

صلاة الاضلاع



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک هسته‌ای

# بررسی ذرات نسبیتی و غیرنسبیتی با استفاده از نظریه گروه‌ها

نگارنده: پریسا صداقت نیا

استاد راهنما

دکتر حسن حسن آبادی

تیر ۱۳۹۸



## فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای پریسا صداقت نیا با شماره دانشجویی ۹۶۰۹۷۲۴ رشته: فیزیک گرایش: هسته‌ای تحت عنوان: بررسی طیف ذرات نسیبی و غیرنسبیتی با استفاده از نظریه گروه‌ها که در تاریخ ۱۳۹۸/۰۴/۲۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: ..... عالی.....)  مردود

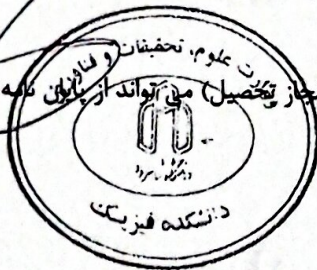
نوع تحقیق: نظری  عملی

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استاد	دکتر حسن حسن آبادی	۱- استاد راهنمای اول
			۲- استاد راهنمای دوم
			۳- استاد مشاور
	استادیار	دکتر احسان ابراهیمی بسابی	۴- نماینده تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر مسلم سوهانی	۵- استاد ممتحن اول
	دانشیار	دکتر حسن توکلی عنبران	۶- استاد ممتحن دوم

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر سعید حسامی پیله رود

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تصوه: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).



”تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم ”

و تمام کسانی که نیروی حرکت به سوی مقصود را در وجود من

زنده کردند.

## تُعِزُّ مَنْ تَشَاءُ وَ تُذِلُّ مَنْ تَشَاءُ

اینکه به فضل پروردگار اثر حاضر در مقام یک پایان‌نامه کارشناسی ارشد قرار گرفت، بر خود لازم می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی خود را از استاد فرهیخته جناب آقای **دکتر حسن حسن آبادی**، استاد راهنمای این پایان‌نامه به خاطر زحمات فراوان و راهنمایی‌های مشفقانه‌ی ایشان در طی یک سال گذشته و همچنین به خاطر سعه صدر و بزرگواری ایشان در طول انجام کار، ابراز نمایم. و همچنین از دو دوست عزیزم سرکارخانم فاطمه آزادبخت و زهرا صادقیچه و تمام کسانی که در تمام مراحل مختلف انجام این تحقیق اینجانب را یاری نمودند، سپاسگزارم و برای همه‌ی این عزیزان آرزوی بهروزی و سربلندی دارم.

**پریسا صداقت نیا**

تیر ۱۳۹۸

## تعهد نامه

اینجانب پریسا صداقت نیا دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی ذرات نسبیتی و غیرنسبیتی با استفاده از نظریه گروه‌ها، تحت راهنمایی حسن آبادی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

**پریسا صداقت نیا**

**تیر ۱۳۹۸**

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پایان نامه قصد داریم، در ابتدا روش حل پذیر شبه دقیق را با استفاده از نظریه گروه‌ها معرفی کنیم و سپس با استفاده از این روش به بررسی سیستم‌های غیرنسبیتی و نسبیتی (سیستم‌های فرمیونی و بوزونی) بپردازیم. در سال‌های اخیر توجه زیادی برای مطالعه معادلات موج نسبیتی و غیرنسبیتی صورت گرفته است که در این میان حل معادله دیراک به عنوان یک معادله موج نسبیتی که به نتایج فیزیکی قابل قبول منجر می‌شود اهمیت فراوانی داشته و نقش مهمی در مکانیک کوانتومی نسبیتی ایفا می‌کند. فیزیکدانان تلاش‌های قابل ملاحظه‌ای را برای حل معادله دیراک با پتانسیل‌های فیزیکی انجام داده‌اند و تعداد حل‌های دقیقی که در این زمینه وجود دارد رو به افزایش است که در آن‌ها روش‌های استاندارد متفاوتی استفاده شده است. یکی از این روش‌های استاندارد، حل معادله دیراک به روش جبری با استفاده از نظریه گروه است. در این پایان نامه نیز معادله دیراک به عنوان یک معادله موج نسبیتی در حضور پتانسیل برداری و اسکالر قرار می‌گیرد و معادلات دیفرانسیل مربوط به هر اسپینور به صورت تحلیلی حل می‌شود و تابع موج فرمیون‌ها و طیف انرژی آن‌ها محاسبه می‌شود. در ادامه معادله دیراک برای پتانسیل کولنی در مختصات فضا زمانی با روش حل پذیر شبه دقیق مورد بررسی قرار می‌گیرد و در نهایت تابع موج و نیز طیف انرژی فرمیون‌ها در پتانسیل کولنی محاسبه می‌شود. همچنین برای سیستم‌های بوزونی نیز در حضور پتانسیل برداری و اسکالر تابع موج و طیف انرژی بوزون‌ها با روش حل پذیر شبه دقیق مورد بررسی قرار می‌گیرد. امروزه تعدادی از پتانسیل‌ها در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی به صورت دقیق حل شده و طیف انرژی و توابع موج آن‌ها به دست آورده شده است. در این پایان نامه برای پتانسیل کلینگ-بک سیستم‌های غیرنسبیتی را با روش حل پذیر شبه دقیق مورد بررسی قرار داده‌ایم. همچنین توزیع انرژی مومنتم را با استفاده از مدل‌های شناخته شده‌ی لاندائو-لیفشیتز و انیشتین و پاپیترو در دو متریک سام ریچادری و متریک گودل گونه ارزیابی می‌کنیم و همچنین در بخش آخر به بررسی و تحلیل روش تاویز-کومینگز و ارتباط آن با هامیلتونی حل پذیر شبه دقیق مربوط به گروه  $SL(2)$  پرداخته و سپس با استفاده از فرم معادلات هیون-بای کانفلوئننت به حل آن در فرم‌های مختلف با پتانسیل‌های متفاوت می‌پردازیم.

**کلمات کلیدی:** نظریه گروه‌ها، روش حل پذیر شبه دقیق، روش تاویز-کومینگز، متریک سام ریچادری، متریک گودل، انرژی-مومنتم، انرژی-مومنتم لاندائو لیفشیتز، انرژی-مومنتم انیشتین، انرژی-مومنتم پاپیترو، معادله هیون.

## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Dirac fermions in Som–Raychaudhuri space-time with scalar and vector potential and the energy momentum distributions.
2. Klein–Gordon oscillator in the presence of a Cornell potential in the cosmic string space-time.
3. Investigation of fermions with metric based on q-addition and the energy-momentum distributions.(revise)





# فهرست مطالب

خ	فهرست تصاویر
ذ	فهرست جداول
۱	۱ مقدمه‌ای بر نظریه گروه‌ها
۲	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ مفهوم گروه
۳	۳.۱ جدول ضرب گروه
۴	۴.۱ گروه‌های لی
۴	۵.۱ مولدهای گروه لی
۶	۶.۱ معرفی برخی از گروه‌ها با تاکید بر گروه $SL(n)$
۶	۱.۶.۱ گروه $GL(n, R)$
۶	۲.۶.۱ گروه $SL(n, R)$
۷	۳.۶.۱ گروه $O(n, R)$
۷	۴.۶.۱ گروه $SO(n, R)$
۹	۲ روش حل پذیر شبه دقیق
۱۰	۱.۲ بررسی روش حل پذیر شبه دقیق تحت تقارن دینامیکی گروه $SL(2)$
۱۰	۱.۱.۲ مقدمه
۱۱	۲.۱.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول حل پذیر شبه دقیق
۱۲	۳.۱.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم حل پذیر شبه دقیق
۱۳	۲.۲ بررسی ذرات نسبیتی با روش حل پذیر شبه دقیق
۱۳	۱.۲.۲ توصیف ذرات نسبیتی
۱۳	۲.۲.۲ روش حل پذیر شبه دقیق در بررسی فرمیون‌های نسبیتی
۲۷	۳.۲.۲ روش حل پذیر شبه دقیق در بررسی بوزون‌های نسبیتی
۲۷	۴.۲.۲ معادله کلاین گوردون در حضور پتانسیل هایپر بولیگی

۳۳	بررسی ذرات غیرنسبیتی با روش حل پذیر شبه دقیق	۳.۲
	۱.۳.۲ حل معادله شرودینگر در حضور پتانسیل با روش حل پذیر شبه	
۳۳	دقیق	
۳۷	<b>توزیع انرژی- مومنتم فضا- زمانی با استفاده از گروه <math>SO(d, 2)</math></b>	۳
۳۸	۱.۳ مقدمه	
۳۸	۲.۳ محاسبه انرژی- مومنتم لاندائو- لیفشیتز در فضا- زمان سام- ریچادری	
۳۹	۳.۳ محاسبه انرژی- مومنتم انیشتین در فضا- زمان سام ریچادری	
۴۰	۴.۳ محاسبه انرژی- مومنتم پاپیترو در فضا- زمان سام ریچادری	
۴۱	۵.۳ محاسبه انرژی- مومنتم لاندائو- لیفشیتز در فضا- زمان گودل	
۴۲	۶.۳ محاسبه انرژی- مومنتم انیشتین در فضا- زمان گودل	
۴۲	۷.۳ محاسبه انرژی- مومنتم پاپیترو در فضا- زمان گودل	
۴۵	<b>ارتباط مدل تاویز- کومینگز و معادله شرودینگر حل پذیر شبه دقیق</b>	۴
۴۶	۱.۴ مقدمه	
۴۶	۲.۴ توابع هیون	
۴۶	۳.۴ انواع معادله هیون	
۴۷	۴.۴ مدل تاویز- کومینگز	
۴۸	۵.۴ بررسی فرم دیفرانسیلی مدل تاویز- کومینگز	
۵۱	۶.۴ معادله شرودینگر	
۵۵	<b>نتیجه گیری و پیشنهادات</b>	۵
۵۷	<b>مراجع</b>	

# فهرست تصاویر

۴	.....	۱.۱	جدول ضرب گروه
۸	.....	۲.۱	گروه همبند نامتناهی
۱۵	.....	۱.۲	پتانسیل های پربولیکی بر حسب $x$ به ازای $k = 0, 1, 2, 3$ و $a = 0/2$
۱۸	.....	۲.۲	تابع موج به ازای $n = 0, 1, 2$ بر حسب $x$ با $k = 0$ و $k = 3$ و $a = 0/2$
	.....	۳.۲	تغییرات تابع موج بر حسب $r$ به ازای $n = 1$ و $\Omega = 0/2, 0/5, 0/8, 1$ و $\alpha = 0/9$
۲۲	.....	۴.۲	تغییرات تابع موج بر حسب $r$ به ازای $n = 1$ و $\Omega = 0/2, 0/5, 0/8, 1$ و $\alpha = 0/9$ و $m = 1/5$ برای حالت $E > 0$
۲۳	.....	۵.۲	تغییرات تابع موج بر حسب $r$ به ازای $n = 0, 1, 2$ و $m = 4$ و $\Omega = 0/8$ و $m = 1/5$ برای حالت $E < 0$
۲۶	.....	۶.۲	تغییرات تابع موج بر حسب $x$ و $\alpha = 0/5$ و $M = 1$
۲۹	.....	۷.۲	تغییرات تابع موج بر حسب $x$ به ازای پارامترهای $k = -10, -9$
۳۲	.....	۸.۲	تابع موج به ازای $n = 0, 1, 2$ بر حسب $x$
۳۵	.....		



# فهرست جداول

۱.۱	گروه‌های ماتریسی و تعداد پارامترهای حقیقی آنها	۵
-----	--	---

# فصل ۱

## مقدمه‌ای بر نظریه گروه‌ها

## ۱.۱ مقدمه

نگاهی گذرا بر نظریه‌هایی که در طول قرون مختلف همچنان به حیات خویش ادامه داده‌اند نشان می‌دهد که هماهنگی زیبایی بین پدیده‌های طبیعی و قواعد ریاضی و هندسی وجود دارد. جبر فیثاغورث<sup>۱</sup>، قوانین کپلر<sup>۲</sup>، نیوتن و بسیاری نمونه‌های دیگر مثال‌هایی از این هماهنگی می‌باشند. یکی دیگر از این موارد روش ریاضی نظریه گروه‌ها است، که برای بررسی و تجزیه و تحلیل تقارن در سیستم‌های فیزیکی می‌باشد. کاربرد نظریه گروه در فیزیک نظری از آغاز پیدایش نظریه‌ی کوانتومی روز به روز گسترش بیشتری پیدا کرده است. از این قواعد ریاضی محض می‌توان برای مطالعه‌ی سیستم‌هایی کمک گرفت که دارای آنچنان تقارن پیچیده‌ای هستند که با روش‌های معمول کلاسیکی نمی‌توان آن‌ها را بررسی نمود، و یا سیستم‌هایی که برهمکنش آن‌ها کاملاً شناخته شده نیست.

در ابتدا به نظر می‌رسید که برای درک مکانیک کوانتومی چندان نیازی به نظریه‌ی گروه‌ها نیست و می‌توان به جای استفاده از گروه‌ها از ابزار دیگری کمک گرفت. به عنوان مثال به جای استفاده از گروه‌های جایگشت از اصل پائولی استفاده کرد، ولی بعدها مشخص شد که فیزیکدانان نظری برای درک بسیاری از پدیده‌ها از جمله مسئله‌ی اسپین نیازمند اطلاعاتی راجع به نظریه‌ی نمایش گروه متقارن<sup>۳</sup> می‌باشند. در بررسی تئوری طیف‌های<sup>۴</sup> پیچیده نیز مشخص گردید که بدون استفاده از نظریه گروه مشخص کردن رابطه‌ی میان تئوری و نتایج تجربی امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال برای بررسی چگونگی شکافته شدن ترازهای انرژی در یک نمونه باید به طور همزمان اثر میدان و جفت شدن اسپین مدار را در محاسبات در نظر گرفت که در این صورت برای رسیدن به نتایج تجربی باید اختلال در نظر گرفته شود در صورتی که با استفاده از نظریه گروه بدون محاسبات دشوار می‌توان به همان نتایج رسید [۱]. در حال حاضر این نظریه به صورت ابزاری بی‌نظیر در دست فیزیکدانان برای بررسی سیستم‌هایی که دارای تقارن‌های متفاوت می‌باشند درآمده است. از جمله‌ی این موارد بررسی ذرات نسبیتی<sup>۵</sup> و غیرنسبیتی<sup>۶</sup> است که در این پایان نامه به اختصار به آن‌ها پرداخته شده است.

## ۲.۱ مفهوم گروه

در نظر ریاضیدان‌ها گروه دارای معنای بسیار دقیقی است. نظریه گروه‌ها با مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی مانند  $A$  و  $B$  و  $C$  و غیره سروکار دارد و یک قانون ترکیب که طبق قرارداد از اصطلاح ضرب برای آن استفاده می‌شود. از این رو برای هر دو عنصر  $A$  و  $B$  از یک گروه  $G$  یک حاصل

<sup>1</sup>Pythaoreas algebra

<sup>2</sup>Kepler algebra

<sup>3</sup>Symmetric

<sup>4</sup>spectrum

<sup>5</sup>Relativity

<sup>6</sup>Non Relativity



### جدول ضرب گروه ۳

ضرب منحصر به فرد مانند  $C$  تعریف می‌شود به طوری که  $AB = C$  است به عبارت دیگر به هر زوج مرتب  $(A, B)$  یک عنصر منحصر به فرد مانند  $C$  مربوط می‌شود. مجموعه‌ای مانند  $G$  که در آن یک قانون ترکیب (ضرب) تعریف شده است در صورتی گروه نامیده می‌شود که شرایط زیر در آن برقرار باشد:

۱- قانون بسته بودن نسبت به عمل ضرب گروه:

یعنی حاصل ضرب هر دو عضو گروه خود عضوی از گروه است.

$$\forall A, B \in G \rightarrow C = AB \in G \quad (1.1)$$

۲- قانون شرکت پذیری:

یعنی اگر  $A, B, C$  سه عضو دلخواه از  $G$  باشند آن گاه:

$$(AB)C = A(BC) \quad (2.1)$$

۳- قانون عنصر واحد: یعنی مجموعه‌ی  $G$  شامل عنصری مانند  $E$  است که آن را عنصر واحد یا همانی یا خنثی می‌نامند به طوری که

$$AE = EA = A \quad (3.1)$$

۴- قانون عنصر عکس: یعنی به ازای هر عنصر  $A$  عنصری مانند  $A^{-1}$  در  $G$  وجود دارد به طوریکه

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \quad (4.1)$$

گروهی که علاوه بر ویژگی‌های بالا به ازای هر دو عنصر آن رابطه‌ی  $AB = BA$  برقرار باشد یک گروه آبلی<sup>۷</sup> یا تعویض پذیر نامیده می‌شود. اگر  $G$  متشکل از تعداد متناهی عنصر باشد آن گاه این تعداد را مرتبه‌ی گروه نامیده و آن را با  $g$  نمایش می‌دهند [۲].

## ۳.۱ جدول ضرب گروه

در نظریه‌ی گروه‌ها هیچ اشاره‌ای به ماهیت عناصر نمی‌شود در صورتی که همه‌ی حاصل ضرب‌های عناصر به شکل  $AB$  معلوم باشند و یا به وسیله‌ی قواعد مشخصی بتوان آن‌ها را تعیین کرد، آنگاه آن گروه کاملاً مشخص است. در یک گروهی متناهی با مرتبه‌ی  $g$  تعداد چنین حاصل ضرب‌ها  $g^2$  است و می‌توان آن‌ها را در یک جدول فهرست کرد که این جدول در شکل ۱.۱ آورده شده است. از ویژگی‌های این جدول آن است که هر سطر یا ستون فقط یک بار هر عنصر را دربر دارد. ویژگی‌های گروه نیز از روی این جدول مشخص می‌شود یعنی بسته بودن عنصر واحد و وجود عنصر عکس، ولی در مورد قانون شرکت پذیری این کار مشکل‌تر است و باید عناصر این قانون را مورد بررسی قرار داد [۳].

<sup>7</sup>Abelian

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

شکل ۱.۱: جدول ضرب گروه

## ۴.۱ گروه‌های لی

گروه‌های لی<sup>۸</sup> گروه‌های پیوسته‌ای هستند که می‌توانند توسط یک مجموعه پارامترهای حقیقی که حداقل یکی از آن‌ها به طور پیوسته در یک بازه معین تغییر کند مشخص شوند. تعداد این پارامترها بعد گروه لی را تشکیل می‌دهد. از ضرب هر عضو در عضو دیگر، عضوی با پارامترهای جدید را به دست می‌دهد. چنان که گفته شد عناصر گروه لی با مختصات پیوسته مشخص می‌شوند و هر عضو گروه با تعدادی پارامتر که بعد گروه نامیده می‌شود شناخته می‌شود [۲].

## ۵.۱ مولدهای گروه لی

کوچک‌ترین مجموعه عناصری را در نظر بگیرید که توان‌ها یا حاصل ضرب‌هایشان تمام عناصر گروه را بدهد. عناصر این مجموعه را مولدهای گروه می‌نامند. برای بررسی مولدهای یک گروه فرایند زیر را در نظر می‌گیریم. توابع  $f^i$  با در نظر گرفتن خاصیت عنصر خنثی ویژگی زیر را دارا می‌باشند:

$$f^i(0, 0, \dots, 0; \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n) = \beta^i \quad (5.1)$$

$$f^i(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n, 0, 0, \dots, 0) = \alpha^i \quad (6.1)$$

برای پرهیز از پیچیدگی، بحث خود را به گروه‌های ماتریسی به عنوان مهم‌ترین گروه‌های لی محدود می‌کنیم، که در شکل ۱.۱ گروه‌های ماتریسی و تعداد پارامترهای حقیقی آن‌ها بیان شده است. لازم به ذکر است که نتایج به دست آمده برای گروه‌های لی قابل تعمیم است. مهم‌ترین گروه‌های لی گروه‌های ماتریسی هستند. مطابق با بخش قبل حاصل ضرب دو عنصر  $a = k(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n), b = k(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n)$  که در نزدیکی عنصر واحد در نظر گرفته شده‌اند به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C = k(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)k(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n) = k(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \quad (7.1)$$

<sup>8</sup>Lie group

جدول ۱.۱: گروه‌های ماتریسی و تعداد پارامترهای حقیقی آنها

تعداد پارامترهای حقیقی	نام گروه ماتریسی
$n^2$	$GL(n, R)$
$n^2 - 1$	$SL(n, R)$
$2n^2$	$GL(n, c)$
$2n^2 - 2$	$SL(n, c)$
$n^2$	$U(n)$
$n^2 - 1$	$SU(n)$
$(p, q)^2$	$U(p, q)$
$(p + q)^2 - 1$	$SU(p, q)$
$n(2n + 1)$	$SP(2n)$

از آنجایی که گروه لی یک گروه پیوسته است عنصر  $C$  نیز در همسایگی واحد قرار می‌گیرد، بنابراین از بسط پارامترها سه عنصر حول صفر و استفاده از اصل جمع روی شاخص‌های تکراری خواهیم داشت:

$$a = I + \alpha^i T_i + \frac{1}{2} \alpha^i \alpha^j T_{ij} + \dots \quad (8.1)$$

$$b = I + \beta^i T_i + \frac{1}{2} \beta^i \beta^j T_{ij} + \dots \quad (9.1)$$

$$c = I + \gamma^i T_i + \frac{1}{2} \gamma^i \gamma^j T_{ij} + \dots \quad (10.1)$$

که در آن  $T_{ij} = T_{ji}$  است و  $T_i$ ها ماتریسی هستند، به این ترتیب رابطه حاصل ضرب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(I + \alpha^i T_i + \frac{1}{2} \alpha^i \alpha^j T_{ij} + \dots)(I + \beta^i T_i + \frac{1}{2} \beta^i \beta^j T_{ij} + \dots) \quad (11.1)$$

در نتیجه

$$\gamma^i = \alpha^i + \beta^i + C_{jk}^i + \dots \quad (12.1)$$

از جایگذاری رابطه (۱۱.۱) در (۱۲.۱) و نیز نگه داشتن جملات تا مرتبه دوم رابطه بین ضرایب ماتریسی به صورت  $T_{jk} = T_j T_k - C_{jk}^i T_i$  به دست می‌آید. رابطه به دست آمده نشان

می‌دهد که ضرایب بسط درجه دوم یعنی  $T_{jk}$  ها برحسب ضرایب بسط درجه اول یعنی  $T_j$  ها تعیین می‌شوند. از سوی دیگر از تفریق رابطه‌ی به‌دست آمده از رابطه‌ی مشابه خودش که در آن اندیس‌ها جابه‌جا شده‌اند داریم:

$$T_{jk} - T_k T_j = (C_{jk}^i - C_{kj}^i) T_i \quad (13.1)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$[T_j, T_k] = f_{jk}^i T_i \quad (14.1)$$

که در آن  $T_{jk} = T_{kj}$  در نظر گرفته شده است. ضرایب  $f_{jk}^i$  که نسبت به اندیس‌های پایین خود پادمتقارن هستند ثابت‌های ساختار گروه لی نامیده می‌شوند و همان‌گونه که رابطه‌ی  $T_{jk} = T_j T_k - C_{jk}^i T_i$  نشان می‌دهد ضرایب درجه دوم نیز برحسب آن‌ها قابل محاسبه هستند، و با ادامه دادن این استدلال تا مرتبه‌های بالاتر دیده می‌شود که ضرایب تمام مرتبه‌ها برحسب  $T_i$  ها قابل محاسبه می‌باشند و به این دلیل  $T_i$  ها را مولدهای گروه لی می‌نامند [۲].

## ۶.۱ معرفی برخی از گروه‌ها با تاکید بر گروه $SL(n)$

### ۱.۶.۱ گروه $GL(n, R)$

مجموعه تمام ماتریس‌های حقیقی  $n \times n$  را با  $M_n(R)$  نشان می‌دهیم. این مجموعه یک فضای برداری است، یعنی می‌توان هر دو عضو آن را با هم جمع کرد و یا یک عضو آن را در یک عدد حقیقی ضرب کرد و حاصل هنوز متعلق به خود این مجموعه باشد. علاوه بر این مجموعه نسبت به ضرب بسته است و عضو خنثی نیز دارد که همان ماتریس واحد است ولی یک گروه نیست زیرا همه عناصر آن وارون‌پذیر نیستند. هرگاه خود را محدود به ماتریس‌های وارون‌پذیر کنیم گروه  $GL(n, R)$ <sup>۹</sup> (یعنی گروه ماتریس‌های حقیقی  $n \times n$ ) به‌دست می‌آیند بنابراین می‌توان گفت گروه  $GL(n, R)$  دارای  $n^2$  پارامتر حقیقی است. تعداد پارامترهای این گروه، بعد آن نیز نامیده می‌شود. بنابراین گروه  $GL(n, R)$  یک گروه  $n^2$  بعدی است [۳].

### ۲.۶.۱ گروه $SL(n, R)$

یک زیرگروه مهم از  $GL(n, R)$  زیرگروهی است که از ماتریس‌های با دترمینان واحد تشکیل می‌شود و  $SL(n, R)$ <sup>۱۰</sup> خوانده می‌شود:

<sup>9</sup>General Linear Group of Real Matrices

<sup>10</sup>Special Linear Group

$$SL(n, R) := \{g \in GL(n, R) | \det(g) = 1\} \quad (15.1)$$

که یکی از گروه‌های مهم با بعد کم در فیزیک گروه  $SL(n)$  است. این گروه، گروه انتقال خطی خاص  $n \times n$  است که دترمینان ماتریس‌های آن یک می‌باشد و  $n^2 - 1$  پارامتری است. این چنین ماتریس‌هایی به راحتی به فضای مینکوفسکی مرتبط می‌شوند. زیرا اگر عضوی از این ماتریس‌ها مثلاً  $X$  را برای گروه  $SL(2)$  به صورت زیر بنویسیم آنگاه دترمینان آن به اندازه‌ی چهار بردار  $X$  برابر خواهد شد.

$$X = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}. \quad (16.1)$$

### ۳.۶.۱ گروه $O(n, R)$

گروه  $O(n, R)$  <sup>۱۱</sup> یکی دیگر از زیرگروه‌های  $GL(n, R)$  است که از ماتریس‌های متعامد تشکیل شده‌است یعنی

$$O(n, R) = \{A \in GL(n, R) | A^T = A^{-1}\} \quad (17.1)$$

هرگاه فضای برداری حقیقی  $V$  مجهز به یک ضرب داخلی باشد  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  می‌توان برای آن یک پایه متعامد یکه ساخت. در این صورت ضرب داخلی هر دو بردار  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  و  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  در این فضا به صورت زیر درمی‌آید:  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^t y$  که در آن  $x^t$  ترانهاده  $x$  است. یک تبدیل متعامد خطی تبدیلی است که ضرب داخلی بردارها را حفظ کند. یعنی اگر  $x' = Ax$  و  $y' = Ay$  آنگاه می‌خواهیم که  $x'^t y' = x^t y$  و در نتیجه  $A^t A = I$ . به راحتی معلوم می‌شود که ترکیب دو تبدیل متعامد یک تبدیل متعامد <sup>۱۲</sup> است. بنابراین گروه تبدیلات متعامد گروه ماتریس‌های حقیقی‌ای است که در شرط  $A^t A = I$  صدق می‌کنند. هر ماتریس  $A \in O(n, R)$  دارای دترمینان برابر با  $\pm 1$  است. آن عده از ماتریس‌ها که دترمینان  $+1$  دارند تشکیل یک زیرگروه می‌دهند که گروه  $SO(n, R)$  نامیده می‌شود.

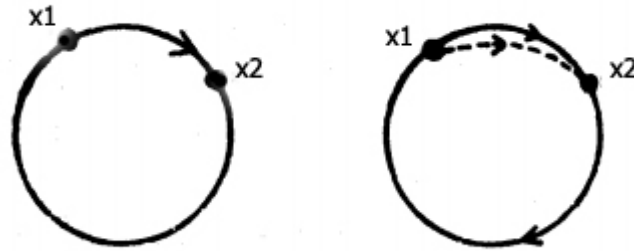
### ۴.۶.۱ گروه $SO(n, R)$

مجموعه دوران‌های یک دایره حول محوری که برصفحه دایره عمود است و از مرکز آن می‌گذرد را در نظر بگیرید هر عضو این مجموعه می‌تواند توسط یک پارامتر مشخص شود که می‌توان آن را زاویه‌ی دوران  $\phi$  انتخاب کرد که مقادیر  $[0, 2\pi]$  را می‌گیرد. واضح است که این گروه یک گروه لی یک پارامتری پیوسته همبند آبلی و فشرده است که به گروه دوران محوری معروف

<sup>11</sup>Orthogonal Group

<sup>12</sup>Orthogonal

است و با  $SO(n)$ <sup>۱۳</sup> نمایش داده می‌شود، دوران به اندازه  $\phi$  با دوران  $\phi + 2\pi n$  یکسان است، این گروه را هم‌بند نامتناهی می‌گوییم زیرا تعداد بی‌نهایت مسیر وجود دارد که هر دو عضو از گروه را که نمی‌توان با تغییر شکل پیوسته بدون این که از فضا خارج شد به یکدیگر منطبق کرد به هم وصل می‌کند، مسیری که دایره را  $n$  بار دور می‌زند با مسیری که  $n + 1$  بار دور می‌زند یکسان نیست (شکل ۲.۱ را ببینید) [۵].



شکل ۲.۱: گروه هم‌بند نامتناهی

<sup>13</sup>Special Orthogonal Group

## فصل ۲

### روش حل پذیر شبه دقیق

## ۱.۲ بررسی روش حل پذیر شبه دقیق تحت تقارن دینامیکی

### گروه $SL(2)$

#### ۱.۱.۲ مقدمه

از گذشته‌های دور محاسبه‌ی جواب‌های دقیق مسائل و معادلات موجود در علوم مختلف بسیار مشکل بوده است. جستجو برای یافتن جواب‌های دقیق معادلات موج همواره از موضوعات مهم فیزیکدانان از ابتدای پیدایش مکانیک کوانتومی نسبی و غیرنسبی بوده است. در دهه‌های اخیر استفاده از روش‌های ریاضی در فیزیک بیشتر از گذشته ذهن فیزیکدانان را به خود معطوف کرده است یکی از ابزارهای سودمند در تعیین پاسخ‌های طیف ویژه‌مقادیر مدل‌های کوانتومی بهره‌گیری از روش جبر عملگری می‌باشد.

براین اساس در سال‌های ابتدایی دهه ۸۰ میلادی رده‌ی جدیدی از پتانسیل‌ها که حالت بینابین مسائل حل پذیر دقیق و مسائل بدون پاسخ می‌باشند توسط رضوی<sup>۱</sup> و سینگ-رمپال-بایاس-داتا<sup>۲</sup> مطرح شد، که در این مسائل تنها بخش متناهی از طیف آنها و نه طیف کامل، قابل محاسبه توسط روش‌های جبری است به همین دلیل اینگونه مسائل را حل پذیر شبه دقیق ( $QES$ )<sup>۳</sup> می‌نامند. اصطلاح حل پذیر شبه دقیق برای چنین سیستم‌هایی برای اولین بار توسط توربینر<sup>۴</sup> و اشوریدز<sup>۵</sup> در سال ۱۹۸۷ پیشنهاد شد. معمولاً مبنای حل پذیری شبه کامل یک سیستم کوانتومی وجود یک ساختار جبر لی نهفته<sup>۶</sup> در سیستم می‌باشد در مورد مسائل حل پذیر دقیق سیستم دارای تقارن کامل است و ماتریس هامیلتونین سیستم به طور کامل قابل قطری کردن است. مثال‌های مشهور از این دسته در یک بعد نوسانگر هماهنگ ساده، نوسانگر هماهنگ با سد گریز از مرکز<sup>۷</sup>، پتانسیل مورس<sup>۸</sup>، پتانسیل پاشل-تلا<sup>۹</sup> و . . . می‌باشند. اما در مورد مسائل حل پذیر شبه دقیق وضع به این گونه نیست. در این دسته از مسائل در شکل عملگری هامیلتونین سیستم جبر نهفته‌ای وجود دارد که مارا مطمئن می‌سازد که حداقل بخش متناهی از طیف سیستم قابل محاسبه است. به این ترتیب با قطری کردن قسمت متناهی از ماتریس هامیلتونین سیستم بخشی از ویژه‌مقادیر و ویژه توابع تعیین می‌شوند. تعداد هامیلتونین‌های حل پذیر دقیق در مکانیک کوانتومی محدود می‌باشند و این تعداد کم قادر به پاسخ‌گویی نیازهای مختلف در مکانیک کوانتومی نمی‌باشد.

<sup>1</sup>Razavy

<sup>2</sup>Singh-Rampal-Biawas-Datta

<sup>3</sup> Quasi Exactly Solvable

<sup>4</sup>Turbiner

<sup>5</sup>Ushveridze

<sup>6</sup>Hidden Lie algebra

<sup>7</sup>Harmonic oscillator plus centrifugal barrier

<sup>8</sup>Morse potential

<sup>9</sup>Pöschl-Teller potential



مدل‌های حل پذیر شبه کامل از دو دیدگاه جبری (تقریب بر اساس تقارن دینامیکی<sup>۱۰</sup> نهفته در هامیلتونین سیستم) و تحلیلی مورد بررسی قرار می‌گیرند. روش کار در دیدگاه جبری که بر اساس نمایش‌های با ابعاد متناهی از جبر لی می‌باشد، به این صورت

$$H = c_{ab}T^aT^b + \sigma c_a T^a + const \quad (1.2)$$

است که در آن  $c_a$  و  $c_{ab}$  ضرایب ثابت و  $T^a$  مولدهای جبر مورد نظر هستند. در این صورت هامیلتونین سیستم قابل حل خواهد بود زیرا با اثر عملگری مولدها بر فضای نمایش با ابعاد متناهی از جبر های لی فضای مورد نظر ناورد می‌ماند. بنابراین می‌توان چنین نتیجه گرفت که در بررسی مسائل حل پذیر شبه دقیق از دیدگاه جبری وجود یک ترکیب نهفته جبر لی و به تبع آن وجود یک زیر فضای ناوردای  $w$  با ابعاد متناهی، مبنای حل پذیری شبه دقیق سیستم می‌باشد یعنی اگر  $\psi \in w$  باشد آنگاه  $H\psi \in w$  است. توربینر به بررسی جدی و عمیق ارتباط بین معادله دیفرانسیل عملگرهای حل پذیر شبه دقیق و فضای نمایش جبر لی در یک بعد پرداخت و نتایج تحقیقات خود را در مقاله‌ای تحت عنوان معادلات دیفرانسیل حل پذیر شبه دقیق در سال ۱۹۹۴ منتشر کرد [۶] لازم به ذکر است که قبل از توربینر در سال ۱۹۸۴ ارتباط بین معادلات دیفرانسیل حل پذیر شبه دقیق و نمایش‌های متناهی از جبر لی  $SL(2)$  برای اولین بار توسط زاسلاوسکی<sup>۱۱</sup> و اولیانوف<sup>۱۲</sup> مطرح شده [۷، ۸، ۹].

## ۲.۱.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول حل پذیر شبه دقیق

در این روش ارتباط بین جبر لی و معادلات دیفرانسیل خطی در یک بعد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. عملگرهای دیفرانسیلی مرتبه اول را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۶، ۸، ۹، ۱۰]:

$$J_a = \sum_{i=1}^n A_{ai}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + B_a(x) \quad (2.2)$$

که  $A$  و  $B$  در رابطه‌ی (۲.۲) توابعی از  $x$  می‌باشند.

تعریف ۱: اگر عملگر دیفرانسیلی مرتبه  $m$  ام  $T_m(x, dx)$  را بر فضای چند جمله‌ای  $P_n(x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$  اثر بدهیم در صورتی که در رابطه‌ی نامتناهی  $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots \subset P_n$  صدق کند، در این صورت عملگر  $T_m(x, dx)$  حل پذیر شبه دقیق نامیده می‌شود. قضیه ۱: الف) با فرض  $n > m - 1$  می‌توان عملگر حل پذیر شبه دقیق  $T_m(x, dx)$  را به صورت چند جمله‌ای مرتبه  $m$  ام از عملگرهای زیر نوشت [۶]:

$$J_n^+ = x^2 d_x - nx \quad (3.2)$$

<sup>10</sup>Dynamical symmetry

<sup>11</sup>Zaslavskii

<sup>12</sup>Ulyanov

$$J_n^\circ = x d_x - \frac{n}{x} \quad (4.2)$$

$$J_n^- = d_x \quad (5.2)$$

این عملگرها در رابطه‌های جابه جایی جبر  $SL(2)$  به صورت زیر صدق می‌کنند:

$$[J^+, J^\circ] = -2J^\circ \quad (6.2)$$

$$[J^\pm, J^\circ] = \pm J^\pm \quad (7.2)$$

و همچنین اگر  $n < m - 1$  باشد در این صورت قسمتی از عملگر حل پذیر شبه دقیق  $T_m$  شامل مشتقات دیفرانسیلی تا مرتبه  $n$  می‌شود به صورت چندجمله‌ای‌های مرتبه‌ی  $n$  از مولدهای رابطه (۱.۲) بیان می‌شود.

ب) عکس این تعریف هم صادق است، یعنی هر چندجمله‌ای از مولدهای رابطه‌ی (۳.۲) تا (۵.۲) یک عملگر حل پذیر شبه دقیق است.

ج) در حالت کلی هر عملگر حل پذیر دقیق حالت حدی خاصی از عملگر حل پذیر شبه دقیق است:  $E_m \subset T_m$

### ۳.۱.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم حل پذیر شبه دقیق

معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم در علم فیزیک و سایر شاخه‌های علوم از اهمیت بسیاری برخوردارند. ویژه‌مقادیر عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم  $T_m(x, dx)$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_m(x, dx)\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x) \quad (8.2)$$

با توجه به قضیه ۱ معادله‌ی دیفرانسیل حل پذیر شبه دقیق بر حسب مولدهای جبرلی  $SL(2)$  در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$T_\gamma = c_{++}J_n^+J_n^+ + c_{+0}J_n^+J_n^\circ + c_{+-}J_n^+J_n^- + c_{0-}J_n^\circ J_n^- + c_{--}J_n^-J_n^- + \quad (9.2)$$

$$c_+J_n^+ + c_0J_n^\circ + c_-J_n^- + c$$

که  $c \in R$  و  $c_\alpha$  و  $c_{\alpha\beta}$  می‌باشند. از جایگذاری شکل دیفرانسیلی مولدهای رابطه (۳.۲) تا (۵.۲) در رابطه‌های (۸.۲) و (۹.۲) شکل کلی عملگر حل پذیر شبه دقیق زیر به دست می‌آید:

$$-P_\#(x)d_x^\# \varphi(x) + P_\#(x)d_x \varphi(x) + P_\#(x)\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x) \quad (10.2)$$

که  $P_j(x)$ ها چند جمله‌ای مرتبه  $j$  از متغیر  $x$  و با ضرایبی شامل  $c$ ،  $c_\alpha$  و  $c_{\alpha\beta}$  می‌باشند. معادله‌ی فوق در حالت کلی دارای  $(n+1)$  ویژه‌تابع مستقل خطی می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع جدید  $\psi(z) = \varphi(x)e^{-A(z)}$  که  $A$  یک تابع حقیقی مشخص است.

$$A = \int \frac{P_f}{P_f} dx - \log z', \quad z = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{P_f}} \quad (11.2)$$

به این ترتیب با دنبال کردن مراحل فوق ویژه‌تابع و ویژه مقادیر مربوط به معادلات به دست [۶].

## ۲.۲ بررسی ذرات نسبیتی با روش حل پذیر شبه دقیق

### ۱.۲.۲ توصیف ذرات نسبیتی

از نظر فیزیکی برای بررسی ذرات نسبیتی می‌توان گفت، انرژی کل این ذرات به مراتب بزرگ‌تر از انرژی سکون می‌باشد. ذرات نسبیتی بسته به اسپینشان با معادله‌های دیراک<sup>۱۳</sup>، کلاین-گوردون<sup>۱۴</sup> و دافین-کمر-پتیا<sup>۱۵</sup> توصیف می‌شوند [۱۱]. همه‌ی ذرات بنیادی در دو دسته فرمیون‌ها<sup>۱۶</sup> و بوزون‌ها<sup>۱۷</sup> تقسیم بندی می‌شوند. فرمیون‌ها از اصل طرد پائولی پیروی می‌کنند که می‌گوید هیچ دو فرمیونی نمی‌توانند تابع موج یکسانی داشته باشند. فرمیون‌ها از آمار فرمی دیراک و بوزون‌ها از آمار بوز-انیشترین<sup>۱۸</sup> تبعیت می‌کنند. رابطه‌ی مشهودی بین اندازه حرکت مداری ذاتی یا اسپین ذره و آمار حاکم بر آن وجود دارد. اسپین با عدد کوانتومی  $S$  مشخص می‌شود و این کمیت برای فرمیون‌ها مقداری نیمه صحیح ( $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ) و برای بوزون‌ها مقداری صحیح ( $0, 1, 2, \dots$ ) می‌باشد.

### ۲.۲.۲ روش حل پذیر شبه دقیق در بررسی فرمیون‌های نسبیتی

#### معادله دیراک

معادله دیراک یک معادله‌ی موج نسبیتی است که در سال ۱۹۲۸ توسط یک فیزیکدان بریتانیایی پائول دیراک<sup>۱۹</sup> به دست آمد که برهمکنش‌های الکترومغناطیسی تمام ذرات دارای اسپین  $\frac{1}{2}$

<sup>13</sup>Dirac

<sup>14</sup>Klein-Gordon

<sup>15</sup>Duffin-Kemmer-Petiau

<sup>16</sup>fermions

<sup>17</sup>bosons

<sup>18</sup>Bose-Einstein condensate

<sup>19</sup>Paul Dirac

مانند الکترون و کوارک‌ها را توصیف می‌کند، تقارن پارته در آن حفظ می‌شود و سازگار با دو اصل مکانیک کوانتومی و نظریه‌ی نسبیت خاص است [۱۲].

### معادله دیراک در حضور پتانسیل هایپر بولیگی

برای بررسی این سیستم معادله دیراک مستقل از زمان را برای یک فرمیون با جرم  $m$  در حال حرکت در پتانسیل برداری<sup>۲۰</sup>  $V(x)$  و یک پتانسیل اسکالر<sup>۲۱</sup>  $S(x)$  به فرم زیر در نظر می‌گیریم [۱۲]:

$$[\alpha \cdot P + \beta(m + S(x)) + V(x)]\psi_n = E\psi_n \quad (12.2)$$

که  $E$  و  $P = -i\vec{\nabla}$  به ترتیب انرژی نسبیتی سیستم و اپراتور اندازه حرکت در سه بعد است و همچنین  $\alpha$  و  $\beta$  ماتریس‌های دیراک  $4 \times 4$  به صورت رابطه‌ی زیر هستند

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \circ & \sigma_i \\ \sigma_i & \circ \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & \circ \\ \circ & -I \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (13.2)$$

که با استفاده از ماتریس‌های پائولی و یکه نمادگذاری شده اند. اگر معادله (۱۲.۲) را به صورت مجموعه معادلات آن باز کنیم سپس با در نظر گرفتن در راستای  $x$  و برابر قراردادن  $V(x) = S(x)$  داریم:

$$[\alpha_x \cdot P_x + \beta m + V(x) + \beta] \psi_n = E \psi_n \quad (14.2)$$

که مولفه‌های تابع موج دیراک می‌توانند با توجه به عدد کوانتومی  $n$  به صورت زیر نوشته شوند

$$\psi_n(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (15.2)$$

که  $\psi_1(x)$  مولفه بالایی و  $\psi_2(x)$  مولفه پایینی اسپینورهای دیراک هستند. با جایگذاری معادله (۱۵.۲) در معادله (۱۲.۲) معادلات جفت شده‌ی زیر به دست می‌آید

$$(\sigma_x P_x) \psi_2(x) = -(m + 2V - E) \psi_1(x) \quad (16.2)$$

$$(\sigma_x P_x) \psi_1(x) = (m + E) \psi_2(x) \quad (17.2)$$

در نتیجه با حذف  $\psi_1(x)$  از معادله (۱۷.۲) و حذف  $\psi_2(x)$  از معادله (۱۶.۲) به معادلات غیر جفت شده‌ی زیر بر حسب مولفه پایینی و بالایی اسپینورهای دیراک می‌رسیم

<sup>20</sup>vector potential

<sup>21</sup>Scalar potential

$$[(\sigma_x P_x)^2 + (E + m)(m + 2V - E)]\psi_1 = 0 \quad (18.2)$$

$$[(\sigma_x P_x)^2 + (E + m)(m + 2V - E)]\psi_2 = 0 \quad (19.2)$$

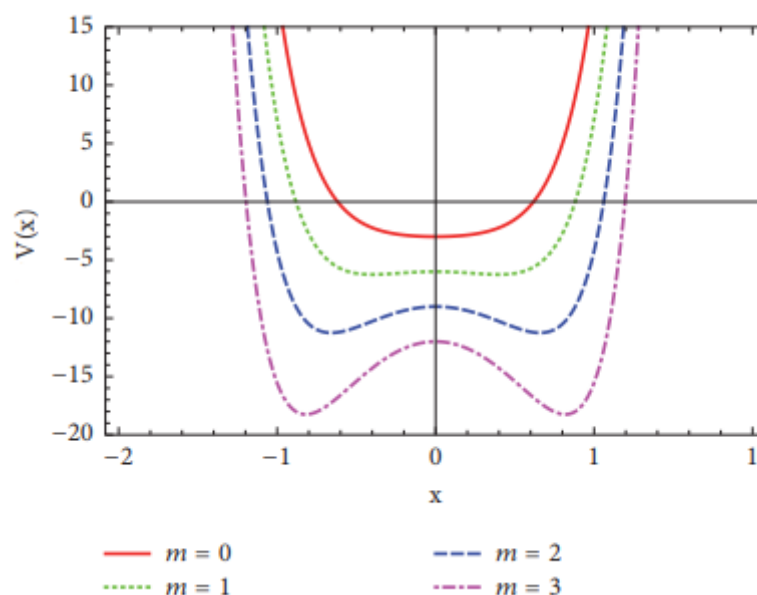
که از دو رابطه‌ی (۱۸.۲) و (۱۹.۲) نتیجه می‌شود که  $\psi_2(x) = \psi_1(x)$  است، در نتیجه به فرم دیفرانسیلی زیر می‌رسیم:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - (E + m)(m + 2V - E)\right]\psi(x) = 0 \quad (20.2)$$

با در نظر گرفتن پتانسیلی به شکل زیر [۱۳]:

$$V = a^2 \sinh^2 x - k \tanh^2 x \quad (21.2)$$

که روند تغییرات پتانسیل بر حسب  $x$  در شکل ۱.۲ آورده شده است.



شکل ۱.۲: پتانسیل هایپربولیکی بر حسب  $x$  به ازای  $k = 0, 1, 2, 3$  و  $a = 0.2$ .

با مقایسه‌ی رفتار توابع موج بدست آمده از بررسی سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی در حضور این پتانسیل که در ادامه به آن می‌پردازیم نتایج بسیار جالب و قابل توجهی را در اختیار ما قرار داد که منجر به این شد تا این پتانسیل را انتخاب کنیم.

با تغییر متغیر  $\cosh^2 x = Z$  هامیلتونی به فرم زیر به دست می‌آید:

$$H = 4(Z^2 - Z)\frac{d^2}{dZ^2} + 4(Z - 2)\frac{d}{dZ} + (E^2 - m^2 - 2(a^2(Z - 1) - K\frac{(Z - 1)}{Z}))(E + m) \quad (22.2)$$

مطابق با نظریه‌ی مشهور حل‌پذیری شبه دقیق [۶، ۸، ۹، ۱۰] تبدیل پیمانهای موهومی زیر را در معادله‌ی (۲۲.۲) اعمال می‌کنیم:

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(x)EXP(-A(x)) \quad (23.2)$$

که  $A(x)$  تابع پیمانهای است و در سیستم‌های فیزیکی عامل فاز  $EXP(-A(x))$  مسئول رفتار مجانبی تابع موج برای شرط بهنجارپذیری می‌باشد. در نتیجه با استفاده از روابط (۱۰.۲) و (۱۱.۲) به فرم زیر می‌رسیم:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{Z(Z-1)}}EXP(-\log\sqrt{4(Z^3 - Z^2)})\tilde{\psi}(x) \quad (24.2)$$

با توجه به روابط زیر:

$$P_4 = C_{++}Z^4 + C_{+0}Z^3 + C_{+-}Z^2 + C_{0-}Z + C_{--}, \quad (25.2)$$

$$P_4 = C_{++}(2 - 2n)Z^3 + (C_+ + C_{+0}(1 - \frac{3n}{4}))Z^2 + (C_0 - nC_{+-})Z + (C_- - \frac{n}{4}C_{0-}), \quad (26.2)$$

$$P_4 = C_{++}n(n-1)Z^2 + (\frac{n^2}{4}C_{+0} - nC_+)Z + (C_- - \frac{n}{4}C_0) \quad (27.2)$$

و با مقایسه‌ی روابط بالا با رابطه‌ی (۱۰.۲) می‌توان ثوابت زیر را به دست آورد.

$$C_{++} = C_{0-} = C_{--} = 0, \quad C_{+0} = 4, \quad (28.2)$$

$$C_{+-} = -4, \quad C_+ = 6n, \quad C_0 = -2(1 + 2n), \quad (29.2)$$

$$C_- = 0, C = -2k(E + m) + n + 2n^2, \quad (E^2 - m^2 + 2(E + m)) = 2n^2 + nC_+. \quad (30.2)$$

با استفاده از روابط (۲۹.۲) تا (۳۰.۲) انرژی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$E_n = (a^2 + k) \pm \frac{1}{4}\sqrt{4(a^2 + k)^2 + 4m^2 - 8m(k + a^2) + 32n^2} \quad (31.2)$$

باید در نظر داشته باشیم که جمله‌ی زیر رادیکال یک اتحاد است که می‌توان انرژی را به فرم زیر هم نوشت

$$E_n = (a^2 + k) \pm \frac{1}{4}\sqrt{(2(a^2 + k) - 2m)^2 + 32n^2}$$

همچنین با در نگرفتن مقدار  $n = 0$  زیر رادیکال مقداری مثبت می‌شود در نتیجه انرژی نیز همواره مثبت خواهد بود. سپس با جایگذاری روابط به دست آمده در هامیلتونی رابطه (۹.۲) داریم:

$$\tilde{H} = [4(Z^3 - Z^2) \frac{d^2}{dZ^2} + (4Z^2 - 4nZ^2 + 4nZ + 6nZ^2 - 2Z - 4nZ) \frac{d}{dZ} + (-4n^2Z - 2(E+m)k + n + 2n^2)] \quad (32.2)$$

رابطه‌ی فوق به صورت زیر بر حسب مولدهای جبر  $SL(2)$  بازنویسی می‌شود:

$$\tilde{H} = 4J_n^+ J_n^0 - 4J_n^+ J_n^- + 6nJ_n^+ - 2(1 + 2n)J_n^0 - 2k(E+m) + n + 2n^2 \quad (33.2)$$

و همچنین  $\tilde{\psi}$  در رابطه‌ی (۲۵.۲) به فرم زیر است:

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=0}^N a_n Z^n \quad (34.2)$$

در نتیجه با قراردادن سری فوق به ازای مقادیر زیر برای  $n$  داریم:  
 ۱- به ازای  $n = 0$  مقدار  $\tilde{\psi} = a_0$  را در رابطه‌ی (۳۳.۲) جایگذاری می‌کنیم و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم.

$$(-2(E+m)k)a_0 = 0 \quad a_0 \neq 0. \quad (35.2)$$

در نتیجه تابع موج به ازای  $n = 0$  به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{Z(Z-1)}} \text{EXP}(-\log \sqrt{4(Z^3 - Z^2)}) a_0. \quad (36.2)$$

۲- به ازای  $n = 1$  مقدار  $\tilde{\psi} = a_0 + a_1 Z$  را در رابطه‌ی (۳۳.۲) جایگذاری می‌کنیم و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم.

$$\begin{pmatrix} -2(E+m)k + 3 & 0 \\ -4 & -2(E+m)k + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (37.2)$$

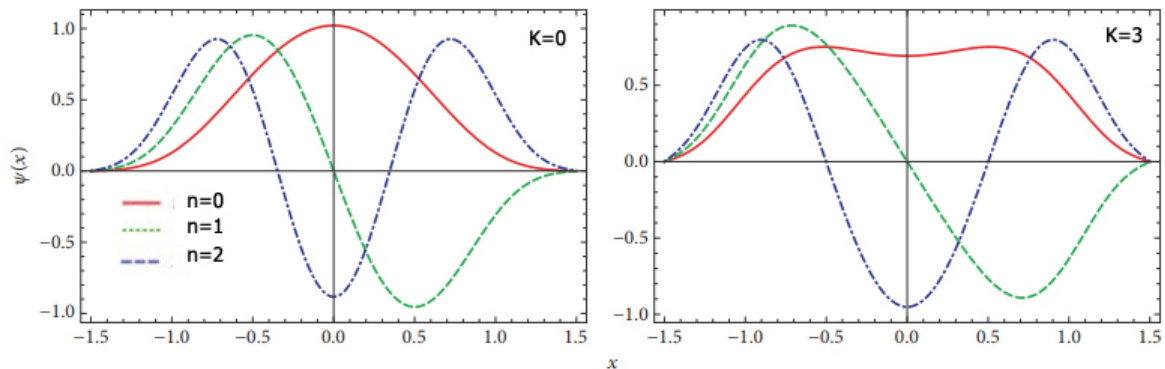
که

$$a_1 = \frac{4}{3 - 2(E+m)} a_0 \quad (38.2)$$

در نتیجه تابع موج به ازای  $n = 1$  به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{Z(Z-1)}} \text{EXP}(-\log\sqrt{4(Z^3 - Z^2)})(1 + \frac{4}{3 - 2(E+m)k}Z) \quad (39.2)$$

سپس رسم‌هایی از رفتار تابع موج بر حسب  $x$  برای مقادیر متفاوتی از  $m$  در شکل ۲.۲ آورده شده است.



شکل ۲.۲: تابع موج به ازای  $n = 0, 1, 2$  بر حسب  $x$  با  $k = 0$  و  $k = 3$  و  $a = \pi/2$ .

### فرمیون‌های با اسپین $\frac{1}{2}$ در فضا زمان خمیده

معادله دیراک در فضا زمان خمیده به صورت زیر نوشته می شود [۱۲]

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu) - M]\Psi(r, t) = 0, \quad (40.2)$$

$\gamma^\mu$  ماتریس‌های دیراک تعمیم یافته می باشند و از رابطه زیر پیروی می کنند

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (41.2)$$

که در آن  $\Gamma_\mu$  اتصال دهنده‌های اسپینوری آفین  $\gamma^\mu$  هستند.

$$\Gamma_\mu = \frac{-1}{8} \omega_{\mu ab} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (42.2)$$

$\gamma^a$  ماتریس‌های دیراک استاندارد در فضا زمان مینکوفسکی تخت هستند و  $\omega_{\mu ab}$  اتصال دهنده‌های اسپینی می باشند که از رابطه زیر محاسبه می شوند

$$\omega_{\mu ab} = \eta_{ac} e_\nu^c e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu - \eta_{ac} e_b^\nu \partial_\mu e_\nu^c, \quad (43.2)$$



در رابطه (۴۳.۲)  $(\mu, \nu) = (0, 1, 2, 3)$  و  $(a, b) = (0, 1, 2, 3)$  هستند. اتصال دهنده‌های اسپینی امکان انتقال در یک فضا زمان خمیده از یک نقطه با مختصات موضعی به نقطه با مختصات موضعی جدید را فراهم می‌آورند.  $\Gamma_{\sigma\mu}^{\nu}$  نمادهای کریستوفل نوع دوم می‌باشند و از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$\Gamma_{ij}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left\{ \frac{\partial g_{\nu i}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^{\nu}} \right\}, \quad (44.2)$$

که در رابطه (۴۴.۲)  $q^i$  مختصات یک نقطه یعنی  $(q^1, q^2, q^3)$  می‌باشند.  $\gamma^{\mu}$  ماتریس‌های تعمیم‌یافته دیراک هستند که می‌توانند بر حسب ماتریس‌های استاندارد دیراک نوشته شوند

$$\gamma^{\mu}(x) = e_a^{\mu} \gamma^a, \quad (45.2)$$

که در رابطه (۴۵.۲)  $\gamma^a = (\gamma^0, \gamma^i)$  و  $(i = 1, 2, 3)$  هستند. با استفاده از ماتریس‌های تبدیل  $e_a^{\mu}$  و  $e_{\mu}^a$  می‌توان به ترتیب از یک دستگاه مختصات موضعی تعمیم یافته در فضای خمیده به فضای تخت و برعکس انتقال پیدا کرد. بین این ماتریس‌های تبدیل رابطه زیر وجود دارد

$$\eta^{ab} e_b^{\mu} e_{\mu}^{\nu} = g^{\mu\nu} \quad (46.2)$$

که  $\eta^{ab}$  تانسور ریمان است.

## فرمیون‌های با اسپین $\frac{1}{2}$ در متریک استوانه‌ای دوار تحت پتانسیل‌های اسکالر و برداری

المان طول توصیف کننده فضا زمان را به فرم زیر انتخاب می‌کنیم

$$ds^2 = -(dt + \alpha \Omega r^2 d\varphi)^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (47.2)$$

که در آن  $-\infty < z < \infty$  و  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  و  $r \geq 0$  هستند. معادله دیراک در فضا زمان خمیده ریسمان کیهانی<sup>۲۳</sup> در حضور پتانسیل‌های اسکالر  $S(r)$  و برداری  $A_{\mu} = (V(r), 0, 0, 0)$  به صورت زیر نوشته می‌شود

$$[i\gamma^{\mu}(\nabla_{\mu} + ieA_{\mu}) - (M + S(r))]\Psi(r, t) = 0 \quad (48.2)$$

که مشتق هموردا به صورت  $\nabla_{\mu} = (\partial_{\mu} + \Gamma_{\mu})$  می‌باشد و  $M$  جرم فرمیون است. با توجه به روابط (۴۱.۲) تا (۴۶.۲) ماتریس‌های انتقال به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸]

$$e_{\mu}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha\Omega r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_a^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Omega r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49.2)$$

از طرفی با توجه به رابطه (۴۷.۲) داریم

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\alpha\Omega r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha\Omega r^2 & 0 & \alpha^2 r^2 - \alpha^2 \Omega^2 r^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (50.2)$$

به همین ترتیب اتصال دهنده‌های اسپینوری آفین به فرم زیر به دست می‌آیند

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} \frac{i\Omega}{\sqrt{r}} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \frac{i\Omega}{\sqrt{r}} \sigma^3 \end{pmatrix} \quad (51.2)$$

$$\Gamma_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{i\alpha}{\sqrt{r}} (r^2 \Omega^2 - 1) \sigma^3 & 0 \\ 0 & \frac{i\alpha}{\sqrt{r}} (r^2 \Omega^2 - 1) \sigma^3 \end{pmatrix} \quad (52.2)$$

$$\Gamma_r = O_{4 \times 4}, \quad \Gamma_z = O_{4 \times 4} \quad (53.2)$$

در نتیجه با قراردادن روابط فوق در رابطه‌ی (۴۹.۲) و انتخاب تابع موج به فرم زیر

$$\Psi(t, r, \varphi) = EXP(-iEt + im\varphi) \begin{pmatrix} \psi(r) \\ \chi(r) \end{pmatrix} \quad (54.2)$$

معادلات زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned} & (E - \frac{\Omega}{\sqrt{r}} \sigma^3 - V(r) - (M + S(r)))\psi(r) + (r\Omega\sigma^2 V(r) - r\Omega\sigma^2 E + \\ & - \frac{m\sigma^2}{r\alpha} + \frac{1}{\sqrt{r}} \sigma^2 \sigma^3 + i\sigma^1 \frac{\partial}{\partial r})\chi(r) = 0 \end{aligned} \quad (55.2)$$

$$\begin{aligned} & (E - \frac{\Omega}{\sqrt{r}} \sigma^3 - V(r) + (M + S(r)))\chi(r) + (r\Omega\sigma^2 V(r) - r\Omega\sigma^2 E + \\ & - \frac{m\sigma^2}{r\alpha} + \frac{1}{\sqrt{r}} \sigma^2 \sigma^3 + i\sigma^1 \frac{\partial}{\partial r})\psi(r) = 0 \end{aligned} \quad (56.2)$$

با نوشتن یک عامل برحسب دیگری و درنظر گرفتن حالتی که پتانسیل اسکالر با برداری برابر است داریم:

$$\begin{aligned} & \psi''(r) + [E^2 - M^2 - 2E\Omega\sigma^3 + \frac{\Omega^2}{r} - 2(M + E)V(r) + 2\Omega\sigma^3 V(r) \\ & - \frac{2m}{\alpha} \Omega(E - V(r)) + \Omega\sigma^3 V(r) - (\frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{m}{\alpha} \sigma^2 + \frac{1}{r^2}) \frac{1}{r^2} \\ & - (E^2 + V^2(r) - 2EV(r))r^2 \Omega^2] \psi(r) = 0 \end{aligned} \quad (57.2)$$

معادله (۵۸.۲) را با اعمال دو پتانسیل به فرم‌های زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱. در این حالت پتانسیل اسکالر و برداری را صفر در نظر می‌گیریم:

$$V(r) = S(r) = 0 \quad (58.2)$$

با قراردادن رابطه (59.2) در رابطه (58.2) به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - E^2 \Omega^2 r^2 - \frac{(ms - \frac{1}{c})^2}{r^2} + (E^2 - M^2 - 2E\Omega s + \frac{\Omega^2}{c} - \frac{2mE\Omega}{\alpha}) \right\} \psi(r) = 0 \quad (59.2)$$

همچنین می‌توان رابطه (60.2) را به فرم زیر بازنویسی کرد

$$\psi''(r) + (\lambda_1 r^2 + \frac{\lambda_2}{r^2} + \lambda_3) \psi(r) = 0 \quad (60.2)$$

که در رابطه فوق  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$  و  $\lambda_3$  به صورت زیر انتخاب شده‌اند

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -E^2 \Omega^2 \\ \lambda_2 &= -\left(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{c}\right)^2 \\ \lambda_3 &= E^2 - M^2 - 2E\Omega s + \frac{\Omega^2}{c} - \frac{2m\Omega E}{\alpha} \end{aligned} \quad (61.2)$$

همچنین با نوشتن معادله‌ی (61.2) به صورت زیر می‌بینیم که فرمی مشابه با فرم معادلات دیفرانسیل روش نیکوورف اووارف [19] دارد

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \frac{1}{z^2} \left( \frac{\lambda_1}{c} z^2 + \frac{\lambda_2}{c} + \frac{\lambda_3}{c} z \right) \right\} \psi(z) = 0 \quad (62.2)$$

در نتیجه مطابق با این روش تابع موج به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Psi(r, t) = r^{\left|\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{c}\right|} e^{(-iEt - \frac{|E\Omega|}{c} r^2)} L_n^{\left|\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{c}\right|} (|E\Omega| r^2) \quad (63.2)$$

و همچنین با استفاده از روابط مربوط به این روش به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$2|E\Omega|(\nu n + 1) - (E^2 - M^2 - 2E\Omega s + \frac{\Omega^2}{c} - \frac{2m\Omega E}{\alpha}) + 2|E\Omega| \left| \frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{c} \right| = 0 \quad (64.2)$$

در نتیجه از رابطه‌ی (65.2) به ازای  $E > 0$  انرژی به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= \frac{1}{c\alpha} (2m\Omega(s+1) + \alpha\Omega(1 + 4n + 2s)) \\ &+ \sqrt{(2m(s+1) + \alpha(1 + 4n + 2s))^2 \Omega^2 + \alpha^2 (4M^2 - \Omega^2)}, \end{aligned} \quad (65.2)$$

و می بینیم که در حالت حدی زمانی که  $m = 0$  باشد رابطه (۶۶.۲) به فرم زیر تبدیل می شود

$$E_{n,0} = \frac{1}{2\alpha} (\alpha\Omega(1 + 4n + 2s) + \sqrt{(\alpha(1 + 4n + 2s))^2 \Omega^2 + \alpha^2(4M^2 - \Omega^2)}), \quad (66.2)$$

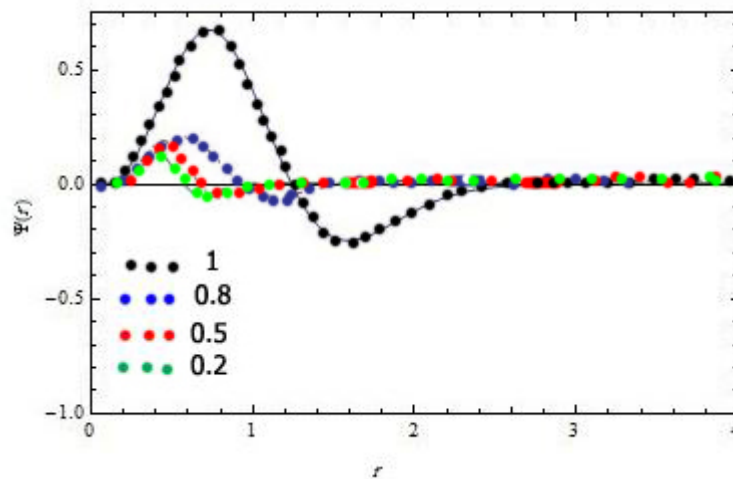
همچنین رابطه‌ی (۶۵.۲) به ازای  $E < 0$  به صورت زیر خواهد بود

$$E_{n,m} = \frac{1}{2\alpha} (2m\Omega(s-1) - \alpha\Omega(1 + 4n + 2s) + \sqrt{(2m(s-1) + \alpha(1 + 4n + 2s))^2 \Omega^2 + \alpha^2(4M^2 - \Omega^2)}), \quad (67.2)$$

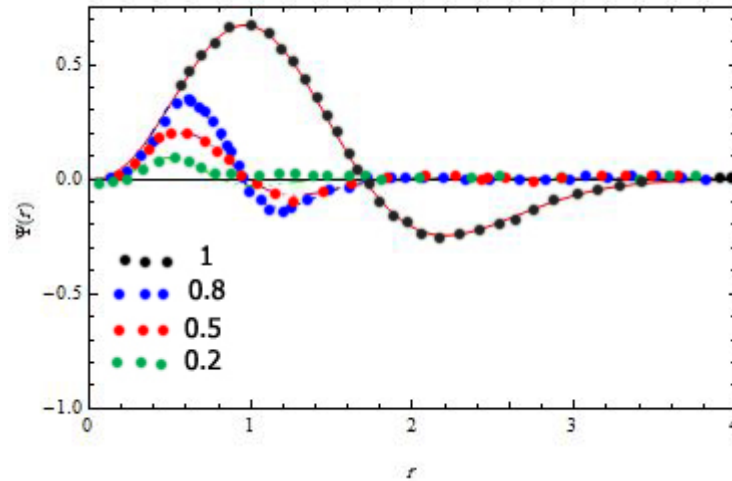
در حالت حدی زمانی که  $m = 0$  باشد رابطه (۶۷.۲) به فرم زیر تبدیل می شود

$$E_{n,0} = \frac{1}{2\alpha} (-\alpha\Omega(1 + 4n + 2s) + \sqrt{(\alpha(1 + 4n + 2s))^2 \Omega^2 + \alpha^2(4M^2 - \Omega^2)}) \quad (68.2)$$

از طرفی تغییرات تابع موج رابطه‌ی (۶۴.۲) برحسب  $r$  برای حالتی که انرژی مثبت است در شکل ۳.۳ و برای حالتی که انرژی منفی است در شکل ۴.۳ رسم شده است.



شکل ۳.۲: تغییرات تابع موج برحسب  $r$  به ازای  $n = 1$  و  $\Omega = 1, 0.8, 0.5, 0.2$  و  $E > 0$  برای  $m = 1/5$  و  $\alpha = 0.9$



شکل ۴.۲: تغییرات تابع موج بر حسب  $r$  به ازای  $n = 1$  و  $\Omega = 1, 0.8, 0.5, 0.2$  و  $E < 0$  برای  $m = 1/5$  و  $\alpha = 0.9$

۲. در حضور پتانسیل کولنی:  
پتانسیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$V(r) = \frac{a}{r}, \quad (۶۹.۲)$$

در رابطه فوق  $a$  پارامتری ثابت است و فرم پتانسیل به صورت کولنی است با قرار دادن در رابطه‌ی (۵۸.۲) به فرم دیفرانسیلی زیر می‌رسیم

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - E^2 \Omega^2 r^2 + 2E\Omega ar + (E^2 - M^2 - 2E\Omega s + \frac{\Omega^2}{4} + \frac{2m}{\alpha}E\Omega - \Omega^2 a^2)\right) + ((2\Omega + 1)sa + \frac{2m}{\alpha}a\Omega - 2(M + E)a)\frac{1}{r} + \left(\frac{m}{\alpha}s - \frac{m^2}{\alpha^2} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{r^2}\psi(r) = 0 \quad (۷۰.۲)$$

مشابه با (۲۴.۲) تبدیل پیمانه‌ای زیر را اعمال می‌کنیم:

$$\psi(r) = G.\tilde{\psi}(r) \quad (۷۱.۲)$$

که  $G = e^A$  است و  $A$  به صورت رابطه‌ی (۷۲.۲) به دست می‌آید

$$A = (\Omega ar + \frac{E\Omega r^2}{2} - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{4})^2})\ln r). \quad (۷۲.۲)$$

با توجه به رابطه‌ی زیر

$$\tilde{H} = G^{-1}.H.G \quad (۷۳.۲)$$

به فرم جدیدی برای هامیلتونی می‌رسیم که به صورت رابطه (۷۴.۲) نوشته شده است.

$$\begin{aligned} \tilde{H} \equiv & r \frac{d^2}{dr^2} + (2\Omega ar - 2E\Omega r^2 - 1 + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{4})^2}) \frac{d}{dr} + \\ & (E\Omega + \Omega^2 a^2 + E\Omega(-1 + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{4})^2}) + E^2 - M^2 \\ & - 2E\Omega s + \frac{\Omega^2}{4} + \frac{2m}{\alpha} E\Omega - \Omega^2 a^2) r - 2E\Omega^2 a + \frac{2m}{\alpha} a\Omega + as \\ & - \Omega a(-1 + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{4})^2}) + 2\Omega as - 2(E + M)a \end{aligned} \quad (74.2)$$

با توجه به هامیلتونی تبدیل یافته برحسب جبر گروه  $SL(2)$  که به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & C_{++} J_n^+ J_n^+ + C_{+0} J_n^+ J_n^0 + C_{+-} J_n^+ J_n^- + C_{0-} J_n^0 J_n^- + C_{--} J_n^- J_n^- \\ & + C_+ J_n^+ + C_0 J_n^0 + C_- J_n^- + C, \end{aligned} \quad (75.2)$$

و دانستن مولدهای جبر  $SL(2)$  به صورت زیر

$$\begin{aligned} J_n^+ &= r^2 \frac{d}{dr} - nr, \\ J_n^0 &= r \frac{d}{dr} - \frac{n}{4}, \\ J_n^- &= \frac{d}{dr}. \end{aligned} \quad (76.2)$$

و در نظر گرفتن فرم دیفرانسیلی زیر

$$(P_4 \frac{d^2}{dr^2} + P_4 \frac{d}{dr} + P_4) \tilde{\Psi}(r) = 0 \quad (77.2)$$

که  $p_i$  ها در رابطه‌ی (۷۷.۲) به صورت روابط

$$\begin{aligned} P_4 &= C_{++} r^4 + C_{+0} r^3 + C_{+-} r^2 + C_{0-} r + C_{--}, \\ P_4 &= C_{++} (2 - 2n) r^3 + (C_+ + C_{+0} (1 - \frac{3n}{4})) r^2 \\ &+ (C_0 - n C_{+-}) r + (C_- - \frac{n}{4} C_{0-}), \\ P_4 &= C_{++} n(n-1) r^2 + (\frac{n^2}{4} C_{+0} - n C_+) r + (C_- - \frac{n}{4} C_{0-}). \end{aligned} \quad (78.2)$$

هستند، با مقایسه‌ی رابطه‌ی (۷۵.۲) با روابط (۷۶.۲) تا (۷۸.۲) ثابت زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} C_{++} = C_{+0} = C_{+-} = C_{--} = 0, \quad C_{0-} = 1, \quad C_+ = -2E\Omega, \\ C_0 = 2\Omega a, \quad C_- = -1 + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{4})^2} + \frac{n}{4}, \\ C = \frac{n}{4} C_0 - 2E\Omega^2 a - \Omega a(-1 + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{4})^2}) + \\ \frac{2m}{\alpha} \Omega + as + 2\Omega as - 2(M + E)a, \quad -nC_+ = 2\Omega E + E\Omega(-1 + \\ \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{4})^2}) + E^2 - M^2 - 2E\Omega s + \frac{\Omega^2}{4} + \frac{2m}{\alpha} E\Omega \end{aligned} \quad (79.2)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه‌های (۷۹.۲) انرژی به فرم زیر محاسبه می‌شود

$$E_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (-2m\Omega - \alpha\Omega(1 + 2s - 2n + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^2}) \pm \sqrt{(2m - \alpha\Omega(1 + 2s - 2n + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^2}))^2 + \alpha^2(4M^2 - \Omega^2)}) \quad (۸۰.۲)$$

با در نظر گرفتن حالت خاص  $m = 0$  انرژی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$E_{n,0} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (-\alpha\Omega(1 + 2s - 2n + \sqrt{2}) \pm \sqrt{(-\alpha\Omega(1 + 2s - 2n + \sqrt{2}))^2 + 16\alpha^2(4M^2 - \Omega^2)}) \quad (۸۱.۲)$$

در نتیجه با جایگذاری روابط (۷۸.۲) و (۷۹.۲) در رابطه‌ی (۷۷.۲) به فرم هامیلتونی تبدیل یافته توسط مولدهای جبر  $SL(2)$  می‌رسیم

$$\begin{aligned} \tilde{H} = & \left\{ r \frac{d^2}{dr^2} + (2\Omega ar - 2E\Omega r^2 - 1 + \frac{n}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^2}) \frac{d}{dr} + 2nE\Omega r \right. \\ & \left. + 2\Omega sa + sa - 2(M - E)a + \frac{2ma\Omega}{\alpha} - 2Ea\Omega^2 - a\Omega(-1 + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^2}) \right\} \end{aligned} \quad (۸۳.۲)$$

که  $\tilde{\psi}(r)$  در رابطه (۷۱.۲) به صورت زیر است

$$\tilde{\psi}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \quad (۸۴.۲)$$

و با جایگذاری  $\tilde{\psi}(r) = a_0$  به ازای  $n = 0$  داریم

$$va_0 = 0 \quad (۸۵.۲)$$

که  $v$  به صورت زیر به دست آمده است

$$\begin{aligned} v = & 2\Omega as + as - 2a(M + E) + \frac{2m}{\alpha} a\Omega - 2Ea\Omega^2 \\ & - \Omega a(-1 + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^2}) \end{aligned} \quad (۸۶.۲)$$

در نتیجه رابطه‌ی (۷۲.۲) به ازای  $n = 0$  به صورت زیر است

$$\Psi_0(r, t) = EXP(-iEt - \Omega ar - \frac{E\Omega r^2}{2} + (\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^2}) \ln r) \quad (۸۷.۲)$$

و همین طور با انتخاب  $\tilde{\psi}(r) = a_0 + a_1 r$  به ازای  $n = 1$  داریم

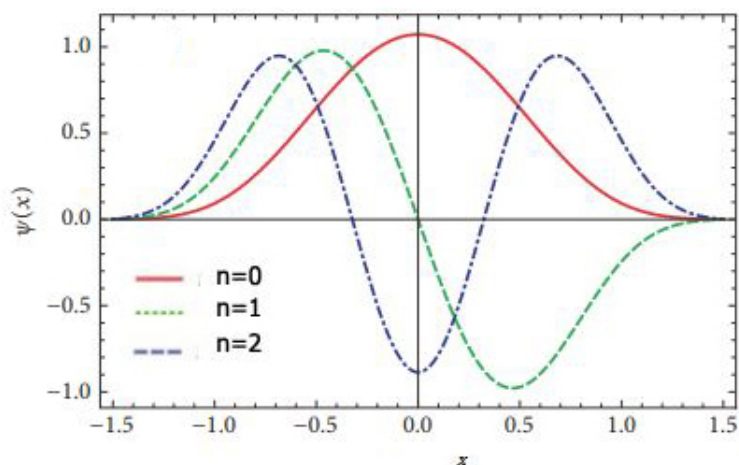
$$\begin{pmatrix} v & -1 + \sqrt{1 + 4(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})^2} \\ 2E\Omega & v + 2a\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (۸۸.۲)$$

$$a_1 = \frac{v}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1}} a_0 \quad (۸۹.۲)$$

در نهایت تابع موج به ازای  $n = 1$  به فرم زیر خواهد بود.

$$\Psi_1(r, t) = EXP(-iEt - \Omega ar - \frac{E\Omega r^2}{2} + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\sqrt{1 + 4\left(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)^2}\right) \ln r) \cdot \left(1 + \frac{v}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{ms}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1}} r\right). \quad (۹۰.۲)$$

همچنین رفتار تابع موج در حضور پتانسیل کولنی به ازای  $n = 0, 1, 2$  در شکل ۵.۲ آورده شده است.



شکل ۵.۲: تغییرات تابع موج بر حسب  $r$  به ازای  $n = 0, 1, 2$  و  $m = 4$  و  $\Omega = 0.8$  و  $M = 1$  و  $\alpha = 0.5$ .



## ۳.۲.۲ روش حل پذیر شبه دقیق در بررسی بوزون‌های نسبیتی

### معادله کلاین گوردون

معادله کلاین گوردون یک معادله‌ی موج نسبیتی است که توسط فیزیکدانان اسکار کلاین<sup>۲۵</sup> و والتر گوردون<sup>۲۶</sup> به دست آمده است که برهمکنش‌های تمام ذرات اسپین صفر مانند پایون<sup>۲۷</sup> را توصیف می‌کند [۱۲]. فرم هموردای این معادله با در نظر گرفتن  $\hbar = c = 1$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2] \psi = 0$$

که  $\partial^\mu$  و  $\partial_\mu$  با استفاده از تعریف چهار بردار فضا زمان  $x^\mu = (ct, x)$ ، به صورت زیر می‌باشند.

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\nabla\right), \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \nabla\right)$$

## ۴.۲.۲ معادله کلاین گوردون در حضور پتانسیل هایپر بولیکی

در این قسمت ما قصد داریم رفتار نسبیتی بوزون‌های اسکالر را تحت پتانسیل اسکالر و برداری بررسی کنیم، سپس توابع موج و انرژی نسبیتی را به دست آوریم. معادله کلاین گوردون زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\psi'' + [(E - V)^2 - (m + S(x))^2] \psi = 0 \quad (91.2)$$

با در نظر گرفتن  $V(x) = S(x)$  رابطه (۹۱.۲) به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$\psi'' + [E^2 - m^2 - 2V(E + m)] \psi = 0 \quad (92.2)$$

و سپس با در نظر گرفتن پتانسیل به فرم زیر:

$$V = a^2 \sinh^2 x - k \tanh^2 x \quad (93.2)$$

و همچنین با انتخاب تغییر متغیر  $\cosh^2 x = Z$ ، هامیلتونی به فرم زیر به دست می‌آید

$$[4(Z^2 - Z) \frac{d^2}{dZ^2} + (4Z - 2) \frac{d}{dZ} + (E^2 - m^2 - 2(E + m)(a^2(Z - 1) - k \frac{Z - 1}{Z}))] \psi = 0 \quad (94.2)$$

در نتیجه مطابق با نظریه‌ی مشهور حل‌پذیری شبه دقیق و مشابه با روابط (۸.۲) تا (۱۱.۲) عمل می‌کنیم، در نتیجه  $P_i$  ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

<sup>25</sup>Klein

<sup>26</sup>Walter Gordon

<sup>27</sup>Payon

$$P_{\phi} = \psi(Z^3 - Z^2), \quad (95.2)$$

$$P_{\psi} = \psi Z^2 - \psi Z, \quad (96.2)$$

$$P_{\psi} = [E^2 - m^2 + \psi(E + m)(a^2 + k)]Z - [\psi(E + m)a^2]Z^2 - \psi(E + m)k \quad (97.2)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۱.۲) تابع موج به صورت زیر خواهد بود

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{Z(Z-1)}} \text{EXP}(-\log \sqrt{\psi(Z^3 - Z^2)}) \tilde{\psi} \quad (98.2)$$

در نتیجه با توجه به روابط بالا و مقایسه با رابطه (۱۰.۲) ثابت به صورت زیر بدست می‌آیند

$$C_{++} = C_{0-} = C_{--} = C_{-} = 0, \quad C_{+0} = \psi, \quad C_{+-} = -\psi \quad (99.2)$$

$$C_{+} = \psi n, \quad C_{0} = -\psi(1 + \psi N), = -\psi(E + m)k - n - \psi n^2 \quad (100.2)$$

$$E^2 - m^2 + \psi(E + m)(a^2 + k) = \psi n^2 + nC_{+}. \quad (101.2)$$

با استفاده از روابط (۹۹.۲) تا (۱۰۱.۲) انرژی به فرم زیر به دست می‌آید:

$$E_n = \frac{-\psi(a^2 + k) \pm \sqrt{(\psi(a^2 + k) - m)^2 + 3\psi n^2}}{\psi} \quad (102.2)$$

با جایگذاری ثابت‌ها در رابطه‌ی (۹.۲) هامیلتونی به فرم زیر می‌باشد

$$\tilde{H} = [\psi(Z^3 - Z^2)] \frac{d^2}{dZ^2} + (\psi Z^2 - \psi n Z^2 - \psi Z) \frac{d}{dZ} + (-\psi n^2)Z - \psi(E + m)k \quad (103.2)$$

و همچنین  $\tilde{\psi}$  به فرم زیر است:

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=0}^N a_n Z^n \quad (104.2)$$

در نتیجه با قراردادن سری فوق به ازای مقادیر زیر برای  $n$  داریم:

۱- به ازای  $n = 0$  مقدار  $a_0 = \tilde{\psi}$  را در رابطه‌ی (۱۰۳.۲) جایگذاری می‌کنیم و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم.

$$(-2(E+m)k)a_0 = 0 \quad a_0 \neq 0. \quad (105.2)$$

$$\psi_0 = \text{EXP}(\text{Ln}(Z+1) + \frac{1}{4} \log \sqrt{4Z^2(z-1)}) a_0 \quad (106.2)$$

۲- به ازای  $n=1$  مقدار  $\tilde{\psi} = a_0 + a_1 Z$  را در رابطه‌ی (۱۰۳.۲) جایگذاری می‌کنیم و به روابط زیر می‌رسیم.

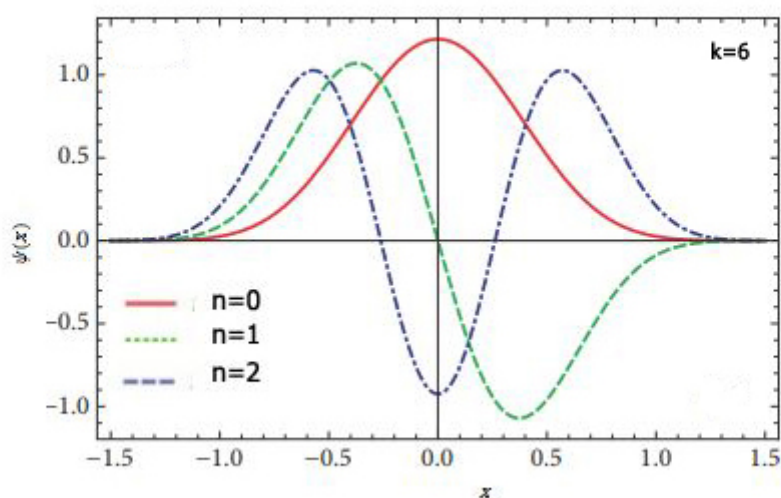
$$\begin{pmatrix} -2(E+m)k & 0 \\ -4 & -2(E+m)k-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (107.2)$$

$$a_1 = \frac{-2}{(E+m)k+1} a_0 \quad (108.2)$$

در نتیجه داریم

$$\psi_1 = \text{EXP}(\text{Ln}(Z+1) + \frac{1}{4} \log \sqrt{4Z^2(z-1)}) \left( 1 + \left( \frac{-2}{(E+m)k+1} \right) Z \right) \quad (109.2)$$

همچنین رفتار تابع موج در حضور هایپربولیکی به ازای  $n=0, 1, 2$  در شکل ۶.۲ آورده شده است.



شکل ۶.۲: تغییرات تابع موج بر حسب  $x$

### معادله دی کی پی

معادله دی کی پی یک معادله نسبیتی مرتبه اول برای بوزون‌های با اسپین صفر و یک می‌باشد که در ابتدا در دهه ۱۹۳۰ توسط دافین-کمر-پتیو ارائه شد. این معادله در بسیاری از شاخه‌های فیزیک از جمله کیهان‌شناسی و طیف‌سنجی مزون‌ها<sup>۲۸</sup> کاربرد دارد [۱۲].

### معادله دی کی پی در حضور پتانسیل هایپر بولیکی

برای بررسی بوزون‌های نسبیتی با اسپین صفر و یا اسپین یک می‌توان از معادله دی کی پی استفاده نمود. فرم این معادله به صورت زیر است [۱۲]

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - (m + S))\psi = 0, \quad (\hbar = c = 1) \quad (110.2)$$

که در رابطه (۱۱۰.۲)  $m$  جرم بوزونی است که با پتانسیل  $S(x)$  در حرکت است. همچنین ماتریس‌های  $\beta^\mu$  دارای جبر ناجابجایی زیر می‌باشند

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta^\mu, \quad (\mu, \nu, \lambda = 0, 1, 2, 3) \quad (111.2)$$

با توجه به این که چه بوزون‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم وضعیت این ماتریس‌ها متفاوت می‌باشد. اینجا بوزون‌های اسپین صفر مدنظر ما هست. در این وضعیت ماتریس‌های  $\beta$  ماتریس‌هایی  $5 \times 5$  با ویژگی‌های زیر می‌باشند

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & 0_{2 \times 2} \\ (0_{2 \times 3})_T & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \rho^i \\ -\rho^i_T & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (112.2)$$

در رابطه (۱۱۲.۲)  $\theta$  و  $\rho^i$  به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (113.2)$$

در نتیجه می‌خواهیم معادله (۱۱۰.۲) را با توجه به روابط (۱۱۱.۲) تا (۱۱۳.۲) در حضور پتانسیل زیر بررسی کنیم

$$S = a^2 \sinh^2 x - k \tanh^2 x \quad (114.2)$$

با انتخاب تغییر متغیر  $\cosh^2 x = Z$  هامیلتونی به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$H = \left[ 4(Z^2 - Z) \frac{d^2}{dZ^2} + (4Z - 2) \frac{d}{dZ} + (E^2 - m^2 - 2(E + m)(a^2(Z - 1) - k \frac{Z - 1}{Z})) \right] \quad (115.2)$$

در نتیجه مشابه بخش‌های قبل  $P_i$  ها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$P_4 = 4(Z^3 - Z^2), \quad (116.2)$$

$$P_3 = 4Z^2 - 2Z, \quad (117.2)$$

$$P_2 = [E^2 - m^2 + 2(E+m)(a^2 + k)]Z - [2(E+m)a^2]Z^2 - 2(E+m)k \quad (118.2)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۱.۲) تابع موج به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{Z(Z-1)}} \text{EXP}(-\log \sqrt{4(Z^3 - Z^2)}) \tilde{\psi}(x) \quad (119.2)$$

در نتیجه با توجه به روابط بالا و مقایسه با رابطه (۱۰.۲) داریم:

$$C_{++} = C_{--} = C_{+-} = C_{-+} = 0, \quad C_{+0} = 4, \quad C_{+-} = -4 \quad (120.2)$$

$$C_+ = 6n, \quad C_0 = -2(1 + 2N), = -2(E+m)k - n - 2n^2 \quad (121.2)$$

$$E^2 - m^2 + 2(E+m)(a^2 + k) = 2n^2 + nC_+. \quad (122.2)$$

با استفاده از روابط (۱۲۰.۲) تا (۱۲۲.۲) انرژی به فرم زیر به دست می‌آید:

$$E_n = \frac{2(a^2 + k) \pm \sqrt{(2(a^2 + k) - m)^2 + 32n^2}}{2} \quad (123.2)$$

با جایگذاری ثابت‌ها در رابطه‌ی (۹.۲) فرم دیفرانسیلی هامیلتونی تبدیل یافته به فرم زیر به دست می‌آید:

$$[4(Z^3 - Z^2) \frac{d^2}{dZ^2} + (4Z^2 - 2nZ^2 - 2Z) \frac{d}{dZ} + (-2n^2)Z - 2(E+m)k] \tilde{\psi} = 0 \quad (124.2)$$

که  $\tilde{\psi}$  به صورت زیر است

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=0}^N a_n Z^n \quad (125.2)$$

در نتیجه با قراردادن  $\tilde{\psi} = a_0$  در رابطه‌ی (۱۲۴.۲) داریم:

$$(-2(E+m)k)a_0 = 0 \quad a_0 \neq 0. \quad (126.2)$$

رابطه‌ی (۱۱۹.۲) به ازای  $n = 0$  به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{Z(Z-1)}} \text{EXP}(-\log\sqrt{4(Z^3 - Z^2)})a_0 \quad (127.2)$$

همچنین با قرار دادن  $\tilde{\psi} = a_0 + a_1 Z$  به ازای  $n = 1$  در رابطه (۱۲۴.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} -2(E+m)k & 0 \\ -4 & -2(E+m)k - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (128.2)$$

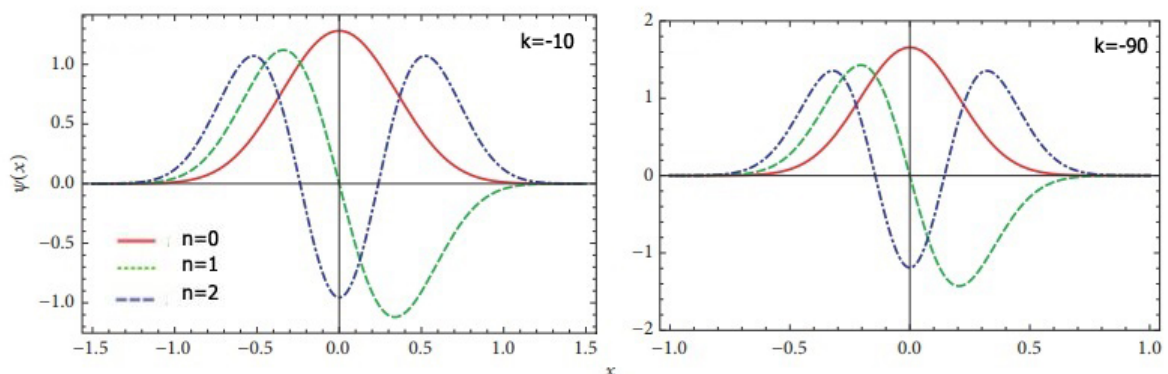
که مقدار  $a_1$  به صورت رابطه‌ی زیر است

$$a_1 = \frac{-2}{(E+m)k + 1} a_0 \quad (129.2)$$

در نتیجه رابطه‌ی (۱۱۹.۲) به ازای  $n = 1$  به فرم زیر بدست می‌آید.

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{Z(Z-1)}} \text{EXP}(-\log\sqrt{4(Z^3 - Z^2)}) \left(1 + \left(\frac{-2}{(E+m)k + 1}\right)Z\right). \quad (130.2)$$

همچنین رفتار تابع موج در حضور پتانسیل هایپربولیکی به ازای  $n = 0, 1, 2$  در شکل ۷.۲ آورده شده است.



شکل ۷.۲: تغییرات تابع موج برحسب  $x$  به ازای پارامترهای  $k = -10, -90$ .

## ۳.۲ بررسی ذرات غیرنسبیتی با روش حل پذیر شبه دقیق

### ۱.۳.۲ حل معادله شرودینگر در حضور پتانسیل با روش حل پذیر شبه دقیق

یکی از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل درجه دوم از دیدگاه کاربردی معادله شرودینگر می‌باشد

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x) \quad (131.2)$$

که در آن  $E$  پارامتر طیفی و تابع  $\psi(x)$  تابع موج در فضای موردنظر است [۷، ۸، ۹، ۱۰]. یکی از روش‌های ممکن برای پیدا کردن عملگر شرودینگر حل‌پذیر شبه دقیق، هم ارز قرار دادن معادلات دیفرانسیل حل‌پذیر شبه دقیق با معادله شرودینگر است. در این فصل با در نظر گرفتن پتانسیل کلینگ بک<sup>۲۹</sup> ویژه توابع جبری و انرژی سیستم را با توجه به روابط فصل ۲ به دست می‌آوریم.

پتانسیل کلینگ بک [۱۰]:

$$V(x) = ax + bx^2 - \frac{c}{x} \quad (132.2)$$

با جایگذاری پتانسیل در معادله شرودینگر و استفاده از روابط (۱۰.۲) تابع موج به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\Psi(x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{b}{2}}x^2 - \frac{a}{\sqrt{2b}}x + \log x\right)\tilde{\Psi}(x) \quad (133.2)$$

در نتیجه مشابه بخش‌های قبلی داریم:

$$P_2 = -x^2, \quad (134.2)$$

$$P_4 = 2\sqrt{2b}x^3 + \frac{2a}{\sqrt{2b}}x^2 - 2x, \quad (135.2)$$

$$P_6 = (-2E - \frac{a^2}{2b} + 3\sqrt{2b})x^2 + \frac{2a}{\sqrt{2b}} - 2c \quad (136.2)$$

با مقایسه‌ی روابط (۱۳۴.۲) تا (۱۳۶.۲) با رابطه‌ی (۷۷.۲) ثوابت زیر را داریم:

<sup>29</sup>Killingbeck potential

$$C_{++} = C_{+0} = C_{--} = C_{+-} = 0, \quad C_{0-} = -1, \quad (137.2)$$

$$C_{+} = 2\sqrt{2b}, \quad C_{0} = \frac{2a}{\sqrt{2b}}, \quad C_{-} = -\left(2 + \frac{n}{2}\right), \quad (138.2)$$

$$C = \left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{2a}{\sqrt{2b}} - 2c, \quad 2E + \frac{a^2}{\sqrt{2b}} + 3\sqrt{2b} = nC_{+}. \quad (139.2)$$

در نتیجه با استفاده از این روابط انرژی به فرم زیر به دست می‌آید

$$E_n = \sqrt{2b}\left(n + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) - \frac{a^2}{4b} \quad (140.2)$$

سپس با جایگذاری روابط بدست آمده در هامیلتونی رابطه (۷۴.۲) داریم:

$$\tilde{H} = -J_n^{\circ} J_n^{-} + 2\sqrt{2b} J_n^{+} + \frac{2a}{\sqrt{2b}} J_n^{\circ} - \left(\frac{n}{2} + 2\right) J_n^{-} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) \frac{2a}{\sqrt{2b}} - 2c. \quad (141.2)$$

و همچنین با در نظر گرفتن  $\tilde{\psi}$  به صورت سری زیر

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=0}^N a_n Z^n \quad (142.2)$$

و قراردادن سری فوق به ازای مقادیر زیر برای  $n$  داریم:

۱- به ازای  $n = 0$  مقدار  $\tilde{\psi} = a_0$  را در رابطه (۱۳۰.۲) جایگذاری می‌کنیم و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\left(\frac{2a}{\sqrt{2b}} - 2c\right)a_0 = 0 \quad (143.2)$$

در نتیجه تابع موج به ازای  $n = 0$  به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\Psi_0(x) = a_0 \text{EXP}\left(-\sqrt{\frac{b}{2}}x^2 - \frac{a}{\sqrt{2b}}x + \log x\right) \quad (144.2)$$

۲- به ازای  $n = 1$  مقدار  $\tilde{\psi} = a_0 + a_1 Z$  را در رابطه (۱۳۰.۲) جایگذاری می‌کنیم و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم



$$\begin{pmatrix} c - \frac{a}{\sqrt{2b}} & 1 \\ \sqrt{2b} & c - \frac{2a}{\sqrt{2b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (145.2)$$

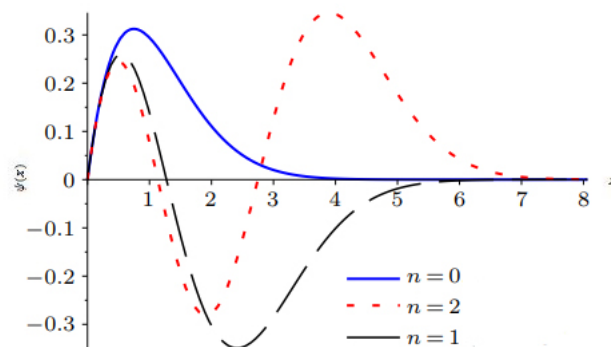
که  $a_1$  از (۱۴۵.۲) به صورت زیر به دست می‌آید

$$a_1 = \left( \frac{a}{\sqrt{2b}} - c \right) a_0 \quad (146.2)$$

در نتیجه تابع موج به ازای  $n = 1$  به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\psi_1(x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{b}{2}}x^2 - \frac{a}{\sqrt{2b}}x + \log x\right) \left(1 + \left(\frac{a}{\sqrt{2b}} - c\right)x\right) \quad (147.2)$$

در نهایت رفتار تابع موج حاصل از معادله شرودینگر در حضور پتانسیل کلینگ-بک به ازای  $n = 0, 1, 2$  بر حسب متغیر  $x$  در شکل ۸.۲ نشان داده شده است.



شکل ۸.۲: تابع موج به ازای  $n = 0, 1, 2$  بر حسب  $x$



## فصل ۳

توزیع انرژی-مومنتم فضا-زمانی با  
استفاده از گروه  $SO(d, 2)$

## ۱.۳ مقدمه

یکی از زمینه‌های مهم استفاده از نظریه گروه‌ها، در ایجاد تانسورهای انرژی مومنتم است که در اینجا ما با کمک گرفتن از تانسورهای انرژی مومنتوم حاصل از گروه  $SO(d, 2)$  است که پارامتر  $d$  را در اینجا ۳ در نظر گرفته ایم [۲۰] به محاسبه‌ی سه مدل انرژی- مومنتم یعنی انرژی- مومنتم انیشتین<sup>۱</sup>، پاپاپترو<sup>۲</sup> و لاندائو- لیفشیتز<sup>۳</sup>، در دو متریک متفاوت می‌پردازیم و نتایج هم‌گام‌سازی را به دست می‌آوریم. توزیع انرژی- مومنتم در ارتباط با فضا زمان در زمینه‌های فضا زمان غیراستاتیکی و فضا زمان متقارن و یا سیاه‌چاله‌های چرخشی و غیرچرخشی مورد بررسی قرار گرفته است. تعاریف بسیاری برای انرژی- مومنتم شبه تانسوری مانند تولمان<sup>۴</sup>، برگمن- تامسون<sup>۵</sup>، مولر<sup>۶</sup>، وینبرگ<sup>۷</sup> و قدیر- شریف<sup>۸</sup> پیشنهاد شده است. که ما در این فصل به همین سه مدل اکتفا می‌کنیم [۲۱، ۲۲، ۲۳].

## ۲.۳ محاسبه انرژی- مومنتم لاندائو- لیفشیتز در فضا-

### زمان سام- ریچادری

متریک سام ریچادری<sup>۹</sup> [۱۹] که به صورت زیر داده می‌شود را در نظر می‌گیریم:

$$ds^2 = -(dt + \alpha \Omega r^2 d\varphi)^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (1.3)$$

با توجه به متریک فوق انرژی و چگالی اندازه حرکت در مدل لاندائو- لیفشیتز به صورت زیر معرفی می‌شود [۲۴]:

$$L^{\mu\rho} = \frac{1}{16\pi} S^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (2.3)$$

که در رابطه بالا  $S^{\mu\nu\rho\sigma}$  به صورت

$$S^{\mu\nu\rho\sigma} = -g(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) \quad (3.3)$$

است که در رابطه (۲.۳)  $L^{\circ\circ}$  نشان‌دهنده‌ی چگالی انرژی و  $L^{oi}$  نشان‌دهنده‌ی اجزای چگالی اندازه حرکت است. همچنین مدل لاندائو- لیفشیتز حفظ قوانین فیزیکی را تضمین می‌کند، به

<sup>1</sup>Einstein

<sup>2</sup>papapetro

<sup>3</sup>Landau- Lifshitz

<sup>4</sup>Tolman

<sup>5</sup>Bergman Tamson

<sup>6</sup>Moller

<sup>7</sup>Winberg

<sup>8</sup>ghadir sharif

<sup>9</sup>Som-Raychaudhuri

طوری که:

$$\frac{\partial L^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (4.3)$$

و اجزای غیرصفر  $S^{\mu\nu\rho\sigma}$  به صورت زیر

$$S^{01} = \alpha^2 r^2 (r^2 \Omega^2 - 1), \quad (5.3)$$

$$S^{02} = \alpha^2 r^2 \left( \frac{r^2 \Omega^2 - 1}{\alpha^2 r^2} - \frac{\Omega^2}{\alpha^2} \right), \quad (6.3)$$

$$S^{03} = \alpha^2 r^2 (r^2 \Omega^2 - 1). \quad (7.3)$$

بدست می‌آیند، با جایگذاری روابط (۵.۳) در (۳.۳) چگالی انرژی را به صورت رابطه (۸.۳) به دست می‌آوریم.

$$L^0 = \frac{1}{16\pi} (S_{,11}^{01} + S_{,22}^{02} + S_{,33}^{03}) = \frac{1}{8\pi} (6\alpha^2 r^2 \Omega^2 - \alpha^2), \quad (8.3)$$

بنابراین انرژی در فضا- زمان سام ریچادری به صورت استوانه ای به شعاع  $r$  و طول  $L$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E_L = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^L L^0 r dr d\varphi dz = \frac{L}{8} \alpha^2 r^2 (3\Omega^2 r^2 - 1). \quad (9.3)$$

## ۳.۳ محاسبه انرژی- مومنتم انیشتین در فضا- زمان سام ریچادری

انرژی و چگالی اندازه حرکت در مدل انیشتین به صورت زیر معرفی می‌شود [۲۴]:

$$\Theta_\mu^\nu = \frac{1}{16\pi} H_{\mu,\rho}^{\nu\rho} \quad (10.3)$$

در رابطه (۱۰.۳)  $H_\mu^{\nu\rho}$  به صورت رابطه مقابل است

$$H_\mu^{\nu\rho} = -H_\mu^{\rho\nu} = \frac{g_{\mu\tau}}{\sqrt{-g}} [-g(g^{\nu\tau} g^{\rho\sigma} - g^{\rho\tau} g^{\nu\sigma})]_{,\sigma} \quad (11.3)$$

که  $\Theta_i^0$  نشان‌دهنده چگالی انرژی و  $\Theta_i^j$  نشان‌دهنده اجزای چگالی اندازه حرکت است. همچنین مدل انیشتین حفظ قوانین فیزیکی را تضمین می‌کند. به طوری که:

$$\frac{\partial H_\mu^{\nu\rho}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (12.3)$$

اجزای غیرصفر  $H_\mu^{\nu\rho}$  به صورت رابطه (۱۳.۳) به دست آمده است

$$H_0^1 = -4\alpha\Omega^2 r^2 + 2\alpha, \quad H_0^2 = H_0^3 = 0. \quad (13.3)$$

با جایگذاری روابط (۱۳.۳) در (۱۰.۳) چگالی انرژی را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\Theta^{\circ} = \frac{1}{16\pi} H^{\circ\rho}_{\rho} = \frac{1}{16\pi} (H^{\circ}_1 + H^{\circ}_2 + H^{\circ}_3) = \frac{-1}{16\pi} (\lambda \alpha \Omega^2 r) \quad (14.3)$$

بنابراین انرژی به فرم زیر خواهد بود

$$E_E = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^L \Theta^{\circ} r dr d\varphi dz = \frac{-L}{3} (\alpha \Omega^2 r^3). \quad (15.3)$$

که در رابطه (۱۵.۳)  $L$  طول استوانه ای به شعاع  $r$  می‌باشد.

## ۴.۳ محاسبه انرژی- مومنتم پاپیتر و در فضا- زمان سام ریچادری

انرژی و چگالی اندازه حرکت در مدل پاپیتر و به صورت زیر معرفی می‌شود [۲۵]:

$$\Omega^{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi} N^{\mu\nu\rho\sigma}_{,\rho\sigma} \quad (16.3)$$

که در رابطه بالا  $N^{\mu\nu\rho\sigma}$  به صورت

$$N^{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + g^{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} - g^{\nu\sigma} \eta^{\mu\rho}) \quad (17.3)$$

است که  $\Omega^{\circ}$  نشان دهنده چگالی انرژی و  $\Omega^i$  نشان دهنده اجزای چگالی اندازه حرکت است. همچنین مدل پاپیتر و حفظ قوانین فیزیکی را تضمین می‌کند. به طوری که:

$$\frac{\partial \Omega^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (18.3)$$

و اجزای غیرصفر  $N^{\mu\nu\rho\sigma}$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$(19.3)$$

$$N^{\circ 11} = (\alpha \Omega^2 r^3 - 2\alpha r), \quad N^{\circ 22} = \alpha r (r^2 \Omega^2 + \frac{1}{\alpha^2 r^2 - 1}), \quad N^{\circ 33} = \alpha r^3 \Omega^2.$$

با جایگذاری روابط (۱۹.۳) در (۱۷.۳) چگالی انرژی را به دست می‌آوریم به این صورت:

$$\Omega^{\circ} = \frac{1}{16\pi} N^{\circ\rho\sigma}_{,\rho\sigma} = \frac{1}{16\pi} (N^{\circ 11}_{,11} + N^{\circ 22}_{,22} + N^{\circ 33}_{,33}) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{-1}{\alpha r^3} \right) \quad (20.3)$$

بنابراین انرژی به فرم زیر خواهد بود

$$E_P = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^L \Omega^{\circ} r dr d\varphi dz = \frac{L}{4} (\alpha \Omega^2 r^3). \quad (21.3)$$

باید توجه داشته باشیم که با مقایسه‌ی سه انرژی فوق به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{3}{4} E_E = -E_P = \frac{2}{3\alpha r} E_L - \frac{1}{6} \alpha r. \quad (22.3)$$

که ملاحظه می‌شود بین انرژی- مومنتم انیشتین و پاپیتر و رابطه‌ای به صورت  $\frac{E_E}{E_P} = -\frac{4}{3}$  وجود دارد.

## ۵.۳ محاسبه انرژی-مومنتم لاندائو-لیفشیتز در فضا-زمان گودل

متریک گودل<sup>۱۰</sup> [۲۴، ۲۷] که به صورت زیر داده می‌شود را در نظر می‌گیریم:

$$ds^2 = -dt^2 + (1 - \alpha^2 x^2) dy^2 - 2\alpha x dt dy + dz^2. \quad (23.3)$$

با توجه به متریک فوق انرژی و چگالی اندازه حرکت در مدل لاندائو-لیفشیتز به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$L^{\mu\rho} = \frac{1}{16\pi} S^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (24.3)$$

که در رابطه بالا  $S^{\mu\nu\rho\sigma}$  به صورت

$$S^{\mu\nu\rho\sigma} = -g(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}). \quad (25.3)$$

است که  $L^{\circ\circ}$  نشان دهنده‌ی چگالی انرژی و  $L^{\circ i}$  نشان دهنده‌ی اجزای چگالی اندازه حرکت است. همچنین مدل لاندائو-لیفشیتز حفظ قوانین فیزیکی را تضمین می‌کند. به این صورت که:

$$\frac{\partial L^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (26.3)$$

و اجزای غیرصفر  $S^{\mu\nu\rho\sigma}$  به صورت:

$$S^{\circ 1 \circ 1} = S^{1 \circ 1 \circ} = -(1 - \alpha^2 x^2), \quad (27.3)$$

$$S^{\circ 2 \circ 2} = -1, \quad (28.3)$$

$$S^{\circ 1 2 1} = S^{2 1 \circ 1} = -\alpha x. \quad (29.3)$$

با جایگذاری روابط (۲۹.۳) در (۲۷.۳) چگالی انرژی را به دست می‌آوریم به این صورت:

$$L^{\circ\circ} = \frac{1}{16\pi} (S^{\circ 1 1 \circ}) = \frac{\alpha^2}{8\pi}. \quad (30.3)$$

بنابراین انرژی لاندائو-لیفشیتز در فضا-زمان گودل به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E_L = \int \int \int L^{\circ\circ} dx dy dz = \frac{\alpha^2}{8\pi} V \quad (31.3)$$

<sup>10</sup>godel metric

### ۶.۳ محاسبه انرژی- مومنتم انیشتین در فضا- زمان گودل

انرژی و چگالی اندازه حرکت در مدل انیشتین به صورت زیر معرفی می شود [۲۴، ۲۶]:

$$\Theta_{\mu}^{\nu} = \frac{1}{16\pi} H_{\mu, \rho}^{\nu \rho} \quad (32.3)$$

که در رابطه بالا  $H_{\mu}^{\nu \rho}$  به صورت

$$H_{\mu}^{\nu \rho} = -H_{\mu}^{\rho \nu} = \frac{g_{\mu \tau}}{\sqrt{-g}} [-g(g^{\nu \tau} g^{\rho \sigma} - g^{\rho \tau} g^{\nu \sigma})]_{, \sigma} \quad (33.3)$$

است که  $\Theta^{\circ}$  نشان دهنده چگالی انرژی و  $\Theta_i^{\circ}$  نشان دهنده اجزای چگالی اندازه حرکت است. همچنین مدل انیشتین حفظ قوانین فیزیکی را تضمین می کند. به این صورت که:

$$\frac{\partial H_{\mu}^{\nu \rho}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (34.3)$$

و اجزای غیر صفر  $H_{\mu}^{\nu \rho}$  به صورت:

$$H^{\circ 1} = -\alpha^2 x H^{\circ 2} = \circ H^{\circ 3} = \circ. \quad (35.3)$$

با جایگذاری روابط (۳۵.۳) در (۳۳.۳) چگالی انرژی را به دست می آوریم به این صورت:

$$\Theta^{\circ} = \frac{1}{16\pi} H^{\circ, \rho}_{\circ, \rho} = \frac{1}{16\pi} (H^{\circ 1}_{\circ 1} + H^{\circ 2}_{\circ 2} + H^{\circ 3}_{\circ 3}) = \frac{-\alpha^2}{16\pi} \quad (36.3)$$

بنابراین انرژی به فرم زیر خواهد بود

$$E_E = \int \int \int \Theta^{\circ} dx dy dz = \frac{-\alpha^2}{16\pi} V. \quad (37.3)$$

### ۷.۳ محاسبه انرژی- مومنتم پاپیترو در فضا- زمان گودل

انرژی و چگالی اندازه حرکت در مدل پاپیترو به صورت زیر معرفی می شود [۲۶، ۲۷]:

$$\Omega^{\mu \nu} = \frac{1}{16\pi} N^{\mu \nu \rho \sigma}_{, \rho \sigma} \quad (38.3)$$

که در رابطه بالا  $N^{\mu \nu \rho \sigma}$  به صورت

$$N^{\mu \nu \rho \sigma} = \sqrt{-g} (g^{\mu \nu} \eta^{\rho \sigma} - g^{\mu \rho} \eta^{\nu \sigma} + g^{\rho \sigma} \eta^{\mu \nu} - g^{\nu \sigma} \eta^{\mu \rho}) \quad (39.3)$$

است که  $\Omega^{\circ \circ}$  نشان دهنده چگالی انرژی و  $\Omega^{\circ i}$  نشان دهنده اجزای چگالی اندازه حرکت است. همچنین مدل پاپیترو حفظ قوانین فیزیکی را تضمین می کند. به این صورت که:

$$\frac{\partial \Omega^{\mu \nu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \quad (40.3)$$



و اجزای غیرصفر  $N^{\mu\nu\rho\sigma}$  به صورت:

$$N^{\circ\circ 11} = -(2 - \alpha^2 x^2), \quad N^{\circ 211} = -\alpha x \quad (41.3)$$

با جایگذاری روابط (41.3) در (39.3) چگالی انرژی را به دست می‌آوریم به این صورت:

$$\Omega^{\circ\circ} = \frac{1}{16\pi} N^{\circ\circ, \rho\sigma}{}_{,\rho\sigma} = \frac{1}{16\pi} (N^{\circ\circ 11}{}_{,11} + N^{\circ\circ 22}{}_{,22} + N^{\circ\circ 33}{}_{,33}) = \frac{\alpha^2}{8\pi}, \quad (42.3)$$

بنابراین انرژی به فرم زیر به دست می‌آید:

$$E_P = \int \int \int \Omega^{\circ\circ} dx dy dz = \frac{\alpha^2}{8\pi} V \quad (43.3)$$

باید توجه داشته باشیم که با مقایسه‌ی سه انرژی به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$E_L = E_P = -\frac{1}{4} E_E = \frac{\alpha^2}{8\pi} V \quad (44.3)$$

از رابطه (44.3) ملاحظه می‌شود که بین انرژی-مومنتم‌های انیشتین و پاپایتر و رابطه‌ای به صورت  $\frac{E_E}{E_P} = -2$  وجود دارد و همچنین بین انرژی-مومنتم‌های لاندائو-لیفشیتز و پاپایتر و رابطه‌ای به صورت  $\frac{E_L}{E_P} = 1$  برقرار است.



## فصل ۴

ارتباط مدل تاویز- کومینگز و معادله  
شرو دینگر حل پذیر شبه دقیق

## ۱.۴ مقدمه

هدف از این فصل معرفی یک روش مستقیم برای اتصال هامیلتونی‌های کوانتومی با معادله‌ی شرودینگر یک بعدی توسط روش حل پذیر شبه دقیق است، که ارتباط بین این‌ها توسط معادله‌ی هیون بای کانفلوئنت<sup>۱</sup> ایجاد شده است. دریافتیم که هر زیرمجموعه از فضای  $n$  بعدی از هامیلتونی تاویز- کومینگز مطابق با  $n$  پتانسیل است که هر کدام با یک راه‌حل معروف همراه است و یا به یک پتانسیل با  $n$  راه‌حل مختلف قابل حل است. همچنین در این فصل ما نشان خواهیم داد که هامیلتونی با معادله‌ی هیون بای کانفلوئنت و با خانواده‌های مختلف معادله‌ی شرودینگر حل پذیر شبه دقیق در ارتباط است [۲۸].

## ۲.۴ توابع هیون

تابع هیون<sup>۲</sup> از توابع خاص در علم ریاضیات است و پاسخ یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه دو با ضرایب غیر ثابت به نام معادله هیون می‌باشد که توسط ریاضیدان آلمانی، کارل هیون<sup>۳</sup> در سال ۱۸۸۸ معرفی شد. معادله هیون کلی‌ترین حالت معادله خطی مرتبه دو با چهار نقطه تکین منظم است. حل این معادله تحت عنوان تابع هیون، از طریق تکنیک حل معادلات دیفرانسیل با کمک سری‌های توانی، برپایه‌ی تئوری فوکس- فروبنیوس<sup>۴</sup> امکان پذیر است. گونه‌هایی از معادلات هیون تحت عنوان معادلات کانفلوئنت<sup>۵</sup> هیون با داشتن یک یا چند نقطه تکین نامنظم وجود دارند. یک ویژگی مهم تمام این معادلات این است که جواب‌های سری‌های بی‌نهایت را حول یکی از نقاط تکینگی منظم‌شان مجاز می‌دانند و یک رابطه‌ی بازگشتی می‌تواند بین دو ضریب متوالی از سری‌ها یافت شود. این واقعیت به ما اجازه داشتن ایده‌ای در مورد مشخصات کلی جواب، رفتار مجانبی در نقاط دور، شعاع همگرایی سری‌ها و غیره را می‌دهد. معادله هیون که معادله‌ای با چهار نقطه تکین منظم است می‌تواند فرم‌های کانفلوئنت مختلفی داشته باشد. [۲۹]

## ۳.۴ انواع معادله هیون

فرم‌های کانفلوئنت معادله هیون زمانی به وجود می‌آید که دو تکینگی منظم یا بیشتر، برای ایجاد یک تکینگی نامنظم پدیدار شوند که با مشتق فوق هندسی کانفلوئنت مشابهت دارد. چهار فرم استاندارد وجود دارد:

<sup>1</sup> biconfluent Heun

<sup>2</sup>Heun

<sup>3</sup>karel Heun

<sup>4</sup>Fuchs-Frobenius

<sup>5</sup>Confluent

۱. معادله کانفلوئنت هیون به صورت رابطه‌ی (۱.۴) می‌باشد:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \varepsilon\right) \frac{d\omega}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z(z-1)\omega} = 0 \quad (1.4)$$

این معادله دارای تکینگی‌های منظم در  $z = 0$  و  $z = 1$  و یک تکینگی نامنظم درجه یک در  $z = \infty$  است. توابع متیو، توابع موح کروی و توابع کروی کولنی موارد خاصی از جواب‌های معادله کانفلوئنت هیون است.

۲. معادله کانفلوئنت مضاعف هیون<sup>۶</sup>:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left(\frac{\delta}{z^2} + \frac{\gamma}{z} + 1\right) \frac{d\omega}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z^2}\omega = 0 \quad (2.4)$$

این معادله دارای تکینگی‌های نامنظم در  $z = 0$  و  $z = \infty$  از نوع مرتبه اول است.  
۳. معادله بای کانفلوئنت هیون<sup>۷</sup>:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} - \left(\frac{\gamma}{z} + \delta + z\right) \frac{d\omega}{dz} + \frac{\alpha z - q}{z}\omega = 0 \quad (3.4)$$

این معادله دارای یک تکینگی منظم در  $z = 0$  و یک تکینگی نامنظم در  $z = \infty$  از مرتبه دو است.

۴. معادله تری کانفلوئنت هیون<sup>۸</sup>:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + (\gamma + z)z \frac{d\omega}{dz} + (\alpha z - q)\omega = 0 \quad (4.4)$$

معادله (۴.۴) دارای یک تکینگی نامنظم مرتبه سه در  $z = \infty$  است.

## ۴.۴ مدل تاویز- کومینگز

مدل تاویز- کومینگز<sup>۹</sup> یا دیک مدل<sup>۱۰</sup> برای اولین بار در سال ۱۹۶۸ توسط میکایل تاویز<sup>۱۱</sup> و فردریک کومینگز<sup>۱۲</sup> مطرح شد. این مدل ارتباط اتم‌های دو سطح را با یک تک حالت از میدان تابشی در نزدیکی موج چرخشی به صورت هامیلتونی زیر معرفی می‌کند:

$$H_{TC} = \omega_c c_+ c + \omega_c J_z + g(c J_+ + c^+ J_-), \quad (5.4)$$

<sup>6</sup>Double-confluent Heun equation

<sup>7</sup>Bi-confluent Heun equation

<sup>8</sup>Tri-confluent Heun equation

<sup>9</sup>Tavis-Cummings

<sup>10</sup>Dicke model

<sup>11</sup>Michael Tavis

<sup>12</sup>Frederick cummings

که  $J_{\pm}$  و  $J_z$  تعدادی از اپراتورهای گروه  $Su(2)$  هستند،  $c_+$  و  $c$  اپراتورهای بوزونی ناشی از میدان تابشی و  $g$  ثابت همبستگی است. اکنون ما از معادله شرودینگر استفاده کرده و روابط زیر را می‌نویسیم

$$J_+ = a^+b, \quad J_- = ab^+ \quad (6.4)$$

$$J_z = \frac{1}{2} / - (a^+a - b^+b), \quad (7.4)$$

به این ترتیب که  $a$ ،  $a^+$ ،  $b$  و  $b^+$  اپراتورهای مستقل بوزونی هستند. سپس از روابط (۶.۴) و (۷.۴) هامیلتونی سه گانه زیر را در نظر می‌گیریم که در آن سه حالت مختلف فرکانس  $\omega_1$ ،  $\omega_2$  و  $\omega_3$  با یکدیگر در ارتباط اند

$$H_t = \omega_a a^+a + \omega_b b^+b + \omega_c c^+c + g(a^+bc + ab^+c^+) \quad (8.4)$$

که ترم  $g \neq 0$  نشان دهنده‌ی تعامل بین این سه حالت است. استفاده از یک نسخه‌ی ساده‌ی این هامیلتونی که توسط تقسیم رابطه‌ی (۸.۴) بر ثابت  $g$  حاصل می‌شود به این صورت است

$$H = \frac{H_t}{g} = \omega_1 a^+a + \omega_2 b^+b + \omega_3 c^+c + a^+bc + ab^+c^+ \quad (9.4)$$

که در رابطه (۹.۴)  $\omega_1 = \frac{\omega_a}{g}$  و  $\omega_2 = \frac{\omega_b}{g}$  و  $\omega_3 = \frac{\omega_c}{g}$  هستند. این سیستم دارای مجموعه‌ای از سه اپراتور متقارن مستقل است که شامل هامیلتونی به فرم زیر است

$$\{H, L = Na + Nb, M = Na + Nc\}, \quad (10.4)$$

که  $N_c = c^+c$  و  $N_b = b^+b$ ،  $N_a = a^+a$  از آن جایی که سیستم دارای سه درجه آزادی است می‌توان گفت که این سیستم کاملاً یکپارچه است [۳۰، ۳۱].

## ۵.۴ بررسی فرم دیفرانسیلی مدل تاویز- کومینگز

ساده‌ترین تحلیل دیفرانسیلی از فرم سه بعدی از هامیلتونی تاویز کومینگز نمایش به فرم فوک - برگمن<sup>۱۳</sup> در سه متغیر پیچیده است.

$$a = \partial_{z_1}, \quad a^+ = z_1, \quad b = \partial_{z_2}, \quad b^+ = z_2, \quad c = \partial_{z_3}, \quad c^+ = z_3. \quad (11.4)$$

با استفاده از این متغیرها هامیلتونی (۹.۴) به فرم دیفرانسیلی زیر می‌رسد:

$$H_T = \omega_1 z_1 \partial_{z_1} + \omega_2 z_2 \partial_{z_2} + \omega_3 z_3 \partial_{z_3} + z_1 \partial_{z_2} \partial_{z_3} + z_2 z_3 \partial_{z_1}, \quad (12.4)$$

در حالی که اپراتورهای متقارن  $L, M$  اولین اپراتور دیفرانسیلی ای هستند به صورت:

$$L = z_1 \partial z_1 + z_2 \partial z_2, \quad M = z_1 \partial z_1 + z_3 \partial z_3. \quad (13.4)$$

در این صورت حالت‌های فوک به صورت زیر داده می‌شود:

$$|n_a, n_b, n_c\rangle = \frac{(z_1)^{n_a} (z_2)^{n_b} (z_3)^{n_c}}{(n_a! n_b! n_c!)^{\frac{1}{2}}} \quad (14.4)$$

با در نظر گرفتن (۱۰.۴) ما می‌خواهیم یک مجموعه از متغیرهای  $(z_1, z_2, z_3)$  را به مجموعه‌ی دیگری شامل  $(r, s, t)$  تبدیل کنیم تا هامیلتونی بتواند ساده شود. این متغیرهای جدید با این شرط مشخص می‌شود که اپراتورهای  $L, M$  باید تنها به یک متغیر بستگی داشته باشند. در اینجا  $L$  را انتخاب می‌کنیم تا تابع  $s, M$  را از  $t$  انتخاب کنیم سپس بعد از محاسبات ساده رابطه‌ی زیر را بین دو مجموعه متغیرها پیدامی‌کنیم.

$$r = \frac{cz_1}{z_2 z_3}, \quad s = \frac{z_1}{z_3} f(z_2), \quad t = \frac{z_1}{z_2} g(z_3), \quad (15.4)$$

که  $c$  ثابت است،  $f$  و  $g$  توابع دلخواه هستند. ما می‌توانیم این توابع را به صورت  $f(z_2) = 1$  بنویسیم بنابراین می‌توانیم متغیرهای  $(z_1, z_2, z_3)$  را برحسب  $(r, s, t)$  به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$z_1 = c \frac{st}{r}, \quad z_2 = c \frac{s}{r}, \quad z_3 = c \frac{t}{r} \quad (16.4)$$

بنابراین مشتقات جزئی به صورت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} &= \frac{1}{c} \left( \frac{r}{t} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{r}{s} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{r^2}{st} \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z_2} &= -\frac{1}{c} \left( \frac{tr}{s} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{r^2}{s} \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z_3} &= -\frac{1}{c} \left( \frac{rs}{t} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{r^2}{t} \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (17.4)$$

سه اپراتور  $H, L, M$  عبارت‌های زیر را برحسب متغیرهای جدید  $(r, s, t)$  بیان می‌کنند

$$H = \frac{r^3}{c} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{rst}{c} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} + \frac{tr^2}{c} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} + \frac{r^2 s}{c} \frac{\partial^2}{\partial r \partial s}$$

$$+ \left( \frac{r^2}{c} + (\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)r + c \right) \frac{\partial}{\partial r} + ((\omega_1 - \omega_3)r + c) \frac{s}{r} \frac{\partial}{\partial s} + ((\omega_1 - \omega_2)r + c) \frac{t}{r} \frac{\partial}{\partial t} \quad (18.4)$$

در حال حاضر ما می‌توانیم برای جواب‌های  $\psi$  به عنوان مثال ویژه توابع متقارن  $M, L$  که متعلق به زیرمجموعه‌های  $W_{\ell, m}$  اند را به صورت زیر نوشت:

$$M\psi(r, s, t) = m\psi(r, s, t), \quad L\psi(r, s, t) = \ell\psi(r, s, t). \quad (19.4)$$

پس تابع موج به فرم

$$\Psi(r, s, t) = s^l t^m \psi(r), \quad (20.4)$$

و هامیلتونی  $H$  با ویژه مقادیر  $E$  در زیرمجموعه  $W_{\ell, m}$  منجر به معادله دیفرانسیلی خطی مرتبه دوم زیر می شود (برحسب  $r$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \left( \frac{c^2}{r^3} + \frac{c(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)}{r^2} + \frac{m+l+1}{r} \right) \frac{d\psi}{dr} + \\ + \left( \frac{(m+l)c^2}{r^4} + \frac{c(m(\omega_1 - \omega_2) + l(\omega_1 - \omega_3) - E)}{r^3} + \frac{ml}{r^2} \right) \psi = 0 \end{aligned} \quad (21.4)$$

ما می خواهیم که حل ناشی از (20.4) به صورت چندجمله ای هایی برحسب متغیرهای جدید باشد به گونه ای که  $\psi(r) = a_0 + a_1 r + \dots + a_N r^N$  پس اگر ما در (20.4) متغیرهای قدیمی را جایگزین کنیم پس داریم:

$$\Psi(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1^{m+l}}{z_2^m z_3^l} \sum_{k=0}^N a_k \left( \frac{cz_1}{z_2 z_3} \right)^k \quad (22.4)$$

در نتیجه تابع موج نیز باید یک چندجمله ای برحسب متغیرهای قدیمی باشد، اما در شکل فعلی معیارهای آن این امکان را ندارند، پس بنابراین برای حل این مشکل ما باید متغیر  $r$  را به معکوس آن  $\rho = \frac{1}{r}$  تغییر دهیم، به این ترتیب که:

$$\Psi(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1^{m+l}}{z_2^m z_3^l} \sum_{k=\max(l, m)}^{l+m} a_k \left( \frac{z_2 z_3}{cz_1} \right)^k \quad (23.4)$$

در نتیجه یک چندجمله ای قابل قبول داریم، از این رو برحسب  $\rho = \frac{1}{r}$  معادله (21.4) تبدیل می شود به:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{d\rho^2} - \left( \frac{m+l-1}{\rho} + c(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) + c^2 \rho \right) \frac{d\psi}{d\rho} + \\ + \left( \frac{ml}{\rho^2} + \frac{c(m(\omega_1 - \omega_2) + l(\omega_1 - \omega_3) - E)}{\rho} + (m+l)c^2 \right) \psi = 0 \end{aligned} \quad (24.4)$$

این معادله دارای تکینگی منظم در مبدا و یک تکینگی نامنظم مرتبه دو در بی نهایت است که با تکینگی معادله هیون-بای کانفلوئنت همخوانی دارد. در واقع اگر ما از تغییر متغیر رابطه (24.4) استفاده کنیم برای تغییر در تابع  $\psi(\rho) = \rho^k \varphi(\rho)$  که  $k = \max(l, m)$  در می یابیم که:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{d\rho^2} + \left( \frac{1+2k-m-l}{\rho} - c(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) - c^2 \rho \right) \frac{d\varphi}{d\rho} + \left( \frac{(m-k)(l-k)}{\rho^2} + \right. \\ \left. + \frac{c(m(\omega_1 - \omega_2) + l(\omega_1 - \omega_3) - E - k(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3))}{\rho} + (m+l-k)c^2 \right) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (25.4)$$

از (25.4)، می توانیم بفهمیم که اگر  $k = \ell$  یا  $k = m$  باشد این معادله دارای فرمی به صورت فرم هیون-بای کانفلوئنت خواهد داشت، با فرم کلی زیر [31]:

$$y'' + \left( \frac{1+\alpha}{x} + \beta - 2x \right) y' + \left( -\frac{\delta + (1+\alpha)\beta}{2x} + \gamma - \alpha - 2 \right) y = 0 \quad (26.4)$$



با مقایسه‌ی (۲۵.۴) و (۲۶.۴) و انتخاب  $c = \pm\sqrt{2}$  داریم که ضرایب  $\alpha, \beta, \gamma$  باید به این فرم باشند:

۱- اگر  $m \geq l$  و  $k = m$  باشد:

$$\alpha = m - l, \quad \beta = -c(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \quad \gamma = m + l + 2$$

$$\delta = c(m(\omega_1 - \omega_2 - 3\omega_3) - l(3\omega_1 - \omega_2 - 3\omega_3) + (\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 + 2E)) \quad (27.4)$$

۲- اگر  $m \geq l$  و  $k = l$  باشد، در این صورت پارامترهای  $\alpha, \beta, \gamma$  و  $\delta$  مشابه بالا می‌باشند. اما جای  $\omega_2$  با  $\omega_3$  جابه‌جا می‌شود و همچنین  $l$  با  $m$ .

## ۶.۴ معادله شرودینگر

در این قسمت ما می‌خواهیم معادله هیون - بای کانفلوئنٹ رابطه‌ی (۲۶.۴) را به یک معادله‌ی معروف و شناخته‌شده‌ی شرودینگر ارتباط دهیم، که به طور کامل تجزیه و تحلیل خواهد شد. اگر ما در رابطه (۲۵.۴) مقدار  $c$  را به صورت  $c = \sqrt{2}$  انتخاب کنیم و تغییر متغیرهای مستقل و وابسته‌ای را اعمال کنیم به صورت زیر [۳۲، ۳۳]

$$\varphi(\rho) = e^{-W(x)}\chi(x), \quad x = x(\rho). \quad (28.4)$$

ما امکان انتخاب  $W(x)$  و  $\chi(\rho)$  را داریم به گونه‌ای که  $\chi(x)$  برابر شود با یک معادله‌ی شرودینگر با ویژه‌مقدار  $\lambda = 0$

$$-\chi'' + V(x)\chi = \lambda\chi = 0 \quad (29.4)$$

در واقع اگر  $W(x)$  معادله را برآورده کند داریم:

$$\ddot{x} - 2(\dot{x})^2 \frac{dW}{dx} + \frac{dx}{d\rho} \left( \frac{2k - m - n + 1}{\rho} - \sqrt{2}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) - 2\rho \right) = 0 \quad (30.4)$$

که  $\dot{x} = \frac{dx}{d\rho}$  است و پتانسیل معرفی شده در (۲۹.۴) به فرم زیر است:

$$V(x) = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}^2} \frac{dW}{dx} - \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 + \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{1}{\dot{x}} \frac{dW}{dx} \left[ \frac{2k - m - l + 1}{\rho} - \sqrt{2}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) - 2\rho \right] \quad (31.4)$$

$$- \frac{1}{\dot{x}} \left[ \frac{\sqrt{2}(l(\omega_1 - \omega_3) + m(\omega_1 - \omega_2) - E - k(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3))}{\rho} + 2(m + l - k) \right]$$

از این رو ما وابستگی بین  $\rho$  و  $x$  را به صورت  $x = \rho^b, b > 0$  انتخاب می‌کنیم و بنابراین پتانسیل که از طریق  $V_b(x)$  و تابع موج  $\chi(x)$  استخراج می‌شود به صورت زیر است:

$$V_b(x) = \left( -\frac{1}{4} + \frac{(1+B)^2 - 4k - 4kB + 4k^2}{4b^2} \right) x^{-2} - \left( \frac{AB + 2D}{2b^2} \right) x^{-2+\frac{1}{b}} \quad (32.4)$$

$$- \left( \frac{A^2 + 4B + 4G - 4}{4b^2} \right) x^{-2+\frac{2}{b}} + \frac{A}{b^2} x^{-2+\frac{3}{b}} + \frac{1}{b^2} x^{-2+\frac{4}{b}},$$

$$\chi(x) = x^{-(1-b+B-2k)/(2b)} \exp\left[-\frac{1}{2} x^{\frac{1}{b}} (A + x^{\frac{1}{b}})\right] \varphi(\rho(x)), \quad (33.4)$$

$$A = \sqrt{2}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \quad B = m + l - 1, \quad G = 2(m + l) \quad (34.4)$$

$$D = (m(\omega_1 - \omega_2) + l(\omega_1 - \omega_3) - E).$$

باید توجه داشته باشیم که برای تمام مقادیر پارامترهای  $\ell, m \in N$  و  $b > 0$  است و مقدار  $x$  در (۳۳.۴) مثبت است، در حالی که عبارتی که قالب است در  $\exp$  منفی است. این به این معنی است که در تمام موارد حل‌های حاصل برای  $\chi(x)$  به صورت تابع موج‌هایی هستند که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \chi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \chi(x) = 0 \quad (35.4)$$

که از نظر فیزیکی قابل قبول است. همچنین ما می‌خواهیم برخی از شرایط را در پتانسیل (۳۱.۴) حذف کنیم برای داشتن یک فرم ساده‌تر برای رسیدن به این هدف می‌توانیم برخی از مقادیر خاص  $b$  را انتخاب کنیم:

۱- اگر  $b = 1$  باشد پتانسیل (۳۱.۴) به صورت

$$V_1(x) = \frac{\sqrt{2}(2E + (1 - 3m - 3n)\omega_1 + (-1 + 3m + n)\omega_2 + (-1 + m + 3n)\omega_3)}{2x} \quad (36.4)$$

$$+ \frac{(m-l-1)(m-l+1)}{4x^2} + 2 - 3(m+n) - \frac{(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2}{2}$$

$$+ \sqrt{2}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)x + x^2,$$

و تابع موج به فرم

$$\chi(x) = x^{-(B-2k)/2} \exp\left[-\frac{1}{2} x(A+x)\right] \varphi(\rho(x)) \quad (37.4)$$

بدست می‌آید. باید توجه داشته باشیم که این پتانسیل شامل پتانسیل کولنی و نوسانگر و پتانسیل خطی همراه با جمله‌ی گریز از مرکز است این پتانسیل برای توصیف کوارکونیوم است که در مرجع [۲۴، ۲۵] به آن اشاره شده است.

۲- اگر  $b = \frac{1}{2}$  باشد پتانسیل به صورت

$$V_{1/2}(x) = \frac{(2m-2l-1)(2m-2l+1)}{4x^2} + 4\sqrt{2}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)x^4 + 4x^6 \quad (38.4)$$

$$- (-8 + 12(m+l) + 2(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)^2)x^2$$

$$+ 2\sqrt{2}[-(3m+3l-1)\omega_1 + (l+3m-1)\omega_2 + (3l+m-1)\omega_3] - \epsilon(E)$$

و تابع موج

$$\chi(x) = x^{-(B-2k+\frac{1}{2})} \exp\left[-\frac{1}{2} x^2(A+x^2)\right] \varphi(\rho(x)) \quad (39.4)$$

۳- اگر  $b = \frac{2}{3}$  باشد پتانسیل به صورت

$$V_{3/2}(x) = \frac{(2m - 2l - 3)(2m - 2l + 3)}{36x^2} + \frac{4}{9}x^{2/3} + \frac{4\sqrt{2}}{9}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \quad (40.4)$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}(2E - (3m + 3l - 1)\omega_1 + (l + 3m - 1)\omega_2 + (3l + m - 1)\omega_3)}{9x^{4/3}}$$

$$- \frac{(-8 + 12(m + l) + 2(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)^2)}{9x^{2/3}}$$

و تابع موج به فرم رابطه (۴۱.۴) خواهد بود.

$$\chi(x) = x^{-(-\frac{1}{3} + B - 2k)/3} \exp[-\frac{1}{3}x^{2/3}(A + x^{2/3})] \varphi(\rho(x)) \quad (41.4)$$

۴- اگر  $b = 2$  باشد پتانسیل به صورت

$$V_2(x) = \frac{(m - l - 2)(m - l + 2)}{16x^2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)}{4\sqrt{x}} \quad (42.4)$$

$$\frac{2\sqrt{2}(2E - (3m + 3l - 1)\omega_1 + (l + 3m - 1)\omega_2 + (3l + m - 1)\omega_3)}{16x^{3/2}}$$

$$- \frac{(-8 + 12(m + l) + 2(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)^2)}{x},$$

با تابع موجی به صورت

$$\chi(x) = x^{-(-1 + B - 2k)/4} \exp[-\frac{1}{4}x^{1/2}(A + x^{1/2})] \varphi(\rho(x)) \quad (43.4)$$

همچنین برای مقدار  $C = -\sqrt{2}$  معادله‌ی (۲۵.۴) مشابه با حالتی که  $C = \sqrt{2}$  است به دست می‌آید، اما به جای  $\rho$  از  $-\rho$  استفاده می‌کنیم، و همچنین این جایگزینی ما را به سمت تعدادی پتانسیل دیگر هدایت می‌کند زیرا متغیر  $x$  که در روابط برحسب  $\rho$  می‌باشد تغییر می‌کند و همچنین در روابط  $x = (-\rho)^b$  باید جایگزین  $x = (\rho)^b$  بشود.



# فصل ۵

## نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه چگونگی استفاده از روش حل پذیر شبه دقیق به منظور دست یافتن به طیف ذرات نسبیتی و غیرنسبیتی سیستم موردنظر در شرایط مختلف و متفاوت مورد بحث و استفاده قرار گرفت. در ابتدا مفاهیم پایه برای تبیین مفهوم گروه بیان شد. همچنین مفهوم حل پذیر شبه دقیق را تحت تقارن دینامیکی جبر  $SL(2)$  مورد بررسی قرار دادیم، با اعمال تغییر متغیر مناسب از طریق هم‌ارز قراردادان معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم با معادله شرودینگر ضرایب هامیلتونی را برحسب چند جمله‌ای‌های با ابعاد متناهی معرفی کردیم. به این ترتیب شکل کلی پتانسیل حل‌پذیر شبه دقیق و تابع پیمانه‌ای را بر اساس این چند جمله‌ای محاسبه کردیم. عملگر دیفرانسیلی جبری که به صورت چندجمله‌ای از مولدهای جبر گروه مربوطه می‌باشد را مطرح و شکل کلی عملگر دیفرانسیلی جبری مرتبه دوم را ارائه نمودیم. در ادامه ذرات نسبیتی (فرمیونها و بوزون‌ها) را با روش حل پذیر شبه دقیق بررسی کرده و به انرژی و تابع موج مربوط به سیستم‌های موردنظر رسیدیم و رفتار توابع موج بدست آمده را به صورت نمودارهایی در متن ارائه دادیم. همچنین به بررسی انرژی – مومنتم برای مدل‌های شناخته شده ی لاندائو- لیفشیتز و انیشتین و پایاپترو پرداختیم و در آخر به مطالعه و بررسی جزئیات روش تاویز- کومینگ پرداختیم و همچنین ارتباط این مدل با معادله ی حل پذیر شبه دقیق را با معادله ی هیون بای کانفلوئنت بررسی کردیم.

برای ادامه‌ی کار نیز می‌توان پیشنهادهایی به صورت زیر ارائه نمود:

۱. برای بررسی مسائل حل پذیر شبه دقیق در ابعاد بالاتر می‌توان هامیلتونین سیستم

را بر حسب مولدهای جبرهای دیگر بسط داد.  
۲. با در نظر گرفتن سایر پتانسیل‌ها غیر از پتانسیل کولنی که در مورد معادلات دیراک و کلاین گوردون به کار بردیم. می‌توان با انجام محاسبات جبری، معادله دیفرانسیل حل پذیر شبه دقیق آن‌ها را محاسبه نمود.

# مراجع

- [۱] مشهدی تفرشی، ف، (۱۳۷۲)، ”بررسی ارتعاشات مولکولی با استفاده از نظریه گروه‌ها“، پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت معلم تهران.
- [۲] رضانی مزدهی، ر، (۱۳۹۴) ”جبر  $sl(2)$  تغییر فرم یافته و مدل‌های کوانتومی شبه حل‌پذیر دقیق“، پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه گیلان.
- [3] R. Gilmore, Lie groups Lie algebras and some of their applications (A WileInter-science publication 1974).
- [4] P .J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations. NewYork : Springer, (1986 ).
- [۵] ا. و. جوشی، ”مبانی نظریه گروه‌ها برای فیزیکدانان“، ترجمه: دکتر محسن سربیشه‌ای، چاپ سوم.
- [6] A. V. Turbiner, Commun. Math. Phys. 118 467,(1988).
- [۷] برادران، م، (۱۳۹۰)، ”مطالعه جبری مدل‌های کوانتومی حل‌پذیر شبه کامل“، پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه گیلان.
- [8] H. Panahi, S. Zarrinkamar, M. Baradaran, Chin. Phys. B 24(6), 512 060301 (2015).
- [9] A. V. Turbiner, Contemp. Math. 160 263 (1994).
- [10] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (New York: Dover), (1931).
- [۱۱] سعیدی جوزچال، خ، (۱۳۹۵) ”بررسی ذرات نسبیتی و فرا نسبیتی با استفاده از میدان‌های وابسته به زمان“، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۱۲] حسین پور، م، (۱۳۹۷) ”تصحیحات نواقص هندسی فضا زمان بر سیستم‌های هسته‌ای بوزونی و فرمیون‌ها“، رساله دکتری، دانشگاه صنعتی شاهرود.

- [13] Q. Dong, F. A. Serrano, Guo-Hua Sun, Jian Jing, and Shi-Hai Dong. "Semiexact Solutions of the Razavy Potential." *Advances in High Energy Physics* (2018).
- [14] P. sedaghatnia, H. Hassanabadi and F. Ahmed. "Dirac fermions in Som-Raychaudhuri space-time with scalar and vector potential and the energy momentum distributions." *The European Physical Journal C*(2019).
- [15] M. M. Som and A. K. Raychaudhuri, *Proc. R. Soc. A* **304**, 81 (1968).
- [16] O. Bertolami and F. Lobo, *Neuro. Quantol.* **7**, 1 (2009).
- [17] D. Barrow and P. Dabrowski, *Phys. Rev D* **58**, 103502 (1998).
- [18] L.C.N. Santos, C.C. Barros Jr., *EPJ C* **78**, 13 (2018).
- [19] M. de Montigny, S. Zare, H. Hassanabadi, *Gen. Relativ. Gravit.* **50**, 472 47 (2018).
- [20] A. Dymarsky, Z. Komargodski, A. Schwimmer, S. Theisen, On scale and conformal invariance in four dimensions. *Journal of High Energy Physics*.(10):171.(2015).
- [21] F. Ahmed, *EPJ C* **79**(02), 104 (2019).
- [22] F. Ahmed, *Ann. Phys. (N. Y.)* **401**, 193 (2019).
- [23] I. Radinschi, F. Rahaman, T. Grammenos, S. Islam, *Adv. High Energy Phys.* (article ID 9049308, 1-9 pages)(2016).
- [24] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press (1987).
- [25] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of General Theory of Relativity* (Wiley, New York, 1972).
- [26] A. Papapetrou, *Proc. R. Irish Acad.* (**52**), 11 (1948).
- [27] F. Ahmed, "The energy-momentum distributions and relativistic quantum effects on scalar and spin-half particles in a Gödel-type space-time", *Eur. Phys. J. C* **78** (2018).
- [28] T. Mohamadian , J. Negro , L.M. Nieto , and H. Panahi "Tavis-Cummings models and their quasi-exactly solvable Schrödinger Hamiltonians", (2019).



[۲۹] حسینی، م، (۱۳۹۷)، ”بررسی توابع هیون در سیستم‌های بوزونی و فرمیونی“، پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

- [30] G. Alvarez, F. Finkel, A. Gonzalez-Lopez, and M. Rodriguez, “Quasi-exactly solvable models in nonlinear optics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 35, no. 41, p. 8705, (2002).
- [31] W. Miller Jr, S. Post, and P. Winternitz, “Classical and quantum superintegrability with applications,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 46, no. 42, p. 423001, (2013).
- [32] A. Ronveaux(Ed.), *Heun’s Differential Equations*. Oxford University Press, Oxford, (1995).
- [33] O. Zaslavskii, “Effective potential for spin-boson systems and quasi-exactly solvable problems,” *Physics Letters A*, vol. 149, no. 7-8, pp. 365–368, (1990).
- [34] D. Gómez-Ullate, N. Kamran, and R. Milson, “Quasi-exact solvability and the direct approach to invariant subspaces,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 38, no. 9, (2005).
- [35] F. Caruso, J. Martins, and V. Oguri, “Solving a two-electron quantum dot model in terms of polynomial solutions of a biconfluent Heun equation,” *Annals of Physics*, vol. 347, pp. 130–140, (2014).
- [36] H. Karayer, D. Demirhan, and F. Büyükkılıç, “Solution of Schrödinger equation for two different potentials using extended Nikiforov-Uvarov method and polynomial solutions of biconfluent Heun equation,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 59, no. 5, p. 053501, (2018).

## **Aabstract**

In this thesis, we intend to introduce a quasi-exactly solvable method by using group theory. Then, using this method we study the non-relativistic and relativistic system (fermionic and bosonic systems). In recent years, much attention has been paid to the study of the relativistic and non-relativistic wave equations that among them, the solution of the Dirac equation, a relativistic wave equation which leads to acceptable physical results, is very important, and plays an important role in relativistic quantum mechanics. Physicists tried to solve the Dirac equation with physical potentials, and the number of exact solutions in this area is increasing. There are many different method to use to study the Dirac equation. One of these standard methods is to solve the Dirac equation in the algebraic method using group theory.

In this thesis, the Dirac equation is presented as a relativistic wave equation in the presence of vector and scalar potential. The differential equations for the spinor are solved analytically, and the function of the wave of fermions and their energy spectrum are derived. In the following, the Dirac equation for Coulomb potential is investigated in space-time coordinates by a quasi-exactly solvable method. Finally, the wave function and the energy spectrum of the fermions are calculated for the Coulomb potential. Also, for bosonic systems in the presence of vector potential and scalar, the wave function of the boson and energy equation are investigated by a quasi-exactly solvable method. the Killingbeck potential is examined for a non-relativistic system using a quasi-exactly solvable method. We also evaluate the distribution of energy-momentum using the well-known complexes of Landau-Lifshitz and Einstein and Papapetru in the two metrics of Som-Raychaudhuri and godel metric. In the last section, we study and analyze the tavis-cummings method and its relation to obtain a quasi-exactly solvable Hamiltonian of the  $SL(2)$  group. Then using the Heun biconfluent equation different potentials are solved.

**Keywords:** Group Theory; Quasi-Exactly Solvable method; Som-Raychaudhuri metric; Energy- Mumentum; Energy- Mumentum Landau-Lifshitz; Energy- Mumentum Einstein; Energy- Mumentum Papapetru; Tavis-cummings method; Heun Equation.



Faculty of Physics and Nuclear Engineering

MSc Thesis in Nuclear Physics

**Investigation of relativistic and  
non-relativistic of by using group theory**

By: Parisa Sedaghatnia

Supervisor:

**Dr. Hassan Hassanabadi**

July 2019