

صلى الله عليه وسلم



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

گروه فیزیک ذرات بنیادی

مطالعه‌ی هولوگرافی فیزیک غیر تعادلی و حل عددی معادلات اینشتین

دانشجو: مهدی آتشی

استاد راهنما

دکتر کاظم بی‌تقصیر فدافن

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

تیر ۱۳۹۷



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)
(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای مهدی آتشی دانشجوی دکتری رشته فیزیک به شماره دانشجویی ۹۲۱۵۷۷۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۲ در تاریخ ۱۳۹۷/۴/۲۷ از رساله نظری / عملی خود با عنوان: مطالعه هولوگرافی فیزیک غیر تعادلی و حل عددی معادلات اینشتین دفاع و با اخذ نمره به درجه: نائل گردید.

<input type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	<input checked="" type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۷
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹-۱۵	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	مهرت دانشجویان	نام و نام خانوادگی	مراتب علمی	امضاء
۱	دکتر کاظم بی تقصیر فدافان	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر کوروش جاویدان	استاد مدعو خارجی	استاد	
۳	دکتر بهروز میرزا	استاد مدعو خارجی	استاد	
۴	دکتر علی اصغر علوی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۵	دکتر مسلم سوهانی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای مهدی آتشی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده:
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



۹۷/۴/۲۷

سپاس‌گزاری...

حمد و سپاس بی‌کران، پروردگار علیم حکیمی را سزاست که با دو دست قدرت خویش، از خاک زمین گلی ساخت و از آن گل موجودی سرشت و اعضا و جوارحش بخشید. سپس او را مستوی کرد به نفع روح خویش؛ او را ظرف علم خود قرار داد و از همین جهت، مسجود ملائکش کرد.

پس از ستایش خداوند، تکریم می‌کنم وجود مقدس انبیاء الهی و اهل بیت علیهم السلام را که سرچشمه و معدن همه علوم هستند و ستایش می‌کنم وجود مقدس امام ششم (ع) را که فرمود

«... علم بیادگیری نیست، بلکه علم نوری است که خداوند متعال در قلب هر کس که می‌خواهد هدایتش کند قرار می‌دهد...»

تشکر و قدردانی ویژه‌ی من به استاد راهنمای محترم و ارجمندم جناب آقای دکتر کاظم بی‌تقصیر فدافن تعلق می‌گیرد که حقیقتاً دلسوزانه و دغدغه‌مندانه در طول دوره دکتری و تنظیم این رساله مرا راهنمایی کرده و شرمنده خویش نمودند. با بهره‌مندی از توان علمی و دلسوزی ایشان در این مدت، فرصت‌های علمی بسیاری برای من به وجود آمد و از این بابت از ایشان سپاسگزارم. حمایت‌های فراوان و اخلاق پسندیده ایشان را در این مدت هیچ‌گاه فراموش نخواهم کرد. از ایشان به خاطر اعتمادی که به من داشتند صمیمانه متشکرم و همواره قدردان حمایت‌ها و رهنمودهای ایشان خواهم بود.

والا ترین تشکر و قدردانی نیز پس از ذات اقدس اله و انبیاء و ائمه (ع)، متعلق به پدر و مادر گرانقدر و مهربانم و همسر صبورم می‌باشد که همواره و در همه شرایط، وجود گرمشان آرامش بخش و امید دهنده است.

از پژوهشکده ذرات و شتاب‌دهنده پژوهشگاه دانش‌های بنیادی و آقای Wilke van der Schee برای برگزاری کارگاه حل عددی معادلات اینشتین که در خرداد

ماه ۱۳۹۴ دایر شد و همچنین از برگزارکنندگان این کارگاه آقای دکتر محمد علی اکبری و خانم دکتر هاجر ابراهیم تشکر می‌کنم. شرکت در این کارگاه مفید، نقش بسیار تعیین کننده‌ای در مسیر علمی بنده و تنظیم این رساله داشته است. همچنین از پژوهشکده فیزیک و جناب آقای استاد محمد مهدی شیخ جباری برای برگزاری کلاس‌های سیاه‌چاله در زمستان ۱۳۹۳ و حمایت‌ها قدردانی می‌کنم. از دوستان و اساتید بسیار عزیزی که در طول این مدت از دانش آن‌ها بهره و از ارتباط دوستانه با آن‌ها لذت بردم تشکر می‌کنم. از آقای دکتر حسام سلطان‌پناهی سرابی برای مطالب عمیقی که در اواخر دوره از ایشان آموختم، از آقای دکتر قدیر جعفری برای همکاری و بحث‌های مفید در مورد محاسبات عددی، از جناب آقای دکتر سید علی حسینی‌منصوری و دوستان عزیزم مسلم احمدوند، رضا میرعباسی، حسن توکلی، محمدحسین امامی، منصوره غلامزاده، فریده کاظمیان، صدیقه رضاپور، مریم کریمی، مریم رضانی، میترا فرهدنیا، فاطمه سعیدی، سحر مجرد و معصومه دهقان که در جلسات هفتگی بسیار از آن‌ها آموختم و از مصاحبت با آن‌ها مشعوف شدم متشکرم.

مهدی آتشی-تابستان ۱۳۹۷

تعهد نامه

این جانب مهدی آتشی دانشجوی دوره دکتری رشته فیزیک ذرات بنیادی دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه هولوگرافی فیزیک غیر تعادلی و حل عددی معادلات اینشتین تحت راهنمایی دکتر کاظم بی تقصیر فداقتن متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط این جانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و با « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آن ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در دهه‌های گذشته، هولوگرافی امکان مطالعه سیستم‌های جفت شده‌ی قوی را با استفاده از دوگان گرانشی آن‌ها پدید آورده است. در این رساله با استفاده از هولوگرافی به بررسی انرژی از دست رفته یک ذره سنگین چرخان در پس زمینه غیر نسبیتی پرداخته و رفتار انرژی از دست رفته را به ازای مقادیر مختلف پارامترهای نظریه مطالعه کرده‌ایم.

بر طبق اصل هولوگرافی، سیستم جفت شده قوی غیرتعادلی یک دوگان گرانشی دارد که معادلات اینشتین بر دینامیک آن حاکم است و با حل عددی این معادلات، تحول زمانی و حالت تعادلی سیستم مشخص خواهد شد. ما در این رساله، با استفاده از اصل هولوگرافی، دینامیک پلاسمای کوارک-گلوئون را به عنوان یک سیستم غیرتعادلی در جفت شدگی محدود مورد بررسی قرار داده‌ایم. دوگان گرانشی جفت شدگی محدود، اضافه کردن جملات گاوس-بونت به معادلات اینشتین است. با حل عددی معادلات اینشتین-گاوس-بونت با تقریب خطی به عنوان معادلات تحول، زمان همسانگردی و آنتروپی تولید شده توسط پلاسمای کوارک-گلوئون را به عنوان کمیت‌های مهم مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

همچنین در این رساله، نحوه حل عددی معادلات اینشتین در پس زمینه مجانباً پاد-دوسیتیه با استفاده از روش طیفی به دقت بررسی و تشریح شده است.

کلمات کلیدی: پلاسمای کوارک-گلوئون، هولوگرافی، سیستم‌های غیرتعادلی، جملات گاوس-

بونت، روش طیفی

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. Mahdi Atashi, Kazem Bitaghsir Fadafan, Mitra Frahbodnia, *Holographic energy loss in non-relativistic backgrounds*, **Eur. Phys. J. C** (2017) 77:175, arXiv:1606.09491.
 2. Mahdi Atashi, Kazem Bitaghsir Fadafan, Ghadir Jafari, *Linearized Holographic Isotropization at Finite Coupling*, **Eur. Phys. J. C** (2017) 77:430, arXiv:1611.09295.
۳. آتشی مهدی، بی تقصیرفدافن کاظم، جعفری قدیر؛ همسانگرد شدن پلاسمای کوارک-گلوئون در حضور تصحیحات گاوس-بونت؛ هفتمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان‌ها؛ دانشگاه دامغان، ۶ و ۷ بهمن ماه ۱۳۹۵
۴. مهدی آتشی، کاظم بی تقصیرفدافن؛ بررسی اثر جفت شدگی محدود بر تحول انتروپی پلاسمای کوارک-گلوئون؛ بیست و چهارمین کنفرانس بهاره فیزیک؛ پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، ۳ و ۴ خرداد ماه ۱۳۹۶

فهرست مطالب

۱	۱	فیزیک غیرتعادلی و هولوگرافی
۲	۱-۱	مقدمه
۵	۲-۱	سیستم‌های غیرتعادلی
۶	۳-۱	هولوگرافی
۹	۴-۱	پلاسمای کوارک-گلوئون
۱۴	۵-۱	هولوگرافی و پلاسمای کوارک - گلوئون
۱۶	۶-۱	انرژی از دست رفته هولوگرافی در پس زمینه‌های غیرنسبیتی
۱۸	۱-۶-۱	انرژی از دست رفته در دمای صفر
۲۷	۲-۶-۱	انرژی از دست رفته در دمای محدود
۳۱	۳-۶-۱	جمع‌بندی
۳۳	۲	هولوگرافی دینامیک سیستم‌های غیرتعادلی
۳۴	۱-۲	دوگان گرانشی سیستم جفت شده‌ی قوی تعادلی
۳۶	۲-۲	دوگان گرانشی سیستم جفت شده‌ی قوی غیرتعادلی
۳۹	۳-۲	معادلات تحول دوگان گرانشی سیستم غیرتعادلی

۳۹	معادلات اینشتین	۱-۳-۲
۴۰	متریک حدسی	۲-۳-۲
۴۲	بازتعریف مشتق زمانی	۳-۳-۲
۴۲	معادلات حرکت	۴-۳-۲
۴۵	رفتار مرزی متریک و تانسور انرژی-تنش	۵-۳-۲
۴۸	همسانگردی پلاسمای کوارک-گلوئون همگن	۴-۲
۵۱	دوگان گرانشی و معادلات اینشتین	۱-۴-۲
۵۵	۳ راهبرد حل عددی معادلات اینشتین در زمینه مجانباً پاد-دوسیت		
۵۶	انتخاب پیمانه شعاعی و موقعیت افق	۱-۳
۵۹	راهبرد انتگرال گیری و شرایط مرزی	۲-۳
۶۲	تحول زمانی	۳-۳
۶۳	روش رونگه-کوتای مرتبه چهار	۱-۳-۳
۶۴	روش رونگه-کوتای ضمنی	۲-۳-۳
۶۴	روش آدامز-بش فورث	۳-۳-۳
۶۵	انتخاب مقادیر اولیه مناسب	۴-۳
۶۶	حذف واگرایی نزدیک مرز با بازتعریف میدانها	۵-۳
۶۹	۴ روش طیفی		
۷۰	روش تفاضل محدود	۱-۴
۷۲	کاربرد روش طیفی	۲-۴
۷۳	اساس روش طیفی	۳-۴

۷۵	انتخاب پایه	۱-۳-۴
۷۹	مثال	۲-۳-۴
۸۱	مقایسه روش طیفی با تفاضل محدود	۴-۴
۸۳	معادلات دیفرانسیل با چند متغیر مستقل	۵-۴
۸۴	معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان	۶-۴
۸۵	روش طیفی برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی	۷-۴
۹۱	۵ مطالعه همسانگردی پلاسمای کوآرک-گلوئون در جفت شدگی محدود	
۹۲	همسانگردی پلاسمای کوآرک-گلوئون در جفت شدگی نامحدود	۱-۵
۹۳	حل دستگاه معادلات تحول	۱-۱-۵
۹۴	تقریب خطی	۲-۱-۵
۹۶	دوگان گرانشی در جفت شدگی محدود	۲-۵
۹۸	معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت	۳-۵
۱۰۵	معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت با تقریب خطی	۴-۵
۱۰۶	اثر جفت شدگی محدود بر زمان همسانگردی	۱-۴-۵
۱۱۲	رفتار آنتروپی تولید شده توسط افق رویداد	۲-۴-۵
۱۱۷	جمع بندی	۵-۵
۱۱۹	۶ جمع بندی و نگاه به آینده	
۱۲۳	برنامه محاسباتی استخراج معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت	آ
۱۳۷	برنامه محاسباتی بسط نزدیک مرز میدان های متریک	ب

فصل ۱

فیزیک غیر تعادلی و

هولوگرافی

اغلب سیستم‌هایی که در طبیعت مشاهده می‌کنیم سیستم‌های غیر تعادلی^۱ هستند. منظور از سیستم غیر تعادلی سیستمی است که در تعادل ترمودینامیکی نبوده و در حال تبادل انرژی یا ماده با محیط می‌باشد. مطالعه رفتار سیستم‌های غیر تعادلی، خصوصاً بررسی زمان رسیدن به تعادل، همواره یکی از مهم‌ترین مسائل در حوزه‌های مختلف فیزیک بوده است.

در فیزیک انرژی‌های بالا، یکی از مهم‌ترین سیستم‌های غیر تعادلی که امروزه مورد توجه بسیاری قرار گرفته، پلاسمای کوارک-گلوئون^۲ است که از برخورد یون‌های سنگین نسبیتی^۳ در برخورد دهنده بزرگ هادرونی^۴، و برخورد دهنده یون‌های سنگین نسبیتی^۵، به وجود می‌آید. این پلازما در ابتدای تشکیل، به شدت ناهمسانگرد (غیر تعادلی) است و با گذشت زمان به حالت تعادل نزدیک می‌شود به گونه‌ای که پس از گذشت زمان از مرتبه $1fm/c$ - که به زمان همسانگردی معروف است - همسانگرد شده و مانند یک سیال کامل رفتار می‌کند. در این وضعیت، سیستم توسط معادلات هیدرودینامیک نسبیتی توصیف می‌شود که بر پایه تعادل موضعی استوار است.

نظریه حاکم بر پلاسمای کوارک-گلوئون، نظریه کوانتومی رنگ^۶ است. ثابت جفت شدگی این نظریه در انرژی‌های پایین، بسیار بزرگ شده و استفاده از بسط اختلالی برای مطالعه مشاهده‌پذیرهای

^۱Non-equilibrium Systems

^۲Quark-Gluon Plasma (QGP)

^۳Relativistic heavy ion collision

^۴Large Hadron Collider (LHC)

^۵Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC)

^۶Quantum chromodynamics (QCD)

مسئله غیرممکن می‌شود. لذا رهیافت مناسبی در نظریه میدان برای مطالعه دینامیک این سیستم وجود ندارد. در دهه‌های گذشته، هولوگرافی امکان مطالعه سیستم‌های جفت شده‌ی قوی را با استفاده از دوگان گرانشی آن‌ها پدید آورده است. براساس هولوگرافی، هر نظریه میدان کوانتومی با جفت شدگی بالا با یک مسئله گرانش کلاسیک با یک بعد بیشتر دوگان است که کمیت‌های این دو نظریه به یکدیگر ترجمه می‌شوند. بنابراین با مطالعه یک مسئله گرانش کلاسیک می‌توان رفتار کمیت‌های مختلف در نظریه میدان متناظر را استخراج کرد.

دوگان گرانشی سیستم‌های جفت شده قوی غیرتعادلی، یک نظریه گرانش کلاسیک در پس‌زمینه مجانباً پاد-دوسپسته وابسته به زمان است که معادلات اینشتین بر دینامیک آن حاکم می‌باشد. با حل عددی این معادلات، تحول زمانی و حالت تعادلی پس‌زمینه گرانشی مشخص خواهد شد و سپس با ترجمه کمیت‌های مورد نیاز در طرف نظریه میدان به زبان مولفه‌های متریک طرف گرانش، رفتار سیستم جفت شده قوی معلوم می‌شود. ما در این رساله، با استفاده از اصل هولوگرافی، دینامیک پلاسمای کوارک-گلوئون را در جفت شدگی محدود مورد بررسی قرار داده و با حل عددی معادلات اینشتین با تقریب خطی به عنوان معادلات تحول، زمان همسانگردی و آنتروپی پلاسمای تولید شده در لحظه ابتدایی را مطالعه می‌کنیم.

در فصل اول، مقدماتی در مورد پلاسمای کوارک-گلوئون، اصل هولوگرافی و کاربرد آن در مطالعه جنبه‌های مختلف پلاسمای کوارک-گلوئون بیان شده است.

در ادامه فصل اول، انرژی از دست رفته یک ذره سنگین چرخان در پس زمینه‌های غیر نسبیتی را با استفاده از دوگانی AdS/CFT بررسی می‌کنیم. در این بخش، با استفاده از اصل هولوگرافی و ساخت دوگان گرانشی مسئله، رفتار انرژی از دست رفته ذره چرخان را به ازای مقادیر مختلف پارامترهای نظریه در دمای صفر و دمای محدود مورد مطالعه قرار داده‌ایم. همچنین سهم کانال‌های مختلف اتلاف

انرژی مانند نیروی کششی و تابش نیز مطالعه شده است.

فصل دوم شامل مقدماتی در مورد مطالعه هولوگرافی دینامیک سیستم‌های غیرتعادلی می‌باشد. در این فصل دوگان گرانشی تحول یک سیستم خارج از تعادل تا زمان رسیدن به تعادل را تشریح می‌کنیم. همچنین در این فصل، معادلات تحول حاکم بر سیستم غیرتعادلی - که همان معادلات اینشتین وابسته به زمان هستند - را به دست می‌آوریم. بر طبق ارتباط بین کمیت‌های دو طرف تناظر، رسیدن به تعادل در نظریه میدان، معادل تشکیل یک سیاه‌چاله در دوگان گرانشی است. بنابراین متریک فضا-زمان دوگان گرانشی مسئله، یک متریک وابسته به زمان است که از حالت اولیه شروع به تحول می‌کند و در نهایت به متریک یک سیاه‌چاله تبدیل می‌شود. در ادامه این فصل، مولفه‌های تانسور انرژی-تکانه نظریه میدان را بر حسب میدان‌های متریک دوگان گرانشی ترجمه می‌کنیم. در انتهای این فصل نیز، معادلات تحول حاکم بر پلاسمای کوآرک-گلوئون همگن را به عنوان یک مثال، به دست خواهیم آورد.

فصل سوم شامل راهبرد حل عددی معادلات تحول می‌باشد. در این فصل مطالبی را در مورد چگونگی اعمال شرایط اولیه، شرایط مرزی، شرط ایستا بودن افق، بازتعریف میدان‌ها و الگوی مناسب برای انجام تحول زمانی ارائه خواهیم کرد.

در فصل چهارم، مقدمات روش‌های طیفی^۷ برای حل عددی معادلات دیفرانسیل بیان شده است. در این فصل، ضمن بیان اساس کار روش طیفی در حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی، به مقایسه دقت و سرعت این روش با روش تفاضل محدود می‌پردازیم.

فصل پنجم به مطالعه همسانگرد شدن پلاسمای کوآرک-گلوئون در جفت شدگی محدود اختصاص دارد. در این فصل ابتدا دوگان گرانشی مسئله در جفت شدگی محدود معرفی شده که معادل با اضافه

^۷Spectral methods

کردن جملات مشتقات بالاتر متریک در کنش می‌باشد. از بین تصحیحات مشتقات مراتب بالاتر، جملات گاوس-بونت^۸ به علت اینکه معادلات حرکت را در مرتبه دو حفظ می‌کند، مورد علاقه است. از آنجایی که معادلات حرکت اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت بسیار پیچیده می‌شوند، از تقریب خطی برای حل مسئله استفاده شده است.

در ادامه، در دو پیوست جداگانه، نحوه به دست آوردن معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت و بسط نزدیک مرز میدان‌های متریک دوگان به زبان نرم افزار محاسباتی "Mathematica" ارائه شده است.

۲-۱ سیستم‌های غیر تعادلی

تعادل ترمودینامیکی، یکی از مهم‌ترین مفاهیم فیزیک است. به بیان ساده و کیفی، هر سیستمی که با گذشت زمان به اندازه کافی طولانی، تغییر قابل ملاحظه‌ای در کمیت‌های قابل مشاهده آن صورت نگیرد در تعادل ترمودینامیکی قرار دارد. به بیان کمی، تعادل ترمودینامیکی حالتی است که آنتروپی سیستم بیشینه باشد.

بنا بر تعریف فوق، هر سیستمی که از محیط اطراف خود کاملاً مجزا یا به یک حمام گرمایی با دمای ثابت متصل باشد، در تعادل گرمایی بوده و طبیعتاً سیستم‌هایی که چنین ویژگی‌هایی نداشته باشند خارج از تعادل یا غیرتعادلی هستند. بنابراین مهم‌ترین تفاوت بین سیستم‌های تعادلی و غیرتعادلی این است که رفتار سیستم‌های خارج از تعادل وابسته به زمان بوده و با گذشت زمان به حالت تعادلی نزدیک می‌شود.

^۸Gauss-Bonnet

برخی از سیستم‌های غیر تعادلی، نزدیک به حالت تعادل^۹ هستند که به عنوان یک اختلال کوچک از حالت تعادلی در نظر گرفته می‌شوند و جریان انرژی مبادله شده بین سیستم و محیط اطراف متناسب با اختلاف دمای بین سیستم و محیط است.

اما بخشی دیگر از سیستم‌های غیر تعادلی، سیستم‌های دور از تعادل^{۱۰} هستند. معادلات حرکت این گونه سیستم‌ها غیر خطی بوده و نمی‌توان رفتار آنها را با ترمودینامیک توصیف کرد. برای مطالعه سیستم‌های دور از تعادل، سیستم را به بخش‌های بسیار کوچکی که هر کدام از آنها در تعادل باشند تقسیم کرده و سپس رفتار جمعی آنها را با زمان و تا رسیدن به تعادل مطالعه می‌کنند. این کار به ما اجازه می‌دهد تا از دینامیک شارها یا هیدرودینامیک^{۱۱} برای توصیف سیستم‌های دور از تعادل استفاده کنیم [۱]. برای آشنایی بیشتر با مباحث مربوط به هیدرودینامیک به مرجع [۲] مراجعه کنید.

۳-۱ هولوگرافی

در نظریه میدانهای کوانتومی^{۱۲} هر نظریه با یک ثابت جفت شدگی معرفی می‌شود که مشاهده پذیرهای آن نظریه به صورت یک بسط اختلالی برحسب توان‌های ثابت جفت شدگی بیان می‌شوند. در مقیاسهایی که ثابت جفت شدگی نظریه به قدری بزرگ باشد که نتوان از بسط اختلالی استفاده کرد، در توصیف نظریه و محاسبات با مشکل مواجه می‌شویم. به عنوان مثال در نظریه کوانتومی رنگ رفتار ثابت جفت شدگی به گونه‌ای است که در انرژی‌های پایین قوی‌تر شده و استفاده از بسط اختلالی غیر ممکن می‌شود. به عبارت دیگر، حل مسئله‌های QCD در انرژی‌های پایین عملاً ممکن نیست. ارائه راهکاری

^۹Near equilibrium

^{۱۰}Far-from-equilibrium systems

^{۱۱}Hydrodynamics

^{۱۲}Quantum field theory

برای حل مسائل نظریه میدان با جفت شدگی قوی همواره یکی از دغدغه‌های فیزیکدانان بوده است. بر اساس دیدگاه ویلسونی^{۱۳} در نظریه میدان‌های کوانتومی، راه مناسب برای تشریح یک نظریه میدان d بعدی، دسته‌بندی کردن فیزیک بر حسب مقیاس انرژی است^{۱۴}. با این روش، خانواده‌ای پیوسته از نظریه‌های موثر d بعدی در مقیاس‌های انرژی خواهیم داشت. با یک دید دیگر، می‌توان این خانواده پیوسته نظریه‌های d بعدی را به عنوان یک نظریه واحد $d + 1$ بعدی در نظر گرفت که بعد اضافه آن همان مقیاس انرژی باشد. بر اساس تقارن‌های موجود و شمردن درجات آزادی، درمی‌یابیم که نظریه واحد $d + 1$ بعدی باید یک نظریه گرانشی در پس‌زمینه پاد-دوسیتته^{۱۵} باشد. بر این اساس می‌توان معادل هر نظریه میدان d بعدی، یک نظریه گرانشی $d + 1$ بعدی نوشت که همه تقارن‌ها و درجات آزادی نظریه را حفظ کند [۴، ۵].

در سال ۱۹۷۳ نیز فیزیکدانان دریافته‌اند که آنتروپی یک سیاه چاله متناسب با مساحت افق رویداد آن سیاه‌چاله است [۶]. به بیان دیگر، اطلاعات مربوط به یک ناحیه، در رویه‌ای با یک بعد کمتر کد گذاری شده است. بر این اساس در سال ۱۹۹۷، مالداسنا^{۱۶} حدس زد که یک نظریه ریسمان نوع IIB روی زمینه پاد-دوسیتته پنج بعدی با یک نظریه پیمانه‌ای ابر یانگ-میلز^{۱۷} با تقارن همدیس^{۱۸} و چهار ابرتقارنی دوگان است که به دوگانی AdS/CFT معروف شد [۷].

پارامترهای تعیین کننده در طرف نظریه ریسمان، طول پلانک^{۱۹}، l_P و مقیاس ریسمان^{۲۰}، l_s و در

^{۱۳}Wilsonian approach

^{۱۴}برای مطالعه بیشتر در این زمینه به فصل ۱۲ مرجع [۳] مراجعه کنید.

^{۱۵}Anti de-Sitter (AdS) background

^{۱۶}Maldacena

^{۱۷}Super Yang-Mills gauge theory

^{۱۸}Conformal symmetry

^{۱۹}Planck length

طرف نظریه پیمانانه، جفت شدگی توفت^{۲۱} که به صورت $\lambda = g^2 N_c$ تعریف می‌شود هستند که در آن g جفت شدگی نظریه یانگ-میلز و N_c تعداد رنگ در نظریه میدان هستند. ارتباط بین این پارامترها به صورت زیر بیان می‌شود^[۴]:

$$l_P^8 \propto \frac{1}{N_c^2} \quad l_s^2 \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}}. \quad (1-1)$$

در حد $l_s \ll 1$ نظریه ریسمان به ابرگرانش کلاسیکی^{۲۲} تبدیل می‌شود. قرار گرفتن در این محدوده بر طبق رابطه (۱-۱) منجر به افزایش جفت شدگی نظریه توفت، λ می‌شود. از طرفی در نظریه میدان، روش شناخته شده‌ای برای مطالعه سیستم‌های جفت شده قوی وجود ندارد در حالی که گرانش کلاسیکی کاملاً شناخته شده است. بنابراین با استفاده از تناظر AdS/CFT می‌توان دوگان گرانشی مسائل جفت شده قوی را ساخت و با استفاده از گرانش کلاسیک مسئله را حل کرد.

نظریه گرانشی دوگان با نظریه میدان جفت شده‌ی قوی d بعدی، روی پس زمینه AdS_{d+1} تعریف می‌شود که نظریه میدان روی مرز این فضا زندگی می‌کند. اگر هدف، مطالعه یک نظریه میدان جفت شده‌ی قوی در دمای محدود^{۲۳} باشد، دوگان آن یک نظریه گرانشی است که روی سیاه‌چاله پاد-دوسیت^{۲۴} تعریف می‌شود به طوری که مکان افق سیاه‌چاله، متناظر با دمای نظریه میدان می‌باشد^{۲۵}.

^{۲۰}String scale

^{۲۱}'t Hooft coupling

^{۲۲}Classical supergravity

^{۲۳}Finite temperature

^{۲۴}AdS blackhole

^{۲۵}به بیان بهتر، مکان افق سیاه‌چاله متناسب با عکس دمای سیاه‌چاله بوده و دمای سیاه‌چاله برابر با دمای نظریه میدان

دوگان می‌باشد.

همچنین تقارن‌های سراسری^{۲۶} طرف نظریه میدان متناظر با تقارن‌های پیمانه‌ای^{۲۷} طرف گرانش و چشمه^{۲۸} جفت شده با عملگر موضعی^{۲۹} نظریه میدان متناظر با مقدار مرزی میدان دوگان در طرف گرانش هستند.

برای مطالعه بیشتر در مورد اصل هولوگرافی، تناظر AdS/CFT و روابط بین کمیت‌ها و پارامترهای دو طرف تناظر، به مراجع [۵، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳] مراجعه کنید.

۴-۱ پلاسمای کوارک-گلوئون

یکی از مهم‌ترین سیستم‌های غیر تعادلی که در دهه‌های اخیر مورد علاقه فیزیکدانان قرار گرفته است، پلاسمای کوارک-گلوئون است که از برخورد یونهای سنگین نسبیتی تولید می‌شود. این سیستم-که وضعیت مشابه آن در حدود چند میکروثانیه بعد از مهبانگ وجود داشته است- دمایی در حدود 300 MeV و طول عمری از مرتبه 10^{-23} ثانیه دارد [۱۴، ۱۵، ۱۶]. در برخورد دهنده LHC یونهای طلا (با ۷۹ پروتون و ۱۱۸ نوترون) با انرژی 1.38 TeV و در برخورد دهنده RHIC یونهای سرب (با ۸۲ پروتون و ۱۲۶ نوترون) با انرژی 100 GeV را برای تولید پلاسمای کوارک-گلوئون با یکدیگر برخورد می‌هند [۱۷].

هسته‌های سرب یا طلا که قطری در حدود 14 fm دارند، در اثر حرکت با سرعتی نزدیک به سرعت نور و اثر نسبیتی انقباض طول^{۳۰} به دو قرص فشرده با ضخامت $14/\gamma \text{ fm}$ تبدیل می‌شوند که در آن

^{۲۶}Global symmetry

^{۲۷}Gauge symmetry

^{۲۸}Source

^{۲۹}Local operator

^{۳۰}Length contraction

هر $\gamma = 1/\sqrt{1-v_z^2}$ فاکتور نسبیتی و v_z سرعت برخورد دو قرص در چارچوب مرکز جرم می‌باشد^{۳۱}. هر دیسک شامل تعداد بسیار زیادی از کوارک‌ها و پاد کوارک‌ها و زوج‌های $q\bar{q}$ است که به دلیل افت و خیزهای کوانتومی در حالت اولیه ناشی از اتساع زمان^{۳۲} به وجود می‌آیند. به عبارت دیگر، قرص‌های برخورد کننده، یک سیستم بسیار پیچیده‌ای از پارتون‌ها^{۳۳} با توزیع تکانه طولی^{۳۴} هستند که هر کدام از پارتون‌ها کسری از اندازه حرکت دیسک را حمل می‌کنند^{۳۵}.

پس از برخورد دو قرص منقبض شده، یک توپ آتشین بسیار داغ شکل می‌گیرد که پارتون‌ها در اثر حرکت در این محیط، بخشی از انرژی خود را ازدست می‌دهند. این سیستم بسیار دور از حالت تعادل خواهد بود؛ این موضوع را می‌توان از آنتروپی تولید شده در اثر برخورد نیز دریافت. قبل از برخورد، آنتروپی صفر بوده ولی بعد از برخورد حدود 30000 ذره در یک محیط بسیار کوچک (از مرتبه فرمی) بدون نظم خاص و با سرعت زیاد شناور خواهند بود و آنتروپی سیستم به شدت افزایش خواهد داشت. همچنین به دلیل انقباض فضا و دمای بسیار بالا، چگالی انرژی سیستم بسیار بالاست. بر اساس تقریبهای موجود، چگالی انرژی پلاسمای تولید شده در حدود $12 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ است که بسیار بسیار بزرگتر از چگالی انرژی درون یک هادرون نوعی (حدود $500 \text{ MeV}/\text{fm}^3$) می‌باشد^[۱۸].

توپ آتشین تولید شده - شامل دریایی از کوارک‌ها و گلوئونهای آزاد- که در ابتدا به شدت ناهمسانگرد است، بعد از مدت زمانی از مرتبه fm/c سرد و همسانگرد^{۳۶} شده و مانند یک سیال

^{۳۱} فاکتور نسبیتی γ برای برخورد دهنده LHC حدود 2500 و برای برخورد دهنده RHIC حدود 100 است^[۱۸].

^{۳۲} Time dilation

^{۳۳} Partons

^{۳۴} Longitudinal momentum distribution

^{۳۵} برای آشنایی بیشتر با تابع ساختار و توزیع اندازه حرکت پارتون‌ها به مرجع^[۱۹] مراجعه کنید.

^{۳۶} Isotropic

ایده‌آل رفتار می‌کند به طوری که می‌توان از هیدرودینامیک برای توصیف آن بهره برد. در این مرحله، پلاسمای کوآرک-گلوئون به یک محیط با جفت شدگی بسیار بالا تبدیل شده است. شکل ۱-۱ این موضوع را نشان می‌دهد^{۳۷}. در این شکل رفتار مولفه‌های تانسور انرژی-تکانه پلاسمای کوآرک-گلوئون استخراج شده از حل عددی بر اساس هولوگرافی و مولفه‌های به دست آمده از معادلات هیدرودینامیک با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، در زمان‌های بالا مقادیر به دست آمده از حل عددی هولوگرافی و هیدرودینامیک بر یکدیگر منطبق می‌شوند و به این معناست که در زمان‌های بالا، هیدرودینامیک می‌تواند به خوبی پلاسمای کوآرک-گلوئون را به عنوان یک سیال ایده‌آل توصیف کند.

تانسور انرژی-تنش سیستمی که از معادلات هیدرودینامیک تبعیت می‌کند به صورت

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{E}u_\mu u_\nu + P[\mathcal{E}]\Delta_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}, \quad (2-1)$$

می‌باشد که در آن \mathcal{E} چگالی انرژی^{۳۸}، $P[\mathcal{E}]$ معادله حالت^{۳۹} سیستم، u_μ سرعت موضعی سیال^{۴۰}،

$\pi_{\mu\nu}$ تانسور برش^{۴۱} و η و شکسانی برشی^{۴۲} و به شرح ذیل هستند [۱۷]:

^{۳۷}این شکل با استفاده از بخشی از برنامه محاسباتی حل عددی معادلات اینشتین که توسط Wilke van der Schee نوشته شده رسم شده است. این برنامه محاسباتی در کارگاه محاسبات عددی که در پژوهشگاه ذرات و شتاب‌دهنده‌های پژوهشگاه دانش‌های بنیادی برگزار شد تدریس شده و در نشانی <https://sites.google.com/site/wilkevanderschee> در دسترس است.

^{۳۸}Energy density

^{۳۹}Equation of state

^{۴۰}Local fluid velocity

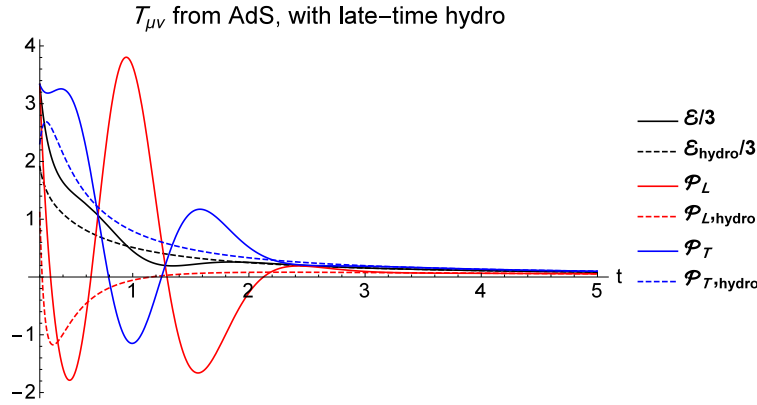
^{۴۱}Shear tensor

^{۴۲}Shear viscosity

$$\Delta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu,$$

(۳-۱)

$$\pi_{\mu\nu} = -\eta[\mathcal{E}] \left(\Delta_{\mu\alpha} \Delta_{\nu\beta} (\nabla^\mu u^\nu + \nabla^\nu u^\mu) - \frac{2}{d-1} \Delta_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta} \nabla^\alpha u^\beta \right).$$



شکل ۱-۱: رفتار مولفه‌های تانسور انرژی-تکانه پلاسمای کوارک-گلوئون. خط‌های پر رفتار تانسور انرژی-تکانه استخراج شده از هولوگرافی عددی و خط‌چین‌ها رفتار بر اساس هیدرودینامیک هستند. بعد از گذشت زمانی از مرتبه fm/c هیدرودینامیک می‌تواند پلاسمای کوارک-گلوئون را به خوبی توصیف کند.

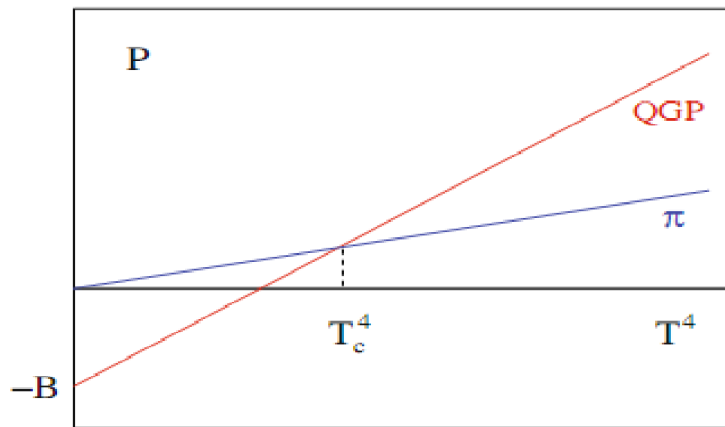
با سرد شدن پلاسما، مزونها، پروتونها و نوترونها تشکیل شده و توسط آشکارسازها ثبت می‌شوند. با استفاده از معادله حالت گاز ایده‌آل برای زمانی که مزونهای π بازترکیب شده‌اند و تابع توزیع استغان-بولتزمن^{۴۳} برای زمانی که کوارکها و گلوئونهای آزاد وجود دارند و برابر قرار دادن این دو رابطه، دمای بحرانی برای تولید پلاسمای کوارک-گلوئون بدست می‌آید که حدود $150 MeV$ است [۱۶]:

$$P_\pi = 3 \frac{\pi^2}{90} T^4 \quad (۴-۱)$$

^{۴۳}Stephen-Boltzman distribution function

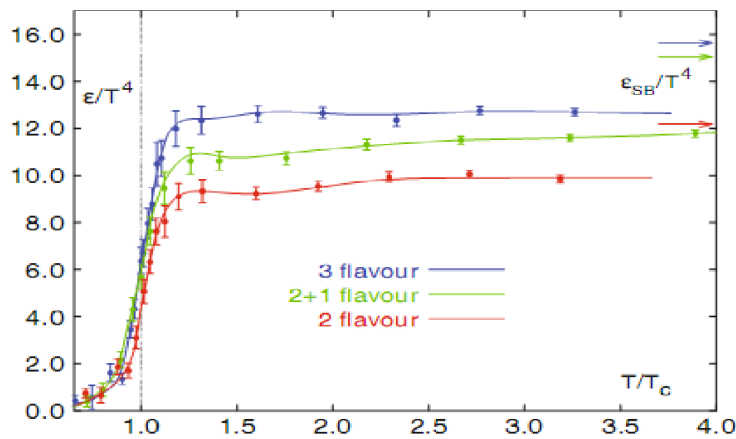
$$P_{gg} = [(2 \times 8) + \frac{7}{8}(3 \times 2 \times 2 \times 2)] \frac{\pi^2}{90} T^4 - B = 37 \frac{\pi^2}{90} T^4 - B, \quad (5-1)$$

که در آن، B ، اختلاف حالت خلاء و حالت پایه کوارک-گلوئون در پلاسما است. ضریب ۳ در رابطه (۴-۱) برای شمارش تعداد بارهای الکتریکی مزون π می‌باشد. در جمله اول رابطه (۵-۱) ضریب ۲ بیانگر دو اسپین مختلف و ضریب ۸ شمارنده هشت رنگ مختلف گلوئون‌ها هستند. در جمله دوم، ضرایب داخل پرانتز به ترتیب شمارنده تعداد رنگ، تعداد طعم، اسپین و ذره و پاد-ذره برای کوارک‌ها می‌باشند.



شکل ۱-۲: دمای بحرانی پلاسما [۱۶]

بعد از گذر از دمای بحرانی، چگالی انرژی پلاسمای تولید شده، یک تغییر ناگهانی داشته و سپس به یک مقدار ثابت می‌رسد و با افزایش دما تغییری نخواهد داشت. این مطلب در شکل ۱-۳ نشان داده شده است.



شکل ۱-۳: چگالی انرژی بر حسب دما [۱۶]

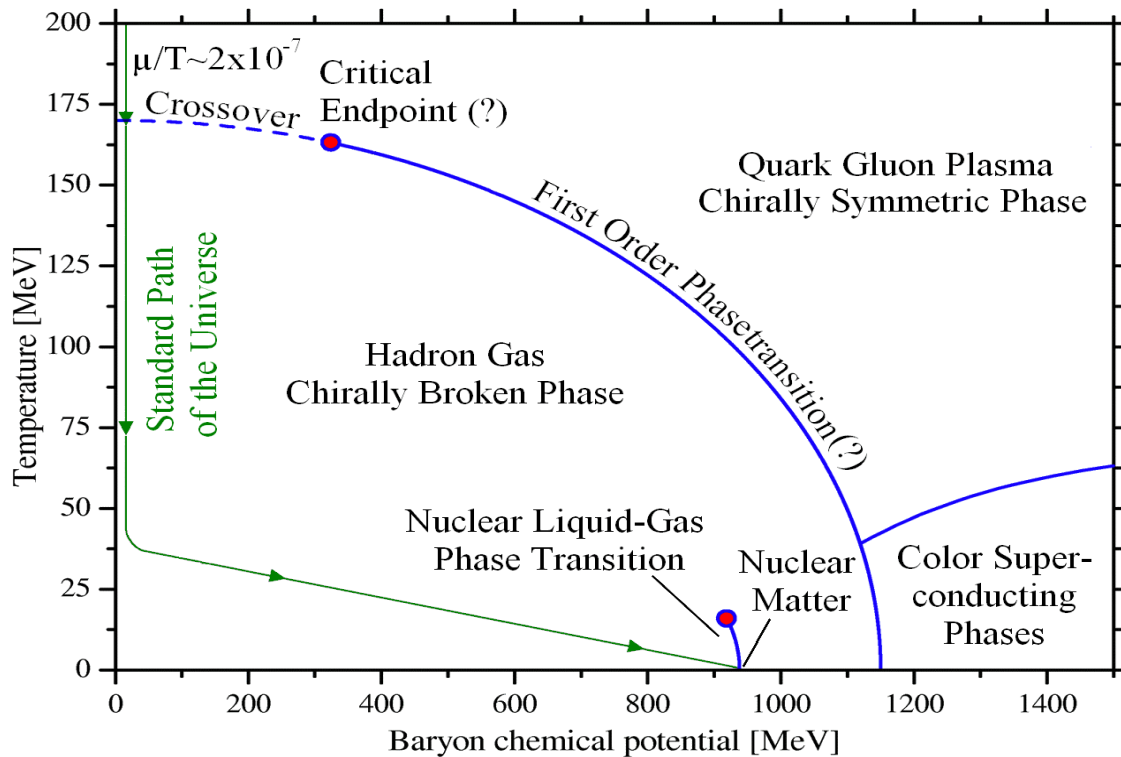
علاوه بر دما، چگالی باریونی (فشار) نیز در تشکیل پلاسما موثر است. شکل ۱-۴ نمودار گذار فاز را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، در دماهای بالا و پتانسیل شیمیایی زیاد، پلاسمای کوارک-گلوئون تولید می‌شود.

بررسی دینامیک این سیستم از حالت غیرتعادلی تا رسیدن به تعادل یکی از مسائل به روز و بسیار مهم در فیزیک است که به دلیل جفت شدگی بسیار قوی با استفاده از نظریه میدان مقذور نیست. بنابراین همان‌طور که اشاره شد برای مطالعه این سیستم باید از تناظر AdS/CFT استفاده کرد.

۵-۱ هولوگرافی و پلاسمای کوارک - گلوئون

از آنجا که پلاسمای کوارک-گلوئون محیطی با ثابت جفت شدگی قوی است، تناظر AdS/CFT ابزار مناسبی (یا شاید تنها ابزار موجود) برای مطالعه این سیستم است. مراجع مروری [۴، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳] در مورد کاربرد AdS/CFT در پلاسمای کوارک-گلوئون وجود دارند.

قدیمی‌ترین کاربرد AdS/CFT در محاسبه چسبندگی برشی است که مقدار محاسبه شده برای نسبت چسبندگی برشی بر چگالی آنروپی، η/s ، به مقدار آزمایشگاهی خیلی نزدیک بود [۲۴، ۲۵].



شکل ۱-۴: نمودار گذار فاز

موارد دیگر که محاسبه آنها از طریق هولوگرافی امکان پذیر بود نیروی کششی^{۴۴} [۲۶]، انرژی هدر رفته^{۴۵} [۲۷] و پارامتر خاموشی جت^{۴۶} [۲۸] بودند. برای مشاهده سایر کاربردهای تناظر AdS/CFT به مراجع [۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹] مراجعه کنید.

جدیدترین کاربرد هولوگرافی نیز در مورد مطالعه دینامیک پلاسمای کوارک-گلوئون به عنوان یک سیستم غیر تعادلی است [۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳] که در فصل‌های آینده به آنها خواهیم پرداخت.

^{۴۴} Drag force

^{۴۵} Energy loss

^{۴۶} Jet quenching parameter

۶-۱ انرژی از دست رفته هولوگرافی در پس زمینه‌های غیر نسبیتی

در این بخش، به عنوان مثالی از کاربرد دوگانی AdS/CFT، به بررسی انرژی از دست رفته یک ذره سنگین چرخان در پس زمینه غیر نسبیتی می‌پردازیم. این بررسی را یک بار بدون در نظر گرفتن دما و یک بار در دمای محدود-که به زبان هولوگرافی، به معنای تشکیل یک سیاه‌چاله است - انجام می‌دهیم^{۴۷}.

بر طبق دوگانی AdS/CFT، نظریه میدان دوگان با هندسه پاد-دوسیت، یک نظریه با تقارن همدیس و ناوردا تحت مقیاس بندی^{۴۸} است. گرانش دوگان با نظریه میدان بدون تقارن همدیس، روی زمینه‌ای غیر از پاد-دوسیت تعریف می‌شود.

به عنوان مثالی از نظریه میدان غیر همدیس، نظریه‌ای را در نظر بگیرید که تحت مقیاس بندی $(t, \vec{x}) \rightarrow (w^z t, w \vec{x})$ ناوردا باشد. که در آن اگر $z = 1$ باشد نظریه نسبیتی و اگر $z \neq 1$ باشد نظریه غیر نسبیتی است. چنین نظریه‌هایی به نظریه‌های با نقطه ثابت لیف شیتز^{۴۹} معروف هستند.

گرانش دوگان با نظریه میدان‌های غیر نسبیتی در مراجع [۴۵، ۴۶، ۴۷] مطالعه شده‌اند. برای پیدا کردن دوگان گرانشی نظریه میدان غیر نسبیتی از معادلات اینشتین، باید میدان‌هایی شبیه میدان‌های پیمان‌های جرم دار را به کنش اضافه کرد. پس زمینه‌هایی که شامل یک میدان پیمان‌های و یک میدان نرده‌ای^{۵۰} هستند به شکل زیر می‌باشند:

^{۴۷} نتایج این بخش در مرجع [۴۴] توسط نویسنده رساله آمده است.

^{۴۸}Scaling

^{۴۹}Lifshitz fixed point theories

^{۵۰}Scalar field

$$ds_{d+2}^2 = u^{2(\frac{d}{2}-1)} \left(\frac{-dt^2}{u^{2(z-1)}} + du^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + \sum_{i=3}^d dx_i^2 \right). \quad (6-1)$$

در رابطه (6-1)، u بعد هولوگرام و مرز فضای حجم در $u = 0$ واقع شده است. d ابعاد فضایی نظریه میدان و θ نمای نقض مقیاس $^{\text{H}}_1$ می‌باشند $^{\text{H}}_2$. بین پارامترهای z ، d و θ روابط زیر صادق است:

$$(z-1)(d+z-\theta) \geq 0, \quad (d-\theta)(dz-\theta-d) \geq 0. \quad (7-1)$$

در این بخش، ما انرژی از دست رفته یک ذره سنگین چرخان را در پس زمینه غیر نسبیتی بررسی می‌کنیم. مطالعه انرژی از دست رفته، یک مسئله مهم و مورد علاقه در بررسی پلاسمای کوارک-گلوئون است. در این مثال، ذره چرخان سنگین می‌تواند یک کوارک چرخان سنگین - که به عنوان یک کاوشگر $^{\text{H}}_3$ پلاسمای کوارک-گلوئون مطرح است - باشد [48].

بر طبق تناظر AdS/CFT، ذره متحرک در مرز، به وسیله یک ریسمان کلاسیکی در حجم توصیف می‌شود که انتهای ریسمان روی مرز قرار گرفته و متناظر با مکان ذره است. حال مطالعه دینامیک یک ذره سنگین چرخان روی مرز که با بسامد زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند مطلوب است.

همچنین در این فصل انرژی از دست رفته ذره سنگین چرخان از طریق کانال نیروی کششی $^{\text{H}}_4$ و کانال تابش $^{\text{H}}_5$ بررسی خواهد شد. انرژی از دست رفته کوارک سنگین چرخان در یک پلاسمای ابر

$^{\text{H}}_1$ Hyperscaling violation exponent

$^{\text{H}}_2$ به دلیل اینکه در این بخش می‌خواهیم انرژی از دست رفته یک ذره چرخان را بیابیم، دو مختصه از مختصات فضایی

پس زمینه را مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ) در نظر گرفته‌ایم.

$^{\text{H}}_3$ Probe

$^{\text{H}}_4$ Drag force channel

$^{\text{H}}_5$ Radiation channel

یانگ-میلز با چهار ابرتقارنی^{۵۶} برای اولین بار در مرجع [۴۹] مطالعه شده است.

۱-۶-۱ انرژی از دست رفته در دمای صفر

دوگان گرانشی ذره چرخان

در این بخش با استفاده از پس زمینه (۶-۱) به بررسی انرژی از دست رفته ذره چرخان در دمای صفر می‌پردازیم. همانطور که گفته شد، بر طبق هولوگرافی، ذره چرخان روی مرز فضای حجم ($u = 0$) قرار گرفته و مطالعه انرژی از دست رفته آن منوط به بررسی دینامیک ریسمان کلاسیکی پیچیده^{۵۷} در حجمی که هندسه آن با رابطه (۶-۱) بیان می‌شود می‌باشد. معادلات حرکت ریسمان از کمینه کردن کنش نامبو-گوتو^{۵۸} بدست می‌آیند [۵۰]:

$$S_{NG} \propto - \int d^2\sigma \sqrt{-\det g}, \quad (۸-۱)$$

که در آن g متریک القا شده روی ریسمان است که به صورت $g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}$ تعریف می‌شود و $G_{\mu\nu}$ متریک پس‌زمینه است. X^μ نیز جهان سطح^{۵۹} ریسمان است که برای ریسمان پیچیده به صورت

$$X^\mu = (t = \tau, u = \sigma, \rho = \rho(u), \phi = \omega\tau + \phi(u), x_3 = 0), \quad (۹-۱)$$

حدس زده می‌شود. در رابطه (۹-۱) t زمان، u بعد هولوگرام و (ρ, ϕ, x_3) نیز مختصات استوانه‌ای

^{۵۶} $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills plasma

^{۵۷}Spiraling classical string

^{۵۸}Nambu-Goto action

^{۵۹}World sheet

توصیف کننده ریسمان هستند. σ و τ هم پارامترهایی هستند که ریسمان بر اساس آنها پارامتربندی شده است. اگر فرض کنیم که ذره چرخان در مرز روی دایره‌ای به شعاع l حرکت دورانی انجام می‌دهد و نقطه‌ی شروع حرکت آن در مرز را مبدأ مختصه ϕ در نظر بگیریم، شرایط مرزی

$$\rho(0) = l, \quad \phi(0) = 0, \quad (10-1)$$

باید در معادلات حرکت صدق کنند. با استفاده از روابط (۸-۱) و (۹-۱) و تعریف متریک القایی،

چگالی لاگرانژی به صورت

$$\mathcal{L} = u^{\frac{2\theta}{d}-1-z} \sqrt{(1 - \rho^2 \omega^2 u^{2(z-1)})(1 + \rho'^2) + \rho^2 \phi'^2}, \quad (11-1)$$

بدست می‌آید. علامت $''$ نشان دهنده مشتق نسبت به u است. از آنجایی که لاگرانژی (۱۱-۱)

به ϕ وابسته نیست، ثابت حرکت Π به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Pi = \frac{-\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} = \frac{-u^m \rho^2 \phi'}{\sqrt{(1 - \rho^2 \omega^2 u^n)(1 + \rho'^2) + \rho^2 \phi'^2}}, \quad (12-1)$$

که در آن $m = \frac{2\theta}{d} - 1 - z$ و $n = 2z - 2$ می‌باشد. با استفاده از معادله (۱۱-۱) و معادله

اولر-لاگرانژ^{۶۰} معادله حرکت استخراج می‌شود:

$$\rho'' + \left(\frac{\rho(u - m\rho\rho')}{u(u^{-2m}\Pi^2 - \rho^2)} + \frac{(2 - nu^{n-1}\omega^2\rho^3\rho')}{2\rho(1 - u^n\omega^2\rho^2)} \right) (1 + \rho'^2) = 0. \quad (13-1)$$

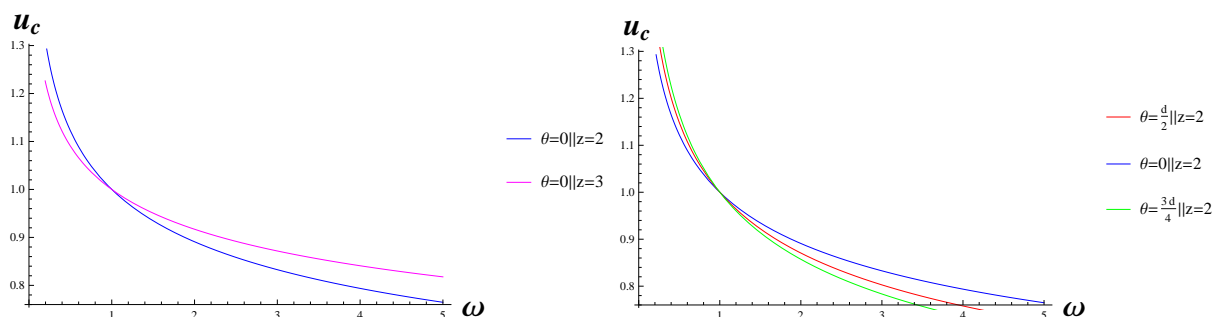
با حل معادله (۱۳-۱) و شرایط مرزی (۱۰-۱) مشخصات ریسمان پیچیده بدست می‌آید. همچنین

^{۶۰} Euler-Lagrange equation

با اعمال شرط حقیقی بودن روی ϕ' یک نقطه خاص در بعد هولوگرام u_c - که به افق جهان سطح^{۶۱} موسوم است - و یک مقدار خاص برای شعاع ریسمان پیچیده $\rho_c \equiv \rho(u_c)$ به شرح ذیل بدست می‌آید:

$$\rho_c = \frac{(\Pi\omega)^{\frac{-q}{2m-n}}}{\omega}, \quad u_c = (\Pi\omega)^{\frac{2}{2m-n}}. \quad (14-1)$$

در حالت نسبیتی ($z = 1$)، در محدوده $u < u_c$ ریسمان با سرعتی کمتر از سرعت نور دوران می‌کند و به لحاظ علی، این ناحیه از محدوده $u > u_c$ کاملاً جدا است. اما در حالت غیر نسبیتی سرعت خطی ریسمان در نقطه خاص u_c توسط رابطه $v = \rho_c \omega$ داده می‌شود و از صفر تا بی‌نهایت گسترده است. در شکل ۵-۱ رفتار افق جهان سطح نسبت به بسامد زاویه‌ای ω برای مقادیر مختلف θ و z نشان داده شده است. در حالت کلی، افق جهان سطح با افزایش بسامد زاویه‌ای کاهش می‌یابد و به مرز نزدیک‌تر می‌شود.



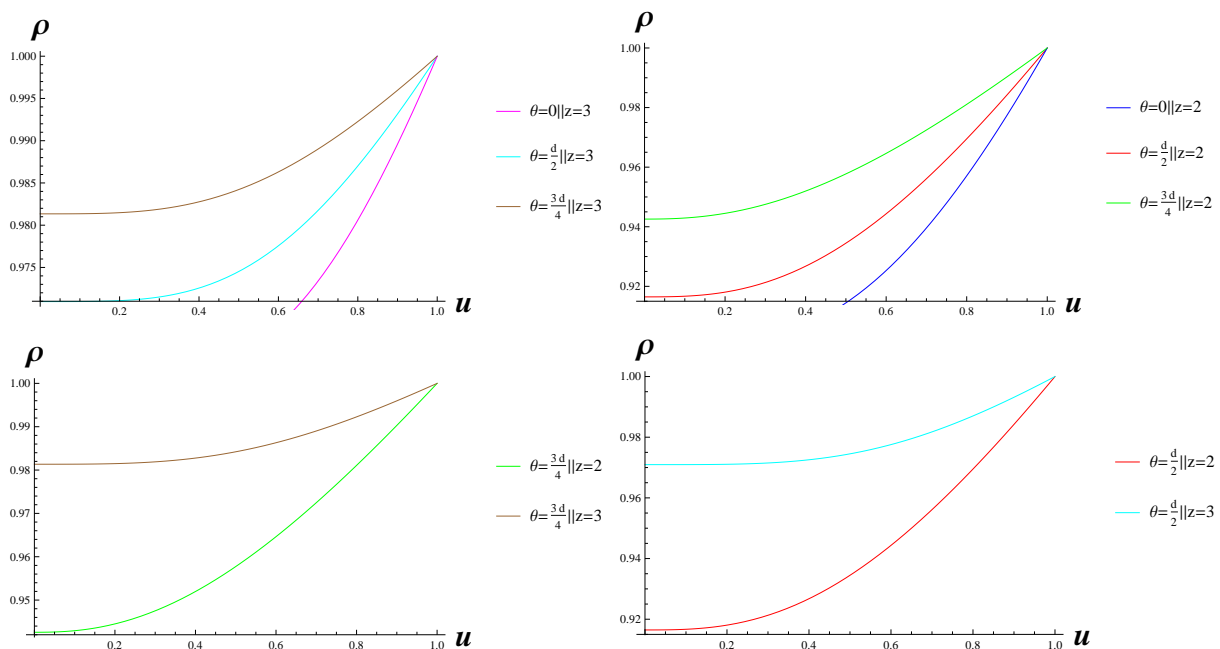
شکل ۵-۱: رفتار افق جهان سطح نسبت به بسامد زاویه‌ای. در هر دو شکل مقدار $\Pi = 1$ است.

وجود افق جهان سطح در پس زمینه غیر نسبیتی، در دمای صفر - درحالی که سیاه‌چاله‌ای در حجم تشکیل نشده است - نکته مهم و جالبی است. وجود افق جهان سطح در حجم، متناظر با حرکت براونی^{۶۲} ذره در مرز است [۵۱].

^{۶۱} World sheet horizon

^{۶۲} Brownian motion

همان طور که در شکل ۵-۱ می‌بینیم، ترتیب منحنی‌های متناظر با مقادیر مختلف z و θ قبل و بعد از یک مقدار بحرانی برای بسامد زاویه‌ای ω_c ، متفاوت است. بر اساس نمودارهای مختلفی که برای مقادیر مختلف Π رسم شده است، دریافتیم که این مقدار بحرانی بسامد زاویه‌ای به گونه‌ای است که $\Pi\omega_c = 1$ باشد. در شکل ۵-۱ که $\Pi = 1$ انتخاب شده است، مقدار بحرانی ω_c نیز برابر یک است. در محدوده $\omega < \omega_c$ مقدار u_c با افزایش θ افزایش و با افزایش z کاهش می‌یابد و این ترتیب برای $\omega > \omega_c$ معکوس است.



شکل ۶-۱: شعاع ریسمان نسبت به بعد هولوگرام برای مقادیر مختلف θ و z با $\omega = \Pi = 1$

با حل معادله حرکت (۱۳-۱) رفتار شعاع ریسمان بر حسب بعد هولوگرام به دست می‌آید که در شکل ۶-۱، برای مقادیر مختلف θ و z و $\omega = \Pi = 1$ رسم شده است. در یک u ثابت، با افزایش θ و z شعاع ریسمان افزایش می‌یابد. همچنین چون $u = 0$ مرز فضای حجم است، $\rho(0)$ شعاع چرخش ذره سنگین در مرز خواهد بود. بنابراین از شکل ۶-۱ می‌توان دریافت که شعاع دوران در ω ثابت برای θ و z بزرگتر، بیشتر خواهد بود.

انرژی از دست رفته کل یک ذره چرخان

انرژی از دست رفته یک ذره چرخان با رابطه

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \Pi\omega \quad (15-1)$$

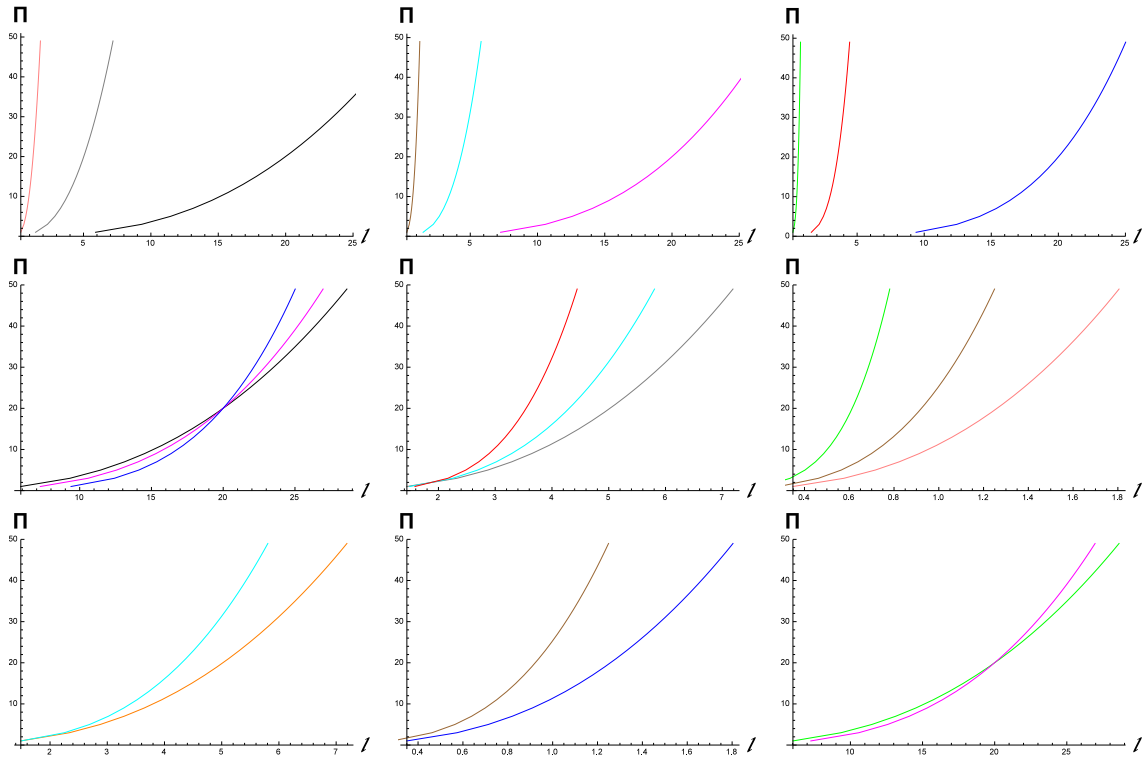
داده می‌شود. در شکل ۷-۱ رفتار انرژی از دست رفته کل بر حسب شعاع چرخش برای مقادیر مختلف θ ، ω و z نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، یک مقدار بحرانی برای شعاع چرخش وجود دارد که ترتیب قرار گرفتن منحنی‌های متناظر با مقادیر مختلف θ ، ω و z قبل و بعد از آن معکوس می‌شود. مقدار این شعاع بحرانی به گونه‌ای است که در آن نقطه $\omega l_c = 1$ می‌شود. در $l = l_c$ مقدار انرژی از دست رفته به هیچ‌کدام از پارامترهای θ ، ω و z بستگی ندارد.

بر طبق شکل ۷-۱ انرژی از دست رفته متناظر با $z = 2$ در $l < l_c$ بیشتر از انرژی از دست رفته متناظر با $z = 3$ است و این ترتیب در محدوده $l > l_c$ معکوس می‌شود. همچنین انرژی از دست رفته با افزایش بسامد زاویه‌ای در θ و z ثابت افزایش می‌یابد.

به طور کلی می‌توان رفتار انرژی از دست رفته در پس زمینه غیر نسبی در دمای صفر را به شرح ذیل مورد بندی کرد:

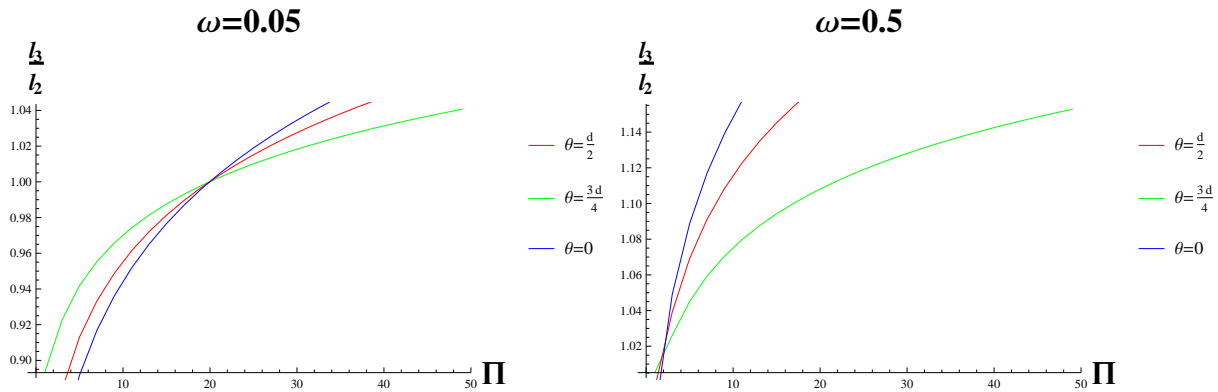
۱. مشابه با حالت نسبی، انرژی از دست رفته با افزایش شعاع چرخش افزایش می‌یابد.
۲. با افزایش بسامد زاویه‌ای ω در θ و z ثابت، انرژی از دست رفته افزایش می‌یابد.
۳. یک مقدار بحرانی برای شعاع چرخش وجود دارد به طوری که $\omega l_c = 1$ و در $l = l_c$ انرژی از دست رفته به هیچ‌کدام از پارامترهای مسئله وابسته نیست.

برای واضح‌تر شدن اثر z روی انرژی از دست رفته، رفتار نسبت شعاع چرخش متناظر با مقادیر مختلف z را بر حسب انرژی از دست رفته بررسی کرده‌ایم. شکل ۸-۱ این موضوع را نشان می‌دهد. در این شکل نسبت $\frac{l_3}{l_2}$ بر حسب انرژی از دست رفته برای مقادیر مختلف θ رسم شده است. هر شکل برای



شکل ۷-۱: انرژی از دست رفته برحسب شعاع چرخش برای مقادیر مختلف θ ، ω و z . ردیف اول: در این ردیف پارامتر $z = 2$ و مقدار θ از چپ به راست به ترتیب $0, d/2, 3d/4$ می‌باشد. همچنین در هر شکل منحنی‌ها از چپ به راست به ترتیب به ازای $\omega = 0.05, 0.5, 5$ رسم شده‌اند. ردیف دوم: در این ردیف $z = 2$ و از چپ به راست به ترتیب $\omega = 0.05, 0.5, 5$ رسم شده‌اند. در این ردیف و در هر شکل، منحنی‌ها از چپ به راست به ترتیب به ازای $\theta = 0, d/2, 3d/4$ رسم شده‌اند. ردیف سوم: در این ردیف برای همه شکل‌ها مقدار $\theta = d/2$ ثابت بوده و از چپ به راست به ترتیب $\omega = 0.05, 0.5, 5$ متغیر بوده و در هر شکل، منحنی‌ها به ترتیب از چپ به راست متناظر با $z = 2, 3$ هستند.

مقدار خاصی از بسامد زاویه‌ای رسم شده است. نقطه تلاقی منحنی‌ها در هر دو شکل، نقطه‌ای است که در آن $\Pi\omega = 1$ بوده و متناظر با $l = l_c$ می‌باشد که انرژی از دست رفته در آن نقطه به هیچکدام از پارامترها بستگی ندارد. در محدوده $\Pi\omega < 1$ با افزایش θ نسبت $\frac{l_3}{l_2}$ افزایش یافته و این روند در محدوده $\Pi\omega > 1$ برعکس می‌شود.



شکل ۸-۱: رفتار $\frac{l_{z=3}}{l_{z=2}}$ بر حسب انرژی از دست رفته برای مقادیر مختلف θ . شکل سمت راست برای $\omega = 0.5$ و شکل سمت چپ متناظر با $\omega = 0.05$ هستند.

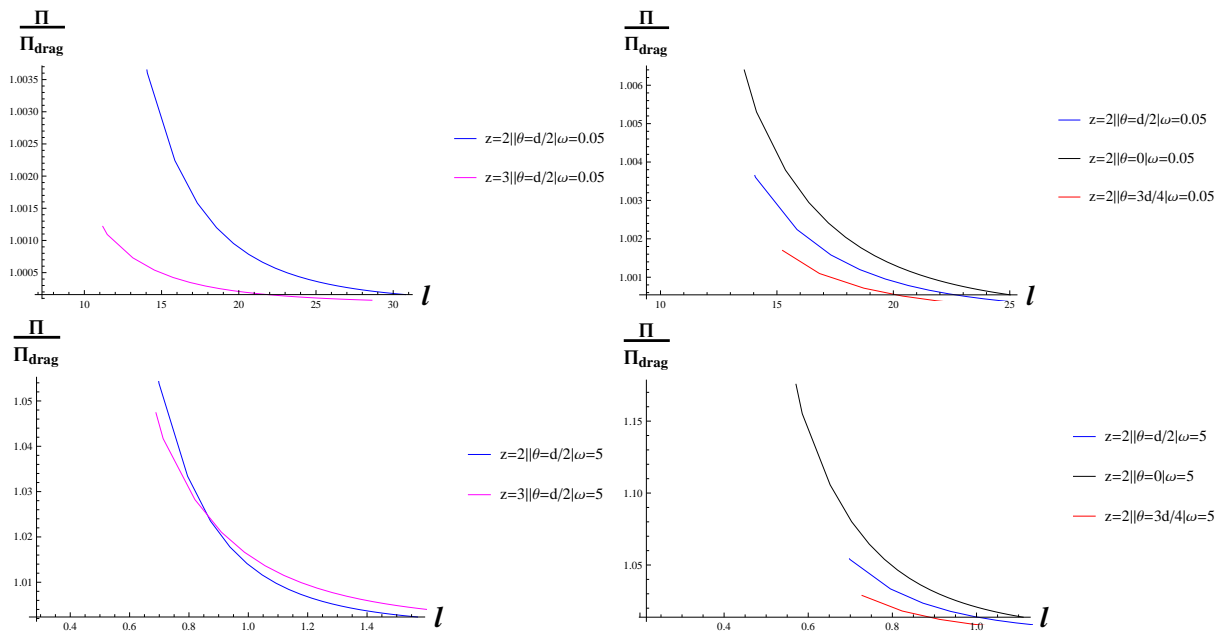
انرژی از دست رفته ذره چرخان از طریق نیروی کششی

برای بدست آوردن نیروی کششی، باید یک ریسمان باز را در پس زمینه (۶-۱) بررسی کرد. انرژی از دست رفته توسط نیروی کششی در پس زمینه غیر نسبیتی در مراجع [۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷] بررسی شده و نشان داده شده است که حتی در دمای غیر صفر، انرژی از دست رفته توسط نیروی کششی صفر نیست و از رابطه زیر بدست می آید:

$$2\pi\alpha' \frac{dE}{dt}_{drag} \equiv \Pi_{drag} = v \frac{2d-2\theta}{d-z-d} + 2, \quad (16-1)$$

که در آن v سرعت خطی ذره چرخان است. انتظار می رود در حد $\omega \rightarrow 0$ سهم نیروی کششی در انرژی از دست رفته کل، بیشتر و بیشتر شود. برای بررسی این موضوع، نسبت انرژی از دست رفته کل به انرژی از دست رفته توسط نیروی کششی را بر حسب شعاع چرخش و مقادیر مختلف θ ، z محاسبه کرده ایم. شکل ۹-۱ نتایج این بررسی را نشان می دهد. در ردیف بالا که به ازای بسامد زاویه ای کوچک

$\omega = 0.05$ رسم شده است، نسبت مذکور بسیار به یک نزدیک بوده که نشان دهنده سهم بالای نیروی کششی در انرژی از دست رفته است. همچنین مشاهده شده است که در یک شعاع l و بسامد زاویه‌ای ثابت، با افزایش θ سهم نیروی کششی کاهش می‌یابد. همچنین یک مقدار خاص برای شعاع l_s مشاهده شده است که سهم نیروی کششی در محدوده $l < l_s$ با افزایش z کاهش یافته و برای محدوده $l > l_s$ این ترتیب معکوس می‌شود.



شکل ۱-۹: نسبت انرژی از دست رفته کل به انرژی از دست رفته توسط نیروی کششی بر حسب شعاع چرخش برای مقادیر مختلف θ ، z و ω .

انرژی از دست رفته ذره چرخان از طریق تابش

انرژی از دست رفته برای یک ذره چرخان در نظریه نسبیتی از طریق تابش از رابطه زیر بدست می‌آید

:[۵۸]

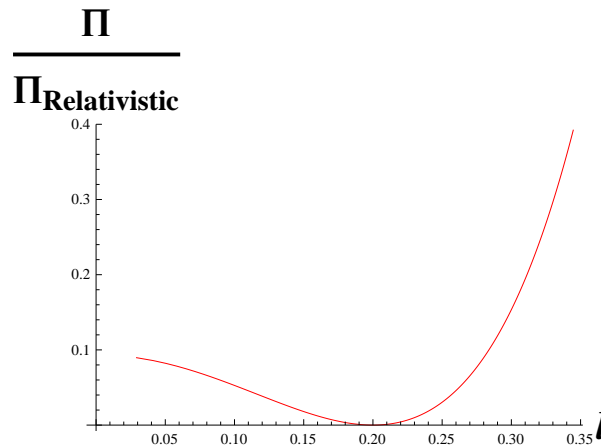
$$\frac{dE}{dt}_{Relativistic} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{a^2}{(1-v^2)^2} \quad (17-1)$$

در این بخش قصد داریم سهم تابش در انرژی از دست رفته در یک نظریه غیر نسبیتی را با یک نظریه نسبیتی مقایسه کنیم. برای این منظور نسبت انرژی از دست رفته کل به سهم تابش نسبیتی

را $\frac{\Pi}{\Pi_{Relativistic}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\Pi}{\Pi_{Relativistic}} = \frac{\Pi}{v^2 \omega} (1-v^2)^2. \quad (18-1)$$

شکل ۱۰-۱ رفتار این نسبت را بر حسب شعاع چرخش l و به ازای بسامد زاویه‌ای $\omega = 5$ نشان می‌دهد. در سرعت‌های کم، سهم تابش در نظریه‌های غیر نسبیتی کمتر از تابش نسبیتی است. همانطور که از رابطه (۱۸-۱) انتظار می‌رود، در نقطه خاص $v = l\omega = 1$ نسبت مذکور صفر می‌شود.



شکل ۱۰-۱: نسبت انرژی از دست رفته کل غیر نسبیتی به سهم تابش نسبیتی بر حسب شعاع چرخش. این شکل برای $\omega = 5$ رسم شده است.

۲-۶-۱ انرژی از دست رفته در دمای محدود

در بخش قبل انرژی از دست رفته یک ذره چرخان در یک نظریه غیر نسبیتی در دمای صفر را بررسی کردیم. در این بخش با تعمیم مسئله به دمای محدود انرژی از دست رفته و رفتار آن را مطالعه می‌کنیم. بررسی مسئله در دمای محدود معادل با تشکیل یک سیاه‌چاله در حجم است. بنابراین دوگان گرانشی مسئله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$ds^2 = \left(\frac{u}{u_F}\right)^{\frac{2\theta}{d}} \left(-u^{-2z} f(u) dt^2 + \frac{du^2}{u^2 f(u)} + \frac{d\vec{x}^2}{u^2} \right), \quad f(u) = 1 - \left(\frac{u}{u_h}\right)^{z+d-\theta}. \quad (19-1)$$

مانند حالت دمای صفر، مرز در $u = 0$ واقع شده و $u = u_h$ مکان افق را نشان می‌دهد که از حل معادله $f(u_h) = 0$ بدست می‌آید. همچنین در رابطه (۱۹-۱)، u_F یک مقیاس دینامیکی است که گرانش فقط در محدوده $u > u_F$ تعریف می‌شود. با مقیاس بندی متریک (۱۹-۱) بر حسب u_F دما به صورت $T = \frac{d+z-\theta}{4\pi u_h^z}$ تعریف می‌شود.

همانند حالت دمای صفر، با استفاده از کنش نامبو-گوتو و جهان سطح حدسی (۹-۱)، لاگرانژی و

معادله حرکت را بدست می‌آوریم. لاگرانژی به صورت

$$\mathcal{L} = u^{\frac{2\theta}{d}-1-z} \sqrt{(f(u) - \rho^2 \omega^2 u^{2(z-1)}) \left(\frac{1}{f(u)} + \rho'^2 \right) + \rho^2 \phi'^2 f(u)}, \quad (20-1)$$

و ثابت حرکت نیز به شکل

$$\phi'^2 = \Pi^2 \frac{\left(\frac{-f(u)}{u^{2z}} + \frac{\rho^2 \omega^2}{u^2} \right) \left(\frac{1}{u^2 f(u)} + \frac{\rho'^2}{u^2} \right)}{\left(\frac{-\rho(u)^2 f(u)}{u^{2+2z}} \right) \left(-\rho(u)^2 f(u) u^{\frac{4\theta}{d}-2z-2} + \Pi^2 \right)} \quad (21-1)$$

خواهند بود. رابطه (۲۰-۱) به ازای $f(u) = 1$ به رابطه (۱۱-۱) تبدیل خواهد شد. افق جهان

سطح u_t و مقدار شعاع ریسمان در این نقطه نیز از حل دو معادله زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{-f(u_t)}{u_t^{2z}} + \frac{\rho_t^2 \omega^2}{u_t^2} = 0, \quad -u_t^{\frac{4\theta}{d}-2z-2} \rho(u_t)^2 f(u_t) + \Pi^2 = 0. \quad (22-1)$$

با استفاده از رابطه (21-1) می‌توان معادله حرکت برای $\rho(u)$ را بر حسب ثابت حرکت Π به صورت

زیر بدست آورد:

$$\rho''(u) + \frac{u^{\frac{4\theta}{d}-1} \rho(u) (-2du + \rho(u) (-2f(u)(d+dz-2\theta) + du f'(u)) \rho'(u) (1+f(u)\rho'(u)^2)}{2d\rho(u) (-\Pi^2 u^{2+2z} + u^{\frac{4\theta}{d}} f(u)\rho(u)^2)} + \frac{2u^3 + \rho'(u) (u^3 \rho(u) h'(u) + 2u^3 f(u) \rho'(u) + u^{2z} \omega^2 \rho(u)^3 (2-2z+2f(u)-2zf(u)+u f'(u)) \rho'(u)^2)}{2u\rho(u) (u^2 f(u) - u^{2z} \omega^2 \rho(u)^2)} = 0. \quad (23-1)$$

رابطه (23-1) یک رابطه عمومی برای معادله حرکت یک ذره چرخان در یک نظریه غیر نسبیتی با

مقادیر مختلف (T, θ, z, d) است. با انتخاب مقادیر $(d=3, \theta=0, z=1, f(u)=1)$ به معادله حرکت

ذره چرخان در نظریه نسبیتی ابر یانگ-میلز برای دمای صفر:

$$\rho''(u) + \frac{\rho(u)(1+\rho'(u)^2)(u+2\rho(u)\rho'(u))}{u(\Pi^2 u^4 - \rho(u)^2)} + \frac{1+\rho'(u)^2}{\rho(u)(1-\omega^2 \rho(u)^2)} = 0, \quad (24-1)$$

و با انتخاب $(d=3, \theta=0, z=1)$ برای دمای محدود می‌رسیم [49]:

$$\rho''(u) + \frac{\rho(u) (1+f(u)\rho'(u)^2) (4f(u)\rho(u)\rho'(u) + u(2-\rho(u)f(u)\rho'(u)))}{2u(-\Pi^2 u^4 + f(u)\rho(u)^2)} + \frac{2+\rho(u)f'(u)\rho'(u) + 2f(u)\rho'(u)^2 + \omega^2 \rho(u)^3 f'(u)\rho'(u)^3}{2\rho(u)(f(u) - \rho(u)^2 \omega^2)} = 0. \quad (25-1)$$

برای حل معادله حرکت به دو شرط مرزی نیاز داریم. شرط مرزی اول همان مقادیر خاص (ρ_t, u_t)

هستند و شرط مرزی دوم مقدار ρ'_t است که مشابه آنچه در مرجع [49] آمده است از بسط تیلور معادله

حرکت حول $u = u_t$ بدست می‌آید. با بسط دادن معادله حرکت به رابطه زیر برای ρ'_t می‌رسیم:

$$-2\sqrt{f(u_t)}u_t^z(d-\theta)\omega + 2f(u_t)^{\frac{3}{2}}u_t^z(d-\theta)\omega\rho'(u_t)^2 + \rho'(u_t)(\theta f(u_t)(f'(u_t)u_t - 4f(u_t)(z-1)) + d(-zu_t f(u_t)f'(u_t) + 2f(u_t)^2(z^2-1) + 2u_t^{2z}\omega^2) = 0.$$

(۲۶-۱)

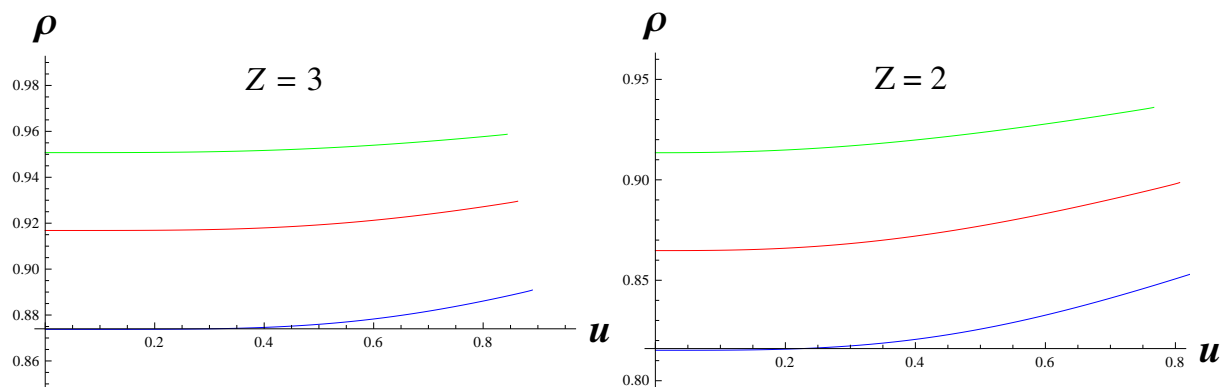
با بدست آوردن شرایط مرزی و حل معادله حرکت، رفتار شعاع ریسمان بر حسب بعد هولوگرام

استخراج می‌شود. شکل ۱-۱۱ این رفتار را برای مقادیر مختلف θ و z و $\omega = \Pi = 1$ نشان می‌دهد. در

هر شکل منحنی‌ها از بالا به پایین به ترتیب متناظر با مقادیر $\theta = \frac{3d}{4}, \frac{d}{2}, 0$ می‌باشند. در z و u ثابت

با افزایش θ شعاع ریسمان و شعاع چرخش ذره، $l \equiv \rho(0)$ ، افزایش می‌یابد. همچنین در θ و ω ثابت، با

افزایش z شعاع چرخش ذره افزایش می‌یابد.



شکل ۱-۱۱: شعاع ریسمان بر حسب بعد هولوگرام در دمای محدود به ازای مقادیر مختلف θ ، z . در این شکل مقادیر

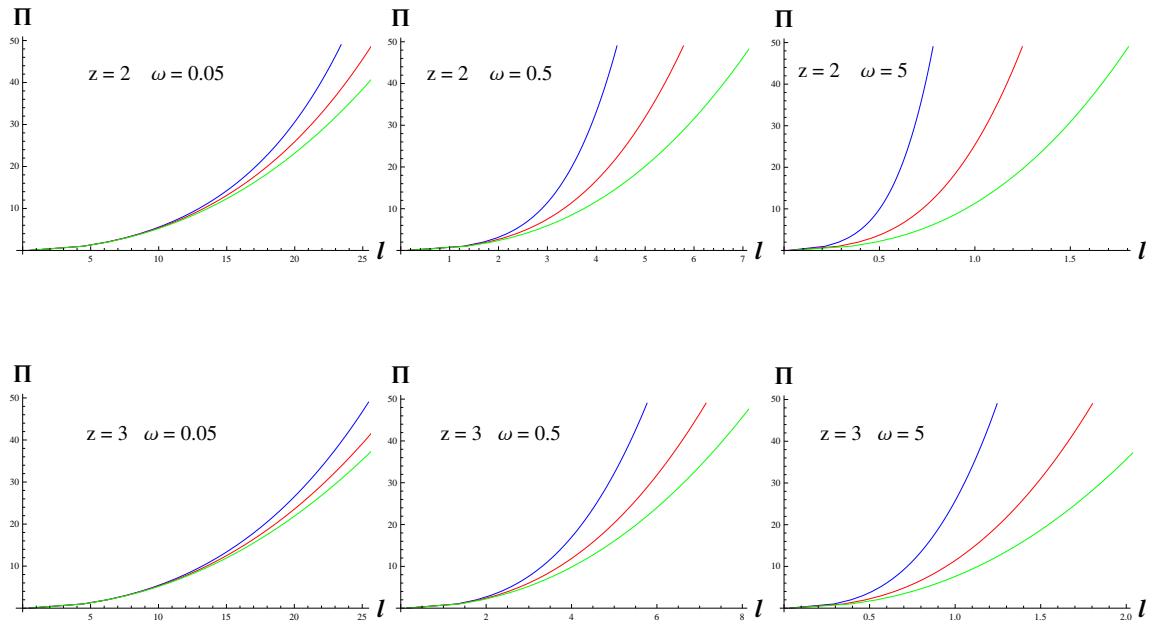
$\omega = \Pi = 1$ انتخاب شده‌اند. در هر شکل منحنی‌ها به ترتیب از بالا به پایین متناظر با مقادیر $\theta = \frac{3d}{4}, \frac{d}{2}, 0$ می‌باشند.

مشابه حالت قبل، انرژی از دست رفته را محاسبه می‌کنیم. شکل ۱-۱۲ رفتار انرژی از دست رفته

ذره چرخان در دمای محدود را بر حسب شعاع چرخش ذره چرخان، به ازای مقادیر مختلف θ ، z و ω

نشان می‌دهد.

به طور کلی، انرژی از دست رفته با افزایش شعاع چرخش، بیشتر می‌شود. همان‌طور که در شکل می‌بینیم، در یک مقدار ثابت برای انرژی از دست رفته Π ، با افزایش بسامد زاویه‌ای ω شعاع چرخش l کاهش می‌یابد.



شکل ۱-۱۲: انرژی از دست رفته بر حسب شعاع چرخش به ازای مقادیر مختلف θ ، z و ω در دمای محدود.

در شکل ۱-۱۲، منحنی‌ها از بالا به پایین، به ترتیب متناظر با مقادیر $\theta = 0, d/2, 3d/4$ می‌باشند. بنابراین در یک شعاع و بسامد زاویه‌ای ثابت، با افزایش θ انرژی از دست رفته کاهش می‌یابد. همچنین در شعاع چرخش l ثابت، افزایش مقدار z منجر به کاهش انرژی از دست رفته می‌شود. به طور خلاصه می‌توان رفتار انرژی از دست رفته در دمای محدود را به صورت موارد زیر بیان کرد:

۱. مشابه حالت دمای صفر، انرژی از دست رفته با افزایش شعاع چرخش l افزایش می‌یابد.

۲. افزایش z و θ در بسامد زاویه‌ای و شعاع چرخش ثابت، منجر به کاهش انرژی از دست رفته

می‌شوند.

۳. در رفتار انرژی از دست رفته در دمای محدود، شعاع بحرانی l_c وجود ندارد.

انتظار داریم، ذره‌ای که در یک نظریه میدان جفت شده قوی در دمای محدود تعریف می‌شود، تحت تاثیر نیروی کششی خطی قرار بگیرد. برای مشاهده محاسبات مربوط به نیروی کششی خطی مراجع [۵۲، ۵۳] را ببینید.

بر اساس آنچه که در مرجع [۵۳] آمده است، آهنگ انرژی از دست رفته یک ذره سنگین به صورت

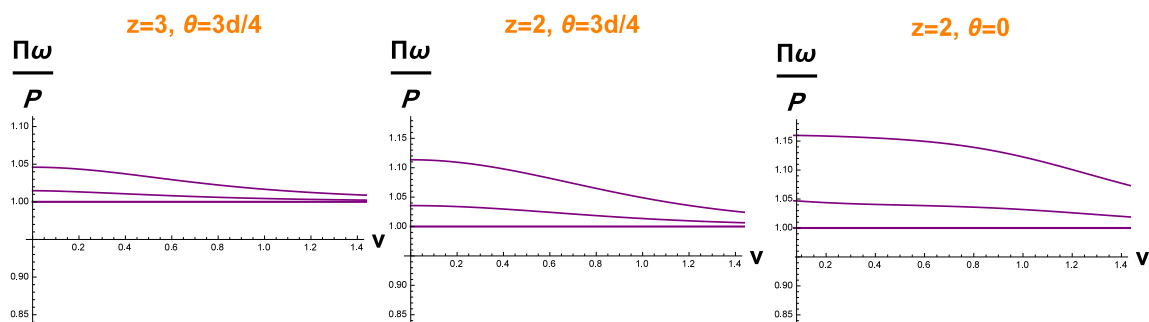
$$P \equiv 2\pi\alpha' \frac{dE}{dt} = v^2 u_c^{-2+\frac{2\theta}{d}}, \quad (27-1)$$

بیان می‌شود. که در آن u_c از حل معادله $f(u_c)u_c^{-2z+2} - v^2 = 0$ بدست می‌آید. شکل ۱-۱۳

رفتار نسبت انرژی از دست رفته کل ذره چرخان به نیروی کششی خطی بر حسب سرعت خطی را در دمای محدود نشان می‌دهد. در هر شکل منحنی‌ها از بالا به پایین به ترتیب متناظر با مقادیر $\omega = 1, 0.5, 0.05$ می‌باشند. همانطور که در شکل دیده می‌شود، با افزایش بسامد زاویه‌ای در z و θ ثابت سهم نیروی کششی در انرژی کل از دست رفته کمتر می‌شود. همچنین در z و ω ثابت، افزایش θ باعث کاهش سهم نیروی کششی می‌شود. در θ و ω ثابت، افزایش z نیز منجر به کاهش سهم نیروی کششی می‌شود.

۳-۶-۱ جمع‌بندی

در این فصل، رفتار انرژی از دست رفته ذره چرخان در نظریه غیر نسبیتی در دمای صفر و دمای محدود، و همچنین بررسی سهم نیروی کششی و تابش در انرژی از دست رفته بررسی شد. در مجموع، نتایج این مطالعه را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد:



شکل ۱-۱۳: رفتار نسبت انرژی از دست رفته کل ذره چرخان به نیروی کششی خطی بر حسب سرعت خطی در دمای محدود در هر شکل منحنی‌ها از بالا به پایین به ترتیب متناظر با مقادیر $\omega = 1, 0.5, 0.05$ هستند..

۱. مانند حالت نسبیتی، انرژی از دست رفته هم در دمای صفر و هم در دمای محدود، با افزایش شعاع چرخش l_c انرژی از دست رفته افزایش می‌یابد.

۲. با افزایش بسامد زاویه‌ای ω کاهش می‌یابد.

۳. در دمای صفر، یک شعاع خاص l_c وجود دارد به طوری که $\omega l_c = 1$ و در این نقطه خاص، انرژی از دست رفته به هیچکدام از پارامترهای نظریه وابسته نیست.

۴. افزایش z و θ منجر به کاهش انرژی از دست رفته در دمای محدود می‌شوند.

همچنین در ادامه این مطالعه، می‌توان با واقعی‌تر کردن مسئله، انرژی از دست رفته کوآرک چرخان در جفت شدگی محدود را بررسی کرد. دوگان گرانشی مسئله در جفت شدگی محدود، اضافه کردن جملات مشتقات بالاتر متریک در کنش است. به عنوان یک مثال، بررسی اثر جملات گائوس-بونت در کنش بر انرژی از دست رفته کوآرک چرخان مورد علاقه است.

فصل ۲

هولوگرافی دینامیک

سیستم‌های غیرتعادلی

مطالعه فیزیک سیستم‌های جفت شده قوی در نظریه میدان به علت بزرگ بودن ثابت جفت شدگی نظریه و عدم امکان استفاده از بسط اختلالی ممکن نیست. همچنین بررسی تحول یک سیستم دور از تعادل به علت عدم امکان استفاده از ترمودینامیک تعادلی، دشواری خاص خود را دارد. در این بین، اگر مطالعه تحول و دینامیک یک سیستم جفت شده قوی و دور از تعادل مد نظر باشد، دشواری کار دو چندان می‌شود.

اصل هولوگرافی، امکان مطالعه سیستم‌های جفت شده قوی را با استفاده از دوگان گرانشی آن فراهم می‌کند. با وارد کردن تحول زمانی در طرف گرانش و تولید یک نظریه گرانش وابسته به زمان، می‌توان تحول یک سیستم جفت شده قوی دور از تعادل را بررسی کرد.

۱-۲ دوگان گرانشی سیستم جفت شده قوی تعادلی

بر اساس اصل هولوگرافی، هر نظریه میدان d بعدی با جفت شدگی قوی، با یک نظریه گرانش کلاسیک $d + 1$ بعدی دوگان است. با فرض اینکه نظریه میدان تحت گروه پوانکاره^۱ و مقیاس گذاری ناوردا باشد^۲ و همچنین با حفظ این تقارن‌ها در طرف گرانش، درمی‌یابیم که نظریه گرانش دوگان، بر روی پس زمینه پاد-دوسیته $d + 1$ بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2), \quad (1-2)$$

که در آن z بعد اضافه یا بعد هولوگرام و $z = 0$ مرز فضای پاد-دوسیته است. متریک (۱-۲) یک

^۱ Poincaré group

^۲ هر نظریه میدان همدیس، علاوه بر تقارن گروه پوانکاره و مقیاس گذاری، باید تحت تبدیلات خاص همدیس نیز ناوردا

باشد که مجموعاً به گروه همدیس موسوم است.

فضا زمان با تقارن بیشینه^۳ و شعاع خمیدگی^۴ R است. بنابراین، نظریه میدان d بعدی روی مرز فضای پاد-دوسیه $d + 1$ بعدی زندگی می‌کند.

رابطه (۱-۲)، پس زمینه نظریه گرانشی دوگان با نظریه میدان همدیس در دمای صفر^۵ را بیان می‌کند. اگر سیستمی که با نظریه میدان همدیس توصیف می‌شود، یک سیستم تعادلی باشد، به آن دما نسبت داده می‌شود. بنابراین توصیف هولوگرافی یک سیستم تعادلی مستلزم این است که اثر دما در طرف نظریه میدان در نظریه دوگان گرانشی اعمال شود. این اثر در پس زمینه نظریه گرانشی، خود را نشان می‌دهد و رابطه (۱-۲) را به صورت زیر تصحیح می‌کند:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left(-f(z) dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right), \quad (2-2)$$

که متریک یک سیاه‌شامه^۶ در زمینه پاد-دوسیه است که در آن $f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_h^4}$ می‌باشد. همچنین مکان افق سیاه‌شامه است که معکوس آن با دما در طرف نظریه میدان متناسب است $\frac{1}{z_h} \propto T$. در متریک (۲-۲) نیز مانند (۱-۲)، $z = 0$ مرز فضا است.

بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت دوگان گرانشی یک نظریه میدان همدیس d بعدی جفت شده‌ی قوی تعادلی با دمای محدود، یک نظریه گرانشی $d + 1$ بعدی است که روی زمینه سیاه‌شامه پاد-دوسیه تعریف شده است.

این مطلب را به زبان نمودار پنروز^۷ نیز می‌توان نشان داد. همان‌طور که در شکل ۱-۲ نشان داده

^۳Maximally symmetric

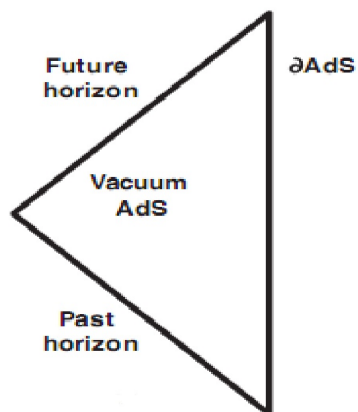
^۴Curvature radius

^۵Zero temperature

^۶Black brane

^۷Penrose diagram

شده است، نظریه میدان روی مرز فضای پاد-دوسیته زندگی می‌کند و متناظر با حالت تعادلی، در سمت گرانش افق سیاه‌شامه تولید شده است.



شکل ۲-۱: نمودار پنروز فضازمان خلاء پاد-دوسیته. نظریه میدان روی مرز قرار دارد و متناظر با حالت تعادل یک افق در سمت گرانش تولید شده است [۴].

۲-۲ دوگان گرانشی سیستم جفت شده‌ی قوی غیر تعادلی

بنابر قانون دوم ترمودینامیک، آنتروپی یک سیستم همواره در حال افزایش است تا به بیشترین مقدار ممکن خود برسد که زمانی است که سیستم در حال تعادل ترمودینامیکی است. بنابراین سیستم‌های غیرتعادلی همواره در حال تحول به سمت حالت تعادل هستند. به زبان هولوگرافی، متریک دوگان با یک سیستم دور از تعادل، یک متریک وابسته به زمان است که با گذشت زمان متحول شده و نهایتاً به متریک یک سیاه‌شامه که متناظر با حالت تعادلی سیستم است تبدیل می‌گردد. این دینامیک با معادلات اینشتین وابسته به زمان بیان می‌شود که در سال‌های اخیر به صورت تحلیلی، تقریبی و عددی حل شده است. برای یافتن مراجع مناسب در هر کدام از روش‌ها به مرجع [۴] مراجعه کنید. به دلیل پیچیدگی معادلات اینشتین وابسته به زمان، راهبرد عددی حل این معادلات در سال‌های اخیر مورد

توجه قرار گرفته است.

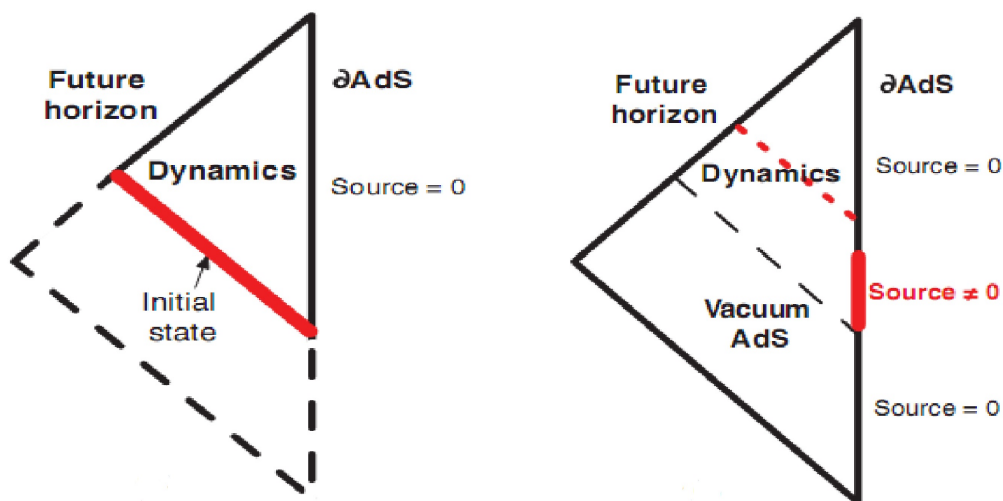
همانطور که پیش‌تر بیان شد، پلاسمای کوارک-گلوئون که از برخورد یونهای سنگین نسبیتی تولید می‌شود یکی از مهمترین مثال‌های سیستم جفت شده‌ی قوی غیرتعادلی است که با استفاده از هولوگرافی و حل عددی معادلات اینشتین می‌توان به مطالعه آن پرداخت. لحظات اولیه پس از برخورد یونهای سنگین نسبیتی، سیستم بسیار دور از تعادل است که بعد از گذشت زمانی در حدود $1fm/c$ به یک سیستم جفت شده قوی که مانند یک سیال ایده‌آل رفتار می‌کند، تبدیل می‌شود.

حالت غیر تعادلی ابتدایی یک سیستم می‌تواند معلول اثر یک عملگر روی حالت پایه سیستم با یک منبع خارجی و یا اعمال شرایط اولیه روی سیستم باشد.

در دیدگاه اول، سیستم ابتدا در حالت پایه خود قرار دارد، سپس یک منبع روشن می‌شود که اثر این منبع، گذار سیستم از حالت پایه به حالت برانگیخته است. پس از گذشت مدتی منبع خارجی خاموش شده و سیستم به حال خود رها می‌شود تا تحول زمانی داشته باشد. این تحول زمانی تا جایی ادامه می‌یابد که سیستم به حالت تعادلی می‌رسد. شکل ۲-۲ سمت راست نمودار پنهان این فرآیند را نشان می‌دهد.

منبع در نظریه پیمانهای متناظر با مقدار میدان ابرگرانشی روی مرز AdS است. با روشن شدن منبع، یک موج گرانشی به داخل حجم فرستاده می‌شود. چون موج با سرعت بیشتر از سرعت نور نمی‌تواند حرکت کند، بنابراین روی وضعیت زیر خط چین در شکل ۲-۲ که زاویه بیشتر از ۴۵ درجه دارند تاثیرگذار نیست. بنابراین ناحیه زیر خط چین که خلاء AdS را نشان می‌دهد، متناظر با نظریه میدان همدیس در طرف پیمانها است.

همانطوری که در نظریه پیمانهای انتظار داریم که یک سیستم برهمکنشی با چگالی انرژی محدود نهایتاً به تعادل گرمایی برسد، در سمت گرانش نیز این اتفاق معادل تشکیل یک افق است.



شکل ۲-۲: سمت راست: نمودار پنروز فضا زمان تولید شده توسط منبع خارجی. قسمت قرمز رنگ روی مرز جایی است که منبع روشن است. سمت چپ: فضا زمان مربوط به تحول یک حالت اولیه که در شرایط اولیه و شرایط مرز سیستم صدق می‌کند. در این وضعیت برای ما مهم نیست که سیستم چگونه به حالت خط قرمز یعنی وضعیت اولیه رسیده است. خط قرمز در این شکل که نشان دهنده وضعیت اولیه است وضعیت مشابه خط چین قرمز در شکل سمت راست است [۴].

در دیدگاه اول، اطلاعات مربوط به بخش دینامیک - از قبیل متریک و مقدار میدانهای ابرگرانشی - با داشتن اطلاعات منبع قابل استخراج می‌باشد. با دانستن اطلاعات منبع در واقع وضعیت خط چین در شکل ۲-۲ سمت راست معلوم است و با حل عددی معادلات اینشتین که در واقع معادلات تحول حاکم بر سیستم هستند، وضعیت سیستم در حالت تعادلی و در هر زمان دلخواه مشخص خواهد شد. شکل ۲-۲ سمت چپ، نمودار پنروز مربوط به دیدگاه دوم در تولید حالت اولیه غیر تعادلی را نشان می‌دهد. در این حالت چگونگی رسیدن سیستم به حالت اولیه غیر تعادلی - که در شکل با خط قرمز نشان داده شده است - اهمیتی ندارد. تنها عامل مهم این است که متریک و میدانهای ابرگرانشی در این وضعیت در شرایط اولیه سیستم و در شرایط مرزی نزدیک مرز AdS صدق کنند. در این حالت نیز با دانستن شرایط اولیه و با حل عددی معادلات اینشتین، تحول سیستم مورد بررسی قرار گرفته و حالت تعادلی مشخص می‌گردد.

۳-۲ معادلات تحول دوگان گرانشی سیستم غیر تعادلی

۱-۳-۲ معادلات اینشتین

همانطور که پیش تر بیان شد، دینامیک سیستم غیر تعادلی به زبان هولوغرافی با معادلات اینشتین وابسته به زمان توصیف می شود. واضح است که به تعداد مولفه های مستقل متریک، معادله دیفرانسیل داریم که بعضی از آنها معادلات تحول دینامیکی^۸ و برخی دیگر معادلات قیدی^۹ هستند. معادله اینشتین با حضور ثابت کیهان شناسی^{۱۰} به صورت زیر است:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (۳-۲)$$

با استفاده از روابط $g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R$ و $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = d + 1$ به رابطه ای بین ثابت کیهان شناسی و اسکالر

ریچی^{۱۱} می رسیم:

$$R = 2\frac{d+1}{d-1}\Lambda, \quad (۴-۲)$$

که در آن d بعد نظریه میدان دوگان می باشد و همچنین با قرار دادن (۴-۲) در (۳-۲) داریم:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \frac{2}{d-1}, \quad (۵-۲)$$

^۸Dynamical evolution equations

^۹Constraints equations

^{۱۰}Cosmological constant

^{۱۱}Ricci scalar

و سرانجام با استفاده از تعریف تانسور و اسکالر ریچی برای متریک (۲-۸) خواهیم داشت:

$$\Lambda = -\frac{1}{2} \frac{d(d-1)}{L^2}, \quad (۲-۶)$$

که در آن، L ، شعاع خمیدگی فضای AdS است^{۱۲}. شکل نهایی معادلات اینشتین به صورت زیر خواهد شد:

$$R_{\mu\nu} + dg_{\mu\nu} = 0. \quad (۲-۷)$$

۲-۳-۲ متریک حدسی

گام اول در به دست آوردن معادلات حرکت در دوگان گرانشی سیستم، حدس زدن یک متریک وابسته به زمان است که با میل کردن زمان به بی‌نهایت به متریک یک سیاه‌چاله تبدیل شود. علاوه بر آن، متریک حدسی^{۱۳} باید تحت وابریختی^{۱۴} ناوردا بوده و تمام دامنه‌ی مورد نظر را نیز پوشش دهد. به دلیل وجود تکینگی مختصات^{۱۵} در متریک سیاه‌چاله در مختصات معمولی، متریک مطلوب در مختصات ادینگتون-فینکلشتاین تعمیم یافته^{۱۶} به شکل زیر نوشته می‌شود [۵۹]:

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} g_{\mu\nu}(x, r) dx^\mu dx^\nu - 2\omega_\mu dx^\mu dr, \quad (۲-۸)$$

^{۱۲} غالباً مقدار L را برابر با یک در نظر می‌گیریم.

^{۱۳} Ansatz

^{۱۴} Diffeomorphism

^{۱۵} Coordinate singularity

^{۱۶} Generalized Eddington-Finkelstein coordinate

که در آن، r مختصات شعاعی حجم^{۱۷} یا همان بعد هولوگرام^{۱۸} است (مرز در $r = \infty$ قرار دارد).

$x^\mu = (t, \vec{x})$ مختصات d بعدی مرز و $\tilde{\omega} = \omega_\mu dx^\mu$ مستقل از r و زمان گونه است ($\tilde{\omega}^2 = -1$).

متریک معرفی شده تحت دو تبدیل وابرریختی زیر ناورداست:

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu \equiv f^\mu(x), \quad (9-2)$$

$$r \rightarrow \bar{r} \equiv r + \lambda(x). \quad (10-2)$$

با استفاده از آزادی (۹-۲) می‌توان یک انتخاب خاص برای $\tilde{\omega}$ به صورت $\omega_\mu = -\delta_\mu^0$ در نظر گرفت.

برای ادامه محاسبات بهتر است مولفه‌های متریک را به شکل زیر بازتعریف کنیم:

$$\frac{r^2}{L^2} g_{00}(x, r) \equiv -2A(x, r), \quad \frac{r^2}{L^2} g_{0i}(x, r) \equiv -F_i(x, r), \quad \frac{r^2}{L^2} g_{ij}(x, r) \equiv \Sigma(x, r)^2 \hat{g}_{ij}(x, r), \quad (11-2)$$

بنابراین متریک حدسی به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$ds^2 = \Sigma(x, r)^2 \hat{g}_{ij}(x, r) dx^i dx^j + 2dt \left(dr - A(x, r) dt - F_i(x, r) dx^i \right). \quad (12-2)$$

چنانچه خواهیم دید، استفاده از مختصات تعمیم یافته ادینگتون-فینکلشتاین و متریک (۱۲-۲)

باعث می‌شود که معادلات حرکت اینشتین به گونه‌ای مرتب شوند که با یک الگوریتم تو در تو قابل

حل باشند.

^{۱۷}Bulk

^{۱۸}Hologram dimension

۳-۳-۲ بازتعریف مشتق زمانی

همان‌طور که در شکل ۳-۲ نشان داده شده است، جهت تحول در حجم با جهت پیشرفت زمان واقعی متفاوت است. بنابراین باید مشتق زمانی طرف نظریه میدان، به شکل مناسبی به مشتق در جهت تحول متریک در طرف گرانج ترجمه شود. از دید هندسی، مشتق زمانی^{۱۹} در راستای تحول متریک حجم، به صورت جمع برداری مشتق زمانی در راستای ژئودزیهای خنثی بیرون رونده^{۲۰} و مشتق زمانی در راستای زمان واقعی و به صورت مشابه، مشتق‌های مختصات فضایی^{۲۱} به صورت زیر تعریف میشوند:

$$d_+ \equiv \partial_t + A(x)\partial_r, \quad d_i \equiv \partial_i + F_i(x)\partial_r, \quad (13-2)$$

۴-۳-۲ معادلات حرکت

با قرار دادن متریک (۱۲-۲) در رابطه (۷-۲) به معادله دیفرانسیل‌های مطلوب به شرح ذیل می‌رسیم^{۲۲}:

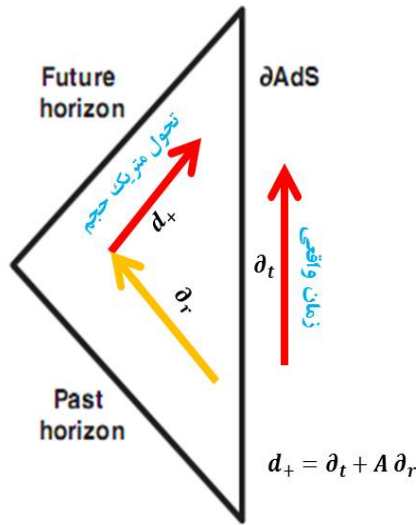
$$(\partial_r^2 + Q_\Sigma[\hat{g}])\Sigma = 0, \quad (14-2)$$

^{۱۹}Temporal derivative

^{۲۰}Outgoing null geodesics

^{۲۱}Spatial derivatives

^{۲۲}رسیدن به معادلات ذیل کار پر زحمتی است و از بسیاری روابط دیگر در مورد رد ماتریس‌ها نیز استفاده شده است که در مرجع [۵۹] می‌توانید آنها را ببینید. البته همان‌طور که در ادامه خواهید دید، برای مثال خاص با متریک مشخص، معادله دیفرانسیل‌های ذیل توسط بسته Headrick نرم افزار Mathematica بدست می‌آیند. این بسته در <http://people.brandeis.edu/headrick/Mathematica/index.html> با اسم diffgeo.m در دسترس است.



شکل ۲-۳: تعریف مشتق در جهت تحول متریک حجم به سمت متریک سیاه‌چاله. نظریه میدان روی مرز فضا-زمان پاد-دوسیه قرار دارد و حرکت روی مرز به سمت بالا در جهت زمان واقعی است.

$$(\delta_i^j \partial_r^2 + P_F[\hat{g}, \Sigma]_i^j \partial_r + Q_F[\hat{g}, \Sigma]_i^j) F_j = S_F[\hat{g}, \Sigma]_i, \quad (15-2)$$

$$\partial_r^2 A = S_A[\hat{g}, \Sigma, F, d_+ \Sigma, d_+ \hat{g}], \quad (16-2)$$

$$(\partial_r + Q_{d_+ \Sigma}[\Sigma]) d_+ \Sigma = S_{d_+ \Sigma}[\hat{g}, \Sigma, F], \quad (17-2)$$

$$(\delta_i^k \delta_j^l \partial_r + Q_{d_+ \hat{g}}[\hat{g}, \Sigma]_{ij}^{kl}) d_+ \hat{g}_{kl} = S_{d_+ \hat{g}}[\hat{g}, \Sigma, F, d_+ \Sigma]_{ij}, \quad (18-2)$$

$$(\delta_i^j \partial_r + Q_{d_+ F}[\hat{g}, \Sigma]_i^j) d_+ F_j = S_{d_+ F}[\hat{g}, \Sigma, F, d_+ \Sigma, d_+ \hat{g}, A]_i, \quad (19-2)$$

$$d_+(d_+\Sigma) = S_{d_+^2\Sigma}[\hat{g}, \Sigma, F, d_+\Sigma, d_+\hat{g}, A], \quad (20-2)$$

که در آن

$$Q_\Sigma[\hat{g}] \equiv \frac{1}{4(d-1)} \text{tr}(\hat{g}'^2),$$

$$P_F[\hat{g}, \Sigma]_i^j \equiv -G'^j_i + (d-1)(\Sigma'/\Sigma)\delta_i^j,$$

$$Q_F[\hat{g}, \Sigma]_i^j \equiv -G''^j_i + (G'^2)^j_i - (d-1)(\Sigma'/\Sigma)G'^j_i + \text{tr}(G'' - \frac{1}{2}G'^2)\delta_i^j,$$

$$Q_{d_+\Sigma}[\Sigma] \equiv (d-2)\Sigma'/\Sigma,$$

$$Q_{d_+\hat{g}}[\hat{g}, \Sigma]^{kl}_{ij} \equiv -G'^k_{(i}\delta_{j)}^l + \frac{1}{d-1}G'^{kl}G_{ij} + (2 + \frac{d-1}{2})(\Sigma'/\Sigma)(\delta_{(i}^k\delta_{j)}^l) - \frac{1}{d-1}G^{kl}G_{ij},$$

$$Q_{d_+F}[\hat{g}, \Sigma]_i^j \equiv -G'^j_i, \quad (21-2)$$

و سایر توابع از معادله اینشتین بدست می آیند. همچنین نماد m نشان دهنده مشتق گیری نسبت

به r است. با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل فوق، رفتار توابع متریک با زمان به دست می آید^{۲۳}.

^{۲۳}معادلات مذکور در کلی ترین حالت ممکن بدست آمده اند. در حالت خاص، بسته به تقارن های موجود در مسئله،

ممکن است تعداد معادلات کمتر و شکل آن ساده تر باشند.

۲-۳-۵ رفتار مرزی متریک و تانسور انرژی-تنش

بر اساس تناظر پیمانانه/گرانش^{۲۴}، یک تناظر بین عملگرهای موضعی^{۲۵} و ناوردا نسبت به پیمانانه^{۲۶} در نظریه میدان و میدان داخل حجم وجود دارد که به تناظر میدان/عملگر^{۲۷} معروف است. بر طبق این تناظر، چشمه‌ای که با هر عملگر موضعی در نظریه میدان جفت می‌شود، برابر با مقدار یک میدان متناظر گرانش روی مرز است. کمیت مورد علاقه در مورد سیستم‌های غیر تعادلی، تانسور انرژی-تنش^{۲۸} است که مقدار چشم‌داشتی آن متناظر با مقدار میدان متریک حجم روی مرز است. بنابراین بررسی رفتار متریک حجم نزدیک مرز از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۴]. به این منظور متریک حدس زده شده برای حجم را بر حسب توان‌های $\frac{1}{r}$ نزدیک مرز بسط می‌دهیم^{۲۹}:

$$g_{\mu\nu}(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{\mu\nu}^{(n)}(x) r^{-n}, \quad (22-2)$$

با قرار دادن بسط (۲۲-۲) در معادلات اینشتین و حل مرتبه به مرتبه، ضرایب بسط $g_{\mu\nu}^{(n)}(x)$ به دست خواهند آمد.

برای برقراری ارتباط بین مولفه‌های تانسور انرژی-تکانه و بسط نزدیک مرز متریک، به یک مشکل

^{۲۴}Gauge/gravity correspondence

^{۲۵}Local

^{۲۶}Gauge invariant

^{۲۷}Field/operator correspondence

^{۲۸}Stress-Energy tensor

^{۲۹}در مسائلی که در این رساله بررسی می‌شود، متریک مرز، تخت مینکوفسکی در نظر گرفته می‌شود. در صورتی که

متریک مرز تخت نباشد، برای ابعاد زوج، جملات لگاریتمی به صورت $g_{\mu\nu}^{(n)}(x) r^{-n} \ln(1/r)$ نیز در بسط نزدیک مرز ظاهر خواهند شد.

بر می‌خوریم. همان‌طور که از تناظر پیمانه/گرانج می‌دانیم، توابع پارش طرف نظریه میدان و گرانج با یکدیگر برابرند:

$$\left\langle e^{\int d^4x \phi(x^\mu) \mathcal{O}(x^\mu)} \right\rangle_{CFT} = \mathcal{Z}_{string} [\Phi|_{\partial AdS}(x)], \quad (23-2)$$

که در آن مقدار میدان متناظر با چشمه نظریه میدان $\phi(x^\mu)$ روی مرز است. در انتگرال سمت چپ (۲۳-۲) با واگرایی UV روبرو می‌شویم که متناظر با آن واگرایی IR در طرف گرانج می‌باشد. برای رهایی از این واگرایی و امکان ترجمه مولفه‌های تانسور انرژی-تنش به زبان ضرایب بسط مرزی میدان‌های متریک، از فرآیندی موسوم به بازبهنجارش هولوگرافی^{۳۰} که در مرجع [۶۲] تشریح شده است استفاده می‌کنیم.

بر اساس آنچه که در مرجع [۶۲] آمده است، برای بازبهنجارش هولوگرافی، ابتدا باید با یک تبدیل، از مختصات ادینگتون-فینکلشتاین به مختصات فرمن-گراهام^{۳۱} رفته و متریک حدسی را در این دستگاه به صورت

$$ds^2 = \frac{1}{\rho^2} (d\rho^2 + \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu), \quad (24-2)$$

بنویسیم که مرز در $\rho = 0$ واقع شده است^{۳۲}. اگر متریک مرز را تخت در نظر بگیریم، بسط نزدیک مرز متریک در این مختصات به صورت

^{۳۰} Holographic renormalization

^{۳۱} Fefferman-Graham

^{۳۲} جزئیات تبدیل مختصات ادینگتون-فینکلشتاین به فرمن-گراهام در مرجع [۱۷] آمده است.

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{g}_{\mu\nu}^{(n)}(x) \rho^n, \quad (25-2)$$

خواهد بود^{۳۳}.

در مرجع [۶۲] برای $d = 4$ مقدار چشم‌داشتی تانسور انرژی-تنش بر حسب ضرایب بسط مرزی توابع متریک در مختصات ففرمن-گراهام به شکل زیر ارائه شده است:

$$\langle T_{ij} \rangle = \frac{4}{16\pi G_5} \left(\tilde{g}_{ij}^{(4)} - \frac{1}{8} \tilde{g}_{ij}^{(0)} [(Tr(\tilde{g}^{(2)}))^2 - Tr(\tilde{g}^{(2)})^2] - \frac{1}{2} (\tilde{g}^{(2)})_{ij}^2 + \frac{1}{4} \tilde{g}_{ij}^{(2)} Tr \tilde{g}^{(2)} \right), \quad (26-2)$$

که در آن $\tilde{g}^{(2)}, \tilde{g}^{(0)}$ برای حالتی که متریک مرز تخت باشد برابر با صفر هستند. همچنین G_5 ثابت

گرانج پنج بعدی است که به شکل زیر می‌باشد [۴]:

$$G_5 = \frac{G_{10}}{\Omega_5 L^5} = \frac{G_{10}}{\pi^3 L^5} = \frac{\pi^3 L^3}{2 N_c^2}. \quad (27-2)$$

از آنجایی که ما مولفه‌های متریک را بر حسب توابع A, F, G, \hat{g} بازتعریف کردیم، هر کدام از توابع فوق را می‌توان به صورت بسطی بر حسب توانهای r نزدیک مرز نوشت. با قرار دادن بسط این توابع در معادله (۷-۲) و حل مرتبه به مرتبه معادلات، ضرایب بسط یکی پس از دیگری به دست خواهند آمد. پس از مرتب سازی، بسط نزدیک مرز توابع متریک را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$A = \frac{1}{2}(r + \lambda)^2 - \partial_t \lambda + a^{(d)} r^{2-d} + O(r^{1-d}),$$

^{۳۳} در صورتی که متریک مرز تخت نباشد، جملات لگاریتمی به صورت $\tilde{g}_{\mu\nu}^{(n)}(x) \rho^n \log(\rho)$ در بسط نزدیک مرز ظاهر خواهند شد. در این رساله همه جا متریک مرز، تخت در نظر گرفته شده است.

$$\Sigma = r + \lambda + O(r^{1-2d}),$$

$$E_i = -\partial_i \lambda + f_i^{(d)} r^{2-d} + O(r^{1-d}),$$

$$\hat{g}_{ij} = \delta_{ij} + \hat{g}_{ij}^{(d)} r^{-d} + O(r^{-1-d}),$$

$$d_+ \Sigma = \frac{1}{2}(r + \lambda)^2 + a^{(d)} r^{2-d} + O(r^{1-d}),$$

$$d_+ \hat{g}_{ij} = -\frac{d}{2} \hat{g}_{ij}^{(d)} r^{1-d} + O(r^{-d}). \quad (28-2)$$

در معادلات بالا $\lambda = \lambda(x)$ آزادی عمل در راستای بعد هولوگرام r است.

با استفاده از معادلات (26-2) و (28-2) برای $d = 4$ مولفه‌های تانسور انرژی-تنش به دست

خواهند آمد:

$$\langle T_{00} \rangle = -\frac{3}{4} a^{(4)}, \quad \langle T_{0i} \rangle = f_i^{(4)}, \quad \langle T_{ij} \rangle = \hat{g}_{ij}^{(4)} - \frac{1}{2} a^{(4)} \delta_{ij}. \quad (29-2)$$

بنابراین مولفه‌های تانسور انرژی-تنش نظریه میدان، چیزی جز ضرایب بسط نزدیک مرز توابع

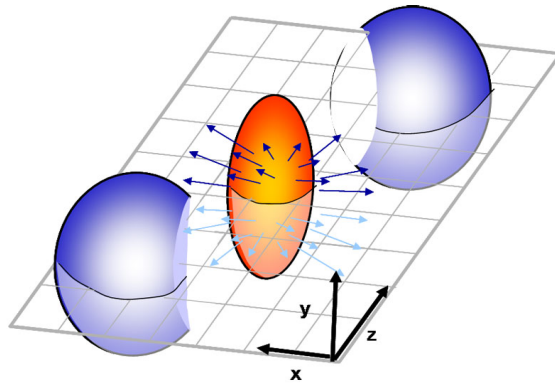
متریک نیستند و برای بدست آوردن رفتار مولفه‌های این تانسور فقط کافی است مقادیر $a^{(D)}$, $f_i^{(D)}$, $\hat{g}^{ij(D)}$

با زمان را بدست آوریم. در فصل بعد به تشریح راهبرد رسیدن به پاسخ نهایی خواهیم پرداخت.

۴-۲ همسانگردی پلاسمای کوارک-گلوئون همگن

همانطور که قبلا گفته شد، در اثر برخورد یونهای سنگین نسبیتی پلاسمای کوارک-گلوئون به جود

می‌آید.



شکل ۲-۴: برخورد یونهای نسبیتی

توزیع ابتدایی ذرات در این پلاسما به شدت ناهمسانگرد^{۳۴} بوده و از تابع زیر - که به شار بیضوی^{۳۵}

موسوم است - پیروی می کند [۴]:

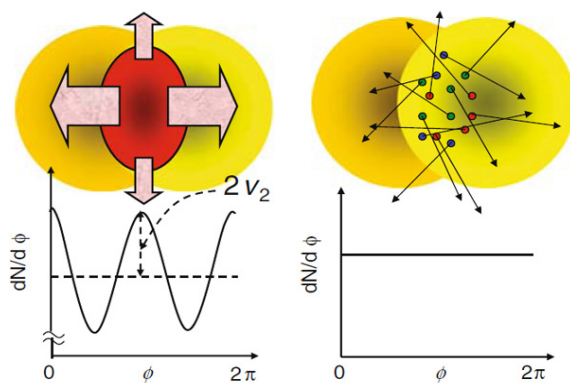
$$\frac{d\bar{N}}{d\phi} = \frac{\bar{N}}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n \cos[n(\phi - \Psi_n)] \right), \quad (۳۰-۲)$$

که در آن \bar{N} تعداد متوسط ذرات در هر رویداد، ϕ زاویه صفحه عرضی و \bar{v}_n ضریب شار ناهمسانگرد هستند. اگر رابطه (۳۰-۲) را تا $n = 2$ بنویسیم، ضریب \bar{v}_2 نشان دهنده ی ناهمسانگرد بودن توزیع پلاسما است.

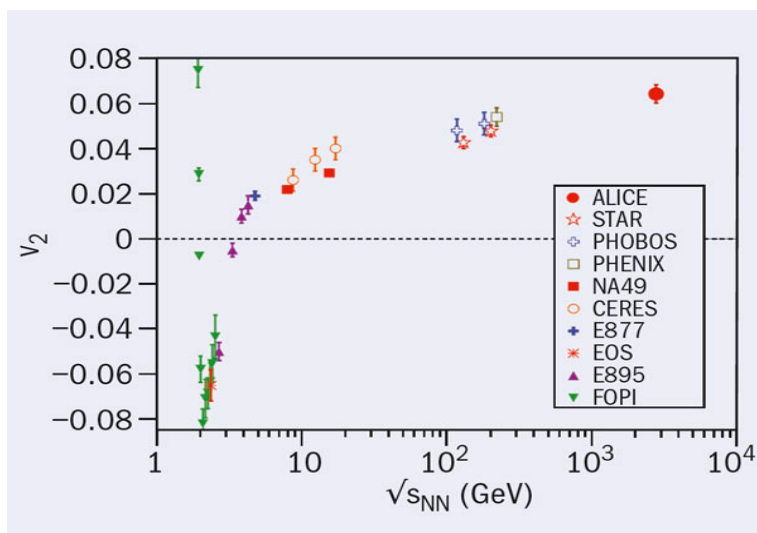
همانطور که در شکل ۲-۶ می بینید با افزایش انرژی برخورد سهم ضریب ناهمسانگردی \bar{v}_2 بیشتر شده و ناهمسانگردی در پلاسمای تولید شده در انرژی بالاتر بیشتر است.

^{۳۴}Anisotropic

^{۳۵}Elliptic flow



شکل ۲-۵: شار بیضوی پلاسما [۱۶]



شکل ۲-۶: رابطه \bar{v}_2 برحسب انرژی برخورد [۹]

بعد از مدت زمانی از مرتبه fm/c که به زمان همدمایی^{۳۶} یا زمان همسانگردی^{۳۷} معروف است، پلاسما در اثر سرد شدن و منبسط شدن همسانگرد می‌شود. استخراج رفتار مولفه‌های تانسور انرژی-تنش در طول این تحول بسیار با اهمیت است.

^{۳۶}Thermalization Time

^{۳۷}Isoropization Time

پس از سرد شدن و همسانگرد شدن، پلاسمای کوارک-گلوئون مانند یک سیال ایده‌آل نسبیتی رفتار می‌کند که به خاطر وکشسانی^{۳۸} کم، یک محیط جفت شده‌ی قوی است. از این رو حل مسئله و به دست آوردن تانسور انرژی-تنش به خاطر عدم استفاده از روش اختلالی غیر ممکن است. با تقریب خوبی می‌توان نظریه حاکم بر محیط پلازما یعنی QCD را با نظریه ابرتقارنی یانگ-میلز با چهار ابر تقارنی معادل گرفت. حال می‌توان با استفاده از دوگانی AdS/CFT یک دوگان گرانشی برای مسئله فوق ساخت و با استفاده از روش معرفی شده در فصل قبل مسئله را حل کرد.

۱-۴-۲ دوگان گرانشی و معادلات اینشتین

برای ساده سازی، فرض کنید تقارن سمتی داریم و توزیع ذرات در دو راستای عمود بر راستای برخورد، یکسان باشد. همچنین فرض کنید توزیع ذرات تحت انتقال در همه جهات ناورد باشد. در این شرایط، می‌توان حدس زد که تانسور انرژی-تنش قطری بوده و مولفه‌های دو راستای عمود بر راستای برخورد با یکدیگر برابرند:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{N_c^2}{2\pi^2} \mathbf{diag}[\mathcal{E}, \mathcal{P}_L(t), \mathcal{P}_T(t), \mathcal{P}_T(t)], \quad (۳۱-۲)$$

که در آن، N_c مرتبه گروه پیمانهای $SU(N_c)$ ، \mathcal{E} چگالی انرژی و $\mathcal{P}_L(t)$ و $\mathcal{P}_T(t)$ به ترتیب فشار در راستای برخورد و عمود بر راستای برخورد می‌باشند که بر اساس بدون رد بودن تانسور انرژی-تنش و تخت بودن متریک مرز، فشارهای طولی و عرضی را می‌توان بر حسب یک اختلاف فشار ناهمسانگردی به شکل زیر نوشت:

^{۳۸}Viscosity

$$\mathcal{P}_L(t) = \frac{1}{3}\mathcal{E} - \frac{2}{3}\Delta\mathcal{P}(t),$$

(۳۲-۲)

$$\mathcal{P}_T(t) = \frac{1}{3}\mathcal{E} + \frac{1}{3}\Delta\mathcal{P}(t).$$

با توجه به تقارن تانسور انرژی-تنش، مولفه‌های زمانی، طولی و عرضی متریک حجم دوگان باید

دینامیکی باشند بنابراین متریک حدسی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$ds^2 = 2dt dr - A(t, r)dt^2 + \Sigma(t, r)^2 e^{-2B(t, r)} dx_L^2 + \Sigma(t, r)^2 e^{B(t, r)} dx_T^2, \quad (۳۳-۲)$$

که در آن A, B, Σ توابع متریک وابسته به زمان و مختصات شعاعی r هستند. با توجه به رابطه

(۷-۲)، معادله اینشتین برای چهار بعد به شکل زیر در خواهد آمد:

$$R_{\mu\nu} + 4g_{\mu\nu} = 0. \quad (۳۴-۲)$$

حال توابع متریک A, B, Σ را نزدیک مرز بسط می‌دهیم:

$$A(t, r) = r^2(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)r^{-n}),$$

$$\Sigma(t, r) = r(1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t)r^{-n}), \quad (۳۵-۲)$$

$$B(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)r^{-n}.$$

با محاسبه تانسور ریچی و نوشتن معادلات اینشتین به ازای هر مولفه‌ی غیر صفر متریک، جایگذاری

بسط‌های (۳۵-۲) و حل مرتبه به مرتبه معادلات اینشتین، می‌توان ضرایب غیرصفر بسط‌های (۳۵-۲)

و نهایتاً شکل توابع متریک در نزدیکی مرز را بدست آورد [۷۴]:

$$A(t, r) = r^2 + \frac{a_4}{r^2} - \frac{2b_4(t)}{7r^6} + \dots,$$

$$B(t, r) = \frac{b_4(t)}{r^4} + \frac{\partial_t b_4(t)}{r^5} + \dots, \quad (۳۶-۲)$$

$$\Sigma(t, r) = r - \frac{b_4(t)^2}{7r^7} + \dots$$

با توجه به روابط (۲۹-۲) و (۳۶-۲) داریم:

$$\mathcal{E} = -\frac{3a_4}{4}, \quad \Delta\mathcal{P}(t) = 3b_4(t). \quad (۳۷-۲)$$

بنابراین حل مسئله به استخراج رفتار ضرایب بسط (۳۶-۲) با زمان محدود می‌شود. با استفاده از

تعریف مشتق زمانی، معادلات اینشتین به شکل زیر تبدیل می‌شوند:

$$\Sigma(d_+\Sigma)' + 2\Sigma'd_+\Sigma - 2\Sigma^2 = 0, \quad (۳۸-۲)$$

$$\Sigma(d_+B)' + \frac{3}{2}(\Sigma'd_+B + B'd_+\Sigma) = 0, \quad (۳۹-۲)$$

$$A'' + 3B'd_+B + 12\frac{\Sigma'd_+\Sigma}{\Sigma^2} = 0, \quad (۴۰-۲)$$

$$\Sigma'' + \frac{1}{2}B'^2\Sigma = 0, \quad (۴۱-۲)$$

$$d_+(d_+\Sigma) + \frac{1}{2}(d_+B^2\Sigma - A'd_+\Sigma) = 0, \quad (۴۲-۲)$$

که در آن $h' \equiv \partial_r h$ و $d_+h \equiv \partial_t h + \frac{A}{2}\partial_r h$ می‌باشند. معادلات فوق معادلات تحول و معادلات قیدی حاکم بر دینامیک پلاسمای کوارک-گلوئون همگن تولید شده است. با حل این دستگاه معادلات، توابع متریک A, Σ, B با زمان به دست می‌آیند. با توجه به بسط نزدیک مرز توابع مذکور و مشتق گیری مناسب از آن‌ها، ضرایب بسط و نهایتاً فشارهای طولی و عرضی و چگالی انرژی به دست خواهند آمد که در فصل بعد به تفصیل به آن خواهیم پرداخت.

فصل ۳

راهبرد حل عددی معادلات

اینشتین در زمینه مجانباً

پاد-دوسپته

در فصل قبل مقدماتی راجع به کاربرد هولوگرافی در مطالعه سیستم‌های جفت شده قوی غیرتعادلی بیان شد. در این دیدگاه، تحول زمانی فضا-زمان گرانشی دوگان با سیستم غیرتعادلی، با معادلات اینشتین وابسته به زمان توصیف می‌شود. در این فصل به بیان اجمالی راهبرد عددی برای حل معادلات تحول، بر مبنای روش ارائه شده در مرجع [۵۹] خواهیم پرداخت.

از آنجایی که مجموعه معادلات (۲-۱۴) تا (۲-۲۰) دستگاه معادلات جفت شده و وابسته به زمان می‌باشند، باید با تزریق شرط اولیه به این دستگاه معادلات و اعمال شرایط مرزی مناسب در هر برش زمانی به حل آن پرداخت. به طور کلی، میدان \hat{g} به عنوان شرط اولیه به سیستم داده می‌شود، سپس میدان‌های Σ, F, d_+F و $d_+\Sigma$ در هر برش زمانی برای کل بازه فضایی بدست می‌آیند. در نهایت با یافتن میدان A در هر گام زمانی و استفاده از تعریف مشتق‌های (۲-۱۳) مقادیر میدان‌های مذکور برای برش زمانی بعدی معلوم خواهد شد. با تکرار این روش تا زمان مورد نیاز، تحول زمانی میدان‌های متریک حجم و به تبع آن رفتار کمیت‌های متناظر در سمت نظریه میدان استخراج می‌شود. در ادامه، به بیان تفصیلی این روند خواهیم پرداخت.

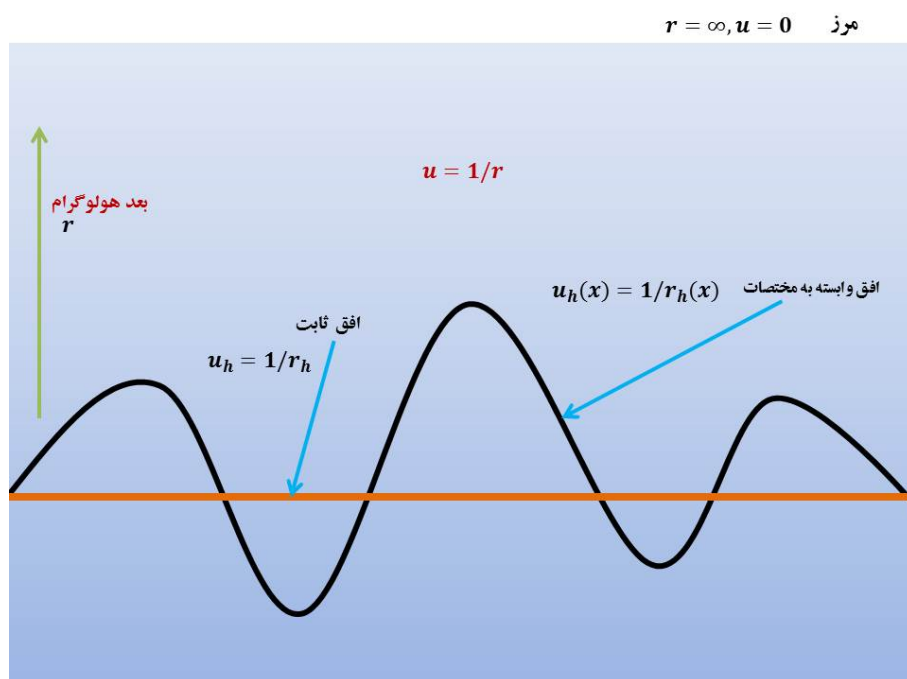
۱-۳ انتخاب پیمانه شعاعی و موقعیت افق

همان‌طور که در ابتدای فصل قبل بیان شد، متریک حدسی برای حجم دوگان، به گونه‌ای انتخاب شده است که تحت تبدیل پیمانه‌ای شعاعی (۲-۱۰) ناوردا باشد. در تبدیل (۲-۱۰) و همچنین در بسط نزدیک مرز توابع متریک (۲-۲۸)، تابع $\lambda(x)$ وجود دارد که باید به درستی انتخاب شود.

با توجه به رفتار مجانبی توابع متریک (۲-۲۸) و متریک وابسته به زمان حجم (۲-۱۲)، چنانچه $\lambda(x) = 0$ انتخاب شود، در نزدیکی مرز و در تمام محدوده (\vec{x}, t) تابع $\Sigma(x, r) = r$ خواهد شد. این موضوع منجر به تغییرات شدید مکان افق در گستره مختصات می‌شود. به عبارت دیگر مکان

شعاعی وابستگی شدیدی به (\vec{x}, t) خواهد داشت. شکل ۱-۳ این مطلب را در یک برش زمانی نشان می‌دهد [۵۹].

از آنجایی که موقعیت شعاعی افق به عنوان مرز محدوده محاسبات عددی قلمداد می‌شود، وابستگی موقعیت شعاعی افق به مختصات فضایی و زمان، به لحاظ تکنیکی برای انجام محاسبات عددی، مشکل ساز خواهد بود. بنابراین بهترین راه برای حل این مشکل این است که $\lambda(x)$ به گونه‌ای انتخاب شود که موقعیت شعاعی افق همواره ثابت بوده و به $x = (\vec{x}, t)$ وابسته نباشد. در این صورت دامنه محاسبات عددی به یک مستطیل ساده تبدیل خواهد شد. همچنین همان‌طور که در شکل ۱-۳ معلوم است، با تبدیل مختصات $u = 1/r$ دامنه انتگرال گیری از $[r_h, \infty]$ به $[0, u_h]$ تبدیل می‌شود که به لحاظ تکنیکی برای محاسبات عددی منطقی‌تر است.



شکل ۱-۳: با انتخاب پیمانه به گونه‌ای که موقعیت شعاعی افق نسبت به مختصات ثابت باشد، دامنه محاسبات عددی به یک مربع ساده تبدیل خواهد شد. همچنین با تبدیل $u = 1/r$ دامنه انتگرال گیری محدود می‌شود.

عدم وابستگی مکان شعاعی افق به مختصات، باعث صفر شدن واگرایی مجموعه ژئودزیک‌های خنثی

بیرون رونده می‌شود. با توجه به متریک (۱۲-۲) این موضوع به صورت قیدی روی مقدار میدان $d_+\Sigma$

روی افق به شکل زیر ظهور می‌کند [۵۹، ۶۰]:

$$d_+\Sigma|_{r_h} = -\frac{1}{d-1} \left(\nabla \cdot F + \frac{1}{4} \text{tr} G' F \cdot F \right). \quad (۱-۳)$$

رابطه (۱-۳) به همراه شرط ایستایی افق و معادلات (۱۴-۲) تا (۲۰-۲) به معادله دیفرانسیل خطی

مرتبه دو زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 A - \nabla A \cdot (F' - G' F) + \frac{1}{2} A [-R^{(d-1)} + 2\Lambda + \frac{1}{2} (F' - G' F) \cdot (F' - G' F) - \nabla \cdot (F' - G' F)] \\ & + \frac{1}{2} F \cdot F \left[+\frac{1}{2} \text{tr} (d_+ G)' - (\nabla \cdot F)' - F_{i;j} G'^{ji} - \frac{1}{4} (F \cdot F)' \text{tr} G' \right] \\ & + \frac{1}{4} (F_{i;j} - F_{j;i}) (F^{i;j} - F^{j;i}) \\ & - \frac{1}{4} [(d_+ G)^2] - (d_+ G)^{ji} F_{i;j} + F \cdot \nabla^2 F + \frac{1}{2} (F' - G' F) \cdot \nabla (F \cdot F)|_{r=r_h} = 0, \end{aligned} \quad (۲-۳)$$

که در آن اسکالر ریچی فضایی^۱ و $G \equiv \Sigma^2 \hat{g}$ است. روابط (۱-۳) و (۲-۳) به ترتیب

برای استخراج مقادیر میدان‌های $d_+\Sigma$ و A روی افق به عنوان شرایط مرزی برای حل معادلات حرکت

استفاده می‌شوند.

^۱ Spatial Ricci scalar

۲-۳ راهبرد انتگرال گیری و شرایط مرزی

مجموعه معادلات (۲-۱۴) تا (۲-۲۰) به گونه‌ای سازمان دهی شده‌اند که با یک الگوریتم تو در تو^۲ به شرح ذیل قابل حل است.

۱. مقادیر تابع $\hat{g}_{ij}(\vec{x}, r)$ و $\lambda(\vec{x})$ در برش زمانی ابتدایی $t = t_0$ به عنوان شرایط اولیه داده می‌شوند.

۲. با حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۲-۱۴) مقدار Σ در برش زمانی اول را بدست می‌آوریم. ثابت‌های انتگرال گیری از رابطه بسط مجانبی برای Σ ، (۲-۲۸) مشخص می‌شوند.

۳. با معلوم بودن توابع \hat{g} و Σ و با استفاده از رابطه (۲-۱۵) و حل آن F_i بدست خواهد آمد. در این مرحله نیز ثابت‌های انتگرال گیری از بسط نزدیک مرز معلوم خواهند شد. در بسط مجانبی میدان‌های F_i ، ضرایب $f_i^{(d)}$ نامعلوم هستند. بنابراین علاوه بر میدان \hat{g} و λ ، مقدار $f_i^{(d)}$ نیز در برش زمانی ابتدایی باید به عنوان شرط اولیه به دستگاه معادلات داده شود.

۴. در مرحله بعد، $d_+\Sigma$ را از معادله دیفرانسیل (۲-۱۷) استخراج می‌کنیم. در این مرحله هم برای مشخص شدن ثابت انتگرال گیری، به بسط مجانبی میدان $d_+\Sigma$ مراجعه می‌کنیم. ضریب جمله دوم بسط مجانبی، $a^{(d)}$ ، نیز نامعلوم است و باید همراه λ ، \hat{g} و $f_i^{(d)}$ در برش زمانی اولیه معلوم باشد. همچنین می‌توان ثابت انتگرال گیری را با استفاده از شرط (۳-۱) که مقدار میدان روی افق را می‌دهد استخراج کرد.

۵. با داشتن میدان‌های \hat{g} ، Σ ، $d_+\Sigma$ ، با حل معادله (۲-۱۸) تابع $d_+\hat{g}_{ij}$ مشخص خواهد شد. ثابت انتگرال گیری هم از بسط مجانبی استخراج می‌شود.

^۲Nested algorithm

۶. با در دست داشتن توابع متریک $\Sigma, F_i, d_+\Sigma, d_+\hat{g}_{ij}$ به معادله (۱۶-۲) برگشته و تابع متریک A را بدست می‌آوریم. از آنجایی که معادله مذکور، مرتبه دو است، دو ثابت انتگرال‌گیری وجود دارد. یکی از آنها از بسط مجانبی میدان A و دیگری با حل معادله ایستایی افق (۲-۳) به دست می‌آیند.^۳

۷. برای گذار به برش زمانی بعدی، باید، مقادیر کمیت‌هایی که به عنوان شرط اولیه در $t = t_0$ به سیستم داده شده بودند را در برش زمانی بعدی $t = t_0 + \delta t$ به دست آوریم. با توجه به بسط نزدیک مرز میدان‌های A و $d_+\Sigma$ مشتق زمانی λ به صورت زیر خواهد بود:

$$\partial_t \lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} (d_+\Sigma - A). \quad (۳-۳)$$

سپس با استفاده از بسط تیلور مرتبه اول به صورت

$$\lambda(\vec{x}, t_0 + \delta t) = \lambda(\vec{x}, t_0) + \delta t \partial_t \lambda|_{t=t_0}, \quad (۴-۳)$$

مقدار λ برای برش زمانی بعدی معلوم می‌شود.

همچنین طبق تعریف مشتق تحول (۱۳-۲) مقدار میدان \hat{g} در برش زمانی بعدی بدست می‌آید:

$$\partial_t \hat{g}_{ij} = (d_+ - A\partial_r)\hat{g}_{ij}. \quad (۵-۳)$$

۸. با استفاده از بدون رد بودن^۴ و پایسته بودن تانسور انرژی-تنش، تحول زمانی سایر ضرایب بسط^۳ با حل معادله (۲-۳) مقدار تابع A روی افق در برش اول زمانی معلوم خواهد شد. این رابطه که خود نیز یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم می‌باشد با اعمال شرط مرزی مناسب روی جهت فضایی حل می‌شود.

^۳Traceless

^۴Conserved

توابع متریک را نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$T_{\mu}^{\mu} = 0, \quad \nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (۶-۳)$$

با قرار دادن $\nu = 0$ و استفاده از (۲-۲۹) داریم:

$$\nabla_0 T^{00} + \nabla_i T^{i0} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2d-2}{d} \partial_t a^{(d)} = -\partial_i f_i^{(d)} \quad (۷-۳)$$

$$\Rightarrow \partial_t a^{(d)} = \frac{d}{2d-2} \partial_i f_i^{(d)}.$$

همچنین اگر $\nu = j$ باشد خواهیم داشت:

$$\nabla_0 T^{0j} + \nabla_i T^{ij} = 0$$

(۸-۳)

$$\Rightarrow \partial_t f_i^{(d)} = \frac{2}{d} \partial_i a^{(d)} - \partial_j \hat{g}_{ji}.$$

۹. حال با قرار دادن $t \rightarrow t_0 + \delta t$ همه مراحل را برای برش زمانی بعدی انجام می‌دهیم. در این

مرحله با استفاده از روابط (۳-۳)، (۵-۳)، (۷-۳)، (۸-۳) مقادیر $\lambda, \hat{g}_{ij}, f_i^{(d)}$ را در برش زمانی

بعدی محاسبه کرده و به عنوان شرایط اولیه گام زمانی دوم مورد استفاده قرار داده و سپس

مراحل ۱ تا ۸ را دوباره انجام می‌دهیم. این کار تا زمانی که مورد مطالبه است انجام می‌گیرد.

با استفاده از راهبرد مذکور، معادلات غیر خطی اینشتین، به یک مجموعه از معادلات تحول و قیدی

خطی در هر برش زمانی تبدیل می‌شوند که کار کردن با آن‌ها ساده‌تر می‌باشد. معادلات دیفرانسیل

موجود در مراحل ۱ تا ۸ به روش طیفی حل می‌شوند که در فصل بعد به تشریح آن خواهیم پرداخت.

۳-۳ تحول زمانی

محاسبه مقادیر ضرایب بسط توابع متریک برای گام‌های زمانی بعدی، با انتگرال‌گیری مرتبه اول از معادلات (۳-۳)، (۵-۳)، (۷-۳)، (۸-۳) انجام خواهد شد. از بین الگوریتم‌های متنوع موجود برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی، فیزیکدانانی که در حوزه نسبیت عام عددی و تحول گرانشی در فضا-زمان مجاناً پاد-دوسپسته کار می‌کنند معمولاً از یکی از سه روش رونگه-کوتای مرتبه چهار آشکار^۶، رونگه-کوتای ضمنی^۷ و یا آدامز-بش فورث مرتبه سوم^۸ استفاده می‌کنند.

اگر معادله دیفرانسیل به شکل $\frac{dy}{dt} = f(y)$ و $y(t_0) = y_0$ نیز شرط اولیه باشد، هدف پیدا کردن $y(t)$ در گام‌های زمانی بعدی است. در روش رونگه-کوتای مرتبه چهار، در هر گام برای یافتن $y_n -$ که n شماره گام مورد نظر است - چهار محاسبه انجام می‌شود. روش رونگه-کوتای ضمنی، در هر گام به تعداد محاسبات بیشتری نیاز داشته و قیدی روی طول گام زمانی ندارد. بنابراین پایداری روش رونگه-کوتای ضمنی از رونگه-کوتای مرتبه چهار خیلی بیشتر است اما در عین حال زمان بیشتری برای محاسبه نیاز دارد. روش آدامز-بش فورث مبتنی بر یک محاسبه در هر گام است اما در این روش گام‌های زمانی باید خیلی کوچکتر از گام‌هایی باشند که در جهت مختصات فضایی اعمال شده است $\delta t \ll \delta x$. بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت مقایسه طول گام، تعداد محاسبات و پایداری در هر یک از روش‌ها به صورت زیر است:

$$\delta t_{im-RK} > \delta t_{ex-RK4} > \delta t_{AB3}$$

^۶Explicit fourth order Runge-Kutta (RK4)

^۷Implicit Runge-Kutta (RK)

^۸Adams-Bashforth (AB3)

$$eval_{im-RK} > eval_{ex-RK4} > eval_{AB3}$$

$$stability_{im-RK} > stability_{ex-RK4} > stability_{AB3}$$

هرچه طول گام بزرگتر و تعداد محاسبات در هر گام کمتر باشد، زمان کمتری برای محاسبه نیاز است. اما در عین حال بزرگ بودن طول گام و کم بودن تعداد محاسبات، باعث پایین آمدن پایداری روش عددی خواهد شد. بنابراین در هر مسئله، بسته به نوع آن و سایر بخش‌های محاسبه عددی، باید بهترین گزینه را از نظر پایداری و دقت و زمان مورد نیاز برگزید.

۱-۳-۳ روش رونگه-کوتای مرتبه چهار

در روش رونگه-کوتای مرتبه چهار در هر گام چهار محاسبه برای یافتن مقدار تابع مجهول به شرح زیر انجام خواهد شد:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (9-3)$$

که در آن:

$$k_1 = f(\delta t y_n),$$

$$k_2 = f(y_n + \delta t k_1/2),$$

$$k_3 = f(y_n + \delta t k_2/2),$$

$$k_4 = f(y_n + \delta t k_3), \quad (10-3)$$

که y_n مقدار تابع مجهول در گام n ام و δt طول گام است [۶۳]. میزان انحراف جواب به دست

آمده به وسیله این روش با حل تحلیلی از مرتبه δt^5 می‌باشد [۵۹].

۲-۳-۳ روش رونگه-کوتای ضمنی

در این روش تعداد محاسبات در هر گام خیلی بیشتر از روش‌های دیگر است. مقدار تابع در هر گام به صورت

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), \quad (11-3)$$

می‌باشد که در آن

$$k_1 = f(y_n + \delta t[k_1/6 - k_2/3 + k_3/6]),$$

$$k_2 = f(y_n + \delta t[k_1/6 + 5k_2/12 - k_3/12]), \quad (12-3)$$

$$k_3 = f(y_n + \delta t[k_1/6 + 2k_2/3 + k_3/6]).$$

در این روش مقادیر ضرایب k_i به روش تکرار به دست می‌آیند. ابتدا برای مقادیر k_1, k_2, k_3 یک حدس زده و مقادیر حدسی را در سمت راست روابط (۱۲-۳) قرار می‌دهیم. سپس مقادیر به دست آمده در سمت چپ را مجدداً در سمت راست جایگزین کرده و این عمل را تا جایی که اختلاف دو مقدار متوالی به صفر میل کند ادامه می‌دهیم. واضح است که با این الگوریتم، تعداد محاسبات در هر گام بسیار زیاد بوده و زمان زیادی برای آن صرف خواهد شد. مقیاس خطای این روش نیز δt^5 می‌باشد.

۳-۳-۳ روش آدامز-بش فورث

در این روش، مقدار تابع در هر گام وابسته به مقدار تابع در سه گام قبلی است:

$$y_{n+1} = y_n + \delta t \left[\frac{23}{16} f(y_n) - \frac{4}{3} f(y_{n-1}) + \frac{5}{12} f(y_{n-2}) \right]. \quad (13-3)$$

از آنجایی که برای استفاده از روش آدامز-بش فورث به اطلاعات مقدار تابع در سه گام قبلی نیاز داریم، برای تعیین مقدار تابع در دوگام اولیه $n = 1, 2$ باید از روش دیگری استفاده کرد. مقیاس خطا در این روش از مرتبه δt^4 می‌باشد.

۴-۳ انتخاب مقادیر اولیه مناسب

برای حل عددی معادلات حرکت به دست آمده، باید مقادیر $\hat{g}(t_0, \vec{x}, r)$, $a^{(d)}(t_0, \vec{x})$, $f_i^{(d)}(t_0, \vec{x})$ به عنوان شرایط اولیه‌ی سیستم به دستگاه معادلات داده شوند. با توجه به روابط (۲-۲۹)، مقادیر مذکور متناظر با مقدار اولیه مولفه‌های تانسور انرژی-تنش در سمت نظریه میدان است. بنابراین با انتخاب این مقادیر، در واقع روی انرژی، فشار و اندازه حرکت اولیه سیستم شرط می‌گذاریم. انتخاب‌های مختلف برای شرایط اولیه -چنانکه خواهیم دید- منجر به رفتارهای مختلف در متریک حجم و متناظراً در دینامیک سیستم غیرتعادلی مورد مطالعه خواهد شد. شکل تابعی که برای \hat{g} در زمان ابتدایی انتخاب می‌شود، باید با بسط نزدیک مرز این میدان سازگار باشد.

علاوه بر ضرایب بسط مذکور، مقدار آزادی پیمانه‌ای در راستای شعاعی، $\lambda(t_0, \vec{x})$ ، نیز باید در لحظه اولیه معلوم باشد. مقدار λ باید به گونه‌ای انتخاب شود که موقعیت شعاعی افق نسبت به مختصات فضایی و زمان ثابت بماند. برای پیدا کردن مقدار مناسب λ ، ابتدا معادلات (۲-۱۴)، (۲-۱۵) و (۲-۱۷) را با $\lambda = 0$ حل کرده تا میدان‌های Σ, F_i و $d_+\Sigma$ معلوم شوند. سپس با اعمال شرط (۳-۱) مقدار λ در زمان اولیه معلوم می‌گردد.

۵-۳ حذف واگرایی نزدیک مرز با بازتعریف میدان‌ها

برای محدود کردن دامنه محاسبات عددی، بازه‌ی تغییرات مختصات شعاعی r را که از $r = r_h$ یعنی افق تا $r = \infty$ یعنی مرز گسترده بود با یک تغییر متغیر به شکل $u = \frac{1}{r}$ به یک بازه محدود از $u = 0$ یعنی مرز تا $u = u_h$ یعنی افق سیاهچاله تبدیل می‌کنیم.

از طرفی اگر به روابط (۲۸-۲) دقت کنیم، روابط موجود برای توابع متریک $A, \Sigma, d_+\Sigma$ در نزدیکی مرز ($r = \infty$ or $u = 0$) واگرا می‌شوند. برای حل این مشکل در محاسبات عددی، توابع متریک را به صورت زیر باز تعریف می‌کنیم:

$$A^{redef}(x, u) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \lambda \right)^2 + A^{reg}(x, u),$$

$$\Sigma^{redef}(x, u) = \frac{1}{u} + \Sigma^{reg}(x, u),$$

$$F_i^{redef}(x, u) = F_i^{reg}(x, u),$$

(۱۴-۳)

$$\hat{g}_{ij}^{redef}(x, u) = u^{d-1} \hat{g}_{ij}^{reg}(x, u) + \delta_{ij},$$

$$d_+ \hat{g}_{ij}^{redef}(x, u) = u^{d-2} d_+ \hat{g}_{ij}^{reg}(x, u),$$

$$d_+ \Sigma^{redef}(x, u) = u^{d-3} d_+ \Sigma^{reg}(x, u) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \lambda \right)^2.$$

با قرار دادن میدان‌های بازتعریف شده در معادلات حرکت، شرایط مرزی برای حل معادلات به

صورت زیر اعمال خواهد شد:

$$\begin{aligned} A^{reg}(x, u)|_{u \rightarrow 0} &= -\partial_i \lambda + u^{d-2} a^{(d)}, & \Sigma^{reg}(x, u)|_{u \rightarrow 0} &= \lambda, \\ F_i^{reg}(x, u)|_{u \rightarrow 0} &= -\partial_i \lambda + u^{d-2} f_i^{(d)}, & d_+ \hat{g}_{ij}^{reg}(x, u)|_{u \rightarrow 0} &= 0, \\ d_+ \Sigma^{reg}(x, u)|_{u \rightarrow 0} &= u a^{(d)}. & & (15-3) \end{aligned}$$

فصل ۴

روش طیفی

با پیشرفت سخت افزاری و ابزار محاسباتی، محاسبات مختلف عددی و از جمله حل عددی معادلات دیفرانسیل، اهمیت خاصی یافته‌اند. از بین مسائل مختلف، در سال‌های اخیر، حل عددی معادلات اینشتین، به دلیل پیچیدگی از یک سو و مورد علاقه نبودن حل تحلیلی آن در بسیاری از مسائل از سوی دیگر، بسیار مورد توجه بوده است.^۱

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل، روش‌های متعددی وجود دارد که بسته به نوع معادله دیفرانسیل، شرایط مرزی و ... انتخاب می‌شوند. اولین قدم برای استفاده از هر روش عددی، گسسته سازی بازه‌ای است که معادله دیفرانسیل روی آن تعریف شده و باید انتگرال‌گیری انجام شود. به مجموعه نقاط جدا از هم در بازه انتگرال‌گیری شبکه نقاط^۲ می‌گویند. نوع گسسته‌سازی و فاصله بین نقاط انتخاب شده، بسته به روش انتخاب شده برای حل عددی، متفاوت است. در برخی روش‌ها، فاصله بین نقاط برابر و در برخی نابرابر بوده و توسط مولدهای^۳ مختلف تعیین می‌شود.

۱-۴ روش تفاضل محدود

ساده‌ترین و شناخته شده‌ترین روش برای پیدا کردن مشتق یک تابع در بازه انتگرال‌گیری، روش تفاضل محدود^۴ است. در این روش، بازه مورد نظر به N نقطه که فاصله برابر از یکدیگر دارند، تقسیم می‌شود. به عنوان مثال، تابع دلخواه $f(x)$ را در بازه $[a, b]$ در نظر بگیرید. بازه مورد نظر را به N نقطه تقسیم‌بندی کرده و هر نقطه را با شماره i مشخص و مجموعه نقاط را به صورت $\{x_i\}_{i=1, \dots, N} \subset [a, b]$ نشان ^۱حل‌های تحلیلی و تقریبی موجود برای معادلات اینشتین، مبتنی بر فرض‌هایی روی تقارن و ... است که برای بسیاری از مسائل فیزیکی و اخترفیزیکی مناسب نیست [۶۴].

^۲ Grid points

^۳ Generators

^۴ Finite difference method

می‌دهیم. فاصله بین نقاط $x_{i+1} - x_i = \Delta x = \frac{b-a}{2(N-1)}$ خواهد بود. همچنین مقدار تابع f در هر نقطه

را نیز با $f_i \equiv f(x_i)$ نمایش می‌دهیم.

بر اساس بسط تیلور تا مرتبه اول

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \dots, \quad (1-4)$$

مقدار مشتق تابع f در هر نقطه، به صورت

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}, \quad (2-4)$$

داده می‌شود. در این تقریب که به تقریب رو به جلو^۵ موسوم است، مقدار مشتق تابع مجهول در هر نقطه، به مقدار تابع در همان نقطه و نقطه‌ی بعد وابسته است. در تقریب (۲-۴)، که تقریب مرتبه اول است، خطای تقریب از مرتبه Δx می‌باشد. در صورتی که بسط (۱-۴) را تا مرتبه n ادامه دهیم، خطای تقریب به صورت $(\Delta x)^n$ خواهد بود که به معنای دقیق‌تر شدن تقریب است. در تقریب رو به عقب^۶، مقدار مشتق تابع در هر نقطه به مقدار تابع در همان نقطه و نقطه قبل؛ و در تقریب مرکزی^۷، به مقدار تابع در نقطه قبل و نقطه بعد بستگی دارد. انواع تقریب‌های تفاضل محدود و مرتبه خطای آن‌ها در جدول ۱-۴ آمده است.

نرم‌افزارهایی مانند Mathematica با دستورات خاص، به طور هوشمند از روش تفاضل محدود برای حل معادله دیفرانسیل استفاده می‌کنند. شکل ۱-۴ چگونگی اجرای این دستور را نشان می‌دهد.

^۵Forward approximation

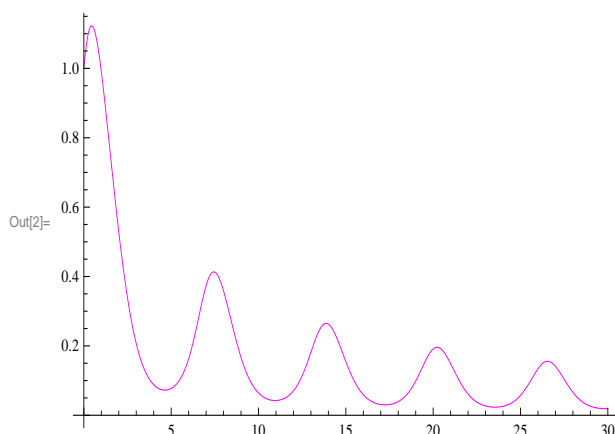
^۶Backward approximation

^۷Central approximation

جدول ۴-۱: تقریب‌های مختلف در روش تفاضل محدود.

نوع تقریب	مشتق تابع	مرتبه خطا
رو به جلو	$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$	Δx
رو به عقب	$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$	Δx
مرکزی	$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$	$(\Delta x)^2$
مقارن	$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2}$	$(\Delta x)^2$

```
In[1]:= s = NDSolve[{y'[x] == y[x] Cos[x + y[x]], y[0] == 1}, y, {x, 0, 30}];
In[2]:= Plot[Evaluate[y[x] /. s], {x, 0, 30}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Magenta]
```



شکل ۴-۱: حل معادله دیفرانسیل به روش تفاضل محدود در نرم‌افزار Mathematica

۲-۴ کاربرد روش طیفی

روش معمول مورد استفاده در نسبت عام عددی و حل عددی معادلات اینشتین - که مورد توجه فیزیکدانان قرار گرفته است - روشی موسوم به روش طیفی است. بر طبق آنچه که در مرجع [۶۴] آمده، برای نخستین بار، روش طیفی در حل عددی معادلات اینشتین، در مطالعه رمبش ستاره نوترونی استفاده شده است [۶۵]. این روش به علت دقت بالاتر نسبت به سایر روش‌های موجود برای حل

معادلات دیفرانسیل و همچنین به خاطر اشغال کمتر حافظه سیستم بسیار مورد علاقه است. علاوه بر حل عددی معادلات اینشتین، روش طیفی در بسیاری حوزه‌های دیگر فیزیک نیز کاربرد دارد. در مطالعه عددی دینامیک شارها^۸ و بررسی آشوب، شبیه سازی جریان شار^۹ و همچنین حل عددی معادلات نوییر-استوکس^{۱۰}، روش طیفی به علت دقت بالا، مورد استفاده است [۶۶، ۶۷]. حل عددی معادلات ماکسول^{۱۱}، مطالعه هیدرودینامیک مغناطیسی^{۱۲} [۶۸] و مطالعه تحول تابع توزیع فوتون در پلاسما با استفاده از تقریب فوکر-پلانک^{۱۳} [۶۹] از دیگر استفاده‌های روش طیفی است [۶۴]. علاوه بر این‌ها، روش طیفی در رشته‌های دیگری مانند ژئوفیزیک^{۱۴} و هواشناسی^{۱۵} نیز کاربرد دارد. برای مشاهده مراجع مناسب در این زمینه، به مرجع [۶۴] مراجعه کنید.

۳-۴ اساس روش طیفی

روش طیفی، بر پایه حدس زدن تابع مجهول به صورت بسطی از چند جمله‌ای‌های کامل استوار است:

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n(x), \quad (3-4)$$

که در آن، N تعداد نقاط گسسته شده در بازه مورد نظر و $\phi_n(x)$ چند جمله‌ای کامل می‌باشد.

^۸Fluid dynamics

^۹fluid flow

^{۱۰}Navier-Stokes equations

^{۱۱}Maxwell equations

^{۱۲}Magneto-hydrodynamics (MHD)

^{۱۳}Fokker-Planck approximation

^{۱۴}Geophysics

^{۱۵}Meteorology

فاصله نقاط گسسته شده در بازه مورد نظر در روش طیفی، یکسان نبوده و نقاط شبکه، توسط مولدهای مختلف بسته به چندجمله‌ای انتخاب شده $\phi_n(x)$ تولید می‌شوند. با استفاده از روش طیفی، معادلات دیفرانسیل خطی، به یک دستگاه خطی ساده N معادله و N مجهول تبدیل می‌شوند. انجام محاسبات و یافتن تابع مجهول در روش طیفی، با دو رویکرد مختلف قابل انجام است. در رویکرد اول که به فضای ضرایب^{۱۶} معروف است، بسط (۳-۴) و مشتقات آن را به جای تابع مجهول و مشتقات آن در معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم. با اعمال شرط صدق کردن معادله دیفرانسیل در هر نقطه شبکه، N معادله و N مجهول خواهیم داشت که مجهولات همان ضرایب بسط در (۳-۴) هستند. با معلوم شدن ضرایب a_n تابع مجهول نیز مشخص می‌شود.

اما در رویکرد دوم که به فضای پیکربندی^{۱۷} موسوم است و در حل معادلات اینشتین بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، معادله دیفرانسیل خطی، به صورت یک عملگر خطی روی تابع مجهول عمل می‌کند. به عبارت دیگر می‌توان معادله دیفرانسیل را به صورت یک معادله عملگری نوشت:

$$\mathcal{L}y(x) = S(x). \quad (۴-۴)$$

در معادله نوعی (۴-۴)، \mathcal{L} عملگر معادله دیفرانسیلی است که روی تابع مجهول اثر می‌کند. $y(x)$ تابع مجهول و $S(x)$ چشمه هستند. به عنوان مثال، معادله دیفرانسیل $y''(x) + y'(x) - 20xy(x) - x^2 = 0$ را در نظر بگیرید. مشابه (۴-۴)، می‌توان این معادله دیفرانسیل را به صورت معادله عملگری نوشت که در آن $\mathcal{L} \equiv (\partial_x^2 + \partial_x - 20x)$ و $S(x) \equiv x^2$ می‌باشند. به عبارت دیگر، معادله (۴-۴) یک دستگاه N معادله- N مجهول به شکل زیر است:

^{۱۶}Coefficient space

^{۱۷}Configuration space

$$\sum_{i=0}^{i=N-1} \sum_{j=0}^{j=N-1} \mathcal{L}_{ij} y_j = S_i, \quad (5-4)$$

که در آن $h_n \equiv h(x_n)$ است.

در این رویکرد، برای هر چندجمله‌ای، یک تابع کاردینال^{۱۸} $C_j(x)$ تعریف می‌شود به طوری که

$$C_j(x_i) = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, \dots, N \quad (6-4)$$

و مشتق مرتبه k ام آن به صورت $(\delta_k)_{ij} \equiv \frac{d^k C_j}{dx^k} |_{x=x_i}$ می‌باشد. با استفاده از تابع کاردینال، عملگرهای مشتق و به تبع آن عملگر \mathcal{L} را می‌توان به صورت یک ماتریس $N \times N$ نوشت که روی ماتریس ستونی تابع مجهول که درایه‌های آن $y_i \equiv y(x_i)$ هستند اثر می‌کند و حاصل برابر با ماتریس ستونی چشمه که درایه‌های آن مقدار چشمه در نقاط شبکه $S_i \equiv S(x_i)$ هستند می‌شود. با حل معادله ماتریسی (۵-۴) مقادیر تابع مجهول در هر نقطه شبکه به دست خواهند آمد^{۱۹}.

۱-۳-۴ انتخاب پایه

چندجمله‌ای‌هایی که در رابطه (۴-۴) به عنوان پایه بسط انتخاب می‌شوند، بسته به نوع مسئله و ویژگی‌های تابع مجهول، متفاوت‌اند. به عنوان مثال، اگر تابع مجهول در شرط مرزی دوره‌ای صدق کند، توابع \sin و \cos که خود توابع متناوب هستند، به عنوان پایه‌های بسط انتخاب می‌شوند. علاوه بر شرایط مسئله و ویژگی‌های تابع مجهول، چندجمله‌ای مورد استفاده باید علاوه بر کامل بودن^{۲۰} به

^{۱۸}Cardinal function

^{۱۹} روش‌های مختلفی در مورد نوع تولید عملگر معادله دیفرانسیل و به دست آوردن تابع مجهول وجود دارد که به روش‌های

مختلف طیفی مشهورند. برای مطالعه در مورد روش‌های طیفی مختلف به مراجع [۶۴، ۷۰] مراجعه کنید.

^{۲۰} منظور از کامل بودن این است که هر تابعی را بتوان برحسب بسطی از آن چندجمله‌ای نوشت.

آسانی قابل محاسبه بوده و همگرایی سریع نیز داشته باشد. در شکل ۲-۴ پایه‌های بسط مناسب برای شرایط مختلف ذکر شده است.

If	Basis Set is
$f(x)$ is periodic	Fourier series
$f(x)$ is periodic & symmetric about $x = 0$	Fourier cosine
$f(x)$ is periodic & antisymmetric about $x = 0$	Fourier sine
$x \in [a, b]$ & $f(x)$ is non-periodic	Chebyshev polys. Legendre polys.
$y \in [0, \infty]$ & $f(y)$ decays exponentially as $y \rightarrow \infty$	$TL_n(y)$ Laguerre functions
$y \in [0, \infty]$ & $f(y)$ has asymptotic series in inverse powers of y	$TL_n(y)$ only
$y \in [-\infty, \infty]$ & $f(y)$ decays exponentially as $y \rightarrow \infty$	$TB_n(y)$ sinc functions or Hermite functions
$y \in [-\infty, \infty]$ & $f(y)$ has asymptotic series in inverse powers of y	$TB_n(y)$ only
$f(\lambda, \theta)$ is a function of latitude and longitude	spherical harmonics

شکل ۲-۴: پایه‌های بسط مناسب برای شرایط مختلف [۷۰].

در اغلب موارد از چندجمله‌ای‌های چیشیف^{۲۱} نوع اول استفاده می‌شود که تعریف آن به صورت

زیر است:

$$T_n(\cos \theta) \equiv \cos(n\theta). \quad (۷-۴)$$

چند جمله‌ای‌های چیشیف، حل معادله اشتورم-لیوویل^{۲۲}

$$-(pu')' + qu = \lambda\omega u \quad (۸-۴)$$

هستند که در آن

^{۲۱}Chebyshev polynomials

^{۲۲}Sturm-Liouville equation

$$p(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad q(x) = 0, \quad \omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{and} \quad \lambda_n = -n. \quad (9-4)$$

بر طبق تعریف، $T_0(x) = 1$ و $T_1(x) = x$ می‌باشد. بر این اساس، چند جمله‌ای‌های چبیشف از

رابطه بازگشتی

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (10-4)$$

پیروی می‌کنند [۶۴].

تابع کاردینال مربوط به چند جمله‌ای‌های چبیشف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_j(x) = (-1)^{j+1} \frac{1-x^2}{c_j N^2 (x-x_j)} \frac{dT_N(x)}{dx}, \quad (11-4)$$

که در آن c_j برای $j = \pm N$ برابر با ۲ و برای سایر مقادیر j برابر ۱ می‌باشد.

با استفاده از تعریف تابع کاردینال برای چند جمله‌ای‌های چبیشف، می‌توان مشتق مرتبه اول را به

صورت یک عملگر ماتریسی به شکل

$$(\delta_1^{Cheb})_{ij} \equiv \frac{dC_j}{dx} \Big|_{x=x_i} = \begin{cases} (1 + 2N^2)/6 & i = j = 0 \\ -(1 + 2N^2)/6 & i = j = N \\ -x_j/[2(1 - x_j^2)] & i = j; 0 < j < N \\ (-1)^{i+j} p_j/[p_j(x_i - x_j)] & i \neq j \end{cases} \quad (12-4)$$

نوشت که در آن p_j به ازای $j = 0, N$ برابر ۲ و برای سایر مقادیر j برابر ۱ می‌باشد^{۲۳}. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های چندجمله‌ای چبیشف این است که مشتقات مراتب بالاتر به صورت توان‌های مشتق اول به شکل $\delta_k^{Cheb} = (\delta_1^{Cheb})^k$ تعریف می‌شوند [۷۰].

همچنین با انتخاب چندجمله‌ای چبیشف به عنوان پایه بسط، بازه انتگرال‌گیری توسط مولد

کسینوسی به صورت

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi i}{N-1}\right); \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (13-4)$$

گسسته می‌شود^{۲۴}.

^{۲۳} برای مشاهده توابع کاردینال سایر چندجمله‌ای‌ها به مرجع [۷۰] مراجعه کنید.
^{۲۴} باید توجه کرد که به دلیل اینکه مولد چند جمله‌ای چبیشف برای تولید شبکه در روش طیفی، تابع کسینوس است، بازه شبکه تولید شده $[-1, 1]$ است که بسته به بازه مسئله مورد نظر، باید با تبدیل مناسب شبکه تولید شده را به بازه واقعی مسئله تبدیل کرد.

مثال ۲-۳-۴

به عنوان یک مثال ساده، معادله دیفرانسیل $u''(x) - (x^6 + 3x^2)u(x) = 0$ را با شرایط مرزی $u(1) = 1$ و $u(-1) = 1$ در نظر بگیرید. برای حل این معادله به روش طیفی، عملگر معادله دیفرانسیل را بر اساس تعریف تابع کاردینال برای چندجمله‌ای چبیشف شکل می‌دهیم. در شکل ۳-۴ مشتقات اول و دوم بر اساس تعریف تابع کاردینال چبیشف به زبان Mathematica نشان داده شده است. در این شکل DSpec تعریف مشتق اول و D2Spec تعریف مشتق دوم هستند.

```

nz = 30;
z = N[Table[Cos[ $\frac{x \pi}{nz - 1}$ ], {x, 0, nz - 1}]];
DSpec = Table[If[i == nz && j == nz, -N[ $\frac{2(nz - 1)^2 + 1}{6}$ ],
  If[i == 1 && j == 1, N[ $\frac{2(nz - 1)^2 + 1}{6}$ ], If[i == j,  $\frac{-z[[i]]}{2(1 - z[[i]]^2)}$ ,
     $\frac{(-1)^{i+j}}{z[[i]] - z[[j]]} \frac{If[i == 1 || i == nz, 2, 1]}{If[j == 1 || j == nz, 2, 1]}]]], {i, nz}, {j, nz}];
D2Spec =
  DSpec.
  DSpec;
eqn =
  D2Spec - MatrixPower[DiagonalMatrix[z], 6] - 3 MatrixPower[DiagonalMatrix[z], 2];
source = Table[If[i == 1 || i == nz, 1, 0], {i, nz}];$ 
```

شکل ۳-۴: تعریف مشتقات اول و دوم و عملگر معادله دیفرانسیل بر اساس تابع کاردینال چبیشف به زبان

Mathematica

باید توجه داشت که از اعمال شرایط مرزی مسئله غافل نشویم. در شکل ۴-۴ چگونگی اعمال شرایط مرزی نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل می‌بینیم، با جایگزینی سطر اول و آخر عملگر معادله دیفرانسیل با مقادیر مرزی، شرط مرزی اعمال شده و نهایتاً با دستور LinearSolve معادله ماتریسی حل شده و مقادیر تابع مجهول در نقاط شبکه معلوم گشته‌اند.

```

eqn[[1]] = Table[If[i == 1, 1, 0], {i, nz}];
source[[1]] = 1;
eqn[[-1]] = Table[If[i == nz, 1, 0], {i, nz}];
source[[-1]] = 1;

numsol = LinearSolve[eqn, source]

{1., 0.994206, 0.977681, 0.952773, 0.922763, 0.891156, 0.861065, 0.834811,
 0.813762, 0.798353, 0.78823, 0.782464, 0.779799, 0.778934, 0.778802,
 0.778802, 0.778934, 0.779799, 0.782464, 0.78823, 0.798353, 0.813762,
 0.834811, 0.861065, 0.891156, 0.922763, 0.952773, 0.977681, 0.994206, 1.}

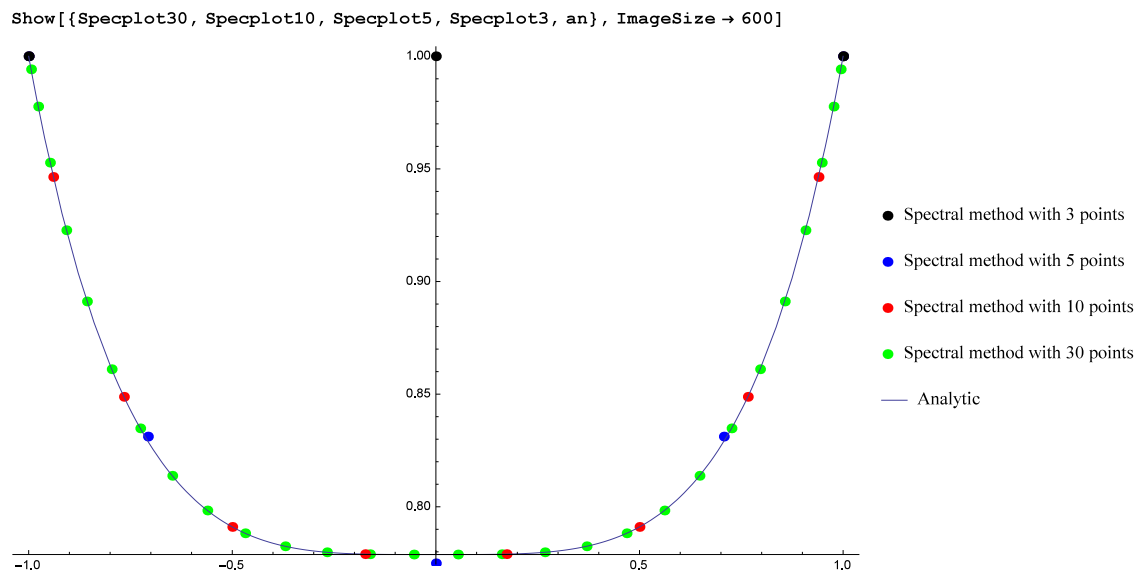
```

شکل ۴-۴: اعمال شرایط مرزی

نتیجه حل عددی معادله دیفرانسیل مذکور به روش طیفی برای تعداد نقاط مختلف در شکل ۴-۵

آمده است. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، با تعداد نقاط بسیار کم می‌توان به روش طیفی

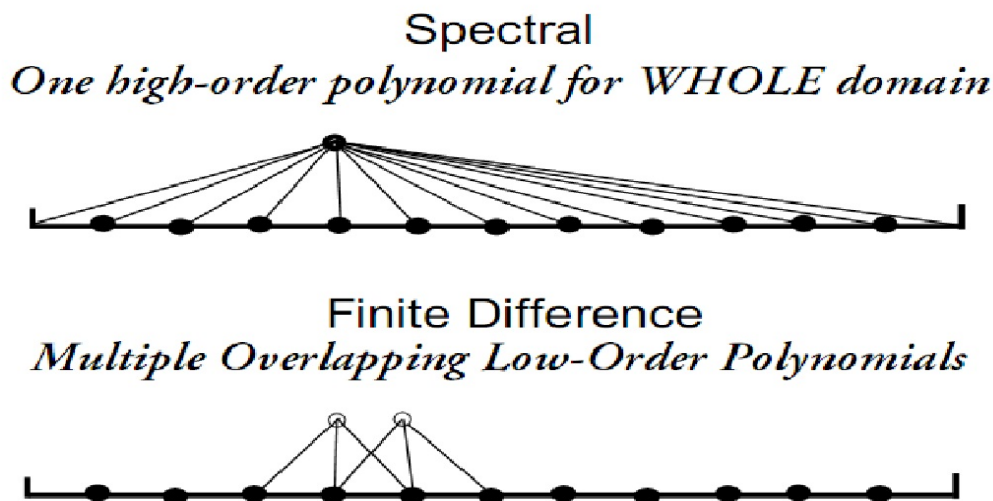
اعتماد کرد.



شکل ۴-۵: نتایج حل روش طیفی به ازای تعداد نقاط مختلف.

۴-۴ مقایسه روش طیفی با تفاضل محدود

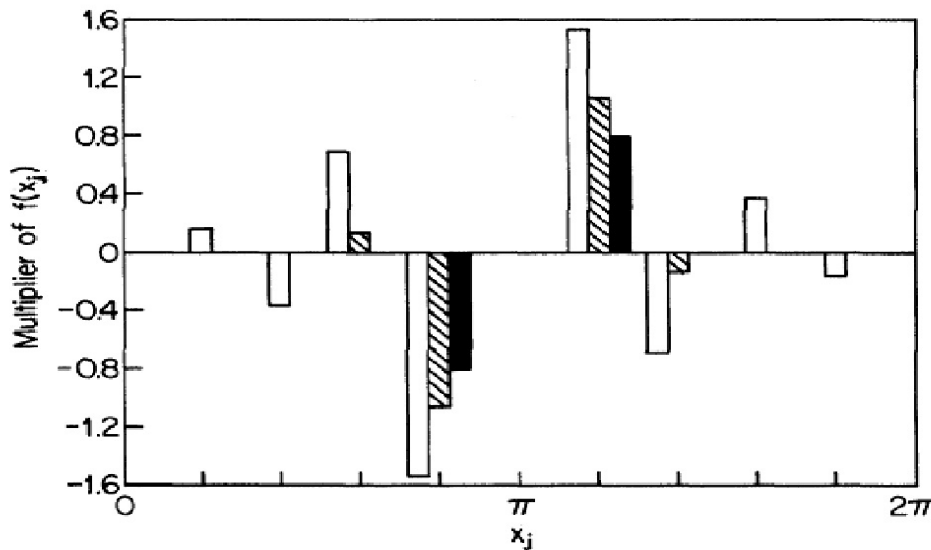
برای روشن تر شدن امتیاز روش طیفی به روش تفاضل محدود، در این بخش به مقایسه اجمالی این دو روش می‌پردازیم. مهم‌ترین امتیاز روش طیفی بر تفاضل محدود این است که، در روش تفاضل محدود چند چندجمله‌ای مرتبه پایین همپوشان برای بازه انتگرال‌گیری وجود دارد به نحوی که در بسط مرتبه n ام، مقدار مشتق در هر نقطه به مقدار تابع در n نقطه وابسته است. اما در روش طیفی، یک چندجمله‌ای مرتبه بالا برای کل بازه تعریف می‌شود و مقدار مشتق در هر نقطه به مقدار تابع در تمام نقاط شبکه وابسته است و این به دقت بالا منجر می‌شود. شکل ۴-۶ این موضوع را به خوبی نشان می‌دهد.



شکل ۴-۶: مقایسه تفاضل محدود و روش طیفی [۷۰].

در شکل ۴-۷ میزان سهم نقاط مختلف برای محاسبه مقدار مشتق در یک نقطه، برای روش طیفی و روش تفاضل محدود با یکدیگر مقایسه شده‌اند. ستون‌های سفید مربوط به روش طیفی، ستون‌های مشکی مربوط به تفاضل محدود مرتبه اول و ستون‌های هاشور خورده مربوط به تفاضل محدود مرتبه

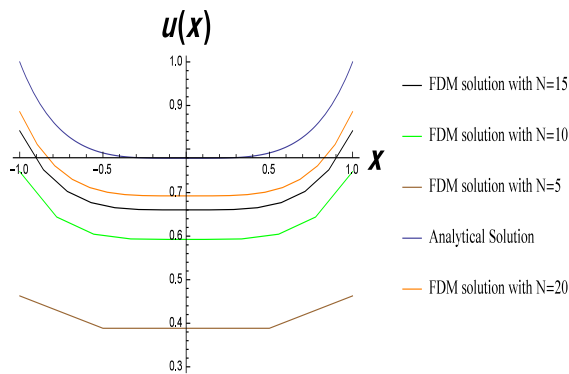
دوم برای ده نقطه شبکه هستند. همان‌طور که در شکل دیده میشود، در روش طیفی همه نقاط در محاسبه مقدار مشتق در یک نقطه، سهم دارند.



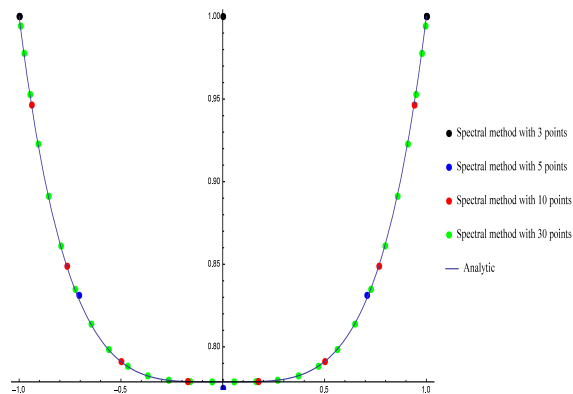
شکل ۴-۷: مقایسه سهم نقاط مختلف در محاسبه مشتق اول در روش تفاضل محدود و روش طیفی [۷۰]. ستون‌های خالی مربوط به روش طیفی، ستون‌های مشکی مربوط به تفاضل محدود مرتبه اول و ستون‌های هاشور خورده مربوط به تفاضل محدود مرتبه دوم برای ده نقطه شبکه هستند.

برتری دیگر روش طیفی بر تفاضل محدود، همگرایی سریع آن است. همان‌طور که در ابتدای فصل گفته شد، خطای روش تفاضل محدود نسبت به حل تحلیلی در مرتبه n ام، از مرتبه $(\Delta x)^n$ است و با آهنگ $1/N$ همگرا می‌شود که N تعداد نقاط شبکه می‌باشد. حل مبتنی بر روش طیفی به صورت نمایی e^{-N} به حل عددی همگرا می‌شود. به عبارت دیگر، برای رسیدن به یک دقت مشخص، اگر با روش تفاضل محدود به ۲۰ نقطه نیاز باشد، برای رسیدن به همان دقت با روش طیفی حدود ۳ نقطه لازم است. شکل ۴-۸ این مقایسه را به خوبی نشان می‌دهد. سمت چپ حل به روش تفاضل محدود و سمت راست حل به روش طیفی برای تعداد نقاط مختلف هستند. در روش طیفی با انتخاب سه نقطه، با دقت یک هزارم جواب عددی به حل تحلیلی منطبق شده است اما با انتخاب بیست نقطه در روش تفاضل محدود هنوز جواب‌های عددی بر جواب تحلیلی منطبق نشده است.

Show[{ana, P5, P10, P15, P20}, PlotRange -> {{-1, 1}, {0.3, 1}}]



Show[{SpecPlot30, SpecPlot10, SpecPlot5, SpecPlot3, an}, ImageSize -> 600]



شکل ۴-۸: مقایسه همگرایی روش طیفی و تفاضل محدود. در روش طیفی با انتخاب سه نقطه، با دقت یک هزارم حل عددی بر حل تحلیلی منطبق شده است اما با انتخاب بیست نقطه در روش تفاضل محدود هنوز جواب‌های عددی بر جواب تحلیلی منطبق نشده است.

۵-۴ معادلات دیفرانسیل با چند متغیر مستقل

در مطالبی که تا اینجا بیان شد، فرض بر این بود که تابع مجهول در معادله دیفرانسیل، فقط یک متغیر مستقل داشت. اگر چنانچه تابع مجهول، مانند $y(x, z)$ تابعی از دو متغیر مستقل باشد، بسط حدسی برای تابع مجهول به صورت زیر بر پایه حاصل ضرب دو پایه کامل خواهد بود

$$y(x, z) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^{N_2} a_{ij} \phi_i(x) \phi_j(z). \quad (14-4)$$

اساس کار همانند قبل بوده با این تفاوت که این بار دو تابع کاردینال در دو جهت برای چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌شود:

$$\frac{dy(x, z)}{dx} = \frac{dC_k}{dx} \Big|_{x=x_i}; \quad \frac{dy(x, z)}{dz} = \frac{dC_l}{dz} \Big|_{z=z_j}, \quad (15-4)$$

و همچنین مشتقات مراتب مختلف به صورت

$$\frac{d^2y(x, z)}{dx dz} = \frac{dC_k}{dx} \Big|_{x=x_i} \frac{dC_l}{dz} \Big|_{z=z_j, \dots} \quad (16-4)$$

خواهند بود. با داشتن تعریف ماتریسی مشتقات مراتب مختلف بر حسب تابع کاردینال، عملگر ماتریسی معادله دیفرانسیل را شکل داده و همانند قبل به حل آن می‌پردازیم.

۶-۴ معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان

در مسائلی که تحول زمانی تابع مجهول مد نظر است و یا به عبارتی دیگر، معادله دیفرانسیل تابعی از زمان است، بهترین راهبرد ایجاد برش‌های زمانی و حل معادله دیفرانسیل در برش‌های زمان ثابت است. به دلایلی، در نظر گرفتن زمان به مانند یک بعد فضایی و گسسته کردن آن مانند سایر ابعاد، راهبرد مناسبی برای حل عددی مسائل وابسته به زمان نبوده و زمان زیادی برای حل می‌طلبد [۶۴]. گسسته سازی زمانی و حل انتگرال مرتبه اول آن، بسته به نوع مسئله و دقت و سرعت مورد نیاز، با یکی از روش‌های تشریح شده در بخش ۳-۳ انجام می‌شود.

برای معادلاتی نظیر معادله موج

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$$

که مشتق مرتبه دوم زمانی دارد، بر اساس الگوی کرانک-نیکولسون^{۲۵}، مقدار تابع در هر گام زمانی بر حسب مقدار تابع و مشتقات مکانی آن در دو گام زمانی قبلی به صورت زیر به دست می‌آید [۶۴]:

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + \frac{\delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} \right), \quad (17-4)$$

که در آن n شماره گام زمانی است.

^{۲۵}Crank-Nicolson scheme

روش طیفی برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی

روش طیفی تشریح شده تا اینجا برای حل معادلات دیفرانسیل خطی بود. منظور از معادلات دیفرانسیل خطی، معادلات دیفرانسیلی است که در آن توان تابع مجهول و مشتقات آن بیشتر از یک نباشد. اما در دنیای فیزیک معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که غیر خطی بوده و با روش طیفی علاقه‌مند به حل آن‌ها هستیم. برای این منظور از روش تکرار نیوتون-رافسون^{۲۶} استفاده می‌کنیم.

برای یافتن ریشه یک تابع $f(x)$ که نسبت به متغیر مستقل، غیر خطی است، براساس روش تکرار نیوتون به این صورت عمل می‌کنیم که:

۱. ابتدا یک ریشه حدسی x_0 را در نظر می‌گیریم.

۲. سپس با استفاده از داشتن شکل تابع و مشتق آن حدس خود را به صورت $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ بهبود می‌بخشیم.

۳. این الگوریتم را تا زمانی که اختلاف دو مقدار متوالی برای x_n به صفر میل کند تکرار می‌کنیم.

برای حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی نیز به همین روال عمل می‌کنیم. ابتدا یک جواب برای تابع مجهول $y_0(x)$ حدس می‌زنیم. سپس با استفاده از الگوریتم تکرار نیوتون و تعریف ژاکوبین $J(y) = \frac{\partial F(y, y', y'', \dots)}{\partial y}$ که در آن $F(y, y', y'', \dots)$ تابع معادله دیفرانسیل برحسب y است، جواب حدسی را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{F(y_n, y_n', y_n'', \dots)}{J(y_n)} \quad (18-4)$$

^{۲۶}Newton-Raphson iteration

در شکل‌های ۹-۴ تا ۱۳-۴ نحوه انجام این روند به عنوان مثال برای یک معادله دیفرانسیل ساده به زبان Mathematica نشان داده شده است. در شکل‌های مذکور، معادله دیفرانسیل غیر خطی $y''(x) + y'(x) - y(x)^2 + 1 = 0$ با شرایط مرزی $y(-1) = y(1) = 2$ به روش طیفی و با استفاده از تقریب تکرار نیوتون حل شده است.

شکل ۹-۴، تعریف عملگرهای مشتق اول و دوم با استفاده از تابع کاردینال چندجمله‌ای چبیشف به صورت ماتریسی را نشان می‌دهد. در این شکل همچنین تعداد ۳۰ نقطه شبکه با مولد کسینوسی چندجمله‌ای چبیشف، تولید شده‌اند.

شکل ۱۰-۴ معادله دیفرانسیل را به صورت یک معادله ماتریسی نشان می‌دهد. همچنین در این شکل، جواب حدسی اولیه به صورتی که در شرایط مرزی صدق کند در نظر گرفته شده است.

در شکل ۱۱-۴ جواب حدسی و تعریف ژاکوبین و همچنین تکرار نیوتون انجام شده است. شکل ۱۲-۴ حل عددی ساده معادله دیفرانسیل و شکل ۱۳-۴ انطباق حل عددی مبتنی بر تقریب تکرار نیوتون با روش طیفی بر حل عددی ساده را نشان می‌دهند.

همان‌طور که در شکل ۱۳-۴ نشان داده شده است، بعد از سه بار تکرار، جواب تکرار نیوتون به روش طیفی، با دقت 10^{-11} با جواب عددی منطبق شده است. بنابراین با استفاده از تکرار نیوتون، می‌توان با استفاده از روش طیفی طبق الگوی برنامه نمونه نشان داده شده، معادلات دیفرانسیل غیر خطی را نیز با دقت بالا حل نمود.

```

In[25]= initGrid[points_] := (
  $MinPrecision = 50;
  nz = points;
  z = N[Table[Cos[ $\frac{r \pi}{nz - 1}$ ], {r, 0, nz - 1}], 50];
  FirstD = Table[If[i == nz && j == nz,  $-\frac{2(nz - 1)^2 + 1}{6}$ ,
    If[i == 1 && j == 1,  $\frac{2(nz - 1)^2 + 1}{6}$ , If[i == j,  $\frac{-z[[i]]}{2(1 - z[[i]]^2)}$ ,
       $\frac{(-1)^{i+j}}{z[[i]] - z[[j]]}$  If[i == 1 || i == nz, 2, 1]
      If[j == 1 || j == nz, 2, 1]]]], {i, nz}, {j, nz}];
  SecondD = FirstD.FirstD;
)
initGrid[30]

```

شکل ۴-۹: تولید نقاط شبکه و تعریف عملگرهای مشتق با مولد چندجمله‌ای چبیشف.

```

In[5]= eq := SecondD.trial + (FirstD.trial) trial - trial^2 + Table[1, {nz}]
In[6]= trial = 1 + (z^2 + 1) / 2; (*simple trial: satisfying boundary conditions*)
In[7]= show := {Show[plotsol, ListPlot[Thread[{z, trial}], PlotStyle -> PointSize[Large]],
  ImageSize -> 200], (*ListPlot[Thread[{z, eq}]], *)Max[Abs[eq]] // N}

```

شکل ۴-۱۰: نوشتن معادله دیفرانسیل به صورت ماتریسی و جواب حدسی.

```

jacobian := (
  matrix = SecondD + FirstD.DiagonalMatrix[trial] - DiagonalMatrix[2 trial];
  matrix[[1]] = Table[If[i == 1, 1, 0], {i, nz}];
  matrix[[-1]] = Table[If[i == nz, 1, 0], {i, nz}];
  matrix)

step := (
  trial = trial - LinearSolve[jacobian, {0} ~Join~ eq[[2 ;; -2]] ~Join~ {0}];
  show
)

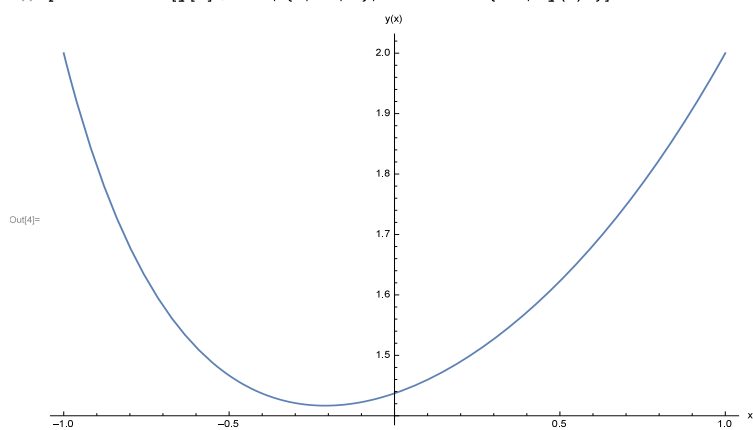
```

شکل ۴-۱۱: تعریف ژاکوبین و اصلاح حدس اولیه با استفاده از تقریب تکرار نیوتون.

```

In[3]= sol = NDSolve[{y''[x] + y'[x] y[x] - y[x]^2 + 1 == 0, y[-1] == 2, y[1] == 2}, y, x][[1]];
In[4]= plotsol = Plot[y[x] /. sol, {x, -1, 1}, AxesLabel -> {"x", "y(x)"}]

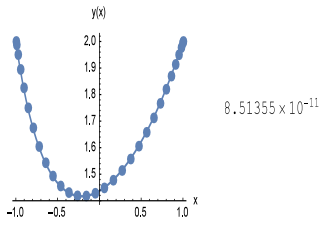
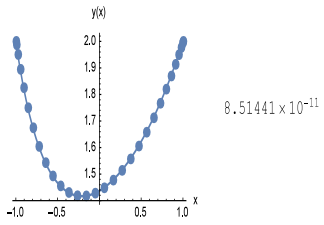
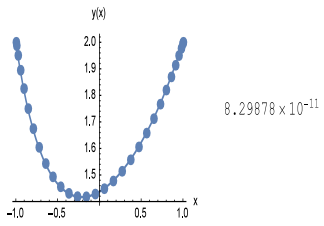
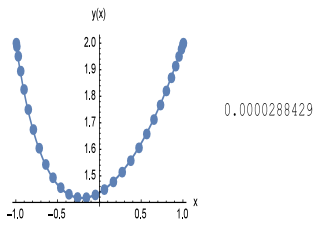
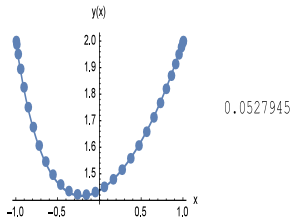
```



شکل ۴-۱۲: حل عددی به روش تفاضل محدود.

```
In[10]:= Quiet[Table[step, {5}] // TableForm]
```

```
Out[10]TableForm=
```



شکل ۴-۱۳: نتایج حل عددی با روش طیفی و تقریب نیوتون. بعد از سه بار تکرار، جواب تقریب تکرار نیوتن با دقت

10^{-11} بر جواب عددی قبل منطبق شده است..

فصل ۵

مطالعه همسانگردی

پلاسمای کوآرک-گلوئون

در جفت شدگی محدود

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، مطالعه رفتار پلاسمای کوآرک-گلوئون به عنوان یک سیستم دور از تعادل و جفت‌شده‌ی قوی به روش عددی یکی از مهمترین مسائل طرح شده در دهه‌های اخیر است. در سال‌های اخیر مطالعاتی در مورد همسانگرد شدن پلاسمای کوآرک-گلوئون و زمان رسیدن به تعادل انجام شده است که در ادامه به آن‌ها اشاره خواهد شد. در این فصل ضمن مرور سریع کارهای انجام شده در این حوزه، به منظور واقعی‌تر کردن مسئله، به بررسی همسانگردی پلاسمای کوآرک-گلوئون در جفت‌شدگی محدود با تقریب خطی می‌پردازیم.^۱

۱-۵ همسانگردی پلاسمای کوآرک-گلوئون در جفت‌شدگی نامحدود

در بخش ۲-۴ به تشریح هولوگرافی دینامیک پلاسمای کوآرک-گلوئون همگن غیرتعادلی پرداختیم و معادلات حرکت آن را به دست آوردیم. با استفاده از راهبرد تشریح شده در فصل ۳ و روش طیفی که در فصل ۴ بیان شد، به حل عددی آن می‌پردازیم.

در ابتدا، طبق آنچه قبلاً گفته شد، برای اعمال صحیح شرایط مرزی توابع متریک در مرز، با تغییر

متغیر $z \equiv 1/r$ آنها را باز تعریف کرده و بخش محدود آنها را جدا می‌کنیم:

$$A^{redef}(t, z) = \left(\frac{1}{z} + \lambda\right)^2 + A^{reg}(t, z),$$

$$B^{redef}(t, z) = z^3 B^{reg}(t, z),$$

$$\Sigma^{redef}(t, z) = \frac{1}{z} + \Sigma^{reg}(t, z),$$

$$d_+ B^{redef}(t, z) = z^3 d_+ B^{reg}(t, z),$$

$$d_+ \Sigma^{redef}(t, z) = \left(\frac{1}{z} + \lambda\right)^2 + z d_+ \Sigma^{reg}(t, z). \quad (1-5)$$

^۱نتایج این فصل در مراجع [۷۱، ۷۲، ۷۳] توسط نویسنده رساله آمده است.

همچنین با توجه به روابط (۱-۳) و (۲-۳۳)، مقدار میدان $d_+\Sigma$ و مشتق زمانی آن روی افق صفر خواهد شد. با استفاده از معادله حرکت (۲-۳۸) داریم:

$$(d_+\Sigma)' = 2 \left(\Sigma - d_+\Sigma \frac{\Sigma'}{\Sigma} \right), \quad (2-5)$$

با قرار دادن (۲-۵) در معادله حرکت (۲-۴۲) و استفاده از صفر بودن $\partial_t d_+\Sigma$ روی افق، معادله شرط ایستایی افق - که با حل آن مقدار میدان A روی افق را خواهیم داشت - به صورت زیر خواهد بود:

$$A_h + \frac{1}{4} (d_+B)^2 |_{r=r_h} = 0, \quad (3-5)$$

که در آن A_h مقدار تابع A روی افق است.

۱-۱-۵ حل دستگاه معادلات تحول

با استفاده از (۱-۵) و با قرار دادن توابع باز تعریف شده در معادلات (۲-۳۸) تا (۲-۴۲) می‌توان توابع مجهول را با استفاده از الگوریتم تو در تو به ترتیب زیر بدست آورد^۲:

۱. قرار دادن شرایط اولیه با مشخص کردن چگالی انرژی (که با تعیین ضریب a_4 مشخص می‌شود)،

ضریب b_4 و میدان B .

۲. به دست آوردن میدان Σ با حل معادله (۲-۴۱).

۳. بدست آوردن $d_+\Sigma$ از (۲-۳۸).

^۲ در این مسئله، مقدار تابع B و ضرایب بسط $a_4, b_4(t_0)$ به عنوان شرایط اولیه، در برش زمانی اول به سیستم داده خواهند شد که به ترتیب بیانگر چگالی انرژی و اختلاف فشار طولی و عرضی در لحظه ابتدایی هستند.

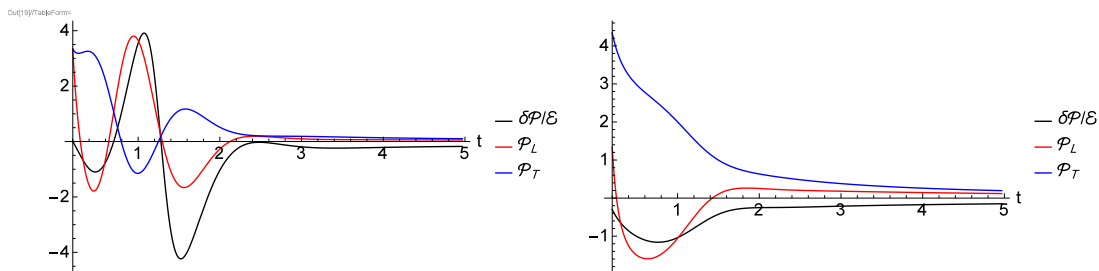
۴. حل (۳۹-۲) و به دست آوردن d_+B .

۵. مشخص کردن A با حل (۴۰-۲).

۶. مشخص کردن تحول زمانی B .

۷. تکرار مراحل فوق برای برش‌های زمانی بعدی.

نتایج در شکل ۱-۵ نشان داده شده است. در شکل ۱-۵ رفتار فشار ناهمسانگردی $\delta P = T_{zz}$ - نتایج در شکل ۱-۵ نشان داده شده است. در شکل ۱-۵ رفتار فشار ناهمسانگردی $\delta P = T_{zz}$ - نسبت به زمان نشان داده شده است. همانطور که در شکل واضح است، بعد از گذشت مدت زمانی که به زمان همسانگردی معروف است، اختلاف فشار طولی و عرضی صفر شده که به معنای همسانگرد شدن پلازماست.



شکل ۱-۵: فشار همسانگردی پلاسمای کوارک-گلوئون برای شرایط اولیه مختلف. در شکل رفتار فشار راستای طولی و عرضی با زمان نشان داده شده است. منحنی مشکی رنگ اختلاف فشار طولی و عرضی است که پس از گذشت زمان همسانگردی به صفر میل می‌کند.

۲-۱-۵ تقریب خطی

مسئله همسانگردی پلاسمای کوارک-گلوئون را می‌توان با یک تقریب خطی ساده‌تر کرد. به عنوان دوگان گرانشی برای سیستم جفت شده‌ی قوی دور از تعادل، یک متریک وابسته به زمان حدس زده شد. رسیدن به تعادل در سمت نظریه پیمانه‌ای، دوگان با تشکیل یک سیاه چاله در طرف گرانش

است. در تقریب خطی، شکل هر کدام از توابع متریک A, B, Σ را به صورت جواب نهایی سیاه چاله پاددوسیته-شوارزشیلد^۳ به اضافه یک جمله وابسته به زمان در نظر می‌گیریم [۷۴]:

$$A(t, z) = \frac{1-z^4}{z^2} + \alpha \delta A^{(1)}(t, z) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (۴-۵)$$

$$B(t, z) = \alpha \delta B^{(1)}(t, z) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (۵-۵)$$

$$\Sigma(t, z) = \frac{1}{z} + \alpha \delta \Sigma^{(1)}(t, z) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (۶-۵)$$

با قرار دادن معادلات (۴-۵)، (۵-۵) و (۶-۵) در معادلات اینشتین خواهیم دید تا مرتبه اول تقریب جملات $\delta A^{(1)}(t, z)$ و $\delta \Sigma^{(1)}(t, z)$ صفر خواهند شد و فقط یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو برای $\delta B^{(1)}(t, z)$ داریم:

$$(z^4 + 3) \partial_z \delta B + z (z^4 - 1) \partial_z^2 \delta B - 3 \partial_t \delta B + 2z \partial_t \partial_z \delta B = 0. \quad (۷-۵)$$

برای حل معادله دیفرانسیل فوق از شرایط اولیه‌ای مشابه حل غیر خطی استفاده می‌کنیم. چگالی انرژی را ثابت و شرط اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\delta B^{(1)}(t=0, z) = B(t=0, z). \quad (۸-۵)$$

مشابه قبل، میدان‌ها را باز تعریف کرده و بخش محدود آن را جدا می‌کنیم:

$$\delta B_{reg}^{(1)}(t, z) = \frac{1}{z^3} \delta B^{(1)}(t, z), \quad (۹-۵)$$

که تابع $\delta B_{reg}^{(1)}(t, z)$ در شرط $\delta B_{reg}^{(1)}(t, z=0) = 0$ صدق می‌کند. با حل معادله دیفرانسیل (۹-۵)

^۳ AdS-Schwarzschild

نسبت اختلاف فشار طولی و عرضی (فشار ناهمسانگردی^۴) به چگالی انرژی $\Delta P/\mathcal{E}$ بدست می‌آید. همانطور که در مرجع [۷۴] نشان داده شده است، نتایج تقریب خطی مرتبه اول با نتایج حل غیر خطی انطباق مناسبی دارد.

با افزایش مرتبه تقریب تا مرتبه دوم، می‌توان سایر مشاهده‌پذیرها از جمله آنتروپی درهم‌تنیدگی، تابع دو نقطه‌ای، حلقه ویلسون و غیره را نیز مطالعه کرد.

۲-۵ دوگان گرانشی در جفت شدگی محدود

آنچه در قسمت قبل ذکر شد، مربوط به مطالعه همسانگردی پلاسمای کوآرک-گلوئون با جفت شدگی قوی (بی‌نهایت) بود. اما در واقعیت، جفت شدگی اگرچه بالاست ولی بی‌نهایت نیست. از این رو فیزیکدانان علاقه‌مند به مطالعه‌ی این مسئله در جفت شدگی محدود هستند. از آنجایی که مسئله با استفاده از اصل هولوغرافی حل می‌شود، لذا باید دوگان مناسب گرانشی برای وضعیت جفت شدگی محدود را یافت. دوگان گرانشی متناظر با جفت شدگی محدود، جملات تصحیحی مشتقات مراتب بالاتر متریک در کنش است. ما در اینجا جملات تصحیحات گاوس-بونت را در نظر می‌گیریم:

$$S = \int dx^5 \sqrt{-g} \{R - 2\Lambda + \lambda_{GB} \mathcal{L}_{GB}\} \quad (10-5)$$

که در آن

$$\mathcal{L}_{GB} = R_{cdef} R^{cdef} - 4R_{ab} R^{ab} + R^2, \quad (11-5)$$

و λ_{GB} جفت شدگی گاوس-بونت هستند. حل دقیق سیاه چاله پاددوسیت-شوارزشیلد به صورت

^۴Pressure Anisotropy

زیر است [۷۵، ۷۶، ۷۷]:

$$ds^2 = -N z^2 h(z) dt^2 + \frac{1}{z^4 h(z)} dz^2 + z^2 d\vec{x}^2, \quad (12-5)$$

که در آن

$$h(z) = \frac{1}{2\lambda_{GB}} \left[1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{GB} \left(1 - \frac{z^4}{z_h^4} \right)} \right], \quad (13-5)$$

و دمای هاوکینگ^۵ $T = \sqrt{N} \frac{z_h}{\pi L^2}$ و $N = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{GB}})$ می‌باشد. همچنین سرعت نور برابر یک در نظر گرفته شده است. برای مقادیر $\lambda_{GB} > 1/4$ حل خلاء AdS و دوگان نظریه میدان وجود ندارد. با رعایت کردن علیت در دوگان گرانشی مسئله، جفت شدگی گائوس-بونت در بازه $-7/36 < \lambda_{GB} < 9/100$ قرار می‌گیرد.

ملاحظات مربوط به علیت در دوگان گرانشی در مراجع [۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳] مطالعه شده است. بر طبق این مطالعات، جفت شدگی گائوس-بونت λ_{GB} باید به عنوان یک پارامتر کوچک و نظریه گائوس-بونت مانند تصحیحات مشتقات بالاتر بررسی شوند.

معادلات اینشتین به صورت

$$R_{ab} + 4g_{ab} + \lambda_{GB} \mathcal{H}_{ab} = 0, \quad (14-5)$$

خواهد بود که در آن

$$\mathcal{H}_{ab} = -2R_{ac}R_b^c + R_{ab}R - 2R_{cd}R_a^c b^d + R_{acde}R_b^{cde}. \quad (15-5)$$

^۵Hawking temperature

۳-۵ معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس - بونت

در این بخش، معادلات حرکت به دست آمده از کنش (۱۰-۵) را معرفی می‌کنیم. همانطور که از روابط (۱۴-۵) و (۱۵-۵) واضح است، این معادلات بسیار پیچیده خواهند بود به طوری که الگوریتم تو در توی بکار رفته برای حل معادلات (۳۸-۲) تا (۴۲-۲) در اینجا کاربرد ندارد. معادلات حرکت به شکل زیر خواهند بود:

۱. معادله (۳۸-۲) به صورت

$$\begin{aligned} & (-2\Sigma^2 + \Sigma(d_+\Sigma)' + 2(d_+\Sigma)\Sigma') \\ & + \frac{\lambda_{GB}}{\Sigma} \left\{ (d_+B)^2 \Sigma \Sigma' (\Sigma B' + 2\Sigma') + 2(d_+\Sigma) (\Sigma B' (\Sigma(d_+B)' + (d_+\Sigma)B') - 4(d_+\Sigma)'\Sigma') \right. \\ & \left. + (d_+B)\Sigma^2 (B' ((d_+\Sigma)B' + 2(d_+\Sigma)') + 2(d_+B)' (\Sigma B' + \Sigma')) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (۱۶-۵)$$

۲. معادله (۳۹-۲) به شکل

$$\begin{aligned} & \Sigma(2\Sigma(d_+B)' + 3(d_+\Sigma)B' + 3(d_+B)\Sigma') \\ & - \lambda_{GB} \left\{ 2(d_+\Sigma)\Sigma A'' B' + 2(d_+\Sigma)\Sigma A' B'' + 4(d_+\Sigma)A' B' \Sigma' - (d_+\Sigma)\Sigma A' B'^2 \right. \\ & + 2(d_+B)(\Sigma(A''(\Sigma B' + \Sigma') + A'(\Sigma B'' + 2B'\Sigma' + \Sigma'')) + (d_+\Sigma)'(4\Sigma' - 2\Sigma B')) \\ & - 4(d_+\Sigma)(\Sigma B'' + B'\Sigma' + \Sigma'') - 4(d_+d_+B)\Sigma^2 B'' - 4(d_+d_+\Sigma)\Sigma B'' + 4\Sigma^2(d_+B)^2 \\ & - 8(d_+d_+B)\Sigma B'\Sigma' + 8\Sigma(d_+B)'((d_+\Sigma)B' + (d_+B)\Sigma' + (d_+\Sigma)') + 8(d_+\Sigma)B'(d_+\Sigma)' \\ & \left. - 8(d_+d_+\Sigma)B'\Sigma' + 2(d_+d_+\Sigma)\Sigma B'^2 + 4(d_+\Sigma)^2 B'^2 \right. \\ & \left. - 4(d_+d_+B)\Sigma\Sigma'' + 2(d_+B)^2(\Sigma\Sigma'' + 2\Sigma'^2) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (۱۷-۵)$$

۳. معادله (۴۰-۲) به صورت

$$\begin{aligned}
& 3(d_+B)B' + \frac{8(d_+\Sigma)'}{\Sigma} + \frac{4(d_+\Sigma)\Sigma'}{\Sigma^2} - 12 + A'' \left(1 - \lambda_{GB} \left(\frac{8\Sigma'\Sigma'}{\Sigma^2} - 2(d_+B)B' \right) \right) \\
& - \frac{\lambda_{GB}}{\Sigma^2} \left\{ 4(d_+\Sigma)\Sigma A' B'^2 \right. \\
& + (d_+B) (B' (\Sigma A' (\Sigma B' - 4\Sigma') + 16\Sigma(d_+\Sigma)' + 8(d_+\Sigma)\Sigma') - 2\Sigma B'' (\Sigma A' - 4(d_+\Sigma))) \\
& + 8(d_+\Sigma)A'\Sigma'' + 4(d_+d_+B)\Sigma^2 B'' - 2(d_+B)^2 (\Sigma (\Sigma B'' + 4\Sigma'') + 2(\Sigma')^2) - 4\Sigma^2(d_+B)^2 \\
& - 2(d_+d_+B)\Sigma^2 (B')^2 + 4\Sigma(d_+B)' ((d_+B) (\Sigma B' - 2\Sigma') - 2(d_+\Sigma)B') + 8(d_+d_+B)\Sigma B'\Sigma' \\
& \left. - 8(d_+d_+\Sigma)\Sigma (B')^2 - 4(d_+\Sigma)^2 (B')^2 - 16(d_+d_+\Sigma)\Sigma'' + 16(d_+\Sigma)^2 \right\} = 0. \quad (۱۸-۵)
\end{aligned}$$

۴. معادله (۴۲-۲) به شکل

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left((d_+B)^2 \Sigma - (d_+\Sigma)A' \right) + (d_+d_+\Sigma) \left(1 - \lambda_{GB} \left(\frac{8(d_+\Sigma)\Sigma'}{\Sigma^2} - 2(d_+B)B' \right) \right) \\
& - \frac{\lambda_{GB}}{\Sigma^2} \left\{ -2(d_+B)\Sigma \left(-\Sigma(d_+\Sigma)A'B' + (d_+d_+B)\Sigma (\Sigma B' + \Sigma') + 2(d_+\Sigma)^2 B' \right) \right. \\
& + (d_+B)^2 \Sigma^2 (A' (\Sigma B' + \Sigma') - 3(d_+\Sigma)B') \\
& \left. - 2(d_+\Sigma) \left(2(d_+\Sigma)A'\Sigma' + (d_+d_+B)\Sigma^2 B' \right) + (d_+B)^3 \Sigma^2 \Sigma' \right\} = 0. \quad (۱۹-۵)
\end{aligned}$$

۵. و معادله قیدی مستقل از زمان (۴۱-۲) به معادله وابسته به زمان زیر مبدل خواهند شد.

$$\begin{aligned}
& \Sigma'' \left(2 + 4\lambda_{GB} \left((d_+B)B' - 4 \frac{(d_+\Sigma)\Sigma'}{\Sigma^2} \right) \right) = -\Sigma B'^2 + 2 \frac{\lambda_{GB}}{\Sigma} \left((d_+B) - B'\Sigma' (3\Sigma B' + 4\Sigma') \right. \\
& \left. - 2\Sigma B'' (\Sigma B' + \Sigma') + \Sigma(d_+\Sigma)B' (B'^2 - 2B'') \right). \quad (۲۰-۵)
\end{aligned}$$

اگرچه حل عددی این معادلات بسیار مهم و مورد علاقه است، اما در این بخش به دلیل پیچیدگی معادلات و ساده کردن مسئله از تقریب خطی استفاده می‌کنیم.

شرط ایستایی افق، همانند حالت قبل با استفاده از صفر بودن $d_+\Sigma$ و مشتق زمانی آن روی افق و معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A F(\Sigma, B, d_+B, d_+\Sigma)|_{r=r_h} + G(\Sigma, B, d_+B, d_+\Sigma)|_{r=r_h} = 0, \quad (21-5)$$

که در آن

$$\begin{aligned} F(\Sigma, B, d_+B, d_+\Sigma) = & \\ & 4(d_+B)^2 \lambda_{GB}^2 (B')^4 \Sigma^5 - 4(B')^2 \Sigma^5 \\ & - 8(d_+B)^2 \lambda_{GB}^2 (B')^2 B'' \Sigma^5 + 4(d_+B) \lambda_{GB} B' (d_+B)' B'' \Sigma^5 + 8B'' \Sigma^5 \\ & - 2(d_+B) \lambda_{GB} (B')^3 (d_+B)' (2(d_+B)^2 B'' \lambda_{GB}^2 + 1) \Sigma^5 - 8(d_+B)^2 \lambda_{GB}^2 (B')^3 \Sigma' \Sigma^4 \\ & - (d_+B)^2 \lambda_{GB} (B')^3 \Sigma' \Sigma^4 - 8(d_+B) \lambda_{GB} (B')^2 \Sigma' \Sigma^4 + 16B' \Sigma' \Sigma^4 - 2(d_+B)^3 \lambda_{GB}^3 (B')^4 (d_+B)' \Sigma' \Sigma^4 \\ & - 4(d_+B)^2 \lambda_{GB}^2 (B')^3 (d_+B)' \Sigma' \Sigma^4 + 6(d_+B) \lambda_{GB} (B')^2 (d_+B)' \Sigma' \Sigma^4 \\ & + (d_+B)^3 \lambda_{GB}^3 (B')^5 (2\Sigma(d_+B)' + (d_+B)\Sigma' - 2(d_+\Sigma)') \Sigma^4 - 3(d_+B)^2 \lambda_{GB}^2 (B')^4 (d_+\Sigma)' \Sigma^4 \\ & + (B')^2 (d_+\Sigma)' \Sigma^4 - 2(d_+B)^4 \lambda_{GB}^3 (B')^3 \Sigma' B'' \Sigma^4 \\ & + 16(d_+B) \lambda_{GB} \Sigma' B'' \Sigma^4 - 16(d_+B)^2 \lambda_{GB}^2 B' \Sigma' B'' \Sigma^4 \\ & + 2(d_+B)^2 \lambda_{GB} B' \Sigma' B'' \Sigma^4 - 12(d_+B)^3 \lambda_{GB}^3 (B')^2 (d_+B)' \Sigma' B'' \Sigma^4 + 4(d_+B) \lambda_{GB} (d_+B)' \Sigma' B'' \Sigma^4 \\ & + 8(d_+B)^2 \lambda_{GB}^2 B' (d_+B)' \Sigma' B'' \Sigma^4 + 4(d_+B)^3 \lambda_{GB}^3 (B')^3 (d_+\Sigma)' B'' \Sigma^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +6(d_+B)^2\lambda_{GB}^2(B')^2(d_+\Sigma)'B''\Sigma^4 \\
& -2(d_+\Sigma)'B''\Sigma^4 - 2(d_+B)^3\lambda_{GB}^2(B')^3(\Sigma')^2\Sigma^3 - 32(d_+B)^2\lambda_{GB}^2(B')^2(\Sigma')^2\Sigma^3 \\
& +2(d_+B)^2\lambda_{GB}(B')^2(\Sigma')^2\Sigma^3 + 32(d_+B)\lambda_{GB}B'(\Sigma')^2\Sigma^3 - 20(d_+B)^3\lambda_{GB}^3(B')^3(d_+B)'(\Sigma')^2\Sigma^3 \\
& +12(d_+B)^2\lambda_{GB}^2(B')^2(d_+B)'(\Sigma')^2\Sigma^3 + 8(d_+B)\lambda_{GB}B'(d_+B)'(\Sigma')^2\Sigma^3 \\
& -(d_+B)^3\lambda_{GB}^3(B')^4\Sigma'(d_+\Sigma)'\Sigma^3 \\
& +6(d_+B)^2\lambda_{GB}^2(B')^3\Sigma'(d_+\Sigma)'\Sigma^3 + 3(d_+B)\lambda_{GB}(B')^2\Sigma'(d_+\Sigma)'\Sigma^3 \\
& -8(d_+B)^4\lambda_{GB}^3(B')^2(\Sigma')^2B''\Sigma^3 \\
& +4(d_+B)^2\lambda_{GB}(\Sigma')^2B''\Sigma^3 + 4(d_+B)^3\lambda_{GB}^2B'(\Sigma')^2B''\Sigma^3 + 8(d_+B)^2\lambda_{GB}^2(d_+B)'(\Sigma')^2B''\Sigma^3 \\
& -8(d_+B)^3\lambda_{GB}^3B'(d_+B)'(\Sigma')^2B''\Sigma^3 + 18(d_+B)^3\lambda_{GB}^3(B')^2\Sigma'(d_+\Sigma)'B''\Sigma^3 \\
& -6(d_+B)\lambda_{GB}\Sigma'(d_+\Sigma)'B''\Sigma^3 \\
& +4B'\Sigma'(d_+\Sigma)'\left(3(d_+B)^2\lambda_{GB}^2B'' - 1\right)\Sigma^3 - 12(d_+B)^4\lambda_{GB}^3(B')^3(\Sigma')^3\Sigma^2 \\
& +4(d_+B)^3\lambda_{GB}^2(B')^2(\Sigma')^3\Sigma^2 \\
& +8(d_+B)^2\lambda_{GB}B'(\Sigma')^3\Sigma^2 - 16(d_+B)^3\lambda_{GB}^3(B')^2(d_+B)'(\Sigma')^3\Sigma^2 \\
& +16(d_+B)^2\lambda_{GB}^2B'(d_+B)'(\Sigma')^3\Sigma^2 \\
& +24(d_+B)^3\lambda_{GB}^3(B')^3(\Sigma')^2(d_+\Sigma)'\Sigma^2 + 24(d_+B)^2\lambda_{GB}^2(B')^2(\Sigma')^2(d_+\Sigma)'\Sigma^2 \\
& +8(d_+B)^3\lambda_{GB}^2(\Sigma')^3B''\Sigma^2 \\
& -8(d_+B)^4\lambda_{GB}^3B'(\Sigma')^3B''\Sigma^2 + 12(d_+B)\lambda_{GB}B'(\Sigma')^2(d_+\Sigma)'\left(2(d_+B)^2\lambda_{GB}^2B'' - 1\right)\Sigma^2 \\
& -16(d_+B)^4\lambda_{GB}^3(B')^2(\Sigma')^4\Sigma + 16(d_+B)^3\lambda_{GB}^2B'(\Sigma')^4\Sigma \\
& +44(d_+B)^3\lambda_{GB}^3(B')^2(\Sigma')^3(d_+\Sigma)'\Sigma
\end{aligned}$$

$$+8(d_+B)^3\lambda_{GB}^3(\Sigma')^3(d_+\Sigma)'B''\Sigma + 16(d_+B)^3\lambda_{GB}^3B'(\Sigma')^4(d_+\Sigma)' \quad (22-5)$$

$$G(\Sigma, B, d_+B, d_+\Sigma) =$$

$$12\Sigma\lambda_{GB}^3B'(\Sigma')^4Bdot^5 + 44\Sigma^2\lambda_{GB}^3(B')^2(\Sigma')^3Bdot^5 + 35\Sigma^3\lambda_{GB}^3(B')^3(\Sigma')^2Bdot^5$$

$$+8\Sigma^4\lambda_{GB}^3(B')^4\Sigma'Bdot^5 + 4\Sigma^5\lambda_{GB}^3(B')^3B''(d_+B)^5 + 8\Sigma^2\lambda_{GB}^3(\Sigma')^3B''(d_+B)^5$$

$$+24\Sigma^3\lambda_{GB}^3B'(\Sigma')^2B''(d_+B)^5 + 18\Sigma^4\lambda_{GB}^3(B')^2\Sigma'B''(d_+B)^5 + 2\Sigma^5\lambda_{GB}^2(B')^4(d_+B)^4$$

$$+4\Sigma\lambda_{GB}^2(\Sigma')^4(d_+B)^4 - 4\Sigma^2\lambda_{GB}^2B'(\Sigma')^3(d_+B)^4 - 8\Sigma^2\lambda_{GB}^3B'(d_+B)'(\Sigma')^3(d_+B)^4$$

$$+21\Sigma^3\lambda_{GB}^2(B')^2(\Sigma')^2(d_+B)^4 - 4\Sigma^3\lambda_{GB}^3(B')^2(d_+B)'(\Sigma')^2(d_+B)^4$$

$$+4\Sigma^5\lambda_{GB}^3(B')^4(d_+B)'(d_+B)^4$$

$$+16\Sigma^4\lambda_{GB}^2(B')^3\Sigma'(d_+B)^4 + 8\Sigma^4\lambda_{GB}^3(B')^3(d_+B)'\Sigma'(d_+B)^4 + 6\Sigma^5\lambda_{GB}^2(B')^2B''(d_+B)^4$$

$$+12\Sigma^4\lambda_{GB}^2B'\Sigma'B''(d_+B)^4 - \Sigma^5\lambda_{GB}(24\lambda_{GB} + 7)(B')^3(d_+B)^3 + 4\Sigma^2\lambda_{GB}(\Sigma')^3(d_+B)^3$$

$$+8\Sigma^2\lambda_{GB}^2(d_+B)'(\Sigma')^3(d_+B)^3 - 2\Sigma^3\lambda_{GB}(12\lambda_{GB} + 13)B'(\Sigma')^2(d_+B)^3$$

$$-4\Sigma^3\lambda_{GB}^2B'(d_+B)'(\Sigma')^2(d_+B)^3 - 2\Sigma^4\lambda_{GB}(24\lambda_{GB} + 11)(B')^2\Sigma'(d_+B)^3$$

$$-12\Sigma^4\lambda_{GB}^2(B')^2(d_+B)'\Sigma'(d_+B)^3 - 6\Sigma^4\lambda_{GB}\Sigma'B''(d_+B)^3 + \Sigma^5(B')^2(d_+B)^2$$

$$+24\Sigma^5\lambda_{GB}(B')^2(d_+B)^2$$

$$+6\Sigma^3(\Sigma')^2(d_+B)^2 + 24\Sigma^3\lambda_{GB}(\Sigma')^2(d_+B)^2 + 8\Sigma^3\lambda_{GB}(d_+B)'(\Sigma')^2(d_+B)^2$$

$$-8\Sigma^5\lambda_{GB}(B')^2(d_+B)'(d_+B)^2 + 2\Sigma^4B'\Sigma'(d_+B)^2 + 48\Sigma^4\lambda_{GB}B'\Sigma'(d_+B)^2$$

$$-4\Sigma^4\lambda_{GB}^2(B')^2((d_+B)')^2(\Sigma + (d_+B)\lambda_{GB}\Sigma')(d_+B)^2 - 2\Sigma^5B''(d_+B)^2 + 4\Sigma^5B'(d_+B)'(d_+B)$$

$$+4\Sigma^4(d_+B)'\Sigma'(d_+B) + 4\Sigma^3\lambda_{GB}((d_+B)')^2\Sigma'(\Sigma + (d_+B)\lambda_{GB}\Sigma')(d_+B)$$

$$+2B' ((d_+B)')^2 (2(d_+B)\Sigma^5 \lambda_{GB} - 2(d_+B)^3 \Sigma^3 \lambda_{GB}^3 (\Sigma')^2) \quad (23-5)$$

معادلات حرکت (۱۶-۵) تا (۲۰-۵) و معادله شرط ایستایی افق (۲۱-۵) در جفت شدگی محدود با اعمال حد $\lambda_{GB} \rightarrow 0$ به ترتیب به معادلات حرکت (۲-۳۸) تا (۲-۴۲) و معادله شرط ایستایی افق (۳-۵) در جفت شدگی نامحدود تبدیل می‌شوند. با قرار دادن جملات گاوس-بونت در معادلات اینشتین و اعمال تغییر متغیر $z = 1/r$ ، بسط نزدیک مرز توابع متریک نیز به شکل زیر خواهد شد:

$$A(z, t) = \frac{a_0(t)}{z^2} + \frac{a_1(t)}{z} + a_2(t) + a_4(t)z^2 + \dots, \quad (24-5)$$

$$B(z, t) = b_4(t)z^4 + b_5(t)z^5 + \dots, \quad (25-5)$$

$$\Sigma(z, t) = \frac{s_0(t)}{z} + s_1(t) + \dots, \quad (26-5)$$

که در آن ضرایب $s_0(t), s_1(t), a_4(t), b_4(t)$ نامعلوم بوده و باید در زمان ابتدایی به عنوان شرایط

اولیه به سیستم داده شوند و سایر ضرایب بسط بر حسب آن‌ها به شرح ذیل به دست خواهند آمد:

$$a_0 = -L_c, \quad (27-5)$$

$$a_1(t) = \frac{-2}{s_0(t)} (L_c s_1(t) + s_0'(t)), \quad (28-5)$$

$$a_2(t) = \frac{-1}{s_0(t)^2} (L_c s_1(t)^2 + 2s_1'(t)), \quad (29-5)$$

$$b_5(t) = \frac{-1}{L_c} \left(b_4'(t) + 4\lambda_{GB} b_4(t) \left(L_c \frac{s_1(t)}{s_0(t)} + \frac{s_0'(t)}{s_0(t)} \right) \right), \quad (30-5)$$

که در آن $L_c = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\lambda_{GB}}}{2\lambda_{GB}}$ می‌باشد. معادلات (۲۴-۵)، (۲۵-۵) و (۲۶-۵) در حد $\lambda_{GB} \rightarrow 0$

به معادلات (۳۶-۲) تبدیل می‌شوند.^۶

ضریب $s_1(t)$ در واقع همان آزادی عمل در انتخاب پیمانانه شعاعی $\lambda(t)$ رابطه (۲-۱۰) است که همان‌طور که قبلاً اشاره شد به گونه‌ای انتخاب می‌شود که موقعیت شعاعی افق به مختصات فضایی و زمان وابستگی نداشته باشد.

همچنین از حل مرتبه به مرتبه معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت، به یک اتحاد

به صورت

$$\partial_t a_4(t) = -4 \frac{a_4(t) s_0'(t)}{s_0(t)} \quad (۳۱-۵)$$

می‌رسیم. همان‌طور که از اتحاد (۳۱-۵) واضح است، چون ضریب $a_4(t)$ مستقیماً به چگالی انرژی

سیستم مربوط است، ضریب $s_0(t)$ به فیزیک مسئله بستگی دارد به طوری که انتخاب مقدار $s_0(t)$ به

عنوان اعمال شرط روی چگالی انرژی سیستم - و یا به عبارت دیگر شرط روی متریک مرز - قلمداد

می‌شود. در این مسئله و مثال‌هایی که در فصل‌های قبل ذکر شد، مقدار $s_0(t) = 1$ انتخاب شده که با

توجه به رابطه (۳۱-۵) به معنای ثابت بودن چگالی انرژی سیستم - و یا تخت بودن متریک مرز - در

طول تحول است.

^۶ برای رسیدن به روابط متناظر برای جفت شدگی نامحدود، علاوه بر حد $\lambda_{GB} \rightarrow 0$ باید مقادیر $s_0(t) = 1, s_1(t) = 0$

را نیز لحاظ کرد که انتخاب مقادیر فوق به منزله تعیین متریک مرز و انتخاب آزادی پیمانانه‌ای در راستای بعد هولوگرام هستند

که بسته به مسئله انتخاب می‌شوند.

۴-۵ معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت با تقریب

خطی

در این بخش به معرفی معادلات خطی اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت و حل عددی آن می‌پردازیم. مشابه روابط (۴-۵) تا (۶-۵)، توابع متریک را به صورت جواب نهایی سیاه‌چاله شوارزشیلد گاوس-بونت به اضافه یک جمله وابسته به زمان به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$A(t, z) = \frac{1}{2\lambda_{GB}z^2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{GB} \left(1 - \frac{z^4}{z_h^4}\right)} \right) + \alpha \delta A^{(1)}(t, z) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (۳۲-۵)$$

$$B(t, z) = \alpha \delta B^{(1)}(t, z) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (۳۳-۵)$$

$$\Sigma(t, z) = \frac{1}{z} + \alpha \delta \Sigma^{(1)}(t, z) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (۳۴-۵)$$

با قرار دادن این تقریب در معادلات اینشتین، در می‌یابیم که توابع A و Σ تا مرتبه اول تقریب،

دینامیک ندارند و معادله مربوط به دینامیک $\delta B^{(1)}(t, z)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & (z^4 + 3) \partial_z \delta B + z (z^4 - 1) \partial_z^2 \delta B - 3 \partial_t \delta B + 2z \partial_t \partial_z \delta B + \lambda_{GB} \{ (6z^9 - 2z) \partial_z^2 \delta B \\ & + 6(5z^8 + 1) \partial_z \delta B + 4(z^4 - 3) \partial_t \delta B + 8z(z^4 + 1) \partial_t \partial_z \delta B \} = 0. \end{aligned} \quad (۳۵-۵)$$

همانطور که واضح است با قرار دادن $\lambda_{GB} = 0$ در رابطه (۳۵-۵)، به رابطه (۷-۵) می‌رسیم. برای

حل معادله (۳۵-۵) از روابط (۸-۵) و (۹-۵) و شرط اولیه مشابه با آنچه برای حل معادله (۷-۵) بیان

شد استفاده می‌کنیم.

۱-۴-۵ اثر جفت‌شدگی محدود بر زمان همسانگردی

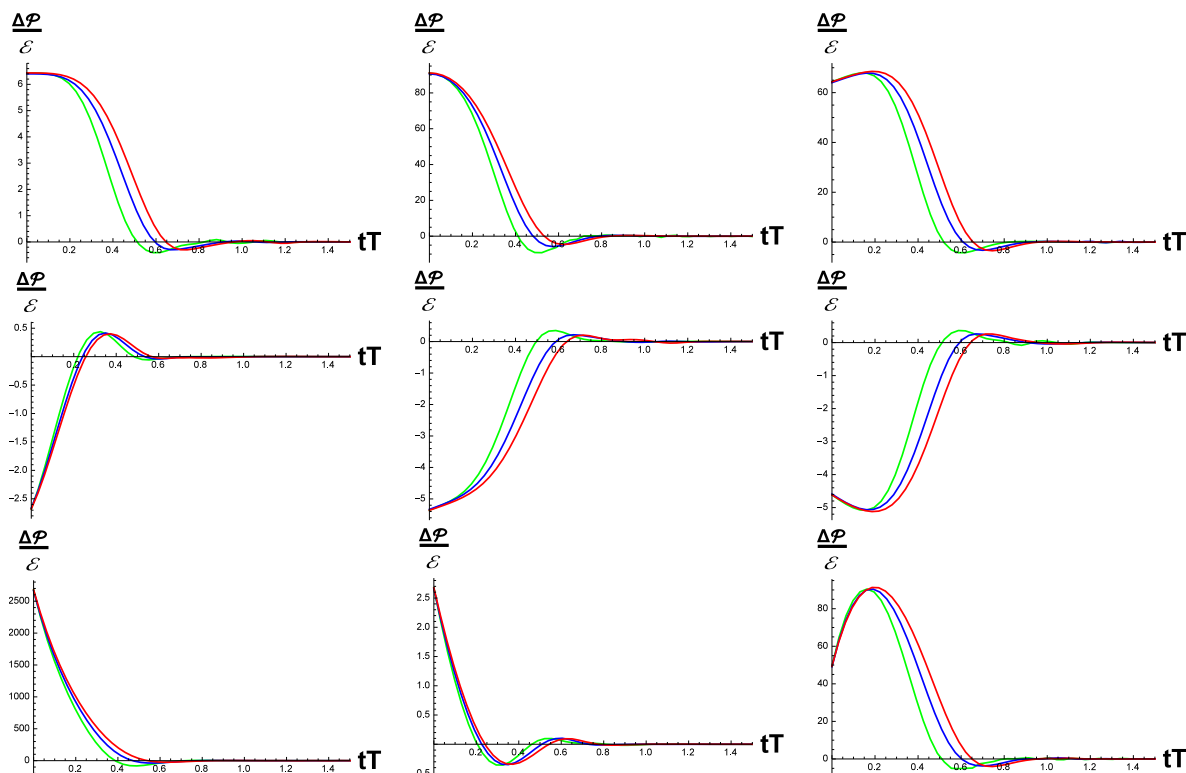
در این بخش با حل عددی معادله حرکت خطی شده (۳۵-۵) برای مقادیر مختلف λ_{GB} و تناظر بین کمیت‌های مختلف در طرف نظریه میدان و دوگان گرانشی، رفتار اختلاف فشار طولی و عرضی پلازما در طول زمان و همچنین زمان همسانگردی را بررسی می‌کنیم. از آنجا که نظریه میدان متناظر با گرانش گاوس-بونت نامعلوم است، ما کمیت $\Delta P(t)/\mathcal{E}$ را مطالعه می‌کنیم که در آن ΔP اختلاف فشار بین راستای برخورد یون‌های سنگین و راستای عمود بر آن و \mathcal{E} چگالی انرژی است.

زمان همسانگردی نیز به عنوان لحظه‌ای که در آن فشار راستای طولی و عرضی برابر می‌شوند مطرح می‌شود. به صورت کمی این زمان را معادل با لحظه‌ای در نظر می‌گیریم که مقدار نسبت $\Delta P(t)/\mathcal{E}$ کوچکتر از یک مقدار تعیین شده باشد.

رفتار فشار ناهمسانگردی با زمان و مقدار زمان همسانگردی، به شرایط اولیه‌ای که برای سیستم در نظر گرفته می‌شود بستگی دارد. بنابراین برای استخراج یک نتیجه کلی در مورد رفتار مولفه‌های تانسور انرژی-تنش سیستم، باید یک مجموعه معناداری از شرایط اولیه مورد بررسی قرار گیرد. ما با بررسی بیش از صد حالت اولیه جفت شده قوی غیرتعادلی به نتایجی دست یافتیم که در ادامه تشریح خواهد شد.

معادله حرکت (۳۵-۵) یک معادله دیفرانسیل ساده مرتبه دوم است که به لحاظ فنی، پیچیدگی خاصی برای حل ندارد و در اینجا به روش تفاضل محدود حل شده است.

شکل ۲-۵ رفتار نسبت $\Delta P(t)/\mathcal{E}$ را نسبت به زمان برای نه شرط اولیه مختلف نشان می‌دهد. منحنی‌های قرمز، آبی و سبز به ترتیب متناظر با مقادیر 0 ، $0/05$ ، و $0/05$ برای λ_{GB} هستند. معادله (۳۵-۵) برای تعداد زیادی از شرایط اولیه مختلف مطالعه شده است که رفتار مشاهده شده در شکل ۵-۲ به ازای مقادیر مثبت و منفی λ_{GB} برای همه آنها عمومیت دارد. همانطور که در شکل دیده می‌شود،



شکل ۵-۲: $\frac{\Delta P}{\epsilon}$ بر حسب tT برای نه شرط اولیه مختلف در تقریب خطی مرتبه اول. منحنی‌های قرمز، آبی و سبز به ترتیب متناظر با مقادیر $\lambda_{GB} = -0.05, 0, 0.05$ هستند.

اثر مقادیر منفی (مثبت) جفت شدگی گاوس-بونت، یک جابجایی به سمت مثبت (منفی) روی محور زمان است. به عبارت دیگر مقدار زمان همسانگردی برای مقادیر منفی (مثبت) جفت شدگی گاوس-بونت افزایش (کاهش) خواهد یافت.

هم‌زمان با انجام محاسبات فوق، گروه دیگری نیز همسانگردی پلاسمای کوآرک گلوئون در جفت شدگی محدود با دوگان گرانشی گاوس-بونت را با روش دیگری مطالعه کردند [۸۴]. در این مقاله، نویسندگان با در نظر گرفتن جملات گاوس-بونت به عنوان یک اختلال کوچک، بدون به دست آوردن معادلات حرکت در جفت شدگی محدود، رفتار همسانگردی پلازما در مقادیر مثبت و منفی λ_{GB} را استخراج کردند. در مرجع مذکور، جواب معادلات اینشتین-گاوس-بونت به صورت

$$g_{GB} = g_0 + \lambda_{GB} \delta g, \quad (36-5)$$

در نظر گرفته شده که در آن، g_0 جواب معادلات اینشتین بدون جملات گاوس-بونت است. بدین ترتیب در جفت شدگی محدود، با استفاده از بسط نزدیک مرز میدان‌های متریک و ترجمه آن به زبان نظریه میدان، یک جابجایی در مقادیر مولفه‌های تانسور انرژی-تنش نسبت به جفت شدگی نامحدود مشاهده می‌شود. بر اساس نتایج مرجع [۸۴] برای مقادیر منفی (مثبت) λ_{GB} زمان همسانگردی افزایش (کاهش) می‌یابد که با نتایج ارائه شده در این رساله کاملاً منطبق است.

نسبت فشار ناهمسانگردی به چگالی انرژی به صورت $\frac{-2b_4(t)}{L_e^2} = \Delta P / \mathcal{E}$ به جفت شدگی گاوس-بونت وابسته است. با استفاده از بسط نزدیک مرز و تقریب مرتبه اول، این کمیت به صورت $\Delta P(t) / \mathcal{E} = -2 \frac{\alpha \delta B}{z^4} (1 + \lambda_{GB})$ در می‌آید. برای اینکه بتوانیم مقایسه معناداری بین رفتارهای منحنی‌های متناسب با مقادیر مختلف جفت شدگی گاوس-بونت داشته باشیم، شرط می‌کنیم که مقدار نسبت $\frac{\Delta P}{\mathcal{E}}$ به ازای مقادیر مختلف λ_{GB} در زمان ابتدایی یکسان باشد. برای این منظور در حل معادله (35-5) شرط اولیه را به صورت زیر اعمال می‌کنیم:

$$\delta B_{\lambda_{GB}}(z, t = t_{ini}) = \frac{1}{1 + \lambda_{GB}} \delta B_{\lambda_{GB}=0}(z, t = t_{ini}). \quad (37-5)$$

برخی از حالت‌های اولیه‌ای برای تابع ناهمسانگردی B که در محاسبات این فصل در نظر گرفته

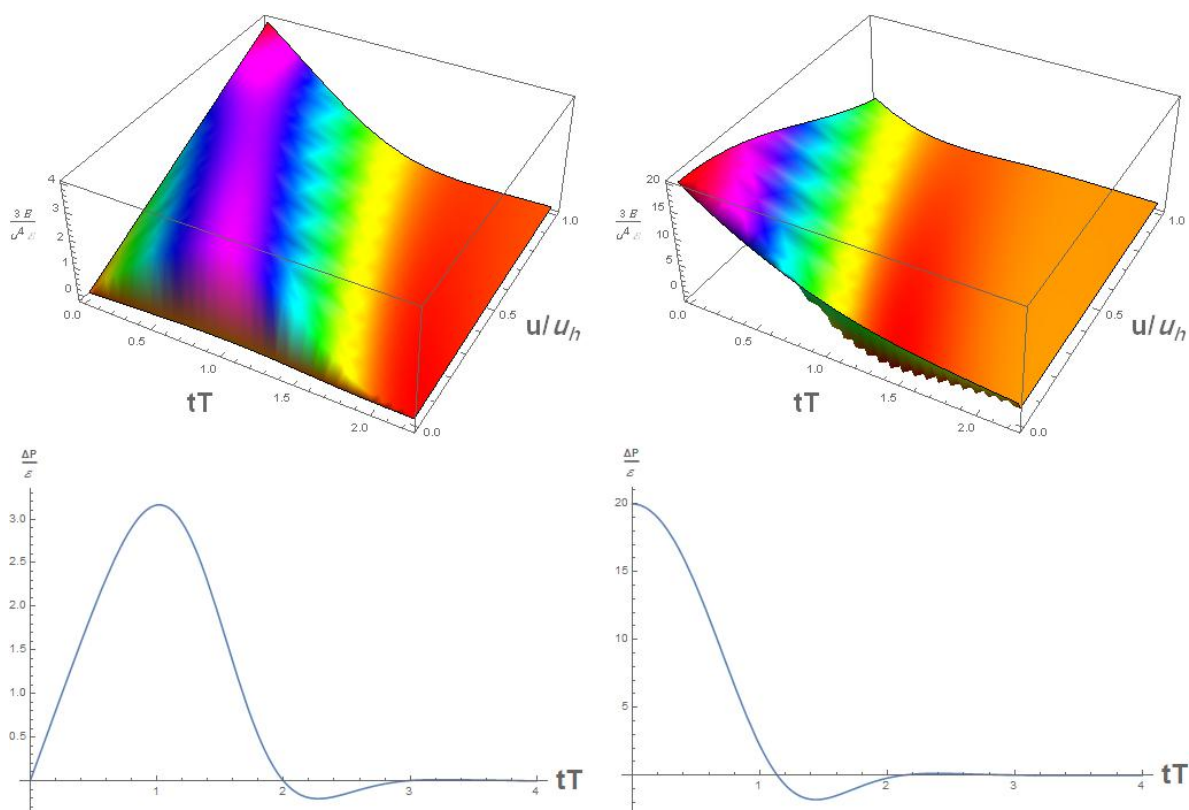
شده‌اند به شرح ذیل هستند:

$$\begin{aligned} & \frac{8u^4}{3}, \quad 1.7u^4 \cos(u), \quad 1.2u^4 e^{0.15u}, \quad 5u^4 e^{-1.5u^2}, \quad 1.7u^4 \cos((u - u_h)^2), \\ & -0.1u^4 e^{-0.15(u - u_h)^2}, \quad 0.05e^{-1.5u^2} (u - u_h) u^3 \sin(u), \quad 0.05(u - u_h)^2 u^3 \sin(u), \\ & \frac{1}{75} e^{-150(u - \frac{u_h}{3})^2} u^4, \quad u^{24} \end{aligned} \quad (38-5)$$

تابعی که به عنوان شرط اولیه در نظر گرفته می‌شود، در واقع مقدار فشار ناهمسانگردی در لحظه ابتدایی و رفتار تابع ناهمسانگردی B را در درون حجم تعیین می‌کند. با انتخاب شرایط اولیه متفاوت، اختلافات متفاوتی را در درون حجم ایجاد می‌کنیم که باعث ایجاد تفاوت در رفتار سیستم می‌شود. در شکل ۳-۵ تفاوت رفتار مربوط به دو شرط اولیه مختلف را مشاهده می‌کنید. شکل سمت چپ مربوط به شرط اولیه $B \propto u^5$ و شکل سمت راست مربوط به شرط اولیه $B \propto u^4 e^{-1.5u^2}$ می‌باشد^۷. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، برای قسمت چپ، اختلال ایجاد شده نزدیک به افق $\frac{u}{u_h} = 1$ است و برای شکل سمت راست این اختلال نزدیک مرز $u = 0$ ایجاد شده است. برای حالتی که اختلال ایجاد شده نزدیکتر به افق است، زمان همسانگردی نیز بیشتر است. این رفتار برای تعداد زیادی از شرایط اولیه مختلف مشاهده شده است که هرچه اختلال اولیه ایجاد شده، به افق نزدیکتر باشد، زمان همسانگردی بیشتر است. علت این مطلب آن است که، اختلال ایجاد شده ابتدا به سمت مرز حرکت کرده و سپس پس زده شده و توسط افق جذب می‌شود^۸. بنابراین هرچه اختلال اولیه به افق نزدیکتر باشد، زمان بیشتری نیاز دارد تا به مرز رسیده و مجدداً پس زده شده و توسط افق جذب شود. شکل ۴-۵ تفاوت این مطلب را برای دو شرط اولیه مختلف نشان می‌دهد. شکل سمت چپ مربوط به شرط اولیه $B \propto u^{24}$ و سمت راست برای شرط اولیه $B \propto u^4 e^{\left[\frac{-150}{v_h^2}(u-u_h)^2\right]}$ می‌باشند. در شکل سمت راست که اختلال در نزدیکی مرز ایجاد شده، اختلاف فشار، در زمان زودتری اتفاق افتاده و موج سریع‌تر جذب افق شده است.

همان‌طور که در شکل ۲-۵ نشان داده شده، حالت‌های مربوط به مقادیر منفی (مثبت) جفت شدگی^۷ با مقایسه بسط نزدیک مرز شرایط اولیه فوق با رابطه به دست آمده برای بسط نزدیک مرز تابع B و ترجمه ضرایب بسط به زبان نظریه میدان، انتظار داریم با اعمال شرط اولیه $B = u^5$ اختلاف فشار در لحظه ابتدایی صفر و برای شرط اولیه دیگر غیر صفر باشد که شکل ۳-۵ این موضوع را تایید می‌کند. حرکت اختلال ایجاد شده به سمت مرز، معادل ایجاد یک اختلاف فشار بین راستای طولی و عرضی در طرف نظریه میدان است.

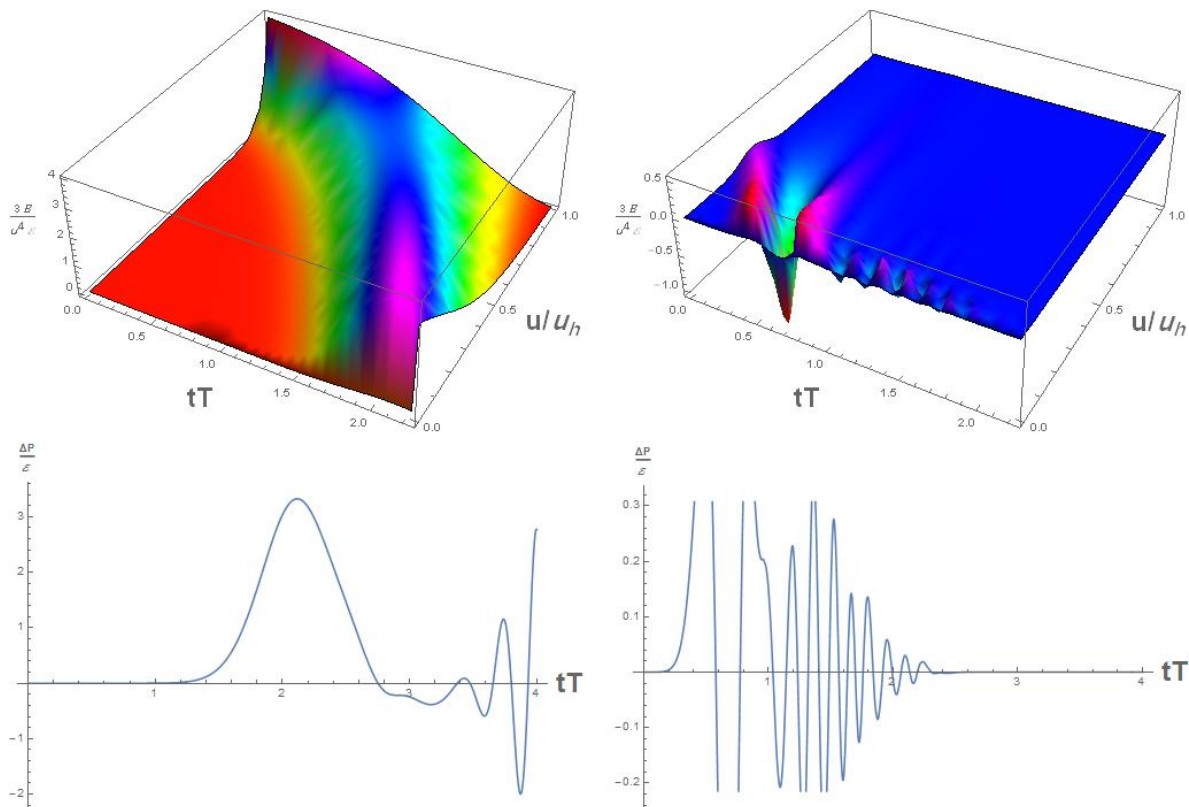
گوس- بونت به افزایش (کاهش) زمان همسانگردی منجر می‌شوند. این مطلب به زبان حرکت اختلال اولیه به سمت مرز و جذب توسط افق، در شکل ۵-۵ نشان داده شده است. در این شکل، سمت چپ مربوط به $\lambda_{GB} = 0$ ، وسط مربوط به $\lambda_{GB} < 0$ و سمت راست به ازای $\lambda_{GB} > 0$ می‌باشند. در شکل سمت راست (وسط)، اختلال ایجاد شده نزدیکتر به (دورتر از) افق بوده و باعث افزایش (کاهش) زمان همسانگردی شده است.



شکل ۵-۳: مقایسه زمان همسانگردی شرایط اولیه مختلف؛ هر چه اختلال اولیه ایجاد شده به افق نزدیک‌تر باشد، زمان همسانگردی بیشتر است.

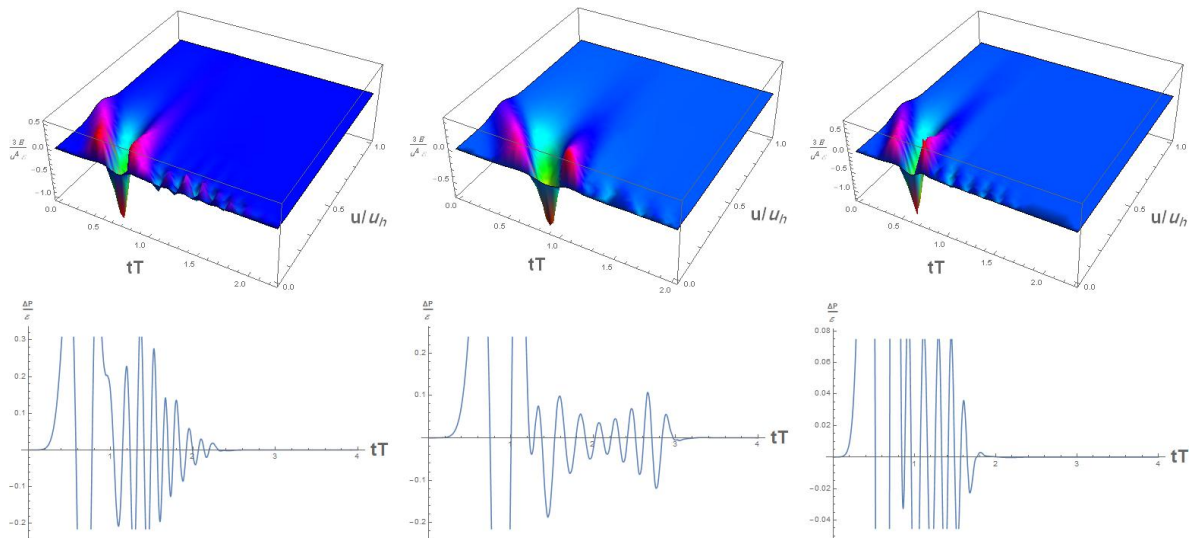
برای مطالعه دقیق‌تر اثر جفت شدگی محدود بر زمان همسانگردی، جدول ۵-۱ را ببینید. در این جدول مقادیر زمان همسانگردی tT به ازای مقادیر $\lambda_{GB} = 0, -0.05$ برای θ شرط اولیه مختلف گزارش شده است.

شکل ۵-۶ رفتار زمان همسانگردی با جفت شدگی گوس- بونت λ_{GB} را برای شرایط اولیه مختلف



شکل ۵-۴: اختلال ایجاد شده در حجم، به سمت مرز حرکت کرده و سپس پس زده می شود تا توسط افق جذب می شود. نشان می دهد. در این شکل، نقاط با رنگ های مختلف، متناظر با شرایط اولیه متفاوت هستند. در $\lambda_{GB} = 0$ همه شرایط اولیه در زمان $tT < 1.25$ همسانگرد شده اند اما در جفت شدگی محدود این حد تغییر کرده است. در این شکل و جدول ۵-۱، زمان همسانگردی به عنوان زمانی که در آن $\Delta P/\epsilon < 0.1$ باشد تعریف شده است.

همچنین در شکل ۵-۷ با افزایش تعداد شرایط اولیه، رفتار زمان همسانگردی نسبت به جفت شدگی گاوس- بونت نشان داده شده است. همان طور که در این شکل دیده می شود، به ازای $\lambda_{GB} = 0$ همه حالت های اولیه در زمانی کمتر از $tT = 1.25$ همسانگرد می شوند که با نتایج مرجع [۷۴] منطبق است. اما برای مقادیر غیر صفر λ_{GB} حالت های اولیه ای وجود دارند که در زمان های بزرگتر از $tT = 1.25$ همسانگرد می شوند.



شکل ۵-۵: رفتار تابع ناهمسانگردی به ازای مقادیر مختلف λ_{GB} از چپ به راست: $\lambda_{GB} = 0, \lambda_{GB} < 0, \lambda_{GB} > 0$. برای مقادیر مثبت جفت شدگی گاوس-بونت، اختلال ایجاد شده دورتر از افق و برای مقادیر منفی نزدیکتر به افق است.

۲-۴-۵ رفتار آنتروپی تولید شده توسط افق رویداد

همان‌طور که در بخش قبل دیدیم، در تقریب مرتبه اول، توابع A و Σ دینامیک ندارند. بنابراین برای مطالعه رفتار زمانی سایر کمیت‌ها از جمله حلقه ویلسون، تابع همبستگی دو نقطه‌ای، آنتروپی در هم‌تنیدگی هولوگرافی و ... باید از تقریب مراتب بالاتر استفاده کرد. یکی از کمیت‌های مورد علاقه، آنتروپی تولید شده توسط افق رویداد سیاه‌چاله‌ی دوگان با پلاسمای کوآرک-گلوئون است. آنتروپی تولید شده توسط افق رویداد را می‌توان -البته با اغماض- دوگان با آنتروپی پلاسمای کوآرک-گلوئون دانست.^۹

بر طبق آنچه در مرجع [۷۴] آمده است، آنتروپی تولید شده توسط افق رویداد به صورت
 در این بخش موقعیت افق ثابت نبوده و با زمان تغییر می‌کند. بنابراین شرط ایستایی افق در اینجا برقرار نبوده و مقدار $s_1(t)$ در بسط نزدیک مرز متریک برابر با صفر انتخاب شده است.

جدول ۵-۱: اثر جفت شدگی محدود بر زمان همسانگردی برای نه شرط اولیه .

$\lambda_{GB} = 0$	$\lambda_{GB} = -0.05$
۱/۰۷۳۲	۱/۰۸۶۲
۱/۰۸۲۳	۱/۱۴۸۳
۰/۶۰۴۸	۰/۶۵۱۷
۰/۸۹۱۳	۱/۸۳۱۰
۱/۱۱۴۱	۱/۱۴۸۳
۰/۹۸۶۸	۱/۲۱۰۳
۰/۶۰۴۸	۰/۶۵۱۷
۰/۶۰۴۹	۰/۶۸۲۷
۰/۸۵۹۴	۱/۸۳۱۱

$$S_{eh} \propto \Sigma(t, r_{eh}(t))^3, \quad (39-5)$$

و تحول افق رویداد با معادله ژئودزیک

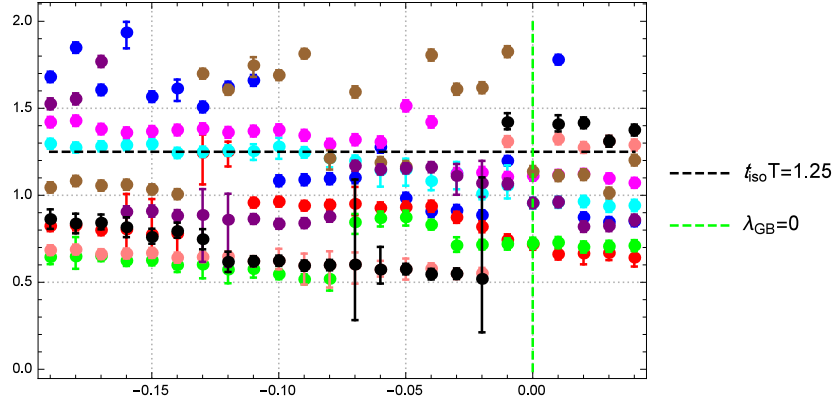
$$r'_{eh}(t) - \frac{1}{2}A(t, r_{eh}(t)) = 0, \quad (40-5)$$

داده می‌شوند^{۱۰}.

با ادامه دادن تقریب خطی تا مرتبه دوم به صورت

$$A(t, z) = \frac{1}{2\lambda_{GB}z^2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\lambda_{GB} \left(1 - \frac{z^4}{z_h^4} \right)} \right) + \alpha \delta A^{(1)}(t, z) + \alpha^2 \delta A^{(2)}(t, z) + \mathcal{O}(\alpha^3),$$

^{۱۰} برای حل این معادله از شرط اولیه $r_{eh}(\infty) \rightarrow \pi T$ استفاده کرده و در زمان به سمت عقب خواهیم رفت.



شکل ۵-۶: رفتار زمان همسانگردی با λ_{GB} برای شرایط اولیه مختلف.

(۴۱-۵)

$$B(t, z) = \alpha \delta B^{(1)}(t, z) + \alpha^2 \delta B^{(2)}(t, z) + \mathcal{O}(\alpha^3), \quad (۴۲-۵)$$

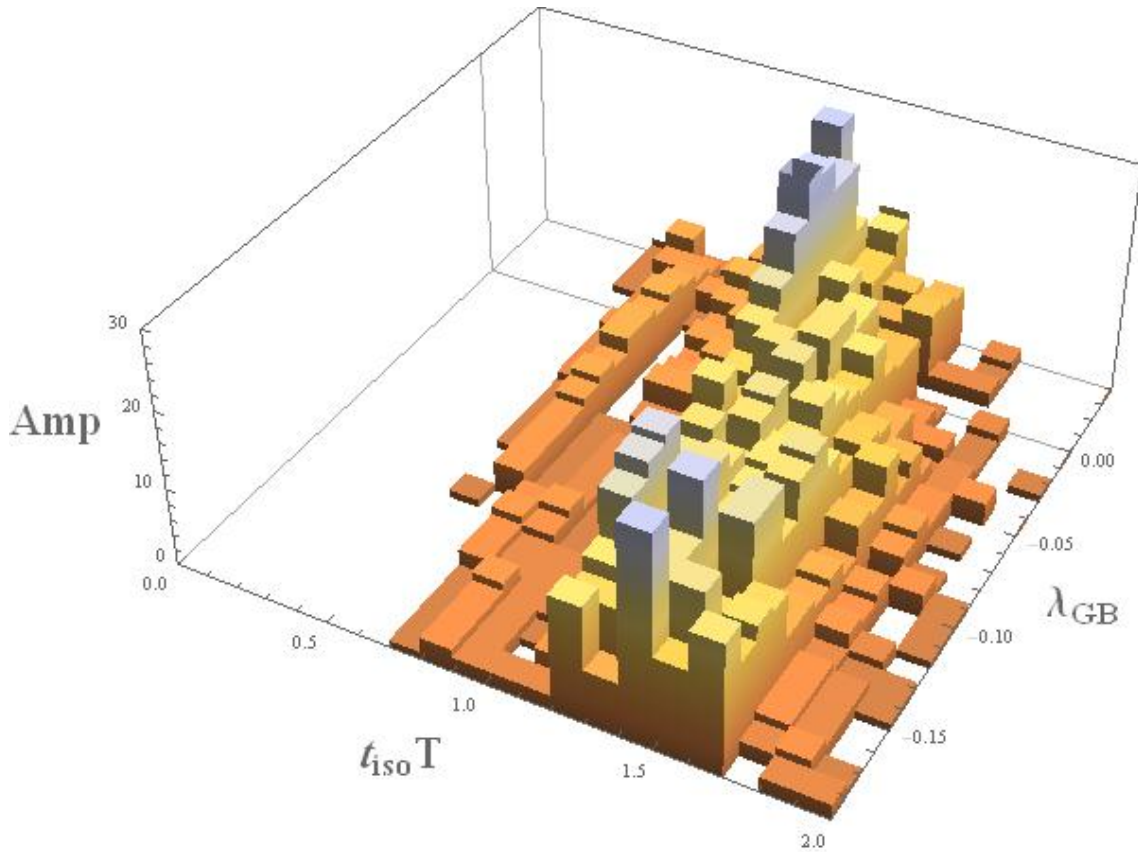
$$\Sigma(t, z) = \frac{1}{z} + \alpha \delta \Sigma^{(1)}(t, z) + \alpha^2 \delta \Sigma^{(2)}(t, z) + \mathcal{O}(\alpha^3). \quad (۴۳-۵)$$

و قرار دادن در معادلات اینشتین، معادلات حرکت دینامیکی برای توابع $\delta A^{(2)}$ و $\delta \Sigma^{(2)}$ به صورت

زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} & -(\partial_z \delta B^{(1)})^2 - 4\partial_z \delta \Sigma^{(2)} - 2z \partial_z^2 \delta \Sigma^{(2)} + \lambda_{GB} \{4z \partial_z^2 \delta B^{(1)} \partial_t \delta B^{(1)} \\ & + 4(z^4 - 1) \left((\partial_z \delta B^{(1)})^2 + z \partial_z^2 \delta B^{(1)} \partial_z \delta B^{(1)} + 4\partial_z \delta \Sigma^{(2)} + 2\partial_z^2 \delta \Sigma^{(2)} \right) \} = 0, \end{aligned} \quad (۴۴-۵)$$

$$\begin{aligned} & -3\delta A^{(2)} - \frac{3\partial_t \delta B^{(1)} \partial_z \delta B^{(1)}}{2} - 6\partial_t \delta \Sigma^{(2)} + \partial_z \delta A^{(2)} z - \frac{3}{4} (\partial_z \delta B^{(1)})^2 (z^4 - 1) \\ & - 6\partial_z \delta \Sigma^{(2)} (z^4 - 1) + \frac{\partial_z^2 \delta A^{(2)} z^2}{2} - \frac{6\delta \Sigma^{(2)} (z^4 - 1)}{z} + \lambda_{GB} \left\{ 6(\partial_t \delta B^{(1)})^2 \right. \end{aligned}$$



شکل ۷-۵: هیستوگرام مربوط به ۱۰۰ حالت اولیه ناهمسانگرد. به ازای $\lambda_{GB} = 0$ همه حالت‌های اولیه در زمانی کمتر از ۱/۲۵ همسانگرد شده‌اند. برای مقادیر غیر صفر جفت شدگی گاوس-بونت حالت‌های اوایه‌ای وجود دارند که در زمانی بزرگتر از ۱/۲۵ همسانگرد می‌شوند.

$$\begin{aligned}
 & +\partial_z^2 \delta B^{(1)} \left(2\partial_t \delta B^{(1)} (1 - 3z^4) z + 2\partial_t^2 \delta B^{(1)} z^2 \right) - 24\partial_t \delta \Sigma^{(2)} (5z^4 + 1) \\
 & - 2z^2 (\partial_t \partial_z \delta B^{(1)})^2 + \partial_z \delta B^{(1)} (-2\partial_t \delta B^{(1)} (13z^4 + 9) + 4\partial_t \partial_z \delta B^{(1)} z (1 - 3z^4) \\
 & - 2\partial_z^2 \delta B^{(1)} z (3z^8 - 4z^4 + 1)) - 4\partial_t \delta B^{(1)} \partial_t \partial_z \delta B^{(1)} z - 4\partial_z \delta A^{(2)} z (z^4 - 1) \\
 & + \frac{1}{2} (\partial_z \delta B^{(1)})^2 (-53z^8 + 16z^4 + 15) + 12\partial_z \delta \Sigma^{(2)} (-11z^8 + 8z^4 + 1) \\
 & - 2\partial_z^2 \delta A^{(2)} z^2 (z^4 - 1) - 12\delta A^{(2)} (5z^4 + 1) + \frac{12\delta \Sigma^{(2)} (-11z^8 + 8z^4 + 1)}{z} \Big\} = 0.
 \end{aligned}$$

(۴۵-۵)

با قرار دادن در روابط (۴۴-۵) و (۴۵-۵) به روابط متناظر در مرجع [۷۴] می‌رسیم.

برای حل این معادلات و بازتعریف میدان‌ها از روابط $\delta A_{reg}^{(2)} = z^{-4} \delta A^{(2)}$ و $\delta \Sigma_{reg}^{(2)} = z^{-5} \delta \Sigma^{(2)}$ استفاده می‌کنیم. همچنین شرط $\delta \Sigma^{(2)}(t, z=0) = 0$ به عنوان شرط مرزی برای معادله (۴۴-۵) و بسط نزدیک مرز برای تابع A به عنوان شرط مرزی برای معادله (۴۵-۵) مورد استفاده قرار می‌گیرند. به طور خلاصه مراحل محاسبه عددی آنترپوی تولید شده توسط افق رویداد به شرح ذیل می‌باشد:

۱. ابتدا معادله (۳۵-۵) را برای $\partial_t \delta B^{(1)}(t, z)$ حل می‌کنیم.

۲. با قرار دادن $\delta B^{(1)}(t, z)$ در معادله (۴۴-۵) به عنوان شرط اولیه، و حل آن تابع $\delta \Sigma^{(2)}(t, z)$ را بدست می‌آوریم.

۳. با داشتن $\delta B^{(1)}(t, z)$ و $\delta \Sigma^{(2)}(t, z)$ و حل معادله (۴۵-۵) تابع $\delta A^{(2)}(t, z)$ را بدست می‌آوریم.^{۱۱}

۴. سه مرحله بالا را برای برش‌های زمانی بعدی تکرار می‌کنیم.

۵. معادله تحول افق رویداد (۴۰-۵) را حل می‌کنیم.^{۱۲}

۶. آنترپوی افق رویداد را با استفاده از معادله (۳۹-۵) بدست می‌آوریم.

در شکل ۸-۵ رفتار کمیت $\frac{S_{eh}(t)}{S_{eh}(\infty)}$ نسبت به tT برای هشت شرط اولیه مختلف نشان داده شده است. در این شکل، منحنی‌های قرمز، آبی و سبز متناظر با مقادیر 0 ، $0/0.5$ و $0.5/0.5$ برای جفت شدگی گاوس- بونت هستند. همانطور که در شکل دیده می‌شود، اثر مقادیر منفی (مثبت) جفت شدگی گاوس- بونت روی کمیت $\frac{S_{eh}(t)}{S_{eh}(\infty)}$ در زمان‌های اولیه، کاهشی (افزایشی) می‌باشد. نتایج مشابهی در مرجع [۸۵] در دسترس است.

^{۱۱} ما از روش طیفی برای انجام مراحل ۱ تا ۳ استفاده کرده‌ایم.

^{۱۲} استفاده از الگوریتم مرتبه چهارم رونگه-کوتا و دستور درونیابی نرم افزار Mathematica برای حل این معادله کافی

است.

در زمان‌های اولیه حدود ۲۰ درصد و در زمان‌های نهایی حدود ۱۰ درصد کاهش در نسبت آنتروپی را شاهد هستیم که این نتیجه نیز به طور تقریبی با نتایج مرجع [۸۵]^{۱۳} همخوانی دارد. در مرجع [۸۵] همچنین یک روند کاهشی آنتروپی برای $\lambda_{GB} = -0.2$ مشاهده شده است که ما چنین موضوعی را مشاهده نکردیم. همچنین همانطور که در شکل ۵-۸ واضح است، یک زمان خاص وجود دارد که منحنی‌های متناظر با مقادیر مختلف جفت شدگی گاوس- بونت با یکدیگر تلاقی پیدا کرده و مقدار آنتروپی در آن نقطه وابسته به مقدار λ_{GB} نیست.

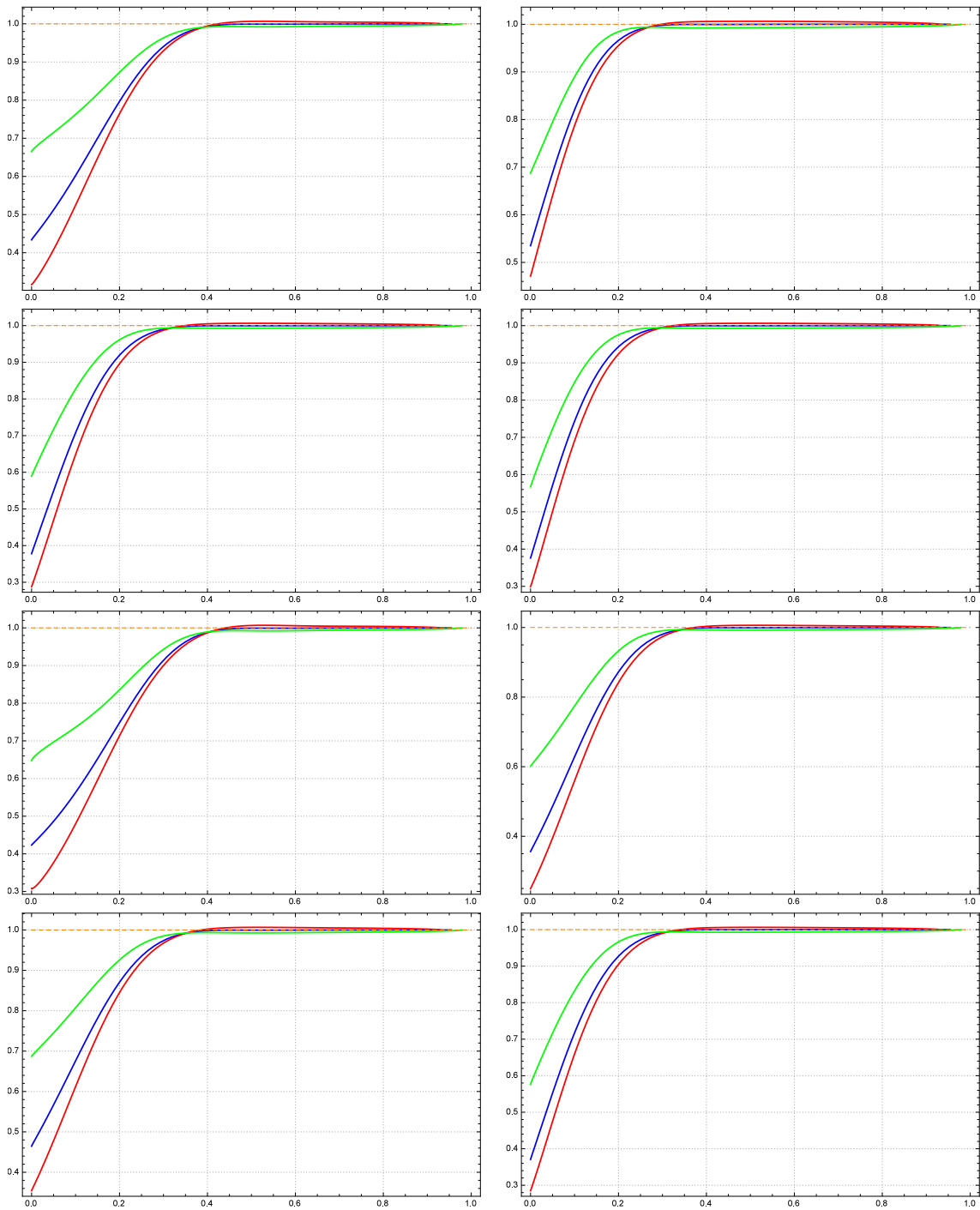
۵-۵ جمع بندی

در این فصل اثر جفت شدگی محدود بر روند تحول پلاسمای کوآرک-گلوئون بررسی شد. با توجه به پیچیدگی معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس- بونت - که دوگان با جفت شدگی محدود است- از تقریب خطی حول جواب نهایی سیاه چاله استفاده کردیم.

در تقریب مرتبه اول، فقط تابع ناهمسانگردی B دینامیک دارد و با استفاده از حل معادله تحول آن برای مقادیر مختلف جفت شدگی گاوس- بونت λ_{GB} دریافتیم که برای مقادیر مثبت (منفی) جفت شدگی محدود، زمان همسانگردی پلاسمای کوآرک-گلوئون کاهش (افزایش) می‌یابد.

با استفاده از تقریب مرتبه دوم و حل معادله تحول افق رویداد، آنتروپی تولید شده توسط پلاسمای کوآرک-گلوئون محاسبه شد و دیدیم که این کمیت برای لحظات ابتدایی در جفت شدگی محدود، کاهش می‌یابد. همچنین در بررسی تحول آنتروپی پلاسمای یک زمان خاص پیدا شد که در آن زمان مقدار آنتروپی به مقدار جفت شدگی گاوس- بونت بستگی ندارد.

^{۱۳}در این مرجع، نویسندگان آنتروپی تولید شده توسط افق آشکار را در برخورد امواج ضربه‌ای محاسبه کرده‌اند.



شکل ۵-۸: رفتار $\frac{S_{eh}(t)}{S_{eh}(\infty)}$ نسبت به tT برای هشت شرط اولیه مختلف. منحنی‌های قرمز، آبی و سبز متناظر با مقادیر

$\lambda_{GB} = -0.05, 0, 0.05$ می‌باشد.

فصل ۶

جمع‌بندی و نگاه به آینده

در این رساله به بررسی برخی از ویژگی‌های پلاسمای کوارک-گلوئون به عنوان یک سیستم غیر تعادلی جفت شده قوی با استفاده از هولوگرافی پرداختیم. همان‌طور که در فصل اول بیان شد، به دلیل اینکه روش شناخته شده‌ای برای مطالعه سیستم‌های جفت شده قوی در نظریه میدان وجود ندارد، از اصل هولوگرافی برای توصیف این سیستم‌ها استفاده می‌شود.

در فصل اول، انرژی از دست رفته یک ذره سنگین چرخان در پس زمینه‌های غیر نسبیتی مورد بررسی قرار گرفت. در این فصل رفتار انرژی از دست رفته و افق جهان سطح ریسمان دوگان با ذره چرخان، برحسب شعاع چرخش ذره و بسامد زاویه‌ای به ازای مقادیر مختلف پارامترهای نظریه آمده است. این بررسی‌ها هم در دمای صفر و هم در دمای محدود انجام شده است. به طور کلی نتایج در دمای صفر را می‌توان به موارد ذیل خلاصه کرد:

۱. مشابه با حالت نسبیتی، انرژی از دست رفته با افزایش شعاع چرخش افزایش می‌یابد.
۲. با افزایش بسامد زاویه‌ای ω در θ و z ثابت، انرژی از دست رفته افزایش می‌یابد.
۳. یک مقدار بحرانی برای شعاع چرخش وجود دارد به طوری که $\omega l_c = 1$ و در $l = l_c$ انرژی از دست رفته به هیچکدام از پارامترهای مسئله وابسته نیست.

همچنین نتایج در دمای محدود عبارتند از:

۱. مشابه حالت دمای صفر، انرژی از دست رفته با افزایش شعاع چرخش l افزایش می‌یابد.
۲. افزایش z و θ در بسامد زاویه‌ای و شعاع چرخش ثابت، منجر به کاهش انرژی از دست رفته می‌شوند.

۳. در رفتار انرژی از دست رفته در دمای محدود، شعاع بحرانی l_c وجود ندارد.

در فصل پنجم نیز مسئله همسانگردی پلاسمای کوآرک-گلوئون در جفت شدگی محدود مطالعه شده است. در این فصل ابتدا دوگان گرانشی مسئله در جفت شدگی محدود را معرفی کرده ایم. بر اساس دوگانی AdS/CFT، جفت شدگی محدود در نظریه میدان، معادل با اضافه کردن جملات مشتقات بالاتر متریک در کنش می باشد. از بین تصحیحات مشتقات مراتب بالاتر، جملات گاوس-بونت به علت اینکه معادلات حرکت را در مرتبه دو حفظ می کند، مورد علاقه است. از آنجایی که معادلات حرکت اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت بسیار پیچیده می شوند، از تقریب خطی برای حل مسئله استفاده شده است.

بر اساس محاسبات انجام شده در این فصل دریافتیم که جفت شدگی محدود به ازای مقادیر منفی جفت شدگی گاوس-بونت λ_{GB} ، باعث افزایش زمان همسانگردی پلاسمای کوآرک-گلوئون و کاهش آنتروپی آن در لحظه اولیه می شود. همچنین فشار ناهمسانگردی به ازای مقادیر مثبت (منفی) برای جفت شدگی گاوس-بونت یک جابه جایی منفی (مثبت) خواهد داشت.

همچنین در بررسی تحول آنتروپی پلاسمای کوآرک-گلوئون دریافتیم که یک زمان خاص - که خیلی کوچکتر از زمان همسانگردی است - وجود دارد که در آن زمان، مقدار آنتروپی به جفت شدگی گاوس-بونت بستگی ندارد.

بررسی و حل معادلات غیر خطی اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت از جمله مسائل مهمی است که توسط نویسنده رساله و استاد راهنما در حال انجام است. در حوزه کاربرد هولوگرافی در محاسبات جفت شده قوی، نویسنده در حال انجام محاسبات انرژی از دست رفته کوآرک چرخان در جفت شدگی محدود می باشد.

در ادامه مطالعه تحول کمیت های مختلف در سیستم های جفت شده ی قوی، می ظش^۳توان به

بررسی پیچیدگی^۱ در پس زمینه‌های وابسته به زمان پرداخت. همچنین مطالعه آشوب و کاربرد روش تشریح شده حل عددی معادلات اینشتین در کیهان‌شناسی، مسائل دیگری است که می‌توان به آن پرداخت.

^۱Complexity

پیوست آ

برنامه محاسباتی استخراج معادلات اینشتین

در حضور تصحیحات گاوس-بونت

در این بخش برنامه محاسباتی استخراج معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت با استفاده از بسته xAct نشان داده شده است. مراحل این محاسبه شامل، تعاریف اولیه xAct، تعریف متریک، معادلات اینشتین و مرتب سازی معادلات حرکت می‌باشد.

Gauss - Bonnet - Einstein' s equations

xAct Defs

```
Block[{Print}, << xAct`xTras`];
Block[{Print}, << xAct`TexAct`];
$CovDFormat = "Prefix";
$Pre = ScreenDollarIndices;
$DefInfoQ = False;
$UndefInfoQ = False;
$CVVerbose = False;
$CommuteCovDsOnScalars = True;

D = 5;
DefManifold[M, D, {α, β, γ, δ, η, ι, κ, λ, μ, ο, ς, σ, τ, υ, χ, ω, ν}]
DefChart[B, M, {0, 1, 2, 3, 4}, {u[], t[], x[], y[], z[]}, ChartColor → Blue]

DefConstantSymbol[λGB, PrintAs → "λGB"]
DefConstantSymbol[Λ]

DefScalarFunction[A]
DefScalarFunction[Σ]
DefScalarFunction[B]
DefScalarFunction[δA]
DefScalarFunction[δB]
DefScalarFunction[δΣ]
```

شکل آ-۱: تعاریف اولیه xAct.

metric

$$\text{met} = \left\{ \left\{ 0, -\frac{1}{u[]^2}, 0, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{1}{u[]^2}, -A[t[], u[]], 0, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, e^{-2B[t[], u[]]} \Sigma[t[], u[]]^2, 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, 0, 0, e^{B[t[], u[]]} \Sigma[t[], u[]]^2, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, 0, e^{B[t[], u[]]} \Sigma[t[], u[]]^2 \right\} \right\};$$

met // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{u^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{u^2} & -A[t, u] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2B[t, u]} \Sigma[t, u]^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{B[t, u]} \Sigma[t, u]^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{B[t, u]} \Sigma[t, u]^2 \end{pmatrix}$$

$g = \text{CTensor}[\text{met}, \{-B, -B\}];$

$\text{SetCMetric}[g, B, \text{SignatureOfMetric} \rightarrow \{5, 0, 0\}];$

$\text{MetricCompute}[g, B, \text{All}, \text{CVSimplify} \rightarrow \text{Simplify}]$

$\text{CD} = \text{CovDOFMetric}[g];$

$\text{RiemannCD} = \text{Riemann}[\text{CD}];$

$\text{RicciScalarCD} = \text{RicciScalar}[\text{CD}];$

$\text{RicciCD} = \text{Ricci}[\text{CD}];$

شکل آ-۲: تعریف متریک.

Einstein' s equations

Rules

```

dpS[t, u] = Σ(1,0)[t, u] -  $\frac{u^2 A[t, u]}{2}$  Σ(0,1)[t, u];
dp2S[t, u] = D[dpS[t, u], t] -  $\frac{u^2 A[t, u]}{2}$  D[dpS[t, u], u];

rule1 = Solve[Σdot[t, u] == dpS[t, u], Σ(1,0)[t, u]][[1]];
rule2 = Solve[Σddot[t, u] == dp2S[t, u], Σ(2,0)[t, u]][[1]];
rule3 = rule1 /. Σ → B /. Σdot → Bdot;
rule4 = rule2 /. Σ → B /. Σddot → Bddot;
secondDrule = {rule2, rule4} // Flatten // Expand
FirstDrule = {rule1, rule3} // Flatten // Expand

{Σ(2,0)[t, u] →
  Σddot[t, u] -  $\frac{1}{2}$  u3 A[t, u]2 Σ(0,1)[t, u] -  $\frac{1}{4}$  u4 A[t, u] A(0,1)[t, u] Σ(0,1)[t, u] -
   $\frac{1}{4}$  u4 A[t, u]2 Σ(0,2)[t, u] +  $\frac{1}{2}$  u2 Σ(0,1)[t, u] A(1,0)[t, u] + u2 A[t, u] Σ(1,1)[t, u],
  B(2,0)[t, u] → Bddot[t, u] -  $\frac{1}{2}$  u3 A[t, u]2 B(0,1)[t, u] -
   $\frac{1}{4}$  u4 A[t, u] A(0,1)[t, u] B(0,1)[t, u] -  $\frac{1}{4}$  u4 A[t, u]2 B(0,2)[t, u] +
   $\frac{1}{2}$  u2 B(0,1)[t, u] A(1,0)[t, u] + u2 A[t, u] B(1,1)[t, u]}

{Σ(1,0)[t, u] → Σdot[t, u] +  $\frac{1}{2}$  u2 A[t, u] Σ(0,1)[t, u],
  B(1,0)[t, u] → Bdot[t, u] +  $\frac{1}{2}$  u2 A[t, u] B(0,1)[t, u]}

D[FirstDrule, u]

{Σ(1,1)[t, u] → u A[t, u] Σ(0,1)[t, u] +
   $\frac{1}{2}$  u2 A(0,1)[t, u] Σ(0,1)[t, u] + Σdot(0,1)[t, u] +  $\frac{1}{2}$  u2 A[t, u] Σ(0,2)[t, u],
  B(1,1)[t, u] → u A[t, u] B(0,1)[t, u] +  $\frac{1}{2}$  u2 A(0,1)[t, u] B(0,1)[t, u] +
  Bdot(0,1)[t, u] +  $\frac{1}{2}$  u2 A[t, u] B(0,2)[t, u]}

```

شکل آ-۳: تعریف مشتقات زمانی تحول.

EoMs

NOTE : the EoMs is defined as follow (variation of Lagrangian).

Lagrangian=RicciScalarCD[+Λ+ λGB EulerDensity[CD,4]//NoScalar
EoM1=VarL[g[α,β]][Lagrangian]//FullSimplification[g]//Collect[#,λGB]&

in this notation, the Λ should be set as 12. See eq. 2.18 of the work by Anderae et al; [arXiv : 1610.08987](https://arxiv.org/abs/1610.08987) and eq. 4.100 of Carroll.

$$\text{EoM1} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \Lambda g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \lambda_{\text{GB}} \left(4 R_{\alpha}{}^{\gamma} R_{\beta\gamma} - 2 R_{\alpha\beta} R + 4 R^{\gamma\delta} R_{\alpha\gamma\beta\delta} - \right. \\ \left. 2 R_{\alpha}{}^{\gamma\delta\eta} R_{\beta\gamma\delta\eta} - 2 R_{\gamma\delta} R^{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} R^2 g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} R_{\gamma\delta\eta\zeta} R^{\gamma\delta\eta\zeta} g_{\alpha\beta} \right);$$

E1 = EoM1 [[0, 1]] /. t[] → t /. u[] → u;

EEnew =

(E1 /. Λ → 12 // Simplify) /. secondDrule //. FirstDrule //. D[FirstDrule, u] //
Expand // Simplify;

eqs = Drop[EEnew // Flatten // Union, 1];

rule8 = {D[Σ[t, u], u] → Σ', D[D[Σ[t, u], u], u] → Σ'',

D[D[D[Σ[t, u], u], u], u] → Σ''', Σ[t, u] → Σ};

rule9 = rule8 /. Σ → B;

rule10 = rule8 /. Σ → A;

rule11 = rule8 /. Σ → Σdot;

rule12 = rule8 /. Σ → Bdot;

rule13 = rule8 /. Σ → Σddot;

rule14 = rule8 /. Σ → Bddot;

rule15 = {rule8, rule9, rule10, rule11, rule12, rule13, rule14} // Flatten

{Σ^(0,1)[t, u] → Σ', Σ^(0,2)[t, u] → Σ'', Σ^(0,3)[t, u] → Σ⁽³⁾, Σ[t, u] → Σ, B^(0,1)[t, u] → B',

B^(0,2)[t, u] → B'', B^(0,3)[t, u] → B⁽³⁾, B[t, u] → B, A^(0,1)[t, u] → A',

A^(0,2)[t, u] → A'', A^(0,3)[t, u] → A⁽³⁾, A[t, u] → A, Σdot^(0,1)[t, u] → Σdot',

Σdot^(0,2)[t, u] → Σdot'', Σdot^(0,3)[t, u] → Σdot⁽³⁾, Σdot[t, u] → Σdot,

Bdot^(0,1)[t, u] → Bdot', Bdot^(0,2)[t, u] → Bdot'', Bdot^(0,3)[t, u] → Bdot⁽³⁾,

Bdot[t, u] → Bdot, Σddot^(0,1)[t, u] → Σddot', Σddot^(0,2)[t, u] → Σddot'',

Σddot^(0,3)[t, u] → Σddot⁽³⁾, Σddot[t, u] → Σddot, Bddot^(0,1)[t, u] → Bddot',

Bddot^(0,2)[t, u] → Bddot'', Bddot^(0,3)[t, u] → Bddot⁽³⁾, Bddot[t, u] → Bddot}

E2 = eqs /. rule15 // Expand // Simplify // Collect[#, λGB, Simplify] &

شکل آ-۴: معادلات اینشتین در حضور تصحیحات گاوس-بونت.

first eq

E2[[1]]

$$\frac{3 \left(u \Sigma (B')^2 + 4 \Sigma' + 2 u \Sigma'' \right)}{2 u \Sigma} - \frac{1}{2 \Sigma^3} \left(3 u \lambda_{GB} \left(-u \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^3 + \Sigma^2 (B')^2 (4 (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) + 3 B \text{dot} u \Sigma') + 2 \Sigma' (-8 \Sigma \text{dot} \Sigma' + B \text{dot} u \Sigma^2 B'' - 4 u \Sigma \text{dot} \Sigma'') + 2 \Sigma B' (4 B \text{dot} \Sigma \Sigma' + 2 B \text{dot} u (\Sigma')^2 + u \Sigma ((B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B'' + B \text{dot} \Sigma'')) \right) \right)$$

EQ1 = - \frac{2 u}{3} \Sigma^3 E2[[1]] // Together // Factor // Collect[#, \lambda_{GB}, FullSimplify] &

$$\Sigma^2 \left(u \Sigma (B')^2 + 4 \Sigma' + 2 u \Sigma'' \right) + u^2 \lambda_{GB} \left(-u \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^3 + \Sigma^2 (B')^2 (4 (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) + 3 B \text{dot} u \Sigma') + 2 \Sigma' (-8 \Sigma \text{dot} \Sigma' + B \text{dot} u \Sigma^2 B'' - 4 u \Sigma \text{dot} \Sigma'') + 2 \Sigma B' (4 B \text{dot} \Sigma \Sigma' + 2 B \text{dot} u (\Sigma')^2 + u \Sigma ((B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B'' + B \text{dot} \Sigma'')) \right)$$

شکل آ-۵: معادله حرکت اول.

second eq

E2[[2]]

$$\frac{6}{u^2} - \frac{3}{4} A u^2 (B')^2 - \frac{3 (A u \Sigma - 2 \Sigma \text{dot}) \Sigma'}{\Sigma^2} + \frac{3 \Sigma \text{dot}'}{\Sigma} - \frac{3 A u^2 \Sigma''}{2 \Sigma} - \frac{1}{4 \Sigma^3} \left(3 u^2 \lambda_{GB} \left(-A u^2 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^3 + \Sigma (B')^2 (4 A u \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) - 2 \Sigma \text{dot} (B \text{dot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot}) + 3 A B \text{dot} u^2 \Sigma \Sigma') - 2 \Sigma' (2 B \text{dot} \Sigma^2 B \text{dot}' + 2 (B \text{dot}^2 \Sigma + 4 A u \Sigma \text{dot}) \Sigma' - 8 \Sigma \text{dot} \Sigma \text{dot}' - A B \text{dot} u^2 \Sigma^2 B'' + 4 A u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma'') + 2 \Sigma B' (-2 \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B \text{dot}' - B \text{dot} (B \text{dot} - 4 A u) \Sigma \Sigma' - 2 A B \text{dot} u^2 (\Sigma')^2 + \Sigma (-2 B \text{dot} \Sigma \text{dot}' + A u^2 ((B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B'' + B \text{dot} \Sigma'')) \right) \right)$$

Eq2 = \frac{u^2}{3} \Sigma^3 E2[[2]] // Together // Collect[#, \lambda_{GB}, Simplify] &

$$-\frac{1}{4} \Sigma (A u^4 \Sigma^2 (B')^2 + 4 u^2 (A u \Sigma - 2 \Sigma \text{dot}) \Sigma' + 2 \Sigma (-4 \Sigma - 2 u^2 \Sigma \text{dot}' + A u^4 \Sigma'')) + \frac{1}{4} u^4 \lambda_{GB} \left(A u^2 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^3 + \Sigma (B')^2 (-4 A u \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) + 2 \Sigma \text{dot} (B \text{dot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot}) - 3 A B \text{dot} u^2 \Sigma \Sigma') + 2 \Sigma' (2 B \text{dot} \Sigma^2 B \text{dot}' + 2 (B \text{dot}^2 \Sigma + 4 A u \Sigma \text{dot}) \Sigma' - 8 \Sigma \text{dot} \Sigma \text{dot}' - A B \text{dot} u^2 \Sigma^2 B'' + 4 A u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma'') + 2 \Sigma B' (2 \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B \text{dot}' + B \text{dot} (B \text{dot} - 4 A u) \Sigma \Sigma' - 2 A B \text{dot} u^2 (\Sigma')^2 - \Sigma (-2 B \text{dot} \Sigma \text{dot}' + A u^2 ((B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B'' + B \text{dot} \Sigma'')) \right)$$

Ssecond = Solve[EQ1 == 0, \Sigma''][[1]] // Simplify

$$\left\{ \Sigma'' \rightarrow \left(u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^3 - u \Sigma^2 (B')^2 (\Sigma + 4 B \text{dot} u \lambda_{GB} \Sigma + 4 u \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} + 3 B \text{dot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma') - 2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma B' (4 B \text{dot} \Sigma \Sigma' + 2 B \text{dot} u (\Sigma')^2 + u \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B'') - 2 \Sigma' (8 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma' - \Sigma^2 (2 + B \text{dot} u^3 \lambda_{GB} B'')) \right) / (2 u (\Sigma^2 + B \text{dot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma') \right\}$$

EQ2 = 4 Eq2 /. Ssecond // Simplify // Together // Collect[#, \lambda_{GB}, Simplify] &

$$4 \Sigma (2 u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma' + \Sigma (2 \Sigma + u^2 \Sigma \text{dot}')) + 2 u^4 \lambda_{GB} (\Sigma \Sigma \text{dot} (B \text{dot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot}) (B')^2 + 2 \Sigma' (B \text{dot} \Sigma^2 B \text{dot}' + B \text{dot}^2 \Sigma \Sigma' - 4 \Sigma \text{dot} \Sigma \text{dot}') + \Sigma^2 B' (2 (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B \text{dot}' + B \text{dot} (B \text{dot} \Sigma' + 2 \Sigma \text{dot}')))$$

شکل آ-۶: معادله حرکت دوم.

third eq

E2 [[3]]

$$-\frac{1}{8 \Sigma^2} \left(3 \left(4 u^2 \Sigma \Sigma \text{dot} A' + A^2 u^4 \Sigma^2 (B')^2 + 2 \left(-8 A \Sigma^2 + 2 B \text{dot}^2 \Sigma^2 + 4 \Sigma \Sigma \text{ddot} + 2 A^2 u^3 \Sigma \Sigma' - 8 A u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma' - 4 A u^2 \Sigma \Sigma \text{dot}' + A^2 u^4 \Sigma \Sigma'' \right) \right) - \frac{1}{8 \Sigma^3} 3 u^2 \lambda_{GB} \left(-A^2 u^4 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^3 + A u^2 \Sigma (B')^2 \left(4 (A u \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) - \Sigma \text{dot} (B \text{dot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot})) + 3 A B \text{dot} u^2 \Sigma \Sigma' \right) + 2 \Sigma B' \left(4 B \text{ddot} B \text{dot} \Sigma^2 + 4 B \text{dot} \Sigma \Sigma \text{ddot} + 4 B \text{ddot} \Sigma \Sigma \text{dot} + 6 B \text{dot}^2 \Sigma \Sigma \text{dot} + 8 B \text{dot} \Sigma \text{dot}^2 + 2 B \text{dot} u^2 \Sigma (B \text{dot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot}) A' - 4 A u^2 \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B \text{dot}' - 2 A B \text{dot}^2 u^2 \Sigma \Sigma' + 4 A^2 B \text{dot} u^3 \Sigma \Sigma' + 2 A^2 B \text{dot} u^4 (\Sigma')^2 - 4 A B \text{dot} u^2 \Sigma \Sigma \text{dot}' + A^2 B \text{dot} u^4 \Sigma^2 B'' + A^2 u^4 \Sigma \Sigma \text{dot} B'' + A^2 B \text{dot} u^4 \Sigma \Sigma'' \right) - 2 \Sigma' \left(-4 B \text{ddot} B \text{dot} \Sigma^2 + 2 B \text{dot}^3 \Sigma^2 + 16 \Sigma \text{ddot} \Sigma \text{dot} - 2 u^2 (B \text{dot}^2 \Sigma^2 - 4 \Sigma \text{dot}^2) A' + 4 A B \text{dot} u^2 \Sigma^2 B \text{dot}' + 4 A B \text{dot}^2 u^2 \Sigma \Sigma' + 8 A^2 u^3 \Sigma \text{dot} \Sigma' - 16 A u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma \text{dot}' - A^2 B \text{dot} u^4 \Sigma^2 B'' + 4 A^2 u^4 \Sigma \text{dot} \Sigma'' \right) \right)$$

Eq3 = $\frac{-8 u^2}{3} \Sigma^3 \mathbf{E2}[[3]]$ // Together // Factor // Collect[#, λGB, Simplify] &

$$u^2 \Sigma \left(4 u^2 \Sigma \Sigma \text{dot} A' + A^2 u^4 \Sigma^2 (B')^2 + 2 \left(-8 A \Sigma^2 + 2 B \text{dot}^2 \Sigma^2 + 4 \Sigma \Sigma \text{ddot} + 2 A^2 u^3 \Sigma \Sigma' - 8 A u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma' - 4 A u^2 \Sigma \Sigma \text{dot}' + A^2 u^4 \Sigma \Sigma'' \right) \right) + u^4 \lambda_{GB} \left(-A^2 u^4 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^3 + A u^2 \Sigma (B')^2 \left(4 (A u \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) - \Sigma \text{dot} (B \text{dot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot})) + 3 A B \text{dot} u^2 \Sigma \Sigma' \right) + 2 \Sigma B' \left(4 B \text{ddot} B \text{dot} \Sigma^2 + 4 B \text{dot} \Sigma \Sigma \text{ddot} + 4 B \text{ddot} \Sigma \Sigma \text{dot} + 6 B \text{dot}^2 \Sigma \Sigma \text{dot} + 8 B \text{dot} \Sigma \text{dot}^2 + 2 B \text{dot} u^2 \Sigma (B \text{dot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot}) A' - 4 A u^2 \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B \text{dot}' - 2 A B \text{dot}^2 u^2 \Sigma \Sigma' + 4 A^2 B \text{dot} u^3 \Sigma \Sigma' + 2 A^2 B \text{dot} u^4 (\Sigma')^2 - 4 A B \text{dot} u^2 \Sigma \Sigma \text{dot}' + A^2 B \text{dot} u^4 \Sigma^2 B'' + A^2 u^4 \Sigma \Sigma \text{dot} B'' + A^2 B \text{dot} u^4 \Sigma \Sigma'' \right) - 2 \Sigma' \left(-4 B \text{ddot} B \text{dot} \Sigma^2 + 2 B \text{dot}^3 \Sigma^2 + 16 \Sigma \text{ddot} \Sigma \text{dot} - 2 u^2 (B \text{dot}^2 \Sigma^2 - 4 \Sigma \text{dot}^2) A' + 4 A B \text{dot} u^2 \Sigma^2 B \text{dot}' + 4 A B \text{dot}^2 u^2 \Sigma \Sigma' + 8 A^2 u^3 \Sigma \text{dot} \Sigma' - 16 A u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma \text{dot}' - A^2 B \text{dot} u^4 \Sigma^2 B'' + 4 A^2 u^4 \Sigma \text{dot} \Sigma'' \right) \right)$$

Sigdotp = Solve[EQ2 == 0, Σdot'][[1]] // Simplify

$$\left\{ \Sigma \text{dot}' \rightarrow - \left(\left(\Sigma \left(u^4 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} (B \text{dot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot}) (B')^2 + u^4 \lambda_{GB} \Sigma B' \left(2 (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) B \text{dot}' + B \text{dot}^2 \Sigma' \right) + 2 \left(2 \Sigma^2 + \left(2 u^2 \Sigma \text{dot} + B \text{dot} u^4 \lambda_{GB} \Sigma B \text{dot}' \right) \Sigma' + B \text{dot}^2 u^4 \lambda_{GB} (\Sigma')^2 \right) \right) \right) / \left(2 u^2 \left(\Sigma^2 + B \text{dot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma' \right) \right) \right\}$$

EQ3 =

Eq3 /. Sigdotp /. Ssecond // Simplify // Together // Collect[#, λGB, FullSimplify] &

$$4 u^2 \Sigma^2 (B \text{dot}^2 \Sigma + 2 \Sigma \text{ddot} + u^2 \Sigma \text{dot} A') + 4 u^4 \lambda_{GB} \left(\Sigma \left(2 B \text{ddot} \Sigma (B \text{dot} \Sigma + \Sigma \text{dot}) + B \text{dot} \left(2 \Sigma \Sigma \text{ddot} + 3 B \text{dot} \Sigma \Sigma \text{dot} + 4 \Sigma \text{dot}^2 \right) + B \text{dot} u^2 \Sigma (B \text{dot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot}) A' \right) B' + \left(-B \text{dot} \left(-2 B \text{ddot} + B \text{dot}^2 \right) \Sigma^2 - 8 \Sigma \text{ddot} \Sigma \text{dot} + u^2 (B \text{dot}^2 \Sigma^2 - 4 \Sigma \text{dot}^2) A' \right) \Sigma' \right)$$

شکل آ-۷: معادله حرکت سوم.

fifth eq

EQ5 = Collect[Eq5, {A'', λGB}, Simplify]

$$\begin{aligned}
 & -12 \Sigma^2 + 2 u^3 \Sigma^2 A' + 3 u^2 \Sigma (-B \dot{\Sigma} + \Sigma \dot{B}) B' + 2 u^2 \Sigma^2 B \dot{\Sigma}' + 3 B \dot{\Sigma} u^2 \Sigma \Sigma' - 4 u^2 \Sigma \dot{\Sigma}' - \\
 & 8 u^2 \Sigma \Sigma \dot{\Sigma}' + (u^4 \Sigma^2 + u^6 \lambda_{GB} (\Sigma (2 B \dot{\Sigma} + \Sigma \dot{B}) B' + (B \dot{\Sigma} - 4 \Sigma \dot{B}) \Sigma')) A'' - \\
 & \frac{1}{2} u^3 \lambda_{GB} (u (2 (B \ddot{\Sigma} \Sigma^2 + 5 \Sigma \Sigma \dot{\Sigma} + 4 \Sigma \dot{\Sigma}^2) + u^2 \Sigma (B \dot{\Sigma} + 5 \Sigma \dot{B}) A') (B')^2 - \\
 & 4 B' (4 B \ddot{\Sigma} \Sigma^2 - B \dot{\Sigma}^2 \Sigma^2 + 2 \Sigma \Sigma \dot{\Sigma} + 8 B \dot{\Sigma} \Sigma \dot{\Sigma} + u \Sigma (B \dot{\Sigma} - 4 \Sigma \dot{B}) B \dot{\Sigma}' + \\
 & 4 B \ddot{\Sigma} u \Sigma \Sigma' + 2 u \Sigma \dot{\Sigma} \Sigma' + 4 B \dot{\Sigma} u \Sigma \dot{\Sigma}' + u^2 (2 B \dot{\Sigma} \Sigma + \Sigma \dot{B}) A' (2 \Sigma + u \Sigma') + \\
 & 5 B \dot{\Sigma} u \Sigma \dot{\Sigma}' - 2 u \Sigma \dot{\Sigma} \Sigma \dot{\Sigma}') - 2 (-4 u \Sigma^2 (B \dot{\Sigma}')^2 - 4 B \dot{\Sigma}^2 u (\Sigma')^2 - \\
 & 4 u \Sigma B \dot{\Sigma}' (2 B \dot{\Sigma} \Sigma' + \Sigma \dot{B}') + 2 \Sigma' (2 B \ddot{\Sigma} \Sigma - 5 B \dot{\Sigma}^2 \Sigma - 8 \Sigma \dot{\Sigma} + \\
 & 4 B \dot{\Sigma} \Sigma \dot{B} + 2 u^2 (B \dot{\Sigma} - 4 \Sigma \dot{B}) A' - 2 B \dot{\Sigma} u \Sigma \dot{\Sigma}') + u (8 (\Sigma \dot{\Sigma}')^2 + \\
 & \Sigma (4 B \ddot{\Sigma} \Sigma - B \dot{\Sigma}^2 \Sigma + 2 \Sigma \dot{\Sigma} + 8 B \dot{\Sigma} \Sigma \dot{B} + u^2 (2 B \dot{\Sigma} \Sigma + \Sigma \dot{B}) A') B'' + \\
 & (2 B \ddot{\Sigma} \Sigma - 5 B \dot{\Sigma}^2 \Sigma - 8 \Sigma \dot{\Sigma} + 4 B \dot{\Sigma} \Sigma \dot{B} + u^2 (B \dot{\Sigma} - 4 \Sigma \dot{B}) A') \Sigma''))
 \end{aligned}$$

EQ1

$$\Sigma^2 (u \Sigma (B')^2 + 4 \Sigma' + 2 u \Sigma'') - u^2 \lambda_{GB} \Sigma \dot{B} (16 (\Sigma')^2 + \Sigma^2 B' (B' (-4 + u B') - 2 u B'') + 8 u \Sigma' \Sigma'') + \\
 B \dot{\Sigma} u^2 \lambda_{GB} \Sigma (\Sigma (B')^2 (4 \Sigma + 3 u \Sigma') + 2 u \Sigma \Sigma' B'' + 2 B' (4 \Sigma \Sigma' + 2 u (\Sigma')^2 + u \Sigma (\Sigma B'' + \Sigma'')))$$

EQ2

$$\begin{aligned}
 & 4 \Sigma (2 u^2 \Sigma \dot{\Sigma}' + \Sigma (2 \Sigma + u^2 \Sigma \dot{\Sigma}')) + \\
 & 2 u^4 \lambda_{GB} (\Sigma \Sigma \dot{B} (B \dot{\Sigma} + 2 \Sigma \dot{B}) (B')^2 + 2 \Sigma' (B \dot{\Sigma}^2 B \dot{\Sigma}' + B \dot{\Sigma}^2 \Sigma \Sigma' - 4 \Sigma \dot{B} \Sigma \dot{\Sigma}') + \\
 & \Sigma^2 B' (2 (B \dot{\Sigma} + \Sigma \dot{B}) B \dot{\Sigma}' + B \dot{\Sigma} (B \dot{\Sigma} \Sigma' + 2 \Sigma \dot{B}'))
 \end{aligned}$$

rule16 = {Σ' -> D[Σ[t, u], u], Σ'' -> D[D[Σ[t, u], u], u], Σ -> Σ[t, u]};

rule17 = rule16 /. Σ -> B;

rule18 = rule16 /. Σ -> A;

rule19 = rule16 /. Σ -> Σdot;

rule20 = rule16 /. Σ -> Bdot;

rule21 = rule16 /. Σ -> Σddot;

rule22 = rule16 /. Σ -> Bddot;

rule23 = {rule16, rule17, rule18, rule19, rule20, rule21, rule22} // Flatten

$$\begin{aligned}
 & \{\Sigma' \rightarrow \Sigma^{(0,1)}[t, u], \Sigma'' \rightarrow \Sigma^{(0,2)}[t, u], \Sigma \rightarrow \Sigma[t, u], B' \rightarrow B^{(0,1)}[t, u], \\
 & B'' \rightarrow B^{(0,2)}[t, u], B \rightarrow B[t, u], A' \rightarrow A^{(0,1)}[t, u], A'' \rightarrow A^{(0,2)}[t, u], A \rightarrow A[t, u], \\
 & \Sigma \dot{\Sigma}' \rightarrow \Sigma \dot{\Sigma}^{(0,1)}[t, u], \Sigma \dot{\Sigma}'' \rightarrow \Sigma \dot{\Sigma}^{(0,2)}[t, u], \Sigma \dot{\Sigma} \rightarrow \Sigma \dot{\Sigma}[t, u], \\
 & B \dot{\Sigma}' \rightarrow B \dot{\Sigma}^{(0,1)}[t, u], B \dot{\Sigma}'' \rightarrow B \dot{\Sigma}^{(0,2)}[t, u], B \dot{\Sigma} \rightarrow B \dot{\Sigma}[t, u], \\
 & \Sigma \ddot{\Sigma}' \rightarrow \Sigma \ddot{\Sigma}^{(0,1)}[t, u], \Sigma \ddot{\Sigma}'' \rightarrow \Sigma \ddot{\Sigma}^{(0,2)}[t, u], \Sigma \ddot{\Sigma} \rightarrow \Sigma \ddot{\Sigma}[t, u], \\
 & B \ddot{\Sigma}' \rightarrow B \ddot{\Sigma}^{(0,1)}[t, u], B \ddot{\Sigma}'' \rightarrow B \ddot{\Sigma}^{(0,2)}[t, u], B \ddot{\Sigma} \rightarrow B \ddot{\Sigma}[t, u]\}
 \end{aligned}$$

Bdotrule = Solve[EQ1 == 0, Bdot][[1]] /. rule23 // Simplify

$$\begin{aligned}
 & \{B \dot{\Sigma}[t, u] \rightarrow (-u \Sigma[t, u]^3 B^{(0,1)}[t, u]^2 + \\
 & 8 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \dot{B}[t, u] \Sigma^{(0,1)}[t, u] (2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u]) + \Sigma[t, u]^2 \\
 & (u^2 \lambda_{GB} \Sigma \dot{B}[t, u] B^{(0,1)}[t, u] (-4 B^{(0,1)}[t, u] + u B^{(0,1)}[t, u]^2 - 2 u B^{(0,2)}[t, u]) - \\
 & 2 (2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u])) / \\
 & (u^2 \lambda_{GB} \Sigma[t, u] (4 u B^{(0,1)}[t, u] \Sigma^{(0,1)}[t, u]^2 + 2 \Sigma[t, u]^2 B^{(0,1)}[t, u] \\
 & (2 B^{(0,1)}[t, u] + u B^{(0,2)}[t, u]) + \Sigma[t, u] (3 u B^{(0,1)}[t, u]^2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + \\
 & 2 u \Sigma^{(0,1)}[t, u] B^{(0,2)}[t, u] + 2 B^{(0,1)}[t, u] (4 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u]))))\}
 \end{aligned}$$

شکل آ-۹: معادله حرکت پنجم

DBdotrule = D[Bdotrule, u] // Simplify

$$\begin{aligned}
& \left\{ \text{Bdot}^{(0,1)}[t, u] \rightarrow \right. \\
& - \left(\left(2 \Sigma[t, u] \left(-u \Sigma[t, u]^3 B^{(0,1)}[t, u]^2 + 8 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}[t, u] \Sigma^{(0,1)}[t, u] \left(2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) + \Sigma[t, u]^2 \left(u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}[t, u] B^{(0,1)}[t, u] \left(-4 B^{(0,1)}[t, u] + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. u B^{(0,1)}[t, u]^2 - 2 u B^{(0,2)}[t, u] \right) \right) - 2 \left(2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) \right) \right) \\
& \left(4 u B^{(0,1)}[t, u] \Sigma^{(0,1)}[t, u]^2 + 2 \Sigma[t, u]^2 B^{(0,1)}[t, u] \right. \\
& \quad \left. \left(2 B^{(0,1)}[t, u] + u B^{(0,2)}[t, u] \right) + \Sigma[t, u] \left(3 u B^{(0,1)}[t, u]^2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + 2 u \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \Sigma^{(0,1)}[t, u] B^{(0,2)}[t, u] + 2 B^{(0,1)}[t, u] \left(4 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) \right) \right) + \\
& u \Sigma^{(0,1)}[t, u] \left(-u \Sigma[t, u]^3 B^{(0,1)}[t, u]^2 + 8 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}[t, u] \right. \\
& \quad \left. \Sigma^{(0,1)}[t, u] \left(2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) + \right. \\
& \quad \left. \Sigma[t, u]^2 \left(u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}[t, u] B^{(0,1)}[t, u] \left(-4 B^{(0,1)}[t, u] + u B^{(0,1)}[t, u]^2 - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2 u B^{(0,2)}[t, u] \right) \right) - 2 \left(2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) \right) \right) \\
& \left(4 u B^{(0,1)}[t, u] \Sigma^{(0,1)}[t, u]^2 + 2 \Sigma[t, u]^2 B^{(0,1)}[t, u] \right. \\
& \quad \left. \left(2 B^{(0,1)}[t, u] + u B^{(0,2)}[t, u] \right) + \Sigma[t, u] \left(3 u B^{(0,1)}[t, u]^2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + 2 u \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \Sigma^{(0,1)}[t, u] B^{(0,2)}[t, u] + 2 B^{(0,1)}[t, u] \left(4 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) \right) \right) + \\
& u \Sigma[t, u] \left(-u \Sigma[t, u]^3 B^{(0,1)}[t, u]^2 + 8 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}[t, u] \Sigma^{(0,1)}[t, u] \right. \\
& \quad \left. \left(2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) + \right. \\
& \quad \left. \Sigma[t, u]^2 \left(u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}[t, u] B^{(0,1)}[t, u] \left(-4 B^{(0,1)}[t, u] + u B^{(0,1)}[t, u]^2 - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2 u B^{(0,2)}[t, u] \right) \right) - 2 \left(2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) \right) \right) \\
& \left(\Sigma^{(0,1)}[t, u] \left(3 u B^{(0,1)}[t, u]^2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + 6 u \Sigma^{(0,1)}[t, u] B^{(0,2)}[t, u] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 B^{(0,1)}[t, u] \left(6 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + 5 u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) \right) \right) + \\
& 2 \Sigma[t, u]^2 \left(u B^{(0,2)}[t, u]^2 + B^{(0,1)}[t, u] \left(5 B^{(0,2)}[t, u] + u B^{(0,3)}[t, u] \right) \right) + \\
& \Sigma[t, u] \left(B^{(0,1)}[t, u]^2 \left(11 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + 3 u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) + 2 \left(2 u B^{(0,2)}[t, u] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \Sigma^{(0,2)}[t, u] + \Sigma^{(0,1)}[t, u] \left(5 B^{(0,2)}[t, u] + u B^{(0,3)}[t, u] \right) \right) + 2 B^{(0,1)}[t, u] \right. \\
& \quad \left. \left(5 u \Sigma^{(0,1)}[t, u] B^{(0,2)}[t, u] + 5 \Sigma^{(0,2)}[t, u] + u \Sigma^{(0,3)}[t, u] \right) \right) \right) - \\
& u \Sigma[t, u] \left(4 u B^{(0,1)}[t, u] \Sigma^{(0,1)}[t, u]^2 + 2 \Sigma[t, u]^2 B^{(0,1)}[t, u] \right. \\
& \quad \left. \left(2 B^{(0,1)}[t, u] + u B^{(0,2)}[t, u] \right) + \right. \\
& \quad \left. \Sigma[t, u] \left(3 u B^{(0,1)}[t, u]^2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + 2 u \Sigma^{(0,1)}[t, u] B^{(0,2)}[t, u] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 B^{(0,1)}[t, u] \left(4 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) \right) \right) \\
& \left(-\Sigma[t, u]^3 B^{(0,1)}[t, u] \left(B^{(0,1)}[t, u] + 2 u B^{(0,2)}[t, u] \right) - \right. \\
& \quad \left. 2 \Sigma[t, u] \Sigma^{(0,1)}[t, u] \left(4 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}[t, u] B^{(0,1)}[t, u] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(4 B^{(0,1)}[t, u] - u B^{(0,1)}[t, u]^2 + 2 u B^{(0,2)}[t, u] \right) + 2 u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) + \right. \\
& \quad \left. \Sigma[t, u]^2 \left(u^3 \lambda_{GB} B^{(0,1)}[t, u]^3 \Sigma \text{dot}^{(0,1)}[t, u] - u B^{(0,1)}[t, u]^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(3 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + 4 u \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}^{(0,1)}[t, u] \right) - 2 u^3 \lambda_{GB} B^{(0,1)}[t, u] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \Sigma \text{dot}^{(0,1)}[t, u] B^{(0,2)}[t, u] + u \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}[t, u] \left(3 u B^{(0,1)}[t, u]^3 - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2 u^2 B^{(0,2)}[t, u]^2 + B^{(0,1)}[t, u]^2 \left(-8 + 3 u^2 B^{(0,2)}[t, u] \right) - 2 u B^{(0,1)}[t, u] \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left(7 B^{(0,2)}[t, u] + u B^{(0,3)}[t, u] \right) \right) \right) - 2 \left(3 \Sigma^{(0,2)}[t, u] + u \Sigma^{(0,3)}[t, u] \right) \right) + \\
& 8 u \lambda_{GB} \left(u \Sigma^{(0,1)}[t, u] \Sigma \text{dot}^{(0,1)}[t, u] \left(2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) + \right. \\
& \quad \left. \Sigma \text{dot}[t, u] \left(4 \Sigma^{(0,1)}[t, u]^2 + u^2 \Sigma^{(0,2)}[t, u]^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. u \Sigma^{(0,1)}[t, u] \left(7 \Sigma^{(0,2)}[t, u] + u \Sigma^{(0,3)}[t, u] \right) \right) \right) \right) \Big/ \\
& \left(u^3 \lambda_{GB} \Sigma[t, u]^2 \left(4 u B^{(0,1)}[t, u] \Sigma^{(0,1)}[t, u]^2 + 2 \Sigma[t, u]^2 B^{(0,1)}[t, u] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(2 B^{(0,1)}[t, u] + u B^{(0,2)}[t, u] \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \Sigma[t, u] \left(3 u B^{(0,1)}[t, u]^2 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + 2 u \Sigma^{(0,1)}[t, u] B^{(0,2)}[t, u] + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. 2 B^{(0,1)}[t, u] \left(4 \Sigma^{(0,1)}[t, u] + u \Sigma^{(0,2)}[t, u] \right) \right) \right) \right) \Big) \Big\}
\end{aligned}$$

شکل آ-۱۰: معادله حرکت پنجم

$\Sigma \text{doteq} =$

EQ2 /. rule23 /. Bdotrule /. DBdotrule /. rule15 // Together // Numerator //

Collect[#, λGB, Simplify] &

$$\begin{aligned}
 & -2 \Sigma^3 (u \Sigma (B')^2 + 4 \Sigma' + 2 u \Sigma'') \\
 & (u \Sigma^3 (B')^5 (8 \Sigma^2 + 8 u \Sigma \Sigma' - 9 u^2 (\Sigma')^2 + 6 u^2 \Sigma \Sigma'') + 2 u \Sigma^2 (B')^4 (-2 u \Sigma (\Sigma')^2 - 16 u^2 (\Sigma')^3 + \Sigma \\
 & \quad \Sigma' (12 \Sigma - u^2 \Sigma B'' + 8 u^2 \Sigma'') + 2 u \Sigma^2 (2 \Sigma B'' + 6 \Sigma'' + u \Sigma B^{(0,3)} [t, u] + u \Sigma^{(0,3)} [t, u])) - \\
 & 2 \Sigma (B')^3 (14 u^2 \Sigma (\Sigma')^3 + 12 u^3 (\Sigma')^4 + u \Sigma (\Sigma')^2 (-52 \Sigma + 9 u^2 \Sigma B'' - u^2 \Sigma'') - \\
 & \quad 4 \Sigma^2 \Sigma' (8 \Sigma + 7 u^2 \Sigma'' + u^3 \Sigma B^{(0,3)} [t, u] - u^3 \Sigma^{(0,3)} [t, u]) + \\
 & \quad 2 u \Sigma^2 (u^2 \Sigma^2 (B'')^2 + 4 \Sigma \Sigma'' - 3 u^2 (\Sigma'')^2 + 4 u \Sigma \Sigma^{(0,3)} [t, u])) + \\
 & 4 B' (-16 u^2 (\Sigma')^5 + 2 u^3 \Sigma^3 B'' \Sigma'' (\Sigma B'' + 2 \Sigma'') + (\Sigma')^4 (8 u \Sigma - 8 u^3 \Sigma'') + 2 \Sigma (\Sigma')^3 \\
 & \quad (16 \Sigma + 9 u^2 \Sigma B'' + 2 u^2 \Sigma'' - 2 u^3 \Sigma^{(0,3)} [t, u]) + u \Sigma (\Sigma')^2 (-2 u^2 \Sigma^2 (B'')^2 + 20 \Sigma \Sigma'' + \\
 & \quad 6 u^2 (\Sigma'')^2 + \Sigma B'' (56 \Sigma + 9 u^2 \Sigma'') + 8 u \Sigma^2 B^{(0,3)} [t, u] - 4 u \Sigma \Sigma^{(0,3)} [t, u]) + \\
 & \quad 4 u^2 \Sigma^2 \Sigma' (\Sigma^2 (B'')^2 + \Sigma'' (2 \Sigma'' + u \Sigma B^{(0,3)} [t, u]) + \Sigma B'' (6 \Sigma'' - u \Sigma^{(0,3)} [t, u])) + 8 u \\
 & \quad \Sigma \Sigma' (2 u (\Sigma')^3 B'' + u^2 \Sigma B'' \Sigma'' (\Sigma B'' + 2 \Sigma'') + (\Sigma')^2 (B'' (14 \Sigma + u^2 \Sigma'') + 2 u \Sigma B^{(0,3)} [t, u]) + \\
 & \quad u \Sigma \Sigma' (2 \Sigma (B'')^2 + u \Sigma'' B^{(0,3)} [t, u] + B'' (8 \Sigma'' - u \Sigma^{(0,3)} [t, u]))) - \\
 & 4 \Sigma (B')^2 (18 u^2 (\Sigma')^4 + (\Sigma')^3 (-34 u \Sigma + 4 u^3 \Sigma B'' + 9 u^3 \Sigma'') + u \Sigma \Sigma' (3 u^2 \Sigma^2 (B'')^2 - 7 \Sigma B'' \\
 & \quad (4 \Sigma + u^2 \Sigma'') - 2 (8 \Sigma \Sigma'' + 5 u^2 (\Sigma'')^2 + 2 u \Sigma (\Sigma B^{(0,3)} [t, u] - 2 \Sigma^{(0,3)} [t, u]))) - \\
 & \quad \Sigma (\Sigma')^2 (48 \Sigma + 12 u^2 \Sigma B'' + 16 u^2 \Sigma'' + u^3 \Sigma B^{(0,3)} [t, u] - 7 u^3 \Sigma^{(0,3)} [t, u]) + \\
 & \quad 2 u^2 \Sigma^2 (-\Sigma'' (4 \Sigma'' + u \Sigma B^{(0,3)} [t, u]) + B'' (-4 \Sigma \Sigma'' + u \Sigma \Sigma^{(0,3)} [t, u]))) + \\
 & 2 u \lambda_{GB} \Sigma (u^3 \Sigma^5 (B')^8 (-21 u^2 \Sigma \text{dot} (\Sigma')^2 - 6 u \Sigma \Sigma' (2 \Sigma \text{dot} + u \Sigma \text{dot}') - \\
 & \quad 4 \Sigma (4 \Sigma \Sigma \text{dot} + 2 u \Sigma \Sigma \text{dot}' - 3 u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma'')) + \\
 & 2 \Sigma^3 (B')^6 (-10 u^5 \Sigma \text{dot} (\Sigma')^4 + u^3 \Sigma (\Sigma')^3 (54 \Sigma + 206 u \Sigma \text{dot} - u^2 \Sigma \text{dot}') + \\
 & \quad u^2 \Sigma (\Sigma')^2 (216 \Sigma^2 + 344 u \Sigma \Sigma \text{dot} + 36 u^2 \Sigma \Sigma \text{dot}' - 29 u^3 \Sigma \Sigma \text{dot} B'' + 11 u^3 \Sigma \text{dot} \Sigma') + \\
 & \quad 4 \Sigma^2 (32 \Sigma^3 - 2 u^5 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B'')^2 - 16 u^3 \Sigma \Sigma \text{dot} \Sigma'' - 3 u^5 \Sigma \Sigma \text{dot} B'' \Sigma'' + \\
 & \quad 4 u^5 \Sigma \text{dot} (\Sigma'')^2 - 4 u^2 \Sigma \Sigma \text{dot}' (-4 \Sigma + u^2 \Sigma'') - 4 u^4 \Sigma \Sigma \text{dot} \Sigma^{(0,3)} [t, u]) + \\
 & \quad 2 u \Sigma^2 \Sigma' (\Sigma \text{dot}' (56 u^2 \Sigma - 5 u^4 \Sigma B'' - 10 u^4 \Sigma'') + 2 (72 \Sigma^2 + 32 u \Sigma \Sigma \text{dot} - 8 u^3 \Sigma \Sigma \text{dot} B'' + \\
 & \quad 9 u^3 \Sigma \text{dot} \Sigma'' + 5 u^4 \Sigma \Sigma \text{dot} B^{(0,3)} [t, u] + u^4 \Sigma \text{dot} \Sigma^{(0,3)} [t, u])) + \\
 & 16 u^2 \Sigma (\Sigma')^2 (64 u \Sigma \text{dot} (\Sigma')^4 B'' + u^3 \Sigma \Sigma \text{dot} B'' \Sigma'' (\Sigma^2 (B'')^2 + 8 \Sigma B'' \Sigma'' + 12 (\Sigma'')^2) + \\
 & \quad 16 (\Sigma')^3 (B'' (12 \Sigma \Sigma \text{dot} - u \Sigma \Sigma \text{dot}' + 4 u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma'') + 2 u \Sigma \Sigma \text{dot} B^{(0,3)} [t, u]) + \\
 & \quad u \Sigma \Sigma' (\Sigma^2 (2 (\Sigma + u \Sigma \text{dot}) + u^2 \Sigma \text{dot}') (B'')^3 + 32 u \Sigma \Sigma \text{dot} (B'')^2 \Sigma'' + 8 u^2 \Sigma \text{dot} (\Sigma'')^2 \\
 & \quad B^{(0,3)} [t, u] - 4 u B'' \Sigma'' ((-18 \Sigma \text{dot} + u \Sigma \text{dot}') \Sigma'' + 2 u \Sigma \text{dot} \Sigma^{(0,3)} [t, u])) + \\
 & \quad 2 u (\Sigma')^2 (16 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B'')^2 + u^2 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B'')^3 + 16 u \Sigma \Sigma \text{dot} \Sigma'' B^{(0,3)} [t, u] + \\
 & \quad 8 B'' (\Sigma (12 \Sigma \text{dot} - u \Sigma \text{dot}') \Sigma'' + u^2 \Sigma \text{dot} (\Sigma'')^2 - u \Sigma \Sigma \text{dot} \Sigma^{(0,3)} [t, u]))) + \\
 & 2 u^3 \Sigma^4 (B')^7 (-46 u^2 \Sigma \text{dot} (\Sigma')^3 - 16 u \Sigma (\Sigma')^2 (\Sigma \text{dot} + u \Sigma \text{dot}') - \\
 & \quad \Sigma \Sigma' (24 u \Sigma \Sigma \text{dot}' + \Sigma \text{dot} (32 \Sigma + 9 u^2 \Sigma B'' - 21 u^2 \Sigma'')) + 2 u \Sigma^2 \\
 & \quad (-\Sigma (4 \Sigma \text{dot} + u \Sigma \text{dot}') B'' + u (-\Sigma \text{dot}' \Sigma'' + 2 \Sigma \text{dot} (\Sigma B^{(0,3)} [t, u] + \Sigma^{(0,3)} [t, u]))) + \\
 & 8 u \Sigma (B')^2 (16 u^2 \Sigma \text{dot} (\Sigma')^6 (-4 + 3 u^2 B'') - 4 u^4 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (\Sigma'')^3 (\Sigma B'' + 2 \Sigma'') + 8 u (\Sigma')^5 \\
 & \quad (88 \Sigma \Sigma \text{dot} + 2 u \Sigma (3 \Sigma + 14 u \Sigma \text{dot}) B'' + u \Sigma \Sigma \text{dot}' (-14 + 3 u^2 B'') - 8 u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma'') + \\
 & \quad 2 u^2 \Sigma^2 \Sigma' (3 \Sigma^3 (2 \Sigma + u^2 \Sigma \text{dot}') (B'')^3 + 6 \Sigma^2 (2 \Sigma + u \Sigma \text{dot} + u^2 \Sigma \text{dot}') (B'')^2 \Sigma'' - \\
 & \quad 2 u (\Sigma'')^2 (2 (4 \Sigma \text{dot} + u \Sigma \text{dot}') \Sigma'' - 5 u \Sigma \Sigma \text{dot} B^{(0,3)} [t, u]) + \\
 & \quad 2 \Sigma B'' \Sigma'' ((3 \Sigma + 8 u \Sigma \text{dot} - u^2 \Sigma \text{dot}') \Sigma'' - 5 u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma^{(0,3)} [t, u])) + \\
 & \quad \Sigma (\Sigma')^3 (u^2 \Sigma^2 (66 \Sigma + 106 u \Sigma \text{dot} + 33 u^2 \Sigma \text{dot}') (B'')^2 + 4 u^2 (-7 \Sigma \text{dot}' \Sigma'' (8 \Sigma + u^2 \Sigma'') + \\
 & \quad 2 \Sigma \text{dot} (35 u (\Sigma'')^2 + 2 \Sigma (5 \Sigma B^{(0,3)} [t, u] - 8 \Sigma^{(0,3)} [t, u]) + \\
 & \quad u^2 \Sigma'' (2 \Sigma B^{(0,3)} [t, u] - 7 \Sigma^{(0,3)} [t, u]))) + 8 \Sigma B'' (24 \Sigma^2 + 60 u \Sigma \Sigma \text{dot} + \\
 & \quad 2 u^2 (3 \Sigma + 29 u \Sigma \text{dot}) \Sigma'' + \Sigma \text{dot}' (7 u^2 \Sigma + 2 u^4 \Sigma'') - u^4 \Sigma \text{dot} \Sigma^{(0,3)} [t, u])) + \\
 & u \Sigma (\Sigma')^2 (13 u^3 \Sigma^3 \Sigma \text{dot} (B'')^3 + \Sigma^2 (B'')^2 (24 \Sigma (5 \Sigma + u \Sigma \text{dot}) + 60 u^2 \Sigma \Sigma \text{dot}' + \\
 & \quad 17 u^3 \Sigma \text{dot} \Sigma'') + 4 u \Sigma'' (-4 \Sigma (8 \Sigma \text{dot} + 5 u \Sigma \text{dot}') \Sigma'' + 17 u^2 \Sigma \text{dot} (\Sigma'')^2 + \\
 & \quad 4 u \Sigma \Sigma \text{dot} (5 \Sigma B^{(0,3)} [t, u] - 4 \Sigma^{(0,3)} [t, u])) + 8 \Sigma B'' (\Sigma (12 \Sigma + 40 u \Sigma \text{dot} + \\
 & \quad u^2 \Sigma \text{dot}') \Sigma'' + 12 u^3 \Sigma \text{dot} (\Sigma'')^2 - 5 u^2 \Sigma \Sigma \text{dot} \Sigma^{(0,3)} [t, u])) + \\
 & 2 (\Sigma')^4 (33 u^4 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B'')^2 + 8 u \Sigma \Sigma \text{dot}' (-12 \Sigma + 5 u^2 \Sigma B'' - 7 u^2 \Sigma'') + \\
 & \quad 32 u \Sigma B'' (\Sigma (3 \Sigma^3 + 10 u \Sigma \text{dot}) + u^3 \Sigma \text{dot} \Sigma'') + \\
 & \quad 8 \Sigma \text{dot} (40 u^2 \Sigma \Sigma'' - u^4 (\Sigma'')^2 + \Sigma (24 \Sigma + 2 u^3 \Sigma B^{(0,3)} [t, u] - 7 u^3 \Sigma^{(0,3)} [t, u]))) + \\
 & 16 u B' \Sigma' (-64 u^2 \Sigma \text{dot} (\Sigma')^6 - 32 u (\Sigma')^5 (-4 \Sigma \Sigma \text{dot} + u \Sigma \Sigma \text{dot}' + 2 u^2 \Sigma \text{dot} \Sigma'') + \\
 & \quad u^4 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} \Sigma'' (\Sigma^3 (B'')^3 + 7 \Sigma^2 (B'')^2 \Sigma'' + 8 \Sigma B'' (\Sigma'')^2 - 4 (\Sigma'')^3) + \\
 & \quad 4 (\Sigma')^4 (-8 u \Sigma \Sigma \text{dot}' (2 \Sigma + u^2 \Sigma'') + \Sigma \text{dot}
 \end{aligned}$$

شکل آ-۱۱: معادله حرکت پنجم

BdotEq = Bdotrule[[1, 2]] /. rule15

$$\left(-u \Sigma^3 (B')^2 + 8 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma' (2 \Sigma' + u \Sigma'') + \Sigma^2 (u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} B' (-4 B' + u (B')^2 - 2 u B'') - 2 (2 \Sigma' + u \Sigma'')) \right) / \left(u^2 \lambda_{GB} \Sigma (4 u B' (\Sigma')^2 + 2 \Sigma^2 B' (2 B' + u B'') + \Sigma (3 u (B')^2 \Sigma' + 2 u \Sigma' B'' + 2 B' (4 \Sigma' + u \Sigma'')) \right)$$

Bdoteq = (Bdot - BdotEq) // Together // Numerator // Collect[#, Bdot, Simplify] &

$$u \Sigma^2 (\Sigma + 4 u \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}) (B')^2 - u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^3 + 2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} B' B'' + 2 (\Sigma^2 - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma') (2 \Sigma' + u \Sigma'') + Bdot u^2 \lambda_{GB} \Sigma (\Sigma (B')^2 (4 \Sigma + 3 u \Sigma') + 2 u \Sigma \Sigma' B'' + 2 B' (4 \Sigma \Sigma' + 2 u (\Sigma')^2 + u \Sigma (\Sigma B'' + \Sigma'')))$$

Solve[EQ3 == 0 && EQ4 == 0, {Bddot, Sddot}]

$$\left\{ \left\{ Bddot \rightarrow - \left(\left(- (4 Bdot^2 u^2 \Sigma^3 + 4 u^4 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} A' + 12 Bdot^2 u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} B' + 16 Bdot u^4 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot}^2 B' + 4 Bdot u^6 \lambda_{GB} \Sigma^2 (Bdot \Sigma + 2 \Sigma \text{dot}) A' B' - 4 Bdot^3 u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma' + 4 u^6 \lambda_{GB} (Bdot^2 \Sigma^2 - 4 \Sigma \text{dot}^2) A' \Sigma' \right) (-4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma B' + u^3 \lambda_{GB} \Sigma (B')^2 - 4 u^3 \lambda_{GB} B' \Sigma' - 2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma B'') + (8 u^2 \Sigma^2 + 8 Bdot u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' - 32 u^4 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma') \right. \right. \\ \left. \left(-8 Bdot u^2 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} B' + 2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}^2 (B')^2 + \frac{1}{2} u^5 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} A' (B')^2 + 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} B' Bdot' + 2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 (Bdot')^2 + 2 Bdot^2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma' - 8 Bdot u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma' - 4 Bdot u^4 \lambda_{GB} \Sigma A' \Sigma' - 4 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} B' \Sigma' + 2 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} (\Sigma')^2 - u \Sigma (3 \Sigma \text{dot} B' + 2 \Sigma Bdot' + 3 Bdot \Sigma') - 2 u^4 \lambda_{GB} (Bdot \Sigma + \Sigma \text{dot}) A' B' (2 \Sigma + u \Sigma') - 2 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma B' \Sigma \text{dot}' + 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} B' \Sigma \text{dot}' + 4 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma' \Sigma \text{dot}' + 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma Bdot' (Bdot \Sigma' + \Sigma \text{dot}') - Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' A'' - u^5 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} B' A'' - Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma' A'' - 4 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} B'' - u^5 \lambda_{GB} \Sigma (Bdot \Sigma + \Sigma \text{dot}) A' B'' + Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma'' - 4 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma'' - Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma A' \Sigma'' \right) \right) / \\ \left(- (8 u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 (Bdot \Sigma + \Sigma \text{dot}) B' + 8 Bdot u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma') \right. \\ \left. (-4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma B' + u^3 \lambda_{GB} \Sigma (B')^2 - 4 u^3 \lambda_{GB} B' \Sigma' - 2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma B'') + (8 u^2 \Sigma^2 + 8 Bdot u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' - 32 u^4 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma') \right. \\ \left. (-4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma' - 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma B' \Sigma' - 2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 B'' - 2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma'') \right) \left. \right\}, \\ Sddot \rightarrow - \left((4 Bdot^2 \Sigma^4 B' + 4 u^2 \Sigma^3 \Sigma \text{dot} A' B' - 6 Bdot u \Sigma^3 \Sigma \text{dot} (B')^2 - 4 Bdot^2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma^3 \Sigma \text{dot} (B')^2 - 6 u \Sigma^2 \Sigma \text{dot}^2 (B')^2 - 4 Bdot^2 u^4 \lambda_{GB} \Sigma^4 A' (B')^2 - 8 Bdot u^4 \lambda_{GB} \Sigma^3 \Sigma \text{dot} A' (B')^2 - 8 u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot}^2 A' (B')^2 + 4 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot}^2 (B')^3 + 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot}^3 (B')^3 + Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma^3 \Sigma \text{dot} A' (B')^3 + u^5 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot}^2 A' (B')^3 - 4 Bdot u \Sigma^4 B' Bdot' - 4 u \Sigma^3 \Sigma \text{dot} B' Bdot' + 8 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 \Sigma \text{dot} (B')^2 Bdot' + 8 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot}^2 (B')^2 Bdot' + 4 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^4 B' (Bdot')^2 + 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 \Sigma \text{dot} B' (Bdot')^2 + 4 Bdot^2 \Sigma^3 \Sigma' + 4 u^2 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} A' \Sigma' - 2 Bdot^2 u \Sigma^3 B' \Sigma' - 12 Bdot u \Sigma^2 \Sigma \text{dot} B' \Sigma' - 16 Bdot^2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} B' \Sigma' - 8 Bdot^2 u^4 \lambda_{GB} \Sigma^3 A' B' \Sigma' + 4 u^3 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} A' B' \Sigma' - 8 Bdot u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} A' B' \Sigma' - 16 u^4 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot}^2 A' B' \Sigma' + 4 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^2 \Sigma' + 12 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot}^2 (B')^2 \Sigma' + Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} A' (B')^2 \Sigma' - 4 u^5 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot}^2 A' (B')^2 \Sigma' - 4 Bdot u \Sigma^3 Bdot' \Sigma' + 8 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 B' Bdot' \Sigma' + 16 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} B' Bdot' \Sigma' + 4 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 (Bdot')^2 \Sigma' - 6 Bdot^2 u \Sigma^2 (\Sigma')^2 - 16 Bdot^2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} (\Sigma')^2 - 4 Bdot^2 u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 A' (\Sigma')^2 - 16 u^4 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}^2 A' (\Sigma')^2 - 4 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} B' (\Sigma')^2 - 4 Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} A' B' (\Sigma')^2 - 16 u^5 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}^2 A' B' (\Sigma')^2 + 8 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 Bdot' (\Sigma')^2 + 4 Bdot^3 u^3 \lambda_{GB} \Sigma (\Sigma')^3 - 4 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 (B')^2 \Sigma \text{dot}' + 4 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^2 \Sigma \text{dot}' + 8 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot}^2 (B')^2 \Sigma \text{dot}' + 8 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 B' Bdot' \Sigma \text{dot}' + 8 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} B' Bdot' \Sigma \text{dot}' + 4 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' \Sigma' \Sigma \text{dot}' + 16 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} B' \Sigma' \Sigma \text{dot}' + 8 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 Bdot' \Sigma' \Sigma \text{dot}' + 8 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma (\Sigma')^2 \Sigma \text{dot}' - 2 Bdot^2 u^5 \lambda_{GB} \Sigma^4 (B')^2 A'' - 4 Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma^3 \Sigma \text{dot} (B')^2 A'' - 2 u^5 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot}^2 (B')^2 A'' - 4 Bdot^2 u^5 \lambda_{GB} \Sigma^3 B' \Sigma' A'' - 4 Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} B' \Sigma' A'' - 2 Bdot^2 u^5 \lambda_{GB} \Sigma^2 (\Sigma')^2 A'' + 2 Bdot^2 u \Sigma^4 B'' + 2 u^3 \Sigma^3 \Sigma \text{dot} A' B'' - 2 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 \Sigma \text{dot} B' B'' - 2 u^5 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot}^2 A' B' B'' - 2 Bdot^3 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 \Sigma' B'' - 8 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} \Sigma' B'' - 2 Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} A' \Sigma' B'' - 8 u^5 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot}^2 A' \Sigma' B'' + 2 Bdot^2 u \Sigma^3 \Sigma'' + 2 u^3 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} A' \Sigma'' + 2 Bdot^3 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 B' \Sigma'' + 2 Bdot u^5 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} A' B' \Sigma'' - 8 Bdot^2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} \Sigma'' - 8 u^5 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}^2 A' \Sigma' \Sigma'' \right) / \\ \left(2 (4 \Sigma^3 B' - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^2 + Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^3 (B')^3 + u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} (B')^3 + 4 \Sigma^2 \Sigma' + 4 u \Sigma^2 B' \Sigma' - 16 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} B' \Sigma' + Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 (B')^2 \Sigma' - 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} (B')^2 \Sigma' - 16 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} (\Sigma')^2 - 4 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma B' (\Sigma')^2 - 16 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} B' (\Sigma')^2 + 2 u \Sigma^3 B'' - 2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} B' B'' - 2 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma' B'' - 8 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} \Sigma' B'' + 2 u \Sigma^2 \Sigma'' + 2 Bdot u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' \Sigma'' - 8 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma' \Sigma'') \right) \left. \right\}$$

شکل آ-۱۲: معادله حرکت پنجم

Bddrule = {%220[[1, 1]]} // Simplify

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{Bddot} \rightarrow \\ & - \left(\left(u \lambda_{GB} \left(A' \left(u^2 \Sigma^2 \Sigma \text{dot} + \text{Bdot} u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 \left(\text{Bdot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot} \right) B' + u^4 \lambda_{GB} \left(\text{Bdot}^2 \Sigma^2 - 4 \Sigma \text{dot}^2 \right) \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \Sigma' \right) + \text{Bdot} \Sigma \left(u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \left(3 \text{Bdot} \Sigma + 4 \Sigma \text{dot} \right) B' + \text{Bdot} \Sigma \left(\Sigma - \text{Bdot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma' \right) \right) \right) \right) \\ & \left(u \Sigma \left(B' \right)^2 - 4 B' \left(\Sigma + u \Sigma' \right) - 2 u \Sigma B'' \right) + \left(\Sigma^2 + \text{Bdot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma' \right) \\ & \left(-u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \left(4 \Sigma \text{dot} + u^2 \Sigma A' \right) \left(B' \right)^2 + \right. \\ & \quad 2 B' \left(3 \Sigma \Sigma \text{dot} + 8 \text{Bdot} u \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} \text{Bdot}' + 4 \text{Bdot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma' + \right. \\ & \quad \left. 2 u^3 \lambda_{GB} \left(\text{Bdot} \Sigma + \Sigma \text{dot} \right) A' \left(2 \Sigma + u \Sigma' \right) + 2 \text{Bdot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot}' - \right. \\ & \quad \left. 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma \text{dot}' + \text{Bdot} u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 A'' + u^4 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} A'' \right) + \\ & \quad 2 \left(-2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma^2 \left(\text{Bdot}' \right)^2 - 2 \text{Bdot}^2 u^2 \lambda_{GB} \left(\Sigma' \right)^2 + 2 \Sigma \text{Bdot}' \left(\Sigma - 2 \text{Bdot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma' - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}' \right) + \text{Bdot} \Sigma' \left(3 \Sigma - 2 \text{Bdot} u \lambda_{GB} \Sigma + 8 u \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma A' - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}' + u^4 \lambda_{GB} \Sigma A'' \right) + u^2 \lambda_{GB} \left(\Sigma \left(4 \text{Bdot} \Sigma \text{dot} + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. u^2 \left(\text{Bdot} \Sigma + \Sigma \text{dot} \right) A' \right) B'' + \text{Bdot} \left(-\text{Bdot} \Sigma + 4 \Sigma \text{dot} + u^2 \Sigma A' \right) \Sigma'' \right) \right) \right) / \\ & \left(2 u \lambda_{GB} \Sigma \left(u^2 \lambda_{GB} \Sigma \left(\left(\text{Bdot} \Sigma + \Sigma \text{dot} \right) B' + \text{Bdot} \Sigma' \right) \left(u \Sigma \left(B' \right)^2 - 4 B' \left(\Sigma + u \Sigma' \right) - 2 u \Sigma B'' \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2 \left(\Sigma^2 + \text{Bdot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma^2 B' - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma' \right) \left(2 \Sigma' + 2 B' \left(\Sigma + u \Sigma' \right) + u \left(\Sigma B'' + \Sigma'' \right) \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \right\}$$

Sddrule = {%220[[1, 2]]} // Simplify

$$\left\{ \begin{aligned} & \text{Sddot} \rightarrow \left(-u^3 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} \left(\text{Bdot} \Sigma + \Sigma \text{dot} \right) \left(4 \Sigma \text{dot} + u^2 \Sigma A' \right) \left(B' \right)^3 + u \Sigma \left(B' \right)^2 \right. \\ & \quad \left(u^3 \lambda_{GB} A' \left(4 \Sigma \left(\text{Bdot}^2 \Sigma^2 + 2 \text{Bdot} \Sigma \Sigma \text{dot} + 2 \Sigma \text{dot}^2 \right) + u \Sigma \text{dot} \left(-\text{Bdot} \Sigma + 4 \Sigma \text{dot} \right) \Sigma' \right) + \right. \\ & \quad \left. 2 \left(3 \text{Bdot} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} + 2 \text{Bdot}^2 u \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} + 3 \Sigma \Sigma \text{dot}^2 - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} \left(\text{Bdot} \Sigma + \Sigma \text{dot} \right) \text{Bdot}' - 2 \text{Bdot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \left(\text{Bdot} \Sigma + 3 \Sigma \text{dot} \right) \Sigma' + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2 \text{Bdot}^2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot}' - 2 \text{Bdot} u^2 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} \Sigma \text{dot}' - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}^2 \Sigma \text{dot}' + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \text{Bdot}^2 u^4 \lambda_{GB} \Sigma^3 A'' + 2 \text{Bdot} u^4 \lambda_{GB} \Sigma^2 \Sigma \text{dot} A'' + u^4 \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot}^2 A'' \right) \right) - \\ & \quad 2 B' \left(-u^2 A' \left(2 u \Sigma \left(2 \text{Bdot}^2 u \lambda_{GB} \Sigma^2 - \Sigma \Sigma \text{dot} + 2 \text{Bdot} u \lambda_{GB} \Sigma \Sigma \text{dot} + 4 u \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}^2 \right) \Sigma' + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \left(\text{Bdot} \Sigma + 4 \Sigma \text{dot} \right) \left(\Sigma' \right)^2 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \Sigma^2 \Sigma \text{dot} \left(-2 \Sigma + u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} B'' - \text{Bdot} u^3 \lambda_{GB} \Sigma'' \right) \right) \right) + \\ & \quad \Sigma \left(2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \left(\text{Bdot} \Sigma + \Sigma \text{dot} \right) \left(\text{Bdot}' \right)^2 + 2 u \Sigma \text{Bdot}' \right. \\ & \quad \left(2 \text{Bdot} u^2 \lambda_{GB} \left(\text{Bdot} \Sigma + 2 \Sigma \text{dot} \right) \Sigma' - \left(\text{Bdot} \Sigma + \Sigma \text{dot} \right) \left(\Sigma - 2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}' \right) \right) + \\ & \quad \text{Bdot} \left(-2 \text{Bdot} u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \left(\Sigma' \right)^2 - u \Sigma' \left(-2 u^2 \lambda_{GB} \left(\text{Bdot} \Sigma + 4 \Sigma \text{dot} \right) \Sigma \text{dot}' + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \Sigma \left(\text{Bdot} \Sigma + 6 \Sigma \text{dot} + 8 \text{Bdot} u \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} + 2 u^4 \lambda_{GB} \left(\text{Bdot} \Sigma + \Sigma \text{dot} \right) A'' \right) \right) \right) + \\ & \quad \left. \text{Bdot} \Sigma^2 \left(2 \Sigma - u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} B'' + \text{Bdot} u^3 \lambda_{GB} \Sigma'' \right) \right) \right) + \\ & \quad 2 \left(-2 \text{Bdot}^3 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \left(\Sigma' \right)^3 + u \left(\Sigma' \right)^2 \left(2 u^3 \lambda_{GB} \left(\text{Bdot}^2 \Sigma^2 + 4 \Sigma \text{dot}^2 \right) A' + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \text{Bdot}^2 \Sigma \left(3 \Sigma + 8 u \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{Bdot}' - 4 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}' + u^4 \lambda_{GB} \Sigma A'' \right) \right) - \right. \\ & \quad \left. u \Sigma^2 \left(\text{Bdot}^2 \Sigma + u^2 \Sigma \text{dot} A' \right) \left(\Sigma B'' + \Sigma'' \right) + \right. \\ & \quad \left. \Sigma' \left(u^2 \Sigma \text{dot} A' \left(-2 \Sigma^2 + u^3 \lambda_{GB} \Sigma \left(\text{Bdot} \Sigma + 4 \Sigma \text{dot} \right) B'' + 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma'' \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \text{Bdot} \Sigma \left(-2 u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \left(\text{Bdot}' \right)^2 + 2 u \Sigma \text{Bdot}' \left(\Sigma - 2 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot}' \right) + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \text{Bdot} \left(-2 \Sigma^2 + u^3 \lambda_{GB} \Sigma \left(\text{Bdot} \Sigma + 4 \Sigma \text{dot} \right) B'' + 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma'' \right) \right) \right) \right) \right) / \\ & \left(2 \left(u^3 \lambda_{GB} \Sigma^2 \left(\text{Bdot} \Sigma + \Sigma \text{dot} \right) \left(B' \right)^3 + u^2 \lambda_{GB} \Sigma \left(B' \right)^2 \left(-4 \Sigma \Sigma \text{dot} + u \left(\text{Bdot} \Sigma - 4 \Sigma \text{dot} \right) \Sigma' \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2 B' \left(2 u \Sigma \left(\Sigma - 4 u \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \right) \Sigma' - 2 u^3 \lambda_{GB} \left(\text{Bdot} \Sigma + 4 \Sigma \text{dot} \right) \left(\Sigma' \right)^2 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \Sigma^2 \left(2 \Sigma - u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} B'' + \text{Bdot} u^3 \lambda_{GB} \Sigma'' \right) \right) + 2 \left(-8 u^2 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \left(\Sigma' \right)^2 + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. u \Sigma^2 \left(\Sigma B'' + \Sigma'' \right) - \Sigma' \left(-2 \Sigma^2 + u^3 \lambda_{GB} \Sigma \left(\text{Bdot} \Sigma + 4 \Sigma \text{dot} \right) B'' + 4 u^3 \lambda_{GB} \Sigma \text{dot} \Sigma'' \right) \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \right\}$$

شکل آ-۱۳: معادله حرکت پنجم

```

Aeq = EQ5 //. Bddrule //. Eddrule // Together // Numerator //
Collect[#, {A, A', A''}, Simplify] &
3 u^7 lambda_GB^2 Sigma^2 Epsilon Dot (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot)^2 (B')^5 - u^5 lambda_GB Sigma (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) (B')^4
(-4 u^2 lambda_GB Sigma^2 (B Dot Sigma + 3 Epsilon Dot) B Dot' + u^2 lambda_GB (B Dot^2 Sigma^2 - 10 B Dot Sigma Epsilon Dot - 16 Epsilon Dot^2) Sigma' +
Sigma (4 B Dot^2 u lambda_GB Sigma^2 + 2 Epsilon Dot (7 Sigma - 4 u lambda_GB Epsilon Dot) +
B Dot Sigma (5 Sigma + 4 u lambda_GB Epsilon Dot) - 4 u^2 lambda_GB (B Dot Sigma + 4 Epsilon Dot) Epsilon Dot')) - 2 u^3 Sigma (B')^3
(12 B Dot lambda_GB Sigma^4 - 4 B Dot^2 u lambda_GB Sigma^4 - 3 Sigma^3 Epsilon Dot + 12 lambda_GB Sigma^3 Epsilon Dot - 8 B Dot u lambda_GB Sigma^3 Epsilon Dot -
2 u^4 lambda_GB^2 Sigma^3 (2 B Dot Sigma + 3 Epsilon Dot) (B Dot')^2 - 2 B Dot u^4 lambda_GB^2 Epsilon Dot (B Dot Sigma + 4 Epsilon Dot) (Sigma')^2 +
6 B Dot u^2 lambda_GB Sigma^3 Epsilon Dot' + 8 B Dot^2 u^3 lambda_GB^2 Sigma^3 Epsilon Dot' + 12 u^2 lambda_GB Sigma^2 Epsilon Dot Epsilon Dot' +
16 B Dot u^3 lambda_GB^2 Sigma^2 Epsilon Dot Epsilon Dot' - 8 B Dot u^4 lambda_GB^2 Sigma^2 (Epsilon Dot')^2 - 8 u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot (Epsilon Dot')^2 -
4 u^2 lambda_GB Sigma' (-2 (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) (B Dot Sigma^2 + B Dot^2 u lambda_GB Sigma^2 + Epsilon Dot (Sigma - 2 u lambda_GB Epsilon Dot)) +
u^2 lambda_GB (B Dot^2 Sigma^2 + 2 B Dot Sigma Epsilon Dot + 4 Epsilon Dot^2) Epsilon Dot') -
2 u^2 lambda_GB Sigma B Dot' (u^2 lambda_GB (5 B Dot^2 Sigma^2 + 16 B Dot Sigma Epsilon Dot + 16 Epsilon Dot^2) Sigma' +
Sigma (- (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) (3 Sigma - 4 u lambda_GB Epsilon Dot) + 2 u^2 lambda_GB (3 B Dot Sigma + 4 Epsilon Dot) Epsilon Dot')) +
B Dot^3 u^4 lambda_GB^2 Sigma^4 B'' + 3 B Dot^2 u^4 lambda_GB^2 Sigma^3 Epsilon Dot B'' - 4 u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot^3 B'' +
B Dot^3 u^4 lambda_GB^2 Sigma^3 Sigma'' - 12 B Dot u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot^2 Sigma'' - 16 u^4 lambda_GB^2 Epsilon Dot^3 Sigma'' -
8 u^3 A' (-Sigma^2 + u^2 lambda_GB Sigma (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) B' + 2 u^2 lambda_GB (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) Sigma')
(u^3 lambda_GB Sigma^2 (B Dot Sigma + Epsilon Dot) (B')^3 + 4 u^2 lambda_GB (B Dot Sigma - 2 Epsilon Dot) (Sigma')^2 +
B Dot u^2 lambda_GB Sigma^2 (B')^2 (2 Sigma + 3 u Sigma') + u Sigma^2 (Sigma B'' + Sigma'')) +
2 Sigma' (Sigma^2 - 2 u^3 lambda_GB Sigma Epsilon Dot B'' + u^3 lambda_GB (B Dot Sigma - 2 Epsilon Dot) Sigma'') +
B' (2 u Sigma (Sigma + 3 B Dot u lambda_GB Sigma - 2 u lambda_GB Epsilon Dot) Sigma' - 8 u^3 lambda_GB Epsilon Dot (Sigma')^2 +
Sigma (2 Sigma^2 + B Dot u^3 lambda_GB Sigma^2 B'' + u^3 lambda_GB (3 B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) Sigma'')) -
4 u^4 (-Sigma^2 + u^2 lambda_GB Sigma (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) B' + 2 u^2 lambda_GB (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) Sigma') A''
(u^3 lambda_GB Sigma^2 (B Dot Sigma + Epsilon Dot) (B')^3 + 4 u^2 lambda_GB (B Dot Sigma - 2 Epsilon Dot) (Sigma')^2 +
B Dot u^2 lambda_GB Sigma^2 (B')^2 (2 Sigma + 3 u Sigma') + u Sigma^2 (Sigma B'' + Sigma'')) +
2 Sigma' (Sigma^2 - 2 u^3 lambda_GB Sigma Epsilon Dot B'' + u^3 lambda_GB (B Dot Sigma - 2 Epsilon Dot) Sigma'') +
B' (2 u Sigma (Sigma + 3 B Dot u lambda_GB Sigma - 2 u lambda_GB Epsilon Dot) Sigma' - 8 u^3 lambda_GB Epsilon Dot (Sigma')^2 +
Sigma (2 Sigma^2 + B Dot u^3 lambda_GB Sigma^2 B'' + u^3 lambda_GB (3 B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) Sigma'')) +
2 u^2 (B')^2 (6 B Dot^3 u^5 lambda_GB^2 Sigma^2 (Sigma')^3 + 2 u^3 lambda_GB Sigma^3 (B Dot')^2
(Epsilon ((-1 + 4 B Dot u lambda_GB) Sigma + 4 u lambda_GB Epsilon Dot) + u^2 lambda_GB (7 B Dot Sigma + 8 Epsilon Dot) Sigma') +
2 u^3 lambda_GB (Sigma')^2 (16 Epsilon Dot^2 (2 Sigma + u lambda_GB Epsilon Dot) + 16 B Dot Sigma Epsilon Dot (Sigma + 2 u lambda_GB Epsilon Dot) +
B Dot^2 Sigma^2 (-3 Sigma + 8 u lambda_GB Epsilon Dot) - 8 u^2 lambda_GB Epsilon Dot (5 B Dot Sigma + 4 Epsilon Dot) Epsilon Dot') + 2 u Sigma^2 B Dot'
(Sigma^3 + 2 B Dot u^4 lambda_GB^2 (5 B Dot Sigma + 4 Epsilon Dot) (Sigma')^2 + 2 u^2 lambda_GB (-1 + 4 B Dot u lambda_GB) Sigma^2 Epsilon Dot' +
2 u^2 lambda_GB Sigma' (4 B Dot^2 u lambda_GB Sigma^2 - 3 B Dot Sigma (Sigma - 4 u lambda_GB Epsilon Dot) + 2 Epsilon Dot (-Sigma + 8 u lambda_GB Epsilon Dot) +
4 u^2 lambda_GB (2 B Dot Sigma + Epsilon Dot) Epsilon Dot') + 2 B Dot u^4 lambda_GB^2 Sigma^2 Epsilon Dot B'' + 4 u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot^2 B'' +
2 B Dot^2 u^4 lambda_GB^2 Sigma^2 Sigma'' + 12 B Dot u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot Sigma'' + 16 u^4 lambda_GB^2 Epsilon Dot^2 Sigma'') +
u Sigma' (-9 B Dot Sigma^4 - 12 B Dot lambda_GB Sigma^4 + 2 B Dot^2 u lambda_GB Sigma^4 - 12 Sigma^3 Epsilon Dot + 48 lambda_GB Sigma^3 Epsilon Dot +
8 B Dot u lambda_GB Sigma^3 Epsilon Dot + 8 u lambda_GB Sigma^2 Epsilon Dot^2 - 4 u^2 lambda_GB (-3 + 4 B Dot u lambda_GB)
Sigma^2 (B Dot Sigma + 4 Epsilon Dot) Epsilon Dot' + 8 u^4 lambda_GB^2 Sigma (B Dot Sigma - 4 Epsilon Dot) (Epsilon Dot')^2 -
B Dot u^4 lambda_GB^2 Sigma^2 (3 B Dot^2 Sigma^2 + 8 B Dot Sigma Epsilon Dot + 4 Epsilon Dot^2) B'' + 12 B Dot^2 u^4 lambda_GB^2 Sigma^2 Epsilon Dot Sigma'' +
32 B Dot u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot^2 Sigma'' + 16 u^4 lambda_GB^2 Epsilon Dot^3 Sigma'') + Sigma (-32 u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot (Epsilon Dot')^2 -
4 u^2 lambda_GB (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) Epsilon Dot' (-6 Sigma^2 + B Dot u^3 lambda_GB Sigma^2 B'' - 4 u^3 lambda_GB Epsilon Dot Sigma'') +
Sigma (-12 Sigma^2 (B Dot Sigma + Epsilon Dot - 4 lambda_GB Epsilon Dot) + 2 B Dot u^3 lambda_GB Sigma^2 (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) B'' -
u^3 lambda_GB (3 B Dot^2 Sigma^2 + 20 B Dot Sigma Epsilon Dot + 28 Epsilon Dot^2) Sigma'')) -
4 (-16 B Dot^2 u^6 lambda_GB^2 (B Dot Sigma + Epsilon Dot) (Sigma')^4 - 2 u^4 lambda_GB (Sigma')^3 (-14 B Dot^2 Sigma^2 + 16 Epsilon Dot^2 +
16 B Dot u^2 lambda_GB Sigma (B Dot Sigma + Epsilon Dot) B Dot' + 16 B Dot^2 u^2 lambda_GB Sigma Epsilon Dot' +
B Dot^3 u^3 lambda_GB Sigma^2 B'' + 4 B Dot^3 u^3 lambda_GB Sigma Sigma'' + 4 B Dot^2 u^3 lambda_GB Epsilon Dot Sigma'') +
2 u Sigma^2 (Sigma (6 Sigma^2 + 4 u^2 Sigma Epsilon Dot' - 4 u^4 lambda_GB (Epsilon Dot')^2 + u^2 Sigma B Dot' (Sigma - 2 u^2 lambda_GB Epsilon Dot')) B'' +
(6 Sigma^2 + u^4 lambda_GB Sigma^2 (B Dot')^2 + 4 u^2 Sigma Epsilon Dot' - 4 u^4 lambda_GB (Epsilon Dot')^2) Sigma') -
2 u^2 (Sigma')^2 (-4 Sigma^2 Epsilon Dot + 48 lambda_GB Sigma^2 Epsilon Dot + 8 u^4 lambda_GB^2 Sigma^2 (B Dot Sigma + Epsilon Dot) (B Dot')^2 -
32 u^4 lambda_GB^2 Epsilon Dot (Epsilon Dot')^2 + 8 B Dot u^3 lambda_GB Sigma^2 Epsilon Dot B'' +
8 u^3 lambda_GB Sigma Epsilon Dot^2 B'' - 7 B Dot^2 u^3 lambda_GB Sigma^2 Sigma'' + 8 u^3 lambda_GB Epsilon Dot^2 Sigma'' +
8 u^2 lambda_GB Sigma Epsilon Dot' (4 Epsilon Dot - B Dot u^3 lambda_GB Epsilon Dot B'' + B Dot^2 u^3 lambda_GB Sigma'') + 2 B Dot u^2 lambda_GB Sigma B Dot'
(-6 Sigma^2 + 8 u^2 lambda_GB Sigma Epsilon Dot' + B Dot u^3 lambda_GB Sigma^2 B'' + 4 B Dot u^3 lambda_GB Sigma Sigma'' + 4 u^3 lambda_GB Epsilon Dot Sigma'')) +
Sigma' (8 u^4 lambda_GB (Epsilon Dot')^2 (-2 Sigma^2 + u^3 lambda_GB Sigma (B Dot Sigma + 4 Epsilon Dot) B'' + 4 u^3 lambda_GB Epsilon Dot Sigma') -
4 u^2 Sigma Epsilon Dot' (-4 Sigma^2 + u^3 lambda_GB Sigma (3 B Dot Sigma + 8 Epsilon Dot) B'' + 8 u^3 lambda_GB Epsilon Dot Sigma'') -
2 u^4 lambda_GB Sigma^2 (B Dot')^2 (-2 Sigma^2 + B Dot u^3 lambda_GB Sigma^2 B'' + 4 u^3 lambda_GB (B Dot Sigma + Epsilon Dot) Sigma'') +
4 u^5 lambda_GB Sigma^2 B Dot' (-2 Epsilon Dot (Sigma - 2 u^2 lambda_GB Epsilon Dot') B'' + B Dot (3 Sigma - 4 u^2 lambda_GB Epsilon Dot') Sigma'') +
Sigma^2 (u^3 Sigma (3 B Dot (1 - 4 lambda_GB) Sigma + 4 Epsilon Dot - 48 lambda_GB Epsilon Dot) B'' +
4 (6 Sigma^2 + u^3 (1 - 12 lambda_GB) Epsilon Dot Sigma'')))) +
4 B' (4 B Dot^3 u^7 lambda_GB^2 Sigma (Sigma')^4 + 16 u^5 lambda_GB (Sigma')^3 (B Dot^3 u lambda_GB Sigma^2 + 2 B Dot^2 u lambda_GB Sigma Epsilon Dot +
2 Epsilon Dot^2 + 2 B Dot Epsilon Dot (Sigma + u lambda_GB Epsilon Dot) - 2 B Dot u^2 lambda_GB Epsilon Dot Epsilon Dot') +
2 u^3 (Sigma')^2 (-3 B Dot Sigma^3 + 12 B Dot lambda_GB Sigma^3 - 10 B Dot^2 u lambda_GB Sigma^3 - 4 Sigma^2 Epsilon Dot +
48 lambda_GB Sigma^2 Epsilon Dot - 4 B Dot u lambda_GB Sigma^2 Epsilon Dot + 16 u lambda_GB Sigma Epsilon Dot^2 +
4 u^2 lambda_GB Sigma (3 B Dot Sigma + 2 B Dot^2 u lambda_GB Sigma + 8 Epsilon Dot - 4 B Dot u lambda_GB Epsilon Dot) Epsilon Dot' -
8 u^4 lambda_GB^2 (B Dot Sigma + 4 Epsilon Dot) (Epsilon Dot')^2 - B Dot^2 u^4 lambda_GB^2 Sigma^2 Epsilon Dot B'' +
3 B Dot^3 u^4 lambda_GB^2 Sigma^2 Sigma'' + 8 B Dot^2 u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot Sigma'' + 8 B Dot u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot^2 Sigma'') -
Sigma^2 (-2 u^2 Sigma Epsilon Dot' (-8 Sigma + 3 u^3 lambda_GB (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) B'') +
8 u^4 lambda_GB (Epsilon Dot')^2 (-2 Sigma + u^3 lambda_GB Epsilon Dot B'' - B Dot u^3 lambda_GB Sigma'') +
3 Sigma^2 (8 Sigma + u^3 (B Dot Sigma + Epsilon Dot - 4 lambda_GB Epsilon Dot) B'' + B Dot u^3 (1 + 4 lambda_GB) Sigma'')) +
2 u^6 lambda_GB^2 Sigma^3 (B Dot')^2 (8 (B Dot Sigma + Epsilon Dot) Sigma' + 2 B Dot u (Sigma')^2 +
u (Sigma (B Dot Sigma + Epsilon Dot) B'' + (3 B Dot Sigma + 4 Epsilon Dot) Sigma'')) -
2 u Sigma Sigma' (8 u^4 lambda_GB (-Sigma + 4 u lambda_GB Epsilon Dot) (Epsilon Dot')^2 +
Sigma (2 Sigma (6 Sigma + 3 B Dot u Sigma + 2 u Epsilon Dot - 24 u lambda_GB Epsilon Dot) - u^4 lambda_GB
(B Dot^2 Sigma^2 + 6 B Dot Sigma Epsilon Dot + 8 Epsilon Dot^2) B'' + 5 B Dot u^4 lambda_GB (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) Sigma'') +
2 u^2 Epsilon Dot' (u^4 lambda_GB^2 (B Dot^2 Sigma^2 + 6 B Dot Sigma Epsilon Dot + 4 Epsilon Dot^2) B'' -
2 Sigma (-2 Sigma + 3 B Dot u lambda_GB Sigma + 8 u lambda_GB Epsilon Dot + B Dot^2 u^4 lambda_GB^2 Sigma'')))) +
2 u^2 Sigma B Dot' (4 B Dot^2 u^5 lambda_GB^2 Sigma (Sigma')^3 + 8 u^3 lambda_GB (Sigma')^2 (2 B Dot^2 u lambda_GB Sigma^2 +
3 B Dot u lambda_GB Sigma Epsilon Dot + Epsilon Dot (Sigma + 2 u lambda_GB Epsilon Dot) - 2 u^2 lambda_GB Epsilon Dot Epsilon Dot') +
u Sigma' (-2 Sigma^3 - 6 B Dot u lambda_GB Sigma^3 - 4 u lambda_GB Sigma^2 Epsilon Dot + 4 u^2 lambda_GB (1 + 4 B Dot u lambda_GB) Sigma^2 Epsilon Dot' +
B Dot^2 u^4 lambda_GB^2 Sigma^3 B'' + 6 B Dot^2 u^4 lambda_GB^2 Sigma^2 Sigma'' + 12 B Dot u^4 lambda_GB^2 Sigma Epsilon Dot Sigma'' +
8 u^4 lambda_GB^2 Epsilon Dot^2 Sigma'') + Sigma (-Sigma (2 Sigma^2 + 3 u^3 lambda_GB (B Dot Sigma + 2 Epsilon Dot) Sigma') +
2 u^2 lambda_GB Epsilon Dot' (B Dot u^3 lambda_GB Sigma^2 B'' + 2 (Sigma^2 + 2 u^3 lambda_GB (B Dot Sigma + Epsilon Dot) Sigma''))))

```

شکل آ-۱۴: معادله حرکت پنجم

پیوست ب

برنامه محاسباتی بسط نزدیک مرز میدان‌های

متریک

در این بخش، بسط نزدیک مرز میدان‌های متریک انجام شده است. همچنین با حل مرتبه به مرتبه معادلات اینشتین، ضرایب بسط نیز به دست آمده‌اند. به دلیل اینکه بخش مربوط به تعاریف اولیه xAct، تعریف متریک و معادلات اینشتین در شکل‌های ۱-آ تا ۳-آ آمده است، از تکرار آن‌ها در این بخش خودداری می‌کنیم.

در پایان نیز با تجمیع ضرایب بسط به دست آمده، بسط نزدیک مرز توابع متریک و همچنین حد

$\lambda_{GB} \rightarrow 0$ آن‌ها آمده است.

Primary expansion

```

order = 5;

{Aexp[u_, t_], Bexp[u_, t_], Bdotexp[u_, t_], Σexp[u_, t_], Σdotexp[u_, t_]} =
{
  Sum[a_n[t] u^n, {n, 0, order},
  Sum[b_n[t] u^n, {n, 1, order},
  Sum[bd_n[t] u^n, {n, 1, order},
  Sum[s_n[t] u^n, {n, 0, order},
  Sum[sd_n[t] u^n, {n, 0, order}] // Simplify // Expand

{a_0[t] + u a_1[t] + u^2 a_2[t] + u^3 a_3[t] + u^4 a_4[t] + u^5 a_5[t],
 u b_1[t] + u^2 b_2[t] + u^3 b_3[t] + u^4 b_4[t] + u^5 b_5[t],
 u bd_1[t] + u^2 bd_2[t] + u^3 bd_3[t] + u^4 bd_4[t] + u^5 bd_5[t],
 s_0[t] + u s_1[t] + u^2 s_2[t] + u^3 s_3[t] + u^4 s_4[t] + u^5 s_5[t],
 sd_0[t] + u sd_1[t] + u^2 sd_2[t] + u^3 sd_3[t] + u^4 sd_4[t] + u^5 sd_5[t]}

repl1 = {A → Aexp, B → Bexp, Bdot → Bdotexp, Σ → Σexp, Σdot → Σdotexp};

EEexp = (Expand/@Series[#, {u, 0, order}]) & /@ (u^2 EQS // . repl1); // Timing
{1.606810, Null}

coeffeqs[eqnnumber_, order_] :=
  Numerator[SeriesCoefficient[EEexp[[eqnnumber]], order] // Factor]

```

شکل ب-۱: بسط اولیه.

zeroth order coefficients

`coeffeqs[1, 0]`

`coeffeqs[2, 0]`

`coeffeqs[3, 0]`

`coeffeqs[4, 0]`

`coeffeqs[5, 0]`

0

$$6 (1 - a_0[t] + \lambda_{GB} a_0[t]^2)$$

$$-6 (1 - a_0[t] + \lambda_{GB} a_0[t]^2) s_0[t]^2$$

$$-6 (1 - a_0[t] + \lambda_{GB} a_0[t]^2) s_0[t]^2$$

$$6 a_0[t] (1 - a_0[t] + \lambda_{GB} a_0[t]^2)$$

`sol = Solve[{coeffeqs[1, 0] == 0, coeffeqs[2, 0] == 0, coeffeqs[3, 0] == 0, coeffeqs[4, 0] == 0, coeffeqs[5, 0] == 0}, {a_0[t], s_0[t]}][[1]]`

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

$$\left\{ a_0[t] \rightarrow \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \lambda_{GB}}}{2 \lambda_{GB}} \right\}$$

NOTE : The first solution is acceptable only, because of $\lambda_{GB} \rightarrow 0$ limit.

`a_0[t_] = a_0[t] /. sol // Simplify`

$$\frac{-1 + \sqrt{1 - 4 \lambda_{GB}}}{2 \lambda_{GB}}$$

شکل ب-۲: مرتبه صفرم.

first order coefficients

coeffeqs[1, 1]
coeffeqs[2, 1]
coeffeqs[3, 1]
coeffeqs[4, 1]
coeffeqs[5, 1]

0

$$-9 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \left(\lambda_{GB} a_1[t] s_0[t] - s_1[t] + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1[t] + 2 \lambda_{GB} s_0'[t] \right)$$

$$3 s_0[t] \left(4 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} a_1[t] s_0[t] - b_1[t] s_0[t] + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} b_1[t] s_0[t] + 4 \lambda_{GB} b_1[t] s_0[t] + 4 s_1[t] - 4 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1[t] - 16 \lambda_{GB} s_1[t] + 8 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0'[t] \right)$$

$$3 s_0[t] \left(2 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} a_1[t] s_0[t] + b_1[t] s_0[t] - \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} b_1[t] s_0[t] - 4 \lambda_{GB} b_1[t] s_0[t] + 2 s_1[t] - 2 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1[t] - 8 \lambda_{GB} s_1[t] + 4 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0'[t] \right)$$

$$-9 \left(-\lambda_{GB} a_1[t] s_0[t] + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} a_1[t] s_0[t] + 4 \lambda_{GB}^2 a_1[t] s_0[t] + 2 s_1[t] - \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1[t] - (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_1[t] - 8 \lambda_{GB} s_1[t] - 2 \lambda_{GB} s_0'[t] + 2 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0'[t] + 8 \lambda_{GB}^2 s_0'[t] \right)$$

sol1 = Solve[{coeffeqs[3, 1] == 0, coeffeqs[4, 1] == 0}, {b1[t], a1[t]}] // Flatten;

a1[t_] = a1[t] /. sol1 // Simplify

b1[t_] = b1[t] /. sol1 // Simplify

$$\frac{\left(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} + 4 \lambda_{GB} \right) s_1[t]}{\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}} - 2 \lambda_{GB} s_0'[t]$$

$$\lambda_{GB} s_0[t]$$

0

coefftable

		$\frac{\left(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} + 4 \lambda_{GB} \right) s_1[t]}{\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}} - 2 \lambda_{GB} s_0'[t]$	$a_2[t]$	$a_3[t]$	$a_4[t]$	$a_5[t]$
$-\frac{-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}}{2 \lambda_{GB}}$		$\frac{\left(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} + 4 \lambda_{GB} \right) s_1[t]}{\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}} - 2 \lambda_{GB} s_0'[t]$	$a_2[t]$	$a_3[t]$	$a_4[t]$	$a_5[t]$
$b_0[t]$	0		$b_2[t]$	$b_3[t]$	$b_4[t]$	$b_5[t]$
$s_0[t]$	$s_1[t]$		$s_2[t]$	$s_3[t]$	$s_4[t]$	$s_5[t]$
$bd_0[t]$	$bd_1[t]$		$bd_2[t]$	$bd_3[t]$	$bd_4[t]$	$bd_5[t]$
$sd_0[t]$	$sd_1[t]$		$sd_2[t]$	$sd_3[t]$	$sd_4[t]$	$sd_5[t]$

شکل ب-۳: مرتبه اول.

second order coefficients

```
coeffeqs[1, 2]
coeffeqs[2, 2]
coeffeqs[3, 2]
coeffeqs[4, 2]
coeffeqs[5, 2]
```

$$-6 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_2[t]$$

$$3 \left(2 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} a_2[t] s_0[t]^2 + s_1[t]^2 - (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_1[t]^2 - 8 \lambda_{GB} s_1[t]^2 + 16 \lambda_{GB}^2 s_1[t]^2 + 4 s_0[t] s_2[t] - 4 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_0[t] s_2[t] - 32 \lambda_{GB} s_0[t] s_2[t] + 64 \lambda_{GB}^2 s_0[t] s_2[t] + 4 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t] \right)$$

$$-2 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} a_2[t] s_0[t]^2 + 2 b_2[t] s_0[t]^2 - 2 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} b_2[t] s_0[t]^2 - 16 \lambda_{GB} b_2[t] s_0[t]^2 + 32 \lambda_{GB}^2 b_2[t] s_0[t]^2 - s_1[t]^2 + (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_1[t]^2 + 8 \lambda_{GB} s_1[t]^2 - 16 \lambda_{GB}^2 s_1[t]^2 - 8 s_0[t] s_2[t] + 8 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_0[t] s_2[t] + 64 \lambda_{GB} s_0[t] s_2[t] - 128 \lambda_{GB}^2 s_0[t] s_2[t] - 4 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t]$$

$$-2 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} a_2[t] s_0[t]^2 - 4 b_2[t] s_0[t]^2 + 4 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} b_2[t] s_0[t]^2 + 32 \lambda_{GB} b_2[t] s_0[t]^2 - 64 \lambda_{GB}^2 b_2[t] s_0[t]^2 - s_1[t]^2 + (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_1[t]^2 + 8 \lambda_{GB} s_1[t]^2 - 16 \lambda_{GB}^2 s_1[t]^2 - 8 s_0[t] s_2[t] + 8 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_0[t] s_2[t] + 64 \lambda_{GB} s_0[t] s_2[t] - 128 \lambda_{GB}^2 s_0[t] s_2[t] - 4 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t]$$

$$-3 \left(\lambda_{GB} a_2[t] s_0[t]^2 - (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} a_2[t] s_0[t]^2 - 8 \lambda_{GB}^2 a_2[t] s_0[t]^2 + 16 \lambda_{GB}^3 a_2[t] s_0[t]^2 - s_1[t]^2 - 4 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1[t]^2 + 8 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_1[t]^2 - 3 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} s_1[t]^2 + 8 \lambda_{GB} s_1[t]^2 + 32 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_1[t]^2 - 30 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_1[t]^2 - 16 \lambda_{GB}^2 s_1[t]^2 - 64 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^2 s_1[t]^2 - 4 s_0[t] s_2[t] + 2 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_0[t] s_2[t] + 2 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} s_0[t] s_2[t] + 32 \lambda_{GB} s_0[t] s_2[t] - 64 \lambda_{GB}^2 s_0[t] s_2[t] + 2 \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t] - 2 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t] - 16 \lambda_{GB}^2 s_0[t] s_1'[t] + 32 \lambda_{GB}^3 s_0[t] s_1'[t] \right)$$

$$s_2[t_] = s_2[t] /. Solve[coeffeqs[1, 2] == 0, s_2[t]][[1]] // Simplify$$

0

$$sol = Solve[coeffeqs[3, 2] == 0, coeffeqs[4, 2] == 0, {a_2[t], b_2[t]} // Flatten;$$

$$b_2[t_] = b_2[t] /. sol // Simplify$$

$$a_2[t_] = a_2[t] /. sol // Simplify$$

0

$$- \left(\left((-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} + 4 \lambda_{GB}) \left(-(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} + 4 \lambda_{GB}) s_1[t]^2 + 4 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t] \right) \right) / \left(2 (-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) \lambda_{GB} (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]^2 \right) \right)$$

coefftable

$-\frac{-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}}{2 \lambda_{GB}}$	$\frac{\frac{-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}+4 \lambda_{GB}}{\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}} s_1[t]-2 \lambda_{GB} s_0'[t]}{\lambda_{GB} s_0[t]}$	$-\frac{(-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}+4 \lambda_{GB}) \left((-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}+4 \lambda_{GB}) s_1[t]^2+4 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t] \right)}{2 \left(-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \right) \lambda_{GB} (-1+4 \lambda_{GB}) s_0[t]^2}$	$a_3[t]$	$a_4[t]$	$a_5[t]$
$b_0[t]$	0	0	$b_3[t]$	$b_4[t]$	$b_5[t]$
$s_0[t]$	$s_1[t]$	0	$s_3[t]$	$s_4[t]$	$s_5[t]$
$bd_0[t]$	$bd_1[t]$	$bd_2[t]$	$bd_3[t]$	$bd_4[t]$	$bd_5[t]$
$sd_0[t]$	$sd_1[t]$	$sd_2[t]$	$sd_3[t]$	$sd_4[t]$	$sd_5[t]$

شكل ب-٤: مرتبه دوم.

third order coefficients

```
coeffeqs[1, 3]
coeffeqs[2, 3]
coeffeqs[3, 3]
coeffeqs[4, 3]
coeffeqs[5, 3]
```

$$-18 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_3[t]$$

$$3 \left(-\lambda_{GB} a_3[t] s_0[t]^3 + (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} a_3[t] s_0[t]^3 + 12 \lambda_{GB}^2 a_3[t] s_0[t]^3 - 4 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^2 a_3[t] s_0[t]^3 - 48 \lambda_{GB}^3 a_3[t] s_0[t]^3 + 64 \lambda_{GB}^4 a_3[t] s_0[t]^3 - 6 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1[t]^3 + 19 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_1[t]^3 - 13 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} s_1[t]^3 + 68 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_1[t]^3 - 136 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_1[t]^3 + 40 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB} s_1[t]^3 - 256 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^2 s_1[t]^3 + 240 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^2 s_1[t]^3 + 320 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^3 s_1[t]^3 + 6 s_0[t]^2 s_3[t] - 3 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_0[t]^2 s_3[t] - 3 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} s_0[t]^2 s_3[t] - 72 \lambda_{GB} s_0[t]^2 s_3[t] + 12 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_0[t]^2 s_3[t] + 12 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB} s_0[t]^2 s_3[t] + 288 \lambda_{GB}^2 s_0[t]^2 s_3[t] - 384 \lambda_{GB}^3 s_0[t]^2 s_3[t] + 4 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0[t] s_1[t] s_1'[t] - 16 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_0[t] s_1[t] s_1'[t] + 12 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB} s_0[t] s_1[t] s_1'[t] - 32 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^2 s_0[t] s_1[t] s_1'[t] + 64 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^2 s_0[t] s_1[t] s_1'[t] + 64 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^3 s_0[t] s_1[t] s_1'[t] \right)$$

$$3 \left(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} + 4 \lambda_{GB} \right) s_0[t] \left(b_3[t] s_0[t] - 4 s_3[t] \right)$$

$$-3 \left(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} + 4 \lambda_{GB} \right) s_0[t] \left(b_3[t] s_0[t] + 2 s_3[t] \right)$$

$$3 \left(-2 \lambda_{GB} a_3[t] s_0[t]^3 - 2 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} a_3[t] s_0[t]^3 + 4 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB} a_3[t] s_0[t]^3 + 28 \lambda_{GB}^2 a_3[t] s_0[t]^3 + 16 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^2 a_3[t] s_0[t]^3 - 16 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB}^2 a_3[t] s_0[t]^3 - 144 \lambda_{GB}^3 a_3[t] s_0[t]^3 - 32 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^3 a_3[t] s_0[t]^3 + 320 \lambda_{GB}^4 a_3[t] s_0[t]^3 - 256 \lambda_{GB}^5 a_3[t] s_0[t]^3 + 2 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1[t]^3 - 20 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} s_1[t]^3 + 34 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} s_1[t]^3 - 16 (1-4 \lambda_{GB})^{7/2} s_1[t]^3 - 40 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_1[t]^3 + 232 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_1[t]^3 - 232 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB} s_1[t]^3 + 40 (1-4 \lambda_{GB})^{7/2} \lambda_{GB} s_1[t]^3 + 288 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^2 s_1[t]^3 - 896 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^2 s_1[t]^3 + 384 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB}^2 s_1[t]^3 - 896 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^3 s_1[t]^3 + 1152 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^3 s_1[t]^3 + 1024 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^4 s_1[t]^3 + 12 s_0[t]^2 s_3[t] - 9 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} s_0[t]^2 s_3[t] - 3 (1-4 \lambda_{GB})^{7/2} s_0[t]^2 s_3[t] - 180 \lambda_{GB} s_0[t]^2 s_3[t] + 36 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB} s_0[t]^2 s_3[t] + 12 (1-4 \lambda_{GB})^{7/2} \lambda_{GB} s_0[t]^2 s_3[t] + 1008 \lambda_{GB}^2 s_0[t]^2 s_3[t] - 2496 \lambda_{GB}^3 s_0[t]^2 s_3[t] + 2304 \lambda_{GB}^4 s_0[t]^2 s_3[t] - 8 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_1[t]^2 s_0'[t] + 36 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_1[t]^2 s_0'[t] - 28 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB} s_1[t]^2 s_0'[t] + 96 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^2 s_1[t]^2 s_0'[t] - 288 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^2 s_1[t]^2 s_0'[t] + 112 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB}^2 s_1[t]^2 s_0'[t] - 384 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^3 s_1[t]^2 s_0'[t] + 576 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^3 s_1[t]^2 s_0'[t] + 512 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^4 s_1[t]^2 s_0'[t] + 4 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0[t] s_1[t] s_1'[t] - 28 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB} s_0[t] s_1[t] s_1'[t] + 24 (1-4 \lambda_{GB})^{5/2} \lambda_{GB} s_0[t] s_1[t] s_1'[t] - 48 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^2 s_0[t] s_1[t] s_1'[t] + 112 (1-4 \lambda_{GB})^{3/2} \lambda_{GB}^2 s_0[t] s_1[t] s_1'[t] + 192 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^3 s_0[t] s_1[t] s_1'[t] - 256 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB}^4 s_0[t] s_1[t] s_1'[t] \right)$$

```
s3[t_] = s3[t] /. Solve[coeffeqs[1, 3] == 0, s3[t]][[1]] // Simplify
```

```
0
```

```
soll = Solve[coeffeqs[2, 3] == 0, coeffeqs[4, 3] == 0, {a3[t], b3[t]} // Flatten;
```

```
a3[t_] = a3[t] /. soll // Simplify
```

```
b3[t_] = b3[t] /. soll // Simplify
```

```
0
```

```
0
```

```
coefftable
```

$-\frac{-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}}{2 \lambda_{GB}}$	$\frac{\sqrt{-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}+4 \lambda_{GB}} s_1[t]-2 \lambda_{GB} s_0'[t]}{\lambda_{GB} s_0[t]}$	$-\frac{\left(-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}+4 \lambda_{GB}\right)\left(-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}+4 \lambda_{GB}\right) s_1[t]+4 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t]}{2\left(-1+\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}\right) \lambda_{GB}\left(-1+4 \lambda_{GB}\right) s_0[t]^2}$	0	$a_4[t]$	$a_5[t]$
$b_0[t]$	0	0	0	$b_4[t]$	$b_5[t]$
$s_0[t]$	$s_1[t]$	0	0	$s_4[t]$	$s_5[t]$
$bd_0[t]$	$bd_1[t]$	$bd_2[t]$	$bd_3[t]$	$bd_4[t]$	$bd_5[t]$
$sd_0[t]$	$sd_1[t]$	$sd_2[t]$	$sd_3[t]$	$sd_4[t]$	$sd_5[t]$

شكل ب-5: مرتبه سوم.

fourth order coefficients

```
coeffeqs[1, 4]
coeffeqs[2, 4]
coeffeqs[3, 4]
coeffeqs[4, 4]
coeffeqs[5, 4]
```

$$-36 \sqrt{1-4 \lambda_{CB}} s_4[t]$$

0

0

0

0

```
s4[t_] = s4[t] /. Solve[coeffeqs[1, 4] == 0, s4[t]][[1]] // Simplify
```

0

coefftable

$-\frac{-1+\sqrt{1-4 \lambda_{CB}}}{2 \lambda_{CB}}$	$\frac{\frac{-1+\sqrt{1-4 \lambda_{CB}}+4 \lambda_{CB}}{\sqrt{1-4 \lambda_{CB}}} s_1[t]}{\lambda_{CB} s_0[t]} - 2 \lambda_{CB} s_0'[t]$	$-\frac{\left(-1+\sqrt{1-4 \lambda_{CB}}+4 \lambda_{CB}\right)\left(-\left(-1+\sqrt{1-4 \lambda_{CB}}+4 \lambda_{CB}\right) s_1[t]^2+4 \sqrt{1-4 \lambda_{CB}} \lambda_{CB} s_0[t] s_1'[t]\right)}{2\left(-1+\sqrt{1-4 \lambda_{CB}}\right) \lambda_{CB}\left(-1+4 \lambda_{CB}\right) s_0[t]^2}$	0	$a_4[t]$	$a_5[t]$
$b_0[t]$	0	0	0	$b_4[t]$	$b_5[t]$
$s_0[t]$	$s_1[t]$	0	0	0	$s_5[t]$
$bd_0[t]$	$bd_1[t]$	$bd_2[t]$	$bd_3[t]$	$bd_4[t]$	$bd_5[t]$
$sd_0[t]$	$sd_1[t]$	$sd_2[t]$	$sd_3[t]$	$sd_4[t]$	$sd_5[t]$

شکل ب- ۶: مرتبه چهارم.

fifth order coefficients

```

int1241= coeffeqs[1, 5]
coeffeqs[2, 5]
coeffeqs[3, 5]
coeffeqs[4, 5]
coeffeqs[5, 5]
Out[124]= -60 sqrt(1-4 lambda GB) s5[t]
Out[125]= -3 (-lambda GB a5[t] s0[t]^5 + (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB a5[t] s0[t]^5 + 12 lambda GB^2 a5[t] s0[t]^5 -
(1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^2 a5[t] s0[t]^5 - 48 lambda GB^3 a5[t] s0[t]^5 + 64 lambda GB^4 a5[t] s0[t]^5 -
2 lambda GB a4[t] s0[t]^4 s1[t] + 2 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB a4[t] s0[t]^4 s1[t] +
24 lambda GB^2 a4[t] s0[t]^4 s1[t] - 16 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^2 a4[t] s0[t]^4 s1[t] -
96 lambda GB^3 a4[t] s0[t]^4 s1[t] + 32 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^3 a4[t] s0[t]^4 s1[t] +
128 lambda GB^4 a4[t] s0[t]^4 s1[t] + 20 sqrt(1-4 lambda GB) s1[t]^5 - 51 (1-4 lambda GB)^(3/2) s1[t]^5 +
31 (1-4 lambda GB)^(5/2) s1[t]^5 - 216 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB s1[t]^5 + 344 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB s1[t]^5 -
84 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB s1[t]^5 + 768 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^2 s1[t]^5 - 560 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^2 s1[t]^5 -
896 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^3 s1[t]^5 + 10 s0[t]^4 s5[t] - 5 (1-4 lambda GB)^(3/2) s0[t]^4 s5[t] -
5 (1-4 lambda GB)^(5/2) s0[t]^4 s5[t] - 120 lambda GB s0[t]^4 s5[t] + 20 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB s0[t]^4 s5[t] +
20 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB s0[t]^4 s5[t] + 480 lambda GB^2 s0[t]^4 s5[t] - 640 lambda GB^3 s0[t]^4 s5[t] -
24 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB s0[t] s1[t]^3 s1'[t] + 64 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB s0[t] s1[t]^3 s1'[t] -
40 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB s0[t] s1[t]^3 s1'[t] + 192 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^2 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] -
256 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^2 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] - 384 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^3 s0[t] s1[t]^3 s1'[t])
Out[126]= s0[t] (4 lambda GB a5[t] s0[t] - 16 lambda GB^2 a5[t] s0[t] - 5 b5[t] s0[t] + 6 sqrt(1-4 lambda GB) b5[t] s0[t] -
(1-4 lambda GB)^(3/2) b5[t] s0[t] + 20 lambda GB b5[t] s0[t] - 24 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB b5[t] s0[t] +
8 lambda GB a4[t] s1[t] - 32 lambda GB^2 a4[t] s1[t] - 20 b4[t] s1[t] + 12 sqrt(1-4 lambda GB) b4[t] s1[t] + 20 s5[t] +
20 (1-4 lambda GB)^(3/2) b4[t] s1[t] + 80 lambda GB b4[t] s1[t] - 48 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB b4[t] s1[t] + 20 s5[t] +
12 sqrt(1-4 lambda GB) s5[t] - 32 (1-4 lambda GB)^(3/2) s5[t] - 80 lambda GB s5[t] - 48 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB s5[t] +
10 lambda GB s0[t] b4'[t] - 40 lambda GB^2 s0[t] b4'[t] + 40 lambda GB b4[t] s0'[t] - 160 lambda GB^2 b4[t] s0'[t])
Out[127]= s0[t] (2 lambda GB a5[t] s0[t] - 8 lambda GB^2 a5[t] s0[t] + 5 b5[t] s0[t] - 6 sqrt(1-4 lambda GB) b5[t] s0[t] +
(1-4 lambda GB)^(3/2) b5[t] s0[t] - 20 lambda GB b5[t] s0[t] + 24 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB b5[t] s0[t] +
4 lambda GB a4[t] s1[t] - 16 lambda GB^2 a4[t] s1[t] + 20 b4[t] s1[t] - 12 sqrt(1-4 lambda GB) b4[t] s1[t] +
6 (1-4 lambda GB)^(3/2) b4[t] s1[t] - 80 lambda GB b4[t] s1[t] + 48 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB b4[t] s1[t] + 10 s5[t] +
8 sqrt(1-4 lambda GB) s5[t] - 16 (1-4 lambda GB)^(3/2) s5[t] - 40 lambda GB s5[t] - 24 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB s5[t] -
10 lambda GB s0[t] b4'[t] + 40 lambda GB^2 s0[t] b4'[t] - 40 lambda GB b4[t] s0'[t] + 160 lambda GB^2 b4[t] s0'[t])
Out[128]= 3 (4 lambda GB a5[t] s0[t]^5 - 2 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB a5[t] s0[t]^5 - 3 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB a5[t] s0[t]^5 +
(1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB a5[t] s0[t]^5 - 76 lambda GB^2 a5[t] s0[t]^5 + 24 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^2 a5[t] s0[t]^5 +
32 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^2 a5[t] s0[t]^5 - 8 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^2 a5[t] s0[t]^5 +
576 lambda GB^3 a5[t] s0[t]^5 - 96 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^3 a5[t] s0[t]^5 -
112 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^3 a5[t] s0[t]^5 + 16 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^3 a5[t] s0[t]^5 -
2176 lambda GB^4 a5[t] s0[t]^5 + 128 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^4 a5[t] s0[t]^5 +
128 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^4 a5[t] s0[t]^5 + 4096 lambda GB^5 a5[t] s0[t]^5 - 3072 lambda GB^6 a5[t] s0[t]^5 +
8 lambda GB a4[t] s0[t]^4 s1[t] - 2 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB a4[t] s0[t]^4 s1[t] -
6 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB a4[t] s0[t]^4 s1[t] - 152 lambda GB^2 a4[t] s0[t]^4 s1[t] +
48 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^2 a4[t] s0[t]^4 s1[t] + 1152 lambda GB^3 a4[t] s0[t]^4 s1[t] +
96 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^3 a4[t] s0[t]^4 s1[t] - 96 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^3 a4[t] s0[t]^4 s1[t] -
4352 lambda GB^4 a4[t] s0[t]^4 s1[t] - 256 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^4 a4[t] s0[t]^4 s1[t] +
8192 lambda GB^5 a4[t] s0[t]^4 s1[t] - 6144 lambda GB^6 a4[t] s0[t]^4 s1[t] +
46 sqrt(1-4 lambda GB) s1[t]^5 - 182 (1-4 lambda GB)^(3/2) s1[t]^5 + 226 (1-4 lambda GB)^(5/2) s1[t]^5 -
90 (1-4 lambda GB)^(7/2) s1[t]^5 - 880 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB s1[t]^5 + 2724 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB s1[t]^5 -
2456 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB s1[t]^5 + 612 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB s1[t]^5 + 6720 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^2 s1[t]^5 -
15216 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^2 s1[t]^5 + 8800 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^2 s1[t]^5 -
1008 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^2 s1[t]^5 - 25600 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^3 s1[t]^5 +
37568 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^3 s1[t]^5 - 10368 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^3 s1[t]^5 +
48640 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^4 s1[t]^5 - 34560 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^4 s1[t]^5 -
36864 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^5 s1[t]^5 - 40 s0[t]^4 s5[t] + 20 (1-4 lambda GB)^(5/2) s0[t]^4 s5[t] +
20 (1-4 lambda GB)^(7/2) s0[t]^4 s5[t] + 800 lambda GB s0[t]^4 s5[t] - 160 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB s0[t]^4 s5[t] -
160 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB s0[t]^4 s5[t] - 6480 lambda GB^2 s0[t]^4 s5[t] +
320 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^2 s0[t]^4 s5[t] + 320 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^2 s0[t]^4 s5[t] +
26880 lambda GB^3 s0[t]^4 s5[t] - 58880 lambda GB^4 s0[t]^4 s5[t] + 61440 lambda GB^5 s0[t]^4 s5[t] -
20480 lambda GB^6 s0[t]^4 s5[t] - 4 lambda GB^2 s0[t]^5 a4'[t] + 4 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^2 s0[t]^5 a4'[t] +
72 lambda GB^3 s0[t]^5 a4'[t] - 32 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^3 s0[t]^5 a4'[t] - 512 lambda GB^4 s0[t]^5 a4'[t] +
64 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^4 s0[t]^5 a4'[t] + 1792 lambda GB^5 s0[t]^5 a4'[t] -
3072 lambda GB^6 s0[t]^5 a4'[t] + 2048 lambda GB^7 s0[t]^5 a4'[t] - 16 lambda GB^2 a4[t] s0[t]^4 s0'[t] +
16 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^2 a4[t] s0[t]^4 s0'[t] + 288 lambda GB^3 a4[t] s0[t]^4 s0'[t] -
128 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^3 a4[t] s0[t]^4 s0'[t] - 2048 lambda GB^4 a4[t] s0[t]^4 s0'[t] +
256 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^4 a4[t] s0[t]^4 s0'[t] + 7168 lambda GB^5 a4[t] s0[t]^4 s0'[t] -
12288 lambda GB^6 a4[t] s0[t]^4 s0'[t] + 8192 lambda GB^7 a4[t] s0[t]^4 s0'[t] -
48 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB s1[t]^4 s0'[t] + 84 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB s1[t]^4 s0'[t] +
48 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB s1[t]^4 s0'[t] - 84 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB s1[t]^4 s0'[t] +
768 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^2 s1[t]^4 s0'[t] - 864 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^2 s1[t]^4 s0'[t] -
768 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^2 s1[t]^4 s0'[t] + 576 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^2 s1[t]^4 s0'[t] -
4608 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^3 s1[t]^4 s0'[t] + 2304 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^3 s1[t]^4 s0'[t] +
3840 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^3 s1[t]^4 s0'[t] - 960 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^3 s1[t]^4 s0'[t] +
12288 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^4 s1[t]^4 s0'[t] + 1536 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^4 s1[t]^4 s0'[t] -
6144 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^4 s1[t]^4 s0'[t] - 12288 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^5 s1[t]^4 s0'[t] -
9216 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^5 s1[t]^4 s0'[t] + 12 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB s0[t] s1[t]^3 s1'[t] +
112 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB s0[t] s1[t]^3 s1'[t] - 324 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB s0[t] s1[t]^3 s1'[t] +
200 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB s0[t] s1[t]^3 s1'[t] - 192 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^2 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] -
1488 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^2 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] + 2968 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^2 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] -
1032 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^2 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] + 1152 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^3 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] -
7136 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^3 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] - 8256 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^3 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] +
960 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^3 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] - 3072 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^4 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] -
14336 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^4 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] + 6272 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^4 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] +
3072 sqrt(1-4 lambda GB) lambda GB^5 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] + 9728 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^5 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] +
24 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^5 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] - 92 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^5 s0[t] s1[t]^3 s1'[t] -
s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 68 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^2 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
304 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^2 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 768 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^2 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] +
s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] - 288 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^3 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] +
1280 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^3 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] - 1600 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^3 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] - 1792 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^4 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
48 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^4 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 128 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^4 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
80 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^5 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 544 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^5 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
960 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^5 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 288 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^6 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
2048 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^6 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 1792 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^6 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
2560 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^7 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 16 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^7 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
32 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^7 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 16 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^8 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
128 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^8 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 256 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^8 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] +
52 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^9 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] - 28 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^9 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] +
272 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^9 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] - 384 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^10 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] +
96 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^10 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] - 1024 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^10 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] +
704 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^11 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 1280 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^11 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -
16 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^11 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] - 32 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^12 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] +
16 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^12 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] - 128 (1-4 lambda GB)^(7/2) lambda GB^12 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] +
128 (1-4 lambda GB)^(3/2) lambda GB^13 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] + 256 (1-4 lambda GB)^(5/2) lambda GB^13 s0[t] s1[t]^2 s0'[t] s1'[t] -

```

$$s_5[t] = 0;$$

`soll = Solve[{coeffeqs[2, 5] == 0, coeffeqs[3, 5] == 0}, {a5[t], b5[t]}] // Flatten`

$$\left\{ a_5[t] \rightarrow -\frac{2 a_4[t] s_1[t]}{s_0[t]}, b_5[t] \rightarrow -\left(\frac{2(-2 b_4[t] s_1[t] + 2\sqrt{1-4\lambda_{GB}} b_4[t] s_1[t] + \lambda_{GB} s_0[t] b_4'[t] + 4\lambda_{GB} b_4[t] s_0'[t])}{(-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}}) s_0[t]} \right) \right\}$$

`a5[t_] = a5[t] /. soll // Simplify`

`b5[t_] = b5[t] /. soll // Simplify`

$$-\frac{2 a_4[t] s_1[t]}{s_0[t]} - \left(\frac{2(\lambda_{GB} s_0[t] b_4'[t] + 2 b_4[t] (-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}}) s_1[t] + 2\lambda_{GB} s_0'[t])}{(-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}}) s_0[t]} \right)$$

`Solve[{coeffeqs[5, 5] // Simplify == 0}, a4'[t]]`

$$\left\{ \left\{ a_4'[t] \rightarrow -\frac{4 a_4[t] s_0'[t]}{s_0[t]} \right\} \right\}$$

`coefftable`

$-\frac{-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}}}{2\lambda_{GB}}$	$\frac{\frac{(-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}} + 4\lambda_{GB}) s_1[t]}{\sqrt{1-4\lambda_{GB}}} - 2\lambda_{GB} s_0'[t]}{\lambda_{GB} s_0[t]}$	$-\frac{(-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}} + 4\lambda_{GB}) \left(-(-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}} + 4\lambda_{GB}) s_1[t]^2 + 4\sqrt{1-4\lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t] \right)}{2(-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}}) \lambda_{GB} (-1 + 4\lambda_{GB}) s_0[t]^2}$	0	$a_4[t]$	$-\frac{2 a_4[t] s_1[t]}{s_0[t]}$
$b_0[t]$	0	0	0	$b_4[t]$	$-\frac{2(\lambda_{GB} s_0[t] b_4'[t] + 2 b_4[t] (-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}}) s_1[t] + 2\lambda_{GB} s_0'[t])}{(-1 + \sqrt{1-4\lambda_{GB}}) s_0[t]}$
$s_0[t]$	$s_1[t]$	0	0	0	0
$bd_0[t]$	$bd_1[t]$	$bd_2[t]$	$bd_3[t]$	$bd_4[t]$	$bd_5[t]$
$sd_0[t]$	$sd_1[t]$	$sd_2[t]$	$sd_3[t]$	$sd_4[t]$	$sd_5[t]$

شکل ب-۷: مرتبه پنجم.

final NB expansion

Now Since I need only first five order, I drop coefficients corresponding to order higher than 5.

```
In[145]= order = 5;
```

```
In[146]= {Aexp[u_, t_], Bexp[u_, t_], Bdotexp[u_, t_], Sexp[u_, t_], Sdotexp[u_, t_]} =
```

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\text{order}} a_n[t] u^n, \sum_{n=1}^{\text{order}} b_n[t] u^n, \sum_{n=1}^{\text{order}} b_{dn}[t] u^n, \sum_{n=0}^{\text{order}} s_n[t] u^n, \sum_{n=0}^{\text{order}} s_{dn}[t] u^n \right\} // \text{Simplify} // \text{Expand}$$

```
Out[146]=
```

$$\left\{ \frac{1}{2 \lambda_{GB}} - \frac{\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}}{2 \lambda_{GB}} + u^4 a_4[t] + \frac{4 u s_1[t]}{\sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_0[t]} + \frac{u s_1[t]}{\lambda_{GB} s_0[t]} - \frac{u s_1[t]}{\sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_0[t]} - \frac{2 u^5 a_4[t] s_1[t]}{s_0[t]} - \frac{6 u^2 s_1[t]^2}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]^2} + \frac{4 u^2 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1[t]^2}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]^2} + \frac{u^2 s_1[t]^2}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) \lambda_{GB} (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]^2} - \frac{u^2 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1[t]^2}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) \lambda_{GB} (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]^2} + \frac{8 u^2 \lambda_{GB} s_1[t]^2}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]^2} - \frac{2 u s_0'[t]}{s_0[t]} - \frac{2 u^2 s_1'[t]}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]} + \frac{2 u^2 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} s_1'[t]}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]} + \frac{8 u^2 \lambda_{GB} s_1'[t]}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]} - \frac{8 u^2 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} \lambda_{GB} s_1'[t]}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) (-1 + 4 \lambda_{GB}) s_0[t]}, u^4 b_4[t] + \frac{4 u^5 b_4[t] s_1[t]}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) s_0[t]} - \frac{4 u^5 \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} b_4[t] s_1[t]}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) s_0[t]} - \frac{2 u^5 \lambda_{GB} b_4'[t]}{-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}} - \frac{8 u^5 \lambda_{GB} b_4[t] s_0'[t]}{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) s_0[t]}, u b_{d1}[t] + u^2 b_{d2}[t] + u^3 b_{d3}[t] + u^4 b_{d4}[t] + u^5 b_{d5}[t], s_0[t] + u s_1[t], s_{d0}[t] + u s_{d1}[t] + u^2 s_{d2}[t] + u^3 s_{d3}[t] + u^4 s_{d4}[t] + u^5 s_{d5}[t] \right\}$$

upto fourth order

```
In[147]= Anbex05[u_, t_] = Collect[1/u^2 Aexp[u, t], u, Simplify]
```

```
Bnbex05[u_, t_] = Collect[Bexp[u, t], u, Simplify]
```

```
Snbex05[u_, t_] = Collect[1/u Sexp[u, t], u, Simplify]
```

```
(*Sdotnbex05[u_, t_] = Collect[1/u Sdotexp[u, t], u, Simplify]
```

```
Bdotbex05[u_, t_] = Collect[Bdotexp[u, t], u, Simplify] *)
```

```
Out[147]=
```

$$-\frac{-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}}{2 u^2 \lambda_{GB}} + u^2 a_4[t] - \frac{2 u^3 a_4[t] s_1[t]}{s_0[t]} + \frac{(-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} + 4 \lambda_{GB}) s_1[t]}{\sqrt{1-4 \lambda_{GB}}} - \frac{2 \lambda_{GB} s_0'[t]}{u \lambda_{GB} s_0[t]} + \frac{((-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}} + 2 \lambda_{GB}) s_1[t]^2 - 2 (-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) \lambda_{GB} s_0[t] s_1'[t])}{((-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) \lambda_{GB} s_0[t]^2)}$$

```
Out[148]=
```

$$u^4 b_4[t] - (2 u^5 (\lambda_{GB} s_0[t] b_4'[t] + 2 b_4[t] ((-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) s_1[t] + 2 \lambda_{GB} s_0'[t]))) / ((-1 + \sqrt{1-4 \lambda_{GB}}) s_0[t])$$

```
Out[149]=
```

$$\frac{s_0[t]}{u} + s_1[t]$$

```
In[150]= Collect[Limit[Anbex05[u, t], \lambda_{GB} \to 0] // Expand, {u}]
```

```
Limit[Bnbex05[u, t], \lambda_{GB} \to 0]
```

```
Limit[Snbex05[u, t], \lambda_{GB} \to 0]
```

```
(*Limit[Sdotnbex05[u, t], \lambda_{GB} \to 0]
```

```
Limit[Bdotbex05[u, t], \lambda_{GB} \to 0] *)
```

```
Out[150]=
```

$$\frac{1}{u^2} + u^2 a_4[t] - \frac{2 u^3 a_4[t] s_1[t]}{s_0[t]} + \frac{s_1[t]^2}{s_0[t]^2} + \frac{2 s_1[t] - 2 s_0'[t]}{u s_0[t]} - \frac{2 s_1'[t]}{s_0[t]}$$

```
Out[151]=
```

$$\frac{u^4 (u s_0[t] b_4'[t] + b_4[t] (s_0[t] + 4 u (-s_1[t] + s_0'[t])))}{s_0[t]}$$

```
Out[152]=
```

$$\frac{s_0[t]}{u} + s_1[t]$$

شکل ب-۸: بسط نهایی.

کتاب نامه

1. Micheal Cross; Lecture notes: *equilibrium and nonequilibrium systems*;
www.cmp.caltech.edu/~mcc/BNU/Notes1_2.pdf; p.54.
2. P. Kovtun (2012) "Lectures on hydrodynamic fluctuations in relativistic theories"
J. Phys. A: theor. **45 473001**; arXiv:1205.5040.
3. M. E. Peskin and D. V. Schroeder (1995) "An Introduction to Quantum Field Theory" PERSEUS BOOKS.
4. J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal , U. A. Wiedemann (2014)
"Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions" CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
5. M. M. Sheikh Jabbari; Lecture notes: *A Course on AdS/CFT*;
<http://physics.ipm.ac.ir/courses.jsp>
6. J. D. Bekenstein (1973) "Black holes and entropy" **Phys.Rev.** **D7, 2333** .
7. J. M. Maldacena (1999) "The Large N limit of superconformal field theories and super-gravity" **AIP Conf.Proc.** **484, 51** .
8. Juan Maldacena (2011) "The gauge/gravity duality" arXiv: 1106.6073v2.
9. Jens Lyng Petersen (1999) "Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS/CFT" **Int.J.Mod.Phys.A14:3597-3672**; arXiv: [hep-th/9902131v2].

10. Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Maldacena, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz
(1999) "Large N Field Theories, String Theory and Gravity" **Phys.Rept.323:183-386,2000**; arXiv: [hep-th/9905111].
11. Joseph Polchinski (2010) "Introduction to Gauge/Gravity Duality" **Conference: C10-06-01.1, p.3-46 Proceedings** ; arXiv:1010.6134.
12. Alfonso V. Ramallo (2013) "Introduction to the AdS/CFT correspondence" **Conference: C13-01-21.3 Proceedings** ; arXiv:1310.4319.
13. Makoto Natsuume (2015) "AdS/CFT Duality User Guide" **Lect.Notes Phys. 903 pp.1-294**; arXiv:1409.3575.
14. J. Letessier, J. Rafelski (2002) "**Hadrons and Quark-Gluon Plasma**" CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
15. K. Yagi, T. Hatsuda, Y. Miake (2005) "**Quark-Gluon Plasma**" CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
16. Lecture Notes in Physics 785 (2010) "**The Physics of Quark-Gluon Plasma**" Springer.
17. *Ph.D Thesis*, Wilke Van der Schee (2014) "**Gravitational Collisions and Quark-Gluon Plasma**"; arXiv: 1407.1849.
18. Wit Busza, Krishna Rajagopal and Wilke van der Schee (2018) "Heavy Ion Collisions: The Big Picture, and the Big Questions" **Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 2018. 68:1 49**; arXiv:1802.04801v2.

19. Francis Halzen and Alan D. Martin (1984) ”**Quarks and Leptons: An Introduction Course in Modern Particle Physics**” John Wiley & Sons.
20. D. Mateos (2007) ”String Theory and Quantum Chromodynamics” **Class.Quant.Grav.24:S713-S740**; arXiv:0709.1523.
21. S. S. Gubser , A. Karch (2009) ”From gauge-string duality to strong interactions: A Pedestrian’s Guide” **Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.59:145-168**; arXiv:0901.0935.
22. O. DeWolfe, S. S. Gubser, C. Rosen , D. Teaney (2014) ”Heavy ions and string theory” **Prog.Part.Nucl.Phys. 75 86-132**; arXiv:1304.7794.
23. R. A. Janik (2013) ”AdS/CFT and applications” **PoS EPS-HEP2013 141**; arXiv:1311.3966.
24. G. Policastro, D. Son , A. Starinets (2001) ”The Shear viscosity of strongly coupled N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma” **Phys.Rev.Lett.87:081601**; arXiv:[hep-th/0104066].
25. U. Heinz , R. Snellings (2013) ”Collective flow and viscosity in relativistic heavy-ion collisions” **Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 63 123-151**;arXiv:1301.2826.
26. S. S. Gubser (2006) ”Drag force in AdS/CFT” **Phys.Rev.D74:126005**; arXiv:[hep-th/0605182].
27. C. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz , L. Yaffe (2006) ”Energy loss of a heavy quark moving through N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma” **JHEP 0607 013**;arXiv:[hep-th/0605158].

28. H. Liu, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann (2006) "Calculating the jet quenching parameter from AdS/CFT" **Phys.Rev. D74 046006**; arXiv:[hep-ph/0605178].

۲۹. امامی م، (۱۳۹۶)، پایان نامه ارشد: "بررسی انرژی آزاد کوارکونیوم در محیط دما دار با استفاده از تناظر AdS/CFT"، دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۰. میرعباسی م (۱۳۹۵)، پایان نامه ارشد: "محاسبه رسانندگی الکتریکی DC بر روی شامه‌ها با استفاده از نظریه‌ی ریسمان"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۱. مجرد لمن جویی س (۱۳۹۵)، پایان نامه ارشد: "مطالعه‌ی ثابت پخش کوارک‌های سنگین در پلاسمای کوارک-گلوئون با استفاده از AdS/CFT"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۲. خلیلیان نسب ع (۱۳۹۴)، پایان نامه ارشد: "مطالعه‌ی نیروی وارد بر کوارک سنگین در پلاسمای کوارک-گلوئون با استفاده از نظریه ریسمان"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۳. شریفی م (۱۳۹۳)، پایان نامه ارشد: "مطالعه مشاهده پذیرهای پلاسمای ناهمسانگرد کوارک گلوئون"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۴. سعیدی ف (۱۳۹۳)، پایان نامه ارشد: "مطالعه‌ی اثر شوینگر با استفاده از دوگانگی AdS/CFT"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۵. فرهدنیا م (۱۳۹۳)، پایان نامه ارشد: "در نظر گرفتن تأثیرات غیرنسبیتی بر تابش کوارک چرخان با استفاده از تناظر AdS/CFT"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۶. قدیری س (۱۳۹۲)، پایان نامه ارشد: "محاسبه پارامتر خاموشی جت با استفاده از AdS/CFT"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۷. عابدینی م (۱۳۹۱)، پایان نامه ارشد: ”مطالعه حرکت شتابدار کوارک سنگین در پلاسمای

کوارک گلوئون”، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۸. عظیم فرد ا (۱۳۹۰)، پایان نامه ارشد: ”مطالعه پتانسیل کوارک-پادکوارک با استفاده از

همسانی AdS/CFT”، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۳۹. نیازی ح (۱۳۹۰)، پایان نامه ارشد: ”مطالعه اتلاف انرژی کوارک سنگین با استفاده از سیاهچاله

های RN”، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

40. G. T. Horowitz , V. E. Hubeny (2000) ”Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium” **Phys.Rev.D62:024027**;arXiv:[hep-th/9909056].

41. P. M. Chesler , L. G. Yaffe (2009) ”Horizon formation and far-from-equilibrium isotropization in supersymmetric Yang-Mills plasma” **Phys.Rev.Lett.102:211601**;arXiv:0812.2053.

42. M. P. Heller, R. A. Janik , P. Witaszczyk (2012) ”The characteristics of thermalization of boost-invariant plasma from holography” **Phys. Rev. Lett. 108, 201602**;arXiv:1103.3452.

43. P. M. Chesler, L. G. Yaffe (2011) ”Holography and Colliding Gravitational Shock Waves in Asymptotically AdS_5 Spacetime” **Phys. Rev. Lett. 108, 201602**;arXiv:1011.3562v1.

44. M. Atashi, K. Bitaghsir Fadafan and M. Farahbodnia (2017) ”Holographic energy loss in non-relativistic backgrounds” **Eur. Phys. J. C (2017) 77:175**;arXiv:

1606.09491.

45. D. T. Son (2008) “Toward an AdS/cold atoms correspondence: A Geometric realization of the Schrodinger symmetry,” **Phys. Rev. D** **78** **046003** [arXiv:0804.3972 [hep-th]].
46. K. Balasubramanian and J. McGreevy (2008) “Gravity duals for non-relativistic CFTs,” **Phys. Rev. Lett.** **101** **061601** [arXiv:0804.4053 [hep-th]].
47. S. Kachru, X. Liu and M. Mulligan (2008) “Gravity duals of Lifshitz-like fixed points,” **Phys. Rev. D** **78** **106005** [arXiv:0808.1725 [hep-th]].
48. T. Matsui, H. Satz (1986) “ J/ψ Suppression by Quark-Gluon Plasma Formation,” **Phys. Lett. B** **178** (1986) **41**.
49. K. B. Fadafan, H. Liu, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann (2009) “Stirring Strongly Coupled Plasma,” **Eur. Phys. J. C** **61** **553** doi:10.1140/epjc/s10052-009-0885-6 [arXiv:0809.2869 [hep-ph]].
50. K. B. Fadafan and H. Soltanpanahi (2012) “Energy loss in a strongly coupled anisotropic plasma,” **JHEP** **1210** **085** [arXiv:1206.2271 [hep-th]].
51. M. Chernicoff and A. Paredes (2011) “Accelerated detectors and worldsheet horizons in AdS/CFT,” **JHEP** **1103** **063** [arXiv:1011.4206 [hep-th]].
52. A. Akhavan, M. Alishahiha, A. Davody and A. Vahedi (2009) “Non-relativistic CFT and Semi-classical Strings,” **JHEP** **0903** **053** [arXiv:0811.3067 [hep-th]].

53. K. B. Fadafan (2009) “Drag force in asymptotically Lifshitz spacetimes,” arXiv:0912.4873 [hep-th].
54. S. A. Hartnoll, J. Polchinski, E. Silverstein and D. Tong (2010) “Towards strange metallic holography,” **JHEP 1004 120** [arXiv:0912.1061 [hep-th]].
55. M. Alishahiha and H. Yavartanoo (2012) “On Holography with Hyperscaling Violation,” **JHEP 1211 034** [arXiv:1208.6197 [hep-th]].
56. E. Kiritsis (2013) “Lorentz violation, Gravity, Dissipation and Holography,” **JHEP 1301 030** [arXiv:1207.2325 [hep-th]].
57. D. Tong and K. Wong (2013) “Fluctuation and Dissipation at a Quantum Critical Point,” **Phys. Rev. Lett. 110 no.6, 061602** [arXiv:1210.1580 [hep-th]].
58. A. Mikhailov (2008) ”Nonlinear waves in AdS/CFT correspondence” arXiv:[hep-th/0305196].
59. P. M. Chesler, L. G. Yaffe (2014) ”Numerical Solution of Gravitational Dynamics in Asymptotically Anti-de Sitter Spacetimes” **JHEP 1407 086** ;arXiv:1309.1439v2.
60. E. Poisson (2002) ”An advanced course in general relativity”
<http://www.physics.uoguelph.ca/poisson/research/agr.pdf>
61. V. Cardoso, L. Gualtieri, C. Herdeiro, U. Sperhake, P. M. Chesler, L. Lehner, S. C. Park and H. S. Reall et al. (2012) ”NR/HEP: roadmap for the future” **Class.Quant.Grav. 29 244001** ; arXiv:1201.5118.

62. S. de Haro, S. N. Solodukhin and K. Skenderis (2001) "Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS/CFT correspondence" **Math.Phys.** **217** (2001) **595-622**; arXiv:[hep-th/0002230].
63. W. H. Press, S. A. Teuskolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery (1992) "Numerical Recipes in C" CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
64. P. Grandclément, J. Novak (2009) "Spectral Methods for Numerical Relativity" **Living Reviews in Relativity** **lrr-1009-1**; arXiv:0706.2286.
65. Gourgoulhon, E. (1991) "Simple equations for general relativistic hydrodynamics in spherical symmetry applied to neutron star collapse" **Astron. Astrophys.**, **252**, **651-663**.
66. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A. (1988) "Spectral Methods in Fluid Dynamics Springer Series in Computational Physics, (Springer, Berlin; New York).
67. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A. (2007) "Spectral Methods: Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics, Scientific Computation (Springer, Berlin; New York). [Google Books].
68. Hollerbach, R. (2000) "A spectral solution of the magneto-convection equations in spherical geometry" **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, **32**, **773-797**.
69. Bonazzola, S., Gourgoulhon, E. and Marck, J.-A. (2000) "Spectral methods in general astrophysics" **J. Comput. Appl. Math.**, **109**, **433-473**.

70. J. P. Boyd (2000) "Chebyshev and Fourier spectral methods" DOVER Publications, Inc.
http://www-personal.umich.edu/~jpboyd/BOOK_Spectral2000.html.
71. M. Atashi, K. Bitaghsir Fadafan and G. Jafari (2017) "Linearized holographic isotropization at finite coupling" **Eur. Phys. J. C** (2017) 77:430; arXiv: 1611.09295.
۷۲. آتشی م، بی‌تقصیر فدافن ک و جعفری ق (۱۳۹۵) "همسانگرد شدن پلاسمای کوآرک - گلوئون در حضور تصحیحات گاوس- بونت" هفتمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدانها، ص ۲۶، دامغان
۷۳. آتشی م و بی‌تقصیر فدافن ک (۱۳۹۶) "بررسی اثر جفت شدگی محدود بر تحول انتروپی پلاسمای کوآرک- گلوئون" بیست و چهارمین کنفرانس بهاره فیزیک، ص ۸، تهران
74. M. P. Heller, D. Mateos, W. Van der Schee, M. Triana (2013) "Holographic Isotropization Linearized" **JHEP** 1309:026"; arXiv: 1304.5172v2.
75. R. G. Cai (2002) "Gauss-Bonnet black holes in AdS spaces," **Phys. Rev. D** 65 084014 [arXiv:hep-th/0109133].
76. S. Nojiri and S. D. Odintsov (2001) "Anti-de Sitter black hole thermodynamics in higher derivative gravity and new confining-deconfining phases in dual CFT," **Phys. Lett. B** 521 87 [Erratum-ibid. B 542 (2002) 301] [arXiv:hep-th/0109122].
77. S. Nojiri and S. D. Odintsov (2002) "(Anti-) de Sitter black holes in higher derivative gravity and dual conformal field theories," **Phys. Rev. D** 66 044012

[arXiv:hep-th/0204112].

78. X.O. Camanho and J.D. Edelstein (2017) "Causality constraints in AdS/CFT from conformal collider physics and Gauss–Bonnet gravity" **JHEP 1004, 007 (2010)**.
arXiv:0911.3160
79. M. Brigante, H. Liu, R.C. Myers, S. Shenker and S. Yaida (2008) "The viscosity bound and causality violation" **Phys. Rev. Lett. 100, 191601 (2008)**
arXiv:0802.3318
80. J. de Boer, M. Kulaxizi and A. Parnachev (2010) "AdS(7)/CFT(6), Gauss–Bonnet gravity, and viscosity bound" **JHEP 1003, 087 (2010)** arXiv:0910.5347 [hep-th]
81. A. Buchel, J. Escobedo, R.C. Myers, M.F. Paulos, A. Sinha and M. Smolkin (2010) "Holographic GB gravity in arbitrary dimensions" **JHEP 1003, 111 (2010)**
arXiv:0911.4257
82. X.O. Camanho and J.D. Edelstein (2010) "Causality in AdS/CFT and Lovelock theory" **JHEP 1006, 099 (2010)** arXiv:0912.1944
83. X.O. Camanho, J.D. Edelstein, J. Maldacena and A. Zhiboedov (2016) "Causality constraints on corrections to the graviton three-point coupling" **JHEP 1602, 020 (2016)** arXiv:1407.5597 [hep-th]
84. T. Andrade, J. Casalderrey-Solana and A. Ficnar (2017) "Holographic isotropisation in Gauss–Bonnet gravity", **JHEP 1702 (2017) 016**, arXiv:1610.08987.

85. S. Grozdanov and W. van der Schee (2017) “Coupling constant corrections in holographic heavy ion collisions,” **Phys. Rev. Lett.** **119**, 011601
arXiv:1610.08976 [hep-th].

ABSTRACT

In the recent decades, the holography presented possibility of study of strongly-coupled systems using their gravitational duals. In this thesis, using holography, we consider energy loss of a heavy rotating particle in non-relativistic backgrounds, and study its behavior for different values of parameters of the theory.

Based on the holographic principle, a strongly coupled non-equilibrium system has a gravitational dual that obeys the Einstein's equations that by solving these equations numerically, time evolution and equilibration state of the system will be determined. In this thesis, using holographic principle, we consider dynamics of quark-gluon plasma as a non-equilibrium system at finite coupling. Gravitational dual of finite coupling is adding Gauss-Bonnet terms to the Einstein's equations. Solving Einstein-Gauss-Bonnet equations numerically with linear approximation as evolution equations, we have studied isotropisation time and entropy produced by QGP as important quantities.

Also, in this thesis, numerical solution of Einstein's equations in asymptotically Anti-de Sitter background using spectral method is described carefully.

Key words: Quark-Gluon Plasma, Holography, Non-equilibrium Systems, Gauss-Bonnet Terms, Spectral Method



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

Particle Physics Group

Ph.D Thesis

**Study of Holographic Non-Equilibrium Physics and Numerical Solution of
Einstein's Equations**

Mahdi Atashi

Supervisor:

Dr. Kazem Bitaghsir Fadafan

July 2018