

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران و معماری

گروه عمران

مدل سازی ریاضی ضربه قوچ در

لوله های ویسکوالاستیک

دانشجو : آرش غفاریان کلاهی

استاد راهنما :

دکتر احمد احمدی

استاد مشاور :

دکتر علیرضا کرامت

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۲

## تقدیم بہ:

روح پاکِ مادرم، آنکہ آفتابِ مهرش در آستانہِ قلبم، بہچنانِ پابرجاست و ہرگز غروب نخواہد کرد.  
و پدرم، کہ نمی دانم از بزرگی اش بگویم یا مردانگی سخاوت، سکوت، مہربانی و...

پدرم راہ تمام زندگیت

پدرم دہخوشی، ہمیشگیست

## تقدیر و تشکر

وظیفه خود می دانم از تمام سرورانی که در این مدت تحصیل از محضر مبارکشان کسب فیض نموده ام تشکر و سپاسگزاری نمایم. از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر احمد احمدی بخاطر هدایت های آگاهانه و عالمانه اشان که در تمام مراحل پیشرفت این تحقیق راهنما و مشکل گشا بوده اند. از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علیرضا کرامت که همواره از راهنمائیهای ارزشمندشان برخوردار بوده ام.

## تعهد نامه

اینجانب آرش غفاریان کلاهی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران - گرایش سازه های هیدرولیکی دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مدل سازی ریاضی ضربه قوچ در لوله های ویسکوالاستیک تحت راهنمایی دکتر احمد احمدی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرکی یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام << دانشگاه صنعتی شاهرود >> و یا <<shahrood university of technology>> به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افراد که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.
- 

تاریخ: ۱۳۹۲/۰۶/۲۶

امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق و نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحوی مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه / رساله بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

مدل سازی ریاضی در سیستمهای لوله، که در آن، رفتار دینامیکی سیستم لوله به علت پدیده ضربه قوچ مورد بررسی قرار می‌گیرد، در سالهای اخیر مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین نظر به محاسن فراوان لوله‌های ویسکوالاستیک، استفاده از اینگونه لوله‌ها در بخش‌های متعدد صنعت و بخصوص در سیستم‌های لوله گذاری به سرعت رو به افزایش است. در مواد ویسکوالاستیک، در اثر بارگذاری وارد بر آنها، یک تغییر شکل اضافی (تاخیری)، علاوه بر تغییر شکل ایجاد شده، بلافاصله پس از بارگذاری ایجاد می‌شود. مدل‌های ریاضی ارائه شده پیشین در مطالعه ضربه قوچ در لوله‌های ویسکوالاستیک، نسبت پواسن را نیز ثابت فرض می‌کردند. در حالیکه در مدل ریاضی اصلاح شده حاضر، نسبت پواسن لوله نسبت به زمان متغیر در نظر گرفته می‌شود.

در این پژوهش، نخست، معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر ضربه قوچ در یک سیستم لوله ساخته شده از مواد ویسکوالاستیک معرفی می‌گردد. استخراج این معادلات با فرض متغیر بودن نسبت پواسن لوله نسبت به زمان، ثابت بودن مدول بالک لوله و نازک بودن جداره لوله صورت می‌گیرد. از دید فیزیکی، در یک مساله ضربه قوچ، رفتار ویسکوالاستیک منجر به ایجاد کرنشهای تاخیری در جهت شعاعی و محوری لوله می‌گردد. لازم به ذکر است که کرنش تاخیری محوری به علت مهار بودن لوله در جهت محوری صفر در نظر گرفته می‌شود. در معادلات دیفرانسیل استخراج شده، جهت محاسبه کرنشهای تاخیری، از عبارات انتگرال کانولوشن استفاده شده است که با استفاده از روابط مناسبی به صورت تقریبی محاسبه می‌شوند. پس از مشخص کردن معادلات دیفرانسیل و شرایط اولیه و مرزی، روش عددی خطوط مشخصه (MOC) به منظور حل معادلات در حوزه زمان به کار گرفته می‌شود.

نتایج به صورت تاریخچه زمان- فشار در نقطه مشخصی از لوله رسم شده و با نتایج آزمایشگاهی  
ارایه شده در منابع معتبر قبلی مقایسه می شوند. نتایج حاصل از این پژوهش حاکی از این است که با در  
نظر گرفتن نسبت پواسن متغیر مواد ویسکوالاستیک در مدل ریاضی ارائه شده سبب یافتن پاسخی با  
دقت بالا در پدیده ضربه قوچ در مواد ویسکوالاستیک برای دبی های مختلف با استفاده از یک منحنی  
خزش کالیبره شده، می گردد.

**کلمات کلیدی :** ضربه قوچ، لوله ویسکوالاستیک، خطوط مشخصه، نسبت پواسن

## لیست مقالات مستخرج از رساله

1. Keramat, A., Ghaffarian Kolahi, A., Ahmadi, A. (2013). "Waterhammer modelling of viscoelastic pipes with a time-dependent Poisson's ratio", Journal of Fluids and Structures, Vol. 43, pp 164-178.

۲. احمدی ا.، کرامت ع.، غفاریان کلاهی ا. (۱۳۹۲) "مدل ریاضی اصلاح شده ضربه قوچ در لوله های ویسکوالاستیک" مجله علمی - پژوهشی مکانیک سازه ها و شاره ها، دانشگاه صنعتی شاهرود. (تحت داوری)



## فهرست مطالب

۱	فصل اول: مقدمه
۲	۱-۱- پدیده ضربه قوچ (چکش آبی)
۳	۱-۱-۱- رفتار مواد ویسکوالاستیک
۵	۲-۱- فرضیات مطالعه
۵	۳-۱- اهداف اصلی تحقیق حاضر
۶	۴-۱- فصل بندی پایان نامه
۸	فصل دوم: مطالعات پیشین
۹	۱-۲- جریان غیر ماندگار
۱۰	۲-۲- ضربه قوچ
۱۱	۳-۲- تاریخچه ضربه قوچ
۱۴	۴-۲- مواد ویسکوالاستیک
۱۵	۵-۲- مطالعات پیرامون تئوری‌ها و معادلات حاکم
۱۹	فصل سوم: مدل ریاضی
۲۰	۱-۳- معادلات حاکم
۲۰	۱-۱-۳- رفتار مکانیکی مواد ویسکوالاستیک
۲۷	۱-۱-۳- تشریح کرنش محیطی در لوله های ویسکوالاستیک
۲۸	۱-۱-۳- روابط تنش-کرنش ویسکوالاستیک در حالت سه بعدی
۳۱	۱-۱-۳- تست خزش و تعیین توابع تطابقی خزش
۳۴	۲-۱-۳- معادلات پیوستگی و مومنتم سیال
۳۹	فصل چهارم: روشهای عددی
۴۰	مقدمه
۴۱	۱-۴- تقریب ترمهای انتگرال کانولوشن
۴۴	۲-۴- حل عددی با روش خطوط مشخصه
۵۱	فصل پنجم: بررسی صحت مدل ریاضی و عددی و ارائه نتایج
۵۲	۱-۵- آزمایش ایمپریال کالج
۵۳	۲-۵- فرایند کالیبراسیون
۵۵	۳-۵- صحت سنجی با استفاده از مقایسه با مدل مرجع
۵۹	۴-۵- مقایسه منحنی خزش تطابقی بدست آمده از مدل ریاضی ارائه شده با مدل‌های قبلی
۶۱	فصل ششم: خلاصه و نتیجه گیری
۶۲	۱-۶- خلاصه

۶۳ ..... نتیجه گیری ۲-۶

۶۴ ..... پیشنهادات ۳-۶

۶۶ ..... پیوست

۶۹ ..... منابع

۷۰ ..... منابع فارسی

۷۱ ..... منابع انگلیسی

- شکل ۱-۱: پدیده چکش آبی در لوله ..... ۳
- شکل ۱-۲: راست: پاسخ مواد جامد الاستیک چپ: پاسخ مواد جامد ویسکوالاستیک ..... ۱۵
- شکل ۱-۳: نمایش مکانیکی یک ماده جامد ویسکوالاستیک. (a): یک المان کلویین - ویت (b): مدل سه پارامتری کلویین - ویت (c): مدل تعمیم یافته کلویین - ویت. .... ۲۱
- شکل ۲-۳: تست خزش در یک میله ویسکوالاستیک ..... ۳۲
- شکل ۳-۳: تست رهاسازی در یک میله ویسکوالاستیک ..... ۳۲
- شکل ۱-۴: خطوط مشخصه در صفحه  $z-t$  ..... ۴۹
- شکل ۱-۵: منحنی خزش تطابقی در لوله ویسکوالاستیک بدست آمده از مدل جدید بر اساس نتایج آزمایشگاههای آزمایش ایمپیرال کالج ..... ۵۵
- شکل ۲-۵: منحنی تابع رهاسازی بدست آمده از خزش تطابقی در لوله ویسکوالاستیک بدست آمده از مدل جدید بر اساس نتایج آزمایشگاههای آزمایش ایمپیرال کالج ..... ۵۶
- شکل ۳-۵: نتایج هد در محل شیر بالادست در آزمایش ایمپیرال کالج. نمودار پیوسته: نتایج حل با روش مدل ریاضی ارایه شده، نمودار خط چین: دیتای آزمایشگاهی سوارس ( $Q_0=1.01 \text{ l/s}$ ) ..... ۵۶
- شکل ۴-۵: نتایج هد در محل شیر بالادست در آزمایش ایمپیرال کالج. نمودار پیوسته: نتایج حل با روش مدل ریاضی ارایه شده، نمودار خط چین: دیتای آزمایشگاهی سوارس ( $Q_0=0.056 \text{ l/s}$ ) ..... ۵۷
- شکل ۵-۵: مقایسه نتایج هد در ۳ نقطه متفاوت در حالت آنالیز با در نظر گرفتن اثر ویسکوالاستیک راست: نتایج کوواس و همکاران [6]، چپ: نتایج تحقیق حاضر. .... ۵۸
- شکل ۶-۵: منحنی خزش تطابقی مدل کوواس برای انواع دبی جریان [6-7] ..... ۵۹
- شکل ۷-۵: مقایسه منحنی خزش بدست آمده از تست مکانیکی منحنی خزش تطابقی کوواس، دوآن و مدل ارائه شده ..... ۶۰

- جدول ۱-۵: داده‌های ورودی در آزمایش ایمپریال کالج جهت بررسی ضربه قوچ در یک لوله ویسکوالاستیک..... ۵۳
- جدول ۲-۵: ضرایب کالیبره شده توابع کرنش خزشی در آزمایش ایمپریال کالج..... ۵۳
- جدول ۳-۵: تابع رهاسازی بدست آمده از ضرایب تابع خزش تطابقی در آزمایش ایمپریال کالج..... ۵۳

# فصل اول:

## مقدمه

## ۱-۱- پدیده ضربه قوچ (چکش آبی)

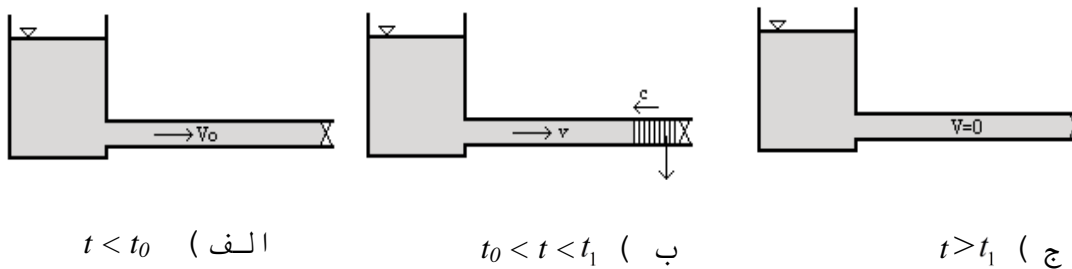
جریان غیرماندگار جریانی است که خصوصیات آن در هر نقطه با زمان تغییر کند. زمانی که جریان از یک حالت ماندگار به حالت ماندگار دیگری تغییر شرایط می دهد، جریان غیرماندگار ما بین را جریان میرا (گذرا)<sup>۱</sup> می نامند. ضربه قوچ یا چکش آبی<sup>۲</sup> نوعی جریان میرا است که در خطوط لوله می تواند در اثر بسته شدن شیرها یا توقف ناگهانی پمپ ایجاد شود.

به عنوان مثال فرض می شود که شیر پایین دست خط لوله در زمان  $t = t_0$  کاملاً باز و آب با سرعت  $V_0$  در حال حرکت باشد. در این لحظه شیر بطور ناگهانی بسته می شود. در نتیجه بسته شدن شیر، سرعت جریانی که از شیر عبور می کند، بطور ناگهانی به صفر می رسد و بر اثر تبدیل انرژی جنبشی به انرژی فشاری، فشار در پشت شیر افزایش می یابد. این افزایش فشار باعث می شود که یک موج فشاری به سمت بالا دست شروع به حرکت کند. موج فشاری در محل مخزن منعکس خواهد شد و مابین شیر و مخزن به حرکت رفت و برگشتی خود ادامه خواهد داد. ولی به علت تلفات ناشی از اصطکاک، این موج در حین حرکت مستهلک می گردد و بالاخره در زمان  $t = t_1$  فشار در تمامی خط لوله مساوی با ارتفاع نظیر فشار مخزن خواهد شد و جریان کاملاً متوقف می شود. بنابراین زمانی که  $t < t_0$  و  $t > t_1$  باشد، مشخصات جریان نسبت به زمان ثابت است و جریان ماندگار محسوب می گردد. ولی وقتی که  $t_0 < t < t_1$  باشد شرایط در حال تغییر از وضعیت اولیه به وضعیت نهایی است و جریان میرا خواهد بود [۳].

---

<sup>۱</sup>Transient flow

<sup>۲</sup>Water Hammer



شکل ۱-۱ : پدیده چکش آبی در لوله

### ۱-۱-۱- رفتار مواد ویسکوالاستیک

برخی مواد مانند پلیمرها در اثر بارگذاری خارجی وارد بر آنها، به تدریج آرایش مولکولهایشان نسبت به هم تغییر می‌کند. این امر باعث ایجاد یک تغییر شکل اضافی، علاوه بر تغییر شکل ایجاد شده بلافاصله پس از بارگذاری می‌گردد. مقدار این تغییر شکل اضافی با میزان و تاریخچه تنش وارده بر آن ماده رابطه دارد. جهت مدلسازی این نوع مواد باید با انجام آزمایشهایی، یک سری ثابت‌ها را برای آن ماده خاص مورد نظر تعیین نمود. هرچه تعداد ثابت‌های مورد نیاز جهت توصیف آن ماده کمتر باشد می‌توان گفت که مدل ریاضی توصیف کننده رفتار مکانیکی آن ماده کاملتر است.

تاکنون مدل‌های بسیار متنوعی به منظور توصیف ریاضی این مواد ارائه شده است. این مدل‌ها بر این اساس استوارند که با آرایش خاصی از تعدادی میراگر و فنر، می‌توان سیستمی تولید کرد که رفتارش معادل آن ماده ویسکوالاستیک مورد نظر باشد. از جمله این روشها می‌توان به مدل جامع کلوین-ویت<sup>۱</sup> و ماکسول<sup>۲</sup> اشاره نمود. صرفنظر از اینکه این مدلها تا چه اندازه قادرند رفتاری معادل یک ماده

<sup>۱</sup> Generalized Kelvin-Voigt Model

<sup>۲</sup> Maxwell Model

ویسکوالاستیک ارایه نمایند، موضوع اصلی این است که چگونه می‌توان رابطه دیفرانسیلی حاکم بر آن آرایش میراگر و فنر را به دست آورد. مطالعات انجام شده نشان داده‌اند که روابط حاکم بین تنش و کرنش در صورتی که مدل از تعداد نامحدودی المان فنر و میراگر تشکیل شده باشد شامل جملاتی از مشتقات زمانی تنش و کرنش از درجه صفر تا تعداد المانها خواهد بود. این روابط حاکم اگرچه از دقت خوبی از نظر ریاضی برخوردارند، به دلیل وجود مشتقات از درجات بالا در آنها، نمیتوانند به منظور استفاده‌های مهندسی ابزار مناسبی باشند. برای رفع این مشکل، با استفاده از اصل روی هم گذاری بولتزمن و یا به کار گیری یک سری محاسبات طولانی شامل استفاده از تبدیل لاپلاس جهت حذف مشتقات زمانی از درجات بالا، یک فرم انتگرالی معادل برای ارایه رابطه حاکم بین تنش و کرنش استخراج گردیده است که به تدریج مبنای اصلی بسیاری از روشهای عددی قرار گرفته است [۲].

با این وجود، این مساله که آیا توصیفهای ریاضی ارایه شده بر پایه مدل‌های کلوین-ویت و یا ماکسول قادرند تمام انواع مصالح ویسکوالاستیک را شبیه سازی نمایند یا خیر همچنان مورد بحث محققان مختلف است. تحقیقات اخیر در این زمینه منجر به ارایه مدل‌هایی مجازی (چون نمی‌توان ادعا کرد که معادل آرایش خاصی از فنرها و میراگرها هستند) گردیده است که شامل جملات با مشتقات کسری هستند. با استفاده از این مدلها می‌توان با به کارگیری تعداد ثابت‌های کمتری نسبت به مدل‌های با درجات مشتق اعداد طبیعی، رفتار یک ماده ویسکوالاستیک را شبیه سازی نمود.

در این رساله از فرم انتگرالی اشاره شده برای توصیف رابطه بین تنش و کرنش استفاده می‌شود. عامل ایجاد کننده تنش در مساله مورد بحث این رساله، همان فشار سیال است که وجود آن باعث ایجاد یک تغییر شکل تدریجی در سازه می‌گردد. انتگرالهای توصیف کننده رفتار ویسکوالاستیک با استفاده از یک روش تقریبی سازگار با خطوط مشخصه حل می‌شوند.



## ۱-۲- فرضیات مطالعه

مدل توسعه داده شده در این رساله برای لوله‌های با مقطع گرد که در فضای آزاد در معرض فشار هوای جو هستند معتبر است. لوله‌ها (و شیر) در جهت محوری کاملاً مهار شده اند به طوری که اثر تداخلی پواسن (و اتصال) نتواند ایجاد شود. دمای محیط به صورت ثابت فرض می‌شود.

در استخراج معادلات دیفرانسیلی حاکم، لوله به صورت جدار نازک فرض می‌شود که از مواد الاستیک و یا ویسکوالاستیک خطی تهیه شده است. سیال درون لوله نیز به صورت تراکم ناپذیر و نیوتنی والاستیک خطی فرض می‌شود. کرنشهای ایجاد شده در امتداد لوله صفر در نظر گرفته می‌شود.

کلیه معادلات دیفرانسیلی استخراج شده بجز ترم نه چندان مهم اصطکاک بین سیال و دیواره لوله، خطی می‌باشند. البته وجود شرایط مرزی غیر خطی باعث ایجاد مساله غیرخطی می‌شود.

## ۱-۳- اهداف اصلی تحقیق حاضر

### ۱- آیا لوله‌های ویسکوالاستیک باعث تغییراتی در نمودارهای فشار-زمان می‌شوند؟

در تشریح مساله تداخل سیال-سازه در لوله‌های ویسکوالاستیک از دید فیزیکی می‌توان گفت: پس از بستن شیر، فشار جوکوفسکی در تمام نصف دوره تناوب ضربه قوچ برقرار خواهد بود. از طرف دیگر بر طبق مدل ویسکوالاستیک به علت وجود تنش هوپ (محیطی) درون لوله، دیواره لوله به تدریج رفتار خزشی از خود نشان خواهد داد. این رفتار باعث افزایش حجمی که سیال فشار بالا در آن است خواهد شد و این امر به نوبه خود باعث کاهش جزیی فشار می‌شود. به عبارت دیگر سیال مقداری از انرژی خود را به علت انجام کار روی دیواره لوله از دست می‌دهد. مقداری از این کار منجر به تغییر شکل الاستیک در لوله می‌شود بنابراین لوله می‌تواند این انرژی را دوباره به سیال برگرداند، بخش دیگری از این کار

منجر به تغییر شکل خزشی (ویسکوالاستیک) در دیواره لوله می‌شود و در واقع به صورت میرایی در نتایج ظاهر می‌شود زیرا این کار غیر قابل برگشت است.

۲- مدل ریاضی اصلاح شده، متغیر بودن نسبت پواسن، باعث چه تغییراتی در معادلات و نمودارها می‌گردد؟

نسبت پواسن در مواد ویسکوالاستیک تابعی از زمان می‌باشد که این مورد باعث تغییراتی در ترم کرنش محیطی در معادله پیوستگی می‌گردد که برای محاسبه این کرنش نیازمند تابع خزش و رهاسازی داریم. تابع خزش تطابقی بدست آمده از این مدل نزدیک به تابع خزش بدست آمده از تست مکانیک می‌باشد. که در فصول بعد با مفهوم تابع خزش و تابع رهاسازی و چگونگی محاسبه آنها آشنا می‌شویم.

#### ۱-۴- فصل بندی

پس از تشریح یک مقدمه کلی درباره پدیده ضربه قوچ و تاریخچه آن و مولفه‌های تاثیرگذار بر آن و سپس بیان خلاصه‌ای از اهداف این رساله در این فصل، در پنج فصل باقیمانده به مباحث زیر پرداخته شده است.

در فصل دوم پدیده ضربه قوچ و تاریخچه مطالعه در مورد آن توضیح داده شده است. و آخرین کارهایی که محققین در زمینه پدیده ضربه قوچ بر روی مواد ویسکوالاستیک انجام داده اند، به اختصار بررسی شده است.

در فصل سوم به ارایه مدل ریاضی حاکم در سیستمهای لوله ویسکوالاستیک و تحت فشار، پرداخته شده است. در این فصل، معادلات حاکم بر هیدرولیک جریان بیان شده اند.

در فصل چهارم روشهای حل عددی معادلات حاکم تشریح می‌شوند. روش حل عددی شامل روش خطوط مشخصه، تشریح شده و الگوریتم آن به منظور حل معادلات مذکور توضیح داده شده است.

فصل پنجم به ارزیابی مثال نمونه اختصاص داده شده است در این مثال نشان داده شده است که با به کارگیری روشهای ارزیابی شده در این تحقیق، نتایجی کاملاً مشابه آنچه انتظار می‌رود، حاصل شده است.

در فصل ششم ارزیابی خلاصه‌ای از تحقیق حاضر و برخی نتایج حاصله از کار روی این موضوع پرداخته شده است.

فصل دوم:

مطالعات پیشین

## ۱- جریان غیر ماندگار

بر اساس تغییر در مشخصات جریان بر حسب زمان، انواع جریان به دو نوع دائمی (ماندگار) و غیر دائمی (غیر ماندگار)، طبقه بندی می شوند. هرگاه در یک مقطع ثابت از جریان، مشخصات جریان (دبی، فشار و ...) با زمان تغییر یابد، جریان غیر دائمی می باشد و چنانچه در یک مقطع ثابت از جریان، مشخصات جریان با زمان تغییر نداشته باشد، جریان دائمی است.

از نظر فیزیکی، هر جریان غیر دائمی، عبارت است از حرکت یک موج که با تغییر مکان خود و بر حسب شرایط، خصوصیات جریان را از مقطعی به مقطع دیگر و از زمانی به زمان دیگر، تغییر می دهد.

تغییرات صورت گرفته در جریانات غیر ماندگار، می تواند در اثر عوامل گوناگونی همچون عوامل طبیعی یا حوادث اتفاقی باشد و این جریانات محدوده وسیعی را از امواج نواسانی (مانند پدیده ضربه قوچ) گرفته تا سیلاب حاصل از اقیانوس ها، در بر می گیرد.

امروزه با پیشرفت علوم و فنون و ساخت تجهیزات صنعتی بزرگتر و دستگاههای دارای سرعت زیادتر، مسائل مربوط به جریان غیر ماندگار، اهمیت روز افزونی یافته است. به عنوان نمونه در پدیده هایی همچون پدیده ضربه قوچ و اندرکنش آب و سازه که با جریانات گذرای هیدرولیکی روبرو هستیم، نه تنها با فشارهای بالا و خطرناک مواجه بوده، بلکه صداهای شدید و خستگی و حفره ای شدن فلزات (سازه سیستم)، به دلیل ایجاد خلاء در جریان سیال و قطع مدارات کنترل معمولی را نیز به دنبال دارد. در چنین شرایطی بررسی ارتعاشات شدیدی که می تواند مخرب باشند، در سازه سیستم هیدرولیکی، از اهمیت بالایی برخوردار است.

از سوی دیگر تحلیل جریانهای غیر ماندگار بسیار پیچیده تر از جریان های ماندگار است؛ چرا که با توجه به عدم استقلال زمانی جریانات غیر دائمی، نمیتوان عامل زمان را در حل مسائل مربوطه این جریانات حذف نمود. بنابر این معادلات، از نوع معادلات دیفرانسیل جزئی خواهند بود. برای حل مسائل جریانات غیر ماندگار، استفاده از روشهای تحلیلی در حالاتی خاص وجود دارد اما در بیشتر موارد حل، از روشهای عددی استفاده می گردد.

## ۲-ضربه قوچ [۱]

وقتی که یک سیال درون یک مسیر در حال جریان باشد و کند شدن و یا تسریع سرعت جریان به وجود آید، پدیده ضربه قوچ مشاهده خواهد شد. نظیر مواقعی که در مسیر لوله شیری قرار گرفته باشد و به وسیله آن تغییری در سطح خروجی جریان ایجاد شود. وقتی یک شیر را در مسیر خط لوله و جریان به سرعت می بندیم، جریان درون شیر کاسته می شود. این عمل افزایش هد در سمت ورودی شیر را به دنبال خواهد داشت و ضربه ای ناشی از فشار زیاد را ایجاد می کند که در بالا دست جریان با سرعت موج صوتی  $c$ ، تقویت می شود. نتیجه این ضربه فشاری کاهش سرعت جریان می باشد. در سمت دیگر شیر، فشار کاهش خواهد یافت و موج فشار کاسته شده با سرعت موج  $c$  به طرف پایین دست جریان حرکت می کند که این نیز کاهش سرعت را به همراه دارد. موج فشاری در قسمت بالادست شیر، در حد فاصل شیر و مخزن به حرکت رفت و برگشتی خود ادامه می دهد. فرایند رفت یا برگشت موج فشاری در زمان  $L/c$  ثانیه صورت می گیرد که  $L$  فاصله بین شیر و مخزن می باشد. عمل اصطکاک سیال و خواص ناقص کشسانی سیال و جداری لوله، میرایی ارتعاشات و نهایتاً فشار در تمامی خط لوله، از مخزن تا شیر، برابر با ارتفاع نظیر فشار مخزن می گردد و توقف دائمی سیال را به دنبال دارد.

### ۳-تاریخچه ضربه قوچ [۳]

مطالعه هیدرولیک جریانهای میرا از قرن ۱۷ میلادی با تحقیق در باره نحوه انتشار امواج صوتی در هوا و انتشار امواج در آبهای کم عمق شروع شد، لکن تحقیق پیرامون پدیده ضربه قوچ، بیشتر به حدود دو قرن پس از آن، مربوط می شود.

نیوتن<sup>۱</sup> و لاگرانژ<sup>۲</sup> نخستین کسانی بودند که در این زمینه به مطالعه پرداختند. مونژ<sup>۳</sup> در سال ۱۷۸۹ روشی ترسیمی برای انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه کرد و آنرا روش خطوط مشخصه (MOC)<sup>۴</sup> نامید. هلم هولتز<sup>۵</sup> اولین کسی بود که دریافت، سرعت امواج فشاری در آب داخل لوله کمتر از سرعت موج در آبهای آزاد است. او این اختلاف را ناشی از کشسان بودن جدار لوله دانست. وبر<sup>۶</sup> جریان سیال غیر قابل تراکم را در لوله های کشسان مورد مطالعه قرار داد و آزمایشاتی جهت تعیین سرعت امواج فشاری انجام داد. همچنین او معادلات پیوستگی و اندازه حرکت که اساس مطالعات جریانهای غیرماندگار هستند را ارائه نمود. ماری<sup>۷</sup> نیز آزمایشات متعددی جهت تعیین سرعت موج فشاری انجام داد و دریافت که اولاً سرعت موج مستقل از دامنه امواج فشاری است و ثانیاً سرعت موج با ضریب الاستیسیته جدار لوله متناسب است. کورت وگ<sup>۸</sup> نخستین کسی بود که سرعت موج را با توجه به

---

<sup>۱</sup> Newton

<sup>۲</sup> Lagrange

<sup>۳</sup> Monge

<sup>۴</sup> Method Of Characteristics

<sup>۵</sup> Helmholtz

<sup>۶</sup> Weber

<sup>۷</sup> Marey

<sup>۸</sup> Korteweg

کشسان بودن جدار لوله و کشسانی سیال بدست آورد. گرومیکا<sup>۱</sup> برای اولین بار افتهای اصطکاکی را به هنگام تحلیل ضربه قوچ مد نظر قرار داد. او فرض کرد که سیال غیر قابل تراکم است و افتهای اصطکاکی با سرعت رابطه مستقیم دارند. در سال ۱۸۹۷ ژوکوفسکی<sup>۲</sup> بر اساس مطالعات نظری و آزمایشگاهی که انجام داد، گزارشی درمورد تئوری اساسی ضربه قوچ منتشر نمود. او رابطه ای جهت سرعت انتشار موج فشاری بدست آورد که در آن کشسان بودن سیال و جدار لوله در نظر گرفته شده بود. همچنین او با استفاده از معادلات پیوستگی و اندازه حرکت، رابطه ای ما بین کاهش سرعت و افزایش فشار ناشی از آن بدست آورد. وی همچنین تحقیقاتی درباره اثرات سرعت بسته شدن یک شیر انجام داد و دریافت که افزایش فشار در لوله به زمان بسته شدن شیر ارتباط دارد. آلیوی<sup>۳</sup> در سال ۱۹۰۲ تئوری عمومی ضربه قوچ خود را منتشر کرد. معادله اندازه حرکتی که او بدست آورد از آنچه کورت وگ بدست آورده بود، دقت بیشتری داشت. گیبسون<sup>۴</sup> براساس تئوری ژوکوفسکی رساله ای ارائه کرد که برای اولین بار در تحلیل جریان، افتهای اصطکاکی بصورت غیر خطی در نظر گرفته شده بودند. وود<sup>۵</sup> روشی ترسیمی - تحلیلی جهت تحلیل جریان ضربه قوچ ارائه داد. لووی<sup>۶</sup> هم در سال ۱۹۲۸ روش ترسیمی مشابهی ارائه نمود و مسأله تشدید حاصل از عملکرد تناوبی شیرها و همچنین کاهش فشار ناشی از باز شدن آهسته شیرها را مورد بررسی قرار داد. وی در تحلیل خود تلفات اصطکاکی را با اضافه کردن جمله مربوط به

---

<sup>۱</sup> Gromeka

<sup>۲</sup> Joukowsky

<sup>۳</sup> Allievi

<sup>۴</sup> Gibson

<sup>۵</sup> Wood

<sup>۶</sup> Lowy



اصطکاک در معادلات دیفرانسیل جزئی در نظر گرفت. برگرون<sup>۱</sup> روش ترسیمی را برای تعیین شرایط در مقاطع میانی خط لوله بسط و گسترش داد. وی اولین کسی بود که در تحلیل ترسیمی خود تلفات اصطکاکی را در نظر گرفت.

در سال ۱۹۳۳ کنفرانس مشترکی توسط انجمن مهندسين راه و ساختمان آمریکا<sup>۲</sup> و انجمن مهندسين مکانیک آمریکا<sup>۳</sup> برگزار شد که در آن رساله های متعددی در مورد تحلیل ضربه قوچ در خطوط لوله انتقال ارائه گردید. همچنین در اجلاس سالانه انجمن مهندسين مکانیک آمریکا در سال ۱۹۳۷ مقالاتی در مورد تحلیل مخازن هوای تحت فشار و شیرها و همچنین چگونگی در نظر گرفتن منحنی مشخصه کامل پمپ و مقایسه بین نتایج محاسبه شده و نتایج آزمایشگاهی ارائه گردید. در فاصله سالهای ۱۹۴۰ تا ۱۹۶۰ کتابها و مقالات متعددی در زمینه ضربه قوچ منتشر گردید. رويس<sup>۴</sup> اولین شخصی بود که روشی برای تعیین مراحل بسته شدن شیر ارائه کرد که روش بسته شدن بهینه شیر<sup>۵</sup> نامیده شد.

کیبلکا و فرانک<sup>۶</sup> و استریتر<sup>۷</sup> از این روش در تحلیل کامپیوتری سیستم های لوله کشی پیچیده بهره گرفتند. گری<sup>۸</sup> روش مشخصه را در تحلیل کامپیوتری ضربه قوچ بکار برد. لای<sup>۹</sup> و استریتر در مقاله ای مشترک، برای نخستین بار روش مشخصه را در تحلیل جریان میرا، با استفاده از کامپیوتر تعمیم دادند.

---

<sup>۱</sup> Bergeron

<sup>۶</sup> Cableca & Franc

<sup>۲</sup> ASCE

<sup>۷</sup> Streeter

<sup>۳</sup> ASME

<sup>۸</sup> Gray

<sup>۴</sup> Ruus

<sup>۹</sup> Lai

<sup>۵</sup> Optimum Valve Closure

بعدها استریتر مقالات متعددی درباره روش مشخصه ارائه نمود . همچنین کتابی در مورد جریانهای میرای هیدرولیکی منتشر کرد.

#### ۴- مواد ویسکوالاستیک

درسالهای اخیر کاربرد پلیمرهایی مثل پلی اتیلن (PE) و پلی کلرید وینیل (PVC) و اکریلونیتریل بوتادین استرین (ABS) به طور گسترده ای در بخش های متعدد صنعت و بخصوص در سیستم های لوله گذاری افزایش یافته است. برخی مزایا شامل وزن کم، نصب سریع و آسان، قیمت پایین و مقاومت شیمیایی و مقاومت سایشی بالا، طراحان را برای انتخاب استفاده مواد خام ویسکوالاستیک در طراحی هایشان برانگیخته اند. اساساً ویسکوالاستیکی خاصیتی است که با تاخیر در واکنش مکانیکی ماده خام آشکار شده است. در مواد ویسکوالاستیک از مصالحی صحبت می شود که ویژگیهای سیالات و جامدات را دارا می باشند. برای شبیه سازی رفتار مکانیکی یک ماده جامد الاستیک خطی، معمولاً از یک فنر استفاده می شود و برای شبیه سازی رفتار مکانیکی یک سیال ویسکوز خطی، معمولاً از یک میراگر ویسکوز (لزج) استفاده می شود.

در مواد الاستیک خطی اگر یک تنش تک محوری ثابت به نمونه وارد شود، بر اساس رابطه  $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$  یک کرنش ثابت در این زمان به نمونه وارد می شود که در شکل (۱-۲) مشاهده می کنید.

اما اگر این تنش تک محوری ثابت را به یک نمونه از جنس مواد ویسکوالاستیک خطی وارد کنیم پاسخ نمونه، در شکل (۱-۲) نشان داده شده است، شامل :

۱- افزایش سریع کرنش، OA

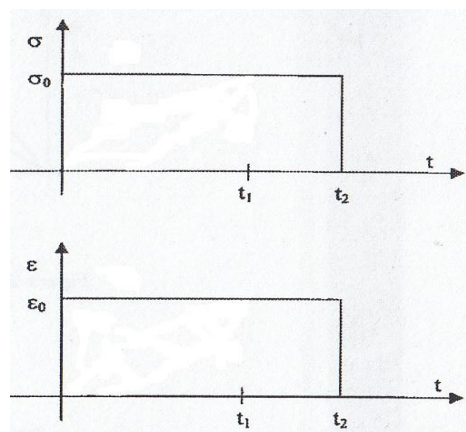
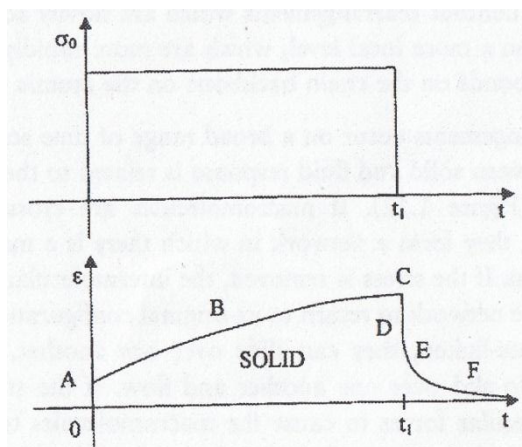
۲- کرنش در طول زمان بدون نرخ ثابتی افزایش می یابد، ABC

کرنش OA به عنوان کرنش الاستیک خوانده می شود و کرنش ABC که در طول زمان اتفاق می افتد که ترکیبی از اثرات ویسکوز و الاستیک ماده است، خزش خوانده می شود.

اگر تنش را در زمان  $t_1$  به صفر کاهش یابد، آنگاه:

۱- کرنش به صورت آنی کاهش می یابد، CD

۲- سپس بقیه کرنش به صورت غیر خطی کاهش می یابد تا به صفر برسد، DEF



شکل (۱-۲): راست: پاسخ مواد جامد الاستیک چپ: پاسخ مواد جامد ویسکوالاستیک [15]

## ۵- مطالعات پیرامون تئوری‌ها و معادلات حاکم

تشریح روش مدلسازی رفتار ویسکوالاستیک دیواره لوله در معادلات ضربه قوچ، با استفاده از روش MOC توسط کوواس و همکاران [1-3,5] ارائه گردید. در این کارها که جدیدترین تحقیقات در زمینه ضربه قوچ در لوله‌های ویسکوالاستیک به شمار می‌روند، اثر کرنشهای محیطی دیواره لوله با استفاده از

المانهای کلونین - ویت مدل سازی شده است. کواس یک مدل برای در نظر گرفتن رفتار دینامیکی ویسکوالاستیک دیواره لوله در ضربه قوچ را ارائه کرد [4]. مدل یک ترم اضافه در معادله پیوستگی برای تشریح تغییر شکل شعاعی تاخیری دیواره لوله در برداشت که مبتنی بر تابع خزش پردازش شده با داده های آزمایشگاهی بود. در این مدل، رفتار ویسکوالاستیک به وسیله مجموعه ای از فنرها و میراگرها شبیه سازی میشود. معادلات ارائه شده در اینجا، دو معادله پیوستگی و مومنتم سیال می باشند که اثر رفتار ویسکوالاستیک همانند یک ترم چشمه ای<sup>1</sup> در معادله پیوستگی وارد می گردد. البته ضعف عمده این روش این است که در آن، توابع خزش تطابقی باید با انجام یک آزمایش روی شبکه لوله، کالیبره شوند. این روش در تحقیقات بعدی که به وسیله سوارس و همکاران انجام شد، تکمیل و تصحیح شد. در تحقیق کاملتری که توسط سوارس و همکاران انجام شد، اثر جدایی ستون مایع در لوله های ویسکوالاستیک به صورت عددی و آزمایشگاهی بررسی شد. پژوهش مشابهی در این زمینه توسط سوارس [10] با ارائه یک الگوریتم کلی که شامل اثرات ویسکوالاستیک و اصطکاک غیرماندگار (مدل اصطکاک شبه ماندگار و مدل اصطکاک غیرماندگار) که در روش عددی MOC قابل پیاده سازی بود، انجام گرفت. در این پژوهش از حل معکوس برای تعیین ضرایب تابع خزش تطابقی به کار گرفته شد. نتیجه گیری نهایی کار این بود که تاثیرات اصطکاک ناپایدار وقتیکه اثر ویسکوالاستیک دیواره لوله در نظر گرفته شود قابل اغماض هستند. جدیدترین پژوهشی که روی مدل سازی ریاضی ضربه قوچ صورت گرفته است، مدل ریاضی کرامت و همکاران (2012) و کرامت و تایلینگ (2012) [12-13] می باشد. در این مدل، ترم اضافی در معادله پیوستگی که برای تشریح کرنش محیطی (هوپ) بکار می رود با توجه به فرضیاتی مانند لوله جدار نازک، ثابت بودن نسبت پواسن و تئوری کرنش های کوچک بدست آمده است. در حالیکه در این معادلات اثر کرنش محوری، پدیده جدایی ستون مایع و اثر کوپله اتصال و پواسن در نظر گرفته شده است.

---

<sup>1</sup> Source term

در سالهای اخیر محققین مباحث چکش آبی همانند برگانت و همکاران، بیشتر توجه خود را به بررسی اثرات تک تک پارامترهای موثر در امواج فشاری ضربه قوچ معطوف داشته اند. این موارد عبارتند از : اثر رفتار ویسکوالاستیک دیواره لوله، نشت و سه اثر معروف پیشین یعنی اصطکاک غیرماندگار، کاویتاسیون و اندرکنش سیال-سازه. در این تحقیق که در دو بخش مدلسازی ریاضی و انواع نمونه‌های بررسی شده، ارایه شده است فقط مورد رفتار ویسکوالاستیک دیواره لوله بررسی شده است [1-3].

حل معادلات ضربه قوچ در شبکه‌های لوله از دو دیدگاه اصلی مورد توجه قرار گرفته است : حل در بازه زمان و حل در بازه فرکانس که هر کدام مزایا و معایبی دارند.

حل در بازه زمان که منظور حل عددی معادلات می‌باشد از این نظر اهمیت دارد که به وسیله آن می‌توان انواع مختلف سیستمهای لوله (شاخه ای، حلقوی با انواع شرایط مرزی) را تحلیل کرد. ضعف این روش در لزوم استفاده از میانبایی جهت انتقال پارامترهای هیدرولیکی به معادلات سازه و بالعکس می‌باشد که این امر خود باعث کند شدن این مدل‌ها می‌شود.

حل فرکانسی تنها برای یک لوله مستقیم امکان پذیر است و شرایط مرزی باید بسیار ساده باشند. در این روش معادلات حاکم با روش جداسازی متغیرها و سپس استفاده از سریهای فوریه جهت تعیین تابع مناسب که بتواند شرایط مرزی را ارضا کند امکان پذیر است.

در مسایل ویسکوالاستیک چنانچه حل فرکانسی مورد نظر باشد باید از اصل تطابق<sup>1</sup> استفاده کرد. در این صورت معادله دیفرانسیل حاکم در حوزه لاپلاس نوشته می‌شود که معمولاً از آن میتوان حل دقیق را در حوزه لاپلاس به دست آورد. اما گرفتن لاپلاس معکوس از آن معمولاً کاری پیچیده بوده و نیاز به بکارگیری آگوریتمهای عددی دارد. به طور کلی مزیت این روش دقت بسیار بالا و امکان حصول

---

<sup>1</sup> Correspondence principle

جواب تا زمان‌های طولانی پس از آغاز غیر ماندگاری سیستم بدون نیاز به صرف زمان زیاد جهت محاسبه

می‌باشد [۲].

فصل سوم:

مدل ریاضی

### ۳-۱- معادلات حاکم

اصلی ترین بخش هر مدل ریاضی، معادلات حاکم می باشد که در اینجا برای پدیده ضربه قوچ با در نظر گرفتن اثرات تداخلی سیال-سازه، در حالتی که لوله از مواد ویسکوالاستیک ساخته شده است بررسی می شوند.

قبل از تشریح نحوه استخراج معادلات، برخی روابط بنیادی حاکم بر مواد ویسکوالاستیک ارائه می شوند.

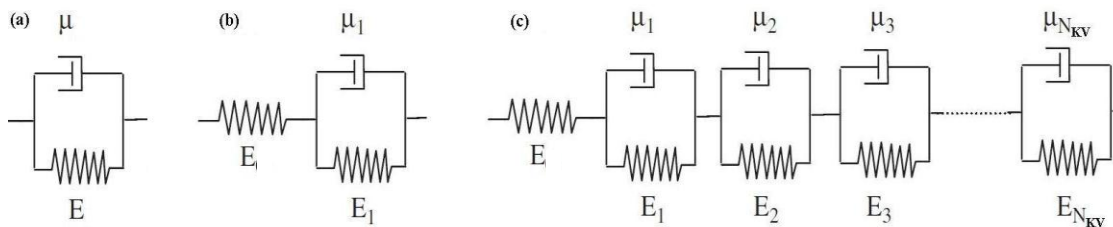
#### ۳-۱-۱- رفتار مکانیکی مواد ویسکوالاستیک

در مواد ویسکوالاستیک از مصالحی صحبت می شود که ویژگیهای سیالات و جامدات را دارا می باشند. برای شبیه سازی رفتار مکانیکی یک ماده جامد الاستیک خطی، معمولاً از یک فنر استفاده می شود که در حالت یک بعدی با رابطه ای به صورت  $F_s = k_1 u$ ، که در آن  $F$  نیرو و  $u$  جابجایی و اندیس  $k$  جهت نشان دادن فنر است مدلسازی می شود. برای شبیه سازی رفتار مکانیکی یک سیال ویسکوز خطی، معمولاً از یک میراگر ویسکوز (لزج) استفاده می شود که در حالت یک بعدی با رابطه  $F_D = k_2 \dot{u}$  مدلسازی می شود که در آن اندیس  $D$  نشان دهنده میراگر و نقطه در بالای  $u$  نشان دهنده مشتق جابجایی نسبت به زمان است. جهت بیان پاسخ یک ماده ویسکوالاستیک خطی، یک روش در نظر گرفتن سیستمی متشکل از یک فنر و یک میراگر که به صورت موازی نسبت به هم قرار داده شده اند می باشد. در این صورت بدیهی است که کل نیروی وارده بر این سیستم  $F = F_D + F_s$  و بنابراین  $F = k_1 u + k_2 \dot{u}$  خواهد بود. برطبق این رابطه، که برای یک سیستم در معرض یک نیرو و متشکل از یک فنر و یک میراگر موازی صادق است یک مدل مکانیکی مطابق شکل ۳-۱-۳a تعریف می شود. در این مدل رابطه حاکم بین تنش  $\sigma$  و کرنش  $\epsilon$  که براین سیستم (مجموعه فنر و میراگر) عمل می کنند عبارت است از



$$p_0\sigma = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon}, \quad p_0 = 1, \quad q_0 = E, \quad q_1 = \mu, \quad (1-3)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیسیته فنر و  $\mu$  ویسکوزیته میراگر و  $\dot{\varepsilon}$  آهنگ تغییر کرنش است.



شکل (۱-۳): نمایش مکانیکی یک ماده جامد ویسکوالاستیک. (a): یک المان کلوین - ویت (b): مدل سه پارامتری کلوین - ویت (c): مدل تعمیم یافته کلوین - ویت.

شکل (a-۱-۳) نشان دهنده مدل کلوین- ویت متشکل از یک المان است. معمولاً این مدل نمی‌تواند به درستی پاسخ مواد ویسکوالاستیک را شبیه سازی کند. مدل کامل تری بنام مدل کلی (جامع) کلوین- ویت که در شکل (c-۱-۳) نشان داده شده است، ابزاری برتر برای این منظور است. در این مدل تعداد  $N_{KV}$  المان کلوین- ویت به صورت سری به همراه یک فنر اضافی به هم متصل شده اند. با استفاده از آنالیز مشابهی که جهت بدست آوردن معادله (۱-۳) انجام شد می‌توان ثابت کرد که رابطه حاکم برای مدل تعمیم یافته کلوین- ویت به شکل زیر می‌باشد [6].

$$p_0\sigma + \sum_{k=1}^{N_{KV}} p_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = q_0\varepsilon + \sum_{k=1}^{N_{KV}} q_k \frac{d^k \varepsilon}{dt^k} \quad (2-3)$$

که در آن ضرایب  $p$  و  $q$  توابعی از مدول الاستیسیته فنر و ویسکوزیته میراگر مربوط به هر المان می‌باشند که با اندیس‌های 1 الی  $N_{KV}$  برای هر المان (مطابق شکل c-۱-۳) نشان داده شده اند. در اینجا رابطه فوق برای یک سیستم سه پارامتری کلوین - ویت ( $N_{KV}=1$ ) نشان داده در شکل (b-۱-۳) اثبات می‌شود.

روابط اصلی که برای یک مدل سه پارامتری کلوین- ویت صادق هستند عبارتند از :

$$\sigma = \sigma_0 = \sigma_1 \quad (3-3)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \quad (4-3)$$

که در آن اندیس 0 نشان دهنده خصوصیات یک فنر تنها و اندیس 1 نشان دهنده ویژگیهای مربوط به یک المان کلویین - ویت است. متغیرهای بدون اندیس نشان دهنده خصوصیات کل سیستم متشکل از سه پارامتر می‌باشند. به این ترتیب  $\sigma_0$  و  $\sigma_1$  به صورت زیر قابل بیان هستند.

$$\sigma = \sigma_0 = E_0 \varepsilon_0 \quad (5-3)$$

$$\sigma = \sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 + \mu_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad (6-3)$$

برای بدست آوردن یک رابطه دیفرانسیلی بنیادی بین تنش و کرنش در سیستم مورد نظر، رابطه (4-3) که در آن  $\varepsilon_0$  بر حسب  $\sigma$  با استفاده از (5-3) قابل بیان است را در  $E_1$  ضرب می‌نماییم. از سوی دیگر، با توجه به رابطه (6-3)، از آن نسبت به زمان مشتق گیری نموده و در  $\mu_1$  ضرب می‌نماییم. در نهایت دو رابطه اخیر حاصله را با هم جمع می‌نماییم، رابطه زیر حاصل خواهد شد.

$$E_1 \varepsilon + \mu_1 \dot{\varepsilon} = \frac{E_1}{E_0} \sigma + \frac{\mu_1}{E_0} \dot{\sigma} + E_1 \varepsilon_1 + \mu_1 \dot{\varepsilon}_1 \quad (7-3)$$

که با توجه به رابطه (6-3) به صورت زیر قابل نوشتن است.

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \varepsilon + q_1 \dot{\varepsilon}, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{\mu_1}{E_0 + E_1}, \quad q_0 = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}, \quad q_1 = \frac{E_0 \mu_1}{E_0 + E_1}. \quad (8-3)$$

این رابطه معادل رابطه (2-3) در حالتی که  $N_{KV}=1$  می‌باشد است.

همانطور که مشاهده گردید رابطه حاکم بین تنش و کرنش برای مواد ویسکوالاستیک خطی شامل جملاتی از مشتقات زمانی تنش و کرنش می‌باشد. با استفاده از تبدیل لاپلاس و سپس معکوس آن یک شکل جایگزین برای بیان رابطه تنش و کرنش به صورت زیر پیدا می‌شود [1-2].

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)J(0) + \int_0^t \sigma(t-s) \frac{dJ(s)}{ds} ds = (\sigma * dJ)(t) = (J * d\sigma)(t) \quad (9-3)$$

" \* " نشان دهنده اپراتور کانولوشن و " \* d " اپراتور استیلیس کانولوشن می‌باشند. اپراتور استیلیس کانولوشن نسبت به اپراتور کانولوشن معمولی دارای یک ترم اضافی  $\sigma(t)J(0)$  که نشانگر پاسخ آنی (الاستیک) سیستم است می‌باشد. در فرمول فوق تابع خزش تطابقی  $J(t)$  مطابق با مدل تعمیم یافته کلوین-ویت به صورت زیر به دست خواهد آمد [1-2].

$$J(t) := J_0 + \sum_{k=1}^{N_{KV}} J_k \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}} \right) \quad (10-3)$$

که در آن  $J_0 = 1/E$  نشان دهنده پاسخ آنی مصالح ویسکوالاستیک،  $J_k = 1/E_k$  نشان دهنده خزش تطابقی فنر مربوط به المان  $k$  ام کلوین-ویت و  $E_k$  مدول الاستیسیته فنر  $k$  ام و  $\tau_k$  زمان تاخیر میراگر  $k$  ام است. در اینجا  $\tau_k := \mu_k/E_k$  که در آن  $\mu_k$  ویسکوزیته میراگر  $k$  ام است (منظور از  $:=$  تساوی تعریف شده است). معادلات (9-3) و (10-3) برای یک مدل سه پارامتری کلوین-ویت در ادامه اثبات می‌شوند.

همچنین میتوان رابطه بین تنش و کرنش را از فرمول زیر بدست آورد:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t)E_R(0) + \int_0^t \varepsilon(t-s) \frac{dE_R(s)}{ds} ds = (\varepsilon * dE_R)(t) = (E_R * d\varepsilon)(t) \quad (11-3)$$

که  $E_R(t)$  تابع رها سازی به صورت زیر می باشد.

$$E_R(t) = E_{R_\infty} + \sum_{k=1}^{N_{kv}} E_{R_k} e^{-\frac{t}{\tau_k}} \quad (12-3)$$

که  $E_{R_\infty}$  و  $J_\infty$  به صورت  $J_\infty \cdot E_{R_\infty} = 1$  رابطه دارند که در آن  $J_k = \sum_{k=1}^{N_{kv}} J_k$

شرط اولیه ضروری جهت معادله مربوط به مدل سه پارامتری کلون ویت (3-8) به صورت زیر می باشد.

$$p_1 \sigma(0) = q_1 \varepsilon(0) \quad (13-3)$$

معادله دیفرانسیل ارائه شده در (3-8) به همراه شرط اولیه (3-13)، مدل سه پارامتری کلون-ویت ارائه شده در شکل (3-1-b) را به صورت کامل توصیف می کنند.

جهت بدست آمدن یک فرمولاسیون انتگرالی بین تنش و کرنش، اپراتور لاپلاس به صورت زیر تعریف می گردد.

$$L(f(t)) = \bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (14-3)$$

بر طبق این اپراتور و با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء می توان ثابت کرد که تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع به صورت زیر بدست می آید.

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sL(f(t)) - f(0) = s\bar{f}(s) - f(0) \quad (15-3)$$

در راستای این اپراتور، تابع  $f_3$  که به عنوان انتگرال کانولوشن<sup>۱</sup> (یا ریمان کانولوشن) دو تابع  $f_1$  و  $f_2$  خوانده می‌شود و به صورت  $f_1 * f_2$  نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$f_3(t) = \int_0^t f_1(t-s)f_2(s)ds \quad (۱۶-۳)$$

در این حالت، این ویژگی مهم برقرار خواهد بود.

$$L(f_3(t)) = \bar{f}_3(s) = L(f_1(t) * f_2(t)) = L(f_1(t))L(f_2(t)) = \bar{f}_1(s)\bar{f}_2(s) \quad (۱۷-۳)$$

اکنون چنانچه از رابطه (۸-۳) لاپلاس گیری شود خواهیم داشت.

$$p_0\bar{\sigma} + p_1(s\bar{\sigma} - \sigma(0)) = q_0\bar{\varepsilon} + q_1(s\bar{\varepsilon} - \varepsilon(0)) \quad (۱۸-۳)$$

که با توجه به شرط اولیه (۱۳-۳) به رابطه زیر منجر خواهد شد.

$$\bar{\varepsilon}(s) = \left( \frac{p_0 + p_1s}{q_0 + q_1s} \right) \bar{\sigma}(s) \quad (۱۹-۳)$$

از تعریف  $J_1 = 1/E_1$ ,  $J_0 = 1/E$ ,  $\tau_1 = \mu_1/E_1$ ، رابطه (۱۹-۳) به صورت زیر قابل نوشتن است.

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{\sigma}(s)s \left( \frac{J_0 + J_1}{s} - \frac{J_1\tau_1}{s\tau_1 + 1} \right) := \bar{\sigma}(s)s\bar{J}(s), \quad \bar{J}(s) = \left( \frac{J_0 + J_1}{s} - \frac{J_1\tau_1}{s\tau_1 + 1} \right) \quad (۲۰-۳)$$

اگر رابطه فوق به صورت زیر نوشته شود

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{\sigma}(s)(s\bar{J}(s) - J(0)) + \bar{\sigma}(s)J(0), \quad \bar{J}(s) = \left( \frac{J_0 + J_1}{s} - \frac{J_1\tau_1}{s\tau_1 + 1} \right) \quad (۲۱-۳)$$

---

<sup>۱</sup> convolution integral

آنگاه با توجه به (۳-۱۵)، به صورت زیر قابل تبدیل خواهد بود.

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{\sigma}(s)L\left(\frac{dJ(t)}{dt}\right) + \bar{\sigma}(s)J(0), \quad J(t) = J_0 + J_1\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \quad (22-3)$$

و با توجه به خاصیت (۳-۱۷) به فرم زیر در خواهد آمد

$$\bar{\varepsilon}(s) = L\left(\sigma(t) * \frac{dJ(t)}{dt}\right) + \bar{\sigma}(s)J(0), \quad J(t) = J_0 + J_1\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \quad (23-3)$$

که در حقیقت این رابطه، تبدیل لاپلاس گرفته شده از رابطه زیر است.

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)J(0) + \int_0^t \sigma(t-s) \frac{dJ(s)}{ds} ds, \quad J(t) = J_0 + J_1\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \quad (24-3)$$

در استفاده از رابطه انتگرالی بین تنش و کرنش ارایه شده در (۳-۲۴)، برای سادگی، می‌توان یک اپراتور جدید و ساده کننده بنام اپراتور استیلیس کانولوشن<sup>۱</sup> تعریف کرد [3]. این اپراتور از دو تابع  $Q(t)$  و  $G(t)$  (که باید برای کلیه  $t < 0$  مقدارشان صفر بوده و برای  $t \geq 0$  تکه‌ای پیوسته باشند) تابع جدید استیلیس کانولوشن را به صورت زیر ارایه می‌نماید.

$$G * dQ(t) := G(t)Q(0) + \int_0^t G(t-s) \frac{dQ(s)}{ds} ds \quad (25-3)$$

بنابراین، رابطه (۳-۲۴) به صورت ساده شده زیر قابل نوشتن است.

---

<sup>1</sup>Stieltjes convolution operator

$$\varepsilon(t) = \sigma * dJ(t), \quad J(t) = J_0 + J_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) \quad (26-3)$$

رابطه (۲-۳) که برای یک مدل تعمیم یافته کلونین- ویت ارایه گردید و برای یک مدل سه پارامتری کلونین- ویت در قسمت‌های قبل اثبات شد بیانگر این است که کل کرنش در یک سیستم با مصالح ویسکوالاستیک از دو جزء الاستیک و ویسکوالاستیک تشکیل شده است. بخش ویسکوالاستیک تابعی از کل تاریخچه بارگذاری وارده بر سیستم و توابع خزش تطابقی می‌باشد. پاسخ ویسکوالاستیک در حقیقت از روی هم انباشته شدن پاسخ‌های جزئی مربوط به هر جزء بارگذاری از ابتدا تا لحظه فعلی بدست می‌آید.

### ۳-۱-۱-۱- تشریح کرنش محیطی در لوله‌های ویسکوالاستیک

فشار سیال درون لوله باعث ایجاد تنش محیطی<sup>۱</sup> می‌گردد. این تنش به نوبه خود باعث ایجاد کرنش محیطی<sup>۲</sup> می‌شود که از دو قسمت الاستیک (آنی) و ویسکوالاستیک (تاخیری) تشکیل شده است. این مفهوم فیزیکی به وسیله معادلات دیفرانسیلی پیوستگی و مومنتم برای سیال درون لوله مدلسازی می‌شود. در عمل جریان پایدار در سیستم لوله برای زمانی طولانی برقرار می‌شود بنابراین هد مربوط به جریان پایدار  $H_0$ ، تنها باعث ایجاد پاسخ استاتیکی در سازه سیستم می‌گردد. با توجه به اینکه در تحلیل ضربه قوچ، پاسخ دینامیکی مورد نظر است هد دینامیکی سیال  $\tilde{H} = H - H_0$  باید در فرمول‌ها به عنوان عامل ایجاد تنش در سیستم در نظر گرفته شود. با استفاده از این بارگذاری دوجمله شامل انتگرال کانولوشن که با  $I_{\tilde{H}}^r$  و  $I_{\tilde{H}}^c$  نشان داده شده اند برای محاسبه کرنش محیطی به کار گرفته می‌شوند:

<sup>۱</sup>circumferential(Hoop stress)

<sup>۲</sup>circumferential(Hoop stress)

$$I_{\tilde{H}}^c = \int_0^t \tilde{H}(t-s) \frac{dJ(s)}{ds} ds = \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( \frac{J_k}{\tau_k} \int_0^t \tilde{H}(t-s) e^{-\frac{s}{\tau_k}} ds \right) = \sum_{k=1}^{N_{kv}} I_{\tilde{H}k}^c \quad (27-3)$$

$$I_{\tilde{H}}^r = \int_0^t \tilde{H}(t-s) \frac{dE_{Rk}(s)}{ds} ds = \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( \frac{E_{Rk}}{\tau_k^r} \int_0^t \tilde{H}(t-s) e^{-\frac{s}{\tau_k^r}} ds \right) = \sum_{k=1}^{N_{kv}} I_{\tilde{H}k}^r \quad (28-3)$$

عبارت (۲۷-۳) و (۲۸-۳) در بخش‌های بعد جهت استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم، به کار گرفته خواهند شد.

### ۳-۱-۱-۲- روابط تنش- کرنش ویسکوالاستیک در حالت سه بعدی

رابطه (۲۴-۳) تنها در بارگذاری یک بعدی صادق است و چنانچه بارگذاری در حالت سه بعدی مورد نظر باشد تغییر شکل‌ها به علت نسبت پواسن  $\nu$  که یکی از مشخصه‌های بسیار مهم مصالح می‌باشد و در مواد ویسکوالاستیک تابعی از زمان است هم باید در نظر گرفته شوند. بنابراین بر طبق فرمولاسیون تعریف شده برای استیلیس کانولوشن (عبارت (۲۵-۳)) رابطه بنیادی بین تنش و کرنش در جهت محوری  $z$  در یک دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر خواهد بود.

$$\varepsilon_z = \sigma_z * dJ - (\varepsilon_\phi + \varepsilon_r) * dv = \sigma_z * dJ - (\sigma_\phi * dJ) * dv - (\sigma_r * dJ) * dv. \quad (29-3)$$

در اینجا دو فرض ساده کننده اساسی در فرمول در نظر گرفته می‌شود.

اول اینکه با توجه به ویژگیهای لوله‌های جدار نازک ( $\sigma_r = \tilde{P}, \sigma_\phi = \tilde{P}D/2/e$ ) که در آن  $\tilde{P}$  نشان دهنده فشار دینامیکی می‌باشد) از  $\sigma_r$  در مقایسه با  $\sigma_\phi$  صرف نظر می‌شود. با توجه به این امر رابطه (۳-۲۹) به صورت زیر در می‌آید.



$$\varepsilon_z = \sigma_z * dJ - (\sigma_\theta * dv) * dJ \quad (30-3)$$

و رابطه زیر که در جهت  $\phi$  برقرار می باشد:

$$\varepsilon_\theta = \sigma_\theta * dJ - (\sigma_z * dv) * dJ \quad (31-3)$$

و فرضیه مهم دوم اعمال شده در این پژوهش این است که لوله کاملاً در جهت محوری مهار شده است بنابراین  $\varepsilon_z = 0$ . لذا از معادله (30-3) نتیجه می شود:

$$\sigma_z * dJ = (\sigma_\theta * dv) * dJ \quad (32-3)$$

اگر از معادله بالا، لاپلاس بگیریم، داریم:

$$s\bar{\sigma}_z\bar{J} = s(\overline{\sigma_\theta * dv})\bar{J} = s(s\bar{\sigma}_\theta\bar{v})\bar{J} \quad (33-3)$$

همچنین اگر از معادله (31-3)، لاپلاس بگیریم، خواهیم داشت:

$$\bar{\varepsilon}_\theta = s\bar{\sigma}_\theta\bar{J} - s(\overline{\sigma_z * dv})\bar{J} = s\bar{\sigma}_\theta\bar{J} - s^2\bar{\sigma}_z\bar{v}\bar{J} = s\bar{\sigma}_\theta\bar{J} - s\bar{v}(s^2\bar{\sigma}_\theta\bar{v}\bar{J}) \Rightarrow$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = s\bar{\sigma}_\theta\bar{J} - s^3\bar{v}^2\bar{\sigma}_\theta\bar{J} \quad (34-3)$$

با توجه به تئوری الاستیسیته در مواد ویسکوالاستیک جامد که مدول بالک ثابت دارند، نسبت پواسن به صورت زیر به دست می آید:

$$v(t) = \frac{1}{2} - \frac{E_R(t)}{6k_0} \quad (35-3)$$

که  $E_R(t)$  تابع ریلکسیشن و  $k_0$  مدول بالک مواد دیواره لوله می باشد.

اگر از معادله (35-3) لاپلاس بگیریم، داریم:

$$\bar{v} = \frac{1}{2s} - \frac{\bar{E}_R}{6k_0} \quad (36-3)$$

حال مقدار  $\bar{v}$  بدست آمده از فرمول (36-3) را در معادله (34-3) جایگذاری می کنیم، بنابراین:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_\phi &= s\bar{\sigma}_\phi\bar{J} - s^3\bar{\sigma}_\phi\bar{J} \left( \frac{1}{2s} - \frac{\bar{E}_R}{6k_0} \right)^2 = s\bar{\sigma}_\phi\bar{J} - s^3\bar{\sigma}_\phi\bar{J} \left( \frac{1}{4s^2} - \frac{\bar{E}_R}{6k_0}s + \frac{\bar{E}_R^2}{36k_0^2} \right) \\ \Rightarrow \bar{\varepsilon}_\phi &= s\bar{\sigma}_\phi\bar{J} - \frac{s\bar{\sigma}_\phi\bar{J}}{4} + \frac{s^2\bar{J}\bar{E}_R\bar{\sigma}_\phi}{6k_0} - \frac{s^3\bar{\sigma}_\phi\bar{J}\bar{E}_R^2}{36k_0^2} \end{aligned} \quad (37-3)$$

می دانیم رابطه بین  $J$  و  $E_R$  به صورت  $J * dE_R = 1$  تعریف می شود [13]. اگر از رابطه مذکور لاپلاس بگیریم، داریم:

$$J * dE_R = 1 \Rightarrow s\bar{J}\bar{E}_R = \frac{1}{s} \Rightarrow s^2\bar{J}\bar{E}_R = 1 \quad (38-3)$$

در فرمول (37-3)، بجای عبارت  $s^2\bar{J}\bar{E}_R$ ، مقدار یک را قرار می دهیم. در نتیجه معادله (37-3)، به صورت ساده شده زیر بدست می آید:

$$\bar{\varepsilon}_\emptyset = \frac{3}{4} s \bar{\sigma}_\emptyset \bar{J} + \frac{\bar{\sigma}_\emptyset}{6K_0} - \frac{s \bar{\sigma}_\emptyset \bar{E}_R}{36K_0^2} \quad (39-3)$$

نهایتاً از فرمول بالا لاپلاس معکوس می گیریم لذا کرنش محیطی به صورت زیر بدست می آید.

$$\varepsilon_\emptyset = \frac{3}{4} \sigma_\emptyset * dJ + \frac{\sigma_\emptyset}{6K_0} - \frac{\sigma_\emptyset * dE_R}{36K_0^2} \quad (40-3)$$

در ادامه از مشتق زمانی این معادله در ترم اضافی ایجاد شده در معادله پیوستگی استفاده خواهد شد.

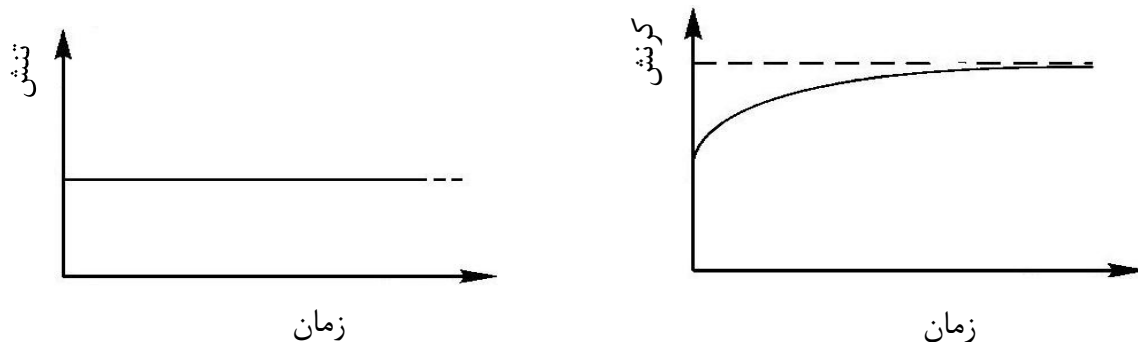
### ۳-۱-۱-۳- تست خزش و تعیین توابع تطابقی خزش

جهت درک عمیقتر ماهیت مواد ویسکوالاستیک، پاسخ یک نمونه به یک تست خزش در شکل (۳-۳) و همچنین یک تست رها سازی در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. در تست خزش، یک تنش تک محوری ثابت به نمونه وارد می گردد بدون اینکه در نمونه ارتعاشی ایجاد شود (بارگذاری شبه استاتیکی). در تست رها سازی به نمونه یک کرنش ثابت اعمال میشود.

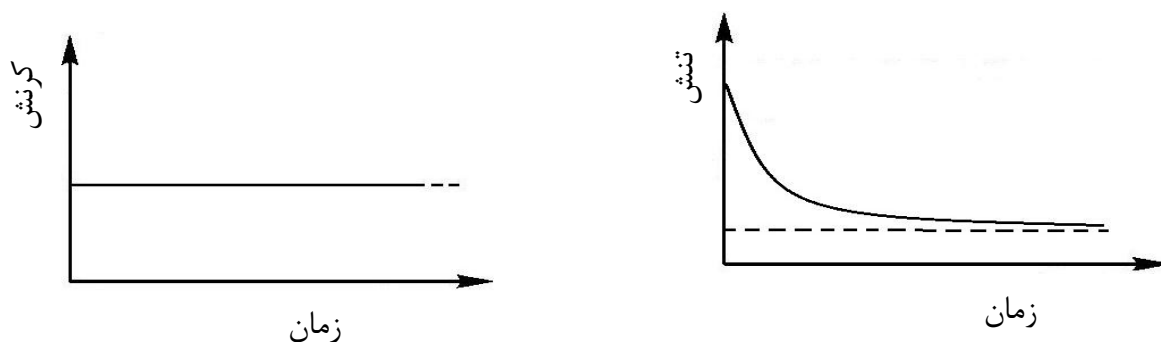
برای یک تست خزش برطبق معادله (۳-۲۶) می توان نوشت:

$$(41-3)$$

$$\varepsilon = \sigma_0 * dJ = \sigma_0 \left( J_0 + \sum_{k=1}^{N_{KV}} J_k \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}} \right) \right), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = \sigma_0 J_0 + \sigma_0 \sum_{k=1}^{N_{KV}} J_k = \varepsilon_0 + \sigma_0 \sum_{k=1}^{N_{KV}} J_k = \sigma_0 \sum_{k=0}^{N_{KV}} J_k = \varepsilon_\infty$$



شکل (۲-۳): تست خزش در یک میله ویسکوالاستیک



شکل (۳-۳): تست رهاسازی در یک میله ویسکوالاستیک

این مثال تفاوت پاسخ‌های شبه استاتیکی الاستیک و ویسکوالاستیک را زمانی که نمونه تحت یک تنش محوری ثابت قرار گرفته باشد، نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود در یک پاسخ ویسکوالاستیک علاوه بر یک پاسخ آنی که به عنوان کرنش الاستیک خوانده می‌شود و در شکل با  $\epsilon_0$  نشان داده شده است، بخش دیگری از کرنش در طول زمان اتفاق می‌افتد و با گذر زمان به سمت یک مقدار ثابت  $\epsilon_\infty$  همگرا می‌شود (فقط در مواد ویسکوالاستیک خطی اینگونه است). این کرنش اخیر که در

طول زمان رخ می‌دهد به عنوان خزش<sup>۱</sup> خوانده می‌شود. مکانیزم این تغییر شکل به ساختار مولکولی زنجیره‌ای در پلیمرها مربوط می‌شود. بارگذاری پیوسته به تدریج منجر به جمع شدن جزء کرنش‌های ایجاد شده در اثر باز شدن و لغزش زنجیره‌های مولکولها می‌شود به گونه‌ای که در نهایت ماده مورد نظر، متناسب با بار وارده بر آن به یک آرایش مولکول جدید دست می‌یابد. پاسخ دینامیکی یک ماده ویسکوالاستیک به یک بارگذاری ثابت (تنش ثابت) در بخش‌های بعد بررسی خواهد شد [۲][15].

برای یافتن رفتار خزشی یک ماده ویسکوالاستیک راهی بجز انجام تست‌هایی که این ویژگیها را به صورت کمی تعیین نماید وجود ندارد. زیرا این رفتار به طور مستقیم به ساختار مولکولی مواد، درجه حرارت محیط و تاریخچه بارگذاری وارده بر آن ماده مربوط می‌شود. برای اندازه‌گیری این ویژگی تابعی بنام تابع خزش تطابقی که به شکل فرمول (۳-۱۰) می‌باشد تعریف می‌گردد. علت نامگذاری "خزش تطابقی" ماهیت تغییر مکان تدریجی در زمان که از تطبیق آنها با مقادیر اندازه‌گیری شده آزمایشگاهی تعیین می‌شوند، می‌باشد.

در بحث آنالیز ضربه قوچ در لوله‌های ویسکوالاستیک به طور کلی دو راه حل جهت تعیین ضرایب توابع خزش تطابقی ( $J_K$  و  $\tau_K$  در فرمول ۳-۱۰) وجود دارد که می‌توان آنها را به عنوان روش مستقیم و غیر مستقیم نامید. در روش اول یک آزمایش مشابه آنچه پیشتر توضیح داده شده (تست خزش) یا یک آزمایش رهاسازی (که در آن پس از ایجاد یک کرنش ثابت در نمونه، کاهش تدریجی تنش در طول زمان اندازه‌گیری می‌شود) بر روی نمونه‌ای از جنس مواد تشکیل دهنده لوله انجام می‌گیرد و به این ترتیب بوسیله توابع خزش تطابقی خواص آن ماده ذخیره می‌گردد. در روش دیگر (روش غیر مستقیم) که بوسیله کواس و همکاران [1-3,5] پیشنهاد گردید ضرایب توابع خزش تطابقی به گونه‌ای تعیین می

---

<sup>1</sup> creep

گردند که زمانی که این توابع جهت حل جریان ناپایدار در سیستم لوله به کار گرفته می‌شوند بتوانند فشارهایی تا حد ممکن نزدیک به مقادیر اندازه گیری شده آزمایشگاهی تولید نمایند. علت نامگذاری غیر مستقیم برای این روش این است که ویژگیهای فیزیکی مصالح لوله بجای انجام تست‌های مستقیم بر روی مصالح، بوسیله انجام تست بر روی جریان سیال به طور غیر مستقیم تعیین می‌گردند. این روش که به عنوان کالیبراسیون توابع خزش به وسیله جریان گذرا خوانده می‌شود از دقت بیشتری در آنالیزهای ضربه قوچ و تداخل سیال - سازه برخوردار می‌باشد زیرا بدینوسیله اثرات تاریخچه بارگذاریهای قبلی بر روی سیستم لوله و همچنین اثرات حرارت و محیط و شکل سیستم لوله که در تست‌های مستقیم به درستی وارد نمی‌گردند هم در اینجا در تعیین ضرایب به کار گرفته می‌شوند.

پس از کالیبراسیون و تعیین ضرایب توابع خزش برای یک سیستم لوله خاص، می‌توان بوسیله مدلسازی ریاضی و روش‌های عددی پیشنهاد شده در این تحقیق، پیش بینی دقیقی از پدیده تداخل سیال - سازه در سیستم‌های لوله ویسکوالاستیک ارائه داد. بنابراین در حالت کلی توابع خزش به عنوان بخشی از داده‌های ورودی ضروری جهت انجام آنالیز می‌باشند.

### ۳-۱-۲- معادلات پیوستگی و مومنتم سیال

برای بدست آوردن معادلات فوق برای یک سیستم لوله، معادلات ناویر-استوکس در حالت دو بعدی در دستگاه مختصات استوانه‌ای  $r-z$  نوشته می‌شود. این معادلات شامل یک معادله پیوستگی و دو معادله مومنتم در جهت‌های محوری و شعاعی با متغیرهای سرعت محوری  $V_z$ ، سرعت شعاعی  $V_r$ ، فشار سیال  $P$  و دانسیته سیال  $\rho_f$  می‌باشند. به علاوه، یک معادله حالت، فشار و دانسیته سیال را به هم مربوط می‌کند.

جهت رسیدن به یک فرمول بندی یک بعدی سازگار با معادلات کلاسیک چکش آبی، معادلات ناویر-استوکس مذکور در  $2\pi r$  ضرب شده و سپس از 0 تا شعاع لوله  $R$  انتگرالگیری می‌شوند و سپس

نتیجه بر  $\pi R^2$  تقسیم می‌شود. با این کار تمام جملات موجود در معادلات ناویر - استوکس از حالت دو

بعدی بر حسب  $t, z, r$  به یک بعدی بر حسب  $t, z$  تبدیل می‌شوند. با این کار، معادله پیوستگی به صورت

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2}{R} \dot{u}_r \Big|_{r=R} = 0, \quad \dot{u}_r \Big|_{r=R} = V_r \Big|_{r=R} \quad (42-3)$$

و معادله مومنتم در جهت محوری به صورت

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2}{\rho_f R} \tau_0 + g \sin \theta \quad (43-3)$$

خواهد بود. که در آن سرعت  $V$  و فشار  $P$  به صورت زیر می‌باشند.

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r v_z dr \quad (44-3)$$

$$P = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r p dr \quad (45-3)$$

که در آن  $v_z$  و  $p$  به ترتیب توابع توزیع سرعت و فشار در مقطع جریان می‌باشند. در این روابط  $z$

امتداد محور لوله،  $t$  زمان،  $g$  شتاب گرانش زمین،  $R$  شعاع داخلی لوله و  $\rho_f$  دانسیته سیال است.

کرنش محیطی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت  $\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r}$  تعریف می‌شود که با توجه به

محدود بودن امتداد شعاعی  $r$  به دیواره داخلی تا دیواره بیرونی لوله، می‌توان نوشت:

$$\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} \rightarrow u_r = r\varepsilon_\phi, \quad R \leq r \leq R+e \rightarrow r \approx R \rightarrow u_r = R\varepsilon_\phi \quad (46-3)$$

در این صورت آخرین ترم در معادله پیوستگی (42-3)، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{2}{R} \dot{u}_r|_{r=R} = \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial t} (R \varepsilon_\phi)|_{r=R} = 2 \frac{\partial \varepsilon_\phi}{\partial t} \quad (47-3)$$

بنابراین معادله پیوستگی (42-3) با فرض  $e \ll R$  به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} + 2 \frac{\partial \varepsilon_\phi}{\partial t} = 0 \quad (48-3)$$

با توجه به رابطه سه بعدی تنش - کرنش در مواد ویسکوالاستیک در جهت  $\phi$  و فرضیات لوله‌های

جدار نازک به صورت  $\sigma_\phi = \frac{D\tilde{P}}{2e}$  (فشار دینامیکی سیال می‌باشد که در آن  $\tilde{P} = P - P_0$  فشار کل و

$P_0$  فشار جریان ماندگار می‌باشد) و با فرض متغیر بودن نسبت پواسن و  $\varepsilon_z = 0$  و کوچک بودن  $\sigma_r$  در

مقایسه با  $\sigma_\phi$ ، همچنین معادله (40-3) را در معادله پیوستگی (48-3) جایگذاری کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\rho g}{K} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{3\rho g D}{4eE} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{3\rho g D}{4e} \frac{\partial}{\partial t} (H * dJ) + \frac{\rho g D}{6ek_0} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\rho g D E_0}{36ek_0^2} \frac{\partial H}{\partial t} \\ - \frac{\rho g D}{36ek_0^2} \frac{\partial}{\partial t} (H * dE_R) = 0 \end{aligned} \quad (49-3)$$

که به کمک معادلات (27-3) و (28-3) و اپراتور استلیس کانولوشن، این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{g}{c^2} \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{3\rho g D}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} + \frac{\rho g D}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} \quad (50-3)$$

در این رابطه  $f$  ضریب اصطکاک دارسی - وایسباخ،  $D$  قطر داخلی لوله،  $\nu$  نسبت پواسن،  $\rho_f$  دانسیته سیال

$e$  ضخامت دیواره لوله و  $I_{\bar{H}}$  ضریب کرنش محیطی تأخیری<sup>1</sup> است که با رابطه (25-3) داده می‌شود.  $c_f$

<sup>1</sup> Retarded circumferential strain



نیز سرعت موج فشاری است که با رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$c = \left( \rho \left( \frac{1}{K} + \frac{3D}{4eE} + \frac{D}{6ek_0} + \frac{DE_0}{36ek_0^2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (51-3)$$

که در آن  $E$  مدول الاستیک یانگ و  $K$  مدول بالک سیال می‌باشد.

در معادله مونتیم سیال (۳-۴۳)، تنش برش  $\tau_0$  معادل این تنش در حالت جریان پایدار فرض می‌گردد که این به عنوان مدل اصطکاک شبه ماندگار<sup>۱</sup> خوانده می‌شود در این صورت خواهیم داشت.

$$\tau_0 = \rho_f f \frac{V_{rel} |V_{rel}|}{8} \quad (52-3)$$

که در آن  $V_{rel}$  سرعت نسبی سیال درون لوله نسبت به دیوار داخلی لوله می‌باشد که برابر با  $V - \dot{u}_z$  است. که در این  $V$  سرعت مطلق سیال،  $\dot{u}_z$  سرعت مطلق دیواره لوله و  $f$  ضریب افت داری و ایسباخ می‌باشد. چنانچه  $P$  در رابطه مونتیم با  $P = \gamma H - Z$ ، که در آن  $H$  هد فشار سیال و  $\gamma$  وزن حجمی سیال و  $Z$  رقوم نقطه مورد بررسی است، جایگزین گردد رابطه مونتیم (۳-۴۳) به صورت زیر قابل نوشتن خواهد بود.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{-fV|V|}{2D} \quad (53-3)$$

---

<sup>۱</sup> Quasi-steady friction model

دو معادله پیوستگی و مومنتم سیال با استفاده از روش حل عددی خطوط مشخصه<sup>۱</sup> (MOC) جهت حل مساله بدون تداخل سیال - سازه به عنوان مثال در یک سیستم مخزن - لوله (الاستیک و یا ویسکوالاستیک) - شیر به کار گرفته می‌شوند. این کار در بخش بعد انجام شده است.

---

<sup>۱</sup> Method of characteristics

**فصل چهارم:**

**روشهای عددی**

## مقدمه

در این قسمت می‌خواهیم روش حل عددی معادلات هیدرولیکی را بیان کنیم.

روش مشخصه‌ها بهترین روشی است که برای حل این معادلات وجود دارد و بدون شک در بین تمام روش‌های عددی دیگری که می‌توان استفاده کرد، جواب‌های دقیقتر و سریعتری می‌دهد. علت دقت و سرعت بالای این روش این است که به نوعی می‌توان گفت این روش یک روش نیمه تحلیلی است و جواب معادله دیفرانسیل را با یک حل تحلیلی روی خطوط مشخصی، تقریباً به طور دقیق می‌دهد.

با این همه از روش‌های عددی متنوع شناخته شده دیگر نیز می‌توان برای بررسی این معادلات استفاده کرد. به عنوان مثال یک روش تفاضل محدود توسط مک کرمک<sup>۱</sup> معرفی شده است که می‌توان از آن جواب‌های قابل قبولی به دست آورد. در روش دیگری، دو معادله پیوستگی و مومنتم را با هم ترکیب کرده و یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو نسبت به زمان و مکان به دست می‌آورند. (شبهه معادله موج) البته برای استفاده از این روش، مشکلاتی در اعمال شرایط مرزی برای سرعت و فشار وجود خواهد داشت. ولی حل معادله موج حاصله به سادگی با روش اجزای محدود یا تفاضل محدود امکان‌پذیر خواهد بود.

در روش‌های دیگری، می‌توان معادلات پیوستگی و مومنتم را در بعد مکان گسسته‌سازی کرد (مثلاً با روش اجزای محدود) و یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل معمولی<sup>۲</sup>، نسبت به زمان به دست آورد. این دستگاه معادلات که در حقیقت هر یک از آنها مربوط به یک گره می‌باشد را می‌توان با روش‌های استاندارد حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی، مثل روش رانج کوتا و ... حل نمود و جواب هر گره

---

<sup>۱</sup>MacCormak Method

<sup>۲</sup>Ordinary differential equation

را در هر زمان به دست آورد [۳].

اما با همه این روش‌ها، همچنان از روش خطوط مشخصه به دلیل سرعت بالا و جواب دقیق‌ترش استفاده می‌شود.<sup>۱</sup> و بهمین دلیل مطالعات زیادی برای بهبود و تکامل روش خطوط مشخصه و گرفتن جوابهای دقیقتر از آن (هر چند اندک) صورت گرفته است.

فرایند حل عددی برای حالتی که اثرات ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود شبیه به حالت الاستیک است که پیشتر توسط محققان مختلف، تاپسلینگ، ویگرت، هاینسبروک، جزایری و کرامت بررسی شده است. تنها تفاوت در نحوه محاسبه ترمهای شامل انتگرال کانولوشن است که برای مدسازی تغییر شکل‌های ویسکوالاستیک (تاخیری)<sup>۱</sup> به معادلات حاکم اضافه شده‌اند.

#### ۱-۴- تقریب ترم‌های انتگرال کانولوشن

در سمت راست معادله (۳-۵۰) عبارتهایی متشکل از فرم خاصی از مجهولات وجود دارد. ترم‌های دارای انتگرال کانولوشن به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

(۴-۱)

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\tilde{H}}^c}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{\partial I_{\tilde{H}k}^c}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{J_k}{\tau_k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t \tilde{H}(t-s) e^{-\frac{s}{\tau_k}} ds \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{J_k}{\tau_k} \left( -\frac{1}{\tau_k} \int_0^t \tilde{H}(t-s) e^{-\frac{s}{\tau_k}} ds + \tilde{H}(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( -\frac{I_{\tilde{H}k}^c(t)}{\tau_k} + \frac{J_k}{\tau_k} \tilde{H}(t) \right) \end{aligned}$$

---

*I-retarded*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_{\tilde{H}}^r}{\partial t} &= - \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{\partial I_{\tilde{H}k}^r}{\partial t} = - \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{E_{Rk}}{\tau_k^r} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^t \tilde{H}(t-s) e^{-\frac{s}{\tau_k^r}} ds \right) & (2-4) \\
&= - \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{E_{Rk}}{\tau_k^r} \left( -\frac{1}{\tau_k^r} \int_0^t \tilde{H}(t-s) e^{-\frac{s}{\tau_k^r}} ds + \tilde{H}(t) \right) \\
&= - \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( -\frac{I_{\tilde{H}k}^r(t)}{\tau_k^r} + \frac{E_{Rk}}{\tau_k^r} \tilde{H}(t) \right)
\end{aligned}$$

جهت انجام آنالیز در حوزه زمان، این عبارتها بایستی به صورت عبارتهای مستقیمی از مجهولات نوشته شوند. در غیر اینصورت با یک سری معادلات انتگرال روبرو خواهیم بود که حل عددی آنها بسیار هزینه بر خواهد بود. جهت نوشتن عبارات مذکور بر حسب مجهولات، ساده‌ترین راه نوشتن آنها به صورت عبارتهایی از مجهولات در گام زمانی فعلی و مقادیر محاسبه شده در گام‌های زمانی قبل می‌باشد. این امر با استفاده از دو فرمول انجام می‌گیرد. در فرمول اول، چنانچه داشته باشیم

$$f_k(t) = \frac{J_k}{\tau_k} \int_0^t g(t-s) e^{-\frac{s}{\tau_k}} ds$$

می‌توان ثابت کرد که

$$\frac{df_k(t)}{dt} = -\frac{f_k(t)}{\tau_k} + \frac{J_k}{\tau_k} g(t) \quad (3-4)$$

فرمول دوم، تقریب بسیار خوبی برای انتگرال کانولوشن ظاهر شده در روابط ارائه می‌نماید که با

استفاده از یک رابطه برگشتی پیاده‌سازی می‌شود:

$$f_k(t) \approx g(t) \left( J_k + \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} - 1 \right) \right) + g(t - \Delta t) \left( -J_k e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} - 1 \right) \right) + e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} f_k(t - \Delta t) \quad (4-4)$$

قابل ذکر است که تقریب بکار رفته در استخراج رابطه تقریبی (۴-۴) از درجه اول می‌باشد.

جهت ارایه مشتق نسبت به  $t$  از فرم جاری انتگرال کانولوشن که در معادلات حاکم وجود دارد،

این  $f_k(t)$  از معادله (۴-۴) را می‌توان در معادله (۳-۴) جایگزین نمود. در این صورت خواهیم داشت.

$$\frac{df_k(t)}{dt} \approx g(t) \left( \frac{J_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} \right) \right) + g(t - \Delta t) \left( \frac{J_k}{\tau_k} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} - \frac{J_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} \right) \right) - \frac{e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}}}{\tau_k} f_k(t - \Delta t) \quad (5-4)$$

این رابطه و رابطه (۴-۴) در تقریب ترم‌های شامل انتگرال کانولوشن یا تقریب مشتق آنها در فرایند حل

عددی به کار گرفته می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\tilde{H}}^c}{\partial t} &= (H(t) - H_0) \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{J_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} \right) + \tilde{H}(t - \Delta t) \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( \frac{J_k}{\Delta t} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} - \frac{J_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} \right) \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}}}{\tau_k} I_{\tilde{H}k}^c(t - \Delta t) = a_1^c H(t) + a_2^c \end{aligned} \quad (6-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\tilde{H}}^r}{\partial t} &= -(H(t) - H_0) \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{E_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k^r}} \right) - \tilde{H}(t - \Delta t) \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( \frac{E_k}{\Delta t} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k^r}} - \frac{E_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k^r}} \right) \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{N_{kv}} \frac{e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k^r}}}{\tau_k^r} I_{\tilde{H}k}^r(t - \Delta t) := a_1^r H(t) + a_2^r \end{aligned} \quad (7-4)$$

برای بدست آوردن رابطه بالا باید رابطه زیر محاسبه شود.

$$\begin{aligned}
I_{\tilde{H}k}^c(t - \Delta t) &= \tilde{H}(t - \Delta t) \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( J_k - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} \right) \right) \\
&+ \tilde{H}(t - 2\Delta t) \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( -J_k e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} \right) \right) \\
&+ \sum_{k=1}^{N_{kv}} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k}} I_{\tilde{H}k}^c(t - 2\Delta t)
\end{aligned} \tag{۸-۴}$$

$$\begin{aligned}
I_{\tilde{H}k}^r(t - \Delta t) &= -\tilde{H}(t - \Delta t) \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( E_k - \frac{E_k \tau_k^r}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k^r}} \right) \right) \\
&- \tilde{H}(t - 2\Delta t) \sum_{k=1}^{N_{kv}} \left( -E_k e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k^r}} - \frac{E_k \tau_k^r}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k^r}} \right) \right) \\
&+ \sum_{k=1}^{N_{kv}} e^{-\frac{\Delta t}{\tau_k^r}} I_{\tilde{H}k}^r(t - 2\Delta t).
\end{aligned} \tag{۹-۴}$$

#### ۲-۴- حل عددی با روش MOC

در این قسمت می‌خواهیم معادلات هیدرولیکی را که به صورت (۱۰-۴) و (۱۱-۴) می‌باشند، با روش

خطوط مشخصه حل نماییم.

$$L_1: \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{c_f^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{3\rho_f g D}{4e} \frac{\partial I_{\tilde{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f g D}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\tilde{H}}^r}{\partial t} = 0 \tag{۱۰-۴}$$

$$L_2: \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \tag{۱۱-۴}$$



در این روش ابتدا معادلات دیفرانسیل جری پیوستگی و اندازه حرکت، بر روی مسیرهایی به معادلات دیفرانسیل کامل تبدیل می‌شوند و سپس بوسیله روش تفاضل محدود صریح<sup>۱</sup> حل می‌شوند. چون در این روش هر قسمت از لوله به صورت جداگانه تحلیل می‌شود، برای حل مسائل پیچیده مناسب‌تر است. البته عیب این روش این است که بازه‌های زمانی و مکانی باید نسبت به هم دارای تناسب خاصی باشند و به این دلیل بازه‌های زمانی باید وابسته به ابعاد مساله انتخاب شوند. در نهایت معادلات هذلولوی مذکور جهت حل به شرایط مرزی و شرایط اولیه نیاز دارند. شرایط اولیه برای جریان غیر ماندگار مذکور، مقادیر دبی و ارتفاع پیژومتریک در حالت ماندگار است. شرایط مرزی نیز با توجه به صورت مساله تعیین می‌شوند.

### روش حل

هدف این است که معادلات دیفرانسیل (۴-۱۰) و (۴-۱۱) را به دو یا چند معادله دیفرانسیل ساده‌تر که قابل حل به صورت تحلیلی باشند، تبدیل کنیم (منظور این است که به راحتی قابل انتگرالگیری باشند، به عبارت دیگر معادله دیفرانسیل کامل باشند). برای این کار پارامتر دلخواه  $\lambda$  را در نظر گرفته و یک ترکیب خطی از دو معادله  $L_2, L_1$  با استفاده از آن می‌سازیم. سپس دو مقدار دلخواه به  $\lambda$  می‌دهیم تا دو معادله دیفرانسیل دیگر، که ترکیبی از  $L_2, L_1$  هستند به دست آید.<sup>۲</sup> برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم.

---

<sup>۱</sup> *Explicit Finite Difference*

<sup>۲</sup> از این روش برای حل دستگاه معادلات همزمان جبری نیز می‌توان استفاده کرد.

$$L_1 + \lambda L_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{g}{c_f^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{3\rho_f g D}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f g D}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} + \lambda \left( \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{fV|V|}{2D} \right) = 0 \quad (12-4)$$

رابطه (۱۲-۴) را می‌توان به صورت (۱۳-۴) مرتب کرد.

$$\begin{aligned} \frac{g}{c_f^2} \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda g \frac{\partial H}{\partial z} + \lambda \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\lambda fV|V|}{2D} + \frac{3\rho_f g D}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f g D}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} = 0 \Rightarrow \\ \frac{g}{c_f^2} \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \lambda c_f^2 \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \lambda \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{\lambda fV|V|}{2D} + \frac{3\rho_f g D}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f g D}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (13-4)$$

از توجه به رابطه بدست آمده در (۱۳-۴) می‌توان دید که اگر ضرایب  $\frac{\partial H}{\partial x}$ ،  $\frac{\partial V}{\partial x}$  عبارت  $\frac{dx}{dt}$  باشد می‌توان آن را به صورت یک معادله دیفرانسیل کامل (که فقط شامل دیفرانسیل نسبت به یک متغیر است، معادله دیفرانسیلی معمولی) تبدیل کرد. لکن فعلاً بدون توجه به این مطلب، سعی می‌کنیم دو معادله دیفرانسیل از (۱۳-۴) به دست آوریم. برای این کار ضرایب  $\frac{\partial H}{\partial x}$ ،  $\frac{\partial V}{\partial x}$  را مساوی هم قرار می‌دهیم تا دو مقدار برای  $\lambda$  به دست آید. فایده این کار را بعداً خواهیم دید.

$$\lambda c_f^2 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{c_f^2} ; \quad (14-4)$$

به این ترتیب طبق رابطه (۱۴-۴) توانستیم دو مقدار برای  $\lambda$  پیدا کنیم، چون رابطه (۱۳-۴) به ازای تمام مقادیر دلخواه  $\lambda$  صادق بود از جایگذاری این دو مقدار در آن، دو معادله دیفرانسیل به صورت زیر (۱۵-۴) بدست می‌آید که بدون شک هم ارز دو معادله (۱۰-۴) و (۱۱-۴) می‌باشند.

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{1}{c_f} \rightarrow \frac{g}{c_f^2} \left( \frac{\partial H}{\partial t} + c_f \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{1}{c_f} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + c_f \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{fV|V|}{2Dc_f} + \frac{3\rho_f g D}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f g D}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} = 0 \\ \lambda = -\frac{1}{c_f} \rightarrow \frac{g}{c_f^2} \left( \frac{\partial H}{\partial t} - c_f \frac{\partial H}{\partial z} \right) - \frac{1}{c_f} \left( \frac{\partial V}{\partial t} - c_f \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{fV|V|}{2Dc_f} + \frac{3\rho_f g D}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f g D}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (15-4)$$

بنابراین جواب دو معادله دیفرانسیل (۴-۱۵) همان جواب معادلات دیفرانسیل ضربه قوچ می‌باشند. ولی این معادلات هم به سادگی قابل انتگرالگیری نیستند. اما با یک نگاه به معادله اول (۴-۱۵) در می‌یابیم که اگر  $c_f = \frac{dz}{dt}$  باشد، این معادله به یک معادله دیفرانسیل کامل (که به راحتی قابل انتگرالگیری و گسسته سازی است) تبدیل می‌شود. زیرا می‌دانیم که:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{dH}{dt} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dt} \quad (۴-۱۶)$$

همچنین در معادله دوم (۴-۱۵) اگر  $c_f = -\frac{dz}{dt}$  باشد این معادله نیز یک معادله کامل خواهد شد. قابل توجه است، اینکه ما بجای  $c_f$  بگذاریم  $\frac{dz}{dt}$ ، خللی در جواب ایجاد نمی‌کند زیرا  $z$  و  $t$  دو متغیر مستقل هستند و اگر ما خود را به این ملزم کنیم که گره‌هایمان روی این خط  $\left(c_f = \frac{dz}{dt}\right)$  باشند می‌توان بین گره‌ها هر رابطه‌ای را که با استفاده از  $c_f = \frac{dz}{dt}$  حاصل می‌شود، استفاده کرد.

می‌دانیم که در روش تفاضل محدود ابتدا باید یک شبکه بنا کنیم تا مقادیر مجهولات را بتوانیم روی گره‌های شبکه به صورت گسسته شده در آوریم. شبکه‌ای که در آنجا بنا می‌کردیم یک شبکه کاملاً دلخواه بود و تنها در صفحه گره‌هایی ایجاد می‌کردیم که بتوانیم معادلات را گسسته سازی کنیم. اما در

اینجا باید گره‌ها (مجهولات) را روی شبکه‌ای در نظر بگیریم که بین  $\Delta z, \Delta t$  اش رابطه  $\frac{dz}{dt} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = c_f$

حاکم باشد. بنابراین در اینجا دیگر نمی‌توان نقاط را در یک فضای  $z-t$  دلخواه پخش کرد و بینشان

رابطه برقرار کرد. بلکه باید حتماً نقاط را روی دسته خطوطی که عبارت دیفرانسیلی  $c_f = \frac{dz}{dt}$  تولید

می‌کند، گستراند.

همچنین در معادله دوم (۴-۱۵) مشاهده می‌شود که اگر  $c_f = -\frac{dz}{dt}$  باشد، این معادله نیز یک

معادله کامل خواهد شد. و به این ترتیب با رعایت در نظر گرفتن گرہ‌ها روی  $c_f$  ، می‌توان

گسسته‌سازی را برای معادله دیفرانسیلی کاملی که حاصل می‌شود انجام داد.

با توجه به مطالب گفته شده می‌توان نوشت:

$$\text{if } c_f = \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{g}{c_f^2} \frac{dH}{dt} + \frac{1}{c_f} \frac{dV}{dt} + \frac{fV|V|}{2Dc_f} + \frac{3\rho_f gD}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f gD}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} = 0 \quad (۴-۱۷)$$

$$\text{if } c_f = \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{g}{c_f^2} \frac{dH}{dt} - \frac{1}{c_f} \frac{dV}{dt} - \frac{fV|V|}{2Dc_f} + \frac{3\rho_f gD}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f gD}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} = 0 \quad (۴-۱۸)$$

قبل از اقدام به گسسته سازی معادله (۴-۱۷) و (۴-۱۸) ابتدا آن را بر حسب  $Q$  می‌نویسیم

این کار را به این دلیل انجام می‌دهیم تا در نقاط تغییر قطر (گره‌هایی که بین دو لوله با

قطر متفاوت قرار دارند) یک دبی داشته باشیم (اگر رابطه سازی بر حسب سرعت باشد در گره تغییر قطر

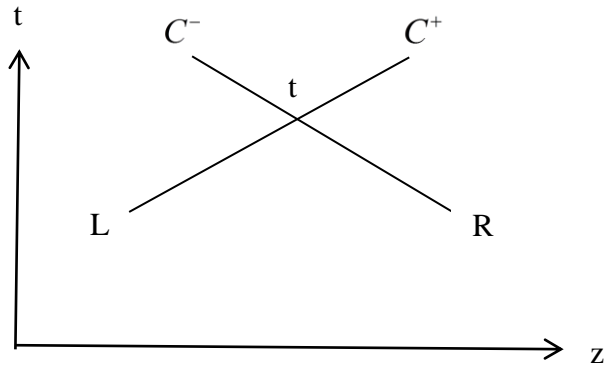
دو سرعت می‌شد در نظر گرفت).

به این ترتیب روابط (۴-۱۷) و (۴-۱۸) بر حسب  $Q$  (دبی) به صورت (۴-۱۹) و (۴-۲۰) تبدیل می‌شوند.

$$C = \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{g}{c_f^2} \frac{dH}{dt} + \frac{1}{c_f A} \frac{dQ}{dt} + \frac{fQ|Q|}{2DA^2 c_f} + \frac{3\rho_f gD}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f gD}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} = 0 \quad (۴-۱۹)$$

$$C = -\frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{g}{c_f^2} \frac{dH}{dt} - \frac{1}{c_f A} \frac{dQ}{dt} - \frac{fQ|Q|}{2DA^2 c_f} + \frac{3\rho_f gD}{4e} \frac{\partial I_{\bar{H}}^c}{\partial t} - \frac{\rho_f gD}{36ek_0^2} \frac{\partial I_{\bar{H}}^r}{\partial t} = 0 \quad (۴-۲۰)$$

حال معادله (۴-۱۹) را روی خط  $C^+$   $\left(\frac{dz}{dt} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = C\right)$  گسسته‌سازی می‌کنیم. (شکل (۴-۱۱))



شکل (۱-۴): خطوط مشخصه در صفحه  $z-t$

$$\frac{g}{c_f^2} \cdot \frac{H(t) - H_L}{\Delta t} + \frac{1}{c_f A} \cdot \frac{Q(t) - Q_L}{\Delta t} + \frac{fQ(t)|Q_L|}{2DA^2 c_f} + \frac{3\rho_f g D}{4e} (a_1^c H(t) + a_2^c) - \frac{\rho_f g D}{36ek_0^2} (a_1^r H(t) + a_2^r) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{Ag}{c_f} \cdot \frac{H(t) - H_L}{\Delta t} + \frac{Q(t) - Q_L}{\Delta t} + \frac{fQ(t)|Q_L|}{2DA} + \frac{3\rho_f g D}{4e} (a_1^c H(t) + a_2^c) - \frac{\rho_f g D}{36ek_0^2} (a_1^r H(t) + a_2^r) = 0 \quad (۲۱-۴)$$

با معرفی ثابت‌های  $B = \frac{c_f}{gA}$ ،  $R = \frac{f}{2DA}$  معادله (۲۱-۴) را می‌توان به صورت (۲۲-۴) نوشت.

(همانطور که گفته شد،  $\Delta x = C \Delta t$  خواهد بود).

$$Q(t) = -BH(t) + BH_L + Q_L + (-RQ_P|Q_L|\Delta t - \frac{3\rho_f g D \Delta x}{4e} (a_1^c H(t) + a_2^c) + \frac{A\rho_f g D \Delta x}{36ek_0^2} (a_1^r H(t) + a_2^r)) = 0 \quad (۲۲-۴)$$

برای سادگی در استفاده از این فرمول، آن را به صورت (۲۳-۴) می‌نویسند.

$$Q(t) = -\frac{B + C_{P_2}''}{1 + C_{P_2}'} H(t) + \frac{Q_L + BH_L + C_{P_1}''}{1 + C_{P_2}'} , C_{P_2}'' = \frac{3A\rho_f g D c_f \Delta t a_1^c}{4e} - \frac{A\rho_f g D c_f \Delta t a_1^r}{36ek_0^2} , C_{P_2}' = R|Q_L|\Delta t,$$

$$C_{P_1}'' = -\frac{3A\rho_f g D c_f \Delta t a_2^c}{4e} + \frac{A\rho_f g D c_f \Delta t a_2^r}{36ek_0^2} \quad (۲۳-۴)$$

بهین ترتیب از گسسته‌سازی معادله (۱۹-۴) روی خط  $C^-$   $\left( \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -C \right)$  رابطه (۴-)

(۲۴) به دست خواهد آمد.

$$Q(t) = \frac{B + C_{N_2}'''}{1 + C_{N_2}''} H(t) + \frac{Q_R - BH_R + C_{N_1}'''}{1 + C_{N_2}''}, C_{N_2}''' = C_{P_2}'', C_{N_2}' = R|Q_R|\Delta t, C_{N_1}''' = -C_{P_1}''' \quad (24-4)$$

معادلات به دست آمده در (۲۳-۴) و (۲۴-۴) که به ترتیب مربوط به گسسته‌سازی روی خطوط  $C^+, C^-$  می‌باشند را می‌توان به صورت همزمان حل کرد. در این دو معادله مجهولات  $Q(t), H(t)$  می‌باشند که پس از حل همزمان معادلات مذکور، بر حسب  $Q_R, Q_L, H_R, H_L$  به دست خواهند آمد.

استریتر برای افزایش دقت محاسبه اثر اصطکاک پیشنهاد کرده که بجای  $Q_R|Q_R|$  از  $Q(t)|Q_R|$  استفاده شود همچنین بجای  $Q_L|Q_L|$  از  $Q(t)|Q_L|$  استفاده شود. بدیهی است که برای داشتن یک دقت بیشتر، بهتر بود گسسته‌سازی این جمله به صورت غیر صریح<sup>۱</sup> (در زمان آینده) انجام شود یعنی بنویسیم  $Q(t)|Q(t)|$  اما چون  $Q(t)$  مجهول می‌باشد این کار باعث می‌شود که برای هر گره یک دستگاه دو معادله دو مجهولی غیر خطی داشته باشیم اما استفاده از  $Q(t)|Q_R|$  در رابطه  $C^-$  و  $Q(t)|Q_L|$  در رابطه  $C^+$  باعث می‌شود که بدون اینکه دستگاهی غیر خطی از  $Q(t), H(t)$  ایجاد شود، دقت نسبت به حالت کاملاً صریح<sup>۲</sup> افزایشی پیدا کند.

---

1 - Implicit

2 - fully Explicit

## فصل پنجم:

بررسی صحت مدل ریاضی و

عددی و آرایه نتایج

## ۵-۱- آزمایش ایمپریال کالج

در این فصل هدف شرح آزمایش ضربه قوچ انجام شده در آزمایشگاه ایمپریال کالج در انگلستان که برای یک لوله ویسکوالاستیک انجام گرفته است می‌باشد.

این آزمایش در یک سیستم مخزن-لوله-شیر انجام شده است و هدف اصلی آن صحت سنجی مدل‌های ویسکوالاستیک ارائه شده تاکنون [1-3,6] و بررسی عواملی است که می‌توانند در نتایج فشارها و سرعت‌های حاصله ناشی از یک آزمایش ضربه قوچ تاثیر قابل توجهی داشته باشند. به این منظور یک مدلسازی عددی نظیر این آزمایش که مدل ریاضی و عددی ویسکوالاستیسیته آن بر طبق مدل پیشنهادی کواس و همکاران [4-7] و سوارس و همکاران [6] است، تهیه گردید که با استفاده از آن و یک برنامه بهینه سازی، توابع خزش تطابقی که نشان دهنده رفتار ویسکوالاستیک دیواره لوله می‌باشند تعیین می‌گردد. بدیهی است که این مدل‌ها به منظور اینکه بتوانند به دقت جهت تحقیق یک اثر خاص به کار گرفته شوند نسبت به مدل‌های کاربردی موجود در سیستم‌های صنعتی، بسیار ساده‌تر خواهند بود. در نهایت از مقایسه نتایج مدل عددی و آزمایشگاهی نتیجه‌گیری شده است که مدل ویسکوالاستیسیته حاضر از دقت خوبی برخوردار است.

در اینجا ضربه قوچ بدون جدایی ستون مایع در یک سیستم لوله پلی اتیلن بررسی می‌شود. این آزمایش که توسط کوواس و همکاران [1-3] انجام شده به آزمایش ایمپریال کالج<sup>۱</sup> معروف است. این آزمایش که به صورت یک سیستم مخزن-لوله-شیر قابل مدلسازی است از یک خط لوله پلی اتیلن به طول ۲۷۷ متر تشکیل شده است. سایر مشخصات این سیستم در جدول (۵-۱) ارائه شده است.

---

<sup>1</sup> Imperial college experiment



جدول (۵-۱): داده‌های ورودی در آزمایش ایمپریال کالج جهت بررسی ضربه قوچ در یک لوله ویسکوالاستیک.

ضریب اصطکاک	زمان بستن شیر	هد مخزن	دبی جریان پایدار	نسبت پواسن	مدول یانگ	جرم مخصوص لوله	ضخامت دیواره لوله	قطر داخلی لوله	طول لوله
0.02	0.09s	45m	1.01l/s	0.46	1.43GPa	5000kg/m <sup>3</sup>	6.3 mm	50.6 mm	277m

در نقاط ۱، ۵، ۸ متناظر فواصل ۱۱۶.۵، ۱۹۷، ۲۷۱ متری از مخزن بالا دست دستگاه فشار سنج قرار می‌گیرد تا فشار متناظر این نقاط اندازه‌گیری شود آنگاه هد فشار بدست آمده با هد فشار محاسبه شده از مدل ریاضی اصلاح شده مقایسه می‌شود تا صحت این مدل اثبات شود.

## ۵-۲- فرایند کالیبراسیون

پارامترهای  $\tau_k$ ،  $J_k$ ،  $N_{KV}$ ،  $E_{RK}$  مربوط به مدل عددی با استفاده از یک الگوریتم بهینه‌سازی که در آن تفاوت بین فشارهای محاسبه شده و فشارهای برداشت شده از آزمایش نظیر یک فشارسنج خاص حداقل می‌شوند تعیین می‌شوند. تابع به نام lsqnonlin موجود در جعبه ابزار بهینه‌سازی برنامه MATLAB که برای حل مسائل غیر خطی حداقل کردن مربعات تهیه شده است در اینجا به کار گرفته می‌شود. در این ابزار بهینه‌سازی، تابع هدف عبارت است از برداری که درایه‌های آن تفاوت بین مقادیر اندازه‌گیری شده آزمایشگاهی و مقادیر محاسبه شده از حل عددی در محل شیر می‌باشند. به منظور کاهش تعداد متغیرهای بهینه‌سازی و بنابراین کاهش زمان انجام بهینه‌سازی یک فرض مناسب برای پارامترهای  $\tau_k$  انجام می‌شود. در مدل حاضر، مقادیر  $\tau_k$  به صورت ثابت برابر  $\tau_3 = 1.5$  s،  $\tau_4 = 5$  s،  $\tau_5 = 10$  s،  $\tau_2 = 0.5$  s،  $\tau_1 = 0.05$  s در سراسر عملیات بهینه‌سازی در نظر گرفته می‌شوند.  $J_0$  براساس سرعت موج تخمین زده شده، تعیین می‌گردد. سرعت موج را می‌توان طبق رابطه (۳-۵۱) تعیین نمود، اما به علت تغییر سرعت موج در جریان غیر ماندگار در لوله‌های ویسکوالاستیک (اگر چه در مدلسازی عددی از یک مقدار ثابت در کل زمان مدلسازی استفاده می‌شود) محاسبه آن براساس مدول الاستیسیته لوله پلی اتیلن اغلب نمی‌تواند منجر به حصول نتایج خوبی از حل عددی گردد. علاوه بر این، اغلب مدول

الاستیسیته لوله مورد استفاده به طور دقیق توسط کارخانه سازنده داده نمی‌شود بنابراین، به منظور افزایش دقت مدل و سادگی کار بهتر است که آن را با استفاده از نتایج آزمایشگاهی حاصله تعیین نمود. این کار معمولاً با استفاده از مدل عددی تهیه شده بدون در نظر گرفتن اثرات ویسکوالاستیک (زیرا ضرایب مدل ویسکوالاستیک هنوز تعیین نشده اند) به صورت سعی و خطا انجام می‌شود. در این روش نتایج عددی حاصله براساس سرعت موج برآورد شده بایستی ماگزیمم (یا مینیمم در صورتی که ضربه قوچ ناشی از باز شدن شیر مورد نظر باشد) فشاری تا حد ممکن نزدیک به نتایج آزمایشگاهی تولید نمایند. چنانچه سیستم بدون اصطکاک باشد این کار به معنای تنظیم سرعت موج به گونه‌ای که فشار جوکوفسکی نظیر آن نزدیک به مشاهدات تجربی باشد است. به عنوان یک روش دیگر سرعت موج را می‌توان از طریق تقسیم فاصله بین دو فشار سنج به زمانی که پیشانی اولین موج فاصله بین آن دو فشار سنج را طی می‌کند تعیین نمود [5]. برای بدست آوردن تابع رهاسازی نظیر آن از رابطه  $J_{\infty} * dE_{R_{\infty}} = 1$  و  $J * dE_R = 1$  که در حوزه لاپلاس به صورت  $\bar{J} \bar{E}_R = \frac{1}{s^2}$  نوشته می‌شود استفاده می‌کنیم [14]. بنابراین متغیرهای باقیمانده جهت بهینه سازی  $J_k$  و  $E_{Rk}$  و  $\tau_k^r$  ها خواهند بود.

رفتار ویسکوالاستیک نسبت به عواملی مانند دما، شرایط تکیه گاهی و یکنواخت نبودن مواد لوله بسیار حساس است بهمین منظور مطمئن ترین راه برای بدست آوردن توابع خزش تطابقی استفاده از انجام آزمایش ضربه قوچ و کالیبره نمودن آنهاست. در اینجا نیز کوواس و همکاران [1-7] ضرایب توابع خزش تطابقی را با انجام تست‌های ضربه قوچ و نه تست‌های خزشی بدست آوردند. این نتایج در مقاله آنها برای آزمایش‌های مختلف با شرایط مختلف جریان پایدار ارایه شده اند.

### ۳-۵- صحت سنجی با استفاده از مقایسه با مدل مرجع

ضرایب کالیبره شده توابع کرنش خزشی و ضرایب تابع رهاسازی بدست آمده از ضرایب تابع خزش تطابقی در آزمایش ایمپریال کالج برای هر دو دبی جریان  $Q_0=1.01$  l/s و  $Q_0=0.056$  l/s در جدول (۵-۲) و (۳-۵) با فرض مدول بالک  $1.7E9$  Pa و نسبت پواسن اولیه برابر 0.36 ارایه شده اند.

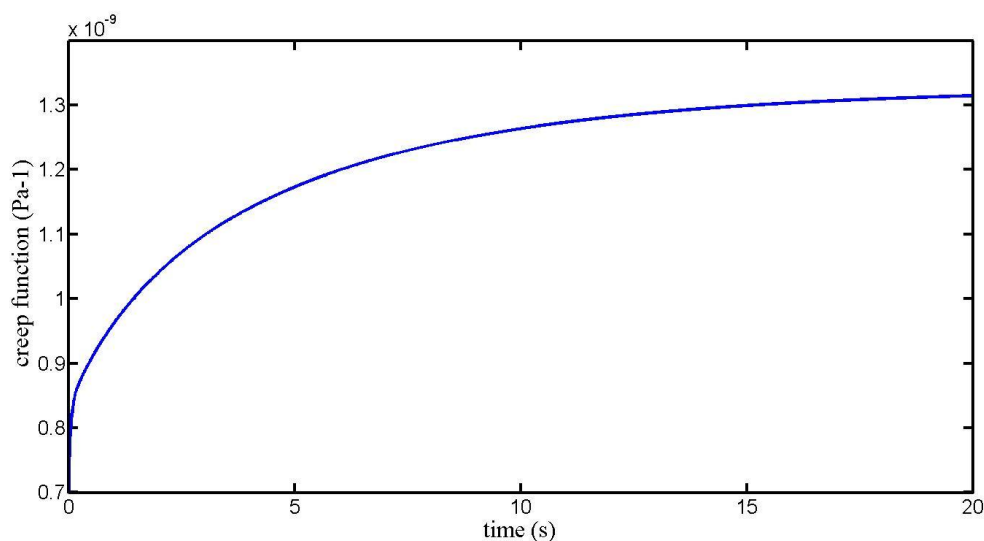
جدول (۲-۵): ضرایب کالیبره شده توابع کرنش خزشی در آزمایش ایمپریال کالج

تعداد المان کلویین- ویت	$\tau_k$ (s) , $J_0 = 7 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ , $J_k (10^{-10} \text{ Pa}^{-1})$				
5	$\tau_1=0.05$ s	$\tau_2=0.5$ s	$\tau_3=1.5$ s	$\tau_4=5$ s	$\tau_5=10$
	1.338	0.143	1.091	3.083	0.631

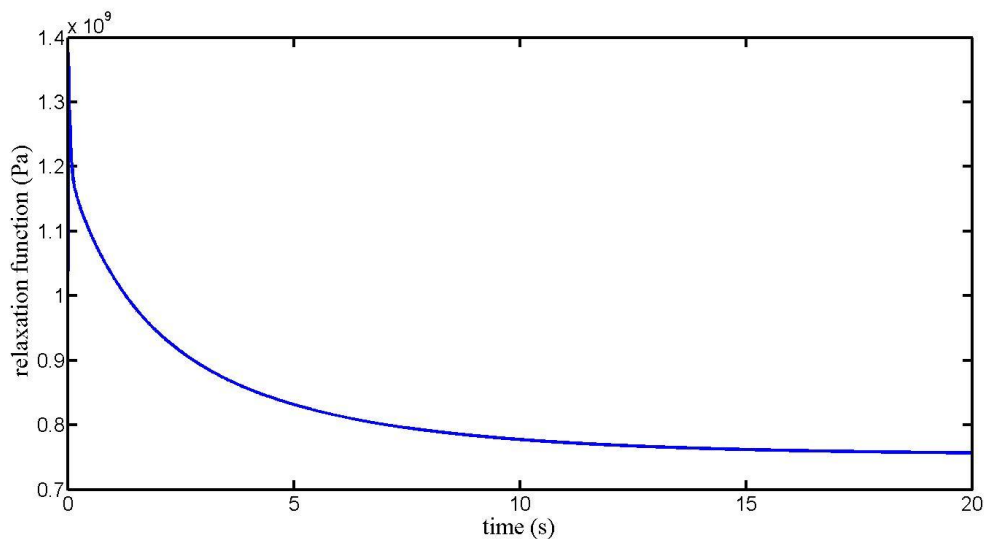
جدول (۳-۵): تابع رهاسازی بدست آمده از ضرایب تابع خزش تطابقی در آزمایش ایمپریال کالج

تعداد المان کلویین- ویت	$E_R (10^8 \text{ Pa})$ , $E_{R_\infty} = 7.5267 \times 10^8 \text{ Pa}$ , $\tau_k^r$ (s)				
5	$\tau_1^r=0.0419$	$\tau_2^r=0.4908$	$\tau_3^r=1.3081$	$\tau_4^r=3.8153$	$\tau_5^r=9.6252$
	2.330	0.2428	1.6696	2.2861	0.2275

همچنین نمودارهای تابع خزش تطابقی و تابع رهاسازی نسبت به زمان در شکل (۵-۱) و (۲-۵) ترسیم شده اند.

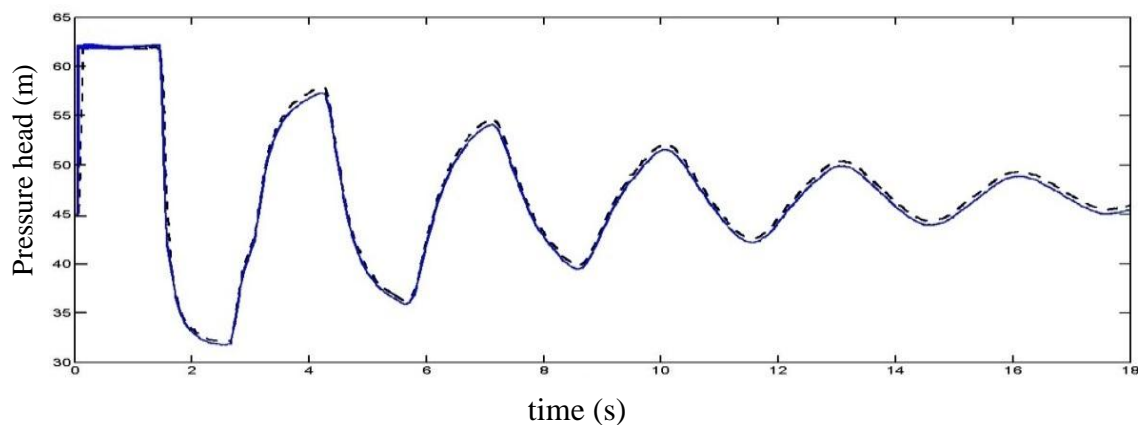


شکل (۵-۱): منحنی خزش تطابقی در لوله ویسکوالاستیک بدست آمده از مدل جدید بر اساس نتایج آزمایشگاهی آزمایش ایمپریال کالج

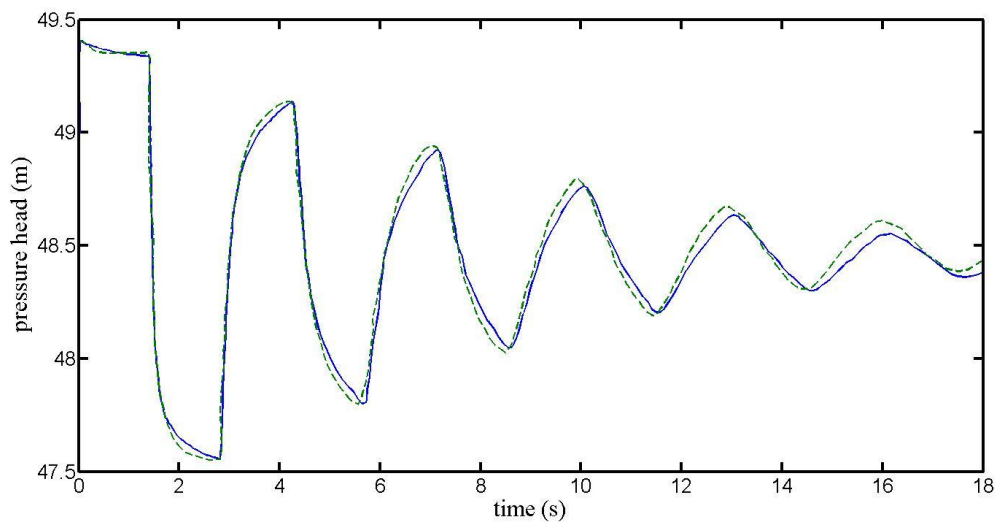


شکل (۲-۵) : منحنی تابع رهاسازی بدست آمده از خزش تطابقی در لوله ویسکوالاستیک بدست آمده از مدل جدید بر اساس نتایج آزمایشگاهی آزمایش ایمریال کالج

داده‌های جدول (۳-۵) همراه با جدول (۱-۵) و (۲-۵) جهت انجام آنالیز ضربه قوچ در سیستم مذکور در این مدل ریاضی برای هر دو نوع جریان به کار گرفته می‌شود. نتیجه در فاصله ۲۷۱ متری از مخزن بالا دست در شکل (۳-۵) که مربوط به  $Q_0=1.01$  l/s و شکل (۴-۵) مربوط به  $Q_0=0.056$  l/s، با داده های آزمایشگاهی ارائه شده (Covas et al 2004a, 2005) مقایسه شده اند [4-7].



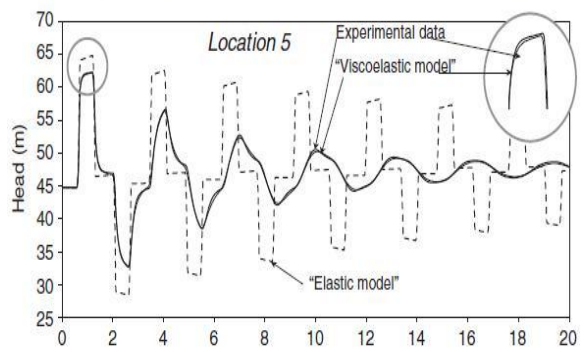
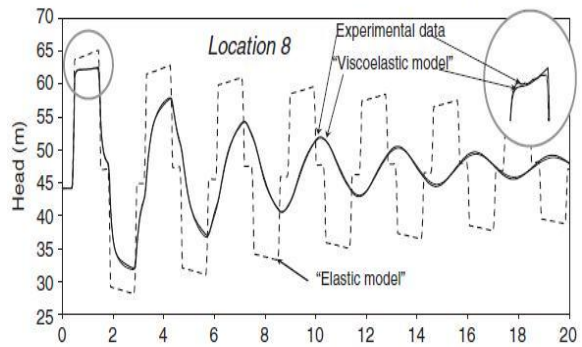
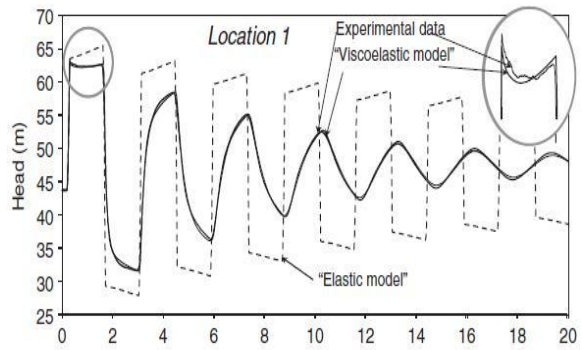
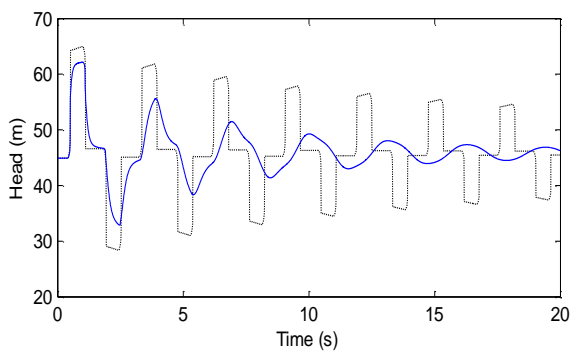
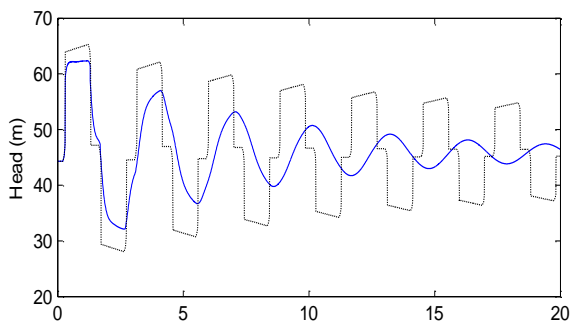
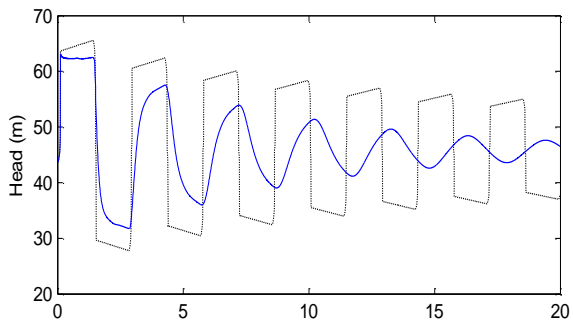
شکل (۳-۵) : نتایج هد در محل شیر بالادست در آزمایش ایمریال کالج. نمودار پیوسته: نتایج حل با روش مدل ریاضی ارائه شده ، نمودار خط چین: دیتای آزمایشگاهی سوارس ( $Q_0=1.01$  l/s)



شکل (۴-۵) : نتایج هد در محل شیر بالادست در آزمایش ایمپیریال کالج. نمودار پیوسته : نتایج حل با روش مدل ریاضی ارایه شده، نمودار خط چین : دیتای آزمایشگاهی سوارس ( $Q_0=0.056 \text{ l/s}$ )

همانطور که مشاهده می شود جوابها از دقت رضایت بخش برخوردار می باشند که این امر نشان دهنده صحیح بودن مدلسازی انجام شده است. در حقیقت مدل پیشنهاد شده، مدل اصلاح شده مدل های ریاضی ضربه قوچ در لوله های ویسکوالاستیک می باشد. قابل ذکر است که در این مدل آزمایشگاهی تمام لوله ها در طول خود به یک دیوار قائم به صورت کاملاً صلب متصل شده اند به گونه ای که امکان هیچگونه حرکت محوری وجود نخواهد داشت.

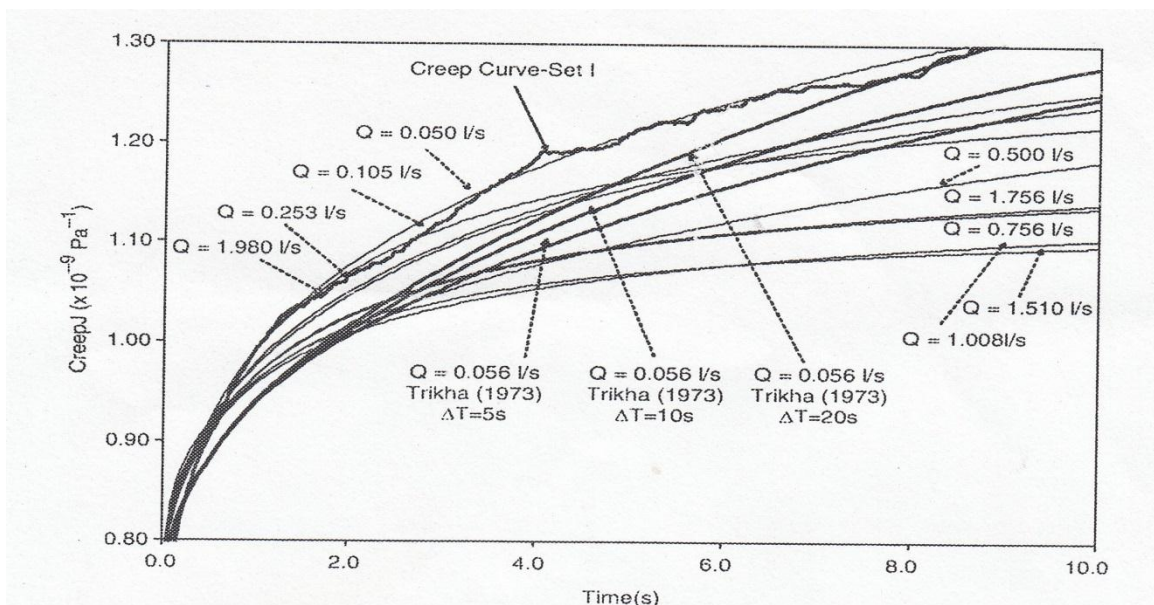
همچنین نتایج در نقاط ۱، ۵، ۸ متناظر فواصل ۱۱۶.۵، ۱۹۷، ۲۷۱ متری از مخزن بالا دست در شکل (۴-۵) با نتایج ارایه شده در مرجع [6] مقایسه شده اند. همانطور که مشاهده می شود در هر سه نقطه جوابها کاملاً یکسان می باشند و همچنین خطوط خط چین نتایج ضربه قوچ کلاسیک را در لوله الاستیک نشان میدهد.



شکل (۵-۵) : مقایسه نتایج هد در ۳ نقطه متفاوت در حالت آنالیز با در نظر گرفتن اثر ویسکوالاستیک راست: نتایج کوواس و همکاران [6]، چپ: نتایج تحقیق حاضر.

#### ۵-۴- مقایسه منحنی خزش تطابقی بدست آمده از مدل ریاضی ارائه شده با مدل‌های قبلی

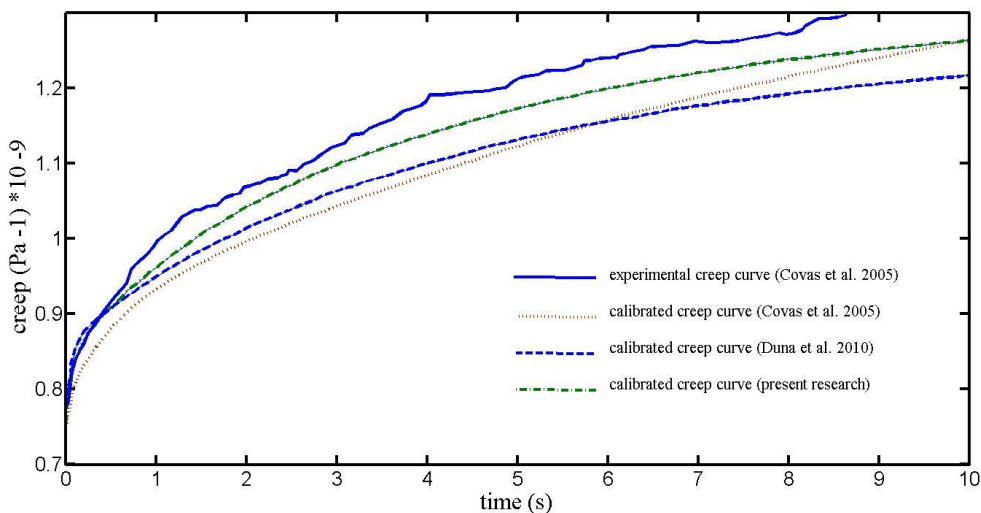
یکی از مشخصات مواد ویسکوالاستیک، خزش آن می باشد که به دبی جریان و سیستم غیر وابسته است. این خصوصیت مواد ویسکوالاستیک، به کمک آزمایش مکانیکی (تست خزش) در آزمایشگاه بدست می آید. بنابراین، در یک مدل ریاضی مناسب، به وسیله نمودار خزش بدست آمده از آزمایش مکانیکی در آزمایشگاه، نمودار پیوسته آبی در شکل ۵-۷، برای پیش بینی نتایج آزمایشگاهی ضربه قوچ برای انواع جریان ها استفاده می شود.



شکل ۵-۶: منحنی خزش تطابقی مدل کواس برای انواع دبی جریان [6-7]

در سال ۲۰۰۵ کواس [6-7]، مدل ریاضی که ارائه داد قادر به پیش بینی نتایج آزمایشگاهی ضربه قوچ برای انواع جریان ها با استفاده از نمودار خزش بدست آمده از آزمایش مکانیکی نبود. همانطور که مشاهده می کنید در شکل (۵-۶)، برای بدست آوردن نتایج آزمایشگاهی ضربه قوچ توسط مدلش باید برای هر دبی یک تابع خزش بدست می آورد.

در مدل دوآن که در سال ۲۰۱۰ [8] این مدل را ارائه داد که منحنی خزش تطابقی آن بصورت خط چین آبی در شکل (۷-۵) نمایش داده شده است، به کمک یک منحنی خزش تطابقی، می توان با دقت خوبی نتایج آزمایشگاهی ضربه قوچ را برای انواع دبی ها پیش بینی کرد اما منحنی خزش تطابقی بدست آمده از آن با منحنی خزش تست مکانیکی تطابق قابل قبولی ندارد.



شکل (۷-۵) : مقایسه منحنی خزش بدست آمده از تست مکانیکی منحنی خزش تطابقی کواس، دوآن و مدل ارائه شده

می توان در شکل (۳-۵) و شکل (۴-۵) نتایج هد پیزومتریک بدست آمده از مدل ریاضی ارائه شده را با نتایج آزمایشگاهی در دسترس مقایسه کرد. تطابق بسیار خوبی بین نتایج آزمایشگاهی و عددی برای هر دو دبی جریان مشاهده می شود. این در حالی است که نتایج بدست آمده برای هر دو جریان بوسیله یک منحنی خزش تطابقی بدست آمده است. به علاوه، منحنی خزش تطابقی بدست آمده بر اساس مدل ریاضی ارائه شده به منحنی خزش بدست آمده از تست خزش نزدیک و تطابق قابل قبولی دارد.



فصل ششم: خلاصه

و

نتیجه گیری

ضربه قوچ نوعی جریان میرا است که در خطوط لوله می‌تواند در اثر بسته شدن شیرها یا توقف ناگهانی پمپ ایجاد شود. در مواد ویسکوالاستیک، در اثر بارگذاری وارد بر آنها، یک تغییر شکل اضافی (تاخیری)، علاوه بر تغییر شکل ایجاد شده بلافاصله پس از بارگذاری ایجاد می‌شود. مدل های ریاضی ارائه شده پیشین در مطالعه ضربه قوچ در لوله های ویسکوالاستیک، نسبت پواسن را نیز ثابت فرض می کردند. در حالیکه در مدل ریاضی اصلاح شده حاضر، نسبت پواسن متغیر در نظر گرفته می شود که منجر به نتایجی با دقت بالاتر در آنالیزهای ضربه قوچ می شود.

به طور کلی مدل جدید ارائه شده به رفتار فیزیکی لوله های ویسکوالاستیک نزدیکتر است زیرا مطابق گزارشات ارائه شده نیز در رفتار پلیمرها، معمولاً در طول یک بارگذاری تغییرات مدول بالک به مراتب از تغییرات نسبت پواسن کمتر است لذا استفاده از یک مدل تنش- کرنش که دارای مدول بالک ثابتی باشد ولی تغییرات نسبت پواسن را بتواند در خود جای دهد به واقعیت نزدیک بوده و چنانچه از آن جهت توسعه مدل ریاضی ضربه قوچ به کار رود مدل کاملتری خواهیم داشت.

در این تحقیق مدل ریاضی در لوله ویسکوالاستیک خطی گسترش یافته است. به علت در نظر گرفتن نسبت پواسن متغیر، ترم کرنش محیطی در معادله پیوستگی ضربه قوچ شامل توابع خزش و رهاسازی می باشند در حالیکه در مدل ریاضی که نسبت پواسن ثابت در نظر گرفته شده باشد، ترم کرنش محیطی در معادله پیوستگی ضربه قوچ فقط شامل تابع خزش می باشد. معادله پیوستگی شامل دو انتگرال کانولوشن می باشد که به کمک معادلاتی این دو انتگرال تقریب زده می شوند. سپس مدل ریاضی مذکور با روش عددی خطوط مشخصه حل شده و در نهایت با استفاده از نتایج آزمایشگاهی معتبر موجود صحت سنجی گردیده است.

از مقایسه پاسخ بدست آمده از مدل ریاضی گسترش یافته با داده های آزمایشگاهی نتیجه می شود که به وسیله یک منحنی خزش تطابقی، می توان با دقت خوبی نتایج آزمایشگاهی ضربه قوچ را برای انواع دبی ها بدست آورد.

## ۲-۶- نتیجه گیری

از مطالعه در زمینه پدیده ضربه قوچ در لوله های ویسکوالاستیک (هدف این رساله) می توان به نتایج کلی که در زیر ارائه شده اند رسید.

۱- در حالت آنالیز ضربه قوچ به تنهایی، میرایی موج که ناشی از رفتار ویسکوالاستیک دیواره لوله می باشد به خوبی با مدل ریاضی ارائه شده قابل شبیه سازی است به طوریکه همابستگی قابل قبولی بین نتایج عددی و آزمایشگاهی وجود دارد.

۲- مشخصات ویسکوالاستیک لوله به نوع جریان و سیستم غیر وابسته می باشد. یکی از این مشخصات ویسکوالاستیک، خزش آن می باشد که بوسیله آزمایش مکانیک بدست می آید. در این مدل ریاضی، تابع خزش تطابقی بدست آمده تطابق خوبی را با خزش بدست آمده از تست خزش دارد.

۳- از این مدل می توان با در نظر گرفتن یک تابع خزش تطابقی واحد برای انواع دبی های جریان، نتایج عددی خوبی بدست آورد در حالیکه در مدل کواس به دلیل تغییر دبی جریان باید تابع خزش را نیز کالیبره کرد و سپس از تابع خزش کالیبره شده نسبت به آن دبی جریان می توان به نتایج آزمایشگاهی رسید.

## ۶-۳- پیشنهادات

۱- ارائه یک مدل ریاضی ضربه قوچ در لوله های ویسکوالاستیک غیر خطی. تمامی آنچه در این رساله ارائه شد برای لوله های ویسکوالاستیک خطی می باشند که اگر چنین فرضی صورت بگیرد تابع خزش تطابقی علاوه بر آنکه تابع زمان می باشد، تابع تنش نیز قرار می گیرد.

۲- حل معادلات ضربه قوچ در شبکه های لوله در این پژوهش از دیدگاه حوزه زمان بدست آمده است که این معادلات می توانند در حوزه فرکانس نیز حل شوند. در مسایل ویسکوالاستیک چنانچه حل فرکانسی مورد نظر باشد باید معادله دیفرانسیل حاکم در حوزه لاپلاس نوشته شود که معمولاً از آن میتوان حل دقیق را در حوزه لاپلاس به دست آورد.

۳- روش خطوط مشخصه برای تحلیل جریان غیرماندگار روش بسیار دقیقی است ولی محدودیت هایی دارد. یکی از این محدودیتها نسبت  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  است که باید همواره برابر با سرعت موج در لوله باشد. در یک خط لوله تنها، می توان  $\Delta x$  را طوری انتخاب کرد که کل لوله به قطعات مساوی تقسیم شود و مقدار  $\Delta t$  را بر طبق آن تعیین نمود. در اینجا ممکن است طول لوله به گونه ای باشد که در تقسیم بندی لوله به بازه های  $\Delta x$ ، قطعه ای از لوله مقدار کمتری پیدا کند. در این حالت استفاده از اینترپولاسیون می تواند خطای بسیار زیادی وارد محاسبات کند. برای رفع این مشکل می توان روشهای پیشنهادی مختلفی مانند روش احجام محدود گودونو را به کار برد.

۴- بررسی پدیده ضربه قوچ در لوله های ویسکوالاستیک با جداره ضخیم و مقایسه نتایج با حالت لوله جدار نازک. در نظر گرفتن این فرض باعث می شود تنش شعاعی از معادلات پیوستگی حذف نشود و معادله پیوستگی پیچیده تر شود.

۵- ارائه یک مدل ریاضی ضربه قوچ در لوله های ویسکوالاستیک با فرض متغیر بودن مدول بالک لوله و همچنین متغیر بودن نسبت پواسن فرض شود. این فرض سبب تغییراتی در کرنش محیطی می گردد که کرنش محیطی شامل توابع انتگرال کانولوشن دوگانه و سه گانه می شود.

پیوست

## اثبات رابطه تقریب برای انتگرال کانولوشن

اگر انتگرال کانولوشن به صورت زیر تعریف شود:

$$f_k(t) = \frac{J_k}{\tau_k} \int_0^t g(t-s) e^{\frac{-s}{\tau_k}} ds$$

فرمول زیر، تقریب بسیار خوبی برای انتگرال کانولوشن ارائه می‌نماید که با استفاده از یک رابطه

برگشتی پیاده‌سازی می‌شود:

$$f_k(t) \approx g(t) \left( J_k + \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - 1 \right) \right) + g(t - \Delta t) \left( -J_k e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - 1 \right) \right) + e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} f_k(t - \Delta t)$$

فرمول مذکور طی مراحل زیر اثبات می‌شود.

$$\begin{aligned}
f_k(t) &= \frac{J_k}{\tau_k} \int_0^t g(t-s) e^{\frac{-s}{\tau_k}} ds \\
&= \underbrace{\frac{J_k}{\tau_k} \int_0^{\Delta t} g(t-s) e^{\frac{-s}{\tau_k}} ds}_A + \underbrace{\frac{J_k}{\tau_k} \int_{\Delta t}^t g(t-s) e^{\frac{-s}{\tau_k}} ds}_B \\
A &= \frac{J_k}{\tau_k} \int_0^{\Delta t} g(t-s) e^{\frac{-s}{\tau_k}} ds \\
&= -\frac{J_k}{\tau_k} \int_t^{t-\Delta t} g(y) e^{\frac{y-t}{\tau_k}} dy = \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t}{\tau_k}} \int_{t-\Delta t}^t g(y) e^{\frac{y}{\tau_k}} dy \\
&= \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t}{\tau_k}} \left( g(y) \tau_k e^{\frac{y}{\tau_k}} \Big|_{t-\Delta t}^t - \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial g(y)}{\partial y} \tau_k e^{\frac{y}{\tau_k}} dy \right) \\
&= \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t}{\tau_k}} \left( g(t) \tau_k e^{\frac{t}{\tau_k}} - g(t-\Delta t) \tau_k e^{\frac{t-\Delta t}{\tau_k}} - \int_{t-\Delta t}^t \frac{\partial g(y)}{\partial y} \tau_k e^{\frac{y}{\tau_k}} dy \right) \\
&\approx \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t}{\tau_k}} \left( g(t) \tau_k e^{\frac{t}{\tau_k}} - g(t-\Delta t) \tau_k e^{\frac{t-\Delta t}{\tau_k}} - \tau_k \dot{g}(t-\Delta t) \int_{t-\Delta t}^t e^{\frac{y}{\tau_k}} dy \right) \\
&\approx \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t}{\tau_k}} \left( g(t) \tau_k e^{\frac{t}{\tau_k}} - g(t-\Delta t) \tau_k e^{\frac{t-\Delta t}{\tau_k}} - \tau_k \dot{g}(t-\Delta t) \left[ \tau_k e^{\frac{y}{\tau_k}} \right]_{t-\Delta t}^t \right) \\
&\approx \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-t}{\tau_k}} \left( g(t) \tau_k e^{\frac{t}{\tau_k}} - g(t-\Delta t) \tau_k e^{\frac{t-\Delta t}{\tau_k}} - \tau_k^2 \left( \frac{g(t) - g(t-\Delta t)}{\Delta t} \right) \left( e^{\frac{t}{\tau_k}} - e^{\frac{t-\Delta t}{\tau_k}} \right) \right) \\
&\approx J_k g(t) - J_k g(t-\Delta t) e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - J_k \tau_k \left( \frac{g(t) - g(t-\Delta t)}{\Delta t} \right) \left( 1 - e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} \right) \\
&\approx g(t) \left( J_k + \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - 1 \right) \right) + g(t-\Delta t) \left( -J_k e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - 1 \right) \right) \\
B &= \int_{\Delta t}^t g(t-s) \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-s}{\tau_k}} ds = \int_0^{t-\Delta t} g(t-\Delta t-u) \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-u-\Delta t}{\tau_k}} ds \\
&= e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} \int_0^{t-\Delta t} g(t-\Delta t-u) \frac{J_k}{\tau_k} e^{\frac{-u}{\tau_k}} ds = e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} f_k(t-\Delta t) \Rightarrow \\
f_k(t) &= A+B = g(t) \left( J_k + \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - 1 \right) \right) + g(t-\Delta t) \left( -J_k e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - \frac{J_k \tau_k}{\Delta t} \left( e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} - 1 \right) \right) \\
&+ e^{\frac{-\Delta t}{\tau_k}} f_k(t-\Delta t)
\end{aligned}$$



## منابع

## منابع فارسی

۱. استریتز، ویکتور ال و وایلی، بنجامین. و بدفورد، کیچ [ترجمه] ملک زاده، غلامرضا و کاشانی حصار، محمد حسین و معتمدی، غلام محمد، ویرایش دوم، انتشارات نما، مشهد، ۱۳۷۵
۲. کرامت علیرضا "بررسی پدیده اندرکنش سیال-سازه در سیستمهای لوله ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن جدایی ستون مایع" پایان نامه دکترا، دانشگاه صنعتی شاهرود، دانشکده عمران و معماری، شهریور ۱۳۸۹.
۳. کرامت علیرضا "تحلیل دینامیکی شبکه‌های لوله تحت فشار با روش اجزای محدود" پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران اهواز، دانشکده مهندسی، بهمن ۱۳۸۴.

- [1] Bergant, A., Tijsseling, A., Vítkovský, J.P., Covas, D., Simpson, A., Lambert, M., 2008a. Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing. Part 1: Mathematical tools. *IAHR Journal of Hydraulic Research* 46, 373–381
- [2] Bergant, A., Tijsseling, A., Vítkovský, J.P., Covas, D., Simpson, A., Lambert, M., 2008b. Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing. Part 2: Case studies. *IAHR Journal of Hydraulic Research* 46, 382–391.
- [3] Brinson, H.F., Brinson, L.C., 2008. *Polymer engineering science and viscoelasticity: an introduction*, Springe
- [4] Covas, D., Stoianov, I., Mano, J., Ramos, H., Graham, N., Maksimovic, C., 2004a. The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity on hydraulic transients. Part I Experimental analysis and creep characterization. *IAHR Journal of Hydraulic Research* 42, 516–530.
- [5] Covas, D., Stoianov, I., Mano, J., Ramos, H., Graham, N., Maksimovic, C., 2005. The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity in hydraulic transients. Part II—Model development, calibration and verification. *IAHR Journal of Hydraulic Research* 43, 56–70.
- [6] Covas, D., Stoianov, I., Ramos, H., Graham, N., Maksimovic, C., Butler, D., 2004. Water hammer in pressurized polyethylene pipes: conceptual model and experimental analysis. *Urban Water Journal*. 1(2), 177-197
- [7] Covas, D., Stoianov, I., Ramos, H., Graham, N., Maksimovic, C., Butler, D., 2004b. Water hammer in pressurized polyethylene pipes: conceptual model and experimental analysis. *Urban Water Journal* 1, 177–197.
- [8] Duan, H.F., Ghidaoui, M., Lee, P.J., Tung, Y.K., 2010. Unsteady friction and visco-elasticity in pipe fluid transients. *IAHR Journal of Hydraulic Research* 48, 354–362. Discussion in 49, 398–403.
- [9] Keramat, A., Tijsseling, A.S., 2012. Waterhammer with column separation, fluid-structure interaction and unsteady friction in a viscoelastic pipe. 11th International Conference on Pressure Surges Lisbon, Portugal, 24-26 October.
- [10] Keramat, A., Tijsseling, A.S., Ahmadi, A., 2010. Investigation of transient cavitating flow in viscoelastic pipes. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* 12(1), 012081.
- [11] Keramat, A., Tijsseling, A.S., Hou, Q., Ahmadi, A., 2012. Fluid-structure interaction with pipewall viscoelasticity during water hammer. *Journal of Fluids and Structures* 28, 434–455.
- [12] Soares, A.K., Covas, D.I.C., Ramos, H.M., Reis, L.F.R., 2009. Unsteady flow with cavitation in viscoelastic pipes. *International Journal of Fluid Machinery and Systems* 2, 269–277.

- [13] Soares, A.K., Covas, D.I.C., Reis, L.F., 2008. Analysis of PVC pipe-wall viscoelasticity during water hammer. *ASCE Journal of Hydraulic Engineering* 134, 1389–1394.
- [14] Teishev, A.Y., Malkin, A.Y., 1990. On the relation between relaxation and creep curves of polymers in the range of linear viscoelasticity. *Polymer Science U.S.S.R.* 32(8), 1669-76
- [15] Wineman, A.S.: Rajagopal K. R., 2000. *Mechanical response of polymers: an introduction.* Cambridge University Press.

## Abstract

Mathematical modeling of piping systems, in which the dynamic behavior of the pipe system are also studied due to water hammer phenomenon, has been studied in recent years. Also consider the many benefits of viscoelastic pipes, these pipes are used in numerous industrial sectors, especially in piping systems is growing rapidly. In viscoelastic materials, the effect of loading on them, an additional deformation (late), the deformation is made, immediately after this occurs. The mathematical model presented earlier in viscoelastic study of water hammer in pipes, the Poisson ratio was assumed constant. While the modified mathematical model, the Poisson ratio of the pipe varies with time is considered.

In this study, first, partial differential equations governing water hammer in pipe systems made of viscoelastic materials is introduced. These equations are derived assuming a Poisson's ratio of pipe varies with time, constant bulk modulus of pipe and thin-walled pipe are done. From the physical point of view, the problem of water hammer, viscoelastic behavior leads to strain in the radial direction of the pipe axis is delayed. Should be noted that the axial strain due to inhibition of delayed pipe in the axial direction is considered to be zero. The differential equations are derived to calculate the strain delay, the convolution integral is used phrases which are calculated using an approximate relationship for good. After specifying the differential equations and initial and boundary conditions, a numerical method of characteristic (MOC) in order to solve the equations in the time domain to be handled.

The results for a certain point of time-pressure in the history of the laboratory results are plotted with the pipe provided in the previous valid researches are compared. The results of this study suggest that by taking the Poisson ratio of the viscoelastic pipe varies in mathematical model, provided the answer cause high-precision on the water hammer phenomenon in viscoelastic materials for different discharge using a calibrated creep curves.

**Keywords:** Water hammer, Viscoelastic pipe, Method of Characteristics, variable Poisson's ratio



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Civil & Architecture Engineering**

**Mathematical Modeling of Waterhammer in Viscoelastic Pipes**

**Arash Ghaffarian Kolahi**

**Supervisor:**

**Dr. Ahmad Ahmadi**

**September 2013**

