

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

گروه فیزیک هسته‌ای

رساله دکتری

بررسی طیف انرژی هسته‌های سبک زوج - زوج و زوج - فرد با استفاده از پتانسیل‌های تک مرکزی و دو مرکزی در مدل خوشه‌ای

نگارنده: نفیسه روشن بخت

استاد راهنما

دکتر محمد رضا شجاعی

شهریور ۹۸

تقدیم به همسر عزیزم که:

وجودش روشنی بخش حیاتم و

کلامش راه‌کشای طریقتم بوده و هست و

تقدیم به پسران نازنینم که:

مهرشان تسلای وجودم است.

سپاس گزاری ...

سپاس خاص پروردگاری است که کویندگان به پایگاه شناکترش نرسند و شمارشگران نعمت هایش را به حساب نتوانند آورد، خدایی که آثار قدرت او بر چهره روز، روشن و تلمان است و انوار حکمت او در دل شب تابان. معبودی که نه از رحمتش ناامیدم و نه از نعمتش بی بهره، نه از آرزویش مایوسم و نه از پستیدنش روی گردان. او را به جنت بخشش های پی در پی و بی شمارش می ستایم و بر داده های بسیارش کرنش می نمایم.

سر تعظیم فرود می آوردم در برابر علم، ایمان، صبر و ادب استاد فریخته و فرزانه ام جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی که با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نمودند و بدون مساعدت ایشان انجام این کار و ادامه آن به بیخ وجه ممکن نبود. خدای سبحان را شاکرم که توفیق شاکردی ایشان را بر من ارزانی داشتند.

مشکرمی کنم از پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه کنم و قدردان زحمات مادرم، هستم که آفتاب مهرش در آستانه قلمم همیشه پابرجاست.

در نهایت، مشکرمی کنم از تمامی اعضای خانواده ام که همواره در طول تحصیل متحمل زحمت بودند و در مواجهه با مشکلات تکیه گاهم. وجودشان همیشه مایه دلگرمی من است.

تهیه‌نامه

اینجانب نفیسه روشن بخت دانشجوی دوره دکتری رشته فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه بررسی طیف انرژی هسته‌های سبک زوج - زوج و زوج - فرد با استفاده از پتانسیل‌های تک مرکزی و دو مرکزی در مدل خوشه‌ای تحت راهنمایی دکتر محمد رضا شجاعی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در سیستم هسته‌های سبک، انحراف از حالت کروی، تنها در قالب انحراف‌های محوری دیده نمی‌شود بلکه ساختار خوشه‌ای نیز ایجاد می‌کند. این ساختار خوشه‌ای در هسته‌های سبک به سه دسته عمده تقسیم می‌شوند که عبارتند از: (۱) مولکول‌های هسته‌ای (۲) ایزوتوپ‌هایی با ساختار مغز و خوشه (۳) هسته‌های آلفا - مزدوج

در مولکول‌های هسته‌ای با استفاده از مدل پوسته‌ای دو مرکزی به خوبی می‌توان ماهیت خوشه‌ای هسته‌ها را نشان داد. در این مدل، هر خوشه با چاه پتانسیل خود نشان داده می‌شود. در اینجا، با در نظر گرفتن تقارن محوری در چنین هسته‌هایی و معرفی پتانسیل دو مرکزی گوسی به حل معادله شرودینگر در مختصات استوانه‌ای پرداخته‌ایم و ترازهای انرژی دو ایزوتوپ ${}^8\text{Be}$ و ${}^9\text{Be}$ را در این مدل بررسی کرده‌ایم.

در هسته‌هایی که تعداد نوکلئون‌های آن در نزدیکی هسته‌هایی با دو عدد جادویی است، نوکلئون‌های ظرفیت می‌توانند همانند یک خوشه رفتار کنند که بیرون از مغز جادویی می‌چرخد. در اینجا، برای بررسی ترازها از مدل هسته‌ای دو ذره‌ای شامل مغز و خوشه استفاده شده است. با انتخاب پتانسیل‌های مناسب نوارهای چرخشی با پارامتر منفی و مثبت مربوط به دو ایزوتوپ ${}^{44}\text{Ti}$ و ${}^{20}\text{Ne}$ محاسبه و با نتایج تجربی مقایسه شده است. همچنین به بررسی خوشه‌هایی با اسپین غیر صفر نظیر ${}^3\text{H}$ و ${}^3\text{He}$ حول اولین هسته جادویی با ساختار دوگانه که ذره آلفا می‌باشد، پرداخته‌ایم و ترازهای چرخشی ایزوتوپ‌های آینه‌ای ${}^6\text{Li}$ و ${}^7\text{Be}$ مورد بررسی قرار داده‌ایم.

در نهایت، به بررسی هسته‌هایی با عدد جرمی $A=4n$ و $N=Z$ که به عنوان هسته‌های آلفا - مزدوج شناخته می‌شوند، پرداخته شده است. در این هسته‌ها، انرژی برانگیختگی داخلی به انرژی بستگی خوشه‌ها تبدیل می‌شود و ساختاری متشکل از ذرات آلفا خواهیم داشت. از این رو، برهمکنش خوشه - خوشه را جایگزین بر هم کنش نوکلئون - نوکلئون نموده و با حل معادله شرودینگر D بعدی به محاسبه انرژی خوشه شدن و نوار چرخشی مربوطه برای ایزوتوپ‌های ${}^8\text{Be}$ ، ${}^{12}\text{C}$ و ${}^{16}\text{O}$ پرداخته‌ایم.

کلمات کلیدی: مدل خوشه‌ای، پتانسیل دو مرکزی، مولکول هسته‌ای، هسته‌های آلفا-مزدوج، مدل مغز و خوشه، پتانسیل مرکزی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

- [۱] M. R. Shojaei, N. Roshanbakht (۲۰۱۵), "Deuteron-Deuteron Cluster Model for Studying the Ground State Energy of the ${}^4\text{He}$ Isotope," *Chinese Journal of Physics*, vol. ۵۳, no. ۷, p. ۱۲۰۳۰۱.
- [۲] N. Roshanbakht, M. R. Shojaei (۲۰۱۷), "Two-Center Gaussian Potential Well for Studying Light Nucleus in Cluster Structure," *Advances in High Energy Physics*, vol. ۲۰۱۷.
- [۳] N. Roshanbakht, M. R. Shojaei (۲۰۱۸), "The Cluster Model for Studying Even-Even Light Nuclei," *Canadian Journal of Physics*, vol. ۹۶, no. ۱۱, pp. ۱۲۳۰-۱۲۳۴.
- [۴] N. Roshanbakht, M. R. Shojaei (۲۰۱۸), "A New Calculation of Rotational Bands in Alpha-Cluster Nuclei" *Communications in Theoretical Physics*, vol. ۷۰, no. ۱, p. ۶۷.
- [۵] N. Roshanbakht, M. Shojaei (۲۰۱۸), " ${}^7\text{Li}$ and ${}^8\text{Be}$ Isotopes in a New Cluster Model," *The European Physical Journal A*, vol. ۵۴, no. ۸, p. ۱۳۴.
- [۶] M. R. Shojaei, N. Roshanbakht (۲۰۱۶), "Calculation of Energy Spectrum of ${}^{12}\text{C}$ Isotope with Modified Yukawa Potential by Cluster Models," *Pramana*, vol. ۸۳, p. ۵۴.
- [۷] N. Roshanbakht, M. R. Shojaei (۲۰۱۹), " ${}^{12}\text{C}$ isotope in relativistic cluster model," *Modern Physics Letter A*, vol. ۳۴, no. ۲۰, p. ۱۹۵۰۱۵۸.
- [۸] روشن بخت، نفیسه؛ شجاعی، محمد رضا (۱۳۹۵) "محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ های کربن از طریق حل معادله نسبیتی دیراک با استفاده از پتانسیل وود-ساکسون" بیست و سومین کنفرانس هسته‌ای ایران، تهران.
- [۹] روشن بخت، نفیسه؛ شجاعی، محمد رضا (۱۳۹۵)، "محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ های برلیوم با استفاده از چاه پتانسیل گوسی تغییر یافته در مختصات استوانه ای" اولین کنفرانس فیزیک ریاضی ایران، قم، صفحه ۸۰.
- [۱۰] روشن بخت، نفیسه؛ شجاعی، محمد رضا؛ حسین نژاد، حمزه (۱۳۹۷) "حل معادله شرودینگر D بعدی جهت محاسبه انرژی خوشه شدن در هسته‌های آلفا - مزدوج سبک" سومین کنفرانس فیزیک ریاضی ایران، قم، صفحه ۵.
- [۱۱] روشن بخت، نفیسه؛ شجاعی، محمد رضا (۱۳۹۸)، "بررسی ترازهای چرخشی در ایزوتوپ ${}^{20}\text{Ne}$ " مجله پژوهش فیزیک، جلد ۱۹، شماره ۲، تابستان.

فهرست مطالب

س	فهرست جداول
ش	فهرست اشکال
۱	فصل اول: آشنایی با مفاهیم مدل خوشه‌ای
۲	۱-۱ مقدمه
۳	۲-۱ تعریف مدل خوشه‌ای
۶	۳-۱ مروری مختصر بر تاریخچه مدل خوشه‌ای در فیزیک هسته‌ای
۱۲	۴-۱ شواهد تجربی مدل خوشه‌ای در فیزیک هسته‌ای
۱۶	۵-۱ مولکول‌های هسته‌ای
۲۰	۶-۱ شواهد تجربی از ساختار خوشه‌ای در مولکول‌های هسته‌ای
۲۱	فصل دوم: تئوری های مدل خوشه‌ای
۲۲	۱-۲ مقدمه
۲۲	۲-۲ انواع ساختارهای خوشه‌ای مشاهده شده در هسته‌های سبک
۲۳	۳-۲ مدل‌های خوشه‌ای میکروسکوپی و غیر میکروسکوپی
۲۵	۴-۲ مدل نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته DHO:
۲۹	۵-۲ مدل نوسانگر هارمونیک با دو مرکز TCHO
۳۰	۶-۲ مدل خوشه‌ی آلفا برینک- بلاچ (ACM)
۳۱	۷-۲ روش پتانسیل‌های پدیده شناختی
۳۳	۸-۲ بررسی مولکول‌های هسته‌ای با استفاده از پتانسیل‌های دو مرکزی
۳۷	فصل سوم: روش‌های تحلیلی و عددی حل مسئله
۳۸	۱-۳ مقدمه
۳۹	۲-۳ دستگاه مختصات ژاکوبی
۴۰	۳-۳ متغیرهای فوق‌کروی
۴۱	۴-۳ مروری مختصر بر روش NU در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم تک‌متغیره
۴۲	۱-۴-۳ کلیات روش NU
۴۳	۲-۴-۳ تعمیم پارامتری روش NU

۴۵	۳-۵ حل معادلات دیفرانسیل به روش رونگ - کوتا
۴۹	فصل چهارم: بررسی ساختار خوشه‌ای مولکول‌های هسته‌ای
۵۰	۴-۱ مقدمه
۵۰	۴-۲ حل معادله شرودینگر در مختصات استوانه‌ای
۵۹	۴-۳ تاثیر جفت شدگی اسپین - مدار بر ترازهای انرژی
۶۱	۴-۴ بررسی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های ^9Be و ^8Be
۶۱	۴-۴-۱ ایزوتوپ ^8Be
۶۲	۴-۴-۲ ایزوتوپ ^9Be
۶۵	فصل پنجم: بررسی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های متشکل از مغز و خوشه
۶۶	۵-۱ مقدمه
۶۷	۵-۲ محاسبه ترازهای انرژی هسته‌هایی با ساختار خوشه آلفا و مغز
۷۰	۵-۲-۱ بررسی ترازهای ایزوتوپ ^{20}Ne
۷۱	۵-۲-۱-۱ پتانسیل یوکاوا به همراه پتانسیل کولنی
۷۲	۵-۲-۲-۱ پتانسیل دنگ-فان به همراه پتانسیل کولنی
۷۳	۵-۲-۲-۳ پتانسیل دنگ-فان به همراه پتانسیل یوکاوا و کولنی
۷۴	۵-۲-۲ بررسی ترازهای ایزوتوپ ^{44}Ti
۷۶	۵-۳ بررسی ساختار خوشه‌ای هسته‌های سبک با اسپین غیر صفر
۷۷	۵-۴ محاسبه ترازهای ایزوتوپ‌های آینه‌ای ^6Li و ^7Be
۸۱	۵-۵ محاسبه شعاع باری و گشتاور چهار قطبی الکتریکی ایزوتوپ‌های آینه‌ای ^6Li و ^7Be
۸۳	فصل ششم: بررسی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های آلفا-مزدوج
۸۴	۶-۱ مقدمه
۸۵	۶-۲ معادله شرودینگر برای A ذره
۸۷	۶-۳ محاسبه ترازهای انرژی با پتانسیل پیشنهادی
۸۹	۶-۴ بررسی نتایج
۸۹	۶-۴-۱ ایزوتوپ ^8Be
۹۰	۶-۴-۲ ایزوتوپ ^{12}C
۹۱	۶-۴-۳ ایزوتوپ ^{16}O
۹۲	۶-۵ ارائه پتانسیل پیشنهادی دیگر و محاسبه ترازهای انرژی مربوطه

نتیجه گیری ۹۷

منابع ۱۰۱

فهرست جداول

- جدول ۴-۱. مقایسه ترازهای انرژی ایزوتوپ ^9Be با نتایج تجربی ۶۲
- جدول ۵-۱. محاسبه شعاع باری ایزوتوپ های ^7Li و ^9Be ۸۲
- جدول ۵-۲. محاسبه گشتاور چهار قطبی الکتریکی ایزوتوپ های ^7Li و ^9Be ۸۲
- جدول ۶-۱. مقایسه انرژی خوشه شدن ایزوتوپ ^9Be و دو تراز نوار چرخشی آن با مقادیر تجربی ۹۰
- جدول ۶-۲. مقایسه انرژی خوشه شدن ایزوتوپ ^{12}C و دو تراز نوار چرخشی آن با مقادیر تجربی ۹۱
- جدول ۶-۳. مقایسه انرژی خوشه شدن ایزوتوپ ^{16}O و دو تراز نوار چرخشی آن با مقادیر تجربی ۹۲
- جدول ۶-۴. محاسبه انرژی خوشه شدن و نوار چرخشی آن در هسته های آلفا - مزدوج با پتانسیل
منینگ - روزن تغییر شکل یافته ۹۵

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱. شکل‌گیری چهار خوشه آلفا در هسته ^{16}O ۳
- شکل ۱-۲. منحنی انرژی پیوندی به ازای هر نوکلئون ۵
- شکل ۱-۳. انرژی بستگی بر هر نوکلئون در هسته‌های سبک (در هر خط تعداد پروتون ها ثابت است). ۷
- شکل ۱-۴. نمودار انرژی بستگی هر هسته بر اساس تعداد پیوندهای ممکن بین ذرات آلفا ۸
- شکل ۱-۵. نمودار ایکدا(کلیه انرژی ها بر حسب MeV است). ۹
- شکل ۱-۶. ساختار کریستالی ایزوتوپ‌های مختلف که توسط برینک ارائه شد. ۱۱
- شکل ۱-۷. مقایسه نتایج تئوری و تجربی برای ایزوتوپ ^{20}Ne در ساختار خوشه‌ای $^{16}\text{O} + \alpha$ ۱۲
- شکل ۱-۸. الف) تشدیدهای مشاهده شده در واکنش $^{12}\text{C}(^{16}\text{O}, ^{24}\text{Mg}^*)$ برای باریکه ^{16}O با انرژی‌های 115MeV و 160MeV (ب) اندازه‌گیری زاویه گسیل محصولات واپاشی ترازهای برانگیخته ایزوتوپ ^{24}Mg ۱۴
- شکل ۱-۹. ساختار خوشه‌ای $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ایزوتوپ ^{24}Mg ۱۵
- شکل ۱-۱۰. نوارهای چرخشی برای ایزوتوپ ^{16}O ۱۶
- شکل ۱-۱۱. شکل‌گیری اوربیتال‌های مولکولی در برلیوم (کره های قرمز، ذرات آلفا را نشان می‌دهد). ۱۷
- شکل ۱-۱۲. ترازهای چرخشی ایزوتوپ ^9Be ۱۸
- شکل ۱-۱۳. نمودار اصلاح شده‌ی ایکدا جهت نشان دادن ساختار مولکولی در هسته‌ها ۱۹
- شکل ۱-۲. ترازهای انرژی در مدل نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته ۲۷
- شکل ۲-۲. چگالی محاسبه شده برای نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته ۲۹
- شکل ۲-۳. پتانسیل وود-ساکسون در مختصات استوانه‌ای الف) مقدار کشیدگی $R=7\text{ fm}$ (ب) مقدار کشیدگی $R=18\text{ fm}$ ۳۵
- شکل ۱-۴. نمایش کمیت‌های شکل هسته با ساختار دو خوشه‌ی یکسان ۵۱
- شکل ۲-۴. چاه پتانسیل گوسی برای برخی مقادیر Z ۵۲
- شکل ۳-۴. توابع ویژه، $R_{n_p}(\rho)$ ، برای حالت پایه و دو تراز برانگیخته ۵۵
- شکل ۴-۴. توابع ویژه، $Z_{n_v}(z)$ ، برای حالت پایه و دو تراز برانگیخته ۵۷
- شکل ۴-۵. ترازهای انرژی بدون تاثیر جفت شدگی اسپین-مدار ۶۳
- شکل ۴-۶. ترازهای انرژی همراه با تاثیر جفت شدگی اسپین-مدار ۶۴

- شکل ۵-۱. مقایسه دو نوار چرخشی محاسبه شده با استفاده از پتانسیل یوکاوا به اضافه کولنی برای ایزوتوپ ^{20}Ne با مقادیر تجربی ۷۱
- شکل ۵-۲. مقایسه دو نوار چرخشی محاسبه شده با استفاده از پتانسیل دنگ-فان به اضافه کولنی برای ایزوتوپ ^{20}Ne با مقادیر تجربی ۷۲
- شکل ۵-۳. مقایسه طیف انرژی محاسبه شده برای ایزوتوپ ^{20}Ne با مقادیر تجربی و نتایج کار دیگران ۷۴
- شکل ۵-۴. مقایسه طیف انرژی محاسبه شده برای ایزوتوپ ^{44}Ti با مقادیر تجربی و نتایج کار دیگران ۷۵
- شکل ۵-۵. پتانسیل هسته‌ای ایزوتوپ‌های آینه‌ای $^{\text{Y}}\text{Li}$ و $^{\text{Y}}\text{Be}$ ۷۸
- شکل ۵-۶. مقایسه مقادیر محاسبه شده با نتایج تجربی در ترازهای انرژی ایزوتوپ $^{\text{Y}}\text{Be}$ ۸۰
- شکل ۵-۷. مقایسه مقادیر محاسبه شده با نتایج تجربی در ترازهای انرژی ایزوتوپ $^{\text{Y}}\text{Li}$ ۸۰

فصل اول: آشنایی با معنا، مسم مدل خوشه ای

۱ + مقدمه

در یک توصیف سنتی از هسته، می‌توان هسته‌ها را به صورت گروهی و ترکیب تقریباً همگنی از پروتون‌ها و نوترون‌ها دانست. این دید بسیار ساده گرایانه است. در توصیف دقیق‌تر از هسته، فرض بر این است که نیروهایی توسط نوکلئون‌های دیگر بر یک نوکلئون وارد می‌شود و می‌توان به صورت تقریبی آن را با چاه پتانسیل نمایش داد که به آن پتانسیل نظریه پوسته‌ای می‌گویند. این حقیقت، نتیجه بسیار مهمی دارد و ایجاب می‌کند که شکل بسیاری از هسته‌ها غیر گروهی باشد. انحراف از شکل گروهی یا به عبارتی تغییر شکل محوری هسته‌ها، به مدل جمعی^۱ معروف است. ناحیه اصلی هسته‌های بیضی‌وار سبک در پوسته‌های تقریباً نیمه پر $N=2$ و $N=3$ قرار می‌گیرد. در واقع هسته‌های گروهی در وسط جدول تناوبی ($A=35$ تا $A=150$) قرار دارند که در آن، پروتون‌ها و یا نوترون‌ها به اندازه کافی به پوسته پر نزدیک بوده و مانع تغییر شکل هسته می‌شود [۱].

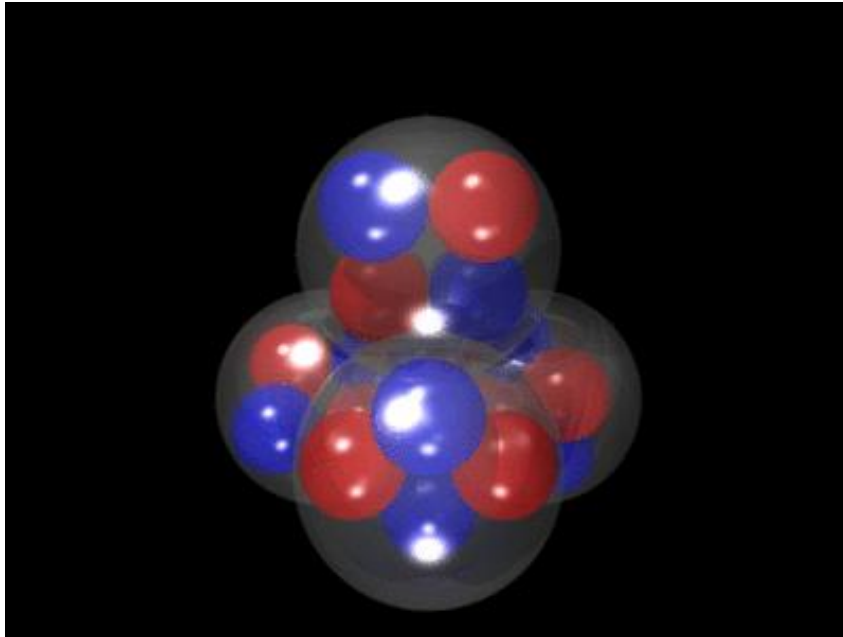
در سیستم هسته‌های سبک، انحراف از حالت گروهی تنها در قالب انحراف‌های محوری دیده نمی‌شود بلکه ساختار خوشه‌ای^۲ هم ایجاد می‌کند. هر چند، حتی در آغاز دانش هسته‌ای نیز به هم پیوستن و جمع شدن نوکلئون‌ها یا به عبارتی ساختار خوشه‌ای آن‌ها در تعیین ساختار هسته‌های سبک، بسیار دارای اهمیت بوده است. در بسیاری از موارد، یک تصویر مناسب از هسته مشابه شکل ۱-۱ است.

گرایش اشیاء برای جمع شدن در تمامی مقیاس‌های فیزیکی قابل توجه است. اساس این موضوع در کاهش انرژی پتانسیل و رسیدن به پایداری است. در بزرگترین مقیاس‌های شناخته شده برای انسان، پدیده مجموعه‌شدن ستارگان بعد از انفجار بزرگ و شکل‌گیری کهکشان‌ها نشانی از جمع شدن و تمایل به خوشه‌ای شدن است [۲]. همچنین اتم‌ها باعث شکل‌گیری مولکول‌ها و نیز مایعات و گازها

^۱ Collective model

^۲ Clustering structure

می‌گردند. در جامدات نیز، کریستال‌ها این نقش را ایفا می‌کنند. کوارک‌ها^۱، در حجم محدود هادرون^۲ با تعداد خاصی (۲ یا ۳ کوارک) جمع شده‌اند. هادرون به دو صورت باریون (مثل پروتون و نوترون شامل ۳ کوارک) و مزون^۳ (مانند پیون شامل یک کوارک و یک آنتی کوارک^۴) است. بنابراین، به هم پیوستن و جمع شدن نوکلئون‌ها و ایجاد ساختار خوشه‌ای در هسته‌ها، دور از انتظار نیست.



شکل ۱-۱. شکل‌گیری چهار خوشه‌ی آلفا در هسته ^{16}O [۳]

۴-۱ تعریف مدل خوشه‌ای

مدل خوشه‌ای در سیستم‌های هسته‌ای، مدلی است که در آن هسته به صورت ترکیبی از خوشه‌ها رفتار می‌کند و در آن خوشه به معنای زیر سیستم‌هایی با موقعیت فضایی مشخص است که از نوکلئون‌هایی با همبستگی قوی تشکیل شده‌است. در واقع اساس مدل خوشه‌ای، بر این اصل است که درون هسته، ترکیباتی از نوکلئون‌ها وجود دارند که ضمن حفظ خود، با یکدیگر بر هم کنش می‌کنند. محاسن بررسی ساختار هسته در مدل خوشه‌ای، هنگامی مشخص می‌گردد که حرکت نسبی بین خوشه‌ها، حالت اصلی حرکت هسته می‌شود [۴]. بر این اساس، برای بعضی هسته‌ها، با در نظر گرفتن

^۱ Quark
^۲ Hadron
^۳ Meson
^۴ Anti-Quark

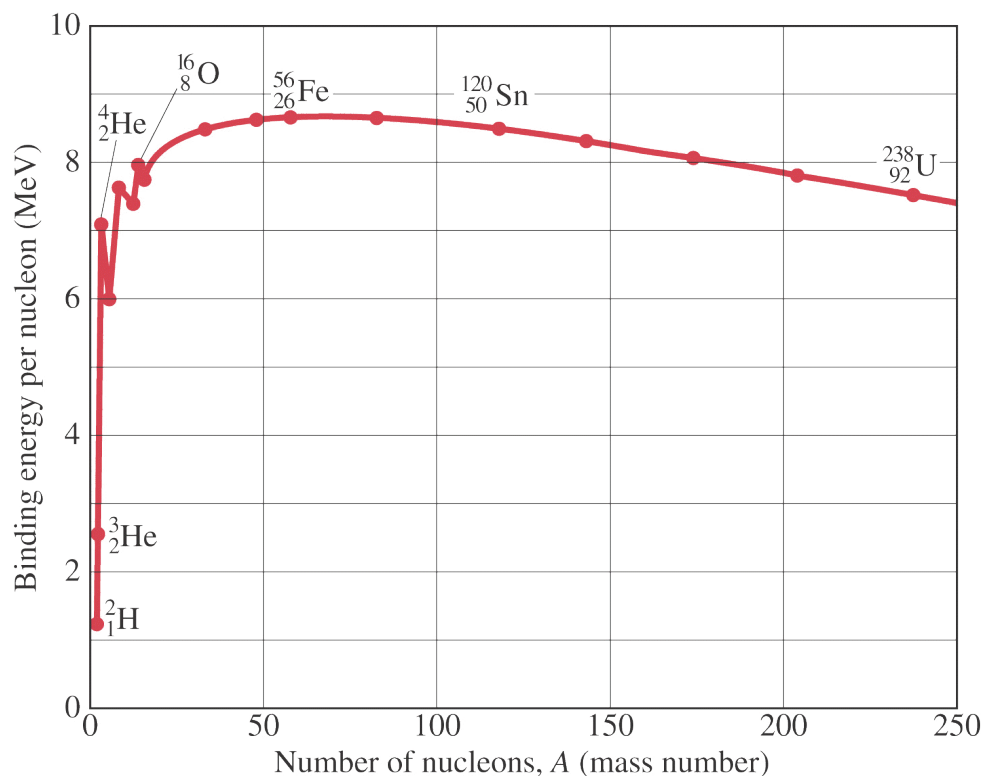
انرژی مناسبی برای نوکلئون‌ها می‌توان آن‌ها را به عنوان خوشه‌های کوچکتر یا به عنوان زیر واحدهایی در هسته مادر در نظر گرفت. به عنوان مثال، هسته ^{28}Si را می‌توان متشکل از هسته ^{24}Mg و یک هسته α دانست و یا هسته ^9Be می‌تواند متشکل از دو ذره α در نظر گرفته شود [۵]. مدل خوشه‌ای در ابتدا برای هسته‌های بسیار سبک به عنوان یک مکمل در بررسی مدل پوسته‌ای مورد استفاده قرار می‌گرفت. در سال‌های اخیر، به طور گسترده پدیده خوشه‌ای شدن در زمینه‌های مختلف مورد استفاده قرار گرفته است و داده‌های زیادی در خصوص حالت‌های شبه مولکولی جمع‌آوری شده است. به طوری که برای ناحیه بزرگی از عدد جرمی و همچنین در ناحیه انرژی‌های نسبتاً بالای برانگیختگی، به عنوان مدل مهم در بررسی ساختار هسته مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در بین وجود خوشه‌ها و موقعیت فضایی آن‌ها نسبت به یکدیگر، خوشه α از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. در حقیقت در هسته‌های سبک، تعداد زیادی از حالت‌های هسته‌ای پیدا شده است که وجود خوشه α را به صورت مسلم در آورده است و می‌تواند به عنوان پایگاه داده‌ای محکمی در مدل خوشه‌ای مورد استفاده قرار گیرد. هسته‌هایی که ساختار خوشه‌ای آن‌ها، متشکل از ذرات α است، هسته‌های α - مزدوج نامیده می‌شوند. این هسته‌ها را در حالت خوشه‌ای می‌توان به صورت ساختارهایی شبیه به آرایش هندسی اتم‌ها در مولکول‌ها در نظر گرفت که بعدها به مدل ساختار شبه مولکولی^۱ معروف شد. تاریخچه خوشه α مربوط به سال ۱۹۱۱ می‌باشد، هنگامی که آزمایشات رادرفورد^۲ و همکارانش، گسیل خود به خودی ذرات α را نشان دادند، رادرفورد پیشنهاد داد که ذرات α می‌توانند درون هسته مادر شکل بگیرند. در این هنگام، فرضیه اولیه شکل‌گیری هسته‌ها از ذرات α ایجاد شد [۶]. در این هسته‌ها، تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها با یکدیگر برابر و نیز $A=4n$ ($n=2,3,4,\dots$) است [۷]. دلیل جایگاه ویژه خوشه α ، ثبات و پایداری بسیار بالای آن است. بر اساس مدل لایه‌ای، دو پروتون و دو نوترون این هسته، تراز $1s_{1/2}$ را کاملاً پر کرده و بنابراین، ذره α دارای

^۱ Quasi-Molecular Structure

^۲ Rutherford

دو عدد جادویی بوده و بسیار پایدار است. همچنین، انرژی بستگی بر نوکلئون ذرات آلفا در مقایسه با هسته‌های سبک، بسیار بزرگ است (انرژی بستگی ذره آلفا برابر با 7.07 MeV بر هر نوکلئون است). که در شکل ۱-۲ نشان داده شده است. انرژی اولین حالت برانگیخته ذره آلفا در حدود 20.21 MeV است [۸-۹]. از این رو، دادن انرژی مناسب به هسته، منجر به شکل گیری و یکپارچه شدن ذرات آلفا می‌گردد. در این هنگام، بر هم کنش نوکلئون - نوکلئون جای خود را به بر هم کنش خوشه - خوشه می‌دهد که در فواصل مشخصی کاملاً به صورت دافعه عمل کرده و اجازه نمی‌دهد، ذرات مثل قبل به هم نزدیک شوند.



شکل ۱-۲. منحنی انرژی پیوندی به ازای هر نوکلئون [۸]

پیشرفت‌هایی که در بیست سال اخیر در راستای مطالعه و بررسی ساختار هسته از طریق مدل خوشه‌ای صورت گرفته است، بسیار قابل توجه بوده و موارد استفاده آن بسیار گسترده است. نه تنها

ایزوتوپ‌هایی مثل دوترون، تریتون، ${}^3\text{He}$ و آلفا در ساختار هسته‌ای به صورت خوشه عمل می‌کنند، بلکه هسته‌های ${}^{12}\text{C}$ و ${}^{16}\text{O}$ نیز می‌توانند در هسته‌های بزرگتر به عنوان خوشه رفتار کنند [۳].

۱ ۳ مروری مختصر بر تاریخچه مدل خوشه‌ای در فیزیک هسته‌ای

کشف ذره آلفا از واپاشی هسته‌های سنگین، آغاز تفکر وجود ساختار خوشه‌ای در هسته‌ها، قبل از گسیل بود. در سال ۱۹۳۱ بر اساس تئوری واپاشی ذرات آلفا، گامو^۱، به بررسی هسته‌ها به صورت ترکیبی از ذرات آلفا پرداخت. البته در آن زمان هنوز ماهیت ذره نوترون شناخته شده نبود و او هسته‌هایی با عدد جرمی $A=4n$ ($n=2,3,4,\dots$) مانند ${}^8\text{Be}$ ، ${}^{12}\text{C}$ و ${}^{16}\text{O}$ را متشکل از ذرات آلفایی می‌دانست که از پروتون‌ها و الکترون‌ها تشکیل شده بودند و بیان نمود به دلایل نامعلوم، اگر چه الکترون‌ها رفتار مبهمی در ساختار هسته‌ای دارند ولی تاثیری بر روی حرکت ذرات آلفا و پروتون‌ها در ساختار هسته‌ای ندارند و در واقع می‌توان ذرات آلفا و پروتون‌ها را به صورت مستقل از الکترون‌ها بررسی کرد [۱۰-۱۱].

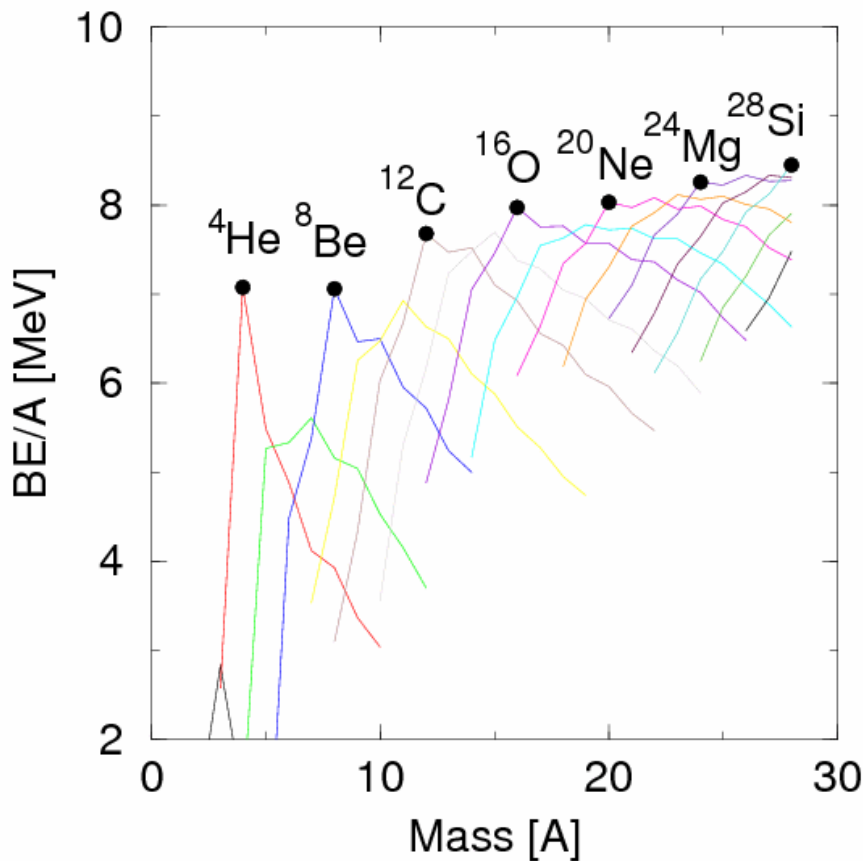
بعد از کشف نوترون، مدل‌های پروتون - نوترون در بررسی هسته‌ها دارای عمومیت شدند و ایزوتوپ‌هایی متشکل از ذرات آلفا مورد بررسی قرار گرفتند. در سال ۱۹۳۷، هافستد^۲ و تلر^۳، از مدل خوشه‌ای آلفا، جهت برآورد انرژی بستگی هسته‌های 4n ، ${}^{4n+1}$ و ${}^{4n+2}$ استفاده نمودند. هسته ${}^{4n+1}$ شامل n ذره آلفا و یک نوکلئون اضافی است و هسته ${}^{4n-1}$ شامل n ذره آلفا و یک حفره ناشی از کمبود یک نوکلئون می‌باشد. نوکلئون اضافی و یا حفره بین یک ذره آلفا و ذرات آلفای دیگر، همانند اوربیتال‌های مولکولی، جابجا می‌شود. با بررسی انرژی بستگی بر عدد جرمی، در هسته‌های نسبتاً سبک، مشاهده می‌شود انرژی بستگی برای هسته‌هایی که دارای تعداد زوج پروتون هستند بیشتر و برای هسته‌هایی که دارای تعداد زوج هم برای پروتون و هم نوترون است، مقدار ماکزیمم را دارد که

^۱ Gamow

^۲ Hafstad

^۳ Teller

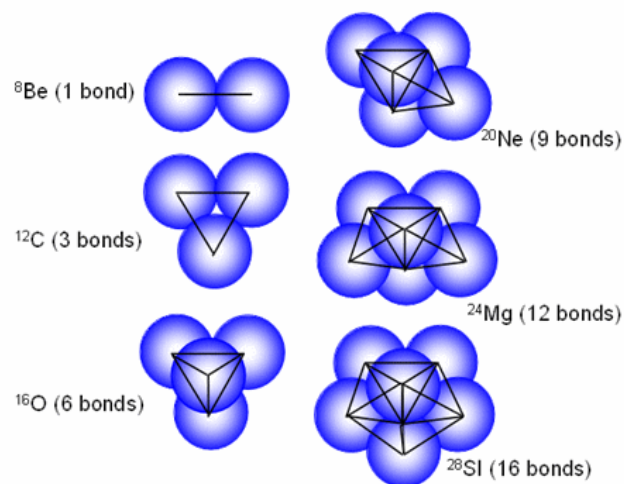
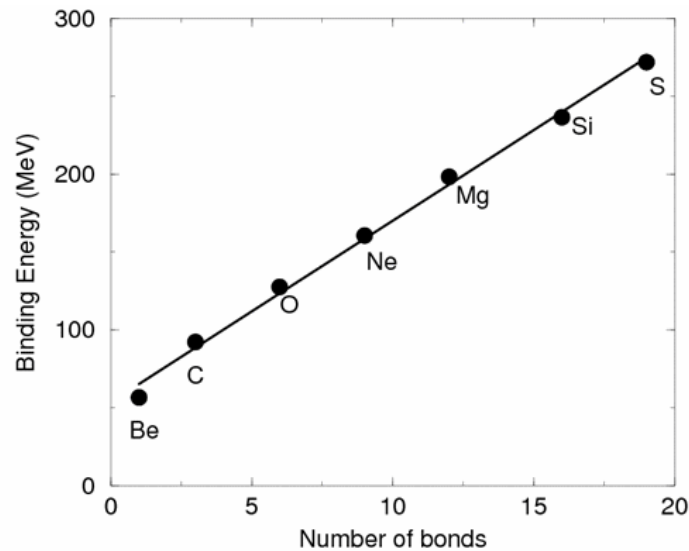
در شکل ۱-۳ قابل رویت است. بنابراین، این قابل درک است که تمامی این هسته‌ها می‌توانند به صورت خوشه‌های آلفا دیده شوند [۱۲].



شکل ۱-۳. انرژی بستگی بر هر نوکلئون در هسته‌های سبک (در هر خط تعداد پروتون‌ها ثابت است). [۳]

ذره آلفا با ۴ نوکلئون، به صورت یک ساختار متراکم در نظر گرفته می‌شود که در تقابل با ذرات بسیار نزدیک به خود است. این مدل با در نظر گرفتن یک اندرکنش آلفا - آلفا جهت محاسبه انرژی بستگی سیستم‌هایی با $n\alpha$ گسترش یافت. بررسی انرژی بستگی هسته‌های $A=4n, N=Z$ که در آن $n=2,3,4,\dots$ به عنوان تابعی از تعداد پیوندهای ممکن آلفا - آلفا که به صورت رابطه خطی در شکل ۱-۴ دیده می‌شود، بیانگر نقش مهم خوشه آلفا در حالت پایه این هسته‌ها است. این تصویر ساده، در اصل درست است، به ویژه هنگامی که انرژی آستانه واپاشی خوشه، در نزدیکی حالت پایه باشد. اما در

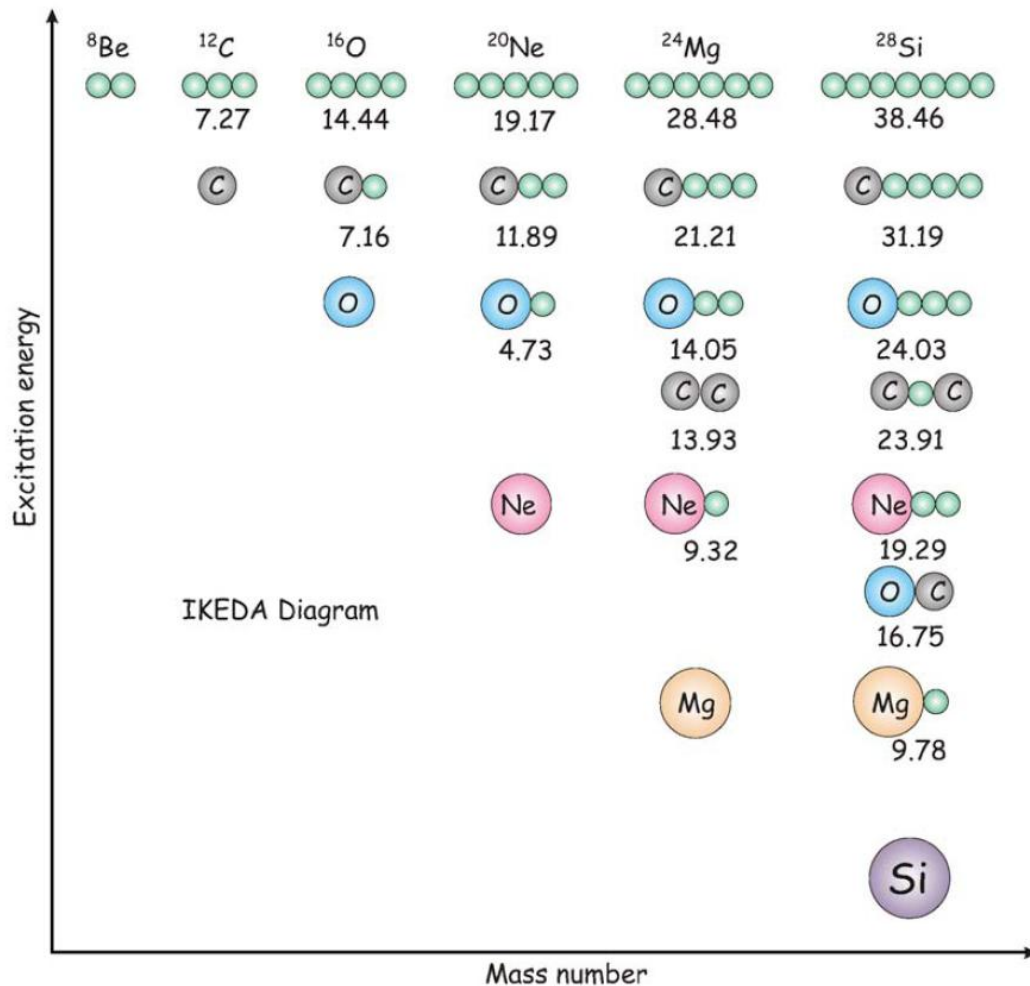
بیشتر حالت‌های پایه ساختار خوشه‌ای به عنوان ذرات آلفا جدا از هم باقی نمی‌ماند بلکه ساختار خوشه‌ای فشرده شده و خوشه‌ها با یکدیگر هم‌پوشانی پیدا می‌کنند.



شکل ۱-۴. نمودار انرژی بستگی هر هسته بر اساس تعداد پیوندهای ممکن بین ذرات آلفا [۳]

فرضیه اصلی در انرژی بستگی در تشابه بین ذرات آلفا و اتم‌هایی با پوسته بسته است که بیان می‌کند: «نیروهای اندرکنش می‌توانند در طبیعت افزایش یابند و اضافه شدن یک ذره آلفا در سیستم، اندرکنش بین دوتای اول را تغییر نمی‌دهد». این تشابه باعث می‌شود تا در صورت وجود نوکلئون اضافی و یا حفره، بتوان از همان مدل استفاده کرد. نوکلئون اضافی در مقایسه با هسته مشابه الکترون اضافی در سیستم اتمی است. یعنی جرم قابل چشم پوشی تک نوکلئون در مقایسه با جرم هسته با

یوسته‌های کامل و نزدیک به آن که به تبادل کوالانسی بین ذرات آلفا منجر می‌شود. تعداد پیوندهایی که بین ذرات آلفا می‌تواند وجود داشته باشد از طریق رسم ساختار خوشه‌ای هسته امکان پذیر است که در شکل ۴-۱ ساختار خوشه‌ای برخی از ایزوتوپ‌ها به تصویر کشیده شده است.



شکل ۴-۱. نمودار ایکدا (کلیه انرژی‌ها بر حسب MeV است). [۱۳]

این ایده، که ساختار خوشه‌ای در حالت پایه وجود ندارد و با افزایش انرژی داخلی هسته ظاهر می‌شود، در دهه سال ۱۹۶۰ رونق گرفت و بیان شد هسته برای توسعه دادن ساختار خوشه‌ای می‌بایست انرژی قابل قبولی داشته باشد. به طور مجانبی، هنگامی هسته به اجزای خوشه‌ای تبدیل می‌شود که انرژی معادل اختلاف جرم هسته اولیه و خوشه‌ها فراهم باشد. در سال ۱۹۶۸، ایکدا^۱ برای

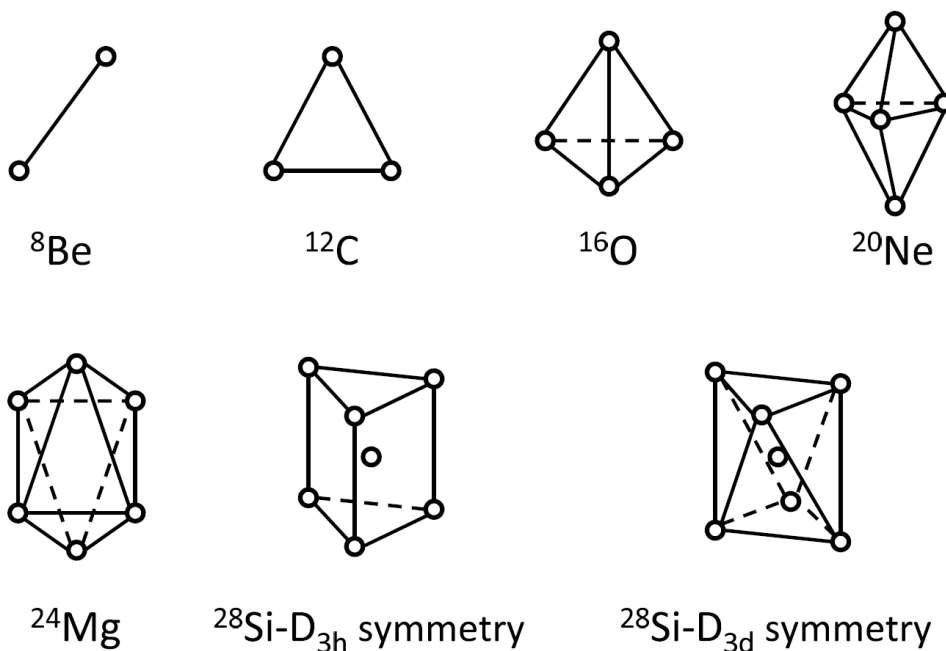
^۱ Ikeda

کلیه هسته‌ها با $Z=N$ و $A=4n$ پیشنهاد کرد که حالت خوشه‌ای با یک برجستگی مربوط به انرژی آستانه واپاشی می‌تواند ایجاد شود که در شکل ۱-۵ نشان داده شده‌است و به نمودار ایکدا معروف است. بنابراین، انتظار می‌رود ساختار خوشه‌ای در آستانه واپاشی خوشه و احتمالاً کمی پایین‌تر، دیده شود [۱۴]. بر این اساس، ساختار هسته به شکلی است که در هنگام واپاشی و گسیل خوشه، کمترین تغییر پیکربندی را داشته باشد. از طرف دیگر هسته می‌تواند انرژی برانگیختگی داخلی را به انرژی بستگی خوشه‌ها تبدیل کند. مشابه پدیده شکافت هسته‌ای که در آن یک هسته سنگین در چندین مرحله از شکل اصلی به شکلی که نیاز به کمترین تغییر پیکربندی بعد از شکافت را دارد تبدیل می‌شود. شکل ۱-۵ همچنین نشان می‌دهد هنگامی که انرژی برانگیختگی افزایش می‌یابد، ساختار خوشه‌ای نیز برجسته می‌شود و در نهایت ساختار هسته متشکل از ذرات آلفا خواهد بود. بر این اساس، ساختار خوشه‌ای، به جز برای ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ ، در حالت پایه هیچ یک از هسته‌های آلفا - مزدوج رخ نخواهد داد. به طور مثال، ایزوتوپ ${}^{12}\text{C}$ با دریافت مقدار $7/27\text{MeV}$ انرژی به صورت سه خوشه آلفا در می‌آید.

ایزوتوپ ${}^{24}\text{Mg}$ نیز، در انرژی $9/32\text{MeV}$ دارای ساختار خوشه‌ای ${}^2\text{Ne}+\alpha$ است و با افزایش انرژی و رسیدن به انرژی $13/93\text{MeV}$ ساختار خوشه‌ای آن به صورت ${}^{12}\text{C}+{}^{12}\text{C}$ در خواهد آمد. هنگامی که انرژی برانگیختگی هسته به $14/05\text{MeV}$ می‌رسد، ساختار آن سه خوشه‌ای شده و در نهایت در انرژی $28/48\text{MeV}$ به صورت ساختاری متشکل از شش خوشه از ذره آلفا خواهد بود.

برینک^۱ در سال ۱۹۶۶ با ارائه یک مدل خوشه‌ای آلفا، به بررسی پایداری و شبه پایداری ساختار سیستم‌هایی خوشه‌ای پرداخت. وی یک ساختار کریستالی با آرایش هندسی پیشنهاد داد که از بسیاری جهات شبیه آنچه قبل‌تر توسط هافستد و تلمر پیش‌بینی شده بود، می‌مانست. با این تفاوت که مدل وی مربوط به حالت‌های برانگیخته بود. شکل ۱-۶ ساختار کریستالی برخی ایزوتوپ‌ها که توسط برینک ارائه شد را نشان می‌دهد [۱۵].

^۱ Brink

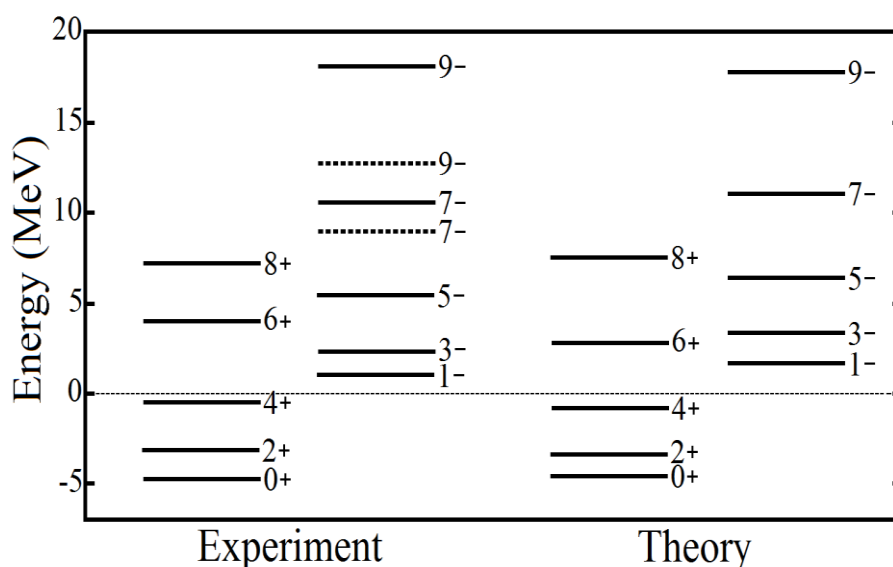


شکل ۱-۶. ساختار کریستالی ایزوتوپ‌های مختلف که توسط برینک ارائه شد [۱۵].

پیشرفت‌های بیشتر در دهه ۱۹۷۰ رخ داد. محاسبات برای سیستم‌هایی متشکل از یک هسته با پوسته کامل و ذره آلفا از طریق حل معادله شرودینگر^۱ به عنوان یک سیستم دو جسمی انجام شد. این محاسبات برای ایزوتوپ ^{28}Si که متشکل از خوشه‌های بزرگتر $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ بود، نیز انجام گردید. این حل بسیار مفید بود و اجازه مقایسه بین تئوری و کمیت‌های قابل اندازه‌گیری مانند نیمه عمر واپاشی و شعاع باری هسته را فراهم آورد [۱۵].

توافق خوب بین این دو، در سال ۱۹۷۵، توسط بیوک و همکارانش در مورد هسته ^{20}Ne نشان داده شد. این مدل هم‌خوانی خوبی با نمودار یکدا داشت. شکل ۱-۷ مقایسه نتایج محاسباتی انجام شده برای بررسی طیف انرژی ایزوتوپ ^{20}Ne با مقادیر تجربی در مدل $^{16}\text{O} + \alpha$ را نشان می‌دهد [۱۶].

^۱ Schrödinger Equation



شکل ۱-۷. مقایسه نتایج تئوری و تجربی برای ایزوتوپ ^{16}Ne در ساختار خوشه‌های $^{16}\text{O}+\alpha$ [۱۷]

۱-۴ شواهد تجربی مدل خوشه‌ای در فیزیک هسته‌ای

شواهد تجربی برای ساختار خوشه‌ای هسته‌های سبک به خوبی مستند شده است. ساده‌ترین مورد، سیستم دو ذره‌ای آلفا یعنی ^4He است که پس از ایجاد شدن به سرعت به دو ذره آلفا واپاشیده می‌شود. ساختار دمبل مانند آن باعث افزایش نوارهای چرخشی می‌شود و ممان اینرسی آن متناسب با تغییر شکل محوری ۱:۲ است [۸]. انرژی بستگی ذرات آلفا ($\sim 28\text{MeV}$) آنقدر بزرگ است که سیستم‌هایی مثل ^6Li و ^7Li به ترتیب، به صورت ساختار خوشه‌ای $^4\text{He}+\text{D}$ و $^4\text{He}+\text{T}$ مشاهده می‌شوند [۳]. مشهورترین حالت خوشه‌ای، تراز هویل^۱ ایزوتوپ ^{12}C در انرژی $7/65\text{MeV}$ می‌باشد.

این تراز توسط هویل در سال ۱۹۵۳ پیش بینی شد و در سال ۱۹۵۷ در انرژی بسیار نزدیک به آنچه هویل پیش‌بینی کرده بود، اندازه‌گیری شد. کربن در محیط ستارگان از طریق فرآیند سنتز^۲ سه ذره آلفا تولید می‌شود. به موجب آن، اولین دو ذره آلفا به طور لحظه‌ای آمیخته می‌شوند و ^8Be شکل می‌گیرد، سپس قبل از آن که سیستم واپاشی کند، سومین ذره آلفا گیراندازی می‌شود. این فرآیند

^۱ Hoyle-state
^۲ synthesized

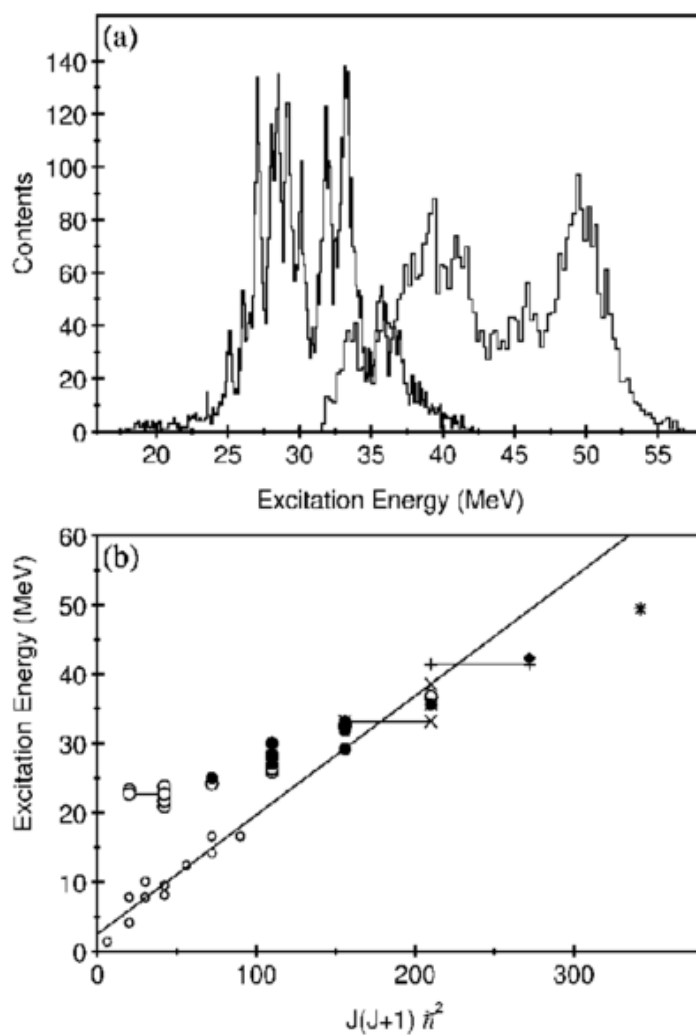
عمدتاً در انرژی $7/65\text{MeV}$ و در دومین تراز 0^+ رخ می‌دهد. این تراز شناخته شده دارای شعاع نسبتاً بزرگی است و برای اینکه ذرات آلفا خصوصیات شبه آزاد خود را حفظ کنند، کافی است [۲۰-۱۸].

پیشرفت‌های بیشتر در دهه ۱۹۶۰ به دلیل استفاده از شتابدهنده‌ها برای ایجاد باریکه یون‌های سنگین رخ داد. یکی از اولین سیستم‌هایی که مورد بررسی قرار گرفت، واکنش $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ بود. این اندازه‌گیری شامل بررسی سطح مقطع واکنش با انرژی‌های مختلف باریکه فرودی بود. شایان ذکر است، به جای مشاهده تغییرات خطی یک سری تشدید مشاهده شد. پهنای این تشدیدها در مرتبه 100keV بود که نشان دهنده شکل گیری سیستم ^{24}Mg با نیمه عمری است که در مقایسه با زمان عبور، به‌طور قابل توجهی بزرگتر است. در سال ۱۹۹۲ ویوزما^۱ و همکارانش، از این تشدیدها به عنوان حالت خوشه‌ای $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ تعبیر کردند.

بعدها، روش‌های غیرمستقیم، شامل واکنش‌های $^{12}\text{C}(^6\text{O}, ^{24}\text{Mg})^4\text{He}$ مورد بررسی قرار گرفتند. در این روش هسته ^{24}Mg در یک واکنش هسته‌ای شکل گرفته و سپس متعاقباً به دو هسته ^{12}C واپاشیده می‌شود. مزیت استفاده از روش دوم این است که بدون نیاز به صرف وقت جهت تنظیم انرژی باریکه، طیف وسیعی از حالت‌های خوشه‌ای در دسترس خواهد بود. طیف انرژی برانگیختگی که می‌تواند با این روش دیده شود در شکل ۱-۸ قابل مشاهده است و نشان‌دهنده شکل‌گیری ایزوتوپ ^{24}Mg می‌باشد. در این شکل قله‌ها در طیف، نشانگر تشدید در ^{24}Mg است که می‌توانند در ناحیه انرژی برانگیختگی 20 MeV تا 60 MeV رخ دهد. ترازهای واپاشیده شده به تراز نهایی $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ شامل خوشه‌های زیادی است که با استفاده از روش‌های تجربی اندازه‌گیری شده است و مربوط به ترازهای برانگیخته ^{24}Mg است که در قسمت ب شکل ۱-۸ دیده می‌شود. در این نمودار محور افقی $J(J+1)$ است. ترازهای فروپاشی $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ تقریباً روی خطی قبل از انرژی برانگیختگی 20 MeV قرار می‌گیرند. با استفاده از مقادیر تجربی و رابطه $E = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$ که

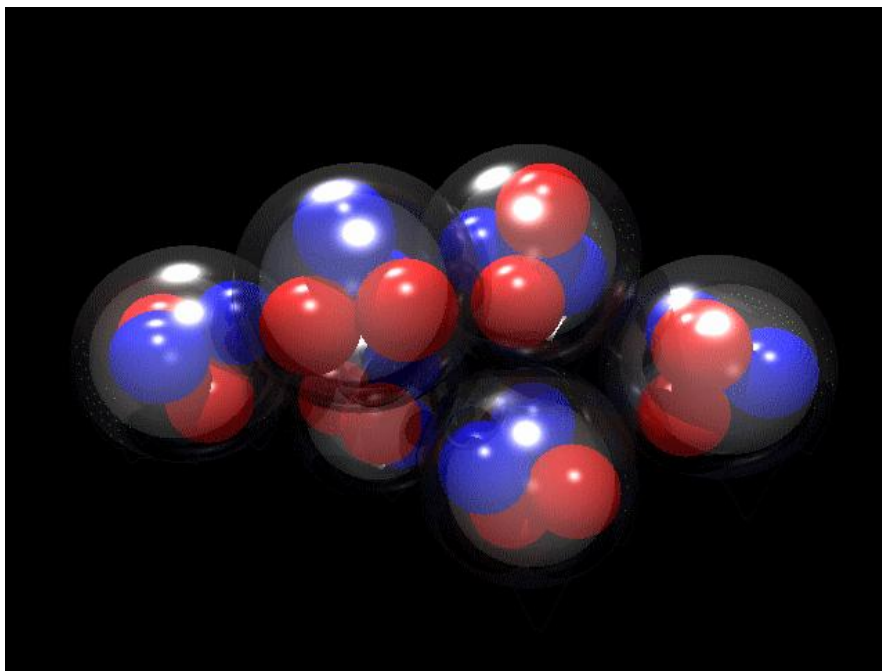
^۱ Wuosmaa

انرژی ترازهای چرخشی را مشخص می‌کند، محاسبه ممان اینرسی امکان‌پذیر است. در شکل ۹-۱ آرایش ممکن دو هسته ^{12}C را هنگامی که با یکدیگر تعامل دارند و ترازهای برانگیخته ^{24}Mg شکل می‌گیرد، نشان داده شده است. ممان اینرسی این ساختار با آنچه به روش تجربی به دست آمده است منطبق می‌باشد [۲۱].



شکل ۹-۱. الف) تشدیدهای مشاهده شده در واکنش ^{16}O برای باریکه ^{12}C ($^{16}\text{O}, ^{24}\text{Mg}^*$) با انرژی‌های ۱۱۵ MeV و

ب) اندازه‌گیری زاویه گسیل محصولات واپاشی ترازهای برانگیخته ایزوتوپ ^{24}Mg [۳]



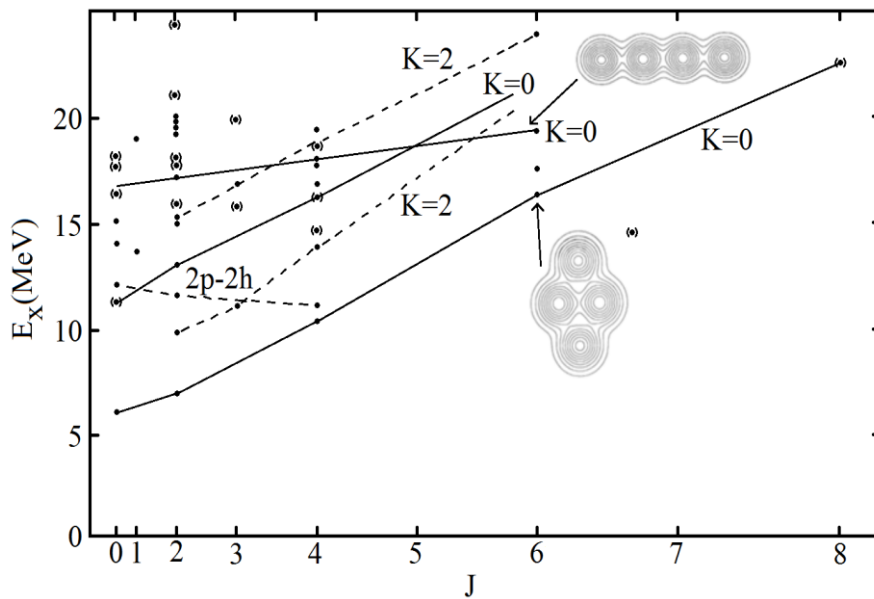
شکل ۱-۹. ساختار خوشه‌ای $^{12}\text{C}+^{12}\text{C}$ ایزوتوپ ^{24}Mg [۳]

فراتر از این مثال‌ها، سیستم‌های زیادی که در نمودار ایکدا پیش‌بینی شده‌اند به صورت تجربی مشاهده شده است. مدل ایکدا در نزدیکی انرژی برانگیختگی $7/16\text{MeV}$ در ایزوتوپ ^{16}O ، ساختار $^{12}\text{C}+\alpha$ را پیش‌بینی می‌کند و بیان می‌کند که این ایزوتوپ در انرژی $14/4\text{MeV}$ دارای ساختاری به صورت ۴ ذره آلفاست. شکل ۱-۱۰ شواهد تجربی مدل ایکداست. این شکل، تصویر نوارهای چرخشی اندازه‌گیری شده تجربی را برای ترازهای ایزوتوپ ^{16}O نشان می‌دهد. شیب خط برای یک باند چرخشی، متناسب با معکوس ممان اینرسی هسته، I ، است [۲۲].

اخیراً نیز، مطالعات تجربی، وجود ساختار خوشه‌ای در هسته‌های میان - وزن را تایید کرده‌اند. در

سال ۲۰۱۳، کالی^۱، به وجود ساختار خوشه‌ای $\alpha+^{36}\text{Ar}$ در ایزوتوپ ^{40}Ca پی برد [۲۳].

^۱ Cowley



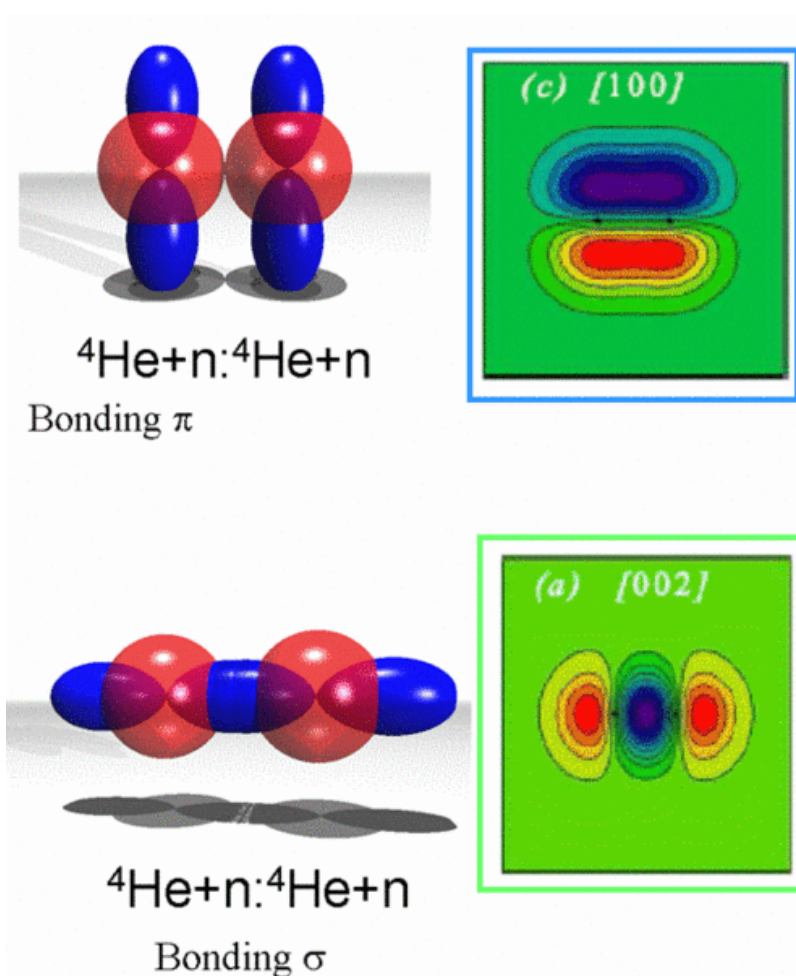
شکل ۱-۱۰. نوارهای چرخشی برای ایزوتوپ ^{16}O [۱۳]

۱-۵ مولکول‌های هسته‌ای

مثال‌های قبل، ساختار خوشه‌ای هسته‌های آلفا - مزدوج را نشان می‌داند. در صورت اضافه شدن نوکلئون ظرفیت به ساختار فوق، انتظار می‌رود، نوکلئون‌های ظرفیت که به طور معمول بیشتر نوترون‌ها هستند، بین ذرات آلفا رد و بدل شوند. این نوع فرآیند تبادل، کاملاً مشابه تبادل الکترونی در مولکول‌های اتمی است. در سیستم‌های اتمی، مانند H_2^- ، یک الکترون از طریق پیوند کووالانسی^۱ توسط دو پروتون مقید می‌شود و به‌طور مشابه در حالت پایه هسته ^9Be ، یک نوترون توسط دو ذره آلفا مقید می‌گردد. دو پروتون و دو نوترون موجود در ذره آلفا، پوسته $1s_{1/2}$ در مدل پوسته‌ای را کاملاً پر می‌کنند. بنابراین نوترون بعدی در تراز p قرار می‌گیرد که متناظر با حالت پایه هسته ^5He بوده و دارای اسپین و پاریته $\frac{3}{2}^-$ می‌باشد. جهت‌گیری اوربیتال‌های p نسبت به محور جدایی دو ذره آلفا می‌تواند به دو صورت موازی و عمود دیده شود. جهت‌گیری عمودی اوربیتال‌ها، نوع π و جهت‌گیری افقی، نوع σ نام‌گذاری شده‌اند. وضعیت تجربی حاضر در شکل ۱-۱۱ به تصویر کشیده شده‌است. تبادل نوترون، دو ذره آلفا را مقید می‌سازد (هسته ^9Be در طبیعت به صورت مقید است در حالیکه

^۱ The Covalent bond

هسته ${}^4\text{Be}$ نامقید است. به دلیل وجود ساختار مولکولی در چنین هسته‌هایی، آن‌ها را به عنوان مولکول هسته‌ای می‌شناسند که از سال ۲۰۰۰ تاکنون به‌طور گسترده توسط وان اورتنز^۱ و همکارانش در دست بررسی است [۲۴-۲۵].

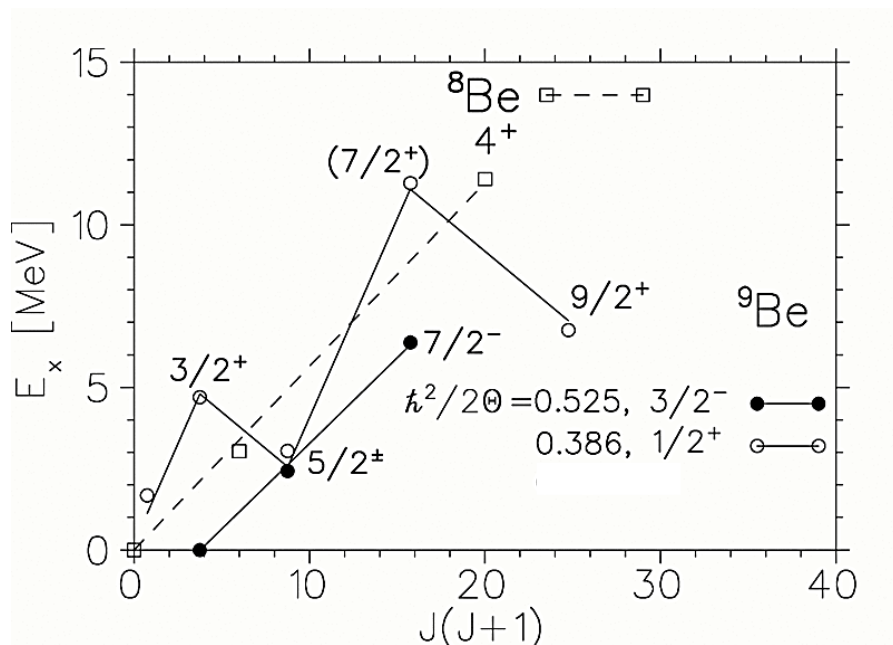


شکل ۱-۱۱. شکل گیری اوربیتال‌های مولکولی در برلیوم (کره‌های قرمز، ذرات آلفا را نشان می‌دهد). [۳].

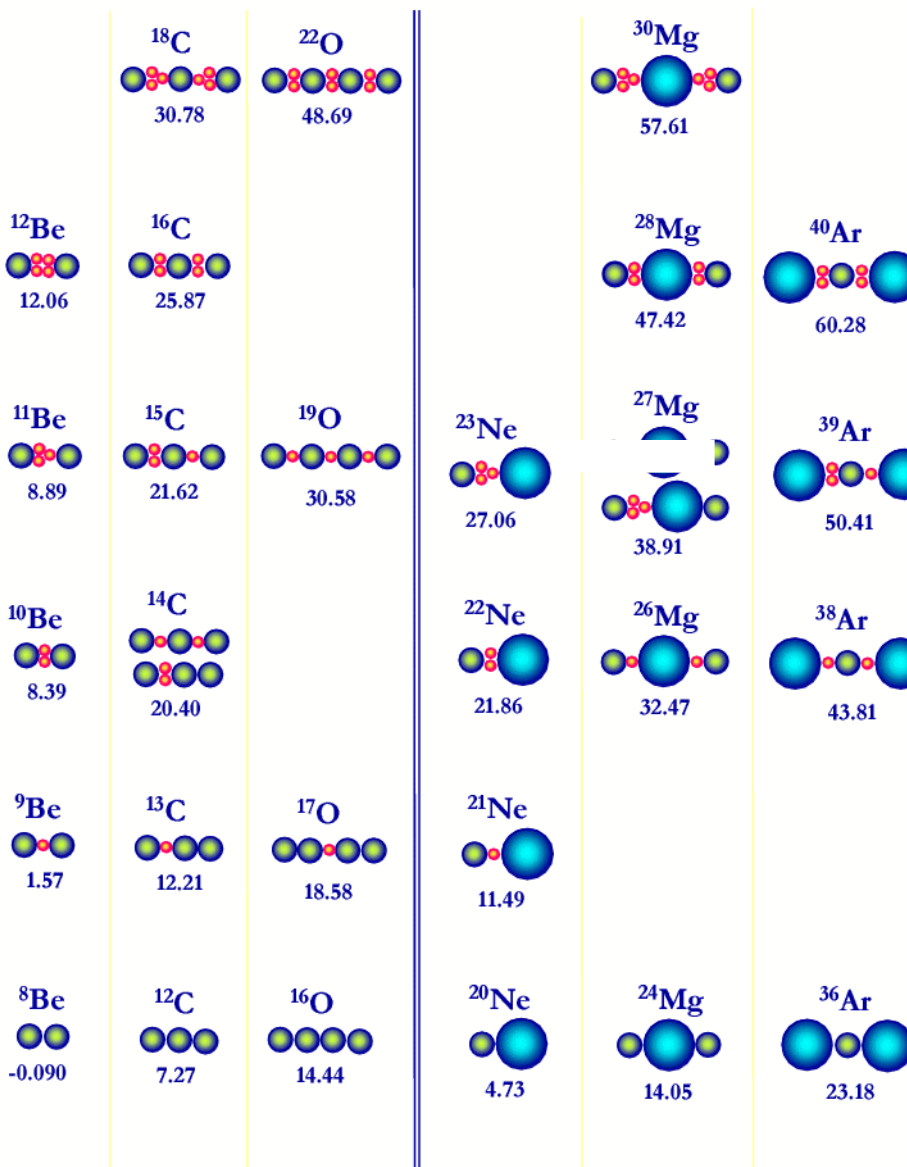
این مدل پیش‌بینی می‌کند که هسته ${}^4\text{Be}$ در حالت پایه دارای اسپین و پاریته $\frac{3}{2}^-$ است و یک حالت برانگیخته با اختلاف انرژی بسیار کم، $\frac{1}{2}^+$ ، دارد که به ترتیب متناظر با اوربیتال‌های نوع π و σ است. در واقع حالت پایه ${}^4\text{Be}$ دارای $J_{\pi} = \frac{3}{2}^-$ و تراز بعدی $\frac{1}{2}^+$ در انرژی $1/68\text{MeV}$ قرار دارد. ماهیت تغییر شکل متناظر با ساختار مولکولی به این مسئله اشاره دارد که باید به‌طور چرخشی رفتار کنند و

^۱ Von Oertzen

این تایید دوباره توسط نتایج تجربی است که در شکل ۱۲-۱ دیده می‌شود. با استفاده از نوارهای چرخشی محاسبه ممان اینرسی برای هر دو پیکر بندی امکان پذیر است که سازگار با تفسیرهای مولکولی است. نوار چرخشی از نوع π وابسته به حالت پایه در تصویر بالایی نشان داده شده است. ممان اینرسی این نوار از طریق رابطه $\frac{\hbar^2}{2I} = 0.525 \text{ MeV}$ به دست می‌آید که مشابه سیستم دو آلفایی در هسته ^8Be است که برای آن $\frac{\hbar^2}{2I} = 0.480 \text{ MeV}$ می‌باشد. همچنین، ممان اینرسی مربوط به اوربیتال مولکولی σ از رابطه $\frac{\hbar^2}{2I}$ برابر 0.386 MeV به دست آمده است. این رابطه نشان دهنده ممان اینرسی بزرگتری نسبت به حالت اوربیتال مولکولی π است و می‌تواند ناشی از ماهیت اوربیتال‌های σ باشد که بین دو ذره آلفا قرار گرفته‌اند و باعث افزایش جدایی آن‌ها گردیده است.



شکل ۱۲-۱. ترازهای چرخشی ایزوتوپ ^9Be [۲۵]



شکل ۱-۱۳. نمودار اصلاح شد ایگدا جهت نشان دادن ساختار مولکولی در هسته‌ها [۲۶]

مشابه این سیستم، در دیگر سیستم‌های دو مرکزی نظیر ^8Be و ^{11}Be نیز دیده می‌شود. شواهد تجربی خوبی برای رفتار مولکولی هنگامی که یکی از ذرات آلفا با خوشه ^{16}O جایگزین گردد، دیده شده است که به طور مثال، ایزوتوپ ^{21}Ne توسط وان اورتنز مطالعه شده است. در واقع، ساختار نامتقارن جرمی ($^{16}\text{O} + \alpha$) ^{21}Ne نقش مهمی را در رفتار اوربیتال‌های مولکولی در هسته‌هایی نظیر ^{21}Ne و ^{22}Ne ایفا می‌کند. در این مورد، اوربیتال مولکولی ذره آلفا و اوربیتال مولکولی خوشه دیگر ^{16}O ، دو اوربیتال ناهمگون هستند، زیرا اوربیتال ذره آلفا از نوع p و اوربیتال d در پیرامون ^{16}O وجود

دارد. شکل ۱-۱۳ نمودار اصلاح شده یکدا است. این نمودار شامل انواع ساختارهای مولکولی است که می‌تواند وجود داشته باشند و بسیاری از آن‌ها در حال حاضر مشاهده شده اند [۲۷].

شباهت بین نمودار یکدای استاندارد و نمودار هسته‌هایی با عنوان مولکول‌های هسته‌ای این است که ساختار خوشه‌ای را در انرژی‌های برانگیختگی متفاوت توصیف می‌کند که به طور معمول دور از حالت پایه است. هر چند وجود ساختار خوشه‌ای در حالت پایه مولکول‌های هسته‌ای دارای بحث است.

۱ ۶ شواهد تجربی از ساختار خوشه‌ای در مولکول‌های هسته‌ای

با توجه به نمودار یکدا در شکل ۱-۱۳، انتظار می‌رود که ایزوتوپ ^{10}Be در انرژی برانگیختگی 8.39 MeV ، دارای ساختار خوشه‌ای α - $2n$ - α باشد. با بررسی نوارهای چرخشی مقدار کمیت $\frac{\hbar^2}{2I}$ برای ایزوتوپ ^{10}Be برابر 0.20 MeV به دست می‌آید که با مقدار کمیت $\frac{\hbar^2}{2I}$ برای حالت پایه ایزوتوپ‌های ^9Be و ^8Be که به ترتیب برابر 0.57 MeV و 0.53 MeV می‌باشند، قابل مقایسه است. این مقایسه، نشان‌دهنده یک جدایی بزرگ بین دو خوشه آلفا در ساختار ^{10}Be است و تایید کننده ساختار α - $2n$ - α می‌باشد. هنگامی که دو نوترون بین دو ذره آلفا قرار می‌گیرند، جدایی آن‌ها نسبت به ^8Be افزایش می‌یابد [۲۸].

اخیراً نیز کاواباتا^۱ و همکارانش نشان دادند که ایزوتوپ ^{11}Be ، با دریافت مقدار مشخصی انرژی می‌تواند به صورت ساختاری از دو خوشه آلفا و سه نوترون ظاهر شود که یکدا نیز در نمودار خود این حالت را در انرژی 8.89 MeV بالاتر از حالت پایه پیش بینی کرده بود [۲۹].

در فصل بعد ابتدا رفتارهای خوشه‌ای دیده شده در هسته‌های سبک را دسته بندی کرده و سپس به معرفی مدل‌های مربوطه خواهیم پرداخت

^۱ Kawabata

فصل دوم : تئوری های مدل خوشه ای

۲-۱ مقدمه

برای بررسی خواص و ویژگی‌های هسته‌ها، با یک سیستم بس- ذره‌ای مواجه می‌شویم. حل دقیق سیستم‌های سه ذره‌ای مشکل است. از این رو، واضح است بررسی هسته‌ها با ده‌ها نوکلئون و حل مسئله مربوطه، غیر ممکن شود. بنابراین به منظور درک ساختار هسته‌های چند نوکلئونی می‌بایست به تقریب‌هایی متوسل شد. این تقریب‌ها به صورت مدل‌سازی در فیزیک هسته‌ای مطرح می‌شوند تا بتوانند یک توصیف تقریبی از سیستم‌های هسته‌ای ارائه دهند. این مدل‌ها معمولاً برای یک حالت خاص که نتایج تجربی معینی دارد، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

یکی از این حالت‌های خاص، رفتار خوشه‌ای در هسته‌ها است که مبحث بسیار جالب توجه‌ای در فیزیک هسته‌ای به شمار می‌آید و در عین حال بسیار مورد تردید است. بر این اساس، دانشمندان هسته‌ای به دنبال مدل‌هایی می‌باشند که بتوانند توصیف کاملی از چگونگی پدیده خوشه‌شدن در هسته‌ها ارائه دهند. این مدل‌ها تنها در صورتی که با داده‌های کمی سازگار باشند و درک بصری از آن‌ها حاصل شود، مورد تایید است. در حالت کلی، با توجه به ساختار خوشه‌ای ایجاد شده در هسته، مدل‌های مختلفی با رویکرد خوشه‌ای ایجاد شده است که در این فصل ابتدا به بررسی انواع ساختارهای خوشه‌ای در هسته‌های سبک پرداخته و سپس تعدادی از مدل‌های خوشه‌ای معرفی می‌گردد.

۲-۲ انواع ساختارهای خوشه‌ای مشاهده شده در هسته‌های

سبک

رفتار خوشه‌ای در هسته‌های سبک به صورت‌های مختلفی دیده می‌شود:

الف) در هسته‌های بسیار سبک نظیر ${}^8\text{Be}$ و ${}^{12}\text{C}$ ، هسته به صورت ترکیبی از زیر سیستم‌هایی با موقعیت فضایی مشخص که کاملاً به هم فشرده هستند، رفتار می‌کند [۳۰-۳۱]. با اضافه شدن نوترون مازاد، این گونه هسته‌ها به صورت مولکول‌های هسته‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرند. اگر به

عنوان مثال، ایزوتوپ ^{10}Be را در نظر بگیریم، دو خوشه برهم‌کنشی آلفا خواهیم داشت که نوکلئون‌های مازاد را از طریق برهم‌کنش قوی، بین خود مبادله می‌کنند. به بیان دیگر، برای یک نوکلئون معین، تابع موج به خوشه آلفای خاصی محدود نمی‌شود بلکه بین خوشه‌های مختلف به اشتراک گذارده می‌شود.

ب) در صورتیکه ایزوتوپ مورد مطالعه در نزدیکی هسته‌ای با ساختار جادویی دوگانه ^4He ، ^{16}O و ^{40}Ca قرار داشته باشد، نوکلئون‌های ظرفیت همانند خوشه‌ای رفتار می‌کنند که بیرون از مغز چرخیده و طیف انرژی چرخشی مربوطه را ایجاد می‌نمایند [۳۲]. به عنوان مثال، سیستم‌هایی مثل ^6Li و ^7Li به ترتیب، به صورت ساختارهای خوشه‌ای $^4\text{He}+\text{D}$ و $^4\text{He}+\text{T}$ مشاهده می‌شوند [۳].

ج) برای هسته‌های زوج - زوج با شرط $N=Z$ و $A=4n$ یک رفتار حدی خوشه‌ای پیش بینی می‌شود که در آن هسته به صورت یک قطره مایع رفتار نمی‌کند بلکه به صورت چگالش کامل n ذره آلفای جداگانه عمل می‌کند. در واقع هنگامی که انرژی برانگیختگی مازاد به این هسته‌ها افزوده می‌شود، گذار تدریجی از حالت پایه فشرده به آزاد سازی کامل $n\alpha$ دیده می‌شود [۷، ۱۴ و ۳۳]. هنگامی که انرژی برانگیختگی مازاد به این هسته‌ها افزوده شود، پیکربندی مراکز جرم ممکن است جدا شده و در فضا توسعه یابند [۲۸].

۲-۳ مدل‌های خوشه‌ای میکروسکوپی و غیر میکروسکوپی

در سیستم‌های نوکلئونی متناهی مدل‌های هسته‌ای مختلفی ارائه شده است که در حالت کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند [۳۴]:

- مدل‌های غیر میکروسکوپی که در آن سیستم به صورت A_n نوکلئون در n خوشه بررسی می‌شود.
- مدل‌های میکروسکوپی که سیستمی را با A نوکلئون توصیف می‌کند.

^۱ doubly magic closures

تفاوت اصلی این دو دیدگاه در چگونگی حل معادله شرودینگر می‌باشد، زیرا که اصلی ترین گام در حل مسائل مکانیک کوانتومی، حل معادله شرودینگر است [۳۴]. معادله شرودینگر در ساده‌ترین شکل به صورت زیر است:

$$H\Psi = E\Psi \quad (۲-۱)$$

که در آن E انرژی کلی سیستم، Ψ تابع موج و H بیانگر هامیلتونین سیستم است که در سیستم‌های غیر میکروسکوپی به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۵]:

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2M_i} + \sum_{i>j=1}^n V_{ij}(R_i - R_j) \quad (۲-۲)$$

در این رابطه، n تعداد خوشه‌ها، M_i جرم هر خوشه، P_i اندازه حرکت هر خوشه و R_i و R_j به ترتیب، مختصات خوشه i ام و j ام است و V_{ij} به برهم‌کنش بین خوشه‌ها اشاره دارد. در این مدل، موضوع مهم انتخاب صحیح پتانسیل بین خوشه‌هاست که بتواند برخی از ویژگی‌های سیستم را توصیف نماید [۱۷]. لازم به ذکر است، در این روش از ساختار داخلی خوشه‌ها صرف نظر می‌شود.

همچنین، هامیلتونین در سیستم‌های میکروسکوپی که به صورت سیستمی متشکل از A نوکلئون در نظر گرفته می‌شود، به صورت زیر است:

$$H = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2M_N} + \sum_{i>j=1}^A V_{ij}(r_i - r_j) \quad (۳-۲)$$

در این رابطه M_N بیانگر جرم نوکلئون می‌باشد و با توجه به اختلاف جرم اندک بین پروتون و نوترون، یکسان در نظر گرفته می‌شود. P_i اندازه حرکت هر نوکلئون و r_i و r_j به ترتیب، مختصات نوکلئون i ام و j ام است و V_{ij} نیز به برهم‌کنش نوکلئون-نوکلئون اشاره دارد. در این جا نیز پتانسیل می‌تواند به جز وابستگی فضایی به کمیت‌های دیگری مانند اسپین و اندازه حرکت مداری و یا موارد دیگر وابسته باشد.

چنانچه گفته شد، در هامیلتونین مربوط به مدل‌های میکروسکوپی، بر هم کنش نوکلئون‌ها وارد می‌شود. مدل لایه‌ای و مدل دینامیک مولکولی از جمله مدل‌های میکروسکوپی محسوب می‌شوند. در سیستم‌هایی که تعداد نوکلئون‌هایشان کم است، برای حل معادله شرودینگر در مدل‌های میکروسکوپی روش‌های موفقی ارائه شده‌است ولی برای وضعیت‌هایی که در آن تعداد نوکلئون زیاد است، می‌بایست تقریب‌هایی را جهت حل مسئله به کار برد. در ادامه به معرفی چند مدل غیر میکروسکوپی پرداخته خواهد شد.

۴-۲ مدل نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته^۱:DHO:

رفتار تک ذره‌ای هسته، به خوبی توسط مدل لایه‌ای هسته‌ها توصیف شده است که در این مدل نوکلئون در یک میدان میانگین که مشخصه میانگین اندرکنش یک نوکلئون با دیگر نوکلئون‌های سازنده هسته است، حرکت می‌کند. در این مدل، نوکلئون‌ها دارای یک مسیر آزاد متوسط اند که به طور قابل توجهی بزرگتر از مقیاس هسته‌ای است. جهت بررسی مولکول‌های هسته‌ای باید اذعان داشت، مدل پوسته‌ای در فیزیک هسته‌ای جهت محاسبه ترازهای انرژی اشغال شده توسط نوکلئون‌ها در یک هسته کروی مورد استفاده قرار می‌گیرد و مشابه مدل پوسته‌ای در اتم‌ها است که لایه‌های آن توسط الکترون‌ها اشغال شده است. وجود اختلاف بزرگ بین ترازهای انرژی مجاور بدین معناست که انرژی نسبتاً بزرگی برای برانگیخته کردن نوکلئون تراز پایین‌تر و انتقال آن به تراز بالاتر لازم است. به تعداد کل نوکلئون‌ها درون تراز پایینی که به وسیله آن پوسته کاملاً پر می‌شود عدد جادویی می‌گویند. هر هسته‌ای که نوکلئون‌های آن تا یک عدد جادویی پر است یک هسته با پایداری ویژه محسوب می‌شود، زیرا که انرژی لازم برای برانگیختگی و عبور نوکلئون‌ها از فاصله بین ترازها زیاد است. در نتیجه، یک نوکلئون اضافه به عنوان یک نوکلئون ظرفیت عمل می‌کند که در اندرکنش با هسته کوچک‌تر بوده و پایدار است. برای هسته‌هایی دور از اعداد جادویی، فرضیه وجود هسته کروی دارای دقت پایینی می‌باشد. اندرکنش بین نوکلئون‌های ظرفیت با مغز می‌تواند باعث کشیده شدن و

^۱ Deformed Harmonic Oscillator

یا پهن شدن هسته در قطبین گردد و نیازمند به استفاده از پتانسیل‌های هسته‌ای می‌شویم که نیلسون^۱ در سال ۱۹۵۵ معرفی کرد [۳۶].

یک بررسی ساده، جهت بیان این تغییر شکل در هسته، استفاده از پتانسیل نوسانگر هارمونیک سه بعدی برای هسته‌ای است که در طول محور z تغییر شکل داده است [۳۶]. در این مدل، بسامد نوسان برای محور موازی و عمود بر محور تغییر شکل مستقل است. نوسانگر هارمونیک، چارچوب مناسبی جهت بررسی خصوصیات هسته‌ها می‌باشد زیرا که به روش تحلیلی قابل حل است. پس از حل معادله شرودینگر با استفاده از پتانسیل نوسانگر تغییر شکل یافته، تابع موج نوکلئون در طول محور تغییر شکل قابل محاسبه بوده و برابر با رابطه زیر می‌باشد:

$$\Psi(z) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{\mu\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} H_n \left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} z \right) e^{-\frac{\mu\omega z^2}{2\hbar}} \quad (۴-۲)$$

در این رابطه n عدد کوانتومی نوسانی وابسته به محور z ، μ جرم کاهیده، ω بسامد نوسان و H_n چند جمله‌ای هرमित^۲ از مرتبه n و در راستای محور z است [۳۷، ۸]. این تابع موج برای هر بعد فضایی برقرار می‌باشد، بنابراین انرژی جنبشی نوکلئون می‌تواند توسط کمیت‌های n_x ، n_y و n_z به دست آید. ترازهای کوانتومی انرژی به دست آمده به صورت ذیل است:

$$E = \hbar\omega_{\perp} n_{\perp} + \hbar\omega_z n_z + \frac{3}{2} \hbar\omega_0 \quad (۵-۲)$$

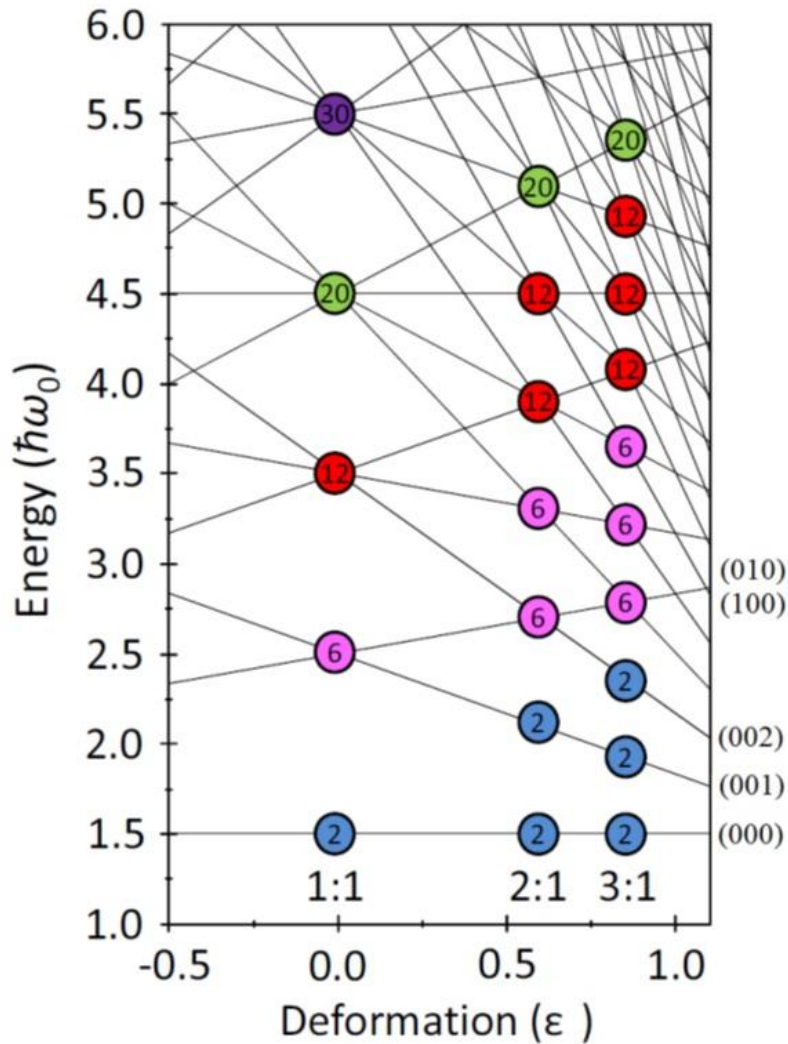
که در آن $\omega_0 = \frac{2\omega_{\perp} + \omega_z}{3}$ می‌باشد. ω_{\perp} بسامد نوسان برای دو محور بدون تغییر شکل و ω_z بسامد نوسانی محور تغییر شکل است. در این جا تغییر شکل چهار قطبی از طریق رابطه ذیل محاسبه می‌شود:

^۱ Nilsson

^۲ Hermite Polynomial

$$\varepsilon = \frac{\omega_{\perp} - \omega_z}{\omega_0}$$

(۶-۲)



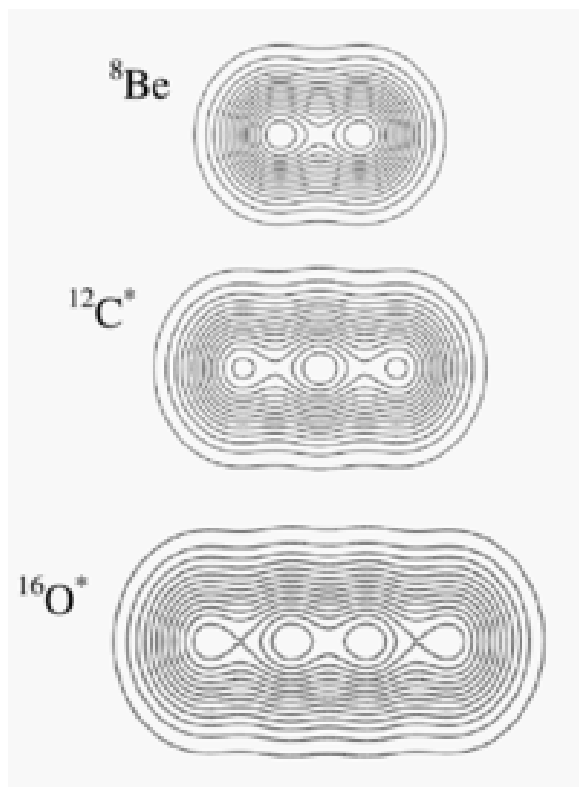
شکل ۲-۱. ترازهای انرژی در مدل نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته [۳]

هنگامی که ε مثبت باشد، $\omega_{\perp} > \omega_z$ ، حاکی از تغییر شکل هسته به صورت کشیدگی است، در حالی که مقدار منفی، $\omega_{\perp} < \omega_z$ نشانه پهن‌شدگی در قطبین است و هنگامی که مقدار کمیت ε با صفر برابر است بیانگر شکل ذاتی کروی هسته خواهد بود. در نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته، ساختار پوسته‌ای هنگامی ظاهر می‌شود که نسبت پارامترهای توصیف سه بعدی پتانسیل تغییر شکل $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ عدد صحیح باشد.

برای یک پتانسیل با تقارن محوری، تغییر شکل می‌تواند با دو پارامتر ω_z و ω_{\perp} توصیف شود و هنگامی تبهگنی ماکزیمم می‌شود که نسبت ω_{\perp} به ω_z ($\omega_z \leq \omega_{\perp}$) برابر $n=1, 2, 3, \dots$ باشد. در شکل ۲-۱ ترازهای انرژی به صورت تابعی از تغییر شکل نمایش داده شده‌اند.

با پتانسیل بدون تغییر شکل، راه حل‌های نوسانگر هارمونیک به یک سری اعداد تبهگنی منجر می‌شود: یعنی ۲، ۶، ۱۲، ۲۰ و... . نکته قابل توجه این است که در تغییر شکل ۲:۱ تبهگنی‌های موجود در حالت کروی دو بار تکرار می‌گردد، یعنی (۲، ۲، ۶، ۶، ۱۲، ۱۲...) و در تغییر شکل ۳:۱ این تکرار سه مرتبه است. این تقارن که در مدل نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته ظاهر می‌شود، نشان می‌دهد که در تغییر شکل ۲:۱ باید دو خوشه و در تغییر شکل ۳:۱ باید سه خوشه وجود داشته باشد. در شکل ۲-۲، چگالی هسته‌هایی که مشابه تبهگنی ۲+۲، ۲+۲+۲ و ۲+۲+۲+۲ متناسب با تغییر شکل‌های ۲:۱، ۳:۱ و ۴:۱ است، نمایش داده شده است [۸، ۳۷].

لازم است بدانیم، در پتانسیل تغییر شکل یافته، ترازهای انرژی که مرتبط با نوسان‌ها در طول محور تغییر شکل یافته است، کاهش می‌یابد زیرا فرکانس نوسان کاهش یافته است و برای محورهای عمود بر محور تغییر شکل، انرژی افزایش یافته که این افزایش ناشی از افزایش فرکانس در محورهای عمودی است.



شکل ۲-۲. چگالی محاسبه شده برای نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته [۸]

۲-۵ مدل نوسانگر هارمونیک با دو مرکز^۱ TCHO

یک رویکرد مناسب‌تر برای مدل‌سازی خوشه‌ها ممکن است مدل نوسانگر هارمونیک با دو مرکز باشد. در این مدل هر خوشه ذره آلفا به وسیله پتانسیل نوسانگر خودش نمایش داده می‌شود. یک چارچوب برای انجام چنین محاسباتی در خصوص مولکول‌های هسته‌ای، روش هوکل^۲ است. روش هوکل جهت محاسبه انرژی الکترون‌ها در اوربیتال‌های مولکولی مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین این روش می‌تواند به طور مشابه برای سیستم‌هایی متشکل از ذرات آلفا و نوکلئون‌های ظرفیت مورد استفاده قرار گیرد. در این مدل، هر خوشه، با پتانسیلی جداگانه به روش نوسانگر هارمونیک مدل‌سازی می‌شود. این مهم است که توجه داشته باشیم، هر خوشه به صورت مجزا به وسیله پتانسیل نوسانگر هارمونیک نشان داده می‌شوند زیرا از لحاظ فضایی جداگانه هستند و اصل پاولی از اینکه نوکلئون‌ها

^۱ Two Centre Harmonic Oscillator
^۲ the Hückel method

در دو پتانسیل مجزا دارای عدد کوانتومی یکسانی باشند جلوگیری نمی‌کند. تابع موج نوترون در یک سیستم دو خوشه‌ای از فرمول زیر محاسبه می‌شود [۳۷].

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \left(H_n(z-z_1) e^{-\frac{\omega(z-z_1)^2}{2}} \pm H_n(z-z_2) e^{-\frac{\omega(z-z_2)^2}{2}} \right) \quad (7-2)$$

n عدد کوانتومی نوسانگر، ω بسامد نوسان و H_n چند جمله‌ای هرمیت و از مرتبه n و در راستای z است. کمیت‌های z_1 و z_2 محل قرارگیری دو خوشه آلفاست. تابع موج برای هر بعد فضایی (x و y و z) یکسان است با این تفاوت که مرکز خوشه‌ها تنها در راستای z دیده می‌شود. در معادله (۷-۲)، تابع موج نوترون ظرفیت روی هر دو خوشه آلفا نرمالیز شده است [۳۷].

۲-۶ مدل خوشه‌ی آلفا برینک - بلاچ^۱ (ACM)

مدل ACM، یک مدل ساده سازی شده جهت بررسی هسته‌های آلفا - مزدوج است. در این مدل، مجموعه دو پروتون و دو نوترون یک خوشه را تشکیل می‌دهند که دارای اندازه حرکت زاویه ای جفت شده صفر است. بنابراین این مدل تنها در هسته‌هایی با $N=Z$ و $A=4n$ کاربرد دارد، به عبارت دیگر، برای مولکول‌های هسته‌ای قابل استفاده نیست. در این جا، یک سیستم فرمیونی متشکل از Z پروتون و N نوترون به صورت یک سیستم بوزونی متشکل از k خوشه تقریب زده شده و بررسی می‌شود.

با داشتن این فرض که هسته از خوشه‌های آلفا تشکیل شده است، جایگیری‌های مختلف خوشه‌ها نسبت به هم بررسی می‌شوند. توابع موج با یکدیگر ترکیب شده و کمترین مقدار انرژی سیستم در آن جایگیری بررسی می‌شود. پیدا کردن آن جایگیری از خوشه‌ها که مقدار مینیمم انرژی را ایجاد کرده و با انرژی برانگیختگی که ممکن است دارای ساختار خوشه‌ای باشد، مطابقت دارد، هدف این مدل می‌باشد. کاربرد این مدل برای سیستم‌های سبک راحت است و ارتباط مستقیمی با اندازه سیستم دارد. علاوه بر این، نتایج برای سیستم کوچک واقع بینانه تر است [۲۶].

^۱ Brink-Bloch Alpha Cluster Model

۷-۲ روش پتانسیل‌های پدیده شناختی^۱

یکی از روش‌هایی که امروزه به طور گسترده در بررسی سیستم‌های کوانتومی مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش به کارگیری پتانسیل‌های پدیده شناختی است. در این روش، برای برهم‌کنش بین ذرات یک سیستم، پتانسیل مناسبی شامل تعدادی پارامتر در نظر گرفته می‌شود. سپس با بررسی نتایج تجربی، پارامترها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که بیشترین هم‌خوانی بین تئوری و نتایج تجربی برقرار گردد [۳۸-۳۹].

از این مدل می‌توان در بررسی هسته‌های آلفا - مزدوج و نیز ایزوتوپ‌های نزدیک هسته‌ای با ساختار جادویی دوگانه استفاده نمود که در این جا به معرفی تعدادی از پتانسیل‌هایی که اخیراً در این مدل مطرح شده‌اند، پرداخته می‌شود:

(۱) یکی از موفق‌ترین پتانسیل‌ها در توصیف ایزوتوپ‌هایی با ساختار مغز و خوشه، پتانسیل \cosh است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(r) = -V_0 \frac{1 + \cosh\left(\frac{R}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{r}{a}\right) + \cosh\left(\frac{R}{a}\right)} + \frac{V_1}{r} \quad (۸-۲)$$

این پتانسیل دارای عمق قسمت جاذبه، V_0 و قدرت قسمت دافعه، V_1 می‌باشد. کمیت R فاصله جدایی مراکز جرم مغز و خوشه بوده و a ضریب پراکندگی است. مقادیر ثابت، از طریق مقایسه با نتایج تجربی برای هسته‌ی مورد بررسی، تعیین می‌گردد [۷].

(۲) پتانسیل بعدی که برای بررسی ایزوتوپ آلفا - مزدوج ^8Be به صورت دو خوشه آلفا توسط افضل^۲ و همکارانش پیشنهاد شد، ترکیبی از یک چاه پتانسیل جاذب، شبیه پتانسیل وود-ساکسون^۳، و یک جمله دافعه کولنی به صورت زیر بود:

^۱ Phenomenological Potentials

^۲ Afzal

^۳ Woods-Saxon Potential

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} + \frac{V_1}{r} \quad (9-2)$$

کمیت های V_0 و V_1 به ترتیب بیانگر عمق چاه پتانسیل و قدرت جمله دافعه کولنی است. R_0 ، شعاع خوشه آلفا و a برد پتانسیل است. آنان ضرایب این پتانسیل را به کمک تطبیق با نتایج آزمایشگاهی به دست آورند [۴۰-۴۱]. در سال ۲۰۱۵ از این پتانسیل برای بررسی حالت پایه ایزوتوپ ${}^4\text{He}$ در مدل خوشه‌ای استفاده کردیم [۴۲].

(۳) پتانسیلی دیگری که در مدل پدیده شناختی مورد استفاده قرار گرفته است، پتانسیل تغییر یافته یوکاوا بوده که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V(r) = -V_0 \frac{\exp(-\alpha r)}{r} + V_1 \frac{\exp(-\alpha r)}{r^2} + \frac{k}{r} \quad (10-2)$$

این پتانسیل شامل یک جمله جاذبه هسته‌ای با ثابت V و یک جمله دافعه با ثابت V_1 در فواصل کوتاه برد هست. همچنین k ضریب پتانسیل دافعه کولنی بین خوشه هاست. از این پتانسیل جهت بررسی ساختار ایزوتوپ ${}^{12}\text{C}$ به صورت ساختاری متشکل از سه ذره آلفا و مقایسه آن با مدل ${}^4\text{Be} + \alpha$ استفاده کرده ایم که نتایج در سال ۲۰۱۶ چاپ شده است [۴۳].

(۴) اخیراً نیز پتانسیل ذیل که ترکیبی از پتانسیل مینینگ - روزن^۱ و پتانسیل کولنی است برای دو ایزوتوپ ${}^{16}\text{O}$ و ${}^{20}\text{Ne}$ در مدل هسته‌های آلفا - مزدوج مورد استفاده قرار گرفته است [۴۴]:

$$V(r) = \frac{be^{-2ar}}{(1-e^{-ar})^2} - \frac{ce^{-ar}}{(1-e^{-ar})} + \frac{f}{r} \quad (11-2)$$

در این رابطه نیز، b قدرت دافعه مغز در فواصل نزدیک، c قدرت جاذبه هسته‌ای در فواصل متوسط و f قدرت دافعه کولنی در فواصل دور است. a نیز عکس برد پتانسیل می‌باشد. پتانسیل مینینگ - روزن یکی از پتانسیل‌های پرکاربرد در فیزیک به حساب می‌آید که نه تنها برای بررسی

^۱ Manning-Rosen Potential

ارتعاشات مولکول‌های دو اتمی استفاده می‌شود، بلکه برای محاسبه ترازهای انرژی در فیزیک هسته‌ای نیز به کار رفته است [۴۵].

بنابراین، با استفاده از مدل پدیده شناختی و انتخاب پتانسیل بر هم کنش مناسب می‌توان به بررسی هسته‌های سبک در مدل خوشه‌ای پرداخت که در فصول بعد به این موضوع پرداخته شده است.

۸-۲ بررسی مولکول‌های هسته‌ای با استفاده از پتانسیل‌های دو مرکزی

از آنجایی که، پتانسیل‌های مرکزی قادر به توصیف تغییر شکل هسته، برای عبور از یک هسته به دو خوشه مجزا نمی‌باشند، لذا این مشکل با فرض حرکت نوکلئون‌ها در یک میدان پتانسیل دو مرکزی بهبود می‌یابد. یک مدل دو مرکزی، شرح تحولات انرژی تک ذره را از حالت پایه تا شکل‌گیری به دو تکه مجزا در یک سیستم دو خوشه‌ای را فراهم می‌آورد که بیشترین کاربرد این روش، بر اساس پتانسیل نوسانگر دو مرکزی است که در بخش ۲-۴ به آن اشاره شد [۴۶-۴۸].

اخیراً، میریا^۱ پتانسیل دو مرکزی جدیدی جهت بررسی مولکول‌های هسته‌ای معرفی کرد [۵۱-۴۹]. این پتانسیل مشابه پتانسیل وود-ساکسون در مختصات استوانه‌ای و به صورت زیر است:

$$V(\rho, z) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{\Delta(\rho, z)}{a}\right)} \quad (۱۲-۲)$$

در این رابطه، $\Delta(\rho, z)$ فاصله بین نقطه (ρ, z) از سطح هسته است. این فاصله تنها در جهت عمود بر سطح اندازه‌گیری شده است. V_0 عمق چاه پتانسیل و a برد پتانسیل است. با تغییر شکل هسته و میزان کشیدگی آن، شکل پتانسیل تغییر می‌کند و این تغییر در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.

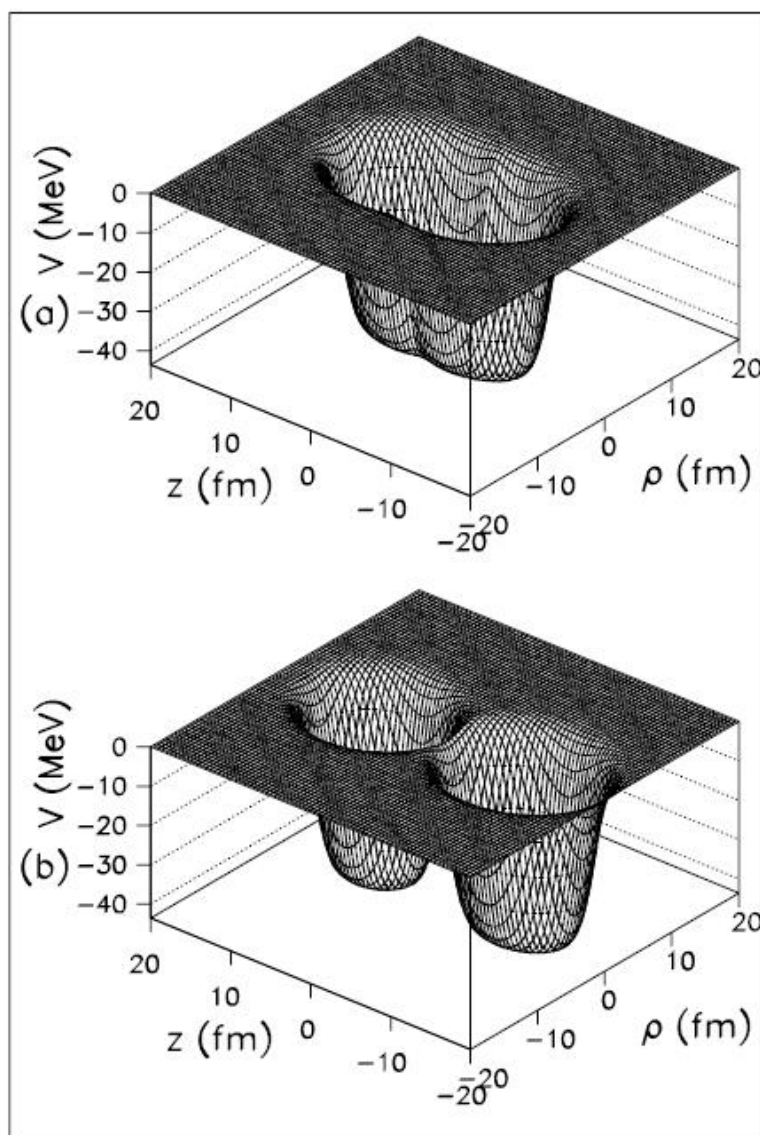
^۱Mirea

میریا، جفت شدگی اسپین - مدار را به صورت زیر در نظر گرفته و به پتانسیل خود اضافه نمود و تاثیر آن را بر ترازهای انرژی بررسی نمود:

$$V_{ls} = -\lambda \left(\frac{1}{2mc} \right)^2 \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (۱۳-۲)$$

در این رابطه، λ ثابت جفت شدگی و بدون بعد است. m جرم نوکلئون و c سرعت نور می باشد [۵۲]. سپس، با روش‌های حل عددی و مدل پدیده شناختی، معادله شرودینگر را در مختصات استوانه‌ای حل کرد. در این مدل، پارامترهای پتانسیل، به گونه ای انتخاب شده اند، که نتایج تئوری، بیشترین همخوانی را با داده‌های تجربی داشته باشند.

درفصل بعد به معرفی چند روش تحلیلی و عددی حل مسئله که در این کار پژوهشی مورد استفاده قرار گرفته است پرداخته ایم و در فصول آتی با تکیه بر همین روش‌ها تراز انرژی ایزوتوپ های انتخابی مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۲-۳. پتانسیل وود-ساکسون در مختصات استوانه ای الف) مقدار کشیدگی $R=7$ fm

ب) مقدار کشیدگی $R=18$ fm [۵۲]

فصل سوم: روش های تحلیلی و عددی حل مسئله

۳-۱ مقدمه

از جمله معادلاتی که برای توصیف فیزیک سیستم‌های غیرنسبیتی و نسبیتی به کار می‌روند، می‌توان به معادلات شرودینگر، دیراک^۱ و کلاین گوردن^۲ اشاره کرد. برای این معادلات، تعداد کمی پتانسیل وجود دارد که بتوان به روش تحلیلی و دقیق حل کرد. از جمله‌ی آن‌ها: پتانسیل کولنی، نوسانگر هماهنگ ساده، سد پتانسیل و پله پتانسیل است و در سایر موارد، امکان حل دقیق مسئله میسر نیست و می‌بایست به روش‌های جبری دیگری متوسل شویم. از جمله روش‌هایی که برای حل معادله شرودینگر پیشنهاد شده، می‌توان به روش نیکووفور - یووارو^۳، روش ابر تقارن^۴ و روش انتگرال مسیر^۵ اشاره کرد که تمام آن‌ها جزء روش‌های تحلیلی محسوب می‌شوند [۵۳-۵۵]. این تکنیک‌های جبری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم در حضور پتانسیل‌های مرکزی و غیر مرکزی به کار برده می‌شوند [۵۶-۵۸].

برای مواردی که نمی‌توان، مسئله را در قالب یک معادله دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه یا شرایط مرزی بیان نمود، با استفاده از کامپیوتر و روش‌های عددی می‌توان آن‌ها را حل کرد. از نظر محاسباتی، اغلب روش‌های کار آمد، توسط دو ریاضی دان مشهور رونگ و کوتا^۶ توسعه یافته‌اند. این روش‌ها به روش عددی رونگ کوتا (R-K) نام‌گذاری شده‌اند که با توجه به مرتبه آن‌ها تمیز داده می‌شوند، یعنی مطابقت آن با جواب‌های سری تیلور تا جمله h^r که r مرتبه روش محسوب مس شود [۵۹].

^۱ Dirac Equation

^۲ Klein-Gordon Equation

^۳ Nikiforov-Uvarov method

^۴ Supersymmetric

^۵ Path- Integral

^۶ Runge-Kutta

در این فصل، ابتدا فضای لازم برای حل مسائل چند جسمی یعنی فضای فوق کروی^۱ به همراه مختصات ژاکوبی^۲ و متغیرهای فوق کروی معرفی می‌گردد. در ادامه مروری بر روش‌های تحلیلی و عددی لازم برای حل برخی مسائل خواهیم داشت.

۲-۳ دستگاه مختصات ژاکوبی

در یک سیستم دو نوکلئونی کمیت‌هایی که نیرو به آن‌ها وابسته است، عبارتند از: \vec{r}_{12} یعنی برداری که مکان ذره ۱ را به ذره ۲ ارتباط می‌دهد، $\vec{P}_{12} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$ یعنی تکانه نسبی آن‌ها، S که اسپین کل است و تکانه زاویه‌ای مداری آن‌ها یعنی $\vec{L} = \vec{r}_{12} \times \vec{p}_{12}$. حال اگر سیستم مورد مطالعه ما، یک سیستم A ذره‌ای باشد، در این صورت معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان آن به صورت $H\Psi = E\Psi$ نوشته می‌شود که در آن هامیلتونین به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$H = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + V(r_i) + V(r_i, r_j) \right) \quad (1-3)$$

$i \neq j$ بدین معنی است که هیچ ذره‌ای با خودش بر همکنش ندارد و عبارت $i < j$ از نوشتن جملات تکراری جلوگیری می‌کند. پتانسیل $V(r_i)$ نشان دهنده اثرات محیطی است. به طور مثال، وقتی ذره‌ای تحت تاثیر میدان‌های الکترومغناطیسی باشد، این تاثیر بر روی ذره i ام با پتانسیل $V(r_i)$ نشان داده می‌شود. $V(r_i, r_j)$ پتانسیل ناشی از برهم کنش دو ذره با یکدیگر است. اغلب روش‌های حل معادله شرودینگر بر اساس سیستم‌های دو جسمی می‌باشد، پس نیاز به دستگاه مختصات جدیدی داریم تا برای سیستم‌های چند جسمی نیز بتوانیم از این روش‌ها استفاده کنیم. مناسب‌ترین دستگاه مختصات، برای توصیف یک سیستم A ذره‌ای، دستگاه مختصات ژاکوبی می‌باشد. برای یک سیستم A ذره‌ای می‌توان $N = A - 1$ بردار ژاکوبی و در نتیجه $3N$ مختصه ژاکوبی تعریف کرد. در این

^۱ Hyperspherical Space
^۲ Jacobi Coordinates

دستگاه مختصات، $\vec{\xi}_i$ ، بردار مکان هر ذره نسبت به مرکز ذرات قبلی است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\vec{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1} \left(r_{i=1} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r_j \right)} \quad i=1, 2, \dots, N-1 \quad (2-3)$$

آخرین مختصه ژاکوبی \bar{R} معرف بردار مرکز جرم کل ذرات است که به شکل زیر خواهد بود:

$$R = \frac{1}{A} (r_1 + r_2 + \dots + r_A) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A r_i = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} r_i \quad (3-3)$$

و المان حجم در این مختصات به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\prod_{i=1}^N d\vec{r}_i = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{\xi}_j = dx \quad (4-3)$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان‌هایی از فاصله نسبی آن‌ها باشد، می‌توان آن‌ها را بر حسب ابر شعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل‌ها، پتانسیل‌های فوق مرکزی می‌گویند [۶۱-۶۰].

۳-۳ متغیرهای فوق کروی^۱

هسته‌ها شکلی تقریباً کروی دارند و معمولاً پتانسیل برهم‌کنش بین ذره‌ها را پتانسیل مرکزی در نظر می‌گیریم، لذا به جای مختصه دکارتی با مختصات فوق کروی سر و کار خواهیم داشت. از بین $D=3N$ مختصه فوق کروی، $2N$ مختصه به زوایای قطبی و سمتی بردارهای ژاکوبی مربوط می‌شوند، $N-1$ مختصه فوق زاویه^۲ هستند و تک مختصه دیگر، فوق شعاع، r ، است که با رابطه زیر تعریف می‌شود [۶۲-۶۳]:

$$r^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_N^2 = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 \quad (5-3)$$

$3N-1$ مختصه دیگر بر اساس تعریف «زرنیک-برینکمن» به صورت زیر است:

^۱ HyperSpherical Variables
^۲ Hyperangle

$$\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}) \quad (6-3)$$

که در آن ω_i معرف دو زاویه سمتی و قطبی مربوط به هر بردار ژاکوبی ξ_i است که مجموعاً شامل $2N$ زاویه و $N-1$ مختصه دیگر $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ فوق زاویه هستند.

در نمایش دیگر زوایا و فوق زوایا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r = \left(\sum_{i=1}^D x_i^2 \right)^{1/2} \quad (7-3)$$

$$x_1 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{N-1}$$

$$x_2 = r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \dots \sin \theta_{N-1}$$

⋮

$$x_i = r \cos \theta_{i-1} \sin \theta_i \sin \theta_{i+1} \dots \sin \theta_{N-1} \quad (8-3)$$

⋮

$$x_{N-1} = r \cos \theta_{N-2} \sin \theta_{N-1}$$

$$x_N = r \cos \theta_{N-1}$$

که در آن $0 \leq r < \infty$ و $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi; 0 \leq \theta_i \leq \pi (2 \leq i \leq D-1)$ است. کمیت های $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}$ و ξ_N که

در رابطه (5-3) آمده است، به ترتیب با کمیت های $(\sum_{j=1}^{2N+1} x_j^2)^{1/2}; x_D, x_{D-1}, \dots, x_{2N+2}$ (8-3) متناظر

است. با استفاده از رابطه (8-3) اندازه زوایا به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tan \theta_i = \frac{\left(\sum_{j=1}^i x_j^2 \right)^{1/2}}{x_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \dots, D-1) \quad (9-3)$$

۴-۳ مروری مختصر بر روش NU در حل معادلات دیفرانسیل

مرتبه دوم تک متغیره

در سال‌های اخیر، حل سیستم‌های مکانیک کوانتومی به روش NU بسیار مورد توجه قرار گرفته

است [۶۴-۶۷]. به کارگیری این روش در حل معادله شرودینگر، دستورالعمل مشخصی برای به دست

آوردن جواب های دقیق ویژه مقادیر انرژی حالت های مقید و ویژه توابع وابسته آن ها بر حسب چند جمله ای های متعامد ارائه می دهد که در عین سادگی موثر است.

۳-۴-۱ کلیات روش NU

در این جا معادله شرودینگر، پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب، $s = s(r)$ به صورت معادله تبدیل یافته زیر است [۵۳]:

$$\Psi_n'''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi_n''(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi_n'(s) = 0 \quad (۱۰-۳)$$

در این رابطه $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چند جمله ای و حداکثر از مرتبه دوم هستند و $\tilde{\tau}(s)$ یک چند جمله ای است که حداکثر می تواند از مرتبه اول باشد. با در نظر گرفتن تابع موج $\Psi_n(s)$ به صورت حاصل ضرب:

$$\Psi_n(s) = \varphi_n(s) y_n(s) \quad (۱۱-۳)$$

معادله (۱۰-۳) به یک معادله فوق هندسی به شکل زیر تقلیل می یابد:

$$\sigma(s) y_n'''(s) + \tau(s) y_n''(s) + \lambda y_n'(s) = 0 \quad (۱۲-۳)$$

که در آن $\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s)$ است و شرط $\tau'(s) < 0$ نیز باید برقرار باشد که بدان معنی است، مشتق مرتبه اول $\tau(s)$ باید منفی باشد. λ هم پارامتری است که به صورت ذیل تعریف می شود و تساوی دو رابطه (۱۳-۳) ویژه مقادیر انرژی را مشخص می کند.

$$\begin{cases} \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''(s), \\ \lambda = K + \pi'(s) \end{cases} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (۱۳-۳)$$

باید به این نکته توجه کرد که پارامتر λ_n و μ_n از یک جواب خاص، $y(s) = y_n(s)$ ، که چند جمله‌ای درجه n است به دست می‌آید. به علاوه این که، جمله‌ی $y_n(s)$ از تابع موج معادله (۳-۱۱)، یک تابع از نوع فوق هندسی است و رابطه رودریگز^۱ به دست می‌آید:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (۳-۱۴)$$

در این رابطه B_n ثابت نرمالیزاسیون و $\rho(s)$ تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند:

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad \omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (۳-۱۵)$$

تابع $\pi(s)$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (۳-۱۶)$$

از آنجایی که باید $\pi(s)$ حداکثر یک چند جمله‌ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله (۳-۱۶) باید به صورت یک چند جمله‌ای درجه اول مرتب شوند و این، در صورتی ممکن است که مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ برابر صفر شود. در این حالت یک معادله برای K به دست می‌آید که پس از حل معادله، مقادیر به دست آمده برای K ، در معادله (۳-۱۶) جایگذاری شده و با مقایسه با معادلات (۳-۱۳) ویژه مقادیر انرژی را به دست می‌آوریم.

۳-۴-۲ تعمیم پارامتری روش NU [۶۸]

برای تعمیم پارامتری معادله NU، فرم کلی معادله شرودینگر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{(s(1 - \alpha_3 s))^2} \right] \Psi = 0 \quad (۳-۱۷)$$

^۱ Rodríguez

با مقایسه معادله (۳-۱۷) با فرم کلی معادله دیفرانسیل روش NU، معادله (۳-۱۰)، می‌توان

روابط زیر را به دست آورد:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau} &= \alpha_1 - \alpha_2 s \\ \sigma &= s(1 - \alpha_3 s) \\ \tilde{\sigma} &= -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3\end{aligned}\tag{۳-۱۸}$$

و با جایگذاری آن در معادله (۳-۱۶) خواهیم داشت:

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm \sqrt{(\alpha_6 - k\alpha_3)s^2 + (\alpha_7 + k)s + \alpha_8}\tag{۳-۱۹}$$

که در آن داریم:

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1)\tag{۳-۲۰}$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3)\tag{۳-۲۱}$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1\tag{۳-۲۲}$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2\tag{۳-۲۳}$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3\tag{۳-۲۴}$$

چون تابع زیر رادیکال باید مربع کامل باشد، خواهیم داشت:

$$K_{\pm} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}\tag{۳-۲۵}$$

در این رابطه:

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_6 + \alpha_3^2\alpha_8\tag{۳-۲۶}$$

و برای K معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\pi = \alpha_4 + \alpha_5 s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}]\tag{۳-۲۷}$$

$$\tau = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_3)s - 2[(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s + \sqrt{\alpha_8}]\tag{۳-۲۸}$$

$$\tau' = -(\alpha_2 - 2\alpha_3) - 2[(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})] = -2\alpha_3 - 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})\tag{۳-۲۹}$$

بنابراین معادله ویژه مقداری انرژی می‌تواند به سهولت با استفاده از رابطه زیر به دست آید:

$$\alpha_2 n - (2n+1)\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n-1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0 \quad (30-3)$$

جهت به دست آوردن توابع موج نیز می توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$\Psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (31-3)$$

در برخی مسائل مقدار کمیت $\alpha_3 = 0$ است. در این صورت می بایست مقادیر حدی زیر را جایگزین

نمود:

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - \alpha_3 s) P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} = L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} s) \quad (32-3)$$

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} = e^{\alpha_{13} s} \quad (33-3)$$

در این صورت توابع موج به صورت ذیل بیان می شود:

$$\Psi(s) = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13} s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} s) \quad (34-3)$$

در روابط فوق، ضرایب α_{10} تا α_{13} به صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8} \quad (35-3)$$

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) \quad (36-3)$$

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8} \quad (37-3)$$

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) \quad (38-3)$$

۵-۳ حل معادلات دیفرانسیل به روش رونگ - کوتا^۱

از این روش، برای حل عددی معادلات خطی و غیر خطی به طور گسترده استفاده می شود که

بسط آن از نظر جبری پیچیده است. ایده‌ی اصلی این روش را با روش رونگ - کوتای مرتبه دوم (R-)

(K_۲) و بر اساس میانگین شیب ها، بررسی می کنیم [۵۹]. به عبارت دیگر:

$$y_{n+1} = y_n + hx \quad (39-3)$$

^۱ Runge-Kutta

مقادیر اولیه مسئله به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_n) = y_n \quad (40-3)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad , \quad k_2 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad (41-3)$$

میانگین وزنی k_1 و k_2 را انتخاب و برای تعیین y_{n+1} به y_n اضافه می‌کنیم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \quad (42-3)$$

w_1 ، w_2 ، α و β مقادیر ثابتی هستند که باید تعیین شوند:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + \dots \quad (43-3)$$

رابطه (43-2) با استفاده از روابط (41-3) و (40-3) به صورت زیر در می‌آیند:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (f_t + ff_y) + \frac{h^3}{6} [f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 f_{yy} + f_y (f_t + ff_y)] + O(h^4) \quad (44-3)$$

در این جا کلیه مشتق‌ها در نقطه (t_n, y_n) محاسبه شده‌اند [59]. با قرار دادن معادله (41-3) در

معادله فوق، می‌توان آن را به صورت زیر باز نویسی کرد:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad (45-3)$$

حال با استفاده از بسط سری تیلور دو متغیره، داریم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 h [f(t_n, y_n) + (\alpha hf_t + \beta k_1 f_y) + (\frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{tt} + \alpha h \beta k_1 f_{ty} + \frac{\beta^2 f^2}{2} f_{yy})] + O(h^3) \quad (46-3)$$

از قرار دادن عبارت k_1 در معادله (46-3) و مرتب کردن آن بر حسب توان‌های صعودی h

خواهیم داشت:

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2) hf + w_2 h^2 (\alpha f_t + \beta f f_y) + w_2 h^3 (\frac{\alpha^2}{2} f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{\beta^2 f^2}{2} f_{yy}) + O(h^4) \quad (47-3)$$

از تساوی ضرایب معادلات (۴۷-۳) و (۴۴-۲) داریم:

$$w_1 + w_2 = 1 \quad , \quad w_2(\alpha f_t + \beta f_y) = \frac{f_t f_y}{2} \quad (۴۸-۳)$$

که نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 \alpha = w_2 \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 1 - w_2 \\ \alpha = \frac{1}{2w_2} \\ \beta = \frac{1}{2w_2} \end{cases} \quad (۴۹-۴)$$

کمیت w_2 دلخواه است و مقادیر گوناگونی را می‌توان به آن اختصاص داد:

الف) حالت اول:

$$\begin{aligned} w_1 = w_2 = \frac{1}{3} & \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{3}{2} \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{3}(2k_1 + k_2) \\ k_1 &= hf(t, y) \\ k_2 &= hf\left(t + \frac{3}{2}h, y + \frac{3}{2}k_1\right) \end{aligned} \quad (۵۰-۳)$$

ب) حالت دوم:

$$\begin{aligned} w_1 = w_2 = \frac{1}{2} & \Rightarrow \alpha = \beta = 1 \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{(k_1 + k_2)}{2} \\ k_1 &= hf(t, y) \\ k_2 &= hf(t + h, y + k_1) \end{aligned} \quad (۵۱-۳)$$

به روشی مشابه، فرمول R-K از هر مرتبه را می‌توان به دست آورد که البته مشتقات آن بسیار طولانی و پیچیده است ولی از بین آن‌ها روش R-K از مرتبه ۴ متداول تر است که مراحل آن به صورت زیر است:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

(52-3)

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3)$$

فصل چهارم: بررسی ساختار خوشه‌ای مولکول‌های

هسته‌ای با استفاده از پتانسیل دو مرکزی

۴-۱ مقدمه

در هسته‌های سبک تغییر شکل، نقش مهمی را در ساختار هسته ایفا می‌کند. این انحراف از ساختار کروی، در قالب تغییرات محوری و خوشه بندی دیده می‌شود و مطالعات تجربی متعددی این ساختار را اثبات می‌کند [۵، ۶۹]. در سال ۲۰۰۱، کانادا^۱ و هوریچی^۲ نشان دادند نوترون‌های ظرفیت در هسته‌هایی با ساختار خوشه‌ای می‌توانند، پیوند کوالانسی، بین خوشه‌ها ایجاد نمایند؛ از این رو آن‌ها را "مولکول‌های هسته‌ای" نامیدند. به عنوان مثال، ${}^8\text{Be}$ دارای یک نوترون است که بین دو خوشه آلفا مبادله می‌شود. آن‌ها مولکول‌های هسته‌ای را با یک پتانسیل نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته‌ی تک مرکز بررسی کردند [۳، ۷۰]. این مدل دارای مزایای مهمی برای مطالعه هسته‌ها در مدل خوشه‌ای است ولی فرضیه‌ای در خصوص خوشه‌ها ندارد [۷۱].

در مولکول‌های هسته‌ای با استفاده از مدل پوسته‌ای دو مرکز به خوبی می‌توان ماهیت خوشه‌ای هسته‌ها را نشان داد. در این مدل، هر خوشه با چاه پتانسیل خود نشان داده می‌شود. پتانسیلی که تا کنون بیشتر مورد استفاده قرار گرفته است، پتانسیل نوسانگر دو مرکزی است. این پتانسیل در لبه به قدر کافی تیز نیست و انرژی جدایی آن بی نهایت می‌شود [۳۵]. در این فصل، با در نظر گرفتن تقارن محوری در هسته‌های غیر کروی با دو خوشه یکسان، معادله سطح هسته را در مختصات استوانه‌ای توصیف کرده‌ایم. سپس با معرفی پتانسیل دو مرکزی گوسی و حل معادله شرودینگر در مختصات استوانه‌ای، ترازهای انرژی را به دست می‌آوریم.

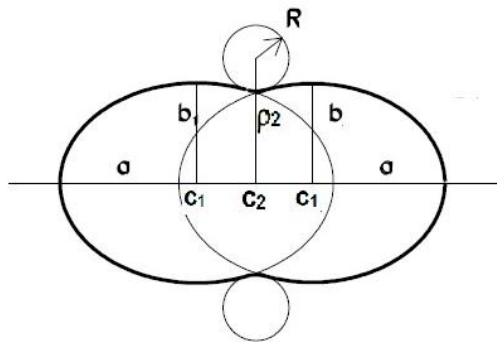
۴-۲ حل معادله شرودینگر در مختصات استوانه‌ای:

در صورتی که ساختار هسته شامل دو خوشه یکسان باشد، معادله سطح هسته در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود [۵۲]:

^۱ Kanada
^۲ Horiuchi

$$\rho = \begin{cases} b \sqrt{1 - \left(\frac{z+c_1}{a}\right)^2} & z \leq z_1 \\ \rho_2 - \sqrt{R^2 - (z-c_2)^2} & z_1 < z < z_2 \\ b \sqrt{1 - \left(\frac{z-c_1}{a}\right)^2} & z_2 \leq z \end{cases} \quad (1-4)$$

در این رابطه، $\pm c_1$ موقعیت هر یک از خوشه‌ها را مشخص می‌کند و سایر کمیت‌ها در شکل ۱-۴ نشان داده شده است.



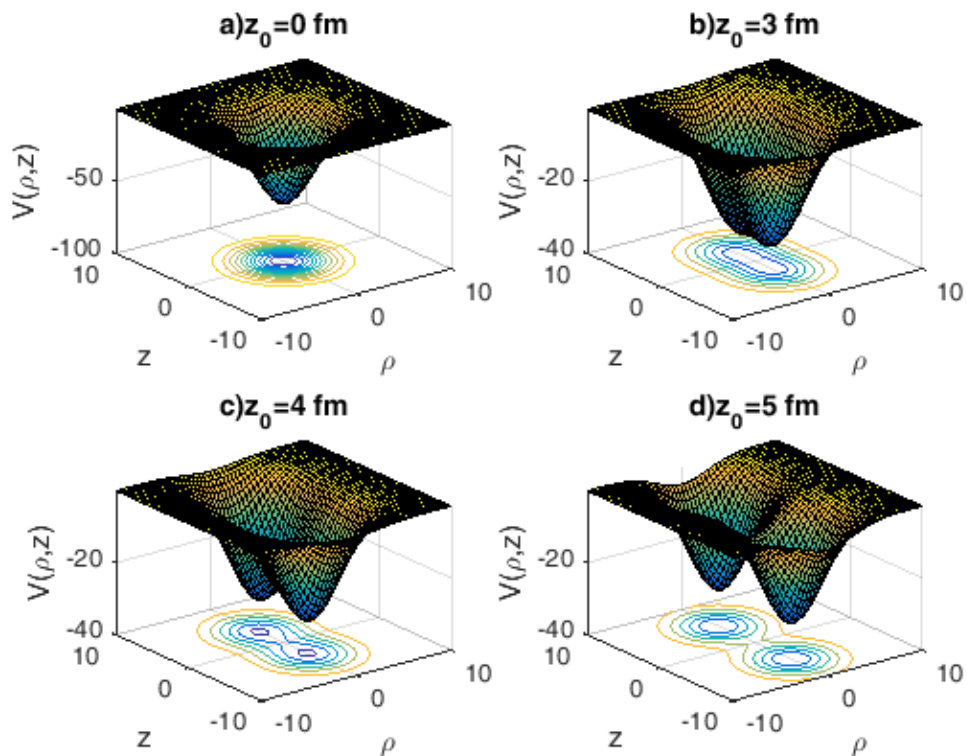
شکل ۱-۴. نمایش کمیت‌های شکل هسته با ساختار دو خوشه‌ی یکسان [۵۲]

در اینجا، از چاه پتانسیل دو مرکزی گوسی برای بررسی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های ^9Be و ^8Be استفاده می‌کنیم که در مختصات استوانه‌ای می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$V_0(\rho, z) = \begin{cases} -A_1 \exp(-\alpha_1(z-z_0)^2) - B \exp(-\beta\rho^2), & z \geq 0 \\ -A_2 \exp(-\alpha_2(z+z_0)^2) - B \exp(-\beta\rho^2), & z < 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

که A_1 ، A_2 و B عمق پتانسیل می‌باشند. کمیت‌های α_1 ، α_2 و β معکوس مربع دامنه پتانسیل و z_0 محل قرارگیری مرکز خوشه است. در شکل ۲-۴ نمودار پتانسیل برای برخی از مقدار z_0 نشان داده شده است. هسته‌هایی با پوسته کاملاً بسته نظیر ^4He دارای شکل کروی است و بسیار پایدارند. بنابراین، چاه پتانسیل کروی بوده و کمیت $z_0 = 0$ است (شکل ۲-۴). در هسته‌های سبک با لایه‌های نیمه پر، مشابه ایزوتوپ ^9Be که لایه‌ی $N=2$ آن نیمه پر است، هسته دارای دو خوشه آلفا بوده که

می‌توان هر یک را با یک مرکز در چاه پتانسیل نشان داد (شکل ۴-۲-۴ و c). در نهایت، در هسته‌هایی با پوسته نیمه پر هنگامی که هسته در حالت پایه ناپایدار بوده، مانند ایزوتوپ ^9Be که با انرژی ~ 92 keV به دو ذره آلفا واپاشیده می‌شود، می‌توان از دو چاه پتانسیل چسبیده به هم برای توصیف استفاده کرد (شکل ۴-۲-۴-d).



شکل ۴-۲. چاه پتانسیل گوسی برای برخی مقادیر z . [۷۲]

هنگامی که پتانسیل دارای تقارن محوری است، بهتر است به حل معادله شرودینگر در مختصات

استوانه‌ای بپردازیم که به صورت زیر بیان می‌شود [۴۶]:

$$\frac{-\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \psi(\rho, \phi, z) + V_0(\rho, z) \psi(\rho, \phi, z) = E \psi(\rho, \phi, z) \quad (۳-۴)$$

در این رابطه E ویژه مقادیر انرژی و m_0 جرم نوکلئون است. $V_0(\rho, z)$ پتانسیل گوسی است که به

دلیل تقارن محوری به ϕ بستگی ندارد و می‌توان آن را به صورت $V_0(\rho)$ و $V_0(z)$ جداسازی کرد.

در مختصات استوانه ای عملگر لاپلاس بدین صورت تعریف می شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (4-4)$$

با استفاده جداسازی متغیرها:

$$\psi(\rho, \phi, z) = R(\rho)Z(z)\Phi(\phi) \quad (5-4)$$

و جایگذاری در معادله (4-3)، سه معادله دیفرانسیل معمولی به دست خواهد آمد [46]:

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m_\phi^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (6-4)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - \frac{2m_0}{\hbar^2} (V_0(z) - E)Z(z) + \gamma^2 Z(z) = 0 \quad (7-4)$$

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \left(\gamma^2 + \frac{m_\phi^2}{\rho^2}\right)R(\rho) - \frac{2m_0}{\hbar^2} V_0(\rho)R(\rho) = 0 \quad (8-4)$$

از حل معادله (4-6) به دست می آوریم:

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im_\phi \phi) \quad (9-4)$$

در این رابطه m_ϕ ، عدد کوانتومی مغناطیسی است که می تواند مقادیر $m_\phi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را داشته باشد. در معادله (4-7)، $V_0(\rho)$ ، چاه پتانسیل گوسی با عمق محدود $-B$ می باشد. به عبارت دیگر، $V_0(\rho) = -B \exp(-\beta \rho^2)$ در اطراف نقطه می نیمم خود مشابه تابع پارابولیک عمل کرده و در بی نهایت به صفر میل می کند. بنابراین با استفاده از تقریب پارابولیک و در نظر گرفتن کمیت های

$x_0 = -\gamma^2 + \frac{2m_0 B}{\hbar^2}$ و $k_0 = 2B\beta$ ، معادله (4-8) به صورت زیر خواهد شد [47-48]:

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(x_0 - \frac{m_\phi^2}{\rho^2} - \frac{m_0 k_0}{\hbar^2} \rho^2\right) R(\rho) = 0 \quad (10-4)$$

حال، با جایگذاری تغییر متغیر [۷۵]:

$$R_{n_\rho, m_\phi}(\rho) = \rho^{|m_\phi|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\rho_0^2}\right) W(\rho) \quad (11-4)$$

در معادله (۱۰-۴)، آن را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\rho \frac{d^2 W(\rho)}{d\rho^2} + \left(2|m_\phi| + 1 - \frac{2\rho^2}{\rho_0^2}\right) \frac{dW(\rho)}{d\rho} + \left(x_0 - \frac{2(|m_\phi| + 1)}{\rho_0^2}\right) W(\rho) = 0 \quad (12-4)$$

که در آن $\rho_0^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{m_0 k_0}}$ است. معادله بالا، معادله فوق هندسی نام دارد و جواب های آن برابر است با:

$$W(\rho) = C \frac{n_\rho! \Gamma(|m_\phi| + 1)}{\Gamma(n_\rho + |m_\phi| + 1)} L_{n_\rho}^{(|m_\phi|)}\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \quad (13-4)$$

در این رابطه، C ثابت نرمالیزاسیون است که با استفاده از شرط $\int |R_{n_\rho, m_\phi}(\rho)|^2 d\rho = 1$ به دست

می آید. $L_{n_\rho}^{(|m_\phi|)}\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right)$ چند جمله ای های لاگر^۱ و Γ تابع گامای اوایلر^۲ است. بنابراین، تابع موج شعاعی

به صورت زیر به دست می آید [۷۶]:

$$R_{n_\rho, m_\phi}(\rho) = \frac{1}{\rho_0^{|m_\phi|+1}} \left[\frac{2n_\rho!}{\Gamma(n_\rho + |m_\phi| + 1)} \right]^{1/2} \rho^{|m_\phi|} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\rho_0^2}\right) L_{n_\rho}^{(|m_\phi|)}\left(\frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) \quad (14-4)$$

کمیت n_ρ عدد کوانتومی شعاعی نامیده می شود که می تواند مقادیر ۰، ۱، ۲ و... را داشته باشد.

شکل (۳-۴) توابع ویژه، $R_{n_\rho, m_\phi}(\rho)$ را در راستای محور ρ برای حالت پایه و برای اولین و دومین حالت

برانگیخته نشان می دهد.

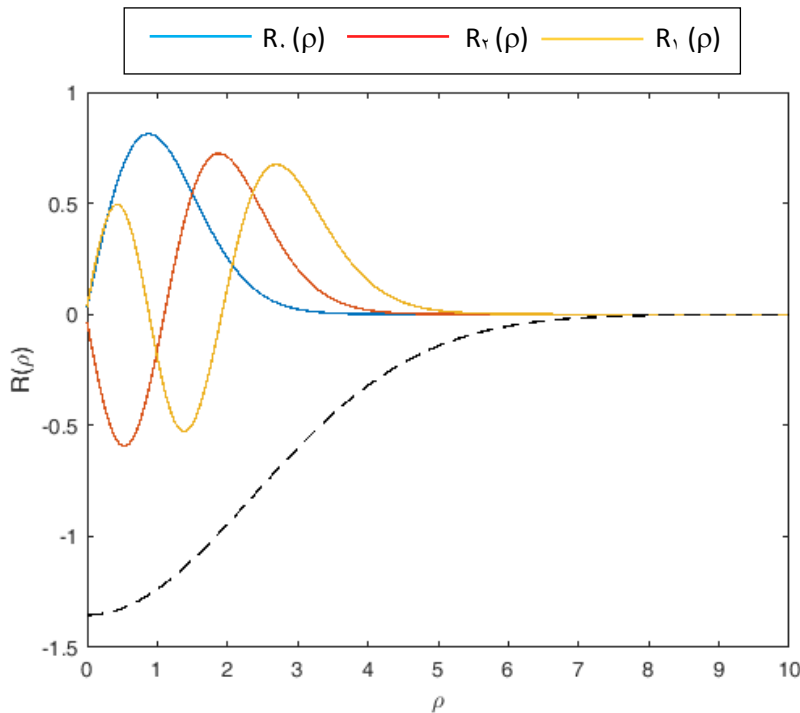
^۱The Laguerre polynomial

^۲The Euler's gamma function

حال با تعریف کمیت های $x_i = \gamma^2 + \frac{2m_0(E+A_i)}{\hbar^2}$ و $k_i = 2A\alpha_i$ که در آن $(i=1,2)$ می باشد،

معادله (۷-۴) تبدیل می شود به:

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + \left(x_i - \frac{m_0 k_i (z \pm z_0)^2}{\hbar^2} \right) Z(z) = 0 \quad (15-4)$$



شکل ۴-۳. توابع ویژه، $R_{n_p}(\rho)$ ، برای حالت پایه و دو تراز برانگیخته [۷۲]

که جواب عمومی آن بدون اعمال هیچ شرطی برای ناحیه $z \geq 0$ بدین صورت [۷۷]:

$$Z_{n_{z_1}}(z) = D_1 \exp\left(-\frac{\sqrt{m_0 k_1}}{\hbar}(z-z_0)^2\right) \left\{ \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-n_{z_1}}{2})} {}_1F_1\left(\frac{-n_{z_1}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_1}}{\hbar}(z-z_0)^2\right) + \right. \\ \left. \frac{\Gamma(\frac{-1}{2})}{\Gamma(\frac{-n_{z_1}}{2})} \left(\frac{m_0 k_1}{\hbar^2}\right)^{1/4} (z-z_0) \times {}_1F_1\left(\frac{1-n_{z_1}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_1}}{\hbar}(z-z_0)^2\right) \right\} \quad (16-4)$$

و برای ناحیه $z < 0$ به صورت زیر است [۷۷]:

$$Z_{n_{z_2}}(z) = D_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{m_0 k_2}}{\hbar}(z+z_0)^2\right) \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-n_{z_2}}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{-n_{z_2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_2}}{\hbar}(z+z_0)^2\right) + \right. \\ \left. \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-n_{z_2}}{2}\right)} \left(\frac{m_0 k_2}{\hbar^2}\right)^{1/4} (z+z_0) \times {}_1F_1\left(\frac{1-n_{z_2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_2}}{\hbar}(z+z_0)^2\right) \right\} \quad (۱۷-۴)$$

که در آن D_1 و D_2 ثابت های نرمال سازیند و ${}_1F_1(a, b, z)$ توابع فوق هندسی همشار^۱ است که به صورت زیر تعریف می شود [۵۳]:

$${}_1F_1(a, b, z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(a)_x}{(b)_x} \frac{z^x}{x!} \quad (۱۸-۴)$$

در شکل (۴-۴) توابع ویژه سه تراز اول، $Z_{n_z}(z)$ ، در راستای محور z ها برای ۴ مقدار مختلف جدایی Z نشان داده شده است. برای $Z=0$ ، توابع چاه پتانسیل گوسی معمولی (شکل ۴-۴-۴) به دست می آید. با افزایش فاصله جدایی (شکل های ۴-۴-۴ و ۴-۴-۴) توابع موج حول مراکز مجزای جدید متمرکز می شوند. همچنین می توان دید که برای فواصل جدایی بزرگ Z (شکل ۴-۴-۴)، توابع موج نسبت به مراکز جدید $\pm z_0$ پاریده مثبت و یا منفی دارند زیرا هیچ هم پوشانی بین توابع موج در دو خوشه وجود ندارد و بنابراین پاریده باید نسبت به هر مرکز به صورت جداگانه بررسی شود.

در نهایت، ویژه مقادیر انرژی در حالت کلی به صورت ذیل محاسبه می شود [۷۶]:

$$E_{n_{z_i}, n_{\rho}, m_{\phi}} = \hbar \sqrt{\frac{2A_i \alpha_i}{m_0}} \left(n_{z_i} + \frac{1}{2}\right) + \hbar \sqrt{\frac{2B\beta}{m_0}} (2n_{\rho} + |m_{\phi}| + 1) - (A_i + B) \quad (۱۹-۴)$$

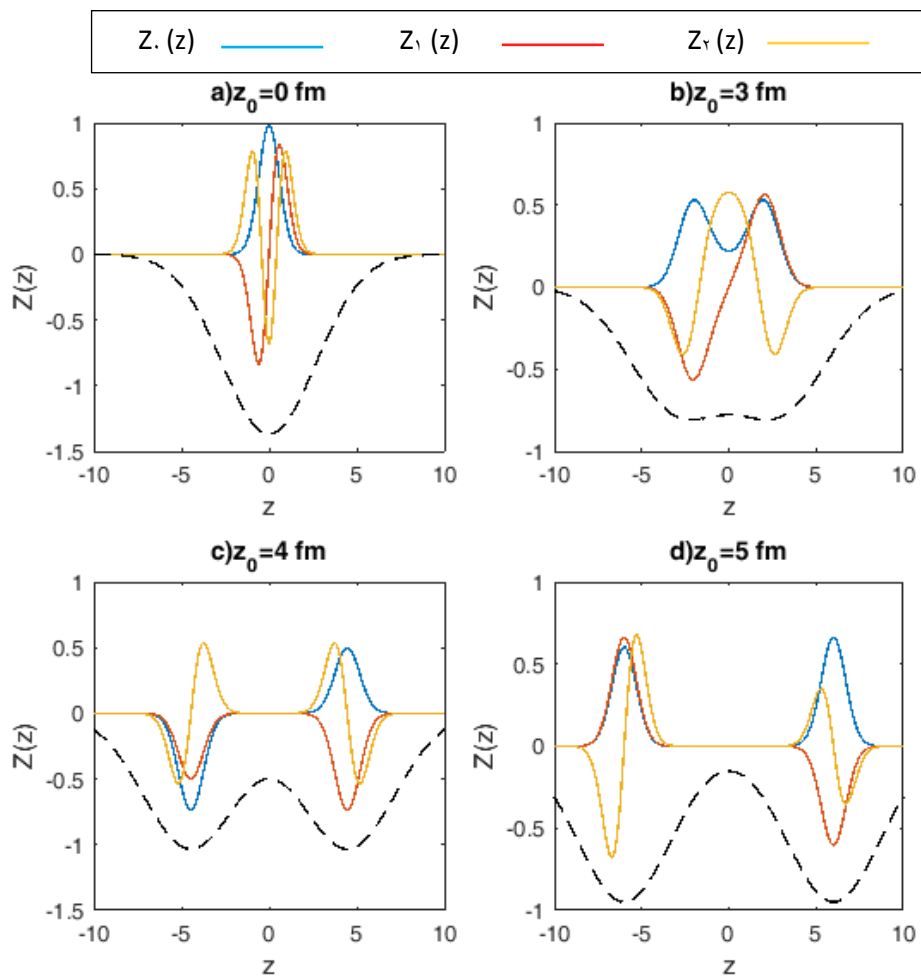
^۱ Confluent hypergeometric functions

از آنجائیکه انرژی نباید به محور Z ها وابسته باشد، بنابراین مقادیر n_{z_1} و n_{z_2} بدین صورت به یکدیگر مربوط می باشند که:

$$\hbar \sqrt{\frac{2A_1\alpha_1}{m_0}} \left(n_{z_1} + \frac{1}{2}\right) - A_1 = \hbar \sqrt{\frac{2A_2\alpha_2}{m_0}} \left(n_{z_2} + \frac{1}{2}\right) - A_2 \quad (20-4)$$

و با در نظر گرفتن حالت تقارن، از طریق دو خوشه یکسان مقادیر $A_1=A_2$ و $\alpha_1=\alpha_2$ خواهد بود و می توان ویژه توابع انرژی را در حالت دو مرکزی متقارن به صورت زیر نوشت:

$$E_{n_z, n_\rho, m_\phi} = \hbar \sqrt{\frac{2A_1\alpha_1}{m_0}} \left(n_z + \frac{1}{2}\right) + \hbar \sqrt{\frac{2B\beta}{m_0}} (2n_\rho + |m_\phi| + 1) - (A_1 + B) \quad (21-4)$$



شکل ۴-۴. توابع ویژه، $Z_{n_z}(z)$ ، برای حالت پایه و دو تراز برانگیخته [۷۲]

به منظور ایجاد یک معنای فیزیکی برای جواب های عمومی (۴-۱۶) و (۴-۱۷) و نیز پیدا کردن

ویژه مقادیر n_z شرایط زیر را اعمال می کنیم:

(۱) دو تابع موج می بایست در $Z=0$ پیوسته باشند، یعنی:

$$\left[Z_{n_z}(z > 0) = Z_{n_z}(z < 0) \right]_{z=0} \quad (۲۲-۴)$$

که منجر می شود به رابطه $D_1 = D_2$ یا:

(۲۳-۴)

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-n_z}{2})} {}_1F_1\left(\frac{-n_z}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_1}}{\hbar} z_0^2\right) + z_0 \frac{\Gamma(\frac{-1}{2})}{\Gamma(\frac{-n_z}{2})} \left(\frac{m_0 k_1}{\hbar^2}\right)^{1/4} {}_1F_1\left(\frac{1-n_z}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_1}}{\hbar} z_0^2\right) = 0$$

(۲) اولین مشتق توابع موج باید در $Z=0$ پیوسته باشند:

$$\left[\frac{dZ_{n_z}(z > 0)}{dz} = \frac{dZ_{n_z}(z < 0)}{dz} \right]_{z=0} \quad (۲۴-۴)$$

که دلالت دارد بر رابطه $D_1 = -D_2$ یا:

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1-n_z}{2})} {}_1F_1\left(\frac{-n_z}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_1}}{\hbar} z_0^2\right) + z_0 \frac{\Gamma(\frac{-1}{2})}{\Gamma(\frac{-n_z}{2})} \left(\frac{m_0 k_1}{\hbar^2}\right)^{1/4} {}_1F_1\left(\frac{1-n_z}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_1}}{\hbar} z_0^2\right) -$$

(۲۵-۴)

$$n_z \frac{\Gamma(\frac{-1}{2})}{\Gamma(\frac{1-n_z}{2})} {}_1F_1\left(\frac{2-n_z}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_1}}{\hbar} z_0^2\right) + z_0^{-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{2-n_z}{2})} \left(\frac{m_0 k_1}{\hbar^2}\right)^{1/4} {}_1F_1\left(\frac{1-n_z}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{m_0 k_1}}{\hbar} z_0^2\right) = 0$$

معادله های (۴-۲۳) و (۴-۲۵) عدد کوانتومی n_z را تعیین می کنند که به کمیت Z بستگی دارند.

۳-۴ تاثیر جفت شدگی اسپین - مدار بر ترازهای انرژی

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های نیروهای هسته‌ای، وابستگی آن به اسپین ذره است که جفت شدگی اسپین - مدار نامیده می‌شود. اگرچه این جفت شدگی در مقایسه با پتانسیل میدان میانگین، بسیار کوچک است، اما تاثیر آن بر تغییر سطح انرژی یک ذره را نمی‌توان نادیده گرفت. در این بخش تاثیر جفت شدگی اسپین - مدار روی ترازهای انرژی تک ذره بررسی می‌شود.

پتانسیل اسپین - مدار به صورت زیر تعریف می‌شود [۵۲، ۷۸]:

$$V_{LS} = -\lambda \left(\frac{1}{2m_0c} \right)^2 \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (۲۶-۴)$$

در این رابطه، λ کمیت بدون بعد ثابت جفت شدگی و برابر ۳۵ است. m_0 جرم نوکلئون و c سرعت نور می‌باشد [۵۲]. عملگر اندازه حرکت برابر $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ است که در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{L}^{\pm} = \mp \hbar e^{\pm i\phi} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \pm i \frac{\partial V}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (۲۷-۴)$$

و

$$\hat{L}_z = i\hbar \frac{\partial V}{\partial \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (۲۸-۴)$$

بنابراین:

$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2} (L^+ s^- + L^- s^+) + L_z s_z. \quad (۲۹-۴)$$

با استفاده از توابع موج متعامد، عناصر ماتریس اسپین - مدار به صورت زیر تعریف می‌شود [۷۶]:

$$\begin{aligned}
\left\langle n'_z, n'_\rho, m'_\phi, m'_s \left| \frac{1}{2}(L^+ s^- + L^- s^+) + L_z s_z \right| n_z, n_\rho, m_\phi, m_s \right\rangle = \\
\frac{\hbar}{2} \left\langle n'_z, n'_\rho, m'_\phi \left| L^+ \right| n_z, n_\rho, m_\phi \right\rangle \delta_{m'_s, m_s - 1} \\
+ \frac{\hbar}{2} \left\langle n'_z, n'_\rho, m'_\phi \left| L^- \right| n_z, n_\rho, m_\phi \right\rangle \delta_{m'_s, m_s + 1} \\
+ \hbar m_s \left\langle n'_z, n'_\rho, m'_\phi \left| L_z \right| n_z, n_\rho, m_\phi \right\rangle \delta_{m'_s, m_s}
\end{aligned} \quad (30-4)$$

این عناصر ماتریسی می‌توانند به عناصر ماتریسی وابسته به S و عناصر ماتریسی وابسته به L تفکیک شوند. $|n_z, n_\rho, m_\phi, m_s\rangle$ حالت‌های ویژه هامیلتونین در نگارش دیراک هستند که به توابع موج در راستای z ، ρ و ϕ دلالت دارد که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\langle \rho, \phi, z | n_z, n_\rho, m_\phi \rangle = R_{n_\rho}(\rho) Z_{n_z}(z) \Phi_{m_\phi}(\phi) \quad (31-4)$$

در رابطه (30-4) جمله ماتریسی وابسته به L_z قطری است و می‌توان بدین صورت نوشت [76]:

$$\hbar m_s \left\langle n'_z, n'_\rho, m'_\phi \left| L_z \right| n_z, n_\rho, m_\phi \right\rangle \delta_{m'_s, m_s} = \hbar^2 m_s m_\phi \delta_{m'_s, m_s} \delta_{m'_\phi, m_\phi} \quad (32-4)$$

جمله‌های دیگر نیز برابرند با [76]:

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{2} \left\langle n'_z, n'_\rho, m'_\phi \left| L^+ \right| n_z, n_\rho, m_\phi \right\rangle \delta_{m'_s, m_s - 1} = \frac{\hbar}{2} \delta_{m'_s, m_s - 1} \delta_{m'_\phi, m_\phi - 1} \times \\
\left[2B\beta \delta_{n'_z, n_z - 1} \delta_{N'_\rho, N_\rho + 1} \sqrt{\frac{n_z(N_\rho + m_\phi + 2)}{2}} + 2A_1 \alpha (\delta_{n'_z, n_z + 1} + z_0 \delta_{n'_z, n_z}) \delta_{N'_\rho, N_\rho - 1} \sqrt{\frac{(n_z + 1)(N_\rho - m_\phi)}{2}} \right] \quad (33-4)
\end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar}{2} \left\langle n'_z, n'_\rho, m'_\phi \left| L^- \right| n_z, n_\rho, m_\phi \right\rangle \delta_{m'_s, m_s - 1} = \frac{\hbar}{2} \delta_{m'_s, m_s + 1} \delta_{m'_\phi, m_\phi - 1} \times \\
\left[2B\beta \delta_{n'_z, n_z - 1} \delta_{N'_\rho, N_\rho + 1} \sqrt{\frac{n_z(N_\rho - m_\phi + 2)}{2}} + 2A_1 \alpha (\delta_{n'_z, n_z + 1} + z_0 \delta_{n'_z, n_z}) \delta_{N'_\rho, N_\rho - 1} \sqrt{\frac{(n_z - 1)(N_\rho + m_\phi)}{2}} \right] \quad (34-4)
\end{aligned}$$

که در آن $N_\rho = 2n_\rho + |m_\phi|$ به عنوان عدد کوانتومی جدید انتخاب می‌شود زیرا در عناصر ماتریسی هر دو کمیت $|m_\phi|$ و m_ϕ ظاهر می‌شود و این شیوه نگارش به ما امکان ترکیب این دو عبارت را می‌دهد و نتیجه نهایی به صورت ذیل خواهد بود:

$$\begin{aligned} \langle n'_z, n'_\rho, m'_\phi, m'_s \mid V_{LS} \mid n_z, n_\rho, m_\phi, m_s \rangle = & -\lambda \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{2m_0 c} \right)^2 \delta_{m'_s, m_s - 1} \delta_{m'_\phi, m_\phi - 1} \times \\ & \left[2B\beta \delta_{n'_z, n_z - 1} \delta_{N'_\rho, N_\rho + 1} \sqrt{\frac{n_z(N_\rho + m_\phi + 2)}{2}} + 2A_1 \alpha (\delta_{n'_z, n_z + 1} + z_0 \delta_{n'_z, n_z}) \delta_{N'_\rho, N_\rho - 1} \sqrt{\frac{(n_z + 1)(N_\rho - m_\phi)}{2}} \right] \\ & - \lambda \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{2m_0 c} \right)^2 \delta_{m'_s, m_s + 1} \delta_{m'_\phi, m_\phi - 1} \times \\ & \left[2B\beta \delta_{n'_z, n_z - 1} \delta_{N'_\rho, N_\rho + 1} \sqrt{\frac{n_z(N_\rho - m_\phi + 2)}{2}} + 2A_1 \alpha (\delta_{n'_z, n_z + 1} + z_0 \delta_{n'_z, n_z}) \delta_{N'_\rho, N_\rho - 1} \sqrt{\frac{(n_z - 1)(N_\rho + m_\phi)}{2}} \right] \\ & - \lambda \hbar^2 \left(\frac{1}{2m_0 c} \right)^2 m_s m_\phi \delta_{m'_s, m_s} \delta_{m'_\phi, m_\phi} \end{aligned} \quad (35-4)$$

در قسمت بعد به بررسی ترازهای انرژی دو ایزوتوپ ^9Be و ^8Be می‌پردازیم که نمونه‌ای از مولکول‌های هسته‌ای با ساختار خوشه‌ای متقارن شامل دو ذره آلفا می‌باشند.

۴-۴ بررسی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های ^8Be و ^9Be

۴-۴-۱ ایزوتوپ ^8Be

در این قسمت به منظور ارزیابی دقت مدل خود ترازهای انرژی ایزوتوپ ^8Be را بررسی می‌کنیم. ایزوتوپ ^8Be ، ساده‌ترین ایزوتوپ از هسته‌های سبک زوج - زوج می‌باشد که در حالت پایه خود دارای ساختار خوشه‌ای $\alpha + \alpha$ است. طول عمر آن ($\sim 10^{-16}$ s) و بسیار ناپایدار محسوب می‌شود. بنابراین یک سیستم با دو خوشه یکسان بوده که شکل دمبل مانند دارد. نتایج آزمایشات نشان می‌دهد که نه تنها در حالت پایه بلکه در اولین دو حالت برانگیخته نیز دارای ساختار خوشه‌ای دوآلفایی است [۷۹]. انرژی بستگی ایزوتوپ ^8Be برابر $57/75\text{MeV}$ - و در حالت پایه کاملاً نامقید بوده و با کمتر 92keV به

دو ذره آلفا واپاشیده می‌شود. اولین تراز برانگیخته آن، 2^+ ، در انرژی $54/72 \text{ MeV}$ و دومین تراز برانگیخته آن، 2^+ ، در انرژی $41/12 \text{ MeV}$ قرار دارد.

از آنجائیکه در ساختار این ایزوتوپ، دو خوشه آلفا در تماس با یکدیگر قرار دارند، مدل چاه پتانسیل دو مرکزی مورد استفاده قرار گرفته است که هر خوشه در یک مرکز است. با توجه به اینکه دو خوشه، یکسان می‌باشد با استفاده از روابط (۴-۲۱) و (۴-۳۵) به محاسبه ترازهای انرژی پرداخته ایم و نتایج در جدول (۴-۱) آورده شده است [۷۶]. مقادیر کمیت های ثابت در این محاسبه برابرند با: $A=73/12 \text{ MeV}$, $B=34/47 \text{ MeV}$, $\alpha=0/73 \text{ fm}^{-2}$, and $\beta=0/50 \text{ fm}^{-2}$ فاصله بین مراکز دو خوشه نیز برابر $1/10 \text{ fm}$ منظور شده است. همانطور که نتایج نشان می‌دهد انرژی حالت پایه در حدود $0/34 \text{ MeV}$ پایین تر از مقدار تجربی و در ترازهای برانگیخته این اختلاف برابر $0/11 \text{ MeV}$ می‌باشد. این نتایج نشان می‌دهد که مدل به خوبی توانسته است انرژی حالت پایه، اولین و دومین حالت های برانگیخته را برای ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ برآورد نماید.

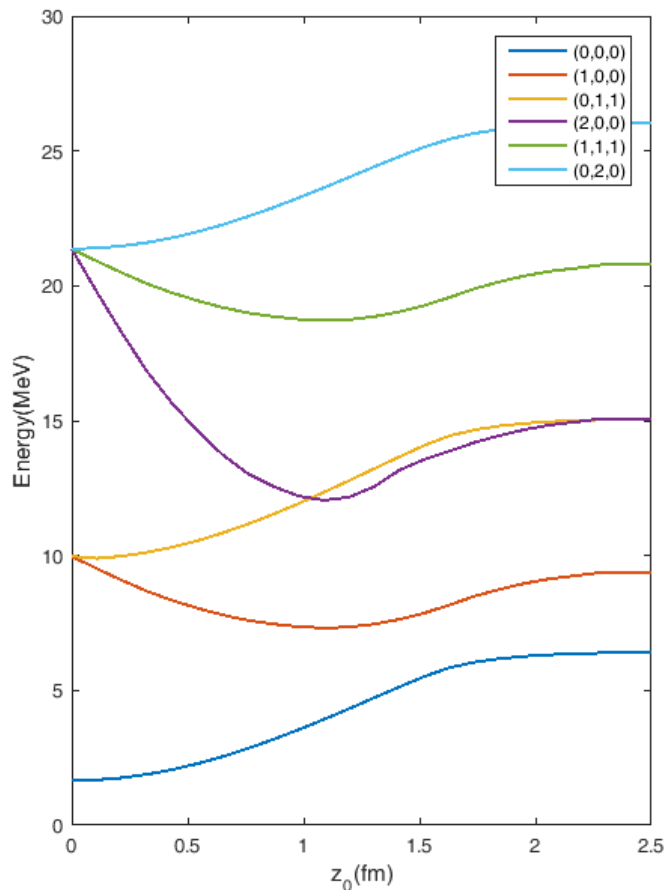
جدول ۴-۱. مقایسه ترازهای انرژی ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ با نتایج تجربی

تراز	مقدار انرژی محاسبه شده (MeV)	مقدار تجربی انرژی (MeV)
حالت پایه	-۵۸/۰۹	-۵۷/۷۵
اولین حالت برانگیخته	-۵۴/۸۳	-۵۴/۷۲
دومین حالت برانگیخته	-۴۱/۲۳	-۴۱/۱۲

۴-۴-۲ ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$

دومین ایزوتوپ مورد بررسی ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ می‌باشد که یک ایزوتوپ پایدار بوده و مشاهدات انجام شده نشان می‌دهد که در حالت پایه و اولین حالت برانگیخته دارای سیستم پیچیده $2\alpha+n$ است. شکل (۴-۵) ترازهای انرژی مدل لایه‌ای دو مرکزی را نشان می‌دهد که برای ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ با فرض

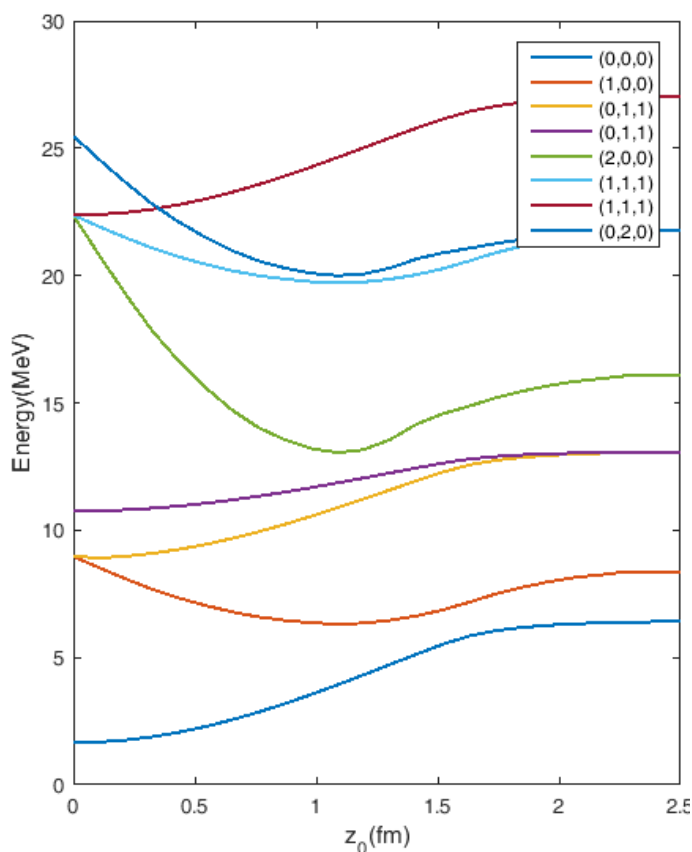
$\hbar=1$ و $c=1$ و بر اساس اعداد کوانتومی (n_z, N_ρ, m_ϕ) ترسیم شده است. عدد کوانتومی مربوط به محور تقارن و N_ρ تصویر اندازه حرکت زاویه ای مداری روی محور تقارن است که برابر $N_\rho = 2n_\rho + |m_\phi|$ می باشد. این مدل برای توصیف ادغام دو هسته موثر است و با تاثیر جفت شدگی اسپین - مدار بر روی ترازها، تبهگنی اولیه از بین می رود که در شکل (۴-۶) نشان داده شده است. اولین خوشه آلفا در تراز اول و تراز دوم نیز توسط خوشه آلفای دیگر پر شده است. نوکلئون اضافه در تراز سوم قرار می گیرد که در آن $\Omega = \frac{3}{2}$ است. Ω تصویر اندازه حرکت زاویه ای کل روی محور zها است که از رابطه $\Omega = N_\rho \pm \frac{1}{2}$ محاسبه می گردد.



شکل ۴-۵. ترازهای انرژی بدون تاثیر جفت شدگی اسپین - مدار بر حسب (n_z, N_ρ, m_ϕ) [۷۲]

چنانچه در تصویر مشخص است، این مدل به درستی اسپین حالت پایه ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ را پیش بینی می کند. همچنین، نتایج تجربی نشان می دهد، اولین تراز برانگیخته ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ با اختلاف انرژی

بسیار کم معادل $1/684\text{MeV}$ نسبت به حالت پایه قرار گرفته است که در آن $\Omega = \frac{1}{p}$ است. چنانچه در شکل ۴-۶ نیز مشخص است در نزدیکی $z_0 = 0/5$ این تطابق با شواهد تجربی به خوبی دیده می شود. چنانچه نتایج نشان می دهد این نوع پتانسیل برای توصیف ساختار خوشه ای مولکول های هسته ای، بسیار مناسب تر است. از توابع موج تک ذره ای که در این فصل به صورت تحلیلی محاسبه شدند می توان به عنوان یک مجموعه پایه مناسب برای مطالعات دیگر خصوصیات مشاهده پذیر هسته ها با ساختار مولکولی استفاده کرد. این بدین معنی است که پتانسیل های نوع نیلسون که معمولاً مورد استفاده قرار می گیرند برای توصیف رفتار حالت پایه هسته در ناحیه تغییر شکل های کوچک مناسب است در حالیکه این مدل می تواند فرآیند خوشه شدن را به خوبی توصیف نماید.



شکل ۴-۶. ترازهای انرژی همراه با تاثیر جفت شدگی اسپین-مدار بر حسب (n_z, N_ρ, m_ϕ) [۷۲]

فصل پنجم: بررسی ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های سنگین از مغز و خورش

۵-۱ مقدمه

با وجود اینکه می‌دانیم سیستم‌های هسته‌ای از قواعد کوانتوم مکانیکی تبعیت می‌کند ولی برای توصیف خواص و ویژگی‌های یک سیستم بس - ذره‌ای نیاز به دانستن ماهیت نیروهای بستگی بین ذرات است. از این رو، با استفاده از مدل‌سازی در فیزیک هسته‌ای می‌توان به یک توصیف تقریبی از سیستم‌های هسته‌ای دست یافت. یکی از راه‌های قابل قبول جهت بررسی ساختار هسته، مطالعه طیف انرژی آن است. یکی از خصوصیات که در هسته‌های سبک نظیر ^{20}Ne و ^{16}O دارای اهمیت است، تراکم نوارهای چرخشی است که در طیف انرژی آنها دیده می‌شود. این مشاهدات به همراه واپاشی آلفا از این ترازها، بیانگر ساختار خوشه‌ای آن است [۸۳-۸۰، ۳۳].

در هسته‌هایی که تعداد نوکلئون‌های آن در نزدیکی هسته‌هایی با دو عدد جادویی است، نوکلئون‌های ظرفیت می‌توانند همانند یک خوشه رفتار کنند که بیرون از مغز جادویی می‌چرخد. این ساختار خوشه‌ای طیف‌های چرخشی مشخصه‌ای را ارائه می‌کند [۸۶-۸۴، ۱۷]. به عنوان مثال در ایزوتوپ ^{20}Ne دو نوار چرخشی با پارامترهای مثبت و منفی وجود دارد که گشتاور لختی آن دو، تقریباً با یکدیگر مشابه است. فقط انرژی نوار چرخشی با پارامتر منفی بالاتر از نوار چرخشی با پارامتر مثبت است. این نوارها متناظر با چرخش ذره آلفا حول مغز ^{16}O می‌باشد. این رفتار مشخصه در ایزوتوپ ^{44}Ti نیز دیده می‌شود که در آن ذره آلفا پیرامون مغز جادویی ^{40}Ca می‌چرخد.

برای بررسی پدیده خوشه شدن در هسته‌ها مدل‌های مختلفی ارائه شده است [۸۷-۸۶، ۳۹]. ولی با این وجود، برای بررسی ترازهای چرخشی هسته‌هایی که خوشه آن‌ها به دور یک مغز^۱ می‌چرخد، استفاده از مدل هسته‌ای دو ذره‌ای شامل مغز و خوشه مناسب‌تر است. با استفاده از این مدل می‌توان به بازتولید طیف انرژی ایزوتوپ‌های مورد بررسی پرداخت.

^۱ Core

۲-۵ محاسبه ترازهای انرژی هسته‌هایی با ساختار خوشه آلفا و

مغز

تا کنون مدل‌های زیادی نظیر مدل لایه‌ای کامل و مدل خوشه‌ای برینک - بلوخ برای توصیف حالت‌های خوشه‌ای و محاسبه‌ی نوار چرخشی ارائه شده‌اند [۹۱-۸۹]. در مدل لایه‌ای کامل با در نظر گرفتن هامیلتونین تک ذره، تراز پایه حالت‌ها محاسبه شده و سپس با استفاده از قطری کردن سیستم برهمکنشی چهار ذره خارج از مغز خنثی، سایر ترازها محاسبه می‌شود. در مدل تابع موج برینک - بلوخ نیز ذره آلفا، خارج از شعاع مغز در نظر گرفته می‌شود که به دلیل عرض‌های بزرگ مشاهده شده آلفاست. در این مدل‌ها عمق پتانسیل برای هر یک از ترازها تغییر می‌کند. همچنین به دلیل پردازش عددی، نتیجه‌گیری‌های غیر قابل تضمین برای هندسه پتانسیل به دست می‌آید. بنابراین امکان پیش بینی حالت‌هایی که مقدار آن به صورت تجربی شناخته شده نیست وجود ندارد.

در اینجا، با در نظر گرفتن فرضیات ساده یکی از مشخصات مشاهده پذیر هسته‌ها به شکل دقیق محاسبه و توصیف شده است که یکی از اجزای تشکیل دهنده ساختار، ذره آلفا است و به دور یک مغز که لزوماً در حالت پایه نیست می‌چرخد. واپاشی ذره آلفا به خودی خود نشان می‌دهد که روی سطح هسته شکل گرفته و می‌تواند از طریق تونل زنی گسیل شود. همچنین با توجه به انرژی بستگی بالا و تقارن آن انتظار می‌رود که این خوشه در حالت پایه مشاهده شود. در اینجا با صرف نظر کردن از اثرات تبادل، دو هسته واقعی با خصوصیت آزاد بدون اختلال خواهیم داشت که می‌توانند دور یکدیگر چرخیده و حالت‌های نیمه مقید را به وجود آورند. بنابراین یک سیستم چند جسمی به راحتی به یک سیستم دو جسمی تبدیل می‌شود.

توابع موج و ترازهای انرژی که حرکت نسبی خوشه و مغز را توصیف می‌کنند، از طریق حل معادله شرودینگر با انتخاب مناسبی از عدد کوانتوم اصلی N و اندازه حرکت زاویه ای مداری L به دست می‌آیند.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \Psi_{N,L} = E_{N,L} \Psi_{N,L} \quad (4-5)$$

در این رابطه پتانسیل ذره منفرد به صورت $V(r) = V_N(r) + V_c(r)$ تعریف می‌شود که شامل پتانسیل مرکزی هسته‌ای و پتانسیل کولنی است.

در سیستم دو ذره‌ای، متشکل از خوشه و مغز، با استفاده از شرط وایدرموت^۱ بین مدل پوسته‌ای و مدل خوشه‌ای ارتباط برقرار می‌کنیم. به عبارت دیگر، در مدل پوسته‌ای بر اساس اصل طرد پاولی هر تراز با تعدادی عدد کوانتومی مشخص می‌شود که نتیجتاً همان اعداد کوانتومی در توصیف مدل خوشه‌ای نیز باید بکار رود. این یک محدودیت ایجاد می‌کند که به عنوان شرط وایدرموت شناخته شده است که در حدی ترین حالت به صورت زیر است [۹۳]:

$$2N + L = \sum_{i=1}^{n_k} (2n_i + l_i) \quad (2-5)$$

زیرا اعداد کوانتومی نوکلئون‌های خوشه وابسته به ساختار داخلی آن در محاسبات وارد نمی‌شود. در رابطه‌ی فوق، N و L اعداد کوانتومی در توصیف هسته اصلی است و n_i و l_i اعداد کوانتومی اصلی و اندازه حرکت زاویه‌ای مداری نوکلئون‌هایی هستند که خوشه را تشکیل می‌دهند. n_k تعداد نوکلئون‌های خوشه است. لازم به ذکر است، حرکت نسبی با اعداد کوانتومی کوچکتر همان ممنوع پاولی است. در تایید این مدل می‌توان به مطالعات اخیر هوریچی اشاره کرد که نشان می‌دهد، نوکلئون‌های خوشه، اوربیتال‌های بالای سطح فرمی مغز را اشغال می‌کنند [۹۴-۹۳، ۷۰].

در اینجا به منظور انتخاب پتانسیل هسته‌ای مناسب، ترکیبی از پتانسیل یوکاوا، کولنی و دنگ-فان^۲ را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر است:

$$\frac{-V_0 e^{-ar} + V_1}{r} - \frac{V_2}{e^{-ar} - 1} + \frac{V_3}{(e^{-ar} - 1)^2} \quad (3-5)$$

^۱ wildermuth condition

^۲ Deng-Fan potential

در این رابطه ضرایب V_1 تا V_3 بیانگر قدرت هر جمله از پتانسیل و α معکوس برد پتانسیل است. پتانسیل دنگ - فان موفقیت‌های خوبی در محاسبه‌ی طیف ارتعاشی مولکول‌های دو اتمی داشته است و به نظر می‌رسد، می‌تواند در توصیف هسته‌هایی با ساختار دو خوشه‌ای در کنار پتانسیل کولنی و پتانسیل هسته‌ای قوی یوکاوا مورد استفاده قرار گیرد [۹۵]. جهت بررسی موضوع ابتدا به حل معادله شرودینگر می‌پردازیم. پس از جایگذاری پتانسیل مرکزی (۳-۵) در معادله شرودینگر (۱-۵)، به منظور حل آن از طریق روش پارامتریک نیکوفور-یووارو (NU)، لازم است معادله ما به صورت زیر در آید [۴۲، ۵۳، ۹۶]:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{(s(1 - \alpha_3 s))^2} \right] \Psi = 0 \quad (4-5)$$

با در نظر گرفتن تقریب $\frac{1}{r^2} \approx \frac{4\alpha^2 e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})^2}$ برای مقادیر $\alpha \ll 1$ ، معادله شرودینگر (۱-۵) به صورت زیر خواهد بود [۹۷-۹۹]:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E_{N,L} - \left(\frac{-V_0 e^{-\alpha r} + V_1}{r} - \frac{V_2}{e^{-\alpha r} - 1} + \frac{V_3}{(e^{-\alpha r} - 1)^2} \right) - \frac{4\alpha^2 e^{-2\alpha r}}{(e^{-\alpha r} - 1)^2} \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu} \right\} \right] \psi_{N,L}(r) = 0 \quad (5-5)$$

و با اعمال تغییر متغیر $s = e^{-\alpha r}$ در معادله (۵-۵) خواهیم داشت:

$$-\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1-s}{s(1-s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{(s(1-s))^2} \right] R(s) = 0 \quad (6-5)$$

که در این رابطه:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{-2\mu E_{nl}}{\alpha^2 \hbar^2} + \frac{2\mu(V_2 + V_3 + V_0 V_1)}{\alpha^2 \hbar^2} \\ \xi_2 &= \frac{4\mu E_{nl}}{\alpha^2 \hbar^2} + \frac{2\mu(-V_2 - \alpha V_1 - \alpha V_0)}{\alpha^2 \hbar^2} \\ \xi_3 &= \frac{-2\mu E_{nl}}{\alpha^2 \hbar^2} + \frac{2\mu \alpha V_1}{\alpha^2 \hbar^2} + 4\alpha^2 l(l+1) \end{aligned} \quad (7-5)$$

است. بنابراین با استفاده از روابط (۳۰-۳) و (۳۱-۳) معادله ویژه مقداری انرژی و نیز توابع موج به صورت زیر به دست می‌آید:

$$-\frac{1}{2} + (2n+1)\left(\sqrt{\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\xi_3}\right) + n(n-1) - \xi_2 + 2\xi_3 + 2\sqrt{\xi_3\left(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4}\right)} = 0 \quad (۸-۵)$$

$$\psi_{NL}(r) = e^{-\alpha\sqrt{\xi_3}r} (1 - e^{-\alpha r})^{-\frac{1}{2} - 2\sqrt{\xi_3} + \sqrt{\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4}}} \times P_n^{(2\sqrt{\xi_3}, 2(\sqrt{\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4}} - \sqrt{\xi_3} - 1))} (1 - 2e^{-\alpha r}) \quad (۹-۵)$$

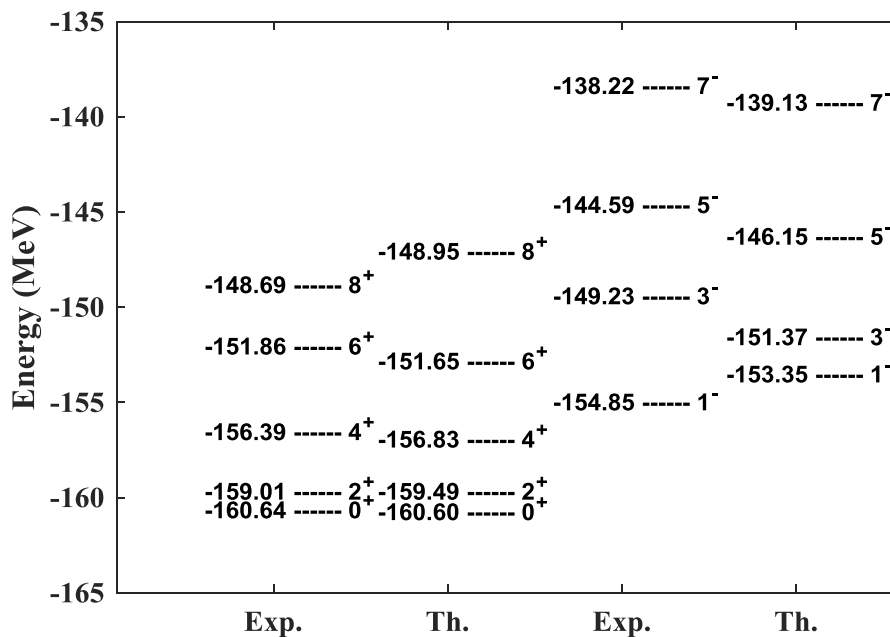
۵-۲-۱ بررسی ترازهای ایزوتوپ ${}^2\text{Ne}$

به عنوان اولین مثال شهودی از نحوه عملکرد این مدل، ایزوتوپ ${}^2\text{Ne}$ را به صورت دو ذره برهمکنشی ${}^{16}\text{O} + \alpha$ در نظر می‌گیریم. این ایزوتوپ دارای ساختار نامتقارن است که یک نوار چرخشی با پارите منفی و یک نوار چرخشی حالت پایه پارите مثبت دارد. این نوارها متناظر با یک ذره آلفا است که به دور یک مغز کروی ${}^{16}\text{O}$ می‌چرخد. هوریچی و همکارانش نیز با استفاده از مدل میکروسکوپی AMD به مطالعه نظری درجه خوشه شدن در ترازهای مختلف نوار چرخشی ${}^2\text{Ne}$ پرداختند [۱۰۰]. این مطالعات کاهش درجه خوشه شدن در تراز 8^+ نوار چرخشی حالت پایه را نشان می‌دهد. برای حالت‌های پایین‌تر در نوار، ساختار ایزوتوپ کشیده و دارای تقارن محوری متناظر با ساختار خوشه‌ای ${}^{16}\text{O} + \alpha$ است. در حالیکه در نوار چرخشی پارите منفی ساختار خوشه‌ای کاملاً مشخص است و برای اسپین 7^- و بالاتر تمایل به جدایی خوشه‌ها دیده شده و ساختارهای دیگر از جمله ${}^{12}\text{C} + \alpha + \alpha$ شروع به ظاهر شدن می‌کند. اگر چه این بررسی‌ها از اعتبار ساختار خوشه‌ای بسیار پشتیبانی کرد اما نمی‌توانست نوارهای انرژی پارите منفی را به خوبی باز تولید کند.

در مدل ما، پایین‌ترین تراز فرضی، حالت پایه نوار چرخشی 0^+ است که در اینجا مشابه قرار گفتن ۴ نوکلئون در پوسته $1s-0d$ ، $(2n_i + l_i = 2)$ ، نسبت به پوسته‌های $0s$ و $0p$ است. این مورد معادل $2N + L = 8$ در رابطه (۵-۲) می‌باشد. محاسبه نوارهای چرخشی 1^- نیز با این فرض انجام می‌شود که

سه نوکلئون در لایه $1s-0d$ قرار داشته و یک نوکلئون به پوسته بالاتر یعنی $1p-0f$ می رود که منجر به شرط $2N+L=9$ می گردد. بنابراین با در نظر گرفتن شرط وایدرموت و به کمک رابطه (۵-۸) ابتدا حالت پایه‌ی نوارهای چرخشی 0^+ و 1^- در چند حالت خاص پتانسیل محاسبه شده و سپس به محاسبه ترازهای چرخشی پرداخته ایم.

۵-۲-۱-۱ پتانسیل یوکاوا به همراه پتانسیل کولنی



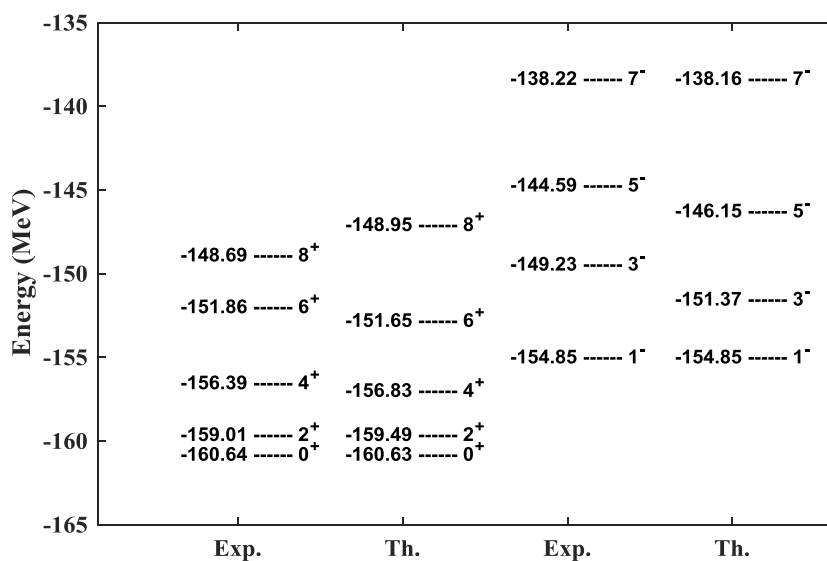
شکل ۵-۱. مقایسه دو نوار چرخشی محاسبه شده با استفاده از پتانسیل یوکاوا به اضافه کولنی برای

ایزوتوپ ^{20}Ne با مقادیر تجربی [۱۰۳-۱۰۱، ۸۹]

پتانسیل هسته‌ای منتخب ما، این قابلیت را دارد که به راحتی با تغییر در پارامترهای هر پتانسیل می توان آن را به یک پتانسیل هسته‌ای دیگر تبدیل کرد. در اینجا، با در نظر گرفتن $V_2=V_3=0$ پتانسیل ما تبدیل به پتانسیل هسته‌ای یوکاوا به همراه پتانسیل کولنی خواهد شد. نوارهای چرخشی محاسبه در این حالت در شکل (۵-۱) نشان داده شده است. عمق پتانسیل جاذبه برابر با $V_1=193/26\text{MeV}$ و قدرت قسمت دافعه کولنی برابر با $V_4=4/45\text{MeV}$ در نظر گرفته شده است. معکوس برد پتانسیل نیز $\alpha=0/8\text{fm}^{-1}$ است. چنانچه در شکل مشخص است، این پتانسیل به خوبی

قادر به توصیف نوارهای چرخشی با پارایته مثبت می‌باشد ولی در توصیف ترازهای نوار چرخشی با پارایته ی منفی، مقادیر محاسبه شده اندکی با مقادیر تجربی متفاوت است. به طوری که مقدار محاسبه شده برای تراز 1^- ، $1/50 \text{ MeV}$ بالاتر از مقدار تجربی و برای تراز 7^- مقدار $1/11 \text{ MeV}$ بالاتر است. برای تراز 3^- و 5^- مقادیر به دست آمده با مقادیر تجربی همخوانی خوبی دارد.

۵-۲-۱-۲ پتانسیل دنگ-فان به همراه پتانسیل کولنی



شکل ۵-۲. مقایسه دو نوار چرخشی محاسبه شده با استفاده از پتانسیل دنگ-فان به اضافه کولنی برای

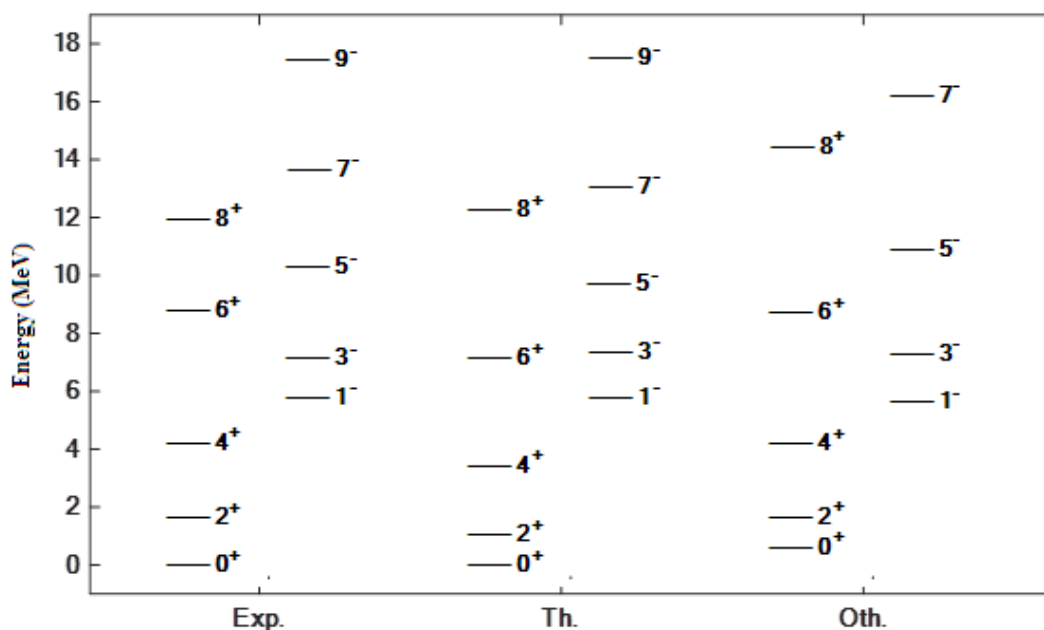
ایزوتوپ ^{20}Ne با مقادیر تجربی [۱۰۳-۱۰۱، ۸۹]

با انتخاب پارامتر $V_0 = 0$ پتانسیل هسته‌ای (۵-۳) به پتانسیل هسته‌ای دنگ-فان به اضافه‌ی پتانسیل دافعه کولنی تبدیل خواهد شد. در اینجا قدرت پتانسیل کولنی برابر $V_1 = 25/32 \text{ MeV}$ است. قدرت هر یک از جملات جاذبه و دافعه هسته‌ای در پتانسیل دنگ-فان نیز برابر با $V_2 = 155/35 \text{ MeV}$ و $V_3 = 1/34 \text{ MeV}$ در نظر گرفته شده است. معکوس برد پتانسیل مشابه قسمت قبل برابر $\alpha = 0.8 \text{ fm}^{-1}$ می‌باشد. پس از انتخاب مقادیر فوق به محاسبه ترازهای دو نوار چرخشی با پارایته مثبت و منفی پرداخته‌ایم که نتایج در شکل (۵-۲) نشان داده شده است. همانطور که در شکل نیز مشخص می‌باشد، مقادیر محاسبه شده با پتانسیل دنگ-فان برای ترازهای نوار چرخشی 0^+ تطابق بهتری با مقادیر

تجربی دارد. همچنین این پتانسیل به خوبی قادر به محاسبه تراز 1^- و 2^- از نوار چرخشی با پارите منفی نیز می باشد.

۵-۲-۱-۳ پتانسیل دنگ-فان به همراه پتانسیل یوکاوا و کولنی

حال برای بررسی دقیق تر، پتانسیل را به طور کامل مورد بررسی قرار می دهیم. طیف انرژی محاسبه شده در شکل (۵-۳) نشان داده شده است. مشاهده می شود، سر نوارهای پارите مثبت و منفی به ترتیب در انرژی $E_x = -160/64 \text{ MeV}$ و $E_x = -154/85 \text{ MeV}$ قرار دارد. در این مدل، مقادیر ثابت پتانسیل به صورت $\alpha = 0/62 \text{ fm}^{-1}$ ، $V_1 = 153/19 \text{ MeV}$ ، $V_2 = 40/67 \text{ MeV}$ ، $V_3 = 58/62 \text{ MeV}$ و $V_4 = 1/55 \text{ MeV}$ انتخاب شده اند. شکافتگی انرژی توسط این مدل کاملاً بازتولید شده است. فقط مقدار محاسبه شده تراز 8^+ با مقدار تجربی دارای اختلاف از مرتبه 2 MeV می باشد که ساختار خوشه ای این تراز نیز دارای تردید است. در حالیکه همخوانی با نتایج تجربی در محاسبات صورت گرفته توسط بیوک و همکارانش فقط برای تراز پایه هر نوار چرخشی و اولین تراز برانگیخته آن مشاهده می شود و برای ترازهای بالاتر نتایج محاسبه شده از نتایج تجربی فاصله زیادی دارد [۳۲].



شکل ۵-۳. مقایسه طیف انرژی محاسبه شده برای ایزوتوپ ^{20}Ne با مقادیر تجربی و

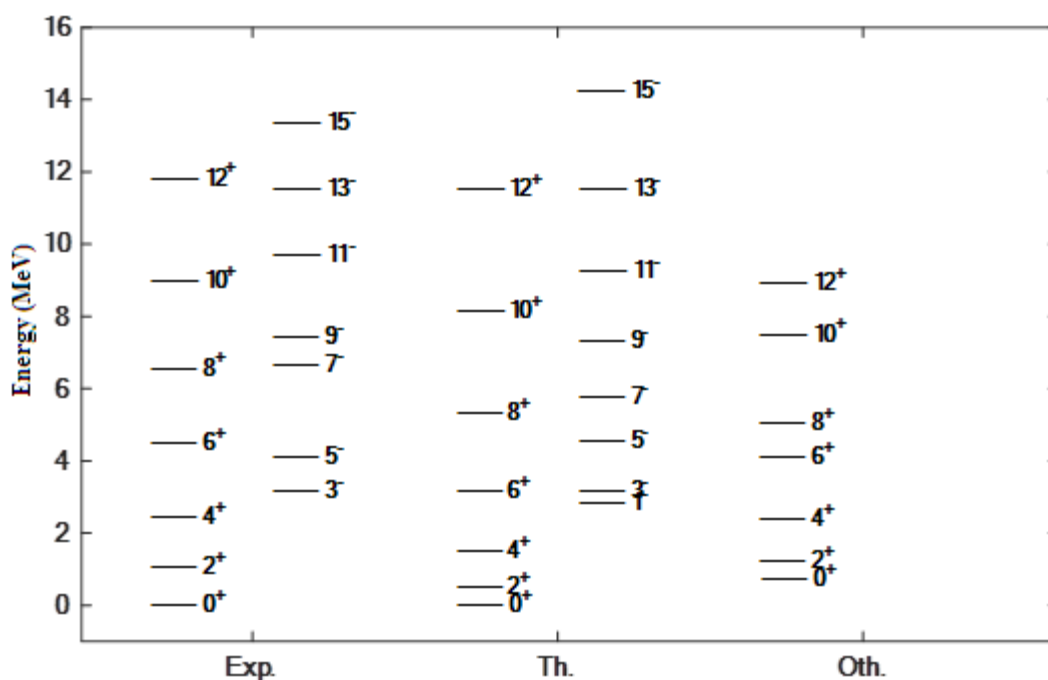
نتایج کار دیگران [۱۰۶-۱۰۳، ۳۲]

۵-۲-۲ بررسی ترازهای ایزوتوپ ^{44}Ti

بر اساس بررسی هایی که تا کنون صورت گرفته است، ساختار خوشه آلفا در هسته های سبک مورد تایید است. اما در اینجا با در نظر گرفتن ایزوتوپ ^{44}Ti به عنوان مثال دوم، چگونگی عملکرد مدل خود را برای مغزی با دو عدد جادویی در لایه بالاتر یعنی ^{40}Ca بررسی می کنیم که ۴ نوکلئون لایه ظرفیت به صورت خوشه آلفا به دور آن می چرخد [۳۲]. بنابراین $2N+L=12$ خواهد بود. در اینجا پتانسیل مورد استفاده، همان پتانسیل دنگ-فان به اضافه یوکاوا و کولنی است که پارامترهای ثابت آن به صورت $\alpha=0.18\text{fm}^{-1}$ ، $V_1=380/40\text{MeV}$ ، $V_2=70/45\text{MeV}$ ، $V_3=76/92\text{MeV}$ و $V_4=9/68\text{MeV}$ انتخاب شده اند. نتایج محاسبات انجام شده جهت بازتولید ترازهای دو نوار چرخشی با پارامتر مثبت و منفی برای ایزوتوپ ^{44}Ti در شکل (۴-۵) نشان داده شده است. سر نوارها به ترتیب در انرژی $E_x=-372/78\text{MeV}$ و $E_x=-375/44\text{MeV}$ قرار دارد که سر نوار پارامتر مثبت به خوبی با نتایج

تجربی تطبیق دارد ولی در خصوص نوار چرخشی پاریته منفی تراز 1^- در انرژی که محاسبه شده، مشاهده نگردیده است و با تراز 3^- آغاز شده است.

در سال ۱۳۹۵ نیز بیوک و همکارانش محاسبات مشابهی را برای ایزوتوپ ^{44}Ti با استفاده پتانسیل وود-ساکسون تغییر شکل یافته انجام دادند که نتایج آن در شکل ۴-۵ با نتایج محاسبات ما مقایسه شده است [۳۲]. همانطور که در شکل دیده می‌شود، تراکم ترازهای بالاتر نوار چرخشی مثبت پایین‌تر از مکان مورد انتظار قرار گرفته است و این اختلاف در خصوص تراز 8^+ و بالاتر به حدود ۳ مگا الکترون ولت می‌رسد. عیب دیگر این توصیف، عدم توانایی آن در باز تولید طیف نوار چرخشی با پاریته منفی ایزوتوپ ^{44}Ti است.



شکل ۴-۵. مقایسه طیف انرژی محاسبه شده برای ایزوتوپ ^{44}Ti با مقادیر تجربی و

نتایج کار دیگران [۱۰۶-۳۲، ۱۰۵]

در حالیکه در مدل ما، به طور کلی، نتایج به دست آمده برای ایزوتوپ ^{44}Ti ، حالت‌های اسپین پایین را به صورت فشرده تری نسبت به مقادیر تجربی پیش بینی می‌کند ولی نسبت به مطالعات صورت گرفته، نتایج بهتری ارائه شده است. یکی از نتایج مهم این مطالعه، وجود خوشه آلفا در ساختار

ایزوتوپ ^{44}Ti و پیش بینی تراز 1^- به عنوان اولین تراز باند چرخشی با پاریته فرد در انرژی $372/78\text{MeV}$ در این ایزوتوپ است. این رویکرد نشان دهنده توانایی این مدل خوشه‌ای ساده در پیش بینی ترازهای انرژی است که هنوز به صورت تجربی شناخته شده نیستند. همچنین، با توجه به ویژگی خاص طیف ذره آلفا، این مدل به خوبی نوارهای دارای پاریته منفی را چند مگا الکترون ولت بالاتر از نوار پاریته مثبت پیش بینی می‌کند.

۳-۵ بررسی ساختار خوشه‌ای هسته‌های سبک با اسپین غیر صفر

در این قسمت، به بررسی خوشه‌هایی با اسپین غیر صفر نظیر ^3H و ^3He با اسپین $\frac{1}{2}$ پرداخته می‌شود. بدین منظور، مغز مورد مطالعه، اولین هسته جادویی با بستار دوگانه که ذره آلفا می‌باشد، انتخاب می‌گردد و ترازهای چرخشی ایزوتوپ‌های آینه ای ^6Li و ^6Be مورد بررسی قرار می‌گیرند. پتانسیل موضعی که برای برهمکنش موثر بین خوشه و مغز مورد استفاده قرار گرفته است، به صورت زیر می‌باشد:

$$V(r) = -V_0 \frac{e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})} + k \frac{e^{-2\alpha r}}{r^2} \quad (10-5)$$

و از مجموع پتانسیل هسته‌ای هولتن^۱ به اضافه پتانسیل یوکاوا^۲ درجه دوم^۲ تشکیل شده است که سدی در فاصله جدایی صفر دارد. پتانسیل هولتن یک پتانسیل کوتاه برد در فیزیک است که برای مقادیر کوچک r رفتاری مشابه پتانسیل کولنی دارد و برای مطالعه در مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیرنسبیتی مناسب است. در این رابطه V و k عمق هر جمله از پتانسیل و α معکوس برد پتانسیل است. در اینجا نشان می‌دهیم با استفاده از این پتانسیل مرکزی عمیق می‌توان به خوبی انرژی ترازها و برخی از مشاهده پذیرهای دیگر را با دقت خوبی پیش بینی کرد. بدین منظور، پس از جایگذاری پتانسیل مرکزی (۱۰-۵) در معادله شرودینگر (۱-۵) جهت حل آن از طریق روش پارامتریک

^۱ Hulthen potential

^۲ Quadratic Yukawa potential

نیکوفور-یووارو (NU) ، استفاده شده است [۹۶، ۵۳، ۴۲]. از این رو، با در نظر گرفتن تقریب

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{4\alpha^2 e^{-2\alpha r}}{(1-e^{-2\alpha r})^2} \quad \text{برای مقادیر } \alpha \ll 1 \text{، معادله شرودینگر (۱-۵) به صورت زیر خواهد بود [۹۹-۹۷]:}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left\{ E_{N,L} - \left(-V_0 \frac{e^{-2\alpha r}}{1-e^{-2\alpha r}} + k \frac{e^{-2\alpha r}}{r^2} \right) - \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} \right\} \right] \psi_{N,L}(r) = 0 \quad (11-5)$$

با اعمال تغییر متغیر $s = e^{-2\alpha r}$ در معادله فوق خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1-s}{s(1-s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{(s(1-s))^2} \right] R(s) = 0 \quad (12-5)$$

که در این رابطه:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{2\mu(-E_{nl} + V_0 - 4\alpha^2 k)}{4\alpha^2 \hbar^2} \\ \xi_2 &= \frac{-2\mu(2E_{nl} + V_0)}{4\alpha^2 \hbar^2} + 4\alpha^2 L(L+1) \\ \xi_3 &= \frac{-2\mu E_{nl}}{4\alpha^2 \hbar^2} \end{aligned} \quad (13-5)$$

است. بدین ترتیب، با استفاده از روابط (۳۰-۳) و (۳۱-۳) معادله ویژه مقداری انرژی و نیز توابع موج

را به صورت زیر به دست می آوریم:

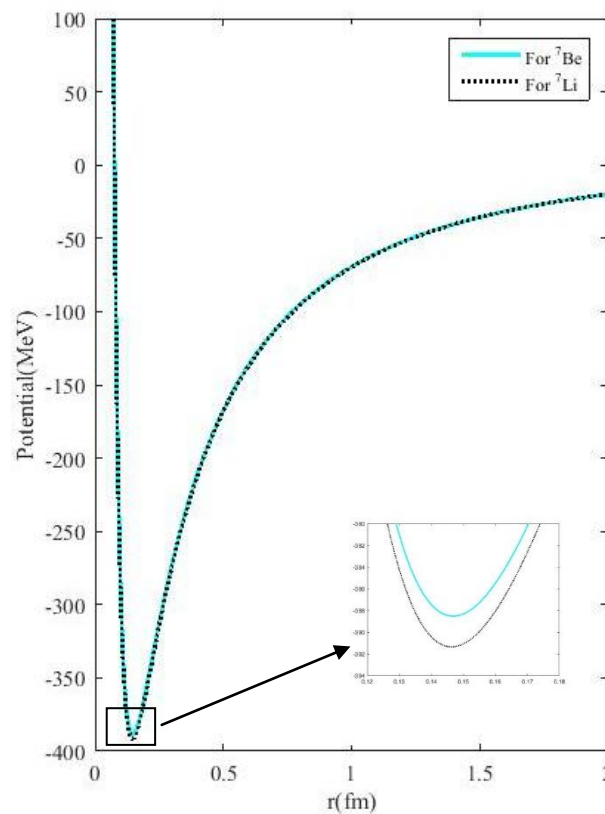
$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + (2n+1) \left(\sqrt{\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\xi_3} \right) + \\ n(n-1) - \xi_2 + 2\xi_3 + 2\sqrt{\xi_3 \left(\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4} \right)} = 0 \end{aligned} \quad (14-5)$$

9

$$\begin{aligned} \psi_{NL}(r) = e^{-\alpha\sqrt{\xi_3}r} (1-e^{-2\alpha r})^{-\frac{1}{2}-2\sqrt{\xi_3}+\sqrt{\xi_1-\xi_2+\xi_3+\frac{1}{4}}} \times \\ P_n^{(2\sqrt{\xi_3}, 2(\sqrt{\xi_1-\xi_2+\xi_3+\frac{1}{4}}-\sqrt{\xi_3}-1))} (1-2e^{-2\alpha r}) \end{aligned} \quad (15-5)$$

۵-۳-۱ محاسبه ترازهای ایزوتوپ های آینه ای ${}^6\text{Li}$ و ${}^6\text{Be}$

این مدل برای خوشه‌هایی با اسپین صفر بارها مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج رضایت بخشی حاصل شده است [۱۰۷-۱۰۹]. در این قسمت به بررسی خوشه‌هایی با اسپین غیر صفر نظیر ${}^3\text{He}$ و ${}^3\text{H}$ با اسپین $\frac{1}{2}$ پرداخته می‌شود. بدین منظور، مغز مورد مطالعه، اولین هسته جادویی با بستار دوگانه که ذره آلفا می‌باشد، انتخاب می‌گردد و ترازهای انرژی ایزوتوپ های آینه ای ${}^6\text{Li}$ و ${}^6\text{Be}$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۵-۵. پتانسیل هسته‌ای برای ایزوتوپ های آینه ای ${}^6\text{Li}$ و ${}^6\text{Be}$ [۱۱۰]

دو ایزوتوپ ${}^6\text{Li}$ و ${}^6\text{Be}$ با توجه به ساختار کاملاً خوشه‌ای در تراز پایه و اولین حالت برانگیخته مورد توجه بسیاری از مطالعات تجربی و نظری بوده است [۱۱۱-۱۱۲]. این دو ایزوتوپ آینه ای، در تراز پایه دارای ساختار مغز ${}^4\text{He}$ در لایه s بوده و سه نوکلئون مازاد خارج از این لایه و در لایه p ، $(2n_i + l_i = 1)$ ، قرار می‌گیرند و بر اساس شرط وایدرموت، معادل $2N + L = 3$ در حرکت نسبی مرکز جرم، مغز و خوشه است. بدین ترتیب از طریق رابطه (۵-۱۴) امکان محاسبه ترازهای انرژی برای

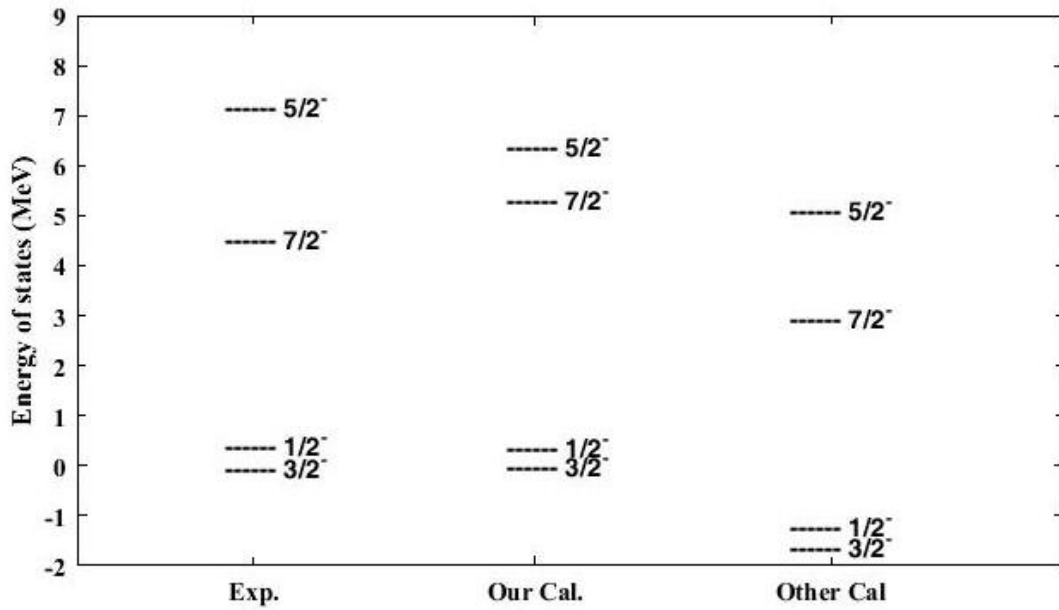
اندازه حرکت های نسبی $L=1$ و $L=3$ میسر می گردد. این انرژی ها به خوبی از طریق پتانسیل هسته ای رابطه (۵-۱۰) قابل محاسبه است. در شکل (۵-۵) پتانسیل را برای هر دو ایزوتوپ ترسیم و مقایسه کرده ایم. چنانچه در شکل نیز مشاهده می شود، پتانسیل موضعی می بایست عمیق انتخاب شود تا توابع موج جایگزیده باشند. به دلیل اختلاف جرمی ناچیز و همین طور اختلاف کمی که بین انرژی تراز پایه و اولین حالت برانگیخته دو ایزوتوپ ${}^7\text{Li}$ و ${}^7\text{Be}$ وجود دارد، تفاوت عمق پتانسیل نیز بسیار کم بوده و در حدود 0.445 MeV عمق پتانسیل ایزوتوپ ${}^7\text{Li}$ بیشتر است.

از آنجائیکه هسته در حالت پایه دارای اسپین $J^\pi = \frac{3}{2}^-$ است، بنابراین نمی توان از تاثیر جفت شدگی اسپین- مدار بر روی حالت های $L=1$ و $L=3$ چشم پوشی کرد. از این رو، با استفاده از رابطه ذیل، اثر جفت شدگی اسپین- مدار را به عنوان عامل اختلالی مرتبه اول بر روی ترازهای انرژی محاسبه نموده که نتیجه محاسبات در شکل های (۵-۶) و (۵-۷) نشان داده شده است:

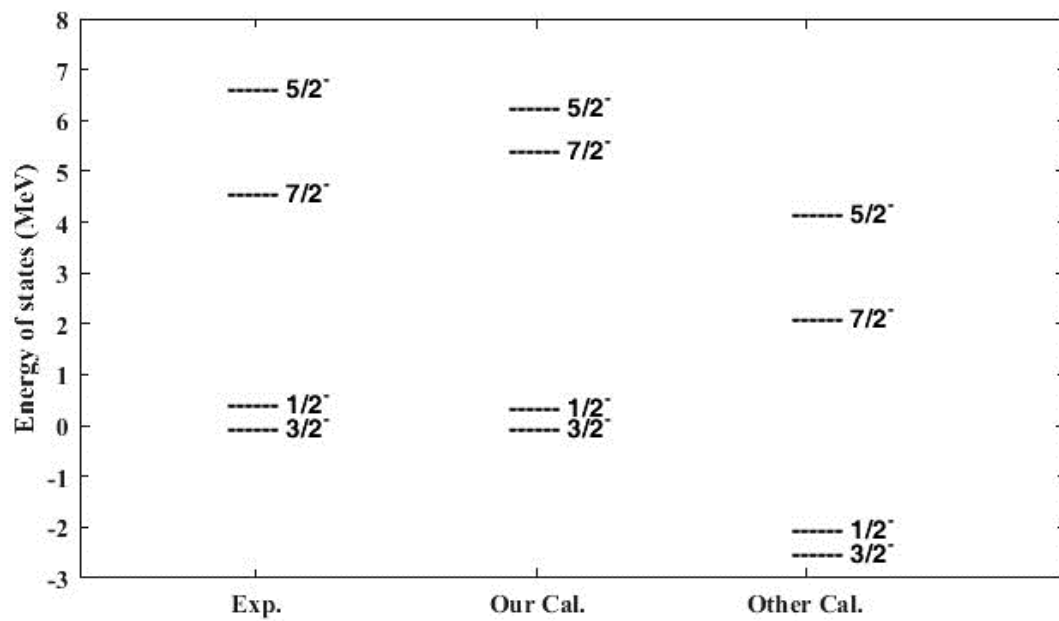
$$E_n^{(1)} = \langle n | V_{LS}(r) \vec{L} \vec{S} | n \rangle = \int \psi_{NL}^{(0)*}(r) \frac{\hbar^2}{2m_0^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \psi_{NL}^{(0)}(r) r^2 dr \quad (16-5)$$

در رابطه فوق، $\psi_{NL}^{(0)}(r)$ تابع موج مختل نشده است که از رابطه (۵-۱۵) محاسبه می شود، m جرم نوکلئون و c سرعت نور می باشد [۸۰].

همانطور که در شکل های (۵-۶) و (۵-۷) مشخص می باشد، هر تراز به یک دوتایی با $J=L \pm \frac{1}{2}$ شکافته می شود. نتایج محاسبات ما نسبت به محاسبات انجام شده توسط بیوک مغایرت کمتری با نتایج تجربی دارد [۱۱۳، ۱۰۵، ۱۰۳]. در خصوص ترازهای $J^\pi = \frac{3}{2}^-$ ، $\frac{1}{2}^-$ مقادیر محاسبه شده با مقادیر تجربی همخوانی خوبی دارد که بیانگر تایید مدل ارایه شده است، در حالیکه در خصوص ترازهای $J^\pi = \frac{7}{2}^-$ ، $\frac{5}{2}^-$ شاهد اختلاف جزئی می باشیم که می تواند ناشی از تاثیر ترازهای بالاتر بر روی آنها باشد.



شکل ۵-۶. مقایسه مقادیر محاسبه شده با نتایج تجربی در ترازهای انرژی ایزوتوپ ${}^7\text{Be}$



شکل ۵-۷. مقایسه مقادیر محاسبه شده با نتایج تجربی در ترازهای انرژی ایزوتوپ ${}^7\text{Li}$

۵-۳-۲ محاسبه شعاع باری و گشتاور چهار قطبی الکتریکی

ایزوتوپ های آینه ای ${}^7\text{Li}$ و ${}^7\text{Be}$

با توجه به داشتن توابع موج شعاعی حرکت نسبی مغز و خوشه می توان از طریق رابطه زیر به

محاسبه چگالی توزیع پرداخت:

$$\rho(r) = \psi_{NL}^{(0)}(r) \psi_{NL}^{*(0)}(r) \quad (17-5)$$

در این رابطه کمیت $\psi_{NL}^{(0)}(r)$ از رابطه (۵-۱۵) به دست می آید که در آن مقادیر N و L هر دو برابر

با ۱ در نظر گرفته شده است. همچنین شرط نرمالیزاسیون $\int \rho(r) d\vec{r} = 1$ برقرار است. بدین ترتیب با

داشتن چگالی توزیع، شعاع باری را می توان از طریق رابطه ساده کوانتوم مکانیکی ذیل محاسبه کرد:

$$\langle r^2 \rangle = \int \rho(r) r^2 d\vec{r} = 4\pi \int \psi_{NL}^{*(0)}(r) r^2 \psi_{NL}^{(0)}(r) r^2 dr \quad (18-5)$$

بنابراین شعاع باری ایزوتوپ های مورد مطالعه به سادگی قابل محاسبه است و نتایج مربوطه در

جدول (۵-۱) درج شده است. چنانچه مقایسه نتایج حاصله با مقادیر تجربی نشان می دهد، مدل ارایه

شده علاوه بر تعیین تراز پایه و اولین تراز بر انگیخته ایزوتوپ های ${}^7\text{Li}$ و ${}^7\text{Be}$ می تواند به خوبی شعاع

باری آن ها را نیز برآورد کند [۱۱۴]. همانطور که نتایج نشان می دهد اختلاف بین شعاع باری

محاسبه شده با نتایج تجربی در خصوص ایزوتوپ ${}^7\text{Li}$ برابر ۰/۲۶۴ fm و برای ایزوتوپ ${}^7\text{Be}$ برابر ۰/۰۷۶

fm می باشد.

جدول ۵-۱. محاسبه شعاع باری ایزوتوپ های ${}^7\text{Li}$ و ${}^9\text{Be}$

نام ایزوتوپ	شعاع باری محاسبه شده	شعاع باری تجربی
${}^7\text{Li}$	۲/۱۲۶ (fm)	۲/۳۹۰ (fm)
${}^9\text{Be}$	۲/۷۲۳ (fm)	۲/۶۴۷ (fm)

همچنین با استفاده از رابطه $eQ = 4\pi e \int \psi_{NL}^{(0)}(r)^* (3z^2 - r^2) \psi_{NL}^{(0)}(r) r^2 dr$ مقدار گشتاور چهار قطبی الکتریکی برای حالت پایه محاسبه شده است و نتایج در جدول (۵-۲) با مقادیر تجربی مقایسه گردیده است [۳۵، ۱۱۵]. نتایج تجربی گشتاور چهار قطبی الکتریکی حالت پایه برای ایزوتوپ ${}^7\text{Li}$ برابر با $-۴/۰۰۰\text{eb}$ است و برای ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ هیچ داده تجربی وجود ندارد. در حالیکه محاسبات ما با اختلاف اندکی گشتاور چهار قطبی الکتریکی را برای ایزوتوپ ${}^7\text{Li}$ ، $-۴/۲۵۴\text{eb}$ و برای ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ ، $-۵/۴۴۶\text{eb}$ بر آورد می‌کند. در این محاسبات فرض بر این است که تابع موج در صفحه xy متمرکز شده است و به همین دلیل مقدار گشتاور چهار قطبی کمیتی منفی به دست آمده است.

جدول ۵-۲. محاسبه گشتاور چهار قطبی الکتریکی ایزوتوپ های ${}^7\text{Li}$ و ${}^9\text{Be}$

نام ایزوتوپ	گشتاور چهار قطبی محاسبه شده	گشتاور چهار قطبی تجربی
${}^7\text{Li}$	$-۴/۲۵۴\text{ (eb)}$	$-۴/۰۰۰\text{ (eb)}$
${}^9\text{Be}$	$-۵/۴۴۶\text{ (eb)}$	-

فصل هشتم: بررسی ترازهای انرژی اینروتوپ‌های آلفا-مزودوج

۶-۱ مقدمه

خوشه‌بندی پدیده‌ای عمومی است که به دلیل کاهش انرژی و رسیدن به پایداری بیشتر در تمامی مقیاس‌های شناخته شده برای انسان رخ می‌دهد و با کاهش تراکم همراه است. به همین دلیل این موضوع در فیزیک هسته‌ای نیز از دیر باز مورد توجه قرار گرفته و مطالعات تجربی و نظری زیادی در این خصوص انجام شده است [۱۱۷-۱۱۶، ۶۹]. در مطالعه ساختار هسته‌های سبک، هسته‌هایی با عدد جرمی $A=4n$ و $N=Z$ به عنوان هسته‌های آلفا-مزدوج شناخته می‌شوند و بررسی آن‌ها به صورت مدل ذره آلفا^۱ اجتناب‌ناپذیر است و دلیل آن ثبات و پایداری بسیار بالای خوشه آلفاست.

برای توسعه ساختار خوشه‌ای، هسته می‌بایست از نظر انرژی مجاز به انجام این کار باشد. زمانی که هسته به صورت مجانبی به شکل مولفه‌های خوشه‌ای خود جدا سازی می‌شود، انرژی ای هم ارز با اختلاف جرم بین هسته‌ی اولیه و خوشه‌ها باید فراهم شود. البته می‌بایست بر هم کنش بین خوشه‌هایی که باید به طور کامل از هم جدا شوند نیز در نظر گرفته شود. به عبارت دیگر، انتظار می‌رود ساختار خوشه‌ای در آستانه‌ی واپاشی و احتمالاً اندکی پایین‌تر از آن آشکار گردد [۱۴]. در واقع آنچه که مشخص است این است که انرژی بستگی هسته‌هایی با ساختار $N\alpha$ (که در آن N بیانگر تعداد ذرات آلفاست) را می‌توان به کمک رابطه $N(BE_\alpha) + N.B_{\alpha\alpha}$ توصیف کرد. در این رابطه BE_α انرژی بستگی ذره آلفا و $B_{\alpha\alpha}$ انرژی مربوط به برهم کنش آلفا-آلفا است.

بنابراین، به منظور ساده سازی در بررسی هسته‌های آلفا-مزدوج می‌توان به جای بر هم کنش نوکلئون-نوکلئون، بر هم کنش خوشه - خوشه را در نظر گرفت که در فواصل مشخصی کاملاً به صورت دافعه عمل کرده و اجازه نمی‌دهد، ذرات مثل قبل به هم نزدیک شوند. در واقع برهم کنش‌های جاذبه بین خوشه‌ها اساساً همراه با نیروی دافعه کولنی و پتانسیل مرکز گریز همراه است که در حفظ خوشه‌ها در کنار هم به صورت حالت‌های مقید ضعیف یا شبه مقید، نقش ایفا می‌کند.

^۱ Alpha-particle model

بررسی‌های میکروسکوپی مدل‌های خوشه‌ای بر اساس بر همکنش نوکلئون- نوکلئون می‌باشد [۸۲، ۹۱، ۱۱۸]. به عنوان مثال، محاسبات مونت کارلوی تابع گرین که در آن، برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون، بر حسب مولفه‌های دوزره‌ای و سه‌ذره‌ای بیان می‌شود اما پیش‌فرضی در خصوص برهم‌کنش بین خوشه‌ها ارائه نمی‌دهد [۱۱۹]. در حالیکه در این فصل به بررسی بر همکنش خوشه - خوشه پرداخته شده است. بدین منظور ابتدا، ریاضیات مدل پیشنهادی ارائه شده و سپس با انتخاب پتانسیل‌های مناسب بین خوشه‌ها و تعیین پارامترهای آن به محاسبه انرژی لازم برای تشکیل ساختار خوشه‌ای هسته‌های آلفا- مزدوج و نوار چرخشی آن پرداخته ایم.

۲-۶ معادله شرودینگر برای A ذره

به منظور بررسی انرژی سیستم‌های چند ذره‌ای از دیدگاه غیر میکروسکوپی با استفاده از پتانسیل جایگزیده، می‌بایست از معادله شرودینگر مستقل از زمان استفاده گردد:

$$H = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + V(r_i) + V(r_i, r_j) \right) \quad (1-6)$$

در این بررسی، از $V(r_i)$ که نشان دهنده‌ی اثرات محیطی است، صرف نظر شده است و فقط $V(r_i, r_j)$ که پتانسیل هسته‌ای بین ذرات آلفا است در نظر گرفته می‌شود. در این شرایط، مناسب‌ترین دستگاه مختصات، جهت توصیف یک سیستم A ذره‌ای، دستگاه مختصات ژاکوبی است که به تفصیل در فصل ۳ بیان شده است. در صورتی که پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به فاصله نسبی بین آن‌ها باشد، می‌توان آن را بر حسب ابر شعاع نوشت که به آن پتانسیل فوق مرکزی می‌گویند [۶۰-۶۱].

برای حل معادله شرودینگر، پس از جداسازی متغیرها، آن بخش که مربوط به متغیر ابر شعاع برای یک سیستم A ذره‌ای در فضای D بعدی است را می‌توان برای پتانسیل متقارن کروی به صورت زیر بیان کرد [۱۲۰-۱۲۲]:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} [\nabla_D^2 + V(r)] \psi_{nlm}(r, \Omega_D) = E_{n,l} \psi_{nlm}(r, \Omega_D) \quad (۲-۶)$$

در این رابطه M جرم یکی از ذرات، ∇_D^2 عملگر لاپلاسین در فضای D بعدی است که به صورت زیر

تعریف می شود:

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{L_D^2(\Omega)}{r^2} \quad (۳-۶)$$

و $\psi_{nlm}(r, \Omega_D)$ توابع ویژه می باشند. با توجه به اینکه پتانسیل، وابستگی فضایی ندارد بنابراین

می توان توابع موج را به صورت حاصلضرب قسمت شعاعی و فضایی در نظر گرفت،

$\psi_{nlm}(r, \Omega_D) = R_{nl}(r) Y_l^m(\Omega)$. قسمت فضایی آن، $Y_l^m(\Omega)$ ، توابع هماهنگ کروی هستند که ویژه

توابع عملگر مجذور تکانه زاویه ای، L_D^2 ، می باشند و در رابطه ویژه مقداری زیر صدق می کنند:

$$L_D^2 Y_l^m(\Omega) = l(l+D-2) Y_l^m(\Omega) \quad (۴-۶)$$

با استفاده از رابطه (۴-۶) و جایگزاری رابطه (۳-۶) در رابطه (۲-۶) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{D-1} \frac{\partial R_{nl}(r)}{\partial r}) + \frac{2M}{\hbar^2} \left[E_{n,l} - \frac{l(l+D-2)}{r^2} - V(r) \right] R_{nl}(r) = 0 \quad (۵-۶)$$

سپس به کمک تغییر متغیر، $R_{nl}(r) = r^{(1-D)/2} \varphi_{nl}(r)$ ، معادله شرودینگر را نهایتاً بدین صورت

می نویسیم:

$$\frac{d^2 \varphi_{nl}(r)}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \hbar^2 \frac{(D+2l-1)(D+2l-3)}{8Mr^2} \right) \varphi_{nl}(r) = 0 \quad (۶-۶)$$

در معادله فوق، عبارت $\frac{(D+2l-1)(D+2l-3)}{8r^2}$ به عنوان پتانسیل گریز برای اندازه حرکت

مداری 1 در یک سیستم D بعدی معرفی می شود [۱۲۳].

۳-۶ محاسبه ترازهای انرژی با پتانسیل پیشنهادی

همانطور که قبلاً ذکر شد، جهت بررسی هسته‌های آلفا- مزدوج در این جا، اندرکنش بین دو به دوی خوشه‌ها که همان پتانسیل جایگزیده است، به صورت $V(r) = V_N(r) + V_C(r)$ در نظر گرفته می‌شود که در آن $V_C(r)$ پتانسیل دافعه کولنی و $V_N(r)$ پتانسیل هسته‌ای است که شامل جملات جاذبه و دافعه می‌باشد و در دستگاه مختصات ژاکوبی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V(x) = -V_0 \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} - V_1 \frac{e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} + \frac{V_2}{x^2} + \frac{k}{x} \quad (۷-۶)$$

در این رابطه، V_0 و V_1 قدرت جاذبه هسته‌ای، V_2 قدرت دافعه هسته‌ای، k قدرت دافعه کولنی و α برد پتانسیل هستند. با قرار دادن پتانسیل در معادله شرودینگر D بعدی رابطه (۶-۶) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 \varphi_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2M}{\hbar^2} \left(E + V_0 \frac{e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} + V_1 \frac{e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} - \frac{V_2}{x^2} - \frac{k}{x} - \hbar^2 \frac{(D + 2l - 1)(D + 2l - 3)}{8Mx^2} \right) \varphi_{nl}(x) = 0 \quad (۸-۶)$$

از آنجایی که معادله فوق به دلیل شکل پتانسیل به روش‌های معمول قابل حل نمی‌باشد، لذا برای

حل این معادله از یک تقریب مناسب به صورت زیر استفاده می‌کنیم [۱۲۴]:

$$\frac{1}{x^2} \approx \frac{\alpha^2 e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^2} \quad (۹-۶)$$

که رابطه معادل آن نیز برقرار است:

$$\frac{1}{x} \approx \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{1 - e^{-\alpha x}} \quad (۱۰-۶)$$

با قرار دادن تقریب های معادلات (۹-۶) و (۱۰-۶) و استفاده از تغییر متغیر $s = e^{-\alpha x}$ ، به کمک

کمی تجزیه و تحلیل رابطه (۸-۶) را بازنویسی می کنیم:

$$\frac{d^2 R_{n,l}(s)}{ds^2} + \frac{(1-s)}{s(1-s)} \frac{dR_{n,l}(s)}{ds} + \frac{2M}{\alpha^2 \hbar^2 s^2} \times \left[E_{n,l} + \frac{V_0 s}{1-s} - \frac{\alpha^2 V_2 s^2}{(1-s)^2} + \frac{V_1 s}{(1-s)^2} - \frac{k \alpha s}{1-s} - \hbar^2 \frac{(D+2l-1)(D+2l-3)\alpha^2 s^2}{8M(1-s)^2} \right] R_{n,l}(s) = 0 \quad (14 \text{ ۶})$$

در صورتی که پارامترهای زیر را بدین صورت تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \\ -\varepsilon^2 = \frac{2ME}{\alpha^2 \hbar^2} \\ X = \frac{2M}{\alpha^2 \hbar^2} (-V_0 + \alpha^2 V_2 - k \alpha) + \frac{(D+2l-1)(D+2l-3)}{4} \\ Y = \frac{2M}{\alpha^2 \hbar^2} (V_0 - k \alpha + V_1) \end{aligned} \quad (14 \text{ ۶})$$

رابطه (۱۱-۶) به صورت زیر خواهد شد:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1-s}{s(1-s)} \frac{d}{ds} + \frac{-(\varepsilon^2 + X)s^2 + (Y + 2\varepsilon^2)s - \varepsilon^2}{s^2(1-s)^2} \right] R_{n,l}(s) = 0 \quad (14 \text{ ۶})$$

که مشابه رابطه (۱۷-۳) می باشد و به راحتی از طریق روش پارامتریک نیکوفور-یووارو (PNU) به صورت تحلیلی قابل حل است. بدین منظور از مقایسه دو رابطه (۱۳-۶) و (۱۷-۳) خواهیم داشت:

$$\xi_1 = \varepsilon^2 + X \quad \xi_2 = 2\varepsilon^2 + Y \quad \xi_3 = \varepsilon^2 \quad (14 \text{ ۶})$$

و سایر پارامترهای مورد نیاز برابرند با:

$$\begin{aligned} \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_6 = \frac{1}{4} + X + \varepsilon^2, \quad \alpha_7 = -2\varepsilon^2 - Y \\ \alpha_8 = \varepsilon^2, \quad \alpha_9 = X - Y + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (16 \text{ ۶})$$

حال معادله ویژه مقدار انرژی را به کمک رابطه (۳-۳۰) محاسبه می کنیم که برابر خواهد شد با:

$$E_{n,l} = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2M} \left[\frac{\frac{2n+1}{2} + (2n+1)\sqrt{X-Y + \frac{1}{4}} + n^2 - Y}{2n+1+2\sqrt{X-Y + \frac{1}{4}}} \right]^2 \quad (14 \ 6)$$

با استفاده از رابطه فوق، به سهولت می توان به محاسبه انرژی خوشه شدن در هسته های سبک آلفا-مزدوج پرداخت که در قسمت بعد برای ایزوتوپ های ^4Be ، ^{12}C و ^{16}O به ترتیب با ساختاری متشکل از دو، سه و چهار خوشه آلفا محاسبه شده است.

۴-۶ بررسی نتایج

۴-۶-۱ ایزوتوپ ^4Be

حالت پایه ایزوتوپ ^4Be ساده ترین و در عین حال قانع کننده ترین مثال برای بررسی هسته هایی با ساختار خوشه ای آلفاست که بررسی آن به صورت دو خوشه آلفا توسط چندین نظریه پیشنهاد شده است [۱۲۶-۱۲۵]. بررسی ها نشان می دهد که هیچ مدل پوسته ای کروی نمی تواند شکل دمبل مانند ایزوتوپ ^4Be را توصیف کند که در آن دو ذره آلفا بسیار نزدیک هم قرار گرفته اند. این ساختار دمبل مانند، سبب به وجود آمدن یک نوار چرخشی می شود که ممان اینرسی آن متناسب با تغییر شکل محوری ۲:۱ در مدل نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته است [۲۶، ۳۷]. انرژی بستگی ایزوتوپ ^4Be برابر $56/50 \text{ MeV}$ است. ترازهای 2^+ و 4^+ از نوار چرخشی حالت پایه آن به ترتیب در انرژی های - $52/27 \text{ MeV}$ و $-46/40 \text{ MeV}$ قرار دارد که به کمک رابطه $\frac{\hbar^2}{2I} j(j+1)$ به دست می آید. در این رابطه

$$\text{مقدار } \frac{\hbar^2}{2I} \text{ برابر با } 0/48 \text{ است و } I \text{ ممنتوم اینرسی است [۳، ۱۲۷].}$$

در جدول (۱-۶) نتایج محاسبات انرژی خوشه شدن و دو تراز نوار چرخشی آن با نتایج تجربی مقایسه شده است. در اینجا ثابت های پتانسیل برابرند با: $\alpha = 0/42 \text{ fm}^{-1}$ ، $V = 23/98 \text{ MeV}$.

$V_1=0/03\text{MeV}$ ، $V_2=3/05\text{MeV}$ و $k=5/77\text{MeV}$. همانطور که مشخص می‌باشد این مدل در محاسبه

انرژی خوشه شدن و نیز انرژی ترازهای چرخشی مشاهده شده ایزوتوپ ^9Be موفق می‌باشد.

جدول ۶-۱. مقایسه انرژی خوشه شدن ایزوتوپ ^9Be و دو تراز نوار چرخشی آن با مقادیر تجربی

تراز انرژی	محاسبات ما (MeV)	مقادیر تجربی (MeV)
انرژی خوشه شدن	-۵۶/۴۴	-۵۶/۴۹
تراز 2^+ نوار چرخشی	-۵۳/۵۶	-۵۳/۲۷
تراز 4^+ نوار چرخشی	-۴۶/۸۴	-۴۶/۴۰

۶-۴-۲ ایزوتوپ ^{12}C

یکی از آزمایش‌های برجسته که تا کنون انجام شده است، مربوط به ساختار خوشه‌ای ایزوتوپ ^{12}C در دومین حالت برانگیخته آن است. این تراز با مشخصه $J^\pi = 0^+$ در انرژی $7/56\text{MeV}$ بالاتر از حالت پایه دیده می‌شود که به دلیل پیش بینی این تراز توسط هوپل به تراز هوپل معروف است. این ایزوتوپ در ستارگان از طریق تلفیق سه ذره آلفا ایجاد می‌شود. در این فرایند ابتدا دو ذره آلفا با همدیگر ترکیب شده و ایزوتوپ ^8Be را تشکیل می‌دهند و در صورت کافی بودن چگالی گیراندازی ذره آلفای سوم بلافاصله رخ داده و ایزوتوپ ^{12}C تشکیل می‌شود. این فرآیند در تراز انرژی $7/56\text{MeV}$ رخ می‌دهد و اگر انرژی اندکی کمتر باشد فراوانی کربن بسیار کاهش می‌یابد. این ساختار خوشه‌ای غیر کروی باعث ایجاد یک نوار چرخشی در تراز هوپل خواهد شد که انرژی آن اندکی بالاتر از واپاشی به یک ذره آلفا و ^8Be یا سه ذره آلفاست. اندازه گیری‌های اخیر که توسط زیمرمن^۱ و همکارانش صورت گرفته است، اولین حالت برانگیخته این نوار را تراز 2^+ و در انرژی بین 9MeV تا 11MeV

^۱ W.R. Zimmerman

پیش بینی می‌کنند که در ستارگان به دلیل سرعت بالای واکنش در دمای 10^9 K رخ می‌دهد [۱۲۸]. دومین تراز این نوار، 4^+ ، به صورت آزمایشگاهی در انرژی نزدیک به $13/30$ MeV بالاتر از حالت پایه مشاهده شده است [۱۲۹]. کمیت $\frac{\hbar^2}{2I}$ در صورت داشتن آرایش خطی برابر $0/16$ می‌باشد [۱۲۷]. در جدول ۲ نتایج محاسبه شده با نتایج تجربی مقایسه شده است. ثابت های پتانسیل در اینجا عبارتند از: $\alpha=0/43\text{fm}^{-1}$ ، $V_0=55/02\text{MeV}$ ، $V_1=0/05\text{MeV}$ ، $V_2=4/74\text{MeV}$ و $k=6/87\text{MeV}$. نتایج نشان می‌دهد که انرژی خوشه شدن به خوبی با نتایج تجربی تطبیق دارد ولی اختلافی که بین انرژی محاسبه شده ترازهای نوار چرخشی با نتایج تجربی وجود دارد می‌تواند ناشی از فرضیه داشتن آرایش خطی خوشه‌ها باشد.

جدول ۶-۲. مقایسه انرژی خوشه شدن ایزوتوپ ^{12}C و دو تراز نوار چرخشی آن با مقادیر تجربی

تراز انرژی	محاسبات ما (MeV)	مقادیر تجربی (MeV)
انرژی خوشه شدن	-۸۴/۶۱	-۸۴/۶۰
تراز 2^+ نوار چرخشی	-۸۳/۶۵	-۸۳/۱۶ تا -۸۱/۱۶
تراز 4^+ نوار چرخشی	-۸۱/۴۱	-۷۸/۸۶

۶-۴-۳ ایزوتوپ ^{16}O

حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O ماهیت لایه‌ای بسته‌ای را با دو عدد جادویی نشان می‌دهد که از دیدگاه ذره مستقل قابل درک است و شامل پیکربندی‌های ترازهای بسته $0s$ و $0p$ می‌باشد که به علت آثار اصل پائولی رخ می‌دهد و نقش اساسی در تایید ماهیت ذره مستقل هسته‌ای ایفا می‌کند. مطالعات صورت گرفته نشان می‌دهد در انرژی $6/06$ MeV بالاتر از حالت پایه که متناظر با تراز برانگیخته O_2^+ است، ساختار هسته به صورت خوشه آلفایی است که حول مغز ^{12}C در حالت پایه می‌چرخد. در

انرژی بالاتر، مغز ^{12}C می‌تواند در تراز هوپل قرار داشته باشد. در این صورت ساختاری با چهار ذره آلفا خواهیم داشت. این ساختار خوشه‌ای در تراز برانگیخته 0_6^+ در انرژی $16/75\text{MeV}$ رخ می‌دهد و به دلیل ساختار خطی، نوار چرخشی با گشتاور لختی بزرگ ایجاد می‌کنند [۱۳۰]. از طریق نتایج تجربی مقدار کمیت $\frac{\hbar^2}{2I}$ را برابر $0/07$ به دست آمده است [۱۳۱]. اولین تراز نوار چرخشی، 2^+ ، در انرژی $17/5\text{MeV}$ و دومین تراز آن، 4^+ ، در انرژی $17/8\text{ MeV}$ بالاتر از حالت پایه مشاهده شده است. در جدول ۳ انرژی خوشه شدن برای ایزوتوپ ^{16}O و نیز دو تراز نوار چرخشی آن محاسبه و با نتایج تجربی مقایسه گردیده است. در اینجا نیز محاسبات با نتایج تجربی تطبیق خوبی دارد. ثابت های پتانسیل که در اینجا مورد استفاده قرار گرفته است برابر $\alpha=0/47\text{fm}^{-1}$ ، $V_1=103/74\text{MeV}$ ، $V_2=6/64\text{MeV}$ و $V_3=9/29\text{MeV}$.

جدول ۳-۶. مقایسه انرژی خوشه شدن ایزوتوپ ^{16}O و دو تراز نوار چرخشی آن با مقادیر تجربی

تراز انرژی	محاسبات ما (MeV)	مقادیر تجربی (MeV)
انرژی خوشه شدن	-۱۱۰/۸۵	-۱۱۰/۸۶
تراز 2^+ نوار چرخشی	-۱۱۰/۴۳	-۱۱۰/۱۱
تراز 4^+ نوار چرخشی	-۱۰۹/۴۵	-۱۰۹/۸۱

۵-۶ ارائه پتانسیل پیشنهادی دیگر و محاسبه ترازهای انرژی

مربوطه

پتانسیل M-R موفقیت خوبی در توصیف اندرکنش بین دو اتم در مولکول‌های دو اتمی ارائه می‌دهد. در فیزیک هسته‌ای نیز برای بررسی ترازهای مقید و ویژگی های پراکندگی به کار می‌رود.

بنابراین به نظر می‌آید بتوان از آن به عنوان پتانسیل اندرکنش بین خوشه‌ای استفاده کرد. شکل عمومی پتانسیل M-R به صورت زیر است [۱۳۳-۱۳۲، ۹۸]:

$$V(r) = \frac{-A\hbar^2}{2\mu b^2} \frac{e^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} + \frac{\alpha(\alpha-1)\hbar^2}{2\mu b} \left[\frac{e^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} \right]^2 \quad (18 \text{ } \epsilon)$$

در این رابطه کمیت های A و α دو کمیت بدون بعد و b یک کمیت با بعد طول است. بر همین اساس با توجه به سیستم چند ذره‌ای در ایزوتوپ های آلفا - مزدوج از مختصات ژاکوبی استفاده کرده و پتانسیل ذیل، برای برهمکنش بین خوشه‌ها در این مختصات پیشنهاد می‌شود [۱۳۴]:

$$V(x) = \frac{-V_0 e^{-x/b} + V_1 e^{-2x/b}}{(1-e^{-x/b})^2} + \frac{k}{x} \quad (19 \text{ } \epsilon)$$

در این رابطه، V_0 قدرت جاذبه هسته‌ای، V_1 قدرت دافعه هسته‌ای در فواصل نزدیک، k قدرت دافعه کولنی در فواصل دور و b معکوس برد پتانسیل هستند. با قرار دادن پتانسیل در معادله شرودینگر D بعدی، رابطه (۶-۶)، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 \varphi_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2M}{\hbar^2} \left(E + \frac{V_0 e^{-x/b} - V_1 e^{-2x/b}}{(1-e^{-x/b})^2} + \frac{k}{x} - \hbar^2 \frac{(D+2l-1)(D+2l-3)}{8Mx^2} \right) \varphi_{nl}(x) = 0 \quad (20 \text{ } \epsilon)$$

حال سعی بر این خواهد بود با استفاده از یک تقریب مناسب به حل تحلیلی معادله فوق پردازیم که به صورت زیر می‌باشد [۱۲۴]:

$$\frac{1}{x^2} \approx \frac{1}{b^2} \frac{e^{-2x/b}}{(1-e^{-x/b})^2} \quad (21 \text{ } \epsilon)$$

با قرار دادن تقریب فوق و معادل آن، $\frac{1}{x} \approx \frac{1}{b} \frac{e^{-x/b}}{(1-e^{-x/b})}$ ، در معادله (۶-۲۰) و اعمال تغییر متغیر $s = e^{-x/b}$ ، آن را به شکل ذیل بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{d^2 R_{n,l}(s)}{ds^2} + \frac{(1-s)}{s(1-s)} \frac{dR_{n,l}(s)}{ds} + \frac{2Mb^2}{\hbar^2 s^2} \times \left[E_{n,l} - \frac{ks}{b(1-s)} - \frac{V_0 s - V_1 s^2}{(1-s)^2} - \hbar^2 \frac{(D+2l-1)(D+2l-3)s^2}{8b^2 M (1-s)^2} \right] R_{n,l}(s) = 0 \quad (24 \text{ ع})$$

حال پارامترهای زیر را تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \\ -\varepsilon^2 = \frac{2Mb^2 E}{\hbar^2} \\ X = \frac{2Mb^2}{\hbar^2} \left(V_1 - \frac{k}{b} \right) + \frac{(D+2l-1)(D+2l-3)}{4} \\ Y = \frac{2Mb^2}{\hbar^2} \left(V_0 - \frac{k}{b} \right) \end{aligned} \quad (24 \text{ ع})$$

و خواهیم داشت:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1-s}{s(1-s)} \frac{d}{ds} + \frac{-(\varepsilon^2 + X)s^2 + (Y + 2\varepsilon^2)s - \varepsilon^2}{s^2(1-s)^2} \right] R_{n,l}(s) = 0 \quad (24 \text{ ع})$$

که مشابه رابطه:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{(s(1 - \alpha_3 s))^2} \right] R_{n,l}(s) = 0 \quad (25-ع)$$

بوده و از طریق روش پارامتریک نیکوفور-یووارو (PNU) قابل حل است. بدین منظور از مقایسه دو

رابطه (24-ع) و (25-ع) خواهیم داشت:

$$\xi_1 = \varepsilon^2 + X, \quad \xi_2 = 2\varepsilon^2 + Y, \quad \xi_3 = \varepsilon^2 \quad (25 \text{ ع})$$

دیگر پارامترهای مورد نیاز، در روش PNU به شرح ذیل محاسبه شده اند:

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) = 0, \quad \alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3) = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1 = \frac{1}{4} + X + \varepsilon^2, \quad \alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2 = -2\varepsilon^2 - Y \quad (26 \text{ } \epsilon)$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3 = \varepsilon^2, \quad \alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_6 + \alpha_3^2\alpha_8 = X - Y + \frac{1}{4}$$

بنابراین معادله ویژه مقداری انرژی برابر خواهد شد با:

$$E_{n,l} = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2M} \left[\frac{\frac{2n+1}{2} + (2n+1)\sqrt{X - Y + \frac{1}{4}} + n^2 - Y}{2n+1 + 2\sqrt{X - Y + \frac{1}{4}}} \right]^2 \quad (27 \text{ } \epsilon)$$

در جدول (۴-۶) ثابت های پتانسیل، انرژی خوشه شدن و انرژی دو تراز چرخشی هسته های آلفا - مزدوج سبک محاسبه شده اند. در اینجا نیز مشاهده می شود تطابق خوبی بین مقادیر تجربی و کمیت های محاسبه شده وجود دارد و اختلاف بین آن دو از مرتبه ۱۰ keV می باشد.

جدول ۴-۶. محاسبه انرژی خوشه شدن و نوار چرخشی آن در هسته های آلفا - مزدوج با پتانسیل میننگ

- روزن تغییر شکل یافته [۱۳۶]

تراز 4^+ نوار چرخشی (MeV)	تراز 2^+ نوار چرخشی (MeV)	انرژی خوشه شدن (MeV)	ثابت های پتانسیل	نام ایزوتوپ
-۴۶/۸۵	-۵۳/۵۷	-۵۶/۴۵	$b=0.44, V_1=24.71$ $V_1=18.03, k=17.06$	${}^8\text{Be}$
-۸۱/۳۴	-۸۳/۵۸	-۸۴/۵۴	$b=0.44, V_1=119.97$ $V_1=28.95, k=20.93$	${}^{12}\text{C}$
-۱۰۹/۴۸	-۱۱۰/۴۶	-۱۱۰/۸۸	$b=0.44, V_1=32.43$ $V_1=126.01, k=23.12$	${}^{16}\text{O}$

شناسایی دو نوع ساختار مختلف در حالت پایه هسته های سبک $4n$ ، یا به عبارتی آلفا- مزدوج منجر به درک این مطلب شده است که ذرات آلفا ماهیت خود را در هسته فشرده از دست می دهند، همانند ایزوتوپ ${}^{16}\text{O}$ و بالعکس اگر فشردگی سیستم هسته ای کاهش یابد مانند ایزوتوپ ${}^8\text{Be}$ ذرات آلفا، در کل سیستم ماهیت خود را حفظ می کنند. بنابراین تغییر ساختار و خوشه ای شدن در

حالت‌های برانگیخته هسته‌های سبک آلفا - مزدوج مشاهده شود زیرا کاهش فشردگی به دلیل کاهش عدد جرمی و یا انرژی سیستم هسته‌ای رخ می‌دهد.

نتیجه گیری

در این کار پژوهشی ابتدا به تعریف مدل خوشه‌ای به عنوان مدل مهمی در بررسی ساختار هسته‌های سبک پرداخته شده است و در ادامه به مرور مختصری از تاریخچه این مدل در فیزیک هسته‌ای و آرایه شواهد تجربی که گویای تایید این مدل است پرداخته ایم. بر این اساس ساختار خوشه‌ای در انرژی نزدیک به آستانه واپاشی خوشه رخ می‌دهد. در واقع، هسته می‌تواند انرژی برانگیختگی داخلی خود را به انرژی بستگی خوشه‌ها تبدیل کند.

بررسی‌ها نشان می‌دهد رفتار خوشه‌ای در هسته‌های سبک به یک شکل دیده نمی‌شود بلکه می‌توان با توجه به ساختار هسته‌ها، آن‌ها را به صورت‌های مختلفی تقسیم بندی کرد:

الف) مولکول‌های هسته‌ای که با اضافه شدن نوکلئون مازاد به هسته‌های بسیار سبک نظیر ^4Be و ^{12}C که ساختار خوشه‌ای کاملاً مشخصی دارند، شکل می‌گیرد. در این ساختار، تابع موج یک نوکلئون معین به خوشه آلفای خاصی محدود نمی‌شود بلکه بین خوشه‌های مختلف به اشتراک گذارده می‌شود، همانند ایزوتوپ ^7Be که شامل دو خوشه برهم‌کنشی آلفا است و نوکلئون‌های مازاد را از طریق برهم‌کنش قوی، بین خود مبادله می‌کنند.

در فصل چهار این پایان نامه، مدل پوسته‌ای دو مرکزی جهت بررسی هسته‌هایی با ساختار مولکولی آرایه شده است. در واقع، با در نظر گرفتن تقارن محوری در هسته‌های غیر کروی با دو خوشه یکسان، معادله سطح هسته را در مختصات استوانه‌ای توصیف کرده‌ایم. سپس با معرفی پتانسیل دو مرکزی گوسی و حل معادله شرودینگر در مختصات استوانه‌ای، ترازهای انرژی را به دست آورده‌ایم. در ادامه با توجه به اهمیت وابستگی اسپینی نیروهای هسته‌ای، به بررسی اثر جفت‌شدگی اسپین - مدار بر ترازهای انرژی تک ذره پرداخته‌ایم و در نهایت نتایج محاسبات جهت بررسی ساختار دو ایزوتوپ ^4Be و ^7Be مورد استفاده قرار گرفته است. در ایزوتوپ ^4Be انرژی بستگی برابر $57/75\text{MeV}$ می‌باشد که در حالت پایه کاملاً نامقید بوده و با کمتر 92keV به دو ذره آلفا واپاشیده می‌شود. اولین تراز برانگیخته آن، 2^+ ، در انرژی $54/72\text{MeV}$ و دومین تراز برانگیخته آن، 2^+ ، در انرژی $41/12\text{MeV}$ قرار

دارد. نتایج بررسی ما، نشان دهنده وجود دو چاه پتانسیل است که فاصله مراکز آن با یکدیگر $1/10 \text{ fm}$ می‌باشد. این مدل انرژی تراز حالت پایه را برابر با $58/09 \text{ MeV}$ ، انرژی اولین تراز برانگیخته را برابر با $54/83 \text{ MeV}$ و انرژی دومین تراز برانگیخته را برابر با $41/23 \text{ MeV}$ برآورد کرده است که نشان دهنده تطابق خوب مدل با نتایج تجربی است. همچنین در خصوص ایزوتوپ ${}^9\text{Be}$ ، می‌بینیم پس از تاثیر جفت شدگی اسپین - مدار بر روی ترازهای انرژی، اسپین حالت پایه و اولین تراز برانگیخته به درستی محاسبه شده است.

ب) در صورتیکه ایزوتوپ مورد مطالعه در نزدیکی هسته‌ای با ساختار جادویی دوگانه نظیر ${}^4\text{He}$ ، ${}^{16}\text{O}$ و ${}^{40}\text{Ca}$ قرار داشته باشد، نوکلئون‌های ظرفیت همانند خوشه‌ای رفتار می‌کنند که بیرون از مغز چرخیده و طیف انرژی چرخشی مشخصه‌ای را ایجاد می‌نمایند. به عنوان مثال، سیستم‌هایی مثل ${}^{20}\text{Ne}$ و ${}^{44}\text{Ti}$ به ترتیب، به صورت ساختارهای خوشه‌ای ${}^{16}\text{O}+\alpha$ و ${}^{40}\text{Ca}+\alpha$ مشاهده می‌شوند.

در فصل پنجم این کار پژوهشی، با در نظر گرفتن فرضیات ساده نوارهای چرخشی هسته‌های مورد مطالعه به شکل دقیق محاسبه و توصیف شده است که یکی از اجزای تشکیل دهنده ساختار، ذره آلفا است و به دور یک مغز که لزوماً در حالت پایه نیست می‌چرخد. واپاشی ذره آلفا به خودی خود نشان می‌دهد که روی سطح هسته شکل گرفته و می‌تواند از طریق تونل زنی گسیل شود. همچنین با توجه به انرژی بستگی بالا و تقارن آن انتظار می‌رود که این خوشه در حالت پایه مشاهده شود. در اینجا با صرف نظر کردن از اثرات تبادل، دو هسته واقعی با خصوصیت آزاد بدون اختلال خواهیم داشت که می‌توانند دور یکدیگر چرخیده و حالت‌های نیمه مقید را به وجود آورند. بنابراین یک سیستم چند جسمی به راحتی به یک سیستم دو جسمی تبدیل شده است. در این سیستم دو ذره‌ای، متشکل از خوشه و مغز، با استفاده از شرط وایدرموت بین مدل پوسته‌ای و مدل خوشه‌ای ارتباط برقرار کرده ایم.

در خصوص ایزوتوپ ${}^{20}\text{Ne}$ ، با استفاده از این مدل، دو نوار چرخشی با پارامترهای مثبت و منفی محاسبه شده است که گشتاور لختی آن دو، تقریباً با یکدیگر مشابه است. فقط انرژی نوار چرخشی با

پاریته منفی بالاتر از نوار چرخشی با پاریته مثبت است. این نوارها متناظر با چرخش ذره آلفا حول مغز ^{16}O می باشد. پتانسیل مورد استفاده در این محاسبات، پتانسیل دنگ-فان به اضافه یوکاوا و کولنی است.

این پتانسیل به خوبی قادر به توصیف نوارهای چرخشی با پاریته مثبت می باشد ولی در توصیف ترازهای نوار چرخشی با پاریته منفی، مقادیر محاسبه شده برای تراز 1^- و تراز 7^- اندکی بالاتر از مقادیر تجربی ولی برای تراز 3^- و 5^- مقادیر به دست آمده با مقادیر تجربی همخوانی خوبی دارد.

این رفتار مشخصه در ایزوتوپ ^{44}Ti نیز دیده می شود که در آن ذره آلفا پیرامون مغز جادویی ^{40}Ca می چرخد. به طور کلی، نتایج به دست آمده برای ایزوتوپ ^{44}Ti ، حالت های اسپین پایین را به صورت فشرده تری نسبت به مقادیر تجربی پیش بینی می کند ولی نسبت به مطالعات صورت گرفته، نتایج بهتری ارائه شده است. یکی از نتایج مهم این مطالعه، وجود خوشه آلفا در ساختار ایزوتوپ ^{44}Ti و پیش بینی تراز 1^- به عنوان اولین تراز باند چرخشی با پاریته فرد در انرژی $372/78\text{MeV}$ برای این ایزوتوپ است. این رویکرد نشان دهنده توانایی این مدل خوشه ای ساده در پیش بینی ترازهای انرژی است که هنوز به صورت تجربی شناخته شده نیستند. همچنین، با توجه به ویژگی خاص طیف ذره آلفا، این مدل به خوبی نوار دارای پاریته منفی را چند مگا الکترون ولت بالاتر از نوار پاریته مثبت پیش بینی می کند.

در ادامه این بررسی، مدل خود را برای خوشه هایی با اسپین غیر صفر نظیر ^3He و ^3H با اسپین $\frac{1}{2}$ تعمیم داده ایم. بدین منظور، مغز مورد مطالعه، اولین هسته جادویی با ساختار دوگانه که ذره آلفا می باشد، انتخاب می گردد و ترازهای انرژی ایزوتوپ های آینه ای ^6Li و ^6Be مورد بررسی قرار گرفته است.

ج) هسته های آلفا - مزدوج که شامل هسته های زوج - زوج با شرط $N=Z$ و $A=4n$ می باشد. در این هسته ها، یک رفتار حدی خوشه ای پیش بینی می شود که در آن هسته به صورت یک قطره مایع رفتار نمی کند بلکه به صورت چگالش کامل n ذره آلفای جداگانه عمل می کند. در واقع هنگامی که

انرژی برانگیختگی مازاد به این هسته‌ها افزوده می‌شود، گذار تدریجی از حالت پایه فشرده به آزاد سازی کامل $n\alpha$ دیده می‌شود.

جهت بررسی هسته‌های آلفا - مزدوج در فصل پایانی با یک سیستم A ذره ای مواجه ایم. با در نظر گرفتن دو پتانسیل مختلف پیشنهادی جهت اندرکنش خوشه - خوشه که شامل جملات پتانسیل جاذبه هسته‌ای میان برد، دافعه هسته ای کوتاه برد و دافعه کولنی بلند برد می‌باشند، در مختصات ژاکوبی به بررسی ایزوتوپ‌های ${}^8\text{Be}$ ، ${}^{12}\text{C}$ و ${}^{16}\text{O}$ به ترتیب با ساختاری متشکل از دو، سه و چهار خوشه آلفا پرداخته ایم. در این بررسی پس از محاسبه انرژی خوشه شدن، برای نخستین بار نوار چرخشی تراز مربوطه نیز با استفاده از یک مدل غیر میکروسکوپی محاسبه شده است. تطابق خوب این مدل با کارهای تجربی دیگران نشان دهنده وجود یک مدل خوب جهت توصیف ویژگی‌های استاتیکی سیستم‌های خوشه‌ای در هسته‌ها است.

- [١] B. L. Cohen (١٩٧١) "*Concepts of nuclear physics*", Tata McGraw-Hill Education.
- [٢] J. A. Peacock *et al.* (٢٠٠١) "A measurement of the cosmological mass density from clustering in the ٢dF Galaxy Redshift Survey" *Nature*, vol.٤١٠, no.٦٨٢٥, pp.١٦٩–١٧٣.
- [٣] M. Freer (٢٠١٠), "Clusters in nuclei" *Scholarpedia*, vol.٥, no.٦, p.٩٦٥٢.
- [٤] N. D. Cook (٢٠١٠), "Models of the atomic nucleus. Unification through a lattice of nucleons", Springer; ٢nd.
- [٥] W. von Oertzen, M. Freer, and Y. Kanada-En'yo (٢٠٠٦), "Nuclear clusters and nuclear molecules" *Phys. Rep.*, vol.٤٣٢, no.٢, pp.٤٣–١١٣.
- [٦] E. Rutherford (٢٠١٢), "The scattering of α and β particles by matter and the structure of the atom" *Philos. Mag.*, vol.٩٢, no.٤, pp.٣٧٩–٣٩٨.
- [٧] M. Freer and A. C. Merchant (١٩٩٧) "Developments in the study of nuclear clustering in light even-even nuclei" *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.*, vol.٢٣, no.٣, p.٢٦١.
- [٨] M. Freer (٢٠٠٧), "The clustered nucleus—cluster structures in stable and unstable nuclei" *Reports Prog. Phys.*, vol.٧٠, no.١٢, p.٢١٤٩.
- [٩] D. R. Tilley, H. R. Weller, and G. M. Hale (١٩٩٢), "Energy levels of light nuclei $A=٤$ " *Nucl. Phys. A*, vol.٥٤١, no.١, pp.١–١٠٤.
- [١٠] G. Gamow (١٩٣٠), "Mass defect curve and nuclear constitution" *Proc. R. Soc. London. Ser. A, Contain. Pap. a Math. Phys. Character*, vol.١٢٦, no.٨٠٣, pp.٦٣٢–٦٤٤.

- [11] K. Wildermuth and T. Kanellopoulos (1988), “The cluster model of the atomic nuclei” *Nucl. Phys.*, vol.7, pp.150–162.
- [12] L. R. Hafstad and E. Teller (1938), “The alpha-particle model of the nucleus,” *Phys. Rev.*, vol. 54, no. 9, p. 681.
- [13] M. Freer (, 2014), “Clustering in Light Nuclei; from the Stable to the Exotic,” in *The Euroschool on Exotic Beams, Vol. IV*, Springer, pp. 1–37.
- [14] H. Horiuchi and K. Ikeda (1968), “A Molecule-like Structure in Atomic Nuclei of $^{16}\text{O}^*$ and ^{16}Ne ,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 40, no. 2, pp. 277–287.
- [15] D. M. Brink and E. Boeker (1967), “Effective interactions for Hartree-Fock calculations,” *Nucl. Phys. A*, vol. 91, no. 1, pp. 1–26.
- [16] W. Bauhoff, H. Schultheis, and R. Schultheis (1984), “Alpha cluster model and the spectrum of ^{16}O ,” *Phys. Rev. C*, vol. 29, no. 3, p. 1046.
- [17] B. Buck, C. B. Dover, and J. P. Vary (1975), “Simple potential model for cluster states in light nuclei,” *Phys. Rev. C*, vol. 11, no. 5, p. 1803.
- [18] J. Kallunkathariyil, Z. Sosin, and A. Wieloch (2013), “ALPHA CLUSTERING IN NUCLEUS.” *Acta Phys. Pol. B Proc. Suppl.*, Vol.8, No.4, p. 1147.
- [19] D. M. Brink (2001), “History of cluster structure in nuclei,” in *Journal of physics: Conference series*, 2008, vol. 111, no. 1, p. 1.
- [20] M. Chernykh, H. Feldmeier, T. Neff, P. von Neumann-Cosel, and A. Richter (2007), “Structure of the Hoyle State in ^{12}C ” *Phys. Rev. Lett.*, vol.98, no.3, p.32501.
- [21] A. H. Wuosmaa *et al.* (1993), “Evidence for alpha-particle chain configurations in ^{24}Mg ” *Nucl. Phys. A*, vol.553, pp.563–566.

- [22] M. Freer *et al.* (2004), “ $^A\text{Be} + ^A\text{Be}$ decay of excited states in ^{16}O ”, *Phys. Rev. C*, vol.70, no.6, p.064311.
- [23] A. A. Cowley (2013), “Alpha-cluster structure in the ground state of ^{44}Ca displayed in a $(p, p\alpha)$ knockout reaction,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol.436, no.1, p.12011.
- [24] W. Von Oertzen (1996), “Two-center molecular states in ^3B , ^3Be , ^7Be , and ^7B ,” *Zeitschrift für Phys. A Hadron. Nucl.*, vol.354, no.1, pp.37–43.
- [25] W. Von Oertzen *et al.* (2004), “Search for cluster structure of excited states in ^{12}C ,” *Eur. Phys. J. A-Hadrons Nucl.*, vol.21, no.2, pp.193–215.
- [26] M. Freer, R. R. Betts, and A. H. Wuosmaa (1995), “Relationship between the deformed harmonic oscillator and clustering in light nuclei”, *Nucl. Phys. A*, vol.587, no.1, pp.36–54.
- [27] W. Von Oertzen (2001), “Covalently bound molecular structures in the $\alpha + ^{16}\text{O}$ system”, *Eur. Phys. J. A-Hadrons Nucl.*, vol.11, no.4, pp.403–411.
- [28] M. Freer *et al.* (2006), “ $\alpha: \gamma n: \alpha$ Molecular Band in ^7Be ” *Phys. Rev. Lett.*, vol.96, no.4, p.042501.
- [29] T. Kawabata *et al.* (2007), “ $\gamma\alpha + t$ cluster structure in ^{11}B ,” *Phys. Lett. B*, vol.646, no.1, pp. 6–11.
- [30] J. A. Wheeler (1937), “On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure,” *Phys. Rev.*, vol. 52, no. 11, p. 1107.
- [31] D. M. Brink and C. Bloch (1966), “Proceedings of the International School of Physics ‘enrico fermi’ Course XXXVI.” Academic New York.
- [32] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez (1995), “Systematics of alpha-cluster states

- above double shell closures,” *Phys. Rev. C*, vol. ۵۱, no. ۲, p. ۵۵۹.
- [۳۳] N. Zoghi-Foumani, M. R. Shojaei, A. A. Rajabi, (۲۰۱۷), “A new non-microscopic study of cluster structures in light alpha-conjugate nuclei,” *Chinese Phys. C*, vol. ۴۱, no. ۱, p. ۱۴۱۰۴.
- [۳۴] C. Beck (۲۰۱۲), *Clusters in Nuclei*, vol. ۲. Springer Science & Business Media.
- [۳۵] K. S. Krane (۱۹۸۷), “Introductory nuclear physics”, David Halliday, ۲nd.
- [۳۶] B. R. Mottelson, S. G. Nilsson (۱۹۵۵), “Classification of the nucleonic states in deformed nuclei,” *Phys. Rev.*, vol. ۹۹, no. ۵, p. ۱۶۱۵.
- [۳۷] P. McEwan, M. Freer (۲۰۰۴), “Characterization of molecular structures in the deformed harmonic oscillator” *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.*, vol. ۳۰, no. ۴, p. ۴۴۷.
- [۳۸] Y. Suzuki, K. Varga (۱۹۹۸), “Stochastic variational approach to quantum-mechanical few-body problems”, vol. ۵۴. Springer Science & Business Media.
- [۳۹] C. A. Bertulani (۲۰۰۷), “Nuclear physics in a nutshell”, Princeton University Press.
- [۴۰] S. A. Afzal, A. A. Z. Ahmad, S. Ali (۱۹۶۹), “Systematic Survey of the α - α Interaction,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. ۴۱, no. ۱, p. ۲۴۷.
- [۴۱] ن. روشن بخت، م. ر. شجاعی (۱۳۹۵)، “محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ های کربن از طریق حل معادله نسبیتی دیراک با استفاده از پتانسیل وود-ساکسون”، *کنفرانس فیزیک هسته ای ایران*.
- [۴۲] M. R. Shojaei, N. Roshanbakht (۲۰۱۵), “Deuteron-deuteron cluster model for studying the ground state energy of the ^6He isotope” *Chinese J. Phys.*, vol. ۵۳, no. ۷, p. ۱۲۰۳۰۱.
- [۴۳] M. R. Shojaei, N. Roshanbakht (۲۰۱۶), “Calculation of energy spectrum of ^{13}C isotope with modified Yukawa potential by cluster models” *Pramana*, vol. ۸۷,

no. 4, p. 54.

- [44] N. Zoghi-Foumani, M. R. Shojaei, A. A. Rajabi (2017), "A new approach for cluster structures in ^{16}O and ^{20}Ne ", *Pramana - J. Phys.*, vol. 88, no. 4.
- [45] M. K. Bahar, F. Yasuk (2012), "Approximate Solutions to the Dirac Equation with Effective Mass for the Manning–Rosen Potential in N Dimensions," *Few-Body Syst.*, vol. 53, no. 3–4, pp. 515–524.
- [46] J. Maruhn and W. Greiner (1972), "The asymmetric two center shell model", *Zeitschrift für Phys.*, vol. 251, no. 5, pp. 431–457.
- [47] P. Holzer, U. Mosel, W. Greiner (1969), "Double-centre oscillator and its application to fission" *Nucl. Phys. A*, vol. 138, no. 2, pp. 241–252.
- [48] W. Greiner, J. Y. Park, W. Scheid (1995), "Nuclear molecules", World Scientific.
- [49] M. Mirea (1998), "Landau-Zener effect in cluster decay" *Phys. Rev. C*, vol. 57, no. 5, p. 2484.
- [50] M. Mirea (2006), "Realistic orbital momentum operators for the supersymmetric two-center shell model" *Nucl. Phys. A*, vol. 780, no. 1, pp. 13–33.
- [51] M. Mirea (1996), "Supersymmetric two-center shell model for spontaneous heavy-ion emission", *Phys. Rev. C*, vol. 54, no. 1, p. 302.
- [52] M. Mirea (2007), "Two center shell model with Wood-Saxon potentials" *Rom. Reports Phys.*, vol. 59, no. 2, p. 523.
- [53] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov (1988), "Special functions of mathematical physics", Springer, vol. 205.
- [54] B. Gönül, I. Zorba (2000), "Supersymmetric solutions of non-central potentials",

- Phys. Lett. A*, vol. 269, no. 2, pp. 83–88.
- [55] Ş. Erkoç, R. Sever (1984), “Path-integral solution for a Mie-type potential”, *Phys. Rev. D*, vol. 30, no. 10, p. 2117.
- [56] C. Berkdemir (2006), “Pseudospin symmetry in the relativistic Morse potential including the spin–orbit coupling term” *Nucl. Phys. A*, vol. 770, no. 1, pp. 32–39.
- [57] G. Lévai (1989), “A search for shape-invariant solvable potentials” *J. Phys. A. Math. Gen.*, vol. 22, no. 6, p. 689.
- [58] A. A. Rajabi (2005), “Hypercentral constituent quark model and isospin for the baryon static properties”, *J. Sci. Islam. Repub. Iran*, vol. 16, no. 1, pp. 73–79.
- [59] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery (1992), “Numerical recipes in FORTRAN”, Cambridge Univ. Press.
- [60] A. Kievsky, M. Viviani, L. E. Marcucci, S. Rosati (2006), “Variational description of bound states in three-and four-nucleon systems”, *Few-Body Syst.*, vol. 38, no. 2–4, pp. 63–66.
- [61] A. Kievsky, M. Viviani, L. Girlanda, L. E. Marcucci, S. Rosati (2009), “Analysis of the Effects of Three-nucleon Forces in $A=3, 4$ Systems” *Few-Body Syst.*, vol. 45, no. 2–4, pp. 115–118.
- [62] A. A. Rajabi (2005), “Exact analytical solution of the schrödinger equation for an N-identical body-force system” *Few-body Syst.*, vol. 37, no. 4, pp. 197–213.
- [63] L. S. Ferreira, A. C. Fonseca, L. Streit (1987), “Models and methods in few-body physics: proceedings of the λ th Autumn School on Models and Methods in Few-Body Physics”, Springer-Verlag.
- [64] O. Bayrak, D. Sahin (2015), “Exact Analytical Solution of the Klein–Gordon

Equation in the Generalized Woods–Saxon Potential “ *Commun. Theor. Phys.*, vol. ۶۴, no. ۳, p. ۲۵۹.

- [۶۵] C. Cari, A. Suparmi (۲۰۱۳), “Solution of Schrodinger Equation for Three Dimensional Harmonics Oscillator plus Rosen-Morse Non-central Potential Using NU Method and Romanovski Polynomials”, *Journal of Physics: Conference Series*, vol. ۴۲۳, no. ۱, p. ۱۲۰۳۱.
- [۶۶] M. R. Shojaei, M. Amini, N. Zoghi-Foumani (۲۰۱۵), “A new approach for parameters of Nucleon-Nucleon Scattering at low energies in one and two dimensions”, *International Frontier Science Letters*, vol. ۳, pp. ۱-۱۰.
- [۶۷] A. D. Antia, A. N. Ikot, E. E. Ituen, L. E. Akpabbio (۲۰۱۲), “Analytical solution of Schrödinger equation withh Eckart potential plus Hulthen potential via NU method”, *Palestine Journal of Mathematics*, vol. ۱, n. ۲, pp. ۱۰۴-۱۰۹.
- [۶۸] N. Roshanbakht, M. R. Shojaei (۲۰۱۹), “^{۱۲}C isotope in relativistic cluster model” *Mod. Phys. Lett. A*, p. ۱۹۵۰۱۵۸۹.
- [۶۹] Y. Kanada-En’yo, T. Suhara, and F. Kobayashi, “Cluster formation, breaking, and excitation in light nuclei,” in *EPJ Web of Conferences*, ۲۰۱۴, vol. ۶۶, p. ۱۰۰۸.
- [۷۰] Y. Kanada-En’yo and H. Horiuchi, “Structure of light unstable nuclei studied with antisymmetrized molecular dynamics,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. ۱۴۲, pp. ۲۰۵-۲۶۳, ۲۰۰۱.
- [۷۱] ن. روشن بخت. م. ر. شجاعی, “محاسیه انرژی حالت پایه ایزوتوپ های برلیم با استفاده از چاه پتانسیل گوسی تغییر یافته در مختصات استوانه ای”, “کنفرانس فیزیک ریاضی/ایران, ۱۳۹۵.
- [۷۲] N. Roshanbakht, M. R. Shojaei (۲۰۱۷), “Two-center Gaussian potential well for studying light nucleus in cluster structure”, *Adv. High Energy Phys.*, vol. ۲۰۱۷.
- [۷۳] S. Gomez, R. Romero (۲۰۰۹), “Few-electron semiconductor quantum dots with

- Gaussian confinement” *Open Phys.*, vol.7, no.1, pp.12–21.
- [74] J. Adamowski, M. Sobkowicz, B. Szafran, S. Bednarek (2000), “Electron pair in a Gaussian confining potential” *Phys. Rev. B*, vol.62, no.7, p.4234.
- [75] T. Sandev, I. Petreska (2005), “Selection Rules For Two-Dimensional Harmonic Oscillator” *Bull. Chem. Technol. Maced.*, vol. 24, no. 2, pp. 143–146.
- [76] N. Roshanbakht, M. R. Shojaei (2018), “The cluster model for studying even-even light nuclei” *Can. J. Phys.*, , vol. 96, no.11, pp.1230–1234.
- [77] D. Scharnweber, W. Greiner, U. Mosel (1971), “The two-center shell model” *Nucl. Phys. A*, vol.164, no.2, pp.257–278.
- [78] W. Greiner, J. A. Maruhn (1996), “Nuclear models”, Springer.
- [79] M. Milin (2013), “Cluster and molecular structures observed in reactions of light nuclei” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol.436, no.1, p.12050.
- [80] J. A. Maruhn, M. Kimura, S. Schramm, P.-G. Reinhard, H. Horiuchi, A. Tohsaki, (2006), “ α -cluster structure and exotic states in a self-consistent model for light nuclei”, *Phys. Rev. C*, vol.74, no.4, p.44311.
- [81] R. K. Gupta, S. Kumar, M. Balasubramaniam, G. M \ddot{u} nzenberg, W. Scheid (2002), “The cluster–core model for the halo structure of light nuclei at the drip lines” *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.*, vol.28, no.4, p.699.
- [82] B. Zhou *et al.* (2012), “New concept for the ground-state band in ^{16}Ne within a microscopic cluster model” *Phys. Rev. C*, vol. 86, no.1, p.14301.
- [83] W. Broniowski, E. R. Arriola (2014), “Signatures of α Clustering in Light Nuclei from Relativistic Nuclear Collisions” *Phys. Rev. Lett.*, vol.112, no.11, p.112501.

- [84] B. Buck, J. C. Johnston, A. C. Merchant, S. M. Perez (1995), “Unified treatment of scattering and cluster structure in α + closed shell nuclei: ${}^7\text{Ne}$ and ${}^8\text{Ti}$,” *Phys. Rev. C*, vol.52, no.4, p.1840.
- [85] B. Buck, A. C. Merchant, M. J. Horner, S. M. Perez (2000), “Choosing cluster and core in cluster models of nuclei” *Phys. Rev. C*, vol.61, no.2, p.24314.
- [86] B. Buck, A. C. Merchant, S. M. Perez (2000), “Cluster selection in binary nuclear models” *Few-Body Syst.*, vol.29, no.1-3, pp.53-60.
- [87] C. Beck *et al.* (2010), “Clusters in light nuclei” *arXiv Prepr. arXiv 1011.3423*.
- [88] M. V Zhukov, B. V Danilin, D. Fedorov, J. M. Bang, I. J. Thompson, J. S. Vaagen (1993), “Bound state properties of Borromean halo nuclei: ${}^6\text{He}$ and ${}^7\text{Li}$,” *Phys. Rep.*, vol.231, no.4, pp.151-199.
- [89] Y. Akiyama, A. Arima, T. Sebe (1969), “The structure of the sd shell nuclei:(IV). ${}^7\text{Ne}$, ${}^8\text{Ne}$, ${}^9\text{Ne}$, ${}^{10}\text{Na}$ and ${}^{11}\text{Mg}$,” *Nucl. Phys. A*, vol.138, p.273.
- [90] E. C. Halbert, J. B. McGrory, B. H. Wildenthal (1968), “Shell-Model Calculations of $B_{(E\gamma)}$ Values in s- d Shell Nuclei with $A= 18\text{--}22$ ” *Phys. Rev. Lett.*, vol.20, no.20, p.1112.
- [91] Y. C. Tang (1981), “Microscopic description of the nuclear cluster theory,” *Topics in Nuclear Physics II A Comprehensive Review of Recent Developments*, Springer, pp. 571-692.
- [92] N. Takigawa, K. Washiyama (2015), *Fundamentals of Nuclear Physics*. Springer.
- [93] H. Horiuchi (2017), “Nonlocalized clustering and evolution of cluster structure in nuclei” *Journal of Physics Conference Series*, vol.163, no.1.
- [94] B. Zhou *et al.* (2013), “Nonlocalized clustering: A new concept in nuclear cluster

- structure physics” *Phys. Rev. Lett.*, vol.110, no.26, p.262501.
- [95] Z. H. Deng, Y. P. Fan (1987), “A potential function of diatomic molecules” *J. Shandong Univ. (Natural Sci.)*, vol.1, p.11.
- [96] M. Mousavi, M. R. Shojaei (2016), “Remove degeneracy in relativistic symmetries for Manning–Rosen plus quasi-hellman potentials by tensor interaction” *Commun. Theor. Phys.*, vol.66, no.5, p.483.
- [97] R. L. Greene, C. Aldrich (1976), “Variational wave functions for a screened Coulomb potential” *Phys. Rev. A*, vol.14, no.6, p.2363.
- [98] W.-C. Qiang, S.-H. Dong (2007), “Analytical approximations to the solutions of the Manning–Rosen potential with centrifugal term” *Phys. Lett. A*, vol.368, no.1, pp.13–17.
- [99] S. M. Ikhdair, R. Sever (2008), “Approximate l-state solutions of the D-dimensional Schrödinger equation for Manning-Rosen potential” *Ann. Phys.*, vol.17, no.11, pp.897–910.
- [100] P. A. Butler, W. Nazarewicz (1996), “Intrinsic reflection asymmetry in atomic nuclei,” *Rev. Mod. Phys.*, vol.68, no.2, p.349.
- [101] Y. Kanada-En’yo, M. Kimura, H. Horiuchi (2003), “Antisymmetrized Molecular Dynamics: a new insight into the structure of nuclei” *Comptes Rendus Phys.*, vol.4, no.4, pp.497–520.
- [102] J. B. McGrory, B. H. Wildenthal (1973), “Shell-model calculations for $A= 18, 19$, and 20 nuclei with core excitation included explicitly” *Phys. Rev. C*, vol.7, no.3, p.974.
- [103] P. Obložinský, B. Pritychenko (2017), “Nuclear data sheets” *Science Direct* , vol.139.

- [۱۰۴] نفیسه روشن بخت، محمد رضا شجاعی (۱۳۹۸)، “بررسی ترازهای چرخشی در ایزوتوپ ^{20}Ne ” پژوهش فیزیک، جلد ۱۹، شماره ۲، تابستان.
- [۱۰۵] B. Pritychenko *et al.* (۲۰۰۶), “Nuclear reaction and structure data services of the National Nuclear Data Center” *Ann. Nucl. Energy*, vol.۳۳, no.۴, pp.۳۹۰–۳۹۹.
- [۱۰۶] N. Roshanbakht, M. R. Shojaei (۲۰۱۸), “A New Calculation of Rotational Bands in Alpha-Cluster Nuclei,” *Commun. Theor. Phys.*, vol.۷۰, no.۱, p.۶۷.
- [۱۰۷] R. Bijker (۲۰۱۵), “The structure of rotational bands in alpha-cluster nuclei,” *EPJ Web of Conferences*, vol.۹۳, p.۱۰۱۱.
- [۱۰۸] D. Jenkins (۲۰۱۶), “Alpha clustering in nuclei: another form of shape coexistence” *J. Phys. G Nucl. Part. Phys.*, vol.۴۳, no.۲, p.۲۴۰۰۳.
- [۱۰۹] G. Reidemeister, S. Ohkubo, F. Michel (۱۹۹۰), “Alpha-cluster spectroscopy in ^{40}Ca and in the sd-shell closure region” *Phys. Rev. C*, vol.۴۱, no.۱, p.۶۳.
- [۱۱۰] N. Roshanbakht, M. Shojaei (۲۰۱۸), “ ^7Li and ^7Be isotopes in a new cluster model” *Eur. Phys. J. A*, vol.۵۴, no.۸, p.۱۳۴.
- [۱۱۱] C. Constantinou, M. A. Caprio, P. J. Fasano (۲۰۱۷), “Cluster orbitals for the mirror nuclei ^7Li and ^7Be ” *Bulletin of the American Physical Society*, vol. ۶۲.
- [۱۱۲] H. Sadeghi, H. Khalili (۲۰۱۴), “Three-Body Calculation of the $^4\text{He} (^3\text{H}, \gamma) ^7\text{Li}$ and $^4\text{He} (^3\text{He}, \gamma) ^7\text{Be}$ Reactions and Structure of the ^7Li and ^7Be at Solar Energies” *Chinese Phys. Lett.*, vol.۳۱, no.۱, p.۱۲۱۰۱.
- [۱۱۳] B. Buck (۱۹۸۵), “Cluster Structure of Light Nuclei,” *Clustering Aspects of Nuclear Structure*, Springer, pp.۷۱–۸۴.
- [۱۱۴] I. Angeli, K. P. Marinova (۲۰۱۳), “Table of experimental nuclear ground state charge radii: An update” *At. Data Nucl. Data Tables*, vol.۹۹, no.۱, pp.۶۹–۹۵.

- [115] C. Forssén, E. Caurier, P. Navrátil (2009), “Charge radii and electromagnetic moments of Li and Be isotopes from the ab initio no-core shell model” *Phys. Rev. C*, vol.79, no.2, p.21303.
- [116] B. Buck, A. C. Merchant (1989), “Cluster-model calculations of exotic decays from heavy nuclei” *Phys. Rev. C*, vol.39, no.5, p.2097.
- [117] M. A. Souza, H. Miyake (2015), “ α -cluster structure in even-even nuclei around ^{96}Mo ” *Phys. Rev. C*, vol.91, no.3, p.34320.
- [118] Y. Funaki, A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck, G. Röpke (2003), “Analysis of previous microscopic calculations for the second 2^+ state in ^{12}C in terms of 3α particle Bose-condensed state” *Phys. Rev. C*, vol.67, no.5, p.054306.
- [119] R. B. Wiringa, S. C. Pieper, J. Carlson, V. R. Pandharipande (2000), “Quantum Monte Carlo calculations of $A=8$ nuclei” *Phys. Rev. C*, vol.62, no.1, p.14001.
- [120] S. M. Ikhdair, R. Sever (2008), “Polynomial solutions of the Mie-type potential in the D-dimensional Schrödinger equation” *J. Mol. Struct. THEOCHEM*, vol.855, no.1-3, pp.13-17.
- [121] S. M. Ikhdair, R. Sever (2008), “Exact solutions of the modified Kratzer potential plus ring-shaped potential in the D-dimensional Schrödinger equation by the Nikiforov–Uvarov method” *Int. J. Mod. Phys. C*, vol.19, no.02, pp.221-235.
- [122] H. Panahi, S. Zarrinkamar, M. Baradaran (2015), “Solutions of the D-dimensional Schrödinger equation with Killingbeck potential: Lie algebraic approach” *Chinese Phys. B*, vol.28, no.6, p.6301.
- [123] Y. Zhang (2008), “Approximate analytical solutions of the Klein–Gordon equation with scalar and vector Eckart potentials” *Phys. Scr.*, vol.78, no.1, p.15006.

- [124] C. L. Pekeris (1934), “The rotation-vibration coupling in diatomic molecules”
Phys. Rev., vol.48, no.2, p.98.
- [125] R. Guardiola, I. Moliner, M. A. Nagarajan (2001), “Alpha-cluster model for ^8Be and ^{12}C with correlated alpha particles” *Nucl. Phys. A*, vol.679, no.3-4, pp.393-409.
- [126] N. I. Ashwood *et al.* (2004), “Helium clustering in neutron-rich Be isotopes”
Phys. Lett. B, vol.580, no.3-4, pp.129-136.
- [127] M. Freer *et al.* (2012), “Consistent analysis of the γ^+ excitation of the ^{12}C Hoyle state populated in proton and α -particle inelastic scattering” *Phys. Rev. C*, vol.86, no.3, p.034320.
- [128] W. R. Zimmerman *et al.* (2013), “Unambiguous Identification of the Second γ^+ State in ^{12}C and the Structure of the Hoyle State” *Phys. Rev. Lett.*, vol.110, no.15, p.152502.
- [129] M. Freer *et al.* (2009), “ γ^+ excitation of the ^{12}C Hoyle state” *Phys. Rev. C*, vol.80, no.4, p.041303.
- [130] Y. Funaki, T. Yamada, H. Horiuchi, G. Röpke, P. Schuck, A. Tohsaki (2013), “Gas-like alpha-cluster states and condensates in nuclei” *Journal of Physics: Conference Series*, vol.436, no.1, p.12004.
- [131] Y. Abgrall, G. Baron, E. Caurier, G. Monsonogo (1967), “The λ particle- λ hole rotational band in ^{16}O ” *Phys. Lett. B*, vol.26, no.2, pp.53-55.
- [132] W.-C. Qiang, S.-H. Dong (2007), “Arbitrary l-state solutions of the rotating Morse potential through the exact quantization rule method” *Phys. Lett. A*, vol.363, no.3, pp.169-176.

[۱۳۳] M. F. Manning, N. Rosen (۱۹۳۳), “A potential function for the vibrations of diatomic molecules” *Phys. Rev*, vol. ۴۴, p. ۹۵۳.

[۱۳۴] نفیسه روشن بخت. محمد رضا شجاعی، حمزه حسین نژاد (۱۳۹۷)، “حل معادله شرودینگر D بعدی جهت محاسبه انرژی خوشه شدن در هسته‌های آلفا - مزدوج سبک”، کنفرانس فیزیک ریاضی ایران.

Abstract

In light nuclear systems, deviation from spherical shape is not only in the form of axial deviations but it can also create cluster structures. This cluster structure in light nuclei can be divided into three groups: 1) nuclear molecules, 2) isotopes in vicinity of double magic nuclei and 3) alpha-conjugated nuclei

In nuclear molecules, the cluster nature of nuclei can be well described by double center shell model. In this model, each cluster is represented by its own potential well. Here, considering the axial symmetry in such nuclei and introducing double center Gaussian potential, the Schrödinger equation was solved in cylindrical coordination system and energy levels of ^8Be and ^9Be isotopes were addressed.

In nuclei whose number of nucleons was near to the ones with two magic numbers, valence nucleons can serve as a cluster which evolves outside the magic core. To investigate rotational levels, two-particle nuclear models including core and cluster were employed. By selection of proper potential, rotational bands with negative and positive parity for ^{16}Ne and ^{44}Ti isotopes were also calculated and compared with empirical results. Moreover, the cluster with non zero spin (such as ^3He and ^3H) which are around the first magic nucleus with double alpha structure, were investigated and rotational spectra of mirror isotopes (^7Li and ^7Be) were addressed.

Finally, nuclei with $A=2n$ and $N=Z$ (known as alpha-conjugated nuclei) were investigated. In these nuclei, internal excitation energy was converted to clusters binding energy giving rise to a structure composed of alpha particles. Therefore, cluster-cluster interaction replaced the nucleon-nucleon interaction and by solving D-dimensional Schrödinger equation, cluster energy and rotational spectra of ^{10}Be , ^{12}C and ^{16}O isotopes were investigated.

Keywords: cluster model, double centric potential, nuclear molecule, alpha-conjugated nuclei, core-cluster model, central potential



**Shahrood University of
Technology**

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

Thesis in Ph.D.

Calculation of Energy Spectrum of Even-Even and Even-Odd Light Nuclei Using One-Center and Two-Center Potentials in Cluster Model

By: Nafiseh Roshanbakht

Supervisor:
Dr. Mohammad Reza Shojaei

September 2019