

اللَّهُمَّ احْمِنا بِالْحَمْدِ



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده عمران و معماری
گروه عمران

عنوان:

حل تطبیقی در روش تحلیل آیزورنومریک

دانشجو: احمد رضا ذبیحی پور

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

مشاور:

مهندس احمد گنجعلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد سازه

بهمن ماه ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده عمران و معماری

گروه عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای احمدرضا ذبیحی پور

تحت عنوان: حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتریکی در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ

مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	مشاور	امضاء	استاد راهنما
	نام و نام خانوادگی : مهندس احمد گنجعلی		نام و نام خانوادگی : دکتر بهروز حسنی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر گلی		نام و نام خانوادگی : دکتر نادری
			نام و نام خانوادگی : دکتر ساغروانی

تقدیم به

خانواده‌ی عزیزم

که در تمام لحظات سخت و طاقت فرسا با مهربانی و شکیبایی مرا حمایت کردند

قدردانی

فراز و فرودهایی که در سلوک علمی پیش روی دانشجوست، گاه چنان سهمناک می‌نماید که بی‌مدد استاد و اشارت‌های راهبردی او کار به انجام نخواهد رسید.

این پایان نامه، پس از عنایت حق بیش از هر چیز، وامدار لطف، درایت و تذکره‌های کارکشای استاد ارجمندم جناب آقای دکتر بهروز حسینی است.

با اخلاص تمام از ایشان که بر من حق حیات معنوی دارند، سپاسگزاری می‌کنم و از خداوند می‌خواهم سایه شان را بر سر فرزندک، علم و پویندگان دانش در این مرز و بوم مستدام بدارد.

همچنین از مهندس احمد کنجعلی که با کمال صمیمیت و رضایت در مراحل مختلف انجام این پایان نامه صبورانه مرایاری نموده اند، کمال قدردانی به عمل می‌آید.

تعهد نامه

اینجانب **احمد رضا ذبیحی پور** دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتریک** تحت راهنمایی دکتر بهروز حسنی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام (دانشگاه صنعتی شاهرود) و یا (Shahrood University of Technology) به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ:

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

در این پایان نامه، ابتدا به بررسی و معرفی اجمالی درمورد خطاها و برآوردکننده های خطا در اجزای محدود پراخته شده است. سپس تئوری مربوط به منحنی ها و سطوح نربز مطرح شده است. در نهایت با ارائه ی مبانی روش تحلیل آیزوژئومتریک و روش های مختلف حل تطبیقی در آن، روش حل تطبیقی با استفاده از فنرها مطرح گردیده است. برای استفاده از این روش برنامه ی کامپیوتری به زبان فرترن نیز تهیه شده است که توانایی تحلیل سیستم فنرها و محاسبه ی تغییر مکان ها را دارا می باشد. همچنین برای نحوه ی استفاده از این روش در حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتریک چندین حالت مختلف ارائه شده است که جهت کنترل صحت روش های پیشنهادی و کارایی برنامه ی نوشته شده، مسئله ی تیر طره با روش های مختلف ارائه شده تحلیل گردیده و نتایج با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج حاصل نشان دهنده ی کارایی و بازدهی بسیار خوب روش پیشنهادی می باشند، به طوری که با استفاده از این روش می توان بدون افزایش هزینه، برای یک مسئله بیشترین بازدهی را از روش تحلیل آیزوژئومتریک دریافت نمود.

روش پیشنهادی در این پایان نامه مبنی بر استفاده از فنرها در فضای پارامتری و نقاط کنترلی، یک روش ابداعی می باشد که در نهایت باعث بهبود نتایج حاصل از روش تحلیل آیزوژئومتریک می گردد. استفاده از این روش در فضای پارامتری باعث توزیع یکنواخت خطا در دامنه و در نتیجه حصول شبکه ای بهینه برای محاسبه ی انتگرال ها می گردد. از طرف دیگر استفاده از این روش برای نقاط کنترلی منجر به میل نتایج حاصل از تحلیل به سمت نتایج دقیق می گردد که در نهایت استفاده از هر دو روش فوق نتیجه ای بسیار مطلوب را بدست می دهد. همچنین در این پایان نامه روشی ابداعی برای توزیع خطاها بر روی نقاط فضای پارامتری و نقاط کنترلی ارائه شده است، که نتایج حاصل نشان از صحت روش ارائه شده می باشند.

کلمات کلیدی: اجزای محدود، تخمین خطا، حل تطبیقی، تحلیل آیزوژئومتریک، جابجایی نقاط شبکه

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه و کلیات

۱-۱ مقدمه	۲
۲-۱ روش اجزای محدود	۷
۳-۱ خطاها در روش اجزای محدود	۸
۴-۱ برآوردکننده های خطا	۹
۱-۴-۱ روشهای برآورد خطا مبتنی بر محاسبه مانده‌ها	۱۰
۲-۴-۱ روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان)	۱۰
۱-۲-۴-۱ روش میانگین گیری	۱۲

فصل دوم: معرفی منحنی ها و سطوح نریز

۱-۲ فرم ضمنی و پارامتری	۱۴
۲-۲ منحنی های بزیز	۱۵
۳-۲ منحنی ها و سطوح بی-اسپلین	۱۸
۱-۳-۲ تعریف و خواص توابع پایه ای بی اسپلین	۲۰
۲-۳-۲ مشتق توابع پایه ای بی-اسپلین	۲۳
۳-۳-۲ دیگر ویژگی های توابع پایه ای بی-اسپلین	۲۳
۴-۳-۲ تعریف منحنی های بی-اسپلین	۲۴
۵-۳-۲ تعریف سطوح بی-اسپلین	۲۷
۶-۳-۲ مشتق سطوح بی-اسپلین	۲۸
۴-۲ منحنی ها و سطوح نریز	۲۹

۲۹ معرفی منحنی های نریز
۳۰ معرفی سطوح نریز
۳۲ مشتق سطوح نریز

فصل سوم: روش تحلیل آیزوژئومتریک

۳۵ ۱-۳ مقدمه
۳۵ ۲-۳ فرمول بندی تحلیل آیزوژئومتریک
۳۵ ۱-۲-۳ محیط پیوسته ی کشسان
۴۲ ۲-۲-۳ معرفی هندسه
۴۳ ۳-۳ محاسبه ی ماتریس سختی
۴۳ ۱-۳-۳ معرفی انتگرال ماتریس سختی
۴۳ ۲-۳-۳ روش انتگرال گیری گاوس
۴۵ ۳-۳-۳ حل عددی انتگرال ماتریس سختی
۴۸ ۴-۳ محاسبه ی خطا در روش تحلیل آیزوژئومتریک
۴۸ ۱-۴-۳ تشریح روش بازیافت تنش
۵۱ ۲-۴-۳ نرم خطای انرژی

فصل چهارم: حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتریک

۵۵ ۱-۴ مقدمه
۵۶ ۲-۴ حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتریک
۵۶ ۱-۲-۴ مقدمه
۵۷ ۲-۲-۴ اضافه کردن گره

- ۳-۲-۴ افزایش مرتبه توابع پایه ای ۵۹
- ۴-۲-۴ حل تطبیقی به روش K ۶۰
- ۳-۴ روش حل تطبیقی ارائه شده در این پایان نامه ۶۴
- ۴-۴ برآورد خطا برای حل تطبیقی به روش استفاده از فنرها ۷۰
- ۵-۴ حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتری با قرار دادن فنر بین نقاط فضای پارامتری ۷۳
- ۶-۴ حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتری با قرار دادن فنر بین نقاط کنترلی ۷۹

فصل پنجم: جزئیات روش تحلیل سیستم فنرها

- ۱-۵ تئوری فنرها ۸۴
- ۲-۵ فنرهای خطی به عنوان المان های اجزاء محدود ۸۵
- ۳-۵ فنر های مستوی (درون صفحه) ۸۶
- ۱-۳-۵ سیستم مختصات محلی و جهانی (سراسری) ۸۶
- ۲-۳-۵ روابطی برای محاسبه ی l و m ۸۸
- ۳-۳-۵ ماتریس سختی المان فنر ۸۹
- ۴-۳-۵ محاسبه ی جابجایی ها در سیستم فنرها ۹۰
- ۵-۳-۵ حل یک مسئله ی نمونه برای سیستم فنرها ۹۳

فصل ششم: حل مسئله نمونه

- ۱-۶ مقدمه ۹۷
- ۲-۶ تیر طره تیمو شنکو ۹۷
- ۲-۲-۶ حل تطبیقی در فضای پارامتری با استفاده از جابجا کردن گره های فضای پارامتری (روش اول) ۱۰۳

- ۳-۲-۶ حل تطبیقی در فضای پارامتری با استفاده از جابجا کردن گره های فضای پارامتری (روش دوم)..... ۱۰۸
- ۴-۲-۶ حل تطبیقی با استفاده از جابجا کردن نقاط کنترلی..... ۱۰۹
- ۵-۲-۶ حل تطبیقی با جابجا کردن نقاط گره ای و سپس نقاط کنترلی..... ۱۱۷
- ۶-۲-۶ حل تطبیقی با جابجا کردن نقاط کنترلی و سپس گره های فضای پارامتری..... ۱۲۴

فصل هفتم: نتیجه گیری و ارائه ی پیشنهادت

- ۱-۷ مقدمه..... ۱۳۱
- ۲-۷ نتایج..... ۱۳۱
- ۳-۷ ارائه ی پیشنهادت..... ۱۳۳
- مراجع..... ۱۳۵

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ پوسته های نازک حساسیت زیادی را نسبت به نقص های هندسی از خود نشان می دهند. هندسه دارای انحنا یک نمونه از قسمت هایی است که المان بندی اجزاء محدود می تواند باعث ایجاد عیوب هندسی شود [۳]..... ۴
- شکل ۱-۲ کیفیت مش لایه های مرزی تاثیر مهمی در بهبود دقت نتایج دارد..... ۵
- شکل ۱-۲ منحنی بریز درجه ۳..... ۱۶
- شکل ۲-۲-نمودار توابع پایه ای منحنی های بزی (چند جمله ای برنشتین) الف - $n=1$ و ب - $n=2$ و ج - $n=3$ و د - $17n=9$ ۱۷
- شکل ۳-۲ منحنی دارای چند جمله ای های قطعه ای درجه ۳ که دارای سه قسمت می باشد..... ۱۹
- شکل ۴-۲ توابع پایه ای بی - اسپیلاین از درجات ۰ و ۱ و ۲..... ۲۱
- شکل ۵-۲ توابع پایه ای موثر برای محاسبه تابع $N_{1,3}$ ۲۱
- شکل ۶-۲ توابع پایه ای درجه ی ۳ موثر برای (ξ_3, ξ_4) ۲۲
- شکل ۷-۲ یک منحنی درجه ۳ بر روی بردار گره ای $\Xi = 0,0,0,0,14,12,34,1,1,1,1$ تعریف شده است، با تغییر نقطه کنترلی P_4 به P_4 فقط قسمتهایی از منحنی که داخل بازه $[14,1]$ قرار دارند تغییر می کنند..... ۲۵
- شکل ۸-۲ نمونه یک سطح بی - اسپیلاین. (الف) شبکه نقاط کنترلی؛ (ب) سطح مربوطه..... ۲۸
- شکل ۹-۲ شبکه نقاط کنترلی و سطح نربز که در هر دو جهت از درجه ۲ می باشد..... ۳۲
- شکل ۱-۳ گسسته سازی دامنه در تحلیل آیزوژئومتری با استفاده از نقاط کنترلی؛ (الف) تیر طره؛ (ب) صفحه سوراخ دار..... ۳۶
- شکل ۲-۳ زیر دامنه نربز و المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای..... ۴۶
- شکل ۱-۴ روش اضافه کردن گره..... ۵۸
- شکل ۲-۴ افزایش مرتبه ی توابع پایه..... ۶۰
- شکل ۳-۴ روش حل تطبیقی k -refinement..... ۶۳
- شکل ۴-۴ دیاگرام Voronoi و سیستم فنرها برای فرایند حل تطبیقی..... ۶۶
- شکل ۵-۴ نمودار جسم آزاد فنر بین دو نقطه ی i و j ۶۷
- شکل ۶-۴ حالت کلی برای شرایط مرزی سیستم فنرها..... ۶۹
- شکل ۷-۴ شرایط مرزی سیستم فنرها..... ۷۰
- شکل ۸-۴ زیر دامنه نربز و المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای..... ۷۱

- شکل ۴-۹ نقاط موجود در فضای پارامتری و نقاط متناظر با آنها بر روی هندسه ی مسئله ۷۳
- شکل ۴-۱۰ قرار دادن فنر بین نقاط فضای پارامتری بعد از انتقال خطاها از هندسه ی مسئله بر روی آنها ۷۴
- شکل ۴-۱۱ محل جدید نقاط بعد از جابجای آنها توسط فنرها ۷۵
- شکل ۴-۱۲ محل جدید نقاط گره ای بعد از تصویر کردن نقاط جابجا شده در فضای پارامتری ۷۶
- شکل ۴-۱۳ حالت دیگر استفاده از فنرها برای جابجایی نقاط در فضای پارامتری ۷۷
- شکل ۴-۱۴ نحوه ی در نظر گرفتن خطاها در حالت دوم ۷۷
- شکل ۴-۱۵ جابجایی نقاط فضای پارامتری در حالت جدید ۷۸
- شکل ۴-۱۶ محل جدید نقاط گره ای بعد از جابجا شدن توسط فنرها ۷۸
- شکل ۵-۱ سیستم متشکل از چند فنر ۸۴
- شکل ۵-۲ المان الاستیک خطی فنر ۸۵
- شکل ۵-۳ المان فنر دو بعدی ۸۷
- شکل ۵-۴ کسینوس های هادی المان فنر ۸۸
- شکل ۵-۱ سیستم متشکل از چند فنر ۹۱
- شکل ۵-۵ سیستم متشکل از چند فنر ۹۳
- شکل ۶-۱ شرایط هندسی و مرزی تیر طره ۹۷
- شکل ۶-۲ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره ۱۰۰
- شکل ۶-۳ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره ۱۰۰
- شکل ۶-۴ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره ۱۰۱
- شکل ۶-۵ تنش σ_y در تیر طره ۱۰۲
- شکل ۶-۶ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره پس جابجا شدن گره های فضای پارامتری ۱۰۵
- شکل ۶-۷ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری ۱۰۶
- شکل ۶-۸ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی پس از جابجا شدن گره ها در فضای پارامتری ۱۰۷
- شکل ۶-۹ تنش σ_y در تیر طره پس از جابجا شدن گره ها در فضای پارامتری ۱۰۸
- شکل ۶-۱۰ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی ۱۱۳

- شکل ۱۱-۶ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی ۱۱۴
- شکل ۱۲-۶ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی ۱۱۵
- شکل ۱۳-۶ تنش σ_y در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی ۱۱۶
- شکل ۱۴-۶ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی ۱۲۱
- شکل ۱۵-۶ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی ۱۲۲
- شکل ۱۶-۶ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی ۱۲۳
- شکل ۱۷-۶ تنش σ_y در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی ۱۲۴
- شکل ۱۸-۶ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری ۱۲۶
- شکل ۱۹-۶ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری ۱۲۷
- شکل ۲۰-۶ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری ۱۲۸
- شکل ۲۱-۶ تنش σ_y در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری ۱۲۹

فهرست جداول

جدول ۱-۳	مختصات و وزن های نقاط انتگرال گیری گاوس.....	۴۵
جدول ۱-۶	نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی وشاخص تاثیر در المان های تیر طره.....	۹۸
جدول ۲-۶	نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی وشاخص تاثیر در المان های تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری.....	۱۰۳
جدول ۳-۶	مختصات اولیه و جدید نقاط کنترلی.....	۱۰۹
جدول ۴-۶	نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی وشاخص تاثیر در المان های تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی.....	۱۱۱
جدول ۵-۶	مختصات اولیه و جدید نقاط کنترلی در مسئله با بردارهای گره ای بهینه.....	۱۱۷
جدول ۶-۶	نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی وشاخص تاثیر در المان های تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی.....	۱۲۰
جدول ۷-۶	نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی وشاخص تاثیر در المان های تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری.....	۱۲۵

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱-۱ مقدمه

تحلیل سازه در علوم مهندسی از اولین گام های شناخت و ارزیابی صحیح مسائلی می باشد که در عمل با آن مواجه می شویم. این تحلیل به طور خاص در مکانیک سازه ها منجر به حل معادلات دیفرانسیلی می شود، که در حالت کلی دارای پیچیدگی بسیار زیادی می باشد. لذا باید به دنبال روش هایی جهت حل این معادلات باشیم تا بتوانیم شناخت و علم خود را توسعه دهیم. در دهه های گذشته روش های بسیاری برای تحلیل مسائل مهندسی و حل مشکلات پیش روی محققین ارائه شده است که برخی از مهمترین آنها روش تفاضل های محدود، روش اجزاء محدود و دسته ای از روش ها با عنوان روش های بدون شبکه می باشند. روشی که اخیراً برای تحلیل مسائل مهندسی ارائه شده است، روش تحلیل آیزوژئومتریک می باشد. روش تحلیل آیزوژئومتریک اولین بار در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز معرفی شد، و در پی آن است که ضعف های دیگر روش های تحلیل را رفع کند.

روش اجزای محدود یکی از روشهایی است که کاربرد فراوانی در حل مسائل بسیاری از رشته های مهندسی و به خصوص مسائل مکانیک جامدات دارد. ریشه های توسعه این روش را باید در اوائل دهه ۱۹۴۰ میلادی جستجو کرد. در سال ۱۹۴۳ کورانت معادله پواسون پیچش را توسط آنچه امروز المانهای مثلثی خطی نامیده می شود، حل کرد، اما کارهای وی مدتها ناشناخته ماند. روشهای اجزای محدود به شکل امروزی آن، ریشه در کارهای ترنر و همکاران وی در سال ۱۹۵۷ دارد. در سال ۱۹۶۰، کلاف نام اجزای محدود را بر این روش نهاد؛ و کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره ای در سال ۱۹۶۵ توسط زینکوویچ و چونگ پیشنهاد شد. [۱]

تاکنون مقالات و کتابهای فراوانی در زمینه اجزای محدود نوشته شده اند و هنوز روشها و تکنیکهای جدیدی در این زمینه مطرح می شوند؛ اما از همان آغاز مدل سازی رخدادهای فیزیکی توسط کامپیوتر و شکل گیری مبانی اجزای محدود وجود خطاهای عددی در محاسبات منشأ اصلی نگرانی بوده است؛ زیرا در فرایند جزء بندی یک محیط پیوسته و تبدیل آن به یک مسأله کامپیوتری قابل مدیریت، یقیناً

نمی‌توان تمام اطلاعات موجود در مدل را که بوسیله معادلات دیفرانسیل پاره‌ای یا معادلات انتگرالی مشخص و توصیف شده است، در بر گرفت.

با وجود آنکه هندسه یکی از زیر بناهای تحلیل می باشد، طراحی به کمک کامپیوتر (CAD) به صورتی که ما امروزه می شناسیم، در سال های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ معرفی و رشد پیدا کرد. شاید بتوان به این سوال که، چرا شیوه معرفی هندسه در اجزای محدود و CAD دارای تفاوت های زیادی با هم می باشند؟ اینگونه جواب داد که، برنامه های اجزای محدود از نظر تکنیکی مدت زمان زیادی قبل از اینکه روش های مدرن CAD رواج پیدا کنند، رشد و توسعه یافتند. اما در حال حاضر CAD نسبت به مهندسی به کمک کامپیوتر (CAE^۱) صنعت بزرگتری محسوب می شود. در حال حاضر محاسبه دقیق حجم صنایع CAD و CAE به دلیل گستردگی کاربرد آنها مشکل می باشد، اما کارشناسان آن را در حدود یک تا دو بیلیون دلار برای CAE و ۵ تا ۱۰ بیلیون دلار برای CAD تخمین می زنند.

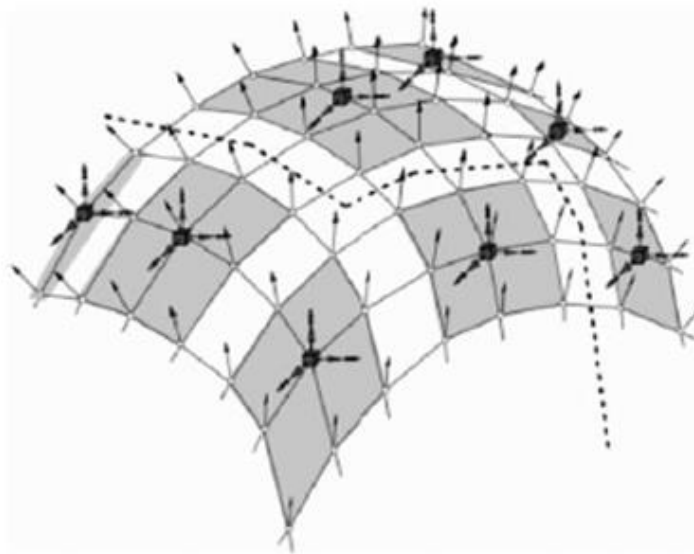
در یک عملیات مهندسی بطور خلاصه می توان گفت که طراحی ها در سیستم CAD هستند و المان از روی داده های CAD تولید می شوند. این عمل باعث ایجاد یک تعریف هندسی کاملاً متفاوت برای فضای پارامتری تحلیل می شود، که در حقیقت فقط یک تقریب از هندسه واقعی می باشد.

در بعضی از مسائل می توان تولید المان را به صورت خودکار انجام داد، اما در بیشتر مسائل در بهترین حالت فقط می توان این عمل را به صورت نیمه خودکار انجام داد. هنوز در صنایع بزرگ نقشه ها در CAD طراحی می شوند و المان ها بر اساس آن تولید می شوند، تخمین زده می شود که حدوداً ۸۰٪ زمان تحلیل مسائل در صنایعی مانند خودروسازی، هوافضا و کشتی سازی صرف تولید المان ها می شود. در صنعت خودرو سازی تولید المان برای تمام اجزای یک اتومبیل حدود چهار ماه طول می کشد، این در صورتی است که تغییرات در طراحی های روزانه صورت می گیرد، حال اگر نتوانیم در این مدت المان های جدید بر مبنای تغییرات طراحی را تولید کنیم، قادر به استفاده از مزایای تحلیل

¹ Computer Aided Engineering

در طراحی نمی باشیم. [۲]

هنگامی که شبکه المان ها ساخته شد بایستی که برای کاهش خطای تحلیل، شبکه المان ها اصلاح شود. که این عمل در هر تکرار خود احتیاج به برقراری ارتباط با سیستم CAD دارد، در صورتی که این ارتباط در اغلب موارد ناممکن می باشد؛ که این نشان می دهد که چرا حل تطبیقی^۱ بجای اینکه به یک فناوری صنعتی تبدیل شود، هنوز در حد پروژه های دانشگاهی باقی مانده است. مقدار تقریب هندسی ذاتی در شبکه های المان، دقت تحلیل مسائل را مشخص می کند. به عنوان مثال در این زمینه می توان تحلیل پوسته های نازک را نام برد که بسیار به عیوب هندسی حساس هستند (شکل ۱-۱). حساسیت به هندسه را، همچنین می توان در مسائل مکانیک سیالات مشاهده کرد.



شکل ۱-۱ پوسته های نازک حساسیت زیادی را نسبت به نقص های هندسی از خود نشان می دهند. هندسه دارای

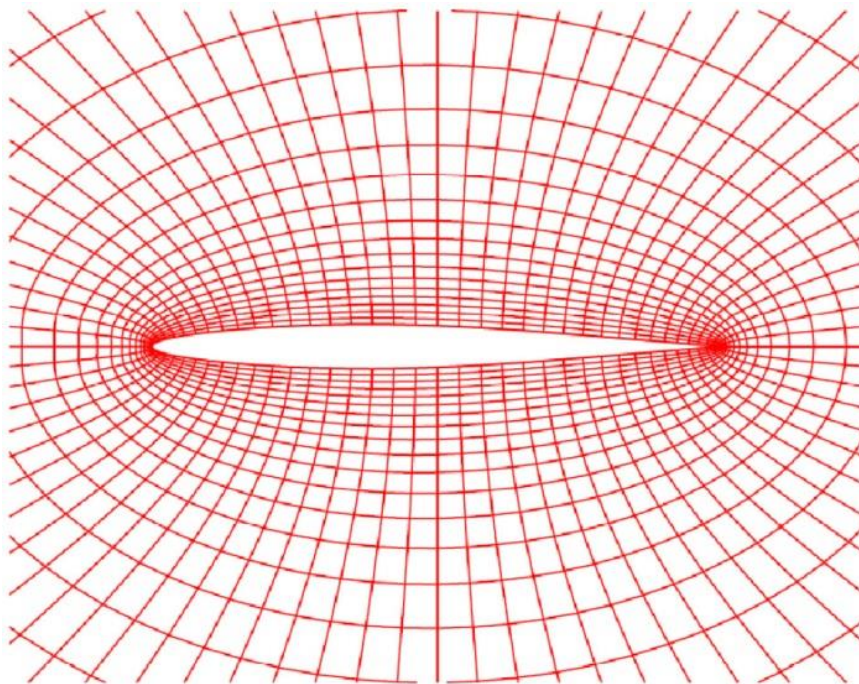
انحنای یک نمونه از قسمت هایی است که المان بندی اجزاء محدود می تواند باعث ایجاد عیوب هندسی شود [۳]

ساختار هندسه در اجزای محدود، (که همان شبکه المان ها می باشد)، پرهزینه، زمان بر و همچنین باعث کاهش دقت در حل مسئله می شود. این مشکل باعث شده که، در مقیاس کوچک در صنعت

^۱ Adaptive refinement analysis

CAE تلاش های مفیدی در جهت تغییرات یا جایگزینی روش اجزای محدود با روش های دیگر که بیشتر شبیه به CAD باشد، صورت پذیرد. این تلاش ها باعث گسترش برنامه کامپیوتری به نام RASNA شد، که در آن از ترکیب هندسه دقیق مسئله، با حل تطبیقی P-refinement اجزای محدود استفاده شده بود.

اهمیت این نتایج به این دلیل است، که کمیت های محاسبه شده در روی مرزها، معمولاً در مهندسی کاربردی، مهمتر هستند، و مرزها نقاطی می باشند که، خطاهای هندسی در آنها مضرترین هستند. علاوه بر این در بیشتر تحلیل های اجزای محدود هنوز از المان های با مرتبه پایین استفاده می شود که این باعث خطاهای هندسی بزرگی می شود. [۲]



شکل ۱-۲ کیفیت مش لایه های مرزی تاثیر مهمی در بهبود دقت نتایج دارد

موفقیت RASNA باعث می شود که، یک شرکت فعال در زمینه CAD کار آنها را ادامه دهد. آنها به دلیل ارتباط محکمی که با هندسه CAD در برنامه خود فراهم کرده بودند، و شاید مهمتر از آن توانایی انجام حل تطبیقی به روش P-refinement، توانستند به نتایج قابل اعتمادتری دست یابند.

روش آیزوژئومتریکی بطور مشابه الهام گرفته شده است، اما سعی شده به صورت دقیق تری از هندسه CAD استفاده شود، همچنین چند جمله ای های اجزای محدود، بطور کلی از روند محاسبه حذف شده اند.

در تحلیل به روش آیزوژئومتریکی محاسبات بر مبنای استفاده از نربز (NURBS^۱) که یک فناوری استاندارد برای سیستم های CAD می باشد، انجام می شود. ایده این روش اولین بار توسط هیوز^۲ و همکارانش در سال ۲۰۰۵ ارائه شد [۴]. آنها پیشنهاد کردند، که ابتدا هندسه دقیق به وسیله سطوح نربز ایجاد شود و سپس یک شبکه المان با چشمه های درشت توسط المان های نربز ساخته شود. به این ترتیب در اصلاح شبکه المان ها نیاز به ارتباط با سیستم CAD نمی باشد، و می توان به سادگی شبکه المان ها را اصلاح کرد به همین دلیل امکان گسترش هر چه بیشتر آن در صنعت وجود دارد. [۲]

در روش حاضر از همان متغیرهایی که در تعریف هندسه مسئله استفاده شده است، برای تعریف هندسه مدل تحلیلی و همچنین تحلیل استفاده می شود، به همین دلیل، نام تحلیل آیزوژئومتریکی توسط هیوز برای آن انتخاب شده است.

برآورد کننده های خطا در روش های عددی ابزاری کارآمد جهت اطمینان از جهت گیری درست حل و برآورد دقت نتایج بدست آمده می باشند. اگر قسمت هایی از مساله که نیاز به دقت بیشتری دارند مشخص شوند می توان با یک فرایند مناسب، حجم محاسبات را تا حد زیادی کم کرد. هر فرآیند تظریف تطبیقی شامل دو بخش اصلی است: بخش اول برآورد کننده خطا و دیگری ابزاری برای فرآیند تظریف. برآورد کننده خطا مقدار خطا را در هر نقطه تخمین زده و فرآیند تظریف بر اساس اطلاعات برآورد کننده خطا مشخص می نماید که چه قسمت هایی از حوزه ی مسئله نیاز به تظریف دارد. در فرآیند های معمول تخمین خطا دو مقدار از یک کمیت (مقدار محاسبه شده و مقدار مرجع) مورد نیاز است. مقدار محاسبه شده، کمیت خامی است که از محاسبه مستقیم بدست می آید در حالی که مقدار مرجع از مقدار اول

^۱ Non-Uniform Rational B-Spline

^۲ T.J.R. Hughes

بعد از یک فرآیند پس پردازشی مانند هموار سازی به دست می‌آید. در اجزای محدود، معمولاً تنش‌ها در مرز المان‌ها یا ناپیوسته هستند یا از دقت کمتری برخوردارند. مقادیر تصحیح شده آن‌ها از طریق فرآیند هموار سازی به دست می‌آید. اختلاف بین مقادیر خام و مقادیری که از طریق فرآیند فوق به دست آمده‌اند، تشکیل دهنده‌ی یک مقدار اولیه برای برآورد کننده خطا در روش اجزای محدود می‌باشد. فرآیند نظریه تطبیقی به طور گسترده‌ای در اجزای محدود محاسباتی بکار گرفته شده است و در سال‌های اخیر نیز این فرآیند در بسیاری از روش‌های بدون شبکه مورد استفاده قرار گرفته است. در روش‌های بدون شبکه ناپیوستگی بین المانی وجود نداشته و جواب‌ها همواره حالت هموار روی کل حوزه‌ی مسئله دارند.

۲-۱ روش اجزای محدود

روش کلاسیک تحلیل یک محیط پیوسته بدین قرار است که یک تابع تنش یا تغییر شکل که معادلات دیفرانسیل تعادل، روابط تنش- کرنش، و شرایط سازگاری را در هر نقطه از محیط پیوسته شامل شرایط مرزی برآورده سازد، تعیین می‌شود. با توجه به قیدهای معمولاً پیچیده، تعداد حل‌های کلاسیک موجود، بسیار محدود می‌باشد. به علاوه اکثر نتایج بدست آمده از روش‌های کلاسیک به صورت سریهای نامتناهی می‌باشد که در محاسبات علمی فقط چند جمله اول آنها به کار گرفته می‌شود که نتیجه آن ایجاد یک تقریب در نتایج است. در صورت عدم تعیین یک تابع صریح، می‌توان معادله دیفرانسیل تعادل را به کمک روش تفاوت‌های محدود^۱ حل نمود، لیکن این روش نیز ایراداتی دارد که عدم ارضاء شرایط مرزی و عدم دقت در نتایج بدست آمده از جمله آن‌ها است [۵].

روش تقریبی دیگری که امروزه به عنوان یک ابزار قوی برای حل عددی محدوده وسیعی از مسائل

^۱ Finite difference

هندسی است، روش اجزای محدود^۱ می‌باشد. در روش اجزای محدود، محیط پیوسته به اجزای هندسی ساده و کوچکتری که (جزء محدود) نامیده می‌شود، تقسیم می‌گردد. این عمل را جزء بندی کردن^۲ می‌گویند. سپس با انتخاب یک تابع شکل^۳ تغییر مکان، مشخصات مصالح و تنشهای داخلی برحسب تغییر مکانهای مجهول گره‌های هر یک از این اجزاء تعریف می‌گردد. با توجه به ترتیب قرارگیری اجزاء در کنار یکدیگر، معادلات آنها بر هم سوار شده و با منظور کردن نیروهای خارجی و شرایط تکیه گاهی در محل گره‌ها، معادلات تعادل کل سیستم بدست می‌آید. این معادلات نیروهای گرهی را به تغییر مکانهای گرهی ربط می‌دهند و ثابتهای آنها مشخصات هندسی و الاستیک اجزای محدود می‌باشد. با حل این معادلات تغییر مکانهای گرهی و با استفاده از آنها تنشهای داخلی محاسبه می‌شوند[۵].

۳-۱ خطاها در روش اجزای محدود [۶]

واضح است که روش اجزای محدود یک روش تقریبی است. با توجه به آنچه در قسمت قبل آمد، منابع خطا در روش اجرای محدود را می‌توان به سه گروه عمده تقسیم کرد [۷]:

۱- **خطای ناشی از تقریب زدن دامنه حل مسئله** : این خطا از آنجا ناشی می‌شود که در حالت کلی نمی‌توان دامنه حل مسئله را با المانهای مورد نظر به طور کامل پوشانید. برای مثال، یک صفحه دایره‌ای شکل را هیچگاه نمی‌توان با المانهای مثلثی خطی به طور کامل مدل نمود، هر چند این کار با هر دقت دلخواه با ریز تر کردن شبکه المان بندی امکان پذیر است.

۲- **خطای ناشی از گرد کردن اعداد** : این گروه از خطاها بستگی به سخت افزار و نرم افزار مورد استفاده برای محاسبات دارد. از آنجا که تعداد محدودی از ارقام یک عدد در رایانه ذخیره می‌شود، استفاده از این عدد در محاسبات باعث ایجاد خطا خواهد شد و به علت اینکه محاسبات معمولاً به صورت زنجیروار

^۱ Finite Element

^۲ Discretizing

^۳ Shape Function

به نتایج مراحل قبل وابسته است، این موضوع باعث گسترش خطا در تمامی حل می‌گردد. بر خلاف سایر انواع خطاها، ریز تر نمودن شبکه المان بندی معمولاً این گروه از خطاها را تشدید می‌کند. برای کاهش این گروه از خطاها، باید به صورت سخت افزاری و یا نرم افزاری تعداد ارقامی از یک عدد را که در رایانه نگهداری می‌شود، افزایش داد که این کار با افزایش حافظه مورد نیاز و همچنین بالا رفتن زمان حل همراه است.

۳- خطای ناشی از گسسته سازی: این گروه از خطاها، عمده ترین منبع خطا در روش اجزای محدود بوده و ناشی از تقریب زدن میدان جابجایی به وسیله توابع شکل می‌باشد. این گروه از خطاها نیز با ریزتر کردن شبکه المان بندی و بالا بردن درجه توابع شکل مورد استفاده، کاهش می‌یابد. این سه گروه خطا در حل عددی معادله دیفرانسیل و برای مثال در معادلات الاستیسیته در بدست آوردن مقدار جابجایی u هر گره وارد می‌شود.

آنچه از این پس در این تحقیق به عنوان خطا مورد بحث قرار خواهد گرفت، خطای ناشی از گسسته سازی است و بنابراین همواره فرض بر آن خواهد بود که دامنه حل به طور کامل توسط المانهای مورد استفاده پوشیده شده و محاسبات نیز به صورت کاملاً دقیق انجام می‌گیرد.

۴-۱ برآوردکننده های خطا

در برآورد خطا دو رویکرد عمده وجود دارد. اولین اینها تخمین خطا بر اساس روشهای باقیمانده است که از ادامه کار بابوشکا می‌باشد. و دومین که امروزه تأکید بر استفاده از آن می‌باشد، استفاده از روشها، با وصله‌های خود تعادلی^۱ است، که در این زمینه انس ورس و آدن^۲ پیشتاز می‌باشند. روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان) نیز در این دسته قرار می‌گیرند [۸].

^۱ self-equilibrating patches

^۲ Ainsworth and Oden

۱-۴-۱ روشهای برآورد خطا مبتنی بر محاسبه مانده‌ها

از آنجا که حل اجزای محدود یک معادله دیفرانسیل با حل دقیق آن متفاوت است، واضح است که حل اجزای محدود، معادله دیفرانسیل را به طور کامل ارضا نمی‌نماید. همچنین در یک حل اجزای محدود، اصولاً تنها میدان متغیر اصلی معادله (u) دارای پیوستگی در لبه المانها می‌باشد و میدان گرادیان آن، (σ) گسسته است. این موضوع، اساس تخمین خطا در این دسته از روشها است. در اینجا با قرار دادن حل حاصل از روش اجزای محدود در معادله دیفرانسیل اولیه و محاسبه مانده آن و نیز محاسبه پرش میدان گرادیان در لبه المانها، تخمینی از خطای حل اجزای محدود به دست می‌آید.

این روش نخستین تلاش برای محاسبه خطا در روش اجزای محدود بوده است. این روش ونیز ایده تعیین خطاها در روش اجزای محدود اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط بابوشکا و رینبولت مطرح شد [۱].

در تحقیقاتی که بابوشکا همراه با یک تیم تحقیقاتی به سرپرستی پروفیسور استروبولیس^۱ از دانشگاه تگزاس، انجام دادند، روشی ابداع شد که به کمک آن می‌توان مقایسه‌ای بین روشهای تخمین خطا انجام داد. این روش آزمون وصله بابوشکا نام گرفت و بر اساس آن پی برده شد که روشهای بازیافتی در مقایسه با روشهای باقیمانده‌ای از دقت و همگرایی بهتری برخوردار می‌باشند [۸]. لذا در این تحقیق از بررسی بیشتر این دسته از برآورد کننده‌ها صرف نظر می‌شود.

۱-۴-۲ روشهای برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش (گرادیان)

پس از حل معادله دیفرانسیل الاستیسیته توسط روش اجزای محدود وبه دست آوردن مقادیر جابجایی در هر گره، در صورتی که به دست آوردن مقادیر دقیق تنش (گرادیان میدان) در گره‌ها، روی مرز المانها

¹ Strouboulis

و یا هر جای دیگر از دامنه مورد نظر باشد، در آن صورت باید از روش‌های بازیافت تنش استفاده نمود. زیرا اگر مسأله تغییراتی، از درجات پایین، مانند C^0 باشد، تنها تابع جابجایی در نقاط گرهی و مرز المانها پیوسته بوده و تنش یا گرادیان میدان در آن نقاط گسسته و همراه با پرش می‌باشد. برای مثال در هر گره که چهار المان مربعی شکل به آن متصل باشد، فقط یک مقدار جابجایی پس از حل معادله دیفرانسیل به وسیله اجزای محدود موجود بوده، ولی برای مشتق اول و تنش، به دلیل ناپیوسته بودن شیب در آن گره، از هر المان متصل به گره مذکور مقداری متفاوت، یعنی در مجموع چهار مقدار مختلف برای آن گره وجود خواهد داشت. این موضوع برای کلیه مرزهای المانها نیز صادق می‌باشد. از اینجا می‌توان به اهمیت بحث بازیافت تنش پی برد. زیرا قاعدتا باید فقط یک مقدار مشخص، نزدیک به حل دقیق، برای مشتق اول یا تنش در هر گره موجود باشد که به دست آوردن این مقدار، با استفاده از عملیات تکمیلی بازیافت تنش به روی نتایج حاصل از حل روش اجزای محدود مقدور می‌باشد، که خود شامل روشهای مختلفی است.

به طور کلی بازیافت تنش روشی به منظور بالا بردن دقت، و پیوسته و هموار نمودن میدان تنش یا گرادیان میدان به دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش با استفاده از حل روش اجزای محدود، یک جواب نزدیک به حل دقیق یا تحلیلی در هر گره یا در نقاط دلخواه روی دامنه محاسبه شده که دقت بالاتری نسبت به حل اولیه اجزای محدود داشته است.

این میدان تنش بهبود یافته، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^* = N\bar{\sigma} \quad (1-1)$$

که در آن $\bar{\sigma}^*$ مقادیر گرهی این میدان و N توابع شکل مورد استفاده در المانها است. با استفاده از این میدان بهبود یافته، خطای بازیافت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_{\sigma}^* = \sigma^* - \sigma_h \quad (2-1)$$

که در رابطه بالا σ_h تنش ناشی از اجزای محدود می‌باشد. روشهای متعددی برای بازیافت تنش از حل

اجزای محدود وجود دارد. واضح است که کارایی روند بازیافت نقش عمده‌ای در کارایی این گروه از برآورد کننده‌های خطا دارد.

از مهمترین روش های مطرح در این گروه از برآوردکننده های خطا می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- روش میانگین گیری
- روش تصویر L_2
- روش بازیافت تنش بر مبنای نقاط فوق همگرا **SPR**
- روش بازیافت تنش بر مبنای تعادل در زیر دامنه ها، **REP**

با توجه به این که در این پایان نامه از روش میانگین گیری استفاده می شود، در ادامه توضیح مختصری از این روش ارائه خواهد شد.

۱-۲-۴-۱ روش میانگین گیری

روشی که توسط هینتن و کمپبل در سال ۱۹۷۴ برای بازیابی تنش به کار برده شده است. که در حال حاضر نیز در برخی نرم افزارهای اجزای محدود برای بدست آوردن یک مقدار واحد تنش در گره ها به کار می رود. [۹]

در این مقاله دو متد سراسری و موضعی پیشنهاد شده است. در روش موضعی پیشنهاد شده ابتدا مقادیر تنش در نقاط گوسی به وسیله روش اجزای محدود به دست آمده و پس از آن با استفاده از برونابی در هر المان مربعی با چهار نقطه گوسی، مقادیر تنش در گره ها به دست می آید. میانگین تنش حاصل از المانهای متصل به هر گره پس از عمل برونابی به عنوان مقدار بهبود یافته آن تعریف می گردد و مطابق رابطه داریم:

$$\bar{\sigma}_i^* = \frac{1}{\rho_i} \sum_{\tau \in \xi_i} \sigma_h^\tau |_{X_i} \quad (3-1)$$

که در آن σ_h^τ تنش محاسبه شده در المان τ در محل گره i ام بعد از عمل برونابی و ρ_i تعداد المانهای متصل به گره i ام می باشد. این روش با وجود سادگی و سرعت بالا در مسائل ساده که شبکه

المان بندی منظم است، کارایی قابل قبولی دارد.

فصل دوم

معرفی منحنی‌ها و سطوح نربرز (NURBS)

۱-۲ فرم ضمنی و پارامتری [۱۰]

بطور کلی دو روش رایج برای نشان دادن منحنی ها و سطوح در هندسه تحلیلی، معادلات ضمنی و توابع پارامتری هستند. معادله ضمنی یک منحنی در صفحه xy بصورت $f(x, y) = 0$ می باشد. این معادله نشان دهنده رابطه بین مختصه x و مختصه y یک نقطه روی منحنی است، که معادله ارائه شده برای منحنی در این فرم، منحصر به فرد می باشد. به عنوان مثال فرم ضمنی برای یک دایره به شعاع واحد در حالتی که مرکز آن در مبدا باشد به صورت $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ است. در فرم پارامتری، هر مختصه نقاط روی منحنی به صورت منفرد و به وسیله یک تابع صریح از یک متغیر مستقل تعریف می شود.

$$C(\xi) = (x(\xi), y(\xi)) \quad a \leq \xi \leq b \quad (1-2)$$

بنابراین $C(\xi)$ یک مقدار برداری است، که تابعی از متغیر مستقل ξ می باشد. مقدار ξ در بازه بسته $[a, b]$ می باشد. که این بازه بصورت قرار دادی انتخاب می شود و معمولاً آن را بصورت نرمال شده $[0, 1]$ ارائه می دهند.

برای یک ربع دایره با مشخصات حالت قبل می توان معادله پارامتری زیر را ارائه کرد:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \cos(\xi) \\ y(\xi) &= \sin(\xi) \end{aligned} \quad 0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2} \quad (2-2)$$

اگر در معادله (۲-۲) از تغییر متغیر $t = \tan\left(\frac{\xi}{2}\right)$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3-2)$$

بنابراین همانطور که مشاهده می شود، معادلات یک منحنی در حالت پارامتری منحصر به فرد نمی

باشد .

هر کدام از روش های فوق دارای مزایا و معایبی است و نمی توان یکی از آنها را به عنوان یک روش بهتر انتخاب کرد . دو مثال معروف در این زمینه به صورت زیر است:

۱- محاسبه یک نقطه روی یک منحنی یا روی یک سطح، که در حالت ضمنی مشکل می باشد.

۲- تعیین اینکه یک نقطه داده شده بر روی منحنی یا سطح قرار دارد ، که در حالت پارامتری مشکل می باشد.

برای مدل کردن یک شکل در کامپیوتر استفاده از فرم پارامتری ساده تر می باشد.

۲-۲ منحنی های بزیر^۱

یک منحنی بزیر از درجه n بصورت زیر تعریف می شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(\xi) P_i \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (4-2)$$

به $\{B_{i,n}(\xi)\}$ توابع پایه ای بزیر گفته می شود، که در حقیقت چند جمله ای های درجه n برنشتین هستند که بصورت زیر می باشند:

$$B_{i,n}(\xi) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \xi^i (1-\xi)^{n-i} \quad (5-2)$$

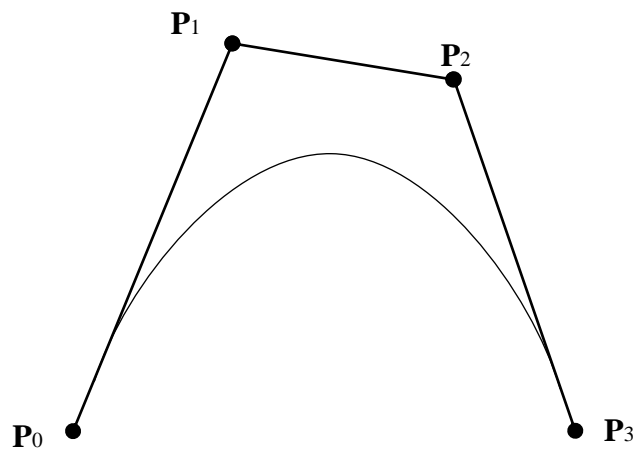
به نقاط $\{P_i\}$ نقاط کنترلی^۲ گفته می شود ، ضمن اینکه همانطور که ملاحظه می شود ξ بایستی که در بازه $[0,1]$ قرار گیرد.

به عنوان مثال یک منحنی بزیر از درجه ۳ بصورت زیر می باشد:

$$C(\xi) = (1-\xi)^3 P_0 + 3\xi(1-\xi)^2 P_1 + 3\xi^2(1-\xi) P_2 + \xi^3 P_3$$

^۱ Bezier Curves

^۲ Control points



شکل ۱-۲ منحنی بریز درجه ۳

از مهمترین ویژگی‌های منحنی بزیر می‌توان به موارد زیر اشاره کرد :

- چند ضلعی کنترلی^۱ (چند ضلعی که از به هم متصل کردن نقاط کنترلی ایجاد می‌شود) می‌تواند شکل منحنی را تخمین بزند.

- نقاط کنترلی ابتدایی و انتهایی روی منحنی قرار دارند ($P_3 = C(1), P_0 = C(0)$)

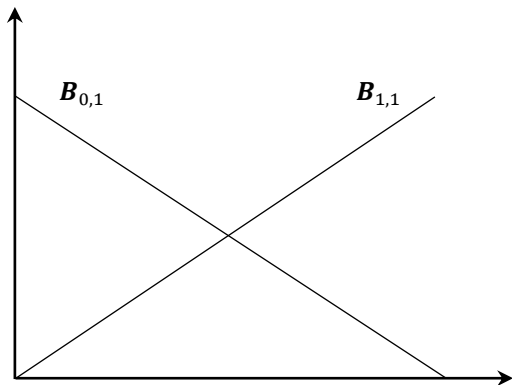
- شیب منحنی در نقاط انتهایی موازی با شیب خط اتصال نقاط کنترلی می‌باشد.

$$(P_1 - P_0, P_3 - P_2)$$

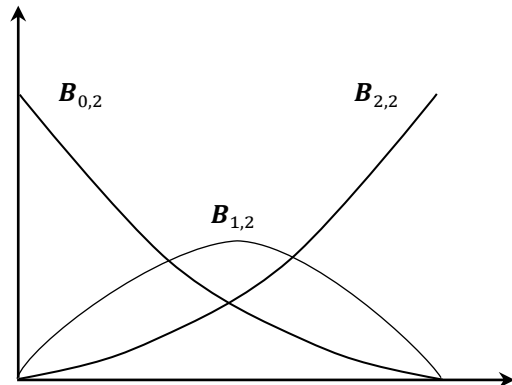
همانطور که قبلاً اشاره شد برای معرفی یک منحنی (یا سطح) در معادلات بزیر احتیاج به توابع پایه ای می‌باشد. که این توابع نشان دهنده خصوصیات هندسی می‌باشند در شکل ۲-۲ توابع پایه ای

$\{B_{i,n}(\xi)\}$ برای $n = 1, 2, 3, 9$ نشان داده شده است.

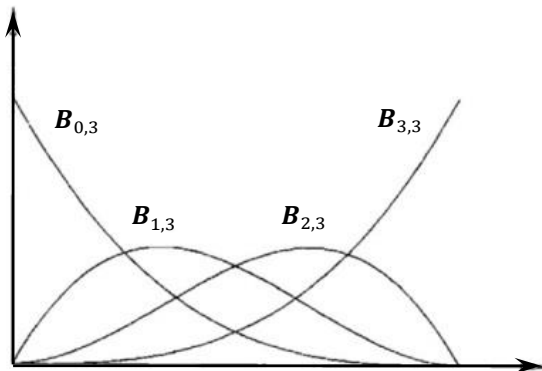
^۱ Control Polygon



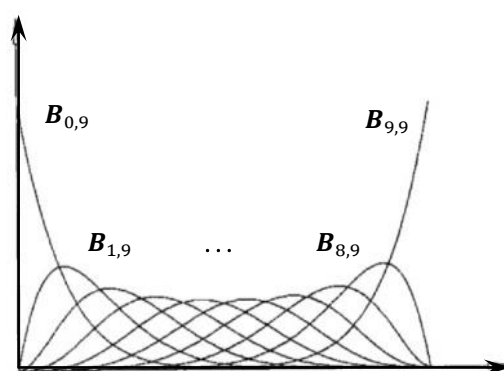
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

شکل ۲-۲- نمودار توابع پایه ای منحنی‌های زیر (چند جمله‌ای برنشتین) الف- $n=1$ ب- $n=2$ ج- $n=3$ و د- $n=9$

این توابع دارای خواص زیر می‌باشند:

$$1- \text{منفی نبودن: برای هر } n, i, 0 \leq \xi \leq 1 \text{ آنگاه داریم: } B_{i,n}(\xi) \geq 0$$

$$2- \text{برای هر } \xi \in [0,1] \text{ داریم: } \sum_{i=0}^n B_{i,n}(\xi) = 1$$

$$3- B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$$

۴- هر تابع پایه ای $B_{i,n}(\xi)$ در بازه $[0,1]$ دقیقاً دارای یک ماکزیمم در $\xi = \frac{i}{n}$ می‌باشد.

۵- تقارن: به ازای هر n ، مجموعه چند جمله ای های $\{B_{i,n}(\xi)\}$ نسبت به $\xi = \frac{1}{2}$ دارای تقارن می باشد.

۶- تعریف بازگشتی^۱:

$$B_{i,n}(\xi) = (1 - \xi)B_{i,n-1}(\xi) + \xi B_{i-1,n-1}(\xi) \quad (۶-۲)$$

که در آن $i > n$ و $i < 0$ باشد آنگاه $B_{i,n}(\xi) = 0$

۷- مشتق تابع پایه ای بزیر بصورت زیر تعریف می شود:

$$B'_{i,n}(\xi) \frac{dB_{i,n}(\xi)}{d\xi} = n(B_{i-1,n-1}(\xi) - B_{i,n-1}(\xi)) \quad (۷-۲)$$

باید توجه کرد که در فرمول (۷-۲) $B_{-1,n-1}(\xi) \equiv B_{n,n-1}(\xi) \equiv 0$ می باشد.

۳-۲ منحنی ها و سطوح بی-اسپلاین^۲

همانطور که ملاحظه شد منحنی هایی که فقط دارای یک چند جمله ای می باشند، (مانند منحنی های بزیر) می توانند در اغلب موارد به کار برده شوند. اما این منحنی ها دارای معایبی از جمله موارد زیر می باشند:

- هنگامی که قصد داریم به تعداد زیادی نقطه منحنی را برازش دهیم، مجبور به استفاده از چند جمله ای هایی با درجات بالا می شویم، به عنوان مثال برای برازش یک منحنی بزیر به n نقطه نیاز به چند جمله ای از درجه $(n-1)$ داریم. که استفاده از درجات بالا باعث افزایش حجم محاسبات و همچنین ناپایداری های عددی می شود.

- برای ایجاد اشکال پیچیده باز هم نیاز به چند جمله ای هایی از درجات بالا وجود دارد.

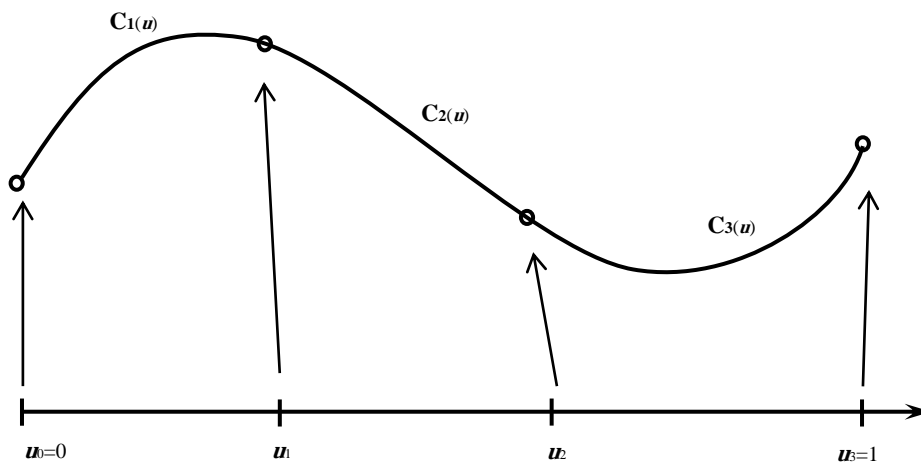
- در طراحی اشکال مختلف برای تغییر در قسمتی از منحنی، بایستی علاوه بر نقاط کنترلی آن قسمت،

^۱ Recursive definition

^۲ B-Spline

بسیاری از نقاط کنترلی دیگر را هم اصلاح کر . به عبارت دیگر قابلیت کنترل محلی^۱ روی منحنی بسیار کم می باشد.

برای حل این مشکلات از منحنی های با چند جمله ای های قطعه ای استفاده می کنیم. در شکل ۲-۳ منحنی $C(\xi)$ که دارای $m(=3)$ قطعه چند جمله ای درجه n ، می باشد، نشان داده شده است، که $C(\xi)$ در بازه $\xi \in [0,1]$ تعریف شده است.



شکل ۲-۳ منحنی دارای چند جمله ای های قطعه ای درجه ۳ که دارای سه قسمت می باشد

یک منحنی بی - اسپلاین بصورت زیر تعریف می شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n f_i(\xi) P_i \quad \xi \in [0,1] \quad (۸-۲)$$

که در آن نقاط کنترلی و $\{f_i(\xi), i = 0, \dots, n\}$ توابع چند جمله ای قطعه ای^۲ (توابع پایه ای با درجه و پیوستگی مناسب) می باشند. لازم به ذکر است که پیوستگی منحنی به وسیله توابع پایه ای تعیین می شوند، از این رو می توان بدون اینکه پیوستگی منحنی تغییر کند نقاط کنترلی را اصلاح کرد.

^۱ Local support property

^۲ Piecewise polynomial functions

۱-۳-۲ تعریف و خواص توابع پایه ای بی اسپلاین^۱

$\Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ مجموعه ای متوالی و غیر نزولی از اعداد حقیقی می باشد، یعنی در آن به ازای

$i = 0, \dots, m-1$ داریم $\xi_{i+1} \geq \xi_i$. به ξ_i گره^۲ و به مجموعه Ξ بردار گره ای^۳ گفته می شود.

در این صورت اُمین تابع پایه ای بی اسپلاین از درجه p (مرتبه $p+1$) که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود.

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9-2)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

- $N_{i,0}(\xi)$ تابعی تکه ای می باشد، به طوری که در همه ی نقاط برابر صفر است بجز در بازه ی نیمه باز $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$.

- برای $p > 0$ ، تابع $N_{i,p}(\xi)$ ترکیب خطی از دو تابع پایه ای با درجه $p-1$ می باشد.
- به بازه نیمه باز $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ ، اُمین دهانه گره ای^۴ گفته می شود، که می تواند طول آنها صفر باشد، زیرا استفاده از گره های تکراری در بردار گره ای مجاز می باشد. (شکل ۲-۴)

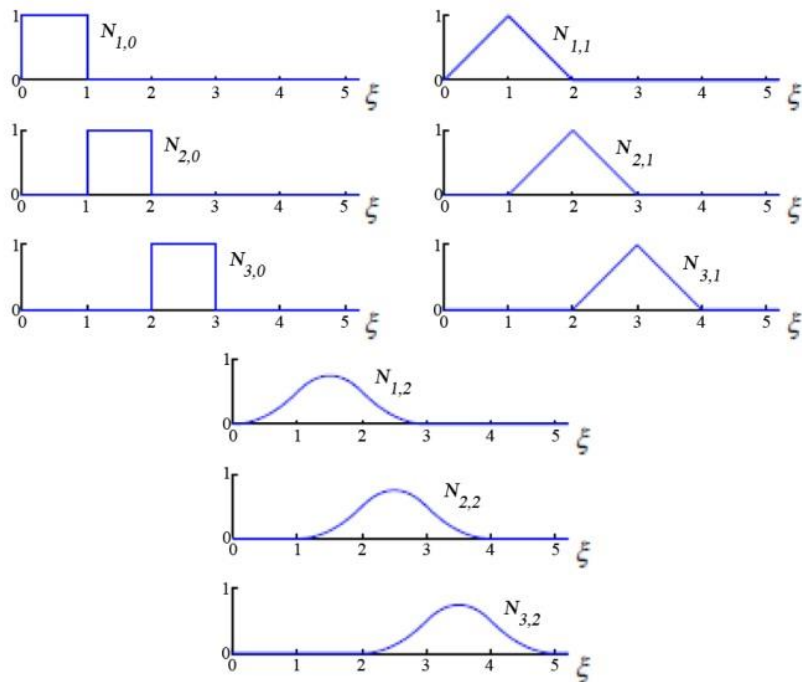
برخی از خواص مهم توابع پایه ای بی - اسپلاین که در واقع تعیین کننده خصوصیات منحنی ها و سطوح بی - اسپلاین می باشند در زیر آورده شده است. در اینجا p درجه تابع و $\Xi = \{\xi_0, \dots, \xi_m\}$ بردار گره ای می باشد.

^۱ B-Spline Basis Function

^۲ Knot

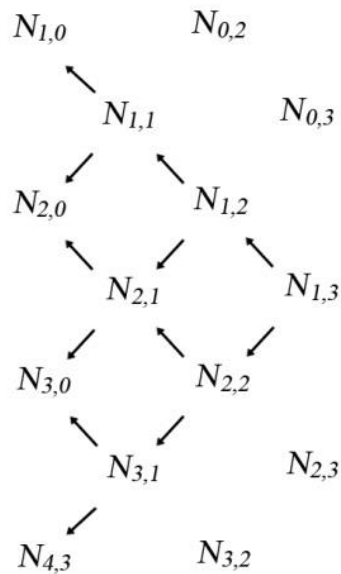
^۳ Knot Vector

^۴ Knot Span



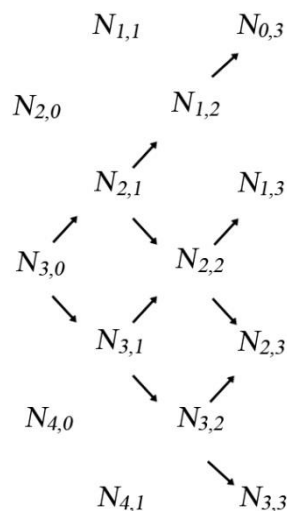
شکل ۲-۴ توابع پایه ای بی - اسپلاین از درجات ۰ و ۱ و ۲

۱- اگر ξ خارج از بازه $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ باشد آنگاه $N_{i,p}(\xi)$ صفر است. (این نکته باعث وجود ویژگی کنترل محلی می شود) این ویژگی در شکل ۲-۵ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می شود ، $N_{1,3}$ ترکیبی از توابع $N_{1,0}$ ، $N_{2,0}$ ، $N_{3,0}$ و $N_{4,0}$ می باشد ، بنابراین $N_{1,3}$ در بازه $\xi \in [\xi_1, \xi_5]$ غیر صفر می باشد.



شکل ۲-۵ توابع پایه ای موثر برای محاسبه تابع $N_{1,3}$

۲- برای دهانه گره مثل (ξ_j, ξ_{j+1}) ، حداکثر $(p + 1)$ تابع پایه ای $N_{i,p}(\xi)$ غیر صفر وجود دارد ، که شامل توابع $N_{j-p,p}, \dots, N_{j,p}$ می باشد . این ویژگی در شکل ۲-۶ نشان داده شده است؛ به عنوان مثال برای بازه (ξ_3, ξ_4) ، از توابع درجه صفر $N_{i,0}$ ، تابع $N_{3,0}$ غیر صفر می باشد، بنابراین توابع درجه ۳ غیر صفر روی بازه (ξ_3, ξ_4) شامل توابع $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$ می باشد.



شکل ۲-۶ توابع پایه ای درجه ۳ موثر برای (ξ_3, ξ_4)

۳- برای همه مقادیر i, p, ξ ها مقدار تابع پایه ای $N_{i,p}(\xi)$ نامنفی است.

۴- برای هر دهانه گره ای مانند (ξ_j, ξ_{j+1}) داریم: $\sum_{j=i-p}^i N_{j,p}(\xi) = 1$ به ازای $\xi = [\xi_i, \xi_{i+1})$

۵- همه مشتقات $N_{i,p}(\xi)$ در داخل دهانه های گره ای موجود است . و اگر تعداد تکرار هر گره را با

K نشان دهیم $N_{i,p}(\xi)$ در هر گره $p - k$ بار مشتق پذیر و پیوسته می باشد. بنابراین افزایش درجه

تابع باعث افزایش پیوستگی، و افزایش تعداد گره های تکراری باعث کاهش پیوستگی می شود.

۶- بجز در حالت $p = 0$ تابع $N_{i,p}(\xi)$ دقیقاً دارای یک ماکزیمم می باشد.

لازم به ذکر است که تعداد گره های تکراری برای محاسبه پیوستگی تابع $N_{i,p}(\xi)$ ، فقط در بازه

(ξ_i, ξ_{i+1}) محاسبه می شود.

۲-۳-۲ مشتق توابع پایه ای بی-اسپلاین

مشتق اول توابع پایه از رابطه زیر بدست می آید:

$$N_{i,p}'(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p}-\xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (10-2)$$

در حالت کلی مشتق مرتبه k ، $N_{i,p}(\xi)$ بصورت زیر است:

$$N_{i,p}^{(k)}(\xi) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{\xi_{i+p}-\xi_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}} \right) \quad (11-2)$$

که در آن مقدار k نبایستی از p بیشتر شود (مقدار مشتق مراتب بالاتر صفر می باشد). در حالتی که در مخرج کسرها که تفاضل دو گره می باشد صفر ایجاد شود، مقدار آن کسر برابر با صفر در نظر گرفته می شود.

همچنین می توان مشتق مرتبه k توابع پایه ای بی - اسپلاین را بصورت زیر نیز محاسبه کرد. این رابطه مشتق مرتبه k ام این توابع را بر حسب مرتبه k ام توابع مرتبه پایین تر آنها ارائه می کند.

$$N_{i,p}^{(k)}(\xi) = \frac{p}{p-k} \left(\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i} N_{i,p-1}^{(k)}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}^{(k)}(\xi) \right) \quad (12-2)$$

$$k = 0, \dots, p-1$$

۳-۳-۲ دیگر ویژگی های توابع پایه ای بی-اسپلاین

در صورتی که p درجه توابع پایه ای بی - اسپلاین ثابت باشد، فقط بردار گره ای تعیین کننده مقدار تابع $N_{i,p}(\xi)$ می باشد. انواع مختلفی از بردارهای گره ای وجود دارد ولی در این پایان نامه فقط از نوع خاصی از بردارهای گره ای به نام بردارهای گره ای نامتناوب^۱ (یا باز^۲) استفاده می کنیم.

این نوع بردارها به فرم زیر نشان داده می شوند:

^۱ nonperiodic knot vector

^۲ open

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (13-2)$$

همانطور که ملاحظه می شود در بردارهای گره ای نامتناوب گره های ابتدا و انتهای بردار $p + 1$ مرتبه تکرار می شوند. با توجه به تعریف بردارهای گره ای نامتناوب برای آنها می توان دو نکته زیر را ذکر کرد:

- ۱- استفاده از بردار گره ای به فرم $\Xi = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \}$ منتج به چند جمله ای های برنشتین از درجه p می گردد. در واقع توابع پایه ای برنشتین حالت خاصی از توابع پایه ای بی-اسپلاین هستند.
- ۲- اگر $m + 1$ تعداد گره ها ، $n + 1$ تعداد توابع پایه ای و p درجه توابع باشد، آنگاه رابطه $n = m - p - 1$ بین آنها برقرار است، همچنین $N_{0,p}(a) = 1, N_{n,p}(b) = 1$ می باشد.

۴-۳-۲ تعریف منحنی های بی-اسپلاین

در این قسمت به معرفی منحنی ها و سطوح بی-اسپلاین و برخی از ویژگی های آنها پرداخته و سپس مشتق آنها را معرفی خواهیم کرد.

منحنی بی-اسپلاین از درجه p بصورت زیر تعریف می شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad a \leq \xi \leq b \quad (14-2)$$

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی است و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه ای بی-اسپلاین می باشد، که روی بردار گره ای نامتناوبی بصورت زیر تعریف شده است:

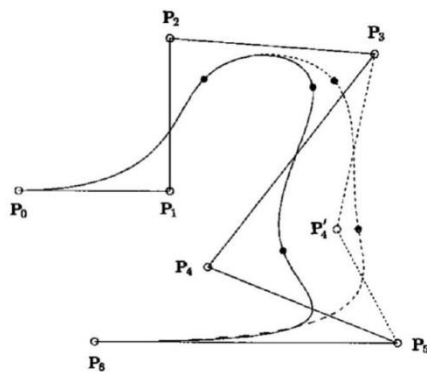
$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (13-2)$$

بردار گره ای فوق دارای $m + 1$ گره است. معمولا فرض می شود که $a = 0$ و $b = 1$ می باشد. به چند ضلعی که از متصل کردن نقاط کنترلی به هم ایجاد می شود، چند ضلعی کنترلی گفته می شود.

برخی از ویژگی های منحنی های بی-اسپلاین عبارتند از:

- ۱- اگر $n = p$ و $\Xi = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ باشد، آنگاه منحنی بی-اسپلاین تبدیل به یک منحنی بزیر می شود.
- ۲- $C(\xi)$ یک منحنی چند جمله ای قطعه ای می باشد؛ اگر p درجه، $n + 1$ تعداد نقاط کنترلی و $m + 1$ تعداد گره ها باشد آنگاه رابطه $m = n + p + 1$ را می توان برای آنها نوشت.
- ۳- نقاط کنترلی ابتدا و انتها دقیقاً روی منحنی قرار دارند، یعنی $C_0 = P_0, C_n = P_n$
- ۴- برای اعمال یک نگاشت بر روی منحنی فقط کافی است این نگاشت را بر نقاط کنترلی منحنی اعمال کنیم.
- ۵- تمام نقاط منحنی در داخل چند ضلعی کنترلی محذب ایجاد شده به وسیله نقاط کنترلی قرار می گیرد.

- ۶- منحنی های بی-اسپلاین دارای قابلیت اصلاح محلی (ناحیه ای) می باشند، بدین مفهوم که اگر P_i را تغییر دهیم منحنی $C(\xi)$ فقط در ناحیه ای داخل بازه $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ تغییر می کند. زیرا به ازای $N_{i,p}(\xi) = 0, \xi \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ می باشد. (شکل ۷-۲)



شکل ۷-۲ یک منحنی درجه ۳ بر روی بردار گره ای $\Xi = \{0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1\}$ تعریف شده است، با تغییر

نقطه کنترلی P_4 به P'_4 فقط قسمتهایی از منحنی که داخل بازه $[\frac{1}{4}, 1]$ قرار دارند تغییر می کنند

- ۷- پیوستگی و مشتق پذیری منحنی $C(\xi)$ مانند توابع پایه ای $N_{i,p} = 0$ می باشد، بنابراین در نقاط بین گره ها بطور نامحدود پیوسته و مشتق پذیر است و در روی نقطه گره ای $p - k$ مرتبه مشتق

پذیر و پیوسته می باشد. که در آن k تعداد تکرار گره مورد نظر می باشد.

مشتق مرتبه K ام منحنی های بی-اسپلاین بصورت زیر تعریف می شود، که برای یک ξ ثابت بر اساس مشتق مرتبه K ام توابع پایه ای آن محاسبه می شود.

$$C^{(k)}(\xi) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)}(\xi) P_i \quad (16-2)$$

اگر در بردار گره ای Ξ گره ابتدا و انتهای آن را حذف کنیم می توان Ξ' را بصورت زیر تعریف کرد، که دارای $(m-1)$ گره می باشد.

$$\Xi' = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_p, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_p \} \quad (17-2)$$

از تعریف فوق می توان نتیجه گرفت که $N_{i+1,p-1}(\xi)$ روی بردار گره ای Ξ برابر با $N_{i,p-1}$ روی بردار گره ای Ξ' می باشد. بنابراین برای مشتق مرتبه اول منحنی $C(\xi)$ می توان تعریف زیر را ارائه کرد:

$$C'(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,p-1}(\xi) Q_i \quad (18-2)$$

که در آن $Q_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}}$ و $N_{i,p-1}(\xi)$ روی بردار گره ای Ξ' محاسبه شده است، بنابراین $C'(\xi)$ یک منحنی بی-اسپلاین از درجه $(p-1)$ می باشد.

با تعمیم روابط (18-2) و استفاده از رابطه بازگشتی توابع پایه ای (معادله (9-2)) و با تعریف $P_i^{(0)} = P_i$ می توان مشتقات مرتبه بالاتر را نیز محاسبه کرد.

$$C^{(k)}(\xi) = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-1}(\xi) P_i^{(k)} \quad (19-2)$$

که در آن:

$$P_i^{(k)} = \begin{cases} P_i & K = 0 \\ \frac{p-k+1}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} (P_{i+1}^{(k-1)} - P_i^{(k-1)}) & k > 0 \end{cases}$$

$$\Xi^{(k)} = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p-k+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p-k+1} \}$$

۵-۳-۲ تعریف سطوح بی-اسپلین

سطوح بی - اسپلین تشکیل شده است از شبکه نقاط کنترلی^۱ که در دو جهت قرار گرفته اند، دو بردار گره ای و حاصلضرب توابع پایه ای بی - اسپلین که بصورت زیر تعریف می شود:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (20-2)$$

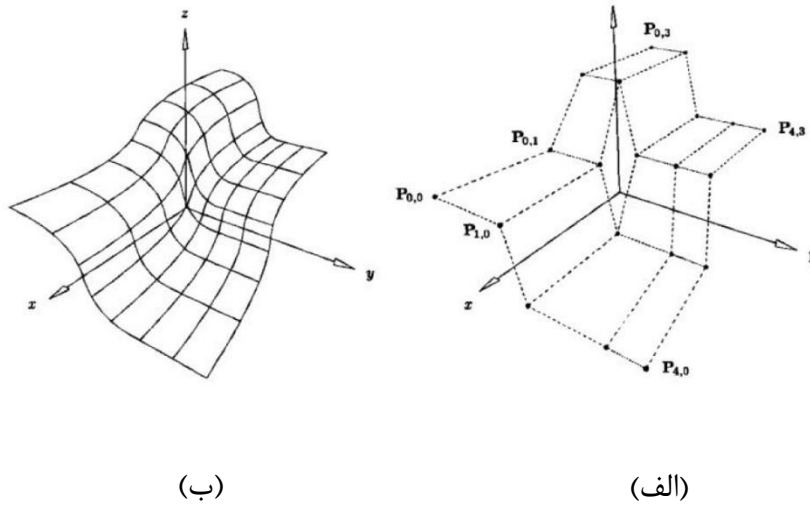
که در آن:

$$\Xi^{(k)} = \{0, \dots, 0, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, 1, \dots, 1\}$$

$$\mathcal{H} = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \}$$

بطوری که بردار گره ای Ξ دارای $r + 1$ گره و \mathcal{H} دارای $s + 1$ گره می باشد.

^۱ Control net



شکل ۸-۲ نمونه یک سطح بی-اسپلاین. (الف) شبکه نقاط کنترلی؛ (ب) سطح مربوطه

۶-۳-۲ مشتق سطوح بی-اسپلاین

مشتق سطوح بی-اسپلاین در سوی ξ $(S_\xi(\xi, \eta))$ و سوی η $(S_\eta(\xi, \eta))$ را می توان بصورت

زیر تعریف کرد:

$$A^{(k)}(\xi) = w(\xi)C^{(k)}(\xi) + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^i(\xi)C^{(k-i)}(\xi) \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} S(\xi, \eta) = S_\xi(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m N_{i,p-1}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j}^{(1,0)}$$

که در آن:

$$P_{i,j}^{(1,0)} = p \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}}$$

$$\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_p, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_p \right\}$$

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}$$

همچنین به طور مشابه داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} S(\xi, \eta) = S_{\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} N_{i,p}(\xi) N_{j,q-1}(\eta) P_{i,j}^{(0,1)} \quad (22-2)$$

که در آن:

$$P_{i,j}^{(0,1)} = q \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\eta_{j+q+1} - \eta_{j+1}}$$

$$\Xi^{(0)} = \Xi$$

$$\mathcal{H}^{(0)} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_q, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_q \right\}$$

در حالت کلی می‌توان مشتق سطوح بی - اسپلاین را بصورت زیر تعریف کرد:

$$\frac{\partial^{k+1}}{\partial^k \xi \partial \eta} S(\xi, \eta) = S_{\eta}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{m-1} N_{i,p-k}(\xi) N_{j,q-1}(\eta) P_{i,j}^{(k,1)} \quad (23-2)$$

که در آن:

$$P_{i,j}^{(k,1)} = (q - l + 1) \frac{P_{i,j+1}^{(k,l-1)} - P_{i,j}^{(k,l-1)}}{\eta_{j+q+1} - \eta_{j+1}}$$

۴-۲ منحنی‌ها و سطوح نریز^۱

۱-۴-۲ معرفی منحنی‌های نریز

یک منحنی نریز از درجه p بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad a \leq \xi \leq b \quad (24-2)$$

^۱ NURBS(NonUniform Rational B-Spline)

که در آن $\{P_i\}$ نقاط کنترلی، $\{w_i\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای بی-اسپلاین از درجه p هستند، که بر روی بردار گره‌ای نامتناوب زیر تعریف شده‌اند.

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\}$$

و با فرض اینکه $a = 0$ و $b = 1$ و به ازای تمام i ها، $w_i > 0$ باشد، می‌توان رابطه (۲-۲۴) را بصورت زیر نوشت:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p} P_i \quad (۲-۲۵)$$

که در معادله (۲-۲۵) داریم:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{i,p}(\xi) w_j} \quad (۲-۲۶)$$

که $\{R_{i,p}(\xi)\}$ توابع پایه‌ای نسبی هستند، که در حقیقت یک تابع کسری قطعه‌ای می‌باشند، مشتق مرتبه k ام منحنی نریز را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$C^{(k)}(\xi) = \frac{A^{(k)}(\xi) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^i(\xi) C^{(k-i)}(\xi)}{w(\xi)} \quad (۲-۲۷)$$

که در آن:

$$A^{(k)}(\xi) = w(\xi) C^{(k)}(\xi) + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^i(\xi) C^{(k-i)}(\xi)$$

۲-۴-۲ معرفی سطوح نریز

یک سطح نریز که در جهت ξ از درجه P ، و در جهت η از درجه q باشد، را می‌توان به وسیله

توابع کسری قطعه‌ای بصورت زیر تعریف کرد:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (28-2)$$

در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی می باشد که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{W_{i,j}\}$ وزن‌ها، $\{N_{i,p}(\xi)\}$ و $\{N_{j,q}(\eta)\}$ توابع پایه‌ای بی-اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره‌ای زیر تعریف شده‌اند.

$$\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\}$$

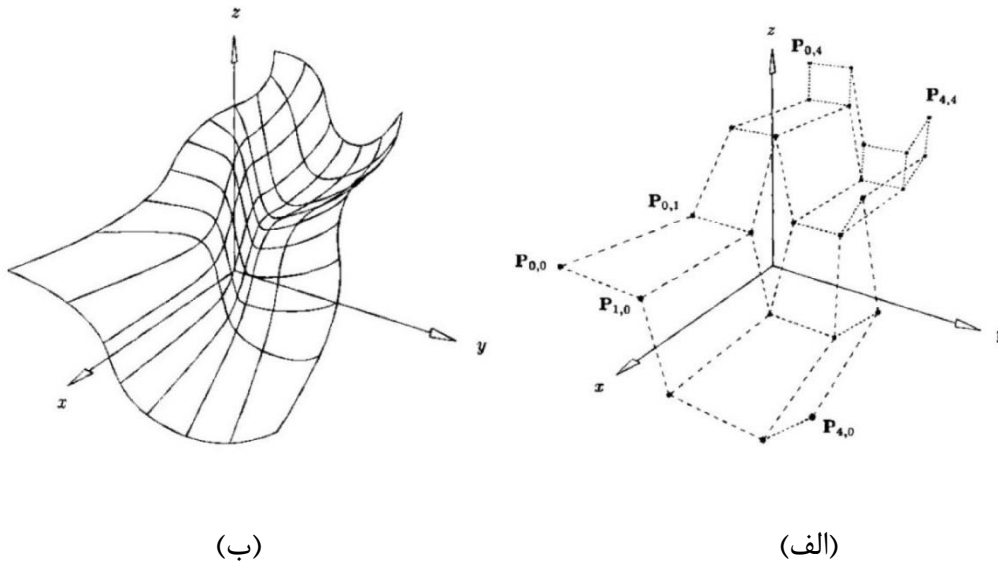
که در روابط فوق همچنان تساوی‌های $r = n + p + 1$ و $s = m + q + 1$ برقرار می باشد.

در روابط (28-2) اگر توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای را بصورت

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad (29-2)$$

تعریف کنیم خواهیم داشت:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (30-2)$$



شکل ۹-۲ شبکه نقاط کنترلی و سطح نریز که در هر دو جهت از درجه ۲ می باشد.

(الف) شبکه نقاط کنترلی؛ (ب) سطح نریز

۳-۴-۲ مشتق سطوح نریز [۱۱]:

مشتق سطوح نریز به وسیله یک مشتق گیری معمولی از رابطه (۲-۲۸) بدست می آید که نتیجه آن

بصورت زیر است:

$$S_{\xi} = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{\bar{N}_{\xi}}{\bar{N}} - \frac{\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}} \right) \quad (۲-۳۱)$$

$$S_{\eta} = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{\bar{N}_{\eta}}{\bar{N}} - \frac{\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}} \right)$$

که در آن \bar{N} و \bar{D} به ترتیب عبارات صورت و مخرج رابطه (۲-۲۸) می باشند؛ که مشتق آنها به صورت

زیر است:

$$\begin{aligned}
\bar{N}_\xi &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'_{i,p}(\xi) N_{i,j}(\eta) w_{i,j} P_{i,j} \\
\bar{N}_\eta &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N'_{i,j}(\eta) w_{i,j} P_{i,j} \\
\bar{D}_\xi &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \\
\bar{D}_\eta &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) w_{i,j}
\end{aligned}
\tag{۳۲-۲}$$

فصل سوم

روش تحلیل انرژی نوومریک

۳-۱ مقدمه [۱۲]

همانطور که در فصل اول اشاره شد مفهوم تحلیل آیزوژئومتریکی برگرفته از، روش های هندسه کامپیوتری، اجزای محدود و روش نقاط محدود می باشد. در این فصل قصد داریم، به معرفی فرمول بندی روش تحلیل آیزوژئومتریکی بپردازیم. برای این منظور همانند اجزای محدود می توان از طریق کاربردهای فیزیکی ویژه، یا بصورت یک مفهوم ریاضی عام به معرفی روش پرداخت، در اینجا روش اول را اختیار می کنیم و بدین ترتیب بررسی خود را به مجموعه ای از مسائل مربوط به مکانیک سازه ها محدود می کنیم.

در بسیاری از مسائل مهندسی پیدا کردن توزیع تنش و کرنش، در محیط های پیوسته کشسان مورد نظر است.

۳-۲ فرمول بندی تحلیل آیزوژئومتریکی

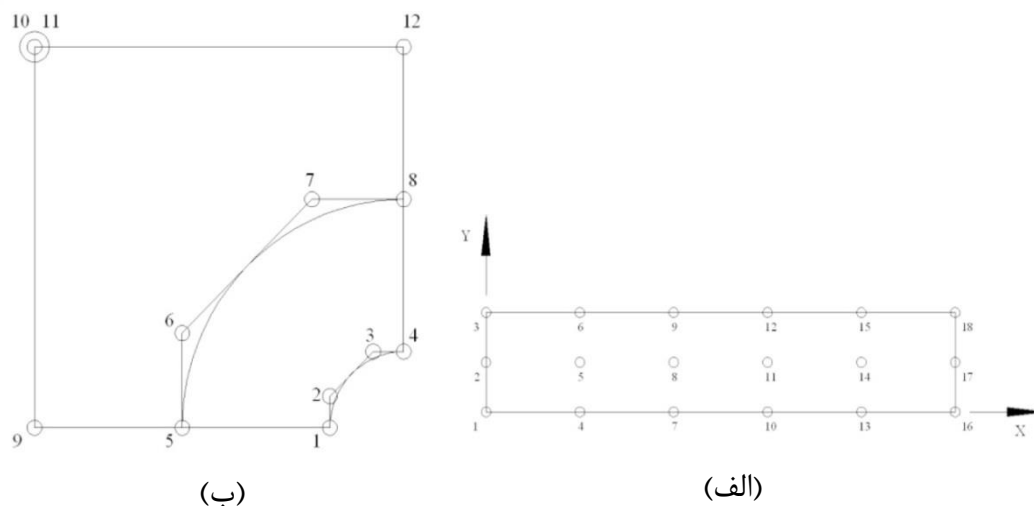
۳-۲-۱ محیط پیوسته ی کشسان

برای مدل کردن یک منحنی یا سطح در نرَبز معمولاً نیاز داریم، که کل دامنه منحنی یا سطح مورد نظر را، به چند زیر دامنه^۱ تقسیم کنیم و هر زیر دامنه را بصورت جداگانه بصورت نرَبز، مدل کنیم. در فصل مشترک زیر دامنه ها بایستی پیوستگی لازم، بسته به شکل مدل برقرار باشد. به همین دلیل ابتدا فرمول بندی آیزوژئومتریکی برای زیر دامنه ها محاسبه کرده و سپس بایستی آنها را با هم اسمبل کنیم. به منظور تحلیل یک محیط پیوسته در آیزوژئومتریکی ابتدا باید آن محیط را به یک محیط گسسته تبدیل کرد، این عمل در آیزوژئومتریکی با استفاده از مفهوم سطوح در نرَبز صورت می گیرد.

همانطور که در فصل دوم اشاره شد، یک صفحه در محیط نرَبز تشکیل شده است از یکسری توابع پایه ای، نقاط کنترلی و بردارهای گره ای بطوری که نقاط کنترلی، تشکیل دهنده شبکه ای از نقاط هستند

^۱ Patch

و هر نقطه که در روی رویه نرَبز واقع شده باشد، به وسیله درونیایی بین نقاط کنترلی، با استفاده از توابع پایه ای نرَبز مشخص می شود. در حقیقت می توان یک رویه نرَبز را در صورت معلوم بودن بردارهای گره ای، با مشخص نمودن نقاط کنترلی آن تعریف کرد. از این مفهوم می توان بطور همزمان، هم در تعریف هندسه مسئله و هم در تعریف فضای پارامتری مورد نیاز تحلیل مسئله استفاده کرد. برای گسسته سازی یک محیط پیوسته در تحلیل آیزوژئومتریک از نقاط کنترلی نرَبز استفاده می گردد. همانطور که اشاره شد برخلاف روش های کلاسیک اجزای محدود، که برای تعریف هندسه و فضای پارامتری تحلیل از دو محیط متفاوت استفاده می کنند، در روش آیزوژئومتریک تعریف هندسه و فضای پارامتری مورد نیاز تحلیل هر دو در محیط نرَبز صورت می گیرد. که این نکته یکی از مزایای مهم این روش نسبت به اجزای محدود می باشد.



شکل ۳-۱ گسسته سازی دامنه در تحلیل آیزوژئومتریک با استفاده از نقاط کنترلی؛ (الف) تیر طره؛ (ب) صفحه سوراخ دار

به طور کلی در روش آیزوژئومتریک مقدار مجهول مسئله (به عنوان مثال تغییر مکان)، در نقاط کنترلی نرَبز محاسبه می شود و سپس به وسیله توابع پایه ای نرَبز در بقیه نقاط تقریب زده می شود. حال اگر نقاط کنترلی را طوری انتخاب کنیم که، مولفه های اول و دوم مختصات این نقاط (P_x, P_y) ، بتوانند هندسه مسئله را برآورد کنند، و همچنین مولفه سوم مختصات این نقاط (P_z) را طوری محاسبه

کنیم، که درونیایی بین این نقاط به وسیله توابع پایه ای نریز نشان دهنده، تغییر مکان آن نقطه باشد، در حقیقت می توان رویه ای تشکیل داد که تصویر آن روی صفحه XY نشان دهنده هندسه مسئله و ارتفاع رویه در هر نقطه (Z) نسبت به صفحه XY نشان دهنده تغییر مکان آن نقطه باشد.

تابع تغییر مکان: هر زیر دامنه^۱ دارای تعدادی نقاط کنترلی ($P_{i,j}$) می باشد. فرض کنیم تغییر مکان در هر نقطه داخل زیر دامنه به صورت یک بردار ستونی \hat{u} تقریب زده شود:

$$u \approx \hat{u} = \sum_i \sum_j R_{i,j} P_{i,j} \quad (1-3)$$

به عنوان مثال در حالت دو بعدی داریم:

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2-3)$$

$P_{i,j}$ ها نمایشگر بردار مولفه های سوم مختصات نقاط کنترلی نریز می باشند، که خود دارای دو مولفه می باشد یکی برای تغییر مکان در جهت u و دیگری برای تغییر مکان در جهت v .

$$P_{i,j} = \begin{Bmatrix} P_{u \ i,j} \\ P_{v \ i,j} \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

و همچنین $R_{i,j}$ ها توابعی معلوم از مکان می باشند و به وسیله آنها می توان تغییر مکان در هر نقطه دلخواه داخل زیر دامنه را از روی تغییر مکان نقاط کنترلی درونیایی کرد. این توابع عملکردی مانند توابع شکل در اجزای محدود دارند.

همانطور که قبلاً اشاره شد توابع $R_{i,j}$ همان توابع پایه ای نریز می باشند و مطابق آنچه در مورد این توابع در فصل چهارم ذکر شد این توابع معمولاً در دستگاه مختصات نرمالی مانند $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ محاسبه می شوند. حال اگر برای هر زیر دامنه یک دستگاه مختصات نرمالی محلی در نظر گرفته شود می توان محاسبات را به طور ساده تری در این دستگاه مختصات انجام داد.

^۱ Patch

$$u = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j} P_{u \ i,j} \\ \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j} P_{v \ i,j} \end{Bmatrix} \quad (4-3)$$

توابع پایه ای به کار رفته در معادله (4-3) همانطور که در فصل چهارم ذکر شد دارای ویژگی های زیادی می باشند که می توان از آنها برای ساده تر شدن محاسبات استفاده کرد یکی از این ویژگی ها که در بخش 2-3-1 و شکل 2-6 بدان اشاره شد؛ نشان می دهد که برای هر ξ, η فقط تعداد محدودی از این توابع غیر صفر می باشند، به طوری که اگر فرض کنیم ξ, η به ترتیب در دهانه های گره ای i ام و j ام قرار دارند (یعنی $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$ و $\eta \in [\eta_j, \eta_{j+1})$ ، و درجه توابع پایه ای در جهت بردار گره ای \bar{e} ، p و در جهت بردار گره ای \mathcal{H} ، q باشند، آنگاه فقط حداکثر $(p+1)(q+1)$ تابع پایه ای غیر صفر وجود خواهد داشت.

بنابراین می توان معادله (4-3) را به معادله زیر کاهش داد:

$$u = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l} P_{u \ k,l} \\ \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l} P_{v \ k,l} \end{Bmatrix} \quad (5-3)$$

همچنین می توان معادله (5-3) را به فرم ماتریسی زیر نوشت: [26]

$$\bar{u} = \bar{R} \cdot \bar{P} \quad (6-3)$$

که در آن \bar{u} ماتریس ستونی تغییر مکان های نقاط کنترلی به فرم زیر است:

$$\bar{u}^{i,j} = [u_{i,j} \quad v_{i,j}]^T \quad (7-3)$$

و \bar{R} ماتریس توابع پایه ای نسبی نریز به فرم زیر است:

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & 0 & \dots & R_{i,j}(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i-p,j}(\xi, \eta) & \dots & 0 & R_{i,j}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (۸-۳)$$

همچنین \bar{p} ماتریس ستونی زیر می باشد:

$$\bar{P} = [P_{ui-p,j-q} \quad P_{vi-p,j-q} \quad \dots \quad P_{ui-p,j} \quad P_{vi-p,j} \quad \dots \quad P_{ui,j} \quad P_{vi,j}] \quad (۹-۳)$$

کرنش ها: با معلوم بودن تغییر مکان در نقاط داخل هر زیر دامنه می توان کرنش ها را در هر نقطه دلخواه به دست آورد. این فرآیند همواره منجر به رابطه ای می شود که می توان آن را به فرم ماتریسی زیر نوشت: [۱۳]

$$\varepsilon = Lu \quad (۱۰-۳)$$

که در آن u بردار تغییر مکان ها، ε کرنش ها، و L عملگر دیفرانسیل می باشد؛ که برای مسائل دو بعدی بصورت زیر تعریف می شود:

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (۱۱-۳)$$

با استفاده از معادله (۳-۶) می توان کرنش را بصورت زیر تقریب زد:

$$\varepsilon = B\bar{P} \quad (۱۲-۳)$$

که در آن $B = L\bar{R}$ می باشد.

تنش ها: در حالت کلی ممکن است ماده داخل هر زیر دامنه تحت تأثیر کرنش های اولیه، برای مثال کرنش های حاصل از تغییرات دما، انقباض، رشد کریستالی و غیره، قرار داشته باشد. اگر این کرنش ها با ε_0 نشان داده شود، تنش ها در جسم، ناشی از تفاوت بین کرنش های موجود و کرنش های اولیه خواهد بود.

علاوه بر این بهتر است چنین فرض شود که جسم مورد نظر، از ابتدا تحت تأثیر مجموعه ای از تنش

های اولیه باقی مانده ، σ_0 معلوم ، قرار گرفته ، که پیش بینی آنها بدون اطلاع از تاریخچه ماده مورد نظر ناممکن است. این تنش ها را می توان به آسانی به تنش های دیگر افزود. بنابراین، با فرض وجود رفتار خطی کشسان، رابطه بین تنش ها و کرنش ها خطی و بصورت زیر خواهد بود.

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (13-3)$$

که در آن D ماتریس کشسانی و نمایشگر خواص ماده مورد نظر است:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (14-3)$$

در مسائل تنش مسطح، تنش نیز نظیر کرنش ها تعریف شده و دارای سه مؤلفه است:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (15-3)$$

یکی از روش هایی که در اجزای محدود برای هم ارز سازی استاتیکی نیروهای گره ای با تنش های مرزی و بارهای گسترده و نهایتاً محاسبه ماتریس سختی ، استفاده می شود؛ به کاربردن روش تغییر مکان مجازی می باشد. به این ترتیب که ابتدا یک تغییر مکان گره ای فرضی (مجازی) را اعمال و کارهای داخلی و خارجی را که نیروهای مختلف در اثنای این تغییر مکان انجام می دهند، مساوی فرض می کنیم. [۱۳]

از همین روش می توان برای محاسبه ماتریس ضرایب در آیزوژئومتری نیز استفاده کرد، به طوری که اگر در یک زیر دامنه مانند Ω که دارای مرزهای Γ می باشد، نیروهای کالبدی b و نیروهی سطحی t وجود داشته باشند، می توان نوشت:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u^T t d\Gamma = 0 \quad (16-3)$$

با استفاده از معادلات (۶-۳) و (۱۲-۳) می توان نوشت:

$$\delta u = \bar{R} \delta \bar{P} \quad (17-3)$$

$$\delta \varepsilon = B \delta \bar{P} \quad (18-3)$$

حال با جایگذاری معادلات فوق در معادله (۱۶-۳) داریم:

$$\int_{\Omega} \delta \bar{P}^T B^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta \bar{P}^T \bar{R}^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \bar{P}^T \bar{R}^T t d\Gamma = 0 \quad (19-3)$$

با حذف $\delta \bar{P}$ و استفاده از رابطه (۱۳-۳) خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} B^T D \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} B^T D \varepsilon_0 d\Omega + \int_{\Omega} B^T \sigma_0 d\Omega - \int_{\Omega} \bar{R}^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{R}^T t d\Gamma = 0 \quad (20-3)$$

از طرفی می توان را از معادله (۱۲-۳) محاسبه نمود:

$$\int_{\Omega} B^T D B \bar{P} d\Omega - \int_{\Omega} B^T D \varepsilon_0 d\Omega + \int_{\Omega} B^T \sigma_0 d\Omega - \int_{\Omega} \bar{R}^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{R}^T t d\Gamma = 0 \quad (21-3)$$

در نهایت می توان این رابطه را به صورت خطی زیر نوشت:

$$K U = F \quad (22-3)$$

که در آن K ماتریس ضرایب (سختی)، U مجهولات مسئله (تغییر مکان ها) و F نیروهای خارجی وارده

بر زیر دامنه می باشند، که بصورت زیر تعریف می شوند:

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (23-3)$$

$$F = \int_{\Omega} \bar{R}^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{R}^T t d\Gamma \quad (24-3)$$

با حل دستگاه معادلات (۲۲-۳) می توان مجهولات مسئله را محاسبه نمود.

۲-۲-۳ معرفی هندسه

در اجزای محدود ایزوپارامتریک برای تقریب زدن هندسه، از همان توابع شکلی استفاده می شود، که برای تقریب زدن مجهول مسئله در نقاط داخلی جزء استفاده شده بود. مشابه آنچه در مورد اجزای محدود ایزوپارامتریک ذکر شد، در آیزوژئومتری نیز به کار برده می شود؛ یعنی از همان توابع پایه ای که برای درون یابی مجهول مسئله در نقاط داخلی زیر دامنه استفاده شده بود، برای برآورد کردن هندسه مسئله هم استفاده می شود. با این تفاوت که در اینجا با توجه به استفاده از روابط نربز می توان هندسه مسئله را بطور دقیق برآورد کرد.

برای تشکیل هندسه در محیط نربز، احتیاج به نقاط کنترلی و بردارهای گره ای می باشد. بردارهای گره ای از پارامترهای مؤثر تعیین توابع پایه ای هستند، بنابراین بردارهای گره ای به کار رفته در تعیین هندسه همان بردارهای گره ای مربوط به تحلیل مسئله می باشند.

همچنین نقاط کنترلی مورد استفاده هم همان نقاطی هستند که برای تحلیل مسئله به کار رفته اند و در حقیقت ما در یک مسئله دوبعدی از مؤلفه های اول و دوم مختصات نقاط کنترلی برای تعریف هندسه و از مؤلفه سوم آن به عنوان مجهول مسئله استفاده می کنیم. بنابراین می توان برای تعریف هندسه از روابط زیر استفاده کرد:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{x i,j} \quad (25-3)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(\xi, \eta) P_{y i,j}$$

که در آن ξ, η پارامترهایی در مختصات نرمال هستند (یعنی $0 \leq \xi, \eta \leq 1$) و $P_{x i,j}, P_{y i,j}$ به ترتیب اولین و دومین مؤلفه های مختصات نقاط کنترلی می باشند.

۳-۳ محاسبه ی ماتریس سختی

۱-۳-۳ معرفی انتگرال ماتریس سختی

همانطور که در بخش ۲-۳ ذکر شد ، می توان با حل دستگاه معادلات (۲۲-۳) مجهولات مسئله را محاسبه نمود. در معادله (۲۲-۳) ضریب مجهولات به صورت زیر تعریف می شود:

$$K = \int_{\Omega_{patch}} B^T(\xi, \eta) DB(\xi, \eta) d\Omega \quad (۲۶-۳)$$

که این انتگرال نشان دهنده ماتریس سختی یک زیر دامنه می باشد. که تشابه زیادی با انتگرال ماتریس سختی در اجزای محدود دارد، اما بایستی توجه داشت که این دو دارای تعاریف متفاوتی با هم می باشند. با توجه به رابطه ارائه شده برای ماتریس سختی می توان ابعاد این ماتریس را حدس زد. اگر تعداد نقاط کنترلی را با NP نشان دهیم، و تعداد درجات آزادی آنها را ۲ فرض کنیم ، ابعاد ماتریس سختی $2NP \times 2NP$ می باشد ، که یک ماتریس مربعی است.

جهت خودکار سازی روش آیزوژئومتریک برای محاسبه انتگرال های ماتریس سختی از انتگرال گیری عددی استفاده می کنیم روش های مختلفی برای انتگرال گیری عددی مانند قاعده سیمپسون، فرمول نیوتن-کوتز، روش انتگرال گیری گاوس و غیره وجود دارد، که در این بحث از روش انتگرال گیری گاوس استفاده خواهیم کرد.

۲-۳-۳ روش انتگرال گیری گاوس

از آنجا که روش آیزوژئومتریک به مقدار زیادی انتگرال گیری نیاز دارد، لازم است بیشترین دقت ممکن را همراه با کمترین هزینه (وقت کامپیوتر) به دست آورد. یکی از دقیقترین روش های انتگرال گیری عددی، فرمول انتگرال گیری گاوس است. انتگرال معین زیر را در نظر بگیرید:

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (27-3)$$

که از روی n عدد مفروض، از مقادیر $f(x)$ ، به صورت عددی باید محاسبه شود. گاوس مسئله تعیین مقادیری از x را بررسی کرد که برای دستیابی به بیشترین دقت ممکن باید انتخاب شوند. به عبارت دیگر، چگونه بازه (a, b) را باید تقسیم بندی کرد تا بهترین نتایج ممکن را بدهد؟ گاوس دریافت که n نقطه بازه نبایستی هم فاصله باشند، بلکه بایستی نسبت به نقطه میانی بازه به طور متقارن قرار گیرند. برخی از نتایج بررسی های گاوس، در زیر آمده است. فرض کنید y به $f(x)$ اشاره دارد که در انتگرالی مانند انتگرال رابطه (27-3) باید محاسبه شود. تغییر متغیری را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$x(r) = \frac{1}{2}(b-a) + r \frac{1}{2}(b+a) \quad (28-3)$$

به طوری که حدهای بی بعد انتگرال گیری r مساوی -1 و $+1$ شوند. مقدار جدید $y(r)$ عبارتست از:

$$y = f(x) = f \left[\frac{1}{2}(b-a) + r \frac{1}{2}(b+a) \right] = \Phi(r) \quad (29-3)$$

با توجه به معادله (28-3) که $dx = \frac{1}{2}(b-a)dr$ ، انتگرال اولیه به صورت زیر در می آید:

$$I = \frac{1}{2}(b-a) \int_{-1}^1 \Phi(r) dr \quad (30-3)$$

گاوس نشان داد که انتگرال معادله (30-3) به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\int_{-1}^1 \Phi(r) = \sum_{i=1}^n W_i \Phi(r_i) \quad (31-3)$$

که W_i و r_i مقادیر جدول بندی شده توابع وزن و طول را بسته به n نقطه در بازه بی بعد $(-1, 1)$ را

نشان می دهند. بدین ترتیب، نتیجه نهایی عبارتست از:

$$I = \frac{1}{2}(b-a) \sum_{i=1}^n W_i \Phi(r_i) = \sum_{i=1}^n f(x(r_i)) W_i \quad (3-32)$$

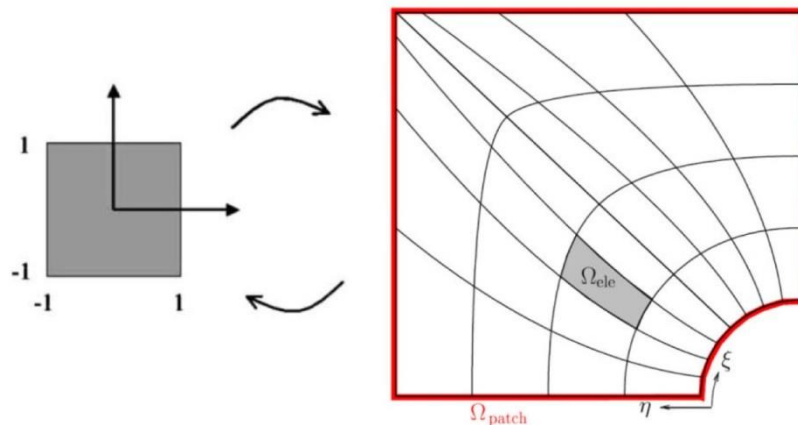
همچنین، گاوس نشان داد که این معادله، از چند جمله ای درجه $(2n - 1)$ دقیقاً انتگرال می گیرد. برای انتگرال های در فضای چند بعدی (با گستره -1 تا $+1$)، مجموعه ای چند گانه از نقاط و وزن ها می توان به دست آورد، جدولی از نقاط گاوس و وزن ها در فضای دو بعدی در زیر ارائه شده است.

جدول ۳-۱ مختصات و وزن های نقاط انتگرال گیری گاوس [۱۴]

m	r_i	W_i
1	0.0	2.0
2	0.577350269189626 . . .	1.0
	-0.577350269189626 . . .	1.0
3	0.0	0.888888888888889
	0.774596669241483	0.555555555555556
	-0.774596669241483	0.555555555555556
4	0.339981043583856	0.652145154862526
	-0.339981043583856	0.652145154862526
	0.861136311590453	0.347854845137454
	-0.861136311590453	0.347854845137454

۳-۳-۳ حل عددی انتگرال ماتریس سختی

برای استفاده از انتگرال گیری به روش گاوس احتیاج به المان بندی زیر دامنه داریم، تا بتوانیم از نقاط گاوس و وزن های ارائه شده برای المان های چهار ضلعی در اجزای محدود استفاده کنیم. المان بندی در آیزوژئومتریک با استفاده از دهانه های گره ای نربز انجام می شود. به طوری که هر زیر مجموعه به صورت $[\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\xi_i, \xi_{i+1}]$ یک المان نربز نامیده می شود. در شکل ۳-۲ نمونه ای از این المان بندی نشان داده شده است.



شکل ۳-۲ زیر دامنه نریز و المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای

حال می توان با انتگرال گیری به روش گاوس بر روی هر یک از این المان ها ، انتگرال را روی کل سطح زیر دامنه محاسبه نمود.

در بخش ۳-۲ ماتریس سختی هر زیر دامنه بصورت زیر ارائه شده:

$$K_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} B^T(\xi, \eta) DB(\xi, \eta) d\Omega \quad (3-33)$$

همانطور که ملاحظه می شود این انتگرال وابسته به $B(\xi, \eta)$ می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$B = L\bar{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \bar{R} \quad (3-34)$$

بنابراین برای حل انتگرال ماتریس سختی احتیاج به مشتقات R نسبت به y, x در دستگاه مختصات کلی داریم. که برای ارتباط بین دستگاه مختصات کلی و فضای پارامتری نریز، ژاکوبین زیر را تعریف می کنیم:

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} \end{Bmatrix} = J_1^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3-36)$$

که در آن $\frac{\partial R}{\partial \xi}$ و $\frac{\partial R}{\partial \eta}$ مشتقات جزئی توابع پایه ای نریز می باشند. همچنین با توجه به اینکه همه پارامتر های انتگرال ماتریس سختی بر حسب مختصات فضای پارامتری نریز می باشد، ساده ترین راه برای انتگرال گیری استفاده از همین فضای پارامتری می باشد. که این عمل باعث ایجاد $\det J_1$ در انتگرال ماتریس سختی می شود. بنابراین می توان رابطه (3-33) را بصورت زیر نوشت:

$$K_{patch} = \iint_{\Omega_{patch}} B^T(\xi, \eta) DB(\xi, \eta) \det J_1 d\xi d\eta \quad (3-37)$$

همانطور که در بخش 3-3-2 ذکر شد، در انتگرال گیری گاوس بایستی مقدار تابع داخل انتگرال، در نقاط گاوس محاسبه شود، ضمن اینکه نقاط گاوس نقاطی از پیش تعیین شده است، که برای المان های مختلف از جمله المان های چهار ضلعی از اجزای محدود محاسبه شده در المان های چهار ضلعی این نقاط در دستگاه مختصات نرمال یا سرندیپیتی مشخص شده است، بنابراین برای اینکه بتوانیم از این نقاط ارائه شده بهره ببریم، بایستی از این نگاشت استفاده کنیم. به طوری که این نگاشت مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه سرندیپیتی المان $\bar{1}$ ام را به دستگاه مختصات نرمال زیر دامنه نریز (ξ, η) منتقل می کند.

$$\xi = \frac{1}{2} [(\xi_{i+1} - \xi_i)r + (\xi_{i+1} + \xi_i)] \quad (3-38)$$

$$\eta = \frac{1}{2} [(\eta_{i+1} - \eta_i)s + (\eta_{i+1} + \eta_i)]$$

که در روابط فوق S, r مؤلفه های مختصات نقاط در دستگاه سرنديپیتی المان و ξ, η مؤلفه های مختصات در دستگاه نرمال زیر دامنه نرېز می باشد.

این نگاشت در انتگرال گیری باعث ایجاد ژاکوبین بصورت زیر می شود:

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad d\xi d\eta = \det J_2 dr ds \quad (39-3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{2} (\xi_{i+1} - \xi_i), & \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \frac{1}{2} (\eta_{i+1} - \eta_i) \end{aligned} \quad (40-3)$$

بنابراین می توان رابطه (37-3) برای ماتریس سختی را به فرم نهایی زیر در دستگاه مختصات سرنديپیتی المان نوشت:

$$K_{patch} = \sum \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T(r, s) DB(r, s) \det J_1 \det J_2 dr ds \quad (41-3)$$

۴-۳ محاسبه ی خطا در روش تحلیل آیزوژئومتری

۱-۴-۳ تشریح روش بازیافت تنش [۶]

به طور کلی در این روش، میدان تنش بهبود یافته برای هر مؤلفه تنش در هر ناحیه به صورت یک

سطح فرضی در نظر گرفته می شود. این سطح فرضی با استفاده از توابع شکل نربزی که برای تخمین تابع مجهول (جابجایی) استفاده شده اند، بدست می آید. یک سطح نربز زمانی بدست خواهد آمد که مختصات نقاط کنترلی آن مشخص شده باشد. با تعریف مختصات x و y هر نقطه کنترلی توسط کاربر، تنها مولفه مجهول جهت تعیین سطح بهبود یافته تنش، مولفه z نقطه کنترلی می باشد. نحوه محاسبه مختصات z نقاط کنترلی به نحوی است که سطح تنش جدید بدست آمده نسبت به سطح تنش قبلی که از تحلیل ایزوژئومتری است، به یک سطح تنش بهبود یافته تبدیل می شود.

اساس محاسبه مختصات نقاط کنترلی و در نتیجه بدست آوردن سطح تنش بهبود یافته برگرفته از خاصیت نقاطی است که در آنها تنش بدست آمده از تحلیل تقریبی نسبت به سایر نقاط از دقت بیشتری برخوردار می باشد. در این نقاط مرتبه همگرایی گرادیان یک تابع، یک مرتبه از مقداری که از تقریب تابع شکل مربوط به حل تقریبی انتظار می رود، بالاتر است. به همین دلیل به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می شود که اولین بار توسط بارلو مطرح شده است [۵].

در تحلیل ایزوژئومتری دو بعدی که دامنه مسئله با توجه به آرایش نقاط گرهی به المانهای چهار ضلعی تقسیم می شود، این نقاط فوق همگرا بر نقاط گوسی المان منطبق هستند. مختصات نقاط کنترلی سطح بهینه تنش با مینیمم کردن فاصله بین این سطح فرضی و سطح تنش بدست آمده از حل ایزوژئومتری در نقاط گوس المانهای هر ناحیه با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات محاسبه می شود.

در صورتی که سطح بازیافتی (بهینه) هر یک از مؤلفه‌های بردار تنش را با σ^* نشان دهیم، با توجه به توابع شکل نربز می توان این سطح را در داخل هر ناحیه به صورت زیر بیان نمود:

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(u,v) P_{i,j} \quad (۳-۴۲)$$

که در آن n تعداد نقاط کنترلی در جهت y و m تعداد نقاط کنترلی در جهت x هر ناحیه، R توابع شکل نربز و P مختصات نقاط کنترلی مربوط به صفحه تنش می باشد. در صورتی که \mathbf{R} و \mathbf{P} را به ترتیب بردار

توابع شکل نریز و بردار مختصات نقاط کنترلی، به صورت روابط (۳-۴۳) و (۳-۴۴) تعریف کنیم، رابطه (۳-۴۲) را می‌توان به صورت (۳-۴۵) بیان نمود.

$$\mathbf{R} = [R_{1,1}, R_{1,2}, \dots, R_{1,n}, R_{2,1}, R_{2,2}, \dots, R_{2,n}, \dots, R_{m,n}]^T \quad (۳-۴۳)$$

$$\mathbf{P} = [P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,n}, P_{2,1}, P_{2,2}, \dots, P_{2,n}, \dots, P_{m,n}]^T \quad (۳-۴۴)$$

$$\sigma^* = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \quad (۳-۴۵)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، تنها پارامتر مجهول جهت تعیین این سطح، مختصات z نقاط کنترلی (بردار \mathbf{P}) می‌باشد. برای تعیین این مقادیر، مجموع مربعات اختلاف تنش بین مقدار بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتری و تنش بهبود یافته را در نقاط گوس مینیمم می‌کنیم. برای این منظور تابع $F(\mathbf{P})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{j=1}^{k_y} \sum_{i=1}^{k_x} (\sigma_{i,j}^* - \bar{\sigma}_{i,j})^2 \quad (۳-۴۶)$$

که در آن $\bar{\sigma}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتری و k_x و k_y به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهت‌های x و y موجود در هر ناحیه می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۳-۴۵) در (۳-۴۶) خواهیم داشت:

$$F(\mathbf{P}) = \sum_{l=1}^K (\mathbf{R}_l^T \mathbf{P}_l - \bar{\sigma}_l)^2 \quad (۳-۴۷)$$

که در آن K تعداد نقاط گوس موجود در هر ناحیه می‌باشد. در نهایت با مشتق‌گیری از تابع $F(\mathbf{P})$ نسبت به مؤلفه‌های z نقاط کنترلی و مساوی صفر قرار دادن آن مختصات نقاط کنترلی صفحه تنش بهبود یافته بدست می‌آید.

$$\frac{\partial F(\mathbf{P})}{\partial P_{i,j}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (۳-۴۸)$$

که در آن ماتریسهای \mathbf{A} و \mathbf{B} به صورت (۴۹-۳) محاسبه می‌شوند.

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i^T \quad ; \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^K \mathbf{R}_i \bar{\sigma}_i \quad (49-3)$$

با داشتن مختصات نقاط کنترلی، سطح تنش مربوط به آن نیز بدست می‌آید. همانگونه که در ادامه نشان داده خواهد شد، این میدان مؤلفه تنش نسبت به سطح تنش بدست آمده از روش آیزوژئومتری دقیق تر می‌باشد و از این رو می‌تواند به عنوان یک تخمین کننده بالقوه خطا برای تحلیل آیزوژئومتری که کار رود. روش کار این تخمین کننده خطا بدین صورت است که با در نظر گرفتن اختلاف بین سطح تنش بازیافتی و سطح تنش بدست آمده از تحلیل آیزوژئومتری برای هر المان، به صورت تقریبی به یک معیاری جهت تعیین میزان خطای موجود در آن المان دست پیدا کرد. در مرحله بعد می‌توان با افزایش نقاط در بردارگرهی و یا نقاط کنترلی در اطراف آن المان، به بهبود محلی شبکه اولیه پرداخت و تحلیل آیزوژئومتری دوباره با توجه به شبکه جدید انجام می‌پذیرد و این روند تا حصول دقت مورد نیاز کاربر ادامه خواهد یافت.

جهت بررسی کارایی این تخمین کننده خطا به مقایسه نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق برای دو مسئله نمونه معروف در الاستیسیته که معمولاً جهت بررسی کارایی برآوردکننده های خطا به کار می‌روند، پرداخته شده است. لذا در ابتدا به چگونگی محاسبه نرم خطای انرژی تقریبی و نرم خطای انرژی دقیق پرداخته می‌شود.

۳-۴-۲ نرم خطای انرژی

استفاده از معیارهای مختلفی برای تعیین میزان خطا متداول است. یکی از معروفترین معیارهای بیان خطا، معیار خطای انرژی است. طبق تعریف، نرم خطای انرژی دقیق تنش برای یک المان به صورت زیر بیان می‌شود [۵]:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (50-3)$$

که در این رابطه σ مقدار دقیق تنش، $\bar{\sigma}$ تنش بدست آمده از حل تقریبی، D ماتریس الاستیسیته و Ω دامنه المان می‌باشد. با توجه به اینکه در حالت کلی، جز در مواردی خاص که حل تئوری بعضی از مسائل الاستیسیته موجود می‌باشد، حل دقیق مسئله در دسترس نمی‌باشد، لذا به جای استفاده از میزان دقیق تنش از میزان بهبود یافته آن جهت محاسبه نرم خطای انرژی استفاده می‌شود. در اینصورت نرم خطای انرژی تقریبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|e\| \square \|\bar{e}\| = \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (51-3)$$

که در اینجا $\boldsymbol{\sigma}^*$ تنش بازیافتی و $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ تنش بدست آمده از تحلیل ایزوژئومتری می‌باشد. برای محاسبه انتگرال فوق روی هر المان از روش انتگرال گیری گوس استفاده شده است. در اینصورت خواهیم داشت:

$$\|\bar{e}\| = \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) |J_1| \cdot |J_2| dr ds \right]^{\frac{1}{2}} \quad (52-3)$$

در رابطه بالا دترمینان J_1 مربوط به انتقال دستگاه مختصات از فضای x و y سراسری به فضای u و v مربوط به توابع پایه نریز و دترمینان J_2 مربوط به انتقال دستگاه مختصات از فضای u و v به فضای s و r (مختصات نرمال المان پایه) می‌باشد.

و در نهایت نرم خطای انرژی برای هر المان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\|\bar{e}\| = \left[\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \bar{\boldsymbol{\sigma}}) |J_1| \cdot |J_2| w_i \cdot w_j \right]^{\frac{1}{2}} \quad (53-3)$$

m و n به ترتیب تعداد نقاط گوس در جهت y و x در هر المان و w وزن نقاط گوسی می‌باشد. در نهایت

مجموع نرم خطای انرژی المانها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می دهد.

فصل چهارم

حل تطبیقی در روش تحلیل آیزورنومریک

۴-۱ مقدمه [۱۵]

امروزه در روش‌های عددی مانند اجزای محدود و روش‌های بدون شبکه، نظریف شبکه بر اساس یک فرآیند تطبیقی برای رسیدن به دقت مطلوب با استفاده از حداقل تعداد نقاط، به یک رویه‌ی استاندارد تبدیل شده است. یک الگوریتم محاسباتی ایده‌آل باید قابلیت نقطه‌گذاری یا شبکه‌بندی مجدد مسئله به گونه‌ای که تراکم این نقاط یا اجزای جدید متوجه مکان‌های با خطای محاسباتی بیشتر باشد را دارا باشد. فرآیند نظریف تطبیقی^۱ به طور گسترده‌ای در اجزای محدود محاسباتی بکار گرفته شده است و در سال‌های اخیر نیز این فرآیند در بسیاری از روش‌های بدون شبکه مورد استفاده قرار گرفته است. در این فصل با معرفی یک فرآیند نظریف تطبیقی نقاط (یا به عبارت دقیق‌تر حل تطبیقی)، قابلیت روش تحلیل آیزوژئومتریک در فرآیند حل تطبیقی برای حل مسائل حوزه مکانیک جامدات نشان داده شده است. فرآیند برآورد خطا و حل تطبیقی معرفی شده بسیار کارآمد بوده و می‌توان گفت به دلیل آنکه روش تحلیل آیزوژئومتریک، ترکیبی از روش‌های بدون شبکه^۲ و دارای شبکه می‌باشد محدودیت‌های روش FEM برای المان‌بندی تا حد زیادی برطرف شده است، این فرآیند بسیار انعطاف پذیرتر و مؤثرتر از آن چیزی است که در FEM انجام می‌شود. به طوری که در این پایان‌نامه نشان داده خواهد شد، در روش تحلیل آیزوژئومتریک می‌توان بدون نگرانی در مورد المان‌ها به فرآیند حل تطبیقی پرداخت.

^۱ Adaptive Refinement

^۲ Meshless

۲-۴ حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتری [۲]

۱-۲-۴ مقدمه

در حقیقت حل تطبیقی به آن دسته از فرآیندهایی گفته می‌شود که در آن همواره در هر مرحله، نیازمند به جوابها در مرحله قبل می‌باشد [۵]. در این فرآیند حل اولیه به روش اجزای محدود عادی نقش بسیار مهمی در تقریب حل و مقدار خطای محاسبه شده دارد.

یکی از اهداف مهم روش آنالیز تطبیقی پیدا کردن شبکه المان بهینه است. منظور از شبکه المان بهینه شبکه ای است که با تعداد المانهای ثابت، حداقل خطای حل به روش اجزای محدود را داشته باشد. اولین تلاش برای رسیدن به شبکه المان بهینه توسط نایس و مارکال^۱ در سال ۱۹۷۴ صورت گرفت [۱۵]. در این روش موقعیت گرهها^۲ به صورت نامعلوم در نظر گرفته می‌شود و سپس با استفاده از حداقل نمودن انرژی پتانسیل می‌توان موقعیت گرهها را تعیین نمود. در روشهای آنالیز تطبیقی شبکه المانی بهینه است که معیار خطای انرژی^۳ به صورت یکنواخت روی کل ناحیه توزیع شده باشد. این تعریف اولین بار در مورد مسائل یک بعدی صورت گرفت [۱۶، ۱۷]. و در حال حاضر این تعریف در همه روشهای آنالیز تطبیقی استفاده می‌شود. توجه به این نکته ضروری است که اگر از معیار خطای دیگری استفاده شود، شبکه المان بهینه تغییر خواهد نمود. به عبارت دیگر تعریف شبکه المان بهینه منحصر به فرد نیست.

در ادامه به بررسی انواع روشهای آنالیز تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتری می‌پردازیم.

^۱ Neice and Marcal

^۲ Knots

^۳ Energy Norm

۴-۲-۲ اضافه کردن گره^۱ [۲]

اضافه کردن گره به بردار گره ای روش معادل روش h-refinement می باشد. می توان به یک منحنی، بدون ایجاد تغییر شکل هندسی و یا پارامتری در آن، گره اضافه نمود. فرض کنیم که گره $\xi_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$ یک گره جدید دلخواه در $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ باشد. در این صورت $n+1$ تابع پایه ای جدید با استفاده از روابط بازگشتی (۲-۹) و بردار گره ای جدید $\bar{\Xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ محاسبه خواهند شد. همچنین $n+1$ نقطه کنترلی جدید، $\{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_{n+1}\}$ ، با استفاده از نقاط کنترلی اولیه ی $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ ، به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$\bar{B}_i = \alpha_i B_i + (1 - \alpha_i) B_{i-1} \quad (1-4)$$

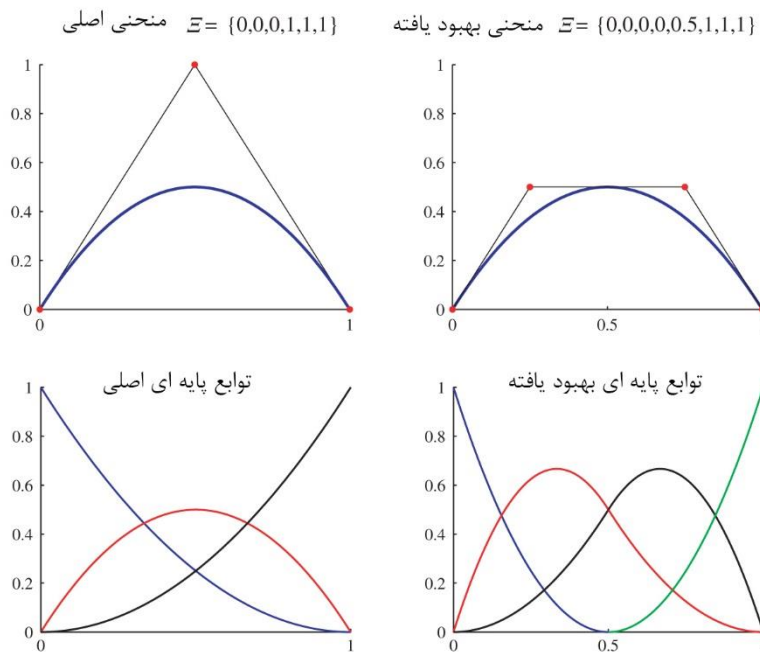
که در آن

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k-p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0, & k+1 \leq i \leq n+p+2 \end{cases}$$

یک گره در بردار گره ای می تواند تکرار شود، اما همانطور که در قسمت ۲-۳-۴ مطرح شد، این کار باعث کاهش پیوستگی منحنی خواهد شد. همچنین پیوستگی منحنی با انتخاب نقاط کنترلی به شکل روابط (۱-۴) حفظ خواهد شد. هر گره داخلی نباید بیشتر از p مرتبه در بردار گره ای ظاهر شود، زیرا در غیر این صورت منحنی غیر پیوسته خواهد شد.

^۱ knot-insertion

یک نمونه از روش اضافه کردن گره در شکل (۴-۱) ارائه شده است. منحنی اصلی از بی-اسپلاین های درجه ۲ تشکیل شده است. بردار گره ای آن $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$ می باشد. منحنی اصلی سمت چپ و در زیر آن توابع پایه ای نمایش داده شده اند. بعد از اضافه کردن یک گره جدید در $\xi = 0.5$ ، منحنی جدید در سمت راست نمایش داده شده است.



شکل ۴-۱ روش اضافه کردن گره

منحنی جدید از نظر هندسی و پارامتری کاملاً مشابه منحنی جدید می باشد، اما توابع پایه ای آن که در سمت راست و پایین ترسیم شده اند و همچنین نقاط کنترلی تغییر کرده اند. در واقع به هر کدام از آنها یک عدد اضافه شده است. این فرآیند (اضافه کردن توابع پایه ای از همان درجه)، می تواند برای غنی سازی فضای جواب بدون تغییر منحنی ادامه پیدا کند. این روش تقسیم کردن به عنوان روشی متناظر (معادل) با روش کلاسیک h-refinement در اجزاء محدود در نظر گرفته می شود.

^۱ Basis Functions

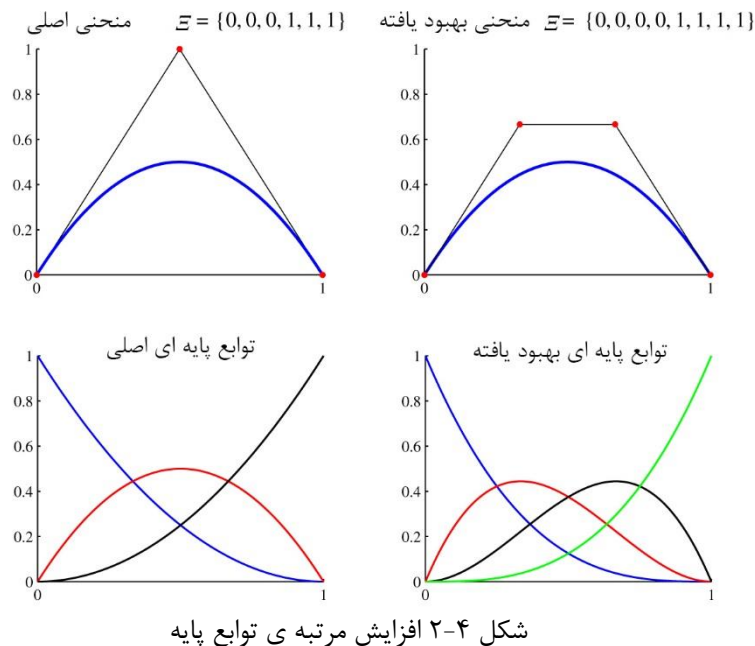
۳-۲-۴ افزایش مرتبه توابع پایه ای^۱ [۲]

مرتبه ی چندجمله ای توابع پایه، بدون تغییر منحنی از نظر پارامتری و هندسی، می تواند افزایش یابد. نکته ی مهمی که در این فرآیند باید به آن توجه کرد این است که برای حفظ عدم پیوستگی مشتق مرتبه ی p منحنی، باید تمام نقاط گره ای در $\bar{\Omega}$ تکرار شوند. تعداد نقاط کنترلی جدید وابسته به تعداد نقاط گره ای موجود می باشد. این فرآیند افزایش مرتبه معادل (متناظر) با روش p -refinement در روش اجزاء محدود می باشد.

مانند حالت h -refinement (به وسیله ی اضافه کردن گره)، فضای جواب که با استفاده از توابعی که افزایش مرتبه یافته اند دهانه بندی می شوند، شامل فضایی که با استفاده از توابع اصلی دهانه بندی شده اند می باشد. بنابراین افزایش مرتبه ی توابع بدون تغییر هندسه ی منحنی بی-اسپلاین ممکن خواهد بود. به طور مشابه، این کار بدون تغییر پارامتری سازی منحنی امکان پذیر خواهد بود. روند انجام این کار به این صورت است که منحنی را به تعداد زیادی منحنی بزیر با استفاده از اضافه کردن گره تقسیم شود، سپس در هر کدام از این قطعات افزایش مرتبه صورت پذیرد، و در نهایت برای متصل کردن قطعات، گره های اضافه حذف گردد.

یک نمونه از این روش (افزایش مرتبه) در شکل (۲-۴) ارائه شده است. منحنی اصلی و توابع پایه ای مرتبه ی دوم نشان داده شده در سمت چپ، همان موارد ارائه شده در مثال قبل می باشند. اما در این مثال تعداد تکرار هر گره یک بار افزایش یافته است. همچنین تعداد نقاط کنترلی و توابع پایه یک عدد افزایش یافته است. محل نقاط کنترلی تغییر کرده است، اما منحنی از نظر پارامتری و هندسی مانند منحنی اصلی می باشد. در منحنی جدید ۴ تابع پایه ای مرتبه ی ۳ موجود می باشد. محل نقاط کنترلی برای منحنی که افزایش مرتبه یافته است، با مثال قبلی متفاوت است.

^۱ P-refinement



۴-۲-۴ حل تطبیقی به روش [۲K]

با توجه به این نکته که ترتیب اعمال روش های اضافه کردن گره و افزایش مرتبه ی توابع پایه ای، دارای اهمیت می باشد، می توان روش دیگری برای افزایش مرتبه ی توابع پایه ای ارائه نمود. به عبارت دیگر با تغییر ترتیب اعمال روش های فوق، نتیجه ی حاصل متفاوت خواهد بود.

اگر یک گره مشخص مانند ξ بین دو گره از یک منحنی با مرتبه ی p اضافه گردد، در این صورت تعداد توابع مشتق توابع پایه ای در ξ برابر $p-1$ خواهد بود. همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد، اگر مرتبه ی تابع را بعد از اضافه نمودن این گره، به مقدار q افزایش دهیم، تعداد هر گره (شامل گره جدیدی که ضافه کرده ایم) افزایش خواهد یافت، به طوری که ناپیوستگی در مشتق درجه p تابع پایه ای حفظ خواهد شد. بدین معنی که تابع پایه ای همچنان دارای مشتق درجه ی $p-1$ پیوسته در ξ خواهد بود. اما اگر در مقابل، به جای روش فوق، ابتدا مرتبه ی منحنی را به q افزایش دهیم و سپس فقط یک گره را به بردار گره ای اضافه کنیم، تابع پایه ای دارای $q-1$ مشتق پیوسته در ξ خواهد بود.

^۱ K-refinement

از روش دوم به عنوان فرآیند حل تطبیقی به روش k (k -refinement) یاد می شود. هیچ روشی مشابه این روش در اجزای محدود وجود ندارد. روش k -refinement فرآیند مهمی می باشد، بطوری که نسبت به روش افزایش مرتبه i تابع پایه ای (p -refinement) موثرتر می باشد.

در روش کلاسیک p -refinement ساختار آرایه ها به دلیل اختصاص توابع پایه ای مختلف به سطح، لبه های سطح، نقاط و گره های داخلی، بسیار نامنظم می باشد. همچنین یک افزایش ناگهانی در تعداد نقاط، به این دلیل که در طول فرآیند حل تطبیقی پیوستگی از درجه C^0 باقی خواهد ماند، بوجود می آید. در روش k -refinement ساختار داخل زیردامنه ها^۱ منظم و افزایش تعداد متغیرهای کنترلی محدود می باشد. این موضوع با ارائه یک مثال واضح خواهد شد، اما قبل از ارائه i مثال باید تعریفی ارائه گردد.

در فضای یک بعدی، بازه i بین دو گره را به عنوان یک المان تعریف می نماییم. بنابراین تعداد المان های یک منحنی برابر با تعداد بازه های غیر صفر موجود در بردار گره i آن منحنی خواهد بود. (به عنوان مثال بازه $i = \{0,0,0,1,2,3,3,4,4,4\}$ دارای چهار المان می باشد).

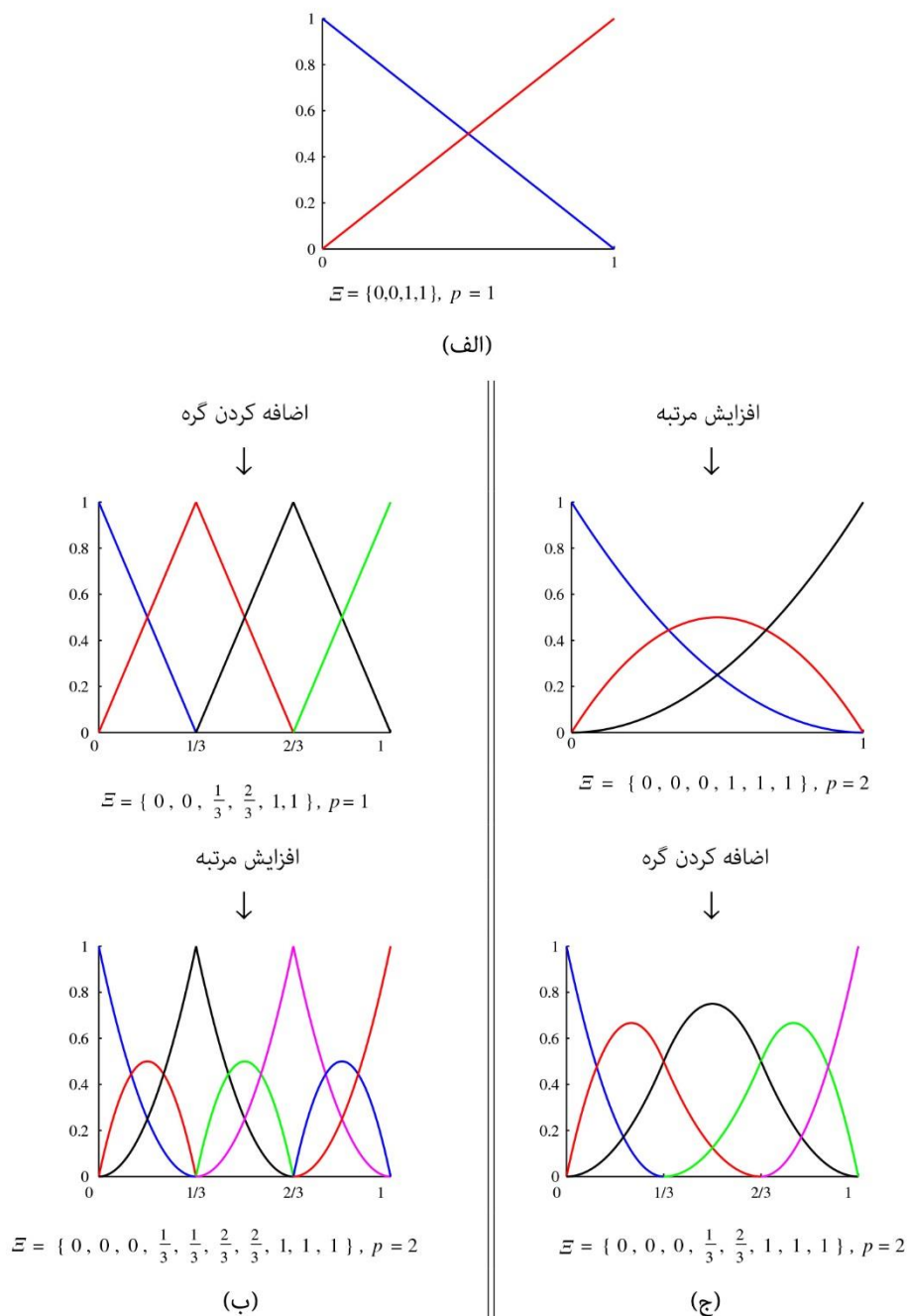
باچنین تعریفی، فرآیند حل تطبیقی مانند شکل (۴-۳) را در نظر می گیریم. فرض می کنیم که دامنه i اولیه شامل یک المان و $p+1$ تابع پایه ای باشد. حال فرآیند h -refinement را تا زمان تشکیل $n-p$ المان و n تابع پایه ای بر روی این دامنه انجام می دهیم. سپس با استفاده از روش p -refinement، مرتبه i تابع را برای حفظ پیوستگی درجه i $p-1$ افزایش می دهیم. چنین فرآیندی نیازمند تکرار هر گره در بردار گره i و اضافه کردن یک تابع پایه ای در هر المان و بنابراین افزایش تعداد کل توابع پایه ای از $n-p$ به $2n-p$ می باشد.

بعدها r مرتبه افزایش مرتبه i تابع پایه ای به این روش، $(r+1)n-rp$ تابع پایه ای خواهیم داشت، در حالی که مرتبه i توابع پایه ای اصلی، همچنان p خواهد بود. این تعداد تابع پایه ای، باتوجه به این که

^۱ Patch

در مسائل واقعی تعداد المان‌ها بسیار بیشتر از مرتبه‌ی توابع پایه‌ای می‌باشد، بسیار زیاد می‌باشد. جهت مقایسه فرآیند k -refinement را با همان دامنه‌ی شامل یک المان انجام می‌دهیم. به این صورت که مرتبه‌ی تابع را r مرتبه افزایش می‌دهیم و در هر مرحله فقط یک تابع پایه‌ای اضافه می‌گردد. سپس فرآیند h -refinement را تا رسیدن به $n-p$ المان ادامه می‌دهیم. در این حالت در نهایت $n+r$ تابع پایه‌ای با درجه‌ی پیوستگی $r+p-1$ خواهیم داشت.

واضح است که این فرآیند باعث کاهش شدید تعداد توابع پایه‌ای از $(r+1)n-rp$ به $n+r$ خواهد شد. همچنین باید به خاطر داشت که در فضای دارای d بعد، این اعداد باید به توان d برسند.



شکل ۳-۴ روش حل تطبیقی k-refinement

(الف) شکل اولیه از یک المان خطی

(ب) روش کلاسیک p-refinement: اضافه کردن گره و سپس افزایش مرتبه که باعث ایجاد هفت تابع پایه ای درجه ی ۲ با

پیوستگی C^0 در بازه های بین گره ها می شود

(ج) روش جدید k-refinement: افزایش مرتبه ی تابع پایه ای و سپس اضافه کردن گره که باعث ایجاد پنج تابع پایه ای درجه ی

۲ با پیوستگی C^1 در بازه های گره ای می گردد

مزیت دیگری که ممکن است در این روش وجود داشته باشد، این است که مشتق های هموارتر^۱ توابع پایه ای می تواند باعث افزایش دقت کمیت ها فیزیکی مانند تنش و کرنش شود و از طرف دیگر، افزایش همواری باعث محاسبه ی بهتر لایه های نازک^۲ توسط این روش خواهد شد.

همچنین اگر شرایط فیزیکی، یک مقدار پایین و خاصی از پیوستگی در یک نقطه را به مسئله تحمیل کند(به عنوان مثال نقاط گوشه درهندسه، مصالح با مشخصات ناپیوسته و ...)، در این صورت این امر با تکرار گره و بدون از بین رفتن ماهیت کلی مسئله، برآورده خواهد شد.

۳-۴ روش حل تطبیقی ارائه شده در این پایان نامه

در اجزای محدود سه روش کلی برای تظریف وجود دارد: [۱۸]

حرکتدهی شبکه^۳

غنی کردن شبکه^۴ (افزودن اجزا)

افزایش مرتبه ی توابع شکل^۵

در فرآیند حرکتدهی شبکه، تعداد کل نقاط ثابت باقی می ماند ولی محل نقاط طبق خطاهای به دست آمده تغییر می کند. در اجزا محدود این روش با محدودیت همراه است زیرا در زمان جابجایی نقاط ممکن است اتصال^۶ اجزا به هم بخورد و بعضی از المان ها همپوشانی پیدا کرده و یا مساحت بعضی از المان ها صفر شود. در فرآیند اضافه کردن اجزا یا شبکه ابتدایی باقی می ماند و اجزای جدیدی در مناطق دارای خطای بیشتر اضافه می شوند و یا شبکه ی جدیدی براساس توزیع خطا ایجاد می شود. این روش

^۱ Smooth

^۲ Thin Layers

^۳ Mesh Moving(r-method)

^۴ Mesh Enrichment(h-method)

^۵ p-method

^۶ Connectivity

رایج‌ترین شیوه‌ی تطریف در اجزای محدود می‌باشد. در فرآیند افزایش مرتبه‌ی توابع شکل در مناطقی که خطا بیشتر است مرتبه‌ی توابع شکل افزایش می‌یابد. این فرایند مستلزم استفاده از توابع شکل سلسله‌مراتبی^۱ می‌باشد که با پیچیدگی‌هایی همراه است.

واضح است که مناسب‌ترین روش تطریف به دلیل اینکه تعداد نقاط و در نتیجه هزینه‌ی محاسباتی ثابت می‌ماند، حرکت‌دهی شبکه می‌باشد. ولی در اجزای محدود به دلیل اینکه المان‌ها بعد از جابجایی دچار بدشکلی می‌شوند استفاده از این روش با مشکلات زیادی همراه است. به همین دلیل در اجزای محدود محبوب‌ترین روش برای تطریف تطبیقی استفاده از روش غنی کردن شبکه است که از لحاظ محاسباتی پرهزینه است. ولی از آنجاییکه به طور کلی در روش‌های بدون شبکه و همچنین روش تحلیل آیزوژئومتریک در فضای پارامتری آن، المان بندی وجود ندارد، استفاده از روش جابجایی نقاط براحتی امکان پذیر است. بنابراین در فرآیند تطریف ارائه شده برای روش تحلیل آیزوژئومتریک، ایده‌ی جابجایی نقاط به کار گرفته شده است.

روش‌های متعددی برای جابجایی نقاط شبکه در اجزای محدود پیشنهاد شده و برای مسائل مختلف به کار گرفته شده است. [۱۹] از میان این روش‌ها چهار روش به نام‌های *trans-finite interpolation*(TFI) [۲۰]، *isoparametric mapping* [۲۲، ۲۱]، *elastic analogy* [۲۳-۲۵]، و سیستم فنرها^۲ [۱۹، ۲۶-۲۸] به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند. TFI و *Isoparametric mapping* الگوریتم‌های ریاضی می‌باشند که برای مسائل شبکه‌های ساختار یافته و ساده مناسب می‌باشند. از طرف دیگر *elastic analogy* و سیستم فنرها برای هر دو حالت مسائل دارای شبکه‌ی ساختار یافته و ساختار نیافته کاربرد دارند و بنابراین برای استفاده در روش‌های بدون شبکه نیز مناسب هستند. در میان الگوریتم‌های حرکت دادن شبکه، روش سیستم فنرها به دلیل سادگی، انعطاف پذیری و نیاز به حافظه‌ی کم (از نظر برنامه نویسی کامپیوتری) بیشتر مورد علاقه می‌باشد. یکی از مشکلاتی که در

^۱ Hierarchical

^۲ Spring Analogy

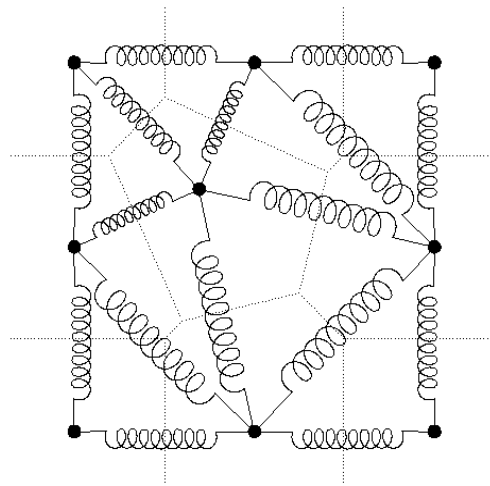
هنگام جابجایی شبکه ها در روش اجزای محدود ممکن است اتفاق بیافتد، این است که ممکن المان

دچار کج شکلی^۱ و یا برعکس شدن شکل آن شود. [۲۶,۱۹]

روش سیستم فنرها نیز می تواند به دو دسته تقسیم شود: مدل های نقطه ای^۲ (فنرها نقطه ای) و مدل های قطعه ای^۳ (فنرهای قطعه ای) [۲۶,۱۹]. در سیستم ها نقطه ای، طول آزاد فنرها برابر صفر در نظر گرفته می شوند، در حالی که در سیستم های قطعه ای [۲۹] طول آزاد فنرها مخالف صفر است و معمولا آنرا برابر با فاصله ی اولیه ی بین نقاطی که فنر بین آنها قرار گرفته است در نظر می گیرند. در سیستم های قطعه ای، برای حل سیستم باید در ابتدای حل جابجایی بخشی از دامنه مشخص باشد، اما در سیستم نقطه ای نیاز به مشخص بودن جابجایی ها در ابتدای حل مسئله نمی باشد. به همین دلیل در این پایان نامه از مدل نقطه ای استفاده می شود. بنابراین در ادامه به توضیح مبانی این روش پرداخته می شود.

نحوه ی کار به این صورت است که در ابتدا تمامی نقاط همسایه در داخل حوزه همانند آنچه در شکل

(۴-۴) نشان داده شده است، توسط فنرهایی به یکدیگر متصل می شوند. [۳۰]



شکل ۴-۴ دیاگرام Voronoi و سیستم فنرها برای فرایند حل تطبیقی

^۱ Distorsion

^۲ Vertex Springs

^۳ Segment Springs

برای یافتن نقاط همسایه از دیاگرام Voronoi [۱۸] استفاده شده است که طبق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

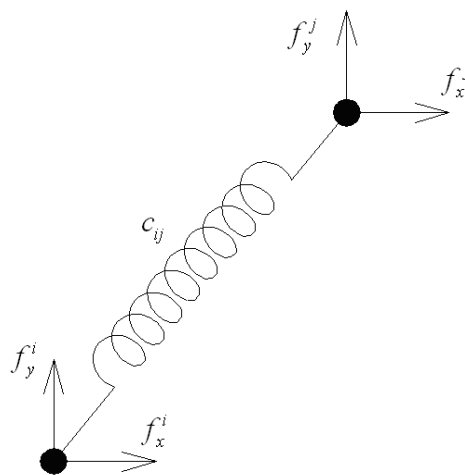
$$T_i = \{x \in \mathcal{R} : d(X, X_i) < d(X, X_j) \forall j \neq i\} \quad (۲-۴)$$

که در آن $d(x, x_i)$ فاصله (اقلیدسی) بین X و X_i است. معنی رابطه‌ی بالا این است که نقاط متعلق به سلول Voronoi i گره i نقاطی هستند که به این گره نزدیکترند تا سایر گره‌ها. نیروی فنرها از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$f_{ij} = c_{ij}(X_i - X_j) \quad (۳-۴)$$

که در آن c_{ij} سختی فنری است که نقطه‌ی i ام را به j ام متصل می‌کند و X_i و X_j مختصات دو نقطه‌ی i و j پس از رسیدن به تعادل هستند.

نمودار جسم آزاد یک فنر در شکل (۴-۵) نشان داده شده است.



شکل ۴-۵ نمودار جسم آزاد فنر بین دو نقطه‌ی i و j

سختی این فنر تابعی از خطای محاسبه شده توسط برآورد کننده‌ی خطا می‌باشد.

$$c_{ij} = (e_i + e_j) \quad (4-4)$$

در رابطه (4-4)، e تابع خطا می باشد. رابطه‌ی (4-3) در حالت دوبعدی و بصورت ماتریسی چنین است:

$$\begin{bmatrix} f_x^i \\ f_y^i \\ f_x^j \\ f_y^j \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

در واقع سیستم فنرها مانند یک خرپای دوبعدی^۱ عمل می کند که نقاط، گره‌ها و فنرها، المان‌های آن هستند.

حال با معلوم بودن سختی فنرها اجازه داده می شود فنرها تا جایی حرکت کنند تا حالت تعادل برقرار شود. به عبارتی بردار F که نشان دهنده‌ی نیروی بین نقاط گرهی است باید صفر شود.

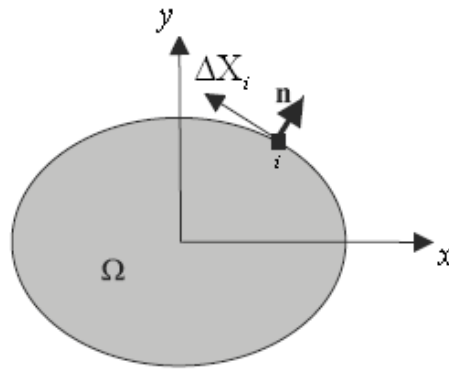
$$F = C.X = 0 \quad (6-4)$$

در رابطه‌ی (6-4)، C ماتریس سختی^۲ کل سیستم می باشد که از جمع بندی سختی فنرهای بین گرهی به دست می آید. پس از اعمال شرایط مرزی^۳ و حل دستگاه معادلات مختصات جدید نقاط بدست می آید. شرایط مرزی مجموعه فنرها چنین است که نقاط روی مرزهای حوزه تنها می توانند در راستای مرز جابجا شوند شکل (6-4) به عبارت دیگر در جهت عمود بر مرز جابجایی آنها صفر است. نتیجه‌ی طبیعی این شرط این است که نقاط واقع بر محل برخورد دو مرز که زاویه‌ی غیر صفر دارند، بی حرکت می مانند. همچنین با این شرایط هیچ نقطه‌ای از یک مرز وارد مرز دیگر نخواهد شد.

^۱ 2D-Truss

^۲ Stiffness Matrix

^۳ Boundary Conditions



شکل ۶-۴ حالت کلی برای شرایط مرزی سیستم فنرها

در زیر روابط مربوط به شرط مرزی آورده شده است.

$$\Delta X_i n_i = [\Delta x_i \quad \Delta y_i] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = [(x_i - \bar{x}_i) \quad (y_i - \bar{y}_i)] \begin{bmatrix} n_x^i \\ n_y^i \end{bmatrix} = 0 \quad (7-4)$$

که در آن ΔX_i بردار تغییر مکان نقطه‌ی i ام و n_i بردار برون‌گرایی عمود بر مرز در این نقطه می‌باشد.

با ضرب کردن دو بردار ΔX_i و n_i در رابطه‌ی بالا داریم:

$$y_i = w + s x_i \quad (8-4)$$

که در آن w و s چنین‌اند:

$$w = \bar{x}_i \frac{n_x^i}{n_y^i} + \bar{y}_i \quad (9-4)$$

$$s = -\frac{n_x^i}{n_y^i} \quad (10-4)$$

روابط فوق برای حالتی که مرز عمود بر یکی از محورهای مختصات باشد به صورت زیر ساده می‌شود:

$$y_i = \bar{y}_i \quad \text{if} \quad n_x^i = 0 (n \perp x) \quad (11-4)$$

$$x_i = \bar{x}_i \quad \text{if} \quad n_y^i = 0 (n \perp y) \quad (12-4)$$

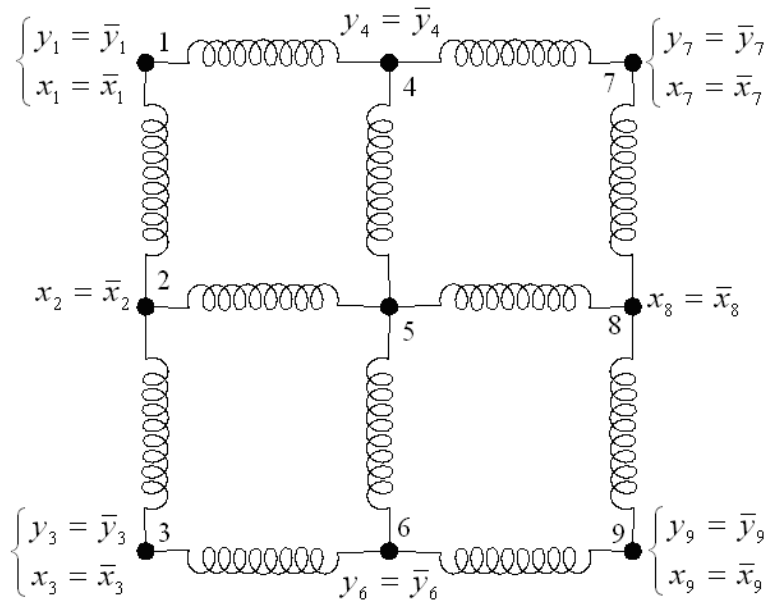
مفهوم این دو رابطه این است که اگر مرز موازی بر محور x باشد، نقطه‌ی واقع بر آن تنها می‌تواند در

جهت x جابجا شود و تغییر مکان آن در جهت y صفر است و همچنین اگر مرزی موازی بر محور y باشد،

نقطه‌ی واقع بر آن تنها می‌تواند در جهت y جابجا شود و تغییر مکان آن در جهت x صفر است (شکل

(۷-۴). این دو شرط مرزی براحتی و همانند اعمال شرایط مرزی دریشه (تغییر مکانی) در روش اجزای محدود اعمال می‌شوند.

نکته‌ی مهم در مورد این روش تطریف این است که در این روش، هدف پیدا کردن بهترین آرایش نقاط با تعداد ثابتی از نقاط است.



شکل ۷-۴ شرایط مرزی سیستم فنرها

۴-۴ برآورد خطا برای حل تطبیقی به روش استفاده از فنرها

اما با توجه به مطالب فوق، نکته‌ی مهم برآورد خطا^۱ در گره‌ها یا به طور کلی در نقاط می‌باشد. از طرفی با توجه به این نکته که در اجزاء محدود و آیزوژئومتری معمولاً خطاها بر روی سطح یک المان محاسبه می‌شوند و همچنین این خطاها در مرز المان‌ها ناپیوسته هستند، باید روش مناسبی برای برآورد خطا در نظر گرفت، که در این جا روش میانگین‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در روش میانگین‌گیری ابتدا مقادیر نرم خطای انرژی در المان‌های نریز محاسبه شده، سپس میانگین نرم‌های انرژی حاصل از المانهای متصل به هر گره به عنوان مقدار نرم خطای آن گره تعریف می‌گردد و مطابق رابطه داریم:

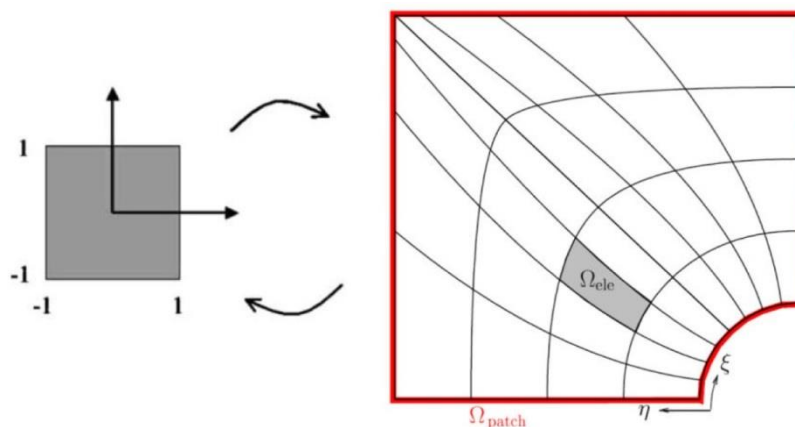
^۱ Error Estimation

$$\bar{e}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n e_i \quad (4-13)$$

که در آن e_i تنش محاسبه شده در المان i و n تعداد المانهای متصل به گره i ام می باشد. حال با داشتن نرم خطای انرژی در گره ها، می توان خطای نقاط کنترلی را نیز بدست آورد.

اما نکته ی دیگری که باید در مورد آن توضیح داده شود این است که، در روش تحلیل آیزوژئومتریک چگونه می توان از روابط فوق استفاده نمود؟

در واقع ایده ی اصلی برای استفاده از اطلاعات بالا به این صورت می باشد که، در روش تحلیل آیزوژئومتریک، برای محاسبه تنش ها و کمیت های مجهول مسئله (که معمولا به صورت انتگرال می باشند و برای حل این انتگرال ها نیاز به داشتن مرزی برای انتگرال گیری داریم)، ابتدا هر زیر دامنه (patch) را با استفاده از بردارهای گره ای^۱ به تعدادی المان تقسیم می کنیم و انتگرال های مسئله را روی این المان ها محاسبه می کنیم. به این صورت که هر زیر مجموعه به صورت $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_i, \eta_{i+1}]$ یک المان نریز^۲ نامیده می شود. در شکل زیر نمونه ای از این المان بندی نشان داده شده است.



شکل ۴-۸ زیر دامنه نریز و المان های ساخته شده به وسیله دهانه های گره ای

^۱ Knot Vectors

^۲ NURBS Element

از اینجا مشخص می شود که مختصات نقاط گره ای در میزان مقادیر تنش محاسبه شده و در نتیجه در میزان خطای بوجود آمده نقش بسزایی دارند. به عبارت دیگر با تغییر مختصات نقاط گره ای میزان خطا تغییر می کند (که روش حل تطبیقی اضافه کردن نقاط به بردار گره ای برای بهبود حل مسئله مبین این روش می باشد). حال با محاسبه ی خطا در سطح یک المان و توزیع آن روی نقاط گره ای المان، می توان شرایط اولیه ی حل مسئله با استفاده از فنرها را فراهم نمود. به عبارت دیگر با این روش ما یک سری نقاط که دارای مقدار خطا می باشند و هندسه ی مسئله را نیز مشخص می کنند در اختیار خواهیم داشت.

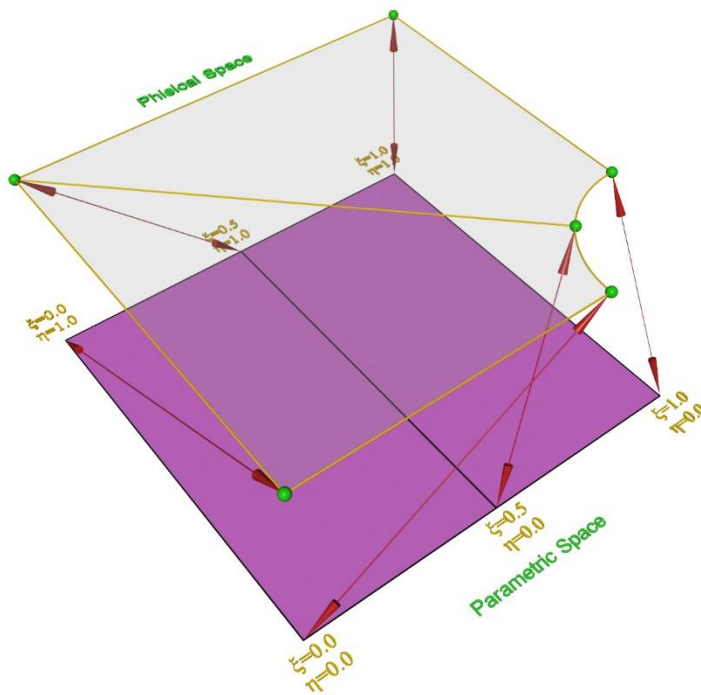
در ادامه می توان به چند روش عمل نمود. بدین صورت که همان شکل (۴-۸) را در نظر گرفت و بین نقاط آن فنر قرار داد و مسئله را حل نمود. به عبارتی در این حالت مسئله را در فضای هندسه ی مسئله (Physical Space) حل می کنیم. در نهایت بعد از بدست آوردن نقاط جدید باید آن ها را با استفاده از فرمول های نریز معکوس دوباره به بردارهای گره ای تبدیل کنیم یا به عبارت صحیح تر آنها را روی بردارهای گره ای تصویر کنیم که با توجه به دشوار بودن این کار و عدم وجود مراجع و منابع کافی برای نریز معکوس در این پایان نامه از این روش استفاده نمی گردد.

اما در حالت دیگر می توان این کار را در فضای پارامتری^۱ بردارهای گره ای انجام داد. بدین صورت که، با توجه به این که می دانیم هر نقطه در فضای هندسه که محل تقاطع دو منحنی در جهت های ξ و η هستند، متناظر با یک نقطه در فضای پارامتری می باشد. یا به عبارت دیگر هر نقطه در فضای پارامتری که محل تقاطع دو گره ξ_i و η_i هستند، در واقع محل برخورد دو منحنی بر روی سطح مسئله می باشند (شکل ۴-۹).

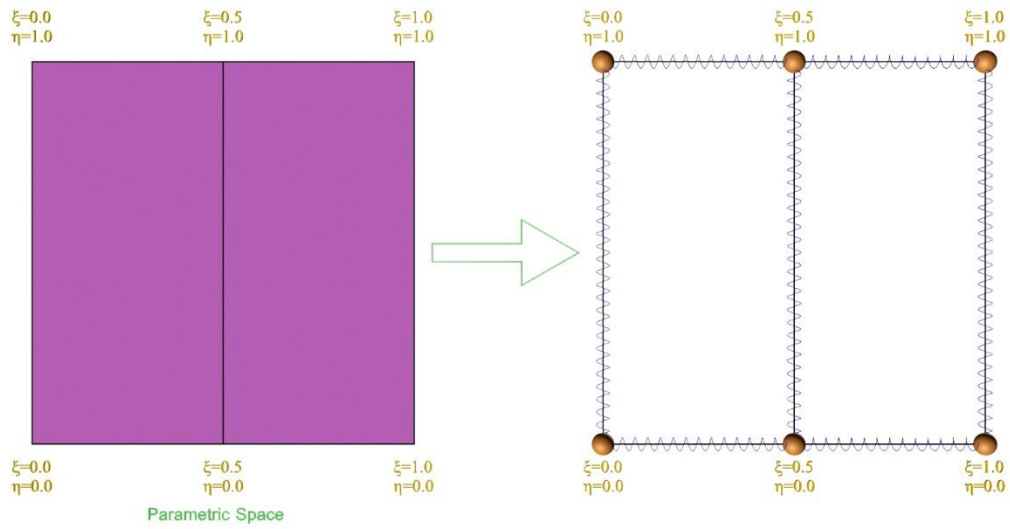
^۱ Parametric Space

۵-۴ حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتری با قرار دادن فنر بین نقاط فضای پارامتری

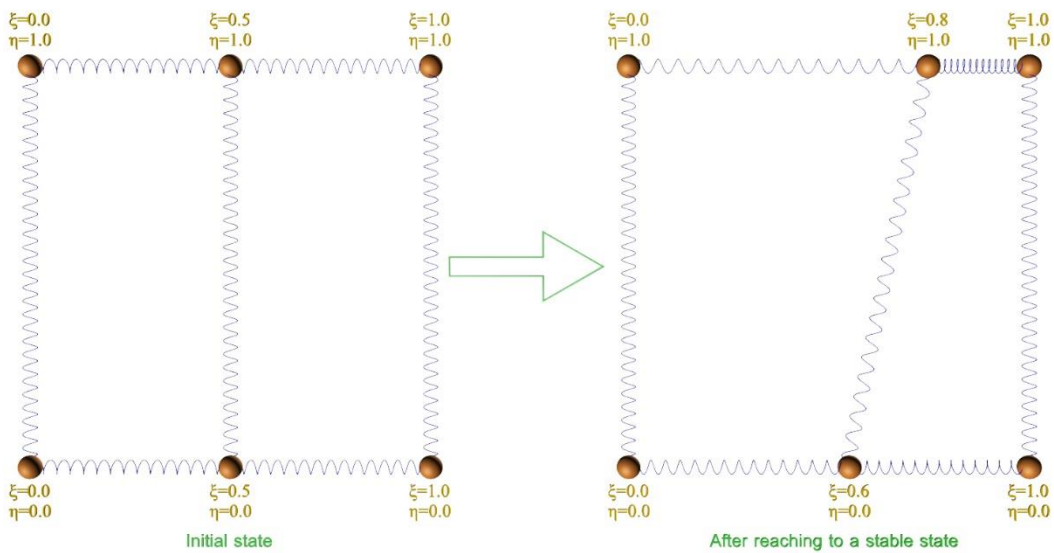
حال با توجه به نکات فوق (بخش ۴-۴) می توان خطاهای محاسبه شده برای نقاط در فضای هندسه برای گره های متناظر آنها در فضای پارامتری در نظر گرفت و سپس با قرار دادن فنر بین این نقاط محل جدید این نقاط را بدست آورد (شکل های ۴-۱۰ و ۴-۹۸).



شکل ۴-۹ نقاط موجود در فضای پارامتری و نقاط متناظر با آنها بر روی هندسه ی مسئله

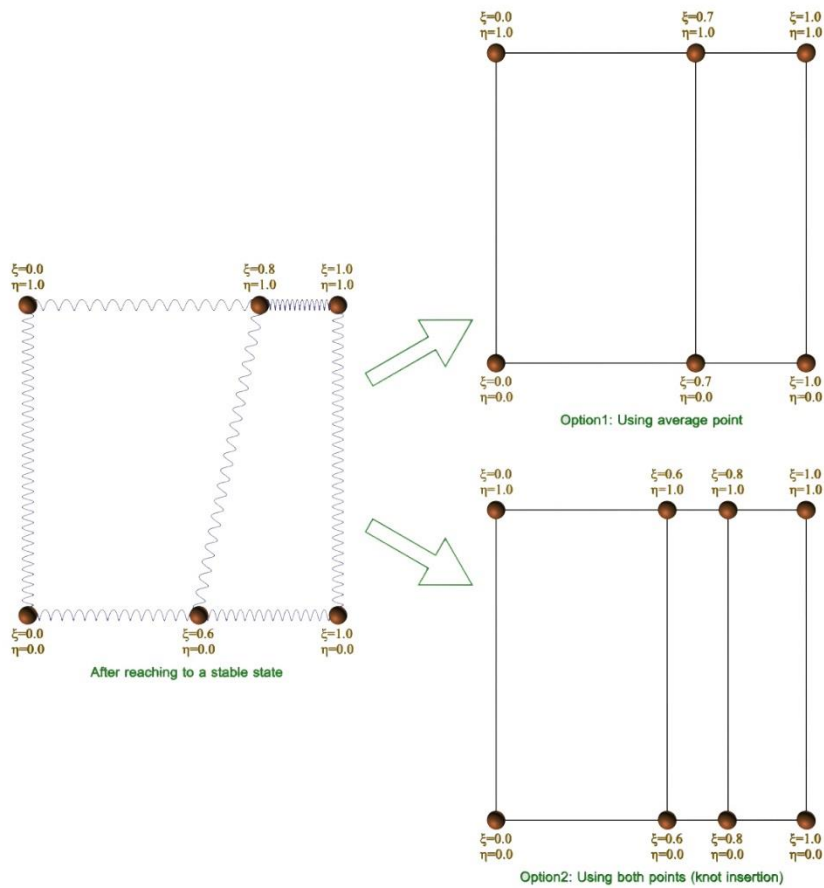


شکل ۴-۱۰ قرار دادن فنر بین نقاط فضای پارامتری بعد از انتقال خطاها از هندسه ی مسئله بر روی آنها



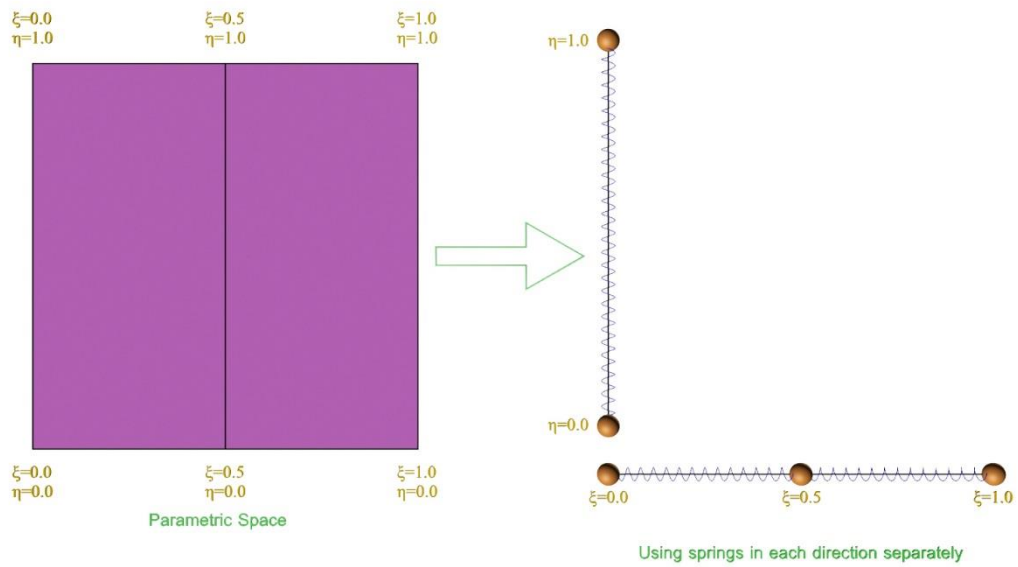
شکل ۴-۱۱ محل جدید نقاط بعد از جابجایی آنها توسط فنرها

بعد از انجام حل تطبیقی با روش فوق، نتیجه‌ی حاصل را باید تفسیر نمود و سپس از آن استفاده نمود. بدین صورت که با توجه به شکل (۴-۱۰)، بعد از بدست آوردن محل جدید نقاط فضای پارامتری به شکل (۴-۱۰) می‌باشد. که در حالت کلی، مفهوم آن بدین صورت است که بعد از جابجایی یک گره در یک راستا از فضای پارامتری، تعداد گره‌ها حداکثر به تعداد گره‌های موجود در راستای دیگر افزایش می‌یابد. به عبارت ساده‌تر اگر بخواهیم نتیجه‌ی حاصل را مورد استفاده قرار دهیم باید نقاط موجود در فضای پارامتری را روی بردارهای گره‌ای تصویر کنیم که با توجه به اینکه نقاط قبلی که در یک راستا قرار داشته‌اند، از یک راستا خارج شده‌اند و باید برای هر کدام از آنها یک گره روی بردار گره‌ای در نظر گرفت. در واقع این روش یک نوع اضافه کردن گره (Knot insertion) به صورت خودکار و موثر می‌باشد (شکل (۴-۱۲)). البته حالت دیگر این است که بعد از جابجایی نقاط و بدست آوردن نقاط جدید در بردار گره‌ای، در صورت نزدیک بودن نقاط به یکدیگر، میانگین آنها را به عنوان یک گره در بردار گره‌ای در نظر بگیریم (۴-۱۲).

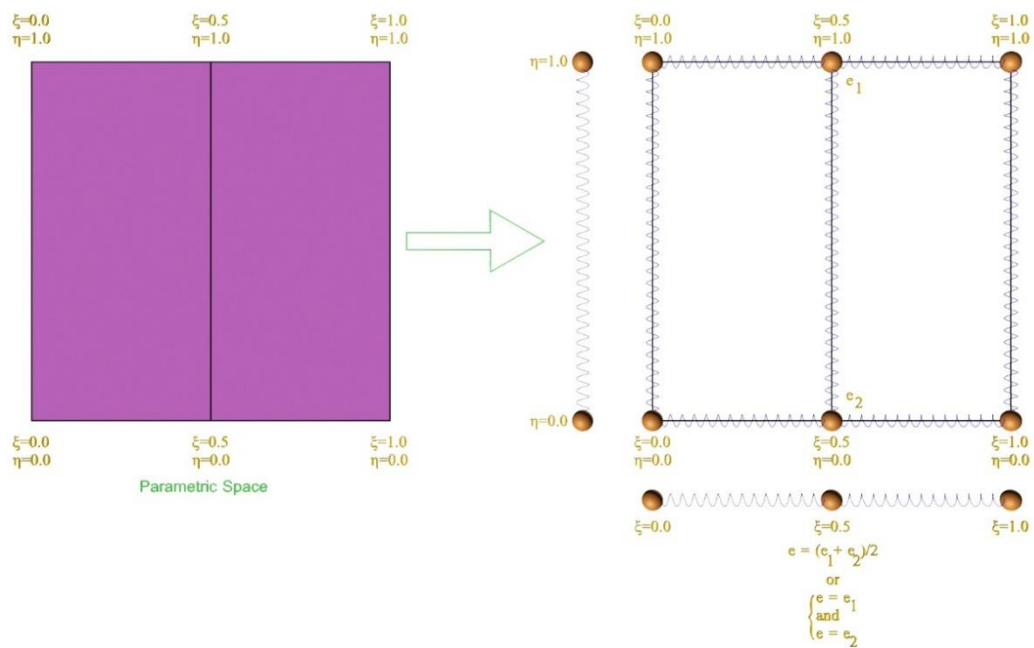


شکل ۴-۱۲ محل جدید نقاط گره ای بعد از تصویر کردن نقاط جایجا شده در فضای پارامتری

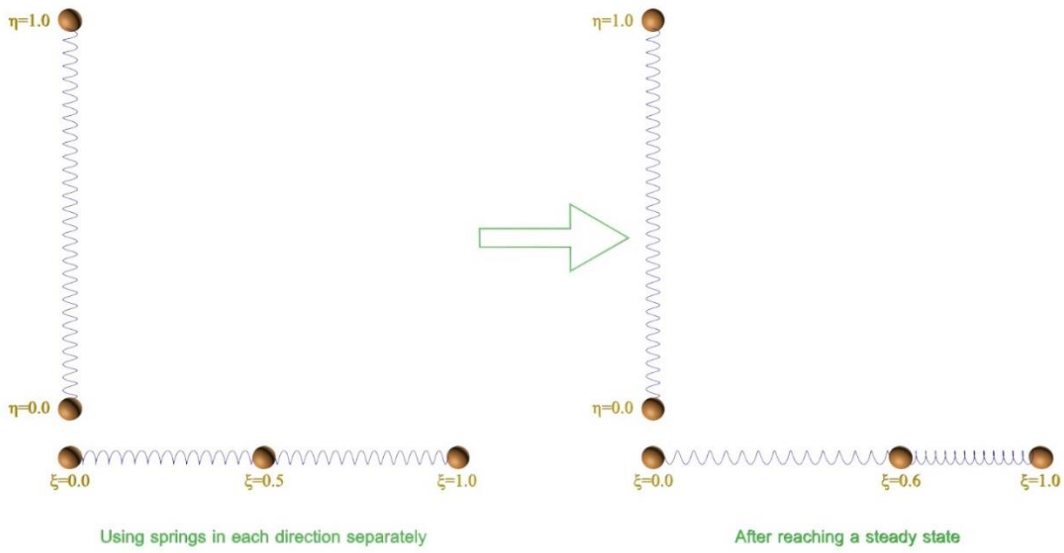
اما حالت دیگر در فضای پارامتری این است که بعد از انتقال خطاها از فضای هندسه بر روی گره های فضای پارامتری، بردارهای گره ای در هر جهت را به صورت جداگانه در نظر بگیریم و سپس بین گره های موجود در هر بردار گره ای فنر قرار دهیم و سپس سیستم فنرها را در این حالت حل کرده و محل جدید نقاط گره ای را بدست آوریم. (شکل های (۴-۱۳)، (۴-۱۴)، (۴-۱۵) و (۴-۱۶))



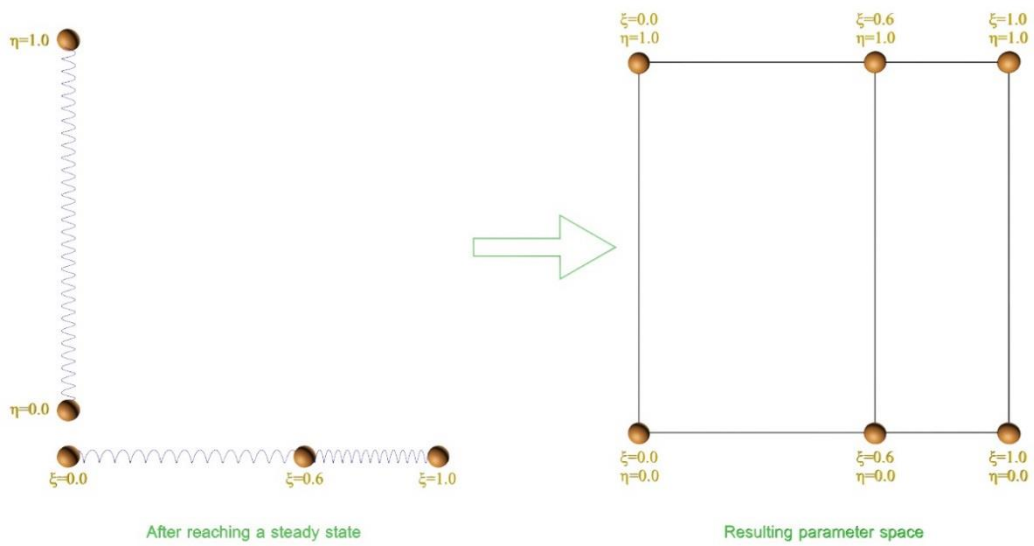
شکل ۴-۱۳ حالت دیگر استفاده از فنرها برای جابجایی نقاط در فضای پارامتری



شکل ۴-۱۴ نحوه ی در نظر گرفتن خطاها در حالت دوم



شکل ۴-۱۵ جایابی نقاط فضای پارمتری در حالت جدید



شکل ۴-۱۶ محل جدید نقاط گره ای بعد از جایا شدن توسط فنرها

اما نکته ای که باید در این حالت به آن توجه کرد این است که خطایی که برای هر گره در هر بردار گره ای در نظر گرفته می شود چه مقدار است؟ به عبارت دیگر برای هر گره در هر بردار گره ای، به تعداد گره های موجود در بردار گره ای در راستای دیگر، کمیت های خطا موجود می باشد که باید مشخص شود که از کدامیک از آنها باید استفاده شود. اولین حالت منطقی که به ذهن می رسد این است که میانگین این خطاها برای گره مورد نظر انتخاب گردد. اما حالت دیگر که کمی پیچیده تر و طولانی تر است، این است که مسئله را با در نظر گرفتن تمام مقادیر ممکن برای هر گره حل کنیم و یا به عبارت دیگر با در نظر گرفتن تمام حالات مختلف (مقادیر مختلف) برای هر گره مسئله را حل کنیم و در نهایت میانگین مختصات های جدیدی را که برای هر گره بدست می آیند را به عنوان مقدار نهایی در نظر بگیریم. مشخصا تفاوت این دو روش از نظر حجم محاسبات بسیار زیاد می باشد. در مورد حجم محاسبات در روش اول، فقط نیاز به یک بار حل مسئله می باشد، اما در روش دوم اگر فرض کنیم که تعداد نقاط گره ای در راستای ξ برابر m و در راستای η برابر n باشد، آنگاه تعداد حالات مختلف برای راستای ξ برابر n^m و برای راستای η برابر m^n می باشد. بنابراین تعداد کل حالاتی که باید مسئله حل شود برابر مجموع این دو حالت، یعنی $n^m + m^n$ می باشد. واضح است که این روش از نظر حجم محاسبات و زمان مقرون به صرفه نمی باشد.

۴-۶ حل تطبیقی در روش تحلیل آیزوژئومتری با قرار دادن فنر بین نقاط کنترلی^۱

اما از ایده ی فنرها در یک حالت دیگر نیز می توان استفاده نمود و آن هم قرار دادن فنر بین نقاط کنترلی می باشد.

در اولین گام باید رابطه ی بین نقاط کنترلی و خطاها مشخص شود. برای مشخص شدن این رابطه، نگاهی به فرمول مربوط به سطوح نریز می اندازیم:

^۱ Control Points

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (14-4)$$

در فرمول بالا نمی توان هیچ رابطه ی مستقیمی بین نقاط کنترلی و خطاهای موجود در مسئله یافت. اما نکته ای که در این رابطه می تواند مورد توجه قرار بگیرد این است که مختصات نقاط کنترلی در توابع پایه ای بی-اسپلاین^۱ ضرب شده اند. از طرفی توابع پایه ای بی-اسپلاین کاملا وابسته به نقاط کنترلی هستند، به طوری که رابطه ی آنها به صورت زیر می باشد:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (15-4)$$

در روابط (۱۵-۴) مشخص است که توابع پایه ای بی-اسپلاین کاملا به نقاط گره ای و یا به عبارت دیگر به بردارهای گره ای وابسته هستند، به طوری که با تغییر در مختصات نقاط گره ای مقدار توابع پایه ای بی-اسپلاین نیز تغییر خواهد نمود. همچنین با توجه به مطالب ارائه شده در بخش (۴-۴)، توانستیم خطاهای موجود در مسئله را به نقاط موجود در فضای پارامتری (نقاط گره ای) انتقال دهیم. یا به عبارت صحیح تر رابطه ای بین خطاها و نقاط گره ای تعریف نماییم.

اکنون با توجه به مطالب فوق، می توان رابطه ی بین خطاها و نقاط کنترلی را به این صورت تبیین نمود. با توجه به اینکه توابع پایه ای بی-اسپلاین تابعی از نقاط گره ای هستند، بنابراین خطای موجود در این نقاط به توابع پایه ای بی-اسپلاین نیز منتقل می شوند، با در نظر گرفتن این نکته که با توجه به فرمول این توابع، مقدار خطای موجود در نقاط گره ای به صورت تجمعی به این توابع انتقال می یابد. از طرف دیگر رابطه ی (۱۵-۴) یک رابطه ی بازگشتی می باشد، به طوری که خطای موجود در توابع با درجه ی پایین تر ($p - 1$) به تابع با درجه ی بالاتر (p) منتقل می شود. بنابراین رابطه ی بین توابع

^۱ B-Spline Basis Functions

پایه ای بی-اسپلاین و خطاها یک رابطه ی مستقیم و مشخص نیست و خطاها به صورت تجمعی به توابع منتقل می شوند. اما در هر حال توابع پایه ای بی-اسپلاین حاوی خطاها می باشند. در نهایت با توجه به اینکه در فرمول مربوط به سطوح نریز (۴-۱۴) مختصات نقاط کنترلی در مقدار توابع پایه ای بی-اسپلاین ضرب می شود، بنابراین می توان مختصات نقاط کنترلی را به عنوان ضرایبی در نظر گرفت که با ضرب شدن در این توابع مقدار آنها را تغییر می دهند.

با توجه به مطالبی که تا اینجا ارائه شد، یک رابطه ی نه چندان روشن بین نقاط کنترلی و خطاهای موجود در نقاط گره ای تعریف گردید که با توجه به مبهم بودن آن چندان کارآمد نخواهد بود. اما برای اینکه بتوان از این رابطه استفاده نمود، باید نگاهی دقیق تر به ویژگی های و مشخصات توابع پایه ای بی-اسپلاین بیاندازیم. به عبارت دیگر ابهام موجود در رابطه ی تعریف شده ی فوق، به دلیل واضح نبودن رابطه ی توابع پایه ای بی-اسپلاین و نقاط گره ای موجود در بردارها ی گره ای می باشد.

ویژگی هایی که در این جا باید مورد توجه قرارگیرند به این صورت می باشند:

۱- اگر ξ خارج از بازه $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ باشد آنگاه $N_{i,p}(\xi)$ صفر است. (این نکته باعث وجود ویژگی کنترول محلی می شود) این ویژگی در شکل ۲-۵ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می شود ، $N_{1,3}$ ترکیبی از توابع $N_{1,0}, N_{2,0}, N_{3,0}$ و $N_{4,0}$ می باشد ، بنابراین $N_{1,3}$ در بازه $[\xi_1, \xi_5]$ $\xi \in$ غیر صفر می باشد.

۲- برای دهانه گره ای^۱ مثل $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ ، حداکثر $(p + 1)$ تابع پایه ای $N_{i,p}(\xi)$ غیر صفر وجود دارد ، که شامل توابع $N_{j,p}, \dots, N_{j-p,p}$ می باشد. این ویژگی در شکل ۲-۶ نشان داده شده است؛ به عنوان مثال برای بازه $[\xi_3, \xi_4]$ ، از توابع درجه صفر، $N_{i,0}$ غیر صفر می باشد، بنابراین توابع درجه ۳ غیر صفر روی بازه $[\xi_3, \xi_4]$ شامل توابع $N_{0,3}, \dots, N_{3,3}$ می باشند.

^۱ Knot Span

از این دو ویژگی، خصوصا ویژگی شماره ی یک می توان نقاط گره ای که در تعیین مقدار یک تابع پایه ای نقش موثر دارند، استفاده نمود. به عبارت دیگر طبق ویژگی شماره ی یک، هر تابع پایه ای از $N_{i,p}$ فقط در بازه ی $[u_i, u_{i+p+1}]$ غیر صفر می باشد و با توجه به اینکه در فرمول سطوح نربز دو تابع پایه ای در هم ضرب می شوند (رابطه ی ۴-۱۴) و از طرف دیگر با توجه به این که هر نقطه ی کنترلی در این دو تابع پایه ای بی-اسپلاین ضرب می شود، بنابراین می توان میانگین خطای توزیع شده در محدوده ی $[u_i, u_{i+p+1}] \times [v_j, v_{j+p+1}]$ که در تعیین مقدار آن توابع پایه ای موثر هستند را به عنوان خطای نقطه ی کنترلی که در این تابع پایه ای بی-اسپلاین ضرب می شود $(P_{i,j})$ ، در نظر گرفت. به این ترتیب خطاها به نقاط کنترلی نیز مرتبط می شوند و می توان با قرار دادن فنر بین آنها، مخصات بهینه را برای آنها نیز بدست آورد.

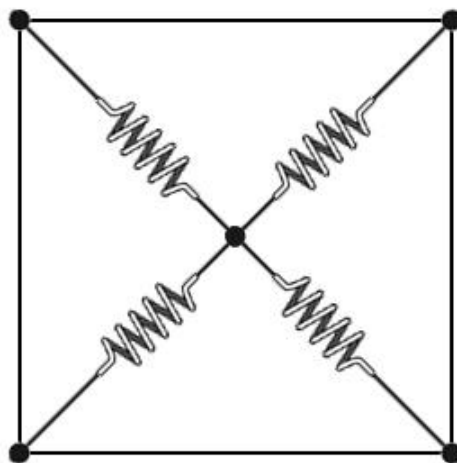
اما نکته ای که در این روش باید به آن توجه نمود این است که طبق ویژگی شماره ی ۲ برای هر گره حداکثر $(p + 1)$ تابع پایه ای غیرصفر می باشند و این بدین معنی است که هر گره می تواند به تعداد $(p + 1)$ تابع پایه ای مربوط شود و بنابراین خطای آن گره بر روی $(p + 1)$ نقطه ی کنترلی در نظر گرفته می شود. این امر باعث همپوشانی خطای نقاط کنترلی می شود (یا به عبارت ساده تر خطای هر گره در چندین نقطه ی کنترلی در نظر گرفته می شود) و می تواند باعث ایجاد خطا در روند حل تطبیقی گردد.

فصل پنجم

جزئیات روش تحلیل سیستم فزرا

۱-۵ تئوری فنرها [۳۱]

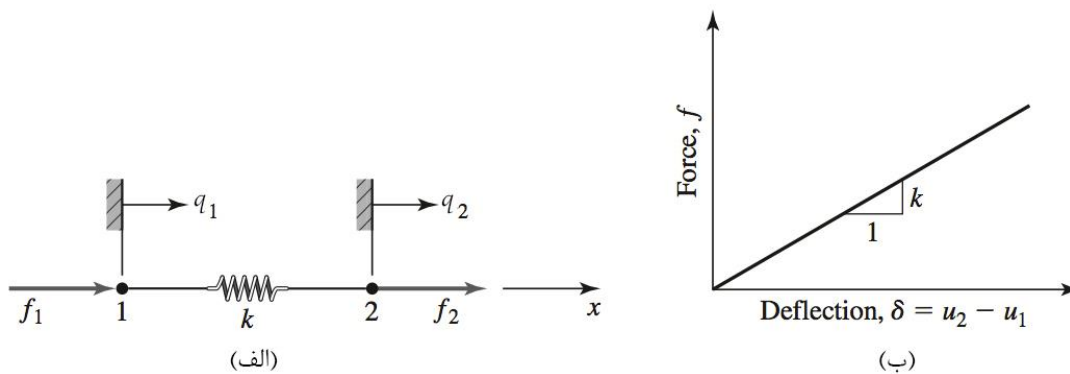
در این فصل در مورد تئوری مربوط به فنرها و روابط حاکم بر آن ها بحث خواهد شد. ابتدا روابط مربوط به فنرها در فضای یک بعدی مطرح خواهد شد و سپس روابط آن ها در مورد فضای دوبعدی تعمیم داده خواهد شد. در انتها روشی برای حل سیستم متشکل از چندین فنر که هیچ باری به آنها وارد نمی شود و فنرها نیز در حالت تعادل نیستند (به عبارت دیگر طول آنها برابر طول آزاد فنر نیست) ارائه خواهد شد. نمونه ای از این سیستم ها در شکل (۱-۵) نمایش داده شده است. نمونه ای از این سیستم را می توان در قابهای نگهدارنده ی بنرها مشاهده کرد. این نوع سیستم ها از فنرهای تشکیل می شوند که به آنها اعضای دو نیرویی می گویند. به عبارت دیگر در این سیستم ها اعضاء یا دارای نیروی محوری کششی و یا نیروی محوری فشاری می باشند. همچنین در این سیستم ها باید نیروها و واکنش های تکیه گاهی فقط در گره ها اعمال شوند و تمام اعضاء فقط در نقاط انتهایی و توسط اتصالات بدون اصطکاک به یکدیگر متصل شوند. با توجه به این که اعضای خرپاها دقیقا مانند این سیستم ها می باشند بنابراین بیشتر روابط ارائه شده در این فصل شبیه روابط خرپاها می باشند.



شکل ۱-۵ سیستم متشکل از چند فنر

۲-۵ فنرهای خطی به عنوان المان های اجزاء محدود

یک فنر الاستیک خطی^۱، یک وسیله ی مکانیکی می باشد که فقط توانایی تحمل نیروی محوری را دارد به طوری که میزان افزایش و یا کاهش طول آن به طور مستقیم با نیروی محوری که به آن وارد می شود متناسب است. ضریب تناسب بین نیروی محوری و تغییر طول فنر، ثابت فنر و یا سختی فنر نامیده می شود که آن را با C و یا K نمایش می دهند. واحد این ضریب تناسب (سختی فنر) نیرو در واحد طول می باشد. با توجه به اینکه فنر الاستیک فقط توانایی تحمل نیروی محوری را دارد، در اینجا یک سیستم مختصات محلی به صورت زیر را در نظر می گیریم:



شکل ۲-۵ المان الاستیک خطی فنر

(الف) المان فنر الاستیک با گره ها، جابجایی های گره ای و نیروهای گره ای

(ب) نمودار نیرو-تغییر شکل

با فرض اینکه جابجایی های گره ای هنگامی که فنر تغییر شکل نداده باشد، برابر صفر باشد، تغییر شکل خالص فنر برابر خواهد بود با:

$$\delta = u_2 - u_1 \quad (1-5)$$

و بنابراین مقدار نیروی محوری ایجاد شده در فنر برابر خواهد بود با:

$$f = k\delta = k(u_2 - u_1) \quad (2-5)$$

اگر معادله تعادل کل فنر را بنویسیم، داریم:

^۱ Linear Elastic Spring

$$f_1 + f_2 = 0 \quad \text{or} \quad f_1 = -f_2 \quad (3-5)$$

اگر تعادل دو گره انتهایی فنر را در نظر بگیریم، روابط زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} f_1 &= -k(u_2 - u_1) \\ f_2 &= k(u_2 - u_1) \end{aligned} \quad (4-5)$$

که اگر این دو معادله را به صورت ماتریسی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad \text{or} \quad [k_e]\{u\} = \{f\} \quad (5-5)$$

که در آن:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

ماتریس سختی المان فنر در سیستم مختصات مفروض (محلی)، $\{u\}$ ماتریس ستونی جابجایی های گره ای و $\{f\}$ ماتریس ستونی نیروهای گره ای می باشند.

۳-۵ فنر های مستوی^۱ (درون صفحه)

در این قسمت با تعمیم روابط حاصل در بخش ۲-۵ روابط مربوط به فنرها را در فضای دو بعدی بدست خواهیم آورد.

۱-۳-۵ سیستم مختصات محلی^۲ و جهانی^۳ (سراسری)

تفاوت اصلی بین فنرها در فضای یک بعدی و فضای دو بعدی در این است که در فضای دو بعدی فنرها در راستاهای مختلفی قرار می گیرند.

برای حل این مشکل دو سیستم مختصات محلی و جهانی (سراسری) را به شکل زیر تعریف می کنیم:

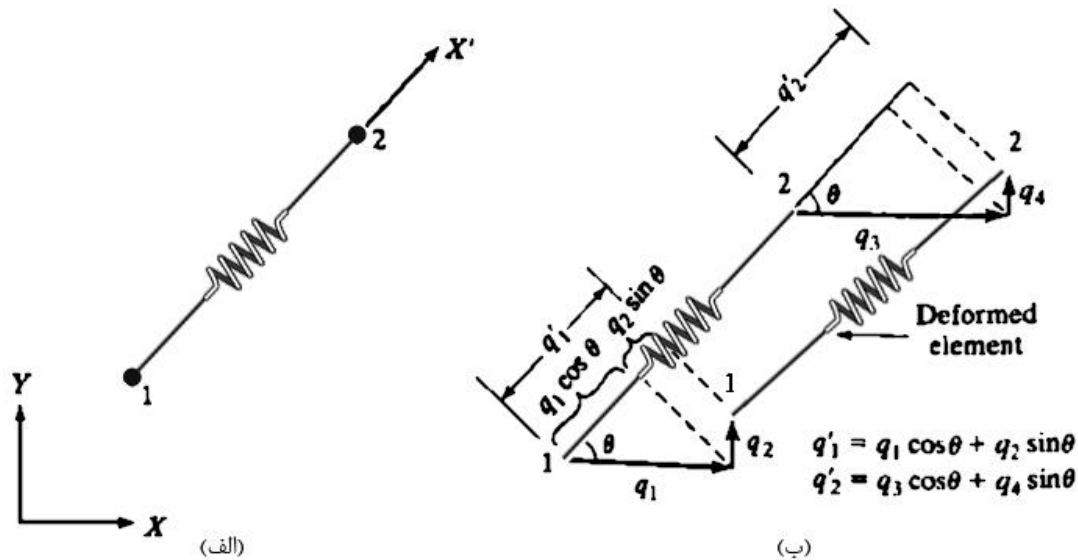
در شکل (۳-۵) یک المان فنر دوبعدی در سیستم مختصات محلی و جهانی نشان داده شده است. در سیستم مختصات محلی دو گره انتهایی فنر با اعداد 1 و 2 علامت گذاری شده اند. سیستم مختصات محلی شامل یک محور x' می باشد که از گره 1 به سمت گره 2 ترسیم شده است. تمام کمیت ها در

^۱ Plain Springs

^۲ Local Coordinates

^۳ Global Coordinates

سیستم مختصات محلی با یک علامت پرایم (') نشانه گذاری خواهند شد. سیستم مختصات سراسری $x - y$ در یک نقطه ثابت است و به جهت المان بستگی ندارد. باید توجه نمود که سیستم مختصات x, y و z یک سیستم مختصات راستگرد می باشد که در آن محور z به سمت بیرون صفحه در نظر گرفته می شود.



شکل ۳-۵ المان فنر دو بعدی (الف) سیستم مختصات محلی (ب) سیستم مختصات سراسری

در سیستم مختصات سراسری هر گره دارای دو درجه آزادی می باشد. در اینجا یک روش سیستماتیک برای شماره گذاری در نظر گرفته می شود، به این صورت که درجات آزادی برای گره j در سیستم مختصات جهانی، برابر $2j - 1$ و $2j$ خواهد بود. همچنین جابجایی ها در سیستم مختصات سراسری برای گره j ، Q_{2j-1} و Q_{2j} خواهد بود.

فرض کنیم که q'_1 و q'_2 به ترتیب جابجایی گره های 1 و 2 در سیستم مختصات محلی باشند. در این صورت بردار جابجایی های گره ای المان در مختصات محلی به صورت زیر خواهد بود:

$$q' = [q'_1, q'_2]^T \quad (7-5)$$

همچنین بردار جابجایی های المان در سیستم مختصات سراسری یک بردار (4×1) به شکل زیر خواهد بود:

$$q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T \quad (8-5)$$

ارتباط بین q و q' به صورت زیر بدست خواهد آمد. با توجه به شکل (۵-۳-ب) می توان دید که q' برابر است با مجموع تصاویر q_1 و q_2 روی محور x' . بنابراین:

$$q_1' = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta \quad (۵-۹-الف)$$

به طور مشابه داریم:

$$q_2' = q_3 \cos \theta + q_4 \sin \theta \quad (۵-۹-ب)$$

در این جا کسینوس های هادی l و m را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$l = \cos \theta \quad (۵-۱۰)$$

$$m = \cos \phi (= \sin \theta)$$

این کسینوس های هادی، کسینوس زوایای هستند که محور محلی x' به ترتیب با محورهای سراسری

x و y می سازد. اکنون می توان روابط (۵-۹-الف) و (۵-۹-ب) را به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$q' = Lq \quad (۵-۱۱)$$

که در آن ماتریس تبدیل L به شکل زیر می باشد:

$$L = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \quad (۵-۱۲)$$

۵-۳-۲ روابطی برای محاسبه ی l و m

در این قسمت روابط ساده ای برای محاسبه ی کسینوس های هادی l و m بر حسب مختصات نقاط

ابتدایی و انتهایی فنر ارائه می گردد. با توجه به شکل (۵-۴) اگر مختصات نقاط 1 و 2 را به ترتیب

(x_1, y_1) و (x_2, y_2) در نظر بگیریم، در این صورت خواهیم داشت:

$$l = \cos \theta = \frac{x_2 - x_1}{l_e}$$

$$m = \cos \phi = \frac{y_2 - y_1}{l_e} (= \sin \theta)$$

$$l_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

شکل ۴-۵ کسینوس های هادی المان فنر

$$l = \frac{x_2 - x_1}{l_e} \quad (۵-۱۳)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{l_e}$$

به طوری که طول فنر از رابطه ی زیر محاسبه می گردد:

$$l_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (۱۴-۵)$$

روابط (۱۳-۵) و (۱۴-۵) بر اساس مختصات گره ای بدست آمدند که این امر استفاده از آنها در برنامه های کامپیوتری را آسان می نماید.

۳-۳-۵ ماتریس سختی المان فنر

یک المان فنر دو بعدی^۱، اگر در سیستم مختصات محلی به آن نگاه شود در واقع همان المان فنر در فضای یک بعدی می باشد. با استفاده از این نکته می توان از روابط بدست آمده در قسمت (۲-۵) برای فنرهای دو بعدی نیز استفاده نمود. بنابراین طبق رابطه ی (۶-۵) ماتریس سختی المان فنر در سیستم مختصات محلی برابر است با:

$$[k_e] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (۶-۵)$$

که در آن k و c سختی فنر می باشند که در ادامه برای جلوگیری از اشتباه بین سختی فنر و ماتریس سختی از علامت c برای نشان دادن سختی فنر استفاده می کنیم. اکنون ما به دنبال بدست آوردن ماتریس سختی در سیستم مختصات سراسری می باشیم که این کار با استفاده از انرژی کرنشی امکان پذیر خواهد بود. انرژی کرنشی^۲ المان فنر در مختصات محلی برابر است با:

$$U_e = \frac{1}{2} q'^T k' q' \quad (۱۵-۵)$$

که در آن q' ماتریس جابجایی های گره ای در سیستم مختصات محلی می باشد. با جایگذاری مقدار $q' = Lq$ در رابطه ی (۱۵-۵) داریم:

$$U_e = \frac{1}{2} q^T [L^T k' L] q \quad (۱۶-۵)$$

از طرفی انرژی کرنشی را می توان در سیستم مختصات سراسری نیز به صورت زیر نوشت:

^۱ 2D-Spring Element

^۲ Strain Energy

$$U_e = \frac{1}{2} q^T k q \quad (17-5)$$

که در آن k ماتریس سختی المان فنر در سیستم مختصات سراسری می باشد. با مقایسه روابط (5-16) و (5-17) مقدار ماتریس سختی در سیستم مختصات سراسری به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$k = L^T k' L \quad (18-5)$$

با جایگذاری مقادیر L و k' از روابط (5-12) و (5-6) خواهیم داشت:

$$k = c \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad (19-5)$$

در نهایت ماتریس سختی کل از روی هم گذاری ماتریس های سختی المان ها بدست خواهد آمد.

5-3-4 محاسبه ی جابجایی ها^۱ در سیستم فنرها

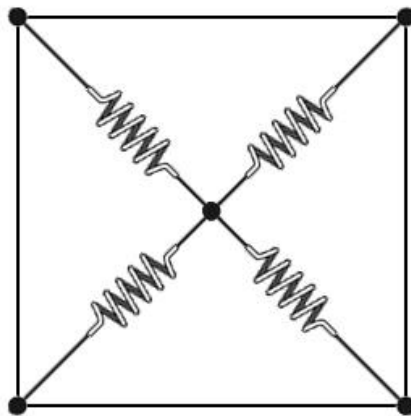
بعد از محاسبه ی ماتریس سختی کل سیستم، و در اختیار داشتن نیروهای گره ای، می توان ماتریس مربوط به نیروهای گره ای را تشکیل داد و سپس با استفاده از رابطه ی زیر با بدست آوردن ماتریس جابجایی، جابجایی های گره ای را بدست آورد:

$$f = kq \rightarrow q = k^{-1}f \quad (20-5)$$

در رابطه ی فوق q ماتریس جابجایی های گره ای، k ماتریس سختی کل سیستم و f ماتریس نیروهای گره ای می باشد. حالت فوق ساده ترین حالت برای یک سیستم متشکل از چندین فنر می باشد. اما حالتی که در این جا با آن روبرو هستیم چالش برانگیزتر از حالت قبل می باشد، به طوری که در این حالت هیچ گونه نیروی خارجی به سیستم اعمال نمی شود و از طرف دیگر در ابتدا فنرها در حالت تعادل نمی باشند بلکه نسبت به طول آزاد خود کشیده فشرده شده اند. در این حالت در ابتدا تعدادی نقطه داریم که محل دقیق آنها مشخص است و ما برای جابجا کردن آنها، فنرهایی را بین آنها قرار می دهیم که ممکن است فاصله ی بین دو نقطه ای که فنر بین آنها قرار می گیرد بیشتر و یا کمتر از طول آزاد فنر باشد که این امر باعث بوجود آمدن نیرو در فنرها می شود. حال این سیستم را به حال خود

^۱ Displacements

رها می کنیم تا به حالت تعادل برسد. برای روشن شدن موضوع شکل (۵-۱) را در نظر می گیریم.



شکل ۵-۱ سیستم متشکل از چند فنر

علت انتخاب این شکل این است که نه تنها دارای ساختار ساده ای می باشد و به راحتی قابل درک می باشد، بلکه نمونه ی فیزیکی و واقعی می توان برای آن پیدا کرد که این امر باعث درک بهتر موضوع می گردد. این شکل را می توان حالت ساده شده ای از قاب های نگهدارنده ی بنرها دانست. در این قاب ها از چهار فنر که یک انتهای هر کدام از آنها به یک گوشه از بنر و انتهای دیگر آنها به گوشه ی متناظر از قاب متصل می باشند، برای نگه داشتن بنر استفاده شده است.

نکته ای که در مورد این سیستم باید به آن توجه نمود این است که با توجه به این که هیچ نیروی خارجی به این سیستم وارد نمی شود، بنابراین ماتریس نیرو در رابطه ی (۵-۲۰) برابر صفر می باشد. صفر بودن ماتریس نیروها باعث می شود که مقدار جابجایی ها از رابطه ی (۵-۲۰) نیز برابر صفر بدست آید:

$$f = kq \rightarrow q = k^{-1}f \rightarrow q = k^{-1}\{0\} \rightarrow q = \{0\} \quad (۵-۲۱)$$

همچنین مشکل دیگری که در مسائل تئوری (حل تطبیقی با استفاده از جابجایی نقاط، ...) وجود دارد این است که طول اولیه (طول آزاد)^۱ فنرها مشخص نیستند و بنابراین نمی توان تغییر طول و در نتیجه

^۱ Equilibrium Length

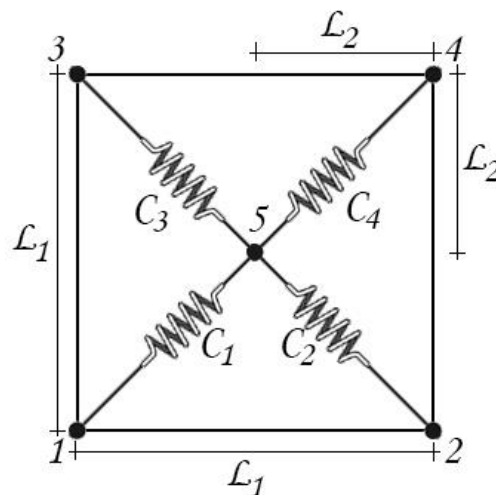
نیروی داخلی ایجاد شده در فنرها را محاسبه نمود.

برای رفع مشکلات فوق، به این روش عمل می‌کنیم. در مورد طول آزاد فنر، باید برای آن یک طول آزاد در نظر گرفت که در این جا به دو صورت می‌توان عمل کرد. اولین حالت این است که طول آزاد فنر را برابر با فاصله ی اولیه ی دو نقطه ای که بین آنها قرار می‌گیرد انتخاب کنیم. به عبارت دیگر در این حالت در ابتدا سیستم در حال تعادل می‌باشد و هیچ نیرویی در فنرها وجود ندارد. در این صورت با توجه به این که نیروهای خارجی نیز صفر هستند، برای این که بتوانیم جابجایی‌ها را بدست آوریم باید در ابتدای حل مسئله میزان جابجایی یک سری از نقاط را بدانیم. به عبارت دیگر این حالت برای مسائلی مناسب می‌باشد که در آنها می‌خواهیم جابجایی نقاط دامنه را در صورت جابجای یک سری از نقاط دامنه بدانیم. اما حالت دیگر این است که طول آزاد فنر را برابر صفر در نظر بگیریم. بنابراین در ابتدای مسئله طول اولیه ی فنر همان تغییر طول فنر می‌باشد و به عبارت دیگر سیستم در همان ابتدا در حال تعادل نیست و فنرها دارای نیروی داخلی می‌باشند. این روش برای حل مسائلی مانند حل تطبیقی مناسب تر می‌باشد. چنین فرضی دارای یک مفهوم دقیق نیز می‌باشد و آن هم این که، فنی که بین دو نقطه قرار می‌گیرد با توجه به این که تمایل دارد تا به حالت تعادل برسد (طول آن برابر طول آزاد یعنی برابر صفر شود)، سعی دارد تا دو نقطه را بر هم منطبق سازد. اما در این حالت نیز با توجه به اینکه نیروهای خارجی صفر می‌باشند، طبق رابطه ی (۵-۲۱) جابجایی‌های برابر صفر بدست خواهند آمد. اما با توجه به اینکه این سیستم دارای نیروی داخلی می‌باشد و در حال تعادل نیست، قطعاً دارای جواب می‌باشد. برای حل این سیستم می‌توانیم به این روش عمل کنیم که برای هر نقطه برآیند تمام نیروهای داخلی ای که از طرف فنرها به آن وارد می‌شود را بدست آورده، و آن را به عنوان نیروی خارجی به آن نقطه وارد کنیم و سپس سیستم را به عوان سیستمی در حال تعادل در نظر بگیریم (به عبارت دیگر فنرها در حالت تعادل در نظر بگیریم) که این نیروهای خارجی به آن وارد شده اند. به این روش به راحتی می‌توان چنین سیستمی متشکل از چندین فنر را با استفاده از روش‌های معمول

اجزاء محدود حل نمود. با توجه به کارایی این روش، در این پایان نامه از این روش استفاده می گردد. در ادامه برای روش تر شدن روش فوق، همان مسئله ی مربوط به شکل (۵-۱) را در نظر می گیریم و آن را هم به صورت دستی و هم با استفاده از برنامه ی اجزاء محدود نوشته شده به همین منظور تحلیل می نماییم.

۵-۳-۵ حل یک مسئله ی نمونه برای سیستم فنرها

در این قسمت برای کنترل صحت روش ارائه شده در قسمت ۵-۳-۴ و همچنین برنامه ای که برای تحلیل سیستم فنرها با این روش نوشته شده است، شکل زیر (۵-۵) را در نظر میگیریم و آنرا هم به صورت دستی و هم با استفاده از برنامه ی نوشته شده تحلیل و در انتها نتایج را با هم مقایسه می نماییم.



شکل ۵-۵ سیستم متشکل از چند فنر

اطلاعات مربوط به مسئله به شرح زیر می باشند:

$$L_1 = 10 \text{ cm} , L_2 = 5 \text{ cm} , C_1 = 2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} , C_2 = 5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} , C_3 = 8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}} , C_4 = 7 \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

نتایج تحلیل به روش دستی

بعد از تحلیل، مقدار جابجای گره 5 به صورت زیر محاسبه می شود:

- جابجای در راستای x گره 5 = 1.62393 cm

- جابجایی در راستای y گره 5 = 3.93162 cm

نتایج حاصل از برنامه ی کامپیوتری

فایل ورودی و نتایج برنامه در انتهای این بخش ذکر شده اند. نتایج حاصل از برنامه برای گره 5 به صورت زیر می باشند:

- جابجای در راستای x گره 5 = 1.6240 cm

- جابجای در راستای y گره 5 = 3.9318 cm

نتایج خروجی برنامه نشان می دهد که برنامه ی نوشته شده به درستی کار می کند و از دقت کافی نیز برخوردار می باشد.

فایل ورودی برنامه :

```
Next line is problem title   << 2D Spring System ANALYSIS >>
EXAMPLE 4-99
NN NE
5 4
ND NL
8 2
Node# X Y
1 0 0
2 10 0
3 0 10
4 10 10
5 5 5
Elem# N1 N2 C
1 1 5 2
2 2 5 5
3 3 5 8
4 4 5 7
DOF# Displacement
1 0
2 0
3 0
4 0
5 0
6 0
7 0
```

نتایج خروجی برنامه:

==== First Time Run =====

Output data for Input data from file d:\spring499.inp

EXAMPLE 4-99

Node# X-Displ Y-Displ

1	5.0507E-05	5.0507E-05
2	-5.2448E-05	5.2448E-05
3	-8.3915E-05	8.3915E-05
4	1.7677E-04	1.7677E-04
5	1.6240E+00	3.9318E+00

Node# New-X-Pos New-Y-Pos

1	5.0507E-05	5.0507E-05
2	9.9999E+00	5.2448E-05
3	-8.3915E-05	1.0000E+01
4	1.0000E+01	1.0000E+01
5	6.6240E+00	8.9318E+00

DOF# Load

1	0.0000E+00
2	0.0000E+00
3	0.0000E+00
4	0.0000E+00
5	0.0000E+00
6	0.0000E+00
7	0.0000E+00
8	0.0000E+00
9	1.0000E+01
10	4.0000E+0

فصل ششم

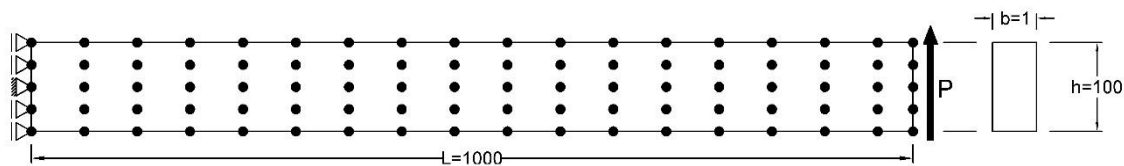
حل مسئله نمونه

۱-۶ مقدمه

در این قسمت مسائل نمونه ای جهت بررسی صحت و میزان کارایی روش ارائه شده در این پایان نامه برای حل تطبیقی ارائه می گردد. بدین منظور ابتدا تیر طره تیموشنکو با روش آیزوژئومتریکی تحلیل شده و سپس با استفاده از نتایج حاصل از این تحلیل و توزیع خطاها بر فضای پارامتری، اقدام به حل تطبیقی به روش جایجایی نقاط فضای پارامتری و جایجایی نقاط کنترلی و در نهایت ترکیب این دو روش، گردیده است.

۲-۶ تیر طره تیموشنکو

در این قسمت نتایج حاصل از تحلیل یک تیر طره با روش آیزوژئومتریکی و در نهایت انجام حل تطبیقی با استفاده از فنرها ارائه می گردد. تیر طره به صورت الاستیک خطی ایزوتروپیک و در شرایط تنش مستوی فرض می گردد. شکل (۱-۶) پارامترهای مورد نیاز در این مسئله را نشان می دهد.



شکل ۱-۶ شرایط هندسی و مرزی تیر طره

مشخصات هندسی	خواص مصالح
$L = 1000^{mm}$ طول تیر	$E = 210^{GPA}$ مدول الاستیسیته
$h = 100^{mm}, b = 1^{mm}$ ابعاد مقطع	$\nu = 0.3$ ضریب پواسون
$ntctp = 90$ تعداد کل نقاط کنترلی	$Y = 0.24^{GPA}$ تنش تسلیم
$npatch = 1$ تعداد زیردامنه ها(patch)	$P = 30^{KN}$ نیروی متمرکز اعمالی

تنش های دقیق این تیر توسط تیموشنکو به صورت زیر ارائه شده است: [۳۲]

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)}{I}, \sigma_y=0, \tau = \frac{P}{2I}(c^2 - y^2)$$

برای مدل سازی و تحلیل این تیر همانند شکل (۶-۱) به روش آیزوژئومتریک از ۹۰ نقطه ی کنترلی و یک زیردامنه استفاده شده است. همچنین برای تحلیل از توابع پایه ای درجه ی دو (مرتبه ی ۳) با بردارهای گره ای به شکل زیر استفاده شده است [۳۳]:

$$u = \{0, 0, 0, 0.625, 0.125, 0.185, 0.25, 0.3125, 0.375, 0.4375, 0.5, 0.5625, 0.625, 0.6875, 0.75, 0.8125, 0.875, 0.9375, 1, 1, 1\}$$

$$v = \{0, 0, 0, 0.35, 0.65, 1, 1, 1\}$$

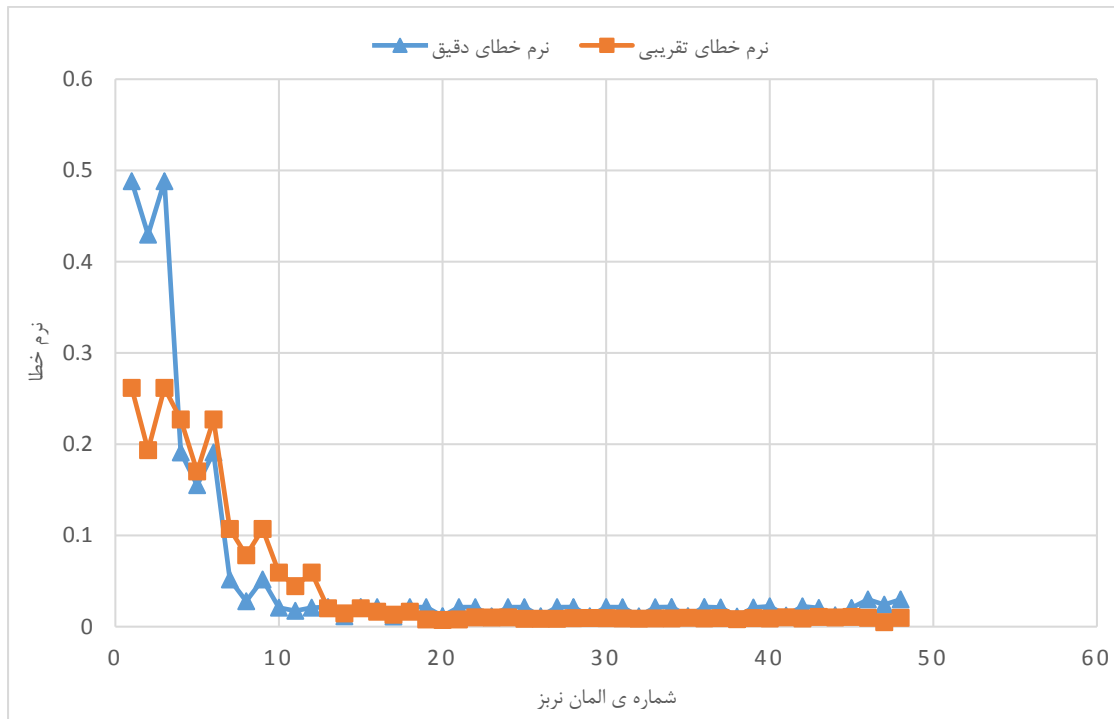
شرایط مرزی تکیه گاهی مانند شکل (۶-۱) می باشد و نیروی P به صورت خطی به انتهای تیر اعمال شده است. در این مثال نقاط گوس مورد نیاز برای تحلیل برابر ۹ در نظر گرفته شده است.

در جدول (۶-۱) نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و همچنین شاخص تاثیر برای هر یک از المان ها و کل دامنه ارائه شده است. شاخص تاثیر نسبت نرم خطای دقیق به نرم خطای تقریبی می باشد که بیانگر همگرایی حل به سمت حل واقعی می باشد. نمودار تغییرات نرم خطای انرژی دقیق و نرم خطای انرژی تقریبی در شکل (۶-۲) نشان داده شده است. همچنین در شکل های (۶-۳) و (۶-۴) نحوه ی توزیع نرم خطای تقریبی و نرم خطای دقیق در طوی تیر نشان داده شده است.

جدول ۶-۱ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در المان های تیر طره

شماره ی المان	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر
1	0.4882	0.2617	0.5360
2	0.4296	0.1934	0.4502
3	0.4882	0.2617	0.5360
4	0.1909	0.2271	1.1893
5	0.1551	0.1701	1.0968
6	0.1909	0.2271	1.1893
7	0.0517	0.1070	2.0701
8	0.0278	0.0782	2.8130
9	0.0517	0.1070	2.0701
10	0.0208	0.0592	2.8438
11	0.0174	0.0444	2.5547
12	0.0208	0.0592	2.8438
13	0.0215	0.0201	0.9346
14	0.0113	0.0145	1.2825
15	0.0215	0.0201	0.9346
16	0.0214	0.0164	0.7657

17	0.0111	0.0131	1.1792
18	0.0214	0.0164	0.7656
19	0.0214	0.0079	0.3682
20	0.0115	0.0073	0.6351
21	0.0214	0.0079	0.3682
22	0.0214	0.0102	0.4750
23	0.0113	0.0100	0.8808
24	0.0214	0.0102	0.4750
25	0.0214	0.0086	0.4013
26	0.0114	0.0086	0.7575
27	0.0214	0.0086	0.4014
28	0.0214	0.0093	0.4329
29	0.0114	0.0095	0.8289
30	0.0214	0.0093	0.4328
31	0.0213	0.0090	0.4210
32	0.0113	0.0087	0.7701
33	0.0213	0.0090	0.4211
34	0.0216	0.0090	0.4163
35	0.0115	0.0097	0.8397
36	0.0216	0.0090	0.4167
37	0.0210	0.0093	0.4440
38	0.0110	0.0082	0.7437
39	0.0210	0.0093	0.4440
40	0.0223	0.0090	0.4019
41	0.0122	0.0102	0.8422
42	0.0223	0.0090	0.4020
43	0.0205	0.0106	0.5188
44	0.0125	0.0100	0.8063
45	0.0205	0.0106	0.5186
46	0.0298	0.0097	0.3234
47	0.0242	0.0049	0.2044
48	0.0299	0.0097	0.3234
مجموع	2.8142	2.1689	0.7707



شکل ۲-۶ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره

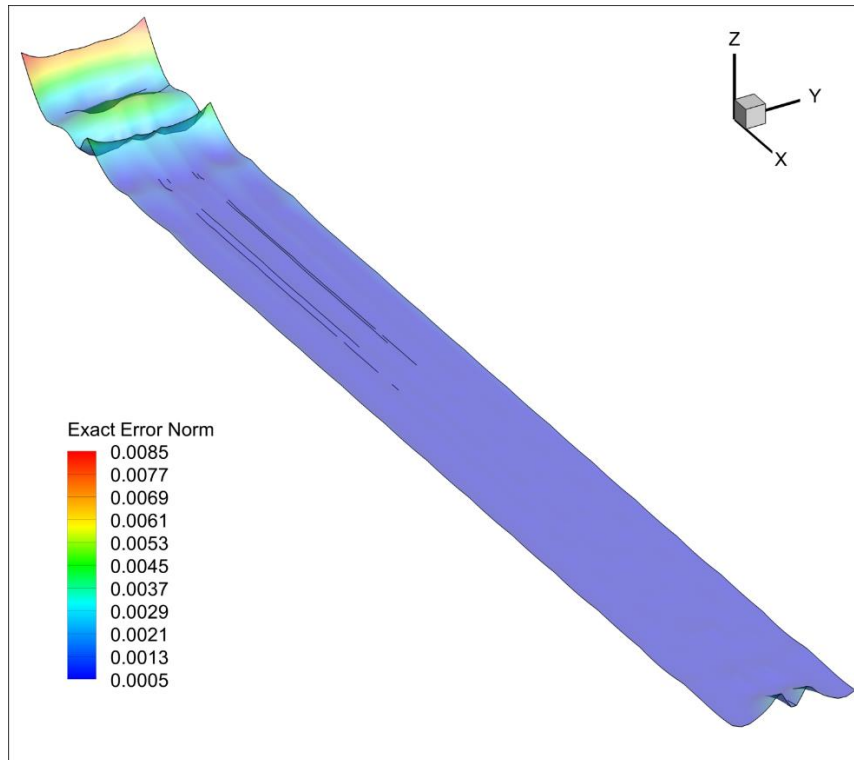


الف) نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق در تیر طره

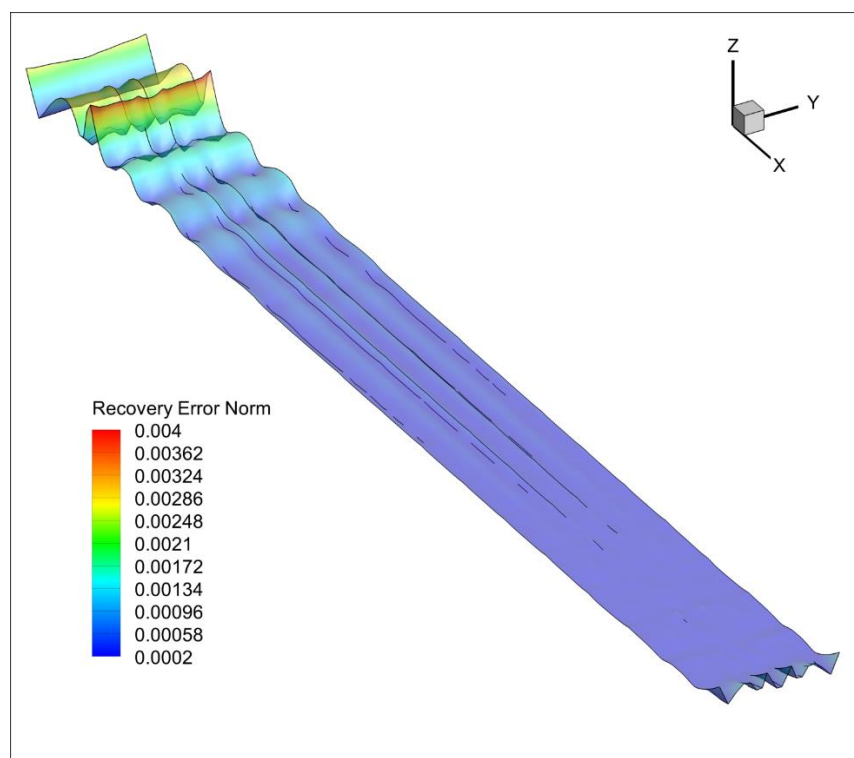


ب) نحوه ی توزیع نرم خطای تقریبی در تیر طره

شکل ۳-۶ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره



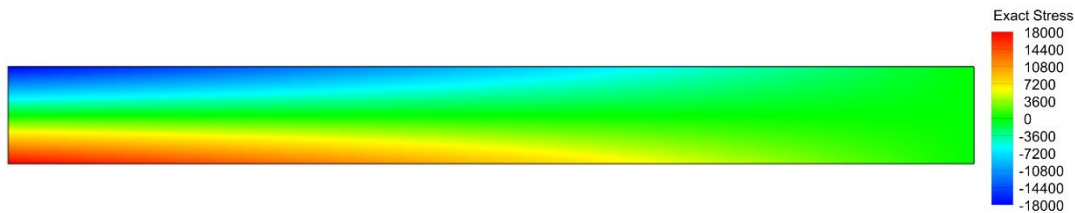
الف) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق در تیر طره



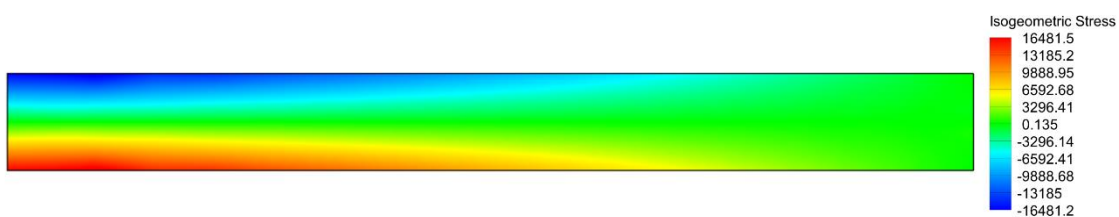
ب) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای تقریبی در تیر طره

شکل ۴-۶ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره

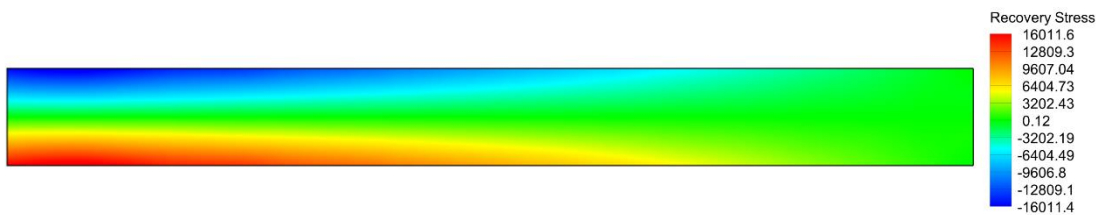
همچنین در شکل (۵-۶) تنش σ_y بدست آمده از حل دقیق، حل آیزوژئومتریکی و حل بهبود یافته ارائه شده اند.



الف) تنش دقیق در تیر طره



ب) تنش حاصل از تحلیل آیزوژئومتریکی در تیر طره



ج) تنش حاصل از حل بهبود یافته در تیر طره

شکل ۵-۶ تنش σ_y در تیر طره

تا اینجا اطلاعات مربوط به تحلیل اولیه به روش آیزوژئومتریکی ارائه شد. حال با استفاده از اطلاعات بدست آمده می توان حل تطبیقی با استفاده از روش های ذکر شده در فصل چهارم را انجام داد. برای این کار ابتدا خطاهای محاسبه شده را بر روی المان های فضای پارامتری متناظر با المان های نریز مسئله منتقل می نماییم و سپس برای حل تطبیقی در فضای پارامتری آن ها را بر روی گره های فضای پارامتری و برای حل تطبیقی با استفاده از نقاط کنترلی، خطاهای المان های فضای پارامتری را بر روی نقاط کنترلی توزیع و در نهایت اقدام به انجام تحلیل مجدد می نماییم. نتایج حاصل به شرح زیر میباشند.

۲-۲-۶ حل تطبیقی در فضای پارامتری با استفاده از جابجا کردن گره های فضای پارامتری (روش

(اول)

در این روش پس از توزیع خطاها بر روی گره های فضای پارامتری، با استفاده از دیاگرام Voronoi نقاط همسایه را تشخیص داده و سپس با قرار دادن فنر بین این نقاط و در نظر گرفتن مجموع خطاهای دو گره همسایه به عنوان سختی فنرهای بین آنها، گره های فضای پارامتری را جابجا می نماییم. سپس با استفاده از نتایج حاصل دوباره مسئله را تحلیل می نماییم. بردارهای گره ای جدید حاصل در این حالت به صورت زیر می باشند:

$$u = \{0, 0, 0, 0.00345, 0.00775, 0.0148, 0.02915, 0.05955, 0.11665, 0.1963, 0.28595, 0.3754, 0.46605, 0.55635, 0.6468, 0.7367, 0.823, 0.9079, 1, 1, 1\}$$

$$v = \{0, 0, 0, 0.3288471, 0.6713, 1, 1, 1\}$$

نکته ای که در اولین نگاه مشهود می باشد، این است که با توجه به جدول (۶-۱) خطای حل در نزدیک تکیه گاه دارای بیشترین مقدار خود می باشد که با حرکت به سمت انتهای آزاد تیر این خطا کاهش می یابد، روش حل تطبیقی ارائه شده نقاط گره ای را برای کاهش این خطا به سمت تکیه گاه جابجا می نماید.

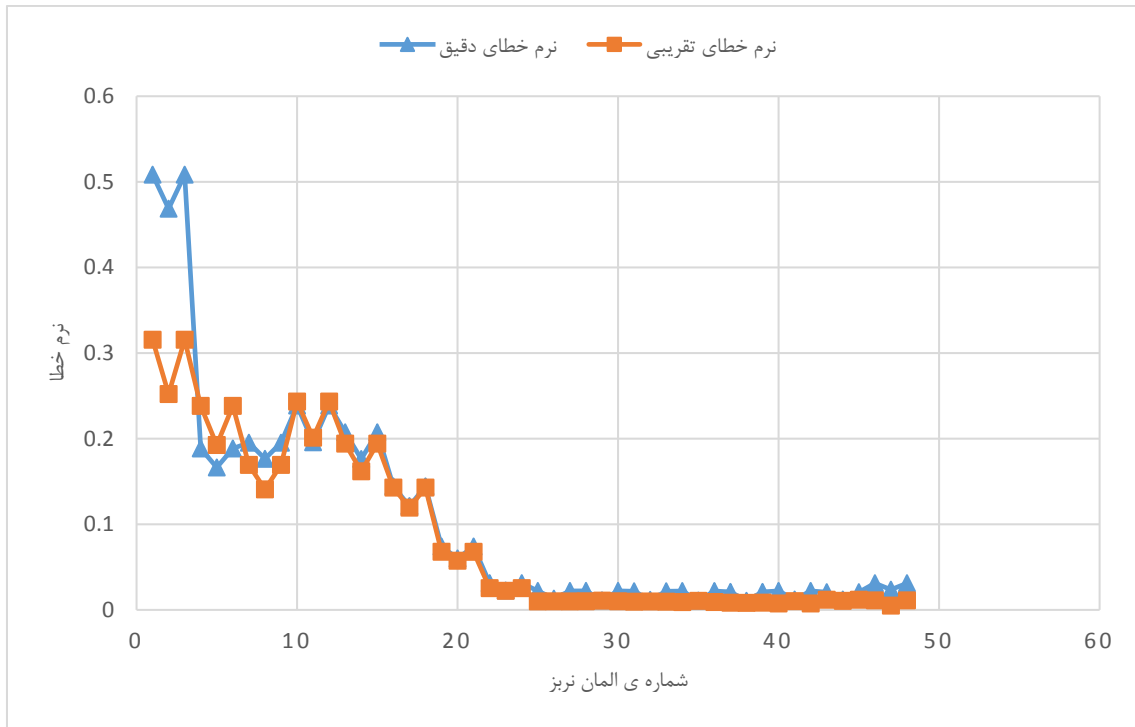
پس از تحلیل مسئله با بردارهای گره ای جدید، نتایج حاصل به شرح زیر می باشند:

جدول ۲-۶ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در المان های تیر طره پس از جابجا شدن

گره های فضای پارامتری

شماره ی المان	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر
1	0.5084	0.3156	0.6207
2	0.4686	0.2521	0.5380
3	0.5084	0.3156	0.6207
4	0.1886	0.2383	1.2638
5	0.1664	0.1926	1.1576
6	0.1885	0.2383	1.2638
7	0.1953	0.1693	0.8671
8	0.1765	0.1408	0.7977

9	0.1953	0.1693	0.8671
10	0.2387	0.2433	1.0192
11	0.1958	0.2011	1.0272
12	0.2387	0.2433	1.0192
13	0.2074	0.1942	0.9362
14	0.1763	0.1619	0.9182
15	0.2074	0.1942	0.9362
16	0.1443	0.1429	0.9900
17	0.1213	0.1194	0.9848
18	0.1443	0.1429	0.9900
19	0.0740	0.0679	0.9166
20	0.0601	0.0574	0.9546
21	0.0740	0.0679	0.9166
22	0.0312	0.0254	0.8130
23	0.0227	0.0223	0.9806
24	0.0312	0.0254	0.8131
25	0.0221	0.0099	0.4482
26	0.0132	0.0100	0.7594
27	0.0221	0.0099	0.4481
28	0.0222	0.0101	0.4520
29	0.0112	0.0108	0.9679
30	0.0222	0.0101	0.4522
31	0.0218	0.0095	0.4379
32	0.0118	0.0098	0.8337
33	0.0218	0.0095	0.4379
34	0.0220	0.0092	0.4153
35	0.0109	0.0105	0.9634
36	0.0220	0.0092	0.4155
37	0.0210	0.0084	0.3993
38	0.0106	0.0082	0.7749
39	0.0210	0.0084	0.3996
40	0.0222	0.0075	0.3389
41	0.0121	0.0102	0.8404
42	0.0222	0.0075	0.3390
43	0.0207	0.0119	0.5724
44	0.0121	0.0105	0.8708
45	0.0207	0.0119	0.5724
46	0.0312	0.0111	0.3569
47	0.0236	0.0050	0.2126
48	0.0312	0.0111	0.3570
مجموع	5.0358	4.1716	0.8284



شکل ۶-۶ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره پس جابجا شدن گره های فضای پارامتری

با مقایسه ی مقدار شاخص تاثیر در این حالت با تحلیل اولیه، مشخص می شود که حل آیزوژئومتریکی به سمت حل دقیق جابجا شده است. همچنین با مقایسه ی شاخص های تاثیر المان ها با حل اولیه، مشخص می شود که توزیع نرم خطا در المان ها به صورت هموارتر و یکنواخت تری صورت گرفته است که با توجه به تعریفی که از حل تطبیقی در بخش ۴-۲-۱ ارائه شد، با استفاده از این فرآیند شبکه ی المان های مسئله به سمت شبکه ی المان بهینه با توزیع یکنواخت نرم خطا حرکت نموده است.

در ادامه شکل های مربوط به توزیع خطا و تنش در طول تیر طره ارائه می گردد.

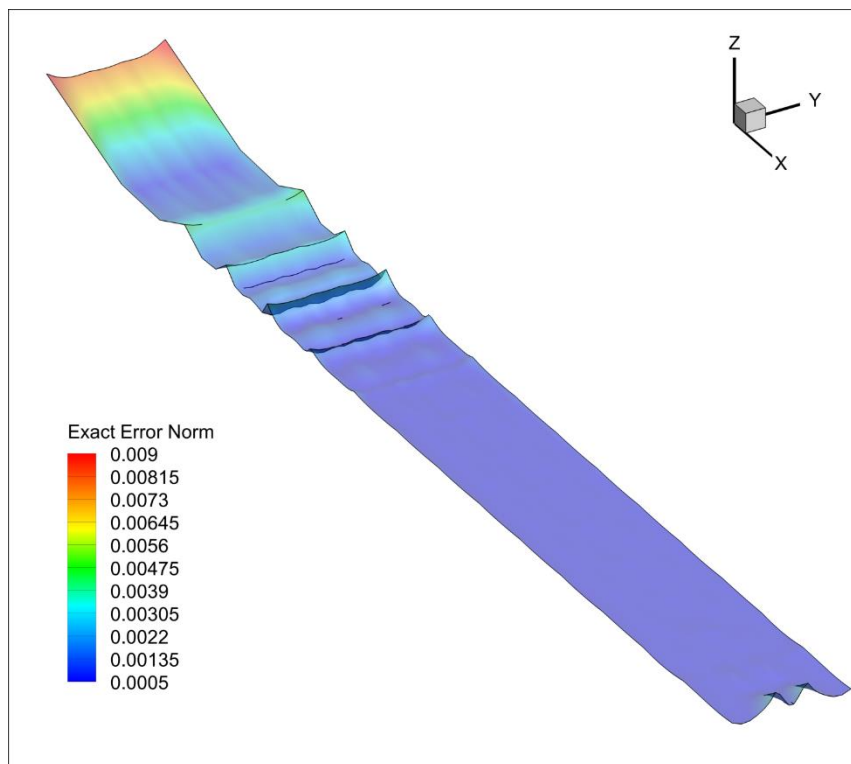


الف) نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری

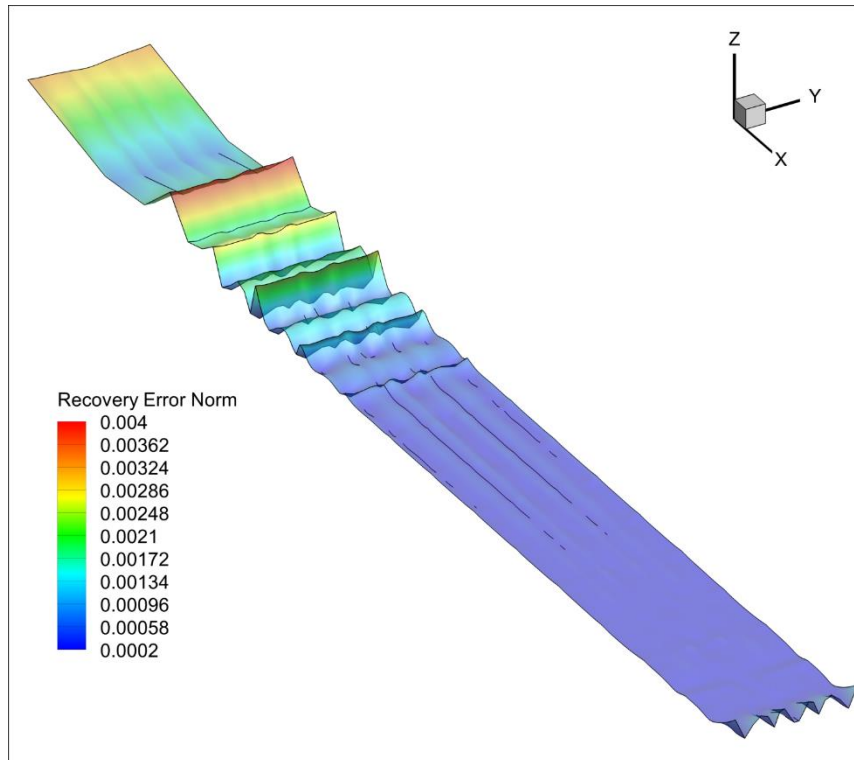


ب) نحوه ی توزیع نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری

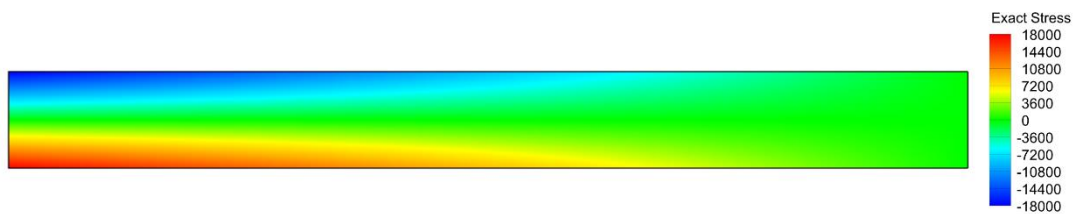
شکل ۶-۷ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری



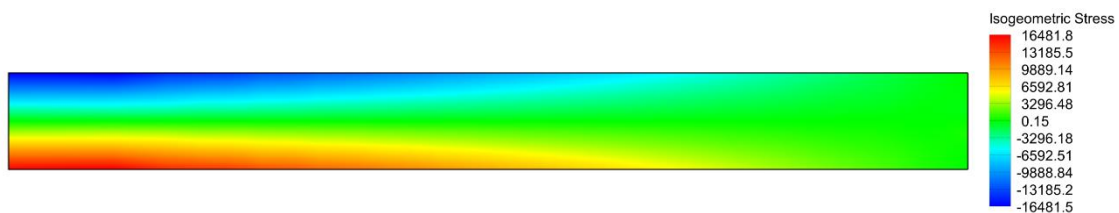
الف) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری



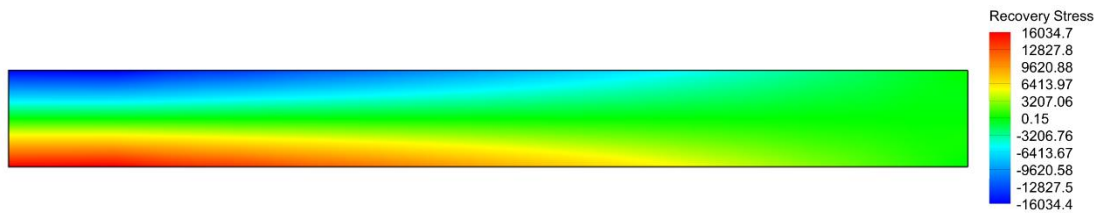
ب) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره ها در فضای پارامتری شکل ۸-۶ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی پس از جابجا شدن گره ها در فضای پارامتری



الف) تنش دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری



ب) تنش حاصل از تحلیل آیزوژئومتریک در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری



ج) تنش حاصل از حل بهبود یافته در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری

شکل ۶-۹ تنش σ_y در تیر طره پس از جابجا شدن گره ها در فضای پارامتری

مشاهده می شود که با استفاده از این روش تغییر چندانی در میزان تنش های محاسبه شده ایجاد نمی گردد و حتی در یک سری از نقاط تنش به مقدار بسیار اندکی کاهش می یابد. بنابراین تاثیر این روش بیشتر در بدست آوردن شبکه ی بهینه برای انتگرال گیری در روش تحلیل آیزوژئومتریکی می باشد.

۶-۲-۳ حل تطبیقی در فضای پارامتری با استفاده از جابجا کردن گره های فضای پارامتری (روش

دوم)

همانطور که در فصل چهارم توضیح داده شد، به روش دیگری می توان گره ها را جابجا نمود، بدین ترتیب که پس از توزیع خطاها روی نقاط فضای پارامتری، آنها را روی بردارهای گره ای تصویر نماییم. برای این کار می توان میانگین خطای نقاطی که در یک راستا هستند را به عنوان خطای گره موجود در بردار گره ای که با آنها هم راستا می باشد، در نظر گرفت و در نهایت با قرار دادن فنر بین نقاط گره ای در دو بردار گره ای مختصات جدید گره ها را بدست آورد. پس از اعمال این روش، بردارهای گره ای به صورت زیر می باشند:

$$u = \{0, 0, 0, 0.00347, 0.00774, 0.0148, 0.0291, 0.0594, 0.1165, 0.196, 0.286, \\ 0.376, 0.4663, 0.557, 0.647, 0.737, 0.8236, 0.9086, 1, 1, 1\}$$

$$v = \{0, 0, 0, 0.3288471, 0.6713, 1, 1, 1\}$$

که با توجه به یکسان بودن نتیجه ی حاصل از روش اول و جهت اجتناب از طولانی شدن بیهوده ی

مطلب از ارائه ی سایر نتایج این روش خودداری می گردد.

۴-۲-۶ حل تطبیقی با استفاده از جابجا کردن نقاط کنترلی

در این حالت برای انجام حل تطبیقی، پس از محاسبه ی خطاها بر روی نقاط کنترلی (با استفاده از مطالب بخش ۴-۶) بین آنها فنر قرار داده و سپس آنها را جابجا می نماییم. در این حالت بردارهای گره ای، همان بردارهای گره ای در حل اولیه می باشند. جهت مقایسه، در جدول زیر مختصات اولیه و جدید نقاط کنترلی ارائه شده اند.

جدول ۳-۶ مختصات اولیه و جدید نقاط کنترلی

مختصات جدید نقطه ی کنترلی		مختصات اولیه نقطه کنترلی		شماره ی نقطه ی کنترلی
Y	X	Y	X	
0	0	0	0	1
0	24.41	0	25	2
0	50	0	50	3
0	75.59	0	75	4
0	100	0	100	5
3.23	0	60	0	6
3.52	24.42	60	25	7
3.42	50	60	50	8
3.52	75.58	60	75	9
3.23	100	60	100	10
6.92	0	120	0	11
7.54	24.41	120	25	12
7.32	50	120	50	13
7.54	75.59	120	75	14
6.92	100	120	100	15
11.88	0	180	0	16
12.95	24.42	180	25	17
12.58	50	180	50	18
12.95	75.58	180	75	19
11.88	100	180	100	20
20.35	0	240	0	21
22.2	24.4	240	25	22
21.54	50	240	50	23
22.2	75.6	240	75	24
20.34	100	240	100	25

37.74	0	300	0	26
41.19	24.44	300	25	27
39.97	50	300	50	28
41.19	75.56	300	75	29
37.74	100	300	100	30
72.76	0	360	0	31
78.95	24.52	360	25	32
76.78	50	360	50	33
78.95	75.48	360	75	34
72.75	100	360	100	35
134.95	0	420	0	36
143.64	24.74	420	25	37
140.64	50	420	50	38
143.64	75.26	420	75	39
134.92	100	420	100	40
215.12	0	480	0	41
223.03	24.94	480	25	42
220.37	50	480	50	43
223.03	75.06	480	75	44
215.07	100	480	100	45
304.65	0	540	0	46
308.77	25	540	25	47
307.46	50	540	50	48
308.77	75	540	75	49
304.59	100	540	100	50
393.86	0	600	0	51
393.64	24.99	600	25	52
393.87	50	600	50	53
393.64	75.01	600	75	54
393.77	100	600	100	55
484.38	0	660	0	56
479.3	25.05	660	25	57
481.22	50	660	50	58
479.3	74.96	660	75	59
484.28	100	660	100	60
574.24	0	720	0	61
564.8	24.95	720	25	62
568.26	50	720	50	63
564.8	75.05	720	75	64
574.12	100	720	100	65
664.1	0	780	0	66
650.14	25.06	780	25	67
665.19	50	780	50	68
650.14	74.94	780	75	69
663.96	100	780	100	70

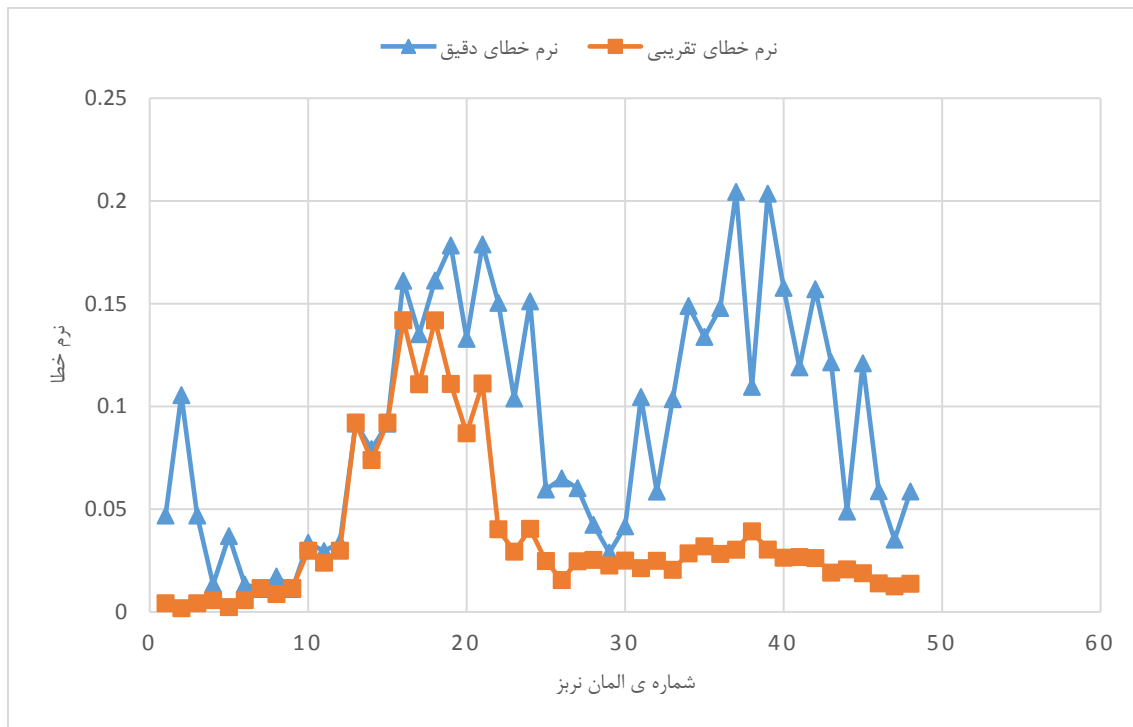
751.4	0	840	0	71
732.91	24.96	840	25	72
739.55	50	840	50	73
732.91	75.04	840	75	74
751.24	100	840	100	75
835.7	0	900	0	76
816.42	24.69	900	25	77
823.41	50	900	50	78
816.42	75.31	900	75	79
835.53	100	900	100	80
917.82	0	960	0	81
903.44	24.39	960	25	82
908.75	50	960	50	83
903.44	75.61	960	75	84
917.63	100	960	100	85
1000	0	1000	0	86
1000	23.77	1000	25	87
1000	50	1000	50	88
1000	76.24	1000	75	89
1000	100	1000	100	90

در این حالت نیز مانند جابجا کردن گره های فضای پارامتری، مشاهده می شود که نقاط کنترلی به سمت تکیه گاه که دارای خطای بیشتری می باشد، جابجا می شوند. نتایج تحلیل به در جداول و شکل های زیر ارائه شده اند.

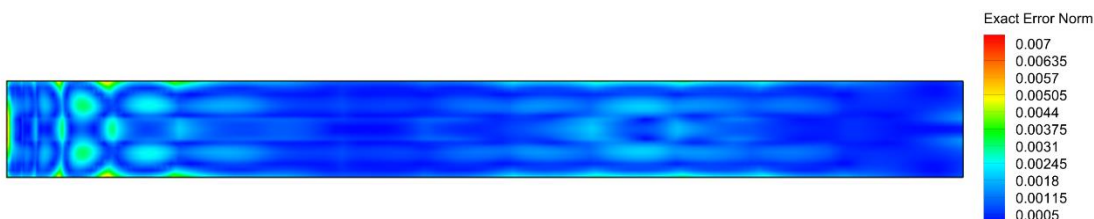
جدول ۴-۶ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در المان های تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی

شماره ی المان	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر
1	0.0469	0.0042	0.0892
2	0.1055	0.0018	0.0169
3	0.0469	0.0042	0.0891
4	0.0134	0.0057	0.4281
5	0.0369	0.0023	0.0632
6	0.0134	0.0057	0.4275
7	0.0111	0.0116	1.0401
8	0.0172	0.0087	0.5040
9	0.0111	0.0116	1.0410
10	0.0336	0.0298	0.8853
11	0.0296	0.0240	0.8091
12	0.0336	0.0298	0.8852
13	0.0916	0.0922	1.0060

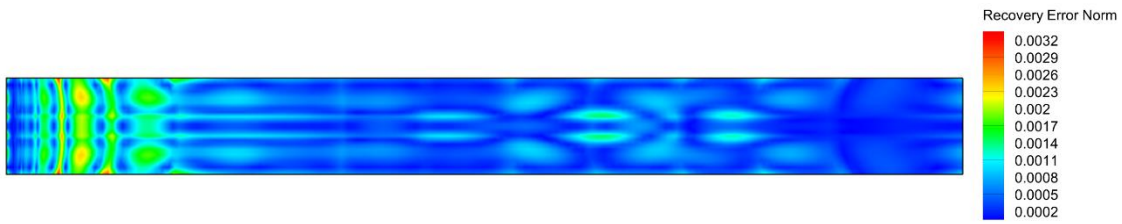
14	0.0792	0.0739	0.9327
15	0.0916	0.0921	1.0058
16	0.1612	0.1419	0.8807
17	0.1351	0.1108	0.8199
18	0.1613	0.1419	0.8799
19	0.1783	0.1110	0.6222
20	0.1329	0.0869	0.6541
21	0.1788	0.1111	0.6216
22	0.1504	0.0402	0.2673
23	0.1039	0.0293	0.2824
24	0.1511	0.0404	0.2673
25	0.0595	0.0247	0.4156
26	0.0649	0.0155	0.2385
27	0.0602	0.0246	0.4091
28	0.0424	0.0253	0.5971
29	0.0289	0.0226	0.7827
30	0.0416	0.0250	0.5996
31	0.1046	0.0213	0.2035
32	0.0585	0.0249	0.4245
33	0.1035	0.0205	0.1979
34	0.1489	0.0285	0.1912
35	0.1338	0.0319	0.2384
36	0.1479	0.0282	0.1908
37	0.2044	0.0303	0.1481
38	0.1095	0.0392	0.3578
39	0.2035	0.0303	0.1489
40	0.1577	0.0264	0.1672
41	0.1190	0.0267	0.2242
42	0.1570	0.0262	0.1668
43	0.1215	0.0191	0.1573
44	0.0488	0.0207	0.4234
45	0.1210	0.0188	0.1554
46	0.0588	0.0139	0.2360
47	0.0352	0.0124	0.3535
48	0.0586	0.0137	0.2337
مجموع	4.4045	1.7816	0.4045



شکل ۶-۱۰ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی با مقایسه ی جداول ۶-۴ و ۶-۱ و همچنین شکل های ۶-۱۰ و ۶-۲ مشخص می شود که شاخص تاثیر در اغلب المان ها و کل دامنه کاهش یافته است و این بدین معنی می باشد که بردارهای گره ای اولیه برای حالت جدید مسئله با مختصات جدید نقاط گره ای، مناسب نبوده و در واقع شبکه ی ایجاد شده برای انتگرال گیری مناسب نمی باشد و این خود نیز بدین معنی می باشد که هنوز در این مسئله با همین شرایط می توان به جواب های دقیق تری رسید. همچنین در شکل ۶-۱۰ مشخص است که در ابتدا و انتهای تیر اختلاف قابل ملاحظه ای بین نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی بوجود آمده است که این امر نیز به دلیل نامناسب بودن بردارهای گره ای می باشد. در ادامه شکل های مربوط به نحوه ی توزیع نرم های خطا و تنش جهت Y در طول تیر ارائه می گردد.

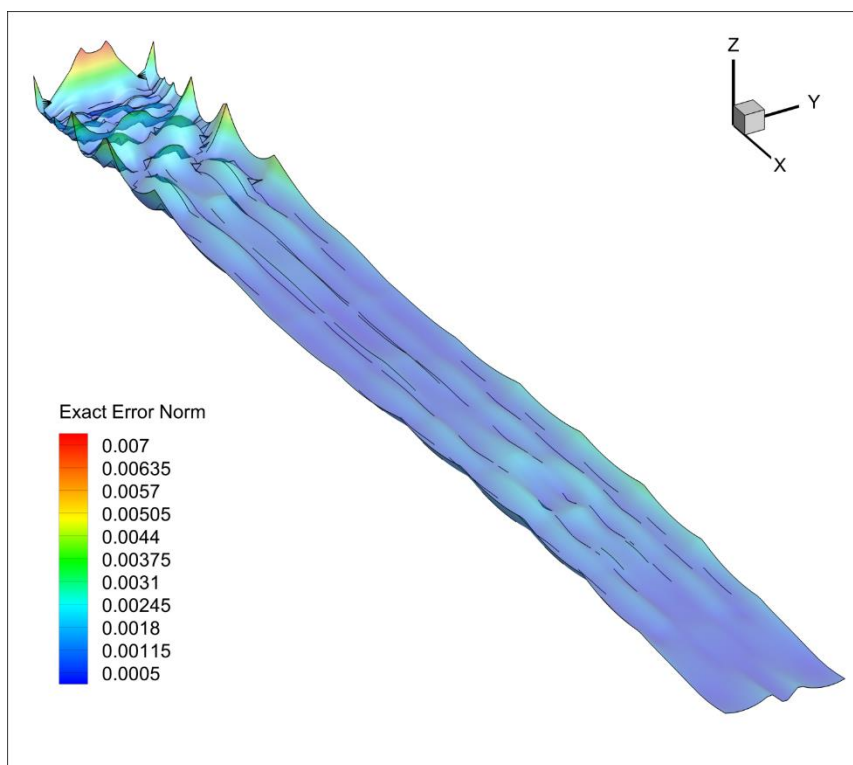


الف) نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی

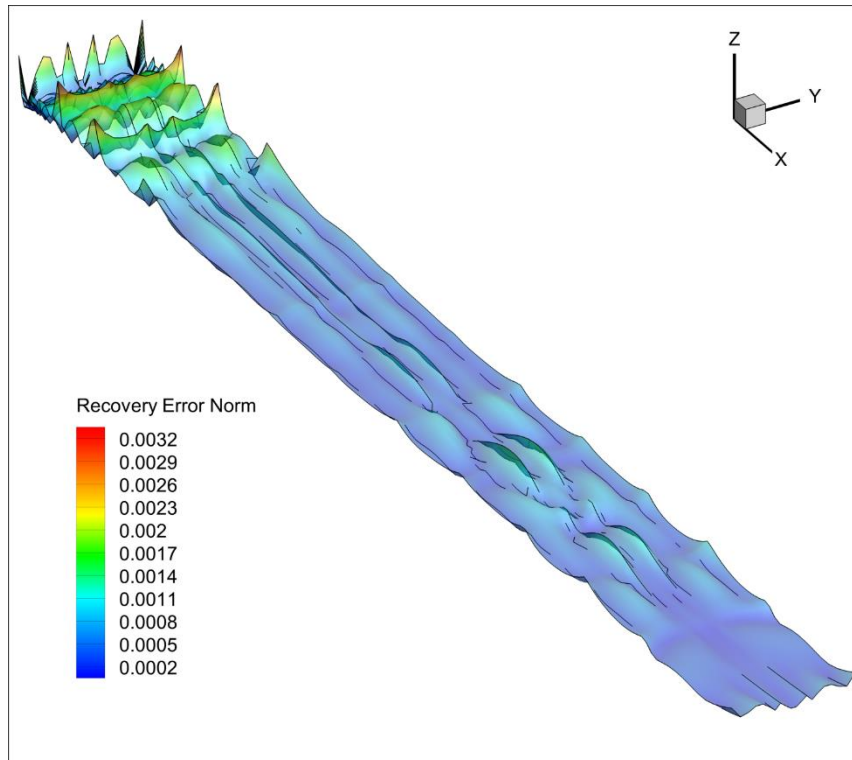


ب) نحوی توزیع نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی

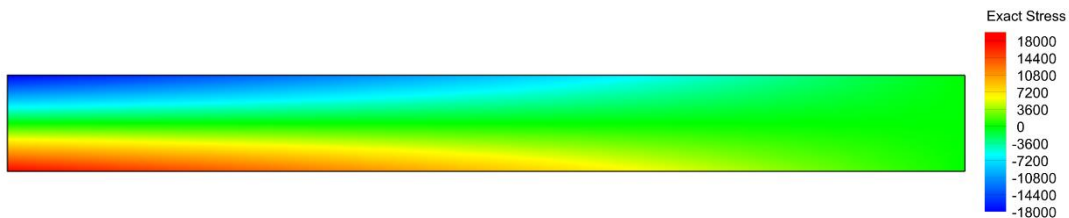
شکل ۶-۱۱ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی



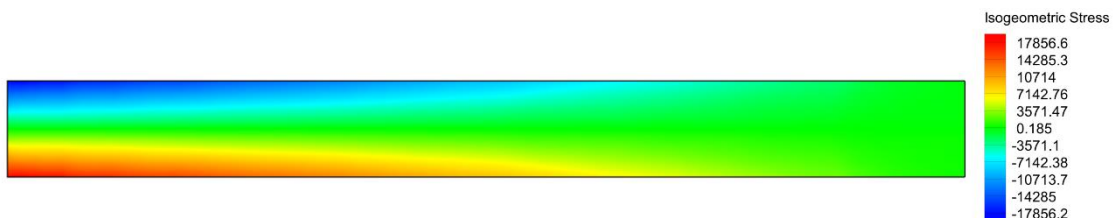
الف) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی



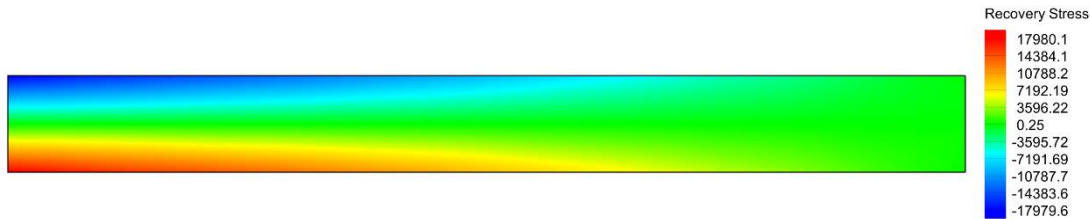
ب) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی
 شکل ۶-۱۲ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی



الف) تنش دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی



ب) تنش حاصل از تحلیل آیزوژئومتریک در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی



ج) تنش حاصل از حل بهبود یافته در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی

شکل ۶-۱۳ تنش σ_y در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی

در نتایج حاصل جابجا کردن نقاط کنترلی نکات بسیار با اهمیتی وجود دارد. اولین نکته ای که می توان به آن اشاره نمود، میل نمودن تنش ها به سمت تنش دقیق می باشد (حتی با وجود بردارهای گره ای نامناسب، باز هم تنش ها به میزان قابل ملاحظه ای بهبود یافته اند). از طرف دیگر اگر شکل ۶-۱۳ را با شکل های ۶-۵ و ۶-۹ مقایسه کنیم، متوجه می شویم که در شکل های ۶-۵ و ۶-۹ به طور کلی مقدار تنش حاصل از تحلیل آیزوژئومتریکی از مقدار تنش بهبود یافته به حل دقیق نزدیک تر می باشد که با توجه به این که فلسفه ی تعریف تنش بهبود یافته، محاسبه ی تنش هایی نزدیکتر به تنش های واقعی است، نتایج فوق دارای خطای زیادی می باشند. در صورتی که در این حالت (شکل ۶-۱۳) چنین مشکلی وجود ندارد تنش های بهبود یافته به حل دقیق نزدیکتر می باشند.

با توجه به مطالبی که در بخش های ۶-۲-۲ الی ۶-۲-۴ ارائه گردید، به نظر می رسد که استفاده از هر دو روش ذکر شده در بخش های ۶-۲-۲ و ۶-۲-۴ در یک مسئله بهترین حالت را نتیجه دهد. بنابراین برای تحقیق چنین نظریه ای در بخش های ۶-۲-۵ و ۶-۲-۶ به بررسی نتایج دو حالت ممکن برای این کار پرداخته می شود. در بخش ۶-۲-۵ ابتدا نقاط گره ای جابجا می شوند و سپس با محاسبه ی مجدد خطاهای نقاط کنترلی اقدام به جابجای آنها می گردد. اما در بخش ۶-۲-۶ ابتدا نقاط کنترلی و سپس نقاط گره ای جابجا می شوند.

۵-۲-۶ حل تطبیقی با جابجا کردن نقاط گره ای و سپس نقاط کنترلی

در این حالت پس از حل مسئله ی اولیه و محاسبه خطاها، ابتدا نقاط گره ای در فضای پارامتری جابجا می شوند که نتیجه این حالت همان نتایج ارائه شده در بخش ۲-۲-۶ می باشند. حال مسئله را با بردارهای گره ی جدید بدست آمده تحلیل نموده و خطاها را در نقاط کنترلی محاسبه می نماییم و در نهایت با استفاده از این خطاها نقاط کنترلی را جابجا می نماییم. بردارهای گره ای که در بخش ۲-۲-۶ بدست آمدند به شکل زیر می باشند:

$$u = \{0, 0, 0, 0.00345, 0.00775, 0.0148, 0.02915, 0.05955, 0.11665, 0.1963, 0.28595, 0.3754, 0.46605, 0.55635, 0.6468, 0.7367, 0.823, 0.9079, 1, 1, 1\}$$

$$v = \{0, 0, 0, 0.3288471, 0.6713, 1, 1, 1\}$$

پس از محاسبه ی مختصات جدید نقاط کنترلی در این حالت، مسئله را یک بار دیگر با بردارهای گره ای فوق و نقاط کنترلی جدید تحلیل می نماییم که نتایج آن به صورت زیر می باشد.

جدول ۵-۶ مختصات اولیه و جدید نقاط کنترلی در مسئله با بردارهای گره ای بهینه

مختصات جدید نقطه ی کنترلی		مختصات اولیه نقطه کنترلی		شماره ی نقطه ی کنترلی
Y	X	Y	X	
0	0	0	0	1
0	24.55	0	25	2
0	50	0	50	3
0	75.45	0	75	4
0	100	0	100	5
3.76	0	60	0	6
4.03	24.56	60	25	7
3.94	50	60	50	8
4.03	75.44	60	75	9
3.76	100	60	100	10
8.06	0	120	0	11
8.63	24.58	120	25	12
8.44	50	120	50	13
8.63	75.42	120	75	14
8.06	100	120	100	15
12.93	0	180	0	16
13.81	24.6	180	25	17
13.52	50	180	50	18
13.81	75.4	180	75	19

12.93	100	180	100	20
18.24	0	240	0	21
19.43	24.63	240	25	22
19.05	50	240	50	23
19.43	75.38	240	75	24
18.24	100	240	100	25
23.88	0	300	0	26
25.37	24.63	300	25	27
24.89	50	300	50	28
25.37	75.37	300	75	29
23.88	100	300	100	30
30.66	0	360	0	31
32.52	24.64	360	25	32
31.92	50	360	50	33
32.52	75.36	360	75	34
30.66	100	360	100	35
41.09	0	420	0	36
43.47	24.66	420	25	37
42.71	50	420	50	38
43.47	75.35	420	75	39
41.09	100	420	100	40
60.79	0	480	0	41
64.02	24.72	480	25	42
63.01	50	480	50	43
64.02	75.29	480	75	44
60.79	100	480	100	45
105.78	0	540	0	46
109.9	24.89	540	25	47
108.67	50	540	50	48
109.9	75.11	540	75	49
105.78	100	540	100	50
195.05	0	600	0	51
196.79	25.08	600	25	52
196.53	50	600	50	53
196.79	74.92	600	75	54
195.05	100	600	100	55
309.74	0	660	0	56
304.38	25.16	660	25	57
306.66	50	660	50	58
304.38	74.84	660	75	59
309.74	100	660	100	60
429.35	0	720	0	61
416.16	25.11	720	25	62
421.23	50	720	50	63
416.16	74.89	720	75	64

429.35	100	720	100	65
557.44	0	780	0	66
533.96	25.3	780	25	67
542.59	50	780	50	68
533.96	74.7	780	75	69
557.44	100	780	100	70
683.83	0	840	0	71
650.59	25.08	840	25	72
662.62	50	840	50	73
650.59	74.92	840	75	74
683.83	100	840	100	75
798.52	0	900	0	76
764.95	25.65	900	25	77
777.32	50	900	50	78
764.95	75.35	900	75	79
798.52	100	900	100	80
901.38	0	960	0	81
878.26	24.24	960	25	82
887.05	50	960	50	83
878.26	75.76	960	75	84
901.38	100	960	100	85
1000	0	1000	0	86
1000	23.55	1000	25	87
1000	50	1000	50	88
1000	76.39	1000	75	89
1000	100	1000	100	90

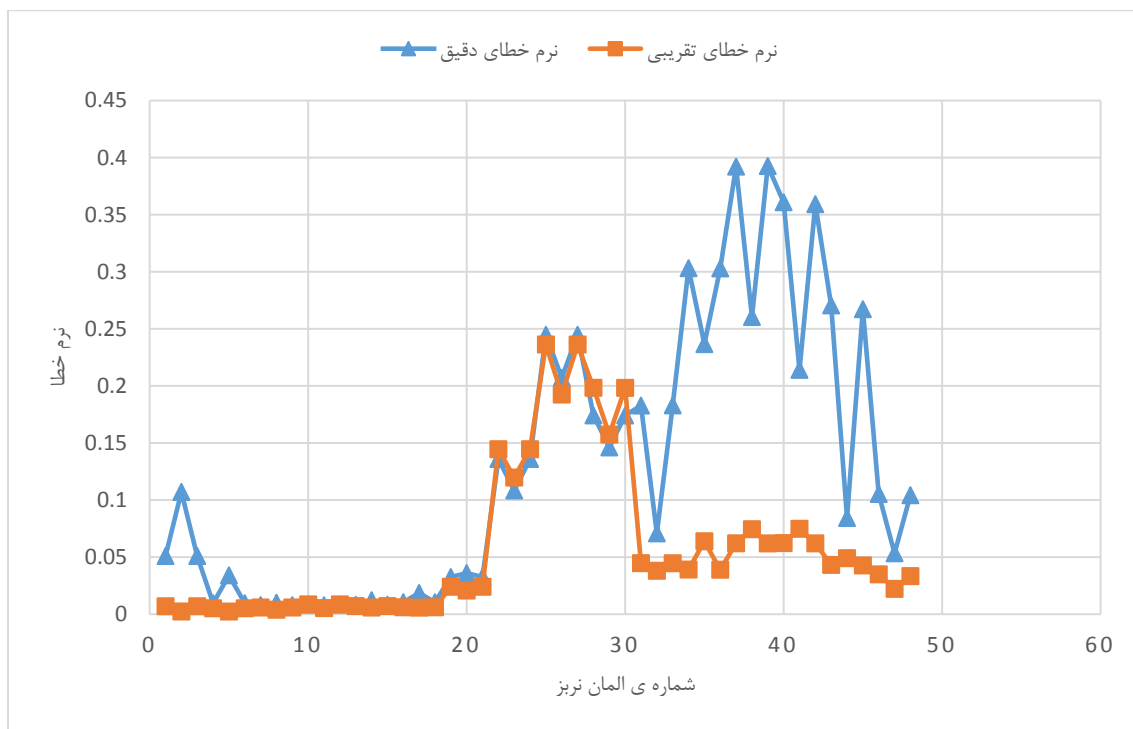
اگر جدول فوق (جدول ۶-۵) را با جدول ۶-۳ مقایسه کنیم، متوجه می شویم که در این حالت نقاط کنترلی به میزان بیشتری به سمت محل های دارای خطا در مسئله (مانند تکیه گاه) جابجا شده است که علت این اتفاق برداره های گره ای بهینه می باشد. در واقع تاثیر اصلی جابجایی گره های فضای پارامتری در چنین حالتی مشخص می شود. در ادامه نتایج تحلیل در این حالت ارائه می گردد.

جدول ۶-۶ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در المان های تیر طره پس از جابجا شدن گره های

فضای پارامتری و نقاط کنترلی

شماره ی المان	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر
1	0.0510	0.0069	0.1356
2	0.1071	0.0024	0.0221
3	0.0510	0.0069	0.1356
4	0.0096	0.0052	0.5387
5	0.0341	0.0023	0.0671
6	0.0096	0.0052	0.5388
7	0.0079	0.0058	0.7382
8	0.0100	0.0039	0.3872
9	0.0079	0.0058	0.7383
10	0.0085	0.0086	1.0134
11	0.0078	0.0054	0.6867
12	0.0085	0.0086	1.0134
13	0.0083	0.0071	0.8531
14	0.0122	0.0058	0.4728
15	0.0083	0.0071	0.8523
16	0.0105	0.0060	0.5738
17	0.0186	0.0057	0.3076
18	0.0105	0.0060	0.5742
19	0.0326	0.0240	0.7371
20	0.0360	0.0207	0.5754
21	0.0326	0.0240	0.7370
22	0.1360	0.1445	1.0628
23	0.1084	0.1197	1.1049
24	0.1360	0.1445	1.0629
25	0.2448	0.2362	0.9651
26	0.2070	0.1924	0.9294
27	0.2448	0.2362	0.9651
28	0.1741	0.1983	1.1387
29	0.1461	0.1573	1.0769
30	0.1741	0.1982	1.1387
31	0.1828	0.0447	0.2445
32	0.0708	0.0380	0.5368
33	0.1829	0.0446	0.2440
34	0.3031	0.0391	0.1289
35	0.2366	0.0638	0.2699
36	0.3029	0.0389	0.1285
37	0.3921	0.0621	0.1583
38	0.2603	0.0744	0.2859
39	0.3926	0.0620	0.1579
40	0.3609	0.0623	0.1726

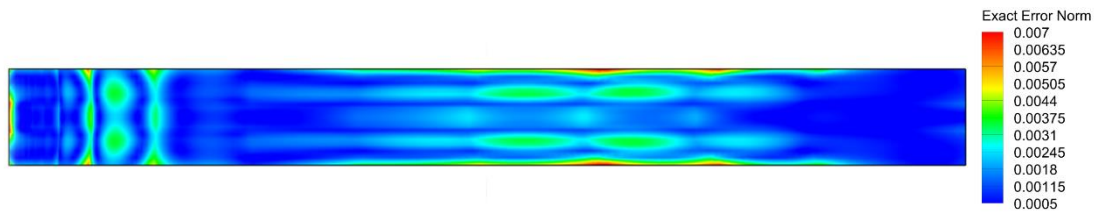
41	0.2140	0.0748	0.3496
42	0.3592	0.0621	0.1728
43	0.2705	0.0431	0.1595
44	0.0843	0.0490	0.5821
45	0.2672	0.0427	0.1597
46	0.1053	0.0349	0.3313
47	0.0534	0.0222	0.4156
48	0.1042	0.0334	0.3200
مجموع	6.1967	2.6929	0.4346



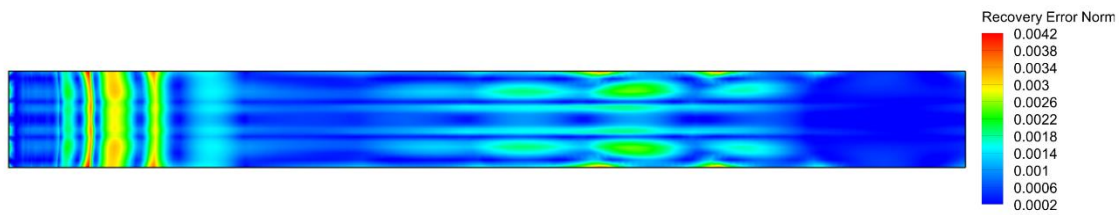
شکل ۶-۱۴ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای

پارامتری و نقاط کنترلی

در این حالت نیز مشاهده می شود که با جابجایی نقاط کنترلی میزان شاخص تاثیر نسبت به مسئله ی اولیه کاهش یافته است، اما با توجه به این ابتدا گره های فضای پارامتری جابجا و بهینه شده اند، شاخص تاثیر در این حالت از حالتی که فقط نقاط کنترلی را جابجا نمودیم (بخش ۶-۵، جدول ۶-۴) بیشتر می باشد و این نیز دلیل دیگری بر تاثیر جابجا کردن نقاط گره ای می باشد.



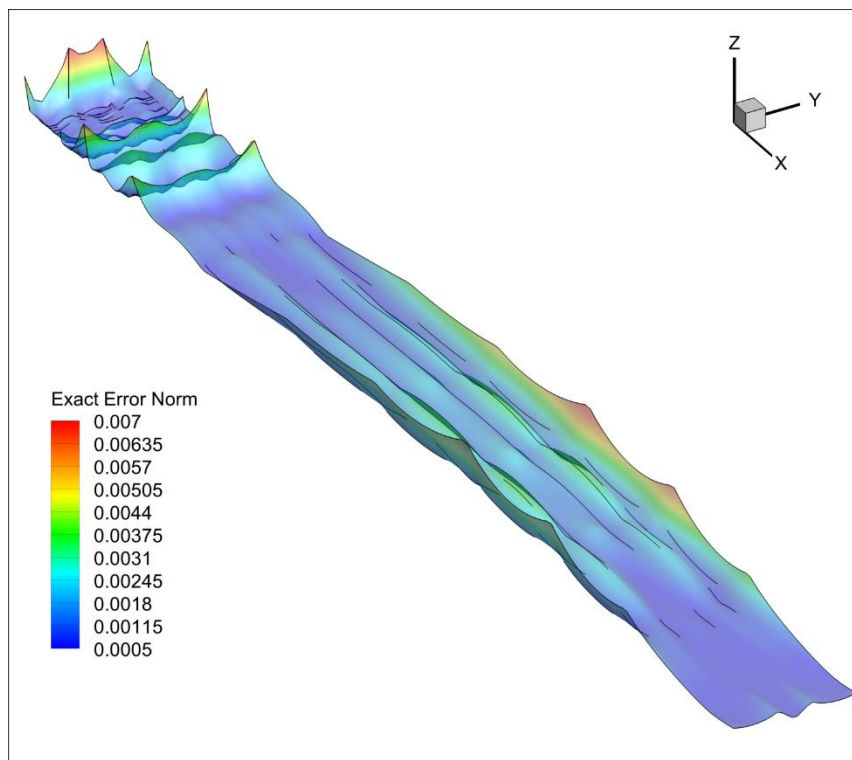
الف) نحوی توزیع نرم خطای دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی



ب) نحوی توزیع نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی

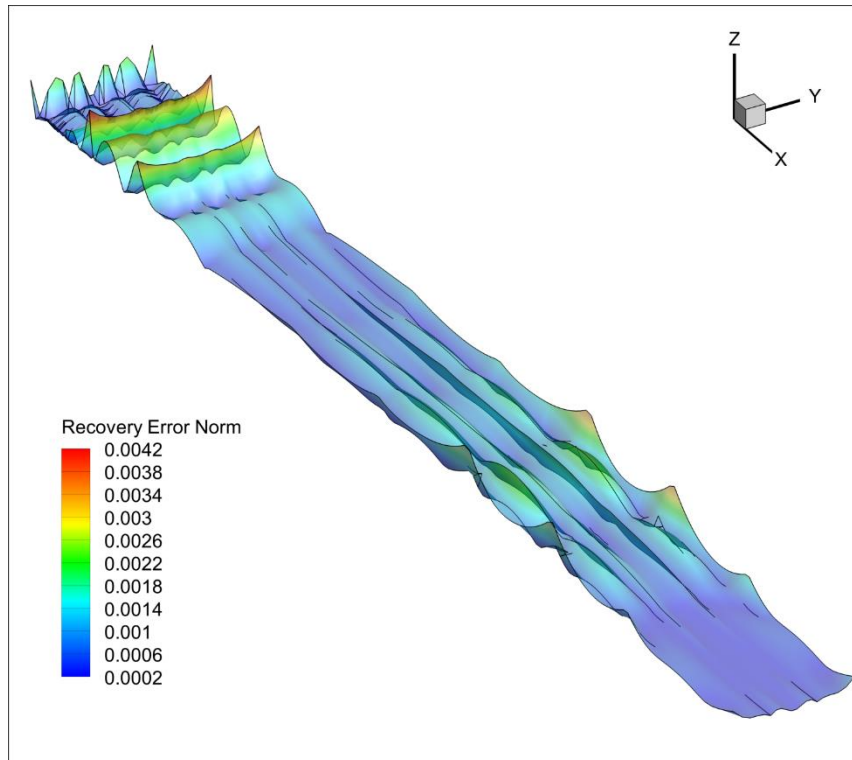
شکل ۶-۱۵ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط

کنترلی



الف) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط

کنترلی

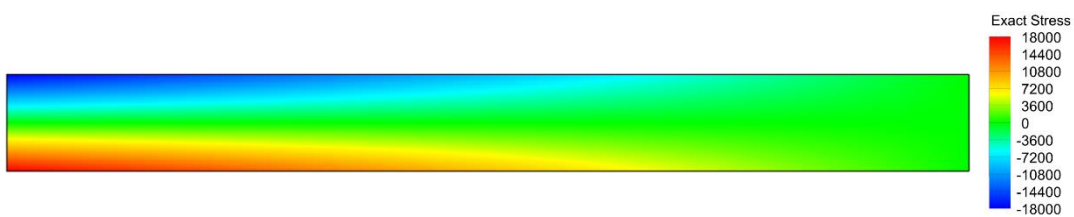


ب) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط

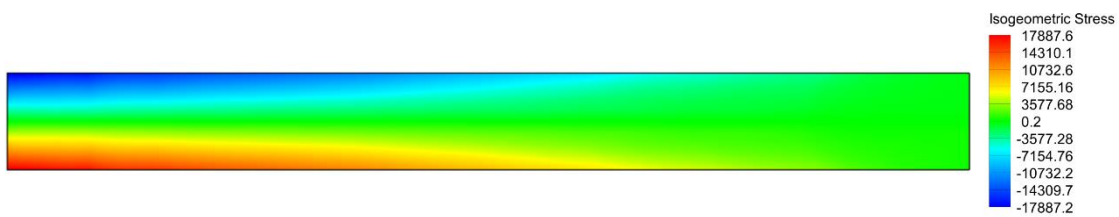
کنترلی

شکل ۶-۱۶ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای

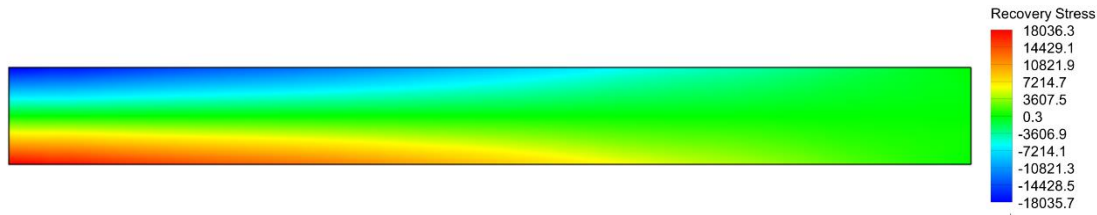
پارامتری و نقاط کنترلی



الف) تنش دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی



ب) تنش حاصل از تحلیل آیزوژئومتری در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی



ج) تنش حاصل از حل بهبود یافته در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی

شکل ۶-۱۷ تنش σ_y در تیر طره پس از جابجا شدن گره های فضای پارامتری و نقاط کنترلی

نکته ای که از نمودارهای بالا مشاهده می شود، این است که همانطور که قبلا ذکر شد، بدلیل استفاده از بردارهای گره ای مناسب، نتایج تحلیل به سمت بیشتر جابجا شده است و حتی در مورد حل بهبود یافته، تطابق تنش های ناشی از آن بر تنش های دقیق در تکیه گاه را می توان مشاهده نمود. بنابراین این حالت، یعنی جابجا کردن گره های فضای پارامتری و سپس نقاط کنترلی، از حالت های قبلی، یعنی جابجایی گره های فضای پارامتری به تنهایی و همچنین جابجایی نقاط کنترلی، بسیار موثرتر می باشد.

۶-۲-۶ حل تطبیقی با جابجا کردن نقاط کنترلی و سپس گره های فضای پارامتری

در این حالت ابتدا نقاط کنترلی با استفاده از خطاهای محاسبه شده از تحلیل اولیه جابجا می شوند که نتایج آن در بخش ۶-۲-۴ ارائه شده است. سپس با این نقاط کنترلی و همان بردار گره ای اولیه، مسئله مجددا تحلیل می شود و در نهایت با استفاده از خطاهای بدست آمده در این حالت گره های فضای پارامتری جابجا می شوند. بردارهای گره ای جدید به صورت زیر می باشند:

$$u = \{0, 0, 0, 0.28185, 0.4625, 0.54145, 0.56945, 0.58225, 0.5917, 0.60305, 0.6245, \\ 0.66515, 0.7114, 0.75575, 0.7944, 0.8306, 0.8721, 0.92725, 1, 1, 1\}$$

$$v = \{0, 0, 0, 0.32798, 0.6720471, 1, 1, 1\}$$

که پس از تحلیل با این بردارهای گره ای و نقاط کنترلی جدیدی که در ابتدا بدست آمدند، نتایج به

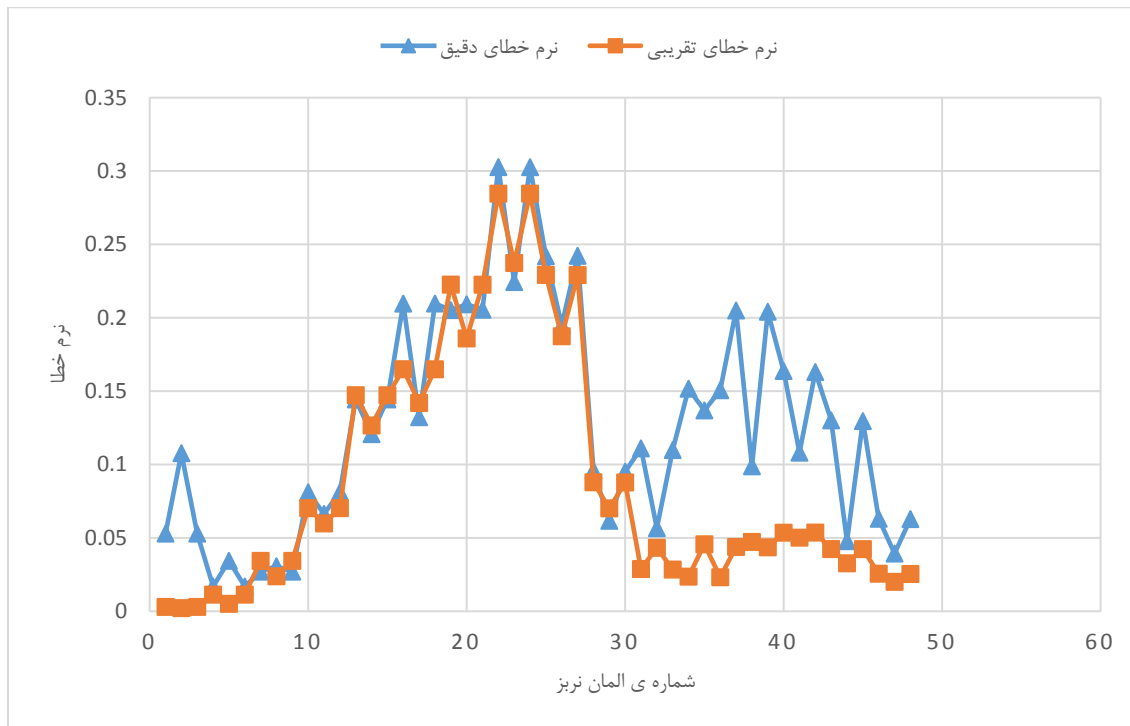
شرح زیر می باشند.

جدول ۶-۷ نرم خطای دقیق، نرم خطای تقریبی و شاخص تاثیر در المان های تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی

و گره های فضای پارامتری

شماره ی المان	نرم خطای دقیق در هر المان	نرم خطای تقریبی در هر المان	شاخص تاثیر
1	0.0529	0.0030	0.0563
2	0.1077	0.0022	0.0202
3	0.0529	0.0030	0.0564
4	0.0169	0.0114	0.6721
5	0.0344	0.0051	0.1481
6	0.0169	0.0114	0.6717
7	0.0270	0.0344	1.2711
8	0.0307	0.0239	0.7779
9	0.0270	0.0344	1.2718
10	0.0811	0.0703	0.8665
11	0.0664	0.0599	0.9024
12	0.0811	0.0703	0.8663
13	0.1444	0.1472	1.0197
14	0.1207	0.1266	1.0490
15	0.1444	0.1472	1.0196
16	0.2097	0.1650	0.7868
17	0.1323	0.1420	1.0733
18	0.2097	0.1649	0.7865
19	0.2052	0.2226	1.0846
20	0.2092	0.1859	0.8889
21	0.2055	0.2225	1.0828
22	0.3027	0.2846	0.9402
23	0.2244	0.2374	1.0579
24	0.3027	0.2846	0.9404
25	0.2419	0.2292	0.9475
26	0.1949	0.1874	0.9617
27	0.2422	0.2291	0.9456
28	0.0959	0.0879	0.9169
29	0.0617	0.0701	1.1374
30	0.0951	0.0878	0.9225
31	0.1110	0.0288	0.2594
32	0.0566	0.0433	0.7643
33	0.1099	0.0284	0.2588
34	0.1517	0.0236	0.1556
35	0.1369	0.0457	0.3338

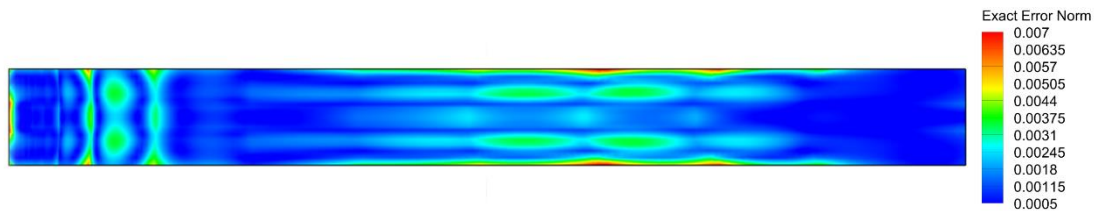
36	0.1506	0.0232	0.1540
37	0.2050	0.0438	0.2139
38	0.0988	0.0473	0.4785
39	0.2041	0.0436	0.2136
40	0.1637	0.0536	0.3271
41	0.1081	0.0502	0.4643
42	0.1630	0.0537	0.3291
43	0.1301	0.0424	0.3259
44	0.0478	0.0327	0.6845
45	0.1296	0.0424	0.3270
46	0.0630	0.0256	0.4059
47	0.0393	0.0201	0.5108
48	0.0628	0.0254	0.4046
مجموع	6.0699	4.2248	0.6960



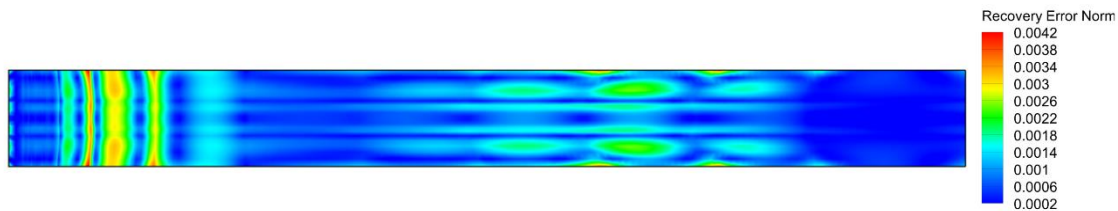
شکل ۶-۱۸ نمودار تغییرات نرم خطای دقیق و نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره

های فضای پارامتری

همانطور که ملاحظه می شود، برخلاف روش های قبلی که در آن ها شاخص تاثیر به صورت قابل ملاحظه ای کاهش می یافت، در این حالت شاخص تاثیر تفاوت چندانی نداشته است (کاهش اندک مشاهده شده نسبت نتایج حاصل قابل چشم پوشی می باشد). از طرف دیگر می توان یکنواخت شدن توزیع نرم خطا را در سراسر دامنه مشاهده نمود.



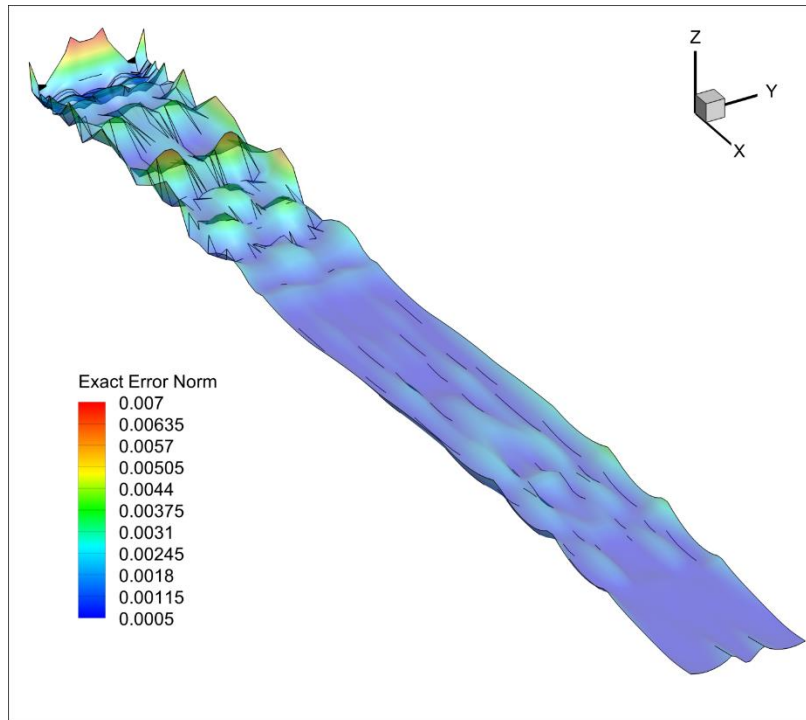
الف) نحوی توزیع نرم خطای دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری



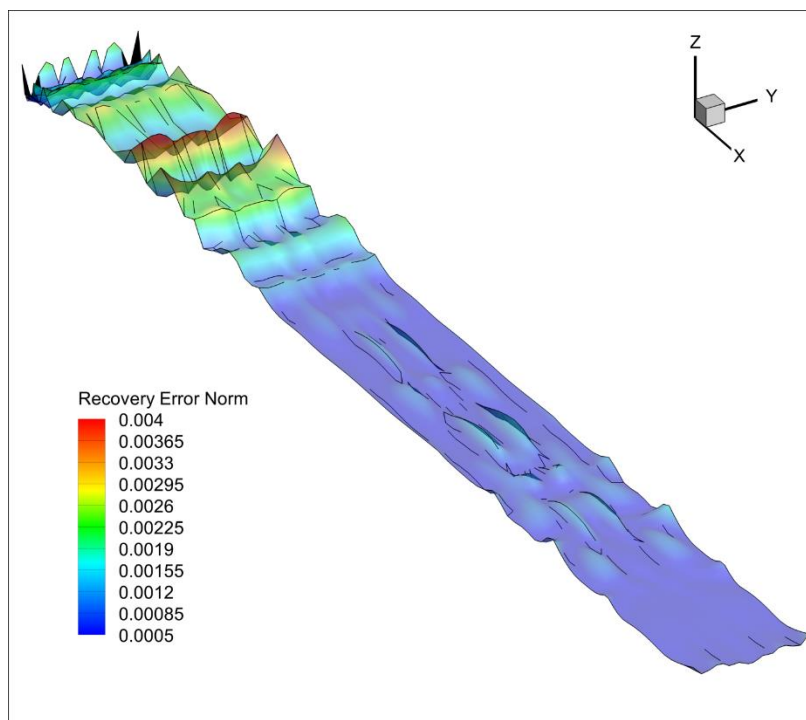
ب) نحوی توزیع نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری

شکل ۶-۱۹ نحوه ی توزیع نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای

پارامتری



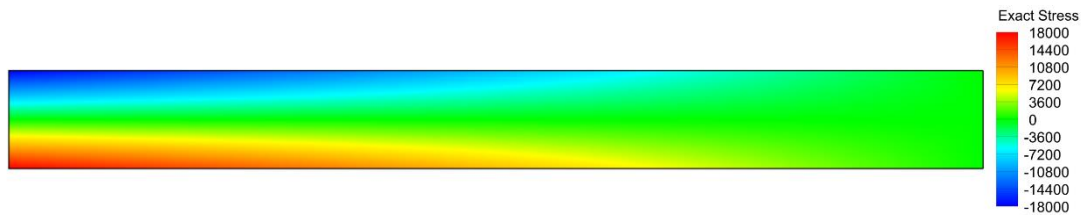
الف) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری



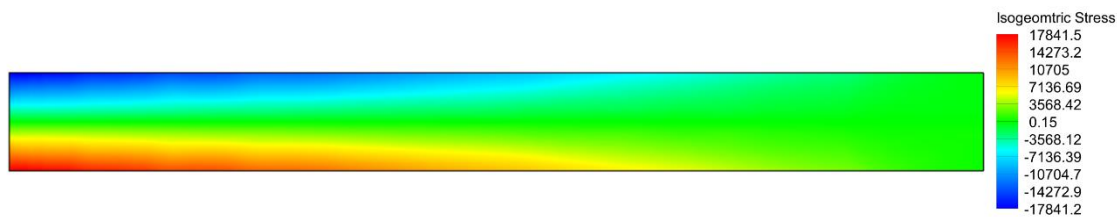
ب) نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری

شکل ۶-۲۰ نحوه ی توزیع سه بعدی نرم خطای دقیق و تقریبی در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره

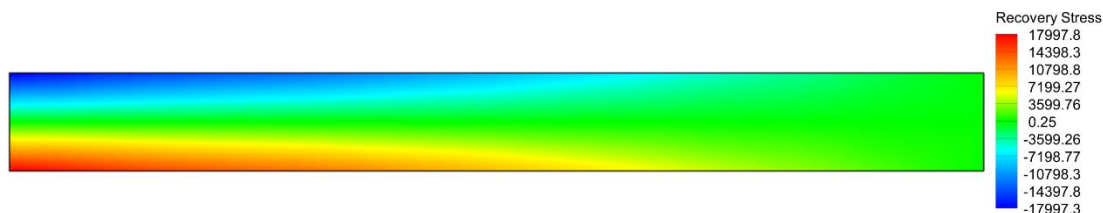
های فضای پارامتری



الف) تنش دقیق در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری



ب) تنش حاصل از تحلیل آیزوژئومتری در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری



ج) تنش حاصل از حل بهبود یافته در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری

شکل ۶-۲۱ تنش σ_y در تیر طره پس از جابجا شدن نقاط کنترلی و گره های فضای پارامتری

ملاحظه می شود که در این حالت، علاوه بر اینکه شاخص تاثیر در حد اولیه باقی می ماند، نتایج حاصل از تحلیل نیز به سمت نتایج دقیق جابجا می شوند.

بنابراین، با توجه مطالب ارائه شده در این قسمت، می توان گفت، که بهترین حالت این است که ابتدا نقاط کنترلی را جابجا کرده سپس اقدام به جابجایی گره های فضای پارامتری نماییم تا علاوه میل به سمت جواب های دقیق، شاخص تاثیر و به عبارتی دیگر کارایی روش حل در حد قابل قبولی باقی بماند.

فصل ہفتم

نتیجہ گیری و پیشہ اداات

۱-۷ مقدمه

در فصل های قبلی این پایان نامه تلاش شد تا با ارائه ی مباحث تئوری و پایه ای مربوط به روش تحلیل آیزوژئومتریک نحوه ایجاد خطا را در این روش مشخص نماییم. با توجه به مطالب ارائه شده، مشخص گردید که یکی از عوامل مهم در ایجاد خطا، انتگرال گیری عددی بر روی المان های نریز می باشد. سپس مبانی روشی که در آن از فنر برای جابجا کردن نقاط یک دامنه استفاده می گردد، مطرح شد و بیان گردید که در این روش با محاسبه ی خطاها در یک سری از نقاط مشخص دامنه، می توان بین این نقاط فنری با سختی معادل با مجموع خطاهای دو گره ای که فنر بین آنها قرار میگیرد، قرار داد سپس این سیستم را به حال خود رها می کنیم تا به حالت تعادل برسد، که در نهایت محل جدید نقاط نقاط بدست خواهند آمد. در نهایت توضیح داده شده که چگونه می توان از این روش در تحلیل آیزوژئومتریک برای حل تطبیقی استفاده نمود. طبق مطالب ارائه شده، از این روش می توان در دو حالت مختلف در تحلیل آیزوژئومتریک استفاده نمود. حالت اول استفاده از این روش در فضای پارامتری و در نتیجه جابجا کردن گره های بردارهای گره ای می باشد. اما حالت دیگر استفاده از روش فوق برای جابجا کردن نقاط کنترلی می باشد. که تئوری مربوط به این حالات به طور کامل مطرح شده است. در انتها، با حل یک مسئله نمونه، کارایی و صحت تئورهای مطرح شده مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل نشان دهنده ی کارایی بسیار مطلوب این روش در حل تطبیقی و میل به سمت جواب های دقیق می باشد.

۲-۷ نتایج

با توجه به اینکه روش تحلیل آیزوژئومتریک، روشی نوپا می باشد و مراجع و منابع محدودی در مورد آن در دست می باشد، بنابراین نتایج حاصل از این پایان نامه برای انجام حل تطبیقی می تواند راه گشایی برای گسترش استفاده از این روش و همچنین کارهای آینده در این زمینه باشد.

نتایج حاصل از این پایان نامه را، به طور کلی می توان به صورت زیر مطرح نمود:

- (۱) استفاده از سیستم فنرها برای جابجایی نقاط در آیزوژئومتریک نتایج بسیار مطلوبی را بدست می دهد که استفاده از این روش برای حل تطبیقی را مورد تایید قرار می دهد.
- (۲) با توجه به رابطه ای که بین فضای پارامتری و فضای هندسه، در روابط مربوط به سطوح نریز وجود دارد، می توان خطای محاسبه شده در فضای هندسه را به فضای پارامتری و به المان ها ی آن منتقل نمود. همچنین، با استفاده از روابط سطوح نریز می توان این خطاها را به نقاط کنترلی نیز اختصاص داد.
- (۳) جابجا کردن گره های بردارهای گره ای، تاثیر بسیار کمی بر روی نتایج خروجی دارد، اما بر خطاهای محاسبه شده بشدت تاثیرگذار می باشد، به طوری که با جابجایی گره ها نحوه ی توزیع خطا و همچنین میزان خطا در کل دامنه تغییر خواهد نمود. نتیجه ی این کار حصول یک شبکه ی المان بهینه در فضای هندسه می باشد. همچنین استفاده از این روش به طرز قابل ملاحظه ای شاخص تاثیر را افزایش می دهد.
- (۴) جابجا کردن نقاط کنترلی بشدت در نتایج خروجی موثر می باشد و می تواند آن ها را به سمت نتایج دقیق میل دهد. اما از طرف دیگر، مشکلی که بوجود می آورد کاهش شدید شاخص تاثیر می باشد که این امر می توان باعث دور شدن نتایج از نتایج دقیق گردد.
- (۵) استفاده از این دو نوع حل تطبیقی (جابجا کردن گره ها و نقاط کنترلی) در یک مسئله تاثیر این روش را بیشتر می کند. البته ترتیب اعمال آنها در نتیجه ی خروجی موثر می باشد.
- (۶) با توجه به نتایج بدست آمده، انجام حل تطبیقی به این صورت که ابتدا نقاط کنترلی را جابجا نماییم و سپس گره ها را، نسبت به حالتی که ابتدا گره ها را جابجا نماییم و سپس نقاط کنترلی را جابجا نماییم، نتیجه ی مطلوب تری بدست می دهد. یکی از نتایج مهم استفاده از این روش حفظ مقدار شاخص تاثیر در حدود شاخص تاثیر اولیه ای که در حل اولیه ی مسئله بدست می

آید، می باشد. به عبارت دیگر با این روش، کارایی مسئله کاهش نمی یابد.

۳-۷ ارائه ی پیشنهادات

با وجود اینکه نتایج حاصل، رضایت بخش می باشند، اما چون ایده ای ارائه شده در این پایان نامه ایده ای جدید می باشد و از طرف دیگر، همانطور که قبلا مطرح گردید روش تحلیل آیزوژئومتریک، موضوعی نوین است، بنابراین هنوز هم می توان در این راستای انجام حل تطبیقی و بهبود نتایج حاصل تلاش نمود. در این راستا جهت پیشبرد این موضوع در آینده پیشنهادهایی به شرح زیر ارائه می گردد.

(۱) مسلما پایه ی اصلی برای حل تطبیقی، برآورد خطاها می باشد. بنابراین نوع برآورد خطا در نتیجه ی حاصل موثر می باشد. در این پایان نامه پس از محاسبه ی خطاها، آنها بدون هیچ تغییری به فضای پارامتری منتقل گردیدند. اما به نظر می رسد که با توجه به فرمول سطوح نریز می توان در مورد این ارتباط مطالعه ی بیشتری نمود تا رابطه ی بین آنها به صورت کاملا مشخص تبیین گردد.

(۲) در این پایان نامه برای توزیع خطاها از روی المان ها بر روی نقاط گره ای از روش میانگین گیری استفاده شده است، که روشی ساده ولی موثر می باشد، در صورتی که می توان در این زمینه از روش های دقیق تری استفاده نمود.

(۳) در این پایان نامه برای محاسبه ی خطاهای نقاط کنترلی، میانگین خطای المان هایی از فضای پارامتری که توسط یک نقطه ی کنترلی تحت تاثیر قرار می گیرند، برای آن نقطه ی کنترلی در نظر گرفته شده است. اما طبق ویژگی های سطوح نریز، تاثیر نقطه ی کنترلی مذکور بر روی تمام این المان ها یکسان نمی باشد. بنابراین برای افزایش دقت باید رابطه ی بین آنها مشخص گردد که این امر می تواند موضوعی برای تحقیقات آینده باشد.

(۴) در این پایان نامه از سیستم فنرها برای جابجایی نقاط استفاده گردید که می توان از روش های

دیگر برای جابجایی نقاط استفاده نمود.

(۵) بررسی و امکان سنجی استفاده از این روش در تحلیل غیرخطی آیزوژئومتریک.

- [1] Zienkiewicz, O.C. (2000), “**Achievements and some unsolved problems of the finite element method**”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, pp.28.
- [2] Hughes T.G.R. Cottrell J.A.. Bazilevs Y.. (2005). “**Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement.**” Comput. Method Appl. Mech. Engrg. 194 4135–4195.
- [3] M. Gee, W.A. Wall, E. Ramm, **Parallel multilevel solutions of nonlinear shell structures**, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.
- [4] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, A. Reali, “**Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis**”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 (2007) 4160-4183.
- [5] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and J.Z. Zhu. (2005), “**The Finite Element Method**” 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [6] پایان نامه دوره ی کارشناسی ارشد «احمد گنجعلی» (۱۳۸۸)، "تخمین خطا و حل تطبیقی سازه های دو بعدی در اجزای محدود و روش آیزوژئومتریک"، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [7] Reddy. J. N. (1993). “**An Introduction to the Finite Element Method**”, McGraw-Hill, Singapore.
- [8] Zienkiewicz. O. c. (2006). “**The background of error estimation and adaptivity in finite element computations**” , Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195 207–213.
- [9] Hinton, E. and Campbell J. (1974), “**Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Square Method**”, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol. 8, pp.461-480.
- [10] L. Piegl, W. Tiller, “**The NURBS Book**” (Monographs in Visual Communication), Second ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [11] D.F. Rogers, “**An Introduction to NURBS With Historical Perspective**”, Academic Press, San Diego, CA, 2001.

[۱۲] پایان نامه دوره ی کارشناسی ارشد «ابوالفضل حجت پناه منتظری» (۱۳۸۸)، "تحلیل

آیزوژئومتریک و بهینه سازی شکل سازه های با تقارن محوری"، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[13] O. Zienkiewicz, R. Taylor, "**The Finite Element Method, sixth ed**", vols.1–3, Butterworth-Heinemann, 2005.

[14] David V. Hutton, "**Fundamentals Of Finite Element Analysis**", McGraw-Hill, New York, 2004.

[15] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, and O.C. Zienkiewicz. (1987), "**Adaptive remeshing for compressible flow computations.**" J. Comp. Phys., 72, 449±66.

[16] Babuska. I. and Rheinboldt. W.C. (1981), "**A-posteriori error analysis of finite element solution for one-dimension problems**", SIAM J Num. Anal., Vol. 18, pp. 565-589.

[17] Zienkiewicz, o.c. and Zhu, Z. (1987), "**A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis**", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, pp. 337-357.

[18] George, P.L., Borouchaki H., "**Delaunay Triangulation and Meshing: Application to Finite Elements**", HERMES, Paris(1998).

[19] D. Zeng, C.R. Ethier, "**A semi-torsional spring analogy model for updating unstructured meshes in 3D moving domains**", Finite Elements in Analysis and Design 41 (2005) 1118–1139.

[20] R. Haber, M.S. Shephard, J.F. Abel, R.H. Gallagher, D.P. Greenberg, "**A general two-dimensional graphical finite-element preprocessor utilizing discrete transfinite mappings**", International Journal for Numerical Methods in Engineering 17 (1981) 1015.

[21] M.S. Gadala, M.R. Movahhedy, J. Wang," **On the mesh motion for ALE modeling of metal forming processes**", Finite Elements in Analysis and Design 38 (2002) 435.

[22] O.C. Zienkiewicz, D.V. Philips, "**An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric coordinates**", International Journal for Numerical Methods in Engineering 3 (1971) 519.

[23] P.Z. Bar-Yoseph, S. Mereu, S. Chippada, V.J. Kalro, "**Automatic monitoring of element shape quality in 2-D and 3-D computational mesh dynamics**", Computational Mechanics 27 (2001) 378.

- [24] P.I. Crumpton, M.B. Giles, “**Implicit time-accurate solutions on unstructured dynamic grids**”, International Journal for Numerical Methods in Fluids 25 (1997) 1285.
- [25] R. Lohner, C. Yang, “**Improved ALE mesh velocities for moving bodies**”, Communications in Numerical Methods in Engineering 12 (1996) 599.
- [26] F.J. Blom, “**Considerations on the spring analogy**”, International Journal for Numerical Methods in Fluids 32 (2000) 647.
- [27] C. Degand, C. Farhat, “**A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes**”, Computers and Structures 80 (2002) 305.
- [28] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, M. Lesoinne, “**Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes**”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 163 (1998) 231.
- [29] Batina JT. “**Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes**”. AIAA Journal 1990; **28**(8):1381–1388
- [۳۰] پایان نامه دوره ی کارشناسی ارشد «محمد نیسی پور» (۱۳۸۸)، "توسعه روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته هم مکان برای مسایل کشسانی، برآورد خطا و نظریه تطبیقی"، دانشگاه علم و صنعت.
- [31] T.R.Chandrupatla, Ashok D. Belegundu, (2002), “**Introduction to Finite Elements in Engineering 3rd ed.**”, Prentice Hall.
- [32] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, (1977), “**Theory of Elasticity,**” McGraw-Hill, New York
- [33] Michael R. Dorfel, Bert Juttler, Bernd Simeon, (2008), “**Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines**”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., (To appear, available online).