دانشکده عمران و معماری
گروه عمران

تحلیل الاستو-پلاستیک مسائل پیوسته دو بعدی به روش آیزوژئومتریک

دانشجو: زهرا معصومی

استاد راهنما:
دکتر بهروز حسنی

استاد مشاور:
دکتر سید مهدی توکلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ماه ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده عمران و معماری
گروه عمران

تحلیل الاستو- پلاستیک مسائل پیوسته دو بعدی به روش آیزوژئومتریک

دانشجو: زهرا معصومی

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

استاد مشاور:

دکتر سید مهدی توکلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ماه ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران و معماری

گروه عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم زهرا معصومی

تحت عنوان تحلیل الاستو-پلاستیک مسائل پیوسته دوبعدی به روش آیزوژئومتریک

در تاریخ ۱۳۹۱/۶/۲۹ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه خوب مورد پذیرش قرار گرفت.

استاد راهنما	امضاء	استاد مشاور	امضاء
دکتر بهروز حسنی		دکتر سید مهدی توکلی	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
دکتر وحید کلاتجاری		مهندس سید علی حسینی	
دکترفضل الله ساغروانی			

تقدیم به :

روح پاک **پدرم** که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم

به **مادرم** دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

به **همسرم** اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم که همواره یار و مشوقم بوده و گام هایم را در پیمودن راه به ویژه در تهیه این رساله استواری بخشیده

و به **فرزند** عزیزم که نشانه لطف الهی در زندگی من است

تقدیر و تشکر :

لازم می‌دانم مراتب تشکر و قدردانی صادقانه خود را نسبت به استاد ارجمند جناب آقای دکتر حسنی به جهت هدایت و پشتیبانی دلسوزانه ایشان بیان نمایم.
بعلاوه از هدایتهای علمی استاد مشاور محترم آقای دکتر توکلی نیز صمیمانه تشکر می نمایم.
بعلاوه از اساتید محترم کمیته داوری و نیز کلیه اساتید و دوستانم در دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود بویژه ریاست محترم دانشکده جناب آقای دکتر احمدی که نقش ارزنده‌ای در پیشرفت علمی‌ام داشته‌اند تشکر می نمایم.
بر خود واجب می‌دانم مراتب قدردانی عمیق خود را نسبت به همسرم بخاطر شکیبایی، درک متقابل و پشتیبانی کامل در طول دوران تحصیلم ابراز نمایم.

تعهد نامه

اینجانب **زهرا معصومی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **عمران** دانشکده **عمران و معماری** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تحلیل الاستو-پلاستیک مسائل پیوسته دوبعدی به روش آیزوژئومتریک** تحت راهنمائی **دکتر بهروز حسنی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

چکیده

روش تحلیل آیزوژئومتریک یکی از روشهای محاسباتی است که اخیراً توسعه یافته و تلاش می‌کند امکان یکپارچه‌سازی بسته های CAD و CAE را فراهم نماید و بدین ترتیب ضمن ایجاد هندسه مدل دقیق و بهبود روش تحلیل، حجم محاسباتی را نیز کاهش دهد. این پایان نامه با مرور پیشینه موضوع و رویکرد تحلیل آیزوژئومتریک مبتنی بر نربز، تحلیل پلاستیک سازه‌های دوبعدی مبتنی بر این روش را مورد توجه قرار داده است. در این راستا فرمول‌بندی رابطه الاستو-پلاستیک سازه های دوبعدی صورت پذیرفته و روشهای عددی حل این معادلات بررسی می‌شود. در ادامه با مرور خواص توابع پایه نربز، چگونگی حل اجزای محدود معادلات الاستو-پلاستیک سازه های دو بعدی مبتنی بر این توابع پایه ارائه می‌گردد. سپس با استفاده از نرم‌افزار MATLAB و کد توسعه یافته در آن تحت عنوان Elasto-Plastic IGA، حل عددی چند مساله نمونه با روش آیزوژئومتریک مبتنی بر نربز ارائه و پاسخ ها با روش اجزاء محدود کلاسیک یا نتایج تحلیلی مقایسه می شود. بررسی نتایج حاصل حاکی از دقت مناسب روش تحلیل آیزوژئومتریک و نرم افزار توسعه یافته مبتنی بر آن می باشد.

واژه‌های کلیدی: روش آیزوژئومتریک، تئوری پلاستیسیته، روش اجزاء محدود، سازه‌های دوبعدی

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول:

مقدمه

فصل اول

مقدمه

روش تحلیل آیزوژئومتریک[1] یکی از روشهای محاسباتی است که اخیرا توسعه یافته و تلاش می‌کند امکان یکپارچه سازی بسته های CAD[2] و CAE[3] را فراهم نماید. بسته هایCAD در سالهای ۱۹۸۰-۱۹۷۰ بر پایه منحنی‌های نربز(NURBS)[4] که قابلیت ارائه هندسه دقیق اشکال پیچیده بویژه شکل‌های مهندسی چون سیلندر،کره و... را دارد طراحی شده‌اند، اما بسته‌های CAE که در سالهای ۱۹۵۰-۱۹۴۰ طراحی شده اند، با بهره گیری از روش اجزای محدود [5] ، هندسه مدل را با استفاده از چند جمله‌ایها[6] ایجاد می‌نمایند، در نتیجه هندسه ایجاد شده تقریبی است. این خطا در نواحی مرزی و هندسه‌های پیچیده افزایش می‌یابد. علاوه بر این، ایجاد مدل‌های تحلیلی چون تولید مش، اصلاح مش بندی، مدلسازی جریان سیالات، شکلهای آیرودینامیک، کمانش پوسته‌ها و ... در آن با دشواری همراه خواهد بود[۱]. بنابراین جهت تحلیل طرحهای جدید که بطور مستمر، با سرعت ودقت بالا تولید می‌شوند باید بین CAD و CAE تبادل اطلاعات صورت پذیرد و چون روش‌های محاسباتی هندسی برای هریک متفاوت است انجام آن پیچیده و زمانبر خواهد بود[۲] بطوریکه تولید هندسه و مش بندی به روش اجزای محدود در برخی از پروژه‌ها علاوه بر اینکه تا ۸۰٪ زمان تحلیل را به خود اختصاص می‌دهد، از دقت هندسه مدل نیز می‌کاهد.

---

۱ Isogeometric analysis
۲ Computer Aided Design
۳ Computer Aided Engineering
۴ Non-Uniform Rational B-Splines
۵ Finite Element Method
۶ Polynomial

در راستای بهبود روشهای تحلیل و برطرف نمودن مشکلات فوق روش تحلیل آیزوژئومتریک در سال ۲۰۰۵ توسط پروفسور T.J.R.Hughes ارائه گردید. در این روش هندسه دقیق با استفاده از سطوح نربز در نرم افزارهای CAD ایجاد و سپس با المانهای نربز مش‌بندی انجام می‌شود و به این ترتیب مدل تحلیلی نیز بطور دقیق ایجاد می‌گردد[۳]. این روش از مزایای زیر برخوردار است:

۱- سادگی در بهبود مش و بالا بردن دقت حل

۲- کاهش حجم محاسبات با توجه به انعطاف‌پذیر بودن توابع پایه در مدلسازی چندجمله‌ای‌های با درجات بالا

۳- مدلسازی دقیق و ساده هندسه مساله

۴- اقناع دقیق شرایط مرزی

طبق مطالعات انجام شده این روش در حوزه‌های مختلفی چون ارتعاشات سازه ای [۴،۵،۶]، انتشار امواج [۴]، انتقال حرارت [۷] و الکترومغناطیس [۸] موفق عمل نموده است و همچنان تحقیق بر روی این روش در سایر حوزه‌ها ادامه دارد.

در این راستا تعداد قابل توجهی از مواد مهندسی مانند فلزات، بتن، سنگ‌ها و به طور کلی خاک‌ها، بعنوان مواد پلاستیک دسته بندی می گردند. لذا با توجه به اهمیت تجزیه و تحلیل دقیق رفتار این مواد، مطالعه بر روی آنالیز پلاستیک سازه‌های دوبعدی بر اساس روش آیزوژئومتریک در قالب این پایان نامه مورد توجه قرار گرفته است. شایان ذکر است بر اساس بررسی‌های صورت پذیرفته تاکنون در این حوزه در داخل و خارج از کشور مستندی منتشر نشده است.

۱-۱- ساختار پایان نامه

این پایان نامه با مرور پیشینه موضوع و رویکرد تحلیل آیزوژئومتریک مبتنی بر نربز، تحلیل پلاستیک سازه‌های دوبعدی مبتنی بر این روش را مورد توجه قرار می‌دهد. در این راستا فرمول‌بندی

رابطه الاستو-پلاستیک تنش-کرنش سازه های دوبعدی در فصل دوم صورت می‌پذیرد و روشهای عددی حل این معادلات بررسی می‌شود. در ادامه در فصل سوم با مرور خواص توابع پایه نربز چگونگی حل اجزای محدود معادلات الاستو-پلاستیک سازه‌های دو بعدی مبتنی بر این توابع پایه ارائه می-گردد. سپس در فصل چهارم با ارائه حل تحلیلی یک مساله نمونه بعنوان یک الگوی مقایسه، شبیه-سازی آن با روش آیزوژئومتریک مبتنی بر نربز با استفاده از نرم‌افزار Elasto-Olastic IGA صورت می پذیرد. بررسی نتایج حاصل و ارائه جمع بندی و برخی پیشنهادات برای فعالیت های آتی نیز در فصل پنجم انجام خواهد شد.

فصل دوم:

تئوری ریاضی پلاستیسیته در

سازه های دو بعدی

فصل دوم

تئوری ریاضی پلاستیسیته در سازه‌های دو بعدی

۲-۱- مقدمه

تئوری پلاستیسیته با جامداتی[۱] سرو کار دارد که پس از بارگذاری و باربرداری کامل، به حالت اولیه خود بازنگشته و در آنها تغییر شکلهای دائمی ایجاد می‌گردد. در حالت خاص، این تئوری به تشریح موادی می‌پردازد که در آنها تغییر شکل دائمی به نرخ اعمال بار بستگی ندارد. موادی که رفتار آنها توسط تئوری پلاستیسیته قابل تشریح باشد، مواد پلاستیک نامیده می‌شود. تعداد قابل توجهی از مواد مهندسی مانند فلزات، بتن، سنگ‌ها و به طور کلی خاک‌ها، بعنوان مواد پلاستیک دسته بندی می‌گردند. پیدایش اصل تئوری پلاستیسیته را می‌توان در اواسط قرن نوزدهم جستجو کرد، در ادامه مخصوصا در نیمه اول قرن بیستم، پیشرفت‌های چشم‌گیری واقع شد. این تئوری امروزه دارای پایه‌های ریاضی قدرتمندی است و بعنوان یکی از موفق‌ترین مدلهای ساختاری مواد جامد شناخته می‌شود.

هدف از تئوری ریاضی پلاستیستیه فراهم‌آوری توصیف تئوریک روابط بین تنش و کرنش برای موادی است که پاسخ الاستو-پلاستیک از خود نشان می‌دهند. در تئوری ریاضی پلاستیسیته، تغییرشکل‌ها بی نهایت کوچک فرض می‌شوند که این مطلب حل عددی رفتار جامدات را ممکن می‌سازد. در این فصل تحلیل الاستو-پلاستیک سازه های دو بعدی با ارائه فرضیات اولیه و بیان تئوریک مرتبط با آنها مورد

[۱] Solids

توجه قرار می‌گیرد و در ادامه روشهای حل عددی این معادلات ارائه می شود. مراجع اصلی موضوعات این فصل[۹،۱۰،۱۱] است اما از مراجع [۱۲،۱۳،۱۴] نیز می‌توان در تکمیل بحث استفاده نمود.

۲-۲- معادلات حاکم بر مکانیک جامدات در سیستم مختصات کارتزین

سه حالت ایده‌آل در فضای دوبعدی به صورت زیر متصور می‌باشد:

۱- تنش مسطح[۱]

۲- کرنش مسطح[۲]

۳- تقارن محوری[۳]

در مساله تنش مسطح σ_{zz} ثابت فرض می‌شود و در مساله کرنش مسطح ε_{zz} ثابت می‌باشد. لذا در مساله تنش مسطح ε_{zz} در حین بارگذاری می‌تواند تغییر کند در حالیکه در مساله کرنش مسطح σ_{zz} متغیر خواهد بود.

در مسائل تنش و کرنش مسطح تنها اجزایی که بعنوان متغیرهای مجهول مفروض هستند $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ و $(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$ می‌باشند زیرا σ_{zz} و ε_{zz} را می‌توان از روی این متغیرها و بهره‌گیری از معادلات ساختاری[۴] محاسبه نمود. قراردادن این متغیرها در قالب بردارهای $\sigma = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz})$ و $\varepsilon = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy})$ و تعریف رابطه بین σ و ε مساله مقادیر مرزی دو بعدی را کامل می‌کند. بطور کلی تانسور تنش و کرنش از طریق تانسور مرتبه ۴ به شکل زیر به هم مرتبط هستند.

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{۱-۲}$$

۱ Plane stress
۲ Plane strain
۳ Axisymmetric
۴ Constitutive equations

که D_{ijkl} تانسور مدول سختی مرتبه ۴ می‌باشند وقتی‌که ماده در حالت الاستیک خود قرار دارد، این تانسور با تانسور سختی الاستیک برابر خواهد بود. وقتی‌که رفتار تنش- کرنش الاستوپلاستیک است، رابطه فوق به صورت رابطه‌ی نرخی[۱] بیان می‌شود (یعنی $\dot{\sigma}$ برحسب $\dot{\varepsilon}$) در اینحالت تانسور فوق یک تانسور سختی الاستوپلاستیک ترکیبی می‌باشد. لذا یک مدل الاستوپلاستیک مناسب جهت تعریف آن مورد نیاز خواهد بود. تقارن تانسورهای تنش و کرنش امکان نوشتن روابط تنش- کرنش به شکل ماتریس- بردار را فراهم می‌کند. برای جامدات[۲] سه بعدی:

$$\sigma = C\varepsilon \tag{۲-۲}$$

رابطه تنش- کرنش سه بعدی ۶×۶ فوق در مسائل تنش و کرنش مسطح به یک رابطه‌ی ساده‌تر تبدیل می‌گردد. روابط به شکل زیر خواهند بود:

(۲-۳)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & C_{13}^* \\ C_{21}^* & C_{22}^* & C_{23}^* \\ C_{31}^* & C_{32}^* & C_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \sigma_{xy0} \end{Bmatrix}$$

معادله تعادل:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad in \quad \Omega \tag{۲-۴الف}$$

شرایط مرزی:

$$u = \hat{u}(t) \quad on \quad \Gamma_u \tag{۲-۴ب}$$

$$t = \hat{t}(t) \quad on \quad \Gamma_t \tag{۲-۴ج}$$

شرایط اولیه:

[۱] Rate
[۲] solid

$$u = u_0(x) \quad on \quad \Gamma_u \tag{۲-۴د}$$

$$\dot{u} = \dot{u}_0(x) \quad on \quad \Gamma_u \tag{۲-۴ه}$$

معادله ساختاری:

$$\sigma = D\varepsilon \tag{۲-۴و}$$

رابطه کرنش- جابجایی:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{۲-۴ز}$$

خواهند بود.

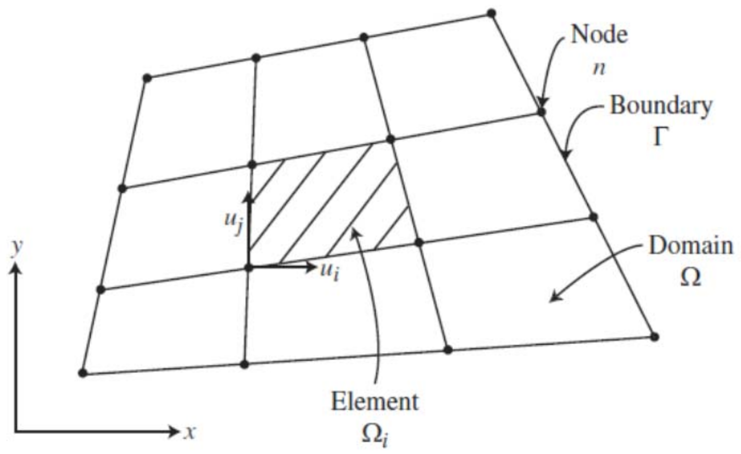
۲-۳- حل اجزاء محدود مساله مقدار مرزی/ اولیه

در این بخش در ابتدا با فرض تئوری الاستیک مساله مقدار مرزی/ اولیه با استفاده از روش اجزاء محدود حل و سپس روش به مساله الاستوپلاستیک توسعه می‌یابد.

۲-۳-۱- مساله الاستیک

روش اجزاء محدود یک روش عددی جهت حل تقریبی مسائل مقدار مرزی می‌باشد. بطورکلی اصول مختلفی (اصل کار مجازی، اصل حداقل انرژی پتانسیل، اصل تغییرات و...) می‌تواند مبنای استخراج معادلات اجزاء محدود قرار گیرند.

مطابق شکل (۲-۱) در یک مساله دو بعدی، دامنه به تعدادی المان شامل مجموعه‌ای از گره‌ها تقسیم می‌شود. متغیرهای نامشخص اولیه در درون هر المان بر حسب مقادیر گره‌ای به کمک توابع شکل تکه‌ای تعریف می شوند.



شکل (۲-۱) یک نمونه شیء اجزاء محدود

بعنوان مثال در روش اجزاء محدود مبتنی بر جابجایی، بردار جابجایی در هر نقطه در المان به صورت تابعی از جابجایی مقادیر گره‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u = N\hat{u} \qquad (۲\text{-}۵\text{الف})$$

که u بردار مشتمل بر جابجایی نامشخص هر نقطه در درون المان می‌باشد. $\hat{u}$ بردار مقادیر نامشخص گره‌ای احاطه کننده المان، N ماتریس توابع شکل مورد نظر است. ابعاد N به تعداد مولفه های جابجایی و مرتبه توابع شکل وابسته است.

متغیرهای مجهول ثانویه از روی معادله (۲-۵الف) استخراج می‌گردند که بطور مشابه بر حسب $\hat{u}$ تعریف می‌شوند. بعنوان مثال در مساله مکانیک جامدات بردار کرنش بر حسب $\hat{u}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = B\hat{u} \qquad (۲\text{-}۵\text{ب})$$

با استفاده از توابع پایه مناسب متغیرهای گره‌ای $\hat{u}$ در ابتدا مشخص شده و سپس متغیرهای ثانویه محاسبه می‌گردند.

میدان جابجایی در درون المان‌ها ومرز بین آن‌ها پیوسته است. تنش و کرنش در درون المان‌ها پیوسته و روی مرزها ناپیوسته می‌باشد. جهت محاسبه بهترین تخمین تنش و کرنش در این نواحی، درون‌یابی ویژه‌ای باید مورد استفاده قرار گیرد.

در اینجا جهت حل مساله مقدار مرزی، از اصل کار مجازی استفاده می‌شود، این اصل در واقع تغییرات[۱] معادلات تعادل و شرایط مرزی می‌باشد که حاصل آن شکل ضعیف[۲] مساله مقدار مرزی است. با استفاده از اصل کار مجازی، کار مجازی $\delta \mathrm{u}$ بعنوان تغییرات اصل کار مجازی u فرض می‌شود. کرنش مجازی سازگار $\delta\varepsilon$ توسط رابطه کرنش جابجایی از روی $\delta \mathrm{u}$ محاسبه می‌گردد. چون $\mathrm{u} = \hat{\mathrm{u}}$ روی Γ_{u} می‌باشد، لذا تغییرات آن باید روی Γ_{u} صفر شود.

بر این اساس میدان قابل قبول $(\delta u, \delta\varepsilon)$ با شرایط زیر تعریف می شود:

- $\delta \mathrm{u} = 0$ روی Γ_{u}
- روی Ω پیوسته و برای اینکه $\delta\varepsilon$ از روی آن محاسبه شود به مقدار کافی هموار است.

با کاربرد اصل کار مجازی تفاضل کار خارجی و داخلی باید برابر با صفر باشد، لذا:

$$\int_{\Omega} \delta\, \varepsilon^T \sigma\, dv - \int_{\Omega} \delta\, u^T b\, dv - \int_{\Gamma_t} \delta\, u^T t\, ds = 0 \qquad (۶\text{-}۲)$$

با استفاده از این معادله متغیرهای نامعلوم قابل محاسبه‌اند جهت اینکار جابجایی‌ها بعنوان متغیرهای نامشخص اولیه فرض شده و جابجایی در دامنه برحسب متغیرهای اولیه تقریب زده می‌شود، سپس متغیرهای ثانویه (ε, σ) بر حسب متغیرهای اولیه محاسبه

[۱] Variation
[۲] Weak form

مـی‌شـوند. در روش اجـزاء محـدود انتگـرال حجمـی در رابطـه بـالا بـه انتگـرال روی هـر یـک از المان‌های محدود تقسیم می‌شود.

$$\sum_{i=1}^{N_E}\int_{\Omega i}\delta\varepsilon^T\sigma\,dv-\sum_{i=1}^{N_E}\int_{\Omega i}\delta u^T b\,dv-\int_{\Gamma_t}\delta u^T t\,ds=0 \qquad (۷-۲)$$

برای مواد الاستیک قانون ساختاری به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma=\mathrm{D}\varepsilon \qquad (۸-۲)$$

که D ماتریس متقارن سختی ماده می‌باشد. اولین انتگرال در معادله (۲-۷) برای المان i ام به صورت زیر می‌باشد:

$$I_i^1=\int_{\Omega_i}\delta\varepsilon^T\sigma\,dv=\delta\hat{u}_i^T\int_{\Omega_i}B^T\sigma\,dv=\delta\hat{u}_i^T\left[\int_{\Omega_i}B^TDB\,dv\right]\hat{u}_i=\delta\hat{u}_i^T k_i\hat{u}_i \qquad (۲-۹الف)$$

که در آن:

$$k_i=\int_{\Omega_i}B^TDB\,dv \qquad (۲-۹ب)$$

ماتریس سختی المان نامیده می‌شود. از انتگرال دوم المان i :

$$I_i^2=\int_{\Omega_i}\delta\hat{u}_i^T b\,dv=\delta\hat{u}_i^T\left[\int_{\Omega_i}N^T b\,dv\right]=\delta\hat{u}_i^T f_i^b \qquad (۲-۱۰الف)$$

که

$$f_i^b=\int_{\Omega_i}N^T b\,dv \qquad (۲-۱۰ب)$$

بردار نیروی المان ناشی از نیروی بدنه نامیده می‌شود. حتی جمله سوم در معادله (۲-۷) هم می‌تواند به اجزاء المانی تقسیم شود. هر جزء المانی معرف بردار نیروی المانی $\mathrm{f}_\mathrm{i}^\mathrm{t}$ ناشی از کشش مرزی به صورت زیر می‌باشد:

$$I_i^3 = \int_{\Gamma_{ti}} \delta \hat{u}_i^T t \; ds = \delta \hat{u}_i^T \int_{\Gamma_{ti}} N^T t \; ds = \delta \hat{u}_i^T f_i^t$$ (۲-۱۱الف)

که

$$f_i^t = \int_{\Gamma_{ti}} N^T t \; ds$$ (۲-۱۱ب)

باید توجه نمود که انتگرال مرزی در معادله فوق تنها روی بخشی از مرز که با مرزهای المان i ام تلاقی می‌کند محاسبه می‌شود. بر این اساس معادله (۲-۷) به صورت زیر تغییرمی یابد.

$$\sum_{i=1}^{N_E} I_i^1 - \sum_{i=1}^{N_E} I_i^2 - \sum_{i=1}^{N_E} I_i^3 = 0$$ (۲-۱۲الف)

$$\sum_{i=1}^{N_E} \delta \hat{u}_i^T k_i \hat{u}_i - \sum_{i=1}^{N_E} \delta \hat{u}_i^T f_i^b - \sum_{i=1}^{N_E} \delta \hat{u}_i^T f_i^t = 0$$ (۲-۱۲ب)

بطور خلاصه یک بردار جابجایی گره‌ای از متغیرهای مجهول کلی به صورت $\hat{u}$ تعریف می‌شود. سازگار با تعریف $\hat{u}$ یک ماتریس سختی کلی k و یک بردار کلی بار p تعریف می‌شود. k با مونتاژ k_i برای $i = 1, N_E$ و p نیز از تجمیع f_i^b و f_i^t برای $i = 1, N_E$ شکل می‌گیرد. علاوه بر این نیروهای گره‌ای فشرده شده به p اضافه می‌شود. لذا معادله (۲-۱۳ب) به شکل زیر خواهد بود:

$$\delta \hat{u}^T (K\hat{u} - P) = 0$$ (۲-۱۳)

اگر معادله فوق برای هر جابجایی‌گره‌ای مجازی $\delta\hat{u}$ اختیاری و غیرصفر صادق باشد، آنگاه:

$$K\hat{u} = P$$ (۲-۱۴)

لذا مجموعه‌ای از معادلات خطی همزمان حاصل می‌شود. در این مرحله شرایط مرزی جابجایی را وارد کرده و از یک روش حل مناسب جهت حل $\hat{u}$ استفاده می‌شود.

روش کار مجازی به سیستم‌های خطی و غیرخطی قابل اعمال هستند. برای سیستم‌های غیرخطی D بطورکلی متقارن نیست و بنابراین k نیز متقارن نخواهد بود، بعنوان مثال D حاصل از یک مدل ساختاری الاستوپلاستیک که یک قاعده جریان غیرهمبسته[۱] را به کار می‌گیرد، غیرمتقارن می‌باشد.

بر اساس روش غیرخطی به کار رفته، D می‌تواند یک اپراتور مماسی پیوسته[۲] یا اپراتور مماسی سازگار[۳] باشد، وقتی از قاعده جریان همبسته[۴] استفاده می‌شود اولی متقارن و دومی ممکن است متقارن یا نامتقارن باشد.

در روش تغییرمکان، ساختار مدل شده، سخت‌تر از ساختار واقعی می‌باشد یعنی جابجایی محاسبه شده کوچک‌تر از جابجایی اصلی است. چنانچه تعداد المان‌ها افزایش یابد، پاسخ حاصله به واقعیت نزدیک‌تر خواهد بود.

۲-۳-۲- مساله الاستو-پلاستیک

در بخش قبل رابطه تنش- کرنش به صورت $\sigma = \mathrm{D}\varepsilon$ خطی بود و تقریب اجزاء محدود در مسائل مکانیک جامدات، به مجموعه‌ای از معادلات همزمان خطی برای متغیرهای نامشخص گره‌ای به صورت زیر منجر گردید:

$$\mathrm{K}\hat{\mathrm{u}} = \mathrm{P} \qquad (۱۴-۲)$$

k ماتریس سختی کلی و $\hat{\mathrm{u}}$ بردار تغییرمکان گره‌ای مجهول کلی می‌باشد. حاصل‌ضرب $\mathrm{k}\hat{\mathrm{u}}$ معرف نیروی داخلی و p نیروی اعمال شده خارجی است. حال اگر نیروی داخلی (یا فنری) به صورت زیر تعریف شود:

$$F_s = K\hat{u} \qquad (۱۵-۲)$$

---

۱ Nonassociated
۲ Continum
۳ Consistent
۴ Associated

آنگاه این معادله شکل متفاوتی خواهد گرفت، اگر رابطه بین تنش و کرنش غیرخطی باشد. برای مواد خطی K گرادیان F_s نسبت به $\hat{u}$ و مستقل از آن می‌باشد. برای مواد غیرخطی گرادیان ثابت نخواهد بود. گرادیان بعنوان ماتریس سختی مماسی کل[۱] K^t شناخته می‌شود که در $(n+1)$امین مرحله اعمال بار از ماتریس‌های سختی مماسی المان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K^t{}_{n+1} = \frac{\partial F_s{}^{n+1}}{\partial u} = \sum \frac{\partial f_s{}^{n+1}}{\partial u} = \sum \frac{\partial}{\partial u}\left\{\int B^T \sigma_{n+1} dv\right\} = \sum \int B^T \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial u_{n+1}} dv$$
$$= \sum \int B^T D^t{}_{n+1} B dv = \sum k^t{}_{n+1}$$

(۲-۱۶الف)

که

$$D^t{}_{n+1} = \frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$$

(۲-۱۶ب)

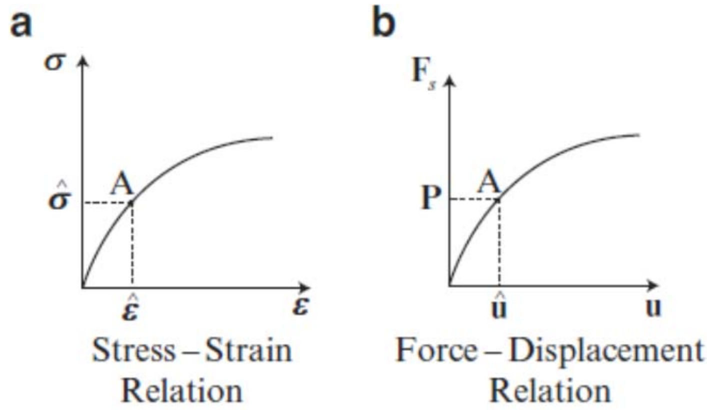
D^t_{n+1}ماتریس یا اپراتور سختی مماسی[۲] ماده نامیده می‌شود. نیروی فنری کلی F_s از روی نیروهای فنری المانی f^s محاسبه می‌شود که در $(n+1)$امین مرحله اعمال بار به صورت می‌باشد:

$$f_s{}^{n+1} = \int_{\Omega i} B^T \sigma_{n+1} dv$$

(۲-۱۶ج)

بر اساس معادلات (۲-۱۵) و (۲-۱۶) وقتی رابطه بین تنش-کرنش غیرخطی باشد (شکل۲-۲)، رابطه المانی p_s در برابر u و رابطه کلی F_s در برابر u نیز غیرخطی خواهند بود.

---
۱ global tangent stiffness matrix
۲ tangent stiffness matrix (or operator)



شکل (۲-۲) روابط غیرخطی تنش- کرنش و نیرو- جابجایی

در مواد پلاستیک افزایش بار به تعدادی افزایش‌های کوچک[۱] تقسیم می‌شود و در هر افزایش، توالی‌هایی[۲] اجرا می‌شود. این آنالیز، آنالیز افزایش- توالی نامیده می‌شود. بر اساس این آنالیز با پاسخ داده شده در یک مرحله، پاسخ مرتبط نیروی افزایش داده شده جستجو می‌گردد. بعبارت دیگر در آنالیز الاستیک غیرخطی می‌توان همه بار را در یک افزایش اعمال نمود در حالیکه در آنالیز الاستوپلاستیک، بار در طی چند افزایش کوچک اعمال می‌شود. لذا در حالت اول توالی‌ها روی تمام بار به‌کار می‌رود درحالی‌که در حالت دوم در هر افزایش به صورت مجزا اعمال می‌شود. جدا از این تفاوت کلیدی، جزئیات توالی مشابه است.

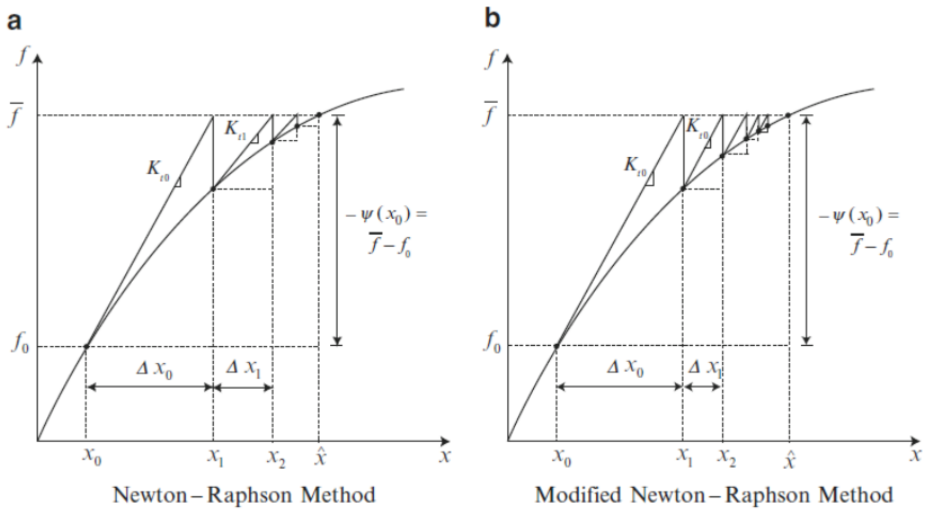
لذا با توضیحات فوق مساله به صورت زیر خواهد بود:

هدف تعیین جابجایی گره‌ای $\hat{u}$ برای یک بار داده شده ثابت p با استفاده از شکل تابع $\hat{\sigma}\hat{\varepsilon}$ می‌باشد ، به نحوی‌که:

$$F_s(\hat{u}) = P \qquad (۱۷-۲)$$

[۱] Small Increment
[۲] Interations

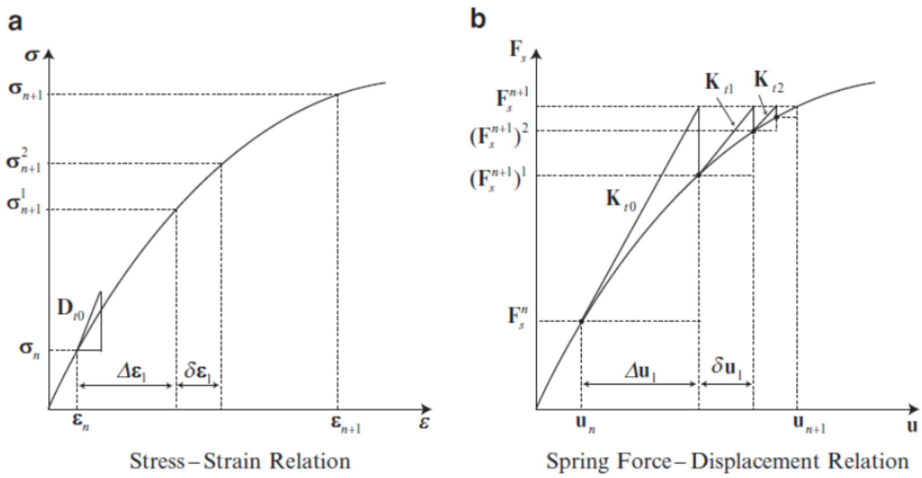
پیچیدگی مساله فوق در اینجاست که باید از رابطه غیرخطی بین $\hat{\delta}$ و $\hat{\varepsilon}$ در سطح محلی به رابطه غیرخطی بین F_s و $\hat{u}$ در سطح کلی برویم. حل این مساله بر اساس روش‌های متوالی متفاوتی انجام می‌شود که متداول‌ترین آن‌ها؛ روش نیوتن یا نیوتن-رافسون و روش نیوتن-رافسون تغییر یافته می‌باشد. شکل زیر مفهوم حاکم بر این روش‌ها را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۳) نمایش روش‌های متوالی نیوتن- رافسون

روش نیوتن- رافسون بر اساس بسط تیلور پاسخ را تقریب می‌زند، این روش تغییر یافته بویژه در حوزه الاستوپلاستیک از حجم محاسبات کمتری برخوردار است، اما سرعت هم‌گرایی آن کمتر است. (شکل ۲-۴) کارب

رد این دو روش در آنالیز اجزاء محدود را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۴) کاربرد توالی‌های نیوتن- رافسون در آنالیز اجزاء محدود غیر خطی

در مسائل الاستوپلاستیک متغیرهای اضافی ξ تحت عنوان متغیرهای سخت‌شدگی[۱] وارد شده و از توالی‌ها جهت محاسبه تنش‌ها و متغیرهای سخت‌شدگی، از روی کرنش‌های افزایشی، استفاده می‌شود. بر این اساس داده های مساله مورد نظر به صورت $(F_s^n, \sigma_n, \xi_n, \varepsilon_n, u_n)$ بوده و هدف تعیین $(F_s^{n+1}, \sigma_{n+1}, \xi_{n+1}, \varepsilon_{n+1}, u_{n+1})$ با بار جدید $\overline{F}_{n+1}$ می‌باشد.

ماتریس K_{n+1}^t سختی مماسی کلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_{n+1}^t = \sum k_{n+1}^t$$

(۱۸-۲)

$$k_{n+1}^t = \int B^T D_{n+1}^t B dv$$

که $D^t{}_{n+1}$ اپراتور مماسی است که در شکل (۲-۴) نشان داده شده است و k_{n+1}^t ماتریس سختی مماسی المانی است که با استفاده از $D^t{}_{n+1}$ شکل می‌گیرد. نیروی فنری المان f_s^{n+1} هم به صورت زیر تعیین می‌شود:

[۱] Hardening variables

$$f_s^{\,n+1} = \int B^T \sigma_{n+1} dv$$
(۱۹-۲)

بر این اساس مراحل اصلی کار به صورت زیر است:

۱- ایجاد $(F_s^n, \sigma_n, \xi_n, \varepsilon_n, u_n)$

۲- تعیین نیروی باقیمانده $\psi(u)$ بصورت $\psi(u) = F_s(u) - \overline{F}$

۳- تعیین ماتریس سختی مماسی کلی فعلی K^t (معادله (۲-۱۸)) و حل معادله $K_{n+1}^t . \delta u = \psi_{n+1}$ جهت محاسبه جابجایی متوالی (δu_0، δu_1، ...) و کرنش‌های متوالی($\delta\varepsilon_1$ ، $\delta\varepsilon_2$، ...)

۴- به روز رسانی جابجایی‌های افزایشی (Δu_0، Δu_1، ...) و کرنش‌های افزایشی($\Delta\varepsilon_1$، $\Delta\varepsilon_2$،...)

۵- محاسبه تنش‌های جاری (σ_{n+1}) و متغیرهای سخت‌شدگی (ξ_{n+1}) مطابق با کرنش‌های افزایشی توسط مدل ساختاری

۶- تعیین نیروی فنری فعلی(معادله ۲-۱۹)) و تجمیع نتایج جهت محاسبه نیروی فنری کلی F_s^{n+1}

۷- تعیین نیروی باقیمانده $\psi_{n+1}(u)$

۸- بررسی هم‌گرایی الگوریتم

۹- توقف محاسبات در صورت هم‌گرایی و در غیر این صورت ادامه دادن آن.

مراحل فوق را توالی‌های کلی[۱] گویند. در محله پنجم محاسبات σ_{n+1}, ξ_{n+1} از روی کرنش‌های افزایشی در نقاط گوسی مشخص در قالب مدل ساختاری ماده انجام می‌شود. در

[۱] Global Iteration

مساله الاستو پلاستیک، این مرحله به توالی‌هایی نیاز دارد که به آن، توالی‌های محلی[۱] گوییم.

نکته حائز اهمیت دیگر آنست که نوعاً روابط ساختاری به صورت نرخ تنش و سخت‌شدگی بر حسب تابعی از نرخ کرنش تعریف می‌شوند. لذا مطابق آنچه در بالا گرفته شده؛ جهت محاسبه تنش‌های افزایشی بر حسب کرنش‌های افزایشی، باید از این معادله انتگرال‌گیری نمود. مساله انتگرال‌گیری در حوزه ریاضیات یک مساله مقدار اولیه می‌باشد که توسط روش‌های عددی زیر حل می‌شود:

۱- روش اویلر پیشرو(صریح)[۲]

۲- روش اویلر برگشتی(ضمنی)[۳]

۳- روش نقطه میانی[۴]

آنالیزهای مبتنی بر این روش‌ها، در حوزه الاستوپلاستیک در مراجع [۱۶,۱۷،۱۸،۱۹] ارائه شده‌اند. نکته حائز اهمیت در حل مساله مقدار اولیه بر اساس روش‌های فوق و کاربرد آن‌ها در حوزه الاستوپلاستیک آنست که در طی فرآیند فوق معیار تسلیم نیز باید ارضاء گردد. بعبارت دیگر همچنانکه تنش‌ها و متغیرهای سخت‌شدگی تغییر می‌کنند، نقطه تنش باید روی سطح تسلیم قرار گیرد(شرط سازگاری[۵]) این مطلب باعث افزایش دقت روش‌های فوق می‌گردد.

نکته مهم دیگر در کاربرد روش‌های فوق استفاده از دو اپراتور مماسی سازگار و مماسی پیوسته در محاسبات می‌باشد. اولی نرخ تنش را به نرخ کرنش بر حسب روابط الگوریتمیک

[۱] Local Iteration
[۲] Forward Euler(Explicit) method
[۳] Backward Euler (Implicit) method
[۴] Midpoint rule
[۵] Consistency condition

بین تنش و کرنش مرتبط می‌کند (D^t) درحالی‌که دومی در رابطه اصلی بین نرخ تنش و نرخ کرنش (قانون ساختاری) ظاهر می‌شود ($\overline{D}$).

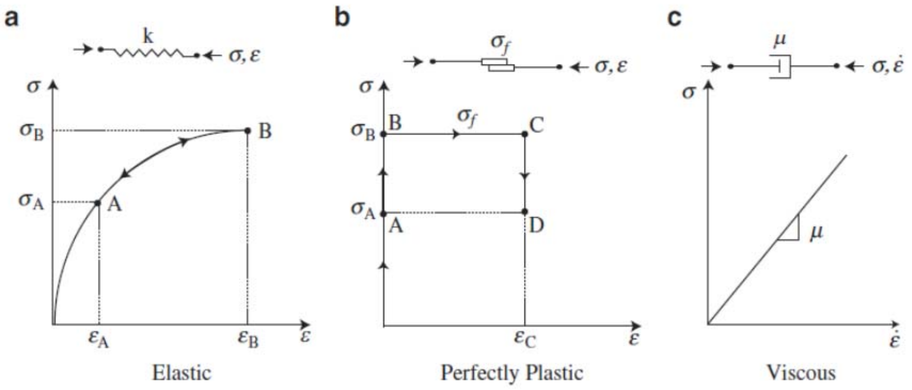
نکته سوم ظاهر شدن بردار جهت جریان[1] در آنالیز الاستوپلاستیک است لذا الگوریتم به مشتق این بردار نسبت به متغیرهای تنش و سخت‌شدگی نیاز دارد. زمانی‌که متغیرهای سخت‌شدگی اسکالر باشند (در حالت مدل سخت‌شدگی ایزوتروپیک) این محاسبه نسبت به متغیرهای سخت‌شدگی به راحتی و نسبت به متغیرهای تنش با دشواری انجام می‌شود.

۲-۳-۳- طبقه‌بندی رفتارهای ساختاری[2]

واژه غیرالاستیک[3]، هر رفتار ساختاری به‌جز الاستیک را توصیف می‌نماید. نوعاً این رفتارها شامل ویسکوالاستیک، ویسکوپلاستیک و الاستوپلاستیک می‌باشد. در برخی مواد مانند فلزات بخش الاستیک رابطه تنش-کرنش خطی است، لذا مدول الاستیک ثابت می‌باشد. غیرخطی بودن عموماً نتیجه رفتار پلاستیک است، اگرچه خود مدول الاستیسیته برای مواردی چون خاک و لاستیک‌ها با بار تغییر می‌کند. بخشی از کار انجام شده روی مواد توسط نیروهای خارجی قابل بازیابی و مابقی غیرقابل بازیابی است. کرنش‌در مواد غیرالاستیک وابسته به تاریخچه[4] (مسیر[5]) است درحالی‌که در مواد الاستیک مستقل از پیشینه خود میباشد.

جهت بررسی مطالب فوق، رفتارهای ساختاری و مفاهیم پایه‌ای آن‌ها در حالت بارگذاری تک محوری بررسی و نتیجه به حالت چندمحوری توسعه می‌یابد، بر این اساس در شکل (۲-۵) برخی از این رفتارها نشان داده شده است.

[1] Flow Direction Vector
[2] Constitutive behavior
[3] Inelasticity
[4] History
[5] Path

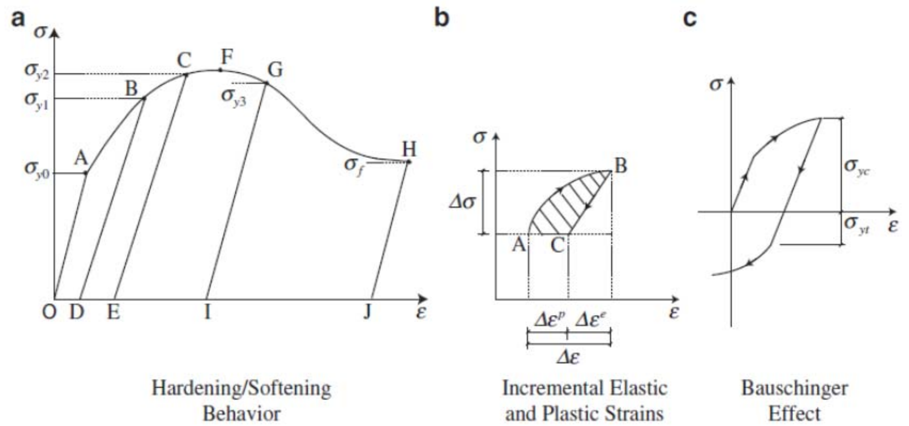


شکل (۲-۵) مدل‌های ساختاری ابتدایی

اگر رفتار بصورت المـان‌هـای الاسـتیک و پلاسـتیک توأمـان باشـد، تغییـر شـکل‌هـای الاسـتیک و پلاستیک به صورت همزمان رخ می‌دهند. آنرا رفتار الاستوپلاستیک مستقل از نرخ[1] نامند.

۲-۳-۴- تئوری پلاستیک مستقل از نرخ

رفتـار معمـول تـنش- کـرنش تـک محـوره یـک مـاده الاسـتو پلاسـتیک در طـی مراحـل بارگذاری- باربرداری در شکل (۲-۶) نشان داده شده است.



شکل(۲-۶) اساس رفتار الاستو پلاستیک

در ایـن فرآینـد خصوصـیات اصـلی یـک رفتـار الاستوپلاسـتیک نشـان داده شـده اسـت. وقتـی رفتار ماده از حالت الاستیک به الاستوپلاستیک تغییر می‌یابد، می‌گویند تسلیم[1] شده است.

---

[1] Rate- Independent Elasto-Plastic

تنشی که در آن تسلیم رخ می‌دهد را تنش تسلیم[۲] گویند. زمانی‌که تنش تسلیم افزایش می‌یابد، ماده سخت‌شدگی یا سخت‌شدگی کرنشی[۳] را تجربه می‌کند و زمانی‌که کاهش می‌یابد به آن نرم‌شدگی یا نرم‌شدگی کرنشی[۴] گویند. جهت مدل‌سازی رفتار سخت‌شدگی و نرم‌شدگی از یک قاعده ریاضی به عنوان قانون سخت‌شدگی استفاده می‌شود. زمانی‌که تنش تسلیم ثابت بماند به آن رفتار کاملاً پلاستیک[۵] گویند.

با فرض یک بارگذاری کوچک از نقطه‌ی A تا B مطابق شکل (۲-۶)، کرنش کوچک $\Delta\varepsilon$ رخ می‌دهد که بخش $\Delta\varepsilon^{e}$ آن بر اساس باربرداری به نقطه‌ی C بازیابی می‌شود و بخش $\Delta\varepsilon^{p}$ بازیابی نمی‌گردد. $\Delta\varepsilon^{e}$ را کرنش الاستیک و $\Delta\varepsilon^{p}$ را کرنش پلاستیک گویند، به‌نحوی که:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{e} + \Delta\varepsilon^{p} \tag{۲-۲۰}$$

جمع فوق تنها تحت شرایط کرنش کوچک صادق است، در طی سیکل تنش شکل فوق، کار خالص انجام شده به صورت زیر است:

$$\Delta W = \int_A^B \sigma\, d\varepsilon + \int_B^C \sigma\, d\varepsilon \tag{۲-۲۱الف}$$

$$\int_A^B \sigma\, d\varepsilon \approx \frac{1}{2}\Delta\sigma(\Delta\varepsilon^{e} + \Delta\varepsilon^{p}) \; ; \int_B^C \sigma\, d\varepsilon = -\frac{1}{2}\Delta\sigma\Delta\varepsilon^{e} \Rightarrow \Delta W = \Delta W^{p} \approx \frac{1}{2}\Delta\sigma\Delta\varepsilon^{p} \geq 0$$

(۲-۲۱ب)

این خاصیت رفتار پلاستیک را نشان می‌دهد زیرا کار خالص انجام شده در طی سیکل تنش غیرمنفی است. به لحاظ هندسی ΔW^{p} بخش هاشورخورده شکل می‌باشد. در

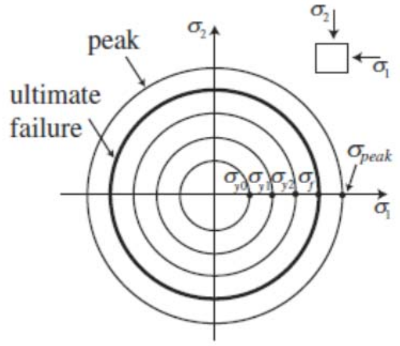
[۱] Yield
[۲] Yield stress
[۳] Hardening
[۴] Softening
[۵] Perfectly-plastic

نقطه‌ی H و پس از آن ماده تغییر شکل نامحدود بدون اضافه شدن تنش را تجربه می کند در اینحالت گفته می‌شود ماده جریان پلاستیک[1] را تجربه کرده است.

اگر مدول‌های الاستیک (E_e) و پلاستیک (E_p) و کل (E) تعریف شوند، آنگاه:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \;;\quad \Delta\sigma = E_e\Delta\varepsilon^e \;;\; \Delta\sigma = E_p\Delta\varepsilon^p \qquad (۲۲-۲)$$

مطالب فوق در خصوص بارگذاری تک محوره بود که می‌تواند به بارگذاری چندمحوری نیز توسعه یابد. در این‌حالت تنش تسلیم یک سطح است که به آن سطح تسلیم[2] گویند. اگر شکل (۲-۷) را مدنظر قرار دهیم و فرض کنیم ماده ایزوتروپیک باشد یعنی رفتار آن مستقل از جهت بوده و تنش تسلیم در تمام جهات برابر باشد، می‌خواهیم سطوح تسلیم و خرابی آنرا در صفحه دو محور $\sigma_1 - \sigma_2$ نشان دهیم. وقتی قطعه‌ای تحت بارگذاری قرار گیرد بگونه ای که هر دو σ_1 و σ_2 تغییر کنند، رسم σ_1 بر حسب σ_2 مسیر بسته‌ای را در صفحه‌ی $\sigma_1 - \sigma_2$ ایجاد می‌کند که به آن مسیر تنش[3] گویند. اگر بارگذاری در هر یک از جهات به شکل منفرد انجام شود، رفتار مشابه حالت تک‌محوره است، اما اگر در هر دو جهت بارگذاری انجام شود، سطح تسلیم شکل می‌گیرد، لذا تسلیم زمانی رخ می‌دهد که تنش‌ها به سطح تسلیم برسد.



[1] Plastic Flow
[2] Yield surface
[3] Stress Path

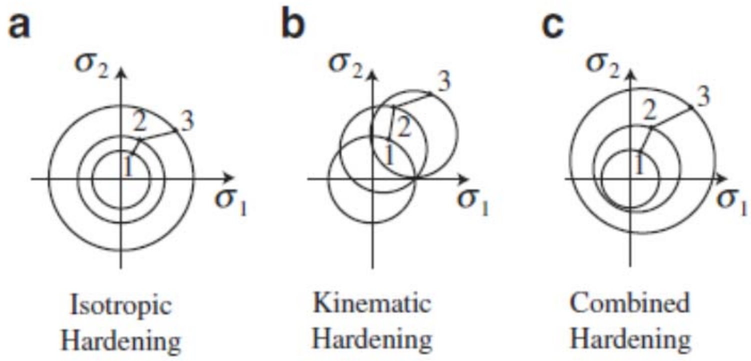
شکل(۲-۷) سیر تحول سطح تسلیم طی بارگذاری چند محوری

در حالت تک محوره با افزایش تنش فراتر از تنش تسلیم اولیه، مقدار تنش تسلیم تا رسیدن به یک ماکزیمم افزایش می‌یافت در حالت دو محوره این مطلب به صورت رشد اندازه سطوح تسلیم قابل نمایش است(سطوح بارگذاری). شکل (۲-۸) رفتارهای ایده‌آل مختلف را نشان می‌دهد. در حالت (الف) در شکل زیر با تغییر نقطه تنش از ۱ به ۲ وسپس ۳ سطح تسلیم به صورت یکنواخت در همه جهات توسعه یافته و مرکز و شکل آن ثابت می‌ماند. لذا تغییر در اندازه سطح تسلیم تنها با یک متغیر سخت‌شدگی اسکالر قابل مدل‌سازی است. این نوع سخت‌شدگی را سخت‌شدگی ایزوتروپیک گویند. اگر مطابق شکل (ب) اندازه و شکل آن تغییر نکند و صرفاً جابجا شود، سخت‌شدگی را از نوع سخت‌شدگی سینماتیکی می‌گویند. در این‌حالت یک متغیر سخت‌شدگی تانسوری جهت مدل‌سازی ریاضی رفتار فوق نیاز است. ترکیب این دو رفتار سخت‌شدگی در شکل (ج) نشان داده شده است. در این‌حالت سخت‌شدگی از نوع سخت‌شدگی دورانی[۱] است که به‌عنوان مثال در خاک‌ها ملاحظه می‌شود.

قاعده یا قانونی که حرکت یا تغییر سطح تسلیم را در طی فرآیند بارگذاری توصیف می‌کند، قانون سخت‌شدگی نامیده می‌شود. مفاهیمی چون کرنش نرم‌شدگی نیز در حوزه دو بعدی به شکل انقباض سطح تسلیم در سخت‌شدگی ایزوتروپیک قابل نمایش است، اما در نرم‌شدگی سینماتیکی این مطلب به شکل فرورفتگی موضعی در سطح تسلیم خود را نشان می‌دهد.

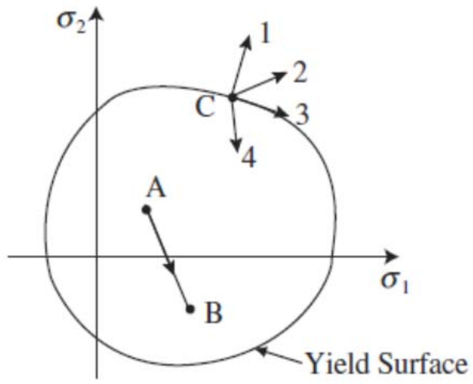
وقتی ماده از خود نرم‌شدگی نشان نمی‌دهد خارجی‌ترین سطح تسلیم، معرف سطح خرابی است. در هر حال سطوح خرابی و تسلیم مورد قبول باید محدب[۲] باشند.

[۱] Rotational Hardening
[۲] Convex



شکل (۲-۸) رفتارهای سخت شدگی استاندارد

مطلب مهم دیگر در حالت چندمحوره نیاز به معیار بارگذاری/باربرداری است. در حالت دو محوره، تانسور تنش هم مقدار دارد و هم اندازه، لذا مطابق شکل (۲-۹) رفتار از نقطه‌ی A به B در درون سطح تسلیم، الاستیک است. در نقطه‌ی C در جهات ۱و۲ رفتار پلاستیک است زیرا در جهت خروج از سطح است، در جهت ۳ که بارگذاری خنثی نامیده می‌شود رفتار الاستیک می‌باشد اما در حالت ۴ لزوما رفتار ماده الاستیک نیست و می تواند حالت نرم شدگی اتفاق بیفتد.



شکل (۲-۹) نمایش الزامات معیار بارگذاری

در مواد الاستوپلاستیک رفتار به تاریخچه وابسته است. لذا متغیرهای جدیدی تحت عنوان متغیرهای داخلی[1] یا متغیرهای مخفی[2] (ξ) در تابعی ساختاری تعریف می‌شوند، تا این اثر تاریخچه‌ای را کمّی کنند، لذا حالت مواد باید بر حسب (ε,ξ) کمّی شود، بنابراین:

$$\sigma = \sigma(\varepsilon,\xi)$$ (۲-۲۳الف)

این متغیرهای جدید می‌توانند مفهوم فیزیکی نیز داشته باشند، اما همیشه این امر ممکن نیست. حتی اگر مکانیزم‌های فیزیکی مذکور مشخص باشند، تعریف یک رابطه کمی بین این متغیرها و کرنش‌های پلاستیک امکان‌پذیر نمی‌باشد. لذا در بسیاری از موارد در مدل‌های ساختاری، قرار دادن ξ با متغیر سخت‌شدگی[3] مانند سایز سطح تسلیم، معمول است.

در هر حال ξ به نحوی تعریف می‌شود که وقتی نرخ تغییر کرنش پلاستیک صفر است، نرخ تغییر ξ نیز صفر باشد، لذا برای متغیرهای داخلی یا دقیق‌تر، متغیرهای داخلی پلاستیک(PIV)[4] $\{\xi_1, \xi_2, ...\} = \xi$ خواهیم داشت:

(۲-۲۳ب)

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \quad \text{وقتی} \quad \dot{\xi} = 0$$

مثال‌هایی از PIV های مبتنی بر کرنش پلاستیک متداول به صورت زیر هستند:

۱- کرنش انحرافی[5] جمع شده (در مدل‌سازی کرنش سخت یا نرم‌شدگی)

$$\xi = \int d\, J_\varepsilon$$ (۲-۲۴الف)

۲- کار پلاستیک جمع شده (در مدل‌سازی کار سخت و نرم‌شدگی)

[1] Internal variables
[2] Hidden variables
[3] Hardening variable
[4] Plastic Internal Variable
[5] Deviatoric strain

$$W^p = \int \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p$$ (۲-۲۴ب)

۲-۳-۵- ساختار کلی پلاستیک مستقل از نرخ

در این بخش چارچوب کلی رفتار تنش- کرنش مواد جهت شبیه سازی رفتار آن‌ها بررسی می‌گردد.

۲-۳-۵-۱- حالت مواد

حالت مواد بر حسب دو متغیر تنش (σ) و PIV ها (ξ) تعریف می‌شود، لذا تابع تسلیم یا سطح تسلیم به صورت زیر می‌باشد:

$$\phi(\sigma, \xi) = 0$$ (۲-۲۵الف)

سطح تسلیم معرف وضعیت فعلی ماده به صورت زیر بیان می‌شود:

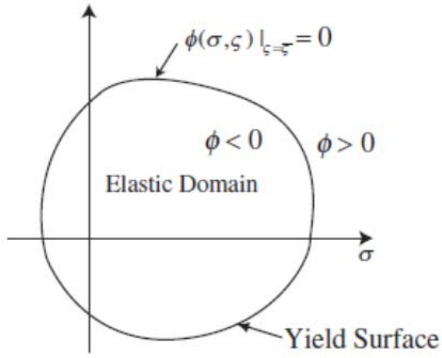
$$\xi = \bar{\xi}$$ (۲-۲۵ب)

که $\bar{\xi}$ مقدار PIV در وضعیت فعلی ماده است. شکل(۲-۱۰) سطح تسلیم را نشان می‌دهد. دامنه درون سطح دامنه الاستیک خالص است که رفتار در آن کاملا الاستیک می‌باشد. دامنه خارج از سطح در حالت فیزیکی قابل حصول نیست بنابراین دستیابی به آن ممکن نیست. لذا تابع تسلیم به نحوی تعریف می‌شود که:

$$\phi(\sigma, \xi = \bar{\xi}) = 0$$ روی سطح (۲-۲۶الف)

$$\phi(\sigma, \xi = \bar{\xi}) > 0$$ خارج از سطح (۲-۲۶ب)

$$\phi(\sigma, \xi = \bar{\xi}) < 0$$ داخل سطح (۲-۲۶ج)



شکل (۲-۱۰) شکل تابعی سطح تسلیم

۲-۳-۵-۲- معیار بارگذاری/ باربرداری

با توجه به مباحث مطروحه در خصوص بارگذاری و باربرداری یک مقدار اسکالر کمی L به عنوان یک ضرب اسکالر بین نرخ تنش ($\dot{\sigma}$) و بردار نرمال n بر سطح تسلیم در نقطه فعلی تنش به صورت زیر تعریف می‌شود: (شکل (۲-۱۱))

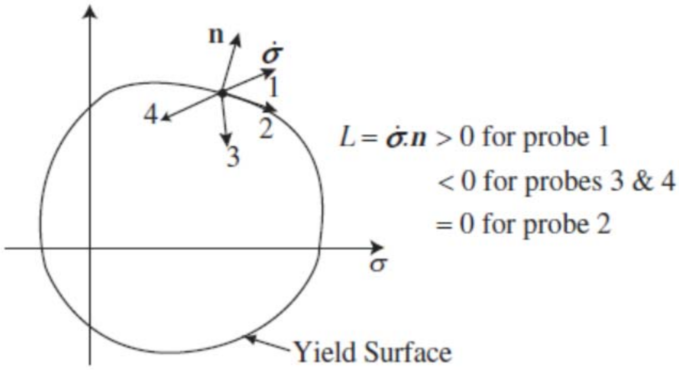
$$L=\dot{\sigma}_{kl}n_{kl} \qquad \text{(۲-۲۷الف)}$$

که

$$n_{kl}=\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial\sigma_{kl}} \quad \text{و} \quad g=\left|\frac{\partial\phi}{\partial\sigma}\right| \qquad \text{(۲-۲۷ب)}$$

با توجه به شکل برای جهت تنش شماره۱؛ $L>0$ برای جهت ۲؛ $L=0$ و برای تنش‌های ۳و۴؛ $L<0$ می‌باشد. بنابراین اسکالر L می‌تواند موضوع بارگذاری و باربرداری را تعریف کند. به L اندیس بارگذاری[۱] نیز می‌گویند.

۱ Loading Index



شکل (۲-۱۱) نمایش اندیس بارگذاری

$L > 0$ بارگذاری (الاستو-پلاستیک) (۲-۲۸الف)

$L = 0$ بارگذاری خنثی (الاستیک) (۲-۲۸ب)

$L < 0$ باربرداری (الاستیک) (۲-۲۸ج)

در کاربردهای اجزاء محدود مدل‌های ساختاری، افزایش کرنش $\Delta\varepsilon$ داده شده و افزایش تنش متناظر $\Delta\sigma$ باید محاسبه گردد. لذا در ابتدا باید مشخص شود که این افزایش کرنش رفتار الاستو پلاستیک را باعث می گردد یا رفتار الاستیک. بنابراین مقادیر نرخی باید به مقادیر افزایشی تغییر یابد پس معیار بارگذاری/ باربرداری فوق مناسب نمی‌باشد و باید معیار دیگری تعریف نمود.

اگر تنش در نقطه انتگرال‌گیری پیش رو $n+1$ با σ_{n+1} نشان داده شود یعنی $\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma$ باشد از شکل (۲-۱۶) نقطه σ_{n+1} برای یک تنش الاستو پلاستیک، خارج از سطح تسلیم فعلی قرار می‌گیرد. بر این اساس:

$\phi(\sigma_{n+1}, \xi = \bar{\xi}_n) = 0$ بارگذاری خنثی (۲-۲۹الف)

> 0 بارگذاری (۲-۲۹ب)

(۲-۲۹ج)		باربرداری (یا بارگذاری الاستیک) $0 >$

که $\bar{\xi}_n$ مقدار PIV در نقطه‌ی n می‌باشد. رابطه فوق تابع σ_{n+1} است که از قبل مقدار آن مشخص نیست، لذا رابطه دیگری باید جستجو شود. در ادامه تنش حدس الاستیک[1] یا تنش پیش بین الاستیک[2] به صورت $\sigma_{n+1}^{tri} = \sigma_n + C^e : \Delta\varepsilon$ تعریف می‌شود که می‌تواند در این خصوص مورد استفاده قرار گیرد. σ_{n+1}^{tri} برای بارگذاری الاستوپلاستیک خارج از سطح قرار می‌گیرد و برای بارگذاری الاستیک درون سطح می‌ماند.

۲-۳-۵-۳- چارچوب معادلات ساختاری

بر اساس مشاهدات فوق نرخ کرنش پلاستیک می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

(۲-۳۰الف)		$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = f_{ij}(\sigma, \xi, \dot{\sigma}, \dot{\xi})$

با

(۲-۳۰ب)		$\dot{\xi} = 0$ برای $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$

(۲-۳۰ج)		$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$ برای $L \le 0$

به علاوه ملزومات زیر اضافه می‌گردد:

- رابطه تنش-کرنش مستقل از نرخ است
- رابطه تنش-کرنش روی سطح تسلیم پیوسته است (شرط پیوستگی)[3]

برای رابطه تنش- کرنش مستقل از نرخ، تابع f_{ij} رابطه فوق باید همگن از مرتبه یک در $\dot{\sigma}$ و $\dot{\xi}$ باشد (بدین مفهوم که $f(nx) = nf(x)$).

یک شکل ممکن برای معادله فوق به صورت زیر می‌باشد:

[1] Elastic trial stress
[2] Elastic predictor stress
[3] Continuity condition

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \langle L \rangle f_{ij}(\sigma,\xi) \qquad (۳۱-۲)$$

کـه $\dot{\sigma}$ و $\dot{\xi}$ خـارج از f_{ij} بـوده و تنهـا در L خلاصـه مـی‌شـوند. انـدیس بارگـذاری L همگـن از مرتبـه یـک در $\dot{\sigma}$ و مسـتقل از $\dot{\xi}$ مـی‌باشـد. تـابع $< . >$ تـابع Heavy Side اسـت و بـه صـورت $<L>=L$ بـرای $L>0$ و $<L>=0$ بـرای $L\leq 0$ تعریـف مـی‌شـود. حـال شـکل تابعی مناسـبی بـرای $\dot{\xi}$ بطوریکـه معادلـه(۲-۵۰ب) ارضـا گـردد، مـورد نیـاز اسـت. یـک راه ممکـن تعریف $\dot{\varepsilon}^{p}$ و $\dot{\xi}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \langle L \rangle f_{ij}(\sigma,\xi) \qquad (۲-۳۲الف)$$

و

$$\dot{\xi} = \langle L \rangle s \qquad (۲-۳۲ب)$$

باید توجه نمـود کـه وقتـی $L\leq 0$ اسـت هـر دوی $\dot{\varepsilon}^{p}$ و $\dot{\xi}$ صـفر مـی‌باشـند. بـر اسـاس رابطـه (۲-۳۲الـف) تـابع f_{ij} جهـت و دامنـه تانسـور نـرخ کـرنش پلاسـتیک را نمـایش مـی‌دهـد. فـرض می‌کنیم که جهـت را بتـوان از تـابع پتانسـیل ψ اسـتخراج نمـود. لـذا رابطـه فـوق بـه صـورت زیـر بازنویسی می‌شود:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = G(\sigma,\xi)\langle L \rangle \frac{\partial \psi(\sigma,\xi)}{\delta \sigma_{ij}} \qquad (۲-۳۳الف)$$

که تابع

$$\psi(\sigma,\xi) = 0 \qquad (۲-۳۳ب)$$

بعنوان تابع پتانسیل پلاستیک[۱] شناخته می‌شود.

با تعریف یک بردار نرمال به صورت:

[۱] Plastic potential

$$\bar{g} = \left| \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right| \text{ وقتی } r = \frac{1}{\bar{g}} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$$ (۲-۳۳ج)

یک شکل مشخص برای (۲-۳۳ الف) به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \frac{1}{K_p} \langle L \rangle r_{ij}$$ (۲-۳۴)

که k_p مدول پلاستیک[۱] نامیده می‌شود.

شکل دیگر معادله (۲-۳۳ الف) درج مدول پلاستیک در اندیس بارگذاری می‌باشد. با این تعریف معادلات ساختاری پلاستیک به شکل زیر خواهد بود:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \langle L \rangle r_{ij}$$ (۲-۳۵الف)

$$\dot{\xi} = \langle L \rangle s$$ (۲-۳۵ب)

که

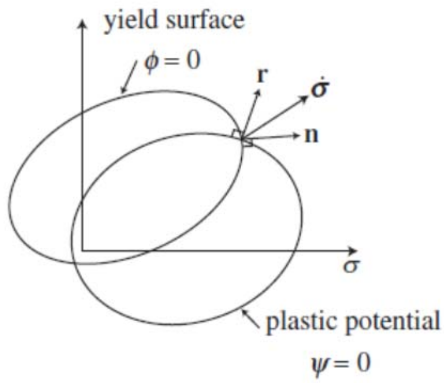
$$L = \frac{1}{K_p} \dot{\sigma}_{kl} n_{kl}$$ (۲-۳۵ج)

با استفاده از تعریف مواد سخت‌شونده، سطح تسلیم به صورت محلی به خارج حرکت می‌کند، لذا $\dot{\sigma}_{kl} n_{kl} > 0$. چون $L > 0$ برای بارگذاری پلاستیک است، لذا برای مواد سخت شونده k_p باید مثبت باشد. به همین ترتیب در خصوص مواد نرم شونده k_p باید منفی باشد.

مفهوم هندسی سطوح تسلیم و پتانسیل پلاستیک در شکل (۲-۱۲) نشان داده شده است. L که طبق رابطه (۲-۳۵ج) تعریف شده، پارامتر سازگاری پلاستیک[۲] نامیده می‌شود. نوشتار متداول برای L، $\dot{\lambda}$ می‌باشد.

---

[۱] Plastic modulus
[۲] Plastic consistency parameter



شکل (۲-۱۲) مفهوم هندسی سطوح تسلیم و پتانسیل پلاستیک

۲-۳-۵-۴-قواعد جریان مرتبط و نامرتبط

وقتیکه $\psi = 0$، n=r خواهد بود و قاعده جریان، قاعده جریان همبسته نامیده می‌شود. در غیر اینصورت قاعده جریان، ناهمبسته می‌باشد. در ادامه نشان داده خواهد شد که اپراتور مماسی پیوسته و لذا ماتریس سختی المان محدود کلی، در حالت مدلهای جریانی همبسته متقارن و در غیر اینصورت نامتقارن خواهد بود.

۲-۳-۵-۵- قواعد جریان همبسته و ناهمبسته[۱]

وقتیکه $L > 0$، بارگذاری پلاستیک جایگزین شده و نقطه تنش از سطح تسلیم خارج می‌شود (به سمت خارج برای مواد سخت شدگی و به سمت داخل برای مواد نرم شدگی) جدا از رخداد فوق نقطه تنش باید روی سطح تسلیم باقی بماند. لذا سطح تسلیم باید تغییر سایز، شکل یا مکان دهد بنحویکه نقطه فعلی هنوز روی سطح تسلیم قرار گیرد. این الزام شرط سازگاری[۲] نامیده می‌شود و بصورت ریاضی زیر نشان داده می‌شود:

[۱] Associated and Non-associated Rules
[۲] Consistency Condition

$$\dot{\phi}(\sigma, \xi) = 0 \qquad \text{(۲-۳۶الف)}$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}\dot{\sigma} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\dot{\xi} = 0 \qquad \text{(۲-۳۶ب)}$$

از (۲-۳۵ب)و (۲-۳۵ج) و (۲-۲۷ب) خواهیم داشت:

$$gK_p L + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} sL = 0 \qquad \text{(۲-۳۶ج)}$$

که منجر به

$$K_p = -\frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial \xi} s \qquad \text{(۲-۳۶د)}$$

می‌شود.

لذا مدول پلاستیسیته یک مقدار مستقل نیست. همینکه سطح تسلیم و قواعد سخت شدگی انتخاب می‌شود، مدول پلاستیک از روی (۲-۳۶د) محاسبه می‌گردد. متعاقبا می‌توان یک توصیف برای مدول پلاستیک انتخاب نمود و یک قاعده سخت شدگی از روی آن توسعه داد. همانطورکه پیش‌تر بحث شد:

$K_p \geq 0$ برای مواد سخت شونده

$K_p = 0$ برای مواد پلاستیک کامل (۲-۳۶هـ)

$K_p \leq 0$ برای مواد نرم شونده

زمانیکه فرمول‌بندی نرمال واحد نباشد:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \langle L \rangle r_{ij} \ ; \ \dot{\xi} = \langle L \rangle s \qquad \text{(۲-۳۶و)}$$

$$L = \frac{1}{K_p}\dot{\sigma}_{kl} n_{kl} \qquad \text{(۲-۳۶ز)}$$

$$r_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}} \;\; ; \;\; n_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \tag{۲-۳۶ح}$$

شرط سازگاری منجر می‌گردد به:

$$K_p = -\frac{\partial \phi}{\partial \xi} s \tag{۲-۳۶ط}$$

۲-۳-۵-۶-مراحل توسعه مدلهای ساختاری

بر اساس مفاهیم و معادلات ارائه شده، توسعه یک مدل پلاستیک مراحل زیر را طلب می‌کند:

۱- تعریف توابع تسلیم و پتانسیل که برای تشخیص تغییرات حالت ماده در طی بارگذاری کاربرد دارند

۲- شناسایی رفتارهای سخت‌شدگی (بعنوان مثال: ایزوتروپیک، سینماتیک، ترکیبی و...) و متغیرهای سخت‌شدگی(مثل: اندازه سطح تسلیم، چگالی جابجایی[۱]،...)که مناسب ماده مورد نظر است:

الف) توسعه معادلات ریاضی مناسب (معادله (۲-۳۵ب)) برای تکامل هر یک از متغیرهای سخت شدگی در حل بارگذاری و استخراج مدول‌های پلاستیک از معادله سازگاری یا

ب) تعریف یک توصیف برای مدول‌های پلاستیک و توسعه یک توصیف برای تابع سخت‌شدگی از روی تابع سازگاری

[۱] Dislocation Density

۳- تکمیل کردن معادلات پلاستیک با معادلات الاستیک (الاستیک خطی، هایپر الاستیک[۱] و ...)

۲-۳-۵-۷- اپراتورمماسی پیوسته الاستوپلاستیک

در روش نیوتن- رافسون عنوان شد که این تکنیک به اپراتور یا تانسور مماسی ماده و مقدار تنش افزایشی برای یک مقدار کرنش افزایشی نیاز دارد. حال اپراتور مماسی پیوسته را محاسبه می‌کنیم. برای اینکار قانون ساختاری الاستیک را در نظر می‌گیریم.

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\,\dot{\varepsilon}^{e}_{kl} \qquad (۲-۳۷)$$

کرنش کل به دو بخش الاستیک و پلاستیک (با فرض کرنش کوچک) تقسیم می‌شود:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{ij} \qquad (۲-۳۸)$$

معادله (۲-۳۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\,(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^{p}_{kl}) \qquad (۲-۳۹\text{الف})$$

با کمک (۲-۳۵ الف) خواهیم داشت:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\,(\dot{\varepsilon}_{kl} - L\,r_{kl}) \qquad (۲-۳۹\text{ب})$$

با درک این مطلب که جمله L وارد شده در معادله (۲-۳۹ ب) تنها زمانی وجود دارد که $L > 0$ باشد، از ترکیب معادلات (۲-۳۵ج) و (۲-۳۹ ب) خواهیم اشت:

$$L = \frac{1}{K_p} n_{kl}\left[E_{klpq}(\dot{\varepsilon}_{pq} - L\,r_{pq})\right]$$

$$L\left[K_p + n_{kl}E_{klpq}r_{pq}\right] = n_{kl}E_{klpq}\dot{\varepsilon}_{pq}$$

---
[۱] Hyper elastic

$$L = \frac{n_{kl} E_{klpq} \dot{\varepsilon}_{pq}}{K_p + n_{kl} E_{klpq} r_{pq}} \qquad (۲- ۴۰)$$

با ترکیب (۲-۳۹ب) و (۲-۴۰) داریم:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left[Eijkl - \frac{(E_{ijab} r_{ab})(n_{rs} E_{rskl})}{K_p + n_{rs} E_{rspq} r_{pq}} \right] \dot{\varepsilon}_{kl} \qquad (۲-۴۱)$$

یا

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \qquad (۲-۴۲الف)$$

که تانسور مرتبه چهار D_{ijlk} اپراتور مماسی الاستوپلاستیک پیوسته زیر می‌باشد:

$$D_{ijkl} = E_{ijkl} - \frac{(E_{ijab} r_{ab})(n_{rs} E_{rskl})}{K_p + n_{rs} E_{rspq} r_{pq}} \qquad (۲-۴۲ب)$$

زمانی‌که قاعده جریان مرتبط باشد D_{ijkl} متقارن خواهد بود ($D_{ijkl} = D_{klij}$)

۲-۳-۵-۸- معیار تسلیم فون-میسز[۱]

معیار تسلیم فون-میسز فرض می‌کند که تسلیم زمانی رخ می‌دهد که مقدار نامتغیر انحرافی تنش[۲] از یک مقدار مشخص فراتر رود که مستقل از فشار هیدرواستاتیک است. به صورت ریاضی سطح تسلیم به صورت زیر قابل نمایش است:

$$\phi(s,k) = s_{ij} s_{ij} - \frac{2}{3} k^2 = 0 \qquad (۲-۴۳)$$

یا

[۱] Von misses criterion
[۲] Deviatoric stress invariant

$$J-\frac{1}{\sqrt{3}}k=0 \qquad (۴۴-۲)$$

که k به صورت یک مقدار مثبت تعریف می‌شود. J نامتغیر انحرافی تنش است و k نقش PIV در مدل ساختاری را که از این سطح تسلیم استفاده نماید، بازی می‌کند.

معیار میسز را می‌توان بر حسب اجزاء تانسور تنش به صورت زیر نوشت:

$$\phi(\sigma_{ij},k)=\frac{3}{2}\tau_{oct}^{2}-\frac{1}{3}k^{2}=0$$

$$\phi(\sigma_{ij},k)=\frac{1}{6}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^{2}+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^{2}+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^{2}+6\left(\sigma_{12}^{2}+\sigma_{23}^{2}+\sigma_{13}^{2}\right)\right]-\frac{1}{3}k^{2}=0$$

(۴۵-۲)

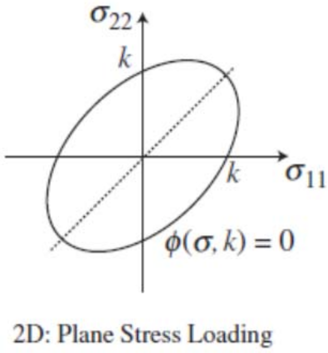
با فرض مساله تنش مسطح که در جهت‌های اصلی بارگذاری شده است: $\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{13}=\sigma_{33}=0$ معادله (۲-۴۵) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$2\sigma_{11}^{2}+2\sigma_{22}^{2}-2\sigma_{11}\sigma_{22}-2\mathrm{k}^{2}=0$$

یا

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\mathrm{k}}\right)^{2}-\left(\frac{\sigma_{11}}{\mathrm{k}}\right)\left(\frac{\sigma_{22}}{\mathrm{k}}\right)+\left(\frac{\sigma_{22}}{\mathrm{k}}\right)^{2}=1 \qquad (۴۶-۲)$$

که معادله ی بیضی در فضای $\sigma_{22}-\sigma_{11}$ می‌باشد (شکل ۲-۱۳).



شکل (۲-۱۳) شکل سطح تسلیم فون- میسز در حالت بارگذاری دومحوره

جهت مدلسازی رفتار سخت‌شدگی سینماتیک معادله (۲-۴۳) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\phi(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, k) = (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - \frac{2}{3}k^2 = 0 \qquad (۲-۴۷)$$

که α_{ij} تنش برگشتی[۱] نامیده می‌شود.

در واقع α_{ij} مخالف صفر، معادل جابجایی مرکز سطح تسلیم می‌باشد، لذا تنش برگشتی α_{ij} متغیر سخت‌شدگی سینماتیک (یکی از PIV ها) می‌باشد. لذا یک قاعده سخت‌شدگی مناسب جهت مدلسازی تکامل آن در طی فرآیند بارگذاری لازم است.

۲-۳-۵-۹- قواعد سخت‌شدگی[۲]

الف) قاعده سخت‌شدگی ایزوتروپیک

بر اساس مطالب ارائه شده رفتار سخت‌شدگی را می‌توان به رفتارهای سخت‌شدگی ایزوتروپیک، سینماتیک و ترکیبی تقسیم‌بندی نمود. سخت‌شدگی ایزوتروپیک به معنی

---
۱ Back stress
۲ Hardening Rules

توسعه و انقباض سطح به صورت یکنواخت در همه جهات در فضای تنش بدون تغییر در شکل و مرکز سطح است. معیار تسلیم فون-میسز را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\phi(\sigma_{ij}, k) = \bar{\phi}(\sigma_{ij}) - \frac{2}{3}k^2 = 0 \qquad (۲-۴۸)$$

که تنش تسلیم k اندازه سطح را دیکته می‌کند. در گذشته برای فلزات دو سنجش کرنش پلاستیک زیر، جهت مدل‌سازی تکامل تدریجی k با بارگذاری استفاده می‌شد (۲-۲۴الف و ۲-۲۴ب):

$$\xi^p = \int \left[\frac{1}{2} de_{ij}^p \, de_{ij}^p \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۲-۴۹\text{الف})$$

و

$$W^p = \int \sigma_{ij} \, d\varepsilon_{ij}^p \qquad (۲-۴۹\text{ب})$$

که ξ^p کرنش پلاستیک انحرافی مؤثر یا معادل[1] (طول تجمعی مسیر در فضای کرنش پلاستیک انحرافی) و W^p کار پلاستیک تجمعی می‌باشد.

باید توجه نمود که مسیرهای مختلف می‌توانند مقادیر برابر برای ξ^p و W^p ارائه نمایند. لذا این پارامترها به صورت یکتا به مسیر کرنش یا تنش مرتبط نمی‌باشند. اما به صورت یکتا به تغییر شکل پلاستیک تجربه شده توسط ماده مرتبط هستند.

اندازه پارامتر k به صورت تابعی از ξ^p یا W^p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k = k(\xi^p) \qquad (۲-۵۰\text{الف})$$

یا

[1] equivalent or effective deviatoric plastic strain

$$k = k(W^p)$$ (۲-۵۰ب)

معادله (۲-۵۰ الف) قانون سخت‌شدگی کرنش[1] و معادله (۲-۵۰ ب) قانون سخت‌شدگی کار[2] نامیده می‌شوند:

$$\dot{k} = \frac{dk}{d\xi^p}\dot{\xi}^p = g(\xi^p)\dot{\xi}^p$$ (۲-۵۱الف)

$$\dot{k} = \frac{dk}{dW^p}\dot{W}^p = h(W^p)\dot{W}^p$$ (۲-۵۱ب)

که g و h شیب روابط $k - \xi^p$ و $k - W^p$ هستند (شکل (۲-۱۴)).

با در نظر گرفتن قانون سخت‌شدگی کرنش یکی از روابط پیشنهادی به صورت رابطه هایپربولیک زیر می‌باشد:

$$k = k_0 + \frac{m(k_f - k_0)\xi^p}{(k_f - k_0) + m\xi^p}$$ (۲-۵۲)

k_0 تنش تسلیم اولیه می‌باشد.

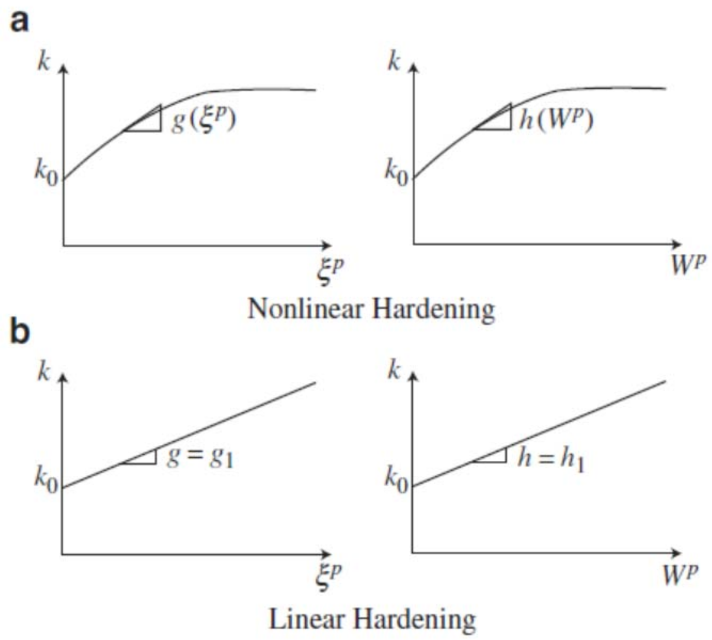
با مشتق‌گیری از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\dot{k} = g\dot{\xi}^p$$ (۲-۵۳الف)

$$g = \frac{m(k_f - k_0)^2}{\left[(k_f - k_0) + m\xi^p\right]^2}$$ (۲-۵۳ب)

اگر $\xi^p = 0$ آن‌گاه $g = m$ خواهد بود. همچنانکه $\xi^p \to \infty$ آن‌گاه $k \to \infty$ و $g \to 0$. این تابع در انتگرال‌گیری معادلات ساختاری مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

[1] strain hardening law
[2] Work hardening law



شکل (۲-۱۴) شماتیک توابع سخت‌شدگی ایزوتروپیک خطی و غیرخطی

ب) قاعده سخت‌شدگی سینماتیک

در این رفتار سخت‌شدگی شکل و سایز سطح تسلیم ثابت مانده و مرکز آن تغییر می‌کند. به طور کلی این سخت‌شدگی توسط معرفی یک PIV تانسوری تحت عنوان تنش برگشتی و تعریف یک قاعده تکامل مناسب برای آن مدل می‌شود. در مواد وابسته به فشار مانند خاک این تنش برگشتی هم اجزاء حجمی[۱] و هم انحرافی[۲] دارند. در مواد مستقل از فشار مانند فلزات چون سطح تسلیم مستقل از تنش هیدرواستاتیک است، تنش برگشتی یک تانسور انحرافی خالص می‌باشد.

یک شکل معمولی تغییر یافته معیار تسلیم فون-میسز با تنش برگشتی در معادله (۲-۴۷) داده شده است که α_{ij} تنش برگشتی است که با کرنش پلاستیک تغییر می‌کند و k

۱ Volumetric
۲ Deviatoric

یک ثابت اسکالر است که طی رفتار پلاستیک بدون تغییر باقی می‌ماند (در حالت سخت‌شدگی سینماتیک خالص). در بین قواعد سخت‌شدگی سینماتیک کلاسیک قاعده پراگر[1] و زیگلر[2] پرکاربردترین هستند که به صورت ریاضی زیر بیان می‌شوند:

(۲-۵۴الف) قانون پراگر: $\dot{\alpha}_{ij} = c_1(\sigma,\zeta)\dot{\varepsilon}^p{}_{ij}$

(۲-۵۴ب) قانون زیگلر: $\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\mu}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})$

یک شکل مناسب برای $\dot{\mu}$ در قاعده زیگلر به صورت زیر می‌باشد:

(۲-۵۴ج) $\dot{\mu} = c_2(\sigma,\zeta)\dot{\xi}^p$

که $\dot{\xi}^{\mathrm{p}}$ نامتغیر انحرافی نرخ کرنش پلاستیک می‌باشد. وقتی C_1 در قاعده پراگر و C_2 در قاعده زیگلر مستقل از متغیرهای حالت (σ,ξ) باشند، قاعده سخت‌شدگی خطی و در غیراین‌صورت غیرخطی می‌باشد.

۲-۳-۶- روش‌های انتگرال‌گیری معادلات ساختاری الاستوپلاستیک

همانطور که پیش‌تر مطرح شد یکی از مهمترین موضوعات آنالیز اجزاء محدود الاستوپلاستیک تکامل بردار تنش افزایشی $\Delta\sigma$ برای یک بردار کرنش افزایشی داده شده $\Delta\varepsilon$ می‌باشد.

از طرفی روش‌های متوالی مبتنی بر روش نیوتن- رافسون به یک ماتریس مدول مماسی ماده (یا اپراتور سختی مماسی) D^{t} نیاز دارند. اگرچه محاسبه آن در حوزه مسائل الاستیک

[1] Prager
[2] Ziegler

اعم از خطی و غیرخطی آسان است، اما در حوزه الاستوپلاستیک با دشواری‌هایی همراه می باشد. در این راستا سه روش انتگرال‌گیری قوانین ساختاری الاستوپلاستیک مستقل از نرخ وجود دارد که شامل:

۱- روش اویلر دو مرحله‌ای[۱]

۲- روش صفحه برشی[۲]

۳- روش تصویر نزدیک‌ترین نقطه[۳] (CPPM)

می‌باشد. پیش‌تر گفته شد که حل معادلات اجزاء محدود غیرخطی توسط روش نیوتن-رافسون مستلزم آنست که در هر نقطه گوسی ماتریس مدول مماسی D^{t} و بردار تنش افزایشی $\Delta\sigma$ به صورت زیر تعریف شود:

$$D^t = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \quad \text{و} \quad \Delta\sigma = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\sigma}\, dt \qquad (۵۵-۲)$$

که $\dot{\sigma}$ بردار نرخ تنش و $\dot{\varepsilon}$ بردار نرخ کرنش و t زمان است. با ترکیب معادلات ساختاری الاستیک و پلاستیک خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \ ; \ \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} r \\ &\dot{\sigma} = C\dot{\varepsilon}^e = C[\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p] = C\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}\, Cr \end{aligned} \qquad (\text{۵۶-۲الف})$$

که

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(\sigma,\xi) = \frac{1}{K_p}\dot{\sigma}^T n \ ; \ n(\sigma,\xi) = \frac{\partial \phi(\sigma,\xi)}{\partial \sigma} \ ; \qquad (\text{۵۶-۲ب})$$

$$\dot{\xi} = \dot{\lambda}\mathrm{s} = \mathrm{g}(\sigma,\xi) \quad ; \quad \mathrm{s} = \mathrm{s}(\sigma,\xi) \quad ; \quad \mathrm{r}(\sigma,\xi) = \frac{\partial \psi(\sigma,\xi)}{\partial \sigma} \qquad (\text{۵۶-۲ج})$$

[۱] Two-step Euler method
[۲] Cutting plane
[۳] Closest point projection method

$$\phi(\sigma,\xi)=0\ ;\ \psi(\sigma,\xi)=0 \qquad (۲-۵۶د)$$

$\dot{\varepsilon}^{p}$ بـــردار نـــرخ کـــرنش پلاســـتیک، C مـــاتریس مـــدول مماســـی الاســـتیک، $\dot{\lambda}$ پـــارامتر سـازگاری، r جهـت جریـان (بـردار نرمـال بـر سـطح پتانسـیل پلاسـتیک ψ)، n جهـت تسـلیم (بردار نرمـال بـر سـطح تسـلیم تعریـف شـده توسـط تـابع ϕ)، ξ متغیـر داخلـی پلاسـتیک (PIV) یا متغیـر سـخت‌شـدگی (کـه عمومـاً شـامل PIV هـا اسـکالر و یـا تانسـوری ماننـد تـنش برگشـتی می‌باشد)، s جهت نرخ PIV و

$$K_p=-(\partial_{\xi}\phi)^{T}s \qquad (۲-۵۶هـ)$$

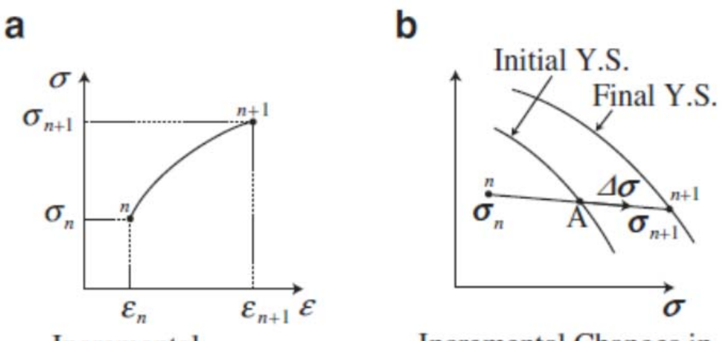
مـدول پلاسـتیک مـی‌باشـد، بعـلاوه معادلـه نـرخ تـنش- کـرنش الاستوپلاسـتیک ترکیبـی بـه صورت زیر است:

$$\dot{\sigma}=\overline{D}\,\dot{\varepsilon} \qquad (۲-۵۶و)$$

که $\overline{\mathrm{D}}$ اپراتور مماسی پیوسته الاستوپلاستیک می‌باشد.

مساله موردنظر به صورت زیر می‌باشد:

بـا داشـتن $(\sigma_{\mathrm{n}},\xi_{\mathrm{n}},\Delta\varepsilon)$، هـدف محاسـبه‌ی $(D^{t}_{n+1},\sigma_{n+1},\xi_{n+1})$ مـی‌باشـد کـه n معـرف عدد افزایش مطـابق شـکل (۲-۱۵) مـی‌باشـد. پـیش‌تـر مطـرح شـد کـه $\mathrm{D}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{n+1}},\sigma_{\mathrm{n+1}}$ در مراحـل مختلف در طی توالی کلی مورد نیاز هستند.



Incremental Stress–Strain Relation

Incremental Changes in Stress Space

شکل (۲-۱۵) نمایش هندسی افزایش‌های تنش و کرنش

لـذا فرآینـد، یـک فرآینـد آغازشـونده بـا کـرنش $\Delta\varepsilon$ مـی‌باشـد و محاسـبه‌ی $\Delta\xi$ و $\Delta\sigma$ مـدنظر اسـت. ایـن مسـاله از جملـه مسـائل مقـدار اولیـه مـی‌باشـد کـه توسـط روش‌هـای انتگـرال گیری اویلر قابل محاسبه است. اشـاره شـد کـه اسـتفاده از اپراتـور مماسـی سـازگار بـه مقـدار قابـل ملاحظه‌ای نرخ هم‌گرایی را نسبت به اپراتور مماسی پیوسته افزایش می‌دهد.

حـال اگـر مسـاله یـافتن مـاتریس سـختی مماسـی را در نظـر بگیـریم؛ نشـان داده شـده کـه $\dot{\sigma} = \overline{\mathrm{D}}\dot{\varepsilon}$ بنابراین داریم:

$$\overline{D} = \left[C - \frac{(Cr)(Cn)^T}{n^T Cr + K_p} \right] \qquad \text{(۲-۵۷الف)}$$

و

$$\dot{\lambda} = \frac{n^T C\dot{\varepsilon}}{n^T Cr + K_p} \qquad \text{(۲-۵۷ب)}$$

$\overline{\mathrm{D}}$ اپراتور مماسـی الاستوپلاسـتیک پیوسـته مـی‌باشـد. عمومـا حـل معـادلات (۲-۵۷ الـف) بـه صـورت تحلیلـی جهـت محاسـبه انتگـرال (۲-۴۹) بـرای محاسـبه $\Delta\sigma$ بسـیار پیچیـده اسـت. لـذا یـک روش عـددی مناسـب مـورد نیـاز اسـت. بایـد توجـه نمـود کـه $\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma$ و $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon$ لـذا اپراتـور مماسـی در حـل فرآینـد افزایشـی قابـل محاسـبه اسـت، اگـر σ_{n+1} بر حسب ε_{n+1} را بـدانیم. یـک رابطـه تحلیلـی جهـت ایـن دو در دسـترس نیسـت، امـا بـر اسـاس روش عـددی مـورد اسـتفاده یـک رابطـه الگـوریتمی وجـود دارد کـه یـک تقریـب از آن است. از این رابطه می‌توان مشتق‌گیری نمود و تقریبی از اپراتور مماسی را به دست آورد:

$$D^t = \frac{\partial[\sigma_n + \Delta\sigma]}{\partial[\varepsilon_n + \Delta\varepsilon]} \qquad \text{(۲-۵۸)}$$

که D^t ماتریس مدول مماسی سازگار الاستوپلاستیک[1] می‌باشد.

یا به‌طور ساده؛ اپراتور مماسی سازگار الاستوپلاستیک می‌باشد. اپراتور سازگار نامیده می‌شود، زیرا مطابق و سازگار با الگوریتم مورد استفاده جهت محاسبه تنش‌ها است. اگرچه D^t وجود دارد، اما همیشه محاسبه آن آسان نیست، لذا به گرادیان مقادیری چون r و n و... بر حسب σ, ε نیاز دارد که برای مدل‌های پیچیده محاسبه آن‌ها آسان نخواهد بود. لذا استفاده از اپراتور پیوسته به جای اپراتور مماسی سازگار معمول می‌باشد.

همان‌طور که اشاره شد به طور کلی سه روش اویلر دو مرحله‌ای، صفحه برشی و تصویر نزدیک‌ترین نقطه جهت محاسبه انتگرال فوق وجود دارد.

بیشتر مطالعات اخیر روی مدل‌های پلاستیک فلزات متمرکز است. اگرچه در برخی حالات پلاستیک کامل، محاسبه دقیق انتگرال امکان‌پذیر است، اما عمده مدل‌های پلاستیک سخت‌شدگی به روش‌های عددی نیاز دارند. روش‌های مبتنی بر اویلر در گذشته استفاده شده‌اند.

به طور کلی روش‌های محاسبه تنش افزایشی به تدریج سبب خروج تنش نهایی از سطح تسلیم می‌شوند. لذا روشی جهت بازگرداندن آن‌ها به سطح تسلیم مورد نیاز است. روش کلاسیک حصول این هدف الگوریتم بازگشت شعاعی[2] است. کلاس کلی‌تری که این الگوریتم جزء آن می‌باشد؛ الگوریتم پیش‌بینی کننده الاستیک- تصحیح کننده پلاستیک[3] می‌باشد که در آن در ابتدا از پاسخ غیرالاستیک ماده صرف‌نظر شده و تنها بخش الاستیک لحاظ می‌شود، سپس با اضافه کردن کرنش غیرالاستیک، تنش الاستیک به سطح تسلیم برگردانده می‌شود. این فرآیند نگاشت با بازگشت[4] نامیده می‌شود. این روش معادل یافتن

---

[1] Elasto-Plastic consistent tangent modular matrix
[2] Radial return mapping
[3] Elastic predictor- Plastic corrector
[4] Return Mapping

تصویر نزدیک‌ترین نقطه تنش فرضی اولیه (پیش‌بینی کننده الاستیک) روی سطح تسلیم می‌باشد. بر همین اساس به آن روش CPPM نیز می‌گویند.

CPPM در کنار تکنیک توالی نیوتن به کار می‌رود. استفاده از اپراتور مماسی پیوسته هم‌گرایی آن‌را متأثر می‌کند، اما با اپراتور مماسی سازگار این هم‌گرایی بصورت دو مجذوری محقق می‌شود. لذا روش بهینه در دسترس جهت پیاده‌سازی مدل‌های ساختاری الاستوپلاستیک، استفاده از CPPM جهت محاسبه معادلات نرخ در نقاط گوسی جهت محاسبه افزایش تنش برای یک مقدار افزایش کرنش داده شده، و استفاده از اپراتور مماسی سازگار در توالی‌های نیوتن کلی می‌باشد. CPPM یک روش ضمنی است و به گرادیان n و r نیاز دارد.

روش صفحه برشی به گرادیان n و r نسبت به σ و ξ نیاز ندارد، اما اپراتور مماسی سازگار به راحتی قابل محاسبه نیست. لذا در طی توالی کلی نیوتن باید از اپراتور پیوسته استفاده نمود که در این حالت الگوریتم بازدهی خود را از دست می‌دهد. لذا تنها در مواردی که مدل به قدر کافی آسان نباشد، به نحوی‌که امکان محاسبه r و n مهیا نگردد، این روش مناسب خواهد بود.

در پلاستیک فلزات، خواص الاستیک در طی بارگذاری غالباً ثابت می‌ماند. بدین مفهوم که نه تابعی از کرنش‌های پلاستیک هستند و نه تابعی از تنشها. بنابراین هنگامی که کرنشهای پلاستیک به شکل متوالی محاسبه شد، تنش فرضی الاستیک اولیه بدون تغییر باقی می‌ماند، لذا بیشتر الگوریتم‌های توسعه یافته برای پلاستیک فلزات مبتنی بر همین حقیقت هستند.

در ادامه، ابتدا تعریفی از روش‌های پیش‌بین الاستیک- تصحیح کننده پلاستیک ارائه و سپس روش CPPM تشریح می‌گردد. جدا از روش انتگرال‌گیری به کار رفته، پیش‌بین

الاستیک جهت بررسی حالت بارگذاری/ باربرداری به کار می‌رود. با انتگرال‌گیری از (۲-۵۶ الف) خواهیم داشت:

$$\int_{t}^{t+\Delta t}\dot{\sigma}=\int_{t}^{t+\Delta t}C\dot{\varepsilon}-\int_{t}^{t+\Delta t}\dot{\lambda}Cr \qquad (۲\text{-}۵۹\text{الف})$$

$$\Delta\sigma=\Delta\sigma^{ep}+\Delta\sigma^{pc} \qquad (۲\text{-}۵۹\text{ب})$$

که

$$\Delta\sigma^{ep}=\int_{t}^{t+\Delta t}C\dot{\varepsilon} \quad \text{و} \quad \Delta\sigma^{pc}=-\int_{t}^{t+\Delta t}\dot{\lambda}Cr \qquad (۲\text{-}۵۹\text{ج})$$

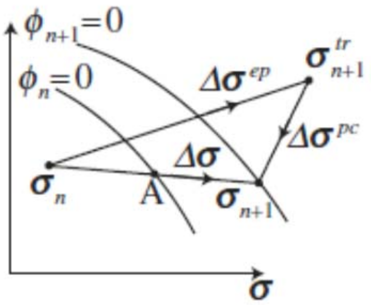
بنابراین:

$$\sigma_{n+1}=\sigma_n+\Delta\sigma^{ep}+\Delta\sigma^{pc}=\sigma_{n+1}^{tr}+\Delta\sigma^{pc} \qquad (۲\text{-}۵۹\text{د})$$

که

$$\sigma_{n+1}^{tr}=\sigma_n+\Delta\sigma^{ep} \qquad (۲\text{-}۵۹\text{هـ})$$

از (۲-۵۹ الف) می‌توان دید که $\Delta\sigma$ می‌تواند به دو بخش $\Delta\sigma^{ep}$ و $\Delta\sigma^{pc}$ تقسیم شود. که منجر به (۲-۵۹د) و (۲-۵۹ هـ) می‌شود. σ_{n+1} به صورت جمع σ_{n+1}^{tr} و $\Delta\sigma^{pc}$ در شکل (۲-۱۶) نشان داده شده است.



شکل(۲-۱۶) نمایش هندسی پیش‌بین الاستیک- تصحیح کننده پلاستیک

حال حالتی را در نظر می‌گیریم که پاسخ غیرالاستیک ماده صرف‌نظر شده و فرض می-شود تمام طول افزایش کرنش، پاسخ الاستیک خالص تولید می‌کند. لذا $\dot{\lambda}=0$ و $\Delta\sigma^{\mathrm{pc}}=0$ بنابراین $\sigma_{\mathrm{n+1}}=\sigma^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{n+1}}$ لذا $\sigma^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{n+1}}$،پیش بین الاستیک نامیده می‌شود و $\Delta\sigma^{\mathrm{pc}}$، تصحیح کننده پلاستیک نام‌گذاری می‌گردد. $\Delta\sigma^{\mathrm{ep}}$ بخشی از افزایش تنش است که با پیش‌بین الاستیک همراه است.

جدا از روش انتگرال‌گیری مورد استفاده، ما نیازمند تعیین تغییر شکل پلاستیکی هستیم که ناشی از افزایش کرنش داده شده می‌باشد. $\sigma^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{n+1}}$ می‌تواند مبنای تعیین الاستیک یا الاستوپلاستیک بودن توالی قرار گیرد.

$$\phi^{tr}_{n+1}(\sigma^{tr}_{n+1},\xi_n)>0\Rightarrow \text{الاستوپلاستیک} \qquad (\text{۲-۶۰الف})$$

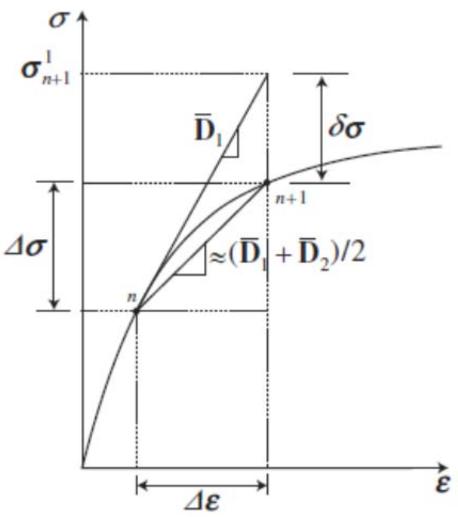
$$\phi^{tr}_{n+1}(\sigma^{tr}_{n+1},\xi_n)\leq 0\Rightarrow \text{الاستیک} \qquad (\text{۲-۶۰ب})$$

$\sigma^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{n+1}}$ را تنش فرضی نیز می‌نامند.

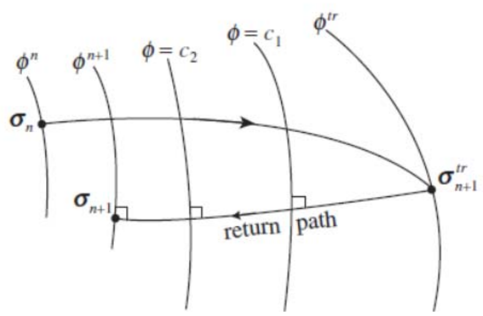
پیشتر استراتژی توالی کلی برای آنالیز المان محدود الاستوپلاستیک در روش نیوتن-رافسون ارائه گردید. در آن تنش افزایشی $\Delta\sigma$ منطبق با کرنش افزایشی $\Delta\varepsilon$ محاسبه می‌گردد، نه تنش متوالی $\delta\sigma$ منطبق با کرنش متوالی $\delta\varepsilon$.

بعبارت دیگر در طی توالی کلی انتگرال‌گیری از تنش‌ها همیشه از نقطه‌ی n شروع می‌شود نه از نقطه‌ای بین n و $\mathrm{n+1}$. در غیراین‌صورت مقدار نهایی $\Delta\sigma$ وابسته به مسیر تنشی خواهد بود که در زمان توالی طی شده است و لذا به الگوریتم خاصی که به کار رفته وابسته خواهد بود. شکل(۲-۱۷) نمایش هندسی روش اویلر دو مرحله‌ای و شکل(۲-۱۸)

نمـایش هندسـی روش صـفحه برشـی را نشـان مـی‌دهنـد. در ادامـه روش CPPM تشـریح مـی-گردد.



شکل (۲-۱۷) نمایش هندسی روش اولر دو مرحله‌ای



شکل(۲-۱۸) نمایش هندسی روش صفحه برشی

۲-۳-۷- روش تصویر نزدیک‌ترین نقطه (CPPM)

روش CPPM یـک روش پـیش‌بـین الاسـتیک- تصـحیح‌کننـده پلاسـتیک مـی‌باشـد کـه ارضـاء شـرط سـازگاری را در انتهـای افـزایش جسـتجو مـی‌کنـد، لـذا یـک روش اویلـر برگشـتی و رویـه

ضمنی مـی‌باشـد. ایـن روش قـوی بـوده و اجـازه محاسـبه تحلیلـی مشـتق اپراتـور مماسـی سـازگار را می‌دهد. لـذا نسـبت بـه دور روش دیگـر پایـدارتر و بـا بـازده بیشـتر مـی‌باشـد. تنهـا مشـکل ایـن روش نیـاز بـه گرادیـان r و n و s نسـبت بـه σ و ξ مـی‌باشـد کـه در برخـی مـدل‌هـای پیچیـده محاسبه آن دشوار است.

در ابتـدا روشـی بـرای مـاده‌ای ماننـد فلـزات کـه خـواص الاسـتیک ثـابتی دارنـد توصـیف مـی‌شـود. لـذا مطـابق شـکل (۲-۱۹) پـیش‌بـین الاسـتیک در طـی تـوالی ثابـت مـی‌مانـد. هـدف محاسبه‌ی σ_{n+1} و ξ_{n+1} بر اساس معادلات اویلر بازگشتی (ضمنی) می‌باشد.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma^{ep} + \Delta\sigma^{pc} = \sigma_{n+1}^{tr} + \Delta\sigma^{pc} \qquad \text{(۲-۶۱الف)}$$

$$\Delta\sigma^{ep} = \int_t^{t+\Delta t} C\dot{\varepsilon} = C\,\Delta\varepsilon \qquad \text{(۲-۶۱ب)}$$

$$\Delta\sigma^{pc} = -\int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} Cr = -\Delta\lambda\, Cr^{n+1} \qquad \text{(۲-۶۱ج)}$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \Delta\xi \qquad \text{(۲-۶۲الف)}$$

$$\Delta\xi = \Delta\lambda\, s^{n+1} \qquad \text{(۲-۶۲ب)}$$

آنچنان که:

$$\phi^{n+1}(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}) = 0 \qquad \text{(۲-۶۲ج)}$$

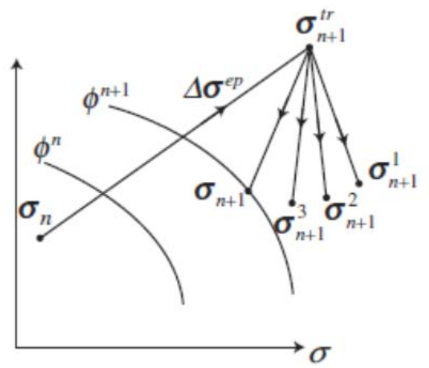
در مجموع معادلات برای محاسبه‌ی σ_{n+1} و ξ_{n+1} به قرار زیر هستند:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + C\Delta\varepsilon - \Delta\lambda Cr^{n+1}(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}) \qquad \text{(۲-۶۳الف)}$$

(۲-۶۳ب)

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \Delta\lambda s^{n+1}(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1})$$

چون σ_{n+1} و ξ_{n+1} توابعی از خودشان هستند، لذا رویه متوالی می‌باشد.



شکل (۲-۱۹) شماتیک رویه CPPM در حالت خواص الاستیک ثابت

فرمول‌بندی فوق بر حسب تانسور تنش σ می‌باشد، به این نوع فرمول‌بندی، فرمول‌بندی $\sigma - space$ گفته می‌شود. اگر توالی بر حسب جداسازی تنش‌های کروی-انحرافی باشد، به آن فرمول‌بندی $s - space$ گویند.

این روش به این‌صورت عمل می‌کند که در ابتدا یک تقریب اولیه برای $\Delta\lambda$ با استفاده از یک رویه مناسب فراهم می‌گردد. به عنوان مثال روش صریح به‌کار رفته در صفحه برشی می‌تواند برای این منظور به کار رود که بر این اساس:

$$\Delta\lambda_1 = \frac{\phi^{tr}}{[n^T Cr + K_p]^{tr}} \qquad (۲-۶۴)$$

همانگونه که مشهود است مقادیر ارزیابی شده در پیش‌بین الاستیک مبنای تعیین مقدار $\Delta\lambda_1$ می‌باشد، سپس با استفاده از r^{tr} و n^{tr} اولین تقریب‌ها برای σ_{n+1} و ξ_{n+1} تحت نام σ^1_{n+1} و ξ^1_{n+1} (شکل ۲-۱۹) توسط معادلات (۲-۶۳ الف) و (۲-۶۳ ب) محاسبه

مـــی‌شـــود. ایـــن مقـــادیر معادلـــه (۲-۶۲ ج) را ارضـــا نمـــی‌کنـــد. زیـــرا $r^{tr} \neq r^{n+1}$ و $n^{tr} \neq n^{n+1}$ است. مانده‌های زیر تعریف می‌شوند.

$$R_\sigma = \sigma_{n+1} - [\sigma_n + C\Delta\varepsilon - \Delta\lambda C r^{n+1}] = R_\sigma(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}, \Delta\lambda) \qquad \text{(۲-۶۵الف)}$$

$$R_\xi = \xi_{n+1} - [\xi_n + \Delta\lambda\, s^{n+1}] = R_\xi(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}, \Delta\lambda) \qquad \text{(۲-۶۵ب)}$$

$$R_\phi = \phi^{n+1}(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}) = R_\phi(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}) \qquad \text{(۲-۶۵ج)}$$

در رابطـــه (۲-۶۵ ب) از نمـــایش اویلـــر بازگشـــتی بـــرای ξ_{n+1} اســـتفاده شـــده اســـت، امـــا در برخی موارد مثلاً روی مـدل فـون-میسـز انتگـرال‌گیـری مسـتقیم روی قـانون سـخت‌شـدگی جهـت محاسبه معادله تحلیلی برای ξ_{n+1} بر حسب σ_{n+1} و $\Delta\lambda$ امکان‌پذیر است.

بـــا خطـــی‌ســـازی معـــادلات (۲-۶۵ الـــف تـــا ج) حـــول σ_{n+1} و ξ_{n+1} بـــرای حـــالتی کـــه ξ و R_ξ^1 اسکالر باشند، خواهیم داشت:

$$A_{ijkl} = \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \sigma_{kl}}\right]_1 \; ; \; B_{ij} = \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \xi}\right]_1 \; ; \; F_{ij} = \left[\frac{\partial R_{\sigma_{ij}}}{\partial \Delta\lambda}\right]_1 \qquad \text{(۲-۶۶الف)}$$

$$H_{kl} = \left[\frac{\partial R_\xi}{\partial \sigma_{kl}}\right]_1 \; ; \; \omega = \left[\frac{\partial R_\xi}{\partial \xi}\right]_1 \; ; \; \beta = \left[\frac{\partial R_\xi}{\partial \Delta\lambda}\right]_1 \qquad \text{(۲-۶۶ب)}$$

$$E_{kl} = \left[\frac{\partial R_\phi}{\partial \sigma_{kl}}\right]_1 \; ; \; \gamma = \left[\frac{\partial R_\phi}{\partial \xi}\right]_1 \qquad \text{(۲-۶۶ج)}$$

لذا مقادیر مورد نیاز جهت محاسبه ضرایب عبارتند از:

- $\Delta\varepsilon$

- مقادیر C، r، n، $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$، $\Delta\lambda$ و s در نقطه پیشرو n+1 در توالی جاری

- گرادیان $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$، $\frac{\partial r}{\partial \sigma}$، $\frac{\partial r}{\partial \xi}$، $\frac{\partial s}{\partial \sigma}$، $\frac{\partial s}{\partial \xi}$ و $\frac{\partial s}{\partial \Delta\lambda}$

معادلات (۲-۶۶ الف تا ج) به طور همزمان جهت محاسبه مقادیر نامشخص $\delta\sigma_{ij}$، $\delta\xi$ و $\delta\lambda$ حل می‌شوند و تقریب‌های جدید برای ξ_{n+1} و σ_{n+1} و $\Delta\lambda$ یافت می‌شود.

$$\sigma_{n+1}^{2} = \sigma_{n+1}^{1} + \delta\sigma \qquad (۲-۶۷الف)$$

$$\xi_{n+1}^{2} = \xi_{n+1}^{2} + \delta\xi \qquad (۲-۶۷ب)$$

$$\Delta\lambda_{2} = \Delta\lambda_{1} + \delta\lambda \qquad ((۲-۶۷ج)$$

نگارش «۲» نشانه تقریب دوم می‌باشد. در معادلات (۲-۶۶ الف تا ج) باقیمانده‌ها باید در (σ^{1}_{n+1} و ξ^{1}_{n+1}) محاسبه شوند. با ادامه این توالی $\Delta\sigma^{pc}$ به تدریج به سمت مقدار صحیح در محدوده تلورانس مشخص شده مطابق شکل (۲-۱۹) همگرا می‌شود. معیار همگرایی به صورت زیر است:

$$e_{\sigma} = \left\| R_{\sigma}^{i+1} \right\| / \left\| \sigma_{n+1}^{i} \right\| \le TOL_{\sigma} \qquad (۲-۶۸الف)$$

$$e_{\xi} = \left\| R_{\xi}^{i+1} \right\| / \left\| \xi_{n+1}^{i} \right\| \le TOL_{\xi} \qquad (۲-۶۸ب)$$

$$R_{\phi}^{i+1} = \phi^{i+1} \le TOL_{\phi} \qquad (۲-۶۸ج)$$

به محض اینکه همگرایی محقق شد تنش‌ها و PIV ها با استفاده از فرمول‌های (۲-۶۷ الف) و (۲-۶۷ ب) به روز رسانی و تقریباً مشابه به آنچه که در (۲-۶۳ الف) و (۲-۶۳ ب) مشاهده شد، محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_{n+1}^{k} \approx \sigma_{n} + C\Delta\varepsilon - \Delta\lambda_{k} C r^{n+1}(\sigma_{n+1}^{k}, \xi^{k}{}_{n+1}) \qquad (۲-۶۹الف)$$

$$\xi_{n+1}^{k} \approx \xi_{n} + \Delta\lambda_{k}\, s^{n+1}(\sigma_{n+1}^{k}, \xi_{n+1}^{k}) \qquad (۲-۶۹ب)$$

که k عدد توالی است که همگرایی در آن رخ می‌دهد. پس از حصول هم‌گرایی:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + C\Delta\varepsilon - \Delta\lambda C r^{n+1}(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}) \quad \text{(۲-۷۰الف)}$$

$$\xi_{n+1} \approx \xi_n + \Delta\lambda\, s^{n+1}(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}) \quad \text{(۲-۷۰ب)}$$

کــه معــرف معــادل الگــوریتمی جهــت محاســبه σ_{n+1} و ξ_{n+1} مــی‌باشــند، بعــلاوه شــرط سازگاری زیر نیز وجود دارد:

$$R_\phi = \phi^{n+1}(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}) = R_\phi(\sigma_{n+1}, \xi_{n+1}) = 0 \quad \text{(۲-۷۱)}$$

بــا مشــتق گیــری از (۲-۷۰ الــف) و (۲-۷۰ ب) و (۲-۷۱) و ترکیــب معــادلات جهــت حــذف $\dot{\xi}$ و $\dot{\lambda}$ معادله مرتبط شده رابطه $\dot{\sigma}$ و $\dot{\varepsilon}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\sigma} = D^t \dot{\varepsilon} \quad \text{(۲-۷۲)}$$

که D^t اپراتور مماسی سازگار است.

محاســبات فــوق در حالــت خــواص الاســتیک متغیــر نیــز قابــل انجــام اســت [۲۱]. بــا مشتق‌گیری از معادلات الگوریتمی و بازآرایی آن‌ها داریم:

$$R_\sigma^{*1} + A^*\dot{\sigma} + B^*\dot{\xi} + F^*\dot{\lambda} = 0 \quad \text{(۲-۷۳الف)}$$

$$R_\xi^{*1} + H^{*T}\dot{\sigma} + \omega^*\dot{\xi} + \beta^*\dot{\lambda} = 0 \quad \text{(۲-۷۳ب)}$$

$$R_\phi^{*1} + E^{*T}\dot{\sigma} + \gamma^*\dot{\xi} = 0 \quad \text{(۲-۷۳ج)}$$

می‌توان نشان داد که:

$$A^* = A \;,\; B^* = B \;,\; F^* = F \;,\; H^* = H \;,\; E^* = E \;,\; \omega^* = \omega \;,\; \beta^* = \beta \;,\; \gamma^* = \gamma$$

که مانده‌ها عبارتند از:

$$R_\sigma^{*1} = -C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \;;\; R_\xi^{*1} = 0 \;;\; R_\phi^{*1} = 0 \quad \text{(۲-۷۴)}$$

با ساده سازی خواهیم داشت:

$$\dot{\sigma} = RC\dot{\varepsilon} - \overline{C}\overline{r}\frac{\overline{n}^T\,\overline{C}\dot{\varepsilon}}{x_0\gamma\beta + \overline{n}^T\,\overline{C}\overline{r}} = \left[\overline{C} - \frac{(\overline{C}\overline{r})(\overline{n}^T\,\overline{C})}{x_0\gamma\beta + \overline{n}^T\,\overline{C}\overline{r}}\right]\dot{\varepsilon} = D\dot{\varepsilon} \qquad \text{(۲-۷۵الف)}$$

که

$$D = \left[\overline{C} - \frac{(\overline{C}\overline{r})(\overline{n}^T\,\overline{C})}{x_0\gamma\beta + \overline{n}^T\,\overline{C}\overline{r}}\right] \qquad \text{(۲-۷۵ب)}$$

این رابطه توصیفی برای اپراتورهای سازگار می‌باشد. با توجه به (۲-۶۶) خواهیم داشت:

$$\gamma = \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial \xi} \qquad \text{و} \qquad \beta = -s^{n+1} - \Delta\lambda \frac{\partial s^{n+1}}{\partial \Delta\lambda}$$

بر اساس رابطه (۲-۵۶ هـ)؛ $(x.\gamma\beta)$ یک مدول پلاستیک تغییر یافته تحت عنوان k_p^* می‌باشد. لذا توصیف اپراتور مماسی سازگار مشابه شکل اپراتور مماسی پیوسته (۲-۶۸ الف) می‌باشد. با اپراتور مماسی الاستیک تغییر یافته $\overline{C}$، جهت جریان $\overline{r}$، جهت تسلیم $\overline{n}$ و مدول پلاستیک k_p^*.

این مطلب با جایگزینی $\Delta\lambda \to 0$، $\overline{C} \to C$، $\overline{r} \to r$، $\overline{n} \to n$ و $k_p^* \to k_p$ می‌تواند تأیید شود. حتی اگر مدلی از یک قاعده جریان مرتبط (یعنی $r=n$) استفاده نماید، $\overline{r} \neq \overline{n}$ و بنابراین $\overline{C} \neq \overline{C}^T$ است، لذا D به طور کلی غیرمتقارن است. در برخی حالات ساده مانند مدل فون-میسز با سخت‌شدگی ایزوتروپیک، D می‌تواند متقارن نیز باشد.

۲-۳-۸- مدل فون-میسز و انتگرال‌گیری از آن

در بین قوانین ساختاری الاستوپلاستیک در دسترس مستقل از نرخ، جهت توصیف رفتار تنش- کرنش مواد، مدل‌هایی که سطح تسلیم فون-میسز را با قاعده جریان همبسته به کار می‌گیرند، پرکاربردترین و ساده‌ترین قوانین ساختاری می‌باشند. درحالی‌که مدل‌های

سـختشـدگی ایزوتروپیـک عمومـاً بـرای کاربردهـای بارگـذاری یکنواخـت مناسـب هسـتند. مـدلهـای پیشـرفتهتـر شـامل مـدلهـای سـختشـدگی سـینماتیکی غیرخطـی و مـدلهـای چندسطحی و ... نوعاً برای کاربردهای بارگذاری متناوب[1] مناسب هستند.

در ایـن بخـش ابتـدا مـدل فـون- میسـز بـا سـختشـدگی ایزوتروپیـک و انتگـرالگیـری آن توسـط روش CPPM ارائـه مـیگـردد و قواعـد سـختشـدگی خطـی و غیرخطـی مـدنظر قـرار میگیـرد. بـا توجـه بـه بـازدهی محاسـباتی بـالا فرمـولبنـدی $s-space$ نسـبت بـه $\sigma-space$ انتگـرالگیـری در در ایـن فضـا نیـز ارائـه مـیشـود. اگرچـه در صـورت پیچیـده بـودن مـدل تنهـا روش پیشرو $\sigma-\mathrm{space}$ میباشد.

همانطور که پیشتر نیز ذکر شد رابطه الاستیک تنش- کرنش به صورت زیر است:

$$\dot{\sigma} = C\dot{\varepsilon}^e \tag{۲-۷۶الف}$$

که

$$C_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{۲-۷۶ب}$$

کـه G مـدول برشـی و k مـدول بالـک(حجمی)[2] و δ دلتـای کرونکـر و C اپراتـور مماسـی الاسـتیک پیوسـته، $\dot{\sigma}$ نـرخ تـنش و $\dot{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ نـرخ کـرنش الاسـتیک مـیباشـد. دو نـامتغیر تـنش I و J به صورت زیر تعریف میشوند:

$$I = \sigma_{kl}\delta_{kl} \tag{۲-۷۷الف}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}I\delta_{ij} \tag{۲-۷۷ب}$$

---
[1] Cyclic
[2] Bulk

$$J = \left(\frac{1}{2} s_{kl} s_{kl}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(۲-۷۷ج)}$$

سطح تسلیم یک استوانه یکنواخت در فضای تنش می‌باشد که محور آن منطبق با محور قطری فضا [1] است. تصویر آن در صفحه هشت‌وجهی یک دایره است که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(s,k) = s_{ij} s_{ij} - \frac{2}{3}k^2 = 0 \qquad \text{(۲-۷۸)}$$

که اسکالر k تنها متغیر سخت‌شدگی (PIV) در مدل می‌باشد که به صورت هندسی معرف سایز سطح تسلیم است. بنابراین مدل PIV به صورت زیر می‌باشد:

$$\xi \equiv k \qquad \text{(۲-۷۹)}$$

با فرض قاعده جریان مرتبط، معادلات دخیل در رابطه ساختاری پلاستیک به صورت زیر می‌باشند:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} r \; ; \; r = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \; , \; \dot{\lambda} = \frac{1}{K_p} n \dot{\sigma} \; ; \; n = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \; , \; \phi = \psi \; ; \; r = n \qquad \text{(۲-۸۰)}$$

که $\dot{\varepsilon}^p$ نرخ کرنش پلاستیک می‌باشد و $\dot{\lambda}$ پارامتر سازگاری (یا اندیس بارگذاری) است. الگوریتم با فرض عدم برابری ϕ با ψ استخراج می‌گردد. لذا به راحتی قابل توسعه به قواعد جریان غیرمرتبط نیز می‌باشد. دو قاعده سخت‌شدگی متفاوت نیز مد نظر قرار می‌گیرد:

۱- سخت‌شدگی ایزوتروپیک خطی

۲- سخت‌شدگی ایزوتروپیک غیرخطی (مبتنی بر رابطه هایپربولیک که پیشتر ارائه گردید)

---

[1] Space Diagonal

نرخ تغییر k به صورت زیر می‌باشد:

(۲-۸۱الـــــــــــف)

$$\dot{k} = g\dot{\xi}^{p}$$

که ξ^p کـرنش پلاسـتیک انحرافـی تجمعـی مـی‌باشـد، بـرای مـدل سـخت‌شـدگی خطـی خواهیم داشت:

(۲-۸۱ب)
$$g = g_1$$

که g یک ثابت است.

برای مدل سخت‌شدگی غیرخطی رابطه هایپربولیک زیر استفاده می‌شود:

(۲-۸۱ج)
$$k = k_0 + \frac{m(k_f - k_0)\xi^p}{(k_f - k_0) + m\xi^p}$$

که k_0 (تـنش تسـلیم اولیـه)، m (پـارامتر سـخت‌شـدگی)، k_f (تـنش خرابـی) پارامترهـای مدل هستند.

با مشتق‌گیری از (۲-۸۱ ج) و مقایسه نتایج با معادله (۲-۸۱ الف) داریم:

(۲-۸۱د)
$$g = g_2 = \frac{m(k_f - k_0)^2}{[(k_f - k_0) + m\xi^p]^2} = \frac{a_1}{(a_2 + b\xi^p)^2};$$
$$b = m \;\; ; \;\; a_2 = k_f - k_0 \;\; ; \;\; a_1 = m(k_f - k_0)^2 = ba_2^2$$

که

(۲-۸۱هـ)
$$\dot{\xi}^p = \left[\frac{1}{2}\dot{e}_{ij}^p \dot{e}_{ij}^p\right]^{\frac{1}{2}} \;\; ; \;\; \dot{e}_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$

از (۲-۸۰) و (۲-۸۱هـ):

$$\dot{\xi}^p = \left[\frac{1}{2}\dot{e}_{ij}^p\dot{e}_{ij}^p\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2}r_{ij}^d r_{ij}^d\right]^{\frac{1}{2}}\dot{\lambda} = \bar{r}^d\,\dot{\lambda} \quad ; \quad \bar{r}^d = \left[\frac{1}{2}r_{ij}^d r_{ij}^d\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(۲-۸۲الف)}$$

که r_{ij}^d بخش انحرافی r_{ij} می‌باشد.

$$r_{ij}^d = r_{ij} - \frac{1}{3}r_{pp}\delta_{ij} \qquad \text{(۲-۸۲ب)}$$

از ترکیب (۲-۸۱الف) و (۲-۸۲الف) برای مدل‌های سخت‌شدگی خطی و غیرخطی خواهیم داشت:

$$\dot{k} = g\,\bar{r}^d\,\dot{\lambda} = \bar{g}\dot{\lambda} \qquad \text{(۲-۸۲ج)}$$

بنابراین تابع سخت‌شدگی در معادلات، یک اسکالر به صورت زیر می‌باشد:

$$s = \bar{g} = g\,\bar{r}^d \qquad \text{(۲-۸۲د)}$$

حال گرادیان‌های تابع سطح نسبت به متغیرها را محاسبه می‌کنیم، با مشتق‌گیری از (۲-۷۷ ب) داریم:

$$\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ki}\delta_{lj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \qquad \text{(۲-۸۳الف)}$$

با مشتق‌گیری از ϕ نسبت به s_{ij} خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial s_{kl}} = 2\delta_{ik}\delta_{jl}s_{ij} = 2s_{kl}$$

حال با استفاده از دو معادله فوق:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \phi}{\partial s_{kl}}\frac{\partial s_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= 2s_{kl}(\delta_{ki}\delta_{lj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}) \\ &= 2s_{ij} \quad (s_{kk} = 0) \end{aligned} \qquad \text{(۲-۸۳ب)}$$

مشاهده می‌شود که r_{ij} به صورت خالص انحرافی[1] است. (یعنی بخش حجمی آن صفر است) بنابراین:

$$r_{ij}^{d} = r_{ij} \tag{۲-۸۳ج}$$

با توجه به (۲-۸۳ب) در صفحه هشت وجهی، r_{ij} و s_{ij} هم‌خط[2] هستند. با ترکیب (۲-۸۲ الف) و (۲-۸۳ ب) و (۲-۸۳ ج) خواهیم داشت:

$$\bar{r}^{d} = \left[\frac{1}{2} r_{ij}^{d} r_{ij}^{d}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2} r_{ij} r_{ij}\right]^{\frac{1}{2}} = 2\left[\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}\right]^{\frac{1}{2}} = 2J \tag{۲-۸۴}$$

مشتق ϕ نسبت به k به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial k} = -\frac{4}{3} k \tag{۲-۸۵}$$

از معادله سازگاری و استفاده از (۲-۸۳ ج) و (۲-۸۵) خواهیم داشت:

$$K_{p} = -(\partial_{\xi} \phi)^{T} s \tag{۲-۸۶الف}$$

$$K_{p} = \frac{4}{3} kg\, \bar{r}^{d} \tag{۲-۸۶ب}$$

[1] urely Deviatoric
[2] Collinear

۲-۴- جمع‌بندی

در این فصل بر اساس معادلات حاکم بر مکانیک جامدات مساله مقدار مرزی/ اولیه شامل معادلات حاکم، شرایط مرزی، قوانین ساختاری و روابط کرنش- جابجایی برای حالت دو بعدی استخراج شد. سپس مساله با استفاده از روش اجزاء محدود در حوزه الاستیک حل و پس از آن به حوزه الاستوپلاستیک توسعه داده شد. در این راستا با طبقه بندی رفتارهای ساختاری، روشهای عددی حل بویژه در مساله پلاستیک مستقل از نرخ مبتنی بر معیار تسلیم فون-میسز ارائه شد.

فصل سوم

تحلیل آیزوژئومتریک

فصل سوم

تحلیل آیزوژئومتریک

۳- ۱-مقدمه

در این بخش ب-اسپیلاین[۱] ها و نربز ها[۲] بعنوان روشی نوین در توصیف هندسی اجسام معرفی می‌شوند و علت انتخاب آن‌ها بعنوان توابع پایه، هم در بخش توصیف هندسی و هم در بخش آنالیز در قالب تحلیل آیزوژئومتریک[۳] نشان داده خواهد شد.

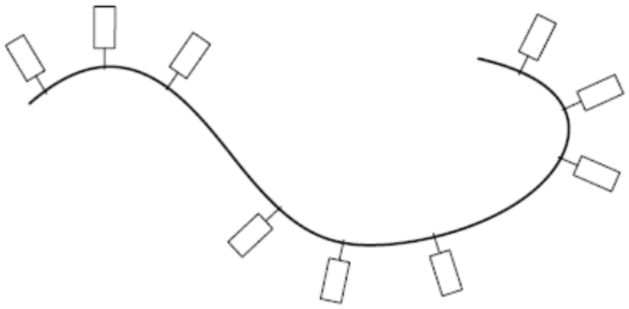
در ادامه تفاوت‌های اساسی بین تحلیل مبتنی بر اجزای محدود (FEM) کلاسیک و آیزوژئومتریک (IGA) ارائه شده و چگونگی حل معادلات الاستو پلاستیک مبتنی بر گسسته‌سازی با استفاده از توابع پایه نربز و ملاحظات مربوط بیان می‌شود. در پایان نیز قابلیت‌های نرم افزار متلب در حل عددی معادلات حاصل ارائه می گردد. مرجع اصلی موضوعات این فصل[۳،۱۵] است اما از مراجع [۱۶،۱۷،۱۸،۱۹،۲۰،۲۱] نیز در تکمیل بحث استفاده شده‌است.

---

۱ B-Spline
۲ NURBS
۳ Isogeometric Analysis (IGA)

۳-۲- ب-اسپیلاین

اسپیلاین‌ها برای اولین‌بار جهت ساخت کشتی‌ها، پیش از عصر مدل‌سازی کامپیوتری مورد استفاده قرار گرفت. معماران دریایی از اسپیلاین‌ها که نوارهای باریک و منعطفی از چوب بودند؛ جهت رسم منحنی‌های هموار طرح خطوط کشتی استفاده می‌کردند. وزنه‌های فلزی به عنوان زبانه طوری قرار می‌گرفتند که اسپیلاین‌ها شکل مورد نظر را داشته باشند. بین زبانه‌ها، اسپیلاین‌ها با فرض حداقل انرژی کرنشی شکل گرفته و هندسه پیوسته (C^2)با منحنی‌های هموار را شکل می‌دهد. (شکل ۳-۱).



شکل (۳-۱) اسپیلاین نگه‌داشته شده با زبانه‌ها جهت ایجاد شکل طراحی هموار مدنظر

با ظهور کامپیوتر؛ طراحی هندسی به کمک کامپیوتر (CAGD) [۱] ظهور کرد. CAGD با تولید منحنی‌ها و سطوح هموار که عموماً باید مجموعه بزرگی از محدودیت‌ها را ارضا نمایند، مرتبط است. وقتی از چند جمله‌ای‌ها استفاده می‌شود این امر مستلزم دقت‌های بسیار بالاست. زیرا چند جمله‌ای‌ها با درجه p می‌توانند p+1 محدودیت را ارضا نماید. چند جمله‌ای‌های با درجه بالا به لحاظ پردازش کم بازده هستند و می‌توانند ناپایدار شوند و در جایی‌که کنترل محلی مورد نظر است، تغییرات به طور کلی رخ دهد. به علاوه وقتی‌که تغییرات محلی رخ می‌دهد پیوستگی باید حفظ شود.

[۱] Computer Aided Geometric Design

این موضوعات به صورت ریاضی با تعریف اسپیلاین‌ها منتفی می‌گردد؛ یعنی تابعی از المان‌های چند جمله‌ای که با سطح پیوستگی مشخص بین المان‌ها به هم متصل شده‌اند. پیوستگی مورد نیاز به صورت مستقیم در پایه‌ها ایجاد شده است که اسپیلاین‌های پایه یا ب-اسپیلاین ها را شکل می‌دهد. پایه‌های طبیعی که جهت توصیف اسپیلاین‌ها استفاده می‌شوند(توابع پایه ب-اسپیلاین) انتخاب آزادانه پیوستگی بین المان‌ها از C^0 تا ماکزیمم C^{p-1} را فراهم می‌کند. پیوستگی منحنی الزام مهمی در طراحی است.

کاربرد آنها در مدل‌سازی اشکال آزاد[1] آسان است، اما در نمایش دقیق برخی اشکال ساده هندسی مانند دوایر و بیضی‌ها ناتوان هستند. به همین دلیل استاندارد متداول در CAD ، تعمیم یافته ب-اسپیلاین ها یعنی نربز [2] می‌باشد. آن‌ها توابع گویا از ب-اسپیلاین ها هستند و تمامی خواص مطلوب آن‌ها را دارا هستند. در واقع توسعه‌ای بر ب-اسپیلاین است به نحوی‌که امکان نمایش دقیق مقاطع مخروطی را فراهم می‌کند.

۳-۲-۱- حوزه یا دامنه پارامتری

ب-اسپیلاین ها در فضای پارامتری Ω تعریف می‌شوند. این فضای پارامتری متشکل از زیردامنه‌ها[3] به‌جای المان‌ها می‌باشد. آن‌ها را می‌توان به عنوان ماکروالمان تصور نمود. دامنه پارامتری توسط بردارهای گره‌ای[4] (Ξ) تعریف می‌شود. بردار گره‌ای به صورت زیر معرفی می‌گردند:

$$\Xi = \{(\xi_1,\dots,\xi_{p+1}=a)\ ,\ \xi_{p+2}\ ,\dots,\xi_n\ ,(\xi_{n+1},\dots,\xi_{n+p+1}=b)\} \qquad (۱-۳)$$

که $\xi_i \in R$ معرف i امین گره و i اندیس گره بوده و $i=1,2,\dots,n+p+1$ که n تعداد توابع پایه و p درجه این تابع میباشد. فضاهای پارامتری با ابعاد بزرگ‌تر با استفاده از

---
[1] Free Form
[2] Non Uniform B-Spline
[3] Patches
[4] Knot vector

ضرب تانسوری بردارهای گره‌ای ۱D ساخته می‌شوند. لذا دامنه پارامتری بوسیله مجموعه $[a,b]^d \in R^d$ با d برابر با بعد فضا تعریف می‌شود. با استفاده از بردار گره‌ای می‌توان توابع پایه ب-اسپیلاین از مرتبه p+1 که توابع چندجمله‌ای تکه‌ای از درجه p هستند را ساخت. تکرار گره‌ها مجاز است بنابراین $\xi_1 \le \xi \le ... \le \xi_{n+p+1}$. گره‌ای که k بار تکرار می‌شود با کثرت[۱] k نامیده می‌شود.

در ادبیات هندسه محاسباتی بین درجه[۲] و مرتبه[۳] تفاوت است درواقع مرتبه معادل درجه بعلاوه یک می‌باشد($o = p + 1$). گره‌هایی که با فواصل برابر قرار گیرند، بردار گره‌ای یکنواخت را شکل می‌دهند و در غیر این‌صورت بردار گره‌ای غیریکنواخت شکل می‌گیرد.

بردار گره‌ای باز[۴] است بدین مفهوم که اولین و آخرین گره‌ها p+1 بار تکرار می‌شوند.

۳-۲-۲- توابع پایه ب-اسپیلاین

توابع پایه ب-اسپیلاین به صورت برگشتی با شروع از ثابت‌های تکه‌ای[۵] تعریف می‌شود [۳۶].

$$B_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad \xi_i \le \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \end{cases} \qquad (۳-۲)$$

برای $p = 1,2,3,...$ تعریف به صورت زیر است:

$$B_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1,p-1}(\xi) \qquad (۳-۳)$$

۱ Multiplicity
۲ Degree
۳ Order
۴ Open knot vector
۵ Piecewise constants

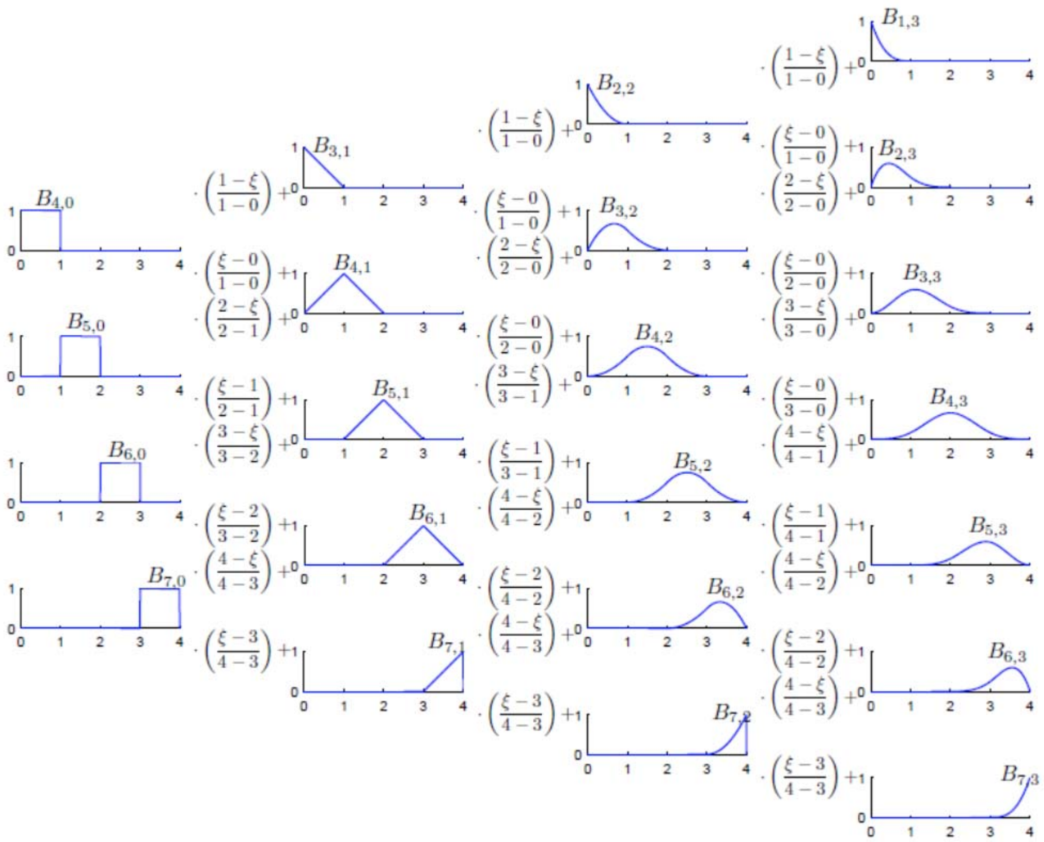
بنـابراین بـا یـک بـردار گـره‌ای و درجـه چندجملـه‌ای داده شـده، یـک فضـای تـابع پایـه ب-اسپیلاین (B) به صورت یکتای زیر با استفاده از الگوریتم بازگشتی تعریف می‌شود:

$$\mathrm{B} \equiv \mathrm{B}(\Xi; p) := span\{\mathrm{B}_{i,p}\}_{i=1}^{n} \tag{۴-۳}$$

فضای پایه ب-اسـپیلاین بـا بعـد بـالاتر بـا اسـتفاده از ضـرب تانسـوری توابـع پایـه ب-اسـپیلاین تک متغیره به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\mathrm{B} \equiv \mathrm{B}(\Xi; \mathrm{H}, \ldots, p, q, \ldots) := span\{\mathrm{B}_{i,p} \otimes \mathrm{B}_{j,p} \otimes \ldots\}_{i,j,\ldots=1}^{n,m,\ldots} \tag{۵-۳}$$

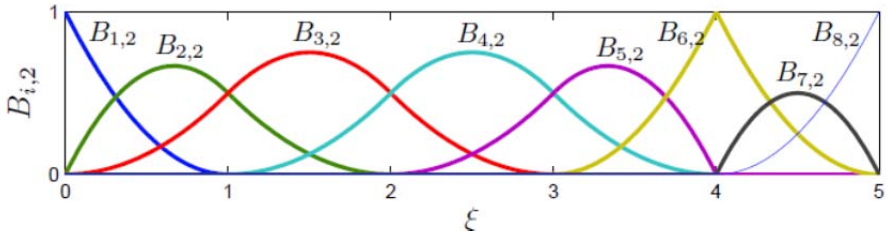
نتیجـه روابـط (۳-۲) و (۳-۳) بـرای بـردار گـره‌ای $\Xi = \{0,0,0,0,1,2,3,4,4,4,4\}$ در شکل (۳-۲) نشان داده شده است.



شکل (۳-۲) تولید بازگشتی توابع پایه درجه ۳ برای بردار گره‌ای

$$\Xi = \{0,0,0,0,1,2,3,4,4,4,4\}$$

مثالی از توابع پایه دو مجذوری برای یک بردار گره‌ای غیریکنواخت و باز در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. در این مثال تعدد گره‌های تکرار شده در انتهای توالی و همچنین در $\xi = 6$ که پیوستگی در آنجا پایین آمده و به C^0 رسیده، نشان داده شده است.



شکل (۳-۳) توابع پایه درجه دو برای بردار گره‌ای غیریکنواخت

$$\Xi = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$$

توابع پایه دیگر پیوسته C^1 هستند. درجه توابع پایه p، حداکثر p-۱ مشتق پیوسته دارد. یک گره تکرار شونده عدد مشتقات پیوسته را یک واحد کاهش می‌دهد. وقتی‌که تعدد برابر با p باشد، تابع پایه، نقطه ای[۱] نامیده می‌شود. توابع پایه خواص مهم زیر را دارند:

۱- غیرمنفی هستند $B_{i,p}(\xi) \geq 0 \quad \forall i,p \;,\; a \leq \xi \leq b$

۲- روی یک بازه گره‌ای $[\xi_i, \xi_{i+1})$، p+۱ تابع غیرصفر وجود دارد

۳- $\sum_{i=1}^{n} B_{i,p}(\xi) = 1$

۴- توابع پایه، پایه‌های مستقل خطی مناسب برای آنالیز را شکل می‌دهند.

۵- $B_{o,p}(0) \equiv B_{n,p}(1) \equiv 1$

[۱]Nodal

۶- محدوده کوچکی را پوشش میدهد $[\xi_i,\xi_{i+1})$. توابع با درجات بالاتر نواحی بیشتری از دامنه را می پوشانند. این افزایش تاثیری روی پهنای باند جواب سیستم خطی در عملگرهای عددی، ندارد. کل توابعی که در همپوشانی یک محدوده از دامنه شرکت دارند برابر با $2p+1$ است.

۳-۲-۳- مشتقات ب-اسپیلاین ها

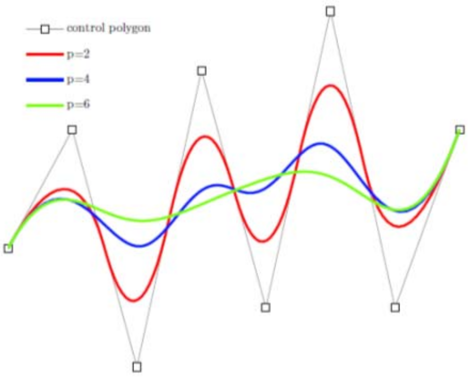
مشتقات توابع پایه ب-اسپیلاین با استفاده از توابع پایه مرتبه پایین قابل تولید است[۲۷].

$$\frac{d^k}{d\xi^k}B_{i,p}(\xi)=\frac{p!}{(n-p)!}\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}B_{i+j,p-k}(\xi) \tag{۶-۳}$$

با

$$\begin{aligned}
&\alpha_{0,0}=1\\
&\alpha_{k,0}=\frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1}-\xi_i}\\
&\alpha_{k,j}=\frac{\alpha_{k-1,j}-\alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1}-\xi_{i+j}} \qquad j=1,\dots,k-1\\
&\alpha_{k,k}=\frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+k}}
\end{aligned} \tag{۷-۳}$$

وقتی مخرج بدلیل گره‌های تکراری صفر شود، ضرایب صفر تعریف می‌شود.



شکل (۳-۴) خاصیت تقلیل تغییرات با افزایش درجه منحنی

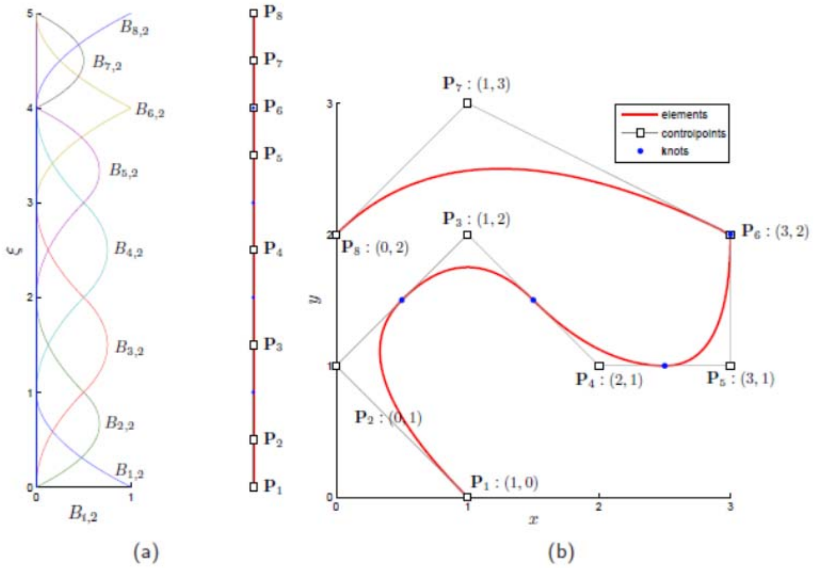
۳-۲-۴- منحنی‌های ب-اسپیلاین

منحنـــی‌هـــای ب-اســـپیلاین بـــه وســـیله ضـــرایب توابـــع پایـــه (نقـــاط کنترلـــی p_i) تعریـــف مـــی‌شـــوند. منحنـــی در R^d بـــا ترکیـــب خطـــی مجموعـــه‌ای از n توابـــع پایـــه $B_{i,p}$ و $i=1,2,3,..,n$ و نقـــاط کنترلـــی متنـــاظر آن‌هـــا $p_i \in R^d$ و $i=1,2,3,..,n$ ســـاخته مـــی‌شـــود. منحنـــی چنـــد جمله‌ای تکه‌ای ب-اسپیلاین به صورت زیر می‌باشد:

$$C(\xi)=\sum_{i=1}^{n} B_{i,n} P_i \quad ; \quad a \le \xi \le b \qquad (۸-۳)$$

بـا داشـتن درجـه p، بـردار گـره Ξ و مجموعـه نقـاط کنترلـی p_i، منحنـی تعریـف مـی‌شـود. منحنی $C(\xi)$ یک تـابع مقـدار داده شـده بـرداری[۱] از یـک پـارامتر اسـت کـه یـک قسـمت خطـی را به فضـای سـه بعـدی اقلیدوسـی یـا بـه شـکل رسـمی‌تـر $C:\Omega' \to \Omega$ نگاشـت مـی‌کنـد. ایـن مطلب در شکل (۳-۵) نشان داده شده است.

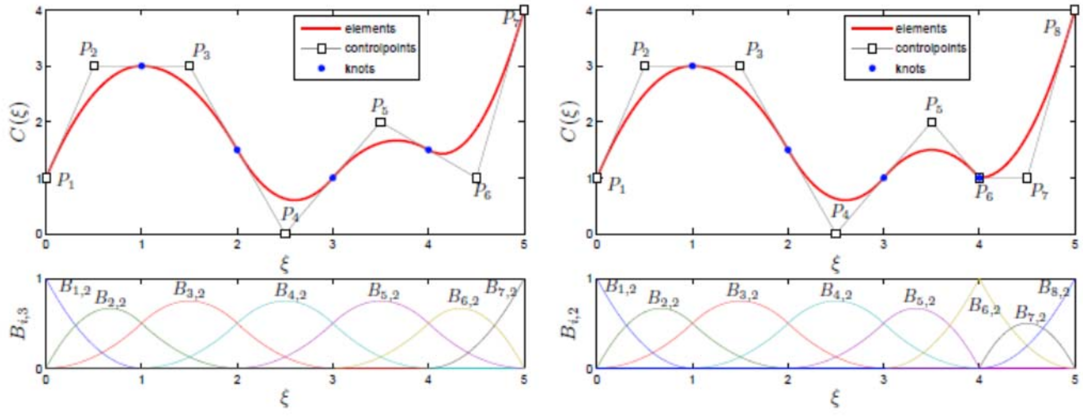
---
[۱] Vector-Valued



شکل (۳-۵) ایجاد یک منحنی (الف) دامنه پارامتری Ω' و شبکه کنترلی p

(ب) ترکیب خطی توابع پایه و نقاط کنترلی که منحنی را شکل می‌دهد.

شکل (۳-۶ ب) مثالی از یک منحنی را با استفاده از توابع پایه شکل (۳-۳) نشان می‌دهد. باید توجه نمود که منحنی مشابه توابع پایه خود، در اولین و آخرین نقطه کنترلی به جهت باز بودن بردار گره‌ای و در نقطه کنترلی p_6 به جهت تعدد $\xi = 4$ درون‌یابی شده است، بعلاوه منحنی در اولین و آخرین و ششمین نقطه‌ی کنترلی بر چندضلعی کنترلی مماس است.



(a) $p = 2, \Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5\}$ (b) $p = 2, \Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$

شکل (۳-۶) الـف) یـک منحنـی درجـه دو بـا بـردار گـره‌ای یکنواخـت ب) یـک منحنـی کـه در $\xi = 4$ دوبـار تکـرار شـده اسـت $k = 2$. کـاهش پیوسـتگی منحنـی در p_6 ناشـی از تکـرار در $\xi = 4$ قابل توجه است.

مشتقات منحنی را به آسانی با مشتق‌گیری از توابع پایه می‌توان محاسبه نمود:

$$C'(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\, B_{i,p}(\xi)}{d\xi} P_i \quad ; \quad a \le \xi \le b \qquad (۹-۳)$$

منحنی‌های ب-اسپیلاین خواص مهم زیر را دارند:

۱- ایـن خـواص بـه صـورت مسـتقیم از خـواص توابـع پایـه آن‌هـا حاصـل مـی‌شـود،ماننـد پایـه‌هـای خـود منحنـی ب-اسـپیلاین از درجـه p، p-۱ مشـتق پیوسـته دارد (در غیـاب گره‌هـای تکـراری یـا نقـاط کنترلـی) و حرکـت یـک نقطـه کنترلـی بـیش از p+۱ المـان منحنی را متأثر نمی‌کند (پشتیبانی فشرده[۱])

۲- تکـرار یـک گـره یـا نقطـه کنترلـی (k بـار) ، تعـداد مشـتق پیوسـته را k بـار کـاهش می‌دهد

[۱] Compact support

۳- غیرمنفی بودن پایه‌ها منجر به خاصیت پوسته محدب[۱] می‌شود، اگر $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$ باشد، آنگاه $C(\xi)$ در درون پوسته محدب حاصل از نقاط کنترلی $p_{i-p}, \ldots, p_i$ قرار خواهد گرفت.

۴- خاصیت نزولی تغییرات با افزایش درجه (شکل(۳-۴)). منحنی هرگز بیش از چندضلعی کنترلی خود تاب نخواهد داشت، هر خط راست منحنی را کمتر از نقاط کنترلی آن قطع می‌کند.

۵- خاصیت تغییرناپذیری وابسته[۲]: تبدیلات وابسته از منحنی ب-اسپیلاین مستقیماً به نقاط کنترلی اعمال می‌شود.

۳-۲-۵- سطوح و احجام ب-اسپیلاین

سطح ب-اسپیلاین توسط شبکه کنترلی p_{ij} و $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$ و بردارهای گره‌ای $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+p+1}\}$, $\mathrm{H} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m+p+1}\}$ تعریف می‌شود. ضرب تانسوری توابع پایه $B_{i,p}(\xi)$, $B_{j,q}(\eta)$ با شبکه کنترلی به یک سطح ب-اسپیلاین که به صورت $s : \Omega' \to \Omega$ با نگاشت زیر تعریف می‌شود، منجرمی‌گردد.

$$S(\xi,\eta) = \sum_{i=1,\, j=1}^{n,m} B_{i,p}(\xi) B_{j,q}(\eta) P_{i,j} \qquad (۳-۱۰)$$

نکته حائز اهمیت آنست که توابع پایه روی بردار گره‌ای خود تعریف می‌شوند، بنابراین می‌توانند به شکلهای متفاوتی پارامتری شوند. بعلاوه می توان برای هر جهت مختصات درجه متفاوتی انتخاب نمود.

---
[۱] Conven hull
[۲] Affine Invariance

متعاقب سطح ب-اسپیلاین، حجم ب-اسپیلاین به صورت حاصل‌ضرب سه تابع پایه تعریف می‌شود. با یک شبکه کنترلی داده شده $p_{i,j,k}$ و $i=1,2,...,n\ ,\ j=1,2,...,m\ ,\ k=1,2,...,\ell$ و بردارهای گره‌ای $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_{n+p+1}\}\ ,\ \mathrm{H}=\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_{m+p+1}\}\ ,\ \mathrm{Z}=\{\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_{\ell+r+1}\}$ حجم ب-اسپیلاین به صورت $\mathrm{v}:\Omega'\to\Omega$ با نگاشت زیر تعریف می‌شود:

$$V(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1,j=1,k=1}^{n,m,\ell}B_{i,p}(\xi)\,B_{j,p}(\eta)\,B_{k,r}(\zeta)\,P_{i,j,k} \tag{۱۱-۳}$$

۳-۲-۶- درون‌یابی منحنی کلی[۱]

به منظور درج شرایط دریچلت[۲] شکلی از درون‌یابی مورد نیاز است. لذا درون‌یابی منحنی کلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. وقتی از چندجمله‌ای‌های لاگرانژ استفاده می‌گردد، شرط دریچلت را می‌توان مستقیماً وارد گره‌ها نمود. چون ب-اسپیلاین ها قابلیت درونیابی[۳] ندارند، یک سیستم باید حل شود تا نقاط کنترلی درست، به نحوی که شرط دریچلت درون‌یابی شود، یافت گردد.

جهت درون‌یابی مجموعه‌ای از نقاط باید انتخاب شود. انتخاب‌های استاندارد نقاط Grevilie abscisse یا Marsden-schoenberg می‌باشند که به صورت متوسط مقادیر گره‌ای متوالی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_j^*=\frac{1}{p+1}\sum_{i=j+1}^{p+j+1}\xi_i \tag{۱۲-۳}$$

[۱] Global Curve Interpolation
[۲] Dirichlet
[۳] interpolatory

نقاط .G.A بر موقعیت نقاط کنترلی در فضای پارامتری منطبق هستند، بنابراین انتخاب ایده‌آل برای درونیابی می‌باشند. حال اگر تابع g(x) با بردار گره‌ای Ξ و نگاشت $x = C(\xi)$ از هندسه ب-اسپیلاین یا نربز داده شده باشد؛ درون‌یابی منحنی کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g\left(C(\xi_j^*)\right) = \sum_{i=1}^{n} B_{i,p}(\xi_i^*) g_i \qquad (۱۳-۳)$$

نتیجه سیستمی از معادلات خطی n*n قابل حل می‌باشد.

۳-۳- بهبود[۱]

توابع ب-اسپیلاین را می‌توان بوسیله سه نوع بهبود که دوتای آن‌ها مترادف با FEM استاندارد هستند، غنی نمود که شامل درج گره[۲] ، بالابردن درجه[۳] و بالابردن درجه و پیوستگی می‌باشند. دوتای اول معادله بهبود h و p در روش اجزا محدود است و آخری بهبود k است که معادلی در روش اجزاء محدود ندارد.

۳-۳-۱- درج گره: بهبود- h

درج گره یا بهبود h در FEM کلاسیک پایه‌ها را با بالابردن وضوح فضای پارامتری غنی می‌کند. با یک بردار گره‌ای داده شده $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+p+1}\}$ و معرفی یک بردار گره‌ای توسعه یافته $\overline{\Xi} = \{\overline{\xi}_1 = \xi_1, \overline{\xi}_2, \ldots, \overline{\xi}_{n+m+p+1} = \overline{\xi}_{n+p+1}\}$ آنچنان که $\Xi \subset \overline{\Xi}$ باشد و n+m توابع پایه جدید که به صورت معادلات (۳-۲) و (۳-۳) و اعمال آن‌ها به $\overline{\Xi}$ شکل

[۱] Refinement
[۲] Knot Insertation
[۳] Degree Elevation

مـــی‌گیرنـــد انجـــام مـــی‌شـــود. (n+m) نقـــاط کنترلـــی جدیـــد $\overline{P} = \{\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_{n+m}\}^T$ از ترکیـــب خطی نقاط کنترلی اصلی $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}^T$ به صورت زیر شکل می‌گیرند:

$$\overline{P} = \alpha_i P_i + (1-\alpha) P_{i-1} \tag{۱۴-۳}$$

که

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & ; \quad 1 \le i \le k-p \\ \frac{\bar{\xi}-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i} & ; \quad k-p+1 \le i \le k \\ 0 & ; \quad k+1 \le i \le n+p+2 \end{cases} \tag{۱۵-۳}$$

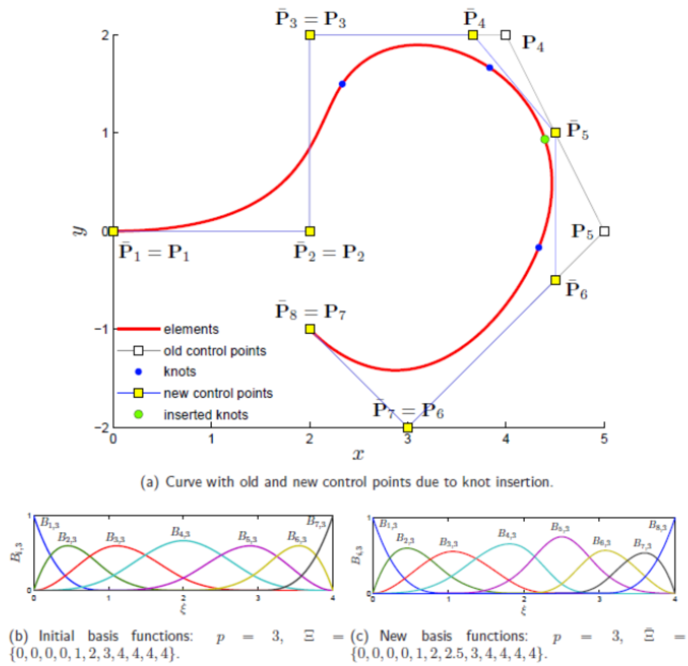
بایـد توجـه نمـود کـه انتخـاب نقـاط کنترلـی بـه صـورت معـادلات فـوق پیوسـتگی منحنـی را حفــظ مــی‌کنــد. شــکل (۳-۷) مثــالی از درج گــره را نشــان مــی‌دهــد. بــردار گــره‌ای اولیــه $\Xi = \{0,0,0,0,1,2,3,4,4,4,4\}$ است و یک گره جدید در $\bar{\xi} = 2.5$ وارد می‌شود.

علاوه بر افزایش وضـوح فضـای پـارامتری، درج گـره مـی‌توانـد جهـت کنتـرل پیوسـتگی پایـه‌هـا با تکرار گره‌ها نیز به کار رود. ایـن یکـی از وجـوه تمـایز مشخصـات پایـه‌هـای اسـپیلاین نسـبت بـه پایه‌های FEM کلاسیک است.

۳-۳-۲- ارتقاء درجه[۱]: بهبود- p

ارتقـاء درجـه؛ روش دوم غنـی سـازی پایـه هاسـت و معـادل بهبـود-p در FEM مـی‌باشـد. ایـن رویه با تقسیم مـؤثر منحنـی بـه المـان‌هـای بزیـر[۲] بـا درج گـره بـر اسـاس معـادلات (۳-۱۴) و (۳-۱۵) جهت بالابردن تعدد درجه چندجمله‌ای‌ها انجام می‌شود.

[۱] Degree Elevation
[۲] Bezier



(a) Curve with old and new control points due to knot insertion.

(b) Initial basis functions: $p = 3$, $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4\}$.

(c) New basis functions: $p = 3$, $\bar{\Xi} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2.5, 3, 4, 4, 4, 4\}$.

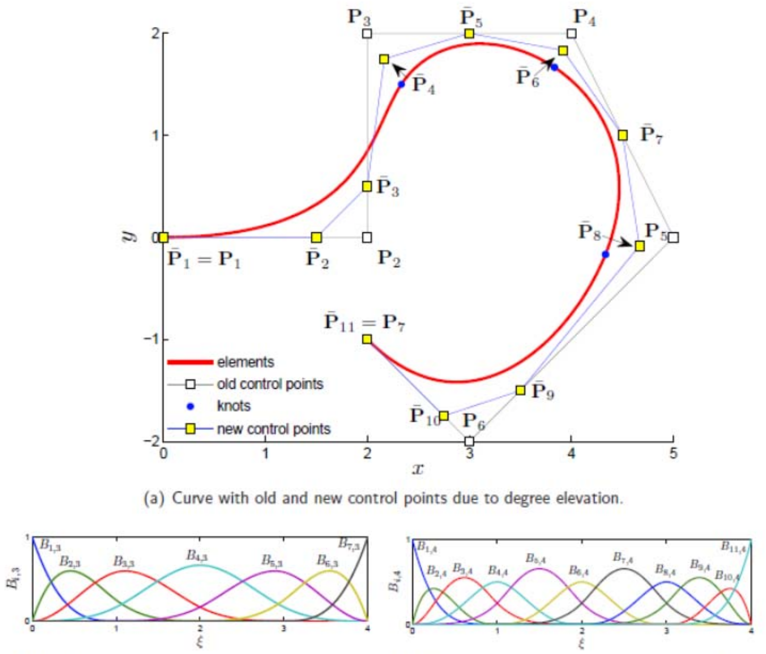
شکل (۳-۷) مثالی از درج گره روی یک منحنی ب-اسپیلاین درجه ۳

آنگاه مرتبه چندجمله‌ای‌ها روی هر بخش مجزا بالا برده می‌شود. نهایتاً گره‌های اضافه شده جهت ایجاد ب-اسپیلاین جدید، حذف می‌شوند. بر اساس آنچه گفته شد؛ پایه‌ها p-k مشتق پیوسته دارند لذا افزایش p افزایش k را ایجاب می‌کند که باعث می‌شود پایه‌ها پیوستگی خود را حفظ کنند. مثالی از ارتقاء درجه در شکل (۳-۸) نشان داده شده است.

۳-۳-۳- ارتقاء پیوستگی و درجه: بهبود-k

نوع بسیار قدرتمند بهبود که مختص پایه‌های ب-اسپیلاین می‌باشد؛ بهبود-k نام دارد. به صورت ابتدایی بهبود-k نوع متفاوتی از ارتقاء مرتبه است و مزایایی دارد که در درج گره و

ارتقاء درجه دیده نمی‌شود. درج یک مقدار گره‌ای یکتا $\bar{\xi}$ بین دو گره مجزا در یک منحنی درجه p، عدد مشتقات پیوسته در $\bar{\xi}$ را به ۱-p کاهش می‌دهد.



(a) Curve with old and new control points due to degree elevation.

(b) Initial basis functions: $p = 3, \Xi = \{0,0,0,0,1,2,3,4,4,4,4\}$

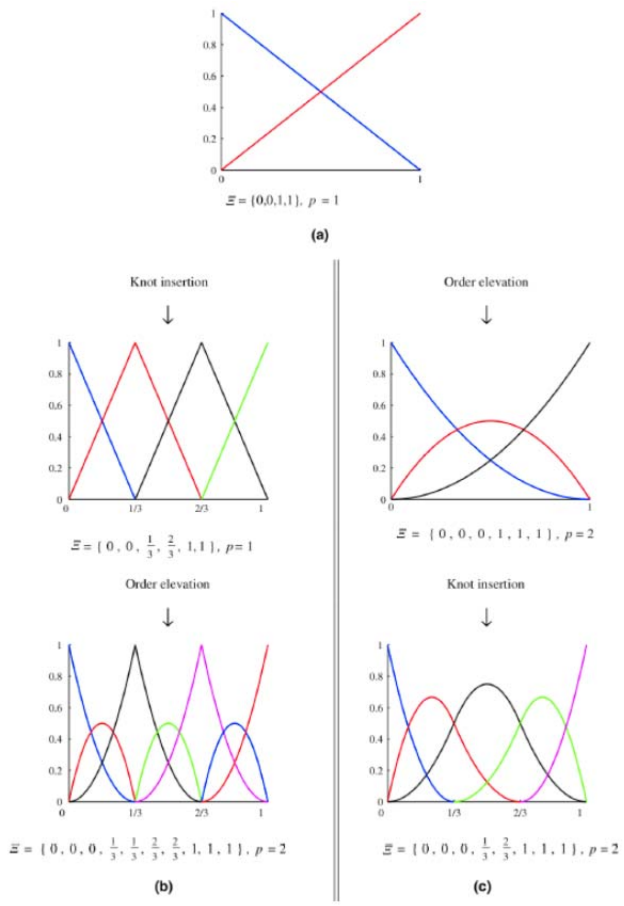
(c) New basis functions: $p = 4, \Xi = \{0,0,0,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,4,4,4\}$

شکل (۳-۸) ارتقاء درجه منحنی ب-اسپیلاین مرتبه ۳ با بردار گره‌ای $\Xi = \{0,0,0,0,1,2,3,4,4,4,4\}$ و شبکه کنترلی p منجر به منحنی مرتبه ۴ با غنی‌سازی بردار گره‌ای $\Xi = \{0,0,0,0,0,1,1,2,2,3,3,4,4,4,4,4\}$ و شبکه کنترلی $\bar{p}$ شده است.

ارتقاء درجه به q با استفاده از رویه بخش ۳-۳-۲ تعدد گره‌ها را افزایش داده به نحوی‌که عدم پیوستگی در مشتق pام پایه‌ها حفظ می‌شود. بنابراین پایه‌ها کماکان ۱-p مشتقات پیوسته در $\bar{\xi}$ دارد. فرآیند بالا می‌تواند به نحو دیگری انجام شود؛ ابتدا درجه منحنی به q ارتقاء یابد و سپس گره یکتای $\bar{\xi}$ درج گردد. حال پایه‌ها مشتقات پیوسته ۱-q در $\bar{\xi}$ دارند. این فرآیند بهبود-k نامیده می‌شود.

تکرار این رویه با استفاده از بهبود-k با یک المان و p+1 تابع پایه شروع می‌شود. ابتدا درجه r بار با اضافه کردن یک تابع پایه در هر بار ارتقاء یافته و سپس گره‌ها درج شده تا اینکه تعداد المان‌ها n-p گردد. این منتج به n+r تابع پایه که همگی r+p-1 مشتق پیوسته دارند می‌شود. باید توجه نمود که $n+r << (r+1)n-rp$ بویژه وقتی که به ابعاد بالاتر می‌رویم که سبب افزایش توان از مرتبه d می‌شود $(n+r)^d << ((r+1)n-rp)^d$

بعلاوه بهبود-k سبب مشتقات هموارتر می‌شود که منجر به نمایش دقیق‌تر مقادیر فیزیکی می‌گردد.



شکل (۳-۹) بهبود-k در مقابل بهبود-p الف) شروع از یک المان خطی ب) روش بهبود-p کلاسیک: درج گره به‌همراه ارتقاء درجه سبب ایجاد هفت تکه تابع پایه درجه چهار C^0 شده است ج) بهبود-k با ارتقاء درجه همراه با درج گره منتج به پنج تکه تابع پایه درجه چهار C^1 شده است.

۳-۴- ب-اسپیلاین های گویای غیریکنواخت (نربز)

ب-اسپیلاین ها توابع همتای گویایی دارند که به آن امکان نمایش دقیق اشیایی که نمی‌توان آن‌ها را بوسیله چندجمله‌ها نمایش داد، را می‌دهد. بعنوان مثال در CAD اشکال دایره‌ای و مخروطی اغلب استفاده می‌شوند که می‌توان آن‌ها را دقیقاً توسط نربز نمایش داد.

۳-۴-۱- توابع پایه نربز

توابع پایه نربز از روی توابع پایه ب-اسپیلاین با یک وزن مثبت w_i تعریف می‌شوند:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\omega_i B_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} \tag{۳-۱۶}$$

که

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i B_{i,p}(\xi) \tag{۳-۱۷}$$

توسعه فضای توابع نربز به صورت یکتا با $N \equiv N(\Xi; p; w) := span\{N_{i,p}\}_{i=1}^{n}$ تعریف می‌شود. مشابه ب-اسپیلاین فضای توابع با ابعاد بالاتر توسط ضرب تانسوری توابع پایه $\mathrm{N} \equiv \mathrm{N}(\Xi, \mathrm{H}, ...; p, q, ...; \omega) := span\{N_{i,p} \otimes N_{j,q} \otimes ...\}_{i,j,...=1}^{n,m,...}$ ساخته می‌شود. توابع پایه نربز دارای خواص زیر هستند:

۱- $\sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) = 1 \quad \forall \xi$

۲- نربز خواص خود را از توابع پایه ب-اسپیلاین اخذ می‌کند، مشابه پیوستگی در گره‌ها و غیرمنفی بودن

۳- توابع پایه نربز چندجمله‌ای نیستند، اما توابع گویا هستند.

۴- اگـر همـه وزن‌هـا برابـر باشـند: پایـه مجـدداً چنـد جملـه‌ای خواهـد بـود. بنـابراین ب-اسپیلاین ها حالت خاص نربز هستند

۳-۴-۲- مشتقات نربز

مشـتقات توابـع نربـز بـا اسـتفاده از قاعـده خـارج قسـمت [1] روی معادلـه (۳-۱۶) یافـت می‌شوند:

$$\frac{d}{d\xi}N_{i,p}(\xi)=\omega_i\frac{W(\xi)B'_{i,p}(\xi)-W'(\xi)B_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \qquad (۳\text{-}۱۸)$$

که $B'_{i,p}(\xi)\equiv\frac{d}{d\xi}B_{i,p}(\xi)$ و $W'(\xi)=\sum_{\hat{i}}^{n}B'_{\hat{i},p}(\xi)\omega_{\hat{i}}$

حال رابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A_i^{(k)}(\xi)=\omega_i\frac{d^k}{d\xi^k}B_{i,p}(\xi) \qquad (۳\text{-}۱۹)$$

مجموعی روی i وجود ندارد

$$W^{(k)}(\xi)=\frac{d^k}{d\xi^k}W(\xi) \qquad (۳\text{-}۲۰)$$

مشتقات درجه بالاتر بر حسب مشتقات مرتبه پایین‌تر تعریف می‌شوند:

$$\frac{d^k}{d\xi^k}N_{i,p}(\xi)=\frac{A_i^{(k)}(\xi)-\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}W^{(j)}(\xi)\frac{d^{(k-j)}}{d\xi^{(k-j)}}N_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} \qquad (۳\text{-}۲۱)$$

که

[1] Quetient rule

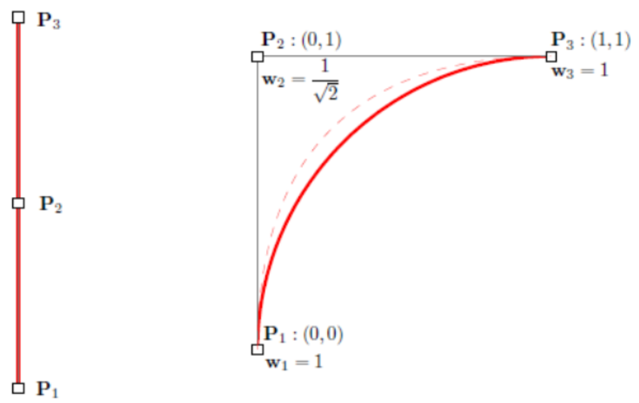
$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \qquad (۲۲-۳)$$

۳-۴-۳- منحنی‌های نربز

بـا اسـتفاده از (۳-۱۶) منحنـی نربـز بـه همـان صـورت منحنـی ب-اسـپیلاین قابـل تعریـف است:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^{k} N_{i,p}(\xi) P_i \qquad (۲۳-۳)$$

شکل (۳-۱۰) ساخت یک کمان دایره را نشان می‌دهد. باید توجه نمود که یکی از وزن‌ها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ می‌باشد، تا امکان نمایش دقیق دایره فراهم شود. خط‌چین منحنی را وقتی‌که همه وزن‌ها برابر یک هستند و بنابراین منحنی یک چندجمله ای است نشان می‌دهد. مقایسه دو منحنی نشان می‌دهد که به علت وزن داده شده نقطه کنترل میانی منحنی را کمتر می‌کشد.



شکل (۳-۱۰) مثالی از ساخت منحنی کمان دایره با استفاده از توابع نربز روی بردار گره‌ای $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$

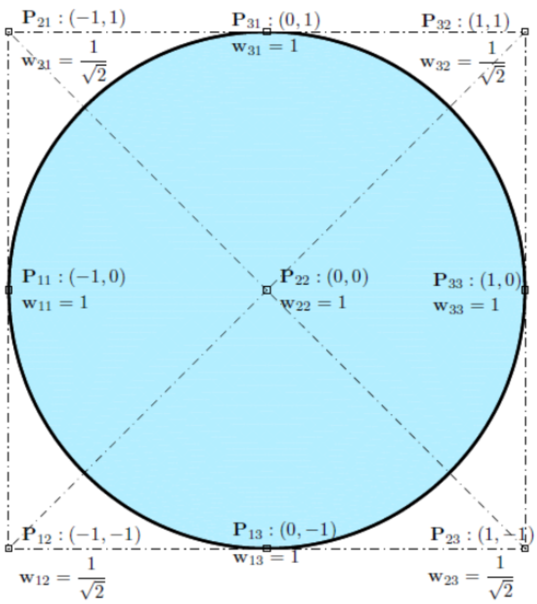
۳-۴-۴- سطوح و احجام نربز

سطوح و احجام نربز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S(\xi,\eta)=\sum_{i=1,\,j=1}^{n,m} N_{i,p}(\xi)N_{j,p}(\eta)P_{i,j} \tag{۳-۲۴}$$

$$V(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1,\,j=1,k=1}^{n,m,\ell} N_{i,p}(\xi)\,N_{j,p}(\eta)\,N_{k,r}(\zeta)\,P_{i,j,k} \tag{۳-۲۵}$$

شکل (۳-۱۱) ساخت یک سطح دایروی با استفاده از نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی با استفاده از نقاط کنترلی و وزن‌ها (منحنی دایره شکل (۳-۱۰)) در هر جهت از فضای پارامتری را نشان می‌دهد.



شکل (۳-۱۱) ساخت دایره با استفاده از نربز. سطح از بردار $\Xi=H=\{0,0,0,1,1,1\}$ و نقاط کنترلی و وزن‌های نشان داده شده در شکل ساخته شده است.

۳-۵- آنالیز آیزوژئومتریک: نربز به عنوان پایه‌ای برای آنالیز

نظریه آیزوژئومتریک توسط Hughes و همکارانش [۳] ارائه گردید. اگرچه تنها تغییر در توابع رخ داده است، اما این روش بسیار قدرتمند است. ساخت فضاهای توابع پایه اجزاء محدود مبتنی بر نربز نیاز به ارتباط با برنامه‌های CAD را از بین برده و هندسه دقیق را فراهم می کند بعلاوه FEA را با روش بهبود-k، ارتقا می‌دهد و روش‌های با مرتبه بالاتر را روی دامنه‌های منحنی ممکن می‌کند.

در ادامه تفاوت اساسی بین FEA کلاسیک و IGA یعنی تعریف مش بندی و هندسه بیان می‌شود. سپس گسسته‌سازی معادلات با استفاده از توابع نربز ارائه می‌گردد. [۲۴,۲۵,۳۱]

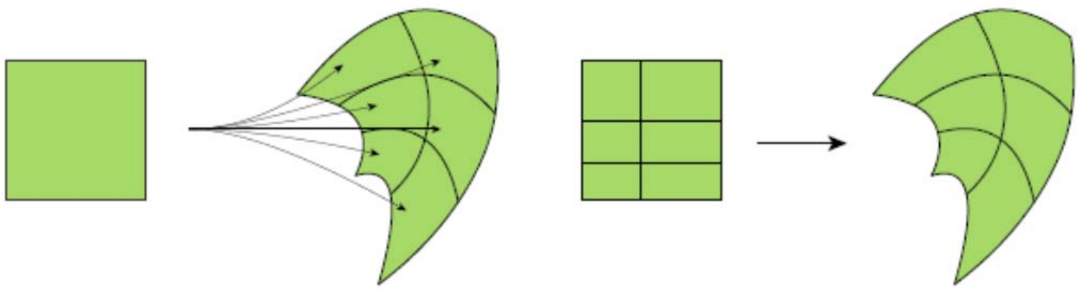
۳-۵-۱- مش

قبل از تعریف مش، جدول (۳-۱) مهم‌ترین تفاوت‌ها و شباهت‌های بین FEM و IGA را خلاصه نموده است:

جدول (۳-۱) مقایسه FEA و IGA [۳۷]

FEM		IGA
Nodal points		Control points
Nodal variables		Control variables
Mesh		Knots
Element		Knot span
Basis interpolates nodal points and variables		Basis does *not* interpolate control points and variables
Approximate geometry		Exact geometry
Polynomial basis		NURBS basis
Gibbs phenomena		Variation Diminishing
Subdomains		Patches
	Compact support	
	Partition of unity	
	Isoparametric concept	
	Affine covariance	
	Patch tests satisfied	

شکل (۳-۱۱) ایـن مقایسـه را از دیـدگاه آنـالیز نشـان مـی‌دهـد در FEM کلاسـیک هـر المـان نگاشـت خـود را از فضـای پـارامتری بـه فضـای فیزیکـی دارد (شـکل ۳-۱۲ الـف). در حـالی‌کـه در IGA، گـره‌هـای داخلـی فضـای پارامتری در المـان‌هـا را تقسـیم‌بنـدی نمـوده و یـک ب-اسـپیلاین منفـرد، فضـای پـارامتری را بـه فضـای فیزیکـی نگاشت می‌کند (شکل ۳-۱۲ ب).



شکل (۳-۱۲) تفاوت FEM و IGA از دیدگاه آنالیز

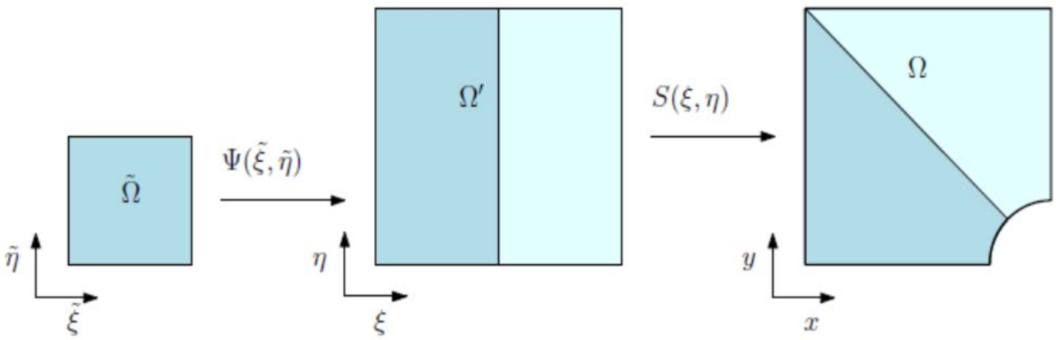
مـش در IGA مسـتقیماً بوسـیله پـارامتری‌سـازی نربـز تعریـف مـی‌شـود. اگـر Ω' یـک دامنـه محـدود بـاز بـا مـرز $\delta\Omega'$ باشـد، دامنـه بـه زیردامنـه‌هـای $\Omega' u_e \Omega'_e$ توسـط چهـار وجهـی‌هـا آنچنـان کـه $\Phi = \Omega'_i \cap \Omega'_j$ بـرای $i \neq j$ تقسـیم مـی‌شـود. المـان‌هـا بـه صـورت توسـعه‌هـای گـره‌ای بـه صـورت $\Omega'_e = \{[\xi_i, \xi_{i+1})\}$ یـا ضـرب تانسـوری $\Omega'_e = \{[\xi_i, \xi_{i+1}) \otimes [\eta_i, \eta_{i+1}) \otimes \dots\}$ در بعدهای بالاتر تعریف می‌شود.

المان در فضای فیزیکی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega_e = S o \Omega'_e \qquad (۲۶-۳)$$

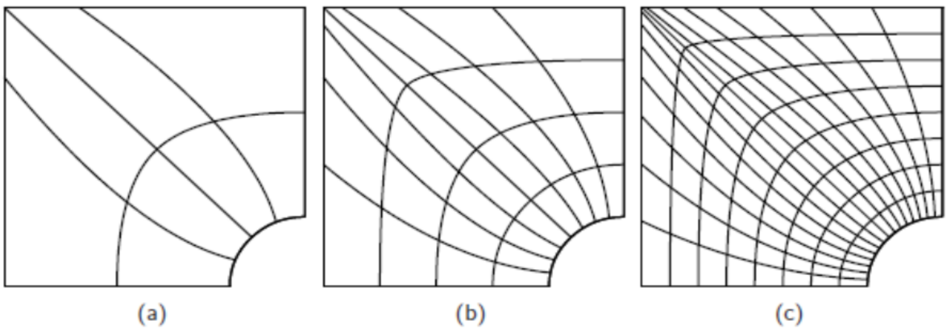
کـه S نگاشـت نربـز در معادلـه (۳-۲۴) مـی‌باشـد. شـکل (۳-۱۳) ایـن ایـده را بـه صـورت گرافیکـی روی یـک صـفحه سـوراخ‌دار نشـان مـی‌دهـد. آنچـه در اینجـا نشـان داده شـده اسـت،

توصیف اولیه CAD در قالب یک مش دو المانه است. بعلاوه المان پایه[1]، $\widetilde{\Omega}=[-1,1]^{\mathrm{d}}$ نیز نشان داده شده است که جهت بکارگیری چهارتائی‌ها[2] بکار می‌رود.



شکل(۳-۱۳) تعریف مش در IGA تعریف هندسه CAD اولیه برای صفحه سوراخ‌دار فضای پارامتری Ω' مطابق با بردارهای گره‌ای $\{0,0,0,0.5,1,1,1\}$, $\Xi=\{0,0,01,1,1\}$ که منتج به مش بندی با دو المان می‌شود که با دورنگ نشان داده شده است و پس از نگاشت به فضای فیزیکی در شکل نمایان است.

جهت انجام آنالیز، وضوح بیشتری مورد نیاز است. اینکار توسط یک یا ترکیبی از بهبودها انجام می‌شود. شکل (۳-۱۴) این بهبود با درج گره برای هندسه اولیه شکل (۳-۱۳) که منجر به مش‌های متوالی می‌شود را نشان می‌دهد.



شکل(۳-۱۴) ساخت هندسه مناسب آنالیز با بهبودهای متوالی

[1] Parent
[2] quadrature

۳-۵-۲- توسعه FEM مبتنی بر نربز

توسعه FEM مبتنی بر نربز خیلی متفاوت از توسعه FEM کلاسیک نیست. تفاوت ظریف آن‌ها ناشی از خصوصیت غیردرون‌یابی نربز و تعریف یک المان می‌باشد. به عنوان مثال مساله الاستیک خطی دو بعدی شکل قوی[۱] [۲۶] به صورت زیر دارد:

$$\begin{cases} \nabla.\sigma_x + b_x = 0 \quad \text{و} \qquad \nabla.\sigma_y + b_y = 0 \;\; on \qquad \Omega \\ \sigma = D\nabla_s u \\ \sigma_x.n = t_x \qquad \text{و} \qquad \sigma_y.n = t_y \qquad on \qquad \Gamma_t \\ u = \bar{u} \quad on \qquad \Gamma_u \end{cases} \tag{۲۷-۳}$$

که Γ_t قسمتی از مرز است که کشش در آن تعریف شده و Γ_u بخشی از مرز است که جابجایی در آن تعریف گردیده است. معادله تعادل گسسته حاصل به صورت زیر می‌باشد:

$$Ku = f \tag{۲۸-۳}$$

که k ماتریس سختی و u بردار جابجایی و f بردار نیروی خارجی است. ماتریس سختی k می‌تواند از ماتریس سختی المان (k_e) فراهم شود (تجمیع شود). بطور مشابه بردار نیروی f را می‌توان از بردار نیروی المان f_e تجمیع نمود. ماتریس سختی المان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$k_e = t_e \int_{\hat{\Omega}_e} B^T D B |J| d\hat{\Omega} \tag{۲۹-۳}$$

که t_e ضخامت المان ورقی و $\hat{\Omega}$ دامنه پارامتری ساختار در فضای $\xi_1\xi_2$ می‌باشد.

انتگرال به صورت عددی با تعیین مقدار انتگرال در نقاط گوسی المان محاسبه می‌شود. ماتریس جابجایی- کرنش B نیز به صورت زیر است:

---
۱ Strong

$$B=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_{n_{en}}}{\partial x_1} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{n_{en}}}{\partial x_2}\\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_{n_{en}}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{n_{en}}}{\partial x_1}\end{bmatrix} \tag{۳۰-۳}$$

که N_i توابع پایه آنالیز اجزاء محدود یا نربز در آنالیز آیزوژئومتریک می‌باشد. D ماتریس خواص ماده در حالت الاستیک خطی است بطور مثال در حالت تنش مسطح به صورت زیر می‌باشد:

$$D=\frac{E}{1-v^2}\begin{bmatrix}1 & v & 0\\ v & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2}\end{bmatrix} \tag{۳۱-۳}$$

J ماتریس ژاکوبین به صورت زیر است:

$$J=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}\end{bmatrix} \tag{۳۲-۳}$$

که نگاشت نقاط از مختصات پارامتریک به مختصات فیزیکی را بر عهده دارد.

بردار نیرو روی المان e را می‌توان به صورت زیر نوشت که b نیروی پوسته (نیرو بر واحد سطح)، t کشش روی پوسته و $\hat{\Gamma}_t$ دامنه پارامتری مرز کشش در فضای $\xi_1\xi_2$ می‌باشد.

در حالت الاستوپلاستیک رابطه تنش- کرنش یک رابطه خطی مانند مساله الاستیک نیست. در این‌حالت مشتق رابطه ساختاری برای یک ماده ایزوتروپیک که سخت‌شدگی ایزوتروپیک را تجربه می‌کند به صورت رابطه افزایشی بین بردار افزایش تنش $\mathrm{d}\sigma$ و بردار افزایش کرنش $\mathrm{d}\varepsilon$ آنچنان که $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{D_{ep}}.\mathrm{d}\varepsilon$ نشان داده می‌شود.

همانطور که پیش‌تر اشاره شد D_{ep} به صورت عددی و متوالی محاسبه می‌گردد، لذا در مجموع D_e در محاسبات نهایی جابجایی در حالت الاستوپلاستیک با D_{ep} در نقطه‌ای که تسلیم رخ می‌دهد جایگزین می‌شود.

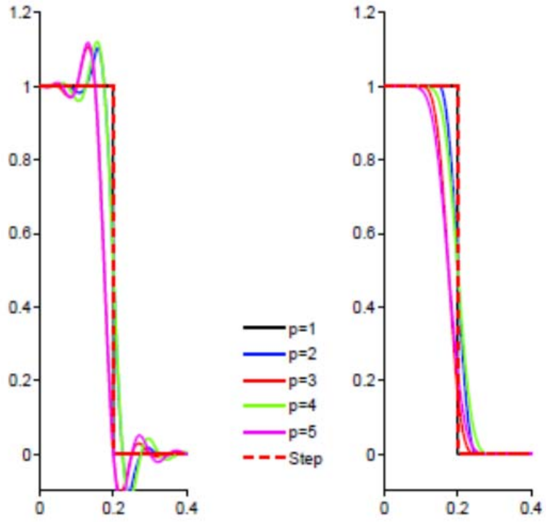
۳-۵-۳- شرایط مرزی

شرایط مرزی در IGA مشابه FEM کلاسیک وارد می‌شود. شرایط مرزی اصلی روی نقاط کنترلی اعمال می‌شوند. چون توابع نربز غیردرون‌یابی هستند، شرایط مرزی قوی تمایل دارند که توابع پایه با درجات بالا را (وقتی‌که داده های مرزی غیرپیوسته وارد می‌شوند) درگیر نمایند. شکل (۳-۱۵) این مطلب را برای پروفایل پله‌ای نشان می‌دهد. در تصویر سمت چپ درون‌یابی این شرایط نشان داده شده است در سمت راست این شرایط روی نقاط کنترلی اعمال شده‌اند. باید توجه نمود که اگرچه نربز خاصیت حذف تغییرات را دارد، اما همچنان پدیده گیبس[۱] را از خود نشان می‌دهد. اما با افزایش درجه بر خلاف چندجمله‌ای‌ها عمل می‌کند. بعلاوه باید توجه نمود که چگونه داده‌ها با افزایش p درگیر می‌شوند واضح است که برای داده‌های غیرپیوسته بهتر است داده‌ها روی نقاط کنترلی اعمال شوند. وقتی‌که داده‌های هموار مدنظر باشد عکس این مطلب صحیح است.

گزینه دیگر، اعمال شرایط دریچلت به صورت ضعیف است که یک تقریب از شرایط دریچلت است. اگرچه اعمال شرایط مرزی قوی هم خود یک تقریب است.

---

[۱] Gibbs



شکل (۳-۱۵) اعمال شرایط مرزی قوی. ملاحظه می‌شود که نربز هم مانند چندجمله‌ای‌های لاگرانژ پدیده گیبس را از خود نشان می‌دهد، اما کمتر از آن با اعمال داده‌ها مستقیماً روی نقاط کنترلی باعث درگیر شدن شرایط مرزی با افزایش p می‌شود.

۳-۵-۴- انتگرال‌گیری

جهت تجمیع ماتریس‌های سختی و جرم و بردار بار، انتگرال کلی زیر باید حل شود:

$$\int_{\Omega e} f(x)\, d\Omega \qquad (۳۳-۳)$$

که f بقدر کافی هموار و انتگرال پذیر فرض می‌شود. جهت انتگرال‌گیری، از فضای فیزیکی به المان پایه[۱] برده می‌شود. جهت انجام اینکار تغییر متغیرهایی باید انجام شود که در فضای ۲D به صورت زیر است:

$$\int_{\tilde{\Omega}} f(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\, |J_S|\, |J_\psi|\, d\tilde{\Omega} \qquad (۳۴-۳)$$

که J ژاکوبین و | J | دترمینان آن است.

[۱] parent element

برای یک ماتریس سختی نوعی $f(x,y)=\nabla N_A(x,y)\kappa\nabla N_B(x,y)$ توابع پایه N در فضای پارامتری Ω' تعریف شده است. به منظور تعریف آن در فضای Ω باید:

$$\nabla N(x,y)=J_S^{-1}\nabla N(\xi,\eta) \tag{۳-۳۵}$$

حال انتگرال به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_{\tilde{\Omega}}\left(J_S^{-1}\nabla N_A(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\right)\kappa\left(J_S^{-1}\nabla N_B(\tilde{\xi},\tilde{\eta})\right)|J_S||J_\psi|d\tilde{\Omega} \tag{۳-۳۶}$$

انتگرال‌گیری گوسی با توجه به اینکه انتگرال تابع را به صورت دقیق با حداقل نقاط گوسی محاسبه می‌کند بهینه می‌باشد. توابع ب-اسپیلاین شرایط همواری و انتگرال‌پذیری را دارا هستند و به صورت چندجمله‌ای می‌باشند، لذا قوانین گوس استاندارد قابل استفاده است. با توجه به مرجع [۲۲] در توابع پایه ب-اسپیلاین های C^1، نقاط گوسی بهینه تابع قانون نقطه میانی[۱] هستند، لذا تعداد نقاط گوسی برابر با نصف تعداد درجات آزادی می‌باشد.

۳-۶- آنالیز آیزوژئومتریک با استفاده از نرم افزار Matlab

سادگی و متن باز بودن نرم‌افزار متلب و انجام محاسبات به صورت جبری در سال‌های اخیر باعث کاربرد روزافزون آن در حوزه‌های مختلف محاسبات مهندسی شده است[۲۳] . اولین کاربرد آن در حوزه IGA توسط مرجع [۲۴] گزارش شده است که به معادلات با مشتقات جزئی (PDE) اسکالر محدود می‌باشد. کد IGA متن باز دیگری که در این حوزه نوشته شده در [۲۵] ارائه شده است. جزئیات کاربرد IGA در قالب کد FE شیء گرا، نیز در [۲۶] بحث شده است. جزئیات پیاده سازی فرمول‌بندی در چارچوب IGA با استفاده از نرم افزار FE تجاری در [۲۷] گزارش شده است. آخرین فعالیت در این حوزه مربوط به مرجع

[۱] Half- Point rule

[۲۸] مـی‌باشـد. در چـارچوب موضـوع پایـان نامـه همـانطور کـه پیشـتر عنـوان گردیـد تـا کنـون هیچ مستندی منتشـر نشـده‌اسـت. امـا در حـل مسـاله الاسـتو-پلاسـتیک بـه روش FEM مبتنـی بر نرم افزار متلب میتوان از مراجع [۲۹, ۳۰] نام برد.

NURBS Toolbox نیـــز بعنـــوان یکـــی از Toolboxهـــای نـــرم افـــزار متلـــب، شـــامل مجموعه‌ای از برنامه‌ها جهت ایجـاد و دسـت‌کـاری نربـز در محـیط متلـب مطـابق بـا نگـارش کتـاب [۱۶] بـه عنـوان اولـین محصـول اسـتاندارد در ایـن حـوزه ارائـه شـده اسـت. توابـع ایـن Toolbox در قالـب m-file در جـدول (۳-۲) ارائـه شـده انـد. شـایان ذکـر اسـت پیشـتر Spline Toolbox نیز در متلب پیـاده سازی شـده اسـت. مرجـع [۲۸] نیـز IGA را در قالـب کـد متلـب در حالـت ۱، ۲ و ۳ بعدی ارائه نموده است.

آنچـه در ایـن پایـان نامـه مـورد اسـتفاده قـرار مـی‌گیـرد برخـی از m-file هـای بسـته‌هـای نـرم‌افـزاری بـویژه NURBS Toolbox و GEOPDES جهـت تولیـد توابـع پایـه، برخـی پـردازش هـای میـانی و Post Processing مـی باشـد. همچنـین از بسـته نـرم افـزاری ParaView جهت نمایش داده های حاصل از تحلیل استفاده می شود.

جدول (۳-۲) توابع NURBS Toolbox

Basic operations for NURBS curves, surfaces and volumes

nrbmak
NRBMAK: Construct the NURBS structure given the control points and the knots.
nrbkntins
NRBKNTINS: Insert a single or multiple knots into a NURBS curve, surface or volume.
nrbdegelev
NRBDEGELEV: Elevate the degree of the NURBS curve, surface or volume.
nrbderiv
NRBDERIV: Construct the first and second derivative representation of a NURBS curve, surface or volume.
nrbdeval
NRBDEVAL: Evaluation of the derivative and second derivatives of NURBS curve, surface or volume.
nrbeval
NRBEVAL: Evaluate a NURBS at parametric points.

Operations for constructing NURBS curves and surfaces

nrbtform
NRBTFORM: Apply transformation matrix to the NURBS.
nrbreverse
NRBREVERSE: Reverse the evaluation direction of a NURBS curve or surface.
nrbtransp
NRBTRANSP: Transpose a NURBS surface, by swapping U and V directions.
nrbline
NRBLINE: Construct a straight line.
nrbcirc
NRBCIRC: Construct a circular arc.
nrbrect
NRBRECT: Construct NURBS representation of a rectangular curve.
nrb۴surf
NRB۴SURF: Constructs a NURBS bilinear surface.
nrbcylind
NRBCYLIND: Construct a cylinder or cylindrical patch.
nrbextract
NRBEXTRACT: construct NURBS curves by extracting the boundaries of a NURBS surface, or NURBS surfaces by extracting the boundary of a NURBS volume.
nrbextrude
NRBEXTRUDE: Construct a NURBS surface by extruding a NURBS curve, or construct a NURBS volume by extruding a NURBS surface.
nrbrevolve
NRBREVOLVE: Construct a NURBS surface by revolving a NURBS curve, or construct a NURBS volume by revolving a NURBS surface.
nrbruled
NRBRULED: Construct a ruled surface between two NURBS curves.
nrbcoons
NRBCOONS: Construction of a Coons patch.
nrbplot
NRBPLOT: Plot a NURBS curve or surface, or the boundary of a NURBS volume.
nrbctrlplot
NRBCTRLPLOT: Plot a NURBS entity along with its control points.
nrbkntplot
NRBKNTPLOT: Plot a NURBS entity with the knots subdivision.

جدول (۳-۲) توابع NURBS Toolbox (ادامه)

B-Spline functions

bspeval
BSPEVAL: Evaluate B-Spline at parametric points
bspderiv
BSPDERIV: B-Spline derivative
bspkntins
BSPKNTINS: Insert knots into a B-Spline
bspdegelev
BSPDEGELEV: Degree elevate a univariate B-Spline.
basisfun
BASISFUN: Compute B-Spline Basis Functions
basisfunder
BASISFUNDER: B-Spline Basis function derivatives
findspan
FINDSPAN Find the span of a B-Spline knot vector at a parametric point
numbasisfun
NUMBASISFUN: List non-zero Basis functions for B-Spline in a given knot-span
tbasisfun
TBASISFUN: Compute a B- or T-Spline basis function, and its derivatives, from its local knot vector.

B-splines geometric entities

curvederivcpts
CURVEDERIVCPTS: Compute control points of n-th derivatives of a B-spline curve.
curvederiveval
CURVEDERIVEVAL: Compute the derivatives of a B-spline curve.
surfderivcpts
SURFDERIVCPTS: Compute control points of n-th derivatives of a NURBS surface.
surfderiveval
SURFDERIVEVAL: Compute the derivatives of a B-spline surface

NURBS geometric entities and functions

nrbbasisfun
NRBBASISFUN: Basis functions for NURBS
nrbbasisfunder
NRBBASISFUNDER: NURBS basis functions derivatives
nrbnumbasisfun
NRBNUMBASISFUN: Numbering of basis functions for NURBS
nrbcrvderiveval
NRBCRVDERIVEVAL: Evaluate n-th order derivatives of a NURBS curve.
nrbsurfderiveval
NRBSURFDERIVEVAL: Evaluate n-th order derivatives of a NURBS surface.

Knots construction and refinement

kntuniform
KNTUNIFORM: generate uniform open knot vectors in the reference domain.
kntrefine
KNTREFINE: Refine a given knot vector by dividing each interval uniformly, maintaining the continuity in previously existing knots.
kntbrkdegreg
KNTBRKDEGREG: Construct an open knot vector by giving the sequence of knots, the degree and the regularity.
kntbrkdegmult
KNTBRKDEGMULT: Construct an open knot vector by giving the sequence of knots, the degree and the multiplicity.

Vector and Transformation Utilities

vecnorm
VECNORM: Normalise the vectors.
vecmag
VECMAG: Magnitude of the vectors.
vecmag۲
VECMAG۲: Squared magnitude of a set of vectors.
vecangle
VECANGLE: An alternative to atan, returning an arctangent in the range ۰ to ۲*pi.
vecdot
VECDOT: The dot product of two vectors.
veccross
VECCROSS: The cross product of two vectors.
vecrotx
VECROTX: Transformation matrix for a rotation around the x axis.
vecroty
VECROTY: Transformation matrix for a rotation around the y axis.
vecrotz
VECROTZ: Transformation matrix for a rotation around the z axis.
vecrot
VECROT: Transformation matrix for a rotation around the axis given by a vector.
vecscale
VECSCALE: Transformation matrix for a scaling.
vectrans
VECTRANS: Transformation matrix for a translation.

Misc Utilities

deg۲rad
DEG۲RAD: Convert degrees to radians.
rad۲deg
RAD۲DEG: Convert radians to degrees.

۳-۷- جمع بندی

در ایــن فصــل ضــمن توصــیف ب-اســپیلاین هــا و نربــز هــا بعنــوان روشــی نــوین در توصیف هندسی اجسـام، علـت انتخـاب آن‌هـا بعنـوان توابـع پایـه، هـم در بخـش توصـیف هندسـی و هـم در بخـش آنـالیز در قالـب تحلیـل آیزوژئومتریـک نشـان داده شـد و بـا بیـان تفـاوت‌هـای اساسـی بـین تحلیـل مبتنـی بـر اجـزای محـدود کلاسـیک و آیزوژئومتریـک، چگـونگی حـل معادلات الاستو پلاسـتیک بـا اسـتفاده از توابـع پایـه نربـز ارائـه گردیـد. در پایـان نیـز قابلیـت‌هـای نرم افزار متلب در حل عددی معادلات حاصل در قالب Toolbox های تولید شده بیان شد.

فصل چهارم

پیاده سازی الگوریتم و حل

الاستو-پلاستیک مسائل دو بعدی نمونه

به روش IGA

فصل چهارم

پیاده سازی الگوریتم و نتایج حل الاستو–پلاستیک مسائل دو بعدی به روش IGA

۴-۱- مقدمه

همانگونه که قبلا ذکر شد کلیات محاسبات در روشهای آیزوژئومتریک و اجزای محدود مشابه بوده و تفاوت عمده آنها در نحوه محاسبات توابع پایه و نگاشتهای مربوط به آنهاست. در این فصل حل الاستو- پلاستیک مثالهای عددی دوبعدی با استفاده از برنامه Elasto-Plastic IGA که در این پایان نامه مبتنی بر نرم افزار MATLAB تهیه شده است، ارائه و نتایج حاصل از آن با حل تحلیلی مقایسه می‌گردد.

۴-۲- ساختار برنامه Elasto-Plastic IGA

شکل (۴-۱) ساختار کلی برنامه Elasto-Plastic IGA پیاده سازی شده در فصول دوم و سوم را نشان میدهد. بر این اساس برنامه اطلاعات ورودی شامل خواص مواد، هندسه و مشخصات مشها و نربز را دریافت کرده و افزایشهای کلی را بر اساس روش نیوتن-رافسون جهت محاسبه جابجایی انجام می‌دهد. در طی این فرآیند به روش CPPM خواص ماده در نقاط گوسی در نظر گرفته شده در قالب توالی‌های محلی مبتنی بر معیار تسلیم فون-میسز بررسی و با توجه به حالت ماده در نقاط مذکور

ماتریس مماسی پیوسته جهت به‌روز رسانی ماتریس سختی و نیروهای داخلی محاسبه می‌گردد. برنامه مذکور معیار تسلیم با فرض سخت شدگی توسعه یافته و ماده ایزوتروپیک فرض شده‌است.

قابل ذکر است همانطور که قبلا اشاره شد محاسبه ماتریس مماسی سازگار مستلزم برخی محاسبات پیچیده است و در مقابل سبب افزایش سرعت همگرایی می‌شود که در خصوص مسائل الاستو-پلاستیک دو بعدی با هندسه ساده از اهمیت چندانی برخوردار نیست لذا از ماتریس مماسی پیوسته استفاده گردیده‌است.

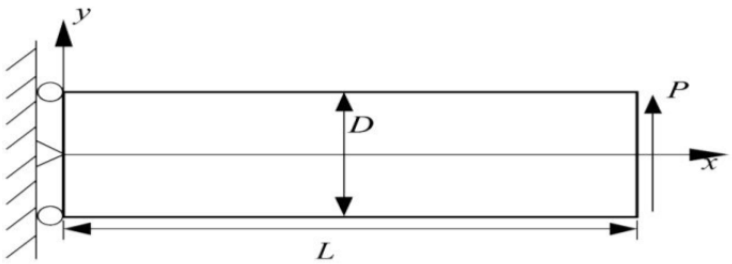
نکته حائز اهمیت دیگر ماهیت ضمنی بودن روش CPPM است که از دقت محاسباتی بالاتری نسبت به روشهای صریح برخوردار است.

شکل (۴-۱) ساختارکلی برنامه Elasto-Plastic IGA

۴-۳- مثالهای عددی

۴-۳-۱- تیر طره

تیر طره شکل (۴-۲) تحت بار متمرکز P=۱۵۰۰ N قرار گرفته است. در این مثال D=۲ m و L=۴۸ مدول الاستیتسیته E=۳*۱۰^۷ و ضریب پواسون $\upsilon = 0.3$ و تنش تسلیم $\sigma_y = 2400$ فرض گردیده است.H پارامتر سخت شدگی معادل ۱ فرض شده است.

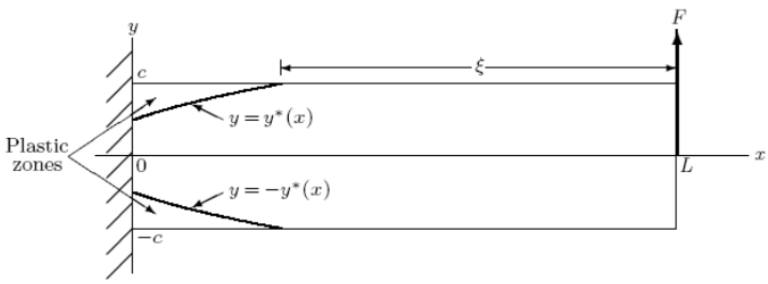


شکل (۴-۲) تیر طره : هندسه و شرایط تکیه گاهی

برای حل مسئله به روش آیزوژئومتریک بردارهای گرهی در دو جهت ξ و η به ترتیب {۰،۰،۰،.۲۵،.۵،.۷۵،۱،۱،۱} و {۰،۰،۱،۱} تعداد نقاط کنترلی در این دو جهت به ترتیب ۶ و ۲ فرض گردیده است.

جهت حل مساله در حالت الاستو-پلاستیک از روابط زیر استفاده می‌گردد[۳۲].

تنش ماکزیمم در (o،±c) رخ میدهد. در $F=F_E=\frac{۲\sigma_y bc^۲}{۳L}$ تسلیم آغاز می شود.اگر مقدار بار وارده از این مقدار افزایش یابد ، ناحیه پلاستیک از وجه بالا و پایین تیر گسترش می یابد.



شکل (۴-۳) نواحی الاستیک و پلاستیک در تیر طره

معیار تسلیم در ناحیه پلاستیک مستلزم آن است که تنشها علاوه بر معادلات تعادلی از روابط زیر نیز تبعیت نمایند :

$$\frac{\sigma}{\sigma^2{}_Y}\frac{\partial\sigma}{\partial\chi}+\frac{\tau}{\tau^2{}_Y}\frac{\partial\tau}{\partial\chi}=0 \qquad (۲-۴)$$
$$\frac{\sigma}{\sigma^2{}_Y}\frac{\partial\sigma}{\partial Y}+\frac{\tau}{\tau^2{}_Y}\frac{\partial\tau}{\partial Y}=0$$

روابط تعادل:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial X}+\frac{\partial\tau}{\partial Y}=0 \quad , \quad \frac{\partial\tau}{\partial X}=0 \qquad (۳-۴)$$

این معادلات می توانند به طور همزمان ارضا گردند اگر σ و τ در هر ناحیه پلاستیک ثابت باشند. و از آنجائیکه از τ در وجه بالا و پایین صرفنظر می‌گردد و $\sigma=\pm\sigma_y$، اگر مرز الاستو-پلاستیک در x با $y=y_{(x)}$نمایش داده شود ، داریم :

$$\sigma=\sigma_y \quad , \quad -c\leq y\leq -y^*_{(x)} \qquad (۴-۴)$$

$$\sigma=-\sigma_y \quad , \quad y^*_{(x)}\leq y\leq c$$

در هسته الاستیک $-y^*\leq y\leq y^*_{(x)}$ توزیع تنش در راستای y مانند حوزه الاستیک خطی است.

$$\sigma=\frac{\sigma_y . y}{y^*_{(x)}} \qquad (۵-۴)$$

مرز ناحیه الاستیک به صورت زیر است :

$$Y^*_{(X)}=\sqrt{3\left[C^2-\frac{F(L-x)}{\sigma_Y}b\right]}$$

(۶-۴)

$$y^*_{(x)}=c \quad \text{در} \quad X = L - \frac{2\sigma_y bc^2}{3F} = L - \xi \qquad (۷-۴)$$

بار نهایی به شکل زیر محاسبه می گردد:

$$F_u=\frac{\sigma_y bc^۲}{L} \qquad (۸-۴)$$

با توجه به این حقیقت که τ در ناحیه پلاستیک صفر است ، نیروی عرضی باید توسط تنش برشی تنها در هسته الاستیک متعادل شود. تنش برشی ماکزیمم در نقطه (۰ , x) برابر است با :

$$\tau = \frac{3F}{4by^*(x)} \qquad (۹-۴)$$

تنش برشی ماکزیمم در نقطه x=۰ اتفاق می افتد.

$$\tau_{\max} = \frac{3F}{4by^*(0)} \qquad (۱۰-۴)$$

تغییر مکان در هر نقطه از تیر با $F=F_E$ (شروع تغییر شکل پلاستیک) برای $L \le \xi \le {}^{۲l}/_{c}$ عبارت

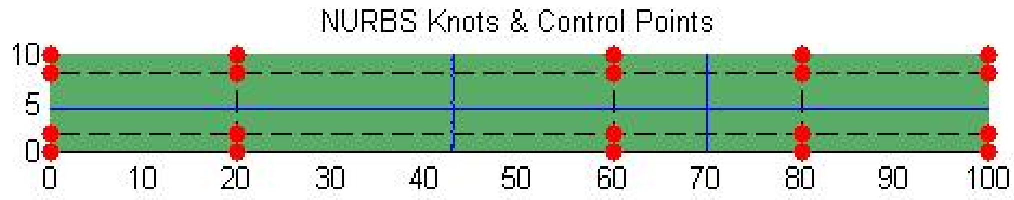
است از:

$$\Delta = \Delta_E \left(\frac{F_E}{F}\right)^2 \left[5 - \left(3 + \frac{F}{F_E}\right)\sqrt{3 - 2\frac{F}{F_E}}\right] \qquad (۱۱-۴)$$

که در آن :

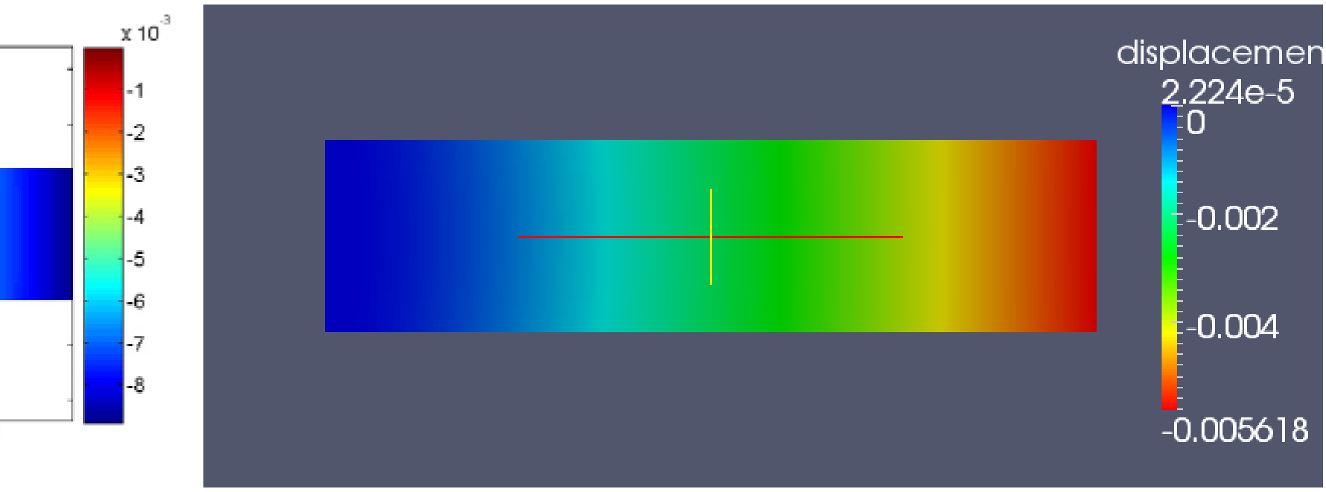
$$\Delta_E=\frac{\sigma_y L^۲}{۳EC} \quad \text{و} \quad F_U=\frac{۳F_E}{۲} \qquad (۱۲-۴)$$

در این مثال طبق روابط ارائه شده تسلیم باید در نقطه تکیه‌گاهی در بار ۱۲۰۰ نیوتن آغاز شود نتایج حاصل از برنامه شروع تسلیم را در بار ۱۰۸۰ نیوتن نشان می‌دهد خطا در حدود ۱۰ در صد است.شایان ذکر است این نتیجه تنها با یک زیرناحیه در مدلسازی بدست آمده است.



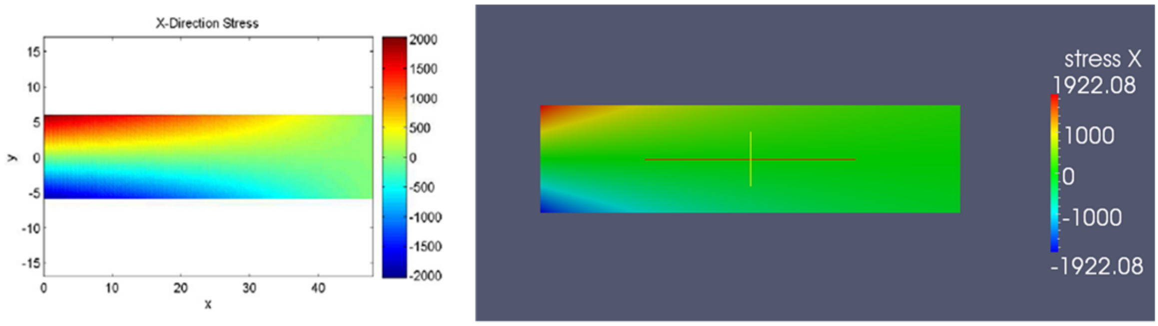
شکل (۴-۴) مش‌ها و نقاط کنترلی در تیر طره

جهت کنترل برنامه خروجی تنش در جهت x و جابجایی تیر در جهت y با بار ۱۰۰۰ N و در حوزه الاستیک با نتایج مرجع [۱۸] مقایسه گردیده است. شکل (۴-۴) مش‌ها و نقاط کنترلی در نظر گرفته شده در تیر طره را نشان می دهد.



(۴-۵)جابجایی در جهت yتیر طره در حالت ***الاستیک*** تحت اثر بار p=۱۰۰۰ N

(a)حاصل از برنامه Elasto-plastic IGA. (b) حل IGA مرجع [۱۸]



(b)

(a)

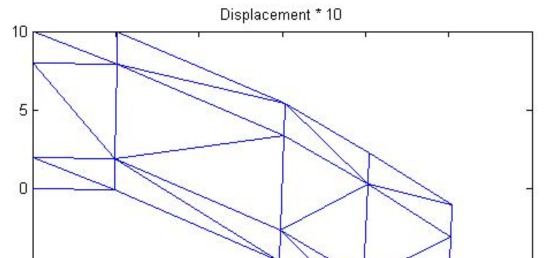
شکل (۴-۶) تنش در جهت XXتیر طره در حالت ***الاستیک*** تحت اثر بار p=۱۰۰۰ N
(a)حاصل از برنامه Elasto-plastic IGA. (b) حل IGA مرجع [۱۸]

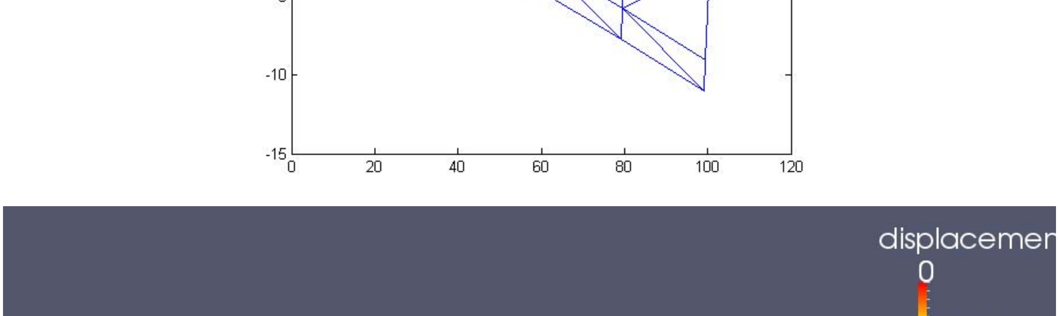
جابجایی در انتهای تیر مطابق حل تحلیلی ۰/۰۰۷۷ می باشد نتایج شبیه سازی مطابق شکل (۴-۵) این مقدار را ۰/۰۰۵۶ نشان می دهد. تنش در جهت XX تیر طره در حالت الاستیک تحت اثر بار p=۱۰۰۰ N نیز در شکل (۴-۶) نشان داده شده است که از خطای ناچیزی برخوردار است. لذا برنامه در حالت الاستیک و با یک ناحیه و تعداد اندک مش نتایج قابل قبول دارد.

حال مساله الاستو پلاستیک را در بار N۱۵۰۰ با استفاده از برنامه حل کرده و با نتایج تئوری مقایسه می کنیم. شکل (۴-۷) مقدار جابجایی انتهای تیر را نشان می دهد که با نتایج تحلیلی مجاور آن تطبیق بسیار خوبی دارد.

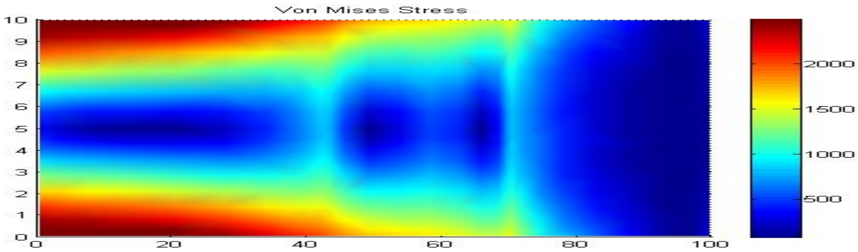
تنش فون میسز در شکل (۴-۸) هم نمایانگر تسلیم در تنش تسلیم ۲۴۰۰ N می باشد. سایر تنشها و کرنش پلاستیک موثر نیز در شکل های (۴-۹) و (۴-۱۰) ارائه شده اند.

Fu=۱۸۰۰ N
F_E=۱۲۰۰ N
$\Delta_E = 0.1024$
$\Delta = 0.0128$

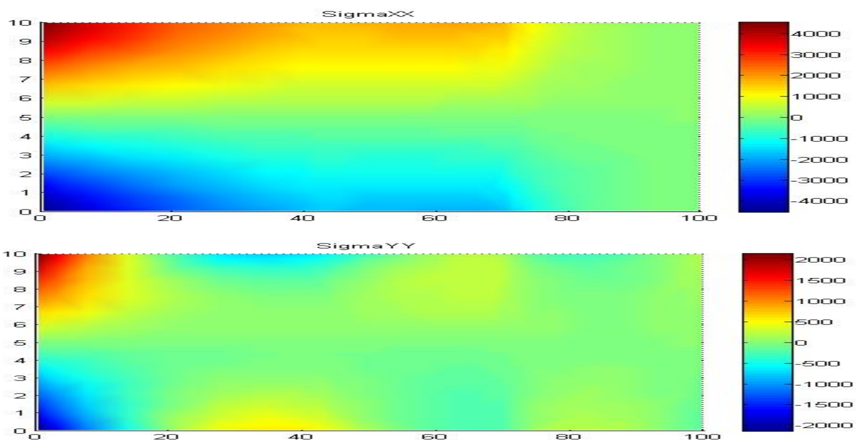




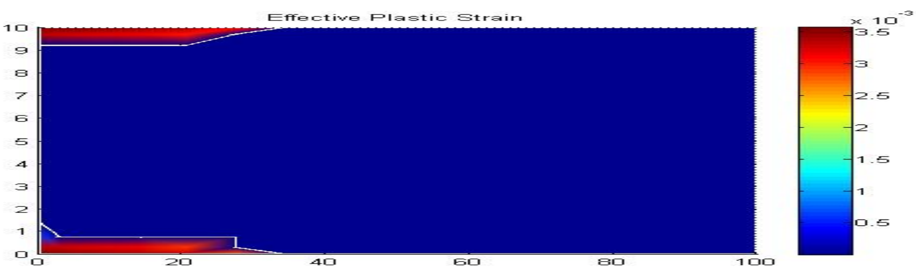
شکل (۴-۷) جابجایی در جهت yتیر طره در حالت ***پلاستیک*** تحت اثر بار p=۱۵۰۰ N
حاصل از برنامه Elasto-plastic IGA



شکل (۴-۸) تنش فون-میسز تیر طره در حالت ***پلاستیک*** تحت اثر بار p=۱۵۰۰ N
حاصل از برنامه Elasto-plastic IGA



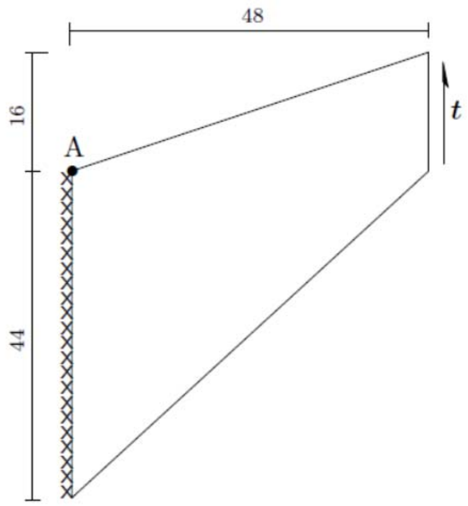
شکل (۴-۹) تنشهای تیر طره در حالت ***پلاستیک*** تحت اثر بار p=۱۵۰۰ N
حاصل از برنامه Elasto-plastic IGA



شکل (۴-۱۰) کرنش پلاستیک موثر تیر طره در حالت ***پلاستیک*** تحت اثر بار p=۱۵۰۰ N
حاصل از برنامه Elasto-plastic IGA

۴-۳-۲- غشای Cook[۱]

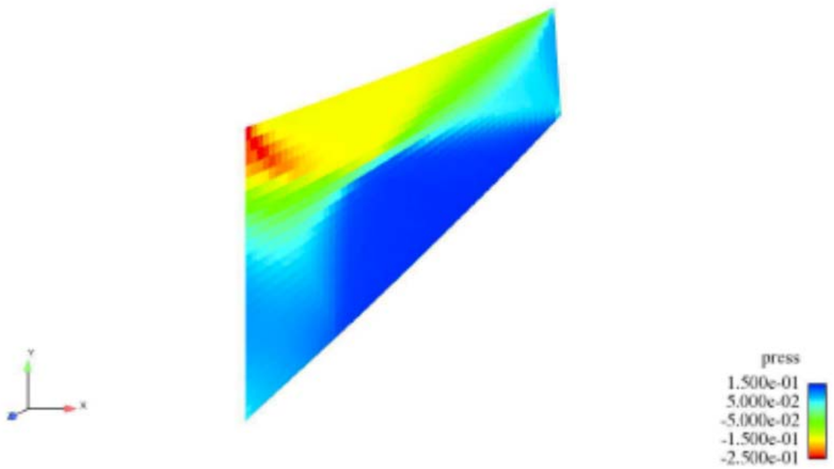
در این مثال، مساله شناخته شده cook مورد نظر قرار می گیرد. مطابق شکل (۴-۱۱) مساله شامل یک پانل مخروطی تحت کرنش صفحه‌ای است که یک بار برشی در انتهای آن اعمال شده است. پانل ۴۸ واحد طول و ۴۴ واحد ارتفاع در محل قید و ۱۶ واحد ارتفاع در انتهای خود دارد . مدل ماده استفاده شده الاستو پلاستیک با مدول یانگ ۷۰ و نسبت poisson ۰,۳۳۳ و تنش تسلیم ۰,۲۴۳ و مدول سخت شدگی خطی ۰,۱۵ می باشد. بار برشی بکار رفته نهایی ۱,۸ است که یک جابجایی خمشی جزئی را در طول غشا ایجاد می کند [۳۳].حل اجزاء محدود آن با ۵۳ المان در طول و ۲۳ المان در ارتفاع در شکل (۴-۱۲) نشان داده شده است.



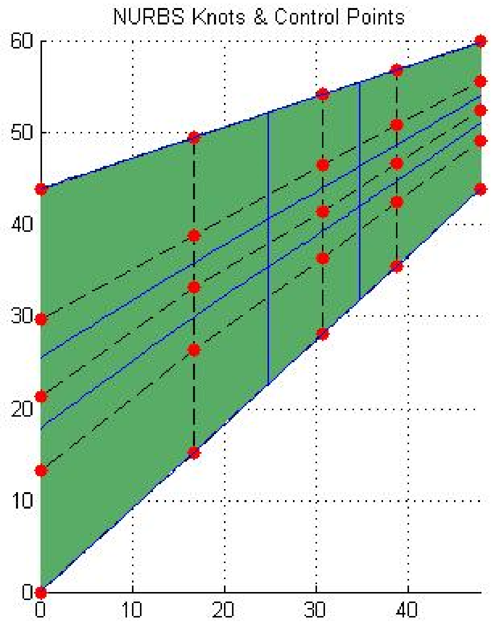
شکل (۴-۱۱) غشای Cook

[۱] Cook Memberan

این مساله با کد توسعه یافته در این پایان نامه مبتنی بر روش آیزوژئومتریک با بردارهای گره ای $\Sigma=\{۰,۰,۰,۰.۴, ۰.۷,۱,۱,۱\}$ و $H=\{۰,۰,۰,۰.۴,۰.۷,۱,۱,۱\}$ و نقاط کنترلی نشان داده شده در شکل (۴-۱۳) نیز حل گردیده است.

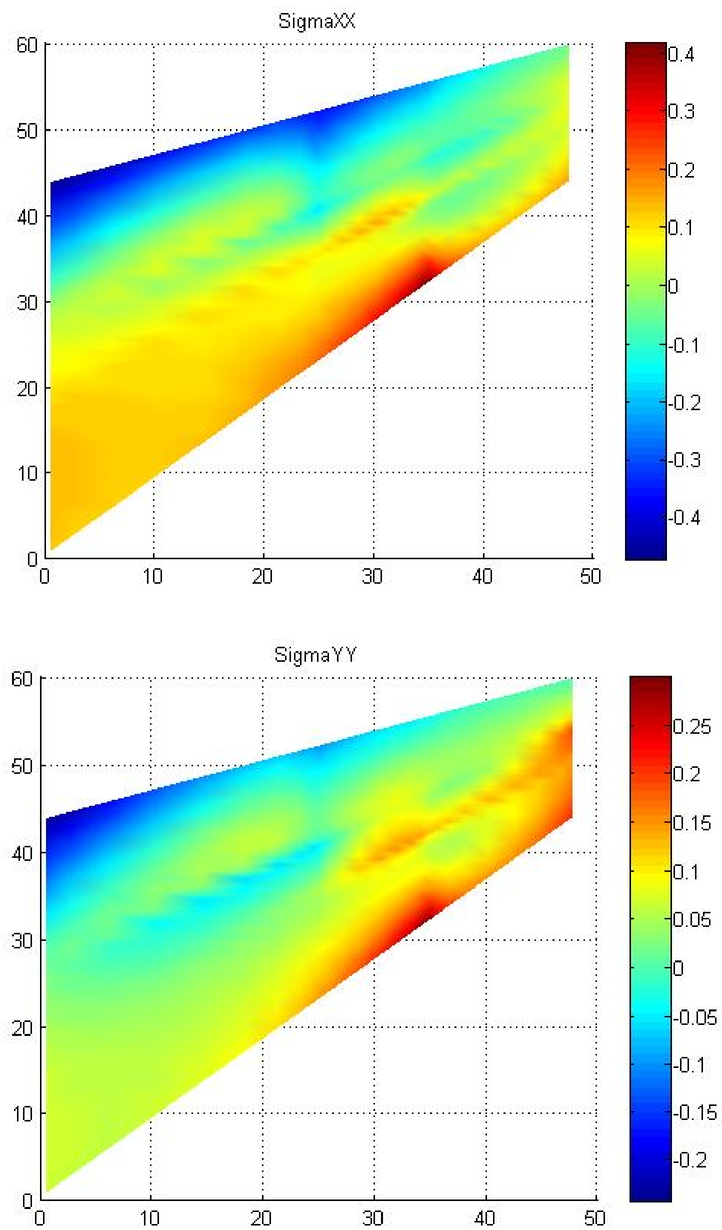


شکل (۴-۱۲) کشش در مساله غشای Cook

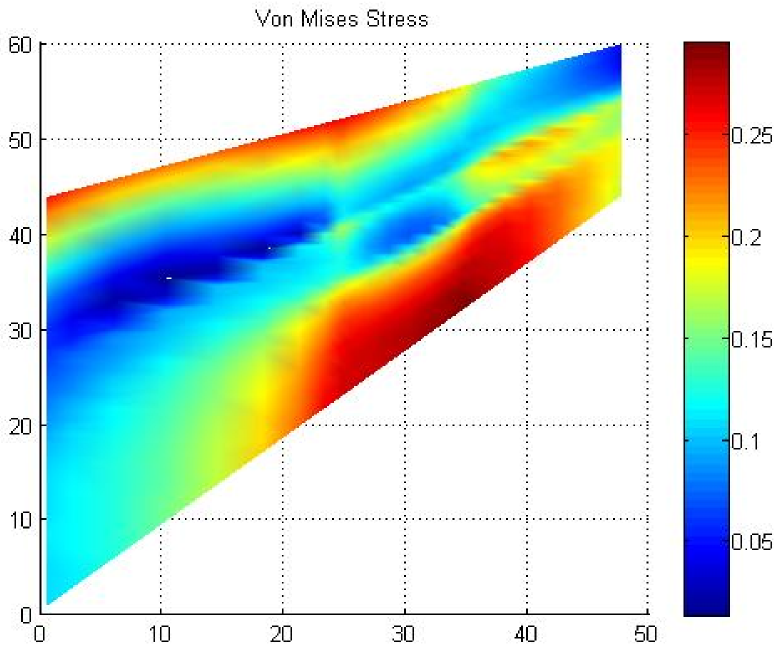


شکل (۴-۱۳) مش‌ها و نقاط کنترلی در غشای Cook

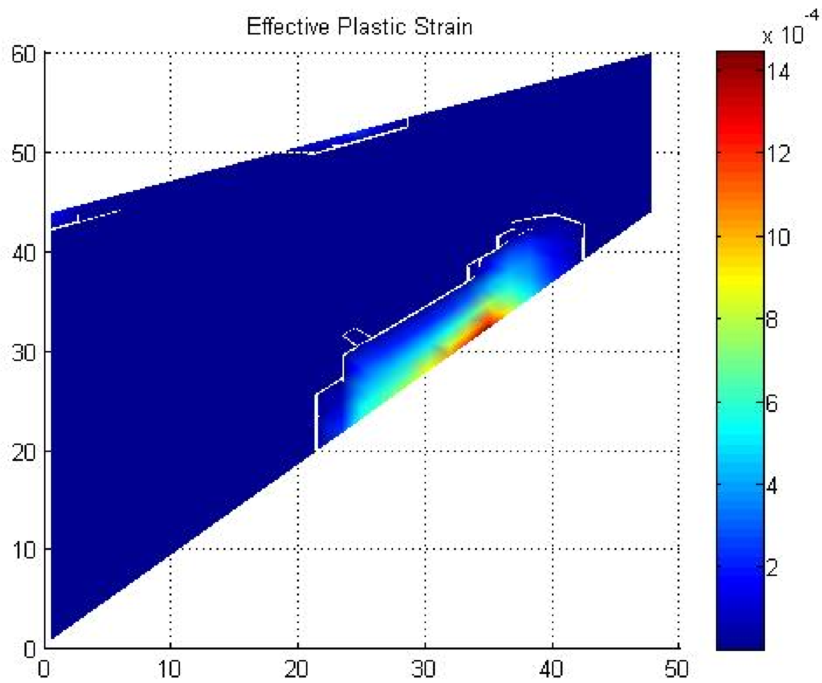
کانتورهای تنش σ_{xx} ، σ_{yy} در شکل (۴-۱۴) نشان داده شده‌اند تنش فون میسز و کرنش پلاستیک موثر در شکل های (۴-۱۵) و (۴-۱۶) نشان داده شده‌اند. جابجایی غشاء در شکل (۴-۱۷) نشان داده شده‌اند. مقایسه نتایج با روش اجزاء محدود معرف صحت تحلیل انجام شده توسط برنامه ارائه شده می باشد.



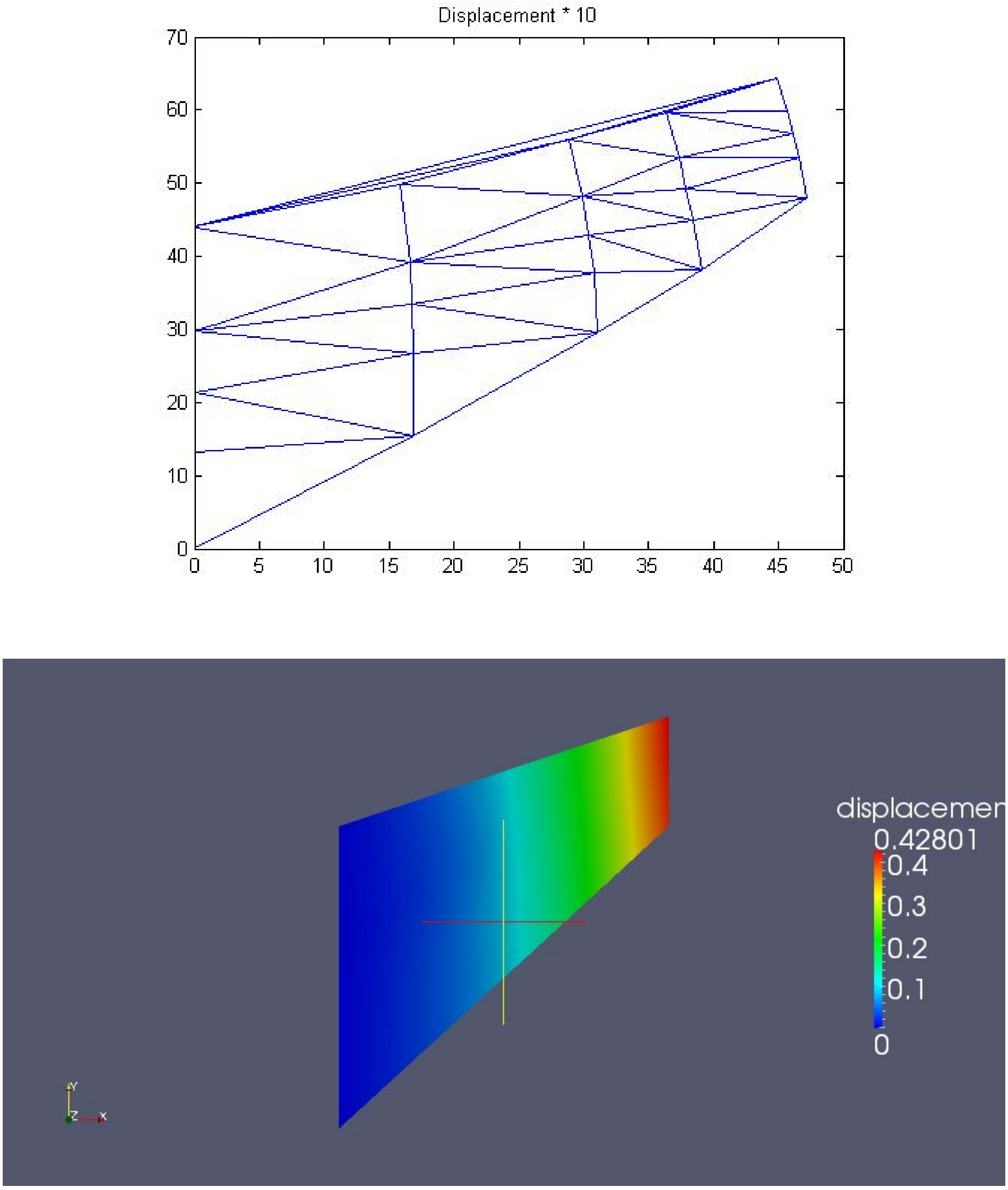
شکل (۴-۱۴) کانتورهای تنش در غشای Cook



شکل (۴-۱۵) تنش فون میسنر در غشای Cook



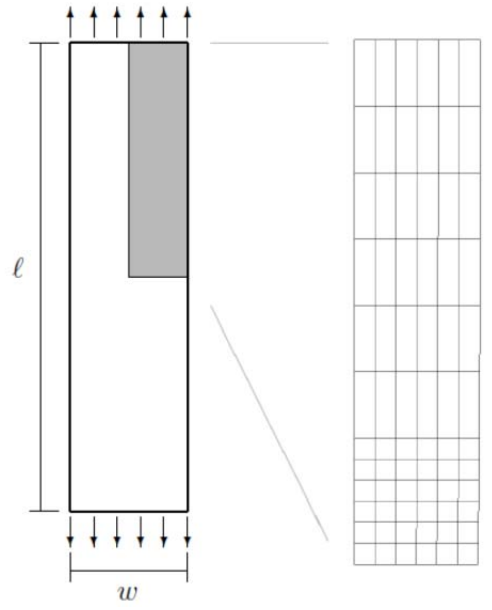
شکل (۴-۱۶) کرنش پلاستیک موثر در غشای Cook



شکل (۴-۱۷) جابجایی در غشای Cook

۴-۳-۳- نوار مسطح[1]

در این مثال نوار مسطح تحت شرایط کشش یکنواخت و بار کرنش صفحه ای قرار می گیرد. این مساله که یک الگوی استاندارد تست مسائل پلاستیک با تغییر شکل محدود می‌باشد در مراجع مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. [۳۴,۳۵,۳۶] هندسه و خواص ماده در شکل (۴-۱۸) نشان داده شده است. با شرایط مرزی متقارن تنها ربع نوار جهت تحلیل مد نظر قرار گرفته است.

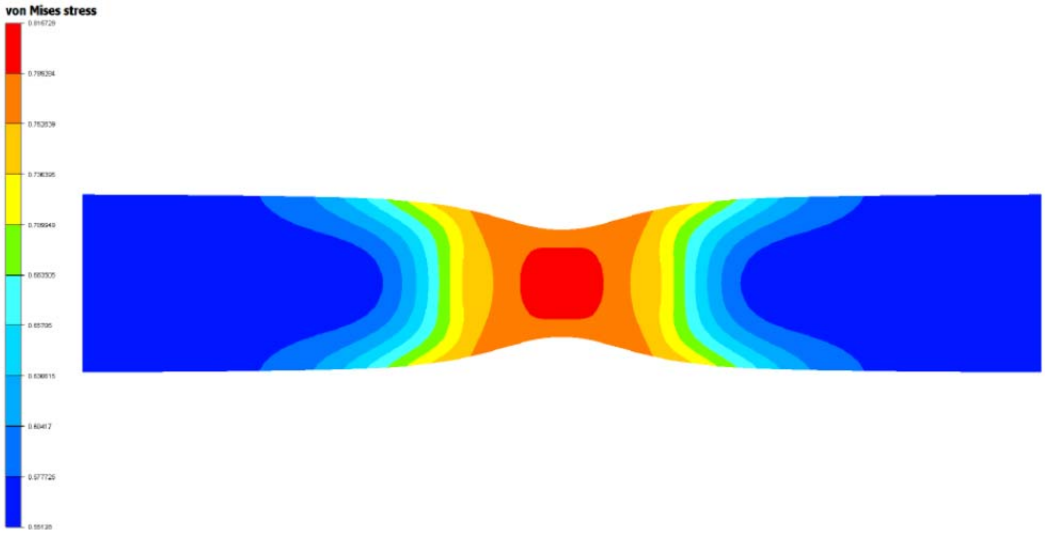


Length	:	ℓ	=	53.334
Width	:	w	=	12.826
Center width	:	w_c	=	$0.982w$
Bulk modulus	:	κ	=	164.206
Shear modulus	:	μ	=	80.1938
Initial yield stress	:	σ_0	=	0.45
Residual yield stress	:	σ	=	0.715
Isotropic hardening	:	h	=	0.12924
Saturation exponent	:	β	=	16.93

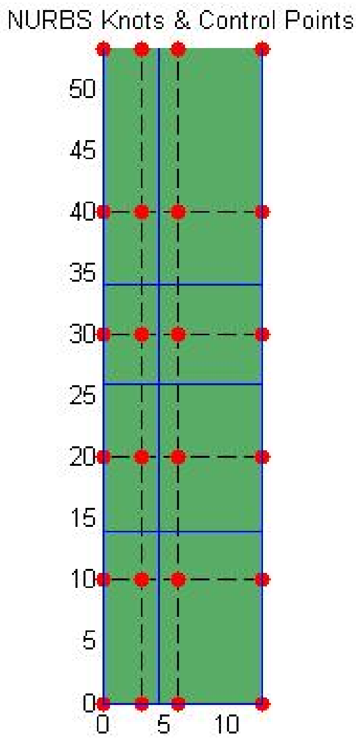
شکل (۴-۱۸) نوار الاستوپلاستیک

آنالیز در روش اجزاء محدود با نقاط گره ای ۱۳×۷ مطابق شکل (۴-۱۹) انجام شده است[۳۷]. تحلیل روش آیزوژئومتریک بر اساس بردارهای گره‌ای {۰،۰،۰,۵،۱،۱،۱}=Σ و {۰،۰،۰,.۲,.۵,.۷،۱،۱،۱}= H و نقاط کنترلی نشان داده شده در شکل (۴-۲۰) انجام گرفته است.

---
[2] plane strip

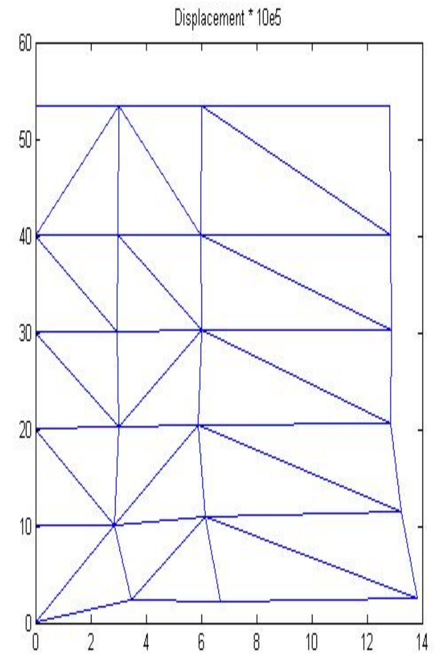


شکل (۴-۱۹) تنش فون میسز در نوار صفحه ای حاصل از حل اجزای محدود

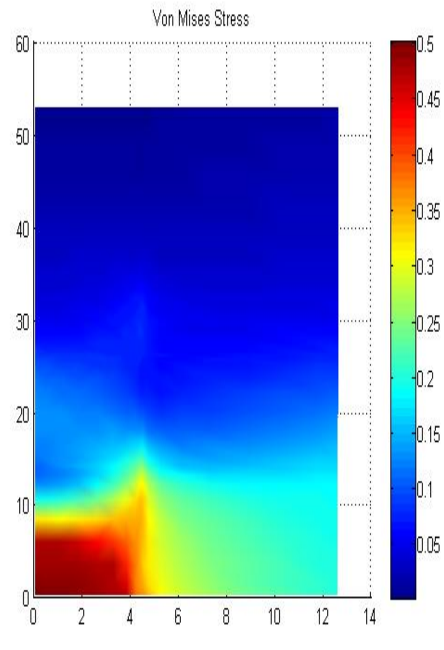


شکل (۴-۲۰)مش‌ها و نقاط کنترلی در نوار مسطح

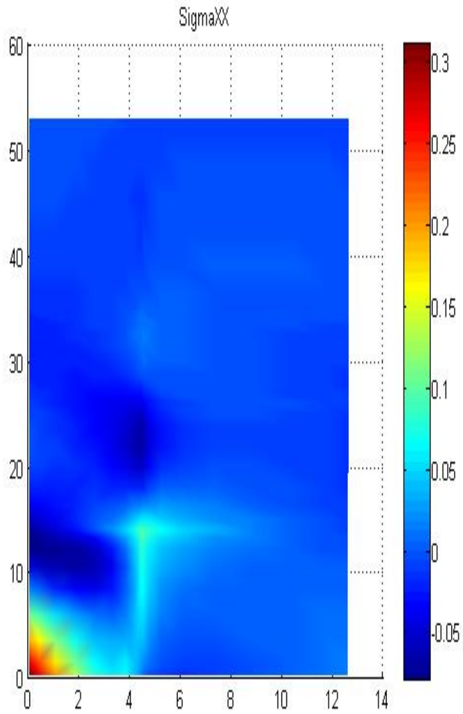
نتایج مربوط به جابجایی ها و تنش ها در شکل های (۴-۲۱) الی (۴-۲۳) نشان داده شده اند. همانگونه که ملاحظه می شود الگوی تنش ها با روش اجزای محدود منطبق است.

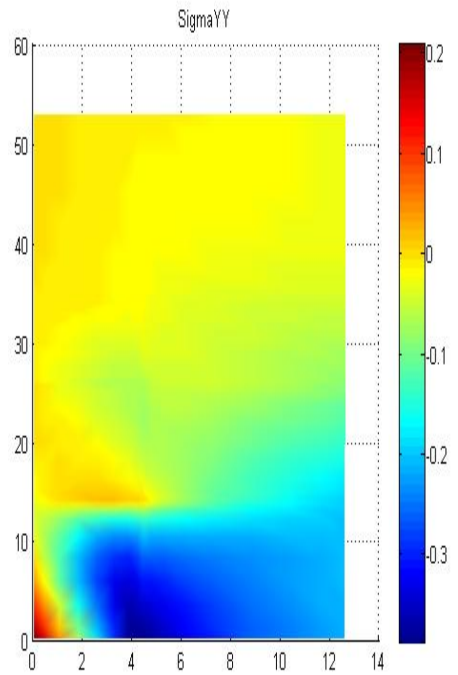


شکل (۴-۲۱) جابجایی در نوار مسطح

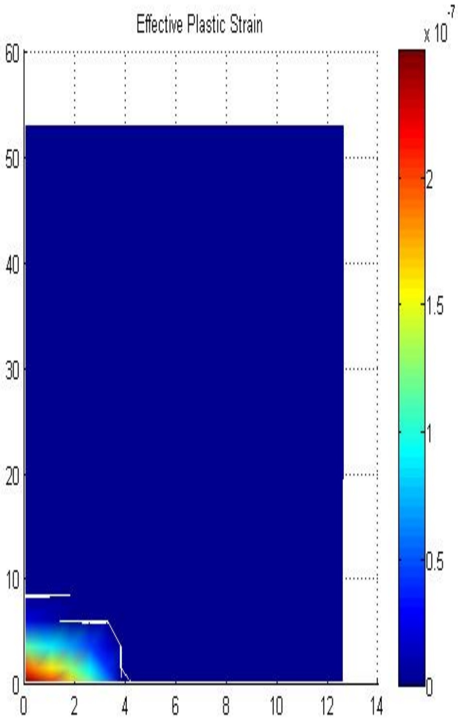


شکل (۴-۲۲)تنش فون میسز در نوار مسطح





شکل (۴-۲۳) تنشها در نوار مسطح



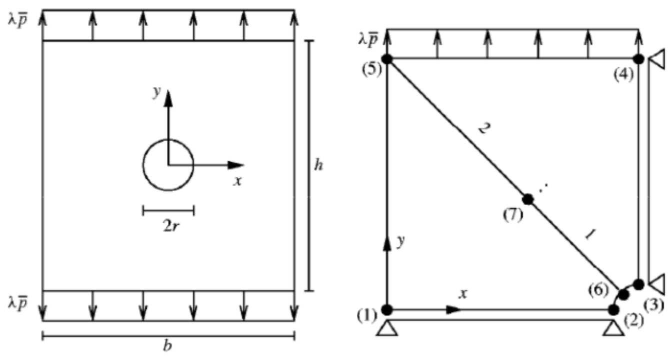
شکل (۴-۲۴) کرنش پلاستیک موثر در نوار مسطح

۴-۳-۴- ورق نامحدود با حفره دایروی

این مثال رفتار یک ورق با یک سوراخ مرکزی تحت کشش را مطابق شکل (۴-۲۵) مد نظر قرار می دهد. به جهت تقارن یک چهارم ورق مدل شده است. ورق تحت شرایط کرنش مسطح مد نظر قرار می گیرد. خواص ماده شامل مدول یانگ $۲\times۱۰^{۵}\ N/mm$،نسبت poisson ۰,۲۹، تنش تسلیم ۲۴۰ و مدول سخت شدگی۱ می باشد. حل آن مبتنی بر روش اجزای محدود در شکل (۴-۲۶) نشان داده شده است.

تحلیل روش آیزوژئومتریک نیز بر اساس بردارهای گره‌ای Σ={۰،۰،۰,۵،۱،۱،۱} و H ={۰،۰،۰,.۲,.۵,.۷،۱،۱،۱} و نقاط کنترلی نشان داده شده در شکل (۴-۲۷) انجام گرفته است.

نتایج مربوط به تنش ها و جابجایی ها در شکل های (۴-۲۸) الی (۴-۳۱) نشان داده شده اند. همانگونه که ملاحظه می شود الگوی تنش ها با روش اجزای محدود منطبق است و پاسخها علی رغم تک ناحیه ای بودن و تعداد محدود مش از دقت لازم برخوردار است.

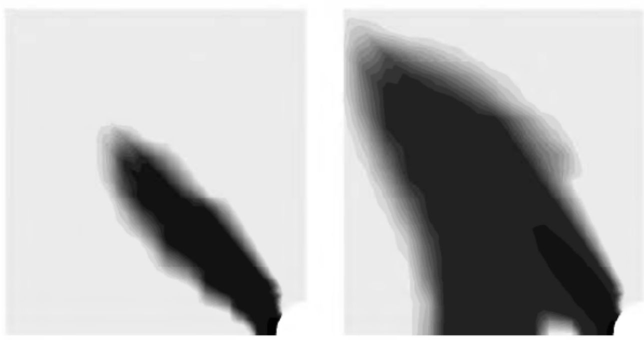


Young's modulus	$E = 206\,900.00\ \mathrm{kN/mm^2}$
Poisson's ratio	$\nu = 0.29$

شکل (۴-۲۵) ورق نامحدود با سوراخ دایروی

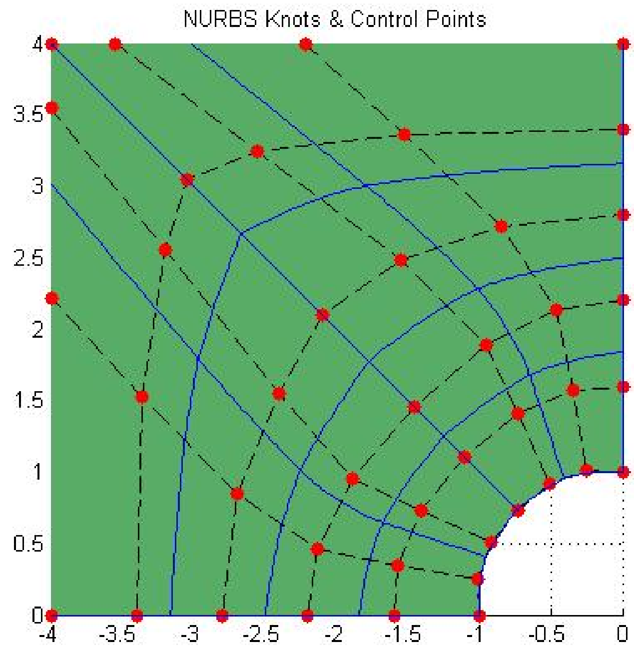
Participant	u_x at (2) in mm	σ_{yy} at (2) in $\mathrm{N/mm^2}$	u_y at (4) in mm	type of element
Reference	0.021290	1388.732343	0.20951	Q19
Rank	0.021290	1388.858414	0.20951	Q10
Rannacher	0.021238	1363.9	0.20950	Q1
Stein	0.021175	1409.69999	0.20944	Q1
Stein	0.021287	1392.32958	0.20951	Q2
Stein	0.021133	1426.3608	0.20946	Q1–P0
Stein	0.021253	1420.5582	0.20947	Q1–E5
Wendland	0.021292	1467.93	0.20952	BEM
Wittum	0.021291	1389.0	0.02095	Q2
Wunderlich	0.021290	1382.00336	0.02095	Q2
Wriggers	0.021177	1339.16	0.02094	T1

Participant	u_x at (5) in mm	$\int_{(4)}^{(5)} u_y$ in mm^2	# of d.o.f.	type of element
Reference	0.076758	20.40344	7372	Q19
Rank	0.076758	20.40344	2080	Q10
Rannacher	0.076764	20.403	2000	Q1
Stein	0.076796	20.40156	2353	Q1
Stein	0.076756	20.40338	2596	Q2
Stein	0.076798	20.40080	1680	Q1–P0
Stein	0.076781	20.40123	1436	Q1–E5
Wendland	0.076760	20.40321	2500	BEM
Wittum	0.076758	20.4034	2300	Q2
Wunderlich	0.076758	20.4034	2512	Q2
Wriggers	0.076788	20.4016	2639	T1

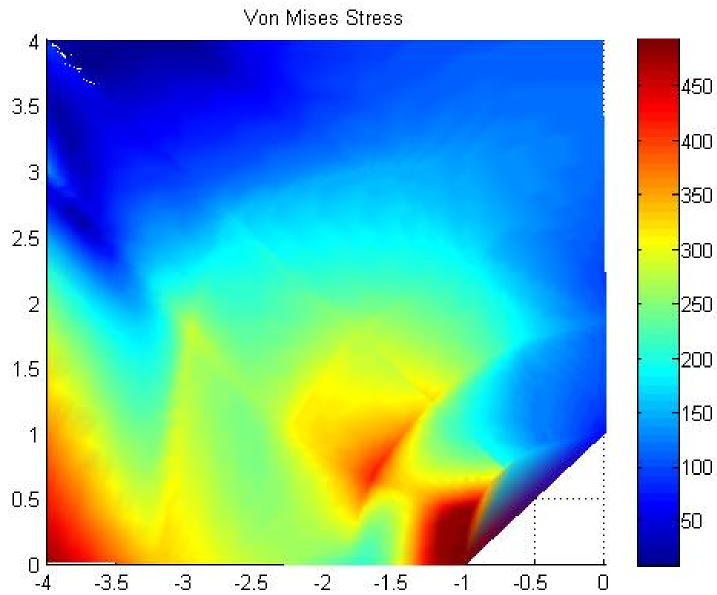


(a) Plastic zone at $\lambda = 4.0$ (b) Plastic zone at $\lambda = 4.5$

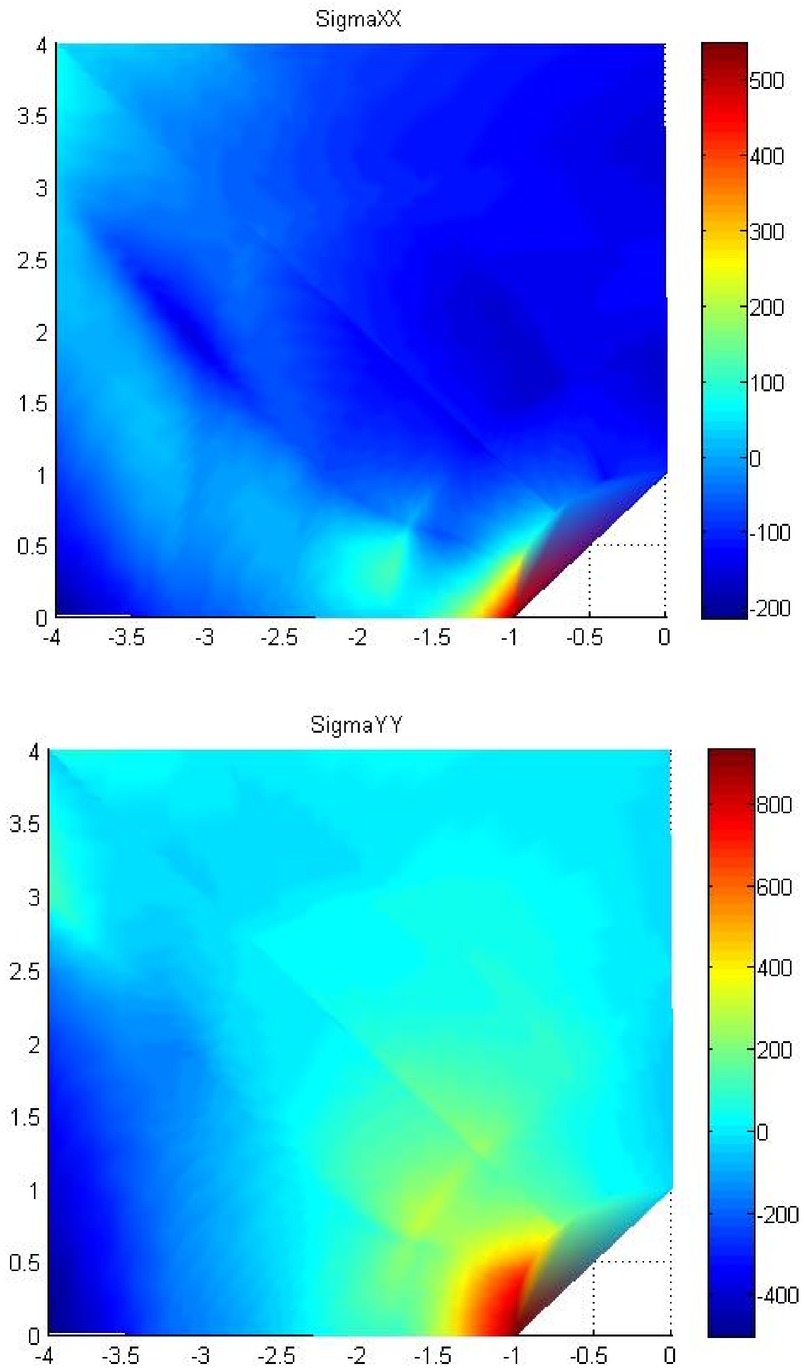
شکل (۴-۲۶) تنش پلاستیک ورق نامحدود با سوراخ دایروی حاصل از حل اجزای محدود



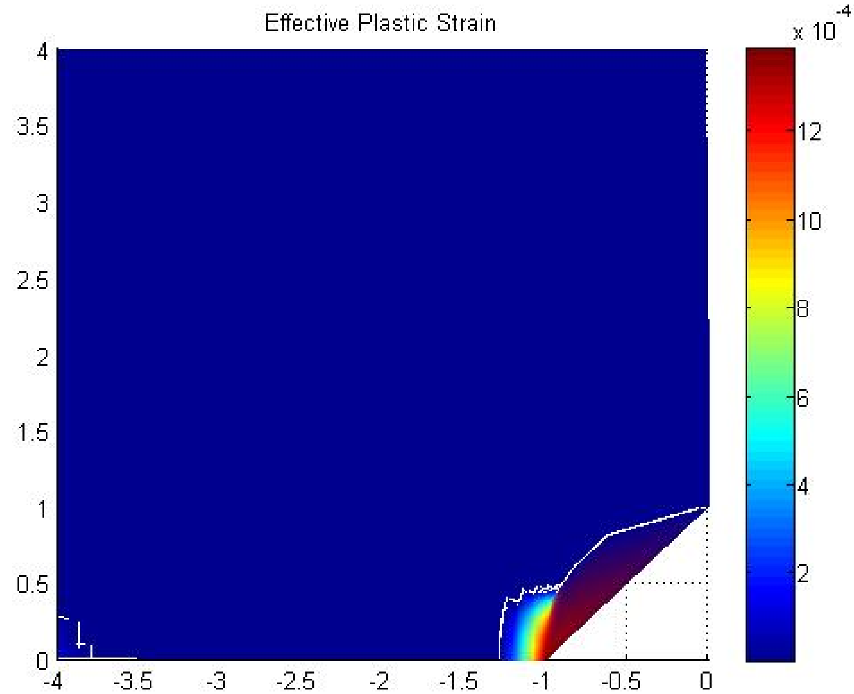
شکل (۴-۲۷)مش‌ها و نقاط کنترلی در ورق نامحدود با سوراخ دایروی



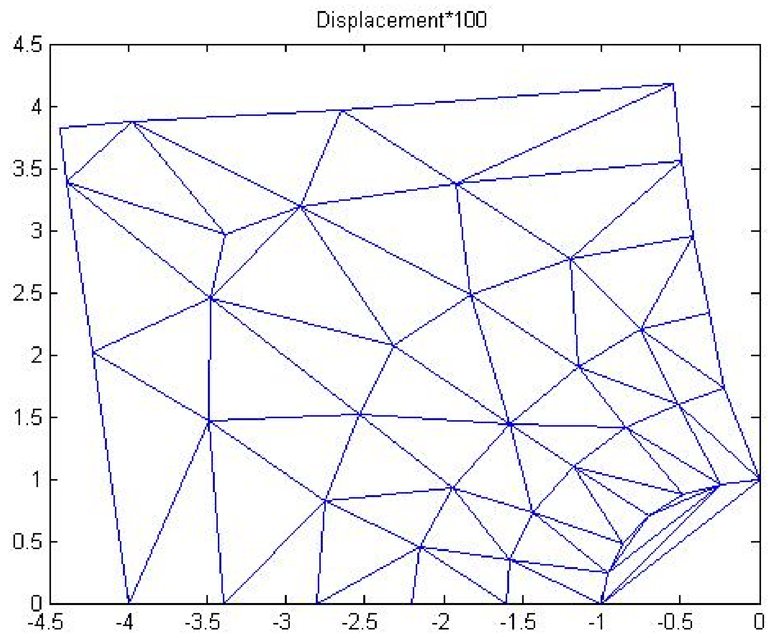
شکل(۴-۲۸)تنش فون میسز در ورق نامحدود با سوراخ دایروی



شکل(۴-۲۹)تنش ها در ورق نامحدود با سوراخ دایروی



شکل (۴-۳۰) کرنش پلاستیک موثر در ورق نامحدود با سوراخ دایروی



شکل (۴-۳۱) جابجایی در ورق نامحدود با سوراخ دایروی

۴-۴-جمع بندی

در این فصل ضمن تشریح ساختار برنامه Elasto-Plastic IGA به بررسی حل چهار مساله الگو با برنامه مذکور و مقایسه نتایج آن با حل تحلیلی یا نتایج حاصل از حل اجزای محدود برخی منابع پرداخته شد. همانطور که ملاحظه شد علیرغم انتخاب تنها یک زیر ناحیه و هندسه ساده با مشهای کم، جوابها از دقت قابل قبولی برخوردار است.

فصل پنجم

جمعبندی و پیشنهادات

فصل پنجم

جمع‌بندی و پیشنهادات

در این فصل جمع بندی از نتایج حاصل از حل عددی معادلات الاستو-پلاستیک سازه های دوبعدی به روش آیزوژئومتریک که در فصل قبل در قالب حل چهار مساله الگو نشان داده شده، ارائه می گردد و سپس بر اساس نقاط ضعف و قوت نتایج حاصل، پیشنهاداتی جهت ادامه کار ارائه می شود.

۵-۱- جمع بندی نتایج حاصل

همانگونه که در نتایج عددی ارائه شده، ملاحظه گردید یکی از ویژگیهای منحصر بفرد روش آیزوژئومتریک تعداد کم مشها و حجم محاسبات کم جهت حصول نتایج مشابه روش FEM می باشد. مطلب مهم دیگر درجه پایین توابع نربز جهت حصول دقت مورد نظر است که در کنار تعداد مشها در حل مسائل غیر خطی که مستلزم حل توالیهای متعدد جهت کاهش خطای محاسبات است، بالطبع یک مزیت مهم در مقابل روش FEM محسوب می شود. لذا در مجموع می توان اذعان نمود که :

۱- تحلیل الاستو-پلاستیک سازه های دوبعدی مبتنی برتوابع پایه نربز در قالب روشهای عددی موجود، چون نیوتون-رافسون ضمن برخورداری از حجم محاسبات و دقت قابل قبول (البته مشروط به انتخاب مناسب گره ها ، درجه ها و نقاط کنترلی) می تواند ابزار ارزشمندی محسوب گردد.

۲- حل سایر مسائل غیر خطی چه در حوزه الاستیک و چه در حوزه پلاستیک نیز بالطبع بر اساس این روش می تواند از ارجحیت برخوردار باشد.

۳- نکته بسیار مهم در حل عددی بر اساس روش IGA لزوم درک عمیق و صحیح از مسأله غیرخطی و مفهوم توابع نربز فضای پارامتری و فضای فیزیکی می‌باشد که جز در سایه چنین

درک عمیقی ، امکان تحقق برنامه نرم افزاری با پیچیدگیهای موجود در مسائل غیر خطی عملا امکانپذیر نمی باشد.

۴- یکی از چالشهای موجود در روش IGA ، نحوه اعمال نیروهای گسترده خارجی بر سازه مورد نظر است که تجربیات موجود نشان می دهد انتگرال گیری مبتنی بر توابع نربز در طول مرزی از المان که در معرض نیروی خارجی است می تواند منجر به پاسخهای صحیح گردد.
از آنجاییکه در حل الاستو پلاستیک مسأله باز توزیع نیروها در افزایشهای کلی و توالی های محلی اهمیت ویژه‌ای را داراست، توزیع صحیح نیروهای خارجی از اهمیت بالاتری نسبت به مسائل حوزه الاستیک برخوردار است.

۵-۲- پیشنهادات

با توجه به نتایج حاصل از انجام این پایان نامه، موارد ذیل جهت فعالیتهای آتی پیشنهاد می گردد:

۱- نظر به قابلیتهای ویژه نرم افزار متلب در حل ماتریسی مسائل و بهره گیری از یک ویرایشگر قوی عملا توسعه های بعدی روش ایزوژئومتریک مبتنی بر آن توصیه می گردد رویکردی که در مرور محصولات آکادمیک و تجاری اخیر (فصل سوم) بوضوح قابل مشاهده است، در این راستا نرم افزار GEO PDE به عنوان یک بستر قدرتمند پیشنهاد می‌شود.

۲- حل مسائل الاستو-پلاستیک با فرض سخت شدگی غیرخطی

۳- تعمیم حل مسائل الاستو-پلاستیک در فضای سه بعدی

۴- بررسی شکل صحیح بارگذاری خارجی در روش آیزوژئومتریک با توجه به نقش نقاط کنترلی در حل مسأله

مراجع

[١] David J. Benson, Thomas J. R. Hughes, Yuri Bazilevs., " Isogeometric methods".

[٢] Thomas J.R. Hughes. , (٢٠٠٨). , " **Isogeometric Analysis: Progress and Challenges**", ECCOMAS: European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering

[٣] T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs. , (٢٠٠٥). , "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement". **Compuer Methods in Applied Mechanics and Engineering**., Vol ١٩٤. , pp. ٤١٣٥-٤١٩٥

[٤] T.J.R Hughes, AR, and Sangalli. , (٢٠٠٨)." Duality and Unified Analysis of Discrete Approximations in Structural Dynamics and Wave Propagation: Comparison of p-method Finite Elements with k-method NURBS". , **Compuer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. , Vol ١٩٧. , pp. ٤١٠٤-٤١٢٤.

[٥] AR, , (٢٠٠٦). , "An isogeometric analysis approach for the study of structural vibrations". , **Journal of Earthquake Engineering**, Vol ١٠(s.i.١). , pp.١–٣٠.

[٦] Cottrell, AR, Bazilevs, and Hughes. , (٢٠٠٦). , "Isogeometric analysis of structural vibrations". **Compuer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. , Vol ١٩٥. , pp.٥٢٥٧–٥٢٩٦.

[٧] R. Duvigneau. , (٢٠٠٩). , "An Introduction to Isogeometric Analysis Application to Heat Conduction" INRIA Research Report RR-٦٩٥٧.

[٨] A. Buffa and R. Vazquez., (٢٠٠٣). , " IsoGeometric analysis for electromagnetic problems". , Tec. Rep, IMATICNR.

[٩] A.Anandarajah. , (٢٠١٠). , "**Computational Methods in Elasticity and Plasticity: Solids and Porous Media".** Springer ScienceBusiness Media. , New York , U.S

[١٠] EA de Souza Neto, D Peri´c, DRJ Owen . , (٢٠٠٨). , "**Computational methods for plasticity: theory and Application**". John Wiely&Sons Ltd. , England.

[١١] D. R. J. Owen, E. Hinton. , (١٩٨٠). , "**Finite element in plasticity: Theory and Practice**". Pineridge Press Limited. , U.K.

[١٢] J. Chakrabarty. , (٢٠٠٦). , "**Theory of plasticity**". , Third edition., Elsevier Butterworth-Heinemann. , England.

[١٣] J.C.Simo, T.J.R. Hughes. ,(١٩٩٨). , "**Computational Inelasticity**". , Springer-Verlag. , New York.

[١٤] Allan F. Bower. , (٢٠١٠). , "**Applied Mechanics of Solids**". , Taylor and Francis Group. , U.S

[١٥] **Dennis Ernens. , (٢٠١١)., MSc thesis. , "Finite Element Methods with exact geometry representation". Aerospace Engineering. , Delft University of Technology.**

[١٦] Les Piegl, Wayne Tiller. , "**The NURBS book**". ٢nd edition. , Springer. , Berlin.

[١٧] Michael R. D orfel, Bert J uttler, Bernd Simeon. , (٢٠٠٧). , "Adaptive Isogeometric Analysis by Local h-Re_nement with T-Splines". **Compuer Methods in Applied Mechanics and Engineering.**

[١٨] N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, S.P.A. Bordas, T. Rabczuk. , (٢٠١١). , "Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical T-meshes for two-dimensional elastic solids". , **Compuer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. , Vol ٢٠٠. , pp. ١٨٩٢–١٩٠٨.

[١٩] Toby Mitchell. , Ph.D thesis. , "**NURBS-Based Adaptive Finite Element Analysis**". , Civil and Environmental Engineering. , California at Berkeley University.

[٢٠] Xiaoping Qian. , (٢٠١٠). , "Full analytical sensitivities in NURBS based isogeometric shape optimization". **Compuer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. , Vol ١٩٩. , pp. ٢٠٥٩-٢٠٧١.

[٢١] Y. Bazilevs, L. Beir˜ao da Veiga, J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, G. Sangalli.(٢٠٠٦), "Isogeometric Analysis: Approximation, stability and error estimates for h-refined meshes". **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences,**Vol.١٦,Issue ٧.

[٢٢] T.J.R. Hughes, A. Reali, and G. Sangalli. , (٢٠١٠), "Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric". **Compuer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. . ,Vol ١٩٩(٥-٨). , pp.٣٠١–٣١٣.

[٢٣] Howard B. Wilson, Louis H. Turcotte, David Halpern. , (٢٠٠٣). , "**Advanced Mathematics and Mechanics Applications Using MATLAB**". Third edition. , Chapman & Hall/CRC. , Florida. U.S.

[٢٤] A.-V. Vuong, Ch. Heinrich , B. Simeon. (٢٠١٠). , "ISOGAT: A ٢D tutorial MATLAB code for Isogeometric Analysis". **Advances in Engineering Software**. , Vol ٢٧. , pp. ٦٤٤-٦٥٥.

[٢٥] C. de Falco, A. Reali, R. VلJzquez. , (٢٠١١). , "GeoPDEs: A research tool for Isogeometric Analysis of PDEs". **Advances in Engineering Software**. , Vol ٤٢. , pp. ١٠٢٠-١٠٣٤.

[٢٦] Daniel Rypl, Borˇek Patzak. , (٢٠١٢). , "From the finite element analysis to the isogeometric analysis in an object oriented computing environment". ,**Advances in Engineering Software.** , Vol ٤٤. , pp. ١١٦-١٢٥.

[٢٧] D. J. Benson, Y. Bazilevs, E. De Luycker, M.-C. Hsu, M. Scott, T. J. R. Hughes T. Belytschko.(٢٠١٠)., "A generalized finite element formulation for arbitrary basis functions: From isogeometric analysis to XFEM". , **International Journal for Numerical Methods in Engineering.** , VOL٨٣ (٦). pp. , ٧٦٥–٧٨٥.

[٢٨] Vinh Phu Nguyen, Robert N. Simpson, St´ephane P.A. Bordas, Timon Rabczuk. , (٢٠١٢). , "An introduction to Isogeometric Analysis with Matlab R implementation: FEM and XFEM formulations". , **Compuer Methods in Applied Mechanics and Engineering**.

[٢٩] Robert L. Taylor. , (٢٠١١). , "**FEAP - - A Finite Element Analysis Program**". , Berkeley.

[٣٠]C. Carstensen, R. Klose. , (٢٠١٠). , "Elastoviscoplastic Finite Element Analysis in ١٠٠ lines of Matlab". , **Journal of Numerical Mathematics**. Vol. ١٠, Issue ٣, P ١٥٧–١٩٢.

[٣١] Jacob Lubliner. , (٢٠٠٦). , "**Plasticity Theory**". , Jacob Lubliner., U.S

[٣٢] E.Ramm, E.Rank, R.Rannacher, K.Schweizerhof, E.Stein, W.Wendland, G.Wittum, P.Wriggers, W.Wundelich. , (٢٠٠٣). , " **Error-controlled adaptive finite elements in solid mechanics**". , John Wiely&Sons Ltd. , England.

[٣٣]M. Puso and J. Solberg., (٢٠٠٦). , "A stabilized nodally integrated tetrahedral". , **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, ٦٧:٨٤١–٨٦٧

[٣٤] S. Glaser and F. Armero., (١٩٩٧). , "On the Formulation of Enhanced Strain Finite Elements in Finite Deformation". , **Engineering with Computers**, ١٤:٧٥٩{٧٩١}.

[٣٥] E. N. Dvorkin and A. P. Assanelli., (٢٠٠٠). , "Implementation and Stability Analysis of the QMITC-TLH Elasto-plastic Finite Strain (٢D) Element Formulation". , **Computers and Structures**, ٧٥:٣٠٥{٣١٢}.

[٣٦] E. N. Dvorkin and A. P. Assanelli. , (٢٠٠٠). , "Implementation and Stability Analysis of the QMITC-TLH Elasto-plastic Finite Strain (٢D) Element Formulation". **Computers and Structures**, ٧٥:٣٠٥{٣١٢}.

[٣٧] Kjell Magne Mathisen, Knut Morten Okstad, Trond Kvamsdal and Siv Bente Raknes, Rakenteiden Mekaniikka., (٢٠١١)., "Isogeometric analysis of finite deformation nearly incompressible solids". , **Journal of Structural Mechanics**. , Vol. ٤٤, No ٣, pp. ٢٦٠ -٢٧٨.

Abstract

Isogeometric Analysis (IGA) as a early developed computational method tries to integrate CAD and CAE packages. In this manner, while improving the accuracy of model geometry and analysis, computational effort also reduces.

In this thesis, by review of the nurbs based IGA, elasoplastic analysis of ۲D problems according to this approach is considered. In this way, elastoplastic formulation of ۲D problems and numerical methods of solving them are reviewed. Then by considering nurbs basis functions, the method of solving ۲D elstoplastic problems based on this functions are presented.

By the developed code in MATLAB to solve these problems as “Elasto-plastic IGA”, numerical solution of some beanchmark problems are obtaind and compared with the FEM or analytical ones. Results show appropriate accuracy of the method and developed software.

Keywords: Isogeometric Analysis, Elastoplasticity, two dimensional solids

Shahrood University of Technology

Faculty of Civil Engineering

Isogeometrical Elasto-Plastic Analysis of Two Dimensional Problems

Zahra Masoumi

Supervisor:

Dr. Behrooz Hassani

September ۲۰۱۲