

مَدَامُ



دانشکده مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی سازه

بهینه‌سازی آیزوژئومتریک شکل سازه‌های دوبعدی تنش مسطح با الگوریتم اجتماع  
مورچگان

نگارنده: فاطمه محمد علی نیا

استاد راهنما

دکتر سید مهدی توکلی

شهریور ۱۳۹۵

## دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : عمران

گروه : سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم فاطمه محمد علی نیا

تحت عنوان:

بهینه سازی آیزوژئومتری یک شکل سازه‌های دوبعدی تنش مسطح با الگوریتم اجتماع مورچگان

در تاریخ ۱۳۹۵/۰۶/۱۶ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه ..... مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :	دکتر سید مهدی توکلی	نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :	دکتر فرشید جندقی علایی	نام و نام خانوادگی :
	دکتر بهناز دهر آزما	دکتر فرنوش باسلیقه	نام و نام خانوادگی :

چه انتظار عجیبی!

تو من منظران، عزیز من چه غریبی!

عجیب تر که چه آسان نبودنت شده عادت!

چه بیخمال نشستم نه کوششی نه وفایی

فقط نشسته و گفتم خدا کند که بیایی...

تقدیم به پدرم، اول استادم که همواره چتر محبتش بر سرم است.

تقدیم به مادرم، بلند تکیه گاهم که دامن پرمهرش یگانه پناهم است.

تقدیم به همسرم، مهربانم که در تمام لحظاتم صبورانه همدم و همراهم است.

و تقدیم به دخترم، امید بخش جاتم که آسایش او آرامش جان من است.

## تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ"

از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوام... که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بوده‌اند؛

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر سید مهدی توکلی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننموده‌اند و و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛

و از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر فرشید جندقی علایی و دکتر فرنوش باسلیقه که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

## تعهد نامه

اینجانب **فاطمه محمد علی نیا** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **عمران - سازه** دانشکده **عمران** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **بهینه‌سازی آیزوژئومتریکی شکل سازه‌های دوبعدی تنش مسطح با الگوریتم اجتماع مورچگان** تحت راهنمایی **دکتر سید مهدی توکلی** متعهد می‌شوم .

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

## تاریخ

### امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه‌ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمیشود.

## چکیده

بهینه‌سازی سازه‌ها با در نظر گرفتن شرایط و محدودیت‌های موجود یا همان توابع قید همواره یکی از اهداف مهندسان و طراحان بوده است. تاکنون تحقیقات زیادی بر روی بهینه‌سازی انجام شده و روش‌های مختلفی برای حل پیشنهاد شده است. به طور کلی بهینه‌سازی سازه‌ها در محیط‌های پیوسته را می‌توان به سه دسته بهینه‌سازی توپولوژی، بهینه‌سازی شکل و بهینه‌سازی ابعادی تقسیم‌بندی نمود. در این پژوهش به منظور حل مسأله بهینه‌سازی شکل، با توجه به این‌که الگوریتم مورچگان که از جمله روش‌های فراابتکاری است، در اساس برای بهینه‌سازی مسائل گسسته ابداع شده است، ما از نسخه‌ی *ACOR* الگوریتم مورچگان استفاده کردیم.

در روش‌های سنتی بهینه‌سازی شکل که از روش اجزای محدود به منظور تحلیل استفاده می‌شود، پس از هر بار تحلیل در روند بهینه‌سازی مرزهای سازه تغییر یافته و شکل جدید شبکه‌بندی می‌شود و سپس مجدداً تحلیل انجام شده که این پروسه مستلزم زمان زیادی است و در برخی از مسائل بزرگ، حل را با مشکل مواجه می‌سازد.

با ظهور روش آیزوژئومتریک و ادغام مدل‌سازی هندسی و تحلیل، امکان تغییر شکل (مرزهای سازه) بدون شبکه‌بندی مجدد ایجاد شده است. بنابراین در این پایان‌نامه سعی بر آن است با استفاده از روش آیزوژئومتریک برای تحلیل، شکل سازه در روند بهینه‌سازی تغییر کند.

در این پژوهش وزن سازه تابع هدف و محدودیت تنش‌ها به عنوان قید مسأله بهینه‌سازی در

نظرگرفته شده‌اند. برای نشان دادن کارایی روش اجتماع مورچگان در مسائل بهینه‌سازی شکل چند

مثال دوبعدی با استفاده از برنامه‌ی کامپیوتری تهیه شده، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی شکل سازه‌ها، روش آیزوژئومتریک، روش اجتماع مورچگان



## فهرست مطالب

فصل اول : کلیات	۱
۱-۱- مقدمه	۲
۲-۱- تاریخچه	۶
۳-۱- اهداف کلی پایان نامه	۸
۴-۱- برنامه کامپیوتری نوشته شده در راستای پایان نامه	۹
۵-۱- ساختار کلی پایان نامه	۹
فصل دوم: روش تحلیل آیزوژئومتریکی	۱۱
۱-۲- مقدمه	۱۲
۲-۲- مبانی روش آیزوژئومتریکی	۱۵
۳-۲- بی-اسپلین ها و توابع نربز	۱۷
۳-۲-۱- بردارهای گرهی	۱۸
۳-۲-۲- توابع پایه	۲۰
۳-۲-۳- مشتقات توابع پایه بی-اسپلین ها	۲۳
۳-۲-۴- منحنی بی-اسپلین ها	۲۴

۲۶.....	۲-۳-۵- سطوح بی-اسپلاین‌ها.....
۲۸.....	۲-۳-۶- احجام بی-اسپلاین‌ها.....
۲۹.....	۲-۳-۷- بی-اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت (NURBS).....
۳۲.....	۲-۳-۸- مشتقات توابع پایه نربز.....
۳۳.....	۲-۴- نربز به عنوان پایه‌ای برای تحلیل.....
۳۶.....	۲-۵- تحلیل آیزوژئومتریکی مسائل تنش مسطح.....
۳۶.....	۲-۵-۱- فرمول‌بندی آیزوژئومتریکی.....
۳۹.....	۲-۶- مقایسه‌ی روش آیزوژئومتریکی با روش اجزای محدود.....
۴۵.....	<b>فصل سوم: بهینه‌سازی</b> .....
۴۶.....	۳-۱- مقدمه.....
۴۷.....	۳-۲- تعاریف اولیه.....
۴۷.....	۳-۲-۱- متغیرهای طراحی.....
۴۸.....	۳-۲-۲- تابع هدف.....
۴۸.....	۳-۲-۳- قیدها.....
۴۹.....	۳-۳- فرم استاندارد مسأله بهینه‌سازی.....
۵۱.....	۳-۴- انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها.....

- ۳-۴-۱- بهینه‌سازی ابعادی..... ۵۱
- ۳-۴-۲- بهینه‌سازی توپولوژی..... ۵۲
- ۳-۴-۲-۱- روش‌های معیار بهینگی..... ۵۴
- ۳-۴-۳- بهینه‌سازی شکل سازه‌ها..... ۵۶
- ۳-۴-۳-۱- انتخاب متغیرهای طراحی..... ۵۸
- ۳-۴-۳-۲- استفاده از چند جمله‌ای جهت نمایش مرزها..... ۶۱
- ۳-۴-۳-۳- استفاده از اسپلاین‌ها جهت نمایش مرزها..... ۶۲
- ۳-۴-۴- استفاده از نریز در روش آیزوژئومتریک..... ۶۲
- ۳-۵-۱- انواع روش‌های بهینه‌سازی..... ۶۴
- ۳-۵-۱- روش‌های شمارشی..... ۶۵
- ۳-۵-۲- روش‌های محاسباتی..... ۶۵
- ۳-۵-۳- روش‌های ابتکاری و فراابتکاری..... ۶۷
- فصل چهارم: الگوریتم کلونی مورچگان (اجتماع مورچگان)..... ۶۹
- ۴-۱- مقدمه..... ۷۰
- ۴-۲- از بیولوژی تا الگوریتم..... ۷۰

۷۱	۴-۲-۱- مورچه‌ها
۷۴	۴-۲-۲- الگوریتم
۷۸	۴-۳- الگوریتم بهینه‌سازی اجتماع مورچگان
۸۱	۴-۴- برخی نسخه‌های تغییر یافته الگوریتم مورچگان
۸۳	۴-۵- الگوریتم مورچگان در فضای پیوسته
۸۳	۴-۵-۱- مقدمه
۸۵	۴-۵-۲- الگوریتم ACOR
۹۱	فصل پنجم: مثال‌های عددی
۹۲	۵-۱- مقدمه
۹۲	۵-۲- مطالعه موردی
۹۲	مثال ۵-۱ تیر طره
۹۸	مثال ۵-۲ آچار
۱۰۲	مثال ۵-۳ فیلت دوبعدی
۱۰۶	مثال ۵-۴ تیر دوسرگیردار
۱۰۹	فصل ششم: نتایج و پیشنهادات
۱۱۰	۶-۱- مقدمه

۱۱۰..... ۲-۶- جمع‌بندی نتایج

۱۱۱..... ۳-۶- پیشنهادات

۱۱۳..... مراجع

## فهرست اشکال

- شکل (۱-۲). بار کمانش پیوسته‌ی نازک به ازای نقص‌های هندسی ۱٪، ۱۰٪ و ۵۰٪..... ۱۳
- شکل (۲-۲). شمای کلی مفهوم نربز برای سطح با یک المان..... ۱۶
- شکل (۳-۲). نگاهت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی در اجزای محدود کلاسیک..... ۱۸
- شکل (۴-۲). توابع پایه بی-اسپلاین درجه صفر، یک و دو برای بردار گرهی یکنواخت  $\Xi = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ..... ۲۱
- شکل (۵-۲). توابع پایه‌ی درجه دو برای بردار گرهی غیریکنواخت و باز  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ ..... ۲۲
- شکل (۶-۲). منحنی بی-اسپلاین به همراه شبکه‌ی کنترلی و موقعیت بردارهای گرهی..... ۲۵
- شکل (۷-۲). مختصات نقاط کنترلی شکل (۸-۲)..... ۲۶
- شکل (۸-۲). سطح بی-اسپلاین..... ۲۷
- شکل (۹-۲). فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی شکل (۸-۲)..... ۲۷
- شکل (۱۰-۲). المان گوس و تصویر آن در فضای فیزیکی و پارامتری..... ۲۸
- شکل (۱۱-۲). ساخت منحنی بی-اسپلاین نسبی از منحنی بی-اسپلاین..... ۳۰
- شکل (۱۲-۲). مدل‌سازی هندسی یک لوله خم شده با استفاده از ۹ نقطه کنترلی (الف) بدون (ب) با شبکه‌ی ترسیمی..... ۳۱
- شکل (۱۳-۲). تقزیم هندسه لوله خم شده با استفاده از روش اجزای محدود (الف) ۶۷۵ گره (ب) ۲۷۲۰ گره..... ۳۱
- شکل (۱۴-۲). روش‌های (الف) پیوسته و (ب) ناپیوسته‌ی گالرکین..... ۳۴
- شکل (۱۵-۲). مقایسه‌ی تطبیق دادن داده‌ای ناپیوسته (الف) روش اجزای محدود (ب) روش آیزوژئومتریک..... ۳۵
- شکل (۱۶-۲). طرح اولیه‌ی مثال مرجع [۱۴]..... ۴۰

- شکل (۲-۱۷). تغییر مکان قائم شکل (۲-۱۶) با روش اجزای محدود..... ۴۰
- شکل (۲-۱۸). مدل سازی شکل (۲-۱۶) با روش آیزوژئومتریکی..... ۴۱
- شکل (۲-۱۹). تغییر مکان قائم شکل (۲-۱۶) با روش آیزوژئومتریکی..... ۴۲
- شکل (۲-۲۰). مقایسه نتایج تحلیل شکل (۲-۱۶) با دو روش اجزای محدود و آیزوژئومتریکی..... ۴۲
- شکل (۳-۱). یک مسأله بهینه سازی ابعادی که برای بهینه سازی سطح مقطع اعضای خرپا فرمول بندی شده است..... ۵۲
- شکل (۳-۲). بهینه سازی توپولوژی یک خرپا..... ۵۴
- شکل (۳-۳). بهینه سازی توپولوژی یک تیر ساده..... ۵۴
- شکل (۳-۴). مسأله‌ی بهینه سازی شکل با یافتن تابع  $\eta(x)$  که شکل تیر را مشخص می کند..... ۵۶
- شکل (۳-۵). استفاده از گره های اجزای محدود به عنوان متغیرهای طراحی ( الف ) طرح اولیه ( ب ) طرح بهینه..... ۶۰
- شکل (۳-۶). استفاده از گره های اجزای محدود به عنوان متغیرهای طراحی در بهینه سازی ابعادی..... ۶۰
- شکل (۳-۷). طبقه بندی انواع روش های بهینه سازی..... ۶۴
- شکل (۴-۱). رفتار مورچه های آرژانتینی در آزمایش گرس و همکارانش..... ۷۴
- شکل (۴-۲). گراف الگوریتم بهینه سازی اجتماع مورچه ها..... ۷۸
- شکل (۴-۳): الگوریتم های تغییر یافته ی مورچگان براساس تغییر فرمون..... ۸۲
- شکل (۴-۴). تابع چگالی احتمال کرنل گاوسی و توابع گاوسی واحد..... ۸۶
- شکل (۴-۵). یک راه حل از تیر طره..... ۸۶
- شکل (۴-۶). فلوجارت الگوریتم *ACOR*..... ۹۰
- شکل (۵-۱). طرح اولیه در مثال (۵-۲-۱)..... ۹۳
- شکل (۵-۲). روند بهینه سازی شکل تیر طره براساس الگوریتم مورچگان..... ۹۳

- شکل (۳-۵). شکل بهینه به همراه نقاط کنترلی براساس الگوریتم مورچگان..... ۹۴
- شکل (۴-۵). طرح بهینه به همراه کانتور تنش آن براساس الگوریتم مورچگان..... ۹۴
- شکل (۵-۵). روند بهینه‌سازی شکل تیر طره بر اساس روش برنامه‌ریزی درجه دوم ترتیبی..... ۹۵
- شکل (۶-۵). طرح بهینه به همراه شبکه‌ی کنترلی در روش برنامه‌ریزی درجه دوم ترتیبی..... ۹۵
- شکل (۷-۵). کانتور تنش فون میسز در روش برنامه‌ریزی درجه دوم ترتیبی..... ۹۵
- شکل (۸-۵). روند بهینه‌سازی مثال تیر طره در روش مجانب‌های متحرک..... ۹۶
- شکل (۹-۵). شکل بهینه به همراه نقاط کنترلی در روش مجانب‌های متحرک..... ۹۶
- شکل (۱۰-۵). شکل بهینه به همراه کانتورهای تنش فون میسز در روش مجانب‌های متحرک..... ۹۷
- شکل (۱۱-۵). روند بهینه‌سازی مثال تیر طره با الگوریتم ذرات باردار..... ۹۷
- شکل (۱۲-۵). شکل بهینه به همراه نقاط کنترلی با الگوریتم ذرات باردار..... ۹۷
- شکل (۱۳-۵). شکل بهینه به همراه کانتورهای تنش فون میسز با الگوریتم ذرات باردار..... ۹۸
- شکل (۱۴-۵). طرح اولیه‌ی مسأله نصف آچار..... ۹۹
- شکل (۱۵-۵). روند بهینه‌سازی در مسأله آچار براساس الگوریتم مورچگان..... ۹۹
- شکل (۱۶-۵). طرح بهینه‌ی مسأله آچار به همراه نقاط کنترلی براساس الگوریتم مورچگان..... ۱۰۰
- شکل (۱۷-۵). نمای نزدیک از شکل بهینه‌ی سر آچار براساس الگوریتم مورچگان..... ۱۰۰
- شکل (۱۸-۵). طرح بهینه‌ی آچار و کانتور تنش نهایی براساس الگوریتم مورچگان..... ۱۰۰
- شکل (۱۹-۵). روند بهینه‌سازی شکل مسأله آچار در روش مجانب متحرک..... ۱۰۱
- شکل (۲۰-۵). کانتور تنش برای طرح بهینه آچار در روش مجانب متحرک..... ۱۰۱



- شکل (۵-۲۱). نمایش متغیرهای طراحی در مسأله فیلت دوبعدی.....۱۰۲
- شکل (۵-۲۲). روند بهینه‌سازی فیلت دوبعدی با استفاده از الگوریتم مورچگان.....۱۰۳
- شکل (۵-۲۳). طرح بهینه مسأله فیلت دوبعدی به همراه نقاط کنترلی براساس الگوریتم مورچگان.....۱۰۳
- شکل (۵-۲۴). کانتورهای تنش فون میسز برای فیلت دوبعدی براساس الگوریتم مورچگان.....۱۰۳
- شکل (۵-۲۵). روند بهینه‌سازی فیلت دوبعدی بر اساس روش مجانب‌های متحرک.....۱۰۴
- شکل (۵-۲۶). شبکه نقاط کنترلی طرح بهینه فیلت دوبعدی براساس روش مجانب‌های متحرک.....۱۰۴
- شکل (۵-۲۷). کانتور تنش فون میسز طرح بهینه فیلت دوبعدی به دست آمده از روش مجانب‌های متحرک.....۱۰۵
- شکل (۵-۲۸). روند بهینه‌سازی فیلت دوبعدی بر اساس روش جستجوی ذرات باردار.....۱۰۵
- شکل (۵-۲۹). شبکه نقاط کنترلی طرح بهینه فیلت دوبعدی براساس روش جستجوی ذرات باردار.....۱۰۶
- شکل (۵-۳۰). کانتور تنش فون میسز طرح بهینه فیلت دوبعدی به دست آمده از روش جستجوی ذرات باردار.....۱۰۶
- شکل (۵-۳۱). شکل اولیه‌ی تیر دو سرگیردار.....۱۰۷
- شکل (۵-۳۲). روند بهینه‌سازی شکل تیر دوسرگیردار براساس الگوریتم مورچگان.....۱۰۷
- شکل (۵-۳۳). طرح بهینه به همراه شبکه‌ی نقاط کنترلی براساس الگوریتم مورچگان.....۱۰۸
- شکل (۵-۳۴). طرح بهینه به همراه کانتور تنش تیر دوسرگیردار براساس الگوریتم مورچگان.....۱۰۸



## فصل اول

# کلیات

## ۱-۱- مقدمه

طی دهه‌های اخیر برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم در مسائل مهندسی روش‌های عددی بسیاری به وجود آمدند. از گسترده‌ترین روش‌های پیشنهادی در این زمینه می‌توان به روش اجزای محدود<sup>۱</sup> اشاره کرد. ظهور این روش در علوم مهندسی به سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ برمی‌گردد که در این سال‌ها مهندسی هوا فضا نقطه‌ی کانونی آن بوده است. در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰ اولین برنامه‌های تجاری نسترن<sup>۲</sup>، آسکا<sup>۳</sup> و استاردین<sup>۴</sup> تولید گردید. مبنای این برنامه‌ها روش اجزای محدود بود. پس از آن روش اجزای محدود در دیگر علوم مهندسی گسترش یافت و برنامه‌های تجاری زیادی بر مبنای آن تولید شد. اگر چه هندسه مبنای تحلیل است، اما آنچه تحت عنوان کد<sup>۵</sup> می‌شناسیم، بعدها در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ به وجود آمد. این مسأله شاید به نوعی دلیل تفاوت‌های بین نمایش هندسی در اجزای محدود و کد را بیان کند. اکثر برنامه‌های اجزای محدود سال‌ها قبل از این که کد به طور گسترده پیشرفت کند به تکامل رسیده بودند. اما در حال حاضر کد صنعتی است که حتی مقداری از تحلیل بزرگتر است. در امور تجاری از تحلیل به عنوان مهندسی به کمک کامپیوتر تعبیر می‌شود. اندازه‌گیری دقیق حجم صنایع تحلیل و کد کمی مشکل است، اما برآوردهایی مبنی بر این که ارزش تحلیل در حدود یک یا دوهزار میلیون دلار و کد در حدود پنج تا ده‌هزار میلیون دلار است وجود دارد [۱]. در کارهای

---

<sup>1</sup> Finite Element Method

<sup>2</sup> Nastaran

<sup>3</sup> Aska

<sup>4</sup> Stardyne

<sup>5</sup> Computer Aided Design (CAD)

مهندسی این گونه متداول است که طراحی‌ها در سیستم‌های کد انجام می‌گیرند و شبکه‌ها از داده‌های کد تولید می‌شوند. این مسأله باعث می‌شود هندسه‌ای تقریبی برای تحلیل به کاربریم. در صنایع اتومبیل، هوافضا و کشتی‌سازی چنین برآورد می‌شود که حدود ۸۰ درصد کل تحلیل به تولید شبکه اختصاص می‌یابد. در صنایع اتومبیل‌سازی ایجاد شبکه برای یک وسیله کامل در حدود چهار ماه طول می‌کشد. با توجه به تغییرات روزانه طراحی، اگر نتوانیم شبکه‌ی جدیدی را در بازه‌ی زمانی لازم تولید کنیم سودمندی تحلیل در طراحی کاهش می‌یابد. هنگامی که شبکه تولید شد، اصلاح آن در هر بار تکرار عملیات نیاز به ارتباط با کد دارد. ایجاد این ارتباط غیر قابل دسترس است، که این مسأله شاید دلیل این که چرا اصلاح تطبیقی همچنان اولین مشکل آکادمیک است را مشخص می‌کند.

ساخته هندسه‌ی اجزای محدود یا به عبارتی شبکه اجزای محدود پرهزینه و زمان‌بر است و همراه با خطاهای زیادی است. ما به دنبال راهی برای تغییر و جایگزینی تحلیل اجزای محدود با روشی که سازگاری بیشتری با کد داشته باشد هستیم. با توجه به این که صنعت تحلیل حجم کم‌تری در مقایسه با کد دارد. استفاده از یک تقریب چند جمله‌ای ثابت برای هندسه اولین بار توسط سابو<sup>۱</sup> و همکاران انجام شد [۲]. در این روش هرچه مرتبه‌ی چند جمله‌ای افزایش پیدا می‌کرد، خطا کاهش می‌یافت تا جایی که دیگر با افزایش مرتبه‌ی چند جمله‌ای خطا تغییر نمی‌کرد. تاثیر این مشکل وقتی بیشتر می‌شود که کمیت‌های محاسبه شده روی مرز استفاده می‌کنیم، که معمولاً مهم‌ترین کاربردهای مهندسی

---

<sup>۱</sup> sazabo

هستند و این جاست که خطاهای مهندسی مضرترین خطاها هستند. علاوه بر آن هنوز بیشتر تحلیل- های اجزای محدود توسط المان‌های مرتبه پایین انجام می‌شدند، که در آن‌ها خطاهای مهندسی بزرگتر بودند. موقعیت نرم‌افزار راسنا<sup>۱</sup> که بعدها توسط شرکت فناوری پارامتری<sup>۲</sup> به دست آمد مرهون ارتباط تنگاتنگ آن با هندسه کد و در نتیجه نتایج قابل اعتمادتر آن بود. روش آیزوژئومتری<sup>۳</sup> که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته نیز از الگویی مشابه الهام می‌گیرد اما تلاش می‌کند تا بیشتر به هندسه کد مرتبط شود و توصیف چند جمله‌ای اجزای محدود را به طور کامل حذف کند [۳].

رویه‌ای که در این روش ارائه می‌شود بر پایه‌ی نربز<sup>۴</sup> است، یک تکنولوژی استاندارد که در سیستم- های کد استفاده می‌شود. به این منظور هندسه‌ی دقیق کد با سطوح نربز تطبیق داده می‌شود و سپس یک شبکه درشت از المان‌های نربز ساخته می‌شود. این المان، المان‌های سه‌بعدی خواهند بود که هندسه را به صورت دقیق نمایش می‌دهند. این روش است که با انجام آن درهای تازه‌ای برای کارهای قدرتمند باز می‌شود. اصلاح شبکه‌ی به دست آمده از این روش نیاز به ارتباط بیشتری با کد ندارد و به قدری ساده است که می‌تواند مطابقت گسترده‌تر این تکنولوژی را با صنعت فراهم کند. در این روش از مفهومی مشابه آیزوپارامتریک<sup>۵</sup> استفاده می‌شود، یعنی فضای حل برای متغیرهای وابسته بر حسب

---

<sup>۱</sup> RASNA

<sup>۲</sup> Parametric Technology Corporation (PTC)

<sup>۳</sup> Isogeometric

<sup>۴</sup> NURBS

<sup>۵</sup> Isoparametric

همان توابعی نمایش داده می‌شود که برای نمایش هندسه به کار رفته‌اند. به همین دلیل این روش

تحلیل آیزوژئومتریک نام گرفته است [۴].

الگوریتم بهینه‌سازی تابع هدف و قید را معرفی می‌کند و با آن‌ها کار می‌کند. این الگوریتم از برنامه-

ریزی ریاضی با سایر تکنیک‌ها استخراج می‌شود. برای رسیدن به یک نتیجه‌ی مناسب باید تعاملی

قوی بین مدل طراحی، مدل تحلیل و مدل بهینه‌سازی وجود داشته باشد. در بیشتر موارد و در

کاربردهای صنعتی مدل طراحی به یک برنامه طراحی به کمک کامپیوتر (CAD) لینک می‌شود و مدل

تحلیل شامل یک برنامه‌ی حل به روش اجزای محدود است. یکی از چالش‌های پیش رو در این زمینه،

نیاز به مبادله‌ی اطلاعات بین این سیستم‌هاست. مشکل دیگر محدودیت در تغییرپذیری شکل‌های

ممکن است، زیرا فضای طراحی به المان‌های طراحی که از پیش تعریف شده‌اند محدود شده است. اما

مشکل اصلی این است که هم مدل تحلیل و هم مدل طراحی هر دو به شدت به هندسه وابسته

هستند، اگرچه نمایش هندسی در هر دو مورد متفاوت است.

امتیازی که در ادغام مدل‌های تحلیل و طراحی وجود دارد بسیار آشکار است. از این رو ما رویکرد

آیزوژئومتریک را به عنوان روشی جایگزین معرفی می‌کنیم که این دو را ترکیب می‌کند. این رویکرد

مفهوم اجزای محدود را با دسته‌بندی جدیدی از توابع شکل همچون نرَبز تجهیز می‌کند. تاکنون برای

بهینه‌سازی شکل همراه با مفهوم المان طراحی و یا روش المان مرزی به کار رفته‌است [۴].

سوباریان<sup>۱</sup> و همکاران نیز از نریز به همراه رویکرد بدون شبکه در قالب یک استراژی ترکیبی بر پایه‌ی هندسه فضایی استفاده کرده‌اند [۵] و [۶]. اگر از حد این روش‌ها که نریز را تنها به عنوان نمایش-دهنده‌ی هندسه‌ی مرزها استفاده می‌کنند، فراتر رویم به رویکرد مورد نظر ما می‌رسیم که در آن این توابع در مدل تحلیل نیز مشارکت می‌کنند. از این رو ویژگی دقت و همواری نمایش هندسه در تحلیل آیزوژئومتریکی به کمک بهینه‌سازی شکل می‌آید و مدل‌های تحلیل و طراحی را به هم پیوند می‌زند. لازم است توجه شود که استفاده از آیزوژئومتریکی در بهینه‌سازی شکل ابتدا توسط خود هیوز<sup>۲</sup> و همکاران به عنوان موضوعی جذاب برای تحقیق مطرح شد [۱].

همان‌طور که اشاره شد در مرحله‌ی تحلیل باید اطلاعات لازم برای مرحله بهینه‌سازی به دست آید.

## ۱-۲- تاریخچه

فرآیند بهینه‌سازی شکل شامل سه بخش اصلی است: نمایش هندسی مسأله، تحلیل سازه و الگوریتم بهینه‌سازی. در ابتدا باید نمایش هندسی مناسبی برای شکل مرزها را انتخاب نماییم و مقادیر اولیه برای متغیرهای طراحی در نظر بگیریم. سپس یک مدل تحلیلی مناسب برای تحلیل سازه‌ها انتخاب می‌کنیم. یک روش تحلیل مناسب باید قادر باشد اطلاعات لازم را جهت مرحله‌ی بهینه‌سازی بدهد.

---

<sup>1</sup> Subbarayan

<sup>2</sup> Hughes



پس از انجام تحلیل، الگوریتم بهینه‌سازی مقادیر جدیدی برای متغیرهای طراحی به ما می‌دهد. در نتیجه یک مدل طراحی جدید ساخته شده و به قسمت تحلیل برده می‌شود. از تحلیل مجدد مقادیر تابع برای طراحی جدید حاصل می‌شود. اگر معیار لازم برای خاتمه‌ی محاسبات اقماع شده بود، محاسبات متوقف می‌شود. در غیر این صورت مرحله‌ی بهینه‌سازی نقطه‌ی طراحی جدیدی به ما می‌دهد.

در روش‌های اولیه برای بهینه‌سازی از مختصات گرهی به عنوان متغیر طراحی استفاده می‌شد، اما این عمل به زودی متوقف شد، زیرا تجربه نشان داد که با این کار نمی‌توان به مرز همواری دست پیدا کرد. به علاوه نمی‌توان انتظار داشت که این کار نتایج صحیحی برای تنش تولید کند.

این تجربه نشان داد که مدل تحلیل باید از مدل طراحی جدا شود، زیرا همواری مرز یک نیاز اساسی جهت نمایش هندسه در بهینه‌سازی شکل است. برای حل این مشکل محققین از چند جمله‌ای‌ها برای نمایش مرز استفاده کردند [۷] و ضرایب چندجمله‌ای را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفتند. البته این روش دارای ایرادهایی نیز بود. اول این که این متغیرها به خوبی با خواص مکانیکی در ارتباط نبودند و دیگر این که اگر چه این مدل همواری لازم را فراهم می‌کرد، اما وقتی مرتبه‌ی چند جمله‌ای بالا می‌رفت می‌توانست منجر به ایجاد مرزهای نوسانی شود. به علاوه چندجمله‌ای‌ها قادر به نمایش شکل‌های کلی نیستند و تنها می‌توانند خانواده‌ی منحنی‌ها درجه دو، سه و غیره را نشان دهند. از

نقطه نظر طراحی مشکل دیگر عدم کنترل محلی بر منحنی بود. تغییر در یکی از ضرایب چند جمله‌ای باعث تغییر در کل منحنی می‌شد.

اسپلاین‌ها<sup>۱</sup> این مشکل را حذف کردند، زیرا این توابع ترکیبی از چند جمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند که با هم ترکیب شده‌اند تا حداکثر همواری را در مرزها به وجود آورند.

برایبنت و همکاران [۸] از توابع مخلوط بی-اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند. توابع مخلوط انعطاف‌پذیری بالایی جهت نمایش هندسه ایجاد کردند. با استفاده از فرمول‌های بی-اسپلاین نظم و قاعده مورد نیاز برای مرز به دست می‌آید. سرانجام هیوز و همکاران با استفاده از توابع نریز برای مدل تحلیل و طراحی، روش آیزوژئومتریکی را ابداع کردند، که این روش در این پژوهش به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است.

### ۱-۳-اهداف کلی پایان‌نامه

به صورت کلی بهینه‌سازی شکل سازه‌های دوبعدی هدف نهایی این پایان‌نامه می‌باشد. اما با توجه به جدید بودن روش تحلیل آیزوژئومتریکی که در این تحقیق از آن استفاده شده، قسمتی به معرفی این روش اختصاص داده شده است. انتخاب ساختاری مناسب برای مسأله بهینه‌سازی که از مهم‌ترین عناصر حل مسأله است این از اهداف اصلی در این تحقیق بوده است.

---

<sup>۱</sup> Spline

ارائه‌ی برنامه‌ی کامپیوتری مناسب برای حل مسائل بهینه‌سازی شکل ضروری و بدون آن حل این مسائل غیرممکن است. بنابراین ایجاد برنامه‌ای مناسب در این زمینه از اهداف دیگری است که در این تحقیق دنبال شده است.

## ۱-۴- برنامه کامپیوتری نوشته‌شده در راستای پایان‌نامه

همان‌گونه که اشاره شد بدون ارائه‌ی برنامه‌ی کامپیوتری مناسب انجام تمام بخش‌های دیگر پایان‌نامه بی‌فایده و غیرقابل اجرا می‌باشد. بدین منظور برنامه‌ای برای حل مسائل بهینه‌سازی شکل به روش الگوریتم مورچگان در پایان‌نامه نوشته شده است. در پایان مثال‌هایی به منظور بررسی صحت فرمول‌بندی و برنامه کامپیوتری حل و بیان شده است.

## ۱-۵- ساختار کلی پایان‌نامه

این پایان‌نامه شامل شش فصل می‌باشد. در فصل کنونی به مقدماتی در رابطه با پایان‌نامه اشاره شده است. در فصل دوم روش تحلیل آیزوژئومتریک به عنوان روشی نوین و پرکاربرد مورد بررسی قرار گرفته و فرمول‌بندی لازم جهت تحلیل مسائل تنش مسطح به اختصار در این فصل بیان شده است. در فصل سوم اصول کلی بهینه‌سازی شکل سازه‌ها و روش‌های متداول و مناسب بررسی شده‌اند و در پایان روش مناسب برای این منظور انتخاب و توضیح داده شده است.

با توجه به این که روش الگوریتم مورچگان بخش مهمی از این پایان نامه را به خود اختصاص می دهد؛

این الگوریتم در فصل چهارم به صورت کامل بررسی شده و همراه فرمول بندی ارائه شده است.

در فصل پنجم با توجه به نتایج به دست آمده از این پایان نامه، تعدادی مثال متداول در مراجع

بهینه سازی شکل بررسی شده و نتایج حاصل از آنها بیان شده است.

در پایان در فصل ششم نتایج حاصل از پایان نامه و پیشنهادات لازم ارائه شده است .

## فصل دوم

روش تحلیل آیزوژئومتریکی

## ۲-۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر روش‌های عددی متنوعی برای تحلیل سازه‌ها پیشنهاد شده و توسعه پیدا کرده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش تفاضل محدود<sup>۱</sup>، اجزای محدود و دسته‌ی سوم که به روش‌های بدون شبکه‌بندی شهرت دارند اشاره کرد.

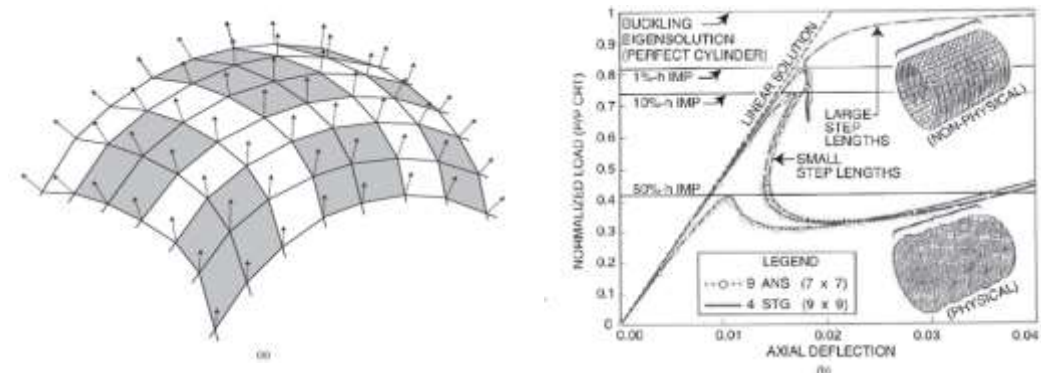
امروزه از میان این روش‌ها روش اجزای محدود به عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده است. این روش در دهه‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ ابداع و مورد استفاده قرار گرفت، به گونه‌ای که در پایان این دهه برنامه‌های کامپیوتری تجاری مانند نسترن<sup>۲</sup>، اسکا<sup>۳</sup> و استاردین<sup>۴</sup> به وجود آمدند. طی سال‌های گذشته این روش توسعه یافته و با ترکیب آن با روش‌های تفاضل محدود و بدون شبکه<sup>۵</sup> بسیاری از مشکلات دانشمندان مکانیک محاسباتی حل گردیده است.

وجود برخی کمبودها و نواقص در روش اجزای محدود مانند وجود خطا در تعریف مرزهای مسائل با هندسه پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائلی که با تغییرات شدید خواص مصالح همراه است و نیاز به تولید چند باره شبکه اجزای محدود می‌باشد، از جمله دلایلی است که به نوآوری این روش انجامید.

---

<sup>1</sup> Finite Difference  
<sup>2</sup> Nastaran  
<sup>3</sup> Aska  
<sup>4</sup> Stardin  
<sup>5</sup> Meshless Methods

تقریب هندسی در شبکه به خودی خود می‌تواند باعث مشکلاتی در دقت کار شود. یک نمونه از این مسأله در تحلیل پوسته‌ی نازک پیش می‌آید که شدیداً نسبت به نقص هندسی حساس است. این مسأله در شکل (۱-۲) نشان داده شده است، که در آن بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای با مقایسه‌ی هندسه‌ی دقیق با پوسته‌هایی که دارای نقص هندسی ۱٪، ۱۰٪ و ۵۰٪ در ضخامت هستند مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، کاهش قابل ملاحظه‌ای در بار کمانش با افزایش نقص وجود دارد [۱].



شکل (۱-۲). بار کمانش پوسته‌ی نازک به ازای نقص‌های هندسی ۱٪، ۱۰٪ و ۵۰٪ [۹]

انگیزه انجام نخستین فعالیت‌ها در زمینه تحلیل آیزوژئومتریک ناشی از شکاف موجود بین دنیای تحلیل اجزای محدود و مدل‌سازی کامپیوتری بوده است. در ابتدا یکی از مهمترین زمینه‌های تحقیق در تحلیل آیزوژئومتریک ایجاد رابطه بین مدل طراحی و تحلیل و نیز تشخیص موانع و راه‌حل‌های مطرح شده در هر دسته بوده است.

روش تحلیل آیزوژئومتریکی در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش برای رفع کاستی‌های بیان شده، معرفی شد [۱]. توابع هندسی محاسباتی زیادی وجود داشتند که می‌توانستند به عنوان توابع پایه در تحلیل آیزوژئومتریکی مورد استفاده قرار گیرند. به دلیل پرکاربرد بودن توابع بی-اسپلاین و نربز در طراحی مهندسی از این توابع به‌عنوان پایه اولیه استفاده شد. نربزها نسبت به توابع پایه‌ی چند جمله-ای تکه‌ای<sup>۱</sup> مرسوم، به‌عنوان یک پایه برای آنالیز به راحتی تعمیم داده شده و اصلاح می‌گردند و برای مدل‌سازی دقیق مقاطع مخروطی شکل، استوانه‌ای، کره‌ای و بیضی بسیار مناسب است. این ویژگی نربزها یعنی ترکیب توانایی‌های هندسی و تحلیلی، به خوبی در تحلیل آیزوژئومتریکی نمود پیدا کرده است.

در این فصل به صورت خلاصه به بیان برخی ویژگی‌های تحلیل آیزوژئومتریکی و توابع مربوط به آن می‌پردازیم. سپس روش‌های آیزوژئومتریکی و اجزای محدود با هم مقایسه شده و در ادامه تحلیل آیزوژئومتریکی مسائل تنش مسطح برای مسائل دو بعدی بررسی می‌شود.

---

<sup>۱</sup> Piecewise Polynomial



## ۲-۲- مبانی روش آیزوژئومتری

تحلیل آیزوژئومتری در بسیاری از ویژگی‌ها مشابه اجزای محدود کلاسیک و برخی آن خصوصیات در تشابه با روش‌های بدون مش می‌باشد. این روش بیشتر براساس هندسه مدل بنا شده است و از شاخه مدل‌سازی و طراحی کامپیوتری الهام گرفته است.

در اجزای محدود کلاسیک دو مفهوم مش و المان وجود دارد. المان به دو شکل یکی در قلمرو مادر و دیگری در فضای فیزیکی تعریف می‌شود. المان‌ها عموماً با مختصات گرهی و درجات آزادی که معمولاً ارزش توابع پایه در گره‌ها هستند بیان می‌شوند. توابع پایه‌ی اجزای محدود معمولاً درونیاب هستند و ممکن است دارای مقادیر مثبتی و منفی باشند.

توابع پایه‌ی نریز معمولاً درونیاب نیستند. در این جا دو مفهوم برای مش‌ها با عنوان مش کنترلی و مش فیزیکی بیان شده است. مش کنترلی متشکل از نقاط کنترلی است و در واقع این مش بیشتر شبیه به داربستی است که هندسه را پوشش می‌دهد. مش کنترلی شکلی از مش‌بندی المان‌های چند بعدی اجزای محدود معمول می‌باشد. متغیرهای کنترلی درجات آزادی هستند که در نقاط کنترل قرار گرفته و امکان دارد به عنوان مختصات کلی در نظر گرفته شود.

مش فیزیکی حاصل تجزیه‌ی هندسه‌ی واقعی است و دو مفهوم وصله<sup>۱</sup> و بازه‌ی گرهی<sup>۲</sup> برای المان‌ها

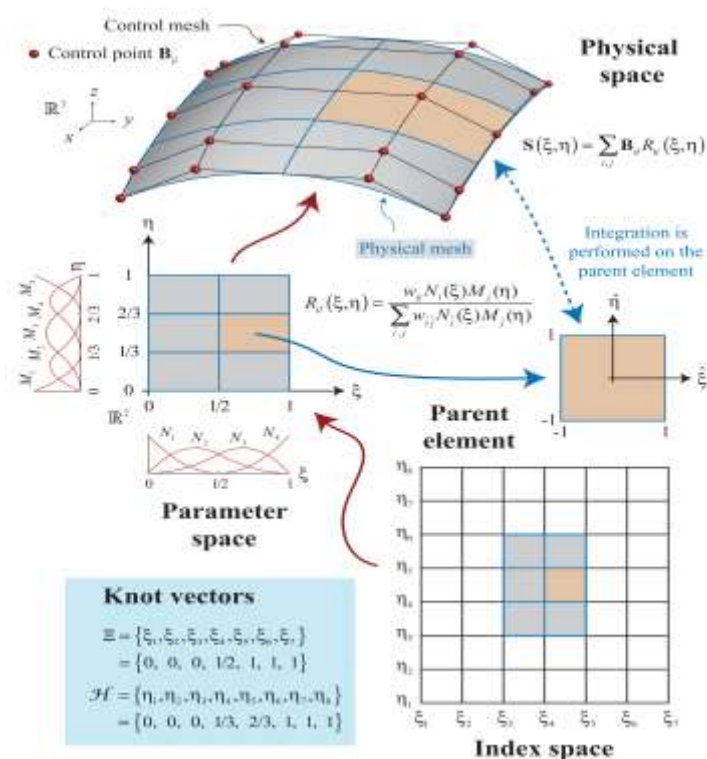
در آن تعریف می‌گردد. وصله‌ها را در حقیقت می‌توان المان بزرگ نامید. بیشتر هندسه‌ها را می‌توان با

یک وصله مدل کرد. هر وصله نیز به دو صورت یکی در قلمرو مادر و دیگری در فضای فیزیکی مطرح

می‌شوند. برای درک بهتر می‌توان مراحل تحلیل آیزوژئومتریک را به صورت تصویری بررسی کرد.

شکل (۲-۲) توصیف هندسی روش تحلیل آیزوژئومتریک می‌باشد. در این شکل اجزای نرَبز را برای یک

وصله که در آن از بردار گرهی باز و توابع پایه‌ی مربعی با پیوستگی  $C^1$  استفاده شده نشان می‌دهد.



شکل (۲-۲). شمای کلی مفهوم نرَبز برای سطح با یک المان [۱]

<sup>1</sup> Patches

<sup>2</sup> Knot Span

## ۲-۳- بی-اسپلاین‌ها و توابع نربز

استفاده از چند جمله‌ای‌های مرتبه بالا می‌تواند منجر به ایجاد شکل با مرز نوسانی شود. از سوی دیگر ساختن اشکال پیچیده با استفاده از چند جمله‌ای‌ها نیازمند بالا بردن درجه‌ی آن‌هاست و نمی‌توان تنها با استفاده از یک چند جمله‌ای چنین اشکالی را مدل کرد.

اسپلاین‌ها این مشکل را حذف کردند، زیرا این توابع ترکیبی از چند جمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند که با هم ترکیب شده‌اند تا حداکثر همواری را در مرزها به وجود آورند. این چند جمله‌ای‌ها می‌توانند با مرتبه‌های پیوستگی دلخواه به یکدیگر متصل شوند و یک منحنی را تشکیل دهند. تابع اسپلاین درجه سه که دارای دو مشتق پیوسته می‌باشد و حداقل میانگین انحنا را دارد، یک انتخاب طبیعی برای تعریف مرز می‌باشد [۱۰] و [۱۱]. برایبنت<sup>۱</sup> و همکاران [۱۲] از توابع مخلوط بی-اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند. توابع مخلوط انعطاف‌پذیری بالایی جهت نمایش هندسه ایجاد کردند. با استفاده از فرمول‌های بی-اسپلاین نظم و قاعده مورد نیاز برای مرز به دست آمده است. بی-اسپلاین از جمله‌ی این منحنی‌ها هستند که در ادامه به توضیح آن‌ها می‌پردازیم.

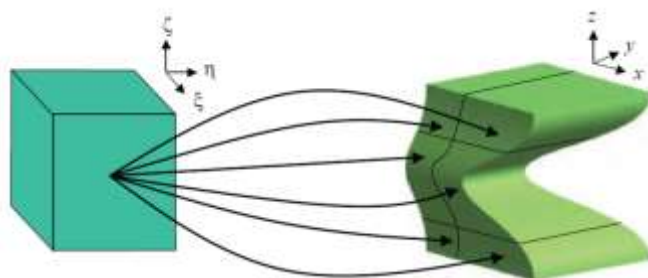
---

<sup>۱</sup> Braibent

## ۲-۳-۱- بردارهای گرهی<sup>۱</sup>

در فضای یک بعدی، بردار گرهی، دستگاه مختصات غیر نزولی ای در فضای پارامتری می باشد که به صورت  $\vec{E} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  نوشته می شود، به گونه ای که  $\xi_i \in R$  گره  $i$ ام است و  $i$  اندیس گره  $P$  مرتبه ای چند جمله ای و  $n$  تعداد توابع پایه ای است که در ساخت منحنی بی- اسپلاین استفاده می شود. گره ها فضای پارامتری را به المان ها تقسیم می کنند و مرزهای المان در فضای فیزیکی به سادگی تصاویر خطوط گرهی تحت نگاشت بی اسپلاین می باشند [۹].

در شکل (۲-۳) وصله ها زیر قلمروهایی شامل تعداد زیادی المان هستند که بازه های گرهی نامیده می شوند .



شکل (۲-۳). نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی در اجزای محدود کلاسیک [۹]

<sup>۱</sup> Knot Vector

به طور کلی بردارهای گرهی به دو دسته تناوبی و باز تقسیم‌بندی می‌شوند که هر کدام نیز می‌توانند حالت یکنواخت و یا غیر یکنواخت را داشته باشند. وقتی که در فضای پارامتری فاصله بین نقاط برابر باشد، بردار گرهی یکنواخت است و اگر فاصله‌ها نامساوی باشد، بردار گرهی غیر یکنواخت می‌باشد.

اگر یک عدد برای بیش از یک گره تکرار شود، به آن گره، تکراری می‌گوییم. یک بردار گرهی را باز گوئیم اگر اولین و آخرین گره‌های آن  $P+1$  بار تکرار شود. در مسائل یک بعدی، توابع پایه که از بردارهای گرهی باز تشکیل شده‌اند، یک درونیایی در انتهای بازه فضای پارامتری  $(\xi_i, \xi_{i+1})$ ، و در چند بعد نیز در گوشه‌های زیرالمان‌ها هستند، اما درونیایی از گره‌های داخلی نیستند. این یک تمایز بین گره‌ها در آیزوژئومتریک (*knots*) و در اجزای محدود (*nodes*) است.

[0 1 2 3 4 5 ] بردار گرهی تناوبی یکنواخت

[0 0.25 0.75 1 ] بردار گرهی تناوبی غیر یکنواخت

[0 0 1 2 3 4 5 5 ] بردار گرهی باز یکنواخت

[0 0 1 2 2 3 4 4 ] بردار گرهی باز غیریکنواخت

از دیگر تفاوت‌های موجود بین روش اجزای محدود و روش آیزوژئومتریک این است که در اجزای-محدود سنتی فضای پارامتری هر المان به صورت مجزا است (شکل ۲-۳)، ولی در روش آیزوژئومتریک فضای پارامتری هر زیردامنه جداست و هر زیردامنه خود شامل المان‌هایی است که بوسیله بردارهای گرهی تشکیل شدند و با مفهوم المان در اجزای محدود متفاوت می‌باشد.

## ۲-۳-۲- توابع پایه

با در اختیار داشتن یک بردار گرهی می توان توابع پایه مربوطه را به صورت بازگشتی تعیین نمود که شروع آن یک تابع تکه ای ثابت است.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i < \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1-2)$$

برای  $P = 1, 2, 3, \dots$  داریم:

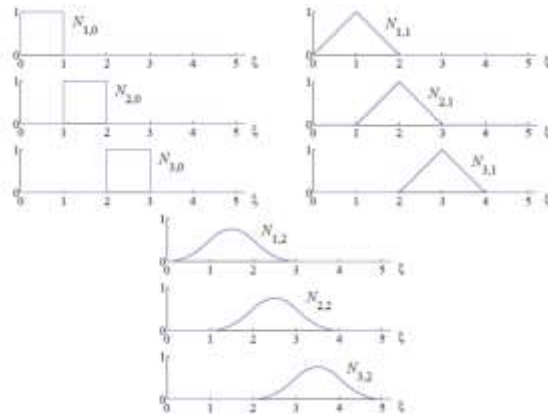
$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2-2)$$

که مرجع اصلی آن رابطه ی بازگشتی کاکس-دی بور است. یک مثال ابتدایی از نتایج فرمول های بالا برای بردار گرهی یکنواخت در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. توجه شود که برای توابع بی اسپلین با  $p = 0$  و  $p = 1$  به ترتیب مانند همان توابع ثابت تکه ای و توابع اجزای محدود خطی است، اما برای  $P \geq 2$  موضوع کمی متفاوت است. توابع پایه ی بی-اسپلین مرتبه دوم (همچنین توابع پایه نرئز، همان طور که بعداً نشان خواهیم داد) با یکدیگر مشابه هستند و فقط هر کدام نسبت به تابع قبلی انتقال داده شده اند. در صورتی که شکل توابع مربعی اجزای محدود بسته به این که منطبق بر گره میانی و یا انتهایی باشند متفاوت است. این الگوی همگن برای بی-اسپلین های مرتبه بالا نیز صدق می کند و می تواند باعث امتیاز بزرگی در حل معادلات نسبت به توابع اجزای محدود که کاملاً نامتشابه هستند،

شود. یک نمونه از توابع پایه برای بردار گرهی غیریکنواخت و باز در شکل (۲-۵) نشان داده شده است.

توجه شود که توابع پایه در ابتدا و انتها و  $\xi = 4$  دارای پیوستگی از مرتبه  $C^0$  هستند، در حالی که

در سایر نقاط پیوستگی آنها مرتبه  $C^1$  است.



شکل (۲-۴). توابع پایه بی-اسپلاین درجه صفر، یک و دو برای بردار گرهی یکنواخت  $\Xi = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  [۹]

به طور کلی توابع پایه با مرتبه  $P$  دارای  $P-1$  مشتق پیوسته هستند. اگر یک گره  $K$  بار تکرار

شود تعداد مشتقات پیوسته  $K$  مرتبه کاهش می‌یابد.

ویژگی‌های مهم توابع پایه بی-اسپلاین به شرح زیر می‌باشد:

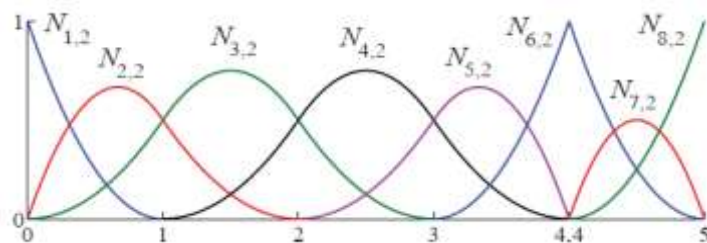
۱- مجموع توابع پایه در هر نقطه عدد یک است. یعنی  $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$

۲- هر تابع  $N_{i,p}$  به بازه  $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$  محدود می‌شود.

۳- توابع پایه در تمام قلمرو غیر منفی‌اند، یعنی  $N_{i,p}(\xi) \geq 0, \forall \xi$ ، در نتیجه همه‌ی ضرایب

ماتریس جرم که بر پایه‌ی بی-اسپلاین ساخته شده بزرگتر یا مساوی با صفر می‌باشد.

۴- هر تابع از مرتبه  $p$  در طول مرزهای المان دارای پیوستگی  $p-1$  است، که این خاصیت بسیار مهم دلیلی بر استفاده از بی-اسپلاین به عنوان پایه در آنالیز می‌باشد و این از مهم‌ترین ویژگی‌های آنالیز آیزوژئومتریک است. هر یک از توابع بی-اسپلاین از مرتبه  $p$  همواره  $p-1$  بازه گرهی را تحت پوشش قرار می‌دهد. این‌گونه توابع مرتبه بالاتر بخش بیشتری از قلمرو را نسبت به توابع در اجزای محدود کلاسیک تحت پوشش خود قرار می‌دهند. در شکل (۲-۵) نمونه‌ای از توابع مربعی با در نظر گرفتن بردار گرهی غیریکنواخت  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$  نمایش داده شده است.



شکل (۲-۵). توابع پایه‌ی درجه دو برای بردار گرهی غیریکنواخت و باز  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$  [۹]

از دیگر تفاوت‌های بین روش اجزای محدود و آیزوژئومتریک این است که در روش اجزای محدود تابع مجهول به وسیله توابع پایه تقریب زده می‌شود و در ادامه از همان توابع برای مدل هندسی استفاده می‌شود (در حالت آیزوپارامتریک). ولی در روش آیزوژئومتریک برعکس این حالت است ابتدا هندسه‌ی شکل توسط توابع پایه مدل می‌شوند و سپس از همین توابع برای تقریب تابع مجهول استفاده می‌شود.



### ۲-۳-۳- مشتقات توابع پایه بی-اسپلاین

مشتقات توابع پایه بی-اسپلاین را می‌توان به خوبی با استفاده از بی-اسپلاین‌های مرتبه پایین‌تر بیان

کرد. این مسأله با توجه به بازگشتی این بدیهی به نظر می‌رسد. بردار گرهی مشتق تابع پایه نام برای

چند جمله‌ای مرتبه  $P$  به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{P}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{P}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (۳-۲)$$

با مشتق‌گیری از از هر سمت این رابطه می‌توان آن را برای مشتقات مرتبه بالاتر به شکل زیر بسط داد:

$$\frac{d^K}{d\xi^K} N_{i,p}(\xi) = \frac{P}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left( \frac{d^{K-1}}{d\xi^{K-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{P}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left( \frac{d^{K-1}}{d\xi^{K-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (۴-۲)$$

با بسط رابطه‌ی (۴-۲) با توجه به رابطه‌ی (۳-۲) می‌توان به عبارت زیر بر حسب توابع مرتبه پایین‌تر

برسیم:  $N_{i,p-k}, \dots, N_{i+k,p-k}$

$$\frac{d^K}{d\xi^K} N_{i,p}(\xi) = \frac{P!}{(P-K)!} \left( \sum_{j=0}^K \alpha_{j,k} N_{i+k,p-k}(\xi) \right) \quad (۵-۲)$$

که در آن:

$$\alpha_{0,0}=1$$

$$\alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i}$$

$$\alpha_{k,i} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,i-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$\alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_{i+k}} \quad (۶-۲)$$

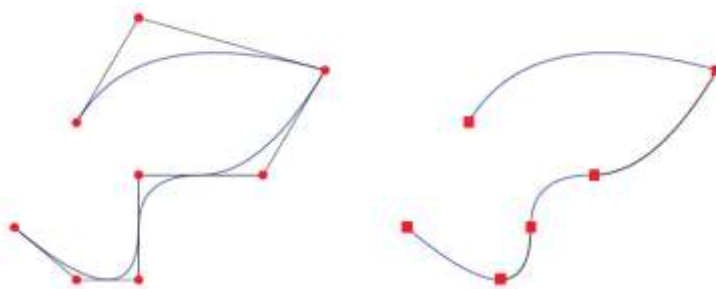
در نتیجه بسیاری از این ضرایب در حضور نقاط تکراری صفر خواهد بود. هر زمان که این اتفاق رخ داد مقدار این ضرایب کلاً صفر در نظر گرفته می شود.

## ۲-۳-۴- منحنی بی-اسپلاین

منحنی‌های بی-اسپلاین در  $R^d$  با یک ترکیب خطی توابع پایه بی-اسپلاین ساخته می‌شوند. ضرایب توابع پایه به عنوان نقاط کنترلی در نظر گرفته می‌شوند، که می‌توان آن‌ها را هم ارز مختصات نقاط گرهی در تحلیل اجزای محدود در نظر گرفت. درونیایی خطی تکه‌ای نقاط کنترلی چند ضلعی کنترلی را به دست می‌دهد. برای  $n$  تابع بی-اسپلاین و نقاط کنترلی متناظر  $B_i \in R^d$  یک منحنی بی-اسپلاین به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (7-2)$$

یک نمونه از این منحنی‌ها برای تابع پایه درجه دو که قبلاً بررسی شد، در شکل (۶-۲) نمایش داده شده است. توجه شود که منحنی در نقاط کنترلی ابتدایی و انتهایی به دلیل این که بردار گرهی باز است دارای پیوستگی صفر است و همین‌طور در نقطه‌ی کنترلی ششم به دلیل اینکه تعداد دفعات تکرار  $\xi = 4$  برابر با مرتبه‌ی چند جمله‌ای است. ملاحظه می‌شود که منحنی در اولین، آخرین و ششمین نقطه‌ی کنترلی بر چند ضلعی کنترلی مماس است. منحنی در هر جایی که گرهی تکراری  $\xi = 4$  وجود دارد پیوستگی مرتبه‌ی  $C^{p-2} = C^0$  دارد.



(الف) نقاط کنترلی و منحنی بی-اسپلاین (ب) منحنی و شبکه نشان داده شده به موقعیت گره‌ها

شکل (۶-۲) منحنی بی-اسپلاین به همراه شبکه‌ی کنترلی و موقعیت بردارهای گره‌ی [۱]

خواص مهم منحنی بی-اسپلاین به شرح زیر است:

۱- این منحنی‌ها در جاهایی غیر از تکرار گره‌ها یا نقاط کنترلی دارای مشتقات پیوسته‌ی مرتبه‌ی

$P-1$  هستند. به طور کلی در طول مرز یک المان، پیوستگی در مشتقات حداقل به همان

مقداری است که توابع پایه‌ی آن‌ها در طول مقادیر گره‌ی مربوطه دارند.

۲- تکرار  $K$  مرتبه یک نقطه کنترلی تعداد مشتقات پیوسته را  $K$  مرتبه کاهش می‌دهد.

۳- جابجایی نسبی یک منحنی بی-اسپلاین با اعمال جابجایی به نقاط کنترلی آن به دست می‌آید.

این خاصیت را کواریانس سلبی<sup>۱</sup> می‌گویند.

<sup>۱</sup> Affine Covariance

## ۲-۳-۵- سطوح بی-اسپلین

برای شبکه کنترلی  $\{B_{i,j}\}$ ،  $i=1,2,\dots,n$ ،  $j=1,2,\dots,m$  و بردارهای گرهی

$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  و  $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$  یک سطح بی-اسپلین حاصل از ضرب تانسوری

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (۸-۲)$$

که در آن  $N_{i,p}$  و  $M_{j,q}$  توابع پایه‌ی منحنی‌های بی-اسپلین هستند. نمونه‌ای از یک سطح بی-

اسپلین به همراه شبکه‌ی نقاط کنترلی آن در شکل زیر نمایش داده شده است. در شکل (۸-۲) یک

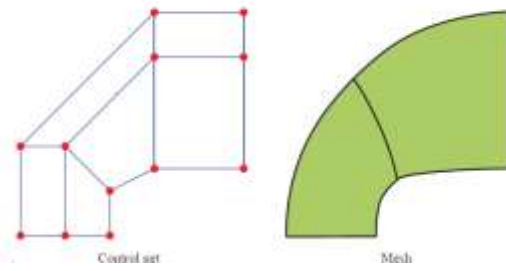
سطح بی-اسپلین به همراه شبکه کنترلی آن نشان داده شده است. بردارهای گرهی این شکل به

صورت  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$  و  $H = \{0, 0, 0, 1, 1\}$  می‌باشد. و همچنین مختصات نقاط کنترلی

شکل طبق شکل (۷-۲) می‌باشد.

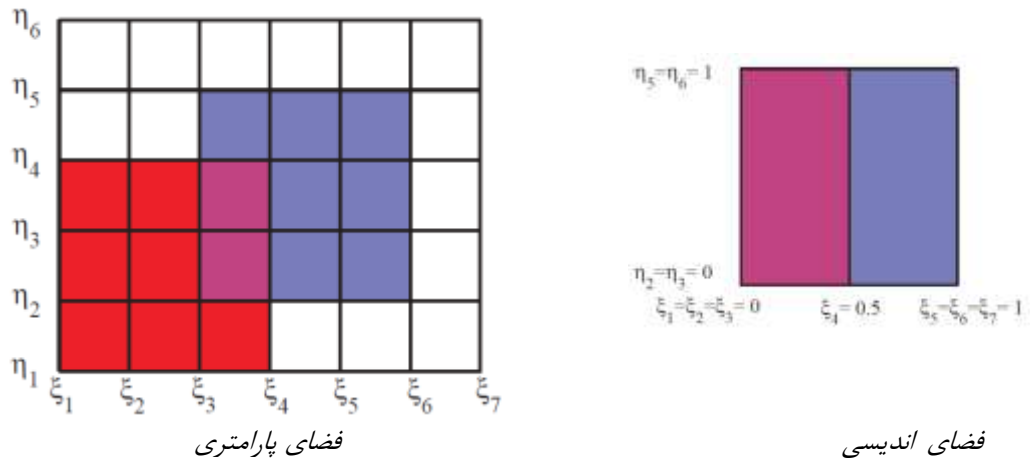
<b>i</b>	<b>j</b>	<b>B<sub>i,j</sub></b>
1	1	(0,0)
1	2	(-1,0)
1	3	(-2,0)
2	1	(0,1)
2	2	(-1,2)
2	3	(-2,2)
3	1	(1,1.5)
3	2	(1,4)
3	3	(1,5)
4	1	(3,1.5)
4	2	(3,4)
4	3	(3,5)

شکل (۷-۲). مختصات نقاط کنترلی شکل (۸-۲)



شکل (۸-۲). سطح بی-اسپلاین [۱].

و در نهایت فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی به شکل زیر به دست می آید.



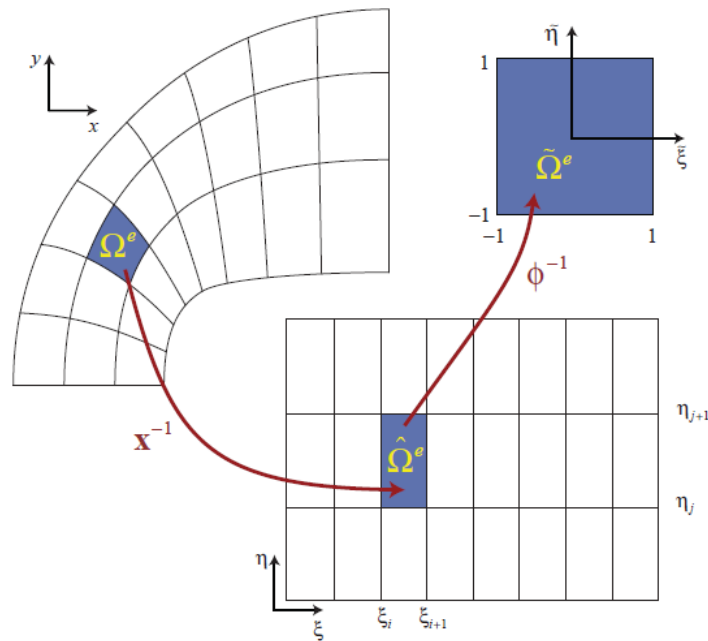
شکل (۹-۲). فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی شکل (۸-۲) [۱].

برای آرایه‌های انتگرال‌گیری عددی ساخته شده از روی بی-اسپلاین‌ها، المان‌ها به عنوان دهانه‌های

گرهی  $[\eta_j, \eta_{j+1}] \times [\xi_i, \xi_{i+1}]$  در نظر گرفته می‌شوند. برای درک بهتر یک المان مرجع دو بعدی و

تصویر آن در فضای فیزیکی به شکل (۲-۱۰) توجه کنید. در انتگرال‌گیری با استفاده از تغییر متغیر و

قوانین انتگرال‌گیری گوس به المان مرجع برمی‌گردیم.



شکل (۲-۱۰). المان گوس و تصویر آن در فضای فیزیکی و پارامتری

## ۲-۳-۶- احجام بی-اسپلاین

احجام بی-اسپلاین، از ضرب تانسوری همانند سطوح بی-اسپلاین تعریف می‌شوند. برای شبکه‌ی

کنترلی  $\{B_{i,j,k}\}$ ،  $k=1,2,\dots,l$  و  $j=1,2,\dots,m$  و  $i=1,2,\dots,n$  و بردارهای گرهی،

$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  و  $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$  و یک حجم بی-

اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k} \quad (9-2)$$

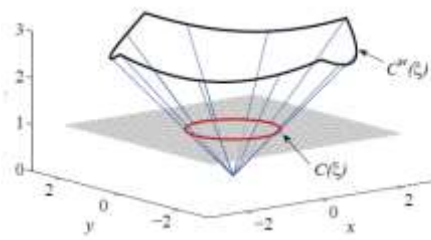
### ۲-۳-۷-بی-اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت<sup>۱</sup> (NURBS)

اشکال هندسی در  $R^d$  را می‌توان با انتقال تصویری اشکال بی-اسپلاین در  $R^{d+1}$  به دست آورد. مقاطع منحنی شکل مانند دایره و بیضی را می‌توان به طور دقیق با انتقال تصویری منحنی‌های درجه-۲ و دو قطعه‌ای ساخت. در شکل (۲-۱۱) این مطلب نمایش داده شده، که در آن یک دایره در  $R^2$  از یک منحنی بی-اسپلاین درجه‌ی دو قطعه‌ای در  $R^3$  ساخته شده است. انتقال تصویری یک منحنی بی-اسپلاین، یک چند جمله‌ای نسبی به فرم  $C_R(\xi) = f(\xi)/g(\xi)$  می‌شود، که  $f$  و  $g$  در آن چند جمله‌ای‌های قطعه‌ای هستند. نحوه‌ی ساخت یک منحنی بی-اسپلاین نسبی در  $R^d$  به شکل زیر می‌باشد. فرض کنید  $\{B_i^w\}$  مجموعه‌ای از نقاط کنترلی برای یک منحنی بی-اسپلاین در  $R^{d+1}$  با بردار گرهی باشد. این نقاط به عنوان نقاط کنترلی تصویری برای منحنی نریز مورد نظر در  $R^d$  در نظر گرفته می‌شوند. نقاط کنترلی در  $R^d$  از تصویر نقاط کنترلی تصویری با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند:

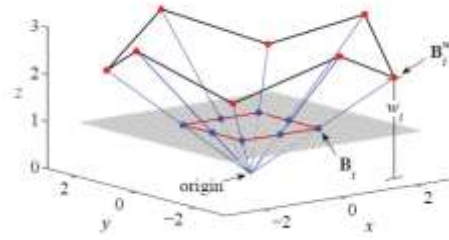
$$(B_i)_j = (B_i^w)_j \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (10-2)$$

$$w_i = (B_i^w)_{d+1} \quad (11-2)$$

<sup>۱</sup> Non-Uniform Rational B-Spline



ب



الف

شکل (۲-۱۱). ساخت منحنی بی-اسپلاین نسبی از منحنی بی-اسپلاین [۱].

که در آن  $(B_i)_j$  مؤلفه  $j$ ام بردار  $B_i$  است و  $w_i$  به عنوان آامین وزن در نظر گرفته می‌شود. در

شکل (۲-۱۱-الف) وزن مؤلفه‌ی قائم نقاط کنترلی منحنی بی-اسپلاین قطعه‌ای را در  $R^3$  تعریف می‌

کنند. توابع پایه‌ی نسبی و منحنی نریز به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} \quad (12-2)$$

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)B_i \quad (13-2)$$

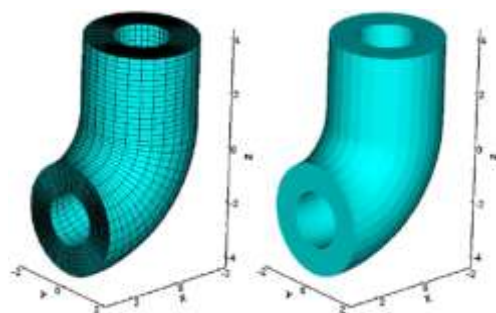
سطوح و احجام نسبی به طور مشابه بر حسب توابع پایه‌ی نسبی تعریف می‌شوند:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{ij}} \quad (14-2)$$

$$R_{i,j,k}^{p,q,r} = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}} \quad (15-2)$$

به عنوان مثال شکل (۲-۱۲) یک قطعه ساخته شده با استفاده از نریز را نشان می‌دهد.

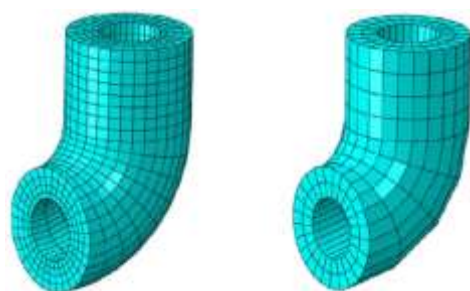




(ب)

(الف)

شکل (۲-۱۲). مدل سازی هندسی یک لوله خم شده با استفاده از ۹۰ نقطه کنترلی (الف) بدون (ب) با شبکه‌ی ترسیمی



(ب)

(الف)

شکل (۲-۱۳). تقزیب هندسه لوله خم شده با استفاده از روش اجزای محدود (الف) ۶۷۵ گره (ب) ۲۷۲۰ گره

همان طور که در شکل های (۲-۱۲) و (۲-۱۳) مشاهده می شود، به هنگام استفاده از روش اجزای-

محدود در وجوه لوله به رغم استفاده از شبکه بندی ریز، تقریب قابل توجهی (ایجاد سطوح مسطح)

نسبت به روش آیزوژئومتریک وجود دارد. بنابراین در کمترین حالت بر اساس ۶۷۵ گره، حجم

محاسبات در مدل سازی هندسه ۸۷ درصد کاهش یافته است. ضمن این که هندسه تولید شده توسط

نرېزها دقیق تر است [۱۳].

از خواص مهم نربز می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱- مجموع مقادیر توابع پایه‌ی نربز برابر واحد است.

۲- پیوستگی توابع پایه‌ی نربز همانند بی-اسپلاین‌ها است.

۳- انتقال نسبی با عمل انتقال بر نقاط کنترلی به دست می‌آید، یعنی نربز خاصیت کواریانس سلبی دارد.

۴- اگر وزن‌ها برابر باشند نربز همان بی-اسپلاین خواهد بود (یا به عبارتی چند جمله‌ای قطعه‌ای).

۵- سطوح و احجام نربز انتقال تصویری اشکال چند جمله‌ای قطعه‌ای هستند.

## ۲-۳-۸- مشتقات توابع پایه نربز

از آنجایی که توابع پایه‌ی نربز از روی بی-اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند، مشتقات آن‌ها وابسته به مشتقات بی-اسپلاین‌هاست.

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{W(\xi)N'_{i,p}(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (16-2)$$

که در آن:

$$N'_{i,p}(\xi) = \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) \quad , \quad W'(\xi) = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(\xi)w_i \quad (17-2)$$

## ۲-۴- نربز به عنوان پایه‌ای برای تحلیل

چهارچوب تحلیل بر مبنای نربز شامل مولفه‌های زیر است [۱]:

۱- شبکه برای یک زیر المان نربز به صورت حاصل ضرب بردارهای گرهی تعریف می‌شود. برای مثال در

سه بعد، یک شبکه به صورت  $\mathbb{E} \times \mathbf{H} \times \mathbf{Z}$  به دست می‌آید.

۲- دهانه‌های گرهی، حوزه‌ی مسأله را به المان‌ها تقسیم می‌کنند.

۳- زیر بنای هر تابع پایه تنها تعداد کمی المان است.

۴- نقاط کنترلی اختصاص داده شده به توابع پایه، هندسه را تشکیل می‌دهند.

۵- از مفهوم آیزوپارامتریک در این جا استفاده می‌شود، یعنی پارامترهای مورد سؤال (مانند جابه‌جایی،

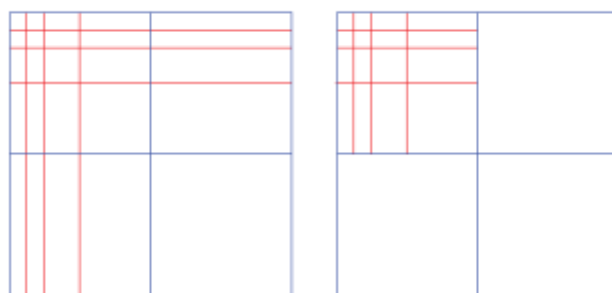
سرعت، دما و ...) برحسب همان توابع پایه‌ای نمایش داده می‌شوند که برای نمایش هندسه به کار

رفته‌اند.

۶- استراتژی‌های اصلاح شبکه از ترکیب تکنیک‌های گره‌گذاری و افزایش مرتبه به دست می‌آیند. این

کار استفاده از روش‌هایی مشابه اصلاح  $h$ ،  $p$  و همچنین روش جدید  $k$  را فراهم می‌کند.

۷- آرایه‌های ساخته شده از زیر المان‌های آیزوپارامتریک نریز می‌توانند همچون روش اجزای محدود برای تشکیل آرایه‌های کلی برهم‌گذاری<sup>۱</sup> شوند. سازگاری بین زیر المان‌های نریز، با استفاده از نمایش نریز یکسان لبه و سطح برای مرز مشترک زیر المان‌ها به دست می‌آید. در شکل (۲-۱۴-الف) استفاده از روش پیوسته‌ی گالرکین نمایش داده شده است. اصلاح از زیر المانی به زیر المانی دیگر انتقال می‌یابد. دو روش جایگزین طبق شکل (۲-۱۴-ب) وجود دارد. یکی روش ناپیوسته‌ی گالرکین است که می‌تواند در سطح زیر المان انجام شود. با استفاده از فرمول‌بندی تغییراتی سازگاری به صورت ضعیفی تحمیل می‌شود. روش دیگر استفاده از معادلات مقید برای نقاط و متغیرهای کنترلی است تا به این وسیله سازگاری نقطه‌ای در مرز مشترک زیر المان‌ها را به دست آوریم.



(ب)

(الف)

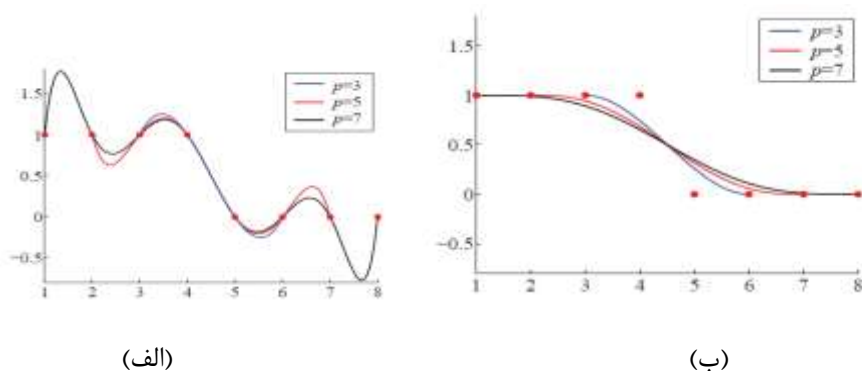
شکل (۲-۱۴). روش‌های (الف) پیوسته و (ب) ناپیوسته‌ی گالرکین

۸- آسان‌ترین راه برای اعمال شرایط مرزی دیریکله، اعمال آن بر متغیرهای کنترلی است. در مورد شرایط دیریکله‌ی همگن این کار منجر به نتایج دقیق و ارضای نقطه‌ای می‌شود. در مورد شرایط

<sup>۱</sup> Assemble

دریکله‌ی غیر همگن، مقادیر مرزی باید توسط توابع مربوط به فضای نربز تقریب زده شوند. این کار منجر به ارضای قوی ولی تقریبی شرایط مرزی می‌شود. یک فرمول‌بندی جایگزین از شرایط دریکله می‌تواند ارضای "ضعیف" یک شکل استاندارد از روش ناپیوسته‌ی گالرکین باشد.

مشهور است که توابع درونیابی اجزای محدود برای تطبیق کردن داده‌های ناپیوسته دارای نوسان هستند. یک مثال از این مطلب در شکل (۲-۱۵-الف) نشان داده شده است که چند جمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه سوم، پنجم و هفتم ناپیوستگی بین هشت نقطه را در  $R^2$  درونیابی می‌کنند. توجه کنید که همچنان که درجه افزایش می‌یابد، دامنه‌ی نوسان افزایش می‌یابد. این پدیده را پدیده‌ی گیبز<sup>۱</sup> می‌نامند. وقتی از همین اطلاعات به عنوان نقاط کنترلی در نربز استفاده می‌شود رفتار کاملاً متفاوتی را مشاهده می‌کنیم. در شکل (۲-۱۵-ب) منحنی‌های نربز یکنوا هستند، که خاصیت میرایی تغییرات<sup>۲</sup> را نشان می‌دهد. این خاصیت در نمایش لایه‌های تیز برتری ایجاد می‌کند.



شکل (۲-۱۵). مقایسه‌ی تطبیق دادن داده‌ای ناپیوسته (الف) روش اجزای محدود (ب) روش آیزوژئومتریکی

<sup>1</sup> Gibbs Phenomena  
<sup>2</sup> Variation Diminishing

## ۲-۵- تحلیل آیزوژئومتریکی مسائل تنش مسطح

هدف از این بخش نمایش فرمول بندی روش آیزوژئومتریکی در مسائل تنش مسطح می باشد.

### ۲-۵-۱- فرمول بندی آیزوژئومتریکی

تابع تغییر مکان در مسائل تنش مسطح را می توان با استفاده از توابع پایه ی نریز به صورت زیر

تقریب زد:

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{u_{i,j}} \quad (18-2)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{v_{i,j}} \quad (19-2)$$

در این روابط  $R_{i,j}(\xi, \eta)$  توابع پایه ی نریز می باشند. با توجه به خاصیت بازه ی تاثیر توابع درونیاپی،

روابط فوق را می توان برای  $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$  و  $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1}]$  به صورت زیر ساده نمود:

$$\bar{\mathbf{u}}_{i,j} = \begin{Bmatrix} u_{i,j} \\ v_{i,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(\xi, \eta) P_{u_{k,l}} \\ \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(\xi, \eta) P_{v_{k,l}} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{P}} \quad (20-2)$$

که در رابطه ی بالا  $\bar{\mathbf{R}}$  را می توان به صورت بسط یافته ی زیر نوشت:

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p_1, j-p_2} & 0 & \dots & R_{i-p_1, j} & 0 & \dots & R_{i, j} & 0 \\ 0 & R_{i-p_1, j-p_2} & \dots & 0 & R_{i-p_1, j} & \dots & 0 & R_{i, j} \end{bmatrix} \quad (21-2)$$

و هم چنین  $\bar{\mathbf{P}}$  عبارت است از:

$$\bar{\mathbf{P}} = [P_{u \ i-p, j-q} \ P_{v \ i-p, j-q} \ \dots \ P_{u \ i-p, j} \ P_{v \ i-p, j} \ \dots \ P_{u \ i, j} \ P_{v \ i, j}]^T \quad (22-2)$$

در مسائل تنش مسطح، بردار کرنش دارای سه مولفه مستقل از هم می باشد که به صورت زیر

تعریف می شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial/\partial X & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y \\ \partial/\partial Y & \partial/\partial X \end{bmatrix} \quad (23-2)$$

با مشخص بودن تغییر مکان در نقاط داخلی هر زیردامنه می توان کرنش را در هر نقطه دلخواه

بدست آورد. که در معادله (23-2) بردار تغییر مکان،  $\boldsymbol{\varepsilon}$  کرنش و  $\mathbf{D}$  عملگر دیفرانسیل می باشد.

همچنین با جای گذاری معادله (20-2) در رابطه (23-2) می توان کرنش را به صورت زیر تقریب

زد:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{P}}, \mathbf{B} = \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \partial R/\partial X & 0 \\ 0 & \partial R/\partial Y \\ \partial R/\partial Y & \partial R/\partial X \end{bmatrix} \quad (24-2)$$

که با توجه به ماتریس دیفرانسیل  $\mathbf{D}$ ، ماتریس  $\mathbf{B}$  برای مسائل تنش مسطح به صورت رابطه (24-2)

خواهد بود. هم چنین در مسائل تنش مسطح، برای بردار تنش می توان سه مولفه تنش را به صورت

رابطه (25-2) در نظر گرفت:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{C} = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

با فرض رفتار خطی کشسان، رابطه‌ی بین تنش و کرنش، خطی خواهد بود و  $\mathbf{C}$  ماتریس خواص

مصالح می‌باشد. در ادامه می‌توان مثل فرمول‌بندی روش اجزای محدود در مسائل تنش مسطح با

استفاده از رابطه‌ی کار مجازی، ماتریس ضرایب را به دست آورد. برای ناحیه‌ی فرضی  $\Omega^P$  رابطه‌ی کار

مجازی به صورت زیر است:

$$\int_{\Omega^P} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega^P} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma^P} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (26-2)$$

که در این رابطه  $\mathbf{t}$  و  $\mathbf{b}$  به ترتیب نیروهای سطحی و حجمی می‌باشند. با استفاده از رابطه‌ی کرنش-

تغییر مکان (2-23) تغییرات کرنش‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \bar{\mathbf{P}} \quad (27-2)$$

اکنون با جایگزینی رابطه‌ی فوق در قسمت اول رابطه‌ی کار مجازی و با به کارگیری  $\delta \mathbf{u} = \bar{\mathbf{R}} \delta \bar{\mathbf{P}}$

برای بقیه‌ی قسمت‌های این رابطه و حذف ضرایب  $\delta \bar{\mathbf{P}}$  به دلیل غیر صفر فرض شدن آن‌ها در رابطه‌ی

کار مجازی ماتریس ضرایب  $\mathbf{K}$  و ماتریس نیروها  $\mathbf{F}$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega^P} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (28-2)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega^P} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma^P} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (29-2)$$

بنابراین مقادیر مجهول نقاط کنترلی را می‌توان از حل دستگاه معادلات زیر محاسبه نمود:



$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{P}} \quad (۳۰-۲)$$

چنان که اشاره شد شبیه به مفهوم آیزوپارامتریک در روش اجزای محدود، در این روش نیز از تقریب یکسان تابع مجهول و هندسه استفاده می‌شود. با این تفاوت که در این جا هندسه به مراتب دقیق‌تر مدل‌سازی می‌شود. بنابراین در مسأله‌ی تنش مسطح، هندسه‌ی دامنه به صورت زیر مدل می‌شود:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{x i,j} \quad (۳۱-۲)$$

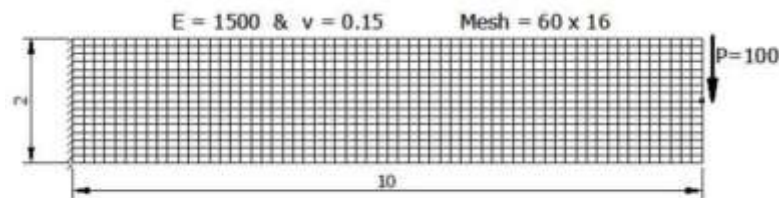
$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{y i,j} \quad (۳۲-۲)$$

که در این روابط  $P_{x i,j}$  و  $P_{y i,j}$  مختصات  $x$  و  $y$  نقاط کنترلی می‌باشند. همان‌طور که قبلاً در تقریب تابع مجهول نیز اشاره شد، در روابط فوق همه‌ی پارامترها بر حسب  $\eta$  و  $\xi$  نوشته شده‌اند که لزوماً نیاز به نگاشت در محاسبات همانند روش اجزای محدود را ایجاب خواهد کرد.

## ۲-۶- مقایسه‌ی روش آیزوژئومتریک با روش اجزای محدود

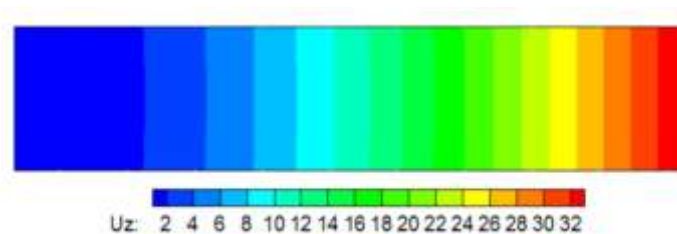
در این جا با حل یک مثال [۱۴] و مقایسه نتایج با روش اجزای محدود، توانمندی و مزایای روش آیزوژئومتریک نشان داده شده است. در این مثال فرض شده است که در یک صفحه مستطیلی در حالت تنش مسطح با اتصال گیردار در یک انتها و تحت اثر بار متمرکز ۱۰۰ کیلوگرم نیرو در انتهای آزاد خود (شکل ۲-۱۶) قرار دارد. مقدار مدول الاستیسیته در کل دامنه برابر با مقدار ثابت ۱۵۰۰

کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع و مقدار ضریب پواسون برابر با  $0.15$  فرض شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود ابعاد تیر  $10$  سانتی‌متر در  $2$  سانتی‌متر و با ضخامت واحد می‌باشد. ابتدا این مسأله با روش اجزای محدود و با تقسیم دامنه به  $960$  المان چهار گرهی حل شده است. ملاحظه می‌شود که در روش اجزای محدود، حل مسأله منجر به حل دستگاه معادلاتی با حدود  $1000$  معادله و مجهول خواهد شد. سپس با روش آیزوژئومتریک نیز مسأله مجدداً حل و نتایج با روش اجزای محدود مقایسه شده است.



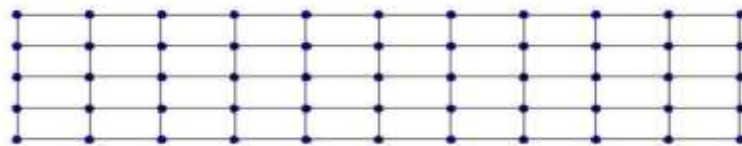
شکل (۲-۱۶). طرح اولیه‌ی مثال مرجع [۱۴]

نتیجه تحلیل مسأله برای تغییر مکان  $u_z$  صفحه مستطیلی با روش اجزای محدود در شکل (۲-۱۷) نشان داده شده است.



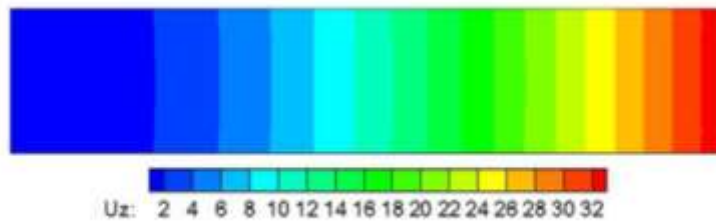
شکل (۲-۱۷). تغییر مکان قائم شکل (۲-۱۶) با روش اجزای محدود

البته مسأله مذکور با تعداد المان‌های بیشتر نیز حل شده است که اساساً تغییر معناداری در جواب‌ها حاصل نشده است. اکنون مسأله فوق را با روش آیزوژئومتریکی و با تعداد 55 نقطه کنترلی مطابق شکل حل می‌کنیم. البته دقت شود که در شکل هر مستطیل یک المان نیست و اصلاً در این خصوص شباهتی بین اجزای محدود و روش آیزوژئومتریکی وجود ندارد. در واقع شبه المان‌های روش آیزوژئومتریکی از حاصل ضرب بردارهای گرهی به دست می‌آید. نکته دیگر این که در اجزای محدود همواره گره‌ها بر روی دامنه قرار می‌گیرند، در حالی که در روش آیزوژئومتریکی نقاط کنترلی در حالت کلی می‌توانند بر روی دامنه نباشند.



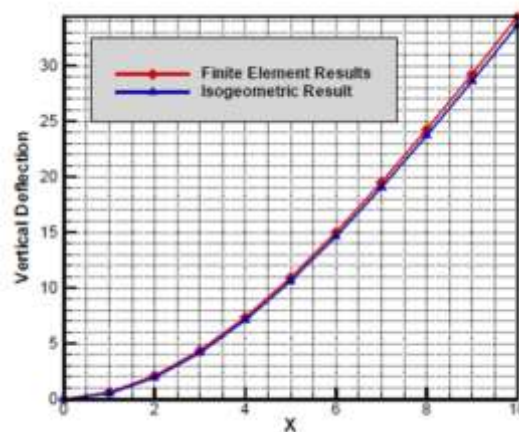
شکل (۲-۱۸). مدل‌سازی شکل (۲-۱۶) با روش آیزوژئومتریکی

بردار گره برای جهت طولی برابر  $\{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$  و برای جهت عرضی برابر  $\{0,0,0,0.33,0.66,1,1,1\}$  در نظر گرفته شده است. هم‌چنین درجه توابع پایه اسپلاین در این مسأله مساوی ۲ لحاظ گردیده است. نتیجه تحلیل آیزوژئومتریکی با شرایط مذکور، در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۱۹-۲). تغییر مکان قائم شکل (۱۶-۲) با روش آیزوژئومتری

همان طور که از روی کانتورهای شکل (۱۷-۲) و (۱۹-۲) مشاهده می‌شود، نتایج تحلیل بسیار شبیه به یکدیگر است، که این مسأله برای تغییر شکل قائم محور میانی صفحه مستطیلی فوق در شکل (۲-۲) (۲۰) نمایش داده شده است.



شکل (۲۰-۲). مقایسه نتایج تحلیل شکل (۱۶-۲) با دو روش اجزای محدود و آیزوژئومتری [۲]

در تحلیل آیزوژئومتری، در واقع فقط از ۱۲ شبه المان که از حاصل ضرب تعداد دهانه‌های گرهی حاصل می‌شود، استفاده شده است. در صورتی که در روش اجزای محدود از ۹۶۰ المان چهارگره‌ی یعنی ۸۰ برابر بیشتر، مورد استفاده قرار گرفته است. به علاوه در روش تحلیل آیزوژئومتری تعداد

مجهولات گرهي حدود ۱۰۰ و در اجزای محدود حدود ۱۰۰۰ می باشد، که باعث تغییرات قابل توجهی در ابعاد دستگاه معادلات نهایی شده و سبب افزایش سرعت و دقت حل مسأله در روش آیزوژئومتریکی می شود. همچنین برای مدل سازی تکیه گاه در روش اجزای محدود فقط نقاط تکیه گاهی گیردار می - شوند که از معایب و ضعف های روش اجزای محدود محسوب می شود، در صورتی که در روش آیزوژئومتریکی کل وجه سمت چپ صفحه ی مستطیلی به صورت سراسری و پیوسته گیردار مدل می - شود و در نتیجه دقت بالاتر مدل سازی در روش آیزوژئومتریکی نسبت به روش اجزای محدود روشن خواهد بود.



# فصل سوم

## بهینه‌سازی

### ۳-۱- مقدمه

بهینه‌سازی شکل سازه‌ها به دنبال یافتن هندسه‌ی بهینه‌ی یک سازه است، به گونه‌ای که رفتار خاصی از سازه تحت قیدهای مشخص در بهترین حالت قرار می‌گیرد. توابعی که هدف طراحی و یا قیود مسأله را مشخص می‌کنند معمولاً وزن، انرژی ذخیره شده، تنش ماکزیمم و یا جابه‌جایی ماکزیمم هستند.

به‌طور کلی فرآیند بهینه‌سازی شکل دارای سه مرحله شامل: توصیف و اصلاح پارامتری هندسه (مدل طراحی)، تحلیل پاسخ سازه (مدل تحلیل) و الگوریتم بهینه‌سازی است. در مدل طراحی حوزه هندسی با استفاده از پارامترهایی (متغیرهای طراحی) که با تغییرات شکل در ارتباط هستند توصیف می‌شود. در مدل تحلیل پاسخ سازه با استفاده از روش‌های عددی مانند روش اجزای محدود محاسبه می‌شود. در نهایت الگوریتم بهینه‌سازی کنترل فرآیند تکرار را برای نزدیک شدن به مقدار بهینه در دست می‌گیرد [۱۵].

پارامتری‌سازی هندسه نقش مهمی را در این رویه بازی می‌کند و توصیف مناسب مرز بسیار لازم است. این مورد بیشتر در مسائل مربوط به کاهش تمرکز تنش در جایی که تغییر در شکل مرز بسیار مهم است، آشکار می‌شود. علاوه بر این انتخاب متغیرهای طراحی می‌تواند در موفقیت روند بهینه‌سازی موثر باشد و لازم است متناسب با مدل تحلیل انتخاب شود.



در این فصل ابتدا به تعاریف اولیه در بهینه‌سازی می‌پردازیم. سپس انواع مسائل بهینه‌سازی بررسی می‌شود. در ادامه فرم استاندارد مسأله بهینه‌سازی بیان شده و روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. بعد از آن به بررسی بهینه‌سازی شکل سازه‌ها می‌پردازیم. در این بخش نحوه‌ی نمایش مرزها به طور کامل معرفی می‌شود.

### ۳-۲- تعاریف اولیه

فرمول‌بندی و شکل کلی مسائل بهینه‌سازی براساس چند پارامتر اصلی تعریف می‌شود که شامل متغیرهای طراحی، تابع هدف و توابع قید می‌باشند و در ادامه به توضیح هر کدام می‌پردازیم.

### ۳-۲-۱- متغیرهای طراحی

متغیرهای طراحی پارامترهایی هستند که در تغییر آن‌ها مقداری آزادی داریم و می‌توانیم اصلاح لازم در سازه مورد نظر را ایجاد کنیم، این پارامترها می‌توانند ابعاد سطح مقطع یا اندازه اعضا، پارامترهای کنترل هندسه‌ی سازه یا خواص مصالح آن و... باشد. متغیرهای طراحی ممکن است مقادیر پیوسته یا گسسته داشته باشند. متغیرهای طراحی پیوسته دارای یک محدوده تغییرات هستند و می‌توانند هر مقداری از این محدوده را دارا باشند. اما متغیرهای طراحی گسسته تنها می‌توانند مقدار خاصی داشته باشند که معمولاً از بین تعدادی مقادیر مجاز انتخاب می‌شود.

### ۳-۲-۲- تابع هدف

تابع هدف تابعی است که از آن به عنوان معیاری جهت تعیین میزان موثر بودن طراحی استفاده می‌شود. در مسأله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ها وزن، تغییر مکان، تنش، فرکانس لرزش، بارهای کمانش و هزینه و یا ترکیبی از این موارد را می‌توان به عنوان تابع هدف در نظر گرفت. وقتی که چند تابع هدف داریم با توجه به پیچیده بودن مسأله سعی می‌کنیم که تابع هدف را به یک تابع کاهش دهیم که این عمل را با ترکیب کردن توابع هدف انجام می‌دهیم و یا یک تابع هدف را که مهم‌تر است انتخاب می‌کنیم و مابقی را به عنوان محدودیت و قید مسأله در نظر می‌گیریم. زمانی که انتخاب بین توابع هدف مشکل باشد از روشی به نام بهینه‌سازی ادج ورث<sup>۱</sup> - پارتو<sup>۲</sup> استفاده می‌کنیم که به مسائل دارای توابع هدف چندگانه می‌پردازد. یک بردار متغیر  $(X^*)$  را طراحی بهینه‌ی ادج ورث - پارتو<sup>۲</sup> گوئیم هر گاه به ازای هر  $X$  دیگر مقادیر همه‌ی توابع هدف‌ها در مقایسه با مقدار آنها به ازای  $X^*$  یکسان باشد و یا حداقل یکی از آنها بدتر شود.

### ۳-۲-۳- قیدها

قیدهای طراحی حدودی هستند که برای متغیرهای طراحی وجود دارد و نمی‌توانند از آنها تجاوز کرد. این حدود به دو دسته‌ی قیدهای مساوی و قیدهای نامساوی تقسیم می‌شوند. قیودی که حد بالا

<sup>1</sup> Edgeworth-Pareto Optimization

<sup>2</sup> Edgeworth-Pareto Optimal

و پایین متغیرهای طراحی را تعیین می‌کنند از دسته قیدهای نامساوی‌اند. گاهی نیاز به قیود مساوی داریم. برخی از روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی نمی‌توانند قیود مساوی را در نظر بگیرند. در چنین مواردی قید مساوی را به دو قید نامساوی تبدیل می‌کنند.

$$h(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

### ۳-۳- فرم استاندارد مسأله‌ی بهینه‌سازی

فرم استاندارد مسأله‌ی بهینه‌سازی به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{s.t. } g_j(x) \geq 0, \quad j=1, \dots, n_g \\ h_k(x) = 0, \quad k=1, \dots, n_e \end{cases} \quad (2-3)$$

زمانی که با تابع هدفی سر و کار داریم که قرار است ماکزیمم شود به آسانی می‌توان برای استاندارد-سازی مینیمم کردن منفی آن را در نظر بگیریم و چنین مطلبی را در مورد قیدهای نامساوی نیز داریم. یک مسأله‌ی بهینه‌سازی را خطی گویند زمانی که هم تابع هدف و هم قیود تابع خطی از متغیرهای طراحی باشند. این مسائل با شاخه‌ای از برنامه‌ریزی ریاضی به نام برنامه‌ریزی خطی<sup>۱</sup> حل می‌شوند.

یکی از مسائل اساسی در بیشتر روش‌های بهینه‌سازی تعیین قیدهای فعال است، زیرا اگر بخواهیم تمام قیدها را در نظر بگیریم هزینه‌ی محاسبات به طور چشم‌گیری افزایش خواهد یافت. از طرف دیگر

---

<sup>۱</sup> Linear Programming

اگر تنها قیدهای فعال یا نزدیک به فعال را در نظر بگیریم، به دلیل نوسان در مجموعه‌ی قیدهای فعال ممکن است همگرایی فرآیند بهینه‌سازی با مشکل روبه‌رو شود. معمولاً بیشتر روش‌های بهینه‌سازی را با یک راهبرد مجموعه فعال، که برای مشخص کردن مجموعه قیدهایی که باید در هر طراحی در نظر گرفته شود استفاده می‌شود، تکمیل می‌کنند.

با وجود این که روش‌های زیادی برای بهینه‌سازی وجود دارد ولی اکثر آن‌ها بر اساس چهار مرحله ساخته شده‌اند. مرحله‌ی اول در بهینه‌سازی انتخاب قیدهای فعال است. در مرحله‌ی دوم ما به دنبال محاسبه‌ی یک مسیر براساس تابع هدف و قیدهای فعال هستیم. در برخی روش‌ها به دنبال مسیری مماس بر مرزهای قیدهای فعال می‌گردند<sup>۱</sup> و برخی به دنبال دور شدن از مرزهای قیدها هستند<sup>۲</sup>. در مرحله‌ی سوم تعیین می‌کنیم چه مقدار بر روی مسیر پیدا شده جلو برویم که این عمل اغلب با فرآیندی که جستجوی خط یک بعدی<sup>۳</sup> می‌نامند، انجام می‌شود، زیرا به دنبال مقدار یک عدد اسکالر است که فاصله مقدار حرکت در جهت مسیر مورد نظر را معین می‌کند. در مرحله‌ی آخر، همگرایی را بررسی کرده و تعیین می‌کنیم آیا حرکت دیگری نیاز هست یا خیر.

---

<sup>۱</sup> Gradient Projection Method

<sup>۲</sup> Interior Penalty Function Method or Feasible Direction Method

<sup>۳</sup> One Dimensional Search

## ۳-۴- انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها

### ۳-۴-۱- بهینه‌سازی ابعادی

بهینه‌سازی ابعادی شاخه‌ای از بهینه‌سازی است که تحقیقات بسیاری بر روی آن انجام شده است و مسائلی مانند مسأله تعیین سطح مقطع بهینه اعضای یک خرپا یا قاب و یا تعیین ضخامت بهینه یک صفحه از جمله مسائلی هستند که با این روش حل می‌شوند. در این مسائل حوزه ثابت است و در طی بهینه‌سازی تغییر نمی‌کند. مسأله بهینه‌سازی ابعادی را می‌توان به عنوان کاربرد بهینه‌سازی در مرحله‌ی طراحی جزئیات در نظر گرفت.

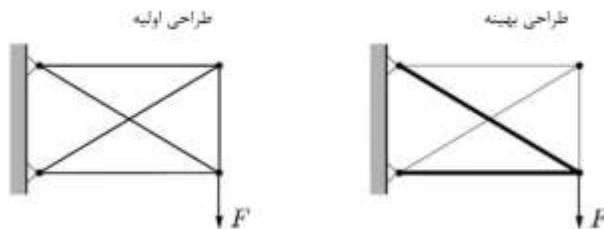
به عنوان مثال در زمینه بهینه‌سازی ابعادی، می‌توانیم تعیین سطح مقطع اعضای یک خرپای دوطبقه را در نظر بگیریم که باید سختی آن حداکثر شود. بدین منظور، می‌توانیم به عنوان یک مقیاس انرژی کرنشی<sup>۱</sup> آن و یا  $\mathbf{F}^T \mathbf{u}$  را حداقل کنیم که  $\mathbf{u}$  در آن جابجایی و  $\mathbf{F}$  نیروی خارجی وارد بر گره می‌باشد. همان‌طور که می‌دانیم اگر انرژی کرنشی کوچک باشد، سختی خرپا زیاد خواهد بود.

مسأله‌ی بهینه‌سازی را می‌توانیم به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} \min_{x,u} \mathbf{F}^T \mathbf{u} \\ \text{s.t. } \mathbf{K}(x) \mathbf{u} = \mathbf{F} \\ \sum_{j=1}^n l_j x_j \leq V_{max} \\ x \in X = \{x \in R^n : x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = 1, \dots, n\} \end{cases} \quad (3-3)$$

<sup>۱</sup> Compliance

که در آن  $n$  تعداد اعضای خرپا،  $l_j$  طول عضو  $j$ ،  $x_j$  سطح مقطع عضو  $j$  و  $V_{\max}$  حداکثر حجم مجاز خرپاست. در شکل زیر طرح اولیه و نهایی برای یک خرپا تحت بهینه‌سازی ابعادی نشان داده شده است [۱۶].



شکل (۳-۱). یک مسأله بهینه‌سازی ابعادی که برای بهینه‌سازی سطح مقطع اعضای خرپا فرمول‌بندی شده است.

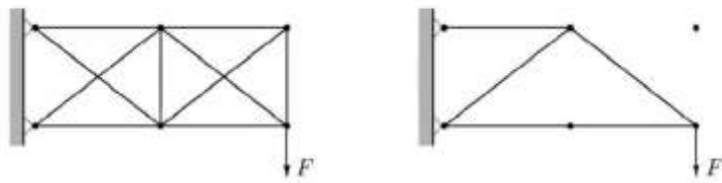
### ۳-۴-۲- بهینه‌سازی توپولوژی

رویکرد دیگری که در مورد بهینه‌سازی وجود دارد بهینه‌سازی توپولوژی است. در تعریف دو شکل هندسی را دارای توپولوژی یکسانی گویند اگر بتوان یکی را از انتقال پیوسته‌ی دیگری به دست آورد. انتقال پیوسته به معنی فشار دادن، کشیدن، پیچاندن، خم کردن و له کردن بدون جدا کردن یا چسباندن نقاط به یکدیگر می‌باشد. عموماً در بهینه‌سازی توپولوژی هدف تعیین مولفه‌هایی هم‌چون تعداد و محل سوراخ‌ها بر روی سازه می‌باشد. مسأله پیدا کردن ترکیب بهینه اعضا و اتصالات یک سازه اسکلتی نیز در این دسته قرار می‌گیرد. به عنوان مثال برای یک خرپا اگر سطح مقطع اعضای خرپا را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر بگیریم و اجازه دهیم که این متغیرها مقدار صفر را بگیرند، یا به عبارتی به میله‌ها اجازه دهیم که از خرپا برداشته شوند، این مسأله را می‌توان به عنوان بهینه‌سازی

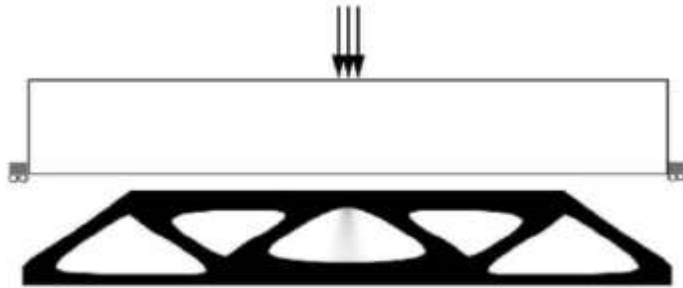
توپولوژی در نظر گرفت. به این ترتیب با توجه به این که اتصال گره‌ها در حال تغییر است، می‌توانیم بگوییم که توپولوژی خرپا تغییر می‌کند. اگر به جای یک سازه گسسته، یک سازه‌ی پیوسته مانند یک صفحه‌ی دو بعدی را در نظر بگیریم، در صورتی که اجازه دهیم ضخامت صفحه مقدار صفر بگیرد آن - گاه می‌توانیم بگوییم توپولوژی در حال تغییر است. اگر بخواهیم توپولوژی بهینه شود، آن‌گاه ضخامت باید تنها بتواند دو مقدار را بگیرد، یکی صفر و دیگر عدد ثابتی به عنوان حداکثر ضخامت صفحه در حالت سه بعدی، وضعیت مشابه وقتی رخ می‌دهد که  $x$  متغیری با ماهیت چگالی باشد و تنها بتواند مقادیر صفر و یک را بگیرد. شکل‌های (۲-۳) و (۳-۳) یک نمونه از بهینه‌سازی توپولوژی را نشان می‌دهد.

در حقیقت بهینه‌سازی شکل زیر مجموعه‌ای از بهینه‌سازی توپولوژی است، اما با توجه به این که مسائل عملی مربوط به بهینه‌سازی شکل و توپولوژی، دارای تکنیک‌های متفاوتی هستند، این دو را به صورت مجزا مورد بررسی قرار می‌دهند. هنگامی که در مورد حل معادلات دیفرانسیل صحبت می‌کنیم، می‌توانیم بگوییم بهینه‌سازی شکل حوزه‌ی معادله را بررسی کرده، در صورتی که بهینه‌سازی ابعادی و توپولوژی به کنترل پارامترهای آن مربوط می‌شوند.

مجموعه‌ی بهینه‌سازی ابعادی و شکل را بهینه‌سازی هندسی می‌گویند [۱۷].



شکل (۳-۲). بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا



شکل (۳-۳). بهینه‌سازی توپولوژی یک تیر ساده

### ۳-۴-۲-۱- روش‌های معیار بهینگی

از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی می‌توان برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک استفاده کرد. این روش‌ها می‌تواند برای حل هر مسأله بهینه‌سازی از جمله بهینه‌سازی سازه‌ها به کار برده شود. استفاده از این روش‌ها در بهینه‌سازی سازه‌ها، معمولاً به محاسباتی نظیر محاسبه تابع هدف، توابع قید و مشتقات آن‌ها نیاز دارد. بنابراین زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات در روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی شدیداً به تعداد متغیرهای طراحی در مسأله وابسته است. از این رو زمانی که تعداد متغیرهای طراحی زیاد باشد، این روش‌ها بسیار زمان‌بر و پرهزینه می‌باشند.



در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها تعداد متغیرهای طراحی به تعداد المان‌های تقسیم‌کننده‌ی فضای طراحی وابسته می‌باشد. از آنجایی که معمولاً تعداد المان‌ها در یک مسأله بهینه‌سازی توپولوژیک زیاد است، بنابراین استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها زمان‌بر و پرهزینه خواهد بود. برای حل این مشکل روش‌های معیار بهینگی پیشنهاد شده‌اند.

ایده‌ی روش‌های معیار بهینگی در سال ۱۹۰۴ توسط میشل [۱۸] معرفی شد و در سال‌های ۱۹۶۰ به بعد این روش‌ها در کنار روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی برای حل مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها گسترش یافتند. روش‌های معیار بهینگی برعکس روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی که به طور مستقیم تابع هدف را بهینه می‌کنند، به صورت غیرمستقیم برای اقناع مجموعه‌ای از معیارهای مرتبط با رفتار سازه تلاش می‌کنند. این معیارها یا به صورت درکی و یا با پایه و اساس ریاضی استخراج می‌شوند. روش‌های «طرح بر اساس تنش یکنواخت شده<sup>۱</sup>» و «طرح بر اساس مدهای خرابی همزمان<sup>۲</sup>» مثال‌هایی از روش‌های معیار بهینگی درکی می‌باشند. روش‌های معیار بهینگی که مبنای ریاضی دارند معمولاً بر پایه شرایط بهینگی کان-تاکر استوار می‌باشند.

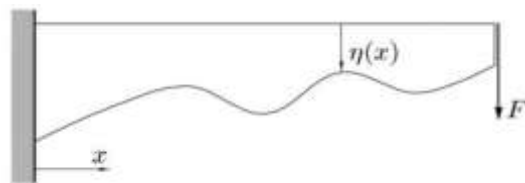
---

<sup>۱</sup> Fully Stressed Design Method

<sup>۲</sup> Simultaneous Failure Mode Design

### ۳-۴-۳- بهینه‌سازی شکل سازه‌ها

بهینه‌سازی شکل سازه‌ها در واقع پیدا کردن بهترین شکل هندسی ممکن برای مرزهای سازه است به صورتی که تابع هدف مینیمم شده و قیدهای مسأله اقلان شوند. تابع هدف در این مسائل می‌تواند انرژی ذخیره شده، وزن، تنش و فرکانس طبیعی سازه باشد. به عنوان مثال می‌توان به یافتن مرزهای یک سازه‌ی مدل شده با استفاده از فرضیات تنش صفحه‌ای یا یافتن محل اتصالات یک سازه‌ی اسکلتی و یا یافتن مقادیر بهینه پارامترهایی که سطح متوسط یک سازه‌ی پوسته‌ای را تعریف می‌کنند اشاره کرد. به این دسته از مسائل، مسائل بهینه‌سازی شکل می‌گویند. در چنین مسائلی شکل حوزه ثابت نیست ولی توپولوژی حوزه ثابت است. بهینه‌سازی شکل را می‌توان به عنوان کاربرد بهینه‌سازی در مرحله‌ی طراحی اولیه در نظر گرفت. در شکل (۳-۴) یک مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل دوبعدی نشان داده شده است.



شکل (۳-۴). مسأله‌ی بهینه‌سازی شکل با یافتن تابع  $\eta(x)$  که شکل تیر را مشخص می‌کند.

در دو دهه‌ی اولیه‌ی بهینه‌سازی عددی سازه‌ها، تمرکز بر روی متغیرهای طراحی به اصطلاح ابعادی بود. متغیرهایی از قبیل ضخامت صفحه و سطح مقطع میله از آن جمله هستند که تغییر در آنها

نیازی به تغییر در مدل اجزای محدودی ندارد. مسائل بهینه‌سازی که در آن‌ها پارامترهای ابعادی متغیر طراحی هستند ساده‌تر از مسائلی هستند که در آن‌ها شکل متغیر طراحی است و هندسه سازه را کنترل می‌کند و معمولاً نیاز به مدل اجزای محدودی دارند که در طول بهینه‌سازی تغییر می‌کند. اما با این وجود در مسائل زیادی بهینه‌سازی شکل بسیار موثرتر از بهینه‌سازی ابعادی است، برای مثال در مسأله تمرکز تنش در مرزهای یک صفحه یک سوراخ‌دار، بهینه‌سازی ابعادی، ضخامت صفحه در اطراف سوراخ را تغییر می‌دهد در حالی که در بهینه‌سازی شکل منجر به تغییر در مرزهای شکل سوراخ می‌شود.

در مسائل بهینه‌سازی شکل، به این دلیل که مدل اجزای محدود مرتب تغییر می‌کند مشکل است بتوانیم مطمئن شویم که صحت تحلیل اجزای محدود در طول روال طراحی در حد قابل قبول باقی می‌ماند.

در شکل کلی فرمول‌بندی مسائل بهینه‌سازی شکل دو دسته قید وجود دارند. دسته اول قیدهای صریح هستند که به طور صریح و مستقیم برحسب متغیرهای طراحی مطرح می‌شوند و دسته‌ی دیگر قیدهای ضمنی هستند که به صورت ضمنی و غیر مستقیم برحسب متغیرها نوشته می‌شوند [۱۹]. قیدهای مسأله می‌توانند قیدهای رفتاری مانند محدودیت تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها و یا قیدهای هندسی مانند محدودیت حجم سازه و ... باشند.

فرآیند بهینه‌سازی شکل شامل سه بخش اصلی است. این سه بخش عبارتند از: نمایش هندسی مسأله، تحلیل سازه و الگوریتم بهینه‌سازی. ابتدا باید نمایش هندسی مناسبی برای شکل مرزها را انتخاب کرده و مقادیر اولیه‌ای برای متغیرهای طراحی در نظر بگیریم، پس از آن یک مدل تحلیلی مناسب مانند اجزای محدود یا اجزای مرزی برای تحلیل سازه انتخاب کنیم. یک روش تحلیل مناسب باید قادر باشد اطلاعات لازم جهت مرحله‌ی بهینه‌سازی را بدهد. بعد از انجام مرحله‌ی تحلیل، الگوریتم بهینه‌سازی مقادیر جدید متغیرهای طراحی را به ما می‌دهد. در نتیجه یک مدل طراحی جدید ایجاد شده و به قسمت تحلیل برده می‌شود. از تحلیل مجدد مقدار تابع هدف برای طراحی جدید به دست می‌آید. در صورتی که معیار لازم برای خاتمه محاسبات اقناع شده بود، محاسبات متوقف شده، در غیر این صورت از مرحله‌ی بهینه‌سازی نقطه‌ی طراحی جدیدی به ما می‌دهد.

### ۳-۴-۱- انتخاب متغیرهای طراحی

روش انتخاب شده برای نمایش شکل هندسی سازه در رسیدن به طرح بهینه اهمیت فراوانی دارد و چنانچه متغیرهای طراحی هدایت کننده شکل سازه با دقت انتخاب نشوند نمی‌توان از بهینه بودن طرح حاصل اطمینان داشت.

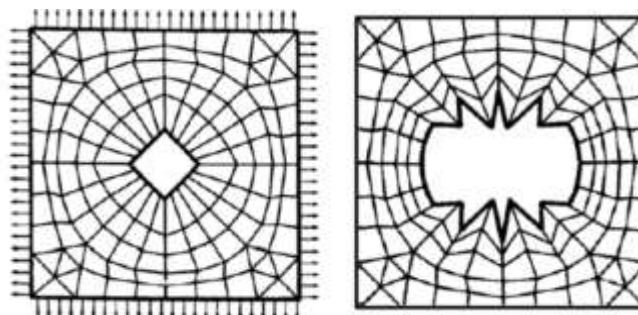
در نخستین تلاش‌های انجام شده در زمینه بهینه‌سازی شکل سازه‌ها توسط زینکویچ<sup>۱</sup> و کمبل [۱۶]، مختصات گره‌های مرزی در شبکه‌ی اجزای محدود به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شدند (شکل ۳-۵)، اما این روش پس از مدت کوتاهی با مشکلات جدی روبه‌رو شد. برقراری شیب ناحیه‌ی مرزی در محل این گره‌ها ممکن نبود و جابه‌جایی مستقل گره‌ها در این روش به تولید شکل‌های زیگزاگی، نامنظم و غیرعملی منجر می‌شد. از دیگر نتایج انتخاب گره‌های اجزای محدود به عنوان متغیرهای طراحی، وابستگی زیاد پاسخ بهینه به نحوه مش‌بندی، تعداد زیاد متغیرهای طراحی و دشواری‌های حفظ یک مش مناسب در طول روند بهینه‌سازی بود.

برای حل این مشکلات، یک‌سری محدودیت‌های هندسی اعمال شد، اما این کار باعث شد هزینه‌های محاسباتی افزایش چشم‌گیری داشته باشد و به آسانی نیز قابل اجرا نبود.

حالت مشابهی در بهینه‌سازی ابعادی یک صفحه رخ می‌دهد (شکل ۳-۶). راه‌حل در هر دو مورد این است که از ایجاد تناظر یک به یک بین شبکه اجزای محدود و متغیرهای طراحی خودداری کنیم و مطمئن شویم که تعداد المان کافی جهت ارزیابی دقیق رفتار سازه وجود دارد. [۱۹].

---

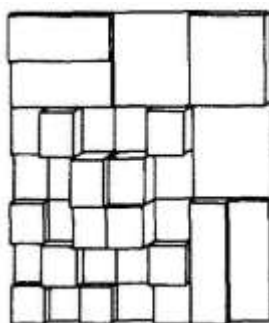
<sup>۱</sup> Zienkiewicz



(الف)

(ب)

شکل (۳-۵). استفاده از گره‌های اجزای محدود به عنوان متغیرهای طراحی (الف) طرح اولیه (ب) طرح بهینه



شکل (۳-۶). استفاده از گره‌های اجزای محدود به عنوان متغیرهای طراحی در بهینه‌سازی ابعادی

استفاده از مختصات گرهی به عنوان متغیرهای طراحی به زودی متوقف شد زیرا تجربه نشان داد که

با این کار نمی‌توان به مرز همواری دست پیدا کرد. به علاوه نمی‌توان انتظار داشت که این کار نتایج

صحیحی برای تنش تولید کند.

## ۲-۳-۴-۳- استفاده از چندجمله‌ای جهت نمایش مرزها

بیهاوویکاتی<sup>۱</sup> و راماکریشنان [۲۰] از چندجمله‌ای‌ها جهت نشان دادن مرزهای شکل استفاده کردند و ضرایب چندجمله‌ای را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفتند. رویکرد دیگر این بود که مرز را به صورت ترکیب خطی توابع شکل تعریف کنیم و ضرایب را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر بگیریم، از این رو کریستسن و مدسن [۲۱] مرز را با استفاده از ترکیب خطی توابع متعامد و ضرایب توابع پایه را به عنوان پارامترهای طراحی در نظر گرفتند. محققین از چندجمله‌ای‌ها برای نمایش مرز استفاده کردند و ضرایب چندجمله‌ای را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفتند، البته این متغیرها به خوبی با خواص مکانیکی قابل ارتباط نبودند. اگرچه این مدل همواری لازم را فراهم می‌کرد اما وقتی مرتبه‌ی چندجمله‌ای بالا می‌رفت می‌توانست منجر به ایجاد مرزهای نوسانی شود. به علاوه چندجمله‌ای‌ها قادر به نمایش شکل‌های کلی نیستند و تنها می‌توانند خانواده‌ی منحنی‌های درجه دو، سه و غیره را نشان دهند. از نقطه نظر طراحی مشکل دیگر عدم کنترل محلی بر منحنی بود. تغییر در یکی از ضرایب چندجمله‌ای باعث تغییر در کل منحنی می‌شد [۲۲].

---

<sup>۱</sup> Bhavikatti

### ۳-۴-۳- استفاده از اسپلاین‌ها جهت نمایش مرزها

استفاده از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا می‌تواند منجر به ایجاد شکل با مرز نوسانی شود. از این رو توجه پژوهشگران به روش‌هایی جلب شد که در آن‌ها مدل آنالیز و مدل طراحی به صورت مجزا در نظر گرفته می‌شود. این روش‌ها برای توصیف هندسه سازه در مدل طراحی از پیشرفت‌های نوین علم هندسه بهره می‌برند.

اسپلاین‌ها مشکل چند جمله‌ای‌ها را حل کردند زیرا این توابع ترکیبی از چند جمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند تا حداکثر همواری را در مرزها داشته باشیم.

تابع اسپلاین درجه سه دارای دو مشتق پیوسته می‌باشد و حداقل میانگین انحنای آن را دارد و می‌تواند یک انتخاب طبیعی برای تعریف مرز باشد. برای اینت و همکاران از توابع مخلوط بی-اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند. توابع مخلوط انعطاف‌پذیری بالایی برای نمایش هندسه دارند. با استفاده از فرمول‌های بی-اسپلاین نظم و قاعده مورد نیاز برای مرز حاصل می‌شود.

### ۳-۴-۳- استفاده از نرَبز در روش آیزوژئومتری

با وجود این‌که استفاده از اسپلاین‌ها برای مدل کردن مرز قسمتی از مشکلات را حل کرده بود، اما همچنان در حل دوگانگی وجود داشت. در این روش، رویکرد نسبت به حل مسائل بهینه‌سازی شکل به



کلی تغییر کرد و روش آیزوژئومتریکی برای تحلیل مورد استفاده قرار گرفت. محققان از این روش در بهینه‌سازی شکل سازه‌ها استفاده نمودند. در روش آیزوژئومتریکی برای تولید مدل هندسی سازه از توابع پایه نربز استفاده می‌شود و با توجه به مفهوم آیزوپارامتریکی، همین توابع در تقریب پاسخ سازه نیز به کار می‌روند. با روش آیزوژئومتریکی ارائه شده در بهینه‌سازی شکل، مدل آنالیز به طور ذاتی با مدل طراحی ادغام می‌شود که منجر به حذف ارتباط بین دو مدل در طول بهینه‌سازی می‌گردد.

در جدول (۱-۳) خلاصه‌ای از انواع مدل‌های ارائه شده برای حل مسائل بهینه‌سازی شکل بیان شده است.

جدول (۱-۳). خلاصه مدل‌های ارائه شده برای مسائل بهینه‌سازی شکل

سال ارائه	متغیرهای طراحی	روش تحلیل	مدل هندسی مرز	ارائه کنندگان مدل
۱۹۷۳	مختصات گره‌های مرزی	اجزای محدود	شبکه اجزای محدود	زینکوویچ و کمبل
۱۹۸۰	ضرایب چند جمله‌ای	اجزای محدود	توابع چند جمله‌ای	بیهاوویکاتی و راماکریشن
۱۹۸۳	مختصات نقاط کنترلی	اجزای محدود	توابع اسپلاین	براینت و همکاران
۱۹۹۳	مختصات نقاط کنترلی	اجزای محدود	توابع نربز	اسکرم <sup>۱</sup> و پیلکی
۲۰۰۸	مختصات نقاط کنترلی	آیزوژئومتریکی	توابع نربز	وال <sup>۲</sup> و همکاران

<sup>۱</sup> Schramm

### ۳-۵- انواع روش‌های بهینه‌سازی

پیشرفت کامپیوتر طی پنجاه سال گذشته باعث توسعه روش‌های بهینه‌سازی شده، به طوری که دستوره‌های متعددی در طی این دوره تدوین شده است. در این بخش، مروری بر روش‌های مختلف بهینه‌سازی ارائه می‌شود.

شکل (۳-۷) روش‌های بهینه‌سازی را در چهار دسته وسیع دسته‌بندی می‌کند. در ادامه بحث، هر دسته از این روش‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند.



شکل (۳-۷). طبقه‌بندی انواع روش‌های بهینه‌سازی

### ۳-۵-۱- روش‌های شمارشی<sup>۱</sup>

در روش‌های شمارشی، در هر تکرار فقط یک نقطه متعلق به فضای دامنه تابع هدف بررسی می‌شود. این روش‌ها برای پیاده‌سازی، ساده‌تر از روش‌های دیگر می‌باشند؛ اما به محاسبات قابل توجهی نیاز دارند. در این روش‌ها سازوکاری برای کاستن دامنه جستجو وجود ندارد و دامنه فضای جستجو شده با این روش خیلی بزرگ است. برنامه‌ریزی پویا<sup>۲</sup> مثال خوبی از روش‌های شمارشی می‌باشد. این روش کاملاً غیرهوشمند است و به همین دلیل امروزه بندرت به تنهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### ۳-۵-۲- روش‌های محاسباتی<sup>۳</sup> (جستجوی ریاضی)

این روش‌ها از مجموعه شرایط لازم و کافی که در جواب مسأله بهینه‌سازی صدق می‌کند، استفاده می‌کنند. وجود یا عدم وجود محدودیت‌های بهینه‌سازی در این روش‌ها نقش اساسی دارد. به همین علت، این روش‌ها به دو دسته روش‌های با محدودیت و بی‌محدودیت تقسیم می‌شوند. روش‌های بهینه‌سازی بی‌محدودیت با توجه به تعداد متغیرها شامل بهینه‌سازی توابع یک متغیره و چند متغیره می‌باشند.

---

<sup>۱</sup> Enumerative Method

<sup>۲</sup> Dynamic Programming

<sup>۳</sup> Method Calculus Based

روش‌های بهینه‌سازی توابع یک متغیره، به سه دسته روش‌های مرتبه صفر، مرتبه اول و مرتبه دوم تقسیم می‌شوند. روش‌های مرتبه صفر فقط به محاسبه تابع هدف در نقاط مختلف نیاز دارد؛ اما روش‌های مرتبه اول از تابع هدف و مشتق آن و روش‌های مرتبه دوم از تابع هدف و مشتق اول و دوم آن استفاده می‌کنند. در بهینه‌سازی توابع چند متغیره که کاربرد بسیار زیادی در مسائل مهندسی دارد، کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی یک کمیت با مقدار زیادی متغیر طراحی صورت می‌گیرد.

یک تقسیم‌بندی، روش‌های بهینه‌سازی با محدودیت را به سه دسته برنامه‌ریزی خطی، روش‌های مستقیم و غیرمستقیم تقسیم می‌کند. مسائل با محدودیت که توابع هدف و محدودیت‌های آن‌ها خطی باشند، جزء مسائل برنامه‌ریزی خطی قرار می‌گیرند. برنامه‌ریزی خطی شاخه‌ای از برنامه‌ریزی ریاضی است و کاربردهای فیزیکی، صنعتی و تجاری بسیاری دارد.

در روش‌های مستقیم، نقطه بهینه به طور مستقیم جستجو شده و از روش‌های بهینه‌یابی بی-محدودیت استفاده نمی‌شود. هدف اصلی روش‌های غیرمستقیم استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی بی‌محدودیت برای حل عمومی مسائل بهینه‌سازی با محدودیت می‌باشد.

در اکثر روش‌های محاسباتی بهینه‌یابی، از گرادینان تابع هدف برای هدایت جستجو استفاده می‌شود. اگر مثلاً به علت ناپیوستگی تابع هدف، مشتق آن قابل محاسبه نباشد، این روش‌ها اغلب با مشکل روبه‌رو می‌شوند.

### ۳-۵-۳- روش‌های ابتکاری<sup>۱</sup> و فرا ابتکاری<sup>۲</sup> (جستجوی تصادفی)<sup>۳</sup>

یک روش ناشیانه برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی این است که تمامی جواب‌های امکان‌پذیر در نظر گرفته شود و توابع هدف مربوط به آن محاسبه شود و در نهایت، بهترین جواب انتخاب گردد. روشن است که شیوه شمارش کامل، نهایتاً به جواب دقیق مسأله منتهی می‌شود؛ اما در عمل به دلیل زیاد بودن تعداد جواب‌های امکان‌پذیر، استفاده از آن غیرممکن است. با توجه به مشکلات مربوط به روش شمارش کامل، همواره بر ایجاد روش‌های مؤثرتر و کارا تر تأکید شده است. در این زمینه، الگوریتم‌های مختلفی به وجود آمده است که مشهورترین نمونه آن‌ها، روش سیمپلکس<sup>۴</sup> برای حل برنامه‌های خطی و روش شاخه و کرانه<sup>۵</sup> برای حل برنامه‌های خطی با متغیرهای صحیح است. برای مسائلی با ابعاد بزرگ، روش سیمپلکس از کارایی بسیار خوبی برخوردار است، ولی روش شاخه و کرانه کارایی خود را از دست می‌دهد و عملکرد بهتری از شمارش کامل نخواهد داشت. به دلایل فوق، اخیراً تمرکز بیشتری بر روش‌های ابتکاری یا فرا ابتکاری یا جستجوی تصادفی صورت گرفته است. روش‌های جستجوی ابتکاری، روش‌هایی هستند که می‌توانند جوابی خوب (نزدیک به بهینه) در زمانی محدود برای یک مسأله ارائه کنند. روش‌های جستجوی ابتکاری عمدتاً بر مبنای روش‌های شمارشی می‌باشند، با این تفاوت که از اطلاعات اضافی برای هدایت جستجو استفاده می‌کنند. این روش‌ها از نظر حوزه

---

<sup>۱</sup> Heuristic

<sup>۲</sup> Metaheuristic

<sup>۳</sup> Random Method

<sup>۴</sup> simplex

<sup>۵</sup> Branch and Bound Method

کاربرد، کاملاً عمومی هستند و می‌توانند مسائل خیلی پیچیده را حل کنند. عمده این روش‌ها، تصادفی بوده و از طبیعت الهام گرفته شده‌اند.

دو مشکل اصلی روش‌های ابتکاری، گیر افتادن آن‌ها در نقاط بهینه محلی و همگرایی زودرس به این نقاط است. روش‌های فراابتکاری برای حل این مشکلات ارائه شده‌اند. در واقع الگوریتم‌های فراابتکاری، یکی از انواع الگوریتم‌های بهینه‌سازی تقریبی هستند که دارای راه‌کارهای برونرفت از نقاط بهینه محلی هستند و قابلیت کاربرد در طیف گسترده‌ای از مسائل را دارند. رده‌های گوناگونی از این نوع الگوریتم در دهه‌های اخیر توسعه یافته است.

روش جستجوی فراابتکاری روشی است که می‌تواند جوابی نزدیک به بهینه در زمانی محدود برای یک مسأله بیان کند ولی مشکل این‌جاست که نمی‌توان میزان نزدیکی جواب به دست آمده به جواب بهینه را تعیین کرد.

در این پژوهش از یکی از جدیدترین الگوریتم‌های بهینه‌سازی بدون گرادیان یعنی الگوریتم بهینه‌سازی مورچگان استفاده شده است. مسائل مورد بررسی به مسائل دوبعدی الاستیسیته خطی محدود شده است اما بسط این روش به مسائل سه‌بعدی و همچنین انواع دیگر مسائل فیزیکی به آسانی امکان پذیر است. در فصل بعد الگوریتم مورچگان که از جمله روش‌های فراابتکاری می‌باشد به تفصیل شرح داده خواهد شد.

## فصل چہارم

الگوریتم اجتماع مورچگان

## ۴-۱- مقدمه

الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچگان<sup>۱</sup>، یک بخش از گروه ذرات یا به عبارتی هوش جمعی است که در واقع این نوع از الگوریتم‌ها با مشاهده رفتار دسته جمعی گروهی از ذرات بوجود می‌آیند. الگوریتم گروه هوشمند، از رفتار ساده تک تک افرادی است که کارهای خود را به صورت خود-ترتیب بدون هیچ کنترل مرکزی انجام می‌دهند، بوجود می‌آید [۲۳].

بهینه‌سازی به روش کلونی مورچگان توسط دوریگو<sup>۲</sup> و همکارانش [۲۳] به عنوان روشی برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی سخت<sup>۳</sup> پیشنهاد شد.

در این بخش مروری بر روش بهینه‌سازی کلونی مورچگان که یک روش فراابتکاری و الهام گرفته شده از رفتار مورچه‌های طبیعی است، انجام می‌دهیم.

## ۴-۲- از بیولوژی تا الگوریتم

الگوریتم بهینه‌سازی *ACO* برگرفته از رفتار مورچه‌های طبیعی است. ما تعدادی از مشاهدات بدست آمده در تحقیقات روی مورچه‌های واقعی را بیان می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که چطور از این مشاهدات برای ساخت الگوریتم *ACO* الهام گرفته شده است.

---

<sup>1</sup> Ant colony optimization (ACO)

<sup>2</sup> Dorigo

<sup>3</sup> COPS



## ۴-۲-۱- مورچه ها

گرس<sup>۱</sup> حشره شناس فرانسوی یکی از اولین پژوهشگرانی بود که بر روی رفتار اجتماعی حشرات تحقیق نمود. در دهه‌های ۱۹۴۰ تا ۱۹۵۰ او به بررسی رفتار مورپانه‌ها پرداخت. او کشف کرد که این حشرات در مقابل سیگنال‌های دریافتی از خود واکنش نشان می‌دهند. او مشاهده کرد [۲۴] که اثر این واکنش‌ها محرک‌های جدیدی را برای هر دو حشره و همین‌طور برای سایر حشرات موجود در کلونی تولید می‌کند. گرس این ارتباط را استیگمرجی<sup>۲</sup> نام‌گذاری کرد، به معنی رفتاری که هماهنگی ما بین موجودات را تنها از طریق تغییرات ایجاد شده در محیط ممکن می‌سازد.

دو ویژگی اصلی استیگمرجی که آن را از ارتباطات دیگر مجزا می‌کند، عبارت است از:

- طبیعت مادی و بدون اشاره این نوع از اطلاعات که توسط مورچه‌هایی که می‌خواهند با هم ارتباط برقرار کنند، رها می‌شود. در واقع این نوع ارتباط معادل است با تغییر شرایط محیط اطراف به منظور برقراری ارتباط.

- ذات محلی بودن اطلاعات رها شده، که در واقع به این معنی است که تنها حشره‌هایی که از

آن محل عبور می‌کنند می‌توانند از این اطلاعات استفاده نمایند.

---

<sup>۱</sup> Pierre-paul Grasse

<sup>۲</sup> stigmergie

نمونه‌ای از استیگمرجی را می‌توانید در کلونی مورچه‌ها مشاهده نمایید. در بسیاری از انواع مورچه‌ها این ویژگی وجود دارد که زمانی که مورچه‌ها از لانه به سمت منبع غذا حرکت می‌کنند، در طول مسیر طی شده ماده‌ای به نام فرمون<sup>۱</sup> را بر روی زمین از خود به جا می‌گذارند. مورچه‌های دیگر می‌توانند فرمون ریخته شده را از طریق بوکشیدن تشخیص دهند و در واقع همین فرمون در انتخاب مسیر آن‌ها برای ادامه حرکت مؤثر است و آن‌ها تمایل دارند مسیری که دارای فرمون بیشتری است را دنبال کنند. این فرمون‌های ریخته شده یک دنباله فرمونی را ایجاد می‌کنند که به دیگر مورچه‌ها اجازه می‌دهد از منبع غذایی که قبلاً توسط سایر مورچه‌ها پیدا شده، استفاده نمایند.

برخی از محققین به طور تجربی بر روی فرمون ریخته شده و رفتار مورچه‌ها در دنبال فرمون تحقیق کرده و توانستند مقدار آن را تعیین کنند. دنی‌یوبورگ<sup>۲</sup> و همکارانش [۲۵] آزمایشی را با عنوان "آزمایش پل دو طرفه" طراحی کردند. آن‌ها از *Linepithema humile* (که به عنوان مورچه‌های آرژانتینی شناخته شده‌اند) استفاده کردند. لانه مورچه‌ها از طریق دو راه با طول مساوی به منبع غذا متصل شدند. مورچه می‌توانند به طور آزادانه هر یک از این دو مسیر را هنگامی که به دنبال غذا می‌روند و هنگامی که به لانه برمی‌گردند انتخاب کنند. رفتار آن‌ها در یک دوره زمانی بررسی شد.

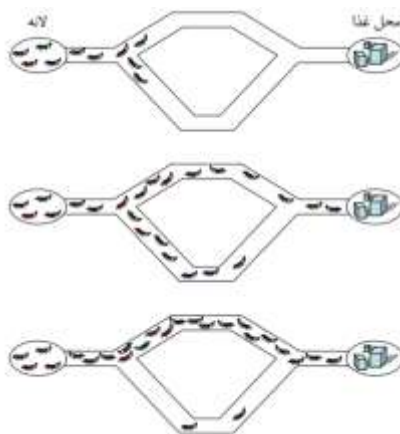
---

<sup>1</sup> Feromon

<sup>2</sup> Deneubourg

در شروع آزمایش فرمونی روی مسیرها وجود نداشت. مورچه‌ها ابتدا کار را با جستجوی اطراف لانه آغاز کردند و به صورت تصادفی یکی از این دو راه را انتخاب کردند و به غذا رسیدند. مورچه‌ها هنگامی که برای یافتن غذا حرکت می‌کردند یا به لانه بر می‌گشتند، مقداری فرمون را روی مسیر از خود به جا می‌گذاشتند. بعد از مدتی مقدار فرمون بر روی یک مسیر بیشتر از دیگری می‌شود. چون مورچه‌ها مایل استفاده از مسیری هستند که فرمون بیشتری دارد، بنابراین بعد از مدتی مسیر دارای فرمون بیشتر، مورچه بیشتری را جذب خود می‌کند. پس این مسیر باز هم فرمون بیشتری را جذب می‌کند تا زمانی که مورچه‌های کلونی به سمت یک مسیر همگرا شوند.

بنابراین در یک کلونی، مورچه‌ها سعی در یافتن کوتاه‌ترین مسیر از لانه به غذا را دارند که این مسیر از طریق فعل و انفعالات شیمیایی به مورچه‌های دیگر اطلاع داده می‌شود. این موضوع در آزمایش‌های دیگری که توسط گوس و همکارانش [۲۶] با مسیرهایی با طول متفاوت (یکی از راه‌ها طولانی‌تر از راه دیگر بود) انجام شد، نیز به اثبات رسید.



شکل (۴-۱): رفتار مورچه‌های آرژانتینی در آزمایش گوس و همکارانش

در بخش بعدی توضیح می‌دهیم چگونه این آزمایش‌ها و نتایج آن‌ها منجر به ایجاد الگوریتم بهینه-ساز شد.

#### ۴-۲-۲- الگوریتم‌ها

به دنبال نتایج جالبی که از آزمایش‌های توصیف شده در قسمت قبل بدست آمد، گوس و همکارانش [۲۶] مدلی را براساس رفتار مورچه در آزمایش دو پل ساختند. با این فرض که با گذشت  $t$  بار از زمان شروع آزمایش،  $m_1$  مورچه از اولین مسیر و تعداد  $m_2$  مورچه از دومین مسیر استفاده کردند، احتمال  $p_1$  برای این که مورچه  $(m+1)$ ام مسیر یک را انتخاب کند از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$P_{1(m+1)} = (m_1 + k)^h / \left( (m_1 + k)^h + (m_2 + k)^h \right) \quad (۴-۱)$$

که در آن پارامترهای  $k$  و  $h$  ضرایب تناسب مدل با داده‌های آزمایشگاه است. احتمال این که مورچه

$(m+1)$ ام مسیر دو انتخاب کند، برابر است با :

$$P_{2(m+1)} = 1 - P_{1(m+1)} \quad (۲-۴)$$

روش شبیه‌سازی مونت کارلو<sup>۱</sup> برای بدست آوردن ضرایب تناسب استفاده شد که مقادیر بدست آمده

برای آن‌ها عبارتست از  $h=20$ ،  $k=20$ .

رفتار مورچه‌های ساختگی (مصنوعی)، بر اساس مدل پایه، که براساس رفتار مورچه‌های واقعی بود

شکل گرفت. ویژگی اصلی استیگمرجی که در بخش قبل بیان شد، می‌تواند به وسیله‌ی مورچه‌های

مصنوعی به صورت زیر اقناع شود:

- تغییر در مسأله همراه با تفاوت در مقدار متغیرها است.

- یک نماینده تنها می‌تواند دسترسی محلی به متغیرها داشته باشد.

از دیگر جنبه‌های مهم رفتار جمع‌آوری غذا توسط مورچه‌ها که ممکن است توسط مورچه‌های

مصنوعی نیز انجام شود، می‌توان به اتصال بین مکانیسم خودترتیبی و ارزیابی ضمنی حل اشاره کرد.

راه کوتاه‌تر، ته‌نشینی سریع‌تر فرمون‌ها و در نتیجه استفاده بیشتر مورچه‌ها از مسیر کوتاه‌تر خواهد بود.

در صورتی‌که این روش به گونه‌ای مناسبی استفاده شود، می‌تواند مکانیسم قدرتمندی در تعیین

جمعیت الگوریتم‌های بهینه‌سازی باشد.

---

<sup>۱</sup> Monte Carlo Method

استیگمرجی، ارزیابی ضمنی حل و رفتار خودترتیبی باعث بوجود آمدن و توسعه *ACO* می‌شوند. ایده اصلی *ACO* به صورت بسته از الهام بیولوژیکی پیروی می‌کند. هر دو کلونی مورچه‌های واقعی و مصنوعی یکسری اعضای تشکیل دهنده دارند که همه هدف مشخصی را دنبال می‌کنند. یک کلونی از جمعیتی ساده، مستقل و نماینده‌هایی که به هم برای پیدا کردن یک راه حل خوب برای مسأله کمک می‌کنند، تشکیل شده است. در مورد مورچه‌های واقعی، هدف پیدا کردن غذاست، اما در مورد مورچه‌های مصنوعی هدف پیدا کردن یک راه حل مناسب برای مسأله بهینه‌سازی است. هر مورچه به تنهایی (هم واقعی و هم مصنوعی) می‌تواند یک راه حل برای مسأله پیدا کند، اما همکاری با تعداد زیادی از اعضا از طریق استیگمرجی منجر به یافتن یک راه حل خوب می‌شود.

در مورد مورچه‌های طبیعی، آن‌ها ماده شیمیایی به نام فرمون را از خود به جا می‌گذارند و نسبت به این ماده از خود واکنش نشان می‌دهند. مورچه‌های مصنوعی در دنیایی مجازی زندگی می‌کنند، از این رو آن‌ها تنها مقادیر عددی (مقدار فرمون‌های مصنوعی) را با توجه به نوع مسأله تغییر می‌دهند. در هر مسأله یک دنباله از فرمون‌های مصنوعی با توجه به مسأله تولید می‌شود. برای شبیه‌سازی مکانیسم تبخیر فرمون‌ها در کلونی مورچه‌های طبیعی در این الگوریتم اجازه می‌دهیم که مورچه‌های مصنوعی گذشته را فراموش کنند و بر روی جهت جستجو جدید متمرکز شوند.

مانند مورچه‌های طبیعی، مورچه‌های مصنوعی نیز می‌توانند مجموعه‌ای از حل‌ها را با حرکت از یک حالت مسأله به حالت‌های دیگر تولید کنند. مورچه‌های طبیعی به سادگی حرکت می‌کنند و یک جهت را با توجه به مقدار فرمون محلی و سیاست تصمیم‌گیری احتمالی انتخاب می‌کنند. مورچه‌های مصنوعی راه حل‌ها را به صورت مرحله به مرحله با حرکت در میان متغیرهای مسأله و تصمیم‌گیری احتمالی ایجاد می‌کنند.

تفاوت‌های اساسی بین مورچه‌های طبیعی و مصنوعی وجود دارد که عبارتند از:

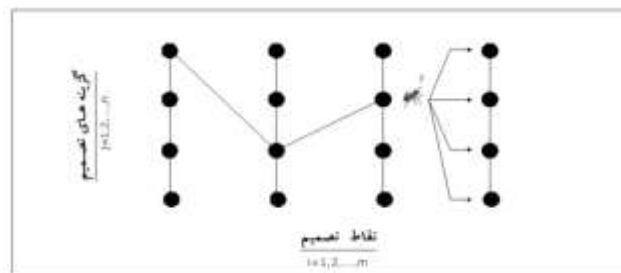
- مورچه‌های مصنوعی در یک محیط گسسته قرار دارند و بین تعداد محدودی از حالت‌های مسأله حرکت می‌کنند.

- به روزرسانی فرمون‌ها به همان صورتی که توسط مورچه‌های مصنوعی انجام می‌شود، توسط مورچه‌های طبیعی انجام نمی‌شود. گاهی تنها تعدادی از مورچه‌های مصنوعی به روزرسانی فرمون‌ها را برعهده دارند و معمولاً تنها بعد از زمانی که یک حل تولید شد این کار انجام می‌شود.

- بعضی از کارهایی که توسط مورچه‌های مصنوعی انجام می‌شود مکانیسمی اضافه است که توسط مورچه‌های طبیعی انجام نمی‌شود. کارهایی مانند جستجوی محلی و ... .

### ۴-۳- الگوریتم بهینه سازی اجتماع مورچگان

الگوریتم‌های بهینه‌سازی جامعه مورچه‌ها از عملکرد مورچه‌ها در یافتن کوتاهترین مسیر از بین مسیرهای مختلف بین لانه و غذا، الهام گرفته است. در روش بهینه‌سازی اجتماع مورچه‌ها، جواب بهینه مسائل گسسته از طریق همیاری مورچه‌های مصنوعی پیدا می‌شود. برای استفاده از این الگوریتم در مسائل بهینه‌سازی باید مسأله را به صورت یک گراف تعریف کرد [۲۷]. بدین منظور گراف  $G = (D, C, L)$  را در نظر بگیرید که در آن  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  نمایش مجموعه‌ای از نقاط تصمیم است که در آن باید در مورد گزینه‌های ممکن تصمیم‌گیری نمود.  $L = \{l_{i,j}\}$  مجموعه‌ای از گزینه‌های تصمیم  $j = 1, 2, \dots, n$  واقع در نقطه‌ی تصمیم  $i = 1, 2, \dots, m$  است و  $C = \{c_{i,j}\}$  مجموعه‌ای از هزینه‌هاست که به هر یک از گزینه‌های  $L = \{l_{i,j}\}$  نسبت داده می‌شود. هر مسیر شدنی بر روی گراف یک جواب  $(\varphi)$  و مسیر با حداقل هزینه روی گراف، جواب بهینه  $(\varphi^*)$  نامیده می‌شود. اجزای مجموعه‌ی  $D$  و  $L$  می‌توانند مقید شوند. شکل شماره‌ی (۴-۲) نمونه‌ای از این گراف را نشان می‌دهد.



شکل (۴-۲). گراف الگوریتم بهینه‌سازی جامعه مورچه‌ها



گام‌های اساسی در الگوریتم مورچه‌ها را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود [۲۸]:

۱. در ابتدای محاسبات مقداری فرمون به طور مساوی بر روی تمام گزینه‌ها  $L = \{l_{i,j}\}$  ریخته

می‌شود، سپس هر کدام از مورچه‌ها بر روی یک نقطه تصمیم قرار داده می‌شود.

۲. هر مورچه برای حرکت از یک نقطه به نقطه‌ی تصمیم بعدی از یک قانون تصمیم‌گیری

استفاده می‌کند تا زمانی که یک جواب کامل توسط هر مورچه تولید گردد. مثلاً برای این که

مورچه‌ی  $k$  ام که کدام گزینه‌ی تصمیم واقع در نقطه تصمیم  $i$  ام را انتخاب نماید، باید از قانون

تصمیم‌گیری استفاده کند. این قانون به شکل زیر تعریف می‌شود [۲۸]:

$$P_{ij}(k,t) = \frac{[\tau_{ij}(k,t)]^\alpha [\rho_{ij}(k,t)]^\beta}{\sum_{j=1}^J [\tau_{ij}(k,t)]^\alpha [\rho_{ij}(k,t)]^\beta} \quad (3-4)$$

$P_{i,j}(t)$ : احتمال اینکه مورچه‌ی  $i$  در تکرار  $t$ ، گزینه تصمیم  $(i,j)$  را انتخاب نماید.

$\tau_{i,j}(t)$ : مقدار فرمون موجود در تکرار  $t$  بر روی گزینه تصمیم  $(i,j)$

$\eta_{i,j}$ : اطلاعات کاوشی که تابعی از هزینه‌ی انتخاب گزینه‌ی تصمیم  $j$  واقع در نقطه‌ی تصمیم  $i$

می باشد:

$$\eta_{i,j} = 1/C_{i,j} \quad (4-4)$$

اطلاعات کاوشی "میدان دید" مورچه‌ها نیز نامیده می‌شود. اطلاعات کاوشی یک بار در

ابتدای جستجو محاسبه می‌شود و در طی جستجو بدون تغییر باقی می‌ماند.  $\alpha$  و  $\beta$

پارامترهایی هستند که نسبت وزنی بین فرمون و مقدار کاوشی را کنترل می‌نمایند. در الگوریتم  $ACO$  دنباله‌های فرمون کانال ارتباطی بین مورچه‌ها هستند که نقش مهمی در استفاده از هوش جمعی جامعه مورچگان ایفا می‌کنند. هر کدام از مورچه‌ها با در نظر گرفتن قانون تصمیم‌گیری فوق، از هر نقطه تصمیم یک گزینه تصمیم را به طور تصادفی انتخاب می‌کند.

۳. بعد از تولید جواب کامل توسط هر مورچه، هزینه ناشی از جواب تولید شده ( $\varphi$ ) محاسبه می‌شود. این هزینه با  $f(\varphi)$  نشان داده می‌شود.

۴. مراحل ۲ و ۳ برای تمامی مورچه‌ها تکرار می‌شود و فرمون‌ها قبل از شروع تکرار بعدی به‌روز رسانی می‌شوند. شکل کلی به‌روز رسانی فرمون به صورت زیر است [۲۸]:

$$\tau_{i,j}(t+1) = \rho\tau_{i,j}(t) + \Delta\tau_{i,j} \quad (۴-۵)$$

در رابطه‌ی فوق  $\tau_{i,j}(t+1)$  مقدار فرمون ریخته شده در گزینه‌ی تصمیم  $j$  واقع در نقطه‌ی تصمیم  $i$  در تکرار  $(t+1)$  و  $\tau_{i,j}(t)$  مقدار فرمون موجود در گزینه‌ی  $L_{i,j}(t)$  در تکرار  $t$  است.  $\rho$  ضریب تبخیر فرمون و  $\Delta\tau_{i,j}$  تغییرات فرمون در گزینه‌ی  $L_{i,j}$  می‌باشد. به این ترتیب مقدار فرمون طی حل مسأله تغییر کرده و مورچه‌ها از این طریق اطلاعات خود را مبادله می‌کنند. مقدار تغییرات فرمون  $\Delta\tau_{i,j}$  در حداقل‌سازی توابع هدف معمولاً به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۸]:

اگر گزینه‌ی  $z$  در نقطه‌ی تصمیم  $i$  به وسیله‌ی مورچه‌ی  $k$ ام انتخاب شود:

$$\Delta\tau_{i,j}^k = \begin{cases} R/f(\varphi)^k \\ 0 \end{cases} \quad (6-4)$$

در غیر این صورت  $f(\varphi)^k$  هزینه‌ی جواب تولید شده توسط مورچه‌ی  $k$ ام و  $R$  مقدار ثابتی که

ضریب بازگشت فرمون نامیده می‌شود. فرمول (4-5) نشان می‌دهد مسیرهایی که موجب

کاهش تابع هدف می‌شوند با فرمون بیشتر و مسیرهایی که موجب افزایش تابع هدف می‌-

گردند با فرمون‌های کمتری علامت‌گذاری می‌شوند. در نتیجه اساس معادله‌ی (4-3)

مسیرهای مناسب‌تر در تکرارهای بعدی احتمال انتخاب بیشتری دارند و این رویه به یافتن

جواب بهینه در تکرارهای بعدی کمک می‌کند.

#### 4-4- برخی از نسخه‌های تغییر یافته‌ی الگوریتم مورچگان

اولین نسخه‌ی الگوریتم مورچگان با نام سامانه‌ی مورچه‌ای<sup>1</sup> در سال ۱۹۹۶ توسط مارکو دوریگو و

همکارانش معرفی شد. ویژگی اصلی آن این است که به‌روزکردن فرمون‌ها توسط همه مورچه‌هایی که

تور را کامل کردند انجام می‌شود. الگوریتم‌های بسیاری با بهبود و تغییر در الگوریتم  $AS$  معرفی شدند

در شکل (4-3) نحوه‌ی تجدید فرمون چند نمونه از این الگوریتم‌ها نشان داده شده است.

<sup>1</sup> Ant System(AS)

<p>Ant System</p> $\Delta \tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{Q}{J(\Psi^k)} & , I_{ij} \in \Psi^k \\ 0 & , I_{ij} \notin \Psi^k \end{cases}$	<p>Elitist Ant System</p> $\Delta \tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{\Delta}{2J(\Psi^k)} & , I_{ij} \in \Psi^k \in \{\Psi^+, \Psi^-\} \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$ $\Delta = \rho \tau_{ij}$
<p>Ant Colony System</p> $\Delta \tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{\rho}{(1-\rho)J(\Psi^k)} & , I_{ij} \in \Psi^k = \Psi^+ \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$	<p>MMAS</p> $\Delta \tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{c \tau_{ij}}{J(\Psi^k)} & , I_{ij} \in \Psi^k = \Psi^+ \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$

شکل (۳-۴). الگوریتم‌های تغییر یافته مورچگان براساس تغییر فرمون

اخیراً محققان سعی کردند که از ACO برای بهینه‌سازی مسائل پیوسته استفاده کنند. زمانی که یک الگوریتم برای مسائل بهینه‌سازی مرکب طراحی می‌شود، در ساده‌ترین حالت، دامنه هر متغیر به تعدادی فاصله تقسیم‌بندی می‌شود. مجموعه این فاصله‌ها محدود هستند. زمانی که اندازه مسأله (به عبارت دیگر تعداد فاصله‌ها) زیاد می‌شود در نتیجه مسأله بهینه‌سازی مرکب کارایی خود را از دست می‌دهد (دقت آن کم می‌شود). همچنین این روش نیاز به تنظیم کردن فاصله‌ها قبل از اجرا کردن الگوریتم است. در مسائل واقعی معمولاً استفاده از این روش، معقول نیست.

با توجه به این دلایل، الگوریتم بهینه‌سازی به نحو ساده‌ای می‌تواند پارامترهای پیوسته را کنترل کند. اخیراً دوریگو و سوچا<sup>۱</sup> الگوریتم ACO را برای کاربرد در مسائل با متغیرهای پیوسته- ثابت و گسسته بسط دادند.

<sup>۱</sup> Socha

## ۴-۵- الگوریتم مورچگان در فضای پیوسته

### ۴-۵-۱- مقدمه

الگوریتم‌های بهینه‌سازی بسیاری هستند که در ابتدا برای بهینه‌سازی ترکیبی توسعه داده شده‌اند و بعد برای بهینه‌سازی مسائل پیوسته تعمیم یافته‌اند. مانند الگوریتم ژنتیک پیوسته، تابکاری فلزات افزایشی و... تا قبل از سال ۲۰۰۸ رویکردهای بسیاری به عنوان کلونی مورچه پیوسته معرفی شده بود که زیاد مورد اقبال عمومی واقع نشدند.

در الگوریتم‌های ارائه شده دو رویکرد برای تعمیم کلونی مورچه گسسته به فضای پیوسته وجود دارد. در رویکرد اول فضای جستجو گسسته‌سازی می‌شود ولی در روش دوم این تعمیم با نمونه‌برداری احتمالاتی از فضای جستجو انجام می‌شود.

گسسته‌سازی، نگاشتی از فضای پیوسته به فضای گسسته است که در آن فضای جستجو به تعدادی محدود بازه تقسیم می‌شود. تحقیقات بسیاری در زمینه گسسته‌سازی انجام شده است. در این میان اولین و ساده‌ترین روش‌ها [۲۹] عبارتند از:

○ گسسته‌سازی با پهنای مساوی<sup>۱</sup>: با در نظر گرفتن حد بالا و پایین دامنه، محدوده به زیر

دامنه‌هایی با پهنای مشخص (که کاربر مشخص می‌کند) تقسیم می‌شود.

---

<sup>۱</sup> Equal Width Discretization

○ گسسته‌سازی با فراوانی یکسان<sup>۱</sup>: زیر دامنه به نحوی تعیین می‌شود که فراوانی داده‌ها در هر

بازه برابر مقدار معینی (که کاربر مشخص می‌کند) باشد.

○ گسسته‌سازی تصادفی<sup>۲</sup>: زیر دامنه به‌طور تصادفی تعیین می‌شود.

در تمامی روش‌های فوق در روند گسسته‌سازی، از اطلاعات مربوط به اندازه تابع استفاده نمی‌شود،

لذا آن‌ها را در گروه روش‌های گسسته‌سازی بدون نظارت قرار می‌دهند [۳۰].

در مقابل روش‌های گسسته‌سازی بدون نظارت، روش‌هایی وجود دارند که در روند گسسته‌سازی از

اطلاعات مربوط به اندازه تابع مورد بررسی استفاده می‌کنند. این گروه، روش‌های گسسته‌سازی با

نظارت<sup>۳</sup> نامیده می‌شوند. روش‌های گسسته‌سازی با نظارت به دو گروه مهم: الگوریتم‌های مبتنی

بر آمار و الگوریتم‌های مبتنی بر بی‌نظمی (آنتروپی) تقسیم می‌شوند. [۳۱].

در مقاله‌ای از دوریگو و سوچا که در سال ۲۰۰۸ منتشر گردید ایده‌ی جالبی به نام الگوریتم *ACOR*

یا کلونی مورچه برای فضای پیوسته مطرح گردید. این الگوریتم تعمیمی است بر ایده‌ی مربوط کلونی

مورچه تا بتوان همان ساختار را که برای حالت گسسته تعریف شده به فضای پیوسته تعمیم دهیم.

---

<sup>1</sup> Equal Frequency Discretization

<sup>2</sup> Random Discretization

<sup>3</sup> Supervised Discretization Method

## ۴-۵-۲- الگوریتم<sup>۱</sup> ACOR

ACOR یک الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر کلونی مورچه است که توسط سوچا و دوریگو [۳۲] در سال ۲۰۰۸ پیشنهاد شده است. ACOR سعی دارد متاهوریسننتیک ACO را دنبال کند. ساختار آن به کاربر اجازه حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی (گسسته-پیوسته) را می‌دهد. قانون ACOR در انتخاب مقادیر متغیر در فضای جستجو با توزیع احتمال پیوسته بیان می‌شود.

همان‌طور که در بخش قبل اشاره شد ACO در هر مرحله از شناخت یک انتخاب احتمالاتی مطابق فرمول (۳-۴) انجام می‌دهد. احتمال تخصیص یافته، یک توزیع احتمال گسسته را می‌سازد. ایده‌ی اصلی ACOR استفاده از یک توزیع احتمال پیوسته با استفاده از یک تابع چگالی احتمال<sup>۲</sup> (PDF)، به جای استفاده از یک توزیع احتمال گسسته است. برای این منظور، الگوریتم تابع گاوسی<sup>۳</sup> را به کار می‌گیرد. اما یک تابع گاوسی به تنهایی نمی‌تواند دو نقطه از فضا را که کاندید بهینه هستند نشان دهد، بنابراین مولفه‌ی یک کرنل گاوسی را که مجموع وزن‌دار از چندین تابع گاوسی واحد  $g$  می‌باشد، را تعریف می‌کنند و آن را با  $G(x)$  نشان می‌دهند [۳۲].

$$G^1(x) = \sum_{l=1}^k w_l g_l^1(x) = \sum_{l=1}^k w_l \frac{1}{\sigma_l^1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_l^1)^2}{2\sigma_l^{12}}} \quad (۷-۴)$$

در این رابطه  $w$  بردار وزن تابع گاوسی،  $\mu$  بردار میانگین و  $\sigma$  واریانس تابع گاوسی  $i$ ام است

<sup>۱</sup> Ant Colony Optimization For Continuous Domain

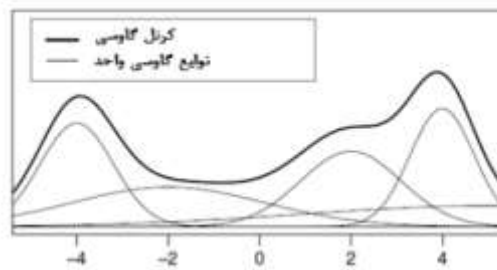
<sup>۲</sup> Probability Density Function

<sup>۳</sup> Gaussian function

چنین  $PDF$  ای ضمن این که امکان نمونه برداری ساده را فراهم می آورد، در مقایسه با یک تابع

گوسی واحد انعطاف پذیری بیشتری دارد. شکل (۴-۴) یک نمونه تابع چگالی احتمال کرنل گوسی را

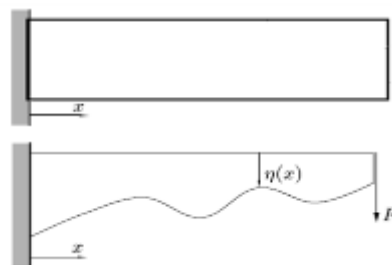
به همراه توابع گوسی واحد نشان می دهد.



شکل (۴-۴). تابع چگالی احتمال کرنل گوسی و توابع گوسی واحد

در ACOR ، راه حل ها که در مسأله ی بهینه سازی شکل موقعیت نقاط کنترلی است که مرز سازه را

می سازند، در آرشیو ذخیره می شوند. شکل (۵-۴) یک راه حل از تیر طره را نشان می دهد.



شکل (۵-۴). یک راه حل از تیر طره

در شروع الگوریتم آرشیو، با تولید  $k$  راه حل تصادفی مقاردهی می شود. در آرشیو  $k$  راه حل

$\{s_1, s_2, \dots, s_l, \dots\}$  به همراه مقادیر تابع هدفشان (وزن سازه)  $\{f(s_1), f(s_2), \dots, f\}$  نگهداری می -



شوند.  $\lambda$ امین متغیر از  $\lambda$ امین راه حل را با  $s_i^i$  نشان می‌دهیم. راه حل‌ها در آرشیو به ترتیب ارزششان نگهداری می‌شوند، بنابراین برای یک مسأله کمینه‌سازی داریم:

$$f(s_1) \leq f(s_2) \leq \dots \leq f(s_l) \leq \dots \leq f(s_k) \quad (۸-۴)$$

و هر راه حل وزنی متناسب با ارزشش دارد یعنی:

$$w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_l \geq \dots \geq w_k \quad (۹-۴)$$

وزن با استفاده از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$w_i = \frac{1}{qk\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(i-1)^2}{2q^2k^2}} \quad (۱۰-۴)$$

مطابق رابطه بالا وزن، مقدار تابع گاوسی با میانگین ۱ و واریانس  $qk$  است و  $q$  پارامتر الگوریتم است.

زمانی که  $q$  کوچک است راه حل‌هایی با رتبه‌ی بالاتر ترجیح بیشتری دارند.

بردار دوم از کرنل گاوسی که باید تعیین شود، بردار میانگین است. برای هر  $G$  مقادیر  $\lambda$ امین متغیر از

راه حل‌های موجود در آرشیو به عنوان بردار میانگین انتخاب می‌شوند.

$$\mu^1 = \{\mu_1^1, \dots, \mu_k^1\} = \{s_1^1, \dots, s_k^1\} \quad (۱۱-۴)$$

تعیین پارامتر سوم  $\sigma^i$  از پیچیدگی بیشتری نسبت به دو پارامتر قبلی برخوردار می‌باشد، بنابراین

برای روشن شدن مقدار این پارامتر، فرض کنید یک مورچه با استفاده از یک روش احتمالاتی نظیر

چرخ گردان<sup>۱</sup> [۳۳]، یکی از این جواب‌ها مانند  $S_i$  را انتخاب نماید. با انتخاب این جواب، بایستی یک جواب جدید به صورتی که در ادامه تشریح خواهد شد با استفاده از تابع گوسی به صورت توزیع نرمال تولید شود.

در تابع گوسی بایستی میانگین و انحراف معیار مشخص شود و همان طوری که در بالا اشاره شده است، پارامتر  $\mu_i$  معرف میانگین در یک تابع گوسی می‌باشد. علاوه بر آن انحراف معیار بین تمامی مقادیر متغیر تصمیم  $i$ ام ( $k$  مقدار برای متغیر تصمیم  $i$ ام) نسبت به متغیر تصمیم  $S_i^i$  بایستی محاسبه شود که با  $\sigma_i^i$  نشان داده می‌شود. بر این اساس، یک عدد تصادفی نرمال به میانگین  $S_i^i$  و انحراف معیار  $\sigma_i^i$  برای متغیر تصمیم  $i$ ام تولید می‌شود و به همین ترتیب تا متغیر تصمیم  $n$ ام، این روند ادامه خواهد داشت که در نهایت، مقادیر اختصاص داده شده به متغیرهای تصمیم، وارد تابع هدف شده که با تکرار این مرحله برای هر مورچه، سرانجام به تعداد مورچه‌ها، جواب جدید تولید و به آرشیو اضافه می‌شود. در ادامه بایستی میزان فرمون به‌روز شود که این به‌روزرسانی فرمون با مرتب‌سازی کل جواب‌ها، و ذخیره نمودن  $k$  جواب برتر انجام خواهد شد. در این راستا انحراف معیار مذکور به صورت زیر محاسبه می‌شود.

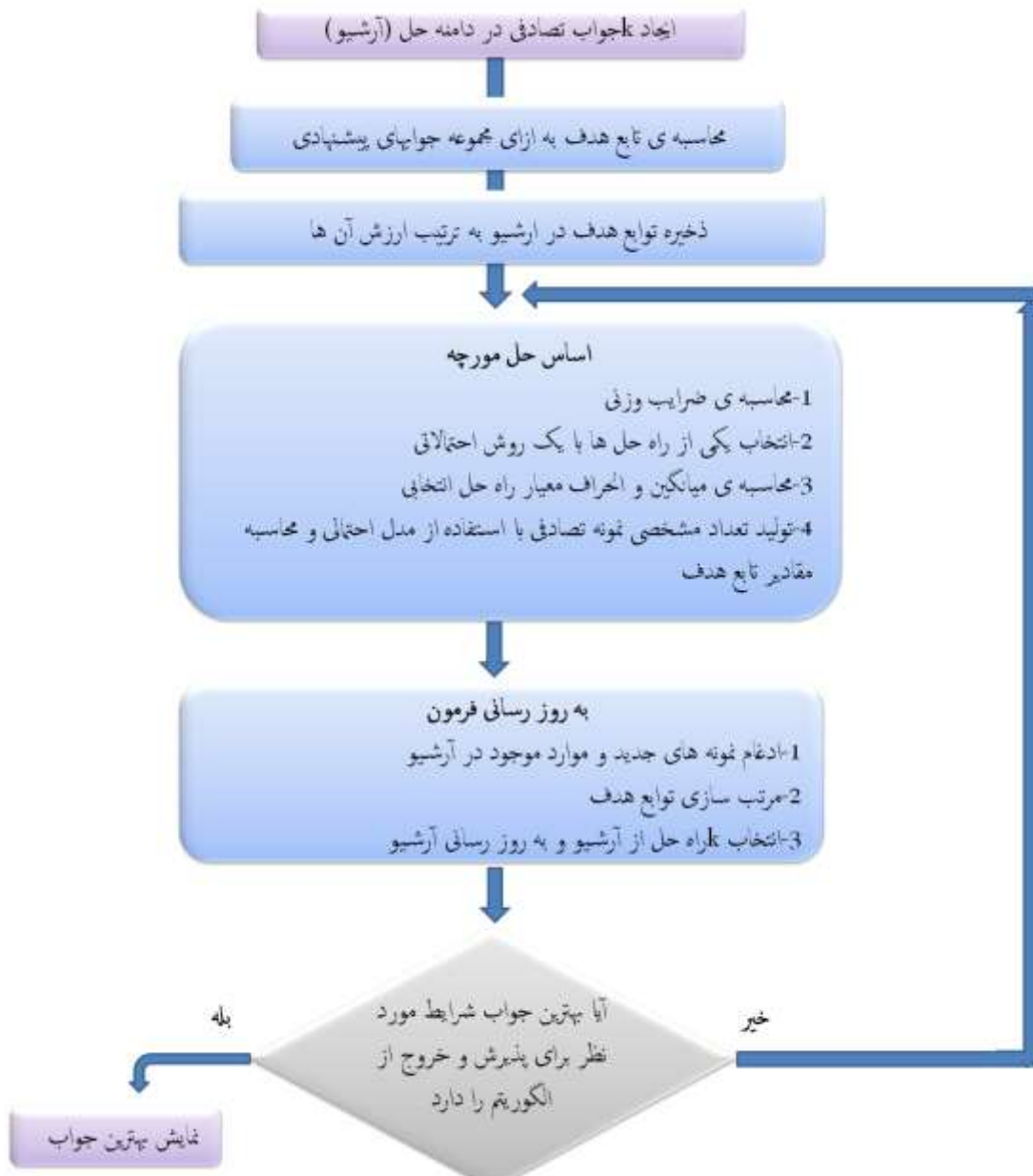
$$\sigma_l^1 = \xi \sum_{e=1}^k \frac{|s_e^1 - s_l^1|}{k-1} \quad (۴-۱۲)$$

<sup>۱</sup> Roulette Wheel

پارامتر  $\xi$  برای همه‌ی ابعاد یکسان است و تاثیری مشابه تبخیر فرمون در  $ACO$  دارد. مقادیر بالا سرعت پایین همگرایی را بدنبال دارد.

برای هر مورچه با استفاده از یک تولید کننده‌ی تصادفی نرمال با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار  $\sigma$  مقدار  $\lambda$  متغیر تصمیم مشخص خواهد شد. این پروسه تا انتخاب  $n$  امین متغیر تصمیم ادامه خواهد داشت و در انتها مقدار تابع هدف محاسبه می‌شود. سرانجام به تعداد مورچه‌ها راه‌حل جدید ساخته می‌شود و به آرشیو راه‌حل اضافه می‌شود. در مرحله‌ی به‌روزرسانی فرمون  $k$  راه‌حل در آرشیو باقی می‌مانند و مابقی حذف می‌شوند.

در شکل (۴-۶) فلوجارت الگوریتم کلونی مورچگان برای فضای پیوسته نمایش داده شده است.



شکل (۴-۶). فلوچارت الگوریتم ACOR

# فصل پنجم

## مثال‌های عددی

## ۵-۱- مقدمه

در این قسمت به منظور بررسی کارایی الگوریتم مورچگان جهت بهینه کردن جوابها و سرعت حل چند مثال مرسوم حل شده است. این مثالها از جمله مثالهایی است که در بسیاری از منابع بهینه سازی مورد بررسی قرار گرفته و حل تحلیلی و عددی آنها به روشهای مختلف موجود است و امکان مقایسه و صحت سنجی این الگوریتم را فراهم می آورد.

در تمام این مثالها کمینه کردن وزن تابع هدف و تنش فون میسز قید طراحی می باشد. شکل کلی مسأله بهینه سازی شکل به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \min_{x_i} & w(x) \\ \text{s.t.} & \sigma_{von} \leq \sigma_a \\ & x_i^{min} \leq x_i \leq x_i^{max}, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1-5)$$

## ۵-۲- مطالعه موردی

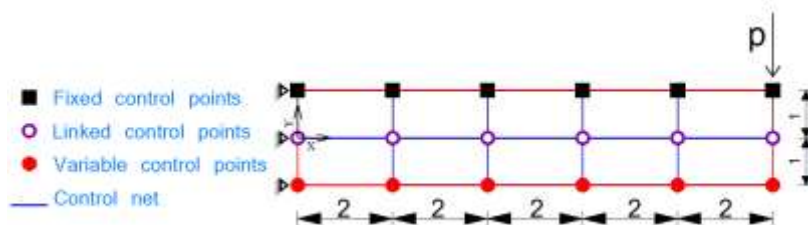
### ۵-۲-۱- مثال تیر طره

در آغاز برای صحت سنجی برنامه نوشته شده مثالی از مرجع ۳۴ بیان می شود. در این مثال یک تیر طره با بار نقطه ای که در انتهای آزاد و گوشه ی بالای تیر وارد می شود، وجود دارد (شکل ۵-۱). مقادیر نیرو، ضریب پواسون و مدول الاستیسیته به ترتیب  $300 \text{ kgf}$ ،  $0.15$  و  $1500 \text{ kg/cm}^2$  می باشد. تابع هدف کمینه کردن وزن، تحت قید تنش فون میسز  $4000 \text{ kg/cm}^2$  می باشد. نقاط کنترلی مورد استفاده

در مراحل بهینه‌سازی شکل شامل نقاط کنترلی وابسته، متغیر و ثابت می‌باشد. نقاط کنترلی وابسته، نقاطی هستند که با توجه به تغییرات نقاط کنترلی متغیر (متغیرهای طراحی) در حین بهینه‌سازی به صورت تعریف شده تغییر می‌یابند. شش متغیر طراحی در نظر گرفته شده است. در هر دو جهت مدل، از فضای زیر دامنه نرَبز مرتبه دو استفاده شده است. تعداد کل نقاط کنترلی نیز 18 نقطه می‌باشد. بردارهای گرهی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

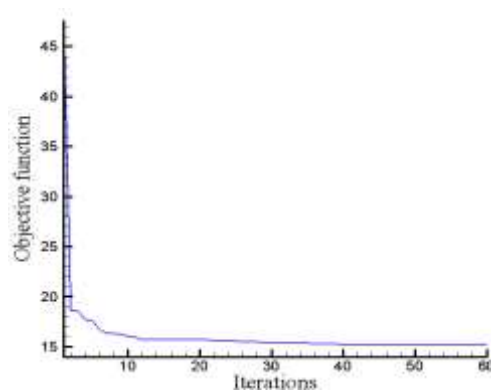
$$\mathbf{E} = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$$

$$\mathbf{H} = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

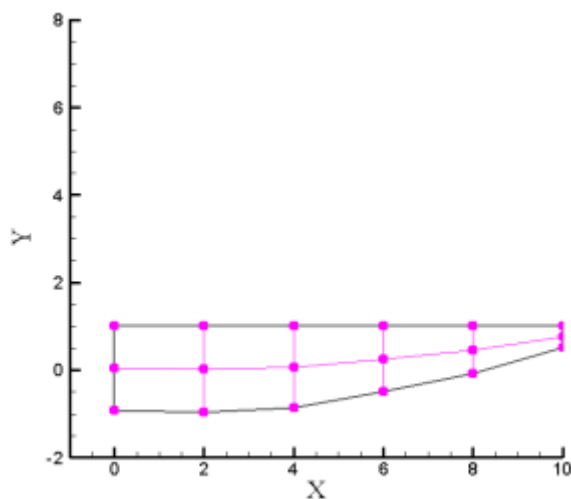


شکل (۱-۵). طرح اولیه در مثال (۱-۲-۵)

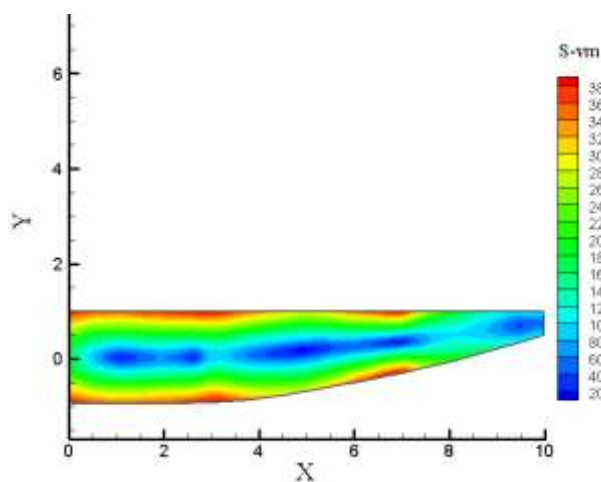
نتایج حاصل از الگوریتم مورچگان در شکل‌های (۲-۵) تا (۴-۵) نمایش داده شده‌اند.



شکل (۲-۵). روند بهینه‌سازی شکل تیر طره براساس الگوریتم مورچگان



شکل (۵-۳). شکل بهینه به همراه نقاط کنترلی براساس الگوریتم مورچگان



شکل (۵-۴). طرح بهینه به همراه کانتور تنش آن براساس الگوریتم مورچگان

این مثال با نتایج به دست آمده از روش‌های برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم ترتیبی<sup>۱</sup> [۳۴]، مجانب‌های

متحرک<sup>۲</sup> [۳۵] و الگوریتم ذرات باردار<sup>۳</sup> [۳۶] مقایسه شده‌اند که نتایج مربوط به روش برنامه‌ریزی درجه

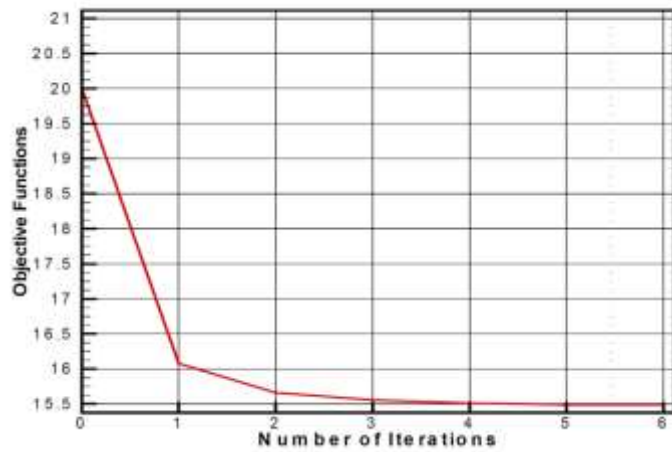
دوم ترتیبی در شکل‌های (۵-۵) تا (۷-۵) نشان داده شده‌اند.

<sup>۱</sup> Sequential Quadratic Programming (SQP)

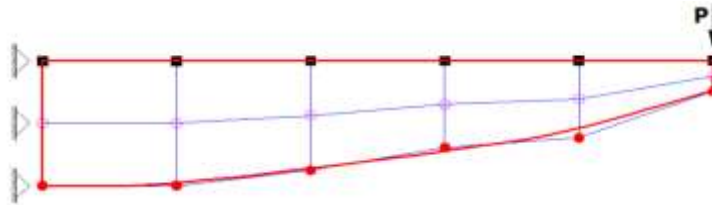
<sup>۲</sup> Method of Moving Asymptotes (MMA)

<sup>۳</sup> Charged System Search (CSS)

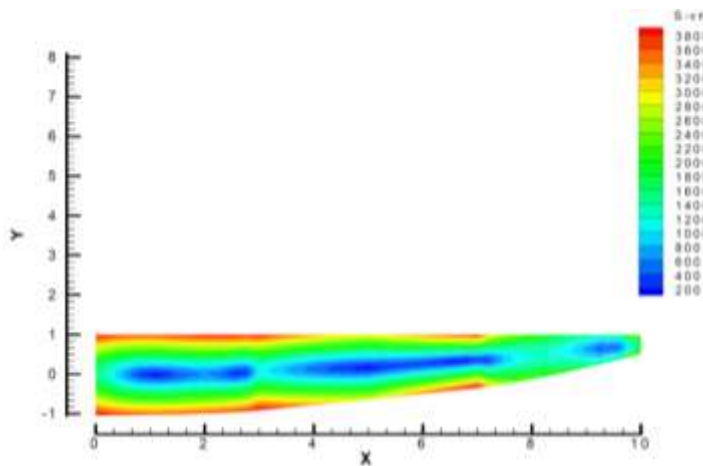




شکل (۵-۵). روند بهینه‌سازی شکل تیر طره بر اساس روش برنامه‌ریزی درجه دوم ترتیبی [۳۴]



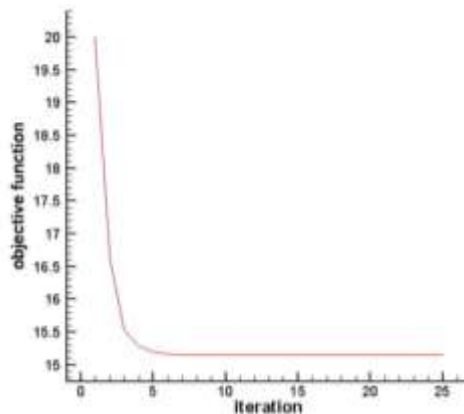
شکل (۶-۵). طرح بهینه به همراه شبکه‌ی کنترلی در روش برنامه‌ریزی درجه دوم ترتیبی [۳۴]



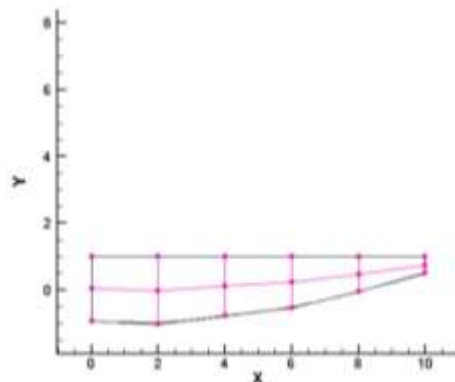
شکل (۷-۵). کانتور تنش فون میسز در روش برنامه‌ریزی درجه دوم ترتیبی [۳۴]

همان‌طور که ملاحظه می‌شود روش برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم ترتیبی در تعداد تکرار کمتری به جواب رسیده است. وزن به دست آمده از الگوریتم مورچگان و روش برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم متوالی به ترتیب  $15.187\text{ kg}$  و  $15.50\text{ kg}$  می‌باشد که در حدود  $2.019$  درصد در روش کلونی مورچگان نسبت به روش برنامه‌ریزی درجه‌ی دوم ترتیبی بهبود مشاهده می‌شود. علت این امر را می‌تواند قابلیت الگوریتم‌های فراابتکاری در مقایسه با روش‌های ریاضی و امکان فرار از بهینه‌های محلی باشد.

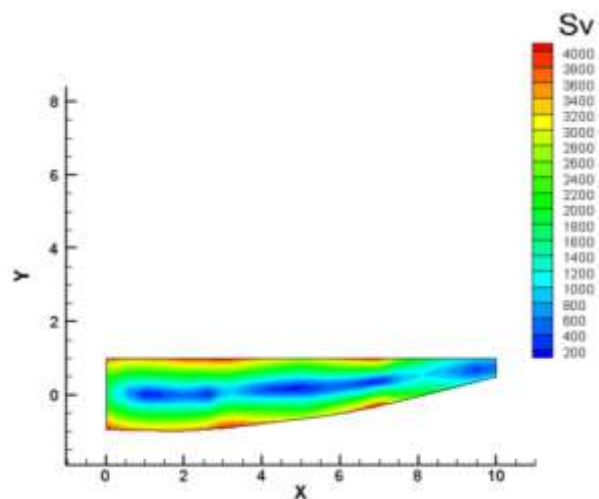
نتایج مربوط به روش مجانب‌های متحرک در شکل‌های (۵-۸) تا (۵-۱۰) و نتایج الگوریتم ذرات باردار در شکل‌های (۵-۱۱) تا (۵-۱۳) نمایش داده شده‌اند.



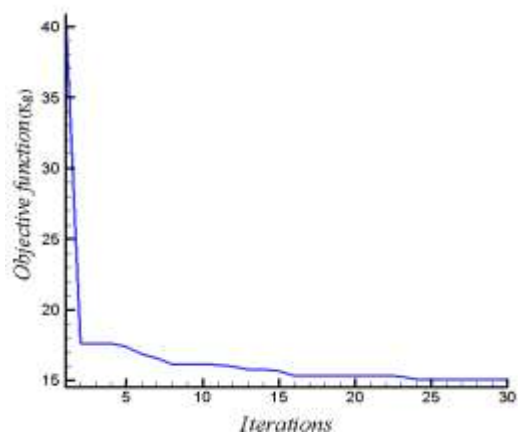
شکل (۵-۸). روند بهینه‌سازی مثال تیر طره در روش مجانب‌های متحرک [۳۹]



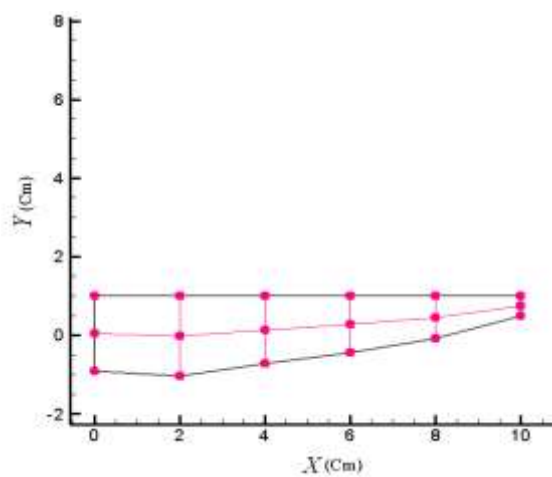
شکل (۵-۹). شکل بهینه به همراه نقاط کنترلی در روش مجانب‌های متحرک [۳۵]



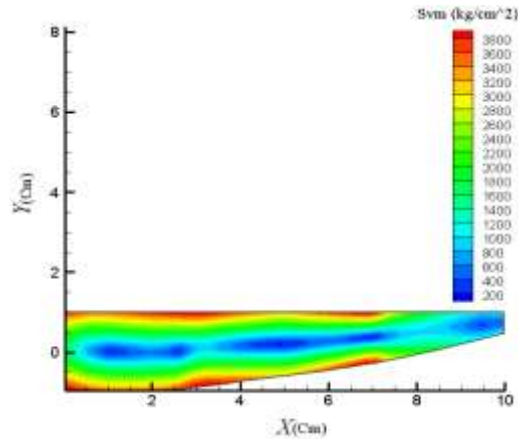
شکل (۵-۱۰). شکل بهینه به همراه کانتورهای تنش فون میسز در روش مجانب‌های متحرک [۳۵]



شکل (۵-۱۱). روند بهینه‌سازی مثال تیر طره با الگوریتم ذرات باردار [۳۶]



شکل (۵-۱۲). شکل بهینه به همراه نقاط کنترلی با الگوریتم ذرات باردار [۳۶]



شکل (۵-۱۳). شکل بهینه به همراه کانتورهای تنش فون میسز با الگوریتم ذرات باردار [۳۶]

همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج به دست آمده بسیار مشابه یکدیگرند، با این تفاوت که در روش-

های فراابتکاری نظیر جستجوی ذرات باردار و کلونی مورچگان در تکرار بیشتری به وزن بهینه‌ی

کمتری رسیده‌اند.

## ۵-۲-۲. مثال آچار

آچاری به طول  $10\text{ cm}$  و با اندازه نیم بولت  $0.8\text{ cm}$  بررسی شده است. به دلیل تقارن مسأله نصف

آچار مدل شده است. شکل اولیه فضای مسأله به وسیله یک زیردامنه مطابق شکل (۵-۱۴) مدل شده

است. مولفه‌ی قائم متغیرهای موجود بر روی مرز بالایی آچار، به عنوان متغیر طراحی لحاظ شده

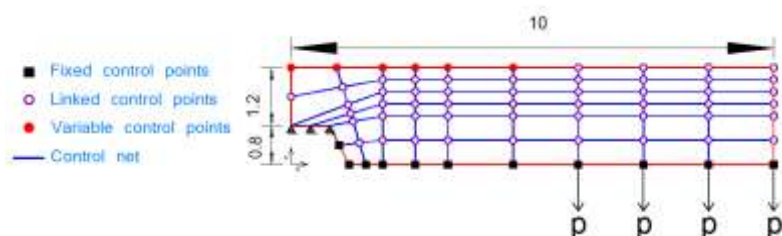
است. برای این‌که شکل دسته‌ی آچار به صورت مستقیم بدست آید، چهار نقطه‌ی کنترلی انتهایی بر

روی مرز بالای شکل به نقطه‌ی پنجم لینک شده است. غیر از نقاط روی مرز بولت و نقاط روی مرز

پایینی، سایر نقاط به متغیرهای طراحی وابسته هستند. حداکثر مقدار برای مولفه‌ی قائم نقاط طراحی

۲ فرض شده است. حداکثر تنش فون میسز  $11150 \text{ kg/cm}^2$  در نظر گرفته شده است. بار وارده به

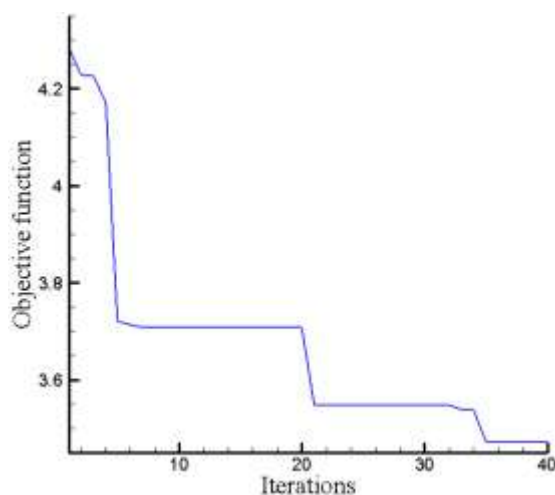
صورت چهار بار نقطه‌ای  $p=10 \text{ kgf}$  مطابق شکل (۵-۱۴) اعمال شده است [۳۷].



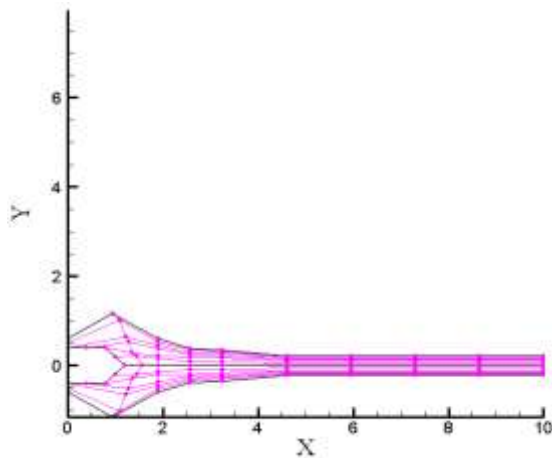
شکل (۵-۱۴). طرح اولیه‌ی مسأله نصف آچار

روند بهینه‌سازی، طرح بهینه‌ی آچار به همراه شبکه‌ی نقاط کنترلی و نیز کانتور تنش جواب به

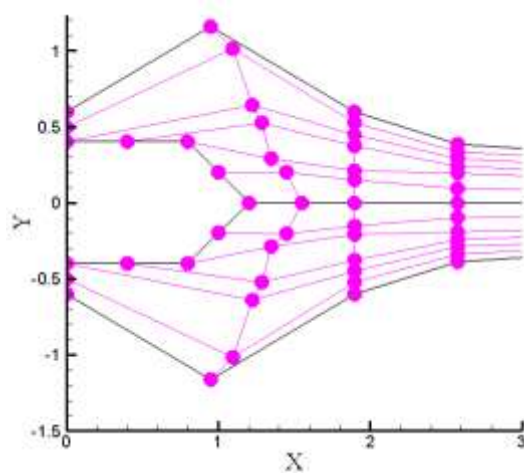
دست آمده از الگوریتم مورچگان، به ترتیب در شکل (۵-۱۵) تا (۵-۱۸) نمایش داده شده‌اند.



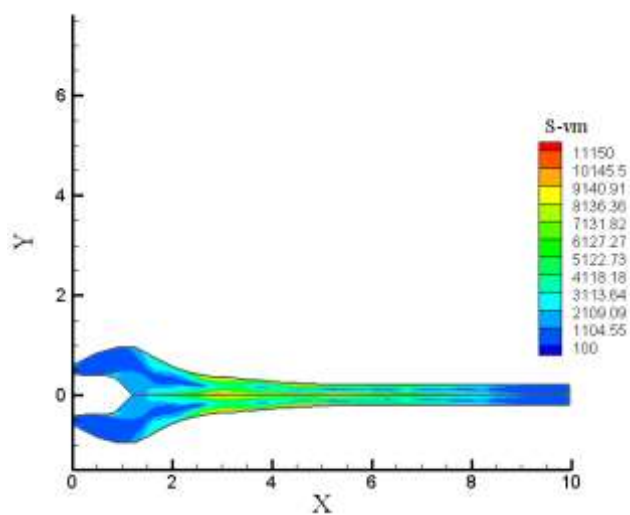
شکل (۵-۱۵). روند بهینه‌سازی در مسأله آچار براساس الگوریتم مورچگان



شکل (۵-۱۶). طرح بهینه‌ی مسأله آچار به همراه نقاط کنترلی براساس الگوریتم مورچگان

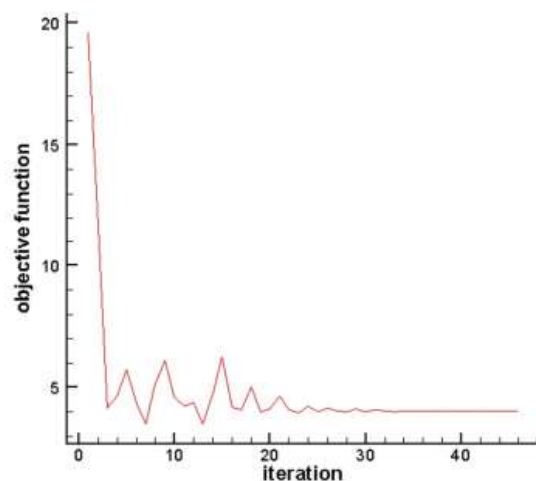


شکل (۵-۱۷). نمای نزدیک از شکل بهینه‌ی سر آچار با استفاده از الگوریتم مورچگان

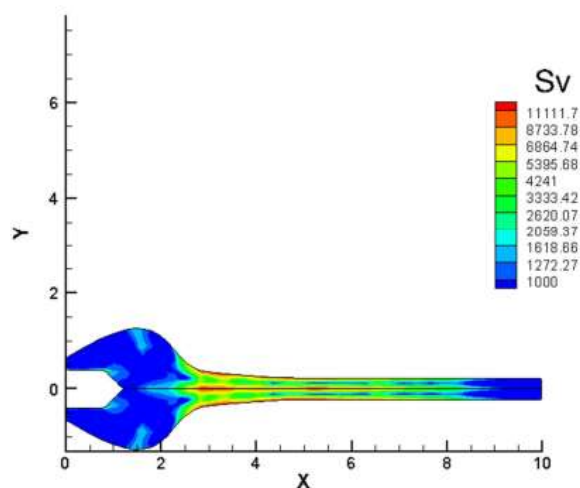


شکل (۵-۱۸). طرح بهینه‌ی آچار و کانتور تنش نهایی براساس الگوریتم مورچگان

نتایج مربوط به روش مجانب‌های متحرک در شکل‌های (۱۹-۵) و (۲۰-۵) نمایش داده شده است.



شکل (۱۹-۵). روند بهینه‌سازی شکل مسأله آچار در روش مجانب متحرک [۳۵]



شکل (۲۰-۵). کانتور تنش برای طرح بهینه آچار در روش مجانب متحرک [۳۵]

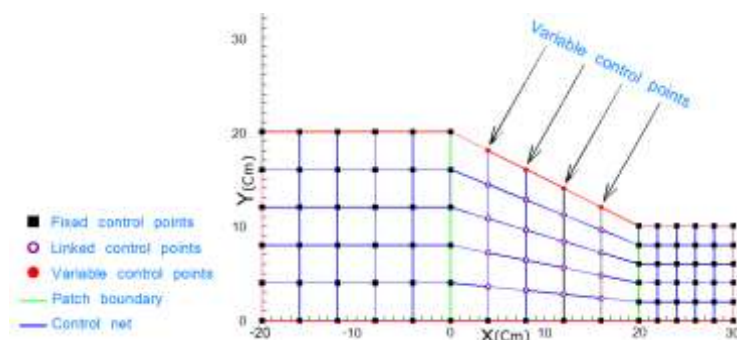
از مقایسه نتایج به دست آمده از الگوریتم مورچگان با نتایج حاصل از روش مجانب‌های متحرک در

می‌یابیم که وزن بهینه در این روش برابر با  $2.6 \text{ kg}$  و وزن کمینه در الگوریتم مورچگان برابر با

$3.089 \text{ kg}$  می‌باشد که در حدود  $15.83$  درصد خطا دارد.

### ۵-۲-۳. مثال فیلت<sup>۱</sup> دوبعدی

هندسه‌ی شکل مسأله با استفاده از 96 نقطه کنترلی مدل شده است. شکل از سه زیر دامنه تشکیل شده است. مقادیر مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب  $1500000 \text{ kg/cm}^2$  و  $0.25$  می‌باشد و بارگذاری بر روی لبه‌ی انتهایی سمت راست به مقدار  $p=10 \text{ kgf}$  اعمال شده است تا بار گسترده‌ای به میزان  $5 \text{ kg/cm}$  را ایجاد نماید. نقاط کنترلی متغیر، بر روی شکل (۵-۲۱) نمایش داده شده است و تنها در راستای قائم حرکت دارند. (ابعاد برحسب سانتی‌متر است).

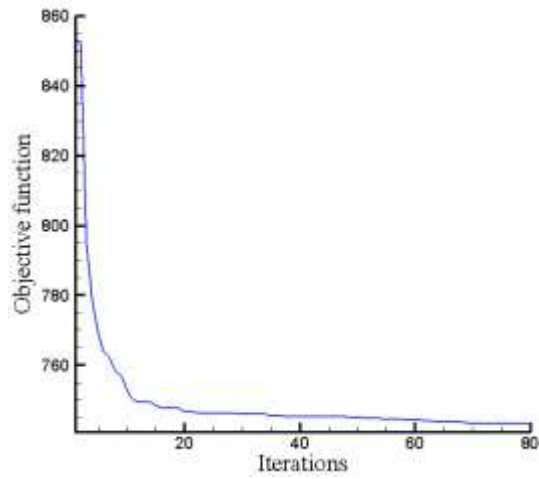


شکل (۵-۲۱). نمایش متغیرهای طراحی در مسأله فیلت دوبعدی

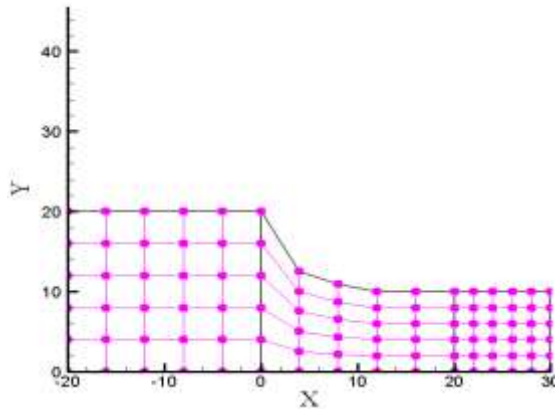
مراحل بهینه‌سازی، شبکه‌ی نقاط کنترلی در طرح بهینه و نیز کانتور تنش فیلت دوبعدی بدست آمده از الگوریتم مورچگان، به ترتیب در شکل‌های (۵-۲۲) تا (۵-۲۴) نشان داده شده‌اند. وزن بهینه در این مثال  $743.251 \text{ kg}$  بدست آمده است.

<sup>۱</sup> Fillet

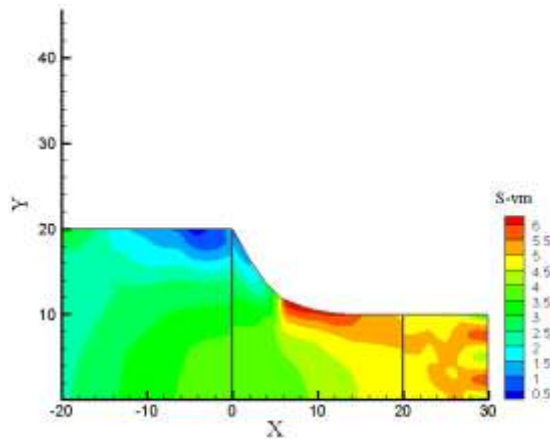




شکل (۵-۲۲). روند بهینه‌سازی فیلتر دوبعدی با استفاده از الگوریتم مورچگان



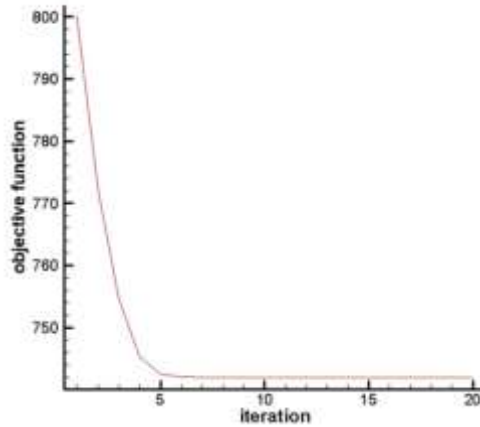
شکل (۵-۲۳). طرح بهینه مسأله فیلتر دوبعدی به همراه نقاط کنترلی با استفاده از الگوریتم مورچگان



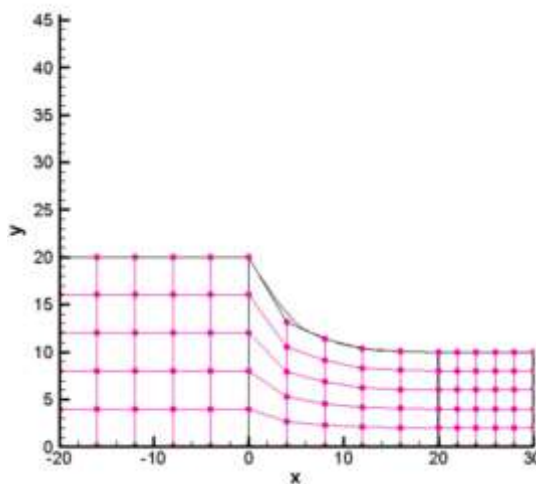
شکل (۵-۲۴). کانتورهای تنش فون میسز برای فیلتر دوبعدی براساس الگوریتم مورچگان

پس از شش مرحله بهینه‌سازی در روش مجانب‌های متحرک، طرح بهینه همانند شکل (۵-۲۶) به

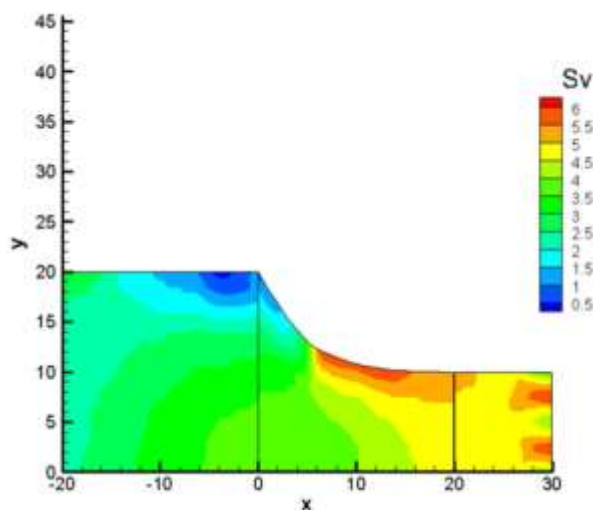
دست می‌آید و در شکل (۵-۲۷) طرح بهینه به همراه کانتورهای تنش نمایش داده شده است.



شکل (۵-۲۵). روند بهینه‌سازی فیلت دوبعدی بر اساس روش مجانب‌های متحرک [۳۵]



شکل (۵-۲۶). شبکه نقاط کنترلی طرح بهینه فیلت دوبعدی بر اساس روش مجانب‌های متحرک [۳۵]



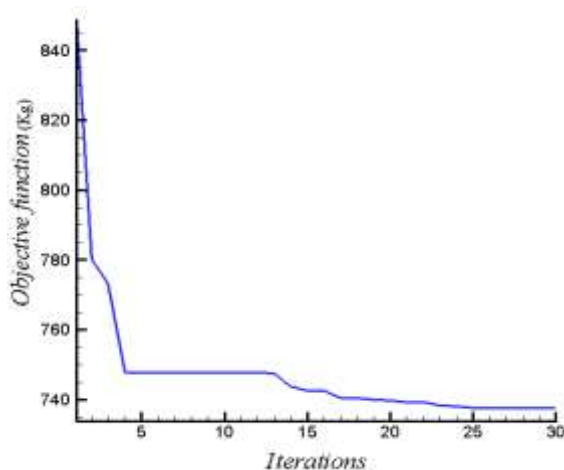
شکل (۵-۲۷). کانتور تنش فون میسز طرح بهینه فیلِت دوبعدی به دست آمده از روش مجانب‌های متحرک [۳۵]

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، وزن کمینه‌ی فیلِت دوبعدی برابر با  $741 \text{ kg}$  می‌باشد که وزن کمینه

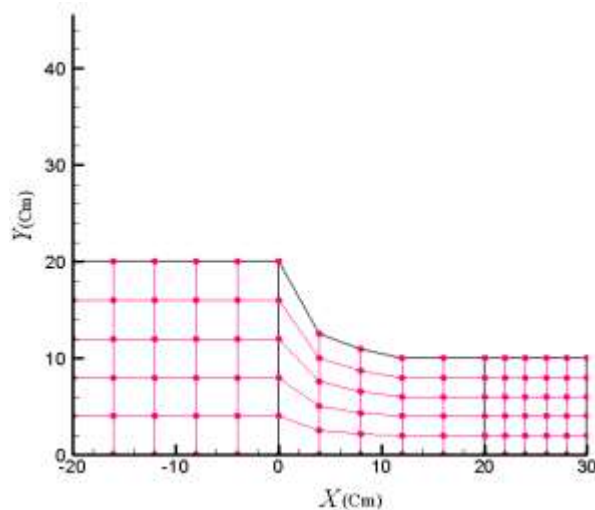
به دست آمده از الگوریتم مورچگان حدود  $0.44$  درصد بهبود یافته است.

نتایج مربوط به روش جستجوی ذرات باردار در شکل‌های (۵-۲۸) تا (۵-۳۰) آمده است. با توجه به

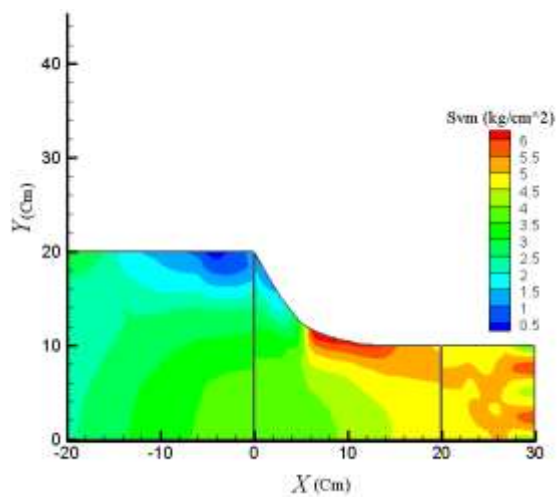
نتایج به دست آمده، نتایج بسیار نزدیک به روش کلونی مورچگان می‌باشد.



شکل (۵-۲۸). روند بهینه‌سازی فیلِت دوبعدی بر اساس روش جستجوی ذرات باردار [۳۶]



شکل (۵-۲۹). شبکه نقاط کنترلی طرح بهینه فیلِت دوبعدی براساس روش جستجوی ذرات باردار [۳۶]



شکل (۵-۳۰). کانتور تنش فون میسز طرح بهینه فیلِت دوبعدی به دست آمده از روش جستجوی ذرات باردار [۳۶]

## ۵-۲-۴. مثال تیر دوسرگیردار

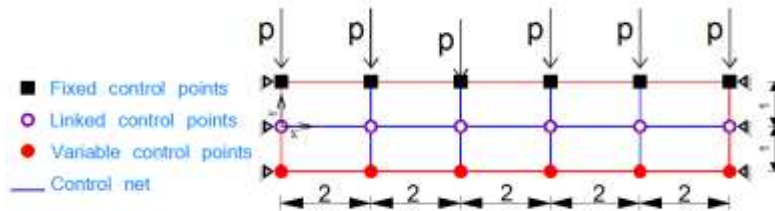
یک تیر دوسرگیردار با بار گسترده در لبه‌ی بالایی همانند شکل (۵-۳۱) در نظر گرفته شده است.

مقادیر نیرو، ضریب پواسون و مدول الاستیسیته به ترتیب  $180 \text{ kg/cm}$ ،  $0.15$  و  $1500 \text{ kg/cm}^2$  می-

باشد. تابع هدف کمینه کردن وزن و تحت قید تنش فون میسز حداکثر برابر با  $4000 \text{ kg/cm}^2$  می باشد.

پارامترهای مدل سازی اولیه نظیر تعداد نقاط کنترلی و فواصل آن ها در این مثال مانند مثال (۵-۲-۱)

در نظر گرفته شده است.

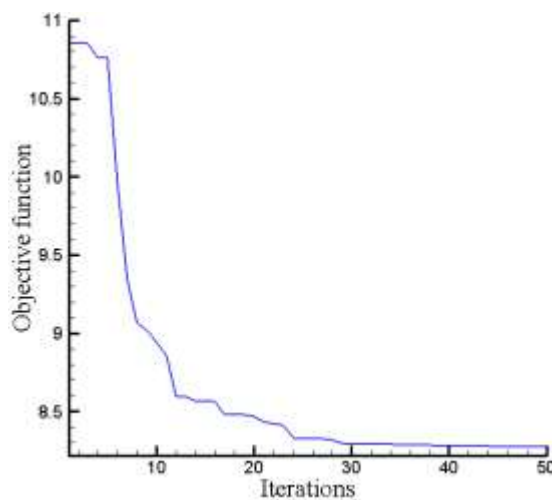


شکل (۵-۳۱). شکل اولیه ی تیر دو سرگیردار

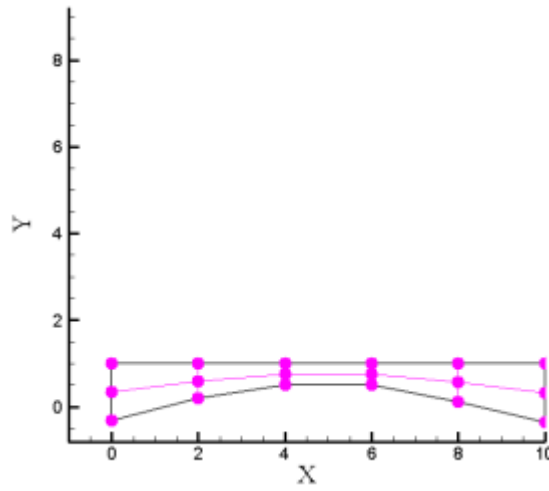
روند بهینه سازی، شبکه ی نقاط کنترلی طرح بهینه و نیز کانتور تنش جواب به دست آمده از

الگوریتم مورچگان، به ترتیب در شکل (۵-۳۲) تا شکل (۵-۳۴) نمایش داده شده اند. وزن کمینه

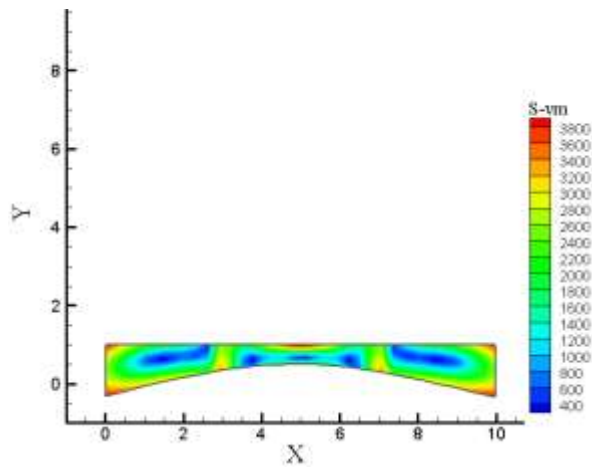
برابر با  $8.278 \text{ kg}$  می باشد.



شکل (۵-۳۲). روند بهینه سازی شکل تیر دوسرگیردار براساس الگوریتم مورچگان



شکل (۳۳-۵). طرح بهینه به همراه شبکه‌ی نقاط کنترلی براساس الگوریتم مورچگان



شکل (۳۴-۵). طرح بهینه به همراه کانتور تنش تیر دوسرگیردار براساس الگوریتم مورچگان

## فصل ششم

### نتایج و پیشنهادات

## ۱-۶- مقدمه

در فصول قبل روش تحلیل آیزوژئومتری، بهینه‌سازی شکل و روش‌های مناسب برای آن به طور مفصل بررسی شد. همچنین الگوریتم مورچگان معرفی شده و مورد مطالعه قرار گرفت. در این فصل نتایج حاصل از این مطالعات به صورت خلاصه ذکر می‌شود. همچنین در پایان پیشنهادهای جهت فعالیت‌های بعدی ارائه می‌گردد.

## ۲-۶- جمع بندی و نتایج

- ❖ با استفاده از نرزه‌ها تعریف هندسه مسأله با دقت بالایی انجام می‌شود و در نتیجه می‌توان با بهره‌گیری از این مزیت شکل مرزها را به صورت مناسبی با دقت بالا مدل‌سازی کرد. همچنین به کمک نرزه‌ها امکان مدل‌سازی اشکالی همچون دایره و بیضی در حالت دو بعدی با دقت بالایی وجود دارد.
- ❖ در این روش تغییرات سطوح مرزی حین بهینه‌سازی مشکلی در یکنواختی آن‌ها ایجاد نمی‌کند و در طول بهینه‌سازی با تغییراتی که در مرز ایجاد می‌شود همواری لازم همچنان حفظ می‌شود.
- ❖ یکی از مزیت‌های مهم این روش نسبت به روش‌های متداولی که از روش اجزای محدود استفاده می‌کنند، حذف مرحله‌ی ساخت شبکه‌ی اجزای محدود در طول مراحل بهینه‌سازی است. این کار حجم محاسبات را به صورت قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد.



❖ استفاده از توابعی که تحلیل مسائل توسط آن‌ها انجام می‌شود به عنوان توابعی که مدل هندسی را ایجاد می‌کنند، مشکل دوگانگی مدل تحلیل و مدل طراحی که مشکلی بزرگ در دیگر روش‌های عددی است را حل می‌کند. این امر موجب می‌شود مدل تحلیل و طراحی بهم پیوند خورده و دیگر نیازی به کار اضافی جهت تبدیل مدل طراحی به مدل تحلیل و یا برعکس نباشد.

❖ از میان روش‌های بهینه‌سازی موجود ما در این پایان‌نامه از روش الگوریتم مورچگان استفاده کردیم. با توجه به این که این روش جزء روش‌های فراابتکاری می‌باشد، سرعت همگرایی در آن نسبت به روش‌های ریاضی مبتنی بر گرادیان کمتر است ولی حسن این روش‌ها در این است که به دلیل فضای جستجوی بزرگتر مشکل افتادن در نقاط بهینه‌ی محلی را حل کرده است و در مقایسه با روش‌های ریاضی در برخی از مسائل بررسی شده نتایج بهبود پیدا کرده‌اند.

### ۳-۶- پیشنهادات

در ادامه برای تحقیقات آینده چند موضوع بیان می‌شود که می‌تواند مفید باشد:

- یافتن روشی سیستماتیک جهت انتخاب مقادیر بردار گرهی و مناسب‌ترین فاصله بین آن‌ها.
- یافتن نقاط مناسب جهت اعمال بار و بررسی بارگذاری‌های مختلف.
- در نظر گرفتن انرژی کرنشی به عنوان تابع هدف و حجم یا وزن سازه به عنوان قید طراحی

○ استفاده از متامدل‌ها<sup>۱</sup> و روش‌های کمکی جهت بهبود سرعت همگرایی و کاهش هزینه‌های

محاسباتی در الگوریتم مورچگان

○ اضافه کردن روند جست و جوی محلی به الگوریتم مورچگان به منظور افزایش دقت الگوریتم

---

<sup>۱</sup> Metamodels, Surrogates Models

[1] T.J.R Hughes, J.Cotrrel. And Y. Bazilevs (2005), "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 194, pp. 4135-4195.

[2] B.Szabo, A.Duster, E.Rank. (2004), "The p-version of the finite element method E.stein, R.de Borst, T.G.R. Hughes (Eds.)" in **Encyclopedia of Computational Mechanics**, vol. 1, New York, Wiley.

[۳] جدیدالاسلام م، (۱۳۹۱)، پایان‌نامه ارشد: "تحلیل حساسیت و بهینه‌سازی آیزوژئومتریکی شکل سازه‌ها"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد «سازه»، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[4] E.Cervera, J.Trevelyan (2005), "Evolutionary Structural Optimization Based on Boundry Representation of NURBS. Part i: 2d Algoritms", **Comput. Struct**, vol.83, pp.1902-1916.

[5] G.Subbarayan, M.Rayasam, V.Srinivisan (2007), "CAD inspired hierarchical partition of unity constructions for NURBS-based, Meshless Design, analysis and optimization" **Int. J.Numer. Math. Eng**, vol. 72, no. 12, pp. 1452-1489.

[6] G.Subbarayan, X.Zhang, M. Rayasam (2007), "A meshles Compositional approach to shape optimal design ", **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng**, vol. 196, pp 2130-2146.

[7] J.Bennet, M.Botkin, (1984), "Structural shape optimization with geometric problem description and adaptive mesh refinement ", **AIAA**, pp. 458-464.

[8] V.Braibant, C.Fleury, P.Beckers (1983), "Shape optimal design: An approach matching C.A.D and optimization concept", **Aerospace laboratory of university of liege, Belgium**.

[9] Hughes, T.J.R, Cottrel, J., Bazilevs, Y., (2009), "Isogeometric Analysis Toward integration of CAD and FEA ", **Wiley**.

[10] Kurshin, L.M., Onoprienko, P.M., (1976), "Determination of the shapes of doubly connected bar section of maximum torsional stiffnes ", **Prikl. Mat. Mekh**, vol. 40, no. 6, pp 1078-1084.

[11] M.Weck, P.Steinke (1983) "An efficient technique in shape optimization", **J. Structural mech**, vol. 11, no. 4, pp. 433-449.

[12] V.Braibent, C.Fleury. (1984), "shape optimal design: A performing C.A.D oriented formulation", in *AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th structural Dynamic and Material Conference*, CA.

[۱۳] توکلی. س. م.، (۱۳۸۸)، پایان نامه دکتری، "آنالیز و بهینه سازی توپولوژی آیزوژئومتریکی سازه ها در محیط های پیوسته با استفاده از توابع پایه نریز"، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت.

[۱۴] حسنی. ب.، ظریف مقدم. ن.، (۱۳۸۹)، "استفاده از اسپلاین ها در مدل سازی و تحلیل مسائل تنش/کرنش مسطح"، پنجمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۴ تا ۱۶ اردیبهشت، مشهد، ایران.

[۱۵] اسلامی. ر.، (۱۳۹۱)، "بهینه سازی شکل سد دوقوسی بتنی با روش تحلیلی آیزوژئومتریکی"، پایان نامه کارشناسی ارشد «سازه»، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده عمران.

[16] Peter. W. Christensen, Klarbring. A, (2009), "An introduction to structural Optimization", Waterloo: **Springer**.

[17] B.Hassani, E.Hinton, (1998), "Homogenization and structural topology optimization: Theory, practice and software", **Springer**.

[18] A.G.M Michell, "The limits of economy of material in frame structures", *Philosophical magazine*, vol. 8, pp. 305-316.

[19] R. T. Haftka, R. V.Grandhi, (1986), "Structural Shape optimization- A Survey", *computer methods in applied mechanics and engineering*. Vol. 57, pp. 91-106, 1986.

[20] S.S. Bhavikatti, C.V. Ramakrishnan, (1977), "Optimum Design of Fillets in flat and Round Tension Bars", *Design engineering technical conference*, Chicago.

[21] E.S Kristensen, N.F. Madsen, (1976), "on the optimum shape of Fillets in Plates Subjected to Multiple in-plane Loading Cases", *International journal of numerical methods in engineering*, vol. 10, pp. 1007-1009.

[22] Y. Liang Hsu, (1994), "A review of structural shape optimization", *Computers in Industry*, vol. 26, pp. 3-13.

[23] M. Dorigo, "The Ant Colony Optimization Methahuristic: Algorithm, Application, and Advances"

[24] p. p. Grasse, (1959), "La reconstruction du nid et les coordinations interindividuelles chez *bellicositermes natalensis* et *cubitermes* sp. La theorie de la stigmergie", *essai d'interpretation du comportement des termites constructeurs*, **Insectes Sociaux**, 6, 41.

[25] J. L. Deneubourg, S. Aron, S. Goss, and J. M. Pasteels, (1990), "The selforganizing exploratory pattern of the Argentine ant", **J. Insect Behav.**, 3, 159.

[26] S. Goss, S. Aron, J. L. Deneubourg, and J. M. Pasteels (1989), "Self-organized shortcuts in the Argentine ant", **Naturwissenschaften**, 76, 579.

[27] M. Dorigo, L. M. Gambardella (1997), "Ant colonies for the traveling salesman problem", **BioSystems**, vol 43, pp. 73–81.

[28] V. Maniello, a. Coloni (2007), "The ant system: optimization by a colony of cooperating ants.", **IEEE Trans Syst Man Cybern.**, vol. 26, pp. 29-42.

[29] j. Aguilar–Ruiz, j. Bacardit, f. Divina (2004), "Experimental Evaluation of Discretization Schemes for Rule Induction", **Deb K., et al. (Eds.)**, pp. 828–839.

[30] L. A. Kurgan (2004), "CAIM Discretization Algorithm", **IEEE Trans. Knowledge and Data Eng.**; Vol. 16, No. 2, pp. 145-153.

[31] X. Liu (2005), "A Discretization Algorithm Based on a Heterogeneity Criterion", **IEEE Trans. Knowledge and Data Eng.**; Vol. 17, No. 9, pp. 1166-1173.

[32] K. Socha, M. Dorigo (2008), "Ant colony optimization for continuous domains", **European Journal of Operational Research**, 185(3): pp. 1155-1173.

[33] Kalyanmoy Deb, A.P. Sameer Agarwal, T. Meyarivan (2000), "A Fast Elitist Multi-Objective Genetic Algorithm", **NSGA-II. IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, pp. 182--197.

[34] Hassani. B, Khanzadi. M, Tavakkoli. S. M. and Moghadam. N. Z, (2009), "Isogeometric Shape Optimization of Three Dimensional Problems, 8th world Congress on structural and Multidisciplinary Optimization", June 1-5, Lisbon, Portugal.

[35] عرب یارمحمدی. ا، (۱۳۹۳)، "بهینه‌سازی آیزوژئومتریکی شکل سازه‌های سه بعدی با تابع هدف وزن و قید تنش با روش مجانب‌های متحرک"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد «سازه»، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده عمران.

[36] مشمول. س. ص، (۱۳۹۴)، پایان‌نامه ارشد: "بهینه‌سازی شکل سازه‌های تنش مسطح با استفاده از الگوریتم CSS"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد «سازه»، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شاهرود، دانشکده عمران.

[37] B. Hassani, S. M. Tavakkoli, N. Zarif Moghadam (2011), “Application of isogeometric analysis in structural shape optimization”, *Scientia Iranica*, 18, pp.846-852.

## ***Abstract***

*Optimization of structures considering conditions and limitations – constraint functions – is a goal for engineers and designers. Many researches done and different methods proposed yet for the solution. Generally Structures optimization in continuous environments can be classified topology optimization, shape optimization and dimensional optimization. In this investigation to solve shape optimization, we use ACOR, because ant colony optimization method is a meta-heuristic method established for discrete problems.*

*In conventional shape optimization methods that use finite elements for analysis; after each analysis in optimization, structure's boundaries changes and new shape reticulates and analysis some again; these processes is time-consuming and make problems in big problems.*

*By emerging isogeometric methods and combining geometric and analysis , possibility of shape change ( structure boundaries ) without repetitive reticulation is provided .so in this thesis we try to use isogeometric method for analysis to change structure's shape in optimization.*

*In this investigation structure's weight is the objective function and stresses' restriction is considered as optimization problem constraint. We demonstrate the effectiveness of ant colony optimization in this thesis that is presented several examples of two-dimensional optimization problems by using a computer program.*

*Key Words: Structures Shape Optimization, Isogeometric method, Ant Colony Optimization Method*



**Faculty of Civil Engineering**  
**M.Sc. Thesis in Structural Engineering**

**Isogeometric shape optimization of plane stress problems by using ant colony**

**By: Fatemeh Mohammad Ali Nia**

**Supervisor:**

**Dr. Seyed Mahdi Tavakkoli**

**September 2016**