دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران و معماری

رساله دکتری

توسعه روشهای نوین برای بازیافت تنش و برآورد خطا در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک

احمد گنجعلی

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

مهر 1392

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده عمران و معماری
گروه عمران

توسعه روشهای نوین برای بازیافت تنش و برآورد خطا در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک

دانشجو : **احمد گنجعلی**

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

مهر 1392

باسمه تعالی

شماره : ت ت ع ۹۲/۱۳۸

تاریخ : ۹۲/۷/۲۲

ویرایش :

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

فرم شماره ۱۲

بدینوسیله گواهی می شود آقای احمد گنجعلی دانشجوی دکتری رشته عمران به شماره دانشجویی ۸۸۱۸۲۶۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۸۸ در تاریخ ۹۲/۷/۲۱ از رساله خود با عنوان : **روشهای نوین برای باز یافت تنش و برآورد خطا در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک** دفاع و با اخذ نمره ....۱۹/۰۵........ به درجه : ....عالی........ نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷☐	
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹– ۱۵☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد☐	ه) رساله
نیاز به اصلاحات دارد☐		

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتربهروز حسنی	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتررضا نادری	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۳	دکتر علی کیهانی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۴	دکتر سهیل محمدی	استاد مدعو خارجی	استاد	
۵	دکتر امیر عباس عابدینی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید.

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران:

تاریخ و امضاء:

تقدیم به روح پدرم،

محمدرضا گنجعلی

و

تقدیم به همسرم که به زندگی من معنایی دیگر بخشید.

تشکر و قدردانی:

حمد و سپاس پروردگار جهانیان را که الطاف رحمتش همگان را فرا گرفته و انوار حکمتش هدایتگر و روشنی بخش راه و طریق انسانهاست. رحمت واسعه الهی فرصتی مغتنم داد تا به اقتضای توان و وسع خود از محضر اساتیدی گرانقدر بهره جویم و ره توشه‌ای از بار علمی آنها برگیرم. در این رهگذر به رسم ادب خود را ملزم می‌دانم که با تواضع و از صمیم قلب مراتب سپاس و تشکر خالصانه خود را نسبت به این عزیزان ابراز نمایم.

در این رابطه از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر بهروز حسنی کمال تشکر و قدردانی را دارم؛ چرا که از ایشان در این هفت سالی که افتخار آشناییشان را داشتم، علاوه بر یادگیری نکات علمی ارزنده، درسهایی از اخلاق نیز آموختم. صبر و تواضع ایشان در برخورد با دانشجویان بسیار کم نظیر و مثال زدنی است. تمام امیدم این است که بعد از اتمام این رساله نیز بتوانم این ارتباط را حفظ نمایم و همواره از رهنمودهای ایشان در زندگی استفاده نمایم.

همچنین مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به اساتید بزرگوار، آقایان دکتر نادری، دکتر توکلی، دکتر کیهانی، دکتر کلات جاری، دکتر علایی، دکتر احمدی و کلیه اساتید محترم دانشکده مهندسی عمران دانشگاه شاهرود که از محضرشان کسب فیض نموده‌ام، ابراز می‌نمایم. و لازم می دانم که از دوستان عزیزم از جمله، دکتر ناصر ظریف مقدم، دکتر مسعود مهدی زاده، مهندس مازیار کوشا، مهندس ابوالفضل حجت پناه، مهندس ابوذر میرزاخانی نیز تشکر نمایم.

اما پدرم، امیداوارم که روحتان همواره در رحمت ایزدی و در پرتو مهر اباعبدالله الحسین (ع) شاد باشد. تمام تلاشم را می‌کنم که در این دنیا ذخیره اخرویتان باشم. و از مادر مهربانم، که تمام زندگیم مدیون دعای خیر اوست؛ خاضعانه تشکر نموده، سلامتی، تندرستی و طول عمر ایشان را از خداوند مسئلت دارم.

در پایان از همسرم، که با صبر و راهنماییهای مدبرانه خود نقش مهمی در به پایان رساندن این رساله داشتند کمال قدردانی و تشکر را دارم و امیدوارم که روزی بتوانم قدردان زحماتشان باشم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

مهر ماه سال یک هزار و سیصد و نود دو

چکیده:

استفاده از فناوری طراحی به کمک رایانه در تحلیل مسائل با استفاده از روش نوین ایزوژئومتریک دارای مزیت های فراوانی است که از جمله‌ی آنها حذف خطای مدلسازی هندسه می‌باشد؛ اما در روشهای عددی وجود خطا در تقریب تابع مجهول امری اجتناب ناپذیر است و همواره باعث نگرانی محققین در قابلیت اطمینان نتایج بوده است. در این رساله به توسعه روشهایی پرداخته می‌شود که با استفاده از آن بتوان میزان خطای حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک را برآورد کرد. این مفاهیم در دو بخش اصلی تنظیم شده است.

در بخش اول به معرفی روش برآورد خطا مبتنی بر نقاط فوق همگرا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش-کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه بعدی پرداخته شده است؛ و نشان داده خواهد شد که چرا نقاط انتگرال گیری گوسی در تحلیل ایزوژئومتریک دارای خاصیت فوق همگرایی هستند. در این روش، با استفاده از نقاط فوق‌همگرا، برای تابع مقادیر هریک از مؤلفه‌های میدان تنش در هر وصله، یک سطح فرضی ساخته می‌شود که از تنش ایزوژئومتریک دقیقتر است. به منظور تعریف این سطح از همان توابع شکل نربزی استفاده می‌کنیم که در روش ایزوژئومتریک برای تقریب زدن تابع جابجایی به کار گرفته می‌شوند. نتایج نشان دهنده کارایی مناسب تخمین کننده خطای پیشنهادی در برآورد خطای موجود در تحلیل مسائل تنش-کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه بعدی به روش ایزوژئومتریک می‌باشد.

در بخش دوم به معرفی یک روش ابداعی دیگر جهت بهبود تنش حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک و برآورد خطای آن با استفاده از قید معادلات تعادل پرداخته شده است. در این روش با استفاده از ارضای معادلات تعادل در هر وصله از فضای محاسباتی تحلیل ایزوژومتریک یک سطح تنش بهبود یافته بدست می‌آید. این سطح تنش با استفاده از توابع شکل نربز هم مرتبه با توابع برآورد کننده تابع جابجایی ساخته می‌شود. ویژگی این برآورد کنند خطا عدم نیاز به نقاط انتگرال گیری گوسی به عنوان نقاط فوق همگرای تنش است. جهت بررسی کارایی این برآورد کننده خطا به مدلسازی و تحلیل شش مسئله الاستیسیته دارای حل تحلیلی و مقایسه نتایج بدست آمده از این روش با روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا و نتایج دقیق پرداخته شده است. نتایج نشان دهنده کارایی بهتر این روش نسبت به روش بازیافت تنش بر پایه استفاده از خاصیت نقاط فوق همگرا است و بر این اساس می توان از این روش نیز به عنوان یک روش ساده و موثر دیگر جهت بازیافت تنش و برآورد خطا در روش ایزوژئومتریک نام برد.

کلمات کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریک، برآورد خطا، بازیافت تنش، نقاط فوق همگرا، معادلات تعادل

لیست مقالات حاصل از تحقیقات این رساله

مقالات ژورنالی(ISI):

- Hassani, B; Ganjali, A; Tavakkoli, M; (2012) "**An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery**", *European Journal of Mechanics A/Solids*, 31, 101-109.

مقالات چاپ شده در نشریات علمی پژوهشی (ISC):

- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ مهدی توکلی؛ (1390) " **برآورد خطا و بهبود میدان تنش بدست آمده از تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک** " مجله (ISC) و علمی- پژوهشی مهندسی عمران دانشگاه فردوسی مشهد، دوره 22، شماره 2، صفحه 17-32.
- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ ابوالفضل حجت پناه؛ (1390) " **تحلیل و بهینه سازی شکل سازه-های متقارن محوری با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریک** " مجله (ISC) و علمی- پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها دانشگاه صنعتی شاهرود، دوره 1، شماره 1، صفحه 1-13.
- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ (1391) " **استفاده از نیروهای وارد بر وصله‌های تحلیل ایزوژئومتریک جهت محاسبه تنش بهبود یافته و برآورد توزیع خطا** " مجله (ISC) و علمی- پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها دانشگاه صنعتی شاهرود، دوره 2، شماره 2، صفحه 13-29.
- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ " **بررسی تاثیر نقاط فوق همگرای تنش جهت بهبود حل و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری** " مجله (ISC) و علمی- پژوهشی مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد.

مقالات چاپ شده در کنفرانس‌ها:

- Hassani, B; Ganjali, A; Tavakkoli, M; (2010) "**Error Estimation and Stress Recovery in the Isogeometrical Analysis Method**", *The Fourth International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation (SEMC), Cape Town South Africa.*

- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ عبدالغفور خادم الرسول؛ (1390) " **معرفی روشی هندسی جهت برآورد خطای موجود در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک** " ششمین کنفرانس ملی مهندسی عمران، سمنان، دانشگاه سمنان، ایران.
- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ عبدالغفور خادم الرسول؛ (1390) " **برآورد خطای موجود در تحلیل ایزوژئومتریک صفحهٔ ترکدار تحت کشش**" نوزدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک ایران، بیرجند، دانشگاه بیرجند، ایران.

- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ ابوالفضل حجت پناه منتظری؛ (1390) " **بررسی عملکرد روش ایزوژئومتریک در بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری** " کنفرانس هوافضای ایران، تهران، دانشگاه شهید ستاری.
- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ (1391) " **نقاط فوق همگرای تنش در تحلیل ایزوژئومتریک** " نهمین کنفراس بین المللی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ایران.
- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ ابوالفضل حجت پناه منتظری؛ (1391) " **بهینه سازی شکل سازه های متقارن محوری با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریک** " نهمین کنفراس بین المللی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ایران.
- بهروز حسنی؛ احمد گنجعلی؛ (1391) " **استفاده از معادلات تعادل جهت بازیافت تنش و برآورد خطا در تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک** " اولین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک و فناوریهای پیشرفته، هتل بین المللی عباسی، اصفهان، ایران.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه و کلیات

فصل دوم

برآورد کننده‌های خطا در روش اجزای محدود

فصل سوم

روش بازیافت تنش و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش-کرنش مسطح

فصل چهارم

بازیافت تنش و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری

فصل پنجم

بازیافت تنش و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی

فصل ششم

بهبود تنش و برآورد خطا با استفاده از تعادل در هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک

فصل هفتم

جمع بندی نتایج و پیشنهادات

پیوست

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول

مقدمه وکلیات

1-1- مقدمه

همگام با رشد علوم و فناوری، مسائل مهندسی نیز روز به روز پیچیده تر می‌شوند. با پیچیده تر شدن مسائل و لزوم حل سریعتر و دقیق تر آنها، روشهای تحلیلی دیگر جوابگوی نیازهای روز افزون جوامع نیستند. با چنین نگرشی، محققان همواره سعی کرده‌اند در کنار توسعه مبانی علوم، روشهای عددی را نیز توسعه بخشند.

دراین مسیر، روشهای متعددی توسط محققین ابداع گشته است. از مهمترین اینها می‌توان به روش تفاضلهای محدود، روش اجزای محدود، روش احجام محدود، روش المانهای مرزی و همچنین روش ایزوژئومتریک که از جملهٔ جدیدترین روش‌ها است، اشاره کرد. هر کدام از این روشها موارد کاربرد خاص خود را دارند و هنوز هم محققان درصدد رشد و توسعه این روشها و ابداع روشهای جدید هستند. روش اجزای محدود یکی از روشهایی است که کاربرد فراوانی در حل مسائل بسیاری از رشته‌های مهندسی و به خصوص مسائل مکانیک جامدات دارد. ریشه‌های توسعه این روش را باید در اوائل دهه 1940 میلادی جستجو کرد. در سال 1943 کورانت معادله پواسون پیچش را توسط آنچه امروز المانهای مثلثی خطی نامیده می‌شود، حل کرد، اما کارهای وی مدتها ناشناخته ماند. روش اجزای محدود به شکل امروزی آن، ریشه در کارهای ترنر و همکاران وی در سال 1957 دارد. در سال 1960، کلاف نام «اجزای محدود» را بر این روش نهاد؛ و کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای[1] درسال 1965 توسط زینکویچ پیشنهاد شد[1].

تاکنون مقالات و کتابهای فراوانی در زمینه توسعه روشهای عددی نوشته شده‌اند و هنوز روشها و تکنیکهای جدیدی در این زمینه مطرح می‌شوند تا بتوانند نتایج با دقت مطلوبتری را ارائه دهند؛ اما از همان آغاز مدل سازی رخدادهای فیزیکی توسط کامپیوتر و شکل گیری مبانی روشهای عددی در تحلیل مسائل مهندسی وجود خطا در محاسبات منشأ اصلی نگرانی بوده است.

[1] Partial Differential Equations

حال مهمترین سوالی که در اینجا مطرح است این است که، با وجود در دسترس نبودن حل دقیق برای تمام مسائل، چگونه می‌توان خطا را اندازه گرفت، کنترل کرد و بطور موثر و قابل توجه مقدار آن را کاهش داد؟

در پاسخ به این سوالات روشهای برآورد خطا همگام با به وجود آمدن روشهای عددی توسعه یافته اند که در ادامه این پژوهش به آنها اشاره خواهد شد.

1-2- روش اجزای محدود

روش کلاسیک تحلیل یک محیط پیوسته بدین قرار است که یک تابع تنش یا تغییر شکل که معادلات دیفرانسیل تعادل، روابط تنش- کرنش، و شرایط سازگاری را در هر نقطه از دامنه شامل شرایط مرزی برآورده سازد، تعیین می‌شود. با توجه به قیدهای معمولا پیچیده، تعداد حل‌های کلاسیک موجود، بسیارمحدود می‌باشد. به علاوه اکثر نتایج بدست آمده از روش‌های کلاسیک به صورت سریهای نا متناهی می‌باشد که در محاسبات علمی فقط چند جمله اول آنها به کار گرفته می‌شود که نتیجه آن ایجاد یک تقریب در نتایج است. در صورت عدم تعیین یک تابع صریح، می‌توان معادله دیفرانسیل تعادل را به کمک روش تفاوتهای محدود[1]حل نمود، لیکن این روش نیز ایراداتی دارد که عدم ارضاء شرایط مرزی و عدم دقت در نتایج بدست آمده از جمله آن‌ها است[2].

روش تقریبی دیگری که امروزه به عنوان یک ابزار قوی برای حل عددی محدوده وسیعی از مسائل هندسی به کار می‌رود، روش اجزای محدود[2] است. در روش اجزای محدود، محیط پیوسته به اجزای هندسی ساده وکوچکتری که (جزء محدود) نامیده می‌شود، تقسیم می‌گردد. این عمل را جزء بندی کردن[3] می‌گویند. سپس با انتخاب یک تابع شکل[4] تغییر مکان، مشخصات مصالح و تنشهای داخلی برحسب تغییر مکانهای مجهول گره‌های هر یک از این اجزاء تعریف می‌گردد. با توجه به ترتیب

[1] *Finite difference*
[2] *Finite Element*
[3] *Discretizing*
[4] *Shape Function*

قرارگیری اجزاء در کنار یکدیگر، معادلات آنها بر هم سوار شده و با منظور کردن نیروهای خارجی و شرایط تکیه گاهی درمحل گرها، معادلات تعادل کل سیستم بدست می‌آید. این معادلات نیروهای گرهی را به تغییر مکانهای گرهی ربط می‌دهند. با حل این معادلات تغییر مکانهای گرهی و با استفاده از آنها تنشهای داخلی محاسبه می‌شوند[2].

1-3- منابع خطا در روش اجزای محدود

واضح است که روش اجزای محدود یک روش تقریبی است. منابع خطا در روش اجرای محدود را می‌توان به سه گروه عمده تقسیم کرد [3]:

1- **خطای ناشی از تقریب زدن دامنه حل مسأله** : این خطا از آنجا ناشی می‌شود که درحالت کلی نمی‌توان دامنه حل مسأله را با المانهای مورد نظر به طور کامل پوشانید. برای مثال، یک صفحه دایره‌ای شکل را هیچگاه نمی‌توان با المانهای مثلثی خطی به طور کامل مدل نمود. هر چند که با ریز تر نمودن شبکه المانها این خطا را می‌توان کاهش داد.

2- **خطای ناشی از گرد کردن اعداد** : این گروه از خطاها بستگی به سخت افزار و نرم افزار مورد استفاده برای محاسبات دارد. از آنجا که تعداد محدودی از ارقام یک عدد در رایانه ذخیره می‌شود، استفاده از این عدد در محاسبات باعث ایجاد خطا خواهد شد و به علت اینکه محاسبات معمولا به صورت زنجیروار به نتایج مراحل قبل وابسته است، این موضوع باعث گسترش خطا در تمامی حل می‌گردد. بر خلاف سایر انواع خطاها، ریز تر نمودن شبکه المان بندی معمولا این گروه از خطاها را تشدید می‌کند. برای کاهش این گروه از خطاها، باید به صورت سخت افزاری و یا نرم افزاری تعداد ارقامی از یک عدد را که در رایانه نگهداری می‌شود، افزایش داد که این کار با افزایش حافظه مورد نیاز و همچنین بالا رفتن زمان حل همراه است.

3- **خطای ناشی از گسسته سازی** : این گروه از خطاها، عمده ترین منبع خطا در روش اجزای محدود بوده و ناشی از تقریب زدن میدان جابجایی به وسیله توابع شکل می‌باشد. این گروه ازخطاها

نیز با ریزتر کردن شبکه المان بندی و بالا بردن درجه توابع شکل مورد استفاده، کاهش می‌یابد.

این سه گروه خطا در حل عددی معادله دیفرانسیل و برای مثال در بدست آوردن مقدار جابجایی u هر گره از معادلات الاستیسیته وارد می‌شود.

1-4- پیشینه علمی برآورد خطا و آنالیز تطبیقی در اجزای محدود

از اولین مقاله‌هایی که در آن یک روش عمومی از تخمین خطا بیان شد، مقاله‌هایی است که توسط ریچاردسون[1]در سال 1910 نوشته شده است. اصولا روش ریچاردسون در تخمین خطا از این حقیقت پیروی می‌کند که خطا در هر طرحی از تفاوت محدود معمولا به اندازه مش‌های مورد استفاده (یا امروزه اندازه جزء محدود) بستگی دارد[4].

کار اصلی در تخمین خطا در سال 1978 و توسط بابوشکا[2] و رینبولت[3] آغاز شد. روش آنها بر این اساس بود، که دقت باقیمانده را در یک گروه از المانها و یا یک المان تنها مورد بررسی قرار داده و به کمک آن می‌توانستند خطا را تخمین بزنند[4].

معمولا کیفیت ودرستی روشهای تخمین خطا به وسیله مقایسه بین معیار خاصی از خطای واقعی و خطای تقریبی بررسی می‌گردد. البته امکان محاسبه خطای دقیق برای یک سری مسائل خاص که حل دقیق آنها در دسترس است، وجود دارد. در این راستا، نسبت خطای تقریبی به خطای واقعی شاخص تأثیر[4] نامیده می‌شود که این نسبت اولین بار توسط بابوشکا در سال 1981 ارائه شد[5].

در سال 1984 یک کنفرانس مهمی پیرامون اصلاح وفقی و تخمین خطاها در لیسبون برگزار شد. در این کنفرانس پیشرفتهای جدیدی در زمینه برآوردکننده‌ها ارائه شدکه یکی ازاین پیشرفتها روش المان بازیافت بود. روش فوق توسط دمکوویز[5] ارائه شد و برای بسیاری از مسائل فیزیک و مکانیک

[1] L.F. Richardson
[2] I. Babŭska
[3] C. Rheinboldt
[4] Effectivity Index
[5] *Demkowicz*

قابل اجرا بود و سرانجام روند مشابهی توسط بنک[1] و وزر[2] ارائه گردید که منظور اصلی آنها ارائه روش آنالیز ریاضی بر مسائل بیضوی دو بعدی بود[4].

بابوشکا و همکارانش در 1986 برای اولین بار شبکه المان بهینه را شبکه‌ای با توزیع یکنواخت معیار خطای انرژی[3] روی کل دامنه، برای مسائل یک بعدی تعریف کردند[6]. از این پس این تعریف در همهٔ روشهای آنالیز تطبیقی مورد استفاده قرار گرفت.

در سال 1987 زینکویچ و زو روش بازیافت تنشها را در برآورد خطا ابداع کردند. و در همان سال روش ساده‌ای برای تخمین خطای کلی و محلی در حل المانهای محدود و شکلی ساده از آنالیز تطبیقی به روش h را ابداع کردند[7].

در سال 1989 زینکویچ و زو طی مقاله‌ای با تقریب خطا در مسائل خمش صفحه، روشی را برای اصلاح المان بندی مثلثی که طی آن، بعد المانها ریزتر می‌شد بر مبنای آنالیز تطبیقی ارائه کردند[8]. از این پس این دو محقق تحقیقات زیادی در آنالیز تطبیقی انجام دادند و در سال 1992 روش SPR [4] را در برآورد خطای حل المانهای محدود وآنالیز تطبیقی، طی دو مقاله معروف ارائه کردند [9 و10].

در 1993 ادن و همکارانش روش مانده‌ها در برآورد خطا را با اضافه کردن قیود تعادل اصلاح کردند[11].

در سال 1993 بوگدا[5] و اولیور یک روش کلی در بهبود خطا در حل مسائل بهینه سازی شکل با استفاده از آنالیز تطبیقی ارائه کردند[12].

در 1997 برومند و زینکویچ روش قدرتمند دیگری در برآورد خطا ارائه کردند که نسبت به روشهای قبلی دارای هیچ محدودیتی نبود[13و14]. این روش قابل استفاده در اکثر مسائل به ویژه مسائل

---

[1] *Bank*

[2] *Weiser*

[۳] Energy error norm

[4] Superconvergent Pach Recovery

[5] Bugeda

پلاستیک است که این ویژگی یک مزیت مهم به شمار می‌آید.

اینها تنها گوشه‌ای از کارهایی بود که در زمینه برآورد خطا و حل تطبیقی مسائل انجام شده است. و نمی‌توان به تمام مقالاتی که در این زمینه تاکنون به چاپ رسیده است، اشاره کرد. امروزه روشهای برآورد خطا و بهبود نتایج بدست آمده از تحلیل عددی مسائل یکی از مهمترین شاخه‌های علم مکانیک محاسباتی به شمار می‌رود و هنوز نیز یکی از پر مخاطب ترین موضوعات مورد علاقه محققین است و مقالات بسیاری در زمینه توسعه روشهای آن به چاپ می‌رسد.

1-5- هدف و تشریح مسأله در این رساله

با توجه به اینکه طراحی مهندسی عمدتا با استفاده از نتایج بدست آمده از تحلیل های عددی صورت می‌پذیرد، در صورتی که نتوان به نتایج تحلیل عددی با قابلیت اطمینان بالا دست یافت، طرح مهندسی با مشکل مواجه خواهد شد. از اینرو یافتن راه حلی مناسب جهت برآورد خطا و بهبود حل مسئله همگام با پیدایش و توسعه روش‌های عددی مورد توجه قرار داشته است و امروزه یکی از مهمترین شاخه های پژوهش در زمینه مکانیک محاسباتی به شمار می‌رود.

تحلیل ایزوژئومتریک یک روش جدید در آنالیز مسائل مهندسی به شمار میرود و با توجه به مزایای بالقوه ای که نسبت به دیگر روشهای عددی از جمله اجزای محدود دارد، تصور می‌شود که در آینده‌ای نزدیک بتواند به صورت گسترده در علوم مختلف به کار رود. علیرغم دقت نسبتا خوب روش تحلیل ایزوژئومتریک، نظیر هر روش دیگر عددی، وجود خطا در آن اجتناب ناپذیر است؛ و باتوجه به اینکه در حالت کلی پاسخ دقیق مسائل موجود نیست، یافتن راه حلی جهت برآورد خطای موجود در محاسبات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این پژوهش بدنبال ابداع و توسعه روشهایی مناسب جهت بهبود حل ایزوژئومتریک و برآورد خطای موجود در آن می‌باشیم. با توجه به اینکه روش تحلیل ایزوژئومتریک یک روش نوین در آنالیز مسائل مهندسی است، هنوز دارای کمبودهای فراوانی در زمینه پژوهش بر روی تخمین خطای نتایج بدست آمده از آن می‌باشد که این امر اهمیت موضوع این رساله

را بیشتر روشن می‌سازد.

با توجه به روند بهبود روش های بازیافت تنش و برآورد خطا در دیگر روش های عددی در این پژوهش نیز انتظار می‌رود که بتوان به بهبود و ارائه روش های نوین در برآورد خطای تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک دست یافت. هدف از بهبود روش برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک، بالا بردن شاخص تاثیر تخمین کننده خطا و انطباق بیشتر نحوهٔ توزیع خطای بدست آمده از برآورد کننده خطای پیشنهادی با برآورد کننده خطای دقیق در حل مسائل مختلف می‌باشد. با استفاده از روش‌های پیشنهادی جهت بازیافت تنش و بهبود حل ایزوژئومتریک در این پژوهش می‌توان به افزایش دقت نتایج در حل تمام مسائلی پرداخت که در آنها از روش ایزوژئومتریک جهت تحلیل استفاده شده است. همچنین کاربرد اصلی روش برآورد کننده خطا در این پژوهش استفاده از آن در حل تطبیقی و بهبود محلی شبکه تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد. روش برآورد کننده خطای پیشنهادی، مناطقی از دامنه حل ایزوژئومتریک که دارای خطای زیادی می‌باشند را شناسایی می‌کند که به کمک آن می‌توان به بهبود محلی شبکه در آن مناطق و افزایش دقت حل ایزوژئومتریک دست یافت.

پژوهش شکل گرفته در قالب این رساله دکتری از سه بخش کلی زیر تشکیل شده است.

در بخش اول، سعی شده است تا خواننده را با انواع روشهای برآورد خطا در اجزای محدود آشنا سازد. بدین منظور دو دسته روش برآورد خطا معرفی شده است. روش‌های برآورد خطا مبتنی بر محاسبه مانده‌ها و روش‌های برآورد خطا بر پایه بازیافت تنش، دو دسته روش برآورد خطا در اجزای محدود می‌باشند. با توجه به کارایی مطلوب روشهای بازیافت تنش نسبت به روشهای مبتنی بر محاسبه مانده‌ها در اجزای محدود، در ادامه این بخش به معرفی چندین روش برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش پرداخته شده است. هدف از این بخش، آشنایی با مفاهیمی است که در برآورد خطای روش ایزوژئومتریک مورد استفاده قرار گرفته است.

در بخش دوم، به طور خلاصه اصول به کار گرفته شده در تحلیل ایزوژئومتریک بیان شده است و

فرمولبندی مسائل تنش-کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه بعدی در تحلیل ایزوژئومتریک ارائه شده است. همچنین به تشریح روش برآورد خطا بر مبنای نقاط فوق همگرای تنش در مسائل تنش-کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه بعدی پرداخته شده است؛ و با حل چندین مثال مختلف کارایی این روش را در برآورد خطای مسائل دوبعدی و سه‌بعدی مورد بررسی قرار داده است.

در بخش سوم، به معرفی روش برآورد خطا بر مبنای استفاده از تعادل در هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک پرداخته شده است. کارایی این روش با حل شش مثال مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج حاصل از آن با روش برآورد خطا مبتنی بر نقاط فوق همگرا، مقایسه شده است.

در انتها نیز به معرفی برنامه نوشته شده به زبان فرترن جهت تحلیل و برآورد خطای روش ایزوژئومتریک در مسائل تنش-کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه بعدی پرداخته شده است.

فصل دوم

برآورد کنندههای خطا در روش اجزای محدود

2-1- مقدمه

از نظر یک تقسیم بندی، برآورد کننده‌های خطا در دو دسته پسرونده[1] وپیشرونده[2] قرار می‌گیرند که از بین آنها موضوع برآورد پسرونده خطا به صورت یکی از جنبه‌های بسیار مهم در کاربرد روش اجزای محدود به شمار می‌رود. در این نوع برآورد، پس از هر بار حل مسأله با روش اجزای محدود، با استفاده از مقادیر محاسبه شده، خطا برآورد می‌شود. در صورتی که برآورد پیشرونده خطا، اطلاعاتی درباره همگرایی و پایداری حل‌های مختلف ارائه می‌دهد. همچنین اطلاعاتی اجمالی درباره رفتار خطا، مادامی که متغیرهای شبکه تغییر می‌کند، ارائه می‌دهد اما هیچ اطلاعات کمی درباره مقدار خطا در یک مسئله خاص ارائه نمی‌کند[15].

در تقسیم بندی مشابه روشهای تخمین خطا در دو گروه عمده زیر قرار می‌گیرند :

1- **استقرایی**: این گروه از برآورد کننده‌های خطا قبل از حل مسأله، بر اساس خواص حل دقیق آن مانند هموار بودن و غیره، اطلاعاتی در مورد نرخ حدی همگرایی (حالتی که ابعاد المانهای به کار رفته به سمت صفر میل می‌کند) فراهم می‌آورند. به لحاظ کاربرد محدود، این گروه از برآورد کننده‌های خطا بیشتر در تحقیقات تئوری به کار برده می‌شوند.

2- **استنتاجی**: این گروه از برآوردکننده‌های خطا، با استفاده از نتایج یک حل اجزای محدود و با استفاده از فرضیات اولیه، تخمینی از توزیع خطای یک کمیت در دامنه حل مسأله ارائه می‌دهند. برآوردکننده‌های خطای استنتاجی امروزه نقش عمده‌ای در کاربردهای عملی مهندسی ایفا می‌کنند، از این رو در این تحقیق تنها این گروه از برآوردکننده‌های خطا مورد توجه قرار گرفته است.

در برآورد خطا به روش استنتاجی، دو رویکرد عمده وجود دارد. اولین رویکرد، تخمین خطا بر اساس روشهای باقیمانده است، که از ادامه کار بابوشکا می‌باشد. و دومین، که امروزه تأکید بر استفاده از آن می‌باشد، استفاده از روشها با وصله‌های خود تعادلی[3] است، که در این زمینه انس ورس و اُدن پیشتاز

[1] posteriori estimation of error
[2] priori estimation of error
[3] self-equilibrating patches

می‌باشند. روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) نیز در این دسته قرار می‌گیرند[4].

در ادامه این فصل به شرح و توضیح این دو رویکرد می‌پروازیم.

2-2- روشهای برآورد خطا مبتنی بر محاسبه مانده‌ها

از آنجا که حل اجزای محدود یک معادله دیفرانسیل، با حل دقیق آن متفاوت است، واضح است که حل اجزای محدود، معادله دیفرانسیل را به طور کامل ارضا نمی‌نماید. همچنین در یک حل اجزای محدود، اصولا تنها میدان متغیر اصلی معادله (u) دارای پیوستگی درلبه المانها می‌باشد و میدان گرادیان آن، (s) گسسته است. این موضوع، اساس تخمین خطا در این دسته از روشها است. در اینجا با قرار دادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادله دیفرانسیل اولیه و محاسبه مانده آن و نیز محاسبه پرش میدان گرادیان در لبه المانها، تخمینی از خطای حل اجزای محدود به دست می‌آید.

این روش نخستین تلاش برای محاسبه خطا در روش اجزای محدود بوده است. این روش و نیز ایده تعیین خطاها در روش اجزای محدود اولین بار در سال 1978 توسط بابوشکا و رینبولت مطرح شد[1].

در ادامه به شرح مختصری از این روش می‌پردازیم[2]:

فرض کنید معادله دیفرانسیل حاکم بر یک مسئله الاستیسیته با شرایط مرزی معلوم به صورت زیر است:

$$\mathbf{L}\mathbf{U}+\mathbf{P}=0 \qquad \text{in} \quad \Omega \tag{1-2}$$

$$\mathbf{L_0}\mathbf{U}+\mathbf{P_0}=0 \qquad \text{in} \quad \Gamma$$

که در آن $\mathbf{L_0}$ و $\mathbf{L}$ اپراتورهای خطی و $\mathbf{U}$ میدان جابجایی است. منظور از Ω کل ناحیه و Γ مرز است.

اکنون با استفاده از روشهایی مثل روش گالرکین می‌توان یک میدان جابجایی پیشنهادی $\hat{\mathbf{U}}$ بدست آورد. اگر این میدان جابجایی تقریبی در معادله (2-1) قرار داده شود، طرف دوم این معادله به علت وجود خطای گسسته سازی صفر نخواهد شد. این مقدار را مانده می‌گویند وآن را با r نمایش می‌دهند.

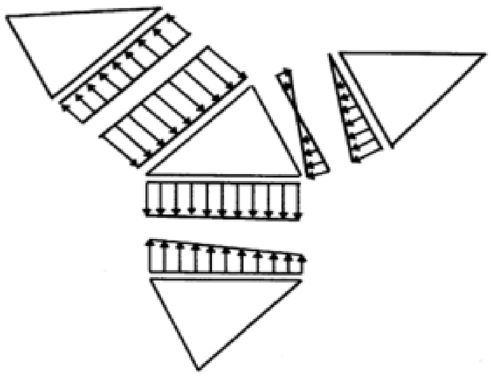
$$r = \mathbf{L}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{P} \tag{2-2}$$

با استفاده از این رابطه مقدار خطا در هر نقطه قابل محاسبه است. بنابراین می‌توان مقدار خطا را برای هر المان با انتگرال گیری روی المان به صورت زیر محاسبه نمود

$$\left\| e_i^{\,2} \right\| = \int_{\Omega_e} r^2 d\Omega \tag{3-2}$$

که در این رابطه e_i شاخص خطا و Ω_e سطح المان i ام است. البته مقدار خطایی که از رابطه فوق به دست می‌آید قسمتی از خطای کل المان است.

اگر یک مسئله الاستیسیته از نوع C^0 مطرح باشد، پیوستگی در تغییر مکان وجود دارد ولی در مشتق و یا شیب آن پیوستگی وجود ندارد واین بدان معنی است که تنشها در مرز المان با تنشهای مرزی المان مجاور خود تفاوت دارند. شکل 2-1 این موضوع را نشان می‌دهد.



شکل 2-1 عدم پیوستگی شیب در مرز المان

با توجه به مطالب فوق شاخص خطا به صورت زیر اصلاح می‌گردد

$$\left\| e^2 \right\| = c_1 \int_{\Omega} r^2 d\Omega + c_2 \int_{\Gamma} J^2 d\Gamma \tag{4-2}$$

در رابطه فوق J مقدار پرش در مرز المانها و Γ مرز بین کل المانهاست. برای یک المان تنها در حالت دو بعدی ضرایب c_1 و c_2 محاسبه شده است. این ضرایب به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$c_1 = \frac{h^2}{24k\,p^2} \tag{5-2}$$

$$c_2 = \frac{h}{24k\,p}$$

در این روابط h اندازه المان، p درجه یا توان توابع شکل و k ضریبی است که بستگی به معادله دیفرانسیل حاکم دارد. مثلا برای مسائل تنش وکرنش مستوی ضریب k به صورت زیر بدست آمده است.

$$k = \frac{E}{1-n} \tag{6-2}$$

که E مدول یانگ و n ضریب پواسون است. بنابراین مقدار خطا برای هر المان به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\left\| e_i^{\,2} \right\| = \frac{h^2}{24k\,p^2} \int_{\Omega_i} r^2 d\Omega + \frac{h}{24k\,p} \int_{r_i} J^2 d\Gamma \tag{7-2}$$

در نتیجه خطا روی کل محیط برابر است با

$$\left\| e^2 \right\|_{total} = \sum_{i=1}^{m} \left\| e_i^{\,2} \right\| \tag{8-2}$$

در رابطه بالا m تعداد کل المانهاست.

در تحقیقاتی که بابوشکا همراه با یک تیم تحقیقاتی به سرپرستی پروفسور استروبولیس[1] از دانشگاه تگزاس، انجام دادند، روشی ابداع شد که به کمک آن می‌توان مقایسه‌ای بین روشهای تخمین خطا انجام داد. این روش آزمون وصله بابوشکا نام گرفت و بر اساس آن پی برده شد که روشهای بازیافتی در مقایسه با روشهای باقیمانده‌ای از دقت و همگرایی بهتری برخوردار می‌باشند[4]. لذا در این تحقیق از بررسی بیشتر این دسته از برآورد کننده‌ها صرف نظر می‌شود.

2-3- روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان)

پس از حل معادله دیفرانسیل الاستیسیته توسط روش اجزای محدود و به دست آوردن مقادیر جابجایی در هر گره، در صورتی که به دست آوردن مقادیر دقیق تنش (گرادیان میدان) در گره‌ها،

[1] Strouboulis

روی مرز المانها و یا هر جای دیگر از دامنه مورد نظر باشد، در آن صورت باید از روش‌های بازیافت تنش استفاده نمود. زیرا اگر مسألهٔ تغییراتی، از درجات پایین، مانند C^0 باشد، تنها تابع جابجایی در نقاط گرهی و مرز المانها پیوسته بوده و تنش یا گرادیان میدان در آن نقاط گسسته و همراه با پرش می‌باشد. برای مثال در هر گره که چهار المان مربعی شکل به آن متصل باشد، فقط یک مقدار جابجایی پس از حل معادلهٔ دیفرانسیل به وسیلهٔ اجزای محدود موجود بوده، ولی برای مشتق اول و تنش، به دلیل ناپیوسته بودن شیب در آن گره، از هر المان متصل به گره مذکور مقداری متفاوت، یعنی در مجموع چهار مقدار مختلف برای آن گره وجود خواهد داشت. این موضوع برای کلیهٔ مرزهای المانها نیز صادق می‌باشد. از اینجا می‌توان به اهمیت بحث بازیافت تنش پی برد. زیرا قاعدتا باید فقط یک مقدارمشخص، نزدیک به حل دقیق، برای مشتق اول یا تنش در هر گره موجود باشدکه به دست آوردن این مقدار، با استفاده از عملیات تکمیلی بازیافت تنش به روی نتایج حاصل از حل روش اجزای محدود مقدور می‌باشد، که خود شامل روشهای مختلفی است.

به طور کلی بازیافت تنش روشی به منظور بالا بردن دقت، وپیوسته و هموار نمودن میدان تنش یا گرادیان میدان به دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش با استفاده از حل روش اجزای محدود، یک جواب نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقاط دلخواه روی دامنه محاسبه شده که دقت بالاتری نسبت به حل اولیهٔ اجزای محدود داشته است.

این میدان تنش بهبود یافته، به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \tag{9-2}$$

که در آن $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ مقادیر گرهی این میدان و $\mathbf{N}$ توابع شکل مورد استفاده در المانها است. با استفاده از این میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\mathbf{e}^*_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{h}} \tag{10-2}$$

که در رابطه بالا $\boldsymbol{\sigma}_h$ تنش ناشی از اجزای محدود می‌باشد. روشهای متعددی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد. واضح است که کارایی روند بازیافت نقش عمده‌ای در کارایی این گروه از

برآورد کننده‌های خطا دارد. در ادامه این فصل، مهمترین این روشها بررسی خواهد شد.

2-3-1- روش میانگین گیری[1]

روشی که توسط هینتن و کمپبل[2] در سال 1974 برای بازیابی تنش به کار برده شده است، که در حال حاضر نیز در برخی نرم افزارهای اجزای محدود برای به دست آوردن یک مقدار واحد تنش در گره‌ها به کار می‌رود[16].

در این مقاله دو متد سراسری و موضعی پیشنهاد شده است. در روش موضعی پیشنهاد شده ابتدا مقادیر تنش در نقاط گوسی به وسیله روش اجزای محدود به دست آمده و پس از آن با استفاده از برونیابی در هر المان مربعی با چهار نقطه گوسی، مقادیر تنش در گره‌ها به دست می‌آید. میانگین تنش حاصل از المانهای متصل به هر گره پس از عمل برونیابی به عنوان مقدار بهبود یافتهٔ آن تعریف می‌گردد و مطابق رابطه داریم :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i^* = \frac{1}{r_i} \sum_{t \in x_i} \boldsymbol{\sigma}_h^t \big|_{X_i} \tag{11-2}$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}_h^t$ تنش محاسبه شده در المان t در محل گره i ام بعد از عمل برونیابی و r_i تعداد المانهای متصل به گره i ام می‌باشد. این روش با وجود سادگی وسرعت بالا در مسائل ساده که شبکه المان بندی منظم است، کارایی قابل قبولی دارد.

2-3-2- روش تصویر L_2[3]

اودن و براچلی[4] در سال 1971 روش تصویر L_2 را پیشنهاد کردند[17]. این روش از اولین روشهای بازیافت تنش محسوب می‌شود. در این روش با کمینه کردن عبارت زیر :

$$\Pi = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h})^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}) d\Omega \tag{12-2}$$

---
[1] Averaging Method
[2] Hinton and Campbell
[3] *L2* Projection Method
[4] Oden and Brauchli

روی دامنه حل، مقادیر گرهی میدان تنش بازیافتی به صورت زیر بدست می‌آید :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*} = \mathbf{A}^{-1}\left(\int_{\Omega}\mathbf{N}^{T}\,\mathbf{DB}d\,\Omega\right)\bar{\mathbf{u}}_{h} \tag{13-2}$$

که در آن :

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega}\mathbf{N}^{T}\,\mathbf{N}d\,\Omega \tag{14-2}$$

و $\boldsymbol{\sigma}^{*}$ تنش بازیافتی و $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{h}}$ تنش به دست آمده از حل اجزای محدود و Ω دامنهٔ حل می‌باشد. البته این روش کارایی محدودی داشته و با ابداع روشهای جدیدتر به ندرت از آن استفاده می‌شود.

2-3-3- روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق هم گرا SPR [1]

این روش بازیافت تنش در سال 1992 توسط زینکویچ و زو ابداع شد و گام بسیار بلندی در بازیافت تنش برداشته شد[9]. امروزه این روش به عنوان یکی از بهترین و موثرترین روشها برای برآورد خطا در مسائل مهندسی به کار می‌رود. اساس این روش برمبنای استفاده از نقاطی است که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است[2].

دراین روش با برازش یک میدان به صورت چند جمله‌ای با ضرایب نامعین بر روی گرادیان حاصل از روش اجزای محدود روی گروه المانهای متصل به هر گره[2]، میدان گرادیان بهبود یافته تعیین می‌شود. این میدان به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma}_{p}^{*} = \mathbf{Pa} \tag{15-2}$$

در روابط فوق $\boldsymbol{\sigma}_{p}^{*}$، تنش بهبود یافته، $\mathbf{P}$ مجموعهٔ تک جمله‌ای‌های حداکثر هم درجه با توابع شکل

[1] Superconvergent patch recovery
[2] patch

المان و **a** مقادیر ثابت مجهول هستند، با کمینه کردن تابع (2-16) مقادیر مجهول مطابق رابطهٔ (2-17) به دست می‌آید.

$$\mathbf{F(a)} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\sigma}_h(x_i, y_i) - \boldsymbol{\sigma}_p^*(x_i, y_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\sigma}_h(x_i, y_i) - \mathbf{p}(x_i, y_i)\mathbf{a})^2 \tag{16-2}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{17-2}$$

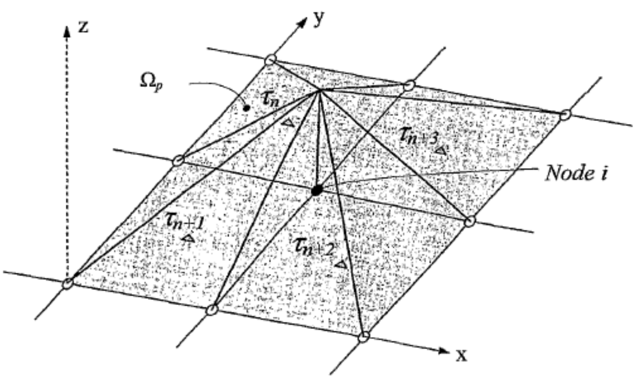
در رابطهٔ (2-17) **A** و **b** به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}^T(x_i, y_i)\mathbf{P}(x_i, y_i) \tag{18-2}$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}^T(x_i, y_i)\boldsymbol{\sigma}_h(x_i, y_i) \tag{19-2}$$

در این روابط، $\boldsymbol{\sigma}_h$ تنش به دست آمده از روش اجزای محدود، x_i و y_i مختصات نقاط فوق همگرا یا نقاط بهینه نمونه گیری گرادیان در Ω_p و n تعداد المانهای موجود در هر وصله [1] است.

پس از محاسبه **a**، سهم گره‌های موجود در Ω_p از رابطهٔ (2-15) به وسیلهٔ یک تابع شکل خطی که مرکز آن بروی گره i ام است، محاسبه می‌شود(شکل 2-2). واضح است که این سهم برای گره اصلی برابر واحد و برای سایر گره‌ها گوشه‌ای برابر صفر می‌باشد. عملیات فوق برای گره‌های میانی، یعنی گره‌هایی که در رئوس واقع نشده‌اند انجام نمی‌گیرد و سهم حاصل از عملیات به روی گره‌های گوشه‌ای برای آنها منظور می‌گردد.



شکل 2- 2 محاسبهٔ سهم گره‌ها در روش SPR

[1] patch

2-3-4- روش بازیافت تنش بر مبنای تعادل در زیر دامنه‌ها، REP [1]

این روش بازیافت در سال 1997 توسط برومند و زینکویچ ابداع شد [13]. در این روش بر خلاف روش SPR احتیاج به مشخص نمودن نقاط فوق همگرا در المان نیست. اساس کار در این روش، معادل قرار دادن نیروهای عمل کننده بر یک گروه از المانها برای میدان تنش حاصل از روش اجزای محدود و میدان تنش بهبود یافته[2] است. اگر مانند روش SPR حول گره i (واقع در گوشه هر المان) یک زیر دامنهٔ $\boldsymbol{\Omega}_p$ در نظر گرفته شود، برآیند نیروهای عمل کننده بر آن را می‌توان به صورت زیر به دست آورد :

$$\mathbf{F}_p = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_h d\Omega \tag{20-2}$$

در رابطه بالا، $\mathbf{F}_p$ برآیند اثر نیروهای باقیمانده دامنه و نیز اثر نیروهای بدنه بر این گروه از المانها است. همین کمیت را می‌توان برای میدان تنش بازیافتی تعریف نمود :

$$\mathbf{F}_p^* = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega \tag{21-2}$$

در این روش میدان تنش به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{Pa} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} & & & \\ & \mathbf{p} & & \\ & & \mathbf{O} & \\ & & & \mathbf{p} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{D_s} \end{Bmatrix} \tag{22-2}$$

که در آن p مجموعه تک جمله‌ایهای هم درجه با توابع شکل به کار رفته در المان و D_s بعد میدان تنش است. از آنجا که تعداد معادلات و مجهولات به احتمال زیاد با هم برابر نیست، سعی می‌شود دو کمیت $\mathbf{F}_p$ و $\mathbf{F}_p^*$ به صورت تقریبی برابر قرار داده شوند. به این منظور، با کمینه کردن تابع زیر:

$$\Pi = \left(\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_h \, d\Omega \right)^T \left(\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^* \, d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_h \, d\Omega \right) \tag{23-2}$$

---
[1] Recovery by Equilibrium in Patches
[2] Improved Stress Field

می‌توان ضرایب مجهول را محاسبه نمود. اگر تابع فوق به صورت زیر نوشته شود:

$$\Pi = (\mathbf{Ha} - \mathbf{F}_p)^T (\mathbf{Ha} - \mathbf{F}_p) \tag{24-2}$$

که در آن:

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \, d\Omega \tag{25-2}$$

با کمینه کردن رابطه (24-2)، ضرایب مجهول به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{F}_p \tag{26-2}$$

اما از آنجایی که گاهی تعداد معادلات نهفته در کمینه کردن رابطه (24-2) کمتر از تعداد مجهولات است، محاسبه **a** از رابطه فوق امکان پذیر نیست. به همین منظور، رابطه بالا به صورت زیر اصلاح می‌گردد:

$$\mathbf{a} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \sum_{t \in r_i} \mathbf{H}^{tT} \mathbf{H}^t\right)^{-1} \left(\mathbf{H}^T \mathbf{F}_p + \sum_{t \in r_i} \mathbf{H}^{tT} \mathbf{F}^t\right)_p \tag{27-2}$$

که در آن $\mathbf{F}^t$ (نیروهای عمل کننده بر روی المان t) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{F}^t = \int_{\Omega^t} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_h^t \, d\Omega \tag{28-2}$$

کارایی این روش قابل مقایسه با روش قبل (استفاده از نقاط فوق همگرا) است.

2-3-5- شکل بهبود یافته روش بازیافت تنش بر مبنای تعادل در زیر دامنه‌ها

چند ماه پس از ابداع فرم اصلی روش بازیافت تنش بر مبنای تعادل در گروه المان، همان محققین شکل بهبود یافتهٔ این روش را ارائه و کارایی آن را با کمک روش عددی ارائه شده توسط بابوشکا و همکارانش[15]، برای مسائل دو بعدی انتقال حرارت و الاستیسیته در میانهٔ دامنه بررسی کردند[14]. نتایج حاصل از این بررسی نشان می‌دهد که در مسائل ذکر شده، شکل بهبود یافتهٔ این روش کارایی بالاتر یا در حد روش SPR دارد. در این روش نیروی ناشی از هر کدام از مولفه‌های تنش برای تنش ناشی از حل اجزای محدود و میدان تنش بهبود یافته، همانند روش قبل به صورت تقریبی با هم برابر

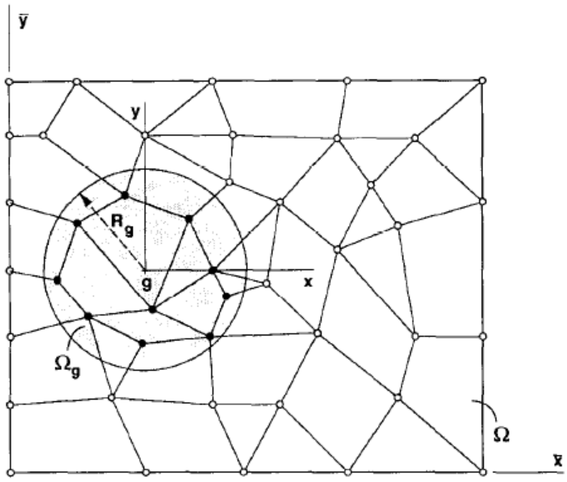
قرار داده می‌شوند. در این روش با ثابت ماندن تعداد مجهولات، تعداد معادلات افزایش یافته و بنابراین کارایی برآورد کننده افزایش می‌یابد.

2-3-6- روش بازیافت تنش بر پایه درونیابی مینیمم مربعات متحرک (MLSI)[1]

در سال 1994 تابارا، بلیکر و بلچکو[2] طی ارائه مقاله‌ای، بازیابی تنش را با استفاده از درونیابی حداقل مربعات متحرک برای آن دسته از مسائل اجزای محدود که از درجه C^{-1} بودند، پیشنهاد کردند[18]. لازم به ذکر است که در مسائل اجزای محدود از درجه C^{-1}، تغییر مکان نقاط گرهی نیز ناپیوسته می‌باشند. در این روش با در نظر گرفتن ابر[3] به جای استفاده از زیر دامنه[4]، به وسیله المانهای متصل به گره و نیز با تخصیص وزن به هر یک از نقاط داخل ابر بر اساس نزدیک یا دور بودن از گره مرکزی، همگرایی روش نسب به روش SPR ارتقا داده شده است. ایدهٔ اساسی درونیابی حداقل مربعات متحرک، بر استفاده از روش حداقل مربعات وزنی[5] در عبور دادن بهترین منحنی از نقاط مورد نظر است. تجربیات و آزمونهای عددی بر روی روش مینیمم مربعات متحرک در مسایل مختلف کارآیی آن را تایید می‌نمایند[18].

به منظور شرح روش، مسئله‌ای با میدان Ω و مرز Γ را در نظر می‌گیریم. گسسته سازی توسط روشهای اجزای محدود انجام پذیرفته است. یک مش فرضی همانند شکل (2-3) در نظر گرفته و در آن سیستم مختصات عمومی با $(\bar{x},\bar{y})$ مشخص شده است. برای محاسبه مشتق مرتبه اول یا تنشها، یک وصله محلی Ω_g با مرکز $\bar{x}_g$ و شعاع دامنه R_g در نظر می‌گیریم، که مختصات محلی $(x\,,y)$ همانند شکل (2-3) تعریف شده است.

[1] Moving least square interpolants (MLSI)
[2] Tabbara & Blaker & Bleytschko
[3] Cloud
[4] Patch
[5] Weighted Least Square Approximation



شکل 2-3 ناحیه محلی مشخص شده بمنظور محاسبه مشتق

ایدهٔ اساسی و اصلی در روش درونیابی حداقل مربعات متحرک، استفاده از روش حداقل مربعات وزنی برای منطبق کردن $\mathbf{u}_i^*(x)$ بر همهٔ u_{iI}^h در دامنهٔ $\mathbf{\Omega}_g$ است.

$$\mathbf{u}_i^*(x) = \mathbf{P}(x)\mathbf{a}_i(x) \tag{29-2}$$

که u_{iI}^h نتیجهٔ تخمینی بدست آمده از حل اجزای محدود برای هر مولفهٔ تغییر مکان i در گره I می‌باشد. در اینجا $\mathbf{P}(x)$، بردار جملات چند جمله‌ایی و $\mathbf{a}_i(x)$، بردار شامل ضرایبی وابسته به x می‌باشد. برای مثال در حالت خطی رابطه (2-30) و در حالت درجه دو در رابطه (2-31)، بردارهای **P** و **a** نشان داده شده است.

$$\mathbf{P} = [1 \quad x \quad y \quad xy] \qquad , \mathbf{a}_i^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]_i \tag{30-2}$$

$$\mathbf{P} = [1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2] \qquad , \mathbf{a}_i^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6]_i \tag{31-2}$$

در روش درونیابی حداقل مربعات متحرک، مطابق با رابطه (2-32)، مجهولات $\mathbf{a}_i(x)$ با کمینه کردن تفاضل وزنی مربعات تغییر مکانها معین می‌شوند که درآن N تعداد گره‌ها در ناحیه محلی $\mathbf{\Omega}_g$ و w(x) تابع وزن می‌باشد.

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}_i(x)) = \sum_{i=1}^{N} w(x_I)(\mathbf{P}(x_I)\mathbf{a}_i(x) - \mathbf{u}_{iI}^h)^2 \tag{32-2}$$

تابع وزن می‌بایست تابعی مثبت باشد، که مقدار ماکزیمم آن در مرکز $\overline{x}_g$ رخ می‌دهد و با فاصله گرفتن از مرکز $\overline{x}_g$ بطور یکنواخت کاهش می‌یابد. این تابع وزنی می‌تواند همانند رابطه (2-33) در نظر گرفته شود.

$$w(x) = e^{-c^2\left[(x/x_m)^2+(y/y_m)^2\right]} \quad (33\text{-}2)$$

که در آن $x_m = Max\,|x_I|$، $y_m = Max\,|y_I|$ و $x_I, y_{I\,(I=1,\dots,N)}$ مختصات گره در ناحیه محلی می‌باشد. ضریب c در رابطه تابع وزن سرعت کاهش آن را کنترل می‌کند.

با مینیمم نمودن تابع $S(a_i(x))$ مقادیر $a_i(x)$ به شکل زیر تعیین می‌گردد.

$$\mathbf{a}_i(x) = \mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{b}_i(x) \quad (34\text{-}2)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N} w(x_I)\mathbf{P}^T(x_I)\mathbf{P}(x_I) \quad (35\text{-}2)$$

$$\mathbf{b}_i(x) = \sum_{i=1}^{N} w(x_I)\mathbf{P}^T(x_I)\mathbf{u}_{iI}^h \quad (36\text{-}2)$$

رتبه[1] ماتریس $\mathbf{A}$ در رابطه (2-35) وابسته به تعداد گره‌های موجود در ناحیه محلی می‌باشد. شرط داشتن جواب برای ماتریس $\mathbf{A}$ وجود حداقل تعداد گره در ناحیه محلی به اندازه N_c (تعداد ضرایب $a_i(x)$) می‌باشد. هر چند شرط بالا برای داشتن معکوس ماتریس $\mathbf{A}$ لازم می‌باشد اما کافی نیست، زیرا ممکن است، گره‌ها در یک امتداد قرار گرفته باشند. برای حالت خطی و درجه دو، N_c بترتیب 4 و 6 می‌باشد. لازم بذکر می‌باشد در محاسبات مشتق از وابستگی a به x با توجه به تاثیر ناچیز آن صرفنظر شده است. در حل بالا محدودیتی در انتخاب ناحیه محلی و مرکز آن وجود ندارد. حال با مشتق گیری از u بدست آمده، مطابق رابطه 2-37 کرنش تعیین می‌گردد.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(x) = \mathbf{D}\mathbf{u}^*(x) \quad (37\text{-}2)$$

که در آن $\mathbf{D}$ اپراتور دیفراسیل و $\mathbf{u}^*(x)$ تغییر مکان درونیابی شده می‌باشد.

درونیابی مقادیر گرهی به وسیله روش حداقل مربعات متحرک، ابزار آسان و موثری را برای بازیافت تشن مسائل خطی فراهم می‌سازد. در بیشتر حالات، بازیابی مقادیر تنش، دارای رفتار فوق همگرا می‌باشد. سرعت همگرایی نیز یک درجه بالاتر از سرعت همگرایی حل‌های اجزای محدود استاندارد است. برخلاف روش SPR، در این روش استفاده از نقاط فوق همگرا ضروری نیست. بنابراین، این روش به سادگی برای المانهای مختلف از قبیل مثلثی و مربعی شکل در اجزای محدود بکار برده می‌شود.

[1] Rank

2-3-7- بهبود روش SPR با اضافه کردن معادلات و شرایط مرزی (SPRE)[1]

در سال 1994 ویبرگ، عبدالوهاب و زیوکاس طی مقاله‌ای سعی نمودند با اضافه کردن شرایطی به روش SPR، روش مذکور را بهبود بخشند[19]. آنها همچنین توانستند با ارائهٔ روش SPREB[2] پیشرفت بیشتری را برای بازیافت تنش در نزدیکی مرزهایی نشان دهند که تغییر مکانها یا بارهای گرهی، از پیش اعمال شده‌اند. زیرا روشهای SPR و SPRE شرایط مرزی را به خوبی برآورده نمی‌کنند. آنها با استفاده از روش گالرکین و اضافه کردن معادلات تعادل، تنشهای بازیافتی را تحت تاثیر قرار دادند. به عبارت دیگر، باقیماندهٔ معادله تعادل را با روش حداقل مربعات استاندارد کمینه کردند. همچنین در همان سال، بلیکر و بلچکو نیز کار مشابهی را با تفاوتهایی در جزئیات روش کار انجام دادند و توانستند نتایج تقریبا مشابهی بدست آوردند[20].

2-3-8- روش بازیافت تنش LP

در این بخش روشی با نام LP ارایه می‌گردد، که در سال 1997 توسط لی و همکاران پیشنهاد شده است[21]. اساس این روش در محاسبه سطح تنش بهبود یافته بدین صورت است که میدان تنش بازیافتی، با استفاده از تابع مینیمم مربعات در نقاط فوق همگرا و استفاده از باقیمانده معادله تعادل در روش کار مجازی در هر ناحیه تعیین می‌گردد. در واقع این روش ترکیبی از دو روش SPR و REP می‌باشد که از مزایای هر دو روش استفاده و با ترکیب آنها معایبشان را نیز کاهش داده است. نتایج عددی، کارایی نسبتا بهتر این روش را نسبت به روش SPR و REP نشان می‌دهد[22].

همانطور که در روش SPR بیان شد، تنش بازیافتی در این روش با $\boldsymbol{\sigma}_p$ نمایش داده می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{Pa} \qquad (2\text{-}38)$$

که در آن $\mathbf{P}$ ماتریس توابع چند جمله‌ای با درجه مناسب و $\mathbf{a}$ بردار ضرایب مجهول می‌باشد. در حالت یک بعدی که تنش دارای یک مولفه می‌باشد، $\mathbf{P}$ مانند رابطه (2-39) و در حالت دو بعدی که دارای

[1] Superconvergent Patch Recovery Incorporating Equilibrium
[2] Superconvergent Patch Recovery Incorporating Equilibrium and Boundary Conditions

سه مولفه تنش می‌باشد، همانند رابطه (2-40) بیان می‌شود.

$$\mathbf{P} = \left[1, x, x^2, x^3, \ldots, x^p\right] \tag{39-2}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \tag{40-2}$$

که در آن $\bar{\mathbf{P}}$ برای حالت دو بعدی برابر مقدار زیر می‌باشد.

$$\bar{\mathbf{P}} = \left[1, x, y, x^2, xy, \ldots, x^p, x^{p-1}y, \ldots, xy^{p-1}, y^p\right] \tag{41-2}$$

در اینصورت خطای ناشی از حل اجزای محدود، با اختلاف بین تنش بازیافتی و تنش اجزای محدود در نقاط گوسی، مطابق رابطه زیر بیان می‌شود.

$$e_i = \boldsymbol{\sigma}_p(x_i, y_i) - \boldsymbol{\sigma}_h(x_i, y_i) = \mathbf{P}(x_i, y_i)\mathbf{a} - \boldsymbol{\sigma}_h(x_i, y_i) \tag{42-2}$$

در رابطه بالا $\boldsymbol{\sigma}_h$ تنش اجزای محدود، $\boldsymbol{\sigma}_p$ تنش بهبود یافته و e_i خطا در نقاط فوق همگرای گوسی می‌باشد.

اما در حالت کلی، در درجات بالای چند جمله‌ای $\bar{\mathbf{P}}$، تنش بازیافتی $\boldsymbol{\sigma}_p$ نمی‌تواند معادله تعادل را ارضا نماید[21]. به همین دلیل قید معادله تعادل به شکل روش کار مجازی همانند رابطه (2-43) در نظر گرفته می‌شود.

$$d\Pi = \int_V d\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S d\mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \int_V d\mathbf{u}^T \mathbf{f} dV = 0 \tag{43-2}$$

که در آن:

$d\boldsymbol{\varepsilon}$: بردار کرنش مجازی $d\mathbf{u}$: بردار تغییر مکان مجازی $\mathbf{f}$: بردار نیروی پیکره

$\mathbf{T}$: بردار نیروی سطحی   V: حجم   S: سطح مرز

حال اگر بجای $\boldsymbol{\sigma}$ در رابطه (2-43) $\boldsymbol{\sigma}_p$ را قرار دهیم باقیمانده معادله تعادل مطابق زیر بدست می‌آید:

$$d\Pi_{residual} = \int_{V_p} d\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_p dV - \int_{S_p} d\mathbf{u}^T \mathbf{T} dS - \int_{V_p} d\mathbf{u}^T \mathbf{f} dV = 0 \tag{43-2}$$

که در آن V_p حجم ناحیه و S_p سطح مرزی در هر ناحیه می‌باشد.

همچنین تغییر مکان مجازی du و کرنش مجازی de توسط روابط (2-44) و (2-45) مشخص می‌گردد.

$$d\mathbf{u} = \mathbf{N} d\mathbf{q}_p \tag{44-2}$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} d\mathbf{q}_p \tag{45-2}$$

که در روابط بالا $d\mathbf{q}_p$ بردار تغییر مکان مجازی گره‌ها، $\mathbf{B}$ ماتریس کرنش- تغییرمکان و $\mathbf{N}$ ماتریس تابع شکل می‌باشد.

با استفاده از معادله‌های (2-38) و (2-45) بخش اول از معادله (2-43) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{V_p} d\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_p dV = d\mathbf{q}_p^T \left(\int_{V_p} \mathbf{B}^T \mathbf{P} dV\right)\mathbf{a} = d\mathbf{q}_p^T \mathbf{C}\mathbf{a} \tag{46-2}$$

که در آن ماتریس $\mathbf{C}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{C} = \int_{V_p} \mathbf{B}^T \mathbf{P} dV \tag{47-2}$$

در اینصورت بخش دوم و سوم معادله (2-43) نیز همانند رابطه (2-48) بیان می‌شوند.

$$\int_{S_p} d\mathbf{u}^T \mathbf{T} dS + \int_{V_p} d\mathbf{u}^T \mathbf{f} dV = d\mathbf{q}_p^T \mathbf{F}_p \tag{48-2}$$

که در آن بردار $\mathbf{F}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{F}_p = \int_{S_p} \tilde{\mathbf{N}}^T \mathbf{T} dS + \int_{V_p} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dV \tag{49-2}$$

در رابطه بالا $\tilde{\mathbf{N}}$ ماتریس تابع شکل تعریف شده بر روی سطح مرزی ناحیه و $\mathbf{F}_p$ بردار نیروی است که از حل اجزای محدود تعیین می‌گردد.

با جایگزاری روابط (2-43) و (2-48) در عبارت باقیمانده معادله تعادل یعنی رابطه (2-43) مطابق زیر خواهیم داشت:

$$d\Pi_{residual} = d\mathbf{q}_p^T (\mathbf{C}\mathbf{a} - \mathbf{F}_p) = d\mathbf{q}_p^T \mathbf{R}_{eq} \tag{50-2}$$

که در آن $\mathbf{R}_{eq}$ باقیمانده معادله تعادل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{R}_{eq} = \mathbf{C}\mathbf{a} - \mathbf{F}_p \tag{51-2}$$

به منظور محاسبه ضرایب مجهول بردار $\mathbf{a}$، باقیمانده تنش در نقاط گوسی e_i، و باقیمانده معادله تعادل $\mathbf{R}_{eq}$ جهت تولید فانگشنال $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ به صورت رابطه زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$F(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{n} e_i^T e_i + b\,\mathbf{R}_{eq}^T \mathbf{R}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{P}\mathbf{a} - \boldsymbol{\sigma}_h)^T (\mathbf{P}\mathbf{a} - \boldsymbol{\sigma}_h) + b\,(\mathbf{C}\mathbf{a} - \mathbf{F}_p)^T (\mathbf{C}\mathbf{a} - \mathbf{F}_p) \tag{52-2}$$

که در آن n تعداد نقاط گوسی در هر وصله و b پارامتر جریمه می‌باشد. زمانی که پارامتر b، صفر

در نظر گرفته شود مقدار فانگشنال $F(\mathbf{a})$ مطابق روش SPR خواهد بود.

به منظور محاسبه ضرایب مجهول $\mathbf{a}$ می‌بایست رابطه (2-52) مینیمم گردد، بدین منظور مطابق زیر خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = 0 \tag{53-2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}^T \mathbf{P} + b\,\mathbf{C}^T \mathbf{C}\right)\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}^T \boldsymbol{\sigma}_h + b\,\mathbf{C}^T \mathbf{F}_p$$

ماتریس ضرایب $\mathbf{a}$ با استفاده از روشهای حل معادله همانند روش حذفی گاوس قابل محاسبه خواهد بود. با محاسبه ماتریس ضرایب $\mathbf{a}$، و جایگذاری در رابطه (2-38) میدان تنش بازیافتی تعیین می‌شود.

2-4- معیارهای بیان خطا

در حالت کلی، خطا عبارت است از اختلاف بین حل دقیق و حل تقریبی که به روش اجزای محدود بدست آمده است. بنابراین خطای حل تنش بصورت زیر بدست می‌آید:

$$e_s = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \tag{54-2}$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ میدان تنش دقیق است. اما به دلیل عدم دسترسی به میدان تنش واقعی می‌توان از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد که این میدان تنش جدید توسط یکی از روشهای بازیافت تنش بدست آمده است. بنابراین خطای تقریبی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{e}_s = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h \tag{55-2}$$

رابطهٔ اخیر مقدار خطای تقریبی را در یک نقطه برآورد می‌کند ضمن اینکه این مقدار ممکن است از نظر عددی، کوچکتر از صفر باشد. بنابراین برای درک بهتر خطا از معیارهای بهتری برای بیان آن استفاده می‌شود.

مهمترین معیارهای بیان خطا عبارتند از[2و3]:

1- معیار خطای انرژی[1]

[1] Energy Norm

2- معیار خطای L_2

2-4-1- مفهوم نرم

برای پی بردن به مفهوم نرم، ابتدا ضرب داخلی توابع f و g را بر روی بازه (a,b) به ازای تابع مفروض $w(x)\geq 0$ را در نظر می‌گیریم[23] .

$$\langle f,g\rangle_w=\int_a^b f(x).g(x).w(x)\,dx \tag{56-2}$$

با ایده گرفتن از فضای سه بعدی و رابطه ضرب داخلی با طول بردارها در آنجا، در اینجا نیز همراه با ضرب داخلی، مفهوم نرم (تعمیم مفهوم طول) بردارها را مطرح می‌کنیم[23] :

نرم بردار f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|=\langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}} \tag{57-2}$$

به ازای هر بردار f از فضا، شرایط اساسی نرم به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}&\|f\|\geq 0\\&\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|\\&\|af\|=\|a\|.\|f\|\\&f=0\Leftrightarrow\|f\|=0\end{aligned} \tag{58-2}$$

2-4-2- معیار خطای انرژی

اگر معادله دیفرانسیل مسائل الاستیسیته را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\mathbf{Lu}+\mathbf{b}=0\ \ on\ \ \Omega \tag{59-2}$$

طبق تعریف، نرم انرژی برای مسائل الاستیسیته با معادله رفتاری فوق به کمک رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\|U\|=\left[\int_\Omega \mathbf{u}^T\,\mathbf{Lu}\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\int_\Omega \mathbf{u}^T\,(\mathbf{S}^T\,\mathbf{DS})\,\mathbf{u}\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{60-2}$$

$$\|U\| = \left[\int_{\Omega} (\mathbf{Su})^T \, \mathbf{D}(\mathbf{Su}) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{61-2}$$

$$= \left[\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T D \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{62-2}$$

$$= \left[\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \, \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{63-2}$$

و نرم انرژی برای خطاها برای یک مسئله الاستیسیته خطی توسط روابط زیر بیان می‌شود[2] :

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} \mathbf{e}^T \, \mathbf{L} \mathbf{e} \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)^T \, \mathbf{L}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \; d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{64-2}$$

$$= \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h)^T \, \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h) \; d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{65-2}$$

$$= \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h)^T \, (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \; d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{66-2}$$

$$= \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \, \mathbf{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \; d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{67-2}$$

2-4-3- درصد خطای نسبی $\boldsymbol{\eta}$

بیان خطا به صورت مقدار مطلق، عملا شاخص مناسبی برای درک آن نمی‌باشد و لذا معمولا خطا به صورت نسبتی از مقدار کل بیان می‌شود. درصد خطای نسبی نرم انرژی با رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$h = \frac{\|e\|}{\|\mathbf{U}\|} \times 100 \quad \% \tag{68-2}$$

از طرفی همانطور که قبلا بحث شد، میدان تنش، کرنش و یا جابجایی به طور دقیق در دست نیست، پس در محاسبه معیار خطا بایستی از میدان تنش اصلاح شده استفاده کرد:

$$\|e\| \approx \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \, \mathbf{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{69-2}$$

در نتیجه درصد خطای نسبی نیز به صورت تقریبی و با توجه به حل اصلاح شده بیان می‌شود:

$$\bar{h} = \frac{\| \bar{e} \|}{\| \bar{\mathbf{u}} \|} \tag{70-2}$$

که در رابطهٔ فوق $\bar{u}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\| \bar{\mathbf{u}} \| = \left[\| \mathbf{u}^* \|^2 + \| \bar{e} \|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{71-2}$$

$$\| \mathbf{u}^* \| = \left[\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^* \, \mathbf{D}^{-1} \, \boldsymbol{\sigma}^* \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{72-2}$$

چنانچه خطای نسبی قابل قبول در یک مسئله را $\hat{h}$بنامیم، بنابراین شرط یک حل قابل قبول توسط روش اجزای محدود این است که:

$$h \le \hat{h} \tag{73-2}$$

مقدار $\hat{h}$ معمولا در کارهای عملی کمتر از 5 درصد در نظر گرفته می‌شود[2] .

2-4-4- معیار خطای L_2

نرم L_2 برای خطای تغییر مکان، تنش و کرنش به صورت روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\| e_u \|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)^T \, (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{74-2}$$

$$\| e_s \|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h)^T \, (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{75-2}$$

$$\| e_e \|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h)^T \, (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_h) \, d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{76-2}$$

مشاهده می‌شود که رابطه (2-75) مشابه رابطه نرم انرژی است با این تفاوت که تابع وزنی $\mathbf{D}^{-1}$ را ندارد. بنابراین نرمهای تعریف شده در روابط (2-74) و (2-75) و (2-76) به ما این اجازه را می‌دهند که توجه خود را روی کمیت مورد نظر متمرکز نمائیم.

درصد خطای نسبی برای معیار L_2 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left\| s^* \right\|_{L_2} = \left[\frac{\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^{*T} \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{77-2}$$

$$\left\| e_s^* \right\| = \left[\frac{\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h)^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{78-2}$$

$$h = \left[\frac{\left\| e_s^* \right\|^2}{\left\| s^* \right\|_{L_2}^2 + \left\| e_s^* \right\|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{79-2}$$

2-4-5- جذر مجموع مربعات[1] خطا

اگر جذر مجموع مربعات خطای تنش به صورت نرمالیزه شده برای یک ناحیهٔ Ω مورد نظر باشد مقدار آن از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد[2] .

$$\Delta s = \left\| e_s \right\|_{RMS} = \left[\frac{\left\| e_s \right\|_{L_2}^2}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{80-2}$$

$$\left\| s \right\|_{RMS} = \left[\frac{\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega}{\Omega} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{81-2}$$

خطای نسبی نرمالیزه شده تنش عبارت است از:

$$h = \frac{\left\| e_s \right\|_{RMS}}{\left\| s \right\|_{RMS}} \times 100\ \% \tag{82-2}$$

هر یک از نرمهای بالا می‌توانند بر روی کل دامنه، جزئی از دامنه ویا فقط یک المان محاسبه شوند؛ در این صورت خطای کل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

[1] Root mean square

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|e\|_i^2 \qquad (83\text{-}2)$$

که در آن m تعداد اجزای شبکه می‌باشد.

2-4-6- شاخص تأثیر θ

برای بعضی مسائل خاص که حل دقیق مسئله موجود است می‌توان معیار خطای دقیق و تقریبی را بدست آورد. نسبت معیار خطای تقریبی به معیار خطای واقعی، بیانگر همگرایی حل به سمت حل واقعی است و معیاری برای بیان دقت محاسبه گر خطا می‌باشد که این نسبت شاخص تأثیر نامیده می‌شود.

$$q = \frac{\|\bar{e}\|}{\|e\|} \qquad (84\text{-}2)$$

هنگامی یک محاسبه گر خطا دارای کارایی مناسب است که شاخص تاثیر به سمت واحد میل نماید.

2-4-7- تعریف شاخص x_i

همان طور که در بخش 2-4-3 بیان شد، با محاسبه η و مقایسه آن با $\hat{h}$ می‌توان به قابل قبول بودن خطای اتفاق افتاده در تحلیل به روش اجزای محدود برای محیط جزء بندی شده پی برد. به طوری که اگر $h \rangle \hat{h}$ باشد، خطاهای اتفاق افتاده قابل قبول بوده و چنانچه $h \langle \hat{h}$ باشد، خطای اتفاق افتاده بیش از مقدار مجاز بوده و برای رسیدن به جواب قابل قبول باید شبکه جزء بندی شده اصلاح گردد. اما سئوالی که در اینجا مطرح است، این است که شبکه جزء بندی شده چگونه باید اصلاح شود[2].

برای اصلاح شبکه جزءبندی شده اولین راه حلی که به نظر می‌رسد کوچکتر نمودن کلیه المانها تا حصول $h \rangle \hat{h}$ می‌باشد. اما راه حل فوق یک راه حل اقتصادی نیست و موجب می‌شود که حجم مسئله بسیاد بزرگ شده و حل آن نیازمند نرم افزارهای با ظرفیت بالا می‌باشد. اما راه حلی که به نظر می‌آید از کارایی بیشتری برخوردار بوده و موجب کمترین افزایش حجم مسئله می‌گردد، کوچکتر

نمودن موضعی مسئله می‌باشد. یعنی در جاهایی که خطا بیش از خطای مجاز می‌باشد، عملیات اصلاحی اعمال شود ودر جاهایی که خطای اتفاق افتاده کمتر از خطای مجاز می‌باشد، دست نخورده باقی بماند، روش اخیر به اصلاح وفقی معروف است. اما در روش اخیر نیازمند ابزار یا پارامتری هستیم، که بتوان به کمک آن خطای موضعی کلیه اجزاء را محاسبه نمود. این پارامتربه x_i معروف است که در ادامه به نحوهٔ محاسبهٔ آن می‌پردازیم.

برای آنکه یک معیاری داشته باشیم تا بتوانیم بگوییم که در کجاها خطا بیشتر است، شاخص x_i را برای تک تک اجزاء به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به منظور تعمیم خطای نسبی نرمها برای تک تک اجزاء مطابق تعریف بابوشکا فرض می‌شود که درصد خطا به طور یکنواخت بین کلیه اجزاء توزیع شده است. پس خواهیم داشت[2]:

$$\left\|e^*\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left\|e^*\right\|_i^2 \qquad (85\text{-}2)$$

$$\left\|e^*\right\|^2 = m.\left\|e^*\right\|_i^2 \qquad (86\text{-}2)$$

که درآن m تعداد اجزاء در کل ناحیه Ω می‌باشد.

$$h = \left[\frac{\left\|e^*\right\|^2}{\left\|\mathbf{u}^*\right\|^2 + \left\|e^*\right\|^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{m.\left\|e^*\right\|_i^2}{\left\|\mathbf{u}^*\right\|^2 + \left\|e^*\right\|^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (87\text{-}2)$$

چنانچه خطای مجاز[1] را با $\left\|e^*\right\|_{per}$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$h = \hat{h} \Rightarrow \left\|e^*\right\|_i = \left\|e^*\right\|_{per} \qquad (88\text{-}2)$$

$$\hat{h}^2 = \frac{m\left\|e^*\right\|_{per}^2}{\left\|\mathbf{u}^*\right\|^2 + \left\|e^*\right\|^2} \qquad (89\text{-}2)$$

$$\left\|e\right\|_{per} = \frac{\hat{h}}{\sqrt{m}}\left[\left\|\mathbf{u}^*\right\|^2 + \left\|e^*\right\|^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (90\text{-}2)$$

[1] *Permissible*

طبق تعریف شاخص x_i عبارت خواهد بود با:

$$x_i = \frac{\left\| e^* \right\|_i}{\left\| e \right\|_{per}} \tag{91-2}$$

بنابراین به عنوان یک معیار چنانچه $x_i \rangle 1$ باشد، خطای جزء مورد نظر (iام) مورد قبول بوده و چنانچه $x_i \langle 1$ باشد، خطای جزء فوق بیش از مقدار مجاز خواهد بود.

فصل سوم

روش بازیافت تنش و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش-کرنش مسطح

3-1- مقدمه

در این فصل به تشریح یک روش ابداعی جهت بهبود میدان تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتریک و تخمین خطای موجود در تحلیل مسائل تنش-کرنش مسطح پرداخته می‌شود. روش تخمین کننده خطایی که در اینجا به آن اشاره خواهد شد در دستهٔ روشهای برآورد خطا، مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) قرار می‌گیرد؛ که اولین بار توسط حسنی و همکاران در مقاله‌ای در سال 2012 معرفی شد[24].

در این روش، با استفاده از نقاط فوق‌همگرا، برای تابع مقادیر هریک از مؤلفه‌های میدان تنش در هر ناحیه، یک سطح فرضی ساخته می شود که دقت بیشتری نسبت به سطح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک دارد. به منظور تعریف این سطح از همان توابع شکل نربزی[1] استفاده می‌کنیم که در روش ایزوژئومتریک برای تقریب زدن تابع جابجایی به کار گرفته می‌شوند. حسنی و همکاران، نشان دادند که تخمین کننده خطای پیشنهادی از کارایی مناسبی جهت برآورد خطای موجود در تحلیل مسائل تنش-کرنش مسطح به روش ایزوژئومتریک برخوردار است[24]. اما از نکاتی که در این مقاله به آن اشاره نشده بود، دلیل فوق همگرا بودن نقاط گوسی در تحلیل ایزوژئومتریک است و همچنین تعداد نقاط گوسی مناسب به عنوان نقاط بهینه تنش در تحلیل و برآورد خطای مسائل تنش-کرنش مسطح به روش ایزوژئومتریک است.

در این فصل اثبات می‌شود که چرا نقاط گوسی همانند روش اجزای محدود، در تحلیل ایزوژئومتریک نیز از خاصیت فوق همگرایی برخوردار می‌باشند. همچنین در این فصل به بررسی تعداد نقاط انتگرال-گیری گوسی به عنوان نقاط بهینه تنش، جهت بهبود حل و برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک پرداخته خواهد شد. بدین منظور به مدلسازی سه مسئله که دارای حل دقیق می‌باشند، پرداخته شده است و با مقایسه نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی بدست آمده از 4، 9، 16، 25 و 36 نقطه گوسی، به

[1] Nurbs shape functions

بررسی تعداد نقاط بهینه تنش جهت بهبود حل و برآورد خطا تحلیل ایزوژئومتریک پرداخته شده است.

در ادامه به صورت مختصر، به بیان مفاهیم اولیه که در تحلیل ایزوژئومتریک مطرح است، پرداخته می‌شود.

3-2- روش ایزوژئومتریک

با پیشرفت سریع علوم و تکنولوژی، روشهای عددی توسعه و تنوع چشمگیری یافته‌اند. از جمله جدیدترین این روشهای می توان روش ایزوژئومتریک را نام برد. تحلیل ایزوژئومتریک، بالقوه دارای ویژگی‌های منحصر به فرد و مناسبی است که شاید در آینده‌ای نه چندان دور بتواند جایگزین روشهای عددی متداول نظیر اجزای محدود و نقاط محدود گردد. وجود برخی معایب در روش اجزای محدود، از جمله وجود خطا در تعریف مرزهای مسائل با هندسه پیچیده و یا مسائل با تغییرات شدید در بارگذاری و خواص مصالح و نیز نیاز به تولید مکرر شبکه المانها در برخی مسائل، نظیر مسائلی که در چارچوب لاگرانژی حل می‌شوند و یا مسائل بهینه‌سازی شکل سازه، از جمله علل ابداع این روش می‌باشد. این روش برای اولین بار طی مقاله ای در سال 2005 توسط هیوز و همکارانش معرفی شد[25]. روش ایزوژئومتریک دارای بعضی مفاهیم شبیه روش اجزای محدود و روش‌های بدون مش می‌باشد که می‌تواند برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم در حوزه‌های مختلف علوم و مهندسی، از جمله الاستیسیته، به کار رود. در این روش از تکنیکهای طراحی به کمک کامپیوتر[1] استفاده شده است. دلیل اینکه روشهای طراحی به کمک کامپیوتر تاکنون در روش اجزای محدود به صورت گسترده وارد نشده است مربوط به اختلاف زمانی، در پیدایش این دو نسبت به یکدیگر می‌باشد. آغاز پیدایش روشهای اجزای محدود در سالهای 1950 تا 1960 میلادی بوده است در حالی که روشهای طراحی به کمک کامپیوتر بعدها در حدود سالهای 1970 تا 1980 شکل گرفته اند[25].

[1] CAD(Computer Aided Design)

ایده‌ای که در این روش معرفی شده است بر اساس بی- اسپلاین‌های نسبی غیر یکنواخت[1] به وجود آمده است. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه اسپیلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها و سطوح، از آنها جهت درونیابی و تقریب سازی هم استفاده می شود. در چند سال اخیر، روش ایزوژئومتریک به سرعت در زمینه‌های مختلفی توسعه داده شده است که می‌توان به موارد کاربردی همچون مراجع [26-32]، کاربرد آن در دینامیک سیالات [33-38]، مکانیک سازه‌ها [39-47] و الکترومغناطیس [48-49] اشاره نمود. همچنین در این زمینه یک کتاب به چاپ رسیده است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به آن مراجعه کرد [50].

در ادامه جهت آشنایی بیشتر با مفاهیم روش ایزوزئومتریک، به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی-اسپلاین و نربز و همچنین فرمولبندی روش ایزوژئومتریک در تحلیل مسائل تنش-کرنش مسطح پرداخته می‌شود.

3-2-1- بی- اسپلاین و نربز

در این بخش به طور خلاصه و در حد نیاز، به معرفی منحنی‌ها و سطوح بی- اسپلاین و نربز پرداخته می‌شود. برای آشنایی بیشتر، مراجعه به مراجع [51و52] پیشنهاد می شود.

نربزها از بی- اسپلاین‌ها ساخته می شوند. بی- اسپیلاین‌ها در یک فضای پارامتری (ناحیه)[2] تعریف می‌شوند. نواحی مذکور دامنهٔ مدلسازی شده را به چندین زیر دامنه تقسیم می کنند. یک بردار گرهی[3] در فضای پارامتری یک بعدی از یک سری مختصات به صورت زیر تشکیل می شود[51].

$$\Xi = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+p+1}\right\}\ ,\ x_{i+1} \geq x_i \quad i = 1, 2, \ldots, n+p+1 \tag{1-3}$$

که در آن x_i iامین گره، p مرتبه چند جمله ای و n تعداد توابع شکل تشکیل دهنده بی- اسپلاین به شمار می رود. انواع مختلفی از بردارهای گره ای وجود دارد ولی در این بحث فقط از نوع خاصی از

[1] Non-Uniform Rational B-splines(NURBS)
[2] Patch
[3] Knot Vector

بردارهای گره ای بنام بردارهای گره ای نامتناوب[1] (یا باز[2]) استفاده می کنیم. این نوع بردارها به فرم زیر نشان داده می شوند:

$$\Xi=\left\{\underbrace{a,\ldots,a}_{p+1},x_{p+1},\ldots,x_{m-p-1},\underbrace{b,\ldots,b}_{p+1}\right\} \tag{2-3}$$

در این صورت iامین تابع پایه ای بی‌اسپلاین از درجه p (مرتبه p+1) که با $N_{i,p}(x)$ نشان داده می شود بصورت زیر تعریف می‌شود[51]:

$$N_{i,0}(x)=\begin{cases}1 & if\ \ x_i\le x<x_{i+1}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$N_{i,p}(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}N_{i,p-1}(x)+\frac{x_{i+p+1}-x}{x_{i+p+1}-x_{i+1}}N_{i+1,p-1}(x) \tag{3-3}$$

با استفاده از تعاریف بالا، منحنی بی- اسپلاین از درجه P بصورت زیر تعریف می شود[51]:

$$C(x)=\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(x)P_i \qquad a\le x\le b \tag{4-3}$$

$\boldsymbol{C}(x)$ یک منحنی چند جمله ای قطعه‌ای[3] است که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی و $\{N_{i,p}(x)\}$ توابع پایه‌ای بی-اسپیلاین هستند، که روی بردار گره‌ای نامتناوبی بصورت رابطه (2-3) با فرض $a=0$ و $b=1$ تعریف می شوند.

اگر p درجه توابع پایه، $n+1$ تعداد نقاط کنترلی و $m+1$ تعداد گره‌ها باشند، آنگاه می توان رابطه $m=n+p+1$ را برای آنها نوشت.

به طرز مشابهی سطوح بی- اسپلاین بصورت زیر تعریف می شود[51]:

[1] Nonperiodic knot vector
[2] Open
[3] Piecewise polynomial curve

$$S(x,h)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(x)N_{j,q}(h)P_{i,j} \tag{5-3}$$

که در آن:

$$\Xi=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1},x_{p+1},\ldots,x_{r-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\right\}\quad ;$$
$$\mathrm{H}=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{q+1},h_{q+1},\ldots,h_{s-q-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{q+1}\right\} \tag{6-3}$$

بطوری که تعداد نقاط کنترلی در جهت x برابر n+1 و در جهت y برابر m+1 است و بردار گره‌ای Ξ دارای $r+1$ گره و H دارای $s+1$ گره می باشد.

یک منحنی نربز از درجه p بصورت زیر تعریف می‌شود[51]:

$$C(x)=\frac{\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(x)w_iP_i}{\sum_{i=0}^{n}N_{i,p}(x)w_i}\qquad a\le x\le b \tag{7-3}$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(x)\}$ توابع پایه‌ای بی- اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره‌ای بصورت رابطه (3-2) تعریف شده‌اند.

و در نهایت، یک سطح نربز که در جهت x از درجه p، و در جهت h از درجه q باشد، بصورت زیر تعریف می‌شود[51]:

$$S(x,h)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(x)N_{j,q}(h)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(x)N_{j,q}(h)w_{i,j}}\qquad 0\le x,h\le 1 \tag{8-3}$$

در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می باشد که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(x)\}$ و $\{N_{j,q}(h)\}$ توابع پایه‌ای بی- اسپلاین هستند که بر روی بردارهای

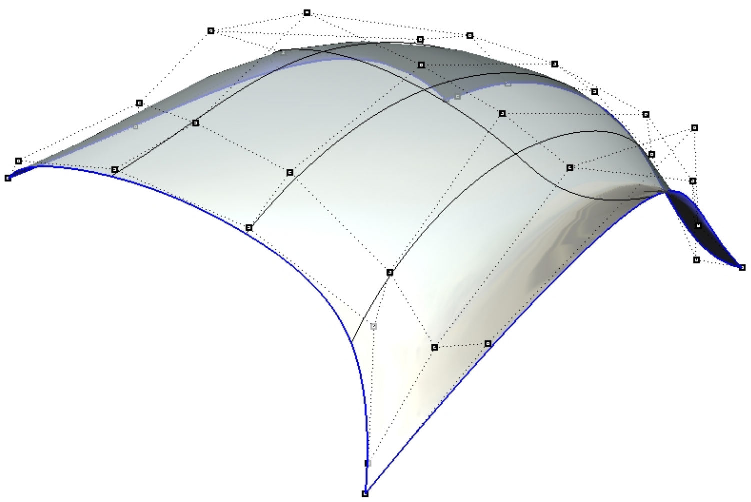
گره‌ای به صورت رابطه (3-6) تعریف شده‌اند. در رابطه (3-8) اگر توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(x,h)=\frac{N_{i,p}(x)N_{j,q}(h)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(x)N_{l,q}(h)w_{k,l}} \tag{3-9}$$

خواهیم داشت:

$$S(x,h)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(x,h)P_{i,j} \tag{3-10}$$

در شکل 3-1 شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز بدست آمده از آن با توابع پایه درجه دو مشاهده می‌شود.



شکل 3-1 شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز مربوط به آن

3-2-2- فرمول‌بندی روش ایزوژئومتریک در مسائل تنش-کرنش مسطح

به منظور تحلیل یک محیط پیوسته در ایزوژئومتریک، باید آن محیط را به یک محیط گسسته تبدیل نمود، این عمل در روش ایزوژئومتریک با استفاده از نقاط کنترلی و بردار گرهی نربز صورت می‌پذیرد. همانطور که در بخش قبل اشاره شد، سطوح نربز از یکسری توابع پایه به همراه نقاط کنترلی و بردارهای گره‌ای تشکیل شده است. نقاط کنترلی تشکیل دهنده شبکه‌ای از نقاط هستند. یک رویه

نربز را در صورت معلوم بودن بردارهای گره‌ای، با مشخص نمودن نقاط کنترلی آن می‌توان تعریف نمود.

بطور کلی در روش ایزوژئومتریک مقدار مجهول مسئله در حالت دوبعدی، (به طور مثال مولفه تغییر مکان جهت x) به عنوان یک سطح نربز، طوری تعیین می‌شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هر نقطه از دامنه بیان کننده مقدار مجهول مسئله در آن مکان باشد. در مسائل تنش و کرنش مسطح اگر نقاط کنترلی را طوری انتخاب کنیم که مولفه‌های اول و دوم مختصات این نقاط (P_x, P_y)، بتوانند هندسه مسئله را برآورد کنند؛ در اینصورت مولفهٔ سوم مختصات این نقاط (P_z) طوری محاسبه می‌شود که درونیابی بین این نقاط به وسیله توابع پایه‌ای نربز، نشان دهندهٔ تغییر مکان آن نقطه باشد؛ در حقیقت می‌توان رویه‌ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحهٔ xy نشان دهندهٔ هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه (z) نسبت به صفحه xy نشان دهندهٔ مجهول مسئله در آن نقطه (تغییر مکان) باشد.

اگر هر مولفهٔ تغییر مکان در دامنه مسئله به صورت یک صفحه در نظر گرفته شود، در اینصورت با استفاده از مفهوم نربز می‌توان صفحهٔ مربوط به هر مولفهٔ تغییر مکان را در حالت دو بعدی به صورت زیر نمایش داد:

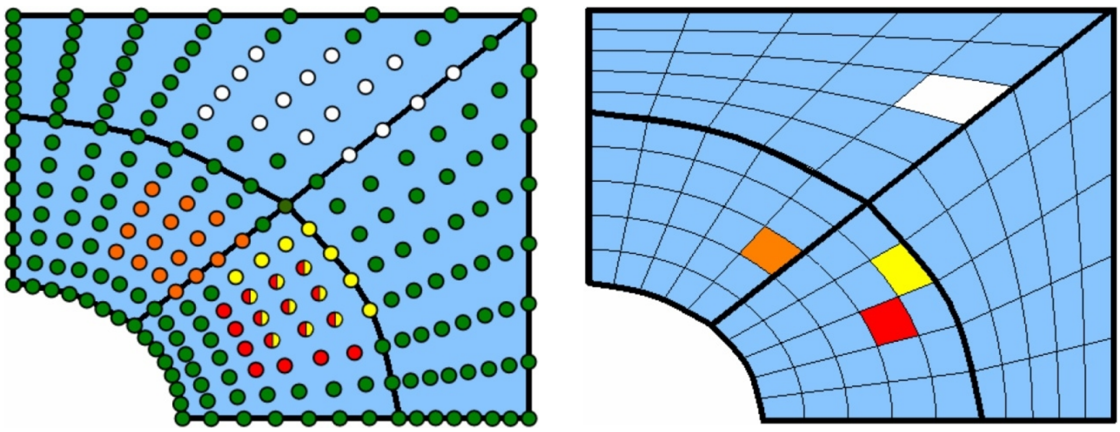
$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \approx \hat{\boldsymbol{u}}=\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} R_{i,j} P_{i,j} \tag{11-3}$$

در رابطه بالا $n+1$ تعداد نقاط کنترلی در جهت x و $m+1$ تعداد نقاط کنترلی در جهت y و $P_{i,j}$ مولفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز در جهت u و v می‌باشد که به عنوان تنها پارامتر مجهول برای تعیین صفحهٔ هر مولفهٔ تغییر مکان به شمار می‌رود. $R_{i,j}$ ، توابع پایه‌ای نربز هستند که عملکردی شبیه توابع شکل در اجزای محدود دارند.

همچنین با در نظر گرفتن دستگاه مختصات نرمال $(0 \le x,h \le 1)$ داریم:

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{Bmatrix} \hat{u}(x,h) \\ \hat{v}(x,h) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} R_{i,j}(x,h)\boldsymbol{P}_{u\,i,j} \\ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} R_{i,j}(x,h)\boldsymbol{P}_{v\,i,j} \end{Bmatrix} \tag{12-3}$$

با توجه به خاصیت بازه تاثیر توابع نربز که بیان می‌کند برای هر x,h فقط تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می‌باشند[51]، می‌توان برای کم کردن هزینه محاسبات کامپیوتر معادله (3-12) را به صورت زیر تغییر داد. بدین منظور اگر فرض کنیم x,h به ترتیب در دهانه‌های گره‌ای iام و jام قرار دارند (یعنی $x \in [x_i, x_{i+1})$ و $h \in [h_j, h_{j+1})$)، و درجه توابع پایه‌ای در جهت بردار گره‌ای Ξ، p و در جهت بردار گره‌ای H، q باشند، آنگاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)$ تابع پایه‌ای غیر صفر وجود خواهد داشت. در این صورت هر المان نربز تنها بر تعداد مشخصی از نقاط کنترلی پیرامون خود تاثیرگذار است. به طور مثال در شکل 3-2 شبکه المان‌ها و نقاط کنترلی دامنه مدلسازی شده با چهار وصله توسط توابع پایه نربز درجه سه نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود هر المان نربز در بازه تاثیر خود دارای16=(3+1)(3+1) نقطه کنترلی می‌باشد.



ب) شبکه نقاط کنترلی الف) شبکه المانها

شکل 3-2 نقاط کنترلی مورد تاثیر هر المان از دامنه مدلسازی شده با چهار وصله و توابع شکل نربز درجه سه

با توجه با خاصیت بازه تاثیر توابع نربز می‌توان معادله (3-12) را به شکل معادله (3-13) بیان نمود.

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \begin{Bmatrix} u(x,h) \\ v(x,h) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^{i} \sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(x,h) \boldsymbol{P}_{u\ k,l} \\ \sum_{k=i-p}^{i} \sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(x,h) \boldsymbol{P}_{v\ k,l} \end{Bmatrix} \tag{13-3}$$

فرم ماتریسی رابطه (13-3) به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{R}}.\bar{\boldsymbol{P}} \tag{14-3}$$

در رابطه بالا $\hat{\boldsymbol{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان‌های جهت x و y، $\bar{\boldsymbol{R}}$ ماتریس توابع پایه‌ای نسبی نربز و $\bar{\boldsymbol{P}}$ ماتریس ستونی مولفهٔ سوم نقاط کنترلی به صورت زیر می‌باشند:

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{i,j} = \begin{bmatrix} u_{i,j} & v_{i,j} \end{bmatrix}^T \tag{15-3}$$

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(x,h) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(x,h) & 0 & \dots & R_{i,j}(x,h) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(x,h) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(x,h) & \dots & 0 & R_{i,j}(x,h) \end{bmatrix} \tag{16-3}$$

$$\bar{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} P_{u\ i-p,j-q} & P_{v\ i-p,j-q} & \dots & P_{u\ i-p,j} & P_{v\ i-p,j} & \dots & P_{u\ i,j} & P_{v\ i,j} \end{bmatrix}^T \tag{17-3}$$

بعد از محاسبه تغییر مکانها، ماتریس کرنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u} \tag{18-3}$$

در این رابطه **u** بردار تغییر مکان و **L** عملگر دیفرانسیل می‌باشد که برای مسائل دو بعدی تنش و کرنش مسطح بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{19-3}$$

با جایگذاری رابطه (3-14) ماتریس کرنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{P}} \tag{3-20}$$

که در آن $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}\overline{\boldsymbol{R}}$ می‌باشد.

همچنین با فرض وجود رفتار خطی کشسان، رابطهٔ بین تنش ها و کرنش ها خطی و بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon_0}\right) + \boldsymbol{\sigma_0} \tag{3-21}$$

در رابطهٔ (3-21) $\boldsymbol{\sigma}_0$ تنش پسماند، $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ کرنش اولیه و $\boldsymbol{D}$ ماتریس کشسانی است که به طور مثال برای مسائل تنش مسطح به صورت زیر می‌باشد:

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-n^2}\begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & {(1-n)}/{2} \end{bmatrix} \tag{3-22}$$

همانند روش اجزای محدود می‌توان با استفاده از رهیافت کار مجازی و یا انرژی پتانسیل به تشکیل ماتریس سختی پرداخت که در ادامه با استفاده از روش کار مجازی ماتریس سختی در تحلیل ایزوژئومتریک استخراج می‌شود.

در صورتی که Γ مرزهای مسئله مورد نظر با دامنهٔ Ω، $\boldsymbol{b}$ نیروهای کالبدی و $\boldsymbol{t}$ نیروهای سطحی باشد، با استفاده از روش کار مجازی داریم:

$$\int_\Omega d\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_\Omega d\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b}\, d\Omega - \int_\Gamma d\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t}\, d\Gamma = 0 \tag{3-23}$$

با جایگذاری روابط (3-14) و (3-20) داریم:

$$\int_\Omega d\overline{\boldsymbol{P}}^T \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_\Omega d\overline{\boldsymbol{P}}^T \overline{\boldsymbol{R}}^T \boldsymbol{b}\, d\Omega - \int_\Gamma d\overline{\boldsymbol{P}}^T \overline{\boldsymbol{R}}^T \boldsymbol{t}\, d\Gamma = 0 \tag{3-24}$$

همچنین با حذف $d\,\overline{\boldsymbol{P}}$ و استفاده از رابطهٔ (3-21) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,d\Omega-\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\varepsilon_0}\,d\Omega+\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0\boldsymbol{d}\,\Omega-\int_{\Omega}\bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{b}\,d\Omega-\int_{\Gamma}\bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{t}\,d\Gamma=0 \tag{25-3}$$

و با جایگذاری رابطهٔ (3-20) داریم:

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{P}}\,d\Omega-\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon_0}\,d\Omega+\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\sigma}_0\boldsymbol{d}\,\Omega-\int_{\Omega}\bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{b}\,d\Omega-\int_{\Gamma}\bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{t}\,d\Gamma=0 \tag{26-3}$$

در صورت عدم وجود تنش و کرنش اولیه رابطه (3-26) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{F} \tag{27-3}$$

که در آن $\boldsymbol{K}$ ماتریس ضرایب (سختی)، $\boldsymbol{U}$ مجهولات مسئله (مختصات سوم نقاط کنترلی) و $\boldsymbol{F}$ نیروهای خارجی وارده بر زیر دامنه می‌باشند؛ که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\boldsymbol{K}=\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,d\Omega \tag{28-3}$$

$$\boldsymbol{F}=\int_{\Omega}\bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{b}\,d\Omega+\int_{\Gamma}\bar{\boldsymbol{R}}^T\boldsymbol{t}\,d\Gamma \tag{29-3}$$

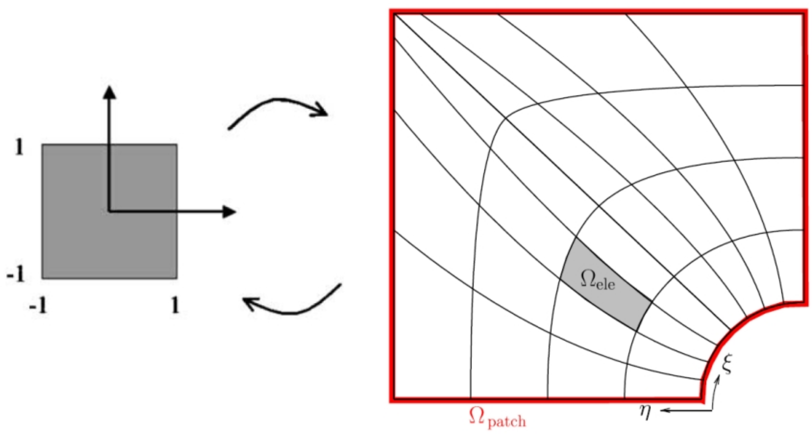
و در نهایت با حل دستگاه معادلات (3-27) مجهولات مسئله (مختصات سوم نقاط کنترلی) محاسبه می‌شوند. باید توجه داشت که یکی از تفاوتهای روش ایزوژئومتریک با اجزای محدود این است که بردار مجهولات بدست آمده در روش ایزوژئومتریک، تغییر مکان سازه نیست بلکه مکان نقاط کنترلی مولفه-های جابجایی است که ممکن است این نقاط بر سازه منطبق نباشند و در نتیجه تغییر مکان سازه را نخواهند داد. با مشخص شدن مختصات سوم نقاط کنترلی برای هر مولفه جابجایی، تغییر مکان سازه به صورت یک سطح نربز با استفاده از رابطه (3-8) بدست می‌آید.

در روش ایزوژئومتریک از توابع شکل مشابهی برای تقریب هندسه و تحلیل مسئله استفاده می‌شود. در این صورت، نقاط کنترلی و بردار گرهی یکسانی برای مدلسازی هندسی مسئله و همچنین تقریب تابع مجهول به کار می‌رود. بنابراین هندسه مسئله نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(x,h)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(x,h)P_{x\,i,j}$$
$$y(x,h)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(x,h)P_{y\,i,j} \qquad (30\text{-}3)$$

که در آن x,h مولفه‌های مختصات نرمال هستند $(0\le x,h\le 1)$، و $P_{y\,i,j},P_{x\,i,j}$ به ترتیب اولین و دومین مؤلفه‌های مختصات نقاط کنترلی می‌باشند.

در این روش برای حل عددی انتگرال ماتریس سختی از روش انتگرال گیری گوس استفاده می‌شود. بدین منظور نیاز به المان بندی دامنهٔ مسئله داریم، تا بتوانیم از نقاط گوس و وزن‌های ارائه شده برای المان‌های چهارضلعی استفاده کنیم. عمل المان بندی در ایزوژئومتریک با استفاده از دهانه‌های گره‌ای نربز انجام می‌پذیرد. بطوری که هر زیر مجموعه بصورت $[x_i,x_{i+1}]\times[h_i,h_{i+1}]$ یک المان نربز نامیده می‌شود. در شکل 3-3 نمونه‌ای از این المان بندی نشان داده شده است.



شکل 3-3 المان‌های ساخته شده به وسیله دهانه‌های گره‌ای نربز[25]

مطابق رابطهٔ (3-28) ماتریس سختی هر زیر دامنه بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$\boldsymbol{K}_{patch}=\iint_{\Omega_{patch}}\boldsymbol{B}^{T}(x,h)\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}(x,h)\,d\Omega \qquad (31\text{-}3)$$

که در آن $\boldsymbol{B}(x,h)$ برای مسائل تنش و کرنش مسطح بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{32-3}$$

بنابراین برای حل انتگرال ماتریس سختی به مشتقات $\boldsymbol{R}$ نسبت به x, y در دستگاه مختصات کلی نیاز داریم؛ که برای ارتباط بین دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری نربز، ژاکوبین زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\boldsymbol{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial h} & \frac{\partial y}{\partial h} \end{bmatrix} \tag{33-3}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial h} \end{Bmatrix} \tag{34-3}$$

که در آن $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial x}$ و $\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial h}$ مشتقات جزئی توابع پایه‌ای نربز می‌باشند. بنابراین می‌توان رابطه (31-3) را بصورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{K}_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} \boldsymbol{B}^T(x,h)\,\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}(x,h)\det \boldsymbol{J}_1\, dx\, dh \tag{35-3}$$

در اینصورت نیاز به مقدار تابع داخل انتگرال در نقاط گوس می‌باشد. در المان‌های چهار ضلعی نقاط گوس در دستگاه مختصات نرمان یا سرندیپیتی[1] مشخص شده است، بنابراین نیاز به یک نگاشت

[1]- Serendipity coordinate

می‌باشد که مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه سرندیپیتی المان iام را به دستگاه مختصات نرمال زیردامنه نربز (x,h) منتقل کند. این نگاشت در انتگرال‌گیری باعث ایجاد ژاکوبینی بصورت زیر می‌شود:

$$\boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial h}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial h}{\partial s}\end{bmatrix} \qquad , \qquad dx\,dh=\boldsymbol{J}_2 drds \tag{36-3}$$

که در آن:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\frac{1}{2}\left(x_{i+1}-x_i\right) \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial r}=0$$
$$\frac{\partial x}{\partial s}=0 \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial s}=\frac{1}{2}\left(h_{i+1}-h_i\right) \tag{37-3}$$

بنابراین رابطه ماتریس سختی (3-35) به فرم نهایی زیر در دستگاه مختصات سرندیپیتی المان نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{K}_{patch}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^T\left(r,s\right)\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\left(r,s\right)\det\boldsymbol{J}_1\det\boldsymbol{J}_2 drds \tag{38-3}$$

و در نهایت انتگرال ماتریس سختی به روش گوس به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{K}_{patch}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}^T\left(r,s\right)\mathbf{D}\mathbf{B}\left(r,s\right)\det\mathbf{J}_1\det\mathbf{J}_2 w_i.w_j \tag{39-3}$$

که در آن m و n تعداد نقاط گوس در جهت r و s در هر المان و $w_i.w_j$ وزن نقاط گوس می‌باشد.

3-3- تشریح روش برآورد خطای مسائل تنش-کرنش مسطح، بر مبنای استفاده از نقاط فوق همگرای گوسی

به طور کلی در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مولفهٔ تنش در هر ناحیه به صورت یک سطح فرضی در نظر گرفته می شود. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین

تابع مجهول (جابجایی) استفاده شده اند، بدست می‌آید. یک سطح نربز زمانی بدست خواهد آمد که مختصات نقاط کنترلی آن مشخص شده باشد. با تعریف مختصات x وy هر نقطه کنترلی توسط کاربر جهت مدلسازی شکل هندسی، تنها مولفه مجهول جهت تعیین سطح بهبود یافتهٔ تنش، مولفه z نقطه کنترلی می باشد. نحوه محاسبه مختصات z نقاط کنترلی به نحوی است که سطح تنش جدید بدست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتریک است، به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می شود.

اساس محاسبه مختصات نقاط کنترلی و در نتیجه بدست آوردن سطح تنش بهبود یافته برگرفته از خاصیت نقاطی است که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می شود که اولین بار در روش اجزای محدود توسط بارلو مطرح شده است[2].

در بخش بعد اثبات می‌شود که در تحلیل ایزوژئومتریک دو بعدی که دامنه مسئله با توجه به آرایش نقاط گرهی به المانهای چهار ضلعی تقسیم می شود، این نقاط فوق همگرا بر نقاط گوسی المان منطبق هستند. مختصات نقاط کنترلی سطح بهینه تنش با مینیمم کردن فاصله بین این سطح فرضی و سطح تنش بدست آمده از حل ایزوژئومتریک در نقاط گوس المانهای هر ناحیه با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات محاسبه می شود.

در صورتی که سطح بازیافتی (بهینه) هریک از مؤلفه‌های بردار تنش را با $\boldsymbol{\sigma}^*$ نشان دهیم، با توجه به توابع شکل نربز می توان این سطح را در داخل هر ناحیه به صورت زیر بیان نمود:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} R_{i,j}(u,v) P_{i,j} \tag{40-3}$$

که در آن n تعداد نقاط کنترلی در جهت y و m تعداد نقاط کنترلی در جهت x هر ناحیه، $R_{i,j}$ توابع شکل نربز و $P_{i,j}$ مختصات نقاط کنترلی مربوط به صفحه تنش می باشد. در صورتی که $\mathbf{R}$ و $\mathbf{P}$ را به

ترتیب بردار توابع شکل نربز و بردار مختصات نقاط کنترلی، به صورت روابط (3-41) و (3-42) تعریف کنیم، رابطه (3-40) را می‌توان به صورت (3-43) بیان نمود.

$$\mathbf{R}=\left[R_{1,1},R_{1,2},...,R_{1,n},R_{2,1},R_{2,2},...,R_{2,n},...,R_{m,n}\right]^{T} \tag{41-3}$$

$$\mathbf{P}=\left[P_{1,1},P_{1,2},...,P_{1,n},P_{2,1},P_{2,2},...,P_{2,n},...,P_{m,n}\right]^{T} \tag{42-3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{*}=\mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} \tag{43-3}$$

همان طور که مشاهده می شود، تنها پارامتر مجهول جهت تعیین این سطح، مختصات z نقاط کنترلی (بردار $\mathbf{P}$) می‌باشد. برای تعیین این مقادیر، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\mathbf{P})=\sum_{j=1}^{k_y}\sum_{i=1}^{k_x}(\boldsymbol{\sigma}^{*}_{i,j}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{i,j})^{2} \tag{44-3}$$

که در آن $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و k_x و k_y به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهتهای x و y موجود درهر ناحیه می باشد. با جایگذاری رابطه (3-43) در (3-44) خواهیم داشت:

$$F(\mathbf{P})=\sum_{l=1}^{K}(\mathbf{R}_l^{T}\,\mathbf{P}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}_l)^{2} \tag{45-3}$$

که در آن K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می باشد. در نهایت با مشتق گیری از تابع $F(\mathbf{P})$ نسبت به مؤلفه‌های z نقاط کنترلی و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته بدست می آید.

$$\frac{\partial F(\mathbf{P})}{\partial P_{i,j}}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{AP}=\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{46-3}$$

که در آن ماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به صورت (3-47) محاسبه می‌شوند.

$$\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_i\mathbf{R}_i^T \qquad ; \qquad \mathbf{B}=\sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_i\,\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i \tag{3-47}$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی، سطح تنش مربوط به آن نیز بدست می آید. همانگونه که در مرجع [24] نشان داده شده است، این میدان مؤلفه تنش نسبت به سطح تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتریک دقیق تر می‌باشد و از این‌رو می‌تواند به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک به کار رود. روش کار این تخمین کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک برای هر المان، به صورت تقریبی به یک معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد. در مرحله بعد می‌توان به حل تطبیقی مسئله پرداخت. بدین منظور با افزایش نقاط در بردارگرهی و یا افزایش نقاط کنترلی در اطراف المانی که دارای خطایی بیش از حد تعیین شده توسط کاربر است، می‌توان به بهبود محلی شبکه اولیه پرداخت و با توجه به شبکه جدید تحلیل ایزوژئومتریک دوباره انجام می‌پذیرد و این روند تا حصول دقت مورد نیاز کاربر ادامه خواهد یافت.

3-3-1- دلیل دقت بیشتر تنش، در نقاط گوسی تحلیل ایزوژئومتریک

فوق همگرا بودن تنش در نقاط گوس به این دلیل است که تنش بدست آمده از حل ایزوژئومتریک با توجه به رابطه سازی آن (مینیمم کردن تابع پتانسیل) معادل این است که به کمک روش حداقل مربعات بهترین سطح تنش را از مقدار دقیق تنش در نقاط گوسی عبور دهیم. اثبات این موضوع به شرح زیر است.

معادله دیفرانسیل مربوط به یک مسئله الاستیسیته خطی با شرایط مرزی معلوم به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{Lu} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{B}^T \mathbf{DBu} - \mathbf{b} = 0 \qquad on \;\; \Omega \tag{48-3}$$

که $\mathbf{L}$ معرف عملگر دیفرانسیل خطی، $\mathbf{B}$ عملگر دیفرانسیل کرنش، $\mathbf{D}$ ماتریس الاستیسیته و $\mathbf{u}$ مقدار مجهول مسئله (جابجایی) می‌باشد. در روش ایزوژئومتریک جواب دقیق مسئله ($\mathbf{u}$) همانطور که در رابطه (3-12) بیان شد به کمک روابط زیر تقریب زده می‌شود.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \approx \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \hat{u}(x,h) \\ \hat{v}(x,h) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j} \mathbf{P}_{u\,i,j} \\ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j} \mathbf{P}_{v\,i,j} \end{Bmatrix} \tag{49-3}$$

در رابطه بالا $\mathbf{P}_{u\,i,j}$ و $\mathbf{P}_{v\,i,j}$ به ترتیب بردار مولفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز در جهت u و v می‌باشند که به عنوان تنها پارامتر مجهول برای تعیین صفحهٔ هر مولفهٔ تغییر مکان به شمار می‌رود. فرم ماتریسی رابطه (3-48) به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}}.\bar{\mathbf{P}} \tag{50-3}$$

در رابطه بالا $\hat{\mathbf{u}}$ ماتریس ستونی تغییر مکان‌های جهت x و y، $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه‌ای نسبی نربز و $\bar{\mathbf{P}}$ ماتریس ستونی نقاط کنترلی می‌باشد. در اینصورت ماتریس کرنش و تنش به صورت روابط (3-50) و (3-51) بیان می‌شوند.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} \tag{51-3}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{DL}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{DB}\bar{\mathbf{P}} \tag{52-3}$$

که در آن $\mathbf{B} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{R}}$ می‌باشد.

حل تقریبی به روش ایزوژئومتریک با جایگذاری مقدار $\hat{\mathbf{u}}$ در تابعک[1] انرژی پتانسیل و مینیمم کردن

[1] Functional

آن بدست می‌آید. این بدان معنی است که مختصات نقاط کنترلی $(\bar{\mathbf{P}})$ به نحوی محاسبه می‌شوند که تابعک انرژی پتانسیل را مینیمم سازند. تابعک انرژی پتانسیل در مسائل الاستیسیته با توجه به رابطه (3-48) در مقدار دقیق جابجایی $\mathbf{u}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\mathbf{Bu})^T \, \mathbf{DBu} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} \qquad (53\text{-}3)$$

در ادامه اثبات خواهد شد که مینیمم کردن این تابعک معادل است با مینیمم کردن تابعک Π^* که به صورت رابطهٔ (3-54) تعریف می‌شود.

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\mathbf{B}(\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}}))^T \, \mathbf{DB}(\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega \qquad (54\text{-}3)$$

مینیمم کردن تابعک Π^* به معنی این است که فاصله بین سطوح دقیق و تقریبی تنش یعنی $(\mathbf{DBu}-\mathbf{DB\hat{u}})$ حداقل شود که این امر منجر به عبور بهترین سطح تنش از نقاط دقیق تنش معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله به کمک روش حداقل مربعات می‌شود. این نقاط دقیق تنش با توجه به حل انتگرال رابطه (3-54) به روش عددی گوس، همان نقاط گوسی می‌باشند. به زبانی ساده تر می‌توان اینطور بیان نمود که روند بدست آوردن تابع جابجایی در روش ایزوژئومتریک معادل است با تولید بهترین سطح تنش به نحوی که فاصله این سطح تنش در نقاط گوس از سطح تنش دقیق حداقل باشد. در اینصورت می‌توان بیان نمود که تنش بدست آمده در نقاط گوس نسبت به دیگر نقاط سطح تنش بدست آمده از حل ایزوژئومتریک، به تنش دقیق نزدیکتر است و از دقت بالاتری برخوردار می‌باشد.

در ادامه اثبات می‌شود که چگونه مینیمم کردن تابعک Π با مینیمم کردن Π^* معادل است. بدین منظور نمو[1] تابعک Π در مقدار مشخص $\hat{\mathbf{u}}$ به صورت زیر بیان می‌شود.

---
[1] variation

$$d\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\mathbf{B}d\mathbf{u})^T\,\mathbf{DB\hat{u}}d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\mathbf{B\hat{u}})^T\,\mathbf{DB}d\mathbf{u}d\Omega - \int_{\Omega}d\mathbf{u}^T\,\mathbf{b}d\Omega = 0 \tag{55-3}$$

به دلیل متقارن بودن ماتریس الاستیسیته D می‌توان رابطه (3-55) را به صورت زیر بیان نمود.

$$d\Pi = \int_{\Omega}(\mathbf{B}d\mathbf{u})^T\,\mathbf{DB\hat{u}}d\Omega - \int_{\Omega}d\mathbf{u}^T\,\mathbf{b}d\Omega = 0 \tag{56-3}$$

با توجه به اینکه نمو $d\mathbf{u}$ می‌تواند هر مقداری داشته باشد در نتیجه $d\mathbf{u}=\mathbf{u}$ در نظر می‌گیریم، در اینصورت خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega}(\mathbf{Bu})^T\,\mathbf{DB\hat{u}}d\Omega - \int_{\Omega}\mathbf{u}^T\,\mathbf{b}d\Omega = 0 \tag{57-3}$$

با کمک کردن رابطه (3-57) از رابطهٔ (3-53) و با توجه به متقارن بودن ماتریس D خواهیم داشت:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\mathbf{B}(\mathbf{u}-\mathbf{\hat{u}}))^T\,\mathbf{DB}(\mathbf{u}-\mathbf{\hat{u}})d\Omega - \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\mathbf{B\hat{u}})^T\,\mathbf{DB\hat{u}}d\Omega = 0 \tag{58-3}$$

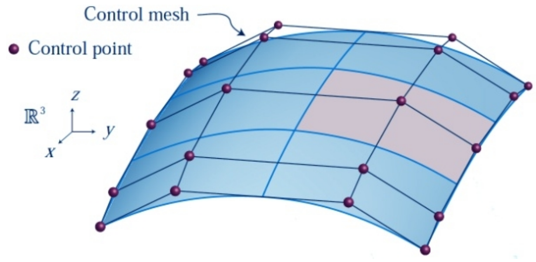
در اینصورت با توجه به رابطه (3-58) و (3-54) خواهیم داشت:

$$\Pi^* = \Pi + \text{constant} \tag{59-3}$$

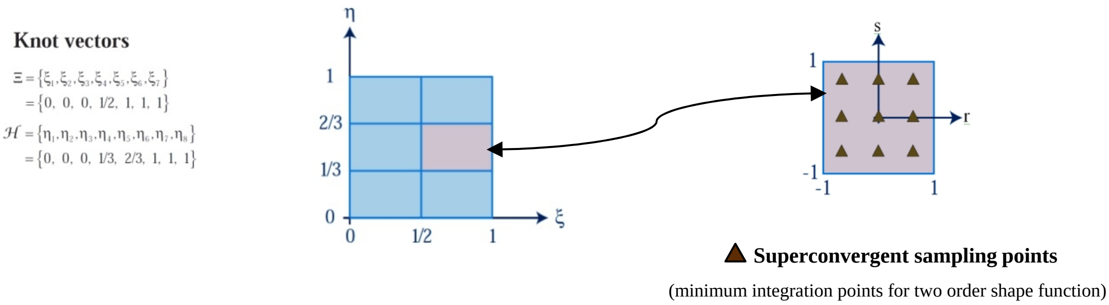
در نتیجه مینیمم کردن Π^* معادل با ایستا کردن تابعک پتانسیل Π در مسائل الاستیسیته می‌باشد. بر این اساس می‌توان بیان کرد که در صورتی که p درجه چند جمله‌ای مورد استفاده برای تابع مجهول u باشد درجه میدان گرادیان مسئله p-1 خواهد شد اما تنش بدست آمده در نقاط انتگرال گیری گوس هم مرتبه با تابع مجهول u و برابر p خواهد بود که به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می‌شود.

در تحلیل دو بعدی مسائل به کمک روش ایزوژئومتریک با توجه به اینکه انتگرال گیری بر روی یک المان مادر چهار ضلعی صورت می‌پذیرد نقاط فوق همگرا مطابق با نقاط گوسی مورد نیاز یک المان

مربعی جهت انتگرال گیری عددی می‌باشند (شکل 3-4). لازم به ذکر است که در تحلیل ایزوژئومتریک حداقل تعداد نقاط مورد نیاز جهت انتگرال گیری عددی به روش گوس با توجه به مرتبه توابع شکل از مورد مشابه آن در اجزای محدود بیشتر است[53].



الف) فضای فیزیکی که از یک وصله **(patch)** تشکیل شده است



ب) فضای پارامتری ج) المان مادر(فضای انتگرال گیری گوس)

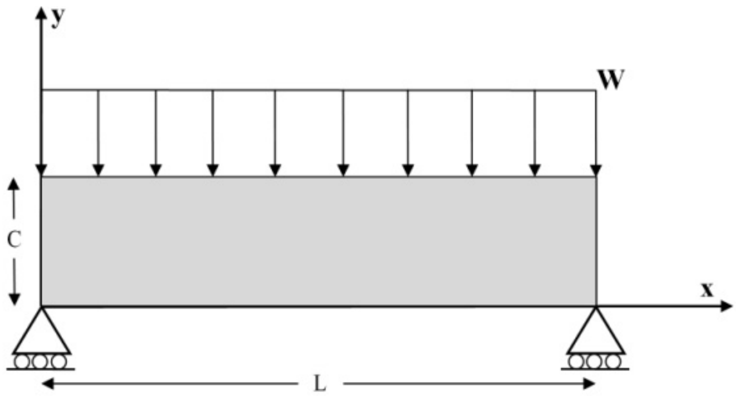
شکل3-4 نقاط فوق همگرا در روش ایزوژئومتریک

در ادامه، جهت نمایش کارایی روش بازیافت تنش و کاربرد نقاط فوق همگرا در تولید سطح تنش بهبود یافته، به بیان نتایج گرفته شده از تحلیل سه مثال نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده، تیر طره دایره‌ای شکل و صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری سه مثال حل شده در این بخش می‌باشند. همچنین مکان بهینه نقاط فوق همگرای تنش با توجه به مرتبه توابع شکل مورد استفاده در تحلیل ایزوژئومتریک مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی کل دامنه با چهار، نه، شانزده، بیست پنج و سی شش نقطه گوسی برای سه مثال حل شده در این بخش محاسبه شده و با توجه به آن، تعداد نقاط بهینه انتگرال گیری گوسی جهت بازیافت تنش و برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک معرفی شده است.

3-4- تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

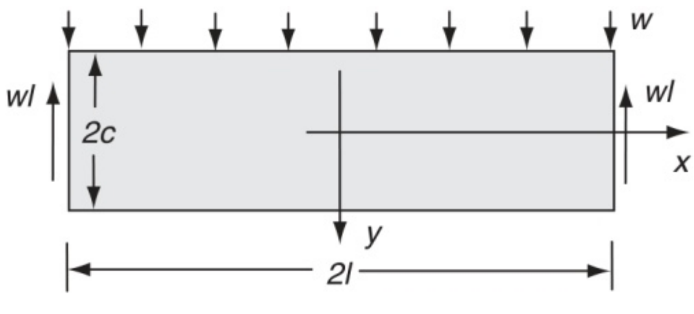
در این بخش به مدلسازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک دو سر مفصل تحت بار گسترده در شرایط تنش مستوی توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش های آن پرداخته می‌شود(شکل3-5). پارامترهای به کار برده شده در مدلسازی و تحلیل این مثال به صورت زیر می‌باشد:

$$L = 10 \quad , \quad C = 2 \ , \ W = 11 \quad , \quad E = 1500 \quad , \quad n = 0.25$$



شکل3-5 تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده

تنشهای دقیق این مسئله با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل3-6 به صورت روابط (3-60) تا (3-62) در نظر گرفته شده است[54].



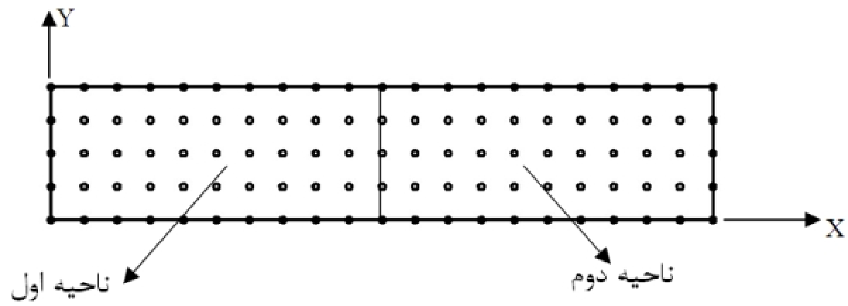
شکل3-6 پارامترهای تعریف شده در حل تحلیلی تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده[54]

$$s_x = \frac{3w}{4c}\left(\frac{l^2}{c^2} - \frac{2}{5}\right)y - \frac{3w}{4c^3}\left(x^2 y - \frac{2}{3}y^3\right) \qquad (3\text{-}60)$$

$$s_y = -\frac{w}{2}+\frac{3w}{4c}y-\frac{w}{4c^3}y^3 \tag{61-3}$$

$$t_{xy} = -\frac{3w}{4c}x+\frac{3w}{4c^3}xy^2 \tag{62-3}$$

برای مدلسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از 105 نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده شده است(شکل3-7).



شکل3-7 نقاط کنترلی مورد استفاده در مدلسازی تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده

جهت نمایش بهتری از کارایی تخمین کننده خطای پیشنهادی، با توجه به مرجع [55] ازتوابع شکل نربز مرتبه دو در هر ناحیه استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات xو hبه صورت زیر می‌باشند.

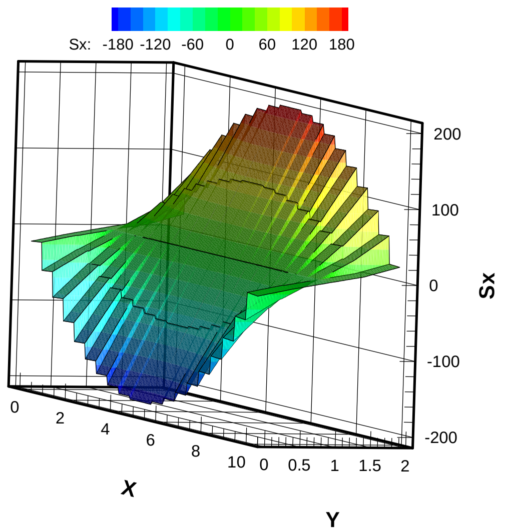
$$x=\{0,0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1\},\ h=\{0,0,0.3,0.5,0.7,1,1\}$$

مطابق با شکل3-4 و با توجه به مرتبه توابع شکل، در این مثال از نه نقطه گوس جهت انتگرالگیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است.

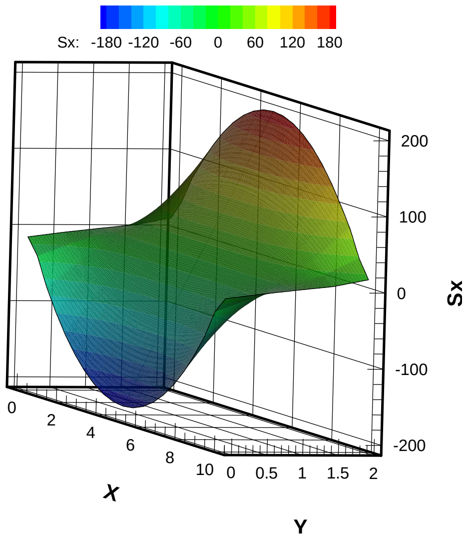
در شکل‌های 3-8 و 3-9 سطح تنش s_x و t_{xy} حاصل از حل ایزوژئومتریک و حل دقیق به همراه سطح تنش بهبود یافته نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود سطح تنش بهبود یافته در مقایسه با سطح تنش ایزوژئومتریک، تطابق قابل توجهی نسب به سطح تنش دقیق دارد.

در شکل 3-10 نحوۀ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی به تغییرات نرم خطای دقیق بسیار نزدیک است که نشان دهنده کارایی مطلوب تخمین کننده خطا و صحت فوق همگرا بودن نقاط

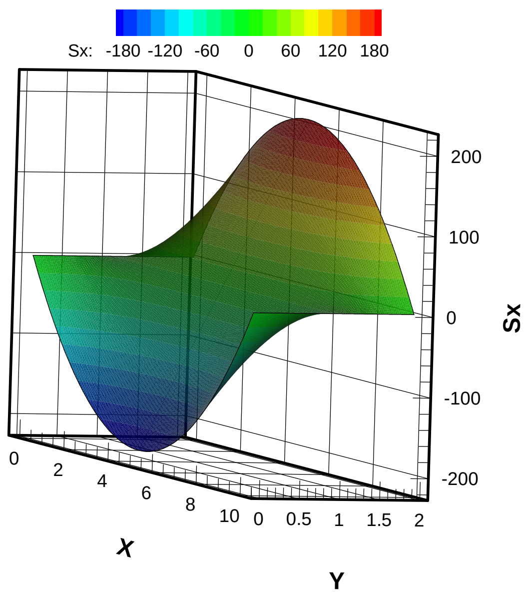
گوسی است. همچنین شاخص تاثیر برای کل دامنه، 0/93 محاسبه شده است. همانطور که در فصل قبل بیان شد، شاخص تاثیر معیاری برای بیان دقت محاسبه‌گر خطا است و هرچه به عدد یک نزدیکتر باشد نشان دهنده کاریی بهتر محاسبه گر خطا است.



الف) حل ایزوژئومتریک

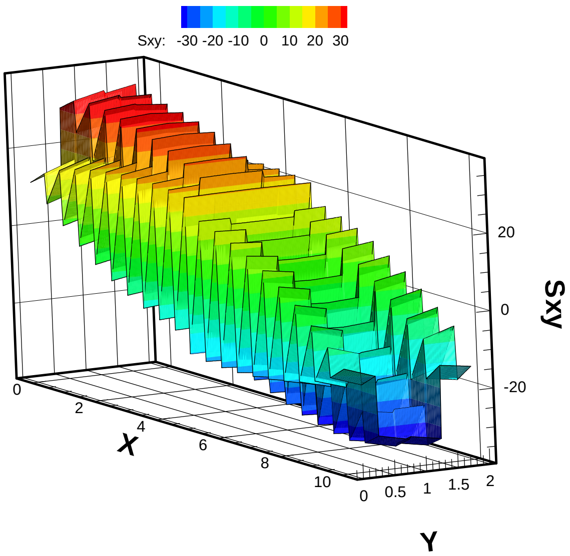


ب) حل بهبود یافته

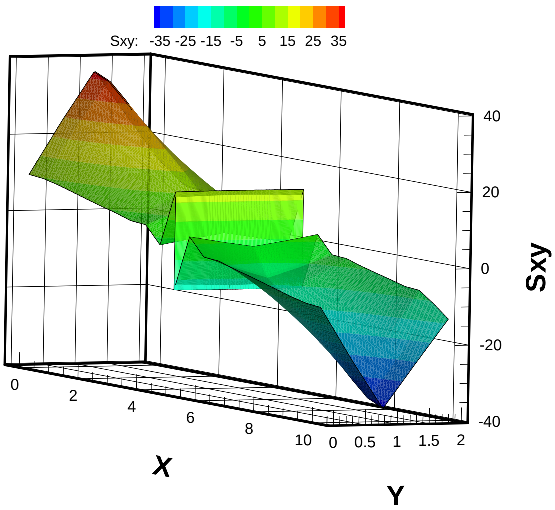


ج) حل دقیق

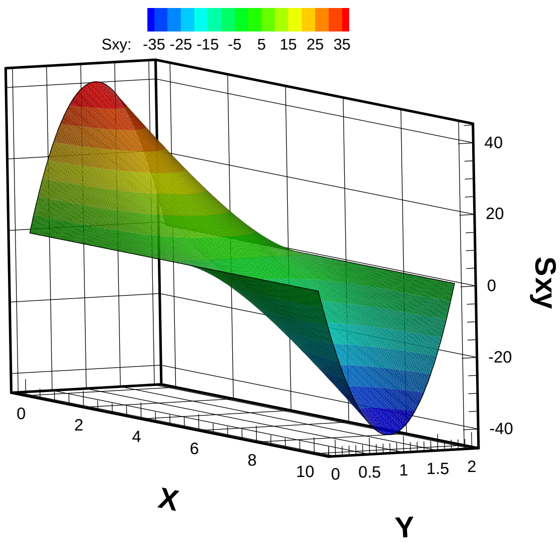
شکل 3-8 سطح تنش σ_x تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده



الف) حل ایزوژئومتریک



ب) حل بهبود یافته



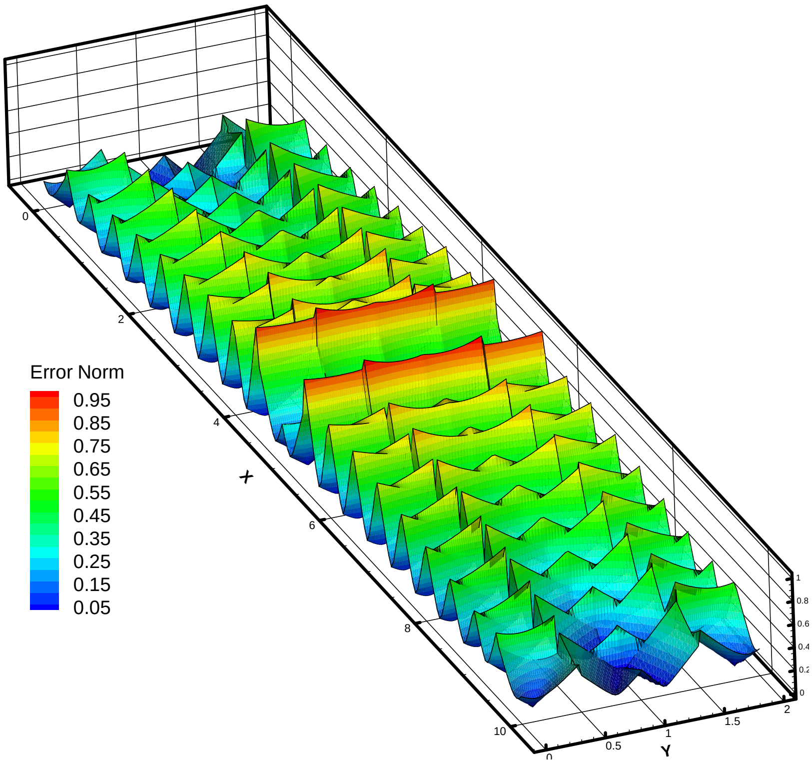
ج) حل دقیق

شکل 3-9 سطح تنش τ_{xy} تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

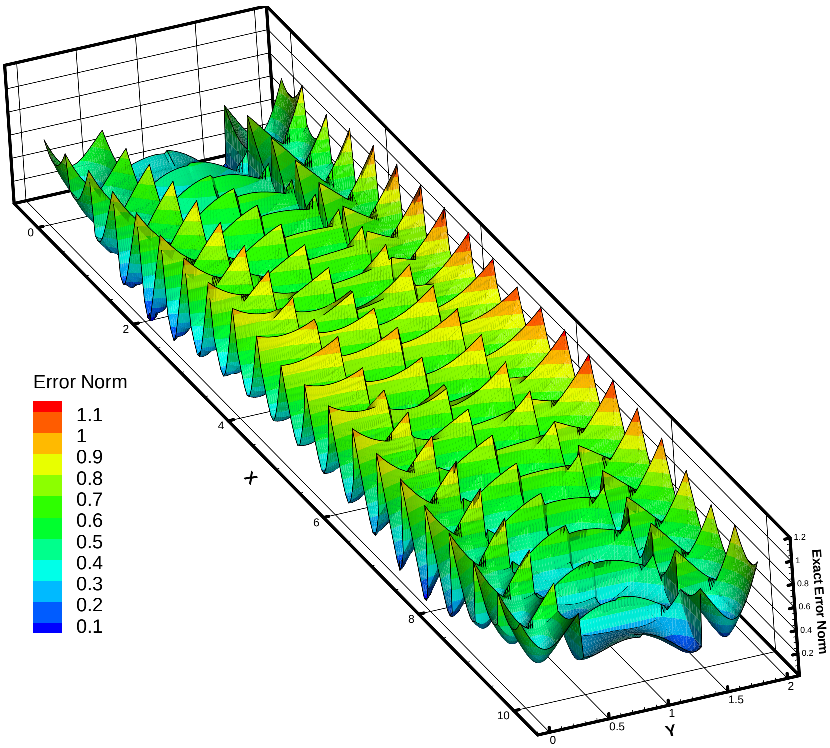
3-5- تیر طره دایره‌ای شکل

در این قسمت به مدلسازی یک تیر طره دایره‌ای شکل الاستیک در شرایط تنش مستوی توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش های آن پرداخته می‌شود(شکل 3-11). پارامترهای به کار برده شده در مدلسازی و تحلیل این مثال به صورت زیر می‌باشد:

$$a = 8 \;\;,\;\; b = 10 \;\;,\;\; P = 100 \;\;,\;\; E = 2\times10^{5} \;\;,\;\; n = 0.3$$

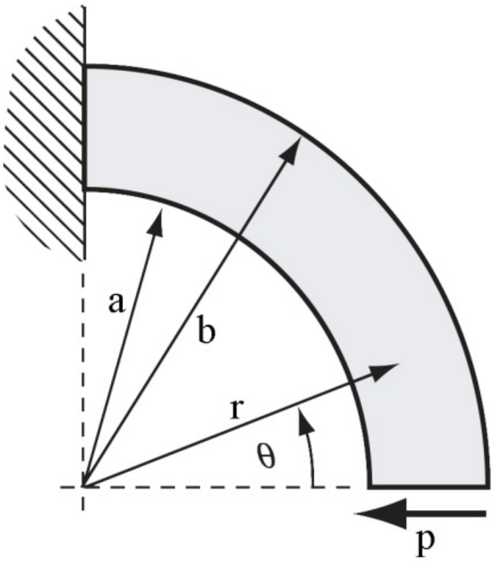


الف) نرم خطای تقریبی



ب) نرم خطای دقیق

شکل 3-10 نحوه توزیع نرم خطای انرژی تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده



شکل 3-11 تیر طره دایره‌ای شکل

تنشهای دقیق این مسئله در دستگاه مختصات قطبی با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل 3-11 به صورت روابط (3-63) تا (3-65) در نظر گرفته شده است[54].

$$s_r = \frac{P}{N}(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r})\sin q \tag{63-3}$$

$$s_q = \frac{P}{N}(3r - \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r})\sin q \tag{64-3}$$

$$t_{rq} = -\frac{P}{N}(r + \frac{a^2b^2}{r^3} - \frac{a^2+b^2}{r})\cos q \tag{65-3}$$

در روابط بالا N به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$N = a^2 - b^2 + (a^2+b^2)\log(\frac{b}{a})$$

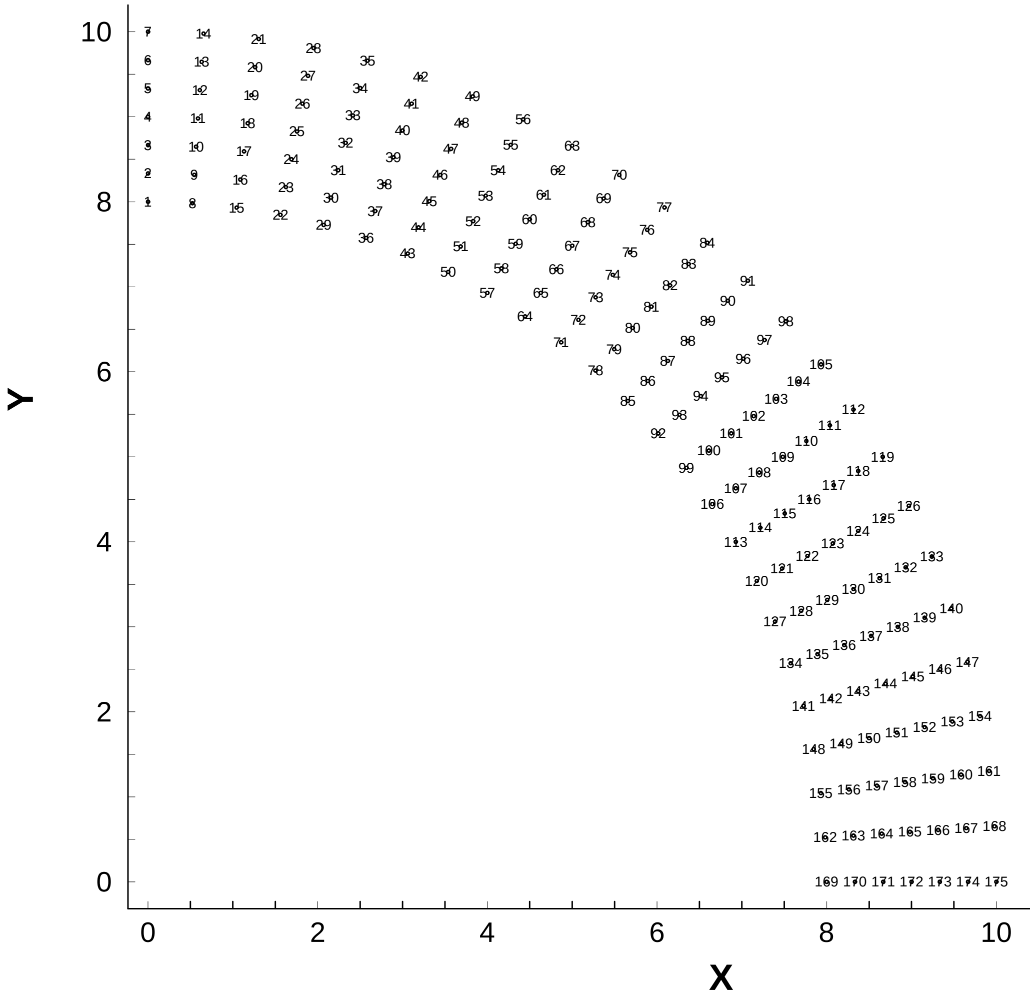
برای مدلسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از یک وصله و 175 نقطه کنترلی استفاده شده است(شکل 3-12).

مشابه مثال قبل، جهت تحلیل این مسئله از توابع شکل نربز مرتبه دو و جهت انتگرال گیری عددی از

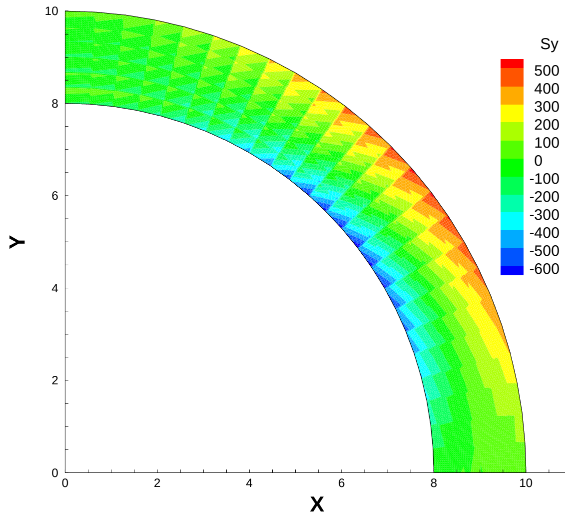
نه نقطه گوسی استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات xو h به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$x=\begin{Bmatrix}0,0,0.041,0.083,0.125,0.166,0.208,0.25,\\ 0.291,0.33,0.375,0.416,0.4583,0.5,0.5416,\\ 0.583,0.625,0.66,0.7083,0.75,0.7916,\\ 0.833,0.875,0.916,0.9583,1,1\end{Bmatrix},\ h=\{0,0,0.1666,0.333,0.5,0.666,0.833,1,1\}$$

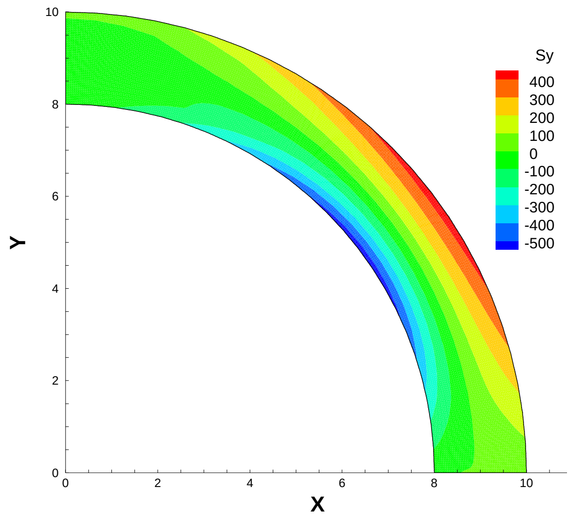
در شکل 3-13 به عنوان نمونه کانتور تنش s_y حاصل از حل ایزوژئومتریک و حل دقیق به همراه کانتور تنش بهبود یافته نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود در این مثال نیز توزیع تنش بهبود یافته در مقایسه با توزیع تنش ایزوژئومتریک، تطابق قابل توجهی نسب به تنش دقیق دارد.



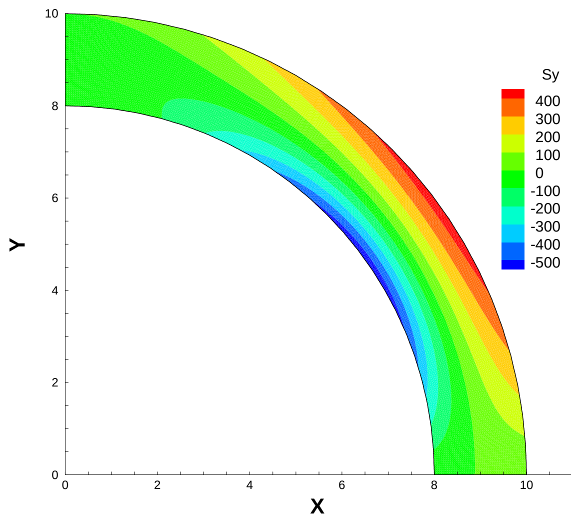
شکل 3-12 نحوه آرایش و شماره گذاری نقاط کنترلی تیر طره دایره‌ای شکل



الف) حل ایزوژئومتریک



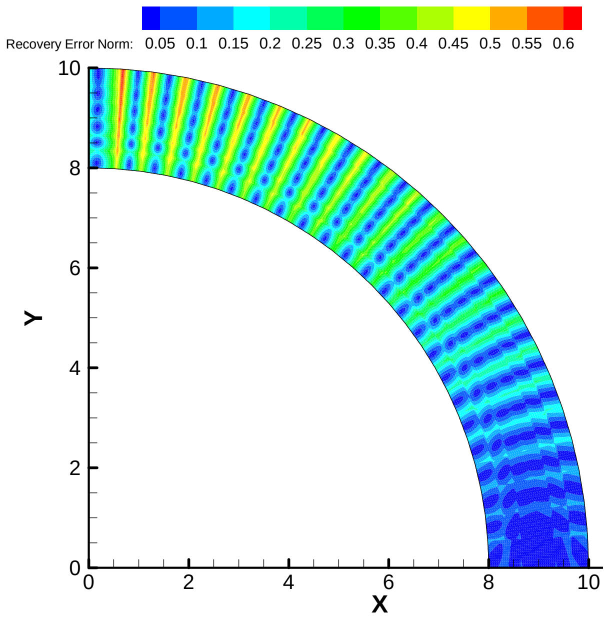
ب) حل بهبود یافته



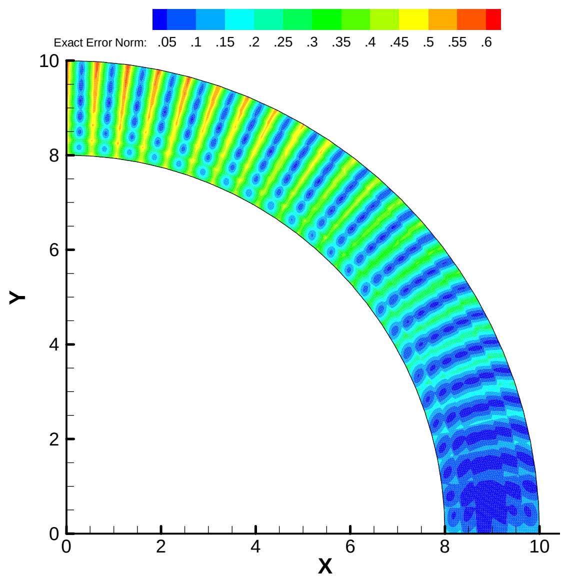
ج) حل دقیق

شکل 3-13 کانتور تنش s_y تیر طره دایره‌ای شکل

در شکل 3-14 نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود در این مثال نیز نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی به تغییرات نرم خطای دقیق بسیار نزدیک است که نشان دهنده کارایی مطلوب تخمین کننده خطا و صحت فوق همگرا بودن نقاط گوسی است. همچنین شاخص تاثیر برای کل دامنه، 0/95 محاسبه شده است.



الف) نرم خطای تقریبی



ب) نرم خطای دقیق

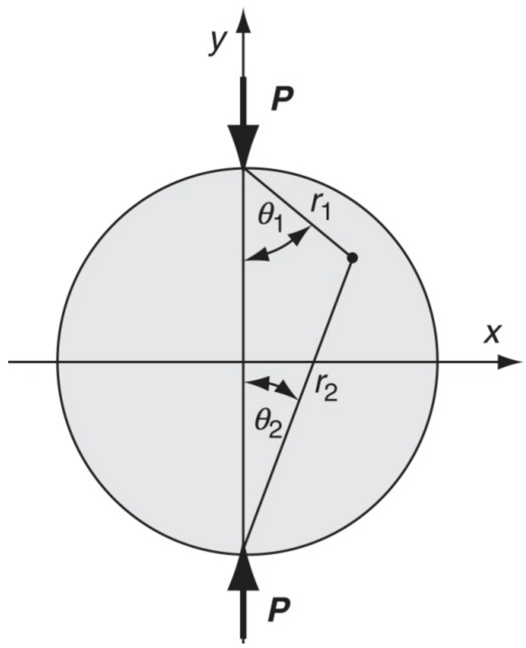
شکل 3-14 نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی تیر طره دایره‌ای شکل

3-6- صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری

در این مثال به بررسی خاصیت فوق همگرایی نقاط گوسی در تولید سطح تنش بهبود یافته و برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک یک مسئله دارای نقطه تکین می‌پردازیم. البته به نظر می‌رسد که مسائل با نقطه تکین، به علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی جهت بررسی کارایی تخمین کننده‌های خطا به شمار نمی‌روند؛ اما هدف از این مثال همان طور که گفته شد، بررسی خاصیت نقاط گوسی در نحوه رفتار برآوردکننده خطای پیشنهادی می‌باشد. با توجه به اینکه زیر بار متمرکز به عنوان یک نقطه تکین، دارای خطای زیادی نسبت به سایر نقاط است، لذا یک تخمین کنندهٔ خطای مناسب باید به طور نسبی قادر به نمایش این توزیع خطا باشد. در صورتی که بهبود شبکه با توجه به نتایج بدست آمده از تخمین کنندهٔ خطا مورد نظر باشد، تخمین کنندهٔ خطایی که دارای آرایشی مناسب باشد می‌تواند برنامه را در هر مرحله به بهبود محلی شبکه در اطراف نوک ترک راهنمایی کند.

در شکل 3-15 مشخصات صفحه دایره‌ای شکل تحت بار متمرکز قطری مشاهده می‌شود. پارامترهای بکار گرفته شده جهت تحلیل این مسئله به صورت زیر می‌باشد.

$$R = 2 \ , \ P = 100 \ , \ E = 1000 \ , \ n = 0.3$$



شکل 3-15 صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری

تنشهای دقیق این مسئله با توجه به پارامترهای تعریف شده در شکل 3-15 به صورت روابط (3-66) تا (3-68) می‌باشد[54].

$$s_x = -\frac{2P}{p}\left[\frac{(R-y)x^2}{r_1^4}+\frac{(R+y)x^2}{r_2^4}-\frac{1}{2R}\right] \tag{66-3}$$

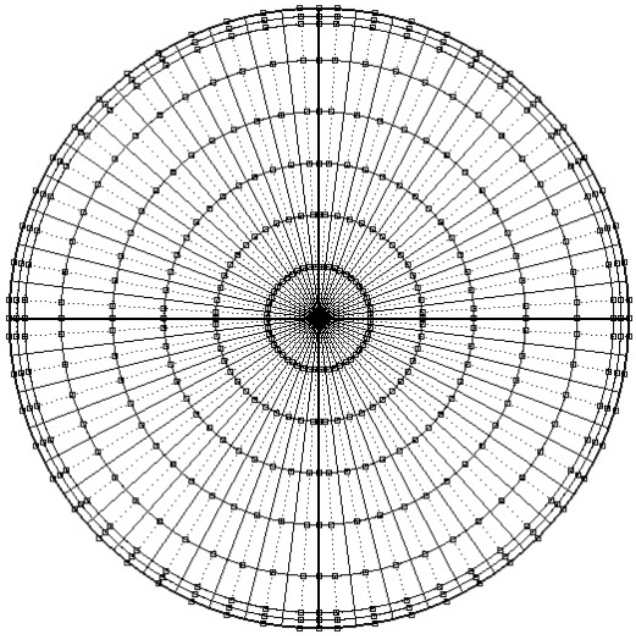
$$s_y = -\frac{2P}{p}\left[\frac{(R-y)^3}{r_1^4}+\frac{(R+y)^3}{r_2^4}-\frac{1}{2R}\right] \tag{67-3}$$

$$t_{xy} = \frac{2P}{p}\left[\frac{(R-y)^2x}{r_1^4}-\frac{(R+y)^2x}{r_2^4}\right] \tag{68-3}$$

در روابط بالا r_1 و r_2 به صورت زیر می‌باشند.

$$r_1 = \sqrt{x^2+(R-y)^2}\ ,\ \ r_2 = \sqrt{x^2+(R+y)^2}$$

برای مدلسازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریک از 513 نقطه کنترلی و چهار ناحیه مشابه به شکل ربع دایره استفاده شده است(شکل 3-16).



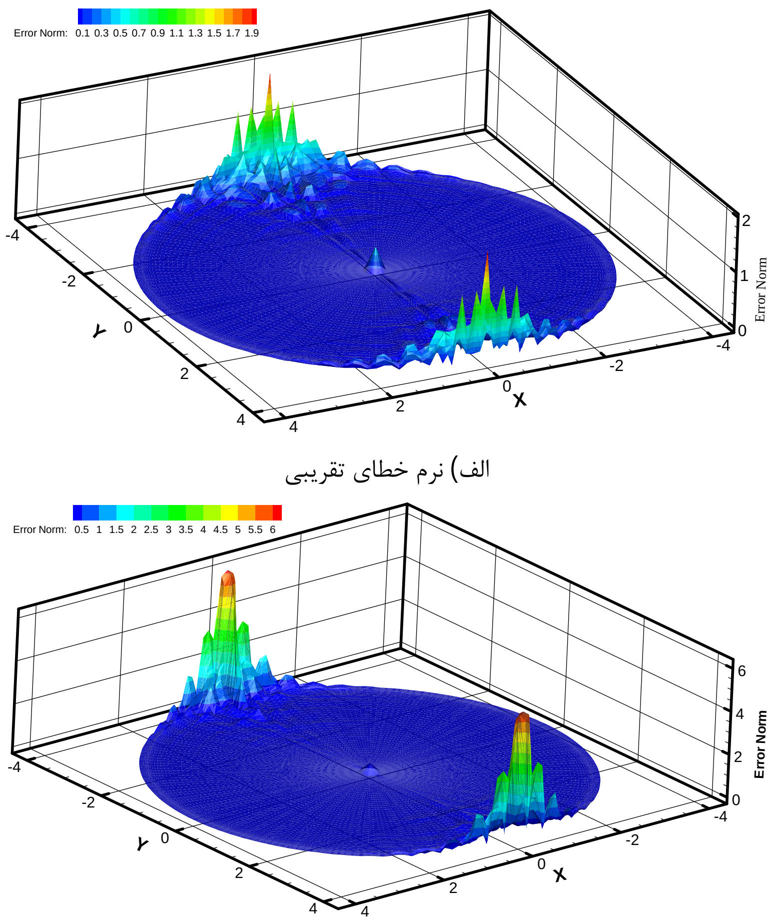
شکل 3-16 آرایش نقاط کنترلی و المانبندی در صفحه دایره‌ای تحت فشار

جهت تحلیل این مسئله در هر وصله از توابع شکل نربز مرتبه سه و جهت انتگرال گیری عددی از

شانزده نقطه گوسی استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات xو h در هر وصله به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$x=\begin{Bmatrix}0,0,0,0.0769,0.1538,0.2307,0.3076,\\0.3846,0.4615,0.5384,0.6153,0.6923,\\0.7692,0.8461,0.9230,1,1,1\end{Bmatrix},\ h=\begin{Bmatrix}0,0,0,0.1428,0.2857,0.4285,0.5714,\\0.71428,0.8571,1,1,1\end{Bmatrix}$$

در شکل 3-17 نحوۀ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی برای این مثال نشان داده شده است. همان طور که در توزیع نرم خطای تقریبی مشاهده می‌شود تطابق قابل قبول آن با توزیع نرم خطای دقیق و افزایش قابل ملاحظه میزان خطا در نوک بار متمرکز نسبت به سایر نقاط، نشان دهنده رفتار مناسب تخمین کننده خطا بویژه در شناسایی نقطه تکینگی می‌باشد. همچنین در این مثال شاخص تاثیر برای کل دامنه، 0/47 محاسبه شده است.



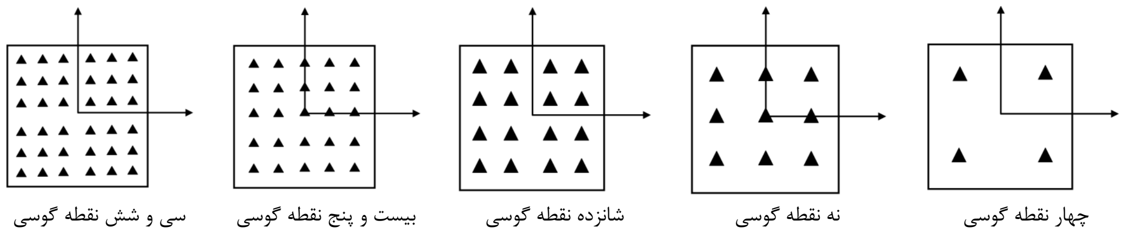
الف) نرم خطای تقریبی

ب) نرم خطای دقیق

شکل 3-17 نحوۀ توزیع نرم خطای انرژی صفحه دایره‌ای

3-7- بررسی تعداد بهینه نقاط انتگرالگیری گوس به عنوان نقاط فوق همگرای تنش

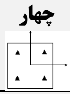
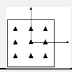
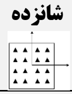
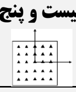
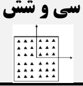
در این بخش به بررسی و یافتن بهترین نقاط گوسی به عنوان نقاط بهینه تنش پرداخته می‌شود؛ بدین منظور به مقایسه شاخص تاثیر برآورد کننده خطا در سه مثال نمونه بیان شده در این با چهار، نه، شانزده، بیست پنج و سی شش نقطه گوسی پرداخته شده است. در شکل 3-18 پنج المان مربعی و تعداد نقاط انتگرال گیری گوسی که به عنوان نقاط بهینه تنش مورد استفاده قرار گرفته‌اند، نشان داده شده است.



شکل 3-18 نقاط گوسی استفاده شده به عنوان نقاط فوق همگرای تنش

در جدول 3-1، مقادیر شاخص تاثیر برآورد کننده خطا، با توجه به مرتبه توابع شکل نربز، برای پنج المان نشان داده شده در شکل 3-18 مشاهده می‌شود.

جدول 3-1 مقادیر شاخص تاثیر برآورد کننده خطا، برای نقاط گوسی مختلف

تعداد نقاط انتگرال گیری به روش گوس	مسائل نمونه		
	تیر دوسر مفصل تحت بار گسترده (توابع شکل مرتبه دو)	تیر طره دایره‌ای شکل (توابع شکل مرتبه دو)	صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری (توابع شکل مرتبه سه)
چهار 	0.9183	0.9441	0.3834
نه 	0.9262	0.9456	0.4647
شانزده 	0.9126	0.9415	0.4703
بیست و پنج 	0.9160	0.9440	0.4308
سی و شش 	0.9148	0.9427	0.4170

همان طور که در فصل قبل بیان شد، شاخص تاثیر نسبت مجموع نرم خطای تقریبی به نرم خطای دقیق می‌باشد و هرچه این شاخص به یک نزدیکتر شود نشان دهنده قدرت بیشتر برآورد کننده خطا در تخمین میزان خطا در مسئله خواهد بود. در جدول 1 بیشترین میزان شاخص تاثیر برای هر یک از مسائل نمونه از دیگر مقادیر متمایز شده است. همان طور که مشاهده می‌شود بیشترین میزان شاخص تاثیر برای هر مثال مطابق با بیشترین نقاط انتگرال گیری به روش گوس نمی‌باشد. بلکه برای مسائل تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده و تیر طره دایره‌ای شکل که با توابع شکل مرتبه دو مورد تحلیل قرار گرفته اند، نه نقطه می‌باشد و برای مسئله صفحه دایره‌ای شکل که با توابع شکل مرتبه سه مورد تحلیل قرار گرفته است این نقاط به شانزده نقطه افزایش یافته اند. با توجه به این نتایج می‌توان بیان نمود که در این سه مسئله، تعداد نقاط بهینه تنش وابسته به مرتبه توابع شکل مورد استفاده در تحلیل مسئله می‌باشند، به طوری که با توجه به مرتبه توابع شکل، محل نقاط بهینه تنش منطبق بر حداقل تعداد نقاط انتگرال گیری به روش گوس در تحلیل ایزوژئومتریک است. نکته مهم دیگری که از نتایج جدول 3-1 برداشت می‌شود این است که برآورد کنند خطا در تمام نقاط گوسی ارائه شده دارای شاخص تاثیرهای نزدیک به هم و قابل قبولی می‌باشد و این موضوع نشان دهنده فوق همگرا بودن تمام نقاط گوسی، بدون در نظر گرفتن تعداد آنها در تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد.

فصل چهارم

بازیافت تنش و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری

4-1- مقدمه

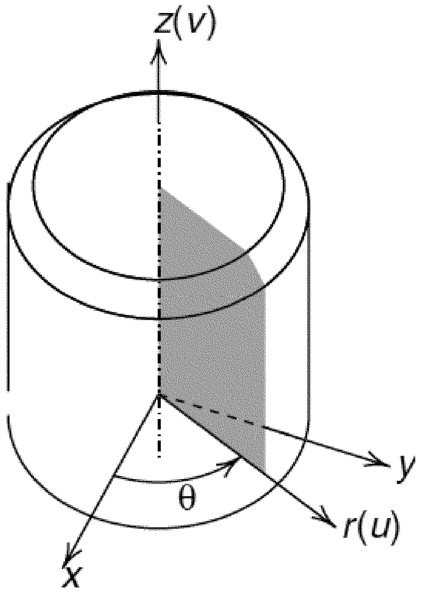
در فصل قبل نشان داده شده که چگونه می‌توان از خاصیت فوق همگرایی نقاط گوسی در بهبود نتایج حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش-کرنش مسطح و برآورد خطای آن استفاده نمود. در این فصل به توسعه این روش، در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل با تقارن محوری و بررسی تاثیر استفاده از نقاط فوق همگرا جهت بهبود حل و برآورد خطای آن پرداخته می‌شود. بدین منظور به مدلسازی و تحلیل دو مثال نمونه با شرایط تقارن محوری و دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. لوله بلند جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی و صفحه دایره‌ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز، دو مثال حل شده در این بخش می‌باشند. با توجه به تشابه توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی و بهبود دقت مولفه-های تنش بازیافتی نسب به حل ایزوژئومتریک برای دو مثال حل شده در این بخش، می‌توان بیان نمود که نقاط گوسی در تحلیل مسائل متقارن محوری نیز از خاصیت فوق همگرایی مناسبی برخوردار می‌باشند و می‌توان از آنها جهت بهبود نتایج تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری و برآورد خطای آن استفاده نمود.

در ادامه به بیان فرمولبندی تحلیل ایزوژئومتریک در تحلیل مسائل متقارن محوری پرداخته شده است؛ همچنین نحوه تشکیل سطح تنش بهبود یافته بر مبنای نقاط فوق همگرا، برای مسائل با شرایط تقارن محوری بیان شده است.

4-2- سازه‌های دارای تقارن محوری

تحلیل اجسامی که تقارن محوری دارند و بار اعمالی به آنها نیز متقارن محوری است در بسیاری از پروژه‌های مهندسی مورد نیاز است. ازکاربردهای این نوع تحلیل می‌توان بررسی تنش و کرنش‌های اعمالی به یک مخزن بزرگ تحت فشار، تحلیل جریان سیال در لوله‌ها، دیسک‌های توربین‌ها و پی‌های استوانه‌ای قرار گرفته بر روی بستر خاکی را نام برد. سازه‌های متقارن محوری سازه‌هایی هستند که از نظر هندسه، خواص ماده، شرایط مرزی و بارگذاری در دستگاه مختصات استوانه‌ای نسبت به q

مستقل هستند (شکل 4-1). وجود تقارن محوری تضمین می‌کند که هیچ نوع حرکت و تغییر مکانی در امتداد زاویه q وجود ندارد. بنابراین مسئله سه بعدی در مختصات (r,q,z) به مسئله دو بعدی در صفحه rz کاهش پیدا می‌کند.



شکل 4-1 تحلیل دو بعدی در حالت تقارن محوری

4-3- فرمولبندی تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل متقارن محوری

در مسائل متقارن محوری، مشابه مسائل تنش-کرنش مسطح، مولفه‌های تغییر مکـان جهـت r و z بـه صورت یک سطح نربز، طوری تعیین می‌شود که ارتفاع سطح تشکیل شده از تراز مبنا در هـر نقطـه از دامنه، بیان کننده‌ی مقدار تغییر مکان مسئله در آن مکـان باشـد. اگـر نقـاط کنترلـی را بـه گونـه‌ای انتخاب کنیم که مولفه‌های اول و دوم مختصات ایـن نقـاط، (P_r, P_z)، بتواننـد هندسـه مسـئله را در صفحه rz برآورد کنند، در این صورت مولفه‌ی سوم مختصات این نقاط را طوری محاسبه می‌کنیم کـه ارتفاع رویه در هر نقطه نسبت به صفحه rz نشان دهنده‌ی تغییر مکان آن نقطـه باشـد. بنـابراین اگـر تغییر شکل‌های شعاعی (در جهت r) و محوری (در جهت z) هر نقطه را بـه ترتیـب بـا u و v نشـان دهیم، می‌توان تغییر مکان هر نقطه در داخل زیر دامنه نربز وصله را به‌صورت زیر از روی نقاط کنترلی مربوط درونیابی کرد.

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(r,z) \\ v(r,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(x,h)\mathbf{P}_{u\,i,j} \\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(x,h)\mathbf{P}_{v\,i,j} \end{Bmatrix} \tag{1-4}$$

در رابطه‌ی بالا $\mathbf{P}_{i,j}$ها نمایشگر بردار مولفه‌های سوم مختصات نقاط کنترلی نربز، $R_{i,j}$ توابع پایه‌ای نربز و m و n تعداد نقاط کنترلی در جهت‌های r و z می‌باشند. با توجه به خاصیت بازه تاثیر توابع نربز، می‌توان معادله (1-4) را به معادله (2-4) کاهش داد.

$$\mathbf{u} \approx \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u(r,z) \\ v(r,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(x,h)\mathbf{P}_{u\,k,l} \\ \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(x,h)\mathbf{P}_{v\,k,l} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}.\bar{\mathbf{P}} \tag{2-4}$$

که در آن $\bar{\mathbf{R}}$ ماتریس توابع پایه‌ای نسبی نربز و $\bar{\mathbf{P}}$ ماتریس ستونی مختصات نقاط کنترلی مطابق روابط (16-3) و (17-3) تعریف می‌شوند.

در مسائل دارای تقارن محوری بردار کرنش‌ها دارای چهار مولفه مستقل از هم می‌باشد؛ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} e_{rr} \\ e_{zz} \\ e_{qq} \\ e_{rz} \end{Bmatrix} \tag{3-4}$$

با معلوم بودن تغییر مکان در نقاط داخل هر زیردامنه، می‌توان کرنش‌ها را در هر نقطه دل‌خواه بدست آورد. در این‌صورت مطابق رابطه (4-4) خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{4-4}$$

$\mathbf{u}$ بردار تغییر مکان‌ها، $\boldsymbol{\varepsilon}$ کرنش، و $\mathbf{L}$ یک عملگر دیفرانسیلی است که برای مسائل متقارن محوری

به‌صورت رابطه (4-5) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{1}{r} & 0\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z}\end{bmatrix} \tag{5-4}$$

با جای‌گذاری (4-2) در رابطه (4-4) می‌توان کرنش‌ها را به‌صورت زیر تقریب زد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\bar{\mathbf{P}} \tag{6-4}$$

که با توجه به ماتریس دیفرانسیل‌گیری $\mathbf{L}$ ماتریس $\mathbf{B}$ برای مسائل تقارن محوری به‌صورت رابطه (4-7) خواهد بود. هم‌چنین در مسائل متقارن محوری می‌توان چهار مولفه تنش را به‌صورت رابطه (4-8) برای بردار تنش‌ها در نظر گرفت.

$$\mathbf{B}=\mathbf{L}\bar{\mathbf{R}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial R(x,h)}{\partial r} & 0 & \cdots\\ 0 & \frac{\partial R(x,h)}{\partial z} & \cdots\\ \frac{R(x,h)}{r} & 0 & \cdots\\ \frac{\partial R(x,h)}{\partial z} & \frac{\partial R(x,h)}{\partial r} & \cdots\end{bmatrix} \tag{7-4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}s_{rr}\\ s_{zz}\\ s_{qq}\\ s_{rz}\end{Bmatrix} \tag{8-4}$$

با فرض وجود رفتار خطّی کشسان، رابطه‌ی بین تنش‌ها و کرنش‌ها به‌صورت رابطه (3-21) می‌باشد که در آن $\mathbf{D}$ ماتریس خواص مصالح، برای مسائل با شرایط تقارن محوری به صورت رابطه (4-9) بیان می‌شود.

$$\mathbf{D}=\frac{E}{(1+n)(1-2n)}\begin{bmatrix}(1-n) & n & n & 0\\ n & (1-n) & n & 0\\ n & n & (1-n) & 0\\ 0 & 0 & 0 & {(1-2n)}/{2}\end{bmatrix} \qquad (9\text{-}4)$$

مشابه فرآیند تشکیل ماتریس سختی که در فصل قبل برای مسائل تنش-کرنش مسطح بیان شده است، برای مسائل متقارن محوری نیز با استفاده از رهیافت کار مجازی می‌توان ماتریس سختی هر وصله از دامنه مدلسازی شده را مطابق رابطه (4-10) محاسبه نمود.

$$\mathbf{K}_{patch}=\int\!\!\int\!\!\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, r\, drdzdq \qquad (10\text{-}4)$$

محاسبه‌ی انتگرال ماتریس سختی در مسائل متقارن محوری با استفاده از المان حجمی نربز امکان-پذیر است که از دوران یک المان سطحی نربز حول محور تقارن ایجاد می‌شود و به صورت یک حلقه با سطح مقطع چهار ضلعی می‌باشد. بایستی توجه داشت که جزء حجم در مختصات استوانه‌ای به صورت $dv=r\,drdzdq$ می‌باشد. هم‌چنین با توجه با این نکته که مسائل متقارن محوری مستقل از q می‌باشند، می‌توان این انتگرال را به صورت دو بعدی زیر تبدیل کرد:

$$\mathbf{K}_{patch}=2p\int\!\!\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, r\, drdz \qquad (11\text{-}4)$$

و در نهایت انتگرال ماتریس سختی به روش گوس به صورت رابطه (4-12) محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{K}_{patch}=2p\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{B}^T(r,s)\mathbf{D}\mathbf{B}(r,s)\, r\det\mathbf{J}_1\det\mathbf{J}_2 w_i.w_j \qquad (12\text{-}4)$$

که در آن m و n تعداد نقاط گوس در جهت r و s در هر المان و $w_i.w_j$ وزن نقاط گوس می‌باشد.

4-4- تشریح روش برآورد خطا در مسائل متقارن محوری

در مسائل متقارن محوری، می‌توان سطح بهبود یافته هر یک از مولفه‌های تنش را با توجه به توابع شکل نربز به صورت رابطه (4-13) در نظر گرفت:

$$\boldsymbol{\sigma}^*=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\sigma}^*_{rr}\\ \boldsymbol{\sigma}^*_{zz}\\ \boldsymbol{\sigma}^*_{qq}\\ \boldsymbol{\sigma}^*_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{R^T P}_{rr}\\ \mathbf{R^T P}_{zz}\\ \mathbf{R^T P}_{qq}\\ \mathbf{R^T P}_{rz}\end{Bmatrix} \qquad (13\text{-}4)$$

که در آن $\mathbf{P}$ و $\mathbf{R}$ مطابق روابط (3-41) و (3-42) تعریف می‌شوند. همان طور که مشاهده می‌شود، تنها پارامتر مجهول جهت تعیین سطح هر مولفه تنش، مختصات سوم نقاط کنترلی (بردار $\mathbf{P}$) می‌باشد. برای تعیین این مقادیر، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می‌کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P})$ را برای هر مولفه تنش به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\mathbf{P}_{rr}) = \sum_{l=1}^{K} (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_{rr} - \bar{\sigma}_{rr})^2 \qquad (14\text{-}4)$$

$$F(\mathbf{P}_{zz}) = \sum_{l=1}^{K} (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_{zz} - \bar{\sigma}_{zz})^2 \qquad (15\text{-}4)$$

$$F(\mathbf{P}_{qq}) = \sum_{l=1}^{K} (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_{qq} - \bar{\sigma}_{qq})^2 \qquad (16\text{-}4)$$

$$F(\mathbf{P}_{rz}) = \sum_{l=1}^{K} (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_{rz} - \bar{\sigma}_{rz})^2 \qquad (17\text{-}4)$$

که در آن $\bar{\sigma}$ مولفه تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می‌باشد. در نهایت با مشتق گیری از تابع $F(\mathbf{P})$ نسبت به مؤلفه‌های مجهول بردار $\mathbf{P}$ و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته هر یک از مولفه‌ها بدست می‌آید. به طور مثال برای مولفه تنش بهبود یافته $\boldsymbol{\sigma}_{rr}^*$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F(\mathbf{P}_{rr})}{\partial P_{i,j}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{P}_{rr} = \mathbf{B}_{rr} \Rightarrow \mathbf{P}_{rr} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{rr} \qquad (18\text{-}4)$$

که در آن:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \qquad ; \qquad \mathbf{B}_{rr} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{R}_i . \bar{\sigma}_{rr}$$

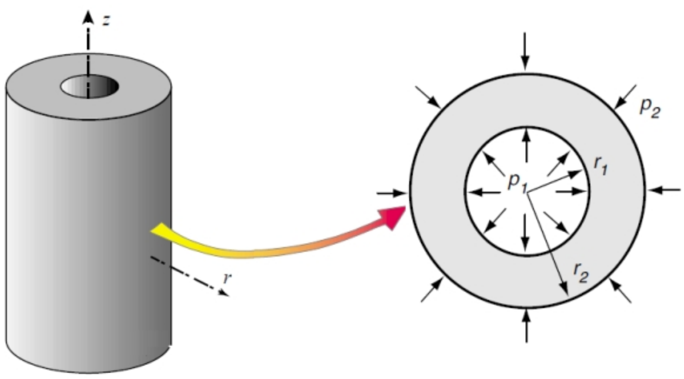
با داشتن مختصات نقاط کنترلی هر یک از مولفه‌های تنش، سطح مربوط به آن نیز بدست می‌آید. همانگونه که در ادامه خواهیم دید، برای مسائل متقارن محوری نیز این سطح تنش نسبت به سطح تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتریک دقیق تر می‌باشد و از این‌رو می‌تواند به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری به کار رود.

در ادامه جهت بررسی کارایی این تخمین کننده خطا در برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک مسائل

متقارن محوری به مدلسازی و مقایسه نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق و نحوه تغییرات مولفه‌های تنش برای دو مسئله نمونه الاستیسیته که دارای حل تحلیلی می‌باشند، پرداخته شده است.

4-5- لوله بلند جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی

در این قسمت به بیان نتایج گرفته شده از مدلسازی یک لوله بلند جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی یکنواخت و در شرایط تقارن محوری، توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش های آن پرداخته می‌شود (شکل 4-2).



شکل4-2 لوله جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی

در این مسئله علاوه بر داشتن شرایط تقارن محوری، کرنش در جهت محور z نیز به دلیل بلند بودن طول لوله صفر در نظر گرفته می‌شود.

پارامترهای به کار برده شده در تحلیل این مسئله به صورت زیر می‌باشند:

$$r_1 = 4, \quad r_2 = 6, \quad P_1 = 20, \quad P_2 = 10, \quad E = 2\times 10^5, \quad n = 0.3$$

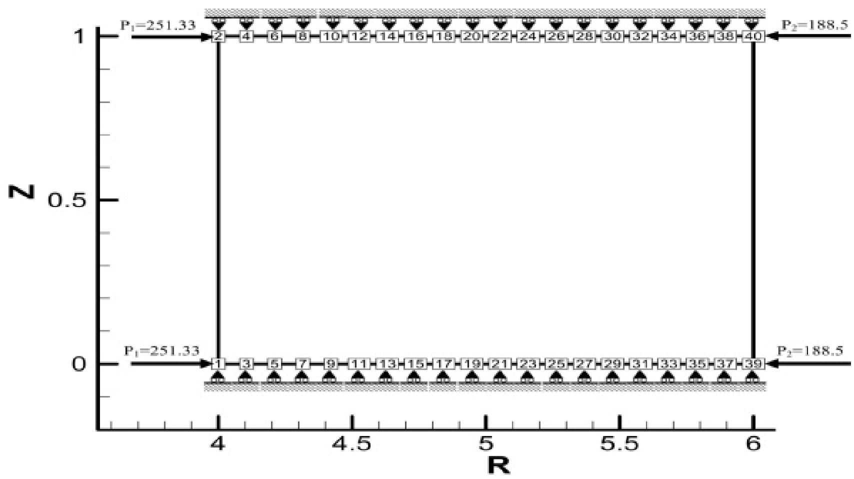
تنشهای دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن به صورت روابط (4-19) تا (4-21) ارائه شده است[54].

$$s_r = \frac{r_1^2 r_2^2 \left(p_2 - p_1\right)}{r_2^2 - r_1^2}\frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad (19\text{-}4)$$

$$s_q = -\frac{r_1^2 r_2^2 \left(p_2 - p_1\right)}{r_2^2 - r_1^2}\frac{1}{r^2} + \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \qquad (20\text{-}4)$$

$$s_z = n\left(s_r + s_q\right) = 2n\,\frac{r_1^{\,2}p_1 - r_2^{\,2}p_2}{r_2^{\,2} - r_1^{\,2}},\; s_{zr} = 0 \qquad (21\text{-}4)$$

برای مدلسازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریک از یک وصله و 40 نقطه کنترلی استفاده شده است. در شکل 4-3 مختصات نقاط کنترلی و ترتیب نامگذاری آنها به همراه شرایط مرزی اعمال شده به نقاط کنترلی مربوطه نشان داده شده است.

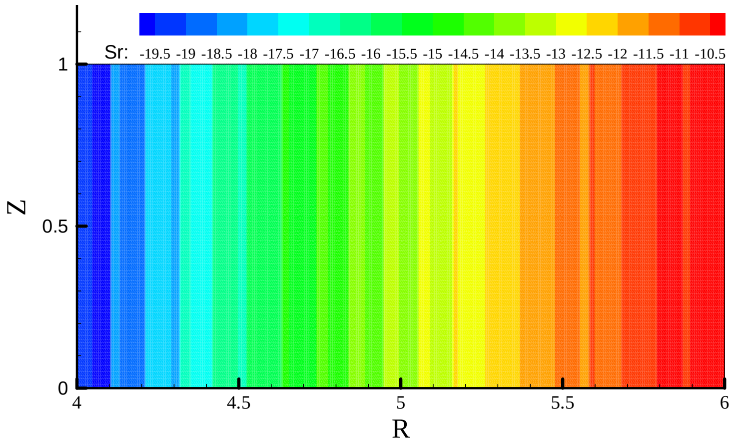


شکل 4-3 نقاط کنترلی و شرایط مرزی لوله جدار ضخیم تحت فشار داخلی و خارجی

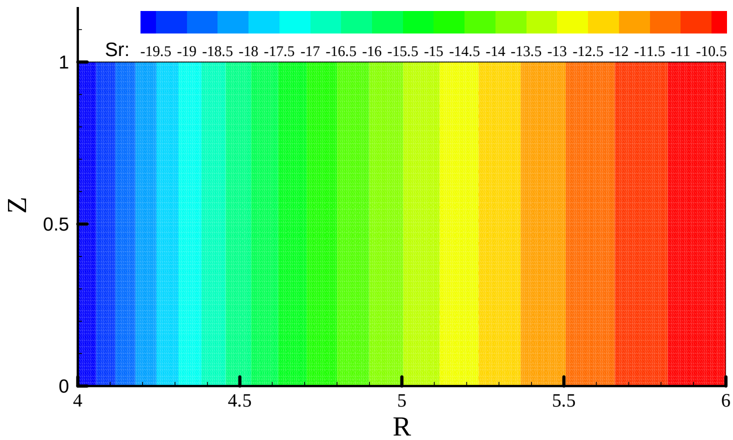
جهت نمایش بهتری از کارایی تخمین کننده خطای پیشنهادی با توجه به مرجع [55] ازتوابع شکل نربز مرتبه دو استفاده شده است. همچنین با توجه با مرتبه تابع شکل از نه نقطه گوسی جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات hو x به صورت زیر می‌باشند.

$$h = \{0,0,1,1\}\;;\; x = \left\{\begin{matrix} 0,0,0.053,0.105,0.158,0.210,0.263,0.316, \\ 0.368,0.421,0.4746,0.526,0.579,0.632, \\ 0.684,0.737,0.789,0.842,0.895,0.947,1,1 \end{matrix}\right\}$$

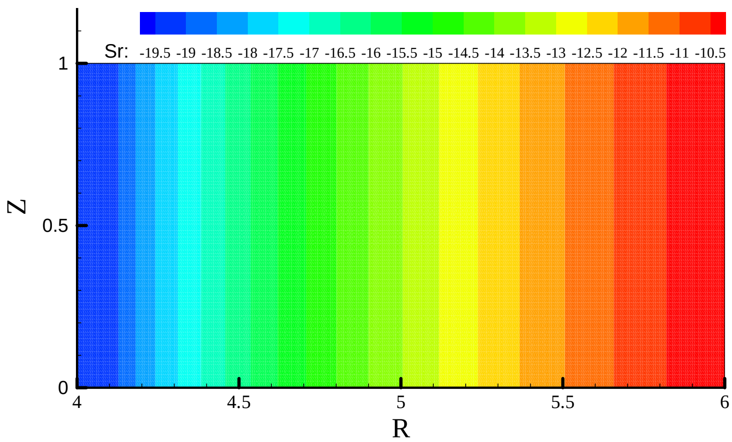
در شکل 4-4، به عنوان نمونه، کانتور تنش مولفه s_r برای حل دقیق، ایزوژئومتریک و حل بهبود یافته نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات تنش بهبود یافته تشابه بیشتری با حل دقیق نسبت به حل ایزوژئومتریک دارد.



الف) حل ایزوژومتریک



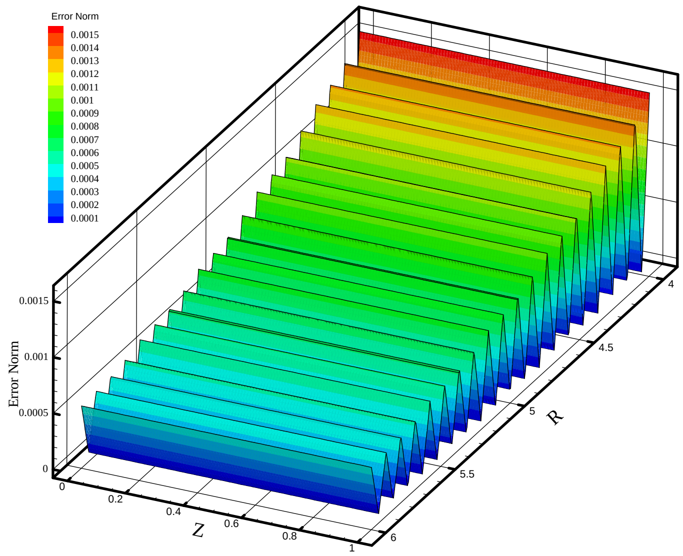
ب) حل دقیق



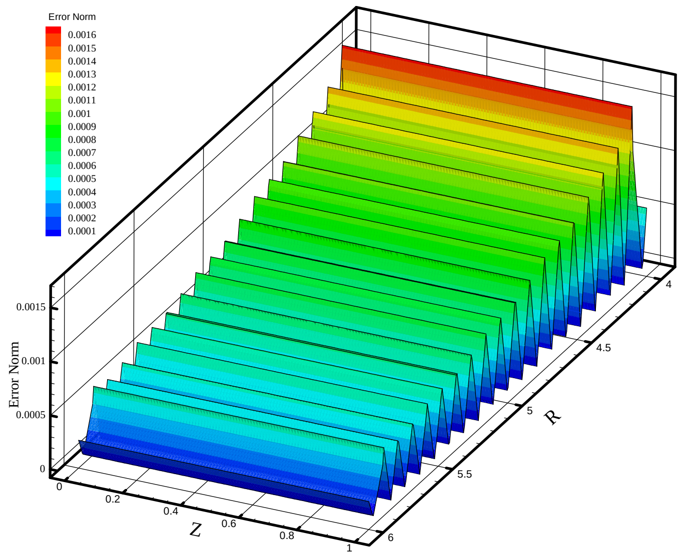
ج) حل بهبود یافته

شکل 4-4 کانتور تنش مولفه s_r لوله جدار ضخیم

در شکل 4-5 نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، تشابه در نحوهٔ توزیع نرم خطای تقریبی نسبت به نرم خطای دقیق در این مثال، نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطای پیشنهادی برای برآورد خطای مسائل متقارن محوری می‌باشد.



الف) نرم خطای دقیق

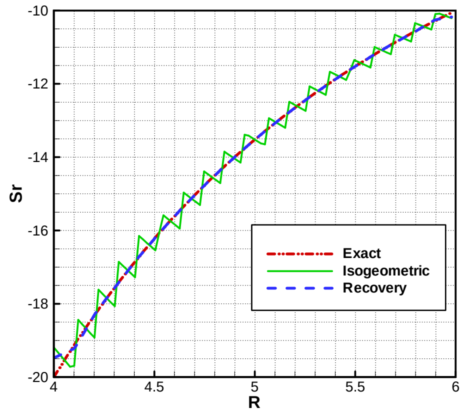


ب) نرم خطای تقریبی

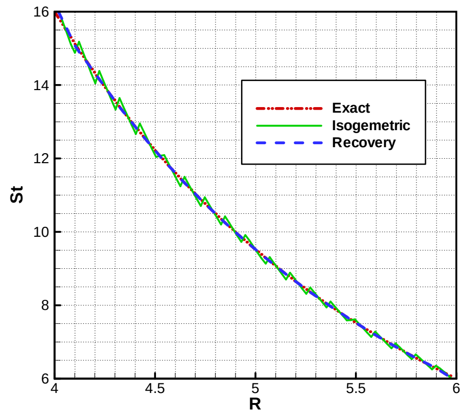
شکل 4-5 توزیع نرم خطای انرژی لوله جدار ضخیم

جهت مقایسه دیگری از نحوه تغییرات تنش دقیق با حل ایزوژئومتریک و بهبود یافته، به ترسیم نمودار

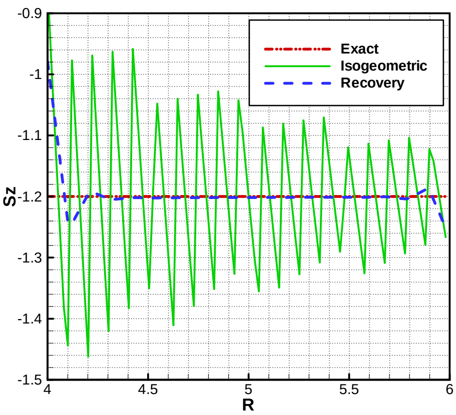
تغییرات تنش در مسیر افقی به مختصاتهای (r,0.5) پرداخته شده است که در شکل 4-6 مشاهده می‌شود.



الف) مولفه تنش s_r



ب) مولفه تنش s_q

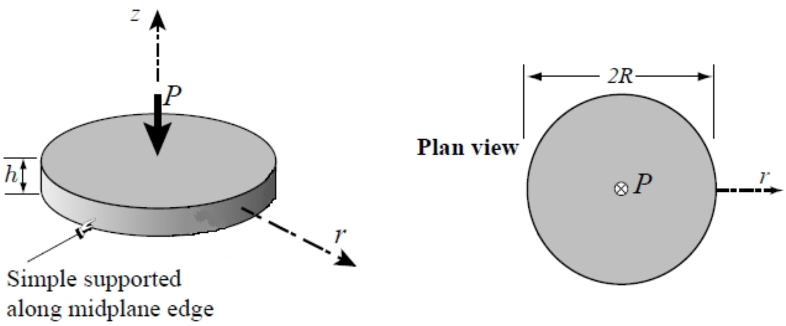


ج) مولفه تنش s_z

شکل 4-6 نمودار تغییرات مولفه‌های تنش لوله جدار ضخیم در مسیر Z=0.5

4-6- صفحه دایره‌ای شکل تحت بار متمرکز

مسئله نمونه دیگری که در این قسمت به آن پرداخته می‌شود، مدلسازی یک صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز P در مرکز و تکیه‌گاه‌های مفصلی در لبه‌های آن، تحت شرایط تقارن محوری می‌باشد(شکل 4-7).



شکل 4-7 صفحه دایره‌ای شکل تحت بار متمرکز در مرکز

با توجه به شکل 4-7، پارامترهای به کار برده شده در تحلیل این مسئله به صورت زیر می‌باشند:

$$R = 10, \quad h = 1, \quad P = 10, \quad E = 1000, \quad n = 0.3$$

تنشهای دقیق این مسئله با فرض مدل صفحه کیرشهف[1] به صورت روابط (4-22) تا (4-24) ارائه شده است[56].

$$s_r = \frac{12 M_r Z}{h^3}\ ,\ M_r = \frac{P}{4p}(1+u)\log\frac{R}{r} \tag{22-4}$$

$$s_q = \frac{12 M_q Z}{h^3},\quad M_q = \frac{P}{4p}\left[(1+u)\log\frac{R}{r} + 1 - u\right] \tag{23-4}$$

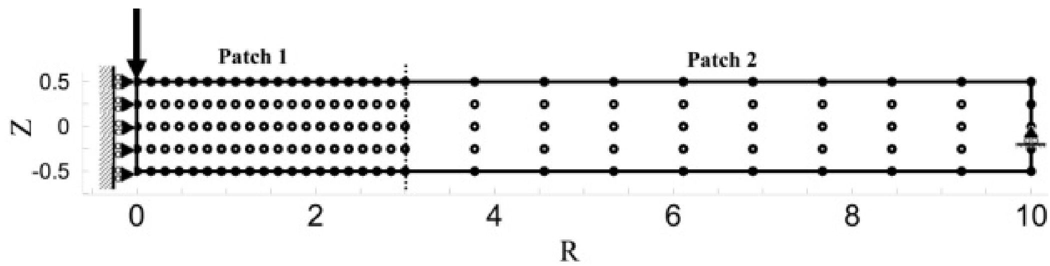
$$s_z = 0\ ,\ s_{zr} = 0 \tag{24-4}$$

همان طور که در معادلات (4-22) و (4-23) مشاهده می‌شود، پاسخ تحلیلی این مسئله در r=0 دارای نقطه تکین می‌باشد. لازم به ذکر است که معمولا مسائل با نقطه تکین، به علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی جهت بررسی کارایی تخمین کننده‌های خطا به شمار نمی‌روند؛ اما هدف از ارائه این مثال، بررسی رفتار تخمین کننده خطا می‌باشد. با توجه به این نکته که در نقاط تکین r=0

[1] Kirchhoff plate model

خطای زیادی نسبت به سایر نقاط وجود دارد، لذا یک تخمین کنندهٔ خطای مناسب باید به طور نسبی قادر به نمایش این توزیع خطا باشد. در صورتی که بهبود شبکه با توجه به نتایج بدست آمده از تخمین کنندهٔ خطا مورد نظر باشد، تخمین کنندهٔ خطایی که دارای آرایشی مناسب باشد می‌تواند برنامه را در هر مرحله به بهبود محلی شبکه در اطراف نوک ترک راهنمایی کند.

برای مدلسازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریک از دو وصله و 145 نقطه کنترلی استفاده شده است. در شکل 4-8 مختصات نقاط کنترلی در هر وصله و شرایط مرزی اعمال شده به آنها نشان داده شده است.

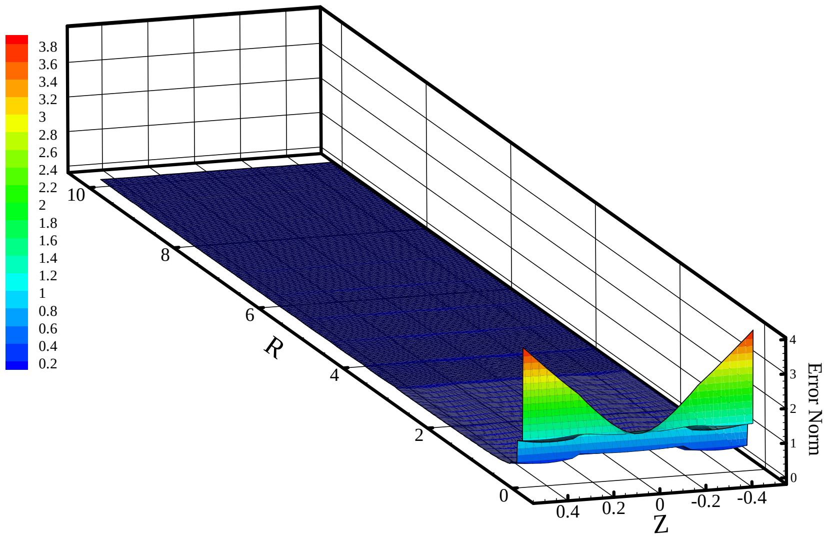


شکل 4-8 نقاط کنترلی و شرایط مرزی صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز در مرکز

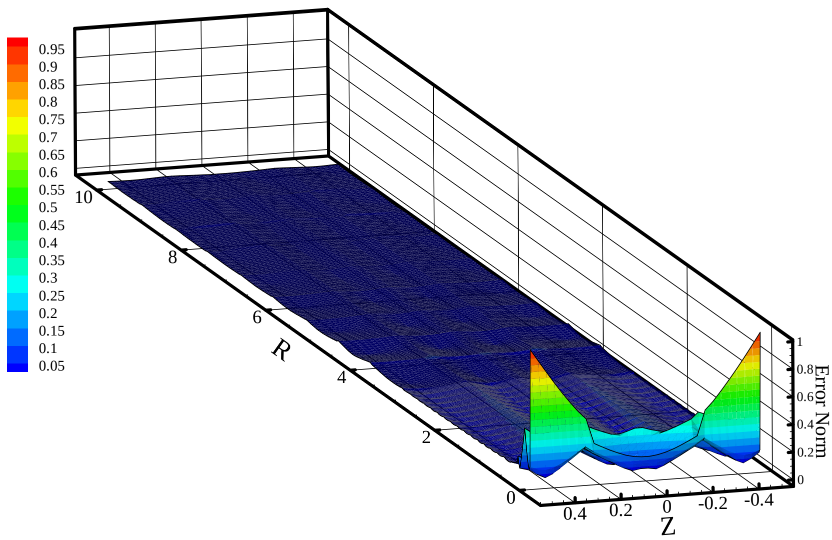
مشابه مثال قبل، در این مسئله نیز از توابع شکل نربز مرتبه دو و نه نقطه گوسی جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر وصله استفاده شده است. بردارهای گرهی درجهات hو x به صورت زیر می‌باشند.

$$h = \{0,0,0.25,0.5,0.75,1,1\} \; ; \; x = \begin{Bmatrix} 0,0,0.05,0.11,0.16,0.21,0.26,0.32, \\ 0.37,0.42,0.47,0.53,0.58,0.63,0.68, \\ 0.74,0.79,0.84,0.89,0.95,1,1 \end{Bmatrix}$$

در شکل 4-9 نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، در توزیع نرم خطای تقریبی نیز میزان خطا در r=0 نسبت به سایر نقاط بیشتر نشان داده شده است که نشان دهنده رفتار مناسب تخمین کننده خطا می‌باشد.



الف) نرم خطای دقیق



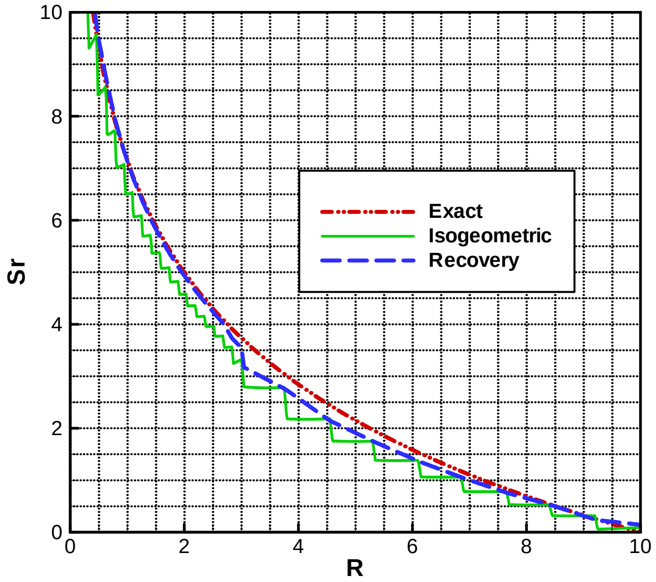
ب) نرم خطای تقریبی

شکل4-9 توزیع نرم خطای انرژی صفحه دایره‌ای

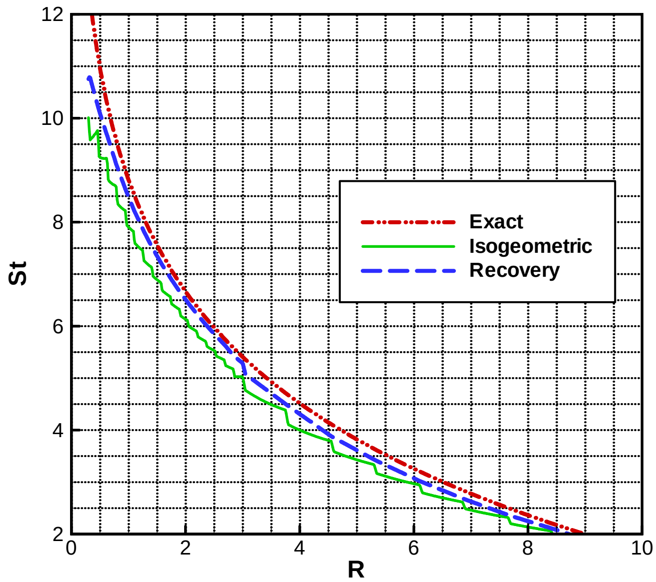
در شکل‌های 4-10 و 4-11 جهت مقایسه نحوه تغییرات تنش دقیق با حل ایزوژئومتریک و بهبود یافته، به ترسیم نمودار تغییرات تنش در مسیر افقی به مختصاتهای (r,0.25) و عمودی (0.5,z) پرداخته شده است. لازم به ذکر است که به علت تغییرات زیاد حل تحلیلی در نزدیکی r=0 نمودارها از r=0.3 به بعد ترسیم شده اند.

در نهایت با توجه به تشابه توزیع نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در مسائل حل شده در این

بخش و همچنین نزدیکی نمودارهای مولفه‌های تنش بهبود یافته به حل دقیق، نسبت به مولفه‌های تنش ایزوژئومتریک در این مسائل، می‌توان بیان نمود که نقاط فوق همگرای تنش در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری نیز از کارایی مناسبی برخوردار می‌باشند و می‌توان از آنها به عنوان راه حلی ساده و مهندسی جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش بدست آمده از تحلیل مسائل متقارن محوری به روش ایزوژئومتریک نام برد.

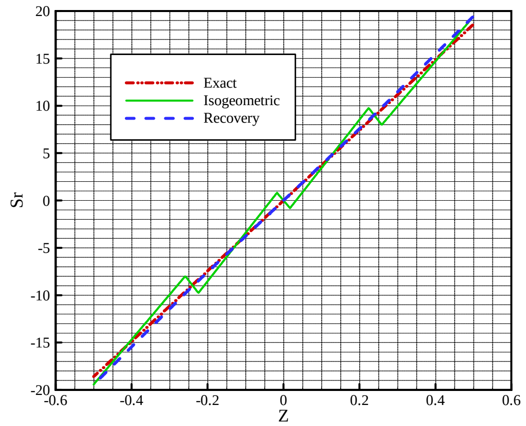


الف) مولفه تنش s_r

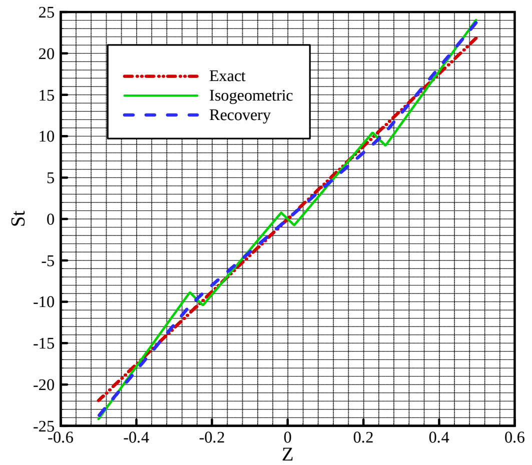


ب) مولفه تنش s_q

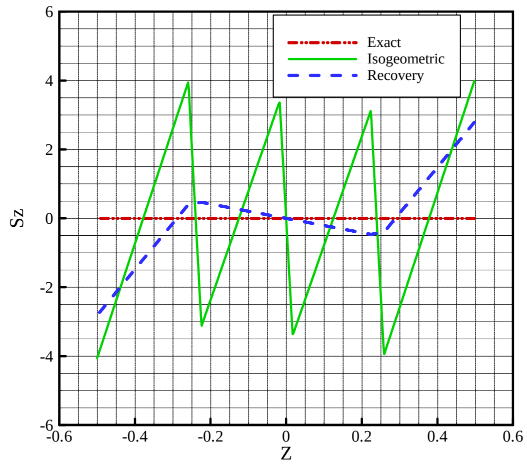
شکل4-10 نمودار تغییرات مولفه‌های تنش صفحه دایره‌ای در مسیر Z=0.25



الف) مولفه تنش s_r



ب) مولفه تنش s_q



ج) مولفه تنش s_z

شکل4-11 نمودار تغییرات مولفه‌های تنش صفحه دایره‌ای در مسیر R=0. 5

فصل پنجم

بازیافت تنش و برآورد خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی

5-1- مقدمه

در فصل‌های سه و چهار، کاربرد استفاده از نقاط فوق همگرای گوسی در تشکیل سطح تنش بهبود یافته و برآورد توزیع خطای مسائل دوبعدی ایزوژئومتریک مورد بررسی قرار گرفت. اما با توجه به اینکه تحلیل مسائل سه بعدی، کاربرد ویژه‌ای در طراحی مهندسی و حل مسائل واقعی دارد، بررسی تاثیر نقاط فوق همگرای گوسی در تشکیل سطح تنش بهبود یافته این مسائل و ارائه یک راهکار موثر جهت برآورد خطا و افزایش قابلیت اعتماد نتایج حاصل از تحلیل مسائل سه بعدی، از اهمیت بالایی برخوردار است. در این فصل به توسعه روش برآورد خطا بر مبنای نقاط فوق همگرای مسائل دو بعدی، جهت استفاده در تحلیل ایزوژئومتریک مسئله‌های سه بعدی و بررسی تاثیر استفاده از نقاط انتگرال گیری گوسی جهت بهبود حل و برآورد خطای این مسائل پرداخته شده است. بدین منظور به مدلسازی و تحلیل دو مثال نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. تیر طره با مقطع دایره و مربع دو مثال حل شده در این پژوهش می‌باشند. با توجه به تشابه توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی و بهبود دقت مولفه‌های تنش بازیافتی نسبت به حل ایزوژئومتریک برای دو مثال حل شده در این پژوهش، می توان بیان نمود که نقاط گوسی در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی نیز از خاصیت فوق همگرایی مناسبی برخوردار می‌باشند و می‌توان از آنها جهت بهبود نتایج تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی و برآورد خطای آن استفاده نمود.

در ادامه به چگونگی تولید هندسه سه بعدی با استفاده از تکنیک نربز در تحلیل ایزوژئومتریک پرداخته شده است. همچنین فرمولبندی تحلیل سه بعدی مسائل با استفاده از روش ایزوژئومتریک بیان می‌شود و در نهایت نحوه تشکیل تنش بهبود یافته در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل سه بعدی تشریح شده است.

5-2- تولید هندسه سه بعدی با استفاده از تکنیک نربز

مشابه فرمولهای که در بخش 3-2-1 در چگونگی تشکیل منحنی‌ها و سطوح توسط تکنیک نربز بیان

شد، احجام نیز با استفاده از تکنیک نربز مطابق رابطه (5-1) بیان می‌شوند [51].

$$V(x,h,z)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}\frac{N_{i,p}(x)N_{j,q}(h)N_{k,r}(z)w_{i,j,k}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}N_{i,p}(x)N_{j,q}(h)N_{k,r}(z)w_{i,j,k}}P_{i,j,k} \tag{1-5}$$

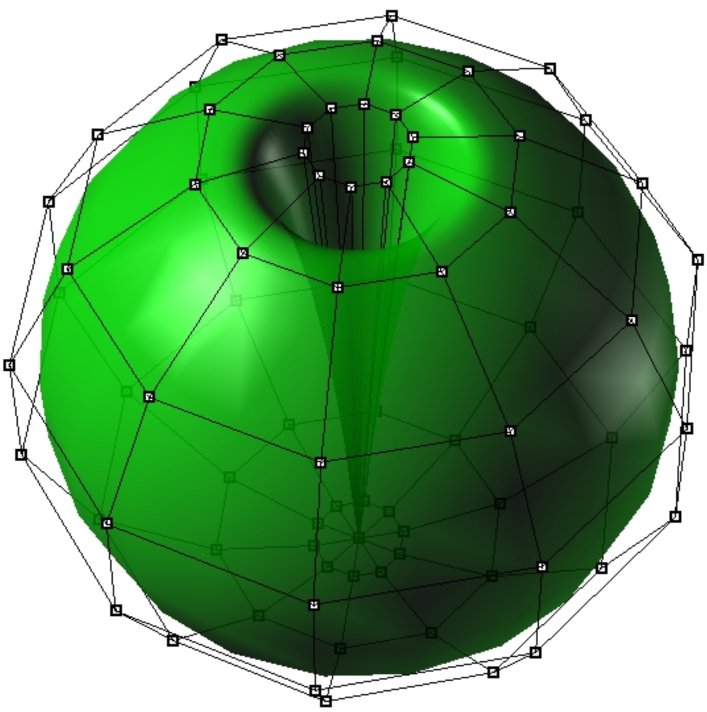
$$=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}R_{i,j,k}P_{i,j,k} \qquad 0\le x,h,z\le 1$$

در این رابطه بردار گرهی x و h مطابق رابطه (3-6) و ζ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{r+1},z_{r+1},\ldots,z_{z-r-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{r+1}\right\} \tag{2-5}$$

که دارای z+1 گره می‌باشد. $P_{i,j,k}$ نقاط کنترلی که به تعداد $(n+1)\times(m+1)\times(l+1)$ می‌باشند. $w_{i,j,k}$ وزنهای متناظر با نقاط کنترلی $P_{i,j,k}$، و $N_{i,p}(x)$، $N_{j,q}(h)$ و $N_{k,r}(z)$ به ترتیب توابع پایه بی- اسپلاین از درجه p، q و r می‌باشند.

به طور مثال در شکل (5-1) شبکه نقاط کنترلی و حجم تولید شده از آن با استفاده از تکنیک نربز نشان داده شده است.



شکل 5-1 شبکه نقاط کنترلی و حجم نربز مربوط به آن

5-3- فرمولبندی تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل سه بعدی

کلی ترین مسائل در تحلیل سازه‌ها، مسائل سه بعدی می‌باشند که در صنعت نیز کاربرد فراون دارند. در این مسائل هزینه ساخت شبکه اجزای محدود نسبت به مسائل دوبعدی، به دلیل پیچیده بودن هندسه آن بسیار بیشتر است. بنابراین به نظر می‌رسد حل این مسائل به کمک روش ایزوژئومتریک از اهمیت بیشتری برخوردار باشد.

در مکانیک محیط های پیوسته، سازه‌های سه بعدی در هر نقطه، دارای سه درجه آزادی تغییر مکانی می‌باشند. در این مسائل شش مولفه کرنش وجود دارد. ماتریس کرنش را در مسائل سه‌بعدی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$e=\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ g_{xy} \\ g_{yz} \\ g_{zx} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \partial u_x/\partial x \\ \partial u_y/\partial y \\ \partial u_z/\partial z \\ \partial u_x/\partial y+\partial u_y/\partial x \\ \partial u_y/\partial z+\partial u_z/\partial y \\ \partial u_z/\partial x+\partial u_x/\partial z \end{Bmatrix}=\mathbf{Lu} \tag{3-5}$$

که در این رابطه:

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \tag{4-5}$$

$$\mathbf{u}=\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{5-5}$$

بنابراین در مسائل سه بعدی سه مولفه تغییر مکانی u، v و w بایستی تقریب زده شوند. در روش ایزوژئومتریک این کار با استفاده از توابع پایه نربز به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\mathbf{u}\approx\bar{\mathbf{u}}^p(x,h,z)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{l}\sum_{k=0}^{m}R_{i,j,k}(x,h,z)\,\mathbf{P}_{i,j,k}^{p} \tag{6-5}$$

که در این رابطه $R_{i,j,k}(x,h,z)$، مطابق رابطه (5-1) توابع پایه نربز می‌باشد و $\mathbf{P}^{p}_{i,j,k}$ متغییرهای کنترلی مربوط به زیردامنه p در مسئله می‌باشند. با توجه به خاصیت بازه تاثیر توابع نربز که بیان می‌کند برای هر x، h و z فقط تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می‌باشند برای کاهش هزینه محاسبات، معادله (5-6) را به صورت (5-7) بیان نمود.

$$\bar{\mathbf{u}}^{i,j,k}=\begin{Bmatrix} u^{i,j,k}(x,y,z)\\ v^{i,j,k}(x,y,z)\\ w^{i,j,k}(x,y,z)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{e=i-p}^{i}\sum_{f=j-q}^{j}\sum_{g=k-r}^{k} R_{e,f,g}(x,h,z)\,P_{u_{e,f,g}}\\ \sum_{e=i-p}^{i}\sum_{f=j-q}^{j}\sum_{g=k-r}^{k} R_{e,f,g}(x,h,z)\,P_{v_{e,f,g}}\\ \sum_{e=i-p}^{i}\sum_{f=j-q}^{j}\sum_{g=k-r}^{k} R_{e,f,g}(x,h,z)\,P_{w_{e,f,g}}\end{Bmatrix}=\mathbf{R.P} \tag{7-5}$$

در رابطه بالا $\mathbf{R}$ ماتریس توابع پایه‌ای نسبی نربز و $\mathbf{P}$ ماتریس ستونی مختصات نقاط کنترلی به صورت (5-8) و (5-9) بیان می‌شوند.

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z) & 0 & 0\\ 0 & R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z) & 0\\ 0 & 0 & R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ R_{i-p,j-q,k}(x,h,z) & 0 & 0\\ 0 & R_{i-p,j-q,k}(x,h,z) & 0\\ 0 & 0 & R_{i-p,j-q,k}(x,h,z)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ R_{i-p,j,k}(x,h,z) & 0 & 0\\ 0 & R_{i-p,j,k}(x,h,z) & 0\\ 0 & 0 & R_{i-p,j,k}(x,h,z)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ R_{i,j,k}(x,h,z) & 0 & 0\\ 0 & R_{i,j,k}(x,h,z) & 0\\ 0 & 0 & R_{i,j,k}(x,h,z) \end{bmatrix}^{T} \tag{8-5}$$

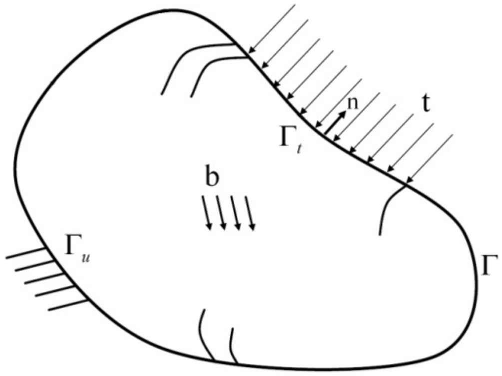
$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} P_{u\ i-p,j-q,k-r} \\ P_{v\ i-p,j-q,k-r} \\ P_{w\ i-p,j-q,k-r} \\ \vdots \\ P_{u\ i-p,j-q,k} \\ P_{v\ i-p,j-q,k} \\ P_{w\ i-p,j-q,k} \\ \vdots \\ P_{u\ i-p,j,k} \\ P_{v\ i-p,j,k} \\ P_{w\ i-p,j,k} \\ \vdots \\ P_{u\ i,j,k} \\ P_{v\ i,j,k} \\ P_{w\ i,j,k} \end{bmatrix} \qquad (9\text{-}5)$$

با توجه به رابطه (7-5) مشاهده می‌شود که تنها پارامتر مجهول برای تعیین تغییر مکان در جهت x، y و z بردار $\mathbf{P}$ می‌باشد. محدودیتی که بردار مولفه‌های چهارم مختصات نقاط کنترلی نربز را برای هر مولفه تغییر مکان مشخص می‌کند، ارضای معادله دیفرانسیل تعادل در دامنه تحلیل ایزوژئومتریک است.

معادله دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی نیرو و جابجایی حاکم بر یک مسئله الاستیسیته را می‌توان به صورت رابطه (10-5) تعریف نمود:

$$\begin{aligned} &\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=0 && in\ \ \Omega \\ &\boldsymbol{\sigma}_{ij}\mathbf{n}_j=\mathbf{t}_i && on\ \ \Gamma_t \\ &\mathbf{u}_i=\hat{\mathbf{u}}_i && on\ \ \Gamma_u \end{aligned} \qquad (10\text{-}5)$$

که در آن L عملگر مشتق می‌باشد و به صورت رابطه (4-5) تعریف می‌شود. $\mathbf{u}$ و $\mathbf{b}$ به ترتیب بردارهای جابجایی و نیروهای حجمی، $\boldsymbol{\sigma}$ مشابه رابطه (18-5)، بردار ستونی مولفه‌های تنش و $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ ماتریس مربعی تنش می‌باشند. $\mathbf{t}_i$ نیروهای سطحی از پیش تعیین شده بر روی مرز طبیعی Γ_t و $\hat{\mathbf{u}}_i$ جابجایی از پیش تعیین شده بر روی مرز ضروری Γ_u و $\mathbf{n}_j$ بردار یکه عمود بر هر نقطه از مرز طبیعی و به سمت خارج سطح می‌باشد (شکل 5-2).



شکل 5-2 شرایط مرزی یک مسئله الاستیسیته

با جایگذاری (5-7) در (5-10) و با استفاده از روش تغییر مکان مجازی و یا روش مینیمم کردن تابع پتانسیل صورت ضعیف معادله (5-10)، مشابه آنچه در تحلیل دوبعدی ایزوژئومتریک گفته شده بود، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega}\mathbf{B}^T(\mathbf{DBP})d\Omega-\int_{\Omega}\mathbf{R}^T\mathbf{b}\,d\Omega-\int_{\Gamma_t}\mathbf{R}^T\mathbf{t}\,d\Gamma=0 \tag{11-5}$$

که در آن $\mathbf{R}$ و $\mathbf{P}$ مطابق با روابط (5-8) و (5-9)، $\mathbf{D}$ ماتریس خواص مصالح و $\mathbf{B}$ ماتریس مشتقات توابع شکل نربز به صورت (5-12) و (5-13) تعریف می‌شود.

$$D=\frac{E}{(1+n)(1-2u)}\begin{bmatrix}1-n & n & 0 & 0 & 0 & 0\\ & 1-n & n & 0 & 0 & 0\\ & & 1-n & 0 & 0 & 0\\ & & & (1-2n)/2 & 0 & 0\\ & sym. & & & (1-2n)/2 & 0\\ & & & & & (1-2n)/2\end{bmatrix} \tag{12-5}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{LR}=\begin{bmatrix}\frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)}{\partial x} & 0 & 0 & \mathbf{L}\\ 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)}{\partial y} & 0 & \mathbf{L}\\ 0 & 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)}{\partial z} & \mathbf{L}\\ \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)}{\partial y} & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)}{\partial x} & 0 & \mathbf{L}\\ 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)}{\partial z} & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)}{\partial y} & \mathbf{L}\\ \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)}{\partial z} & 0 & \frac{\partial R_{i-p,j-q,k-r}(x,h,z)}{\partial x} & \mathbf{L}\end{bmatrix} \tag{13-5}$$

همچنین می‌توان رابطه (5-11) را به صورت زیر بیان نمود:

$$\mathbf{KP}=\mathbf{F} \tag{14-5}$$

که در آن $\mathbf{K}$ ماتریس ضرایب (ماتریس سختی)، $\mathbf{P}$ مجهولات مسئله و $\mathbf{F}$ نیروهای خارجی وارد بر - دامنه می‌باشند. حال با گسسته سازی دامنه، $\mathbf{K}$و $\mathbf{F}$ به ترتیب از گردآوری ماتریس سختی و بردار نیروی هر المان از فضای پارامتری، مطابق با (5-15) ساخته می‌شوند:

$$\mathbf{K}_e=\int_{\Omega_e}\mathbf{B}^T(\mathbf{DB})d\Omega\ ; \qquad \mathbf{F}_e=\int_{\Omega_e}\mathbf{R}^T\mathbf{b}\,d\Omega+\int_{\Gamma_{t_e}}\mathbf{R}^T\mathbf{t}\,d\Gamma \tag{15-5}$$

و در نهایت با حل (5-14) و مشخص شدن بردار $\mathbf{P}$ می‌توان مولفه‌های کرنش و تنش را به صورت زیر به دست آورد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{BP}\ ;\quad \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{16-5}$$

مشابه روش اجزای محدود، در روش ایزوژئومتریک نیز از توابع پایه یکسان جهت تقریب تابع مجهول و هندسه استفاده می‌شود. در این روش مختصات نقاط کنترلی طوری انتخاب می‌شوند که مولفه های اول، دوم و سوم مختصات این نقاط هندسه مسئله را در حالت سه بعدی برآورد کنند. در اینصورت مولفهٔ چهارم مختصات نقاط کنترلی برای هر مولفه‌ی تغییر مکان طوری محاسبه می‌شود که در هر نقطه از فضای سه بعدی مسئله مقدار آن تقریب زده شود. بنابراین در یک مسئله سه بعدی هندسه مسئله بصورت زیر تقریب زده می شود:

$$\mathbf{V}=\begin{Bmatrix}X(x,y,z)\\Y(x,y,z)\\Z(x,y,z)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}R_{i,j,k}(x,h,z)P_{x_{i,j,k}}\\\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}R_{i,j,k}(x,h,z)P_{y_{i,j,k}}\\\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{l}R_{i,j,k}(x,h,z)P_{z_{i,j,k}}\end{Bmatrix} \tag{17-5}$$

در روابط فوق توابع پایه نربز $R_{i,j,k}(x,h,z)$ برحسب مختصات h,x و z نوشته شده اند که همانند روش اجزای محدود لزوم نیاز به نگاشت در محاسبات را همانند آنچه در تحلیل تنش-کرنش مسطح

بیان شده بود، ایجاب خواهد کرد.

4-5- نحوه محاسبه تنش بهبود یافته در مسائل سه بعدی

در مسائل سه بعدی، می‌توان تنش بهبود یافته هر یک از مولفه‌های تنش را با توجه به توابع شکل نربز به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^*_x \\ \boldsymbol{\sigma}^*_y \\ \boldsymbol{\sigma}^*_z \\ \boldsymbol{\tau}^*_{xy} \\ \boldsymbol{\tau}^*_{yz} \\ \boldsymbol{\tau}^*_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{xx} \\ \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{yy} \\ \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{zz} \\ \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{yz} \\ \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_{zx} \end{Bmatrix} \tag{18-5}$$

که در آن $\mathbf{R}$ و $\mathbf{P}$ مطابق روابط (19-5) و (20-5) تعریف می‌شوند.

$$\mathbf{R} = \left[R_{1,1,1}, R_{1,1,2}, ..., R_{1,1,l}, R_{1,2,1}, R_{1,2,2}, ..., R_{1,2,l}, ..., R_{n,m,l} \right]^T \tag{19-5}$$

$$\mathbf{P}_a = \left[P_{1,1,1}, P_{1,1,2}, ..., P_{1,1,n}, P_{1,2,1}, P_{1,2,2}, ..., P_{1,2,n}, ..., P_{n,m,l} \right]^T \tag{20-5}$$

$$a = xx, yy, zz, xy, yz, zx$$

در رابطه (20-5)، سه مولفه اول بردار نقاط کنترلی هر مولفه تنش، هندسه مسئله سه بعدی را تقریب می‌زند که معلوم می‌باشند و مولفه چهارم که مجهول است، مقدار تنش بهبود یافته را در هر نقطه درونیابی می‌کند. برای تعیین این مقادیر مجهول، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می‌کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P}_a)$ را برای هر مولفه تنش به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\mathbf{P}_a) = \sum_{l=1}^{K} (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_a - \bar{\sigma}_a)^2 \;;\; a = xx, yy, zz, xy, yz, zx \tag{21-5}$$

که در آن $\bar{\sigma}_a$ مولفه تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می‌باشد. در نهایت با مشتق گیری از تابع $F(\mathbf{P}_a)$ نسبت به مؤلفه‌های مجهول بردار $\mathbf{P}_a$ و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات چهارم نقاط کنترلی تنش بهبود یافته‌ی هر یک از مولفه‌ها مطابق رابطه (19-5) بدست می‌آید.

$$\frac{\partial F(\mathbf{P}_a)}{\partial P_{i,j}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{P}_a = \mathbf{B}_a \Rightarrow \mathbf{P}_a = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_a \tag{22-5}$$

که در آن:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \quad ; \quad \mathbf{B}_a = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{R}_i \,.\bar{\sigma}_a \tag{23-5}$$

$$a = xx, yy, zz, xy, yz, zx$$

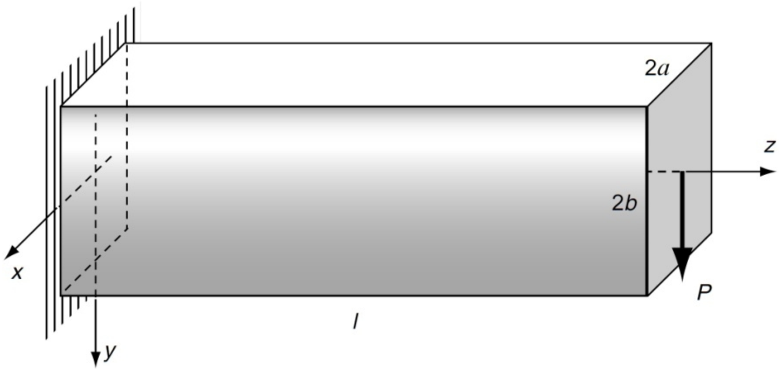
با داشتن مختصات چهارم نقاط کنترلی هر مولفه‌ی تنش، مقدار مربوط به آن نیز در هر نقطه از دامنه سه بعدی مسئله بدست می‌آید. همانگونه که در ادامه خواهیم دید، این میدان مؤلفه تنش نسبت به تنش بدست آمده از روش ایزوژئومتریک دقیق تر می‌باشد و از این‌رو می‌تواند به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل ایزوژئومتریک به کار رود.

در ادامه جهت بررسی کارایی این تخمین کننده خطا در برآورد خطای مسائل سه بعدی، به مقایسه نرم خطای انرژی و نرم خطای L_2 تقریبی و دقیق، برای دو مسئله سه بعدی الاستیسیته که دارای حل تحلیلی می‌باشند، پرداخته شده است.

5-5- تیر طره مکعب مستطیلی

در این قسمت به بیان نتایج گرفته شده از مدلسازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک در حالت سه بعدی توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش‌های آن پرداخته می‌شود (شکل 5-3). پارامترهای به کار برده شده در مدلسازی و آنالیز این تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad L = 10, \quad P = 300, \quad E = 1500, \quad n = 0.25$$



شکل 5-3 تیر طره با مقطع مستطیلی [54]

تنشهای دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن برای تنشهای غیر صفر، و با توجه به دستگاه مختصات در نظر گرفته شده در شکل 5-3، به صورت روابط (5-24) تا (5-26) ارائه شده است[54].

$$t_{xz} = \frac{2na^2P}{(1+n)p^2I_x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\frac{\sin\frac{npx}{a}\sinh\frac{npy}{a}}{\cosh\frac{npb}{a}} \tag{24-5}$$

$$t_{yz} = \frac{P}{2I_x}(b^2-y^2)+\frac{nP}{6(1+n)I_x}\left[3x^2-a^2-\frac{12a^2}{p^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\frac{\cos\frac{npx}{a}\cosh\frac{npy}{a}}{\cosh\frac{npb}{a}}\right] \tag{25-5}$$

$$s_z = \frac{P}{2I_x}y(l-z) \tag{26-5}$$

که در آن I_x ممان اینرسی مقطع حول محور x می‌باشد.

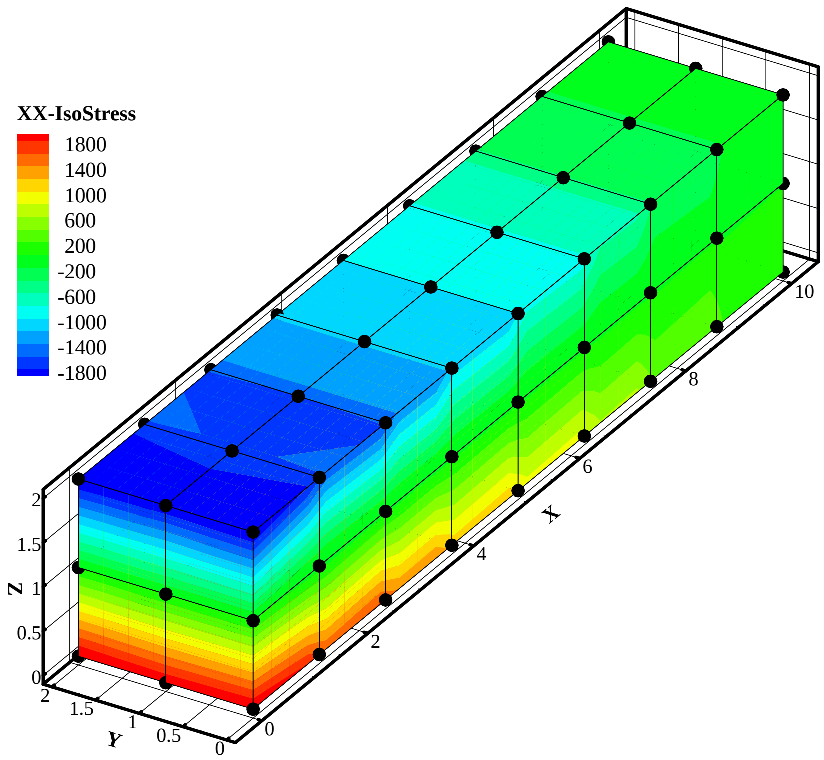
برای مدلسازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریک از یک ناحیه و 81 نقطه کنترلی استفاده شده است. همچنین در هر سه جهت x، h و z از توابع شکل نربز درجه یک استفاده شده است و از بیست و هفت نقطه گوسی جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات x، h و z به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$x = \{0,0,0.125,0.25,0.375,0.5,0.625,0.75,0.875,1,1\};$$
$$h = \{0,0,,0.5,1,1\}; \quad z = \{0,0,0.5,1,1\}$$

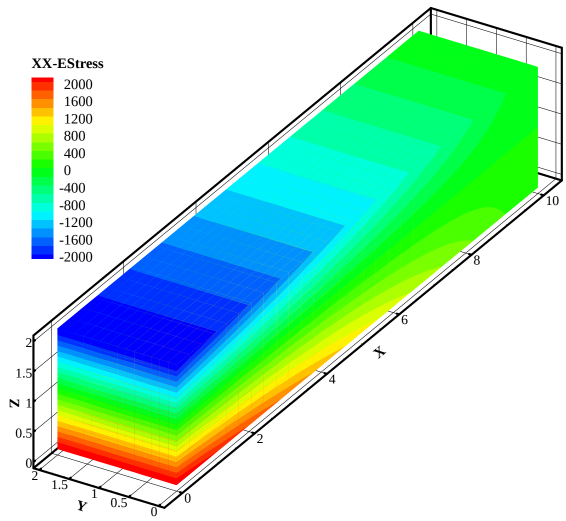
در شکل 5-4، نحوه آرایش نقاط کنترلی تیر طره مکعب مستطیلی و کانتور تنش حاصل از حل ایزوژئومتریک، حل بهبود یافته و حل دقیق برای مولفه تنش s_x نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود نحوه تغییرات تنش بهبود یافته نسبت به حل ایزوژئومتریک، تشابه بیشتری با حل دقیق دارد. همچنین شاخص تاثیر نرم خطای انرژی برای این مثال 0/81 محاسبه شده است.

در شکلهای 5-5، 5-6 و 5-7 به ترتیب نحوه توزیع نرم خطای L_2 دقیق و تقریبی برای تنش‌های s_x، t_{xy} و t_{zx} نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تشابه نرم خطای تقریبی و دقیق در این مثال، نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطای پیشنهادی برای برآورد خطای مسائل سه بعدی با

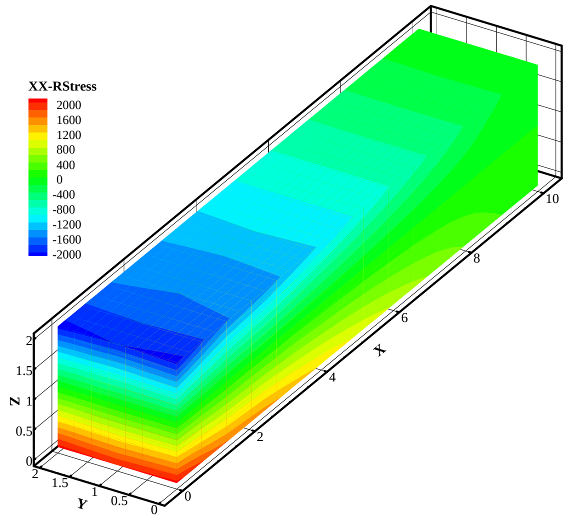
استفاده از روش ایزوژئومتریک می‌باشد.



الف) شبکه نقاط کنترلی و توزیع تنش حاصل از حل ایزوژئومتریک

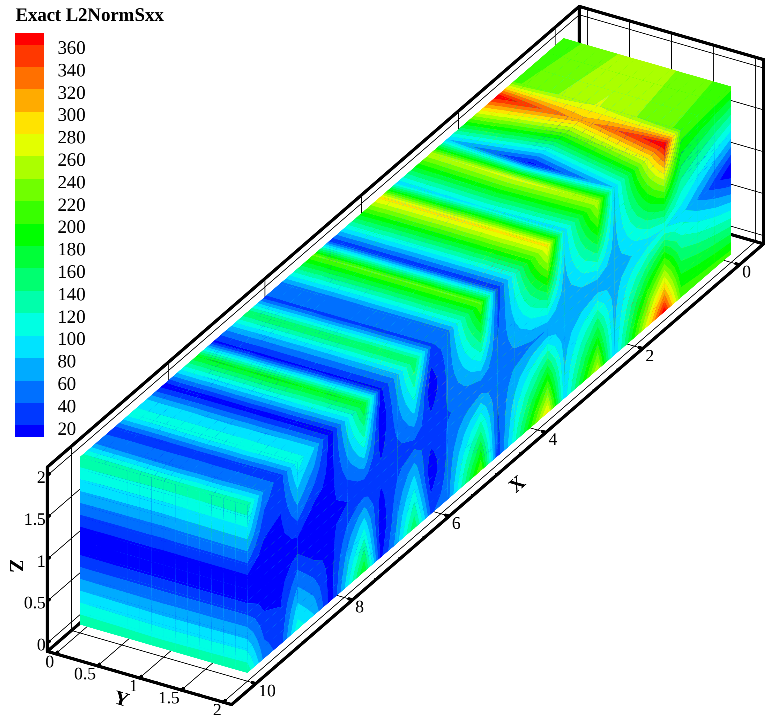


ج) توزیع تنش حاصل از حل دقیق

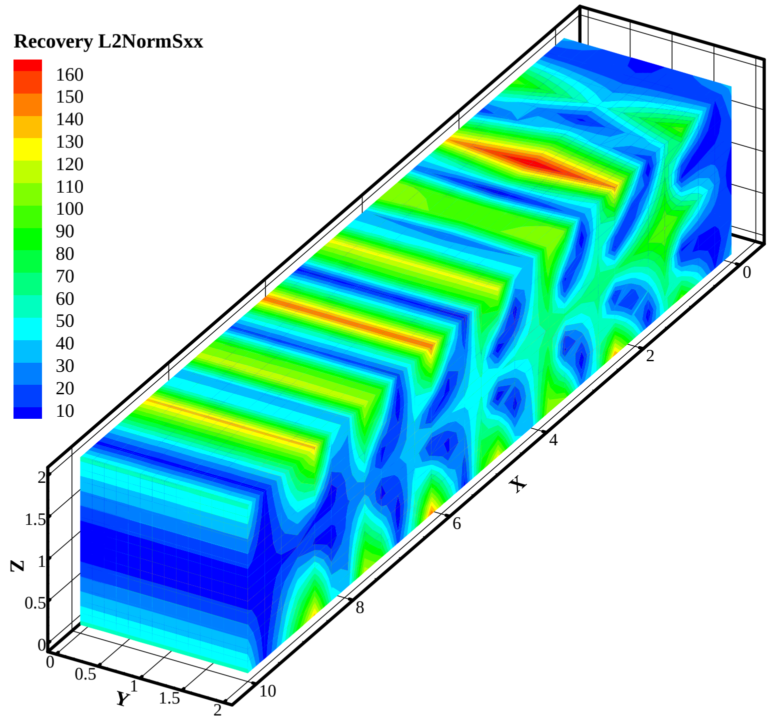


ب) توزیع تنش حاصل از حل بهبود یافته

شکل 4-5 توزیع تنش s_x تیر طره مکعب مستطیلی

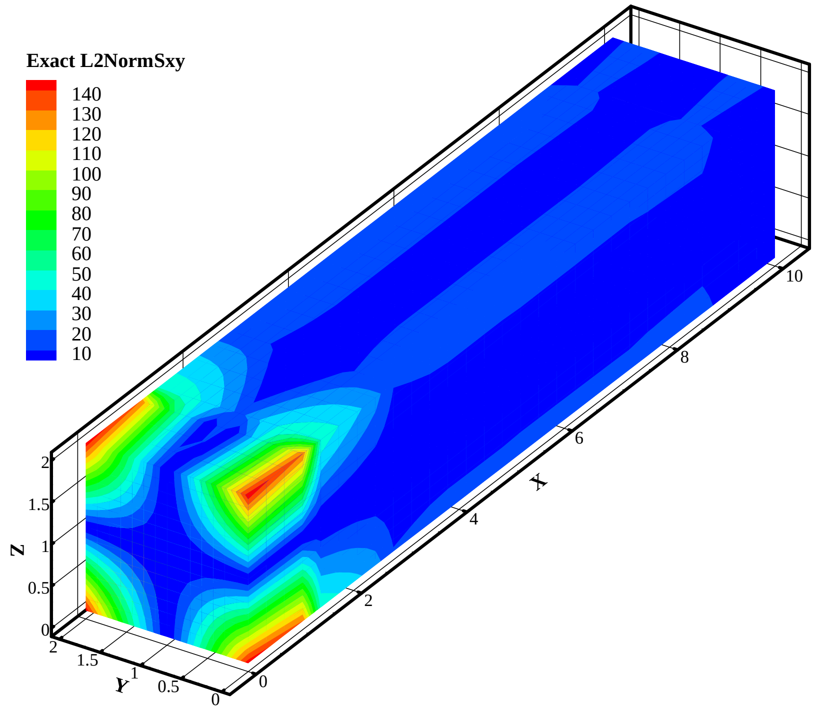


الف) نرم خطای دقیق

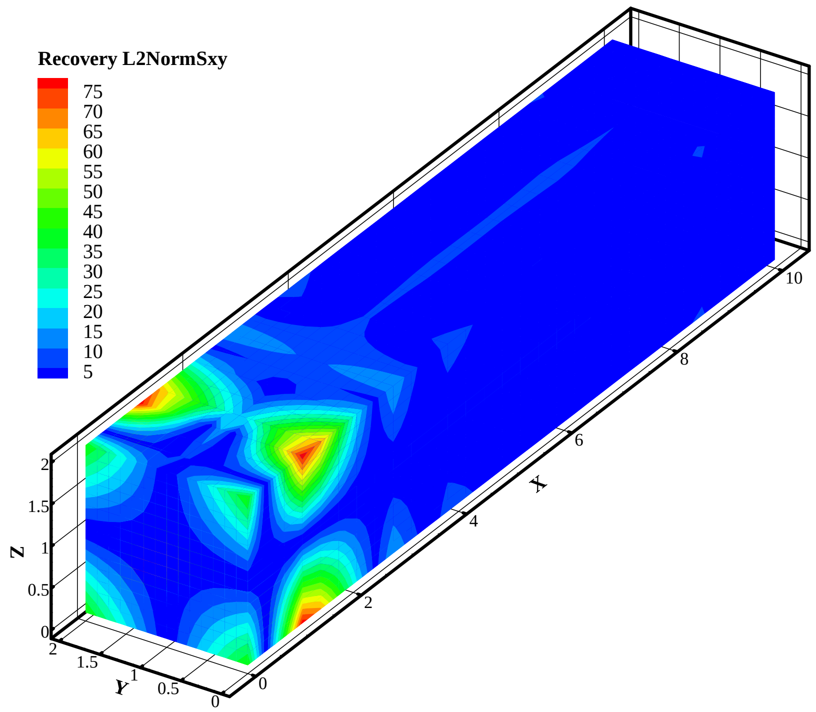


ب) نرم خطای تقریبی

شکل 5-5 نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش s_x

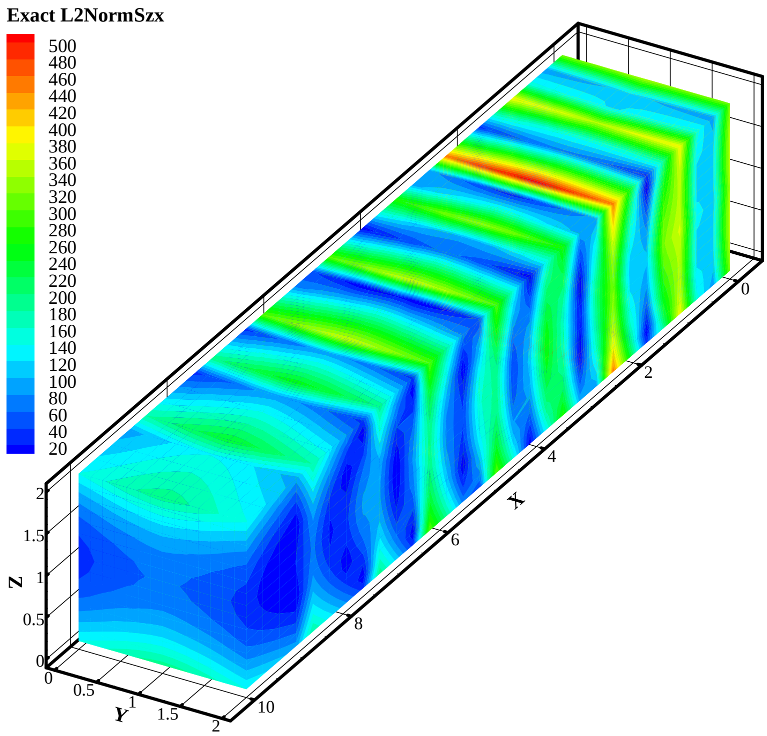


الف) نرم خطای دقیق

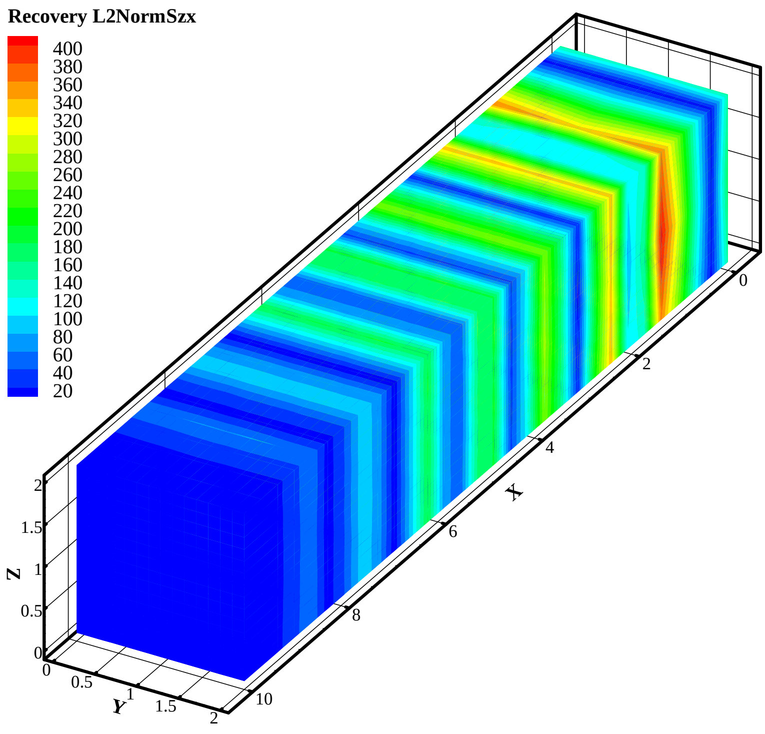


ب) نرم خطای تقریبی

شکل 5-6 نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{xy}



الف) نرم خطای دقیق

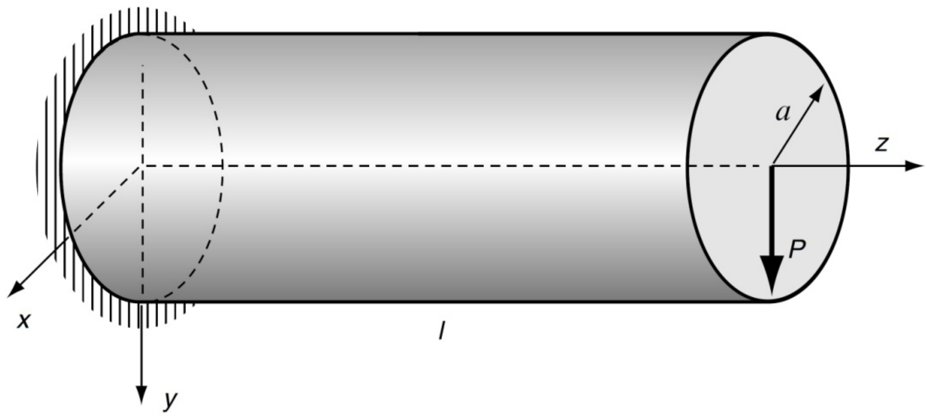


ب) نرم خطای تقریبی

شکل 5-7 نحوه توزیع نرم خطای L_2 تنش t_{zx}

5-6- تیر طره استوانه‌ای

مثال دیگری که جهت بررسی کارایی تخمین کننده خطای پیشنهادی در این بخش مورد توجه قرار گرفته است، مدلسازی و تحلیل تیر طره با مقطع دایره می باشد(شکل 5-8).



شکل 5-8 تیر طره با مقطع دایره[54]

پارامترهای به کار برده شده در مدلسازی و آنالیز این تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$a=4,\quad L=30,\quad P=800,\quad E=1500,\quad n=0.25$$

تنشهای دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن برای تنشهای غیر صفر، و با توجه به دستگاه مختصات در نظر گرفته شده در شکل 5-8، به صورت روابط (5-27) تا (5-29) ارائه شده است[54].

$$t_{xz}=-\frac{P}{4I_x}\frac{1+2n}{1+u}xy \tag{27-5}$$

$$t_{yz}=\frac{P}{I_x}\frac{3+2u}{8(1+u)}\left[a^2-y^2-\frac{1-2u}{3+2u}x^2\right] \tag{28-5}$$

$$s_z=-\frac{P}{I_x}y(l-z) \tag{29-5}$$

که در آن I_x ممان اینرسی مقطع حول محور x می‌باشد.

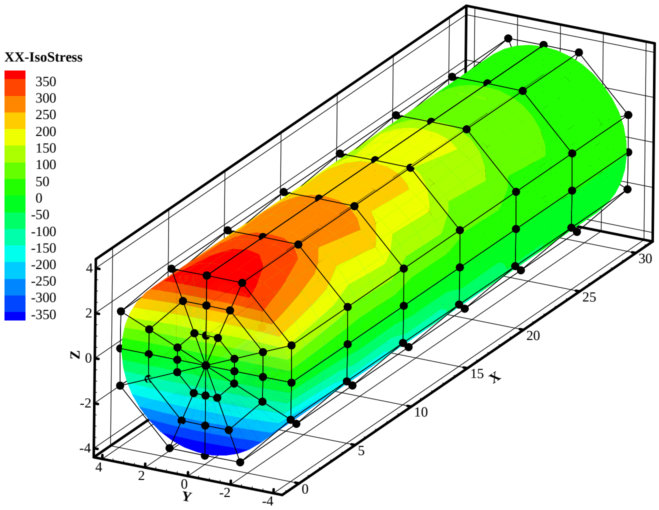
برای مدلسازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریک از یک ناحیه و 364 نقطه کنترلی استفاده شده است. همچنین در جهت x، که در راستای طولی تیر می‌باشد از توابع شکل درجه یک و در جهت h و z از توابع شکل نربز درجه دو استفاده شده است و از بیست و هفت نقطه گوسی جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش در هر المان استفاده شده است. بردارهای گرهی در جهات x،

h و z به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

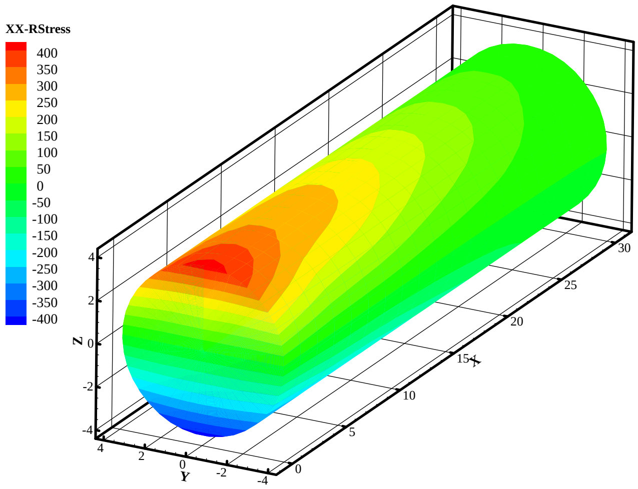
$$x=\{0,0,0.166667,0.33333,0.5,0.66667,0.83333,1,1\};\ z=\{0,0,0,0.5,1,1,1\}$$
$$h=\{0,0,0,0.125,0.25,0.25,0.375,0.5,0.5,0.625,0.75,0.75,0.875,1,1,1\}$$

در شکل 5-9، نحوه آرایش نقاط کنترلی تیر طره استوانه‌ای و کانتور تنش حاصل از حل ایزوژئومتریک، حل بهبود یافته و حل دقیق برای مولفه تنش s_x نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می شود در این مثال نیز نحوه تغییرات تنش بهبود یافته نسبت به حل ایزوژئومتریک، تشابه بیشتری با حل دقیق دارد.

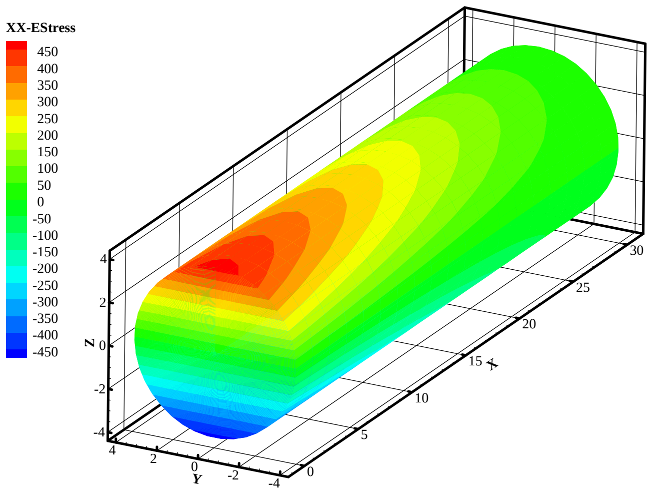
شاخص تاثیر نرم خطای انرژی برای این مثال نیز 0/57 محاسبه شده است. به نظر می رسد که علت کاهش شاخص تاثیر و درنتیجه کاهش کارایی برآورد کننده خطا در این مثال نسبت به مثال قبل استفاده از توابع شکل با درجه بالاتر از یک می‌باشد. نتایج عددی نشان می‌دهند که معمولا در روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش با افزایش درجه توابع شکل از یک، کارایی برآورد کننده خطا پایین می‌آید[55]. در شکل‌های 5-10، 5-11 و 5-12 به ترتیب نحوه توزیع نرم خطای L_2 دقیق و تقریبی برای تنش‌های s_x، t_{xy} و t_{zx} تیر طره استوانه‌ای نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تشابه نرم خطای تقریبی و دقیق در این مثال نیز وجود دارد و نشانه کارایی مناسب محاسبه‌گر خطای پیشنهادی برای برآورد خطای نتایج تحلیل سه بعدی مسائل با استفاده از روش ایزوژئومتریک می‌باشد.



الف) شبکه نقاط کنترلی و توزیع تنش حاصل از حل ایزوژئومتریک

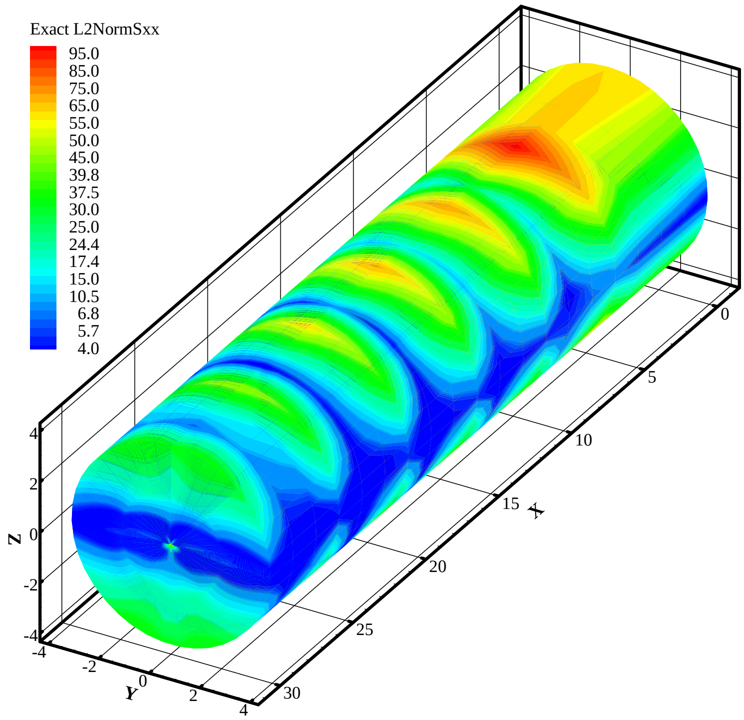


ب) توزیع تنش حاصل از حل بهبود یافته

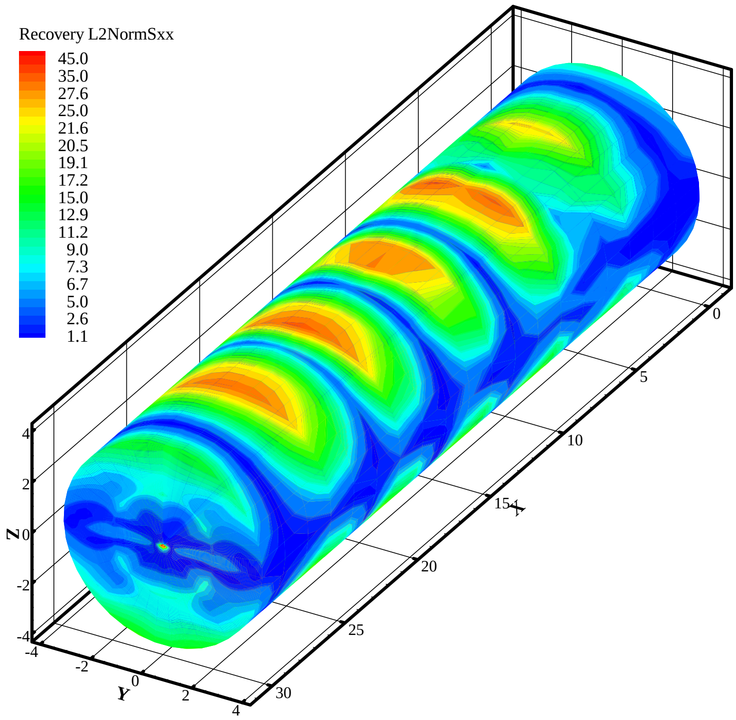


ب) توزیع تنش حاصل از حل دقیق

شکل 5-9 توزیع تنش s_x تیر طره استوانه‌ای

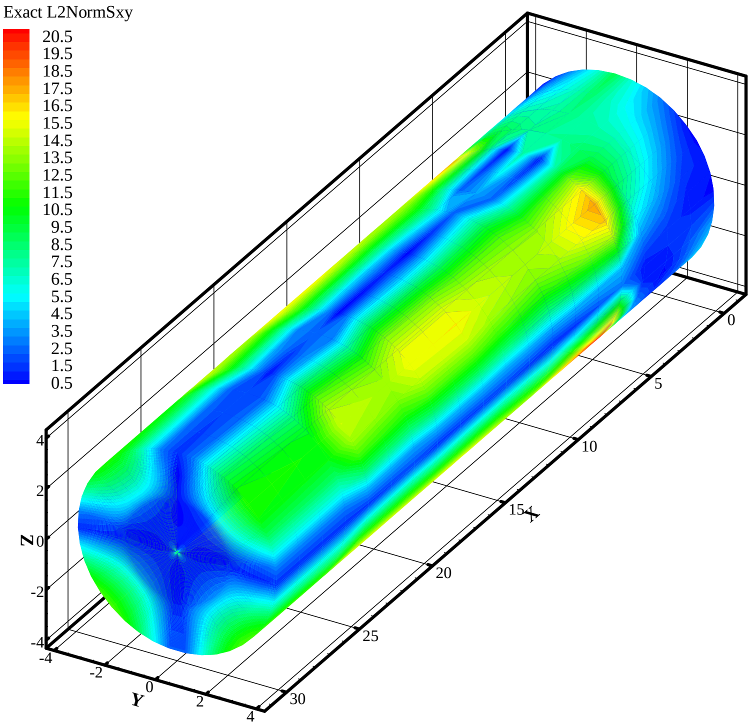


الف) نرم خطای دقیق

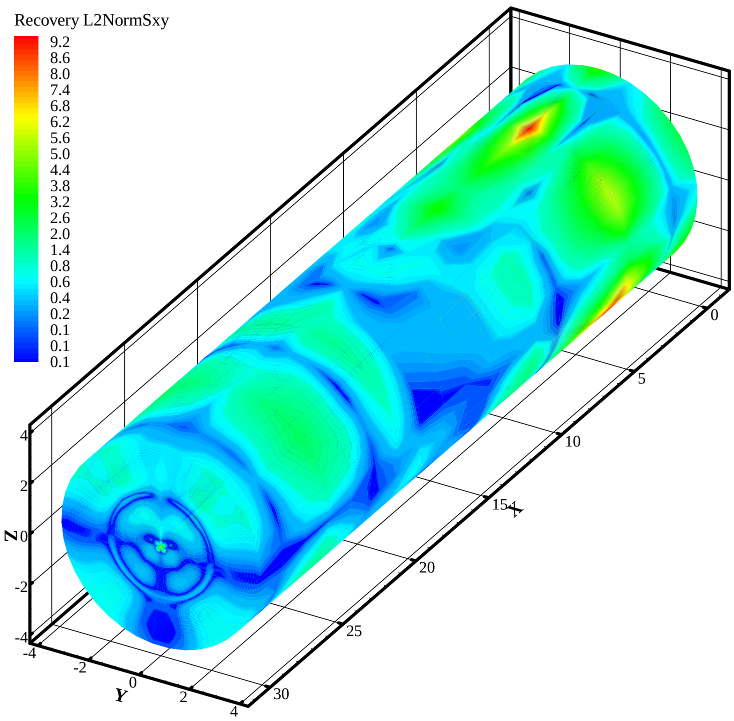


ب) نرم خطای تقریبی

شکل 5-10 نحوه توزیع نرم خطای L2 تنش S_x تیر طره استوانه‌ای

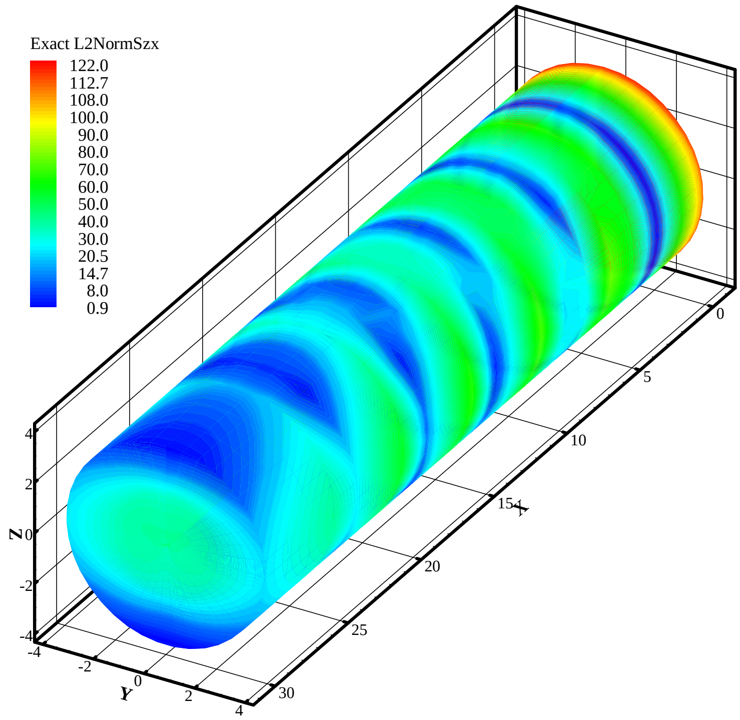


الف) نرم خطای دقیق

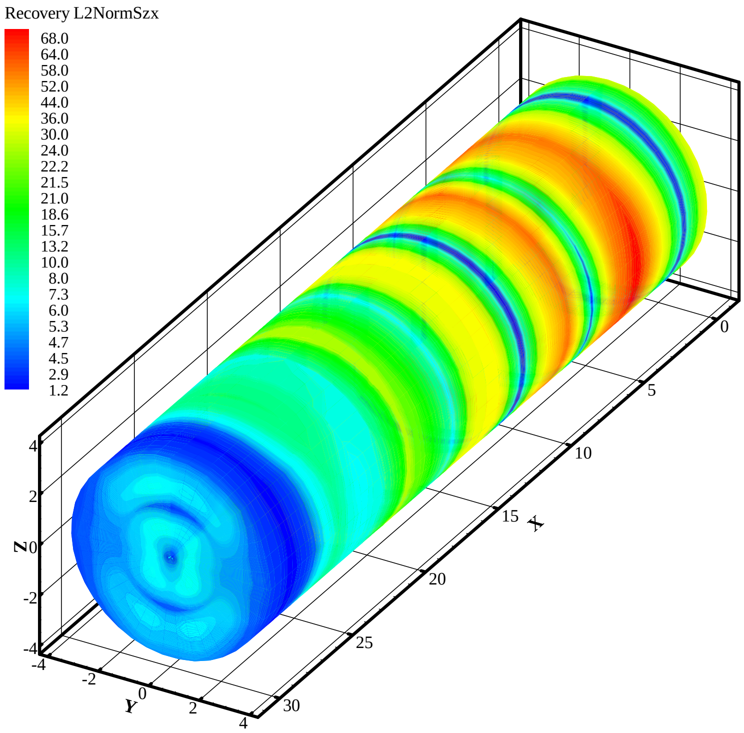


ب) نرم خطای تقریبی

شکل 5-11 نحوه توزیع نرم خطای L2 تنش t_{xy} تیر طره استوانه‌ای



الف) نرم خطای دقیق



ب) نرم خطای تقریبی

شکل 5-12 نحوه توزیع نرم خطای L2 تنش t_{zx}

فصل ششم

بهبود تنش و برآورد خطا با استفاده از تعادل در هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک

6-1- مقدمه

در فصل‌های قبل به بیان چگونگی استفاده از خاصیت نقاط فوق همگرای گوسی جهت بهبود تنش و برآورد خطای مسائل تنش-کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه بعدی ایزوژئومتریک پرداخته شد. با وجود سادگی و اقتصادی بودن این روش، یکی از مشکلاتی که دارد، نیاز به وجود نقاط گوسی و در نتیجه ملزم به استفاده از روش انتگرال گیری عددی به روش گوس است. همچنین همانطور که در فصل‌های قبل، در نحوه تشکیل سطح تنش بهبود یافته مشاهده شد، این سطح تنش از روش حداقل مربعات حاصل می‌شود و محدودیت آن نیز کم کردن فاصله بین تنش بهبود یافته و تنش ایزوژئومتریک در نقاط فوق همگرای گوسی است. در اینصورت هیچ محدودیتی در ارضای معادلات تعادل جهت تشکیل سطح تنش بهبود یافته اعمال نمی‌شود و در نتیجه به علت ارضا نشدن معادلات تعادل، برآورد خطا در داخل و بویژه نزدیک مرزهای دامنه با تقریب بیشتری صورت می‌پذیرد.

در این فصل به معرفی یک روش ابداعی و بر پایه ارضای معادلات تعادل جهت بهبود تنش و برآورد خطای تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک پرداخته می‌شود که باعث برآورد بهتری از خطا در داخل و نواحی مرزی دامنه تحلیل ایزوژئومتریک می‌شود. یکی از ویژگیهای این روش، عدم نیاز به نقاط فوق همگرا در برآورد خطای مسائلی است که از روشی به غیر از روش گوس جهت انتگرال گیری عددی استفاده شده است. در این روش با بکار گیری نیروهای وارد بر هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک، سطح مربوط به هر مولفه تنش با استفاده از توابع شکل نربز هم مرتبه با توابع مورد استفاده در تخمین تابع جابجایی، تقریب زده می‌شود. این سطح تنش جدید نسبت به تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک دارای دقت بیشتری است، لذا می‌توان از آن جهت برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک نیز استفاده نمود. این برآورد کننده خطا در دسته روشهای مبتنی بر بازیافت تنش قرار می‌گیرد و نشان داده خواهد شد که کارایی بهتری نسبت به روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا در تحلیل ایزوژئومتریک خواهد داشت. جهت بررسی کارایی این روش به مقایسه نرم خطای انرژی دقیق

و تقریبی بدست آمده از روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا و روش ارائه شده در این بخش، برای شش مسئله نمونه دارای حل تحلیلی پرداخته شده است. تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده، تیر طره تیموشنکو، صفحه ترکدار تحت کشش، تیر طره دایره‌ای شکل، صفحه دایره‌ای تحت فشار و صفحه نامحدود سوراخدار، شش مسئله حل شده در این فصل می‌باشند. نتایج نشان می‌دهد که در تمامی مثالها، توزیع خطا با استفاده از این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا، به توزیع خطای دقیق نزدیکتر است و تنش بهبود یافته بدست آمده از این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا از دقت بیشتری برخوردار است.

6-2- نحوه تشکیل سطح تنش بهبود یافته بر مبنای استفاده از تعادل در هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک

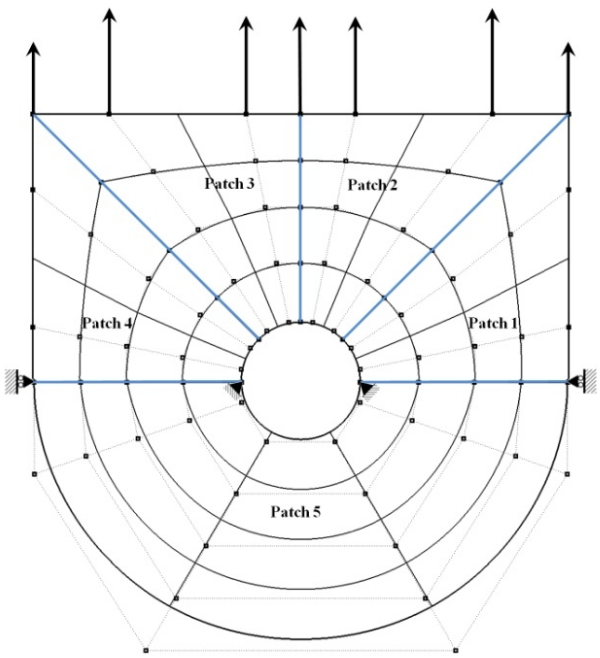
به طور کلی در این روش، مشابه روشهایی که جهت بهبود میدان تنش اجزای محدود در مراجع [13] و [57] ارائه شده است، با معادل قرار دادن نیروهای عمل کننده بر یک وصله از فضای محاسباتی بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و میدان تنش بازیافتی، می‌توان برای هر مولفه تنش به یک سطح تنش بهبود یافته دست یافت.

همانطور که در فصول قبل بیان شد، رابطه سازی تحلیل ایزوژئومتریک و نحوهٔ بدست آمدن سطح جابجایی به گونه‌ای است که با ارضای معادله تعادل در فضای تاثیر هر یک از المانهای تحلیل ایزوژئومتریک، تعادل در کل دامنه مدلسازی شده برقرار می‌شود. در صورت وجود تعادل در کل دامنه، هر وصله نربز از دامنه مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک نیز در شرایط تعادل قرار دارد. به این ترتیب می‌توان معادله (5-11) را برای یک وصله مجزا از کل دامنه مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک، به صورت زیر بیان نمود:

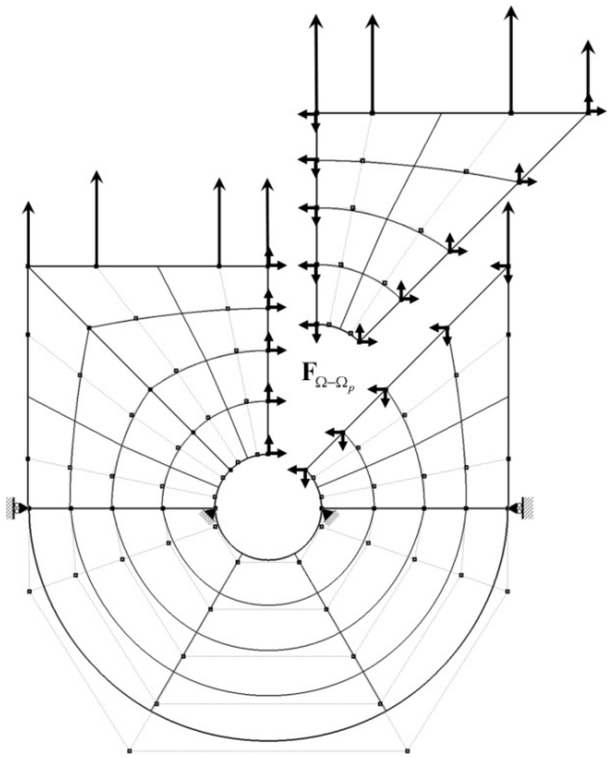
$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T (\mathbf{DBP}) d\Omega - \int_{\Omega_p} \mathbf{R}^T \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t^p} \mathbf{R}^T \mathbf{t} \, d\Gamma + \mathbf{F}_{\Omega-\Omega_p} = 0 \tag{1-6}$$

که در آن $\mathbf{F}_{\Omega-\Omega_p}$، مطابق شکل 6-1، نیروهای عمل و عکس العمل بین وصله جدا شده و کل دامنه

مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد.



الف) شبکه نقاط کنترلی و دامنه مدلسازی شده با پنج وصله



ب) وصله جدا شده و نیروهای وارد بر آن

شکل 6-1 مدلسازی یک مسئله دوبعدی در روش ایزوژئومتریک

در صورتی که مطابق رابطه (6-2)، $\mathbf{F}_\Omega$ را به عنوان نیروهای حجمی و سطحی وارد بر وصله جدا شده از کل دامنه مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک فرض کنیم، رابطه (6-1) را می‌توان به صورت رابطه (6-3) بیان نمود.

$$\mathbf{F}_\Omega = \int_{\Omega_p} \mathbf{R}^T \mathbf{b}\, d\Omega + \int_{\Gamma_t^p} \mathbf{R}^T \mathbf{t}\, d\Gamma \tag{6-2}$$

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T (\mathbf{DBP})\, d\Omega = \mathbf{F}_\Omega - \mathbf{F}_{\Omega-\Omega_p} \tag{6-3}$$

حال در صورتی که $\mathbf{f} = \mathbf{F}_\Omega - \mathbf{F}_{\Omega-\Omega_p}$ را به عنوان کل نیروهای وارد شده بر وصله جدا شده در نظر بگیریم و معلوم فرض کنیم، می‌توان وصله جدا شده را به عنوان یک سیستم مجزا در نظر گرفت و معادله تعادل (5-10) را به فرم زیر برای آن بیان نمود.

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma})\, d\Omega = \mathbf{f} = \mathbf{F}_\Omega - \mathbf{F}_{\Omega-\Omega_p} \tag{6-4}$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ میدان تنش دقیق حاکم بر مسئله می‌باشد. با مقایسه روابط (6-4) و (6-3) می‌توان رابطه (6-5) را نتیجه گرفت.

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma})\, d\Omega = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T (\mathbf{DBP})\, d\Omega \tag{6-5}$$

رابطه بالا محدودیتی است که به طور مستقیم بر میدان تنش دقیق حاکم بر مسئله وارد می‌شود. حال میدان تنش حاکم بر مسئله را، همانند سطوح مفروض برای جابجایی، به صورت سطوح نربز با مختصه سوم مجهول نقاط کنترلی فرض می‌کنیم. بردار مختصات سوم نقاط کنترلی با استفاده از محدودیت معادله (6-5) بدست خواهد آمد. واضح است که این سطوح تنش بازیافتی نسبت به سطوح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک دارای دقت بیشتری خواهند بود. زیرا همانطور که در معادله (6-5) مشاهده می‌شود، این سطوح تنش بازیافتی با انتگرال گیری مستقیم بدست می‌آید و مرتبه آن نسبت به سطوح تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک که از مشتق گیری میدان جابجایی محاسبه می‌شود، بالاتر است.

مطابق رابطه (6-6) هر مولفه از میدان تنش بازیافتی در حالت دو بعدی، بصورت یک سطح نربز به همراه بردار نقاط کنترلی با مولفه سوم مجهول فرض می‌شود. مولفه اول و دوم نقاط کنترلی، معلوم و

هندسه مسئله را تعیین می‌کنند.

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x^* \\ \boldsymbol{\sigma}_y^* \\ \boldsymbol{\tau}_{xy}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^*\mathbf{P}_x^* \\ \mathbf{R}^*\mathbf{P}_y^* \\ \mathbf{R}^*\mathbf{P}_{xy}^* \end{bmatrix} \tag{6-6}$$

مشابه روابط (3-16) و (3-17)، که از خاصیت بازه تاثیر توابع نربز استفاده شده است، در رابطه (6-6) نیز با توجه به این خاصیت، $\mathbf{R}^*$به صورت رابطه (6-7) و $\mathbf{P}_a^*$ برای هر مولفه تنش a به صورت رابطه (6-8) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(x,h) \\ R_{i-p,j-q-1}(x,h) \\ \vdots \\ R_{i-p,j}(x,h) \\ R_{i-p-1,j}(x,h) \\ \vdots \\ R_{i,j}(x,h) \end{bmatrix}^T \tag{7-6}$$

$$\mathbf{P}_a^* = \begin{bmatrix} P_{a\ i-p,j-q} \\ P_{a\ i-p,j-q-1} \\ \vdots \\ P_{a\ i-p,j} \\ P_{a\ i-p-1,j} \\ \vdots \\ P_{a\ i,j} \end{bmatrix} \tag{8-6}$$

حال با جایگذاری $\boldsymbol{\sigma}^*$ در معادله (6-5) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\boldsymbol{\sigma}^*)\,d\Omega = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T(\mathbf{DBP})\,d\Omega \tag{9-6}$$

در صورتی که مولفه‌های تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک در هر وصله را نیز به صورت معادله (6-10) در نظر بگیریم، سمت راست معادله (6-9)، یعنی نیروهای وارد بر هر وصله را می‌توان به صورت معادله (6-11) بیان نمود.

$$\boldsymbol{\sigma}_{iso} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\tau}_{xy} \end{bmatrix} \tag{10-6}$$

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T (\mathbf{DBP})\, d\Omega = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}_{iso})\, d\Omega = \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_{xy} \tag{11-6}$$

به طور مشابه، برای میدان تنش بازیافتی نیز خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\sigma}_y^* \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \boldsymbol{\tau}_{xy}^* \end{bmatrix} \tag{12-6}$$

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}^*)\, d\Omega = \mathbf{F}_p^* = \mathbf{F}_x^* + \mathbf{F}_y^* + \mathbf{F}_{xy}^* \tag{13-6}$$

در اینصورت می‌توان معادله (6-9) را به صورت روابط (6-14) و (6-15) بیان نمود:

$$\mathbf{F}_x^* = \mathbf{F}_x\,,\quad \mathbf{F}_y^* = \mathbf{F}_y\,,\quad \mathbf{F}_{xy}^* = \mathbf{F}_{xy} \tag{14-6}$$

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_a^*\, d\Omega = \left(\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \mathbf{1}^a \mathbf{R}^*\, d\Omega \right) \mathbf{P}_a^* = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_a^{iso}\, d\Omega \;;\; a = x, y, xy \tag{15-6}$$

که در آن $\mathbf{1}^a$، برای هر مولفه تنش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{1}^x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{1}^y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{1}^{xy} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16-6}$$

در رابطه (6-15) نیروهای حاصل از هر مولفه تنش تحلیل ایروژئومتریک یک وصله، با نیروهای مولفه‌های تنش بازیافتی برابر قرار داده شده است. این تساوی برای هر مولفه تنش به صورت تقریبی، با استفاده از روش مینیمم مربعات و تعریف تابع Π به صورت زیر بر قرار می‌گردد.

$$\Pi = \left[\mathbf{C}_a \mathbf{P}_a^* - \mathbf{F}_a^{iso} \right]^T \left[\mathbf{C}_a \mathbf{P}_a^* - \mathbf{F}_a^{iso} \right] \tag{17-6}$$

که در آن:

$$\mathbf{C}_a = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \mathbf{1}^a \mathbf{R}^*\, d\Omega \tag{18-6}$$

$$\mathbf{F}_a^{iso} = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_a^{iso}\, d\Omega \tag{19-6}$$

با مینیمم کردن تابع Π خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{P}_a^*)}{\partial (P_{i,j})_a} = 0 \tag{20-6}$$

$$\mathbf{P}_a^* = \left[\mathbf{C}_a{}^T \mathbf{C}_a \right]^{-1} \left[\mathbf{C}_a{}^T \mathbf{F}_a^{iso} \right] \tag{21-6}$$

با مشخص شدن بردار نقاط کنترلی برای هر مولفه تنش، سطح تنش مربوط به آن نیز بدست می‌آید که در ادامه نشان داده خواهد شد این سطح تنش بازیافتی نسبت به سطح تنش ایزوژئومتریک و سطح تنش بازیافتی مبتنی بر نقاط فوق همگرا دقیق تر است.

همانطور که در معادله (6-21) مشاهده می‌شود، برای بدست آوردن بردار نقاط کنترلی هر مولفه تنش، نیاز به محاسبه معکوس ماتریس $\left[\mathbf{C}_a{}^T\mathbf{C}_a\right]$ می‌باشد. این ماتریس برای بعضی از مسائل با تعداد المانهای کم در هر وصله، معکوس ناپذیر می‌شود. بنابراین برای اطمینان از معکوس پذیری این ماتریس و پایداری معادله (6-21) در تمامی مسائل، مطابق معادله (6-22)، قید معادلات تعادل در داخل هر المان از یک وصله به معادله (6-17) اضافه می‌شود.

$$\Pi=\left[\mathbf{C}_a\mathbf{P}_a^*-\mathbf{F}_a^{iso}\right]^T\left[\mathbf{C}_a\mathbf{P}_a^*-\mathbf{F}_a^{iso}\right]+\sum_{e=1}^{Nel}\left[\mathbf{C}_a\mathbf{P}_a^*-\mathbf{F}_a^{iso}\right]_e^T\left[\mathbf{C}_a\mathbf{P}_a^*-\mathbf{F}_a^{iso}\right]_e \tag{22-6}$$

که در آن، Nel تعداد المانهای موجود در هر وصله می‌باشد. در اینصورت با مینیمم کردن تابع Π، فرم دیگری از معادله (6-21) به شکل زیر بدست می‌آید.

$$\mathbf{P}_a^*=\left[\mathbf{C}_a{}^T\mathbf{C}_a+\sum_{e=1}^{Nel}\left(\mathbf{C}_a\mathbf{C}_a\right)_e\right]^{-1}\times\left[\mathbf{C}_a{}^T\mathbf{F}_a^{iso}+\sum_{e=1}^{Nel}\left(\mathbf{C}_a{}^T\mathbf{F}_a^{iso}\right)_e\right] \tag{23-6}$$

در ادامه جهت درک بهتر این روش، مراحل گام به گام تشکیل بردار نقاط کنترلی سطح تنش بهبود یافته هر مولفه تنش به صورت زیر ارائه می‌شود:

1- استفاده از انتگرال گیری عددی به روش گوس جهت محاسبه ماتریس C در معادله (6-18). برای این منظور باید مراحل زیر دنبال شود:

الف) محاسبه مولفه‌های ماتریس محلی توابع شکل $\mathbf{R}^*$ در نقاط گوسی هر المان.

ب) محاسبه مولفه‌های ماتریس محلی $\mathbf{B}^T$ در نقاط گوسی هر المان.

ج) محاسبه حاصل جمع، ضرب ماتریس‌های معادله (6-19) در ژاکوبین و وزن نقاط گوسی هر المان.

2- استفاده از انتگرال گیری عددی به روش گوس جهت محاسبه بردار نیروهای $\mathbf{F}_a^{iso}$ هر مولفه تنش در معادله (6-19). برای این منظور باید مراحل زیر دنبال شود:

الف) محاسبه مولفه‌های بردار تنش هر مولفه تنش در نقاط گوسی هر المان.

ب) محاسبه حاصل جمع، ضرب بردار تنش بدست آمده از مرحله (الف) در ماتریس محلی $\mathbf{B}^T$ بدست آمده از مرحله قبل، ژاکوبین و وزن نقاط گوسی هر المان.

3- جمع بردارها و ماتریس‌های محاسبه شده در مرحله قبل برای کل المان‌های هر وصله و تشکیل رابطه (6-23) برای محاسبه بردار نقاط کنترلی هر مولفه تنش.

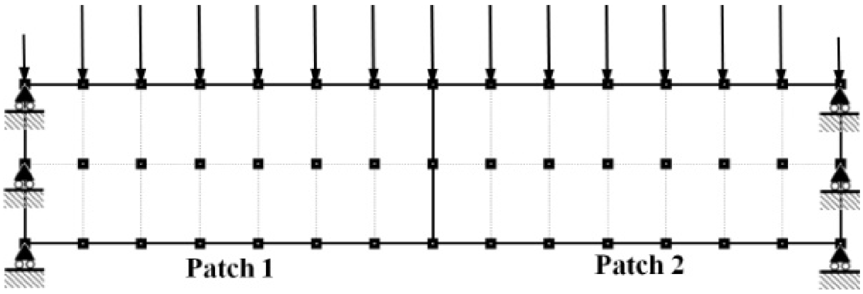
لازم به ذکر است که با وجود هزینه بیشتر این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا در بدست آوردن تنش بازیافتی، این افزایش هزینه به دلیل استفاده از خاصیت بازه تاثیر توابع نربز در تشکیل سطح تنش بازیافتی در این روش نسبت به سطح تنش بازیافتی ارائه شده در مرجع [5]، تا حدی کاهش یافته است.

در ادامه جهت بررسی کارایی این تخمین کننده خطا، به مقایسه نرم خطای انرژی تقریبی بدست آمده از این روش و روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا و نرم خطای انرژی دقیق برای شش مسئله نمونه الاستیسیته که معمولا جهت بررسی کارایی برآوردکننده های خطا به کار می‌روند، پرداخته شده است.

6-3- تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

در این بخش به مدلسازی یک تیر الاستیک خطی ایزوتروپیک دو سر مفصل تحت بار گسترده در شرایط تنش مستوی توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش های آن پرداخته می‌شود. این مثال قبلا در فصل سوم جهت بررسی کارایی روش برآورد خطا بر مبنای نقاط فوق همگرا مورد بررسی قرار گرفته است و پارامترهای به کار برده شده در مدلسازی و تحلیل این مثال مطابق بخش 3-4 فرض می‌شود. همچنین تنش‌های دقیق این مسئله به صورت (3-60) تا (3-62) در نظر گرفته شده است.

برای مدلسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از 45 نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده شده است. در شکل 6-2 آرایش المانها و شبکه نقاط کنترلی به همراه شرایط مرزی اعمال شده در مدلسازی تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده نمایش داده شده است.



شکل6-2 نقاط کنترلی و شرایط مرزی مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده

جهت برآورد میدان جابجایی و میدان‌های تنش بازیافتی بدست آمده از روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا و روش ارضای معادلات تعادل، از توابع شکل درجه یک استفاده شده است. همچنین بردارهای گرهی در جهات xو hبه صورت زیر می‌باشند.

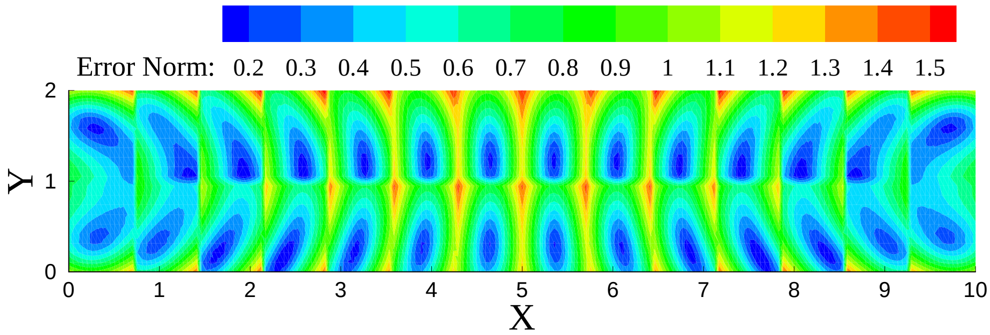
$$x = \{0,0,0.14,0.29,0.43,0.57,0.71,0.86,1,1\},\ h = \{0,0,0.5,1,1\}$$

جهت انتگرالگیری عددی در تمامی محاسبات و نقاط بهینه تنش در هر المان، از نه نقطه گوسی استفاده شده است.

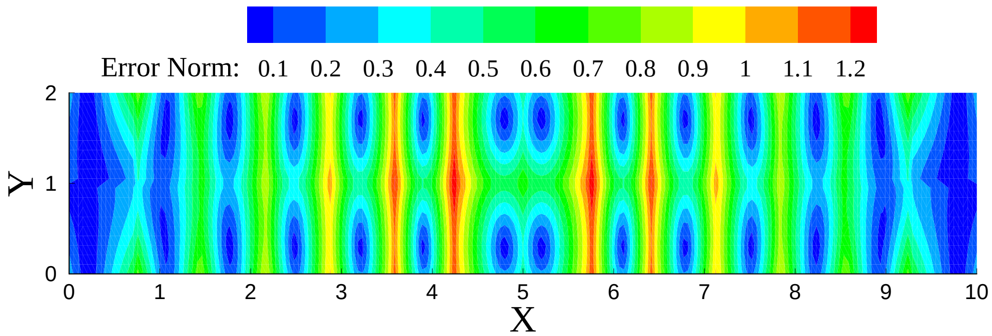
در شکل 6-3 نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی بدست آمده از روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا (روش قدیمی) و روش مبتنی بر ارضای معادلات تعادل (روش جدید) به همراه شاخص تاثیر آنها نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی روش جدید نسبت به روش قدیمی، به تغییرات نرم خطای دقیق نزدیک است که نشان دهنده کارایی بهتر تخمین کننده خطا پیشنهادی نسب به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا است. همچنین افزایش شاخص تاثیر کل دامنه بدست آمده از روش جدید نسب به روش قدیمی نیز نشان دهنده کارایی بهتر این روش می‌باشد.

در شکل 6-4 به عنوان نمونه، نحوه تغییرات تنش s_y بدست آمده از حل دقیق و تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک و روش بازیافت تنش قدیمی و جدید در مسیر y=1/96 ترسیم شده است. همچنین نحوه تغییرات تنش t_{xy} نیز در مسیر y=1/0 در شکل 6-5 نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات تنش بدست آمده از روش مبتنی بر ارضای معادلات تعادل نسب به

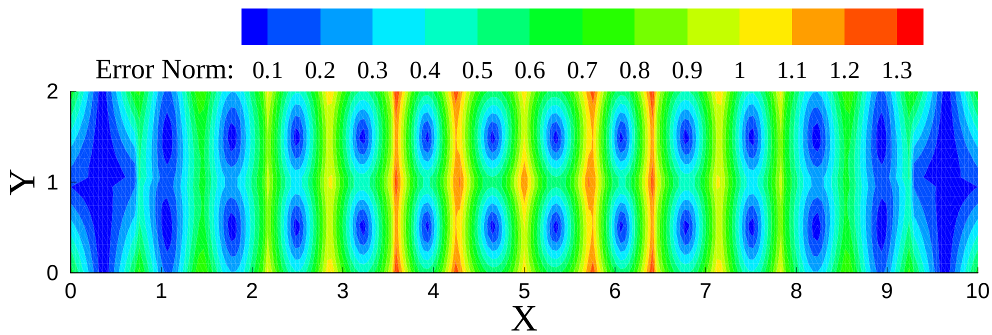
روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا، نزدیکتر به تنش دقیق می‌باشد.



الف) نرم خطای انرژی دقیق

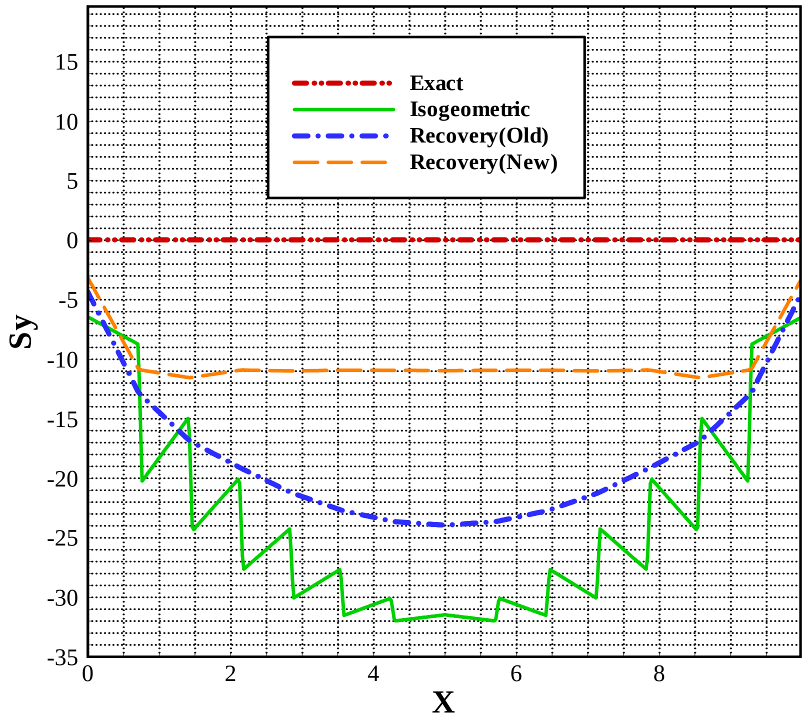


$q_{old} = 0.81$ ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)

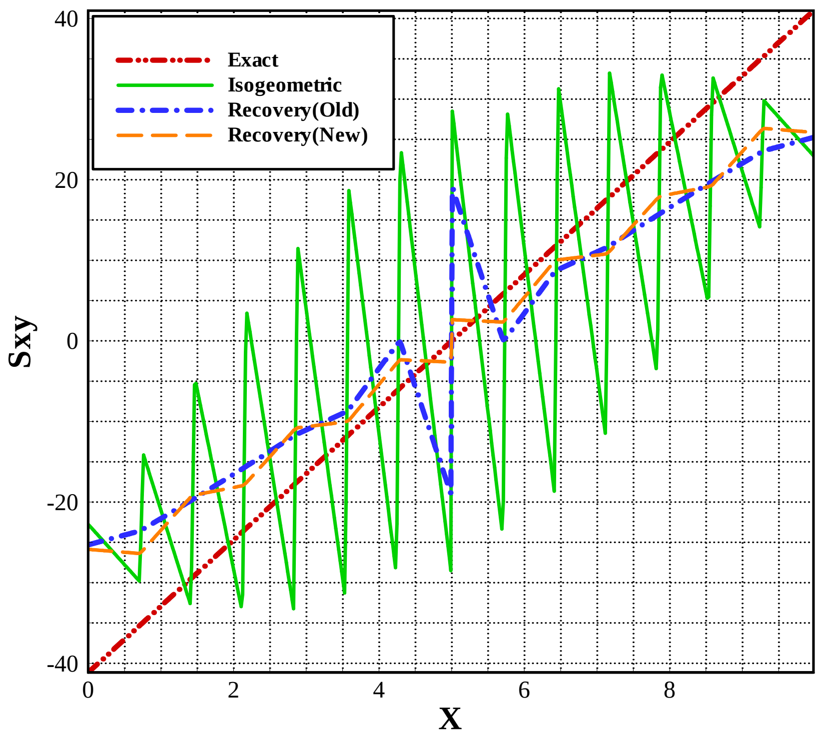


$q_{new} = 0.85$ ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

شکل 3-6 نحوه توزیع نرم خطای انرژی تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده



شکل6-4 نمودار تغییرات مولفه تنش s_y تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده در مسیر y=1/96

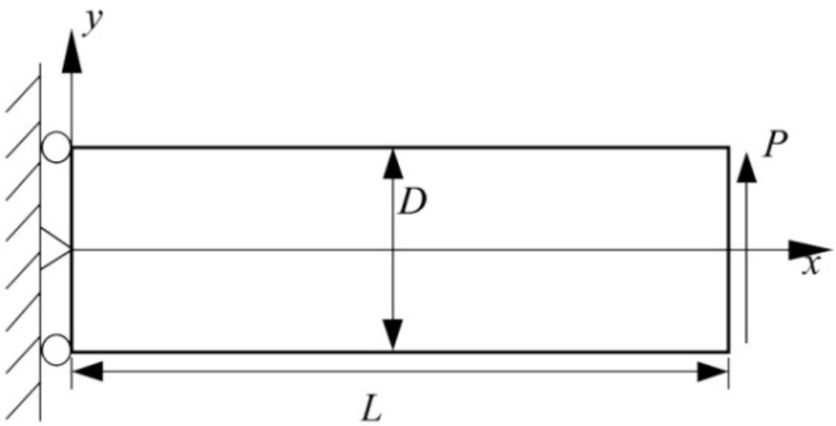


شکل6-5 نمودار تغییرات مولفه تنش t_{xy} تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده در مسیر y=1/0

6-4- تیر طره تیموشنکو

نتایج گرفته شده از مدلسازی تیر طره تیموشنکو با مصالح الاستیک خطی ایزوتروپیک و در شرایط تنش مستوی توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش های آن در این بخش نشان داده شده است. پارامترهای به کار برده شده در مدلسازی این مسئله در تحلیل ایزوژئومتریک به صورت زیر است (شکل 6-6).

$$L = 10\,, \quad D = 2, \quad P = 300, \quad E = 1500, \quad n = 0.15$$

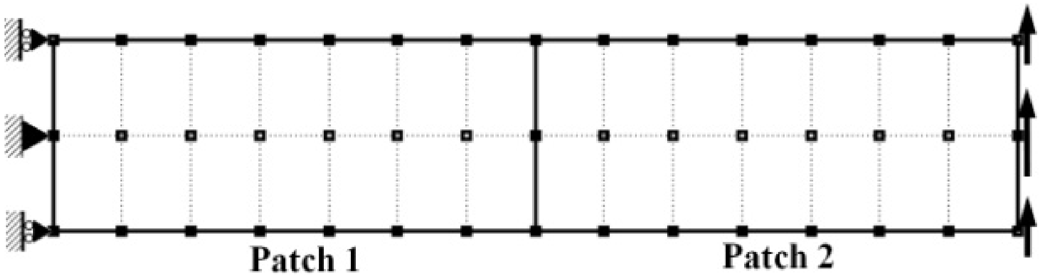


شکل 6-6 تیر طره در شرایط تنش مستوی

تنشهای دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن توسط تیموشنکو وگودیر به صورت زیر ارائه شده است[58].

$$\begin{aligned} s_x &= -\frac{P(L-x)y}{I} \\ s_y &= 0 \\ s_{xy} &= \frac{P}{2I}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right) \end{aligned} \tag{24-6}$$

که در آن $I = \frac{D^3}{12}$ می‌باشد. برای مدلسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از 45 نقطه کنترلی، دو ناحیه مشابه، توابع شکل درجه یک و نه نقطه گوسی جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش استفاده شده است(شکل 6-7).



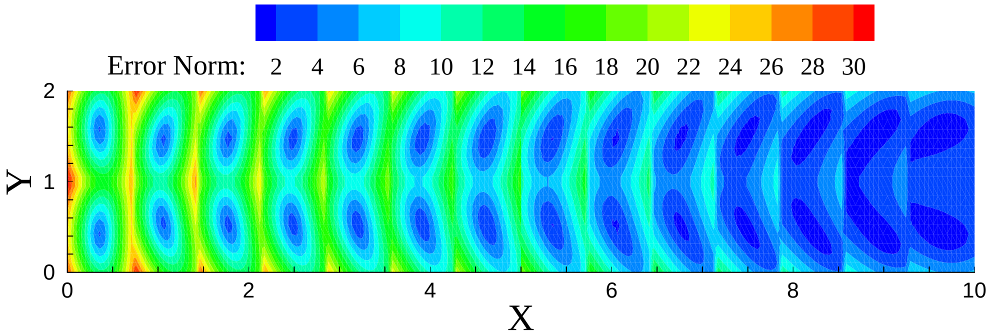
شکل 6-7 نقاط کنترلی و شرایط مرزی مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک تیر طره تیموشنکو

همچنین بردارهای گرهی در جهات xو h به صورت زیر می‌باشند.

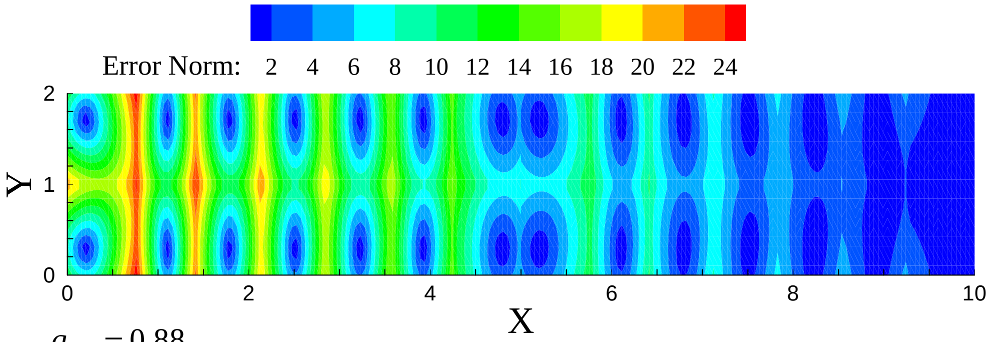
$$x = \{0,0,0.14,0.29,0.43,0.57,0.71,0.86,1,1\},\ h = \{0,0,0.5,1,1\}$$

در شکل 6-8 نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی بدست آمده از روش ارائه شده در این فصل (روش جدید) و روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا (روش قدیمی) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود در این مثال نیز نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی روش جدید نسبت به روش قدیمی، به تغییرات نرم خطای دقیق نزدیکتر است. همچنین افزایش شاخص تاثیر کل دامنه از 0/88 در روش قدیمی به 0/93 روش جدید، نشان دهنده کارایی بهتر روش پیشنهادی می-باشد.

نحوه تغییرات تنش s_x و t_{xy} بدست آمده از حل دقیق، تحلیل ایزوژئومتریک و روش بازیافت تنش قدیمی و جدید در مسیر x=0/1 در شکل 6-9 و تغییرات s_y در مسیر y=1/9 در شکل 6-10 نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در این مثال نیز تنش بهبود یافته بدست آمده از روش ارضای معادلات تعادل نسبت به تنش بدست آمده از روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا دقیق تر است.

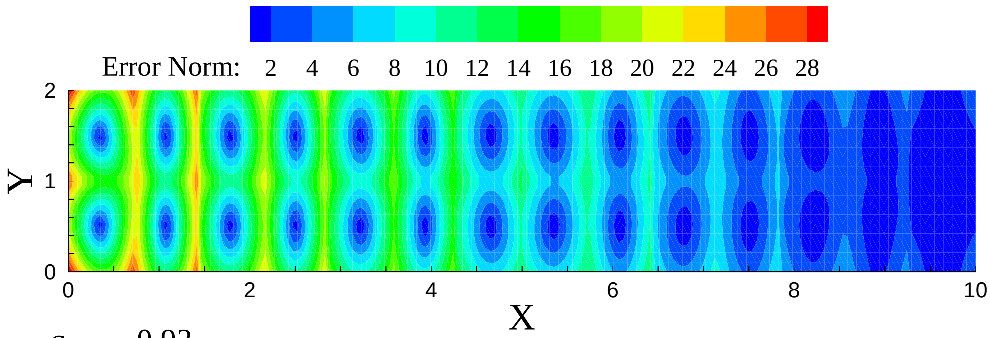


الف) نرم خطای انرژی دقیق



$q_{old} = 0.88$

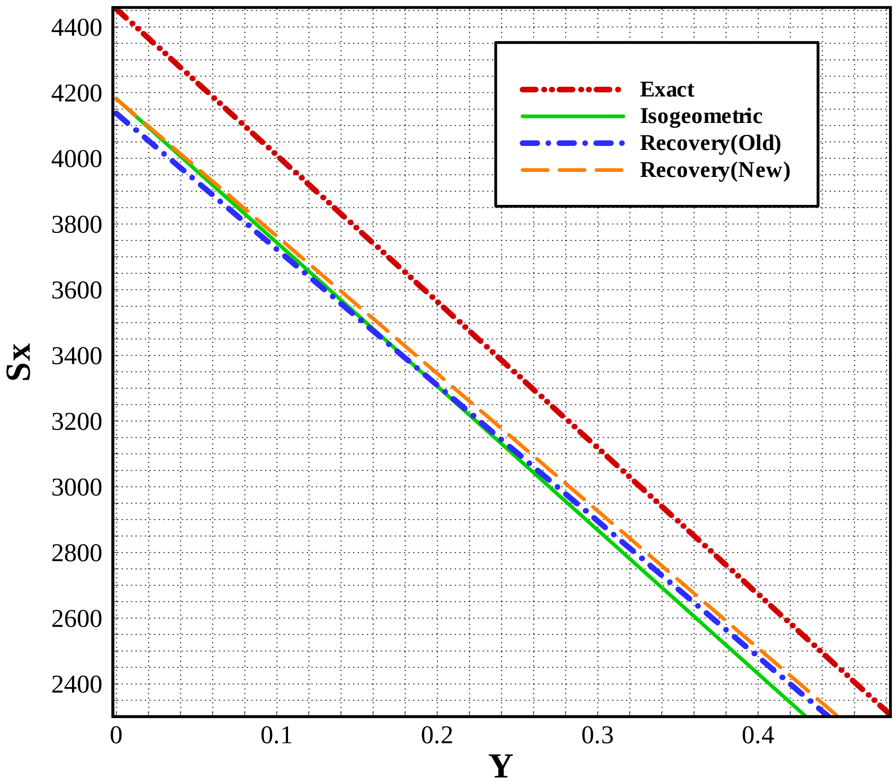
ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)



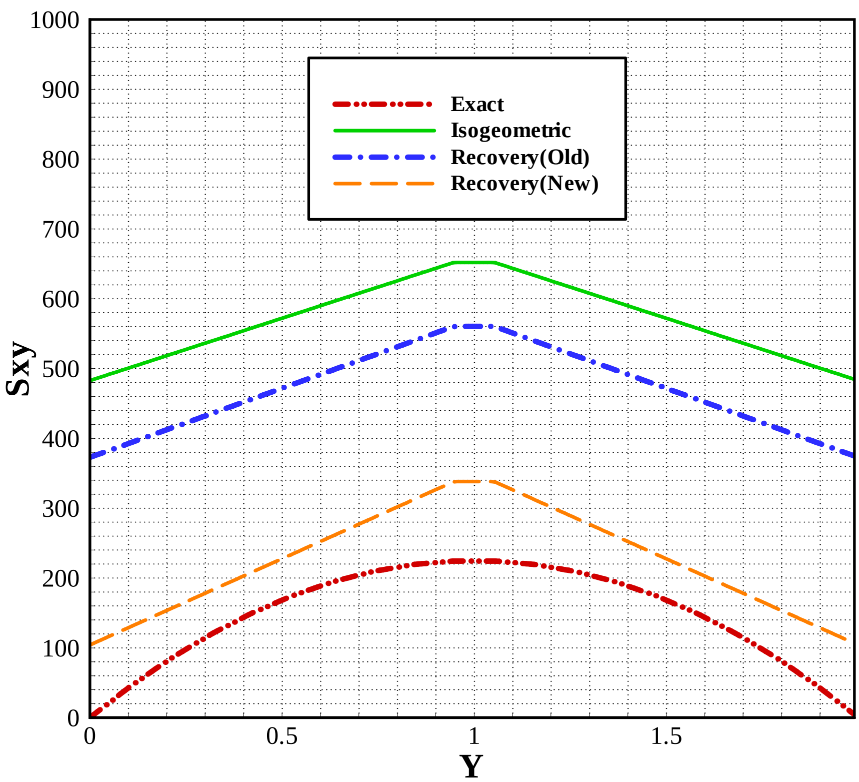
$q_{new} = 0.93$

ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

شکل 6-8 نحوه توزیع نرم خطای انرژی تیر طره تیموشنکو

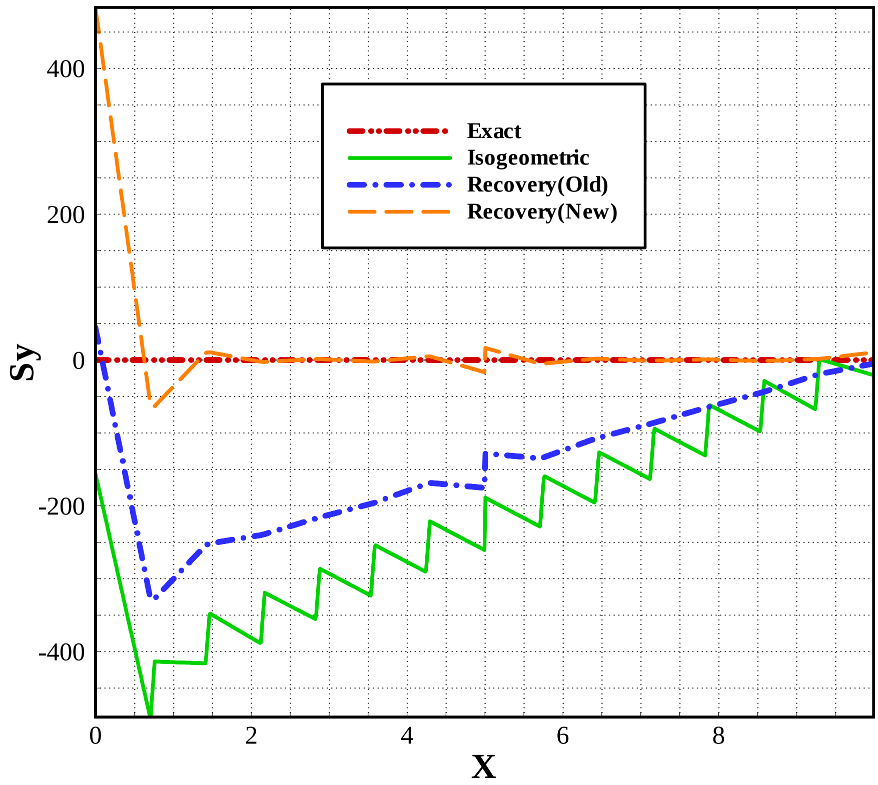


الف) نمودار تغییرات مولفه تنش s_x



ب) نمودار تغییرات مولفه تنش t_{xy}

شکل9-6 نمودار تغییرات تنش تیر طره تیموشنکو در مسیر x=0/1



شکل6-10 نمودار تغییرات مولفه تنش s_y تیر طره تیموشنکو در مسیر y=1/9

6-5- صفحه ترکدار تحت کشش

در این مثال به بررسی رفتار تخمین کننده‌های خطا، در برآورد خطای بدست آمده از تحلیل مسئله دارای یک نقطه تکین با روش ایزوژئومتریک می‌پردازیم. همانطور که قبلا بیان شد، معمولا مسائل با نقطه تکین، به علت بالا بودن خطای آلودگی، مسائل خوبی جهت بررسی کارایی تخمین کننده‌های خطا به شمار نمی‌روند؛ اما هدف از این مثال، بررسی رفتار تخمین کننده‌های خطا در تعیین میزان نرم خطای انرژی نوک ترک و توزیع خطا در دیگر نقاط دامنه خواهد بود.

در شکل 6-11 مشخصات صفحه مربعی تحت تنش کششی P مشاهده می‌شود. اضلاع این مربع به طول 2a و گسترش ترک به میزان a فرض شده است.

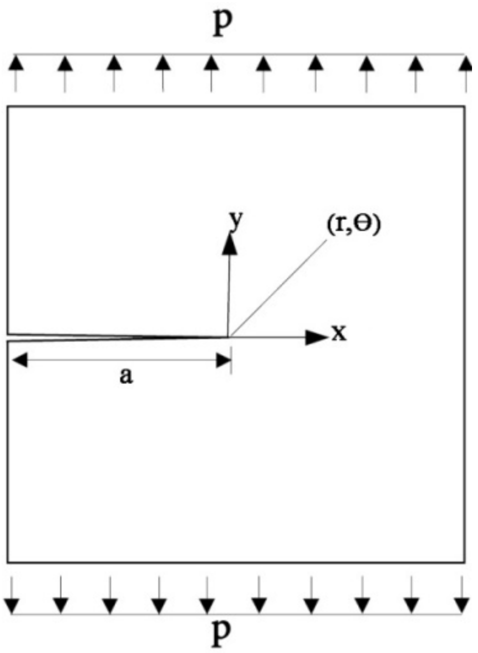
بازشدگی ترک در مد اول است و بر اساس سیستم مختصات قطبی نشان داده شده در شکل 6-11 نتایج تحلیلی آن به صورت روابط (6-25) تا (6-27) می‌باشد[59].

$$s_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2p\,r}}\cos\frac{q}{2}\left(1-\sin\frac{q}{2}\sin\frac{3q}{2}\right) \tag{25-6}$$

$$s_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2p\,r}}\cos\frac{q}{2}\left(1+\sin\frac{q}{2}\sin\frac{3q}{2}\right) \tag{26-6}$$

$$s_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2p\,r}}\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2}\cos\frac{3q}{2} \tag{27-6}$$

که در آن فاکتور شدت تنش برابر $K_I = P\sqrt{pa}$ در نظر گرفته شده است.



شکل 6-11 صفحه مربعی ترکدار تحت تنش کششی

پارامترهای به کار رفته در تحلیل مسئله به صورت زیر می‌باشند.

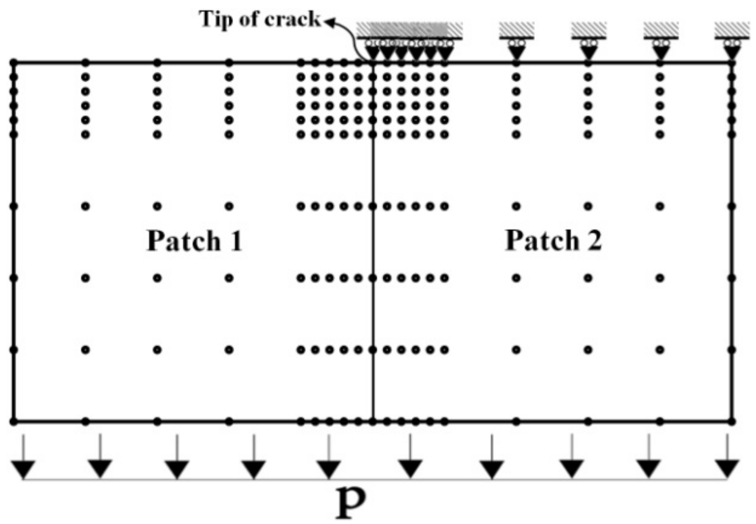
طول ضلع مربع $= 2a = 10; \quad n = 0.3; \quad E = 1000; \quad P = 1$

به علت تقارن تنها نیمی از دامنه مورد تحلیل قرار می‌گیرد. برای مدلسازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریک از 190 نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده شده است. همچنین در جهت x و h هر وصله، از توابع شکل نربز درجه یک، نه نقطه گوسی و بردارهای گرهی به صورت زیر استفاده شده است.

$$x = \{0,0,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1\},\ h = \{0,0,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1\}$$

در شکل 6-12، آرایش نقاط کنترلی و شرایط مرزی اعمال شده در مدلسازی این مسئله نشان داده

شده است.

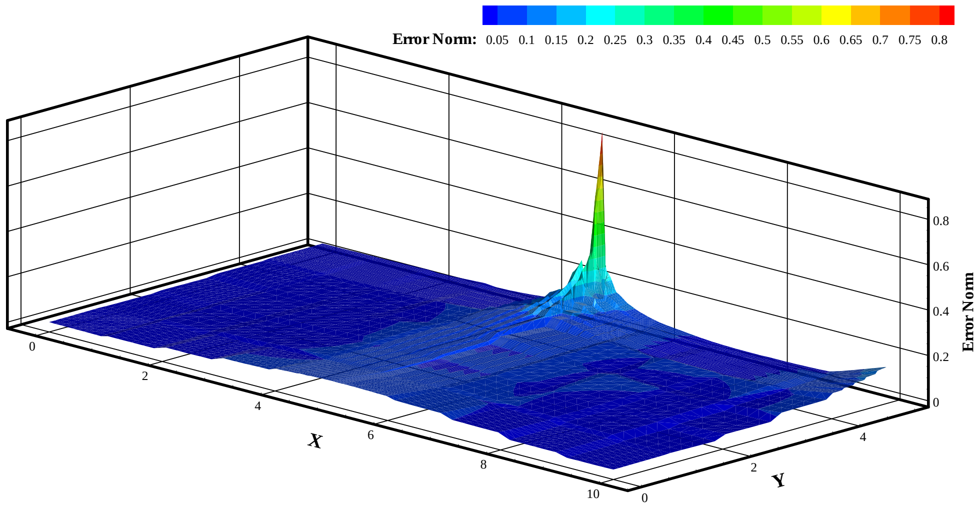


شکل 6-12 نقاط کنترلی و شرایط مرزی مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک صفحه ترکدار

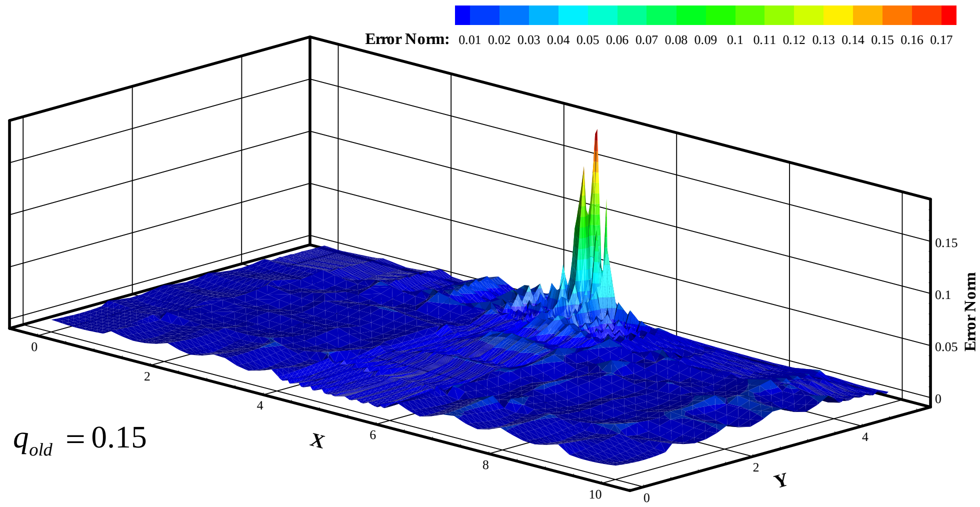
در شکل 6-13 نتایج بدست آمده از نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی برای تحلیل صفحه ترکدار تحت کشش نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، روش تخمین خطای جدید کارایی بهتری نسب به روش قدیمی در برآورد نرم خطای نوک ترک و توزیع نرم خطای کل دامنه دارد.

همچنین در این مثال نیز افزایش شاخص تاثیر کل دامنه در روش جدید نشان دهنده کارایی بهتر روش پیشنهادی می‌باشد.

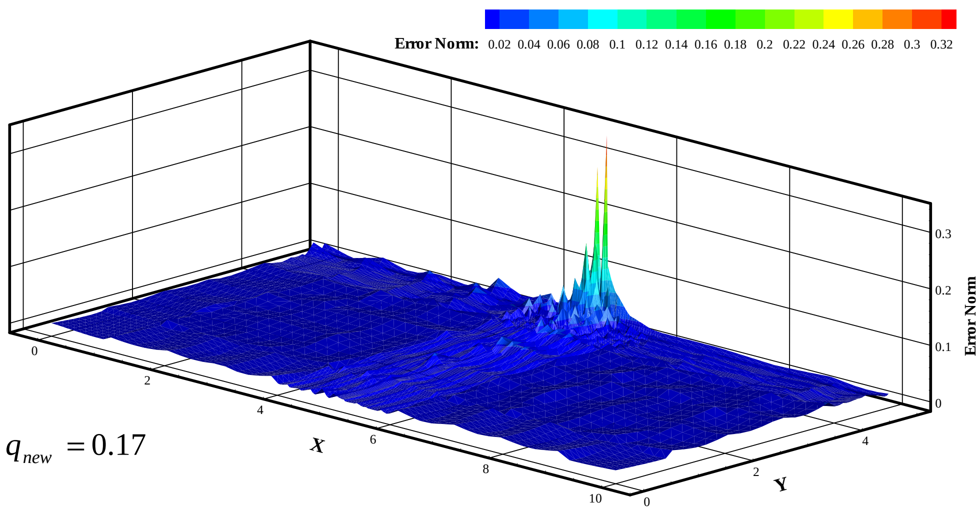
در شکل 6-14، نحوه توزیع تنش‌های s_x و s_y بدست آمده از حل تقریبی، تحلیل ایزوژئومتریک و تنش‌های بهبود یافته نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود هر دو روش بازیافت تنش توانسته‌اند میزان تنش نوک ترک را نسبت به حل ایزوژئومتریک بهبود بخشند و این میزان بهبود تنش در روش جدید بیشتر است.



الف) نرم خطای انرژی دقیق

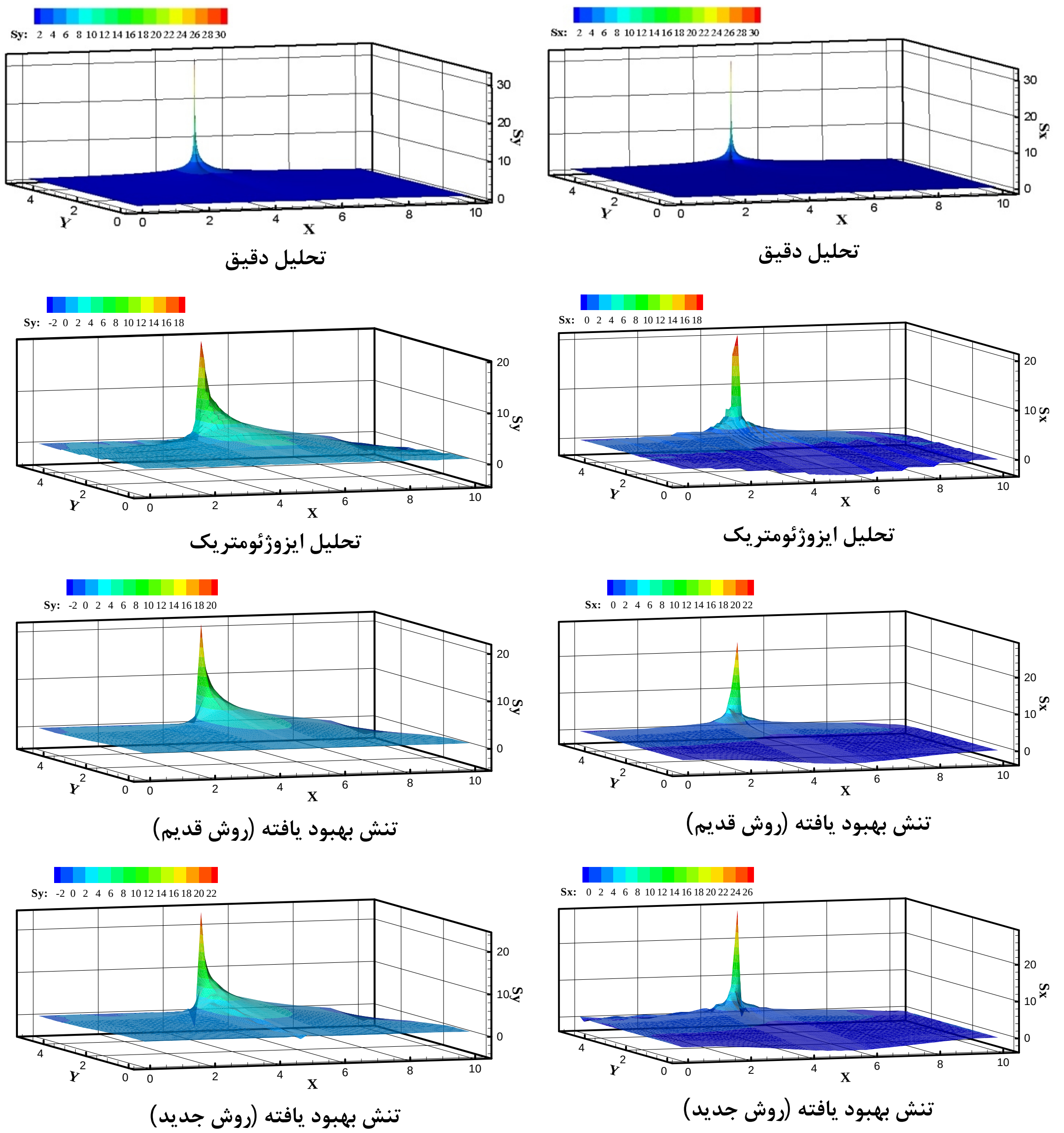


ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)



ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

شکل 6-13 نحوه توزیع نرم خطای انرژی صفحه ترکدار تحت کشش



شکل 6-14 نحوه توزیع تنش‌های s_y , s_x صفحه ترکدار تحت کشش

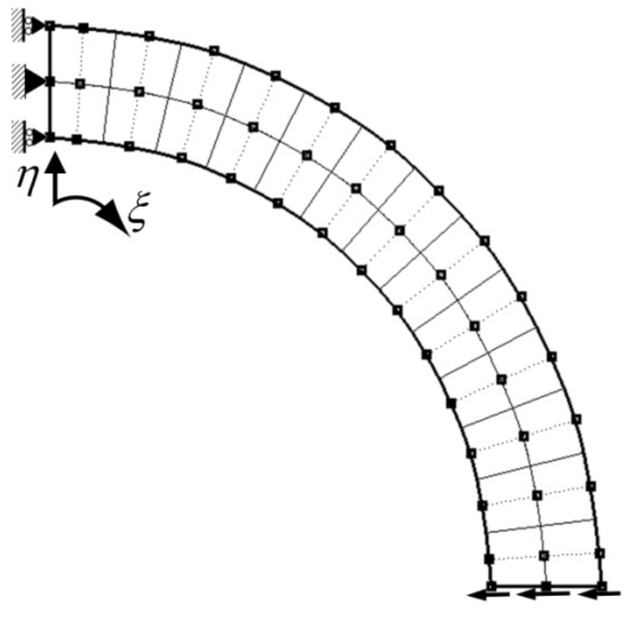
6-6- تیر طره دایره‌ای شکل

در این بخش نیز به مدلسازی تیر طره دایره‌ای شکل الاستیک در شرایط تنش مستوی، توسط تحلیل ایزوژئومتریک و بازیابی تنش های آن پرداخته می‌شود(مسئله بخش 3-5). پارامترهای به کار برده شده در مدلسازی و تحلیل این مسئله و تنشهای دقیق آن مطابق بخش 3-5 در نظر گرفته شده است.

برای مدلسازی و تحلیل این تیر به روش ایزوژئومتریک از یک وصله و 45 نقطه کنترلی استفاده شده است. همچنین در جهت x و h به ترتیب از توابع شکل نربز درجه دو و درجه یک و بردارهای گرهی به صورت زیر استفاده شده است.

$$x=\begin{Bmatrix}0,0,0,0.08,0.15,0.23,0.31,0.38,0.46,\\0.54,0.61,0.69,0.77,0.850.92,1,1,1\end{Bmatrix},\ h=\{0,0,0.5,1,1\}$$

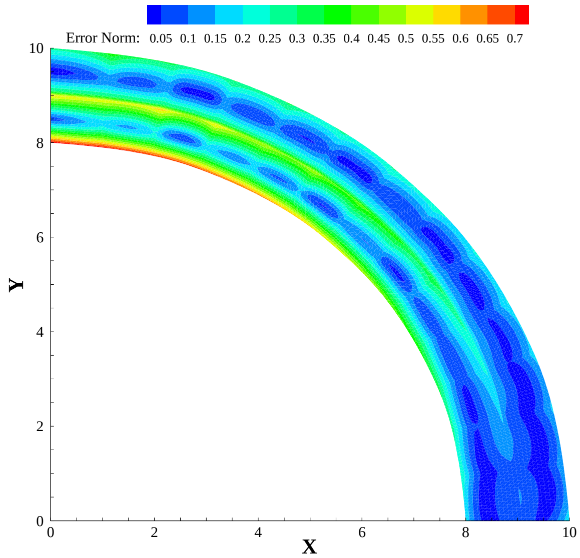
جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش نیز شانزده نقطه گوسی مورد استفاده قرار گرفته است. در شکل 6-15 آرایش المانها و شبکه نقاط کنترلی به همراه شرایط مرزی اعمال شده در مدلسازی تیر طره دایره‌ای نمایش داده شده است.



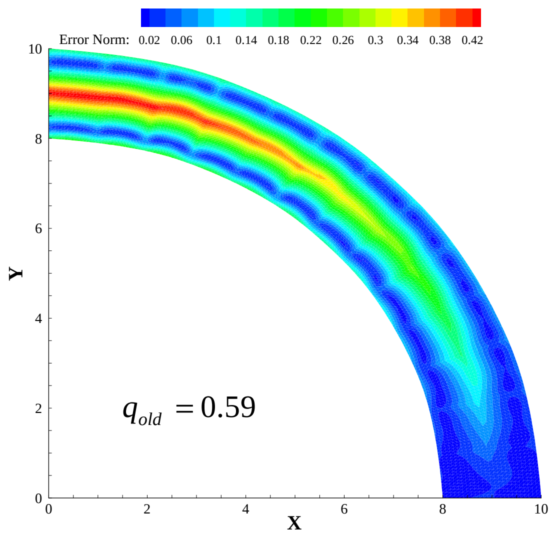
شکل 6-15 نقاط کنترلی و شرایط مرزی مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک تیر طره دایره‌ای

در شکل 6-16 نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی بدست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش (روش جدید) و روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا (روش قدیمی) نشان داده شده است. همان طور که در این مثال نیز مشاهده می‌شود نحوه تغییرات نرم خطای تقریبی بدست آمده از روش جدید نسبت به روش قدیمی، به تغییرات نرم خطای دقیق نزدیک است که نشان دهنده کارایی بهتر تخمین کننده خطا پیشنهادی نسب به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا است. در این

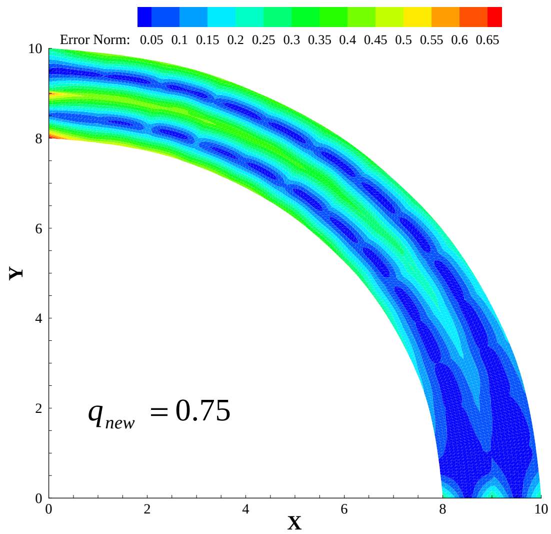
مثال شاخص تاثیر کل دامنه از روش جدید 0/75 و از روش قدیمی 0/59 بدست آمده است. که افزایش شاخص تاثیر در این مثال نیز نشان دهنده کارایی بهتر روش پیشنهادی می‌باشد.



الف) نرم خطای انرژی دقیق



ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)

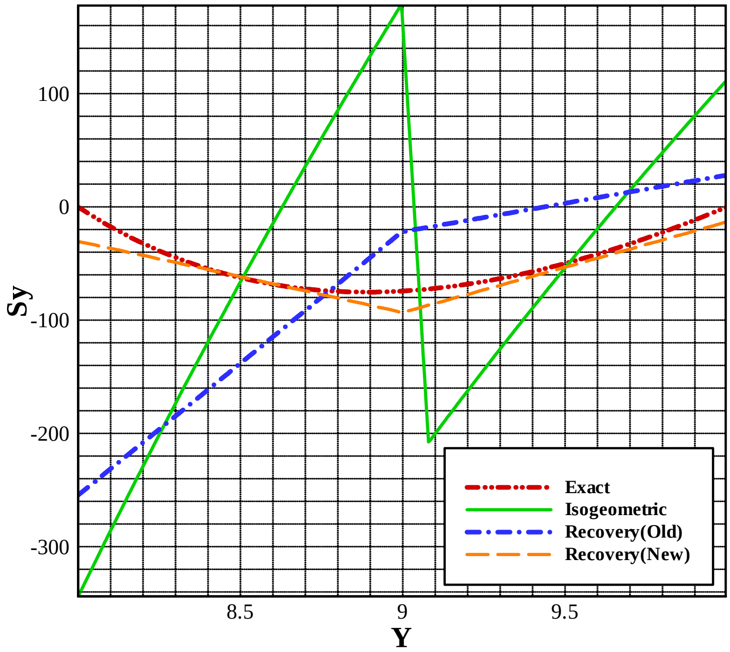


ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

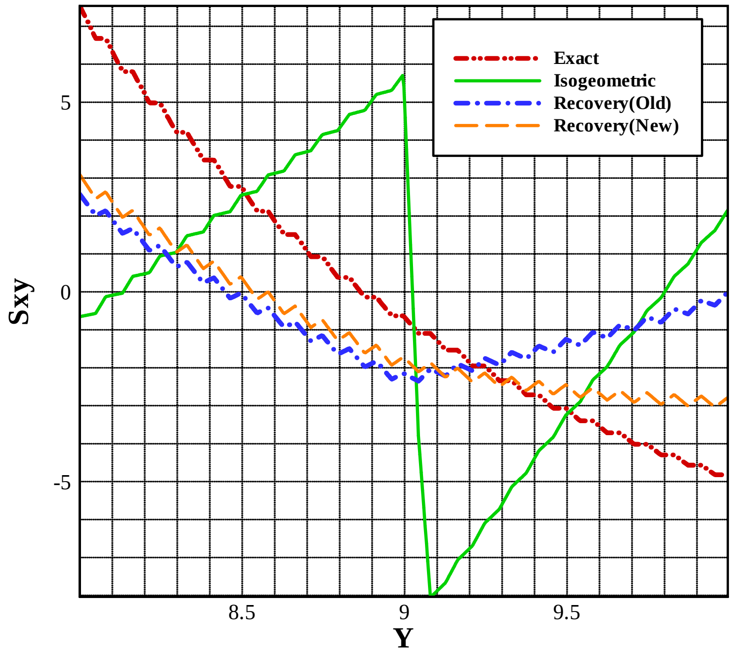
شکل 6-16 نحوه توزیع نرم خطای انرژی تیر طره دایره‌ای

در این مثال نیز به عنوان نمونه، در مسیر x=0/04 ، نحوه تغییرات تنش s_y و t_{xy} بدست آمده از حل دقیق، تحلیل ایزوژئومتریک و روش بازیافت تنش قدیمی و جدید در شکل 6-17 ترسیم شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات تنش بدست آمده از روش مبتنی بر ارضای معادلات

تعادل نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا، دقیقتر است که نشان دهنده کارایی مطلوب روش ارائه شده در این پژوهش در تشکل سطح تنش بهبود یافته می‌باشد.



الف) نمودار تغییرات مولفه تنش s_y

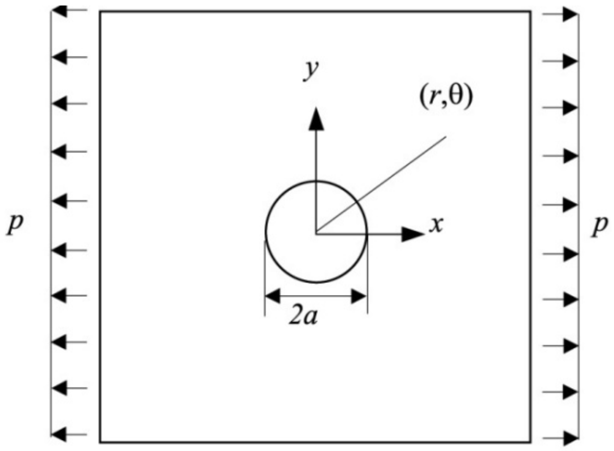


ب) نمودار تغییرات مولفه تنش t_{xy}

شکل6-17 نمودار تغییرات تنش تیر طره دایره‌ای در مسیر x=0/04

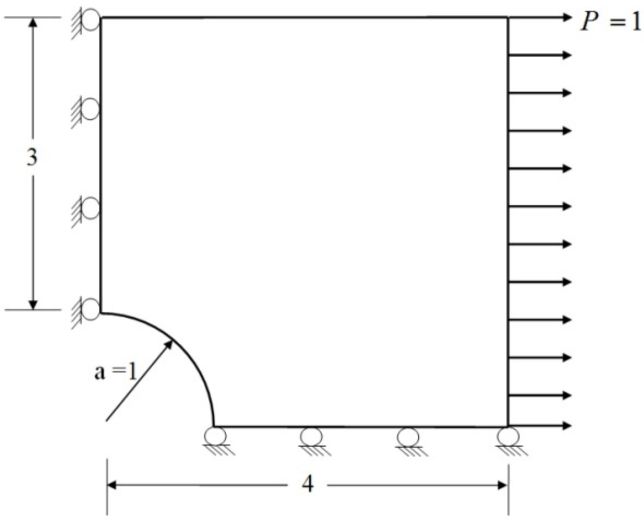
6-7- صفحه نامحدود سوراخدار

مثال دو بعدی دیگری که برای مقایسه مورد بررسی قرار گرفته است، مساله صفحه نامحدود سوراخدار می‌باشد(شکل 6-18).



شکل 6-18 صفحه نامحدود سوراخدار

به علت تقارن، تنها یک چهارم از دامنه مدلسازی شده است(شکل 6-19).



شکل 6-19 دامنه مدلسازی شدهٔ صفحه نامحدود سوراخدار

این صفحه تحت تنش کششی $s_x = 1$ قرار گرفته است و با فرض شرایط تنش مسطح تحلیل شده است. مصالح به صورت الاستیک خطی ایزوتروپیک با ضریب یانگ E=1000 و ضریب پواسون $n = 0.3$ در نظر گرفته شده است. تنشهای دقیق این مسئله با توجه به حل تحلیلی آن به صورت

روابط (6-28) تا (6-30) می‌باشد[58].

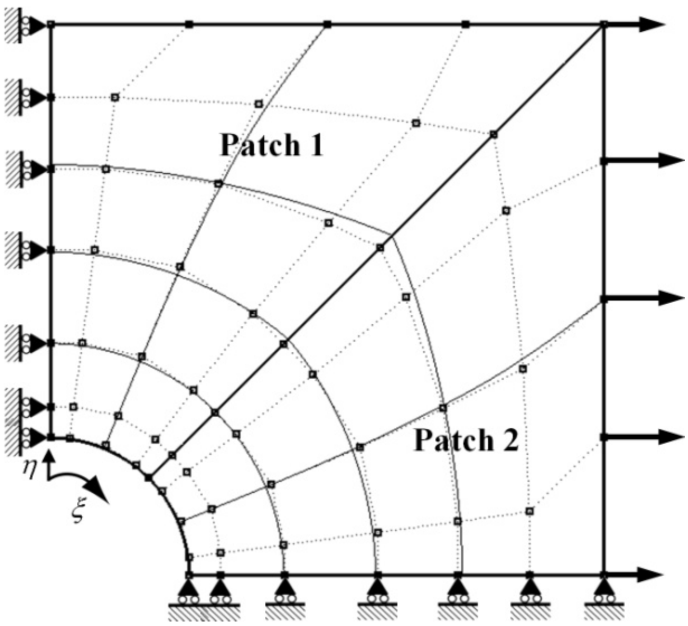
$$s_x = 1 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos 2q + \cos 4q\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos 4q \qquad (28\text{-}6)$$

$$s_y = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos 2q - \cos 4q\right) - \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\cos 4q \qquad (29\text{-}6)$$

$$s_{xy} = -\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2q + \sin 4q\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}\sin 4q \qquad (30\text{-}6)$$

همانطور که در شکل 6-20 مشاهده می‌شود، برای مدلسازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریک از 63 نقطه کنترلی و دو ناحیه مشابه استفاده شده است. همچنین در جهت x و h هر وصله، از توابع شکل نربز درجه سه و بردارهای گرهی به صورت زیر استفاده شده است.

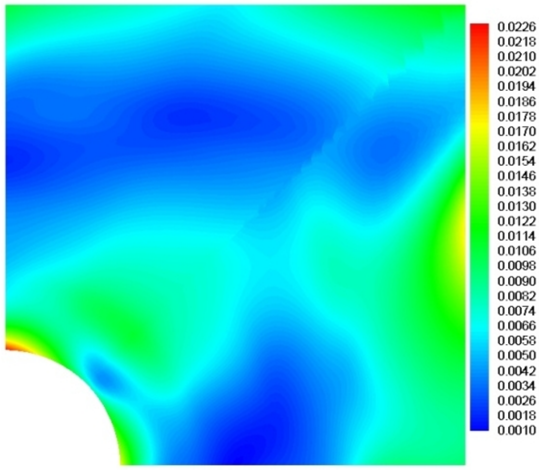
$$x = \{0,0,0,0,0.5,1,1,1,1\},\ \ h = \{0,0,0,00.25,0.5,0.75,1,1,1,1\}$$



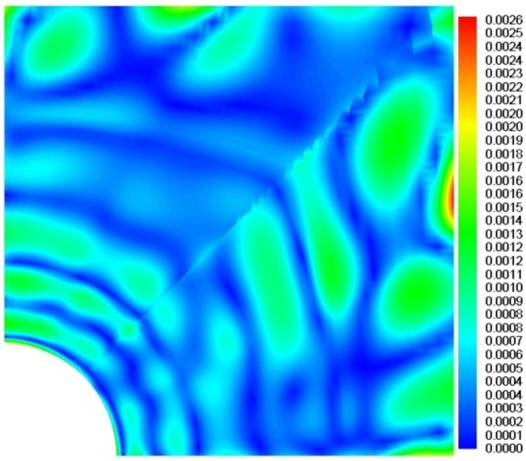
شکل 6-20 نقاط کنترلی و شرایط مرزی مدلسازی شده در تحلیل ایزوژئومتریک صفحه نامحدود سوراخدار

جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش نیز بیست و پنج نقطه گوسی مورد استفاده قرار گرفته است.

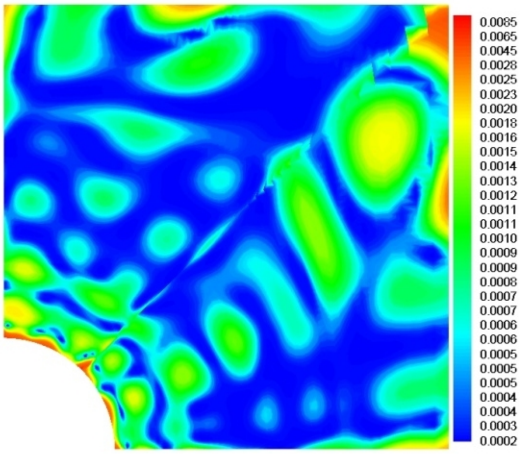
در شکل 6-21، مشاهده می‌شود که در این مثال نیز نحوهٔ توزیع نرم خطای انرژی تقریبی بدست آمده از ارضای معادلات تعادل (روش جدید) نسب به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا (روش قدیمی) به نرم خطای انرژی دقیق نزدیکتر است.



الف) نرم خطای انرژی دقیق



ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)



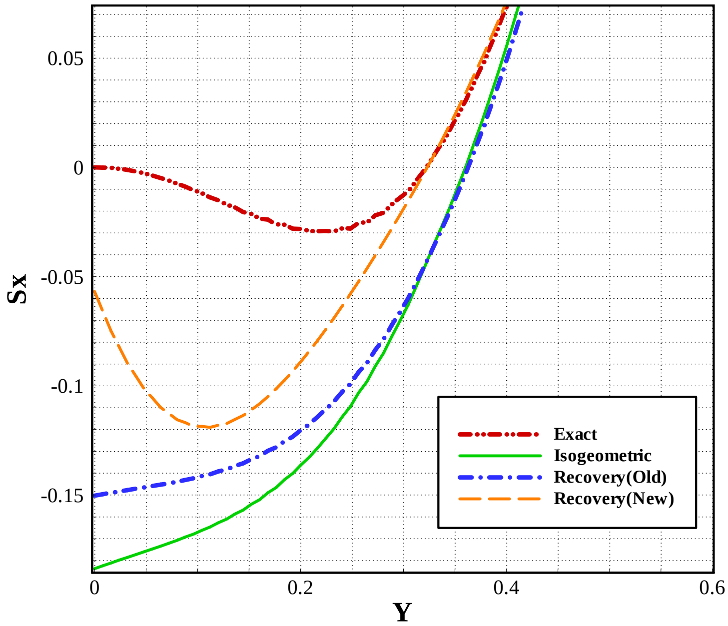
ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

شکل 6-21 نحوه توزیع نرم خطای انرژی صفحه نامحدود سوراخدار

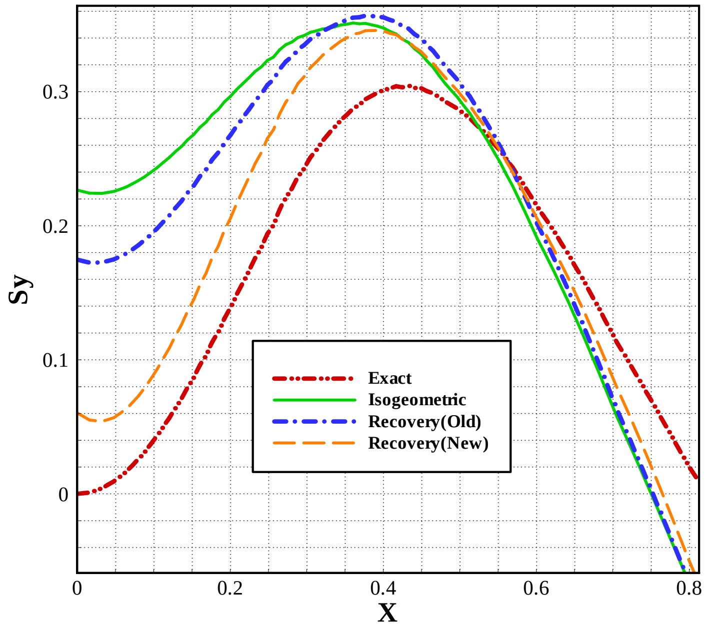
شاخص تاثیر کل دامنه برای روش جدید 0/16 و در روش قدیمی 0/14 بدست آمده است؛ که این افرایش در شاخص تاثیر نیز نشان دهنده کارایی بهتر روش پیشنهادی می‌باشد. به نظر می رسد که علت کاهش شاخص تاثیر و درنتیجه کاهش کارایی برآورد کننده خطا در این مثال نسبت به مثال قبل استفاده از توابع شکل با درجه بالاتر از یک می‌باشد. نتایج عددی نشان می‌دهند که معمولا در روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش با افزایش درجه توابع شکل از یک، کارایی برآورد کننده خطا پایین می‌آید [55].

در شکل 6-22 به عنوان نمونه، نحوه تغییرات تنش s_x بدست آمده از حل دقیق و تحلیل

ایزوژئومتریک و روش بازیافت تنش قدیمی و جدید در مسیر x=1/0 ترسیم شده است. همچنین نحوه تغییرات تنش s_y نیز در مسیر y=1/0 در شکل 6-23 نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود نحوه تغییرات تنش بدست آمده از روش مبتنی بر ارضای معادلات تعادل نسب به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا، در این مثال نیز در نواحی مرزی ترسیم شده، دقیق تر است.



شکل6-22 نمودار تغییرات مولفه تنش s_x صفحه نامحدود سوراخدار در مسیر x=1/0



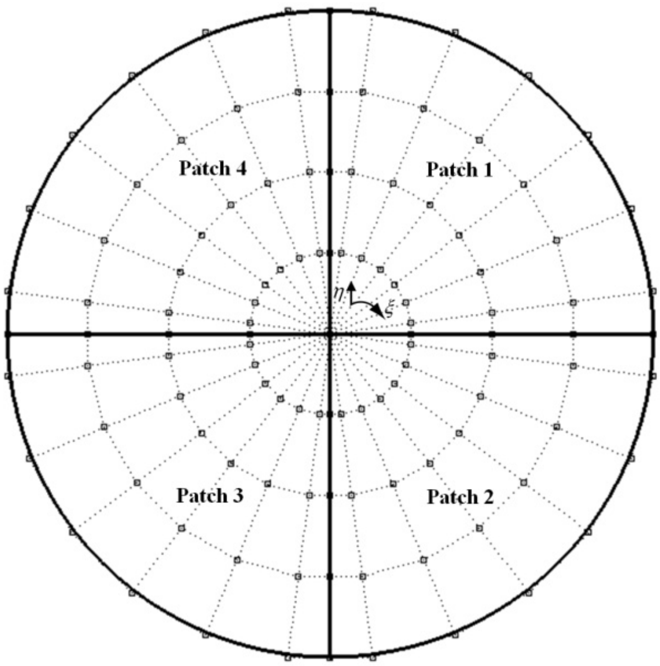
شکل6-23 نمودار تغییرات مولفه تنش s_y صفحه نامحدود سوراخدار در مسیر y=1/0

6-8- صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری

آخرین مثالی که در این فصل جهت بررسی کارایی روش برآورد خطا بر مبنای استفاده از تعادل در روش ایزوژئومتریک و مقایسه این روش با روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا مورد توجه قرار گرفته است، صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری می‌باشد. این مثال نیز همانند مسئله صفحه ترکدار تحت کشش، یک مسئله با نقطه تکین می‌باشد. با توجه به اینکه زیر بار متمرکز به عنوان یک نقطه تکین، دارای خطای زیادی نسبت به سایر نقاط است، هدف از این مثال، بررسی رفتار تخمین کننده‌های خطا در تعیین میزان نرم خطای انرژی زیر بار متمرکز و نحوه توزیع خطا در دیگر نقاط دامنه خواهد بود.

مشخصات این مسئله، پارامترهای مورد استفاده شده و تنش‌های دقیق آن همانند مثال بخش 6-3 در نظر گرفته شده است.

برای مدلسازی و تحلیل این مسئله به روش ایزوژئومتریک از 140 نقطه کنترلی و چهار ناحیه مشابه به شکل ربع دایره استفاده شده است(شکل6-24).



شکل 6-24 شبکه نقاط کنترلی در مدلسازی صفحه دایره‌ای

در جهت x و h هر وصله، به ترتیب از توابع شکل نربز درجه دو و درجه یک و بردارهای گرهی به صورت زیر استفاده شده است.

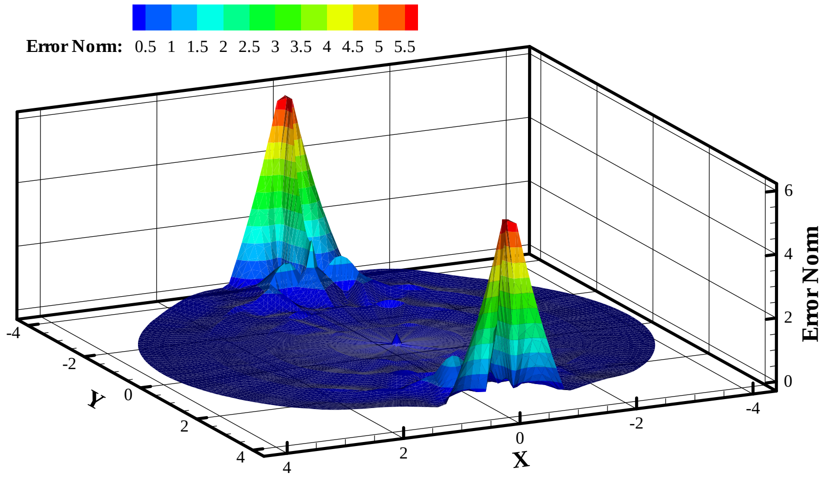
$$x = \{0,0,0,0.17,0.33,0.5,0.67,0.83,1,1,1\}, h = \{0,0,0.25,0.5,0.75,1,1\}$$

جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش نیز شانزده نقطه گوسی مورد استفاده قرار گرفته است.

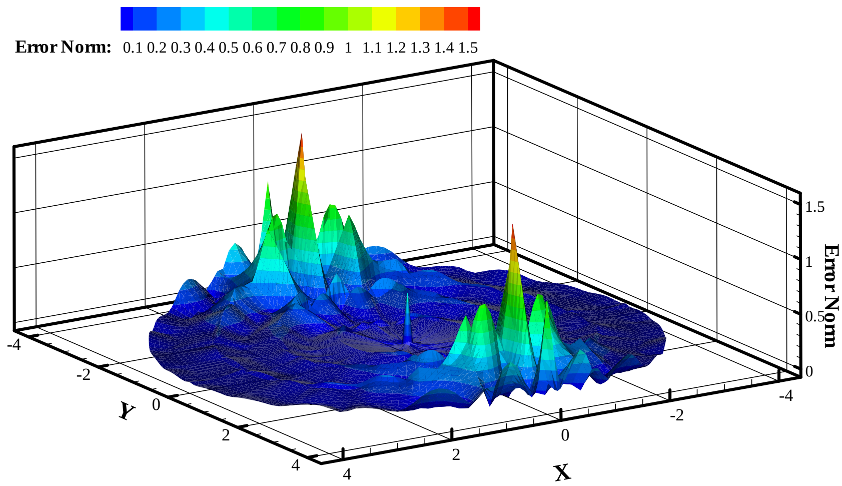
در شکل 6-25 نتایج بدست آمده از نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی تحلیل صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، روش تخمین خطای جدید کارایی بهتری نسب به روش قدیمی در برآورد نرم خطا در زیر بار متمرکز و توزیع نرم خطای کل دامنه دارد. در این مثال نیز شاخص تاثیر تخمین کننده خطا از مقدار 0/45 برای روش قدیمی به مقدار 0/52 در روش جدید افزایش داشته است.

در شکل‌های 6-26 تا 6-28 به مقایسه نحوه توزیع مولفه‌های تنش بدست آمده از تحلیل دقیق، تحلیل ایزوژئومتریک و تنش‌های بازیافتی بدست آمده از روش ارائه شده در این پژوهش و روش قدیمی مبتنی بر نقاط فوق همگرا پرداخته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در مولفه‌های تنش s_x و s_y، روش جدید نسبت به روش قدیمی از توزیع تنش مناسبتری برخوردار می‌باشد. در مورد توزیع تنش مولفه t_{xy}، هر دو روش توزیع مشابهی دارند اما همانطور که مشاهده می‌شود نسبت به توزیع تنش ایزوژئومتریک دقیقتر می‌باشند.

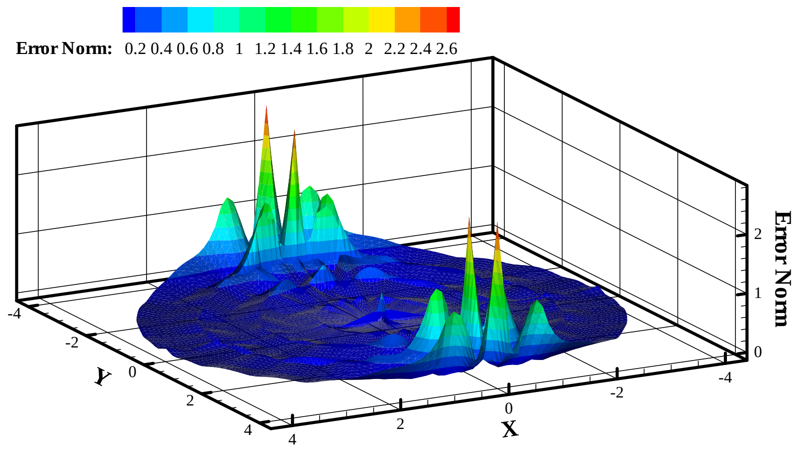
در انتها می‌توان بیان نمود که با توجه به نتایج رضایت بخش حاصل از روش برآورد خطا مبتنی بر استفاده از تعادل، نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا در مسائل حل شده در این فصل، روش جدید برآورد خطا از کارایی بهتری نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا برخوردار است و می‌توان از آن به عنوان یک راه حل ساده و مهندسی دیگر جهت برآورد خطا و بهبود میدان تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتریک نام برد.



الف) نرم خطای انرژی دقیق

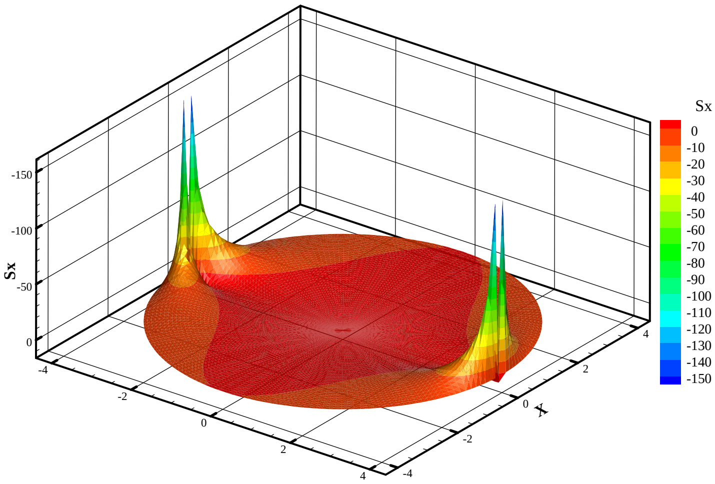


ب) نرم خطای انرژی تقریبی (روش قدیمی)

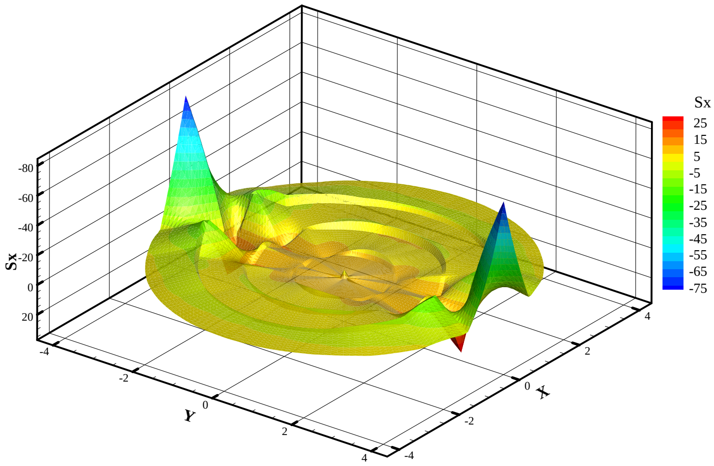


ج) نرم خطای انرژی تقریبی (روش جدید)

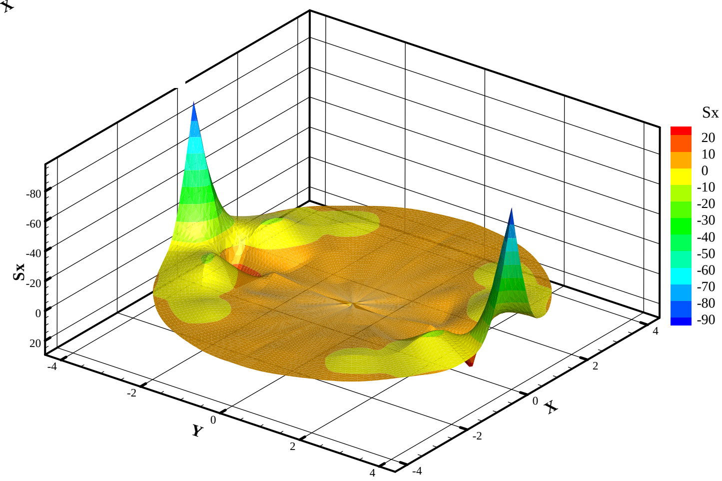
شکل 6-25 نحوه توزیع نرم خطای انرژی صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری



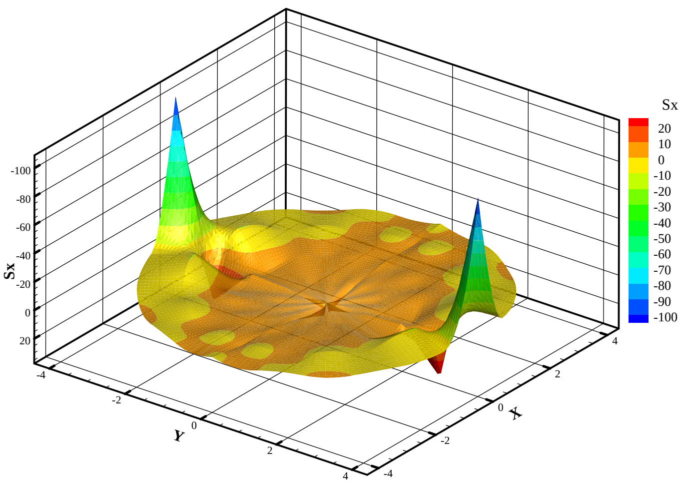
الف) تنش دقیق



ب) تنش ایزوژئومتریک

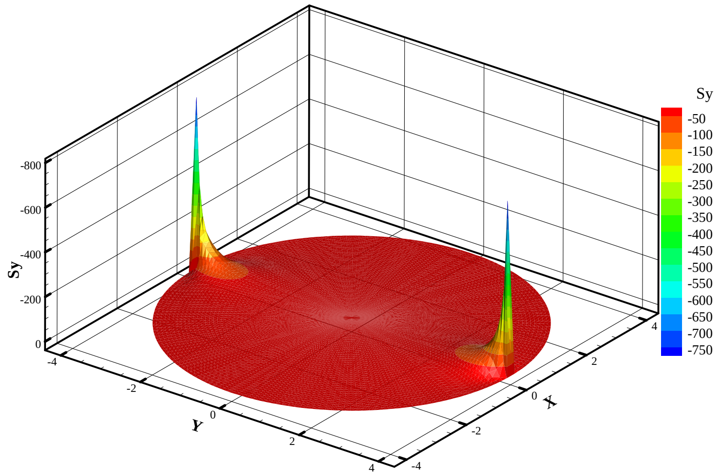


ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)

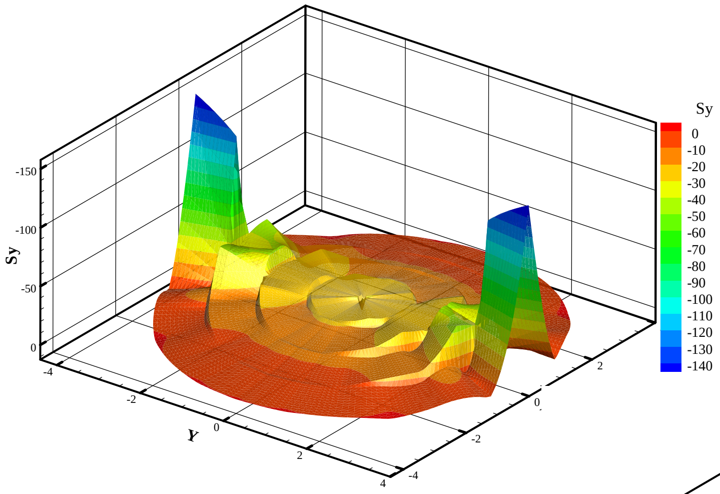


د) تنش بهبودیافته (روش جدید)

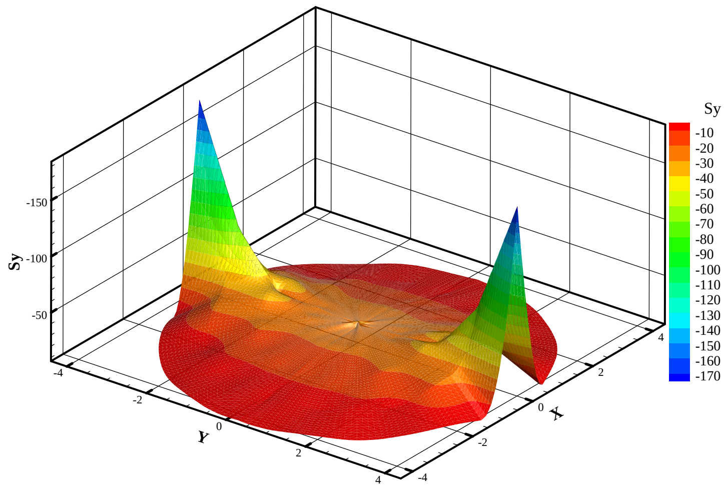
شکل 6-26 نحوه توزیع تنش s_x صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری



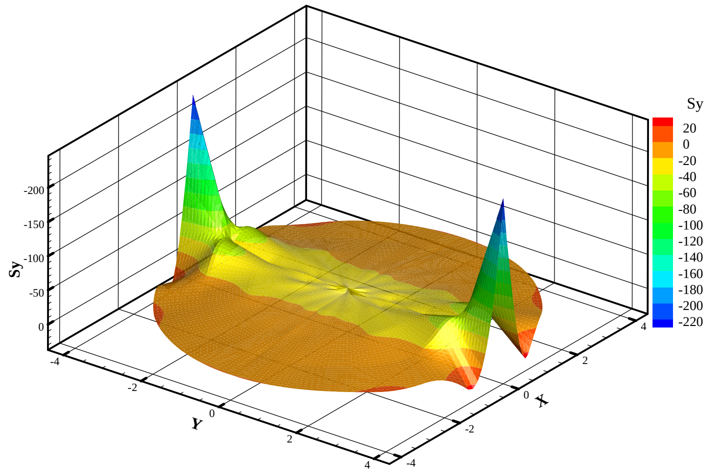
الف) تنش دقیق



ب) تنش ایزوژئومتریک

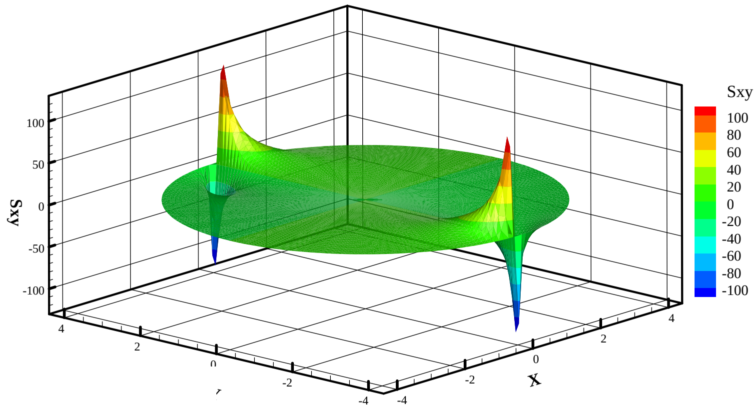


ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)

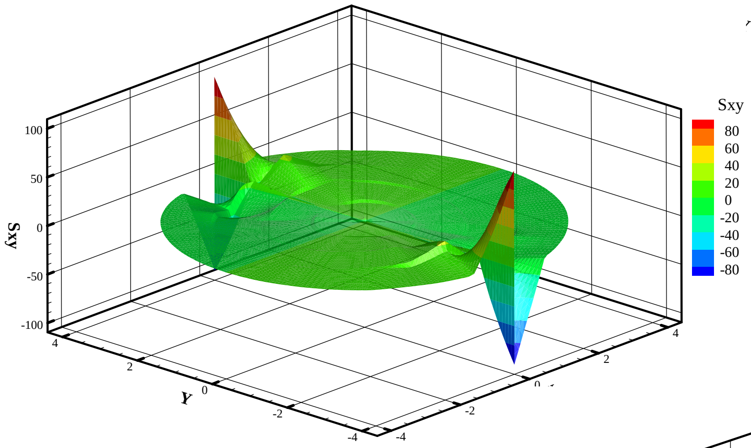


د) تنش بهبودیافته (روش جدید)

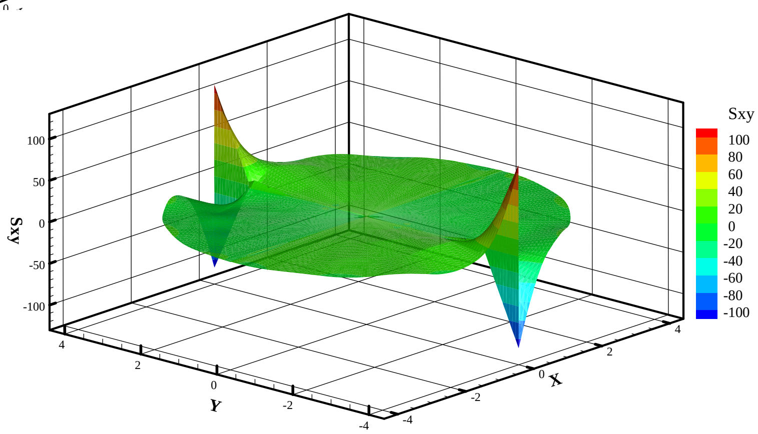
شکل 6-27 نحوه توزیع تنش s_y صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری



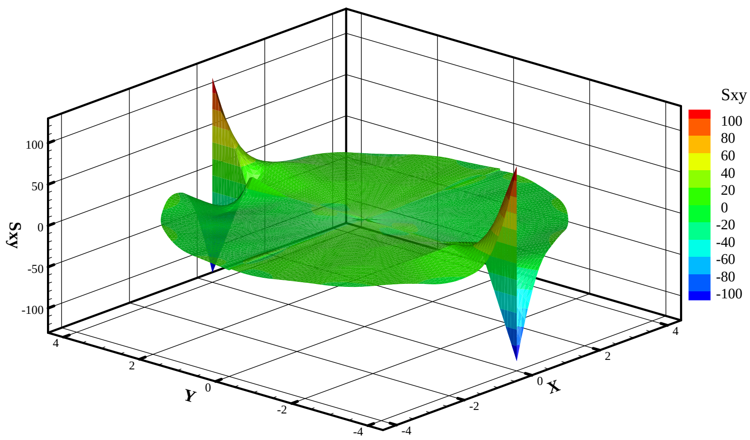
الف) تنش دقیق



ب) تنش ایزوژئومتریک



ج) تنش بهبودیافته (روش قدیمی)



د) تنش بهبودیافته (روش جدید)

شکل 6-28 نحوه توزیع تنش t_{xy} صفحه دایره‌ای تحت بار متمرکز فشاری

فصل هفتم

جمع بندی نتایج و پیشنهادات

7-1- مقدمه

این رساله در هفت فصل تنظیم شده است. در فصل اول به بیان مقدمه، تاریخچه روش‌های برآورد خطا و اهداف حاصل از این پژوهش پرداخته شده است. در فصل دوم، به معرفی تعدادی از روشهای برآورد خطایی که در روش اجزای محدود مورد استفاده قرار گرفته است، پرداخته شده است. هدف از آشنایی با روش‌های برآورد خطا در اجزای محدود، درک بیشتر روشهای برآورد خطایی است که در روش ایزوژئومتریک ارائه شده است. فصل سوم به بیان تاریخچه و مقدمه‌ای بر تحلیل مسائل به کمک روش نوین ایزوژئومتریک اختصاص دارد. در این فصل فرمولبندی مسائل تنش-کرنش مسطح در تحلیل ایزوژئومتریک بیان می‌شود. همچنین این فصل به معرفی اولین روش برآورد خطا بر مبنای بازیافت تنش در تحلیل ایزوژومتریک مسائل تنش-کرنش مسطح اختصاص دارد. در این بخش اثبات می‌شود که چرا نقاط گوسی در تحلیل ایزوژئومتریک همانند روش اجزای محدود، از خاصیت فوق همگرایی برخوردار هستند. همچنین مکانیابی نقاط بهینه تنش مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل چهارم فرمولبندی روش ایزوژئومتریک در تحلیل مسائل متقارن محوری بیان شده است و بعد از آن به توسعه روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرای گوسی جهت برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک مسائل متقارن محوری پرداخته شده است. ارائه فرمولبندی مسائل سه بعدی ایزوژئومتریک در فصل پنجم می‌باشد. همچنین در این فصل به توسعه روش برآورد خطا بر مبنای نقاط فوق همگرا در مسائل سه بعدی ایزوژئومتریک و بررسی تاثیر نقاط گوسی در تشکیل تنش بهبود یافته این مسائل پرداخته شده است. فصل ششم به معرفی یک روش ابداعی دیگر، بر پایه بازیافت تنش، جهت برآورد خطای حاصل از تحلیل مسائل با روش ایزوژئومتریک می‌پردازد. در این روش با استفاده از نیروهای وارد بر هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک و استفاده از قید معادلات تعادل، یک سطح بهبود یافته حاصل می‌شود که دقت بیشتری نسبت به تنش ایزوژئومتریک و نیز تنش بهبود یافته مبتنی بر نقاط فوق همگرا، دارد. در این فصل با ارائه شش مثال مختلف کارایی روش مورد

ارزیابی قرار گرفته است. در آخرین فصل نیز به بیان نتایج و پیشنهادات پرداخته شده است.

7-2- نتیجه گیری

در این رساله، با ایده گرفتن از روشهایی که در اجزای محدود، جهت برآورد خطا و بهبود نتایج آن مورد استفاده قرار گرفته بود، به ابداع و توسعه روشهایی نوین جهت بهبود تنش و برآورد خطای روش ایزوژئومتریک پرداخته شد. با توجه به شباهتهایی که روش ایزوژئومتریک با اجزای محدود دارد، وجود برخی تفاوتهای اساسی بین این دو روش، مشکل جدی در انتقال ایده‌های برگرفته از روش اجزای محدود، جهت برآورد خطا و بازیافت تنش مسائل ایزوژئومتریک در این رساله بود. مقالات اصلی که در روش اجزای محدود، به معرفی چگونگی برآورد خطا و بهبود نتایج پرداخته و در این رساله مورد توجه قرار گرفته بودند عبارتند از:

1) روش برآورد خطای ارائه شده توسط زینکویچ و زو که در سال 1992 به معرفی روش SPR جهت بازیافت تنش و برآورد خطای روش اجزای محدود پرداختند[9].

ایده استفاده از نقاط فوق همگرای گوسی در تحلیل ایزوژئومتریک از این مقاله و دیگر مقالات مرتبط به آن گرفته شد. با توجه به اینکه استفاده از نقاط فوق همگرای گوسی در روش اجزای محدود اولین بار به صورت اتفاقی و توسط بارلو مطرح شد [2]، این سوال وجود داشت که آیا این نقاط در روش ایزوژئومتریک نیز همانند روش اجزای محدود از خاصیت فوق همگرایی برخوردار هستند یا خیر؟. همچنین با توجه به اینکه تنش بهبود یافته در اجزای محدود بر روی هر وصله که حاصل از چند المان بود، بدست می‌آمد، این چالش را در روش ایزوژئومتریک که در آن، المانها همانند روش اجزای محدود وجود نداشت، ایجاد می‌نمود. در این رساله اثبات می‌شود که چرا نقاط گوسی در تحلیل ایزوژئومتریک نیز از خاصیت فوق همگرایی برخوردار می‌باشند. همچنین با استفاده از تکنیک نربز در تولید سطح تنش بهبود یافته بر روی هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک، این روش بخوبی جهت برآورد خطا و بهبود تنش روش ایزوژئومریک پیاده سازی شد و نتایج بدست آمده در فصل های سه، چهار و

پنج، کاربرد موفقیت آمیز این روش را در مسائل دو بعدی تنش-کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه بعدی نشان می‌دهد.

2) روش برآورد خطای ارائه شده توسط برومند و زینکویچ که در سال 1997 به معرفی روش REP پرداختند [13]، همچنین روش ارائه شده توسط باته و همکاران که در سال 2011 به معرفی روشی مشابه روش REP، جهت افزایش دقت تنش حاصل از تحلیل اجزای محدود پرداخته‌اند [57].

ایده استفاده از نیروهای وارد بر هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک و قید معادلات تعادل از این مقالات و دیگر مقالات مرتبط با آنها گرفته شد. یکی از اساسی ترین چالشهایی که این قسمت از پژوهش با آن روبرو شده بود، وجود تفاوت بین نقاط گرهی در روش اجزای محدود (که بر روی مرز المانها و سازه قرار داشتند) با نقاط کنترلی روش ایزوژئومتریک (که در فضایی خارج از مرز سازه و مرز بردارهای گرهی قرار داشتند) بود. تشکیل فرمولبندی این روش بر اساس استفاده از بازه تاثیر توابع نربز نیز یکی دیگر از مشکلات استفاده از این ایده در روش ایزوژئومتریک به شمار می‌رود. با وجود این مشکلات و دیگر چالشهایی که در پیاده سازی این ایده در روش ایزوژئومتریک وجود داشت، این ایده جهت برآورد خطای روش ایزوژئومتریک به کار گرفته شد و نتایج بدست آمده در فصل شش، نشان دهنده کارایی رضایت بخش این روش می‌باشد.

3) روش برآورد خطای ارائه شده توسط تابارا و همکاران، که در آن با استفاده از روش مینیمم مربعات متحرک به بهبود حل و برآورد خطا در روش اجزای محدود پرداخته شده است [18].

با توجه به اینکه روش مینیمم مربعات متحرک در برآورد خطای روش اجزای محدود از کارایی مناسبی برخوردار است تصور می‌شد که با توسعه این روش در تحلیل ایزوژئومتریک نیز بتوان به یک دستاورد جدید در برآورد خطای آن دست یافت. فرمولبندی و الگوریتم های لازم جهت پیاده سازی این روش در تحلیل ایزوژئومتریک استخراج شد و برنامه کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شد.

متاسفانه این روش آنچنان که تصور می‌شد در روش ایزوژئومتریک کارایی مناسبی نداشته و نتایج ضعیفی از خود نشان داده است. تصور می‌شود که دلیل عدم کارایی ایده گرفته شده از این روش در تحلیل ایزوژئومتریک، وجود تفاوتهایی است که بین روش ایزوژئومتریک و اجزای محدود می‌باشد.

4) روش برآورد خطای ارائه شده توسط آبرتینی[1]، که در آن با استفاده از فرمولبندی انرژی مکمل به بازیافت تنش و برآورد خطا در روش اجزای محدود پرداخته شده است[60].

این روش برآورد خطا و دیگر روشهای مرتبط با آن در تحلیل اجزای محدود از کارایی مناسبی برخوردار است و به نظر می‌رسید که بتوان با توسعه آن در روش ایزوژئومتریک نیز به یک دستاورد جدید در برآورد خطای آن دست یافت. برای این روش نیز فرمولبندی و الگوریتم های لازم جهت پیاده سازی آن در تحلیل ایزوژئومتریک استخراج شد و برنامه کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شد. اما نتایج این روش نیز بسیار ضعیف بوده و تخمین کننده خطا با استفاده از این روش کارایی مناسبی در تحلیل ایزوژئومتریک از خود نشان نداد.

همان طور که در بالا اشاره شد، با وجود شباهتهایی که روش اجزای محدود با روش ایزوژئومتریک دارد، اما پیاده سازی ایده‌های گرفته شده از موارد سه و چهار در روش ایزوژئومتریک به خوبی صورت نپذیرفت که این امر ممکن است حاصل از دو دلیل عمده باشد، یکی اینکه روش بدرستی در تحلیل ایزوژئومتریک فرمولبندی نشده باشد، که این امر با توجه به اینکه فرمولبندی روش چندین مرتبه بازبینی شده است، بعید به نظر می‌رسد. و دلیل دوم وجود تفاوتها بین روش ایزوژئومتریک و اجزای محدود است که باعث عدم کارایی صحیح بعضی روشهای ارائه شده در اجزای محدود می‌شود که این امر کار تحقیقاتی بیشتر جهت تطابق بیشتر این روشها در تحلیل ایزوژئومتریک را خواستار است.

- عمده نتایجی که از انجام این رساله حاصل شده است به شرح زیر می‌باشد:

  - استفاده از ایده‌های مطرح شده در روش اجزای محدود جهت برآورد خطای تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک دارای پیچیدگیهایی است که از تفاوت بین این دو روش ناشی می‌شود و

[1] F. Ubertini

نمی‌توان همیشه اطمینان داشت که بتوان با پیاده سازی روشهای ارائه شده در اجزای محدود جهت بازیافت تنش و برآورد خطای نتایج تحلیل سازه، به نتایج قابل قبول و مناسبی در روش ایزوژئومتریک دست یافت.

- نقاط انتگرال گیری گوسی در تحلیل ایزوژئومتریک، مشابه روش اجزای محدود، دارای خاصیت فوق همگرایی می باشند، در این نقاط مرتبه همگرایی تنش، یک مرتبه از مقداری که انتظار می‌رود از مشتق تابع شکل مربوط به حل جابجایی بدست آید، بالاتر است و هم مرتبه با تقریب تابع جابجایی است.
- نتایج حاصل از بررسی تعداد نقاط گوسی به عنوان نقاط بهینه تنش در برآورد خطای مسائل حل شده در این پژوهش بیان کننده این موضوع است که، تعداد نقاط بهینه تنش وابسته به مرتبه توابع شکل مورد استفاده در تحلیل مسئله می‌باشد، به طوری که با توجه به مرتبه توابع شکل، محل نقاط بهینه تنش منطبق بر حداقل تعداد نقاط انتگرال گیری به روش گوس در تحلیل ایزوژئومتریک است. اما با مقایسه شاخص تاثیر حاصل از برآورد کننده خطا با تعداد مختلف نقاط گوسی، این نتیجه نیز حاصل می شود که برآورد کنند خطا در تمام نقاط گوسی ارائه شده دارای شاخص تاثیرهای نزدیک به هم و قابل قبولی می‌باشد که این موضوع نشان دهنده فوق همگرا بودن تمام نقاط گوسی، بدون در نظر گرفتن تعداد آنها در تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد. از اینرو در استفاده از روش برآورد خطا مبتنی بر نقاط فوق همگرا در تحلیل ایزوژئومتریک، نگرانی بابت تعداد نقاط انتگرال گیری گوس به عنوان نقاط فوق همگرا وجود ندارد و می‌توان این اطمینان را داشت که برآورد کننده خطا با هر تعداد نقاط انتگرال گیری گوسی، به تقریب مناسبی از توزیع خطا در دامنه حل مسئله دست یابد.
- با استفاده از خاصیت فوق همگرایی نقاط گوسی و با استفاده از روش حداقل مینیمم مربعات، سطح تنش بهبود یافته بوسیله تکنیک نربز بدست می‌آید که از تنش ایزوژئومتریک دقیقتر

است و از آن می‌توان به عنوان معیاری جهت برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک استفاده نمود. کارایی این برآورد کننده خطا در مسائل تنش-کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه بعدی بررسی شد و تمامی نتایج بیان کننده مناسب بودن این برآورد کننده خطا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل دوبعدی و سه‌بعدی است.

- ویژگی بارز روش برآورد خطا مبتنی بر نقاط فوق همگرا در تحلیل ایزوژئومتریک مسائل دوبعدی و سه‌بعدی الاستیسیته، سادگی و اقتصادی بودن آن می‌باشد. هزینه کم محاسبات در این روش از این بابت است که با توجه به فرمولبندی این روش، برای تمام مولفه‌های تنش، ماتریس ضرایب A فقط یکبار محاسبه شده و معکوس می‌شود.

- برای اولین بار در روش ایزوژئومتریک، استفاده از نیروهای وارد بر هر وصله از فضای محاسباتی تحلیل ایزوژئومتریک و قید معادلات تعادل در تولید تنش بهبود یافته به کار گرفته شد. با استفاده از این روش، محدودیتی برای میدان تنش دقیق حاکم بر مسئله بدست می‌آید که به طور مستقیم و بدون استفاده از مشتق تابع جابجایی (که باعث کاهش دقت توابع شکل درونیاب است) حاصل می‌شود. با استفاده از این محدویت، می‌توان هر مولفه تنش را که به صورت یک سطح نربز با مختصه سوم مجهول فرض شده است، بدون استفاده از مشتق توابع شکل تغییر مکان بدست آورد.

- کارایی روش برآورد خطا بر مبنای استفاده از نیروهای وارد بر هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک در شش مسئله الاستیسیته که دارای حل دقیق می‌باشند، مورد بررسی قرار گرفت و نتایج بیان کننده رفتار خوب این تخمین کننده خطا در برآورد خطای روش ایزوژئومتریک می‌باشند. همچنین شاخص تاثیر این برآورد کننده خطا در تمامی مسائل نسبت به شاخص تاثیر بدست آمده از برآورد خطا بر مبنای نقاط فوق همگرا، بهتر بوده و توزیع نرم خطای تقریبی بدست آمده از این روش نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا،

دقیقتر است.

- ویژگی بارز روش برآورد خطا بر مبنای استفاده از تعادل در هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک، عدم نیاز به نقاط انتگرال گیری گوسی به عنوان نقاط فوق همگرای تنش در تشکیل سطح تنش بهبود یافته است. در اینصورت می‌توان این روش را در مسائلی که جهت انتگرال گیری عددی از روشی به جزء روش انتگرال گیری گوس، استفاده می‌نمایند، به کار گرفت. همچنین تصور می‌شود، با توجه به فرمولبندی این روش، می‌توان به سادگی از آن در برآورد خطای تحلیل ایزوژئومتریک مسائل غیر خطی الاستو-پلاستیک استفاده نمود.
- با توجه به فرمولبندی روش برآورد خطا بر مبنای تعادل در هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک، می‌توان دریافت که هزینه این روش در تولید سطح تنش بهبود یافته نسبت به روش مبتنی بر نقاط فوق همگرا بیشتر است. این افزایش هزینه بدین علت است که باید ماتریس ضرایب C برای هر مولفه تنش به صورت مجزا حساب شده و معکوس شود. اما این افزایش هزینه به دلیل استفاده از خاصیت بازه تاثیر توابع نربز در تشکیل سطح تنش بازیافتی در این روش نسبت به سطح تنش بازیافتی حاصل از نقاط فوق همگرا، تا حدی کاهش یافته است.

7-3- پیشنهادات

در مقاله‌ای که در سال 2003 توسط پروفسور ادن[1]، بلیشکو[2]، بابوشکا[3] و پروفسور هیوز[4]، که از جمله معروفترین دانشمندان شاخه علم مکانیک محاسباتی می‌باشند، به چاپ رسید بود، از برآورد خطا و حل تطبیقی به عنوان یکی از ده شاخه اصلی و مهم تحقیقات آینده در شاخه مکانیک محاسباتی یاد شده است [61]. بدون شک در صورتی که نتوان به نتایج بدست آمده از تحلیل مسائل مهندسی توسط کامپیوتر اعتماد نمود، طراحی مسائل مهندسی با مشکل مواجه می‌شود و یکی از مهمترین

[1] J. Tinsley Oden
[2] Ted Belytschko
[3] Ivo Babuska
[4] T.J.R. Hughes

شاخه‌های تحقیقات آینده این خواهد بود که با استفاده از روش‌های برآورد خطا و بدنبال آن حل تطبیقی، بتوان به نتایج با قابلیت اطمینان بالا دست پیدا کرد. این امر اهمیت موضوع ارائه شده در این رساله را نشان می‌دهد و اهمیت ادامه این مسیر را جهت کارهای تحقیقاتی بیشتر در آینده روشن می‌سازد. همچنین با توجه به اینکه روش تحلیل ایزوژئومتریک یک روش نوین در آنالیز مسائل مهندسی است، هنوز کمبودهای فراوانی در زمینه پژوهش بر روی تخمین خطای نتایج بدست آمده از آن وجود دارد، که این امر نیاز به ادامه تحقیقات را در این زمینه بیشتر از پیش روشن می‌سازد.

- پیشنهاداتی که در ادامه موضوع این رساله می‌توان به آنها اشاره کرد به شرح زیر می‌باشند:
  - توسعه روش برآورد خطا بر مبنای تعادل در هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش-کرنش مسطح جهت برآورد خطای مسائل متقارن محوری و سه بعدی و بررسی کارایی این روش در تشکیل سطح تنش بهبود یافته در این مسائل.
  - استفاده از روش برآورد خطا بر مبنای تعادل در هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک، جهت برآورد خطای مسائل غیر خطی الاستو-پلاستیک و مقایسه آن با روش برآورد خطا بر مبنای نقاط فوق همگرا.
  - تحقیق و تلاش بیشتر بر روی پیاده سازی روشهای برآورد خطا با استفاده از روش مینیمم مربعات متحرک و انرژی مکمل در تحلیل ایزوژئومتریک.
  - بررسی بهبود روشهای برآورد خطای ارائه شده در این پژوهش، با ایده گرفتن از روشهایی که جهت بهبود میدان تنش بازیافتی در روش اجزای محدود مورد استفاده قرار گرفته است.
  - ابداع و توسعه روشهای برآورد خطای باقیمانده‌ای در روش ایزوژئومتریک و مقایسه آن با روشهای برآورد خطا بر مبنای بازیافت تنش ارائه شده در این رساله.
  - ابداع و توسعه روشهایی جهت بهبود شبکه تحلیل ایزوژئومتریک و استفاده از روشهای برآورد خطای ارائه شده در این رساله در حل تطبیقی و افزایش دقت حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک.

- مقایسه سرعت همگرایی در حل تطبیقی مسائل، با استفاده از الگوریتم برآورد خطا بر مبنای نقاط فوق همگرا و برآورد خطا بر مبنای تعادل در هر وصله از تحلیل ایزوژئومتریک.
- استفاده از روشهای بهبود تنش ارائه شده در این رساله در مسائل مکانیک شکست و گسترش ترک در جامدات و همچنین مسائل بهینه سازی و بررسی میزان سرعت همگرایی این مسائل در مقایسه با عدم استفاده از روشهای بهبود تنش.

پیوست

معرفی الگوریتم و برنامه تحلیل و برآورد خطای روش ایزوژئومتریک در مسائل تنش-کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه‌بعدی

فلوچارت و روند کلی برنامه تحلیل ایزوژئومتریک و برآورد خطای آن بر مبنای نقاط فوق همگرا در مسائل دو بعدی و سه بعدی

تهیه فایل ورودی شامل:
بعد مسئله، مشخصات هندسی (نقاط کنترلی، درجه توابع شکل، تعداد وصله ها، بردار نقاط گرهی، ماتریس اتصال نقاط کنترلی و...)، تعداد تقسیمات در هر جهت به عنوان نقاط نمونه در چاپ نتایج خروجی، تعداد نقاط گوسی(نقاط فوق همگرا)، خصوصیات مصالح و شرایط مرزی

اجرای برنامه تحلیل و برآورد خطای ایزوژئومتریک و معرفی فایل ورودی با فرمت txt. به پنجره اجرایی برنامه

تشکیل ماتریس سختی کل سازه با رویهم گذاری ماتریس سختی محلی برای درجات آزادی تاثیر پذیر هر المان و محاسبه مختصات مولفه مجهول نقاط کنترلی تغییر مکان سازه با حل دستگاه معادلات

برداشت نتایج از سطح نربز بدست آمده برای هر مولفه تغییر مکان در نقاط نمونه معرفی شده در فایل ورودی و چاپ نتایج

مشتق گیری از مولفه‌های تغییر مکان و تشکیل سطح نربز هر مولفه تنش و برداشت نتایج از سطوح نربز تنش و چاپ نتایج

شروع فرآیند برآورد خطا با برداشت نتایج از سطوح هر مولفه تنش در نقاط گوسی(نقاط فوق همگرا) المانها و همچنین در نقاط گوسی سطوح تنش حاصل از حل دقیق(در مسائل دارای حل تحلیلی)

تشکیل معادلات روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا

محاسبه ماتریس $\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_i\mathbf{R}_i^{T}$ و معکوس کردن آن (فقط یکبار برای تمامی مولفه های تنش)

محاسبه ماتریس $\mathbf{B}_\alpha=\sum_{i=1}^{K}\mathbf{R}_i\tilde{\sigma}_\alpha$ برای هر مولفه تنش

محاسبه مختصات مجهول نقاط کنترلی مربوط به صفحه نربز هر مولفه تنش بهبود یافته وبرداشت نتایج از این صفحه در نقاط نمونه معرفی شده در فایل ورودی و چاپ نتایج

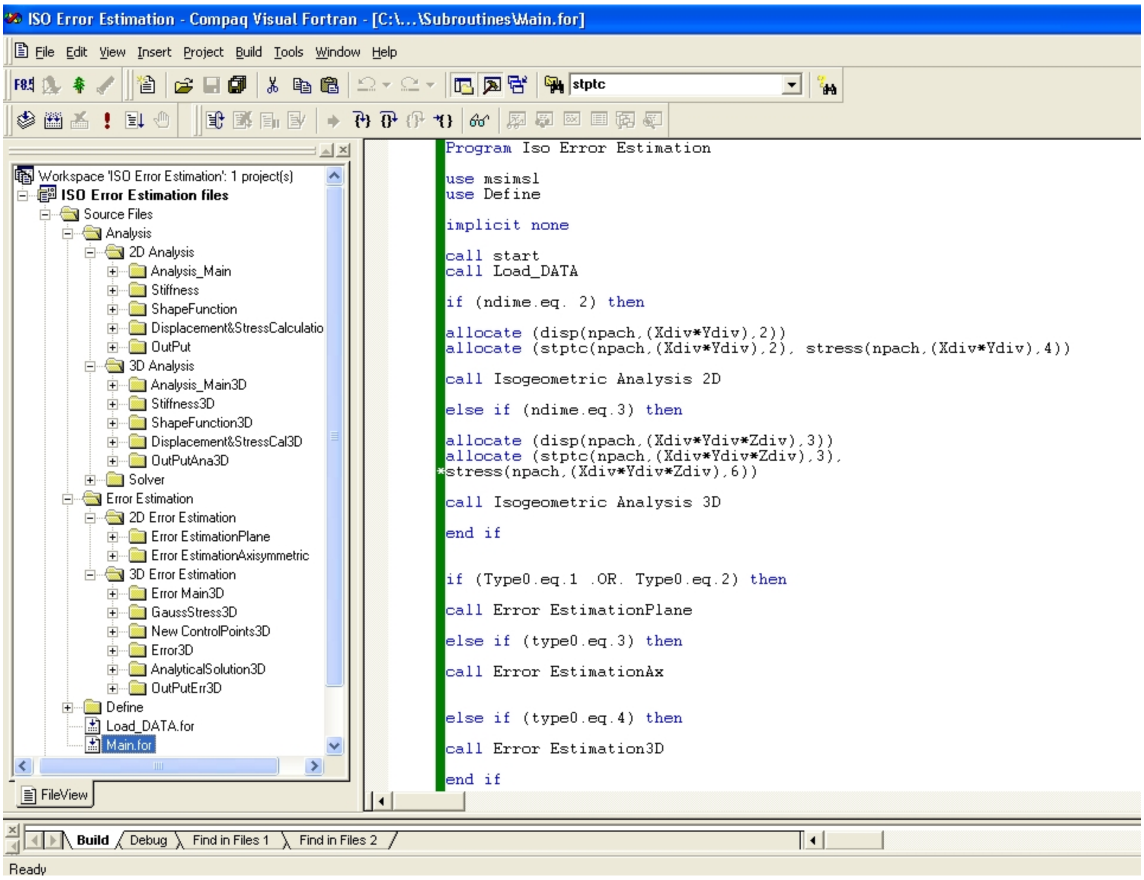
محاسبه پارامتر شاخص تاثیر با انتگرال گیری به روش گوس از عبارت مربوط به نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در هر المان و چاپ نتایج

محاسبه توزیع نرم خطای انرژی دقیق (اختلاف تنش ایزوژئومتریک از تنش دقیق) و نرم خطای تقریبی (اختلاف تنش ایزوژئومتریک از تنش بهبود یافته) در نقاط نمونه معرفی شده در فایل ورودی و چاپ نتایج

فلوچارت و روند کلی برنامه تحلیل ایزوژئومتریک و برآورد خطای آن بر مبنای تعادل در هر وصله از دامنه

در این قسمت به معرفی برنامه کامپیوتری که در نرم افزار Compaq Visual Fortran V6.6 نوشته شده است، پرداخته می‌شود. با توجه به وجود 49 زیر برنامه و در حدود 116905 خط برنامه نوشته شده به زبان فرترن در این برنامه کامپیوتری، ضروری به نظر می‌رسد که در این قسمت به تشریح قسمتهای مختلف آن و نحوه تشکیل فایل ورودی و تشریح نتایج خروجی پرداخته شود.

در شکل 1 نمای کلی از برنامه نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود این برنامه کامپیوتری از دو قسمت کلی تحلیل سازه[1] و برآورد خطا[2] تشکیل شده است. بخش تحلیل سازه به دو قسمت تحلیل دوبعدی[3] و سه بعدی[4] تقسیم می‌شود که در قسمت تحلیل دو بعدی، زیر برنامه‌های مربوط به تحلیل مسائل تنش مسطح، کرنش مسطح و مسائل متقارن محوری وجود دارد.



شکل 1- نمای کلی از برنامه تحلیل مسائل به روش ایزوژئومتریک و برآورد خطای آن

---
[1] Analysis
[2] Error Estimation
[3] 2D Analysis
[4] 3D Analysis

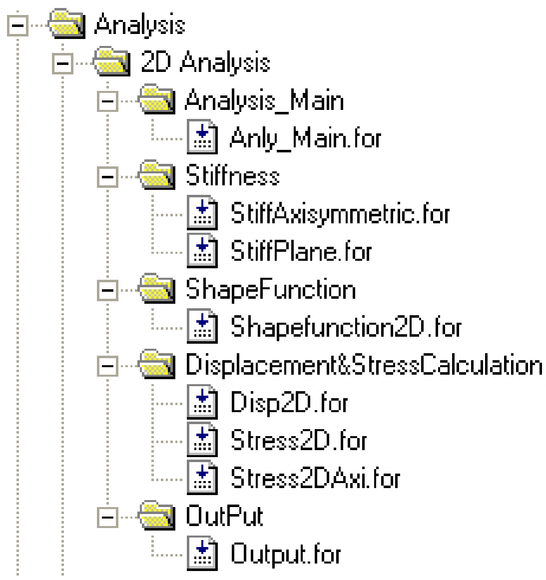
بخش برآورد خطا، حاوی زیربرنامه‌های برآورد خطای مسائل دوبعدی و سه‌بعدی می‌باشد؛ که زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل تنش- کرنش مسطح[1] و برآورد خطای مسائل متقارن محوری[2] در قسمت برآورد خطای مسائل دوبعدی[3] قرار داده شده است.

زیر برنامه مربوط به دریافت داده‌های ورودی[4]، و زیربرنامه‌های قسمت تعاریف[5] به همراه زیربرنامه‌های مربوط به حل دستگاه معادلات خطی[6] از دیگر قسمتهای این برنامه می‌باشند که در شکل 1 مشاهده می‌شوند. ارتباط بین تمام این زیر برنامه‌ها در قسمت زیر برنامه اصلی[7] صورت می‌پذیرد.

در ادامه به تشریح هر یک از قسمتهای ذکر شده در بالا پرداخته شده است.

1- زیر برنامه‌های مربوط به تحلیل دو بعدی

در شکل 2 نمای کلی از زیر برنامه‌های مربوط به تحلیل دو بعدی نشان داده شده است. در ادامه به تشریح وظیفه هر یک از زیر برنامه‌های این قسمت پرداخته شده است.



شکل 2- زیر برنامه‌های مربوط به تحلیل دو بعدی

[1] Error EstimationPlane
[2] Error EstimationAxisymmetric
[3] 2D Error Estimation
[4] Load_DATA.for
[5] Define
[6] Solver
[7] Main.for

Anly_Main.for : این زیربرنامه ارتباط بین زیر برنامه‌های این قسمت را برقرار می‌کند.

StiffAxisymmetric.for : در این قسمت ماتریس سختی کل دامنه مدلسازی شده در مسائل متقارن محوری محاسبه می‌شود.

StiffPlane.for : این بخش نیز وظیفه تشکیل ماتریس سختی کل دامنه مدلسازی شده در مسائل تنش-کرنش مسطح را بر عهده دارد.

Shapefunction2D.for : توابع شکل نربز در مسائل دو بعدی در این زیر برنامه محاسبه می‌شود. در هر قسمت از برنامه که نیاز به محاسبه توابع شکل نربز می‌باشد، این زیر برنامه فراخوانده می‌شود.

Disp2D.for : بعد از تشکیل ماتریس سختی کل سازه و حل دستگاه معادلات در زیربرنامه Solver و محاسبه مختصات سوم نقاط کنترلی، در این قسمت به تشکیل نقاط سطح نربز تغییر مکان در مسائل تنش-کرنش مسطح و متقارن محوری پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که تعداد نقاط لازم در تشکیل سطح نربز، در فایل ورودی به صورت تعداد تقسیمات جهت x و y داده می‌شود.

Stress2D.for : بعد از محاسبه تغییر مکان سازه، در این بخش با مشتق گیری از تغییرمکان، کرنش و تنش در مسائل تنش-کرنش مسطح محاسبه می‌شود.

Stress2DAxi.for : محاسبه کرنش و تنش مسائل متقارن محوری در این قسمت انجام می‌شود.

Output.for : در این قسمت نیز به چاپ نتایج بدست آمده از تحلیل دو بعدی در فایل خروجی پرداخته می‌شود.

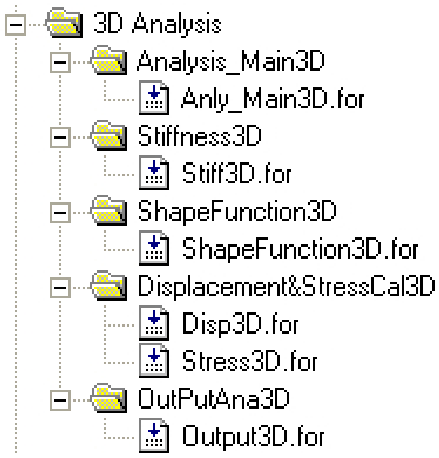
2- زیر برنامه‌های مربوط به تحلیل سه بعدی

همانطور که در شکل 3 مشاهده می‌شود، این قسمت نیز مشابه قسمت قبل در تحلیل دوبعدی، از زیر برنامه‌های مشابهی تشکیل شده است که از توضیح دوباره آن خوداری می‌شود.

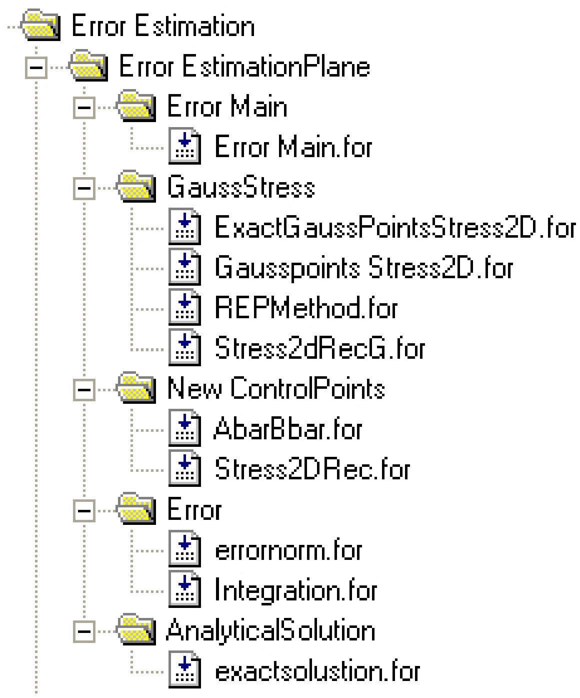
3- زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل دوبعدی

در شکل 4 نمای کلی از زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل دوبعدی نشان داده شده است.

در ادامه به تشریح وظیفه هر یک از زیر برنامه‌های این قسمت پرداخته شده است.



شکل 3- زیر برنامه‌های مربوط به تحلیل سه بعدی



شکل 4- زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل دوبعدی

Error Main.for : این زیربرنامه ارتباط بین زیر برنامه‌های این قسمت را برقرار می‌کند. همچنین در این زیر برنامه با مشخص کردن عدد ضرایب AlfaLP و BetaLP می‌توان انتخاب کرد که برنامه نحوه برآورد خطای ایزوژئومتریک را در مسائل دوبعدی تنش-کرنش مسطح به روش استفاده از تعادل نیروهای و یا استفاده از خاصیت نقاط فوق همگرا انجام دهد.

ExactGaussPointsStress2D.for : در این زیر برنامه مقادیر تنش دقیق در نقاط انتگرال گیری گوسی در متغییر **SigEac** ذخیره می‌شود.

Gausspoints Stress2D.for : در این زیر برنامه مقادیر تنش بدست آمده از حل تقریبی ایزوژئومتریک در نقاط انتگرال گیری گوسی در متغییر **SigIso** ذخیره می‌شود.

REPMethod.for : در این بخش پارامترهای مورد نیاز برای روش برآورد خطا بر مبنای استفاده از تعادل در هر وصله بدست می‌آید.

Stress2dRecG.for : در این قسمت مقادیر تنش بدست آمده از حل بازیافتی در نقاط انتگرال گیری گوسی در متغییر **SigRecG** ذخیره می‌شود.

AbarBbar.for : در این زیربرنامه پارامترهای مربوط به برآورد خطا بر مبنای استفاده از نقاط فوق همگرا محاسبه می‌شود.

Stress2DRec.for : در این زیر برنامه مقادیر تنش بهبود یافته در نقاط نمونه‌ای که تعداد آنها در فایل ورودی مشخص شده است، در متغییر **SigRec** ذخیره می‌شود.

errornorm.for : در این قسمت نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی در نقاط نمونه محاسبه می‌شوند.

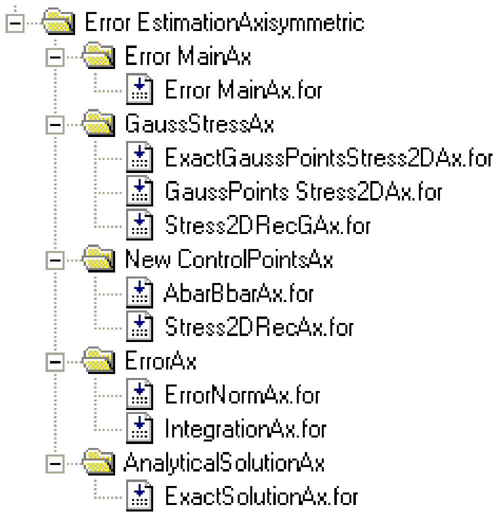
Integration.for : در این زیر برنامه مقادیر نرم خطای انرژی دقیق و تقریبی در نقاط انتگرال گیری گوسی محاسبه و با استفاده از آن، این نرم خطا با انتگرال گیری عددی به روش گوس بر روی کل دامنه هر المان محاسبه می‌شود.

exactsolustion.for : در این زیر برنامه روابط الاستیسیته مربوط به حل دقیق مسائل برای محاسبه مقدار هر مولفه تنش وجود دارد.

4- زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل متقارن محوری

در شکل 5 نمای کلی از زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل با شرایط تقارن محوری نشان داده شده است. لازم به ذکر است که کارایی روش برآورد خطا مبتنی بر تعادل نیروها، در مسائل

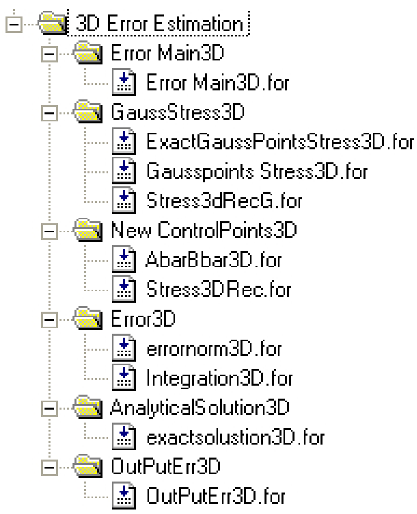
متقارن محوری بررسی نشده است لذا بعضی از زیر برنامه‌هایی که در قسمت قبل جهت محاسبه پارامترهای موجود در روش برآورد خطا بر مبنای تعادل نیروها وجود داشته است در این قسمت موجود نیست و بقیه زیر برنامه‌های موجود در این قسمت وظیفه‌ای مشابه نسبت به قسمت قبل دارند که از توضیح مجدد آن خوداری می‌شود.



شکل 5- زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل متقارن محوری

5- زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل سه بعدی

در شکل 6 نمای کلی از زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل سه بعدی نشان داده شده است.



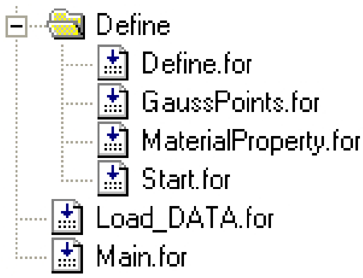
شکل 6- زیر برنامه‌های مربوط به برآورد خطای مسائل سه بعدی

زیر برنامه‌هایی که در این بخش وجود دارد با اسامی و وظیفه مشابه با زیربرنامه‌های بخش برآورد

خطای مسائل تنش-کرنش مسطح می‌باشند و از توضیح دوباره آنها در این بخش خوداری می‌شود.

6- زیر برنامه‌های مربوط به بخش تعاریف

در این قسمت نیز تعدادی زیر برنامه وجود دارد که بیشتر جنبه تعریف دارند به همین منظور این قسمت به عنوان Define نامگذاری شده است که نمایی کلی از آن به همراه زیربرنامه دریافت داده‌های ورودی و زیر برنامه اصلی برنامه در شکل 7 مشاهده می‌شود.



شکل 7- زیر برنامه‌های مربوط به بخش تعاریف

Define.for : این بخش به عنوان یک ماژول[1] تعریف شده و در تمام زیر برنامه‌ها فراخوانده می‌شود که در آن به تعریف تمام متغییرهایی که در برنامه استفاده شده است پرداخته شده است.

GaussPoints.for : در این زیر برنامه به تعریف مختصات و وزن‌های نقاط گوسی پرداخته شده است.

MaterialProperty.for : ماتریس سختی مربوط به مسائل تنش مسطح، کرنش مسطح، متقارن محوری و مسائل سه بعدی در این بخش تعریف می‌شوند.

Start.for : وظیفه نمایش اطلاعاتی که در هنگام اجرای برنامه در پنجره اجرا نمایش داده می‌شوند بر عهده این زیربرنامه می‌باشد.

Load_DATA.for : در این زیر برنامه داده‌های ورودی که در فایل ورودی مرتب شده فراخوانده می‌شوند و در متغییرهای مربوطه ذخیره می‌شوند.

در ادامه به توضیح نحوه تشکیل فایل ورودی برنامه پرداخته می‌شود.

[1] module

7- فایل ورودی برنامه

در شکل 8 به عنوان نمونه فایل ورودی مربوط به تیر طره تیموشنکو نشان داده شده است؛ که در ادامه به توضیح پارامترهای استفاده شده در آن پرداخته می‌شود.

```
         *********************************************
   Solving the 2D&3D Elasticity Problems With Error Estimation
                         By Using
                   NURBS Basis Functions
         *********************************************
                 Developed by : A. Ganjali

              Shahrood University of Technology
         Civil and Structural Engineering Department
==================================================================
Result Beam.txt
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@ Analysis Data @@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@
##pre Load Data##
!Type: 1=PlaneStress  2=PlaneStrain  3=Axisymmetric
-Type  -npach  -ntctp  -ndime  -nintp
  1       2      45      2       16
-ipach  -doapx  -nxknt  -doapy  -nyknt
  1       1       9       1       4
  2       1       9       1       4
#Output Data
-Xdir   -Ydir
 100     20
##Load Data##
-Control Point Coordinates
1       0       0       0       1
2       0       1       0       1
3       0       2       0       1
4       0.714285744     0       0       1
5       0.714285744     1       0       1
6       0.714285744     2       0       1
7       1.428571437     0       0       1
8       1.428571437     1       0       1
9       1.428571437     2       0       1
10      2.142857151     0       0       1
11      2.142857151     1       0       1
12      2.142857151     2       0       1
13      2.857142763     0       0       1
14      2.857142763     1       0       1
15      2.857142763     2       0       1
16      3.571428591     0       0       1
17      3.571428591     1       0       1
18      3.571428591     2       0       1
19      4.285714305     0       0       1
20      4.285714305     1       0       1
21      4.285714305     2       0       1
22      4.999999909     0       0       1
23      4.999999909     1       0       1
24      4.999999909     2       0       1
25      5.714285756     0       0       1
26      5.714285756     1       0       1
27      5.714285756     2       0       1
28      6.428571524     0       0       1
29      6.428571524     1       0       1
30      6.428571524     2       0       1
31      7.142857175     0       0       1
32      7.142857175     1       0       1
33      7.142857175     2       0       1
34      7.857142769     0       0       1
35      7.857142769     1       0       1
36      7.857142769     2       0       1
37      8.571428526     0       0       1
38      8.571428526     1       0       1
39      8.571428526     2       0       1
40      9.28571419      0       0       1
41      9.28571419      1       0       1
42      9.28571419      2       0       1
43      10      0       0       1
44      10      1       0       1
45      10      2       0       1
-ipach  -Patch Conectivity
1       1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
2       22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
-ipach  -Knot Vectors
1       0 0 0.14 0.28 0.43 0.57 0.71 0.86 1 1
1       0 0 0.5 1 1     1
2       0 0 0.14 0.28 0.43 0.57 0.71 0.86 1 1
2       0 0 0.5 1 1
#Material Properties
-E      -Noo
1500   0.25
#Boundary Conditions
-No.supports  -No.forces
  4              3
-Supports
1       0
3       0
5       0
4       0
-Forces
86      75
88      150
90      75
##type of analytical solution##
!type:  1=cantilever beam    2=circle hole   3=crack   4=.....
 1
```

شکل 8- فایل ورودی مربوط به مسئله تیر طره تیموشنکو

اولین داده که از فایل ورودی خوانده می‌شود نام فایل خروجی نتایج تحلیل ایزوژئومتریک می‌باشد که در فایل نمونه بالا این نام با Result Beam.txt مشخص شده است. در ادامه به توضیح دیگر پارامترهای فایل ورودی پرداخته می‌شود.

Type : توسط این پارامتر نوع تحلیل ایزوژئومتریک مشخص می‌شود که همانطور که در فایل ورودی نیز مشخص شده است عدد 1 به معنای تحلیل مسائل تنش مسطح، 2 کرنش مسطح و 3 تحلیل مسائل متقارن محوری می‌باشد.

npach : تعداد وصله‌های مورد نیاز جهت تشکیل دامنه مسئله با توابع نربز، توسط این پارامتر مشخص می‌شود.

ntctp : تعداد کل نقاط کنترلی که جهت تحلیل و مدلسازی هندسه مسئله مورد نیاز است توسط این پارامتر به برنامه معرفی می‌شود.

ndime : بعد مسئله را مشخص می‌کند. عدد 2 برای تحلیل دوبعدی و 3 تحلیل سه بعدی مسائل را مشخص می‌کند.

nintp : تعداد نقاط گوسی جهت انتگرال گیری عددی و نقاط بهینه تنش توسط این پارامتر مشخص می‌شود. اعداد 4، 9، 16، 25 و 36 تعداد نقاط گوسی است که در زیربرنامه GaussPoints.for تعریف شده اند و می‌توان در این قسمت به برنامه معرفی نمود.

ipach : توسط این پارامتر شماره وصله‌ای که اطلاعات آن در ادامه می‌خواهد ارائه شود، مشخص می‌شود.

doapx : درجه توابع پایه نربز در جهت x بردار گره‌ای را مشخص می‌کند.

nxknt : مقدار m را برای هر وصله در جهت x مشخص می‌کند. برای محاسبه مقدار آن به صورت زیر عمل می‌گردد.

$$m = n + p + 1$$

m+1: تعداد گره‌ها در جهت x، n+1: تعداد نقاط کنترلی در جهت x، p: درجه توابع شکل در جهت x

doapy : درجه توابع پایه نربز در جهت y بردار گره‌ای را مشخص می‌کند.

nyknt : مقدار m را برای هر وصله در جهت y مشخص می‌کند؛ که مقدار آن مشابه جهت x محاسبه می‌شود.

Xdir : تعداد نقاط نمونه[1] در جهت x را مشخص می‌کند. لازم به ذکر است که بعد از بدست آمدن سطوح نربز جابجایی، تنش و... جهت ترسیم آنها نیاز به یک سری نقاط نمونه می‌باشد که از روی سطوح مذکور برداشت شده باشند. بعد از چاپ مختصات نقاط نمونه و مقدار توابع مجهول در آن نقاط در یک فایل با پسوند txt.، می‌توان با نرم افزار Tecplot 360 به ترسیم سطوح مفروض پرداخت.

Ydir : تعداد نقاط نمونه در جهت y را مشخص می‌کند.

Control Point Coordinate : در این قسمت مشخصات نقاط کنترلی به برنامه معرفی می‌شود که به صورت زیر می‌باشد.

ستون پنجم	ستون چهارم	ستون سوم	ستون دوم	ستون اول
وزن نقطه کنترلی	مختصات جهت z	مختصات جهت y	مختصات جهت x	شماره نقطه کنترلی

ipach : شماره وصله‌ای که در ادامه ترتیب اتصال نقاط کنترلی آن بیان شده است.

Patch Conectivity : در جلوی شماره وصله مربوطه، ترتیب اتصال نقاط کنترلی دراین قسمت بیان می‌شود. لازم به ذکر است که این ترتیب شماره گذاری همواره باید بگونه‌ای باشد که از سمت چپ شکل شروع و در ابتدا درجهت y شماره‌ها خوانده شود و بعد یک واحد در جهت x حرکت و دوباره در جهت y، تا در نهایت کل نقاط کنترلی هر وصله معرفی شود.

Knot Vectors : بردار گرهی مربوط به هر وصله در این بخش به برنامه معرفی می‌شود. به طوری که در جلوی شماره هر وصله، در ردیف اول، مختصات نقاط گرهی در جهت x (x) و در ردیف دوم مختصات نقاط گرهی در جهت h (y) بیان می‌شود.

Material Properties : خواص مصالح فرض شده برای مسئله در این قسمت به برنامه معرفی می‌شود. ضریب E مشخص کننده ضریب الاستیسیته و ضریب Noo مشخص کننده ضریب پواسون می‌باشد.

[1] Sample points

No.supports : تعداد درجات آزادی که به عنوان تکیه گاه محدود شده است در این قسمت به برنامه معرفی می‌شود. همچنین مقدار این محدودیت در قسمت Supports در جلوی هر درجه آزادی معرفی می‌شود.

No.forces : تعداد درجات آزادی که در آن جهات به سازه نیرو وارد می‌شود در این قسمت معرفی می‌شود. مقدار این نیروها در قسمت Forces در جلو درجه آزادی مربوطه به برنامه معرفی می‌شود. لازم به ذکر است که تعداد کل درجات آزادی سازه برابر است با تعداد کل نقاط کنترلی ضربدر بعد مسئله که ترتیب شماره گذاری این درجات آزادی بگونه‌ای است که اولین نقطه کنترلی در جهت x درجه آزادی یک و در جهت y درجه آزادی دو، و به همین ترتیب تمام نقاط کنترلی درجات آزادیشان مشخص می‌شود.

type of analytical solution : در این بخش با توجه به این که چه مسئله‌ای برای تحلیل و برآورد خطا انتخاب شده است، شماره مسئله مورد نظر بیان می‌شود.

8- فایل‌های نتایج خروجی

تمامی نتایج خروجی در فایل‌هایی با پسوند txt. در دایرکتوری برنامه چاپ می‌شوند که در این قسمت به معرفی آنها پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که جهت ترسیم نتایج خروجی از نرم افزار 360 Tecplotمی‌توان استفاده نمود.

Result Beam.txt : همانطور که پیشتر بیان شد، نتایج تحلیل ایزوژئومتریک در فایلی که نام آن در فایل ورودی مشخص می‌شود، چاپ می‌شود. محتویات فایل نتایج خروجی تحلیل ایزوژئومتریک که در فایل ورودی نمونه، نام آن Result Beam.txt فرض شده بود، در مسائل تنش-کرنش مسطح به صورت زیر خواهد بود.

ستون اول	ستون دوم	ستون سوم	ستون چهارم	ستون پنجم	ستون ششم	ستون هفتم
مختصه x نقطه نمونه	مختصه y نقطه نمونه	مقدار تغییرمکان در جهت x	مقدار تغییرمکان در جهت y	مقدار تنش s_x	مقدار تنش s_y	مقدار تنش t_{xy}

Recovery stress.txt : نتایج تنش بهبود یافته در این فایل چاپ می‌شود؛ که همانند فایل خروجی نتایج ایزوژئومتریک می‌باشد؛ با این تفاوت که دو ستون مربوط به تغییر مکانها در این فایل وجود ندارد.

exact stress.txt : نتایج بدست آمده از حل الاستیسیته مولفه‌های تنش در این فایل ذخیره می‌شود.

recovery error norm.txt : نتایج توزیع نرم خطای انرژی تقریبی (اختلاف تنش ایزوژئومتریک با تنش بازیافتی) در این فایل چاپ می‌شود؛ که در سه ستون تنظیم شده است. ستون اول مختصه x نقطه نمونه، ستون دوم مختصه y و ستون سوم مقدار نرم خطای انرژی تقریبی در آن نقطه می‌باشد.

exact error norm.txt : نتایج توزیع نرم خطای انرژی دقیق (اختلاف تنش ایزوژئومتریک با تنش دقیق) در این فایل چاپ می‌شود.

exact and recovery error norm per element.txt : مقدار نرم خطای انرژی در هر المان در این فایل چاپ می‌شود. در ستون اول نرم خطای انرژی دقیق المانها و در ستون دوم نرم خطای انرژی تقریبی المانها قرار دارد.

مراجع:

[1] Zienkiewicz, O.C. (2000), “Achievements and some unsolved problems of the finite element method”,*Int. J. Numer. Meth. Engng.* ,Vol. 47, pp.28.

[2] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and J.Z. Zhu. (2005), “The Finite Element Method” 6th edition, *Elsevier Butterworth-Heinemann*.

[3] Reddy, J. N. (1993), “An Introduction to the Finite Element Method”, *McGraw-Hill, Singapore*.

[4] Zienkiewicz, O. c. (2006), “The background of error estimation and adaptivity in finite element computations” , *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 195, 207–213.

[5] Babuska, I. and Rheinboldt, W.C. (1981), “A-posteriori error analysis of finite element solution for one-dimention problems”, *SIAM J Num. Anal*., Vol. 18, pp. 565-589.

[6] Gyi, W. and Babuska, I., (1986), “The h, p and h-p version of the finite element method in one dimention: Part 1: The error analysis of the p version. Part 2: The error analysis of the h and h-p version. Part 3: The adaptive h-p version”, *Numerische Math*., Vol. 48, pp. 577-683.

[7] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1987), “A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 24, pp. 337-357.

[8] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1989), “Error estimates and adaptive refinement for plate bending problems”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 28, pp. 2839-2853.

[9] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1992), “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 33, pp. 1331-1364.

[10] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1992), “The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 33, pp. 1365-1382.

[11] Ainsworth, M. and Oden, J. T. (1993), “A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods”, *Numer. Math*., Vol. 65, pp.23-50.

[12] Bugeda, G. and Oliver, J. (1993), “A general methodology for structural shape ptimization problems using automatic adaptive remeshing”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 36, pp. 3161-3185.

[13] Boroomand, B. and Zienkiewicz, o.c. (1997), “Recovery by equilibrium in patchs (REP)”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol.40, pp. 137-164.

[14] Boroomand, B. and Zienkiewicz, O. C. (1997), “An Improved REP Recovery and effectivity Robustness Test”, *Int. J. Numer. Meth. Eng*., Vol. 40, pp. 3247-3277.

[15] I. Babuska, T. strouboulis, C.S. Upadhyay and S.K Gangaraj, (1994), “A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems error estimation in the interior of patch wise uniform grids of triangles”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*.114, 307-378.

[16] Hinton, E. and Campbell J. (1974), “Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method”, *Int. J. Numer. Meth. Eng*., Vol. 8, pp.461-480.

[17] Oden, T. J. and Brauchli J. (1971), “On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximation”, *Int. J. Numer. Meth. Eng*., Vol. 3, pp. 317-325.

[18] Tabbara, M., Blacker, T.Belytschko, T. (1994) “Finite element derivative recovery by moving least square Interpolants”,*Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 117 211-223.

[19] Wiberg, N. E., Abdulwahab, F. and Ziukas, S., (1994) “Enhanced Superconvergent PatchRcovery Incorporation Equilibrium and Boundary Conditions”, *Int. J. Numer. Meth. Eng*.,Vol. 37, pp. 3417-3440.

[20] Blacker, T., and Belytschko, T., (1994) “Superconvergent Patch Recovery With Equilibrium and Conjoint Interpolant Enhancements”, *Int. j. Numer. Meth. Eng*., Vol. 37, pp. 517-536.

[21] Taeoh, Lee. Hoon C. Park, Sung W. Lee , (1997) “A superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 40, 1139{1160.

[22] LO, S. H. LEE, C. K. (1998) “On using different recovery procedures for the construction of smoothed stress in finite element method”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 43, 1223-1252.

[23] Zienkiewicz, O.C. and Morgan, K. (1983), “Finite Elements & Approximation” *New York : J. Wiley*.

[24] Hassani, B; Ganjali, A; Tavakkoli, M; (2012) “An isogeometrical approach to error estimation and stress recovery”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 31, 101-109.

[25] Hughes T.G.R, Cottrell J.A., Bazilevs Y., (2005), “Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement,” *Comput. Method Appl. Mech. Engrg*, 194 4135–4195.

[26] Auricchio F, Beirao da Veiga L, Hughes TJR, Reali A, Sangalli G (2010) “Isogeometric collocation methods. Math. Models Methods,” *Appl. Sci*. 20(11): 2075–2107.

[27] Bazilevs Y, Beirao da Veiga L, Cottrell JA, Hughes TJR, Sangalli G (2006) “Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes.” *Math. Models Methods Appl. Sci.* 16(7): 1031–1090.

[28] Cottrell JA, Hughes TJR, Reali A (2007) “Studies of refinement and continuity in isogemetric analysis.” *Comput.Methods Appl.Mech. Engrg*. 196: 4160–4183.

[29] Drfel M, Jüttler B, Simeon B (2010) “Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T–splines.” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 199(5–8): 264–275.

[30] Evans JA, Bazilevs Y, Babuška I, Hughes TJR (2009) “n-width, sup–infs, and optimality ratios for the k-version of the isogeometic finite element method.” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 198: 1726–1741.

[31] Hughes TJR, Reali A, Sangalli G (2008) “Duality and unified analysis of discrete approximations in structural dynamics and wave propagation: comparison of p–method finite elements with k-method NURBS. Comput.” *Methods Appl. Mech. Engrg.* 197(49–50): 4104–4124.

[32] Hughes TJR, Reali A, Sangalli G (2010) “Efficient quadrature for NURBS–based isogeometric analysis. Comput.” *Methods Appl. Mech. Engrg*. 199(5–8): 301–313.

[33] Bazilevs Y, Calo VM, Cottrell JA, Hughes TJR, Reali A, Scovazzi G (2007) “Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows.” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 197(1–4): 173–201.

[34] Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJR, Zhang Y (2008) “Isogeometric fluid–structure interaction: theory, algorithms, and computations.” *Comput. Mech*. 43(1): 3–37.

[35] Bazilevs Y, Calo VM, Zhang Y, Hughes TJR (2006) “Isogeometric fluid–structure interaction analysis with applications to arterial blood flow.” *Comput. Mech*. 38: 310–322.

[36] Bazilevs Y, Hughes TJR (2008) “NURBS-based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components.” *Comput. Mech*. 43: 143–150.

[37] Buffa A, deFalco C, Sangalli G (2010) “Isogeometric analysis: new stable elements for the stokes equation.” *Int. J. Numer. Meth. Fluids 2000*, 00:1–6.

[38] Gmez H, Calo V, Bazilevs Y, Hughes TJR (2008) “Isogeometric analysis of the Cahn–Hilliard phase–field model.” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 197(49–50): 4333–4352.

[39] Auricchio F, Beirao da Veiga L, Lovadina C, Reali A (2010) “The importance of the exact satisfaction of the incompressibility constraint in nonlinear elasticity: mixed FEMs versus NURBS-based approximations.” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 199(5–8): 314–323.

[40] Auricchio F, Beirao da Veiga L, Buffa A, Lovadina C, Reali A, Sangalli G (2007) “A fully ‘‘locking-free’’ isogeometric approach for plane linear elasticity problems: astream function formulation.” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 197(1–4): 160–172.

[41] Benson DJ, Bazilevs Y, Hsu MC, Hughes TJR (2010) “Isogeometric shell analysis: the Reissner–Mindlin shell.” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 199(5–8): 276–289.

[42] Cottrell JA, Reali A, Bazilevs Y, Hughes TJR (2006) “Isogeometric analysis of structural vibrations.” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 195(41–43): 5257–5296.

[43] Elguedj T, Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJR (2008) "B and –F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. Comput." *Methods Appl. Mech. Engrg*. 197: 2732–2762.

[44] Lipton S, Evans JA, Bazilevs Y, Elguedj T, Hughes TJR (2010) "Robustness of isogeometric structural discretizations under severe mesh distortion." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 199(5–8): 357–373.

[45] Wall WA, Frenzel MA, Cyron C (2008) "Isogeometric structural shape optimization." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 197(33–40): 2976–2988.

[46] Zhang Y, Bazilevs Y, Goswami S, Bajaj CL, Hughes TJR (2007) "Patient–specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196(29–30): 2943–2959.

[47] Hassani B, Khanzadi M, Tavakkoli SM, Moghadam NZ, (2009) "Isogeometric shape optimization of three dimensional problems." *8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization June 1–5, Lisbon, Portugal*.

[48] Buffa A, Rivas J, Sangalli G, Vazquez R (2010) "Isogeometric analysis in electromagnetics: theory and testing." *Technical Report, Pubblicazione*: *13PV10/13/0, Istituto di Matematica Applicata e Tecnologie Informatiche (I.M.A.T.I.) –C.N.R.*

[49] Buffa A, Sangalli G, Vazquez R (2010) "Isogeometric analysis in electromagnetics: Bsplines approximation." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 199(17–20): 1143–1152.

[50] Cottrell JA, Hughes TJR, Bazilevs Y (2009) "Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA." *Wiley*.

[51] Piegl, L.; Tiller, W. (1997) "The NURBS Book" , 2nd ed., *Springer-Verlag, New York*.

[52] Rogers D.F., (2001), "An Introduction to NURBS," *Morgan Kaufmann Publishers*.

[53] Hughes, T.J.R.; Reali, A.; Sangalli, G.; (2010) "Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 199 (5–8), 301–313.

[54] Sadd, M.H. (2005). "ELASTICITY:Theory, Applications, and Numerics," *Elsevier Butterworth–Heinemann.*

[55] Gratsch, T.; Bathe, KJ, (2005), "A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis" Computers and Structures, 83: 235–265.

[56] Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, S. "Theory of Plates and Shells", *McGraw-Hill, 2nd ed.*, (1959).

[57] Payen DJ, Bathe KJ (2011) "The use of nodal point forces to improve element stresses." *Computers and Structures,* 89: 485–495.

[58] Timoshenko, S.P.; Goodier, J.N. (1977), "Theory of Elasticity," *McGraw-Hill, New York.*

[59] Anderson, T.L.; (1991) "Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, first

ed. ”, *CRC Press, Boca Raton*.

[60] Ubertini, F.; (2004) “Patch recovery based on complementary energy”, *Int. J. Numer. Meth. Engng;* 59:1501–1538.

[61] Oden, J.T.; Belytschko, T.; Babuska, I.; Hughes, T.J.R.; (2003) “Research directions in computational mechanics”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192; 913–922*.

Abstract:

Employing the computer aided design technique in the newly developed isogeometric analysis method has many advantages, e.g. removing the error of geometrical modeling. On the other hand, in all numerical methods, errors due to approximation of unknown functions are inevitable and researchers have been concerned about the reliability of the results. This thesis is to develop methods that can be used to estimate error rate of the isogeometric analysis method. These concepts are arranged in two main parts.
In the first section, the error estimation method based on the superconvergent points property for isogeometric analysis of stress-strain, axisymmetric and three-dimensional problems have been considered; and will show why the Gauss integral points has convergence properties in the isogeometric analysis method. In this method, by making use of the superconvergent points, each of the components of the improved stress tensor is considered as an imaginary surface. This surface is generated by using the same NURBS' basis functions that are employed for approximation of the primary variable in the isogeometrical analysis. The obtained results of all examples indicate the effectiveness of the proposed method in the estimating the error of isogeometric analysis of the stress-strain, axisymmetric and three-dimensional problems.
In the second part, a new method is introduced for calculation of stress field in the isogeometric analysis method that makes use of equilibrium of patches. In this technique, by considering the forces induced on the patches of isogeometric analysis, the surface denoting the variations of each component of the stress tensor is approximated by the same order of NURBS' shape functions that are used for approximation of the displacements. One of the useful features of this method is being independent of the Gauss integration points, that is especially advantageous when a different integration method than the Gauss quadrature is employed. To demonstrate the performance of the method, six examples are taken into consideration and their exact and approximate error energy norms are calculated in the rest of the article. The obtained results indicate that in all of the considered examples error estimation by this approach is superior to our previous method based on using the superconvergent points and therefore can be considered as a another simple and efficient method for error estimation and stress recovery in isogeometric analysis.

Key words: Isogeometric Analysis, Error Estimation, Stress Recovery, Superconvergent Points, Patch Equilibrium.

Shahrood University of Technology
Faculty of Civil Engineering

Development of New Methods for Stress Recovery and Error Estimation in Isogeometric Analysis

AHMAD GANJALI

Supervisor:

DR. BEHROOZ HASSANI

Date: OCTOBER 2013