

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای

رشته فیزیک، گرایش حالت جامد

پایان نامه کارشناسی ارشد

گذار بین ترازهای لاندائو در یک چاه کوانتومی تحت تابش لیزر

نگارنده: فاطمه مخبریان نژاد

استاد راهنما

دکتر سعید حسامی پيله رود

شهریور ۱۳۹۷



فرم شماره ۶: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **محمدعلی...** به شماره دانشجویی **۱۳۹۴۱۰۲۷** رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان **مطالعه...** بدون مشورت هیأت داوران برای معادلات سهموی تمام فراموشی که در تاریخ ۱۳۹۴/۱۰/۲۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: **بسیار** امتیاز **۱۸**) دفاع مجدد مردود

۲- بسیار خوب (۱۸-۱۸/۹۹)

۱- عالی (۲۰-۱۹)

۴- قابل قبول (۱۴-۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶-۱۷/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	استادیار	دکتر علی مس فروش	۱- استاد راهنمای اول
			۲- استاد راهنمای دوم
	استادیار	دکتر مهدی قوتمند	۳- استاد مشاور
	استاد	دکتر ابراهیم هاشمی	۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی
	استادیار	دکتر حجت احسنی طهرانی	۵- استاد ممتحن اول
	دانشیار	دکتر علیرضا نافسی	۶- استاد ممتحن دوم

رئیس دانشکده:

تقدیم به همسر مهربانم که صبورانه مرا
در این مسیر یاری کرد.

سپاس گزاری...

از آقای دکتر حسامی استاد راهنمای گرانقدرم و همچنین از پدر و مادر و همسرم که صبورانه مرا حمایت کردند و از دوستانم خانم ها دکتر مرضیه عسکری و دکتر ملیحه ربیعی و خانم کالیوه که در این مسیر مرا یاری دادند کمال تشکر را دارم.

فاطمه مخبریان نژاد

شهریور ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب فاطمه مخبریان نژاد دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک و مهندسی هسته ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان گذار بین ترازهای لاندائو در یک چاه کوانتمی تحت تابش لیزر ، تحت راهنمایی سعید حسامی پيله رود متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه مخبریان نژاد

شهریور ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

بخش مهمی از کاربردهای قطعات الکترونیکی در حضور تابش لیزر و میدان های مغناطیسی موثر در نانوساختارها خواهد بود. به همین دلیل تلاش گسترده ای برای درک جنبه های مختلف گذارهای الکترونی در نانوساختارهای نیم رسانا به عمل آمده است .

در این پایان نامه با توجه به نقش موثر برهم کنش میان الکترونها و فونون های اپتیکی طولی که روش بسیار موثری برای به دست آوردن واهلش حاملان بار در نانوساختارهاست گذار بین ترازهای لاندائو در یک سیم چاه کوانتومی تحت تابش لیزر و در حضور یک میدان مغناطیسی قوی و با اعمال یک پتانسیل محدود کننده عرضی به صورت نظری مطالعه می گردد و با انجام محاسبات عددی نتایج شکافت انرژی در دستگاه مورد مطالعه را به صورت تابعی از میدان اعمالی نشان میدهد. با افزایش شدت میدان و اعمال تابش لیزر شکافت انرژی کمتر میشود .

کلمات کلیدی: فونون های اپتیکی طولی 'ترازهای لاندائو' سیم چاه کوانتومی 'لیزر' شکافت انرژی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
۱	۱ مروری بر مطالعات
۵	۲ مفاهیم پایه
۵	۱.۲ رسانا- نیمه رسانا - عایق
۷	۲.۲ نانو ساختارها
۷	۱.۲.۲ ساختارهای سه بعدی یا حجمی
۷	۲.۲.۲ ساختارهای دو بعدی، چاه های کوانتومی
۸	۳.۲.۲ ساختارهای یک بعدی یا سیم های کوانتومی
۸	۴.۲.۲ ساختارهای صفر بعدی یا نقاط کوانتومی
۹	۳.۲ فونون ها
۹	۱.۳.۲ فونون های طولی و عرضی
۱۰	۲.۳.۲ فونون های نوری و آکوستیکی
۱۱	۴.۲ پولارون ها
۱۳	۵.۲ ترازهای لاندائو
۱۵	۳ برهمکنش الکترون با فونون نوری طولی بین ترازهای لاندائو
۲۳	۴ گذار بین ترازهای لاندائو در یک چاه کوانتومی تحت تابش لیزر
۳۹	۵ نتایج
۴۵	۱.۵ بحث در نتیجه
۴۷	مراجع

فهرست تصاویر

۶	تفاوت رسانا و نیمه رسانا و عایق بر اساس گاف نواری	۱.۲
۷	نانوساختارها	۲.۲
۸	چگالی حالت ها در چاه، سیم، و نقطه کوانتومی	۳.۲
۹	زنجیره خطی اتم	۴.۲
۹	حرکت فونونهای طولی	۵.۲
۱۰	حرکت فونونهای عرضی	۶.۲
۱۰	تفاوت بسامد ارتعاشات نوری و آکوستیکی	۷.۲
۱۱	شکل انتشار مدهای نوری و آکوستیکی در شبکه	۸.۲
۱۳	شبیه سازی پولارون	۹.۲
۱۴	تبهگنی در ترازهای لاندائو	۱۰.۲
۱۸	شکافت انرژی با تغییرات میدان مغناطیسی	۱.۳
۲۱	تغییرات آهنگ پراکندگی بر اساس میدان مغناطیسی	۲.۳
۳۹	شکافت انرژی با تغییرات میدان مغناطیسی	۱.۵
۴۰	شکافت انرژی با تغییرات میدان مغناطیسی بدون اعمال تابش	۲.۵
	شکافت انرژی با تغییر میدان مغناطیسی در حضور تابش با نمونه های مختلف	۳.۵
۴۱		۴.۵
۴۱	تغییرات شکافت انرژی با پهنای ساختار نامتجانس در غیاب تابش	۴.۵
۴۲	تغییرات شکافت انرژی با پهنای ساختار نامتجانس در حضور تابش	۵.۵
۴۳	مقایسه تغییرات شکافت انرژی با میدان مغناطیسی با تابش و بدون تابش	۶.۵
۴۳	تغییرات انرژی جداسازی با پهنای ساختار نامتجانس در غیاب تابش	۷.۵
۴۴	تغییرات انرژی جداسازی با پهنای ساختار نامتجانس در نمونه های متفاوت	۸.۵
	مقایسه تغییرات شکافت انرژی با پهنای ساختار نامتجانس با اعمال تابش و بدون تابش	۹.۵
۴۴		۱۰.۵
	تغییرات انرژی جداسازی با میدان مغناطیسی با اعمال تابش در پتانسیل های عرضی متفاوت	۴۵

۱۱.۵ تغییرات شکافت انرژی با میدان مغناطیسی در حضور تابش لیزر ۴۵

فصل ۱

مروری بر مطالعات

پیشرفت سریع در حوزه علوم و فناوری نانو و به تبع آن مطالعات تجربی گسترده در جهت شناخت و توسعه و نیل به ابزار و ساختارهای جدید مبتنی بر آن، مطالعات نظری بسیاری را در پی داشته است. هدف عمده مطالعات نظری شرح و تحلیل مبانی فیزیکی مشاهدات تجربی برای توسعه و بهینه سازی طراحی قطعات و ساختارهای مربوطه است. در میان زمینه های پژوهشی مورد توجه، نانوساختارهای نیم رسانا با انواع کاربردهای متنوع سهم قابل توجهی را به خود اختصاص داده اند. تلاش گسترده ای برای درک جنبه های متفاوت پدیده های مهمی از قبیل ترابرد الکترونی و ترابرد وابسته به اسپین در نانوساختارهای نیم رسانا به عمل آمده است.

در پاره ای از مطالعات اخیر با استفاده از ابزار طیف سنجی و با اعمال میدان مغناطیسی قوی به بررسی پراکندگی الکترونی در برخی نانوساختارها پرداخته شده است. بررسی برهم کنش و جفت شدگی بین الکترون ها و فونون ها و اثر آنها بر نرخ گذارهای الکترونی در نانوساختارهای نیم رسانا با هدف درک دقیق تر ترابرد الکترونی برای بهینه سازی قطعات مبتنی بر آنها و دستیابی به کاربردهای جدید بسیار اساسی است.

در یک مطالعه نظری، واهلش حامل های بار در یک ساختار چاه کوانتومی^۱ شامل پراکنده کننده های کوتاه برد استاتیک که تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی قوی می باشند، گزارش شده است. اثرات بی نظمی آلیاژی و برهم کنش فروهلیچ هر دو زمانی به حساب آورده می

^۱Quantum Well

شوند که اختلاف انرژی های الکترونی با انرژی فونون های طولی اپتیکی (LO) برابر می شوند. در ناحیه ی رژیم جفت شدگی ضعیف الکترون با فونون، با استفاده از قاعده طلایی فرمی، محاسبه ی آهنگ پراکندگی فونونی یک راه واهلش خیلی سریع برای ترازهای پهن شده ی لاندائو را نشان می دهد.

در ناحیه ی جفت شدگی قوی الکترون-فونون، با استفاده از رهیافت مگنتو-پولارون احتمال های بقای الکترون در ترازهای بالای لاندائوی شامل تعداد بسیاری از مدهای فونون LO برای تعداد زیادی از پیکربندی های بی نظم آلیازی محاسبه شد. نتایج واپاشی غیر نمایی جمعیت الکترون های ترازهای بالای لاندائو پس از تزریق الکترون ها در این حالت ها را پیش بینی می کند.

بررسی دقت محاسبات در ناحیه ی جفت شدگی ضعیف بین الکترون ها و فونون های LO نشان داد که به علت چگالی حالت های تکینه ترازهای لاندائو، به کار بردن قانون طلایی فرمی در این ساختارها به شدت سوال برانگیز است. نه پراکنده کننده های استاتیک به اندازه کافی ضعیف می باشند و نه الکترون ها و فونون های LO مگنتو پولارون های پایدار تشکیل می دهند.

در نتیجه اینکه عدم واپاشی کامل و صفر نشدن احتمال اشغال حالت های بالایی نشان دهنده ی این است که ترازهای مگنتو پولارون هرگز به صورت کامل خالی نمی شوند. یا به عبارتی پراکنده کننده های استاتیک به میزان کافی کارآمد هستند تا نوسانهای پولارونی را از بین ببرند، چرا که آنها به جای جفت کردن حالت های پولارونی با یکدیگر، ترازهای پولارونی را به صورت موثرتری به منبع بزرگی از حالت های تک فونون جفت نشده LO، جفت می کنند. واپاشی احتمال اشغال حالت های بالایی لاندائو از الگویی نمایی که از قاعده طلایی فرمی بدست می آید، پیروی نمی کند. در عوض، اول مشابه آنچه در مورد پولارون میرا رخ می دهد، کاهش پیدا می کند و وقتی که به اولین کمینه ی خود رسید، در عمل هرگز افزایش نمی یابد. پیچیدگی تحول زمانی احتمال باقی ماندن الکترون ها در ترازهای بالایی، شاهدی بر نیاز به توصیف میکروسکوپی دقیق تر برای نیل به درک فیزیک سازو کارهای ساختار چاه کوانتومی مورد مطالعه است.[1]

در بررسی نظری توان خروجی یک لیزر آبخاری کوانتومی^۲ (QCL) تراهرتز طراحی شده، تحت اثر میدان مغناطیسی قوی، که از تشدید فونونی بهره می برد، با تغییر شدت میدان مغناطیسی دو سری از نوسانات در توان لیزر مشاهده شدند. یکی به زبری سطوح مرزی منجر به پراکندگی کشسان و دیگری به پراکندگی فونون (ناکشسان) حامل ها در ترازهای برانگیخته لاندائو نسبت داده شدند. نشان داده شد که در دومی که با واهلش الکترون های داغ از طریق گسیل یک فونون LO همراه شده بود، توزیع حرارتی الکترون ها در حالت های بالایی لیزر منجر به شکسته شدن وارونی جمعیت^۳ و بنابراین عمل لیزر می شود[2].

²Quantum Cascade Laser

³Population Inversion

جهت مطالعه دینامیک ترابرد الکترونی، اندازه گیری های پمپ-پروب فمتوثانیه روی لیزرهای آبشاری کوانتومی در شرایطی که ترابرد الکترونی تحت تاثیر آهنگ گسیل القایی بوجود آمده است، صورت پذیرفته اند. دینامیک بهره^۴، آشکار می کند که چگونه گسیل القایی کوانتومی جریان الکترون ها از میان ساختارهای نامتجانس لیزر آبشارهای کوانتومی را پیش می راند. نتایج حاکی از تغییر رژیم ترابرد از سوق در حضور پراکندگی فونونی به تراپردی با جفت شدگی مستقیم به فوتون ها است. [3]

وابستگی سطح مقطع یونش نوری^۵ به انرژی فوتون برای ناخالصی های دهنده هیدروژنی در یک چاه کوانتومی و سیم چاه کوانتومی^۶ بینهایت با سطح مقطع مستطیل، با فرض اینکه که انرژی یونش بسیار بزرگتر از انرژی فوتون نوری است، به عنوان تابعی از اندازه سیم محاسبه شده است. در طی بررسی فرایند یونش نوری، برهم کنش الکترون با فوتون طولی نوری (LO) با احتساب جفت شدگی قوی برای حالت ناخالصی و استفاده از یک روش وردشی برای حالت زیر نوار نهایی در محاسبات گنجانده شدند. نتایج حاکی از وابستگی چشمگیر سطح مقطع و انرژی آستانه یونش نوری به اندازه سیم و حساسیت زیاد آن به جفت شدگی الکترون با فوتون نوری بود. [4]، [5]

مطالعه اثرات پولارونی و مغناطیسی بر روی یک ناخالصی هیدروژنی در یک دستگاه چاه کوانتومی AIAs/GaAIAs با بررسی انرژی پیوند حالت پایه یک ناخالصی هیدروژنی تحت اثر میدان مغناطیسی قوی خارجی با احتساب برهمکنش الکترون با فوتون های طولی نوری که در چاه کوانتومی محدود شده اند، انجام شده است. انرژی پیوند به عنوان تابعی از میدان مغناطیسی و اندازه ی چاه، با بکارگیری تقریب جرم موثر و با استفاده از روش وردشی با دو فرض سد پتانسیل متناهی و نامتناهی انجام شده است. نتایج نشان دهنده وابستگی شدید انرژی های پیوند به ترکیب اثرات اندازه ی چاه، میدان مغناطیسی اعمال شده ی قوی، و برهم کنش الکترون-فوتون است. [6]

بهره نوری لیزر آبشار کوانتومی AIAs/GaAIAs در یک میدان مغناطیسی با استفاده از مدلی مبتنی بر حل مجموعه ای از معادلات نرخ دربرگیرنده فرایندهای پراکندگی فوتون های نوری و آکوستیک که چگالی حامل ها در هر تراز را معین می کنند، محاسبه شده است. محدودیت به وجود آمده توسط میدان مغناطیسی، به شدت طول عمر الکترون ها در حالت برانگیخته را تغییر می دهد و نوسانهایی وابسته به میدان را در بهره نوری سبب می شود. میدان موجب کوانتش حالت های الکترونی می شود. وابستگی ترازهای لاندائو به شدت میدان امکان تنظیم مکان نسبی ترازهای لاندائو را سبب شده و بنابراین آهنگ واهلش الکترون توسط باز یا مسدود شدن شرایط تشدید برای گسیل فوتون LO به شدت مدوله می شود. این فرایندهای غیر تابشی واهلش می تواند توان خروجی QCL را محدود سازد یا حتی در برخی میدان های مغناطیسی

⁴Gain

⁵Photoionization

⁶Quantum Well Wire

مانع لیزرتابی^۷ گردد یا در برخی مقادیر دیگر میدان بهره نوری را بهبود بخشد. نتایج حاصل از مدل توافق خوبی با مطالعات نظری و آزمایشگاهی قبلی را نشان می دهند.[7] مطالعه نظری ترابرد غیر خطی و خواص نوری دستگاه های نیم رسانای دو بعدی تحت اثر میدان های الکترومغناطیسی تراهرتز با حل معادلات ترازمندی تکانه و انرژی و استفاده از معادله بولتزمن^۸ حالت پایا با احتساب برهم کنش الکترون با فونون LO صورت پذیرفته است.[8]، [9] نتایج حاصل از این مطالعه در توافق با مشاهدات تجربی پیشین می باشند که نشان دهنده آن است که تحت اثر لیزر تراهرتز پراکندگی فونون LO هم از واهلش انرژی و هم از واهلش تکانه مهمتر است.[10]

این پایان نامه در پنج فصل تدوین شده است. در فصل دوم پاره ای از مفاهیم پایه مرتبط با پایان نامه مرور خواهند شد. فصل سوم به آشنایی با رهیافت انتخاب شده برای بررسی برهمکنش الکترون با فونون طولی نوری بین ترازهای لاندائو اختصاص دارد. در فصل چهارم گذار بین ترازهای لاندائو در یک چاه کوانتومی تحت تابش لیزر بررسی خواهد شد. در انتها نتایج محاسبات عددی ارائه و بر روی نتایج بحث می شود.

⁷Lasing

⁸Boltzmann equation

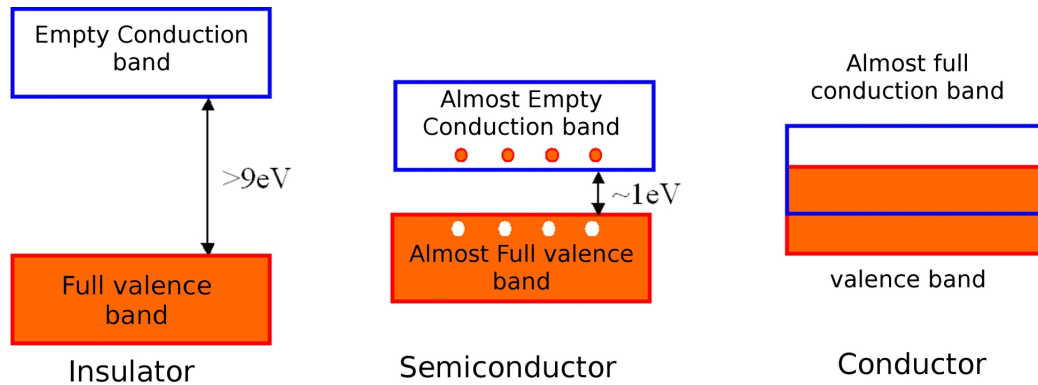
فصل ۲

مفاهیم پایه

این بخش به مرور برخی مفاهیم پایه که با تحقیق حاضر ارتباط دارند اختصاص دارد.

۱.۲ رسانا- نیمه رسانا - عایق

جامدات به سه دسته کلی تقسیم می شوند: فلزات و نیمه رساناها و عایق ها. فلزات یا رساناها جامداتی هستند که در اثر اعمال یک میدان الکتریکی جریان الکتریکی در آنها ایجاد میشود. برعکس، اعمال یک میدان الکتریکی هیچ جریان الکتریکی در عایق ها ایجاد نمیکند. مدل الکترون آزاد فلزها آگاهی بسیاری درباره خواص الکترونی چندی از فلزها به دست میدهد ولی باز خواص الکترونی دیگری در جامدها وجود دارد که نمیتوان به یاری مدل الکترون آزاد آنها را بررسی کرد. با این مدل نمی توان فهمید که چرا برخی از ترکیبات عناصر شیمیایی بلور شده رسانای الکتریکی هستند و برخی عایق میباشند. همچنین برخی نیمه رساناها را تشکیل میدهند که خواص الکتریکی آنها به طور محسوس با دما تغییر میکند. یک ملاک ساده برای تمایز این دسته از جامدات نظریه نوارهای انرژی میباشد. در جامدات بلوری حالت های مجاز انرژی بواسطه نزدیکی بسیار به یکدیگر نواحی پیوسته ای برای انرژی را بوجود آورده و نوارهای پهنی از انرژی تشکیل می دهند. آخرین نوار کاملاً پر را نوار ظرفیت و نزدیکترین نوار دارای انرژی بالاتر را نوار رسانش می نامند. اختلاف انرژی بالاترین تراز انرژی نوار ظرفیت با پائین ترین تراز انرژی نوار رسانش را گاف نواری می نامند.



شکل ۱.۲: تفاوت رسانا و نیمه رسانا و عایق بر اساس گاف نواری

بر اساس شکل (۱.۲) اگر فقط قسمتی از آخرین نوار انرژی ماده معینی (نوار رسانش) پر باشد آن ماده به صورت یک فلز یا رسانا عمل میکند زیرا اعمال میدان الکتریکی میتواند جریان الکتریکی در ماده ایجاد کند. ولی چنانچه در جامدی با گاف نواری بزرگ، نوار ظرفیت کاملا پر و نوار رسانش کاملا خالی باشد، در حد میدان های معمول هیچ جریانی ایجاد نمیشود و ماده یک عایق است.

هنگامیکه گاف بین نوار ظرفیت و نوار رسانش کوچک باشد ممکن است الکترونها بطور حرارتی تحریک شوند و از گاف عبور کنند. در اینصورت اگر اعمال میدان الکتریکی یا تحریک حرارتی منجر به یک رسانایی کوچک گردد ماده نیمه رسانا نامیده میشود.

در مبحث نیمه رساناها معمولا به الکترونها و حفره ها حامل های آزاد گفته میشود زیرا این ذرات هستند که مسئول انتقال جریان الکتریکی هستند. چگالی حاملها عامل مهمی در نیمه رساناهاست. به منظور تعیین تعداد حاملها به بعضی از نتایج بنیادی مکانیک آماری نیاز داریم. مهمترین نتیجه در این مورد تابع توزیع فرمی دیراک است. این تابع احتمال اینکه یک تراز انرژی توسط یک الکترون اشغال شود را وقتی سیستم در دمای T است به دست می دهد.

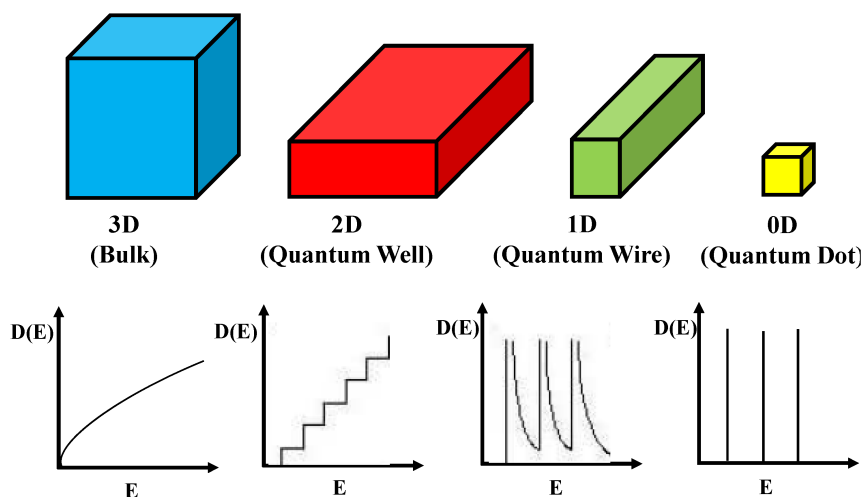
چگالی حالت های یک الکترون در یک نوار برابر است با تعداد حالت های الکترونی (در واحد حجم) در یک بازه معین انرژی. این تابع در فرایندهای الکترونی بویژه در پدیده های ترابری بسیار مهم است تابع چگالی حالتها را با $g(E)$ نمایش میدهیم و با رابطه زیر تعریف می شود. [11]

چگالی حالتها رابطه نزدیکی با ساختار نواری دارد و همراه با تابع توزیع فرمی دیراک در مطالعه جامدهای بلوری نقشی مهم دارد. در یک نیم رسانا می توان چگالی حالتها را بر حسب جرم موثر بیان کرد. در یک نیم رسانای کپه ای چگالی حالتها عبارت است از:

$$g(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} E^{1/2} \quad (1.2)$$

۲.۲ نانوساختارها

زمانی که اندازه ماده در یک یا چند بعد به صورت پیوسته از یک اندازه ی ماکروسکوپیک یا بزرگ کاهش پیدا می کند، مانند تغییر از سانتی متر یا متر به اندازه های خیلی کوچک، ویژگی ها در ابتدا یکسان باقی می مانند سپس تغییرات کوچک اتفاق می افتد تا زمانی که بعضی از ابعاد آن به زیر ۱۰۰ نانومتر می رسد در اینصورت در آن ابعاد با محدودیت کوانتومی مواجه می شویم. با توجه به شکل (۲.۲) در این حالت یک ساختار جدید برای ماده که نانوساختار نامیده می شود شکل می یابد. چون این ساختارها با مکانیک کوانتومی توصیف می شوند بنابراین آن ها را بسته به تعداد ابعاد شامل محدودیت کوانتومی، چاه های کوانتومی، سیم های کوانتومی و نقاط کوانتومی می نامند. این چاه ها و سیم ها و نقاط 'کلاسیکی نیستند بلکه ساختارهای کوانتومی هستند. این ها همچنین ساختارهای با بعد پایین نیز نامیده می شوند. [12]



شکل ۲.۲: نانوساختارها

۱.۲.۲ ساختارهای سه بعدی یا حجمی

در این ساختارها محدودیت کوانتومی و کوانتیده شدن حرکت ذرات اتفاق نمی افتد یعنی ذرات رفتاری کلاسیک دارند. الکترون ها در باند رسانش و حفره ها در باند ظرفیت قادر به حرکت در سه بعد در فضایی وسیع هستند.

۲.۲.۲ ساختارهای دو بعدی، چاه های کوانتومی

در این ساختارها محدودیت کوانتومی در یم بعد نانوساختار به وجود می آورییم اگر یک بعد محدود شود یا هنگامی که یک بعد به محدوده ی چند ده نانومتر کاهش بیابد و دو بعد دیگر با مقیاس بزرگ باقی بمانند ساختاری با دوبعد ماکروسکوپی که دسته مهمی از آنها چاه کوانتومی

نامیده میشود خواهیم داشت. در این حالت حرکت الکترون ها در جهت چاه کوانتومی محدود می شوند و در دو بعد دیگر به سادگی حرکت می کنند که به این حالت کوانتیزه شدن در یک بعد میگویند.

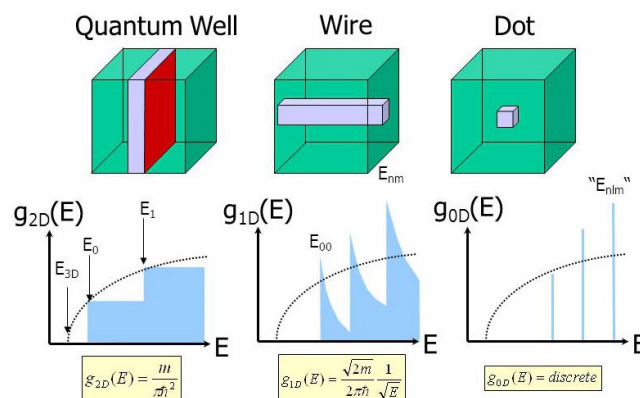
۳.۲.۲ ساختارهای یک بعدی یا سیم های کوانتومی

اگر دو بعد به محدوده ی نانومتر کاهش بیابند و بعد دیگر ساختار بزرگ باقی بماند یک سیم کوانتومی^۱ خواهیم داشت.

الکترون ها در دو بعد سیم کوانتومی محدود شده اند و در یک جهت به راحتی حرکت می کنند. در این حالت ۲ بعد کوانتیزه شده است. اغلب سیم های نیم رسانا توسط یک ماده با گاف انرژی بزرگ محدود شده اند. ماده ی محدود شده الکترون ها و حفره ها را در دو جهت متناظر با بزرگترین گاف نواری محدود می کند پس حاملان تنها می توانند در یک بعد حرکت کنند. شعاع سیم های کوانتومی میله های کوانتومی و لوله های کوانتومی در ساختارهای یک بعدی در محدوده ی ۱ تا ۱۰۰ نانومتر میباشد.

۴.۲.۲ ساختارهای صفر بعدی یا نقاط کوانتومی

حالت حداکثری فرآیند کاهش اندازه که در آن هر سه بعد به محدوده ی نانو برسند یک نقطه ی کوانتومی^۲ نامیده می شود. در این حالت الکترون ها در سه بعد محدود شده اند در ساختارهای صفر بعدی ۳ بعد کوانتیزه شده است. اغلب نقاط کوانتومی ابعادی بین ۱ تا ۱۰ نانومتر دارند. در شکل (۳.۲) تفاوت چگالی حالتها در انواع نانو ساختارها نشان داده شده است.



شکل ۳.۲: چگالی حالت ها در چاه، سیم، و نقطه کوانتومی

¹Quantum Wire

²Quantum Dot

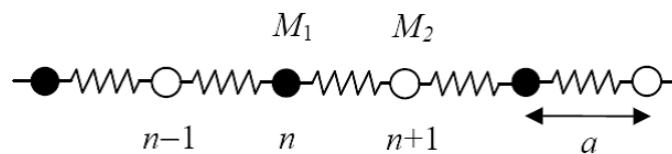
۳.۲ فونون ها

فونون به عنوان برانگیختگی جمعی در یک دوره یعنی به هم ریختگی در آرایش کشسانی اتم ها و مولکول ها در ماده ای چگال مانند جامدات و برخی از مایعات تعریف می شود. یعنی حالت های مجاز ارتعاشات شبکه ای با فونون ها توصیف می شود. در واقع فونون ها به عنوان ارتعاشات کوانتومی شبکه با انرژی $\hbar\omega$ شناخته میشوند. فونون ها نقش عمده ای را در خواص فیزیکی ماده چگال مانند رسانندگی گرمایی و رسانندگی الکتریکی بازی میکنند. مطالعه فونون ها یک قسمت مهم فیزیک ماده چگال می باشد.

ترازهای انرژی یک نوسانگر هماهنگ کوانتیزه هستند و به طور مشابه ترازهای انرژی ارتعاشات شبکه نیز کوانتیزه اند. ترازهای انرژی نوسانگر هماهنگ به صورت $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ میباشد در جایی که n عدد کوانتومی میباشد. انرژی ارتعاشی کل یک کریستال از مجموع انرژیهای هر فونون محاسبه می شود.

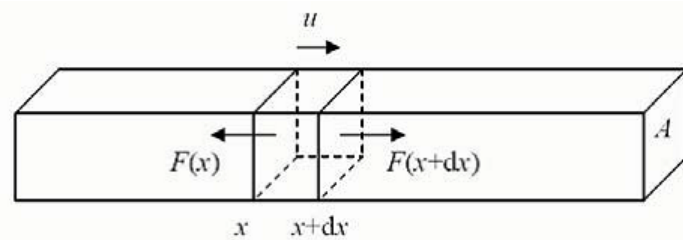
۱.۳.۲ فونون های طولی و عرضی

فونون ها میتوانند به وسیله شکل ارتعاش های اتفاق افتاده در شبکه برچسب گذاری شوند. یک زنجیره خطی یک بعدی از دو نوع اتم را در شکل زیر مشاهده میکنیم .



شکل ۴.۲: زنجیره خطی اتم

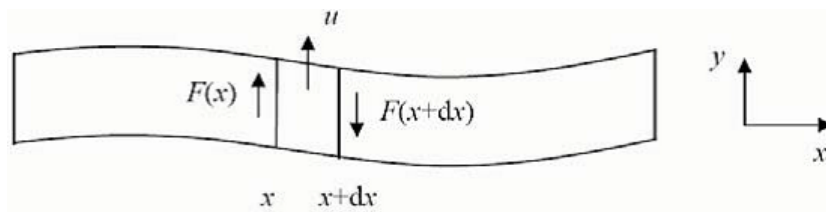
اگر ارتعاشات شبکه به صورت طولی و در راستای بردار موج شبکه باشند به این فونونها فونونهای طولی^۳ میگویند. شکل (۵.۲)



شکل ۵.۲: حرکت فونونهای طولی

³Longitudinal

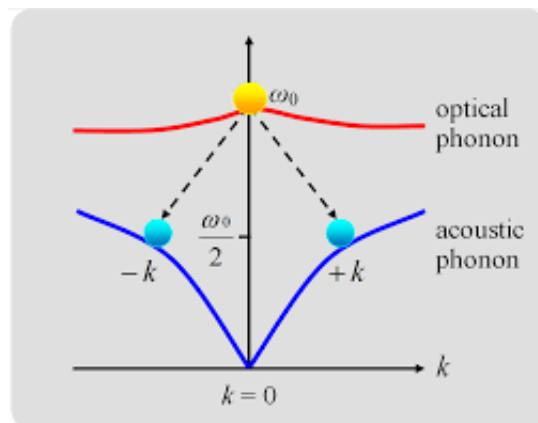
اگر ارتعاشات شبکه به صورت عرضی و عمود بر بردار موج شبکه باشند به این فونونها فونونهای عرضی^۴ می گویند. شکل (۶.۲)



شکل ۶.۲: حرکت فونونهای عرضی

۲.۳.۲ فونون های نوری و آکوستیکی

در بلور هایی که پایه بسیط آنها شامل بیش از یک اتم باشند، ارتعاشات شبکه در دو شاخه نوری و آکوستیکی ظاهر می شوند. شکل (۷.۲) تفاوت بسامد این ارتعاشات را نشان میدهد.



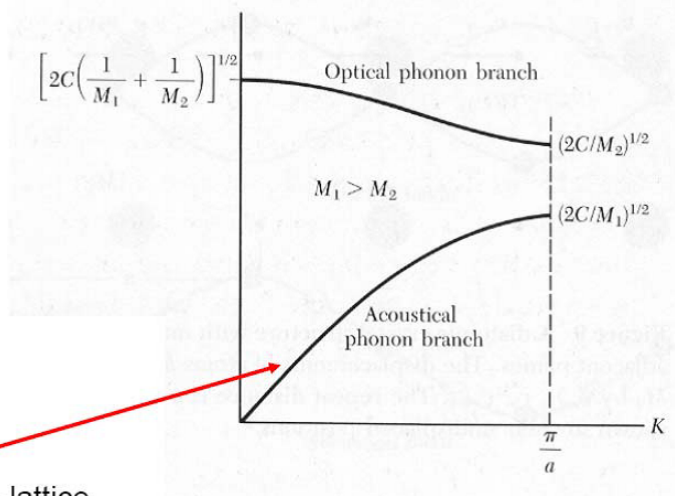
شکل ۷.۲: تفاوت بسامد ارتعاشات نوری و آکوستیکی

طبق شکل (۲.۳.۲) شاخه نوری، یک ارتعاش با انرژی بسیار بالا می باشد (در اینجا فرکانس بیشتر است و احتیاج به یک مقدار مشخص انرژی برای ایجاد مد برانگیخته داریم). عبارت نوری از آنجا می آید که برای نمونه در شبکه های شامل یاخته های بسیط دو اتمی، اگر دو اتم دارای بار مخالف باشند، آنگاه تحت اثر میدان الکتریکی وابسته به زمان خارجی، بارها در خلاف جهت یکدیگر ارتعاش می کنند و بنابراین این مدها می توانند به وسیله امواج الکترومغناطیسی برانگیخته شوند. به عبارتی فونون های نوری می توانند با نور برهم کنش داشته باشند. شاخه آکوستیکی معرف ارتعاش همدوس اتم های شبکه از جایگاه های تعادلی خود با طول موج بلند است. به این شاخه آکوستیکی می گویند زیرا برای تعیین ارتعاشات سریع صوتی به کار می رود.

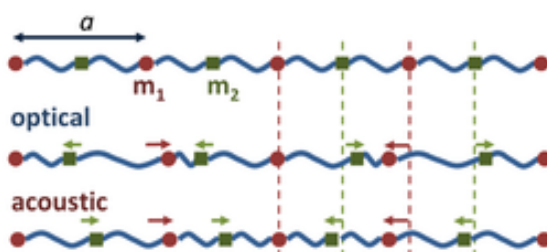
⁴Transverse

$$\omega^2 \cong 2C \left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right] \quad (\text{optical})$$

$$\omega^2 \cong \frac{1}{2} \frac{C}{M_1 + M_2} K^2 a^2 \quad (\text{acoustic})$$



Acoustic mode is linear in this region, just like the one atom basis lattice



شکل ۸.۲: شکل انتشار مدهای نوری و آکوستیکی در شبکه

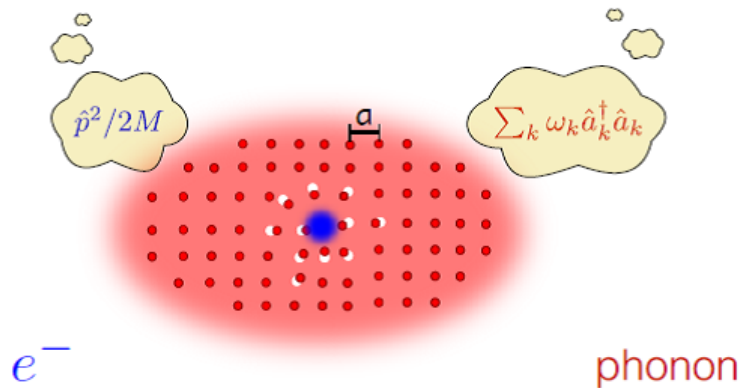
۴.۲ پولارون ها

یک پولارون یک شبه ذره می باشد که برای فهم بهتر برهم کنش های بین الکترون ها و اتم ها در یک ماده جامد، در فیزیک ماده چگال مورد استفاده قرار می گیرد. مفهوم پولارون اولین بار به وسیله لاندائو^۵ در سال ۱۹۳۳ پیشنهاد شد تا حرکت یک الکترون را در یک بلور دی الکتریک توصیف کند. مفهوم پولارون ایجاد شد تا بر همکنش بین الکترون ها و یون ها را در یک حالت انرژی توصیف کند که در مقایسه با سیستم بدون برهم کنش دارای انرژی متفاوتی می باشد. در یک بلور قطبی، الکترون به خاطر بار خود با یون های اطراف برهم کنش نموده و بنابراین یک ابر قطبشی^۶ در اطراف خود بوجود می آورد. این ابر قطبشی همراه با حرکت الکترون به حرکت درآمده و ویژگی های دینامیکی الکترون را تغییر می دهد. به عبارتی، برهم کنش الکترون با فونون منجر با یک شبه ذره جدید، یعنی الکترون به همراه ابر قطبشی آن، و به عبارتی پولارون، می شود. [13] پولارونها در تلاش برای درک برخی ویژگی های مواد مختلف

⁵Landau

⁶Polarization cloud

اهمیت پیدا می کنند. به عنوان مثال پولارونها برای تفسیر رسانایی نوری انواع مواد مهم هستند.



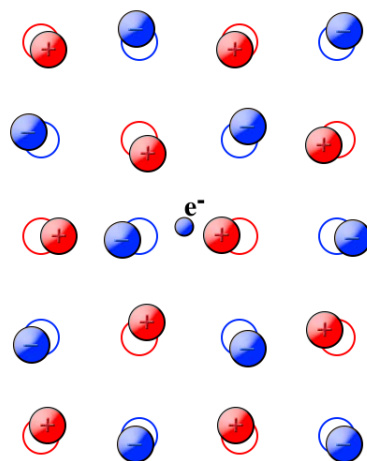
با تشکیل پولارونها تحرک پذیری الکترونها در داخل یک نیم رسانا کاهش زیادی پیدا می کند. طیف انرژی یک الکترون در حال حرکت در یک پتانسیل دوره ای در یک شبکه بلوری طیف بلاخ نامیده می شود که شامل یک سری نوارهای انرژی مجاز و یک سری نوارهای انرژی ممنوع است. یک الکترون در داخل یک نوار مجاز انرژی در حال حرکت است اما تحت اثر پتانسیل یونها، دارای جرم موثری است که با جرمی که با همان انرژی در داخل خلا حرکت می کرد متفاوت می باشد.

در یک کریستال یونی یا یک نیمه رسانای قطبی یک الکترون رسانشی به همراه ابر قطبشی آن نمونه بارز یک پولارون می باشد. فروهلیچ^۷ یک هامیلتونی را برای پولارونها زمانی که کوانتومی رفتار میکنند پیشنهاد داد (هامیلتونی فروهلیچ). اکثر کارهای نظری روی حل هامیلتونی فروهلیچ متمرکز شده است زیرا این رشته هنوز هم بهترین راه برای حل دقیق معادلات عددی در مورد یک یا دو الکترون در یک شبکه بلوری بزرگ یا مطالعه بر روی برهم کنش تعداد زیادی الکترون می باشد.

این مدل فرض میکند که تابع موج الکترونها تحت اثر ارتعاشات تعداد زیادی از یونها (وقتی که همه آنها تا حدی از موقعیت تعادل خودشان دور هستند) منتشر می شود (شکل (۹.۲)). به عبارتی الکترون ها با جابه جایی اتم ها یا یون های در حال ارتعاش برهم کنش می کنند که این برهم کنش به عنوان جفت شدگی الکترون فونون شناخته می شود. قدرت برهم کنش الکترون فونون به وسیله یک ثابت جفت شدگی بدون بعد α بیان میشود که توسط فروهلیچ معرفی شد. هامیلتونی فروهلیچ برای یک الکترون تنها در یک بلور با معادله (۴.۲) داده می شود.

$$H_e = \sum_{k,s} \xi(k,s) c_{k,s}^+ c_{k,s} \quad (۲.۲)$$

⁷Frölich



شکل ۹.۲: شبیه سازی پولارون

$$H_{ph} = \sum_{q,v} \omega_{q,v} a_{q,v}^+ a_{q,v} \quad (۳.۲)$$

$$H_{e-ph} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k,s,q,v} \gamma(\alpha, q, k, v) \omega_{qv} (c_{k,s}^+ c_{k-q,s} a_{q,v} + c_{k-q,s}^+ c_{k,s} a_{q,v}^+) \quad (۴.۲)$$

د اینجا γ به نوع ماده و نوع فونون هایی که در این برهم کنش حضور دارند، بستگی دارد.

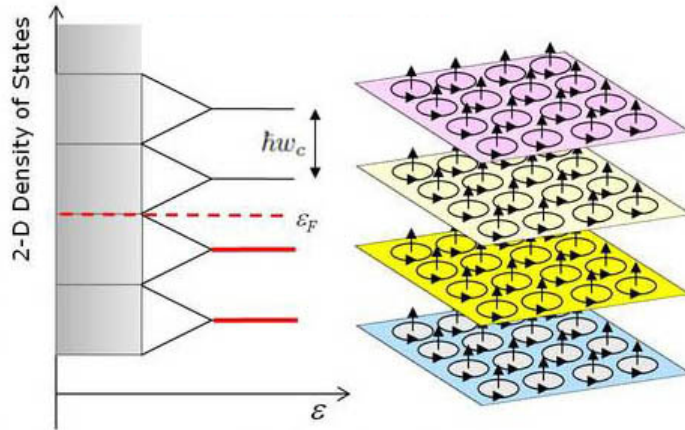
۵.۲ ترازهای لاندائو

در مکانیک کوانتومی کوانتس لاندائو به مدارهای سیکلوترونی کوانتیزه شده ذرات بار در حضور میدان مغناطیسی اطلاق میشود. در نتیجه آن ذرات باردار فقط می توانند مدارهایی با مقادیر انرژی گسسته را اشغال کنند که این مدارها ترازهای لاندائو نامیده میشوند. با معرفی بسامد سیکلوترونی، $\omega_c = eB/m^*c$ ، هر مجموعه از حالت ها با یک مقدار مشخص انرژی از طیف $E_n = (n + 1/2)h\omega_c$ ترازهای لاندائو نامیده می شوند.

ترازهای لاندائو تبهگن هستند و تعداد الکترونهای هر تراز با قدرت میدان مغناطیسی متناسب است. تاثیرات کوانتس و ترازهای لاندائو فقط زمانی قابل مشاهده است که انرژی گرمایی از انرژی جدایی بین ترازها کوچکتر باشد، $KT \ll h\omega_c$. یعنی تاثیرات ترازهای لاندائو در دماهای کمتر و میدان های مغناطیسی بزرگتر مشاهده می شود.

هر تراز لاندائو تبهگن است زیرا دومین عدد کوانتومی k_y میتواند با مقادیر $k_y = 2\pi N/L_y$ به شرط آنکه N یک عدد صحیح باشد، برابر باشد. شکل (۱۰.۲) طرحی از تبهگنی ترازهای لاندائو را نمایش می دهد. مقادیر مجاز N با این شرط که مرکز حرکت سیکلوترونی کوانتیزه

یعنی $x_0 = \hbar kc/eB$ در دستگاه واقع شده باشد، $0 < x_0 < L_x$ تعیین می شوند. با این شرط محدوده N به صورت $0 < N < eBL_xL_y/2\pi\hbar c$ مشخص می شود. به سادگی میتوان دریافت که $\hbar c/eB$ دارای ابعاد مساحت است. و لذا طول مغناطیسی l_B با رابطه $l_B = \sqrt{\hbar c/eB}$ تعریف می شود [14]



شکل ۱۰.۲: تبهگنی در ترازهای لاندائو

وقتی در یک نمونه دو بعدی به مساحت A پایینترین تراز لاندائو $N = 0$ پر است، دستگاه می تواند به ازای هر تراز انرژی یک الکترون بگیرد. بنابراین تعداد کل الکترونهايي که پایینترین تراز لاندائو را پر می کنند $N_{max} = L_xL_y/2\pi l_B^2 = A/2\pi l_B^2$ است.

فصل ۳

برهمکنش الکترون با فونون نوری طولی بین ترازهای لانداو

در این بخش به مرور رهیافت مورد استفاده در مرجع [15] جهت محاسبه آهنگ پراکندگی الکترون - فونون های نوری طولی، بین تراز های لانداو در ساختار نامتجانس نیم رسانا در حضور میدان مغناطیسی موازی با امتداد محدودیت کوانتومی دستگاه پرداخته می شود. هامیلتونی توصیف کننده حرکت یک الکترون در میدان مغناطیسی خارجی B ، با بهره گیری از پیمانۀ لانداو برای پتانسیل برداری $A = (0, Bx, 0)$ ، به صورت زیر نوشته میشود.

$$H = \frac{P_x^2}{2m^*} + \frac{(p_y + eBx)^2}{2m^*} + \frac{P_z^2}{2m^*} + V_z \quad (1.3)$$

در اینجا m^* جرم مؤثر حاملها در انرژی ε و V_z پتانسیل محدود شده در راستای رشد میباشند.

اثر اسپینی زیمان نادیده گرفته شده زیرا برای موادی از قبیل $GaAs$ حتی در میدانهایی به بزرگی $40T$ ، انرژی ناشی از اثر زیمان کمتر از $1meV$ میشود که میتوان آن را در نظر نگرفت. این مقدار اهمیتش خیلی کمتر از تاثیرات دمایی بر روی دستگاه است. می توان جواب های معادله شرودینگر برای هامیلتونی فوق را در غالب زیر بیان نمود.

$$\psi_{n,p,k_y}(r^{\rightarrow}) = \langle r^{\rightarrow} | E_n, p, k_y \rangle = \chi_n(z) \varphi_p(x + \lambda^2 k_y) \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}} \quad (۲.۳)$$

در اینجا φ_p نمایش دهنده p امین تابع هرمیت، L_y طول نمونه در راستای y ، و $\lambda = \sqrt{\hbar/eB}$ شعاع سیکلوترونی میباشد. انرژی الکترون از مجموع انرژی مربوط به حرکت آن در راستای طولی و راستای عمود بر آن بدست می آید. این انرژی به صورت زیر نوشته میشود:

$$\varepsilon_{n,p,k_y} = E_n + (P + 1/2) \hbar \omega_c \quad (۳.۳)$$

در اینجا E_n انرژی دستگاه مختل نشده و $\hbar \omega_c = \hbar eB/m^*$ انرژی سیکلوترونی آن (ترازهای لاندائو) می باشد. طیف انرژی ترازهای لاندائو دارای تبهگنی از مرتبه $(2\pi\lambda^2)$ $L_x L_y$ می باشند.

هامیلتونی الکترون - فونون LO مجموع هامیلتونی های برهم کنش الکترون با هر مد فونونی (هامیلتونی فروهلیچ) است که به وسیله بردار موج سه بعدی $q = (Q, q_z)$ معرفی می شود. $Q = (q_x, q_y)$ مولفه ای از بردار موج می باشد که درون صفحه واقع شده است.

$$H_{e-ph} = \sum_q H_{e-ph}(q) \quad (۴.۳)$$

$$H_{e-ph}(q) = ig(e^{-iq.r} a_q^+ - e^{iq.r} a_q^-) / q \quad (۵.۳)$$

در این رابطه g^2 عامل فروهلیچ میباشد که از رابطه زیر

$$g^2 = 2\pi\omega_{LO} \hbar e^2 / \varepsilon_p V \quad (۶.۳)$$

با

$$\varepsilon_p = \frac{4\pi\epsilon_0}{\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon_s^{-1}} \quad (۷.۳)$$

محاسبه می شود. $\hbar\omega_{LO}$ انرژی فونون های LO بوده، ϵ_s ثابت دی الکتریک نسبی ایستا، ϵ_∞ ثابت دی الکتریک نسبی در بسامدهای بالا، و V حجم نمونه مورد نظر میباشد. در یک طیف انرژی کاملاً گسسته مشکلی مفهومی در محاسبه گذار از یک تراز به ترازهای دیگر وجود دارد. به حدی که توجیهی برای بکارگیری قاعده طلایی فرمی در محاسبه گزار ناشی از انتشار فونون LO ، بین ترازهای لاندائو وجود ندارد. بعلاوه بواسطه فقدان پیوستگی

در طیف انرژی توقع داریم با ترکیبی از برانگیختگی های بنیادی به همراه پولارونها که ویژه حالت های پایدار الکترونها برهم کنش کننده و فونونهای LO می باشند، مواجه باشیم. از آنجا که در پی محاسبه واهلش بین زیرنواری (جایی که بخش وابسته به z توابع موج اولیه و نهایی متفاوتند) هستیم، توقع داریم اثرات پولارونی حتی از آنچه که در حالت $\omega_c = \omega_{LO}$ اندازه گیری شده اند کوچکتر باشد که منجر به واپاشی سریع ناشی از ناکاملی های پولارون ها می شود.

حالت های الکترون-فونونی $|E_1, n_1, k'_y\rangle \otimes |1\rangle$ و $|E_2, 0, k'_y\rangle \otimes |0\rangle$ را که حالت هایی شامل یک یا صفر فونون می باشند در نظر بگیرید. فرض کنید که میدان مغناطیسی به گونه ای است که انرژی حالت صفر فونونی $|E_2, 0, k'_y\rangle \otimes |0\rangle$ با انرژی حالت تک فونونی زیرنوار پائین تر $|E_1, n_1, k'_y\rangle \otimes |1\rangle$ یکسان است. به عبارتی با حالت تشدید مغناطوپلارون بین زیرنواری مواجه هستیم. بنابراین

$$E_{\gamma} = E_{\gamma} + n_{\gamma} \hbar \omega_C + \hbar \omega_{LO} \quad (8.3)$$

قطری کردن هامیلتونی الکترون-فونون بین این حالتها به تشکیل دو حالت پولارونی منجر میشود. شکافت یا جدایی انرژی این دو حالت پولارونی یعنی $\hbar \Omega$ بین حالت های $|E_2, 0, k'_y\rangle \otimes |0\rangle$ و $|E_1, n_1, k'_y\rangle \otimes |1\rangle$ عبارت است از

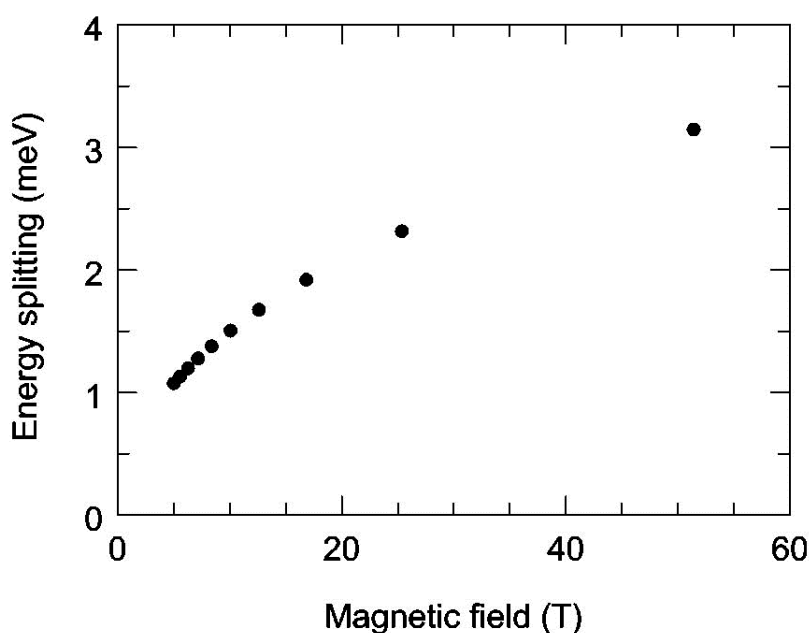
$$\hbar^2 \Omega^2 = \sum_{q=(Q, q_z)} |I|^2 g^2 \frac{1+n}{q^2} |\langle E_{\gamma} | e^{iq_z z} | E_{\gamma} \rangle|^2, \quad (9.3)$$

در این رابطه عنصر ماتریسی $|I|^2$ برای امتداد درون صفحه ای به صورت زیر خواهد بود

$$|I|^2 = \frac{(\lambda^2 Q^2)^{n_{\gamma}}}{2^{n_{\gamma}} n_{\gamma}!} \exp(-\lambda^2 Q^2 / 2). \quad (10.3)$$

شکل (۱۰.۳) رفتار شکافت انرژی، $\hbar \Omega$ ، در تشدید پولارونی را به صورت تابعی از میدان مغناطیسی در چاه کوانتمی $GaAs$ به عرض 90 \AA با سد پتانسیل $Al_{0.45}Ga_{0.55}As$ برای زیرنواریهای $n_{\gamma} = 1 - 10$ نمایش می دهد. جالب آنکه بیشینه مقدار آن در محدوده تغییرات میدانی به اندازه $50^\circ T$ ، از مرتبه 3 meV میباشد.

در یک سیستم واقعی، احتمالاً به واسطه بی نظمی ایجاد شده توسط ناخالصی ها، ناکاملی های سطحی و امثال آن سبب پهن شدگی ترازهای لاندائو خواهند شد که باعث میشود که تاثیرات پولارونی را به سختی مشاهده کنیم. در نمونه هایی با ناکاملی بسیار کم که در آنها شکافت پولارونی از پهن شدگی ترازهای لاندائو بسیار بزرگتر است، باید از ویژه توابع پولارون آغاز نمود و دوباره واهلش انرژی را در نظر گرفت، چرا که دیگر نمی توان هیچ جذب و گسیل فونون LO ای را به مدل برانگیختگی های بنیادی مخلوط پایدار برهم کنش دستگاه الکترون



شکل ۱.۳: شکافت انرژی با تغییرات میدان مغناطیسی

فونون افزود. در چهارچوب پولارون، واهلش انرژی تنها می تواند بواسطه سازوکارهایی باشد که بطور غیر مستقیم پولارون را می شکنند. در یک توصیف شبه کلاسیک این ناهمگونی ها، فرکانس واپاشی پولارون عبارت است از

$$\frac{1}{\tau_{pol}} = \frac{f_e}{\tau_e} + \frac{f_{ph}}{\tau_{ph}} \quad (11.3)$$

در این رابطه f_e کسر حالت صفر فونون و f_{ph} کسر حالت تک فونون در تابع موج پولارونی میباشد. τ_e طول عمر الکترون و τ_{ph} طول عمر فونون هستند. این رابطه نشان میدهد که طول عمر پولارون همیشه طولانی تر از کوتاهترین طول عمر الکترون یا فونون میباشد. در موادی که نظیر *GaAs* هستند τ_{ph} و بنابراین τ_{pol} از مرتبه چند پیکو ثانیه می باشد. می توان زمان واهلش τ_{n_x, n, k_y} حالت اولیه لاندائوی n که مرکز آن در $-\lambda^2 k_y$ معینی در زیرنوار n_2 است و با گسیل یک فونون نوری طولی الکترون را به حالت های لاندائوی متفاوتی در زیر نوارهایی مختلف ($n_m, m < 2$) میاورد محاسبه نمود. با این فرض که ترازهای لاندائو دچار پهن شدگی شده اند، از قاعده طلایی فرمی استفاده میکنیم.

$$\frac{1}{\tau_{n_x, n, k_y}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{n', k'_y} |\langle n_x, n, k_y | H_{e-ph} | n_1, n', k'_y \rangle|^2 L_a [E_{n_x} - E_{n_1} + (n - n')\hbar\omega_c - \hbar\omega_{LO}] \quad (12.3)$$

در اینجا L_a تابع لورنتز نرمالایز شده میباشد که به وسیله پارامتر پهنای a یا هر تابع دیگری که بیانگر یک تابع دلتای پهن شده از تفاوت بین انرژی های ترازهای لاندائو است، توصیف میشود. ما متوجه شدیم که این پهن شدگی در تابع دلتا به دلیل اختلاف بین انرژیهای ترازهای لاندائو میباشد. معادله فوق نشاندهنده آن است که تشدیدها در آهنگ پراکندگی $\frac{1}{\tau}$ در جایی ظاهر می شوند که انرژی فونون LO با اختلاف انرژی بین دو تراز لاندائو در دو زیر نوار برابر شوند یعنی دقیقاً در تشدیدهای مغناطیوپولارون بین زیرنواری روی می دهند. این تشدیدها به جای اینکه در مقادیر گسسته اتفاق بیفتند به خاطر اثر پهن شدگی پخش میشوند و روی یک بخش کوچک محدودی در اطراف B توزیع میشوند.

با در نظر گرفتن مجموعه بزرگی از نمونه های یکسان که می توانند در پهنای چاه، L ، تفاوتی جزئی و رندوم داشته باشند، می توان متوسط آهنگ پراکندگی برای این مجموعه را محاسبه نمود. با دسته بندی نمونه ها به گروه هایی که همگی در میدان یکسانی قرار دارند ولی مقدار متغیر L برای هر کدام بطور کاتوره ای با مقدار آن برای گروه های دیگر تفاوت دارد و توجه به اینکه تعداد نمونه ها بسیار زیاد است، با بهره گیری از چگالی احتمال کاتوره ای وقوع متغیر $P(L)$ ، $P(L)$ ، متوسط آهنگ پراکندگی عبارت است از:

$$\left\langle \frac{1}{\tau_{n_x, n, k_y}} \right\rangle = \int_0^\infty P(L) \frac{1}{\tau_{n_x, n, k_y}} dL. \quad (13.3)$$

در ادامه از یک چگالی احتمال گوسی که به صورت زیر میباشد استفاده می شود.

$$P(L) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(L - L_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (14.3)$$

به عنوان تقریبی قابل قبول میتوان تابع لورنتز را با یک تابع دلتا جایگزین نمود. بنابراین آهنگ پراکندگی برای حالت خاص تراز پایه لاندائو، ($n = 0$)، شکل زیر را به خود می گیرد.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\tau_{n_x, n, k_y}} \right\rangle &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{n', k'_y} |\langle n_x, n = 0, k_y | H'_{e-ph} | n_1, n', k'_y \rangle|^2 \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} P(L) \delta[\Delta_{n_x, n_1}(L) - n' \hbar \omega_c - \hbar \omega_{LO}] dL \end{aligned} \quad (15.3)$$

که

$$\Delta_{n_x, n_1} = E_{n_x}(L) - E_{n_1}(L). \quad (16.3)$$

اختلاف انرژی Δ_{n_x, n_1} یک تابعی از L میباشد که به صورت یکنواخت کاهش پیدا میکند. ما فرض میکنیم که اختلاف انرژی Δ_{n_x, n_1} در اطراف L_0 به صورت خطی با L تغییر کند:

$$\Delta_{n_{\tau}, n_1}(L) = \Delta_0 - \gamma(L - L_0) \quad (17.3)$$

بتابراین

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\tau_{n_{\tau}, n, k_y}} \right\rangle &= \frac{\sqrt{2}\pi}{\hbar} \sum_{n', k'_y} |\langle n_{\tau}, n = 0, k_y | H'_{e-ph} | n_1, n', k'_y \rangle|^2 \\ &\times \frac{1}{\delta \sqrt{2}\pi} \exp\left[-\frac{(\Delta_0 - n' \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO})^2}{2\delta^2}\right] \end{aligned} \quad (18.3)$$

در رابطه بالا $\delta = \gamma\sigma$ عرض توزیع گوسی اختلاف انرژی Δ_{n_{τ}, n_1} میباشد. توجه به این نکته مهم است که پیک های $\langle 1/\tau \rangle$ در تشدید بین نواری مگنتوپولارونها، جایی که $\Delta_0 - \hbar \omega_{LO} = n' \hbar \omega_c$ است، اتفاق می افتند.

بعد از تغییرات انجام شده و با استفاده از معادله (۱۰.۳) خواهیم داشت:

$$\left\langle \frac{\hbar}{\sqrt{2}\pi\tau_{n_{\tau}, 0, k_y}} \right\rangle = g^2 (1 + n_{LO}) \sum_{Q, q_z} \frac{|\langle \chi_{n_{\tau}} | e^{-iq_z z} | \chi_{n_1} \rangle|^2}{q_z^2 + Q^2} S(Q) \quad (19.3)$$

در این رابطه n_{LO} تعداد فونون های LO بوده و

$$S(Q) = \frac{e^{\lambda^2 Q^2 / 2}}{\delta \sqrt{2}\pi} \sum_{n'} \frac{1}{n'!} \left(\frac{\lambda^2 Q^2}{2}\right)^{n'} \exp\left(-\frac{(\Delta_0 - \hbar \omega_{LO} - n' \hbar \omega_c)^2}{2\delta^2}\right) \quad (20.3)$$

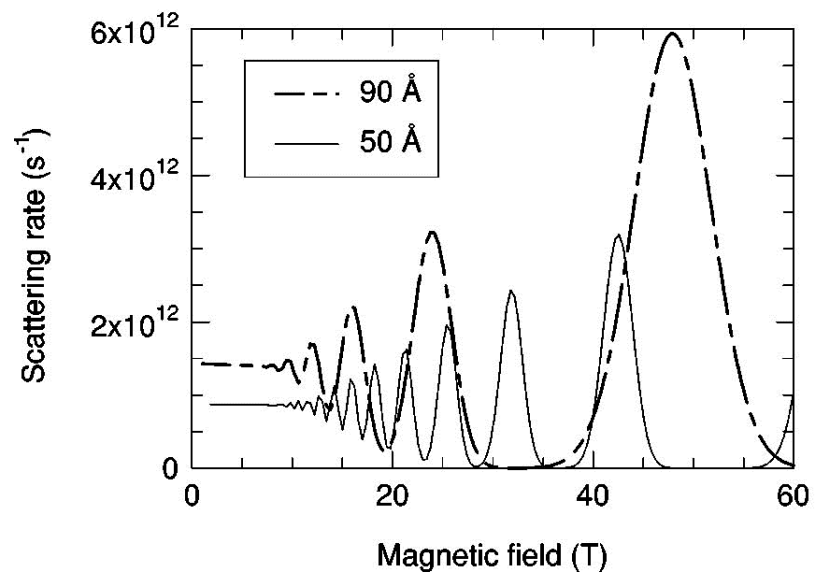
می باشد. با محاسبه جمع روی q_z ها معادله فوق شکل واضح تری بخود می گیرد.

$$\left\langle \frac{\hbar}{\sqrt{2}\pi\tau_{n_{\tau}, 0, k_y}} \right\rangle = (1 + n_{LO}) \frac{e^{\sqrt{2}\hbar\omega_{LO}}}{\lambda\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\epsilon_{\infty}} - \frac{1}{\epsilon_s}\right) \int_0^{\infty} f(Q) S(Q) d(Q) \quad (21.3)$$

در اینجا عامل شکل $f(Q)$ به صورت زیر می باشد

$$f(Q) = \int \int dz dz' \chi_{n_1}^*(z) \chi_{n_1}(z') \chi_{n_{\tau}}(z) \chi_{n_{\tau}}^*(z') \exp(-Q|z - z'|) \quad (22.3)$$

که هم در $Q = 0$ و هم در حد $Q \rightarrow \infty$ ، صفر خواهد شد. شکل (۱۱.۵) تغییرات آهنگ پراکندگی محاسبه شده را بر حسب میدان مغناطیسی، برای گسیل فونون LO بین تراز پایه لاندائوی زیر نوار E_{τ} به ترازهای لاندائوی زیر نوار E_1 برای یک چاه $GaAs$ با دیواره های $Ga_{0.55}Al_{0.45}As$ نشان می دهد.



شکل ۲.۳: تغییرات آهنگ پراکندگی بر اساس میدان مغناطیسی

فصل ۴

گذار بین ترازهای لاندائو در یک چاه کوانتومی تحت تابش لیزر

هامیلتونی برای برهم کنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی خارجی که در راستای چاه کوانتومی یعنی راستای z است و با پتانسیلهای $A(r, t)$ و $\phi(r, t)$ نمایش داده میشود به صورت زیر است:

$$H = \frac{(p - eA(r, t)/c)^2}{2m^*} + e\phi(r, t) \quad (1.4)$$

که در این رابطه $A = (\circ, Bx, \circ)$ پتانسیل برداری برای ترازهای لاندائو است. [14] با این انتخاب هامیلتونی برای تراز لاندائو در زمانی که هیچ پتانسیل خارجی نداشته باشیم $\phi(r, t) = \circ$ به صورت زیر در می آید:

$$H = \frac{1}{2m^*}(p_x^2 + p_y^2 + 2eBxp_y/c + (eB/c)^2 x^2 + p_z^2) \quad (2.4)$$

حالا اگر یک محدودیت عرضی یعنی جمله $m^*\omega_c^2 x^2/2$ را که در راستای محور x میباشد به هامیلتونی اضافه کنیم و راستای چاه کوانتومی را در راستای محور z در نظر بگیریم آنگاه داریم:

$$H = \frac{1}{2m^*}(p_x^2 + p_y^2 + 2eBxp_y/c + (eB/c)^2 x^2 + m^*\omega_c^2 x^2/2 + p_z^2) \quad (3.4)$$

در اینجا m^* همان m^* یا جرم مؤثر حاملها میباشد. همانطور که میدانیم p_x و p_y و p_z عملگر هستند

$$p_x = i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (۴.۴)$$

$$p_y = i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \quad (۵.۴)$$

$$p_z = i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \quad (۶.۴)$$

طبق قانون جابه جایی ها میدانیم که به خاطر وجود ترم x در هامیلتونی $[p_x, x] \neq 0$ و در نتیجه هامیلتونی با p_x جا به جا نمیشود ولی به خاطر وجود نداشتن ترم y و z در هامیلتونی $[H, p_y] = 0$ و $[H, p_z] = 0$

در نتیجه بدیهی است که میتوان توابعی ساخت که ویژه توابع همزمان H و p_y و p_z باشند. اگر این حالت را یک ویژه تابع p_z با ویژه مقدار 0 در نظر بگیریم و ویژه مقدار p_y را به صورت $\hbar k$ در نظر بگیریم و در راستای y ذره را آزاد فرض کنیم آنگاه تابع موج در راستای y به صورت تابع موج تخت در می آید. پس ما میتوانیم ویژه توابع همزمان را به صورت زیر بنویسیم:

$$\psi_{x,y,z} = e^{iky} \phi_x \chi_z \quad (۷.۴)$$

که در آن جواب معادله $H\psi = E\psi$ میباشد.

نکته: اگر طول y یعنی طول عرضی را از $-\infty$ تا ∞ در نظر بگیریم آنگاه میتوانیم ذره را در راستای y آزاد فرض کنیم و تابع موج برای ذره آزاد e^{iky} میشود و وقتی آن را بهنجار کنیم داریم: $\psi = e^{iky} / \sqrt{2\pi}$

اما برای راحتی کار گاهی اوقات طول عرضی را از 0 تا L در نظر میگیریم یعنی طول در راستای y را محدود میکنیم در این حالت دیگر نمیتوانیم تابع موج ذره آزاد را در نظر بگیریم پس یک تابع موج فرضی حقیقی در نظر میگیریم و آن را بهنجار میکنیم.

در نتیجه تابع موج را به صورت $\psi = e^{iky} / \sqrt{L}$ مینویسیم. این تابع موج کاملاً پذیرفته شده است زیرا خیلی از مشکلاتی را که تابع موج بهنجار شده ذره آزاد ایجاد میکند را حل خواهد کرد و بوسیله این تابع موج میتوانیم مقادیر پیوسته را هم محاسبه کنیم.

با استفاده از جداسازی متغیرها داریم: $\psi_{x,y,z} = \phi_{x,y} Z_z$ و با جایگذاری هامیلتونی در رابطه

$$H\psi = E\psi \quad \text{دو معادله جداگانه به دست می آید [21].}$$

معادله اول:

$$\frac{p_z^2}{2m^*} Z_z = E_z Z_z \quad (۸.۴)$$

که با حل آن $E_z = E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ به دست می آید.
معادله دوم:

$$\frac{1}{2m^*} (p_x^2 + p_y^2 + 2eBxp_y/c + (eB/c)^2 x^2 + m^* \omega_c^2 x^2 / 2) \phi_{x,y} = E \phi_{x,y} \quad (۹.۴)$$

با جایگذاری $p_y = \hbar k$ و $p_x = i\hbar d/dx$ داریم:

$$H = \frac{1}{2m^*} (-\hbar^2 d^2/dx^2 + \hbar^2 k^2 + (eB/c)^2 x^2 + 2\hbar k e B x / c + m^* \omega_c^2 x^2 / 2) =$$

$$\frac{1}{2m^*} [-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + (eB/c)^2 (\frac{\hbar k}{eB/c} + x)^2 + m^* \omega_c^2 x^2 / 2] \quad (۱۰.۴)$$

اگر $\hbar c / eB = l^2$ آنگاه داریم:

$$H = \frac{1}{2m^*} [-\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + (eB/c)^2 (l^2 k_y + x)^2 + m^* \omega_c^2 x^2 / 2] \quad (۱۱.۴)$$

اگر $w = \sqrt{w_c^2 + w_0^2}$ آنگاه $eB/m^*c = w_c$

با حل معادله $H\psi = E\psi$ برای هامیلتونی به دست آمده ویژه توابع هامیلتونی به صورت زیر خواهند شد:

$$\psi_{x,y,z} = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{ik_y y} \xi_n(x + x_0) \chi_z \quad (۱۲.۴)$$

که در اینجا $\xi_n(x + x_0) = \xi_n(x + \frac{\omega_c^2}{\omega^2} k_y l^2)$ میباشد.

از آنجا که معادله یک نوسانگر هماهنگ که نقطه تعادل آن در مبدا است به صورت $\frac{p^2}{2m^*} + m^* \omega^2 x^2 / 2$ نوشته میشود اگر معادله $\frac{p^2}{2m^*} + m^* \omega_c^2 x^2 / 2 + m^* \omega_c^2 / 2 [(l^2 k_y)^2 + 2xl^2 k_y]$ را بر $m^* \omega^2 / 2$ تقسیم کنیم داریم:

$$\frac{p^2}{2m^*} + m^* \omega^2 / 2 [x^2 + \omega_c^2 / \omega^2 [(l^2 k_y)^2 + 2xl^2 k_y]] \quad (۱۳.۴)$$

معادله (۱۳.۴) معادله یک نوسانگر هماهنگ است که نقطه تعادل آن در $x_0 = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} k_y l^2$ میباشد.
طیف انرژی نیز به صورت زیر نوشته میشود:

$$E = E_n + (p + \frac{1}{\gamma})\hbar\omega \quad (14.4)$$

در حضور میدان تابشی لیزر تراهرتز با بسامد ω و دامنه میدان الکتریکی E ، که می توان پتانسیل برداری میدان تابشی آن را به صورت $\hat{A}_e(t) = \frac{Ee}{\omega} \cos(\omega t) \hat{j}$ نوشت، هامیلتونی دستگاه شکل زیر را خواهد داشت:

$$\left\{ \frac{1}{2m^*} \left[p_x^2 + \left(p_y + \frac{e}{c} Bx + \frac{e}{c} A_e(t) \right)^2 \right] + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 x^2 + V(x, y) - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (15.4)$$

پاسخ های معادله شرودینگر برای هامیلتونی بالا عبارتند از $\Phi(\mathbf{r}, t) = U(t)\Psi(\mathbf{r}, t)$ که $U(t)$ عملگری یکانی است که می توان آن را در غالب زیر بیان نمود [16]

$$U(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} u_0(t)\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} u_1(t)x\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} u_2(t)p_x\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} u_3(t)p_y\right] \quad (16.4)$$

با معرفی $\gamma_b = \frac{eE}{m^*(\tilde{\omega}^2 - \omega^2)}$ ، $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2}$ ، و $x_0 = (\omega_c^2/\tilde{\omega}^2)k_y l^2$ و با حل معادله شرودینگر می توان شکل دقیق عملگر یکانی $U(t)$ را بدست آورد.

$$u_0(t) = -\frac{m^* \gamma_b^2}{\lambda \omega^2} \left(\frac{\tilde{\omega}^2 (\tilde{\omega}^2 - \omega_c^2 - 2\omega^2) - \omega^2 (\omega_c^2 - \omega^2)}{\omega} \sin(2\omega t) - 2\omega_c^2 \tilde{\omega} \sin(2\tilde{\omega} t) \right. \\ \left. + 4\omega_c^2 \tilde{\omega} \left(\sin[(\tilde{\omega} - \omega)t] + \sin[(\tilde{\omega} + \omega)t] \right) - 2(\tilde{\omega}^2 - \omega^2)(\omega^2 + \omega_c^2 - \tilde{\omega}^2)t \right) \quad (17.4)$$

$$u_1(t) = \gamma_b \frac{m^* \omega_c}{\omega} \left(\omega \sin \omega t - \tilde{\omega} \sin \tilde{\omega} t \right), \quad (18.4)$$

$$u_2(t) = \gamma_b \frac{\omega_c}{\omega} \left(\cos \omega t - \cos \tilde{\omega} t \right), \quad (19.4)$$

$$u_3(t) = \gamma_b \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{\omega_c^2}{\omega \tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} t \right). \quad (20.4)$$

بنابراین می توان حالت های الکترونی دستگاه را به شکل زیر نوشت

$$\psi_{n,k_x}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_y[y - u_3(t)]} e^{iu_1(t)x/\hbar} \xi_n(x + x_0 - u_2(t)) e^{-i[\epsilon_{nk_y} t - u_0(t)]/\hbar} \quad (21.4)$$

پراکندگی فونون در هر کریستال به وسیله هامیلتونی فروهلیچ محاسبه میشود. به وسیله تاثیر هامیلتونی فروهلیچ با قاعده طلایی فرمی میتوانیم آهنگ گزار فونون ها را محاسبه کنیم

الکترون ها در بعد Z کوانتیزه هستند. در بعد y الکترون ها تقریباً رفتار الکترون های آزاد را دارند. در بعد x ترازهای لاندائو را داریم که تحت تاثیر یک پتانسیل محدودیت عرضی قرار میگیرند.

در هر حالتی چه فونون جذب شود و چه منتشر شود قانون پایستگی انرژی ایجاب میکند که

$$E_{before} = E_{after}$$

اگر فونون منتشر شود در نتیجه داریم:

$$E_i = E_f + E_{LO}$$

اگر فونون جذب شود در نتیجه داریم:

$$E_f = E_i + E_{LO}$$

هامیلتونی برهم کنش الکترون - فونون یا همان هامیلتونی فروهلیچ به صورت زیر نوشته میشود:

$$H_{e-ph}(q) = \sum_q [\alpha_q (e^{-iq.r} a_q^+ - e^{iq.r} a_q^-)] \quad (22.4)$$

در این رابطه $\alpha_q = ig/q$ میباشد و g^2 عامل فروهلیچ میباشد که از رابطه (۲۳.۴) محاسبه میشود:

$$g^2 = 2\pi\omega_{LO}\hbar e^2 / \epsilon_p V \quad (23.4)$$

$$\epsilon_p = \frac{4\pi\epsilon_0}{\epsilon_\infty^{-1} - \epsilon_s^{-1}} \quad (24.4)$$

و از روابط (۲۴.۴) و (۲۳.۴) نتیجه میگیریم که:

$$|\alpha_q|^2 = \frac{E_{LO}e^2}{2Vq^2} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) \quad (25.4)$$

بر هم کنش هامیلتونی از مجموع فونون ها با بردار موج با مدهای q به دست می آید. بنابراین میتوانیم مدها را جداسازی کنیم و چون فرض کردیم که کریستال به اندازه کافی بزرگ هست که مدها خیلی به هم نزدیک شوند میتوانیم مجموع را به انتگرال تبدیل کنیم

$$H = (L/\sqrt{\pi})^3 \int dq_x \int dq_y \int dq_z \times \\ \times [\alpha(q_x i' + q_y j' + q_z k') (e^{-i(q_x x + q_y y + q_z z)} a_{(q_x i' + q_y j' + q_z k')}^+ + e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)} a_{(q_x i' + q_y j' + q_z k')})] \quad (26.4)$$

با قرار دادن هامیلتونی بالا در قاعده طلایی فرمی داریم:

$$w_{i \rightarrow f} = (L/\sqrt{\pi})^6 (\sqrt{\pi}/\hbar) \delta(E_f - E_i + E_{LO}) \left| \int dq_x \int dq_y \int dq_z \times \right. \\ \times \alpha(q_x i' + q_y j' + q_z k') \langle f, k_f, n_f | e^{-i(q_x x + q_y y + q_z z)} a_{(q_x i' + q_y j' + q_z k')}^+ + \\ \left. + e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)} a_{(q_x i' + q_y j' + q_z k')} | i, k_i, n_i \rangle \right|^2 \quad (27.4)$$

اگر فرض کنیم که:

$$M_q = \langle f, k_f, n_f | e^{-i(q_x x + q_y y + q_z z)} a_{(\mathbf{q})}^+ + e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)} a_{(\mathbf{q})} | i, k_i, n_i \rangle \quad (28.4)$$

آنگاه داریم:

$$(29.4)$$

$$w_{i \rightarrow f} = (L/\sqrt{\pi})^6 (\sqrt{\pi}/\hbar) \delta(E_f - E_i + E_{LO}) \left| \int dq_x \int dq_y \int dq_z \alpha(q_x i' + q_y j' + q_z k') M_q \right|^2$$

با جداسازی M_q و تاثیر عملگرهای خلق و فنا روی حالت های مورد نظر در رابطه (28.4) آنگاه M_q را باز نویسی میکنیم:

$$M_q = \langle f, k_f, n_f | e^{-i(q_x x + q_y y + q_z z)} \sqrt{n_i + 1} | i, k_i, n_i + 1 \rangle + \\ + \langle f, k_f, n_f | e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)} \sqrt{n_i} | i, k_i, n_i - 1 \rangle \quad (30.4)$$

در حالت های همگن یک کریستال باید حالت های اولیه و نهایی با هم برابر باشند پس با توجه به روابط بالا دو مورد قابل بررسی هستند. حالت اول زمانی است که یک فونون خلق شود آنگاه داریم:

$$n_f = n_i + 1$$

پس معادله (30.4) شکل زیر را خواهد داشت:

$$M_q^{ems} = \sqrt{n_i + 1} \langle f, k_f | e^{-i(q_x x + q_y y + q_z z)} | i, k_i \rangle \quad (31.4)$$

حالت دوم زمانی است که یک فونون نابود شود آنگاه داریم:

$$n_f = n_i - 1$$

پس معادله (۳۰.۴) به صورت زیر میشود:

$$M_q^{abs} = \sqrt{n_i} \langle f, k_f | e^{i(q_x x + q_y y + q_z z)} | i, k_i \rangle \quad (32.4)$$

پس به غیر از حالت $M_q^{ems,abs}$ بقیه حالتها همگی صفر میشوند.

$$M_q^{ems,abs} = \sqrt{n_i + 1/2 \pm 1/2} \langle f, k_f | e^{\pm i(q_x x + q_y y + q_z z)} | i, k_i \rangle \quad (33.4)$$

$$M_q = \sqrt{n_i + 1/2 \pm 1/2} \langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle \langle k_{f,x} | e^{\mp i q_x x} | k_{i,x} \rangle \langle k_{f,y} | e^{\mp i q_y y} | k_{i,y} \rangle \quad (34.4)$$

اگر رابطه (۳۴.۴) را در ماتریس واحد ($I = \int dx |x\rangle \langle x|$) و ($I = \int dy |y\rangle \langle y|$) ضرب کنیم آنگاه داریم:

$$M_q = \sqrt{n_i + 1/2 \pm 1/2} \langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle \langle k_{f,x} | \left[\int dx |x\rangle \langle x| \right] e^{\mp i q_x x} \left[\int dx' |x'\rangle \langle x'| \right] | k_{i,x} \rangle \times \\ \times \langle k_{f,y} | \left[\int dy |y\rangle \langle y| \right] e^{\mp i q_y y} \left[\int dy' |y'\rangle \langle y'| \right] | k_{i,y} \rangle \quad (35.4)$$

با توجه به این نکته که $\langle k_{f,x} | x \rangle$ و $\langle x' | k_{i,x} \rangle$ همان ویژه تابع انرژی در بعد x و $\langle k_{f,y} | y \rangle$ و $\langle y' | k_{i,y} \rangle$ همان ویژه توابع انرژی در بعد y هستند و با توجه به رابطه (۱۲.۴) که ویژه توابع انرژی را نشان میداد، با جایگذاری این ویژه توابع در رابطه (۳۵.۴) خواهیم داشت:

$$M_q = \frac{1}{L} \sqrt{n_i + 1/2 \pm 1/2} \langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle \times \\ \times \int dy \int dy' e^{-i k_f y} \langle y | e^{\pm i q_y y} | y' \rangle e^{i k_i y'} \int dx \int dx' \xi_n^*(x + x'_o) \langle x | e^{\pm i q_x x} | x' \rangle \xi_{n'}(x + x'_o) \quad (36.4)$$

با توجه به دو نکته و به کاربردن آن ها در رابطه (۳۶.۴) آنگاه M_q را بازنویسی میکنیم [20].
نکته اول:

$$\langle y | e^{i q_y y} | y' \rangle = e^{i q_y y} \delta(y - y')$$

نکته دوم:

$$\int dy' e^{i k y'} \delta(y - y') = e^{i k y}$$

$$M_q = \frac{1}{L} \sqrt{n_i + 1/2 \pm 1/2} \langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle \times \\ \times \int dy e^{-i k_f y} e^{\pm i q_y y} e^{i k_i y} \int dx \xi_n^*(x + x'_0) e^{\pm i q_x x} \xi_{n'}(x + x'_0) \quad (37.4)$$

با به کار بردن تعریف $\int dy e^{iy(-k_f + q_y + k_i)} = 2\pi \delta(k_f - q_y - k_i)$ در رابطه (۳۷.۴) خواهیم داشت:

$$M_q = \frac{2\pi}{L} \sqrt{n_i + 1/2 \pm 1/2} \langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle \delta(k_f \pm q_y - k_i) \int dx \xi_{n',x}^* e^{\pm i q_x x} \xi_{n,x} \quad (38.4)$$

که در آن $\xi_n(X)$ همان ویژه توابع نوسانگر هماهنگ میباشند.

$$\xi_n(X) = (2\pi l^2)^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{-X^2/2l} H_n(X) \quad (39.4)$$

که در رابطه فوق $H_n(X)$ چند جمله ای هرmit و $X = x + (\omega_c/\omega)^{1/2} k_y l^2$ میباشد. با توجه به رابطه (۳۸.۴) به سراغ محاسبه انتگرال زیر میرویم:

$$\int dx \xi_{n',x}^* e^{\pm i q_x x} \xi_{n,x} = \langle \xi_{n',x} | e^{\pm i q_x x} | \xi_{n,x} \rangle = \sqrt{c_{n',n,x}} \quad (40.4)$$

با جایگراری رابطه (۳۹.۴) در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\int dx (2\pi l^2)^{-1/2} (2^n n! 2^{n'} n'!)^{-1/2} e^{-X^2} e^{\pm i q_x x} H_n(X) H_{n'}(X) \quad (41.4)$$

حال از اتحاد زیر برای محاسبه انتگرال فوق استفاده میکنیم: [19]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x-y)^2} H_n(x) H_m(x) = 2^n \sqrt{\pi} m! y^{n-m} L_m^{n-m}(-2y)^2 \quad (42.4)$$

که در آن توابع لاگر هستند.

اگر ($m = n <$) و ($n = n >$) با جایگذاری اتحاد فوق در رابطه (۴۰.۴) خواهیم داشت:

$$\sqrt{c_{n_x, n'_x}} = (2\pi l^2)^{-1/2} (2^n n! 2^{n'} n'!)^{-1/2} 2^{n >} \sqrt{\pi} \times \\ \times n <! (i q_x / 2)^{n > - n <} L_{n <}^{n >} - n < (q_x^2 / 2) e^{(i q_x / 2)^2} e^{\pm i q_x (\omega_c / \omega)^{1/2} k_y l^2} \\ = \frac{1}{\sqrt{2} l} (2^{n > - n <})^{1/2} \left(\frac{n <!}{n >!} \right)^{1/2} (i q_x / 2)^{n > - n <} \times \\ \times L_{n <}^{n > - n <} (q_x^2 / 2) e^{(i q_x / 2)^2} e^{\pm i q_x (\omega_c / \omega)^{1/2} k_y l^2} \quad (43.4)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۳۴.۴) خواهیم داشت:

$$M_q = \frac{\sqrt{2}\pi}{L} \sqrt{n_i + 1/2 \pm 1/2} \langle f_z | e^{\mp i q z} | i_z \rangle \delta(k_f \pm q_y - k_i) \sqrt{c_{n_x, n'_x}} \quad (44.4)$$

حالا با قرار دادن رابطه (۴۴.۴) در رابطه (۲۹.۴) و همزمان جداسازی انتگرالها خواهیم داشت:

$$w_{i \rightarrow f} = (L/\sqrt{2}\pi)^2 (\sqrt{2}\pi/\hbar) \delta(E_f - E_i + E_{LO}) \alpha^2 (\sqrt{2}\pi/L)^2 \sqrt{n_i + 1/2 \pm 1/2}^2 \\ \left| \int dq_x \sqrt{c_{n_x, n'_x}} q_x \right|^2 \left| \int dq_y \delta(k_f \pm q_y - k_i) q_y \right|^2 \left| \int dq_z q_z \langle f_z | e^{\mp i q z} | i_z \rangle \right|^2 \quad (45.4)$$

ابتدا $i = \left| \int dq_x \sqrt{c_{n_x, n'_x}} q_x \right|^2$ را محاسبه میکنیم. برای این کار باید چند تغییر متغیر بدهیم:

اگر روابط زیر را در نظر بگیریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}l} (2^{n > -n <})^{1/2} \left(\frac{n < !}{n > !} \right)^{1/2} = A^* \\ n > -n < = k \\ n < = n \\ q_x^2/2 = x$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$i = \frac{-A^{*2}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha^2} \int dx x^k e^{\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \pm \alpha'\right)^2} [L_n^k(x)]^2 \quad (46.4)$$

که در آن $\alpha' = \sqrt{2}(\omega_c/\omega)^2 k_y^2 l^2$ میباشد.

برای حل انتگرال فوق از روش جایگذاری در تابع لاگر استفاده میکنیم. طبق فرض مسئله دو حالت \circ فونون و \circ فونون وجود داشت با توجه به رابطه (۳۰.۴) چهار حالت برای معادله ایجاد میشود:

حالت اول: اگر $n < = \circ$ و $n > = \circ$ آنگاه $M_q = \circ$ در نتیجه کل عبارت صفر خواهد شد.

حالت دوم: اگر $n < = 1$ و $n > = 1$ آنگاه $M_q = \circ$ در نتیجه کل عبارت صفر خواهد شد.

حالت سوم: اگر $n < = 1$ و $n > = \circ$ آنگاه $k = -1$ و در نتیجه $(L_n^k(x) = -x)$

حالت چهارم: اگر $n < = \circ$ و $n > = 1$ آنگاه $k = 1$ و در نتیجه $(L_n^k(x) = 1)$

برای حالت سوم و چهارم معادله (۴۶.۴) به انتگرال زیر تبدیل میشود:

$$i = \frac{-A^{*2}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha^2} \int dx x e^{\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \pm \alpha'\right)^2} \\ = \sqrt{2} A^{*2} e^{-\alpha^2} (\sqrt{\pi} \pm \alpha' e^{\pm \alpha^2} / \sqrt{2}) \quad (47.4)$$

حالا به سراغ محاسبه انتگرال ii و انتگرال iii میرویم:

$$ii = \left| \int dq_y \delta(k_f \pm q_y - k_i) q_y \right|^2 = \pm(k_f - k_i)^2 = \pm Q_y^2 \quad (48.4)$$

$$iii = \left| \int dq_z q_z \langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dq_z q_z^2 |\langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle|^2 \quad (49.4)$$

با جایگذاری عبارتهای (۴۷.۴) و (۴۸.۴) و (۴۹.۴) در رابطه (۴۵.۴) خواهیم داشت:

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{L^2}{\lambda \hbar \pi^3} \frac{E_{LO} e^{\gamma}}{\gamma V} \left(\frac{1}{\epsilon_{\infty}} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) (n_i + 1/2 \pm 1/2) \delta(E_f - E_i \pm E_{LO}) \times \\ \times \gamma^{n > -n <} \left(\frac{n < !}{n > !} \right) e^{-\gamma(\omega_c/\omega)^{\gamma} k_y^{\gamma} l^{\gamma}} (\sqrt{\pi} \pm (\omega_c/\omega)^{\gamma} k_y^{\gamma} l^{\gamma})^{\gamma} e^{\pm \gamma(\omega_c/\omega)^{\gamma} k_y^{\gamma} l^{\gamma}} \times \\ \times \int \frac{Q_y^{\gamma} \pm q_z^{\gamma}}{q^{\gamma}} |\langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle|^2 dq_z \quad (50.4)$$

در اینجا ما آهنگ گذار برای یک حالت کوانتومی خاص f در بعد z را محاسبه کردیم اما هر حالت نهایی در بعد $(x - y)$ انتگرال روی همه حالت‌های نهایی ممکن در بعد $(x - y)$ می‌باشد. پس ما باید روی همه زیر لایه‌های نهایی را جمع بزنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{1}{(\gamma \pi / l)^{\gamma}} \int w_{i \rightarrow f} dk_f \\ = \frac{L^{\gamma}}{16 \hbar \pi^{\gamma}} \frac{E_{LO} e^{\gamma}}{\gamma V} \left(\frac{1}{\epsilon_{\infty}} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) (n_i + 1/2 \pm 1/2) \times \\ \times \gamma^{n > -n <} \left(\frac{n < !}{n > !} \right) e^{-\gamma(\omega_c/\omega)^{\gamma} k_y^{\gamma} l^{\gamma}} (\sqrt{\pi} \pm (\omega_c/\omega)^{\gamma} k_y^{\gamma} l^{\gamma})^{\gamma} e^{\pm \gamma(\omega_c/\omega)^{\gamma} k_y^{\gamma} l^{\gamma}} \times \\ \times \int dk_f \delta(E_f(k_f) - E_i(k_i) \pm E_{LO}) \int \frac{Q_y^{\gamma} \pm q_z^{\gamma}}{q^{\gamma}} |\langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle|^2 dq_z \quad (51.4)$$

در ادامه کار مطلوبست که آهنگ پراکندگی ناشی از این گزارها را محاسبه کنیم رابطه مناسب برای محاسبه آهنگ پراکندگی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{\tau_{n_{\gamma}, n, k_y}} = \frac{\gamma \pi}{\hbar} \sum_{n', k'_y} |\langle n_{\gamma}, n, k_y | H'_{e-ph} | n_1, n', k'_y \rangle|^2 L_a [E_{n_{\gamma}} - E_{n_1} + (n - n') \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO}] \quad (52.4)$$

در اینجا L_a یک تابع لورنتز نرمالایز شده با پهنا a می‌باشد. و $\omega' = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2}$. اگر فرض کنیم که ترازهای لاندائو پهن شدند و طول این پهنا را L در نظر بگیریم آنگاه میتوانیم از قاعده طلایی فرمی استفاده کنیم. قاعده طلایی فرمی به شکل زیر می‌باشد:

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\hbar} |\langle f, k_f, n_f | H'_{e-ph} | i, k_i, n_i \rangle|^2 \delta(E_f(k_f) - E_i(k_i) \pm E_{LO}) \quad (53.4)$$

این پهن شدگی در تابع دلتا به دلیل اختلاف بین انرژی های ترازهای لاندائو میباشد در اینجا خواهیم داشت:

$$E_{\gamma} = E_1 + n_1 \hbar \omega' + \hbar \omega_{LO} = E_{n_{\gamma}} - E_{n_1} + (n - n') \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO} \quad (54.4)$$

تشدیدها در آهنگ پراکندگی در جایی اتفاق می افتند که انرژی LO فونون با اختلاف انرژی بین دو تراز لاندائو در دو زیر لایه برابر میشود.

اگر یک نمونه واقعی m^* را در نظر بگیریم و آن را به N قسمت مساوی تقسیم کنیم از آنجا که تعداد N ها خیلی بزرگ است ما میتوانیم مجموعه های جدا از هم روی نمونه m^* را به وسیله یک انتگرال که انتگرالده آن به وسیله یک تابع توزیع گوسی نمایش داده میشود جایگزین کنیم:

$$\langle \frac{1}{\tau_{n_{\gamma}, n, k_y}} \rangle = \int_0^{\infty} P(L) \frac{1}{\tau_{n_{\gamma}, n, k_y}} dL \quad (55.4)$$

در اینجا متغیر رندوم L لایه های بین l و $l + dl$ میباشد. $P(L)$ نیز تابع چگالی احتمال گوسی میباشد.

$$P(L) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(L - L_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (56.4)$$

اگر حد $a \rightarrow 0$ را در نظر بگیریم میتوانیم به جای تابع لورنتز یک تابع دلتا جایگزین کنیم: کران پایین انتگرال را $-\infty$ در نظر میگیریم زیرا $\sigma \ll L_0$

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{\tau_{n_{\gamma}, n, k_y}} \rangle &= \frac{\sqrt{2}\pi}{\hbar} \sum_{n', k'_y} |\langle n_{\gamma}, n = 0, k_y | H'_{e-ph} | n_1, n', k'_y \rangle|^2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} P(L) \delta[\Delta_{n_{\gamma}, n_1}(L) - n' \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO}] dL \end{aligned} \quad (57.4)$$

در رابطه فوق $n = 0$ تراز پایه لاندائوی اولین زیر لایه میباشد. و $\Delta_{n_{\gamma}, n_1} = E_{n_{\gamma}}(L) - E_{n_1}(L)$ تعریف میشود.

اگر فرض کنیم که اطراف L_0 اختلاف انرژی $\Delta_{n_{\gamma}, n_1}(L)$ با یک تابع خطی L تقریب زده میشود خواهیم داشت:

$$\Delta_{n_2, n_1}(L) = \Delta_0 - \gamma(L - L_0) \simeq \Delta_0 \quad (58.4)$$

با استفاده از تعاریف فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(L) \delta[\Delta_0 - n' \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO}] dL &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(L - L_0)^2}{2\sigma^2}\right) \delta(\Delta_0 - n' \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO}) dl \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\Delta_0 - n' \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO})^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (59.4)$$

با جایگذاری معادله (59.4) در رابطه (57.4) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\tau_{n_2, n_1, k_y}} \right\rangle &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\hbar} \sum_{n', k'_y} |\langle n_2, n = 0, k_y | H'_{e-ph} | n_1, n', k'_y \rangle|^2 \times \\ &\times \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\Delta_0 - n' \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO})^2}{2\delta^2}\right] \end{aligned} \quad (60.4)$$

با محاسبه عبارت زیر که کاملاً شبیه محاسبات انجام شده برای $w_{i \rightarrow f}$ است و جایگذاری در رابطه (60.4) میتوانیم آهنگ پراکندگی را محاسبه کنیم:

$$\frac{2\pi}{\hbar} \sum_{n', k'_y} |\langle n_2, n = 0, k_y | H'_{e-ph} | n_1, n', k'_y \rangle|^2$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\tau_{n_2, n_1, k_y}} \right\rangle &= \frac{L^f E_{LO} e^{\gamma}}{16 h \pi^f \sqrt{2V}} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) (n_i + 1/2 \pm 1/2) \times \\ &\times \sum_{n'} 2^{n > -n <} \left(\frac{n < !}{n > !} \right) e^{-f(\omega_c/\omega)^f k_y^2 l^f} (\sqrt{\pi} \pm (\omega_c/\omega)^f k_y^2 l^f e^{\pm f(\omega_c/\omega)^f k_y^2 l^f}) \times \\ &\times \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\Delta_0 - n' \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO})^2}{2\sigma^2}\right] \int \frac{Q_y^2 \pm q_z^2}{q^2} |\langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle|^2 dq_z \end{aligned} \quad (61.4)$$

اگر $S(Q)$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} S(Q) &= \sum_{n'} 2^{n > -n <} \left(\frac{n < !}{n > !} \right) e^{-f(\omega_c/\omega)^f k_y^2 l^f} (\sqrt{\pi} \pm (\omega_c/\omega)^f k_y^2 l^f e^{\pm f(\omega_c/\omega)^f k_y^2 l^f}) \times \\ &\times \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\Delta_0 - n' \hbar \omega' - \hbar \omega_{LO})^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (62.4)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\tau_{n_2, n_1, k_y}} \right\rangle &= \frac{L^f E_{LO} e^{\gamma}}{16 h \pi^f \sqrt{2V}} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) (n_i + 1/2 \pm 1/2) \times \\ &\times S(Q) \int \frac{Q_y^2 \pm q_z^2}{q^2} |\langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle|^2 dq_z \end{aligned} \quad (63.4)$$

با تبدیل انتگرال به جمع و قرار دادن ویژه مقدار انرژی یعنی $E_{LO} = \hbar\omega_{LO}$ رابطه نهایی برای آهنگ پراکندگی محاسبه خواهد شد:

$$\left\langle \frac{1}{\tau_{n_x, n_y, k_y}} \right\rangle = \frac{L}{(2\pi)^2} \frac{\omega_{LO} e^{\gamma}}{2V} \left(\frac{1}{\epsilon_{\infty}} - \frac{1}{\epsilon_s} \right) (n_i + 1/2 \pm 1/2) \times \\ \times \sum_{Q, q_z} \frac{Q_y^{\gamma} \pm q_z^{\gamma}}{q^{\gamma}} |\langle f_z | e^{\mp i q_z z} | i_z \rangle|^{\gamma} S(Q) \quad (64.4)$$

بعد از محاسبات انجام شده مطلوبست که انرژی جداسازی را نیز محاسبه کنیم برای این محاسبه با قطری کردن هامیلتونی میتوانیم ویژه مقادیر انرژی و تفاوت بین آنها که انرژی جداسازی میباشد را محاسبه کنیم. با توجه به مسئله دو حالت برای فونون ها فرض شده بود که یکی حالت ۰ فونون و دیگری حالت ۱ فونون بود با توجه به این فرض ماتریس هامیلتونی به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \begin{pmatrix} \langle 0 | H | 0 \rangle & \langle 0 | H | 1 \rangle \\ \langle 1 | H | 0 \rangle & \langle 1 | H | 1 \rangle \end{pmatrix} \quad (65.4)$$

طبق روابط (۲۶.۴) و (۴۴.۴) آنگاه هامیلتونی به صورت زیر بازنویسی میشود:

$$H = (L/2\pi)^2 i g \sqrt{n_i + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \int dq_x \int dq_y \int dq_z \left(\frac{q_x i' + q_y j' + q_z k'}{q} \right) \times \\ \times \sqrt{c_{n_x, n'_x}} \delta(k_f \pm q_y - k_i) \langle f_z | e^{\pm i q_z z} | i_z \rangle \quad (66.4)$$

محاسبه انتگرال فوق بواسطه محاسبه سه انتگرال $\int dq_x \sqrt{c_{n_x, n'_x}} q_x$ ، $\int dq_y \delta(k_f \pm q_y - k_i) q_y$ ، و $\int dq_z \langle f_z | e^{\pm i q_z z} | i_z \rangle q_z$ امکان پذیر خواهد بود.

$$A = \int dq_x \sqrt{c_{n_x, n'_x}} q_x = \int q_x \frac{1}{\sqrt{2l}} (2^{n > -n <})^{1/2} \left(\frac{n < !}{n > !} \right)^{1/2} (i q_x / 2)^{n > -n <} \times \\ \times L_{n <}^{n > -n <} (q_x^2 / 2) e^{(i q_x / 2)^2} e^{\pm i q_x (\omega_c / \omega)^2 k_y l^2} dq_x \quad (67.4)$$

اگر $n < = n$ و $n > -n < = k$ آنگاه خواهیم داشت:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2l}} \left(\frac{n!}{(k+n)!} \right)^{1/2} e^{\alpha^2} \int x^{k/2} e^{\left(\sqrt{\frac{x}{2}} \pm \alpha' \right)^2} L_n^k(x) dx \quad (68.4)$$

که در آن $\alpha' = i(\omega_c / \omega)^2 k_y l^2$ میباشد.

طبق فرض مسئله برای حل انتگرال فوق دو حالت در نظر میگیریم:

حالت اول: اگر $n \leq 1$ و $n \geq 0$ آنگاه $k = -1$ و در نتیجه $L_n^k(x) = -x$
 حالت دوم: اگر $n \leq 0$ و $n \geq 1$ آنگاه $k = 1$ و در نتیجه $L_n^k(x) = 1$
 با جایگذاری حالت اول و با توجه به تغییر متغیرهای داده شده در انتگرال خواهیم داشت:

$$A_1 = \frac{4}{l} e^{\alpha^2} \left[\frac{e^{\pm 2\alpha'}}{2} (-\alpha^2 \pm 3\alpha' - 1/2) + \sqrt{\pi} \alpha^2 \right] \quad (۶۹.۴)$$

$$A_1 = \begin{cases} \frac{2}{l} e^{4\alpha'} (-\alpha^2 + 3\alpha' - 1/2) + \frac{4\sqrt{\pi}}{l} \alpha^2 e^{2\alpha'} & \text{اگر بردار موج مثبت باشد} \\ \frac{2}{l} (-\alpha^2 - 3\alpha' - 1/2) + \frac{4\sqrt{\pi}}{l} \alpha^2 e^{2\alpha'} & \text{اگر بردار موج منفی باشد} \end{cases} \quad (۷۰.۴)$$

با جایگذاری حالت دوم و تغییر متغیرهای داده شده در انتگرال خواهیم داشت:

$$A_2 = \begin{cases} -\frac{2}{l} e^{4\alpha'} (-\alpha^2 + 3\alpha' - 1/2) - \frac{4\sqrt{\pi}}{l} \alpha^2 e^{2\alpha'} & \text{اگر بردار موج مثبت باشد} \\ -\frac{2}{l} (-\alpha^2 - 3\alpha' - 1/2) - \frac{4\sqrt{\pi}}{l} \alpha^2 e^{2\alpha'} & \text{اگر بردار موج منفی باشد} \end{cases} \quad (۷۱.۴)$$

$$\int dq_y \delta(k_f \pm q_y - k_i) q_y = \pm(k_f - k_i) \quad (۷۲.۴)$$

با جایگذاری روابط (۷۱.۴) (۷۰.۴) و (۷۲.۴) در رابطه (۶۶.۴) و در نظر گرفتن بردار موج مثبت برای هامیلتونی خواهیم داشت:

$$H = \pm(L/2\pi)^2 ig \sqrt{n_i + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(k_f - k_i)} \times \\ \times (e^{4\alpha'} (-\alpha^2 + 3\alpha' - 1/2) + 2\sqrt{\pi} \alpha^2 e^{2\alpha'}) \int q_z dq_z \langle f_z | e^{\pm i q_z z} | i_z \rangle \quad (۷۳.۴)$$

اگر دو تغییر متغیر زیر را در رابطه فوق اعمال کنیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\int q_z dq_z \langle f_z | e^{\pm i q_z z} | i_z \rangle = X \\ (L/2\pi)^2 ig \sqrt{n_i + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}(k_f - k_i)} (e^{4\alpha'} (-\alpha^2 + 3\alpha' - 1/2) + 2\sqrt{\pi} \alpha^2 e^{2\alpha'}) = S \\ \text{با توجه به رابطه (۶۵.۴) ماتریس هامیلتونی را بازنویسی خواهیم کرد:}$$

$$H = \begin{pmatrix} \circ & SX \\ -SX & \circ \end{pmatrix} \quad (۷۴.۴)$$

برای به دست آوردن انرژی جداسازی باید ویژه مقادیر هامیلتونی بالا را محاسبه کنیم که برای محاسبه ویژه مقادیر از روش قطری کردن هامیلتونی استفاده میکنیم:

$$\det(H - EI) = 0$$

$$d \begin{pmatrix} -E & SX \\ -SX & E \end{pmatrix} \quad (75.4)$$

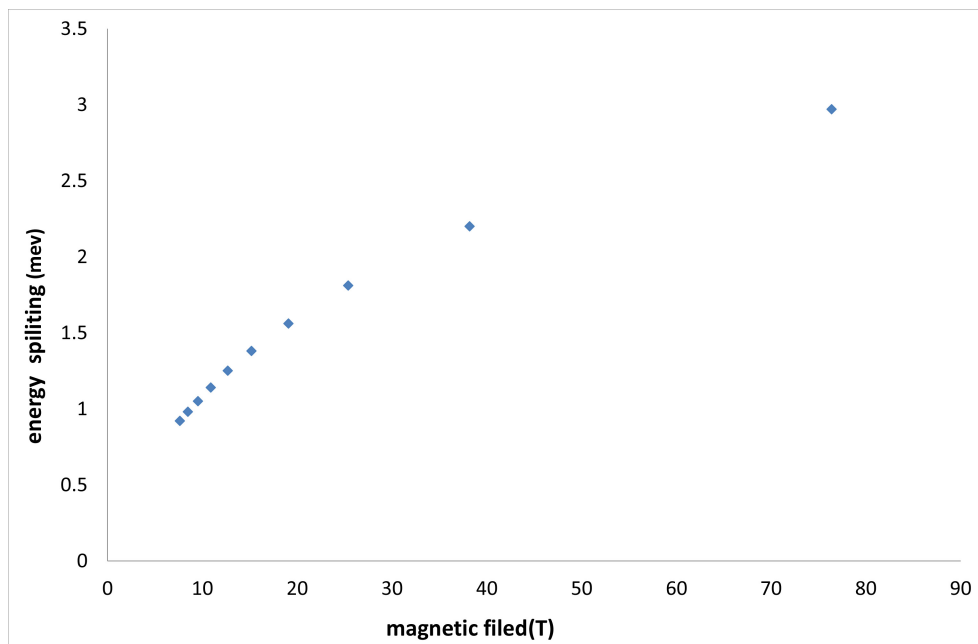
از حل معادله فوق خواهیم داشت: $E = \pm SX$
 در اینجا ما دو تا ویژه مقدار انرژی به دست آوردیم که اختلاف بین آنها همان انرژی جداسازی میباشد.

$$E_{\pm} - E_{\lambda} = L/\pi^2 ig \sqrt{n_i + \frac{1}{2}} \pm \frac{1}{2} (k_f - k_i) (e^{f\alpha'} (-\alpha'^2 + 3\alpha' - 1/2) + 2\sqrt{\pi}\alpha'^2 e^{2\alpha'}) \times \\ \times \int q_z dq_z \langle f_z | e^{\pm iq_z z} | i_z \rangle \quad (76.4)$$

فصل ۵

نتایج

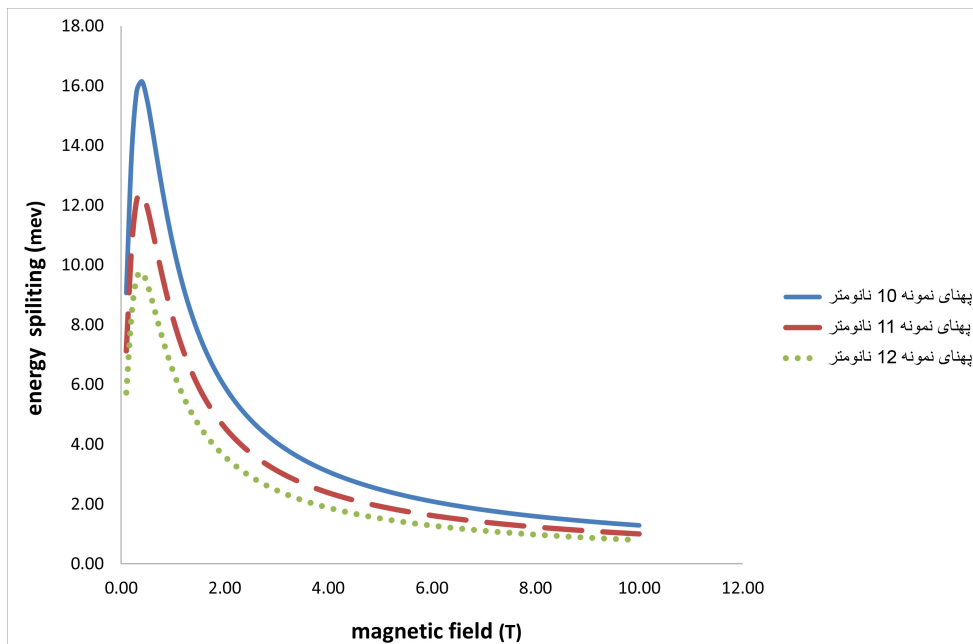
شکل (۱.۵) حاصل باز تولید محاسبات عددی و رسم مجدد شکل (۱.۳) میباشد که این کار برای اطمینان از روند صحیح بودن محاسبات و برنامه مورد نظر انجام شده است .



شکل ۱.۵: شکافت انرژی با تغییرات میدان مغناطیسی

در شکل (۲.۵) با توجه به محاسبات انجام شده 'شکافت انرژی بر اساس میدان مغناطیسی

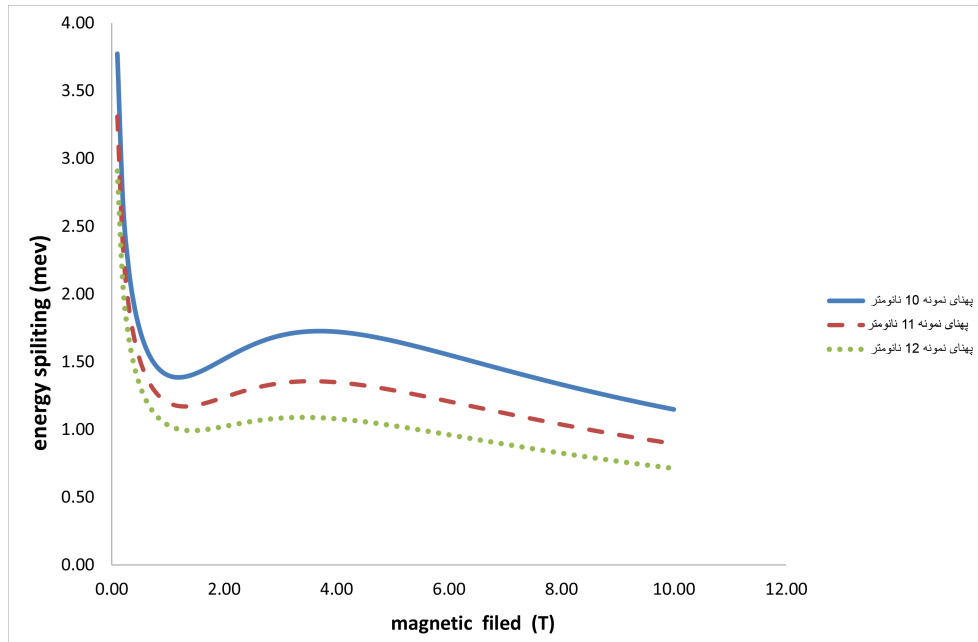
در غیاب تابش برای چاه کوانتومی $GaAs$ که ضخامت چاه در آن در حدود 1000nm فرض شده است کشیده شده است. در این محاسبات برای نمونه هایی با پهنای 10° و 11° و 12° نانومتر نمودار مورد نظر کشیده شد که همانطور که در شکل میبینیم برای هر سه نمونه با افزایش میدان مغناطیسی شکافت انرژی کمتر میشود و هر چه نمونه مورد نظر پهنای کمتری داشته باشد برای یک میدان مغناطیسی مشخص انرژی جداسازی برای آن بیشتر خواهد شد.



شکل ۲.۵: شکافت انرژی با تغییرات میدان مغناطیسی بدون اعمال تابش

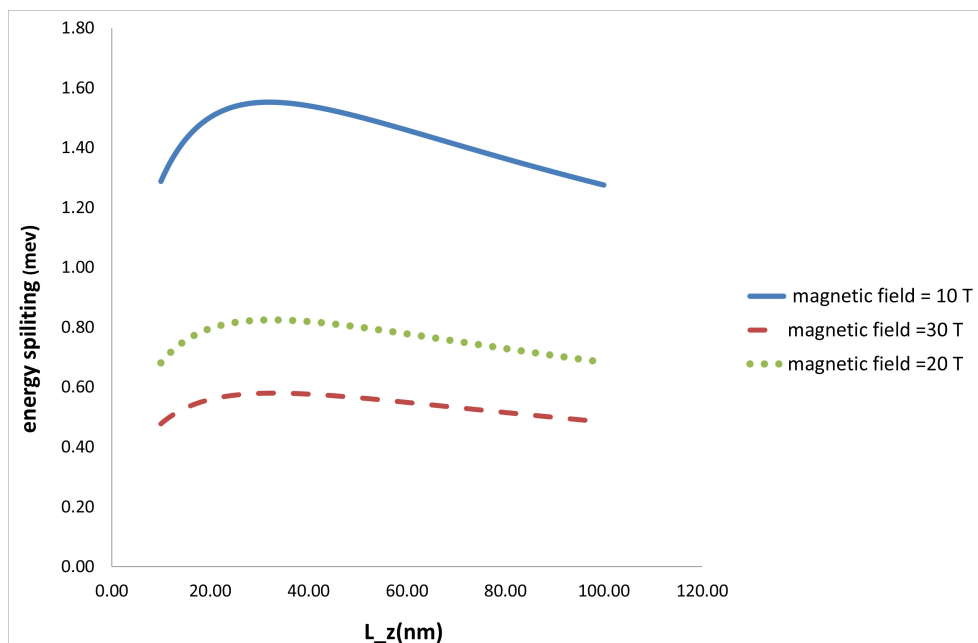
در شکل (۳.۵) با توجه به محاسبات انجام شده 'شکافت انرژی بر اساس میدان مغناطیسی با اعمال تابش لیزر برای چاه کوانتومی $GaAs$ کشیده شده است. در این شکل برای سه نمونه با پهنای 10° نانومتر، 11° نانومتر و 12° نانومتر شکل مورد نظر رسم شده است هر چه نمونه مورد نظر پهنای کمتری داشته باشد برای یک میدان مغناطیسی مشخص انرژی جداسازی برای آن بیشتر خواهد شد. با توجه به شکل وقتی میدان مغناطیسی از ۲ تسلا بیشتر میشود برای هر سه نمونه با پهنای مختلف انرژی جدایی به آرامی کمتر خواهد شد و یک روند نزولی خواهد داشت. اعمال تابش لیزر باعث نقش آفرینی ذره فوتون در برهم کنش ها میشود و به همین دلیل آهنگ تشکیل پولارونها را کند میکند و باعث کم شدن شکاف انرژی میشود.

در شکل (۴.۵) تغییرات میدان مغناطیسی بر حسب ضخامت چاه کوانتومی $GaAs$ رسم شده است که این تغییرات بر مبنای میدان های مغناطیسی $10^\circ T$ و $20^\circ T$ و $30^\circ T$ و در غیاب تابش محاسبه شده است [17]. همانطور که در نمودار مشاهده میکنیم برای هر سه میدان مغناطیسی با افزایش ضخامت چاه کوانتومی تا پهنای حدود 30nm شکافت انرژی یک روند نسبتاً افزایشی خواهد داشت و بعد از آن با افزایش ضخامت چاه شکافت انرژی فونونها یک روند نزولی و تقریباً ثابتی را خواهند داشت. از طرفی هر چه میدان مغناطیسی اعمال شده بزرگتر



شکل ۳.۵: شکافت انرژی با تغییر میدان مغناطیسی در حضور تابش با نمونه های مختلف

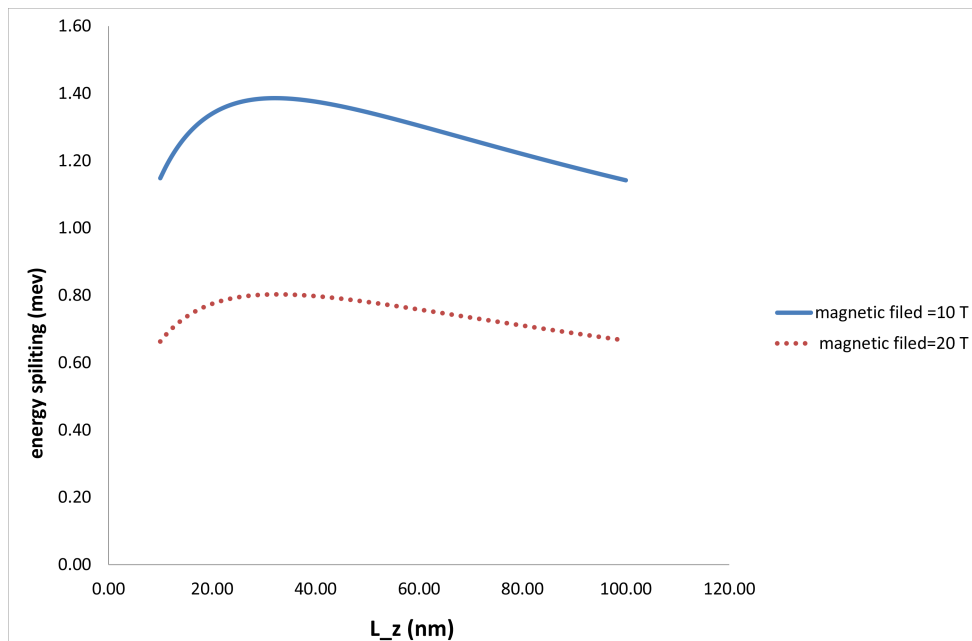
باشد انرژی مورد نیاز برای جداسازی کمتر خواهد شد زیرا افزایش میدان مغناطیسی باعث میشود آهنگ تشکیل پولارونها کمتر شود زیرا مانع برهم کنش الکترون ها با فونون ها میشود.



شکل ۴.۵: تغییرات شکافت انرژی با پهنای ساختار نامتجانس در غیاب تابش

در شکل (۵.۵) تغییرات میدان مغناطیسی بر حسب ضخامت چاه کوانتومی $GaAs$ رسم شده است که این تغییرات بر مبنای میدان های مغناطیسی $10T$ و $20T$ و در حضور تابش لیزر

محاسبه شده است. همانطور که در نمودار میبینیم مانند زمانی که تابش وجود ندارد هر چه میدان مغناطیسی اعمال شده بزرگتر باشد شکافت انرژی کمتر خواهد شد.

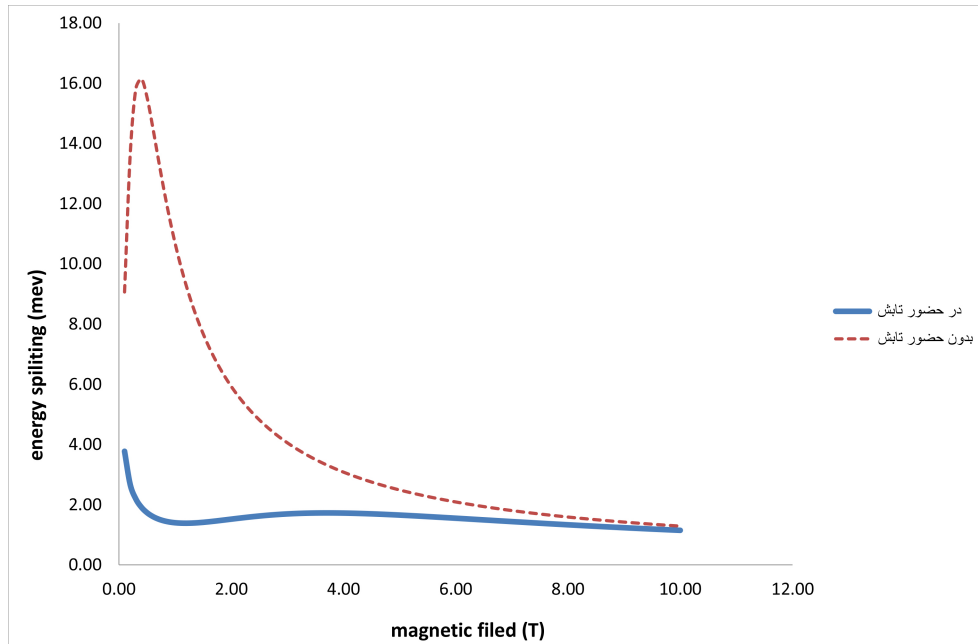


شکل ۵.۵: تغییرات شکافت انرژی با پهناى ساختار نامتجانس در حضور تابش

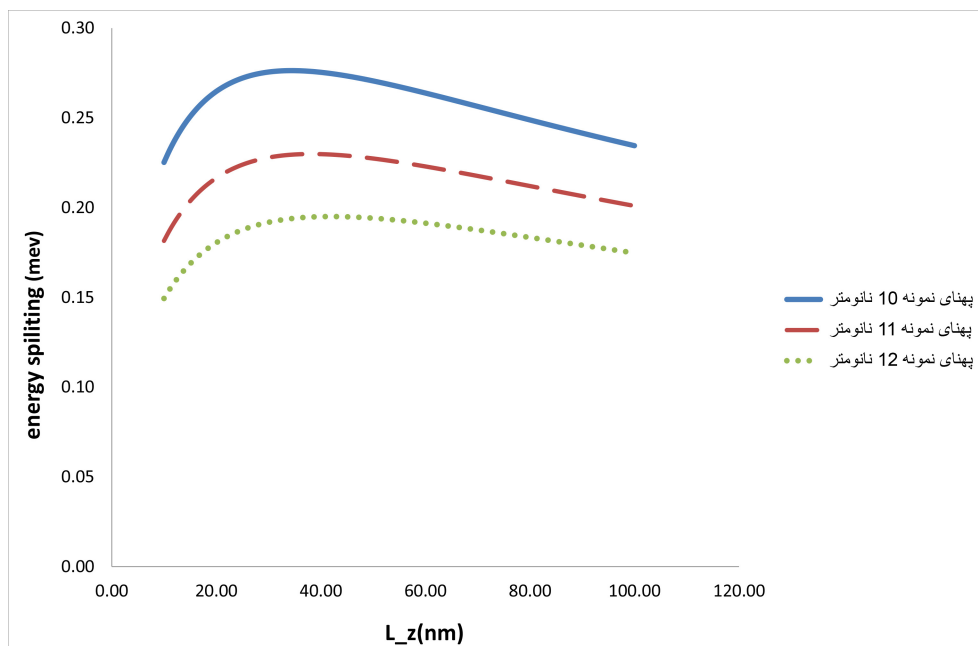
در شکل (۶.۵) مقایسه تغییرات شکافت انرژی با میدان مغناطیسی در حضور تابش و در غیاب تابش برای نمونه ای با پهناى 10° نانومتر انجام شده است همانطور که از شکل پیداست در میدان های مغناطیسی بزرگتر از ۸ تسلا اعمال تابش تاثیر چندانی در روند تغییرات شکافت انرژی ندارد در میدان های مغناطیسی بین ۲ تا ۸ تسلا بدون اعمال تابش لیزر با افزایش میدان مغناطیسی شکافت انرژی کم خواهد شد و یک روند نزولی خواهد داشت در میدان های مغناطیسی کمتر از یک تسلا رفتار دو نمودار در حضور تابش و بدون تابش تغییر زیادی خواهد کرد زیرا در حضور تابش برهم کنش های الکترون - فوتون هم تاثیر گزار خواهد بود.

در شکل (۷.۵) و (۸.۵) نیز تغییرات شکافت انرژی بر حسب ضخامت ساختار نامتجانس در حضور تابش و بدون حضور تابش لیزر در نمونه های با پهناهای متفاوت در میدان مغناطیسی 10° تسلا رسم شده است. همانطور که در هر دو شکل میبینیم هر چه پهناى نمونه مورد نظر کوچکتر باشد شکافت انرژی بیشتری داریم چون هر چه پهنا کمتر باشد برهم کنش ها بیشتر میشود و احتمال تشکیل پولارونها کمتر میشود.

در شکل (۹.۵) مقایسه ای در رابطه با تغییرات شکافت انرژی با پهناى ساختار نامتجانس با اعمال تابش لیزر و بدون اعمال تابش لیزر انجام شده است. این نمودار برای میدان مغناطیسی 10° تسلا رسم شده است به همین دلیل تغییرات تابش لیزر در آن خیلی محسوس نیست زیرا تغییرات نمودار با اعمال تابش لیزر در میدان های مغناطیسی بزرگتر از 20° تسلا محسوس خواهد بود.

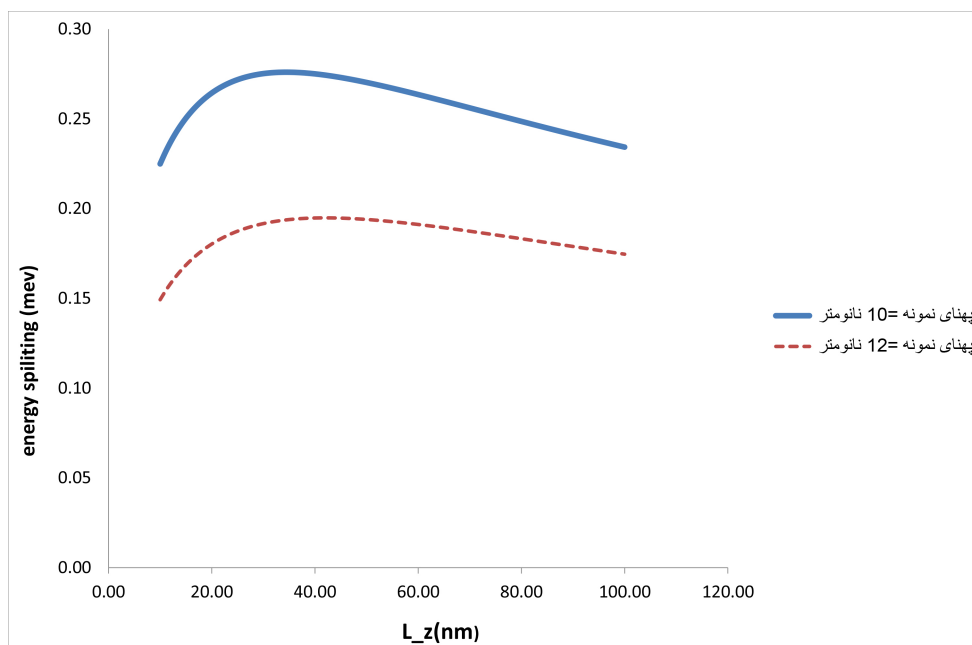


شکل ۶.۵: مقایسه تغییرات شکافت انرژی با میدان مغناطیسی با تابش و بدون تابش

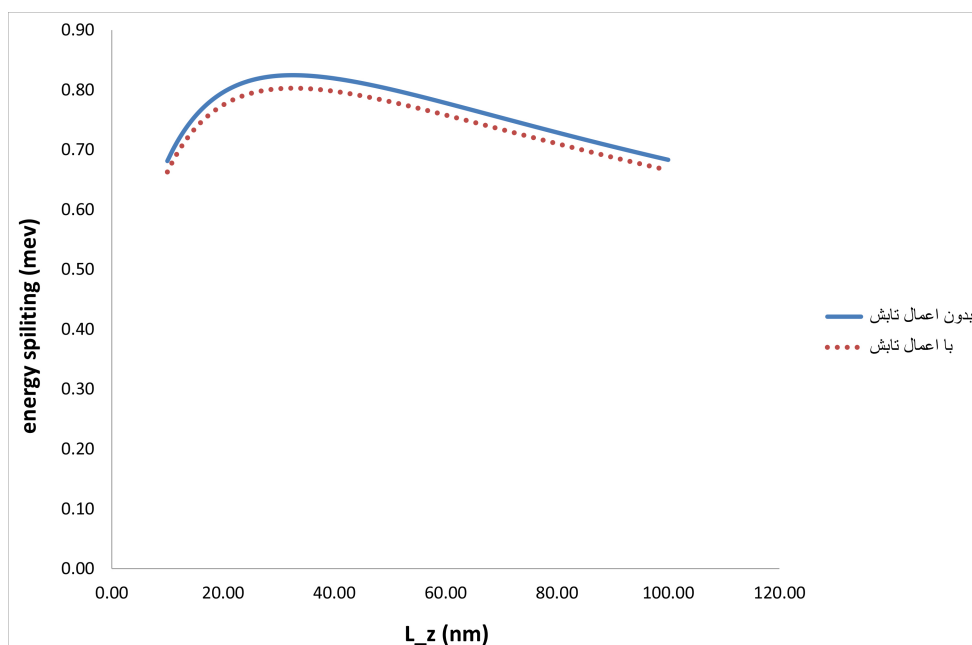


شکل ۷.۵: تغییرات انرژی جداسازی با پهنای ساختار نامتجانس در غیاب تابش

در شکل (۱۱.۵) تغییرات شکافت انرژی بر حسب میدان مغناطیسی زمانی که قدرت میدان لیزر متفاوت میشود بررسی شده است روند کلی نمودار حاکی از آن است که هرچه میدان لیزر قوی تر باشد شکافت انرژی کمتری رخ خواهد داد زیرا تعداد فوتون های بیشتری وارد بر هم کنش میشوند و تعداد بر هم کنش های الکترون - فونونی کمتر خواهد شد و آهنگ تشکیل پولارونها را کمتر خواهد کرد. همچنین در نمودار (۱۰.۵) تغییرات انرژی جداسازی بر حسب

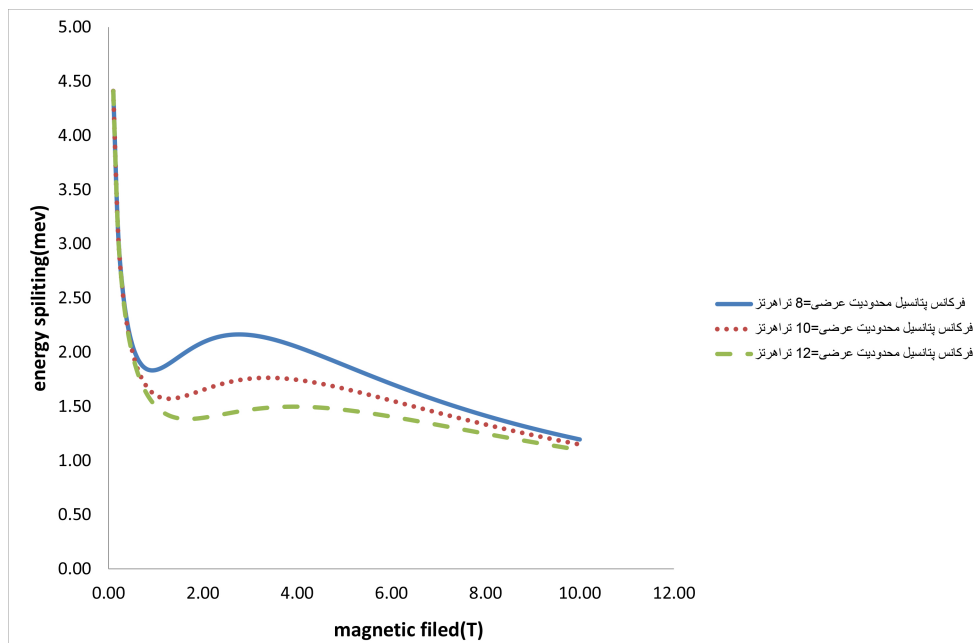


شکل ۸.۵: تغییرات انرژی جداسازی با پهناي ساختار نامتجانس در نمونه های متفاوت

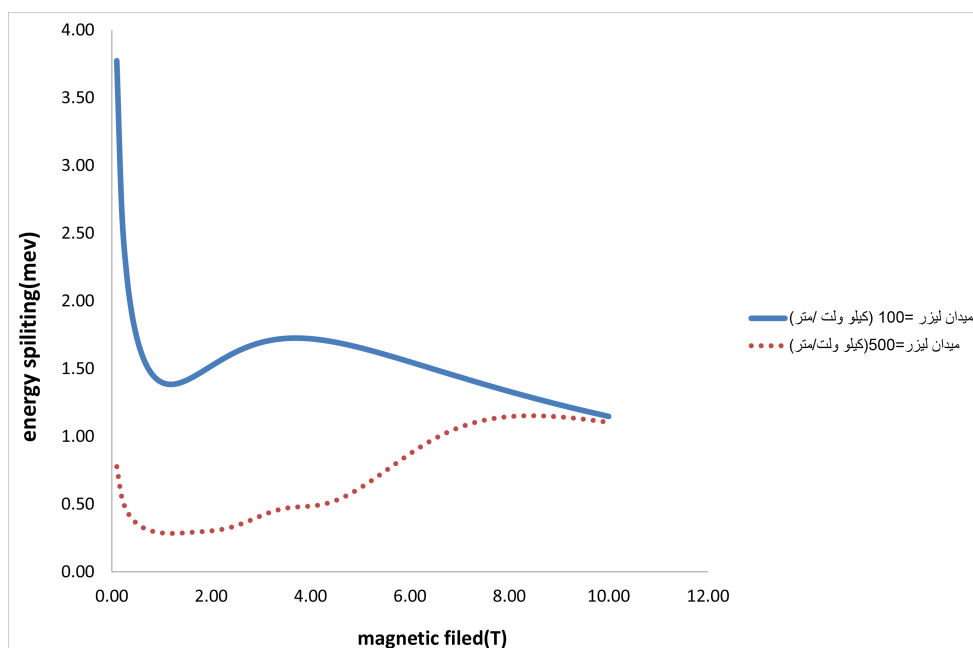


شکل ۹.۵: مقایسه تغییرات شکافت انرژی با پهناي ساختار نامتجانس با اعمال تابش و بدون تابش

میدان مغناطیسی با تغییر در فرکانس پتانسیلی که برای محدودیت عرضی اعمال کرده بودیم در حضور تابش لیزر بررسی شده است که نشان دهنده این است که هر چه فرکانس محدودیت عرضی بیشتر باشد یعنی سد کوانتومی بزرگتری داشته باشیم شکافت انرژی کمتر خواهد شد.



شکل ۱۰.۵: تغییرات انرژی جداسازی با میدان مغناطیسی با اعمال تابش در پتانسیل های عرضی متفاوت



شکل ۱۱.۵: تغییرات شکافت انرژی با میدان مغناطیسی در حضور تابش لیزر

۱.۵ بحث در نتیجه

با توجه به نتایج به دست آمده شکافت انرژی در سیم چاه های کوانتومی تابعی از میدان مغناطیسی اعمال شده میباشد. ما این جدایی را در دو شرایط (با اعمال تابش لیزر و بدون

اعمال تابش لیزر) به صورت نظری مورد بررسی قرار دادیم. نتایج به دست آمده نشان داد که در هر دو حالت (بدون حضور تابش و در حضور تابش) هر چه میدان مغناطیسی اعمال شده را بیشتر کنیم شکاف انرژی کمتر خواهد شد زیرا اعمال میدان مغناطیسی قوی تر باعث میشود که الکترون ها با خود میدان مغناطیسی بر هم کنش کنند و برهم کنش های الکترون ها با فونون ها کمتر میشود و آهنگ تشکیل پولارونها کاهش می یابد و به همین دلیل شکاف انرژی پولارونی کمتر خواهد شد.

در محاسبات انجام شده و نتایج به دست آمده وقتی تغییرات شکافت انرژی را بدون اعمال تابش لیزر بررسی میکنیم یعنی برهم کنش غالب در سیستم مورد مطالعه بر هم کنش الکترون با فونون میباشد و در این سیستمها چون پولارونهای بیشتری تشکیل میشود آهنگ جدایی پولارونی نیز بیشتر خواهد شد. اما زمانی که تابش لیزر را اعمال می کنیم فوتونهای زیادی را وارد سیستم مورد مطالعه کرده ایم. وجود ذره فوتون باعث میشود که سه نوع بر هم کنش در سیستم ایجاد میشود. برهم کنش های الکترون فونون (پولارون) برهم کنش الکترون - فوتون و بر هم کنش سه ذره ای الکترون - فونون - فوتون. وجود بر هم کنش های دیگر باعث میشود که بر هم کنش غالب الکترون با فونون نباشد و بر هم کنش های سه ذره ای بر هم کنش غالب سیستم میشوند و به همین دلیل آهنگ تشکیل پولارونها و بالتبع آن انرژی جدایی پولارونها کاسته میشود.

از طرفی با توجه به نتایج 'شکاف انرژی در سیستم مورد مطالعه تابعی از پهنای ساختار نامتجانس نیز میباشد. با توجه به این موضوع هر چه پهنای ساختار نامتجانس (ضخامت سیم چاه کوانتومی) بیشتر باشد شکاف انرژی کمتر خواهد شد زیرا در ضخامت های بیشتر مقدار برهم کنش ها و احتمال تشکیل پولارونها کمتر خواهد شد. از طرفی میتوان همزمان با تغییر ضخامت چاه 'میدان مغناطیسی اعمال شده را نیز عوض کرد که با توجه به نمودارها و نتایج در یک ضخامت مشخص 'هر چه میدان مغناطیسی اعمال شده بیشتر باشد شکافت انرژی کمتر خواهد شد. همچنین میتوان ضخامت نمونه مورد نظر را نیز تغییر داد که در نمونه های با ضخامت کمتر به دلیل افزایش احتمال برخوردها و برهم کنش ها به انرژی های بزرگتری برای شکافت نیاز داریم.

در بعضی شرایط نیز میتوان فرکانس پتانسیل محدود کننده را نیز تغییر داد که هر چه مقدار این فرکانس را بیشتر کنیم یعنی محدودیت عرضی بیشتری را به سیستم وارد کنیم احتمال تشکیل پولارونها را کمتر خواهیم کرد و در نتیجه شکاف در انرژی کمتری رخ خواهد داد. در همه این شرایط اعمال تابش لیزر باعث کمتر شدن شکاف انرژی خواهد شد و بر حسب نتایج به دست آمده هر چه میدان لیزر بیشتر باشد یعنی تابش لیزر قوی تری داشته باشیم پس فوتون های بیشتری را وارد بر هم کنش ها کرده ایم و مانع تشکیل پولارون ها شده ایم به همین دلیل شکاف انرژی خیلی پایین تری اتفاق خواهد افتاد. پس میتوان نتیجه گرفت که هم میدان مغناطیسی و هم تابش لیزر در شکاف انرژی و به تبع آن در گذارهای الکترونی تاثیر گذار خواهند بود.

مراجع

- [1] Yu Chen, N. Regnault, R. Ferreira, B. Zhu, and G. Bastard, “*Optical-phonon scattering and theory of magneto-polarons in a quantum well in a strong magnetic field*”, Phys. Rev. B 79, 235314 (2009).
DOI: 10.1103/PhysRevB.79.235314
- [2] N. Pér -Laperne, L. A. de Vaultier, Y. Guldner, G. Bastard, G. Scalari, “*Inter-Landau level scattering and LO-phonon emission in terahertz quantum cascade laser*”, Appl. Phys. Lett. 91, 062102 (2007).
DOI: 10.1063/1.2766862.
- [3] H. Choi, L. Diehl, M. Giovannini, J. Faist, F. Capassot, and T. B. Norris, “*Gain Recovery Dynamics and Photon-Driven Transport in Quantum Cascade Lasers*”, Phys. Rev. Lett. 100, 167401 (2008)
DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.167401
- [4] A. Sali, M. Fliyoul, and H. Loumrhari, “*The Effect of the Electron–Longitudinal Optical Phonon Interaction on the Photoionization in Quantum Well Wires*”, phys. stat. sol. (b) 200, 145 (1997).
DOI: 10.1002/1521-3951(199703)200:1<145::AID-PSSB145>3.0.CO;2-7
- [5] A. Sali, M. Fliyoul, and H. Loumrhari, “*The effect of the electron-longitudinal optical phonons interaction on the photoionization in a quantum well*”, J. Phys. Chem Solids 59, 625 (1998).
DOI: 10.1016/S0022-3697(97)00235-7
- [6] N. Es-Sbai, A. Sali, M. Fliyou, and E. Abarkan, “*Electron-confined longitudinal optical phonon interaction and strong magnetic field effects on the binding energy in GaAs quantum wells*”, Journal of Applied Physics 91, 2093 (2002);

- DOI: 10.1063/1.1430532.
- [7] J. Radovanovich, V. Milanovich, Z. Ikonich, D. Indjin, and P. Harrison, “*Electron-phonon relaxation rates and optical gain in a quantum cascade laser in a magnetic field*”, J. Appl. Phys. 97, 103109 (2005);
DOI: 10.1063/1.1904706
- [8] W. Xu, and C. Zhang, “*Nonlinear transport in steady-state terahertz-driven two-dimensional electron gases*”, Phys. Rev. B 55, 5259 (2005).
DOI: 10.1103/PhysRevB.55.5259
- [9] W. Xu, “*Nonlinear transport and optical properties of terahertz-driven two-dimensional electron gases*”, Journal of Physics: Condensed Matter, 13, 3717 (2001).
DOI: 10.1088/0953-8984/13/16/303
- [10] N. G. Asmar, J. Černe, A. G. Markelz, E. G. Gwinn, and M. S. Sherwin, “*Temperature of quasi-two-dimensional electron gases under steady-state terahertz drive*”, Appl. Phys. Lett. 68, 829 (1996)
DOI: 10.1063/1.116547
- [11] M. Ali Omar , “*Elementary Solid State Physics: Principles and Applications*”, Addison-Wesley, 1st Edition, (1975)
- [12] P. Harrison, “*Quantum Wells, Wires and Dots* ”, Wiley, 2nd Edition, (2005)
- [13] P. U. Rössler, “*Solid State Theory: An Introduction*”, Springer, 2nd Edition, (2009)
- [14] S. Gasiorowicz, “*Quantum Physics*”, John Wiley and Sons, 2nd Edition, (1996)
- [15] C. Becker, A. Vasanelli, and C. Sirtori, “*Electron–longitudinal optical phonon interaction between Landau levels in semiconductor heterostructures*”, Phys. Rev. B 69, 115328 (2004).
DOI: 10.1103/PhysRevB.69.115328
- [16] A. Mombeiny and S. Hessami Pilehrood, “*Magnetoplasmon modes of e terahertz-laser-driven quantum well wire* ”, Eur. Phys. J. Plus 130, 252 (2015).
DOI:10.1140/epjp/i2015-15252-8
- [17] H. V. Phuc, L. Dinh, and T. C. Phong, “*Phonon-assisted cyclotron resonance in quantum wells via the multiphoton absorption process*”, Superlattices and Microstructures, (2013).

- [18] H. V. Phuc, N. T. T. Thao, L. Dinh, T. C. Phong , “*Confined-acoustic-phonon-assisted cyclotron resonance via multi-photon absorption process in GaAs quantum well structure*”, Journal of Physics and Chemistry of Solids ,(2014).
- [19] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series, and Products*”, Academic Press, 7th Edition, (2007)
- [۲۰] سرکرده ای م، (۱۳۸۳)، ”*روشهای ریاضی در فیزیک*” جلد دوم ، چاپ اول ، انتشارات دانشگاه الزهراء(س)
- [21] G. B. Arfken, and H. J. Weber, “*Mathematical Methods For Physicists*”, Elsevier Academic Press, 7th Edition, (2005)
- [22] C. S. Baird, “*Quantum Cascade Laser Theory*”, University of Massachusetts Lowell, (2015)

Abstract

An important part of applications of nanostructured electronic devices will be in the presence of laser radiation and effective magnetic fields. For this reason, extensive efforts have been made to understand the various aspects of electron transitions in semiconductor nanostructures.

In this thesis, the transition between the Landau levels in a laterally confined quantum well wire, in the presence of laser field, is studied theoretically. The effective role of interactions between electrons and longitudinal optical phonons, which is very useful in the investigation of the relaxation of charge carriers in the nanostructures is considered. The energy splitting due to the electron phonon interaction in the system is studied as a function of the applied magnetic and laser field, by performing numerical calculations. Results show that in a higher magnetic field and intense laser field, the energy splitting due to the electron phonon interaction decreases.

keywords: Landau levels, Quantum well wire, Longitudinal optical phonons, energy splitting



Shahrood University of Technology

School of Physics and Nuclear Engineering

MSc Thesis in: Solid State Physics

**Transition between Landau levels in a
quantum well under laser radiation**

By: Fatemeh Mokhberiannejhad

Supervisor

Saeid Hessami Pilehrood

September 2018