بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده: فیزیک و مهندسی هسته‌ای

گروه: فیزیک هسته‌ای

استفاده از مدل‌های E(۵)، X(۵) و X(۳) در بررسی طیف انرژی و گذارهای هسته‌های سنگین

دانشجو: مطهره علی‌محمدی

استاد راهنما:

دکتر حسن حسن‌آبادی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

بهمن ماه ۱۳۹۷

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود خانم مطهره علی‌محمدی دانشجوی دکتری رشته فیزیک-هسته‌ای به شماره دانشجویی ۹۴۰۰۸۰۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۴ در تاریخ ۱۳۹۷/۱۱/۲۹ از رساله **نظری**■ **/ عملی**☐ خود با عنوان : **استفاده از مدل‌های (۵)E، (۵)X و (۳)X در بررسی طیف انرژی و گذارهای هسته‌های سنگین** دفاع و با اخذ نمره ......۱۹/۸...... به درجه : ......عالی...... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷☐
ج) درجه خوب: نمره۱۶/۹۹– ۱۵☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر حسن حسن‌آبادی	استاد راهنما	استاد	
۲	دکتر علی‌اکبر رجبی	استاد مدعو داخلی	استاد	
۳	دکتر حسین توکلی عنبران	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۴	دکتر کوروش جاویدان	استاد مدعو خارجی	استاد	
۵	دکتر احسان ابراهیمی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم مطهره علی-محمدی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده فیزیک

تشکر و قدردانی

بر خویش وظیفه می‌دانم از استاد ارجمندم جناب آقای پروفسور حسن حسن‌آبادی که در طی این دوره همواره با راهنمایی‌های ارزنده‌ی خود مرا همراهی نمودند، مراتب قدردانی و سپاس خویش را ابراز نمایم.

هم‌چنین از پدر و مادر عزیز و همسر مهربان و همراهم که تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات بوده‌اند و وجودشان مایه دلگرمی من می‌باشد، کمال تشکر و قدردانی را می‌نمایم.

تعهدنامه

اینجانب مطهره علی‌محمدی دانشجوی دوره دکتری رشته فیزیک-هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده رساله استفاده از مدل‌های X(۵) ،E(۵) و X(۳) در بررسی طیف انرژی و گذارهای هسته‌های سنگین تحت راهنمایی دکتر حسن حسن‌آبادی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایح اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

مطهره علی‌محمدی

بهمن ۹۷

چکیده

هدف از این رساله، بررسی طیف انرژی و آهنگ‌های گذار هسته‌های سنگین زوج-زوج است. به این منظور از سه مدل تقارنی (E(۵، (X(۵ و (X(۳ استفاده شده است. در سال ۲۰۰۶ که مدل (X(۳ معرّفی شد، پتانسیل موجود در آن را (که فقط تابعی از پارامتر تغییر شکل β است) به شکل چاه مربعی نامحدود در نظر گرفتند، ویژه مقادیر و ویژه توابع حاصل را استخراج نمودند و آن‌ها را با داده-های تجربی به دست آمده برای طیف انرژی و آهنگ‌های گذار هسته‌های زوج-زوج، مقایسه نمودند. پس از آن، برای ارتقاء داده‌های نظری و تطابق بیشتر آن‌ها با داده‌های تجربی موجود، از پتانسیل‌های دیگر، از جمله سکستیک استفاده شد. در این رساله، مدل (X(۳ با پتانسیل نوسانگر هماهنگ وابسته به انرژی و نیز پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفته است و برای ارزیابیِ نتایج به دست آمده، آن‌ها را با نتایج نظریِ مربوط به پتانسیل سکستیک و نیز داده‌های تجربیِ متناظر مقایسه نموده‌ایم. در سال ۲۰۱۵ که مدل ترکیبی (X(۵ و (X(۳ معرفی شد، پتانسیل مربوط به هامیلتونی این مدل در بخش وابسته به β و γ به ترتیب به شکل چاه مربعی نامحدود و نوسانگر هماهنگ در نظر گرفته شد. سپس بدون تغییر بخش وابسته به γی پتانسیل، بخش وابسته به βی آن را به شکل داویدسون در نظر گرفتند، امّا از آن‌جایی که نتایج نظریِ به دست آمده در این دوحالت (چاه مربعی نامحدود، داویدسون)، با داده‌های تجربی متناظر برای برخی از هسته‌ها تطابق نسبتاً خوبی نداشت، ما پتانسیل کلینگبک را (بخش وابسته به βی پتانسیل) برای این مدل ترکیبی پیشنهاد دادیم، طیف انرژی و آهنگ‌های گذار را از طریق حلّ معادله‌ی موج مورد نظر به روش وردش استخراج نمودیم، و نتایج خود را با داده‌های نظریِ پیشین و نیز داده‌های تجربی مقایسه نمودیم. از سوی دیگر، از آن-جایی که طیف انرژی استخراج شده از مدل تقارنی (E(۵ که در سال ۲۰۰۰ معرفی شد، تبهگن بود و مدل (X(۳ نیز به تنهایی قادر به پیش‌بینیِ انرژیِ مربوط به ترازهای نوار γ نبود، مدل ترکیب‌شده‌ی (E(۵ و (X(۳ را معرّفی نمودیم و طیف انرژی و نیز آهنگ‌های گذار به دست آمده را با داده‌های

تجربیِ موجود برای هسته‌هایی که پیش‌تر توسط مدل E(۵) بررسی شده بودند، مقایسه نمودیم. همچنین، این مدل ترکیب‌شده را با پتانسیل مورس مورد مطالعه قرار دادیم و نتایج حاصل را با نتایج به دست آمده از مدل E(۵)، که در سال ۲۰۰۸ با همین پتانسیل بررسی شده بود، و نیز داده‌های تجربیِ موجود، مقایسه نمودیم. در این رساله، هم‌چنین مدل X(۳) را در رهیافت جرم وابسته به مکان (که پیشتر برای مدل‌های E(۵) و X(۵) استفاده شده بود) با دو پتانسیل کراتزر و داویدسون تعمیم-یافته، بررسی نمودیم. هدف از این بررسی، مطالعه‌ی رفتار طیف انرژی و آهنگ‌های گذارِ هسته‌های کشیده‌ی γ-صلب در حضور پارامتر مربوط به جرم وابسته به مکان بود. در این بررسی، داده‌های خویش را با داده‌های نظریِ منابع دیگر که نتایج خود را با فرض جرم ثابت به دست آورده بودند و نیز با داده‌های تجربیِ این گونه هسته‌ها مقایسه نموده‌ایم. علاوه بر در نظر گرفتنِ پتانسیل‌های مختلف، ارائه‌ی مدل ترکیب‌شده و نیز بررسی مدل‌های تقارنی در رهیافت جرم وابسته به مکان، استفاده از ساختار فضای ناجابه‌جایی در هامیلتونیِ این مدل‌ها، مبحث دیگری است که در این رساله بررسی شده است. برای حلّ معادله‌ی ویژه‌مقداریِ مربوط به مدل X(۳) در حضور طول کمینه (پارامتری که نشان-دهنده‌ی ساختار فضای ناجابه‌جایی است)، اولین بار از تابع کمکی‌ای استفاده شد که نمودار طیف انرژی حاصل از آن حل، بر حسب پارامتر طول کمینه گسسته بود، لذا قادر به پیش‌بینی مقدار انرژیِ برخی از ترازهای حالت پایه نبود. بنابراین، ما از روشی جایگزین برای بررسی مجدّد این مدل در فضای ناجابه‌جایی استفاده نمودیم و نتایج خود را با نتایج حاصل از روش پیشین و نیز داده‌های تجربی، مقایسه نمودیم. علاوه بر این، از روش خویش برای مطالعه‌ی مدل X(۳) با پتانسیل کولنی–مانند در فضای ناجابه‌جایی استفاده نمودیم. در واقع، اثر پارامتر طول کمینه بر روی طیف انرژی و آهنگ‌های گذارِ هسته‌های کشیده‌ی γ-صلب بررسی شد و به منظور ارزیابیِ آن‌ها، با نتایج پیشین و داده‌های تجربی مقایسه شدند.

کلمات کلیدی: هامیلتونی بوهر؛ مدل‌های تقارنی E(۵)، X(۵) و X(۳)؛ مدل ترکیب‌شده؛ جرم وابسته به مکان؛ طول کمینه

لیست مقالات مستخرج از رساله

M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2016) "Gamma-rigid regime of the Bohr-Mottelson Hamiltonian in an energy-dependent approach" **Int. J. of Mod. Phys. E**, 25, 1650087

M. Alimohammadi, H. Hassanabadi and H. Sobhani (2016) "Effects of Coulomb-like potential on γ-rigid prolate nuclei considering minimal length formalism" **Mod. Phys. Lett. A**, 31, 35, 1650193

M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2017) "The X(3) model for the modified Davidson potential in a variational approach" **Int. J. of Mod. Phys. E**, 26, 9, pp 1750054

M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2017) "Investigation of the hybrid model with the Killingbeck potential in a variational approach" **Nucl. Phys. A**, 966, pp 34

M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2017) "Investigation of the spectroscopy properties of deformed nuclei by combining the X(3) and E(5) models" **Eur. Phys. J. A**, 53, pp 129

M. Alimohammadi, H. Hassanabadi and S. Zare (2017) "Investigation of the Bohr-Mottelson Hamiltonian in γ-rigid version with position dependent mass" **Nucl. Phys. A**, 960, pp 78

H. Hassanabadi, M. Alimohammadi and S. Zare (2017) "γ-rigid version of Bohr Hamiltonian with the modified Davidson potential in the position dependent mass" **Mod. Phys. Lett. A**, 32, 14, pp 1750085

M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2017) "Alternative solution of the gamma-rigid Bohr Hamiltonian in minimal length formalism" **Nucl. Phys. A**, 957, pp 439

H. Hassanabadi and M. Alimohammadi (2018) "Investigatio the Morse potential for the hybrid model and the one combining the E(5) and X(3) symmetries" **Int. J. Mod. Phys. E**, 27, 6, pp 1850053

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل اول:

مقدمه

۱-۱) تاریخچه

داستان هامیلتونی بوهر[۱] به سال‌ها قبل از کشف هسته‌های اتمی باز می‌گردد، هنگامی که ریلی[۲] [۱] نشان داد ضرایب وابسته به زمان $\alpha_{\lambda,\mu}(t)$ که در معادله‌ی مربوط به شعاع قطره‌مایع تراکم‌ناپذیر ظاهر می‌شوند، نقش مدهای طبیعی نوسان‌های کوچک سطح، حول شکل کروی را ایفا می‌کنند. زیروندهای λ و μ در این ضرایب اعداد صحیحی هستند که به ترتیب در بازه‌ی (∞ و۰] و [λ و λ-] قرار دارند. این ضرایب وابسته به زمان به همراه هماهنگ‌های کروی، شعاع قطره‌مایع تراکم‌ناپذیر را در زمان t در جهت θ و φ (زوایای دستگاه مختصات کروی) مشخص می‌نمایند. پس از آن، مدل قطره‌مایع برای یک هسته‌ی اتمی معرفی شد [۲] که این موضوع به فلاگ[۳] اجازه داد تا مدهای طبیعی معرفی شده توسط ریلی را برای توصیف کلاسیکی برانگیختگی‌های انرژی پایین هسته‌های کروی مورد استفاده قرار دهد [۳]. در مدل قطره‌ای، هسته به عنوان یک مایع در نظر گرفته می‌شود که در آن نوکلئون‌ها متناظر با اتم‌های موجود در آن مایع می‌باشند. با این وجود، برخی از ویژگی‌های هسته به خصوص آن‌هایی که مرتبط با اعداد جادویی هستند، نشان می‌دهند که نوکلئون‌های منفرد قطعاً بر رفتار هسته اثر دارند. در واقع با گذشت زمان یافت شد که هسته دارای ویژگی‌هایی است که مدل‌هایی نظیر مدل قطره‌مایع نمی‌توانند آن‌ها را شرح دهند. از برجسته‌ترین آن‌ها می‌توان انحراف‌های بسیار واضح از تقارن کروی در توزیع بار مشاهده شده در برخی هسته‌ها را نام برد. دانشمندان محقّق بیان نمودند که این مطلب به این موضوع اشاره دارد که برخی هسته‌ها کروی نیستند بلکه شبیه به یک بیضی تغییرشکل‌یافته می‌باشند، امّا تا سال ۱۹۵۰ هیچ‌کس نتوانست توضیحی منطقی برای این پدیده ارائه دهد. اوّلین بار رین‌واتر[۴] راه حلّی برای این مسأله مطرح نمود. وی با مشاهده‌ی تعامل بین تعداد زیادی از نوکلئون‌ها (که یک هسته‌ی داخلی را تشکیل می‌دادند) و نوکلئون‌های ظرفیت (که هسته‌ی بیرونی را شکل می-

[۱]Aage Niels Bohr

[۲]Lord Rayleigh

[۳]Siegfried Flugge

[۴]Leo James Rainwater

دهند) بیان نمود که نوکلئون‌های ظرفیت می‌توانند بر شکل هسته‌ی داخلی اثر گذارند. از آن‌جایی که نوکلئون‌های ظرفیت در میدانی که توسط توزیع نوکلئون‌های داخلی تعیین می‌شود، حرکت می‌کنند، این اثرگذاری دو طرفه است. اگر چندین نوکلئون ظرفیت در مسیرهایی مشابه حرکت کنند، اثر قطبی‌شدن روی سایر هسته می‌تواند چنان بزرگ باشد که کلّ هسته به طور دائمی تغییرشکل‌یافته باشد. به عبارتی دیگر، در نتیجه‌ی چرخش این نوکلئون‌های ظرفیت، دیواره‌ی هسته در معرض چنان فشار بالایی (که ناشی از نیروی گریز از مرکز می‌باشد) قرار می‌گیرد که موجب تغییر شکل آن می-شود. رین‌واتر هم‌چنین تلاش نمود تا این اثر را به طور نظری محاسبه کند ونتایج خود را با داده‌های تجربی مقایسه نماید. از سوی دیگر بوهر، کاملاً مستقل از رین‌واتر و تقریباً یک ماه پس از وی، این مسأله را از دیدگاهی فیزیکی‌تر فرمول بندی نمود. ایده‌های نسبتاً مبهم بوهر در سال ۱۹۵۱ توسعه یافت. در آن زمان، وی مطالعه‌ای بسیار جامع در مورد ارتباط بین نوسان‌های سطح هسته‌ای با حرکت‌های نوکلئون‌های منفرد ارائه داد. او توانست با تحلیل فرمول‌های نظری برای انرژی جنبشی هسته، انواع مختلف برانگیختگی‌های جمعی را پیش‌بینی کند: نوسانی که معادل با تغییر دوره‌ایِ شکل هسته حول مقدار میانگین می‌باشد و دورانی که کلّ هسته، حول محوری که در زاویه‌ی غیر صفر نسبت به محور تقارن قرار دارد، انجام می‌دهد. پیشرفت‌هایی که تا آن زمان به دست آمده بودند تا حدّ زیادی فاقد اساس تجربی بودند. مقایسه‌ی بسیار مهم با داده‌های تجربی که به طور مشترک توسط بوهر و متلسون[۱] نوشته شد، در سال‌های ۱۹۵۲ تا ۱۹۵۳ به چاپ رسید [۴-۶]. به عبارتی دیگر می‌توان گفت مدل ریلی و فلاگ توسط بوهر کوانتیزه شد [۷]. وی در این روش، مدل کوانتومی نوسانات سطحی هسته‌های کروی را فرمول بندی نمود. منظور از فرمول‌بندیِ کوانتومی، معرفی عملگر هامیلتونی در چارچوب مرجع ذاتی[۲] (که دستگاه مختصات متصل به جسم[۳] نیز نامیده می‌شود) برای توصیف سطح هسته‌ای چهارقطبی است. بوهر زوایای اویلر و پارامترهای β و γ (که امروزه معمولاً

[۱] Ben Roy Mottelson

[۲] Intrinsic system

[۳] Body-fixed system

پارامترهای تغییر شکل بوهر نامیده می‌شوند) را جایگزین متغیرهای $\alpha_{2,\mu}(t)$ نمود. این پنج مختصه (سه زاویه‌ی اویلر و دو پارامتر β و γ) هسته را در سیستم ذاتی توصیف می‌نمایند. سه زاویه‌ی اویلر که معمولاً با θ_1، θ_2و θ_3 یا θ، φ و ψ و یا به صورت کلی Ω نمایش داده می‌شوند جهت‌گیری دستگاه مختصات متصل به جسم را نسبت به چارچوب مرجع آزمایشگاه نشان می‌دهند درحالی که پارامترهای β و γ به ترتیب انحراف‌های هسته از شکل کروی و تقارن محوری را مشخص می‌نمایند. بوهر و متلسون این مدل کوانتومی را به منظور توصیف نوسان‌ها و دوران‌های هسته‌های تغییرشکل-یافته تعمیم دادند [۸]. در واقع، جایزه‌ی نوبل فیزیک در سال ۱۹۷۵ به طور مشترک به بوهر، متلسون و رین‌واتر برای کشف ارتباط بین حرکت جمعی و حرکت ذره‌ای در هسته‌های اتمی و توسعه‌ی نظریه‌ی ساختار هسته‌های اتمی که بر پایه‌ی این ارتباط است تعلق گرفت.

هامیلتونی بوهر [۷و۸] یا هامیلتونی بوهر- متلسون که هامیلتونی جمعی یا مدل جمعی نیز نامیده می‌شود، یکی از بنیادهای فیزیک هسته‌ای به شمار می‌رود و بیش از ۶۰ سال است [۹-۲۱] که پایه و اساس توصیف جمعی هسته‌ها بوده است. مدل بوهر و گسترش یکپارچه‌ی آن، زبان اساسی و چارچوب پدیدار شناختی‌ای را برای درک ساختار جمعی هسته‌ها فراهم نموده است. به عبارت دیگر، ویژه انرژی‌ها، ویژه توابع متناظر و نیز آهنگ‌های گذار[۱] هسته‌های تغییرشکل‌یافته که با حل عددی یا تحلیلی این هامیلتونی در نقاط بحرانی[۲] تعیین می‌شوند، منجر به دسته‌بندی طیف انرژی برحسب نوارهای βو γ می‌گردند و نوع تغییرشکل‌یافتگی هسته‌ها را تعیین می‌نماید. در هامیلتونی جمعی طیف انرژی هسته بر اساس ترازهای انرژی موجود در نوار حالت پایه[۳]، نوارهای نوسانی β[۴] (مربوط به بخش وابسته به βی انرژی جنبشی نوسانی)، نوارهای نوسانی γ (مرتبط با بخش وابسته به γی انرژی جنبشی نوسانی) و نوارهای دورانی γ (متناظر با بخش دورانی عملگر انرژی جنبشی) تعیین می‌شود

---

[۱]Transition rates

[۲]Critical points

[۳]Ground state

[۴]β-vibrational

(برای آشنایی بیشتر با نوارهای انرژی به فصل سوم رجوع شود). از آن‌جایی که مدل جمعی بر اساس توصیفی کلاسیکیِ نوسان‌های یک قطره‌مایعِ شاره-مانندِ پیوسته و تراکم‌ناپذیر می‌باشد، محدودیت-هایی نیز دارد که برجسته‌ترین آن‌ها عدم وجود انواع برانگیختگی‌های تک-ذره‌ای می‌باشد. علی‌رغم این محدودیت‌ها، این مدل می‌تواند به طور مناسبی برای توصیف زیرمجموعه‌ای از همه‌ی پیکربندی-های میکروسکوپیکی ممکن، که در آن همه‌ی نوکلئون‌ها به طور جمعی در حرکت هسته سهم دارند، که این نوع حرکت همیشه در برانگیختگی‌های انرژی پایین در هسته‌های زوج-زوج یافت می‌شود، استفاده شود. بنابراین، هسته‌هایی که در این مدل بررسی می‌شوند، علاوه بر زوج-زوج بودن، باید دارای عدد جرمی‌ای باشند که بتوان از اندازه‌ی یک نوکلئون در مقایسه با اندازه‌ی تمام هسته صرف نظر کرد، لذا هسته‌های سنگین در این مدل بررسی می‌شوند. [۲۲]. تاکنون هسته‌های که با مدل جمعی بوهر مورد بررسی قرار گرفته‌اند دارای عدد جرمی‌ای بین ۹۸ تا ۲۵۰ بوده‌اند.

از آن‌جایی که در هامیلتونی بوهر، عملگر انرژی جنبشی نوسانی و دورانی و نیز انرژی پتانسیل بر حسب پنج مختصه‌ی نام برده شده نوشته می‌شوند، دینامیک حرکت چهارقطبی هسته‌ها به طور مناسبی توسط این هامیلتونی توصیف می‌شود. بسته به نوع انرژی پتانسیل، این هامیلتونی می‌تواند علاوه بر حدّ نوسانی که در آن هسته متحمّل نوسان‌های هماهنگ حول شکل کروی آن می‌شود، حدّ دورانی را نیز که در آن، برانگیختگی‌های پایین شامل دوران‌هایی حول هسته‌ی تغییرشکل‌یافته‌ی صلب هستند، توصیف نماید. بررسی هم‌زمان حدّ دورانی و نوسانی که برای هسته‌های انتقالی[۱] اهمیت دارد در این هامیلتونی لحاظ می‌شود. هسته‌های انتقالی هسته‌هایی هستند که دچار گذار فازی شکل[۲] از یک تقارن دینامیکی به تقارن دینامیکی دیگر می‌شوند. تقارن‌های دینامیکی حالت خاصی از هامیلتونی مدل برهم‌کنش بوزونی[۳] [۲۳] هستند که برای توصیف هندسی هسته‌ها مورد استفاده قرار

[۱] Transitional nuclei

[۲] Shape phase transition

[۳] Interacting boson model (IBM)

می‌گیرند. به عبارتی دیگر، در این تقارن‌ها، هامیلتونی مدل برهم‌کنش بوزونی از عملگرهای کازمیر[۱] جبر لی [۲۴] ساخته می‌شود. این عملگرها شامل اعداد کوانتومی خوبی هستند که منجر به استخراج ویژه‌مقادیر، ویژه‌حالت‌ها و مشاهده‌پذیرهای فیزیکی می‌شوند. دو نقطه‌ی بحرانی[۲] E(۵) [۲۵] و X(۵) [۲۶] که به ترتیب معادل با گذار از تقارن دینامیکی U(۵) به SO(۶) و گذار از U(۵) به SU(۳) هستند، برای توصیف ویژگی‌های اسپکتروسکوپی هسته‌های انتقالی‌ای استفاده می‌شوند که دچار گذار فازی شکل از کروی به γ-ناپایدار[۳] و کروی به متقارن محوری کشیده[۴] می‌شوند. در مورد تقارن‌های دینامیکی و نقاط بحرانی در فصل چهارم توضیح‌های بیشتری ارائه شده است. از آنجایی که نوع پتانسیل موجود در هامیلتونی بوهر یا به بیانی دقیق‌تر مکان مینیمم این پتانسیل در صفحه‌ی β و γ نوع هندسه‌ی مربوط به هسته را تعیین می‌کند [۲۷]، نقاط بحرانی نام برده شده را می‌توان در هامیلتونی بوهر نیز مورد بررسی قرار داد. لذا از این نقاط به عنوان مدل که بیانگر هامیلتونی بوهر با پتانسیلی مشخّص و به دنبال آن حلّی معیّن از معادله‌ی ویژه‌مقداری متناظر می‌باشد، نیز یاد شده است. مدل X(۳) [۲۸] نیز که حالت خاصّی از نقطه‌ی بحرانی X(۵) می‌باشد در سال ۲۰۰۶ برای توصیف هسته‌های کشیده‌ی γ-صلب[۵] معرفی شد.

۱-۲) ارتباط موضوع تحقیق با کارهای قبلی

در سال ۲۰۱۵، مدل X(۳) به‌ازای پتانسیل سکستیک[۶] (پتانسیلی که شامل جمله‌های مرتبه‌ی دوم، چهارم و ششم β می‌باشد) مورد مطالعه قرار گرفت [۲۹]. ما این مدل را با پتانسیل نوسانگر هماهنگ وابسته به انرژی (که پیش‌تر در مدل E(۵) استفاده شده بود [۳۰]) بررسی نموده [۳۱] که نتایج

[۱] Casmir
[۲] Critical point
[۳] γ-unstable
[۴] Prolate
[۵] γ-rigid
[۶] Sextic

حاصل از آن شامل توصیف نسبتاً خوبی از برخی آهنگ‌های گذار ایزوتوپ‌های ساماریم[۱] $^{152, 154}Sm$ و جیوه ^{190}Hg می‌باشد. هم‌چنین این مدل را به ازای پتانسیل داویدسون[۲] [۳۲] تعمیم‌یافته به روش وردش[۳] [۳۳و۳۴] مورد مطالعه قرار داده و نشان داده‌ایم [۳۵] که مدل X(۳) در این حالت برای برخی هسته‌ها از جمله ایزوتوپ‌های زنون $^{120-126}Xe$ توصیف بهتری نسبت به بررسی این مدل با پتانسیل سکستیک ارائه می‌دهد.

پیش از معرفی مدل ترکیبی[۴] [۳۶]، هامیلتونی بوهر تنها در یک تقارن دینامیکی یا در یک نقطه‌ی بحرانی بررسی شده بود. در این مدل (که ترکیبی از نقطه‌ی بحرانی X(۵) و تقارن دینامیکی X(۳) می‌باشد)، ابتدا پتانسیل مربوط به بخش‌های وابسته به β و γ به ترتیب به شکل چاه مربعی نامحدود[۵] و نوسانگر هماهنگ انتخاب شد و طیف انرژی و آهنگ‌های گذار هسته‌های ^{160}Gd (گادولینیم[۶])، ^{162}Dy (دیسپروزیم[۷]) و ^{166}Er (اربیم[۸]) مورد بررسی قرار گرفت [۳۶]. پس از آن بدون تغییر پتانسیل پتانسیل مربوط به γ، پتانسیل وابسته به β را به صورت پتانسیل داویدسون درنظر گرفتند و با حل معادله‌ی ویژه مقداری متناظر، طیف اسپکتروسکوپی ایزوتوپ‌های غنی از نوترون و کمیاب در زمین هسته‌های گادولینیم و دیسپروزیم را مطالعه نمودند [۳۷و۳۸]. ما نیز با در نظر گرفتن پتانسیل کیلینگبک[۹] [۳۹] و نوسانگر هماهنگ به ترتیب برای بخش وابسته به β و γ نشان داده‌ایم [۴۰] که مدل ترکیبی علاوه بر پیش‌بینی مناسب طیف انرژی و آهنگ‌های گذار هسته‌های از پیش نام برده

---

[۱] Samarium
[۲] Davidson
[۳] Variation method
[۴] Hybrid model
[۵] Infinite square well
[۶] Gadolinium
[۷] Dysprosium
[۸] Erbium
[۹] Killingbeck

شده، ویژگی‌های اسپکتروسکوپی هسته‌های دیگر از جمله ^{154}Sm را نیز به خوبی توصیف می‌نماید. در این بررسی نیز به علّت عدم وجود حل تحلیلی از روش وردش استفاده شده است.

یکی دیگر از مطالعاتی که در این رساله انجام شده است، معرفی مدل ترکیب‌شده[۱] [۴۱] می‌باشد که هم‌زمان نقاط بحرانی E(۵) و تقارن دینامیکی X(۳) را در بردارد. مدل ترکیب‌شده نسبت به بررسی جداگانه‌ی مدل‌های E(۵) و X(۳) از دو برتری برخوردار است: مزیّت اول از بین رفتن تبهگنی مشاهده شده در مدل E(۵) است و دیگری پیش‌بینی انرژی ترازهای مربوط به نوارهای γ می‌باشد (از آنجایی که در مدل X(۳) پارامتر γ و مشتق آن نسبت به زمان صفر است، این مدل نمی‌تواند ترازهای انرژی نوار مربوطه را توصیف نماید). از سوی دیگر در سال ۲۰۰۸، مدل E(۵) با پتانسیل مورس[۲] [۴۲] برای توصیف طیف انرژی و آهنگ‌های گذار هسته‌هایی با عدد جرمی بزرگ‌تر و مساوی ۱۰۰ بررسی شد [۴۳و۴۴]، امّا از آنجایی که مدل ترکیب‌شده برتری از بین رفتگی تبهگنی موجود در مدل E(۵) را در بردارد، ما این پتانسیل را برای مدل خویش مورد استفاده قرار داده [۴۵] و نتایج حاصل را با نتایج به دست آمده در منابع [۴۳و۴۴] و نیز داده‌های تجربی متناظر مقایسه نموده‌ایم.

پیش از سال ۲۰۱۱، پارامتر جرم موجود در هامیلتونی بوهر را به عنوان یک ثابت در نظر می‌گرفتند. در واقع معادله‌ی ویژه‌مقداری مربوط به هامیلتونی بوهر را که یک معادله‌ی دیفرانسیلیِ شرودینگر مانند بود، با فرض جرم ثابت حل می‌نمودند، اما دلایلی وجود دارند که نشان می‌دهند این پارامتر می-تواند به تغییرشکل هسته وابسته باشد:

۱) عدم هم‌خوانی نتایج تجربی و نظری مربوط به میزان وابستگی تکانه‌ی لختی به پارامتر تغییر شکل β، به ویژه برای هسته‌های کاملاً تغییر شکل یافته [۴۶]

۲) مشاهده‌ی تجربی [۴۷و۴۸] عدم ثابت بودن تانسور جرم در هامیلتونی جمعی

---

[۱] Combined

[۲] Morse

۳) حضور عبارت‌هایی به شکل $\pi^2\beta^2$ [۴۹] که π عملگر انرژی جنبشی است، و حتی پیچیده‌تر در عملگر هامیلتونی مدل IBM و عدم حضور آن‌ها در عملگر دیفرانسیلی هامیلتونی بوهر.

اولین بار بناتسس[۱] و همکارانش [۵۰] با بیان دلایل فوق، هامیلتونی بوهری که پتانسیل وابسته به βی آن به شکل داویدسون انتخاب شده بود را برای هسته‌های γ-ناپایدار [۹] (که با مدل E(۵) بررسی می‌شوند)، هسته‌های کشیده و نیز نامتقارن-محوری[۲] [۵۱و۵۲] به‌گونه‌ای تعمیم دادند که پارامتر جرم موجود در آن به β وابسته باشد. آن‌ها این رهیافت را مدل داویدسون با جرم وابسته به تغییرشکل[۳] نامیدند. مدل کراتزر[۴] این رهیافت نیز در سال ۲۰۱۳ بررسی شده است [۵۳]. از آنجایی که در این رهیافت وابستگی جرم به پارامتر β مورد نظر است و این پارامتر به شعاع هسته بستگی دارد (به فصل دوم این رساله رجوع شود)، از این پس در این رساله از آن به عنوان جرم وابسته به مکان[۵] یاد می‌شود. در راستای این پژوهش‌ها، به منظور بررسی تغییرات طیف انرژی و آهنگ‌های گذار هسته‌های کشیده‌ی γ-صلب به هنگام ثابت نبودن پارامتر جرم، مدل X(۳) را در این رهیافت مورد مطالعه قرار داده [۵۴و۵۵] و نتایج حاصل از آن را در این رساله گردآوری نموده‌ایم.

علاوه بر به‌کارگیری پتانسیل‌های متفاوت در دو بخش وابسته به β و γ و نیز پیگیری رهیافت جرم وابسته به مکان، بررسی هامیلتونی بوهر در ساختار طول کمینه[۶] [۵۶]، شیوه‌ی دیگری است که به منظور هم‌پوشانی بیشتر داده‌های نظری با نتایج تجربی مورد استفاده قرار گرفته است. اِعمال طول کمینه روی یک سیستم ناشی از وجود اثرهای گرانشی در آن سیستم است. اگرچه با بررسی ثابت جفت شدگی نسبی بین نیروهای هسته‌ای و گرانشی مشاهده می‌شود که می‌توان به سادگی از اثرهای

[۱]Bonatsos

[۲]Triaxil

[۳]Deformation Dependent Mass

[۴]Kratzer

[۵]Position Dependent Mass

[۶]Minimal length

گرانشی در مقابل نیروهای هسته‌ای صرف نظر نمود، امّا در مکانیک کوانتومی نشان داده شده است [۵۷] که در مقیاس‌های کوانتومی این اثرها وجود دارند. از آنجایی که در هامیلتونی بوهر ویژگی‌های اسپکتروسکوپی یک هسته مورد مطالعه قرار می‌گیرد، در واقع از مقیاس‌های کوانتومی استفاده می‌شود، بنابراین انتظار می‌رود که بتوان از این رهیافت برای بررسی طیف انرژی هسته‌ها استفاده نمود. یکی از راه‌های ممکن برای گنجاندن این اثرات در یک سیستم کوانتومی، بررسی آن در فضای ناجابه‌جایی[۱] است. منظور از این فضا تعمیم رابطه‌ی جابه‌جایی معمول در مکانیک کوانتومی است که به عنوان ساختار طول کمینه شناخته شده است. در این رساله، ویژه توابع و ویژه مقادیر مدل X(۳) در ساختار طول کمینه با استفاده از روشی متفاوت با شیوه‌ی ارائه شده در منبع [۵۶] تعیین شده‌اند و نتایج حاصل مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند [۵۸]. هم‌چنین، اثرات پتانسیل کولنی-مانند[۲] روی هسته‌های کشیده‌ی γ-صلب را در حضور و عدم حضور ساختار طول کمینه مورد بررسی قرار داده‌ایم [۵۹].

۱-۳) اشاره به مطالب فصل‌های بعدی

این رساله بدین طریق فصل‌بندی شده است: فصل دوم آن به معرفی ضرایب وابسته به زمان مدل قطره‌مایع، معرفی تغییر شکلهای چندقطبی سطح هسته‌ای با استفاده از این ضرایب و نیز بررسی تغییر شکل چهارقطبی با استفاده از پارامترهای تغییرشکل بوهر اختصاص یافته است. در فصل سوم به طور کامل در مورد روش استخراج هامیلتونی بوهر، شکل کلی توابع موج و اعداد کوانتومی مربوط به ترازهای انرژی بحث شده است. در انتهای این فصل، هسته‌های سنگین را بر اساس نوع انرژی پتانسیل و مکان مینیمم آن در صفحه‌ی (βوγ) دسته‌بندی نموده‌ایم. توضیح مختصر تقارن‌های دینامیکی U(۵)، SO(۶) و SU(۳) ، مرور مدل‌های E(۵)، X(۵) X(۳) و نیز مدل ترکیبی، به همراه معرفی مدل ترکیب‌شده در فصل چهارم گنجانده شده‌اند. علاوه بر این، بررسی مدل X(۳) با پتانسیل-

[۱] Non-commutative

[۲] Coulomb-like

های نوسانگر هماهنگ وابسته به انرژی و داویدسون تعمیم یافته در این فصل انجام شده است. حل معادله موج مربوط به مدل ترکیبی با پتانسیل کلینگبک و نوسانگر هماهنگ (به ترتیب برای بخش وابسته به β و γ) به روش وردش و مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با نتایج تجربی متناظر نیز در فصل چهارم آورده شده است. هم‌چنین در این فصل، مدل ترکیب‌شده را معرفی نموده و آن را با پتانسیل مورس مورد بررسی قرار داده و نتایج حاصل را تجزیه و تحلیل نموده‌ایم. فصل پنجم و ششم این رساله به ترتیب به مطالعه‌ی مدل X(۳) با رهیافت جرم وابسته به مکان و بررسی این مدل در ساختار طول کمینه اختصاص یافته است. نتیجه‌گیری و پیشنهادها نیز در فصل هفتم آورده شده اند.

فصل دوم:

تغییرشکل‌های سطح هسته‌ای

۲-۱) پارامتر بندی کلی

طیف‌های برانگیختگی هسته‌های زوج-زوج در محدوده‌ی انرژی ۲ MeV ساختارهای نواری مشخصی را نشان می‌دهند. این ساختارها به عنوان نوسان‌ها و دوران‌های سطح هسته‌ای در مدل جمعی اولین بار توسط بوهر و متلسون پیشنهاد شدند [۷-۸و۶۰] و بعد توسط فاسلر[۱] و گرینر[۲] گسترش یافتند [۶۱-۶۷]. همان‌طور که در مقدمه بیان شد، تصویر فیزیکی مدل جمعی بر پایه‌ی تصویر مدل قطره-مایع باردار کلاسیکی می‌باشد و برای برانگیختگی‌های انرژی پایین تراکم ماده‌ی هسته‌ای اهمیتی ندارد به‌گونه‌ای که از ضخامت لایه‌ی سطح هسته‌ای صرف نظر می‌شود، بنابراین با مدل قطره مایع دارای چگالی ثابت و سطح باریک شروع می‌کنیم که در آن ساختار داخلی (وجود نوکلئون‌های منفرد) نیز لحاظ نمی‌شود [۲۲]. با این فرضیه‌ها، سطح هسته‌ای متحرک می‌تواند در حالت کاملاً عمومی توسط یک بسط بر حسب هماهنگ‌های کروی به همراه پارامترهای شکل که به زمان وابسته‌اند و به عنوان ضریب در این بسط ظاهر می‌شوند به شکل زیر توصیف شود [۲۲]

$$R(\theta,\phi,t) = R_0\left(1+\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\alpha^*_{\lambda\mu}(t)\,Y_{\lambda\mu}(\theta,\phi)\right) \qquad (۱-۲)$$

که در آن $R(\theta,\phi,t)$ شعاع هسته‌ای در جهت (θ,ϕ) در زمان t و R_0 شعاع هسته‌ی کروی است. دامنه‌های وابسته به زمان $\alpha_{\lambda,\mu}(t)$ نوسان‌های هسته را توصیف می‌کنند و بنابراین به عنوان مختصات جمعی به کار برده می‌شوند.

برای کامل کردن فرمول‌بندی مدل جمعی باید هامیلتونی وابسته به $\alpha_{\lambda,\mu}(t)$ به همراه تکانه‌های مناسب آن ساخته شود، اما قبل از انجام این‌کار معنای فیزیکی $\alpha_{\lambda,\mu}(t)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

برخی از ویژگی‌های ضرایب $\alpha_{\lambda,\mu}(t)$ را می‌توان به سادگی از معادله‌ی (۲-۱) استخراج نمود [۲۲]:

---

[۱] Faessler

[۲] Greiner

۱) از حقیقی بودن شعاع هسته‌ای و ویژگی هماهنگ‌های کروی یعنی

$$Y^{*}_{\lambda\mu}(\theta,\phi)=(-1)^{\mu}\,Y_{\lambda-\mu}(\theta,\phi) \tag{۲-۲}$$

و با استفاده از فرمول (۲-۱) داریم

$$\alpha^{*}_{\lambda\mu}=(-1)^{\mu}\,\alpha_{\lambda-\mu} \tag{۲-۳}$$

۲) شکل اصلی هسته با تابع $R(\theta,\phi)$ توصیف می‌شود. یک دوران مشخص جهت (θ,ϕ)را به جهت (θ',ϕ') انتقال می‌دهد بنابراین پس از دوران باید شکل هسته را با تابع جدید $R'(\theta',\phi')$که در شرط زیر صدق می‌کند توصیف نمود

$$R'(\theta',\phi')=R(\theta,\phi) \tag{۲-۴}$$

این ایده اکنون تعریف ناوردایی دورانی سطح هسته‌ای را اینگونه معنا می‌کند که سطح دوران یافته‌ی $R'(\theta',\phi')$شکل تابعی یکسانی دارد اما دارای پارامترهایی می‌باشد که مطابق رابطه‌ی زیر دوران می-یابند [۲۲]

$$\alpha'_{\lambda\mu}=\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} D^{(\lambda)}_{\mu\mu'}\,\alpha_{\lambda\mu'} \tag{۲-۵}$$

که

$$D^{(\lambda)}_{\mu\mu'}=\left\langle \lambda\mu \right| R_{1,2,3} \left| \lambda\mu' \right\rangle \tag{۲-۶}$$

و

$$R_{1,2,3}=e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_1\hat{J}_z}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_2\hat{J}_y}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\theta_3\hat{J}_z} \tag{۲-۷}$$

که θ_1، θ_2 و θ_3 زوایای اویلر هستند (ماتریس تعریف شده در رابطه‌ی (۲-۶) تابع ویگنر[1] است که در فصل بعد در مورد آن توضیح داده شده است).

۳) تحت تبدیل پاریته ضرایب $\alpha_{\lambda,\mu}(t)$ تغییر نمی‌کنند زیرا تابع هماهنگ‌های کروی و تابع $R(\theta,\phi)$ هر دو بازتاب می‌یابند.

۲-۲) انواع تغییر شکل‌های چند قطبی

در این بخش معنای فیزیکی جملات حاضر در بسط معادله‌ی (۲-۱) و کاربرد آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم [۲۲].

۲-۲-۱) مد تک‌قطبی $\lambda = 0$. هماهنگ کروی $Y_{00}(\theta,\phi)$ ثابت است، بنابراین مقدار غیر صفر $\alpha_{0,0}$ متناسب با تغییر شعاع کره است. برانگیختگی متناظر مد تنفسی هسته نامیده می‌شود. با این وجود، به علت بزرگی مقدار انرژی مورد نیاز برای فشرده‌سازی ماده‌ی هسته‌ای، این مد در انرژی‌هایی بسیار بالاتر از انرژی‌های پایینی که در اینجا مورد بحث است، حائز اهمیت می‌باشد.

۲-۲-۲) مد دوقطبی. این مد ($\lambda = 1$) در واقع یک تغییر شکل را نشان نمی‌دهد بلکه متناسب با جابه‌جایی یا شیفت مرکز جرم می‌باشد. بنابراین به عنوان پایین ترین مرتبه فقط متناظر با انتقال هسته است و نباید به عنوان برانگیختگی‌های هسته‌ای لحاظ شود.

۲-۲-۳) مد چهارقطبی. ثابت شده است که مدهایی با $\lambda = 2$ از مهم‌ترین برانگیختگی جمعی هسته می‌باشد که در مورد جزئیات آن در بخش بعدی بحث خواهد شد.

۲-۲-۴) مد هشت‌قطبی. مدهای متقارن اصلی هسته، مدهای $\lambda = 3$ هستند که متناظر با نوارهای پاریته‌ی منفی می‌باشند. شکل تغییر شکل یافته‌ی هشت قطبی شبیه به یک گلابی است.

---
[1] Wigner

۲-۲-۵) مد شانزده‌قطبی. با وجود اینکه هیچ گواهی برای برانگیختگی شانزده قطبی ($\lambda = 4$) خالص در طیف‌ها وجود ندارد و بالاترین تکانه‌ی زاویه‌ای است که اهمیتی در فیزیک هسته‌ای ندارد، اما به عنوان ترکیبی با برانگیختگی‌های چهارقطبی، نقش مهمی را ایفا می‌کنند و به عنوان شکل حالت پایه‌ی هسته‌های سنگین محسوب می‌شوند [۲۲].

مدهایی با تکانه‌ی زاویه‌ای بالاتر، از هیچ اهمیت کاربردی‌ای برخوردار نیستند زیرا شواهد تجربی‌ای دال بر وجود آن‌ها ملاحظه نشده است.

۲-۳) تغییرشکل‌های چهارقطبی در مختصات بوهر

همانطور که در بخش قبل ذکر نمودیم، این تغییر شکل‌ها مهم‌ترین درجات آزادی نوسانی هسته می-باشند و بسیاری از رهیافت‌هایی که در ادامه بررسی خواهند شد به این موارد اختصاص یافته است.

در این حالت سطح هسته با رابطه‌ی زیر داده می‌شود [۲۲]

$$R(\theta,\phi,t) = R_0\left(1+\sum_{\mu=-2}^{2}\alpha^*_{2\mu}(t)\,Y_{2\mu}(\theta,\phi)\right) \qquad (۲-۸)$$

برای مطالعه‌ی شکل واقعی هسته، بهترین روش این است که هسته را در مختصات دکارتی نمایش دهیم، زیرا فقط با استفاده از این مختصات می‌توان ضرایب $\alpha_{2\mu}$ را بر حسب پارامترهای تغییر شکل بوهر نوشت (روابط (۲-۲۲) تا (۲-۲۵)). به این منظور، ابتدا باید هماهنگ‌های کروی بر حسب مؤلفه-های دکارتی بردار واحد در جهت (θ,ϕ) بازنویسی شوند. این مؤلفه‌ها عبارتند از [۲۲]

$$\xi = \sin\theta\cos\phi,\ \eta = \sin\theta\sin\phi,\ \zeta = \cos\theta \qquad (۲-۹)$$

که در شرط کمکی $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = 1$ صدق می‌کنند. هماهنگ‌های کروی وارد شده در معادله‌ی (۲-۸) بر حسب این مؤلفه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$Y_{20}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(2\zeta^2-\xi^2-\eta^2\right) \quad (۲-۱۰)$$

$$Y_{2\pm1}(\theta,\phi)=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}=\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\left(\xi\zeta\pm i\eta\zeta\right) \quad (۲-۱۱)$$

$$Y_{2\pm2}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm2i\phi}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\left(\xi^2-\eta^2\pm2i\xi\eta\right) \quad (۲-۱۲)$$

با قرار دادن این روابط در رابطه‌ی (۲-۸) به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$R(\xi,\eta,\zeta)=R_0\left(1+\alpha_{\xi\xi}\xi^2+\alpha_{\eta\eta}\eta^2+\alpha_{\zeta\zeta}\zeta^2+2\alpha_{\xi\eta}\xi\eta+2\alpha_{\xi\zeta}\xi\zeta+2\alpha_{\eta\zeta}\eta\zeta\right) \quad (۲-۱۳)$$

که در آن مؤلفه‌های دکارتی تغییر شکل با مؤلفه‌های کروی آن از طریق روابط زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند

$$\alpha_{2\pm2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left(\alpha_{\xi\xi}-\alpha_{\eta\eta}\pm2i\alpha_{\xi\eta}\right) \quad (۲-۱۴)$$

$$\alpha_{2\pm1}=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\left(\alpha_{\xi\zeta}\pm i\alpha_{\eta\zeta}\right) \quad (۲-۱۵)$$

$$\alpha_{20}=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\alpha_{\zeta\zeta}-\alpha_{\xi\xi}-\alpha_{\eta\eta}\right) \quad (۲-۱۶)$$

در این روابط پنج درجه‌ی آزادی موجود در مؤلفه‌های کروی بر حسب شش مؤلفه‌ی دکارتی نوشته شده‌اند. با این وجود، تابع $R(\theta,\phi)$ باید در رابطه‌ی زیر صدق کند

$$\int R(\Omega)\,d\Omega=4\pi R_0 \quad (۲-۱۷)$$

زیرا انتگرال روی $Y_{2\mu}(\Omega)$ صفر می‌شود. با اعمال انتگرالی مشابه با این انتگرال، برای شکل کروی داریم (به دلایل تقارنی، مؤلفه‌های ترکیبی هیچ سهمی ندارند در حالی که مؤلفه‌های قطری حاصل زیر را می‌دهند)

$$\int \xi^2 d\Omega = \int \eta^2 d\Omega = \int \zeta^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3} \equiv a \tag{۲-۱۸}$$

بنابراین

$$\int R(\Omega) d\Omega = 4\pi R_0 + a\left(\alpha_{\zeta\zeta} + \alpha_{\xi\xi} + \alpha_{\eta\eta}\right) \tag{۲-۱۹}$$

لذا مؤلفه‌های دکارتی باید در شرط زیر صدق کنند

$$\left(\alpha_{\zeta\zeta} + \alpha_{\xi\xi} + \alpha_{\eta\eta}\right) = 0 \tag{۲-۲۰}$$

از آنجایی که تغییرشکل‌های دکارتی به کشیدگی (یا فشردگی) هسته مرتبط می‌شوند می‌توان گفت [۲۲]:

α_{20} کشیدگی محور z نسبت به محورهای x و y را توصیف می‌کند، $\alpha_{2\pm2}$ طول نسبی محور x در مقایسه با محور y را به همراه یک تغییر شکل مورّب در صفحه‌ی x-y شرح می‌دهد و $\alpha_{2\pm1}$ به یک تغییر شکل مورب در جهت محور z اشاره دارد.

مشکلی که در رابطه با این پارامترها وجود دارد این است که محورهای تقارن هسته (اگر وجود داشته باشند) می‌توانند هر جهتی را در فضا اختیار نمایند، بنابراین شکل هسته و جهت آن در $\alpha_{2\mu}$ آمیخته می‌شود. اگر این جهت‌گیری در هم‌آمیخته توسط انتقال به محورهای اصلی از هم جدا شود هندسه‌ی مربوط به این موقعیت واضح تر می‌شود. اگر چارچوب مختصاتی جدید را با کمیت‌های پریم‌دار نشان دهیم، تانسور تغییر شکل دکارتی باید قطری باشد، بنابراین [۲۲]

$$R\left(\xi',\eta',\zeta'\right)=R_0\left(1+\alpha'_{\xi\xi}\xi'^2+\alpha'_{\eta\eta}\eta'^2+\alpha'_{\zeta\zeta}\zeta'^2\right) \tag{۲۱-۲}$$

و شرط $\alpha'_{\xi\eta}+\alpha'_{\xi\zeta}+\alpha'_{\eta\zeta}=0$ برای مؤلفه‌های کروی به این نکته اشاره دارد که

$$\alpha'_{2\pm2}=\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left(\alpha'_{\xi\xi}-\alpha'_{\eta\eta}\right)\equiv a_2 \tag{۲۲-۲}$$

$$\alpha'_{2\pm1}=0 \tag{۲۳-۲}$$

$$\alpha'_{20}=\sqrt{\frac{8\pi}{15}}\frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\alpha'_{\zeta\zeta}-\alpha'_{\xi\xi}-\alpha'_{\eta\eta}\right)\equiv a_0 \tag{۲۴-۲}$$

اکنون نیز پنج پارامتر حقیقی مستقل وجود دارد اما با مفهوم هندسی واضح تر[۲۲]:

a_0 کشیدگی محور z پرایم نسبت به محورهای x و y پرایم را نشان می‌دهد، a_2 تفاوت طول محورهای x و y پرایم را تعیین می‌کند و زوایای اویلر $\left(\theta_1,\theta_2,\theta_3\right)$ جهت‌گیری دستگاه مختصات اصلی $\left(x',y',z'\right)$ نسبت به چارچوب ثابت آزمایشگاه $\left(x,y,z\right)$ را مشخص می‌کنند.

مزیت دستگاه مختصات اصلی این است که دوران و نوسان به وضوح از یک‌دیگر جدا می‌شوند [۲۲]: یک تغییر در زوایای اویلر اشاره به یک دوران خالص هسته بدون هیچ تغییری در شکل آن دارد، در حالی که تغییر شکل فقط توسط پارامترهای a_0 و a_2 تعیین می‌شود. توجه داریم که $a_2=0$ یک شکل با طوهای مساوی در جهت محورهای x و y پرایم را توصیف می‌کند، یعنی شکلی با تقارن محوری حول محور z پرایم.

مجموعه‌ی دیگری از پارامترها وجود دارد که توسط بوهر معرفی شد [۷و۶۰]. این مجموعه متناظر با چیزی شبیه به مختصات قطبی در فضای $\left(a_0,a_2\right)$ است که با روابط زیر تعریف می‌شوند [۲۲]

$$a_0=\beta\cos\gamma,\ a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma \tag{۲۵-۲}$$

فاکتور $\frac{1}{\sqrt{2}}$ به طریقی انتخابی شده است که

$$\sum_{\mu}\left|\alpha_{2\mu}\right|^2=\sum_{\mu}\left|\alpha'_{2\mu}\right|^2=a_0^2+2a_2^2=\beta^2 \qquad (۲-۲۶)$$

اکنون برای توصیف شکل‌های هسته‌ای در دستگاه مختصات اصلی بر حسب β و γ به طریق زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا مؤلفه‌های دکارتی را بر حسب پارامترهای β و γ بازنویسی می‌نماییم. برای این منظور از رابطه‌ی (۲-۲۰) استفاده می‌کنیم، لذا (مشابه با محاسبات انجام شده برای دستگاه بدون پریم که معادلات (۲-۸) تا (۲-۲۰) را در بر می‌گیرد)

$$\alpha'_{\zeta\zeta}=-\alpha'_{\xi\xi}-\alpha'_{\eta\eta} \qquad (۲-۲۷)$$

با اعمال این رابطه در رابطه‌ی (۲-۲۴) و با استفاده از تعریف رابطه‌ی (۲-۲۵) ($a_0=\beta\cos\gamma$)،

$$\alpha'_{\zeta\zeta}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\cos\gamma \qquad (۲-۲۸)$$

هم‌چنین از رابطه‌ی (۲-۲۰) داریم

$$\alpha'_{\xi\xi}-\alpha'_{\eta\eta}=2\alpha'_{\xi\xi}+\alpha'_{\zeta\zeta} \qquad (۲-۲۹)$$

با اعمال این رابطه در رابطه‌ی (۲-۲۲) و با استفاده از تعریف رابطه‌ی (۲-۲۵) ($a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma$) و رابطه‌ی (۲-۲۸) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\alpha'_{\xi\xi}=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\cos\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) \qquad (۲-۳۰)$$

به روش مشابه

$$\alpha'_{\eta\eta} = -\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\gamma + \frac{1}{2}\cos\gamma\right) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\cos\left(\gamma - \frac{4\pi}{3}\right) \qquad (۳۱-۲)$$

مؤلفه‌های دکارتی تغییر شکل اشاره به کشیدگی محور هسته‌ای در آن جهت دارند. با استفاده از نمادگذاری جدید δR_k برای این مؤلفه‌ها، که k= ۱,۲و۳ متناظر با جهت‌های x', y', z' می‌باشد، می‌توان نتیجه‌ی به دست آمده را در یک معادله به شکل زیر خلاصه نمود

$$\delta R_k = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\cos\left(\gamma - \frac{2k\pi}{3}\right) \qquad (۳۲-۲)$$

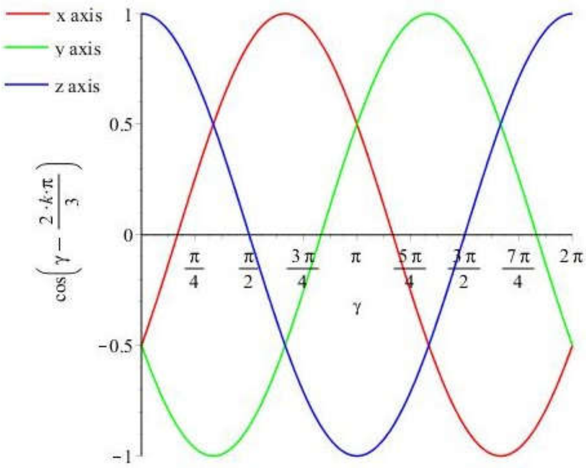
شکل (۲-۱) درک تغییرات سه محور دستگاه پرایم دار را نسبت به تغییرات γ آسان می‌سازد.

در $\gamma=0$ هسته در امتداد محور z پرایم کشیده می‌شود، اما محورهای x وy پرایم مساوی‌اند. این نوع از شکل متقارن محوری را که یادآور شکل یک سیگار می‌باشد دوک‌وار یا کشیده می‌نامند. با افزایش γ، محور x پرایم در یک ناحیه‌ی سه محوری، دارای سه محور نامساوی، افزایش می‌یابد در حالی که محورهای y و z پرایم کاهش می‌یابند تا زمانی که دوباره به تقارن محوری در γ برابر ۶۰ درجه می‌رسیم، اما اکنون با محورهای x وz پرایم مساوی. در این حالت این دو محور کشیده‌تر از محور y پرایم هستند: هسته یک شکل تخت شبیه به شکل پنکک دارد که پخت[۱] نامیده می‌شود. این الگو تکرار می‌شود: هر ۶۰ درجه تقارن محوری تکرار می‌شود و اشکال دوک وار و پخت جایگزین یک‌دیگر می‌شوند، اما با محورهایی که در طول نسبی آن‌ها تغییر ایجاد می‌شود. این نتایج در شکل (۲-۲) نیز خلاصه شده‌اند. اشکال گوناگون هسته‌ای در صفحه‌ی (β,γ) و چگونگی تکرار آن‌ها در هر ۶۰ درجه در این شکل نشان داده شده است. به عنوان مثال، اشکال یکسان (دوک‌وار) در دو طرف γ برابر۶۰ درجه اتفاق می‌افتد. از آن جایی که جهت‌گیری‌ها متفاوت هستند، زوایای اویلر متفاوتند. نتیجه‌ای که از شکل (۲-۲) حاصل می‌شود این است که: اشکال فیزیکی یکسان (شامل جهت‌گیری آن در فضا)

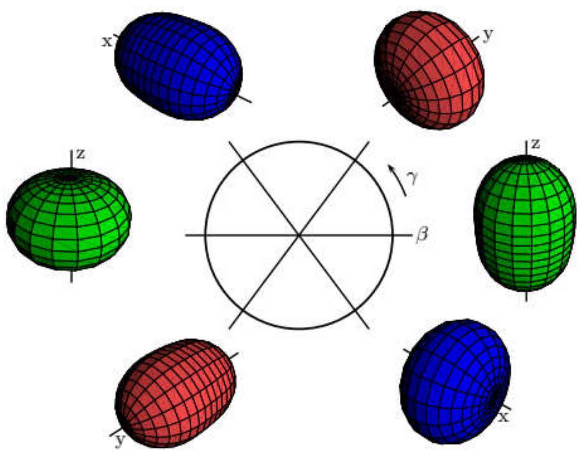
---

[۱] Oblate

می‌توانند بر حسب مجموعه‌های متفاوتی از پارامترهای تغییر شکل (β,γ) و زوایای اویلر نشان داده شوند.



شکل (۲-۱). نمودار $\cos\left(\gamma-\frac{2k\pi}{3}\right)$ بر حسب γ برای k= ۱,۲و۳ که متناظر با تغییرات طول شعاع هسته در جهت-های x',y',z' است



شکل (۲-۲). صفحه‌ی (β,γ) که توسط تقارن‌ها به شش قسمت مساوی تقسیم شده است. ناحیه‌ی موجود بین γ برابر صفر و γ برابر ۶۰ درجه شامل همه‌ی اشکال می‌شود و می‌تواند به عنوان نماینده‌ی اشکال انتخاب شود [۱۵].

فصل سوم:

هامیلتونی بوهر برای هسته‌های تغییرشکل‌یافته

۳-۱) محاسبه‌ی هامیلتونی بوهر

عبارت کلاسیکی انرژی جنبشی که مرتبط با تغییر شکل سطح هسته و دوران آن است به شکل زیر می‌باشد [۶۸]

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k'}\omega_{k'}^{2}J_{k'}+\frac{1}{2}B\left(\dot{\beta}^{2}+\beta^{2}\dot{\gamma}^{2}\right) \tag{۳-۱}$$

که در آن B پارامتر جرم است و مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای حول محورهای چارچوب مختصات ذاتی بر حسب مشتقات زوایای اویلر به شکل زیر نوشته می‌شوند [۶۸]

$$\omega_{x'}=-\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi+\dot{\theta}\sin\psi \tag{۳-۲}$$

$$\omega_{y'}=\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi \tag{۳-۳}$$

$$\omega_{z'}=\dot{\phi}\cos\theta+\psi \tag{۳-۴}$$

با انتخاب مختصات تعمیم یافته به شکل زیر

$$q_1=\phi, q_2=\theta, q_3=\psi, q_4=\beta, q_5=\gamma \tag{۳-۵}$$

می‌توان انرژی جنبشی معادله‌ی (۳-۱) را به شکل دیگری نیز نوشت [۶۹]

$$T=\frac{1}{2}B\left(\frac{ds}{dt}\right)^{2} \tag{۳-۶}$$

که در آن ds^2 مربع دیفرانسیل خطی می‌باشد [۶۸]

$$ds^{2}=g_{ij}\,dq_i\,dq_j \tag{۳-۷}$$

در رابطه‌ی بالا g_{ij}ها عناصر ماتریس متریک هستند. با قرار دادن معادله‌ی (۳-۷) در معادله‌ی (۳-۶) و با مقایسه‌ی آن با رابطه‌ی (۳-۱) g_{ij}ها محاسبه می‌شوند که مقادیر غیر صفر آن‌ها به شرح زیر است

$$g_{11}=B^{-1}\left(J_1\sin^2\theta\cos^2\psi+J_2\sin^2\theta\sin^2\psi+J_3\cos^2\theta\right) \tag{۸-۳}$$

$$g_{12}=g_{21}=B^{-1}\left(J_2-J_1\right)\sin\theta\sin\psi\cos\psi \tag{۹-۳}$$

$$g_{13}=g_{31}=\frac{J_3}{B}\cos\theta \tag{۱۰-۳}$$

$$g_{22}=B^{-1}\left(J_1\sin^2\psi+J_2\cos^2\psi\right) \tag{۱۱-۳}$$

$$g_{33}=B^{-1}J_3 \tag{۱۲-۳}$$

$$g_{44}=1 \tag{۱۳-۳}$$

$$g_{55}=\beta^2 \tag{۱۴-۳}$$

و دترمینان آن به شکل زیر ظاهر می‌شود

$$\det\left(g\right)=\frac{J_1J_2J_3}{B^3}\beta^2\sin^2\theta \tag{۱۵-۳}$$

با استفاده از قواعد جبر خطی می‌توان معکوس ماتریس متریک را محاسبه نمود. عناصر غیر صفر این ماتریس به صورت زیر می‌باشند

$$g_{11}^{-1}=B\left(\frac{\cos^2\psi}{J_1}+\frac{\sin^2\psi}{J_2}\right) \tag{۱۶-۳}$$

$$g_{12}^{-1}=g_{21}^{-1}=-B\left(\frac{1}{J_1}-\frac{1}{J_2}\right)\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sin\theta} \tag{۱۷-۳}$$

$$g_{13}^{-1}=g_{31}^{-1}=-B\left(\frac{\cos^2\psi}{J_1}+\frac{\sin^2\psi}{J_2}\right)\cot\theta \tag{۱۸-۳}$$

$$g_{22}^{-1}=B\left(\frac{\sin^2\psi}{J_1}+\frac{\cos^2\psi}{J_2}\right) \tag{۱۹-۳}$$

$$g_{23}^{-1}=g_{32}^{-1}=B\left(\frac{1}{J_1}-\frac{1}{J_2}\right)\cot\theta\sin\psi\cos\psi \tag{۲۰-۳}$$

$$g_{33}^{-1} = B\left(\frac{\cos^2\psi}{J_1} + \frac{\sin^2\psi}{J_2}\right)\cot^2\theta + \frac{B}{J_3} \qquad (۳-۲۱)$$

$$g_{44}^{-1} = 1 \qquad (۳-۲۲)$$

$$g_{55}^{-1} = \frac{1}{\beta^2} \qquad (۳-۲۳)$$

از طرفی دیگر لاپلاسین در فضای پنج بعدی با عبارت کلی زیر تعریف می‌شود [۶۸]

$$\nabla^2 = \sum_{i,j=1}^{5} \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sqrt{\det(g)}\, g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial q_j}\right) \qquad (۳-۲۴)$$

با قرار دادن روابط (۳-۸) تا (۳-۲۳) در رابطه‌ی (۳-۲۴) و نیز با استفاده از روابط زیر برای عملگر انرژی جنبشی کل (دورانی و نوسانی) و تکانه‌های لختی

$$\hat{T}_{tot} = \frac{-\hbar^2}{2B}\nabla^2 \qquad (۳-۲۵)$$

$$J_k = 4B\beta^2 \sin^2\left(\gamma - \frac{2k\pi}{3}\right) \qquad (۳-۲۶)$$

به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\hat{T}_{tot} = \frac{-\hbar^2}{2B}\left\{\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\sin(3\gamma)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin(3\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2k\pi}{3}\right)}\right\} \qquad (۳-۲۷)$$

که در آن مؤلفه‌های عملگر تکانه‌ی زاویه‌ای دورانی حول محورهای چارچوب مرجع ذاتی عبارتند از

$$\hat{Q}_1 = -i\left(-\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\right) \qquad (۳-۲۸)$$

$$\hat{Q}_2 = -i\left(-\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\right) \qquad (۳-۲۹)$$

$$\hat{Q}_3 = -i\frac{\partial}{\partial\psi} \qquad (۳-۳۰)$$

بنابراین هامیلتونی بوهر در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2B}\left\{\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\sin(3\gamma)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin(3\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2k\pi}{3}\right)}\right\} + V(\beta,\gamma) \qquad (۳-۳۱)$$

۳-۲) تکانه‌های لختی هسته بر حسب پارامترهای تغییر شکل بوهر

برای محاسبه‌ی این کمیت (رابطه‌ی (۳-۲۶)) ابتدا انرژی جنبشی را در مختصات دکارتی (ξ,η,ζ) محاسبه می‌نماییم. با فرض اینکه مینیمم پتانسیل در $a_0 = \beta_0$ و $a_2 = 0$ (a_0 و a_2 طبق رابطه‌ی (۲-۲۵) تعریف می‌شوند) باشد، انحراف‌ها از تغییر شکل تعادلی به صورت زیر معرفی می‌شوند [۲۲]

$$\xi = a_0 - \beta_0 \qquad (۳-۳۲)$$

$$\eta = a_2 = a_{-2} \qquad (۳-۳۳)$$

و انرژی جنبشی هماهنگ مدل نوسانی مطابق رابطه‌ی ذیل تعریف می‌شود [۲۲]

$$T = \frac{1}{2}B\sum_{\mu}\left|\alpha_{2\mu}\right|^2 \qquad (۳-۳۴)$$

اکنون باید $\alpha_{2\mu}$ ها را بر حسب مختصات دکارتی محاسبه نمود. این محاسبه را می‌توان با استفاده از روابط (۲-۲۲) تا (۲-۲۴) انجام داد. به این منظور ابتدا تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم [۲۲]

$$\alpha_{2\mu} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\alpha_{2\mu}}{\partial\theta'_k}\omega'_k + \frac{\partial\alpha_{2\mu}}{\partial\xi}\xi + \frac{\partial\alpha_{2\mu}}{\partial\eta}\eta \qquad (۳-۳۵)$$

که در آن تنها مشتق کوچک اما با اهمیت، مشتق نسبت به زوایای دوران θ'_kحول محورهای ثابت شده روی جسم است. در رابطه‌ی (۳-۳۵) ω'_kسرعت‌های زاویه‌ای حول محورهای ذاتی می‌باشند.

از نمایش نمایی دوران‌ها برای زوایای کوچک داریم [۲۲]

$$\frac{\partial \alpha_{2\mu}}{\partial \theta'_k} = \frac{\partial}{\partial \theta'_k}\left(-\frac{i}{\hbar}\theta'_k J'_k\right)\alpha'_{2\mu} = -\frac{i}{\hbar}J'_k \alpha'_{2\mu} = -\frac{i}{\hbar}\sum_{\nu}\left\langle 2\mu\left|J'_k\right|2\nu\right\rangle \alpha'_{2\nu} \tag{۳-۳۶}$$

که در آن θ'_kهمان زوایای دوران حول محورهای ثابت شده روی جسم می‌باشند و عناصر ماتریسی J'_k با روابط زیر داده می‌شوند

$$\left\langle jm'\left|J'_x\right|jm\right\rangle = \frac{\hbar}{2}\left[\sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,\delta_{m',m+1} + \sqrt{(j-m+1)(j+m)}\,\delta_{m',m-1}\right] \tag{۳-۳۷}$$

$$\left\langle jm'\left|J'_y\right|jm\right\rangle = -i\frac{\hbar}{2}\left[\sqrt{(j-m+1)(j+m)}\,\delta_{m',m-1} - \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,\delta_{m',m+1}\right] \tag{۳-۳۸}$$

$$\left\langle jm'\left|J'_z\right|jm\right\rangle = \hbar m\delta_{m',m} \tag{۳-۳۹}$$

برای مؤلفه‌ی z'، $\left\langle 2\mu\left|J'_z\right|2\nu\right\rangle = \hbar\mu\delta_{\mu\nu}$، بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳۶) و عبارت‌هایی که در روابط (۲-۲۲) تا (۲-۲۴) برای $\alpha'_{2\mu}$ها استخراج نمودیم تنها جمله‌ی غیر صفر برای این مؤلفه عبارت است از

$$\frac{\partial \alpha_{2\pm 2}}{\partial \theta'_k} = \mp 2ia_2 \tag{۳-۴۰}$$

توجه داریم که طبق روابط (۳-۳۷) و (۳-۳۸) برای مؤلفه‌های x' و y'سهم مشتق‌های $\alpha_{2\pm 2}$ و α_{20} صفر است، زیرا عملگرهای تکانه‌ی زاویه‌ای متناظر با این مؤلفه‌ها، فقط پارامترهای $\alpha'_{2\pm 1}$ را با این پارامترها ($\alpha_{2\pm 2}$ و α_{20}) جفت می‌کند، که خود آن‌ها طبق رابطه‌ی (۲-۲۳) صفر هستند. به همین روش، نتیجه‌ی محاسبات برای سایر مؤلفه‌ها به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{\partial \alpha_{2\pm1}}{\partial \theta'_x} = -\frac{i}{2}\left(\sqrt{6}a_0 + 2a_2\right) \tag{۴۱-۳}$$

$$\frac{\partial \alpha_{2\pm1}}{\partial \theta'_y} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}a_0 - 2a_2\right) \tag{۴۲-۳}$$

بنابراین پارامترهای $\alpha_{2\mu}$ به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$\alpha_{20} = a_0 \tag{۴۳-۳}$$

$$\alpha_{2\pm1} = -\frac{i}{2}\left(\sqrt{6}a_0 + 2a_2\right)\omega'_1 \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}a_0 - 2a_2\right)\omega'_2 \tag{۴۴-۳}$$

$$\alpha_{2\pm2} = a_2 \mp 2ia_2\omega'_3 \tag{۴۵-۳}$$

که با استفاده از روابط (۳-۳۲) و (۳-۳۳) به شکل نهایی آن‌ها در مختصات دکارتی می‌رسیم

$$\alpha_{20} = \xi \tag{۴۶-۳}$$

$$\alpha_{2\pm1} = -\frac{i}{2}\left(\sqrt{6}\left(\beta_0 + \xi\right) + 2\eta\right)\omega'_1 \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}\left(\beta_0 + \xi\right) - 2\eta\right)\omega'_2 \tag{۴۷-۳}$$

$$\alpha_{2\pm2} = \eta \mp 2i\eta\omega'_3 \tag{۴۸-۳}$$

اکنون با جایگزین کردن این روابط در رابطه‌ی (۳-۳۴) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$T = \frac{B}{2}\left(\xi^2 + 2\eta^2\right) + 4B\eta^2\omega'^2_3 + \frac{B}{4}\left[\sqrt{6}\left(\beta_0 + \xi\right) + 2\eta\right]^2 \omega'^2_1 + \frac{B}{4}\left[\sqrt{6}\left(\beta_0 + \xi\right) - 2\eta\right]^2 \omega'^2_2$$

(۴۹-۳)

این رابطه می‌تواند به شکل مختصر به صورت زیر نوشته شود

$$T = \frac{1}{2}B\left(\xi^2 + 2\eta^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} J_k \omega'^2_k \tag{۵۰-۳}$$

که در آن تکانه‌های لختی به فرم زیر می‌باشند

$$J_1 = \frac{B}{2}\left[\sqrt{6}\left(\beta_0+\xi\right)+2\eta\right]^2 = 4B\beta^2\sin^2\left(\gamma-\frac{2\pi}{3}\right) \tag{۵۱-۳}$$

$$J_2 = \frac{B}{2}\left[\sqrt{6}\left(\beta_0+\xi\right)-2\eta\right]^2 = 4B\beta^2\sin^2\left(\gamma-\frac{4\pi}{3}\right) \tag{۵۲-۳}$$

$$J_3 = 8B\eta^2 = 4B\beta^2\sin^2\left(\gamma\right) \tag{۵۳-۳}$$

در محاسبه‌ی روابط نهایی از روابط (۲-۲۵)، (۳-۳۲) و (۳-۳۳) استفاده شده است. لذا به رابطه‌ی مورد نظر می‌رسیم

$$J_k = 4B\beta^2\sin^2\left(\gamma-\frac{2k\pi}{3}\right) \tag{۵۴-۳}$$

۳-۳) شکل کلی توابع موج و ترازهای انرژی هامیلتونی بوهر

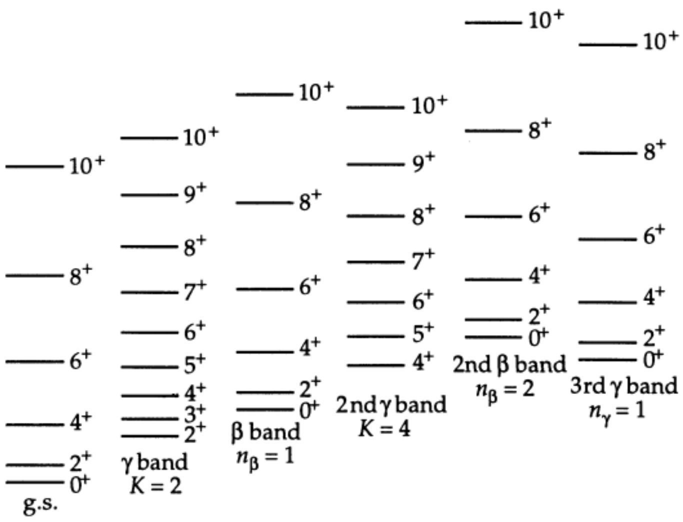
برای حل معادله‌ی شرودینگر متناظر با هامیلتونی ارائه شده در رابطه‌ی (۳-۳۱)، از روش شناخته شده‌ی جداسازی متغیرها استفاده می‌شود. به این منظور توابع موج به شکل کلی زیر در نظر گرفته می‌شوند [۲۲]

$$\Psi\left(\beta,\gamma,\Omega\right) = \xi_{n_\beta L}\left(\beta\right)\eta_{n_\gamma K}\left(\gamma\right)\sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2\left(1+\delta_{K,0}\right)}}\left[D^L_{MK}\left(\Omega\right)+\left(-1\right)^L D^L_{M-K}\left(\Omega\right)\right] \tag{۵۵-۳}$$

که در آن $D^L_{M,K}\left(\Omega\right)$ توابع ویگنر، L، M و K به ترتیب اعداد کوانتمی مربوط به تکانه‌ی زاویه‌ای، تصویر آن در راستای محور z چارچوب آزمایشگاه و تصویر آن در راستای محور z چارچوب ذاتی هستند. منظور از Ω همان زوایای اویلر $\left(\phi,\theta,\psi\right)$ می‌باشد. اعداد کوانتمی n_β، n_γ، L، M و K به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۲]

$$
\begin{aligned}
&K = 0,2,4,\ldots \\
&L = \begin{cases} K, K+1, K+2, \ldots & for\ K \neq 0 \\ 0,2,4,6,8,10,\ldots & for\ K = 0 \end{cases} \\
&M = -L, -L+1, \ldots, +L \\
&n_\gamma = 0,1,2,\ldots \\
&n_\beta = 0,1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{۳-۵۶}
$$

ترازهای انرژی در یک حالت کاملاً کلی به صورت طرح‌وار در شکل (۳-۱) نشان داده شده اند [۲۲]. همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌کنید اولین نوار انرژی، یعنی نوار حالت پایه، متناظر با اعداد کوانتمی n_β، n_γ و K برابر صفر می‌باشد و ترازهای انرژی موجود در آن با اعداد کوانتمی تکانه‌ی زاویه‌ای $L = 0,2,4,6,8,10,\ldots$ داده می‌شوند. به همین ترتیب می‌توان با استفاده از اعداد کوانتمی تعریف شده در رابطه‌ی (۳-۵۶) سایر ترازهای انرژی موجود در هسته‌ی تغییرشکل‌یافته را نمایش داد.

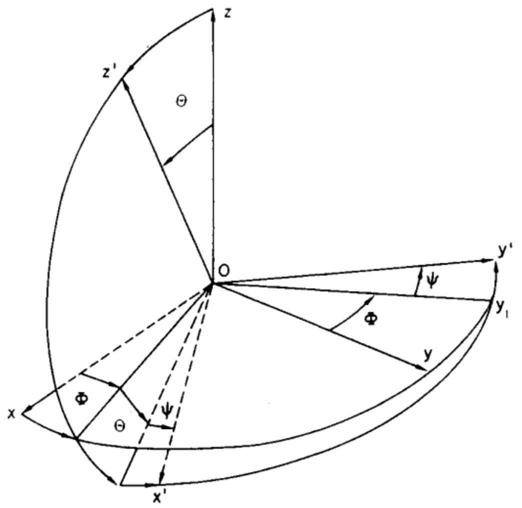


شکل (۳-۱). ترازهای انرژی برای هامیلتونی بوهر [۲۲]

۳-۴) معرفی توابع ویگنر

برای معرفی این توابع ابتدا دوران‌های اویلر را که با زوایای اویلر مشخص می‌شوند مورد بررسی قرار می‌دهیم. این دوران‌ها شامل سه دوران متوالی می‌باشند:

ابتدا چرخش سیستم حول محور z به اندازه‌ی زاویه‌ی ϕ انجام می‌شود که محورهای x_1 و y_1 را به وجود می‌آورد. دومین دوران حول محور جدید y_1 به اندازه‌ی زاویه‌ی θ است که محور جدید z' را به وجود می‌آورد و سرانجام دوران به اندازه‌ی زاویه‌ی ψ حول محور z' انجام می‌شود. دستگاه مختصات نهایی (x',y',z') همان چارچوب مرجع ذاتی است که از محورهای اصلی ثابت روی هسته تشکیل شده است. نمایی طرح وار از زوایای اویلر در شکل (۳-۲) نشان داده شده است.



شکل (۳-۲). تبدیل از چارچوب مرجع آزمایشگاه (x,y,z) به چارچوب مرجع ذاتی (x',y',z') با استفاده از زوایای اویلر [۶۸]

بنابراین عملگر دورانی‌ای که سه دوران اویلر را نشان می‌دهد و آن را با $R(\Omega)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر نوشته می‌شود

$$R(\Omega)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\psi J_{z'}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta J_{y_1}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\phi J_z\right) \tag{۵۷-۳}$$

به منظور بازنویسی رابطه‌ی (۳-۵۷) بر حسب مختصات مربوط به چارچوب آزمایشگاه، به جای دوران سیستم حول y_1 و z' به ترتیب از دوران های زیر استفاده می‌نماییم

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta J_{y_1}\right)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\phi J_z\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta J_y\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\phi J_z\right) \tag{۵۸-۳}$$

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\psi J_{z'}\right)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta J_{y_1}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\phi J_z\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\psi J_z\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\phi J_z\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\theta J_{y_1}\right)$$

(۵۹-۳)

با جایگزینی رابطه‌ی (۳-۵۹) در رابطه‌ی (۳-۵۷) و ساده‌سازی آن و سپس با قرار دادن رابطه‌ی (۳-۵۸) در این فرم ساده شده به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$R(\Omega)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\phi J_z\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta J_y\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\psi J_z\right) \tag{۶۰-۳}$$

ماتریس‌هایی که این دوران‌ها را با تکانه‌ی زاویه‌ای J نشان می‌دهند همان توابع ویگنر هستند که به صورت زیر بیان می‌شوند

$$D^J_{m'm}(\Omega)=\langle Jm'|R(\Omega)|Jm\rangle \tag{۶۱-۳}$$

در مقایسه با رابطه‌ی (۳-۵۵)، J، m و m' به ترتیب همان L، K و M می‌باشند. هم‌چنین این توابع از طریق رابطه‌ی زیر به توابع هماهنگ‌های کروی مرتبط می‌شوند [۶۹]

$$D^{(l)}_{0m}(\Omega)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi) \tag{۶۲-۳}$$

۳-۵) عملگر چهارقطبی مدل جمعی

عملگر چهارقطبی الکتریکی یکی از عناصر مهم مدل جمعی به شمار می‌رود که از یک سو، امکان محاسبه‌ی آهنگ‌های گذار (که در فصل چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرند) را فراهم می‌سازد و از سوی دیگر اهمیّت فیزیکی ضرایب $\alpha_{2\mu}$ را مشخّص می‌نماید. برای تعیین این عملگر از ساده‌ترین فرض، که عبارت است از توزیع بار یکنواخت در هسته‌ای که سطح آن با رابطه‌ی (۲-۱) داده می‌شود، استفاده می‌نماییم. بدین ترتیب داریم [۲۲]:

$$
\begin{aligned}
Q_{2\mu} &= \rho_0 \int\limits_{\text{nuclear volume}} r^2 Y_{2\mu}\left(\theta,\phi\right) r^2 dr d\theta d\phi \\
&= \rho_0 \int Y_{2\mu}\left(\theta,\phi\right) d\theta d\phi \int\limits_0^{R(\theta,\phi)} r^4 dr \\
&= \frac{\rho_0}{5} \int Y_{2\mu}\left(\theta,\phi\right) d\theta d\phi \left(R\left(\theta,\phi\right)\right)^5
\end{aligned} \tag{۶۳-۳}
$$

در این رابطه ρ_0 توزیع یکنواخت بار الکتریکی در هسته است. به منظور محاسبه‌ی آهنگ گذار مربوط به چهارقطبی الکتریکی، که متناظر با مقدار چشم‌داشتی عملگر تعریف شده در رابطه‌ی (۳-۶۳) می‌باشد، از آنجایی که توابع موج مربوط به هامیلتونی بوهر بر حسب زوایای اویلر و پارامترهای β وγ می‌باشند، این عملگر نیز باید بر حسب پارامترهای تغییرشکل بوهر نوشته شود. به این منظور به طریق زیر عمل می‌کنیم. ابتدا شعاع هسته $\left(R\left(\theta,\phi\right)\right)$ را از رابطه‌ی (۲-۱) جایگزین می‌نماییم:

$$
Q_{2\mu} = \frac{\rho_0}{5} R_0^5 \int Y_{2\mu}\left(\theta,\phi\right) d\theta d\phi \left(1+\sum_{\mu} \alpha_{2\mu}\left(t\right) Y_{2\mu}^*\left(\theta,\phi\right)\right)^5 \tag{۶۴-۳}
$$

در رابطه‌ی بالا از دو رابطه‌ی (۲-۲) و (۲-۳) استفاده شده است. اکنون با استفاده از بسط چندجمله‌ای به صورت

$$
\left(1+x\right)^n = 1 + nx + \frac{n\left(n-1\right)}{2} x^2 + \ldots \tag{۶۵-۳}
$$

رابطه‌ی (۳-۶۴) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$
Q_{2\mu} = \frac{\rho_0 R_0^5}{5} \int Y_{2\mu}\left(\theta,\phi\right) d\theta d\phi \left(1 + 5\sum_{\mu'} \alpha_{2\mu'}\left(t\right) Y_{2\mu'}^*\left(\theta,\phi\right) + 10 \sum_{\mu'} \alpha_{2\mu'}\left(t\right) Y_{2\mu'}^*\left(\theta,\phi\right) \sum_{\mu''} \alpha_{2\mu''}\left(t\right) Y_{2\mu''}^*\left(\theta,\phi\right)\right) \tag{۶۶-۳}
$$

با استفاده از تعامد توابع هماهنگ کروی و نیز رابطه‌ی زیر

$$
\int Y_{\lambda\mu}\left(\theta,\phi\right) d\theta d\phi = \sqrt{4\pi} \int Y_{00}^* Y_{\lambda\mu}\left(\theta,\phi\right) d\theta d\phi = \sqrt{4\pi}\, \delta_{\lambda,0} \delta_{\mu,0} \tag{۶۷-۳}
$$

رابطه‌ی (۳-۶۶) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$Q_{2\mu}=\frac{\rho_0 R_0^5}{5}\left(5\alpha_{2\mu}(t)+10\sum_{\mu'\mu''}\alpha_{2\mu'}(t)\alpha_{2\mu''}(t)\int d\theta d\phi Y_{2\mu}(\theta,\phi)Y_{2\mu'}^{*}(\theta,\phi)Y_{2\mu''}^{*}(\theta,\phi)\right) \tag{۳-۶۸}$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی زیر [۲۲]

$$\int d\theta d\phi Y_{2\mu}(\theta,\phi)Y_{2\mu'}^{*}(\theta,\phi)Y_{2\mu''}^{*}(\theta,\phi)=-\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\sqrt{\frac{2}{7}}\left(222|\mu'\mu''\mu\right) \tag{۳-۶۹}$$

که در آن ضریب کلبش-گوردنِ وابسته به μ می‌تواند برای جفت‌کنندگی $\alpha_{2\mu}$ به تکانه‌ی زاویه‌ای کل ۲ استفاده شود، یعنی

$$\left[\hat{\alpha}_{2\mu'}\times\hat{\alpha}_{2\mu''}\right]_{\mu}^{2}=\sum_{\mu'\mu''}\left(222|\mu'\mu''\mu\right)\alpha_{2\mu'}(t)\alpha_{2\mu''}(t) \tag{۳-۷۰}$$

فرم عملگر چهارقطبی الکتریکی بر حسب ضرایب $\alpha_{2\mu}$ برابر است با

$$\hat{Q}_{2\mu}=\frac{3Ze}{4\pi}R_0^2\left(\hat{\alpha}_{2\mu}-\frac{10}{\sqrt{70\pi}}\left[\hat{\alpha}_{2\mu'}\times\hat{\alpha}_{2\mu''}\right]_{\mu}^{2}\right) \tag{۳-۷۱}$$

در رابطه‌ی فوق چگالی بار الکتریکی را برابر با بار کل هسته تقسیم بر حجم آن ($\rho_0=\frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$) در نظر گرفته‌ایم.

اکنون به منظور به دست آوردن فرم عملگر $\hat{Q}_{2\mu}$ در دستگاه مختصات ذاتی، کافی است ضرایب $\alpha_{2\mu}$ و ضرب تانسوری آن‌ها را به ترتیب با استفاده از دو رابطه‌ی زیر به چارچوب مرجع ذاتی تبدیل نماییم

$$\hat{\alpha}_{2\mu}=\sum_{\nu=-2}^{2}D_{\mu\nu}^{(2)*}(\Omega)\hat{\alpha}'_{2\nu} \tag{۳-۷۲}$$

$$\left[\hat{\alpha}_{2\mu'}\times\hat{\alpha}_{2\mu''}\right]_{\mu}^{2}=\sum_{\nu=-2}^{2}D_{\mu\nu}^{(2)*}(\Omega)\left[\hat{\alpha}'_{2\mu'}\times\hat{\alpha}'_{2\mu''}\right]_{\nu}^{2} \tag{۳-۷۳}$$

از سوی دیگر، با استفاده از روابط (۲-۲۲) تا (۲-۲۵)

$$\alpha'_{2\pm2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma,\alpha'_{2\pm1}=0,\alpha'_{20}=\beta\cos\gamma \qquad (۳\text{-}۷۴)$$

رابطه‌های (۳-۷۲) و (۳-۷۳) به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\hat{\alpha}_{2\mu}=\left(D^{(2)*}_{\mu-2}(\Omega)+D^{(2)*}_{\mu2}(\Omega)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\gamma+D^{(2)*}_{\mu0}(\Omega)\beta\cos\gamma \qquad (۳\text{-}۷۵)$$

$$\begin{aligned}\left[\hat{\alpha}_{2\mu'}\times\hat{\alpha}_{2\mu''}\right]^2_{\mu}=&\left(D^{(2)*}_{\mu-2}(\Omega)+D^{(2)*}_{\mu2}(\Omega)\right)\left(\frac{2\beta^2\sin\gamma\cos\gamma}{\sqrt{7}}\right)\\&+D^{(2)*}_{\mu0}(\Omega)\left(\frac{2\beta\sin\gamma-\sqrt{2}\beta^2\cos^2\gamma}{\sqrt{7}}\right)\end{aligned} \qquad (۳\text{-}۷۶)$$

در محاسبه‌ی رابطه‌ی (۳-۷۶) از رابطه‌ی (۳-۷۰) نیز استفاده شده است. با جایگذاری روابط (۳-۷۵) و (۳-۷۶) در رابطه‌ی (۳-۷۱) فرم نهایی عملگر چهارقطبی الکتریکی در در دستگاه مختصات متّصل به جسم به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{Q}_{2\mu}=\frac{3ZeR_0^2}{4\pi}\left[\begin{aligned}&\left(D^{(2)*}_{\mu-2}(\Omega)+D^{(2)*}_{\mu2}(\Omega)\right)\frac{\beta\sin\gamma}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{4\sqrt{5}}{7\sqrt{\pi}}(\beta\cos\gamma)\right)\\&+D^{(2)*}_{\mu0}(\Omega)\left(\beta\cos\gamma+\frac{2\sqrt{5}}{7\sqrt{\pi}}\left(\beta^2\cos^2\gamma-\beta^2\sin^2\gamma\right)\right)\end{aligned}\right] \qquad (۳\text{-}۷۷)$$

۳-۶) دسته‌بندی هسته‌های سنگین براساس نوع انرژی پتانسیل

هامیلتونی استخراج شده در بخش (۳-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\hat{H}=\hat{T}_{vib}+\hat{T}_{rot}+V(\beta,\gamma) \qquad (۳\text{-}۷۸)$$

در این رابطه $\hat{T}_{vib}$ و $\hat{T}_{rot}$ که به ترتیب نوسان‌ها و دوران‌های سطح هسته‌ای را مشخص می‌نمایند عبارتند از

$$\hat{T}_{vib} = \frac{-\hbar^2}{2B}\left\{\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2}\frac{1}{\sin(3\gamma)}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin(3\gamma)\frac{\partial}{\partial\gamma}\right\} \qquad (۷۹-۳)$$

$$\hat{T}_{rot} = \frac{\hbar^2}{2B}\frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2k\pi}{3}\right)} \qquad (۸۰-۳)$$

اما بسته به نوع انرژی پتانیسل موجود در رابطه‌ی (۳-۷۸) شکل متفاوتی برای هسته‌هایی که با هامیلتونی بوهر بررسی می‌شوند پیش‌بینی می‌شود که در ادامه به طور مختصر به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

۳-۶-۱) کروی: در این گونه از هسته‌ها، مینیمم مطلق انرژی پتانسیل در نقطه‌ی $\beta_0 = 0$ است.

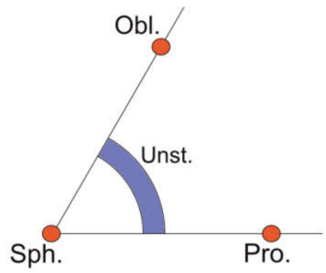
۳-۶-۲) γ-ناپایدار: اگر مکان مینیمم مطلق انرژی پتانسیل به صورت دسته‌ای از یک دَرّه‌ی دایره‌مانند مطابق شکل (۳-۳) باشد، هسته را γ-ناپایدار می‌نامیم. به عبارتی دیگر، در این حالت پتانسیل موجود در رابطه‌ی (۳-۷۸) فقط تابعی از پارامتر تغییرشکل β است و در مورد پتانسیل وابسته به γ هیچ‌گونه اطلاعاتی در دسترس نیست.

۳-۶-۳) γ-پایدار: زمانی که مینیمم مطلق انرژی پتانسیل در $\beta_0 \neq 0$ و $0^o \le \gamma_0 \le 60^o$ باشد، هسته را γ-پایدار می‌نامند. این هسته‌ها بر اساس اندازه‌ی γ_0 به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۳-۶-۳-۱) متقارن محوری (کشیده یا پخت): اگر مینیمم انرژی پتانسیل در بخش وابسته به γ در مکان $\gamma_0 = 0^o$ (کشیده) یا $\gamma_0 = 60^o$ (پخت) باشد هسته دارای محور تقارن است و لذا متقارن محوری خوانده می‌شود.

۳-۶-۳-۲) نامتقارن محوری: زمانی که مینیمم مطلق انرژی پتانسیل در بخش وابسته به γ در $0^o < \gamma_0 < 60^o$ باشد، هسته شکلی نامتقارن دارد که موجب می‌شود آن را نامتقارن محوری خطاب نمایند.

مکان مینیمم انرژی پتانسیل برای این اشکال در شکل (۳-۳) نشان داده شده است.



شکل (۳-۳). انواع هسته‌های سنگین بر اساس انرژی پتانسیل [۲۷]

هسته‌های γ-پایدار، یا صلب[۱] (پتانسیل وابسته به γ دارای مینیممی تیز می‌باشد) هستند و یا نرم[۲] (پتانسیل وابسته به γ دارای مینیممی پهن می‌باشد). به عبارتی دیگر، هسته‌های γ-پایدار صلب جنسی سخت دارند در حالی که نوع نرم آن‌ها متحمّل نوسان‌هایی حول شکل پایه‌ی خود می‌شوند.

---

[۱] Rigid

[۲] Soft

فصل چهارم:

هامیلتونی بوهر برای مدل‌های (۵)E، (۵)X و (۳)X

مدل‌های (۵)E، (۵)X و (۳)X را می‌توان با استفاده از دو رهیافت مطالعه نمود: مدل IBM و هامیلتونی بوهر. در این فصل ابتدا اشاره‌ای به معرفی مدل‌های نام‌برده شده با استفاده از تقارن‌های دینامیکی موجود در مدل IBM می‌شود. سپس آن‌ها را به طور کامل با استفاده از هامیلتونی بوهر مورد بررسی قرار داده و طیف انرژی و آهنگ‌های گذار را برای هر مدل به طور جداگانه استخراج می‌نماییم.

۴-۱) تقارن‌های دینامیکی در مدل IBM

تقارن دینامیکی هنگامی اتفاق می‌افتد که هامیلتونی موجود در مدل IBM از عملگرهای کازمیر جبر لی ساخته شود. این عملگرها شامل اعداد کوانتمی خوبی هستند که منجر به استخراج ویژه مقادیر، ویژه حالت‌ها و مشاهده‌پذیرهای فیزیکی می‌شوند. سه تقارن دینامیکی که در اینجا برای توصیف هامیلتونی بوهر در نقاط بحرانی مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از: (۵)U، (۶)SO و (۳)SU. از این تقارن‌های دینامیکی برای توصیف هندسی هسته‌ها استفاده می‌شود که در ادامه به طور مختصر هر یک را تعریف می‌نماییم.

۴-۱-۱)(۵)U: این تقارن متناظر با گروهی از عمگرها در فضای پنج بعدی است که شکل ماتریسی آن‌ها یکانی[۱] می‌باشد. این نوع تقارن برای توصیف حالت حدی ساختار هندسی نوسانگر کروی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴-۱-۲)(۶)SO: تقارن (۶)SO برای توصیف گروهی از عمگرها در فضای شش بعدی به کار می‌رود که شکل ماتریسی آن‌ها علاوه بر اینکه دارای دترمینان یک[۲] هستند متعامد[۳] نیز می‌باشند. از این تقارن برای توصیف حالت حدی ساختار هندسی هسته‌های چرخان γ-ناپایدار استفاده می‌شود.

---

[۱] Unitary

[۲] Special

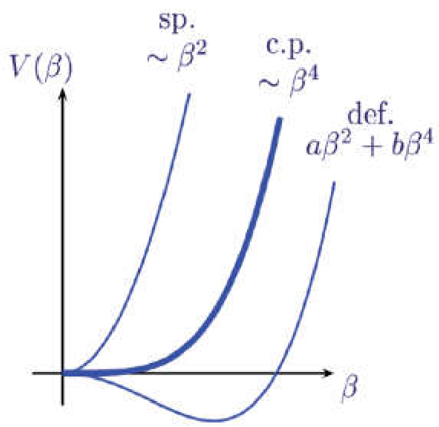
[۳] Orthogonal

۴-۱-۳) SU(۳): این تقارن متناظر با گروهی از عمگرها در فضای سه بعدی است که شکل ماتریسی آن‌ها علاوه بر یکانی بودن دارای دترمینان یک نیز می‌باشند. این تقارن برای توصیف حالت حدی ساختار هندسی هسته‌های چرخان کشیده به کار می‌رود.

۴-۲) نقاط بحرانی: نقاط بحرانی هسته‌هایی را توصیف می‌نمایند که متحمّل گذار فازی شکل از یک تقارن دینامیکی به تقارنی دیگر می‌شوند. از این نقاط به عنوان مدل نیز یاد می‌شود.

۴-۲-۱) مدل E(۵)

با استفاده از توضیحات بخش (۳-۶) می‌دانیم که پتانسیل مستقل از γ به شکل $V(\beta)=a\beta^2+b\beta^4$ (که در آن a و b ثابت‌های اختیاری هستند) بسته به مقادیر ثابت‌ها می‌تواند یک شکل کروی یا یک γ-ناپایدار تغییرشکل یافته را تولید نماید. شکل (۴-۱) این پتانسیل را به همراه حالت‌های خاص آن نشان می‌دهد.



شکل (۴-۱). نقطه‌ی بحرانی E(۵) (critical point یا .c.p) که معادل با گذار فازی شکل از حالت کروی (spherical یا .sp) به حالت γ-ناپایدار تغییرشکل یافته (deformed یا .def) می‌باشد [۲۷]

این پتانسیل وابسته به β در نقطه‌ی بحرانی β^4 معادل با انتقال شکل از نوع کروی به نوع γ-ناپایدار یا گذار فازی شکل از U(۵) به SO(۶) می‌باشد. معادله‌ی ویژه‌مقداری مربوط به هامیلتونی بوهر، به

ازای پتانسیل β^4 به طور تحلیلی قابل حل نیست، اما حل‌های عددی برای آن ارائه شده است [۷۰]. پیش از حل‌های عددی، منبع [۲۵] بیان نمود که می‌توان این پتانسیل را به طور تقریبی با چاه مربعی نامحدود برابر گرفت و مسأله را به یک مورد دقیقاً قابل حل تبدیل نمود. حل تحلیلی این مورد مدل E(۵) نامیده می‌شود، زیرا ویژه توابع حاصل شده که ضرورتاً توابع بسل کروی هستند پایه‌ای برای گروه اقلیدسی[۱] در پنج بعد تشکیل می‌دهند. به عبارتی دیگر، هامیلتونی بوهر در نقطه‌ی بحرانی E(۵)، متناظر با حل معادله‌ی ویژه مقداری این هامیلتونی در فضای پنج بعدی (دو متغیر β و γ و سه زاویه‌ی اویلر) است که در آن پتانسیل وابسته به β به شکل چاه مربعی نامحدود و پتانسیل وابسته به γ صفر در نظر گرفته می‌شود. به منظور بررسی طیف انرژی و آهنگ‌های گذار هسته‌هایی که در نقطه‌ی بحرانی E(۵) قرار می‌گیرند، باید معادله‌ی موج مربوطه را حل نمود.

۴-۲-۱-۱) ویژه توابع و ویژه مقادیر مدل E(۵)

معادله‌ی موج هامیلتونی بوهر در حالت عمومی به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\hat{H}\Psi(\beta,\gamma,\Omega)=E\Psi(\beta,\gamma,\Omega) \tag{۴-۱}$$

که عملگر H از رابطه‌ی (۳-۳۱) جایگزین می‌شود. برای حل این معادله‌ی ویژه مقداری در تقارن E(۵) تابع موج را به صورت زیر در نظر می‌گیرند [۲۵]

$$\Psi(\beta,\gamma,\Omega)=\xi(\beta)\varphi(\gamma,\Omega) \tag{۴-۲}$$

با جداسازی متغیرها رابطه‌ی (۴-۱) به دو رابطه‌ی مستقل از هم تبدیل می‌شود [۲۵]

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2k\pi}{3}\right)}\right]\varphi(\gamma,\Omega)=\Lambda\varphi(\gamma,\Omega) \tag{۴-۳}$$

[۱] Euclidean

$$\left[-\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\Lambda}{\beta^2}+u(\beta)\right]\xi(\beta)=\varepsilon\xi(\beta) \qquad (۴-۴)$$

کهΛ، $u(\beta)$ و ε به ترتیب ثابت جداسازی، پتانسیل و انرژی کاهیده نامیده می‌شوند و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\Lambda=\tau(\tau+3) \qquad (۵-۴)$$

$$u(\beta)=\frac{2B}{\hbar^2}V(\beta) \qquad (۶-۴)$$

$$\varepsilon=\frac{2B}{\hbar^2}E \qquad (۷-۴)$$

معادله‌ی (۴-۳) در منابع [۷۱-۷۳] به طور کامل حل شده است و نتیجه‌ی نهایی آن به صورت زیر می‌باشد

$$\varphi_{\tau,\tilde{v}_\Delta,L,M}(\gamma,\Omega)=\sum_{\substack{K=0\\even}}^{L}\eta_{\tau,\tilde{v}_\Delta,L,K}(\gamma)\Phi^L_{M,K}(\Omega) \qquad (۸-۴)$$

که

$$\Phi^L_{M,K}(\Omega)=\sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2\left(1+\delta_{K,0}\right)}}\left[D^L_{M,K}(\Omega)+(-1)^L D^L_{M,-K}(\Omega)\right] \qquad (۹-۴)$$

در روابط بالا τ و $\tilde{v}_\Delta$ به ترتیب عدد کوانتمی ارشدیت[۱] و شاخص اضافه[۲] [۷۴] نامیده می‌شوند. مقادیر عددی τ بر حسب عدد کوانتمی تکانه‌ی زاویه‌ای L در جدول (۴-۱) مشخص شده است. برای $\tau \geq ۶$، تکانه‌ی زاویه‌ای یکسان می‌تواند برای بیش از یک‌بار ظاهر شود، بنابراین یک شاخص اضافه برای تشخیص بین توابع موج زاویه‌ای با اعداد کوانتمی یکسان مورد نیاز است.

---

[۱] Seniority

[۲] Additional multiplicity index

جدول (۴-۱). مقادیر عددی τ به ازای ۶≥ τ بر حسب عدد کوانتمی تکانه‌ی زاویه‌ای L [۷۴]

τ	L									
۰	۰									
۱	۲									
۲	۴	۲								
۳	۶	۴	۳	۰						
۴	۸	۶	۵	۴	۲					
۵	۱۰	۸	۷	۶	۵	۴	۲			
۶	۱۲	۱۰	۹	۸	۷	۶	۶	۴	۳	۰

بخش وابسته به βی مدل E(۵) که همان معادله‌ی (۴-۴) می‌باشد، به ازای پتانسیل چاه مربعی نامحدود که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$u(\beta)=\begin{cases}0 & 0\le\beta\le\beta_w\\ \infty & \beta>\beta_w\end{cases} \tag{۱۰-۴}$$

و تغییر متغیر $\xi(\beta)=\beta^{-\frac{3}{2}}f(\beta)$، به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\beta}-\frac{\Lambda+\frac{9}{4}}{\beta^2}+\varepsilon\right]f(\beta)=0 \tag{۱۱-۴}$$

که معادله‌ی بسل است. لذا

$$f_{s,\nu}(\beta)=N_{s,\nu}J_{s,\nu}\left(k_{s,\nu}\beta\right) \tag{۱۲-۴}$$

که در این رابطه $N_{s,\tau}$ ثابت نرمالزاسیون است و از معادله‌ی زیر تعیین می‌گردد

$$\int_0^{\beta_w}\left[f_{s,\nu}(\beta)\right]^2\beta^4 d\beta=1 \tag{۱۳-۴}$$

و $k_{s,\nu}$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود

$$k_{s,\nu} \equiv \frac{x_{s,\nu}}{\beta_w}, \varepsilon_{s,\nu} = k_{s,\nu}^2 \tag{۱۴-۴}$$

که در آن νبرابر است با

$$\nu = \sqrt{\Lambda + \frac{9}{4}} = \sqrt{\tau(\tau+3) + \frac{9}{4}} = \tau + \frac{3}{2} \tag{۱۵-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۴) $x_{s,\nu}$، s امین صفر بسل است ($s = n_\beta+1$). با توجه به رابطه‌ی (۴-۱۵) از این پس می‌توان به جای اندیس ν از اندیس τ نیز استفاده نمود. بنابراین ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی بوهر در مدل E(۵) به ترتیب عبارتند از:

$$\Psi_{s,\tau,\tilde{\nu}_\Delta,L,K}(\beta,\gamma,\Omega) = N_{s,\tau}\beta^{-\frac{3}{2}} J_{s,\tau}(k_{s,\tau}\beta) \sum_{\substack{K=0 \\ even}}^{L} \eta_{\tau\tilde{\nu}_\Delta,L,K}(\gamma) \sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2(1+\delta_{K,0})}} \left[D_{M,K}^L(\Omega) + (-1)^L D_{M,-K}^L(\Omega) \right]$$

(۱۶-۴)

$$E_{s,\tau} = \frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{x_{s,\tau}}{\beta_w}\right)^2 \tag{۱۷-۴}$$

۴-۲-۱-۲) آهنگ گذار در مدل E(۵)

برای محاسبه‌ی آهنگ گذار الکتریکی $E2$ (نام‌گذاری"$E2$" از نوع گذار که "الکتریکی" می‌باشد و مرتبه‌ی گذار که "دو" است گرفته شده است) از عملگر گذار چهارقطبی الکتریکی که در بخش (۳-۵) آن را محاسبه نمودیم، استفاده می‌نماییم. با صرف نظر از جملات مرتبه‌ی دوم β، رابطه‌ی (۳-۷۷) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\hat{Q}_{2\mu} = t\beta\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(D_{\mu-2}^{(2)*}(\Omega) + D_{\mu2}^{(2)*}(\Omega)\right)\sin\gamma + D_{\mu0}^{(2)*}(\Omega)(\cos\gamma)\right] \tag{۱۸-۴}$$

که در آن t فاکتور مقیاس نام‌گذاری شده است و مقدار آن با توجه به رابطه‌ی (۳-۷۷) برابر است با

$$t = \frac{3ZeR_0^2}{4\pi} \tag{۴-۱۹}$$

اکنون برای مدل E(۵)، احتمال گذار الکتریکی $E2$ (برخی منابع [۲۶و۲۸] آن را آهنگ گذار الکتریکی $E2$ نیز نامیده‌اند) از یک تراز انرژی با اعداد کوانتومی $s\tau L$ به ترازی دیگر با مشخصّات $s'\tau'L'$ توسط رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود

$$B\left(E2; s\tau L \to s'\tau'L'\right) = t^2 \left| \left\langle \Psi_{s,\tau,L}\left(\beta,\gamma,\Omega\right) \middle| \hat{Q}_{2\mu} \middle| \Psi_{s',\tau',L'}\left(\beta,\gamma,\Omega\right) \right\rangle \right|^2 \tag{۴-۲۰}$$

اکنون با جایگذاری روابط (۴-۱۶) و (۴-۱۸) در رابطه‌ی (۴-۲۰) داریم [۷۵]

$$B\left(E2; s\tau L \to s'\tau'L'\right) = t^2 \left(\tau', L'; 1, 2 \| \tau, L\right)^2 \left[\left\langle \tau \| Q \| \tau' \right\rangle I_{s\tau; s'\tau'} \right]^2 \tag{۴-۲۱}$$

که در آن $\left(\tau_1, L_1; \tau_2, L_2 \| \tau_3, L_3\right)$ ضریب کلبش-گوردون SO(۵) (مقادیری از آن‌ها که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند در منبع [۷۳] جدول‌بندی شده‌اند) است و ماتریس کاهش یافته‌ی غیر صفر به شکل ساده‌ی زیر نوشته می‌شود [۷۶و۷۷]

$$\left\langle \tau \| Q \| \tau' \right\rangle = \sqrt{\frac{\tau}{2\tau+3}}\,\delta_{\tau,\tau'+1} + \sqrt{\frac{\tau+3}{2\tau+3}}\,\delta_{\tau,\tau'-1} \tag{۴-۲۲}$$

و $I_{s\tau L; s'\tau'L'}$ انتگرال روی متغیر β است

$$I_{s\tau; s'\tau'} = \int_0^\infty \beta\, \xi_{s\tau}\left(\beta\right)\, \xi_{s'\tau'}\left(\beta\right)\, \beta^4\, \mathrm{d}\beta \tag{۴-۲۳}$$

اولین مثال تجربی برای مدل E(۵)، هسته‌ی باریم[۱] ^{134}Ba معرفی شد [۱۳]. مقایسه‌ی طیف انرژی و آهنگ‌های گذار در این هسته با نتایج نظری متناظر در مدل E(۵) در جدول (۴-۲) انجام شده است.

---

[۱] Barium

جدول (۴-۲) مقایسه‌ی برخی ازنتایج نظری مدل E(۵) با داده‌های تجربی متناظر برای هسته‌ی ^{134}Ba [۱۳]

	$R_{1,2}$	$R_{1,3}$	$R_{1,4}$	$\frac{B(E2;1,2,4\rightarrow1,1,2)}{B(E2;1,1,2\rightarrow1,0,0)}$	$\frac{B(E2;1,2,2\rightarrow1,1,2)}{B(E2;1,1,2\rightarrow1,0,0)}$
E(۵)	۲.۲۰	۳.۵۹	۵.۱۷	۱.۶۷	۱.۶۷
^{134}Ba	۲.۳۱	۳.۶۶	۴.۶۹	۱.۵۸	۲.۲۱

کمیت R در جدول (۴-۲) مقادیر انرژی نرمال شده می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

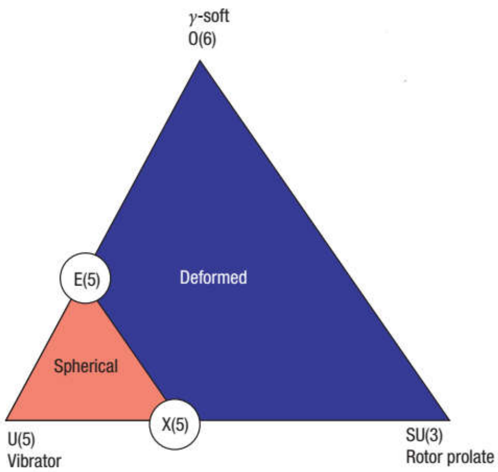
$$R_{s,\tau}=\frac{\varepsilon_{s,\tau}-\varepsilon_{1,0}}{\varepsilon_{1,1}-\varepsilon_{1,0}}=\frac{\left(x_{s,\tau}\right)^2-\left(x_{1,0}\right)^2}{\left(x_{1,1}\right)^2-\left(x_{1,0}\right)^2} \qquad (۲۴-۴)$$

در واقع با استفاده از رابطه‌ی (۴-۲۴) انرژی اولین و دومین تراز حالت پایه به ترتیب برابر با صفر و یک می‌شود. این عمل برای مقایسه با داده‌های تجربی که مقدار اولین تراز حالت پایه را برای تمام هسته‌ها صفر گزارش نموده‌اند، انجام می‌شود. طبق این رابطه، در تمام جداول در این رساله، مقادیر گزارش شده برای انرژی بدون بُعد هستند. با توجه به جدول (۴-۱) و رابطه‌ی (۴-۱۷) مشاهده می‌شود که در نقطه‌ی بحرانی E(۵)، ترازهای انرژی با s و τ مشابه اما L متفاوت تبهگن‌اند، در صورتی که این تبهگنی در بسیاری از هسته‌ها از جمله ^{134}Ba دیده نمی‌شود. اگرچه تقارن E(۵) با پتانسیل چاه مربعی نامحدود تعریف شده است، اما به ازای پتانسیل‌های دیگر از قبیل نوسانگر تعمیم‌یافته (داویدسون) و کولنی-مانند وابسته به انرژی به ترتیب در مراجع [۷۸] و [۷۵] نیز بررسی شده است. استفاده از پتانسیل‌های مختلف برای دست‌یابی به نتایجی است که به داده‌های تجربی نزدیک‌تر باشد.

۴-۲-۲) مدل X(۵)

نقطه‌ی بحرانی X(۵) برای توصیف هسته‌هایی به کار می‌رود که متحمّل انتقال فاز از حالت کروی نوسانی به متقارن محوری کشیده می‌شوند، که معادل با انتقال از U(۵) به SU(۳) است. نقاط بحرانی X(۵) و E(۵) به همراه تقارن‌های دینامیکی در شکل (۴-۲) نشان داده شده‌اند. نقطه‌ی بحرانی X(۵)،

مانند (۵)E تفسیری از مدل هندسی بوهر است که اشکال چهار قطبی هسته‌ای را با استفاده از پنج متغیر (β، γ و سه زاویه‌ی اویلر) توصیف می‌کند، اما ساختار نظریه گروه آن شناخته شده نیست (در حالی که نقطه‌ی بحرانی (۵)E یک درک دقیق از گروه اقلیدسی در فضای پنج بعدی است). تقارن (۵)X شامل دو تقریب است: تقریب اول مرتبط با جداسازی متغیرها و تقریب دوم بر پایه‌ی انتخاب زوایای کوچک برای متغیّر γ. در نقطه‌ی بحرانی (۵)X ، پتانسیل وابسته به β، چاه مربعی نامحدود و پتانسیل وابسته به γ، پتانسیل نوسانگر هماهنگ با مینیممی در نزدیکی γ تقریباً برابر صفر می‌باشد.



شکل (۴-۲) نمایش نقاط بحرانی (۵)X و (۵)E به همراه تقارن‌های دینامیکی (۵)U، (۶)O و (۳)SU [۷۹]

۴-۲-۲-۱) ویژه توابع و ویژه مقادیر مدل (۵)X

در این مدل برای حل معادله‌ی ویژه مقداری رابطه‌ی (۴-۱) تابع موج را به شکل معادله‌ی (۳-۵۵) در نظر می‌گیرند. با اعمال تقریب $\gamma \approx 0$(تقریب دوم در تقارن (۵)X) و استفاده از روش جداسازی متغیّرها، معادله‌ی ویژه مقداری مربوطه برای تابع موج معرفی شده به دو معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\left[-\frac{1}{\langle\beta^2\rangle\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{K^2}{4\langle\beta^2\rangle}\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{4}{3}\right)+u(\gamma)\right]\eta(\gamma)=\varepsilon_\gamma\eta(\gamma) \qquad (۴-۲۵)$$

$$\left[-\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{4\beta^2}\frac{4}{3}L(L+1)+u(\beta)\right]\xi(\beta)=\varepsilon_\beta\xi(\beta) \qquad (۴-۲۶)$$

که در آن $\langle \beta^2 \rangle$ میانگین β^2 حول $\xi(\beta)$ است (تقریب اول در تقارن X(۵)). در معادله‌ی (۴-۲۵) K تصویر تکانه‌ی زاویه‌ای L روی محور z چارچوب مرجع جسم است. در دو رابطه‌ی اخیر همانند بخش قبل $u(\gamma)$، $u(\beta)$ و ε_γ، ε_βبه ترتیب پتانسیل‌ها و انرژی‌های کاهیده نامیده می‌شوند که با روابط زیر معین می‌شوند

$$u(\beta)+u(\gamma)=\frac{2B}{\hbar^2}V(\beta,\gamma) \qquad (۴\text{-}۲۷)$$

$$\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma=\frac{2B}{\hbar^2}E \qquad (۴\text{-}۲۸)$$

در این مدل پتانسیل وابسته به γ معمولاً به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود

$$v(\gamma)=a^2\left(1-\cos 3\gamma\right)\approx\frac{a^2}{2}(3\gamma)^2 \qquad (۴\text{-}۲۹)$$

رابطه‌ی نهایی به ازای تقریب دوم X(۵) نوشته شده است و a ثابت پتانسیل است. این پتانسیل معادل با پتانسیل شناخته شده‌ی نوسانگر هماهنگ می‌باشد. معادله‌ی (۴-۲۵) به ازای این پتانسیل به طور تحلیلی و دقیق با استفاده از روش NU [۸۰] قابل حل است و جواب نهایی آن به صورت زیر می‌باشد

$$\varepsilon^{\gamma}_{n_\gamma K}=\frac{3a}{\sqrt{\langle\beta^2\rangle}}\left(n_\gamma+1\right)-\frac{K^2}{3\langle\beta^2\rangle} \qquad (۴\text{-}۳۰)$$

$$\eta_{n_\gamma K}(\gamma)=N_{n_\gamma K}\gamma^{\frac{|K|}{2}}e^{-\frac{3a}{2}\gamma^2}L_n^{|K|}\left(3a\gamma^2\right) \qquad (۴\text{-}۳۱)$$

که در این روابط n_γ و K همان اعداد کوانتمی هستند که در بخش (۳-۳) معرفی شدند، $N_{n_\gamma K}$ ثابت نرمالیزاسیون و رابطه‌ی بین n و n_γ به صورت زیر است

$$n_\gamma=2n+|K| \qquad (۴\text{-}۳۲)$$

اکنون معادله‌ی (۴-۲۶) را به ازای پتانسیل چاه مربعی که به شکل معادله‌ی (۴-۱۰) در نظر گرفته می‌شود بررسی می‌نماییم. به ازای این پتانسیل و با تغییر متغیرهای $\tilde{\xi}(\beta) = \beta^{\frac{3}{2}}\xi(\beta)$، $\varepsilon_\beta = k_\beta^2$ و $z = \beta k_\beta$ معادله‌ی (۴-۲۶) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\tilde{\xi}'' + \frac{\tilde{\xi}'}{z} + \left[1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right]\tilde{\xi} = 0 \qquad (۳۳\text{-}۴)$$

که معادله‌ی بسل است، بنابراین ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع به ترتیب عبارتند از

$$\varepsilon_{\beta;s,L} = \left(\frac{x_{s,\nu}}{\beta_w}\right)^2 \qquad (۳۴\text{-}۴)$$

$$\xi_{s,L}(\beta) = N_{s,L}\beta^{-\frac{3}{2}}J_\nu\left(k_{s,L}\beta\right) \qquad (۳۵\text{-}۴)$$

که در آن $x_{s,\nu}$، s امین صفر بسل،

$$\nu = \left(\frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۶\text{-}۴)$$

و $N_{s,L}$ ضریب نرمالیزاسیون است که از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$\int_0^{\beta_w} \beta^4\left(\xi_{s,L}(\beta)\right)^2 d\beta = 1 \qquad (۳۷\text{-}۴)$$

بنابراین ویژه توابع و ویژه مقادیر هامیلتونی بوهر در مدل X(۵) به ترتیب عبارتند از:

$$\Psi_{n_\beta n_\gamma LKM}(\beta,\gamma,\Omega) = N_{s,L}N_{n_\gamma K}\beta^{-\frac{3}{2}}J_\nu\left(k_{s,L}\beta\right)\gamma^{\frac{|K|}{2}}e^{-\frac{3a}{2}\gamma^2}L_n^{|K|}\left(3a\gamma^2\right)$$
$$\times\sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2\left(1+\delta_{K,0}\right)}}\left[D_{MK}^L(\Omega) + (-1)^L D_{M-K}^L(\Omega)\right] \qquad (۳۸\text{-}۴)$$

$$E_{n_\beta n_\gamma K L}=\frac{\hbar^2}{2B}\left(\left(\frac{x_{s,\nu}}{\beta_w}\right)^2+\frac{3a}{\sqrt{\langle\beta^2\rangle}}\left(n_\gamma+1\right)-\frac{K^2}{3\langle\beta^2\rangle}\right) \qquad (۴-۳۹)$$

۴-۲-۲-۲) آهنگ گذار در مدل X(۵)

برای تعیین آهنگ گذار در نقطه‌ی بحرانی X(۵)، ابتدا روابط (۴-۱۸) و (۴-۳۸) را در رابطه‌ی (۴-۲۰) جایگذاری می‌نماییم. سپس با استفاده از قضیه‌ی ویگنر-اکارت[۱] [۲۲]

$$\left\langle n'\mu'L'\middle|Q_{2\mu}\middle|n\mu L\right\rangle=\frac{\left(L2L\middle|\mu\mu_t\mu'\right)}{\sqrt{2L'+1}}\left|\left\langle n\,L\middle\|Q_{2\mu}\middle\|n'\,L'\right\rangle\right| \qquad (۴-۴۰)$$

و رابطه‌ی زیر [۲۲]

$$\int d^3\Omega\, D^{(I_3)}_{M_3,k_3}\left(\Omega\right) D^{(I_2)*}_{M_2,k_2}\left(\Omega\right)\, D^{(I_1)*}_{M_1,k_1}\left(\Omega\right)=\frac{8\pi^2}{2I_3+1}\left(I_1I_2I_3\middle|M_1M_2M_3\right)\left(I_1I_2I_3\middle|k_1k_2k_3\right) \qquad (۴-۴۱)$$

که در آن $\left(I_1I_2I_3\middle|M_1M_2M_3\right)$ و $\left(I_1I_2I_3\middle|k_1k_2k_3\right)$ ضرایب کلبش-گوردون SU(۳) هستند و

$$D^{(I)\,*}_{M,k}\left(\Omega\right)=\left(-1\right)^{M-k}\,D^{(I)}_{-M,-k}\left(\Omega\right) \qquad (۴-۴۲)$$

به رابطه‌ی نهایی زیر می‌رسیم [۳۷]

$$B\left(E2;n_\beta n_\gamma LK\rightarrow n_\beta{}'n_\gamma{}'L'K'\right)=\frac{5}{16\pi}t^2\left(C^{L_2L'}_{K\,K'-KK'}I^{n_\beta L}_{n_\beta' L'}G^{n_\gamma K}_{n_\gamma' K'}\right)^2 \qquad (۴-۴۳)$$

که در آن

$$I^{n_\beta L}_{n_\beta' L'}=\int_0^\infty \beta\ \xi_{n_\beta L}\left(\beta\right)\ \xi_{n_\beta' L'}\left(\beta\right)\ \beta^4\ \mathrm{d}\beta \qquad (۴-۴۴)$$

$$G^{n_\gamma K}_{n_\gamma' K'}=\int_0^{\pi/3}\sin\gamma\,\eta_{n_\gamma K}\left(\gamma\right)\ \eta_{n_\gamma' K'}\left(\gamma\right)\left|\sin 3\gamma\right|\mathrm{d}\gamma \qquad (۴-۴۵)$$

---

[۱] Wigner-Eckart

$C^{L_2 L'}_{K K' - KK'}$ ضرایب کلبش-گوردن SU(۳) و t فاکتور مقیاس است. رابطه‌ی (۴-۴۳) برای محاسبه‌ی احتمال گذار از یک تراز انرژی با اعداد کوانتومی $n_\beta n_\gamma LK$ به تراز دیگر با مشخصّات $n_\beta' n_\gamma' L'K'$ در مدل X(۵) مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برخی از مقادیر انرژی نرمال شده و آهنگ‌های گذار برای مدل X(۵) به ترتیب در جداول (۴-۳) و (۴-۴) آورده شده است. کمیت T که در جدول (۴-۴) آمده است به صورت زیر تعریف می‌شود

$$T_{n,L,n',L'} = \frac{B(E2; n, L \to n', L')}{B(E2; 0, 2 \to 0, 0)} \qquad (۴-۴۶)$$

کمیت $B(E2; n, L \to n', L')$ در رابطه‌ی (۴-۴۶) با استفاده از رابطه (۴-۴۳) به ازای $n_\gamma, K, n_\gamma', K' = 0$ و n, n' که متناظر با n_β, n_β' می‌باشند، محاسبه می‌شود. انتگرال تعریف شده در رابطه‌ی (۴-۴۴) با استفاده از رابطه‌ی (۴-۳۵) محاسبه می‌شود. از آن‌جایی که $n_\gamma, K, n_\gamma', K' = 0$، کمیت رابطه‌ی (۴-۴۵) برابر با یک است. با توجه به جدول (۴-۳)، هامیلتونی بوهر در تقارن X(5) به ازای چاه پتانسیل مربعی (X(5)-S) ترازهای انرژی هسته‌هایی از قبیل نئودیمیم[۱] ^{150}Nd و ^{156}Dy را به طور نسبتاً مناسبی توصیف می‌نماید. اختلاف قابل ملاحظه‌ای در سومین تراز انرژی از دومین نوار β بین داده‌های نظری و تجربی به چشم می‌خورد که از معایب این مدل محسوب می‌شود.

جدول (۴-۳) برخی از مقادیر انرژی نرمال شده به ازای تقارن X(۵) برای چاه پتانسیل مربعی نامحدود و مقایسه‌ی آن-ها با داده‌های تجربی هسته‌های ^{150}Nd و ^{156}Dy

	$R_{1,4}$	$R_{1,6}$	$R_{1,8}$	$R_{1,10}$	$R_{2,0}$	$R_{2,2}$	$R_{2,4}$	$R_{3,0}$	$R_{3,2}$
X(5)-S [۲۶]	۲.۹۱	۵.۴۵	۸.۵۱	۱۲.۰۷	۵.۶۷	۷.۴۸	۱۰.۷۲	۱۴.۱۷	۱۶.۷۸
^{150}Nd [۸۱]	۲.۹۳	۵.۵۳	۸.۶۸	۱۲.۲۸	۵.۱۹	۶.۵۳	۸.۷۴		
^{156}Dy [۸۲]	۲.۹۳	۵.۵۹	۸.۸۲	۱۲.۵۲	۴.۹۰	۶.۰۱	۷.۹۰	۱۰.۰۰	

[۱] Neodimium

جدول (۴-۴) برخی از آهنگ‌های گذار برای تقارن X(۵) با چاه پتانسیل مربعی نامحدود و مقایسه‌ی آن‌ها با داده‌های تجربی هسته‌های ^{۱۵۰}Nd و ^{۱۵۶}Dy

	$T_{0,4,0,2}$	$T_{0,6,0,4}$	$T_{0,8,0,6}$	$T_{0,10,0,8}$	$T_{1,0,0,2}$	$T_{1,2,0,2}$	$T_{1,2,0,4}$	$T_{1,2,1,0}$
X(5)-S [۲۶]	۱.۵۸	۱.۹۸	۲.۲۷	۲.۶۱	۰.۶۳	۰.۰۹	۰.۳۶	۰.۷۹
^{۱۵۰}Nd [۸۱]	۱.۵۶	۱.۷۸	۱.۸۶	۱.۷۳	۰.۳۷	۰.۰۹	۰.۱۶	۱.۳۸
^{۱۵۶}Dy [۸۲]	۱.۶۳	۱.۸۷	۲.۰۷	۲.۲۰		۰.۰۹	۰.۰۸	

۴-۲-۲-۳) معرفی ضرایب کلبش-گوردون SU(۳)

این ضرایب در یک سیستم دو ذره‌ای یا یک سیستم تک ذره‌ای که با گذار از یک تراز انرژی به تراز دیگر آن دو مقدار متفاوت از تکانه‌ی زاویه‌ای را به خود می‌گیرد تعریف می‌شوند. در اینجا با مورد دوم در ارتباط هستیم. برای این سیستم، عملگر تکانه‌ی زاویه‌ای کل که مجموع دو عملگر تکانه‌ی زاویه‌ای می‌باشد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2 \qquad (۴۷-۴)$$

ابتدا دو مجموعه ویژه توابع $|j_1 m_1\rangle$ و $|j_2 m_2\rangle$ را به گونه‌ای تعریف می‌نماییم که

$$\hat{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle = \hbar^2 j_1 (j_1+1) |j_1 m_1\rangle \qquad (۴۸-۴)$$

$$\hat{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle = \hbar^2 j_2 (j_2+1) |j_2 m_2\rangle \qquad (۴۹-۴)$$

$$\hat{J}_{1z}^2 |j_1 m_1\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle \qquad (۵۰-۴)$$

$$\hat{J}_{2z}^2 |j_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle \qquad (۵۱-۴)$$

پایه‌های سیستمی که در آن تکانه‌ی زاویه‌ای کل تعریف می‌شود به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \qquad (۵۲-۴)$$

در چنین سیستمی ویژه حالت مؤلفه‌ی z تکانه‌ی زاویه‌ای کل دارای ویژه مقدار m_1+m_2 است لذا

$$\hat{J}_z\left|j_1m_1j_2m_2\right\rangle=\left(\hat{J}_{1z}+\hat{J}_{2z}\right)\left|j_1m_1j_2m_2\right\rangle=\left(m_1+m_2\right)\hbar\left|j_1m_1j_2m_2\right\rangle \qquad (۵۳-۴)$$

با این وجود، ویژه تابع معرفی شده در رابطه‌ی (۴-۵۲) نمی‌تواند ویژه تابع $\hat{J}^2$ باشد. برای واضح نمودن این موضوع، روابط جابه‌جایی تکانه‌های زاویه‌ای متفاوت را بررسی می‌نماییم.

ابتدا توجه داریم که همه‌ی مؤلفه‌های $\hat{J}_1$ با همه‌ی مؤلفه‌های $\hat{J}_2$ جابه‌جا خواهند شد زیرا به دو تراز متفاوت مرتبط می‌شوند. بنابراین

$$\left[\hat{J}_z,\hat{J}_1^2\right]=\left[\hat{J}_z,\hat{J}_2^2\right]=\left[\hat{J}^2,\hat{J}_1^2\right]=\left[\hat{J}^2,\hat{J}_2^2\right]=0 \qquad (۵۴-۴)$$

$$\left[\hat{J}_z,\hat{J}_{1z}\right]=\left[\hat{J}_z,\hat{J}_{2z}\right]=0 \qquad (۵۵-۴)$$

در حالی که مربع تکانه‌ی زاویه‌ای کل با مؤلفه‌ی z هر یک از تکانه‌های زاویه‌ای منفرد جابه‌جا نمی-شود. به طور مثال

$$\left[\hat{J}^2,\hat{J}_{1z}\right]=2i\hbar\left(\hat{J}_{1x}\hat{J}_{2y}-\hat{J}_{1y}\hat{J}_{2x}\right) \qquad (۵۶-۴)$$

بنابراین مجموعه جابه‌جایی‌های کامل عملگرها با $\hat{J}^2$، $\hat{J}_z$، $\hat{J}_1^2$ و $\hat{J}_2^2$ داده می‌شوند، به این معنی که این گروه از عملگرها با هم جابه‌جا می‌شوند، لذا ویژه توابع جدید که به جای توابع معرفی شده در رابطه‌ی (۴-۵۲) مورد استفاده قرار می‌گیرند به شکل $\left|jmj_1j_2\right\rangle$ نمایش داده می‌شوند. می‌توان این ویژه توابع را بر حسب ویژه توابع رابطه‌ی (۴-۵۲) به صورت زیر بسط داد:

$$\left|jmj_1j_2\right\rangle=\sum_{m_1m_2}\left|j_1m_1j_2m_2\right\rangle\left\langle j_1m_1j_2m_2\middle|\middle|jmj_1j_2\right\rangle \qquad (۵۷-۴)$$

برای سادگی نمایش بهتر است ضریب تبدیل را به صورت زیر بنویسیم

$$\langle j_1m_1j_2m_2 || jmj_1j_2\rangle = \left(j_1j_2j|m_1m_2m\right) \qquad (۵۸-۴)$$

این ضریب همان ضریب کلبش-گوردون SU(۳) است که اکنون با استفاده از آن تبدیل پایه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود

$$|jmj_1j_2\rangle = \sum_{m_1m_2}\left(j_1j_2j|m_1m_2m\right)|j_1m_1j_2m_2\rangle \qquad (۵۹-۴)$$

L، ۲، L'، K و K' در رابطه‌ی (۴-۴۳) به ترتیب متناظر با j_1، j_2، j، m_1 و m در رابطه‌ی (۴-۵۸) می‌باشند. به طور مثال برای گذار دومین تراز حالت پایه (L=2 و K=0) به اولین تراز آن (L′=0 و K′=0) این ضریب به صورت $C^{2\,2\,0}_{0\,0\,0\,0}$ یا $\left(220|000\right)$ نوشته می‌شود. مقادیر عددی ضرایب کلبش-گوردون SU(۳) برای برخی از گذارها در جدول (۴-۵) آورده شده است. این مقادیر با استفاده از نرم-افزار متمتیکا و کد دستوری ClebschGordan[{j_1,m_1},{j_2,m_2},{j,m}] حاصل شده‌اند. برای مثال برای محاسبه‌ی ضریب کلبش-گوردونِ گذار از سومین تراز در اولین نوار γ به دومین تراز در همین نوار که برای آن L، L'، K و K' به ترتیب ۴، ۳، ۲ و ۲ می‌باشند، باید کد دستوری به صورت ClebschGordan[{4,2},{2,0},{3,2}] نوشته شود که پس از اجرا مقدار ۰.۵۱۶۳۹۸- را می‌دهد.

جدول (۴-۵) مقادیر عددی ضرایب کلبش گوردون SU(۳) برای برخی از گذارهای مدل X(۵)

۰.۵۷۳۹۴۴	$\left(826|000\right)$	۰.۳۴۵۰۳۳	$\left(422|202\right)$	۰.۴۴۷۲۱۴	$\left(220|000\right)$
۰.۵۸۱۶۷۵	$\left(1028|000\right)$	۰.۴۸۴۷۳۲	$\left(624|202\right)$	۰.۵۳۴۵۲۲	$\left(422|000\right)$

۴-۳) مدل X(۳)

مدل X(۳) نوع γ-صلبِ به طور دقیق جداپذیرِ نقطه‌ی بحرانی X(۵) است. منظور از به طور دقیق جداپذیر این است که دو تقریب به کار برده شده در مدل X(۵) در این مدل کاربردی ندارند که دلیل آن در ادامه مشخّص خواهد شد. در این مدل γ و مشتق آن نسبت به زمان ($\dot{\gamma}$) هر دو برابر صفر

هستند لذا به جای پنج متغیر، تنها از سه متغیر β، θ و ϕ استفاده می‌شود. بنابراین این مدل هسته-های متقارن محوری با شکل دوک‌وار (کشیده) را مورد بررسی قرار می‌دهد. بر اساس این توضیحات، شکل کلی معادله‌ی (۳-۱) به صورت زیر تغییر می‌یابد

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k'}\omega_{k'}^{2}J_{k'}+\frac{1}{2}B\dot{\beta}^{2} \tag{۴-۶۰}$$

که در آن با استفاده از روابط (۳-۵۱) تا (۳-۵۳) و با فرض γ برابر صفر تکانه‌های لختی به صورت

$$J_{1}=J_{2}=3B\beta^{2} \tag{۴-۶۱}$$

$$J_{3}=0 \tag{۴-۶۲}$$

و سرعت‌های زاویه‌ای طبق روابط (۳-۲) و (۳-۳) به صورت زیر جایگزین می‌شوند

$$\omega_{x'}=-\dot{\phi}\sin\theta \tag{۴-۶۳}$$

$$\omega_{y'}=\dot{\theta} \tag{۴-۶۴}$$

بنابراین رابطه‌ی (۴-۶۰) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T=\frac{1}{2}B\left(3\beta^{2}\left(\dot{\theta}^{2}+\dot{\phi}^{2}\sin^{2}\theta\right)+\dot{\beta}^{2}\right) \tag{۴-۶۵}$$

همان‌گونه که پیش‌تر گفته شد در تقارن X(۳) مختصات تعمیم یافته به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$q_{1}=\phi, q_{2}=\theta, q_{3}=\beta \tag{۴-۶۶}$$

با انجام محاسباتی مشابه با محاسبات بخش (۳-۱)، هامیلتونی بوهر در مدل X(۳) به دست می‌آید

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^{2}}{2B}\left(\frac{1}{\beta^{2}}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^{2}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{3\beta^{2}}\Delta_{\Omega}\right)+V\left(\beta\right) \tag{۴-۶۷}$$

که در آن

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{۶۸-۴}$$

اکنون معادله‌ی موج مربوط به هامیلتونی رابطه‌ی (۴-۶۷) را به ازای پتانسیل وابسته به انرژی نوسانگر هماهنگ مورد مطالعه قرار می‌دهیم [۳۱].

۴-۳-۱) مدل X(۳) برای نوسانگر هماهنگ با پتانسیل وابسته به انرژی

معادله‌ی موج وابسته به هامیلتونی رابطه‌ی (۴-۶۷) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{H}\Psi(\beta,\theta,\phi) = E\Psi(\beta,\theta,\phi) \tag{۶۹-۴}$$

که در آن $\Psi(\beta,\theta,\phi)$ شکل کلی تابع موج می‌باشد. با جایگزینی رابطه‌ی (۴-۶۷) در رابطه‌ی (۴-۶۹) داریم

$$\left[\left[\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{3\beta^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right] + \varepsilon - v(\beta)\right]\Psi(\beta,\theta,\phi) = 0 \tag{۷۰-۴}$$

در این رابطه $v(\beta) = \frac{2B}{\hbar^2}V(\beta)$ و $\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2}E$ به ترتیب پتانسیل و انرژی کاهیده نامیده می‌شوند. اکنون پتانسیل وابسته به انرژی نوسانگر هماهنگ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$v(\beta,\varepsilon) = k(\varepsilon)\beta^2 = c_H(1 + a_H\varepsilon)\beta^2 \tag{۷۱-۴}$$

ملاحظه می‌شود که این پتانسیل علاوه بر اینکه به متغیر β وابسته است از طریق ثابت کشیدگی آن یعنی $k(\varepsilon)$ به انرژی نیز وابسته می‌شود. c_H و a_H دو ثابت پتانسیل هستند. a_H که میزان وابستگی پتانسیل به انرژی را نشان می‌دهد بین دو مقدار صفر و یک می‌باشد. با جایگزینی این پتانسیل در رابطه‌ی (۴-۷۰) و در نظر گرفتن تابع موج به شکل زیر

$$\Psi\left(\beta,\theta,\phi\right)=F\left(\beta\right)Y_{L,M}\left(\theta,\phi\right) \tag{۴-۷۲}$$

و تغییر متغیر $s=\beta^2$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}+\frac{3}{2s}\frac{d}{ds}+\frac{1}{s^2}\left(-\frac{L\left(L+1\right)}{12}+\frac{\varepsilon}{4}s-\frac{c_H\left(1+a_H\varepsilon\right)}{4}s^2\right)\right]F\left(s\right)=0 \tag{۴-۷۳}$$

در استخراج معادله‌ی (۴-۷۳) از رابطه‌ی زیر نیز استفاده شده است

$$-\Delta_\Omega Y_{L,M}\left(\theta,\phi\right)=L\left(L+1\right)Y_{L,M}\left(\theta,\phi\right) \tag{۴-۷۴}$$

که در آن L همان عدد کوانتمی تکانه‌ی زاویه‌ای می‌باشد. با استفاده از روش NU ویژه مقادیر انرژی و توابع موج معادله‌ی (۴-۷۳) عبارتند از

$$\left(\varepsilon_{n,L}\right)_H=2\left[a_Hc_Hq_{n,L}+\sqrt{\left(a_Hc_Hq_{n,L}\right)^2+c_Hq_{n,L}}\right] \tag{۴-۷۵}$$

$$F_{n,L}\left(s\right)=N_{n,L}s^{\upsilon}e^{\mu s}L_n^{\lambda}\left(\tau s\right) \tag{۴-۷۶}$$

در این روابط

$$q_{n,L}=\left(2n+1+2\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{L\left(L+1\right)}{12}}\right)^2 \tag{۴-۷۷}$$

$$\upsilon=-\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{L\left(L+1\right)}{12}} \tag{۴-۷۸}$$

$$\mu=-\frac{1}{2}\sqrt{c_H\left(1+a_H\varepsilon\right)} \tag{۴-۷۹}$$

$$\lambda=2\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{L\left(L+1\right)}{12}} \tag{۴-۸۰}$$

$$\tau=\sqrt{c_H\left(1+a_H\varepsilon\right)} \tag{۴-۸۱}$$

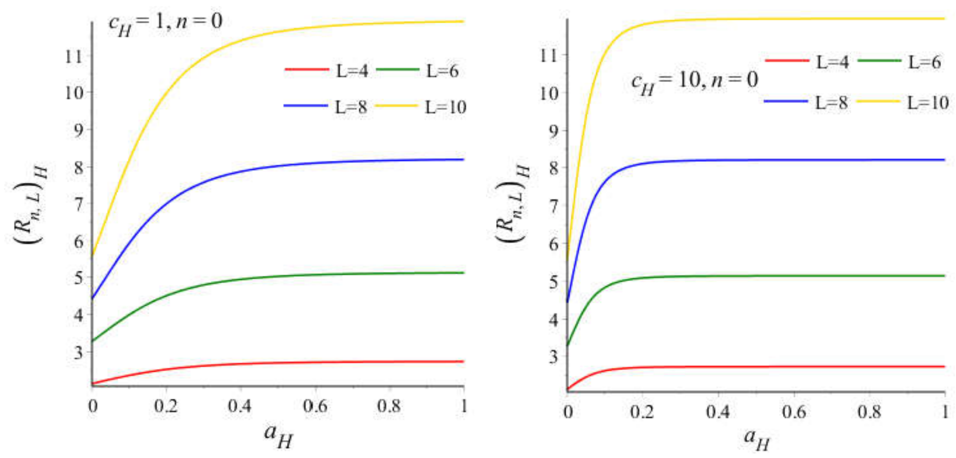
و $N_{n,L}$ ثابت نرمالیزاسیون است که از طریق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$N_{n,L} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^{\infty}\left(1-a_H c_H \beta^2\right) F_{n,L}^2(s)\, \beta^2 d\beta}} \tag{۸۲-۴}$$

مطابق بخش‌های قبل، انرژی نرمال شده به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\left(R_{n,L}\right)_H = \frac{\left(\varepsilon_{n,L}\right)_H - \left(\varepsilon_{0,0}\right)_H}{\left(\varepsilon_{0,2}\right)_H - \left(\varepsilon_{0,0}\right)_H} \tag{۸۳-۴}$$

که $\left(\varepsilon_{n,L}\right)_H$ از رابطه‌ی (۴-۷۵) جایگزین می‌شود. شکل (۴-۳) رفتار $\left(R_{n,L}\right)_H$ را بر حسب a_H برای برخی از ترازهای حالت پایه نشان می‌دهد. این شکل در دو بخش مجزا که به ترتیب متناظر با دو مقدار یک و ده برای ثابت c_H می‌باشد، نشان می‌دهد که با افزایش عدد کوانتمی L، میزان تغییرات انرژی نرمال شده به ازای تغییرات a_H افزایش می‌یابد و با افزایش مقدار c_H، انرژی نرمال شده به ازای a_H کمتر به یک عدد ثابت میل می‌کند (برای ۱۰=c_H، تغییرات انرژی به ازای a_H از صفر تا ۰.۱ است در حالی که این تغییرات برای ۱=c_H، به ازای a_H از صفر تا ۰.۲ می‌باشد) و پیش‌بینی می‌شود که با افزایش مقدار c_H، تغییرات انرژی به ازای تغییرات a_H ناچیز باشد. به عبارتی دیگر با افزایش c_H نقشِ a_H کم‌رنگ می‌شود، به گونه‌ای که به ازای تغییرات آن، انرژی مربوط به ترازها تقریباً ثابت است.



شکل (۴-۳) انرژی نرمال شده‌ی نوسانگر هماهنگ با پتانسیل وابسته به انرژی در مدل X(۳) به عنوان تابعی از a_H

از آنجایی که تابع موج مدل X(۳) مستقل از γ است، آهنگ گذار از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود

$$B\left(E2;n_1L_1\rightarrow n_2L_2\right)=t^2\left(C^{L\,2\,0}_{0000}\right)^2 I^2_{n_1L_1;n_2L_2} \tag{۴-۸۴}$$

که در آن

$$I_{n_1L_1;n_2L_2}=\int_0^\infty \beta\, F_{n_1L_1}\left(\beta\right)F_{n_2L_2}\left(\beta\right)\left(1-\frac{\partial v\left(\beta,\varepsilon\right)}{\partial\varepsilon}\right)\beta^2\ \mathrm{d}\beta \tag{۴-۸۵}$$

جداول (۴-۶) تا (۴-۸) آهنگ‌های گذار را به ازای مقادیر متفاوت a_H و c_H نشان می‌دهد. در این جداول نتایج خود را با داده‌های تجربی موجود و نتایج مرجع [۲۹] مقایسه نموده‌ایم. در این مرجع، مدل X(۳) به ازای پتانسیل سکستیک بررسی شده است. مشاهده می‌شود که شکل پتانسیل انتخابی ما یعنی پتانسیل وابسته به انرژی نوسانگر هماهنگ توصیف بهتری از آهنگ‌های گذار برای هسته‌های ^{152}Sm، ^{150}Sm و ^{190}Hg نسبت به مرجع [۲۹] ارائه می‌دهد. در این جداول، $B(E2;02\rightarrow00)=100$ می‌باشد. در واقع، مقدار مربوط به هر گذار با استفاده از رابطه‌ی $100\times\frac{B(E2;n_1L_1\rightarrow n_2L_2)}{B(E2;02\rightarrow00)}$ محاسبه شده است، لذا اعداد گزارش شده در جداول (۴-۶) تا (۴-۸) بدون واحد می‌باشند.

جدول (۴-۶) آهنگ‌های گذار نوسانگر هماهنگ وابسته به انرژی به ازای ثابت‌های a_H=۰.۱ و c_H=۱ در مدل X(۳)

آهنگ‌های گذار	a_H=۰.۱ و c_H=۱ [۳۱]	داده‌های تجربی ^{152}Sm [۸۳]	داده‌های نظری ^{152}Sm [۲۹]
$B(E2;04\rightarrow02)$	۱۴۴	۱۴۴	۱۷۵
$B(E2;06\rightarrow04)$	۱۶۸	۱۶۶	۲۰۷
$B(E2;08\rightarrow06)$	۱۸۴	۲۰۲	۲۴۷
$B(E2;010\rightarrow08)$	۲۰۷	۲۱۷	۲۶۷
$B(E2;10\rightarrow02)$	۴۸	۲۳	۱۲۲
$B(E2;12\rightarrow02)$	۱۳	۴	۹
$B(E2;12\rightarrow04)$	۶۰	۱۲	۲۴
$B(E2;12\rightarrow10)$	۸۷	۱۱۷	۶۹

جدول (۴-۷) آهنگ‌های گذار نوسانگر هماهنگ وابسته به انرژی به ازای ثابت‌های a_H=۰.۸ و c_H=۱ در مدل X(۳)

آهنگ‌های گذار	a_H=۰.۸ و c_H=۱ [۳۱]	داده‌های تجربی ^{150}Sm [۸۱]	داده‌های نظری ^{150}Sm [۲۹]
$B(E2;04\rightarrow02)$	۱۹۴	۱۹۳	۲۲۹
$B(E2;06\rightarrow04)$	۲۵۰	۲۶۳	۳۲۸
$B(E2;08\rightarrow06)$	۲۷۶	۲۹۸	۴۳۰
$B(E2;10\rightarrow02)$	۲	۹۳	۳۰۳
$B(E2;12\rightarrow10)$	۵۷	۱۹۳	۱۳۷

جدول (۴-۸) آهنگ‌های گذار نوسانگر هماهنگ وابسته به انرژی به ازای ثابت‌های a_H=۰.۸ و c_H=۱۰ در مدل X(۳)

آهنگ‌های گذار	a_H=۰.۸ و c_H=۱ [۳۱]	داده‌های نظری ^{190}Hg [۲۹]
$B(E2;04\rightarrow02)$	۲۷۱	۲۲۹
$B(E2;06\rightarrow04)$	۳۴۵	۳۲۸
$B(E2;08\rightarrow06)$	۴۲۹	۴۳۰

در جدول (۴-۶) ملا حظه می‌شود که به جز دو گذار $B(E2;12\rightarrow 02)$ و $B(E2;12\rightarrow 04)$، در سایر گذارها، داده‌های نظری ما نسبت به مقادیر محاسبه شده در مرجع [۲۹] به داده‌های تجربی نزدیک‌تر است. اختلاف‌های نسبتاً زیاد بین مقادیر محاسبه شده توسط مدل ما و داده‌های تجربی مربوط به گذارهای بین ترازهای اولین نوار β به ترازهای حالت پایه، می‌توانند ناشی از اختلافی که بین داده‌های نظری و تجربی مربوط به انرژی این ترازها وجود دارد، باشند.

۴-۳-۲) مدل X(۳) برای پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته

در این بخش مدل X(۳) را به ازای پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته که به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود، مورد بررسی قرار می‌دهیم [۳۵]،

$$V\left(\beta\right)=a\beta^{2}+\frac{b}{\beta^{2}}+c\beta^{6} \qquad (۸۶-۴)$$

که در آن a، b و c ثابت‌های اختیاری می‌باشند. معادله‌ی موج مربوط به مدل X(۳) به ازای این پتانسیل به معادله دیفرانسیل زیر تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{d^{2}}{d\beta^{2}}+\frac{2}{\beta}\frac{d}{d\beta}+\frac{1}{\beta^{2}}\left(\varepsilon\beta^{2}-\frac{L\left(L+1\right)}{3}-a\beta^{4}-b-c\beta^{8}\right)\right)F\left(\beta\right)=0 \qquad (۸۷-۴)$$

از آن‌جایی که این معادله به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نمی‌باشد، برای به دست آوردن ویژه مقادیر و ویژه توابع آن از روش وردش [۸۴] استفاده شده است [۳۵]. به این منظور، ابتدا حالت خاص معادله‌ی (۴-۸۷) (c=0) (۴-۸۸) را که به طور تحلیلی قابل حل می‌باشد، بررسی می‌نماییم

$$\left(\frac{d^{2}}{d\beta^{2}}+\frac{2}{\beta}\frac{d}{d\beta}+\frac{1}{\beta^{2}}\left(\varepsilon\beta^{2}-\frac{L\left(L+1\right)}{3}-a\beta^{4}-b\right)\right)f\left(\beta\right)=0 \qquad (۸۸-۴)$$

تابع موج این معادله با استفاده از روش NU برابر است با

$$f\left(\beta\right)=\beta^{\left(\frac{-1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+b+\frac{L(L+1)}{3}}\right)}e^{-\sqrt{\frac{a}{4}}\beta^{2}}L_{n}^{\sqrt{\frac{1}{4}+b+\frac{L(L+1)}{3}}}\left(\sqrt{a}\beta^{2}\right) \qquad (۸۹-۴)$$

سپس تابع موج معادله‌ی (۴-۸۷) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$F_{n,L}\left(\beta\right)=\alpha^{\frac{3}{2}}\beta^{\left(\frac{-1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+b+\frac{L(L+1)}{3}}\right)}e^{-\sqrt{\frac{a}{4}}\alpha\beta^{2}}L_{n}^{\sqrt{\frac{1}{4}+b+\frac{L(L+1)}{3}}}\left(\sqrt{a}\alpha\beta^{2}\right) \qquad (۹۰-۴)$$

که مشابه با رابطه‌ی (۴-۸۹) می‌باشد، با این تفاوت که شامل پارامتر وردش α است. در نهایت انرژی موجود در رابطه‌ی (۴-۸۷) با استفاده از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$\varepsilon_{n,L}=\frac{\int_0^\infty F^*_{n,L}(\beta)\hat{H}'F_{n,L}(\beta)\beta^2d\beta}{\int_0^\infty F^*_{n,L}(\beta)F_{n,L}(\beta)\beta^2d\beta} \qquad (۹۱-۴)$$

که در آن

$$\hat{H}'=-\frac{d^2}{d\beta^2}-\frac{2}{\beta}\frac{d}{d\beta}+\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{L(L+1)}{3}+a\beta^4+b+c\beta^8\right) \qquad (۹۲-۴)$$

برای هر تراز انرژی پارامتر وردش به گونه‌ای تعیین می‌شود که مشتق انرژی آن نسبت به پارامتر وردش، صفر باشد، یعنی

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\varepsilon_{n,L}\right)=0 \qquad (۹۳-۴)$$

و برای تعیین انرژی نرمال شده از رابطه‌ی زیر استفاده می‌نماییم

$$R_{n,L}=\frac{\varepsilon_{n,L}-\varepsilon_{0,0}}{\varepsilon_{0,2}-\varepsilon_{0,0}} \qquad (۹۴-۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۹۴) مقادیر سه پارامتر آزاد a، b و c از طریق فرایند فیت کردن، تعیین می‌شود. برای هر هسته این مقادیر به گونه‌ای به دست می‌آیند که به ازای آن‌ها بهترین توافق با داده‌های تجربی متناظر حاصل شود یا به عبارتی دیگر مقدار کمیت زیر مینیمم شود

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\left(R_{n,L}\right)_{th}-\left(R_{n,L}\right)_{\exp}\right]_i^2} \qquad (۹۵-۴)$$

که N تعداد داده‌های تجربی در فرایند فیت است. طبق روابط (۴-۹۵) و (۴-۹۴)، کمیت σ بدون بُعد است. جدول (۴-۹) نتایج محاسبات عددی طیف انرژی برخی از هسته‌ها را به همراه داده‌های نظری منبع [۲۹] و نتایج تجربی متناظر نشان می‌دهد. مقادیر به دست آمده برای پارامترهای پتانسیلِ

رابطه‌ی (۴-۸۶) نیز در این جدول آورده شده است (گام تغییر برای این پارامترها در برنامه‌ی متمتیکاای که برای استخراج آن‌ها اجرا نموده‌ایم، یک بوده است، زیرا به ازای مقادیر کمتر از واحد و تغییرات اعشاری، برنامه قادر به محاسبه‌ی این پارامترها نبود، لذا همان‌گونه که در جدول مشاهده می‌نمایید، اعداد به دست آمده برای این پارامترها اعدادی صحیح هستند). با استفاده از این مقادیر به دست آمده برای ثابت‌های پتانسیل، مقدار گذارهای الکتریکی را نیز را محاسبه کرده‌ایم و نتایج حاصل از آن را نیز در جدول (۴-۱۱) آورده‌ایم که در ادامه بررسی می‌نماییم. در تمام این رساله، مبنای انجام محاسبات به همین صورت است. یعنی ابتدا پارامترهای آزاد که ثابت‌های پتانسیل، پارامتر کنترل مربوط به مدل‌های ترکیبی یا ترکیب‌شده، پارامتر جرم وابسته به مکان و یا پارامتر طول کمینه هستند، با مینیمم کردن کمیت σ، محاسبه می‌شوند و سپس با استفاده از مقادیر به دست آمده برای آن‌ها، مقادیر مربوط به گذارهای الکتریکی تعیین می‌شوند.

جدول (۴-۹) مقایسه‌ی نتایج عددی مربوط به طیف انرژی مدل X(۳) با پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته (خط اول) با داده‌های تجربی متناظر (خط دوم) [۸۳ و ۸۵-۹۷] و داده‌های نظری منبع [۲۹] (خط سوم)

هسته	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	$R_{1,6}$	$R_{2,0}$	$R_{2,2}$	a	b	c
	۲.۶۰	۴.۴۸	۶.۵۶	۸.۸۱	۳.۴۰	۴.۶۹	۶.۶۹	۸.۹۸	۷.۵۷	۹.۱۰	۷	۱	۳
^{102}Mo	۲.۵۱	۴.۴۸	۶.۸۱	۹.۴۱	۲.۳۵	۳.۸۶	–	–	–	–			
	۲.۶۷	۴.۱۹	۶.۵۷	۸.۳۹	۳.۰۹	۴.۶۵	۶.۹۰	۸.۸۰	۷.۱۶	۹.۰۷			
	۲.۵۶	۴.۳۴	۶.۲۸	۸.۳۶	۳.۲۳	۴.۴۳	۶.۲۸	۸.۳۸	۷.۰۳	۸.۴۱	۸	۱	۱
^{104}Ru	۲.۴۸	۴.۳۵	۶.۴۸	۸.۶۹	–	۴.۲۳	۵.۸۱	–	–	–			
	۲.۷۴	۴.۱۴	۶.۴۱	۸.۰۲	۲.۹۲	۴.۲۸	۶.۴۵	۸.۱۰	۶.۵۸	۸.۱۹			
	۲.۶۶	۴.۶۸	۶.۹۷	۹.۴۸	۳.۶۷	۵.۰۹	۷.۳۲	۹.۹۰	۸.۳۹	۱۰.۱۲	۱	۱	۱۴
^{106}Ru	۲.۶۶	۴.۸۰	۷.۳۱	۱۰.۰۲	۳.۶۷	–	–	–	–	–			
	۲.۵۵	۴.۴۳	۶.۱۴	۹.۵۵	۴.۱۰	۶.۲۰	۸.۵۵	۱۱.۱۹	۹.۳۶	۱۲.۲۰			
	۲.۸۱	۵.۰۷	۷.۶۵	۱۰.۵۱	۴.۴۹	۵.۸۶	۸.۲۴	۱۱.۱۰	۱۰.۱۰	۱۱.۷۶	۱	۲	۲
^{108}Ru	۲.۷۵	۵.۱۲	۸.۰۲	۱۱.۳۱	۴.۰۳	–	–	–	–	–			
	۲.۴۹	۴.۵۰	۷.۳۰	۹.۹۲	۴.۷۵	۷.۰۱	۹.۳۱	۱۲.۲۰	۱۰.۴۳	۱۳.۶۵			

	۲.۵۴	۴.۲۹	۶.۱۹	۸.۲۰	۳.۱۸	۴.۳۴	۶.۱۳	۸.۱۶	۶.۸۴	۸.۱۷	۱۰	۱	۱
$^{۱۲۰}\mathrm{Xe}$	۲.۴۷	۴.۳۳	۶.۵۱	۸.۹۰	۲.۸۲	۳.۹۵	۵.۳۱	–	–	–			
	۲.۷۳	۴.۱۱	۶.۳۲	۷.۹۱	۲.۸۸	۴.۲۱	۶.۳۴	۷.۹۴	۶.۴۵	۸.۰۱			
	۲.۶۱	۴.۵۳	۶.۶۶	۸.۹۹	۳.۴۷	۴.۷۹	۶.۸۵	۹.۲۲	۷.۷۸	۹.۳۶	۵	۱	۳
$^{۱۲۲}\mathrm{Xe}$	۲.۵۰	۴.۴۳	۶.۶۹	۹.۱۸	۳.۴۷	۴.۵۱	–	–	–	–			
	۲.۶۳	۴.۲۶	۶.۷۴	۸.۷۳	۳.۲۹	۵.۰۲	۷.۳۳	۹.۴۴	۷.۷۲	۹.۸۹			
	۲.۵۷	۴.۴۰	۶.۴۱	۸.۵۶	۳.۳۱	۴.۵۵	۶.۴۶	۸.۶۵	۷.۲۷	۸.۷۲	۶	۱	۱
$^{۱۲۴}\mathrm{Xe}$	۲.۴۸	۴.۳۷	۶.۵۸	۸.۹۶	۳.۵۸	۴.۶۰	۵.۶۹	–	–	–			
	۲.۷۴	۴.۱۴	۶.۵۰	۸.۲۳	۳.۰۱	۴.۴۸	۶.۷۰	۸.۵۰	۶.۹۱	۸.۶۹			
	۲.۵۳	۴.۲۶	۶.۱۱	۸.۰۷	۳.۱۳	۴.۲۷	۶.۰۲	۷.۹۸	۶.۶۹	۷.۹۷	۱۲	۱	۱
$^{۱۲۶}\mathrm{Xe}$	۲.۴۲	۴.۲۱	۶.۲۷	۸.۶۴	۳.۳۸	۴.۳۲	۵.۲۵	–	–	–			
	۲.۷۲	۴.۰۹	۶.۲۹	۷.۸۶	۲.۸۶	۴.۱۸	۶.۳۰	۷.۸۹	۶.۴۰	۷.۹۵			
	۲.۶۳	۴.۵۷	۶.۷۶	۹.۱۴	۳.۵۳	۴.۸۸	۶.۹۹	۹.۴۳	۷.۹۴	۹.۵۲	۲	۱	۱
$^{۱۳۲}\mathrm{Ce}$	۲.۶۴	۴.۷۴	۷.۱۶	۹.۷۱	۳.۵۶	۴.۶۰	۵.۹۴	–	–	–			
	۲.۶۵	۴.۲۳	۶.۶۵	۸.۵۶	۳.۱۸	۴.۸۳	۷.۱۱	۹.۱۱	۷.۴۳	۹.۴۷			
	۲.۶۳	۴.۵۹	۶.۷۹	۹.۱۹	۳.۵۵	۴.۹۱	۷.۰۴	۹.۴۹	۸.۰۲	۹.۶۷	۳	۱	۳
$^{۱۳۴}\mathrm{Ce}$	۲.۵۶	۴.۵۵	۶.۸۷	۹.۰۹	۳.۷۵	۴.۸۰	–	–	–	–			
	۲.۶۱	۴.۳۰	۶.۸۲	۸.۹۸	۳.۴۲	۵.۲۳	۷.۵۶	۹.۷۷	۸.۰۱	۱۰.۳۱			
	۲.۵۱	۴.۱۸	۵.۹۶	۷.۸۱	۳.۰۵	۴.۱۴	۵.۷۹	۷.۶۲	۶.۳۸	۷.۵۷	۱۸	۱	۱
$^{۱۴۸}\mathrm{Nd}$	۲.۴۹	۴.۲۴	۶.۱۵	۸.۱۹	۳.۰۴	۳.۸۸	۵.۳۲	۷.۱۲	–	–			
	۲.۶۱	۳.۹۵	۵.۹۸	۷.۴۹	۲.۷۱	۳.۹۸	۵.۹۴	۷.۴۶	۶.۰۲	۷.۴۸			
	۲.۸۵	۵.۱۷	۷.۸۰	۱۰.۶۷	۴.۸۲	۶.۰۶	۸.۳۳	۱۱.۱۱	۱۰.۵۳	۱۱.۹۸	۵	۳	۱
$^{۱۵۲}\mathrm{Sm}$	۳.۰۱	۵.۸۰	۹.۲۴	۱۳.۲۱	۵.۶۲	۶.۶۵	۸.۴۰	۱۰.۷۶	۸.۸۹	۱۰.۶۲			
	۲.۵۵	۴.۴۳	۷.۱۴	۹.۵۵	۴.۱۰	۶.۲۰	۸.۵۵	۱۱.۱۹	۹.۳۶	۱۲.۲۰			
	۲.۸۱	۵.۰۶	۷.۶۵	۱۰.۵۱	۴.۴۹	۵.۸۶	۸.۲۳	۱۱.۰۹	۱۰.۰۹	۱۱.۷۵	۳	۲	۱۷
$^{۱۸۴}\mathrm{Pt}$	۲.۶۷	۴.۹۰	۷.۵۵	۱۰.۴۷	۳.۰۲	۵.۱۸	۷.۵۷	۱۱.۰۴	–	–			
	۲.۵۷	۴.۳۸	۷.۰۱	۹.۲۹	۳.۷۹	۵.۷۷	۸.۱۳	۱۰.۵۹	۸.۷۷	۱۱.۳۹			

^{۱۸۶}Pt	۲.۵۹	۴.۴۴	۶.۴۸	۸.۶۸	۳.۳۵	۴.۶۱	۶.۵۷	۸.۸۱	۷.۴۲	۸.۹۰	۵	۱	۱
	۲.۵۶	۴.۵۸	۷.۰۱	۹.۷۰	۲.۴۶	۴.۱۷	۶.۳۸	۸.۳۶	–	–			
	۲.۶۸	۴.۱۸	۶.۵۳	۸.۳۰	۳.۰۴	۴.۵۶	۶.۸۰	۸.۶۴	۷.۰۳	۸.۸۷			
^{۱۸۸}Pt	۲.۶۰	۴.۴۸	۶.۵۶	۸.۸۲	۳.۴۰	۴.۶۹	۶.۷۰	۸.۹۹	۷.۵۸	۹.۱۱	۴	۱	۱
	۲.۵۳	۴.۴۶	۶.۷۱	۹.۱۸	۳.۰۱	۴.۲۰	–	–	–	–			
	۲.۶۵	۴.۲۲	۶.۶۴	۸.۵۳	۳.۱۷	۴.۸۰	۷.۰۸	۹.۰۶	۷.۳۹	۹.۴۱			

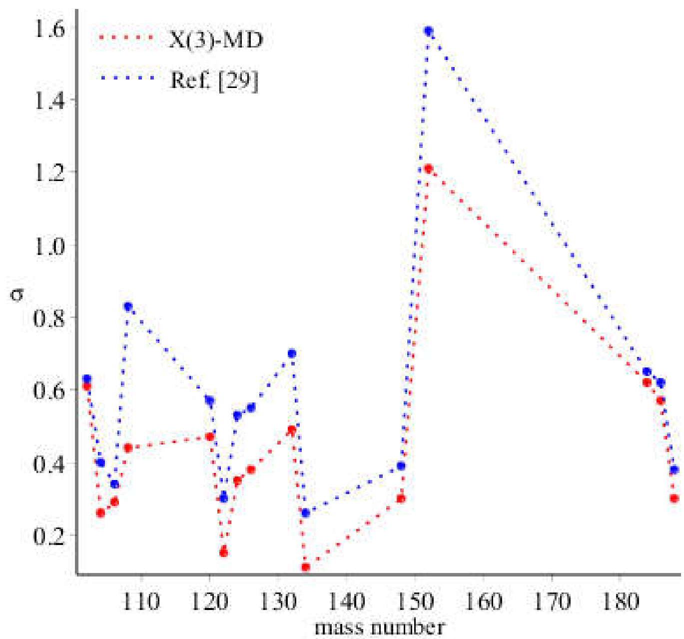
مقادیر محاسبه شده برای پارامتر وردش نیز در جدول (۴-۱۰) گزارش شده‌اند.

جدول (۴-۱۰) مقادیر محاسبه شده برای پارامتر وردش در مدل X(۳) با پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته

هسته	$0_{g.s}$	$2_{g.s}$	$4_{g.s}$	$6_{g.s}$	$8_{g.s}$	$10_{g.s}$	0_{β_1}	2_{β_2}	4_{β_1}	6_{β_1}	0_{β_2}	2_{β_2}
^{۱۰۲}Mo	۱.۴۵	۱.۵۴	۱.۶۸	۱.۸۱	۱.۹۴	۲.۰۶	۱.۸۴	۱.۹۴	۲.۰۷	۲.۱۹	۲.۱۷	۲.۲۶
^{۱۰۴}Ru	۱.۱۹	۱.۲۵	۱.۳۲	۱.۴۰	۱.۴۸	۱.۵۶	۱.۴۲	۱.۴۸	۱.۵۷	۱.۶۵	۱.۶۳	۱.۶۹
^{۱۰۶}Ru	۴.۸۷	۵.۳۱	۵.۹۰	۶.۴۷	۷.۰۱	۷.۵۲	۶.۶۰	۷.۰۱	۷.۵۵	۸.۰۸	۷.۹۳	۸.۳۵
^{۱۰۸}Ru	۳.۲۰	۳.۴۱	۳.۷۳	۴.۰۶	۴.۳۷	۴.۶۸	۴.۲۴	۴.۴۳	۴.۷۳	۵.۰۳	۵.۰۷	۵.۲۵
^{۱۲۰}Xe	۱.۱۴	۱.۱۸	۱.۲۴	۱.۳۱	۱.۳۸	۱.۴۴	۱.۳۲	۱.۳۸	۱.۴۵	۱.۵۲	۱.۵۰	۱.۵۶
^{۱۲۲}Xe	۱.۶۴	۱.۷۶	۱.۹۳	۲.۰۹	۲.۲۴	۲.۳۹	۲.۱۲	۲.۲۴	۲.۴۰	۲.۵۵	۲.۵۳	۲.۶۳
^{۱۲۴}Xe	۱.۲۸	۱.۳۵	۱.۴۵	۱.۵۵	۱.۶۵	۱.۷۴	۱.۵۷	۱.۶۵	۱.۷۵	۱.۸۵	۱.۸۳	۱.۹۰
^{۱۲۶}Xe	۱.۱۰	۱.۱۴	۱.۸۹	۱.۲۴	۱.۳۰	۱.۳۶	۱.۲۶	۱.۳۰	۱.۳۶	۱.۴۲	۱.۴۱	۱.۴۶
^{۱۳۲}Ce	۱.۹۱	۲.۰۶	۲.۲۶	۲.۴۶	۲.۶۵	۲.۸۳	۲.۵۰	۲.۶۵	۲.۸۴	۳.۰۳	۲.۹۹	۳.۱۳
^{۱۳۴}Ce	۲.۰۳	۲.۱۹	۲.۴۱	۲.۶۳	۲.۸۳	۳.۰۳	۲.۶۷	۲.۸۳	۳.۰۴	۳.۲۴	۳.۲۰	۳.۳۵
^{۱۴۸}Nd	۱.۰۵	۱.۰۷	۱.۱۰	۱.۱۴	۱.۱۷	۱.۲۱	۱.۴۵	۱.۱۷	۱.۲۲	۱.۲۶	۱.۲۵	۱.۲۸
^{۱۵۲}Sm	۱.۴۴	۱.۴۹	۱.۵۹	۱.۶۹	۱.۷۹	۱.۸۹	۱.۷۷	۱.۸۳	۱.۹۲	۲.۰۲	۲.۰۶	۲.۱۱
^{۱۸۴}Pt	۳.۱۶	۳.۶۲	۳.۶۸	۴.۰۰	۴.۳۱	۴.۶۱	۴.۱۸	۴.۳۷	۴.۶۶	۴.۹۶	۵.۰۰	۵.۱۷
^{۱۸۶}Pt	۱.۳۶	۱.۴۴	۱.۵۵	۱.۶۶	۱.۷۷	۱.۸۸	۱.۶۹	۱.۷۷	۱.۸۹	۲.۰۰	۱.۹۸	۲.۰۶
^{۱۸۸}Pt	۱.۴۶	۱.۵۵	۱.۶۹	۱.۸۲	۱.۹۵	۲.۰۷	۱.۸۵	۱.۹۵	۲.۰۸	۲.۲۰	۲.۱۸	۲.۲۷

هم‌چنین، شکل (۴-۴) مقادیر پارامتر σ را به ازای محاسبات انجام شده در مدل X(۳) با پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته (X(3)-MD) و نیز برای مدل X(۳) با پتانسیل سکستیک (Ref. [۲۹]) نشان می‌دهد. با توجه به این شکل، نتایج عددی ما برای طیف انرژی هسته‌های بررسی شده، از توافق

بهتری با داده‌های تجربی، نسبت به نتایج منبع [۲۹]، برخوردار می‌باشد، زیرا مقدار σ مدل ما از مقدار متناظر در مرجع [۲۹] کمتر است.



شکل (۴-۴) مقادیر پارامتر σ در مدل X(۳) با پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته (X(3)-MD) و نیز مدل X(۳) با پتانسیل سکستیک (Ref. [۲۹]) برای هسته‌های جدول (۴-۹)

علاوه بر طیف انرژی، آهنگ‌های گذار را نیز با استفاده از رابطه‌ی (۴-۸۴) محاسبه نموده‌ایم. برای مدل X(۳) با پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته، بخش انتگرالی این رابطه به شکل زیر نوشته می‌شود

$$I_{n_1L_1;n_2L_2}=\int_0^\infty \beta\xi_{n_1,L_1}(\beta)\xi_{n_2,L_2}(\beta)\beta^2 d\beta \qquad (۹۶-۴)$$

که در آن

$$\xi_{n,L}(\beta)=\frac{F_{n,L}(\beta)}{\sqrt{\int\limits_0^\infty F^*_{n,L}(\beta)F_{n,L}(\beta)\beta^2 d\beta}} \qquad (۹۷-۴)$$

برخی از آهنگ‌های گذار برای هسته‌های موجود در جدول (۴-۹) محاسبه شده است و نتایج به دست آمده در جدول (۴-۱۱) گزارش شده‌اند. در این جدول، داده‌های نظری‌ای که برای مدل X(۳) با

پتانیسل داویدسون تعمیم‌یافته به دست آورده‌ایم، با داده‌های تجربی متناظر و نتایج مرجع [۲۹] مقایسه شده‌اند.

جدول (۴-۱۱) مقایسه‌ی نتایج عددی مربوط به آهنگ‌های گذار برای مدل X(۳) با پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته (خط اول) با داده‌های تجربی متناظر (خط دوم) [۸۳ و ۸۵-۹۷] و داده‌های نظری منبع [۲۹] (خط سوم)

هسته	$T_{0,4,0,2}$	$T_{0,6,0,4}$	$T_{0,8,0,6}$	$T_{0,10,0,8}$	$T_{1,0,0,2}$	$T_{1,2,0,2}$	$T_{1,2,0,4}$	$T_{1,2,1,0}$
^{102}Mo	۱.۸۱	۲.۵۰	۳.۱۲	۳.۶۸	۲.۲۹	۰.۳۸	۱.۴۹	۱.۳۱
	۱.۲۰	–	–	۰.۹۵	–	–	–	–
	۲.۰۵	۲.۶۴	۳.۳۱	۳.۷۱	۲.۲۳	۰.۱۵	۰.۶۲	۰.۹۷
^{104}Ru	۱.۸۴	۲.۶۰	۳.۲۹	۳.۹۳	۲.۱۷	۰.۳۳	۱.۴۷	۱.۳۹
	۱.۴۳	–	–	۰.۴۳	–	–	–	–
	۲.۱۸	۲.۹۴	۳.۷۶	۴.۳۱	۲.۶۵	۰.۱۷	۱.۸۸	۱.۱۵
^{106}Ru	۱.۷۷	۲.۳۹	۲.۹۴	۳.۴۲	۲.۴۰	۰.۴۳	۱.۵۰	۱.۲۴
	–	–	–	–	–	–	–	–
	۱.۷۵	۲.۰۷	۲.۶۷	۳.۴۷	۱.۲۲	۰.۰۹	۰.۲۴	۰.۶۹
^{108}Ru	۱.۶۸	۲.۲۱	۲.۶۹	۳.۱۲	۲.۰۰	۰.۳۹	۱.۲۹	۱.۲۱
	۱.۶۵	–	–	–	–	–	–	–
	۱.۶۶	۱.۹۳	۲.۲۷	۲.۴۳	۰.۹۵	۰.۰۸	۰.۱۶	۰.۶۴
^{120}Xe	۱.۸۵	۲.۶۴	۳.۳۷	۴.۰۴	۲.۱۱	۰.۳۱	۱.۴۵	۱.۴۲
	۱.۱۶	۱.۱۷	۰.۹۶	۰.۹۱	–	–	–	–
	۲.۱۹	۲.۹۸	۳.۸۲	۴.۴۰	۲.۷۰	۰.۱۸	۰.۹۱	۱.۱۷
^{122}Xe	۱.۷۹	۲.۴۷	۳.۰۷	۳.۶۰	۲.۳۲	۰.۴۰	۱.۴۹	۱.۲۹
	۱.۴۶	۱.۴۱	۱.۰۳	۱.۵۴	–	–	–	–
	۱.۹۵	۲.۴۴	۳.۰۱	۳.۳۳	۱.۹۰	۰.۱۳	۰.۴۷	۰.۸۶
^{124}Xe	۱.۸۲	۲.۵۵	۳.۲۱	۳.۸۱	۲.۲۳	۰.۳۶	۱.۴۸	۱.۳۵
	۱.۱۷	۱.۵۲	۱.۱۴	۰.۳۶	–	–	–	–
	۲.۱۰	۲.۷۶	۳.۴۸	۳.۹۴	۲.۴۰	۰.۱۶	۰.۷۲	۱.۰۴

$^{۱۲۶}\mathrm{Xe}$	۱.۸۶	۲.۶۷	۳.۴۳	۴.۱۴	۲.۰۶	۰.۲۹	۱.۴۴	۱.۴۴
	–	–	–	–	–	–	–	–
	۲.۲۰	۲.۹۹	۳.۸۳	۴.۴۲	۲.۷۱	۰.۱۸	۰.۹۳	۱.۱۸
$^{۱۳۲}\mathrm{Ce}$	۱.۷۹	۲.۴۴	۳.۰۲	۳.۵۴	۲.۳۵	۰.۴۱	۱.۵۰	۱.۲۷
	۱.۱۱	۱.۵۱	۰.۷۳	۰.۴۷	–	–	–	–
	۲.۰۰	۲.۵۳	۳.۱۵	۳.۵۱	۲.۰۶	۰.۱۴	۰.۵۴	۰.۹۱
$^{۱۳۴}\mathrm{Ce}$	۱.۷۸	۲.۴۳	۳.۰۱	۳.۵۲	۲.۳۵	۰.۴۱	۱.۵۰	۱.۲۷
	۰.۷۵	۰.۲۷	۰.۴۷	۰.۰۷	–	–	–	–
	۱.۹۱	۲.۳۵	۲.۸۸	۳.۱۷	۱.۷۵	۰.۱۲	۰.۴۱	۰.۸۲
$^{۱۴۸}\mathrm{Nd}$	۱.۸۸	۲.۷۴	۳.۵۸	۴.۳۷	۱.۹۴	۰.۲۵	۱.۳۹	۱.۵۰
	۱.۶۲	۱.۷۶	۱.۶۹	–	۰.۵۴	۰.۲۵	۰.۱۶	۱.۳۸
	۲.۲۲	۳.۰۶	۳.۹۴	۴.۵۷	۲.۸۰	۰.۱۸	۰.۱۶	۰.۶۴
$^{۱۵۲}\mathrm{Sm}$	۱.۶۵	۲.۱۷	۲.۶۵	۳.۱۰	۱.۶۴	۰.۳۲	۱.۱۱	۱.۲۴
	۱.۴۴	۱.۶۶	۲.۰۲	۲.۱۷	۰.۲۳	۰.۰۴	۰.۱۲	۱.۱۷
	۱.۷۵	۲.۰۷	۲.۴۷	۲.۶۷	۱.۲۲	۰.۰۹	۰.۲۴	۰.۶۹
$^{۱۸۴}\mathrm{Pt}$	۱.۶۸	۲.۲۱	۲.۶۹	۳.۱۲	۲.۰۰	۰.۳۹	۱.۲۹	۱.۲۱
	۱.۶۵	۱.۷۸	۲.۱۳	۲.۴۴	–	–	–	–
	۱.۸۱	۲.۱۷	۲.۶۲	۲.۸۶	۱.۴۲	۰.۱۰	۰.۳۰	۰.۷۴
$^{۱۸۶}\mathrm{Pt}$	۱.۸۱	۲.۵۲	۳.۱۷	۳.۷۵	۲.۲۶	۰.۳۷	۱.۴۹	۱.۳۲
	–	–	–	–	–	–	–	–
	۲.۰۸	۲.۷۰	۳.۴۰	۳.۸۳	۲.۳۲	۰.۱۵	۰.۶۷	۱.۰۱
$^{۱۸۸}\mathrm{Pt}$	۱.۸۱	۲.۴۹	۳.۰۹	۳.۶۸	۲.۲۹	۰.۳۸	۱.۴۹	۱.۳۱
	–	–	–	–	–	–	–	–
	۲.۰۱	۲.۵۵	۳.۱۷	۳.۵۴	۲.۰۸	۰.۱۴	۰.۵۵	۰.۹۲

با مشاهده‌ی جدول (۴-۱۱) درمی‌یابیم که در روند وابستگی آهنگ‌های گذار به تکانه‌ی زاویه‌ای L، بین محاسبات انجام شده و داده‌های تجربی اختلاف نظر وجود دارد. این اختلاف می‌تواند ناشی از

انتخاب‌های به کار گرفته شده در این مدل (X(3)-MD) باشد. به عبارت دیگر، استفاده از نوع خاصّی از هامیلتونی بوهر (مدل X(۳))، شکل پتانسیل و روش حل (روش وردش) می‌توانند دلایل بروز این اختلاف باشند.

۴-۴) مدل ترکیبی تقارن X(۵) و X(۳)

شباهت‌های نظری آشکار بین دو حالت γ-صلب و γ-پایدار که در برانگیختگی‌های جمعی چهارقطبی ظاهر می‌شوند، مدل ترکیبی را به وجود می‌آورد که بر پایه‌ی اثر متقابل این دو رهیافتِ شناخته شده می‌باشد. این مدل ترکیبی اولین بار در منبع [۳۶] برای توصیف هسته‌هایی که حالت بینابینیِ γ-صلب و γ-پایدار را اتخاذ می‌کنند، معرفی شد. به منظور دست‌یابی به حرکت‌های جمعی مدل ترکیبی تقارن X(۵) و X(۳)، هامیلتونی ترکیبی زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد [۳۶]

$$\hat{H}=\chi\hat{T}_1+(1-\chi)\hat{T}_2+V(\beta,\gamma) \qquad (۴-۹۸)$$

که در آن $V(\beta,\gamma)$ انرژی پتانسیل و $0\leq\chi<1$ پارامتری است که درجه‌ی صلبیت سیستم را در مقابل نوسان‌های γ نشان می‌دهد. در این هامیلتونی عملگر انرژی جنبشی هسته‌ی γ-صلب که همان عملگر انرژی جنبشی هامیلتونی بوهر در تقارن X(۳) می‌باشد عبارت است از

$$\hat{T}_1=-\frac{\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{\Delta_\Omega}{3\beta^2}\right] \qquad (۴-۹۹)$$

از سوی دیگر عملگر انرژی جنبشی هسته‌ی γ-پایدار در پنج بعد به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{T}_2=-\frac{\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{Q}_k^{\,2}}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2k\pi}{3}\right)}\right] \qquad (۴-۱۰۰)$$

برای حل معادله‌ی موج مربوط به هامیلتونی رابطه‌ی (۴-۹۸)، تابع موج را به شکل کلی زیر

$$\Psi\left(\beta,\gamma,\Omega\right)=\xi\left(\beta\right)\eta\left(\gamma\right)D_{M\,K}^{L}\left(\Omega\right) \tag{۱۰۱-۴}$$

و انرژی پتانسیل را به صورت حاصل جمع دو پتانسیل وابسته به β و γ به گونه‌ای در نظر می‌گیرند که بتوان از روش جاسازی متغیرها برای حل معادله ویژه‌مقداری مربوطه، استفاده نمود

$$\frac{2B}{\hbar^2}V\left(\beta,\gamma\right)=u\left(\beta\right)+\left(1-\chi\right)\frac{v(\gamma)}{\beta^2} \tag{۱۰۲-۴}$$

بنابراین با جایگزینی روابط (۴-۹۹)، (۴-۱۰۰) و (۴-۱۰۲) در رابطه‌ی (۴-۹۸) و سپس قرار دادن روابط (۴-۹۸) و (۴-۱۰۱) در معادله‌ی موج و نیز در نظر گرفتن تقریب زیر (که به ازای زوایای کوچک و تقریباً برابر با صفر معتبر است)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{Q}_k^{\,2}}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2k\pi}{3}\right)}&\simeq\frac{\hat{Q}_1^{\,2}}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}+\frac{\hat{Q}_2^{\,2}}{\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)}+\frac{\hat{Q}_3^{\,2}}{\sin^2\left(\gamma-2\pi\right)}\\&=\frac{4}{3}\hat{Q}_1^{\,2}+\frac{4}{3}\hat{Q}_2^{\,2}+\frac{\hat{Q}_3^{\,2}}{\sin^2\gamma}=\frac{4}{3}\hat{Q}^2+\hat{Q}_3^{\,2}\left(\frac{1}{\sin^2\gamma}-\frac{4}{3}\right)\end{aligned} \tag{۱۰۳-۴}$$

به دو معادله‌ی زیر که با استفاده از جداسازی متغیرها حاصل شده است، می‌رسیم

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{2\left(2-\chi\right)}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{L\left(L+1\right)}{3\beta^2}+u\left(\beta\right)\right]\xi\left(\beta\right)=\varepsilon_\beta\xi\left(\beta\right) \tag{۱۰۴-۴}$$

$$\left(1-\chi\right)\left(-\frac{1}{\langle\beta^2\rangle\sin3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{K^2}{4\langle\beta^2\rangle}\left(\frac{1}{\sin^2\gamma}-\frac{4}{3}\right)+\frac{v(\gamma)}{\left\langle\beta^2\right\rangle}\right)\eta\left(\gamma\right)=\varepsilon_\gamma\eta\left(\gamma\right) \tag{۱۰۵-۴}$$

در این روابط از رابطه‌ی زیر نیز استفاده شده است

$$\frac{2B}{\hbar^2}E=\varepsilon=\varepsilon_\beta+\varepsilon_\gamma \tag{۱۰۶-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۰۵)، به جای β^2 ازمیانگین آن ($\langle\beta^2\rangle$) استفاده شده است که همان تقریب اول تقارن X(۵) می‌باشد. اکنون به حل دو معادله‌ی (۴-۱۰۴) و (۴-۱۰۵)، به ترتیب با پتانسیل کیلینگبک و نوسانگر هماهنگ، می‌پردازیم [۴۰].

۴-۴-۱) حل معادله‌ی وابسته به β برای مدل ترکیبی به ازای پتانسیل کلینگبک

پتانسیل کیلینگبک به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(\beta)=\beta^2+\frac{b^4}{\beta^2}-\frac{c}{\beta}+d\beta \qquad (۱۰۷\text{-}۴)$$

در این رابطه b، c و d ضرایب ثابت هستند (مطابق تعریف پتانسیل b و c مثبت هستند). با جایگزینی رابطه‌ی (۴-۱۰۷) در رابطه‌ی (۴-۱۰۴) به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{2(2-\chi)}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{L(L+1)}{3\beta^2}-\beta^2-\frac{b^4}{\beta^2}+\frac{c}{\beta}-d\beta+\varepsilon_\beta\right]\xi(\beta)=0 \qquad (۱۰۸\text{-}۴)$$

از آنجایی که این معادله به طور تحلیلی قابل حل نمی‌باشد، از روش عددی وردش برای حل آن استفاده می‌شود. در این روش ابتدا حالت خاص c=d=0 را که متناظر با پتانسیل شناخته شده‌ی داویدسون است، بررسی می‌نماییم. در این حالت معادله‌ی (۴-۱۰۸) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{2(2-\chi)}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{L(L+1)}{3\beta^2}-\beta^2-\frac{b^4}{\beta^2}+\varepsilon_\beta\right]f(\beta)=0 \qquad (۱۰۹\text{-}۴)$$

اکنون این معادله به طور تحلیلی و با استفاده از روش NU قابل حل است، بنابراین تابع موج آن عبارت است از

$$f_{n_\beta L}(\beta)=N_{n_\beta}\beta^{2\upsilon}e^{-\frac{1}{2}\beta^2}L^{\mu}_{n_\beta}\left(\beta^2\right) \qquad (۱۱۰\text{-}۴)$$

که در آن

$$\upsilon = \frac{1}{2}\left(\chi - \frac{3}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\chi - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{L(L+1)}{12} + \frac{b^4}{4}} \qquad (۱۱۱-۴)$$

$$\mu = 2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\chi - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{L(L+1)}{12} + \frac{b^4}{4}} \qquad (۱۱۲-۴)$$

و N_{n_β} ثابت نرمالیزاسون است که از طریق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$\int_0^\infty \left[f_{n_\beta L}(\beta) \right]^2 \beta^{4-2\chi} d\beta = 1 \qquad (۱۱۳-۴)$$

اکنون تابع موج معادله‌ی (۴-۱۰۸) را به صورت زیر که شامل پارامتر وردش α و دارای شکل کلی تابع موج رابطه‌ی (۴-۱۰۹) می‌باشد در نظر می‌گیریم

$$\xi_{n_\beta L}(\beta) = N'_{n_\beta} \beta^{2\upsilon} e^{-\frac{1}{2}\beta^2} L^{\mu}_{n_\beta}\left(\alpha\beta^2\right) \qquad (۱۱۴-۴)$$

که در آن ثابت نرمالیزاسیون N'_{n_β} با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود

$$N'_{n_\beta} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty \left[\xi_{n_\beta L}(\beta) \right]^2 \beta^{4-2\chi} d\beta}} \qquad (۱۱۵-۴)$$

در حالی که υو μبه ترتیب از روابط (۴-۱۱۱) و (۴-۱۱۲) محاسبه می‌شوند. از سوی دیگر می‌دانیم که طیف انرژی معادله‌ی (۴-۱۰۸) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\varepsilon^{\beta}_{n_\beta L} = \int_0^\infty \xi(\beta) H' \xi(\beta) \beta^{4-(2-\chi)} d\beta \qquad (۱۱۶-۴)$$

که در آن

$$H' = -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{2(2-\chi)}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{L(L+1)}{3\beta^2} + \beta^2 + \frac{b^4}{\beta^2} - \frac{c}{\beta} + d\beta \qquad (۱۱۷-۴)$$

برای تعیین پارامتر وردش α، مشتق انرژی $\varepsilon^{\beta}_{n_\beta L}$ را نسبت به این پارامتر برابر صفر قرار می‌دهیم. سرانجام، تابع موج و طیف انرژی معادله‌ی (۴-۱۰۸)، که به ترتیب در روابط (۴-۱۱۴) و (۴-۱۱۶) تعریف شده‌اند، با قرار دادن پارامتر وردش در روابط متناظر محاسبه می‌شوند.

۴-۴-۲) حل معادله‌ی وابسته به γ برای مدل ترکیبی به ازای پتانسیل نوسانگر هماهنگ

پتانسیل وابسته به γ را برای زوایای کوچک معمولاً به شکل زیر در نظر می‌گیرند

$$v(\gamma)=a^2\left(1-\cos 3\gamma\right)\approx\frac{\left(3a\gamma\right)^2}{2} \tag{۴-۱۱۸}$$

که رابطه‌ی نهایی با استفاده از تقریب دوم تقارن X(۵) $(\gamma\approx 0)$ نوشته شده است. رفتار پتانسیل رابطه‌ی (۴-۱۱۸) مشابه با رفتار پتانسیل نوسانگر هماهنگ می‌باشد. با جایگزین نمودن رابطه‌ی (۴-۱۱۸) در رابطه‌ی (۴-۱۰۵) و با استفاده از تقریب $\gamma\approx 0$ داریم

$$\left(-\frac{1}{\langle\beta^2\rangle\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\left(\frac{K}{2}\right)^2\frac{1}{\langle\beta^2\rangle\gamma^2}+\left(3a\right)^2\frac{\gamma^2}{2\langle\beta^2\rangle}\right)\eta(\gamma)=\left(\frac{\varepsilon_\gamma}{1-\chi}+\frac{K^2}{3\langle\beta^2\rangle}\right)\eta(\gamma) \tag{۴-۱۱۹}$$

با تغییر متغیر $\gamma^2=s$ و

$$\varepsilon'_\gamma=\frac{\varepsilon_\gamma}{1-\chi}+\frac{K^2}{3\langle\beta^2\rangle} \tag{۴-۱۲۰}$$

معادله‌ی (۴-۱۱۹) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{1}{s^2}\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{K}{2}\right)^2-\frac{\left(3as\right)^2}{8}+\varepsilon'_\gamma\frac{\langle\beta^2\rangle}{4}s\right)\right)\eta(s)=0 \tag{۴-۱۲۱}$$

که طیف انرژی و تابع موج آن به ترتیب عبارت اند از

$$\varepsilon'_{\gamma} = \frac{3\sqrt{2}a}{\langle \beta^2 \rangle}\left(n_{\gamma}+1\right) \tag{۱۲۲-۴}$$

$$\eta_{n_{\gamma} K}\left(\gamma\right) = N_{nK}\gamma^{\frac{|K|}{2}} e^{-\frac{3a}{2}\gamma^2} L_n^{\frac{|K|}{2}}\left(3a\gamma^2\right) \tag{۱۲۳-۴}$$

که رابطه‌ی بین n و n_{γ} به شکل زیر می‌باشد

$$n_{\gamma} = 2n + \frac{|K|}{2} \tag{۱۲۴-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۲۳) N_{nK} ثابت نرمالیزاسیون و K همان تصویر تکانه‌ی زاویه‌ای در راستای محور z چارچوب مرجع متصل به جسم می‌باشد. با استفاده از روابط (۴-۱۲۰) و (۴-۱۲۲) طیف انرژی وابسته به γ برابر است با

$$\varepsilon^{\gamma}_{n_{\gamma} K} = \left(1-\chi\right)\left(\frac{3\sqrt{2}a}{\langle \beta^2 \rangle}\left(n_{\gamma}+1\right) - \frac{K^2}{3\langle \beta^2 \rangle}\right) \tag{۱۲۵-۴}$$

اکنون برای محاسبه‌ی انرژی کل از رابطه‌ی (۴-۱۰۶) استفاده می‌نماییم. بنابراین

$$E_{n_{\beta} n_{\gamma} LK} = \frac{\hbar^2}{2B}\left(\varepsilon^{\beta}_{n_{\beta} L} + \varepsilon^{\gamma}_{n_{\gamma} K}\right) \tag{۱۲۶-۴}$$

که در آن $\varepsilon^{\beta}_{n_{\beta} L}$ و $\varepsilon^{\gamma}_{n_{\gamma} K}$ به ترتیب با استفاده از روابط (۴-۱۱۶) و (۴-۱۲۵) محاسبه می‌شوند. اما برای تعیین انرژی نرمال شده باید از رابطه‌ی زیر استفاده نمود

$$R_{n_{\beta} n_{\gamma} LK} = \frac{E_{n_{\beta} n_{\gamma} LK} - E_{0000}}{E_{0020} - E_{0000}} \tag{۱۲۷-۴}$$

که به شکل زیر نیز می‌تواند بازنویسی شود

$$R_{n_{\beta} n_{\gamma} LK} = \frac{\varepsilon^{\beta}_{n_{\beta} L} + \varepsilon^{\gamma}_{n_{\gamma} K} - \varepsilon^{\beta}_{00} - \varepsilon^{\gamma}_{00}}{\varepsilon^{\beta}_{02} - \varepsilon^{\beta}_{00}} \tag{۱۲۸-۴}$$

بنابراین انرژی حالت پایه و انرژی برانگیختگی نوارهای β به پارامترهای "c" ,"b","χ"و"d"بستگی دارد زیرا در این حالت

$$\varepsilon^{\gamma}_{n_\gamma K} = \varepsilon^{\gamma}_{00} = \left(1-\chi\right)\frac{3a\sqrt{2}}{\left\langle\beta\right\rangle^2} \qquad (۱۲۹-۴)$$

که موجب می‌شود معادله‌ی (۴-۱۲۸) به معادله‌ی زیر برای حالت پایه و نوارهای β تبدیل شود

$$R_{n_\beta n_\gamma LK} = \frac{\varepsilon^{\beta}_{n_\beta L} - \varepsilon^{\beta}_{00}}{\varepsilon^{\beta}_{02} - \varepsilon^{\beta}_{00}} \qquad (۱۳۰-۴)$$

اما انرژی مربوط به اولین نوار γ ($K=2$ و $n_\gamma=0$)، نسبت به مقدار انرژی حالت پایه و نوارهای β به اندازه-ی s'، که مقدار آن از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود، شیفت می‌یابد

$$s' = \varepsilon^{\gamma}_{02} - \varepsilon^{\gamma}_{00} = \left(1-\chi\right)\left(\frac{-4}{3\left\langle\beta\right\rangle^2}\right) \qquad (۱۳۱-۴)$$

انرژی نرمال شده‌ی تعدادی از ترازهای حالت پایه، اولین و دومین نوار β و اولین نوار γ برای بعضی هسته‌ها با استفاده از روابط (۴-۱۳۰) و (۴-۱۳۱) محاسبه شده و مقادیر عددی آن‌ها در جدول (۴-۱۲) گزارش شده است. در این جدول محاسبات عددی ما با نتایج نظری منابع دیگر و داده‌های تجربی متناظر مقایسه شده است. ثابت‌های"d" ,"c" ,"b","χ"و"s'" که در جدول (۴-۱۳) داده شده‌اند به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که انرژی‌های حاصل از آن‌ها بهترین تطابق را با داده‌های تجربی متناظر داشته باشد و یا مقدار خطای استاندارد (رابطه‌ی (۴-۹۵)) مینیمم باشد. مقادیر عددی پارامتر وردش نیز که برای محاسبه‌ی انرژی‌های جدول (۴-۱۲) استفاده شده است در جدول (۴-۱۴) آورده شده است. از

آنجایی که پارامتر وردش تنها در آرگومان تابع لاگر[۱] رابطه‌ی (۴-۱۱۴) به کار رفته است تأثیری بر مقدار انرژی حالت پایه و نوارهای γ ندارد.

نتایج ما در جدول (۴-۱۲) نشان می‌دهد که طیف انرژی محاسبه شده برای هسته‌های ^{۱۰۴}Ru، ^{۱۰۸}Ru، ^{۱۳۲}Ce، ^{۱۵۴}Sm و ^{۱۵۶}Gd در توافق بهتری با داده‌های تجربی نسبت به نتایج نظری منابع مورد مقایسه می‌باشد. در حقیقت برای این هسته‌ها مقدار پارامتر σ برای محاسبات ما در جدول (۴-۱۲) به ترتیب برابر است با ۰.۳۰، ۰.۶۴، ۰.۳۴، ۰.۴۵ و ۰.۶۳، در حالی که این خطا برای داده‌های منابع متناظر که به منظور مقایسه استفاده شده‌اند برابر است با ۰.۴۰، ۰.۸۳، ۰.۷۰، ۰.۷۵ و ۱.۰۱. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که مدل ترکیبی به ازای پتانسیل کلینگبک و پتانسیل نوسانگر هماهنگ به ترتیب برای برای بخش وابسته به β و γ توصیف مناسب‌تری نسبت به مدل‌های بررسی شده در منابع دیگر برای طیف انرژی هسته‌های نام‌برده شده ارائه می‌دهد.

جدول (۴-۱۲) مقایسه‌ی نتایج عددی مربوط به طیف انرژی مدل ترکیبی با پتانسیل کلینگبک (H-K) با داده‌های تجربی متناظر و سایر منابع نظری

	^{۱۰۴}Ru			^{۱۰۸}Ru			^{۱۱۸}Xe		
L	H-K	Exp.[۸۶]	Ref.[۲۹]	H-K	Exp.[۸۸]	Ref.[۲۹]	H-K	Exp.[۹۸]	Ref.[۲۹]
$4_{g.s}$	۲.۶۵	۲.۴۸	۲.۷۴	۲.۹۸	۲.۷۵	۲.۴۹	۲.۶۵	۲.۴۰	۲.۶۱
$6_{g.s}$	۴.۵۱	۴.۳۵	۴.۱۴	۵.۵۱	۵.۱۲	۴.۵۰	۴.۵۳	۴.۱۴	۳.۹۴
$8_{g.s}$	۶.۴۵	۶.۴۸	۶.۴۱	۸.۳۵	۸.۰۲	۷.۳۰	۶.۴۹	۶.۱۵	۵.۹۸
$10_{g.s}$	۸.۴۴	۸.۶۹	۸.۰۲	۱۱.۳۵	۱۱.۳۱	۹.۹۲	۸.۴۹	۸.۳۵	۷.۴۸
$12_{g.s}$	۱۰.۴۵	۱۰.۳۷		۱۴.۴۷	۱۴.۵۵		۱۰.۵۲	۱۰.۶۵	
$14_{g.s}$	۱۲.۴۸	۱۲.۴۰		۱۷.۶۵	۱۷.۷۰		۱۲.۵۷	۱۲.۹۵	
$16_{g.s}$	۱۴.۵۱	۱۴.۹۶		۲۰.۸۸	۲۱.۲۷		۱۴.۶۲	۱۵.۲۸	
$18_{g.s}$	۱۶.۵۶			۲۴.۱۵			۱۶.۶۸		
$20_{g.s}$	۱۸.۶۰			۲۷.۴۴			۱۸.۷۵		
$22_{g.s}$	۲۰.۶۵			۳۰.۷۶			۲۰.۸۲		
$24_{g.s}$	۲۲.۷۱			۳۴.۰۹			۲۲.۸۹		

[۱] Laguerre

$26_{g.s}$	۲۴.۷۶			۳۷.۴۴			۲۴.۹۶		
0_{β_1}	۳.۵۶	۲.۷۶	۲.۹۲	۵.۸۱	۴.۰۳	۴.۷۵	۳.۵۹	۲.۴۶	۲.۷۱
2_{β_1}	۴.۵۶	۴.۲۳	۴.۲۸	۶.۸۳	۵.۱۶	۷.۰۱	۴.۶۰	۳.۶۴	۳.۹۸
4_{β_1}	۶.۲۱	۵.۸۱	۶.۴۵	۸.۶۷		۹.۳۱	۶.۲۵	۵.۱۳	۵.۹۳
6_{β_1}	۸.۰۸			۱۱.۳۸		۱۲.۲۲	۸.۱۳		
8_{β_1}	۱۰.۰۳			۱۴.۲۳			۱۰.۱۰		
10_{β_1}	۱۲.۰۲			۱۷.۲۵			۱۲.۱۰		
12_{β_1}	۱۴.۰۳			۲۰.۳۸			۱۴.۱۴		
0_{β_2}	۷.۱۳		۶.۵۸	۱۱.۶۸		۱۰.۴۸	۷.۲۰		۶.۰۱
2_{β_2}	۸.۱۳		۸.۱۹	۱۲.۶۸		۱۳.۶۵	۸.۲۰		۷.۴۷
2_{γ_1}	۲.۷۰	۲.۹۴		۲.۹۳	۲.۹۲		۲.۳۴	۲.۷۵	
3_{γ_1}	۳.۴۸	۳.۴۷		۳.۸۳	۴.۰۲		۳.۱۳		
4_{γ_1}	۴.۳۵	۴.۲۰		۴.۹۱	۴.۸۸		۴.۰۰	۴.۲۷	
5_{γ_1}	۵.۲۶	۵.۲۳		۶.۱۳	۶.۱۷		۴.۹۲		
6_{γ_1}	۶.۲۱			۷.۴۴	۷.۲۷		۵.۸۷	۵.۹۲	
7_{γ_1}	۷.۱۷	۷.۳۳		۸.۸۳	۸.۸۰		۶.۸۵		
8_{γ_1}	۸.۱۵	۷.۹۵		۱۰.۲۸	۹.۹۹		۷.۸۳	۷.۷۸	
9_{γ_1}	۹.۱۵			۱۱.۷۶	۱۲.۰۱		۸.۸۳		
10_{γ_1}	۱۰.۱۴			۱۳.۲۸			۹.۸۴	۹.۶۵	
11_{γ_1}	۱۱.۱۵			۱۴.۸۳			۱۰.۸۵		
12_{γ_1}	۱۲.۱۵			۱۶.۴۰			۱۱.۸۷	۱۱.۴۰	
13_{γ_1}	۱۳.۱۷			۱۷.۹۸			۱۲.۸۹		

	^{۱۲۰}Xe			^{۱۳۲}Ce			^{۱۴۸}Ce		
L	H-K	Exp.[۸۹	Ref.[۲۹]	H-K	Exp.[۹۳	Ref.[۲۹]	H-K	Exp.[۹۵	Ref.[۹۹]
$4_{g.s}$	۲.۸۱	۲.۴۷	۲.۷۳	۲.۷۲	۲.۶۴	۲.۶۵	۳.۰۳	۲.۸۶	۲.۶۶
$6_{g.s}$	۴.۹۷	۴.۳۳	۴.۱۱	۴.۷۰	۴.۷۴	۴.۲۳	۵.۶۸	۵.۳۰	۴.۷۷
$8_{g.s}$	۷.۳۰	۶.۵۱	۶.۳۲	۶.۸۰	۷.۱۶	۶.۶۵	۸.۶۹	۸.۱۴	۷.۲۷
$10_{g.s}$	۹.۷۰	۸.۹۰	۷.۹۱	۸.۹۴	۹.۷۱	۸.۵۶	۱۱.۹۱	۱۱.۳۰	۱۰.۱۶
$12_{g.s}$	۱۲.۱۴	۱۱.۳۹		۱۱.۱۲			۱۵.۲۵	۱۴.۶۹	۱۳.۴۳
$14_{g.s}$	۱۴.۶۲	۱۳.۸۲		۱۳.۳۲			۱۸.۶۷	۱۸.۲۲	۱۷.۰۶

$16_{g.s}$	۱۷.۱۱	۱۶.۲۲		۱۵.۵۳			۲۲.۱۵	۲۱.۸۶	۲۱.۰۵
$18_{g.s}$	۱۹.۶۱	۱۸.۷۶		۱۷.۷۴			۲۵.۶۶	۲۵.۶۶	۲۵.۳۹
$20_{g.s}$	۲۲.۱۳	۲۱.۵۶		۱۹.۹۶			۲۹.۲۱	۲۹.۵۷	۳۰.۰۹
$22_{g.s}$	۲۴.۶۵	۲۴.۶۶		۲۲.۱۹			۳۲.۷۷	۳۳.۵۲	۳۵.۱۵
$24_{g.s}$	۲۷.۱۸	۲۸.۰۵		۲۴.۴۲			۳۶.۳۷		۴۰.۵۵
$26_{g.s}$	۲۹.۷۱	۳۱.۷۴		۲۶.۶۵			۳۹.۹۶		۴۶.۲۹
0_{β_1}	۴.۴۲	۲.۸۲	۲.۸۸	۳.۸۹	۳.۵۶	۳.۱۸	۶.۳۶	۴.۸۶	۳.۸۷
2_{β_1}	۵.۴۲	۳.۹۵	۴.۲۱	۴.۸۹	۴.۶۰	۴.۸۳	۷.۳۶	۵.۹۰	۵.۷۷
4_{β_1}	۷.۲۳	۵.۳۱	۶.۳۴	۶.۶۱	۵.۹۴	۷.۱۱	۹.۳۹	۷.۷۲	۸.۶۶
6_{β_1}	۹.۳۹		۷.۹۴	۸.۵۹		۹.۱۱	۱۲.۰۴		۱۲.۰۸
8_{β_1}	۱۱.۷۱			۱۰.۶۹			۱۵.۰۵		۱۵.۹۶
10_{β_1}	۱۴.۱۲			۱۲.۸۳			۱۸.۲۷		۲۰.۲۵
12_{β_1}	۱۵.۵۶			۱۵.۰۱			۲۱.۶۱		
0_{β_2}	۸.۸۴		۶.۴۵	۷.۷۸		۷.۴۳	۱۲.۷۲		۱۰.۰۳
2_{β_2}	۹.۸۴		۸.۰۱	۸.۷۸		۹.۴۷	۱۳.۷۲		۱۲.۸۱
2_{γ_1}	۲.۵۳	۲.۷۱		۲.۷۰	۲.۵۳		۵.۱۶		۶.۲۴
3_{γ_1}	۳.۳۷	۳.۹۴		۳.۵۱	۳.۶۹		۶.۰۷	۷.۰۵	۷.۰۱
4_{γ_1}	۴.۳۴	۴.۳۴		۴.۴۲	۴.۲۵		۷.۱۹		۷.۹۱
5_{γ_1}	۵.۳۹	۵.۶۳		۵.۳۹	۵.۵۸		۸.۴۶	۸.۹۸	۸.۹۱
6_{γ_1}	۶.۵۰	۶.۱۵		۶.۴۰	۶.۲۲		۹.۸۴		۱۰.۰۱
7_{γ_1}	۷.۶۵	۷.۷۳		۷.۴۴			۱۱.۳۱	۱۱.۲۷	۱۱.۲۲
8_{γ_1}	۸.۸۲	۸.۲۳		۸.۵۰	۸.۳۹		۱۲.۸۵		۱۲.۵۲
9_{γ_1}	۱۰.۰۱	۹.۸۴		۹.۵۷			۱۴.۴۴	۱۳.۸۸	۱۳.۹۲
10_{γ_1}	۱۱.۲۲			۱۰.۶۵	۱۰.۶۶		۱۶.۰۷		۱۵.۴۱
11_{γ_1}	۱۲.۴۴			۱۱.۷۳			۱۷.۷۳	۱۶.۸۷	۱۶.۹۹
12_{γ_1}	۱۳.۶۷			۱۲.۸۲	۱۳.۹۰		۱۹.۴۱		
13_{γ_1}	۱۴.۹۰			۱۳.۹۲			۱۲.۱۱		

	^{۱۵۰}Nd			^{۱۵۴}Sm			^{۱۵۶}Gd		
L	H-K	Exp.[۸۱]	Ref.[۹۹]	H-K	Exp.[۱۰۰]	Ref.[۱۰۱]	H-K	Exp.[۸۲]	Ref.[۱۰۱]
$4_{g.s}$	۳.۰۷	۲.۹۳	۲.۸۵	۳.۲۵	۳.۲۶	۳.۲۷	۳.۲۲	۳.۲۴	۳.۲۵

$6_{g.s}$	۵.۸۴	۵.۵۳	۵.۲۹	۶.۵۹	۶.۶۳	۶.۶۸	۶.۴۳	۶.۵۷	۶.۶۰
$8_{g.s}$	۹.۰۳	۸.۶۸	۸.۲۲	۱۰.۸۱	۱۱.۰۱	۱۱.۰۷	۱۰.۴۰	۱۰.۸۴	۱۰.۸۷
$10_{g.s}$	۱۲.۴۸	۱۲.۲۸	۱۱.۶۲	۱۵.۷۴	۱۶.۲۶	۱۶.۲۹	۱۴.۹۳	۱۵.۹۱	۱۵.۹۲
$12_{g.s}$	۱۶.۰۸	۱۶.۲۷	۱۵.۴۶	۲۱.۲۰	۲۲.۲۷	۲۲.۲۴	۱۹.۸۶	۲۱.۶۳	۲۱.۶۲
$14_{g.s}$	۱۹.۷۹	۲۰.۵۹	۱۹.۷۴	۲۷.۰۹			۲۵.۱۰		
$16_{g.s}$	۲۳.۵۸	۲۵.۱۹	۲۴.۴۴	۳۳.۳۰			۳۰.۵۵		
$18_{g.s}$	۲۷.۴۱		۲۹.۵۸	۳۹.۷۶			۳۶.۱۶		
$20_{g.s}$	۳۱.۲۹		۳۵.۱۳	۴۶.۴۲			۴۱.۹۰		
$22_{g.s}$	۳۵.۱۹		۴۱.۱۰	۵۳.۲۴			۴۷.۷۵		
$24_{g.s}$	۳۹.۱۱		۴۷.۴۸	۶۰.۱۹			۵۳.۶۶		
$26_{g.s}$	۴۳.۰۶		۵۴.۲۷	۶۷.۲۵			۵۹.۶۴		
0_{β_1}	۶.۹۹	۵.۱۹	۵.۲۰	۱۳.۳۷	۱۳.۴۰	۱۳.۱۳	۱۱.۰۵	۱۱.۷۹	۱۱.۷۹
2_{β_1}	۷.۹۹	۶.۵۳	۷.۰۲	۱۴.۳۷	۱۴.۳۷	۱۴.۱۴	۱۲.۰۵	۱۲.۶۹	۱۲.۷۹
4_{β_1}	۱۰.۰۷	۸.۷۴	۱۰.۲۰	۱۶.۶۲	۱۶.۳۲	۱۶.۴۱	۱۴.۲۶	۱۴.۶۸	۱۵.۰۲
6_{β_1}	۱۲.۸۴	۱۱.۸۳	۱۴.۱۲	۱۹.۹۷	۱۹.۲۳	۱۹.۷۸	۱۷.۴۸	۱۷.۳۰	۱۸.۲۸
8_{β_1}	۱۶.۰۳		۱۸.۶۳	۲۴.۲۰		۲۴.۰۸	۲۱.۴۴	۲۰.۷۶	۲۲.۳۴
10_{β_1}	۱۹.۴۸		۲۳.۶۶	۲۹.۱۳		۲۹.۱۱	۲۵.۹۷	۲۴.۹۴	۲۷.۰۱
12_{β_1}	۲۳.۰۸			۳۴.۶۰		۳۴.۷۳	۳۰.۹۰	۳۰.۴۳	۳۲.۱۳
0_{β_2}	۱۳.۹۹		۱۳.۱۰	۲۶.۷۵			۲۲.۰۹		
2_{β_2}	۱۴.۹۹		۱۵.۷۴	۲۷.۷۵			۲۳.۰۹		
2_{γ_1}	۸.۲۶	۸.۱۶	۸.۳۵	۱۸.۰۶	۱۷.۵۶	۱۸.۶۷	۱۳.۴۳	۱۲.۹۷	۱۳.۷۵
3_{γ_1}	۹.۱۹	۹.۲۲	۹.۲۰	۱۹.۰۴	۱۸.۷۷	۱۹.۴۹	۱۴.۴۰	۱۴.۰۲	۱۴.۵۸
4_{γ_1}	۱۰.۳۴	۱۰.۳۹	۱۰.۲۱	۲۰.۳۱	۲۰.۳۰	۲۰.۵۷	۱۵.۶۵	۱۵.۲۲	۱۵.۶۷
5_{γ_1}	۱۱.۶۵		۱۱.۳۶	۲۱.۸۶	۲۲.۰۱	۲۱.۹۱	۱۷.۱۵	۱۶.۹۳	۱۷.۰۲
6_{γ_1}	۱۳.۱۱		۱۲.۶۴	۲۳.۶۵	۲۳.۷۳	۲۳.۷۰	۱۸.۸۶	۱۸.۴۷	۱۸.۶۱
7_{γ_1}	۱۴.۶۶		۱۴.۰۵	۲۵.۶۶	۲۶.۲۷	۲۵.۳۳	۲۰.۷۶	۲۰.۷۹	۲۰.۴۴
8_{γ_1}	۱۶.۳۰		۱۵.۵۷	۲۷.۸۷		۲۷.۴۰	۲۲.۸۳	۲۲.۶۰	۲۲.۵۰
9_{γ_1}	۱۷.۹۹		۱۷.۲۲	۳۰.۲۶		۲۹.۷۰	۲۵.۰۴	۲۵.۲۸	۲۴.۷۸
10_{γ_1}	۱۹.۷۴		۱۸.۹۷	۳۲.۸۰		۳۲.۲۱	۲۷.۳۶	۲۷.۴۴	۲۷.۲۸
11_{γ_1}	۲۱.۵۳		۲۰.۸۴	۳۵.۴۷		۳۴.۹۴	۲۹.۷۸	۳۰.۱۹	۲۹.۹۷
12_{γ_1}	۲۳.۳۴			۳۸.۲۷		۳۷.۸۷	۳۲.۳۰	۳۲.۸۴	۳۲.۸۶
13_{γ_1}	۲۵.۱۹			۴۱.۱۶		۴۰.۹۹	۳۴.۸۸	۳۵.۶۷	۳۵.۹۴

جدول (۴-۱۳) مقادیر عددی پارامترهای χ، d, c ,b و s' برای هسته‌های داده شده در جدول (۴-۱۲)

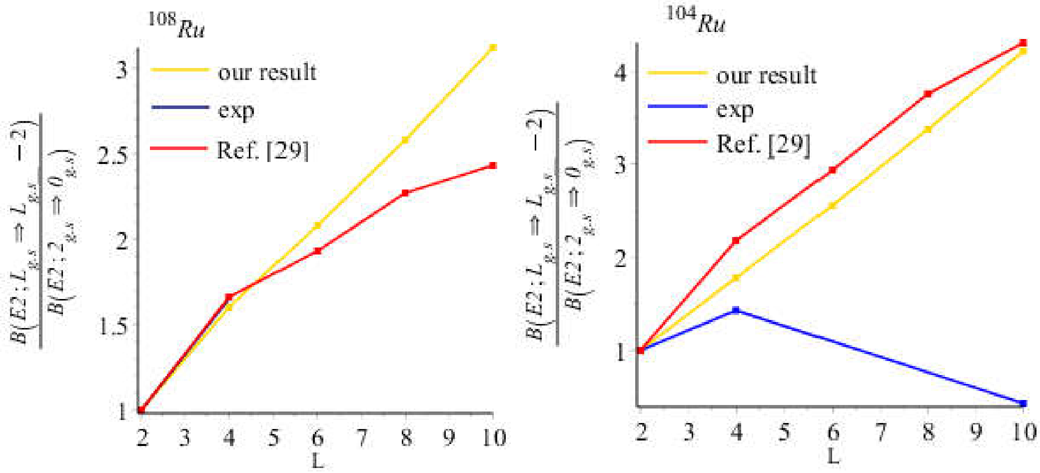
	^{۱۰۴}Ru	^{۱۰۸}Ru	^{۱۱۸}Xe	^{۱۲۰}Xe	^{۱۳۲}Ce	^{۱۴۸}Nd	^{۱۵۰}Sm	^{۱۵۴}Sm	^{۱۵۶}Gd
χ	۰.۸۵۶	۰.۰۷۵	۰.۶۹۵	۰.۴۲۳	۰.۳۶۸	۰.۶۰۵	۰.۱۴۵	۰.۰۲۱	۰.۰۴۵
b	۱.۱۶	۱.۵۰	۱.۱۳	۱.۲۹	۱.۱۲	۱.۷۰	۱.۷۵	۲.۵۳	۲.۲۹
c	۰.۰۱	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱
d	-۰.۱	-۰.۵	-۰.۱	-۰.۰۱	۰.۰۱	۰.۰۲	-۰.۰۴	-۰.۲	۰.۰۶
$\lvert s'\rvert$	۱.۸۹	۱.۲۷	۱.۴۸	۱.۳۸	۱.۷۵	۲.۷۵	۴.۱۴	۵.۰۴	۴.۵۱

جدول (۴-۱۴) مقادیر به دست آمده برای پارامتر وردش برای هسته‌های داده شده در جدول (۴-۱۲)

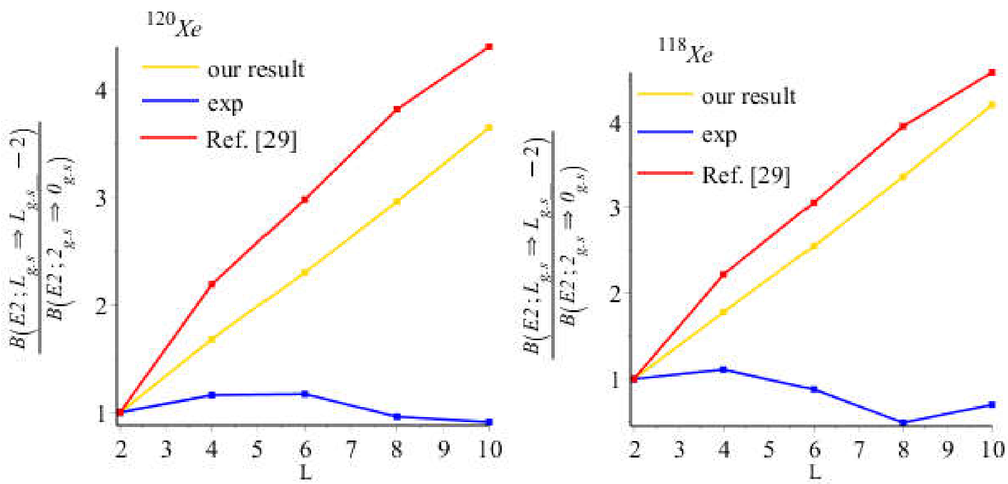
L	^{۱۰۴}Ru	^{۱۰۸}Ru	^{۱۱۸}Xe	^{۱۲۰}Xe	^{۱۳۲}Ce	^{۱۴۸}Nd	^{۱۵۰}Sm	^{۱۵۴}Sm	^{۱۵۶}Gd
0_{β_1}	۰.۹۹۲۸۲	۰.۹۶۸۰۸	۰.۹۹۲۵	۰.۹۹۹۳۳	۱.۰۰۰۷۶	۱.۰۰۱۲۲	۰.۹۹۷۶۸	۰.۹۹۱۰۳	۱.۰۰۲۹
2_{β_1}	۰.۹۹۳۳۸	۰.۹۶۹۴۴	۰.۹۹۳۱۵	۰.۹۹۹۳۷	۱.۰۰۰۷	۱.۰۰۱۱۸	۰.۹۹۷۷۵	۰.۹۹۱۱۲	۱.۰۰۲۸۶
4_{β_1}	۰.۹۹۴۰۹	۰.۹۷۱۶۸	۰.۹۹۳۹۳	۰.۹۹۹۴۳	۱.۰۰۰۶۲	۱.۰۰۱۱	۰.۹۹۷۸۷	۰.۹۹۱۳۰	۱.۰۰۲۷۸
6_{β_1}	۰.۹۹۴۶۷	۰.۹۷۳۹۳	۰.۹۹۴۵۶	۰.۹۹۹۴۸	۱.۰۰۰۵۵	۱.۰۰۱۰۲	۰.۹۹۸۰۱	۰.۹۹۱۵۵	۱.۰۰۲۶۸
8_{β_1}	۰.۹۹۵۱۳	۰.۹۷۵۹۰	۰.۹۹۵۰۵	۰.۹۹۹۵۲	۱.۰۰۰۵	۱.۰۰۰۹۵	۰.۹۹۸۱۴	۰.۹۹۱۸۴	۱.۰۰۲۵۶
10_{β_1}	۰.۹۹۵۵۰	۰.۹۷۷۵۷	۰.۹۹۵۴۳	۰.۹۹۹۵۵	۱.۰۰۰۴۶	۱.۰۰۰۸۹	۰.۹۹۸۲۵	۰.۹۹۲۱۷	۱.۰۰۲۴۵
12_{β_1}	۰.۹۹۵۷۹	۰.۹۷۸۹۷	۰.۹۹۵۷۴	۰.۹۹۹۵۸	۱.۰۰۰۴۳	۱.۰۰۰۸۳	۰.۹۹۸۳۵	۰.۹۹۲۴۴	۱.۰۰۲۳۴
0_{β_2}	۰.۹۹۴۰۵	۰.۹۷۲۲۸	۰.۹۹۳۸۳	۰.۹۹۹۴۳	۱.۰۰۰۶۳	۱.۰۰۱۰۷	۰.۹۹۷۹۵	۰.۹۹۱۶۷	۱.۰۰۲۶۶
2_{β_2}	۰.۹۹۴۳۷	۰.۹۷۳۱۹	۰.۹۹۴۲۰	۰.۹۹۹۴۶	۱.۰۰۰۵۹	۱.۰۰۱۰۴	۰.۹۹۸۰۰	۰.۹۹۱۷۴	۱.۰۰۲۶۳

برای محاسبه‌ی آهنگ‌های گذار از رابطه‌ی (۴-۴۳) استفاده می‌نماییم. گذارهای مربوط به حالت پایه بر حسب تکانه‌ی زاویه‌ای L برای بعضی از هسته‌ها در شکل‌های (۴-۵) تا (۴-۱۰) نشان داده شده است. در این اشکال نتایج عددی ما برای مدل ترکیبی با پتانسیل کلینگبک با داده‌های تجربی متناظر و نتایج نظری منابع دیگر مقایسه شده اند. ملاحظه می‌شود که داده‌های نظری ما در توافق تقریباً بهتری با داده‌های تجربی نسبت به نتایج منابع دیگر قرار دارند. به طور کلی برای هسته‌های ^{۱۰۶}Ru، ^{۱۵۰}Nd، ^{۱۵۴}Sm و ^{۱۵۶}Gd نتایج ما تقریباً به داده‌های تجربی نزدیک است در حالی که برای هسته‌های

^{104}Ru، ^{118}Xe، ^{120}Xe و ^{132}Ce توافق نسبتاً خوبی ملاحظه نمی‌شود. این عدم تطابق می‌تواند ناشی از روش تقریبی وردش که به جای حل دقیق و تحلیلی استفاده شد، باشد.

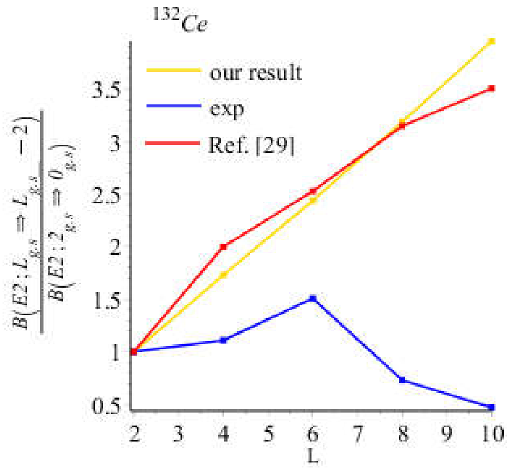


شکل (۴-۵) آهنگ‌های گذار محاسبه شده توسط مدل ترکیبی به ازای پتانسیل کلینگبک برای دو ایزوتوپ روتنیم[1]

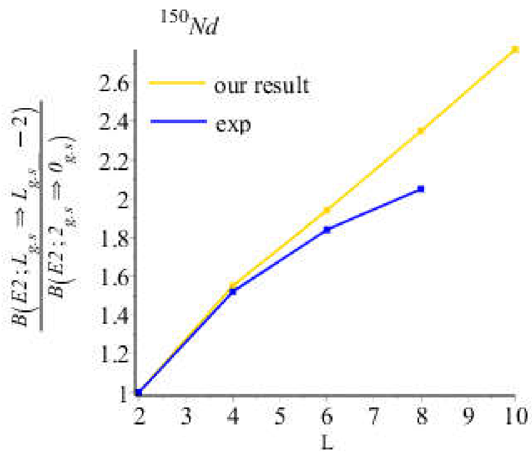


شکل (۴-۶) مشابه با شکل (۴-۵) اما برای دو ایزوتوپ زنون

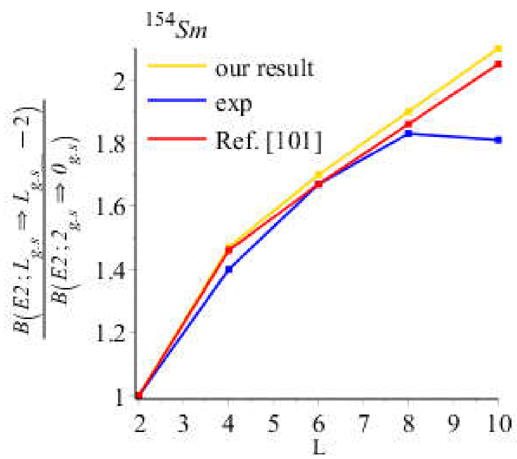
[1]Ruthenium



شکل (۴-۷) مشابه با شکل (۴-۵) اما برای یکی از ایزوتوپ‌های سریم[۱]

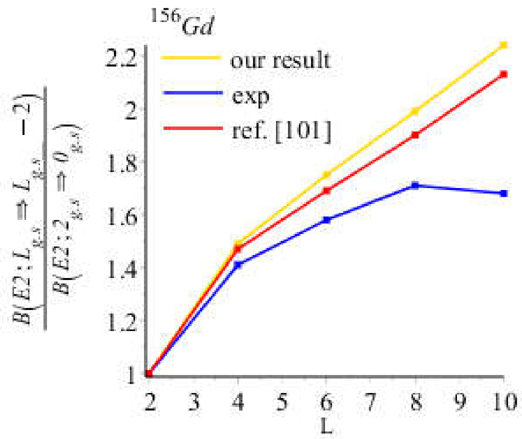


شکل (۴-۸) مشابه با شکل (۴-۵) اما برای یکی از ایزوتوپ‌های نئودیمیم



شکل (۴-۹) مشابه با شکل (۴-۵) اما برای یکی از ایزوتوپ‌های ساماریم

[۱] Cerium



شکل (۴-۱۰) مشابه با شکل (۴-۵) اما برای یکی از ایزوتوپ‌های گادولینیم

۴-۵) مدل ترکیب‌شده

ما مدل ترکیب‌شده [۴۱] را به منظور از بین بردن تبهگنی موجود در مدل E(۵) معرفی نموده‌ایم. هامیلتونی مربوط به این مدل مشابه با هامیلتونی مدل ترکیبی (رابطه‌ی (۴-۹۸)) می‌باشد، با این تفاوت که در مدل ترکیب‌شده، به جای نقطه‌ی بحرانی X(۵) از نقطه‌ی بحرانی E(۵) استفاده می‌شود. به عبارتی دیگر، در این مدل، به جای رابطه‌ی (۴-۱۰۱)، از رابطه‌ی زیر برای حل معادله موج مربوط به هامیلتونی تعریف شده در رابطه‌ی (۴-۹۸) استفاده می‌شود

$$\Psi(\beta,\gamma,\Omega)=\xi(\beta)\varphi(\gamma,\Omega) \qquad (۱۳۲\text{-}۴)$$

و پتانسیل آن مستقل از پارامتر β می‌باشد

$$V(\beta,\gamma)=V(\beta) \qquad (۱۳۳\text{-}۴)$$

با استفاده از جداسازی متغیرها، معادله موجِ مدل ترکیب‌شده، به دو معادله‌ی زیر تبدیل می‌شوند

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2k\pi}{3}\right)}\right]\varphi(\gamma,\Omega)=\Lambda\varphi(\gamma,\Omega) \qquad (۱۳۴\text{-}۴)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\frac{2(2-\chi)}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{\beta^2}\left(\chi\frac{L(L+1)-K^2}{3}+\Lambda(1-\chi)+\left(u(\beta)-\varepsilon\right)\beta^2\right)\right]\xi(\beta)=0$$

(۱۳۵-۴)

در رابطه‌ی (۴-۱۳۵) پتانسیل و انرژی کاهیده به ترتیب طبق روابط (۴-۱۳۶) و (۴-۱۳۷) تعریف می‌شوند

$$u(\beta)=\frac{2B}{\hbar^2}V(\beta) \qquad (۱۳۶-۴)$$

$$\varepsilon=\frac{2B}{\hbar^2}E \qquad (۱۳۷-۴)$$

معادله‌ی (۴-۱۳۴) در بخش (۴-۲-۱) مورد بررسی قرار گرفت. این معادله که اولین بار توسط بِس[۱] [۷۱] حل شد، ویژه مقادیر آن با رابطه‌ی $\Lambda=\tau(\tau+3)$، که در آن عدد کوانتومی ارشدیت τ مرتبط با ویژه مقادیر عملگر کازمیر تقارن SO(۵) است و توسط راکاوی[۲] [۱۰۲] در فیزیک اتمی معرفی شده و ویژه توابع آن با رابطه‌ی زیر داده می‌شوند

$$\varphi_{\tau,\tilde{v}_\Delta,L,M}(\gamma,\Omega)=\sum_{\substack{K=0\\ even}}^{L}\eta_{\tau,\tilde{v}_\Delta,L,K}(\gamma)\Phi^L_{M,K}(\Omega) \qquad (۱۳۸-۴)$$

که در آن

$$\Phi^L_{M,K}(\Omega)=\sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2\left(1+\delta_{K,0}\right)}}\left[D^L_{M,K}(\Omega)+(-1)^L D^L_{M,-K}(\Omega)\right] \qquad (۱۳۹-۴)$$

از سوی دیگر معادله‌ی (۴-۱۳۵) به ازای چاه پتانسیل مربعی نامحدود وتغییر متغیر

$$\xi(\beta)=\beta^{\chi-\frac{3}{2}}f(\beta) \qquad (۱۴۰-۴)$$

---

[۱] Bes

[۲] Rakavy

به معادله دیفرانسیلی زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\beta}+\kappa^2-\frac{\nu^2}{\beta^2}\right]f(\beta)=0 \qquad (۱۴۱-۴)$$

که در آن

$$\nu=\sqrt{\left(\chi-\frac{3}{2}\right)^2+\chi\frac{L(L+1)-K^2}{3}+\Lambda(1-\chi)} \qquad (۱۴۲-۴)$$

و

$${\kappa_{s,\nu}}^2=\varepsilon_{s,\nu} \qquad (۱۴۳-۴)$$

بنابراین ویژه مقادیر مربوط به هامیلتونی ترکیب‌شده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند

$$E_{s,L,\nu}=\frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{x_{s,\nu}}{\beta_w}\right)^2 \qquad (۱۴۴-۴)$$

که در آن $x_{s,\nu}$، s امین صفر بسل نوع اول است و $s=n_\beta+1$. بنابراین تابع موج معاله‌ی (۴-۱۳۵) برابر است با

$$\xi_{s,\nu}(\beta)=C_{s,\nu}\beta^{\chi-\frac{3}{2}}J_\nu\left(\frac{x_{s,\nu}}{\beta_w}\beta\right) \qquad (۱۴۵-۴)$$

که در آن $C_{s,\nu}$ ثابت نرمالیزاسیون است و مقدار آن از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$\int_0^{\beta_w}\left[\xi_{s,\nu}(\beta)\right]^2\beta^{4-2\chi}d\beta=1 \qquad (۱۴۶-۴)$$

لذا تابع موج کل که از ضرب تابع موج مربوط به بخش γ، زوایای اویلر و β حاصل می‌شود برابر است با

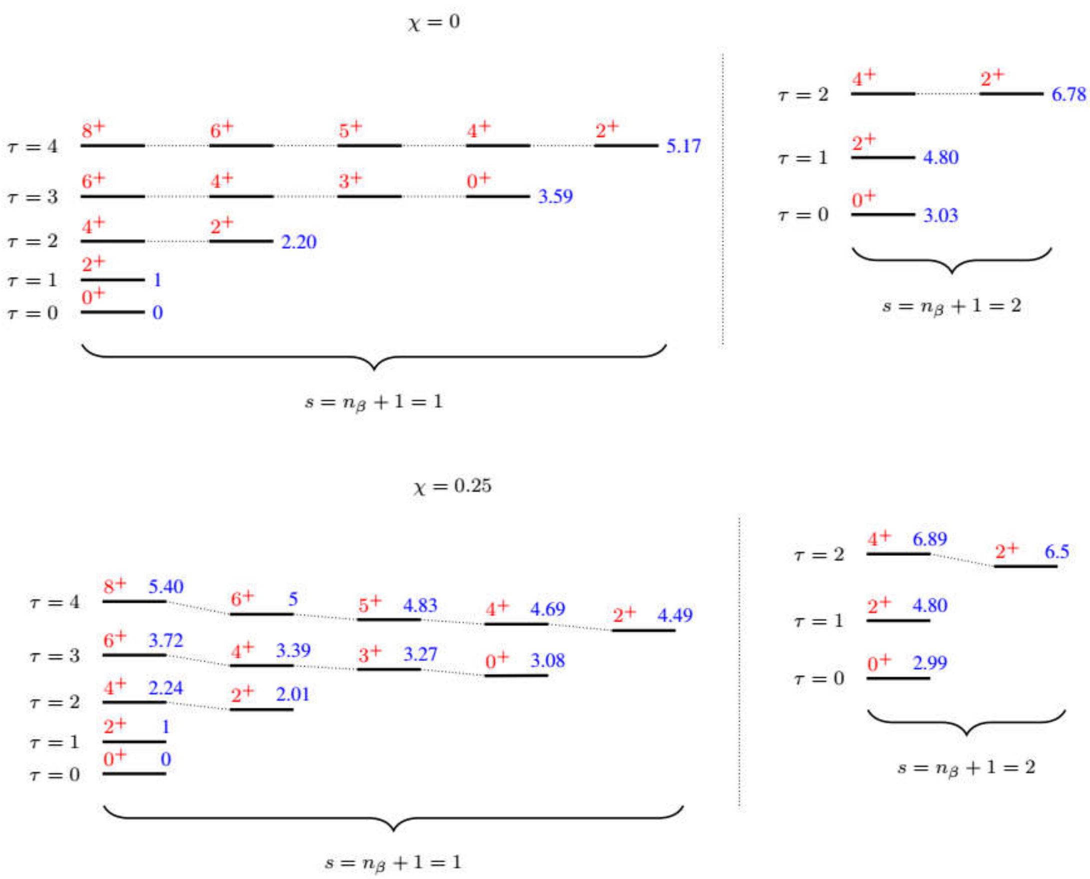
$$\Psi(\beta,\gamma,\Omega)=C_{s,\nu}\beta^{\chi-\frac{3}{2}}J_{\nu}\left(\frac{x_{s,\nu}}{\beta_w}\beta\right)\eta_{\tau,\tilde{\nu}_{\Delta},L,K}(\gamma)\sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2\left(1+\delta_{K,0}\right)}}\left[D^{L}_{M,K}(\Omega)+(-1)^{L}D^{L}_{M,-K}(\Omega)\right]$$

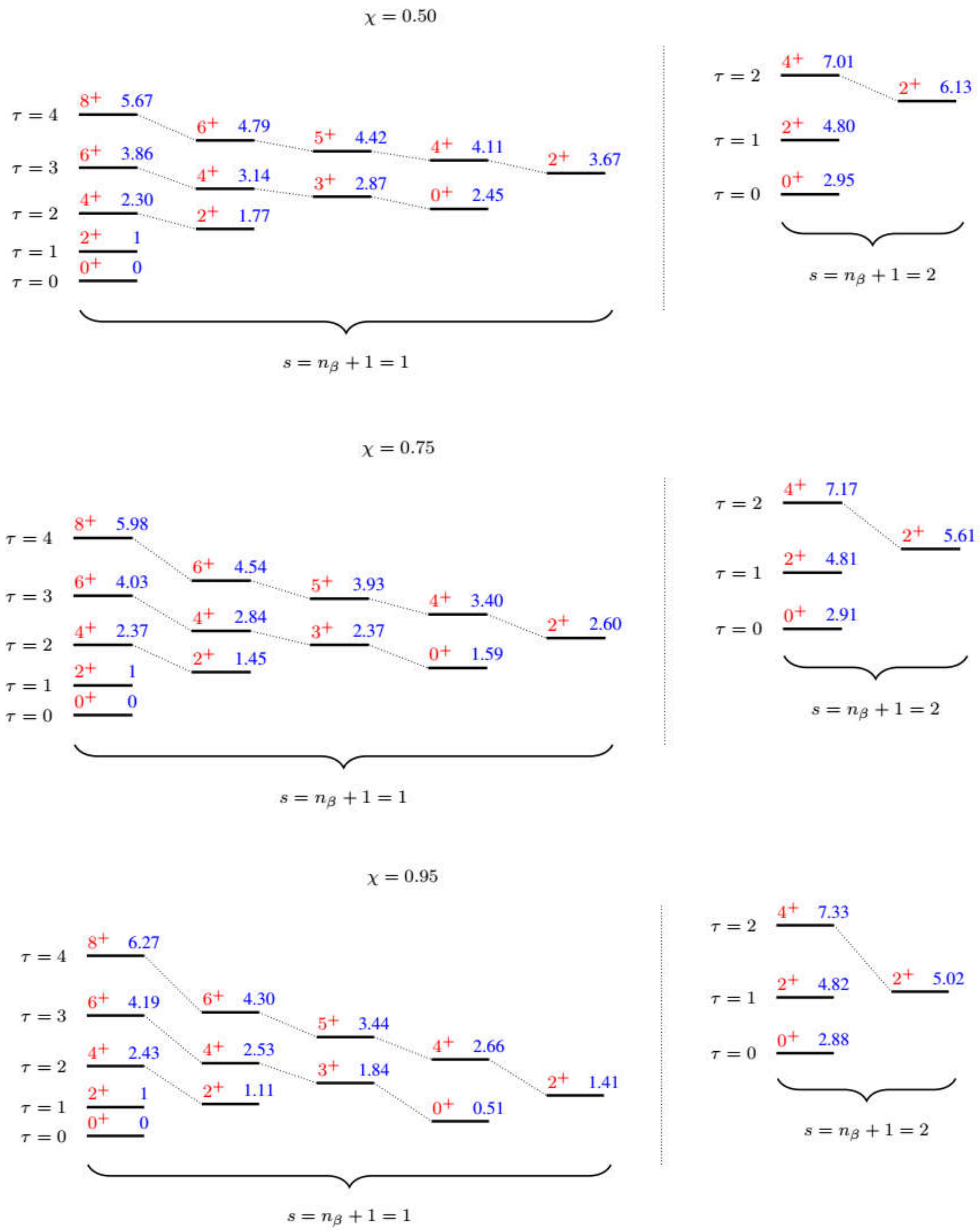
(۱۴۷-۴)

اکنون برای تعیین طیف انرژی از رابطه‌ی زیر که همان انرژی نرمال شده می‌باشد، استفاده می‌نماییم

$$\tilde{E}_{s,\tau,L}=\frac{x^2_{s,\tau,L}-x^2_{1,0,0}}{x^2_{1,1,2}-x^2_{1,0,0}} \qquad (۱۴۸-۴)$$

با توجه به روابط (۴-۱۴۲) و (۴-۱۴۸)، تنها پارامتر آزاد در انرژی نرمال شده، پارامتر χ است. برای مشاهده‌ی تحول انرژی نرمال شده‌ی برخی از ترازها به ازای χ ، شکل (۴-۱۱) را رسم نموده‌ایم.





شکل (۴-۱۱) تحول انرژی نرمال شده‌ی برخی از ترازهای مدل ترکیب‌شده به عنوان تابعی از پارامتر کنترل

در این شکل، تحول مورد نظر در پنج قسمت مجزا که متناظر با پنج مقدار اتخاذ شده برای پارامتر کنترل است (χ=۰,۰.۲۵,۰.۵۰,۰.۷۵,۰.۹۵) نشان داده شده است. به وضوح دیده می‌شود که وارد نمودن پارامتر کنترل، تبهگنی ترازهای انرژی مربوط به مدل E(۵) (χ=۰) را از بین می‌برد، شکافتگی ترازها با افزایش پارامتر کنترل افزایش یافته و ترازهای مربوطه به سمت اولین تراز انرژی حالت پایه

شیفت می‌یابند. ستون‌های موجود در شکل (۴-۱۱) متناظر با نوارهای انرژی در یک هسته است. ستون‌های "اول"، "دوم و سوم"، "چهارم و پنجم"، "ششم" و "هفتم" به ترتیب متناظر با "نوار حالت پایه"، "اولین نوار γ"، "نوار بنا شده بر تراز 0^+"، "اولین نوار β" و احتمالاً "نوار بنا شده بر تراز 2^+" می‌باشند. نوار بنا شده بر تراز 0^+ به طور تجربی مشاهده شده است. برای مثال، در هسته‌ی ^{110}Pd (که یکی از ایزوتوپ‌های پالادیم[1] است) انرژی نرمال شده‌ی مربوط به ترازهای 0^+، 2^+و 4^+در نوار بنا شده بر تراز 0^+ به ترتیب عبارتند از ۲.۵۳، ۳.۲۵ و ۴.۶۰ [۱۰۳]. هم‌چنین، فرایند فیت کردن را برای انرژی نرمال شده به طریقی اجرا نموده‌ایم که نتایج عددی به دست آمده بهترین تطابق را با داده‌های تجربی متناظر داشته باشند. در این روش، پارامتر χ برای هر هسته به گونه‌ای تعیین شد که به ازای آن، اندازه‌ی σ برای انرژی‌های حاصل از χ، مینیمم باشد. نتایج حاصل به همراه پارامترهای N (تعداد داده‌های تجربی استفاده شده در فرایند فیت)، χ و σ در جدول (۴-۱۵) گزارش شده‌اند.

جدول (۴-۱۵) مقایسه‌ی انرژی نرمال شده به روش مدل ترکیب‌شده (خط اول) با داده‌های تجربی متناظر (خط دوم) [۸۶، ۸۹-۹۲، ۹۸ و ۱۰۳-۱۰۸]

$\tilde{E}_{s,\tau,L}$	^{100}Ru	^{104}Ru	^{110}Pd	^{112}Pd	^{114}Pd	^{116}Pd	^{118}Xe	^{120}Xe	^{122}Xe	^{124}Xe	^{126}Xe	^{128}Xe
$\tilde{E}_{1,2,4}$	۲.۲۳ ۲.۲۷	۲.۲۴ ۲.۴۸	۲.۲۵ ۲.۴۶	۲.۲۵ ۲.۵۳	۲.۲۳ ۲.۵۶	۲.۲۱ ۲.۵۸	۲.۲۰ ۲.۴۰	۲.۲۰ ۲.۴۷	۲.۲۲ ۲.۵۰	۲.۲۳ ۲.۴۸	۲.۲۵ ۲.۴۲	۲.۲۵ ۲.۳۳
$\tilde{E}_{1,3,6}$	۳.۶۷ ۳.۸۵	۳.۶۹ ۴.۳۵	۳.۷۳ ۴.۲۱	۳.۷۴ ۴.۴۵	۳.۶۸ ۴.۵۱	۳.۶۱ ۴.۵۸	۳.۵۹ ۴.۱۴	۳.۵۹ ۴.۳۳	۳.۶۶ ۴.۴۳	۳.۶۶ ۴.۳۷	۳.۷۲ ۴.۲۱	۳.۷۴ ۳.۹۲
$\tilde{E}_{1,4,8}$	۵.۳۳ ۵.۶۷	۵.۳۶ ۶.۴۸	۵.۴۳ ۶.۱۴	۵.۴۵ ۶.۶۵	۵.۳۴ ۶.۶۶	۵.۲۰ ۶.۸۹	۵.۱۷ ۶.۱۵	۵.۱۷ ۶.۵۱	۵.۳۰ ۶.۶۹	۵.۳۳ ۶.۵۸	۵.۴۱ ۶.۲۷	۵.۴۵ ۵.۶۷
$\tilde{E}_{1,5,10}$	۷.۱۸ ۷.۸۵	۷.۲۴ ۸.۶۹	۷.۳۵ ۸.۳۱	۷.۳۳ ۸.۷۵	۷.۲۰ [۸.۶۰]	۶.۹۹ –	۶.۹۳ ۸.۳۵	۶.۹۳ ۸.۹۰	۷.۱۴ ۹.۱۸	۷.۱۸ ۸.۹۶	۷.۳۲ ۸.۶۴	۷.۳۷ [۷.۲۲]
$\tilde{E}_{2,0,0}$	۳.۰۱ ۲.۱۰	۳.۰۰ (۲.۷۶)	۲.۹۹ ۲.۵۳	۲.۹۹ ۳.۲۷	۳.۰۰ ۲.۶۲	۳.۰۳ ۳.۲۶	۳.۰۳ ۲.۴۶	۳.۰۳ ۲.۸۲	۳.۰۱ ۳.۴۷	۳.۰۱ ۳.۵۸	۲.۹۹ ۳.۳۸	۲.۹۹ ۳.۵۷

[1] Palladium

$\tilde{E}_{2,1,2}$	۴.۸۰ ۳.۴۶	۴.۸۰ ۴.۲۳	۴.۸۰ ۳.۲۵	۴.۸۰ ۴.۰۲	۴.۸۰ ۴.۱۸	۴.۸۰ –	۴.۸۰ ۳.۶۴	۴.۸۰ ۳.۹۵	۴.۸۰ ۴.۵۱	۴.۸۰ ۴.۶۰	۴.۸۰ ۴.۳۲	۴.۸۰ ۴.۵۱
$\tilde{E}_{2,2,4}$	۶.۸۵ ۴.۳۶	۶.۸۷ ۵.۸۱	۶.۹۰ ۴.۶۰	۶.۹۱ ۴.۹۲	۶.۸۵ –	۶.۸۰ –	۶.۷۸ ۵.۱۳	۶.۷۸ ۵.۳۱	۶.۸۴ –	۶.۸۵ ۵.۶۹	۶.۸۹ ۵.۲۵	۶.۹۱ (۵.۳۹)
$\tilde{E}_{1,2,2}$	۲.۰۷ ۲.۵۲	۲.۰۴ ۲.۴۹	۱.۹۸ ۲.۱۸	۱.۹۷ ۲.۱۱	۲.۰۶ ۲.۰۹	۲.۱۷ ۲.۱۷	۲.۲۰ ۲.۷۵	۲.۲۰ ۲.۷۲	۲.۱۰ ۲.۵۵۵	۲.۰۷ ۲.۳۹	۲.۰۰ ۲.۲۶	۱.۹۷ ۲.۱۹
$\tilde{E}_{1,3,3}$	۳.۳۸ ۳.۴۹	۳.۳۲ ۳.۴۷	۳.۲۲ ۳.۲۴	۳.۲۱ ۳.۱۴	۳.۳۶ ۳.۰۴	۳.۵۴ ۳.۱۳	۳.۵۹ ۴.۰۵	۳.۵۹ ۳.۹۴	۳.۴۲ ۳.۶۷	۳.۳۸ ۳.۵۹	۳.۲۵ ۳.۳۹	۳.۲۱ ۳.۲۳
$\tilde{E}_{1,3,4}$	۳.۴۶ ۳.۸۲	۳.۴۲ ۴.۲۰	۳.۳۶ ۳.۷۴	۳.۳۵ ۳.۹۱	۳.۴۵ ۳.۹۷	۳.۵۶ ۴.۰۴	۳.۵۹ ۴.۰۵	۳.۵۹ ۳.۹۴	۳.۴۸ ۴.۲۳	۳.۴۶ ۴.۰۶	۳.۳۸ ۳.۸۳	۳.۳۵ ۳.۶۲
$\tilde{E}_{1,4,5}$	۴.۹۴ ۴.۷۸	۴.۸۹ ۵.۲۳	۴.۷۹ ۴.۷۱	۴.۷۷ ۵.۰۴	۴.۹۳ ۴.۹۰	۵.۱۲ ۵.۰۵	۵.۱۷ ۵.۷۰	۵.۱۷ ۵.۶۳	۴.۹۹ ۵.۳۶	۴.۹۴ ۵.۱۹	۴.۸۲ ۴.۹۰	۴.۷۷ ۴.۵۱
$\tilde{E}_{1,4,6}$	۵.۰۵ ۵.۰۱	۵.۰۳ –	۴.۹۷ ۵.۳۲	۴.۹۷ ۵.۷۴	۵.۰۵ ۵.۹۴	۵.۱۴ ۶.۱۷	۵.۱۷ ۵.۹۲	۵.۱۷ ۶.۱۵	۵.۰۸ ۶.۲۱	۵.۰۵ ۶.۰۶	۴.۹۹ ۵.۷۰	۴.۹۷ ۵.۱۵
$\tilde{E}_{1,5,7}$	۶.۷۲ ۶.۳۹	۶.۶۷ ۷.۳۳	۶.۵۸ –	۶.۵۶ ۷.۱۲	۶.۷۱ ۶.۸۸	۶.۸۹ ۷.۳۲	۶.۹۳ ۷.۵۹	۶.۹۳ ۷.۶۳	۶.۷۶ ۷.۴۲	۶.۷۲ ۷.۲۷	۶.۶۰ ۶.۸۵	۶.۵۶ –
$\tilde{E}_{1,5,8}$	۶.۸۶ ۶.۵۸	۶.۸۴ ۷.۹۵	۶.۸۱ ۷.۰۹	۶.۸۰ ۷.۵۷	۶.۸۶ ۷.۹۸	۶.۹۲ ۷.۳۵	۶.۹۳ ۷.۷۸	۶.۹۳ ۸.۲۳	۶.۸۷ ۸.۴۴	۶.۸۶ ۸.۲۳	۶.۸۲ ۷.۸۸	۶.۸۰ ۶.۷۲
N	۱۴	۱۲	۱۳	۱۴	۱۲	۱۱	۱۴	۱۴	۱۳	۱۴	۱۴	۱۱
χ	۰.۱۷	۰.۲۱	۰.۲۸	۰.۲۹	۰.۱۸	۰.۰۴	۰	۰	۰.۱۴	۰.۱۷	۰.۲۶	۰.۲۹
σ	۰.۸۸	۰.۸۵	۰.۹۰	۰.۹۰	۰.۷۱	۰.۸۸	۰.۹۱	۱.۰	۱.۰	۰.۹۱	۰.۷۷	۰.۲۸

در این جدول، نتایج نظری ما با داده‌های تجربی متناظر از طریق پارامتر σ مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود توافق نسبتاً خوبی بین محاسبات ما و داده‌های تجربی وجود دارد. بهترین توافق با داده‌های تجربی متعلّق به هسته‌های $^{۱۲۶}\mathrm{Xe}$، $^{۱۲۸}\mathrm{Xe}$ و $^{۱۱۴}\mathrm{Pd}$ می‌باشد. نمادگذاری "–"، "()" و "[]" در جدول (۴-۱۵) مرتبط با مواردی است که به ترتیب در آن‌ها "داده‌ی تجربی متناظر وجود ندارد"، "در مورد داده‌ی تجربی نشان داده شده اطمینان کامل در مقاله‌ای که آن را

گزارش نموده وجود ندارد" و "در تراز مربوطه پدیده‌ی رانش به عقب[1] [۴۶] وجود دارد". این سه نوع داده در فرایند فیت قرار داده نشده‌اند. هنگامی که گفته می‌شود در یک تراز انرژی پدیده‌ی رانش به عقب وجود دارد منظور این است که از آن تراز به بعد تفاوت انرژی بین ترازهای متوالی به طور یکنواخت افزایش نمی‌یابد که این مطلب اشاره به جمعی نبودن حالت‌های اسپینی دارد. گذشته از این، واضح است که برای ایزوتوپ‌های زنون، پارامتر χ با افزایش عدد جرمی افزایش می‌یابد. این موضوع می‌تواند به این معنا باشد که برای این ایزوتوپ‌ها هسته‌هایی با عدد جرمی پایین‌تر می‌توانند با مدل E(۵) بررسی شوند و لذا این هسته‌ها γ-ناپایدار هستند، در حالی که ایزوتوپ‌های زنون با عدد جرمی بالاتر بهتر است با مدل X(۳) بررسی شوند و لذا دارای شکل کشیده‌ی γ-صلب می‌باشند.

علاوه بر طیف انرژی، آهنگ‌های گذار نیز برای مدل ترکیب‌شده با استفاده از رابطه‌ی (۴-۲۱) محاسبه شده و نتایج آن در جدول (۴-۱۶) گردآوری شده‌اند. به منظور ارزیابی داده‌های نظری خود، داده‌های تجربی متناظر را نیز در این جدول گنجانده‌ایم. همان‌گونه که انتظار می‌رود، برای همه‌ی هسته‌ها مقادیر آهنگ‌های گذار ترازهای نوار حالت پایه بین دو مقدار متناظر در مدل‌های E(۵) و X(۳) قرار دارد. این مطلب با مقایسه‌ی مقادیر جدول (۴-۱۶) و نتایج منابع [۲۵] و [۲۸] نیز مشاهده می‌شود.

جدول (۴-۱۶) مقایسه‌ی گذارهای محاسبه شده توسط مدل ترکیب‌شده (خط اول) با داده‌های تجربی متناظر به همراه خطاهای اندازه‌گیری آن‌ها (خط دوم) [۸۶، ۸۹-۹۲، ۹۸ و ۱۰۳-۱۰۸]. تمام مقادیر بر مقدار گذار $1,1,2 \rightarrow 1,0,0$ تقسیم شده‌اند.

$s,\tau,L \rightarrow s',\tau',L'$	^{100}Ru	^{104}Ru	^{110}Pd	^{112}Pd	^{114}Pd	^{116}Pd
۱,۲,۴→۱,۱,۲	۱.۷۰ ۱.۴±۰.۱	۱.۷۰ ۱.۴±۰.۱	۱.۷۲ ۱.۶±۰.۱	۱.۷۲ –	۱.۷۰ –	۱.۶۸ –
۱,۳,۶→۱,۲,۴	۲.۲۲ <۴.۶±۰.۱	۲.۲۳ –	۲.۲۵ ۱.۹۵	۲.۲۶ –	۲.۲۲ –	۲.۱۸ –
۱,۴,۸→۱,۳,۶	۲.۲۶ –	۲.۶۴ –	۲.۶۸ –	۲.۶۸ –	۲.۶۳ –	۲.۵۷ –

[1] Backbending

۱,۵,۱۰→۱,۴,۸	۲.۹۵ –	۲.۹۷ –	۳.۰۱ –	۳.۰۲ –	۲.۹۵ –	۲.۸۸ –
۲,۱,۲→۲,۰,۰	۰.۷۶ ۰.۹	۰.۷۶ –	۰.۷۶ –	۰.۷۶ –	۰.۷۶ –	۰.۷۵ –
۲,۲,۴→۱,۱,۲	۱.۲۶ –	۱.۲۶ –	۱.۲۷ –	۱.۲۷ –	۱.۲۶ –	۱.۲۵ –
۱,۲,۲→۱,۱,۲	۱.۶۹ ۰.۹	۱.۷۰ ۰.۹۵	۱.۷۱ ۰.۸	۱.۷۱ –	۱.۷۰ –	۱.۶۸ –
۱,۳,۴→۱,۲,۲	۱.۱۵ –	۱.۱۵ –	۱.۱۵ ۰.۶±۰.۱	۱.۱۶ –	۱.۱۵ –	۱.۱۴ –
۱,۳,۳→۱,۲,۲	۱.۵۷ ۰.۳±۰.۱	۱.۵۷ –	۱.۵۸ –	۱.۵۸ –	۱.۵۷ –	۱.۵۵ –
۱,۳,۴→۱,۲,۴	۱.۰۵ ۰.۸±۰.۵	۱.۰۶ –	۱.۰۷ ۰.۶±۰.۱	۱.۰۷ –	۱.۰۶ –	۱.۰۴ –

$s,\tau,L \rightarrow s',\tau',L'$	۱۱۸Xe	۱۲۰Xe	۱۲۲Xe	۱۲۴Xe	۱۲۶Xe	۱۲۸Xe
۱,۲,۴→۱,۱,۲	۱.۶۷ ۱.۱	۱.۶۷ ۱.۱۵	۱.۶۹ ۱.۵	۱.۷۰ ۱.۱۷	۱.۷۱ –	۱.۷۲ ۱.۳۵±۰.۲۵
۱,۳,۶→۱,۲,۴	۲.۱۷ ۰.۹±۰.۲	۲.۱۷ ۱.۱۵	۲.۲۱ ۱.۵	۲.۲۲ ۱.۵۲±۰.۱۰	۲.۲۵ –	۲.۲۶ ۱.۳۳±۰.۲۴
۱,۴,۸→۱,۳,۶	۲.۵۵ ۰.۴۵	۲.۵۵ ۰.۹۵	۲.۶۱ ۱.۰	۲.۶۲ ۱.۱۴±۰.۳۳	۲.۶۷ –	۲.۶۸ ۲.۰۴±۰.۲۳
۱,۵,۱۰→۱,۴,۸	۲.۸۶ >۰.۷۵	۲.۸۶ ۰.۹±۰.۱	۲.۹۳ ۱.۵	۲.۹۵ ۰.۳۶±۰.۰۴	۳.۰۰ –	۳.۰۲ ۵.۲۸±۰.۰۰۰۱۲۱
۲,۱,۲→۲,۰,۰	۰.۷۵ –	۰.۷۵ –	۰.۷۶ –	۰.۷۶ –	۰.۷۶ –	۰.۷۶ –
۲,۲,۴→۱,۱,۲	۱.۲۴ –	۱.۲۴ –	۱.۲۶ –	۱.۲۶ –	۱.۲۷ –	۱.۲۷ –
۱,۲,۲→۱,۱,۲	۱.۶۷ –	۱.۶۷ –	۱.۶۹ –	۱.۶۹ ۰.۵۵±۰.۰۹	۱.۷۱ –	۱.۷۱ ۱.۲۳±۰.۲۰

۱,۳,۴→۱,۲,۲	۱.۱۴ –	۱.۱۴ –	۱.۱۵ –	۱.۱۵ ۱.۲±۰.۴	۱.۱۵ –	۱.۱۶ ۰.۶±۰.۱
۱,۳,۳→۱,۲,۲	۱.۵۵ –	۱.۵۵ –	۱.۵۶ –	۱.۵۷ ۰.۱۶±۰.۰۶	۱.۵۷ –	۱.۵۸ ۴.۵۰
۱,۳,۴→۱,۲,۴	۱.۰۳ –	۱.۰۳ –	۱.۰۵ –	۱.۰۵ ۰.۵۸±۰.۲۱	۱.۰۷ –	۱.۰۷ ۰.۶۱±۰.۰۷

۴-۵-۱) مدل ترکیب‌شده با پتانسیل مورس

پتانسیل مورس در منبع [۴۳و۴۴] به عنوان پتانسیل موجود در هامیلتونیِ مدل E(۵) برای بررسی ویژگی‌های اسپکتروسکوپی هسته‌های γ-ناپایدار مورد بررسی قرار گرفت. از آنجایی که در مدل ترکیب‌شده تبهگنی پیش‌بینی شده توسط نقطه‌ی بحرانی E(۵) شکسته می‌شود، انتظار می‌رود که این مدل تطابق بیشتری با داده‌های تجربی داشته باشد. لذا ما در منبع [۴۵] مدل ترکیب‌شده را با این پتانسیل مورد مطالعه قرار داده‌ایم و نتایج خود را با نتایج منابع [۴۳و۴۴] مقایسه نموده‌ایم.

پتانسیل مورس با رابطه‌ی زیر داده می‌شود [۴۲]

$$u(\beta)=e^{-2a(\beta-\beta_e)}-2e^{-a(\beta-\beta_e)} \qquad (۱۴۹-۴)$$

که در آن a و β_e ثابت‌های این پتانسیل می‌باشند. با جایگذاری رابطه‌ی (۴-۱۴۹) در رابطه‌ی (۴-۱۳۵) و تغییر متغیر زیر

$$\xi(\beta)=\beta^{\chi-2}f(\beta) \qquad (۱۵۰-۴)$$

به معادله دیفرانسیلی زیر می‌رسیم

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+\frac{1}{\beta^2}\left(\chi\frac{L(L+1)-K^2}{3}+\Lambda(1-\chi)+(\chi-1)(\chi-2)\right)+e^{-2a(\beta-\beta_e)}-2e^{-a(\beta-\beta_e)}\right]f(\beta)=\varepsilon f(\beta)$$

(۱۵۱-۴)

برای حل این معادله، ابتدا از تقریب پکریس[1] [۱۰۹] استفاده می‌نماییم. با استفاده از این تقریب معادله‌ی (۴-۱۵۱) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\alpha^2}{a^2}\left(e^{-2\alpha x}-2e^{-\alpha x}\right)-\lambda_{com}\left(D_0+D_1e^{-\alpha x}+D_2e^{-2\alpha x}\right)+\frac{\alpha^2}{a^2}\varepsilon\right]f\left(x\right)=0 \qquad (۱۵۲\text{-}۴)$$

که در آن

$$x=\frac{\beta-\beta_e}{\beta_e} \qquad (۱۵۳\text{-}۴)$$

$$\alpha=a\beta_e \qquad (۱۵۴\text{-}۴)$$

$$\lambda_{com}=\chi\frac{L\left(L+1\right)-K^2}{3}+\Lambda\left(1-\chi\right)+\left(\chi-1\right)\left(\chi-2\right) \qquad (۱۵۵\text{-}۴)$$

$$D_0=1-\frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2},D_1=\frac{4}{\alpha}-\frac{6}{\alpha^2},D_2=-\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2} \qquad (۱۵۶\text{-}۴)$$

با تغییر متغیر زیر

$$z=e^{-\alpha x} \qquad (۱۵۷\text{-}۴)$$

معادله‌ی (۴-۱۵۲) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d}{dz}+\frac{1}{z^2}\left(\frac{2z-z^2}{a^2}-\frac{\lambda_{com}\left(D_0+D_1z+D_2z^2\right)}{\alpha^2}+\frac{\varepsilon}{a^2}\right)\right]f\left(z\right)=0 \qquad (۱۵۸\text{-}۴)$$

اکنون این معادله به روش NU قابل حل است و ویژه مقدار و ویژه تابع آن به ترتیب عبارتند از

$$\varepsilon=\frac{\lambda_{com}D_0}{\beta_e^2}-\left[\frac{2\beta_e^2-\lambda_{com}D_1}{2\beta_e\sqrt{\lambda_{com}D_2+\beta_e^2}}-\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right]^2 \qquad (۱۵۹\text{-}۴)$$

[1] Pekeris

$$f\left(z\right)=N_{com}z^{\upsilon_1}e^{\upsilon_2 z}L_{n_\beta}^{\upsilon_3}\left(\upsilon_4 z\right) \qquad (۴-۱۶۰)$$

در رابطه‌ی (۴-۱۶۰) داریم

$$\upsilon_1=\sqrt{\frac{\lambda_{com}}{\alpha^2}D_0-\frac{\varepsilon}{a^2}} \qquad (۴-۱۶۱)$$

$$\upsilon_2=-\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{\lambda_{com}}{\alpha^2}D_2} \qquad (۴-۱۶۲)$$

$$\upsilon_3=2\sqrt{\frac{\lambda_{com}}{\alpha^2}D_0-\frac{\varepsilon}{a^2}} \qquad (۴-۱۶۳)$$

$$\upsilon_4=2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{\lambda_{com}}{\alpha^2}D_2} \qquad (۴-۱۶۴)$$

و ثابت نرمالیزاسیون از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$\int_0^\infty\left[\beta^{\chi-2}f\left(e^{-\alpha\frac{\beta-\beta_e}{\beta_e}}\right)\right]^2\beta^{4-2\chi}d\beta=1 \qquad (۴-۱۶۵)$$

بنابراین ویژه مقادیر و ویژه توابع مربوط به هامیلتونی ترکیب‌شده به ازای پتانسیل مورس برابر است با

$$E=\frac{\hbar^2}{2B}\left(\frac{\lambda_{com}D_0}{\beta_e^2}-\left[\frac{2\beta_e^2-\lambda_{com}D_1}{2\beta_e\sqrt{\lambda_{com}D_2+\beta_e^2}}-\left(n_\beta+\frac{1}{2}\right)a\right]^2\right) \qquad (۴-۱۶۶)$$

$$\begin{aligned}\Psi\left(\beta,\gamma,\Omega\right)=&N_{com}\beta^{\chi-2}e^{-\alpha\,\upsilon_1\frac{\beta-\beta_e}{\beta_e}}e^{\upsilon_2 e^{-\alpha\frac{\beta-\beta_e}{\beta_e}}}L_{n_\beta}^{\upsilon_3}\left(\upsilon_4 e^{-\alpha\frac{\beta-\beta_e}{\beta_e}}\right)\\&\times\sum_{\substack{K=0\\even}}^{L}\eta_{\tau,\tilde{\nu}_\Delta,L,K}\left(\gamma\right)\sqrt{\frac{2L+1}{16\pi^2\left(1+\delta_{K,0}\right)}}\left[D_{M,K}^L\left(\Omega\right)+\left(-1\right)^L D_{M,-K}^L\left(\Omega\right)\right]\end{aligned} \qquad (۴-۱۶۷)$$

همانند بخش‌های گذشته، انرژی نرمال شده که با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\left(\tilde{E}\right)_{n,L,\tau}=\frac{\left(E\right)_{n,L,\tau}-\left(E\right)_{0,0,0}}{\left(E\right)_{0,2,1}-\left(E\right)_{0,0,0}} \qquad (۱۶۸-۴)$$

به گونه‌ای تعیین می‌شود که خطای استاندارد مینیمم باشد. نتایج محاسبات مربوط به طیف انرژی مدل ترکیب‌شده با پتانسیل مورس در جدول (۴-۱۷) آورده شده است. در این جدول منظور از $L_{g.s}$، L_{β}و L_{γ} به ترتیب آخرین تراز انرژی در حالت پایه، اولین نوار β و اولین نوار γ است که داده‌ی تجربی مربوط به آن در فرایند فیت، گنجانده شده است و N تعداد کل ترازهای بررسی شده در این فرایند است.

جدول (۴-۱۷) مقایسه‌ی طیف انرژی مدل ترکیب‌شده به ازای پتانسیل مورس (خط اول) با داده‌های تجربی متناظر (خط دوم) [۸۵-۸۸، ۹۰-۹۴، ۹۸، ۱۰۳-۱۰۸و ۱۱۰-۱۱۱] و نتایج نظریِ [۴۳] مدل E(۵) با این پتانسیل (خط سوم)

	$\left(\tilde{E}\right)_{0,4,2}$	$\left(\tilde{E}\right)_{1,0,0}$	$\left(\tilde{E}\right)_{0,2,2}$	a	β_e	χ	$L_{g.s}$	L_{β}	L_{γ}	N	σ
	۲.۲۹	۱.۸۶	۱.۹۹	۰.۶۱	۳.۲	۰.۲۴	۸	۰	۴	۷	۰.۲۴
^{98}Ru	۲.۱۴	۲.۰۳	۲.۱۷								
	۲.۲۵	۲.۴	۲.۳	۰.۴۴	۳.۸۴		۱۸	۰	۴	۱۲	۰.۶۶
	۲.۳۹	۲.۵۰	۱.۸۸	۰.۴۶	۳.۵۵	۰.۳۶	۱۸	۰	۹	۱۷	۰.۳۵
^{100}Ru	۲.۲۷	۲.۱۰	۲.۵۲								
	۲.۲۹	۲.۸	۲.۳	۰.۳۶	۴.۴۳		۲۸	۰	۴	۱۷	۰.۲۹
	۲.۲۹	۲.۱۱	۲.۰۷	۰.۴۶	۳.۴	۰.۱۸	۱۲	۰	۹	۱۴	۰.۲۹
^{102}Ru	۲.۳۳	۱.۹۹	۲.۳۲								
	۲.۲۵	۲.۳	۲.۲	۰.۴۲	۳.۷۸		۱۶	۰	۵	۱۲	۰.۳۴
	۲.۴۱	۳.۲۹	۲.۰۴	۰.۳۱	۴.۷	۰.۲۶	۱۶	۰	۸	۱۴	۰.۴۰
^{104}Ru	۲.۴۸	۲.۷۶	۲.۴۹								
	۲.۳۳	۲.۹	۲.۳	۰.۱۰	۷.۵۷		۸	۲	۸	۱۲	۰.۴۳
	۲.۲۸	۲.۵۰	۲.۲۵	۰.۳۶	۴.۱	۰.۰۲	۲۶	۴	۵	۱۹	۰.۳۲
^{102}Pd	۲.۲۹	۲.۸۶	۲.۷۶								
	۲.۲۸	۲.۶	۲.۳	۰.۳۴	۴.۳۰		۲۶	۴	۴	۱۸	۰.۲۲

$^{۱۰۴}\mathrm{Pd}$	۲.۳۳ ۲.۳۸ ۲.۲۸	۲.۶۱ ۲.۴۰ ۲.۶	۲.۱۰ ۲.۴۱ ۲.۳	۰.۴۶ ۰.۴۱	۳.۸۵ ۴.۱۵	۰.۱۸	۱۸ ۱۸	۴ ۲	۴ ۴	۱۴ ۱۳	۰.۲۵ ۰.۳۰
$^{۱۰۶}\mathrm{Pd}$	۲.۳۵ ۲.۴۰ ۲.۲۶	۲.۲۹ ۲.۲۲ ۲.۴	۱.۹۵ ۲.۲۰ ۲.۳	۰.۴۱ ۰.۴۳	۳.۵ ۳.۹۳	۰.۳۰	۱۰ ۱۶	۴ ۴	۵ ۵	۱۱ ۱۴	۰.۱۹ ۰.۳۴
$^{۱۰۸}\mathrm{Pd}$	۲.۳۹ ۲.۴۲ ۲.۲۸	۲.۶۷ ۲.۴۳ ۲.۵	۱.۹۴ ۲.۱۵ ۲.۳	۰.۴۱ ۰.۳۰	۳.۸ ۴.۳۶	۰.۳۲	۱۲ ۱۴	۶ ۴	۸ ۴	۱۶ ۱۲	۰.۱۶ ۰.۳۱
$^{۱۱۰}\mathrm{Pd}$	۲.۵۱ ۲.۴۶ ۲.۲۹	۳.۸۱ ۴.۳۹ ۲.۰	۱.۹۱ ۲.۱۸ ۲.۳	۰.۴۱ ۰.۲۶	۴.۵۵ ۴.۰۱	۰.۳۸	۱۴ ۱۲	۰ ۱۰	۸ ۴	۱۳ ۱۴	۰.۲۷ ۰.۳۴
$^{۱۱۲}\mathrm{Pd}$	۲.۵۵ ۲.۵۳ ۲.۳۳	۳.۶۲ ۳.۲۷	۱.۷۱ ۲.۱۱ ۲.۳	۰.۴۱ ۰.۶۰	۴.۲۵ ۴.۱۱	۰.۵	۱۶ ۶	۰ ۰	۱۱ ۳	۱۸ ۵	۰.۲۹ ۰.۴۹
$^{۱۱۴}\mathrm{Pd}$	۲.۵۳ ۲.۵۶ ۲.۳۱	۳.۳۹ ۲.۶۲ ۲.۹	۱.۷۰ ۲.۰۹ ۲.۳	۰.۴۱ ۰.۲۴	۴.۱ ۵.۱۲	۰.۵	۱۶ ۱۶	۰ ۰	۱۱ ۱۱	۱۸ ۱۸	۰.۴۳ ۰.۷۳
$^{۱۱۶}\mathrm{Pd}$	۲.۶۲ ۲.۵۸ ۲.۳۴	۳.۲۰ ۳.۲۶ ۳.۵	۱.۸۵ ۲.۱۷ ۲.۳	۰.۷۱ ۰.۱۳	۴.۳۵ ۷.۴۴	۰.۴۴	۸ ۱۶	۰ ۰	۸ ۹	۱۱ ۱۶	۰.۲۷ ۰.۶۳
$^{۱۱۸}\mathrm{Xe}$	۲.۳۱ ۲.۴۰ ۲.۳۱	۲.۶۸ ۲.۴۶ ۲.۷	۲.۲۶ ۲.۷۵ ۲.۸	۰.۲۱ ۰.۱۹	۵.۱ ۵.۴۰	۰.۰۴	۱۶ ۱۶	۴ ۴	۱۰ ۱۰	۱۹ ۱۹	۰.۳۴ ۰.۳۴
$^{۱۲۲}\mathrm{Xe}$	۲.۵۷ ۲.۵۰ ۲.۴۳	۳.۴۰ ۳.۴۷ ۳.۵	۲.۰۴ ۲.۵۵ ۲.۴	۰.۷۱ ۰.۶۶	۴.۷ ۵.۰۳	۰.۳۲	۱۰ ۱۰	۰ ۰	۱۱ ۹	۱۵ ۱۳	۰.۳۳ ۰.۵۰

	۲.۴۹	۳.۸۹	۱.۹۳	۰.۳۱	۵.۰۰	۰.۳۶	۲۶	۴	۱۱	۲۵	۰.۳۲
^{124}Xe	۲.۴۸	۳.۵۸	۲.۳۹								
	۲.۳۵	۳.۸	۲.۴	۰.۱۷	۶.۸۸		۲۰	۲	۱۱	۲۱	۰.۵۶
	۲.۴۷	۳.۳۷	۱.۸۹	۰.۳۱	۴.۶	۰.۳۸	۱۰	۴	۷	۱۳	۰.۲۱
^{126}Xe	۲.۴۲	۳.۳۸	۲.۲۶								
	۲.۳۳	۳.۲	۲.۳	۰.۱۸	۶.۱۲		۱۲	۴	۹	۱۶	۰.۵۸
	۲.۳۳	۲.۹۶	۲.۲۳	۰.۳۶	۴.۴۵	۰.۰۸	۲۲	۲	۸	۱۱	۰.۴۰
^{128}Xe	۲.۳۳	۳.۵۷	۲.۱۹								
	۲.۳۳	۳.۳	۲.۳	۰.۳۹	۴.۷۴		۱۰	۲	۷	۱۲	۰.۵۲
	۲.۲۳	۲.۰۴	۲.۲۱	۰.۵۱	۳.۵	۰.۰۲	۱۶	۰	۵	۱۲	۰.۵۴
^{130}Xe	۲.۲۵	۳.۳۵	۲.۰۹								
	۲.۲۷	۲.۶	۲.۳	۰.۴۴	۴.۰۵		۱۴	۰	۵	۱۱	۰.۴۸
	۲.۳۳	۱.۴۴	۱.۶۷	۰.۷۱	۲.۷۵	۰.۴۸	۶	۰	۵	۷	۰.۶۷
^{132}Xe	۲.۱۶	۲.۷۷	۱.۹۴								
	۲.۱۷	۱.۴	۲.۲	۰.۶۶	۳.۱۶		۶	۰	۵	۷	۰.۷۳
	۲.۱۳	۰.۶۵	۱.۸۴	۰.۸۱	۲.۵	۰.۲۸	۶	۰	۵	۷	۰.۷۰
^{134}Xe	۲.۰۴	۱.۹۳	۱.۹۱								
	۲.۱۱	۱.۰	۲.۱	۰.۷۴	۲.۹۱		۶	۰	۵	۷	۰.۷۵
	۲.۳۶	۲.۲۹	۱.۹۳	۰.۵۶	۳.۴۵	۰.۳	۸	۰	۴	۷	۰.۴۰
^{134}Ba	۲.۳۲	۲.۹۱	۱.۹۳								
	۲.۲۶	۲.۴	۲.۳	۰.۵۰	۳.۸۲		۸	۰	۴	۷	۰.۴۸

همان‌طور که انتظار داشتیم، نتایج مربوط به مدل بررسی شده در این بخش، خطای کمتری نسبت به مدل ارائه شده در منبع [۴۳] دارند، مخصوصاً برای هسته‌های $Pd^{108,112,114}$ و $Xe^{122,124}$. برای هسته‌هایی که طیف انرژی آن‌ها در جدول (۴-۱۷) مورد بررسی قرار گرفت، برخی از آهنگ‌های گذار نیز محاسبه شده‌اند و نتایج آن‌ها در جدول (۴-۱۸) آورده شده است.

جدول (۴-۱۸) مقایسه‌ی آهنگ‌های گذار مدل ترکیب‌شده با پتانسیل مورس (خط اول) با داده‌های تجربی متناظر (خط دوم) [۸۵-۸۸، ۹۰-۹۴، ۹۸، ۱۰۳-۱۰۸و ۱۱۰-۱۱۱] و نتایج نظریِ [۴۴] مدل E(۵) با این پتانسیل (خط سوم).
این داده‌ها به مقدار مربوط به گذار از دومین تراز حالت پایه به اولین تراز آن تقسیم شده‌اند.

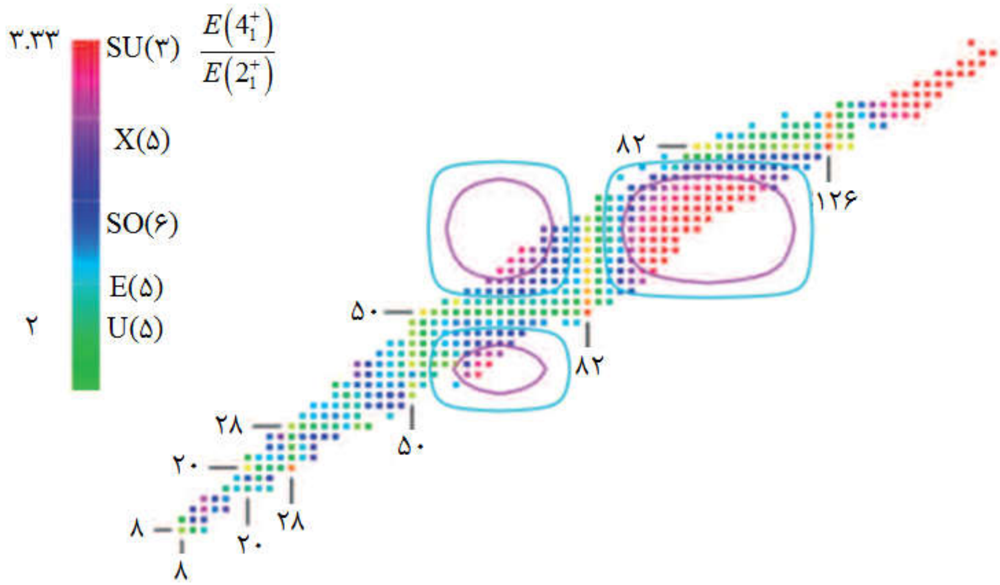
	$4_{g.s} \to 2_{g.s}$	$6_{g.s} \to 4_{g.s}$	$8_{g.s} \to 6_{g.s}$	$10_{g.s} \to 8_{g.s}$	$2_{\gamma} \to 2_{g.s}$	$0_{\beta_1} \to 2_{g.s}$	$2_{\beta_1} \to 0_{g.s}$
^{۹۸}Ru	۱.۷۹	۲.۹۱	۶.۳۵	۳.۴۶	۱.۷۹	۰.۳۰	۰.۰۳۲۴
	۰.۳۷	۰.۴۰	۰.۰۸	–	۱.۴۱	–	–
	۱.۷۱	۲.۵۲	۳.۶۱	۵.۲۷	۱.۷۱	۰.۸۲	۰.۰۰۴۰
^{۱۰۰}Ru	۱.۷۲	۲.۵۸	۳.۸۰	۵.۶۶	۱.۷۱	۰.۸۲	۰.۰۰۶۱
	۱.۴۳	<۴.۷۷	–	–	۰.۸۷	۰.۹۸	–
	۱.۶۵	۲.۳۱	۳.۰۷	۴.۸۶	۱.۶۵	۰.۷۲	۰.۰۰۸۲
^{۱۰۲}Ru	۱.۷۷	۲.۶۹	۳.۹۰	۵.۵۶	۱.۷۶	۰.۹۵	۰.۰۰۳۸
	۱.۴۸	۱.۵۲	۱.۲۶	۱.۲۸	–	۰.۷۸	–
	۱.۷۳	۲.۵۳	۳.۵۴	۴.۸۶	۱.۷۳	۰.۸۸	۰.۰۰۴۶
^{۱۰۴}Ru	۱.۶۳	۲.۲۴	۲.۹۰	۳.۶۴	۱.۶۲	۰.۶۷	۰.۰۱۲۹
	۱.۴۳	–	–	۰.۴۳	–	–	–
	۱.۶۲	۲.۱۰	۲.۴۹	۲.۸۰	۱.۶۲	۰.۷۱	۰.۰۱۶۳
^{۱۰۲}Pd	۱.۶۹	۲.۴۰	۳.۱۸	۴.۰۴	۱.۶۹	۰.۸۴	۰.۰۰۷۴
	۱.۵۶	–	–	–	۰.۴۶	–	–
	۱.۶۸	۲.۳۵	۳.۰۷	۳.۸۶	۱.۶۸	۰.۸۰	۰.۰۰۸۲
^{۱۰۴}Pd	۱.۶۹	۲.۴۷	۳.۶۰	۵.۴۵	۱.۶۸	۰.۷۲	۰.۰۰۵۴
	۱.۳۶	–	–	–	۰.۶۱	–	–
	۱.۶۷	۲.۳۹	۳.۳۰	۴.۶۰	۱.۶۷	۰.۷۳	۰.۰۰۶۲
^{۱۰۶}Pd	۱.۷۵	۲.۵۷	۳.۴۹	۴.۴۷	۱.۷۳	۰.۹۷	۰.۰۰۷۳
	۱.۶۳	–	–	–	۰.۹۸	۰.۶۷	–
	۱.۷۰	۲.۴۷	۳.۵۱	۵.۰۳	۱.۷۰	۰.۷۹	۰.۰۰۴۸
^{۱۰۸}Pd	۱.۷۰	۲.۴۷	۳.۴۴	۴.۶۸	۱.۶۸	۰.۸۱	۰.۰۰۸۳
	۱.۴۷	۲.۱۶	۲.۹۹	–	۱.۴۳	۱.۰۵	۰.۰۰۱۹
	۱.۶۸	۲.۳۲	۲.۹۵	۳.۵۳	۱.۶۸	۰.۸۵	۰.۰۰۹۵

$^{۱۱۰}\mathrm{Pd}$	۱.۵۹ ۱.۶	۲.۱۸ ۱.۹۵	۲.۹۲ –	۴.۰۱ –	۱.۵۷ ۰.۸	۰.۵۰ –	۰.۰۱۲۳ –
$^{۱۱۲}\mathrm{Pd}$	۱.۶۲ –	۲.۲۶ –	۳.۱۱ –	۴.۳۴ –	۱.۵۹ –	۰.۵۸ –	۰.۰۱۲۸ –
$^{۱۱۴}\mathrm{Pd}$	۱.۶۴ –	۲.۳۲ –	۳.۲۲ –	۴.۵۰ –	۱.۶۱ –	۰.۶۳ –	۰.۰۱۲۲ –
$^{۱۱۶}\mathrm{Pd}$	۱.۵۴ –	۲.۰۶ –	۲.۷۸ –	۴.۶۱ –	۱.۵۳ –	۰.۴۹ –	۰.۱۱۵ –
$^{۱۱۸}\mathrm{Xe}$	۱.۶۵ ۱.۱ ۱.۶۵	۲.۲۱ ۰.۹ ۲.۱۹	۲.۷۰ ۰.۴۵ ۲.۶۵	۳.۱۰ $>$۰.۷۵ ۳.۰۳	۱.۶۵ – ۱.۶۵	۰.۸۰ – ۰.۷۸	۰.۰۱۳۲ – ۰.۰۱۳۵
$^{۱۲۲}\mathrm{Xe}$	۱.۵۲ ۱.۵ ۱.۵۷	۱.۹۸ ۱.۵ ۲.۰۵	۲.۵۶ ۱.۰ ۲.۵۰	۳.۰۰ ۱.۵ ۲.۹۲	۱.۵۱ – ۱.۵۷	۰.۴۵ –	۰.۱۰۵ – ۰.۰۱۴۹
$^{۱۲۴}\mathrm{Xe}$	۱.۵۹ ۱.۱۷ ۱.۵۷	۲.۱۵ ۱.۵۲ ۲.۰۵	۲.۷۸ ۱.۱۴ ۲.۵۰	۳.۵۱ ۰.۳۶ ۲.۹۲	۱.۵۸ ۰.۵۵ ۱.۵۷	۰.۵۶ – ۰.۵۴	۰.۰۱۵۱ – ۰.۰۱۴۹
$^{۱۲۶}\mathrm{Xe}$	۱.۶۳ –	۲.۲۵ –	۲.۹۳ –	۳.۶۷ –	۱.۶۱ –	۰.۶۸ –	۰.۰۱۴۳
$^{۱۲۸}\mathrm{Xe}$	۱.۶۴ ۱.۳۵ ۱.۶۰	۲.۲۹ ۱.۳۳ ۲.۱۹	۳.۰۵ ۲.۰۴ ۲.۹۰	۳.۹۹ ۵.۲۸ ۳.۸۹	۱.۶۴ ۱.۲۳ ۱.۶۰	۰.۶۹ – ۰.۵۵	۰.۰۰۹۱ – ۰.۰۰۸۹

^{۱۳۰}Xe	۱.۷۶ –	۲.۷۴ –	۴.۳۰ –	۰.۳۷ –	۱.۷۶ –	۰.۸۰	۰.۰۰۱۲ –
^{۱۳۲}Xe	۱.۸۸ –	۱.۲۰ –	۱.۶۶ –	۲.۸۶ –	۱.۸۹ –	۲.۰۳ –	۰.۳۰۷ –
^{۱۳۴}Xe	۱.۷۹ –	۴.۵۳ –	۲.۰۸ –	۱.۶۵ –	۲.۱۵ –	۶.۱۶ –	۰.۶۵۳ –
^{۱۳۴}Ba	۱.۷۳ ۱.۵۵ ۱.۷۰	۲.۶۸ – ۲.۵۳	۳.۸۷ – ۳.۸۱	۱۰.۸ – ۱.۹۶	۱.۷۲ ۲.۱۷ ۱.۷۰	۰.۵۷ – ۰.۶۸	۰.۰۰۰۸ – ۰.۰۰۲۵

۴-۶) نشانه‌ای برای تشخیص مدل غالب بر هسته

ساده‌ترین نشانه‌ی تجربی برای هر مدل تقارنی، عبارت است از نسبت انرژی ترازهای سوم و دوم نوار پایه [۲۷]. این نسبت به تنهایی برای تضمین اینکه یک ایزوتوپ به یک دسته‌ی خاص تعلّق دارد، کافی نیست، اما اولین نشانه برای دسته‌بندیِ طیف و ماهیتِ شکلِ هسته‌ای است. این نسبت در شکل (۴-۱۲) برای بخش بزرگی از چارت هسته‌ای به عنوان تابعی از تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها (به ترتیب در بعد افقی و عمودی) نشان داده شده است.



شکل (۴-۱۲): نسبت انرژی اولین $^{+}$۴ به انرژی اولین $^{+}$۲ برای بخشی از چارت هسته‌ای. در بُعد افقی و عمودی به ترتیب تعداد نوترون‌ها و پروتون‌ها را داریم. حدهای تقارنی و نقاط بحرانی مختلف در کنار نوار رنگی نوشته شده‌اند. نواحی‌ای که در آن‌ها می‌توانند هسته‌های نماینده‌ی رفتار نقاط بحرانیِ E(۵) و X(۵) یافت شوند به ترتیب با کادرهایی به رنگ آبی آسمانی و بنفش مشخص شده‌اند. [۲۷]

این نسبت برای حالت U(۵) که طیف نوسانگر هماهنگ کروی را دارد، ۲ است، که مثال‌های آن در طول خطوط مربوط به اعداد جادویی (پوسته‌های بسته) یافت می‌شود. برای مورد E(۵) این نسبت برابر با ۲.۰۹ است، در حالی که برای X(۵) تقریباً برابر با ۲.۹ است که به ترتیب متناظر با کادرهایی به رنگ آبیِ آسمانی و بنفش در شکل هستند. حدّ SO(۶) نسبت ۲.۵ را دارد، در حالی که فازهای دورانی خالص نسبت ۳.۳۳ را دارند. کمیّت‌های دیگر از قبیل آهنگ‌های گذار الکترومغناطیسی، شیفت‌های ایزوتوپی و ایزومری نیز می‌توانند برای برچسب‌گذاری نقاط بحرانی و مجموعه‌ای از گذارهای فازی شکل استفاده شوند [۲۷]. به طور مثال، مقدار کوچک برای عملگر چهارقطبی الکتریکی به ازای دومین ترازِ حالت پایه‌ی هسته و مقدار بزرگ برای کمیّت $B\left(E2;2_{\gamma_1}^{+}\rightarrow 2_{g.s}^{+}\right)$، هسته را در طول خط U(۵)-SO(۶) یا نقطه‌ی بحرانی E(۵) قرار می‌دهد. هنگامی که تکانه‌ی چهارقطبی مقادیر منفی یا مثبت را اتخاذ کند، نیز هسته به ترتیب شکل کشیده یا پخت را می‌گیرد.

فصل پنجم:

هامیلتونی بوهر در ساختار جرم وابسته به مکان

در هامیلتونی بوهر و مدل جمعی هندسی [۱۱۲و۱۱۳]، که چندین دهه است چارچوبی را برای درک رفتار جمعی هسته‌های اتمی فراهم نموده‌اند، رایج بوده است که جرم به عنوان یک ثابت در نظر گرفته شود. با این وجود، سرنخ‌هایی وجود دارند که این تقریب (ثابت بودن جرم) ممکن است کافی نباشد. از جمله، پیش‌بینی می‌شود که تکانه‌های لختی با افزایش β، با توان دوم این پارامتر افزایش می‌یابند (رابطه‌ی (۳-۲۶))، در حالی که تکانه‌های لختی‌ای که به طور تجربی از روی طیف تعیین می‌شوند، به طور بسیار متعادل‌تری، به عنوان تابعی از تغییرشکل‌یافتگی‌ای که به طور تجربی از آهنگ‌های گذار $B(E2)$ مشخص می‌شوند، افزایش می‌یابند. این اختلاف به بحث‌هایی منجر شده است که استفاده از هامیلتونی بوهر برای هسته‌های انتقالی و نوسانی توجیه‌پذیر است، امّا کاربرد آن برای هسته‌های تغییرشکل‌یافته نیاز به شفّافیت بیشتری دارد. هم‌چنین مقایسه‌های دقیق‌تر با داده‌های تجربی نشان می‌دهند که پارامتر جرم در هامیلتونی جمعی، نمی‌تواند به عنوان یک ثابت در نظر گرفته شود و باید به عنوان تابعی از مختصات جمعی با حضور عبارت‌های چهارقطبی و نیز تک‌قطبی نوشته شود. علاوه بر این دو سرنخ، می‌توان از حضور عبارت‌هایی به شکل $\pi^2\beta^2$ (π عملگر انرژی جنبشی است) و یا حتی بسیار پیچیده‌تر در بخش مربوط به عملگر انرژی جنبشی هامیلتونی مدل برهم‌کنش بوزونی و عدم وجود چنین جملاتی در همتای این عملگر در مدل جمعی، به عنوان سرنخی دیگر نام برد. بنابراین، جستجو برای یافتن شکل اصلاح شده‌ای از هامیلتونی بوهر که در آن عبارت انرژی جنبشی بر حسب عبارت‌هایی که شامل β^2 هستند نوشته می‌شود، جستجویی معقول و مناسب به نظر می‌رسد. برپایه‌ی این دلایل، هامیلتونی بوهر با جرم وابسته به متغیر β می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. جرم‌های مؤثر وابسته به مکان، در چارچوبی کلی مطالعه شده‌اند [۱۱۴] در حالی که هامیلتونی‌هایی که از طریق روش‌های مکانیک کوانتومی ابرتقارنی [۱۱۵و۱۱۶] قابل حل شناخته شده‌اند، به طور مناسب به گونه‌ای تعمیم‌یافته اند [۱۱۷] که جرم‌های مؤثر وابسته به مکان را در خود جای دهند.

در منبع [۵۰] نشان داده شده است که هامیلتونی بوهر با پتانسیل داویدسون برای بخش وابسته به β آن، می‌تواند در دو نقطه‌ی بحرانی E(۵) و X(۵) به گونه‌ای تعمیم داده شود که وابستگی جرم به پارامتر β در آن گنجانده شود. بخش (۵-۲) و (۵-۳) به بررسی این مطلب اختصاص داده شده است. ما نیز مدل X(۳) را در رهیافت جرم وابسته به مکان مورد مطالعه قرار داده‌ایم [۵۴ و۵۵] که نتایج آن در بخش (۵-۴) آورده شده است.

۵-۱) ساختار جرم وابسته به مکان

ابتدا اساس ساختار مورد نیاز برای جرم‌های مؤثر وابسته به مکان را به طور مختصر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مسأله‌ی اساسی در این ساختار تعمیم عبارت موجود در انرژی جنبشی است. هنگامی که جرم m(**x**) به مکان بستگی دارد [۱۱۴]، با تکانه‌ی $p=-i\hbar\nabla$ جابه‌جا نمی‌شود، بنابراین به منظور استخراج عملگر هامیلتونی، راه‌های بسیاری برای تعمیم شکل معمول انرژی جنبشی $\frac{p^2}{2m_0}$،که در آن جرم یک عبارت ثابت است، وجود دارد. به منظور اجتناب از هر انتخاب خاص، می‌توان از شکل هامیلتونی زیر که اولین بار توسط رز[۱] پیشنهاد شد استفاده نمود [۱۱۸]

$$H=-\frac{\hbar^2}{4}\left(m^{\delta'}(x)\nabla m^{k'}(x)\nabla m^{\lambda'}(x)+m^{\lambda'}(x)\nabla m^{k'}(x)\nabla m^{\delta'}(x)\right)+V(x) \qquad (۵\text{-}۱)$$

در این رابطه $V(x)$ انرژی پتانسیل است و پارامترهای δ',k' و λ' در شرط $\delta'+k'+\lambda'=-1$ صدق می‌کنند. با فرض جرم وابسته به مکان به شکل زیر، که در آن B_0 جرم ثابت و $\frac{1}{f^2(x)}$ جرم وابسته به مکان بدون بعد است،

$$m(x)=\frac{B_0}{f^2(x)} \qquad (۵\text{-}۲)$$

[۱] Von Roos

هامیلتونی رابطه‌ی (۵-۱) به شکل زیر نوشته می‌شود [۵۰]

$$H=-\frac{\hbar^2}{4B_0}\left(f^{\delta}(x)\nabla f^{k}(x)\nabla f^{\lambda}(x)+f^{\lambda}(x)\nabla f^{k}(x)\nabla f^{\delta}(x)\right)+V(x) \tag{۵-۳}$$

در این رابطه $\delta+k+\lambda=2$. در منبع [۱۱۴] نشان داده شده است که هامیلتونی رابطه‌ی (۵-۳) می‌تواند به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$H=-\frac{\hbar^2}{2B_0}\sqrt{f(x)}\nabla f(x)\nabla\sqrt{f(x)}+V_1(x) \tag{۵-۴}$$

که در آن

$$V_1(x)=V(x)+\frac{\hbar^2}{2B_0}\left(\frac{1}{2}(1-\delta-\lambda)f(x)\nabla^2 f(x)+\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\nabla f(x)\right)^2\right) \tag{۵-۵}$$

بنابراین معادله‌ی شرودینگر متناظر با هامیلتونی رابطه‌ی (۵-۴) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2B_0}\sqrt{f(x)}\nabla f(x)\nabla\sqrt{f(x)}+V_1(x)\right)\Psi(x)=E\Psi(x) \tag{۵-۶}$$

این معادله در مرجع [۵۰] به ازای تقارن‌های مختلف E(۵) و X(۵) مورد بررسی قرار گرفته است که نتایج نهایی آن به طور خلاصه مورد بررسی قرا می‌گیرند.

۵-۲) مدل E(۵) در رهیافت جرم وابسته به مکان

دو معادله دیفرانسیل به دست آمده در روابط (۴-۳) و (۴-۴) در ساختار جرم وابسته به مکان به ترتیب به معادلات زیر تبدیل می‌شوند [۵۰]

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{Q}_k^2}{\sin^2\left(\gamma-\frac{2k\pi}{3}\right)}\right]\varphi(\gamma,\Omega)=\Lambda\varphi(\gamma,\Omega) \qquad (۷-۵)$$

$$\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{f}}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4 f\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{f}+\frac{f^2}{2\beta^2}\Lambda\\ +\frac{1}{4}(1-\delta-\lambda)f\nabla^2 f+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)(\nabla f)^2+u(\beta)\end{array}\right]\xi(\beta)=\varepsilon\xi(\beta) \qquad (۸-۵)$$

ملاحظه می‌شود که معادله دیفرانسیل مربوط به بخش γ و زوایای اویلر بدون تغییر باقی می‌ماند در حالی که معادله دیفرانسیل وابسته به β به رابطه‌ی (۵-۸) تبدیل شده است. این معادله به ازای پتانسیل‌های مختلفی از جمله پتانسیل داویدسون [۵۰] و کراتزر [۵۳] حل شده است. شکلی که برای تابع f در این مراجع در نظر گرفته شده است به ترتیب عبارت است از

$$f(\beta)=1+a\beta^2 \qquad (۹-۵)$$

$$f(\beta)=1+a\beta \qquad (۱۰-۵)$$

در این مراجع از فرض $\delta=\lambda=0$ نیز استفاده شده است. از آنجایی که حل معادله‌ی (۵-۸) مشابه با حل حالتهای قبل یعنی جرم ثابت می‌باشد، از بررسی آن در این بخش صرف نظر شده است.

۵-۳) مدل X(۵) در رهیافت جرم وابسته به مکان

در ساختار جرم وابسته به مکان معادلات دیفرانسیل روابط (۴-۲۵) و (۴-۲۶) به ترتیب به دو معادله دیفرانسیل زیر تبدیل می‌شوند

$$\left[-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}+\frac{K^2}{4}\left(\frac{1}{\gamma^2}-\frac{4}{3}\right)+2w(\gamma)\right]\eta(\gamma)=\Lambda\eta(\gamma) \qquad (۱۱-۵)$$

$$\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{f}}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4 f\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{f}+\frac{f^2}{2\beta^2}\tilde{\Lambda}\\+\frac{1}{4}(1-\delta-\lambda)f\nabla^2 f+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)(\nabla f)^2+u(\beta)\end{array}\right]\xi(\beta)=\varepsilon\xi(\beta) \qquad (۱۲-۵)$$

که در آن

$$\tilde{\Lambda}=\Lambda+\frac{L(L+1)}{3} \qquad (۱۳-۵)$$

$$\varepsilon_\gamma=\Lambda+\frac{K^2}{3} \qquad (۱۴-۵)$$

$$v(\beta,\gamma)=u(\beta)+\frac{f^2}{\beta^2}w(\gamma) \qquad (۱۵-۵)$$

معادله‌ی (۵-۱۲) نیز به ازای پتانسیل‌های داویدسون [۵۰] و کراتزر [۵۳] حل شده است. شکلی که برای تابع f در این مراجع در نطر گرفته شده است، مشابه با معادلات (۵-۹) و (۵-۱۰) می‌باشد.

۵-۴) مدل X(۳) در رهیافت جرم وابسته به مکان

ما در این بخش هامیلتونی بوهر در تقارن X(۳) را در ساختار جرم وابسته به مکان مورد بررسی قرار می‌دهیم.

رابطه‌ی (۵-۶) در تقارن X(۳) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2B_0}\sqrt{f(\beta,\theta,\varphi)}\nabla f(\beta,\theta,\varphi)\nabla\sqrt{f(\beta,\theta,\varphi)}+V_1(\beta,\theta,\varphi)-E\right)\Psi(\beta,\theta,\varphi)=0 \qquad (۱۶-۵)$$

که در آن $V_1(\beta,\theta,\varphi)$ پتانسیل غیر مرکزی به شکل زیر است

$$V_1(\beta,\theta,\varphi)=V(\beta,\theta,\varphi)+\frac{\hbar^2}{2B_0}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1-\delta-\lambda)f(\beta,\theta,\varphi)\nabla^2 f(\beta,\theta,\varphi)\\+\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\nabla f(\beta,\theta,\varphi)\right)^2\end{pmatrix} \qquad (۱۷-۵)$$

در این رابطه

$$V(\beta,\theta,\varphi)=V(\beta)+\frac{f^2(\beta)}{\beta^2}V(\theta)+\frac{f^2(\beta)}{\beta^2\sin^2(\theta)}V(\varphi) \qquad (۱۸-۵)$$

در رابطه‌ی (۵-۱۸) $V(\beta)$، $V(\theta)$ و $V(\varphi)$ می‌توانند به صورت هر تابع اختیاری‌ای در نظر گرفته شوند. با انتخاب تابع موج به شکل کلی زیر

$$\Psi(\beta,\theta,\varphi)=\frac{1}{\beta}\frac{R(\beta)}{f(\beta)}\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \qquad (۱۹-۵)$$

و جایگزین نمودن روابط (۵-۱۷)، (۵-۱۸) و (۵-۱۹) در رابطه‌ی (۵-۱۶) و نیز استفاده از روش جداسازی متغیرها به روابط زیر می‌رسیم

$$\begin{pmatrix}\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{2B_0}{\hbar^2}\left(\frac{E-V(\beta)}{f^2(\beta)}\right)-\frac{L(L+1)}{3\beta^2}-\left(\frac{2-\delta-\lambda}{f(\beta)}\left(\frac{f''(\beta)}{2}-\frac{f'(\beta)}{\beta}\right)\right)\\-\left(\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{f'(\beta)}{f(\beta)}\right)^2\end{pmatrix}R(\beta)=0 \qquad (۲۰-۵)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d}{d\theta}+\hat{L}^2-\frac{\Lambda^2}{\sin^2\theta}-\frac{2B_0}{\hbar^2}V(\theta)\right)\Theta(\theta)=0 \qquad (۲۱-۵)$$

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}-\frac{2B_0}{\hbar^2}V(\varphi)+\Lambda^2\right)\Phi(\varphi)=0 \qquad (۲۲-۵)$$

در این روابط Λ^2 و $\hat{L}^2\equiv L(L+1)$ ثابت‌های جداسازی هستند. هم‌چنین L عدد کوانتمی تکانه‌ی زاویه‌ای می‌باشد. از آنجایی که هامیلتونی بوهر در ساختار جرم وابسته به مکان برای تقارن X(۳) (γ و

$\dot{\gamma}$ برابر صفراند) بررسی می‌شود، از حالت خاص معادله‌ی (۵-۱۹) که در آن $\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = Y_{L,M}(\theta,\varphi)$است، استفاده می‌نماییم. به عبارتی دیگر این معادله حاصل این فرض است که $V(\varphi) = V(\theta) = 0$. هم‌چنین به وضوح می‌توان دید که در حالت خاص $f(\beta)=1$ (جرم ثابت) و انتخاب $\delta = \lambda = 0$ معادله‌ی (۵-۲۰) به معادله‌ی زیر تغییر می‌یابد

$$\left(\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{2B_0}{\hbar^2}\left(E - V(\beta)\right) - \frac{L^2}{3\beta^2}\right)R(\beta) = 0 \tag{۵-۲۳}$$

این معادله با تغییر متغیر $R(\beta) = \beta\,\chi(\beta)$ به معادله‌ی شناخته شده‌ی هامیلتونی بوهر در تقارن X(۳) با جرم ثابت تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{2}{\beta}\frac{d}{d\beta} + \frac{2B_0}{\hbar^2}\left(E - V(\beta)\right) - \frac{L^2}{3\beta^2}\right)\chi(\beta) = 0 \tag{۵-۲۴}$$

۵-۴-۱) پتانسیل کراتزر برای مدل X(۳) در رهیافت جرم وابسته به مکان

اکنون معادله‌ی (۵-۲۰) را به ازای پتانسیل کراتزر که به شکل زیر می‌باشد مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$V(\beta) = -\frac{1}{\beta} + \frac{v_0}{\beta^2} \tag{۵-۲۵}$$

با جایگذاری این پتانسیل در رابطه‌ی (۵-۲۰) و با در نظر گرفتن رابطه‌ی زیر

$$f(\beta) = 1 + a\beta \tag{۵-۲۶}$$

و انتخاب $\delta = \lambda = 0$ (تنها محدودیتی که برای این دو پارامتر داریم این است که در شرط $\delta + k + \lambda = 2$ صدق کنند. در اینجا علّت این انتخاب، ساده شدن معادله‌ی (۵-۲۰) است)، به معادله دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\left\{\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{1}{\beta^2\left(1+a\beta\right)^2}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2B_0E}{\hbar^2}+2a^2-\frac{L\left(L+1\right)}{3}a^2\right)\beta^2-\frac{L\left(L+1\right)}{3}\\+\left(\frac{2B_0}{\hbar^2}+2a-2a\frac{L\left(L+1\right)}{3}\right)\beta-\frac{2B_0v_0}{\hbar^2}\end{array}\right]\right\}R\left(\beta\right)=0 \qquad (۲۷\text{-}۵)$$

ویژه مقدار و ویژه تابع این معادله‌ی موج با استفاده از روش NU به ترتیب عبارتند از

$$E_{n,L}=\frac{-\hbar^2}{2B_0}\left(\frac{\left(n^2+n+\frac{5}{2}+\left(2n+1\right)\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}+\frac{2B_0v_0}{\hbar^2}}\right)a+\frac{2B_0\left(1+2av_0\right)}{\hbar^2}}{2n+1+2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}+\frac{2B_0v_0}{\hbar^2}}}\right)^2+\frac{\hbar^2a^2}{8B_0}+a^2v_0+a$$

(۲۸-۵)

$$\xi\left(\beta\right)=N\beta^{\upsilon}\left(1+a\beta\right)^{-\upsilon-2+\frac{\lambda}{a}}P_n^{\left(\tau-1,\frac{-\rho}{a}-\tau-1\right)}\left(1+2a\beta\right) \qquad (۲۹\text{-}۵)$$

در رابطه‌ی اخیر

$$\upsilon=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}+\frac{2B_0v_0}{\hbar^2}} \qquad (۳۰\text{-}۵)$$

$$\lambda=a-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{2B_0}{\hbar^2}\left(a+a^2v_0-E\right)}-a\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}+\frac{2B_0v_0}{\hbar^2}}\right) \qquad (۳۱\text{-}۵)$$

$$\tau=1+2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}+\frac{2B_0v_0}{\hbar^2}} \qquad (۳۲\text{-}۵)$$

$$\rho=-2a+2\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{2B_0}{\hbar^2}\left(a+a^2v_0-E\right)}-a\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}+\frac{2B_0v_0}{\hbar^2}}\right) \qquad (۳۳\text{-}۵)$$

$$N=\left(\sqrt{\int_0^\infty\left[\xi\left(\beta\right)\right]^2\beta^2d\beta}\right)^{-1} \qquad (۳۴\text{-}۵)$$

که در آن

$$\xi(\beta)=\frac{R(\beta)}{\beta(1+a\beta)} \tag{۳۵-۵}$$

برای تعیین طیف انرژی هسته‌های مختلف و مقایسه‌ی آن‌ها با داده‌های تجربی متناظر ابتدا باید رابطه‌ی (۵-۲۸) به طریق زیر نرمالیزه شود

$$R_{n,L}=\frac{E_{n,L}-E_{0,0}}{E_{0,2}-E_{0,0}} \tag{۳۶-۵}$$

این نسبت به ازای برخی از ترازهای حالت پایه و اولین نوار β محاسبه شده است و مقادیر آن برای هسته‌های مختلف در جدول (۵-۱) گزارش شده است. پارامترهای "a"و "v_0"به طریقی تعیین شده‌اند که کمیت آماری تعریف شده در رابطه‌ی (۴-۹۵) مینیمم شود. این کمیت در جدول (۵-۱) برای هر هسته گزارش شده است. توافق بسیار خوبی بین نتایج ما و داده‌های تجربی مشاهده می‌شود.

جدول (۵-۱) مقایسه‌ی محاسبات عددی طیف انرژی مربوط به مدل X(۳) در رهیافت جرم وابسته به مکان به ازای پتانسیل کراتزر با داده‌های تجربی متناظر [۸۲-۸۳، ۸۵-۹۸، ۱۰۰-۱۰۸، ۱۱۰-۱۱۱ و ۱۱۹-۱۲۹]

	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	v_0	a	σ
^{98}Ru	۲.۴۵	۳.۶۶	۴.۵۰	۵.۰۷	۲.۳۱	۲.۸۲	۳.۶۱	۴.۷۵	۰.۰۱۰۰	۰.۳۳
	۲.۱۴	۳.۴۱	۴.۷۹	–	۲.۰۳	–	–			
^{100}Ru	۲.۷۴	۴.۴۹	۵.۹۴	۷.۰۵	۲.۹۲	۳.۵۱	۴.۵۷	۸.۷۲	۰.۰۰۹۴	۰.۷۱
	۲.۲۷	۳.۸۵	۵.۶۷	۷.۸۵	۲.۱۰	–	–			
^{102}Ru	۲.۷۰	۴.۳۷	۵.۷۲	۶.۷۳	۲.۸۹	۳.۴۷	۴.۴۸	۸.۰۰	۰.۰۰۸۲	۰.۵۹
	۲.۳۳	۳.۹۴	۵.۷۰	۷.۲۳	۱.۹۹	–	–			
^{104}Ru	۲.۸۳	۴.۸۳	۶.۵۸	۷.۸۰	۳.۸۰	۴.۴۱	۵.۵۵	۱۱.۲۵	۰.۰۰۱۹	۰.۵۸
	۲.۴۸	۴.۳۵	۶.۴۸	۸.۶۹	۲.۷۶	۴.۲۳	۵.۸۱			

	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	v_0	a	σ
^{۱۰۲}Pd	۲.۶۶ ۲.۲۹	۴.۲۴ ۳.۷۹	۵.۴۸ ۵.۴۱	۶.۳۹ ۷.۱۷	۳.۱۴ ۲.۸۶	۳.۶۸ ۳.۴۹	۴.۶۳ ۴.۱۳	۷.۳۰	۰.۰۰۱۰	۰.۴۷
^{۱۰۴}Pd	۲.۵۸ ۲.۳۸	۴.۰۱ ۴.۰۵	۵.۰۸ ۵.۷۹	۵.۸۴ –	۲.۸۹ ۲.۴۰	۳.۴۱ ۳.۲۳	۴.۲۹ ۳.۹۲	۶.۱۷	۰.۰۰۱۱	۰.۴۴
^{۱۰۶}Pd	۲.۵۰ ۲.۴۰	۳.۷۹ ۴.۰۶	۴.۷۲ –	۵.۳۶ –	۲.۴۹ ۲.۲۱	۳.۰۰ ۳.۰۵	۳.۸۳ ۳.۷۷	۵.۲۶	۰.۰۰۷۰	۰.۲۰
^{۱۰۸}Pd	۲.۷۳ ۲.۴۲	۴.۴۷ ۴.۰۸	۵.۹۱ ۵.۸۷	۷.۰۰ ۷.۵۰	۳.۰۵ ۲.۴۳	۳.۶۳ ۳.۳۲	۴.۶۷ –	۸.۶۲	۰.۰۰۶۹	۰.۴۴
^{۱۱۰}Pd	۲.۷۴ ۲.۴۶	۴.۶۰ ۴.۲۱	۶.۱۴ ۶.۱۴	۷.۳۳ ۸.۲۱	۳.۲۹ ۲.۵۳	۳.۸۸ ۳.۲۵	۴.۹۶ ۴.۶۰	۹.۴۴	۰.۰۰۴۸	۰.۶۰
^{۱۱۲}Pd	۲.۶۴ ۲.۵۳	۴.۱۹ ۴.۴۵	۵.۳۹ –	۶.۲۶ –	۲.۷۷ ۲.۵۵	۳.۳۳ ۳.۲۷	۴.۲۸ –	۶.۸۹	۰.۰۰۷۵	۰.۲۱
^{۱۱۴}Pd	۲.۸۵ ۲.۵۶	۴.۹۰ ۴.۵۱	۶.۷۲ ۶.۶۶	۸.۲۱ ۸.۶۰	۳.۴۰ ۲.۶۲	۴.۰۲ ۴.۱۸	۵.۲۲	۱۱.۸۱	۰.۰۰۷۴	۰.۴۵
^{۱۱۶}Pd	۲.۸۹ ۲.۵۸	۵.۰۲ ۴.۵۸	۶.۹۶ ۶.۸۹	۸.۵۸ ۹.۰۸	۳.۹۱ ۳.۲۶	۴.۵۴ –	۵.۷۵ –	۱۳.۰۰	۰.۰۰۳۴	۰.۴۹
^{۱۰۶}Cd	۲.۵۸ ۲.۳۶	۴.۰۲ ۳.۹۴	۵.۱۰ ۴.۸۱	۵.۸۷ –	۲.۷۳ ۲.۸۴	۳.۲۶ ۳.۷۵	۴.۱۶ –	۶.۲۱	۰.۰۰۵۳	۰.۳۱
^{۱۰۸}Cd	۲.۶۷ ۲.۳۸	۴.۲۷ ۴.۰۱	۵.۵۳ ۵.۸۲	۶.۴۶ ۶.۵۰	۲.۹۱ ۲.۷۲	۳.۴۷ ۳.۴۲	۴.۴۴ –	۷.۴۱	۰.۰۰۶۰	۰.۲۳
^{۱۱۰}Cd	۲.۵۱ ۲.۳۴	۳.۸۲ ۳.۷۷	۴.۷۶ ۴.۹۸	۵.۴۱ ۴.۴۹	۲.۴۶ ۲.۲۴	۲.۹۸ ۲.۷۱	۳.۸۲ –	۵.۳۵	۰.۰۰۸۵	۰.۲۰
^{۱۱۲}Cd	۲.۴۸ ۲.۲۹	۳.۷۳ ۳.۵۱	۴.۶۲ ۴.۶۷	۵.۲۳ ۵.۹۷	۲.۳۷ ۱.۹۸	۲.۸۹ ۲.۳۸	۳.۷۰ ۳.۰۳	۵.۰۲	۰.۰۰۹۵	۰.۵۰

	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	v_0	a	σ
^{۱۱۴}Cd	۲.۴۲	۳.۵۶	۴.۳۴	۴.۸۶	۲.۲۵	۲.۷۵	۳.۵۱	۴.۴۰	۰.۰۰۹۸	۰.۳۲
	۲.۳۰	۳.۵۶	۴.۷۸	–	۲.۰۳	–	۳.۱۰			
^{۱۱۶}Cd	۲.۶۱	۴.۱۰	۵.۲۵	۶.۰۷	۲.۶۹	۳.۲۲	۴.۱۱	۶.۶۰	۰.۰۰۵۵	۰.۳۱
	۲.۳۷	۳.۹۵	۵.۵۰	۵.۹۲	۲.۵۰	۳.۸۰	–			
^{۱۱۸}Cd	۲.۶۲	۴.۱۳	۵.۲۹	۶.۱۳	۲.۹۲	۳.۴۷	۴.۳۹	۶.۷۴	۰.۰۰۲۹	۰.۲۷
	۲.۳۹	۳.۹۷	۵.۳۱	۶.۱۹	۲.۶۴	۳.۹۳	–			
^{۱۲۰}Cd	۲.۶۴	۴.۱۹	۵.۴۰	۶.۲۸	۲.۸۲	۳.۳۷	۴.۳۲	۷.۰۲	۰.۰۰۶۶	۰.۲۲
	۲.۳۸	۴.۰۲	۵.۷۰	۶.۱۹	۲.۷۴	–	–			
^{۱۱۸}Xe	۲.۸۰	۴.۷۲	۶.۳۸	۷.۶۹	۳.۲۲	۳.۸۳	۴.۹۶	۱۰.۳۵	۰.۰۰۷۷	۰.۵۲
	۲.۴۰	۴.۱۴	۶.۱۵	۸.۳۵	۲.۴۶	۳.۶۴	۵.۱۳			
^{۱۲۰}Xe	۲.۸۶	۴.۹۱	۶.۷۵	۸.۲۶	۳.۴۷	۴.۰۹	۵.۲۸	۱۱.۹۶	۰.۰۰۶۸	۰.۴۸
	۲.۴۷	۴.۳۳	۶.۵۱	۸.۹۰	۲.۸۲	۳.۹۵	۵.۳۱			
^{۱۲۲}Xe	۲.۸۹	۵.۰۳	۶.۹۸	۸.۶۱	۳.۸۶	۴.۴۹	۵.۷۱	۱۳.۱۰	۰.۰۰۴۰	۰.۴۶
	۲.۵۰	۴.۴۳	۶.۶۹	۹.۱۸	۳.۴۷	۴.۵۱	–			
^{۱۲۴}Xe	۲.۸۸	۴.۹۷	۶.۸۸	۸.۴۴	۳.۹۰	۴.۵۲	۵.۷۱	۱۲.۵۷	۰.۰۰۳۰	۰.۴۰
	۲.۴۸	۴.۳۷	۶.۵۸	۸.۹۶	۳.۵۸	۴.۶۰	۵.۶۹			
^{۱۲۶}Xe	۲.۸۴	۴.۸۳	۶.۵۹	۸.۰۰	۳.۷۹	۴.۴۱	۵.۶۰	۱۱.۲۵	۰.۰۰۳۶	۰.۴۴
	۲.۴۲	۴.۲۱	۶.۲۷	۸.۶۴	۳.۳۸	۴.۳۲	۵.۲۵			
^{۱۲۸}Xe	۲.۷۷	۴.۵۹	۶.۱۳	۷.۳۱	۳.۴۵	۴.۰۳	۵.۱۰	۹.۴۱	۰.۰۰۲۵	۰.۴۹
	۲.۳۳	۳.۹۲	۵.۶۷	۷.۶۰	۳.۵۷	۴.۵۲	–			
^{۱۳۰}Xe	۲.۶۲	۴.۱۳	۵.۲۹	۶.۱۳	۲.۹۶	۳.۵۰	۴.۴۲	۶.۷۵	۰.۰۰۲۲	۰.۴۲
	۲.۲۵	۳.۶۳	۵.۰۳	–	۳.۳۵	(۴.۰۱)	۴.۵۳			
^{۱۳۲}Xe	۲.۳۴	۳.۳۶	۴.۰۴	۴.۴۸	۲.۲۷	۲.۷۴	۳.۴۳	۳.۸۱	۰.۰۰۲۸	۰.۳۳
	۲.۱۶	۳.۱۶	–	–	۲.۷۷	۲.۹۷	۳.۱۶			

	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	v_0	a	σ
^{۱۳۴}Xe	۲.۱۴ ۲.۰۴	۲.۹۰ ۲.۵۲	۳.۳۵ ۳.۵۴	۳.۶۳ –	۱.۹۲ ۱.۹۳	۲.۳۵ ۲.۶۷	۲.۹۰ ۲.۷۸	۲.۵۸	۰.۰۰۳۹	۰.۲۵
^{۱۳۰}Ba	۲.۸۷ ۲.۵۳	۴.۹۵ ۴.۴۶	۶.۸۲ ۶.۷۰	۸.۳۶ ۹.۱۲	۳.۸۰ ۳.۳۰	۴.۴۲ ۴.۳۶	۵.۶۱ ۵.۱۶	۱۲.۳۰	۰.۰۰۳۶	۰.۴۸
^{۱۳۲}Ba	۲.۷۰ ۲.۴۳	۴.۳۹ ۴.۱۶	۵.۷۵ ۶.۰۳	۶.۷۷ ۶.۷۱	۳.۱۶ ۳.۲۴	۳.۷۲ ۳.۶۳	۴.۷۳ –	۸.۱۱	۰.۰۰۳۵	۰.۲۱
^{۱۳۴}Ba	۲.۵۰ ۲.۳۲	۳.۷۸ ۳.۶۶	۴.۷۰ ۴.۶۹	۵.۳۳ –	۲.۵۴ ۲.۹۱	۳.۰۵ ۳.۳۶	۳.۸۷ ۳.۵۰	۵.۲۱	۰.۰۰۴۹	۰.۲۹
^{۱۳۶}Ba	۲.۱۵ ۲.۲۸	۲.۹۱ ۲.۷۰	۳.۳۶ –	۳.۶۴ –	۱.۹۱ ۱.۹۳	۲.۳۴ ۲.۵۵	۲.۹۰ ۲.۸۸	۲.۶۰	۰.۰۰۴۷	۰.۱۶
^{۱۴۲}Ba	۲.۸۲ ۲.۳۲	۴.۷۹ ۴.۰۸	۶.۵۰ ۶.۰۱	۷.۸۸ ۸.۱۴	۳.۷۹ ۴.۲۷	۴.۳۹ (۴.۷۱)	۵.۵۱ –	۱۰.۹۱	۰.۰۰۱۵	۰.۵۳
^{۱۳۴}Ce	۲.۹۲ ۲.۵۶	۵.۱۳ ۴.۵۵	۷.۱۹ ۶.۸۷	۸.۹۴ ۹.۰۹	۳.۵۶ ۳.۷۵	۴.۲۱ ۴.۸۰	۵.۴۸ –	۱۴.۱۵	۰.۰۰۸۱	۰.۴۴
^{۱۳۶}Ce	۲.۶۰ ۲.۳۸	۴.۰۷ ۴.۰۱	۵.۱۸ –	۵.۹۸ –	۲.۶۱ ۱.۹۵	۳.۱۶ ۳.۹۰	۴.۰۸ –	۶.۴۱	۰.۰۰۹۳	۰.۵۹
^{۱۳۸}Ce	۲.۳۳ ۲.۳۱	۳.۳۳ ۲.۹۱	۳.۹۹ ۳.۹۴	۴.۴۲ ۴.۴۹	۲.۱۴ ۱.۸۷	۲.۶۲ ۳.۳۵	۳.۳۰ –	۳.۷۰	۰.۰۰۷۹	۰.۴۰
^{۱۴۰}Nd	۲.۲۹ ۲.۳۳	۳.۲۳ –	۳.۸۴ –	۴.۲۲ –	۲.۰۶ ۱.۸۳	۲.۵۳ ۲.۷۷	۳.۱۹ ۳.۱۰	۳.۴۱	۰.۰۰۸۵	۰.۲۰
^{۱۴۸}Nd	۲.۸۱ ۲.۴۹	۴.۷۵ ۴.۲۴	۶.۴۴ ۶.۱۵	۷.۷۸ ۸.۱۹	۳.۳۳ ۳.۰۴	۳.۹۴ ۳.۸۸	۵.۰۸ ۵.۳۲	۱۰.۶۰	۰.۰۰۵۶	۰.۳۶
^{۱۴۰}Sm	۲.۶۰ ۲.۳۵	۴.۰۷ ۳.۹۲	۵.۱۸ ۵.۶۰	۵.۹۸ ۵.۹۸	۲.۶۰ ۱.۸۷	۳.۱۵ –	۴.۰۷ –	۶.۴۱	۰.۰۰۹۵	۰.۴۵

	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	v_0	a	σ
^{۱۴۲}Sm	۲.۳۹	۳.۵۰	۴.۲۵	۴.۷۴	۲.۲۳	۲.۷۲	۳.۴۶	۴.۲۱	۰.۰۰۹۱	۰.۲۳
	۲.۳۳	۳.۱۵	۴.۳۳	۴.۹۸	۱.۸۹	۲.۶۸	۳.۳۶			
^{۱۴۲}Gd	۲.۶۵	۴.۲۱	۵.۴۳	۶.۳۳	۲.۷۶	۳.۱۴	۴.۲۸	۷.۱۲	۰.۰۰۸۳	۰.۲۷
	۲.۳۵	۳.۸۹	۵.۳۵	۶.۶۱	۲.۶۶	–	–			
^{۱۴۴}Gd	۲.۴۱	۳.۵۳	۴.۳۰	۴.۸۱	۲.۲۶	۲.۷۶	۳.۵۱	۴.۳۲	۰.۰۰۸۴	۰.۳۰
	۲.۳۵	۳.۱۷	–	–	۲.۵۴	۲.۹۹	–			
^{۱۵۲}Gd	۲.۵۷	۳.۹۸	۳.۰۳	۵.۷۸	۲.۶۷	۳.۲۱	۴.۰۹	۶.۰۳	۰.۰۰۵۸	۰.۶۲
	۲.۱۹	۳.۵۷	۵.۰۷	۶.۶۸	۱.۷۹	۲.۷۰	۳.۷۲			
^{۱۵۴}Dy	۲.۵۹	۴.۰۴	۵.۱۳	۵.۹۰	۲.۸۳	۳.۳۶	۴.۲۵	۶.۲۹	۰.۰۰۳۲	۰.۶۶
	۲۳/۲	۳.۶۶	۵.۲۳	۶.۸۹	۱.۹۸	۲.۷۱	۳.۷۴			
^{۱۵۶}Er	۲.۷۲	۴.۴۴	۵.۸۴	۶.۹۰	۳.۱۵	۳.۷۲	۴.۷۴	۸.۴۱	۰.۰۰۴۶	۰.۴۷
	۲.۳۱	۳.۸۹	۵.۶۹	۷.۶۴	۲.۷۰	۳.۵۴	۴.۴۹			
^{۱۸۶}Pt	۲.۹۳	۵.۱۷	۷.۲۸	۹.۰۸	۳.۸۰	۴.۴۵	۵.۷۳	۱۴.۶۵	۰.۰۰۶۲	۰.۷۳
	۲.۵۶	۴.۵۸	۷.۰۱	۹.۷۰	۲.۴۶	۴.۱۷	۶.۳۸			
^{۱۸۸}Pt	۲.۸۸	۴.۹۹	۶.۹۱	۸.۵۰	۳.۷۲	۴.۳۵	۵.۵۶	۱۲.۷۵	۰.۰۰۵۰	۰.۵۳
	۲.۵۳	۴.۴۶	۶.۷۱	۹.۱۸	۳.۰۱	۴.۲۰	–			
^{۱۹۰}Pt	۲.۸۴	۴.۸۵	۶.۶۴	۸.۰۸	۳.۵۰	۴.۱۲	۵.۲۹	۱۱.۴۶	۰.۰۰۵۷	۰.۴۰
	۲.۴۹	۴.۳۵	۶.۴۷	۸.۵۷	۳.۱۱	۴.۰۷	–			
^{۱۹۲}Pt	۲.۸۵	۴.۹۰	۶.۷۲	۸.۲۱	۳.۸۵	۴.۴۷	۵.۶۳	۱۱.۸۶	۰.۰۰۲۴	۰.۴۰
	۲.۴۸	۴.۳۱	۶.۳۸	۸.۶۲	۳.۷۸	۴.۵۵	–			
^{۱۹۴}Pt	۲.۸۵	۴.۸۶	۶.۶۶	۸.۱۰	۳.۸۱	۴.۴۳	۵.۵۸	۱۱.۵۶	۰.۰۰۲۳	۰.۴۹
	۲.۴۷	۴.۳۰	۶.۳۹	۸.۶۷	۳.۲۳	۴.۶۰	–			
^{۱۹۶}Pt	۲.۸۲	۴.۷۸	۶.۴۸	۷.۸۴	۳.۶۶	۴.۲۵	۵.۳۹	۱۰.۸۱	۰.۰۰۲۷	۰.۵۱
	۲.۴۷	۴.۲۹	۶.۳۳	۸.۵۶	۳.۱۹	۳.۸۳	–			

	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	ν_0	a	σ
$^{198}\mathrm{Pt}$	۲.۶۵ ۲.۴۲	۴.۲۱ ۴.۲۱	۵.۴۳ ۶.۲۱	۶.۳۲ –	۳.۰۱ ۲.۲۵	۳.۵۶ ۳.۱۴	۴.۵۱ ۴.۳۸	۷.۱۴	۰.۰۰۲۸	۰.۵۴
$^{200}\mathrm{Pt}$	۲.۵۵ ۲.۳۵	۳.۹۳ –	۴.۹۴ –	۵.۶۶ –	۲.۷۲ (۲.۳۸)	۳.۲۵ ۳.۶۰	۴.۱۱ ۴.۱۲	۵.۸۲	۰.۰۰۳۳	۰.۳۱

علاوه بر طیف انرژی، آهنگ‌های گذار با استفاده از رابطه‌ی (۴-۸۴) برای برخی از هسته‌های موجود در جدول (۵-۱) محاسبه شده است و نتایج نهایی در جدول (۵-۲) گزارش شده است. محاسبات جدول (۵-۲)، به ازای پارامترهای به دست آمده (ν_0و a) برای تعیین طیف انرژی که در جدول (۵-۱) گزارش شده‌اند، انجام شده‌اند. پس از تعیین آهنگ‌های گذار، اختلاف آن‌ها از داده‌های تجربی از طریق تعیین کمیت σ، محاسبه شده است و مقادیر به دست آمده برای هر هسته در جدول (۵-۲) آورده شده است. اگرچه اختلاف‌هایی بین نتایج ما و داده‌های تجربی به خصوص برای هسته‌های $^{154}\mathrm{Dy}$، $^{116}\mathrm{Cd}$، $^{114}\mathrm{Cd}$ (ایزوتوپ‌های کادمیم[1]) و $^{156}\mathrm{Er}$ مشاهده می‌شود، اما توافق نسبتاً خوبی برای سایر هسته‌ها به چشم می‌خورد.

جدول (۵-۲) مقایسه‌ی محاسبات عددی آهنگ‌های گذار مربوط به مدل X(۳) در رهیافت جرم وابسته به مکان به ازای پتانسیل کراتزر با داده‌های تجربی متناظر. تمام گذارها بر گذار $2_{g.s} \rightarrow 0_{g.s}$ تقسیم شده‌اند.

	$4_{g.s} \rightarrow 2_{g.s}$	$6_{g.s} \rightarrow 4_{g.s}$	$8_{g.s} \rightarrow 6_{g.s}$	$10_{g.s} \rightarrow 8_{g.s}$	$2_{\beta_1} \rightarrow 2_{g.s}$	$0_{\beta_1} \rightarrow 2_{g.s}$	σ
$^{98}\mathrm{Ru}$	۱.۰۴ ۱.۴۴	۱.۱۲ –	۱.۳۶ –	۱.۸۳ –	۰.۹۷ ۱.۶۲	۱.۰۴ –	۰.۷۶
$^{100}\mathrm{Ru}$	۱.۳۵ ۱.۴۵	۱.۹۰ –	۳.۱۱ –	۵.۸۵ –	۰.۶۶ ۰.۶۴	۱.۲۰ ۰.۹۸	۰.۱۷
$^{102}\mathrm{Ru}$	۱.۳۶ ۱.۵۰	۱.۹۹ –	۳.۲۵ –	۶.۰۱ –	۰.۶۳ ۰.۶۲	۱.۱۷ ۰.۸۰	۰.۲۸

[1] Cadmium

^{104}Ru	۱.۲۸ ۱.۱۸	۱.۵۷ –	۲.۰۸ –	۳.۱۳ –	۰.۶۷ ۰.۶۳	۰.۹۷ ۰.۴۲	۰.۴۰
^{102}Pd	۱.۵۶ ۱.۵۶	۲.۲۶ –	۳.۷۰ –	۶.۷۳ –	۰.۴۳ ۰.۴۶	۱.۱۶ –	۰.۰۳
^{104}Pd	۱.۳۶ ۱.۳۶	۱.۹۱ –	۳.۰۹ –	۵.۰۷ –	۰.۶۰ ۰.۶۱	۱.۰۹ –	۰.۰۱
^{106}Pd	۱.۲۳ ۱.۶۳	۱.۶۸ –	۲.۶۵ –	۴.۶۴ –	۰.۸۰ ۰.۹۸	۱.۱۷ ۰.۶۷	۰.۴۷
^{108}Pd	۱.۳۵ ۱.۴۷	۱.۹۰ ۲.۱۶	۳.۰۶ ۲.۹۹	۵.۵۶ –	۰.۶۱ ۱.۴۳	۱.۰۷ ۱.۰۵	۰.۴۳
^{110}Pd	۱.۳۰ ۱.۷۱	۱.۷۲ –	۲.۴۶ –	۴.۳۶ –	۰.۶۵ ۰.۹۸	۱.۰۵ ۰.۶۴	۰.۴۷
^{106}Cd	۱.۶۰ ۱.۷۸	۲.۶۴ –	۴.۶۹ –	۹.۶۹ –	۰.۴۱ ۰.۴۳	۱.۲۷ –	۰.۲۷
^{108}Cd	۱.۵۰ ۱.۵۴	۲.۲۳ –	۳.۵۸ –	۷.۲۸ –	۰.۵۳ ۰.۶۴	۱.۲۵ –	۰.۱۲
^{110}Cd	۱.۳۵ ۱.۶۸	۱.۹۵ –	۳.۴۴ –	۷.۸۸ –	۰.۷۲ ۱.۰۹	۱.۳۲ –	۰.۵۰
^{112}Cd	۱.۷۵ ۲.۰۲	۳.۱۶ –	۶.۵۴ –	۱۵.۵۲ –	۰.۴۲ ۰.۵۰	۱.۸۲ ۱.۶۹	۰.۲۲
^{114}Cd	۱.۲۹ ۱.۹۹	۱.۸۹ ۳.۸۳	۳.۴۷ ۲.۷۳	۷.۵۰ –	۰.۷۹ ۰.۷۱	۱.۳۱ ۰.۸۸	۱.۱۲
^{116}Cd	۱.۲۵ ۱.۷۰	۱.۷۰ –	۲.۷۰ –	۴.۵۲ –	۰.۷۳ ۰.۶۳	۱.۱۴ ۰.۰۲	۰.۸۵
^{118}Xe	۱.۰۱ ۱.۱۱	۱.۰۲ ۰.۸۸	۱.۰۵ ۰.۴۹	۱.۱۳ ۰.۷۳	۰.۹۹ –	۱.۰۰ –	۰.۴۱
^{120}Xe	۱.۰۱ ۱.۱۶	۱.۰۲ ۱.۱۷	۱.۰۵ ۰.۹۶	۱.۰۹ ۰.۹۱	۰.۹۹ –	۱.۰۰ –	۰.۱۷
^{122}Xe	۱.۰۲ ۱.۴۷	۱.۰۴ ۰.۸۹	۱.۰۹ ۰.۴۴	۱.۱۵ –	۰.۹۷ –	۱.۰۰ –	۰.۵۷
^{124}Xe	۱.۰۴ ۱.۳۴	۱.۱۰ ۱.۵۹	۱.۱۶ ۰.۶۳	۱.۳۳ ۰.۲۹	۰.۹۵ ۰.۷۰	۰.۹۹ –	۰.۶۶

^{128}Xe	۱.۲۵ ۱.۴۷	۱.۶۱ ۱.۹۴	۲.۱۵ ۲.۳۹	۲.۰۶ ۲.۷۴	۰.۷۱ ۱.۱۹	۱.۰۱ –	۰.۳۷
^{130}Ba	۱.۰۶ ۱.۳۶	۱.۱۳ ۱.۶۲	۱.۲۵ ۱.۵۵	۱.۵۰ ۰.۹۳	۰.۹۲ –	۰.۹۹ –	۰.۵۰
^{142}Ba	۱.۰۴ ۱.۴۰	۱.۰۹ ۰.۵۶	۱.۱۸ –	۱.۳۱ –	۰.۹۵ –	۱.۰۰ –	۰.۶۴
^{152}Gd	۱.۷۴ ۱.۸۴	۳.۰۰ ۲.۷۴	۵.۵۱ –	۱۱.۶۰ –	۰.۳۳ ۰.۲۳	۱.۵۶ ۲.۴۷	۰.۵۵
^{154}Dy	۱.۲۲ ۱.۶۲	۱.۵۵ ۲.۰۵	۲.۲۹ ۲.۲۷	۳.۵۷ ۱.۸۶	۰.۷۹ –	۱.۲۱ –	۱.۰۶
^{156}Er	۱.۰۶ ۱.۷۸	۱.۱۴ ۱.۸۹	۱.۳۱ ۰.۷۶	۱.۶۰ ۰.۸۸	۰.۹۴ –	۱.۰۲ –	۰.۸۰
^{192}Pt	۱.۰۴ ۱.۵۶	۱.۰۹ ۱.۲۳	۱.۱۹ –	۱.۳۲ –	۰.۹۵ ۱.۹۱	۰.۹۹ –	۰.۷۸
^{194}Pt	۱.۰۳ ۱.۷۳	۱.۰۷ ۱.۳۶	۱.۱۲ ۱.۰۲	۱.۲۴ ۰.۶۹	۰.۹۶ ۱.۸۱	۰.۹۹ ۰.۰۱	۰.۷۲
^{196}Pt	۱.۲۴ ۱.۴۸	۱.۵۴ ۱.۸۰	۲.۰۱ ۱.۹۲	۳.۰۰ –	۰.۷۳ –	۱.۰۲ ۰.۰۷	۰.۵۹
^{198}Pt	۱.۲۱ ۱.۱۹	۱.۵۶ ۱.۷۸	۲.۲۰ –	۳.۵۸ –	۰.۷۷ ۱.۱۶	۱.۰۴ –	۰.۲۹

۵-۴-۲) پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته برای مدل X(۳) در رهیافت جرم وابسته به مکان

در این بخش، معادله دیفرانسیل رابطه‌ی (۵-۲۰) را به ازای پتانسیل داویدسون تعمیم یافته‌ای که آن را به شکل زیر در نظر گرفته‌ایم، بررسی می‌نماییم

$$V(\beta) = V_0 + V_1\beta^2 + V_2\beta^4 + \frac{V_3}{\beta^2} \qquad (۳۷-۵)$$

با انتخابِ

$$\delta = 2+\sqrt{2}, \lambda = 2-\sqrt{2}, k = -2 \qquad (۳۸-۵)$$

به گونه‌ای که هم‌چنان شرط $\delta + k + \lambda = 2$ برقرار باشد، و در نظر گرفتن تابع $f(\beta)$ به صورت زیر

$$f(\beta) = \frac{f_0}{\beta} \qquad (۳۹-۵)$$

معادله موج مربوط به هامیلتونی بوهر در تقارن X(۳) در رهیافت جرم وابسته ه مکان به ازای پتانسیل رابطه‌ی (۵-۳۷) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{d^2}{d\beta^2} + \left(\varepsilon_\beta - \frac{w+a+2}{\beta^2} - b\beta^2 - c\beta^4 - d\beta^6\right)\right) R(\beta) = 0 \qquad (۴۰-۵)$$

که در آن

$$\varepsilon_\beta = -\frac{2B_0V_3}{\hbar^2 f_0^2} \qquad (۴۱-۵)$$

$$w + a + 2 = \frac{L(L+1)}{3} + 4 \qquad (۴۲-۵)$$

$$b = -\frac{2B_0}{\hbar^2 f_0^2}(E - V_0) \qquad (۴۳-۵)$$

$$c = \frac{2B_0V_1}{\hbar^2 f_0^2} \qquad (۴۴-۵)$$

$$d = \frac{2B_0V_2}{\hbar^2 f_0^2} \qquad (۴۵-۵)$$

برای حل معادله‌ی (۵-۴۰) به طریق زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا از تغییر متغیر $y=\beta^2$ استفاده می‌نماییم. این انتخاب منجر می‌شود که معادله‌ی مورد نظر به معادله‌ی زیر تبدیل شود

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\frac{1}{2y}\frac{d}{dy}+\left(\frac{\frac{\varepsilon_\beta}{4}}{y}-\frac{\frac{w+a+2}{4}}{y^2}-\frac{b}{4}-\frac{c}{4}y-\frac{d}{4}y^2\right)\right)R(y)=0 \qquad (۴۶-۵)$$

سپس با انتخاب $R(y)=F(y)y^{-\frac{1}{4}}$ معادله‌ی (۵-۴۶) به شکل زیر تغییر می‌کند

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\left(\frac{\frac{\varepsilon_\beta}{4}}{y}-\frac{\frac{w+a+2}{4}-\frac{3}{16}}{y^2}-\frac{b}{4}-\frac{c}{4}y-\frac{d}{4}y^2\right)\right)F(y)=0 \qquad (۴۷-۵)$$

برای حل این معادله، تابع $F(y)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$F(y)=y^A e^{y(B+Dy)}G(y) \qquad (۴۸-۵)$$

که در آن

$$A=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{w+a+\frac{9}{4}}}{2} \qquad (۴۹-۵)$$

$$B=-\frac{c}{4\sqrt{d}} \qquad (۵۰-۵)$$

$$D=-\frac{\sqrt{d}}{4} \qquad (۵۱-۵)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۵-۴۸) در رابطه‌ی (۵-۴۷) به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم

$$\frac{d^2G(y)}{dy^2}+\left(\frac{2A}{y}+2B+4Dy\right)\frac{dG(y)}{dy}+\left(\frac{2AB+\frac{\varepsilon_\beta}{2}}{y}+2D(1+2A)+B^2-\frac{b}{4}\right)G(y)=0$$

(۵۲-۵)

رابطه‌ی (۵-۵۲) یک معادله دیفرانسیل هیون[۱] [۱۳۰و۱۳۱] می‌باشد، لذا تابع موج آن به صورت زیر نوشته می‌شود

$$G\left(y\right)=H_b\left(\alpha',\beta',\gamma',\delta',y\right) \tag{۵-۵۳}$$

که در آن

$$\alpha'=\sqrt{w+a+\frac{9}{4}} \tag{۵-۵۴}$$

$$\beta'=\frac{c}{2\sqrt{d}} \tag{۵-۵۵}$$

$$\gamma'=\left(2+\sqrt{w+a+\frac{9}{4}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{d}}{4}\right)-\frac{c^2}{16d}-\frac{b}{4} \tag{۵-۵۶}$$

$$\delta'=-\frac{\varepsilon_\beta}{2} \tag{۵-۵۷}$$

اکنون به منظور تعیین طیف انرژی، تابع $G\left(y\right)$ را به صورت یک سری به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$G\left(y\right)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n y^n \tag{۵-۵۸}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۵-۵۸) در رابطه‌ی (۵-۵۲) به معادله‌ی زیر می‌رسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\begin{array}{l}-y^{n+1}\left(2\left(n+1\right)C_{n+1}\right)+y^n\left(\left(n+2\right)\left(n+1\right)C_{n+2}-\beta'\left(n+1\right)C_{n+1}+\left(\gamma'-\alpha'-2\right)C_n\right)+\\ y^{n-1}\left(\left(1+\alpha'\right)\left(n+1\right)C_{n+1}-\dfrac{\delta'+\left(1+\alpha'\right)\beta'}{2}C_n\right)\end{array}\right]=0$$

(۵-۵۹)

که در این رابطه، ضرایب سری به صورت زیر می‌باشند

[۱] Huen

$$C_0 = 1 \tag{۶۰-۵}$$

$$C_1 = \frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2(1+\alpha')} \tag{۶۱-۵}$$

$$C_2 = \frac{C_1\left(\beta' + \frac{\delta' + (1+\alpha')\beta'}{2}\right) + (2+\alpha'-\gamma')}{2(2+\alpha')} \tag{۶۲-۵}$$

$$C_3 = \frac{1}{3(3+\alpha')}\left(\frac{(3+a'-\gamma')\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)}{2(1+\alpha')}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(2\beta' + \frac{1}{2}\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)\right)}{2(2+\alpha')}\left(2+\alpha'-\gamma' + \frac{\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)\left(\beta' + \frac{1}{2}\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)\right)}{2(1+\alpha')}\right)\right)$$

(۶۳-۵)

$$C_4 = \frac{1}{4(4+\alpha')}\left(\frac{(5+\alpha'-\gamma')\left(2+\alpha'-\gamma' + \frac{\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)\left(\beta' + \frac{1}{2}\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)\right)}{2(1+\alpha')}\right)}{2(2+\alpha')}\right.$$
$$+\frac{\left(3\beta' + \frac{1}{2}\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)\right)}{3(3+\alpha')}\left(\frac{(3+a'-\gamma')\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)}{2(1+\alpha')}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\left(2\beta' + \frac{1}{2}\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)\right)}{2(2+\alpha')}\left(2+\alpha'-\gamma' + \frac{\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)\left(\beta' + \frac{1}{2}\left((1+\alpha')\beta'+\delta'\right)\right)}{2(1+\alpha')}\right)\right)\right)$$

(۶۴-۵)

از سوی دیگر با توجه به رابطه‌ی (۵-۵۹) می‌توان به دو رابطه‌ی زیر رسید

$$\varepsilon_{\beta}=\frac{c}{\sqrt{d}}\left(2n+3+\sqrt{w+a+\frac{9}{4}}\right) \tag{۶۵-۵}$$

$$b=4\left(\frac{c^{2}}{16d^{2}}-2n-\frac{\sqrt{d}}{2}\left(2+\sqrt{w+a+\frac{9}{4}}\right)\right) \tag{۶۶-۵}$$

که در آن منظور از n همان n_β می‌باشد. با قرار دادن روابط (۵-۴۲) و (۵-۴۳) در رابطه‌ی (۵-۶۶) به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم

$$E_{n,L}=\frac{2\hbar^{2}f_{0}^{2}}{B_{0}}\left(-\frac{c^{2}}{16d^{2}}+2n+\frac{\sqrt{d}}{2}\left(2+\sqrt{\frac{L(L+1)}{3}+\frac{17}{4}}\right)\right)+V_{0} \tag{۶۷-۵}$$

به این ترتیب، فرم نهایی انرژی، با جایگذاری روابط (۵-۴۱)، (۵-۴۲)، (۵-۴۵) و (۵-۶۵) در رابطه‌ی (۵-۶۷) به دست می‌آید

$$E_{n,L}=\frac{2\hbar^{2}f_{0}^{2}}{B_{0}}\left(\frac{-1}{32B_{0}V_{2}}\frac{\left(\frac{2B_{0}V_{3}}{\hbar f_{0}}\right)^{2}}{\left(2n+3+\sqrt{\frac{L(L+1)}{3}+\frac{17}{4}}\right)^{2}}+2n+\sqrt{\frac{B_{0}V_{2}}{2\hbar^{2}f_{0}^{2}}}\left(2+\sqrt{\frac{L(L+1)}{3}+\frac{17}{4}}\right)\right)+V_{0}$$

(۶۸-۵)

تابع موج نیز با استفاده از رابطه‌های (۵-۱۹)، (۵-۳۹)، (۵-۴۸) و (۵-۵۸) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\Psi(\beta,\theta,\varphi)=\frac{N_{n,L}}{f_{0}}\beta^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{w+a+\frac{9}{4}}\right)}e^{-\beta^{2}\left(\frac{c}{4\sqrt{d}}+\frac{\sqrt{d}}{4}\beta^{2}\right)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}C_{n}\beta^{2n}\right)Y_{LM}(\theta,\varphi) \tag{۶۹-۵}$$

به منظور محاسبه‌ی طیف انرژی، از فرم نرمال‌شده‌ی رابطه‌ی (۵-۶۸) که همانند بخش‌های گذشته با کمیت $R_{n,L}$ نشان داده می‌شود $\left(R_{n,L}=\frac{E_{n,L}-E_{0,0}}{E_{0,2}-E_{0,0}}\right)$، استفاده می‌نماییم. با توجه به رابطه‌ی (۵-۶۸)،

مشخص است که انرژی نرمال شده به پنج پارامتر $\hbar, f_0, B_0, V_2, V_3$ بستگی دارد. به منظور تعیین طیف انرژی هر هسته، مقدار $\hbar$ و B_0 را به ترتیب برابر با یک و عدد جرمی آن هسته قرار داده‌ایم، در حالی که مقادیر f_0, V_2, V_3 برای هر هسته با مینیمم کردن خطای آماری تعیین می‌شوند. در حقیقت به ازای هر مجموعه از مقادیر از این سه ثابت، مقدار انرژی و سپس مقدار σ تعیین می‌شود، نهایتاً مجموعه‌ای انتخاب می‌شود که σ حاصل از آن نسبت به σ مربوط به سایر مجموعه‌ها کمتر باشد. نتایج محاسباتِ ما در جدول (۵-۳) آورده شده است.

جدول (۵-۳) مقایسه‌ی طیف انرژیِ تقارن X(۳) در ساختار جرم وابسته به مکان با پتانسیل داویدسون تعمیم یافته با داده‌های تجربی متناظر [۸۵-۹۲، ۹۸، ۱۰۳-۱۰۷ و ۱۱۱]

	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	f_0	v_2	v_3	σ
$^{۱۰۰}\mathrm{Ru}$	۲.۶۱ ۲.۲۷	۴.۳۰ ۳.۸۵	۵.۹۵ ۵.۶۷	۷.۵۵ ۷.۸۵	۱.۹۰ ۲.۱۰	۲.۶۳ –	۳.۸۹ –	۱.۵	۱.۲	۸.۱	۰.۳۶
$^{۱۰۲}\mathrm{Ru}$	۲.۵۶ ۲.۳۳	۴.۱۶ ۳.۹۴	۵.۶۸ ۵.۷۰	۷.۱۳ ۷.۲۳	۱.۹۷ ۱.۹۹	۲.۶۵ –	۳.۸۱ –	۱.۱	۱.۲	۸.۱	۰.۱۷
$^{۱۰۴}\mathrm{Ru}$	۲.۷۱ ۲.۴۸	۴.۶۴ ۴.۳۵	۶.۶۳ ۶.۴۸	۸.۶۳ ۸.۶۹	۳.۲۱ ۲.۷۶	۴.۰۷ ۴.۲۳	۵.۵۹ ۵.۸۱	۵.۱	۱.۰	۸.۱	۰.۲۷
$^{۱۰۶}\mathrm{Ru}$	۲.۸۲ ۲.۶۶	۴.۹۹ ۴.۸۰	۷.۳۲ ۷.۳۱	۹.۷۳ ۱۰.۰۲	۳.۵۶ ۳.۶۷	۴.۵۴ –	۶.۳۴ –	۵.۱	۰.۸	۲.۱	۰.۲۰
$^{۱۰۴}\mathrm{Pd}$	۲.۵۶ ۲.۳۸	۴.۱۵ ۴.۰۵	۵.۶۷ ۵.۷۹	۷.۱۱ –	۲.۳۵ ۲.۴۰	۳.۰۲ ۳.۲۳	۴.۱۷ ۳.۹۲	۲.۰	۰.۸	۸.۱	۰.۱۹
$^{۱۰۶}\mathrm{Pd}$	۲.۵۰ ۲.۴۰	۳.۹۶ ۴.۰۶	۵.۲۹ –	۶.۵۱ –	۲.۲۵ ۲.۲۱	۲.۸۵ ۳.۰۵	۳.۸۵ ۳.۷۷	۰.۹	۱.۰	۸.۱	۰.۱۳
$^{۱۰۸}\mathrm{Pd}$	۲.۵۹ ۲.۴۲	۴.۲۵ ۴.۰۸	۵.۸۶ ۵.۸۷	۷.۴۱ ۷.۵۰	۲.۵۶ ۲.۴۳	۳.۲۶ ۳.۳۲	۴.۴۹ –	۲.۷	۰.۷	۷.۵	۰.۱۳

	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	f_0	v_2	v_3	σ
۱۱۰Pd	۲.۶۵ ۲.۴۶	۴.۴۳ ۴.۲۱	۶.۲۱ ۶.۱۴	۷.۹۷ ۸.۲۱	۲.۵۲ ۲.۵۳	۳.۲۹ ۳.۲۵	۴.۶۶ ۴.۶۰	۳.۳	۰.۹	۸.۰	۰.۱۶
۱۱۲Pd	۲.۶۴ ۲.۵۳	۴.۴۲ ۴.۴۵	۶.۱۹ –	۷.۹۳ –	۲.۵۱ ۲.۵۵	۳.۲۸ ۳.۲۷	۴.۶۴ –	۳.۳	۰.۹	۸.۱	۰.۰۷
۱۱۴Pd	۲.۷۲ ۲.۵۶	۴.۶۷ ۴.۵۱	۶.۶۸ ۶.۶۶	۸.۷۲ ۸.۶۰	۲.۹۹ ۲.۶۲	۳.۸۵ ۴.۱۸	۵.۴۰ –	۵.۱	۱.۱	۸.۱	۰.۲۵
۱۱۶Pd	۲.۷۵ ۲.۵۸	۴.۷۵ ۴.۵۸	۶.۸۵ ۶.۸۹	۸.۹۹ ۹.۰۸	۳.۲۱ ۳.۲۶	۴.۱۱ –	۵.۷۱ –	۵.۱	۰.۹	۵.۹	۰.۱۳
۱۰۶Cd	۲.۴۶ ۲.۳۶	۳.۸۴ ۳.۹۴	۵.۰۴ ۴.۸۱	۶.۱۱ –	۲.۹۸ ۲.۸۴	۳.۵۳ ۳.۷۵	۴.۴۴ –	۲.۵	۰.۴	۸.۱	۰.۱۹
۱۰۸Cd	۲.۵۳ ۲.۳۸	۴.۰۶ ۴.۰۱	۵.۴۸ ۵.۸۲	۶.۸۱ ۶.۵۰	۲.۶۹ ۲.۷۲	۳.۳۳ ۳.۴۲	۴.۴۱ –	۲.۵	۰.۶	۸.۱	۰.۲۲
۱۱۶Cd	۲.۴۹ ۲.۳۷	۳.۹۲ ۳.۹۵	۵.۲۱ ۵.۵۰	۶.۳۸ ۵.۹۲	۲.۸۰ ۲.۵۰	۳.۳۸ ۳.۸۰	۴.۳۶ –	۲.۴	۰.۵	۸.۱	۰.۳۴
۱۱۸Cd	۲.۴۹ ۲.۳۹	۳.۹۰ ۳.۹۷	۵.۱۷ ۵.۳۱	۶.۳۲ ۶.۱۹	۳.۱۲ ۲.۶۴	۳.۷۰ ۳.۹۳	۴.۶۶ –	۳.۲	۰.۴	۸.۱	۰.۲۶
۱۲۰Cd	۲.۵۱ ۲.۳۸	۳.۹۷ ۴.۰۲	۵.۳۰ ۵.۷۰	۶.۵۳ ۶.۱۹	۲.۶۱ ۲.۷۴	۳.۲۱ –	۴.۲۲ –	۲.۱	۰.۶	۸.۱	۰.۲۸
۱۱۸Xe	۲.۶۷ ۲.۴۰	۴.۵۰ ۴.۱۴	۶.۳۵ ۶.۱۵	۸.۱۹ ۸.۳۵	۲.۸۱ ۲.۴۶	۳.۶۱ ۳.۶۴	۵.۰۲ ۵.۱۳	۴.۰۲	۰.۹	۸.۱	۰.۲۶
۱۲۰Xe	۲.۷۲ ۲.۴۷	۴.۶۷ ۴.۳۳	۶.۶۸ ۶.۵۱	۸.۷۱ ۸.۹۰	۲.۹۸ ۲.۸۲	۳.۸۴ ۳.۹۵	۵.۳۸ ۵.۳۱	۵.۲	۱.۱	۸.۱	۰.۲۲
۱۲۲Xe	۲.۷۳ ۲.۵۰	۴.۷۲ ۴.۳۴	۶.۷۸ ۶.۶۹	۸.۸۷ ۹.۱۸	۳.۴۹ ۳.۴۷	۴.۳۷ ۴.۵۱	۵.۹۵ –	۵.۱	۰.۷	۵.۲	۰.۲۳

	$R_{0,4}$	$R_{0,6}$	$R_{0,8}$	$R_{0,10}$	$R_{1,0}$	$R_{1,2}$	$R_{1,4}$	f_0	v_2	v_3	σ
^{124}Xe	۲.۷۲ ۲.۴۸	۴.۶۷ ۴.۳۷	۶.۶۸ ۶.۵۸	۸.۷۱ ۸.۹۶	۳.۴۵ ۳.۵۸	۴.۳۲ ۴.۶۰	۵.۸۶ ۵.۶۹	۶.۱	۱.۰	۸.۱	۰.۲۴
^{126}Xe	۲.۶۹ ۲.۴۲	۴.۵۸ ۴.۲۱	۶.۵۱ ۶.۲۷	۸.۴۵ ۸.۶۴	۳.۲۹ ۳.۳۸	۴.۱۲ ۴.۳۲	۵.۶۰ ۵.۲۵	۵.۵	۰.۹	۸.۱	۰.۲۸
^{130}Xe	۲.۴۵ ۲.۲۵	۳.۸۰ ۳.۶۳	۴.۹۶ ۵.۰۳	۵.۹۹ –	۳.۳۷ ۳.۳۵	۳.۹۱ (۴.۰۱)	۴.۷۹ (۴.۵۳)	۳.۸	۰.۳	۸.۱	۰.۱۶

همان‌طور که در جدول (۵-۳) مشاهده می‌شود، توافق نسبتاً خوبی بین داده‌های نظری ما و داده‌های تجربی وجود دارد به طوری که بیشترین خطای به دست آمده که مربوط به هسته‌ی ^{100}Ru می‌باشد برابر با ۰.۳۶ است. علاوه بر خطای آماری‌ای که برای هر هسته به طور جداگانه به دست آمده است، می‌توان خطای آماری مربوط به ایزوتوپ‌های هر هسته را نیز محاسبه نمود. به طور مثال، مقدار میانگین خطای آماری برای ایزوتوپ‌های هسته‌ی روتنیم به طریق زیر محاسبه می‌شود

$$\sigma_{Ru} = \frac{0.36+0.17+0.27+0.20}{4} = 0.25 \qquad (۵-۷۰)$$

به طریقی مشابه، این کمیت برای ایزوتوپ‌های مربوط به هسته‌های پالادیم، کادمیم و زنون به ترتیب برابر است با ۰.۱۵، ۰.۲۴ و ۰.۲۳، بنابراین مدل ارائه شده (مدل X(۳) با پتانسیل داویدسون تعمیم-یافته در رهیافت جرم وابسته به مکان) می‌تواند مدل خوبی برای توصیف طیف انرژی ایزوتوپ‌های بررسی شده باشد. با مشاهده‌ی پارامترهای به دست آمده در جدول (۵-۳) و تأثیر مقدار پارامتر f_0 (پارامتر تعیین کننده‌ی میزان وابستگی جرم به پارامتر تغییر شکل β) بر طیف انرژی، می‌توان به اهمیت این پارامتر پی برد. این موضوع با مقایسه‌ی پارامترهای به دست آمده برای ^{118}Xe و ^{126}Xe واضح‌تر می‌شود. به عبارت دیگر، مقدار پارامتر V_2 و V_3 برای این دو هسته یکسان و به ترتیب برابر با ۰.۹ و ۸.۱ به دست آمده است، در حالی که مقدار پارامتر f_0 برای این دو هسته متفاوت است و به

ترتیب برابر با ۴.۲ و ۵.۵ می‌باشد، بنابراین، می‌توان گفت که علت اختلاف بین طیف‌های انرژی مربوط به این دو هسته ناشی از تفاوت مقادیر مربوط به پارامتر f_0 است.

هم‌چنین، آهنگ‌های گذار را برای برخی از هسته‌های موجود در جدول (۵-۳) محاسبه کرده‌ایم و نتایج آن را در جدول (۵-۴) آورده‌ایم.

جدول (۵-۴) مقایسه‌ی آهنگ گذار برای تقارن X(۳) در ساختار جرم وابسته به مکان با پتانسیل داویدسون تعمیم یافته با داده‌های تجربی متناظر. تمام گذارها بر گذار $2_{g.s} \to 0_{g.s}$ تقسیم شده اند

	$4_{g.s} \to 2_{g.s}$	$6_{g.s} \to 4_{g.s}$	$8_{g.s} \to 6_{g.s}$	$10_{g.s} \to 8_{g.s}$	$2_{\beta_1} \to 2_{g.s}$	$2_{\beta_1} \to 0_{g.s}$
^{۱۰۴}Ru	۱.۳۶ ۱.۱۸	۱.۴۱ –	۰.۷۴ –	۱.۱۷ –	۱.۱۵ ۰.۶۳	۰.۷۶ ۰.۰۴
^{۱۰۴}Pd	۰.۸۴ ۱.۳۶	۰.۹۷ –	۱.۱۶ –	۱.۲۸ –	۰.۰۴ ۰.۶۱	۰.۰۰ ۰.۰۳
^{۱۱۰}Pd	۱.۲۵ ۱.۷۱	۱.۳۱ –	۱.۳۴ –	۱.۳۴ –	۰.۶۳ ۰.۹۸	۰.۲۸ ۰.۰۱
^{۱۰۶}Cd	۰.۹۶ ۱.۷۸	۱.۰۷ –	۱.۲۰ –	۱.۲۷ –	۰.۱۰ ۰.۴۳	۰.۰۱ ۰.۰۲
^{۱۰۸}Cd	۱.۰۱ ۱.۵۴	۱.۱۱ –	۱.۲۲ –	۱.۲۷ –	۰.۱۵ ۰.۶۴	۰.۰۲ ۰.۰۷
^{۱۱۶}Cd	۰.۹۰ ۱.۷۰	۱.۰۲ –	۱.۱۸ –	۱.۲۸ –	۰.۰۶ ۰.۶۳	۰.۰۰ ۰.۰۳
^{۱۱۸}Xe	۱.۳۱ ۱.۱۱	۱.۳۹ ۰.۸۸	۱.۴۰ ۰.۴۹	۱.۳۷ ۰.۷۳	۰.۹۰ –	۰۵۲ –
^{۱۲۰}Xe	۱.۳۶ ۱.۱۶	۱.۴۲ ۱.۱۷	۰.۱۷ ۰.۹۶	۰.۰۳ ۰.۹۱	۱.۱۲ –	۰.۷۴ –
^{۱۲۲}Xe	۱.۳۴ ۱.۴۷	۰.۵۰ ۰.۸۹	۱.۰۳ ۰.۴۴	۱.۷۱ –	۱.۲۳ –	۰.۸۴ –
^{۱۲۴}Xe	۱.۳۷ ۱.۳۴	۱.۰۷ ۱.۵۹	۰.۸۲ ۰.۶۳	۱.۶۷ ۰.۲۹	۱.۲۰ ۰.۷۰	۰.۸۱ ۰.۰۲

اگرچه اختلاف‌هایی بین داده‌های نظری ما و داده‌های تجربی متناظر در جدول (۵-۴) مشاهده می‌شود، به خصوص برای گذارهای $\frac{4_{g.s}\rightarrow 2_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$ ، $\frac{8_{g.s}\rightarrow 6_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$ و $\frac{10_{g.s}\rightarrow 8_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$ به ترتیب در هسته‌های $^{106,116}Cd$، ^{122}Xe و ^{124}Xe، اما توافق خوبی برای گذارهای $\frac{4_{g.s}\rightarrow 2_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$؛ $\frac{6_{g.s}\rightarrow 4_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$؛ $\frac{8_{g.s}\rightarrow 6_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$؛ $\frac{2_{\beta_1}\rightarrow 2_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$ و $\frac{2_{\beta_1}\rightarrow 0_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$ به ترتیب در هسته‌های ^{104}Ru، $^{118,120,122,124}Xe$؛ $^{120,122}Xe$؛ ^{124}Xe؛ ^{110}Pd، ^{106}Cd و $^{104,110}Pd$، $^{106,108,116}Cd$ وجود دارد. علاوه بر این، تا آن‌جایی که ما اطلاع داریم، مقادیری که تا کنون برای آهنگ‌های گذار مربوط به ترازهای حالت پایه گزارش شده‌اند، با افزایش L، افزایش می‌یابند. این مطلب در مقاله‌های مربوط به مدل‌های متفاوت هامیلتونی بوهر در هر دو رهیافت جرم وابسته به مکان و جرم ثابت، ملاحظه می‌شود. اما همان‌گونه که در جدول (۵-۴) مشاهده می‌کنید، در برخی موارد، به طور مثال گذار $\frac{6_{g.s}\rightarrow 4_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$ برای هسته‌ی ^{122}Xe و گذار $\frac{8_{g.s}\rightarrow 6_{g.s}}{2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}}$ برای هسته‌ی ^{124}Xe، به جای افزایش، کاهش یافته‌اند و نکته‌ی جالب این است که داده‌های تجربی نیز این کاهش را پیش‌بینی می‌نمایند. به طور نظری، این موضوع می‌تواند به ضرایب سری‌ای که در رابطه‌ی (۵-۵۸) تعریف شد، مرتبط باشد. در واقع، در برخی موارد این ضرایب منفی می‌شوند و این امر موجب کاهش بخش وابسته به β‌ی تابع موج و در نهایت باعث کاهش مقدار گذار می‌شود.

فصل ششم:

هامیلتونی بوهر در ساختار طول کمینه

۶-۱) مدل X(۳) در حضور طول کمینه

اخیراً مسائل مکانیک کوانتومی با وارد نمودن روابط جابه‌جایی تعمیم‌یافته، که شامل طول کمینه یا اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته می‌باشند، توجه‌های زیادی را به خود جلب نموده‌اند. چنین ایده‌ی مهمی توسط هندسه‌ی ناجابه‌جایی [۱۳۲و۱۳۳] در گرانش کوانتومی [۱۳۴-۱۳۶] و مفهوم نظریه‌ی ریسمان [۱۳۷-۱۳۹] ایجاد شده است. با این وجود، مفهوم طول کمینه می‌تواند در مطالعه‌ی سیستم‌های فیزیکی با بررسی رابطه‌ی جابه‌جایی تغییر شکل‌یافته، که به صورت زیر تعریف می‌شود، گنجانده شود

$$\left[\hat{X},\hat{P}\right]=i\hbar\left(1+\alpha P^{2}\right) \tag{۶-۱}$$

در این رابطه α پارامتر اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته نامیده می‌شود و مقدار آن بین صفر و یک قرار دارد. طبق این رابطه، عملگرهای مکان و تکانه در فضای جابه‌جایی معمولی و فضای ناجابه‌جایی به صورت زیر به یک‌دیگر مرتبط می‌شوند

$$\begin{aligned}\hat{X}_i&=\hat{x}_i,\\ \hat{P}_i&=\left(1+\alpha\,\hat{p}^{2}\right)\hat{p}_i\end{aligned} \tag{۶-۲}$$

اولین بار، چباب[۱] و همکارانش [۵۶] در سال (۲۰۱۶) مدل X(۳) را در ساختار طول کمینه با انتخاب چاه مربعی نامحدود برای پتانسیل وابسته به β، مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها برای تعیین هامیلتونی مدل X(۳) در حضور طول کمینه به طریق زیر عمل نمودند. ابتدا هامیلتونی مربوطه را به صورت زیر در نظر گرفتند

$$\hat{H}=\hat{T}+V\left(\beta\right)=\frac{\hat{P}^{2}}{2B_m}+V\left(\beta\right) \tag{۶-۳}$$

[۱] Chababaa

سپس با قرار دادن مربع عملگر تکانه از رابطه‌ی (۶-۲) و در نظر گرفتن $\hat{p}_i = -i\hbar\vec{\nabla}$، عملگر انرژی جنبشی رابطه‌ی (۶-۳) را به صورت زیر بازنویسی نمودند

$$\hat{T} = \frac{\hat{P}^2}{2B_m} = -\frac{\hbar^2}{2B_m}\left(1-2\alpha\hbar^2\nabla^2\right)\nabla^2 \tag{۶-۴}$$

در نهایت با استفاده از رابطه‌ی زیر

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial q_i}\sqrt{g}\,g_{ij}{}^{-1}\frac{\partial}{\partial q_j} \tag{۶-۵}$$

که در آن g_{ij}ها و g به ترتیب عناصر ماتریسی و دترمینان ماتریس زیر (که ماتریس متریک مدل X(۳) می‌باشد) هستند

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 3\beta^2\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 3\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۶-۶}$$

فرم نهایی هامیلتونی مدل X(۳) را در حضور طول کمینه به صورت زیر نوشتند

$$\hat{H} = \hat{T} + V(\beta) = -\frac{\hbar^2}{2B_m}\Delta + \frac{\alpha\hbar^4}{B_m}\Delta^2 + V(\beta) \tag{۶-۷}$$

در این رابطه عملگر Δ به صورت زیر می‌باشد

$$\Delta = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{3\beta^2}\Delta_\Omega \tag{۶-۸}$$

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{۶-۹}$$

منبع [۵۶] برای حل معادله موج مربوط به هامیلتونی رابطه‌ی (۶-۷)، تابع موج مورد نظر را به صورت (۶-۱۰) درنظر گرفتند و طیف انرژی و آهنگ‌های گذار را تعیین نمودند.

$$\Psi(\beta,\theta,\varphi)=\left[1-2\alpha\hbar^2\Delta\right]\Phi(\beta,\theta,\varphi) \tag{۶-۱۰}$$

ما برای حل معادله موج مربوطه، به جای استفاده از رابطه‌ی (۶-۱۰)، حلّی جایگزین ارائه نموده‌ایم [۵۸]. به این منظور، ابتدا هامیلتونی مورد نظر را در عدم حضور طول کمینه (α=0) به صورت زیر معرفی نمودیم

$$\mathrm{H}^0=-\frac{\hbar^2}{2B_m}\Delta+V(\beta)\rightarrow\Delta=\frac{2B_m}{\hbar^2}\left[V(\beta)-E^0\right] \tag{۶-۱۱}$$

بنابراین

$$\Delta^2=\left(\frac{2B_m}{\hbar^2}\right)^2\left[V(\beta)-E^0\right]^2 \tag{۶-۱۲}$$

لذا هامیلتونی مدل X(۳) در حضور طول کمینه به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2B_m}\Delta+4\alpha B_m\left[V(\beta)-E^0\right]^2+V(\beta) \tag{۶-۱۳}$$

این روش اولین بار در منبع [۱۴۰] برای حل معادله شرودینگر با برهم‌کنش وود-ساکسون[۱] در حضور طول کمینه معرفی شد. در ادامه ویژه مقادیر و ویژه توابع این هامیلتونی را برای دو پتانسیل چاه مربعی نامحدود و پتانسیل کولنی تعیین می‌نماییم.

۶-۱-۱) مدل X(۳) در حضور طول کمینه به ازای پتانسیل چاه مربعی نامحدود

[۱] Woods-Saxon

در این بخش برای حل معادله موج مربوط به هامیلتونی (۶-۱۳)، روشی متفاوت با روش ارائه شده در منبع [۵۶] ارائه می‌دهیم. به این منظور، به ازای چاه مربعی نامحدود، با انتخاب تابع موج به صورت زیر

$$\Psi(\beta,\theta,\phi)=\beta^{-\frac{1}{2}}f(\beta)Y_{LM}(\theta,\phi) \tag{۶-۱۴}$$

و به خاطر داشتن رابطه‌ی (۶-۱۵)

$$-\Delta_{\Omega}Y_{LM}(\theta,\phi)=L(L+1)Y_{LM}(\theta,\phi) \tag{۶-۱۵}$$

معادله موج مربوط به هامیلتونی رابطه‌ی (۶-۱۳) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{1}{\beta}\frac{d}{d\beta}+\left(\bar{k}^2-\frac{\eta^2}{\beta^2}\right)\right]f(\beta)=0 \tag{۶-۱۶}$$

که در آن

$$\bar{k}_{s,\eta}{}^2=\frac{2B_m}{\hbar^2}\left[E_{s,L}-4\alpha B_m\left(E_{s,L}{}^0\right)^2\right] \tag{۶-۱۷}$$

$$E_{s,L}{}^0=\frac{\hbar^2}{2B_m}\left(\frac{x_{s\eta}}{\beta_\omega}\right)^2 \tag{۶-۱۸}$$

$$\eta=\left(\frac{L(L+1)}{3}+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۶-۱۹}$$

$$s=n_\beta+1,\ n_\beta=0,1,2,... \tag{۶-۲۰}$$

و $x_{s\eta}$، s امین صفر بسل و β_ω عمق چاه پتانسیل است. معادله‌ی (۶-۱۶) معادله‌ی بسل است، لذا

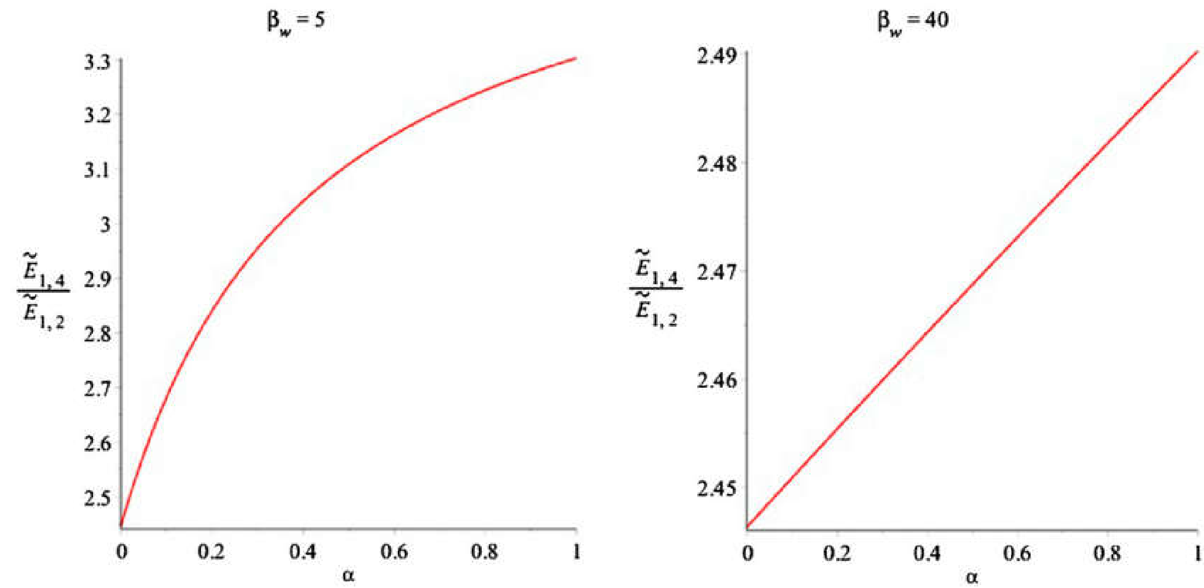
$$\bar{k}_{s,\eta}{}^{2}=\left(\frac{\chi_{s\eta}}{\beta_{\omega}}\right)^{2}$$ (۲۱-۶)

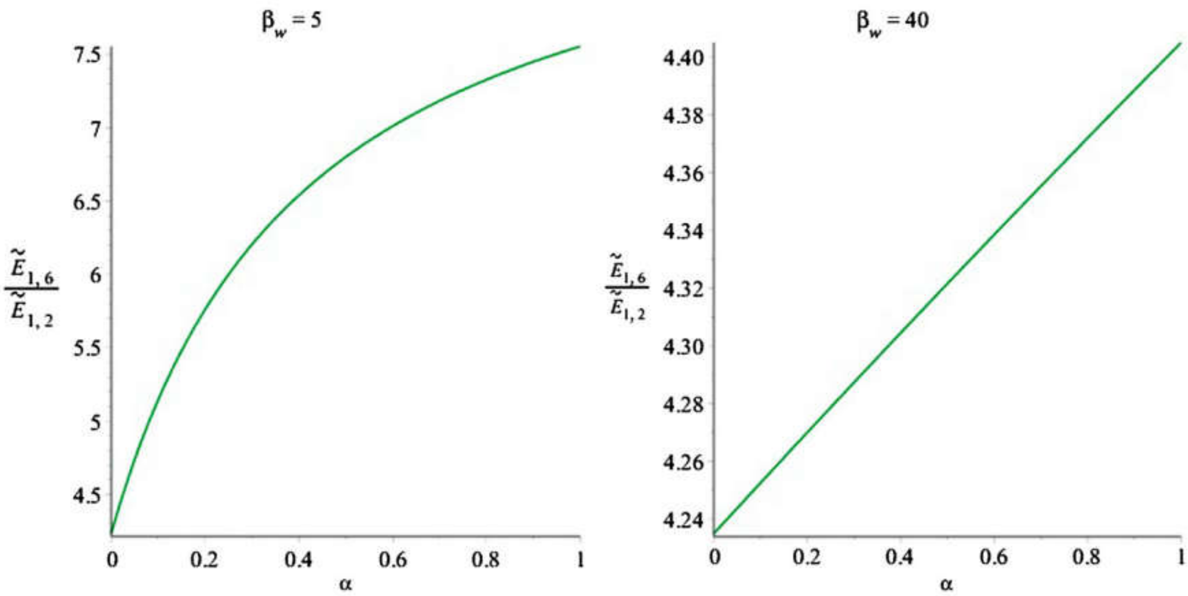
بنابراین ویژه مقدار و ویژه تابع هامیلتونی (۶-۱۳) به ترتیب عبارتند از

$$E_{s,L}=\frac{\hbar^{2}}{2B_{m}}\left(\frac{x_{sL}}{\beta_{\omega}}\right)^{2}\left(1+4\alpha B_{m}\frac{\hbar^{2}}{2B_{m}}\left(\frac{x_{sL}}{\beta_{\omega}}\right)^{2}\right)$$ (۲۲-۶)

$$\Psi\left(\beta,\theta,\phi\right)=\frac{\sqrt{2}}{\beta_{\omega}J_{\eta+1}\left(\chi_{s,\eta}\right)}\beta^{-\frac{1}{2}}J_{\eta}\left(\bar{k}_{s,\eta}\beta\right)Y_{LM}\left(\theta,\phi\right)$$ (۲۳-۶)

در شکل (۶-۱)، انرژی نرمال شده‌ی سومین و چهارمین تراز حالت پایه را به عنوان تابعی از پارامتر طول کمینه به ازای دو مقدار متفاوت عمق چاه پتانسیل رسم نموده‌ایم.





شکل (۶-۱) انرژی نرمال شده‌ی سومین و چهارمین تراز نوار پایه برای مدل X(۳) به ازای چاه پتانسیل مربعی نامحدود به عنوان تابعی از پارامتر طول کمینه برای مقادیر متفاوت عمق چاه پتانسیل

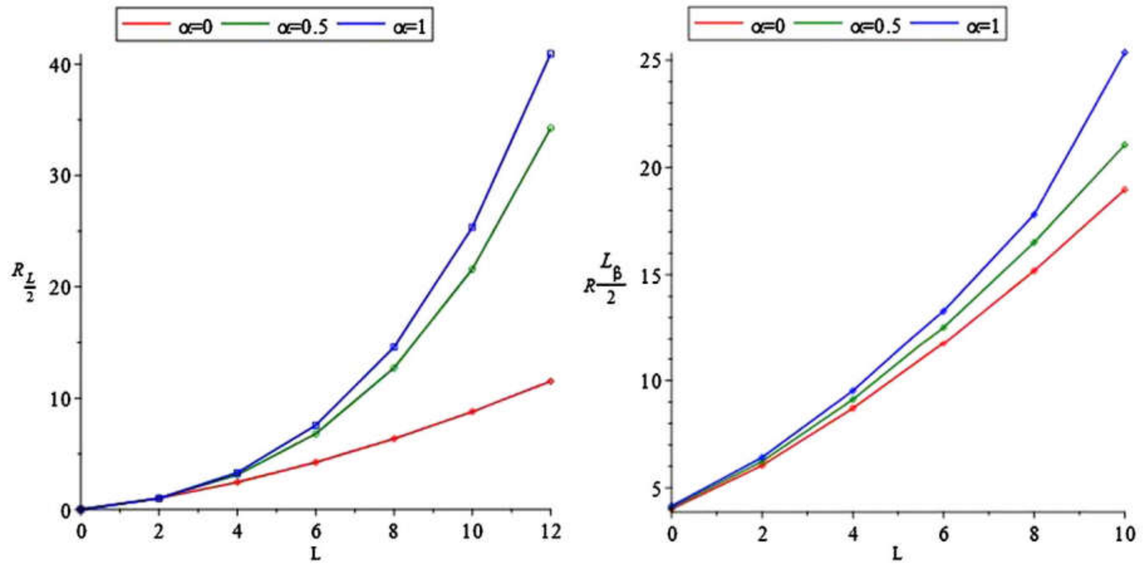
همان‌گونه که از رابطه‌ی (۶-۲۲) انتظار می‌رود، با افزایش مقدار α، مقدار انرژی نرمال شده نیز افزایش می‌یابد که این مطلب در چهار نمودار موجود در شکل (۶-۱) نیز به وضوح مشاهده می‌شود. مقایسه‌ی دو نمودار بالایی یا قیاس نمودارهای پایینی در این شکل نشان می‌دهد با افزایش مقدار عمق چاه پتانسیل، میزان تغییرات انرژی نرمال شده به ازای تغییر پارامتر α، کاهش می‌یابد. لذا می‌توان گفت، طیف انرژیِ هسته‌هایی که عمق پتانسیل کمتری دارند، تحت تأثیر بیشتری از پارامتر α قرار می‌گیرد.

در شکل (۶-۲) تغییرات ترازهای انرژی موجود در نوار پایه و اولین نوار برانگیخته‌ی β را به ازای تغییر پارامتر α بررسی نموده‌ایم. در این نمودار

$$R_{\frac{L}{2}} = \frac{\tilde{E}\left(L_{g.s.}\right)}{\tilde{E}\left(2^{+}_{g.s.}\right)} \qquad (۲۴-۶)$$

$$R_{\frac{L_\beta}{2}} = \frac{\tilde{E}\left(L_{\beta}\right)}{\tilde{E}\left(2^{+}_{g.s.}\right)} \qquad (۲۵-۶)$$

ملاحظه می‌شود که به ازای تغییر α، تغییرات مربوط به انرژی ترازهای موجود در نوار پایه بیشتر از تغییرات مربوط به کمیت متناظر در اولین نوار برانگیخته‌ی β می‌باشد. هم‌چنین، مشاهده می‌شود که در هر دو نوار (نوار پایه و اولین نوار برانگیخته‌ی β) با افزایش عدد کوانتمی تکانه‌ی زاویه‌ای L، تغییرات انرژی ترازهای مربوطه به ازای تغییرات α، زیاد می‌شود. به عبارتی دیگر در هر نمودار، با افزایش L، سه بخش مربوط به سه مقدار α، از یک‌دیگر فاصله می‌گیرند.

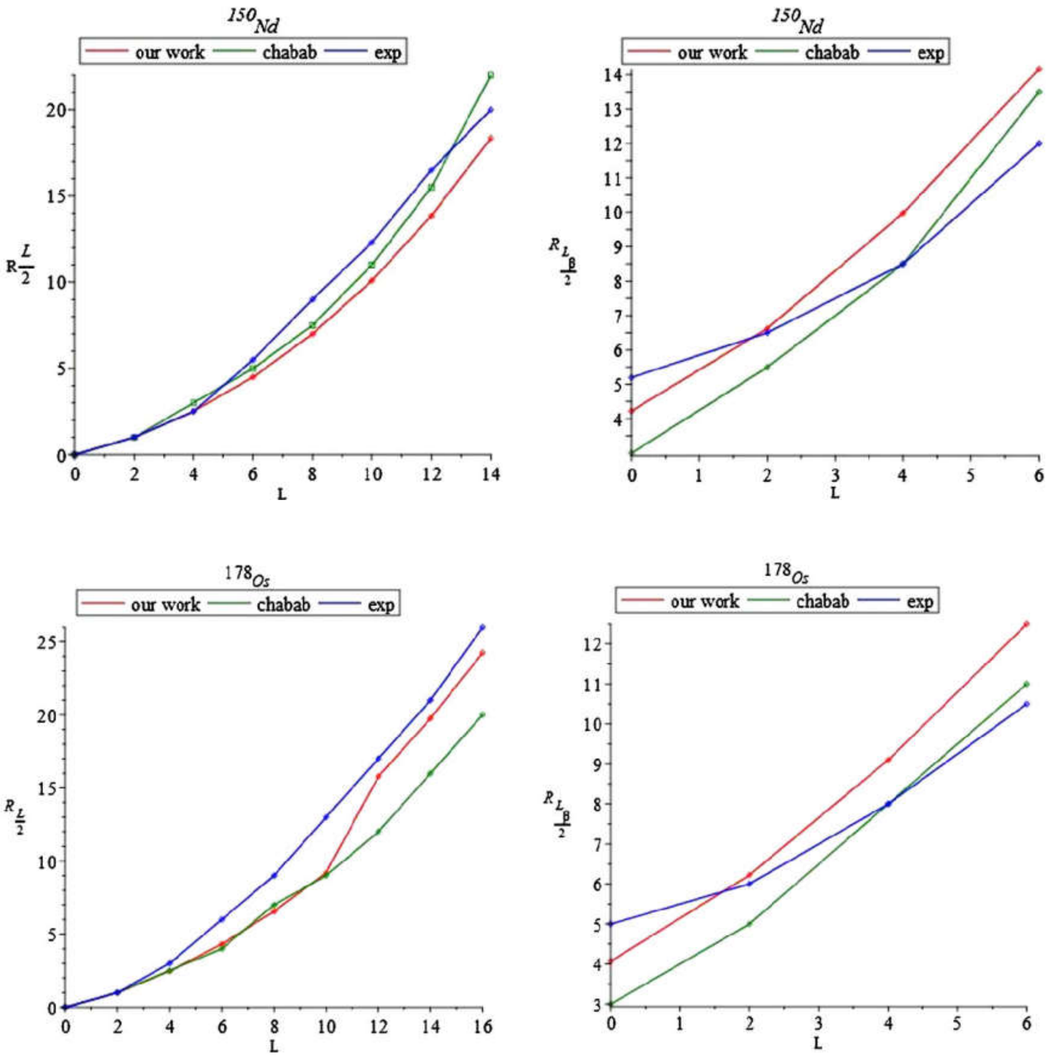


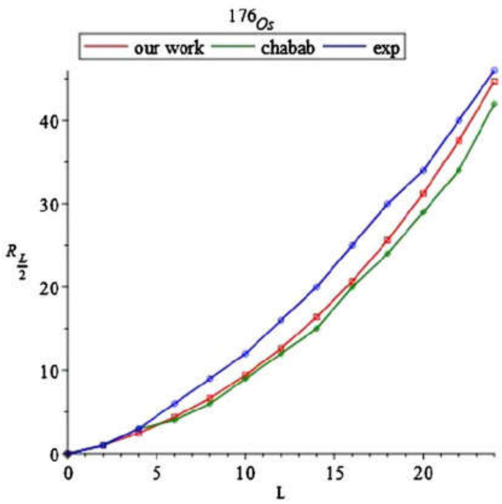
شکل (۶-۲) تغییرات ترازهای انرژی نوار پایه و اولین نوار برانگیخته‌ی β به ازای تغییر پارامتر α

به منظور ارزیابی نتایج خود و مقایسه‌ی آن‌ها با نتایج منبع [۵۶]، شکل (۶-۳) را رسم نموده‌ایم. در این شکل، نسبت‌های تعریف شده در روابط (۶-۲۴) و (۶-۲۵) را برای هسته‌های متفاوت بررسی نموده‌ایم و نتایج خود را با نتایج منبع [۵۶] و نیز داده‌های تجربی متناظر مقایسه نموده‌ایم. در محاسبات خود، مقدار عمق پتانسیل برای هر هسته را برابر با مقدار به دست آمده در منبع [۵۶] قرار داده‌ایم، در حالی مقدار پارامتر طول کمینه به گونه‌ای تعیین شده است که طیف انرژی حاصل از آن، کمترین انحراف را از داده‌های تجربی متناظر داشته باشد. مقدار انتخابی برای عمق پتانسیل به همراه مقدار به دست آمده برای پارامتر α در جدول (۶-۱) برای هر هسته آورده شده است.

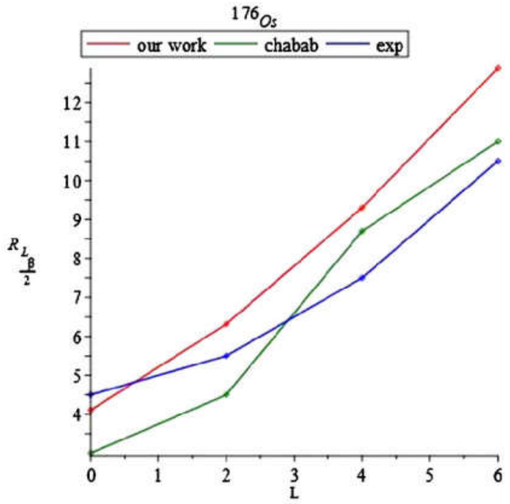
جدول (۶-۱) مقادیر پارامترهای طول کمینه و عمق پتانسیل برای هسته‌های بررسی شده در شکل (۶-۳)

	منبع [۵۸]	منبع [۵۶]
	α	β_{ω}
^{۱۵۰}Nd	۰.۰۸۵	۲۹.۴۴۶
^{۱۷۶}Os	۰.۸۲۱	۴۲.۵۱۷
^{۱۷۸}Os	۰.۴۴۴	۳۸.۵۷۵
^{۱۸۰}Os	۰.۹۹۹	۲۱.۸۵۸
^{۱۵۶}Dy	۰.۹۳۳	۵۰.۷۶۳
^{۱۵۴}Gd	۰.۹۵۴	۶۰.۲۹۹

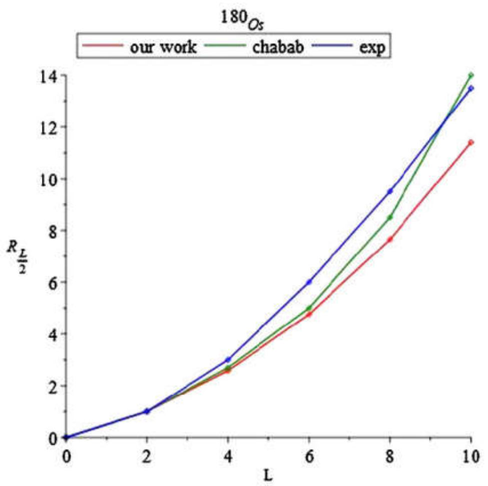




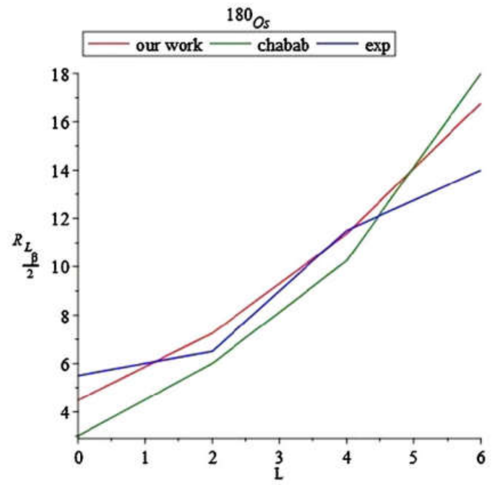
^{176}Os
our work
chabab
exp
$R_{\frac{L}{2}}$
L



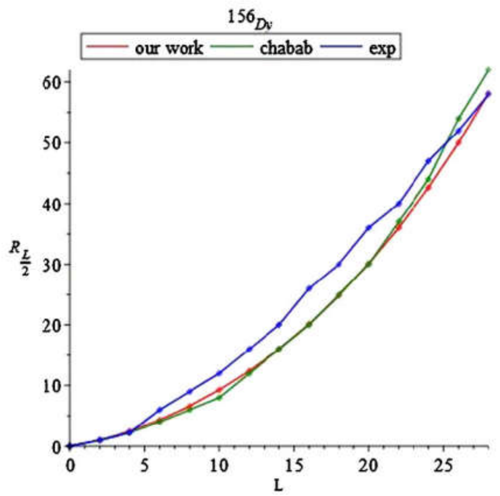
^{176}Os
our work
chabab
exp
$R_{\frac{L_\beta}{2}}$
L



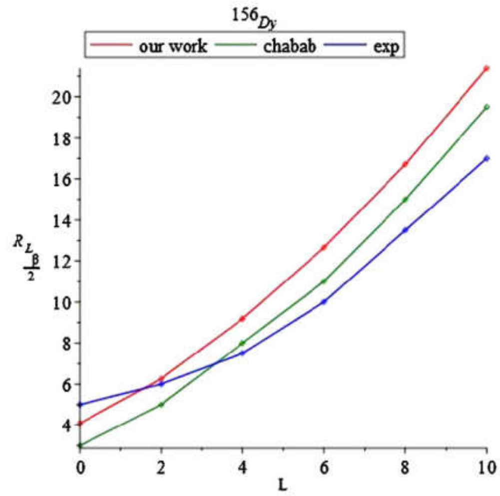
^{180}Os
our work
chabab
exp
$R_{\frac{L}{2}}$
L



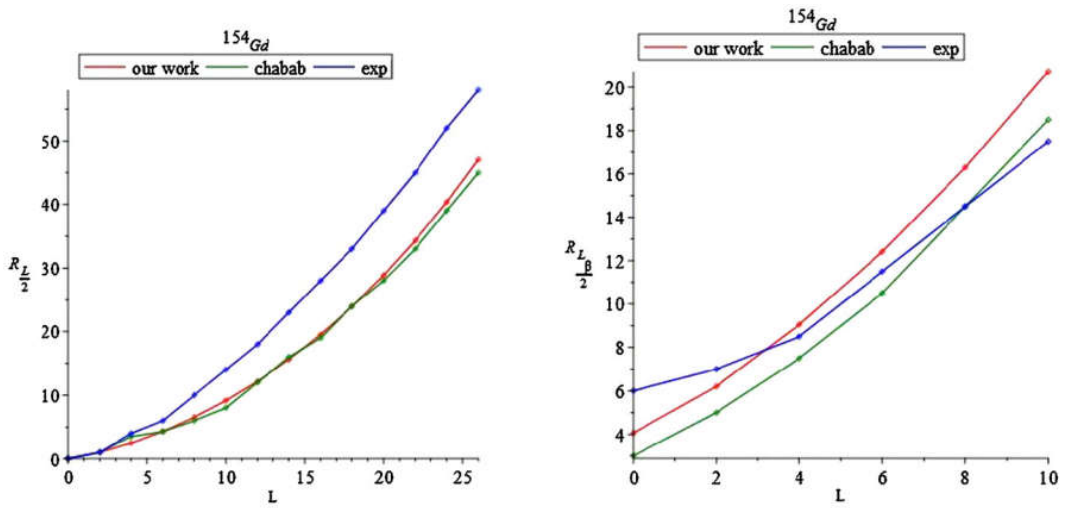
^{180}Os
our work
chabab
exp
$R_{\frac{L_\beta}{2}}$
L



^{156}Dy
our work
chabab
exp
$R_{\frac{L}{2}}$
L



^{156}Dy
our work
chabab
exp
$R_{\frac{L_\beta}{2}}$
L



شکل (۶-۳) انرژی نرمال شده‌ی ترازهای حالت پایه و اولین نوار β که در منبع [۵۸] (our work) و [۵۶] (Chabab) به طور نظری و در منبع [۸۱-۸۲، ۱۰۰و ۱۴۱-۱۴۳] به شیوه‌ی تجربی برای هسته‌های ^{150}Nd، ^{178}Os، ^{176}Os، ^{180}Os، ^{156}Dy و ^{154}Gd محاسبه شده‌اند

همانگونه که در شکل (۶-۳) ملاحظه می‌نمایید، نتایج ما نسبت به نتایج منبع [۵۶]، توافق بهتری با داده‌های تجربیِ مربوط به ترازهای نوار پایه در ایزوتوپ‌های آسمیم[1] ^{176}Os، ^{178}Os و ^{154}Gd و ترازهای اولین نوار برانگیخته‌ی β در هسته‌های ^{180}Os و ^{154}Gd دارند.

۶-۱-۲) مدل X(۳) در حضور طول کمینه به ازای پتانسیل کولنی-مانند

در این بخش، هدفِ ما تعیین ویژه مقادیر و ویژه توابع مربوط به مدل X(۳) (هامیلتونی بوهر برای هسته‌های کشیده‌ی γ-صلب) با پتانسیل کولنی، در حضور و عدم حضور پارامتر طول کمینه است.

اگر تابع موج مورد نیاز برای حل معادله موج مربوط به هامیلتونی رابطه‌ی (۶-۱۳) را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\Psi(\beta,\theta,\phi)=\xi(\beta)Y_{LM}(\theta,\phi) \quad (۶-۲۶)$$

معادله دیفرانسیل مربوط به آن به شکل زیر نوشته می‌شود

[1] Osmium

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{2}{\beta}\frac{d}{d\beta}-\frac{1}{3\beta^2}L(L+1)+\frac{2B_m}{\hbar^2}\left[\left(E-V(\beta)\right)-4\alpha B_m\left(E^0-V(\beta)\right)^2\right]\right]\xi(\beta)=0$$

(۶-۲۷)

با در نظر گرفتن پتانسیل کولنی به شکل

$$V(\beta)=\frac{c}{\beta},\ c<0 \qquad (۶-۲۸)$$

معادله دیفرانسیل رابطه‌ی (۶-۲۷) را در دو حالت $\alpha=0$ و $\alpha\neq 0$ بررسی می‌نماییم. در حالت $\alpha=0$ رابطه‌ی (۶-۲۷) به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{2}{\beta}\frac{d}{d\beta}+\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{2B_m}{\hbar^2}\left(E^0\beta^2-c\beta\right)-\frac{L(L+1)}{3}\right)\right]\xi^0(\beta)=0 \qquad (۶-۲۹)$$

لذا ویژه مقادیر و ویژه توابع آن که به روش NU تعیین شده‌اند به ترتیب در روابط (۶-۳۰) و (۶-۳۱) نشان داده می‌شوند

$$E^0_{n,L}=\frac{-2B_m c^2}{\hbar^2\left[(2n+1)+2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L(L+1)}{3}}\right]^2} \qquad (۶-۳۰)$$

$$\xi^0_{n,L}(\beta)=N^0_{n,L}\beta^{\upsilon^0}e^{\mu^0\beta}L_n^{\eta^0-1}\left(\kappa^0\beta\right) \qquad (۶-۳۱)$$

$$\upsilon^0=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L(L+1)}{3}},\ \mu^0=-\sqrt{\frac{-2B_mE^0}{\hbar^2}},\ \eta^0=1+2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L(L+1)}{3}},\ \kappa^0=2\sqrt{\frac{-2B_mE^0}{\hbar^2}}$$

(۶-۳۲)

$$N^0_{n,L}=\frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty\left(\xi^0_{n,L}(\beta)\right)^2\ \beta^2\ \mathrm{d}\beta}} \qquad (۶-۳۳)$$

اما در حالت $\alpha \neq 0$، رابطه‌ی (۶-۲۷) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{d\beta^2}+\frac{2}{\beta}\frac{d}{d\beta}+\frac{2B_m\left(E_{n,L}-4\alpha B_m\left(E^0_{n,L}\right)^2\right)}{\hbar^2}+\frac{2B_m c\left(8\alpha B_m E^0_{n,L}-1\right)}{\hbar^2\beta}-\frac{L\left(L+1\right)}{3\beta^2}-\frac{8\alpha B_m^2 c^2}{\hbar^2\beta^2}\right]\xi\left(\beta\right)=0$$

(۶-۳۴)

ویژه مقادیر و ویژه توابع رابطه‌ی (۶-۳۴) با روش NU قابل محاسبه‌اند که نتیجه‌ی نهایی آن را به ترتیب در روابط (۶-۳۵) و (۶-۳۷) نوشته‌ایم

$$E_{n,L}=-\frac{2B_m c^2}{\hbar^2 W}\left(8\alpha B_m E^0_{n,L}-1\right)^2+4\alpha B_m\left(E^0_{n,L}\right)^2 \quad (۶\text{-}۳۵)$$

$$W=4n^2+4n+2+\frac{4}{3}L\left(L+1\right)+\frac{32\alpha B_m^2 c^2}{\hbar^2}+4\left(2n+1\right)\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}+\frac{8\alpha B_m^2 c^2}{\hbar^2}} \quad (۶\text{-}۳۶)$$

$$\xi_{n,L}\left(\beta\right)=N_{n,L}\beta^{\upsilon}e^{\mu\beta}L_n^{\eta-1}\left(\kappa\beta\right) \quad (۶\text{-}۳۷)$$

$$\upsilon=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}+\frac{8\alpha B_m^2 c^2}{\hbar^2}} \quad (۶\text{-}۳۸)$$

$$\mu=-\sqrt{\frac{2B_m}{\hbar^2}\left(-E+4\alpha B_m\left(E^0\right)^2\right)} \quad (۶\text{-}۳۹)$$

$$\eta=1+2\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}+\frac{8\alpha B_m^2 c^2}{\hbar^2}} \quad (۶\text{-}۴۰)$$

$$\kappa=2\sqrt{\frac{2B_m}{\hbar^2}\left(-E+4\alpha B_m\left(E^0\right)^2\right)} \quad (۶\text{-}۴۱)$$

$$N_{n,L}=\frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty \xi^2_{n,L}\left(\beta\right)\beta^2\,\mathrm{d}\beta}} \quad (۶\text{-}۴۲)$$

اکنون با استفاده از روابط (۶-۳۰)، (۶-۳۱) و (۶-۳۵)، (۶-۳۷) می‌توان طیف انرژی و آهنگ‌های گذار مدل X(۳) با پتانسیل کولنی را در دو حالت حضور و عدم حضور پارامتر طول کمینه بررسی نمود. پیش از این بررسی، به منظور نمایش پتانسیل بر حسب β، رابطه‌ی (۶-۱۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌نماییم

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2B_m}\left[\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\right]+V_{eff}+4\alpha B_m\left(E^0_{n,L}\right)^2 \qquad (۶\text{-}۴۳)$$

با

$$V_{eff}=\frac{\hbar^2}{6B_m\beta^2}L\left(L+1\right)+4\alpha B_m\left(V\left(\beta\right)\right)^2-8\alpha B_m V\left(\beta\right)E^0_{n,L}+V\left(\beta\right) \qquad (۶\text{-}۴۴)$$

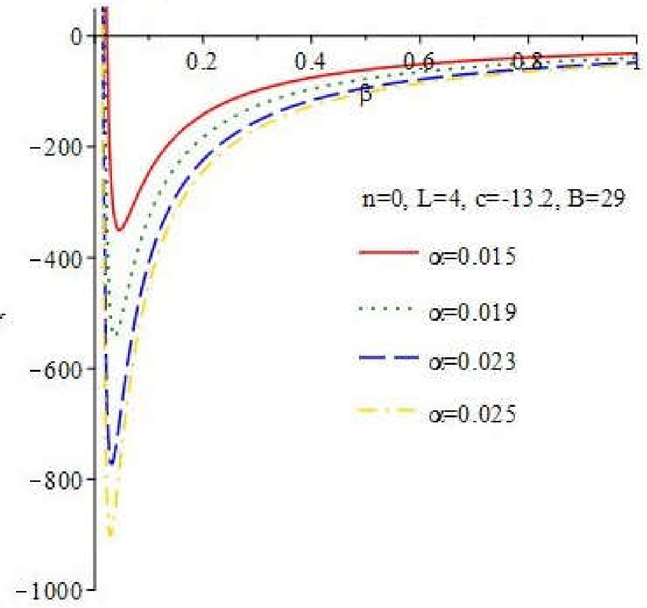
با وارد نمودن رابطه‌ی (۶-۲۸) در رابطه‌ی (۶-۴۴) و در نظر گرفتن $c=-1,\ B_m=\hbar=1$، پتانسیل به صورت زیر ظاهر می‌شود

$$V_{eff}=\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{L\left(L+1\right)}{6}+4\alpha\right]-\frac{1}{\beta}\left[1-8\alpha E^0_{n,L}\right] \qquad (۶\text{-}۴۵)$$

رابطه‌ی (۶-۴۵) مشابه با پتانسیل کراتزر است که ترازهای انرژی آن از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند

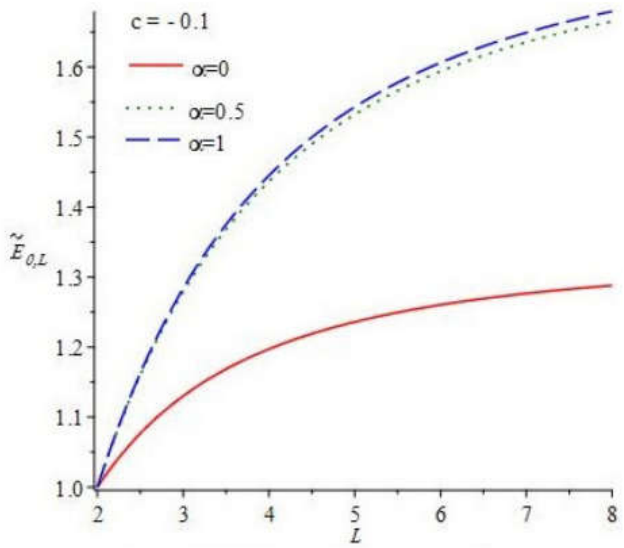
$$E^0_{n,L}=\frac{-2}{\left[4n^2+4n+2+\frac{4}{3}L\left(L+1\right)+4\left(2n+1\right)\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{L\left(L+1\right)}{3}}\right]} \qquad (۶\text{-}۴۶)$$

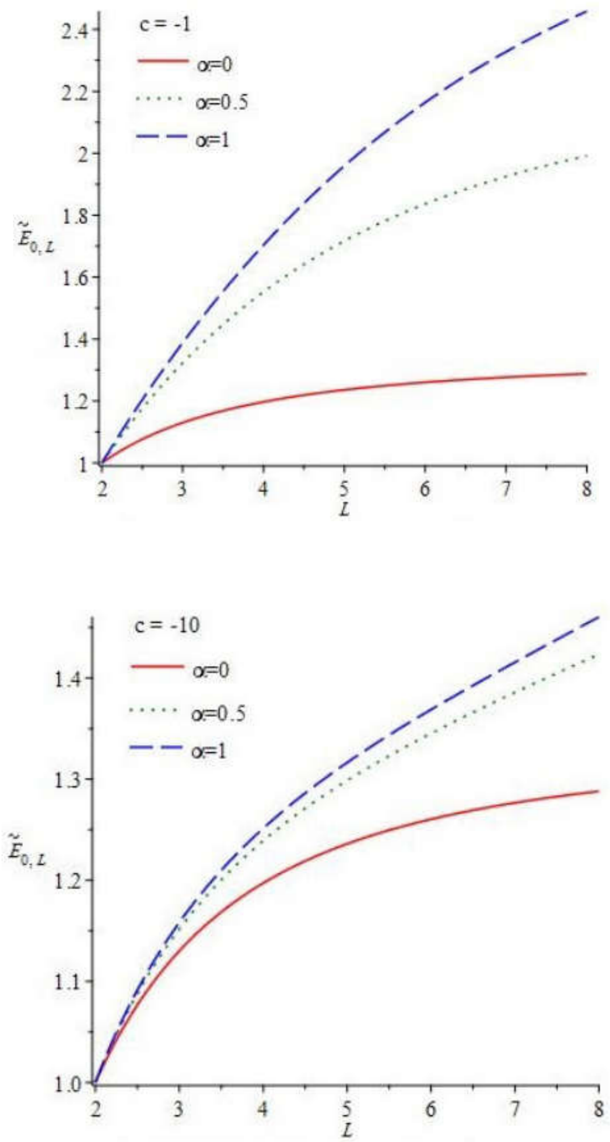
شکل (۶-۴) پتانسیل رابطه‌ی (۶-۴۴) را به عنوان تابعی از β به ازای چهار مقدار متفاوت α برای سومین تراز حالت پایه نشان می‌دهد.



شکل (۶-۴) پتانسیل مؤثر رابطه‌ی (۶-۴۴) به عنوان تابعی از β به ازای چهار مقدار متفاوت از پارامتر طول کمینه

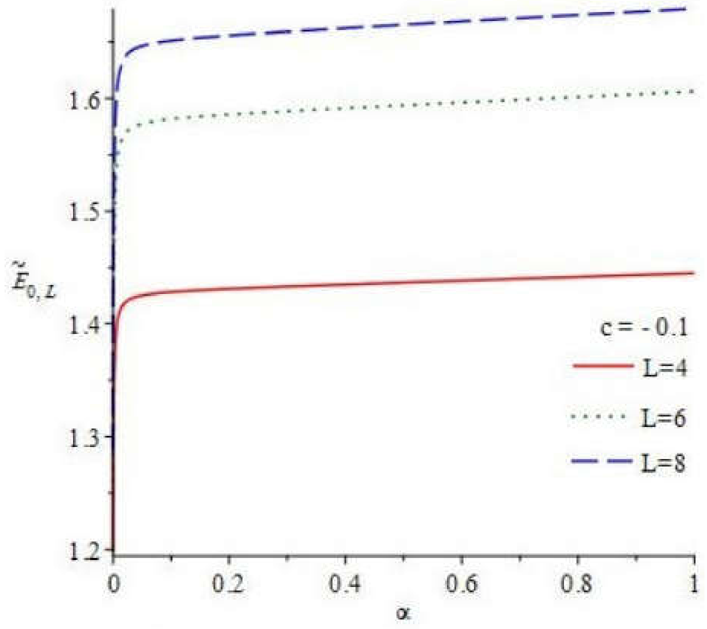
اکنون به بررسی طیف انرژی می‌پردازیم. شکل (۶-۵) فرم نرمال شده‌ی رابطه‌ی (۶-۳۵) را برای ترازهای مختلف حالت پایه به ازای مقادیر متفاوت پارامتر α در سه نمودار مجزا که متناظر با سه مقدار متفاوت c است، نشان می‌دهد.

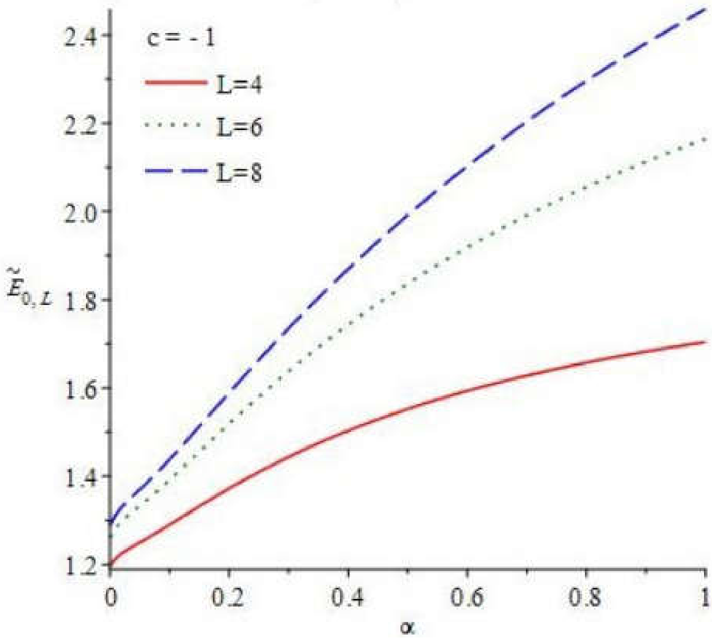


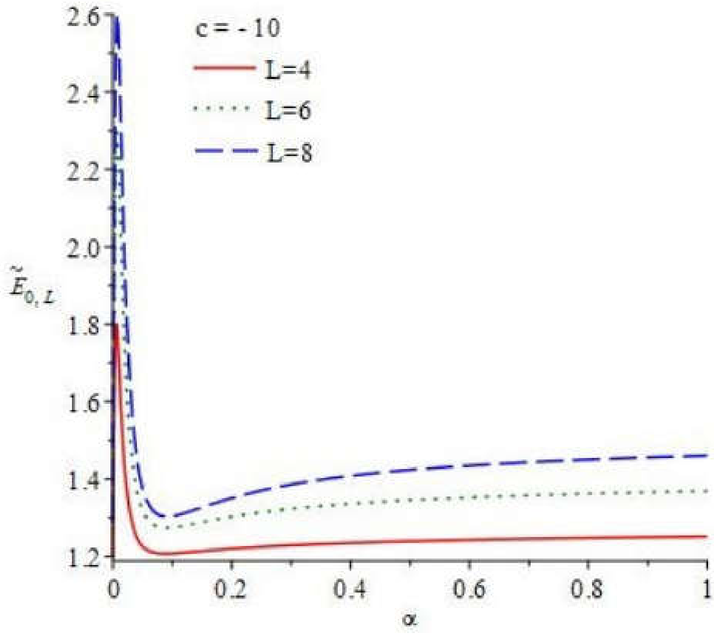


شکل (۶-۵) انرژی نرمال شده‌ی مدل X(۳) با پتانسیل کولنی-مانند در ساختار طول کمینه به ازای مقادیر متفاوت ثابت پتانسیل و پارامتر طول کمینه

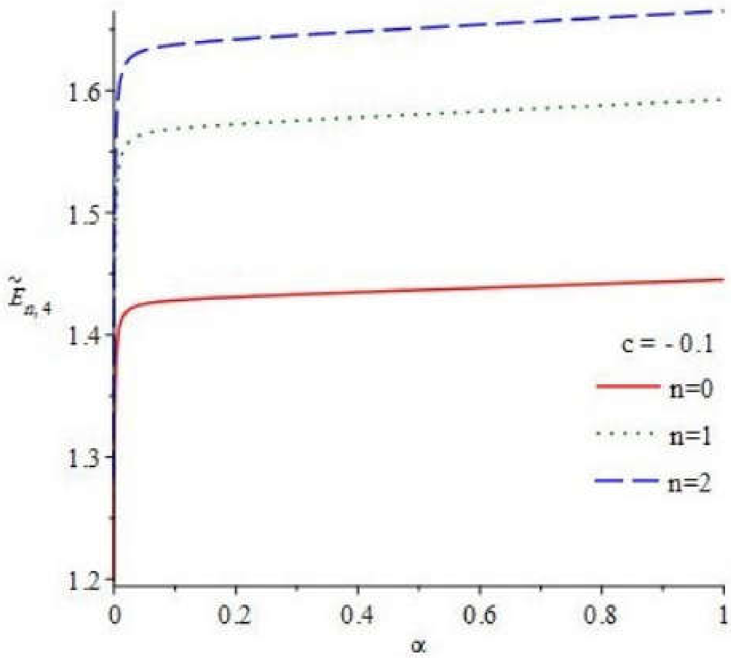
در شکل (۶-۵) ملاحظه می‌شود که با افزایش α، مقدار انرژی به ازای هر سه مقدار c نیز افزایش می‌یابد.

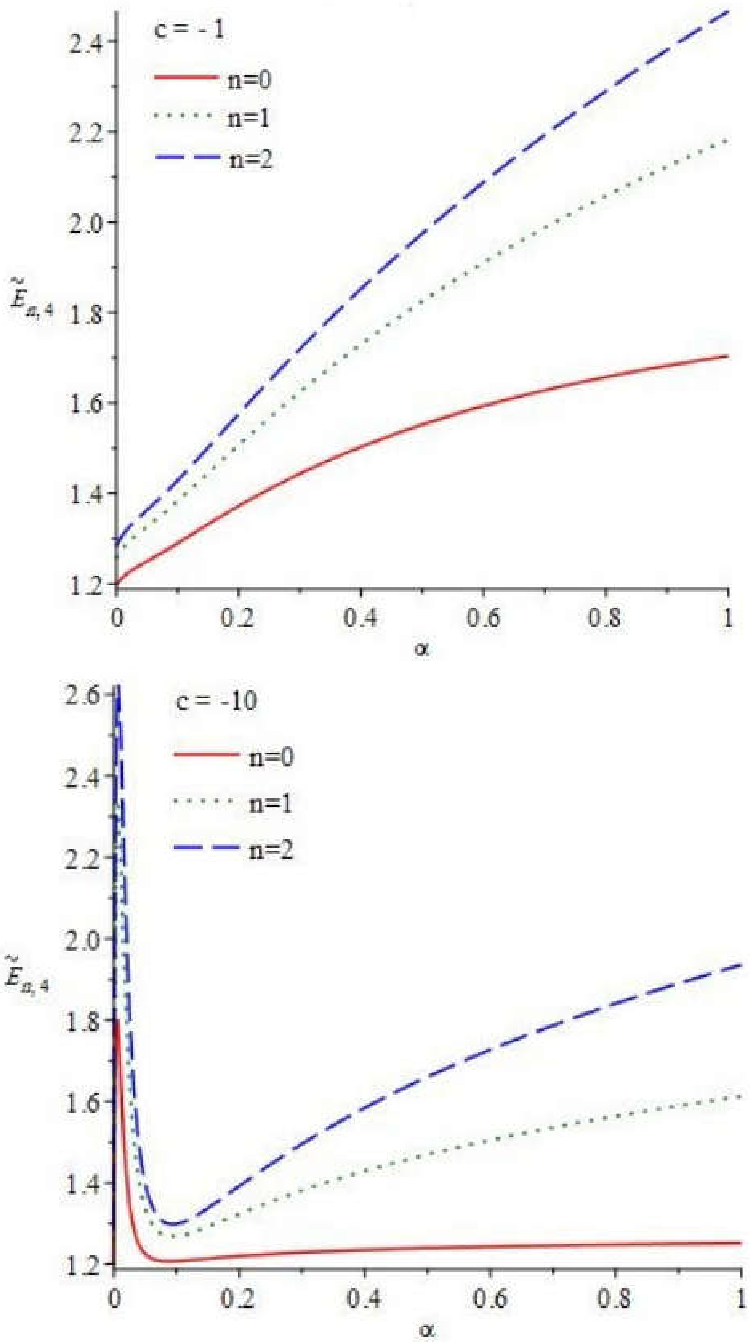

c = - 0.1
L=4
L=6
L=8
α


c = - 1
L=4
L=6
L=8
α



شکل (۶-۶) انرژی نرمال شده‌ی سومین، چهارمین و پنجمین تراز نوار پایه، به ازای سه مقدار متفاوت ثابت پتانسیل کولنی-مانند بر حسب پارامتر طول کمینه





شکل (۶-۷) انرژی نرمال شده‌ی تراز سوم در حالت پایه، در اولین و در دومین نوار β، به ازای سه مقدار متفاوت ثابت پتانسیل کولنی-مانند بر حسب پارامتر طول کمینه

شکل (۶-۶) اثر پارامتر طول کمینه را بر روی انرژی ترازهای سوم، چهارم و پنجم نوار پایه نشان می-دهد. این اثر به ازای سه مقدار متفاوت از ثابت پتانسیل در سه بخش نمایش داده شده است. نتیجه‌ی

به دست آمده از این شکل این است که در حالت‌های ۰.۱- =c و ۱۰- =c، اثر طول کمینه روی طیف انرژی قابل چشم‌پوشی است. شکل (۶-۷) همین نتایج را برای سومین تراز انرژی در سه نوار مختلف پایه، اولین و دومین نوار β نشان می‌دهد.

پس از این شکل‌های متنوع که در آن‌ها اثر پارامتر طول کمینه و ثابت پتانسیل بر روی مقدار انرژی ترازهای مختلف در نوارهای متفاوت مورد بررسی قرار گرفت، نتایج خود را با داده‌های تجربی و نتایج به دست آمده در منابع دیگر مقایسه می‌نماییم. جدول (۶-۲) این مقایسه را نشان می‌دهد. طیف انرژی مربوط به هر هسته با استفاده از رابطه‌ی (۶-۳۵) محاسبه شده است. در این رابطه مقادیر عددی ثابت پتانسیل (c)، $\hbar$ و B_m به ترتیب عبارتند از ۰.۰۴۱-، ۱ و عدد جرمیِ هسته‌ی مورد نظر، در حالی که پارامتر طول کمینه (α) به گونه‌ای تعیین شده است که انحراف داده‌های نظری از داده-های تجربی متناظر مینیمم باشد. با مقایسه‌ی محاسبات خویش (خط اول هر سطر در جدول (۶-۲)) با داده‌های تجربی (خط دوم) و نیز داده‌های مربوط به مرجع [۲۹] (خط سوم) درمی‌یابیم که مدل ما توصیف بهتری از طیف انرژی مربوط به هسته‌های $^{۹۸، ۱۰۰ و ۱۰۲}$Ru، ^{۱۱۸}Xe، ^{۱۵۲}Gd، ^{۱۵۴}Dy و ^{۱۸۶}Pt ارائه می‌دهد، لذا می‌توان نتیجه گرفت، مدل X(۳) در حضور طول کمینه به ازای پتانسیل کولنی-مانند برای این هسته‌ها مناسب‌تر از این مدل در غیاب طول کمینه به ازای پتانسیل سکستیک می‌باشد.

جدول (۶-۲) مقایسه‌ی طیف انرژی مدل X(۳) با پتانسیل کولنی در ساختار طول کمینه (خط اول) با داده‌ی تجربی [۸۳، ۸۵-۸۹، ۹۳، ۹۶، ۹۸، ۱۰۰، ۱۰۳-۱۰۵، ۱۱۰ و ۱۱۹] (خط دوم) و منبع [۲۹] (خط سوم) (عدم وجود خط سوم، به معنای عدم بررسی هسته‌ی مربوطه در منبع [۲۹] است.)

α	$\tilde{E}_{0,10}$	$\tilde{E}_{0,8}$	$\tilde{E}_{0,6}$	$\tilde{E}_{1,0}$	$\tilde{E}_{0,4}$	
۰.۳۲۰	۶.۲۰	۴.۸۳	۳.۴۳	۲.۰۰	۲.۱۴	^{۹۸}Ru
		۴.۷۹	۳.۴۱	۲.۰۳	۲.۱۴	
	۵.۹۷	۴.۷۳	۳.۳۸	۲.۱۵	۲.۲۱	

^{۱۰۰}Ru	۲.۲۷ ۲.۲۷ ۲.۵۸	۲.۱۱ ۲.۱۰ ۲.۶۶	۳.۸۲ ۳.۸۵ ۳.۹۰	۵.۵۹ ۵.۶۷ ۵.۸۸	۷.۴۰ ۷.۸۵ ۷.۳۶	۰.۳۰۵
^{۱۰۲}Ru	۲.۳۳ ۲.۳۳ ۲.۵۰	۲.۰۰ ۲.۰۰ ۲.۵۵	۳.۹۲ ۳.۹۴ ۳.۷۹	۵.۶۶ ۵.۷۰ ۵.۶۴	۷.۳۳ ۷.۲۳ ۷.۰۸	۰.۲۲۵
^{۱۰۴}Ru	۲.۴۸ ۲.۴۸ ۲.۷۴	۲.۶۰ ۲.۷۶ ۲.۹۲	۴.۵۵ ۴.۳۵ ۴.۱۴	۷.۲۹ ۶.۴۸ ۶.۴۱	۱۰.۵۲ ۸.۶۹ ۸.۰۲	۰.۴۳۰
^{۱۰۲}Pd	۲.۲۹ ۲.۲۹	۲.۴۷ ۲.۹۰	۳.۹۹ ۳.۷۹	۶.۱۹ ۵.۴۱	۸.۷۶ ۷.۱۸	۰.۵۰۱
^{۱۰۴}Pd	۲.۳۸ ۲.۳۸	۲.۴۰ ۲.۴۰	۴.۲۳ ۴.۰۵	۶.۵۶ ۵.۷۹	۹.۲۰	۰.۳۸۵
^{۱۰۶}Pd	۲.۴۰ ۲.۴۰	۲.۲۱ ۲.۲۰	۴.۲۱ ۴.۰۶	۶.۳۵	۸.۵۹	۰.۲۷۰
^{۱۰۸}Pd	۲.۴۲ ۲.۴۲	۲.۳۲ ۲.۴۰	۴.۳۱ ۴.۰۸	۶.۶۳ ۵.۸۷	۹.۱۶ ۷.۵۰	۰.۳۰۰

$^{۱۱۰}\mathrm{Pd}$	۲.۴۶ ۲.۴۶	۲.۴۲ ۲.۵۰	۴.۴۵ ۴.۲۱	۶.۹۶ ۶.۱۴	۹.۷۸ ۸.۲۱	۰.۳۲۱
$^{۱۱۲}\mathrm{Pd}$	۲.۵۳ ۲.۵۳	۲.۶۰ ۲.۶۰	۴.۶۹ ۴.۴۵	۷.۵۲ ۶.۶۵	۱۰.۸۰	۰.۳۵۰
$^{۱۰۶}\mathrm{Cd}$	۲.۳۶ ۲.۳۶	۲.۸۰ ۲.۸۰	۴.۲۴ ۳.۹۸	۶.۸۲ ۵.۹۹	۱۰.۰۸ ۷.۶۱	۰.۶۲۰
$^{۱۱۰}\mathrm{Cd}$	۲.۳۵ ۲.۳۵	۲.۰۷ ۲.۲۰	۴.۰۱ ۳.۷۷	۵.۸۷ ۴.۹۸	۷.۷۱ ۵.۴۹	۰.۲۱۱
$^{۱۱۲}\mathrm{Cd}$	۲.۲۹ ۲.۲۹	۱.۹۰ ۲.۰۰	۳.۷۶ ۳.۵۱	۵.۲۸ ۴.۶۷	۶.۶۷ ۵.۹۷	۰.۱۵۹
$^{۱۱۴}\mathrm{Cd}$	۲.۳۰ ۲.۳۰	۱.۸۷ ۲.۰۰	۳.۷۷ ۳.۵۶	۵.۲۶ ۴.۷۸	۶.۶۱ ۵.۶۳	۰.۱۴۴
$^{۱۱۸}\mathrm{Xe}$	۲.۴۰ ۲.۴۰ ۲.۶۱	۲.۴۰ ۲.۴۶ ۲.۷۱	۴.۲۷ ۴.۱۴ ۳.۹۴	۶.۵۹ ۶.۱۵ ۵.۹۸	۹.۱۸ ۸.۳۵ ۷.۴۸	۰.۲۷۲

	۲.۴۷	۲.۷۰	۴.۵۴	۷.۳۵	۱۰.۷۴	۰.۳۶۸
^{۱۲۰}Xe	۲.۴۷	۲.۸۲	۴.۳۳	۶.۵۱	۸.۹۰	
	۲.۷۳	۲.۸۸	۴.۱۱	۶.۳۲	۷.۹۱	
	۲.۱۶	۲.۸۰	۳.۵۹	۵.۳۳	۷.۲۷	۰.۵۸۲
^{۱۳۲}Xe						
	۲.۱۶	۲.۸۰	۳.۵۲		۴.۱۴	
	۲.۲۸	۱.۹۰	۳.۷۴	۵.۲۶	۶.۶۵	۰.۱۱۱
^{۱۳۶}Ba						
	۲.۲۸	۱.۹۰	۲.۷۰			
	۲.۱۹	۱.۸۳	۳.۴۹	۴.۷۸	۵.۹۳	۰.۰۸۶
^{۱۵۲}Gd	۲.۱۹	۱.۷۹	۳.۵۷	۵.۰۷	۶.۶۸	
	۲.۱۰	۲.۰۰	۳.۲۲	۴.۳۷	۵.۵۲	
	۲.۲۳	۲.۰۰	۳.۶۸	۵.۲۷	۶.۸۴	۰.۱۱۴
^{۱۵۴}Dy	۲.۲۳	۱.۹۸	۳.۶۶	۵.۲۳	۶.۸۹	
	۲.۱۰	۲.۰۰	۳.۲۲	۴.۳۷	۵.۵۲	
	۲.۵۶	۲.۳۵	۴.۷۰	۷.۳۴	۱۰.۱۹	۰.۰۹
^{۱۸۶}Pt	۲.۵۶	۲.۴۶	۴.۵۸	۷.۰۱	۹.۷۰	
	۲.۶۸	۳.۰۴	۴.۱۸	۶.۵۳	۸.۳۰	

علاوه بر طیف انرژی، آهنگ‌های گذار را نیز مورد بررسی قرار داده‌ایم. به این منظور از رابطه‌ی (۴-۸۴) استفاده نموده‌ایم که در آن

$$I_{n_1L_1;n_2L_2}=\int_0^\infty \beta\xi_{n_1L_1}\left(\beta\right)\xi_{n_2L_2}\left(\beta\right)\beta^2 d\beta \qquad (۶-۴۷)$$

در این رابطه، تابع موج از رابطه‌ی (۶-۳۷) محاسبه می‌شود. با جایگذاری تابع موج در رابطه‌ی (۶-۴۷) و قرار دادن نتیجه‌ی به دست آمده در رابطه‌ی (۴-۸۴)، برخی از آهنگ‌های گذار را برای هسته‌های بررسی شده در جدول (۶-۲) محاسبه نموده که نتایج آن در جدول (۶-۳) گزارش شده‌اند.

جدول (۶-۳) مقایسه‌ی برخی گذارهای مدل X(۳) با پتانسیل کولنی-مانند در ساختار طول کمینه (خط اول) با داده‌های تجربی (خط دوم). تمام گذارها بر گذار $2_{g.s}\rightarrow 0_{g.s}$ تقسیم شده‌اند

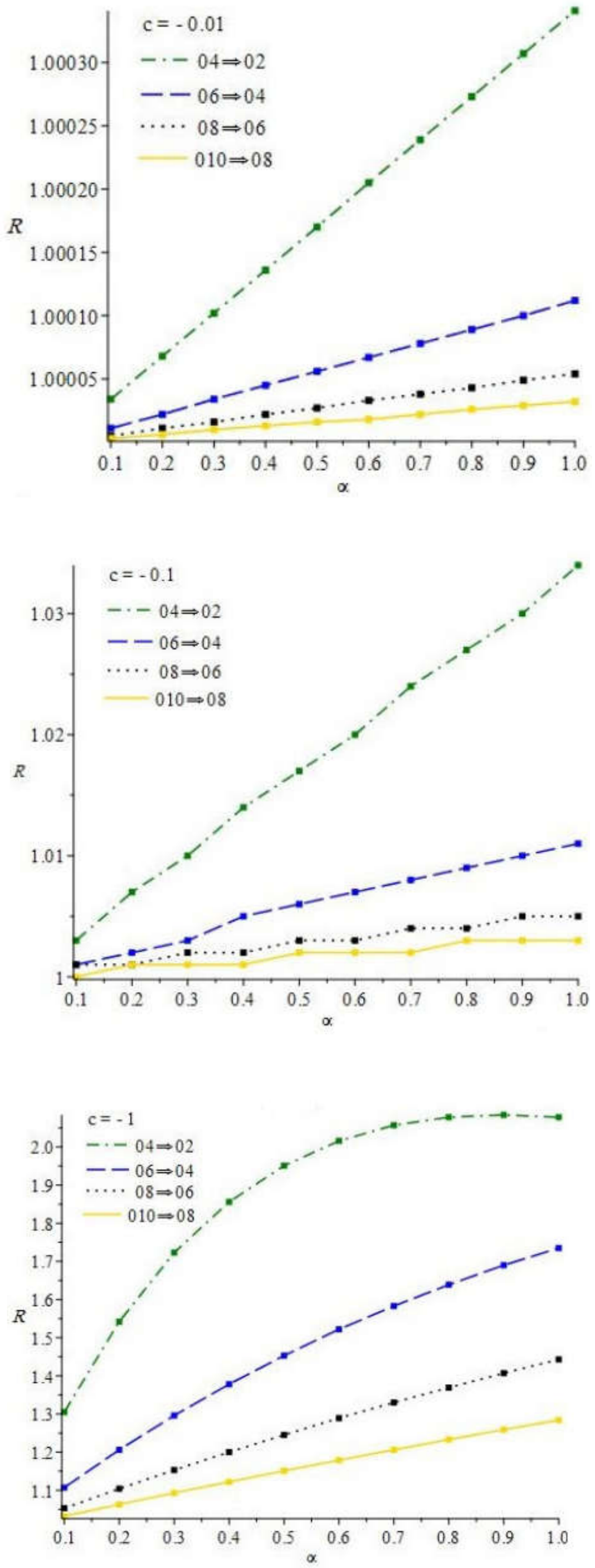
	$4_{g.s}\rightarrow 2_{g.s}$	$6_{g.s}\rightarrow 4_{g.s}$	$8_{g.s}\rightarrow 6_{g.s}$	$10_{g.s}\rightarrow 8_{g.s}$	$2_{\beta_1}\rightarrow 2_{g.s}$	$0_{\beta_1}\rightarrow 2_{g.s}$
^{98}Ru	۱.۴۴ ۱.۴۴	۲.۸۷	۴.۷۹	۶.۹۸	۱.۴۵ ۱.۶۲	۰.۹۶
^{100}Ru	۱.۴۵ ۱.۴۵	۲.۹۰	۳.۷۱	۷.۱۸	۱.۴۶ ۰.۶۴	۰.۷۳ ۰.۹۸
^{102}Ru	۱.۵۰ ۱.۵۰	۲.۸۹	۴.۶۶	۶.۷۶	۱.۴۳ ۰.۶۲	۰.۹۵ ۰.۸۰
^{104}Ru	۱.۱۸ ۱.۱۸	۱.۹۳	۳.۰۷	۴.۴۵	۱.۴۳ ۰.۶۲	۰.۸۸ ۰.۴۲
^{104}Pd	۱.۳۶ ۱.۳۶	۲.۷۶	۴.۸۲	۷.۳۰	۱.۴۳	۰.۷۶

$^{118}\mathrm{Xe}$	۱.۱۱ ۱.۱۱	۱.۵۱ ۰.۸۸	۲.۰۹ ۰.۴۹	۲.۷۸ ۰.۷۳	۱.۱۳	۰.۹۳
$^{120}\mathrm{Xe}$	۱.۱۶ ۱.۱۶	۱.۸۸ ۱.۱۷	۳.۰۳ ۰.۹۶	۴.۴۵ ۰.۹۱	۱.۲۲	۰.۸۸ ۰.۶۲
$^{152}\mathrm{Gd}$	۱.۸۴ ۱.۸۴	۳.۹۸ ۲.۷۲	۶.۶۳	۹.۸۰	۱.۶۵ ۰.۲۳	۰.۵۳ ۲.۴۷
$^{154}\mathrm{Dy}$	۱.۳۵ ۱.۶۲	۲.۴۰ ۲.۰۵	۳.۷۸ ۲.۲۷	۵.۴۲ ۱.۸۶	۱.۳۳	۰.۸۰

کمیت زیر نسبت آهنگ‌های گذار را به ازای دو حالت $\alpha=0$ و $\alpha\neq 0$ نشان می‌دهد

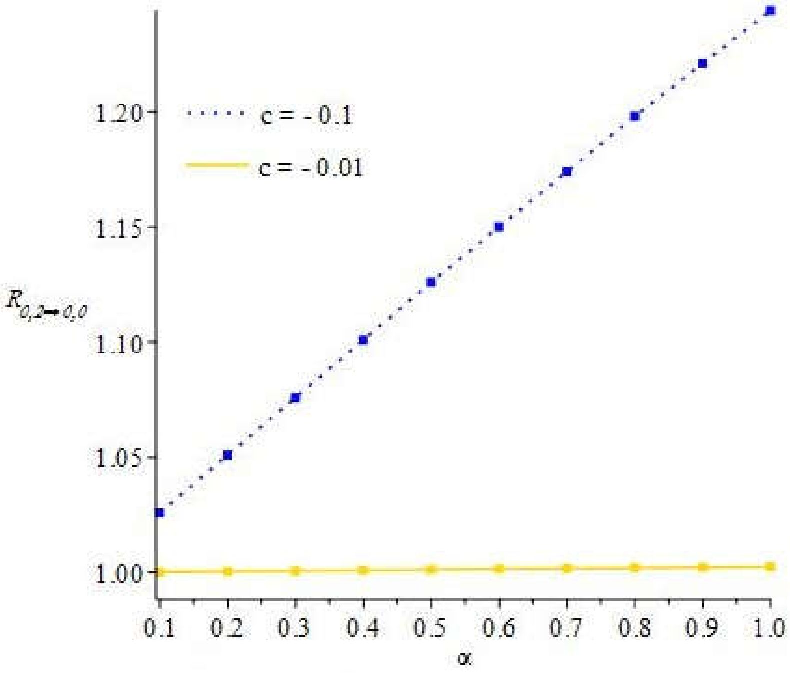
$$R=\frac{B\left(E2;n_1L_1\rightarrow n_2L_2,\alpha\right)}{B\left(E2;n_1L_1\rightarrow n_2L_2,\alpha=0\right)}=\frac{\left[\int_0^\infty \xi_{n_1L_1}\left(\beta\right)\,\xi_{n_2L_2}\left(\beta\right)\,\beta^3\,\mathrm{d}\beta\right]^2}{\left[\int_0^\infty \xi^0_{n_1L_1}\left(\beta\right)\,\xi^0_{n_2L_2}\left(\beta\right)\,\beta^3\,\mathrm{d}\beta\right]^2} \qquad (۶-۴۸)$$

شکل (۶-۸) این کمیت را برای چهار گذار مختلف (سومین تراز حالت پایه به دومین تراز آن، چهارمین تراز حالت پایه به سومین تراز آن، پنجمین تراز حالت پایه به چهارمین تراز آن و ششمین تراز حالت پایه به پنجمین تراز آن) به عنوان تابعی از پارامتر α برای سه مقدار متفاوت از ثابت پتانسیل، c=-۰.۰۱، c=-۰.۱ و c=-۱ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود مقدار این کمیت برای حالت c=-۰.۰۱ نسبت به دو حالت دیگر (c=-۰.۱ و c=-۱)، به یک نزدیک‌تر است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت در حالت c=-۰.۰۱ تأثیر پارامتر طول کمینه بر روی آهنگ‌های گذار کمتر می‌باشد. علاوه بر این ملاحظه می‌شود که به ازای هر سه مقدار از ثابت پتانسیل اثر، پارامتر طول کمینه بر روی اولین گذار نشان داده شده در شکل (گذار از سومین تراز حالت پایه به دومین تراز آن) نسبت به سایر گذارها بیشتر است و این اثر با افزایش عدد کوانتمی تکانه‌ی زاویه‌ای مربوط به ترازها، کاهش می‌یابد.



شکل (۶-۸) مقدار کمیت تعریف شده در رابطه‌ی (۶-۴۸) بر حسب طول کمینه برای گذارهای مختلف نوار پایه به ازای سه مقدار متفاوت از ثابت پتانسیل

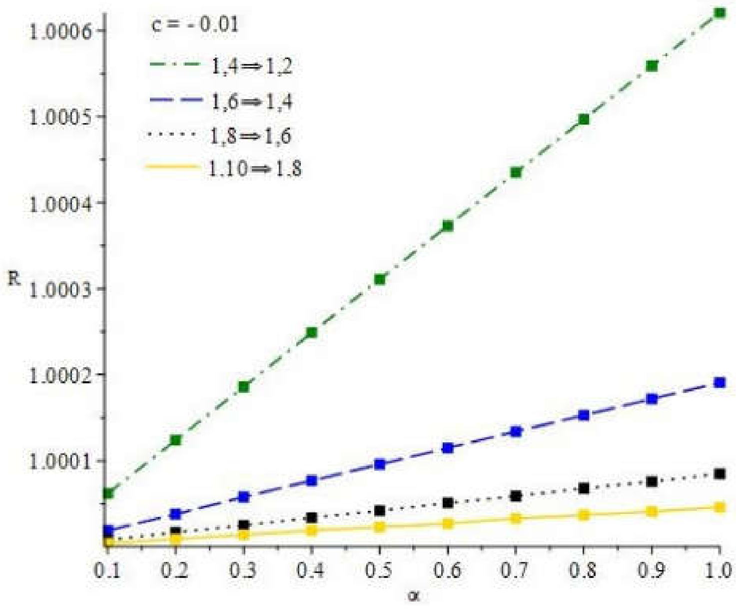
شکل (۶-۹)، کمیت R به عنوان تابعی از پارامتر α را برای گذار از دومین تراز نوار پایه به اولین تراز آن به ازای دو مقدار متفاوت از ثابت پتانسیل (c=-۰.۰۱ و c=-۰.۱) نشان می‌دهد.

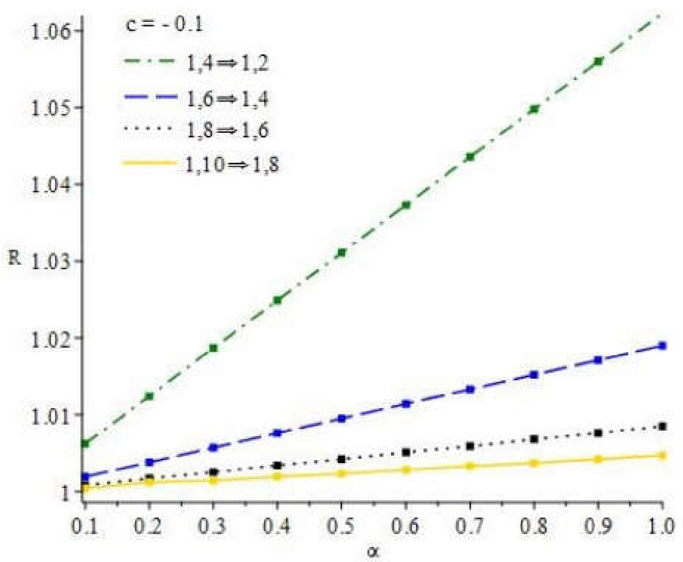


شکل (۶-۹) مقدار کمیت تعریف شده در رابطه‌ی (۶-۴۸) بر حسب طول کمینه برای گذار از دومین تراز نوار پایه به اولین تراز آن به ازای دو مقدار متفاوت از ثابت پتانسیل

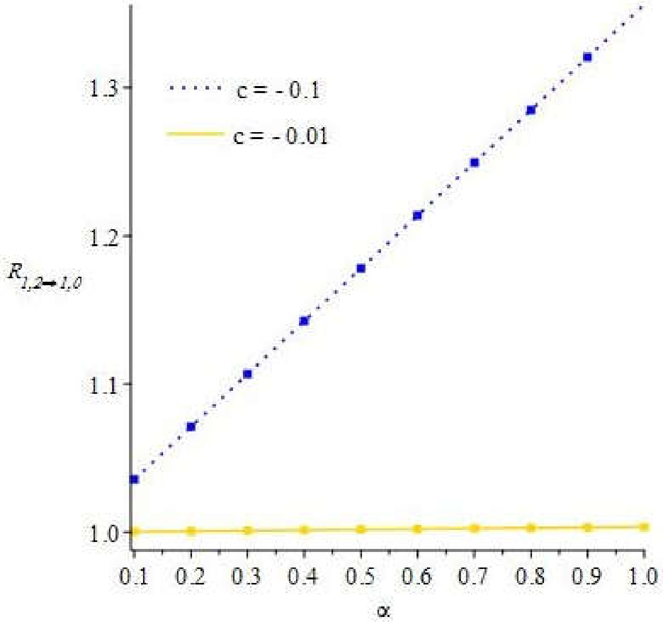
نتیجه‌ی به دست آمده در شکل (۶-۸) در شکل (۶-۹) نیز مشاهده می‌شود.

مطالب بررسی شده در شکل (۶-۸) و (۶-۹) برای اولین نوار β به ترتیب در شکل‌های (۶-۱۰) و (۶-۱۱) مورد مطالعه قرار گرفته است.





شکل (۶-۱۰) مقدار کمیت تعریف شده در رابطه‌ی (۶-۴۸) بر حسب طول کمینه برای گذارهای مختلف در اولین نوار به ازای دو مقدار متفاوت از ثابت پتانسیل β



شکل (۶-۱۱) مقدار کمیت تعریف شده در رابطه‌ی (۶-۴۸) بر حسب طول کمینه برای گذار از دومین تراز در اولین نوار β به اولین تراز آن به ازای دو مقدار متفاوت از ثابت پتانسیل

با توجه به شکل‌های (۶-۱۰) و (۶-۱۱) مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده برای حالت پایه، در اولین نوار β نیز دیده می‌شود.

فصل هفتم:

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۷-۱) نتیجه‌گیری

نتایج حاصل از این رساله را می‌توان به چهار بخش مجزاّ تقسیم نمود. بخش اوّل مربوط به بررسی مدل X(۳) با دو پتانسیل نوسانگر هماهنگ وابسته به انرژی و داویدسون تعمیم‌یافته می‌باشد. تجزیه و تحلیل مدل ترکیبی با پتانسیل کلینگبک، معرفی مدل ترکیب‌شده و نیز مطالعه‌ی این مدل با پتانسیل مورس، نتایج بخش دوم را ایجاد می‌نمایند. لازم به ذکر است که نتیجه‌های مربوط به این دو بخش در فصل چهارم این رساله گردآوری شدند. بررسی مدل X(۳) در رهیافت جرم وابسته به مکان با دو پتانسیل کراتزر و داویدسون تعمیم‌یافته، نتایج بخش سوم را تشکیل داده‌اند در حالی که در بخش چهارم، نتیجه‌های حاصل از بررسی مدل X(۳) در حضور طول کمینه با در نظر گرفتن پتانسیل مربوطه به دو شکل چاه مربّعی نامحدود و کولنی-مانند، گنجانده شده است. نتایجِ بخش سوم و چهارم به ترتیب در فصل پنجم و ششم به تفسیر بیان شدند. اکنون، به طور خلاصه نتیجه‌های مربوط به هر بخش را بازگو می‌نماییم.

۷-۱-۱) بخش اول

برای مدل X(۳) با پتانسیل نوسانگر هماهنگ وابسته به انرژی ($v(\beta,\varepsilon)=k(\varepsilon)\beta^2=c_H(1+a_H\varepsilon)\beta^2$)، رسم نمودار انرژی نرمال شده‌ی ترازهای حالت پایه بر حسب پارامتری که بیانگر وابستگی خطی پتانسیل به انرژی است (a_H)، نشان داد که میزان این وابستگی فقط به ازای مقادیر کوچکِ این پارامتر قابل ملاحظه است (تقریباً $۰\le a_H\le ۰.۴$) و با افزایش ده برابری c_H این مقدار کاهش می‌یابد (تقریباً $۰\le a_H\le ۰.۱$). هم‌چنین این مدل به خوبی آهنگ‌های گذار $B(E2;06\to04)$، $B(E2;010\to08)$، $B(E2;10\to02)$ و $B(E2;12\to10)$ در هسته‌ی ^{152}Sm و گذارهای $B(E2;04\to02)$، $B(E2;06\to04)$ و $B(E2;08\to06)$ در هسته‌ی ^{150}Sm را پیش‌بینی می‌نماید به طوری که تطابق خوبی بین داده‌های نظری ما و نتایج تجربی موجود برای گذارهای نام برده شده، ملاحظه شد.

از آن‌جایی که استفاده از پتانسیل داویدسون تعمیم‌یافته برای مدل X(۳) منجر به معادله دیفرانسیلی شد که به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نبود، برای استخراج ویژه مقادیر و ویژه توابع آن از روش وردش استفاده نمودیم. نتایج نظریِ این مدل با داده‌های نظریِ مدل X(۳) با پتانسیل سکستیک و نیز داده‌های تجربیِ موجود برای هسته‌های ^{102}Mo، $^{104،106و108}$Ru، $^{120،122،124و126}$Xe، ^{132و134}Ce، ^{148}Nd، ^{152}Sm و $^{184،186و188}$Pt مقایسه شد و این مقایسه نشان داد اگر چه برخی از آهنگ‌های گذار به دست آمده (از جمله گذار $\frac{B(E2;010\rightarrow 08)}{B(E2;02\rightarrow 00)}$ برای هسته‌ی ^{104}Ru، گذارهای $\frac{B(E2;08\rightarrow 06)}{B(E2;02\rightarrow 00)}$ و $\frac{B(E2;010\rightarrow 08)}{B(E2;02\rightarrow 00)}$ برای هسته‌های $^{120،122و124}$Xe و ^{132و134}Ce) توسط مدل ما اختلاف نسبتاً قابل ملاحظه‌ای با داده‌های تجربیِ متناظر دارد (همین اختلاف در مدل X(۳) با پتانسیل سکستیک نیز مشاهده می‌شود)، امّا در مورد انرژی ترازهای حالت پایه و اوّلین نوار β، داده‌های حاصل از مدل ما، برای تمام هسته‌های نام برده شده، تطابق بهتری با داده‌های تجربی متناظر دارند.

۷-۱-۲) بخش دوّم

از روش وردش برای استخراج ویژه مقادیر و ویژه توابع مربوط به مدل ترکیبی با پتانسیل کلینگبک نیز استفاده شد و به منظور ارزیابی نتایجِ حاصل از این مدل، آن‌ها را با نتایج نظریِ مدل‌های دیگر و نیز نتایج تجربی مقایسه نمودیم. این مقایسه نشان داد که مدلِ ما توصیف بهتری از طیف انرژی و آهنگ-های گذارِ هسته‌های ^{154}Sm و ^{156}Gd ارائه می‌دهد، به طوری که مقدارِ انحراف از معیار، برای مدل ما در این دو هسته به ترتیب ۰.۴۵ و ۰.۶۵ است، در حالی که این مقدار در مدل X(۵) به ازای پتانسیل داویدسون در رهیافت جرم وابسته به مکان برابر با ۰.۷۵ و ۱.۰۱ می‌باشد.

یکی دیگر از کارهای انجام‌شده در این رساله، معرّفی مدل ترکیب‌شده است. این مدل را، که ترکیبی از تقارن‌های دینامیکیِ E(۵) و X(۳) است، به منظور شکستگیِ تبهگنیِ موجود در طیف انرژیِ مدل E(۵) ارائه دادیم. تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از این مدل نشان داد که هسته‌ی ^{128}Xe یکی از

بهترین نمونه‌های تجربیِ این مدل است، زیرا انحراف معیارِ داده‌های ما از یازده داده‌ی تجربیِ متناظر برای طیف انرژی این هسته (ترازهای سوم، چهارم و پنجم از حالت پایه، ترازهای اول و دوم در اولین نوار β، ترازهای اول، دوم، سوم، چهارم، پنجم، ششم و هشتم از اولین نوار γ) تنها ۰.۲۸ می‌باشد. علاوه بر طیف انرژی، مدل ما برخی از گذارهای پیش‌بینی شده به روش تجربی برای این هسته (از جمله $\frac{B(E2;1,2,4\to1,1,2)}{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}$، $\frac{B(E2;1,4,8\to1,3,6)}{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}$، $\frac{B(E2;1,2,2\to1,1,2)}{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}$ و $\frac{B(E2;1,3,4\to1,2,2)}{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}$) را به خوبی توصیف می‌نماید.

پس از معرفی این مدل، آن را در حضور پتانسیل مورس مورد بررسی قرار دادیم و نتایج خویش را با نتایجی که از مدل E(۵) با پتانسیل مورس به دست آمده بود و نیز نتایج تجربی، مقایسه نمودیم. این مقایسه نشان داد که مدل ترکیب‌شده‌ی ما به ازای پتانسیل مورس، نسبت به مدل E(۵) با همین پتانسیل، طیف انرژیِ هسته‌هایی از جمله ^{108}Pd و ^{112}Pd را بهتر توصیف می‌نماید، به گونه‌ای که خطای آماریِ داده‌های نظریِ ما به ترتیب برای شانزده و هجده تراز انرژی در این دو هسته برابر با ۰.۱۶ و ۰.۲۹ می‌باشد. شانزده تراز انرژی بررسی شده در هسته‌ی ^{108}Pd عبارت است از پنج تراز از حالت پایه، چهار تراز از اولین نوار β و هفت تراز از اولین نوار γ، در حالی که هجده تراز انرژی مربوط به هسته‌ی ^{112}Pd از هفت تراز در حالت پایه، یک تراز در اولین نوار β و ده تراز در اولین نوار γ تشکیل شده‌اند. علاوه بر طیف انرژی، گذارهای $\frac{B(E2;1,2,4\to1,1,2)}{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}$، $\frac{B(E2;1,3,6\to1,2,4)}{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}$، $\frac{B(E2;1,4,8\to1,3,6)}{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}$، $\frac{B(E2;1,0,0\to1,1,2)}{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}$ و $\frac{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}{B(E2;1,1,2\to1,0,0)}$ نیز برای هسته‌ی ^{108}Pd با استفاده از مدل ترکیب‌شده به ازای پتانسیل مورس، به خوبی پیش‌بینی می‌شوند، به گونه‌ای که تطابق بسیار خوبی با داده‌های تجربی متناظر وجود دارد.

۷-۱-۳) بخش سوم

مدل $X(3)$ را در رهیافتِ جرم وابسته به مکان (که پیشتر برای مدل‌های $E(5)$ و $X(5)$ استفاده شده بود) به ازای دو پتانسیل کراتزر و داویدسون تعمیم‌یافته بررسی نمودیم. نتایج حاصل از اولین پتانسیل، توصیف نسبتاً خوبی از طیف انرژی هسته‌ی ^{104}Pd ارائه می‌دهد، به گونه‌ای که سه تراز از حالت پایه و سه تراز از اولین نوار β را با خطای آماری ۰.۴۴ از داده‌های تجربی پیش‌بینی می‌نماید.

از آن‌جایی که مدل مورد نظر به ازای دومین پتانسیل (داویدسون تعمیم‌یافته)، به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نبود، از توابع هیون و روش تقریبیِ سری (با محاسبه‌ی پنج جمله‌ی اول آن) استفاده نمودیم. به منظور ارزیابیِ این مدل، پس از تعیین ویژه مقادیر و ویژه توابع آن، طیف انرژی و آهنگ-های گذار برخی از ایزوتوپ‌های کادمیوم و زنون را که پیشتر به روش تجربی تعیین شده بودند، محاسبه نمودیم. مقایسه‌ی نتایج حاصل با داده‌های تجربیِ متناظر نشان می‌دهد که روند نامنظمِ (ابتدا صعودی و سپس نزولی و یا ابتدا نزولی وسپس صعودی) ملاحظه شده در مقادیرِ گذارهای نوار پایه‌ی ایزوتوپ‌های زنون ($^{118،\ 120،\ 122\ و\ 124}Xe$) که به روش تجربی اندازه‌گیری شده بودند، توسط این مدل نیز به طور نسبتاً خوبی پیش‌بینی می‌شود. در واقع، منفی شدنِ ضرایبِ سری (به ازای برخی از مقادیر ثابت پتانسیل)، منجر به کاهشِ مقدارِ تابع موج می‌شود و این نزول، موجب کاهش آهنگ گذار می-گردد.

۷-۱-۴) بخش چهارم

استفاده از روشی جایگزین برای حلّ معادله موج مربوط به مدل $X(3)$ در فضای ناجابه‌جایی، از دیگر کارهایی است که در این رساله انجام شد. در سال ۲۰۱۶، چباب و همکارانش [۵۶] برای حلّ این موضوع روشی ارائه نمودند که نمودارِ انرژیِ سومین و چهارمین تراز حالت پایه برحسبِ پارامتر طول کمینه را، گسسته پیش‌بینی می‌نمود. ما با ارائه‌ی روشی جایگزین، که قادر به پیش‌بینیِ انرژیِ سومین و چهارمین تراز حالت پایه به ازای تمام مقادیرِ مربوط به پارامتر طول کمینه است، ویژه مقادیر و ویژه توابعِ مدل $X(3)$ در فضای ناجابه‌جایی را بازنویسی نموده و محاسبات عددیِ خویش را با محاسبات

منبع [۵۶] و نیز داده‌های تجربی موجود برای انرژیِ ترازهای نوار پایه و اولین نوار β در هسته‌های ^{150}Nd، ^{154}Gd، ^{156}Dy و $^{176،178و180}Os$ مقایسه نموده‌ایم. این مقایسه نشان داد که در پنج مورد، داده-های نظری ما (نسبت به نتایج منبع [۵۶]) تطابق بیشتری با داده‌های تجربی متناظر دارند و این پنج مورد عبارتند از: ترازهای نوار پایه‌ی $^{176و178}Os$ و ^{154}Gd و ترازهای اولین نوار β در هسته‌های ^{180}Os و ^{154}Gd. لذا می‌توان نتیجه گرفت که هسته‌ی ^{154}Gd می‌تواند نماینده‌ی تجربیِ مدل X(۳) در فضای ناجابه‌جایی باشد.

مطالعه‌ی اثراتِ پتانسیلِ کولنی-مانند بر روی هسته‌های کشیده‌ی γ-صلب در فضای ناجابه‌جایی، یکی دیگر از کارهایی است که در این رساله انجام شد. مقایسه‌ی نتایجِ حاصل از این مطالعه با داده‌های تجربی متناظر برای برخی از این گونه هسته‌ها، نشان می‌دهد که هسته‌ی ^{154}Dy می‌تواند مثال خوبی از مدل X(۳) با پتانسیل کولنی-مانند در فضای ناجابه‌جایی باشد، زیرا علاوه بر اینکه مقادیرِ انرژیِ تعیین شده توسط این مدل، برای ترازهای سوم، چهارم، پنجم و ششمِ نوار پایه و نیز ترازِ اولِ اولین نوار β، تطابق خوبی با داده‌های تجربیِ متناظر در هسته‌ی ^{154}Dy دارند، مقادیری که برای گذارهای $\frac{B(E2;04\to 02)}{B(E2;02\to 00)}$ و $\frac{B(E2;06\to 04)}{B(E2;02\to 00)}$ در این هسته تعیین می‌کند با مقادیر متناظر که به روش تجربی تعیین شده‌اند، توافق دارد.

۷-۲) پیشنهادها و کارهای آینده

- بررسی و تعمیم هامیلتونی بوهر در تقارن دینامیکی E(۵) در ساختار طول کمینه
- مطالعه‌ی رفتار آنتروپی اطلاعات در نقاطِ بحرانیِ مختلف از جمله E(۵) و X(۵)
- بررسی رابطه‌ی اصل عدم قطعیت در دستگاه مختصات ذاتی جسم برای هسته‌های تغییر شکل‌یافته
- بررسی آنتروپی اطلاعات برای مدل‌های تقارنیِ مختلف از جمله مدل X(۳)

- بررسی هامیلتونی بوهر به ازای پتانسیل‌های مختلف در ساختار طول کمینه برای سایر تقارن‌ها از جمله تقارن X(۵) با استفاده از روش وردش
- بررسی وتعمیم هامیلتونی بوهر به ازای پتانسیل‌های مختلف برای سایر تقارن‌های دینامیکی از جمله Z(۵)، Z(۴) و T(۵)
- مطالعه‌ی پراکندگی معادله موج هامیلتونی بوهر در رهیافت جرم وابسته به مکان به ازای پتانسیل‌های مختلف
- بررسی پراکندگی و فاز-شیفتِ ناشی از پتانسیل‌های مختلف از جمله پتانسیل کراتزر برای هسته‌های کشیده‌ی γ-صلب
- معرفی مدل نیمه‌تجربی برای انواع مختلف هسته‌های تغییر شکل‌یافته از جمله هسته‌های نامتقارن محوری
- بررسی کمیّت‌های آماری برای هسته‌های تغییر شکل‌یافته‌ی γ-ناپایدار
- مطالعه‌ی مدل‌های ترکیبی و ترکیب‌شده در ساختار جرم وابسته به مکان
- استفاده از عملگر چهار قطبی الکتریکی به منظور محاسبه‌ی گذارهای الکتریکیِ مرتبه‌ی چهارم
- مطالعه‌ی شکل‌های هم‌زیست برای هسته‌های تغییر شکل‌یافته

منابع

[۱] L. Rayleigh (1879) **Proc. R. Soc.**, 29, pp 71

[۲] C.F. Weizsacker (1935) “Zur Theorie der Kernmassen” **Z. Physik**, 96, 7-8, pp 431

[۳] S. Flugge (1941) “Die Eigenschwingungen eines Flüssigkeitstropfens und ihre Anwendung auf die Kernphysik” **Ann. Phys. Lpz.**, 431, 5, pp 373

[۴] A. Bohr and B. R. Mottelson (1952) “Beta-decay and the shell model, and the influence of collective motion on nuclear transitions” **Physica**, 18, 12, pp 1066

[۵] A. Bohr and B.R. Mottelson (1953) “Interpretation of isomeric transitions of electric quadrupole type” **Phys. Rev.**, 89, pp 316

[۶] A. Bohr and B.R. Mottelson (1953) “Rotational States in Even-Even Nuclei” **Phys. Rev.**, 90, pp 717

[۷] A. Bohr (1952) “The coupling of nuclear surface oscillations to the motion of individual nucleons” **Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk.**, 26, 14, pp 1

[۸] A. Bohr and B.R. Mottelson (1953) “Collective and individual-particle aspects of nuclear structure” **Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk.**, 27, 16, pp 1

[۹] L. Wilets and M. Jean (1956) “Surface Oscillations in Even-Even Nuclei” **Phys. Rev.**, 102, pp 788

[۱۰] A.S. Davydov and A.A. Chaban (1960) “Rotation-vibration interaction in non-axial even nuclei” **Nucl. Phys.**, 20, pp 499

[۱۱] G. Gneuss and W. Greiner (1971) “Collective potential energy surfaces and nuclear structure” **Nucl. Phys. A**, 171, 3, pp 449

[۱۲] L. Prochniak, K. Zajac, K. Pomorski *et al.* (1999) “Collective quadrupole excitations in the $50 < Z, N < 82$ nuclei with the general Bohr Hamiltonian” Nucl. Phys. A, 648, 3-4, pp 181

[۱۳] R.F. Casten and N.V. Zamfir (2000) “Evidence for a Possible E(5) Symmetry in ^{134}Ba” **Phys. Rev. Lett.,** 85, pp 3584

[۱۴] L. Fortunato (2004) "Soft triaxial rotovibrational motion in the vicinity of $\gamma=\pi/6$" **Phys. Rev. C**, 70, pp 011302(R)

[۱۵] L. Fortunato (2005) "Solutions of the Bohr Hamiltonian, a compendium" **Eur. Phys. J. A**, 26, s01, pp 1

[۱۶] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis *et al.* (2005) "γ-rigid solution of the Bohr Hamiltonian for γ=۳۰ compared to the E(5) critical point symmetry" **Phys. Lett. B**, 621, 1-2, pp 102

[۱۷] S. De Baerdemacker, L. Fortunato, V. Hellemans *et al.* (2006) "Solution of the Bohr Hamiltonian for a periodic potential with minimum at $\gamma=\pi/6$" **Nucl. Phys. A**, 769, pp 16

[۱۸] L. Fortunato, S. De Baerdemacker, and K. Heyde (2006) "Solution of the Bohr Hamiltonian for soft triaxial nuclei" **Phys. Rev. C**, 74, pp 014310

[۱۹] L. Prochniak and S. G. Rohozinski (2009) "Quadrupole collective states within the Bohr collective Hamiltonian" **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.**, 36, 12, pp 123101

[۲۰] I. Yigitoglu and D. Bonatsos (2011) "Bohr Hamiltonian with Davidson potential for triaxial nuclei" **Phys. Rev. C**, 83, pp 014303

[۲۱] P. Buganu and L. Fortunato (2016) "Recent approaches to quadrupole collectivity: models, solutions and applications based on the Bohr hamiltonian" J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 43, 9, pp 093003

[۲۲] W. Greiner and J.A. Maruhn (1996), "**Nuclear Models**", Springer

[۲۳] F. Iachello and A. Arima (1987), "**The interacting boson model**", Cambridge University Press, Cambridge

[۲۴] F. Iachello (2006), "**Lie Algebras and Applications**", Springer

[۲۵] F. Iachello (2000) "Dynamical symmetries at the critical point" **Phys. Rev. Lett.**, 85, 3580

[۲۶] F. Iachello (2001) “Analitical description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition” **Phys. Rev. Lett.**, 87, pp 052502

[۲۷] L. Fortunato (2009) “Nuclei at the top of their shape” **Europhysics News**, 40, 2, pp 25

[۲۸] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis *et al.* (2006) “X(3): an exactly seperable γ-rigid version of the X(5) critical point symmetry” **Phys. Lett. B**, 632, 2-3, pp 238

[۲۹] P. Buganu and R. Budaca (2015) “Sextic potential for γ-rigid prolate nuclei” J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 42, 10, pp 105106

[۳۰] R. Budaca (2015) “Spherical vibrator model with an energy increasing stiffness” **Phys. Lett. B**, 751, pp 39

[۳۱] M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2016) “Gamma-rigid regime of the Bohr-Mottelson Hamiltonian in an energy-dependent approach” **Int. J. of Mod. Phys. E**, 25, pp 1650087

[۳۲] P.M. Davidson (1932) “Eigenfunctions for calculating electronic vibrational intensities” **Proc. R. Soc. A**, 135, 827, pp 459

[۳۳] Kudryashov V.V and Reshetnyak V. I., (2007) “Nonlinear dynamics and applications”, In Proc. 14th annual seminar NPCS, vol. 14, P81, Minsk, Belarus

[۳۴] Kudryashov V.V and Reshetnyak V. I., (2008) “Nonlinear dynamics and applications”, In Proc. 15th annual seminar NPCS, vol. 15, P77, Minsk, Belarus

[۳۵] M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2017) “The X(3) model for the modified Davidson potential in a variational approach” **Int. J. of Mod. Phys. E**, 26, 9, pp 1750054

[۳۶] R. Budaca and A.I. Budaca (2015) “Conjunction of γ-rigid and γ-stable collective motions in the critical point of the phase transition from spherical to deformed nuclear shapes” **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.**, 42, 8, pp 085103

[۳۷] R. Budaca and A.I. Budaca (2015) “Competing γ-rigid and γ-stable vibrations in neutron-rich Gd and Dy isotopes” **Eur. Phys. J. A**, 51, pp 126

[۳۸] R. Budaca and A.I. Budaca (2015) “Interplay of γ-rigid and γ-stable collective motion in neutron rich rare earth nuclei” **Bulg. J. Phys.**, 42, pp 503

[۳۹] H. Neyazi, A.A. Rajabi and H. Hassanabadi (2016) “Exactly seperable Bohr Hamiltonian with the Killingbeck potential for triaxial nuclei” **Nucl. Phys. A**, 945, pp 80

[۴۰] M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2017) “Investigation of the hybrid model with the Killingbeck potential in a variational approach” **Nucl. Phys. A**, 966, pp 34

[۴۱] M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2017) “Investigation of the spectroscopy properties of deformed nuclei by combining the X(3) and E(5) models” **Eur. Phys. J. A**, 53, pp 129

[۴۲] P.M. Morse (1929) “Diatomic molecules according to the wave mechanics. ll. Vibrational levels” **Phys. Rev.**, 34, pp 57

[۴۳] I. Boztosun, D. Bonatsos and I. Inci (2008) “Analytical solutions of the Bohr Hamiltonian with the Morse potential” **Phys. Rev. C**, 77, pp 044302

[۴۴] I. Inci, D. Bonatsos and I. Boztosun (2011) “Electric quadrupole transitions of the Bohr Hamiltonian with the Morse potential” **Phys. Rev. C**, 84, pp 024309

[۴۵] H. Hassanabadi and M. Alimohammadi (2018) “Investigatio the Morse potential for the hybrid model and the one combining the E(5) and X(3) symmetries” **Int. J. Mod. Phys. E**, 27, 6, pp 1850053

[۴۶] P. Ring and P. Schuck (1980), “**The Nuclear Many-Body Problem**”, Springer, Berlin

[۴۷] R.V. Jolos and P.von. Brentano (2008) “Bohr Hamiltonian, mass coefficients, and the structure of well deformed axially symmetric” **Phys. Rev. C**, 78, pp 064309

[۴۸] R.V. Jolos and P.von. Brentano (2009) “Mass tensor in the Bohr Hamiltonian from the nondiagonal energy weighted sum rules” **Phys. Rev. C**, 79, pp 044310

[۴۹] Roosmalen O. S. van., (1982), Ph.D. thesis, “**Algebraic descriptions of nuclear and molecular rotation-vibration spectra : mean field techniques and interacting boson models**” U. Groningen

[۵۰] D. Bonatsos, P.E. Georgoudis, D. Lenis *et al.* (2011) “Bohr Hamiltonian with a deformation-dependent mass term for the Davidson potential” **Phys. Rev. C**, 83, pp 044321

[۵۱] A.S. Davydov and G.F. Filippov (1958) “Rotational states in even atomic nuclei” **Nucl. Phys.**, 8, pp 237

[۵۲] A.S. Davydov and V.S. Rostovsky (1959) “Relative transition probabilities between rotational levels of non-axial nuclei” **Nucl. Phys.**, 12, 1, pp 58

[۵۳] D. Bonatsos, P.E. Georgoudis, N. Minkov *et al.* (2013) “Bohr Hamiltonian with a deformation-dependent mass term for the Kratzer potential” **Phys. Rev. C**, 88, pp 034316

[۵۴] M. Alimohammadi, H. Hassanabadi and S. Zare (2017) “Investigation of the Bohr-Mottelson Hamiltonian in γ-rigid version with position dependent mass” **Nucl. Phys. A**, 960, pp 78

[۵۵] H. Hassanabadi, M. Alimohammadi and S. Zare (2017) “γ-rigid version of Bohr Hamiltonian with the modified Davidson potential in the position dependent mass” **Mod. Phys. Lett. A**, 32, 14, pp 1750085

[۵۶] M. Chabab, A. El Batoul, A. Lahbas et al. (2016) “On γ-rigid regime of the Bohr-Mottelson Hamiltonian in the presence of a minimal length” **Phys. Lett. B**, 758, pp 212

[۵۷] J.J. Sakurai and S.F. Tuan (1994), “**Modern Quantum Mechanics”**, Revised Edition, Pearson Education

[۵۸] M. Alimohammadi and H. Hassanabadi (2017) “Alternative solution of the gamma-rigid Bohr Hamiltonian in minimal length formalism” **Nucl. Phys. A**, 957, pp 439

[۵۹] M. Alimohammadi, H. Hassanabadi and H. Sobhani (2016) “Effects of Coulomb-like potential on γ-rigid prolate nuclei considering minimal length formalism” **Mod. Phys. Lett. A**, 31, 35, 1650193

[۶۰] A. Bohr, (1954), Ph.D. thesis, “**Rotational states in atomic nuclei”**, Copenhagen

[۶۱] A. Faessler and W. Greiner (1962) **Z. Physik**, 168, pp 425

[۶۲] A. Faessler and W. Greiner (1962) **Z. Physik**, 170, pp 105

[۶۳] A. Faessler and W. Greiner (1964) **Z. Physik**, 177, pp 190

[۶۴] A. Faessler and W. Greiner (1964) **Nucl. Phys.**, 59, pp 177

[۶۵] A. Faessler, W. Greiner and R.K. Sheline (1965) **Nucl. Phys.**, 62, pp 241

[۶۶] A. Faessler, W. Greiner and R.K. Sheline (1965) **Nucl. Phys.**, 70, pp 33

[۶۷] A. Faessler, W. Greiner and R.K. Sheline (1965) **Nucl. Phys.**, 80, pp 417

[۶۸] A.G. Sitenko and V. K. Tartakovskii (1975), “**Lecture on the theory of the nucleus**”, Pergamon Press

[۶۹] A. R. Edmonds (1957), “**Angular Momentum in Quantum Mechanics**”, Princeton University Press, Princeton

[۷۰] J.M. Arias, C.E. Alonso, A. Vitturi *et al.* (2003) “U(5)-O(6) transition in the interacting boson model and the E(5) critical point symmetry” **Phys.Rev. C.**, 68, pp 041302(R)

[۷۱] D.R. Bes (1959) “The γ-dependent part of the wave functions representing γ-unstable surface vibrations” **Nucl. Phys.**, 10, pp 373

[۷۲] D.J. Rowe (2004) “A computational tractable version of the collective model” **Nucl. Phys. A**, 735, 3-4, pp 372

[۷۳] D.J. Rowe, P.S. Turner and J. Repka, (2004) "Spherical harmonics and basic coupling coefficients for the group SO(5) in an SO(3) basis" **J. Phys. A: Math. Gen.**, 45, pp 2761

[۷۴] M.A. Caprio and F. Iachello (2007) "Analytical descriptions for transitional nuclei near the critical point" **Nucl. Phys. A**, 781, 1-2, pp 26

[۷۵] R. Budaca (2016) "Bohr Hamiltonian with an energy-dependent γ-unstable Coulomb-like potential" **Eur. Phys. J. A**, 52, pp 314

[۷۶] D.J. Rowe (2005) "An algebraic approach to problems with polynomial Hamiltonians on Euclidean spaces" **J. Phys. A: Math. Gen.**, 38, 47, pp 10181

[۷۷] D.J. Rowe and P.S. Turner (2005) "The algebraic collective model" **Nucl. Phys. A**, 753, 1-2, pp 94

[۷۸] J.P. Elliott, J.A. Evans, and P. Park (1986) "A soluble γ-unstable hamiltonian" **Phys. Lett. B**, 169, 4, pp 309

[۷۹] R.F. Casten (2006) "Shape phase transitions and critical-point phenomena in atomic nuclei" **Nature Physics**, 2, pp 811

[۸۰] A.F. Nikiforov and V.B. Uvarov (1988), "**Special Functions of Mathematical Physics**"

[۸۱] S.K. Basu and A.A. Sonzogni (2013) "Nuclear Data Sheets for A=150" **Nuclear Data Sheets**, 114, 4-5, pp 435

[۸۲] C.W. Reich (2012) "Nuclear Data Sheets for A=156" **Nuclear Data Sheets**, 113, 11, pp 2537

[۸۳] M.J. Martin (2013) "Nuclear Data Sheets for A=152" **Nuclear Data Sheets**, 114, 11, pp 1497

[۸۴] H. Hassanabadi, M. Ghafourian and S. Rahmani (2016) "Study of heavy light mesons properties via variational method for cornell interaction" **Few-Body Syst.**, 57, 4, pp 249

[۸۵] D. DE Frenne (2009) “Nuclear Data Sheets for A=102” **Nuclear Data Sheets**, 110, 8, pp 1745

[۸۶] J. Blachot (2007) “Nuclear Data Sheets for A=104” **Nuclear Data Sheets**, 118, 10, pp 2035

[۸۷] D. DE Frenne and A. Negret (2008) “Nuclear Data Sheets for A=106” **Nuclear Data Sheets**, 109, 4, pp 943

[۸۸] J. Blachot (2000) “Nuclear Data Sheets for A=108” **Nuclear Data Sheets**, 91, 2, pp 135

[۸۹] K. Kitao, Y. Tendow and A. Hashizume (2002) “Nuclear Data Sheets for A=120” **Nuclear Data Sheets**, 96, 2, pp 241

[۹۰] T. Tamura (2007) “Nuclear Data Sheets for A=122” **Nuclear Data Sheets**, 108, 3, pp 455

[۹۱] J. Katakura and Z.D. Wu (2008) “Nuclear Data Sheets for A=124” **Nuclear Data Sheets**, 109, 7, pp 1655

[۹۲] J. Katakura, and K. Kitao (2002) “Nuclear Data Sheets for A=126” **Nuclear Data Sheets**, 97, 3-4, pp 765

[۹۳] A.A. Rodionov, S. Sakharov and S. Balraj (2005) “Nuclear Data Sheets for A=132” **Nuclear Data Sheets**, 104, 3, pp 497

[۹۴] A.A. Sonzogni (2004) “Nuclear Data Sheets for A=134” **Nuclear Data Sheets**, 103, 1, pp 1

[۹۵] N. Nica (2014) “Nuclear Data Sheets for A=148” **Nuclear Data Sheets**, 117, pp 1

[۹۶] C. M. Baglin (2003) “Nuclear Data Sheets for A=186” **Nuclear Data Sheets**, 99, 1, pp 1

[۹۷] S. Balraj (2002) “Nuclear Data Sheets for A=188” **Nuclear Data Sheets**, 95, 2, pp 387

[۹۸] K. Kitao (1995) “Nuclear Data Sheets for A=118” **Nuclear Data Sheets**, 75, pp 99

[٩٩] R. Budaca and A.I. Budaca (2016) “Shape phase mixing in critical point nuclei” **Phys. Rev. C**, 94, 054306

[١٠٠] C. W. Reicch (2009) “Nuclear Data Sheets for A=154” **Nuclear Data Sheets**, 110, pp 2257

[١٠١] M. Chabab, A. Lahbas and M. Oulne (2015) “Vibrational and rotational excited states within a Bohr Hamiltonian with a deformation-dependent mass formalism” **Phys. Rev. C**, 91, pp 064307

[١٠٢] G. Rakavy (1957) “The classification of states of surface vibrations” **Nucl. Phys.**, 4, pp 289

[١٠٣] G. Gurdal and F.G. Kondev (2012) “Nuclear Data Sheets for A=110” **Nuclear Data Sheets**, 113, pp 1315

[١٠٤] B. Singh (2008) “Nuclear Data Sheets for A=100” **Nuclear Data Sheets**, 109, pp 297

[١٠٥] S. Lalkovski (2015) “Nuclear Data Sheets for A=112” **Nuclear Data Sheets**, 124, pp 157

[١٠٦] J. Blachot (2012) “Nuclear Data Sheets for A=114” **Nuclear Data Sheets**, 113, pp 515

[١٠٧] J. Blachot (2010) “Nuclear Data Sheets for A=116” **Nuclear Data Sheets**, 111, pp 717

[١٠٨] Z. Elekes and J. Timar (2015) “Nuclear Data Sheets for A=128” **Nuclear Data Sheets**, 129, pp 191

[١٠٩] C.L. Pekeris (1934) “The rotation-vibration coupling in diatomic molecules” **Phys. Rev.**, 45, 2, pp 98

[١١٠] B. Singh and Z. Hu (2003) “Nuclear Data Sheets for A=98” **Nuclear Data Sheets**, 98, 2, pp 35

[١١١] B. Singh (2001) “Nuclear Data Sheets for A=130” **Nuclear Data Sheets**, 93, 1, pp 33

[١١٢] A. Bohr and B. R. Mottelson (1975), “**Nuclear Structure**”, Vol. II, Benjamin, New York

[۱۱۳] J. M. Eisenberg and W. Greiner (1975), "**Nuclear Theory**" Vol. I: nclear models, North-Holland, Amsterdam

[۱۱۴] C. Quesne and V.M. Tkachuk (2004) "Deformed algebras, position-dependent effective masses and curved spaces: an exactly solvable Coulomb problem" **J. Phys. A: Math. Gen.**, 37, 4267

[۱۱۵] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme (1995) "Suppersymmetry and quantum mechanics" **Phys. Rep.**, 251, 5-6, pp 267

[۱۱۶] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme (2001), "**Supersymmetry in Quantum Mechanics**", World Scientific, Singapore

[۱۱۷] B. Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne *et al.* (2005) "Deformed shape invariance and exactly solvable Hamiltonians with position-dependent effective mass" **J. Phys. A: Math. Gen.**, 38, 13, pp 2929

[۱۱۸] O.von Roos (1983) "Position-dependent effective masses in semiconductor theory" **Phys. Rev. B**, 27, 7547

[۱۱۹] A.A. Sonzogni (2002) "Nuclear Data Sheets for A=136" **Nuclear Data Sheets**, 95, 4, pp 837

[۱۲۰] J.K. Tuli (2000) "Nuclear Data Sheets for A=142" **Nuclear Data Sheets**, 89, 3, pp 641

[۱۲۱] A.A. Sonzogni (2003) "Nuclear Data Sheets for A=138" **Nuclear Data Sheets**, 98, 3, pp 515

[۱۲۲] N. Nica (2007) "Nuclear Data Sheets for A=140" **Nuclear Data Sheets**, 108, 7, pp 1287

[۱۲۳] J.K. Tuli (1989) "Nuclear Data Sheets for A=144" **Nuclear Data Sheets**, 56, 4, pp 607

[۱۲۴] B. Singh (2003) "Nuclear Data Sheets for A=190" **Nuclear Data Sheets**, 99, 2, pp 275

[۱۲۵] C.M. Baglin (2012) "Nuclear Data Sheets for A=192" **Nuclear Data Sheets**, 113, 8-9, pp 1871

[۱۲۶] B. Singh (2006) “Nuclear Data Sheets for A=194” **Nuclear Data Sheets**, 107, 6, pp 1531

[۱۲۷] H. Xiaolong (2007) “Nuclear Data Sheets for A=196” **Nuclear Data Sheets**, 108, 6, pp 1093

[۱۲۸] H. Xiaolong (2009) “Nuclear Data Sheets for A=198” **Nuclear Data Sheets**, 110, 10, pp 2533

[۱۲۹] F.G. Kondev and S. Lolkovski (2007) “Nuclear Data Sheets for A=200” **Nuclear Data Sheets**, 108, 7, pp 1471

[۱۳۰] A. Ronveaux (1995), “**Heun’s Differential Equations**” Oxford Press, London

[۱۳۱] S.Yu. Slavyanov and W. Lay (2000), “**Special functions**” Oxford Press, Oxford

[۱۳۲] E. Witten (1986) “Non-commutative geometry and string field theory” **Nucl. Phys. B**, 268, 2, pp 253

[۱۳۳] N. Nathan and E. Witten (1999) “String theory and noncommutative geometry” **J. High Energy Phys.**, 09, pp 032

[۱۳۴] C. Alden Mead (1964) “Possible connection between gravitation and fundamental length” **Phys. Rev.**, 135, pp B849

[۱۳۵] L.J. Garay (1995) “General Relativity and quantum cosmology” **Int. J. Mod. Phys. A**, 10, pp 145

[۱۳۶] C. Rovelli and L. Smolin (1995) “Discreteness of area and volume in quantum gravity” **Nucl. Phys. B**, 442, 3, pp 593

[۱۳۷] D.J. Gross and P.F. Mende (1988) “String theory beyond the Plank scale” **Nucl. Phys. B**, 303, 3, pp 407

[۱۳۸] D. Amati, M. Ciafaloni and G. Veneziano (1989) “Can spacetime be probed below the string size?” **Nucl. Phys. B**, 216, 1-2, pp 41

[۱۳۹] K. Konishi, G. Paffuti and P. Provero (1990) "Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory" **Nucl. Phys. B**, 234, 3, pp 276

[۱۴۰] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar and E. Maghsoodi (2012) "Scattering states of Woods-Saxon interaction in minimal length quantum mechanics" **Phys. Lett. B**, 718, 2, pp 678

[۱۴۱] M.S. Basunia (2006) "Nuclear Data Sheets for A=176" **Nuclear Data Sheets**, 107, pp 791

[۱۴۲] E. Achterberg, O.A. Capurro and G.V. Marti (2009) "Nuclear Data Sheets for A=178" **Nuclear Data Sheets**, 110, pp 1473

[۱۴۳] S.C. Wu and H. Niu (2003) "Nuclear Data Sheets for A=180" **Nuclear Data Sheets**, 100, 4, pp 483

Abstract

The aim of this thesis is investigation the energy spectra and transition rates of even-even heavy nuclei. For this purpose, three symmetric models, E(5), X(5) and X(3), have been used. When the X(3) model was introduced (in 2006), its potential was considered as an infinite square well, its eigenvalues and eigenstates were determined and they compared with the experimental data. Then, in order to improve the theoretical results and gain the better agreement with the experimental data, the other potentials like Sextic were used. In this thesis, the X(3) model has been investigated with the harmonic oscillator energy dependent and modified Davidson potentials. In 2015, when the hybrid model was introduced, its β and γ dependent potentials were respectively considered as an infinite square well and harmonic oscillator. After, without changing the γ dependent potential, the β dependent one was considered as Davidson, but since the results of these two cases do not have good agreement with the experimental data of some nuclei, we proposed the Killingbeck potential. We obtained the relevant energy spectra and transition rates by applying the variation method and compared our results with both previous theoretical results and experimental data. We also introduced the combined model, investigated it with the Morse potential and compared the obtained results with both experimental data and the results of the E(5) model with Morse potential. Moreover, we studied the X(3) model in the presence of position dependent mass formalism with both the Coulomb-like and modified Davidson potentials. In addition to the different potentials, introducing the combined model and consideration the X(3) model in the presence of deformation dependent mass formalism, investigation the X(3) model in the non-commutative space, is the other content that was studied in this thesis.

Keywords: Bohr Hamiltonian; The symmetric models E(5), X(5) and X(3); The combined model; Position dependent mass; Minimal length

Shahrood University of Technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

The use of E(5), X(5) and X(3) models in the investigation of energy spectrum and transition rates of heavy nuclei

Motahhareh Alimohammadi

Supervisor:

Dr. Hassan Hassanabadi

February 2019