

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده عمران و معماری

گروه عمران

بهبینه سازی همزمان شکل و توپولوژی لایه تقویتی سازه های پوسته ای

حسین قاسم نژاد مقری

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

استاد مشاور:

مهندس سید مهدی توکلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تیر ۱۳۸۸

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران و معماری

گروه سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حسین قاسم نژاد مقری

تحت عنوان: بهینه سازی همزمان شکل و توپولوژی لایه تقویتی سازه های پوسته ای

در تاریخ ..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نمایندة تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم به

پدرگرامی

و

مادر عزیزم

## تشکر و قدردانی

در آغاز لازم می‌دانم از استاد فرزانه آقای دکتر بهروز حسنی به‌خاطر راهنمایی‌های گرانقدرشان کمال تشکر را داشته باشم. بی‌شک بدون پشتیبانی و هدایت ایشان قادر به ارائه این پایان‌نامه نبوده‌ام. سربلندی، عزت و موفقیت‌شان را از خداوند بزرگ خواستارم.

همچنین از دوست و استاد عزیزم آقای مهندس توکلی نهایت تشکر را دارم. کمک‌ها و راهنمایی‌های ایشان به‌عنوان استاد مشاور نقش بسزایی در پیشرفت این رساله داشته است.

از کلیه اساتید دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود، به‌خصوص آقایان دکتر کیهانی، دکتر احمدی، دکتر علایی، دکتر نادری و دکتر کلات‌جاری به‌خاطر زحماتی که در رشد و ارتقای سطح علمی اینجانب داشته‌اند، صمیمانه تشکر می‌نمایم و موفقیت و سربلندی‌شان را آرزومندم.

در پایان از خانواده عزیزم که همواره یاور و پشتیبانم در همه امور زندگی بوده‌اند، تشکر و

قدردانی می‌نمایم.

حسین قاسم نژاد مقری

تیر ماه ۱۳۸۸

## اقرارنامه و واگذاری

بدین وسیله تأیید می‌شود مطالب مندرج در این پایان‌نامه نتیجه تحقیقات اینجانب می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن ذکر شده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

حسین قاسم نژاد مقری

تیر ماه ۱۳۸۸

## چکیده

در دهه‌های اخیر پیشرفت‌های زیادی در بهینه‌سازی سازه‌ای صورت گرفته و ضمن رسیدن به نتایج مطلوب ابعاد مسائل بهینه‌سازی گسترش یافته‌است طوری که مسائل جدید و معیارهای طراحی متنوعی برای بیان مسائل بهینه‌سازی به وجود آمده است.

روش معمول در بهینه‌سازی سازه‌ای این است که ابتدا توپولوژی بهینه به دست می‌آید. پس از آن با ثابت نگه داشتن توپولوژی، بهینه‌سازی شکل سازه انجام می‌شود؛ طوری که درحین بهینه‌سازی شکل، توپولوژی ثابت می‌ماند.

در این پایان‌نامه روشی معرفی می‌شود که بهینه‌سازی شکل و توپولوژی را برای سازه به صورت همزمان انجام می‌دهد. هدف به دست آوردن نحوه قرارگیری بهینه سخت‌کننده‌های سطحی روی سازه پوسته‌ای است. با استفاده از روش معرفی شده در این پایان‌نامه همزمان با بهینه‌سازی شکل صفحه میانی پوسته، توپولوژی سخت‌کننده‌های سطحی نیز بهینه می‌شود.

روش حل مسئله برمبنای گسسته‌سازی اجزا محدود است. مصالح هر المان توسط مواد مصنوعی با حفره‌های ریزمقیاس مستطیلی مدل می‌شوند. پارامترهای هندسی حفره‌های ریزمقیاس به عنوان متغیر طراحی در گام بهینه‌سازی توپولوژیک در فرایند بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. هندسه پوسته با استفاده از سطوح نریز تولید شده و نقاط کنترلی تولیدکننده سطح به‌عنوان متغیر طراحی در قسمت بهینه‌سازی شکل استفاده می‌شوند. مسئله بهینه‌سازی در هر بخش با استفاده از روش مجانب‌های متحرک و تحلیل حساسیت حل می‌شود. روش مورد نظر برای مثال‌های عددی به کار گرفته شده و نتایج بیان شده‌اند.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی، توپولوژی، شکل، سازه پوسته‌ای، لایه تقویتی

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

"بهینه‌سازی توپولوژیک لایه تقویتی سازه‌های صفحه‌ای با استفاده از قید تنش"، هشتمین

کنگره بین‌المللی مهندسی عمران، دانشگاه شیراز، اردیبهشت ۱۳۸۸



## فهرست مطالب

۱	مقدمه	۲
۲	بهینه‌سازی توپولوژیک	۶
۲.۱	مقدمه	۶
۲.۲	مدل های مواد	۶
۲.۲.۱	حفره‌های ریزمقیاس مستطیلی	۸
۲.۲.۲	مواد مصنوعی	۱۱
۲.۳	مدل ریاضی برای مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها	۱۳
۲.۴	بهینه‌سازی توپولوژیک با در نظر گرفتن قید تنش	۱۶
۲.۴.۱	معیار تنش برای مدل مصالح مصنوعی (SIMP)	۱۶
۲.۴.۲	روش های حل	۱۷
۲.۵	بهینه‌سازی توپولوژیک لایه تقویتی	۲۰
۳	بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی	۲۳
۳.۱	مقدمه	۲۳
۳.۲	بهینه‌سازی شکل سازه با استفاده از روش تغییرات مرزی	۲۳
۳.۲.۱	تولید شکل	۲۴
۳.۲.۲	مسئله بهینه‌سازی	۲۴
۳.۳	ترکیب بهینه‌سازی شکل و توپولوژی	۲۵
۳.۳.۱	معیار طراحی	۲۵

۲۶	..... فرمول بندی ۳.۳.۲
۲۷	..... تحلیل حساسیت ۳.۳.۳
۲۹	..... روش بهینه‌سازی ۴
۲۹	..... مقدمه ۴.۱
۲۹	..... فرمول بندی کلی ۴.۲
۲۹	..... متغیرهای طراحی ۴.۲.۱
۳۰	..... قیود ۴.۲.۲
۳۱	..... فضای طراحی ۴.۲.۳
۳۲	..... تابع هدف ۴.۲.۴
۳۳	..... رابطه سازی ریاضی ۴.۲.۵
۳۴	..... مفاهیم بهینه‌سازی ۴.۳
۳۴	..... حداقل نامقید ۴.۳.۱
۳۶	..... حداقل مقید (روش ضربگرهای لاگرانژ) ۴.۳.۲
۳۸	..... شرایط کان تاکر ۴.۳.۳
۴۰	..... توابع و مجموعه‌های محدب ۴.۳.۴
۴۱	..... مسائل برنامه‌ریزی محدب ۴.۳.۵
۴۲	..... روش‌های بهینه‌سازی و تقریب‌سازی ۴.۴
۴۴	..... روش دوگان ۴.۵
۴۷	..... برنامه‌ریزی دنباله‌ای ۴.۶

۴۷	برنامه ریزی خطی دنباله‌ای (SLP)
۵۱	برنامه ریزی درجه دوم متوالی (SQP)
۵۳	روش خطی سازی محدب (CONLIN)
۵۳	تقریب سازی
۵۵	حل زیرمسئله به کمک روش دوگان
۵۸	روش مجانب‌های متحرک (MMA)
۵۸	توضیحات کلی
۵۹	نحوه تعریف توابع تقریبی $f_i^{(k)}$
۶۳	روش حل زیرمسئله $P^{(k)}$
۶۸	تحلیل سازه به روش اجزاء محدود
۶۸	مقدمه
۶۹	روابط کلی
۶۹	سختی المان صفحه‌ای در مختصات محلی
۷۰	انتقال به مختصات کلی و اسمبل کردن المان‌ها
۷۲	کسینوسهای هادی محلی برای المان مستطیلی
۷۴	سختی دورانی پیچشی
۷۴	بررسی المان ویلسون
۷۵	المان خمشی کیرشهف
۸۰	معادلات کرنش-تغییر مکان

- ۵.۳.۱.۴ کاهش مرتبه استاتیکی ..... ۸۲
- ۵.۳.۲ المان غشایی با دورانه‌های نرمال ..... ۸۲
- ۵.۳.۲.۱ تخمین تغییر مکان ..... ۸۴
- ۵.۳.۲.۳ اعمال دوران گرهی ..... ۸۵
- ۵.۳.۲.۴ معادلات کرنش-تغییر مکان ..... ۸۶
- ۵.۳.۲.۵ رابطه تنش-کرنش ..... ۸۶
- ۵.۳.۲.۶ تبدیل دورانه‌های نسبی به مطلق ..... ۸۶
- ۵.۳.۳ المان‌های پوسته ..... ۸۷
- ۵.۳.۴ مدل کردن پوسته‌های دارای انحنا با استفاده از المان‌های مسطح ..... ۸۸
- ۶ روش‌های تولید شکل ..... ۹۲
- ۶.۱ مفاهیم پایه در مورد سطوح و منحنی‌ها ..... ۹۲
- ۶.۱.۱ فرم‌های پارامتریک و ضمنی ..... ۹۲
- ۶.۱.۲ فرم پایه‌توانی یک منحنی ..... ۹۳
- ۶.۱.۳ منحنی‌های بزیر ..... ۹۵
- ۶.۱.۴ منحنی‌های بزیر نسبی ..... ۹۸
- ۶.۲ توابع پایه بی‌اسپلاین ..... ۱۰۰
- ۶.۲.۱ تعریف و خواص توابع پایه بی‌اسپلاین ..... ۱۰۱
- ۶.۲.۳ سطوح و منحنی‌های بی‌اسپلاین ..... ۱۰۲
- ۶.۳.۱ تعریف و خصوصیات منحنی‌های بی‌اسپلاین ..... ۱۰۲

۱۰۳.....	۶.۳.۲ تعریف و خصوصیات سطوح بی‌اسپلین
۱۰۵.....	۶.۴ منحنی‌ها و سطوح بی‌اسپلین نسبی (نریز)
۱۰۵.....	۶.۴.۱ تعریف و خصوصیات منحنی نریز
۱۰۸.....	۶.۴.۲ تعریف و خصوصیات سطوح نریز
۱۱۳.....	۷ حل مثال‌ها و نتایج
۱۱۳.....	۷.۱ مقدمه
۱۱۳.....	۷.۲ بهینه‌سازی با قید تنش
۱۱۵.....	۷.۳ بهینه‌سازی لایه تقویتی پوسته
۱۱۹.....	۷.۴ بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی سخت‌کننده سطحی پوسته
۱۲۷.....	۷.۵ نتایج
۱۳۰.....	منابع
۱۳۲.....	پیوست

## فهرست اشکال

- شکل ( ۱-۲ ) میکروسلول‌ها با حفره‌های مستطیلی [۱۴] ..... ۹
- شکل ( ۲-۲ ) سلول واحد با حفره مستطیلی در مختصات میکروسکوپی [۱۴] ..... ۹
- شکل ( ۳-۲ ) (الف) فضای طراحی چندحالتی (ب) فضای طراحی مسئله پس از رهاسازی [۱۱] ..... ۲۰
- شکل ( ۴-۲ ) سلول پایه به همراه لایه تقویتی [۱۴] ..... ۲۰
- شکل ( ۱-۳ ) فلوجارت بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی [۱۵] ..... ۲۷
- شکل ( ۱-۴ ) (الف) شروط کان تاگر اقناع شده‌ند (ب) شروط کان تاگر اقناع نشده‌ند [۲۶] ..... ۴۰
- شکل ( ۲-۴ ) (الف) تابع محدب (ب) تابع غیر محدب [۲۶] ..... ۴۱
- شکل ( ۱-۵ ) المان تحت اثر نیروهای خمشی و درون صفحه‌ای [۲۴] ..... ۶۹
- شکل ( ۲-۵ ) مختصات کلی و محلی [۲۴] ..... ۷۱
- شکل ( ۳-۵ ) پوسته استوانه‌ای تشکیل شده از المان‌های مستطیلی در مختصات کلی و محلی [۲۴] ..... ۷۳
- شکل ( ۴-۵ ) المان خمشی چهارضلعی [۲۴] ..... ۷۶
- شکل ( ۵-۵ ) لبه المان [۲۴] ..... ۷۸
- شکل ( ۶-۵ ) تغییر مکان‌های مثبت در المان خمشی صفحه‌ای [۲۴] ..... ۷۹
- شکل ( ۷-۵ ) برشهای گرهی [۲۴] ..... ۸۰
- شکل ( ۸-۵ ) المان غشایی چهارضلعی با دورانه‌های نرمال [۲۴] ..... ۸۴
- شکل ( ۹-۵ ) لبه یک المان چهارضلعی [۲۴] ..... ۸۵
- شکل ( ۱۰-۵ ) شکلگیری المان مسطح پوسته [۲۴] ..... ۸۸
- شکل ( ۱۱-۵ ) استفاده از المان‌های مسطح برای مدلسازی پوسته‌های دلخواه [۲۴] ..... ۸۹
- شکل ( ۱-۶ ) [۲۵] ..... ۹۷

- شکل (۲-۶) [۲۵] ۹۷.....
- شکل (۳-۶) (الف) توابع پایه منحنی درجه ۳ نسبی (ب) منحنی بزیر نسبی [۲۵] ۱۰۰.....
- شکل (۴-۶) [۲۵] ۱۰۱.....
- شکل (۵-۶) منحنی بی‌اسپلین درجه ۳ روی بردار  $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$  [۲۵] ۱۰۴.....
- شکل (۶-۶) توابع پایه درجه سه روی بردار  $U = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}$  [۲۵] ۱۰۴.....
- شکل (۷-۶) یک منحنی درجه سه که از توابع پایه شکل (۶-۶) استفاده می‌کند [۲۵] ۱۰۴... [۲۵]
- شکل (۸-۶) (الف)  $\{w_0, \dots, w_6\} = \{1, 1, 1, 3, 1, 1, 1\}$  و  $U = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}$  منحنی درجه سه نربز (ب) توابع پایه مربوط به شکل (الف) [۲۵] ۱۰۷.....
- شکل (۹-۶) شبکه کنترل و سطح نربز که در دو جهت از درجه سوم است. [۲۵] ۱۰۹.....
- شکل (۱۰-۶) تابع پایه  $R_{i,j}(u,v)$  با  $U = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}$  و  $w_{1,1} = w_{1,2} = w_{2,1} = w_{2,2} = 10$  [۲۵] ۱۰۹.....
- شکل (۱۱-۶) منحنی‌های درجه دو  $\times$  درجه سه متناظر با شکل (۴-۶)؛ (الف)  $w_{4,2} = \frac{2}{5}$  (ب)  $v = \{0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1\}$  که  $w_{i,j} = 1$  برای  $i, l \neq (4, 2)$   $i, j \neq (4, 2)$  [۲۵] ۱۱۰.....
- شکل (۱۱-۶) منحنی‌های درجه دو  $\times$  درجه سه متناظر با شکل (۴-۶)؛ (الف)  $w_{4,2} = \frac{2}{5}$  (ب)  $w_{4,2} = \frac{2}{5}$  [۲۵] ۱۱۰.....
- شکل (۱-۷) سازه تحت بار متمرکز در مرکز (الف) وزن حداقل (ب) سختی حداکثر ۱۱۴.....
- شکل (۲-۷) سازه تحت چهار بار متمرکز (الف) وزن حداقل (ب) سختی حداکثر ۱۱۴.....
- شکل (۳-۷) سازه تحت بار گسترده یکنواخت (الف) وزن حداقل (ب) سختی حداکثر ۱۱۴.....
- شکل (۴-۷) (الف) سازه اولیه به همراه مش‌بندی (ب) سازه بهینه با لایه تقویتی ۱۱۵.....
- شکل (۵-۷) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه گنبدی ۱۱۶.....
- شکل (۶-۷) سازه شیروانی (الف) سازه اولیه (ب) توپولوژی بهینه لایه تقویتی ۱۱۶.....
- شکل (۷-۷) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه شیروانی ۱۱۷.....

- شکل ( ۷-۸ ) سازه لوله ای شکل طره ای به همراه سخت کننده سطحی ..... ۱۱۷
- شکل ( ۷-۹ ) نمودار همگرایی سازه لوله ای طره ای ..... ۱۱۸
- شکل ( ۷-۱۰ ) سازه لوله ای شکل دو سر گیردار به همراه سخت کننده سطحی ..... ۱۱۸
- شکل ( ۷-۱۱ ) نمودار همگرایی سازه لوله ای دو سر گیردار ..... ۱۱۹
- شکل ( ۷-۱۲ ) سازه استوانه‌ای ..... ۱۲۰
- شکل ( ۷-۱۳ ) سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز ..... ۱۲۰
- شکل ( ۷-۱۴ ) بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز ..... ۱۲۱
- شکل ( ۷-۱۵ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز ..... ۱۲۱
- شکل ( ۷-۱۶ ) بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز با شکل اولیه ثابت ..... ۱۲۲
- شکل ( ۷-۱۷ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز با شکل اولیه ثابت ..... ۱۲۳
- شکل ( ۷-۱۸ ) سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی ..... ۱۲۳
- شکل ( ۷-۱۹ ) بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی ..... ۱۲۴
- شکل ( ۷-۲۰ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی ..... ۱۲۴
- شکل ( ۷-۲۱ ) بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی با شکل اولیه ثابت ..... ۱۲۵
- شکل ( ۷-۲۲ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی با شکل اولیه ثابت ..... ۱۲۵
- شکل ( ۷-۲۳ ) بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت ..... ۱۲۶
- شکل ( ۷-۲۴ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت ..... ۱۲۶
- شکل ( ۷-۲۵ ) بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت با شکل اولیه ثابت ..... ۱۲۷



شکل ( ۲۶-۷ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت با شکل اولیه

ثابت ..... ۱۲۷

## علائم و اختصارات

### مخفف‌ها

CONLIN	Convex Linearization
DSE	Discrete Shear Element
MMA	Method of Moving Asymptotes
NURBS	Non Uniform Rational B-Spline
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
SLP	Sequential Linear Programming
SQP	Sequential Quadratic Programming

### توابع و اسکالرها

$a$	کار داخلی
$B$	تابع چند جمله‌ای برن اشتاین
$E$	مدول الاستیسیته
$\ell$	کار خارجی
$N$	تعداد المان‌های محدود
$n_h$	تعداد قیده‌های مساوی
$n_g$	تعداد قیده‌های نامساوی
$R$	تابع پایه نسبی
$t_0$	ضخامت لایه میانی پوسته
$t_1$	ضخامت لایه بیرونی پوسته
$U$	انرژی کرنشی
$V$	حجم

### بردارها و ماتریس‌ها

C	ماتریس الاستیسیته
f	بردار نیروهای حجمی
g	بردار قیدها
H	ماتریس هسیان
K	ماتریسی سختی
L	بردار مجانب‌های متحرک پایینی
M	بردار لنگرهای خمشی
N	ماتریس توابع شکل
R	ماتریس چرخش
S	بردار متغیرهای کمبود
t	بردار نیروهای سطحی
u	میدان تغییر مکان تعادل سازه الاستیک
U	بردار مجانب‌های متحرک بالایی
v	میدان تغییر مکان مجازی مجاز سینماتیکی
V	بردار نیروهای برشی
w	بردار وزن‌ها
X	بردار متغیرهای طراحی
$\underline{X}$	بردار حدود پایین متغیر طراحی
$\bar{X}$	بردار حدود بالای متغیر طراحی
y	بردار ضرایب لاگرانژ

### نمادهای یونانی

$\gamma_{ij}$	کرنش برشی
$\Gamma$	محدوده فضای طراحی
$\Gamma_d$	محدوده تعریف تغییر مکان‌ها
$\Gamma_t$	محدوده تعریف نیروهای مرزی
$\varepsilon_{ij}$	کرنش‌ها

$\lambda$	ضریب لاگرانژ
$\mu$	ضریب جریمه
$\nu$	ضریب پواسون
$\xi(\mathbf{x})$	تابع پیوسته تعیین کننده بودن یا نبودن مواد
$\Pi$	انرژی پتانسیل کل
$\rho$	چگالی
$\rho_s$	چگالی مواد جامد
$\sigma_{ij}$	تنش‌ها
$\sigma_{VM}$	تنش فن میزز
$\sigma_l$	تنش مجاز
$\phi$	تابع لاگرانژین
$\psi$	انحنای متناظر با لنگر خمشی
$\chi(\mathbf{x})$	تابع گسسته تعیین کننده بودن یا نبودن مواد
$\Omega$	دامنه کل
$\Omega_s$	دامنه مواد جامد
$\bar{\Omega}$	حد بالای حجم مصالح جامد

# فصل اول

## مقدمه

## ۱ مقدمه

بهینه‌سازی علمی است که امروزه مورد توجه بسیاری از محققین و مهندسين قرار دارد. در حالت کلی هدف از بهینه‌سازی این است که از منابع محدود طوری بهره‌برداری شود که بیشترین کارایی را داشته باشد. هدف یک طراحی بهینه، به دست آوردن بهترین طراحی ممکن بر اساس معیارهایی است که طراح در نظر دارد. کمبود منابع مواد اولیه باعث ایجاد تقاضا برای وزن سبک و هزینه پایین می‌شود. این موضوع بیان‌کننده اهمیت بهینه‌سازی وزن و هزینه سازه‌ها است.

مسائل بهینه‌سازی را می‌توان در سه رده مختلف دسته‌بندی نمود که عبارتند از بهینه‌سازی توپولوژی، شکل و ابعاد سازه. در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها، هدف اصلی پیدا کردن تعداد مناسب حفره‌ها و محل آنها می‌باشد. به عنوان مثال در مورد یک خرپا، هدف از بهینه‌سازی توپولوژی، به دست آوردن تعداد بهینه اعضای خرپا و نحوه ارتباط آنها با هم می‌باشد. در بهینه‌سازی شکل سازه‌ها هدف اصلی پیدا کردن بهترین موقعیت مرزهای سازه است. برای مثال اگر خرابایی را در نظر بگیرید، حل مساله بهینه‌سازی شکل خرپا، منجر به حل مساله‌ای می‌شود که جواب آن بهترین موقعیت مکانی گره‌های خرپا خواهد بود و متغیرهای طراحی مساله بهینه‌سازی، مختصات گره‌های دو سر اعضای خرپا می‌باشد. نوع دیگر مسائل بهینه‌سازی، بهینه‌سازی ابعاد است که برای یک سازه خرابایی به مفهوم به دست آوردن حداقل سطح مقطع مورد نیاز هر یک از اعضا است.

بهینه‌سازی شکل و توپولوژی در دهه‌های اخیر پیشرفت‌های زیادی کرده و کاربردهای موفقیت‌آمیزی در بهینه‌کردن مسائل علمی مهندسی داشته است. در بهینه‌سازی شکل هدف دستیابی به بهترین هندسه از دامنه طراحی است، با این فرض که بارگذاری و شرایط مرزی مشخص باشد. معرفی این نوع از بهینه‌سازی را می‌توان در کارهای هافتکا و جاندلی [۱] و دینگ [۲] و همچنین اولف و روزوانی [۳] مطالعه نمود. در نگاه اول این روش بسیار کلی به نظر می‌رسد. با این حال بهینه‌سازی شکل تنها قادر به بهینه‌کردن یک قالب اولیه با توپولوژی مشخص است.

بنابراین در حالت کلی نیازمند روش های بهینه‌سازی هستیم که قادر به ایجاد تغییر در تعداد، موقعیت و نحوه ارتباط عناصر سازه‌ای باشند. در سال‌های اخیر تکنیک‌های مربوط به این نوع بهینه‌سازی معرفی شده‌اند. روش های زیادی برای حل مسئله توپولوژی وجود دارد. در یکی از تحقیقات اولیه که توسط بندسو و کیکوچی [۴] صورت گرفت، روش حل بر مبنای استفاده از ریزسازه بوده است. یک روش جایگزین برای آن، روش قانون توانی یا SIMP<sup>۱</sup> است [۵]. علاوه بر این روش‌ها، برخی روش‌های بر مبنای شهود نیز برای مسائل حداقل‌سازی کار خارجی یا دیگر توابع هدف مورد استفاده قرار گرفته‌اند. از میان این روش‌ها می‌توان به روش‌های تکاملی اشاره کرد (ژی و استیون [۶]). برای مرور کلی بر بهینه‌سازی توپولوژی می‌توان به مرجع [۷] این رساله مراجعه کرد.

رساله حاضر مربوط به ترکیب هر دو مسئله ذکر شده شکل و توپولوژی برای پیدا کردن موقعیت سخت‌کننده‌های سطحی سازه پوسته‌ای می‌باشد. در مسائل سنتی بهینه‌سازی توپولوژی، همواره توزیع ماده در یک محدوده ثابت صورت می‌گیرد. چنانچه در سال‌های اخیر بیشتر تحقیقات انجام شده، بر مبنای به کارگیری جداگانه تکنیک‌های بهینه‌سازی عمل شده است؛ به این صورت که ابتدا بهینه‌سازی توپولوژی به عنوان یک پیش پردازنده انجام شده و سازه بهینه به عنوان یک سازه پایه جهت بهینه‌سازی شکل با روش تغییرات مرزی مورد استفاده قرار گرفته است (اولهوف و همکاران [۸]؛ لین و چاو [۹]).

در این رساله روشی ترکیبی معرفی می‌شود که به صورت همزمان عمل بهینه‌سازی شکل و توپولوژی را انجام می‌دهد. مسئله حداکثرسازی سختی توسط یک مسئله حداقل‌سازی انرژی کرنشی حل می‌شود. مسئله ترکیب شده، به دو زیر مسئله شکل و توپولوژی تقسیم می‌شود. از این‌رو از یک روش تکراری دو مرحله‌ای برای بهینه‌سازی استفاده می‌شود؛ به طوری که در مرحله اول با انجام یک گام بهینه‌سازی شکل، هندسه پوسته بهبود می‌یابد و در مرحله دوم توزیع بهینه لایه تقویتی روی

---

<sup>۱</sup> Solid Isotropic Material with Penalization

پوسته انجام می‌گیرد. این کار تا همگرا شدن به یک جواب بهینه ادامه پیدا می‌کند.

به خاطر زیاد بودن متغیرهای طراحی، معمولاً مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از روش‌های غیر مستقیم بهینه‌سازی، مثل معیار بهینگی<sup>۱</sup> حل می‌شوند. روش‌های معیار بهینگی از دهه شصت میلادی به عنوان جایگزینی برای روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی در حل مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند. امروزه روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی به سرعت در حال پیشرفت بوده و به صورت گسترده در مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای استفاده می‌شوند. روش مجانب‌های متحرک<sup>۲</sup> (MMA) [۱۰] یکی از روش‌های بهینه‌سازی است که قادر به حل مسائل با تعداد متغیرهای طراحی زیاد می‌باشد. در این رساله از این روش به جای روش‌های معیار بهینگی استفاده می‌شود.

در فصل دوم این رساله بهینه‌سازی توپولوژی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این فصل ضمن معرفی مدل مواد مورد استفاده، تعاریف مسئله بهینه‌سازی توپولوژی بیان می‌شوند. سپس انواع معیار طراحی برای بهینه‌سازی توپولوژی بیان شده و نحوه تعریف مدل مصالح برای لایه تقویتی سازه شرح داده می‌شود. در فصل سوم ضمن شرح مختصری از بهینه‌سازی شکل با استفاده از روش تغییرات مرزی، الگوریتم بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی به تفصیل مورد بررسی قرار می‌گیرد. فصل چهارم به شرح روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی پرداخته و در پایان روش مجانب‌های متحرک را که در این پایان نامه از آن استفاده شده است، مورد بررسی قرار می‌دهد. فصل پنجم در مورد تحلیل سازه به روش اجزا محدود است. در این فصل اطلاعات مربوط به تحلیل سازه‌ها از قبیل نوع المان، توابع شکل، درجات آزادی و ... که در این رساله استفاده شده‌اند، شرح داده می‌شود. فصل ششم در مورد نحوه تولید شکل مطالبی را بیان می‌کند. نحوه تعریف پارامتریک منحنی‌ها و سطوح، معرفی منحنی‌های بزیر، بی اسپلاین و نریز از مطالب این فصل می‌باشند. در نهایت در فصل هفتم پایان‌نامه مثال‌هایی حل شده و نتایج آنها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

---

<sup>۱</sup> Optimality Criteria

<sup>۲</sup> Method of Moving Asymptotes



## فصل دوم

# بهینه‌سازی توپولوژیک

## ۲ بهینه‌سازی توپولوژیک

### ۲.۱ مقدمه

هدف از بهینه‌سازی توپولوژی پیدا کردن بهترین چیدمان سازه در یک دامنه مشخص است. تنها مقادیر معلوم در این نوع مسائل بارهای اعمالی، شرایط تکیه‌گاهی و حجم سازه‌ای که قرار است تشکیل شود، می‌باشند. در این نوع مسائل ابعاد فیزیکی، شکل و نحوه ارتباط عناصر سازه‌ای مجهول هستند.

### ۲.۲ مدل های مواد

بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها ترکیب پیچیده‌ای از بهینه‌سازی ابعاد و شکل می‌باشد. یکی از مشکلاتی که در بهینه‌سازی سازه بوسیله تغییرات مرزی وجود دارد این است که در طرح نهایی، توپولوژی جسم نسبت به جسم اولیه تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر برای بهینه‌یابی کامل یک سازه بایستی توپولوژی آن مشخص باشد.

به طور معمول استفاده از تکنیک‌های بهینه‌یابی شکل با روش تغییرات مرزی به چندین بار تغییر می‌شود در حین بهینه‌سازی نیازمند است. بنابراین اعمال تغییرات توپولوژی جسم با استفاده از این روش بسیار پیچیده می‌نماید. در بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها باید بتوانیم سوراخ‌هایی در جسم به وجود آوریم که انجام آن با روش تغییرات مرزی شدنی نیست. مضاف بر اینکه بر خلاف روش‌های بهینه‌سازی شکل که در آنها مرزهای طراحی می‌توانند به وسیله مجموعه‌ای از قسمت‌های هندسی ساده (مثل خطوط، سهمی‌ها و ..) تعریف شوند، در مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک این کار با استفاده از تعداد محدودی از پارامترها انجام‌پذیر نمی‌باشد.

معرفی یک تابع برای مشخص ساختن چگالی مواد در جسم با در نظر گرفتن مواد مرکب مشتمل بر تعداد نامحدودی از سوراخ‌های ریز که به صورت پرئودیک در این جسم پخش شده‌اند،

مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها را به یک مسئله بهینه‌سازی ابعادی تبدیل می‌کند و پیچیدگی این مسائل تا حدودی برطرف می‌شود. در واقع استفاده از ایده بکارگیری جسم سلولی با ریزسازه‌های پرپودیک<sup>۱</sup>، طبیعت بودن یا نبودن مواد در توپولوژی جسم را از مقیاس میکروسکوپی به مقیاس میکروسکوپی رهنمون نموده و باعث پایداری حل می‌گردد.

راه‌های زیادی برای معرفی ریزسازه‌های فوق وجود دارد که آنها را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود. دسته اول ریزسازه‌های مرکب لایه‌ای<sup>۲</sup> و دسته دوم میکروسلول‌ها با حفره‌های داخلی<sup>۳</sup> می‌باشند. تئوری همگن‌سازی<sup>۴</sup> برای محاسبه خواص مکانیکی میکروسکوپی این مواد بکار می‌رود. در مورد مواد لایه‌ای معادله همگن‌سازی می‌تواند به صورت تحلیلی حل شود و برای میکروسلول‌های حفره‌دار این معادله معمولاً به وسیله روش‌های عددی مثل روش اجزاء محدود حل می‌شود.

در عمل پس از انتخاب فضای مرجع و تقسیم‌بندی آن به المانهای محدود، فرض می‌شود که هر المان شامل مواد سلولی با ساختار خاص خود می‌باشد. پارامترهای هندسی این ریزسازه‌ها به عنوان متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بایستی توجه کرد که مسئله در یک فضای ثابت حل می‌شود و بنابراین در تحلیل به روش المان محدود، مدل المان محدود در حین الگوریتم بهینه‌سازی تغییر نمی‌کند.

راه حل دیگری نیز برای مدل کردن مواد در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک گسسته وجود دارد. در این روش بودن یا نبودن مواد با استفاده از تابع تقریب مناسبی که تابع چگالی مصالح مصنوعی نامیده می‌شود، مشخص می‌گردد. به این نوع مواد معمولاً مواد مصنوعی اطلاق می‌شود. با استفاده از این مواد می‌توان خواص مکانیکی میکروسکوپی مواد را بدون استفاده از معادلات همگن‌سازی به دست آورد. لیکن این کار دقت کمتری نسبت به خواص مکانیکی به دست آمده از معادلات همگن‌سازی را

---

<sup>۱</sup> Periodic Micro Structures

<sup>۲</sup> Rank Layered Material

<sup>۳</sup> Rectangular Microscale Voids

<sup>۴</sup> Homogenization Theory

نتیجه می‌دهد.

با استفاده از مدل‌های مواد فوق‌الذکر مصالح به کار رفته به صورت توده‌ای از مواد خلل و فرج‌دار مدل می‌شود. در مسئله بهینه‌سازی تعریف شده با این روش پارامترهای هندسی حفره‌ها متغیرهای طراحی مسئله می‌باشند. در صورتی که در قسمتی از جسم تنها حفره‌های این ریزسازه‌ها به وجود آید، در توپولوژی جسم حفره‌ای ایجاد خواهد شد و در صورتی که در این ریزسازه‌ها حفره به وجود نیاید در آن محل توپولوژی جسم حاوی مواد جامد است. با توجه به اینکه در این فصل از مواد مصنوعی با میکروسلول‌های حفره‌دار استفاده می‌شود، ابتدا میکروسلول‌ها با حفره‌های داخلی و سپس مواد مصنوعی در ادامه بحث می‌شوند.

### ۲.۲.۱ حفره‌های ریزمقیاس مستطیلی

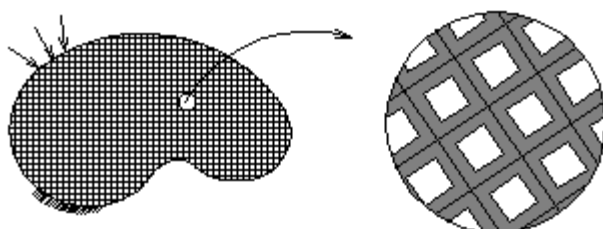
در انتخاب ریزسازه‌ها، شکل ریزسازه یکی از مهمترین مسائلی است که بایستی به آن توجه کرد. شکل انتخاب شده باید به گونه‌ای باشد که چگالی مواد در ریزسازه بتواند کل مقدار  $0$  تا  $1$  را پوشش دهد. برای مثال استفاده از حفره‌های دایروی (و یا کروی در حالت سه‌بعدی) مانع از آن خواهد شد که سلول مستطیل شکل (و یا مکعب مستطیل در حالت سه بعدی) به طور کامل به صورت حفره درآید. از طرف دیگر شکل حفره بایستی با کمترین تعداد پارامتر تعریف شود تا میزان متغیرهای طراحی در مسئله بهینه‌سازی به حداقل برسد. سلولهای مربعی با حفره‌های مستطیل شکل در مرکز آنها ساده‌ترین شکل برای این منظور می‌باشند (شکل (۲-۱)). در فضای سه‌بعدی میکروسلول‌های مکعب شکل با حفره‌های مکعب مستطیل شکل در مرکز آنها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

اگر بعد سلول مربعی با  $\varepsilon$  که مقدار مثبت و بسیار کوچک است نشان داده شود آنگاه اندازه سوراخ با  $\varepsilon a$  و  $\varepsilon b$  مشخص می‌گردد. شکل (۲-۲) سلول واحد را در دستگاه مختصات میکروسکپی نشان می‌دهد. با استفاده از این مدل سطح اشغال شده توسط مواد جامد به صورت زیر محاسبه می‌شود.

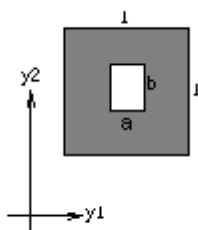
$$\Omega_s = \int_{\Omega} (1 - ab) d\Omega \quad (1-2)$$

که در این رابطه  $0 \leq a \leq 1$  و  $0 \leq b \leq 1$  و  $\Omega$  فضای طراحی و  $\Omega_s$  قسمت جامد فضای طراحی را نشان می‌دهد.

در حالت کلی سوراخ‌های ریزمقیاس در جسم سلولی می‌توانند نسبت به محورهای مختصات



شکل ( ۱-۲ ) میکروسلول‌ها با حفره‌های مستطیلی [۱۴]



شکل ( ۲-۲ ) سلول واحد با حفره مستطیلی در مختصات میکروسکوپی [۱۴]

به صورت زاویه‌دار در نظر گرفته شوند که این انحراف زاویه  $\theta$  بر ماتریس الاستیسیته تاثیر می‌گذارد. بنابراین در محاسبات زاویه  $\theta$  به عنوان یک متغیر طراحی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به نکات فوق هر نقطه  $x \in \Omega$  دارای مقادیر  $a$  و  $b$  و  $\theta$  می‌باشد که متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی می‌باشند.

$$a = a(\mathbf{x}) \quad , \quad b = b(\mathbf{x}) \quad , \quad c = c(\mathbf{x}) \quad (2-2)$$

در عمل این توابع به وسیله توابع ثابتی در هر المان از فضای طراحی گسسته سازی شده، تقریب زده می شوند و بنابراین ابعاد و زاویه یک ریزسازه در هر المان ثابت فرض می شود. در نتیجه ماتریس الاستیسیته همگن شده نیز برای هر المان ثابت خواهد بود. بنابراین در فضای دوبعدی اگر دامنه به  $N$  المان محدود تقسیم شود  $3N$  متغیر طراحی در مسئله بهینه سازی توپولوژیک سازه وجود دارد. قسمت جامد ریزسازه ها از نوع مواد ایزوتروپیک فرض می شود؛ زیرا سوراخ مستطیل شکل در جسم سلولی حالت ارتوتروپیک را به وجود می آورد. در مسائل الاستیسیته دوبعدی (مسائل تنش مسطح و کرنش مسطح) قانون هوک به صورت زیر برقرار است.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3-2)$$

که در این رابطه  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) تنشها،  $\varepsilon_{ij}$  کرنشها و  $c_{ij}$  اعضاء ماتریس سختی کاهش یافته مواد می باشند. توجه شود که برای مواد با ساختمان سلولی اعضاء ماتریس الاستیسیته  $C$  تابعی از  $\theta, b, a$  می باشند.

$$C = C(a, b, \theta) \quad (4-2)$$

وابستگی  $C$  به  $b, a$  به وسیله تئوری همگن سازی محاسبه می شود و تاثیر  $\theta$  در مسائل دوبعدی با استفاده از قاعده چرخش به صورت زیر اعمال می شود.

$$C(a, b, \theta) = \mathbf{R}^T(\theta).C(a, b).\mathbf{R}(\theta) \quad (5-2)$$

که در این رابطه  $\mathbf{R}$  ماتریس چرخش است. تاثیر پارامترهای طراحی بر ماتریس الاستیسیته در بخش های بعدی مفصلاً بحث می شود. به این نکته نیز باید توجه کرد که در مسائل دوبعدی برای سلول واحد تابع چگالی، تابعی از  $b, a$  است.

$$\rho = \rho(a, b) = (1 - ab)\rho_s \quad (6-2)$$

که در این رابطه  $\rho_s$  چگالی مواد جامد می باشد.

## ۲.۲.۲ مواد مصنوعی

در صورتی که شکل و توپولوژی یک سازه را به صورت موادی که در یک فضای طراحی توزیع می‌شوند در نظر بگیریم سازه را می‌توان به وسیله تابع  $\chi$  توصیف کرد که این تابع در هر نقطه  $\mathbf{x}$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_s \quad \text{material} \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_s \quad \text{no material} \end{cases} \quad (7-2)$$

با فرض وجود ایزوتروپی برای قسمت جامد می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= \chi(\mathbf{x})\rho^0 \\ \mathbf{C}(\mathbf{x}) &= \chi(\mathbf{x})\mathbf{C}^0 \end{aligned} \quad (8-2)$$

که در این رابطه  $\rho^0$  و  $\mathbf{C}^0$  به ترتیب چگالی و ماتریس الاستیسیته قسمت جامد همگن می‌باشند.

در حل عددی مسئله بهینه‌سازی تابع  $\chi(\mathbf{x})$  گسسته‌سازی می‌شود و بنابراین در هر المان از فضای طراحی  $\chi(\mathbf{x})$  ها متغیرهای طراحی مسئله می‌باشند. اما این فرمولبندی بسیار پرهزینه است و پیشنهاد نمی‌شود. ساده‌ترین راه برای رفع این مشکل جایگزین کردن تابع پیوسته  $\xi(\mathbf{x})$  بجای تابع گسسته  $\chi(\mathbf{x})$  میباشد بنابراین:

$$\rho(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})\rho^0 \quad (9-2)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})\mathbf{C}^0 \quad (10-2)$$

که در این رابطه  $0 \leq \xi(\mathbf{x}) \leq 1$  و  $\mathbf{x} \in \Omega$  می‌باشند. توجه شود که مطابق رابطه (۱۰-۲) حجم

مواد  $V$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$V = \int_{\Omega} \xi(\mathbf{x}) d\Omega \quad (11-2)$$

اگرچه روابط (۱۰-۲) و (۱۱-۲) سبب ساده‌شدن الگوریتم بهینه‌سازی می‌شوند اما در این حالت جواب سازه بهینه شده دارای نواحی خلل و فرج دار زیادی است. از نقطه نظر مهندسی حلی که منجر به وجود فقط قسمت جامد و یا فقط حفره شود عملی‌تر است. از اینرو بهتر است که نواحی خلل

و فرج دار با استفاده از جریمه‌ای که به  $\xi(\mathbf{x})$  تعلق می‌گیرد حذف شوند. این ایده بوسیله رزوانی مطرح گردید. بنابراین رابطه (۱۱-۴) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x})^\mu \mathbf{C}^0 \quad (12-2)$$

که در این رابطه  $\mu$  عامل جریمه و بزرگتر از ۱ (معمولاً بین ۳ و ۹) می‌باشد.

تابع چگالی مصنوعی  $\xi$  برای ساختن ریزسازه‌های مصنوعی با بعضی پارامترهای هندسی در ارتباط است. به عنوان مثال برای ساختن جسم سلولی شامل سلولهای واحد با حفره‌های مستطیل شکل،  $\xi(\mathbf{x})$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\xi(\mathbf{x}) = 1 - a(\mathbf{x})b(\mathbf{x}) \quad (13-2)$$

همان‌طور که اشاره شد در مدل به کار رفته فرض می‌شود که مصالح حاوی تعداد زیادی سلول‌های مربع‌شکل با حفره‌های مستطیلی بوده و پارامترهای  $a(\mathbf{x})$  و  $b(\mathbf{x})$  در هر المان ثابت می‌باشد. با فرض ایزوتروپیک بودن مصالح، ماتریس الاستیسیته مدل مواد مصنوعی به صورت زیر است:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-ab)^\mu}{(1-v)^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-v)/2 \end{bmatrix} \quad (14-2)$$

برای مسائل سه‌بعدی در محیطهای پیوسته با فرض مواد ایزوتروپیک، ماتریس الاستیسیته مصنوعی به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-abc)^\mu}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-2v)/2 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & (1-2v)/2 & 0 \\ & & & & & (1-2v)/2 \end{bmatrix} \quad (15-2)$$

که در این رابطه  $c$  بعد حفره در جهت  $z$  در سلول مکعب شکل می‌باشد.



### ۲.۳ مدل ریاضی برای مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها

یک مسئله کلی الاستیسیته خطی تحت اثر نیروهای حجمی به کار برده شده در دامنه  $\Omega$  و نیروهای سطحی در  $\Gamma_t$  را در نظر می‌گیریم. سطح دامنه  $\Omega$  دارای مرز  $\Gamma$  شامل  $\Gamma_d$  که تغییرمکانها در آن تعریف شده‌اند و  $\Gamma_t$  که بارهای سطحی در آن به کار برده شده‌اند می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که:

$$\begin{aligned}\Gamma_t \cup \Gamma_d &= \Gamma \\ \Gamma_t \cap \Gamma_d &= \emptyset\end{aligned}\quad (۱۶-۲)$$

با به‌کارگیری روش تغییرمکان مجازی، معادلات تعادل با مساوی قرار دادن کار مجازی داخلی و خارجی به دست آورده می‌شوند. با فرض اینکه  $\mathbf{u}$  میدان تغییرمکان که تعادل سازه الاستیک را تعریف می‌کند باشد و  $\mathbf{v}$  میدان تغییرمکان مجازی سینماتیکی باشد می‌توان نوشت:

$$\mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad \text{where} \quad \mathbf{V} = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3 \text{ and } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_d \right\} \quad (۱۷-۲)$$

پس برای یک سازه ارتجائی با مرز ثابت  $\Gamma_d$  می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v})(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}^T \mathbf{v} d\Gamma \quad (۱۸-۲)$$

با بهره‌گیری از تحلیل حساب تغییراتی و تابع نماها و استفاده از فرم انرژی دوخطی برای کار داخلی و فرم بارخطی برای کار خارجی رابطه (۱۸-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (۱۹-۲)$$

که در این رابطه:

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega \quad (۲۰-۲)$$

$$\ell(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (۲۱-۲)$$

هدف از مسئله بهینه‌سازی سازه‌ها که در این فصل مورد بحث قرار گرفته این است که سخت‌ترین سازه ممکن را با استفاده از یک مقدار مصالح معین بیابیم. مینیمم بودن مقدار کار خارجی

با میدان تغییرمکان حقیقی و یا مینممم بودن  $\ell(\mathbf{u})$ ، ماکزیمم بودن سختی عمومی یک سازه را فراهم می‌کند. بنابراین مسئله بهینه‌سازی سازه‌ها با قرار دادن  $\ell(\mathbf{u})$  به عنوان تابع هدف به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \ell(\mathbf{u}) & (22-2) \\ & \text{Subject to } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ & \text{and } \text{design restrictions} \end{aligned}$$

که در این رابطه محدودیت‌های طراحی،  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  و  $\ell(\mathbf{u})$  توابعی از متغیرهای طراحی می‌باشند. چنانکه قبلاً دیدیم متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک پارامترهای هندسی سوراخ‌های ریزمقیاس مصالح فرض شده برای مسئله می‌باشند (برای مثال پارامترهای  $a$  و  $b$  و  $\theta$  در مصالح شامل سلولهای مربعی با سوراخ‌های مستطیل شکل).

با جایگزین کردن  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  بجای  $\mathbf{v}$  در رابطه (2-19) معادله زیر به دست می‌آید:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \ell(\mathbf{u}) \quad (23-2)$$

یادآوری می‌شود که  $\frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$  نشان دهنده انرژی کرنشی است بنابراین نتیجه گرفته می‌شود

که مینیمم کردن  $\ell(\mathbf{u})$  معادل مینیمم کردن انرژی کرنشی است. از سوی دیگر انرژی پتانسیل کل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \ell(\mathbf{u}) \quad (24-2)$$

با جایگزینی رابطه (23-2) در رابطه فوق می‌توان نوشت:

$$\Pi(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\ell(\mathbf{u}) \quad (25-2)$$

از رابطه فوق چنین نتیجه می‌شود که مینیمم کردن  $\ell(\mathbf{u})$  معادل ماکزیمم کردن انرژی

پتانسیل کل می‌باشد. بنابراین مسئله کلی بهینه سازی (2-22) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \Pi(\mathbf{u}) & (26-2) \\ & \text{Subject to } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ & \text{and design restrictions} \end{aligned}$$

با استفاده از اصل مینیمم کردن انرژی پتانسیل رابطه (۲۶-۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} & \max_{\text{design}} \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \Pi(\mathbf{u}) & (27-2) \\ & \text{subject to design restrictions} \end{aligned}$$

دلیل ساختن مسئله بهینه‌سازی بر اساس انرژی پتانسیل کل آن است که این روش کلی است و همیشه مسئله بهینه‌سازی را برای سخت‌ترین سازه تعریف می‌کند. حال آنکه در مورد مسئله‌ای با تغییر مکان‌های مرزی از قبل تعریف شده غیرصفر و در غیاب نیروهای حجمی و سطحی، سخت‌ترین سازه در حالت انرژی کرنشی ماکزیمم رخ می‌دهد ولی در بیشتر موارد دیگر انرژی کرنشی باید مینیمم شود. بنابراین نمی‌توان از انرژی کرنشی و یا  $\ell(\mathbf{u})$  با اطمینان در همه مسائل به عنوان تابع هدف بهره گرفت.

در صورتی که از مدل مواد با سوراخ‌های مستطیل شکل استفاده شود با در نظر گرفتن  $a$ ،  $b$  و

$\theta$  به عنوان متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی (۲۷-۲) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} & \max_{a, b, \theta} \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \Pi_{\beta}(\mathbf{v}) & (28-2) \\ & \text{subject to } \Omega_s = \int_{\Omega} (1 - ab) d\Omega \leq \bar{\Omega}_s \\ & \text{and } 0 \leq a, b \leq 1 \end{aligned}$$

که  $\bar{\Omega}_s$  حد بالای حجم مصالح جامد می‌باشد. معادله (۲۸-۲) معادل است با :

$$\begin{aligned} & \max_{a, b, \theta} \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \Pi_{\beta}(\mathbf{v}) & (29-2) \\ & \text{subject to } \Omega_s = \int_{\Omega} (1 - ab) d\Omega \leq \bar{\Omega}_s \\ & \text{and } 0 \leq a, b \leq 1 \end{aligned}$$

در بخش بعدی نوع دیگری از مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲.۴ بهینه‌سازی توپولوژیک با در نظر گرفتن قید تنش

به خاطر کاربرد روش اجزا محدود و تقسیم دامنه طراحی به المان‌های زیاد، تعداد متغیرهای طراحی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک زیاد می‌باشد. به همین خاطر استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی ممکن است کمی غیرعملی به نظر آید. از این‌رو روش‌های معیار بهینگی به‌طور گسترده در این‌گونه مسائل استفاده شده‌اند و به خاطر محدودیت‌های این روش‌ها، در مسائل کلاسیک بهینه‌سازی توپولوژیک تنها یک نوع قید (قید حجمی) در نظر گرفته شده‌است.

در سال‌های اخیر دسته‌ای از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی مانند روش خطی‌سازی محدب<sup>۱</sup> (CONLIN) و روش مجانب‌های متحرک (MMA) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. می‌توان نشان داد که استفاده از تقریب‌های روش مجانب‌های متحرک و حل زیرمسئله‌های آن به کمک روش دوگان<sup>۲</sup> به نتایجی مشابه معیار بهینگی می‌انجامد [۱۲]. استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی تعریف مسائل متنوع بهینه‌سازی با قیدهای مختلف را ممکن می‌سازد. در این قسمت مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک برای حداقل کردن وزن با در نظر گرفتن قید تنش معرفی می‌شود.

### ۲.۴.۱ معیار تنش برای مدل مصالح مصنوعی (SIMP)

برای مسائل طراحی توپولوژی با فرمول بندی ۰-۱ می‌توان به راحتی قید تنش را اعمال کرد. ولی زمانی که مصالح با چگالی بینابین را معرفی می‌کنیم، شکل قید تنش دیگر به سادگی حالت قبل نیست.

معیار تنش برای مدل مصالح مصنوعی (همانند رابطه سختی-چگالی) باید تا حد امکان ساده باشد و همگرایی آن را نیز حفظ کند. به همین خاطر از معیار تنش فن میز<sup>۳</sup> برای مصالح مصنوعی با اعمال ضریب جریمه  $\mu$  استفاده می‌شود.

---

<sup>۱</sup> CONvex LINearization

<sup>۲</sup> Dual Method

<sup>۳</sup> Von Mises

$$\sigma_{VM} \leq \rho^\mu \sigma_l \quad (30-2)$$

این قید به معنی کاهش محدوده مقاومت با فاکتور  $\rho^\mu$  می باشد. همان طور که مشاهده می شود برای قید تنش نیز فاکتور جریمه  $\mu$  اختیار شده است. انتخاب یک مقدار دیگر برای آن مغایر با فیزیک مسئله است [۱۲].

مسئله بهینه سازی کلاسیک با قید تنش شامل پیدا کردن وزن حداقل سازه با اقناع قید تنش (باقی ماندن تنش ها در محدوده مجاز) است. با در نظر گرفتن اینکه سازه در تعادل الاستیک با بارهای وارد شده می باشد، می توانیم فرمول بندی زیر را به کار گیریم.

$$\begin{aligned} \min \sum_{e=1}^N \Omega_e \rho_e & \quad (31-2) \\ \text{s.t. } \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{f} \\ \sigma_{VM} \leq \rho_e^\mu \sigma_l \quad \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \quad e = 1, \dots, N \end{aligned}$$

که تنش هر المان را می توان مثلا در گره میانی هر المان محدود در نظر گرفت.

## ۲.۴.۲ روش های حل

وجود مسئله "تکینی"<sup>۱</sup> باعث می شود تا تمهیدات خاصی را در حل مسائل با قید تنش اعمال کنیم [۱۲]. این مسئله ابتدا در حل مسائل خرپا پیش آمد و منجر به یک بی قاعدگی<sup>۲</sup> در فضای طراحی شد. تکینی به این خاطر اتفاق می افتد که تغییر در توپولوژی سازه (حذف یک یا چند المان) باعث حذف قید متناظر با آنها شده و در نهایت فضای طراحی مسئله را تغییر می دهد و باعث چندحالتی<sup>۳</sup> در فضای طراحی می شود. این امر به این معنی است که روش های کلاسیک بهینه سازی مبتنی بر شرایط کان تاکر<sup>۴</sup> دیگر نمی توانند نقاط بهینه ای را که در این نواحی چندحالتی قرار دارند، پیدا کنند. به عبارت دیگر یک الگوریتم استاندارد بهینه سازی قادر نخواهد بود نقاط با چگالی کم را

<sup>۱</sup> Singularity

<sup>۲</sup> Irregularity

<sup>۳</sup> degeneracy

<sup>۴</sup> Kuhn-Tucker Condition

کاملاً حذف کند و به توپولوژی بهینه درست برسد.

یک روش برای رفع این مشکل این است که فرمول‌بندی را طوری تغییر دهیم که بهتر به جواب همگرا شود. در ابتدا توجه کنیم که در یک مسئله طراحی توپولوژی، قیدهای تنش تنها زمانی اعمال می‌شوند که ماده وجود داشته باشد. برای حذف شرط  $\rho > 0$  از قید می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$\rho \left( \frac{\sigma_{VM}}{\rho^\mu \sigma_l} - 1 \right) \leq 0 \quad (32-2)$$

برای اجزای میله‌ای در یک خرپا، این شرط به معنی درنظر گرفتن نیروها به جای تنش‌ها است [۱۲]. متأسفانه بازنویسی فرمول به این شکل کافی نیست و نیاز به اعمال تغییرات دیگری نیز هست. یک روش این است که قیدها را با روش رهاسازی<sup>۱</sup> که توسط چنگ<sup>۲</sup> و ژو<sup>۳</sup> [۱۲] ارائه شد، بازنویسی کنیم. رابطه جدید به این صورت می‌باشد:

$$\rho \left( \frac{\sigma_{VM}}{\rho^\mu \sigma_l} - 1 \right) \leq \varepsilon(1 - \rho) \quad \varepsilon^2 = \rho_{\min} \leq \rho \quad (33-2)$$

که مقدار  $\varepsilon$  مشخص است. به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ، مسئله با قیدهای بالا، دارای فضای طراحی خواهد بود که دیگر چندحالتی نیست. ضریب  $(1 - \rho)$  اطمینان می‌دهد که قید تنش واقعی زمانی اعمال می‌شود که  $\rho = 1$  باشد. بنابراین با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی عادی، امکان رسیدن به نقطه مینیمم  $\rho_\varepsilon^*$  وجود خواهد داشت. چنگ و ژو نشان دادند که فرمول‌بندی رهاسازی، نگاشت‌هایی یک به یک میان پارامتر رهاسازی  $\varepsilon$  و فضای طراحی رهاسازی شده و جواب بهینه آنها به وجود می‌آورد. این یعنی اینکه وقتی  $\varepsilon \rightarrow 0$ ، دنباله فضاهای طراحی  $\{\Omega_\varepsilon\}$  و جواب بهینه آنها  $\rho_\varepsilon$  به سمت مسئله اصلی چندحالتی و جواب بهینه آن همگرا می‌شود.

---

<sup>۱</sup> Relaxation

<sup>۲</sup> Cheng

<sup>۳</sup> Guo

بنابراین روند رسیدن به جواب نهایی شامل حل دنباله‌ای از مسائل بهینه‌سازی متناسب با پارامترهای نزولی  $\varepsilon$  خواهد بود. می‌توان از روش‌های توابع مانع<sup>۱</sup> و توابع جریمه<sup>۲</sup> استفاده کرد. همچنین می‌توان با استفاده از  $\rho_{\min} = \varepsilon^2$  و با کاهش تصاعدی حداقل چگالی از  $10^{-1}$  به  $10^{-4}$  یا  $10^{-6}$  مسئله را حل کرد [۱۳]. می‌توان این کار را با تقسیم متوالی  $\rho_{\min} = \varepsilon^2$  بر یک ضریب معلوم (مثل ۲) انجام داد. برای اینکه مجموعه نقاط شروع که منجر به پیدا کردن نقطه تکین می‌شوند را افزایش دهیم، باید چگالی حداقل انتخابی به اندازه کافی بزرگ باشد [۱۳].

برای استفاده از روش مجانب‌های متحرک (MMA) باید قیدهای تنش طوری نوشته شوند که متناسب با راه حل‌های تقریب‌سازی این روش باشند. برای این منظور قیدها را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم [۱۳]:

$$\frac{\sigma_{VM}}{\rho'' \sigma_l} - \frac{\varepsilon}{\rho} + \varepsilon \leq 1 \quad (۳۴-۲)$$

مسئله رهاسازی را می‌توان در شکل (۳-۲) مشاهده نمود. این شکل مربوط به یک مسئله بهینه‌سازی با دو متغیر طراحی  $x_1$  و  $x_2$  می‌باشد. در قسمت (الف) فضای طراحی چندحالتی و قیدهای مسئله اولیه به همراه نقطه بهینه مشاهده می‌شوند. توجه شود که نقطه بهینه با حذف متغیر  $x_2$  به دست می‌آید. مجموعه نقاط شدنی از فضای طراحی با هاشور مشخص شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نقطه بهینه تنها با یک خط با نقاط شدنی مرتبط است. در قسمت (ب)، همان مسئله با فرمول‌بندی رهاسازی شده مشاهده می‌شود. همان‌طور که از شکل پیدا است، نقطه بهینه در این حالت در مجموعه نقاط شدنی قرار گرفته است و رسیدن به آن از طریق الگوریتم‌های استاندارد بهینه‌سازی ممکن می‌باشد.

---

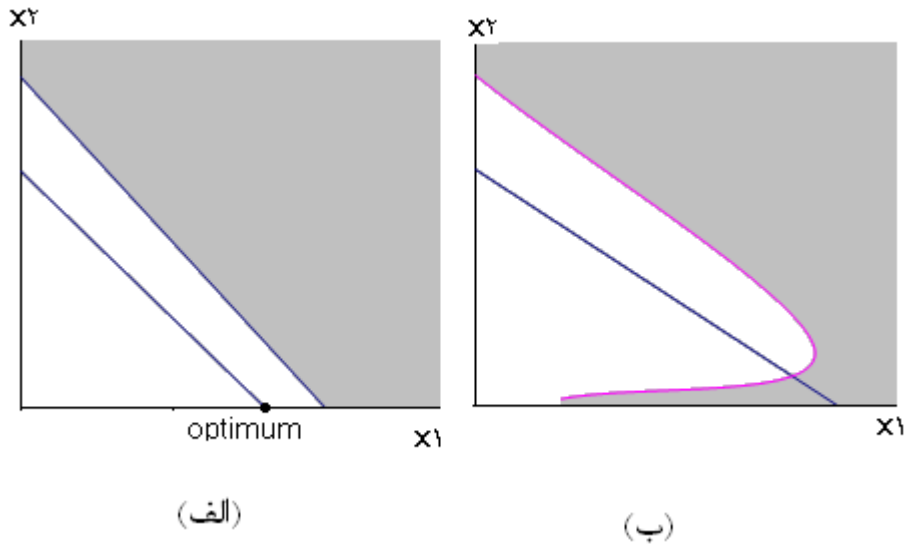
<sup>۱</sup> Barrier Function  
<sup>۲</sup> Penalty Function

## ۲.۵ بهینه‌سازی توپولوژیک لایه تقویتی<sup>۱</sup>

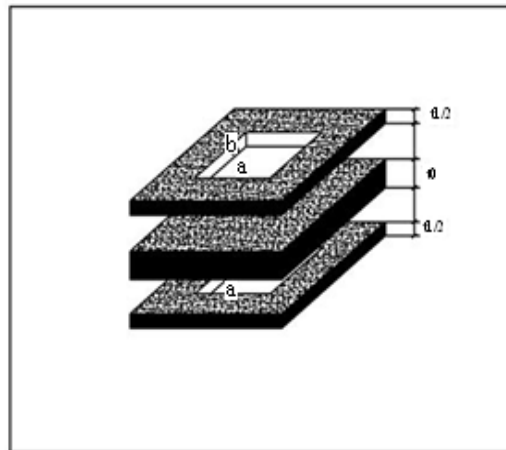
در این بخش می‌خواهیم مدل سلولی را معرفی کنیم که از آن در فرایند بهینه‌سازی توپولوژی

لایه تقویتی برای سازه‌های صفحه‌ای و پوسته‌ای استفاده می‌کنیم. با استفاده از نظریه مونتاژ

لایه‌ها<sup>۲</sup> [۱۴] مدل سلولی شکل (۲-۴) را می‌توان مورد استفاده قرار داد.



شکل (۲-۳) (الف) فضای طراحی چندحالتی (ب) فضای طراحی مسئله پس از رهاسازی [۱۱]



شکل (۲-۴) سلول پایه به همراه لایه تقویتی [۱۴]

<sup>۱</sup> Topological Reinforcement Optimization

<sup>۲</sup> Assembling Plies



در این مدل لایه ایزوتروپیک میانی معرف سازه اصلی و لایه های بالایی و پایینی تشکیل دهنده لایه تقویتی هستند. برای لایه تقویتی مدل میکروسلولی با حفره های مستطیلی را مورد استفاده قرار می دهیم. همانگونه که قبلا اشاره شد ابعاد حفره ها و جهت قرارگیری آنها پارامترهای سلولی خواهند بود. از این رو با فرض اینکه در هر المان محدود لایه های بالایی و پایینی از ماده یکسان تشکیل شده اند، متغیرهای طراحی مسئله بهینه سازی در هر المان محدود  $a^e, b^e, \theta^e$  خواهند بود. باید توجه داشت که در این مدل فرض بر این است که با وجود تغییر ابعاد حفره های میکروسکوپي  $(b, a)$  در حین پروسه بهینه سازی،  $t_0$  ضخامت سازه اصلی و  $t_1$  ضخامت لایه تقویتی ثابت باقی می ماند. در نتیجه اندازه، محل و نحوه قرارگیری لایه تقویتی (با یک ارتفاع ثابت) به وسیله یک الگوریتم بهینه سازی توپولوژی، مشخص خواهند شد. به خاطر حفظ تقارن، لایه تقویتی در هر دو طرف سازه در نظر گرفته می شود.

حجم اشغال شده توسط لایه های تقویتی را می توان از رابطه زیر به دست آورد:

$$V_s = t_1 \int_{\Omega_0} (1 - a(x, y)b(x, y)) d\Omega \quad (۳۵-۲)$$

که  $\Omega_0$  محدوده لایه میانی از سازه اصلی است.

اگر ضخامت لایه میانی  $t_0$ ، صفر در نظر گرفته شود (یعنی تنها یک لایه سلولی با ضخامت  $t_1$  داشته باشیم) نتیجه بهینه سازی توپولوژی، یک سازه پوسته ای شبکه ای همراه با سوراخ خواهد شد که می توان آن را "پیکره بهینه پوسته" نامید. این امر با در نظر گرفتن سه لایه سلولی نیز محقق می شود.

فصل سوم

بهینه سازی همزمان شکل و

توپولوژی

## ۳ بهینه سازی همزمان شکل و توپولوژی

### ۳.۱ مقدمه

در مسائل بهینه‌سازی معمولاً شکل و توپولوژی به صورت جدا از هم بهینه می‌شوند. به این صورت که سازه حاصل از بهینه‌سازی توپولوژی به عنوان سازه پایه برای بهینه‌سازی شکل در نظر گرفته می‌شود. بهینه‌سازی توپولوژی لایه تقویتی سازه پوسته‌ای در حالتی که شکل صفحه میانی آن (سازه پایه) ثابت است لزوماً به معنی رسیدن به بهترین جواب یا حتی یک جواب مناسب نیست. زیرا در نظر گرفتن شکل جدیدی برای سازه پایه ممکن است منجر به پاسخ بهتری برای توزیع ماده بشود. [۱۵]

در این فصل ما پس از شرح مختصر بهینه‌سازی شکل با استفاده از تغییرات مرزی روشی ترکیبی را معرفی خواهیم کرد که به صورت همزمان شکل و توپولوژی سازه را بهینه می‌کند.

### ۳.۲ بهینه‌سازی شکل سازه با استفاده از روش تغییرات مرزی

اولین کارها در بهینه‌سازی شکل توسط زینکوویچ [۱۶] انجام شد. او شکل اولیه سازه و مدل طراحی را به صورت یک مدل محاسباتی اجزا محدود تبدیل کرده و با چشم‌پوشی از مدل هندسی مسئله، منحصرأ بر روی مدل محاسباتی کار کرد. در این حالت مختصات نقاط اجزا محدود واقع بر روی مرزهای سازه به عنوان متغیرهای طراحی مسئله در نظر گرفته می‌شد. این کار خود مستلزم در نظر گرفتن تعداد زیادی متغیر طراحی بود که از اشکالات مهم آن به شمار می‌رفت. همچنین بعد از چند بار تکرار و ایجاد تغییرات طراحی، مرزهای شکل هندسی مورد نظر نرمی و یکنواختی خود را از دست داده و اغلب شکل‌هایی نه چندان جالب پدیدار می‌شد. پس از آن باویکاتی [۱۶] از چند جمله‌ای‌های جبری برای بیان نمودن شکل هندسی سازه‌ها استفاده نمود. در این حالت ضرایب چندجمله‌ای به عنوان متغیرهای طراحی مسئله در نظر گرفته می‌شد. به کار بردن چند جمله‌ای باعث کاهش متغیرهای طراحی در مسئله بهینه‌سازی می‌شد، اما ممکن بود که استفاده از چند جمله‌ای‌های با

درجات بالاتر سبب ناپایداری عددی و نوسان در شکل سازه شود.

امروزه با استفاده از منحنی‌های اسپلاین و نربز این مشکلات برطرف شده‌اند. با استفاده از این منحنی‌ها می‌توان با تعداد بسیار اندک متغیرهای طراحی منحنی‌ها و سطوح مختلفی تولید کرد.

### ۳.۲.۱ تولید شکل

اولین مرحله در تعریف مسئله طراحی شکل بهینه، تعریف هندسه است. در تحقیق حاضر از سطوح نربز برای تولید سطح پیوسته استفاده می‌شود. این کار سبب می‌شود بتوانیم با تعداد کمی از متغیرهای طراحی شکل‌های پیوسته ایجاد کنیم؛ همچنین این امکان را می‌دهد تا بعد از بهبود متغیرهای طراحی در دوره‌های بهینه‌سازی، شکل جدید پیوسته با حفظ پیوستگی و نیز مدل اجزا محدود جدید تولید شوند.

طبیعت پارامتریک مدل طراحی امکان کنترل شکل سازه را از طریق بهبود محل قرارگیری نقاط کنترلی ایجاد می‌کند. به منظور کاهش تعداد متغیرهای طراحی، می‌توان تنها تعداد محدودی از نقاط کنترلی را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفت. با حرکت نقاط کنترل در جهت‌های مشخص، شکل‌های متفاوتی به دست می‌آید. محل‌های قرارگیری نقاط کنترلی به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می‌شوند. متغیرهای طراحی بهینه‌سازی شکل مستقل از هم هستند و هر مجموعه از آنها منجر به ایجاد طراحی متفاوتی از شکل خواهد شد.

### ۳.۲.۲ مسئله بهینه‌سازی

تعریف مسئله بهینه‌سازی از مراحل بسیار مهم این کار می‌باشد. چگونگی تعریف مسئله بهینه‌سازی تأثیر بسیاری در سرعت و دقت جواب حاصل شده و همچنین دستیابی یا عدم دستیابی به جواب بهینه خواهد داشت.

توابع هدف متفاوتی را در مسائل بهینه‌سازی شکل می‌توان مد نظر قرار داد. از این میان می‌توان تابع وزن، تابع انرژی کرنشی، تابع یکنواخت بودن تنش، تابع تمرکز تنش و ... را نام برد. برای توابع

قید نیز می‌توان قیود تنش، قیود تغییر مکان، قیود مربوط به حرکت نقاط کنترلی و ... را تعریف کرد. در این رساله برای بهینه‌سازی شکل، تابع انرژی کرنشی به عنوان تابع هدف و محدوده حرکت نقاط کنترلی به عنوان قید در نظر گرفته می‌شوند.

همان‌طور که اشاره شد برای تعریف هندسه سطح پوسته در این رساله از سطوح نریز استفاده می‌شود. لذا موقعیت نقاط کنترلی تولیدکننده سطوح به عنوان متغیر طراحی پذیرفته می‌شوند. با تغییر در محل قرارگیری نقاط کنترلی، تغییر شکل پوسته اعمال می‌شود. در نتیجه تابع هدف و تابع قید نیز وابسته به نقاط کنترلی هستند.

### ۳.۳ ترکیب بهینه‌سازی شکل و توپولوژی

همان‌طور که پیشتر اشاره شد در این رساله روشی معرفی می‌شود که در آن مسئله بهینه‌سازی شکل و توپولوژی با هم ترکیب می‌شوند و از این روش برای پیدا کردن موقعیت سخت‌کننده‌های سطحی یا همان لایه تقویتی سازه‌های پوسته‌ای استفاده خواهیم کرد.

#### ۳.۳.۱ معیار طراحی

در این قسمت به طور مختصر معیارهای طراحی سازه‌ای مورد نظر برای مسئله بهینه‌سازی را شرح می‌دهیم. همان‌طور که قبلاً اشاره شد روش‌های مختلفی برای طرح یک مسئله بهینه‌سازی وجود دارد که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. هر کدام از روش‌ها می‌توانند توابع هدف و قید متفاوتی داشته باشند. در این رساله ما از معیار سختی سازه‌ای حداکثر استفاده می‌کنیم. یکی از شیوه‌های به‌دست آوردن سختی حداکثر، حداقل کردن کار انجام شده توسط نیروهای وارده شده بر سازه، در شرایط تعادل می‌باشد. فرمول‌بندی جایگزین دیگری که می‌توان از آن استفاده کرد حداقل انرژی کرنشی سازه است [۱۷]. از این رو مسئله حداقل‌سازی کار خارجی را می‌توان به صورت حداقل‌سازی انرژی کرنشی سازه بازنویسی کرد. در این رساله ما همین شیوه را اتخاذ می‌کنیم.

### ۳.۳.۲ فرمول بندی

مسئله بهینه‌سازی بر مبنای حداکثر سختی به صورت مسئله حداقل‌سازی انرژی کرنشی  $U(\mathbf{X})$  تحت قیدی که حجم کل ماده مورد استفاده را محدود می‌کند، بیان می‌شود. می‌توان این مسئله را به این صورت نوشت:

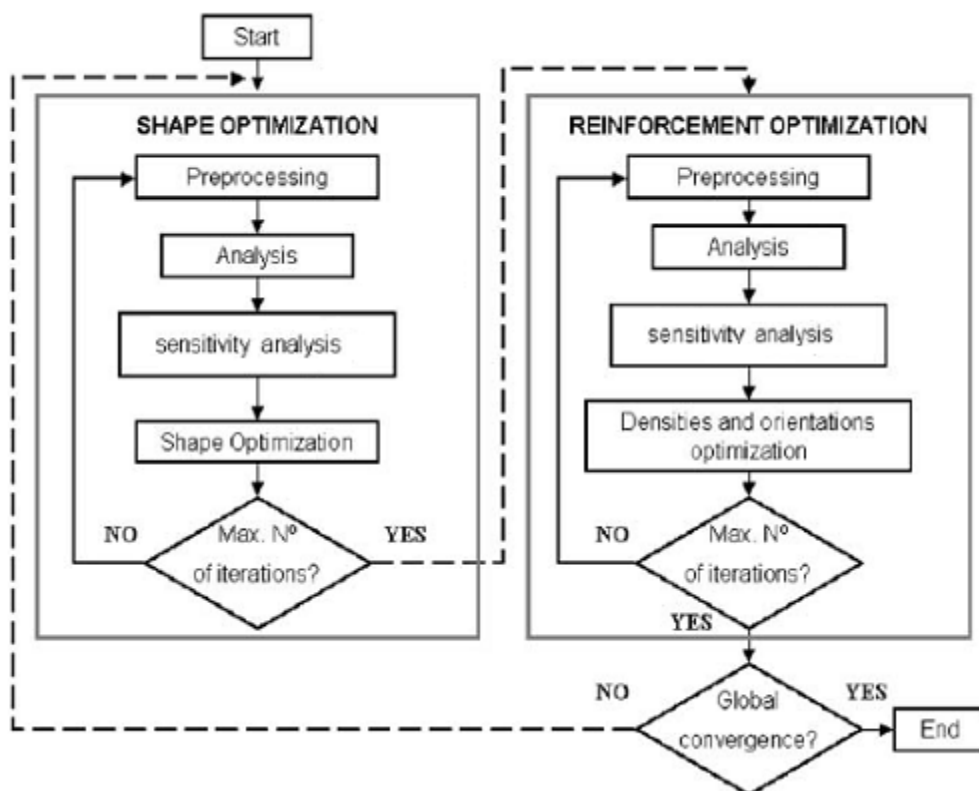
$$\begin{aligned} & \text{Minimize } U(\mathbf{X}) \\ & \text{Subject to } V(\mathbf{X}) \leq V_{\max} \\ & X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max} \end{aligned} \quad (1-3)$$

که  $U(\mathbf{X})$  انرژی کرنشی سازه،  $V(\mathbf{X})$  حجم مصالح و  $\mathbf{X}$  بردار متغیرهای طراحی می‌باشند. مدل مصالح مورد استفاده که با استفاده از نظریه مونتاژ لایه‌ها به دست آمده در فصل دوم به تفصیل شرح داده شده است. برای انجام بهینه‌سازی از روش مجانب‌های متحرک استفاده می‌شود. در این روش مسئله بهینه‌سازی در نقطه تکرار تقریب زده می‌شود. این تقریب بر اساس علامت مشتقات در نقطه تکرار صورت می‌گیرد و مسئله تقریب زده شده به عنوان یک زیرمسئله حل می‌شود. از جواب زیرمسئله برای تقریب در مرحله بعدی استفاده می‌شود. توضیحات بیشتر در مورد این روش در فصل چهارم این رساله آمده است.

شکل (۱-۳) فلوچارت بهینه‌سازی همزمان را نشان می‌دهد. مسئله بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی سخت‌کننده‌ها با استفاده از یک روش دو مرحله‌ای دنباله‌ای حل می‌شود. در اولین حلقه متغیرهای طراحی بهینه شده که شکل سطح پوسته را تعریف می‌کنند به دست می‌آیند. همان‌طور که پیشتر اشاره شد این متغیرهای طراحی همان نقاط کنترلی تولید کننده سطوح نریز هستند. در حلقه دوم، چگالی‌های مصالح برای توزیع ماده تشکیل‌دهنده سخت‌کننده روی سطح پوسته بهینه می‌شوند. این روند تا زمانی که شکل و توپولوژی همزمان به یک پاسخ درست همگرا شوند ادامه می‌یابد.

به منظور جلوگیری از تغییرات زیاد در طراحی بهتر است تعداد تکرارها در حلقه‌های داخلی کم باشد [۱۵]. برای مثال‌های حل شده در این رساله، تعداد تکرارها در هر حلقه را برابر یک می‌گیریم.

بنابراین هر تکرار بهینه‌سازی شکل با یک تکرار بهینه‌سازی توپولوژی همراه خواهد بود. با وجود محافظه کارانه بودن این انتخاب در برخی شرایط، نشان داده شده است که برای مسائل مختلف بسیار خوب کار می‌کند [۱۸].



شکل (۳-۱) فلوچارت بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی [۱۵]

### ۳.۳.۳ تحلیل حساسیت

همانطور که اشاره شد در این رساله برای بهینه‌سازی از روش مجانب‌های متحرک استفاده می‌شود. روش مجانب‌های متحرک یکی از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی است که با استفاده از مقادیر و علامت‌های مشتقات تابع هدف و توابع قید نسبت به هر یک از متغیرهای طراحی، عمل بهینه‌سازی را انجام می‌دهد. از این‌رو در هر سیکل بهینه‌سازی نیازمند مشتقات توابع مذکور می‌باشیم. در این رساله ما از روش تفاوت‌های محدود برای محاسبه مشتقات استفاده می‌کنیم.

## فصل چهارم

# روش بهینه سازی



## ۴ روش بهینه سازی

### ۴.۱ مقدمه

روش‌های حلی که معمولاً برای تعیین طرح بهینه به کار گرفته می‌شود را می‌توان به چند بخش تقسیم کرد. این روش‌ها بر اساس برنامه‌ریزی ریاضی به وجود آمده‌اند. با توجه به تحقیقات و کاربرد زیاد، این روش‌ها بسیار مفید هستند. در نتیجه الگوریتم‌های بسیار مناسبی برای این روش‌ها به وجود آمده‌اند.

انگیزه اصلی در توسعه روش‌های تقریبی کاهش هزینه‌های محاسباتی گرانی است که در روش‌های دیگر نمود پیدا می‌کند. از طرفی هنگامی که ابعاد مسئله افزایش می‌یابد حل مسئله بهینه‌سازی گاه غیرعملی است که با به کارگیری روش‌های تقریبی می‌توان به این مشکل غلبه کرد.

در این فصل پس از شرح مفاهیم بهینه سازی و روش‌های تقریب‌زنی، روش دوگان از برنامه‌ریزی ریاضی شرح داده می‌شود. سپس به معرفی روش‌های برنامه‌ریزی دنباله‌ای پرداخته و در ادامه روش‌های خطی‌سازی محدب و در نهایت روش مجانب‌های متحرک که در این رساله از آن استفاده می‌شود، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

### ۴.۲ فرمول‌بندی کلی

#### ۴.۲.۱ متغیرهای طراحی

یک سیستم سازه‌ای توسط کمیت‌هایی بیان می‌شود که بعضی از آنها را می‌توان به عنوان متغیر طراحی برای پروسه بهینه سازی در نظر گرفت. کمیت‌هایی که در حین این پروسه ثابت هستند پارامترهای از پیش تعیین شده<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند. این پارامترها توسط الگوریتم‌های بهینه‌سازی تغییر

---

<sup>۱</sup> Preassigned parameters

نخواهند کرد. کمیت‌هایی که از پیش تعیین شده نیستند، متغیرهای طراحی<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند. مجموعه پارامترهای از پیش تعیین شده و متغیرهای طراحی یک طرح را تشکیل می‌دهند. بنابه تجربه طراح یا به‌خاطر محدودیت‌هایی، تعدادی از کمیت‌ها از پیش تعیین شده‌اند و می‌توان گفت به این خاطر مسئله بهینه‌سازی تا حد زیادی مختصر می‌شود. متغیرهای طراحی می‌توانند بیان‌کننده خواص زیر برای سازه باشند [۲۰]:

۱- خواص مکانیکی یا فیزیکی مصالح سازه

۲- توپولوژی سازه یا نحوه ارتباط اعضا یا تعداد المان‌های یک سازه

۳- هندسه یا ساختار یک سازه

۴- ابعاد مقطع عرضی یا اندازه سازه

## ۴.۲.۲ قیود

هر یک از مجموعه مقادیر متغیرهای طراحی، یک طرح سازه را تشکیل می‌دهند. مسلماً برخی از طرح‌ها قابل استفاده و برخی دیگر به دلیل پاره‌ای ملاحظات رفتاری، طرح غیر قابل قبولی هستند. اگر یک طرح تمام الزامات خود را برآورده کند به آن طرح شدنی می‌گویند. برای به دست آوردن یک طرح شدنی<sup>۲</sup> محدودیت‌هایی باید برآورده شوند که به آنها قید گفته می‌شود. از نقطه نظر فیزیکی می‌توانیم دو نوع قید داشته باشیم:

۱- قیودی که بر متغیرهای طراحی اعمال می‌شوند و به دلایل غیر رفتاری محدوده تغییرات

متغیرها را محدود می‌کنند، قیود تکنولوژیکی<sup>۳</sup> نامیده می‌شوند. قید تکنولوژیکی یک حد

تعیین شده (همانند بالا و پایین) برای متغیرهای طراحی است، یا رابطه‌ای است که مقدار

نسبی گروهی از متغیرها را ثابت می‌کند. برای مثال می‌توان شیب حداقل یک سقف، یا

---

<sup>۱</sup> Design variables

<sup>۲</sup> Feasible Design

<sup>۳</sup> Technological constraints

ضخامت حداقل یک صفحه یا ارتفاع حداکثر یک پوسته را نام برد.

۲- به قیودی که از شرایط رفتاری سازه به دست می‌آیند قیود رفتاری می‌گویند. حدود اعمال شده بر تنش‌های حداکثر، تغییر مکان‌ها و یا مقاومت کمانشی در یک سازه نمونه‌هایی از این نوع قید هستند.

از نقطه نظر ریاضی قیدهای طراحی و رفتاری را می‌توان توسط مجموعه‌ای از نامساوی‌ها بیان نمود:

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g \quad (1-4)$$

که  $n_g$  تعداد قیدهای نامساوی و  $\mathbf{X}$  بردار متغیرهای طراحی است.

اغلب در مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای باید قیدهای تساوی با شکل کلی زیر بیان شوند:

$$h_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, \dots, n_h \quad (2-4)$$

که  $n_h$  تعداد قیدهای مساوی است. در بسیاری از مواقع می‌توان از قیدهای تساوی برای حذف متغیرها و در نهایت کاهش تعداد آنها استفاده نمود. گرچه در مواقع خاص این کار ممکن است پیچیده و وقت‌گیر باشد.

### ۴.۲.۳ فضای طراحی<sup>۱</sup>

هر یک از متغیرهای طراحی یک بعد در فضای طراحی هستند و هر یک از طرح‌ها (مجموعه متغیرهای طراحی) نقطه‌ای را در فضای طراحی تشکیل می‌دهند. در حالت‌هایی که تنها دو متغیر داریم فضای طراحی به یک صفحه کاهش می‌یابد. در حالت کلی با  $n$  متغیر، یک فضای  $n$  بعدی داریم. با در نظر گرفتن تنها قیود نامساوی، مجموعه مقادیر متغیرهای طراحی که معادله  $g_j(\mathbf{X}) = 0$  را اقلان می‌کنند سطحی را در فضای طراحی تشکیل می‌دهند. این سطح فضا را به دو

---

<sup>۱</sup> Design space

ناحیه تقسیم می‌کند: ناحیه‌ای که  $g_j \geq 0$  و بقیه نواحی که  $g_j \leq 0$ . طرحی که همه قیود را اقلان می‌کند، طرح شدنی نامیده می‌شود و مجموعه طرح‌های شدنی ناحیه شدنی<sup>۱</sup> را تشکیل می‌دهند. نقاط داخل ناحیه شدنی (جاهایی که  $g_j(\mathbf{X}) < 0 \quad j = 1, \dots, n_g$ ) طرح‌های نامقید<sup>۲</sup> نامیده می‌شوند. نقاط روی سطح (طرح‌های شدنی که حداقل یکی از شروط  $g_j(\mathbf{X}) = 0$  را برآورده می‌کنند) طرح‌های مقید<sup>۳</sup> نامیده می‌شوند. زیرفضایی که دو یا چند قید  $g_j(\mathbf{X}) = 0$  برای آنها صدق می‌کند فصل مشترک نامیده می‌شوند. در صورتی که در یک نقطه طراحی برای قید  $z$  ام  $g_j(\mathbf{X}) = 0$  آن قید فعال و در صورتی که  $g_j(\mathbf{X}) < 0$ ، غیر فعال نامیده می‌شود.

#### ۴.۲.۴ تابع هدف

برای انتخاب بهترین طرح از میان بینهایت طرح موجود در ناحیه شدنی نیاز به تعریف یک تابع هدف داریم. تابع هدف، تابعی است که کمترین مقدار آن در عملیات بهینه‌سازی مورد نظر است. معمولاً یک تابع غیر خطی از متغیرهای طراحی  $\mathbf{X}$  می‌باشد که ممکن است بیان‌کننده وزن، هزینه مربوط به سازه یا ... باشد. معمولاً فرض بر این است که تابع هدف  $z = f(\mathbf{X})$  مینیمم شود. البته برای مواقعی که نیاز به ماکزیمم داریم مشکلی پیش نمی‌آید، چون جایی که  $f(\mathbf{X})$  مینیمم شود،  $f(\mathbf{X})$  ماکزیمم خواهد شد.

$$\max f(\mathbf{X}) = -\min[-f(\mathbf{X})] \quad (۳-۴)$$

انتخاب تابع هدف گام مهمی در عملیات بهینه‌سازی است. در حالت کلی تابع هدف بیان‌کننده مهمترین ویژگی یک طرح است. وزن مهمترین تابع هدف مورد استفاده در بهینه‌سازی است، زیرا به راحتی به صورت کمی تعریف می‌شود. ولی حداقل وزن همیشه ارزانترین گزینه نیست. هزینه تابع هدفی است که اهمیت بالاتری در عمل دارد، ولی معمولاً به دست آوردن یک تابع واقعی وزن بسیار

<sup>۱</sup> Feasible Region

<sup>۲</sup> Unconstrained Design

<sup>۳</sup> Constrained Design

مشکل است. همچنین سختی سازه ممکن است به عنوان تابع هدف مطرح باشد. با توجه به اهمیت هریک از موارد ذکر شده تابع هدف مورد نظر ساخته می‌شود.

#### ۴.۲.۵ رابطه سازی ریاضی

مسئله بهینه‌سازی، انتخاب بهینه از متغیرهای طراحی است به طوری که تابع هدف مورد نظر مینیمم شود و مجموعه‌ای از قیدها برآورده شوند. برای هر مجموعه مقادیر داده شده از متغیرهای طراحی رفتار سازه می‌تواند توسط معادلات تحلیل محاسبه شود. می‌توان با در نظر گرفتن قواعد محاسباتی این معادلات را از فرمول‌بندی ریاضی حذف کرده و به دسته‌ای از معادلات ضمنی برای قیدها رسید. توابع قید صریح تنها برای سازه‌های معین استاتیکی یا سازه‌های ساده وجود خواهند داشت.

با این فرض که تمام قیود مساوی می‌توانند حذف شوند، می‌توان مساله طرح بهینه را از نظر ریاضی به انتخاب متغیرهای طراحی به صورتی تعریف کرد که معادلات زیر برقرار باشند:

$$z = f(\mathbf{X}) \rightarrow \min \quad (4-4)$$

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n_g$$

در فرمول‌بندی یک مساله بهینه‌سازی باید به نکات زیر توجه شود:

۱- تمام قیود نامساوی باید به صورت " $\leq 0$ " بیان شوند. هر قید نامساوی می‌تواند به این فرم تبدیل شود.

۲- اگر مقدار تابع هدف به وسیله ضرب کردن آن در یک عدد مثبت ثابت تغییر کند، طرح بهینه تغییر نخواهد کرد، اگرچه مقدار تابع هدف تغییر می‌کند.

۳- قیود نامساوی را نیز می‌توان در یک عدد ثابت مثبت ضرب کرد بدون اینکه اثری در جواب بهینه داشته باشد.

۴- افزایش تعداد قیدها موجب جمع شدن محدوده شدنی می‌شود و همچنین با حذف قیود،

محدوده شدنی گسترش می‌یابد. هنگامی که محدوده شدنی جمع می‌شود، طرح‌های شدنی کمتری وجود خواهد داشت و در پس آن مقدار حداقل تابع هدف افزایش می‌یابد.

### ۴.۳ مفاهیم بهینه‌سازی

روش‌های حلی که معمولاً برای تعیین طرح بهینه به کار گرفته می‌شوند را می‌توان به چند بخش تقسیم کرد. این روش‌ها براساس برنامه‌ریزی ریاضی<sup>۱</sup> به وجود آمده‌اند. الگوریتم‌های بسیاری برای این روش‌ها به وجود آمده است.

در روش‌های مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی، جواب بهینه یک مسئله در یک نقطه بهینه مطلق منحصر به فرد به دست خواهد آمد. در برخی از مسائل سازه‌ای نقاط بهینه نسبی، علاوه بر نقاط بهینه مطلق وجود دارند. اکستریم نسبی در برخی مسائل برنامه‌ریزی ریاضی ممکن است به دلیل ماهیت تابع شکل و قیدها به وجود آید.

بهینه‌سازی را می‌توان به دو گروه تعیین حداقل نامقید<sup>۲</sup> و تعیین حداقل مقید<sup>۳</sup> تقسیم کرد. در بهینه‌سازی نامقید، قید وجود ندارد و حل مسئله ساده تر به نظر می‌رسد؛ اما در بهینه‌سازی مقید، فرمول‌بندی بر اساس برقراری توابع قید و رسیدن به جواب بهینه خواهد بود.

#### ۴.۳.۱ حداقل نامقید

اگر شرایط زیر برای  $f(X)$  در  $X^*$  برقرار باشد،  $X^*$  یک نقطه حداقل نسبی است:

$$f(X^*) \leq f(X) \quad (۵-۴)$$

بسط سری تیلور تابع  $f$  حول  $X^*$  را برحسب جملات درجه دوم می‌توان به صورت زیر نوشت:

---

<sup>۱</sup> Mathematical programming

<sup>۲</sup> Unconstrained minimum

<sup>۳</sup> Constrained minimum

$$f(\mathbf{X}) \cong f^* + \nabla f^{*T} \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{H}^* \Delta \mathbf{X} \quad (6-4)$$

که  $f^*$  و  $\nabla f^*$  و  $\mathbf{H}^*$  در  $\mathbf{X}^*$  محاسبه می‌شوند.  $\nabla f$  بردار مشتقات اول یا بردار گرادیان  $f$  است که با  $G$  نمایش داده می‌شود و  $\mathbf{H}$  ماتریس مشتقات دوم یا ماتریس هسیان<sup>۱</sup> است:

$$\mathbf{G}^T \equiv \nabla f^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n} \right\} \quad (7-4)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_n \partial X_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial X_n^2} \end{bmatrix} \quad (8-4)$$

بردار تغییر متغیرهای طراحی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}^* \quad (9-4)$$

اگر فرض شود که  $\mathbf{X}^*$  حداقل نسبی باشد:

$$\Delta f \equiv f(\mathbf{X}) - f^* = \nabla f^{*T} \Delta \mathbf{X} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{H}^* \Delta \mathbf{X} \geq 0 \quad (10-4)$$

تنها با در نظر گرفتن جملات مرتبه اول، استنباط می‌شود که تنها زمانی  $\Delta f^* \geq 0$  برای تمام مقادیر ممکن  $\Delta \mathbf{X}$  صادق است که:

$$\nabla f^* = 0 \quad (11-4)$$

معادله بالا نشان‌دهنده شرایط لازم برای نقطه حداقل یک تابع  $n$  متغیره با مشتقات پیوسته

است. با در نظر گرفتن جمله دوم رابطه (۱۰-۴):

$$q \equiv \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{H}^* \Delta \mathbf{X} \geq 0 \quad (12-4)$$

---

<sup>۱</sup> Hessian matrix

معادله بالا شرط کافی برای حداقل نسبی  $f(\mathbf{X})$  در  $\mathbf{X}^*$  است. دو معادله بالا تضمین کننده این است که  $\mathbf{X}^*$  حداقل نسبی است.

### ۴.۳.۲ حداقل مقید (روش ضربگرهای لاگرانژ)

برای این بخش مساله بهینه‌سازی یک تابع با قیود مساوی در نظر گرفته می‌شود. در نقطه بهینه، تغییرات دیفرانسیل در تابع هدف  $f(\mathbf{X})$  بر حسب تغییرات دیفرانسیل  $\mathbf{X}$ ، باید صفر باشد:

$$df = \frac{\partial f}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} dX_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_n} dX_n \quad (13-4)$$

اگر تنها یک شرط زیر در نظر گرفته شود:

$$h(\mathbf{X}) = 0 \quad (14-4)$$

پس تغییرات دیفرانسیل  $h$  خواهد شد:

$$dh = \frac{\partial h}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial h}{\partial X_2} dX_2 + \dots + \frac{\partial h}{\partial X_n} dX_n = 0 \quad (15-4)$$

با توجه به معادلات بالا:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial X_1} + \lambda \frac{\partial h}{\partial X_1} \right) dX_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial X_2} + \lambda \frac{\partial h}{\partial X_2} \right) dX_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial X_n} + \lambda \frac{\partial h}{\partial X_n} \right) dX_n = 0 \quad (16-4)$$

که در آن  $\lambda$  یک پارامتر مجهول است و به آن ضربگر لاگرانژ<sup>۱</sup> می‌گویند. از معادله بالا به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} + \lambda \frac{\partial h}{\partial X_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (17-4)$$

بنابراین یک سیستم با  $n+1$  معادله و مجهول وجود خواهد داشت. در حالتی که چند قید مساوی باشد:

---

<sup>۱</sup> Lagrange Multiplier



$$h_j(\mathbf{X}) = 0 \quad j = 1, \dots, n_k \quad (18-4)$$

برای هر قید یک ضربگر لاگرانژ لازم است.

در تابع لاگرانژین<sup>۱</sup> زیر

$$\phi(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j h_j(\mathbf{X}) \quad (19-4)$$

برای پیدا کردن نقطه بحرانی<sup>۲</sup> باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (20-4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} = 0 \quad i = 1, \dots, n_h \quad (21-4)$$

برای برقراری معادلات بالا نیاز است که معادلات تعادل زیر برقرار باشند:

$$\nabla f + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \nabla h_j = 0 \quad (22-4)$$

$$h_j(\mathbf{X}) \equiv 0 \quad (23-4)$$

باید توجه شود که این روابط ممکن است منجر به یک دستگاه غیرخطی از معادلات شود که دارای چندین جواب باشد. تمام جواب‌ها، حداقل مقید نیستند و برخی از آنها حداکثر مقید و یا نقاط زینی<sup>۳</sup> هستند.

مفهوم هندسی معادله (۲۲-۴) این است که در نقطه مینیمم،  $\nabla f$  باید توسط یک مجموعه خطی از بردارهای عمود بر سطوح داده شده توسط رابطه (۱۹-۴) قابل بیان باشد.

می‌توان مفهوم ضرایب لاگرانژ را برای قیدهای نامساوی نیز بیان کرد.

<sup>۱</sup> Lagrangian Function

<sup>۲</sup> Stationary point

<sup>۳</sup> Saddle points

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (24-4)$$

با اضافه کردن متغیرهای کمبود<sup>۱</sup>،  $S_j$

$$h_j(\mathbf{X}, S_j) = g_j(\mathbf{X}) + S_j^2 = 0 \quad (25-4)$$

اگر  $S_j = 0$  آنگاه  $g_j(\mathbf{X}) = 0$  و اگر  $S_j \neq 0$  آنگاه  $g_j(\mathbf{X}) < 0$ ، زیرا اگر  $g_j(\mathbf{X}) > 0$ ، معادله (۲۵-۴) ارضا نخواهد شد. با اعمال روش ضرایب لاگرانژ در این حالت، تعریف می‌کنیم:

$$\phi(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \lambda) = f + \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j (g_j + S_j^2) \quad (26-4)$$

شرایط ایستایی  $\phi$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^{n_g} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial X_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (27-4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial S_j} = 2\lambda_j S_j = 0 \quad i = 1, \dots, n_g \quad (28-4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} = (g_j + S_j^2) = 0 \quad i = 1, \dots, n_g \quad (29-4)$$

معادلات (۲۹-۴) نشان می‌دهد که  $g_j \leq 0$  اقناع شده است. معادلات (۲۸-۴) بیان می‌کنند که یکی از  $\lambda_j$  یا  $S_j$  برابر صفر است، به این معنی که یک قید یا فعال است ( $g_j = 0$ ) و باید در (۲۷-۴) در نظر گرفته شود، و یا غیرفعال است ( $\lambda_j = 0$ ). معادلات (۲۷-۴) ملزم به این است که  $\nabla f$  در زیرفضای ساخته شده توسط گرادیان‌های قیده‌های فعال قرار بگیرد.

### ۴.۳.۳ شرایط کان تاکر<sup>۲</sup>

می‌خواهیم به جای حل مجموعه معادلات (۲۷-۴)، (۲۸-۴) و (۲۹-۴)، آزمایشی را بیان کنیم که بتوان نقطه مورد نظر را با آن بررسی کرد. مجموعه‌ای از اعداد صحیح ( $j \leq n_g$ )  $j = 1, \dots, J$  را به

<sup>۱</sup> Slack variables

<sup>۲</sup> Kuhn-Tucker conditions

عنوان اندیس برای قیدهای  $g_j$  که در نقطه مورد بررسی فعال هستند تعریف می‌کنیم. نقطه  $\mathbf{X}$  می‌تواند مینیمم باشد اگر تمام قیدها  $g_j \leq 0$  اقلان شوند ((۴-۲۹) را ببینید) و همچنین اگر  $\lambda_j$  وجود داشته باشد طوری که

$$\nabla f + \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \nabla g_j = 0 \quad (۴-۳۰)$$

معادلات (۴-۳۰) با در نظر گرفتن تنها قیدهای فعال پایه ریزی شده‌اند. با این تعریف حال می‌توان معادلات (۴-۲۸) را در نظر نگرفت.

برای اینکه معادلات (۴-۳۰) برقرار باشند و  $\mathbf{X}$  مینیمم محلی نباشد باید شرط زیر برقرار باشد:

$$\lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, J \quad (۴-۳۱)$$

معادلات (۴-۳۰) و (۴-۳۱) شرایط کان‌تاکر برای یک مینیمم نسبی می‌باشند. مخروطی را تعریف می‌کنیم که  $\nabla g$  درون آن قرار بگیرد، بنابراین  $\lambda \nabla g$  نیز برای  $\lambda \geq 0$  درون آن قرار می‌گیرد. مجموعه تمام ترکیبات نامنفی خطی

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j \nabla g_j \quad \lambda_j \geq 0 \quad (۴-۳۲)$$

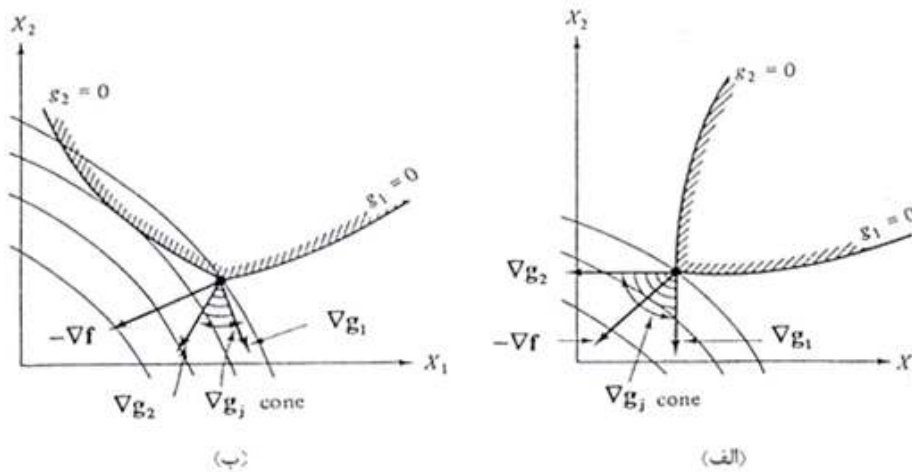
یک مخروط محدب را تشکیل می‌دهد. شرایط کان‌تاکر بیانگر این است که  $-\nabla f$  داخل مخروط محدب تشکیل شده از عمودهای قیدهای فعال ( $j = 1, \dots, J$ ) قرار می‌گیرد. اینها شرایط لازم برای مینیمم نسبی بودن یک نقطه هستند، ولی کافی نمی‌باشند. برای مسائل برنامه‌ریزی محدب، شرایط کان‌تاکر، شرایط لازم و کافی برای یک مینیمم مطلق می‌باشند.

شکل (۴-۱) مفهوم هندسی دوبعدی این شرایط را نشان می‌دهد. در حالت مربوط به شکل (۴-۱)

الف-۱)،  $-\nabla f$  داخل مخروط تشکیل شده توسط  $\nabla g_j$  قرار نمی‌گیرد. نقطه مورد نظر بهینه نیست، زیرا  $f$  می‌تواند بدون اینکه از قیدها تجاوز کند، کاهش یابد. شرایط کان‌تاکر برآورده نشده‌اند، بنابراین نمی‌توان  $\lambda_j$  های نامنفی را طوری پیدا کرد که برای آنها،  $-\nabla f$  برحسب یک ترکیب خطی از

$\nabla g_j$  ها بیان شود. در حالت مربوط به شکل (۴-۱-ب)، شرایط اقناع شده و نقطه بهینه می باشد. مشاهده می شود که  $-\nabla f$  درون مخروط حاصل از  $\nabla g_j$  قرار دارد و از این رو نمی توان جایجایی انجام داد که باعث کاهش در محدوده شدنی شود. می توان  $\lambda_j$  های نامنفی یافت که برای آنها  $-\nabla f$  بر حسب ترکیبی خطی از  $\nabla g_j$  ها بیان شود.

به طور خلاصه می توان گفت برای آزمایش مینیمم کردن یک نقطه می توان از شرایط کان تاکر استفاده کرد. کاربرد عملی این شرایط ملزم به حل همزمان معادلات خطی بر حسب  $\lambda_j$  می باشد. همانطور که پیشتر گفته شد شرایط کان تاکر برای یک مسئله بهینه سازی محدب شرایط لازم و کافی برای مینیمم مطلق می باشند. مفهوم برنامه ریزی محدب در ادامه تشریح خواهد شد.



شکل (۴-۱) (الف) شروط کان تاکر اقناع شده اند (ب) شروط کان تاکر اقناع نشده اند [۲۶]

#### ۴.۳.۴ توابع و مجموعه های محدب

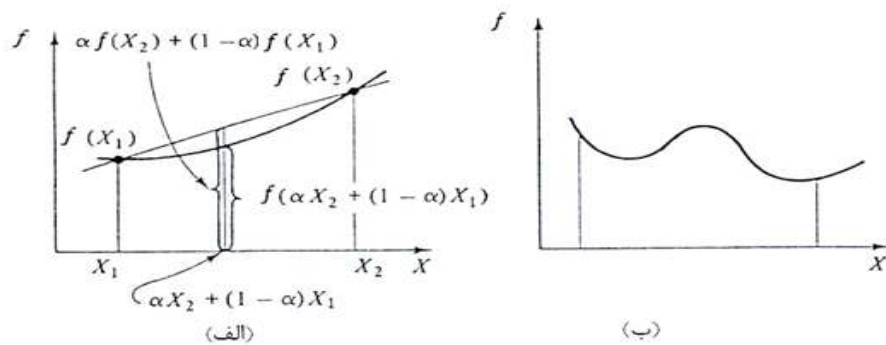
با تعاریف توابع محدب و مجموعه های محدب می توان به ماهیت توابع هدف و قید پی برد. یک تابع  $f(\mathbf{X})$  در صورتی محدب است که برای هر نقطه  $\mathbf{X}_1$  و  $\mathbf{X}_2$  درون دامنه آن، مقدار تابع کمتر از یا مساوی با درون یابی خطی از  $f(\mathbf{X}_1)$  و  $f(\mathbf{X}_2)$  باشد؛ یعنی اینکه:

$$f[\alpha X_2 + (1-\alpha)X_1] \leq \alpha f(X_2) + (1-\alpha)f(X_1) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (۴-۳۳)$$

در صورتی که نامساوی به نامساوی اکید تبدیل شود، تابع اکیدا محدب است. تابع محدب در شکل (۴-۴)

۲-الف) شرح داده شده است. اگر تابع  $f$  محدب باشد، در آن صورت تابع  $(-f)$  مقعر است. یک تابع خطی هم محدب است هم مقعر. ولی محدب یا مقعر اکید نیست. یک تابع ممکن است نه محدب باشد نه مقعر. (شکل (۴-۲-ب) را ببینید)

یک مجموعه از نقاط در صورتی محدب است که خط ارتباط دهنده هر دو نقطه از آن مجموعه تماماً در داخل مجموعه قرار گرفته باشد. از نقطه نظر ریاضی مجموعه‌ای محدب است که برای تمام  $X_1$  و  $X_2$  های درون مجموعه و  $0 < \alpha < 1$ ، نقطه  $Y = \alpha X_1 + (1 - \alpha) X_2$  نیز درون مجموعه واقع شود. تابع  $f(\mathbf{X})$  که روی یک مجموعه محدب تعریف شده است، محدب است اگر و تنها اگر ماتریس هسیان مربوط به آن در تمام نقاط درون مجموعه مثبت نیمه معین یا مثبت معین باشد.



شکل (۴-۲) الف) تابع محدب (ب) تابع غیر محدب [۲۶]

### ۴.۳.۵ مسائل برنامه‌ریزی محدب

یک مسئله برنامه‌ریزی مینیمم‌سازی در صورتی محدب است که تابع هدف  $f(\mathbf{X})$  و توابع نامساوی قید  $g_j(\mathbf{X})$  آن محدب باشند. در این حالت می‌توان نشان داد که ناحیه شدنی تشکیل شده از یک قید نامساوی تنها نیز محدب است. علاوه بر آن فصل مشترک نواحی محدب نیز خود محدب می‌باشد. بنابراین اگر ناحیه مربوط به هر کدام از قیدهای  $g_j(\mathbf{X}) \leq 0$  محدب باشد، ناحیه ای که با اعمال همه قیود تعریف می‌شود نیز محدب است. مسئله‌ای که قیود مساوی  $h_j(\mathbf{X})$  را دارد، در صورتی محدب است که علاوه بر محدب بودن  $f(\mathbf{X})$ ،  $g_j(\mathbf{X})$ ؛  $h_j(\mathbf{X})$  خطی باشند. از آنجا که یک قید تساوی تنها، یک ناحیه محدب است، فصل مشترک قیدهای تساوی خطی نیز محدب محسوب

می‌شود. از آنجا که تمام توابع خطی محدب هستند یک مسئله برنامه‌ریزی خطی همواره یک مسئله محدب است. یک قید مساوی غیر خطی همواره یک ناحیه شدنی غیرمحدب را برای مسئله تعریف می‌کند.

برای مسائل برنامه‌ریزی محدب شرایط لازم کان‌تاکر، کافی هم هستند. نتیجه مهم از تعاریف ذکر شده در بالا این است که در مسائل برنامه‌ریزی محدب هر مینیمم محلی، مینیمم سراسری است. البته در بسیاری از مواقع تشخیص محدب بودن همه توابع یک مسئله کار آسانی نیست. برای اکثر مسائل طراحی بهینه نمی‌توان نشان داد که محدب هستند. اگرچه بسیاری از توابع تقریبی که معرفی خواهند شد، محدب هستند.

#### ۴.۴ روش‌های بهینه‌سازی و تقریب‌سازی

روش‌های بهینه‌سازی سازه‌ها به طور مشخص به دو دسته روش‌های تحلیلی<sup>۱</sup> و روش‌های عددی<sup>۲</sup> تقسیم می‌شوند. اساسا روش‌های تحلیلی بر جنبه مفهومی تاکید دارند، در حالی که روش‌های عددی وجه الگوریتمی پیدا می‌کنند.

روش‌های تحلیلی از تئوری ریاضیات، حساب دیفرانسیل و انتگرال، روش تغییرات و غیره در مطالعه المان‌های سازه‌ای ساده مثل تیر، ستون یا صفحه استفاده می‌کنند. این روش‌ها اغلب برای مطالعات اساسی بر روی مولفه‌های سازه‌ای به شکل منفرد مناسب هستند و زمینه‌ای برای کاربرد در سیستم سازه‌ای بزرگ ندارند.

طراحی سازه‌ها با تعدادی از توابع نامعلوم ارائه می‌شود که هدف پیدا کردن شکل کلی این توابع است. همان‌طور که در قسمت قبل شرح داده شد، طراحی بهینه به شکل تئوری از حل یک سری از معادلات که بیان‌کننده شرایط بهینه (شرایط کان‌تاکر) می‌باشند به دست می‌آید. اگرچه روش‌های

---

<sup>۱</sup> Analytical Methods

<sup>۲</sup> Numerical Methods

تحلیلی از لحاظ عملی با سازه‌های واقعی انطباق ندارند اما بررسی رفتار آنها در درک مسائل عملی نقش مهمی خواهد داشت.

روش‌های عددی معمولا از محاسبات عددی و یا برنامه‌ریزی ریاضی استفاده می‌کنند. پیشرفت‌های اخیر در این زمینه مدیون رشد سریع ظرفیت محاسبات به وسیله برنامه‌ها می‌باشد که باعث تسهیل در حل مسائل واقعی در مقیاس‌های بزرگ می‌گردد. در روش‌های عددی یک طراحی نزدیک به بهینه به شکل خودکار به عنوان نقطه شروع در نظر گرفته می‌شود. سپس یک جستجوی اصولی برای رسیدن به یک طراحی بهینه عموماً در قالب یک فرایند تکراری انجام می‌گیرد.

برخی از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی مثل الگوریتم‌های برنامه‌ریزی خطی، درجه دوم، دینامیکی، هندسی و غیره با توجه به کاربرد مخصوص آنها در حل مسائل بهینه‌سازی توسعه پیدا کرده‌اند. در این میان یک سری الگوریتم‌های کلی تر به عنوان برنامه‌ریزی غیرخطی، برای حل مسائل بهینه‌سازی به شکل عمومی استنتاج شده‌است. اگرچه عمر برنامه‌ریزی‌های ریاضی کوتاه می‌باشد، لیکن در این زمینه الگوریتم‌های زیادی برای حل مسائل عددی توسعه پیدا کرده‌اند.

انگیزه اصلی در توسعه روش‌های تقریبی کاهش هزینه‌های محاسباتی گرانی است که در روش‌های دیگر نمود پیدا می‌کند. از طرفی هنگامی که ابعاد مسئله افزایش می‌یابد حل مسئله بهینه‌سازی گاه غیرعملی است که با به‌کارگیری روش‌های تقریبی می‌توان به این مشکل غلبه کرد.

اشمیت<sup>۱</sup> و همکارانش در اواسط دهه هفتاد مفاهیم تقریب‌سازی را پیگیری کردند. اگر بخواهیم بین تقریب‌سازی تابع و تقریب‌سازی مسئله وجه تمایز قائل شویم، می‌توان گفت تقریب‌سازی تابع یک بیان ساده و متفاوت از تابع هدف و یا توابع قید است و تقریب‌سازی مسئله عبارت است از جایگزینی بیان اصلی مسئله با مسئله‌ای که تقریباً معادل آن اما با راه حل آسانتر می‌باشد.

تقریب‌سازی بر اساس دامنه کاربرد آن در فضای طراحی می‌تواند به سه دسته تقسیم شود:

---

<sup>۱</sup> Schmit

تقریب های محلی، تقریب های سراسری و تقریب های برد متوسط. در یک تقریب محلی، تقریب فقط در همسایگی یک نقطه از فضای طراحی معتبر است. اساس این تقریبها بر فرمول بندی کردن یک مسئله تقریبی (تابع هدف و یا توابع قید) بنا شده و حاصل آن به دست آوردن یک نقطه بهینه است. هنگامی که فرایند بهینه سازی با این نقطه اولیه آغاز می شود نقطه جدید بهینه حاصل می شود که به نقطه بهینه واقعی نزدیکتر است و با تکرار این عملیات جواب مسئله به سمت جواب بهینه همگرا می شود. تقریب های محلی شاید مرسوم ترین تقریب های استفاده شده در مسائل بهینه سازی باشند.

تقریب های سراسری در تمام فضای طراحی و یا بخش بزرگی از آن معتبر هستند. این روشها برای تعریف فرمول یک مسئله بهینه سازی با استفاده از نتایج خروجی به کار می روند و تابعی تقریبی با فرمولی متفاوت تولید می کنند که محاسبات بهینه سازی برای آن آسان تر خواهد بود. و سرانجام تقریب برد متوسط سعی دارد تقریب محلی را با کیفیت سراسری تعمیم دهد.

در این رساله روش مجانب های متحرک<sup>۱</sup> (MMA) برای بهینه سازی مورد استفاده قرار می گیرد. در این فصل ابتدا روش های برنامه ریزی دنباله ای خطی<sup>۲</sup> (SLP)، سهموی<sup>۳</sup> (SQP) و روش خطی سازی خطی سازی محدب<sup>۴</sup> (CONLIN) و سپس روش مجانب های متحرک مورد بررسی قرار خواهند گرفت. به خاطر کاربرد زیاد روش دوگان<sup>۵</sup> در حل بسیاری از مسائل تقریبی، این روش که یک روش برنامه ریزی ریاضی است در اینجا شرح داده خواهد شد.

## ۴.۵ روش دوگان

یکی از روش های برنامه ریزی ریاضی که کاربرد زیادی دارد و در بسیاری از روش های تقریبی نیز به کار گرفته می شود، روش دوگان است. مسئله بهینه سازی با فرم کلی زیر را در نظر می گیریم:

---

<sup>۱</sup> Method of Moving Asymptotes

<sup>۲</sup> Sequential Linear Programming

<sup>۳</sup> Sequential Quadratic Programming

<sup>۴</sup> Convex Linearization

<sup>۵</sup> Dual Method



$$\begin{aligned} \min f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t. } f_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (34-4)$$

مسئله دوگان متناظر با آن به این صورت تعریف می‌شود: مقادیر  $\lambda$ ، (ضرایب لاگرانژ) طوری تعیین شوند که:

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) \rightarrow \max \\ \text{s.t. } \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (35-4)$$

که  $\phi(\lambda)$  تابع دوگان است. تابع لاگرانژین به صورت زیر است:

$$\phi(\mathbf{x}, \lambda) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(\mathbf{x}) \quad j = 1, \dots, m \quad (36-4)$$

و تابع دوگان به صورت

$$\phi(\lambda) = \min_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, \lambda) \quad (37-4)$$

می‌باشد. می‌توان در بسیاری مواقع مسئله دوگان را حل نمود و جواب بهینه را بهبود بخشید. نقطه بهینه  $\mathbf{x}^*$  و ضرایب لاگرانژ متناظر با آن  $\lambda^*$  برای تابع لاگرانژین (36-4) یک نقطه زین اسبی را تعریف می‌کنند. این نقطه متناظر با یک ماکزیمم نسبت به  $\lambda$  و یک مینیمم نسبت به  $\mathbf{x}$  است. بنابراین می‌توانیم تابع لاگرانژین را بر حسب  $\lambda$  تنها (37-4) تعریف کنیم.

از آنجا که تابع دوگان  $\phi(\lambda)$  یک ماکزیمم نسبت به  $\lambda$  در نقطه بهینه است، هدف پیدا کردن

عبارت زیر است:

$$\max_{\lambda} \phi(\lambda) = \max_{\lambda} \min_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, \lambda) \quad (38-4)$$

همچنین این مسئله می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\min_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x}} \max_{\lambda} \phi(\mathbf{x}, \lambda) \quad (39-4)$$

درمسائل غیرخطی، جایی که تابع اولیه محدب و از نظر ریاضی تفکیک پذیر<sup>۱</sup> است، مسئله دوگان بسیار کاربرد دارد. اگر مسئله اولیه و دوگان آن هر دو محدب باشند، حل های متناظر با آنها شروط بهینگی مشابهی را اقناع می کنند. هر دو مسئله معادل هم هستند و مقادیر بهینه آنها برابرند:

$$\phi(\lambda^*) = f(\mathbf{x}^*) \quad (40-4)$$

در تقریب سازی هایی که مورد بحث قرار خواهند گرفت، شرط محدب و تفکیک پذیر بودن بسیار با اهمیت است. توابع هدف و قید در صورتی تفکیک پذیرند که بتوان هر کدام را بر حسب توابعی یک متغیره از متغیره های طراحی بیان نمود.

$$f_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$$

$$f_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_{ji}(x_i) \quad j = 1, \dots, m \quad (41-4)$$

در صورت تفکیک پذیر بودن توابع هدف و قید، تابع لاگرانژین مسئله نیز تفکیک پذیر خواهد بود. با استفاده از (۳۷-۴) و این ویژگی که مینیمم یک تابع تفکیک پذیر، برابر جمع مینیمم های توابعی یک متغیره آن است، می توان مسئله دوگان را به صورت زیر تعریف کرد:  $\lambda$  را طوری بیابید که

$$\max \phi(\lambda) = \sum_{j=1}^m \max \left[ f_i(x_i) + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_{ji}(x_i) \right]$$

$$s.t \quad \lambda_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (42-4)$$

محاسبه تابع لاگرانژین  $\phi(\lambda)$  در این صورت به راحتی صورت می پذیرد.

یک ویژگی جالب تابع دوگان این است که مشتقات جزئی اول آن برابر با قیده های اولیه مسئله است.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j} = f_j(x(\lambda)) \quad (43-4)$$

---

<sup>۱</sup> Separable

مسئله دوگان یک مسئله بهینه‌سازی نامقید است که با به کارگیری الگوریتم‌های مختلفی می‌تواند به راحتی حل شود. از آنجا که روش‌های دوگان در فضای  $n$  عمل می‌کنند، اهمیت آنها در مسائلی که تعداد قیدها در مقایسه با متغیرهای طراحی کم است، بیشتر می‌شود.

## ۴.۶ برنامه‌ریزی دنباله‌ای

### ۴.۶.۱ برنامه‌ریزی خطی دنباله‌ای (SLP)

تقریب‌های قید و روش‌های تحلیل تقریبی بیشتر هنگامی مفیدند که هزینه محاسباتی یک بار ارزیابی تابع هدف قیدها و مشتقاتشان نسبت به هزینه محاسباتی مربوط به عملیات بهینه‌سازی مانند محاسبه جهت‌های جستجو بسیار بیشتر است. این حالت واقعی در بسیاری از مواردی است که برای تحلیل یک سازه که با تعداد زیادی متغیر طراحی تعریف می‌شود از یک مدل اجزای محدود با هزاران درجه آزادی استفاده می‌کنیم. بنابراین کاهش تعداد تحلیل‌های مورد نیاز برای فرایند طراحی در کاربرد الگوریتم‌های بهینه‌سازی در مدل سازه بر اساس تقریب‌ها ارزشمند است. ساده‌ترین و مشهورترین رهیافت تقریب برنامه‌ریزی خطی دنباله‌ای (SLP) است. یک مساله‌ی بهینه‌سازی به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_j(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (44-4)$$

رهیافت (SLP) از یک طراحی آزمایشی  $x_0$  شروع می‌کند و تابع هدف و قیدها را با تقریب‌های

خطی بدست آمده از بسط سری تیلور حول نقطه  $x_0$  جایگزین می‌کند.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_0} \\ \text{s.t.} \quad & f_j(x_0) + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i}) \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_{x_0} \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \text{and} \quad & a_{li} \leq x_i - x_{0i} \leq a_{ui} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (45-4)$$

مجموعه قیود آخر حدود حرکت نامیده می‌شوند که  $a_{ii}$  و  $a_{li}$  به ترتیب کران پائین و بالای تغییرات مجاز  $x_i$  یا مقدار مجاز تغییرات  $x_i$  است.

به سبب تقریب به کار رفته و حدود حرکت، طراحی نهائی مساله خطی‌سازی شده،  $x_L$  به ندرت به طراحی بهینه به شکل قابل قبولی نزدیک است. با این وجود اگر حدود حرکت به اندازه کافی کوچک باشند که یک تقریب خوبی را در این حدود حرکت تضمین کنند  $x_L$  از  $x_0$  به نقطه بهینه نزدیک‌تر خواهد بود.

بنابراین می‌توانیم  $x_0$  را با  $x_L$  جایگزین کرده و بهینه‌سازی خطی را با معادله (۴-۴۵) که حول نقطه شروع جدید خطی شده تکرار کنیم. این فرایند تکرار می‌شود و ما در واقع مساله بهینه‌سازی اصلی را با رشته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی خطی (LP) جایگزین کرده‌ایم (بنابراین می‌توانیم بگوییم برنامه‌ریزی خطی دنباله‌ای). هر بهینه‌سازی خطی یک چرخه بهینه‌سازی نامیده می‌شود.

روش SLP به خاطر در دسترس بودن بسته‌های نرم افزاری LP مطمئن در بیشتر بسته‌های کتابخانه سیستم رایانه‌ها جاذبه بیشتری دارد. از طرف دیگر بسته‌های نرم افزاری برنامه‌ریزی غیرخطی مطمئن به سادگی در دسترس نیستند. با این همه راهبرد SLP مسائل متعددی دارد. اول اینکه هزینه‌های محاسباتی مربوط به عملیات بهینه‌سازی را به میزان زیادی افزایش می‌دهد زیرا فرایند بهینه‌سازی بارها تکرار می‌شود. (معمولا پنج تا چهل بار). بنابراین، این راهبرد تنها وقتی منطقی به نظر می‌رسد که هزینه این محاسبات بهینه‌سازی در مقایسه با هزینه تحلیل و مشتقات حساسیت کمتر باشد. پس کارایی بسته‌های نرم افزاری LP که در SLP به کار می‌رود از اهمیت بسزایی برخوردار است.

دومین مساله این که بدون یک انتخاب مناسب حدود حرکت فرایند هرگز همگرا نمی‌شود. به طور کلی حدود حرکت باید با نزدیک شدن طراحی به بهینه کم‌کم کوچک شود. بخشی از دلیل کوچک ساختن حدود حرکت این است که دقت تقریب مورد نیاز هنگام نزدیک شدن به بهینه افزایش

می‌یابد.

هنگامی که از طراحی بهینه دور هستیم در هر چرخه به موفقیت‌های بزرگتری نایل می‌شویم و می‌توانیم خطاهای قابل ملاحظه‌ای را تحمل کرده و در همان حال به سمت بهینه پیش برویم. هنگامی که به بهینه نزدیک می‌شویم موفقیت کمتر می‌شود و ممکن است این بهبود با خطاهای تقریب از بین برود. از طرف دیگر کاهش زود هنگام حدود حرکت در فرایند ممکن است باعث کاهش بی‌مورد سرعت همگرایی نیز بشود. به ویژه هنگامی که طراحی اولیه از بهینه واقعی دور است. دلیل کاهش حدود حرکت هنگامی مشخص می‌شود که طراحی نهایی یک چرخه در مقایسه با تحلیل دقیق نسبت به طراحی اولیه آن چرخه (که طراحی نهایی چرخه قبلی است) ناکافی باشد یا بهبودی در  $f_0$  به وجود نیآورد. معمولاً حدود حرکت حدود ده تا پنجاه درصد مقدار قبلی‌شان کوچک می‌شوند تا این که برای یک حدود حرکت مشخص تابع هدف از یک رواداری داده شده کمتر بهبود یابد. انتخاب معمول حدود حرکت در شروع حدود ده تا سی درصد مقدار متغیرهای طراحی است. با این وجود، این انتخاب تنها وقتی منطقی است که یک متغیر طراحی به سبب حرکت به سمت عوض شدن علامتش بسیار کوچک نباشد. در چنین حالتی انتخاب حدود حرکت بین ده تا سی درصد مقدار نمونه‌ای (و نه مقدار فعلی) از آن متغیر طراحی منطقی به نظر می‌رسد.

مشکل سوم SLP که گاهی بوجود می‌آید این است که طراحی شروع غیر قابل قبول باشد. اثرات مشترک تقریب و حدود حرکت می‌توانند شرایطی به وجود آورند که مساله‌ی بهینه‌سازی خطی شده یک جواب قابل قبول نداشته باشد یعنی اگر نقطه اولیه یک مساله نسبت به قیدهای نرمال‌سازی<sup>۱</sup> شده غیر قابل قبول باشد و حدود حرکت کوچک باشد، ناحیه‌ای که با حدود حرکت تشکیل می‌شود ممکن است به‌طور کلی خارج از فضای طراحی خطی شده باشد و به یک مساله غیر قابل قبول بیانجامد.

---

<sup>۱</sup> Normalized

ممکن است طراحی بهینه به دست آمده برای یک مساله خطی سازی شده در هر چرخه‌ای از فرآیند SLP قیدهای مساله اصلی را نقض کند. چنین نقض قیدهایی معمولاً با بهبود تابع هدف به وجود می‌آید. همچنین ممکن است از یک جواب مساله خطی به جواب مساله خطی دیگر تابع هدف بهبودی نداشته باشد. این مشکلات را می‌توان با تغییر حدود حرکت حل کرد. با این وجود هیچ کدام از دو مشکل را نمی‌توان در همگرایی کلی SLP مانع اصلی تلقی کرد. در بحث بعدی به این مطلب می‌پردازیم که چگونه می‌توان در مورد یک طراحی جدید بدست آمده از LP قضاوت کرد که آیا هنگامی که تابع هدف بهتر با نقض قید همراه است یک بهبود است و یا هنگامی که مجموعه قید بهتر برآورده شده‌اند ولی تابع هدف افزایش یافته می‌تواند بهبود به حساب آید.

فرض کنید جواب بهینه LP در  $i$  امین چرخه  $x_{iL}^*$ ، به یک مجموعه قیود فعال یا نقض شده  $f_j(x_{iL}^*)$ ،  $j \in J$  انجامیده که  $J$  مجموعه قیدهای فعال است. جواب مساله خطی سازی شده را می‌توانیم به عنوان جواب دقیق مساله خطی بهبود یافته زیر در نظر بگیریم.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_j(\mathbf{x}) \leq p f_j(x_{iL}^*) \quad p = 1 \end{aligned} \quad (46-4)$$

مساله اصلی که می‌خواهیم حل کنیم برای  $p = 0$  است. با استفاده از روابط حساسیت جواب بهینه به پارامترهای مسئله رابطه (46-4) می‌توانیم حدس بزنیم که مقدار بهینه تابع هدف برای مساله بهبود نیافته عبارت است از:

$$L = f(x_{iL}^*) - \sum_{j=1}^r \lambda_j f_j(x_{iL}^*) \quad (47-4)$$

که  $L$  تابع لاگرانژین است. این موضوع رهیافت زیر را بازگو می‌نماید: اگر تابع هدف و بحرانی‌ترین قیدها بهبود یابند، همواره طراحی جدید پذیرفته می‌شود. اگر تابع هدف بهبود یافته و برآورده شدن قیدها بدتر شده یا بر عکس، مقدار لاگرانژین‌ها را مقایسه می‌کنیم. اگر لاگرانژین در پایان یک چرخه از مقدار لاگرانژین در ابتدای چرخه کوچک‌تر شده باشد، آن‌گاه طراحی جدید

پذیرفته می‌شود. اگر از طرف دیگر لاگرانژین افزایش یافته باشد، در حدود حرکت باید تجدید نظر کرد و آن را بهبود بخشید.

#### ۴.۶.۲ برنامه ریزی درجه دوم متوالی (SQP)

این روش با توجه به نظر محققین یکی از بهترین و قویترین روش‌های بهینه‌سازی می‌باشد. مفاهیم پایه این روش بسیار شبیه به روش برنامه‌ریزی خطی متوالی می‌باشد. ابتدا بسط تقریبی سری تیلور توابع هدف و قیدی محاسبه می‌شود. اگرچه به جای حداقل‌سازی تابع هدف خطی شده، یک تابع هدف تقریبی درجه دوم به وجود می‌آید.

برای یک مسأله SQP خواهیم داشت :

$$\text{Minimize } Q(s) = f^0 + \nabla f^T \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{B} \mathbf{S} \quad (4-48)$$

به شرطی که:

$$(\nabla g_i)^T \mathbf{S} + g_j^0 \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (4-49)$$

ماتریس  $B$  که یک ماتریس معین و مثبت است، در ابتدا یک ماتریس واحد است و در چرخه‌های بعدی با استفاده از تئوری هسین<sup>۱</sup> برای توابع لاگرانژین مجدداً محاسبه می‌شود. حال فرض می‌شود که مسأله، حداقل‌سازی  $Q$  تحت قیود خطی است. در نقطه بهینه این مسأله مقادیر ضربگرهای لاگرانژ  $\lambda_j$ ، محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از تابع لاگرانژین تقریبی جستجو در جهت  $S$  انجام خواهد شد. یعنی در روابط زیر  $\alpha$  محاسبه می‌شود.

$$\text{minimize } Q = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m u_j \max[0, g_j(\mathbf{x})] \quad (4-50)$$

که:

---

<sup>۱</sup> Hessian

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{q-1} + \alpha \mathbf{s} \quad (51-4)$$

$$u'_j = |\lambda_j| \quad j = 1, \dots, m \quad \text{در چرخه اول} \quad (52-4)$$

$$\max \left[ |\lambda_j|, \frac{1}{2} (u'_j + |\lambda_j|) \right] \quad j = 1, \dots, m \quad \text{در چرخه‌های بعدی} \quad (53-4)$$

و از چرخه قبلی داریم:

$$u'_j = u_j \quad (54-4)$$

پس از اینکه جستجوی یک بعدی کامل شد، ماتریس  $\mathbf{B}$  جدید با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} \frac{\mathbf{B} \mathbf{p} \mathbf{p}^T \mathbf{B}}{\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p}} + \frac{\eta \eta^T}{\mathbf{p}^T \eta} \quad (55-4)$$

که در آن:

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}^q - \mathbf{x}^{q-1} \quad (56-4)$$

$$\eta = \theta \mathbf{y} + (1 - \theta) \mathbf{B} \mathbf{p} \quad (57-4)$$

$$\mathbf{y} = \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^q - \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^{q-1} \quad (58-4)$$

$$Q = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}) \quad (59-4)$$

$$\theta = \begin{cases} 1.0 \\ \frac{0.8 \mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p}}{\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p} - \mathbf{p}^T \mathbf{y}} \end{cases} \quad (60-4)$$

سپس  $\mathbf{B}^*$  جایگزین  $\mathbf{B}$  در سیکل جدید می‌شود.



## ۴.۷ روش خطی سازی محدب (CONLIN)

### ۴.۷.۱ تقریب سازی

روش خطی سازی محدب، یکی از روش‌های تقریبی است که برای بسیاری از مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در این روش از متغیرهای مستقیم و معکوس به‌طور همزمان استفاده می‌شود و تقریب‌های خطی محافظه کارانه‌ای برای توابع هدف و قید به دست می‌آید. بنابراین همانند روش‌هایی که تاکنون معرفی شده‌اند مسئله اصلی توسط دنباله‌ای از مسائل تقریبی جبری ساده صریح، جایگزین و حل می‌شوند. زیرمسئله‌های تولید شده محدب و تفکیک پذیر هستند و با به کار بردن روش دوگان حل خواهند شد.

مسئله بهینه‌سازی مینیمم سازی با قیدهای کوچکتر مساوی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \text{and} \quad & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4-61)$$

مسئله بهینه‌سازی غیرخطی داده شده را می‌توان توسط روش‌های عددی حل نمود. همان‌طور که می‌دانیم مشکل عمده در حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی مربوط به ضمنی بودن توابع قید  $f_i(\mathbf{X})$  می‌باشد. روند تکراری الگوریتم‌های بهینه‌سازی در مسائل بزرگ باعث تحمیل هزینه‌های محاسباتی زیادی خواهد شد و استفاده از روش‌های تقریبی ضروری می‌باشد.

در روش‌های تقریبی مانند SLP و SQP مسئله اولیه توسط دنباله‌ای از مسائل تقریبی جایگزین می‌شوند که از بسط تیلور تابع هدف و توابع قید برحسب متغیرهای جایگزین خطی به دست آمده‌اند. همچنین خطی سازی توابع نسبت به متغیرهای معکوس را می‌توان در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی از جمله بهینه‌سازی ابعاد به کار برد.

یکی از ویژگی‌های جالب روش‌های تقریبی این است که مسئله به زیرمسئله‌هایی تقریب زده می‌شود که تفکیک پذیرند و می‌توان به کمک روش دوگان آنها را حل نمود. همان‌گونه که در فصل‌های

قبلی گفته شد در روش دوگان مسئله مینیمم‌سازی مقید به یک مسئله ماکزیمم‌سازی غیرمقید تبدیل می‌شود که بستگی به ضرایب لاگرانژ قیدها دارد. این ضرایب متغیرهای دوگان وابسته به قیدهای نامساوی مسئله هستند. رابطه‌سازی دوگان به‌خاطر کوچک بودن فضای طراحی و وابستگی آن به تعداد قیدهای فعال از اهمیت خاصی برخوردار است.

روش CONLIN به کمک خطی‌سازی توابع توسط ترکیبی از متغیرهای مستقیم و معکوس، زیرمسئله‌هایی محدب و تفکیک‌پذیر تولید می‌کند. انتخاب متغیرهای میانی<sup>۱</sup> خطی‌سازی بر مبنای علامت مشتقات اول صورت می‌پذیرد. به آسانی ثابت می‌شود که با در نظر گرفتن هر تابع مشتق‌پذیر  $f(x)$ ، خطی‌سازی زیر یک تقریب محدب خواهد بود [۲۰]:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{+} f_i^0 (x_i - x_i^0) - \sum_{-} (x_i^0)^2 c_i^0 \left( \frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_i^0} \right) \quad (۶۲-۴)$$

که  $f_i$  معرف مشتقات اول  $f(x)$  نسبت به متغیر طراحی  $x_i$  است. نماد  $\sum_{+}$  (  $\sum_{-}$  ) به معنی جمع برداری بر روی جملات مثبت (منفی)  $f_i$  می‌باشد. دیگر ویژگی مهم خطی‌سازی محدب این است که منجر به محافظه‌کارترین تقریب در میان تقریب‌های ممکن از این دست می‌شود [۲۱].

الگوریتم CONLIN این خطی‌سازی را برای تابع هدف و تمام توابع قید مسئله (۴-۶۱) به کار می‌گیرد. بهتر است متغیرهای طراحی نرمال شوند تا در نقطه فعلی  $x^0$  مقادیر واحد داشته باشند.

$$x_i' = \frac{x_i}{x_i^0} \Rightarrow f_i' = f_i^0 x_i^0 \quad (۶۳-۴)$$

جمله  $(x_i^0)^2$  از معادله (۴-۶۲) حذف می‌شود:

$$f(x') = f(x^0) + \sum_{+} f_i' (x_i' - 1) - \sum_{-} c_i^0 \left( \frac{1}{x_i'} - 1 \right) \quad (۶۴-۴)$$

با به‌کاربردن این خطی‌سازی برای هر یک از توابع  $f_j(x)$  و حذف علامت "'''''' زیرمسئله صریح

<sup>۱</sup> Intermediate Variables

زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{+} f_{i0} x_i - \sum_{-} \frac{f_{i0}}{x_i} - \bar{f}_0 \\ \text{s.t.} & \sum_{+} f_{ij} x_i - \sum_{-} \frac{f_{ij}}{x_i} \leq \bar{f}_j \quad (j = 1, \dots, m) \\ & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \end{aligned} \quad (65-4)$$

که  $f_{ij}$  بیانگر مشتقات اول توابع هدف و قید در نقطه تکرار جاری  $x^0$  هستند. همچنین ثابت‌های  $\bar{f}_j$  شامل جملات مرتبه صفر در بسط سری تیلور به فرم زیر هستند:

$$\bar{f}_j = \sum_i |f_{ij}| x_i^0 - f_j(x^0) \quad (j = 0, \dots, m) \quad (66-4)$$

#### ۴.۷.۲ حل زیرمسئله به کمک روش دوگان

همان‌طور که گفته شد در این روش مسئله اولیه به زیرمسئله‌هایی تبدیل می‌شود که محدب و تفکیک‌پذیر هستند. در نتیجه می‌توان این زیرمسئله‌ها را با به‌کارگیری روش دوگان حل کرد. مسئله (۶۵-۴) را می‌توان با فرایند دو مرحله‌ای زیر حل نمود.

$$\begin{aligned} \max & l(r) \\ \text{s.t.} & r_j \geq 0 \end{aligned} \quad (67-4)$$

که تابع دوگان  $l(r)$  از مینیمم کردن تابع لاگرانژین روی ناحیه مورد قبول متغیر اولیه به دست می‌آید:

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \sum_{j=0}^m r_j \left( \sum_{+} f_{ij} x_i - \sum_{-} \frac{f_{ij}}{x_i} - \bar{f}_j \right) \quad (68-4)$$

یعنی

$$\begin{aligned} l(r) &= \min L(x, r) \\ & \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i \end{aligned} \quad (69-4)$$

تفکیک‌پذیری مسئله اصلی بر این امر دلالت می‌کند که تابع لاگرانژین (۶۸-۴) می‌تواند بر حسب جمع  $n$  تابع جدا  $L_i(x_i)$  نوشته شود. بنابراین مسئله مینیمم‌سازی  $n$  متغیره (۶۹-۴) به  $n$  مسئله

مینیمم‌سازی یک متغیره تبدیل می‌شود.

$$\min L_i(x_i) = a_i x_i + \frac{b_i}{x_i} \quad (70-4)$$

$$s.t \quad \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$$

که ضرایب

$$a_i = \sum_{+} f_{ij} r_j \geq 0 \quad (71-4)$$

$$b_i = -\sum_{-} f_{ij} r_j \geq 0$$

تنها به متغیرهای دوگان  $r_j$  بستگی دارند. این ضرایب همواره در ناحیه شدنی فضای دوگان غیرمنفی می‌مانند ( $r_j \geq 0$ ). بنابراین مسئله لاگرانژ (۴-۶۹) لزوماً یک جواب یکتا خواهد داشت که با مساوی صفر قرار دادن مشتق اول  $L_i(x_i)$  به دست می‌آید.

$$L'_i(x_i) = a_i - \frac{b_i}{x_i^2} = 0 \quad (72-4)$$

از آنجا که قیدهای اندازه ( $\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i$ ) باید اقناع شوند:

$$x_i = \left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{if} \quad \underline{x}_i^2 \leq \frac{b_i}{a_i} \leq \bar{x}_i^2 \quad (73-4)$$

$$x_i = \underline{x}_i \quad \text{if} \quad \frac{b_i}{a_i} \leq \underline{x}_i^2 \quad (74-4)$$

$$x_i = \bar{x}_i \quad \text{if} \quad \bar{x}_i^2 \leq \frac{b_i}{a_i} \quad (75-4)$$

با توجه به این نکته که  $a_i$  و  $b_i$  به متغیرهای دوگان وابسته‌اند (۴-۷۱)، به روابط کاملاً صریح بین متغیرهای اولیه و دوگان دست یافته‌ایم. مشاهده می‌شود که در هر نقطه از فضای دوگان، متغیرهای اولیه به دو دسته متغیرهای آزاد<sup>۱</sup> و متغیرهای ثابت<sup>۲</sup> تقسیم شده‌اند. مجموعه اندیس‌های زیر را تعریف

<sup>۱</sup> Free Variables

<sup>۲</sup> Fixed Variables

می‌کنیم:

$$I = \{i ; \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i\} \quad (76-4)$$

متغیرهای آزاد ( $i \in I$ ) توسط رابطه (73-4) و بقیه متغیرهای ثابت توسط (74-4) و (75-4) تعریف شده‌اند.

مسئله دوگان (70-6) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\max l(r) = \sum_{j=0}^m r_j \left[ \sum_{+} f_{ij} x_i(r) - \sum_{-} \frac{f_{ij}}{x_i(r)} - \bar{f}_j \right] \quad (77-4)$$

$$s.t. \quad r_j \geq 0$$

در حالی که متغیرهای اولیه  $x_i$  توسط روابط صریح (74-4) تا (76-4) با متغیرهای دوگان مرتبط شده‌اند.

ویژگی اساسی تابع دوگان این است که مشتقات اول آن به سادگی بر حسب مقادیر قیدهای

اولیه به دست می‌آیند:

$$g_j \equiv \frac{dl}{dr_j} = \sum_{+} f_{ij} x_i(r) - \sum_{-} \frac{f_{ij}}{x_i(r)} - \bar{f}_j \quad (78-4)$$

علاوه بر این به خاطر صریح بودن کامل مسئله دوگان و به خاطر اینکه مسئله اولیه متناظر با آن شکل

جبری نسبتاً ساده‌ای دارد، مشتقات دوم تابع دوگان

$$H_{jk} \equiv \frac{d^2 l}{dr_j dr_k} \quad (79-4)$$

بعد از پاره‌ای محاسبات به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H_{jk} = -\frac{1}{2} \sum_{i \in I} n_{ij} n_{jk} \frac{x_i}{a_i} \quad (80-4)$$

که

$$n_{ij} = f_{ij} \quad \text{if } f_{ij} > 0 \quad (۸۱-۴)$$

$$n_{ij} = \frac{f_{ij}}{x_i^2} \quad \text{if } f_{ij} < 0$$

برای  $n_{ik}$  هم روابط بالا صدق می‌کنند. ذکر این نکته مهم است که جمع در رابطه (۴-۸۰) منحصر به متغیرهای اولیه آزاد است. یعنی آن دسته از  $x_i$  هایی که به مقادیر بالا و پایین خود نمی‌رسند ((۴-۶۴) را ببینید). این به این معنا است که مشتق دوم تابع دوگان در جایی که یک متغیر اولیه آزاد، ثابت می‌شود، ناپیوسته است و برعکس.

مشکل عمده برای استفاده از روش‌های نیوتنی در حل مسائل دوگان، همین ناپیوستگی در ماتریس هسیان است. برای حل مسئله دوگان از روش برنامه‌ریزی سهموی دنباله‌ای استفاده می‌شود. برای اطلاع بیشتر در مورد نحوه حل به این روش، می‌توان به مرجع [۲۱] این رساله مراجعه کرد. روش خطی‌سازی محدب یک روش مناسب و قابل اعتماد برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی است.

## ۴.۸ روش مجانب‌های متحرک (MMA)

### ۴.۸.۱ توضیحات کلی

مسئله بهینه‌سازی سازه‌ای با فرم کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$P : \text{minimization}$$

$$\min f_0(\mathbf{X}) \quad (\mathbf{X} \in R^n)$$

$$s.t \quad f_i(\mathbf{X}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (۸۲-۴)$$

$$\text{and } \underline{X}_j \leq X_j \leq \bar{X}_j \quad j = 1, \dots, n$$

که  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  بردار متغیرهای طراحی،  $f_0(\mathbf{X})$  تابع هدف،  $f_i(\mathbf{X}) \leq 0$  قیدهای رفتاری، و  $\underline{X}_j, \bar{X}_j$  حدود پایین و بالا (قیود تکنولوژیکی) بر متغیرهای طراحی هستند. یکی از روش‌های مناسب برای حل این مسئله این است که به صورت پیاپی زیرمسئله‌های صریح تولید و حل نماییم.

این کار بر اساس طرح تکرارشونده زیر صورت می‌پذیرد:

گام ۰: انتخاب یک نقطه شروع  $\mathbf{X}^{(0)}$  و قرار دادن اندیس تکرار  $k$  برابر با صفر ( $k = 0$ ).

گام ۱: محاسبه  $f_i(\mathbf{X}^{(k)})$  و گرادیان های  $\nabla f_i(\mathbf{X}^{(k)})$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) براساس نقطه تکرار  $\mathbf{X}^{(k)}$ .

گام ۲: قرار دادن توابع تقریبی و صریح  $f_i^{(k)}$  به جای توابع (معمولا ضمنی)  $f_i$  در مسئله  $p$ ، و به دست آوردن زیرمسئله  $P^{(k)}$ .

گام ۳: حل کردن زیرمسئله  $P^{(k)}$  و در نظر گرفتن جواب بهینه این زیرمسئله به عنوان نقطه تکرار بعدی  $\mathbf{X}^{(k+1)}$ ، قرار دادن  $k = k + 1$  و رفتن به گام ۱.

زمانی کار پایان می‌پذیرد که یک سری از معیارهای همگرایی برآورده شوند یا اینکه استفاده کننده از جواب جاری  $\mathbf{X}^{(k)}$  راضی باشد.

به طور خلاصه هر کدام از توابع  $f_i^{(k)}$  با خطی سازی  $f_i$  توسط متغیرهایی از نوع  $\frac{1}{(X_j - L_j)}$  و

بسته به علامت مشتق  $f_i$  در نقطه  $\mathbf{X}^{(k)}$  به دست می‌آیند. مقادیر  $L_j$  و  $U_j$  معمولا در

تکرارها تغییر می‌کنند و از این رو "مجانب‌های متحرک" نامیده می‌شوند.

برای شرح بیشتر مسئله دو مورد را بررسی می‌کنیم:

الف) نحوه تعریف توابع  $f_i^{(k)}$

ب) نحوه حل زیرمسئله  $P^{(k)}$  با توجه به  $f_i^{(k)}$  محاسبه شده.

#### ۴.۸.۲ نحوه تعریف توابع تقریبی $f_i^{(k)}$

برای نقطه  $\mathbf{X}^{(k)}$  (در تکرار) مقادیر  $L_j^{(k)}$  و  $U_j^{(k)}$  برای  $j = 1, \dots, n$  زطوری انتخاب می‌شوند که:

<sup>۱</sup> Sub problem

$$L_j^{(k)} < X_j^{(k)} < U_j^{(k)} \quad (۸۳-۴)$$

نحوه تعیین این مقادیر در ادامه تشریح خواهد شد. سپس برای  $i = 0, 1, \dots, m$  توابع  $f_i^{(k)}$  به

صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_i^{(k)} = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - X_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{X_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \quad (۸۴-۴)$$

که

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_j^{(k)} - X_j^{(k)})^2 \partial f_i / \partial X_j & \text{if } \partial f_i / \partial X_j > 0 \\ 0 & \text{if } \partial f_i / \partial X_j < 0 \end{cases} \quad (۸۵-۴)$$

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{if } \partial f_i / \partial X_j \geq 0 \\ -(X_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \partial f_i / \partial X_j & \text{if } \partial f_i / \partial X_j < 0 \end{cases} \quad (۸۶-۴)$$

$$r_i^{(k)} = f_i^{(k)}(\mathbf{X}) - \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - X_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{X_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \quad (۸۷-۴)$$

که تمامی مشتقات  $\partial f_i / \partial X_j$  در نقطه  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(k)}$  محاسبه شده‌اند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود  $f_i^{(k)}$  یک تقریب مرتبه اول از  $f_i$  در  $\mathbf{X}^{(k)}$  می‌باشد.

$$f_i^{(k)}(\mathbf{X}^{(k)}) = f_i(\mathbf{X}^{(k)}), \quad \partial f_i^{(k)} / \partial X_j = \partial f_i / \partial X_j \quad \text{at } \mathbf{X} = \mathbf{X}^{(k)} \quad (۸۸-۴)$$

for  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$

علاوه بر این مشتقات  $f_i^{(k)}$  در هر یک از نقاط  $\mathbf{X}$  طوری که  $L_j^{(k)} < X_j < U_j^{(k)}$  برای همه مقادیر

$j$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^2 f_i^{(k)}}{\partial X_j^2} = \frac{2p_{ij}^{(k)}}{(U_j^{(k)} - X_j)^3} + \frac{2q_{ij}^{(k)}}{(X_j - L_j^{(k)})^3} \quad (۸۹-۴)$$



$$\frac{\partial^2 f_i^{(k)}}{\partial X_j \partial X_i} = 0 \quad j \neq i \quad (90-4)$$

بنابراین از آنجا که  $p_{ij}^{(k)} \geq 0$  و  $q_{ij}^{(k)} \geq 0$  یک تابع محدب است. در حالت خاص در

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{(k)}$$

$$\frac{\partial^2 f_i^{(k)}}{\partial X_j^2} = \begin{cases} \frac{2\partial f_i / \partial X_j}{U_j^{(k)} - X_j^{(k)}} & , \quad \text{if } \partial f_i / \partial X_j > 0 \\ -\frac{2\partial f_i / \partial X_j}{X_j^{(k)} - L_j^{(k)}} & , \quad \text{if } \partial f_i / \partial X_j < 0 \end{cases} \quad (91-4)$$

بنابراین هرچه  $L_j^{(k)}$  و  $U_j^{(k)}$  به  $X_j^{(k)}$  نزدیکتر انتخاب شود، مشتقات مرتبه دوم بزرگتر می‌شوند، انحنای بیشتری به توابع تقریبی  $f_i^{(k)}$  داده می‌شود، و تقریب مسئله محافظه‌کارانه‌تر خواهد بود.

بنابراین زیرمسئله به دست آمده  $P^{(k)}$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} P^{(k)} : \text{minimize} & \quad \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{0j}^{(k)}}{U_j^{(k)} - X_j} + \frac{q_{0j}^{(k)}}{X_j - L_j^{(k)}} \right) + r_0^{(k)} \\ \text{st} & \quad \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - X_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{X_j - L_j^{(k)}} \right) + r_i^{(k)} \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \text{and} & \quad \max \{ \underline{X}_j, \alpha_j^{(k)} \} \leq X_j \leq \min \{ \bar{X}_j, \beta_j^{(k)} \} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (92-4)$$

در روابط بالا پارامترهای  $\alpha_j^{(k)}$  و  $\beta_j^{(k)}$  "حدود حرکت" نامیده می‌شوند، که لزوماً تعیین کننده نیستند. برای اینکه در حل مسئله هیچ تقسیم بر صفری اتفاق نیافتد،  $\alpha_j^{(k)}$  و  $\beta_j^{(k)}$  باید حداقل به صورت زیر انتخاب شوند:

$$L_j^{(k)} < \alpha_j^{(k)} < X_j^{(k)} < \beta_j^{(k)} < U_j^{(k)} \quad (93-4)$$

$$\beta_j^{(k)} = 0.9U_j^{(k)} + 0.1X_j^{(k)} \quad \text{و} \quad \alpha_j^{(k)} = 0.9L_j^{(k)} + 0.1X_j^{(k)}$$

حال نحوه تعیین "مجانب‌های متحرک"  $L_j^{(k)}$  و  $U_j^{(k)}$ ، مختصراً شرح داده می‌شود. یک انتخاب

ساده برای این مقادیر، به این شرط که حدود پایین و بالا متغیرهای طراحی یعنی  $\underline{X}_j$  و  $\overline{X}_j$  از نظر فیزیکی معقول باشند، می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$L_j^{(k)} = \underline{X}_j - S_0 (\overline{X}_j - \underline{X}_j), \quad U_j^{(k)} = \overline{X}_j + S_0 (\overline{X}_j - \underline{X}_j) \quad (94-4)$$

که  $S_0$  یک عدد حقیقی ثابت است، مثلاً  $S_0 = 0.1$ . در اینجا  $L_j^{(k)}$  و  $U_j^{(k)}$  به  $k$  بستگی ندارند و "مجانبات ثابت" خوانده می‌شوند.

یک حالت خاص و مهم از "مجانبات ثابت" زمانی اتفاق می‌افتد که متغیرهای طراحی  $X_j$  ها بعد امان باشند. در این حالت:

$$L_j^{(k)} = 0, \quad U_j^{(k)} = 10\overline{X}_j \quad \text{یک مقدار بزرگ، مثلاً } 10\overline{X}_j \quad (95-4)$$

هرچند سادگی "مجانبات ثابت" به نظر جالب می‌رسد، ولی برای بهره‌مندی بهتر از انعطاف پذیری روش MMA، بهتر است مجانباتها بین تکرارها تغییر داشته باشند.

یک قاعده کلی برای نحوه تغییر  $L_j^{(k)}$  و  $U_j^{(k)}$  به صورت زیر است:

الف) اگر روند بهینه‌سازی به نوسان افتاد، بهتر است ثابت شود. این کار با نزدیکتر کردن مجانباتها به نقطه تکرار جاری انجام می‌شود.

ب) در عوض اگر روند بهینه‌سازی هماهنگ و کند باشد، بهتر است مجانباتها را از نقطه تکرار جاری دور کرد.

در زیر مفهوم این قاعده شرح داده شده است. در اینجا  $S$  یک عدد حقیقی کوچکتر از واحد، مثلاً  $S = 0.7$  می‌باشد.

برای  $k = 0$  و  $k = 1$  داریم:

$$L_j^{(k)} = X_j^{(k)} - (\overline{X}_j - \underline{X}_j), \quad U_j^{(k)} = X_j^{(k)} + (\overline{X}_j - \underline{X}_j) \quad (96-4)$$

برای  $k \geq 0$  داریم:

الف) در صورتی که علامت‌های  $X_j^{(k)} - X_j^{(k-1)}$  و  $X_j^{(k-1)} - X_j^{(k-2)}$  مخالف هم باشند، نشان می‌دهد که نوسان در  $X_j$  اتفاق می‌افتد. پس قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= X_j^{(k)} - S \left( X_j^{(k-1)} - L_j^{(k-1)} \right) \\ U_j^{(k)} &= X_j^{(k)} + S \left( U_j^{(k-1)} - X_j^{(k-1)} \right) \end{aligned} \quad (97-4)$$

ب) در صورت هم علامت بودن  $X_j^{(k)} - X_j^{(k-1)}$  و  $X_j^{(k-1)} - X_j^{(k-2)}$  نشان می‌دهد که مجانب‌ها در حال کندکردن روند همگرایی در  $X_j$  هستند. پس قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= X_j^{(k)} - \left( X_j^{(k-1)} - L_j^{(k-1)} \right) / S \\ U_j^{(k)} &= X_j^{(k)} + \left( U_j^{(k-1)} - X_j^{(k-1)} \right) / S \end{aligned} \quad (98-4)$$

البته جایگزین‌های زیادی نیز وجود دارد. برای مثال می‌توان شرط دور کردن مجانب‌ها از نقطه

تکرار جاری را هم علامت بودن  $X_j^{(k)} - X_j^{(k-1)}$  و  $X_j^{(k-1)} - X_j^{(k-2)}$  و  $X_j^{(k-1)} - X_j^{(k-3)}$  دانست.

### ۴.۸.۳ روش حل زیرمسئله $P^{(k)}$

برای ساده کردن نگارش، در این بخش اندیس  $k$  را در زیرمسئله حذف می‌کنیم. علاوه‌براین به

جای  $\max \{ \underline{X}_j, \alpha_j^{(k)} \}$  و  $\min \{ \overline{X}_j, \beta_j^{(k)} \}$  به ترتیب  $\alpha_j$  و  $\beta_j$  را به کار می‌بریم. زیرمسئله تعریف

شده در قسمت قبلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} P^{(k)} : \text{minimize} \quad & \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{0j}}{U_j^{(k)} - X_j} + \frac{q_{0j}}{X_j - L_j^{(k)}} \right) + r_0 \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}}{U_j^{(k)} - X_j} + \frac{q_{ij}}{X_j - L_j^{(k)}} \right) + r_i \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ \text{and} \quad & \alpha_j \leq X_j \leq \beta_j \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (99-4)$$

در حالی که  $L_j < \alpha_j \leq \beta_j < U_j$  و  $p_{ij} \geq 0$  و  $q_{ij} \geq 0$ .

$P$  یک مسئله محدب تفکیک‌پذیر است. بنابراین روش دوگان<sup>۱</sup> می‌تواند برای حل آن مفید

باشد. این روش در زیر به اختصار شرح داده خواهد شد.

تابع لاگرانژین<sup>۲</sup> مطابق با  $P^{(k)}$  برابر است با:

$$l(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = f_0^{(k)}(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m \mathbf{Y}_j f_j^{(k)}(\mathbf{X}) \quad (100-4)$$

که بعد از محاسبات مختصری به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} r_0 - \mathbf{y}^T \mathbf{b} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j}{U_j^{(k)} - X_j} + \frac{q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j}{X_j - L_j^{(k)}} \right) \\ = r_0 - \mathbf{y}^T \mathbf{b} + \sum_{j=1}^n l_j(X_j, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (101-4)$$

که

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T, \quad \mathbf{p}_j = (p_{1j}, \dots, p_{mj})^T \\ \mathbf{q}_j = (q_{1j}, \dots, q_{mj})^T, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T \end{aligned} \quad (102-4)$$

و

$$l_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{y}) = \frac{p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j}{U_j^{(k)} - X_j} + \frac{q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j}{X_j - L_j^{(k)}} \quad (103-4)$$

$\mathbf{y}$  بردار ضرایب لاگرانژ یا "متغیرهای دوگان" می‌باشد.

سپس "تابع هدف دوگان"  $W$  برای  $\mathbf{y} \geq 0$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{y}) = \min \{ l(\mathbf{X}, \mathbf{y}); \alpha_j \leq X_j \leq \beta_j \quad \text{for all } j \} \\ = r_0 - \mathbf{y}^T \mathbf{b} + \sum_{j=1}^n W_j(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (104-4)$$

که

<sup>۱</sup> Dual Method

<sup>۲</sup> Lagrangian Function

$$W_j(y) = \min \{l_j(\mathbf{X}, \mathbf{y}); \alpha_j \leq X_j \leq \beta_j \quad \text{for all } j\} \quad (105-4)$$

به راحتی می‌توان مسئله مینیمم‌سازی  $X_j$  را به صورت صریح در رابطه (105-4) نوشت. این مینیمم‌سازی  $X_j$  که وابسته به  $\mathbf{y}$  است، به صورت  $X_j(\mathbf{y})$  نوشته می‌شود.

از آنجا که  $\mathbf{y} \geq 0$ ، داریم:

$$p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j \geq 0, \quad q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j \geq 0 \quad (106-4)$$

بنابراین  $l_j(\mathbf{X}, \mathbf{y})$  یک تابع محدب از  $X_j$  می‌باشد. همچنین توجه داشته باشیم که در مواقع خاص که  $p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j = 0$  و  $q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j = 0$  (برای تمام مقادیر  $i$   $p_{0j} = 0$ ،  $q_{0j} = 0$ ،  $\mathbf{y}_i p_{ij} = 0$ ،  $\mathbf{y}_i q_{ij} = 0$ )  $l_j(\mathbf{X}, \mathbf{y})$  وابسته به  $X_j$  نمی‌باشد. بنابراین در این حالت هر مقدار  $X_j$  که بین  $\alpha_j$  و  $\beta_j$  باشد باعث مینیمم کردن  $l_j(\mathbf{X}, \mathbf{y})$  می‌شود.

از این به بعد فرض می‌کنیم حداقل یکی از  $p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j$  یا  $q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j$  اکیدا مثبت باشد.

مشتق  $l_j(\mathbf{X}, \mathbf{y})$  نسبت به  $X_j$  با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$l'_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{y}) = \frac{p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j}{(U_j^{(k)} - X_j)^2} - \frac{q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j}{(X_j - L_j^{(k)})^2} \quad (107-4)$$

و مشتق دوم  $l_j(\mathbf{X}, \mathbf{y})$  نسبت به  $X_j$  برابر است با:

$$l''_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{y}) = \frac{2(p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j)}{(U_j - X_j)^3} + \frac{2(q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j)}{(X_j - L_j)^3} \quad (108-4)$$

از آنجا که  $l''_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{y})$  اکیدا مثبت است،  $l'_j(X_j, \mathbf{y})$  نسبت به  $X_j$  اکیدا صعودی است و در رابطه

(108-4) می‌توانیم نتایج زیر را داشته باشیم:

الف) اگر  $l'_j(X_j, \mathbf{y}) \geq 0$  آنگاه  $X_j(\mathbf{y}) = \alpha_j$ .

ب) اگر  $l'_j(X_j, \mathbf{y}) \leq 0$  آنگاه  $X_j(\mathbf{y}) = \beta_j$ .

ج) اگر  $l'_j(\alpha_j, \mathbf{y}) < 0$  و  $l'_j(\beta_j, \mathbf{y}) > 0$  آنگاه  $X_j(\mathbf{y})$  جواب یکتای معادله  $l'_j(X_j, \mathbf{y}) = 0$  خواهد

بود.

به سادگی می توان این جواب یکتا را به صورت زیر به دست آورد:

$$X_j(\mathbf{y}) = \frac{(p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j)^{1/2} L_j + (q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j)^{1/2} U_j}{(p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j)^{1/2} + (q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j)^{1/2}} \quad (109-4)$$

حال از آنجا که یک تابع هدف صریح برای  $X_j(\mathbf{y})$  وجود دارد، تابع هدف دوگان  $W(\mathbf{y})$  نیز باید

با یک عبارت صریح بیان شود:

$$W(\mathbf{y}) = r_0 - \mathbf{y}^T \mathbf{b} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j}{U_j - X_j(\mathbf{y})} + \frac{q_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{q}_j}{X_j(\mathbf{y}) - L_j} \right) \quad (110-4)$$

علاوه بر این، مشتقات  $W(\mathbf{y})$  نسبت به متغیرهای دوگان  $\mathbf{y}_i$ ، با رابطه زیر بیان می شوند:

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} = -b_i + \sum_{j=1}^n \left( \frac{p_{ij}}{U_j - X_j(\mathbf{y})} + \frac{q_{ij}}{X_j(\mathbf{y}) - L_j} \right) \quad (111-4)$$

مسئله دوگان متناظر با  $P^{(k)}$ ، مسئله ماکزیم سازی  $W(\mathbf{y})$ ، روی مجموعه تمام  $\mathbf{y}$  ها است،

طوری که  $\mathbf{y} \geq 0$ .

$$D : \text{maximize } W(\mathbf{y}) \text{ s.t. } \mathbf{y} \geq 0 \quad (112-4)$$

از آنجا که  $X_j(\mathbf{y})$  به طور پیوسته به  $\mathbf{y}$  وابسته است (جز در موارد خاص که  $p_{0j} + \mathbf{y}^T \mathbf{p}_j = 0$

از معادله (112-4) نتیجه می شود که  $W(\mathbf{y})$  یک تابع هموار<sup>۱</sup> است. همچنین

به راحتی اثبات می شود که  $W(\mathbf{y})$  یک تابع مقعر<sup>۲</sup> است. (زیرا در میان مجموعه توابع خطی نسبت به

$\mathbf{y}$ ، کمترین است.)

بنابراین  $D$  یک مسئله بسیار مناسب برای حل از طریق روش گرادیان است. بعد از حل مسئله

<sup>۱</sup> Smooth Function

<sup>۲</sup> Concave Function

دوگان، جواب بهینه‌ان  $y$ ، به دست می‌آید و با قرارداد آن در زیرمسئله موردنظر مستقیماً جواب بهینه زیرمسئله  $X_j(y)$  به دست می‌آید.

## فصل پنجم

# تحلیل سازه به روش

## اجزاء محدود

## ۵ تحلیل سازه به روش اجزاء محدود

### ۵.۱ مقدمه

پوسته در واقع صفحه‌ای است که سطح میانی آن خود دارای انحنا است. فرضیات مشابهی که برای توزیع قائم کرنش‌ها و تنش‌ها در صفحات نازک استفاده می‌شوند، در پوسته‌ها هم صادق هستند؛ اگرچه نحوه تحمل بارهای خارجی توسط پوسته‌ها، با صفحات کاملاً متفاوت است. تنش‌های وارده بر سطح میانی پوسته دارای دو مولفه مماسی و عمودی است که سهم عمده‌ای در تحمل بار دارد و این موضوع موجب این شده است که پوسته به عنوان سازه‌ای اقتصادی در تحمل بارها مطرح شود و مورد استقبال قرار گیرد.

به دست آوردن معادلات حاکم برای مسائل پوسته‌های با انحنای سطحی، مشکلات زیادی را دربر دارد که این مساله خود موجب پیدایش روش‌های جایگزینی برای تحلیل پوسته‌ها شده است. خصیصه اصلی این روش‌ها، تقریب‌های به کار گرفته شده در فرمول‌بندی آنها است.

در یک پوسته، المان تحت اثر توام نیروهای خمشی و درون صفحه‌ای قرار می‌گیرد که برای یک المان مسطح، موجب بروز تغییر مکان‌های مستقل می‌شود.

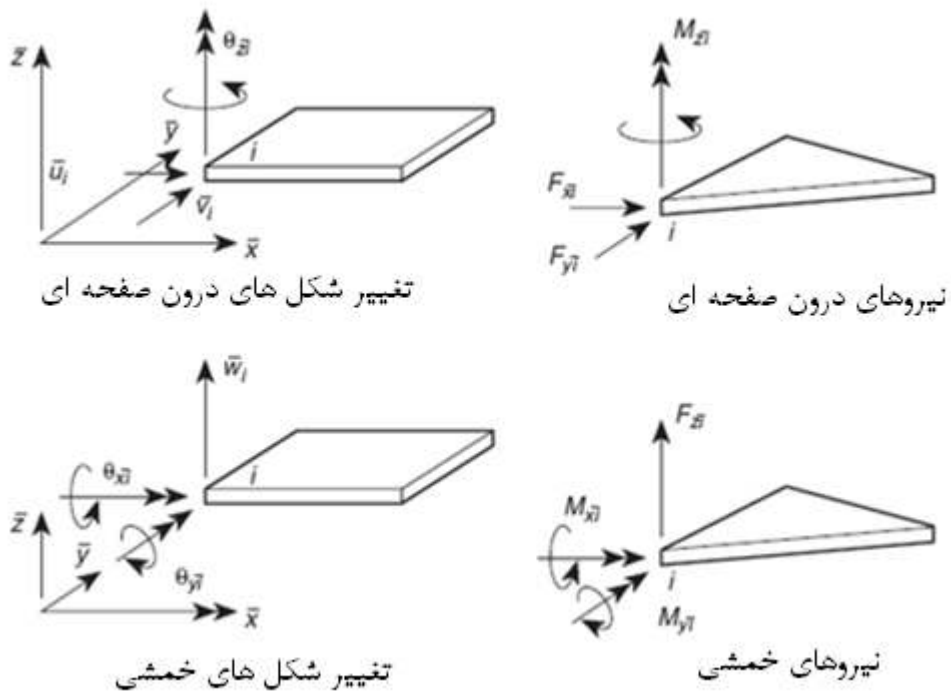
در این رساله پوسته‌ها با استفاده از المان‌های مستطیلی یا چهارضلعی، مدل می‌شوند. با توجه به اینکه چنین المانهایی دارای ماتریس‌های سختی مناسبی هستند، پروسه تحلیل اجزای محدود چنین سازه‌هایی به شکل قابل قبولی انجام می‌شود. مسائل عملی‌ای نظیر سدهای قوسی و سقف‌های پوسته‌ای را می‌توان به سادگی با استفاده از چنین المانهایی بررسی کرد.



## ۵.۲ روابط کلی

### ۵.۲.۱ سختی المان صفحه‌ای در مختصات محلی

یک المان مسطح چند ضلعی در مختصات محلی  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  را در نظر بگیرید که تحت اثر همزمان نیروهای صفحه‌ای و خمشی قرار دارد.



شکل (۵-۱) المان تحت اثر نیروهای خمشی و درون صفحه‌ای [۲۴]

با در نظر گرفتن اثر دورن صفحه‌ای یا همان تنش مسطح، می‌توان کرنش‌ها را بر حسب جملاتی از تغییر شکل‌های  $\bar{u}$  و  $\bar{v}$  در هر کدام از گره‌ها نوشت. حداقل سازی انرژی پتانسیل موجب رسیدن به روابط زیر برای ماتریس سختی، نیروهای گرهی و تغییر مکان‌ها می‌شود:

$$(\bar{\mathbf{f}}^e)^p = (\bar{\mathbf{K}}^e)^p \bar{\mathbf{a}}^p \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{a}}_i^p = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{f}}_i^p = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

اگر اثر خمشی در نظر گرفته شود، می‌توان کرنش‌ها را بر حسب تغییر شکل گرهی  $\bar{z}$  و در دوران

$\theta_{\bar{x}}$  و  $\theta_{\bar{y}}$  نوشت:

$$(\bar{\mathbf{f}}^e)^b = (\bar{\mathbf{K}}^e)^b \bar{\mathbf{a}}^b \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{a}}_i^b = \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \theta_{\bar{x}i} \\ \theta_{\bar{y}i} \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{f}}_i^b = \begin{Bmatrix} F_{\bar{z}i} \\ M_{\bar{x}i} \\ M_{\bar{y}i} \end{Bmatrix} \quad (2-5)$$

قبل از ترکیب این سختی‌ها باید به برخی نکات توجه کرد. ابتدا اینکه تغییرشکل‌های ناشی از نیروهای صفحه‌ای، تاثیری در تغییرشکل‌های خمشی ندارند و بالعکس. دوم اینکه دوران  $\theta_{\bar{z}}$ ، در هیچ یک از موده‌ها، به‌عنوان پارامتری در تعیین تغییرشکل‌ها نقش ندارد. با تعریف مجدد تغییرمکان‌های گرهی ترکیب شده و نیروهای گرهی:

$$\bar{\mathbf{a}}_i = [\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{w}_i \quad \theta_{\bar{x}i} \quad \theta_{\bar{y}i} \quad \theta_{\bar{z}i}] \quad (3-5)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_i = [F_{\bar{x}i} \quad F_{\bar{y}i} \quad F_{\bar{z}i} \quad M_{\bar{x}i} \quad M_{\bar{y}i} \quad M_{\bar{z}i}] \quad (4-5)$$

می‌توان نوشت:

$$\bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{f}}^e \quad (5-5)$$

ماتریس سختی از زیرماتریس‌های زیر تشکیل می‌شود:

$$\bar{\mathbf{k}}_{rs} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{k}}_{rs}^p & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & \bar{\mathbf{k}}_{rs}^b & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

## ۵.۲.۲ انتقال به مختصات کلی و اسمبل کردن المان‌ها

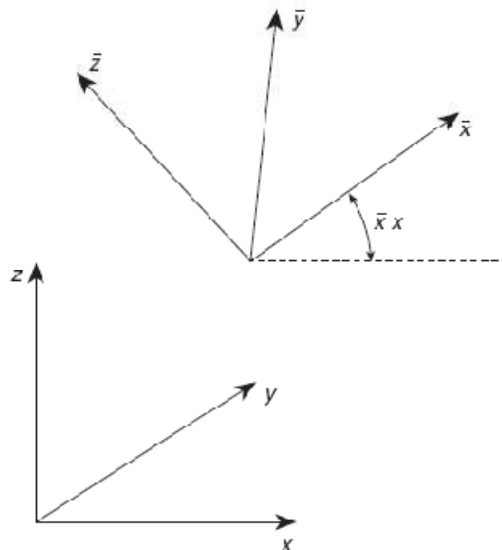
ماتریس سختی که در بخش قبل شرح داده شد، در مختصات محلی محاسبه شده و در پی آن مولفه‌های نیرویی و خمشی نیز در همین مختصات به‌دست آمده‌اند. تبدیل مختصات به یک دستگاه

مختصات کلی، نیازمند اسمبل کردن المان‌ها و بازنویسی معادلات تعادل است.

دو دستگاه مختصات در شکل (۲-۵) نشان داده شده است. نیروها و تغییرشکل‌های گرهی با

استفاده از ماتریس T از سیستم کلی به سیستم محلی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \mathbf{T} \mathbf{a}_i \quad \bar{\mathbf{f}}_i = \mathbf{T} \mathbf{f}_i \quad (۷-۵)$$



شکل (۲-۵) مختصات کلی و محلی [۲۴]

که در آن:

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix} \quad (۸-۵)$$

یک ماتریس ۳ در ۳ است که شامل کسینوس‌های هادی بین محورهای دو سیستم مختصاتی است،

که:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}, x) & \cos(\bar{x}, y) & \cos(\bar{x}, z) \\ \cos(\bar{y}, x) & \cos(\bar{y}, y) & \cos(\bar{y}, z) \\ \cos(\bar{z}, x) & \cos(\bar{z}, y) & \cos(\bar{z}, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{\bar{x}x} & \Lambda_{\bar{x}y} & \Lambda_{\bar{x}z} \\ \Lambda_{\bar{y}x} & \Lambda_{\bar{y}y} & \Lambda_{\bar{y}z} \\ \Lambda_{\bar{z}x} & \Lambda_{\bar{z}y} & \Lambda_{\bar{z}z} \end{bmatrix} \quad (۹-۵)$$

که  $\cos(\bar{x}, x)$  ، کسینوس زاویه بین محور  $x$  و  $\bar{x}$  است.

برای تبدیل مختصات از محلی به کلی:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{a}}_i \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{f}}_i \quad (10-5)$$

که با استفاده از این رابطه برای محاسبه سختی می توان نوشت:

$$\mathbf{K}_{rs}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}_{rs}^e \mathbf{T} \quad (11-5)$$

که  $\bar{\mathbf{k}}_{rs}^e$  با استفاده از روابطی که قبلا ارائه شد محاسبه می شود.

رابطه بین دستگاه مختصات کلی و محلی به صورت زیر است:

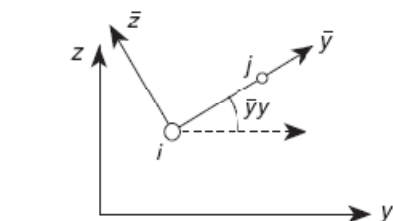
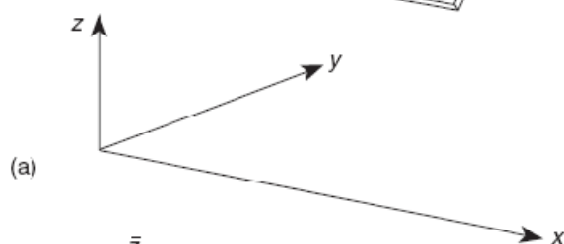
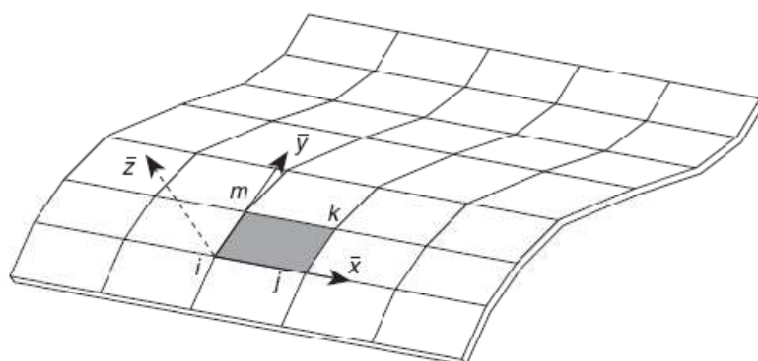
$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \begin{Bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{Bmatrix} \quad (12-5)$$

که  $x_0$  و  $y_0$  و  $z_0$  فاصله بین مبدا مختصات در دستگاه کلی و مبدا مختصات در دستگاه محلی است. در محاسبه مولفه های سختی صفحه ای و خمشی، محل قرارگیری مبدا مختصات اهمیتی ندارد.

### ۵.۲.۳ کسینوسهای هادی محلی برای المان مستطیلی

چنین المان هایی معمولا برای مدل کردن سطوح استوانه ای و ... استفاده می شود. برای این حالات بهتر است که یکی از لبه های المان را در نظر بگیریم. برای یک المان ijkm که در شکل نشان داده شده است، می توان به سادگی کسینوس های هادی را محاسبه کرد:

$$\mathbf{\Lambda}_{\bar{x}\bar{x}} = 1 \quad \mathbf{\Lambda}_{\bar{x}\bar{y}} = \mathbf{\Lambda}_{\bar{x}\bar{z}} = 0 \quad (13-5)$$



(b) Vertical section  $ij$

شکل ( ۳-۵ ) پوسته استوانه‌ای تشکیل شده از المان‌های مستطیلی در مختصات کلی و محلی [۲۴]

کسینوس‌های هادی نسبت به محور  $\bar{y}$ ، با در نظر گرفتن مختصات نقاط گرهی متغیر به صورت

زیر تعیین می‌شوند:

$$\Lambda_{\bar{y}x} = 0 \quad (۱۴-۵)$$

$$\Lambda_{\bar{y}y} = \frac{y_m - y_i}{\sqrt{(y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2}} \quad (۱۵-۵)$$

$$\Lambda_{\bar{y}z} = \frac{z_m - z_i}{\sqrt{(y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2}} \quad (۱۶-۵)$$

این فرمول‌ها به سادگی با در نظر گرفتن روابط هندسی که از گذراندن مقطع عرضی عمودی در

راستای خط  $im$  در راستای  $Z$  به وجود می‌آید، نوشته می‌شود:

$$\Lambda_{\bar{z}x} = 0 \quad (17-5)$$

$$\Lambda_{\bar{z}y} = \frac{z_m - z_i}{\sqrt{(y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2}} \quad (18-5)$$

$$\Lambda_{\bar{z}z} = \frac{y_m - y_i}{\sqrt{(y_m - y_i)^2 + (z_m - z_i)^2}} \quad (19-5)$$

#### ۵.۲.۴ سختی دورانی پیچشی

اگر در فرمول بندی‌ای که در بخش قبل شرح داده شد،  $\theta_{\bar{z}i}$  نیز وارد شود، مساله پیچیده تر می شود. این پیچیدگی در اثر اختصاص یک سختی با اندازه صفر در جهت  $\theta_{\bar{z}i}$  و این حقیقت است که در معادلات کلاسیک پوسته، معادلاتی با پارامترهای دورانی نیستند.

اگر مجموعه‌ای از معادلات تعادل اسمبل شده در یک نقطه در نظر گرفته شود، شش معادله تعادل وجود خواهد داشت که آخرین معادله عبارتست از:

$$0\theta_{\bar{z}} = 0 \quad (20-5)$$

#### ۵.۳ بررسی المان ویلسون

المان ویلسون، یک المان با موده‌های تغییرمکانی ناسازگار است که از برهم‌نهی المان خمشی صفحه کیرشهف و المان غشایی<sup>۱</sup> تشکیل می‌شود. ویژگیهای اصلی این المان عبارتند از:

۱. استفاده از چهار گره برای محاسبات تغییرشکل‌های پوسته
۲. استفاده از درجه آزادی چرخشی برای مدل کردن تغییرمکان‌های واقعی خمشی در المان

---

<sup>۱</sup> Membrane element

۳. حجم کم محاسبات با توجه به خطی بودن و چهارگرهی بودن

۴. استفاده از نقاط و وزن‌های منحصربه‌فرد برای انتگرال‌گیری عددی

۵. داشتن دقت بسیار مناسب با توجه به خطی‌بودن المان

در این بخش مباحث مربوط به تغییرشکل‌ها و روابط تنش-کرنش برای المان ویلسون در دو حالت المان خمشی و غشایی به‌صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت اثر ترکیب دو المان برای المان پوسته ویلسون بررسی می‌شود.

### ۵.۳.۱ المان خمشی کیرشهف

۱. فرض می‌شود که عمود بر سطح مرجع صفحه، پیش از بارگذاری، مستقیم باقی می‌ماند. این موضوع موجب این می‌شود که کرنش‌های صفحه‌ای تابعی خطی در جهت ضخامت باشد. این فرض نیازمند این است که دوران خط عمود برابر با دوران سطح مرجع است. بنابراین امکان تغییرشکل‌های قائم برشی وجود دارد.

۲. تنش‌های قائم در جهت ضخامت در مقایسه با تنش‌های خمشی بسیار کوچک است که در هر دو حالت تیر و صفحه، صفر در نظر گرفته می‌شود. توجه شود که این فرض اجازه استفاده از نسبت پواسون<sup>۱</sup> را برای کرنش‌ها می‌دهد.

۳. اگر کرنش‌های قائم برشی، صفر در نظر گرفته شوند، یک قید تغییرمکانی اضافی به‌صورت شرط چهارم اضافه می‌شود:

۴. خط عمود بر سطح مرجع پس از بارگذاری، عمود باقی می‌ماند.

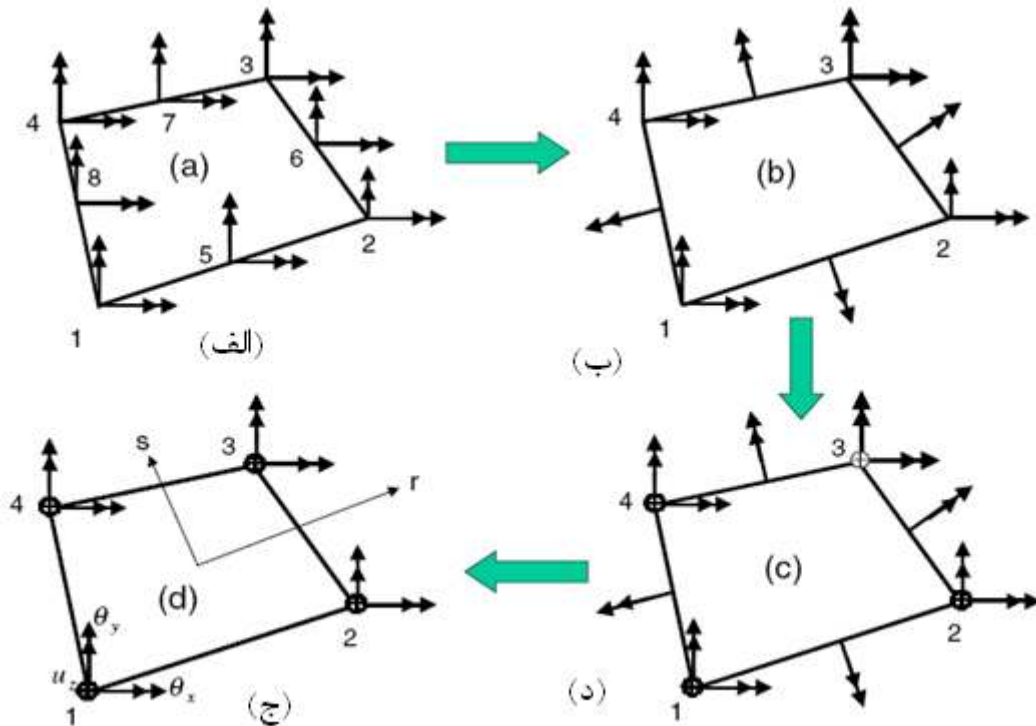
تئوری کلاسیک صفحات نازک بر پایه همین سه فرض است و معادله دیفرانسیل درجه چهارم حاکم هم بر اساس بسط رابطه‌ای بر حسب تغییرشکل قائم حل می‌شود. این تئوری تنها برای صفحات با ضخامت ثابت استفاده می‌شود.

---

<sup>۱</sup> Poisson's ratio

### ۵.۳.۱.۱ المان چهارضلعی (مستطیلی)

یک چهارضلعی با هندسه دلخواه در مختصات کلی  $x-y$  در شکل (۴-۵) نشان داده شده است.



شکل (۴-۵) المان خمشی چهارضلعی [۲۴]

توجه شود که همانند شکل (۴-۵-الف) دارای ۱۶ دوران در چهارنقطه گرهی و نقاط میانی هر لبه است. دوران‌های میان‌لبه‌ای<sup>۱</sup> به دو مولفه مماسی و عمود بر لبه تجزیه می‌شوند. از آنجاکه دوران‌های مماسی را صفر در نظر می‌گیریم، تعداد درجات آزادی به ۱۲ تقلیل می‌یابد (شکل (۴-۵-ب)). معادله حاکم بر لبه‌های المان براساس یک تابع درجه سه از  $u_z$  و چهار تغییرشکل گرهی در گوشه‌های المان تعریف می‌شود (شکل (۴-۵-ج)).

در نهایت دوران‌های میان‌لبه‌ای با کاهش مرتبه استاتیکی<sup>۲</sup> حذف می‌شوند. همانند شکل (۴-۵-د) تبدیل به یک المان با ۱۲ درجه آزادی می‌شود.

<sup>۱</sup> Mid-side

<sup>۲</sup> Static condensation



فرض اساسی در تغییرشکل این است که دوران خطوط عمود بر سطح مرجع صفحه با استفاده

از روابط زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}\theta_x(r, s) &= \sum_{i=1}^4 N_i(r, s)\theta_{xi} + \sum_{i=5}^8 N_i(r, s)\Delta\theta_{xi} \\ \theta_y(r, s) &= \sum_{i=1}^4 N_i(r, s)\theta_{yi} + \sum_{i=5}^8 N_i(r, s)\Delta\theta_{yi}\end{aligned}\quad (21-5)$$

که  $N_i$ ، توابع شکل مطابق زیر هستند.

$$\begin{aligned}N_1 &= (1-r)(1-s)/4 & N_2 &= (1+r)(1-s)/4 \\ N_3 &= (1+r)(1+s)/4 & N_4 &= (1-r)(1+s)/4 \\ N_5 &= (1-r^2)(1-s)/4 & N_6 &= (1+r)(1-s^2)/4 \\ N_7 &= (1-r^2)(1+s)/4 & N_8 &= (1-r)(1-s^2)/4\end{aligned}\quad (22-5)$$

رابطه تغییرشکل در نقاط میانی، یک تابع دوخطی<sup>۱</sup> است که به تابع سلسله مراتبی<sup>۲</sup> موسوم

است. لبه ij از یک المان صفحه‌ای در شکل (5-5) نشان داده‌است.

دوران‌های مماسی صفر در نظر گرفته می‌شوند و تنها دوران‌های نرمال وجود دارند. بنابراین

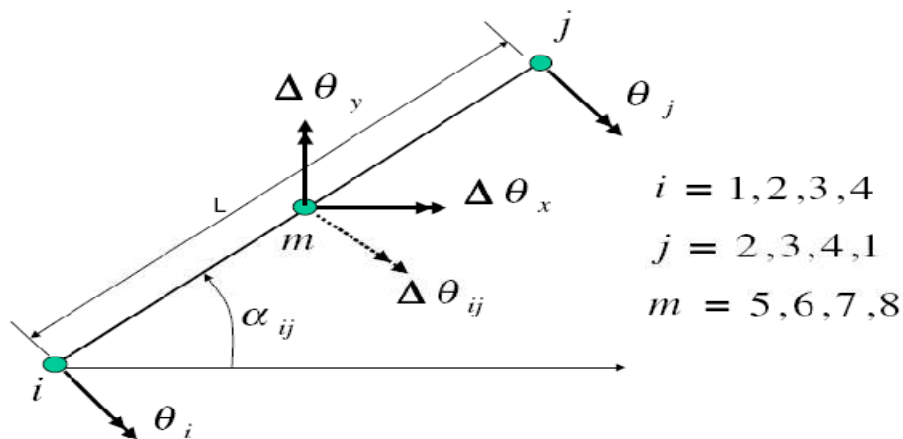
مولفه‌های x و y در دوران‌های نرمال به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_x &= \sin\alpha_{ij}\Delta\theta_{ij} \\ \Delta\theta_y &= -\cos\alpha_{ij}\Delta\theta_{ij}\end{aligned}\quad (23-5)$$

---

<sup>۱</sup> Bilinear function

<sup>۲</sup> Hierarchical



شکل (۵-۵) لبه المان [۲۴]

بنابراین می توان نوشت:

$$\theta_x(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) \theta_{xi} + \sum_{i=5}^8 M_{xi}(r, s) \Delta \theta_i \quad (24-5)$$

$$\theta_y(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) \theta_{yi} + \sum_{i=5}^8 M_{yi}(r, s) \Delta \theta_i$$

حال تعداد درجه آزادی تغییرمکانی از ۱۶ به ۱۲ تقلیل می یابد. تغییرشکل های سه بعدی همانند شکل (۶-۵) نسبت به سطح مرجع x-y عبارتند از:

$$\begin{aligned} u_x(r, s) &= z \theta_y(r, s) \\ u_y(r, s) &= -z \theta_x(r, s) \end{aligned} \quad (25-5)$$

توجه شود که تغییرمکان قائم در صفحه مرجع،  $u_z(r, s)$ ، به صورت یک تابع فضایی تعریف می شود. حال فرض می شود که تغییرشکل قائم در امتداد هر لبه یک تابع درجه سه است. بنابراین کرنش برشی در طول لبه برابر خواهد بود با:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{l} (u_{zj} - u_{zi}) - \frac{1}{2} (\theta_i + \theta_j) - \frac{2}{3} \Delta \theta_{ij} \quad (26-5)$$

در شکل قبل، می توان دوران های نرمال در گره های i و j را با استفاده از دورانهای x و y نوشت و یا در واقع معادله بالا به صورت زیر تغییر کند:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{l}(u_{zj} - u_{zi}) - \frac{\sin \alpha_{ij}}{2}(\theta_{xi} + \theta_{xj}) + \frac{\cos \alpha_{ij}}{2}(\theta_{yi} + \theta_{yj}) - \frac{2}{3}\Delta\theta_{ij} \quad (27-5)$$

که این معادله را برای هر چهار لبه المان نوشت.

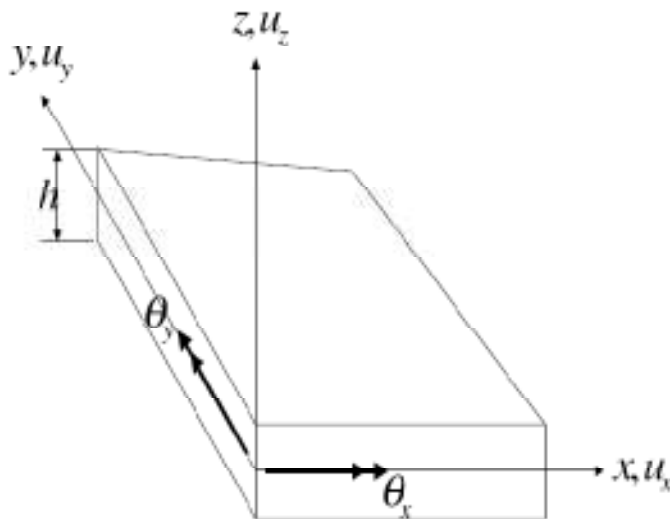
حال می‌توان برش در گره‌ها را براساس برش در لبه‌ها بیان کرد. یک گره در شکل (۷-۵) نشان

داده شده است.

دو مولفه برش میان‌لبه‌ای با استفاده از رابطه تبدیل کرنش زیر به برش‌های گره  $i$  مرتبط

می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{ij} \\ \gamma_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{ij} & \sin \alpha_{ij} \\ \cos \alpha_{ki} & \sin \alpha_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (28-5)$$



شکل (۶-۵) تغییر مکان‌های مثبت در المان خمشی صفحه‌ای [۲۴]

و یا به فرم معکوس می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} \sin \alpha_{ki} & -\cos \alpha_{ki} \\ -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{ij} \\ \gamma_{ki} \end{bmatrix} \quad (29-5)$$

که  $\det = \cos \alpha_{ij} \sin \alpha_{ki} - \sin \alpha_{ij} \cos \alpha_{ki}$  است.

### ۵.۳.۱.۲ معادلات کرنش-تغییر مکان

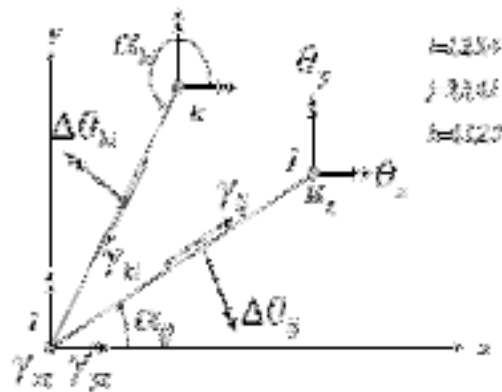
با استفاده از معادلات سه بعدی کرنش-تغییر مکان، کرنش‌های یک صفحه را می‌توان بر حسب

جملاتی ازدوران‌های گرهی به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = z \theta_y (r, s)_{,x} \quad (۳۰-۵)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial x} = -z \theta_x (r, s)_{,y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = z$$



شکل (۷-۵) برش‌های گرهی [۲۴]

بنابراین در هر نقطه انتگرال‌گیری می‌توان پنج مولفه کرنش براساس جملاتی از ۱۶ تغییر مکان

موجود به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{b} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ u_z \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad or \quad \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{a}(z)\mathbf{b}(r, s)\mathbf{u} \quad (۳۱-۵)$$

بنابراین ماتریس تبدیل کرنش-تغییرمکان، از ضرب دو ماتریس به وجود می‌آید که یکی از آن دو ماتریس تابع  $Z$  است.

### ۵.۳.۱.۳ سختی المان چهارضلعی

با استفاده از معادله بالا می‌توان ماتریس سختی یک المان را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dv = \int \mathbf{b}^T \mathbf{D} \mathbf{b} dv \quad (۳۲-۵)$$

که

$$\mathbf{D} = \int \mathbf{a}^T \mathbf{E} \mathbf{a} dz \quad (۳۳-۵)$$

پس از انتگرال‌گیری در جهت  $z$ ، رابطه تغییرشکل-نیرو برای مصالح اورتوتروپیک<sup>۱</sup> به صورت یک

ماتریس  $۵ \times ۵$  در  $۵$  به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_{xz} \\ V_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{xx} \\ \psi_{yy} \\ \psi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (۳۴-۵)$$

لنگرهای  $M$  و برش‌های  $V$ ، نیروهایی در واحد طول هستند و  $\psi$  انحنای متناظر با این لنگرها هستند.

برای مصالح ایزوتروپیک در حالت تنش مسطح، جملات غیر صفر با استفاده از رابطه زیر به دست

می‌آیند:

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (۳۵-۵)$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

<sup>۱</sup> Orthotropic materials

$$D_{44} = D_{55} = \frac{5Eh}{12(1+\nu)}$$

۵.۳.۱.۴ کاهش مرتبه استاتیکی

ماتریس سختی ۱۶ در ۱۶ برای المان خمشی صفحه‌ای با تغییرشکل‌های برشی با استفاده از

انتگرال‌گیری عددی محاسبه می‌شود و یا می‌توان از رابطه زیر آن را محاسبه کرد:

$$\bar{\mathbf{K}} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \quad (۳۶-۵)$$

که  $\mathbf{k}_{12}$  یک ماتریس ۴ در ۴ برای دورانهای نرمال ناسازگار<sup>۱</sup> است.

معادلات تعادل المان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (۳۷-۵)$$

که  $\mathbf{F}$  یک ماتریس حاوی ۱۲ مولفه نیروی گرهی است. از آنجا که نیروهای معادل با  $\Delta\theta$  باید

صفر باشد، درجات آزادی متناظر با این تغییرشکل‌ها می‌توانند با استفاده از کاهش مرتبه استاتیکی

حذف شوند. بنابراین اگر تغییرشکل‌های برشی را در نظر بگیریم، به اندازه ۱۲ در ۱۲ ماتریس سختی

المان افزوده نمی‌شود. به این المان خمشی صفحه‌ای چهارضلعی (یا مثلثی) که شامل تغییرشکل‌های

برشی است المان برشی گسسته<sup>۲</sup> یا DSE می‌گویند [۲۴].

۵.۳.۲ المان غشایی با دورانهای نرمال

یک المان تیر سه‌بعدی دارای ۶ درجه آزادی تغییرمکانی و دورانی در هر گره است. المان

خمشی صفحه که در بخش قبل در مورد آن بحث شد، دارای دو دوران در صفحه المان و یک

تغییرمکان قائم برای هر گره است. یک المان استاندارد در حالت تنش مسطح که برای مدل کردن

<sup>۱</sup> Incompatible normal rotations

<sup>۲</sup> Discrete Shear Element

رفتار غشایی در المان‌های پوسته استفاده می‌شود، تنها دو تغییرمکان در هر گره دارند و نمی‌توانند لنگرهایی که به صورت قائم بر صفحه المان وارد می‌شوند را تحمل کنند.

یک المان قابی که به صورت عمود بر دیوار برشی یا دال قرار می‌گیرد، یکی از مسائل بسیار شایع در مدل‌سازی دیوارها و بسیاری از انواع سازه‌ای است. در این گونه سیستم‌ها می‌توان از قیودی استفاده کرد که لنگر المان قاب را به کوپل-نیرویی تبدیل کند که در صفحه المان وارد می‌شود. برای پوسته‌هایی که به تیرهای لبه‌ای متصل هستند و هرگونه سیستم رایج سازه‌ای، برای المان غشایی نیاز است که یک دوران نرمال را به عنوان یکی از درجات آزادی اصلی سازه در نظر بگیریم [۲۴].

#### ۵.۳.۲.۱ فرضیات اساسی

تعمیم تئوری برای المان غشایی بسیار شبیه المان‌های خمشی است. یک المان چهار ضلعی همانند شکل (۵-۸) را در نظر بگیرید .

۱. ابتدا یک المان چهار با ۱۶ درجه آزادی داریم (شکل (۵-۸-الف))
۲. با چرخش لبه میانی، تغییرمکان‌های نسبی به دو بخش نرمال و مماسی تقسیم می‌شوند و مقدار تغییرمکان‌های نسبی مماسی صفر قرار داده می‌شود که با این کار تعداد درجات آزادی به ۱۲ تقلیل می‌یابد (شکل (۵-۸-ب)).
۳. گام بعدی وارد کردن شرایط تغییرمکان نرمال پارابولیک<sup>۱</sup> برای حذف چهار تغییرمکان نرمال میان لبه‌ای و چهار دوران نرمال نسبی در گره‌ها است (شکل (۵-۸-ج)).
۴. مرحله آخر تبدیل دوران‌های نسبی به مقادیر مطلق و اصلاح توابع شکل برای ارضای آزمون‌های قطعه است. با انجام این مرحله در نهایت یک رابطه ۱۲ در ۱۲ برای سختی المان به دست می‌آید که نسبت به ۱۲ درجه آزادی این المان محاسبه می‌شود (شکل (۵-۸-د)).

---

<sup>۱</sup> Parabolic

### ۵.۳.۲.۲ تخمین تغییر مکان

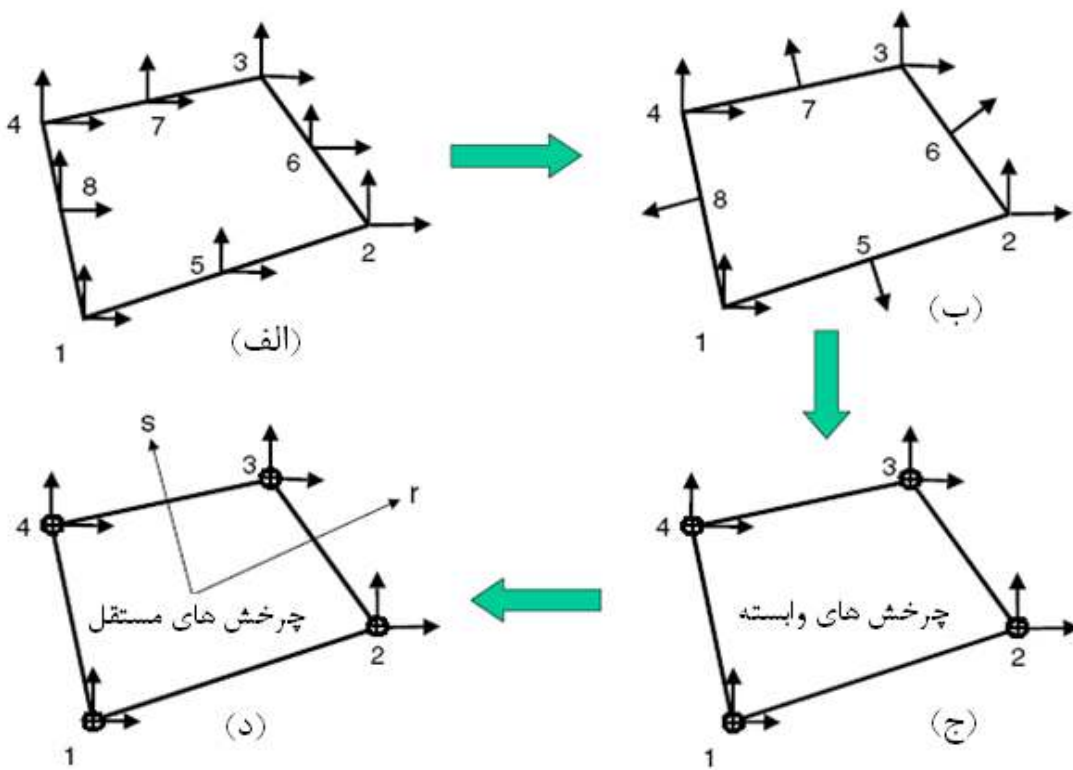
فرض اساسی برای تغییر مکان‌ها در صفحه x-y با استفاده از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$u_x(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) u_{xi} + \sum_{i=5}^8 N_i(r, s) \Delta u_{xi}$$

$$u_y(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) u_{yi} + \sum_{i=5}^8 N_i(r, s) \Delta u_{yi}$$

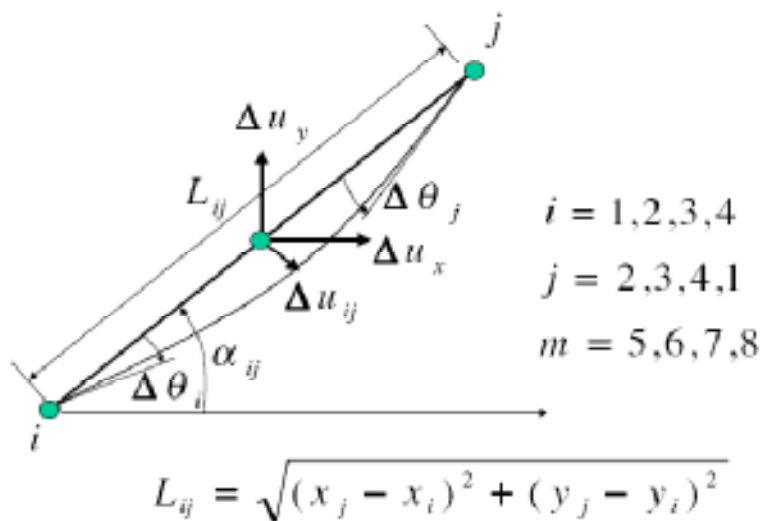
(۳۸-۵)

که  $N_i$  ها، همان توابع شکلی هستند که در بخش قبل شرح داده شده‌اند.



شکل (۸-۵) المان غشایی چهارضلعی با دورانه‌های نرمال [۲۴]





شکل ( ۵-۹ ) لبه یک المان چهارضلعی [۲۴]

### ۵.۳.۲.۳ اعمال دوران گرهی

لبه ij از یک المان غشایی را می توان در شکل ( ۵-۹ ) مشاهده نمود. اگر فرض شود که تغییرمکان نرمال نسبی در هر لبه پارابولیک باشد، معادله زیر بایستی ارضا شود:

$$\Delta u_{ij} = \frac{l_{ij}}{8} (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i) \quad (۳۹-۵)$$

به دلیل اینکه تغییرمکان مماسی میان لبه ای صفر است، تغییرمکان های میان لبه ای نسبی کلی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta u_x = \cos \alpha_{ij} \Delta u_{ij} = \cos \alpha_{ij} \frac{l_{ij}}{8} (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i) \quad (۴۰-۵)$$

$$\Delta u_y = -\sin \alpha_{ij} \Delta u_{ij} = -\sin \alpha_{ij} \frac{l_{ij}}{8} (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i)$$

معادله بالا می تواند بر هر چهار لبه و تغییرمکان های کلی اعمال شود. پس می توان نوشت:

$$u_x(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) u_{xi} + \sum_{i=5}^8 M_{xi}(r, s) \Delta \theta_i \quad (۴۱-۵)$$

$$u_y(r, s) = \sum_{i=1}^4 N_i(r, s) u_{yi} + \sum_{i=5}^8 M_{yi}(r, s) \Delta \theta_i$$

#### ۵.۳.۲.۴ معادلات کرنش-تغییر مکان

معادلات کرنش-تغییر مکان می‌تواند با استفاده از معادلات بنیادی زیر تشکیل شود:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (۴۲-۵)$$

می‌توان با استفاده از روابط بالا نوشت:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \quad (۴۳-۵)$$

برای اینکه المان، آزمون قطعه تنش ثابت<sup>۱</sup> را ارضا کند، اصلاحات زیر در ماتریس  $\mathbf{B}_{12}$  که یک ماتریس ۳ در ۴ است، باید انجام شود:

$$\bar{\mathbf{B}}_{12} = \mathbf{B}_{12} = -\frac{1}{A} \int \mathbf{B}_{12} dA \quad (۴۴-۵)$$

#### ۵.۳.۲.۵ رابطه تنش-کرنش

رابطه تنش-کرنش برای مصالح ایزوتروپیک در حالت تنش مسطح می‌تواند به صورت زیر نوشته

شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (۴۵-۵)$$

ماتریس تنش-کرنش باید متقارن و معین مثبت<sup>۲</sup> باشد.

#### ۵.۳.۲.۶ تبدیل دوران‌های نسبی به مطلق

ماتریس سختی ۱۲ در ۱۲ برای المان مستطیلی با دوران‌های نرمال، با استفاده از انتگرال‌گیری

<sup>۱</sup> Constant stress patch test

<sup>۲</sup> Positive definite

عددی تعیین می‌شود، یا:

$$\bar{\mathbf{K}} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv \quad (۴۶-۵)$$

ماتریس سختی برای المان غشایی همانند آنچه در رابطه بالا بیان شد، دارای چهار دوران نسبی مجهول در هر گره است.

### ۵.۳.۳ المان‌های پوسته

استفاده از تئوری پوسته‌های نازک برای مسائل با هندسه دلخواه، منجر به استفاده از معادلات دیفرانسیل با مرتبه بالا می‌شود که در کل می‌تواند با استفاده از محاسبات عددی به صورت تقریبی محاسبه شود. برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه‌های پوسته‌ای که به وسیله تیرهای کناری مقید شده‌اند، روش اجزای محدود تبدیل به یک روش کاربردی می‌شود.

در دو بخش قبلی، تئوری اساسی المان‌های غشایی و صفحه‌ای بیان شد. در این بخش هر دو نوع المان غشایی و صفحه‌ای به عنوان حالتی خاص از الاستیسیته سه‌بعدی، با هم ترکیب می‌شوند. بنابراین استفاده از چنین المان‌هایی در تحلیل سازه‌های پوسته‌ای، موجب وارد شدن تقریب‌های کمی در جواب می‌شود.

قبل از تحلیل یک سازه با المان پوسته، ابتدا باید مستقیماً از مصالح سه‌بعدی<sup>۱</sup> برای مدل سازی استفاده شود. به عنوان مثال یک سد قوسی سه‌بعدی را در نظر بگیرید. سد قوسی، برای مدل شدن توسط پوسته به اندازه کافی نازک است ولی برای مدل سازی پی آن باید از المان مصالح<sup>۲</sup> کلی استفاده کرد.

---

<sup>۱</sup> Three dimension solids

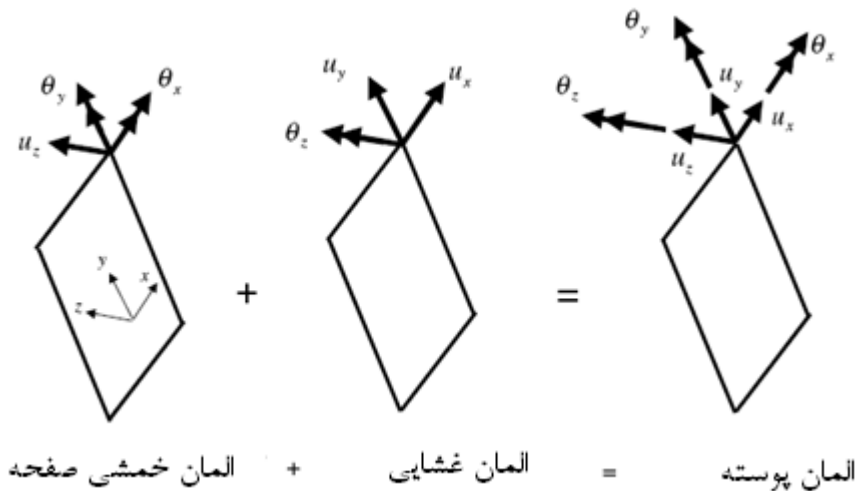
<sup>۲</sup> Solid element

### ۵.۳.۳.۱ المان پوسته چهارضلعی<sup>۱</sup>

المان‌های خمشی صفحه‌ای دوبعدی و غشایی دوبعدی را می‌توان برای شکل‌دهی یک المان پوسته‌ای چهارگره‌ای همانند شکل (۵-۱۰) ترکیب کرد. تنها نیاز است که ماتریس سختی دو المان را در محورهای مختصات محلی XYZ تشکیل داد. سپس ماتریس سختی محلی ۲۴ در ۲۴، به سیستم کل XYZ تبدیل می‌شود. پس از آن سختی المان پوسته و بارها، با استفاده از روش سختی مستقیم برای تشکیل معادلات تعادل محاسبه می‌شوند.

### ۵.۳.۴ مدل کردن پوسته‌های دارای انحنا<sup>۲</sup> با استفاده از المان‌های مسطح

اگر بتوان هر چهار گره را در وسط بعد ضخامت المان قرار داد، می‌توان از المان‌های پوسته‌ای



شکل (۵-۱۰) شکل‌گیری المان مسطح پوسته [۲۴]

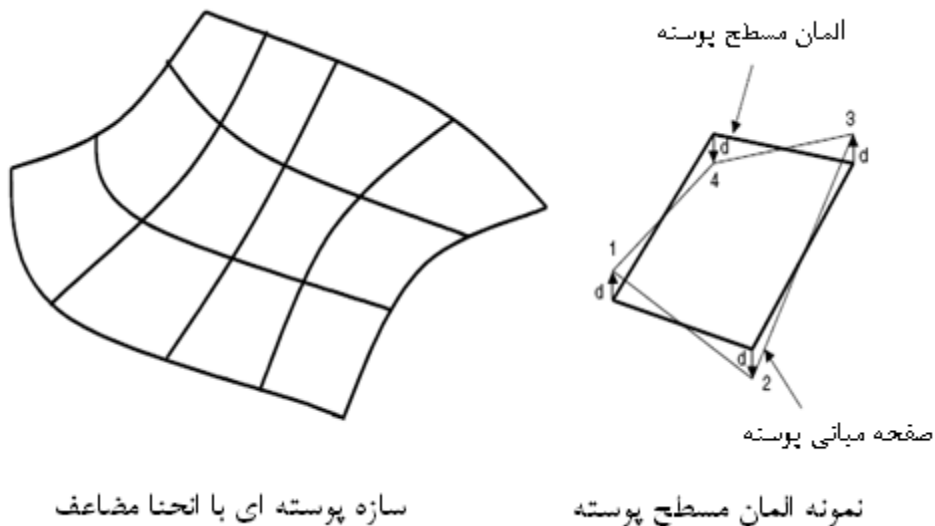
چهارضلعی مسطح برای مدل‌سازی اکثر سازه‌های پوسته‌ای استفاده کرد. ولی این موضوع برای پوسته‌هایی با انحنای مضاعف ممکن نیست [۲۴]. سازه شکل (۵-۱۱) را در نظر بگیرید.

چهار نقطه ورودی ۱ و ۲ و ۳ و ۴، بیانگر این هستند که المان بر روی سطح پوسته قرار دارد.

<sup>۱</sup> Quadrilateral shell element

<sup>۲</sup> Curved Shell

دستگاه مختصات محلی XYZ با استفاده از ضرب بردارهای جهتی عمود برهم تعریف می کنند یا  $V_z = V_{1-3} V_{2-4}$ . بردار فاصله d، عمود بر المان مسطح است و فاصله بین نقاط گرهی المان مسطح و



شکل ( ۵-۱۱ ) استفاده از المانهای مسطح برای مدل سازی پوسته های دلخواه [۲۴]

چهار نقطه سطح میانی پوسته است و از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$d = \pm \frac{z_1 + z_3 - z_2 - z_4}{2} \quad (۴۷-۵)$$

برای اکثر پوسته ها این فاصله برابر با صفر است و گره های اجزای محدود بر روی گره های سطح میانی قرار دارند. اگر فاصله d صفر نباشد، قبل از تبدیل به مختصات کلی، باید سختی المان تصحیح شود [۲۴]. ارضای تعادل نیروها در سطح میانی پوسته بسیار مهم است. این موضوع می تواند با انجام تبدیل ماتریس سختی المان مسطح به سطح میانی، صورت گیرد که همین تبدیل نیز خود نیازمند اعمال معادله تبدیل تغییر مکان زیر در هر گره است:

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (48-5)$$

از لحاظ فیزیکی این بحث بیانگر این است که گره‌های المان مسطح به صورت صلب به گره‌های سطح میانی متصل هستند. واضح است با کوچکتر شدن المان، فاصله  $d$  به سمت صفر میل می‌کند و نتایج حاصل از المان مسطح به جواب اصلی همگرا می‌شود.

## فصل ششم

# روش های تولید شکل

## ۶ روش‌های تولید شکل

۶.۱ مفاهیم پایه در مورد سطوح و منحنی‌ها

۶.۱.۱ فرم‌های پارامتریک و ضمنی

دو راه برای بیان یک منحنی وجود دارد:

۱- معادلات ضمنی

$$f(x, y, z) = 0 \quad (۱-۶)$$

۲- فرم پارامتریک

$$s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (۲-۶)$$

در فرم پارامتریک هر کدام از مختصات‌های یک نقطه در منحنی به صورت جداگانه به عنوان یک

تابع پارامتری مستقل بیان می‌شوند. مثلاً شکل ضمنی معادله یک دایره به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (۳-۶)$$

و شکل پارامتری منحنی دایره به شکل زیر است:

$$C(u) = (x(u, v), y(u, v)) \quad a < u < b \quad (۴-۶)$$

به عنوان مثال ربع اول منحنی دایره به صورت پارامتری به شکل زیر بیان می‌شود:

$$x(u) = \cos(u) \quad (۵-۶)$$

$$y(u) = \sin(u) \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

برای تعریف یک سطح دو پارامتر نیاز است. معادله پارامتری یک کره به شکل زیر است:

$$s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (۶-۶)$$

$$x(u, v) = \sin(u) \cos(v)$$



$$y(u, v) = \sin(u) \sin(v)$$

$$z(u, v) = \cos(u) \quad 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi$$

با مشتق‌گیری از معادله (۱-۱) تابع سرعت به دست می‌آید:

$$C'(u) = (x'(u), y'(u))(-\sin(u), \cos(u)) \quad (۷-۶)$$

مشتق‌های جزئی سطح  $s(u, v)$  در دو جهت  $u$  و  $v$  با  $s_u(u, v)$  و  $s_v(u, v)$  نشان داده می‌شوند.

$$s_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v)) \quad (۸-۶)$$

$$s_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$$

اینکه از بین فرم پارامتریک و ضمنی کدام مناسب است کاملاً مشخص نیست، مثلاً در سه بعد روش پارامتریک برای بیان هندسه شکل مناسب است و یا اینکه بیان منحنی‌های (سطوح) مرزی به فرم ضمنی کار مشکلی است.

## ۶.۱.۲ فرم پایه‌توانی<sup>۱</sup> یک منحنی

از آنجا که توابع مختصات  $x(u), y(u), z(u)$  اختیاری هستند منحنی‌های زیادی را می‌توان به فرم پارامتریک به دست آورد، اما بهتر است به کلاس خاصی از توابع بپردازیم که دارای خصوصیات زیر باشند:

- ۱- بتوانند منحنی را به‌طور دقیق بیان کنند.
- ۲- در پروسه محاسبات کامپیوتری راحت، مؤثر و بادقت باشند، مخصوصاً:

  - در محاسبات نقاط و مشتقات روی منحنی مؤثر باشند.
  - نسبت به خطای گرد کردن ناشی از جابه‌جایی نقاط غیر حساس باشند.
  - احتیاج به فضای کمتری برای ذخیره شدن داشته باشند.

- ۳- ساده و از نظر ریاضی قابل فهم باشند.

---

<sup>۱</sup> Power Basis Form

توابع چندجمله‌ای جز توابعی هستند که کاربرد زیادی دارند. اگرچه موارد ۲ و ۳ از خصوصیات چندجمله‌ای‌ها می‌باشند، ولی تعدادی از منحنی‌های مهم هستند که قابل بیان به وسیله چندجمله‌ای‌ها نیستند.

دو روش بیان چندجمله‌ای‌ها، روش‌های بزیر<sup>۱</sup> و پایه‌توانی هستند. اگرچه این دو روش از نظر ریاضی با یکدیگر معادل‌اند، ولی خواهیم دید که روش بزیر بسیار بهتر از روش پایه‌توانی برای بیان و ساختن یک شکل در کامپیوتر است.

یک منحنی به فرم پایه‌توانی به روش توانی از درجه  $n$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$C(u) = (x(u), y(u), z(u)) = \sum_{i=0}^n a_i u^i \quad (9-6)$$

$$0 \leq u \leq 1$$

که  $a_i = (x_i, y_i, z_i)$  بردار هستند.

$$x(u) = \sum_{i=0}^n x_i u^i \quad y(u) = \sum_{i=0}^n y_i u^i \quad z(u) = \sum_{i=0}^n z_i u^i \quad (10-6)$$

شکل ماتریسی چندجمله‌ای پایه‌توانی به صورت زیر است:

$$C(u) = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = (a_i)^T (u^i) \quad (11-6)$$

با  $i$  بار مشتق‌گیری از معادله (۱۱-۶) داریم:

$$a_i = \frac{C^i(u)|_{u=0}}{i!} \quad (12-6)$$

که  $C^i(u)|_{u=0}$  مشتق  $i$  ام  $C(u)$  در  $u=0$  است.

---

<sup>۱</sup> -Bezier

### ۶.۱.۳ منحنی‌های بزیر

نوع دیگری از منحنی‌های چندجمله‌ای پارامتریک منحنی‌های بزیر هستند. منحنی‌های بزیر و منحنی‌های پایه‌توانی هردو برای بیان توابع مختصات از چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌کنند و هردو از نظر ریاضی معادل هستند، ولی روش بزیر برای مدل کردن هندسی از روش پایه‌توانی بهتر است [۲۵].

مشکلات روش پایه‌توانی عبارتند از:

- ضرایب  $\alpha_i$  خصوصیات هندسی شکل را به خوبی بیان نمی‌کنند. مثلاً شرایط انتهایی و ابتدایی نقاط برای ما مشخص نیست.
- الگوریتم‌هایی که برای توابع چندجمله‌ای این روش در محاسبات کامپیوتری استفاده می‌شود، بیشتر خاصیت نسبتاً جبری دارند تا خاصیت هندسی.
- از نظر عددی یک فرم نسبتاً ضعیف است، در صورتی که ضرایب  $\alpha_i$  بزرگ باشند خطای گرد کردن به وجود می‌آید [۲۵].

یک منحنی درجه  $n$  بزیر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (۱۳-۶)$$

تابع چندجمله‌ای  $\{B_{i,n}(u)\}$  تابع چندجمله‌ای درجه  $n$  ام برنشتاین<sup>۱</sup> است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵].

$$B_{i,n} = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (۱۴-۶)$$

ضرایب هندسی این فرم  $\{P_i\}$ ، نقاط کنترلی<sup>۲</sup> نامیده می‌شوند. مثلاً برای  $n=1$  از معادله (۱۴-۶) داریم:

<sup>۱</sup>Bernstein polynomial

<sup>۲</sup> control points

$$B_{0,1}(u) = 1 - u \quad (15-6)$$

$$B_{1,1}(u) = u$$

پس شکل منحنی به شکل زیر است:

$$C(u) = (1-u)P_0 + uP_1 \quad (16-6)$$

که معادله یک خط راست از  $P_0$  تا  $P_1$  است.

اگر  $n=2$  باشد داریم:

$$C(u) = (1-u)^2 P_0 + 2u(1-u)P_1 + u^2 P_2 \quad (17-6)$$

که یک کمان درجه دوم از  $P_0$  تا  $P_1$  است (شکل (1-6)). چندضلعی که به وسیله نقاط  $P_0$ ،  $P_1$  و  $P_2$  تشکیل می‌شود، چندضلعی پلی‌گون نامیده می‌شود که شکل منحنی را با تقریب خوبی بیان می‌کند.

چند نکته در ارتباط با منحنی بزیر ضروری است:

$$P_n = C(n) \text{ و } P_0 = C(0) \quad -$$

- جهت‌های مماسی برای نقاط انتهایی منحنی برابر با  $P_1 - P_0$  و  $P_n - P_{n-1}$  است.

- خاصیت پوسته محدب<sup>۱</sup>: منحنی در پوسته محدبی که نقاط کنترلی آن را تعریف کرده‌اند قرار گرفته‌است.

- خاصیت نزولی تغییرات<sup>۲</sup>: هر خط راست منحنی را کمتر از نقاط کنترلی آن منحنی قطع می‌کند. (در سه بعد به جای خط راست از صفحه استفاده می‌شود)

- خاصیت نزولی تغییرات نشان می‌دهد که منحنی بزیر تابع پلی‌گون‌های کنترلی‌اش است.

- در صورتی که بردارهای مماسی در ابتدا و انتها باهم برابر باشند و ما یک حلقه<sup>۳</sup> داشته باشیم منحنی صاف<sup>۴</sup> یا نرم است (شکل (2-6)).

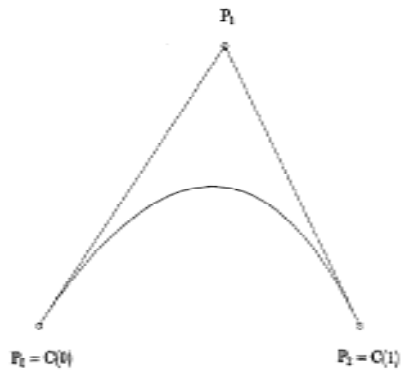
---

<sup>۱</sup>convex hull

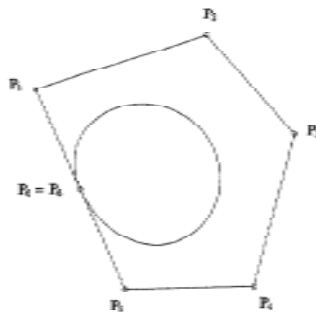
<sup>۲</sup>variation diminishing property

<sup>۳</sup>loop

<sup>۴</sup>smooth



شکل (۱-۶) [۲۵]



شکل (۲-۶) [۲۵]

نکته قابل توجه این است که منحنی‌های بزییر تحت انتقال، دوران و... ثابت هستند و هرکدام از این نگاشتها به وسیله نقاط کنترلی اعمال می‌شود. در هر منحنی و سطح انتخاب توابع اساسی<sup>۱</sup> خصوصیات هندسی شکل را تعیین می‌کند. خصوصیات این توابع به شکل زیر است:

۱- مثبت هستند.

$$B_{i,n}(u) = 0 \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (18-6)$$

۲- جمع آنها برابر واحد است.

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) = 1 \quad (19-6)$$

-۳

---

<sup>۱</sup> -Basis function

$$B_{0,n}(u) = B_{n,n} = 1 \quad (20-6)$$

۴-  $B_{i,n}(u)$  دقیقاً به مقدار ماکزیمم یک در فاصله  $[0,1]$  می رسد.

۵- تعریف بازگشتی:

$$B_{i,n}(u) = (1-u)B_{i,n}(u) + uB_{i-1,n-1}(u) \quad (21-6)$$

$$B_{i,n}(u) = 0 \quad \text{if } i < 0 \text{ or } i > n$$

#### ۶.۱.۴ منحنی‌های بزیر نسبی

این منحنی‌ها نمونه خاصی از بی‌اسپلاین‌های نسبی<sup>۱</sup> هستند. اگرچه چندجمله‌ای‌ها خاصیت‌های مفید زیادی دارند، ولی آنها قادر به بیان دقیق برخی منحنی‌های مهم مثل دایره، بیضی، سیلندرها، هذلولی‌ها و ... نیستند.

از ریاضیات می‌دانیم که همه منحنی‌های مخروطی مثل دایره‌ها می‌توانند به وسیله توابع نسبی

<sup>۲</sup> بیان شوند، یعنی به صورت نسبت دو چندجمله‌ای تعریف می‌شوند:

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)} \quad y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)} \quad z(u) = \frac{Z(u)}{W(u)} \quad (22-6)$$

که هرکدام از توابع مختصات تقسیم کننده‌های یکسانی دارند. به‌طور مثال معادله یک دایره به مرکز مبدأ مختصات به صورت زیر است:

$$x(u) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad y(u) = \frac{2u}{1+u^2} \quad (x(u))^2 + (y(u))^2 = 1 \quad (23-6)$$

یک منحنی درجه  $n$  بزیر نسبی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u)w_i} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (24-6)$$

$B_{i,n}$  و  $P_i$  قبلاً تعریف شده‌اند.  $w_i$  مقادیری عددی هستند که وزن نامیده می‌شوند

<sup>۱</sup> -Rational B-spline

<sup>۲</sup> -Rational function

$w(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n} w_i$  تابع تقسیم کننده مشترک است. در معادله (۶-۲۴) فرض بر این است که  $w_i > 0$  است. بنابراین برای تمام  $u \in [0,1]$  داریم  $w(u) > 0$  را به صورت زیر می توان نوشت:

$$c(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) P_i \quad (۶-۲۵)$$

$$R_{i,n}(u) = \frac{B_{i,n}(u) w_i}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(u) w_j}$$

$R_{i,n}(u)$  تابع پایه نسبی<sup>۱</sup> برای این فرم از منحنی است.

خصوصیات این تابع به صورت زیر است:

- ۱-  $R_{i,n}(u) \geq 0$  for all  $i$
- ۲-  $\sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) = 1$  for all  $0 \leq u \leq 1$
- ۳-  $R_{0,n}(u) = R_{n,n}(u) = 1$
- ۴-  $R_{i,n}(u)$  به مقدار ماکزیمم یک در فاصله  $u \in [0,1]$  می رسد.
- ۵- اگر  $w_i = 1$  برای همه مقادیر  $i$ ،  $R_{i,n}(u) = B_{i,n}(u)$

خصوصیات  $R_{i,n}(u)$  مانند خصوصیات  $B_{i,n}(u)$  است که عبارتند از:

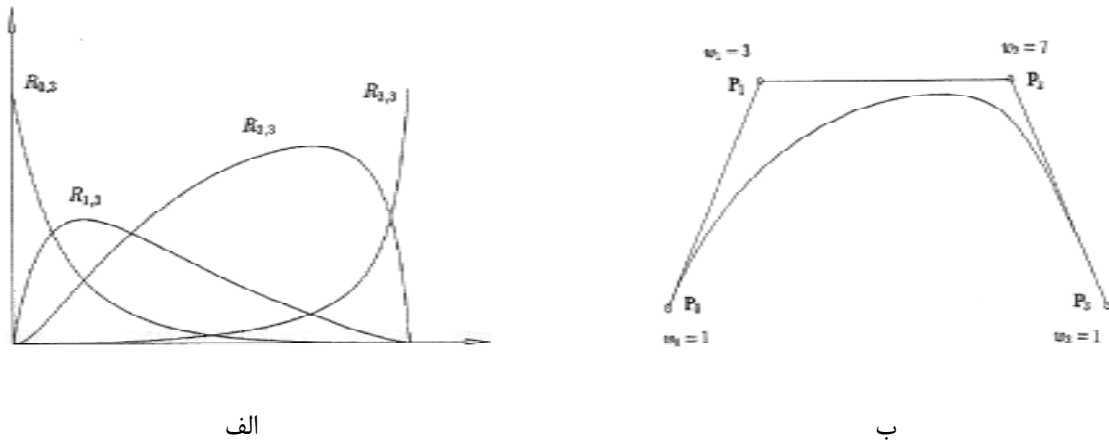
- ۱- ویژگی پوسته محدب
- ۲- انتقال ثابت<sup>۲</sup>
- ۳- خاصیت نزولی تغییرات [۲۵]
- ۴- درون یابی نقاط انتهایی  $C(0) = P_0$ ،  $C(u) = P_n$
- ۵- مشتق  $k$  ام در  $u = 0$  (بستگی به  $k + 1$  نقطه کنترلی و وزن اول (آخر) بستگی دارد.

منحنی های بزیر حالت خاصی از منحنی های بزیر نسبی هستند. شکل (۶-۳) توابع پایه نسبی

<sup>۱</sup> - Rational basis function

<sup>۲</sup> - transformation invariance

منحنی بزیر و شکل آن را برای یک منحنی درجه سه نشان می‌دهد.



شکل (۳-۶) (الف) توابع پایه منحنی درجه ۳ نسبی (ب) منحنی بزیر نسبی [۲۵]

## ۶.۲ توابع پایه بی‌اسپلاین<sup>۱</sup>

چنانچه یک منحنی فقط شامل یک چندجمله‌ای یا یک بخش نسبی باشد نامناسب است،

چون:

- منحنی‌های درجه بالا از نظر عددی ناپایا<sup>۲</sup> هستند.
- منحنی‌های (سطوح) تک قطعه‌ای برای تغییرات طرح شکل مناسب نیستند.

این مشکلات را می‌توان با استفاده از چندجمله‌ای چند قطعه‌ای<sup>۳</sup> حل کرد. شکل (۴-۶) یک

منحنی  $C(u)$  سه‌بخشی را نشان می‌دهد؛ یعنی  $m=3$  که  $u \in [0,1]$  مقادیر پارامتری

می‌دهیم. قطعه‌ها با پیوستگی‌های مختلف به هم وصل می‌شوند. ما قطعه‌ها را با  $0 \leq i \leq m, C_i(u)$  نشان

می‌دهیم. قطعه‌ها با پیوستگی‌های مختلف به هم وصل می‌شوند.

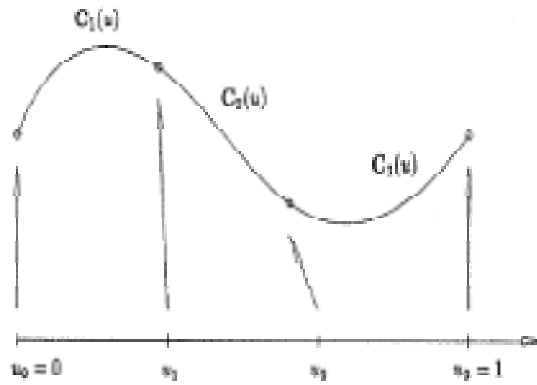
یک منحنی در نقطه شکست  $u_i$  دارای پیوستگی  $C^k$  است، هرگاه:

<sup>۱</sup> B-Spline

<sup>۲</sup> unstable

<sup>۳</sup> -piecewise polynomial





شکل (۴-۶) [۲۵]

$$C_i^{(j)}(u_i) = C_{i+1}^{(j)}(u_i) \text{ for all } 0 \leq u \leq 1 \quad (۲۶-۶)$$

ما یک منحنی را به شکل زیر بیان می کنیم:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u) P_i \quad (۲۷-۶)$$

$P_i$  ها همان نقاط کنترلی هستند و  $\{f_i(u), i = 0, \dots, n\}$  توابع چندجمله ای قطعه ای هستند. باید توجه کرد که پیوستگی منحنی به وسیله تابع پایه تعیین می شود، حتی با تغییر مکان نقاط کنترلی پیوستگی تغییر نمی کند. توابع پایه  $\{f_i\}$  خواص تحلیلی خوبی دارند یعنی خاصیت پوسته محدب، خاصیت نزولی تغییرات و انتقال ثابت. یک خاصیت مهمی که ما به دنبال آن در توابع پایه هستیم خاصیت تکیه گاه محلی است که  $f_i(u)$  را در فواصل داخلی که غیر صفر است تعیین می کند. تغییر  $P_i$  روی شکل منحنی فقط در فواصلی که  $f_i(u)$  غیر صفر است تأثیر می گذارد.

### ۶.۲.۱ تعریف و خواص توابع پایه بی اسپلین

برای تعریف توابع پایه بی اسپلین از یک فرمول بازگشتی استفاده می کنیم [۲۵]. اگر بردار

$$U = \{u_0, \dots, u_m\}$$

یک بردار صعودی از مقادیر حقیقی باشد یعنی  $u_i \leq u_{i+1}$  باشد طوری که  $i = 0, \dots, m-1$  هر کدام از مقادیر  $u_i$  یک گره نامیده می شود و  $U$  بردار گرهی است.  $i$  امین تابع

پایه بی اسپلین از درجه  $p$  که با  $N_{i,p}(u)$  نشان داده می شود را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (28-6)$$

$$N_{i,p} = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1} + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

### ۶.۳ سطوح و منحنی‌های بی‌اسپلین

در این جا به بررسی سطوح و منحنی‌های بی‌اسپلین غیرنسبی می‌پردازیم. برای ایجاز از گفتن کلمه غیر نسبی<sup>۱</sup> صرف نظر می‌کنیم. استفاده از بی‌اسپلین برای تعریف منحنی‌ها و سطوح جهت رسم هندسی توسط کامپیوتر توسط گوردون<sup>۲</sup> و ریزن فیلد<sup>۳</sup> ارائه شده است. یک منحنی بی‌اسپلین از درجه  $p$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (29-6)$$

که  $P_i$  نقاط کنترلی و  $\{N_{i,p}(u)\}$  تابع پایه بی‌اسپلین است که روی بردار گرهی غیرنوسانی تعریف می‌شود:

$$U = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (30-6)$$

سه مرحله برای محاسبه یک نقطه ثابت  $u$  روی منحنی بی‌اسپلین احتیاج است:

- ۱- پیدا کردن بازه گره در جایی که  $u$  قرار دارد.
- ۲- محاسبه توابع پایه غیرصفر.
- ۳- ضرب مقادیر توابع پایه غیرصفر در نقاط کنترلی متناظر.

#### ۶.۳.۱ تعریف و خصوصیات منحنی‌های بی‌اسپلین

۱- اگر  $n = p$  باشد و  $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ ،  $C(u)$ ، یک منحنی بزیر است.

<sup>۱</sup>nonrational

<sup>۲</sup>Gordon

<sup>۳</sup>Riesendfeld

۲-  $C(u)$  یک چندجمله‌ای تکه‌ای است. اگر  $C(u)$  از درجه  $p$  باشد و تعداد نقاط کنترلی برابر با  $n+1$  باشد و تعداد گره‌ها  $m+1$  آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$m = n + p + 1 \quad (۳۱-۶)$$

شکل (۵-۶) و (۶-۶) یک منحنی بی‌اسپلین و مقاطع منحنی را که متناظر با دهانه‌های گرهی است نشان می‌دهد.

۳- خاصیت پوسته محدب قوی: منحنی در پوسته محدب ناشی از نقاط کنترلی‌اش قرار می‌گیرد. اگر  $u \in [u_i, u_{i+1})$  قرار بگیرد و  $i \leq p \leq m - p - 1$  باشد. پس  $C(u)$  در داخل پوسته محدب تشکیل شده از نقاط کنترلی  $P_{i-p}, \dots, P_i$  است.

۴- طرح تغییر موضعی منحنی: حرکت دادن  $P_i$  منحنی را فقط در فاصله داخلی  $(u_i, u_{i+p+1})$  تغییر می‌دهد.

۵- کنترل پلی‌گون یک ترکیب خطی قطعه‌ای را برای منحنی بیان می‌کند. این تقریب به‌وسیله وارد کردن گره‌ها و بالابردن درجه بهتر می‌شود.

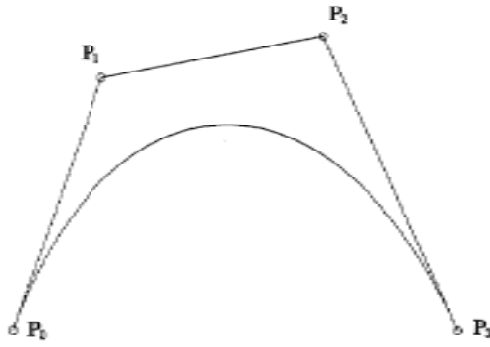
۶- پیوستگی و دیفرانسیل‌پذیری  $C(u)$  وابسته به  $N_{i,p}(u)$  است، پس منحنی در فواصل داخلی گره‌ها بی‌نهایت دیفرانسیل‌پذیر است و در یک گره با تعداد تکرار  $k$  حداقل  $p-k$  بار پیوسته است.

### ۶.۳.۲ تعریف و خصوصیات سطوح بی‌اسپلین

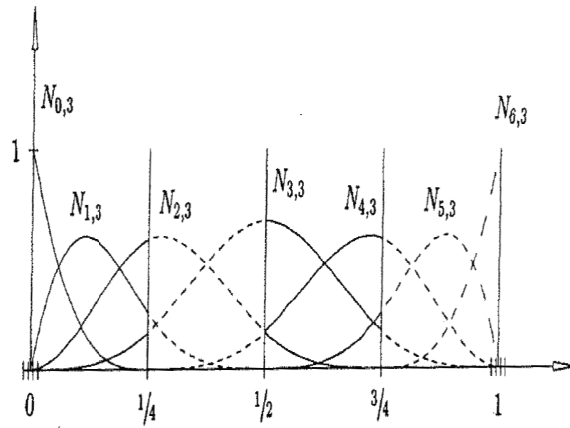
یک منحنی بی‌اسپلین به‌وسیله یک شبکه دوجهته از نقاط کنترلی، دو بردار گرهی و حاصل ضرب توابع بی‌اسپلین تک‌متغیره تولید می‌شود:

$$s(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j} \quad (۳۲-۶)$$

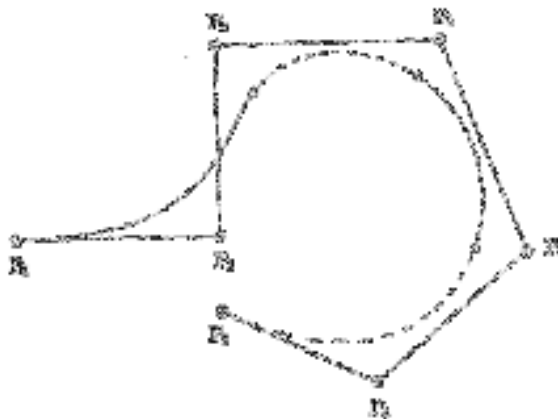
با بردارهای گرهی:



شکل (۵-۶) منحنی بی‌اسپلاین درجه ۳ روی بردار  $U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$  [۲۵]



شکل (۶-۶) توابع پایه درجه سه روی بردار  $U = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}$  [۲۵]



شکل (۷-۶) یک منحنی درجه سه که از توابع پایه شکل (۶-۶) استفاده می‌کند [۲۵]

$$U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \quad (33-6)$$

$$V = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, u_{p+1}, \dots, u_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$$

U دارای  $r+1$  نقطه و V دارای  $s+1$  نقطه است. معادله (31-6) به شکل زیر درمی آید:

$$s = m + q + 1, r = n + p + 1 \quad (34-6)$$

پنج مرحله برای محاسبه یک نقطه روی سطح منحنی در مقدار پارامتری  $(u, v)$  باید انجام داد:

الف- پیدا کردن دهانه گرهی  $u \in [u_i, u_{i+1})$

ب- محاسبه توابع پایه غیرصفر  $N_{i-p,p}(u), \dots, N_{i,p}(u)$

ج- پیدا کردن دهانه گرهی  $v \in [v_j, v_{j+1})$

د- محاسبه توابع پایه غیرصفر  $N_{j-q,q}(v), \dots, N_{j,q}(v)$

ه- ضرب مقادیر توابع پایه غیرصفر در نقاط کنترلی متناظر

#### ۶.۴ منحنی‌ها و سطوح بی‌اسپلاین نسبی (نربز)<sup>۱</sup>

در این بخش با استفاده از مفاهیم منحنی‌های بزیر و بی‌اسپلاین به معرفی تعاریف منحنی‌ها و

سطوح بی‌اسپلاین‌های نسبی یا نربز می‌پردازیم.

##### ۶.۴.۱ تعریف و خصوصیات منحنی نربز

یک منحنی نربز از درجه P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} \quad a \leq u \leq b \quad (35-6)$$

که  $\{P_i\}$  نقاط کنترل هستند و  $\{w_i\}$  وزن‌ها و  $\{N_{i,p}(u)\}$  توابع پایه بی‌اسپلاین از درجه p

<sup>۱</sup> NURBS: NonUniform Rational B-Spline

هستند که روی بردار گرهی غیرنوسانی تعریف می‌شود:

$$U = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (36-6)$$

فرض می‌کنیم که  $a = 0$  و  $b = 1$  و  $w_i > 0$  قرار می‌دهیم:

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}} \quad (37-6)$$

پس معادله (35-6) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)P_i \quad (38-6)$$

$R_{i,p}(u)$  تابع پایه نسبی<sup>۱</sup> است، که یک تابع پایه قطعه‌ای در فاصله  $u \in [0,1]$  است.  $R_{i,p}(u)$  دارای

خصوصیات زیر است:

۱-  $R_{i,p}(u) > 0$  در فاصله  $u \in [0,1]$

۲-  $\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1$  در فاصله  $u \in [0,1]$

۳-  $R_{i,p}(0) = R_{n,p}(u) = 1$

۴- برای  $P > 0$ ،  $R_{i,p}(u)$  دقیقاً یک‌بار به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد.

۵- تکیه‌گاه محلی:  $R_{i,p}(u) = 0$  برای گره‌هایی که خارج از فاصله  $u \in [u_i, u_{i+p+1}]$

۶- همه مشتق‌های  $R_{i,p}(u)$  در داخل یک دهانه گرهی وجود دارند، که آن یک تابع نسبی با

کسر غیرصفر است.

۷- اگر  $w_i = 0$  برای تمام مقادیر  $i$  باشد پس:  $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u)$

۸-  $C(1) = P_n$  و  $C(0) = P_0$

۹- ویژگی پوسته محدب قوی

۱۰- خاصیت نزولی تغییرات: هیچ صفحه‌ای منحنی را بیشتر از نقاط کنترلی آن منحنی

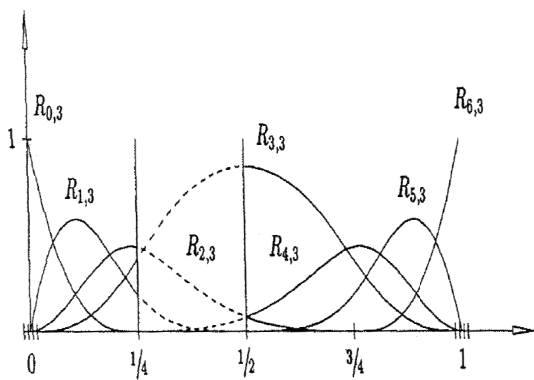
قطع نمی‌کند. (برای دو بعد به جای خط از صفحه استفاده می‌کنیم)

---

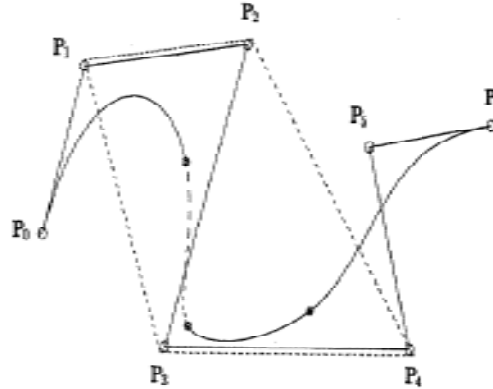
<sup>۱</sup>-rational basis function

۱۱- یک منحنی نریز بدون گره‌های داخلی یک منحنی بزیر نسبی است، طوری که

$N_{i,p}(u)$  تبدیل به  $B_{i,n}(u)$  می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل (۸-۶)  $U = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}$  و  $\{w_0, \dots, w_6\} = \{1, 1, 1, 3, 1, 1, 1\}$  (الف) منحنی درجه سه نریز (ب) توابع پایه مربوط به شکل (الف) [۲۵]

۱۲- تقریب محلی: اگر نقطه کنترلی  $P_i$  تغییر مکان دهد یا وزن  $w_i$  تغییر کند، منحنی

در دهانه داخلی  $u \in [u_i, u_{i+p+1})$  تغییر می‌کند.

همان‌طور که در منحنی‌های بزیر نسبی داشتیم استفاده از مختصات همگن یک روش مؤثر

برای بیان منحنی‌های نریز است. اگر  $H$  را نگاشت پرسپکتیو در نظر بگیریم برای یک سری از نقاط

کنترلی،  $\{P_i\}$ ، و وزن‌ها  $\{w_i\}$ ، ما نقاط کنترلی وزنی،  $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i)$  را

می‌سازیم. پس منحنی بی‌اسپلاین (چندجمله‌ای قطعه‌ای) غیرنسبی در فضای چهاربعدی به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i^w \quad (۳۹-۶)$$

با اعمال نگاشت پرسپکتیو  $H$  به  $C^w(u)$  یک منحنی بی‌اسپلاین نسبی مطابق با  $C(u)$  (نسبی

قطعه‌ای در فضای سه‌بعدی) به دست می‌آید.

$$C(u) = H \{C^w(u)\} = H \left\{ \sum_{i=0}^n N_{i,p} P_i^w \right\} \quad (۴۰-۶)$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) w_i} = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i$$

### ۶.۴.۲ تعریف و خصوصیات سطوح نریز

یک سطح نریز از درجه P در جهت u و از درجه q در جهت v یک تابع نسبی قطعه‌ای دارای مقداری برداری در دو جهت دارای فرم زیر است:

$$s(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (۴۱-۶)$$

که  $\{P_{i,j}\}$  یک شبکه کنترلی دوجهته را تشکیل می‌دهد،  $\{w_{i,j}\}$  وزن‌ها هستند و  $\{N_{i,p}(u)\}$  و  $\{N_{j,q}(v)\}$  توابع پایه بی‌اسپلاین غیرنسبی هستند که روی بردارهای گرهی زیر تعریف می‌شوند.

$$U = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \quad (۴۲-۶)$$

$$V = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, u_{q+1}, \dots, u_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$$

$$s = m + q + 1 \quad \text{و} \quad r = n + p + 1$$

تابع پایه نسبی قطعه‌ای برای سطوح به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{i,j}(u,v) = \frac{N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u) N_{l,q}(v) w_{k,l}} \quad (۴۳-۶)$$

معادله سطح (۴۱-۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u,v) P_{i,j} \quad (۴۴-۶)$$

خصوصیات مهم توابع  $R_{i,j}(u,v)$  عبارتند از:



$$R_{i,j}(u,v) \geq 0 \quad -1$$

$$(u,v) \in [0,1] \times [0,1] \text{ برای } \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u,v) = 1 \quad -2$$

۳- تکیه‌گاه محلی:  $R_{i,j}(u,v) = 0$ ، اگر  $(u,v)$  خارج مستطیل مشخص شده توسط بازه

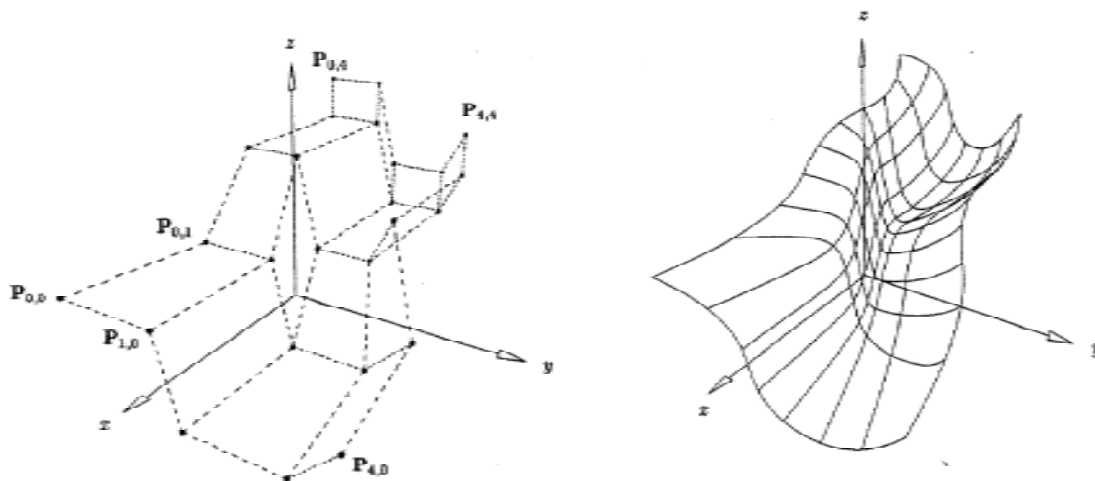
$$[u_i, u_{i+p+1}] \times [v_j, v_{j+q+1}]$$

۴- اگر  $P > 0$  و  $q > 0$  پس  $R_{i,j}(u,v)$  یک بار به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد.

۵- دیفرانسیل پذیری: در داخل مستطیل تشکیل شده توسط خطوط گرهی  $u$  و  $v$  همه مشتقات

جزئی  $R_{i,j}(u,v)$  وجود دارند. در یک گره  $(u, v)$  این تابع  $p-k$  تا  $q-k$  در جهت  $u$  ( $v$ )

دیفرانسیل پذیر است، که  $k$  تعداد تکرار یک گره است.



شکل (۹-۶) شبکه کنترل و سطح نربز که در دو جهت از درجه سوم است.  $w_{1,1} = w_{1,2} = w_{2,1} = w_{2,2} = 10$  [۲۵]

۶- اگر  $w_{i,j} \geq a$  برای  $0 \leq i \leq n$  و  $0 \leq j \leq m$  و  $a \neq 0$  آنگاه:

$$R_{i,j}(u,v) = N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) \quad \text{for all } i, j \quad (۴۵-۶)$$

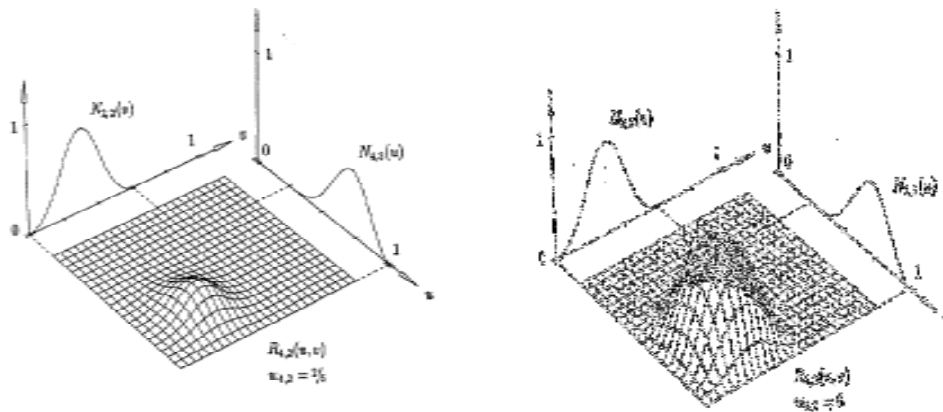
۷- خاصیت پوسته محدب قوی:

فرض  $w_{i,j} \geq 0$  برای تمام  $i$  و  $j$ . اگر  $(u,v) \in [u_{i_0}, u_{i_0+1}] \times [v_{j_0}, v_{j_0+1}]$  آنگاه سطح  $s(u,v)$  یک

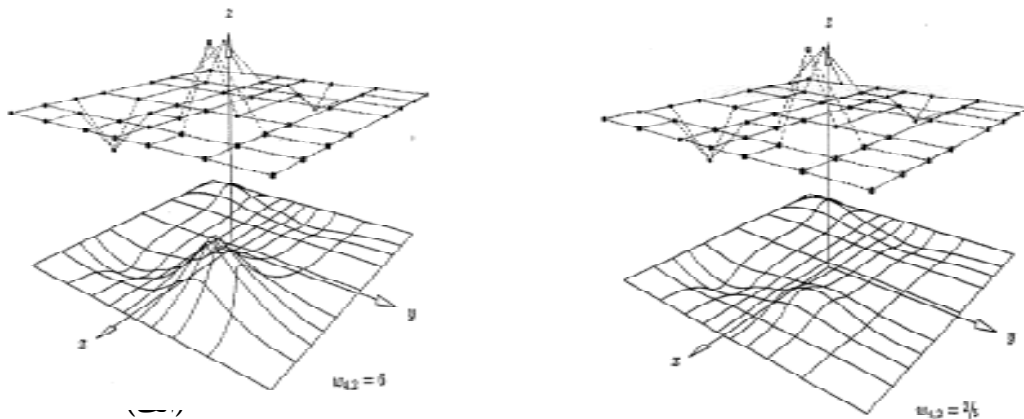
پوسته محدب تشکیل شده از نقاط کنترلی  $P_{i,j}$  که:

$$i_0 - p \leq i \leq i_0 \quad j_0 - q \leq j \leq j_0 \quad (۴۶-۶)$$

در سطوح نربز می توان مکان نقاط کنترلی را تغییر داد یا وزن ها را اصلاح کرد. شکل (۶-۱۰) و (۶-۱۱) تأثیر تغییر یک وزن را وقتی  $w_{i,j}$  تغییر می کند روی شکل سطوح و  $R_{i,j}(u,v)$  نشان می دهد. اگر  $(u,v) \in [u_i, u_{i+p+1}] \times [v_j, v_{j+p+1}]$  آنگاه اگر افزایش  $w_{i,j}$  (کاهش) پیدا کند نقطه روی منحنی  $s(u,v)$  از نقطه  $P_{i,j}$  نزدیکتر (دورتر) می شود. این تغییر مکان  $s(u,v)$  مانند منحنی ها در امتداد یک خط راست است.



شکل (۶-۱۰) تابع پایه  $R_{i,j}(u,v)$  با  $u = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}$  و  $v = \{0, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1, 1\}$  که  $w_{i,j} = 1$  برای  $i, j \neq (4, 2)$  و  $i, l \neq (4, 2)$  [۲۵]



شکل (۶-۱۱) منحنی های درجه دو  $\times$  درجه سه متناظر با شکل (۶-۴)؛ (الف)  $w_{4,2} = \frac{2}{5}$  (ب)  $w_{4,2} = 6$  [۲۵]

سطوح بزیر نسبی و غیرنسبی و سطوح بی اسپلاین غیرنسبی نمونه خاصی از سطوح نربز هستند. بهتر است که برای بیان سطوح نربز از یک مختصات همگن استفاده کنیم.

$$s^w(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}^w \quad (۶-۴۷)$$

که

$$P_{i,j}^w = (w_{i,j}x_{i,j}, w_{i,j}y_{i,j}, w_{i,j}z_{i,j}, w_{i,j}) \quad (48-6)$$

پس

$$s(u,v) = H \{s^w(u,v)\} \quad (49-6)$$

ما  $s(u,v)$  و  $s^w(u,v)$  را سطوح نریز می‌نامیم، هرچند که  $s^w(u,v)$  یک ضرب تنسوری و

سطح چندجمله‌ای قطعه‌ای است.

## فصل هفتم

# حل مثال‌ها و نتایج

## ۷ حل مثال‌ها و نتایج

### ۷.۱ مقدمه

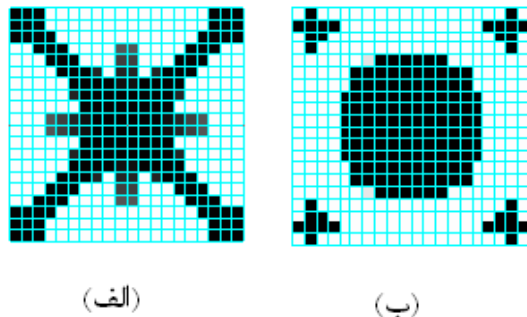
در این فصل به ارائه مسائلی از بهینه‌سازی مطابق آنچه در فصول گذشته شرح داده شد می‌پردازیم. مثال‌های حل شده در این تحقیق را می‌توان به سه بخش تقسیم نمود. ابتدا بهینه‌سازی لایه تقویتی سازه صفحه‌ای با در نظر گرفتن قید تنش مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در بخش‌های بعدی به ترتیب بهینه‌سازی توپولوژیک لایه تقویتی پوسته‌ها و بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی آنها مطابق فصول ۲ و ۳ مورد بررسی قرار خواهند گرفت. مسائل با استفاده از اجزا محدود و المان پوسته‌ای که در فصل ۵ معرفی شد، تحلیل می‌شوند. در شکل‌های این فصل رنگ سفید بیانگر سازه اولیه و نواحی سیاه‌شده نشان‌دهنده نواحی تقویت‌شده می‌باشند. ضخامت سازه پوسته‌ای و لایه تقویتی آن هر کدام  $5 \cdot 10^{-3} m$  و خصوصیات مکانیکی مصالح  $E = 2.1 \cdot 10^6 kg/cm^2$  و  $\nu = 0.3$  می‌باشند.

### ۷.۲ بهینه‌سازی با قید تنش

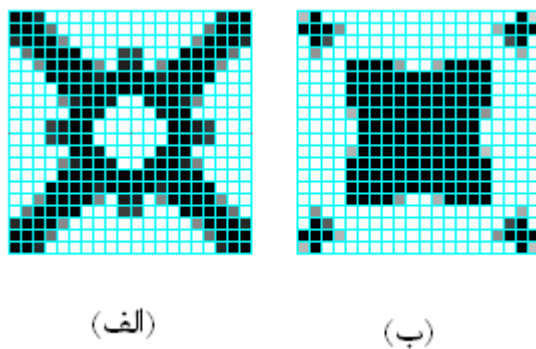
در این بخش مثال‌هایی از بهینه‌سازی توپولوژی سخت‌کننده‌های سازه به منظور حداقل کردن وزن سازه با اعمال قید تنش را بررسی می‌کنیم. سازه اولیه از قبل معلوم است. هدف به دست آوردن توپولوژی بهینه سخت‌کننده‌های سطحی است، با این شرط که میزان تنش از محدوده تنش مجاز تجاوز نکند. همان‌طور که در فصل دو توضیح داده شد، تنش فن‌میز را به‌عنوان معیار تنش مورد استفاده قرار می‌دهیم. سازه مورد نظر سازه صفحه‌ای شکل است که در لبه‌هایش تحت تکیه‌گاه ساده قرار گرفته است.

شکل‌های (۱-۷)، (۲-۷) و (۳-۷) نتایج سازه مورد نظر که به ترتیب تحت بار متمرکز، چهار بار متمرکز، و بار گسترده یکنواخت قرار دارد را نشان می‌دهند. در هر کدام از شکل‌ها، قسمت (الف) توپولوژی بهینه سخت‌کننده طوری که وزن حداقل شده و تنش کنترل شده است را نشان می‌دهد.

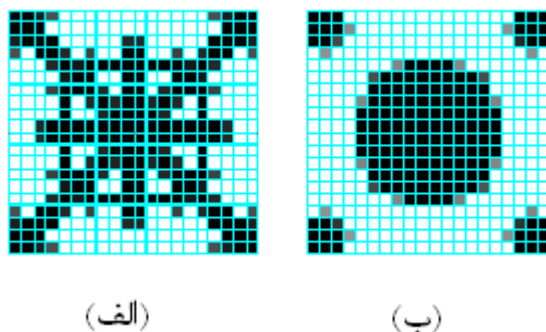
قسمت (ب) نحوه قرارگیری سخت‌کننده‌ها را نشان می‌دهد، طوری که سختی سازه حداکثر می‌شود. با مقایسه قسمت‌های (الف) و (ب) می‌توان تفاوت نحوه فرمول‌بندی در مسئله بهینه‌سازی را مشاهده نمود.



شکل ( ۱-۷ ) سازه تحت بار متمرکز در مرکز (الف) وزن حداقل (ب) سختی حداکثر



شکل ( ۲-۷ ) سازه تحت چهار بار متمرکز (الف) وزن حداقل (ب) سختی حداکثر

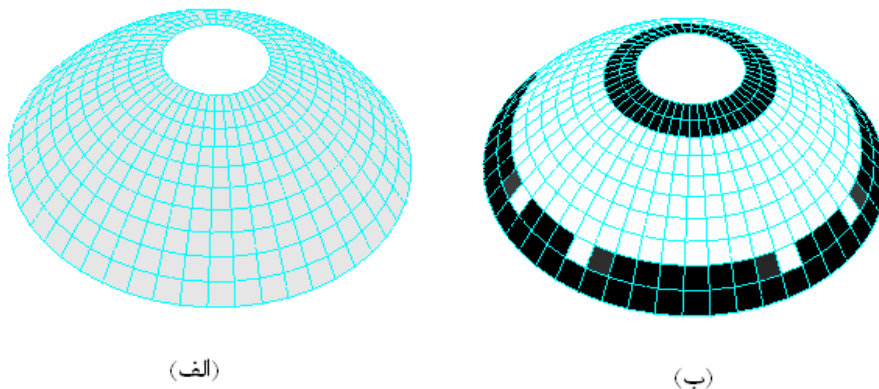


شکل ( ۳-۷ ) سازه تحت بار گسترده یکنواخت (الف) وزن حداقل (ب) سختی حداکثر

### ۷.۳ بهینه‌سازی لایه تقویتی پوسته

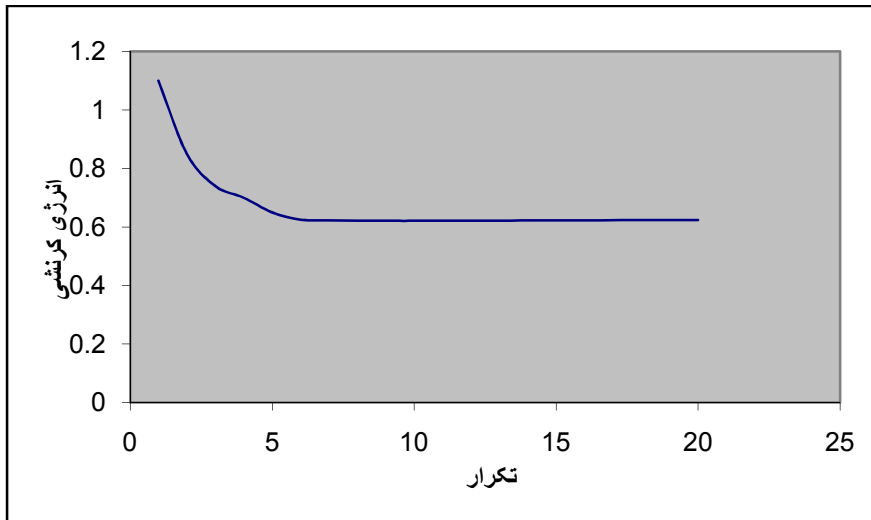
مثال‌های این بخش مربوط به یافتن توپولوژی بهینه لایه تقویتی پوسته یا سخت‌کننده سطحی می‌باشند. به عبارت دیگر سازه پوسته‌ای با شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری مشخص در اختیار داریم. هدف در این‌گونه مسائل پیدا کردن نحوه توزیع ماده به عنوان لایه تقویتی است، طوری که با حجم مشخصی از مصالح سخت‌ترین سازه به دست آید. حداکثر حجم برای لایه تقویتی، چهل درصد حجم کل در نظر گرفته شده است. مدل ریزسازه مورد استفاده در این مسائل در فصل دو شرح داده است.

اولین مثال این بخش، یک سازه گنبدی مطابق شکل (۴-۷) است. در لبه بالایی آن بار خطی به شکل دایره وارد شده است. در لبه پایینی تکیه‌گاه ساده قرار دارد. سازه اولیه به همراه مش‌بندی و سازه بهینه در این شکل نشان داده شده‌اند. شکل (۵-۷) نمودار همگرایی بهینه‌سازی را نشان می‌دهد.

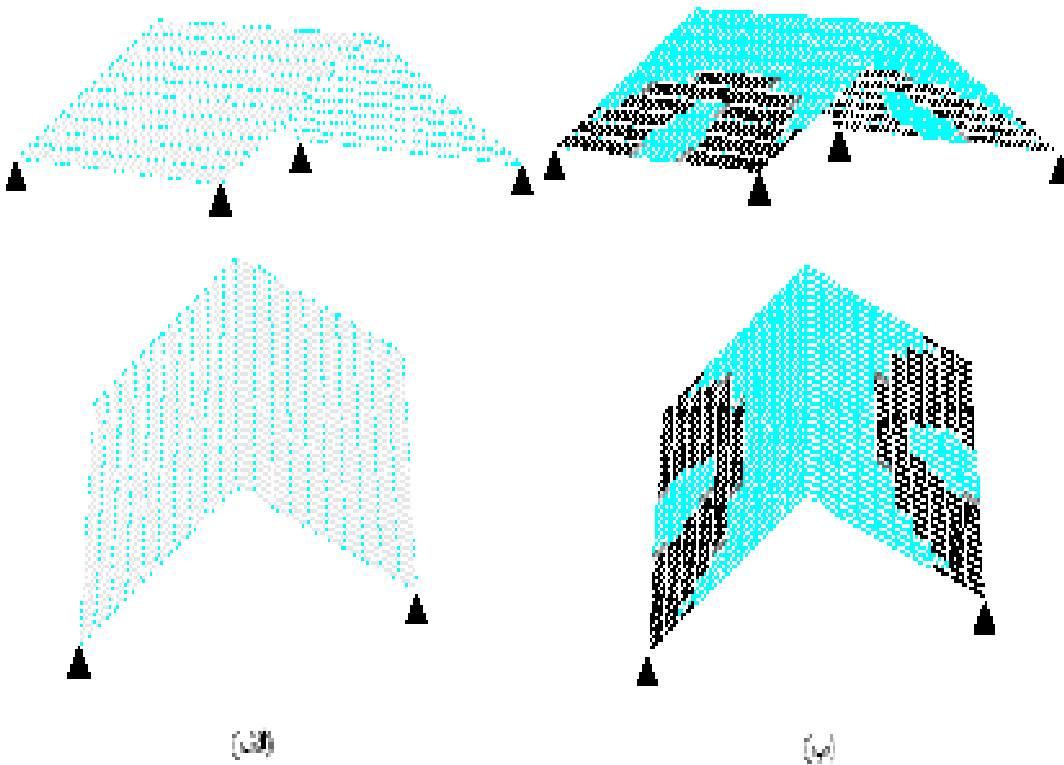


شکل (۴-۷) (الف) سازه اولیه به همراه مش‌بندی (ب) سازه بهینه با لایه تقویتی

در مثال بعدی سازه شیروانی شکل را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سازه موردنظر در چهار گوشه خود دارای تکیه‌گاه ساده می‌باشد و تحت بار گسترده قرار گرفته است. شکل (۶-۷) سازه اولیه و بهینه شده را از زوایای مختلف نشان می‌دهد. نمودار همگرایی مربوطه در شکل (۷-۷) نشان داده شده است.

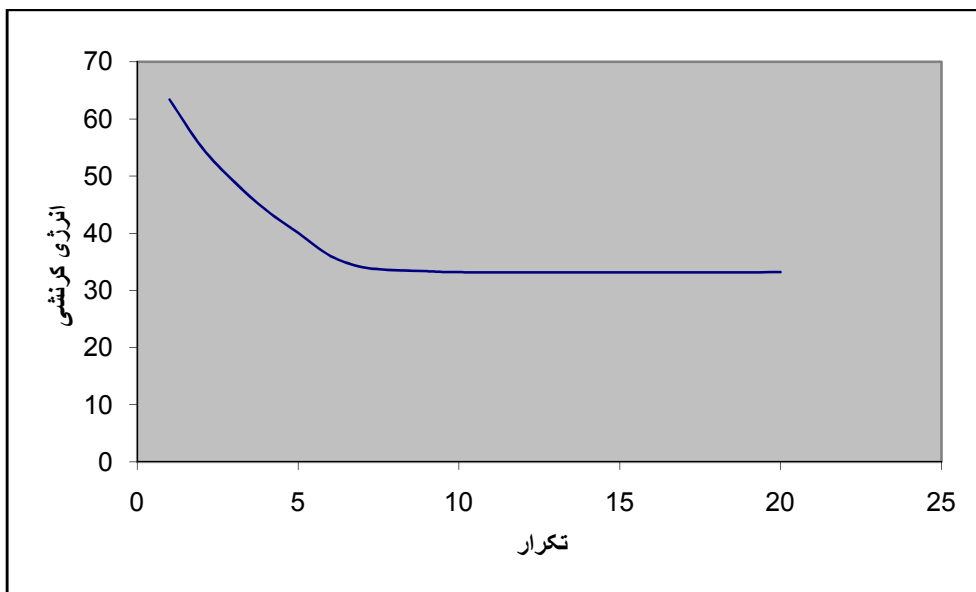


شکل ( ۵-۷ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه گنبدی



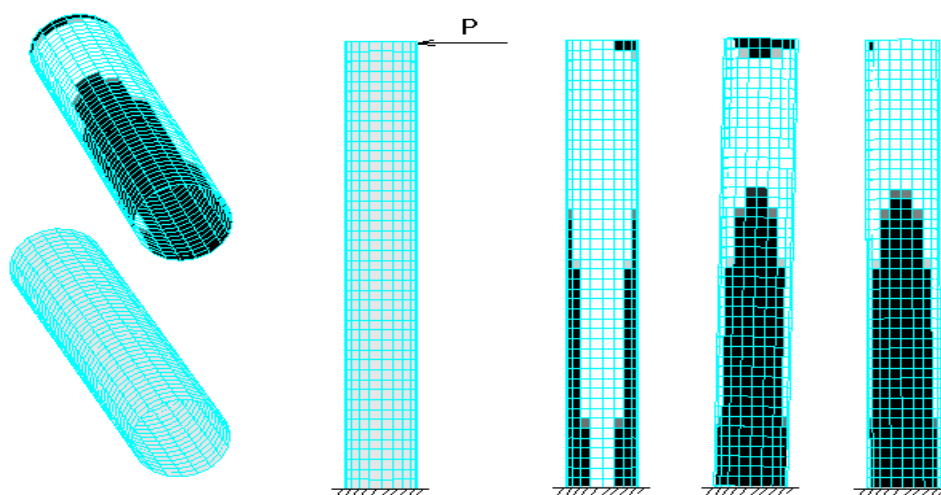
شکل ( ۶-۷ ) سازه شیروانی(الف) سازه اولیه (ب) توپولوژی بهینه لایه تقویتی



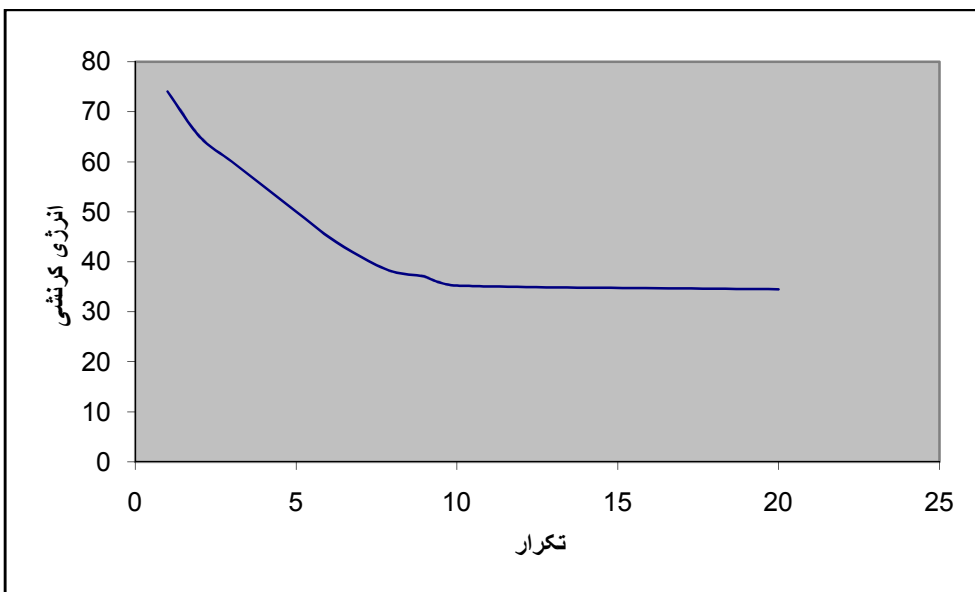


شکل ( ۷-۷ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه شیروانی

در مثال‌های سوم و چهارم این بخش یک سازه استوانه‌ای شکل را بررسی می‌کنیم. شکل (۷-۷) -  
 (۸) پوسته استوانه‌ای در حالتی که یک سر آن تکیه‌گاه گیردار و سر دیگر تحت بار نقطه‌ای قرار دارد را نشان می‌دهد. توپولوژی بهینه سخت‌کننده‌ها از زوایای مختلف در این شکل نشان داده شده است. همچنین شکل (۷-۹) روند همگرایی این مسئله را نشان می‌دهد.



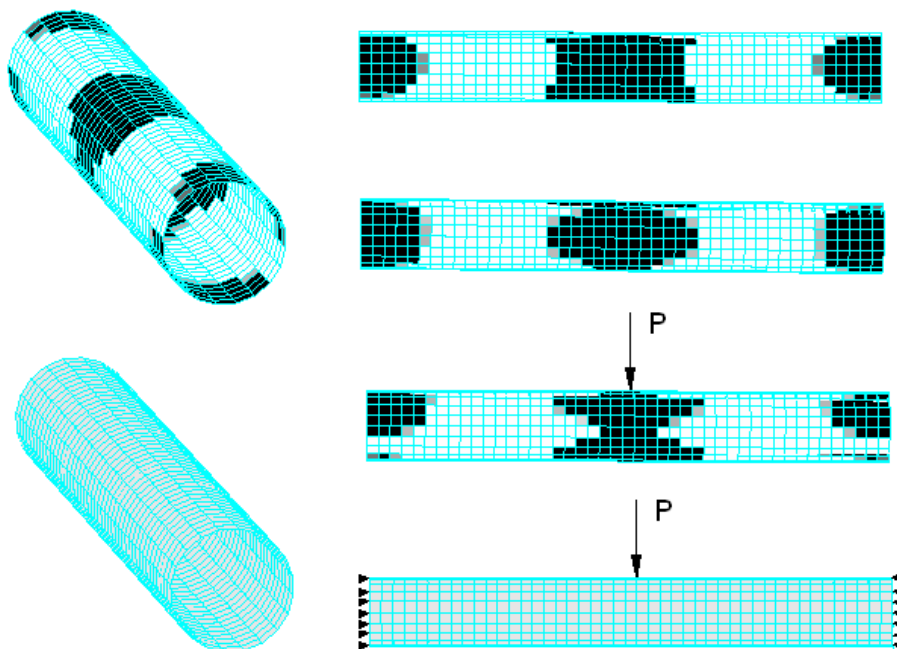
شکل ( ۷-۸ ) سازه لوله ای شکل طره ای به همراه سخت‌کننده سطحی



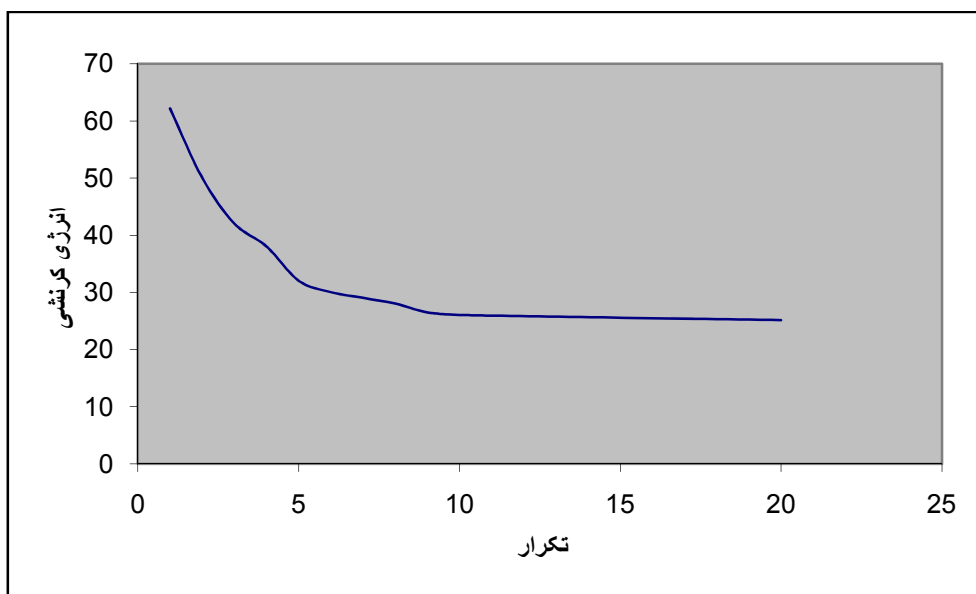
شکل ( ۷-۹ ) نمودار همگرایی سازه لوله ای طره‌ای

در نهایت سازه لوله‌ای شکل مانند یک تیر دوسر گیردار با بار متمرکز در وسط آن مدل شده

است. نتایج در شکل‌های (۷-۱۰) و (۷-۱۱) نشان داده شده‌اند.



شکل ( ۷-۱۰ ) سازه لوله ای شکل دو سر گیردار به همراه سخت‌کننده سطحی



شکل ( ۷-۱۱ ) نمودار همگرایی سازه لوله ای دو سر گیردار

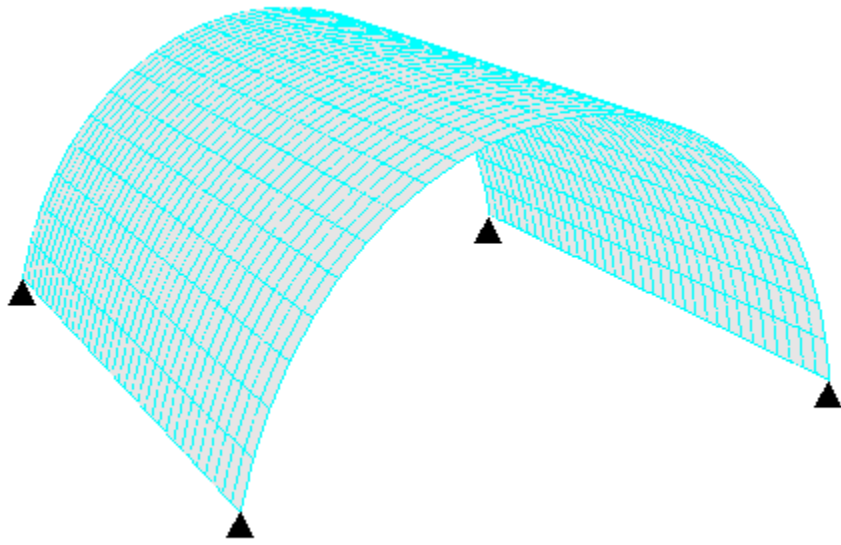
#### ۷.۴ بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی سخت‌کننده سطحی پوسته

همان‌طور که در فصل سوم اشاره شد، توزیع ماده روی طرح اولیه‌ای که ثابت است نمی‌تواند لزوماً بهترین گزینه باشد. مشاهده شد که می‌توان روش ترکیبی را برای ادغام بهینه‌سازی شکل و توپولوژی به کار گرفت. در این بخش به حل مثال‌هایی از این دست و مشاهده نتایج می‌پردازیم.

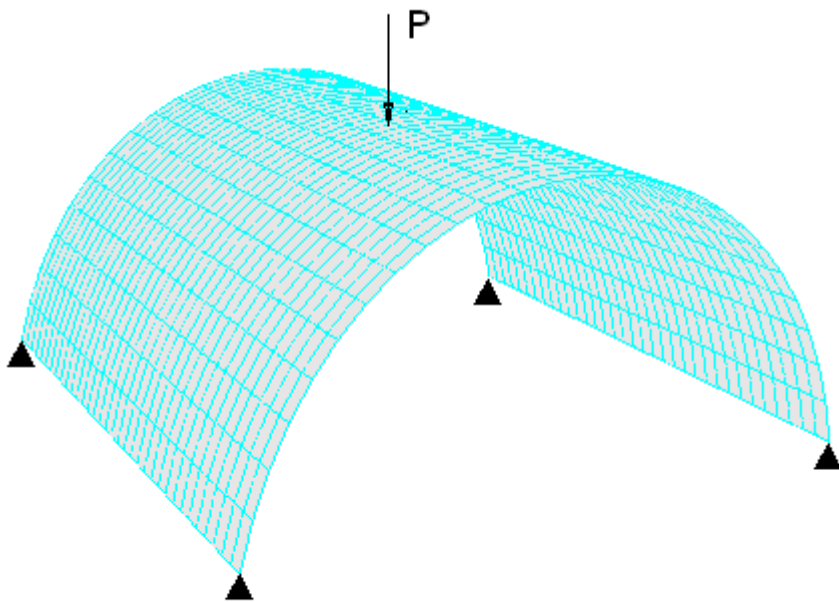
سازه‌ای که مورد بررسی قرار می‌گیرد پوسته‌ای به شکل نیم‌استوانه است که چهار تکیه‌گاه ساده در گوشه‌های آن قرار دارند. شکل (۷-۱۲) هندسه اولیه سازه به همراه مش‌بندی آن را نشان می‌دهد. از یک زیربرنامه تولید سطح با استفاده از منحنی‌های نریز برای ایجاد هندسه سازه استفاده می‌شود. برای تحلیل به روش اجزا محدود سازه به ۸۸۴ جزء محدود تقسیم شده است.

در حالت یک مطابق شکل (۷-۱۳) یک بار متمرکز قائم به سازه وارد می‌شود. شکل (۷-۱۴)

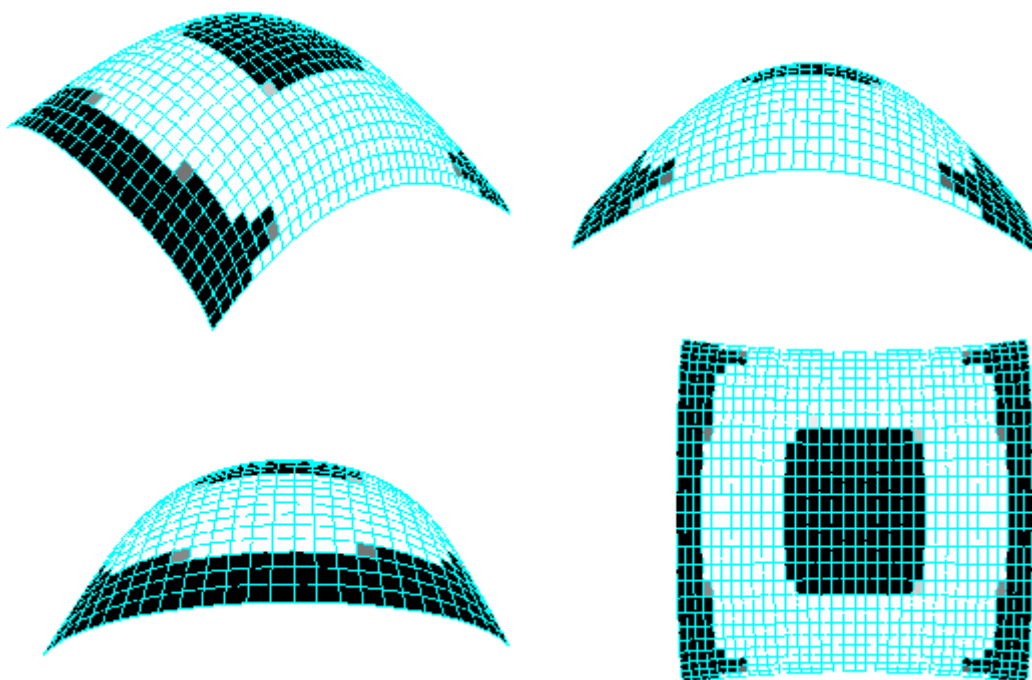
نتایج بهینه‌سازی همزمان را از زوایای مختلف نشان می‌دهد. همچنین شکل (۷-۱۵) نمودار همگرایی بهینه‌سازی را نشان می‌دهد.



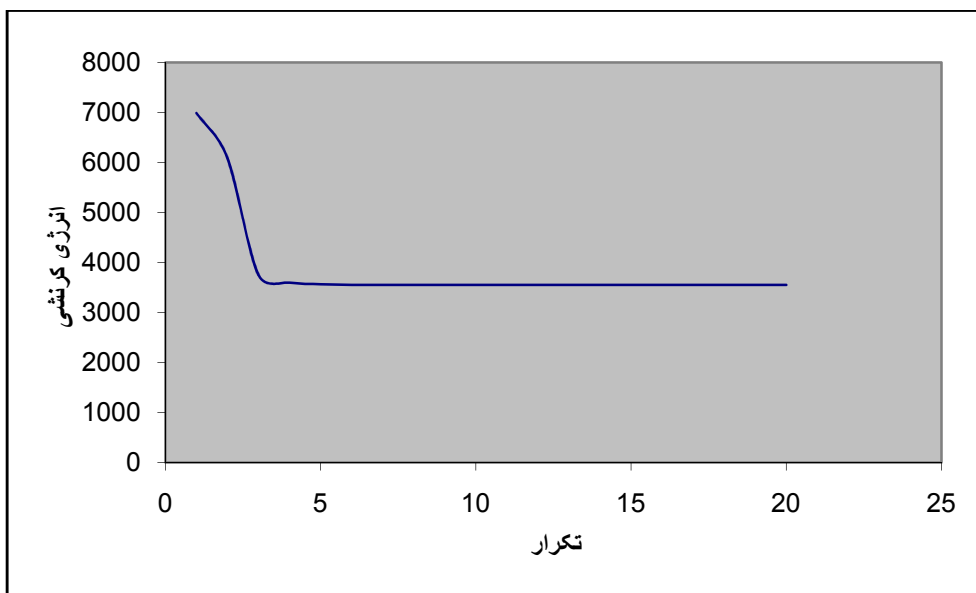
شکل ( ۷-۱۲ ) سازه استوانه‌ای



شکل ( ۷-۱۳ ) سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز



شکل ( ۷-۱۴ ) بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز

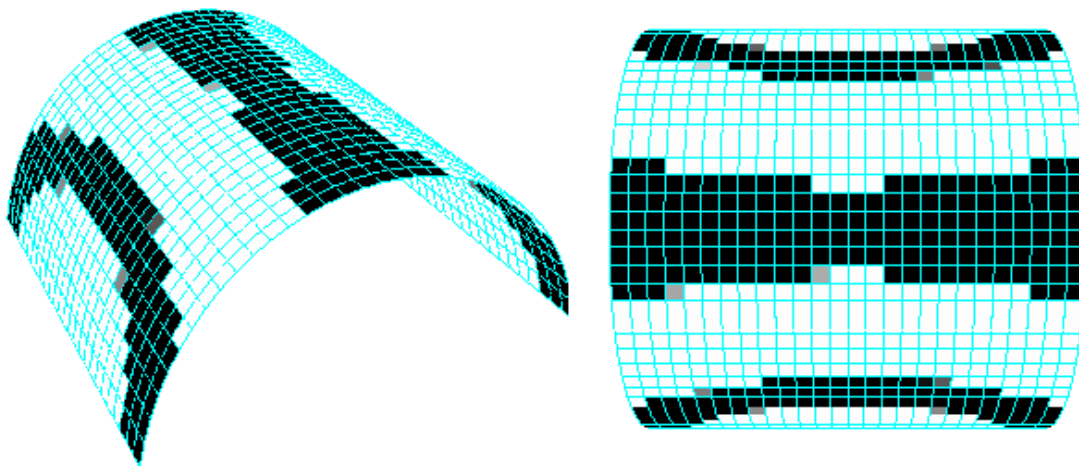


شکل ( ۷-۱۵ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز

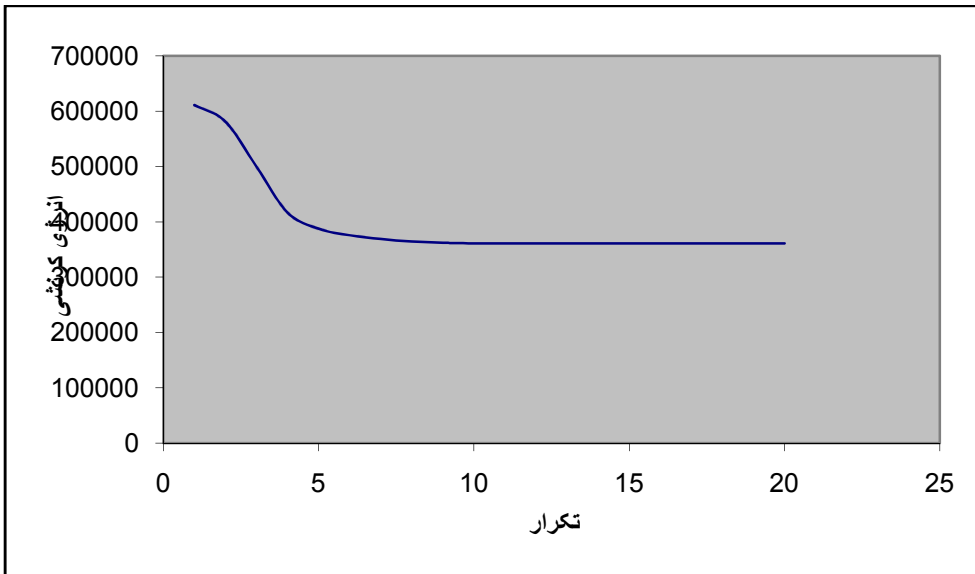
همانطور که مشاهده می‌شود همزمان با توزیع سخت‌کننده‌ها روی سطح پوسته شکل اولیه

پوسته نیز دچار تغییر شده است طوری که کمترین انرژی کرنشی به‌وجود آید. شکل ( ۷-۱۶ ) نتیجه

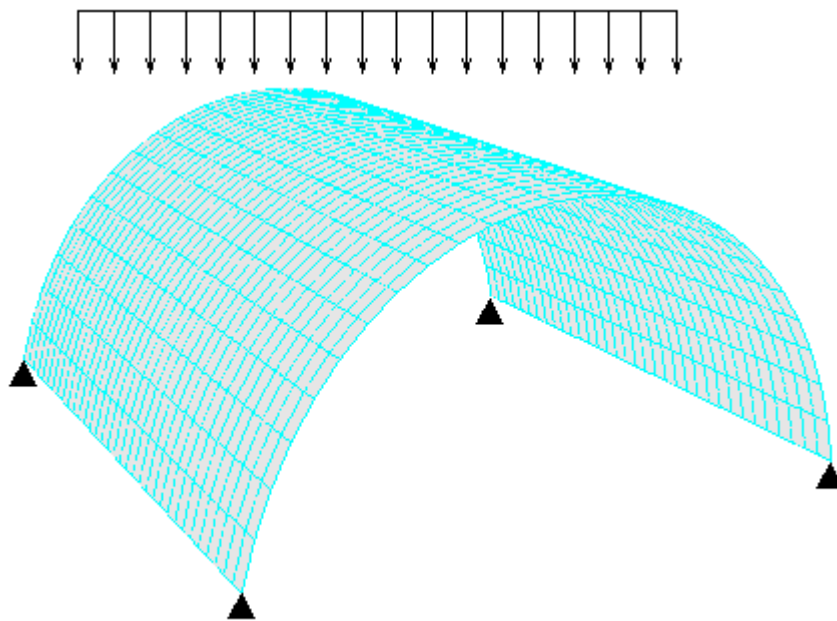
بهینه‌سازی لایه تقویتی را در حالتی که شکل اولیه ثابت می‌ماند نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که جواب نهایی کاملاً متفاوت با حالت قبلی است. نمودار همگرایی بهینه‌سازی در این حالت را می‌توان در شکل (۷-۱۷) مشاهده نمود.



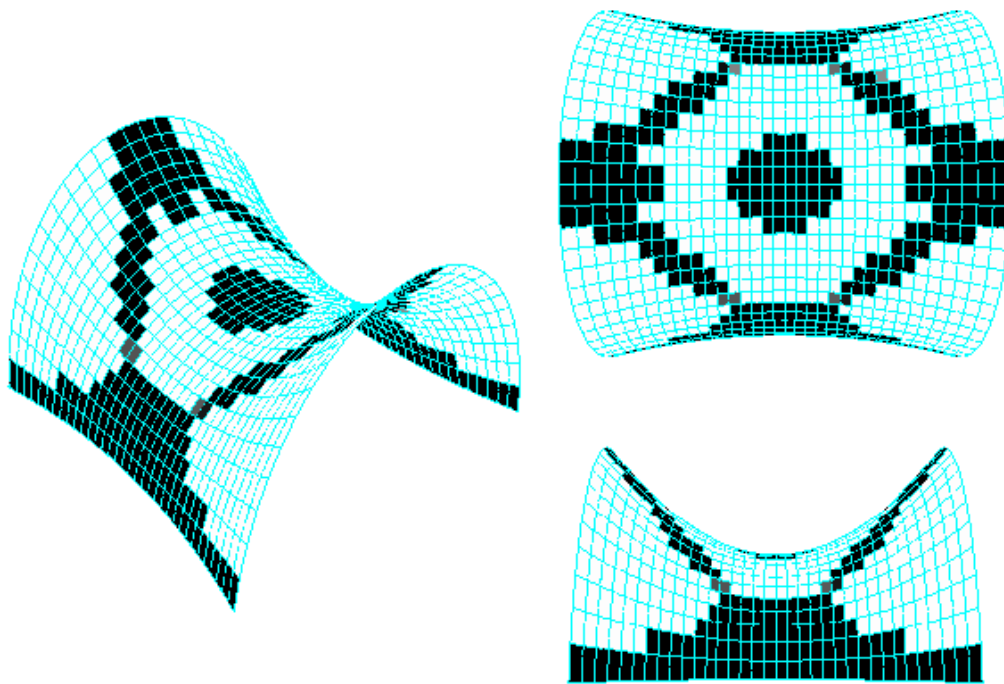
شکل (۷-۱۶) بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز با شکل اولیه ثابت به‌عنوان مثال بعدی بار گسترده خطی مطابق شکل (۷-۱۸) به سازه وارد می‌کنیم. نتایج را می‌توان در شکل‌های (۷-۱۹) و (۷-۲۰) مشاهده نمود. در شکل‌های (۷-۲۱) و (۷-۲۲) نتایج مربوط به این حالت با ثابت ماندن شکل سازه نشان داده شده‌اند. در نهایت سازه را تحت بار گسترده یکنواخت قرار می‌دهیم. شکل‌های (۷-۲۳) و (۷-۲۴) نشان‌دهنده نتایج این حالت هستند. مطابق مثال‌های قبلی می‌توان بهینه‌سازی را در حالت شکل ثابت نیز انجام داد. نتایج این حالت در شکل‌های (۷-۲۵) و (۷-۲۶) آمده‌اند.



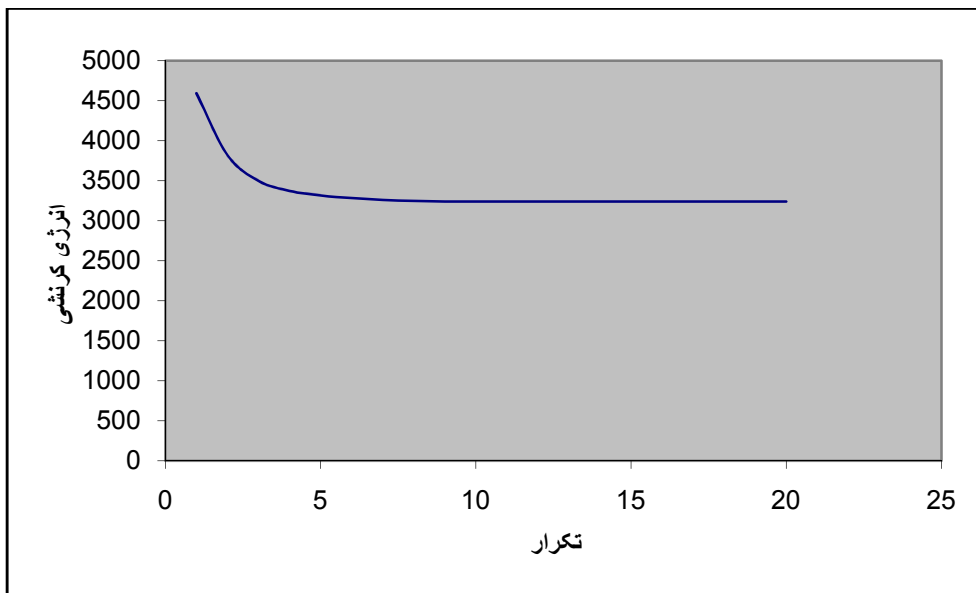
شکل ( ۱۷-۷ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز با شکل اولیه ثابت



شکل ( ۱۸-۷ ) سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی

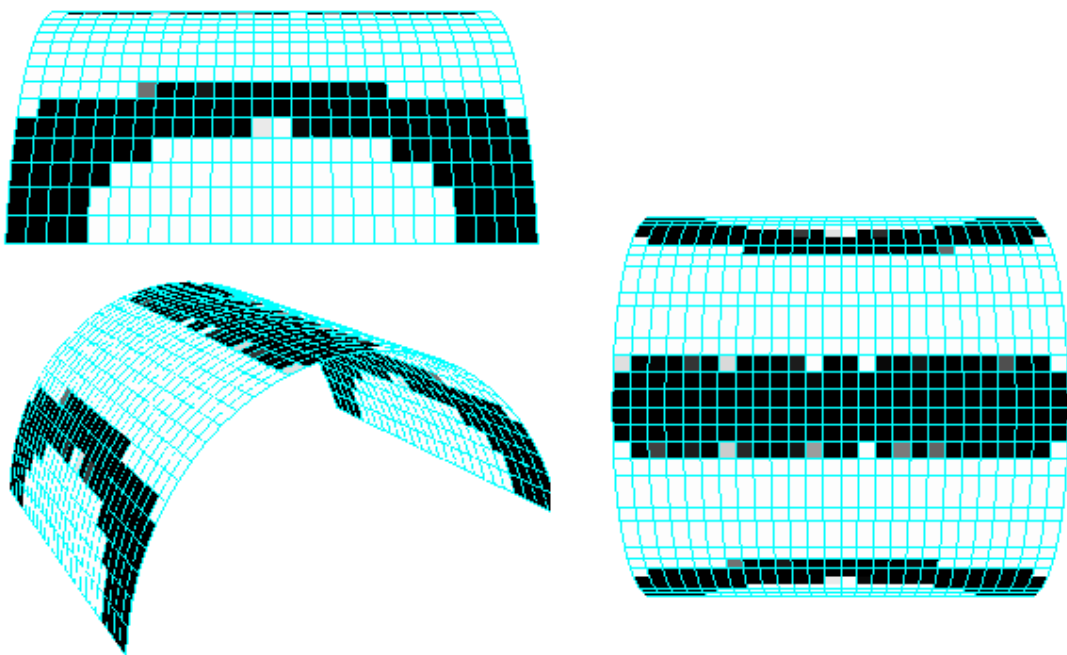


شکل ( ۱۹-۷ ) بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی

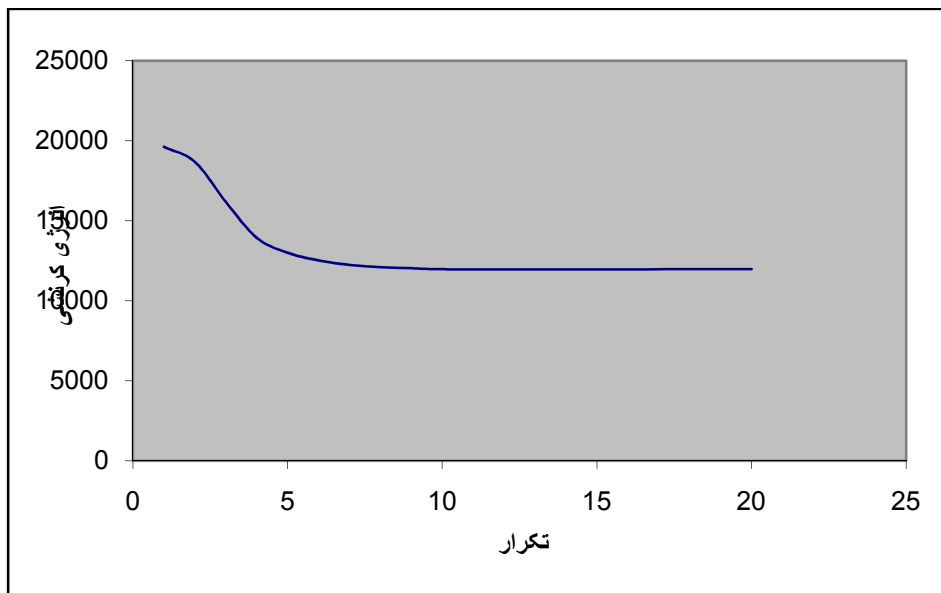


شکل ( ۲۰-۷ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی

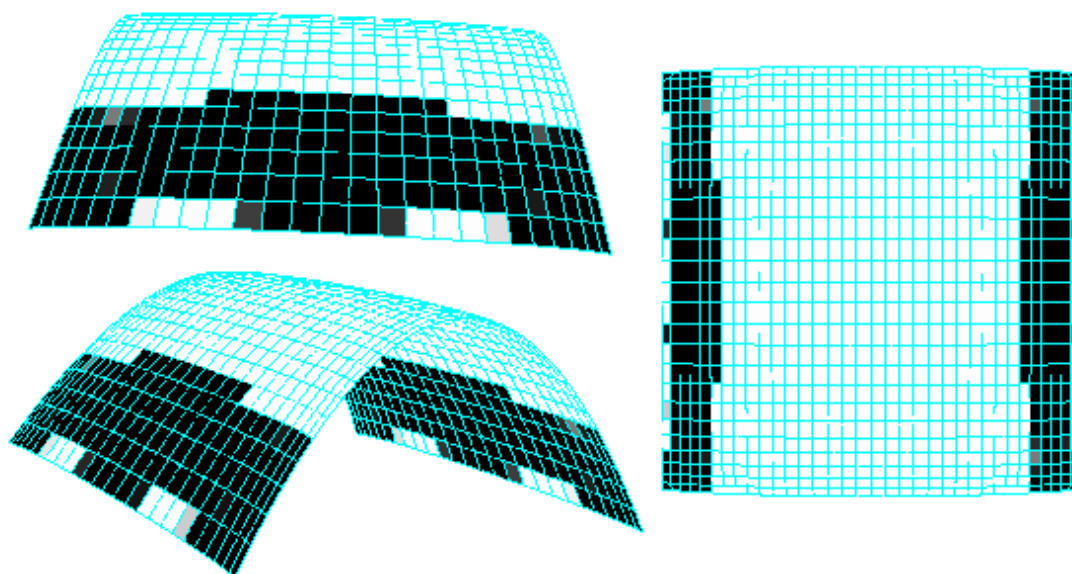




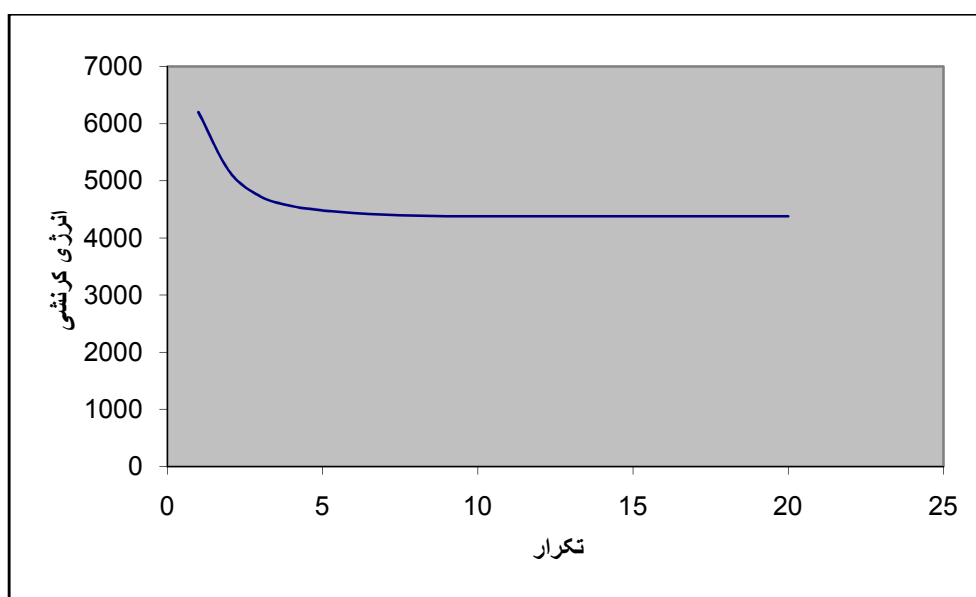
شکل ( ۲۱-۷ ) بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی با شکل اولیه ثابت



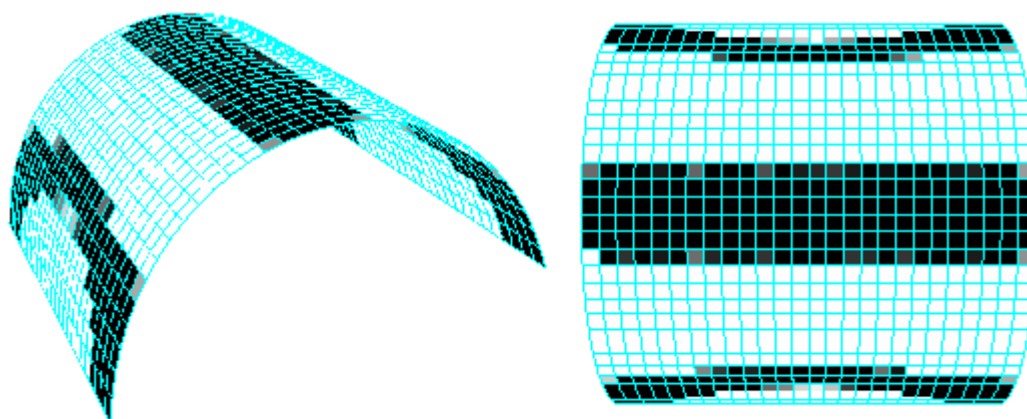
شکل ( ۲۲-۷ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی با شکل اولیه ثابت



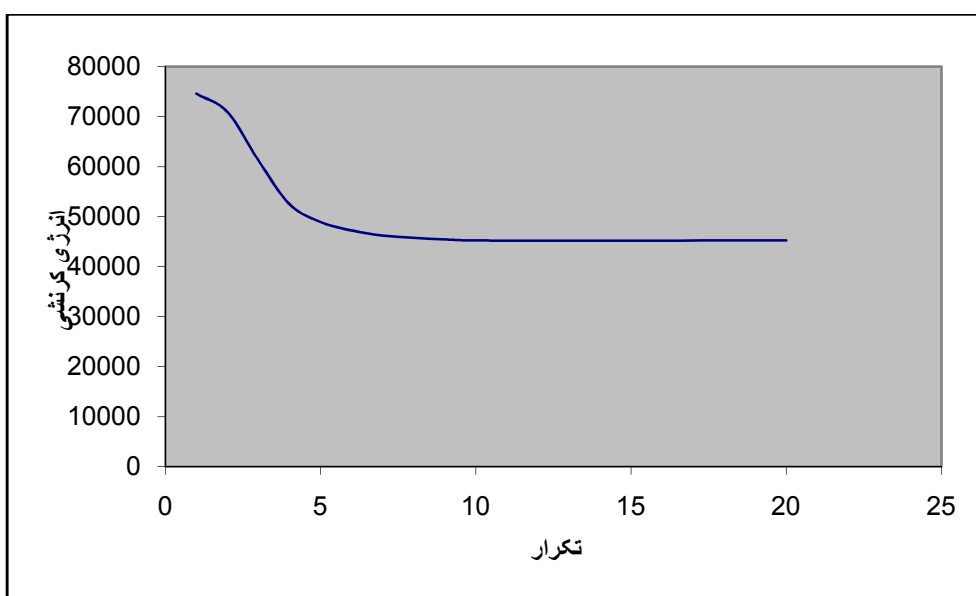
شکل (۷-۲۳) بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت



شکل (۷-۲۴) نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت



شکل ( ۲۵-۷ ) بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت با شکل اولیه ثابت



شکل ( ۲۶-۷ ) نمودار همگرایی بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت با شکل اولیه ثابت

## ۷.۵ نتایج

مثال‌های عددی حل شده نشان‌دهنده صحت و کارایی روش‌های ارائه شده می‌باشند. در پایان

می‌توان به نکات زیر اشاره کرد.

- در گذشته به خاطر زیاد بودن تعداد متغیرهای طراحی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی از روش‌های معیار بهینگی برای حل مسئله بهینه‌سازی استفاده می‌شد. در سال‌های اخیر استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی در این دسته از مسائل بسیار متداول شده است.

در این پایان‌نامه نیز از یکی از بهترین روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی به نام مجانب‌های متحرک استفاده شده‌است. همان‌طور که مشاهده شد با وجود زیادبودن تعداد متغیرهای طراحی، این روش قادر به حل مسائل می‌باشد.

- چنانچه در نمودارهای همگرایی مثال‌های پایان‌نامه مشاهده می‌شود تعداد تکرارهای مورد نیاز برای همگرایی پاسخ بسیار کم (کمتر از بیست تکرار) می‌باشد. در مقایسه با روش‌های معیار بهینگی این نتایج بسیار ایده آل می‌باشد و نشان‌دهنده کارایی بهتر روش مجانب‌های متحرک نسبت به روش‌های معیار بهینگی است.

- جایگزینی روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی به‌جای معیار بهینگی این مزیت را دارد که می‌توان معیارهای طراحی متنوعی را برای مسائل بهینه‌سازی در نظر گرفت. انتخاب معیار طراحی و نحوه فرمول‌بندی مسئله به شرایط سازه و نظر طراح بستگی دارد؛ هر چند در حالت کلی مسائلی که قید تنش در آنها اعمال شده‌است، از نقطه‌نظر مهندسی منطقی‌تر به نظر می‌رسند. در بخش ۷.۲ مثال‌هایی از بهینه‌سازی توپولوژی با فرمول‌بندی حداقل سازی وزن با اعمال قید تنش مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور که مشاهده شد برای لایه تقویتی صفحه خمشی نتایج کاملاً متفاوتی نسبت به مسئله حداکثر سازی سختی به‌دست آمده است.

- در مثال‌های بخش ۷.۴ مسائل بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی حل شده‌اند. مشاهده نتایج این مثال‌ها بیانگر کارایی این روش می‌باشد. همان‌طور که مشاهده شد سازه استوانه‌ای شکل تحت بارگذاری‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت و در هر مورد شکل متفاوتی ایجاد شد. همچنین توپولوژی قرارگیری لایه تقویتی در هر کدام متفاوت بوده است. برای هر یک از شرایط بارگذاری، بهینه‌سازی توپولوژی سخت‌کننده سطحی با شکل ثابت پوسته نیز انجام شد. مشاهده شد که در تمام آنها نحوه قرارگیری لایه تقویتی شباهت زیادی به هم داشته‌است؛ در حالی که برای حالت بهینه‌سازی

همزمان، برای هر کدام نتایج متفاوتی به دست آمده است. مشاهده نمودارهای همگرایی نیز نشان می‌دهد در بهینه‌سازی همزمان سازه نهایی انرژی کرنشی بسیار کمتری نسبت به حالت شکل ثابت دارد. این امر بدین معنی است که سازه سخت‌تری به دست آمده و نتیجه بهتری حاصل شده است.

- در این پایان‌نامه بهینه‌سازی همزمان شکل و توپولوژی برای فرمول‌بندی حداکثر کردن سختی سازه در نظر گرفته شده است. به عنوان کارهای آینده می‌توان معیارهای طراحی متفاوتی را با توابع هدف و قید دیگر در نظر گرفت. به عنوان مثال می‌توان مسائل کماتش، اعمال قید تنش و بهینه‌سازی تحت بارهای دینامیکی و یا ترکیب بارها را مورد بررسی قرار داد. همچنین می‌توان به کمک الگوریتم‌های تولیدکننده شکل با استفاده از نریز، سازه‌هایی که شکل پیچیده‌تر و از نقطه نظر مهندسی کاربردی‌تری دارند را مورد بررسی قرار داد.

## منابع:

- [١]. Haftka, R.T.; Gandhi, R.V. 1986: Structural shape optimization A survey. **Comput Methods Appl Mech Eng** 57, 91–106
- [٢]. Ding, Y. 1986: Shape optimization of structures: A Literature Survey. **Comput Struct** 24, 985–1004
- [٣]. Olhoff, N.; Rozvany, GIN. (eds.) 1995: WCSMO-1, Proc. First World Cong. on Structural and Multidisciplinary Optimization, (held in Goslar, May 28–June 2). Oxford: Pergamon.
- [٤]. Bendsoe, M.P.; Kikuchi, N. 1988: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Comput Methods Appl Mech Eng** 2, 197–224
- [٥]. Bendsoe, M.P. 1989: Optimal shape design as a material distribution problem. **Struct Optim** 1, 193–202
- [٦]. Xie, Y.M.; Steven, G.P. 1997: Evolutionary structural optimization. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [٧]. Bendsoe, M.P. 1995: **Optimization of structural topology, shape, and material**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [٨]. Olhoff, N.; Bendsoe, M.P.; Rasmussen, J. 1991: On CAD integrated structural topology and design optimization. **Comput Methods Appl Mech Eng** 89, 259–279
- [٩]. Lin, C.Y.; Chao, L.S. 2000: Automated image interpretation for integrated topology and shape optimization. **Struct Optim** 20, 125–137
- [١٠]. Svanberg, K. (1987). The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 24:359–373.
- [١١]. Bendsoe, M.P.; Sigmund, O. 2004: **Topology Optimization, Theory, Methods, and Applications**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.
- [١٢]. Cheng, G. D. 1997: Xu Guo.  $\epsilon$ -relaxed approach in structural topology optimization. **Struct optim** 13, 258-266
- [١٣]. Duysinx, P; Bendsoe M.P. 1998: Topology Optimization of Continuum Structures with Local Stress Constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 43, 1453-1478

- [١٤]. Hassani, B.; Hinton, E. 1999: **Homogenization and Structural Topology Optimization Theory, Practice and Softwar**. Springer, New York Berlin Heidelberg.
- [١٥]. Ansola, R. Canales, J. Tarrago J.A. Rasmussen, J. 2004: Combined shape and reinforcement layout optimization of shell structures. **Struct Multidisc Optim** 27, 219–227
- [١٦]. M. Ozakca. 1993: **Analysis and optimal design of structures with adaptivity**. Ph.D Thesis. Civil Engineering University of Swansea, UK.
- [١٧]. Krog, L.A.; Olhoff, N. 1999: Optimum topology and reinforcement design of disk and plate structures with multiple stiffness and eigenfrequency objectives. **Comput Struct** 72, 535–563
- [١٨]. Ansola, R.; Canales, J.; Tarrago, J.A.; Rasmussen, J. 2002: On simultaneous shape and material layout optimization of shell structures. **Struct Optim** 24, 175–184
- [١٩]. Schmit L.A. ; mallet R.H. 1980: Structural synthesis and design parameter hierarchy. **J.struct.Div., ASCE** 18, 1515-1524
- [٢٠]. -Fleury, C. ; Braibant, V. 1986: Structural optimization - a new dual method using mixed variables. **Int. J. Num. Meth. Eng.** 23,409-428
- [٢١]. Starnes, J.H.; Haftka, R.T. 1979: Preliminary design of composite wings for buckling, stress and displacement constraints. **J. Aircraft** 16, 564-570
- [٢٢]. Fleury, C. 1989: CONLIN: an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts. **Structural Optimization** 1, 81-89
- [٢٣]. Zienkiewics, O.C.; Taylor, R.L. 2000: **The Finite Element Method**, Vol. 1: The Basis, Butterwoth-Hienemann, Barcelona.
- [٢٤]. Wilson, E.L. 2002: Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, **Computers and Structures**, California.
- [٢٥]. Piegl, L. ; Tiller, W. 1997: **The NURBS Book(second edition)**, Springer.
- [٢٦] Kirsch, U. 1993:**Suctural Optimization, Fundamental and applications**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

پیوست (الف)

## برنامه Shellopt



## برنامه shelopt

### مقدمه

برنامه shelopt یک برنامه کامپیوتری است که با توجه به مطالب عنوان شده در این پایان نامه برای بهینه‌سازی توپولوژی لایه تقویتی همزمان با شکل صفحه میانی سازه‌های پوسته‌ای می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. این برنامه به زبان فرترن نوشته شده و کاربر پس از تنظیم فایل‌های ورودی و اجرای آن، پاسخ را به صورت فایل‌هایی حاوی مشخصات سازه بهینه دریافت می‌کند. در ادامه به شرح ساختار برنامه و نحوه تنظیم فایل‌های ورودی پرداخته می‌شود.

### ساختار برنامه

برنامه به طور کلی از هفت قسمت اصلی زیر تشکیل شده است:

۱. **ورودی:** در این بخش اطلاعات مورد نیاز برنامه شامل اطلاعات مربوط به تحلیل، تولید شکل و بهینه‌سازی از فایل‌های مربوطه خوانده می‌شود.
۲. **تولید شکل و مش‌بندی:** در این بخش از برنامه هندسه اولیه پوسته به همراه مش‌بندی مورد نیاز برای تحلیل تولید می‌شوند. تولید شکل با استفاده از یک زیربرنامه با به کارگیری روش تولید سطوح نریز انجام می‌شود.
۳. **تحلیل:** این بخش از برنامه وظیفه آنالیز مدل اجزا محدود را به عهده دارد. برای این کار از المان‌های پوسته ویلسون استفاده می‌شود. این بخش شامل قسمت‌های محاسبه ماتریس سختی، بارگذاری، حل کننده و محاسبه تنش می‌باشد.
۴. **پردازش برای بهینه‌سازی شکل:** در این قسمت از برنامه از نتایج قسمت‌های قبل برای تشکیل تابع هدف و توابع قید جهت بهینه‌سازی شکل استفاده می‌شود. این بخش پس از فراخوانی زیربرنامه تولید شکل، اطلاعات را به بخش تحلیل می‌رساند و از نتایج تحلیل برای تنظیم اطلاعات مربوط به بهینه‌سازی استفاده می‌کند.

۵. پردازش برای بهینه‌سازی توپولوژی: بعد از انجام بهینه‌سازی شکل، این بخش از

برنامه، اطلاعات مربوط به بهینه‌سازی توپولوژی لایه تقویتی را تنظیم می‌کند.

۶. بهینه‌سازی: پس از تعیین متغیرهای طراحی و تشکیل توابع هدف و قید با توجه به

نوع مسئله بهینه‌سازی (شکل یا توپولوژی) این بخش فراخوانی می‌شود. همان‌طور که

پیش‌تر اشاره شد، بهینه‌سازی با استفاده از روش مجانب‌های متحرک انجام می‌شود.

۷. بخش کنترلی و خروجی: این بخش عمل کنترل چرخه‌های بهینه‌سازی را انجام

می‌دهد به طوری که تا رسیدن به همگرایی چرخه‌ها ادامه پیدا می‌کنند و در پایان فایل

خروجی نتایج برنامه را آماده و چاپ می‌کند.

### تنظیم فایل‌های ورودی برنامه

قبل از اجرای برنامه دو فایل ورودی باید تنظیم و در پوشه برنامه قرار داده شوند.

فایل input.txt شامل مشخصات تحلیل و درصد کسر حجم و فایل nurbsinput.txt شامل اطلاعات

مورد نیاز برای تولید هندسه سازه می‌باشد.

### فایل input.txt

بلوک اول: این سطر برای نوشتن توضیحات در مورد برنامه به کار می‌رود.

بلوک دوم: سطر توضیحات

بلوک سوم: در این سطر اطلاعات زیر به ترتیب نوشته می‌شوند:

npoin nelem nnode Elename ndime nvfix nmats nsolv

که در این سطر:

npoin تعداد گره در مش‌بندی

nelem تعداد المان‌ها در مش‌بندی

nnode تعداد گره‌های هر المان

Elename	نام المان
ndime	بعد (۲ یا ۳)
nvfix	تعداد گره‌های ثابت
nmats	تعداد مصالح
nsolv	شماره حل‌کننده می‌باشند.

بلوک چهارم: سطر توضیحات

بلوک پنجم: این بلوک شامل nvfix سطر می‌باشد. در هر سطر ابتدا شماره گره ثابت نوشته می‌شود و جلوی آن هر درجه آزادی که بسته شده با عدد یک و درجه آزادی باز با صفر مشخص می‌شود.

بلوک ششم: سطر توضیحات

بلوک هفتم: این بلوک شامل nmats سطر می‌باشد. در این بلوک مشخصات زیر برای مواد به کار برده شده معرفی می‌شوند:

nmats	شماره ماده
E	مدول الاستیسیته
$\nu$	ضریب پواسون

بلوک هشتم: سطر توضیحات

بلوک نهم: در این سطر ضخامت پوسته نوشته می‌شود.

بلوک دهم: سطر توضیحات

بلوک یازدهم: در این سطر درصد کسر حجم نوشته می‌شود.

بلوک دوازدهم: سطر توضیحات

بلوک سیزدهم: تعداد بارهای گرهی

بلوک چهاردهم: سطر توضیحات

بلوک پانزدهم: در این سطر شماره گره و مقدار بار و درجه آزادی که در آن قرار دارد، معرفی می‌شوند.

### فایل nurbsinput.txt

بلوک اول: سطر توضیحات

بلوک دوم: در این سطر اطلاعات زیر به ترتیب نوشته می‌شوند:

n1 p1 m1 nseg1

که در این سطر:

n1 تعداد نقاط کنترلی در جهت ۱

p1 درجه منحنی نربز در جهت ۱

m1 تعداد گره‌ها در جهت ۱

nseg1 تعداد قطعات در جهت ۱

می‌باشند.

بلوک سوم: سطر توضیحات

بلوک چهارم: در این سطر اطلاعات زیر به ترتیب نوشته می‌شوند:

n2 p2 m2 nseg2

که شامل اطلاعات جهت ۲ می‌باشند.

بلوک پنجم: سطر توضیحات

بلوک ششم: این سطر شامل  $(n1+1) \times (n2+1)$  سطر می‌باشد. در هر سطر به ترتیب شماره

نقطه کنترلی، مختصات و وزن مربوط به آن نقطه نوشته می‌شود.

بلوک هفتم: سطر توضیحات

بلوک هشتم: در این بلوک اعضای بردار گرهی جهت ۱ به ترتیب و هر کدام در یک سطر نوشته

می‌شوند.

```

input.txt - Notepad
File Edit Format View Help
Input file for shell optimization problem
npoin nelemt nnode Elename ndime nvfix nmats nsolv
777 720 4 wshell 3 4 2 1
-fixed points
1 1 1 1 0 0 0
37 1 1 1 0 0 0
741 1 1 1 0 0 0
777 1 1 1 0 0 0
-element properties of the non-design region
1 2100000 0.30000
2 2100000 0.30000
-thickness
0.050
-volume fraction
40
-ipload
2
node x-load yload Zload Mx My Mz
167 0 0 -10 0 0 0

```

شکل (الف- ۱) نمونه فایل ورودی input.txt

بلوک نهم: سطر توضیحات

بلوک دهم: در این بلوک اعضای بردار گرهی جهت ۲ به ترتیب و هرکدام در یک سطر نوشته

می‌شوند.

در شکل‌های (الف-۱) و (الف-۲) به ترتیب نمونه فایل‌های input.txt و nurbsinput.txt نشان

داده شده‌اند.

```

nurbsinput.txt - Notepad
File Edit Format View Help
N1 P1 M1 Nseg1 ( M1 = N1 + P1 + 1 )
4 3 8 30
N2 P2 M2 Nseg2 ( M2 = N2 + P2 + 1 )
4 3 8 30
--- N ----- X ----- Y ----- Z ----- W -----
1      0.00000      0.00000      0.00000      1.00000
2      5.00000      0.00000      0.00000      1.00000
3      10.00000     0.00000      0.00000      1.00000
...
25     20.00000     20.00000     0.00000      1.00000
-----
0.000000
0.000000
0.000000
0.000000
0.500000
1.000000
1.000000
1.000000
1.000000
-----
0.000000
0.000000
0.000000
0.000000
0.500000
1.000000
1.000000
1.000000
1.000000

```

شکل (الف- ۲) نمونه فایل ورودی nurbsinput.txt

## Abstract

In traditional integrated structural optimization, the common procedure is to carry a structural topology optimization followed by shape optimization where the topology of the structure does not vary. In this research work a combined shape and topology optimization method for finding the optimum shape of the mid-plane of shell structures together with the optimum layout of the surface stiffeners is proposed.

The solution is based on a finite element discretization of the design domain. The material within each element is modeled by artificial materials with rectangular microscale voids. The geometric parameters of the microscale voids of the artificial material are taken as design variables of the topology optimization loop of optimization procedure. The geometry of the shell structures are generated by NURBS surfaces and the control points of the surface are considered as design variables in the shape optimization loop.

The optimization problem in each loop is solved by the method of moving asymptotes (MMA) and design sensitivity analysis. The proposed approach is applied to a few examples and the obtained results are presented.

Keywords: optimization, topology, shape, shell structure, reinforcement layer



**Shahrood University of Technology**

**Civil Engineering Department**

**Combined shape and reinforcement optimization of  
shell structures**

**Hossein Ghassemnezhad Moghri**

Supervisor:

**Dr. Behrooz Hassani**

Adviser:

**S. Mehdi Tavakoli**

**July 2009**