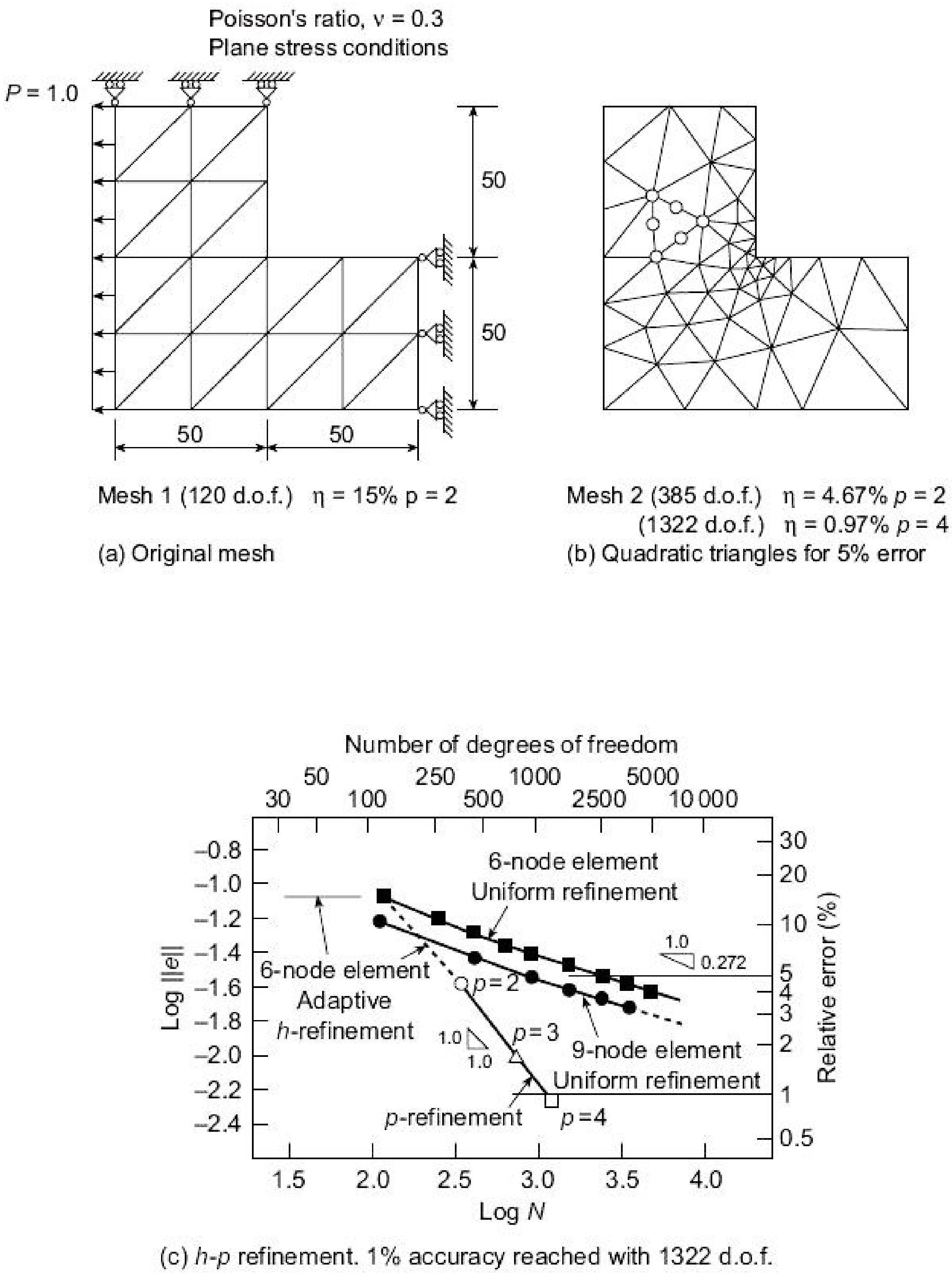
در نتیجه خطای نرم انرژی سراسری در هر مرحله از اصلاح به روش p می‌تواند به صورت زیر بدست آید

$$\|e\|^2 = \|u\|^2 - \left\|\hat{u}_q\right\|^2 \qquad q = 1, 2, \dots, p \tag{۳-۱۳}$$

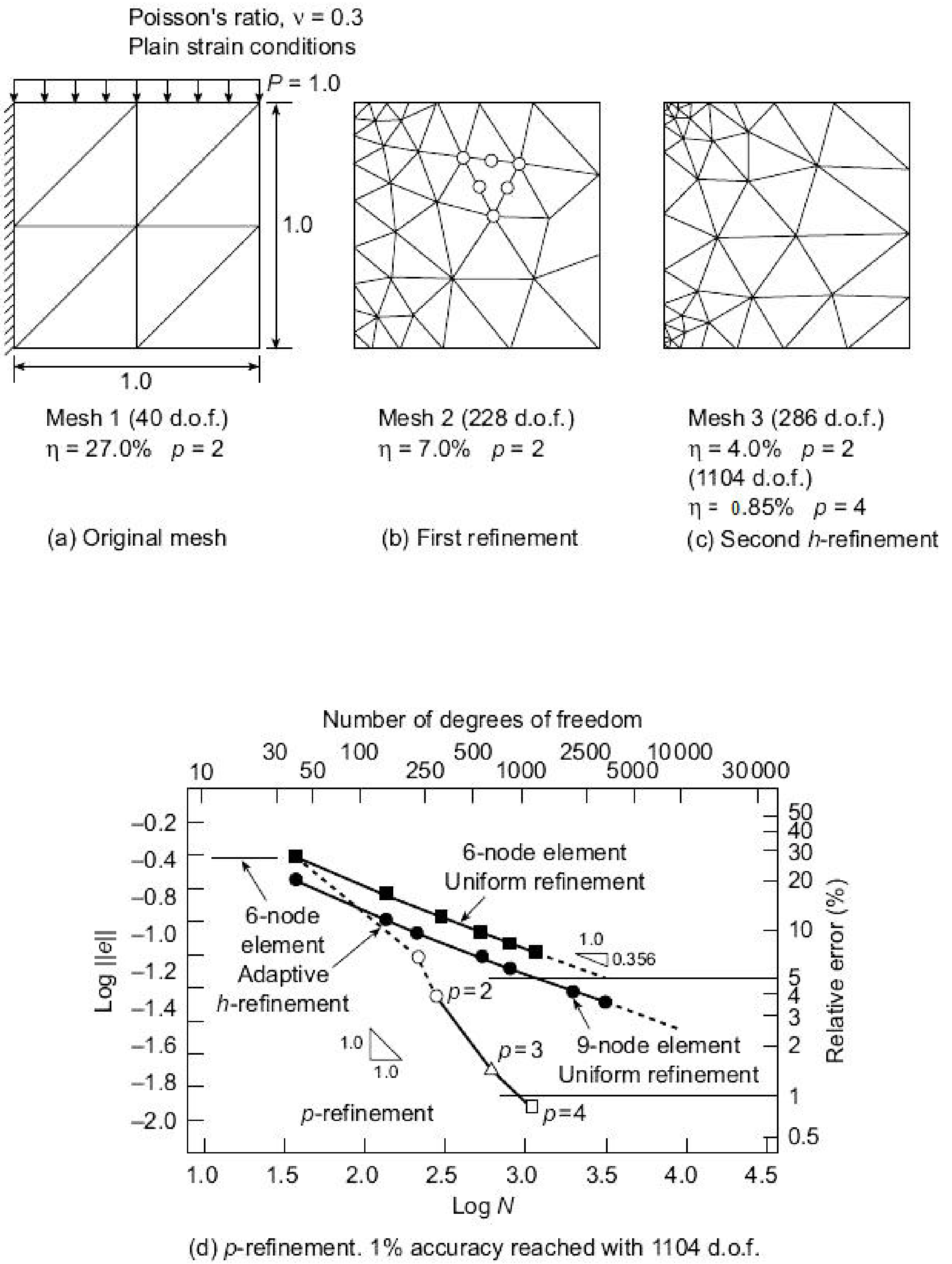
به طور کلی می‌توان گفت که این روش اصلاح شبکه بسیار سریع و با دقت بالا ما را به جواب نهایی می‌رساند.

در اشکال ۳-۱۴ و ۳-۱۵ دو مثال که در بخش قبل با روش h به اصلاح شبکه آنها پرداخته شد مشاهده می‌شوند که اولین آنها صفحهٔ L شکل با یک نقطهٔ منفرد و دومی تیر کوتاه طره با دو نقطهٔ منفرد قوی می‌باشد. در هر دو مسئله در مرحلهٔ اول، اصلاح شبکهٔ تولید شده با المانهای مثلثی درجه دو به کمک روش h صورت پذیرفته است تا به دقت ۵٪ برسد.

در مرحلهٔ دوم، مرتبه p افزایش می‌یابد و با سومین و چهارمین مرتبه از p سه جواب پی در پی تولید می‌شود که در نهایت خطا به میزان کمتر از ۱٪ می‌رسد.



شکل ۳-۱۴ نتایج اصلاح شبکهٔ صفحهٔ **L** شکل با روش **hp**



شکل ۳-۱۵ نتایج اصلاح شبکه تیر کوتاه طره با روش **hp**

فصل چهارم

برنامه تحلیل سازه‌های دو بعدی به کمک تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود

۴-۱- مقدمه

در این فصل به معرفی و بیان الگوریتم‌های به کار رفته در برنامهٔ نوشته شده به زبان فرترن، جهت تحلیل سازه‌های دو بعدی به کمک تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود پرداخته می‌شود.

این برنامه به دلیل توانایی در تحلیل سازه‌ها به همراه حل تطبیقی، ADAPT نامگذاری شده است.

زیر برنامه‌های مورد استفاده در این برنامه، برگرفته از برنامه‌ای می‌باشد که توسط مصطفی اوزاکا[1] و جان زاینس[2] در سالهای ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۴ تحت نظر دکتر هینتون نوشته و تکمیل شده است.

در یک نگاه کلی، ویژگیهای برنامه ADAPT به صورت زیر بیان می‌شوند.

۱- تحلیل خطی سازه‌های دو بعدی با امکان اعمال شرایط تنش مسطح، کرنش مسطح و تقارن محوری تحت بارگذاری‌های گرهی، خطی، حرارتی، ثقلی و نیروی گریز از مرکز

۲- تولید شکل مدل و ایجاد مرزها با استفاده از بی اسپلاینهای درجه سه

۳- تولید شبکه اجزای محدود به صورت ساختار نیافته و خودکار، با استفاده از پنج المان مثلثی سه گرهی و چهار گرهی و چهار ضلعی چهار گرهی، هشت گرهی و نه گرهی، بر روی چندین ناحیه متفاوت

۴- تخمین خطای تحلیل اجزای محدود به کمک دو روش بازیافت تنش در نقاط فوق همگرا بر روی گروه المانهای متصل به یک گره (SPR) و روش میانگین گیری و همچنین بهبود شبکه اجزای محدود با استفاده از دو روش غنی سازی و شبکه بندی دوباره

در ادامه این فصل، به تشریح هر یک از این چهار ویژگی کلی و دیگر خصوصیات برنامه ADAPT می‌پردازیم.

[1] M.Ozaka
[2] J.Sienz

۴-۱- تحلیل اجزای محدود

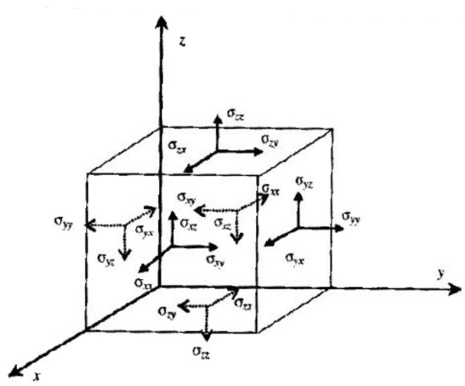
در برنامه ADAPT تحلیل اجزای محدود برای مسائل الاستیسیته خطی درجه دو امکان پذیر می‌باشد. این آنالیز با امکان اعمال شرایط تنش مسطح، کرنش مسطح و تقارن محوری در هر مسئله دلخواه صورت می‌پذیرد. امکان اعمال بارگذاری نقطه‌ای، گسترهٔ خطی، حرارتی و بار ثقلی در هر سازهٔ دلخواه و همچنین اعمال نیروی گریز از مرکز ناشی از حرکت دورانی با سرعت ω در سازه‌های متقارن محوری وجود دارد.

بعد از تحلیل اجزای محدود، مقادیر تنش گرهی به کمک دو روش میانگین گرهی و SPR محاسبه می‌شوند و نتایج نهایی به صورت مقادیر تغییر مکان گرهی، بردار تنش نقاط گوس و بردار تنش در هر گره، نمایش داده می‌شوند.

جهت آشنایی با روابط موجود در تحلیل دو بعدی مسائل الاستیسیته و معرفی فرضیاتی که در مدل سازی دو بعدی مسائل واقعی به کار می‌رود، در ادامه به بیان مختصری از تئوری الاستیسیته برای مسائل صفحه‌ای می‌پردازیم.

۴-۱-۱- تئوری الاستیسیته برای مسائل صفحه‌ای

با فرضیات ساده کننده‌ای که با عمل نیز مطابقت دارد، مسائل سه بعدی تئوری ارتجاعی به مسائل با بعد کمتر تبدیل می‌شود[۳۳].



شکل ۴-۱ شش مولفه مستقل تنش در یک جسم جامد

با توجه به شکل (۴-۱) اگر داشته باشیم $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ مسئله می‌تواند در حالت تنش مسطح حل شود. این حالت از تانسور تنش در مسائل صفحه‌ای تئوری ارتجاعی، زمانی به وجود می‌آید که یک صفحهٔ بسیار نازک (در مقایسه با ابعاد صفحه) در معرض تغییر شکلهایی قرار گیرد که همگی وابسته به مختصات داخل صفحه بوده و صفحه مسطح، پس از تغییر شکل نیز مسطح باقی بماند. همچنین هیچ نوع بارگذاری عمود بر صفحه وجود نداشته باشد، در این صورت مولفه‌های تانسور تنش برای مصالح ایزوتروپیک به صورت زیر می‌باشد[۳۳].

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \tag{۱-۴}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \tag{۲-۴}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \tag{۳-۴}$$

و برای کرنش‌های عمود بر صفحه داریم:

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0\ ,\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{۴-۴}$$

اگر در مسائل تئوری ارتجاعی $w\,(x\,,y\,) = 0$ (تغییر مکان‌های وابسته به x,y و در جهت z) بر قرار باشد، آنگاه مسئله به صورت کرنش مسطح مطرح می‌شود. در این حالت تمام سطوح عمود بر محور z پس از تغییر شکل نیز عمود بر آن باقی می‌ماند. در این صورت داریم:

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zz} = 0 \tag{۵-۴}$$

این حالت از مسائل صفحه‌ای در صورتی در یک محیط منشوری اتفاق می‌افتند که بعد عمود بر صفحهٔ xy در مقایسه با ابعاد این صفحه خیلی بزرگ باشد. مثالی از این نوع مسئله را می‌توان در سدها، در محل‌های دور از تکیه گاه‌ها یا تغییر شکل ناشی از فشار در لوله‌های طویل و دور از دو سر آن جستجو کرد. با استفاده از روابط تنش- کرنش در مصالح ایزوتروپیک برای تنش در حالت کرنش مسطح داریم[۳۳]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right] \quad (۶-۴)$$

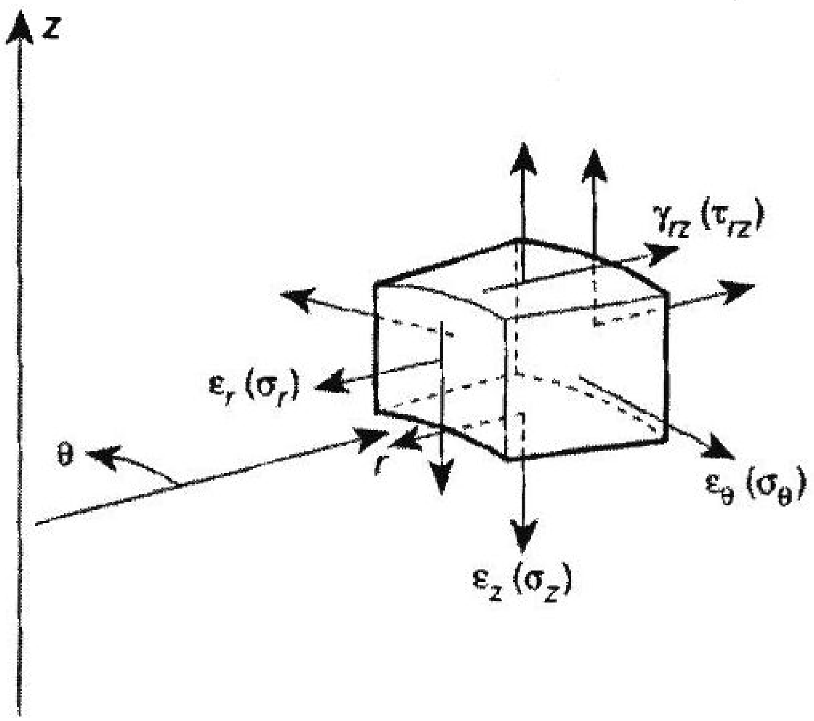
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right] \quad (۷-۴)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \quad (۸-۴)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right] \quad (۹-۴)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (۱۰-۴)$$

اگر سیستم مختصات دکارتی (x,y,z) را به سیستم مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) تبدیل کنیم، با فرض عدم وابستگی تغییر شکل‌ها به θ، نوع دیگری از مسائل دو بعدی به نام مسائل متقارن محوری به دست می‌آیند. در این حالت اگر بارگذاری نیز در حالت متقارن محوری باشد، $\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0$ خواهد بود. همچنین هر تغییر مکان شعاعی به طور خود به خود باعث به وجود آمدن کرنش‌های محیطی می‌شود و تنش‌ها در این جهت (محیطی) غیر صفر خواهد بود(شکل ۴-۲).



شکل ۴-۲ تنش‌ها و کرنش‌ها در حالت متقارن محوری

بنابراین یک مولفه به ماتریس‌های تنش و کرنش اضافه می‌شود. بدین ترتیب تانسور کرنش شامل چهار مولفه $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{rz}, \varepsilon_{\theta\theta}$ است. روابط تنش-کرنش با استفاده از ضرایب هوک و پواسون برای مصالح ایزوتروپیک به صورت زیر است.

$$\sigma_{rr} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta})\right] \tag{۱۱-۴}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varepsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta})\right] \tag{۱۲-۴}$$

$$\sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{rz} \tag{۱۳-۴}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr}) \tag{۱۴-۴}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{z\theta} = 0 \tag{۱۵-۴}$$

بدین ترتیب ماتریس‌های روابط تنش و کرنش برای سه حالت مسائل صفحه‌ای به شکل زیر استخراج می‌شود[۳۳]:

$$\sigma = D\varepsilon \tag{۱۶-۴}$$

تنش مسطح

$$D = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{۱۷-۴}$$

کرنش مسطح

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{۱۸-۴}$$

متقارن محوری

(۱۹-۴)

$$D=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu}\\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu}\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0\\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

۴-۲- تولید شکل و مرزهای سازه

با توجه به اینکه در برنامه ADAPT جهت تولید مرزها از بی اسپلاینهای پارامتری درجه سه استفاده شده است، در این بخش به صورت مختصر به بیان روابط و مفاهیم مربوط به آنها می‌پردازیم.

در مهندسی سازه یکی از هدفهای اصلی دست یابی به روشی جهت تولید شکل برای هندسه مسائل مورد نظر است. در این رهگذر روش به کار رفته باید علاوه بر سادگی، روشی منعطف باشد. با توجه به انواع منحنی‌های موجود برای تولید شکل و روش‌های مختلفی که در این زمینه وجود دارند، اسپلاین‌ها به عنوان گزینه‌ای مناسب برای تولید اشکال هندسی مورد توجه قرار می‌گیرند.

برای مدل سازی شکل بیشتر از اسپلاین‌های درجه سه استفاده می‌شود، زیرا دارای کمترین درجه با پیوستگی C(2) هستند که اغلب نیاز طراح را در مدل سازی و حل مسئله برطرف می‌کند.

۴-۲-۱- توابع اسپلاین

تعریف: فرض کنید یک مجموعه از اعداد حقیقی به صورت $x_1\langle x_2\langle ...\langle x_k$ داده شده باشند. یک تابع اسپلاین S(x) از درجه n با گره‌های $x_1, x_2, ...$ و x_k تابعی است که در شرایط زیر صرق کند:

۱) در هر بازه $x_j \le x \le x_{j+1}$ $(j=1,2,...,k)$ ، S(x) یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر n می‌باشد.

۲) S(x) و مشتقاتش از مرتبه ۱،۲، ... ، n-1 روی $(-\infty,\infty)$ پیوسته اند، یعنی $S(x)\in C^{n-1}$

بنابراین یک تابع اسپلاین، یک تابع چند جمله‌ای قطعه‌ای است که در شرایط فوق صدق می‌کند. به

طور کلی S(x) در محل برخورد بازه‌های (x_i, x_{i+1}) و (x_{i-1}, x_i) با چند جمله‌ایهای متفاوت داده می‌شود.

کلمه "تابع اسپلاین" از طرح ابتدائی آن مشتق شده است وآن عبارت است از یک تکه چوب یا فلز نازک بسیار بلند که به هر شکل دلخواه و مورد نظر در می‌آید بطوریکه از آن می‌توان یک منحنی هموار درست کرد[۳۴].

فایده استفاده از توابع اسپلاین نسبت به چند جمله‌ایها در این است که با انتخاب یک تابع اسپلاین از درجه پایین، تابعی بدست می‌آوریم که تا حد ممکن هموار باشد، به این معنا که بدون آنکه در حالت کلی یک چند جمله‌ای باشد، دارای بیشترین پیوستگی است؛ در صورتی که چند جمله‌ایها از درجه بالا زیاد نوسان می‌کنند[۳۴].

اسپلاین مدل‌های مختلفی دارد.

الف) اسپلاین خطی: هر قطعه این نوع اسپلاین یک خط است. اسپلاین خطی فقط خاصیت پیوستگی دارد و مشتق پذیر نیست، چون با مشتق گیری پیوستگی خود را از دست می‌دهد.

$$S_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j) + x_j \quad , \ f(x) \in C(0)\left[x_0, x_n\right] \qquad (۴-۲۰)$$

$C(0)\left[a,b\right]$: این نماد نمایان گر مجموعه تمام توابع از [a,b] به R است که n بار مشتق پذیر بوده و با مشتق nام پیوستگی را نیز حفظ می‌کنند. برای اسپلاین خطی n=0 است و چون مشتق پذیر نیست و مشتق صفر ام آن پیوسته است، پس پیوستگی C(0) دارد.

ب) اسپلاین مکعبی: این نوع اسپلاین در مقایسه با انواع دیگر اسپلاینها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. دلیل این امر پیوستگی C(2) این منحنی با کمترین درجه ممکن می‌باشد. این بدان معنی است که اسپلاین مکعبی تا دو بار مشتق پذیر، و مشتق دوم آن نیز پیوسته می‌باشد.

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \qquad j = 0,1,2,\ldots,n-1 \qquad (۴-۲۱)$$

اما همان طور که می‌دانیم روش اجزای محدود یک روش عددی به شمار می‌آید و استفاده از کامپیوتر

در این زمینه الزامی است. در کامپیوتر نمایشی مناسب است که پارامتری باشد، و نمایش نموداری یا تابعی چندان مناسب نیست. لذا اشکال این نوع منحنی‌ها نیز، عدم پارامتری بودن آن‌ها است.

۴-۲-۲- اسپلاین‌های پارمتری درجه سه

منحنی‌های درجه سه فرگوسن، بزیر و بی اسپلاینها را می‌توان برای تعریف پارامتری شکل یک قطعه مورد استفاده قرار داد. این روشها را می‌توان به راحتی به فرم ماتریسی نوشت و از آن جهت تولید برنامه‌های کامپیوتری استفاده نمود. هر سه روش نامبرده در فوق را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد[۳۵].

$$P(h)=H.R.M \qquad (۴-۲۲)$$

که در آن خواهیم داشت:

$$H=\begin{bmatrix} h^3 & h^2 & h & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad 0\le h\le 1 \qquad (۴-۲۳)$$

R و M نیز به نوع منحنی اسپلاین مورد استفاده بستگی خواهند داشت. با توجه به اینکه در این تحقیق از منحنی‌های بی اسپلاین درجه سه استفاده شده است، برای این نوع منحنی خواهیم داشت:

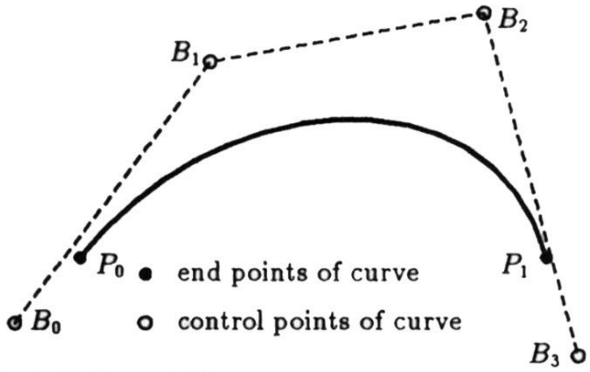
$$R_B=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad M_B=\begin{bmatrix} b_0^T \\ b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix} \; , \; 0\le h\le 1 \qquad (۴-۲۴)$$

که در روابط فوق b_0, b_1, b_2 و b_3، بردارهای موقعیت در رئوس کنترلی B_0 ، B_1، B_2 و B_3 می‌باشند.

این رئوس کنترلی بیانگر چندضلعی مشخصه منحنی هستند.

کلیه نقاط واقع بر روی منحنی درجه سه بی اسپلاین در میان پوسته محدب[۱] شکل بیان کننده چند ضلعی مشخصه اسپلاین[۲] واقع می‌شوند.

[1] Convex hull
[2] Polygon



شکل ۴-۳ منحنی درجه سه **B-Spline**

۴-۲-۳- B- اسپلاینها

دسته‌ای از توابع اسپلاین که از آنها کلیه توابع اسپلاین دیگر با تشکیل ترکیبهای خطی بدست می‌آیند، به طوری که یک پایه[1] برای فضای اسپلاینهای خاص را فراهم می‌کنند، B- اسپلاین نامیده می‌شوند. به محض معلوم بودن گره‌ها، B- اسپلاینها به وسیله روابط بازگشتی به راحتی قابل تولید هستند و الگوریتم آنها نسبتا ساده است.

فرض کنید که مجموعه $U=\{u_0,u_1,u_2,...,u_m\}$ دارای اعضایی باشد که در آنها شرط زیر برقرار باشد.

$$u_i \le u_{i+1} \qquad i=0,1,2,...,m$$

u_iها را گره[2] و بردار U را بردار گره[3] می‌نامیم. i– امین تابع پایه B- اسپلاین را که از درجه P (مرتبه p+1) می‌باشد را با $B_i^p(u)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم[۷].

$$B_i^0(u)=\begin{cases}1 & if \quad u_i \le u \langle u_{i+1} \\ 0 & else\end{cases} \qquad (۲۵-۴)$$

$$B_i^p(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i}B_i^{p-1}(u)+\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}B_{i+1}^{p-1}(u) \qquad (۲۶-۴)$$

توجه شود که

✓ تابع $B_i^0(u)$ تابعی پله‌ای بوده و جز در بازه نیمه باز $u\in[u_i,u_{i+1}[$ مقدار آن صفر می‌باشد.

[1] Basis
[2] Knot
[3] Knot Vector

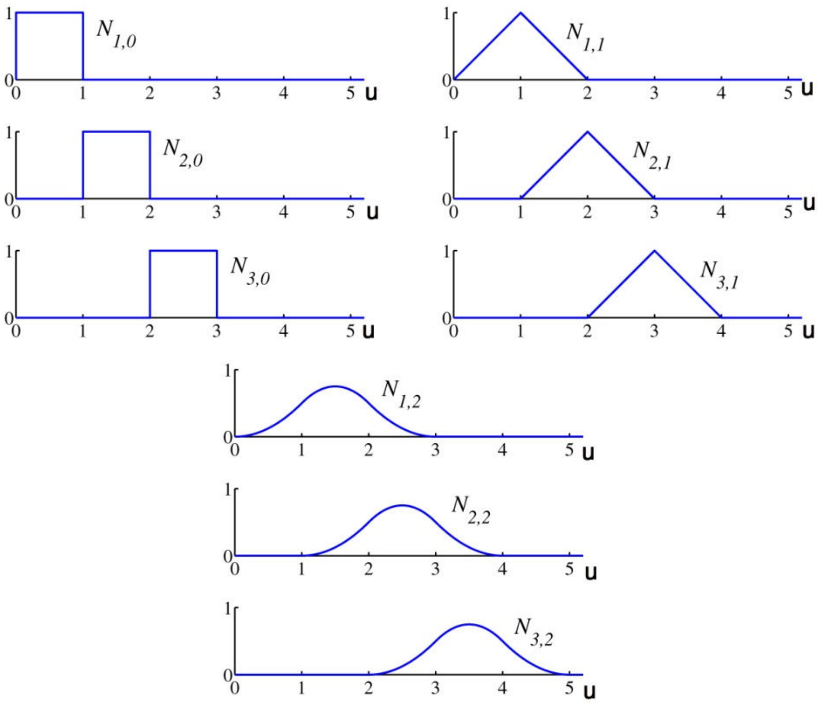
- ✓ به ازای هر $p \rangle 0$ تابع پایه $B_i^p(u)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه با درجه p-1 می‌باشد.
- ✓ در رابطه مذکور در صورت مواجه با تقسیم $\frac{0}{0}$ در ضرایب، مقدار آن را برابر صفر در نظر می‌گیریم[۳۶].

در صورتی که توابع پایه $B_i^p(u)$ را به صورت $N_{i,p}(u)$ نمایش دهیم، در شکل‌های (۴-۴ و ۴-۵) می‌توان نمایش ترسیمی چند تابع پایه اسپلاین را مشاهده کرد.

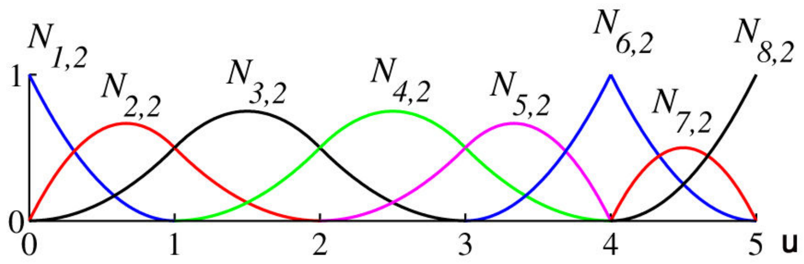
شکل ۴-۶ نحوه محاسبه B_i^p را نشان می‌دهد. برای محاسبه $B_i^1(u)$ به $B_i^0(u)$ و $B_{i+1}^1(u)$ احتیاج داریم. بنابراین می‌توان $B_0^1(u)$، $B_1^1(u)$، $B_2^1(u)$ و.... را محاسبه کرد. به محض محاسبه $B_i^1(u)$ها می‌توان $B_i^2(u)$ را بدست آورد. این روند تا جائی که به محاسبه $B_i^p(u)$ها نیاز است ادامه می‌یابد.

۴-۲-۴- منحنی‌های B- اسپلاین

منحنیهای B- اسپلاین را می‌توان با استفاده از توابع پایه B- اسپلاین تعریف نمود. یک منحنی درجهٔ p ام B- اسپلاین را می‌توان به شکل معادله (۴-۲۷) تعریف نمود[۳۶].



شکل ۴-۴ توابع پایه از درجه ۲،۱،۰ برای بردار گره‌ای یکنواخت $u = \{0,1,2,3,4,5,...\}$



شکل ۴-۵ توابع پایه درجه دو برای بردار گره‌ای $u=\{0,0,0,1,2,3,4,5,5,5\}$

$[u_0,u_1)$	B_0^0					
		B_0^1				
$[u_1,u_2)$	B_1^0		B_0^2			
		B_1^1		B_0^3		
$[u_2,u_3)$	B_2^0		B_0^2		B_0^4	
		B_2^1		B_1^3		B_0^5
$[u_3,u_4)$	B_3^0		B_0^2		B_1^4	
		B_3^1		B_2^3		
$[u_4,u_5)$	B_4^0		B_0^2			
		B_4^1				
$[u_5,u_6)$	B_5^0					

شکل ۴-۶ دیاگرام نحوه محاسبه B_i^p

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n} B_i^p(u)\times P_i \qquad (۲۷-۴)$$

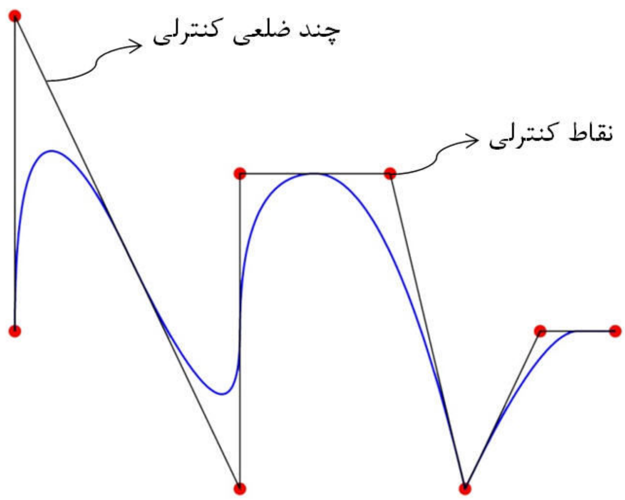
در رابطه بالا $\{P_i\}$ مجموعه نقاط کنترلی و $\{B_i^p(u)\}$ مجموعه توابع درجه pام B- اسپلاین می‌باشند.

بردار گره غیر تکراری[۱] و غیر یکنواخت[۲] U را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$U=\left\{\underbrace{a,\ldots,a}_{p+1},u_{p+1},\ldots,u_{m-p-1},\underbrace{b,\ldots,b}_{p+1}\right\} \qquad (۲۸-۴)$$

چند ضلعی که توسط نقاط کنترلی $\{P_i\}$ ایجاد می‌شود را چند ضلعی کنترلی[۳] می‌نامیم.

[1] nonperiodic
[2] nonuniform
[3] Control polygon



شکل ۴-۷ منحنی درجه دوم تکه‌ای **B**- اسپلاین با استفاده از توابع پایه و بردار گره‌ای شکل ۴-۵

برای محاسبه موقعیت یک نقطه بر روی منحنی، سه مرحله وجود دارد[۳۶].

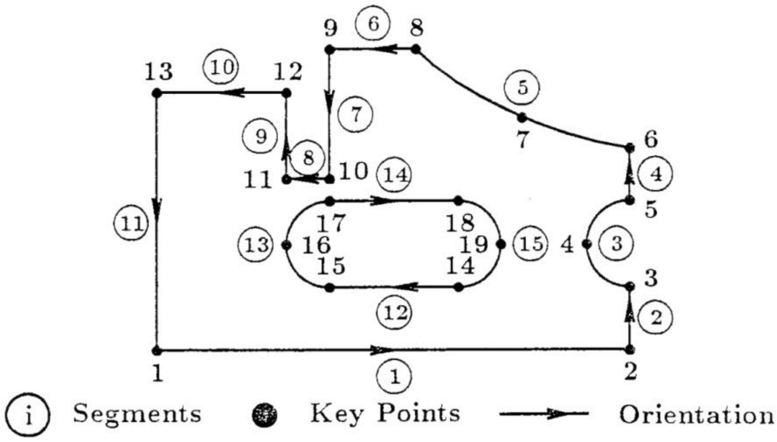
۱. یافتن بازه‌ای که u در آن واقع می‌شود.

۲. محاسبه کلیه توابع پایه غیر صفر مربوط به u

۳. ضرب توابع پایه محاسبه شده در مختصات نقاط کنترلی مربوطه.

۴-۲-۵- مدلسازی دامنه یک سازه

نمای کلی از مرزهای یک جسم دو بعدی در شکل ۴-۸ نمایش داده شده است. مرزها از روی هم گذاری قطعات اسپلاین به وجود آمده اند. علاوه بر این هر قطعه می‌تواند خودش از تعدادی زیر قطعه



شکل ۴-۸ مدل سازی دامنه یک سازه شامل سوراخ داخلی با استفاده از ۱۹ نقطه کلیدی و ۱۵ قطعه[۳۷].

تشکیل شود. همچنین هر زیر قطعه شامل تعدادی نقاط کلیدی می‌باشد که بر روی مرزها واقع شده‌اند. هر زیر قطعه یک منحنی درجه سه B- اسپلاین است که در میان دو نقطه کلیدی مجاور واقع گردیده است. بعضی از این نقاط کلیدی در محل تقاطع قطعه‌ها مشترک می‌باشند. برای مرزهای مستقیم به حداقل دو نقطه کلیدی که بر روی مرزها واقعند، احتیاج داریم. در مورد مرزهای منحنی شکل نیز به حداقل سه نقطه احتیاج است تا بتوان مرزهای منحنی شکل را مدل نمود. همان طور که در شکل ۴-۸ مشاهده می‌شود این دامنه شامل ۱۹ نقطه کلیدی و ۱۵ قطعه می‌باشد. قطعات ۳، ۵، ۱۳ و ۱۵ دارای دو زیر قطعه هستند. جهت تعریف قطعات در مرز خارجی، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد. در مورد مرزهای داخلی، جهت تعریف قطعه‌ها در جهت موافق با عقربه‌های ساعت می‌باشد[۳۷].

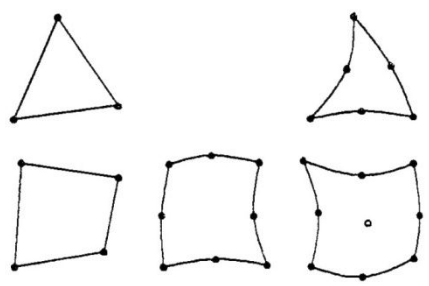
۴-۳- تولید شبکه اجزای محدود

پس از تعیین و معرفی مرزها، نوبت به مش بندی ناحیه مورد نظر از سازه مورد مطالعه می‌رسد. مش بندی و تولید المان‌ها یکی از مراحل مهم در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای با روش اجزای محدود در مسائل مکانیک جامدات است.

تولید مش به مفهوم تقسیم بندی و جایگزینی شکل هندسی اولیه با قطعات ساده‌تر و کوچک‌تر می‌باشد. این اشکال کوچک که المان نامیده می‌شوند، در اشکال دوبعدی به صورت مثلث و یا چهارضلعی و در اشکال سه بعدی به صورت چهاروجهی و یا هشت وجهی ظاهر میشوند. برای حل مسائل سازه ای با استفاده از روش اجزای محدود، ابتدا بایستی مدل هندسی اولیه به یک مدل محاسباتی تبدیل شود. بدین منظور مهمترین بخش کار، تولید مش می‌باشد. در چند دهه گذشته، محققان و برنامه‌نویسان کامپیوتری، تلاش بسیاری را جهت تولید برنامه‌های تحلیلی اجزای محدود به انجام رسانیده‌اند. در این میان برنامه‌های تولید مش، مهمترین بخش کار بوده و وقت زیادی بابت آن صرف شده است. با این وجود، امروزه نیز تلاش‌های بسیاری جهت بهبود و تولید الگوریتم‌های تولید

مش انجام می گیرد. هدف اصلی در این برنامه‌ها، تولید مش با کیفیت بالا و چگالی مناسب به صورت اتوماتیک و موثر می باشد.

در برنامه ADAPT تولید شبکه اجزای محدود به صورت اتوماتیک و با استفاده از المانهای مثلثی و چهار ضلعی نشان داده شده در شکل ۴-۹ انجام می‌گیرد. این شبکه اجزای محدود به صورت ساختار نیافته[1] و به روش جبهه پیش رونده[2] تشکیل می‌شود. الگوریتم به کار رفته در برنامه قادر است که بعد از تخمین خطای اجزای محدود، چگالی مش مورد نیاز را در نواحی مختلف ناحیه تعیین کند و بر اساس آن حل تطبیقی انجام پذیرد.



شکل ۴-۹ المانهای مورد استفاده جهت شبکه بندی دامنه در برنامه **ADAPT**

در ادامه به آشنایی بیشتر با مفاهیم تولید شبکه اجزای محدود و تشریح الگوریتم مورد استفاده جهت تولید مش، در برنامه ADAPT می‌پردازیم.

۴-۳-۱- انواع روشهای تولید کننده شبکه اجزای محدود

بدون در نظر گرفتن نوع و شکل المان‌ها، روش‌های تولید مش به سه گروه کلی زیر تقسیم بندی می‌شوند[۳۷]:

[1] Unstructured

[2] Advancing Front

۱. روش‌های تولید مش سازمان یافته[1]

۲. روش‌های تولید مش سازمان نیافته[2]

۳. روش‌های تولید مش ترکیبی[3]

روش‌های تولید مش سازمان یافته، روش‌هایی هستند که برای هر گره و المان موجود در داخل دامنه، تعداد گره‌ها و المان‌های موجود در همسایگی آنها ثابت می باشد ولی در مورد مش‌های سازمان نیافته، این تعداد ثابت نبوده و می‌تواند تغییر کند. همچنین در روش‌های سازمان یافته تولید مش، ابتدا گره‌ها و سپس المان‌ها تولید می‌شوند . این در حالی است که در روش‌های سازمان نیافته، تولید المان‌ها و گره‌ها به طور همزمان صورت می پذیرد. از امتیازات روش‌های سازمان یافته می‌توان به سادگی الگوریتم آنها و همچنین مصرف کمتر حافظه کامپیوتر نام برد. اما از عیوب مهم آن این است که نمی‌توان از این روش به راحتی برای تولید مش در شکل‌های پیچیده استفاده کرد.

روش‌های تولید مش سازمان نیافته روش‌های قدرتمندی برای مش بندی سطوح پیچیده می‌باشند. این روش‌ها نسبت به روش‌های سازمان یافته، حافظه بیشتری از کامپیوتر را به خود تخصیص میدهند. محققان و متخصصان فن تولید مش، بیشتر زمانشان را برای تولید و اصلاح این نوع از روشها مصرف کرده اند و مقالات بسیاری را منتشر نموده اند. در شکل۴-۱۰ نمونه‌ای از تولید مش سازمان یافته و مش سازمان نیافته قابل ملاحظه می باشد.

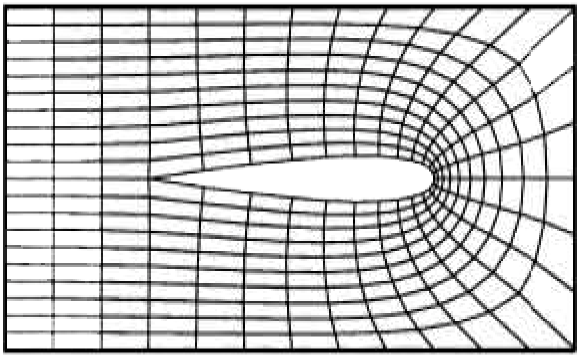
روش‌های ترکیبی نیز همان‌گونه که از اسمشان پیداست، به صورت ترکیبی از روش‌های تولید مش سازمان یافته و سازمان نیافته می‌باشند.

برای حل تطبیقی مسائل به روش اجزای محدود، به یک تولید کننده مش سازمان نیافته قوی نیاز است. در برنامه ADAPT، برای شبکه بندی دامنه مسئله مورد مطالعه، از یک روش تولید مش ساختار نیافته به نام روش جبهه پیش رونده (Advancing Front Technique) که به اختصار AFT

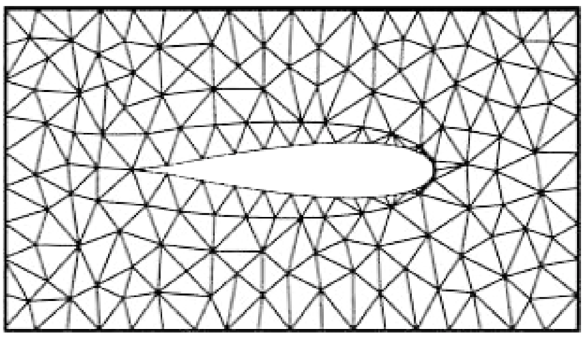
[1] Structured Mesh Generation
[2] Unstructured Mesh Generation
[3] Hybrid Mesh Generation

می‌نامند، استفاده شده است. این روش برای مدل سازی شکل‌های پیچیده بسیار مناسب است و می‌توان گفت اطلاعات و پارامترهای مورد نیاز برای تولید مش در این روش بسیار کم است. این پارامترها تعیین کننده چگالی مش در نواحی مختلف دامنه مورد نظر و همچنین اندازه، جهت و کشیدگی المان‌ها هستند.

لازم به ذکر است که در ضمیمهٔ دو، به طور کامل به تشریح روش جبههٔ پیشرونده جهت تولید شبکهٔ اجزای محدود پرداخته شده است.



الف)



ب)

شکل ۴-۱۰ الف) مش سازمان یافته ب) مش سازمان نیافته

۴-۴- تخمین خطا و بهبود شبکه اجزای محدود

همان طور که بیان شد، برنامه ADAPT قادر به تخمین خطای اجزای محدود با استفاده از دو روش زیر می‌باشد:

۱- تخمین خطا با استفاده از بازیافت تنش در نقاط فوق همگرا بر روی گروه المانهای متصل به

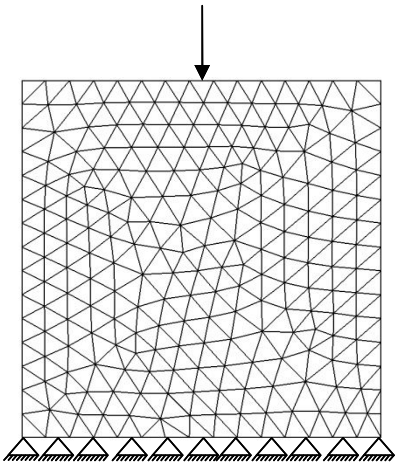
یک گره (SPR).

۲- تخمین خطا با استفاده از روش میانگین گیری.

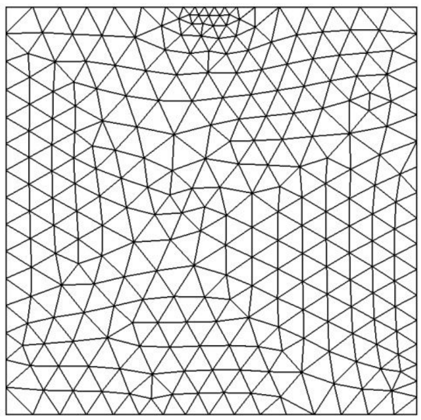
در فصل دوم این پایان نامه اساس روشهای تخمین خطا، به ویژه روش SPR به طور گسترده مورد بحث قرار گرفته است؛ لذا در این قسمت به آن اشاره‌ای نمی‌شود.

تخمین خطا با استفاده از روش میانگین گیری، روشی است که قبل از روش SPR توسط زینکویچ و زو در سال ۱۹۸۷ ابداع شد[۷]. چگونگی تخمین خطا، با استفاده از این روش نیز در قسمت ۵-۷ از فصل پنجم بیان شده است.

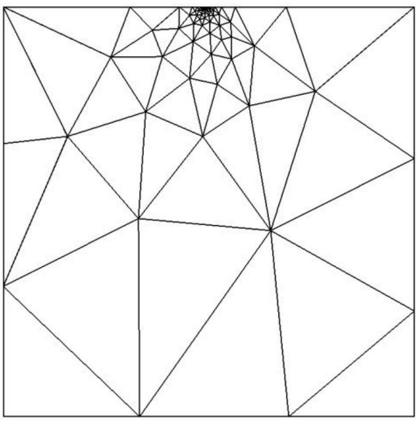
بهبود شبکه اجزای محدود در این برنامه با استفاده از دو روش غنی سازی شبکه اولیه و شبکه بندی دوباره، امکان پذیر می‌باشد. در فصل سوم نیز به طور گسترده به چگونگی بهبود شبکه اجزای محدود با استفاده از این دو روش پرداخته شده است. در شکل ۴-۱۱ می‌توان تفاوت شبکه نهایی اصلاح شده با استفاده از دو روش غنی سازی و شبکه بندی دوباره، برای صفحهٔ مربعی تحت بار متمرکز که با استفاده از نتایج برنامه ADAPT بدست آمده را ملاحظه نمود.



الف) شبکه اجزای محدود اصلاح نشده



ب) اصلاح با استفاده از روش غنی سازی



ج) اصلاح با استفاده از شبکه بندی دوباره

شکل ۴-۱۱ اصلاح شبکه صفحهٔ مربعی تحت بار متمرکز

فصل پنجم

بررسی صحت و دقت برنامه با تعیین فاکتور شدت تنش صفحه ترکدار تحت کشش

۵-۱- مقدمه

در این فصل برای نشان دادن صحت، دقت و توانایی برنامه در حل مسائل اجزای محدود، به ویژه مسائل از نوع تکین، به تعیین فاکتور شدت تنش صفحهٔ ترکدار تحت کشش پرداخته شده است. دقت و صحت نتایج بدست آمده از برنامه به وسیله مقایسهٔ آنها با نتایج آنالیز تئوری و نرم افزار تجاری Ansys مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهند که الگوریتم استفاده شده در برنامه جهت تخمین خطای اجزای محدود، در مقایسه با الگوریتم مورد استفاده در نرم افزار Ansys از کارایی بهتری برخوردار می‌باشد؛ به طوری که برنامه ADAPT در مقایسه با نرم افزار Ansys با تعداد المانهای کمتر و در نتیجه درجات آزادی کمتری به دقت مورد نیاز مسئله می‌رسد.

اهمیت نتایج این فصل نیز از این جهت مورد تاکید می‌باشد که تبیین فاکتورشدت تنش به صورت یک معادله ریاضی برای ترکی دلخواه در یک سازه پیچیده و تحت بارگذاری دلخواه، مشکل وگاهی غیر ممکن است؛ لذا استفاده از یک روش عددی با قابلیت اطمینان بالا درحل اینگونه مسائل الزامی می‌باشد.

قبل از بیان نتایج بدست آمده برای مقادیر فاکتور شدت تنش، لازم به نظرمی‌رسد که برای درک بهتر این مفهوم و چگونگی حصول روابط تئوری آن، به بیان مختصری از علم مکانیک شکست مواد ارتجاعی خطی بپردازیم.

۵-۲- مکانیک شکست ارتجاعی خطی

مکانیک شکست ارتجاعی خطی روشی برای بیان میدان و توزیع تنش در نزدیکی نوک ترک بر حسب بارگذاری در دوردست، اندازه و شکل هندسی ترک یا ناپیوستگی ترک گونه می‌باشد. مکانیک شکست ارتجاعی خطی مبتنی بر اعمال اصول تئوری مکانیک ارتجاعی خطی به قطعهٔ دارای ترک است. در مکانیک ارتجاعی خطی فرض می‌شود که تغییر مکان‌های نقاط مختلف ماده در اثر اعمال بار بسیار کوچک بوده و ماده نیز دارای رفتار خطی است، بدین معنا که می‌توان تنش‌ها و کرنش‌های موجود در

ماده را با هم بطور خطی متناسب دانست. مهمترین اصل مکانیک شکست ارتجاعی خطی این است که توزیع تنش نزدیک یک ترک نوک تیز بر حسب یک کمیت به نام فاکتور تمرکز تنش K، (با واحد $Mpa.\sqrt{m}$یا $Ksi.\sqrt{in}$) قابل بیان است که به هر دو عامل، تنش وارده به قطعه در دوردست (σ) و هندسهٔ قطعه (شامل طول ترک (a)) بستگی دارد. بنابراین سطح بارگذاری روی ترک بر حسب فاکتور شدت تنش قابل بیان است و از این حیث این فاکتور شبیه تنش می‌باشد. چون هر قطعه‌ای که تحت بار قرار می‌گیرد در واقع تا سطح مشخصی تنش در آن ایجاد می‌شود، و یک قطه ترک دار نیز که تحت بار واقع می‌گردد تا سطح معینی فاکتور شدت تنش در آن ایجاد می‌شود.

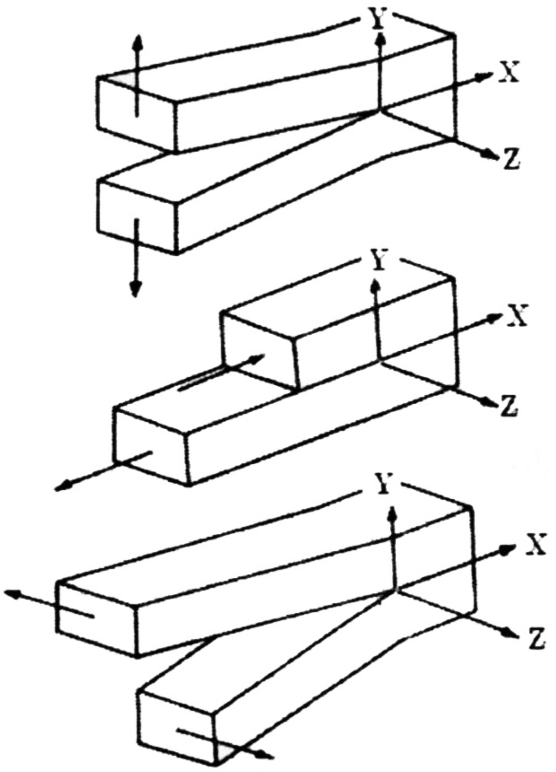
اولین گام در بررسی یک ترک، تحلیل تنش قطعهٔ ترکدار است که توسط آن بررسی رشد ترک و در نتیجه حساسیت قطعه به ترک امکان پذیر می‌شود. برای متمایز نمودن مولفه‌های تنش برای مدهای مختلف تغییر شکل، مناسب است که سه مود تغییر شکل نسبی سطوح ترک تعریف گردد. این مودهای تغییر شکل (که در شکل ۵-۱ نمایش داده شده اند) عبارتند از[۳۹]:

۱- مود ۱ یا مود بازشدگی[۱] که متداول ترین فرم گسیختگی در اثر رشد ترک است، معرف تغییر شکل متقارن سطوح ترک نسبت به صفحات XY و XZ می‌باشد. در این مود سطوح ترک بطور عمود بر هم در جهت مخالف یکدیگر تغییر مکان می‌دهند.

۲- مود ۲ یا مود برشی[۲]، تغییر مکان سطوح ترک نسبت به صفحهٔ XY متقارن و نسبت به صفحهٔ XZ پادمتقارن است. دراین مود، دو سطح ترک نسبت به هم در جهت عمود بر خط نوک ترک، می‌لغزند.

۳- مود ۳ یا مود پارگی[۳] نیز معرف تغییر شکل سطوح ترک بصورت پاد متقارن نسبت به هر دو صفحهٔ XY و XZ می‌باشد. در این مود، لغزش دو صفحه در جهتی به موازات خط پروفیل ترک اتفاق می‌افتد.

[1] Pening Mode
[2] Shearing Mode
[3] Tearing Mode



شکل ۵-۱ مودهای تغییر شکل ترک

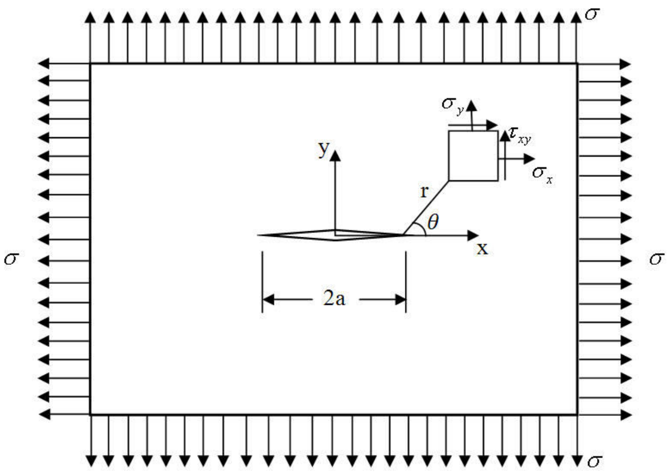
در ادامه به طور خلاصه تحلیل تئوری ارتجاعی برای یک ترک افقی در یک صفحه به ابعاد بینهایت تحت بارگذاری دو محوره (شکل ۵-۲) ارائه می‌شود تا از این تحلیل بتوان فهم دقیق تری از معادلات وسترگارد و فاکتور شدت تنش بدست آورد.

جسم ترکدار نشان داده شده در شکل (۵-۲)، در حالت تنش مسطح در نظر گرفته می‌شود و همچنین ماده تشکیل دهندهٔ این جسم نیز همگن و ایزوتروپیک فرض می‌گردد. بر این اساس و با در نظر گرفتن فرضیات اصلی تئوری ارتجاعی خطی، می‌توان با مراحل استاندارد زیر به توزیع تنش و جابجایی در نمونه رسید[۳۹].

۱- معادلات تعادل تنش

برای نمونهٔ دو بعدی می‌توان معادلات تعادل تنش را به صورت زیر نوشت.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial_y} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (۱-۵)$$



شکل ۵-۲ صفحه به ابعاد بینهایت تحت بار کششی دو محوره یکنواخت

مشاهده می‌شود که این دو معادله دارای سه مجهول ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) می‌باشند. لذا برای حل این معادلات به یک معادلهٔ اضافی نیاز خواهیم داشت.

۲- معادلات هوک و روابط بین کرنش و جابجایی‌ها

تنش در هر نقطه از جسم با روابط زیر که به نام معادلات هوک شناخته می‌شوند، به کرنش‌های جسم مرتبط می‌باشند:

$$E\,\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_x \qquad (۲-۵)$$
$$E\,\varepsilon_y = \sigma_y - \nu\sigma_x$$
$$\frac{E\,\gamma_{xy}}{2(1+\nu)} = \tau_{xy}$$

که در آنها E مدول ارتجاعی ماده و ν ضریب پواسون ماده است. با اضافه شدن این سه معادله، سه مجهول دیگر (مولفه‌های کرنش) به مجهولات قبلی (مولفه‌های تنش) افزوده می‌گردد. بنابراین هنوز کمبود یک معادله برای حل، به قوت خود باقی است. مولفه‌های جابجایی و کرنش نیز با روابط زیر به هم اتصال دارند.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{۵-۳}$$

که در آن u و v مولفه‌های جابجایی می‌باشند. با ترکیب معادلات (۵-۳) با یکدیگر، معادله تطابق کرنش[1] به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varepsilon_x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varepsilon_y) \tag{۵-۴}$$

اکنون با شش معادله معرفی شده (۵-۴و۵-۲و۵-۱) می‌توان به شش مجهول مورد نظر یعنی مولفه‌های تنش و کرنش دست یافت.

ایری[2] نشان داد که برای هر مسئله ارتجاعی تابعی به نام تابع تنش ایری وجود دارد که در معادلات تعادل (روابط ۵-۱) صدق می‌کند. اگر این تابع را $\phi(x, y)$ بنامیم، می‌توان مولفه‌های تنش را به صورت زیر نوشت.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x\, \partial y} \tag{۵-۵}$$

با قرار دادن این مولفه‌های تنش در روابط تعادل (۵-۱)، برآورده شدن این روابط تعادل بسادگی دیده می‌شود. حال اگر معادلات هوک (۵-۲) را بر حسب تابع تنش ایری (۵-۵) نوشته و نتیجه را در معادله تطابق کرنش (۵-۴) قرار دهیم، خواهیم داشت.

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x\, \partial y} = 0 \tag{۵-۶}$$

ویا

$$\nabla^4(\phi) = \nabla^2(\nabla^2 \phi) = 0 \tag{۵-۷}$$

که در آن $\nabla^2 \phi$ به نام تابع هارمونیک و $\nabla^4 \phi$ به نام تابع بای هامونیک شناخته می‌شود. هر تابعی که در معادله (۵-۷) صدق کند، به نام تابع تنش ایری شناخته می‌شود.

---
[1] Strain Compatibility Equation
[2] Airy

فرض کنید تابع مختلطی مانند Z(z) (که به نام تابع وسترگارد[1] شناخته شده و در آن متغیر مختلط z به صورت x+iy می‌باشد) وجود داشته باشد به طوری که بتوان با انتگرال گیری از آن، تابع تنش ایری برای مسئله نشان داده در شکل (۵-۲) را به دست آورد. در این حالت، تابع مختلط طوری انتخاب می‌شود که تابع تنش ایری به صورت ترکیبی از انتگرال‌های مرتبه اول و دوم این تابع به فرم زیر نوشته شود.

$$\varphi = \mathrm{Re}(\iint Z(z))dz^{2}) + y\ \mathrm{Im}(\int Z(z)dz) \qquad (۸\text{-}۵)$$

که در آن Re و Im به ترتیب قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع مختلط می‌باشند. می‌توان نشان داد که این تابع (ϕ) در معادله بای هارمونیک (۵-۷) صدق می‌نماید. اکنون، با مشتق گیری از این معادله، مولفه‌های تنش به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \mathrm{Re}(Z(z)) - y\,.\mathrm{Im}(Z(z)) \\ \sigma_y &= \mathrm{Re}(Z(z)) + y\,.\mathrm{Im}(Z(z)) \\ \tau_{xy} &= -y\,.\mathrm{Re}(Z(z)) \end{aligned} \qquad (۹\text{-}۵)$$

اکنون اگر بتوان یک تابع وسترگارد (Z(z)) مناسب برای مسئله مورد نظر به طوری که شرایط مرزی مورد نظر را اقناء کند، می‌توان با استفاده از روابط (۵-۹) مولفه‌های تنش در اطراف نوک ترک را به دست آورد . برای مسئله مورد نظر (که در شکل ۵-۲ نشان داده شده است) تابع Z(z) باید به گونه‌ای باشد که در شرایط مرزی زیر صدق کند.

$$\begin{aligned} &x = \pm\infty && \sigma_x = \sigma \\ &y = \pm\infty && \sigma_y = \sigma \\ &-a \langle x \langle +a && \sigma_y = 0 \\ &x = \pm a && \sigma_y = \infty \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که تابعی به فرم تابع (۵-۱۰) زیر، می‌تواند کلیه شرایط مرزی بالا را اقناء نماید، لذا می‌تواند یک تابع وسترگاد برای صفحه مورد نظر باشد. این تابع به جز در نقاط $x = \pm a$ (دو نوک ترک) در همه نقاط تحلیلی است.

[1] Westergaard

$$Z(z)=\frac{\sigma.z}{\sqrt{z^2-a^2}} \tag{۵-۱۰}$$

اگر مرکز مختصات نشان داده شده در شکل (۵-۲) را به نوک ترک در $x=+a$ منتقل کنیم و تقریب اول این تابع در حالاتی که مقدار z بسیار از مقدار a کوچکتر باشد، در نظر بگیریم و همچنین، متغیر مختلط z را به فرم قطبی $z=re^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$Z(z)=\frac{\sigma.(z+a)}{\sqrt{(z+a)^2-a^2}};$$
$$Z(z)=\frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2z}}$$
$$Z(r,\theta)=\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}}e^{-i\theta+2}$$

با مشتق گیری از تابع $Z(z)$ و قرار دادن روابط $\mathrm{Re}(Z)$ و $\mathrm{Im}(Z)$ در معادلات (۵-۹)، می‌توان مولفه‌های تنش در نزدیک نوک ترک $x=a$ را به دست آورد. در صورتی که توزیع تنش را در ناحیه اطراف نوک ترک بسیار متمرکز در نظر بگیریم و $\frac{r}{a}$ که عدد بسیار کوچکی است را برابر صفر قرار دهیم، مولفه‌های تنش در اطراف نوک ترک به صورت زیر بیان می‌گردند.

$$\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}.\sin\frac{3\theta}{2}\right]\\
\sigma_y&=\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\sin\frac{\theta}{2}.\sin\frac{3\theta}{2}\right]\\
\tau_{xy}&=\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{3\theta}{2}
\end{aligned} \tag{۵-۱۱}$$

این معادلات نشان می‌دهند که در نوک ترک $(r=0)$ تنش‌ها حالت ویژه داشته و قابل تعریف نمی‌باشند. در این روابط همچنین عبارت $\sigma\sqrt{\pi a}$ به نام فاکتور شدت تنش برای مود ۱(مود بازشدگی) شناخته می‌شود که معمولا با نماد K_I نشان داده می‌شود. اکنون با این تعریف، می‌توان روابط تنش و جابجایی‌ها در ترک‌های مود ۱،۲ و۳ را به صورت زیر بیان کرد:

مود ۱:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}.\sin\frac{3\theta}{2}\right]\\
\sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\sin\frac{\theta}{2}.\sin\frac{3\theta}{2}\right]\\
\tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{3\theta}{2}\\
\sigma_z &= \nu(\sigma_x+\sigma_y), \qquad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0\\
u &= \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\\
v &= \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left[2-2\nu+\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\\
w &= 0
\end{aligned}
\tag{۱۲-۵}
$$

مود ۲:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left[2+\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{3\theta}{2}\right]\\
\sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}.\cos\frac{3\theta}{2}\\
\tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}.\sin\frac{3\theta}{2}\right]\\
\sigma_z &= \nu(\sigma_x+\sigma_y), \qquad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0\\
u &= \frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left[2-2\nu+\cos^2\frac{\theta}{2}\right]\\
v &= \frac{K_{II}}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left[-1+2\nu+\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\\
w &= 0
\end{aligned}
\tag{۱۳-۵}
$$

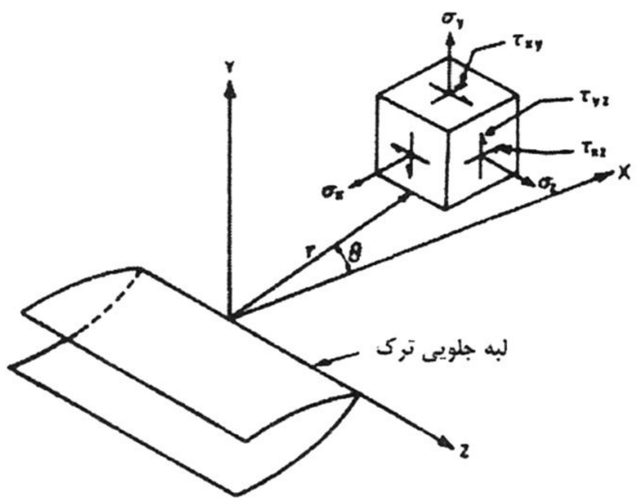
مود ۳:

$$
\begin{aligned}
\tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\\
\tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\\
\sigma_x &= \sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0
\end{aligned}
\tag{۱۴-۵}
$$

$$w = \frac{K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{2r}{\tau}}\sin\frac{\theta}{2}$$
$$u = v = 0$$

که در آن مولفه‌های تنش و مولفه‌های مختصات قطبی (θ,r) می‌باشد که در شکل (۵-۳) نشان داده شده اند. u،v و w نیز به ترتیب مولفه‌های جابجایی در جهت محورهای x، y و z بوده و μ و ν به ترتیب مدول ارتجاعی برشی و نسبت پواسون ماده بوده و K_{II} و K_{III} نیز به ترتیب فاکتور شدت تنش برای مودهاهی ۲ و۳ می‌باشد.

هر یک از سه مود اصلی تغییر مکان سطوح ترک، دارای روابط تنش و جابجایی منحصر به خود است که به نام تنش‌ها و جابجای‌های وسترگارد شناخته می‌شوند. تغییر شکل یک ترک در قطعه‌ای از ماشین یا سازه می‌تواند در هر یک از این مودها و یا ترکیبی از این مودها اتفاق افتد. زمانی که تغییر مکان ترک فقط در یک مود رخ دهد، حالت مود خالص[1] و در شرایطی که ترکیبی از مودها جهت بیان جابجایی سطوح ترک لازم باشد، حالت مود ترکیبی جابجایی[2] ترک نامیده می‌شود. لازم است به ذکر است که متداولترین و مهم ترین مود شکست، مود ۱ یا مود بازشدگی بوده که در این تحقیق بر آن تاکید شده است.



شکل ۵-۳ تعریف سیستم مختصات و مولفه‌های تنش در نوک ترک

[1] Pure Fracture Mode
[2] Mixed Displacement Fracture Mode

معادلات (۵-۱۲) و (۵-۱۳) برای حالت کرنش مسطح که در آن جابجایی در جهت عمود بر صفحه، w، صفر است، نوشته شده است. لازم به تاکید است که وقتی r به سمت صفر میل می‌کند، معادلات تنش وسترگاد (معادلات (۵-۱۲) تا (۵-۱۴)) دقیق می‌باشند و هر چه مقدار r بیشتر گردد، [یعنی تنش در نقطه‌ای با فاصله‌ای نسبتا زیاد (در مقایسه با ابعاد ترک و صفحه) از نوک ترک مورد نظر باشد] دقت این معادلات کاهش پیدا می‌کند.

معادلات نوشته شده همچنین نشان می‌دهند که برای یک قطعه ترکدار که تحت مود شکست خاصی قرار گرفته توزیع تنش و جابجایی در نزدیک نوک ترک غیر متغیر[1] بوده و بر حسب یکی از کمیت‌های فاکتور شدت تنش قابل بیان می‌باشند. بنابراین شکل و اندازه ترک، هندسه قطعه و سطح بارگذاری همگی در مقدار فاکتور شدت تنش تغییر ایجاد می‌کنند ولیکن در توزیع تنش اثری ندارند.

تحلیل ابعادی معادلات توزیع تنش نشان می‌دهد که فاکتور شدت تنش باید با حاصلضرب تنش و ریشه دوم یک طول مشخصه نسبت مستقیم داشته باشد. بر اساس تحلیل انجام شده برای ماده شیشه و بسط و گسترش آن برای فلزات، می‌توان آن طول مشخصه را برابر طول ترک در نظر گرفت. بنابراین فاکتور شدت تنش با حاصلضرب تنش اعمال شده (σ) و ریشه دوم طول ترک $\sqrt{a}$ نسبت مستقیم دارد. لذا فرم عمومی شدت تنش با در نظر گرفتن ضریب تناسبی مانند $f(g)$ که تابع هندسه قطعه و ترک است، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$K = \sigma.\sqrt{a}.f(g) \qquad (۵\text{-}۱۵)$$

تعیین تابع $f(g)$ برای هندسه و ترک‌های مختلف، یکی از موارد مهم تحقیقات است و تاکنون برای بسیاری از قطعات با هندسه‌ها و ترک‌های مختلف، تعیین گردیده است. در مواردی که این تابع معلوم نباشد، می‌توان با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی و یا روش‌های عددی فاکتور شدت تنش را محاسبه نمود.

[1] Invariant

۵-۳- فاکتور شدت تنش

همان طوری که از معادلات تنش وسترگاد دیده شد، توسط فاکتور شدت تنش می‌توان تنش موضعی در نوک ترک را به تنش دوردست (مانند تنش اعمال شده به قطعه) مرتبط کرد. اگر صفحه‌ای به عرض نامحدود که تحت بار کششی یکنواخت در دوردست قرار گرفته و دارای ترکی به طول $2a$ دروسط است، مورد نظر قرار گیرد (مانند شکل (۵-۴ الف) که در آن 2b بسیار بزرگتر از طول ترک در نظر گرفته می‌شود)، می‌توان مقدار حداکثر تنش در نوک ترک را با قرار دادن $\theta = 0$ در معادله تنش σ_y در معادلات (۵-۱۲)، به صورت زیر محاسبه نمود.

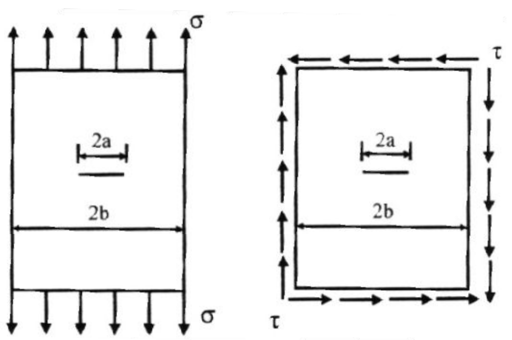
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \tag{۵-۱۶}$$

که در نتیجه فاکتور شدت تنش (K_I) بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$K_I = \sigma_y \sqrt{2\pi r} \tag{۵-۱۷}$$

در این معادله، تنش σ_y با افزایش فاصله از نوک ترک یعنی r کاهش می‌یابد و این کاهش به گونه‌ای است که فاکتور شدت تنش K_I ثابت می‌ماند. چنانچه این صفحه (درحالتی که ابعاد آن نامحدود باشد) تحت بار برشی τ مانند شکل (۵-۴ ب) قرار گیرد، نمونه فقط دارای مود برشی خواهد بود و در این حالت نیز به طریق مشابه می‌توان فاکتور شدت تنش مود ۲ (K_{II}) را به صورت زیر تعریف نمود.

$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a} \tag{۵-۱۸}$$



شکل ۵-۴ صفحه با عرض محدود دارای ترک مرکزی

برای صفحه با عرض محدود نیز همین فرم کلی معادلات بالا برای ضریب شدت تنش حفظ شده و

همان طور که در قسمت قبل بیان گردید، یک ضریب تصحیح هندسی $f(g)$ در این معادلات ضرب می‌گردد. در ادامه به تعیین ضریب تصحیح مربوط به صفحه با ترک عمقی[1] که در این تحقیق به آن پرداخته شده است، می‌پردازیم.

فاکتور شدت تنش برای صفحه‌ای با عرض بزرگ و دارای یک شکافت مرکزی به طول 2a (که در شکل (۵-۳) نشان دادن شده است) بر طبق معادله (۵-۱۷) بیان می‌گردد. در صورتی که عرض ورق محدود و برابر 2b در نظر گرفته شود، ضریب تصحیحی باید در نظر گرفته شود تا بتوان اثر تنش‌های لبه نمونه در توزیع تنش نوک ترک را در رابطه فاکتور شدت تنش وارد نمود. در این حالت فاکتور شدت تنش خواهد بود.

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left(\frac{2b}{\pi a}\tan\frac{\pi a}{2b}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۹\text{-}۵)$$

۵-۴- محاسبه فاکتور شدت تنش در مدلهای اجزای محدود دو بعدی

در این قسمت، نحوه محاسبه فاکتور شدت تنش بر اساس نتایج تحلیل اجزای محدود مورد بحث قرار خواهدگرفت. محاسبه فاکتور شدت تنش برای مودهای ۱ و۲ کاملا مشابه یکدیگر است. لذا فقط محاسبات در مورد مود ۱ تشریح خواهد شد[۳۹].

همان طور که از معادلات وسترگارد برای توزیع تنش و جابجایی مود ۱ در حوالی نوک ترک (معادلات (۵-۱۲)) نشان داده شد، می‌توان با تعیین تنش در طول یک شعاع معلوم اخراج شده از نوک ترک، تابعی برای K_I بر حسب فاصله r به دست آورد. مقدار این تابع در r=0 منجر به مقدار K_I می‌شود.

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\sin\frac{\theta}{2}.\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

در $\theta = 0$ (یعنی خط جلوی ترک) خواهیم داشت:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

[1] Through-Thickness Crack

$$K_I = \sigma_y \sqrt{2\pi r} \qquad (۵-۲۰)$$

و یا براساس جابجایی داده شده در معادله (۵-۱۲) که برای حالت کرنش مسطح نوشته شده، در $\theta = \pi$ (یعنی خط پشت ترک) می‌توان نوشت:

$$v = \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left[2-2\nu+\cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$
$$v = \frac{K_I}{\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(2-2\nu) \qquad (۵-۲۱)$$
$$K_I = v\left(\frac{\mu}{2-2\nu}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{r}}$$

در روابط بالا v جابجایی در جهت عمود بر راستای ترک، μ مدول ارتجاعی برشی و ν نسبت پواسون ماده می‌باشند. با استفاده از رابطه بین مدول برشی μ و مدول E برای مواد ایزوتروپیک، می‌توان این رابطه را به فرم زیر نوشت.

$$K_I = v\left(\frac{\frac{E}{(2+2\nu)}}{2-2\nu}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \qquad (۵-۲۲)$$
$$K_I = v\left(\frac{E}{(4-4\nu^2)}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{r}}$$

اکنون اگر تنش σ_y در جلوی ترک ($\theta = 0$) و یا جابجایی v در خط پشت ترک ($\theta = \pi$) معلوم باشد، می‌توان با استفاده از معادلات (۵-۲۰) و (۵-۲۲) ضریب فاکتور شدت تنش را با برون یابی[۱] منحنی تغییرات K_I بر حسب r در نقطه r=0 محاسبه نمود.

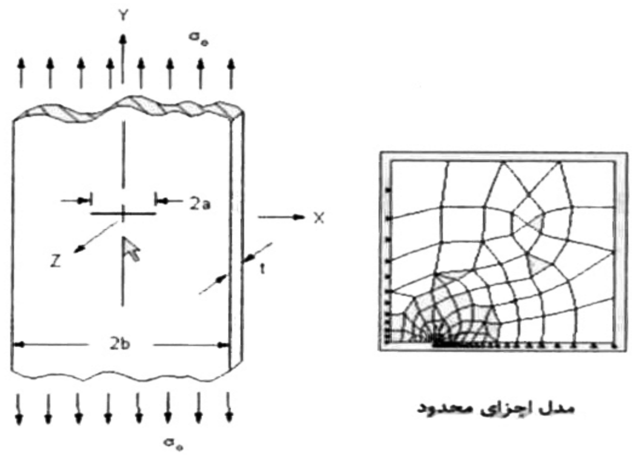
۵-۵- تعریف مسئله

صفحه محدودی با ترکی در قسمت میانی تحت کشش قرار دارد. صفحه از جنس فولاد، با مدول یانگ E=۲۰۰GPa و ضریب پواسون ν =۰/۳ است. عرض صفحه ۲b=۰/۴m و عرض ترک در قسمت میانی صفحه ۲a =۰/ ۰۴ m می‌باشد.

[1] Etrapolation

نیروها به صورت لبه‌ای و گسترده در وجه بالا و پایین نمونه، به مدل اعمال می‌گردند. نیروی گسترده اعمالی به مقدار ۱۰۰×۱۰^{۶} نیوتن بر متر بوده که با توجه به واحد بودن عرض نمونه، موجب تنش برابر ۱۰۰MPaدر لبه‌های مدل خواهد گردید.

در این مسئله شکست را الاستیک خطی فرض می‌کنیم و صفحه را دارای کرنش صفحه‌ای در نظر می‌گیریم. به دلیل تقارن مدل، فقط ۱/۴ از مدل مورد آنالیز قرار می‌گیرد.



شکل ۵-۵ صفحه با ترک میانی[۴۰]

فاکتور شدت تنش K_I به صورت تئوری با استفاده از رابطه (۵-۱۹) به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left(\frac{2b}{\pi a}\tan\frac{\pi a}{2b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$K_I = 100\sqrt{\pi\times0.02}\left(\frac{2\times0.2}{\pi\times0.02}\tan\frac{\pi\times0.02}{2\times0.2}\right)^{\frac{1}{2}} = 25.17\,MPa.m^{\frac{1}{2}}$$

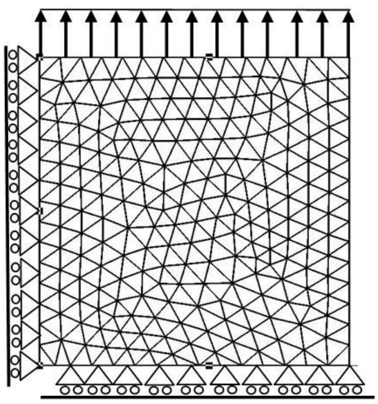
۵-۶- مدلسازی مسئله به کمک برنامه ADAPT

در این قسمت به بیان نتایج ناشی از مدلسازی مسئله به کمک برنامه ADAPT می‌پردازیم. تشکیل مدل هندسی و شبکه بندی دامنه این مسئله با استفاده از دو نوع المان مثلثی شش گرهی و چهار ضلعی هشت گرهی ایزوپارامتریک صورت پذیرفته است که در ادامه، نتایج مربوط به هر کدام مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

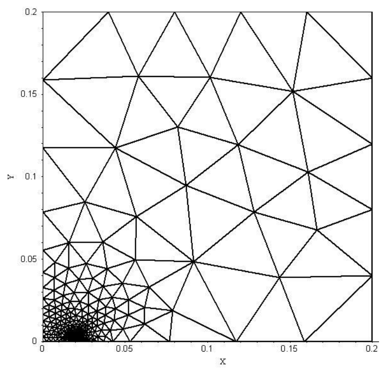
۵-۶-۱- نتایج ناشی از مدلسازی با المان مثلثی شش گرهی

همان طور که در قسمت تعریف مسئله بیان شد، به علت تقارن، تنها ۱/۴ از مسئله مدل می‌شود. در شکل ۵-۶ می‌توان شبکه بندی اولیه، بارگذاری و شرایط تکیه گاهی به وجود آمده از جدا شدن ۱/۴ دامنه از کل آن را مشاهده کرد. نتایج نشان می‌دهند که برای شبکه بندی اولیهٔ با ۴۲۸ المان مثلثی شش گرهی، درصد خطای نسبی ٪۳/۷۷ می‌باشد.

در شکل ۵-۷ شبکه بندی نهایی کل دامنه و نیز در اطراف نوک ترک مشاهده می‌شود. همان طور که مشاهده می‌شود، از روش تولید کامل المانها یا المان بندی دوباره، برای اصلاح شبکه اجزای محدود به روش h استفاده شده است. در شبکه نهایی با ۷۳۳ المان مثلثی شش گرهی به درصد خطای نسبی



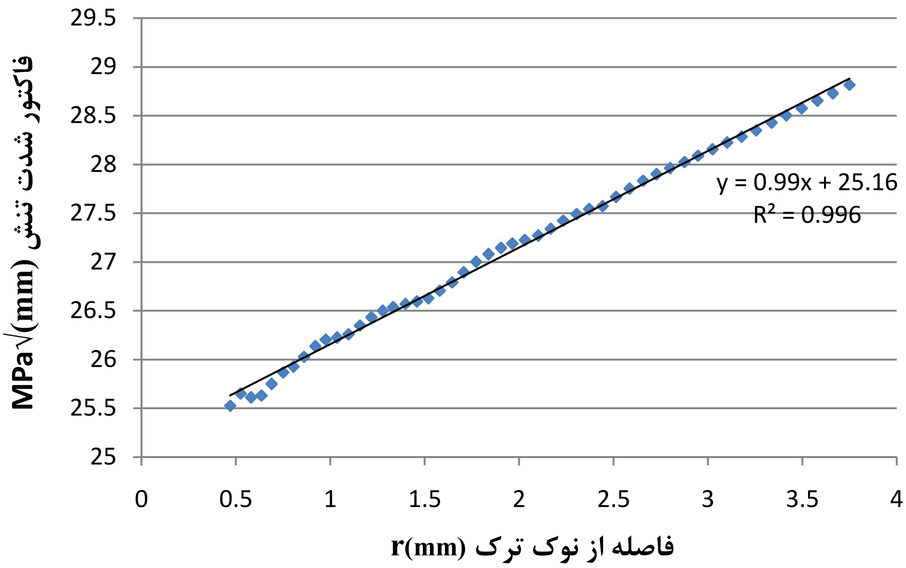
شکل ۵-۶ شبکه اولیه(۹۱۷=تعداد گره‌ها، ۴۲۸=تعداد المانها، درصد $\eta = ۳/۷۷$ با ۱۸۳۴ درجهٔ آزادی)



شکل ۵-۷ شبکه نهایی (۱۵۶۸=تعداد گره‌ها، ۷۳۳=تعداد المانها، درصد $\eta = ۰/۴۲$ با ۳۱۳۶ درجهٔ آزادی)

جدول ۵-۱ مقادیر فاکتور شدت تنش بدست آمده از شبکه بندی دامنه با المانهای مثلثی شش گرهی

شماره گره	مختصات در جهت X(m)	فاصله از نوک ترک r(mm)	تنش در جهت Y (MPa)	فاکتور شدت تنش $Mpa(m)^{1/2}$
1309	0.020	0.470	469.879	25.525
1310	0.021	0.525	446.786	25.651
1254	0.021	0.580	424.424	25.611
1253	0.021	0.634	405.930	25.629
1199	0.021	0.689	391.223	25.748
1198	0.021	0.750	376.844	25.866
1182	0.021	0.805	364.597	25.925
1184	0.021	0.860	354.122	26.026
1139	0.021	0.920	343.735	26.135
1137	0.021	0.975	334.776	26.203
1136	0.021	1.035	325.131	26.225
1135	0.021	1.096	316.436	26.257
1130	0.021	1.156	309.109	26.347
1131	0.021	1.217	302.305	26.432
1129	0.021	1.277	295.827	26.500
1127	0.021	1.332	290.052	26.535
1125	0.021	1.398	283.491	26.569
1124	0.021	1.458	277.811	26.594
1068	0.022	1.519	272.560	26.626
1066	0.022	1.579	268.077	26.704
1065	0.022	1.645	263.488	26.789
1064	0.022	1.706	259.783	26.893
1013	0.022	1.772	255.919	27.000
1014	0.022	1.837	252.026	27.079
1012	0.022	1.903	248.205	27.143
1010	0.022	1.964	244.750	27.187
997	0.022	2.030	241.066	27.223
995	0.022	2.101	237.333	27.269
930	0.022	2.167	234.298	27.339
928	0.022	2.233	231.510	27.422
927	0.022	2.304	228.459	27.490
925	0.022	2.370	225.686	27.542
922	0.022	2.442	222.596	27.571
921	0.023	2.513	220.164	27.665
831	0.023	2.585	217.777	27.751
830	0.023	2.656	215.446	27.831
828	0.023	2.727	213.124	27.899
826	0.023	2.799	210.858	27.961
825	0.023	2.876	208.483	28.024
823	0.023	2.947	206.403	28.086
780	0.023	3.024	204.257	28.155
779	0.023	3.101	202.191	28.222
776	0.023	3.178	200.148	28.281
775	0.023	3.255	198.225	28.346
773	0.023	3.337	196.314	28.426
771	0.023	3.414	194.605	28.502
770	0.023	3.496	192.777	28.573
769	0.024	3.579	191.072	28.652
765	0.024	3.661	189.414	28.728
764	0.024	3.749	187.738	28.814



شکل ۵-۸ برازش خط به فاکتورهای شدت تنش محاسبه شده از المانهای مثلثی شش گرهی

۰/۲۲٪رسیده‌ایم. یعنی با افزایش المانها به کمتر از دو برابر، به کاهش خطایی حدود ۱۷ برابر می‌رسیم.

اکنون می‌توان با استفاده از مولفه‌های تنش محاسبه شده، فاکتور شدت تنش را با استفاده از معادله (۵-۲۰) بدست آورد. بر حسب مقادیر مختلف r، فاکتورهای شدت تنش محاسبه شده و در جدول (۵-۱) داده شده اند. مشاهده می‌شود که بر حسب مقادیر مختلف r، مقادیر مختلفی برای فاکتور شدت تنش به دست می‌آید. حال اگر این مقادیر فاکتورهای شدت تنش را بر حسب متغیر r ترسیم کنیم، منحنی رسم شده در شکل (۵-۸) ایجاد خواهد شد. با برازش یک خط به داده‌ها و به دست آوردن محل تلاقی این خط با محور قائم یعنی جایی که r=0 می‌گردد، فاکتور شدت تنش در نوک ترک به دست خواهد آمد. لازم به ذکر است که برای برون یابی دقیق تر گاهی بهتر است که اطلاعات چند المان نزدیک به ترک که دارای فاصله زیادی نسبت به دیگر نتایج می‌باشند، مورد نظر قرار نگیرند.

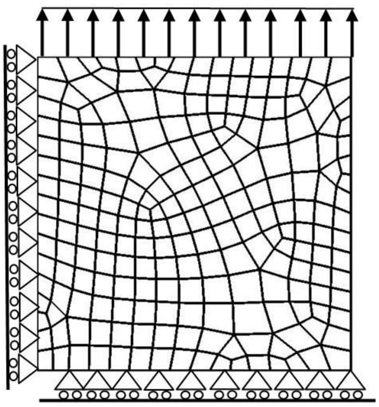
ملاحظه می‌شود که مقادیر فاکتور شدت تنش به دست آمده از برونیابی تنش‌ها و آنالیز تئوری با

یکدیگر تطابق قابل قبولی نشان می‌دهند. مقدار فاکتور شدت تنش از روش برون یابی مولفه تنش σ_y ناشی از حل تطبیقی اجزای محدود عددی حدود $۲۵/۱۶ MPa(m)^{1/2}$ می‌باشد؛ در حالی که فاکتور شدت تنش بدست آمده از آنالیز تئوری $۲۵/۱۷ MPa(m)^{1/2}$ می‌باشد.

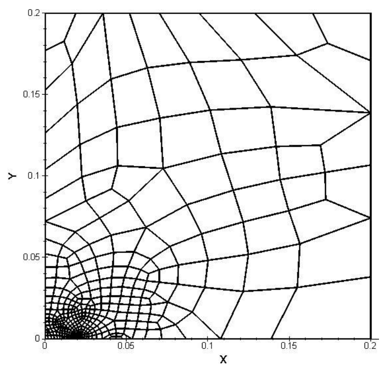
۵-۶-۲- نتایج ناشی از مدلسازی با المان چهار ضلعی هشت گرهی

در این قسمت نیز همانند بخش قبل، به بیان نتایج بدست آمده با شبکه بندی دامنه با المانهای چهار ضلعی هشت گرهی می‌پردازیم.

همان طور که در شکل ۵-۱۰ مشاهده می‌شود، در شبکه بندی نهایی با بالا رفتن مرتبه المان نسبت به حالت قبل، میزان درصد خطای نسبی از ۰/۴۲٪ به ۰/۲۱٪ کاهش یافته است؛ و همچنین کاهش تعداد المانها از ۷۳۳ المان مثلثی شش گرهی به ۵۵۵ المان چهار ضلعی هشت گرهی، صورت پذیرفته



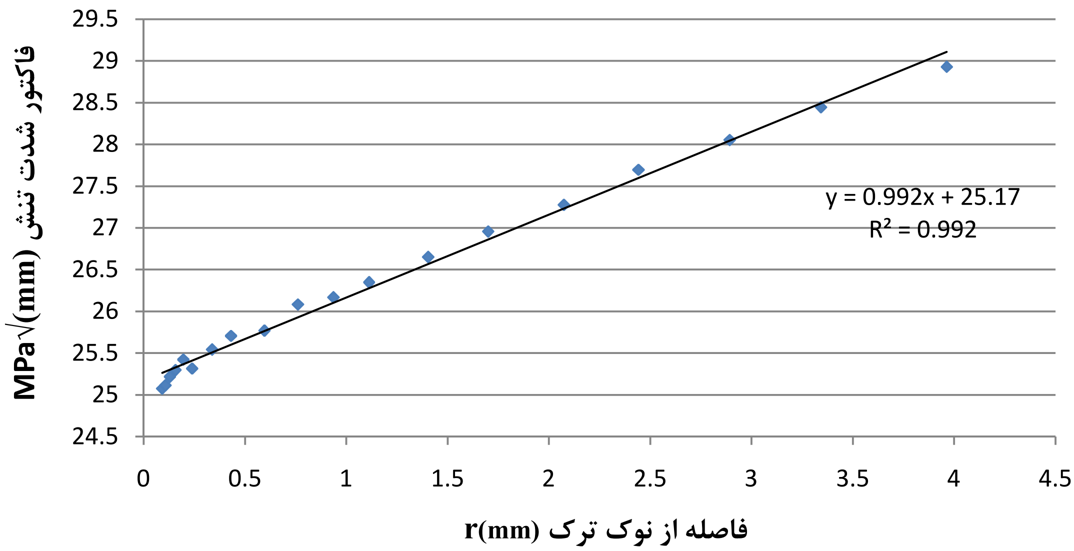
شکل ۵-۹ شبکه اولیه (۷۱۳=تعداد گره‌ها، ۲۱۶=تعداد المانها، درصد $\eta =$ ۴/۶۹ با ۱۴۲۸ درجهٔ آزادی)



شکل ۵-۱۰ شبکه نهایی (۱۷۵۸=تعداد گره‌ها، ۵۵۵=تعداد المانها، درصد $\eta =$ ۰/۲۱ با ۳۵۱۶ درجهٔ آزادی)

جدول ۵-۲ مقادیر فاکتور شدت تنش بدست آمده از شبکه بندی با المانهای چهار ضلعی هشت گرهی

شماره گره	مختصات در جهت X(m)	فاصله از نوک ترک r(mm)	تنش در جهت Y (MPa)	فاکتور شدت تنش $MPa(m)^{1/2}$
232	0.0200	0.090637	1050.706	25.07367
295	0.0201	0.107117	968.0042	25.11247
292	0.0201	0.1291	885.4556	25.2171
313	0.0202	0.1566	806.5552	25.2960
310	0.0202	0.1950	726.2607	25.4215
350	0.0202	0.2390	653.3269	25.3145
347	0.0203	0.3378	554.4149	25.5427
412	0.0204	0.4312	493.8501	25.7054
410	0.0206	0.5960	421.1117	25.7696
527	0.0208	0.7608	377.2377	26.0816
528	0.0209	0.9366	341.1220	26.1678
539	0.0211	1.1124	315.1597	26.3474
537	0.0214	1.4035	283.7974	26.6501
574	0.0217	1.7001	260.8069	26.9553
571	0.0221	2.0737	238.9481	27.2745
608	0.0224	2.4417	223.5934	27.6943
607	0.0229	2.8922	208.0928	28.0512
614	0.0233	3.3426	196.2770	28.4443
612	0.0240	3.9633	183.3150	28.9275



شکل ۵-۱۱ برازش خط به فاکتورهای شدت تنش محاسبه شده از المانهای چهار ضلعی هشت گرهی

است. در جدول ۵-۲ مقادیر فاکتور شدت تنش، بر حسب مقادیر مختلف r محاسبه شده اند؛ که این

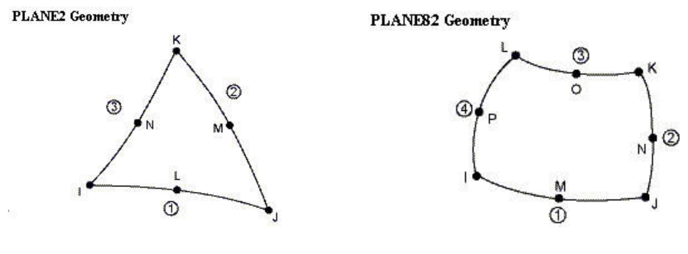
مقادیر با توجه به نتایج بدست آمده برای تنش σ_y در فاصله صفر تا حدود چهار میلیمتر از نوک ترک محاسبه شده اند.

لازم به ذکر است که برای تمام موارد، با توجه به ابعاد نمونه و نیز جهت داشتن شرایط یکسان، از نتایج بدست آمده برای تنش σ_y در فاصله صفر تا حدود چهار میلیمتر از نوک ترک استفاده شده است.

همانطور که در شکل ۵-۱۱ مشاهده می‌شود با برازش خط به فاکتورهای شدت تنش محاسبه شده از المانهای چهار ضلعی هشت گرهی، عدد ۲۵/۱۷ برای فاکتور شدت تنش در نوک ترک بدست می‌آید که کاملا با نتیجهٔ تئوری منطبق می‌باشد.

۵-۷- مدلسازی مسئله به کمک برنامه Ansys

در این بخش به بیان نتایج مربوط به حل مسئله صفحهٔ ترکدار تحت کشش به کمک نرم افزار Ansys می‌پردازیم. هدف از تبیین این قسمت، بررسی صحت برنامه ADAPT و همچنین برتری نسبی آن نسبت به نرم افزار Ansys در تخمین خطا و حل تطبیقی و در نتیجه تعیین فاکتور شدت تنش صفحهٔ ترکدار، با مقایسه نتایج مربوط به آنها می‌باشد. جهت این مقایسه از دو المان مشابه با المانهای مورد استفاده در برنامه ADAPT استفاده شده است. المان مثلثی شش گرهی PLANE2 و المان چهار ضلعی هشت گرهی PLANE82 که در شکل ۵-۱۲ مشخصات هندسی مربوط به هر یک مشاهده می‌شوند[۴۱].



شکل ۵-۱۲ المانهای مورد استفاده در شبکه بندی به کمک نرم افزار **Ansys**

الگوریتم مورد استفاده جهت تخمین خطای اجزای محدود در نرم افزار Ansys بر گرفته از مقاله‌ای

می‌باشدکه توسط زینکویچ و زو در سال ۱۹۸۷ تحت عنوان

"A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis"

ارائه شده است[۷]؛که در ادامه به بررسی اجمالی از این روش می‌پردازیم[۴۱].

$$\left\{\Delta\sigma_n^i\right\} = \left\{\sigma_n^a\right\} - \left\{\sigma_n^i\right\} \qquad (۵-۲۳)$$

در رابطه بالا داریم:

$\left\{\Delta\sigma_n^i\right\}$= بردار خطای تنش در گره n از المان i

$\left\{\sigma_n^a\right\}$= بردار تنش میانگین در گره n که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\left\{\sigma_n^a\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{N_e^n}\left\{\sigma_n^i\right\}}{N_e^n}$$

N_e^n = تعداد المانهای متصل به گره n

$\left\{\sigma_n^i\right\}$= بردار تنش در گره n از المان i

در اینصورت برای هر المان داریم:

$$e_i = \frac{1}{2}\int_V \left\{\Delta\sigma\right\}^T \left[D\right]^{-1} \left\{\Delta\sigma\right\} dV \qquad (۵-۲۴)$$

که در این رابطه داریم:

e_i = خطای انرژی برای المان i ،V = حجم المان

$\left\{\Delta\sigma\right\}$= بردار خطای تنش مربوط به هر گره

در نهایت خطای انرژی کل با رابطه زیر بیان می‌شود.

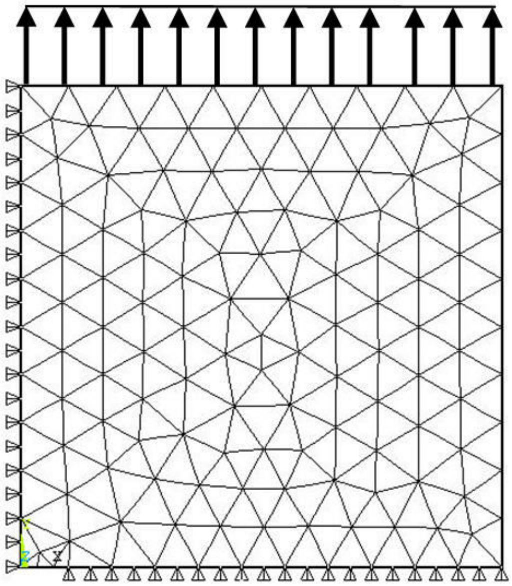
$$e = \sum_{i=1}^{N_r} e_i \qquad (۵-۲۵)$$

که در آن N_r تعداد المانها در کل و یا قسمتی از دامنه می‌باشد.

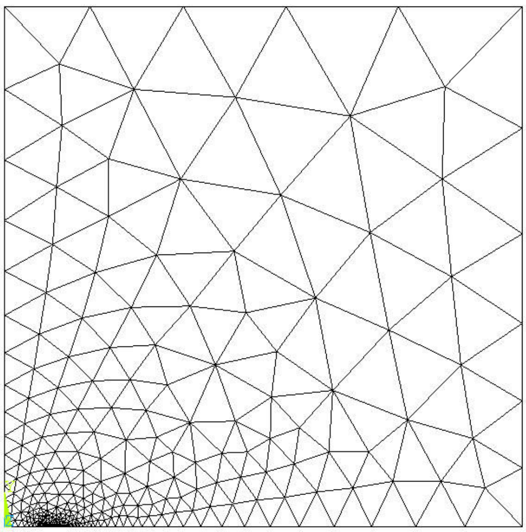
با توجه به اینکه در این تحقیق از آخرین ویرایش نرم افزار Ansys (ver11) استفاده شده است؛ اما همان طور که مشاهده می‌شود هنوز دراین نرم افزار از روش میانگین گیری و استفاده از حداقل مربعات جهت تخمین خطای اجزای محدود استفاده می‌شود. این روش در مقایسه با روش بازیافت

تنش در نقاط فوق همگرا بر روی گروه المانهای متصل به یک گره، که در برنامه ADAPT از آن استفاده شده است ازتوانایی بسیار کمتری برخوردار می‌باشد. لذا پیش بینی می‌شود که این نرم افزار از نتایج ضعیفتری نسبت به برنامه ADAPT در تخمین خطای اجزای محدود بر خوردار باشد.

۵-۷-۱- نتایج ناشی از مدلسازی با المان مثلثی شش گرهی PLANE2



شکل ۵-۱۳ شبکه اولیه(۵۲۶=تعداد گره‌ها، ۲۴۱=تعداد المانها، درصد η = ۷/۲۹ با ۱۰۵۲ درجهٔ آزادی)

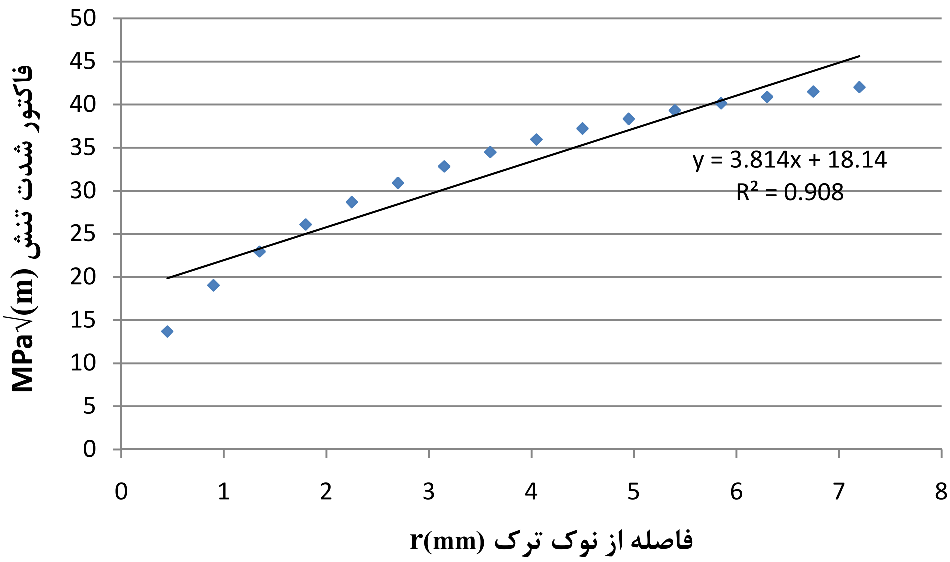


شکل ۵-۱۴ شبکه نهایی(۱۵۸۸=تعداد گره‌ها، ۷۲۳=تعداد المانها، درصد η = ۰/۵۹ با ۳۱۷۶ درجهٔ آزادی)

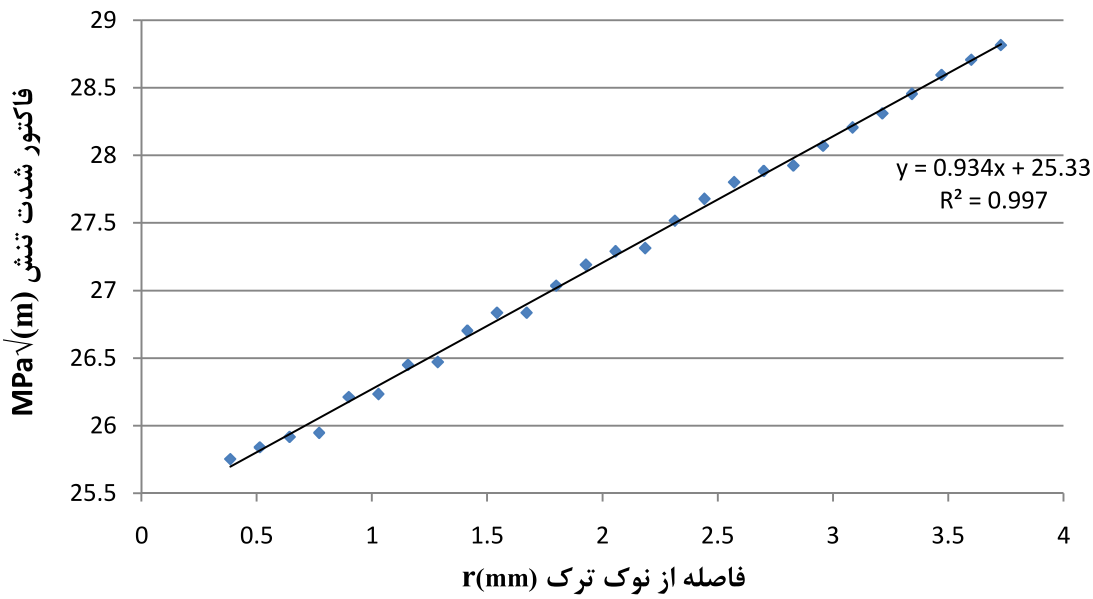
جدول ۵-۳ مقادیر فاکتور شدت تنش بدست آمده از شبکه بندی نهایی با المانهای مثلثی **PLANE2**

شماره	**فاصله از نوک ترک r(mm)**	**تنش در جهت Y (MPa)**	**فاکتور شدت تنش $MPa(m)^{1/2}$**
1	0.38571	523.14	25.7532
2	0.51429	454.58	25.8403
3	0.64286	407.8	25.9173
4	0.77143	372.7	25.9472
5	0.9	348.57	26.2117
6	1.0286	326.33	26.234
7	1.1571	310.2	26.4491
8	1.2857	294.52	26.4709
9	1.4143	283.28	26.7036
10	1.5429	272.55	26.8348
11	1.6714	261.87	26.8355
12	1.8	254.22	27.0352
13	1.9286	247.01	27.1906
14	2.0571	240.04	27.2895
15	2.1857	233.08	27.3139
16	2.3143	228.19	27.5163
17	2.4429	223.41	27.6783
18	2.5714	218.72	27.8008
19	2.7	214.09	27.8844
20	2.8286	209.46	27.9235
21	2.9571	205.93	28.0696
22	3.0857	202.57	28.2056
23	3.2143	199.21	28.3099
24	3.3429	196.34	28.4547
25	3.4714	193.61	28.5933
26	3.6	190.87	28.706
27	3.7286	188.26	28.8147

در این المان جهت نمایش اهمیت آنالیز تطبیقی برای تعیین فاکتور شدت تنش، به بیان فاکتور شدت تنش ناشی از شبکه اولیه در شکل (۵-۱۵ الف) پرداخته شده است. مشاهده می‌شود که نتیجهٔ بدست آمده برای فاکتور شدت تنش، اختلاف زیادی نسبت به مقدار بدست آمده از حل تطبیقی دارد و دارای ۲۸٪ خطا نسبت به آنالیز تئوری می‌باشد.



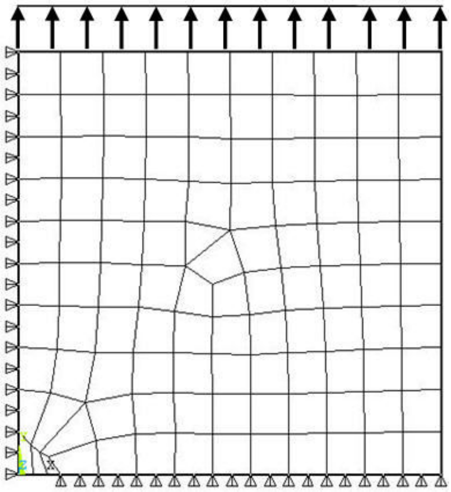
الف) شبکه بندی اولیه



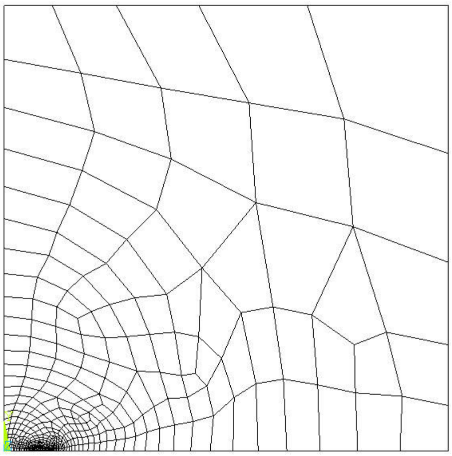
ب) شبکه بندی نهایی

شکل ۵-۱۵ برازش خط به فاکتورهای شدت تنش محاسبه شده از الف) شبکه بندی اولیه و ب) شبکه بندی نهایی

۵-۷-۲- نتایج ناشی از مدلسازی با المان چهار ضلعی هشت گرهی PLANE82



شکل ۵-۱۶ شبکه اولیه(۳۷۰=تعداد گره‌ها، ۱۰۹=تعداد المانها، درصد $\eta =$ ۹/۴۶ با ۷۴۰ درجهٔ آزادی)

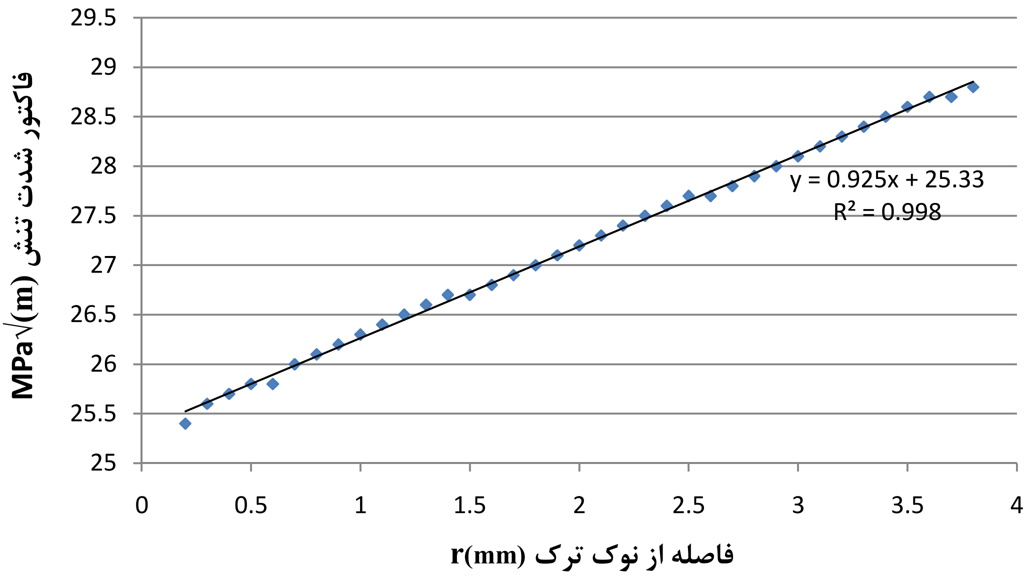


شکل ۵-۱۷ شبکه نهایی(۳۲۶۲=تعداد گره‌ها، ۱۰۱۷=تعداد المانها، درصد $\eta =$ ۰/۲۲ با ۶۵۲۴ درجهٔ آزادی)

جدول ۵-۴ مقادیر فاکتور شدت تنش بدست آمده از شبکه بندی با المانهای چهار ضلعی **PLANE82**

شماره	فاصله از نوک ترک r(mm)	تنش در جهت Y (MPa)	فاکتور شدت تنش $MPa(m)^{1/2}$
1	0.2	716.4	25.4
2	0.3	589.63	25.6
3	0.4	512.5	25.7
4	0.5	459.76	25.8
5	0.6	420.95	25.8
6	0.7	391.58	26.0
7	0.8	367.94	26.1
8	0.9	347.99	26.2
9	1	331.61	26.3

10	1.1	317.44	26.4
11	1.2	304.8	26.5
12	1.3	293.91	26.6
13	1.4	284.33	26.7
14	1.5	275.39	26.7
15	1.6	267.78	26.8
16	1.7	260.49	26.9
17	1.8	254.13	27.0
18	1.9	248.19	27.1
19	2	242.56	27.2
20	2.1	237.71	27.3
21	2.2	232.87	27.4
22	2.3	228.52	27.5
23	2.4	224.58	27.6
24	2.5	220.65	27.7
25	2.6	217.03	27.7
26	2.7	213.82	27.8
27	2.8	210.62	27.9
28	2.9	207.41	28.0
29	3	204.76	28.1
30	3.1	202.17	28.2
31	3.2	199.57	28.3
32	3.3	196.98	28.4
33	3.4	194.83	28.5
34	3.5	192.74	28.6
35	3.6	190.65	28.7
36	3.7	188.56	28.7
37	3.8	186.58	28.8



شکل ۵-۱۸ برازش خط به فاکتورهای شدت تنش محاسبه شده از شبکه بندی با المانهای **PLANE82**

۵-۸- مقایسه و نتیجه گیری

در جدول (۵-۵) نتایج بدست آمده از دو المان PLANE2 و PLANE82 نرم افزار Ansys و دو المان مثلثی شش گرهی و چهار ضلعی هشت گرهی برنامه ADAPT بیان شده است.

همان طور که مشاهده می‌شود برنامه ADAPT در مقایسه با نرم افزار Ansys در هر دو نوع المان برای رسیدن به درصد خطایی مشابه، دارای تعداد المان کمتری می‌باشد.

مقدار فاکتور شدت تنش بدست آمده از نتایج برنامه ADAPT در مقایسه با نرم افزار Ansys، از دقت بسیار قابل توجه‌ای برخوردار می‌باشد.

با افزایش مرتبه المان، با وجود اینکه درصد خطای نسبی کاهش یافته است اما در میزان فاکتور شدت تنش تغییر چندانی مشاهده نمی‌شود.

درصد خطای نسبی شبکه اولیه در نرم افزار Ansys دارای تفاوت قابل ملاحظه‌ای در مقایسه با درصد خطای نسبی شبکه اولیه برنامه ADAPT می‌باشد.

جدول ۵-۵ نتایج بدست آمده از برنامه **ADAPT** و نرم افزار **Ansys**

مشخصات / نوع المان	مثلثی شش گرهی	مثلثی شش گرهی PLANE2	چهارضلعی هشت گرهی	چهارضلعی هشت گرهی PLANE82
تعداد گره‌ها در شبکه اولیه	۹۱۷	۵۲۶	۷۱۳	۳۷۰
تعداد گره‌ها در شبکه نهایی	۱۵۶۸	۱۵۸۸	۱۷۵۸	۳۲۶۲
تعداد المانها در شبکه اولیه	۴۲۸	۲۴۱	۲۱۶	۱۰۹
تعداد المانها در شبکه نهایی	۷۳۳	۷۲۳	۵۵۵	۱۰۱۷
درصد خطای نسبی شبکه اولیه	۳/۷۷	۷/۲۹	۴/۶۹	۹/۴۶
درصد خطای نسبی شبکه نهایی	۰/۴۲	۰/۵۹	۰/۲۱	۰/۲۲
فاکتور شدت تنش شبکه نهایی	۲۵/۱۶	۲۵/۳۳	۲۵/۱۷	۲۵/۳۳
درصد خطای فاکتور شدت تنش از میزان تئوری	۰/۰۴	۰/۶۳	۰	۰/۶۳

فصل ششم

تخمین خطا و بهبود میدان تنش حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک

۶-۱- مقدمه

در این فصل به تشریح یک روش ابداعی جهت بهبود میدان تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتریک و تخمین خطای موجود در آن پرداخته می‌شود. روش تخمین کننده خطایی که در اینجا به آن اشاره خواهد شد در دستهٔ روشهای برآورد خطا، مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) قرار می‌گیرد.

در این روش، با استفاده از نقاط فوق‌همگرا، برای تابع مقادیر هریک از مؤلفه‌های میدان تنش در هر ناحیه، یک سطح فرضی ساخته می شود. به منظور تعریف این سطح از همان توابع شکل نربزی[1] استفاده می‌کنیم که در روش ایزوژئومتریک برای تقریب زدن تابع جابجایی به کار گرفته می‌شوند. از مقایسه نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی بدست آمده برای دو مثال نمونه معروف که معمولا جهت بررسی کارایی برآورد کننده‌های خطا مورد استفاده قرار می‌گیرد، مشاهده می‌شود که تخمین کننده خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی جهت برآورد خطای موجود در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک برخوردار است.

علیرغم آنکه در این پژوهش، تشریح روش ایزوژئومتریک مورد نظر نمی‌باشد، اما برای آشنایی با مفاهیمی که در تخمین خطای این روش با آنها روبرو هستیم، در بخش‌های بعدی این فصل به بیان بعضی از مفاهیم اولیهٔ آن پرداخته شده است.

۶-۲- روش ایزوژئومتریک

با پیشرفت سریع علوم و تکنولوژی، روشهای عددی توسعه و تنوع چشمگیری یافته‌اند. از جمله جدیدترین این روشهای می توان روش ایزوژئومتریک را نام برد. تحلیل ایزوژئومتریک، بالقوه دارای ویژگی‌های منحصر به فرد و مناسبی است که شاید در آینده‌ای نه چندان دور بتواند جایگزین روشهای عددی متداول نظیر اجزای محدود و نقاط محدود گردد. وجود برخی معایب در روش اجزای محدود، از جمله وجود خطا در تعریف مرزهای مسائل با هندسه پیچیده و یا مسائل با تغییرات شدید در

[1] Nurbs shape functions

بارگذاری و خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المانها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، از جمله علل ابداع این روش می‌باشد. این روش برای اولین بار طی مقاله ای در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش معرفی شد[۴۲]. روش ایزوژئومتریک دارای بعضی مفاهیم شبیه روش اجزای محدود و روش‌های بدون مش می‌باشد که می‌تواند برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم در حوزه‌های مختلف علوم و مهندسی، از جمله الاستیسیته، به کار رود. در این روش از تکنیکهای طراحی به کمک کامپیوتر[۱] استفاده شده است. دلیل اینکه روشهای طراحی به کمک کامپیوتر تاکنون در روش اجزای محدود به صورت گسترده وارد نشده است مربوط به اختلاف زمانی، در پیدایش این دو نسبت به یکدیگر می‌باشد. آغاز پیدایش روشهای اجزای محدود در سالهای ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ میلادی بوده است در حالی که روشهای طراحی به کمک کامپیوتر بعدها در حدود سالهای ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ شکل گرفته اند[۴۲].

ایده‌ای که در این روش معرفی شده است بر اساس بی- اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت[۲] به وجود آمده است. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپیلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها و سطوح، از آنها جهت درونیابی و تقریب سازی هم استفاده می شود.

در ادامه جهت آشنایی بیشتر با مفاهیم روش ایزوزئومتریک، به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی-اسپلاین و نربز و همچنین فرمولبندی روش ایزوژئومتریک پرداخته می‌شود.

۶-۲-۱- بی- اسپلاین و نربز

در این بخش به طور خلاصه و در حد نیاز، به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی- اسپلاین و نربز پرداخته می‌شود. برای آشنایی بیشتر، مراجعه به مراجع [۳۶و۴۲] پیشنهاد می شود.

نربزها از بی- اسپلاین‌ها ساخته می شوند. بی- اسپیلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه)[۳] تعریف

[1] CAD(Computer Aided Design)
[2] Non-Uniform Rational B-splines(NURBS)
[3] Patch

می‌شوند. نواحی مذکور دامنهٔ مدلسازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می کنند. یک بردار گرهی[1] در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به صورت زیر تشکیل می شود[۳۶].

$$\Xi = \left\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\right\} \ , \ \xi_{i+1} \ge \xi_i \quad i = 1, 2, \dots, n+p+1 \tag{۶-۱}$$

که در آن ξ_i iامین گره، p مرتبه چند جمله ای و n تعداد توابع شکل تشکیل دهنده بی- اسپلاین به شمار می رود. انواع مختلفی از بردارهای گره ای وجود دارد ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از بردارهای گره ای بنام بردارهای گره ای نامتناوب[2] (یا باز[3]) استفاده می کنیم. این نوع بردارها به فرم زیر نشان داده می شوند:

$$\Xi = \left\{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\right\} \tag{۶-۲}$$

در این صورت iامین تابع پایه ای بی‌اسپلاین از درجه p که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می شود بصورت زیر تعریف می‌شود[۳۶]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \xi_i \le \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{۶-۳}$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی- اسپلاین از درجه P بصورت زیر تعریف می شود[۳۶]:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(\xi) P_i \qquad a \le \xi \le b \tag{۶-۴}$$

$\boldsymbol{C}(\xi)$ یک منحنی چند جمله ای قطعه ای[4] است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع

[1] Knot Vector
[2] Nonperiodic knot vector
[3] Open
[4] Piecewise polynomial curve

پایه ای بی-اسپیلاین هستند، که روی بردار گره ای نامتناوبی بصورت رابطه (۶-۲) با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می شوند.

اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آنگاه می توان رابطه $m=n+p+1$ را برای آنها نوشت.

به طرز مشابهی سطوح بی- اسپلاین بصورت زیر تعریف می شود[۳۶]:

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)P_{i,j} \tag{۶-۵}$$

که در آن:

$$\Xi=\Big\{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1},\xi_{p+1},\ldots,\xi_{r-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\Big\} \quad ; \qquad \mathrm{H}=\Big\{\underbrace{0,\ldots,0}_{q+1},\eta_{q+1},\ldots,\eta_{s-q-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{q+1}\Big\} \tag{۶-۶}$$

بطوری که بردار گره ای Ξ دارای $r+1$ گره و $\mathscr{H}$ دارای $s+1$ گره می باشد.

یک منحنی نربز از درجه p بصورت زیر تعریف می‌شود[۳۶]:

$$C(\xi)=\frac{\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(\xi)w_iP_i}{\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(\xi)w_i} \qquad a\le\xi\le b \tag{۶-۷}$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی- اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره ای بصورت رابطه (۶-۲) تعریف شده اند.

و در نهایت، یک سطح نربز که در جهت ξ از درجه p، و در جهت η از درجه q باشد، بصورت زیر تعریف می‌شود[۳۶]:

$$S(\xi,\eta)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}} \qquad 0\le\xi,\eta\le1 \tag{۸-۶}$$

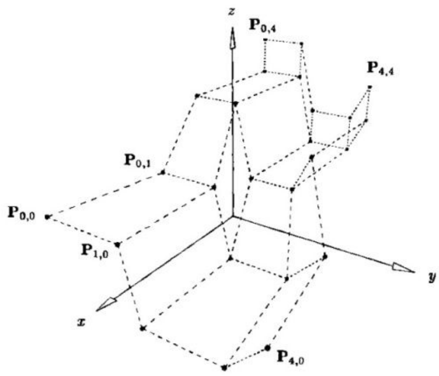
در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می باشد که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه ای بی- اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره ای به صورت رابطه (۶-۶) تعریف شده اند. در رابطه (۶-۸) اگر توابع پایه ای نسبی قطعه‌ای را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p}(\xi)N_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(\xi)N_{l,q}(\eta)w_{k,l}} \tag{۹-۶}$$

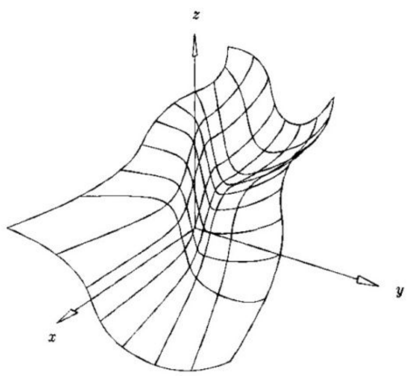
خواهیم داشت:

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(\xi,\eta)P_{i,j} \tag{۱۰-۶}$$

در شکل ۶-۱ شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز بدست آمده از آن با توابع پایه درجه دو در جهت x وy مشاهده می‌شود.



(الف) شبکه نقاط کنترلی



(ب) سطح نربز

شکل ۶-۱ شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز مربوط به آن با توابع پایه درجه دو[۳۶].

۶-۲-۲- فرمول‌بندی روش ایزوژئومتریک

به منظور تحلیل یک محیط پیوسته در ایزوژئومتریک، باید آن محیط را به یک محیط گسسته تبدیل نمود، این عمل در روش ایزوژئومتریک با استفاده از نقاط کنترلی نربز صورت می‌پذیرد.

همانطور که در بخش قبل اشاره شد، سطوح نربز از یکسری توابع پایه به همراه نقاط کنترلی و بردارهای گره ای تشکیل شده است. نقاط کنترلی تشکیل دهنده شبکه ای از نقاط هستند و یک رویه نربز را در صورت معلوم بودن بردارهای گره ای، با مشخص نمودن نقاط کنترلی آن می‌توان تعریف نمود.

بطور کلی در روش ایزوژئومتریک مقدار مجهول مسئله (تغییر مکان)، در نقاط کنترلی محاسبه و سپس به وسیلهٔ توابع پایه ای نربز در بقیه نقاط تقریب زده می‌شود.

در این روش نقاط کنترلی طوری انتخاب می‌شوند که مولفه های اول و دوم مختصات این نقاط (P_x, P_y)، بتوانند هندسه مسئله را برآورد کنند؛ در اینصورت مولفهٔ سوم مختصات این نقاط (P_z) طوری محاسبه می‌شود که درونیابی بین این نقاط به وسیله توابع پایه‌ای نربز، نشان دهندهٔ تغییر مکان آن نقطه باشد؛ در حقیقت می‌توان رویه ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحهٔ xy نشان دهندهٔ هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه (z) نسبت به صفحه xy نشان دهندهٔ مجهول مسئله در آن نقطه (تغییر مکان) باشد.

اگر هر مولفهٔ تغییر مکان در دامنه مسئله به صورت یک صفحه در نظر گرفته شود در اینصورت با استفاده از مفهوم نربز می‌توان صفحهٔ مربوط به هر مولفهٔ تغییر مکان را در حالت دو بعدی به صورت زیر نمایش داد:

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u\left(x, y\right) \\ v\left(x, y\right) \end{Bmatrix} \approx \hat{\boldsymbol{u}} = \sum_i \sum_j R_{i,j} \boldsymbol{P}_{i,j} \qquad (۶-۱۱)$$

در رابطه بالا $\boldsymbol{P}_{i,j}$ بردار مولفه های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز در جهت u و v می‌باشد که به

عنوان تنها پارامتر مجهول برای تعیین صفحهٔ هر مولفهٔ تغییر مکان به شمار می‌رود. $R_{i,j}$ ، توابع پایه‌ای نربز هستند که عملکردی شبیه توابع شکل در اجزای محدود دارند.

همچنین با در نظر گرفتن دستگاه مختصات نرمال ($0 \le \xi,\eta \le 1$) داریم:

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\boldsymbol{P}_{u\,i,j} \\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\boldsymbol{P}_{v\,i,j} \end{Bmatrix} \qquad (۱۲\text{-}۶)$$

به دلیل خاصیت بازهٔ تاثیر توابع نربز، تنها تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می‌باشند؛ در اینصورت رابطه (۶-۱۲) معادل است با:

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(\xi,\eta)\boldsymbol{P}_{u\,k,l} \\ \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(\xi,\eta)\boldsymbol{P}_{v\,k,l} \end{Bmatrix} \qquad (۱۳\text{-}۶)$$

فرم ماتریسی رابطه (۶-۱۳) به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{R}}.\bar{\boldsymbol{P}} \qquad (۱۴\text{-}۶)$$

در رابطه بالا $\bar{\boldsymbol{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان های نقاط کنترلی، $\bar{\boldsymbol{R}}$ ماتریس توابع پایه ای نسبی نربز و $\bar{\boldsymbol{P}}$ ماتریس ستونی نقاط کنترلی به صورت زیر می‌باشند:

$$\bar{\boldsymbol{u}}^{i,j} = \begin{bmatrix} u_{i,j} & v_{i,j} \end{bmatrix}^T \qquad (۱۵\text{-}۶)$$

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi\eta) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(\xi\eta) & 0 & \dots & R_{i,j}(\xi\eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi\eta) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(\xi\eta) & \dots & 0 & R_{i,j}(\xi\eta) \end{bmatrix} \qquad (۱۶\text{-}۶)$$

$$\bar{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} P_{u\,i-p,j-q} & P_{v\,i-p,j-q} & \dots & P_{u\,i-p,j} & P_{v\,i-p,j} & \dots & P_{u\,i,j} & P_{v\,i,j} \end{bmatrix}^T \qquad (۱۷\text{-}۶)$$

بعد از محاسبه تغییر مکانها ماتریس کرنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon = \boldsymbol{Lu} \tag{۶-۱۸}$$

در این رابطه u بردار تغییر مکان و L عملگر دیفرانسیل می‌باشد که برای مسائل دو بعدی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{L}\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{۶-۱۹}$$

با جایگذاری رابطه (۶-۱۴) ماتریس کرنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon = \boldsymbol{B\bar{P}} \tag{۶-۲۰}$$

که در آن $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L\bar{R}}$ می‌باشد.

همچنین با فرض وجود رفتار خطی کشسان، رابطهٔ بین تنش ها و کرنش ها خطی و بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = \boldsymbol{D}\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right) + \sigma_0 \tag{۶-۲۱}$$

در رابطهٔ (۶-۲۱) σ_0 تنش پسماند، ε_0 کرنش اولیه و $\boldsymbol{D}$ ماتریس کشسانی است که برای مسائل تنش مسطح به صورت زیر می‌باشد:

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{(1-\nu)}\!/_{2} \end{bmatrix} \tag{۶-۲۲}$$

در ادامه همانند روش اجزای محدود با استفاده از رهیافت کار مجازی به تشکیل ماتریس سختی

می‌پردازیم.

در صورتی که Γ مرزهای مسئله مورد نظر با دامنهٔ Ω، $\boldsymbol{b}$ نیروهای کالبدی و $\boldsymbol{t}$ نیروهای سطحی باشد، با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_\Omega \delta\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}\, d\Omega - \int_\Gamma \delta\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{t}\, d\Gamma = 0 \tag{۶-۲۳}$$

با جایگذاری روابط (۶-۱۴) و (۶-۲۰) داریم:

$$\int_\Omega \delta\bar{\boldsymbol{P}}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_\Omega \delta\bar{\boldsymbol{P}}^T\bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{b}\, d\Omega - \int_\Gamma \delta\bar{\boldsymbol{P}}^T\bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{t}\, d\Gamma = 0 \tag{۶-۲۴}$$

همچنین با حذف $\delta\bar{\boldsymbol{P}}$ و استفاده از رابطهٔ (۶-۲۱) خواهیم داشت:

$$\int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}\, d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon_0}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0\, \boldsymbol{d}\Omega - \int_\Omega \bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{b}\, d\Omega - \int_\Gamma \bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{t}\, d\Gamma = 0 \tag{۶-۲۵}$$

و با جایگذاری رابطهٔ (۶-۲۰) داریم:

$$\int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{P}}\, d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon_0}\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0\boldsymbol{d}\Omega - \int_\Omega \bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{b}\, d\Omega - \int_\Gamma \bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{t}\, d\Gamma = 0 \tag{۶-۲۶}$$

در صورت عدم وجود تنش و کرنش اولیه رابطه (۶-۲۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{KU} = \boldsymbol{F} \tag{۶-۲۷}$$

که در آن $\boldsymbol{K}$ ماتریس ضرایب (سختی)، $\boldsymbol{U}$ مجهولات مسئله (تغییر مکان ها) و $\boldsymbol{F}$ نیروهای خارجی وارده بر زیر دامنه می‌باشند؛ که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{K} = \int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\, d\Omega \tag{۶-۲۸}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_\Omega \bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{b}\, d\Omega + \int_\Gamma \bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{t}\, d\Gamma \tag{۶-۲۹}$$

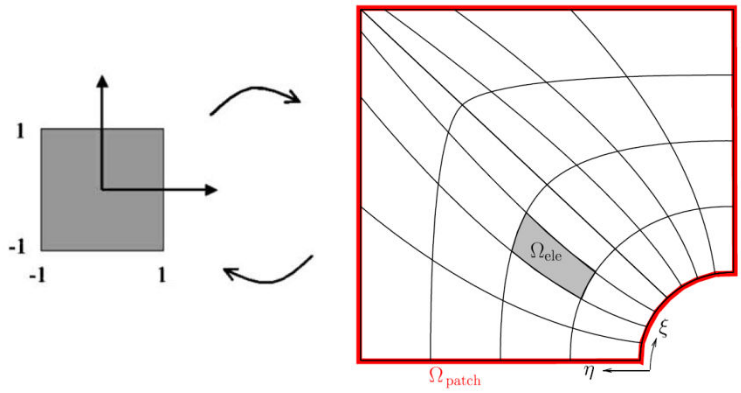
و در نهایت با حل دستگاه معادلات (۶-۲۷) مجهولات مسئله (تغییر مکان ها) محاسبه می‌شوند.

در روش ایزوژئومتریک از توابع شکل مشابهی برای تقریب هندسه و تحلیل مسئله استفاده می‌شود. در این صورت، نقاط کنترلی و بردار گرهی یکسانی برای مدلسازی هندسی مسئله و همچنین تقریب تابع مجهول به کار می‌رود. بنابراین هندسه مسئله نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x\left(\xi,\eta\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}\left(\xi,\eta\right)P_{x\,i,j}$$
$$y\left(\xi,\eta\right)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}\left(\xi,\eta\right)P_{y\,i,j} \qquad (۶-۳۰)$$

که در آن ξ,η مولفه های مختصات نرمال هستند ($0\le\xi,\eta\le1$)، و $P_{x\,i,j},P_{y\,i,j}$ به ترتیب اولین و دومین مؤلفه های مختصات نقاط کنترلی می‌باشند.

در این روش برای حل عددی انتگرال ماتریس سختی از روش انتگرال گیری گوس استفاده می‌شود. بدین منظور نیاز به المان بندی دامنهٔ مسئله داریم، تا بتوانیم از نقاط گوس و وزن های ارائه شده برای المان های چهارضلعی استفاده کنیم. عمل المان بندی در ایزوژئومتریک با استفاده از دهانه های گره‌ای نربز انجام می‌پذیرد. بطوری که هر زیر مجموعه بصورت $[\xi_i,\xi_{i+1}]\times[\eta_i,\eta_{i+1}]$ یک المان نربز نامیده می‌شود. در شکل ۶-۲ نمونه ای از این المان بندی نشان داده شده است.



شکل ۶-۲ المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای نربز[۴۲]

مطابق رابطهٔ (۶-۲۸) ماتریس سختی هر زیر دامنه بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$\boldsymbol{K}_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} \boldsymbol{B}^T(\xi,\eta)\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}(\xi,\eta)\,d\Omega \tag{۶-۳۱}$$

که در آن $\boldsymbol{B}(\xi,\eta)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{۶-۳۲}$$

بنابراین برای حل انتگرال ماتریس سختی به مشتقات R نسبت به $x\,,y$ در دستگاه مختصات کلی نیاز داریم؛ که برای ارتباط بین دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری نربز، ژاکوبین زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{J}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{۶-۳۳}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_1^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{۶-۳۴}$$

که در آن $\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}$ و $\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta}$ مشتقات جزئی توابع پایه ای نربز می‌باشند. بنابراین می‌توان رابطه (۶-۳۱) را بصورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{K}_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} \boldsymbol{B}^T(\xi,\eta)\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}(\xi,\eta)\det\boldsymbol{J}_1 d\xi d\eta \tag{۶-۳۵}$$

در اینصورت نیاز به مقدار تابع داخل انتگرال در نقاط گوس می‌باشد. در المان های چهار ضلعی نقاط گوس در دستگاه مختصات نرمان یا سرندیپیتی[1] مشخص شده است، بنابراین نیاز به یک نگاشت می‌باشد که مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه سرندیپیتی المان iام را به دستگاه مختصات نرمال زیردامنه نربز (ξ,η) منتقل کند. این نگاشت در انتگرال‌گیری باعث ایجاد ژاکوبینی بصورت زیر می‌شود:

$$\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial r} & \dfrac{\partial\eta}{\partial r}\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial s} & \dfrac{\partial\eta}{\partial s}\end{bmatrix} \quad , \quad d\xi d\eta=\boldsymbol{J}_2 drds \tag{۳۶-۶}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{1}{2}\left(\xi_{i+1}-\xi_i\right) \quad , \quad \frac{\partial\eta}{\partial r}=0\\ &\frac{\partial\xi}{\partial s}=0 \quad , \quad \frac{\partial\eta}{\partial s}=\frac{1}{2}\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)\end{aligned} \tag{۳۷-۶}$$

بنابراین رابطه ماتریس سختی (۶-۳۵) به فرم نهایی زیر در دستگاه مختصات سرندیپیتی المان نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{K}_{patch}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^T\left(r,s\right)\boldsymbol{DB}\left(r,s\right)\det\boldsymbol{J}_1\det\boldsymbol{J}_2 drds \tag{۳۸-۶}$$

۶-۳- تشریح روش بازیافت تنش

به طور کلی در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفهٔ تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می شود. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین تابع مجهول (جابجایی) استفاده شده اند، بدست می‌آید. یک سطح نربز زمانی بدست خواهد آمد که مختصات نقاط کنترلی آن مشخص شده باشد. با تعریف مختصات x وy هر نقطه کنترلی توسط کاربر،

[1]- Serendipity coordinate

تنها مولفه مجهول جهت تعیین سطح بهبود یافتهٔ تنش، مولفه z نقطه کنترلی می باشد. نحوه محاسبه مختصات z نقاط کنترلی به نحوی است که سطح تنش جدید بدست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتریک است، به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می شود.

اساس محاسبه مختصات نقاط کنترلی و در نتیجه بدست آوردن سطح تنش بهبود یافته برگرفته از خاصیت نقاطی است که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است[۲].

لازم به ذکر است که در ضمیمهٔ یک به طور کامل به بررسی این نقاط و خواص آنها پرداخته شده است.

در تحلیل ایزوژئومتریک دو بعدی که دامنه مسئله با توجه به آرایش نقاط گرهی به المانهای چهار ضلعی تقسیم می شود، این نقاط فوق همگرا بر نقاط گوسی المان منطبق هستند. مختصات نقاط کنترلی سطح بهینه تنش با مینیمم کردن فاصله بین این سطح فرضی و سطح تنش بدست آمده از حل ایزوژئومتریک در نقاط گوس المانهای هر ناحیه با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات محاسبه می شود.

در صورتی که سطح بازیافتی (بهینه) هریک از مؤلفه‌های بردار تنش را با σ^* نشان دهیم، با توجه به توابع شکل نربز می توان این سطح را در داخل هر ناحیه به صورت زیر بیان نمود:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} R_{i,j}(u,v)P_{i,j} \qquad (۳۹-۶)$$

که در آن n تعداد نقاط کنترلی در جهت y و m تعداد نقاط کنترلی در جهت x هر ناحیه، R توابع شکل نربز و P مختصات نقاط کنترلی مربوط به صفحه تنش می باشد. در صورتی که **R** و **P** را به ترتیب بردار توابع شکل نربز و بردار مختصات نقاط کنترلی، به صورت روابط (۶-۴۰) و (۶-۴۱) تعریف

کنیم، رابطه (۶-۳۹) را می‌توان به صورت (۶-۴۲) بیان نمود.

$$\mathbf{R} = \left[R_{1,1}, R_{1,2}, \dots, R_{1,n}, R_{2,1}, R_{2,2}, \dots, R_{2,n}, \dots, R_{m,n}\right]^T \tag{۶-۴۰}$$

$$\mathbf{P} = \left[P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,n}, P_{2,1}, P_{2,2}, \dots, P_{2,n}, \dots, P_{m,n}\right]^T \tag{۶-۴۱}$$

$$\sigma^* = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} \tag{۶-۴۲}$$

همان طور که مشاهده می شود، تنها پارامتر مجهول جهت تعیین این سطح، مختصات z نقاط کنترلی (بردار $\mathbf{P}$) می‌باشد. برای تعیین این مقادیر، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^{k_y}\sum_{i=1}^{k_x}(\sigma^*_{i,j} - \bar{\sigma}_{i,j})^2 \tag{۶-۴۳}$$

که در آن $\bar{\sigma}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و k_x و k_y به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهتهای x و y موجود درهر ناحیه می باشد. با جایگذاری رابطه (۶-۴۲) در (۶-۴۳) خواهیم داشت:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{l=1}^{K}(\mathbf{R}_l^T\mathbf{P}_l - \bar{\sigma}_l)^2 \tag{۶-۴۴}$$

که در آن K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می باشد. در نهایت با مشتق گیری از تابع $F(\mathbf{P})$ نسبت به مؤلفه‌های z نقاط کنترلی و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته بدست می آید.

$$\frac{\partial F(\mathbf{P})}{\partial P_{i,j}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AP} = \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{۶-۴۵}$$

که در آن ماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به صورت (۶-۴۶) محاسبه می‌شوند.

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \quad ; \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{R}_i \, \bar{\sigma}_i \tag{۶-۴۶}$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی، سطح تنش مربوط به آن نیز بدست می آید. همانگونه که در ادامه نشان داده خواهد شد، این میدان مؤلفه تنش نسبت به سطح تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتریک دقیق تر می‌باشد و از این‌رو می‌تواند به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک به کار رود. روش کار این تخمین کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک برای هر المان، به صورت تقریبی به یک معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد. در مرحله بعد می‌توان با افزایش نقاط در بردارگرهی و یا نقاط کنترلی در اطراف آن المان، به بهبود محلی شبکه اولیه پرداخت و تحلیل ایزوژئومتریک دوباره با توجه به شبکه جدید انجام می‌پذیرد و این روند تا حصول دقت مورد نیاز کاربر ادامه خواهد یافت.

جهت بررسی کارایی این تخمین کننده خطا به مقایسه نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق برای دو مسئله نمونه معروف در الاستیسیته که معمولا جهت بررسی کارایی برآوردکننده های خطا به کار می‌روند، پرداخته شده است. لذا در ابتدا به چگونگی محاسبه نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق پرداخته می‌شود.

۶-۴- نرم خطای انرژی

استفاده از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروفترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به صورت زیر بیان می شود[۲]:

$$\| e \| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \, \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{۶-۴۷}$$

که در این رابطه σ مقدار دقیق تنش، $\bar{\sigma}$ تنش بدست آمده از حل تقریبی، D ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان می‌باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نمی‌باشد، لذا به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می شود. در اینصورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|e\| \approx \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{*} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^{T}\, \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^{*} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})\, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۸-۶)$$

که در اینجا $\boldsymbol{\sigma}^{*}$ تنش بازیافتی و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک می باشد.

برای محاسبه انتگرال فوق روی هر المان از روش انتگرال گیری گوس استفاده شده است. در اینصورت خواهیم داشت:

$$\|\bar{e}\| = \left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\boldsymbol{\sigma}^{*} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^{T}\, \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^{*} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) |J_1| . |J_2|\, dr\, ds\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۴۹-۶)$$

در رابطه بالا دترمینان J_1 مربوط به انتقال دستگاه مختصات از فضای x وy سراسری به فضای u وv مربوط به توابع پایه نربز و دترمینان J_2 مربوط به انتقال دستگاه مختصات از فضای u وv به فضای r وs (مختصات نرمال المان پایه) می‌باشد.

و در نهایت نرم خطای انرژی برای هر المان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|\bar{e}\| = \left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\sigma}^{*} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^{T}\, \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^{*} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) |J_1| . |J_2|\, w_i . w_j\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۵۰-۶)$$

n و m به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهت y وx در هر المان و w وزن نقاط گوسی می‌باشد. در نهایت مجموع نرم خطای انرژی المانها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می دهد.

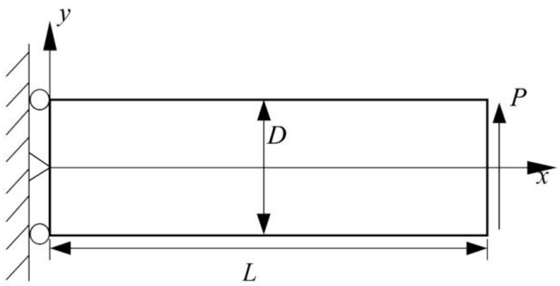
در ادامه به بیان نتایج بدست آمده برای دو مسئله نمونه می‌پردازیم.

۶-۵- تیر طره تیموشنکو

در این قسمت به بیان نتایج گرفته شده از مدلسازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک در شرایط تنش مستوی توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش های آن پرداخته می شود (شکل ۶-۳)

پارامترهای به کار برده شده در این آنالیز به صورت زیر می‌باشد:

$$L = 10 \quad , \quad D = 2 \quad , \quad P = 300 \quad , \quad E = 1500 \quad , \quad \nu = 0.15$$



شکل ۶-۳ تیر طره در شرایط تنش مستوی

تنشهای دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن توسط تیموشنکو وگودیر[1] به صورت زیر داده شده است[۴۴].

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)y}{I} \tag{۶-۵۱}$$

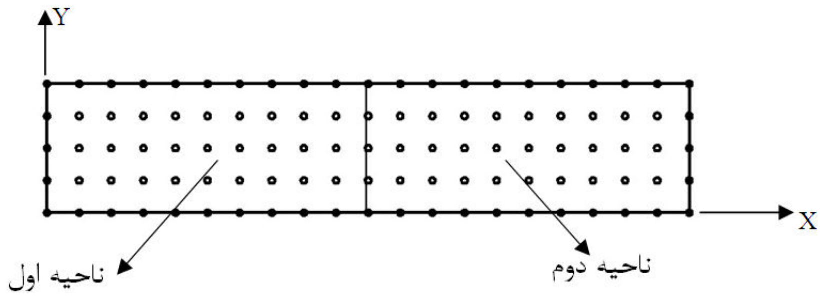
$$\sigma_y = 0 \tag{۶-۵۲}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \tag{۶-۵۳}$$

که در آن $I = \frac{D^3}{12}$ می‌باشد.

برای مدلسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از ۱۰۵ نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده شده است(شکل ۶-۴).

[1] Timonshenko and Goodier



شکل ۶-۴ نقاط کنترلی مورد استفاده در مدلسازی تیر طره

جهت نمایش بهتری از کارایی تخمین کننده خطای پیشنهادی با توجه به مرجع [۴۵] ازتوابع شکل نربز مرتبه دو در هر ناحیه استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات ηو ξبه صورت زیر می‌باشند.

$$u = \{0,0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1\} \quad , \quad v = \{0,0,0.3,0.5,0.7,1,1\}$$

شرایط مرزی تکیه گاهی همانند شکل ۶-۳ به نقاط کنترلی مربوطه اعمال شده است همچنین نیروی P به صورت خطی بین هر یک از نقاط کنترلی سر آزاد تیر اعمال شده است.

با توجه به مرتبه توابع شکل، در تحلیل ایزوژئومتریک تعداد نقاط مورد نیاز جهت انتگرال گیری عددی به روش گوس از مورد مشابه آن در اجزای محدود بیشتر است[۴۶]. از این رو در این مثال از نه نقطه گوس جهت انتگرالگیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است.

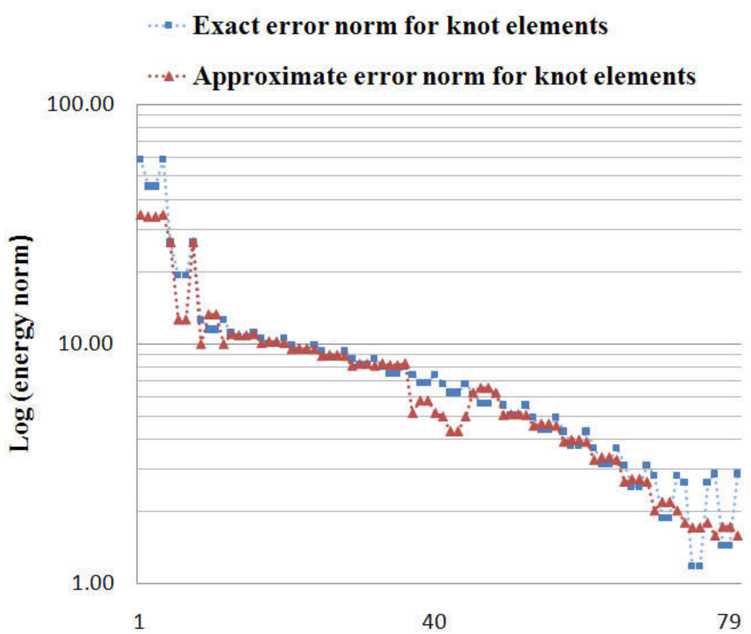
در جدول ۶-۳ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر هر المان و همچنین برای کل دامنه نشان داده شده است. شاخص تاثیر نسبت نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق می‌باشد که بیانگر همگرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه گر خطا به شمار می‌رود. هنگامی یک محاسبه گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تاثیر به سمت یک میل نماید.

نمودار تغییرات نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق برای هر المان در شکل۶-۵ ترسیم شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، تشابه در نحوهٔ تغییرات نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق نشانه کارایی مناسب محاسبه گر خطا می‌باشد. در اشکال ۶-۶ و ۶-۷ نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان داده شده است.

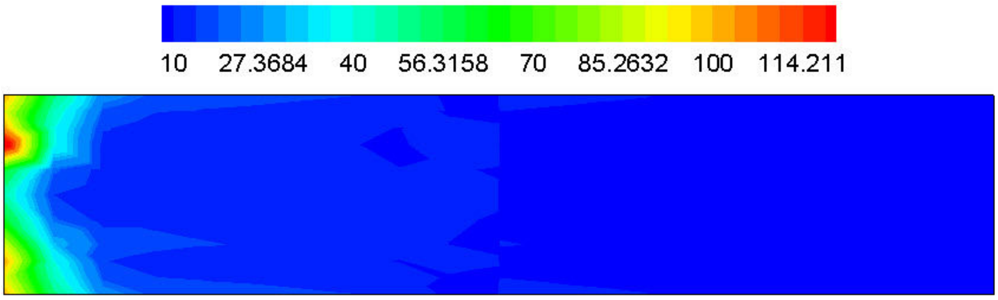
جدول ۶-۳ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر تیر طره تیموشنکو

شماره المان	نرم خطای دقیق در هر المان $\|e\|$	نرم خطای تقریبی در هر المان $\|\bar{e}\|$	شاخص تاثیر θ
1	58.97	34.76	0.59
2	45.64	34.19	0.75
3	45.64	34.19	0.75
4	58.97	34.76	0.59
5	26.72	26.75	1.00
6	19.42	12.73	0.66
7	19.42	12.73	0.66
8	26.72	26.75	1.00
9	12.61	10.05	0.80
10	11.53	13.36	1.16
11	11.53	13.36	1.16
12	12.61	10.05	0.80
13	11.14	11.05	0.99
14	10.72	10.92	1.02
15	10.72	10.92	1.02
16	11.14	11.05	0.99
17	10.58	10.13	0.96
18	10.06	10.29	1.02
19	10.06	10.29	1.02
20	10.58	10.13	0.96
21	9.97	9.58	0.96
22	9.43	9.64	1.02
23	9.43	9.64	1.02
24	9.97	9.58	0.96
25	9.34	8.97	0.96
26	8.80	9.04	1.03
27	8.80	9.04	1.03
28	9.34	8.97	0.96
29	8.71	8.17	0.94
30	8.18	8.30	1.01
31	8.18	8.30	1.01
32	8.71	8.17	0.94
33	8.08	8.34	1.03
34	7.55	8.21	1.09
35	7.55	8.21	1.09
36	8.08	8.34	1.03
37	7.46	5.18	0.69
38	6.92	5.84	0.84
39	6.92	5.84	0.84
40	7.46	5.18	0.69
41	6.83	5.01	0.73
42	6.30	4.35	0.69
43	6.30	4.35	0.69
44	6.83	5.01	0.73
45	6.20	6.29	1.01
46	5.67	6.59	1.16
47	5.67	6.59	1.16
48	6.20	6.29	1.01
49	5.58	5.08	0.91
50	5.04	5.11	1.01
51	5.04	5.11	1.01
52	5.58	5.08	0.91

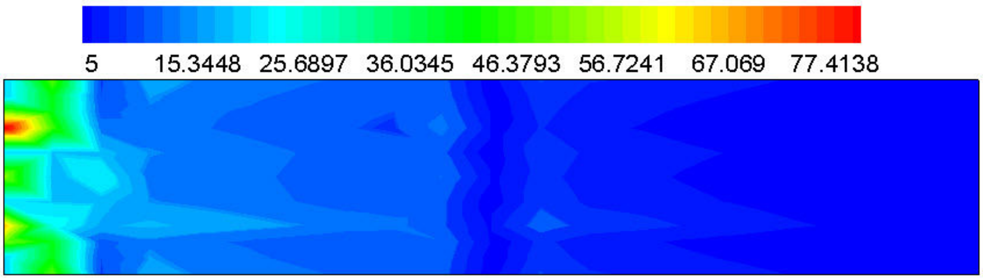
شماره المان	نرم خطای دقیق در هر المان $\|e\|$	نرم خطای تقریبی در هر المان $\|\bar{e}\|$	شاخص تاثیر θ
53	4.95	4.58	0.92
54	4.41	4.67	1.06
55	4.41	4.67	1.06
56	4.95	4.58	0.92
57	4.32	3.92	0.91
58	3.79	4.00	1.06
59	3.79	4.00	1.06
60	4.32	3.92	0.91
61	3.70	3.30	0.89
62	3.16	3.38	1.07
63	3.16	3.38	1.07
64	3.70	3.30	0.89
65	3.12	2.67	0.86
66	2.53	2.75	1.08
67	2.53	2.75	1.08
68	3.12	2.67	0.86
69	2.82	2.03	0.72
70	1.88	2.20	1.17
71	1.88	2.20	1.17
72	2.82	2.03	0.72
73	2.66	1.80	0.68
74	1.19	1.72	1.45
75	1.19	1.72	1.45
76	2.66	1.80	0.68
77	2.88	1.59	0.55
78	1.45	1.73	1.20
79	1.45	1.73	1.20
80	2.88	1.59	0.55
مجموع	760.63	656.59	0.86



شکل۶-۵ نمودار تغییرات نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق تیر طره تیموشنکو

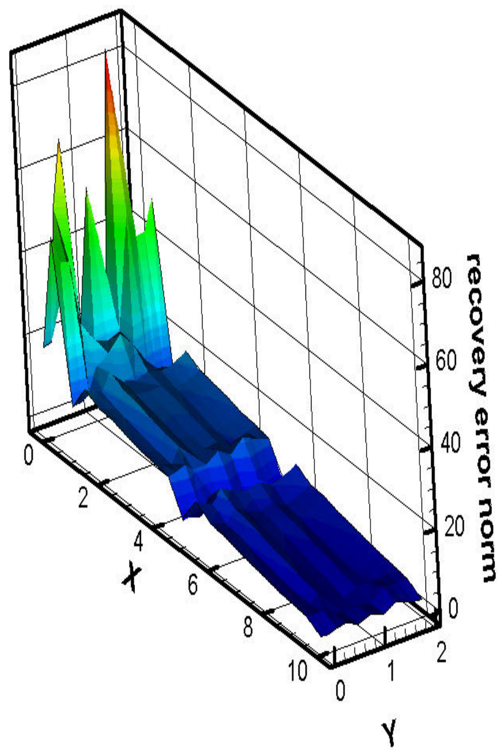


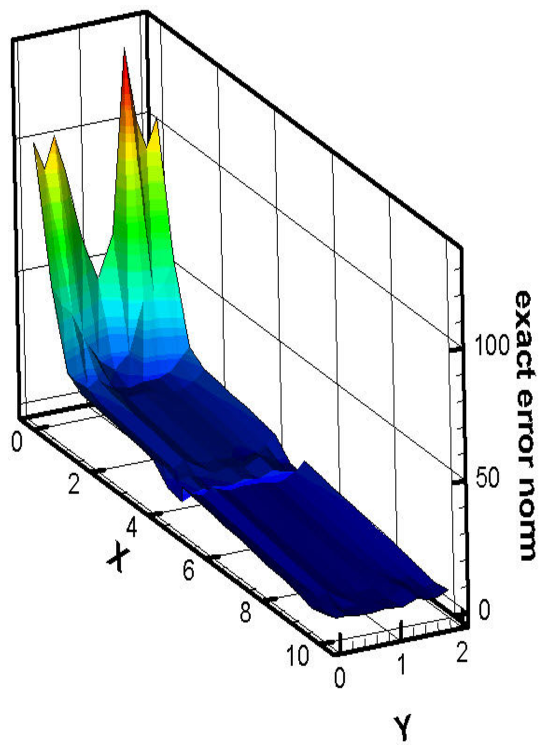
(الف) نرم خطای دقیق



(ب) نرم خطای تقریبی

شکل ۶-۶ توزیع نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی تیر طره تیموشنکو



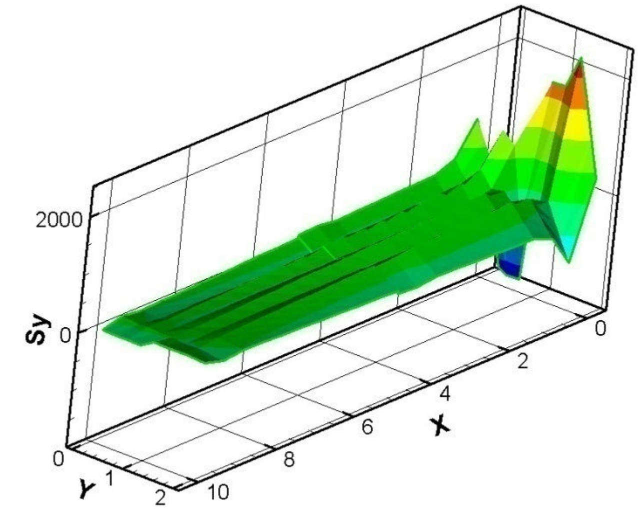


(الف) نرم خطای تقریبی

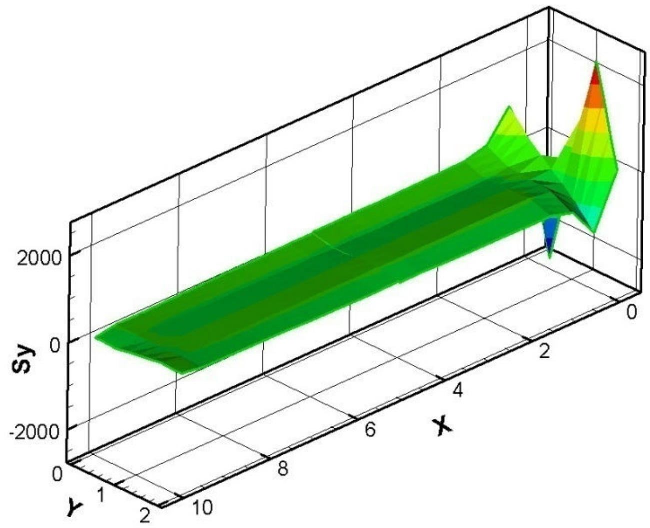
(ب) نرم خطای دقیق

شکل ۶-۷ توزیع سه بعدی نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق تیر طره تیموشنکو

با توجه به رابطهٔ (۶-۵۲)، مقدار تنش σ_y بدست آمده از حل تئوری مسئلهٔ تیر طره تیموشنکو در سراسر دامنه برابر صفر می‌باشد. همان طور که در شکل ۶-۸ مشاهده می‌شود صفحه تنش σ_y برای نتایج بازیابی شده نسبت به صفحه تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک دارای شکستگی های کمتری می‌باشد و همگرایی بیشتری به سمت صفر دارد که نشان دهندهٔ کارایی مناسب محاسبه گر خطا می‌باشد.



(الف) تحلیل ایزوژئومتریک

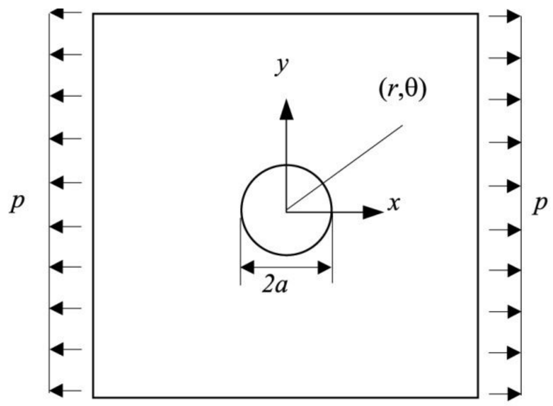


(ب) بهبود یافته

شکل ۶-۸ صفحهٔ تنش σ_y برای نتایج بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و بهبود یافتهٔ تیر طره تیموشنکو

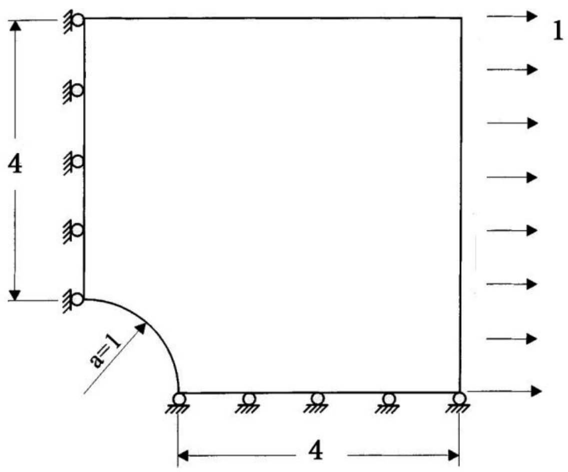
۶-۶- صفحه نامحدود سوراخدار

مساله دو بعدی دیگری که برای مقایسه مورد بررسی قرار خواهد گرفت، مساله صفحه نامحدود سوراخدار می‌باشد(شکل ۶-۹).



شکل ۶-۹ صفحه نامحدود سوراخدار

به علت تقارن، تنها یک چهارم از دامنه مدلسازی شده است(شکل ۶-۱۰).



شکل ۶-۱۰ مشخصات و شرایط مرزی دامنه مدلسازی شدهٔ صفحه نامحدود سوراخدار

این صفحه تحت تنش کششی $\sigma=1$ قرار گرفته است و با فرض شرایط تنش مسطح تحلیل شده است. مصالح به صورت الاستیک خطی ایزوتروپیک با ضریب یانگ E=1000 و ضریب پواسون $\nu=0.3$ در نظر گرفته شده است.

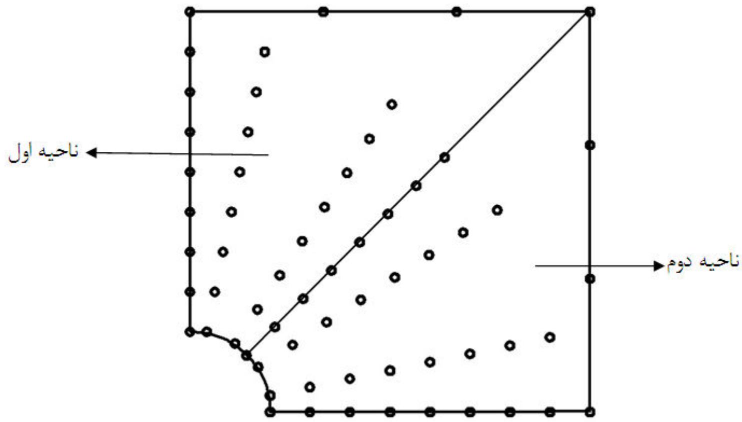
تنشهای دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن به صورت زیر می‌باشد[۴۴].

$$\sigma_x = 1 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos 4\theta \qquad (۶-۵۴)$$

$$\sigma_y = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta - \cos 4\theta\right) - \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos 4\theta \qquad (۶-۵۵)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \sin 4\theta\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\sin 4\theta \qquad (۶-۵۶)$$

برای مدلسازی و تحلیل صفحهٔ نامحدود سوراخدار به روش ایزوژئومتریک از ۶۳ نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده شده است(شکل ۶-۱۱).



شکل ۶-۱۱ نقاط کنترلی مورد استفاده در مدلسازی صفحه نامحدود سوراخدار

به طوری مشابه با مثال اول، در این مثال نیز از توابع شکل نربز مرتبه دو در هر ناحیه و نه نقطه گوسی استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهتهای η و ξ برای هر ناحیه به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

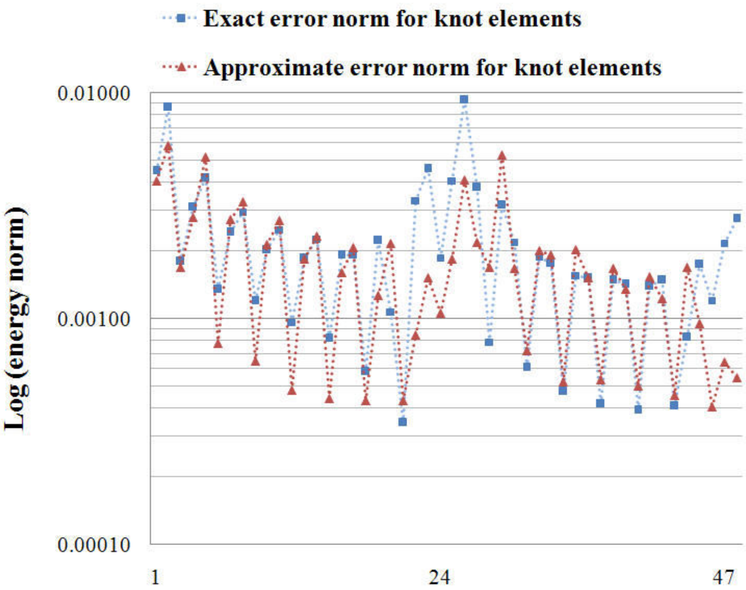
$$u = \{0,0,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,1,1\} \quad , \quad v = \{0,0,0.3,0.7,1,1\}$$

شرایط مرزی تکیه گاهی همانند شکل ۶-۱۰ به نقاط کنترلی مربوطه اعمال شده است همچنین تنش σ به صورت خطی بین هر یک از نقاط کنترلی واقع بر لبه سمت راست مدل اعمال شده است.

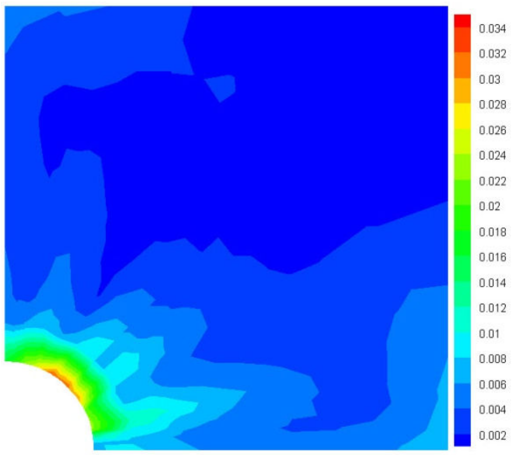
همانند مثال قبل در ادامه نتایج مربوط به تحلیل صفحه نامحدود سوراخدار به روش ایزوژئومتریک و همچنین نتایج مربوط به نرم خطای انرژی تنش های بازیافتی و دقیق ارائه شده است.

جدول ۶-۴ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر صفحه نامحدود سوراخدار

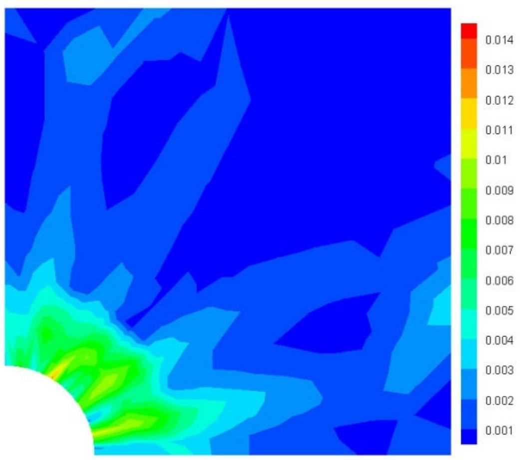
شماره المان	نرم خطای دقیق در هر المان $\|e\|$	نرم خطای تقریبی در هر المان $\|\bar{e}\|$	شاخص تاثیر θ
1	0.00454	0.00408	0.90
2	0.00864	0.00587	0.68
3	0.00180	0.00170	0.94
4	0.00313	0.00280	0.90
5	0.00419	0.00520	1.24
6	0.00135	0.00078	0.57
7	0.00242	0.00275	1.13
8	0.00298	0.00329	1.10
9	0.00120	0.00065	0.54
10	0.00202	0.00213	1.06
11	0.00248	0.00273	1.10
12	0.00096	0.00048	0.50
13	0.00186	0.00184	0.99
14	0.00226	0.00232	1.03
15	0.00082	0.00044	0.54
16	0.00192	0.00160	0.84
17	0.00192	0.00207	1.08
18	0.00058	0.00043	0.74
19	0.00223	0.00127	0.57
20	0.00107	0.00215	2.01
21	0.00035	0.00043	1.25
22	0.00334	0.00084	0.25
23	0.00463	0.00151	0.33
24	0.00186	0.00106	0.57
25	0.00408	0.00184	0.45
26	0.00930	0.00410	0.44
27	0.00382	0.00218	0.57
28	0.00079	0.00170	2.15
29	0.00318	0.00529	1.67
30	0.00219	0.00166	0.76
31	0.00061	0.00072	1.19
32	0.00188	0.00201	1.07
33	0.00177	0.00193	1.09
34	0.00048	0.00052	1.10
35	0.00156	0.00202	1.30
36	0.00152	0.00151	1.00
37	0.00042	0.00054	1.28
38	0.00148	0.00167	1.13
39	0.00142	0.00136	0.96
40	0.00039	0.00050	1.28
41	0.00139	0.00154	1.11
42	0.00148	0.00123	0.83
43	0.00041	0.00046	1.12
44	0.00083	0.00169	2.04
45	0.00174	0.00095	0.55
46	0.00121	0.00041	0.34
47	0.00216	0.00064	0.30
48	0.00277	0.00055	0.20
مجموع	0.10540	0.08547	0.81



شکل ۶- ۱۲ نمودار تغییرات نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق صفحه نامحدود سوراخدار

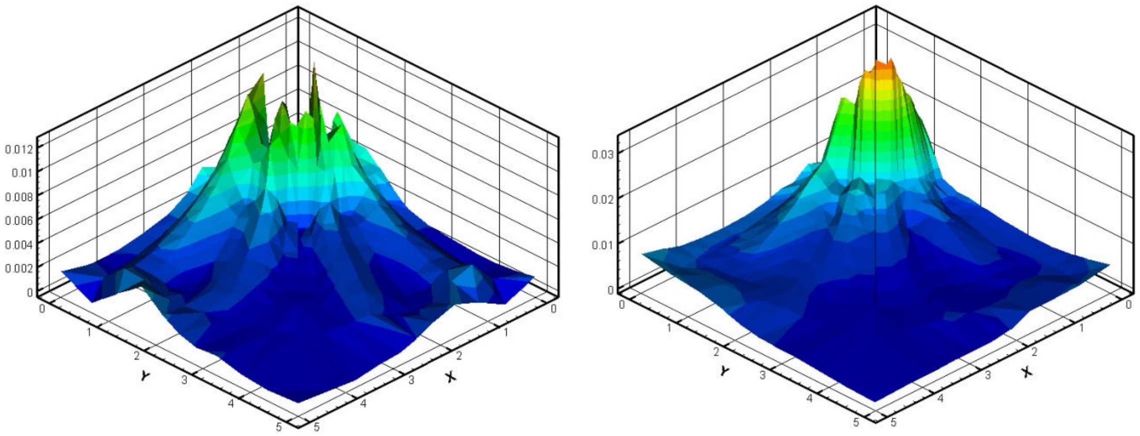


الف) نرم خطای دقیق



ب) نرم خطای تقریبی

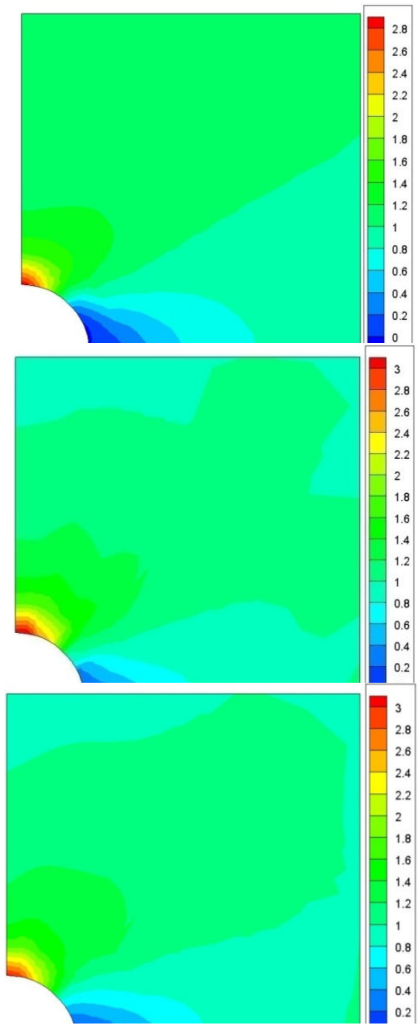
شکل ۶-۱۳ توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی صفحه نامحدود سوراخدار



(الف) نرم خطای دقیق

(ب) نرم خطای تقریبی

شکل ۶- ۱۴ توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی صفحه نامحدود سوراخدار

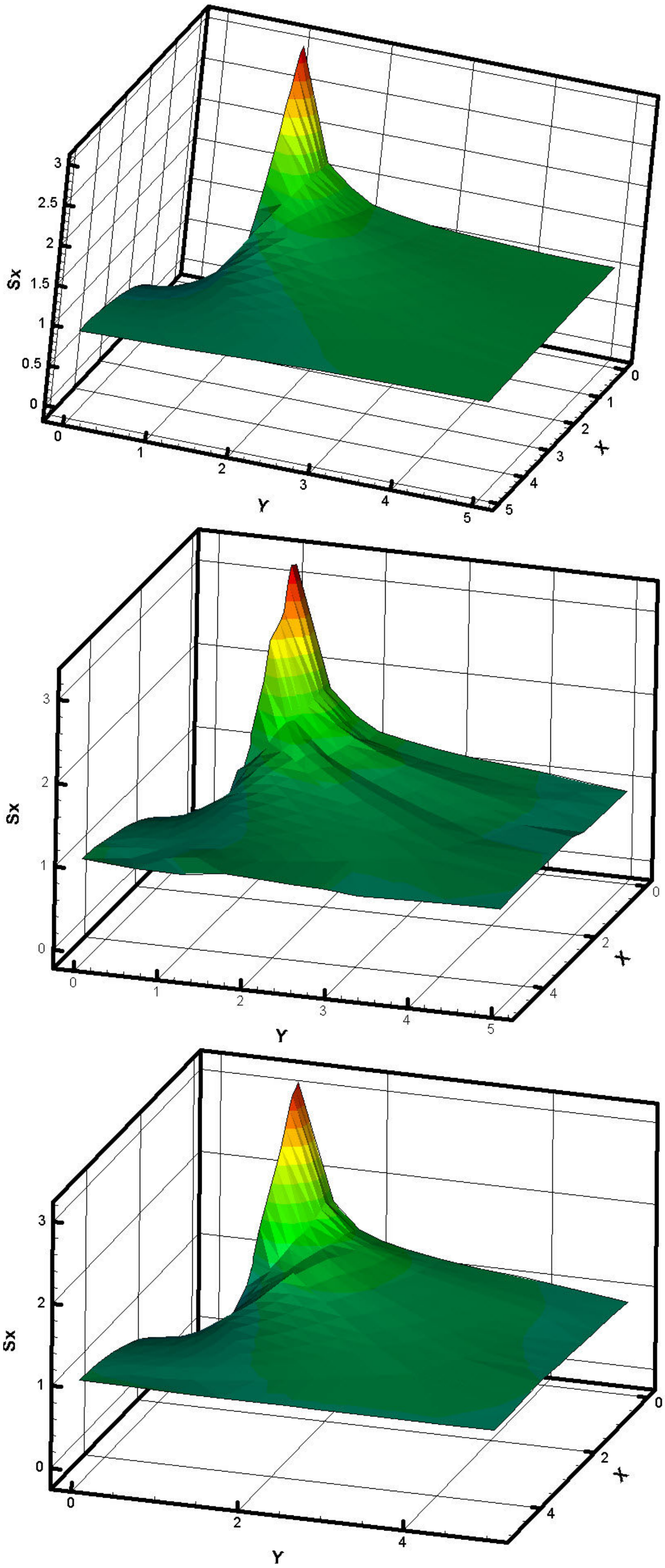


(الف) تحلیل تئوری

(ب) تحلیل ایزوژئومتریک

(ج) تنشهای بهبود یافته

شکل ۶- ۱۵ کانتور تنش σ_x برای نتایج گرفته شده از تحلیل تئوری، تحلیل ایزوژئومتریک و تنشهای بهبود یافته صفحه نامحدود سوراخدار



(الف) تحلیل تئوری

(ب) تحلیل ایزوژئومتریک

(ج) تنشهای بهبود یافته

شکل ۶- ۱۶ صفحهٔ تنش σ_x برای نتایج گرفته شده از تحلیل تئوری، تحلیل ایزوژئومتریک و تنشهای بهبود یافته صفحه نامحدود سوراخدار

با توجه به عدد ۰/۸۱ برای شاخص تاثیر نرم خطای کل دامنه، در جدول ۶-۴ و نیز همسانی تقریبی نمودار تغییرات نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی در شکل ۶-۱۲، می‌توان گفت که روش تخمین خطای به کار گرفته شده برای صفحهٔ نامحدود سوراخدار نیز از کارایی نسبتا خوبی برخوردار می‌باشد.

در اشکال ۶-۱۳ و ۶-۱۴ برای مقایسه بین توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی و همچنین درک بهتری از تشابه در توزیع نرم خطای آنها، به ترسیم کانتور و توزیع سه بعدی نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی پرداخته شده است.

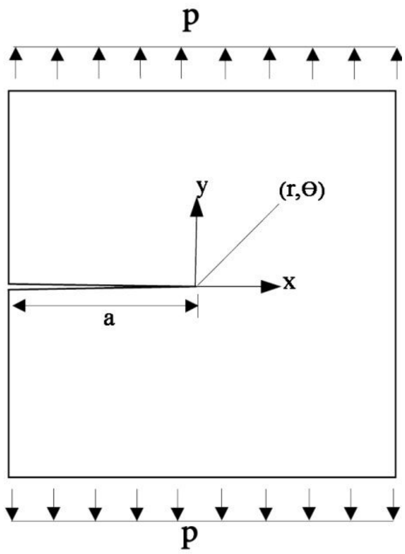
شکل ۶-۱۵ کانتور تنش σ_x را برای نتایج گرفته شده از تحلیل تئوری، تحلیل ایزوژئومتریک و تنشهای بهبود یافته صفحه نامحدود سوراخدار نمایش می‌دهد. همچنین در شکل ۶-۱۶ مشاهده می‌شود که صفحهٔ تنش σ_x بدست آمده از تنشهای بهبود یافته در مقایسه با صفحهٔ تنش تحلیل ایزوژئومتریک دارای شکستگی کمتر و در نتیجه تشابه بیشتری نسبت به صفحهٔ بدست آمده از تحلیل تئوری دارد.

۶-۷- صفحه ترکدار تحت کشش

در این مثال به بررسی رفتار تخمین کننده خطا، در برآورد خطای بدست آمده از تحلیل مسئله دارای یک نقطه تکین با روش ایزوژئومتریک می پردازیم.

معمولا مسائل با نقطه تکین، به علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی جهت بررسی کارایی تخمین کننده های خطا به شمار نمی روند؛ اما هدف از این مثال همان طور که گفته شد، بررسی رفتار تخمین کننده خطا می باشد. با توجه به این نکته که نوک ترک به عنوان یک نقطه تکین، دارای خطای زیادی نسبت به سایر نقاط است، لذا یک تخمین کنندهٔ خطای مناسب باید به طور نسبی قادر به نمایش این توزیع خطا باشد. در صورتی که بهبود شبکه با توجه به نتایج بدست آمده از تخمین کنندهٔ خطا مورد نظر باشد، تخمین کنندهٔ خطایی که دارای رفتاری مناسب باشد می‌تواند برنامه را در هر مرحله به بهبود محلی شبکه در اطراف نوک ترک راهنمایی کند.

در شکل ۶- ۱۷ مشخصات صفحه مربعی تحت تنش کششی P مشاهده می‌شود. اضلاع این مربع به طول 2a و گسترش ترک به میزان a فرض شده است.



شکل ۶- ۱۷ صفحه مربعی ترکدار تحت تنش کششی قائم

بازشدگی ترک در مد اول و بر اساس سیستم مختصات قطبی نشان داده شده در شکل ۶-۱۷ نتایج تحلیلی آن به صورت زیر می‌باشد[۴۷].

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad (۵۷\text{-}۶)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \quad (۵۸\text{-}۶)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \quad (۵۹\text{-}۶)$$

که در آن فاکتور شدت تنش K_Iبه صورت زیر تعریف می‌شود:

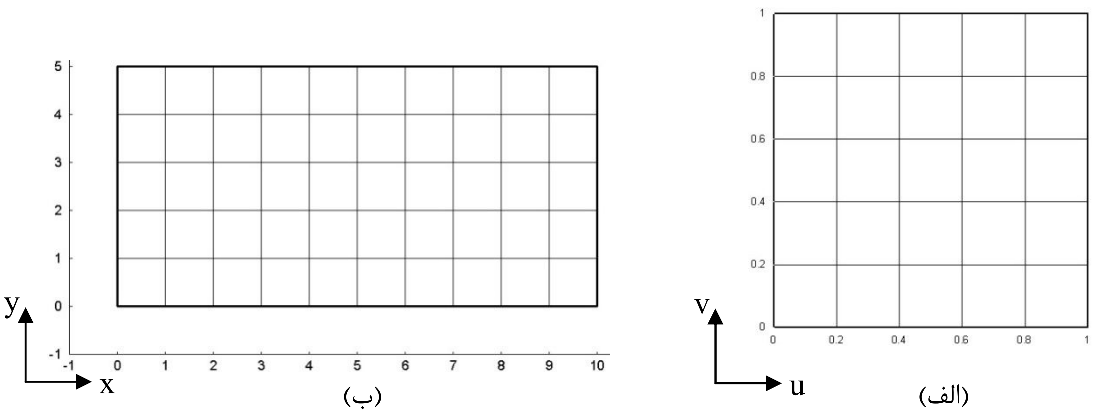
$$K_I = P\sqrt{\pi a} \quad (۶۰\text{-}۶)$$

جهت مدلسازی عددی، به علت تقارن تنها نیمی از دامنه مورد تحلیل قرار می‌گیرد. پارامترهای به کار رفته در حل مسئله به صورت زیر می‌باشند.

طول ضلع مربع = 2a = 10 ; $\nu = 0.3$; E =1000 ; P =10

تحلیل مسئله با روش ایزوژئومتریک برای توابع شکل درجه یک، دو و سه صورت پذیرفته است.

برای بررسی اثر افرایش درجه توابع شکل در کارایی تخمین کننده خطا، تعداد المانها (بردار گرهی) در هر سه مدل ثابت فرض می‌شود؛ لذا با توجه به رابطه m=P+n+1 با افزایش درجه توابع شکل (P) و با توجه به اینکه تعداد تکرار عضوهای صفر و یک بردار گرهی، P+1 می‌باشد، باید درهر جهت یکی به تعداد نقاط کنترلی (n) افروده شود. شکل ۶- ۱۸ بردار گرهی در هر ناحیه و المانهای تولید شده بر روی کل دامنه مدلسازی شده را، توسط توابع شکل درجه یک، دو و سه نشان می‌دهد.

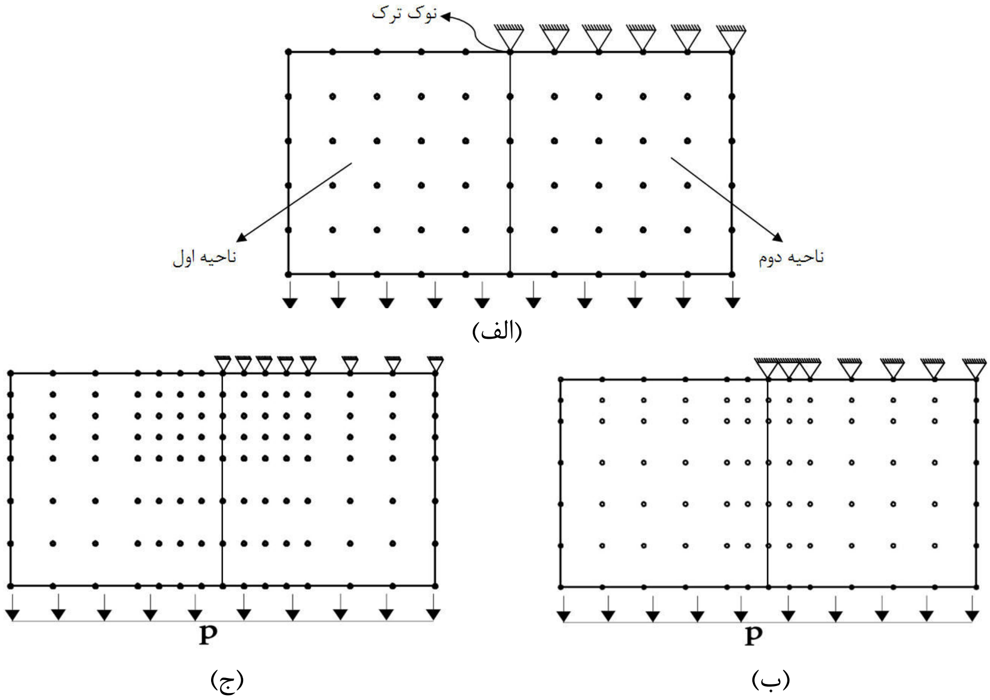


شکل ۶- ۱۸ (الف) بردار گرهی و (ب) المانهای تولید شده بر روی دامنه مدلسازی شده توسط توابع شکل درجه یک، دو و سه به روش ایزوژئومتریک

شکل ۶- ۱۹ دامنهٔ مدلسازی شده به همراه شرایط مرزی و نقاط کنترلی به کار رفته جهت تحلیل صفحه ترکدار تحت کشش با توابع شکل درجه یک، دو و سه را نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، افزایش نقاط کنترلی در نزدیکی نوک ترک که دارای خطای بیشتری نسبت به سایر نقاط می‌باشد، انجام شده است.

در شکل ۶-۲۰ نتایج بدست آمده از نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی برای تحلیل صفحهٔ ترکدار تحت کشش با توابع شکل درجهٔ یک، دو و سه نشان داده شده است.

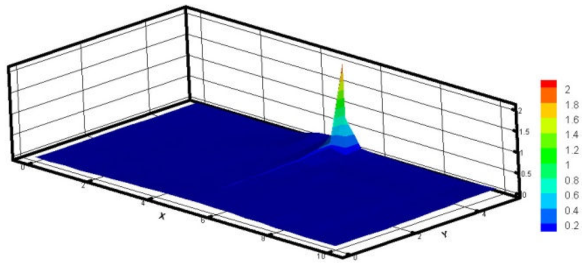
با مشاهدهٔ نرم خطای انرژی تقریبی برای هر سه نوع توابع درجهٔ یک، دو و سه در شکل ۶-۲۰ می‌توان گفت‌که این تخمین‌کنندهٔ خطا دارای رفتاری مناسب جهت برآورد خطای صفحهٔ ترکدار تحت



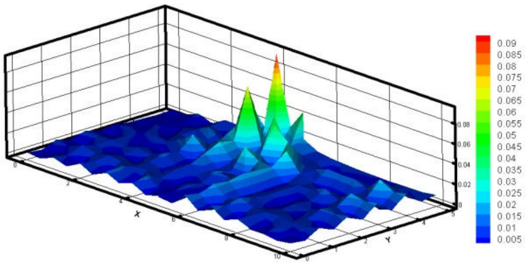
شکل ۶- ۱۹ دامنه مدلسازی شده به همراه شرایط مرزی و نقاط کنترلی به کار رفته جهت تحلیل صفحه ترکدار تحت کشش با توابع شکل (الف) درجهٔ یک، (ب) درجهٔ دو، (ج) درجهٔ سه

کشش می‌باشد، به طوری که در هر سه مورد، میزان خطا در نوک ترک نسبت به سایر نقاط به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر نشان داده شده است.

در صورتی که مقایسه ای بین میزان ماکزیمم نرم خطای دقیق در شکل ۶-۲۰ صورت پذیرد مشاهده می‌شود که با افزایش درجهٔ توابع شکل خطای تحلیل ایزوژئومتریک کاهش می‌یابد.

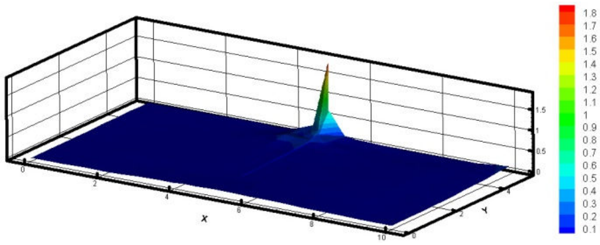


نرم خطای انرژی دقیق

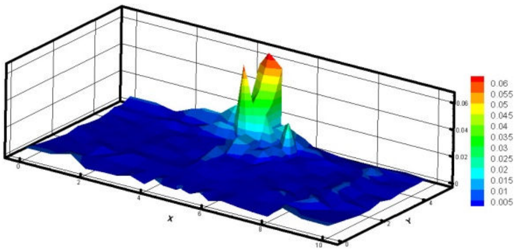


نرم خطای انرژی تقریبی

الف) توابع شکل درجه یک

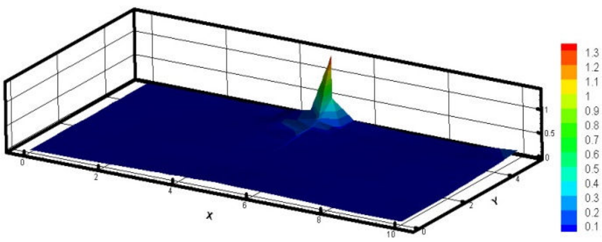


نرم خطای انرژی دقیق

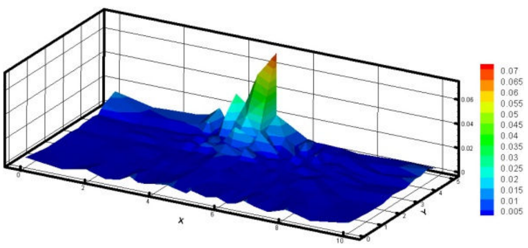


نرم خطای انرژی تقریبی

ب) توابع شکل درجه دو



نرم خطای انرژی دقیق



نرم خطای انرژی تقریبی

ج) توابع شکل درجه سه

شکل ۶-۲۰ مقایسه نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی صفحه ترکدار تحت کشش با توابع شکل درجه یک، دو و سه

فصل هفتم

نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات

در این فصل به جمع بندی و بیان خلاصه نتایج حاصل از این پژوهش پرداخته شده است. همچنین در انتها چندین پیشنهاد جهت ادامه پژوهش در زمینۀ تخمین خطا و حل تطبیقی در روش‌های اجزای محدود و ایزوژئومتریک ارائه شده است. با توجه به اینکه موضوع این پژوهش در دو بخش تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود و همچنین ارائه روشی جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک قرار دارد، لذا در ادامه به طور خلاصه به بیان نتایج گرفته شده از هر یک از این دو بخش پرداخته می‌شود.

۷-۱- نتایج بدست آمده از بخش اول پژوهش

با توجه به اینکه در روش اجزای محدود معمولی، تقریبا هیچگونه ابزاری مبنی بر مناسب بودن اندازۀ المان به کار رفته و صحیح بودن نوع حل در دسترس مهندسین وجود ندارد و انتخاب اندازۀ المان بیشتر بر اساس توصیه‌های داده شده در این مورد صورت می‌پذیرد، لذا در این بخش از پژوهش، ضمن بیان مبانی تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود، از روش اجزای محدود وفقی به عنوان یک ابزار قوی برای غلبه بر محدودیت‌های روش اجزای محدود معمولی استفاده گردید.

دلایل برتری روش اجزای محدود وفقی نسبت به روش اجزای محدود معمولی را می‌توان به طور خلاصه به شرح زیر بیان نمود:

۱) **در اختیار داشتن ابزاری، مبنی بر صحیح بودن نوع حل صورت گرفته**: در روش اجزای محدود وفقی با محاسبۀ خطای نسبی سراسری (η) و مقایسه آن با خطای نسبی سراسری قابل قبول ($\bar{\eta}$) می‌توان صحت حل صورت گرفته را کنترل نمود. همچنین حل تطبیقی این امکان را فراهم می‌کند که با توزیع مناسب خطا بر روی کل شبکه، مقادیر قابل قبول در تمامی المانها بدست آید.

۲) **اصلاح وفقی المانها:** در روش اجزای محدود وفقی، ابتدا خطای نسبی سراسری (η) و خطای نسبی موضعی (ξ_i) برای تک تک المانها محاسبه می‌شود، سپس بر اساس روش

اصلاح نوع h با استفاده از شبکه جزء بندی غنی شده، المانهایی که در آنها $1 \rangle \xi_i$ است، به المانهای کوچکتر تقسیم می‌شوند و این عمل آنقدر ادامه می‌یابد تا معیار توقف اصلاح وفقی تامین شود. بنابراین اصلاح محلی شبکه انجام می‌گیرد که بسیار سریعتر از حل عادی (ریز کردن یکنواخت شبکه) همگرا می‌شود.

۳) **رسیدن به جواب نهایی با تعداد المانهای کمتر:** در روش اجزای محدود وفقی با توجه به اینکه عملیات اصلاحی فقط در نواحی که میزان خطا در آن ناحیه بیشتر است، اعمال می‌شود. لذا می‌توان با تعداد المانهای کمتر به جواب نهایی مسئله دست یافت. بنابراین رسیدن به جواب نهایی دقیق تر با تعداد المانهای کمتر از دیگر مزایای استفاده از روش اجزای محدود وفقی به شمار می‌رود. همچنین به دلیل کاهش حجم محاسبات، خطای ناشی از گرد کردن اعداد نیز کاهش می‌یابد.

همچنین در این بخش به کمک تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود، روشی جهت تبیین فاکتور شدت تنش برای هر ترک مورد نظر در یک سازه پیچیده و تحت بارگذاری دلخواه با قابلیت اطمینان بالا معرفی گردید. با مقایسه نتایج بدست آمده برای فاکتور شدت تنش حاصل از نرم افزار Ansys و برنامهٔ ADAPT با حل تئوری، صحت و دقت برنامهٔ ADAPT در برآورد خطای اجزای محدود و حل تطبیقی آن بررسی شد. همچنین توانایی الگوریتم به کار رفته در نرم افزار Ansys جهت تخمین خطای تحلیل اجزای محدود سازه‌های دو بعدی نسبت به روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا (SPR) که در این پژوهش جهت تخمین خطای اجزای محدود استفاده شد، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که برنامهٔ ADAPT از کارایی کاملا رضایت بخشی برخوردار است و علاوه بر آن روش تخمین خطا و حل تطبیقی به کار رفته در آن نسبت به روش مورد استفاده در نرم افزار Ansys، دارای دقت بیشتر و هزینه کمتری می‌باشد. اهمیت نتایج نیز از این جهت مورد تاکید است که تبیین فاکتورشدت تنش به صورت یک معادله ریاضی برای ترکی دلخواه در یک سازه پیچیده

و تحت بارگذاری دلخواه، مشکل وگاهی غیر ممکن است؛ لذا استفاده از یک روش عددی با قابلیت اطمینان بالا درحل اینگونه مسائل الزامی می‌باشد.

۷-۲- نتایج بدست آمده از بخش دوم پژوهش

در این بخش اصول به کار رفته در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک معرفی شد و به ارائه یک روش ابداعی جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش بدست آمده از این روش پرداخته شده است.

با توجه به اینکه روش ایزوژئومتریک یکی از روشهای جدید در تحلیل سازه ها به شمار می‌رود و بالقوه دارای ویژگی های منحصر به فرد و مناسبی است که به نظر می‌رسد در آینده‌ای نه چندان دور بتواند جایگزین روشهای عددی متداول نظیر اجزای محدود و نقاط محدود گردد لذا نتایج بدست آمده از این بخش از اهمیت بیشتری برخوردار است.

به طور خلاصه نتایج بدست آمده از این بخش به صورت زیر می‌باشد:

۱- شاخص تاثیر کل تیر طره تیموشنکو ۰/۸۶ می‌باشد و در نمودار و کانتور نرم خطای تقریبی با نرم خطای دقیق تشابه قابل قبولی مشاهده می‌شود؛ لذا می‌توان بیان نمود که تخمین کنندۀ خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی جهت برآورد خطای مسئله تیر طره تیموشنکو برخوردار می‌باشد.

۲- شاخص تاثیر کل مسئله صفحه سوراخدار ۰/۸۶ می‌باشد و در این مسئله نیز تطابق و تشابه قابل قبولی در نمودار و نرم خطای تقریبی با نرم خطای دقیق مشاهده می‌شود همچنین مشاهده شد که کانتور و صفحۀ تنش σ_x بدست آمده از تنش های بازیافتی نسبت به کانتور و صفحۀ تنش σ_x بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک از دقت بالاتری برخوردار است. لذا در این مسئله نیز می‌توان بیان نمود که تخمین کنندۀ خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی جهت برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک برخوردار است.

۳- با مشاهده آرایش مناسب نرم خطای تقریبی برای صفحۀ ترکدار تحت کشش با توابع شکل

درجهٔ یک، دو و سه می‌توان بیان نمود که تخمین کنندهٔ خطای پیشنهادی قادر به شناسایی مکان نوک ترک که نسبت به سایر نقاط دارای خطای بیشتری است، می‌باشد؛ لذا می‌توان گفت که در این مثال نیز برآورد خطا به درستی صورت پذیرفته است و این تخمین کنندهٔ خطا توانایی استفاده به عنوان یک راهبر جهت فرآیند تکراری بهبود شبکه صفحهٔ ترکدار تحت کشش را دارا می‌باشد.

با توجه به اینکه تفاوت اصلی روش ایزوژئومتریک با دیگر روشهای آنالیز سازه، استفاده از تکنیک نربز به عنوان یک راهبرد هندسی درتولید مدل هندسی و تابع مجهول مسئله می‌باشد، می‌توان بیان نمود که ویژگی بارز روش تخمین خطای پیشنهادی در این پژوهش همخوانی آن با روش ایزوژئومتریک، به عنوان یک روش هندسی، در برآورد خطای این روش می‌باشد.

در نهایت با توجه به نتایج گرفته شده از حل مثالهای مطرح شده در این پژوهش می‌توان از روش تخمین کنندهٔ خطای پیشنهادی به عنوان راه حلی ساده و مهندسی جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش بدست آمده از تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک نام برد.

۷-۳- ارائه پیشنهادات

با وجود اینکه روشهای تخمین خطا و حل تطبیقی در اجزای محدود از گذشته تاکنون مورد بررسی و کنکاش بوده اند اما به نظر می رسد هنوز این شاخه از دانش دارای ظرفیت زیادی جهت ابداع و نوآوری برای بهتر شدن الگوریتمهای موجود می باشد. در ادامه به چند پیشنهاد جهت پیشبرد این موضوع در آینده اشاره شده است.

۱- استفاده از روش حداقل مربعات وزن دار به جای روش حداقل مربعات، در تعیین پارامترهای مجهول تنش بهبود یافته.

۲- بررسی تاثیر روش های انتگرال گیری عددی مختلف و همچنین تعداد نقاط گوس در سرعت همگرایی مسئله.

۳- بررسی وجود نقاط با قدرت همگرایی بالاتر نسبت به نقاط فوق همگرای مورد استفاده در روش SPR

۴- تلفیق همزمان معیارهای مختلف، علاوه بر معیار حداقل مربعات جهت تعیین پارامترهای مجهول تنش بهبود یافته.

همچنین به علت تازگی و ویژگی های منحصر به فرد روش ایزوژئومتریک در تحلیل مسائل متفاوت علوم و مهندسی می توان از آن به عنوان افقی روشن در پیش روی محققین نام برد که در آینده ای نزدیک قادر به پشت سر گذاشتن تمام روش های عددی گذشته از جمله اجزای محدود می باشد. این روش از پتانسیل بسیار بالایی جهت کار تحقیقاتی برخوردار است و هنوز در ابتدای راه خود قرار دارد. در ادامه به چند پیشنهاد جهت پیشبرد این موضوع در آینده اشاره شده است.

۱- یکی از مهمترین موضوعاتی که در این روش هنوز به صورت روشن حل نشده است، تاثیر و نحوهٔ ارتباط بین حرکت نقاط کنترلی و سطح نربز تولید شده می باشد. در صورت یافتن این مهم بسیاری از مسائل چالش برانگیز از جمله اعمال دقیق بارگذاری دلخواه و شرایط مرزی قابل حل می باشد.

۲- امکان‌سنجی و پیاده‌سازی روشها و ایده‌هایی که در روش اجزای محدود برای بهبود الگوریتم‌های تخمین خطا و حل تطبیقی مورد استفاده قرار گرفته است.

۳- استفاده از T-Spline به جای NURBS، جهت داشتن امکان بهبود محلی شبکهٔ تحلیل ایزوژئومتریک.

ضمیمه ۱

نقاط فوق همگرا در برآورد خطای اجزای محدود

۱- مرتبه خطا

محدوده Ω را که به اجزای محدود Ω^e با اندازه h تقسیم شده است، در نظر بگیرید. فرض می‌شود توابع شکل اجزای محدود شامل یک چند جمله‌ای کامل از درجه p باشند. بدیهی است که اگر جواب مورد نظر، ϕخود یک چند جمله‌ای از درجه p یا کمتر باشد در این صورت تقریب حاصل، دقیق خواهد بود.

در حالت کلی معمولا جواب مورد نظر ϕ خود یک چند جمله‌ای نیست ولی در صورتی که جواب مورد نظر دارای نقاط تکین، که در آنها بعضی یا تمام مشتقها بینهایت می‌شوند، نباشد، می‌توان آن را بطور موضعی با سری تیلور نشان داد. برای مثال، می‌توانیم رابطهٔ زیر را در همسایگی نقطهٔ فرضی O از یک محدودهٔ دو بعدی بنوسیم :

$$\phi(\Delta X , \Delta Y) = \phi\big|_0 + \Delta X \ \frac{\partial \phi}{\partial X}\big|_0 + \Delta Y \ \frac{\partial \phi}{\partial Y}\big|_0 + ... \qquad (۱)$$

که در آن ΔX و ΔY، تفاوت مختصات نقطه مورد نظر و مبدأ منظور شده در نقطه O می‌باشد. حال اگر یک چند جمله‌ای از درجه P مورد استفاده قرار گیرد، در این صورت خطای E، در یک جزء با اندازه h، را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه نمود. زیرا این چند جمله‌ای را می‌توان دقیقاً به وسیله سری تیلور درجه Pام نمایش داد.

$$E = O(h^{p+1}) \qquad (۲)$$

در رابطه فوق h نمودار ماکزیمم مقادیر ΔX و ΔY می‌باشد[۱۸].

در بیانی دیگر، فرض کنید تابع $u(x)$ که دارای مشتقات پیوسته تا مرتبهٔ دلخواه می‌باشد، مفروض باشد. بسط سری مک لورن این تابع در حالت دو بعدی عبارت است از :

$$u(x) = u(0) + xu_{,x}(0) + yu_{,y}(0) + \tfrac{1}{2}x^2u_{,xx}(0) + \tfrac{1}{2}y^2y_{,yy} + \ldots \quad (۳)$$

در همسایگی نقطه مورد نظر می‌توان تابع u(x) را با تعدادی از جملات سری مک لورن آن به صورت زیر تقریب زد :

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = u(0) + xu_{,x}(0) + yu_{,y}(0) + \ldots + O(h^{P+1}) \quad (۴)$$

در معادله فوق P مجموع توانهای x وy می‌باشد. در جمله آخر، O تابعی است که میزان خطای ناشی از قطع سری مک لورن را بیان کرده و h عبارت است از فاصله بین دو گره که به صورت زیر بیان می‌شود :

$$h = \sqrt{h_x^{\,2} + h_y^{\,2}} \quad (۵)$$

از دیدگاه نظری با کاهش h وبا افزایش p مقدار خطای O کاهش می‌یابد و در نتیجه تابع تقریبی به سمت تابع دقیق میل می‌کند.

در رابطه بالا تقریب از مرتبه p+1 می‌باشد، که این مرتبه، معیاری برای بیان میزان خطا می‌باشد.

۲- نقاط گوس در انتگرالگیری عددی

در فرآیند اجزای محدود، عملیات جبری لازم برای محاسبه ماتریسهای جزء اجزای مرتبه بالا، به دلیل پیچیدگی انتگرالهای موجود، خسته کننده و طولانی می‌باشد. علاوه بر این در صورت استفاده از فرآیند نگاشت، بایستی ماتریس ژاکوبی نگاشت را برای محاسبه مشتقهای موجود در این انتگرالها عکس نمود و در نتیجه استفاده از انتگرال گیری دقیق، به واسطهٔ پیچیدگی روابط حاصل، تقریبا غیر ممکن خواهد شد. در چنین حالتی بایستی انتگرالها را با استفاده از روشهای عددی محاسبه نمود که در آن یک انتگرال نمونه از معادله (۶) به وسیلهٔ یک مجموعیابی جایگزین می‌گردد.

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}k\,\frac{\partial N_l^e}{\partial X}\frac{\partial N_m^e}{\partial X}\det(J)\,d\xi d\eta \qquad (۶)$$

در حالت کلی می‌توان انتگرالهای بر روی حوزه‌های یک، دو یا سه بعدی را تنها با استفاده از مجموعیابی حاصلضرب مقدار جملات انتگرالده در نقاط مشخصی از محدوده، در وزنهای مناسب به صورت زیر محاسبه نمود:

$$I=\int_{-1}^{1}G(\xi)\,d\xi \approx W_0G(\xi_0)+W_1G(\xi_1)+\ldots+W_nG(\xi_n) \qquad (۷ \text{ الف})$$

$$I=\int_{-1}^{1}G(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \approx W_0G(\xi_0,\eta_0)+W_1G(\xi_1,\eta_1)+\ldots+W_nG(\xi_n,\eta_n) \qquad (۷ \text{ ب})$$

برای ابداع روشهای یک بعدی، می‌توان ابتدا نقاط ξ_0 و ξ_1 و. . . ξ_n را به عنوان نقاط نمونه انتخاب نمود، سپس چند چند جمله‌ای درجه n ام $F_n(\xi)$ را که در این نقاط دقیقا معادل تابع $G(\xi)$ می‌باشد، به دست آورد. بدین منظور می‌توان چند جمله‌ای $F_n(\xi)$ را به صورت زیر نشان داد:

$$F_n(\xi)=\alpha_0+\alpha_1\xi+\ldots+\alpha_n\xi^n \qquad (۸)$$

که در آن ضرایب چند جمله‌ای از حل معادلات زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned}G(\xi_0)&=\alpha_0+\alpha_1\xi_0+\ldots+\alpha_n\xi_0^n\\ G(\xi_1)&=\alpha_0+\alpha_1\xi_1+\ldots+\alpha_n\xi_1^n\\ &\vdots\\ G(\xi_n)&=\alpha_0+\alpha_1\xi_n+\ldots+\alpha_n\xi_n^n\end{aligned} \qquad (۹)$$

حال با استفاده از رابطهٔ زیر می‌توان انتگرال مورد نظر را به صورت تقریبی محاسبه نمود و سپس با قرار دادن مقادیر ضرایب حاصل از حل معادله (۹) در آن، یک فرمول تقریبی از نوع معادله (۷ الف) به دست آورد.

$$I=\int_{-1}^{1}G(\xi)\,d\xi=\int_{-1}^{1}F_n(\xi)\,d\xi=2\alpha_0+\frac{2\alpha_2}{3}+\ldots+\frac{\alpha_n}{n+1}\left[1-(-1)^{n+1}\right] \qquad (۱۰)$$

در روش انتگرالگیری عددی کوادراچر گوس- لجندر، بر خلاف روش قبل، مختصات نقاط نمونه گیری، که تابع $G(\xi)$ در آنها محاسبه می‌گردد، از قبل تعیین نشده است ولی مختصات آنها چنان تعیین می‌گردد، که انتگرال یک چند جمله‌ای $G(\xi)$ از درجات کمتر یا مساوی P را محاسبه نماید

که در آن مقدار $p(\geq n)$ مجهول است و بایستی محاسبه گردد. (n+1 تعداد نقاط نمونه گیری می‌باشد)

اگر چند جمله‌ای مورد نظر به صورت زیر نوشته شود:

$$F_p(\xi)=\alpha_0+\alpha_1\xi+\ldots+\alpha_p\xi^p \tag{۱۱}$$

در این صورت می‌توان انتگرال تابع فوق را با استفاده از تقریب (۷ الف) وبه صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} I=\int_{-1}^{1}F_p(\xi)d\xi &= W_0(\alpha_0+\alpha_1\xi_0+\ldots+\alpha_p\xi_0^p)+W_1(\alpha_0+\alpha_1\xi_1+\ldots+\alpha_p\xi_1^p)+\ldots+ \\ &+W_n(\alpha_0+\alpha_1\xi_1+\ldots+\alpha_p\xi_1^p) \end{aligned} \tag{۱۲}$$

مقدار دقیق انتگرال فوق را می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۱۰) و به صورت زیر به دست آورد:

$$I=2\alpha_0+\frac{2\alpha_2}{3}+\ldots+\frac{\alpha_n}{n+1}\left[1-(-1)^{n+1}\right] \tag{۱۳}$$

با مقایسه ضرایب دو رابطه فوق می‌توان مشاهده نمود که معادله (۷ الف) در صورتی مقدار دقیق انتگرال چند جمله‌ای $F_p(\xi)$ را به دست می‌دهد که روابط زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} W_0+W_1+\ldots+W_n &= 2 \\ W_0+W_1\xi_1+\ldots+W_n\xi_n &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ W_0\xi_0^p+W_1\xi_1^p+\ldots+W_n\xi_n^p &= \frac{1}{p+1}\left[1-(-1)^{p+1}\right] \end{aligned} \tag{۱۴}$$

در دستگاه متشکل از (p+1) معادله فوق، کمیتهای $\left\{W_i,\xi_i \quad _{,\ i=0,1,2,\ldots,n}\right\}$ مجهول می‌باشند. بدیهی است که جواب دستگاه فوق را تنها می‌توان در صورت برابر بودن تعداد معادلات و مجهولات به دست آورد، یعنی:

$$p+1=2(n+1) \tag{۱۵}$$

از آنجا که n عدد صحیح است؛ p نمودار یک عدد فرد می‌باشد. جدول زیر تغییرات p را بر حسب مقادیر n نشان می‌دهد[۱۸].

با استفاده از این روش می‌توان، برای مثال، با سه برآورد تابع دقیقا انتگرال یک چند جمله‌ای با درجهٔ

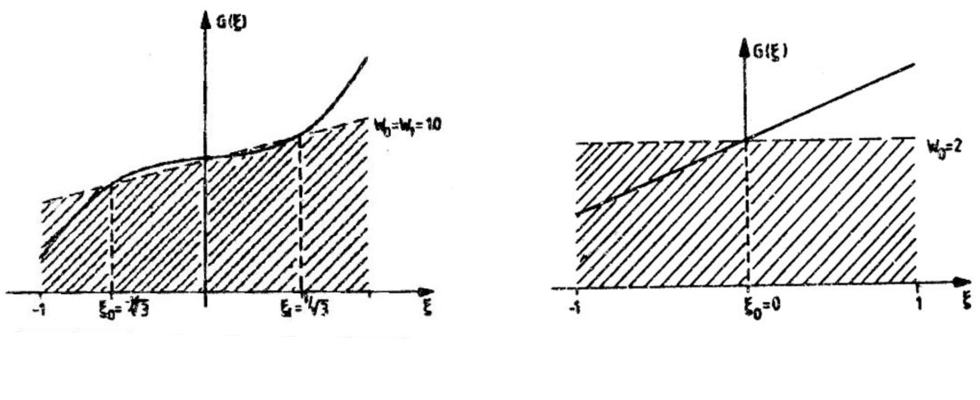
کمتر یا مساوی پنج را محاسبه نمود.

درجه چند جمله‌ای که انتگرال آن دقیقا محاسبه می‌شود (p)	تعداد نقاط نمونه گیری (n+1)
۱	۱
۳	۲
۵	۳
۷	۴

در این روش می‌توان مختصات نقاط نمونه گیری و وزنهای مربوطه را به ازای مقادیر مشخص n محاسبه نمود. معادله (۱۴)، با فرض n=0 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W_0 = 2$$
$$W_0 \xi_0 = 0 \qquad (۱۶)$$

بدیهی است که در صورت استفاده از یک نقطهٔ نمونه گیری، دقیقترین نتیجه را می‌توان با فرض قرار گیری نقطهٔ نمونه در مرکز محدوده به دست آورد که با استفاده از آن می‌توان یک چند جمله‌ای درجه اول را دقیقا انتگرالگیری نمود (شکل ۱ الف).



شکل ۱ کوادراچر گوس- لجندر. (الف) یک نقطه نمونه گیری، دقیق بازای **p=1** . (ب) دو نقطه نمونه گیری، دقیق برای **p=3**. تقریب سطح زیر منحنی، هاشور زده شده است

به روشی مشابه و با فرض n=1 داریم:

$$
\begin{aligned}
&W_0 + W_1 = 2 \\
&W_0 \xi_0 + W_1 \xi_1 = 0 \\
&W_0 \xi_0^2 + W_1 \xi_1^2 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

با حل دستگاه معادلات فوق جوابهای زیر بدست خواهد آمد(شکل ۱ب):

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 = -\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5773502591 \\
&W_0 = W_1 = 1
\end{aligned}
\qquad (۱۸)
$$

مختصات نقاط نمونه گیری گوس- لجندر و وزنهای مربوطه به ازای مقادیر بالای n در جدول زیر قرار دارند[۱۸]:

ξ_i	نقاط نمونه	W_i
	$n = 1$	
0		2.000 000 000 000 000
	$n = 2$	
$1/\sqrt{3}$		1.000 000 000 000 000
	$n = 3$	
$\sqrt{0.6}$		5/9
0.000 000 000 000 000		8/9
	$n = 4$	
0.861 136 311 594 953		0.347 854 845 137 454
0.339 981 043 584 856		0.652 145 154 862 546
	$n = 5$	
0.906 179 845 938 664		0.236 926 885 056 189
0.538 469 310 105 683		0.478 628 670 499 366
0.000 000 000 000 000		0.568 888 888 888 889
	$n = 6$	
0.932 469 514 203 152		0.171 324 492 379 170
0.661 209 386 466 265		0.360 761 573 048 139
0.238 619 186 083 197		0.467 913 934 572 691
	$n = 7$	
0.949 107 912 342 759		0.129 484 966 168 870
0.741 531 185 599 394		0.279 705 391 489 277
0.405 845 151 377 397		0.381 830 050 505 119
0.000 000 000 000 000		0.417 959 183 673 469
	$n = 8$	
0.960 289 856 497 536		0.101 228 536 290 376
0.796 666 477 413 627		0.222 381 034 453 374
0.525 532 409 916 329		0.313 706 645 877 887
0.183 434 642 495 650		0.362 683 783 378 362

در مسائل دو بعدی محاسبه انتگرالهای دوگانه‌ای به شکل زیر لازم می‌باشد.

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \qquad (۱۹)$$

از آنجا که انتگرال فوق بر روی یک محدوده مستطیلی انجام می‌گیرد، ساده ترین روش، استفاده از دو انتگرالگیری عددی مستقل در جهات ξ و η می‌باشد. بدین ترتیب فرآیند محاسبه انتگرال فوق را می‌توان با محاسبه انتگرال داخلی، با استفاده از فرمولهای بخش قبل، به صورت زیر شروع نمود:

$$\int_{0}^{1} G(\xi,\eta)\,d\xi = \sum_{i=0}^{n} W_i G(\xi_i,\eta) \qquad (۲۰)$$

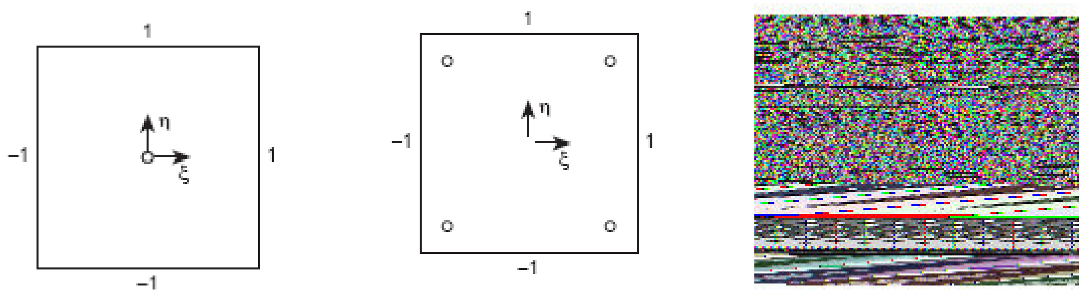
و سپس با استفاده از یک انتگرالگیری مشابه در جهت η

$$I = \int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=0}^{n} W_i G(\xi_i,\eta)\right] d\eta = \sum_{j=0}^{n}\left[W_j \sum_{i=0}^{n} W_{ij} G(\xi_i,\eta_j)\right] \qquad (۲۱)$$

تقریب زیر را برای محاسبه انتگرال دو گانه فوق بدست آورد:

$$I = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \overline{W_{ij}}\, G(\xi_i,\eta_j) \qquad \overline{W_{ij}} = W_i W_j \qquad (۲۲)$$

که در آن (ξ_i,η_i) مختصات نقاط نمونه گیری است.



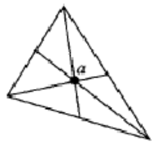
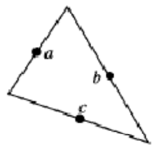
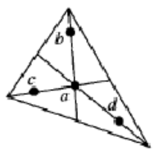
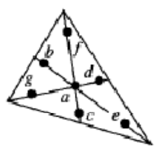
شکل ۲ نقاط نمونه گیری برای کوادراچرگوس- لجندر در چهار ضلعی‌ها

برای محدوده‌های دو بعدی مثلثی نیز می‌توان مجددا از یک روش مستقیم استفاده نمود. در صورت استفاده از یک نقطه نمونه (n=0)، روش مورد نظر دارای سه مجهول، مختصات نقاط نمونه و وزن مربوطه W_0، می‌باشد و بدیهی است که یک چند جمله‌ای درجه اول بر حسب ξو η را می‌توان با استفاده از این روش انتگرال گیری نمود. با فرض n=2، امکان انتگرال گیری دقیق یک چند جمله‌ای درجه سوم فراهم می‌گردد و الی آخر.

مقادیر ضرایب وزنی و مختصات نقاط نمونه گیری به ازای n=0,1,2,3 در شکل (۳) نشان داده شده است.

۳- نقاط فوق همگرا[1]

در این قسمت به بررسی نقاطی می‌پردازیم که درآنها دقت ودرستی حل به روش اجزای محدود، به سایر نقاط بیشتر است و از توان همگرایی بیشتری نسبت به جواب دقیق برخوردار می‌باشند. (در بعضی المانها این نقاط گوسی هستند که دارای مشخصه مذکور هستند و اصطلاحاً به آنها نقاط فوق هم گرا گفته می‌شود.)

Order	Figure	Error	Points	Triangular coordinates	Weights
Linear		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Quadratic		$R = O(h^3)$	a b c	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
Cubic		$R = O(h^4)$	a b c d	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\left.\begin{matrix}0.6, 0.2, 0.2\\0.2, 0.6, 0.2\\0.2, 0.2, 0.6\end{matrix}\right\}$	$-\frac{27}{48}$ $\frac{25}{48}$
Quintic		$R = O(h^6)$	a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\left.\begin{matrix}\alpha_1, \beta_1, \beta_1\\\beta_1, \alpha_1, \beta_1\\\beta_1, \beta_1, \alpha_1\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\alpha_2, \beta_2, \beta_2\\\beta_2, \alpha_2, \beta_2\\\beta_2, \beta_2, \alpha_2\end{matrix}\right\}$	0.225 000 000 0 0.132 394 152 7 0.125 939 180 5
			with $\alpha_1 = 0.059\,715\,871\,7$ $\beta_1 = 0.470\,142\,064\,1$ $\alpha_2 = 0.797\,426\,985\,3$ $\beta_2 = 0.101\,286\,507\,3$		

شکل ۳ چند فرمول کوادراچر برای مثلثها [۱۸]

در ادامه برای روشن شدن مطلب به یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم یک بعدی می‌پردازیم[۲] .

معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

[1] Super convergent Points

$$\frac{d}{dx}(k\frac{d}{dx}) + \beta u + Q = 0 \qquad (۲۳)$$

که شرایط مرزی، به صورت مقدار تابع u و گرادیان آن، در دو انتهای بازه داده شده است. در شکل (۴ الف) برای دو المان به طول h_1 و h_2 مقدار دقیق u و $\frac{du}{dx}$ و همچنین مقادیر بدست آمده از حل اجزای محدود با استفاده از المان خطی داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، در نقاط گرهی مقدار u بدست آمده از حل دقیق کاملا با مقدار اجزای محدود آن برابر است. در شکل (۴ ب) شاهد تفاوت زیاد، بین گرادیان ناشی از حل اجزای محدود و حل دقیق هستیم به جزء در نواحی داخلی هر المان که نزدیک به حل دقیق می‌باشد و در وسط هر المان این اختلاف به صفر می‌رسد.

در شکل (۵ الف) که از المانهای درجه دو برای حل اجزای محدود استفاده شده است، مقدار u در دو انتهای هر المان دقیق و یا نزدیک به مقدار دقیق می‌باشد، اما با دورشدن از دو انتهای هر المان و نزدیک شدن به نواحی داخلی، این اختلاف زیادتر می‌شود. و همان طور که در شکل (۵ ب) مشاهده می‌شود، تنش‌ها یا گرادیان در دو نقطه گوس مربوط به هر المان دارای مقدار دقیق می‌باشند.

این حقیقت اولین بار به طور آزمایشی توسط بارلو[1] بیان شد و این نقاط، نقاط بارلو[2] نام گرفت.

از مطالب گفته شده دو نکته بدیهی زیر برداشت می‌شود:

۱- بهترین نقاط برای جابجایی (u) در هر المان با مرتبه دلخواه همان نقاط گرهی می‌باشند.

۲- بهترین دقت برای گرادیان یا تنش، در نقاط گرهی گوس مربوط به چند جمله‌ای استفاده شده در حل اجزای محدود می‌باشد.

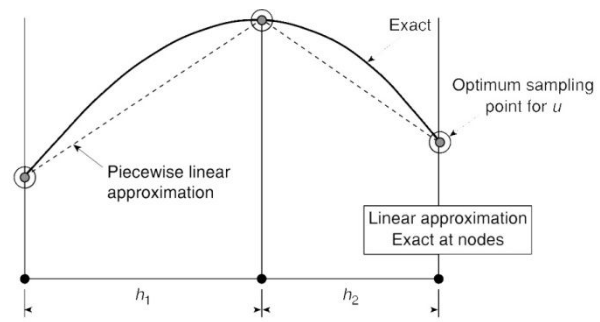
در این نقاط مرتبه همگرایی تابع یا گرادیان آن، یک مرتبه بالاتر از مقداری که از تقریب چند جمله‌ای مربوط به حل اجزای محدود انتظار می‌رود، می‌باشد؛ به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می‌شود. علت فوق هم گرا بودن این نقاط، با استفاده از تئوری هرمان[3] در مرجع [۲] نشان داده

[1] Barlow
[2] *Barlow points*
[3] Herrmann theorem

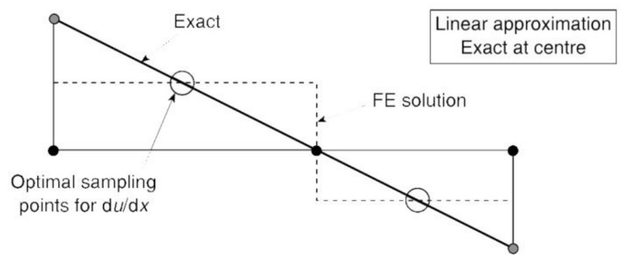
شده است.

با یک نقطهٔ گوس در وسط المان می‌توان تمام توابع خطی که از آن نقطه عبور می‌کنند را دقیقا انتگرال گیری کرد(شکل ۶)، از این رو اگر تابع تنش مسئله به صورت خطی باشد برای هر تابع از آن، مقدار تنش در نقطهٔ گوس کاملا دقیق می‌باشد. به طور مشابه برای توابع تنش درجهٔ دو و سه این خاصیت برقرار است.

در شکل (۷) بهترین نقاط نمونه برای گرادیان در سمت چپ، و کمترین نقاط لازم برای انتگرال گیری عددی در سمت راست جدول نشان داده شده است. همان طورکه مشاهده می‌شود، برای المان مربعی



(الف)



(ب)

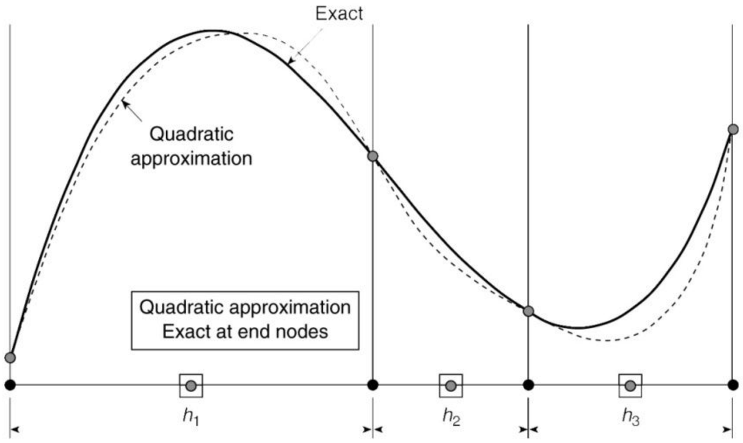
شکل ۴ بهترین نقاط نمونه برای تابع (الف) و گرادیان آن (ب) در یک بعد (المانهای خطی)

نقاط گوس بر نقاط فوق همگرا منطبق می‌باشند اما در المان مثلثی این نقاط فوق همگرا وجود ندارند ولی نتایج عددی بدست آمده توسط موآن[1]، فوق همگرایی نقاطی که در شکل، برای المان مثلثی

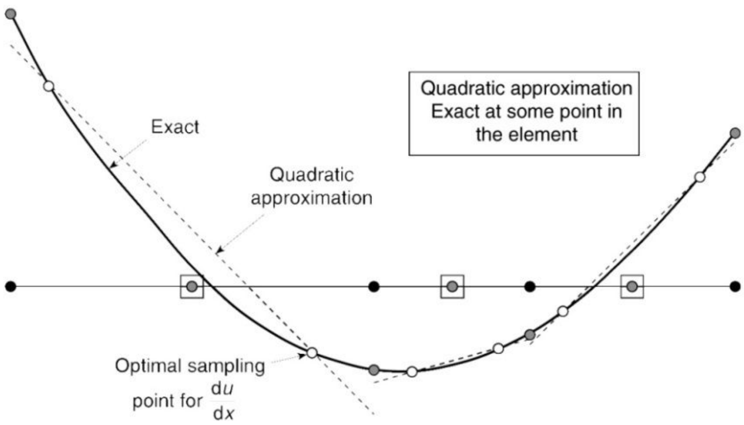
[1] Moan

نشان داده شده است را تایید می‌کند.

آنالیز یک تیر طره، با چهار المان مستطیلی درجه دو در شکل (۸) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، تنش در نقاط گوس در مقایسه با دیگر نقاط از همگرایی و دقت بسیار زیادی برخوردار می‌باشد وبا استفاده از روش برونیابی که توسط هینتون و کامبل در بخش ۲-۳-۱ به آن اشاره شد، مقادیر گرهی تنش محاسبه شده است.

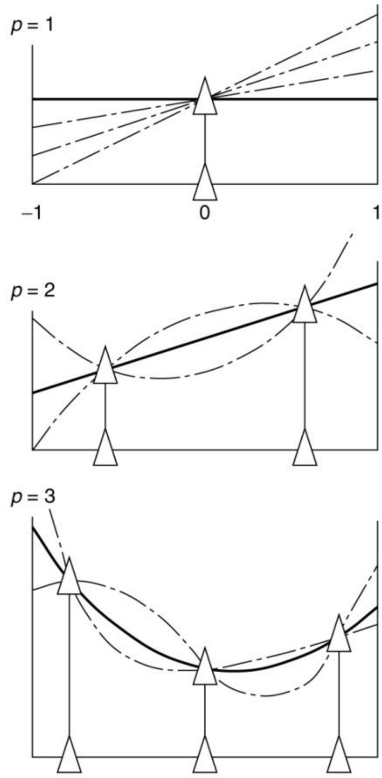


(الف)

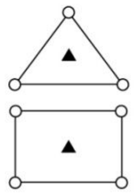
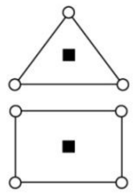
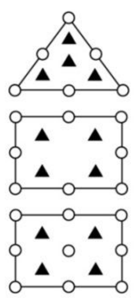
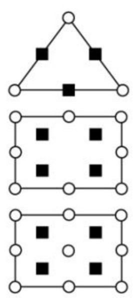


(ب)

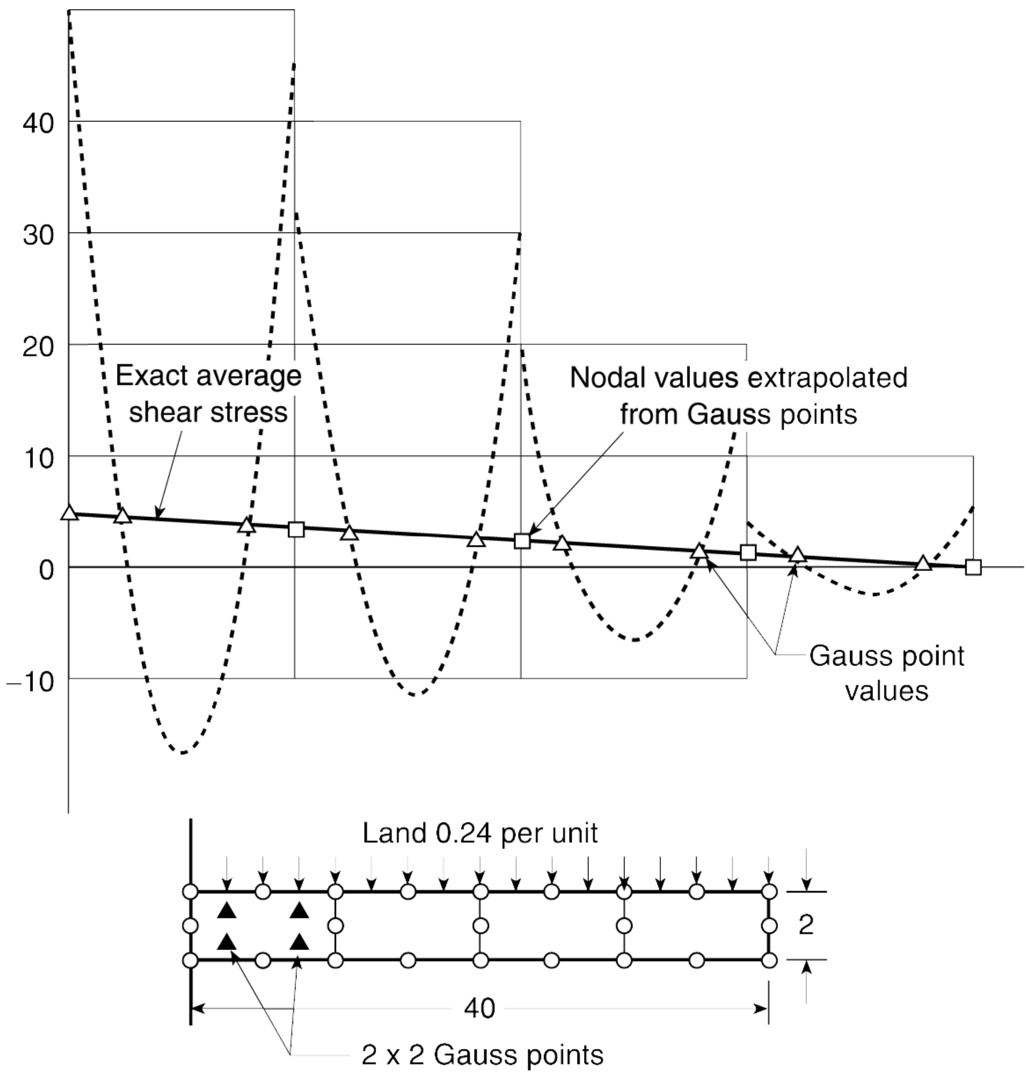
شکل ۵ بهترین نقاط نمونه برای تابع (الف) و گرادیان آن (ب) در یک بعد (المانهای درجه دو)



شکل۶ خاصیت نقاط انتگرال گیری گوس در تضمین همگرایی گرادیان[۲]

p	Optimal error $O\,(h^{2(p-m)+2})$	Minimal quadrature $O\,(h^{2(p-m)+1})$
1	$O\,(h^2)$	$\geq O\,(h^2)$
	 $O\,(h^2)$ $O\,(h^2)$	 $O\,(h^2)$ $O\,(h^2)$
2	$O\,(h^4)$	$\geq O\,(h^3)$
	 $O\,(h^4)$ $O\,(h^4)$ $O\,(h^4)$	 $O\,(h^3)$ $O\,(h^4)$ $O\,(h^4)$

شکل۷ نقاط نمونه فوق هم گرا و نقاط انتگرالگیری گوس[۲]



شکل ۸ تیر طره با چهار المان درجه دو (Q_8). مقدار تنش در نقاط گوس و مقادیر گرهی بدست آمده به کمک برونیابی[۲]

ضمیمه ۲

روش جبهه پیش رونده برای تولید شبکه اجزای محدود

۱- تاریخچه

این روش اولین بار توسط جورج[1] در سال ۱۹۷۱ ارائه شد. فرم کلاسیک این روش برای حالت‌های دو بعدی در سال ۱۹۸۵ توسط لو[2] و در سال ۱۹۸۷ توسط پرایر[3] و همکارانش مطرح شد. پس از آن تحقیقات افرادی چون لونر و پاریخ[4] ۱۹۸۸، گلگلاب[5] ۱۹۸۹، ماوریپلیس[6] ۱۹۹۲ و شوستکو و لونر[7] ۱۹۹۲ باعث پیشرفت فراوان این روش شد. امروزه این روش، روشی بسیار قوی و کامل برای تولید مش‌هایی با کیفیت بالا در شکل‌های دلخواه می‌باشد. تحقیقات بلاکر و استفانسون[8] در سال ۱۹۹۱ و بلاکر و میزر[9] در سال ۱۹۹۳، تولید مش‌هایی با المان‌های چهار ضلعی و شش ضلعی را در فضای دو بعدی و سه بعدی نشان می‌دهد. این روش یکپارچگی مرزی را حفظ می‌کند و دارای این قابلیت است که مثلث‌هایی با کیفیت بالا در مرزها تولید کند. در این روش منحنی‌های مرزی داخلی و خارجی دامنه محاسبات که عموما به وسیله اسپلاینهای تکه تکه مکعبی که بر مبنای مجموعه نقاطی که توسط کاربر معرفی شده است، تعریف شده اند؛ با تقسیم شدن به قطعات خطوط مستقیم که مرتبط

[1] A.George
[2] Lo
[3] Peraire
[4] Lohner and Parikh
[5] Golgolab
[6] Mavriplis
[7] Shoostko and Lohner
[8] Blacker and Stephenson
[9] Blacker and Meyers

با توزیع نقاط دامنه مرزی هستند، گسسته سازی می‌شوند. بدین ترتیب یکپارچگی مرز حفظ می‌شود. این مجموعه از قطعات مستقیم خطی، جبهه اولیه را تشکیل می‌دهند. سپس این جبهه اولیه به سمت داخل دامنه با یک فرایند گام به گام نقل مکان می‌کند. بدین ترتیب نقاط جدید و اضلاع جدید تولید می‌شوند و اضلاع قدیمی حذف می‌شوند و المان‌های مثلثی تشکیل می‌شوند. اضلاع یک مثلث جدید متشکل از دو نقطه از یک ضلع جبهه اولیه و یک نقطه دیگر بر روی مرز جبهه اولیه، یا نقاط تازه تولید شده در داخل جبهه اولیه است. این فرایند تا زمانی که هیچ ضلعی بر روی جبهه اولیه باقی نمانده باشد ادامه پیدا می‌کند. این امر بدین معنا است که جبهه اولیه از بین رفته و یک دامنه مثلثی شده را پشت سر می‌گذارد. قابل توجه است که انتخاب اولیه نقاط بر روی منحنی‌های مرزی به اندازه المانها مرتبط است زیرا اضلاع در جبهه اولیه، همان اضلاع در مش بندی نهایی هستند[۳۸].

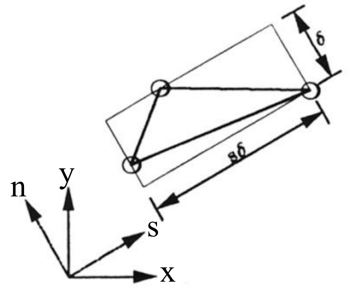
۲- کنترل فرایند تولید مش

هر روش که برای تولید مش استفاده می‌شود باید از یک سیستم کنترل کننده مش در ارتباط با اندازه و شکل المانها برخوردار باشد. اصلی ترین کار برای کنترل اندازه المانها در روش AFT (حالت دو بعدی) تعریف مشخصات دقیق المانها برای هر المان مورد نظر در دامنه محاسباتی با استفاده از مش زمینه است. کنترل روی مشخصه‌های هر المان، با یک درونیابی از پارامترهای مشخص شده روی مش زمینه بدست می‌آید. اندازه، شکل و جهت المانهای مثلثی، با سه پارامتر مستقل توصیف می‌شود:(شکل ۱)

۱. پارامتر اندازه δ

۲. پارامتر کشیدگی S

۳. جهت قرار گیری المان که با زاویه ϕ در شکل نشان داده شده است و با دو بردار مستقل و عمود بر هم s,n مشخص می‌شود[۳۹].

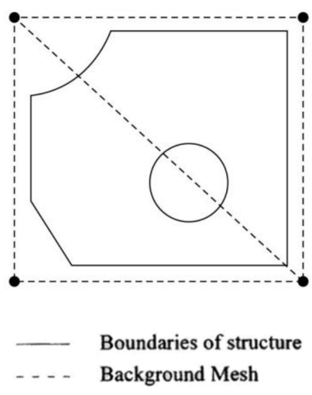


شکل ۱ پارامترهای المان

برای مشخص کردن یک المان، کاربر می‌تواند چهار پارامتر n_x, n_y, S, δ را تعریف کند. در اینجا n_y و n_x مولفه‌های بردار n با در نظر گرفتن مختصات کلی oxy هستند. برای کنترل شبکه، مقادیر مورد نیاز این پارامترها در هر یک از گره‌های مش زمینه مشخص شده اند و برای هر نقطه داخل ناحیه مورد نظر، این پارامترها از طریق درون یابی مشخص می‌شوند.

مشخصات مش زمینه معمولا توسط کاربر و به صورت دستی تعریف می‌شود. این مش زمینه می‌تواند برای اشکال پیچیده نیز نسبتا بزرگ باشد. مش زمینه لازم نیست که دقیقا بر روی مرزهای ناحیه مورد نظر برای مش بندی منطبق باشد و فقط کافی است که این ناحیه را پوشش دهد(شکل ۲).

در برنامه ADAPT در صورتی که مش زمینه وجود نداشته باشد، یک مش زمینه به صورت پیش فرض در نظر گرفته می‌شود که شامل دو المان مثلثی یکسان با چگالی مشابه می‌باشد. تراکم یا چگالی مش زمینه که ارتباط مستقیم با پارامتر δ دارد می‌تواند با مقدار پنج درصد اندازه قطر مش زمینه مشخص شود. در این برنامه که از روش تطبیقی بهره می‌برد، از مش اولیه به عنوان مش زمینه



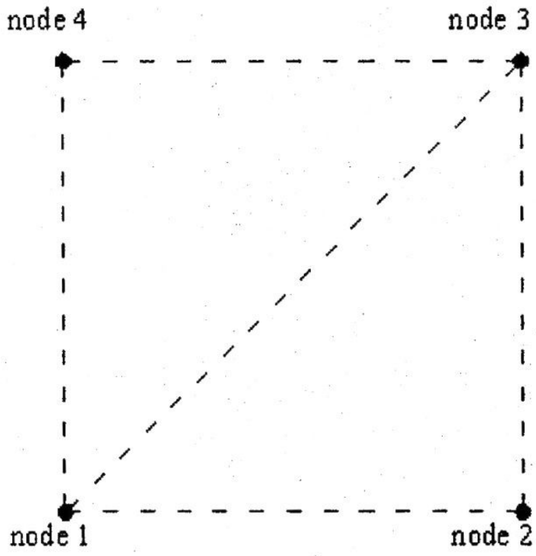
شکل ۲ مش زمینه برای دامنه مسئله مورد نظر [۲]

برای مرحله بعدی استفاده می‌شود، در اینصورت مشخصات المانها با دقت بیشتری برای مرحله بعد بدست می‌آیند.

همان طور که بیان شد، در روش AFT برای هر نقطه‌ای که قرار است یکی از نقاط نهایی دامنه مش بندی شده باشد، چهار پارامتر مستقل وجود دارد. این چهار پارامتر در حقیقت مربوط به یک المان هستند ولی برای تشکیل این المان که به صورت مثلثی است ابتدا باید مشخصات سه گره این مثلث موجود باشد و به عبارت دیگر باید پارامترهای آن مشخص شده باشد. در روش AFT مشخصات دو راس از این سه راس همیشه از قبل معلوم است و مشخصات راس سوم از روی درون یابی از مش زمینه به دست می‌آید. برای هر نقطه منتخب که جزئی از مجموعه نقاط مش نهایی خواهد بود این درون یابی باید انجام شود. پارامترهای مش زمینه در گره‌های مربوط به آن از قبل توسط کاربر مشخص شده است.

در قسمت ضمیمۀ نحوه تهیه فایل ورودی برنامه، چگونگی معرفی مشخصات مش زمینه بیان شده است.

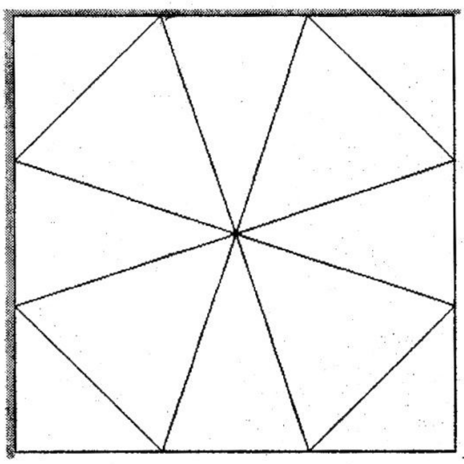
در ادامه برای درک بیشتر مفهوم مش زمینه و تاثیر پارامترهای آن بر مش بندی نهایی شکل‌های ۳ تا ۹ ارائه شده اند[۳۹].



Background Mesh

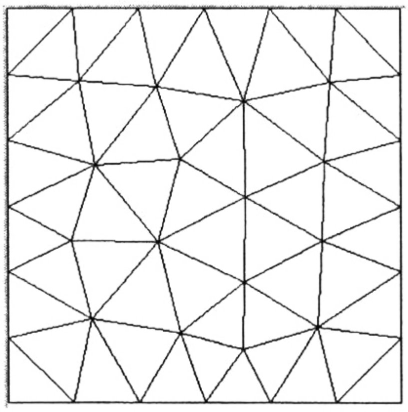
element	node1	node2	node3
1	1	2	3
2	3	4	1

شکل ۳ مشخصات هندسی مش زمینه



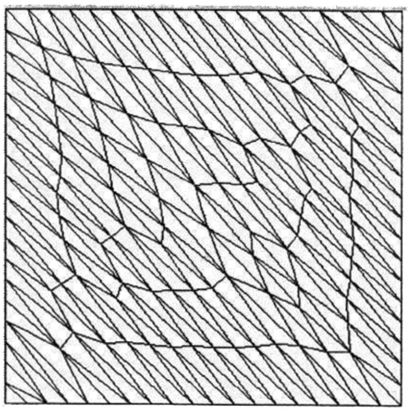
node	X	Y	delta	S	nx	ny
1	0.0	0.0	5.0	1.0	1.	1.
2	10.0	0.0	5.0	1.0	1.	1.
3	10.0	10.0	5.0	1.0	1.	1.
4	0.0	10.0	5.0	1.0	1.	1.

شکل ۴ مشخصات نقاط مش زمینه و شبکه نهایی



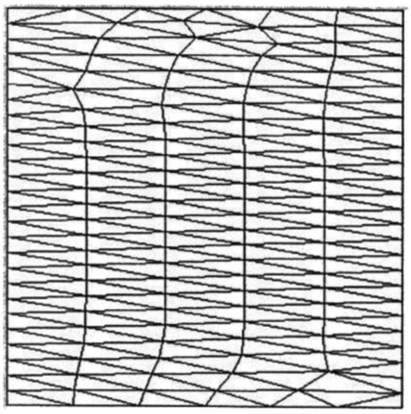
node	X	Y	delta	S	nx	ny
1	0.0	0.0	2.0	1.0	1.	1.
2	10.0	0.0	2.0	1.0	1.	1.
3	10.0	10.0	2.0	1.0	1.	1.
4	0.0	10.0	2.0	1.0	1.	1.

شکل ۵ تاثیر پارامتر δ بر شبکه نهایی



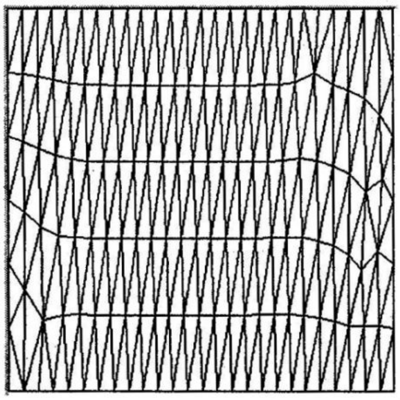
node	X	Y	delta	S	nx	ny
1	0.0	0.0	2.0	0.2	1.	1.
2	10.0	0.0	2.0	0.2	1.	1.
3	10.0	10.0	2.0	0.2	1.	1.
4	0.0	10.0	2.0	0.2	1.	1.

شکل ۶ تاثیر پارامتر **S** بر شبکه نهایی



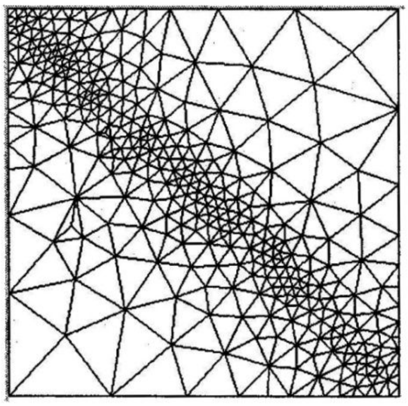
node	X	Y	delta	S	nx	ny
1	0.0	0.0	2.0	0.2	0.	1.
2	10.0	0.0	2.0	0.2	0.	1.
3	10.0	10.0	2.0	0.2	0.	1.
4	0.0	10.0	2.0	0.2	0.	1.

شکل ۷ تاثیر پارامتر $\mathbf{n_x}$ بر شبکه نهایی



node	X	Y	delta	s	nx	ny
1	0.0	0.0	2.0	0.2	1.	0.
2	10.0	0.0	2.0	0.2	1.	0.
3	10.0	10.0	2.0	0.2	1.	0.
4	0.0	10.0	2.0	0.2	1.	0.

شکل ۸ تاثیر پارامتر $\mathbf{n_y}$ بر شبکه نهایی



node	X	Y	delta	s	nx	ny
1	0.0	0.0	4.0	1.0	1.	1.
2	10.0	0.0	0.2	1.0	1.	1.
3	10.0	10.0	4.0	1.0	1.	1.
4	0.0	10.0	0.2	1.0	1.	1.

شکل ۹ پارمترهای مش زمینه و تاثیر آن بر شبکه نهایی

۳- الگوریتم روش جبهه پیش رونده برای تولید شبکه اجزای محدود

اساس روش AFT بر مبنای تولید همزمان گره‌ها و المان‌ها است. اعتبار مثلث‌های به وجود آمده همزمان با تولید آنها توسط برنامه کنترل می‌شود. یک مثلث معتبر باید در داخل جبهه در حال مش بندی و دارای مشخصات درون یابی شده از مش زمینه باشد. در ادامه الگوریتم روش AFT به صورت گام به گام ارائه می‌شود[۳۹].

۱- ابتدا جبهه اولیه برای تولید شبکه تشکیل می‌شود. این جبهه یک چند ضلعی شامل یک سری پاره خط‌ها و نقاط است که مرز اولیه ناحیه مورد نظر برای مش بندی را تشکیل می‌دهد. به این جبهه، جبهه فعال می‌گوییم و نقاط روی آن را نقاط فعال می‌نامیم. سپس با استفاده از درون یابی از

روی مش زمینه پارامترهای نقاط فعال به دست می‌آید. این پارامترها همان طور که قبلا ذکر شد برای بدست آوردن نقطه‌ای که قرار است با دو نقطه مجاور، یک المان را تشکیل دهند، استفاده می‌شوند.

۲- انتخاب کوچکترین ضلع روی جبهه فعال که طول آن برابر l است. مقدار δ در این مرحله با درون یابی از روی دو نقطه تشکیل دهنده این پاره خط (کوچکترین ضلع جبهه فعال) به دست می‌آید. (پس از تشکیل مثلث جدی، این ضلع دیگر ضلع فعال نامیده نمی‌شود و از لیست اضلاع فعال خارج می‌شود.)

۳- محاسبه محل قرار گیری نقطه مطلوب (K_{ideal}) بر روی عمود منصف ضلع مورد نظر (کوچکترین ضلع جبهه فعال) به طوری که یک مثلث متساوی الاضلاع با راس K_{ideal} ایجاد شود. در اینجا با تعریف جهت حرکت بر روی مرزها از به وجود آمدن این مثلث در بیرون از جبهه فعال خوداری می‌کنیم. جهت حرکت روی مرزها ی خارجی، پادساعتگرد و روی مرزهای داخلی، ساعتگرد است.

۴- ساختن یک دایره با مرکز K_{ideal} و شعاع $r = 0.8\delta'$ که مقادیر δ' از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\delta' = \begin{cases} 0.55l & if \;\; \delta \langle 0.55l \\ \delta & if \;\; 0.55l \le \delta \le 2l \\ 2l & if \;\; \delta \rangle 2l \end{cases} \qquad (۱)$$

این طریقه مقدار دهی به r از به وجود آمدن مثلث‌های نا هم شکل جلوگیری می‌کند و قابلیت تطبیق هندسی را تضمین می‌نماید.

۵- پیدا کردن نقاط فعالی که در این دایره قرار دارند؛ در این مرحله لیستی از این نقاط فعال به ترتیب فاصله آنها از نقطه K_{ideal} تهیه می‌شود. از این لیست نزدیک ترین نقطه به نقطه K_{ideal}، بهترین نقطه برای تشکیل مثلث است.

۶- اگر هیچ نقطه فعالی در این دایره وجود نداشت، نقطه K_{ideal} به عنوان مورد نظر برای تشکیل مثلث انتخاب می‌شود، در صورتی که شرایط زیر را داشته باشد:

– این نقطه (K_{ideal}) نباید در داخل مثلث‌های موجود (از قبل تولید شده) قرار داشته باشد.

– هیچ یک از دوضلع المان و در این جا مثلث جدید، نباید با اضلاع مثلث‌های تولید شده موجود تداخل داشته باشند.

۷- اگر مرحله ۶ با موفقیت روبرو نشد، دومین ضلع کوچک از جبهه فعال انتخاب می‌شود و به مرحله ۳ می‌رود.

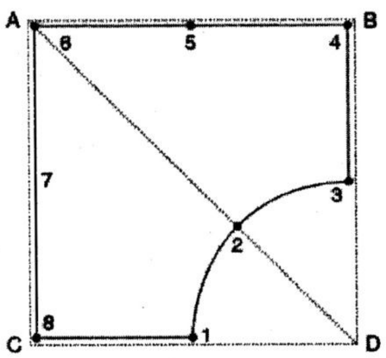
۸- اگر مرحله ۵ یا ۶ با موفقیت روبرو نشد، مثلث جدید تولید می‌شود و جبهه فعال جدید شکل می‌گیرد که شامل اضلاع فعال و نقاط فعال جدید است. پس از تشکیل جبهه فعال جدید روند کار از مرحله ۲ دوباره آغاز می‌شود.

۹- این فرایند تا جایی که هیچ ضلع فعالی روی جبهه وجود نداشته باشد ادامه پیدا می‌کند. در این حالت می‌توان گفت که کل دامنه مورد نظر مش بندی شده است.

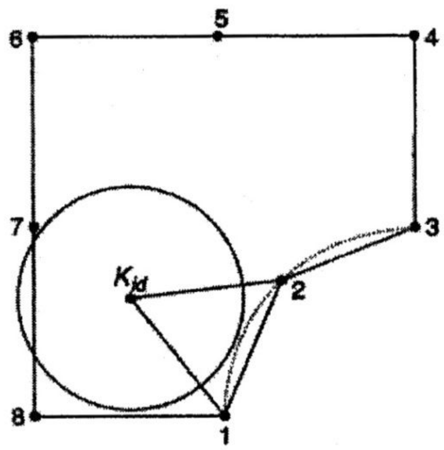
در ادامه جهت آشنایی بیشتربا مراحل این روش، به مش بندی دامنه شکل ۱۰ می‌پردازیم.

این شکل در فضای دو بعدی است و مربعی را نشان می‌دهد که یک ربع دایره از گوشه‌های آن کم شده است. مش زمینه از دو مثلث ABD و ACD تشکیل شده است. مقادیر پارامترهای مش زمینه در هر چهار نقطه A,B,C,D به صورت زیر است:

$$\delta = 1 \quad S = 1 \quad n_x = 1 \quad n_y = 0$$



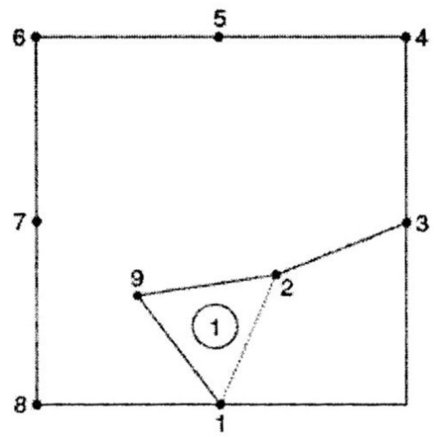
شکل ۱۰ مش زمینه صفحه مربعی که یک چهارم دایره از گوشه آن کم شده است



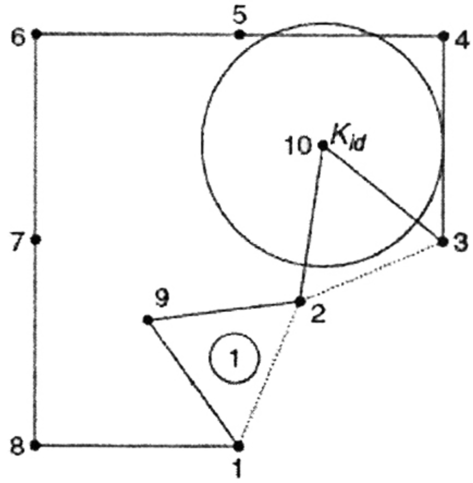
شکل ۱۱ تعیین محل نقطه **K_{ideal}** برای تولید اولین المان

همان طور که در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود، نقاط ۱ تا ۸ انتخاب شده اند و جبهه اولیه تشکیل شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود دو ضلع ۲-۱ و ۳-۲ از همه کوچکترند و ضلع ۲-۱ انتخاب می‌شود و همان طور که در شکل پیداست نقطه K_{ideal} به وجود آمده است. سپس دایره‌ای به شعاع δ' تولید شده است. این دایره هیچ نقطه فعالی را شامل نی شود و طبق بند ۶ الگوریتم AFT نقطه K_{ideal} شرایط تشکیل مثلث را دارا است؛ پس نقطه K_{ideal} پذیرفته می‌شود و مثلث جدید شکل می‌گیرد. این مثلث اولین المان تولید شده خواهد بود. در این مرحله جبهه جدید به وجود می‌آید و ضلع ۲-۱ به عنوان ضلع غیر فعال شناخته می‌شود.

active nodes: 1,9,2,3,4,5,6,7,8
active sides: 1-9, 9-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
passive nodes: none
passive faces: 1-2
npoint (total number of point): 9
nelem (total number of elements created): 1
nptr (number of point remainung, i.e. active nodes): 9

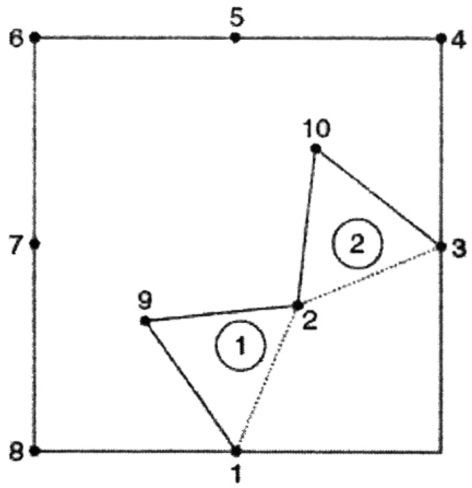


شکل ۱۲ تولید اولین المان



شکل ۱۳ تعیین نقطه **K_{ideal}** برای تولید دومین المان

active nodes: 1,9,2,10,3,4,5,6,7,8
active sides: 1-9, 9-2, 2-10, 10-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
passive nodes: none
passive faces: 1-2, 2-3
npoint (total number of point): 10
nelem (total number of elements created): 2
nptr (number of point remainung, i.e. active nodes): 10



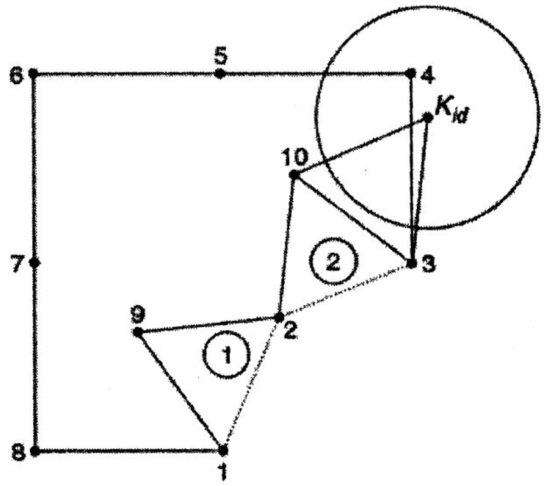
شکل ۱۴ تولید دومین المان

در مرحله بعدی ضلع ۳-۲ به عنوان کوچکترین ضلع فعال انتخاب می‌شود (شکل ۱۳).

البته اضلاع ۹-۲ و ۹-۱ هم اندازه ضلع ۳-۲ هستند و در مراحل بعدی مد نظر قرار می‌گیرند. شایان ذکر است که ترتیب انتخاب کوچکترین ضلع از بین اضلاع هم انداز، تاثیری بر شکل نهایی مش تولید

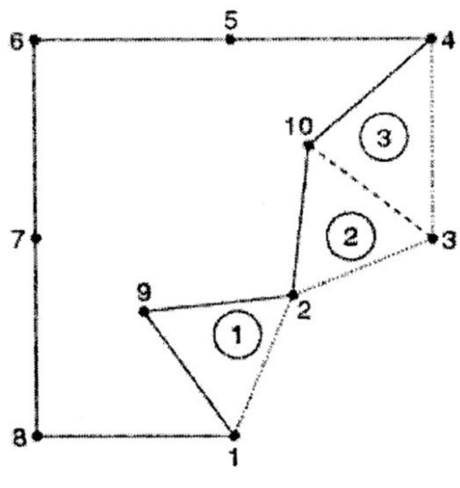
شده ندارد.

تمام عملیاتی که در مرحله قبل برای تشکیل المان ۱ انجام شد این بار بر روی ضلع ۳-۲ برای تشکیل المان جدید تکرار می‌شود و باز هم نقطه K_{ideal} به عنوان نقطه مورد نظر برای تشکیل المان مثلثی انتخاب می‌شود و دومین المان نیز بدین ترتیب تولید می‌شود (شکل ۱۴).



شکل ۱۵ تعیین محل نقطه K_{ideal} برای تولید سومین المان

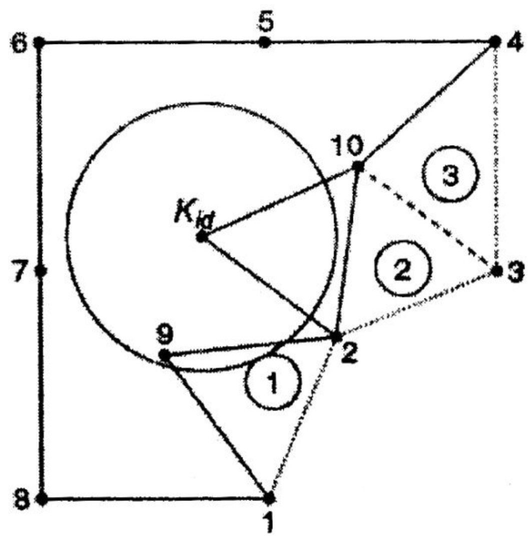
active nodes: 1,9,2,10, 4,5,6,7,8
active sides: 1-9, 9-2, 2-10, 10-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
passive nodes: 3
passive faces: 1-2, 2-3, 3-4
npoint (total number of point): 10
nelem (total number of elements created): 3
nptr (number of point remainung, i.e. active nodes): 9



شکل ۱۶ تولید سومین المان

در مرحله بعد ضلع ۳-۱۰ انتخاب می‌شود (شکل ۱۵). همان طور که در شکل قابل ملاحظه است نزدیکترین نقطه فعال به نقطه K_{ideal} که در دایره قرار دارد، نقطه شماره ۴ است که به عنوان راس مثلث جدید یعنی سومین المان انتخاب می‌شود (شکل ۱۶). ضمن اینکه K_{ideal} شرایط تشکیل مثلث و المان جدید را نداشت، چون خارج از محدوده جبهه فعال بود؛ یعنی اگر گره شماره ۴ در داخل دایره قرار نداشت، باید شرایط نقطه K_{ideal} برای تولید مثلث بررسی می‌کردیم و همان طور که ملاحظه می‌شود این نقطه (K_{ideal}) شرایط تشکیل یک المان معتبر را ندارد.

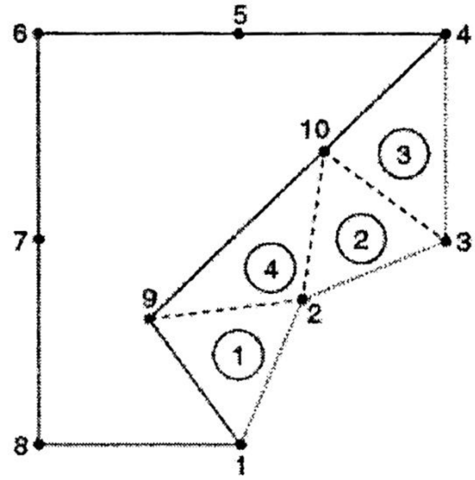
در مرحله بعد ضلع ۱۰-۲ به عنوان کوچکترین ضلع فعال انتخاب می‌شود و دایره به مرکز K_{ideal}، شامل نقطه ۹ می‌باشد (شکل ۱۷). بدین ترتیب نقطه فعال شماره ۹ به عنوان راس مثلث جدید انتخاب می‌شود و المان چهارم همان طور که در شکل ۱۸ پیدا است، تولید می‌شود.



شکل ۱۷ تعیین محل نقطه $\mathbf{K_{ideal}}$ برای تولید چهارمین المان

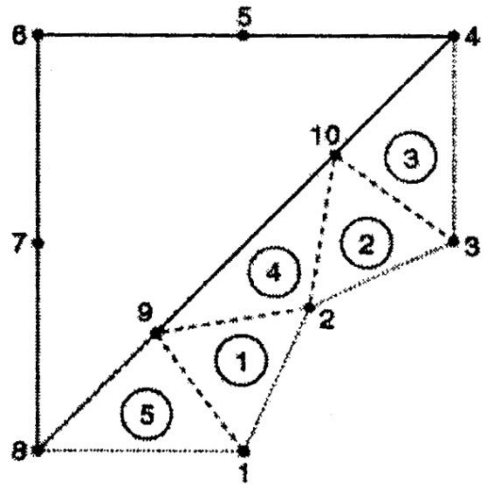
باقی المانها نیز به ترتیبی که گفته شد تولید می‌شوند و مش بندی نهایی به صورت شکل ۲۲ به دست می‌آید.

active nodes: 1,9, 10, 4,5,6,7,8
active sides: 1-9, 9-10, 10-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
passive nodes: 2, 3
passive faces: 1-2, 2-3, 3-4
npoint (total number of point): 10
nelem (total number of elements created): 4
nptr (number of point remainung, i.e. active nodes): 8

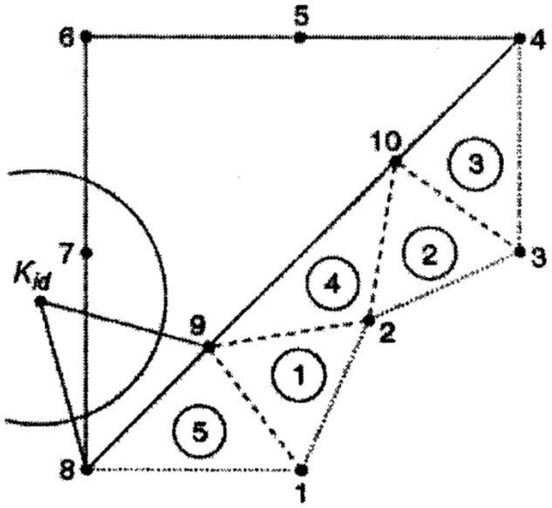


شکل ۱۸ تولید چهارمین المان

active nodes: 9, 10, 4,5,6,7,8
active sides: 9-10, 10-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9
passive nodes: 1, 2, 3
passive faces: 8-1, 1-2, 2-3, 3-4
npoint (total number of point): 10
nelem (total number of elements created): 5
nptr (number of point remainung, i.e. active nodes): 7

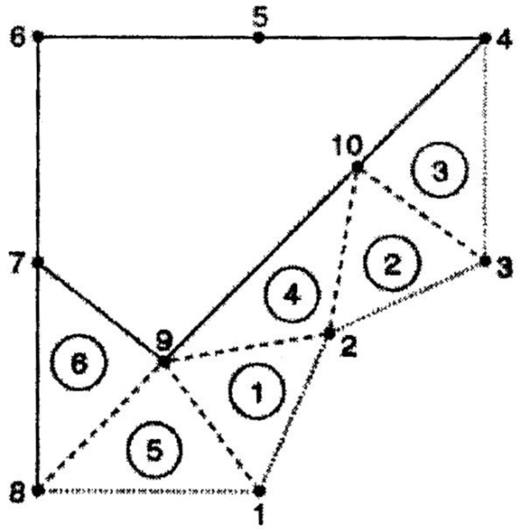


شکل ۱۹ تولید پنجمین المان



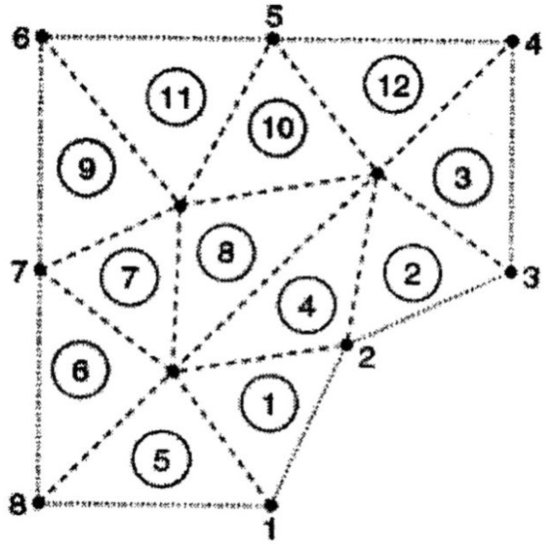
شکل ۲۰ تعیین محل نقطه **K_{ideal}** برای تولید ششمین المان

active nodes: 9, 10, 4,5,6,7
active sides: 9-10, 10-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-9
passive nodes:8, 1, 2, 3
passive faces: 7-8, 8-1, 1-2, 2-3, 3-4
npoint (total number of point): 10
nelem (total number of elements created): 6
nptr (number of point remainung, i.e. active nodes): 6



شکل ۲۱ تولید ششمین المان

active nodes: none
active sides: none
passive nodes: 1, 2, 3,4,5,6,7,8
passive faces:, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-1
npoint (total number of point): 11
nelem (total number of elements created): 12
nptr (number of point remainung, i.e. active nodes): none



شکل ۲۲ مش بندی نهای

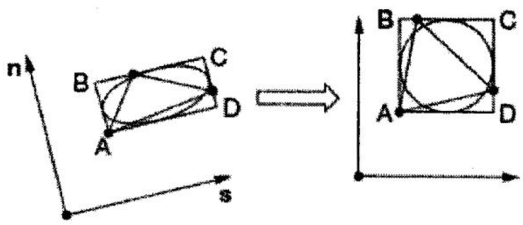
همان طور که درشکل ۲۲ ملاحظه می‌شود، هیچ ضلع فعالی وجود ندارد و این به معنای پایان فرایند تولید مش به روش جبهه پیش رونده می‌باشد.

۴- تطبیق و نحوه اثر پارامترها در تشکیل المان‌ها

اگر پارامتر S در یک نقطه مورد نظر از دامنه محاسباتی برابر واحد باشد، مش بندی اطراف این نقطه باید شامل مثلث‌های تقریبا متساوی الاضلاع باشد. می‌توان مثلث‌های کشیده شده با پارامترهای S متغیر و در جهت‌های مختلف را به وسیله نگاشت ریاضی به دست آورد؛ که در این صورت تولید المانها در فضای پارامتری صورت می‌گیرد. AFT از این روش برای تولید المانها استفاده می‌کند که در آن مثلث‌های کشیده شده موجود در فضای فیزیکی به وسیله مثلث‌های تقریبا متساوی الاضلاع در فضای پارامتری، تولید می‌شوند (شکل ۲۳).

انتقال از فضای فیزیکی یا فضای واقعی مسئله به فضای پارامتری، شامل چرخش و کشیدن یا فشردن

المانها است. در این انتقال یک بردار با بردار مشخصه $\vec{X}$ در فضای فیزیکی، با بردار $\vec{\tilde{X}}$ در فضای پارامتری مشخص می‌شود. برای این انتقال رابطه (۲) به کار گرفته می‌شود.



شکل ۲۳ انتقال از فضای فیزیکی به فضای پارامتری

$$\vec{\tilde{X}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{S}s_x & \frac{1}{S}s_y \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \tilde{X} \tag{۲}$$

پارامتر کشیدگی المان S و بردارهای n,s در شکل ۱ قابل مشاهده هستند. مولفه‌های بردارهای n,s به صورت زیر هستند:

$$(s_x, s_y) = (\cos\phi, \sin\phi) \tag{۳}$$

$$(n_x, n_y) = (-\cos\phi, \sin\phi) \tag{۴}$$

بدین ترتیب فرایند مثلث در فضای پارامتری انجام می‌شودو سپس با یک انتقال معکوس از فضای پارامتری به فضای فیزیکی، مثلث مورد نظر با کشیدگی و جهت دلخواه در فضای فیزیکی به دست می‌آید.

ضمیمه ۳

آشنایی با نحوه تهیه فایل ورودی برنامه ADAPT

در این ضمیمه به بیان جزئیات و معرفی پارامترهای موجود در فایل ورودی برنامه ADAPT، و در نهایت چگونگی تهیه آن برای هر مسئله دلخواه می‌پردازیم.

به طور پیش فرض، برنامه فایل ورودی خود را با پسوند dat. فرا می‌خواند. این فایل باید در همان پوشه‌ای که برنامه از آن اجرا شده است، قرار گیرد.

فایل ورودی برنامه از چهار بخش کلی زیر تشکیل می‌شود:

۱) general data

شامل اطلاعات کلی مربوط به فایل ورودی و خروجی برنامه می‌باشد.

۲) mesh generation data

در این بخش به بیان اطلاعاتی در مورد شکل هندسی مدل و تولید مرزها، شبکه بندی دامنه، بارگذاری و شرایط مرزی می‌پردازیم.

۳) finite element data

دارای اطلاعاتی مربوط به نوع تحلیل اجزای محدود (تنش مسطح، کرنش مسطح، متقارن محوری) و خواص مصالح می‌باشد.

۴) adaptivity data

شامل پارامترهای مربوط به تخمین خطا و حل تطبیقی، به ویژه تعیین میزان دقت مورد نیاز مسئله می‌باشد.

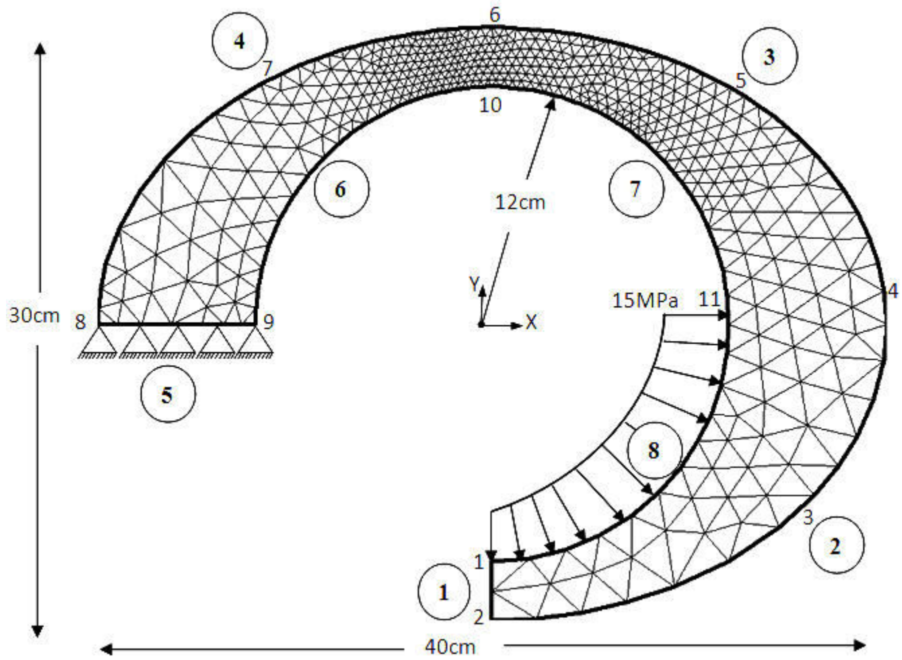
جهت آشنایی بیشتر با جزئیات فایل ورودی، در شکل (۱) یک نمونه از فایل ورودی برنامه نشان داده شده است. اطلاعات این فایل مربوط به یک بیضی با سوراخ دایره‌ای شکل است که در قسمتی از مرز داخلی خود تحت بار گسترده قرار دارد و با فرض کرنش مسطح تحلیل شده است. در شکل (۲) مشخصات و شبکه نهایی مربوط به این فایل ورودی مشاهده می‌شود.

```
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
@@                                                                    @@
@@                                                                    @@
@@         aaaa      dddddd       aaaa      pppppp     tttttttt       @@
@@       aa    aa    dd    dd    aa    aa    pp    pp      tt         @@
@@       aa    aa    dd    dd    aa    aa    pp    pp      tt         @@
@@       aaaaaaaa    dd    dd    aaaaaaaa    pppppp        tt         @@
@@       aa    aa    dd    dd    aa    aa    pp            tt         @@
@@       aa    aa    dd    dd    aa    aa    pp            tt         @@
@@       aa    aa    dddddd      aa    aa    pp            tt         @@
@@                                                                    @@
@@                                                                    @@
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
@@@                        adapt data file                            @@@
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
### general data #######################################################
- jobname (4 chars only)
   elci
- title
   ellipse with circle hole under internal pressure
- output control
- mesg fema adap
    0    0    1
### mesh generation data ###############################################
- node nreg nseg poib eleb poig dofn lpoi ledg fpoi fedg para corr poco
   6    1    8    0    0    11   2    0    1    0    1    0    1    1
- esiz
  5.0
- background mesh
- parameter values
- geometry points
     1    0    0.0000   -0.1200
     2    0    0.0000   -0.1500
     3    1    0.1697    315.00
     4    0    0.2000    0.0000
     5    1    0.1697    45.000
     6    0    0.0000    0.1500
     7    1    0.1697    135.00
     8    0   -0.2000    0.0000
     9    0   -0.1200    0.0000
     10   0    0.0000    0.1200
     11   0    0.1200    0.0000
- polar coordinate systems
     1    0.000         0.000
- boundary segment data
     1   2
      1   2
      0   0
      1       0.0       0.0       0.0       0.0        0.0
     2   3
```

```
      2   3   4
      1   2
      3        0.0       0.0       0.2       0.15       0.0
     3   3
      4   5   6
      2   1
      3        0.0       0.0       0.2       0.15       0.0
     4   3
      6   7   8
      1   2
      3        0.0       0.0       0.20      0.15       0.0
     5   2
      8   9
      0   0
      1        0.0       0.0       0.0        0.0      0.0
     6   2
      9   10
      2   1
      2        0.0       0.0       0.12       0.0      0.0
     7   2
      10   11
      1   2
      2        0.0       0.0       0.12       0.0      0.0
     8   2
      11   1
      2   1
      2        0.0       0.0       0.12       0.0      0.0
- region data
     1   8
      1   2   3   4   5   6   7   8
- point loads
- pressure loads
     8         15.0      0.0       15.0       0.0
- fixed points
- fixed edges
     5         11        0.0       0.0        0.0      0.0
### finite element data ############################################
- type best prop grav rota temp
    2   20    2    0    0    0
- material properties
     1   200000.0      0.3       0.0        0.0      0.0
- gravity data
- centrifugal data
### adaptivity data ################################################
- itad dere hval sing
    5    1    1    0
- percentage error and relaxation factor
       1.00      1.00     1.00
- singularity points
### end of data ####################################################
```

شکل۱ نمونه‌ای از فایل ورودی برنامه



شکل۲ مشخصات و شبکه نهای مربوط به فایل ورودی نمونه

در ادامه به تشریح کامل هر یک از چهار بخش ذکر شده می‌پردازیم.

①

general data

jobname-

نام فایل ورودی برنامه می‌باشد که در هنگام اجرا با نوشتن آن، برنامه آنرا فرا می‌خواند. این نام فقط دارای چهار حرف می‌باشد. برای مثال elci یک نام برای فایل ورودی است. پوشه‌ای که فایلهای خروجی مربوط به هر فایل ورودی در آن نوشته می‌شود با اسم (نام فایل ورودی-ADO) نامگذاری، و در همان مسیر برنامه اصلی تشکیل می‌شود.

title-

در این قسمت می‌توان با تعیین عنوانی برای مسئله در دست تحلیل، تو ضیحات بیشتری از آن بیان کرد.

output control-

با استفاده از عدد صفر و یا یک برای سه پارامتر mesg-fema-adap، می‌توان نحوهٔ چاپ اطلاعات مورد

نیاز را در خروجی برنامه تعیین کرد.

اگر مقدار پارامتر mesg یک و دو پارامتر دیگر صفر باشد، برنامه تنها نیاز به اطلاعات موجود در قسمت general data و mesh generation data دارد و در خروجی نیز تنها اطلاعات مربوط به شبکه بندی دامنه، داده می‌شود.

اگر مقدار پارامتر fema یک و دو پارامتر دیگر صفر باشد، اطلاعات مربوط به تحلیل اجزای محدود و شبکه بندی دامنه بدون حل تطبیقی و تخمین خطا در اختیار کاربر قرار خواهد گرفت و همچنین نیازی به اطلاعات ورودی در قسمت adaptivity data نمی‌باشد.

با تعیین عدد یک برای پارامتر adap و صفر برای fema و mesg تمام اطلاعات مربوط به شبکه بندی دامنه، تحلیل اجزای محدود، تخمین خطا و حل تطبیقی در خروجی در اختیار کاربر قرار می‌گیرند.

②

mesh generation data

در خط اول از این بخش، متغیرهای مختلفی وجود دارد که در زیر هر یک مقدار آن داده می‌شود. در ادامه به معرفی هر متغیر و مقادیری که می‌توانند کسب کنند می‌پردازیم.

node-

این متغیر نوع المان و تعداد گره‌های هر المان را به برنامه معرفی می‌کند. همان طور که در فصل چهار بیان شد، در این برنامه دامنه به کمک دو نوع المان مثلثی و چهار ضلعی شبکه بندی می‌شود. المانهای مثلثی سه گرهی و شش گرهی و المانهای چهار ضلعی چهار گرهی، هشت گرهی و نه گرهی ایزوپارامتریک، جمعا شش دسته المان جهت جزءبندی دامنه می‌باشند. با معرفی هر یک از اعداد زیر برای این متغیر می‌توان نوع المان و تعداد گره‌های آنرا تعیین کرد.

3 : المان مثلثی سه گرهی

6 : المان مثلثی شش گرهی

4 : المان چهار ضلعی چهار گرهی

8 : المان چهار ضلعی هشت گرهی

9 : المان چهار ضلعی نه گرهی

nreg-

این متغیر تعداد نواحی مختلف موجود را در دامنه حل مسئله از نظر خواص الاستیسیته تعیین می‌کند.

باید توجه داشت که در هر ناحیه، برنامه قادر به ترسیم هر تعداد حلقهٔ بسته (دایره، بیضی، مربع و...) می‌باشد؛ به شرطی که این حلقه‌ها در هم تداخل ایجاد نکنند و هر یک در ناحیه مربوط به خود قرار گیرند.

nseg-

این متغیر تعداد تقسیمات لازم جهت ترسیم هندسه مدل را به برنامه معرفی می‌کند.

جهت ترسیم هندسه مدل مورد مطالعه و تولید مرزها نیاز به تعیین یک سری نقاط هندسی مشخص (geometry point or key point) می‌باشد. به فاصلهٔ بین این نقاط هندسی قطعه (segment) گفته می‌شود.

همان طور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود، جهت ترسیم هندسه مدل از یازده نقطهٔ هندسی و معرفی هشت قطعه استفاده شده است. نحوهٔ شماره گذاری نقاط هندسی و قطعات برای مرزهای خارجی به صورت پاد ساعتگرد و برای مرزهای داخلی به صورت ساعتگرد می‌باشد. هر قطعه حداقل دارای دو نقطه هندسی متوالی می‌باشد و جهت ترسیم بهتر می‌تواند از نقاط بیشتری برخوردار باشد.

poib-

تعداد نقاط لازم جهت ترسیم مش زمینه به کمک این متغیر به برنامه معرفی می‌شود.

eleb-

تعداد المانهای لازم جهت ترسیم مش زمینه به کمک این متغیر به برنامه معرفی می‌شود.

همان طور که در فصل چهارم بیان شد، شبکه بندی دامنه در این برنامه به کمک روش فرونتال انجام می‌گیرد. در این روش در ابتدا نیاز به یک مش زمینه می‌باشد تا در نهایت کل شبکه بندی اجزای

محدود تشکیل شود. در این برنامه به طور پیش فرض یک مش زمینه برای تمام مسائل در نظر گرفته شده است. این مش زمینه از دو المان مثلثی تشکیل شده است که به کمک آن کل دامنه در یک ناحیهٔ مستطیلی قرار می‌گیرد. چگالی این مش پیش فرض ۵% از طول قطر این مستطیل در نظر گرفته شده است. با وجود این به کمک متغیر esize، چگالی این مش می‌تواند تغییر یابد.

صفر قرار دادن مقدار متغیر poib و eleb به معنی استفاده از مش زمینه پیش فرض در هر مسئله دلخواه می‌باشد. اما اگر مسئله‌ای نیاز به تعریف مش زمینه خاصی داشته باشد، به کمک این دو متغیر و تعریف دقیق آنها در قسمت background mesh می‌توان آنرا به برنامه معرفی نمود.

poig-

تعداد نقاط مشخصی که برای تعریف هندسه مدل نیاز می‌باشد به کمک این متغیر به برنامه معرفی می‌شود.

lpoi-

این متغیر تعداد بارهای نقطه‌ای وارد بر مدل را معرفی می‌کند.

ledg-

این متغیر تعداد بارهای گسترده وارد بر هر قسمت از مدل را معرفی می‌کند.

fpoi-

تعداد نقاط تکیه گاهی مدل به کمک این متغیر به برنامه معرفی می‌شود.

fedg-

تعداد تکیه گاههای لبه‌ای به کمک این متغیر به برنامه معرفی می‌شود.

dofn-

تعداد درجات آزادی در هر گره به کمک این متغیر معرفی می‌شود.

para-

تعداد پارامتر در هر گره به کمک این متغیر معرفی می‌شود.

پارامترها توسط مش زمینه جهت تولید گره‌های اجزای محدود درونیابی می‌شوند و زمانی از آن استفاده می‌شود که از ویژگی مش زمینهٔ پیش فرض برنامه استفاده نشود.

corr-

به کمک این متغیر، استفاده از ویژگی تصحیح هندسی مدل و یا عدم نیاز به آن را به برنامه معرفی می‌کنیم. اگر مقدار این متغیر عدد یک باشد به معنی استفاده از این ویژگی و اگر این مقدار صفر باشد به معنی عدم استفاده از این ویژگی می‌باشد.

همان طور که در فصل چهار بیان شد تولید مرزها و شکل مدل در این برنامه با استفاده از Bاسپیلاینهای درجه سه صورت می‌گیرد. در مواقعی که مرز مدل دارای شکل هندسی مشخصی مانند مانند خط مستقیم، دایره، بیضی و یا هذلولی باشد، می‌توان با استفاده از این ویژگی Bاسپیلاینهای درجه سه، که قادر به ترسیم این نوع از منحنی‌ها با دقت بسیار بالا می‌باشند، به تصحیح مرز اولیه و انتقال نقاط اجزای محدود به مکان دقیقشان پرداخت. این تصحیح با بیان نوع هر قسمت از مرز (خط مستقیم، دایره، ....) در بخش boundary segment data صورت می‌گیرد.

poco-

به کمک این متغیر تعداد دستگاه مختصات قطبی مورد استفاده جهت بیان ویژگی‌های هندسه مدل به برنامه معرفی می‌شود.

در خطوط بعدی از بخش mesh generation data به بیان مشخصات مورد نیاز برای هر یک از ویژگیهایی که در خط اول این بخش به آنها اشاره شده بود، پرداخته می‌شود.

esiz-

در صورتی که از مش زمینه پیش فرض برنامه جهت شبکه بندی مدل استفاده شود به کمک این پارامتر، چگالی مش یکنواخت را می‌توان به عنوان درصدی از قطر مستطیل این مش به برنامه معرفی نمود. این درصد به طور معمول برای اکثر شبکه‌های مورد نیاز، ۵% در نظر گرفته می‌شود.

background mesh-

در صورتی که دو متغیر poib و eleb صفر در نظر گرفته نشوند، در این قسمت مشخصات مش زمینه به برنامه معرفی می‌شود.

در قسمت اول مشخصات مربوط به المانهای معرفی شده توسط متغیر eleb بیان می‌شوند. این

مشخصات در چهار ستون از اعداد تنظیم می‌شوند. در ستون اول از سمت چپ شماره المان، ستون دوم شماره گره اول المان، ستون سوم شماره گره دوم المان و ستون چهارم شماره گره سوم المان بیان می‌شود. ترتیب شماره گذاری گره‌های هر المان به صورت ساعت گرد می‌باشد.

در قسمت دوم مشخصات مربوط به گره‌های معرفی شده توسط متغیر poib بیان می‌شوند. این مشخصات در هفت ستون مطابق زیر بیان می‌شوند.

ستون هفتم	ستون ششم	ستون پنجم	ستون چهارم	ستون سوم	ستون دوم	ستون اول
میزان کسینوش کشیدگی در جهت Y	میزان کسینوش کشیدگی در جهت X	میزان کشیدگی	اندازه المان	مختصات گره در جهت Y	مختصات گره در جهت X	شماره گره

-parameter values

مقدار پارامترهای مورد نیاز در هر گره جهت ایجاد گره‌های اجزای محدود در این قسمت معرفی می‌شود. همان طور که گفته شد، در صورت استفاده از مش زمینهٔ پیش فرض نیازی به معرفی این پارامتر نداریم.

-geometry points

در این بخش مختصات نقاط تعیین شده توسط متغیر poig جهت تعیین هندسه مدل معرفی می‌شوند. مختصات هر نقطه نسبت به دستگاه مختصات دکارتی فرض شده تعیین می‌شود. در صورتی که با تعریف عددی بزرگتر از صفر برای متغیر corr، نیاز به دستگاه مختصات قطبی اعلام شده باشد، مختصات گره‌های مورد نظر بر اساس دستگاه مختصات قطبی تعریف می‌شوند. این اطلاعات در چهار ستون مطابق زیر بیان می‌شوند.

ستون چهارم	ستون سوم	ستون دوم	ستون اول
مختصات در جهت Y و یا مقدار انحراف	مختصات در جهت X و یا میزان شعاع	شماره دستگاه مختصات	شماره گره

در صورتی که مقدار متغیر corr صفر تعریف شود، ستون دوم خوانده نمی‌شود. اما اگر به طور مثال

یک دستگاه مختصات قطبی تعریف شده باشد برای نقاطی که مختصات آنها بر اساس دستگاه مختصات سراسری است، شماره دستگاه مختصات صفر و برای نقاطی که بر اساس دستگاه مختصات قطبی هستند این شماره یک در نظر گرفته می‌شود. مختصات در دستگاه مختصات قطبی از دو عدد تشکیل می‌شود که عدد اول میزان شعاع و عدد دوم مقدار انحراف از جهت مثبت محور xها بر حسب درجه را بیان می‌کند.

polar coordinate systems-

در این قسمت مشخصات دستگاه مختصات قطبی تعیین می‌شود. این اطلاعات برای هر دستگاه در سه ستون مطابق زیر مرتب می‌شوند.

ستون سوم	ستون دوم	ستون اول
مختصات y مرکز دستگاه مختصات قطبی نسبت به دستگاه مختصات سراسری	مختصات x مرکز دستگاه مختصات قطبی نسبت به دستگاه مختصات سراسری	شماره دستگاه مختصات قطبی

boundary segment data-

در این بخش اطلاعات مربوط به هر قطعه از مرز دامنه جهت تکمیل شکل هندسی مدل معرفی می‌شود. این اطلاعات برای هر قطعه در چهار ردیف از اعداد مرتب می‌شود که در ادامه به تشریح هر یک می‌پردازیم.

ردیف اول از دو عدد تشکیل می‌شود که عدد اول تعیین کننده شماره آن قطعه و عدد دوم تعداد نقاط آن قطعه را بیان می‌کند. معمولا هر قطعه از دو نقطه تشکیل می‌شود اما جهت ترسیم دقیق تر می‌توان نقاط بیشتری برای آن در قسمت geometry points تعریف کرد.

در ردیف دوم شماره نقاط ابتدا و انتهای قطعه بیان می‌شود.

ردیف سوم نیز از دو عدد تشکیل می‌شود که عدد اول تعیین کننده شرایط ابتدایی قطعه و عدد دوم تعیین کننده شرایط انتهایی آن می‌باشد. این شرایط به صورت زیر به برنامه معرفی می‌شوند.

4- : برای ابتدا و یا انتهای یک حلقۀ بسته با پیوستگی C(2)

-3 : دارای پیوستگی C(2) با قطعهٔ قبلی

-2 : دارای پیوستگی C(2) با بازتاب خود نسبت به محور xها

-1 : دارای پیوستگی C(2) با بازتاب خود نسبت به محور yها

0 : اسپیلاین طبیعی[1] با پیوستگی C(0)

1 : مماس با محور xها

2 : مماس با محور yها

3 : مماس با بردار عمود منصف رسم شده از بین نقطهٔ اول و آخر هر قطعه

4 : موارد دیگر

اسپیلاین طبیعی برای حالتی در نظر گرفته می‌شود که قطعهٔ مورد نظر خطی است، که در دو انتها با یک منحنی پیوستگی C(0) دارد. در شکل (۲) قطعات یک و پنج به صورت اسپیلاین طبیعی به برنامه معرفی شده اند.

ردیف چهارم از اعداد در صورتی نیاز است که نیاز به تصحیح هندسه با یک قرار دادن مقدار متغیر corr بیان شده باشد.

اولین عدد از این ردیف مشخص کننده نوع منحنی می‌باشد که مطابق زیر معرفی می‌شود:

0 : بدون شکل

1 : خط مستقیم

2 : دایره

3 : بیضی

اعداد بعدی برای حالت اول و دوم صفر و برای دایره و بیضی هر کدام به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شوند.

[1] Natural spline

دایره:

عدد اول : فاصله مختصات x مرکز دایره از مرکز دستگاه مختصات سراسری

عدد دوم : فاصله مختصات y مرکز دایره از مرکز دستگاه مختصات سراسری

عدد سوم : شعاع دایره

و عدد چهارم و پنجم صفر در نظر گرفته می‌شود.

بیضی:

عدد اول : فاصله مختصات x مرکز بیضی از مرکز دستگاه مختصات سراسری

عدد دوم : فاصله مختصات y مرکز بیضی از مرکز دستگاه مختصات سراسری

عدد سوم : نصف قطر بزرگ بیضی

عدد چهارم : نصف قطر کوچک بیضی

و عدد پنجم صفر در نظر گرفته می‌شود.

region data-

در این بخش اطلاعات مربوط به نواحی موجود در دامنه حل مسئله بیان می‌شود. اطلاعات هر ناحیه در دو ردیف از اعداد معرفی می‌شود. در ردیف اول، اولین عدد شماره ناحیه و دومین عدد تعداد قطعات موجود در ناحیه را معرفی می‌کند. در ردیف دوم شماره قطعات تعریف شده برای هر ناحیه به ترتیب بیان می‌شوند.

point loads-

در این بخش مشخصات بارهای گرهی وارد بر سازه بیان می‌شوند.

عدد اول شمارهٔ گرهی است که در قسمت geometry points تعریف شده و بار گرهی به آن وارد می‌شود. عدد دوم مشخص کننده راستای بار گرهی می‌باشد. عدد یک برای بار گرهی در راستای محورx و صفر برای بار گرهی در راستای محورy می‌باشد. سومین عدد مقدار بار گرهی را مشخص می‌کند. بار گرهی مثبت به معنی اعمال این بار در جهت مثبت محور تعیین شده و بار گرهی منفی به

معنی اعمال این بار در جهت منفی می‌باشد.

واحد نیرو بر اساس واحد ضریب الاستیسیته‌ای که در قسمت material properties برای برنامه تعریف شده است، در نظر گرفته می‌شود. به طور مثال اگر ضریب الاستیسیته ۲۰۰۰۰۰Mpa در نظر گرفته شود، معرفی عدد ۵ برای نیروی متمرکز به معنای ۵ MN نیرو در جهت مثبت محور تعیین شده می‌باشد.

-pressure loads

مشخصات نیروی گسترده وارد به هر قطعه در این قسمت معرفی می‌شوند. مشخصات هر بار گسترده در یک ردیف و توسط پنج عدد مطابق زیر به برنامه معرفی می‌شود.

عدد اول : شمارهٔ قطعه‌ای که بار به آن وارد می‌شود را بیان می‌کند.

عدد دوم : شدت بار وارده در ابتدای قطعه را بیان می‌کند.

عدد سوم : تانژانت زاویه‌ای که تغییرات شدت بار در ابتدای قطعه با محور xها می‌سازد را بیان می‌کند.

عدد چهارم : شدت بار در انتهای قطعه را بیان می‌کند.

عدد پنجم : تانژانت زاویه‌ای که تغییرات شدت بار در انتهای قطعه با محور xها می‌سازد را بیان می‌کند.

بار فشاری با علامت مثبت و بار کششی با علامت منفی معرفی می‌شود. به طور مثال اگر واحد E MPa در نظر گرفته شود، معرفی عدد ۱۵ برای بار گسترده به معنای ۱۵MPaبار فشاری می‌باشد.

-fixed points

در این قسمت شرایط تکیه گاههای نقطه‌ای بیان می‌شود. شرایط هر تکیه گاه در یک ردیف و توسط پنج عدد به صورت زیر معرفی می‌شوند.

عدد اول : شماره گرهی که در قسمت geometry points تعریف شده و بار به آن وارد می‌شود.

عدد دوم : شرایط درگیر و یا آزاد بودن در جهت x را بیان می‌کند.

عدد سوم : شرایط درگیر و یا آزاد بودن در جهت y را بیان می‌کند. عدد صفر به معنای آزاد بودن و

عدد یک به معنای درگیر بودن نقطه می‌باشد.

عدد چهارم : میزان تغییر مکان تکیه گاه در جهت x می‌باشد.

عدد پنجم : میزان تغییر مکان تکیه گاه در جهت y می‌باشد. علامت این تغییر مکان بر اساس جهت محورهای مختصات و واحد آن بر اساس واحد انتخابی جهت تعریف هندسه مدل در بخش geometry points در نظر گرفته می‌شود.

fixed edges-

در این قسمت شرایط تکیه گاهی که برای هر قطعه وجود دارد به برنامه معرفی می‌شود. این شرایط برای هر قطعه توسط هفت عدد و در یک ردیف به صورت زیر بیان می‌شود.

عدد اول : شماره قطعه‌ای که محدودیت تغییر مکان به آن وارد می‌شود.

عدد دوم : شرایط درگیر و یا آزاد بودن در جهت x را بیان می‌کند.

عدد سوم : شرایط درگیر و یا آزاد بودن در جهت y را بیان می‌کند. عدد صفر به معنای آزاد بودن و عدد یک به معنای درگیر بودن نقطه می‌باشد.

عدد چهارم : میزان تغییر مکان ابتدای تکیه گاه در جهت x می‌باشد.

عدد پنجم : میزان تغییر مکان ابتدای تکیه گاه در جهت y می‌باشد.

عدد ششم : میزان تغییر مکان انتهای تکیه گاه در جهت x می‌باشد.

عدد هفتم : میزان تغییر مکان انتهای تکیه گاه در جهت y می‌باشد.

3

finite element data

در خط اول از این بخش نام شش متغیر بیان شده است که هر کدام در خط بعد مقادیر مربوط به خود را دریافت می‌کنند.

type-

با تعیین عددی بین ۱ تا ۳ برای این متغیر، نوع تحلیل انجام شده بر روی مدل اجزای محدود به برنامه معرفی می‌شود.

1 : تحلیل مسئله با فرض تنش مسطح

2 : تحلیل مسئله با فرض کرنش مسطح

3 : تحلیل مسئله با فرض وجود تقارن محوری

best-

به کمک این متغیر نوع روند بازیافت تنش به صورت زیر به برنامه معرفی می‌شود.

عدد ده برای این متغیر به معنای بازیافت تنش به روش میانگین گیری می‌باشد. این روش درمقایسه با روش SPR روشی قدیمی به شمار می‌رود.

عدد بیست برای این متغیر به معنای استفاده از روش بازیافت تنش در نقاط فوق همگرا بر روی گروه المانهای متصل به یک گره (SPR) می‌باشد.

prop-

به کمک این متغیر تعداد خواصی که برنامه در قسمت material properties برای هر ماده از کاربر دریافت می‌کند، مشخص می‌شود.

grav-

وجود بار ثقلی و یا عدم اعمال آن در تحلیل مسئله با استفاده از این متغیر به برنامه معرفی می‌شود. در صورتی که مقدار آن صفر در نظر گرفته شود به معنای تحلیل مسئله بدون بار ثقلی و عدد یک به معنای وجود بار ثقلی می‌باشد.

rota-

وجود نیروی گریز از مرکز توسط این متغیر به برنامه معرفی می‌شود. عدد صفر به معنای عدم وجود این بار و عدد یک به معنای تحلیل مسئله با فرض وجود بار گریز از مرکز می‌باشد.

temp-

به کمک این متغیر وجود بار حرارتی و یا عدم اعمال آن را به صورت زیر به برنامه معرفی می‌کنیم.

0 : به معنای عدم اعمال بار حرارتی به مدل می‌باشد.

1 : به معنای اعمال بار حرارتی یکسان برای تمام مواد موجود در دامنه می‌باشد.

material properties-

در این بخش مشخصات مواد مورد استفاده در مدل اجزای محدود معرفی می‌شوند. این مشخصات برای هر ماده در یک ردیف و توسط شش عدد مطابق زیر تعریف می‌شوند.

ستون ششم	ستون پنجم	ستون چهارم	ستون سوم	ستون دوم	ستون اول
ضریب انبساط حرارتی ماده	چگالی ماده	ضخامت ماده	نسبت پواسون ماده	مدول الاستیسیته ماده	شماره ماده مورد استفاده

gravity data-

مشخصات نیروی گرانشی در این قسمت توسط دو عدد به برنامه معرفی می‌شود. عدد اول زاویه‌ای می‌باشد که جهت نیروی گرانش را نسبت به محور xها بر حسب درجه بیان می‌کند و عدد دوم مقدار ثابت نیروی ثقل را به برنامه معرفی می‌کند.

centrifugal data-

در این قسمت مقدار سرعت زاویه‌ای به برنامه معرفی می‌شود.

4

adaptivity data

در این بخش به معرفی پارامترهای مورد استفاده جهت تخمین خطای اجزای محدود و حل تطبیقی می‌پردازیم.

itad-

این متغیر تعداد ماکزیمم تکرار جهت رسیدن به دقت تعیین شده را معرفی می‌کند. اگر مقدار این متغیر صفر در نظر گرفته شود برنامه فقط میزان خطا و انرژی کرنشی مدل اجزای محدود را محاسبه می‌کند.

dere-

به کمک این متغیر نحوهٔ اصلاح شبکهٔ اجزای محدود را به برنامه معرفی می‌کنیم.

عدد صفر برای این متغیر به معنای اصلاح شبکه به روش غنی سازی شبکهٔ قبلی می‌باشد. این روش با ریز تر کردن المانهای که دارای خطایی بیش از حد مجاز می‌باشند صورت می‌گیرد.

عدد یک برای این متغیر به معنای اصلاح شبکه به روش شبکه بندی دوباره دامنه می‌باشد. در این روش برنامه از اطلاعات شبکه قبلی جهت تولید شبکه‌ای جدید استفاده می‌کند، به طوری که شبکه اجزای محدود در هر مرحله دوباره و مستقل از شبکه قبلی، به صورت کامل تشکیل می‌شود.

hval-

این متغیر نحوهٔ محاسبه مش جدید برای شبکه اصلاح شده را از روی شبکه قبلی بیان می‌کند. عدد یک به معنای اندازهٔ متوسط و عدد دو به معنای اندازهٔ حداقل می‌باشد.

sing-

این متغیر تعداد نقاط تکینگی را در هندسهٔ مدل اجزای محدود بیان می‌کند. نقاط تکینگی به نقاطی گفته می‌شود که مشتق در آن نقاط بینهایت و یا مقدار ثابتی نداشته باشد. در حل مسائل الاستیسیته به کمک اجزای محدود این نقاط در گوشه‌های نوک تیز از دامنه قرار می‌گیرند که در آنها از نظر تئوری تنش بینهایت می‌شود.

percentage error and relaxation factor-

در این قسمت سه عدد به برنامه معرفی می‌شوند که هر یک به ترتیب مربوط به متغیرهای tperc، relax و tpert می‌باشند. در ادامه به معرفی این متغیرها، و مقادیری که می‌توانند کسب کنند می‌پردازیم

tperc-

این متغیر میزان خطای مجاز مورد نظر کاربر در حل اجزای محدود را به صورت درصدی از خطای نرم انرژی کرنشی سراسری به برنامه معرفی می‌کند.

relax-

فاکتوری است که به کمک آن میزان حساسیت، در رسیدن به مقدار دقیق خطای مجاز تعیین شده را به برنامه معرفی می‌کند. با اعداد کوچکتر از یک این حساسیت افزایش می‌یابد و باعث کاهش سرعت همگرایی و افزایش دقت در همسان سازی خطای تعیین شده توسط کاربر و خطای محاسبه شده از شبکه نهای می‌شود.

tpert-

به کمک این متغیر به تعیین محدوده‌ای از میزان خطای مجاز تعیین شده توسط کاربر، جهت قرارگیری میزان خطای محاسبه شده از شبکه نهایی در آن ناحیه می‌پردازیم.

singularity points-

در این بخش مشخصات نقاط تکین موجود در دامنه، به برنامه معرفی می‌شوند. این مشخصات برای هر نقطه در یک سطر و توسط دو عدد تعیین می‌شود. عدد اول شمارۀ گرهی می‌باشد که در بخش geometry points تعیین، و به عنوان نقطۀ تکین در نظر گرفته شده است و عدد دوم نمایشگر قدرت تکینی آن نقطه می‌باشد. در مسائل الاستیسیته، این عدد از مقدار ۰/۵ برای ترک تقریبا بسته تا مقدار ۰/۷۱ برای گوشۀ ۹۰ درجه تغییر می‌کند.

end of data

مراجع:

[1] Zienkiewicz, O.C. *(2000)*, “**Achievements and some unsolved problems of the finite element method**”,*International Journal for Numerical Methods in Engineering,*Vol. 47, pp.28.

[2] *Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and J.Z. Zhu. (2005), “***The Finite Element Method***” 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann.*

[3] Reddy, J. N. *(*1993*)*, “**An Introduction to the Finite Element Method***”,* McGraw-Hill, Singapore.

[4] Zienkiewicz, O. c. (2006), “**The background of error estimation and adaptivity in finite element computations**” , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 207–213

[5] Babuska, I. and Rheinboldt, W.C. *(*1981*)*, “**A-posteriori error analysis of finite element solution for one-dimention problems**”, *SIAM J Num. Anal.,* Vol. 18, pp. 565-589.

[6] Gyi, W. and Babuska, I., (1986), “**The h, p and h-p version of the finite element method in one dimention: Part 1: The error analysis of the p version. Part 2: The error analysis of the h and h-p version. Part 3: The adaptive h-p version**”, *Numerische Math.,* Vol. 48, pp. 577-683.

[7] Zienkiewicz, *o.c.* and Zhu, Z. (1987), “**A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis**”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 24, pp. 337-357.

[8] Zienkiewicz, *o.c.* and Zhu, Z. (1989), “**Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems**”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 28, pp. 2839-2853.

[9] Zienkiewicz, *o.c.* and Zhu, Z. (1992), “**The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique**”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 33, pp. 1331-1364.

[10] Zienkiewicz, *o.c.* and Zhu, Z. (1992), “**The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity**”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 33, pp. 1365-1382.

[11] Ainsworth, M. and Oden, J. T. (1993), “**A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods**”, *Numer. Math.,* Vol. 65, pp.23-50.

[12] Bugeda, G. and Oliver, J. (1993), "**A general methodology for structural shape ptimization problems using automatic adaptive remeshing**", *InternationalJournal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 36, pp. 3161-3185.

[13] Boroomand, B. and Zienkiewicz, o.c. *(*1997*),* "**Recovery by equilibrium in patchs (REP)**", *ernational Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol.40, pp. 137-164.

[14] Boroomand, B. and Zienkiewicz, O. C. (1997), "**An Improved REP Recovery and effectivity Robustness Test**", *Int. J. Numer. Meth. Eng.,* Vol. 40, pp. 3247-3277.

[15] I. Babuska, T. strouboulis, C.S. Upadhyay and S.K Gangaraj, (1994), "**A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patch wise uniform grids of triangles**", Comput. Methods *Appl.* Mech. Engrg.114,307-378.

[16] Hinton, E. and Campbell J. (1974), "**Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method**", *Int. J. Numer. Meth. Eng.,* Vol. 8, pp.461-480.

[17] Oden, T. J. and Brauchli J. (1971), "**On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation**", *Int. J. Numer. Meth. Eng.,* Vol. 3, pp. 317-325.

[18] Zienkiewicz, *O.C.* and Morgan, K. (1983), "**Finite Elements & Approximation**" New York : J. Wiley.

[19] George Arfken.(1985), "**Mathematical Methods for Physicst**" , Miami University Ohio,Academic Press.

[20] McNeice, G. M., and Marcal, P. V. (1974), "**Optimization of finite element grids based on minimum potential energy**", J. *Engrg. for Industry. ASME,* Vol. 95, No.3, pp. 99519.

[21] L.Vardapetyan and L. Demkowicz. (1999), "**hp-Adaptive finite elements in electromagnetics.**" Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 169, 331±44.

[22] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. (1987), "**Adaptive remeshing for compressible flow computations.**" J. Comp. Phys., 72, 449±66.

[23] J.C. Cavendish. (1974), "**Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method.**" Internat. J. Num. Meth. Eng., 8, 679±96.

[24] S.H. Lo. (1985) "**A new mesh generation scheme for arbitrary planar**

domains." Internat. J. Num. Meth. Eng., 21, 1403±26.

[25] J.Z. Zhu, O.C. Zienkiewicz, E. Hinton, and J. Wu. (1991), "**A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation.**" Internat. J. Num. Meth. Eng., 32, 849±66.

[26] J.Z. Zhu, E. Hinton, and O.C. Zienkiewicz. (1993) "**Mesh enrichment against mesh regeneration using quadrilateral elements.**" Comm. Num. Meth. Eng., 9, 547±54.

[27] T.D. Blacker, M.B. Stephenson, and S. Canann. (1991), "**Analysis automation with paving: A new quadrilateral meshing technique.**" Adv. Eng. Software, Elsevier, 56(13), 332±37.

[28] N. Chiba, I. Nishigaki, Y. Yamashita, C. Takizawa, and K. Fujishiro. (1998), "**A flexible automatic hexahedral mesh generation by boundary-fit method.**" Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 161, 145±54.

[29] J.Z. Zhu and O.C. Zienkiewicz. (1988), "**Adaptive techniques in the finite element method.**" Comm. Appl. Num. Math., 4, 197±204.

[30] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, and N.G. Gong. (1989), "**Effective and practical h-p-version adaptive analysis procedures for the finite element method**." Internat. J. Num. Meth. Eng., 8,879±91.

[31] B.A. Szabo. (1986), "**Mesh design for the p version of the finite element**." Comp. Meth. Appl. Mech.Eng., 55, 181±97.

[32] I. *Babuska*, B.A. Szabo, and I.N. Katz. (1981), "**The p version of the finite element method**." SIAMJ. Numer. Anal., 18, 512±45.

[۳۳] محمد رحیمیان و مرتضی قادی. (۱۳۷۹)، "**تئوری ارتجاعی**". انتشارات دانشگاه تهران.

[34] T. N. E . Greville (editor). (1969), "**Theory and Application of Spline Functions**" Academic Press, New York.

[35] M.Ozaka.(1993), "**Analysis and optimal design of structures with adaptivity**". Ph.D Thesis. Department of Civil Engineering University of Wales, Swansea, UK.

[36] Piegl L., Tiller W., (1997), "**The NURBS Book**," 2nd ed., Springer-Verlag, new York.

[37] J. Sienz. (1994), "**Integrated structural modelling, adaptive analysis and shape optimization**", Ph.D. Thesis, University of Wales, Swansea.

[38] M.Farrakhalvat and J.P.Miles. (2003), "**Baisc Structured Grid Generation with an introduction to unstrutured grid generation**". Butterworth-Heinemann.

[۳۹] فرهاد جاوید راد. (۱۳۸۳)، **"مکانیک شکست و کاربرد آن در مهندسی"** .تهران: صنایع هوافضا.

[۴۰] نیما جمشیدی، بهاره جوانبخت. (۱۳۸۴)، **" آموزش طراحی اجزا و مقاومت مصالح به کمک نرم افزار ANSYS"**. تهران: سمیمین دخت،

[41] Release 11.0 Documentation for ANSYS (ANSYS HELP).2007.

[42] Hughes T.G.R, Cottrell J.A., Bazilevs Y., (2005), "**Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement**," Comput. Method Appl. Mech. Engrg, 194 4135–4195.

[43] Rogers D.F., (2001), "**An Introduction to NURBS,**" Morgan Kaufmann Publishers.

[44] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, (1977), "**Theory of Elasticity,**" McGraw-Hill, New York

[45] Michael R. Dorfel, Bert Juttler, Bernd Simeon, (2008),"**Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines**", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., (To appear, available online).

[46] T.J.R. Hughes, A. Reali, G. Sangalli, (2009), "**Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis**" Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., (To appear, available online).

[47] T.L. Anderson, Fracture Mechanics. (1991), "**Fundamentals and Applications, first ed.** ", CRC Press, Boca Raton.