

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده عمران و معماری

گروه سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد

بهینه‌سازی آیزوژئومتری یک شکل سازه‌های سه‌بعدی با تابع هدف وزن و

قید تنش با روش مجانب‌های متحرک

امیر عرب‌یارمحمدی

استاد راهنما :

دکتر سید مهدی توکلی

استاد مشاور:

دکتر بهروز حسنی

شهریور ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : عمران

گروه : سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای امیر عرب یار محمدی

تحت عنوان:

بهینه‌سازی آیزوژئومتری یک شکل سازه‌های سه‌بعدی با تابع هدف وزن و قید تنش با روش

مجانب‌های متحرک

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
نام و نام خانوادگی : دکتر بهروز حسنی		نام و نام خانوادگی : دکتر سید مهدی توکلی	

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
نام و نام خانوادگی : دکتر مهدی گلی		نام و نام خانوادگی : دکتر وحیدرضا کلاتجاری نام و نام خانوادگی : دکتر فرشید جندقی علایی	

تقدیم به

پدر و مادرم ...

بار خدایا، نه میتوانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دستهای پینه بسته شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تشکر و قدردانی

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت، هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون بر می‌آید مفرح ذات، پس در نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.

از دست و زبان که برآید کز عهده شکرش به در آید

اکنون که پس از گذراندن این راه طولانی و طاقت‌فرسا به انتهای راه می‌رسم و سختی این دوران را بخاطر می‌آورم، به رسم ادب و اخلاق وظیفه خود می‌دانم که از همه کسانی که مرا در طی کردن این مسیر بس ناهموار یاری رساندند تشکر نمایم. در ابتدا از دکتر سید مهدی توکلی به خاطر زحماتی که در طول این مدت متحمل شدند تشکری ویژه دارم.

همچنین از پروفیسور بهروز حسنی که هم استاد درس من بودند و هم استاد اخلاق، به خاطر تمام چیزهایی که از ایشان آموختم کمال تشکر را دارم.

و نیز از پروفیسور کریستر سونبرگ^۱ از موسسه فناوری رویال سوئد^۲ به خاطر کدهای کامپیوتریشان سپاسگذارم.

و در آخر از همه کسانی که به نوعی مرا در به ثمر رساندن این پایان‌نامه یاری رساندند تشکر می‌نمایم.

^۱ Krister Svanberg

^۲ Royal Institute of Technology

تعهد نامه

اینجانب امیر عرب یار محمدی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته سازه دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بهینه‌سازی آیزوژئومتریکی شکل سازه‌های سه‌بعدی با تابع هدف وزن و قید تنش تحت راهنمایی دکتر سید مهدی توکلی متعهد می‌شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

چکیده

بهینه‌سازی سازه‌ها با در نظر گرفتن شرایط و محدودیت‌های موجود یا همان توابع قید همواره یکی از اهداف مهندسان و طراحان بوده است. تاکنون تحقیقات زیادی بر روی بهینه‌سازی انجام شده و روش‌های مختلفی برای حل پیشنهاد شده است. به طور کلی روشهای بهینه‌سازی را میتوان به سه دسته روشهای ریاضی، معیار بهینگی و فرااکتشافی تقسیم‌بندی نمود. در این تحقیق از روش مجانب-های متحرک که از جمله روشهای ریاضی به شمار میرود به منظور بهینه‌سازی شکل سازه‌های دو و سه بعدی الاستیک استفاده شده است.

لازمه استفاده از روش مجانب‌های متحرک داشتن مشتقات توابع هدف و قیدها نسبت به متغیرهای طراحی است که اصطلاحاً تحلیل حساسیت نام دارد. به این منظور میتوان از روشهای تحلیلی، نیمه تحلیلی و روشهای عددی تفاضل محدود استفاده نمود. با توجه به هزینه‌بر بودن روشهای نیمه تحلیلی و عددی نسبت به روش تحلیلی از این روش در تحقیق حاضر استفاده شده است. همچنین روش آیزوژئومتریکی به منظور تحلیل سازه‌ها بکار گرفته شده است. در این روش توابع مجهول (تغییرشکلها) با استفاده از توابع پایه اسپلاین که در تولید هندسه مسئله نیز بکار می‌روند تقریب زده می‌شوند. بنابراین برای تغییر هندسه در بهینه‌سازی شکل کفایت مختصات نقاط کنترلی هندسه را تغییر داده و مجدداً مسئله را تحلیل نمود. از اینرو استفاده از این روش مشکل تولید شبکه اجزای محدود در هر مرحله از بهینه‌سازی شکل را مرتفع نموده و هزینه محاسبات را تا حد زیادی کاهش میدهد.

در این تحقیق وزن سازه به عنوان تابع هدف و محدودیت تنش‌ها به عنوان قید مسئله بهینه‌سازی در نظر گرفته شده‌اند. برای نشان دادن کارایی روش مجانب‌های متحرک در مسائل بهینه‌یابی شکل و صحت معادلات تحلیل حساسیت استخراج شده، چندین مثال دو و سه بعدی با استفاده از برنامه کامپیوتری تهیه شده در این پایان نامه، ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی شکل سازه‌ها، روش مجانب‌های متحرک، تحلیل آیزوژئومتریک

فهرست مطالب

۱- فصل اول	۱
کلیات	۱
۱-۱- مقدمه	۲
۱-۲- تاریخچه	۵
۱-۳- اهداف کلی پایان نامه	۷
۱-۴- برنامه کامپیوتری نوشته شده	۷
۱-۵- ساختار کلی پایان نامه	۸
۲- فصل دوم	۹
روش تحلیل آیزوژئومتریک	۹
۱-۲- مقدمه	۱۰
۲-۲- مبانی روش آیزوژئومتریک	۱۴
۳-۲- ب- اسپلاین ها و توابع نریز	۱۷
۱-۳-۲- بردارهای گرهی	۱۷
۲-۳-۲- توابع پایه	۱۹
۳-۳-۲- مشتقات توابع پایه ب- اسپلاین	۲۲

- ۲۳ ۴-۳-۲- منحنی ب-اسپلاین
- ۲۴ ۵-۳-۲- سطوح ب- اسپلاین
- ۲۷ ۶-۳-۲- احجام ب- اسپلاین
- ۲۸ ۷-۳-۲- ب- اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت (NURBS)
- ۳۱ ۸-۳-۲- مشتقات توابع پایه نربز
- ۳۲ ۴-۲- نربز به عنوان پایه‌ای برای تحلیل
- ۳۴ ۵-۲- تحلیل آیزوژئومتریک مسائل تنش مسطح
- ۳۴ ۱-۵-۲- فرمولبندی آیزوژئومتریک
- ۴۱ ۶-۲- تحلیل آیزوژئومتریک مسائل سه بعدی الاستیسیته
- ۴۱ ۱-۶-۲- فرمولبندی مسائل سه بعدی الاستیسیته
- ۴۵ ۷-۲- مقایسه روش آیزوژئومتریک با روش اجزای محدود
- ۴۷ ۳- فصل سوم
- ۴۷ بهینه‌سازی
- ۴۸ ۱-۳- مقدمه
- ۴۹ ۲-۳- تعاریف اولیه
- ۴۹ ۱-۲-۳- متغیرهای طراحی
- ۴۹ ۲-۲-۳- تابع هدف
- ۵۰ ۳-۲-۳- قیدها

۵۰	۳-۳- فرم استاندارد مسئله‌ی بهینه‌سازی
۵۲	۳-۴- انواع روش‌های بهینه‌سازی
۵۲	۳-۴-۱- تحدب
۵۳	۳-۴-۲- تابع محدب
۵۴	۳-۴-۳- مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب و نتایج حاصل از آن
۵۴	۳-۴-۴- روش تشخیص تحدب و تقعر
۵۵	۳-۴-۵- معیار سیلوستر
۵۵	۳-۴-۶- شرایط کاروش-کان-تاکر (KKT)
۵۷	۳-۴-۷- دوگانگی لاگرانژ
۵۸	۳-۴-۸- تقریب برنامه‌ریزی خطی ترتیبی (SLP)
۵۹	۳-۴-۹- برنامه‌ریزی درجه دوم ترتیبی (SQP)
۶۰	۳-۴-۱۰- روش مجانب‌های متحرک (MMA)
۶۲	۳-۵- انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها
۶۲	۳-۵-۱- بهینه‌سازی ابعادی
۶۴	۳-۵-۲- بهینه‌سازی توپولوژی
۶۶	۳-۵-۳- بهینه‌سازی شکل سازه‌ها
۷۳	۴- فصل چهارم
۷۳	تحلیل حساسیت
۷۴	۴-۱- مقدمه

۷۶ ۲-۴- روش‌های تعیین مشتقات حساسیت
۷۷ ۱-۲-۴- روش عددی (تفاضل محدود)
۷۸ ۲-۲-۴- روش تحلیلی
۸۷ ۳-۲-۴- روش نیمه تحلیلی
۸۷ ۴-۲-۴- الگوریتم برنامه
۹۰ ۵- فصل پنجم
۹۰ مثال‌های عددی
۹۱ ۱-۵- مقدمه
۹۱ مثال ۱-۵: تیر طره
۹۴ مثال ۲-۵: فیلت دو بعدی
۹۷ مثال ۳-۵: آچار
۱۰۰ مثال ۴-۵: تیر دو سر گیردار سه بعدی
۱۰۳ مثال ۵-۵: فیلت سه بعدی
۱۰۶ ۶- فصل ششم
۱۰۶ نتایج و پیشنهادات
۱۰۷ ۱-۶- مقدمه

۱۰۷ ۲-۶- جمع‌بندی و نتایج

۱۰۸ ۳-۶- پیشنهادات

۱۰۹ پیوست

۱۱۰ راهنمای برنامه کامپیوتری

۱۱۴ مراجع

فهرست اشکال

- شکل ۱-۲: کانتورهای هم چگالی با استفاده از توابع الف) خطی تکه‌ای ب) درجه دو، برای هندسه [۹].
۱۳
- شکل ۲-۲: شمای کلی مفهوم نربز برای سطحی با یک المان [۹] ۱۶
- شکل ۳-۲: نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی در اجزای محدود کلاسیک ۱۸
- شکل ۴-۲: نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی در روش آیزوژئومتریک ۱۹
- شکل ۵-۲: توابع پایه‌ی ب- اسپلاین درجه صفر، یک و دو برای بردار گرهی یکنواخت
 $\Xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ۲۰
- شکل ۶-۲: توابع پایه‌ی درجه دو برای بردار گرهی غیر یکنواخت و باز $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ ۲۱
- ۲۱
- شکل ۷-۲: ترتیب اعمال توابع پایه بر هندسه و فضای حل ۲۱
- شکل ۸-۲: منحنی ب- اسپلاین به همراه شبکه کنترلی و موقعیت بردارهای گرهی ۲۴
- شکل ۹-۲: مختصات نقاط کنترلی شکل (۲-۱۱) ۲۵
- شکل ۱۰-۲: سطح ب- اسپلاین ۲۶
- شکل ۱۱-۲: فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی شکل (۲-۱۰) ۲۶
- شکل ۱۲-۲: المان گوس و تصویر آن در فضای فیزیکی و پارامتری ۲۷
- شکل ۱۳-۲: ساخت منحنی ب- اسپلاین نسبی از منحنی ب- اسپلاین [۱] ۲۹
- شکل ۱۴-۲: مدلسازی هندسی یک لوله خم شده با استفاده از ۹۰ نقطه کنترلی (الف) بدون (ب) با
شبکه ترسیمی ۳۰
- شکل ۱۵-۲: تقریب هندسه لوله خم شده با استفاده از روش اجزای محدود (الف) ۶۷۵ گره (ب)
۲۷۲۰ گره ۳۰

- شکل ۲-۱۶: روش‌های (الف) پیوسته و (ب) ناپیوسته‌ی گالرکین ۳۳
- شکل ۲-۱۷: مقایسه تطبیق دادن داده‌های ناپیوسته الف) روش اجزای محدود ب) روش آیزوژئومتریک ۳۴
- شکل ۲-۱۸: شکل اولیه مثال مرجع [۲۷] ۳۸
- شکل ۲-۱۹: تغییر مکان قائم شکل (۲-۱۸) با روش اجزای محدود ۳۹
- شکل ۲-۲۰: مدلسازی شکل (۲-۱۸) با روش آیزوژئومتریک ۳۹
- شکل ۲-۲۱: تغییر مکان قائم شکل (۲-۱۸) با روش آیزوژئومتریک ۴۰
- شکل ۲-۲۲: مقایسه نتایج تحلیل شکل (۲-۱۸) با دو روش اجزای محدود و آیزوژئومتریک ۴۰
- شکل ۳-۱: الف) مجموعه‌ی محدب (ب) مجموعه‌ی غیر محدب ۵۳
- شکل ۳-۲: تابع محدب اکید (چپ)، تابع محدب (وسط)، تابع غیر محدب (راست) ۵۳
- شکل ۳-۳: یک مسئله بهینه‌سازی ابعادی که برای بهینه‌سازی سطح مقطع اعضای خرپا فرمولبندی شده است. ۶۳
- شکل ۳-۴: بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا [۱۴] ۶۵
- شکل ۳-۵: مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل با یافتن تابع $\eta(x)$ که شکل تیر را مشخص میکند [۱۴] ۶۷
- شکل ۳-۶: استفاده از گره‌های اجزای محدود به عنوان متغیرهای طراحی الف) طرح اولیه ب) طرح بهینه [۱۴] ۶۹
- شکل ۳-۷: استفاده از گره‌های اجزا محدود به عنوان متغیرهای طراحی در بهینه‌سازی ابعادی [۱۷]. ۶۹
- شکل ۴-۱: الگوریتم برنامه ۸۸
- شکل ۵-۱: طرح اولیه مثال ۱-۵ ۹۲
- شکل ۵-۲: روند بهینه‌سازی مثال ۱-۵ ۹۲
- شکل ۵-۳: شکل بهینه به همراه نقاط کنترلی ۹۲
- شکل ۵-۴: شکل بهینه به همراه کانتورهای تنش فون میزس ۹۳

- شکل ۵-۵: طرح بهینه به همراه شبکه کنترلی آن ۹۳
- شکل ۵-۶: روند بهینه‌سازی شکل تیر طره ۹۴
- شکل ۵-۷: طرح بهینه به همراه کانتورهای تنش آن ۹۴
- شکل ۵-۸: شکل اولیه مسئله فیلت دوبعدی ۹۵
- شکل ۵-۹: نمایش متغیرهای طراحی در مسئله فیلت دوبعدی ۹۵
- شکل ۵-۱۰: روند بهینه‌سازی فیلت دوبعدی ۹۶
- شکل ۵-۱۱: شکل بهینه‌ی مسئله فیلت دوبعدی به همراه نقاط کنترلی ۹۶
- شکل ۵-۱۲: کانتورهای تنش فون میزس برای طرح بهینه‌ی فیلت دوبعدی ۹۷
- شکل ۵-۱۳: طرح اولیه‌ی مسئله نصف آچار ۹۸
- شکل ۵-۱۴: روند بهینه‌سازی مسئله آچار ۹۸
- شکل ۵-۱۵: طرح بهینه‌ی مسئله آچار به همراه نقاط کنترلی ۹۹
- شکل ۵-۱۶: نمای نزدیک از شکل بهینه‌ی سر آچار ۹۹
- شکل ۵-۱۷: کانتورهای تنش برای طرح بهینه‌ی مسئله آچار ۱۰۰
- شکل ۵-۱۸: طرح اولیه مسئله تیر دو سر گیردار سه‌بعدی ۱۰۱
- شکل ۵-۱۹: روند بهینه‌سازی تیر سه‌بعدی ۱۰۱
- شکل ۵-۲۰: کانتورهای تنش محوری x برای طرح بهینه تیر سه‌بعدی به همراه شبکه کنترلی ۱۰۲
- شکل ۵-۲۱: کانتورهای تنش برای طرح بهینه تیر سه‌بعدی از نماهای مختلف ۱۰۲
- شکل ۵-۲۲: طرح بهینه به همراه روند بهینه‌سازی ۱۰۳
- شکل ۵-۲۳: شکل اولیه‌ی نصف فیلت به همراه متغیرهای طراحی و بارهای اعمالی ۱۰۴
- شکل ۵-۲۴: روند بهینه‌سازی فیلت سه‌بعدی ۱۰۴
- شکل ۵-۲۵: طرح نهایی فیلت سه‌بعدی به همراه کانتورهای تنش و شبکه کنترلی ۱۰۵
- شکل ۵-۲۶: طرح نهایی فیلت سه‌بعدی از نماهای مختلف ۱۰۵

فهرست جداول

جدول ۱-۲: مقایسه مشابَهت‌ها و تفاوت‌های روش اجزای محدود و روش آیزوژئومتریك ۴۶

جدول ۱-۳: خلاصه مدل‌های ارائه شده برای مسائل بهینه‌سازی شكل ۷۲

فصل اول

کلیات

۱-۱- مقدمه

به منظور حل معادلات دیفرانسیل حاکم در مسائل مهندسی روش‌های عددی بسیاری طی دهه‌های اخیر به وجود آمدند. از فراگیرترین روش‌های پیشنهادی در این زمینه می‌توان به روش اجزای محدود^۱ اشاره کرد. پیدایش این روش در علوم مهندسی به سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ برمی‌گردد که در این دوران مهندسی هوا فضا نقطه کانونی آن بوده است. در اواخر دهه ۱۹۶۰ اولین برنامه‌های تجاری نسترن^۲، آسکا^۳ و استاردین^۴ تولید گردید. مبنای این برنامه‌ها روش اجزای محدود بود. پس از آن روش اجزای محدود در سایر علوم مهندسی گسترش یافت و برنامه‌های تجاری زیادی بر اساس آن ساخته شد.

اگر چه هندسه اساس تحلیل است، اما آنچه تحت عنوان کد^۵ می‌شناسیم، بعدها در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ به وجود آمد. این مسئله شاید به نوعی دلیل تفاوت‌های بین نمایش هندسی در اجزای محدود و کد را نشان دهد. بسیاری از برنامه‌های اجزای محدود سال‌ها قبل از اینکه کد به طور گسترده پیشرفت کند به تکامل رسیده بودند. اما در حال حاضر کد صنعتی است که حتی مقداری از تحلیل بزرگتر است. در امور تجاری از تحلیل به عنوان مهندسی به کمک کامپیوتر^۶ تعبیر می‌شود. اینکه دقیقاً بتوانیم حجم صنایع تحلیل و کد را اندازه‌گیری کنیم کمی مشکل است، اما تخمین‌هایی مبنی بر اینکه ارزش تحلیل در حدود یک تا دوهزار میلیون دلار و کد در حدود پنج تا ده هزار میلیون دلار است وجود دارد [۱]. در کارهای مهندسی اینگونه مرسوم است که طراحی‌ها در سیستم‌های کد انجام می‌گیرند و شبکه‌ها از داده‌های کد تولید می‌شوند. این مسئله باعث می‌شود توصیف هندسی متفاوتی را برای تحلیل به کار ببریم، هندسه‌ای که تقریبی است. در صنایع اتومبیل، هوا فضا و کشتی-

^۱Finite Element Method

^۲Nastran

^۳Aska

^۴Stardyne

^۵Computer Aided Design (CAD)

^۶Computer Aided Engineering (CAE)

سازی چنین تخمین زده می‌شود که حدود ۸۰ درصد کل تحلیل به تولید شبکه اختصاص می‌یابد. در صنایع اتومبیل‌سازی تولید شبکه برای یک وسیله کامل حدود چهار ماه طول می‌کشد. با توجه به تغییرات طراحی که روزانه انجام می‌شود، اگر نتوانیم شبکه‌ی جدید را در بازه‌ی زمانی لازم تولید کنیم سودمندی تحلیل در طراحی کاهش می‌یابد. وقتی که شبکه ساخته شد، اصلاح آن در هر بار تکرار عملیات نیاز به ارتباط با کد دارد. ایجاد این ارتباط اغلب غیر قابل دسترس است، که این مسئله شاید دلیل اینکه چرا اصلاح تطبیقی همچنان اولین مشکل آکادمیک است را مشخص می‌کند.

ساخت هندسه‌ی اجزا محدود یا به عبارتی شبکه اجزا محدود پرهزینه و زمان‌بر است و خطاهای زیادی ایجاد می‌کند. با توجه به حجم کم صنعت تحلیل در مقایسه با کد منطقی به نظر می‌رسد که به دنبال راهی برای تغییر و جایگزینی تحلیل اجزای محدود، با روشی که سازگاری بیشتری با کد داشته باشد، باشیم. استفاده از یک تقریب چندجمله‌ای ثابت برای هندسه اولین بار توسط سابو^۱ و همکاران انجام شد [۲]. در این روش همچنان که مرتبه چندجمله‌ای افزایش می‌یافت خطا کاهش می‌یافت تا به جایی می‌رسید که دیگر با افزایش مرتبه‌ی چندجمله‌ای خطا تغییر نمی‌کرد. تأثیر این مشکل وقتی بیشتر می‌شد که از کمیت‌های محاسبه شده روی مرز استفاده می‌کردیم، که معمولاً مهم‌ترین کاربردهای مهندسی هستند و اینجاست که خطاهای مهندسی مضرترین خطاها هستند. بعلاوه هنوز بیشتر تحلیل‌های اجزا محدود توسط المان‌های مرتبه پایین انجام می‌شدند که در آن‌ها خطاهای مهندسی بزرگتر بودند. موفقیت نرم‌افزار راسنا^۲ که بعدها توسط شرکت فناوری پارامتری^۳ به دست آمد مرهون ارتباط تنگاتنگ آن با هندسه‌ی کد و در نتیجه نتایج قابل اعتمادتر آن بود. روش آیزوژئومتریک که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته نیز از الگویی مشابه الهام می‌گیرد اما تلاش می‌کند تا بیشتر به هندسه‌ی کد مرتبط شود و توصیف چندجمله‌ای اجزای محدود را به طور کامل حذف کند [۲۳].

^۱Szabo

^۲RASNA

^۳Parametric Technology Corporation (PTC)

رویکردی که در این روش ارائه می‌شود بر پایه‌ی نربز است، یک تکنولوژی استاندارد که در سیستم‌های کد به کار می‌رود. برای این منظور هندسه‌ی دقیق کد با سطوح نربز تطبیق داده می‌شود و سپس یک شبکه درشت از المان‌های نربز ساخته می‌شود. این المان‌ها، المان‌های سه‌بعدی خواهند بود که هندسه را به صورت دقیق نمایش می‌دهند. این روش یک کار جزئی نیست که فقط شایستگی مقدار کمی مطالعه را داشته باشد، بلکه روشی است که با انجام آن درهای تازه‌ای برای کارهای قدرتمند باز می‌شود. اصلاح^۱ شبکه‌ی به دست آمده از این روش نیاز به ارتباط بیشتری با کد ندارد و به قدری ساده است که می‌تواند مطابقت گسترده‌تر این تکنولوژی را با صنعت فراهم کند. در این روش از مفهومی مشابه آیزوپارامتریک^۲ استفاده می‌شود، یعنی فضای حل برای متغیرهای وابسته بر حسب همان توابعی نمایش داده می‌شود که برای نمایش هندسه به کار رفته‌اند. به همین دلیل این روش، تحلیل آیزوژئومتریک نام گرفته است [۲۳].

الگوریتم بهینه‌سازی تابع هدف و توابع قید را معرفی می‌کند و با آن‌ها کار می‌کند. این الگوریتم از برنامه‌ریزی ریاضی یا سایر تکنیک‌ها استخراج می‌شود. برای رسیدن به یک نتیجه‌ی مناسب باید تعاملی قوی بین مدل طراحی، مدل تحلیل و مدل بهینه‌سازی وجود داشته باشد. در بیشتر موارد و در کاربردهای صنعتی مدل طراحی به یک برنامه‌ی طراحی به کمک کامپیوتر (CAD) لینک می‌شود و مدل تحلیل شامل یک برنامه‌ی حل به روش اجزا محدود است. یکی از چالش‌های پیش رو در این زمینه، نیاز به مبادله‌ی اطلاعات بین این سیستم‌هاست. مشکل دیگر محدودیت در تغییرپذیری شکل‌های ممکن است، زیرا فضای طراحی به المان‌های طراحی که از پیش تعریف شده‌اند محدود شده است. اما مشکل اصلی این است که هم مدل تحلیل و هم طراحی هر دو به شدت به هندسه وابسته هستند، اگر چه نمایش هندسی در هر دو مورد متفاوت است.

امتیازی که در ادغام مدل‌های تحلیل و طراحی وجود دارد بسیار آشکار است. از اینرو ما رویکرد

^۱Refinement

^۲Isoparametric

آیزوژئومتریک را به عنوان روشی جایگزین معرفی می‌کنیم که این دو را ترکیب می‌کند. این رویکرد مفهوم اجزای محدود را با دسته‌بندی جدیدی از توابع شکل همچون نربز تجهیز می‌کند. تاکنون نربز برای بهینه‌سازی شکل همراه با مفهوم المان طراحی و یا روش المان مرزی به کار رفته است [۳].

سوباریان^۱ و همکاران نیز از نربز به همراه رویکرد بدون شبکه در قالب یک استراتژی ترکیبی بر پایه‌ی هندسه‌ی فضای استفاده کرده‌اند [۴] و [۵]. اگر از حد این روش‌ها که نربز را تنها به عنوان نمایش‌دهنده‌ی هندسه‌ی مرزها استفاده می‌کنند، فراتر رویم به رویکرد مورد نظر ما می‌رسیم که در آن این توابع در مدل تحلیل نیز مشارکت می‌کنند. از اینرو ویژگی دقت و همواری نمایش هندسه در تحلیل آیزوژئومتریک به کمک بهینه‌سازی شکل می‌آید و مدل‌های تحلیل و طراحی را به هم پیوند می‌زند. لازم است توجه شود که استفاده از آیزوژئومتریک در بهینه‌سازی شکل ابتدا توسط خود هیوز و همکاران به عنوان موضوعی جذاب برای تحقیق مطرح شد [۱].

همانطور که اشاره شد در مرحله‌ی تحلیل باید اطلاعات لازم را برای مرحله‌ی بهینه‌سازی در مورد قیدهای ضمنی به دست آورد. در یک الگوریتم بهینه‌سازی مرتبه اول به مقادیر تابع و حساسیت قیدهای ضمنی نیاز است. بنابراین آنالیز حساسیت موضوع تحقیقاتی مهم در زمینه‌ی بهینه‌سازی شکل است.

۱-۲- تاریخچه

فرآیند بهینه‌سازی شکل شامل سه قسمت اصلی است: نمایش هندسی مسئله، تحلیل سازه و الگوریتم بهینه‌سازی. ابتدا باید نمایش هندسی مناسب برای شکل مرزها را انتخاب کنیم و مقادیر اولیه‌ای برای متغیرهای طراحی در نظر بگیریم، سپس یک مدل تحلیلی مناسب برای تحلیل سازه‌ها انتخاب می‌کنیم. یک روش تحلیل مناسب باید قادر باشد اطلاعات لازم را جهت مرحله‌ی بهینه‌سازی

¹Subbarayan

در مورد مشتقات ضمنی بدهد. به عنوان مثال یک الگوریتم معمولی بهینه‌سازی مرتبه اول به مقادیر توابع قید و حساسیت قیدها بر حسب هر متغیر طراحی نیاز دارد.

پس از انجام مرحله‌ی تحلیل، الگوریتم بهینه‌سازی مقادیر جدیدی برای متغیرهای طراحی به ما می‌دهد. در نتیجه یک مدل طراحی جدید ساخته شده و به قسمت تحلیل برده می‌شود. از تحلیل مجدد مقادیر تابع و نتایج حساسیت قیدهای ضمنی برای طراحی جدید حاصل می‌شود. اگر معیار لازم برای خاتمه‌ی محاسبات ارضا شده بود، محاسبات متوقف می‌شود. در غیر اینصورت مرحله‌ی بهینه‌سازی نقطه‌ی طراحی جدیدی به ما می‌دهد.

در روش‌های اولیه برای بهینه‌سازی از مختصات گرهی به عنوان متغیر طراحی استفاده می‌شد، اما این عمل به زودی متوقف شد زیرا تجربه نشان داد که با این کار نمی‌توان به مرز همواری دست پیدا کرد. بعلاوه نمی‌توان انتظار داشت که این کار نتایج صحیحی برای تنش تولید کند.

این تجربه نشان داد که مدل تحلیل باید از مدل طراحی جدا شود زیرا همواری مرز یک نیاز اساسی جهت نمایش هندسه در بهینه‌سازی شکل است. برای حل این مشکل محققین از چندجمله‌ای‌ها برای نمایش مرز استفاده کردند [۶] و ضرایب چندجمله‌ای را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفتند، البته این روش دارای ایراداتی نیز بود. اول اینکه این متغیرها به خوبی با خواص مکانیکی قابل ارتباط نبودند. و دیگر اینکه اگر چه این مدل همواری لازم را فراهم می‌کرد اما وقتی مرتبه‌ی چندجمله‌ای بالا می‌رفت می‌توانست منجر به ایجاد مرزهای نوسانی شود. بعلاوه چندجمله‌ای‌ها قادر به نمایش شکل‌های کلی نیستند و تنها می‌توانند خانواده‌ی منحنی‌های درجه دو، سه و غیره را نشان دهند. از نقطه نظر طراحی مشکل دیگر عدم کنترل محلی بر منحنی بود. تغییر در یکی از ضرایب چندجمله‌ای باعث تغییر در کل منحنی می‌شد.

اسپلاین‌ها این مشکلات را حذف کردند زیرا این توابع ترکیبی از چندجمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند که با هم ترکیب شده‌اند تا حداکثر همواری را در مرزها به وجود آورند. یانگ و چوی [۷] نشان

دادند که در حالتی که از توابع اسپلاین استفاده می‌کنیم حساسیت دارای دقت بیشتری نسبت به حالتی است که از فرم نمایش خطی تکه‌ای استفاده می‌کنیم. برایینت و همکاران [۸] از توابع مخلوط ب- اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند. توابع مخلوط انعطاف‌پذیری بالایی جهت نمایش هندسه ایجاد کردند. با استفاده از فرمول‌های ب- اسپلاین نظم و قاعده مورد نیاز برای مرز به دست آمده و فرمولبندی تحلیلی مشتقات حساسیت نیز ممکن شد. سرانجام هیوز و همکاران با استفاده از توابع نرئز برای مدل تحلیل و طراحی روش آیزوژئومتریک را ابداع کردند که این روش در این پژوهش به طور مفصل بررسی شده است.

۱-۳- اهداف کلی پایان‌نامه

به صورت کلی بهینه‌سازی شکل سازه‌های سه‌بعدی و ارائه روشی مناسب برای تحلیل حساسیت هدف نهایی این پایان‌نامه می‌باشد. اما با توجه به نوظهور بودن روش تحلیل آیزوژئومتریک که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته، بخشی به معرفی این روش اختصاص داده شده است.

انتخاب ساختاری مناسب برای مسئله‌ی بهینه‌سازی از مهم‌ترین عناصر حل مسائل است که این موضوع از اهداف اصلی بوده است. همچنین تحلیل حساسیت با شرح دقیق و جزییات فرمولبندی به-عنوان بخش تفکیک‌ناپذیری از بهینه‌سازی شکل هدف مهم دیگری بوده است.

در انتها نیز تولید برنامه‌ای کامپیوتری به منظور حل مسائل بهینه‌سازی به عنوان یکی از اهداف این پایان‌نامه در نظر گرفته شده است.

۱-۴- برنامه کامپیوتری نوشته شده

بدون داشتن یک برنامه کامپیوتری مناسب جهت انجام عملیات تحلیل و بهینه‌سازی، بررسی

نتایج فرمولبندی و صحت آن مورد تردید می‌باشد. لذا در این پایان‌نامه برنامه‌ای به منظور انجام عملیات مذکور ارائه گردیده که به زبان فرترن^۱ کدنویسی شده است. در قسمت بهینه‌سازی این برنامه از روش مجانب‌های متحرک (MMA^۲) که یکی از موضوعات این پایان‌نامه می‌باشد استفاده شده است. توضیحاتی راجع به این برنامه در پیوست ارائه شده است. و در انتها مثال‌هایی جهت نمایش کارایی برنامه و روش مورد استفاده در آن بررسی گردیده است.

۱-۵- ساختار کلی پایان‌نامه

به طور کلی این پایان‌نامه شامل شش فصل می‌باشد. در فصل حاضر به مقدماتی راجع به پایان‌نامه اشاره شده است. در فصل دوم روش تحلیل آیزوژئومتریک به عنوان روشی جدید و پرکاربرد بررسی شده و فرمولبندی لازم جهت تحلیل مسائل تنش مسطح به صورت مختصر در این فصل ارائه شده است.

در ادامه و در فصل سوم اصول و چهارچوب کلی بهینه‌سازی شکل سازه‌ها و روش‌های متداول و مناسب بررسی شده‌اند و در انتها روش مناسب برای این منظور انتخاب و شرح داده شده است. با توجه به اینکه تحلیل حساسیت بخش مهمی از این پایان‌نامه را به خود اختصاص می‌دهد در فصلی مجزا به عنوان فصل چهارم به صورت کامل بررسی شده و روش‌های مختلف انجام آن به همراه فرمولبندی شرح داده شده است.

در فصل پنجم بر اساس نتایج به دست آمده از این پایان‌نامه، تعدادی مثال متداول در مراجع بهینه‌سازی شکل بررسی شده و نتایج حاصل از آن‌ها ارائه شده است.

سرانجام در فصل ششم نتایج حاصل از پایان‌نامه و پیشنهادات لازم به اختصار آمده است.

^۱Fortran

^۲Method of Moving Asymptotes

فصل دوم

روش تحلیل

آیزوژنومتریک

۲-۱- مقدمه

روش‌های عددی مختلفی در دهه‌های اخیر برای تحلیل سازه‌ها پیشنهاد شده و توسعه یافته‌اند. از جمله مهم‌ترین این روش‌ها می‌توان به ترتیب شکل‌گیری، به روش‌های تفاضل محدود، اجزای محدود و دسته روش‌های موسوم به روش‌های بدون مش اشاره کرد. به عبارت کلی‌تر می‌توان گفت که این روش‌ها روش‌های حل معادلات دیفرانسیل جزئی بوده و علاوه بر تحلیل سازه‌ها در بسیاری از مسائل مهندسی مانند حل معادلات حاکم بر مسائل انتقال حرارت، مکانیک سیالات، الاستیسیته، انتشار امواج و غیره به کار می‌روند. در این میان، امروزه روش اجزای محدود به عنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و با استفاده از آن نرم افزارهای مختلفی نوشته شده است که در صنعت کاربرد فراوانی دارد. این روش در دهه ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت به طوری که در انتهای این دهه برنامه‌های کامپیوتری تجاری مانند نسترن^۱، آسکا^۲ استاردین^۳ و غیره به وجود آمدند. این روش در طی سال‌های گذشته توسعه یافته و همچنین با ادغام آن با روش‌های تفاضل محدود و بدون مش بسیاری از مشکلات دانشمندان مکانیک محاسباتی مرتفع گردیده است.

علی‌رغم این پیشرفت قابل ملاحظه، این روش‌ها دارای نقاط ضعفی نیز بوده‌اند که از مهم‌ترین آنها می‌توان به نحوه‌ی تعریف مرزهای هندسی اشاره کرد. در روش اجزای محدود با توجه به تقریب هندسه، نزدیک شدن به هندسه‌ی واقعی کاملاً وابسته به نحوه‌ی شبکه‌بندی است و در برخی مسائل پیچیده به لحاظ هندسی، رسیدن به آن بسیار مشکل است. همچنین اقتناع شرایط مرزی در این روش‌ها به خصوص در روش‌های بدون مش با مشکلاتی مواجه است. از طرف دیگر بهبود حل، چه به لحاظ تقریب هندسه و یا متغیرهای مجهول، منجر به ایجاد تغییرات در شبکه‌بندی می‌شود که در نهایت سبب افزایش تعداد معادلات و بالا رفتن زمان حل می‌گردد. علاوه بر این در روش اجزای

^۱Nastran

^۲Aska

^۳Stardin

محدود حل مسائلی که در آن‌ها ساخت چندین شبکه جدید در حین حل مسئله لازم است می‌تواند هزینه طرح را به مراتب افزایش دهد. تحقیقات نشان می‌دهد که تولید شبکه در صناعی چون اتومبیل‌سازی، هوافضا و کشتی‌سازی بیش از ۸۰ درصد زمان تحلیل را به خود اختصاص می‌دهد.

تقریباً یک دهه پس از شکل‌گیری روش اجزای محدود و بین سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ پیشرفت‌های چشمگیری در علم مدلسازی هندسه و یا طراحی به کمک کامپیوتر (کد)^۱ انجام گردید. امروزه به گمان بسیاری از دانشمندان، مدلسازی هندسه دارای صنعت بسیار بزرگتری نسبت به تحلیل می‌باشد. با توجه به اینکه تحلیل بر مبنای هندسه استوار است استفاده از این پیشرفت‌ها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل در رفع نقاط ضعف آن نماید. به این منظور پرفسور هیوز^۲ که یکی از دانشمندان برجسته در روش اجزای محدود است، به همراه همکارانش روش تحلیل آیزوژئومتری^۳ را در سال ۲۰۰۵ پیشنهاد نمودند. نام این روش برگرفته از مفهوم آیزوپارامتریک^۴ در روش اجزای محدود می‌باشد. با توجه به دقت بالا در مدلسازی هندسه و همچنین استفاده از شرایط یکسان در مدلسازی هندسه و تقریب تابع مجهول، نام این روش "تحلیل آیزوژئومتری^۵ انتخاب شده است.

قریب به یک دهه از پیدایش روش آیزوژئومتری^۶ می‌گذرد. مقالات و پایان‌نامه‌های بسیاری جهت معرفی این روش به وجود آمده است، اما به دلیل استفاده از روش آیزوژئومتری^۶ به عنوان روش تحلیل در این پایان‌نامه لازم است تا به شرح این روش قدرتمند پرداخته شود. این بخش به شرح روش مذکور و فرمولبندی آن می‌پردازد.

روش آیزوژئومتری^۶ در بسیاری از ویژگی‌ها مشابه روش اجزای محدود^۵ است و از سوی دیگر در مواردی مشابه روش‌های بدون شبکه^۵ است، اما از نظر هندسی این روش بر پایه‌ی اصول طراحی به

^۱Computer Aided Design (CAD)

^۲Professor T.J.R. Hughes

^۳Isogeometric analysis

^۴Isoparametric concept

^۵Finite Element Method (FEM)

^۶Meshless Methods

کمک کامپیوتر ایجاد شده است و از آن الهام می‌گیرد. هدف اولیه از به وجود آمدن این روش این بود که بتوانیم فارق از میزان ریز یا درشت بودن شبکه، هندسه را به صورت دقیق مدل کنیم.

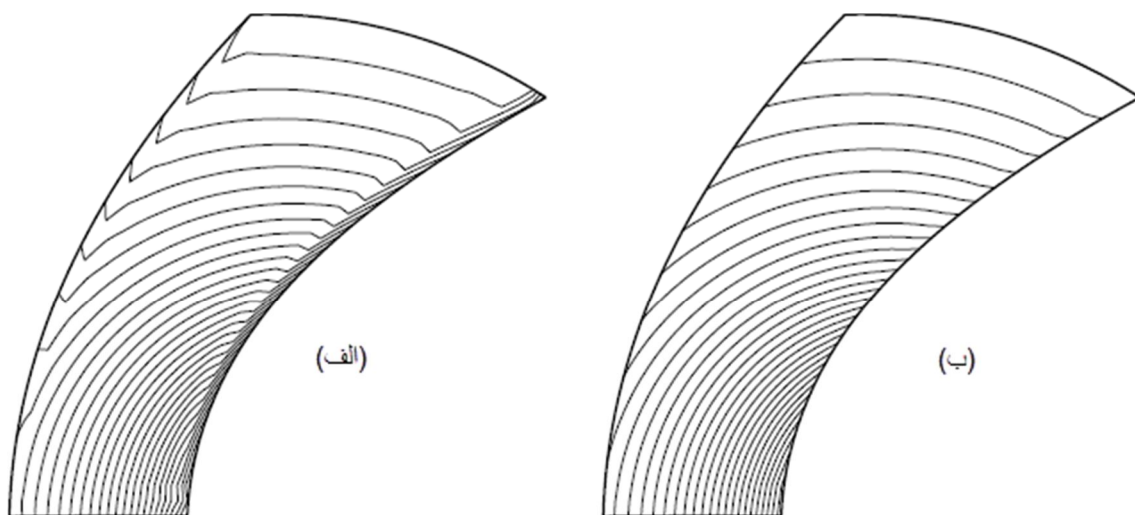
علیرغم آنکه هندسه زیربنای تحلیل به شمار می‌رود، طراحی به کمک کامپیوتر، به شکلی که امروزه ما آن را می‌شناسیم در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ به وجود آمد. این موضوع علت اختلاف زیادی را که بین نمایش هندسه در اجزا محدود و طراحی به کمک کامپیوتر وجود دارد نشان می‌دهد. سال‌ها قبل از این که طراحی به کمک کامپیوتر شکل بگیرد، برنامه‌های اجزای محدودی رشد کرده بودند، اما اکنون طراحی به کمک کامپیوتر صنعتی بزرگتر از تحلیل به شمار می‌رود و رشد سریعتری داشته است.

عموما در مسائل مهندسی طراحی در کد انجام می‌شود و شبکه از اطلاعات حاصل از کد تولید می‌شود. در نتیجه نیاز است توصیفی از هندسه جهت استفاده در تحلیل ایجاد شود، که البته این توصیف تقریبی بیش نیست. بر اساس تحقیق انجام شده توسط لابراتوار ملی سندیا در برنامه‌های موجود تولید مش ۲۰٪ از کل زمان تحلیل را می‌گیرد، در حالی که ایجاد هندسه‌ی مناسب تحلیل حدود ۶۰٪ و تحلیل تنها ۲۰٪ از این زمان را به خود اختصاص می‌دهند. این مقدار ۸۰ به ۲۰ برای نسبت مدلسازی به تحلیل در تجربیات صنعتی بسیار معمول است و تمایل زیادی برای معکوس کردن آن وجود دارد [۹].

توجه به این نکته ضروریست که شبکه اجزا محدود که ما آن را به عنوان مدلی دقیق می‌شناسیم، تنها تقریبی از هندسه‌ی کد است. این تقریب می‌تواند در موارد زیادی باعث خطاهایی در نتیجه‌ی تحلیل شود. به عنوان مثال تحلیل کمانش پوسته نسبت به نقص‌های هندسی بسیار حساس است، و یا مکانیک سیالات پدیده‌های لایه مرزی نسبت به هندسه‌ی دقیق شکل‌های آیرودینامیکی حساسند.

¹Computer Aided Design (CAD)

همانطور که اشاره شد یک نمونه از این مشکل در مکانیک سیالات به وجود می‌آید. لایه‌های آشفته کاذب^۱ در اشکال آیرودینامیکی یکی از قسمت‌های ناخوشایند حل‌کننده‌های تراکم‌پذیر اویلر^۲ در دهه ۱۹۸۰ تا ۱۹۹۰ بود (شکل ۱-۲ - الف). این مشکل و راه حل آن در تز آقای بارخ^۳ مشخص شد. ریشه مشکل در تقریب خطی تکه‌ای هندسه بود. هندسه‌ی مناسب لایه‌های آشفته را حذف کرد (شکل ۱-۲ - ب)، حتی زمانی که میدان‌های جریان که خود بر روی هندسه ملایم و همواری قرار داشت به وسیله المان‌های خطی تقریب زده می‌شد. این نتیجه مشخص می‌کند که چرا روش‌هایی که در آن از هندسه ملایم و هموار استفاده می‌شود به طور گسترده‌ای در تحلیل مقاطع آیرودینامیک استفاده می‌شود.



شکل ۱-۲: کانتورهای هم‌چگالی با استفاده از توابع الف) خطی تکه‌ای ب) درجه دو، برای هندسه [۹].

ساخت هندسه یا شبکه اجزای محدود پرهزینه، زمان‌گیر و همراه با خطاست. در نتیجه واضح است که بهتر است روش اجزای محدود را تغییر دهیم و یا آن را با روشی که ارتباط بهتری با کد داشته باشد جایگزین کنیم. روش آیزوژئومتریک تلاش می‌کند این کار را انجام دهد و توصیف چندجمله‌ای اجزای

¹Spurious entropy layer

²Compressible Euler Solvers

³Barth

محدود را به کلی حذف کند.

اساس روش آیزوژئومتریکی بر مبنای توابع نرَبز است. توابع نرَبز همان توابعی هستند که به عنوان توابع استاندارد در سیستم‌های کَد استفاده می‌شوند. دلیل این انتخاب در سیستم‌های کَد این است که نرَبزها معمول‌ترین تکنیک هندسه‌ی محاسباتی در کَد می‌باشد. به تعبیری می‌توان این روش را بسط و تعمیم قدرتمند روش تحلیل اجزا محدود سنتی به حساب آورد. مانند آنچه در روش اجزای محدود وجود دارد در اینجا نیز از مفهومی مشابه آیزوپارامتریکی استفاده می‌شود. به این منظور که در اینجا نیز از همان توابعی که برای مدل کردن هندسه استفاده شده است در تقریب تابع مجهول نیز استفاده خواهد شد.

این فصل ابتدا به معرفی توابع ب-اسپلاین می‌پردازد و پس از آن توابع نرَبز بررسی می‌شود و در ادامه روش مشتق‌گیری از این توابع بیان می‌شود. مقایسه بین روش اجزای محدود و آیزوژئومتریکی نیز یکی از اهداف این فصل می‌باشد. در انتها نیز فرمولبندی تحلیل آیزوژئومتریکی در مسائل دوبعدی و سه‌بعدی بررسی خواهد شد.

۲-۲- مبانی روش آیزوژئومتریکی

در روش اجزا محدود دو مفهوم شبکه^۲ و المان وجود دارند، اما المان خود دارای دو مفهوم است. یکی المانی که در فضای المان مرجع وجود دارد و یکی المان موجود در فضای فیزیکی. المان‌ها معمولاً به وسیله‌ی مختصات نقاط گرهی خود تعریف می‌شوند و درجات آزادی، مقادیر توابع پایه در گره‌ها هستند. توابع پایه در اجزای محدود حاصل از درونیابی هستند و می‌توانند دارای مقادیر مثبت یا منفی باشند.

^۱Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS)

^۲Mesh

در تئوری نریز توابع پایه معمولا حاصل از درونیابی نیستند. در این تئوری دو مفهوم برای شبکه وجود دارد، یکی شبکه‌ی کنترلی و دیگری شبکه‌ی فیزیکی. نقاط کنترلی شبکه کنترلی را تعریف می‌کنند و شبکه‌ی کنترلی درونیابی از نقاط کنترلی است.

شبکه‌ی کنترلی بر هندسه‌ی واقعی منطبق نیست. در واقع این شبکه چهارچوبی است که هندسه را کنترل می‌کند. شبکه‌ی کنترلی شبیه شبکه‌ی المان‌های چندخطی اجزای محدود است. متغیرهای کنترلی درجات آزادی هستند و بر روی نقاط کنترلی واقع شده‌اند. در نریز بر خلاف اجزای محدود، شبکه‌ی کنترلی می‌تواند به شدت تغییرات داشته باشد، اما در عین حال هندسه‌ی فیزیک مسئله معتبر باقی بماند.

شبکه‌ی فیزیکی تجزیه‌ای از هندسه‌ی واقعی است. در شبکه‌ی فیزیکی دو مفهوم برای المان-ها وجود دارد، یکی زیر دامنه¹ و دیگری بازه‌ی گرهی². زیردامنه‌ها را در حقیقت می‌توان المان‌های بزرگ نامید. در بیشتر مسائل موجود می‌توان هندسه را تنها با یک زیردامنه مدل کرد. هر زیردامنه دارای دو وجه است. یکی در فضای المان مرجع و دیگری در فضای فیزیکی. هر زیردامنه را می‌توان به بازه‌های گرهی تجزیه کرد. گره‌ها در یک، دو و سه بعدی به ترتیب نقطه، خط و صفحه هستند. بازه‌های گرهی به وسیله گره‌ها مرزبندی شده‌اند. این بازه‌ها حوزه‌ی المان را جایی که توابع پایه هموار هستند تعریف می‌کنند. در گره‌های این اجزای توابع پایه دارای پیوستگی C^{p-m} هستند که P درجه چند جمله‌ای و m تعداد تکرار نقاط گرهی در بردار گره می‌باشد.

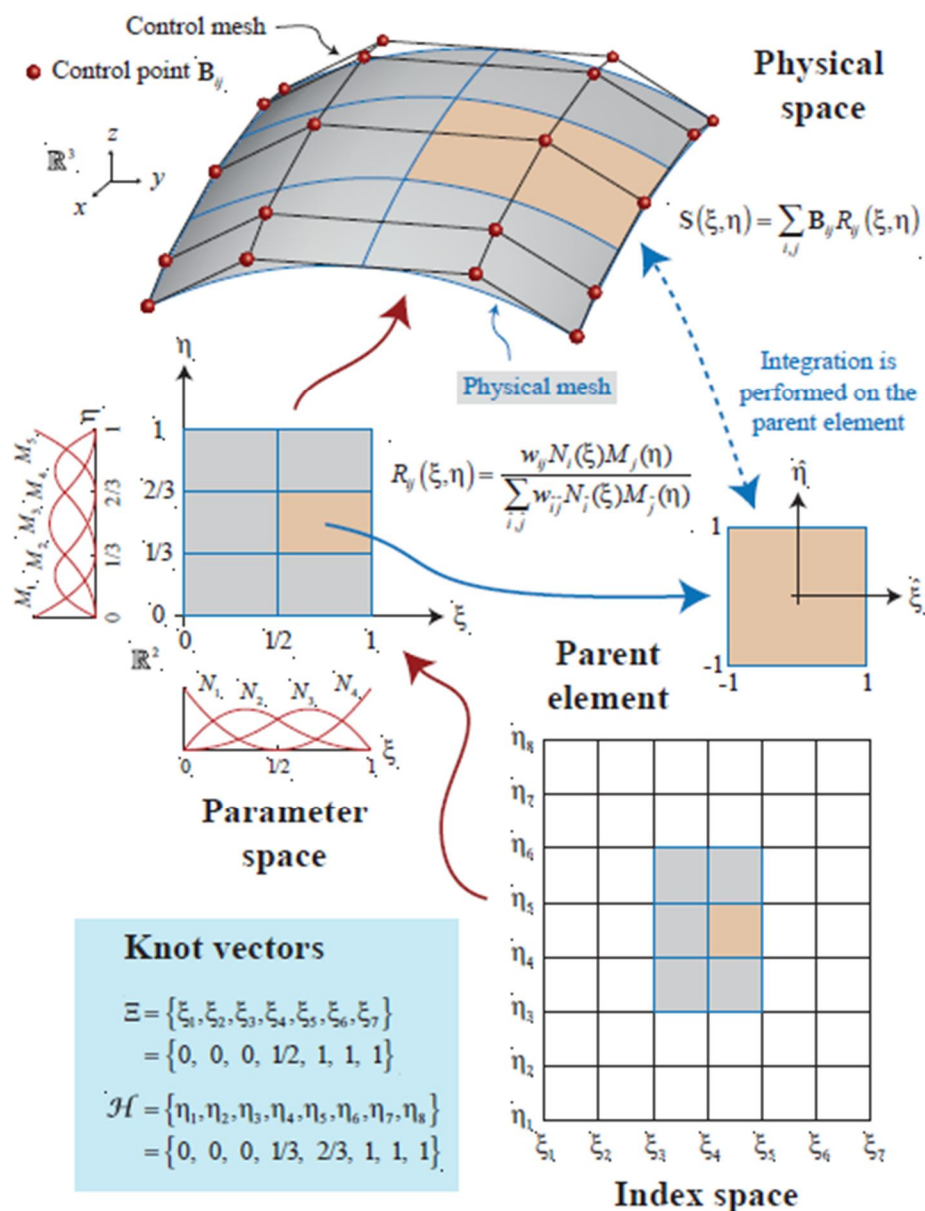
بازه‌های گرهی برای انتگرال‌گیری عددی بسیار مناسب هستند. این بازه‌ها را می‌توان به عنوان المان‌های کوچک در نظر گرفت، زیرا کوچکترین جزئی هستند که ما به آن‌ها می‌پردازیم. وقتی از "المان" به تنهایی صحبت می‌کنیم منظورمان همان بازه‌های گرهی است.

¹Patches

²Knot Span

مفهوم مهم دیگری که وجود دارد و کلیدی برای فهم نریز است، فضای شاخص^۱ زیردامنه است. این فضای شاخص هر گره را به طور ویژه مشخص می کند و گرههایی را که تکرار بیشتر از یک دارند را متمایز می کند.

نمایش کلی این مفاهیم در شکل (۲-۲) نشان داده شده است.



شکل ۲-۲: شمای کلی مفهوم نریز برای سطحی با یک المان [۹].

^۱Index Space

۲-۳-ب-اسپلاین ها و توابع نریز

استفاده از چند جمله‌ای‌های مرتبه بالا می‌تواند منجر به ایجاد شکل با مرز نوسانی شود از سوی دیگر ساختن اشکال پیچیده با استفاده از چندجمله‌ای‌ها نیازمند بالا بردن درجه‌ی آنهاست و نمی‌توان تنها با استفاده از یک چندجمله‌ای چنین اشکالی را مدل کرد. اسپلاین‌ها این مشکل را حذف کردند زیرا این توابع ترکیبی از چند جمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند که با هم ترکیب شده‌اند تا حداکثر همواری را در مرزها به وجود آورند. این چندجمله‌ای‌ها می‌توانند با مرتبه‌های پیوستگی دلخواه به یکدیگر متصل شوند و یک منحنی را تشکیل دهند. تابع اسپلاین درجه سه که دارای دو مشتق پیوسته می‌باشد و حداقل میانگین انحنای را دارد یک انتخاب طبیعی برای تعریف مرز می‌باشد [۱۰] و [۱۱]. یانگ و چوی [۷] نشان دادند که در حالتی که از توابع اسپلاین استفاده می‌کنیم حساسیت دارای دقت بیشتری نسبت به حالتی است که از فرم نمایش خطی تکه‌ای استفاده می‌کنیم. برای نت و همکاران [۱۲] از توابع مخلوط ب-اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند. توابع مخلوط انعطاف پذیری بالایی جهت نمایش هندسه ایجاد کردند. با استفاده از فرمول‌های ب-اسپلاین نظم و قاعده مورد نیاز برای مرز به دست آمده و فرمولبندی تحلیلی مشتقات حساسیت نیز ممکن شد. ب-اسپلاین از جمله‌ی این منحنی‌ها هستند که در ادامه به توضیح آنها می‌پردازیم.

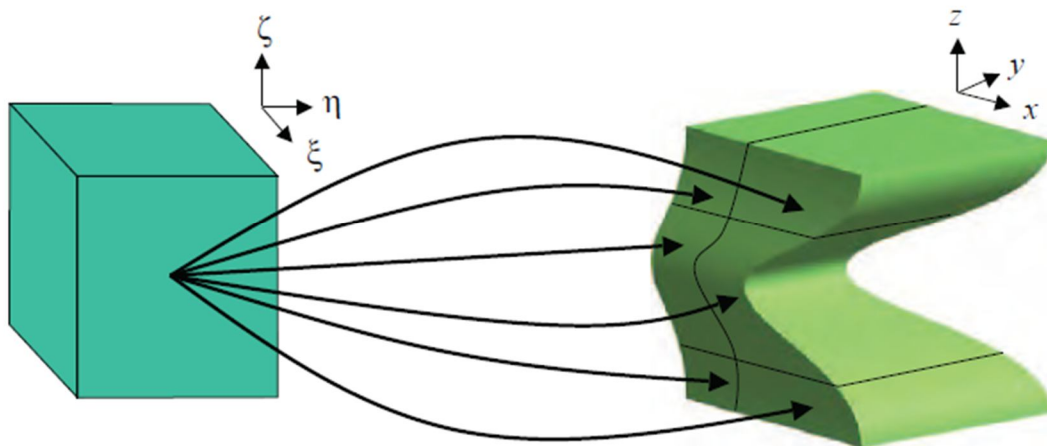
۲-۳-۱- بردارهای گرهی^۱

یک بردار گرهی در یک بعد مجموعه‌ای از اعداد حقیقی غیر نزولی در فضای پارامتری است که به شکل $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ نوشته می‌شود، که $\xi_i \in R$ ، i امین گره است و $i = 1, 2, \dots, n+p+1$ و p مرتبه‌ی چندجمله‌ای و n تعداد توابع پایه است. گره‌ها فضای پارامتری را

^۱Knot vectors

به المان‌ها تقسیم می‌کنند و مرزهای المان در فضای فیزیکی تصویر خطوط گرهی تحت نگاشت ب-اسپلاین هستند. بازه‌ی (ξ_i, ξ_{i+1}) را یک دهانه‌ی گرهی می‌نامیم که می‌تواند طول آن صفر باشد، زیرا گره‌ها لزوماً دارای مقادیر متمایز نمی‌باشند. اگر فاصله‌ی بین گره‌ها مساوی باشد، در این حالت بردار گرهی را یکنواخت^۱ می‌نامیم، در غیر اینصورت این بردار غیر یکنواخت^۲ خواهد بود. اگر یک عدد برای بیشتر از یک گره تکرار شود به آن گره‌ی تکراری می‌گوییم. یک بردار گرهی را باز گوییم اگر اولین و آخرین گره‌های آن $p+1$ بار تکرار شوند. در مسائل یک بعدی، توابع پایه که از بردارهای گرهی باز شکل گرفته‌اند، یک درونیایی در انتهای بازه‌ی فضای پارامتری (ξ_i, ξ_{i+1}) ، و در چند بعد نیز در گوشه‌های زیر المان‌ها هستند، اما درونیایی از گره‌های داخلی نیستند. این یک تمایز بین گره‌ها در آیزوژئومتریک (knots) و در اجزا محدود (nodes) است.

یکی دیگر از تفاوت‌های موجود بین روش اجزای محدود و روش آیزوژئومتریک در این است که در اجزای محدود سنتی فضای پارامتری هر المان به صورت مجزا است (شکل ۲-۳)،



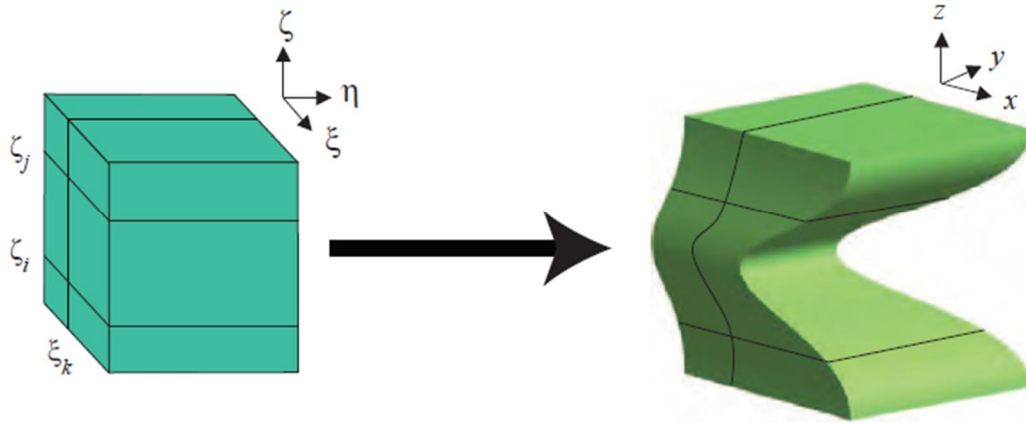
شکل ۲-۳: نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی در اجزای محدود کلاسیک

ولی در روش آیزوژئومتریک فضای پارامتری هر زیردامنه جداست (شکل ۲-۴) و هر زیردامنه خود شامل المان‌هایی می‌شود که بوسیله بردارهای گرهی تشکیل شده‌اند و با مفهوم المان در اجزای

^۱Uniform

^۲Non-Uniform

محدود متفاوت است.



شکل ۲-۴: نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی در روش آیزوژئومتریک

۲-۳-۲- توابع پایه

توابع پایه ی ب-اسپلاین به صورت بازگشتی با شروع از اعداد ثابت تعریف می‌شوند:

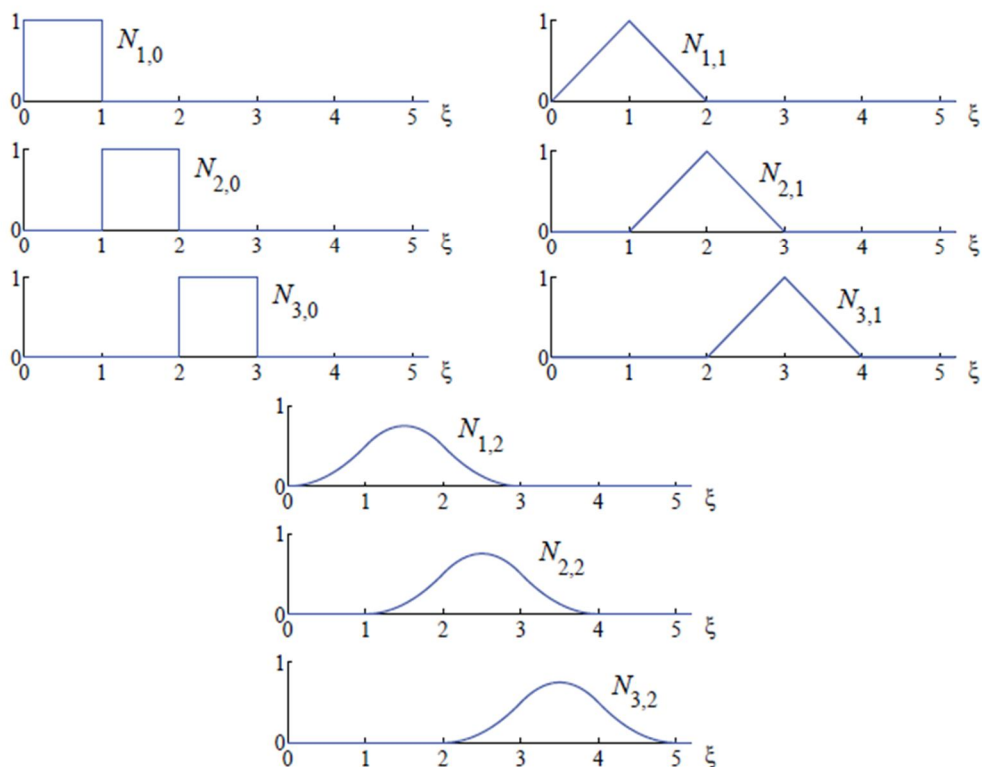
$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1-2)$$

برای $P = 1, 2, 3, \dots$ داریم:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2-2)$$

یک مثال ابتدایی از نتایج فرمول‌های بالا برای بردار گرهی یکنواخت در شکل (۲-۵) نمایش داده شده است. توجه شود که برای $P = 0$ و $P = 1$ توابع پایه به ترتیب مانند همان توابع ثابت تکه‌ای و توابع اجزا محدود خطی هستند اما برای $P \geq 2$ موضوع کمی متفاوت است. توابع پایه ی ب-اسپلاین مرتبه دوم (همچنین توابع پایه نرئز، آنچنانکه بعدا نشان خواهیم داد) با یکدیگر مشابه هستند و فقط هر کدام نسبت به تابع قبلی چند واحد شیفت داده شده‌اند. این مسئله در مقایسه با توابع اجزا محدود

مرتبه دوم که برای گره‌های انتهایی و میانی با هم تفاوت دارند، کمی متفاوت است. این الگوی مشابه برای ب-اسپلاین‌های مرتبه بالاتر نیز به همین شکل ادامه می‌یابد و می‌تواند باعث امتیاز بزرگی در حل معادلات نسبت به توابع اجزا محدود که کاملاً نامتشابه هستند، شود. یک نمونه از توابع پایه برای بردار گرهی غیر یکنواخت و باز در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. توجه شود که توابع پایه در ابتدا



شکل ۲-۵: توابع پایه ب-اسپلاین درجه صفر، یک و دو برای بردار گرهی یکنواخت $\Xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ و انتها و $\xi = 4$ دارای پیوستگی از مرتبه C^0 هستند، در حالی که در سایر نقاط پیوستگی مرتبه‌ی C^1 دارند.

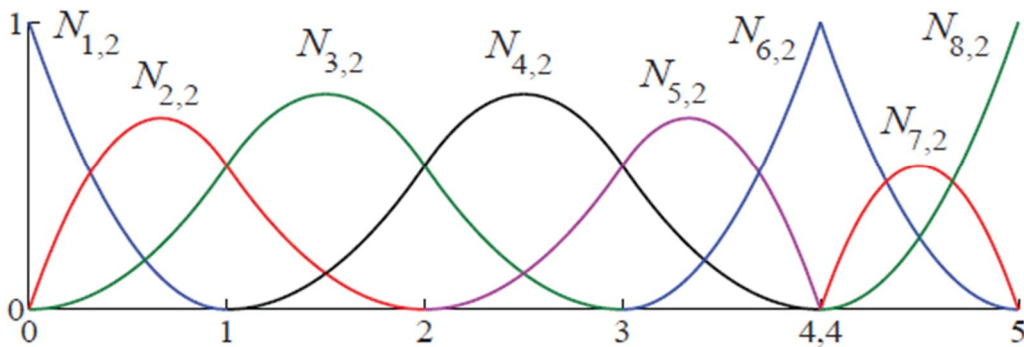
به طور کلی توابع پایه با مرتبه‌ی p دارای $p-1$ مشتق پیوسته هستند. اگر یک گره k بار تکرار شود تعداد مشتقات پیوسته k مرتبه کاهش می‌یابد.

خواص مهم توابع پایه ب-اسپلاین به شرح زیر می‌باشد:

۱- جمع مقادیر این توابع برابر واحد است، یعنی $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$

۲- هر تابع $N_{i,p}$ به بازه‌ی $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ محدود می‌شود.

۳- هر تابع پایه غیر منفی است، یعنی $N_{i,p}(\xi) \geq 0, \forall \xi$ در نتیجه همگی ضرایب ماتریس جرم که بر پایه‌ی ب-اسپلاین ساخته شده بزرگتر یا مساوی با صفر است.



شکل ۲-۶: توابع پایه‌ی درجه دو برای بردار گرهی غیر یکنواخت و باز $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$

از دیگر تفاوت‌های بین دو روش اجزا محدود و آیزوژئومتریک این است که در روش اجزاء محدود تابع مجهول به وسیله توابع پایه تقریب زده می‌شود و سپس از همان توابع برای مدل هندسی استفاده می‌شود (البته در حالت آیزوپارامتریک). ولی در روش آیزوژئومتریک برعکس این حالت است یعنی ابتدا هندسه‌ی شکل توسط توابع پایه مدل می‌شوند و سپس از همین توابع برای تقریب تابع مجهول استفاده می‌شود (در حالت آیزوژئومتریک). شکل زیر بیانگر این اختلاف می‌باشد (شکل ۲-۷).

Classical FEA:	Geometry	\Leftarrow	Fields
		imposed	
		on	
Isogeometric Analysis:	Geometry	\Rightarrow	Fields

شکل ۲-۷: ترتیب اعمال توابع پایه بر هندسه و فضای حل

۲-۳-۳- مشتقات توابع پایه ب-اسپلاین

مشتقات توابع پایه ب-اسپلاین را می‌توان به خوبی بر حسب ب-اسپلاین‌های مرتبه پایین‌تر نشان داد. این مسئله با توجه به تعریف بازگشتی این توابع چندان عجیب نیست. برای چند جمله‌ای مرتبه p و بردار گرهی مشتق تابع پایه i ام به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3-2)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف این می‌توان آن را برای مشتقات مرتبه بالاتر به شکل زیر بسط داد:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (4-2)$$

با بسط رابطه‌ی (۲-۴) به وسیله‌ی رابطه‌ی (۲-۳) می‌توانیم به عبارت زیر بر حسب توابع مرتبه پایین‌تر $N_{i,p-k}, \dots, N_{i+k,p-k}$ برسیم:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+k,p-k}(\xi) \quad (5-2)$$

که در آن:

$$\alpha_{0,0} = 1$$

$$\alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i}$$

$$\alpha_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1 \quad (6-2)$$

$$\alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}$$

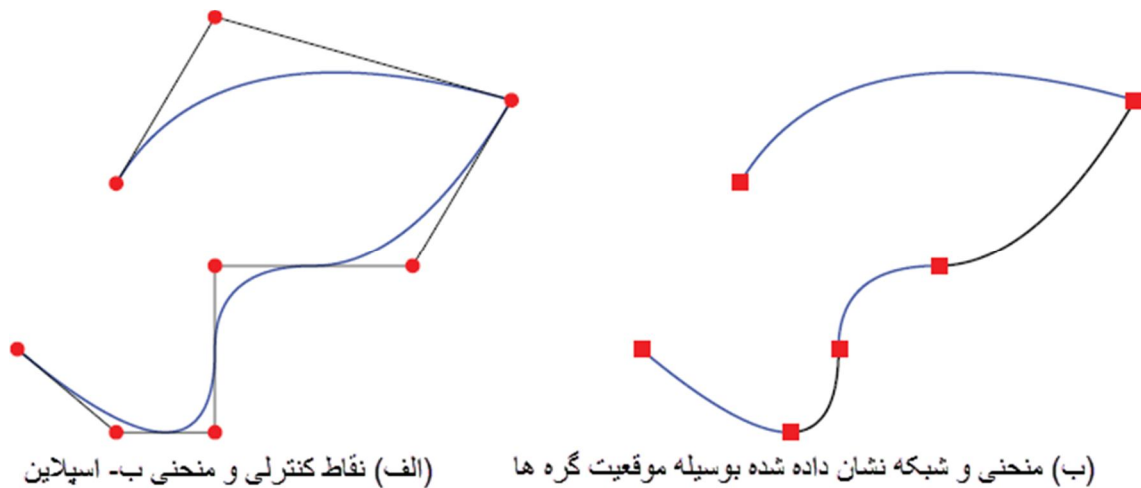
در نتیجه بسیاری از این ضرایب در حضور گره‌های تکراری صفر خواهد بود.

۲-۳-۴ - منحنی ب-اسپلاین

منحنی‌های ب-اسپلاین در R^d با استفاده از ترکیب خطی توابع پایه‌ی ب-اسپلاین ساخته می‌شوند. ضرایب توابع پایه به عنوان نقاط کنترلی در نظر گرفته می‌شوند. این نقاط به نوعی شبیه مختصات نقاط گرهی در تحلیل اجزا محدود هستند. درونیابی خطی تکه‌ای نقاط کنترلی چندضلعی کنترلی را به دست می‌دهد. برای n تابع ب-اسپلاین $N_{i,p}, i=1,2,\dots,n$ ، و نقاط کنترلی متناظر $B_i \in R^d$ یک منحنی ب-اسپلاین به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (7-2)$$

یک نمونه از این منحنی‌ها برای تابع پایه درجه دو که قبلاً بررسی شد در شکل (۲-۸) نشان داده شده است. توجه شود که منحنی در نقاط کنترلی ابتدایی و انتهایی به این خاطر که بردار گرهی باز است دارای پیوستگی صفر است و همینطور در نقطه‌ی کنترلی ششم به دلیل اینکه تعداد دفعات تکرار $\xi=4$ برابر با مرتبه‌ی چند جمله‌ای است. همچنین توجه شود که منحنی در اولین، آخرین و ششمین نقطه‌ی کنترلی مماس بر چندضلعی کنترلی است. منحنی در هر جایی که گره‌ی تکراری $\xi=4$ وجود دارد پیوستگی مرتبه‌ی $C^0 = C^{p-2}$ دارد.



شکل ۲-۸: منحنی ب-اسپلاین به همراه شبکه کنترلی و موقعیت بردارهای گرهی

خواص مهم منحنی ب-اسپلاین به شرح زیر است:

۱- این منحنی‌ها در جاهایی غیر از تکرار گره‌ها یا نقاط کنترلی دارای مشتقات پیوسته‌ی

مرتبه‌ی $p-1$ هستند.

۲- تکرار k مرتبه یک نقطه کنترلی تعداد مشتقات پیوسته را k مرتبه کاهش می‌دهد.

۳- جابجایی نسبی یک منحنی ب-اسپلاین با اعمال جابجایی به نقاط کنترلی آن به

دست می‌آید. ما به این خاصیت کواریانس سلبی^۱ می‌گوییم.

۲-۳-۵- سطوح ب-اسپلاین

برای شبکه کنترلی $\{B_{i,j}\}$ ، $i=1,2,\dots,n$ ، $j=1,2,\dots,m$ و بردارهای گرهی

$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ و $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ یک سطح ب-اسپلاین حاصل از ضرب

تانسوری به صورت زیر تعریف می‌شود:

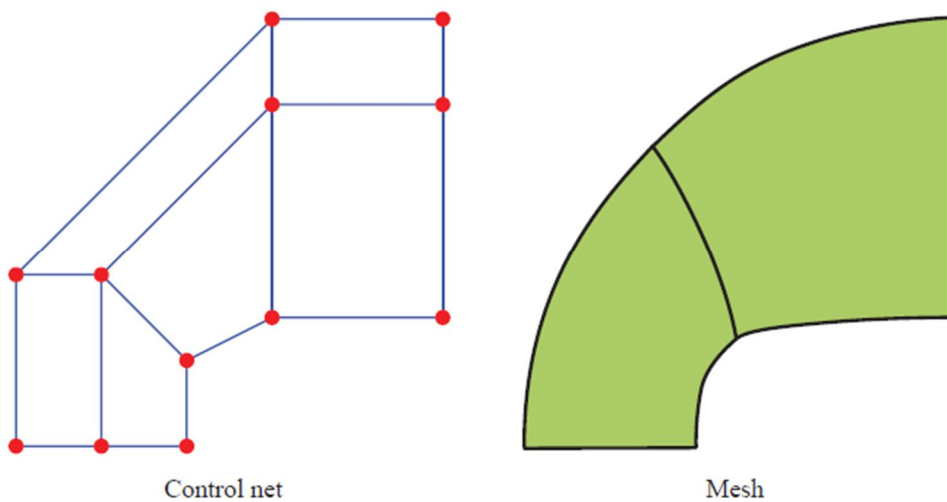
^۱Affine Covariance

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (8-2)$$

که در آن $N_{i,p}$ و $M_{j,q}$ توابع پایه‌ی منحنی‌های ب-اسپلاین هستند. نمونه‌ای از یک سطح ب-اسپلاین به همراه شبکه‌ی نقاط کنترلی آن در شکل زیر نمایش داده شده است. در شکل (۲-۱۰) یک سطح ب-اسپلاین به همراه شبکه کنترلی آن نشان داده شده است. بردارهای گرهی این شکل به صورت $\xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ و $\eta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ می‌باشد. و همچنین مختصات نقاط کنترلی شکل طبق شکل زیر می‌باشد.

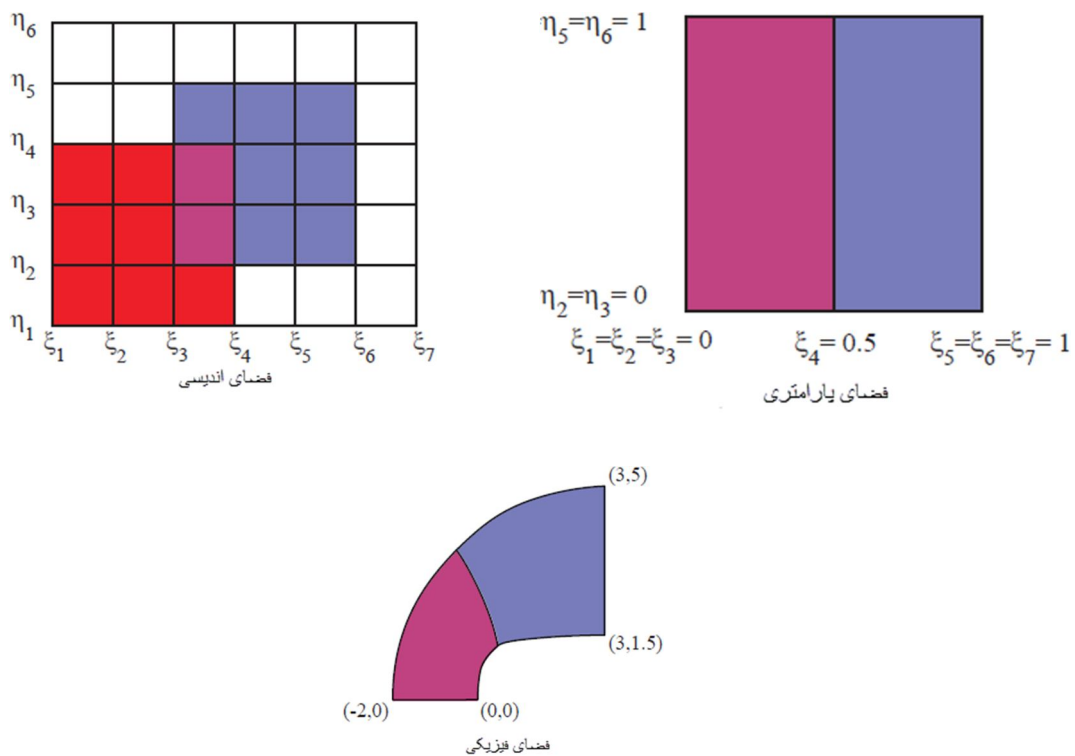
i	j	$\mathbf{B}_{i,j}$
1	1	(0, 0)
1	2	(-1, 0)
1	3	(-2, 0)
2	1	(0, 1)
2	2	(-1, 2)
2	3	(-2, 2)
3	1	(1, 1.5)
3	2	(1, 4)
3	3	(1, 5)
4	1	(3, 1.5)
4	2	(3, 4)
4	3	(3, 5)

شکل ۲-۹: مختصات نقاط کنترلی شکل (۲-۱۱)



شکل ۲-۱۰: سطح ب- اسپلاین

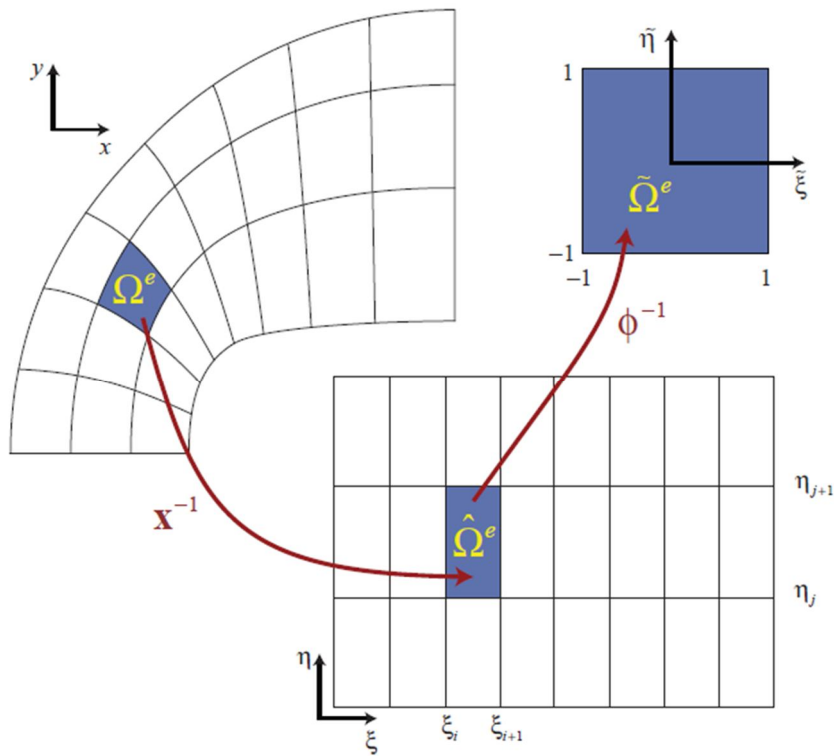
و در نهایت فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی به شکل زیر به دست می‌آید.



شکل ۲-۱۱: فضای اندیسی، پارامتری و فیزیکی شکل (۲-۱۰)

برای آرایه‌های انتگرال‌گیری عددی ساخته شده از روی ب- اسپلاین‌ها، المان‌ها به عنوان

دهانه‌های گرهی $[\eta_j, \eta_{j+1}] \times [\xi_i, \xi_{i+1}]$ در نظر گرفته می‌شوند. برای درک بهتر یک المان مرجع دوبعدی و تصویر آن در فضای فیزیکی به شکل (۲-۱۲) توجه کنید. در انتگرال‌گیری با استفاده از تغییر متغیر و قوانین انتگرال‌گیری گوس به المان مرجع برمی‌گردیم.



شکل ۲-۱۲: المان گوس و تصویر آن در فضای فیزیکی و پارامتری

۲-۳-۶- احجام ب- اسپلاین

احجام ب- اسپلاین حاصل از ضرب تانسوری همانند سطوح ب- اسپلاین تعریف می‌شوند. برای شبکه‌ی کنترلی $\{B_{i,j,k}\}$ و $i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m, k=1,2,\dots,l$ و بردارهای گرهی $Z = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l+r+1}\}$ و $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ و $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ یک حجم ب- اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k} \quad (9-2)$$

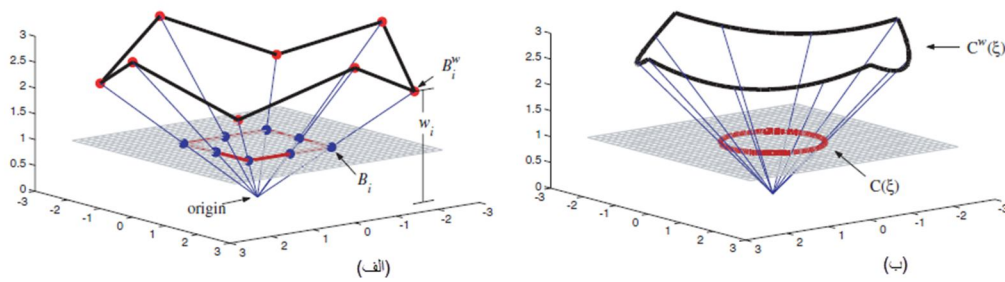
۲-۳-۷-ب- اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت (NURBS)

اشکال هندسی در R^d را می‌توان با انتقال تصویری اشکال ب-اسپلاین در R^{d+1} به دست آورد. مقاطع منحنی شکل مانند دایره و بیضی را می‌توان به طور دقیق با انتقال تصویری منحنی‌های درجه-۲ دو قطعه‌ای ساخت. در شکل (۲-۱۳) این مطلب نمایش داده شده، که در آن یک دایره در R^2 از یک منحنی ب-اسپلاین درجه‌ی دو قطعه‌ای در R^3 ساخته شده است. انتقال تصویری یک منحنی ب-اسپلاین، یک چند جمله‌ای نسبی به فرم $C_R(\xi) = f(\xi)/g(\xi)$ می‌شود، که f و g در آن چند جمله‌ای‌های قطعه‌ای هستند. نحوه‌ی ساخت یک منحنی ب-اسپلاین نسبی در R^d به شکل زیر می‌باشد. فرض کنید $\{B_i^w\}$ مجموعه‌ای از نقاط کنترلی برای یک منحنی ب-اسپلاین در R^{d+1} با بردار گرهی باشد. این نقاط به عنوان نقاط کنترلی تصویری برای منحنی نرَبز مورد نظر در R^d در نظر گرفته می‌شوند. نقاط کنترلی در R^d از تصویر نقاط کنترلی تصویری با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$(B_i)_j = (B_i^w)_j, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (10-2)$$

$$w_i = (B_i^w)_{d+1} \quad (11-2)$$

¹Non-Uniform Rational B-Spline



شکل ۲-۱۳: ساخت منحنی ب-اسپلاین نسبی از منحنی ب-اسپلاین [۱].

که در آن $(B_i)_j$ مؤلفه‌ی j ام بردار B_i است و w_i به‌عنوان آمین وزن در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۲-۱۳-الف) وزن مؤلفه‌ی قائم نقاط کنترلی منحنی ب-اسپلاین قطعه‌ای را در R^3 تعریف می‌کنند. توابع پایه‌ی نسبی و منحنی نریز به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^n N_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}} \quad (12-2)$$

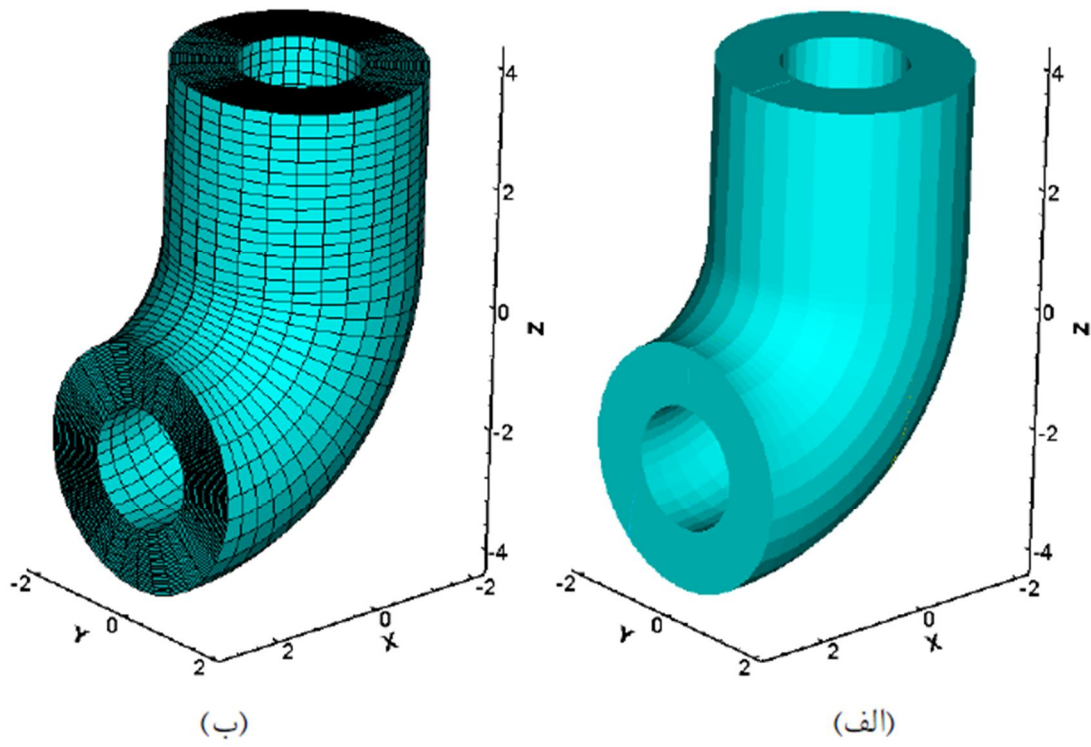
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)B_i \quad (13-2)$$

سطوح و احجام نسبی به طور مشابه بر حسب توابع پایه‌ی نسبی تعریف می‌شوند:

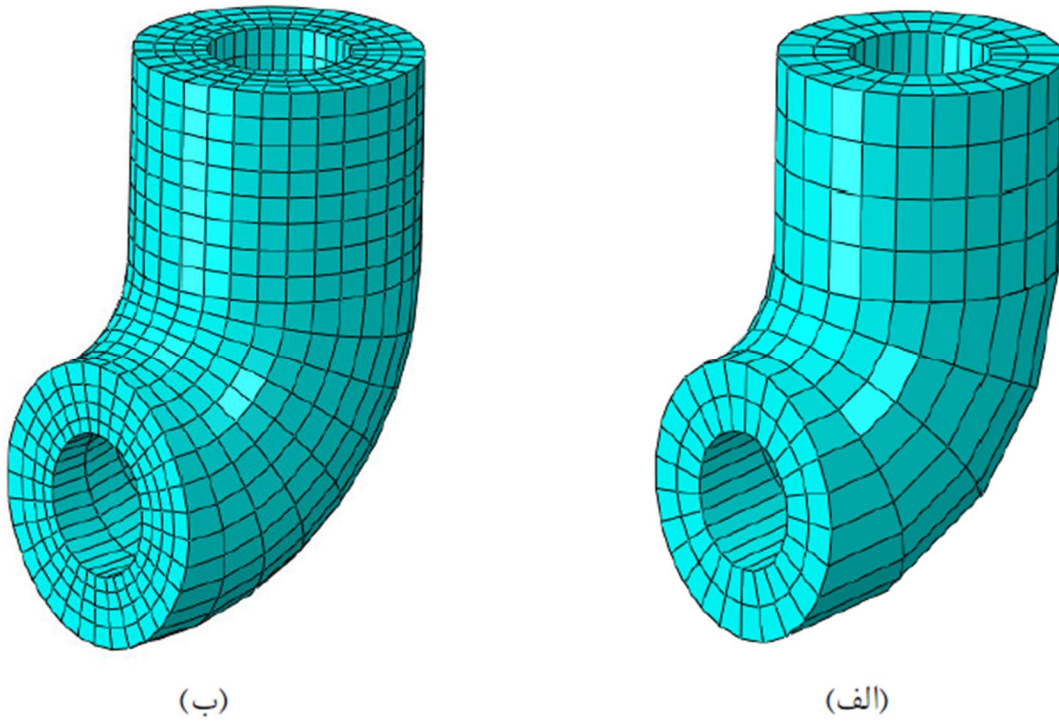
$$R_{i,j}^{p,q}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)w_{\hat{i},\hat{j}}} \quad (14-2)$$

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi,\eta,\zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{\hat{j}=1}^m \sum_{\hat{k}=1}^l N_{\hat{i},p}(\xi)M_{\hat{j},q}(\eta)L_{\hat{k},r}(\zeta)w_{\hat{i},\hat{j},\hat{k}}} \quad (15-2)$$

به عنوان مثال شکل (۲-۱۴) یک قطعه ساخته شده با استفاده از نریز را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱۴: مدل سازی هندسی یک لوله خم شده با استفاده از ۹۰ نقطه کنترلی (الف) بدون (ب) با شبکه ترسیمی



شکل ۲-۱۵: تقریب هندسه لوله خم شده با استفاده از روش اجزای محدود (الف) ۶۷۵ گره (ب) ۲۷۲۰ گره

همانطور که در شکل (۲-۱۴) و (۲-۱۵) مشاهده می‌شود به هنگام استفاده از روش اجزای محدود در وجوه لوله به رغم استفاده از شبکه‌بندی ریز، تقریب قابل توجهی (ایجاد سطوح مسطح) نسبت به روش آیزوژئومتریک وجود دارد. بنابراین در کمترین حالت بر اساس ۶۷۵ گره، حجم محاسبات در مدلسازی هندسه ۸۷ درصد کاهش یافته است. ضمن اینکه هندسه تولید شده توسط نریزها دقیق است [۱۳].

از خواص مهم نریز می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱- مجموع مقادیر توابع پایه‌ی نریز برابر واحد است.
- ۲- پیوستگی توابع پایه‌ی نریز همانند ب- اسپلاین‌ها است.
- ۳- انتقال نسبی با اعمال انتقال بر نقاط کنترلی به دست می‌آید، یعنی نریز خاصیت کواریانس سلبی دارد.
- ۴- اگر وزن‌ها برابر باشند نریز همان ب- اسپلاین خواهد بود (یا به عبارتی چندجمله‌ای قطعه‌ای)
- ۵- سطوح و احجام نریز انتقال تصویری اشکال چندجمله‌ای قطعه‌ای هستند.

۲-۳-۱- مشتقات توابع پایه نریز

از آنجایی که توابع پایه‌ی نریز از روی ب- اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند، مشتقات آن‌ها وابسته به مشتقات ب- اسپلاین‌هاست.

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{W(\xi)N'_{i,p}(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (16-2)$$

که در آن:

$$N'_{i,p}(\xi) = \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) , W'(\xi) = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(\xi) w_i \quad (17-2)$$

۲-۴- نربز به عنوان پایه‌ای برای تحلیل

چهارچوب تحلیل بر مبنای نربز شامل مؤلفه‌های زیر است [۱]:

۱- شبکه برای یک زیر المان نربز به صورت حاصلضرب بردارهای گرهی تعریف می‌شود. برای

مثال در سه بعد یک شبکه به صورت $\mathbb{E} \times H \times Z$ به دست می‌آید.

۲- دهانه‌های گرهی حوزه‌ی مسئله را به المان‌ها تقسیم می‌کنند.

۳- زیربنای هر تابع پایه تنها تعداد کمی المان است.

۴- نقاط کنترلی اختصاص داده شده به توابع پایه، هندسه را تشکیل می‌دهند.

۵- از مفهوم آیزوپارامتریک در اینجا استفاده می‌شود، یعنی پارامترهای مورد سؤال (مانند جابه-

جایی، سرعت، دما و غیره) بر حسب همان نواع پایه‌ای نمایش داده می‌شوند که برای نمایش

هندسه به کار رفته‌اند.

۶- استراتژی‌های اصلاح شبکه از ترکیب تکنیک‌های گره‌گذاری و افزایش مرتبه به دست می-

آیند. این کار استفاده از روش‌هایی مشابه اصلاح h و p و همچنین روش جدید k را فراهم می-

کند.

۷- آرایه‌های ساخته شده از زیر المان‌های آیزوپارامتریک نربز می‌توانند همچون روش اجزا

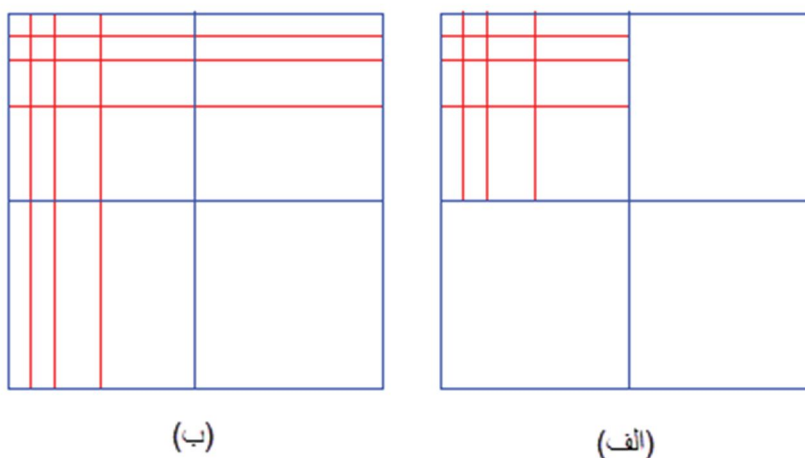
محدود برای تشکیل آرایه‌های کلی برهم‌گذاری^۱ شوند. سازگاری بین زیرالمان‌های نربز با

استفاده از نمایش نربز یکسان لبه و سطح برای مرز مشترک زیرالمان‌ها به دست می‌آید. در

شکل (۲-۱۶- الف) استفاده از روش پیوسته‌ی گالرکین نمایش داده شده است. اصلاح از

¹Assemble

زیرالمانی به زیر المانی دیگر انتقال می‌یابد. دو روش جایگزین طبق شکل (۲-۹-ب) وجود دارد. یکی روش ناپیوسته‌ی گالرکین است که می‌تواند در سطح زیرالمان انجام شود. با استفاده از فرمولبندی تغییراتی سازگاری به صورت ضعیفی تحمیل می‌شود. روش دیگر استفاده از معادلات مقید برای نقاط و متغیرهای کنترلی است تا به این وسیله سازگاری نقطه‌ای در مرز مشترک زیرالمان‌ها را به دست آوریم.

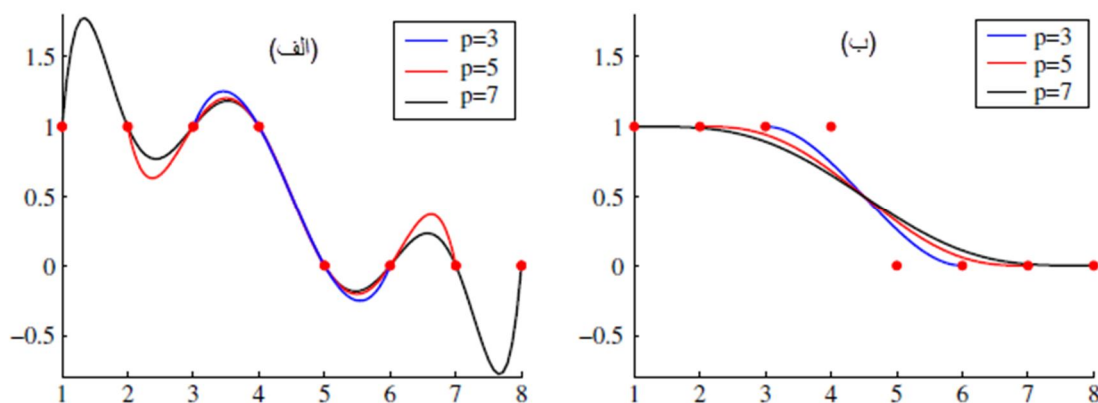


شکل ۲-۱۶: روش‌های (الف) پیوسته و (ب) ناپیوسته‌ی گالرکین

۸- آسانترین راه برای اعمال شرایط مرزی دریکله، اعمال آن بر متغیرهای کنترلی است. در مورد شرایط دریکله‌ی همگن این کار منجر به نتایج دقیق و ارضای نقطه‌ای می‌شود. در مورد شرایط دریکله‌ی غیر همگن، مقادیر مرزی باید توسط توابع مربوط به فضای نریز تقریب زده شوند. این کار منجر به ارضای قوی ولی تقریبی شرایط مرزی می‌شود. یک فرمولبندی جایگزین از شرایط دریکله می‌تواند ارضای "ضعیف" باشد، یک شکل استاندارد از روش ناپیوسته‌ی گالرکین.

مشهور است که توابع درونیایی اجزا محدود برای تطبیق کردن داده‌های ناپیوسته دارای نوسان هستند. یک مثال از این مطلب در شکل (۲-۱۷-الف) نشان داده شده است، که چند جمله‌ای‌های

لاگرانژ مرتبه سوم، پنجم و هفتم ناپیوستگی بین هشت نقطه را در R^2 درونیابی می‌کنند. توجه کنید که همچنان که درجه افزایش می‌یابد، دامنه‌ی نوسان افزایش می‌یابد. این پدیده را پدیده‌ی گیبز^۱ می‌نامند. وقتی از همین اطلاعات به عنوان نقاط کنترلی در نربز استفاده می‌شود رفتار کاملاً متفاوتی را مشاهده می‌کنیم. در شکل (۲-۱۷-ب) منحنی‌های نربز یکنوا هستند، که خاصیت میرایی تغییرات^۲ را نشان می‌دهد. این خاصیت در نمایش لایه‌های تیز برتری ایجاد می‌کند.



شکل ۲-۱۷: مقایسه تطبیق دادن داده‌ای ناپیوسته الف) روش اجزای محدود ب) روش آیزوژئومتریکی

۲-۵- تحلیل آیزوژئومتریکی مسائل تنش مسطح

هدف از این بخش نمایش فرمولبندی روش آیزوژئومتریکی در مسائل تنش مسطح می‌باشد.

۲-۵-۱- فرمولبندی آیزوژئومتریکی

تابع تغییر مکان در مسائل تنش مسطح را می‌توان با استفاده از توابع پایه‌ی نربز به صورت زیر

تقریب زد:

¹Gibbs Phenomena

²Variation Diminishing

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{u i,j} \quad (18-2)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{v i,j} \quad (19-2)$$

در این روابط $R_{i,j}(\xi, \eta)$ توابع پایه‌ی نریز می‌باشند. با توجه به خاصیت بازه‌ی تأثیر توابع درونیایی، روابط فوق را می‌توان برای $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ و $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1}]$ به صورت زیر ساده نمود:

$$\bar{u}^{i,j} = \begin{Bmatrix} u^{i,j} \\ v^{i,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(\xi, \eta) P_{u k,l} \\ \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(\xi, \eta) P_{v k,l} \end{Bmatrix} = \bar{N} \cdot \bar{P} \quad (20-2)$$

که در رابطه‌ی بالا \bar{N} را می‌توان به صورت بسط یافته‌ی زیر نوشت:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} R_{i-p_1, j-p_2} & 0 & \dots & R_{i-p_1, j} & 0 & \dots & R_{i, j} & 0 \\ 0 & R_{i-p_1, j-p_2} & \dots & 0 & R_{i-p_1, j} & \dots & 0 & R_{i, j} \end{bmatrix} \quad (21-2)$$

و همچنین \bar{P} عبارت است از:

$$\bar{P} = [P_{u i-p, j-p} P_{v i-p, j-p} \dots P_{u i-p, j} P_{v i-p, j} \dots P_{u i, j} P_{v i, j}]^T \quad (22-2)$$

رابطه‌ی تنش-کرنش و تعریف کرنش‌ها در مسائل الاستیسیته مطابق روابط زیر است:

$$\sigma = C \varepsilon \quad (23-2)$$

$$\varepsilon = D\bar{u} \quad (24 - 2)$$

که در این روابط C و D به ترتیب ماتریس الاستیسیته و ماتریس اپراتور دیفرانسیلی می‌باشند و در مسائل تنش مسطح به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (25 - 2)$$

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (26 - 2)$$

از روابط تنش-کرنش و تعریف کرنش‌ها در رابطه‌ی (۲۴-۲) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$, B = D\bar{N} \quad \varepsilon = D\bar{u} = B\bar{P} \quad (27 - 2)$$

در ادامه می‌توان مثل فرمولبندی روش اجزای محدود در مسائل تنش مسطح با استفاده از رابطه کار مجازی، ماتریس ضرایب را به دست آورد. برای ناحیه‌ی فرضی Ω^p رابطه‌ی کار مجازی به صورت زیر است:

$$\int_{\Omega^p} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega^p} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma^p} \delta \bar{u}^T t d\Gamma = 0 \quad (28 - 2)$$

که در این رابطه t و b به ترتیب نیروهای سطحی و حجمی می‌باشند. با استفاده از رابطه‌ی کرنش-تغییر مکان (۲۷-۲) تغییرات کرنش‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta \varepsilon = B \delta \bar{P} \quad (29 - 2)$$

اکنون با جایگزینی رابطه‌ی فوق در قسمت اول رابطه‌ی کار مجازی و با به کارگیری $\delta u = \bar{N} \delta \bar{P}$ برای بقیه‌ی قسمت‌های این رابطه و حذف ضرائب $\delta \bar{P}$ به دلیل غیر صفر فرض شدن آن‌ها در رابطه‌ی کار مجازی ماتریس ضرائب K و ماتریس نیروها F به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = \int_{\Omega^p} B^T C B d\Omega \quad (30 - 2)$$

$$F = \int_{\Omega^p} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma^p} N^T t d\Gamma \quad (31 - 2)$$

بنابراین مقادیر مجهول نقاط کنترلی را می‌توان از حل دستگاه معادلات زیر محاسبه نمود :

$$K \bar{P} = F \quad (32 - 2)$$

چنانکه اشاره شد شبیه به مفهوم آیزوپارامتریک در روش اجزای محدود، در این روش نیز از

تقریب یکسان تابع مجهول و هندسه استفاده می‌شود. با این تفاوت که در اینجا هندسه به مراتب

دقیق‌تر مدلسازی می‌شود. بنابراین در مسئله‌ی تنش مسطح، هندسه‌ی دامنه به صورت زیر مدل می-

شود :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{x i,j} \quad (33 - 2)$$

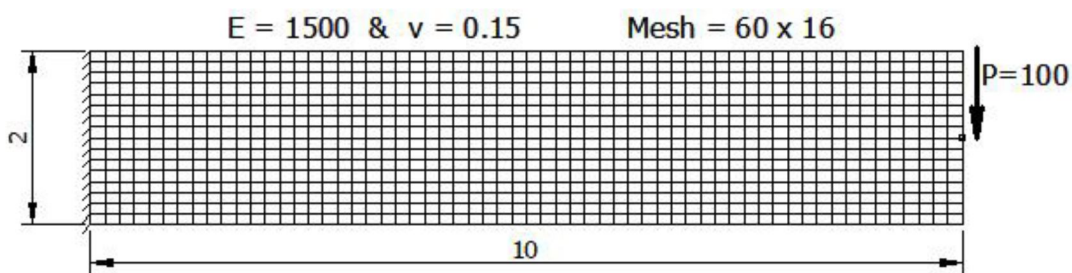
$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n'} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{y i,j} \quad (34 - 2)$$

که در این روابط $P_{x i,j}$ و $P_{y i,j}$ مختصات X و Y نقاط کنترلی می‌باشند. همانطور که قبلاً در تقریب تابع

مجهول نیز اشاره شد در روابط فوق همه‌ی پارامترها بر حسب ξ و η نوشته شده‌اند که لزوماً نیاز به

نگاشت در محاسبات همانند روش اجزای محدود را ایجاب خواهد کرد.

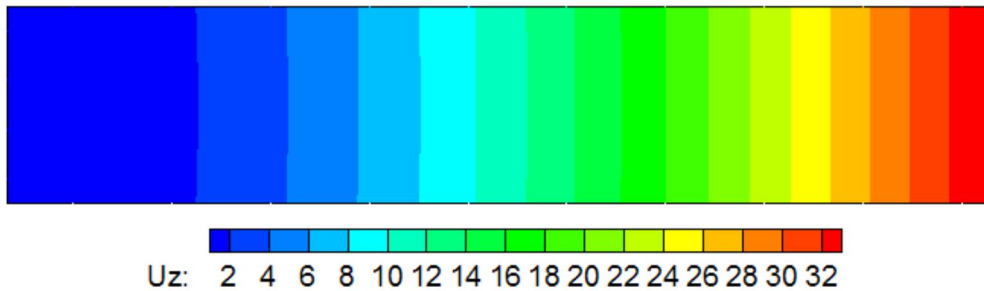
در اینجا با حل یک مثال [۲۷] و مقایسه نتایج با روش اجزای محدود، توانمندی و مزایای روش آیزوژئومتریک نشان داده شده است. در این مثال فرض شده است که یک صفحه مستطیلی در حالت تنش مسطح با اتصال گیردار در یک انتها و تحت اثر بار متمرکز ۱۰۰ در انتهای آزاد خود در شکل (۱۸-۲) قرار دارد. مقدار مدول الاستیسیته در کل دامنه برابر با مقدار ثابت ۱۵۰۰ و مقدار ضریب پواسون برابر با ۰/۱۵ فرض شده است. همانطور که در شکل دیده می‌شود ابعاد تیر ۱۰ در ۲ و با ضخامت واحد می‌باشد. ابتدا این مسئله با روش اجزای محدود و با تقسیم دامنه به ۹۶۰ المان چهارگرمی حل شده است. ملاحظه می‌شود که در روش اجزای محدود، حل مساله منجر به حل دستگاه معادلاتی با حدود ۱۰۰۰ معادله و مجهول خواهد شد. سپس با روش آیزوژئومتریک نیز مسئله مجدداً حل و نتایج با روش اجزای محدود مقایسه شده است.



شکل ۱۸-۲: شکل اولیه مثال مرجع [۲۷]

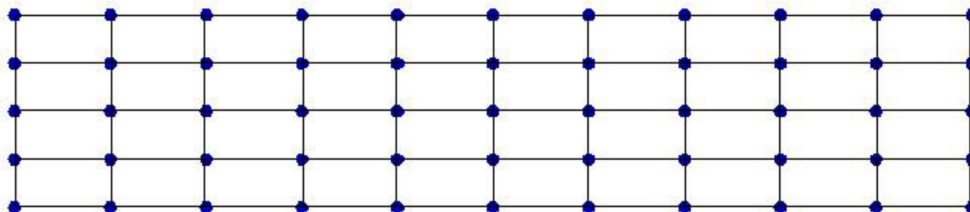
نتیجه تحلیل مسئله برای تغییر مکان u_z صفحه مستطیلی با روش اجزای محدود در شکل (۲)-

(۱۸) نشان داده شده است.



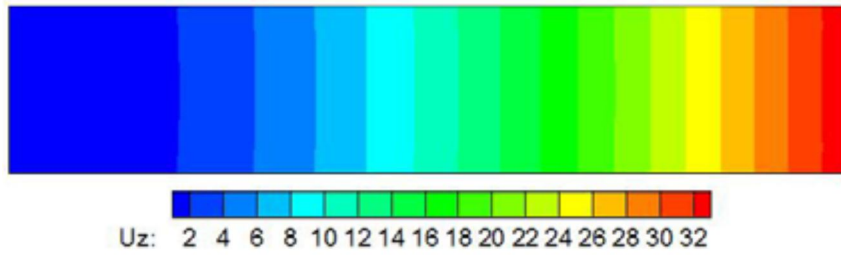
شکل ۲-۱۹: تغییر مکان قائم شکل (۲-۱۸) با روش اجزای محدود

البته مسئله مذکور با تعداد المان‌های بیشتر نیز حل شده است که اساساً تغییر معناداری در جواب‌ها حاصل نشده است. اکنون مسئله فوق را با روش آیزوژئومتریکی و با تعداد ۵۵ نقطه کنترلی مطابق شکل حل می‌کنیم. البته دقت شود که در شکل هر مستطیل یک المان نیست و اصلاً در این خصوص شباهتی بین اجزای محدود و روش آیزوژئومتریکی وجود ندارد. در واقع شبه المان‌های روش آیزوژئومتریکی از حاصلضرب بردارهای گرهی به دست می‌آید. نکته دیگر اینکه در اجزای محدود همواره گره‌ها بر روی دامنه قرار می‌گیرند در حالی که در روش آیزوژئومتریکی نقاط کنترلی در حالت کلی می‌توانند بر روی دامنه نباشند.



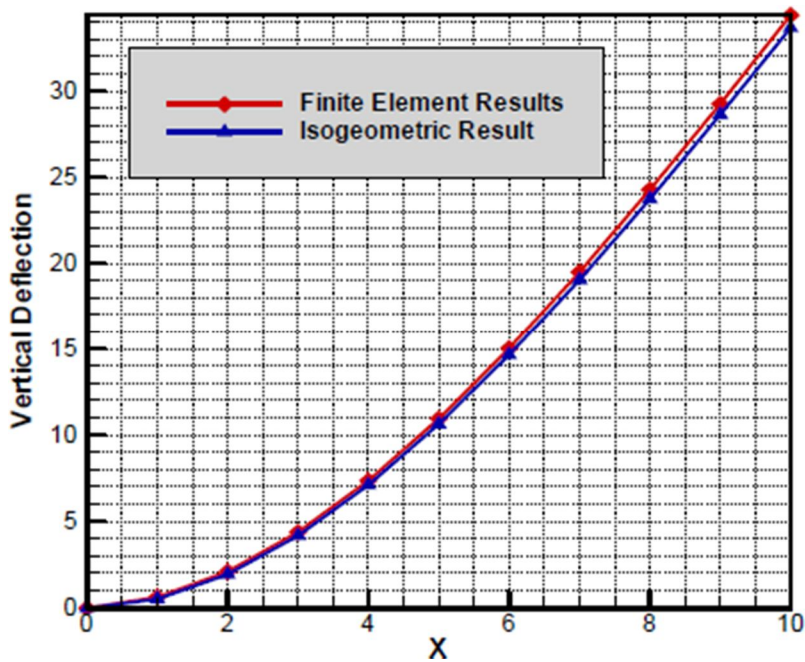
شکل ۲-۲۰: مدل‌سازی شکل (۲-۱۸) با روش آیزوژئومتریکی

بردار گره برای جهت طولی برابر $\{1 \text{ و } 1 \text{ و } 0/75 \text{ و } 0/5 \text{ و } 0/25 \text{ و } 0 \text{ و } 0 \text{ و } 0\}$ و برای جهت عرضی برابر $\{1 \text{ و } 1 \text{ و } 0/66 \text{ و } 0/33 \text{ و } 0 \text{ و } 0 \text{ و } 0\}$ در نظر گرفته شده است. همچنین درجه توابع پایه اسپلاین در این مسئله مساوی ۲ لحاظ گردیده است. نتیجه تحلیل آیزوژئومتریکی با شرایط مذکور، در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۲-۲۱: تغییر مکان قائم شکل (۲-۱۸) با روش آیزوژئومتری

همانگونه که از روی کانتورهای شکل (۲-۱۹) و (۲-۲۱) مشاهده می‌شود، نتایج تحلیل بسیار شبیه به یکدیگر است که این مسئله برای تغییر شکل قائم محور میانی صفحه مستطیلی فوق در شکل (۲-۲۲) نشان داده شده است.



شکل ۲-۲۲: مقایسه نتایج تحلیل شکل (۲-۱۸) با دو روش اجزای محدود و آیزوژئومتری

توجه شود که در واقع در تحلیل آیزوژئومتری فقط از ۱۲ شبه‌المان که در واقع از حاصلضرب تعداد دهانه‌های گرهی حاصل می‌شود استفاده شده است، در حالی که در روش اجزای محدود از ۹۶۰ المان چهارگره‌ای استفاده شده است که ۸۰ برابر بیشتر می‌باشد. همچنین در روش تحلیل آیزوژئومتری تعداد مجهولات گرهی در حدود ۱۰۰ و در اجزای محدود در حدود ۱۰۰۰ می‌باشد که

باز ملاحظه می‌گردد تغییرات قابل توجهی در ابعاد دستگاه معادلات نهایی ایجاد شده که سبب افزایش سرعت و دقت حل مسئله در روش آیزوژئومتریک شده است. همچنین در روش اجزای محدود برای مدلسازی تکیه‌گاه فقط نقاط تکیه‌گاهی گیردار می‌شوند که از معایب و ضعف‌های روش اجزای محدود محسوب می‌شود، در حالی که در روش آیزوژئومتریک کل وجه سمت چپ صفحه مستطیلی به صورت سراسری و پیوسته گیردار مدل می‌شود که باز تفاوت در دقت مدلسازی نسبت به روش اجزای محدود روشن خواهد بود.

۲-۶- تحلیل آیزوژئومتریک مسائل سه بعدی الاستیسیته

مسائل سه‌بعدی جزء کلی‌ترین مسائل در تحلیل سازه‌ها محسوب می‌شود که کاربرد وسیعی در صنعت نیز دارد. با توجه به پیچیدگی زیاد تولید شبکه در مسائل عملی سه بعدی نسبت به مسائل دوبعدی، استفاده از روش آیزوژئومتریک برای این مسائل می‌تواند بسیار مناسب و مفید باشد و همچنین بیانگر کارایی این روش نیز می‌باشد. در ادامه این بخش به شرح و بسط این روش در مسائل سه بعدی پرداخته می‌شود. به این منظور می‌توان نتایج به دست آمده در قسمت دوبعدی را به حالت سه‌بعدی تعمیم داد.

۲-۶-۱- فرمولبندی مسائل سه‌بعدی الاستیسیته

همانطور که می‌دانیم برای سازه‌های سه‌بعدی در مکانیک محیط‌های پیوسته، برای هر نقطه می‌توان سه درجه آزادی انتقالی در فضا متصور شد. در این مسائل شش مولفه‌ی کرنش وجود دارد. ماتریس کرنش در مسائل سه‌بعدی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_z / \partial z \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x \\ \partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y \\ \partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z \end{Bmatrix} = Du \quad (35-2)$$

که در این رابطه:

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (36-2)$$

بنابراین در مسائل سه بعدی سه مؤلفه‌ی تغییرمکانی u_x و u_y و u_z بایستی تقریب زده شوند. در روش آیزوژئومتریک با استفاده از توابع پایه نریز این کار به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$u^p(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) u_{i,j,k}^p \quad (37-2)$$

که در این رابطه $R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta)$ توابع پایه نریز می‌باشند که در رابطه (۲-۱۵) تعریف آن آمده است. متغیرهای کنترلی مربوط به زیر دامنه p در مسئله می‌باشند که تعداد آن‌ها عبارتند از $(n_1+1) \times (n_2+1) \times (n_3+1)$. با توجه به خاصیت بازه تأثیر توابع درونیایی، روابط فوق را می‌توان برای $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ و $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1}]$ و $\zeta \in [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ به صورت زیر ساده نمود:

$$\bar{u}^{i,j,k} = \begin{Bmatrix} u_x^{i,j,k} \\ u_y^{i,j,k} \\ u_z^{i,j,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{e=i-p_1}^i \sum_{f=j-p_2}^j \sum_{g=k-p_3}^k R_{e,f,g}(\xi, \eta, \zeta) P_{u_{x e,f,g}} \\ \sum_{e=i-p_1}^i \sum_{f=j-p_2}^j \sum_{g=k-p_3}^k R_{e,f,g}(\xi, \eta, \zeta) P_{u_{y e,f,g}} \\ \sum_{e=i-p_1}^i \sum_{f=j-p_2}^j \sum_{g=k-p_3}^k R_{e,f,g}(\xi, \eta, \zeta) P_{u_{z e,f,g}} \end{Bmatrix} \quad (38-2)$$

$$= \bar{N} \cdot \bar{P}$$

رابطه تنش-کرنش و تعریف کرنش‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma = C\varepsilon \quad (39 - 2)$$

که در این رابطه C ماتریس الاستیسیته است و در مسائل سه بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1-2\nu/2 & 0 & 0 \\ & & & & 1-2\nu/2 & 0 \\ & & & & & 1-2\nu/2 \end{bmatrix} \quad (40 - 2)$$

sym.

از روابط تنش- کرنش می توان نتیجه گرفت که:

$$\varepsilon = D\bar{u} = B\bar{P}, \quad B = D\bar{N} \quad (41 - 2)$$

در ادامه می توان مثل فرمولبندی اجزای محدود در مسائل سه بعدی با استفاده از رابطه کار مجازی، ماتریس ضرایب را به دست آورد. برای یک زیر دامنه فرضی V^p رابطه کار مجازی به صورت زیر است:

$$\int_{V^p} \delta\varepsilon^T \sigma dV - \int_{V^p} \delta\varepsilon^T \sigma dV - \int_{V^p} \delta\varepsilon^T \sigma dV = 0 \quad (42 - 2)$$

که در این رابطه t و b به ترتیب نیروهای سطحی و حجمی می باشند. در ادامه با استفاده از رابطه کرنش- تغییر مکان (۲-۴۱) تغییرات کرنش ها به صورت زیر بیان می شود:

$$\delta\varepsilon = B\delta\bar{P} \quad (43 - 2)$$

اکنون با جایگزینی رابطه فوق در قسمت اول رابطه کار مجازی و با به کارگیری $\delta u = \bar{N} \delta\bar{P}$ برای بقیه قسمت های این رابطه و حذف ضرایب $\delta\bar{P}$ به دلیل غیر صفر بودن آنها در رابطه کار مجازی ماتریس ضرایب K و ماتریس نیروهای F به صورت زیر به دست می آید:

$$K = \int_{\Omega^p} B^T C B d\Omega \quad (44 - 2)$$

$$F = \int_{\Omega^p} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma^p} N^T t d\Gamma \quad (45 - 2)$$

بنابراین مقادیر متغیرهای کنترلی را می‌توان از حل دستگاه معادلات زیر محاسبه نمود:

$$K\bar{P} = F \quad (46 - 2)$$

پس از محاسبه‌ی متغیرهای کنترلی با جایگزینی آن در رابطه (۲-۳۷) مقادیر تابع مجهول به ازای مختصه‌های فضای پارامتری (ξ, η, ζ) تعیین می‌گردد. برای محاسبه‌ی تابع مجهول در یک نقطه از فضای فیزیکی (x, y, z) ابتدا می‌بایست مختصه‌های پارامتری متناظر این نقاط را پیدا کرده و سپس مقدار تابع مجهول را به دست آورد. این موضوع یکی از پیچیدگی‌های روش آیزوژئومتریک به حساب می‌آید.

شبیبه به روش اجزای محدود در این روش نیز از تقریب یکسان تابع مجهول و هندسه استفاده می‌شود. در این روش در واقع هندسه مدلسازی می‌شود و تابع مجهول با استفاده از توابع پایه تقریب زده می‌شود:

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \sum_{k=0}^{n_3} R_{i,j,k}(\xi, \eta, \zeta) X_{i,j,k} \quad (47 - 2)$$

که در این روابط $X_{i,j,k}$ مختصات نقاط کنترلی می‌باشد. همان‌طور که قبلاً در تقریب تابع مجهول نیز اشاره شد در روابط فوق همه پارامترها بر حسب ξ و η و ζ نوشته شده‌اند که لزوم نیاز به نگاشت در محاسبات همانند روش اجزای محدود را ایجاب خواهد کرد.

با استفاده از معادلات به دست آمده از این فصل امکان تحلیل مسائل الاستیسیته به صورت کامل، حتی در حالت سه‌بعدی نیز فراهم می‌شود که در فصل ششم از نتایج این فرمولبندی‌ها برای

بهینه‌سازی مسائل استفاده شده است.

۲-۷- مقایسه روش آیزوژئومتری با روش اجزای محدود

می‌توان تفاوت‌ها و مشابهت‌های دو روش اجزای محدود و آیزوژئومتری را به صورت خلاصه و

در جدول زیر بیان نمود:

جدول ۱-۲: مقایسه مشابَهت‌ها و تفاوت‌های روش اجزای محدود و روش آیزوژئومتری

روش اجزای محدود		روش آیزوژئومتری
نقاط گرهی		نقاط کنترلی
متغیرهای گرهی		متغیرهای کنترلی
شبکه		گره‌ها
توابع پایه نقاط و متغیرهای گرهی را درونیابی نمی‌کنند		توابع پایه نقاط و متغیرهای کنترلی را درونیابی می‌کنند
هندسه تقریبی		هندسه دقیق
توابع پایه چند جمله‌ای		توابع پایه نرَبز
پدیده گیبز		میرایی تغییرات
زیردامنه‌ها		وصله‌ها
		تاثیرگذاری در ناحیه محدود شده ^۱
		واحد شدن جمع مقادیر ^۲
		مفهوم آیزوپارامتریک ^۳
		کواریانس سلبی ^۴
		اقناع شدن تست‌های استاندارد ^۵

^۱ Compact support

^۲ Partition of unity

^۳ Isoparametric concept

^۴ Affine covariance

^۵ Patch tests satisfied

فصل سوم

بهبودسازی

۳-۱- مقدمه

بهینه‌سازی عبارت است از رسیدن به بهترین نتیجه، در مورد یک عملیات، در حالی که محدودیت‌های مشخصی برآورده شده باشد. کتاب‌های دوگلاس وایلد^۱ مجموعه‌ی جالبی در مورد ریشه کلمه بهینه و طراحی بهینه ارائه می‌دهد. بر اساس تعریف وایلد طراحی بهینه « بهترین طراحی قابل قبول بر اساس یک معیار کیفی شایستگی از پیش تعیین شده » می‌باشد [۲۵].

در مسائل سازه، پس از مرحله تحلیل و استخراج مقادیر مجهول تغییر مکان‌ها و تنش‌ها، از این نتایج برای طرح مهندسی سازه استفاده می‌شود. هدف از این طرح یافتن بهترین سازه به لحاظ عملکرد و اقتصادی بودن آن است. در ادبیات موضوع به این مرحله، بهینه‌سازی سازه‌ها اطلاق می‌شود [۲۴].

یکی از انواع مسائل بهینه‌سازی، بهینه‌سازی شکل می‌باشد که در این فصل به آن اشاره خواهد شد. به طور کلی فرآیند بهینه‌سازی شکل دارای سه مرحله شامل توصیف و اصلاح پارامتری هندسه (مدل طراحی)، تحلیل پاسخ سازه (مدل تحلیل) و الگوریتم بهینه‌سازی است. در مدل طراحی حوزه‌ی هندسی با استفاده از پارامترهایی (متغیرهای طراحی) که با تغییرات شکل در ارتباط هستند توصیف می‌شوند. در مدل تحلیل پاسخ سازه با استفاده از روش‌های عددی مانند اجزای محدود محاسبه می‌شود. در نهایت الگوریتم بهینه‌سازی کنترل فرآیند تکرار را برای نزدیک شدن به مقدار بهینه در دست می‌گیرد [۲۴].

پارامتری‌سازی هندسه نقش مهمی را در این رویه بازی می‌کند و توصیف مناسب مرز بسیار لازم است. این مسئله بیشتر در مسائل مربوط به کاهش تمرکز تنش در جایی که تغییر در شکل مرز بسیار مهم است، آشکار می‌شود. علاوه بر این انتخاب متغیرهای طراحی می‌تواند در موفقیت روند

¹Douglas Wilde

بهینه‌سازی مؤثر باشد و لازم است متناسب با مدل تحلیل انتخاب شود.

در این فصل ابتدا به تعاریف اولیه در بهینه‌سازی پرداخته می‌شود و سپس به بررسی انواع مسائل بهینه‌سازی پرداخته خواهد شد. سپس فرم استاندارد مسئله‌ی بهینه‌سازی معرفی می‌شود و در ادامه روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی بررسی می‌شود. پس از آن انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها بررسی شده و به بررسی بهینه‌سازی شکل سازه‌ها می‌پردازیم. در این بخش نحوه‌ی نمایش مرزها به طور کامل معرفی می‌شود.

۳-۲- تعاریف اولیه

فرمولبندی و شکل کلی مسائل بهینه‌سازی بر اساس چند پارامتر اصلی تعریف می‌شود که شامل متغیرهای طراحی، تابع هدف و توابع قید می‌باشد و در ادامه به توضیح هر یک می‌پردازیم.

۳-۲-۱- متغیرهای طراحی

متغیرهای طراحی پارامترهایی هستند که مقداری آزادی تغییر در آن‌ها داریم و با تغییر آن‌ها اصلاح لازم در سازه مورد نظر را ایجاد می‌کنیم، که این پارامترها معمولاً سطح مقطع اعضا و یا خصوصیات دیگری از مصالح و خواص هندسی اعضای سازه‌ای موجود هستند و به دو دسته‌ی گسسته و پیوسته تقسیم‌بندی می‌شوند. زمانی که متغیرهای طراحی با فاصله زیادی جدا از هم و گسسته هستند از شاخه‌ای از برنامه‌ریزی خطی به نام برنامه‌نویسی عدد صحیح^۱ استفاده می‌کنیم.

۳-۲-۲- تابع هدف

تابع هدف تابعی است که می‌توان آن را به عنوان معیاری جهت تعیین میزان مؤثر بودن طراحی

^۱Integer Programming

در نظر گرفت. جهت بهینه‌سازی سازه‌ها وزن، تغییر مکان، تنش، فرکانس لرزش، بارهای کمانش و هزینه و یا ترکیبی از این موارد را می‌توان به عنوان تابع هدف در نظر گرفت. وقتی که چند تابع هدف داریم با توجه به پیچیده بودن مسئله سعی می‌کنیم که تابع هدف را به یک تابع کاهش دهیم که این عمل را یا با ترکیب کردن توابع هدف انجام می‌دهیم و یا یک تابع هدف را که مهم‌تر است انتخاب می‌کنیم. زمانی که انتخاب بین توابع هدف مشکل باشد از روشی به نام بهینه‌سازی ادج-ورث-پارتو^۱ استفاده می‌کنیم که به مسائل دارای توابع هدف چندگانه می‌پردازد. یک بردار متغیر طراحی (x^*) را بهینه‌ی ادج-ورث-پارتو^۲ گوئیم هرگاه به ازای هر x دیگر مقادیر همهی توابع هدف‌ها، در مقایسه با مقدار آن‌ها به ازای x^* ، یکسان باشد و یا حداقل یکی از آن‌ها بدتر شود.

۳-۲-۳ - قیدها

حدودی که برای متغیرهای طراحی وجود دارد و نمی‌توانند از آن‌ها تجاوز کنند را قیدهای طراحی گویند، که به دو دسته‌ی قیدهای مساوی و قیدهای نامساوی تقسیم می‌شوند. یک روش برای تبدیل قیدهای مساوی به نامساوی در روش‌های برنامه‌ریزی غیرخطی که فقط با قیدهای نامساوی سر و کار دارند تبدیل قید مساوی به دو قید نامساوی است:

$$h(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases} \quad (1-3)$$

۳-۳- فرم استاندارد مسئله‌ی بهینه‌سازی

فرم استاندارد مسئله بهینه‌سازی به شکل زیر می‌باشد:

¹Edgeworth-Pareto Optimization

²Optimal Edgeworth-Pareto

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ s. t. \quad g_i(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g \\ h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, n_e \end{cases} \quad (2-3)$$

زمانی که با تابع هدفی سر و کار داریم که قرار است ماکزیمم شود به راحتی جهت استانداردسازی می‌توانیم مینیمم کردن منفی آن را در نظر بگیریم و چنین مطلبی را در مورد قیدهای نامساوی نیز داریم.

یک مسئله‌ی بهینه‌سازی را خطی گوییم هرگاه هم تابع هدف و هم قیدها توابعی خطی از متغیرهای طراحی باشند و در این مورد از شاخه‌ای از برنامه‌ریزی ریاضی به نام برنامه‌ریزی خطی^۱ استفاده می‌کنیم. مسئله‌ی بهینه‌سازی را غیرخطی گوییم هرگاه یا تابع هدف یا قیدها توابعی غیرخطی از متغیرهای طراحی باشند.

یکی از مسائل اصلی در بهینه‌سازی تعیین قیدهای فعال است، زیرا اگر بخواهیم تمام قیدها را در نظر بگیریم هزینه‌ی محاسبات بسیار زیاد خواهد شد.

اگرچه روش‌های زیادی برای بهینه‌سازی وجود دارد ولی اکثر آن‌ها بر اساس چهار مرحله ساخته شده‌اند. مرحله‌ی اول انتخاب قیدهای فعال است. برخی روش‌ها به دنبال مسیری مماس بر مرزهای قیدهای فعال می‌گردند^۲ و برخی به دنبال دور شدن از مرزهای قیدها هستند^۳. مرحله‌ی سوم این است که تعیین کنیم چه مقدار بر روی مسیر پیدا شده جلو برویم، که این عمل با روشی موسوم به جستجوی خط یک بعدی^۴ انجام می‌شود. مرحله‌ی آخر، مرحله‌ی همگرایی است و این که تعیین کنیم آیا حرکت جدیدی نیاز هست یا خیر.

^۱Linear Programming

^۲Gradient Projection Methods

^۳Interior Penalty Function Methods or Feasible Direction Method

^۴One Dimensional Line Search

۳-۴- انواع روش‌های بهینه‌سازی

به طور کلی می‌توان انواع روش‌های بهینه‌سازی را به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم نمود. برنامه‌ریزی خطی به حل مسائل خطی می‌پردازد، و البته درصد کمی از مسائل فیزیکی هستند که این خاصیت را داشته باشند. بنابراین پاره‌ای از روش‌ها به تقریب خطی مسائل غیرخطی می‌پردازند و از آن جمله می‌توان به روش^۱ SLP اشاره کرد، که در بخش ۳-۴-۸ شرح داده خواهد شد. حل مسائل خطی به سادگی با روش‌هایی همچون سیمپلکس^۲ قابل انجام است. بنابراین می‌توان مسائل غیرخطی زیادی را با این روش حل کرد.

دسته‌ی دیگری از روش‌ها وجود دارند که به حل مسائل محدب می‌پردازند. اگرچه بسیاری از مسائل بهینه‌سازی غیر محدب هستند، اما می‌توان با روش‌هایی همچون SQP^۳ که در بخش ۳-۴-۹ شرح داده خواهد شد، این مسائل را تقریب زده و به مسائل محدب تبدیل کرد.

۳-۴-۱- تحدب

مجموعه‌ی $S \subset R^n$ را محدب گوییم اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ و هر $\lambda \in (0,1)$ داشته

باشیم:

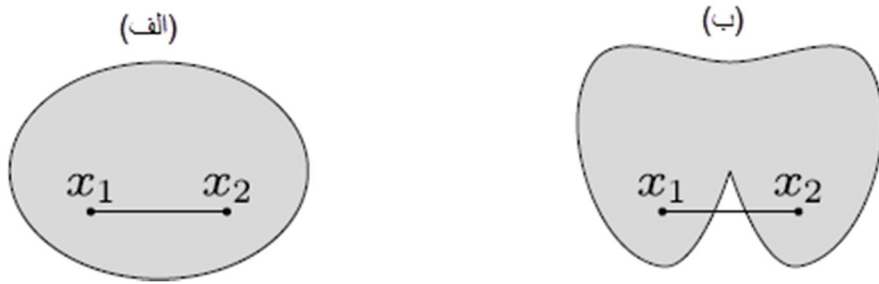
$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S \quad (3-3)$$

به عبارت دیگر یک مجموعه را محدب گوییم هرگاه همه‌ی نقاط روی خطی که دو نقطه‌ی موجود در مجموعه را به هم وصل می‌کند، درون مجموعه باشند.

^۱Sequential Linear Programming

^۲Simplex

^۳Sequential Quadratic Programming



شکل ۱-۳: (الف) مجموعه‌ی محدب (ب) مجموعه‌ی غیر محدب

۳-۴-۲- تابع محدب

تابع $f: S \rightarrow R$ (روی مجموعه‌ی محدب $S \subset R^n$) را محدب گوییم اگر به ازای هر

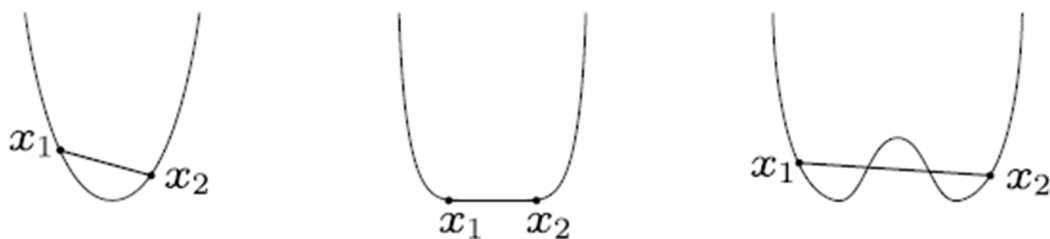
$x_1, x_2 \in S$ که $x_1 \neq x_2$ و $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (4-3)$$

به عبارت دیگر نمودار تابع محدب f یا بر روی خط اتصال دو نقطه‌ی روی گراف قرار دارد یا زیر آن

قرار می‌گیرد. اگر علامت کوچکتر، مساوی به علامت کوچکتر تبدیل شود تابع f را محدب اکید^۱ می-

گوییم. اگر $-f$ محدب باشد، تابع f را مقعر^۲ می‌گوییم.



شکل ۲-۳: تابع محدب اکید (چپ)، تابع محدب (وسط)، تابع غیر محدب (راست)

¹Strictly Convex

²Concave

۳-۴-۳ - مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب و نتایج حاصل از آن

- اگر تابع هدف و تمام توابع قید محدب باشند، مسئله‌ی بهینه‌سازی را محدب گویند.
- اگر مسئله محدب باشد، مینیمم محلی برای تابع، مینیمم مطلق نیز هست.
 - وقتی که محدوده‌ی شدنی مسئله، بسته (مرزبندی شده یا کراندار) باشد همواره یک حل برای آن وجود دارد.
 - اگر تابع هدف محدب اکید و توابع قید محدب باشند، حداکثر یک جواب وجود دارد.
- بنابراین اگر محدوده‌ی شدنی مسئله، کراندار باشد تنها و تنها یک جواب وجود دارد. در نتیجه اگر در این حالت یک مینیمم محلی را به دست آوریم، مینیمم مطلق را نیز به دست آورده‌ایم.

۳-۴-۴ - روش تشخیص تحدب و تقعر

- برای تشخیص یک تابع محدب و یا مقعر می‌توانیم از گرادیان یا ماتریس هسین^۱ استفاده کنیم.
- قضیه ۳-۱: اگر مجموعه‌ی S محدب و تابع f مشتق‌پذیر و پیوسته باشد، f محدب (اکید) است اگر و تنها اگر ∇f یکنوا (اکید) باشد.
- تابع g را یکنوا گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ داشته باشیم:

$$(x_2 - x_1)^T (g(x_2) - g(x_1)) \geq 0 \quad (5-3)$$

- قضیه ۳-۲: برای تابع $f: S \rightarrow R$ که S محدب بوده و f دوبار مشتق‌پذیر و پیوسته باشد داریم:

^۱Hessian

الف- f محدب است، اگر و تنها اگر هسین $\nabla^2 f$ مثبت نیمه‌قطعی باشد.

ب- f محدب اکید است، اگر $\nabla^2 f$ مثبت باشد.

- ماتریس $A \in R^{n \times n}$ را مثبت نیمه‌قطعی گوئیم، اگر $y^T A y \geq 0$

- ماتریس $A \in R^{n \times n}$ را مثبت قطعی گوئیم، اگر $y^T A y > 0$

اما چون چک کردن این تعاریف کار سختی است می‌توانیم از معیار سیلوستر^۱ استفاده کنیم.

۳-۴-۵- معیار سیلوستر

ماتریس متقارن $A \in R^{n \times n}$ را مثبت قطعی گوئیم، اگر و تنها اگر درمینان تمام زیر ماتریس-

های $k \times k$ قسمت چپ و بالای ماتریس A به ازای هر $k=1, \dots, n$ مثبت باشند.

۳-۴-۶- شرایط کاروش-کان-تاکر^۲ (KKT)

حال که تحدب را به طور کامل شرح دادیم، دوباره به این موضوع بازمی‌گردیم که چگونه می-

توان یک مینیمم محلی را، که البته در اینجا مینیمم کلی نیز هست، تشخیص داد. برای این موضوع

لازم است ابتدا تابع لاگرانژ را تعریف کنیم:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = g_0(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i(x) \quad (6-3)$$

که λ_i ها را ضرایب لاگرانژ می‌نامند.

با این تعریف شرایط کاروش-کان-تاکر به شکل زیر تعریف می‌شوند:

^۱Sylvester's Criterion

^۲Karush-Kuhn-Tucker

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} \leq 0, x_j = x_j^{max} \text{ اگر} \quad (7-3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0, x_j^{min} < x_j < x_j^{max} \text{ اگر} \quad (8-3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} \geq 0, x_j = x_j^{min} \text{ اگر} \quad (9-3)$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0 \quad (10-3)$$

$$g_i(x) \leq 0 \quad (11-3)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (12-3)$$

مشتق جزئی \mathcal{L} نسبت به متغیرهای طراحی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_0(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \quad (13-3)$$

هر نقطه‌ای که شرایط (۷-۳) تا (۱۲-۳) را ارضا کند، یک نقطه‌ی کاروش-کان-تاکر (KKT) نامیده می‌شود. برای مسائل غیرمحدب شرایط کاروش-کان-تاکر لازمند ولی کافی نیستند، به عبارتی نقاط بهینه‌ی موضعی همواره در بین نقاط KKT یافت می‌شوند، اما ممکن است نقاط کاروش-کان-تاکری وجود داشته باشند که نقطه‌ی بهینه‌ی موضعی نباشند. برای مسائل محدب نقطه‌ی کاروش-کان-تاکر همیشه‌ی یک نقطه‌ی بهینه است.

قضیه ۳-۳: فرض کنید P یک مسئله‌ی محدب باشد، و (x^*, λ^*) یک نقطه‌ی کاروش-کان-تاکر برای P باشد. در این صورت x^* یک نقطه‌ی مینیمم محلی (و البته مطلق) برای P می‌باشد.

۳-۴-۷- دوگانگی لاگرانژ^۱

روش دیگری که برای حل مسائل محدب می‌توانیم به کار ببریم و از حل معادلات غیرخطی کاروش-کان-تاکر کمی ساده‌تر است، روش دوگانگی لاگرانژ است. اگر مسئله بهینه‌سازی را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$(P) \begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{s. t. } g_i(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g \\ 0 \quad x \in X \end{cases} \quad (14-3)$$

می‌توان ثابت کرد که این مسئله معادل مسئله مینیمم-ماکزیمم زیر است:

$$(P_L) \min_{x \in X} \max_{\lambda \geq 0} \{g_0(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i(x)\} \quad (15-3)$$

به این ترتیب ابتدا لاگرانژ (P) بر حسب $\lambda \geq 0$ نسبت به یک x ثابت ماکزیمم می‌شود، سپس نتیجه‌ی حاصل از آن بر حسب $x \in X$ مینیمم می‌شود. این مسئله در حقیقت معادل همان مسئله اولیه یعنی (P) است. اما حال اگر جای مینیمم و ماکزیمم را عوض کنیم به مسئله دوگانگی لاگرانژ می‌رسیم، که اگر با روش‌هایی همچون MMA که در قسمت ۳-۴-۱۰ توضیح داده خواهد شد تابع هدف و قیدها را تقریب بزنییم، حل این مسئله دوگانگی لاگرانژ برای حل مسئله کافی خواهد بود. شکل مسئله دوگانگی لاگرانژ به صورت زیر می‌باشد:

$$(D) \begin{cases} \max_{\lambda} \varphi(\lambda) \\ \text{s. t. } \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (16-3)$$

که تابع هدف دوگانه φ به شکل زیر تعریف می‌شود:

^۱Lagrangian Duality

$$\varphi(\lambda) = \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \lambda) \quad (17-3)$$

ویژگی اصلی روش دوگانگی لاگرانژ این است که قیدها در آن بسیار ساده هستند، در حالی که در مسئله‌ی اصلی ممکن است قیدها بسیار پیچیده باشند. سادگی این روش علاوه بر قیدهای ساده آن به دلیل مقعر بودن φ نیز می‌باشد.

۳-۴-۱- تقریب برنامه‌ریزی خطی ترتیبی (SLP)

در برخی از مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها تابع هدف و همه‌ی قیدها به عنوان توابعی صریح از متغیرهای طراحی نوشته می‌شوند اما در اکثر مسائل یافتن چنین توابع صریحی غیرممکن است. برای حل این مشکل لازم است مسئله‌ی اصلی را به مجموعه‌ای از زیر مسئله‌های صریح که تقریبی از مسئله‌ی اصلی هستند تبدیل کنیم و به جای مسئله‌ی اصلی این زیر مسئله‌ها را حل کنیم. در ادامه دو مورد از این تقریب‌ها را، که تقریب‌هایی محدب هستند و کاربرد زیادی در حل مسائل بهینه‌سازی شکل دارند معرفی می‌کنیم.

در SLP تابع هدف و توابع قید همگی در متغیر طراحی x^k به کمک دو جمله‌ی اول بسط تیلور تقریب زده می‌شوند و به توابعی خطی تبدیل می‌شوند. این عمل مسئله را به شکل زیر تقریب می‌زند:

$$(SLP) = \begin{cases} \min_x g_0(x^k) + \nabla g_0(x^k)^T (x - x^k) \\ s. t. \quad g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T (x - x^k) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ -l_j^k \leq x_j - x_j^k \leq u_j^k, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (18-3)$$

که در آن u_j^k و l_j^k حدود جابجایی هستند و به این دلیل به کار می‌روند که خطی سازی انجام شده

فقط در نزدیکی طراحی موجود معتبر است. این حدود در طی روند تکرار مسئله توسط کاربر اصلاح می‌شوند. هنگامی که $g_i(x^k)$ و $\nabla g_i(x^k)$ محاسبه شدند تمام عبارت‌ها به عنوان توابع صریح از x مشخص شده‌اند، بنابراین SLP در حقیقت تابعی صریح از مسئله‌ی بهینه‌سازی است.

از آنجاییکه تابع هدف و تمام قیدها توابع نسبی از x هستند و به عبارتی همه‌ی آن‌ها را می‌توان به شکل $a^T x + b$ که در آن a و b ثابت هستند نوشت، نتیجه می‌گیریم که این توابع محدب هستند. در نتیجه SLP یک مسئله‌ی محدب است. با توجه به اینکه SLP یک تقریب خطی است مسئله‌ی به دست آمده را می‌توان به کمک روش‌هایی همچون الگوریتم سیمپلکس حل کرد.

۳-۴-۹ - برنامه‌ریزی درجه دوم ترتیبی^۱ (SQP)

با اضافه کردن عبارت درجه دوی بسط تیلور به تابع هدف در SLP به تقریب برنامه‌ریزی درجه

دوم ترتیبی SQP می‌رسیم:

$$(SQP) = \begin{cases} \min_x g_0(x^k) + \nabla g_0(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^T H(x^k) (x - x^k) \\ \text{s. t. } g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T (x - x^k) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ x \in X \end{cases} \quad (19-3)$$

که در آن $H(x^k)$ نشان‌دهنده تقریب مرتبه اول و مثبت نیمه‌قطعی هسین تابع g_0 در x^k است. این تقریب منجر به تابع هدف محدب می‌شود و بنابراین SQP یک مسئله‌ی محدب می‌باشد. ما از هسین واقعی در این تقریب استفاده نمی‌کنیم زیرا می‌خواهیم این تقریب یک تقریب مرتبه اول باشد. همچنین در این تقریب نیازی به حدود جابجایی نمی‌باشد زیرا SQP نسبت به SLP تقریب بهتری از مسئله می‌زند.

^۱Sequential Quadratic Programming

۳-۴-۱۰- روش مجانب‌های متحرک^۱ (MMA)

روش مجانب‌های متحرک در سال ۱۹۸۷ توسط کریستر سونبرگ^۲ ارائه شد. تقریب MMA تقریبی محدب، صریح و جدایی‌پذیر از مسئله به دست می‌دهد که در نتیجه با روش دوگانگی لاگرانژ به سادگی قابل حل است. این روش، روشی محافظه‌کارانه است، که در آن درجه‌ی محافظه‌کاری را می‌توان کنترل کرد. MMA متغیرهای فرضی رابط زیر را به کار می‌برد:

$$y_j(x_j) = \frac{1}{x_j - L_j} \text{ یا } y_j(x_j) = \frac{1}{U_j - x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (20-3)$$

که L_j و U_j مجانب‌های متحرک هستند که در طول روند تکرار مسئله تغییر می‌کنند اما همواره باید شرط زیر را دارا باشند:

$$L_j^k < x_j^k < U_j^k \quad (21-3)$$

تقریب MMA برای تابع g_i در متغیر طراحی x^k به شکل زیر به دست می‌آید:

$$g_i^{M,k}(x) = r_i^k + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j} + \frac{q_{ij}^k}{x_j - L_j^k} \right) \quad (22-3)$$

که در آن:

$$p_{ij}^k = \begin{cases} (U_j^k - x_j^k)^2 \frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} & \text{if } \frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23-3)$$

^۱Method of Moving Asymptotes

^۲Krister Svanberg

$$q_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} \geq 0 \\ -(x_j^k - L_j^k)^2 \frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24-3)$$

$$r_i^k = g_i(x^k) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j^k} + \frac{q_{ij}^k}{x_j^k - L_j^k} \right) \quad (25-3)$$

بنابراین اگر p_{ij}^k صفر نباشد q_{ij}^k صفر است و برعکس. مشتقات اول و دوم $g_i^{M,k}$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial g_i^{M,k}(x)}{\partial x_j} = \frac{p_{ij}^k}{(U_j^k - x_j)^2} - \frac{q_{ij}^k}{(x_j - L_j^k)^2} \quad (26-3)$$

$$\frac{\partial^2 g_i^{M,k}(x)}{\partial x_j^2} = \frac{2p_{ij}^k}{(U_j^k - x_j)^3} - \frac{2q_{ij}^k}{(x_j - L_j^k)^3} \quad (27-3)$$

$$\frac{\partial^2 g_i^{M,k}(x)}{\partial x_j \partial x_p} = 0, \quad \text{if } j \neq p \quad (28-3)$$

در این روش ما بر اساس شرایط موجود در مسئله درجه‌ی محافظه‌کاری را تغییر می‌دهیم، و ابزار کار ما برای این منظور L_j و U_j هستند. مثلاً در طی روند تکرار مسئله اگر $x_j^k - x_j^{(k-1)}$ و $x_j^{k-1} - x_j^{k-2}$ غیر هم علامت باشند نشان می‌دهد که جواب‌ها در نزدیکی نقطه‌ی بهینه در حال نوسان هستند و ما باید مقادیر محافظه‌کارانه‌تری را برای L_j^k و U_j^k انتخاب کنیم (یعنی باید مقادیر L_j^k و U_j^k به x_j^k نزدیکتر شوند). اما اگر $x_j^k - x_j^{k-1}$ و $x_j^{k-1} - x_j^{k-2}$ هم علامت باشند نشان می‌دهد که جواب‌ها از مقدار بهینه فاصله دارند و ما مقادیر غیرمحافظه‌کارانه‌تری برای L_j^k و U_j^k انتخاب می‌کنیم. اما اینکه چگونه L_j^k و U_j^k بر روی درجه محافظه‌کاری تأثیر می‌گذارند به این صورت است که هر چه این مقادیر به x_j^k نزدیکتر باشند تقریب حاصل محافظه‌کارانه‌تر است.

- تقریب MMA یک تقریب مرتبه‌ی اول است.
- $g_i^{M,k}$ یک تابع صریح و محدب است، زیرا هسین $\nabla^2 g_i^{M,k}$ مثبت نیمه‌قطعی است.
- این تقریب جدایی‌پذیر است در نتیجه می‌توان از روش دوگانگی لاگرانژ برای حل آن استفاده کرد.

تقریب MMA در تکرار k ام به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$(MMA) = \begin{cases} \min_x g_0^{M,k}(x) \\ s. t. \quad g_i^{M,k}(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ \alpha_j^k \leq x_j \leq \beta_j^k, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (29-3)$$

که در آن α_j^k و β_j^k حدود جابجایی هستند.

روش SLP حالت خاصی از MMA است، زیرا اگر $L_j^k \rightarrow -\infty$ و $U_j^k \rightarrow +\infty$ آنگاه SLP به دست می‌آید.

۳-۵- انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها

۳-۵-۱- بهینه‌سازی ابعادی

بهینه‌سازی ابعادی شاخه‌ای از بهینه‌سازی است که تا کنون تحقیقات زیادی بر روی آن انجام شده است و مسائلی مانند مسئله تعیین سطح مقطع بهینه اعضای یک خرپا یا قاب و یا تعیین ضخامت بهینه یک صفحه از جمله مسائلی هستند که به این روش حل می‌شوند. در این مسائل حوزه ثابت است و در طی بهینه‌سازی تغییر نمی‌کند. مسئله بهینه‌سازی ابعادی را می‌توان به عنوان کاربرد بهینه‌سازی در مرحله‌ی طراحی جزئیات در نظر گرفت.

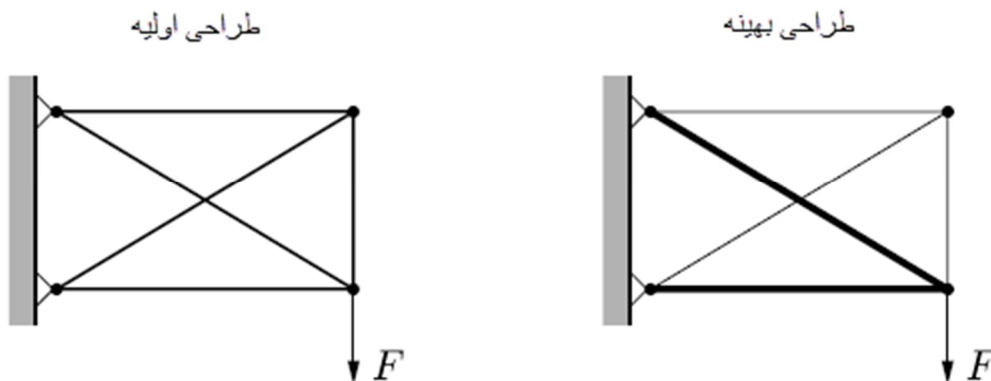
به عنوان مثال می‌توانیم تعیین سطح مقطع اعضای یک خرپای دوبعدی را در نظر بگیریم که

لازم است سختی آن حداکثر شود. برای اینکه بتوانیم سختی یک خرپا را حداکثر کنیم می‌توانیم به عنوان یک مقیاس انرژی کرنشی آن و یا $F^T u$ را حداقل کنیم، که u در آن جابجایی و F نیروی خارجی وارد بر گره می‌باشد. واضح است که اگر انرژی کرنشی کوچک باشد، سختی خرپا زیاد خواهد بود.

مسئله‌ی بهینه‌سازی را می‌توانیم به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,u} F^T u \\ \text{s. t. } K(x)u = F \\ \sum_{j=1}^n l_j x_j \leq V_{max} \\ x \in X = \{x \in R^n : x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = 1, \dots, n\} \end{array} \right. \quad (30-3)$$

که در آن n تعداد اعضای خرپا، l_j طول عضو j ، x_j سطح مقطع عضو j و V_{max} حداکثر حجم مجاز خرپاست. در شکل زیر طرح اولیه و نهایی برای یک خرپا تحت بهینه‌سازی ابعادی نشان داده شده است [۱۴].



شکل ۳-۳: یک مسئله بهینه‌سازی ابعادی که برای بهینه‌سازی سطح مقطع اعضای خرپا فرمولبندی شده است.

¹Compliance

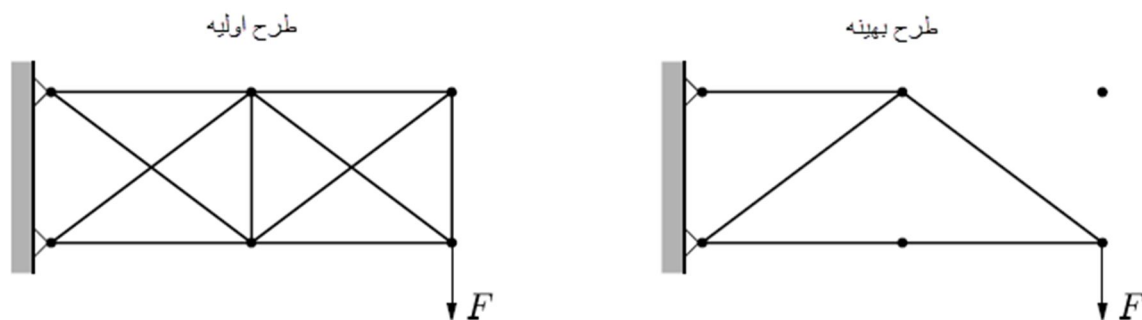
۳-۵-۲ - بهینه‌سازی توپولوژی

رویکرد دیگری که در مورد بهینه‌سازی وجود دارد بهینه‌سازی توپولوژی است. در تعریف دو شکل هندسی را دارای توپولوژی یکسان گویند اگر بتوان یکی را از انتقال پیوسته‌ی دیگری به دست آورد. انتقال پیوسته به معنی فشار دادن، کشیدن، پیچاندن، خم کردن و له کردن بدون جدا کردن یا چسباندن نقاط به یکدیگر می‌باشد. عموماً در بهینه‌سازی توپولوژی هدف تعیین مؤلفه‌هایی همچون تعداد و محل سوراخ‌ها بر روی سازه می‌باشد. مسئله پیدا کردن ترکیب بهینه اعضا و اتصالات یک سازه اسکلتی نیز در این دسته قرار می‌گیرد. به عنوان مثال برای یک خرپا اگر سطح مقطع اعضای خرپا را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر بگیریم و اجازه دهیم که این متغیرها مقدار صفر را بگیرند، یا به عبارتی به میله‌ها اجازه دهیم که از خرپا برداشته شوند، این مسئله را می‌توان به عنوان بهینه‌سازی توپولوژی در نظر گرفت. به این ترتیب با توجه به اینکه اتصال گره‌ها در حال تغییر است، می‌توانیم بگوییم که توپولوژی خرپا تغییر می‌کند. اگر به جای یک سازه گسسته، یک سازه‌ی پیوسته مانند یک صفحه‌ی دوبعدی را در نظر بگیریم، در صورتی که اجازه دهیم ضخامت صفحه مقدار صفر بگیرد آنگاه می‌توانیم بگوییم توپولوژی در حال تغییر است. اگر بخواهیم توپولوژی بهینه شود، آنگاه ضخامت باید تنها بتواند دو مقدار را بگیرد، یکی صفر و دیگری عدد ثابتی به عنوان حداکثر ضخامت صفحه. در حالت سه‌بعدی، وضعیت مشابه وقتی رخ می‌دهد که x متغیری با ماهیت چگالی باشد و تنها بتواند مقادیر صفر و یک را بگیرد. شکل (۳-۴) یک نمونه از بهینه‌سازی توپولوژی را نشان می‌دهد.

در حقیقت بهینه‌سازی شکل زیرمجموعه‌ای از بهینه‌سازی توپولوژی است، اما از آنجا که مسائل عملی مربوط به بهینه‌سازی شکل و توپولوژی، دارای تکنیک‌های متفاوتی هستند، این دو را به صورت جداگانه بررسی می‌کنند. وقتی در مورد حل معادلات دیفرانسیل صحبت می‌کنیم، می‌توانیم بگوییم بهینه‌سازی شکل مربوط به کنترل حوزه‌ی معادله است، در حالی که بهینه‌سازی ابعادی و توپولوژی

به کنترل پارامترهای آن مربوط می‌شوند.

مجموعه‌ی بهینه‌سازی ابعادی و شکل را بهینه‌سازی هندسی گویند [۱۵].



شکل ۳-۴: بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا [۱۴].

۳-۵-۲-۱- روش‌های معیار بهینگی

برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک می‌توان از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی استفاده نمود. این روش‌ها را می‌توان برای حل هر مسئله بهینه‌سازی از جمله بهینه‌یابی سازه‌ها به کار برد. زمانی که از این روش‌ها در بهینه‌سازی سازه‌ها استفاده می‌شود معمولاً به محاسباتی نظیر محاسبه تابع هدف، توابع قید و مشتقات آن‌ها نیاز است. از این رو زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات در روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی وابستگی زیادی به تعداد متغیرهای طراحی در مسئله دارد. بنابراین زمانی که تعداد متغیرهای طراحی زیاد است این روش‌ها بسیار زمان‌بر و پرهزینه می‌باشند.

در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها تعداد متغیرهای طراحی وابسته به تعداد المان‌های تقسیم‌کننده‌ی فضای طراحی می‌باشد. از آنجاییکه غالباً تعداد المان‌ها در یک مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک زیاد است، بنابراین استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها زمان‌بر و پرهزینه است. برای فائق آمدن بر این مشکل روش‌های معیار بهینگی پیشنهاد شده‌اند.

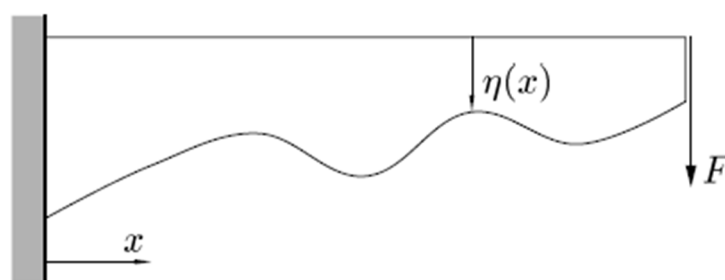
ایده‌ی روش‌های معیار بهینگی در سال ۱۹۰۴ توسط میشل [۱۶] معرفی شد و در سال‌های ۱۹۶۰ به بعد این روش‌ها در کنار روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی برای حل مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها توسعه یافتند. روش‌های معیار بهینگی بر خلاف روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی که به طور مستقیم تابع هدف را بهینه می‌کنند، به صورت غیر مستقیم برای اقلان مجموعه‌ای از معیارهای مرتبط با رفتار سازه تلاش می‌کنند. این معیارها یا به صورت درکی و یا با پایه و اساس ریاضی استخراج می‌شوند. روش‌های "طرح بر اساس تنش یکنواخت شده"^۱ و "طرح بر اساس مدهای خرابی همزمان"^۲ مثال‌هایی از روش‌های معیار بهینگی درکی می‌باشند. روش‌های معیار بهینگی که مبنای ریاضی دارند اغلب بر پایه شرایط بهینگی کان-تاکراستوار می‌باشند.

۳-۵-۳ - بهینه‌سازی شکل سازه‌ها

بهینه‌سازی شکل با توسعه تحقیقات بر روی مسئله‌ی یافتن مرزهای بهینه‌ی سازه به وجود آمد. به عنوان نمونه می‌توان به یافتن مرزهای یک سازه‌ی مدل شده با استفاده از فرضیات تنش صفحه‌ای یا یافتن محل اتصالات یک سازه‌ی اسکلتی و یا یافتن مقادیر بهینه پارامترهایی که سطح متوسط یک سازه‌ی پوسته‌ای را تعریف می‌کنند اشاره کرد. به این دسته از مسائل، مسائل بهینه‌سازی شکل می‌گویند. در این گونه مسائل شکل حوزه ثابت نیست ولی توپولوژی حوزه ثابت است. بهینه‌سازی شکل را می‌توان به عنوان کاربرد بهینه‌سازی در مرحله‌ی طراحی اولیه در نظر گرفت. در شکل (۳-۶) یک مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل دوبعدی نشان داده شده است.

^۱Fully Stressed Design Method

^۲Simultaneous Failure Mode Design



شکل ۳-۵: مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل با یافتن تابع $\eta(x)$ که شکل تیر را مشخص می‌کند [۱۴].

در دو دهه‌ی اولیه‌ی بهینه‌سازی عددی سازه‌ها، تمرکز بر روی متغیرهای طراحی به اصطلاح ابعادی بود. متغیرهایی از قبیل ضخامت صفحه و سطح مقطع میله از آن جمله هستند که تغییر در آن‌ها نیازی به تغییر در مدل اجزای محدودی ندارد. مسائل بهینه‌سازی که در آن‌ها پارامترهای ابعادی متغیر طراحی هستند ساده‌تر از مسائلی هستند که در آن‌ها شکل متغیر طراحی است و هندسه سازه را کنترل می‌کند و معمولاً نیاز به مدل اجزای محدودی دارند که در طول بهینه‌سازی تغییر می‌کند. اما با این وجود در مسائل زیادی بهینه‌سازی شکل بسیار مؤثرتر از بهینه‌سازی ابعادی است، به عنوان مثال در مسئله تمرکز تنش در مرزهای یک صفحه سوراخ‌دار، بهینه‌سازی ابعادی، ضخامت صفحه در اطراف سوراخ را تغییر می‌دهد در حالی که در بهینه‌سازی شکل منجر به تغییر در مرزهای شکل سوراخ می‌شود.

در مسائل بهینه‌سازی شکل با دو دسته مشکل مواجه هستیم: ۱- به دلیل تغییر مداوم مدل اجزای محدود مشکل است بتوانیم مطمئن شویم که صحت تحلیل اجزای محدود در طول روال طراحی در حد قابل قبول باقی می‌ماند. ۲- به دست آوردن مشتقات حساسیت مناسب بر حسب متغیرهای طراحی شکل گرانتر از حالتی است که آن‌ها را بر حسب متغیرهای ابعادی به دست آوریم.

دو دسته قید در شکل کلی فرمولبندی مسائل بهینه‌سازی شکل وجود دارند. یک دسته قیده‌های صریح هستند که به طور صریح و مستقیم بر حسب متغیرهای طراحی بیان می‌شوند و یک دسته قیده‌های ضمنی هستند که به طور ضمنی و غیر مستقیم بر حسب متغیرهای نوشته می‌-

شوند [۱۷].

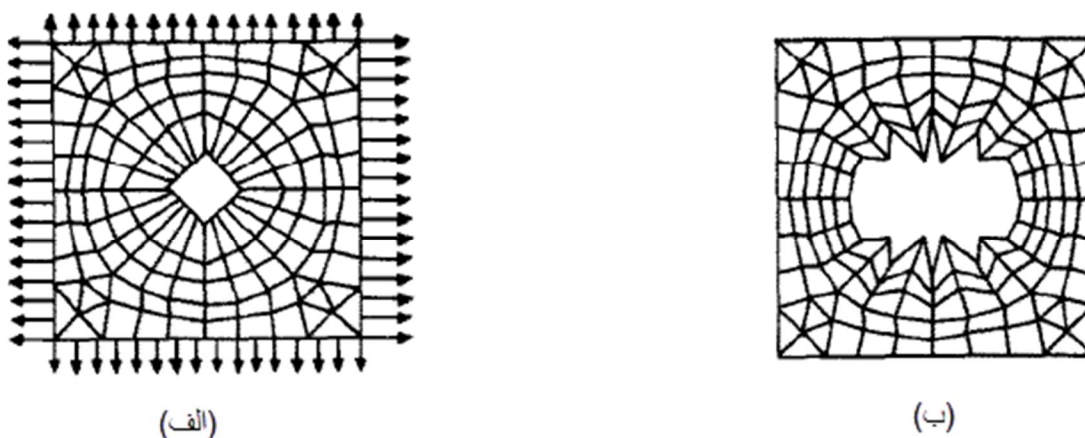
فرآیند بهینه‌سازی شکل شامل سه قسمت اصلی است: نمایش هندسی مسئله، تحلیل سازه و الگوریتم بهینه‌سازی. ابتدا باید نمایش هندسی مناسب برای شکل مرزها را انتخاب کنیم و مقادیر اولیه‌ای برای متغیرهای طراحی در نظر بگیریم، سپس یک مدل تحلیلی مناسب مانند اجزای محدود یا اجزای مرزی برای تحلیل سازه انتخاب می‌کنیم. یک روش تحلیل مناسب باید قادر باشد اطلاعات لازم را جهت مرحله‌ی بهینه‌سازی در مورد مشتقات ضمنی بدهد. به عنوان مثال یک الگوریتم معمولی بهینه‌سازی مرتبه اول به مقادیر توابع قید و حساسیت قیدها بر حسب هر متغیر طراحی نیاز دارد.

پس از انجام مرحله‌ی تحلیل الگوریتم بهینه‌سازی مقادیر جدیدی برای متغیرهای طراحی به ما می‌دهد. در نتیجه یک مدل طراحی جدید ساخته شده و به قسمت تحلیل برده می‌شود. از تحلیل مجدد مقادیر تابع و نتایج حساسیت قیده‌های ضمنی برای طراحی جدید حاصل می‌شود. اگر معیار لازم برای خاتمه محاسبات ارضا شده بود، محاسبات متوقف می‌شود. در غیر اینصورت مرحله‌ی بهینه‌سازی نقطه‌ی طراحی جدیدی به ما می‌دهد.

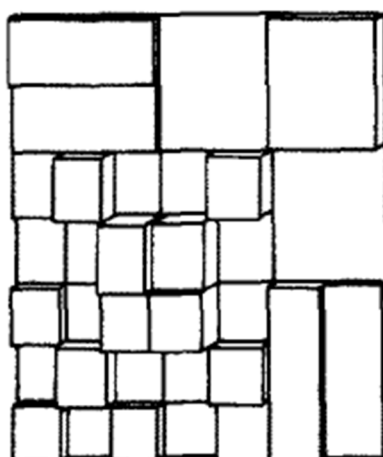
۳-۵-۱- انتخاب متغیرهای طراحی

در مسائل بهینه‌سازی شکل معمولاً تمرکز بر روی کاهش تنش در مرز با تغییر آن می‌باشد. اگر در انتخاب متغیرهای طراحی دقت نکنیم ممکن است مدل تحلیل در طول بهینه‌سازی خراب شود و به طرحی بیانجامد که مفید نیست. این اتفاق اغلب زمانی رخ می‌دهد که مختصات گره‌های مرزی مدل اجزای محدود به عنوان متغیر طراحی انتخاب کنیم (شکل ۳-۷). حالت مشابهی در بهینه‌سازی ابعادی یک صفحه رخ می‌دهد (شکل ۳-۸). راه حل در هر دو مورد این است که از انطباق یک به یک بین مدل تحلیل و متغیرهای طراحی خودداری کنیم و مطمئن شویم که تعداد المان کافی جهت

ارزیابی صحیح تنش وجود دارد [۱۷].



شکل ۳-۶: استفاده از گره‌های اجزای محدود به عنوان متغیرهای طراحی (الف) طرح اولیه (ب) طرح بهینه [۱۴].



شکل ۳-۷: استفاده از گره‌های اجزا محدود به عنوان متغیرهای طراحی در بهینه‌سازی ابعادی [۱۷].

استفاده از مختصات گرهی به عنوان متغیرهای طراحی به زودی متوقف شد زیرا تجربه نشان داد که با این کار نمی‌توان به مرز همواری دست پیدا کرد. به علاوه نمی‌توان انتظار داشت که این کار نتایج صحیحی برای تنش تولید کند.

۳-۵-۳- استفاده از چند جمله‌ای جهت نمایش مرزها

بیهاویکاتی و راماکریشنان [۱۸] از چند جمله‌ای‌ها جهت نشان دادن مرزهای شکل استفاده

کردند و ضرایب چندجمله‌ای را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفتند. رویکرد دیگر این بود که مرز را به صورت ترکیب خطی توابع شکل تعریف کنیم و ضرایب را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر بگیریم، از اینرو کریستنسن و مدسن [۱۹] مرز را با استفاده از ترکیب خطی توابع متعامد در نظر گرفتند و ضرایب توابع پایه را به عنوان پارامترهای طراحی در نظر گرفتند. محققین از چندجمله‌ای‌ها برای نمایش مرز استفاده کردند و ضرایب چندجمله‌ای را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفتند، البته این متغیرها به خوبی با خواص مکانیکی قابل ارتباط نبودند. اگر چه این مدل همواری لازم را فراهم می‌کرد اما وقتی مرتبه‌ی چندجمله‌ای بالا می‌رفت می‌توانست منجر به ایجاد مرزهای نوسانی شود. به علاوه چندجمله‌ای‌ها قادر به نمایش شکل‌های کلی نیستند و تنها می‌توانند خانواده‌ی منحنی‌های درجه دو، سه و غیره را نشان دهند. از نقطه نظر طراحی مشکل دیگر عدم کنترل محلی بر منحنی بود. تغییر در یکی از ضرایب چندجمله‌ای باعث تغییر در کل منحنی می‌شد [۲۰].

۳-۵-۳ - استفاده از اسپلاین‌ها جهت نمایش مرزها

استفاده از چندجمله‌ای‌های مرتبه بالا می‌تواند منجر به ایجاد شکل با مرز نوسانی شود. اسپلاین‌ها این مشکل را حذف کردند زیرا این توابع ترکیبی از چندجمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند که با هم ترکیب شده‌اند تا حداکثر همواری را در مرزها به وجود آورند.

تابع اسپلاین درجه سه که دارای دو مشتق پیوسته می‌باشد و حداقل میانگین انحنا را دارد یک انتخاب طبیعی برای تعریف مرز می‌باشد. یانگ و چوی نشان دادند که در حالتی که از توابع اسپلاین استفاده می‌کنیم حساسیت دارای دقت بیشتری نسبت به حالتی است که از فرم نمایش خطی تکه‌ای استفاده می‌کنیم. برایبنت و همکاران از توابع مخلوط ب-اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند. توابع مخلوط انعطاف‌پذیری بالایی جهت نمایش هندسه ایجاد کردند. با استفاده از فرمول‌های ب-اسپلاین نظم و قاعده مورد نیاز برای مرز به دست آمده و فرمولبندی

تحلیلی مشتقات حساسیت نیز ممکن شد.

۳-۵-۳-۴ - استفاده از نربز در روش آیزوژئومتریک

با وجود اینکه استفاده از اسپلاین‌ها برای مدل کردن مرز بخشی از مشکلات را حل کرده بود اما وجود دوگانگی در حل همچنان وجود داشت. در این روش، رویکرد نسبت به حل مسائل بهینه‌سازی شکل به کلی تغییر کرد و روش آیزوژئومتریک برای تحلیل مورد استفاده قرار گرفت. در این روش از توابع نربز هم برای مدل هندسی و هم برای تحلیل استفاده می‌شود و مختصات نقاط کنترلی به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه این روش موضوع اصلی این گزارش می‌باشد و در بخش قبل در مورد آن توضیح داده شده در این قسمت بیش از این در مورد آن توضیح نمی‌دهیم و کاربرد آن در بهینه‌سازی را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

در جدول (۳-۱) خلاصه‌ای از انواع مدل‌های ارائه شده برای حل مسائل بهینه‌سازی شکل آمده است.

جدول ۳-۱: خلاصه مدل‌های ارائه شده برای مسائل بهینه‌سازی شکل

سال ارائه	متغیرهای طراحی	روش تحلیل	مدل هندسی مرز	ارائه کنندگان مدل
۱۹۷۳	مختصات گره‌های مرزی	اجزا محدود	شبکه اجزا محدود	زینکویچ ^۱ و کمبل ^۲
۱۹۸۰	ضرایب چند جمله‌ای	اجزا محدود	توابع چند جمله- ای	بیهاویکاتی ^۳ و راماکریشنان ^۴
۱۹۸۳	مختصات نقاط کنترلی	اجزا محدود	توابع اسپلاین	برایبنت ^۵ و همکاران
۱۹۹۳	مختصات نقاط کنترلی	اجزا محدود	توابع نربز	اسکرم ^۶ و پیلکی ^۷
۲۰۰۸	مختصات نقاط کنترلی	آیزوژئومتریک	توابع نربز	وال ^۸ و همکاران

¹Zienkiewicz²Campbel³Bhavikatti⁴Ramakrishnan⁵Braibent⁶Schramm⁷Pilkey⁸Wall

فصل چهارم

تحلیل حساسیت

۴-۱- مقدمه

تحلیل حساسیت^۱ را می‌توان به این شکل تعریف کرد، که رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های مسئله را مطالعه می‌کند. به این وسیله می‌توان میزان تغییرات خروجی‌های مسئله را بر اساس تغییرات در ورودی‌های مختلف از نظر کمی و کیفی تعیین کرد. در حقیقت تحلیل حساسیت یک پیش‌نیاز اساسی برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی می‌باشد.

در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی مثل مسائل بهینه‌سازی تو در تو که در آن‌ها مجموعه‌ای از تقریب‌های مرتبه اول صریح را حل می‌کنیم و روش MMA نیز از این دست روش‌ها می‌باشد، نیاز داریم تا از تابع هدف و توابع قید بر حسب متغیرهای طراحی مشتق‌گیری نماییم و اصطلاحاً حساسیت تابع هدف و توابع قید را نسبت به متغیرهای طراحی به دست آوریم. اصولاً این گونه روش‌ها به دلیل انجام تحلیل حساسیت از سایر روش‌ها بسیار سودمندتر هستند و بسیار سریع‌تر پاسخ را برای ما به دست می‌دهند. زیرا با تعیین مشتقات حساسیت می‌توانیم بر حسب شدت اثر تغییرات یک متغیر بر روی تابع هدف و توابع قید، متغیری را انتخاب کرده و تغییر دهیم که تغییرات در آن، شدت بیشتری بر روی تابع هدف و توابع قید داشته باشد و در نتیجه خود را سریعتر به جواب نزدیک کنیم. از این رو در این پایان‌نامه روش MMA برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل انتخاب شده و تحلیل حساسیت به عنوان بخش مهمی از آن انجام شده است.

یک روش ساده برای محاسبه‌ی مشتق پاسخ نسبت متغیرهای طراحی روش تفاضل محدود است. برای تابع $u(x)$ تقریب تفاضل محدود پیشرو $\Delta u / \Delta x$ برای مشتق du/dx به صورت زیر محاسبه می‌شود:

^۱Sensitivity Analysis

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (1-4)$$

با توجه به این فرمول مشاهده می‌شود که محاسبه‌ی $\Delta u/\Delta x$ مستقل از محاسبه‌ی تابع است و این مطلب باعث می‌شود استفاده از روش تفاضل محدود ساده باشد. به‌علاوه این روش برای همه‌ی روش‌های تحلیل سازه‌ای (به‌عنوان مثال برای اجزای محدود یا اجزای مرزی) و همین‌طور انواع تحلیل (به‌عنوان مثال استاتیکی یا تحلیل مودی) قابل استفاده است زیرا به هیچ‌گونه دانش تحلیلی در مورد تابع نیاز ندارد. با این وجود اگر تعداد متغیرهای طراحی زیاد باشد روش تفاضل محدود از لحاظ محاسباتی روش گران‌تری است زیرا اگر بخواهیم مشتقات پاسخ سازه را نسبت به n متغیر طراحی به‌دست آوریم در روش تفاضل محدود پیشرو به n تحلیل اضافی نیاز داریم و در روش تفاضل محدود مرکزی نیز به $2n$ تحلیل اضافی. علاوه بر این رویکرد تفاضل محدود اغلب دارای مشکل دقت است. روش آنالیز حساسیت تحلیلی روش مؤثرتری است. دو رویکرد مختلف در این زمینه وجود دارد، یکی رویکرد مشتق‌گیری ضمنی و دیگری رویکرد تغییراتی. مشتق‌گیری ضمنی بر اساس فرمول‌بندی گسسته سیستم سازه‌ای است.

در نتیجه $\partial u/\partial x_i$ را می‌توان با محاسبه‌ی $\partial K/\partial x_i$ به دست آورد. $\partial K/\partial x_i$ را می‌توان به صورت تحلیلی نسبت به متغیرهای ابعادی همچون ضخامت، سطح مقطع و ممان اینرسی به‌دست آورد. اما محاسبه‌ی تحلیلی آن برای متغیرهای طراحی شکل بسیار سخت است، زیرا تغییر در متغیرهای طراحی شکل باعث می‌شود هندسه‌ی المان و در نتیجه کل ماتریس سختی k تغییر کند. در نتیجه $\partial K/\partial x_i$ به روش تفاضل محدود محاسبه می‌شود. به این روش، روش نیمه‌تحلیلی گفته می‌شود. اگرچه این روش حل معادله‌ی ماتریسی $Ku = f$ را حذف می‌کند، اما همچنان گران است. زیرا باید با هر تغییر در متغیرهای طراحی ماتریس سختی را دوباره از نو بسازیم. به‌علاوه هافکا و همکاران گزارش کردند که دقت روش نیمه-تحلیلی حتی از روش تفاضل محدود نیز کمتر است. مشکل دیگر با رویکرد مشتق‌گیری ضمنی دشواری استفاده از آن در برنامه‌های اجزا محدود با رویکرد

کلی است.

رویکرد تغییراتی بر اساس مشتق‌گیری از معادله حالت تغییراتی است. هافکا و همکاران رویکرد تغییراتی را بررسی کرده‌اند. اجرای این رویکرد با سختی کمتری همراه است، زیرا بیان تحلیلی برای حساسیت تنها به کمیت‌های حل مرزی بستگی دارد که معمولاً از برنامه‌های تحلیل در دسترس هستند. اشکال اولیه این است که این کمیت‌ها به سختی به صورت صحیح به دست می‌آیند.

۴-۲- روش‌های تعیین مشتقات حساسیت

به طور کلی سه روش برای تعیین مشتقات حساسیت وجود دارد:

۱- روش تفاضل محدود

۲- روش تحلیلی

۳- روش نیمه‌تحلیلی

یک معیار برای انتخاب روش، میزان دقت روش انتخابی است. مسلماً میزان دقت^۱ حساسیت می‌تواند بر حل مسئله بهینه‌سازی، تعداد حلقه‌های تکرار مسئله و میزان همگرایی آن تاثیر بگذارد. لازم به ذکر است که بین دقت و سازگاری^۲ تفاوت وجود دارد. اصولاً دقت در اینجا اینگونه تعریف می‌شود، که تفاوت بین مشتقاتی که ما به دست می‌آوریم و مشتقات حاصل از حل دقیق بر پایه‌ی معادلات پیوسته است. همچنین سازگاری را به‌عنوان تفاوت بین مشتقاتی که ما به دست می‌آوریم و مشتقات حاصل از مدل عددی، تعریف می‌کنیم.

دو عامل دیگر در انتخاب روش مناسب برای تحلیل حساسیت مؤثرند، که یکی میزان هزینه‌ی

محاسبات و دیگری سختی اجرای آن است [۱۷].

^۱Accuracy

^۲Consistency

شکل کلی مسئله‌ی بهینه‌سازی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \min \hat{g}_0(x) = g_0(x, \bar{P}(x)) \\ \text{s.t. } \hat{g}_i(x, \bar{P}(x)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \end{cases} \quad (2-4)$$

$$x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = 1, 2, \dots, n\}$$

که در آن \bar{P} تابعی ضمنی از x است، که از معادلات تعادل $K(x)\bar{P}(x) = F(x)$ به دست می‌آید.

حال با این تعریف به توضیح هر یک از سه روش می‌پردازیم:

۴-۲-۱- روش عددی (تفاضل محدود)

در روش عددی برای تعیین مشتقات حساسیت از تفاضل محدود استفاده می‌شود. برای این

منظور می‌توان از هر یک از دو روش تفاضل پیشرو و تفاضل مرکزی استفاده کرد. تفاضل پیشرو را

می‌توان از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} \approx D_f = \frac{\hat{g}_i(x^k + h e_j) - \hat{g}_i(x^k)}{h} \quad (3-4)$$

مشتقات ناشی از تفاضل محدود با گام‌های بزرگ، دارای خطاهای ناشی از کوتاه‌سازی^۱ هستند.

به عبارت دیگر یکی از دلایل خطاهای کوتاه‌سازی صرفنظر کردن از برخی عبارت‌ها در بسط سری

تیلور است. با کاهش مقدار گام‌ها می‌توان این خطا را کاهش داد. اما از سوی دیگر اگر گام‌ها را

کوچک انتخاب کنیم خطاهای شرطی^۲ زیاد خواهند شد. خطای شرطی در حقیقت تفاضل بین ارزیابی

عددی تابع و مقدار دقیق آن است. بزرگ‌ترین منبع این نوع خطا، خطاهای محاسباتی مانند خطاهای

ناشی از گرد کردن و خطاهای ناشی از شرایط ضعیف در مسئله هستند. در نتیجه انتخاب مقدار

^۱Truncation Errors

^۲Condition Errors

مناسب برای گام‌های مسئله از نکات مهم در حل به روش تفاضل محدود است.

جهت استفاده از این روش، پس از اینکه مقدار تابع \hat{g}_i به ازای x^k به دست آمد، لازم است تا مقدار x^k را به اندازه‌ی h افزایش دهیم و دوباره مقدار تابع را به ازای آن محاسبه کنیم. در نتیجه اگر تعداد n متغیر طراحی داشته باشیم، لازم است مقدار توابع موجود (شامل تابع هدف و توابع قید) را به تعداد $2n$ مرتبه انجام دهیم و این مسئله حجم محاسبات را بسیار بالا خواهد برد.

تفاضل مرکزی را نیز می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} \approx \frac{\hat{g}_i(x^k + he_j) - \hat{g}_i(x^k - he_j)}{2h} \quad (4-4)$$

این تقریب، تقریبی دقیق‌تر از تفاضل پیشرو به دست می‌دهد. اما جهت محاسبه‌ی آن لازم است n بار تحلیل اضافی انجام شود، که این مطلب هزینه‌ی محاسبات را بالا خواهد برد.

در برابر مشکلاتی که برای روش عددی تعیین مشتقات حساسیت، با تقریب تفاضل محدود ذکر شد، شاید تنها ویژگی که بتوان ذکر کرد، ساده بودن اجرای محاسبات با این روش باشد.

۴-۲-۲- روش تحلیلی

در روش تحلیلی از تعریف مشتق و محاسبه‌ی آن جهت تعیین حساسیت‌ها استفاده می‌کنیم. به این ترتیب لازم است ابتدا با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق، $\partial \hat{g}_i(x^k) / \partial x_j$ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i(x^k, \bar{P}(x^k))}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i(x^k, \bar{P}(x^k))}{\partial \bar{P}} \frac{\partial \bar{P}(x^k)}{\partial x_j} \quad (5-4)$$

در این بخش دو روش تحلیلی متفاوت بررسی خواهد شد. یکی روش مستقیم و دیگری روش الحاقی.

۴-۲-۱- روش تحلیلی مستقیم^۱

در روش مستقیم $\partial \bar{P}(x^k) / \partial x_j$ با مشتق‌گیری از معادلات تعادل به دست می‌آید:

$$\frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{P}(x^k) + K(x^k) \frac{\partial \bar{P}(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} \quad (6-4)$$

که می‌توان این فرمول را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$K(x^k) \frac{\partial \bar{P}(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{P}(x^k) \quad (7-4)$$

به عبارت سمت راست معادله‌ی فوق شبه بار^۲ گفته می‌شود. به عنوان مثال اگر تنش به عنوان قید در نظر گرفته شود:

$$\hat{g}_i(x) = g_i(x, \bar{P}(x)) = \sigma = C \varepsilon \quad (8-4)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\partial g_i(x^k, \bar{P}(x^k))}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} = C \left(\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial x_j} \right) \quad (9-4)$$

می‌دانیم $\varepsilon = B \bar{P}$ در نتیجه داریم:

^۱Direct Analytical Method

^۲Pseudo Load

$$\frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} = C \left(\frac{\partial(B(x^k)\bar{P}(x^k))}{x_j} \right) = C \left(\frac{\partial B(x^k)}{\partial x_j} \bar{P}(x^k) + B(x^k) \frac{\partial \bar{P}(x^k)}{\partial x_j} \right) \quad (10-4)$$

با حل معادله (۷-۴) که مشابه حل معادله تعادل $K\bar{P} = F$ می‌باشد، و قرار دادن آن در معادله (۴-۱) مشتق قید نسبت به متغیر طراحی به دست می‌آید که برای استفاده از روش MMA لازم است. در برنامه نوشته شده در این پایان‌نامه از این روش، که اصطلاحاً روش مستقیم نام دارد، برای محاسبه مشتق قید استفاده شده است که الگوریتم برنامه در ادامه آمده است.

۴-۲-۲- روش تحلیلی الحاقی^۱

می‌دانیم:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial P} K(x^k)^{-1} \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{P}(x^k) \right) \quad (13-4)$$

اگر تابع λ_i را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\lambda_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial P} K(x^k)^{-1} \right)^T = K(x^k)^{-1} \left(\frac{\partial g_i}{\partial P} \right)^T \quad (14-4)$$

در این روش ابتدا به حل معادله‌ی زیر برای تعیین λ_i می‌پردازیم:

$$K(x^k) \lambda_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial P} \right)^T \quad (15-4)$$

سپس با جایگذاری در رابطه‌ی زیر حساسیت به دست می‌آید:

¹Adjoint Analytical Method

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \lambda_i^T \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{P}(x^k) \right) \quad (16-4)$$

۴-۲-۳- مقایسه‌ی روش مستقیم و الحاقی

در روش مستقیم باید ابتدا معادله‌ی (۷-۴) را برای هر x_j حل کنیم (n بار) و سپس نتایج را در معادله‌ی (۵-۴) به تعداد $l+1$ مرتبه برای هر متغیر طراحی قرار دهیم. در روش الحاقی باید معادله‌ی (۱۵-۴) برای تابع هدف و هر تابع قید به اندازه‌ی $l+1$ مرتبه حل شود و نتیجه به تعداد n مرتبه برای هر تابع در (۱۶-۴) قرار داده شود. در نتیجه وقتی تعداد قیدها از متغیرهای طراحی کمتر است، روش الحاقی و وقتی متغیرهای طراحی از توابع قید بیشتر است، روش مستقیم مناسب‌تر است.

۴-۲-۴- محاسبه‌ی شبه بار در حالت دوبعدی

همانطور که در فصل قبل ذکر شد می‌توان هندسه‌ی مسئله و تغییر مکان‌ها را به شکل زیر درونیابی کرد:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{N} P \quad (17-4)$$

$$U = \bar{N} \bar{P} \quad (18-4)$$

می‌توانیم P و \bar{P} که به ترتیب مختصات نقاط کنترلی و میزان تغییر مکان نقاط کنترلی هستند را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$P = [P_{x1,1} P_{y1,1} P_{x2,1} P_{y2,1} \dots P_{xn,1} P_{yn,1} \dots P_{xn,m} P_{yn,m}]^T \quad (19-4)$$

$$\bar{P} = [\bar{P}_{u1,1} \quad \bar{P}_{v1,1} \quad \bar{P}_{u2,1} \quad \bar{P}_{v2,1} \quad \dots \quad \bar{P}_{un,1} \quad \bar{P}_{vn,1} \quad \dots \quad \bar{P}_{un,m} \quad \bar{P}_{vn,m}]^T \quad (20-4)$$

همچنین برای \bar{N} داریم:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & 0 & R_{2,1} & 0 & \dots & R_{n,1} & 0 & \dots & R_{n,m} & 0 \\ 0 & R_{1,1} & 0 & R_{2,1} & \dots & 0 & R_{n,1} & \dots & 0 & R_{n,m} \end{bmatrix} \quad (21-4)$$

ماتریس سختی را نیز می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$K_e = t_e \int_{\hat{\Omega}} B^T C B |J| d\hat{\Omega} \quad (22-4)$$

همچنین ماتریس جابجایی کرنشی B برابر است با:

$$B = D \times \bar{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{1,1}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{1,1}}{\partial y} & \frac{\partial R_{1,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial y} & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (23-4)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای:

$$C = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (24-4)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (25-4)$$

اگر فرض کنیم شکل منحنی‌های مرزی با متغیرهای طراحی x_i کنترل می‌شود، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial K_e}{\partial x_i} = t_e \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{\partial B^T}{\partial x_i} C B |J| + B^T C \frac{\partial B}{\partial x_i} |J| + B^T C B \frac{\partial |J|}{\partial x_i} \right) d\hat{\Omega} \quad (26-4)$$

برای تعیین مشتقات $\frac{\partial |J|}{\partial x_i}$ و $\frac{\partial B^T}{\partial x_i}$ ، ابتدا دو ماتریس اضافی را تعریف می‌کنیم:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}}{\partial x} & \frac{\partial R_{2,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{1,1}}{\partial y} & \frac{\partial R_{2,1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (27-4)$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}}{\partial r} & \frac{\partial R_{2,1}}{\partial r} & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial r} \\ \frac{\partial R_{1,1}}{\partial s} & \frac{\partial R_{2,1}}{\partial s} & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (28-4)$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مشتق داریم:

$$\hat{G} = JG \quad (29-4)$$

اگر P را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} P_{x1,1} & P_{x2,1} & \dots & P_{xn,1} & P_{xn,2} & \dots & P_{xn,m} \\ P_{y1,1} & P_{y2,1} & \dots & P_{yn,1} & P_{yn,2} & \dots & P_{yn,m} \end{bmatrix} \quad (30-4)$$

از معادله‌ی (۴-۱۷) داریم:

$$J = \hat{G}\hat{P} \quad (31-4)$$

اگر $\frac{\partial}{\partial x_i}$ را با (') نشان دهیم، با توجه به اینکه \hat{G} مستقل از متغیرهای طراحی است خواهیم داشت:

$$0 = \hat{G}' = J'G + JG' \quad (32-4)$$

$$J' = \hat{G}\hat{P}' \quad (33 - 4)$$

از معادلات (۲۹-۴)، (۳۲-۴) و (۳۳-۴) خواهیم داشت:

$$G' = -J^{-1}J'G = -J^{-1}\hat{G}\hat{P}'G = -G\hat{P}'G \quad (34 - 4)$$

همانطور که از جبر خطی می‌دانیم برای هر ماتریس غیر منفرد A:

$$|A'| = |A|tr(A^{-1}A') \quad (35 - 4)$$

در نتیجه برای $|J|'$ از معادلات (۳۳-۴)، (۳۵-۴) و (۲۹-۴) داریم:

$$|J|' = |J|tr(J^{-1}J') = |J|tr(J^{-1}\hat{G}\hat{P}') = |J|tr(\hat{G}\hat{P}') \quad (36 - 4)$$

به طور خلاصه روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = -G \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} G \quad (37 - 4)$$

$$\frac{\partial |J|}{\partial x_i} = |J|tr(\hat{G} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i}) \quad (38 - 4)$$

با داشتن G به راحتی می‌توانیم مشتق B را نیز به دست آوریم. پس از تعیین این مشتقات با

جایگذاری در رابطه‌ی (۲۶-۴) مشتق K نسبت به متغیرهای طراحی به دست می‌آید.

۴-۲-۵- حساسیت‌ها و محاسبه‌ی شبه بار در حالت سه‌بعدی

در حالت سه‌بعدی می‌توانیم هندسه و تغییر مکان‌ها را به ترتیب زیر به دست آوریم:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{N}P \quad (39-4)$$

$$U = \bar{N}\bar{P} \quad (40-4)$$

که P و مطابق روابط زیر به دست می آیند:

$$P = [P_{x\ 1,1,1} \ P_{y\ 1,1,1} \ P_{z\ 1,1,1} \ \dots \ P_{x\ n,1,1} \ P_{y\ n,1,1} \ P_{z\ n,1,1} \ \dots \ P_{x\ n,m,l} \ P_{y\ n,m,l} \ P_{z\ n,m,l}]^T \quad (41-4)$$

$$\bar{P} = [\bar{P}_{u\ 1,1,1} \ \bar{P}_{v\ 1,1,1} \ \bar{P}_{w\ 1,1,1} \ \dots \ \bar{P}_{u\ n,1,1} \ \bar{P}_{v\ n,1,1} \ \bar{P}_{w\ n,1,1} \ \dots \ \bar{P}_{u\ n,m,l} \ \bar{P}_{v\ n,m,l} \ \bar{P}_{w\ n,m,l}]^T \quad (42-4)$$

توابع پایه نریز و ماتریس سختی نیز همانند حالت دوبعدی به شکل زیر می باشند:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} R_{1,1,1} & 0 & 0 & \dots & R_{n,1,1} & 0 & 0 & \dots & R_{n,m,l} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1,1,1} & 0 & \dots & 0 & R_{n,1,1} & 0 & \dots & 0 & R_{n,m,l} & 0 \\ 0 & 0 & R_{1,1,1} & \dots & 0 & 0 & R_{n,1,1} & \dots & 0 & 0 & R_{n,m,l} \end{bmatrix} \quad (43-4)$$

$$K_e = t_e \int_{\hat{\Omega}} B^T C B |J| d\hat{\Omega} \quad (44-4)$$

با توجه به معادله (۲-۳۶) در مورد ماتریس اپراتور دیفرانسیلی D ، برای ماتریس جابه جایی کرنشی

در حالت سه بعدی داریم:

$$B = D \times \bar{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial z} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial y} & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial y} & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial z} & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial z} & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (45 - 4)$$

همچنین ماتریس ژاکوبین برابر است با:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (46 - 4)$$

مانند قبل برای ماتریس سختی داریم:

$$\frac{\partial K_e}{\partial x_i} = t_e \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{\partial B^T}{\partial x_i} C B |J| + B^T C \frac{\partial B}{\partial x_i} |J| + B^T C B \frac{\partial |J|}{\partial x_i} \right) d\hat{\Omega} \quad (47 - 4)$$

ماتریس G و \hat{G} به ترتیب در این حالت برابرند با:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (48 - 4)$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (49 - 4)$$

با تعریف P به شکل زیر:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} P_{x 1,1,1} & P_{x 2,1,1} & \dots & P_{x n,1,1} & P_{x n,2,1} & \dots & P_{x n,m,l} \\ P_{y 1,1,1} & P_{y 2,1,1} & \dots & P_{y n,1,1} & P_{y n,2,1} & \dots & P_{y n,m,l} \\ P_{z 1,1,1} & P_{z 2,1,1} & \dots & P_{z n,1,1} & P_{z n,2,1} & \dots & P_{z n,m,l} \end{bmatrix} \quad (50 - 4)$$

می‌توانیم همان معادلات (۴-۳۷) و (۴-۳۸) را در حالت سه‌بعدی نیز به کار ببریم.

۴-۲-۳ - روش نیمه‌تحلیلی

اگر در روش تحلیلی برای محاسبه‌ی $\frac{\partial \bar{P}(x^k)}{\partial x_j}$ و یا $\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j}$ و یا $\frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j}$ از تفاضل

محدود استفاده شود (در روش تحلیلی) حاصل روش نیمه‌تحلیلی خواهد بود.

با استفاده از نتایج به‌دست آمده از این فصل و فرمولبندی سه‌بعدی تحلیل آیزوژئومتریک که در فصل دوم آمده است می‌توانیم بهینه‌سازی مسائل سه‌بعدی الاستیسیته را انجام دهیم. در فصل بعد بهینه‌سازی چند مسئله انجام شده و در این پایان‌نامه از این روش‌ها برای بهینه‌سازی تعدادی مسئله-ی سه‌بعدی استفاده شده است.

۴-۲-۴ - الگوریتم برنامه

الگوریتم برنامه نوشته شده در این پایان‌نامه به طور خلاصه به صورت زیر می‌باشد:

که در قسمت مربوط به تحلیل حساسیت احتیاج داریم از توابع هدف (وزن) و قیدها (تنش) نسبت به متغیرهای طراحی مشتق‌گیری نماییم که فرمولبندی آن در قسمت‌های قبلی ذکر شد. ابتدا برای حالت دو بعدی و با فرض وزن واحد حجم ۱ و عمق ۱ خواهیم داشت:

$$W = V = \iint d\Omega = \iint |J| d\hat{\Omega} = |J| \times W_1 \times W_2 \quad (51-4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (|J| \times W_1 \times W_2) = W_1 W_2 \frac{\partial |J|}{\partial x_j} \quad (52-4)$$

با جایگذاری $\frac{\partial |J|}{\partial x_j}$ از معادله (۳۸-۴) معادله (۵۲-۴) که همان مشتق تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی است به دست می‌آید. برای مشتق توابع قید (تنش) نسبت به متغیرهای طراحی نیز با استفاده از معادله تکراری (۱۰-۴) داریم:

$$\frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} = C \left(\frac{\partial (B(x^k) \bar{P}(x^k))}{x_j} \right) = C \left(\frac{\partial B(x^k)}{\partial x_j} \bar{P}(x^k) + B(x^k) \frac{\partial \bar{P}(x^k)}{\partial x_j} \right)$$

که در آن با استفاده از معادله (۳۷-۴) ابتدا ماتریس مرتب شده $\frac{\partial G(x^k)}{\partial x_j}$ محاسبه شده و سپس

به دست می‌آید. برای محاسبه $\frac{\partial \bar{P}(x^k)}{\partial x_j}$ نیز با استفاده از معادله تعادل $K \bar{P} = F$ و

مشتق‌گیری از دو طرف رابطه نسبت به متغیر طراحی و بازنویسی آن به معادله (۷-۴) می‌رسیم و با حل آن و قرار دادن در معادله (۱۰-۴) مشتق قید نسبت به متغیرهای طراحی نیز به دست می‌آید. و به طور مشابه و با استفاده از همان فرمول‌های (۳۷-۴) و (۳۸-۴) این روند برای حالت سه‌بعدی نیز تعمیم می‌یابد.

فصل پنجم

مثال‌های عددی

۵-۱- مقدمه

در این قسمت جهت روشن‌تر شدن موضوع و ارزیابی میزان اثربخشی تحلیل حساسیت در بهینه کردن جواب‌ها و سرعت حل و همچنین کارایی روش‌های متحرک چند مثال حل شده-اند. حتی‌الامکان سعی شده‌است که از مثال‌هایی استفاده شود که در منابع مختلف موجود است تا امکان مقایسه و صحت‌سنجی نتایج فراهم شود.

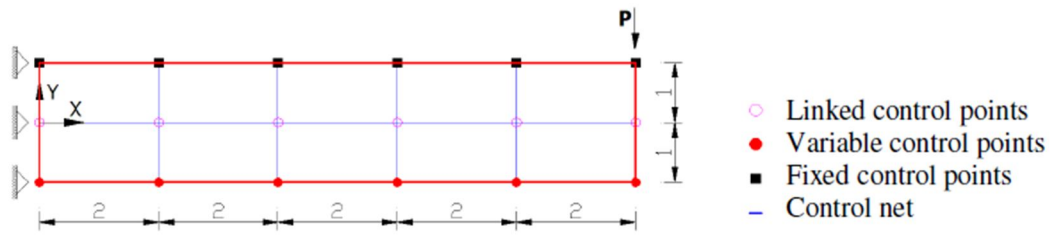
تابع هدف و توابع قید در کلیه‌ی مثال‌های حل شده به ترتیب وزن و تنش می‌باشد.

مثال ۵-۱: تیر طره

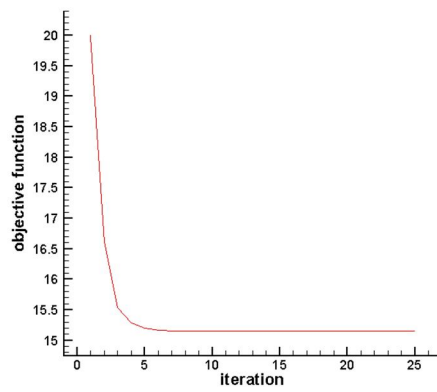
در ابتدا برای بررسی صحت‌سنجی برنامه نوشته شده مثالی از مرجع [۲۲] ارائه می‌شود. در این مثال یک تیر طره به همراه بار نقطه‌ای در انتهای آزاد تیر و در قسمت گوشه‌ی بالای تیر وارد می‌شود (شکل ۵-۱). مقدار نیرو، ضریب پواسون و مدول الاستیسیته به ترتیب ۳۰۰، ۰/۱۵ و ۱۵۰۰ می‌باشد. تابع هدف کمینه کردن وزن و تحت قید تنش فون میزس ۴۰۰۰ می‌باشد. نقاط کنترلی مختلفی که مراحل بهینه‌سازی شکل استفاده شده است شامل نقاط کنترلی لینک، متغیر و ثابت می‌شود. تعداد متغیرهای طراحی برابر ۶ می‌باشد. فضای مسئله به وسیله یک زیر دامنه نریز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت مدل شده است. تعداد کل نقاط کنترلی نیز برابر با ۱۸ می‌باشد.

$$\xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$$

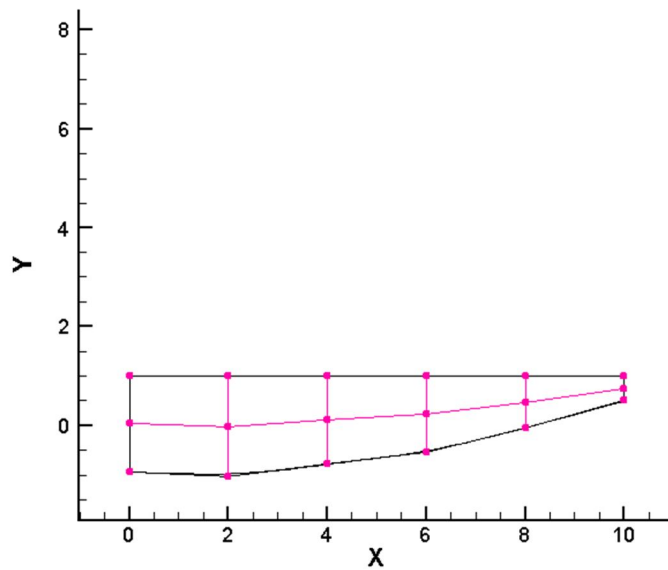
$$\eta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$



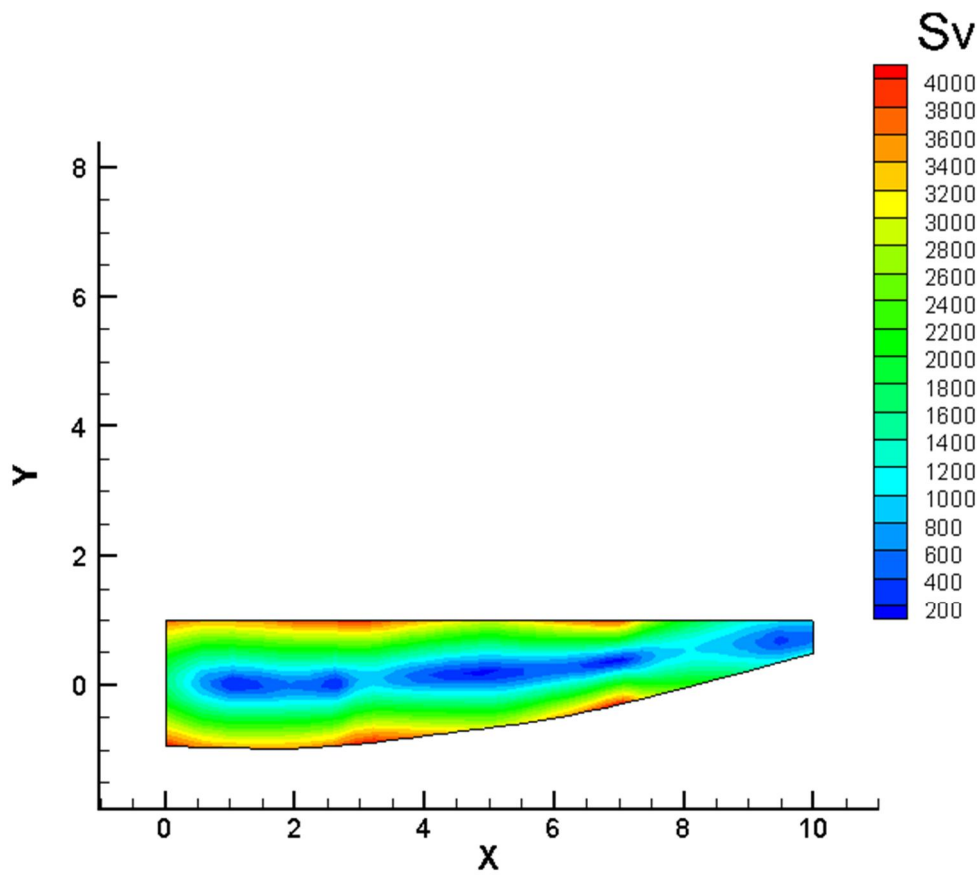
شکل ۱-۵: طرح اولیه مثال ۱-۵



شکل ۲-۵: روند بهینه‌سازی مثال ۱-۵

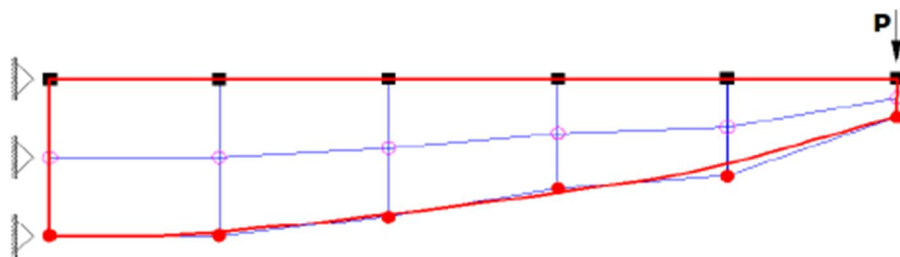


شکل ۳-۵: شکل بهینه به همراه نقاط کنترلی

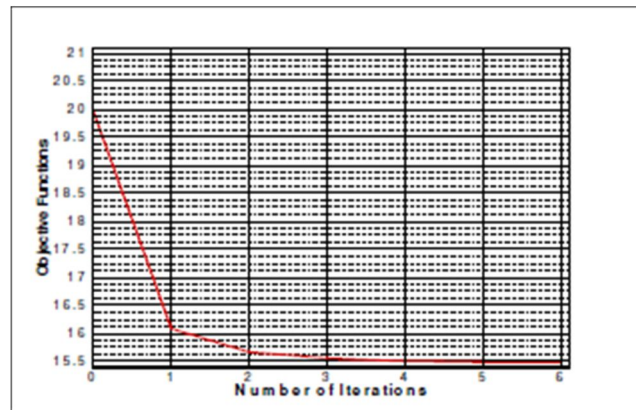


شکل ۴-۵: شکل بهینه به همراه کانتورهای تنش فون میزس

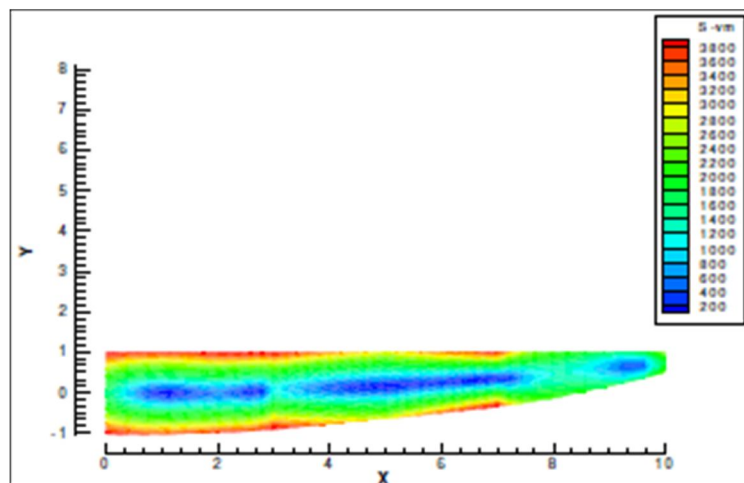
حال جهت مقایسه نتایج به دست آمده در مرجع مذکور به شکل زیر می‌باشد:



شکل ۵-۵: طرح بهینه به همراه شبکه کنترلی آن



شکل ۵-۶: روند بهینه‌سازی شکل تیر طره



شکل ۵-۷: طرح بهینه به همراه کانتورهای تنش آن

همانطور که مشاهده می‌شود نتایج بسیار به هم شبیه است. وزن کمینه نیز حدود ۱۵/۱۴

بدست می‌آید.

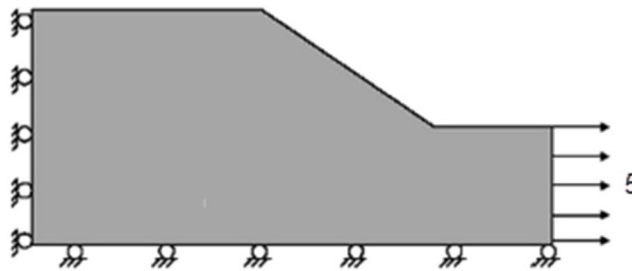
مثال ۵-۲: فیلت^۱ دوبعدی

سومین مثال ارائه شده در این فصل فیلت دوبعدی می‌باشد. هندسه شکل با استفاده از ۹۶

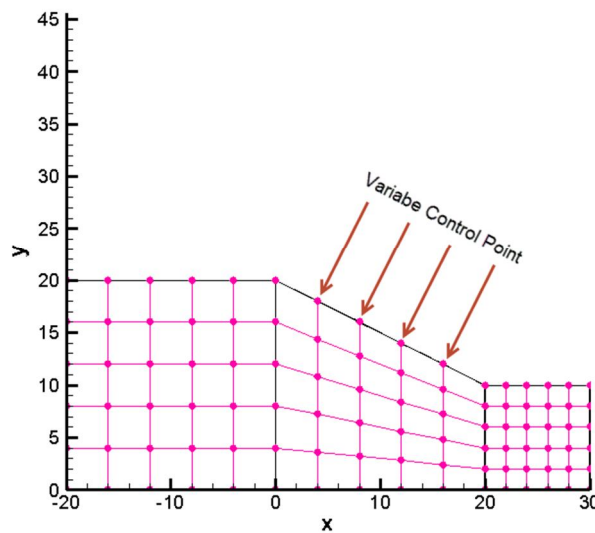
نقطه کنترلی مدل شده است. شکل از سه زیردامنه تشکیل شده است. مدول الاستیسته و ضریب

^۱Fillet

پواسون به ترتیب 1500000 و 0.25 می‌باشد و بارگذاری تنها بر روی لبه‌انتهایی سمت راست به مقدار $p = 10$ انجام شده‌است تا بار گسترده‌ای به میزان $\sigma = 5$ را ایجاد کند. نقاط کنترلی متغیر بر با استفاده از فلش بر روی شکل (۵-۸) نمایش داده شده است و تنها می‌تواند در راستای قائم حرکت کند.



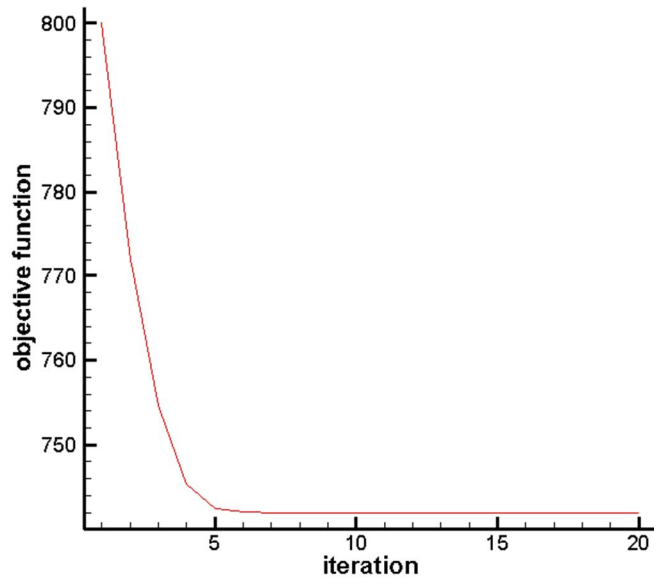
شکل ۵-۸: شکل اولیه مسئله فیلت دوبعدی



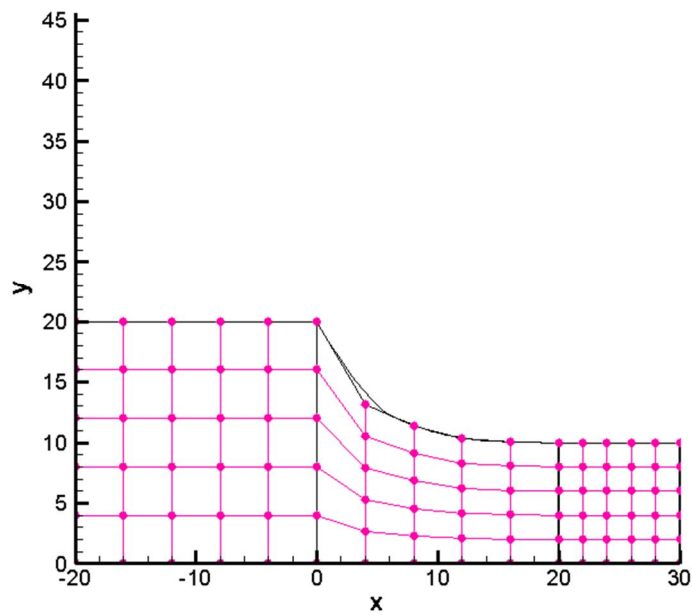
شکل ۵-۹: نمایش متغیرهای طراحی در مسئله فیلت دوبعدی

پس از ۶ مرحله بهینه‌سازی طرح بهینه همانند شکل (۵-۱۱) به دست می‌آید. و در شکل (۵-

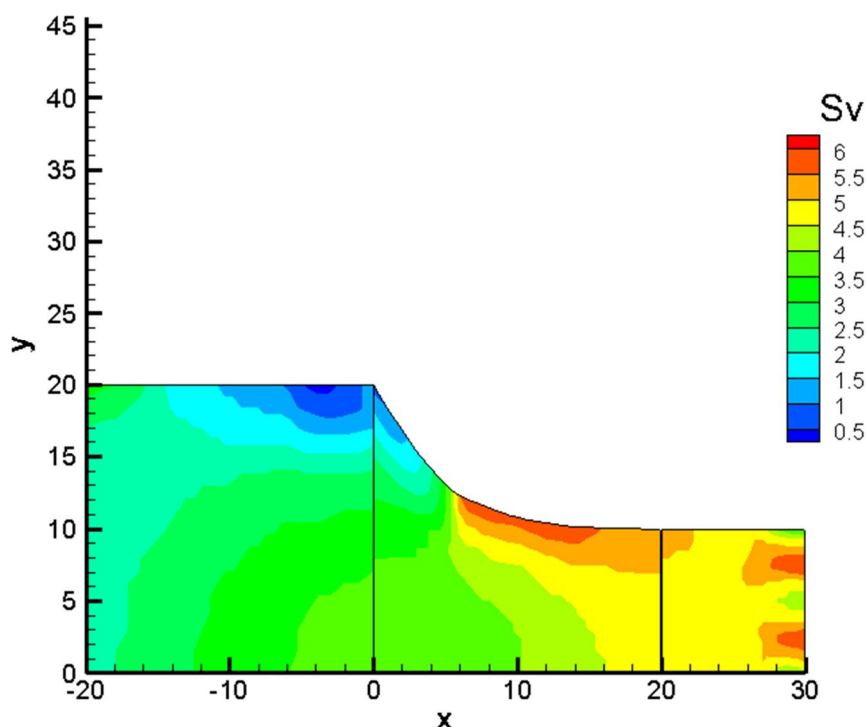
۱۲) شکل بهینه به همراه کانتورهای تنش نمایش داده شده است.



شکل ۵-۱۰: روند بهینه‌سازی فیلت دوبعدی



شکل ۵-۱۱: شکل بهینه‌ی مسئله فیلت دوبعدی به همراه نقاط کنترلی

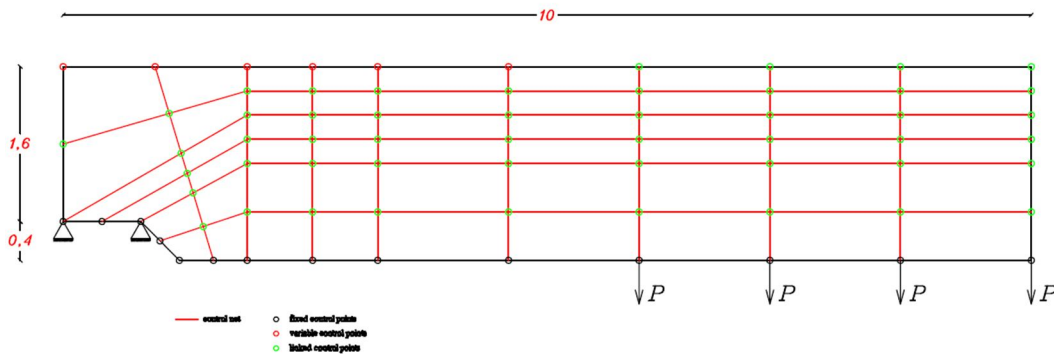


شکل ۵-۱۲: کانتورهای تنش فون میزس برای طرح بهینه‌ی فیلت دوبعدی

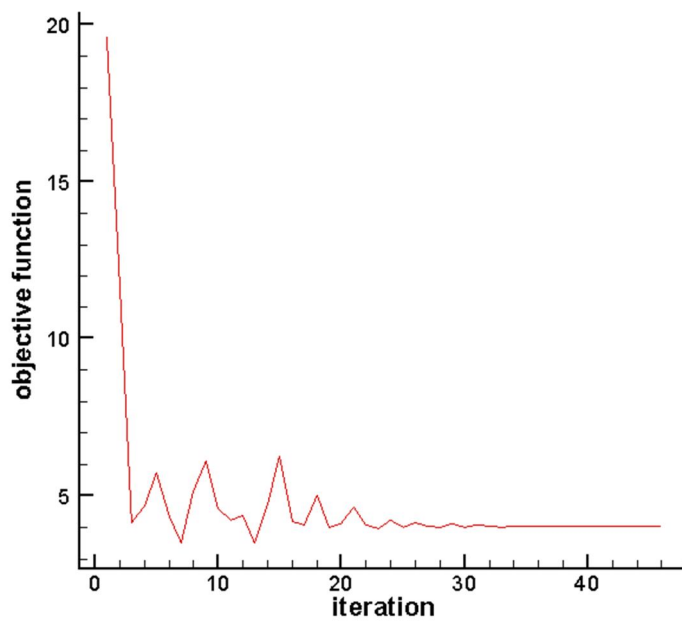
مثال ۵-۳: آچار

در این مثال آچاری به طول ۱۰ و با سایز بولت $0/8$ بررسی شده‌است. با توجه به تقارن مسئله تنها نصف آچار مدل شده‌است. شکل اولیه‌ی فضای مسئله تنها به وسیله یک زیردامنه مدل شده‌است و به صورت شکل (۵-۱۳) می‌باشد. مولفه‌ی قائم متغیرهای موجود بر روی مرز بالای آچار به عنوان متغیر طراحی لحاظ شده‌است. برای اینکه شکل دسته‌ی آچار به صورت مستقیم به دست آید، چهار نقطه‌ی کنترلی انتهایی بر روی مرز بالای شکل به نقطه‌ی پنجم لینک شده‌اند. همچنین غیر از نقاط روی مرز بولت و نقاط روی مرز پایینی سایر نقاط به متغیرهای طراحی لینک شده‌اند. حداکثر مقدار برای مولفه‌ی قائم نقاط طراحی دو فرض شده‌است. پس از ۴۶ مرحله انجام عملیات بهینه‌سازی شکل (۵-۱۵) به دست می‌آید. همانند سایر مثال‌ها وزن به عنوان تابع هدف و تنش فون میزس به عنوان

قید در نظر گرفته شده است ($\sigma_r \leq 11150$).

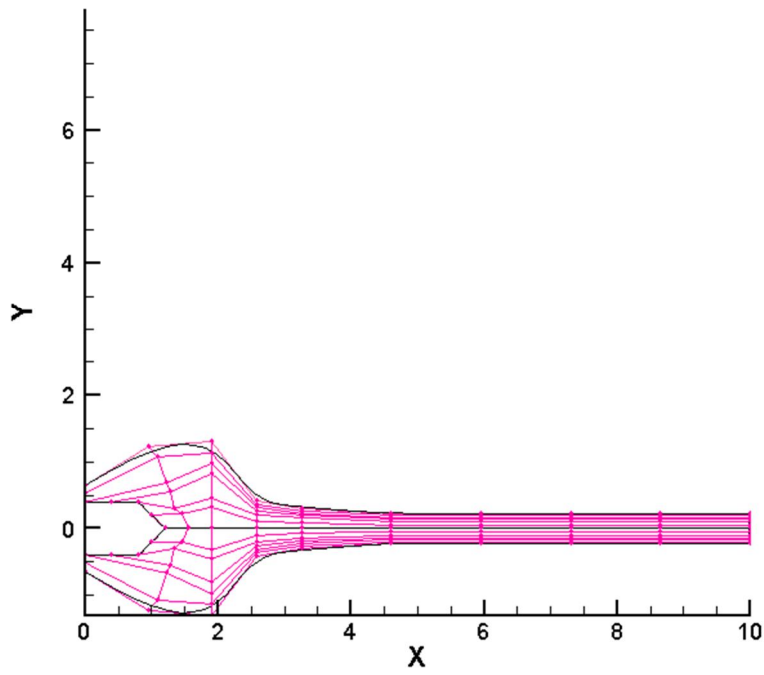


شکل ۵-۱۳: طرح اولیه‌ی مسئله نصف آچار

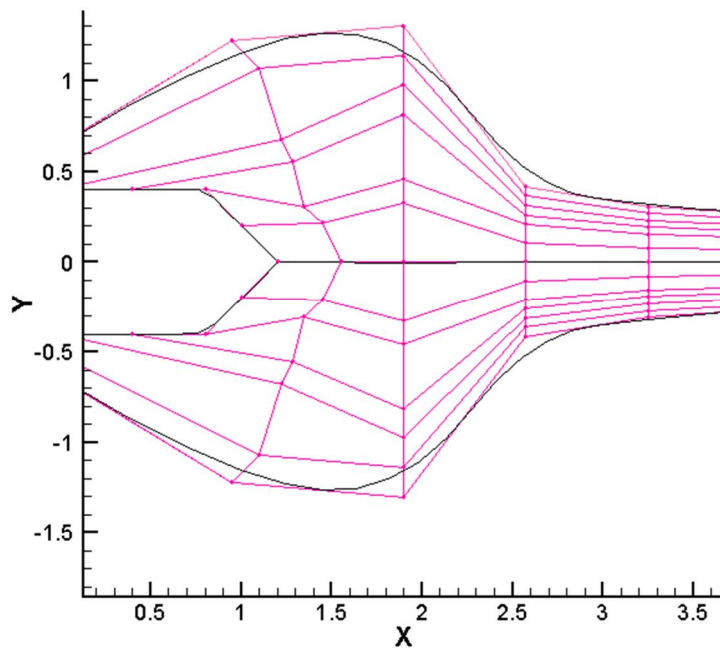


شکل ۵-۱۴: روند بهینه‌سازی مسئله آچار

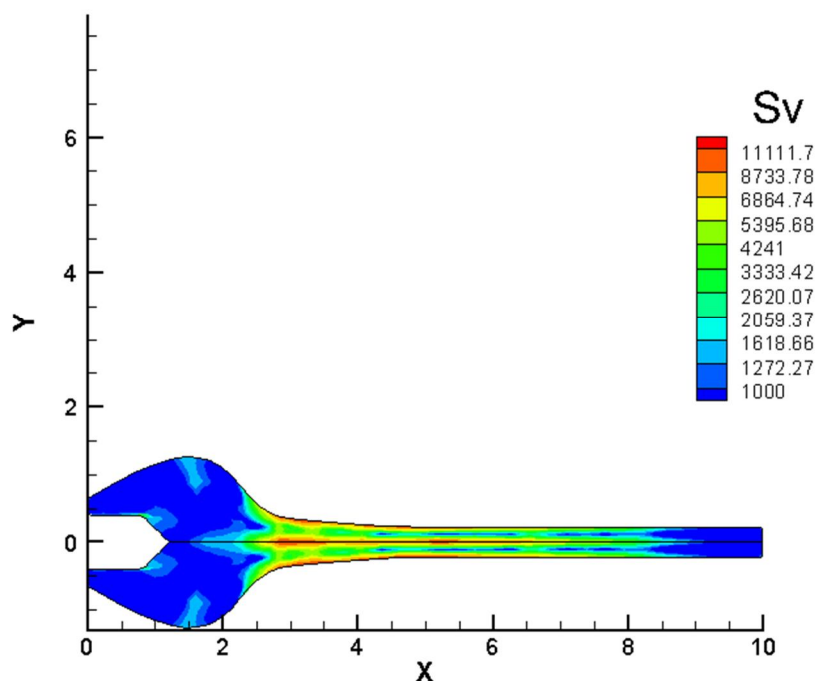
همانطور که مشاهده می‌شود از مراحل ۳۲ به بعد شکل همگرا می‌شود ولی برای بالا بردن دقت مراحل بهینه‌سازی را تا ۱۴ مرحله دیگر نیز ادامه داده‌ایم و مدل بهینه‌شده نهایی به همراه کانتورهای تنش فون میزس در شکل (۵-۱۶) نمایش داده شده است.



شکل ۵-۱۵: طرح بهینه‌ی مسئله آچار به همراه نقاط کنترلی



شکل ۵-۱۶: نمای نزدیک از شکل بهینه‌ی سر آچار



شکل ۵-۱۷: کانتورهای تنش برای طرح بهینه‌ی مسئله آچار

مثال ۵-۴: تیر دو سر گیردار سه بعدی

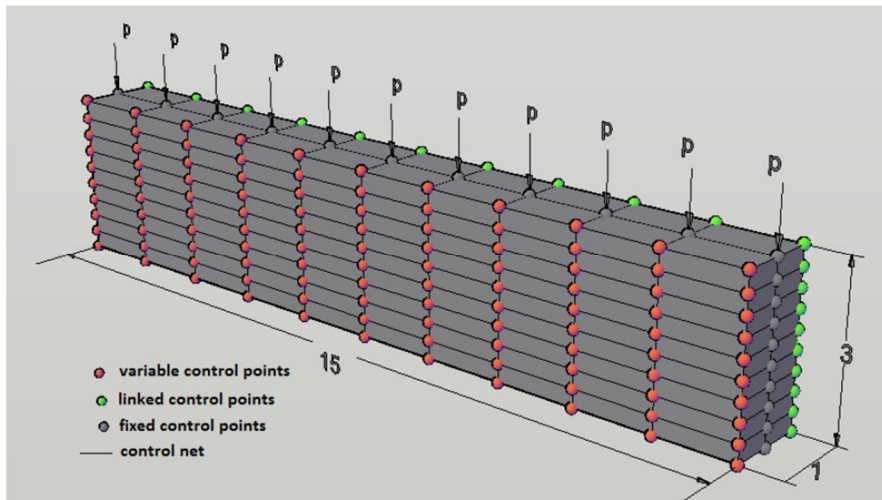
در قسمت مثال‌های سه بعدی نیز برای بررسی صحت سنجی برنامه نوشته شده ابتدا یک مثال سه بعدی حل، بررسی و مقایسه می‌شود. این مثال شامل یک تیر دو سر گیردار سه بعدی با سطح مقطع اولیه‌ی مستطیلی خواهد بود. طول، عرض و ارتفاع تیر به ترتیب ۱۵، ۱ و ۳ می‌باشد. تعداد کل نقاط کنترلی، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب ۳۳۰، ۱۵۰۰ و ۰/۳ در نظر گرفته شده است. بار یکنواخت قائمی طبق شکل (۵-۱۸) و به مقدار ۱۰۰ واحد بر روی نقاط کنترلی میانی بالای تیر اعمال می‌گردد. وزن به عنوان تابع هدف و تنش حداکثری به مقدار ۶۰۰ در راستای محور طولی x به عنوان قید فرض می‌شود. نقاط کنترلی ثابت، متغیر و لینک در شکل (۵-۱۸) نشان داده شده است. تمام نقاط کنترلی در وجه جلو و عقب تیر می‌توانند در راستای y حرکت کنند و ما بقی نقاط ثابت می‌باشد. فضای مسئله از یک زیردامنه با مرتبه دو در هر سه جهت تشکیل می‌شود. بردارهای

گرهی نیز به شرح زیر است:

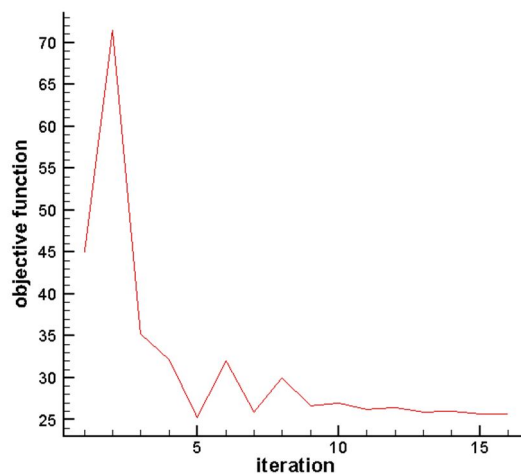
$$\xi = \{0, 0, 0, 0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 0.9, 1, 1, 1, 1\}$$

$$\eta = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

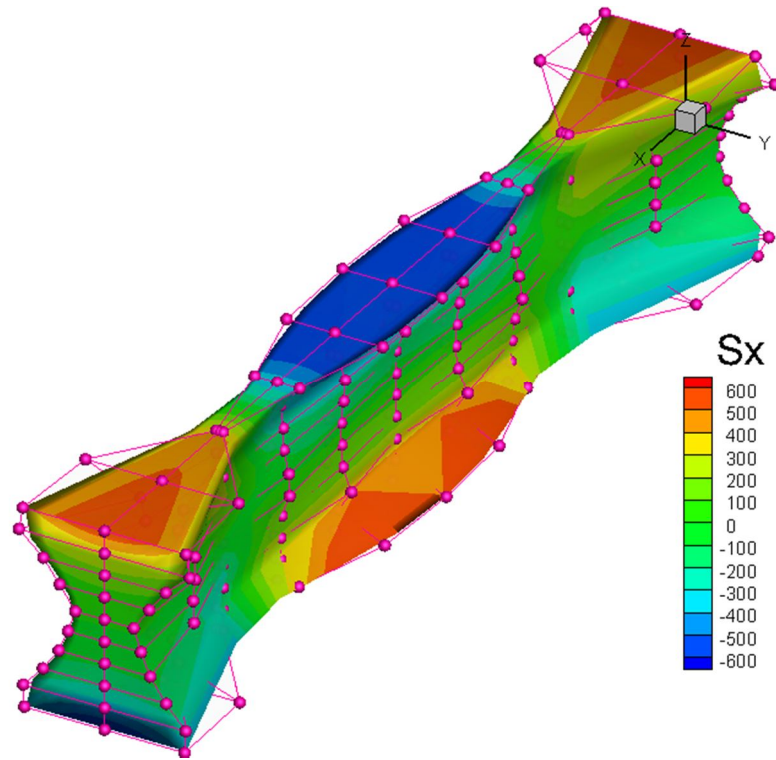
$$\zeta = \{0, 0, 0, 0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9, 1, 1, 1\}$$



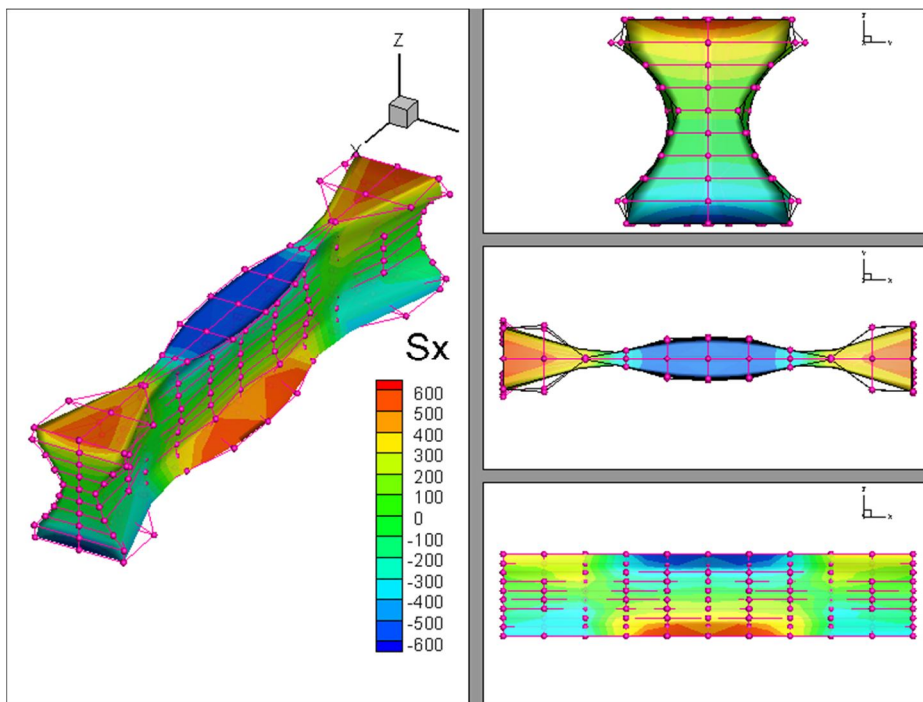
شکل ۵-۱۸: طرح اولیه مسئله تیر دو سر گیردار سه بعدی



شکل ۵-۱۹: روند بهینه‌سازی تیر سه‌بعدی

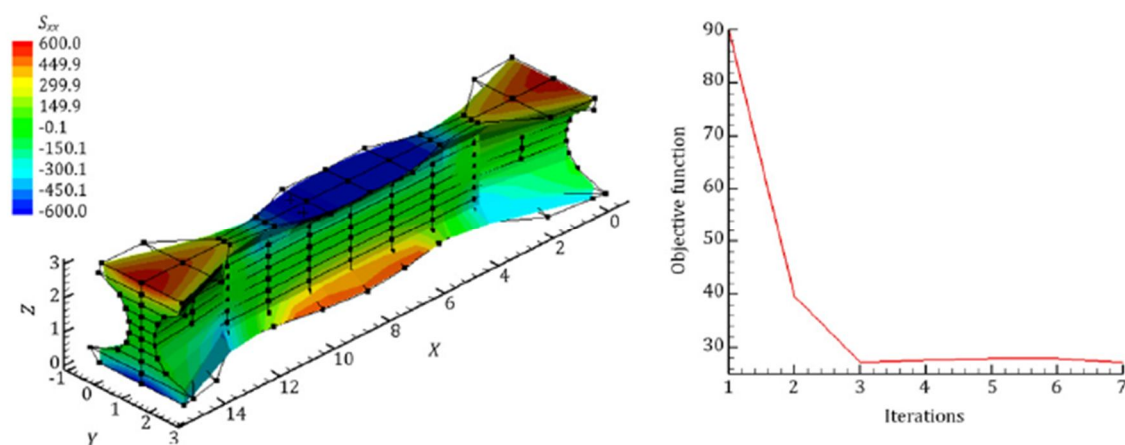


شکل ۵-۲۰: کانتورهای تنش محوری X برای طرح بهینه تیر سه‌بعدی به همراه شبکه کنترلی



شکل ۵-۲۱: کانتورهای تنش برای طرح بهینه تیر سه‌بعدی از نماهای مختلف

نتایج حاصل از تحلیل در مثال مرجع به شکل زیر می‌باشد که برای مقایسه آورده شده است [۲۶].



شکل ۵-۲۲: طرح بهینه به همراه روند بهینه‌سازی

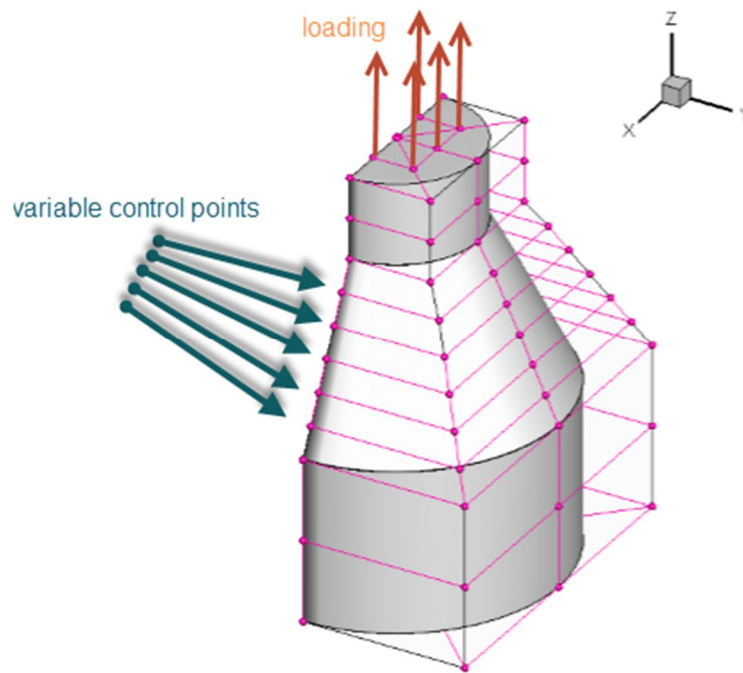
همانطور که مشاهده می‌شود نتایج بسیار به هم نزدیک است.

مثال ۵-۵: فیلت^۱ سه بعدی

در این مثال یک فیلت سه بعدی مدل شده است. به دلیل تقارن تنها نصف شکل را مدل کرده- ایم. کل شکل از سه زیردامنه^۲ تشکیل شده است. درجات تمامی زیر دامنه‌ها یکسان و در سه جهت به ترتیب دو، یک و دو می‌باشد. بارگذاری بر روی قسمت بالایی شکل (زیردامنه اول) اعمال شده است و به نحوی است که محل اعمال بارها به صورت کششی و به مقدار ۲۰۰۰ و بر روی نقاط کنترلی وسط هر تراز از زیردامنه مذکور می‌باشد (زیر دامنه اول شامل سه تراز ارتفاعی است). متغیرهای طراحی ۵ نقطه کنترلی نشان داده شده بر روی زیر دامنه دوم است که به صورت مورب قرار گرفته‌اند (شکل ۵-۲۳). سایر نقاط کنترلی پیرامونی در زیر دامنه دوم به متغیرهای طراحی متصل شده‌اند. در این مثال نیز وزن به عنوان تابع هدف و تنش محوری Z و به مقدار ۵۲۵ به عنوان قید در نظر گرفته شده است.

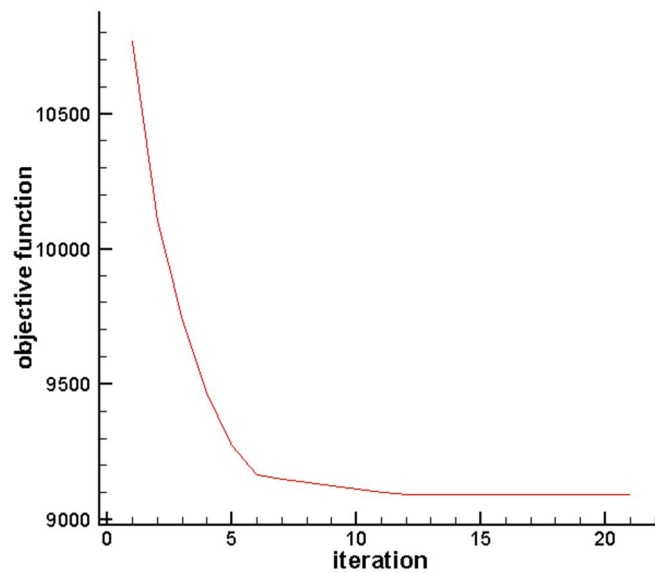
^۱Fillet

^۲Patch

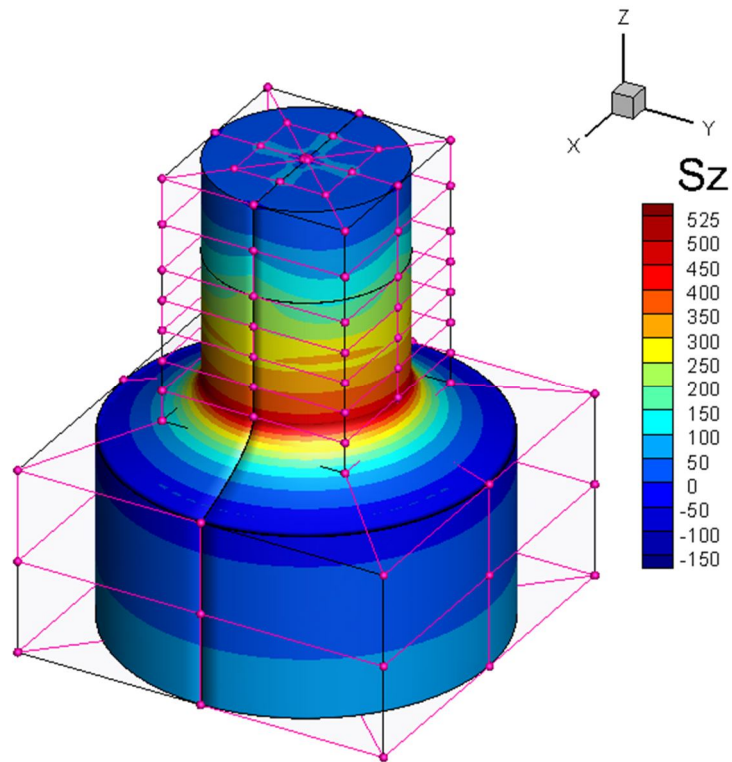


شکل ۵-۲۳: شکل اولیه‌ی نصف فیلت به همراه متغیرهای طراحی و بارهای اعمالی

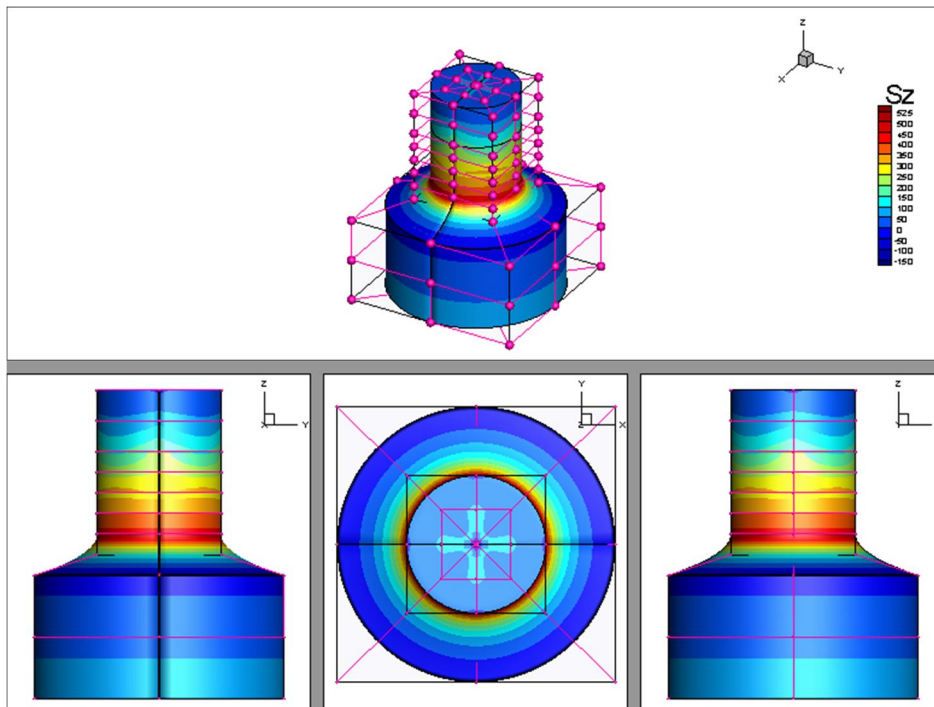
همانطور که مشاهده می‌شود پس از ۱۳ مرحله بهینه‌سازی جواب همگرا می‌شود.



شکل ۵-۲۴: روند بهینه‌سازی فیلت سه‌بعدی



شکل ۵-۲۵: طرح نهایی فیلت سه‌بعدی به همراه کانتورهای تنش و شبکه کنترلی



شکل ۵-۲۶: طرح نهایی فیلت سه‌بعدی از نماهای مختلف

فصل ششم

نتایج و پیشنهادات

۶-۱- مقدمه

روش تحلیل آیزوژئومتری، بهینه‌سازی شکل و روش‌های مناسب برای آن و همچنین آنالیز حساسیت به تفصیل در فصول قبل مورد بررسی قرار گرفت. در فصل پنجم نیز مثال‌هایی برای صحت‌سنجی و کارایی روش مورد استفاده نشان داده شد. در پایان نتایج حاصل از این پژوهش به صورت خلاصه ذکر و همچنین پیشنهادهایی نیز برای مطالعات بعدی ارائه می‌گردد.

۶-۲- جمع‌بندی و نتایج

- در روش آیزوژئومتری نیز مانند سایر روش‌های عددی دیگر از مبانی پایه‌ای مشابه‌ای مفهوم آیزوپارامتری استفاده می‌شود.
- انعطاف‌پذیری بالای نرزه‌ها در تقریب توابع مجهول سبب کاهش تعداد نقاط کنترلی برای رسیدن به جواب قابل قبول و در نهایت کاهش حجم محاسبات نسبت به روش اجزای محدود می‌شود. این عدم نیاز به تعداد زیاد نقاط کنترلی برای تولید هندسه و تقریب توابع مجهول، سرعت محاسبات را در روش آیزوژئومتری به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد.
- در روش آیزوژئومتری نقاط کنترلی سطوح حل (مجهولات مسئله)، لزوماً بر هندسه و فیزیک حل منطبق نیستند و بنابراین دو مفهوم شبکه‌ی کنترلی و فیزیکی در این روش مطرح است. نقاط کنترلی، شبکه کنترلی را ایجاد می‌کنند که این شبکه در مسائل دوبعدی شامل اعضای چهارضلعی و در مسائل سه‌بعدی شامل اعضای شش‌وجهی است. نقاط کنترلی توسط این شبکه درونیابی می‌شوند. این فرآیند سبب انعطاف‌پذیری نرزه‌ها در مدل کردن هندسه‌های پیچیده می‌شود.

از نتایج سایر فصول نیز می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- از بین روش‌های موجود برای بهینه‌سازی در این پایان‌نامه روش MMA انتخاب شده- است. با توجه به این‌که جزء روش‌های بر پایه‌ی گرادیان است و از مشتقات حساسیت استفاده می‌کند سرعت همگرایی در آن نسبت به روش‌های مشابه بالاتر است.
- سرعت همگرایی در روش MMA قابل تنظیم است و بنا به شرایط مسئله می‌توان آن را به شکل دلخواه تغییر داد. و گاهی نیز در صورت مناسب نبودن پارامتر قابل تغییر در MMA باعث عدم همگرایی در مسئله می‌شود.

۶-۳- پیشنهادات

در ادامه برای تحقیقات آتی به چند موضوع اشاره می‌شود که می‌تواند مفید باشد:

- پیدا کردن روندی سیستماتیک برای انتخاب مقادیر بردار گرهی و فاصله مناسب بین آن‌ها برای مثال‌های مختلف که در نتیجه حل و شکل خروجی آن تاثیرگذار خواهد بود.
- یافتن مقایر و جای مناسب بارهای اعمالی به سازه که عموماً به نقاط کنترلی وارد می‌شوند و گاهی خود باعث ایجاد دردسر می‌شود.
- و در نهایت تعیین روشی برای انتخاب تعداد نقاط مناسب قیدها در زمانی که تنش به عنوان قید منظور می‌گردد.

پیوست

راهنمای برنامه کامپیوتری

در این پیوست برنامه نوشته شده در راستای پایان نامه توضیح و چگونگی وارد نمودن فایل ورودی بیان می شود.

برنامه نوشته شده به زبان برنامه نویسی فرترن^۱ می باشد. قسمت اول برنامه با هدف تحلیل به روش آیزوژئومتریک می باشد و توسط دکتر سید مهدی توکلی کدنویسی شده است. قسمت دوم برنامه کدهایی هستند که توسط پرفسور کریستر سونبرگ^۲ از موسسه فناوری رویال سوئد^۳ به منظور انجام عملیات بهینه سازی نوشته شده است. و در نهایت قسمت سوم برنامه مربوط به محاسبات آنالیز حساسیت می باشد و قسمت مشترک آن توسط آقای مهندس جدید الاسلام طراحی و در نهایت قسمت نهایی آن که مشتقات قیدها نسبت به متغیرهای طراحی هستند، توسط اینجانب برنامه نویسی شده است.

برنامه از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به ترتیب عبارتند از:

- ورود اطلاعات
- عملیات تحلیل
- تحلیل حساسیت
- عملیات بهینه سازی با روش MMA

فایل ورودی

جهت آشنایی با نحوه وارد کردن اطلاعات مسئله، نمونه ای از این فایل آورده شده است:

¹Fortran

²Krister Svanberg

³Royal Institute of Technology

Example 2- cantilever beam

npach,ntctp,ndime,nvfix,nmats,nsolv

1 18 2 3 1 1

noptim,nlnkv, vonm

1 0 4000

Coordinates

1 0 -1 0 1

2 2 -1 0 1

3 4 -1 0 1

4 6 -1 0 1

5 8 -1 0 1

6 10 -1 0 1

7 0 0 0 1

8 2 0 0 1

9 4 0 0 1

10 6 0 0 1

11 8 0 0 1

12 10 0 0 1

13 0 1 0 1

14 2 1 0 1

15 4 1 0 1

16 6 1 0 1

17 8 1 0 1

18 10 1 0 1

patch conectivity - no. doapx nokntx doapy noknty

1 2 8 2 5 1 7 13 2 8 14 3 9 15 4 10 16 5 11 17 6 12 18

knot vectors

1 0 0 0 0.25 0.5 0.75 1 1 1

1 0 0 1 1 1

Boundary conditions

1 1 1

7 1 1

13 1 1

material properties

1 1500 0.15

loading

1

load values

18 0 -300

ndesv

6

1 1 2 -1.5 0.5

2 2 2 -1.5 0.5

3 3 2 -1.5 0.5

4 4 2 -1.5 0.5

5 5 2 -1.5 0.5

6 6 2 -1.5 0.5

nlinv

6

1 7 2 1 0.5 0.5

2 8 2 2 0.5 0.5

3 9 2 3 0.5 0.5

4 10 2 4 0.5 0.5

5 11 2 5 0.5 0.5

6 12 2 6 0.5 0.5

در خط اول فایل ورودی شماره و نام مثال جهت راهنمایی کاربر نوشته شده است. پس از آن

به ترتیب تعداد زیردامنه‌ها، تعداد کل نقاط کنترلی، تعداد بعد، تعداد نقاط کنترلی ثابت، تعداد مصالح

و تعداد حل‌کننده‌ها مشخص می‌شود.

در قسمت بعد شماره‌ی بهینه‌سازی وارد می‌شود که در صورت وارد کردن عدد صفر تنها تحلیل

انجام می‌شود و اگر عدد یک وارد شود عملیات بهینه‌سازی نیز صورت می‌گیرد. پس از آن نوع ارتباط

بین متغیرهای طراحی و متغیرهای لینک مشخص می‌شود و قسمت بعدی مقدار قید را که در اینجا

معمولا تنش فون میزس است وارد می کنیم.

در مرحله بعدی بایستی مختصات نقاط کنترلی و وزن مربوط به آنها وارد شود. و در قسمت patch connectivity برای هر یک از زیر دامنه ها به ترتیب شماره ی نقاط کنترلی آن وارد می شود.

در قسمت knot vectors بردارهای گرهی هر بعد از زیر دامنه ها مشخص می شود. Boundary condition نیز مربوط به باز یا بسته بودن گره ها است که اگر راستای هر گره یک باشد یعنی در آن راستا بسته و اگر صفر باشد به معنی باز بودن گره در آن راستا است.

بخش material properties برای وارد کردن مدول الاستیسیته و ضریب پواسون می باشد. در قسمت بعد که loading نام دارد تعداد، مقدار و محل اعمال نیروهای گرهی مشخص می شود. پس از آن و در قسمت ndesv شماره نقاط کنترلی که به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده اند به همراه حدود تغییرات آنها مشخص می شود.

و در انتها نیز که همان بخش nlnkv می باشد مشخصات نقاط کنترلی که به متغیرهای طراحی لینک شده اند و ضرایب وابستگی آنها که فقط به صورت خطی تعریف شده است وارد می شود.

- [1] T.J.R Hughes, J.Cotrrel. and Y. Bazilevs (2005), “Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, pp. 4135-4195.
- [2] B.Szabo, A.Duster, E.Rank. (2004), “The p-version of the finite element method E.stein, R. de Borst, T.G.R. Hughes(Eds.)” in *Encyclopedia of Computational Mechanics*, vol. 1, New York, Wiley, 2004.
- [3] E.Cervera, J.Trevelyan (2005), “Evolutionary Structural Optimization Based on Boundry Representation of NURBS. Part i: 2d Algoritms” ,*Comput. Struct*, vol.83, pp.1902-1916.
- [4] G.Subbarayan, M.Rayasam, V.Srinivisan (2007), “ CAD inspired hierarchical partition of unity constructions for NURBS-based, Meshless Design, analysis and optimization, ” *Int. J.Numer. Math. Eng*, vol. 72, no. 12, pp. 1452-1489.
- [5] G.Subbarayan, X.Zhang, M. Rayasam (2007), “ A meshles Compositional approach to shape optimal design “ , *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*, vol. 196, pp 2130-2146.
- [6] J.Bennet, M.Botkin, (1984), “ Structural shape optimization with geometric problem description and adaptive mesh refinement “ , *AIAA*, pp. 458-464.
- [7] R.J.Yang, K.Choi, (1985) “Accuracy of finite element based shape design sensitivity analysis “ ,*ASCE J.Structural Mech*, vol. 13, no. 2, pp. 223-239.
- [8] V.Braibant, C.Fleury, P.Beckers (1983), “Shape optimal design: An approach matching C.A.D and optimization concept” , *Aerospace laboratory of university of liege*, Belgium.
- [9] T.J.R. Hughes, J. Cottrel and Y. Bazilevs (2009), “Isogeometric Analysis Toward integration of CAD and FEA”, *Wiley*.
- [10] L.M.Kurshin, P.M.Onoprienko,(1976) “Determination of the shapes of doubly connected bar section of maximum torsional stiffnes” , *Prikl. Mat. Mekh*, vol. 40, no 6, pp. 1078-1084.

[11] M.Weck, P.Steinke (1983) "An efficient technique in shape optimization", *J. Structural mech*, vol. 11, no. 4, pp. 433-449.

[12] V.Braibent, C.Fleury. (1984), "shape optimal design: A performing C.A.D oriented formulation" , in *AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th structural Dynamic and Material Conference*, CA.

[۱۳] توکلی. س. م، ۱۳۸۸، پایان‌نامه دکتری، "آنالیز و بهینه‌سازی توپولوژی آیزوژئومتریک سازه‌ها در محیط‌های پیوسته با استفاده از توابع پایه نربز"، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت.

[14] Peter. W. Christensen, Klarbring. A. An introduction to structural Optimization, *Waterloo: Springer*, 2009.

[15] B.Hassani, E.Hinton, (1998), "*Homogenization and structural topology optimization: Theory, practice and software*", Springer.

[16] A.G.M Michell, "The limits of economy of material in frame structures", *Philosophical magazine*, vol. 8, pp. 305-316.

[17] R. T. Haftka, R. V.Grandhi, (1986), "Structural Shape optimization- A Survey", *computer methods in applied mechanics and engineering*. Vol. 57, pp. 91-106, 1986.

[18] S.S. Bhavikatti, C.V. Ramakrishnan, (1977), "Optimum Design of Fillets in Flat and Round Tension Bars", *Design engineering technical conference*, Chicago.

[19] E.S Kristensen, N.F. Madsen, (1976), "on the optimum shape of Fillets in Plates Subjected to Multiple in-plane Loading Cases", *International journal of numerical methods in engineering*, vol. 10, pp. 1007-1009.

[20] Y. Liang Hsu, (1994), "A review of structural shape optimization", *Computers in Industry*, vol. 26, pp. 3-13.

[21] W. A. Wall, M. A. Frenzel, C. Cyron. (2008). (2008), "Isogeometric Structural Shape Optimization", *Comp. Meth.in appl. Mech. And Eng*, vol. 197, pp. 2976-2988.

[22] B. Hassani, S. M.Tavakkoli, N. Zarif Moghadam (2011), "Application of isogeometric analysis in structural shape optimization", *Scientia Iranica*, 18, pp.846-852.

[۲۳] جدیدالاسلام. م. (۱۳۹۱)، تحلیل حساسیت و بهینه‌سازی آیزوژئومتریکی شکل سازه‌ها، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود

[۲۴] اسلامی. ر. (۱۳۹۱)، بهینه‌سازی شکل سد دوقوسی بتنی با روش تحلیلی آیزوژئومتریکی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود

[25] Wilde, D.J, (1978), Globally Optimal Design, John wiley and sons, NewYork.

[26] Hassani. B, Khanzadi. M, Tavakkoli. S. M. and Moghadam. N. Z, (2009), Isogeometric Shape Optimization of Three Dimensional Problems, 8th world Congress on structural and Multidisciplinary Optimization, June 1-5, Lisbon, Portugal.

[۲۷] حسنی. ب. طریف مقدم. ن. استفاده از اسپلاین‌ها در مدلسازی و تحلیل مسائل تنش/کرنش مسطح، پنجمین کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۴ تا ۱۶ اردیبهشت ۱۳۸۹، مشهد، ایران.

Abstract

Optimum boundaries of two and three-dimensional elastic structures are sought. Weight of structure and stress limitations are considered as objective and constraints of the optimization problem, respectively. There are three types of optimization methods in literature called mathematical, optimality criteria and metaheuristic based approaches. In this research, the Method of Moving Asymptotes (MMA) which is from mathematical based approaches is utilized to deal with shape optimization problem. Since derivatives of objective and constraints functions are needed in MMA, sensitivity analysis forms part of this research and an analytical approach is developed for this purpose.

The IsoGeometric Analysis (IGA) method is employed for structural analysis. In this method unknown function (deformation) is approximated by Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) basis functions which are also used for creating geometry of the structure. Consequently, by changing the position of control points of NURBS, the geometry and the analysis model will change, simultaneously. Therefore, there is no need to regenerate the analysis model during the optimization iterations, which is the case when the Finite Element (FE) method is used as the analysis engine.

In order to verify the derived sensitivity equations, demonstrate the ability of MMA in solving shape optimization problems and check the code written in this thesis, several two and three dimensional illustrative examples are presented and the results are compared with other optimization methods, reported in relevant references, such as Sequential Quadratic Programming (SQP) method.

Key Words: Structural Shape Optimization, MMA, Isogeometric Analysis.



Shahrood University of Technology

Department of Structural Engineering

M.Sc. Thesis

**Isogeometric shape optimization of 3D structures, considering weight
objective function and stress constraint by using MMA**

A. Arab yar mohammadi

Supervisor:

Dr.S.M.Tavakkoli

Advisor:

Dr.B.Hassani

Date: September 2014