



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای

رساله دکتری فیزیک هسته ای

محاسبه سطح مقطع پراکندگی در برهمکنش های هسته ای

نگارنده: فاطمه پاکدل

استاد راهنما

دکتر علی اکبر رجبی

بهمن ۹۵

تقديم به

همسر عزیزم، بهترین دوست و یاورم که بدون کمک، همراهی و حمایت همه جانبه او هرگز این رساله به سرانجام نمی رسید.

سپاس

از پروردگار منان که فرصتی عطا نمود تا بتوانم تحصیلاتم در مقطع دکتری را به اتمام برسانم. خداوندی که بی توجه و عنایت او ذره ناچیزی بیش نیستم.

و تشکر از استاد راهنمای محترم و گرامی جناب آقای پروفسور رجبی که زحمت راهنمایی این رساله بر عهده ایشان بود.

چکیدہ

استفاده از فرمالیزم فوق کروی ^۱یکی از روش های حل معادله شرودینگر D بعدی^۲ می باشد. در این رساله، توابع موج هسته با حل معادله فوق شعاعی^۳ با استفاده از فرمالیزم فوق کروی محاسبه می شوند. برهمکنش بین نوکلئون های هسته به صورت پنج نوع پتانسیل کوتاه برد مختلف در نظر گرفته شده و تابع موج برای هر پتانسیل به دست آمده است. برای ارزیابی تابع موج به دست آمده برای هسته و مناسب ترین پتانسیل برای شرح برهمکنش نوکلئون های هسته، یک سیستم دو هسته ای در نظر گرفته شده است. انرژی پتانسیل برهمکنش بین دو هسته با استفاده از مدل دابل فولدینگ[†] با برهمکنش نوکلئون-نوکلئون موثر ^۵محاسبه شده است. محاسبات بخش برهمکنش نوکلئون-نوکلئون موثر ^۵محاسبه شده است. همچنین نتایج با تبادلی^۶ برهمکنش، در تقریب برد محدود^۷ فرض شده و وابستگی به چگالی برهمکنش نوکلئون-نوکلئون، در نظر گرفته شده است. همچنین نتایج با

- ¹. Hyperspherical formalism
- ^r. D-dimensional Schrödinger equation
- ". Hyperradial wave equation
- ^{*}. Double folding model
- ^a. Effective nucleon-nucleon interaction
- ⁹. Exchange interaction
- ^v. Finite-range approximation
- [^]. Zero-range approximation
- ¹. Nucleon density distributions

انجام شده اند. نتایج عددی برای انرژی پتانسیل برهمکنش و سطح مقطع پراکندگی ارائه شده است.

کلمات کلیدی : معادله شرودینگر D بعدی، فرمالیزم فوق کروی، مدل دابل فولدینگ، برهمکنش M3Y ، پتانسیل یوکاوا، پتانسیل هالسن، پتانسیل یوکاوا-فرم، پتانسیل منینگ-روزن، پتانسیل دنگ-فان.

لیست مقالات مستخرج از رساله

مقالات ISI

N-F. Pakdel and A. A. Rajabi (2016) "Investigation of the nuclear system using the D-dimentional wave equation", *Chinese Journal of Physics* **54**, 385e390.

r-F. Pakdel, A. A. Rajabi and L. Nickhah "Folding model analysis of the nucleus-nucleus scattering based on Jacobi coordinates", *Pramana- J. Phys.* (2016) 87:90, DOI 10.1007/s12043-016-1295-6.

r - F. Pakdel, A. A. Rajabi "Studying of the nucleus-nucleus interaction using wave function of the nucleus and hyperspherical formalism", *Z. Naturforsch.* 2016; aop, DOI 10.1515/zna-2016-0104.

مقالات كنفرانسي

۱-بررسی مسئله پراکندگی بر مبنای برهمکنش نوکلئون-نوکلئون و با
 استفاده از معادله موج-کنفرانس فیزیک محاسباتی - ۳۰دی و ۱ بهمن
 ۱۳۹۴ – دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

۲-مطالعه پراکندگی الاستیک در برهمکنش های هسته ای با استفاده از تابع موج-کنفرانس هسته ای ایران- ۵ و۶ اسفند ۱۳۹۴ - دانشگاه یزد

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول-مقدمه	١
۱–۱– مقدمه	٢
۱-۲- روش دابل فولدینگ	٣
۱-۳- حل معادله	٧
فصل دوم-روش دابل فولدینگ	۱١
۱–۲– مقدمه	١٢
۲-۲- پتانسیل دابل فولدینگ	١٢
۲-۳- سیستم مختصات مورد استفاده در روش دابل فولدینگ	14
۲-۴- فرمالیزم روش دابل فولدینگ	۱۵
۲-۵- اثرات تبادل نوکلئونی	١٧
۲-۵-۱ پتانسیل برهمکنش تبادلی و تقریب برد صفر	١٩
۲-۶- برهمکنش موثر نوکلئون-نوکلئون	T I
۲-۶-۲- برهمکنش M3Y	۲ I
۲–۷– توزیع چگالی نوکلئونی هسته	۲۳

۵۶ محاسبه تابع موج هسته
$$Bi$$
 با پتانسیل یوکاوا $-7-4$

۵۶ محاسبه تابع موج هسته
$$Nd$$
 با پتانسیل هالسن – ۳-۴ $-۳-۴$

۴-۵-بررسی سطح مقطع پراکندگی با استفاده از خواص توابع فوق

هندسی ۶۹

الف-۱- محاسبه پتانسیل برهمکنش
$$Bi \, ^{209}B^i$$
 با پتانسیل

الف-۲-محاسبه پتانسیل برهمکنش
$$O+{}^{148}Nd$$
 با پتانسیل

۸۶
 هالسن

 ۸۷
 الف-۳-محاسبه پتانسیل برهمکنش
$$O^{16} + O^{16}$$

 ۸۷
 الف-۳-۱- با پتانسیل یوکاوا

 ۹۰
 الف-۳-۲- با پتانسیل هالسن

 ۹۰
 الف-۳-۳- با پتانسیل منینگ-روزن

 ۹۰
 الف-۳-۳- با پتانسیل منینگ-روزن

 ۹۰
 الف-۳-۳- با پتانسیل منینگ-روزن

 ۹۰
 منینگ-روزن

 ۹۰
 منینگ-روزن

 ۹۰
 منینگ-روزن

 ۹۰
 منینگ-روزن

 ۹۰
 منینگ-روزن

 ۹۰
 مالف-۳-۹- با پتانسیل یوکاوا-فرم

 ۹۰
 مالف-۳-۹- با پتانسیل دنگ-فان

 ۹۰
 مالف-۳-۵- با پتانسیل دنگ-۵۰۰

 ۹۰
 مالبع

فهرست شکل ها

صفحه عنوان شكل (۲-۱): مختصات مورد استفاده در محاسبات فُولدينگ . ۱۳ شکل (۲-۲): دستگاه مختصات استفاده شده در محاسبات دابل فولدینگ. ۱۵ شکا (۴-۱): یتانسیل هسته ای مستقیم و تبادلی محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته، بر اساس فرمالیزم فوق کروی بر حسب $e^{-16}O + e^{209}Bi$ فاصله بین دو هسته، در دستگاه مرکز جرم، برای واکنش مقادیر پتانسیل تبادلی در این نمودار بر اساس تقریب بردصفر و برد محدود ۵٩ محاسبه و مقایسه شده اند. . ¹⁶ $O + {}^{209}Bi$ شکل (۴–۲): پتانسیل برهمنکش کولمبی برای واکنش I - F۶. شکل (۴–۳): یتانسیل کل برهمکنش محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته بر اساس فرمالیزم فوق کروی بر حسب فاصله بین دو هسته، در دستگاه مرکز جرم، برای واکنش $O^{16} + {}^{209}Bi$ در تقریب ۶١ بردصفر و برد محدود. شکل (۴-۴): یتانسیل هسته ای ، مستقیم، تبادلی، کولمبی و کل محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته بر اساس فرمالیزم فوق کروی، بر حسب فاصله بین دو هسته، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب 87 $.^{16}O + {}^{148}Nd$ تقريب برد صفر و محدود برای واکنش شکل (۴–۵): یتانسیل هسته ای مستقیم ، تبادلی و کل محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته بر اساس فرمالیزم فوق کروی، بر حسب فاصله بین دو هسته ، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب تقریب برد $. {}^{16}O + {}^{16}O$ محدود برای واکنش $O + {}^{16}O + {}^{16}O$. 94

شکل (۴–۶): پتانسیل برهمکنش کولمبی و کل محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته بر اساس فرمالیزم فوق کروی بر حسب فاصله بین دو هسته ، در دستگاه مرکز جرم ، بر حسب تقریب برد محدود برای واکنش $O^{16} - O^{16}$.

شکل (۴–۷): پتانسیل هسته ای محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته بر اساس فرمالیزم فوق کروی بر حسب فاصله بین دو هسته، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب تقریب برد محدود برای واکنش هسته، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب تقریب و محدود برای واکنش $O^{16} + O^{16}$ با پتانسیل های یوکاوا، هالسن، یوکاوا-فرم، منینگ-روزن و دنگ فان.

شکل (۴–۸): پتانسیل برهمکنش کل محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب تقریب برد محدود برای واکنش $O^{-16} + O^{-16}$ با پتانسیل های یوکاوا، هالسن، یوکاوا-فرم،منینگ-روزن و دنگ-فان

شکل ((4-9)): مقایسه نتایج عددی سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی حاصل از به کارگیری فرمالیزم فوق کروی برای محاسبه تابع موج هسته بر حسب زاویه پراکندگی در تقریب برد صفر و محدود برای برهمکنش $^{16}O + {}^{209}Bi$. خط با نقاط دایره ای مربوط به انرژی ۹۰Mev در تقریب برد محدود، خط با نقاط مربعی مربوط به انرژی ۹۰Mev در تقریب برد محدود، خط با نقاط مثلثی رو به بالا مربوط به انرژی ۹۰Mev در تقریب برد صفر و خط با نقاط مثلثی رو به پایین مربوط به انرژی ۹۰Mev در تقریب برد صفر و خط با نقاط مثلثی رو به پایین مربوط به انرژی ۹۰Mev در تقریب برد صفر می باشد.

شکل (۴–۱۰): مقایسه نتایج عددی سطح مقطع پراکندگی برحسب سطح مقطع رادرفورد حاصل از به کارگیری فرمالیزم فوق کروی برای محاسبه تابع موج هسته بر حسب زاویه پراکندگی در تقریب برد صفر و محدود برای برهمکنش $Nd^{148}Nd^{-160}$ با داده های تجربی سطح مقطع پراکندگی در

انرژی ۹۰٫۹ Mev [۷۱]. خط با نقاط دایره ای مربوط به تقریب برد صفر ، خط با نقاط مثلثی مربوط به تقریب برد محدود و خط با نقاط مربعی مربوط به داده های تجربی می باشد.

شکل (۴–۱۱): مقایسه نتایج عددی سطح مقطع پراکندگی برحسب سطح مقطع رادرفورد حاصل از به کارگیری فرمالیزم فوق کروی برای محاسبه تابع موج هسته در تقریب برد محدود برای برهمکنش $O^{16} + O^{16}$ با داده های تجربی سطح مقطع پراکندگی در انرژی ۱۲۴ Mev [۲۲]. خط با نقاط دایره ای مربوط به محاسبات انجام شده و خط با نقاط مربعی مربوط به داده های تجربی می باشد .

شکل (۴–۱۲): مقایسه نتایج عددی سطح مقطع پراکندگی با استفاده از تابع موج هسته با پنج نوع پتانسیل کوتاه برد در تقریب برد محدود برای برهمکنش $O^{16} + O^{16}$ با داده های تجربی سطح مقطع پراکندگی در انرژی Nev آبا ۱۲۴ [۲۷]. خط با نقاط دایره ای مربوط به پتانسیل یوکاوا، خط با نقاط مثلث رو به بالا مربوط به پتانسیل هالسن، خط با نقاط مثلث رو به پایین مربوط به پتانسیل یوکاوا-فرم، خط با نقاط لوزی مربوط به پتانسیل دنگ-فان، خط با نقاط مثلث رو به سمت چپ مربوط به پتانسیل منینگ-روزن و خط با نقاط مربعی مربوط به داده های تجربی می باشد.

فهرست جدول ها

عنوان صفحه جدول (۲-۱): ضرایب برهمکنش نوکلئون-نوکلئون وابسته به چگالی ۳۰ [۱۵] M3Y جدول (۲-۲): ضرایب برهمکنش های Reid و Paris و Paris به ۳۱ [۱۵] M3Y

ليست علايم و اختصارات

	عنوان
ولت (Mega electron volt)	مگا الكترون
(F	فرمی(ermi
(بارن (Barn)
(Center of mass)	مرکز جرم (
(Laboratory	آزمایشگاه (

فصل اول مقدمه

۱–۱–مقدمه

مطالعه روند برخورد یونهای سبک و سنگین و پراکندگی الاستیک و غیر الاستیک آنها بخش مهمی از دانش کلی واکنش های یونهای سبک و سنگین را تشکیل می دهد. محاسبه انرژی پتانسیل بین هسته های شرکت کننده در واکنش نیز مهم ترین بخش در مطالعه این نوع برهمکنش ها است زیرا محاسبه این کمیت فیزیکی هم به منظور توضیح سطح مقطع واکنش و هم در کمک به شرح همه پدیده هایی که در برخورد دو هسته اتفاق می افتد اهمیت دارد. روش های زیادی برای مطالعه و محاسبه پتانسیل در برهمکنش های هسته ای (سیستم پرتابه و هدف ^۱) وجود دارند که در آنها پتانسیل برهمکنش بر حسب فاصله جدایی مراکز جرم دو هسته به دست می آید.

یکی از پرکاربردترین مدل ها برای محاسبه پتانسیل برهمکنش، روش دابِل فوُلدینگ است. این مدل به وسیله متوسط برهمکنش نوکلئون-نوکلئون بر روی توزیع ماده در دو یون برهمکنشی تعریف می شود [۴–۱].

روش دابِل فوُلدینگ در دهه های اخیر به طور گسترده ای برای محاسبه جمله مرتبه اول بخش حقیقی پتانسیل اپتیکی پراکندگی الاستیک و غیر الاستیک ذرات آلفا و یونهای سبک و سنگین مورد استفاده قرار گرفته است. این مدل به محاسبه پتانسیل هسته-هسته بر مبنای برهمکنش نوکلئون-نوکلئون موثر می پردازد. از توانایی های این مدل می توان به قابلیت مطالعه

[\]. Target and projectile system

یراکندگی ذرات آلفا، محاسبه زمان نابودی و نیمه عمر عناصر فوق سنگین و محاسبه سد همجوشی برای هسته های کروی و تغییر شکل یافته اشاره كرد [۷-۵] . روش دابل فوُلدينگ با تصحيحات مرتبه بالا، يكي از روشهايي است که چندین سال برای تولید پتانسیل با استفاده از چگالی های توزیع نوکلئونی هسته ای شرکت کننده در برهمکنش، در مسائل هسته ای کاربرد داشته و نتایج بسیار موفقی ارائه کرده است [۱۱-۶] . در این رساله قصد داریم به جای چگالی های توزیع نوکلئونی، از توابع موج هسته ها برای محاسبه یتانسیل برهمکنش بین دو هسته به روش دابل فولدینگ استفاده کنیم. توابع موجی که برای هسته ها محاسبه خواهد شد، با استفاده از نتایج فرمالیزم فوق کروی برای محاسبه تابع موج چند جسمی به دست می آیند. در این روش یک تابع موج D بعدی برای هسته ها به دست خواهد آمد (D بعد فضا می باشد). با استفاده از توابع موجی که به روش فوق کروی محاسبه می شوند، توانایی مدل دابل فولدینگ را در محاسبه پتانسیل هسته ای با استفاده از توابع موج هسته ها به جای چگالی توزیع نوکلئونی آنها، با محاسبه نتایج عددی پتانسیل برهمکنش به روش دابل فولدینگ، مورد ارزیابی قرار می دهیم. هم چنین فرمالیزم استفاده شده برای محاسبه تابع موج هسته ها يعنى استفاده از نتايج فرماليزم فوق كروى با ارزيابي نتايج روش دابل فولدینگ و نیز محاسبه مقادیر عددی سطح مقطع پراکندگی و مقایسه با داده های تجربی مورد آزمون قرار می گیرد.

۲-۱-روش دابل فولدینگ

این مدل از توزیع بار هسته پرتابه و هدف به وجود می آید و به انرژی هسته پرتابه (\vec{R}) و فاصله بین مراکز دو جرم پرتابه و هدف (\vec{R}) وابسته است.

در برهمکنش دو هسته، پتانسیل کل بین دو هسته برهمکنشی به صورت زیر می باشد

$$U_{total}(\vec{R}) = U_N(\vec{R}) + U_C(\vec{R}) + U_{rot}(\vec{R})$$
 (1-1)

در این رابطه U_N پتانسیل برهمکنش هسته ای، U_c پتانسیل برهمکنش الکتروستاتیک (کولمبی) و U_{rot} پتانسیل چرخشی است. در این رساله بخش هسته ای و کولمبی پتانسیل با استفاده از فرمالیزم دابل فولدینگ محاسبه می شود.

انتخاب برهمکنش موثر برای روش دابل فولدینگ دارای اهمیت خاصی است. برهمکنش از دید میکروسکوپیک عموماً مجموع پتانسیل های موضعی دو جسم برهمکنش کننده مطابق رابطه زیر می باشد

$$V = \sum_{PT} V_{PT} \tag{(7-1)}$$

اندیس های T, P به ترتیب نشان دهنده خواص مربوط به هسته پرتابه و هدف می باشد.

قسمت حقیقی پتانسیل (پتانسیل فولدینگ) بین سیستم پرتابه و هدف با استفاده از فرمالیزم اپراتوری فشباخ^۱ به شکل زیر می باشد [۱۰–۲]

$$U_{F}(\vec{R}) = U_{00}(R) = \left\langle \varphi_{P0}\varphi_{T0} \middle| V_{PT} \middle| \varphi_{P0}\varphi_{T0} \right\rangle = \left\langle \varphi_{P0}\varphi_{T0} \middle| \sum_{PT} V_{PT} \middle| \varphi_{P0}\varphi_{T0} \right\rangle \quad (\tilde{} - 1)$$

[\]. Feshbakh

در این رابطه $\left| arphi_{P_0}
ight
angle = \left| arphi_{T_0}
ight
angle
ight|$ به ترتیب بیانگر تابع موج کلی هسته های پرتابه و هدف در حالت پایه می باشند.

چنانچه توزیع ماده هسته ای به صورت پیوسته فرض شود، رابطه بالا برای پتانسیل به شکل انتگرالی به صورت زیر قابل تبدیل خواهد بود [۸-۷]

$$U_{F}(\vec{R}) = \int d\vec{r}_{P} \int d\vec{r}_{T} \rho_{P}(\vec{r}_{P}) \rho_{T}(\vec{r}_{T}) V_{PT}(\vec{r}_{PT}) \qquad (f-1)$$

در این رابطه $(\vec{r}_{PT}(\vec{r}_{PT})$ پتانسیل موضعی بین دو نوکلئون برهمکنشی می باشد و \vec{r}_{PT} فاصله بین دو نوکلئون برهمکنشی از هسته های پرتابه و هدف است. برهمکنش $V_{PT}(\vec{r}_{PT})$ ممکن است معرف برهمکنشی از نوع کولنی و یا هسته ای باشد. $\rho_{T} = \rho_{PT}$ نشاندهنده چگالی های توزیع نوکلئونی هسته های پرتابه و هدف می باشند.

از آنجاییکه این انتگرال بر روی چگالی های توزیع نوکلئونی دوهسته تعریف شده است، اغلب این مدل، مدل دابِل فُولدینگ نامیده می شود اما اگر تنها یکی از برهمکنش ها مد نظر باشد، نتیجه یک پتانسیل سینگِل فُولدینگ^۱ خواهد بود .

عبارت (۱–۴) یک انتگرال شش بعدی است. آنچه که به عنوان V_{PT} در انتگرال دابل فولدینگ ظاهر می شود، برهمکنش نوکلئون-نوکلئون می باشد. پتانسیل مورد استفاده برای این برهمکنش در گذشته پتانسیلی از نوع گوسی پیشنهاد می شده است که برای پراکندگی نوکلئون-نوکلئون با انرژی پایین مورد استفاده قرار $J(E)\delta(\vec{r}_{vr})$

[\]. Single folding

می گرفته است. اما این پتانسیل، سطح مقطع پراکندگی پروتون-پروتون را خیلی بزرگتر از مقدار واقعی پیشگویی می کند [۹]. برهمکنش دلخواه برهمکنشی است که برمبنای نیروی نوکلئون-نوکلئون واقعی باشد و بتواند برای همه انواع برهمکنش ها اعم از نوکلئون-نوکلئون، نوکلئون-هسته و هسته-هسته نتیجه بخش باشد. یکی از پتانسیل های پیشنهادی برای برهمکنش، شبه پتانسیلی به شکل زیر است

 $(\Delta - 1)$

J(E) در این تعریف، بخش وابسته به انرژی پتانسیل برهمکنشی می اشد [۹]. این عبارت وابستگی ضعیفی به انرژی دارد که به صورت زیر تعریف می شود

$$J(E) = G_{E\delta}g(E_P), g(E_P) = 1 - K.E_P$$
 (۶-۱)
انرژی متوسط نوکلئونهای هسته پرتابه است که به صورت زیر تعریف E_P

$$E_P = \frac{E_{lab}}{A_P} \tag{Y-1}$$

در این رابطه E_{lab} انرژی در مختصات آزمایشگاه، A_P تعداد نوکلئون های هسته پرتابه و بنابراین E_P انرژی متوسط نوکلئونهای هسته پرتابه می باشد. مقادیر Kنیز ثابت می باشند.

با استفاده از اطلاعات جمله تبادلی پتانسیل حاصل از سطح مقطع $G_{E\delta}$ با استفاده از اطلاعات جمله تبادلی پتانسیل حاصل از سطح مقطع پراکندگی نوکلئون با هسته های مختلف در انرژی های متفاوت تنظیم شده و یا از محاسبات تقریبی پراکندگی یونهای سنگین به دست می آید [۱۰].

این شبه پتانسیل ابتدا در پراکندگی یونهای سنگین مورد استفاده قرار $\vec{r}_{PT} = 0$ ، $\vec{r}_{pT} = 0$ ، تنها در فاصله $\vec{r}_{PT} = 0$ ، تیها در فاصله دیراک در این تعریف، تنها در فاصله دیرا دیرد یعنی در جاییکه فاصله نسبی دو نوکلئون برهمکنشی صفر باشد مقدار دارد و به همین دلیل شبه پتانسیل در تقریب برد صفر نامیده می شود.

به منظور انجام محاسباتی دقیق تر و نتایجی نزدیکتر به واقعیت در محاسبات دابل فولدینگ، می توان از تقریب برد محدود استفاده نمود [۱۱]. این مطلب در فصل بعد شرح داده خواهد شد.

روش دابل فولدینگ به وسیله محققان بسیاری برای شرح پراکندگی هسته های سبک و سنگین به کار رفته است. هدف از به کار گیری این روش در این رساله، جایگزینی مربع توابع موج هسته های شرکت کننده در واکنش به جای چگالی های توزیع نوکلئونی آنها در روابط مربوط به محاسبه پتانسیل برهمکنش می باشد. به این منظور به توابع موج هسته های برهمکنش کننده نیاز داریم تا به وسیله آنها پتانسیل برهمکنش بین دو هسته را با استفاده از روابط روش دابل فولدینگ به دست آوریم.

۱-۳-حل معادله

واضح است که برای مطالعه هر سیستم کوانتوم-مکانیکی باید معادله دیفرانسیلی مربوط به آن سیستم را حل کرد. جهان فیزیک جهان نیروهای چند جسمی مانند فیزیک حالت جامد، فیزیک پلاسما، فیزیک اتمی و هسته ای، شیمی فیزیک و ... می باشد. برای بررسی این سیستم های چند جسمی نیز باید معادله دیفرانسیل چند جسمی مربوط به آنها حل شود. حل معادله موج یک سیستم و به دست آوردن تابع موج مربوط به آن به دلیل ارائه اطلاعات مهمی در مورد سیستم مورد نظر مانند انرژی سیستم، فاز شیفت^۱ ، دامنه و سطح مقطع پراکندگی تابع موج پراکنده شده، رزونانس^۲، قطبش و… دارای اهمیت می باشد.

استفاده از فرمالیزم فوق کروی و مختصات ژاکوبی یکی از روش های حل معادله موج چند جسمی است [۱۲–۱۲] . در این روش یک معادله موج D بعدی برمبنای فرمالیزم فوق کروی حل شده و یک تابع موج D بعدی به دست می آید. بعد D مربوط به ابعاد سیستم مورد بررسی در دستگاه مرکز جرم می باشد که با رابطه D = 3N - 3 مشخص می شود. در این رابطه *N* نشاندهنده تعداد ذرات سیستم می باشد.

هدف در این رساله، ارزیابی فرمالیزم فوق کروی و معادله موج D بعدی برای بررسی یک هسته به عنوان یک سیستم چند جسمی می باشد. به این منظور یک سیستم برهمکنش دو هسته ای در نظر می گیریم. با استفاده از نتایج فرمالیزم فوق کروی برای حل معادله موج D بعدی، به حل معادله موج مربوط به هر هسته شرکت کننده در واکنش می پردازیم و تابع موج مربوط به هسته را محاسبه می کنیم. به منظور ارزیابی فرمالیزم فوق کروی به کار رفته در حل معادله موج مربوط به هسته و تابع موج D بعدی به دست آمده، به بررسی سیستم برهمکنش دو هسته ای مورد نظر می پردازیم.

از توابع موج به دست آمده برای محاسبه پتانسیل برهمکنش بین دو هسته به روش دابل فولدینگ استفاده می کنیم. همانطور که گفته شد، این روش، پتانسیل برهمکنش بین دو هسته برهمکنش کننده را از طریق متوسط

[\]. Phase shift

^r. Resonance

گیری روی چگالی های توزیع نوکلئونی دو هسته محاسبه می کند. در این رساله توابع موج D بعدی محاسبه شده از طریق فرمالیزم فوق کروی به جای چگالی های توزیع نوکلئونی هسته ها در انتگرال دابل فولدینگ وارد می شوند و پتانسیل برهمکنش با استفاده از توابع موج هسته ها محاسبه می شود. همچنین پس از محاسبه پتانسیل هسته ای، کولمبی و کل برهمکنش برای برهمکنش های مورد نظر، به بررسی سطح مقطع پراکندگی برهمکنش ها پرداخته و مقادیر عددی سطح مقطع برهمکنش با استفاده از روش به کار گرفته شده در این رساله را با داده های تجربی مقایسه می کنیم.

به این ترتیب هم فرمالیزم فوق کروی استفاده شده برای محاسبه تابع موج هسته و هم مدل دابل فولدینگ را در محاسبه پتانسیل هسته ای با استفاده از توابع موج هسته ها به جای چگالی توزیع نوکلئونی آنها مورد ارزیابی قرار می دهیم. در نهایت قصد داریم با بررسی مقادیر عددی محاسبه شده برای پتانسیل برهمکنش هسته ای، کولمبی و کل برای واکنش های بررسی شده و همچنین مقایسه مقادیر عددی محاسبه شده برای سطح مقطع پراکندگی آنها با داده های تجربی، نتیجه گیری کنیم که آیا فرمالیزم فوق کروی برای شرح یک سیستم هسته ای مناسب است یا خیر.

در فصل دوم رساله به شرح روش دابل فولدینگ، فرمالیزم کلی روش و برهمکنش نوکلئون-نوکلئون موثر در این مدل می پردازیم. تعریف معادله شرودینگر D بعدی و روش حل معادله با استفاده از فرمالیزم فوق کروی با پتانسیل های کوتاه برد مختلف در فصل سوم ارائه می شود. نتایج حاصل از روش مورد استفاده در این رساله، شامل توابع موج محاسبه شده برای هسته های مورد نظر با استفاده از معادله موج D بعدی، پتانسیل برهمکنش هسته ای، کولمبی و کل برهمکنش ها با استفاده از روش دابل فولدینگ و همچنین سطح مقطع پراکندگی محاسبه شده برای واکنش های مورد بررسی با ارائه مقادیر عددی محاسبه شده برای هر یک از پارامترهای ذکر شده، در فصل چهارم رساله ارائه می شود.

فصل دوم روش دابل فولدينگ

۲-۱-مقدمه

مطالعه و شناخت روند برخورد یون ها به طور کلی و محاسبه پتانسیل برهمکنش بین آنها و همچنین بررسی پراکندگی الاستیک و غیر الاستیک آنها به طور خاص، بخش مهمی از دانش کلی مربوط به یون ها می باشد.

روش دابِل فوُلدینگ، یکی از روشهایی است که چندین سال برای تولید پتانسیل برای استفاده در مسائل هسته ای کاربرد داشته است. در این مدل محاسبه پتانسیل بوسیله متوسط گیری بر یک برهمکنش نوکلئون-نوکلئون مناسب بر توزیع ماده در دو یون صورت می گیرد. از این مدل برای محاسبه جمله مرتبه اول بخش حقیقی پتانسیل اپتیکی پراکندگی الاستیک و غیر الاستیک ذرات آلفا، یونهای سبک و سنگین، پراکندگی ذرات آلفا، محاسبه زمان نابودی و نیمه عمر عناصر سنگین و فوق سنگین و محاسبه سد همجوشی برای هسته های کروی و تغییر شکل یافته و ...استفاده شده است [۱–۱۱].

۲-۲-پتانسیل دابل فولدینگ

چنانچه هسته را به صورت توزیعی پیوسته از ماده در نظر بگیریم و پتانسیل V یک اپراتور دو جسمی موضعی به شکل زیر باشد

$$V = \sum_{ij} V_{ij} \tag{1-7}$$

پتانسیل رابطه (۱-۳) با استفاده از انتگرال های فُولدینگ به شکل زیر تبدیل می شود [۴-۱] $U_F(\vec{R}) = \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2) V(\vec{r}_{12} = \vec{R} + \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ (۲-۲) در این رابطه ρ_i توزیع چگالی نوکلئونهای هسته *i* ام در حالت پایه است. مختصات مورد استفاده در این محاسبات در شکل (۲–۱) نمایش داده شده است.



شکل (۲–۱): مختصات مورد استفاده در محاسبات فُولدینگ برهمکنش موثر به شکل کلی زیر می باشد $V(\vec{r}_{12}) = V_{00}(\vec{r}_{12}) + V_{01}(\vec{r}_{12})\vec{\tau}_{1}.\vec{\tau}_{2} + V_{10}(\vec{r}_{12})\vec{\sigma}_{1}.\vec{\sigma}_{2}\vec{\tau}_{1}.\vec{\tau}_{2}$ (۳-۲) این رابطه شامل جملات تانسوری و اسپین-مدار است. اما دراین رساله از جملات مربوط به اسپین برای تعریف سطح مقطع صرف نظر شده است[۵]. بخش های غیر کروی U_{F} نیز که از یکی یا هر دو چگالی نتیجه می شوند، مربوط به پراکندگی الاستیک هسته با اسپین صفر هستند اما در مقایسه ای

از پراکندگی
$$O + {}^{59}Co = {}^{16}O + {}^{69}Ni$$
 ، نشان داده شده است که این اثر
قابل چشم پوشی است[۶].

اینچنین فرضهایی ما را به ارزیابی انتگرال دابل فولدینگ (رابطه (۲–۲)) با چگالی های کروی و برهمکنش موثر V_{00} رهنمون می شود.

۲–۳–سیستم مختصات مورد استفاده در روش دابل فولدینگ

در این مختصات همانطور که در شکل (۲–۲) نشان داده شده است، فاصله بین مراکز جرم دو هسته پرتابه و هدف با بردار \overline{R} نمایش داده می شود. $\overline{r}_{p(T)}$ برداری شعاعی است که از مرکز هسته مورد نظر در نظر گرفته می شود و انتهای آن محلی از توزیع چگالی نوکلئونی آن هسته را که با توزیع چگالی نوکلئونی هسته دیگر وارد برهمکنش می شود نشان می دهد. بردار \overline{s} انتهای دو بردار \overline{r}_p و \overline{r}_7 را به یکدیگر وصل می کند.

$$\vec{s} = \vec{R} + \vec{r}_T - \vec{r}_p \tag{(f-r)}$$



شکل(۲-۲): دستگاه مختصات استفاده شده در محاسبات دابل فولدینگ

۲-۴-فرمالیزم روش دابل فولدینگ

همانطور که عنوان شد، این مدل از تاثیر چگالی های هسته پرتابه و هدف برروی هم بوجود می آید و به انرژی هسته پرتابه (E_p) و فاصله جدایی مراکز دو جرم پرتابه و هدف (\overline{R}) وابسته است.

ضمنا همانطور که ذکر شد، در برهمکنش بین دو هسته، پتانسیل کل بین دو هسته برهمکنشی به صورت زیر می باشد

$$U_{total}(\vec{R}) = U_N(\vec{R}) + U_C(\vec{R}) + U_{rot}(\vec{R}) \qquad (\Delta-\Upsilon)$$

در این رابطه U_N پتانسیل برهمکنش هسته ای، U_c پتانسیل برهمکنش الکتروستاتیک (کولمبی) و U_{rot} پتانسیل چرخشی است. در این رساله از محاسبه بخش چرخشی پتانسیل یعنی U_{rot} ، صرف نظر می کنیم.

همانطور که عنوان شد، انتخاب برهمکنش موثر برای مدل دابل فولدینگ دارای اهمیت خاصی است. برهمکنش از دید میکروسکوپیک عموماً مجموع پتانسیل های موضعی دو جسم برهمکنش کننده مطابق رابطه زیر می باشد [۱۰-۷]

$$V = \sum_{PT} V_{PT} \tag{P-T}$$

اندیس های T,P به ترتیب نشان دهنده خواص مربوط به هسته پرتابه و هدف می باشند.

قسمت حقیقی پتانسیل بین سیستم پرتابه و هدف با استفاده از فرمالیزم اپراتوری فشباخ [۷–۱۰]، چنانکه در رابطه (۱–۳) نشان دادیم به شکل زیر می باشد

$$U_{F}(\vec{R}) = U_{00}(R) = \left\langle \varphi_{P0}\varphi_{T0} \middle| V \middle| \varphi_{P0}\varphi_{T0} \right\rangle$$
$$= \left\langle \varphi_{P0}\varphi_{T0} \middle| \sum_{PT} V_{PT} \middle| \varphi_{P0}\varphi_{T0} \right\rangle$$
(Y-Y)

در این رابطه $\left| arphi_{P_0}
ight|$ و $\left| arphi_{T_0}
ight|$ به ترتیب بیانگر تابع موج کلی هسته های پرتابه و هدف در حالت پایه می باشند.

چنانچه توزیع ماده هسته ای به صورت پیوسته فرض شود، رابطه بالا برای پتانسیل به شکل انتگرالی قابل تبدیل خواهد بود

$$U_{F}(\vec{R}) = \int d\vec{r}_{P} \int d\vec{r}_{T} \rho_{P}(\vec{r}_{P}) \rho_{T}(\vec{r}_{T}) V_{PT}(\vec{r}_{PT} = \vec{s}) \quad (A-Y)$$

همانطور که در فصل قبل نیز گفته شد، در این رابطه (\vec{s}) پتانسیل موضعی بین نوکلئون های برهمکنشی می باشد. $(\vec{r}_p) \ q \ e \ (\vec{r}_r)$ به ترتیب توزیع چگالی های هسته های پرتابه و هدف را نشان می دهند و \vec{r}_{pT} فاصله بین دو نوکلئون برهمکنشی از هسته های پرتابه و هدف است. برهمکنش $(\vec{s}) \ V_{pT}(\vec{s})$ ممکن است معرف برهمکنشی از نوع کولنی و یا هسته ای باشد. در صورت کولنی بودن برهمکنش، انتگرال رابطه بالا پتانسیل کولنی سیستم پرتابه و هدف و در صورت هسته ای بودن برهمکنش،

بنابراین انرژی پتانسیل کولمبی برای دو هسته برهمکنش کننده به روش دابل فولدینگ به شکل زیر تعریف می شود

$$U_{C}(\vec{R}) = \int d\vec{r}_{P} \int d\vec{r}_{T} \rho_{Pc}(\vec{r}_{P}) \rho_{Tc}(\vec{r}_{T}) V_{C}(\vec{s}) \qquad (9-7)$$

در این رابطه \bar{s} فاصله بین دو محل برهمکنش معین از هسته های پرتابه و هدف است بطوریکه دررابطه $\bar{r}_p = \bar{R} + \bar{r}_T - \bar{r}_p$ صدق می کند. \bar{r}_7 و \bar{r}_7 بردارهای شعاعی مربوط به هسته های پرتابه و هدف می باشند. بردار \bar{R} بردار واصل بین مراکز دو هسته می باشد.

در این پروژه قصد داریم بخش هسته ای و کولمبی پتانسیل را برای دو هسته برهمکنش کننده به روش دابل فولدینگ محاسبه کنیم.

۲-۵-اثرات تبادل نوکلئونی

چنانچه در روند برخورد دو هسته تبادل نوکلئونی صورت نگیرد، هسته ها

خصوصیات پیش از برهمکنش خود اعم از چگالی های توزیع نوکلئونی را حفظ می کنند اما در صورت وقوع تبادل نوکلئونی بین هسته ها، تغییراتی در خصوصیات هسته ها ایجاد می شود. از مهم ترین این تغییرات که به خصوص در روش دابل فولدینگ مد نظر است، به وجود آمدن چگالی های توزیع نوکلئونی جدید در اثر این تبادل نوکلئونی برای هسته ها می باشد.

در روش دابل فولدینگ برای لحاظ کردن اثر این تبادل نوکلئونی، برهمکنش را با استفاده از یک اپراتور تبادلی $P_{\scriptscriptstyle PT}$ به شکل زیر در نظر می گیرند

$$V_{PT} \to V_{PT} \left(1 - P_{PT} \right) \tag{1-r}$$

اپراتور تبادلی P_{pT} تمامی خصوصیات دو نوکلئون برهمکنشی را که بین دو هسته مبادله شده اند، با یکدیگر جابجا می کند. به این ترتیب رابطه (۲–۷) به شکل زیر تغییر می کند

$$U_{F}(\vec{R}) = \left\langle \varphi_{P0}\varphi_{T0} \left| \sum_{PT} V_{PT}(1 - P_{PT}) \right| \varphi_{P0}\varphi_{T0} \right\rangle$$
$$= \left\langle \varphi_{P0}\varphi_{T0} \left| \sum_{PT} V_{DPT} \right| \varphi_{P0}\varphi_{T0} \right\rangle + \left\langle \varphi_{P0}\varphi_{T0} \left| \sum_{PT} V_{EPT} \right| \varphi_{P0}\varphi_{T0} \right\rangle \quad (11-7)$$
$$= U_{DF}(\vec{R}) + U_{EF}(\vec{R})$$

با استفاده از رابطه بالا، پتانسیل دابل فولدینگ با در نظر گرفتن اثرات تبادل نوکلئونها در جریان برهمکنش بین دو هسته، به دو بخش مستقیم^۱و تبادلی^۲ تقسیم می شود. بخش مستقیم، برهمکنش بدون تبادل نوکلئونی

[!] Direct part

[°]Exchange part

را شرح می دهد و بخش تبادلی از تبادل نوکلئونها بین دو هسته ناشی می شود.

> به این ترتیب رابطه دابل فولدینگ به صورت زیر نوشته می شود $U_{F}(\vec{R}) = U_{DF}(\vec{R}) + U_{EF}(\vec{R}) =$ $\int d\vec{r}_{P} \int d\vec{r}_{T} \rho_{DP}(\vec{r}_{P}) \rho_{DT}(\vec{r}_{T}) V_{DPT}(\vec{s})$ $+ \int d\vec{r}_{p} \int d\vec{r}_{T} \rho_{EP}(\vec{r}_{P}) \rho_{ET}(\vec{r}_{T}) V_{EPT}(\vec{s})$

در رابطه بالا (\vec{r}_{PT} (\vec{r}_{PT}) پتانسیل بخش مستقیم برهمکنش بین دو هسته و (V_{EPT} (\vec{r}_{PT}) پتانسیل بخش تبادلی برهمکنش بین دو هسته را نشان می دهند. ($\vec{r}_{P(T)}$ ($\vec{r}_{P(T)}$) چگالی های توزیع نوکلئونی مربوط به بخش مستقیم و ($\vec{r}_{P(T)}$ ($\vec{r}_{P(T)}$) چگالی های توزیع نوکلئونی بخش تبادلی می باشند.

۲–۵–۱–پتانسیل برهمکنش تبادلی و تقریب برد صفر

اولین پتانسیل پیشنهادی برای برهمکنش بخش تبادلی همانطور که در فصل اول اشاره شد، شبه پتانسیلی به شکل زیر بود

 $J(E)\delta(\vec{r}_{PT})$ (18-5)

در این تعریف بخش وابسته به انرژی پتانسیل برهمکنشی J(E) می باشد. این عبارت وابستگی ضعیفی به انرژی دارد و به صورت زیر تعریف می شود [۱۴]

$$J(E) = G_{E\delta}g(E_P), g(E_P) = 1 - K.E_P$$
 (14-7)

انرژی متوسط نوکلئونهای هسته پرتابه می باشد که به صورت زیر E_P [تعریف می شود

$$E_P = \frac{E_{lab}}{A_P} \tag{10-T}$$

در این رابطه E_{lab} انرژی در مختصات آزمایشگاه، A_p تعداد نوکلئونهای هسته پرتابه می باشد. هسته پرتابه و بنابراین E_p انرژی متوسط نوکلئونهای هسته پرتابه می باشد. مقادیر ثابت K نیز در جدول (۲–۱) نشان داده شده اند.

این شبه پتانسیل ابتدا در پراکندگی یونهای سنگین مورد استفاده قرار $\vec{r}_{PT} = 0$ گرفت. به دلیل وجود دلتای دیراک در این تعریف، تنها در فواصل $\vec{r}_{PT} = 0$ یعنی در جاییکه فاصله نسبی دو هسته صفر باشد، مقدار دارد و به همین دلیل شبه پتانسیل در تقریب برد صفر نامیده می شود.

استفاده از این شبه پتانسیل از آنجا که تنها در فواصل نسبی صفر بین دو هسته مقدار داشته و فواصل بیشتر بین دو هسته را در نظر نمی گیرد، محاسبات دابل فولدینگ را بسیار ساده می سازد. اما به هر حال یک تقریب است و جوابگوی بسیاری از خصوصیات برهمکنش که مربوط به فواصل نسبی بیشتر بین دو هسته می باشد نیست. هرچند به دلیل سادگی محاسباتی هرگاه محاسبات دابل فولدینگ سخت و پیچیده می شود آگاهانه از این شبه پتانسیل برای ساده سازی روند محاسبات استفاده می شود.

به منظور انجام محاسباتی دقیق تر و نتایجی نزدیکتر به واقعیت در مدل دابل فولدینگ، می توان از تقریب برد محدود استفاده نمود که در بخش بعد شرح داده شده است.
۲-۶-برهمکنش موثر نوکلئون-نوکلئون

آنچه که به عنوان (s) در انتگرال دابل فولدینگ ظاهر می شود، برهمکنش نوکلئون-نوکلئون و بسیار قوی می باشد.

همانطور که گفته شد، برهمکنش می بایست با در نظرگرفتن کل چگالی هسته ها تصویر واقعی تری از برهمکنش بین دو هسته ارائه دهد و امکان ایجاد برهمکنش بین دو هسته در فواصل بیشتر را نیز شامل شود.

۲-۶-۲-برهمکنش M3Y ^۱

در روش دابل فولدینگ از برهمکنش موثر بِرچ ^۲ که جمع سه جمله یوکاواست و به آن M3Y می گویند استفاده می شود که تا کنون نتایج بسیار موفقی ارائه کرده است. در این مورد جزییات کاملی بوسیله بِرچ ارائه شده است[۱۵].

در این رساله به منظور بهبود بخشیدن محاسبات دابل فولدینگ، از برهمکنش موثر نوکلئون-نوکلئون از نوع M3Y استفاده نموده ایم. زیرا همچنانکه در بخش پیش شرح داده شد، شبه پتانسیل برهمکنشی که در تقریب برد صفر در این محاسبات استفاده شده است، توصیفی کاملاً تقریبی از پتانسیل برهمکنش بین دو هسته برهمکنش کننده ارائه می دهد.

¹. Michigan 3 Yukawa

^r. Bertsch

به همین علت و به منظور اصلاح نتایج روش دابل فولدینگ، می بایست از مدل های واقعی تری مانند M3Y برای محاسبه پتانسیل برهمکنش استفاده نمود. به این منظور در این بخش رابطه مربوط به برهمکنش موثر نوکلئون-نوکلئون از نوع M3Y را معرفی کرده و سپس در بخش های بعد در محاسبات دابل فولدینگ مورد استفاده قرار می دهیم.

بخش مرکزی برهمکنش موثر نوکلئون-نوکلئون از نوع M3Y را با در نظر گرفتن جملات وابسته به اسپین و ایزواسپین هم برای قسمت برهمکنش مستقیم و هم برای تبادلی در تقریب برد محدود را می توان به صورت کلی

نوشت $V_{D(E)}(\vec{s}) = V_{00}^{D(E)}(\vec{s}) + V_{01}^{D(E)}(\vec{s})\vec{\tau}_1.\vec{\tau}_2 + V_{10}^{D(E)}(\vec{s})\vec{\sigma}_1.\vec{\sigma}_2 + V_{11}^{D(E)}(\vec{s})(\vec{\sigma}_1.\vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1.\vec{\tau}_2)$ اما در این رساله از بخش های وابسته به اسپین و ایزواسپین در برهمکنش نوکلئون-نوکلئون صرف نظر شده است و بنابراین بخش مرکزی برهمکنش M3Y که در این رساله استفاده می شود، به طور مثال برای بخش مستقیم، به صورت زیر می باشد

$$V_{00}(\vec{s}) \to V(\vec{s}) = \sum_{i=1}^{3} G_i V_{vi}(\vec{s})$$
 (19-7)

در این رابطه $V_{\nu i}(ec{s})$ پتانسیل یوکاوا به صورت زیر می باشد

$$V_{vi}(\vec{s}) = \frac{\exp(-\frac{\vec{s}}{r_{vi}})}{(\frac{\vec{s}}{r_{vi}})}$$
(1V-Y)

ثابت های $G_{D(E)i}$ و r_{vi} بسته به نوع برهمکنش، در جدول (۲-۱) نمایش داده شده اند. همچنین برهمکنش M3Y در سیستم های چند نوکلئونی به

اثراتی نظیر چگالی ماده هسته ای و انرژی متوسط هر نوکلئون از هسته پرتابه وابسته می باشد. این اثرات به صورت زیر در نظر گرفته می شوند

 $V_{D(E)}(\rho, E_P, \vec{s}) = g(E_P)F(\rho)V_{D(E)}(\vec{s})$ (1A-T)

وابستگی به انرژی در این رابطه نیز مانند وابستگی به انرژی شبه پتانسیل $1-K.E_p$ برهمکنش که در بخش قبل شرح داده شد، به صورت تابعی مانند در نفر در نظر گرفته می شود. بخش وابسته به چگالی $F(\rho)$ در رابطه بالا، در بخش های بعد شرح داده خواهد شد.

با استفاده از این برهمکنش در توصیف برد محدود، دقت محاسبات دابل فولدینگ بیشتر شده و همانطور که در ارائه نتایج این روش خواهیم دید، نتایج نزدیکتری با داده های تجربی تولید خواهد کرد.

۲-۷-توزیع چگالی نوکلئونی هسته

به منظور سادگی محاسبات و نیز استفاده از داده های موجود برای پراکندگی پروتون، چگالی توزیع نوکلئونی هسته را در این محاسبات، متناسب با چگالی پروتون به صورت زیر فرض می کنند

$$\rho_{P(T)A} = \rho_{P(T)Z} \frac{A}{Z}$$

$$\rho_{P(T)Z}(\vec{r}) = \rho_{0P(T)} \left[1 + e^{\frac{\vec{r} - R_{P(T)}}{a_{P(T)}}} \right]^{-1}$$
(19-Y)

در این رابطه A تعداد نوکلئونهای هسته مورد نظر و Z تعداد پروتونهای

 $ho_{0P(T)}$ آن می باشد. $R_{P(T)}$ شعاع نیمه چگالی، $a_{P(T)}$ پارامتر پخشیدگی و $R_{P(T)}$ این چگالی در نقطه بحرانی از داده های چگالی بار استخراج می شوند[۱۶]. این داده ها به صورت تجربی از پراکندگی الاستیک الکترون به دست آمده اند.

۸-۲-بخش مستقیم انتگرال دابل فولدینگ

با توجه به رابطه (۲-۱۲) ، بخش مستقیم انتگرال دابل فولدینگ به صورت زیر قابل محاسبه می باشد [۱۸-۱۷]

- $U_{DF}(\vec{R}, E_P) = \int d\vec{r}_P \int d\vec{r}_T \rho_{DP}(\vec{r}_P) \rho_{DT}(\vec{r}_T) V_D(\vec{s}, E_P) \quad (\Upsilon \cdot -\Upsilon)$
- در این رابطه چگالی های توزیع نوکلئونی هسته های هدف و پرتابه با توجه به رابطه (۲–۱۹) به صورت زیر در محاسبات وارد می شوند

$$\rho_{DP}(\vec{r}_{P}) = \frac{\rho_{0}}{1 + \exp(\frac{\vec{r}_{P} - R_{P}}{a_{p}})} \frac{A_{P}}{Z_{P}}$$

$$\rho_{DT}(\vec{r}_{T}) = \frac{\rho_{0}}{\vec{r}_{P} - R_{P}} \frac{A_{T}}{R_{P}}$$
(11-1)

$$\mathcal{O}_{DT}(\vec{r}_T) = \frac{\rho_0}{1 + \exp(\frac{\vec{r}_T - R_T}{a_T})} \frac{R_T}{Z_T}$$

پتانسیل برهمکنش با توجه به روابط (۲–۱۶) و (۲–۱۷) به شکل زیر در محاسبات دابل فولدینگ وارد می شود

$$V_{D}(\vec{s}, E_{P}) = g(E_{P}) \sum_{i=1}^{3} G_{Di} \frac{e^{\frac{-\vec{s}}{r_{vi}}}}{\frac{\vec{s}}{r_{vi}}}$$
(77-7)

این برهمکنش به صورت مستقل از چگالی است. در ادامه محاسبات،

وابستگی و عدم وابستگی برهمکنش را به چگالی و نتایج آن مورد بررسی قرار می دهیم.

۹-۲-بخش تبادلی انتگرال دابل فولدینگ

در این بخش ابتدا نتایج روش بسط ماتریس چگالی^۱ را در به دست آوردن چگالی های بخش تبادلی شرح داده و سپس با استفاده از این نتایج، انتگرال بخش تبادلی روش دابل فولدینگ را معرفی می کنیم.

۲-۹-۱-چگالی های بخش تبادلی

در فرمالیزم روش دابل فولدینگ نشان دادیم که اعمال اثرات تبادل نوکلئونی بین دو هسته برهمکنش کننده بر پتانسیل برهمکنش، باعث می شود پتانسیل هسته ای کل به دو بخش مستقیم و تبادلی تقسیم شود.

چگالی های بخش تبادلی به دلیل تبادل نوکلئونی، شکلی متفاوت از چگالی های بخش مستقیم خواهند داشت. بنابراین می بایست این چگالی ها به روشی محاسبه شوند تا بخش تبادلی انتگرال دابل فولدینگ و در نهایت پتانسیل هسته ای کل به این روش قابل محاسبه گردد.

در این رساله برای محاسبه بخش تبادلی پتانسیل هسته ای به روش دابل فولدینگ، از چگالی های به دست آمده از روش بسط ماتریس چگالی استفاده

¹. Density Matrix Expansion

کرده ایم. با استفاده از روش بسط ماتریس چگالی، چگالی های تبادلی در یک نقطه میانی بین دو هسته به شکل زیر به دست می آیند [۲۰–۱۹]

$$\rho(\vec{R} + \frac{\vec{s}}{2}, \vec{R} - \frac{\vec{s}}{2}) \equiv \rho(\vec{R}, \vec{s}) \cong \rho(\vec{R}) \hat{J}_1(k_{eff} \vec{s}) \qquad (\text{YY-Y})$$

در رابطه بالا $\hat{J}_1(k_{eff}\vec{s})$ تابع بسل کروی مرتبه اول می باشد. با استفاده از آین چگالی های تبادلی به دست آمده از روش بسط ماتریس چگالی، بخش تبادلی انتگرال دابل فولدینگ قابل محاسبه می باشد. این مطلب در بخش بعد بررسی شده است.

۲-۹-۲-محاسبه بخش تبادلی انتگرال دابل فولدینگ

بخش تبادلی انتگرال دابل فولدینگ با توجه به روابط (۲-۱۲) و (۲-۲۳) به صورت زیر می باشد

 $U_{EF}(\vec{R}, E_P) = \int d\vec{r}_p \int d\vec{r}_T \rho_p(\vec{r}_p; \vec{r}_p + \vec{s}) \rho_T(\vec{r}_T; \vec{r}_T - \vec{s}) V_E(\vec{s}, E_P) \quad (\Upsilon F - \Upsilon)$ \Rightarrow

$$\rho_{P}(\vec{r}_{P};\vec{r}_{P}+\vec{s}) \cong \rho_{P}(\vec{r}_{P}+\frac{\vec{s}}{2})\hat{J}_{1}(K_{eff}(\vec{r}_{P}+\frac{\vec{s}}{2}).\vec{s})$$

$$\rho_{T}(\vec{r}_{T};\vec{r}_{T}-\vec{s}) \cong \rho_{T}(\vec{r}_{T}-\frac{\vec{s}}{2})\hat{J}_{1}(K_{eff}(\vec{r}_{T}-\frac{\vec{s}}{2}).\vec{s})$$
(YΔ-Y)

در رابطه بالا، تابع بسل کروی مرتبه اول با فرم کلی زیر وارد محاسبات می شود

$$\hat{J}_{1}(x) = \frac{3[\sin(x) - x\cos(x)]}{x^{3}}$$
(79-7)

(77-7)

$$k_{eff}^{2}(\vec{r}_{p}+\frac{\vec{s}}{2}) = \left(\frac{3\pi^{2}\rho_{p}(\vec{r}_{p};\vec{r}_{p}+\vec{s})}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{5C_{s}}{3}\left(\frac{\vec{\nabla}\rho_{p}(\vec{r}_{p};\vec{r}_{p}+\vec{s})}{\rho(\vec{r}_{p};r_{p}+\vec{s})}\right)^{2} + \frac{5\nabla^{2}\rho_{p}(\vec{r}_{p};\vec{r}_{p}+\vec{s})}{36\rho_{p}(\vec{r}_{p};\vec{r}_{p}+\vec{s})}$$

$$k_{eff}^{2}(\vec{r}_{T}-\frac{\vec{s}}{2}) = \left(\frac{3\pi^{2}\rho_{p}(\vec{r}_{T};\vec{r}_{T}-\vec{s})}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{5C_{s}}{3}\left(\frac{\vec{\nabla}\rho_{T}(\vec{r}_{T};\vec{r}_{T}-\vec{s})}{\rho(\vec{r}_{T};r_{T}-\vec{s})}\right)^{2} + \frac{5\nabla^{2}\rho_{T}(\vec{r}_{T};\vec{r}_{T}-\vec{s})}{36\rho_{T}(\vec{r}_{T};\vec{r}_{T}-\vec{s})}$$

پتانسیل برهمکنش نیز با توجه به روابط (۲–۱۶) و (۲–۱۷) برای بخش تبادلی به صورت زیر می باشد

$$V_{E}(\vec{s}, E_{P}) = g(E_{P}) \sum_{i=1}^{3} G_{Ei} \frac{e^{\frac{-\vec{s}}{r_{vi}}}}{\frac{\vec{s}}{r_{vi}}}$$
(YA-Y)

بنابراین با توجه به چگالی های به دست آمده از روش بسط ماتریس چگالی، بخش تبادلی انتگرال دابل فولدینگ در بخش های بعد محاسبه می شود.

۲-۹-۳-تأثیر حرکت نسبی هسته ها

از آنجا که دو هسته در حال برهمکنش نسبت به هم در حال حرکت هستند، بنابراین دارای سرعت نسبی می باشند. برای در نظر گرفتن حرکت نسبی هسته ها رابطه ی زیر در انتگرال دابل فولدینگ وارد می شود

¹. Extended Thomas Fermi approximation

$$e^{rac{ik.ar{s}}{A_{red}}}$$
 (۲۹-۲)

عدد موج k که به دلیل در نظر گرفتن حرکت نسبی هسته ها به مسئله وارد می شود تعریفی مطابق رابطه زیر دارد

$$k^{2} = \frac{2m_{n}A_{red}(E_{c.m.} - U(\vec{R}))}{\hbar^{2}}$$
 (T-T)

در این رابطه $E_{c.m.}$ انرژی در دستگاه مرکز جرم و m_n جرم یک نوکلئون است. A_{red} عدد جرمی کاهش یافته هسته ها مطابق رابطه زیر می باشد

$$A_{red} = \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} \tag{(11-1)}$$

که $A_{
m l}$ تعداد نوکلئونهای هسته اول، $A_{
m 2}$ تعداد نوکلئونهای هسته دوم و $U(ec{R})$ پتانسیل کلی برهمکنش می باشد.

۲-۱۰-وابستگی به چگالی در انتگرال دابل فولدینگ

به منظور در نظر گرفتن وابستگی به چگالی در محاسبات دابل فولدینگ از فرم کلی برهمکنش موثر نوکلئون-نوکلئون وابسته به چگالی از نوع M3Y استفاده می نماییم [۲۵]. این وابستگی به صورت زیر نمایش داده می شود

$$F(\rho_{FA}) = C \left[1 + \alpha \exp(-\beta \rho_{FA}) - \gamma \rho_{FA} \right] \qquad (\forall \forall - \forall)$$

(۱–۲) ضرایب ثابت C, α , β , α , β , α , C فرایب ثابت β , α , β , α , β برای بخش مستقیم و نشان داده شده اند. توزیع چگالی نوکلئونی ρ_{FA} برای بخش مستقیم و

تبادلی به صورت مجموع چگالی های توزیع نوکلئونی هسته های پرتابه و هدف می باشد

$$\rho_{FADirect} = \rho_p(\vec{r}_p) + \rho_T(\vec{r}_T)$$

$$\rho_{FA_{Exchange}} = \rho_p(\vec{r}_p + \frac{\vec{s}}{2}) + \rho_T(\vec{r}_T - \frac{\vec{s}}{2})$$
(YY-Y)

بنابراین فاکتور $F(
ho_{FA})$ پتانسیل برهمکنش را به چگالی وابسته می سازد. با در نظر گرفتن این بخش، فاکتور $F(
ho_{FA})$ در کل انتگرال دابل فولدینگ ضرب می شود.

به این ترتیب و با توجه به مطالب ذکر شده در این فصل، فرمالیزم روش دابل فولدینگ به طور کامل معرفی شد و می توان از روابط ذکر شده برای بررسی پتانسیل برهمکنش بین دو هسته با استفاده از این روش، استفاده نمود.

در قسمت انتهایی این فصل از رساله لازمست به برخی محدودیت های روش دابل فولدینگ اشاره کنیم. همانطور که اشاره شد، روش دابل فولدینگ فقط بخش حقیقی پتانسیل برهمکنش را محاسبه می کند و از محاسبه بخش موهومی پتانسیل برهمکنش که به محاسبات غیر موضعی و وابسته به تکانه زاویه ای و انرژی کاربرد دارد، صرف نظر می کند و بنابراین محاسبات دابل فولدینگ بخش غیر موضعی برهمکنش را نادیده می گیرد. اثرات غیر موضعی به خصوص در پراکندگی نوکلئون-هسته نقش دارد [۲۷-۲۶] در محاسبات دابل فولدینگ فقط نوع خاصی از برهمکنش های نوکلئون-نوکلئون مورد استفاده قرار می گیرد. پتانسیل برهمکنش نوکلئون-نوکلئون M3Y حتما باید به صورت وابسته به چگالی مورد استفاده قرار گیرد زیرا شکل مستقل از چگالی آن نتایج موفقی برای تولید داده ارائه نکرده است. همچنین هنگامی که چندین کانال خروجی داشته باشیم و یا بخواهیم اثراتی مانند ارتعاش و دوران و ... هسته های شرکت کننده در برهمکنش را در محاسبه پتانسیل بررسی کنیم نمی توان از روش فولدینگ دوگانه استفاده نمود [۲۱–۲۱].

DD	برهمكنش	С	α	$\beta(fm^{-3})$	$\gamma(fm^{-3})$
0	مستقل از D	1	0.0	0.0	0.0
1	DDM3Y1	0.2963	3.7231	3.7348	0.0
2	CDM3Y1	0.3429	3.0232	3.5512	0.5
3	CDM3Y2	0.3346	3.0357	3.0685	1.0
4	CDM3Y3	0.2985	3.4528	2.6388	1.5
5	CDM3Y4	0.3052	3.2998	2.3180	2.0
6	CDM3Y5	0.2728	3.7367	1.8294	3.0
7	CDM3Y6	0.2685	3.8033	1.4099	4.0
8	BDM3Y1	1.2521	0.0	0.0	1.7452

جدول (۲-۱): ضرایب برهمکنش نوکلئون-نوکلئون وابسته به M3Y [۱۵]

ضريب	Reid	Paris
$G_{D1}(Mev)$	7999	11062
$G_{D2}(Mev)$	-2134	-2537.5
$G_{D3}(Mev)$	0	0
$G_{Ef1}(Mev)$	4631.4	-1524.25
$G_{Ef2}(Mev)$	-1787.1	-518.75
$G_{Ef3}(Mev)$	-7.847	-7.847
$r_{v1}(fm)$	0.25	0.25
$r_{v2}(fm)$	0.40	0.40
$r_{v3}(fm)$	1.414	1.414
$G_{E\delta}(Mevfm^3)$	-276	-592
$k(Mev^{-1})$	0.002	0.003

جدول (۲-۲): ضرایب برهمکنش های Reid و Paris وابسته به M3Y [۱۵]

فصل سوم روش های حل معادله موج و بررسی سطح مقطع پراکندگی

۲-۱-۳ مقدمه

جهان فیزیک مشتمل بر برهمکنش سیستم های N ذره ای است. در فلزات، فیزیک پلاسما، فیزیک حالت جامد، فیزیک آماری و شیمی فیزیک، سیستم هایی از ذرات مشابه وجود دارند. توصیف این سیستم ها نیازمند در نظر گرفتن نیروهای بین ذره ای در این سیستم ها می باشد. برای بررسی حالات کوانتوم مکانیکی یک سیستم چند ذره ای با نیروهای یکسان، می بایست روشی ریاضی برای حل معادله شرودینگر مربوط به آن سیستم یافت. محققین با استفاده از روش های مختلف حل معادله شرودینگر، به دنبال توصیف مناسبی از برهمکنش های سیستم N-ذره ای بوده اند. یکی از این روش ها استفاده از تبدیلات مختصات ژاکوبی می باشد که با استفاده از فرمالیزم فوق کروی به حل معادله شرودینگر می یردازد[۴۰–۳۲].

۲-۳-حل تحلیلی معادله شرودینگر برای سیستمی با N ذره یکسان

نیروهای چند جسمی با استفاده از فرمالیزم هارمونیک های فوق کروی قابل تعریفند. اگر سیستمی با تعداد ذرات ثابت و یکسان N در نظر بگیریم، معادله شرودینگر مربوط به این سیستم به صورت زیر خواهد بود

$$\left[\frac{-1}{2m}\sum_{i=1}^{N-1}\nabla_{r_i}^2 + \sum_{i,j \succ i} V(\vec{r}_{ij}) - E\right] \psi(\vec{r}_{ij}) = 0 \qquad (1-\tau)$$

 $V(\vec{r}_{ij})$ در این رابطه $\vec{r}_i = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ نشان دهنده مختصات نسبی ذرات و $V(\vec{r}_{ij})$ پتانسیل برهمکنش دو جسمی می باشد. حال مجموعه ای از مختصات ژاکوبی به صورت زیر در نظر می گیریم [۳۵]

$$x^{2} = \sum_{i=1}^{N-1} (\vec{r}_{i} - \vec{R})^{2} = \frac{2}{N-1} \sum_{k,l > k} \vec{r}_{kl}^{2}, \qquad \vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} \vec{r}_{i} \qquad (7-7)$$

در رابطه بالا \vec{R} مختصه مرکز جرم و $\vec{r_i}$ بردار مکان یک ذره می باشد. رابطه مختصه \vec{x} و مختصات نسبی ژاکوبی به صورت زیر می باشد

$$x = (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{N-1})^{\frac{1}{2}}$$
 (r-r)

نسبی ژاکوبی می باشند که تابع مکان های نسبی $\vec{r}_1, \vec{\xi}_2, ..., \vec{\xi}_{N-1}$ می باشند. مرکز جرم \vec{R} با استفاده از مختصات N ذره یعنی $\vec{r}_{N1}, \vec{r}_{23}, ..., \vec{r}_{N1}$ می باشند. مرکز جرم \vec{R} با استفاده از مختصات ژاکوبی حذف شده و مختصه نسبی ژاکوبی به صورت زیر محاسبه می شود

$$\xi_{i} = \sqrt{\frac{i}{i+1}} (\vec{\mathbf{r}}_{i+1} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \vec{r}_{j}) \qquad i = 1, 2, ..., N - 1 \qquad (\mathbf{\tilde{r}}_{-\mathbf{\tilde{r}}})$$

معادله شرودینگر را در مختصات مرکز جرم به صورت زیر خواهیم داشت

$$\left[\frac{-1}{m}\nabla^2 + V(\xi) - E\right]\varphi(\xi) = 0 \qquad (\Delta - \tau)$$

مجموعه مختصات ژاکوبی
$$\left\{ \ddot{\mathcal{Z}}
ight\}$$
 با عملگر لاپلاس $abla_i^2 =
abla_{i=1}^N
abla_i^2$ دارد. در فرمالیزم فوق کروی تابع موج به صورت زیر بر روی پایه هارمونیک
های فوق کروی بسط داده می شود

$$\psi(\xi) = r^{-(D-1)/2} \sum_{\{L\}} Y_{\{L\}}(\Omega) u_{\{L\}}(r)$$
 (5-tr)

بنابراین معادله (۳–۵) به یک مجموعه نامحدود از معادلات دیفرانسیل جفت شده مرتبه دوم تبدیل می شود

$$-\left\{\frac{1}{m}\left[\frac{d^{2}}{dr^{2}}-\frac{l(l+1)}{r^{2}}\right]+E\right\}u_{\{L\}}(r)+$$

$$\sum_{\{\vec{L}=0\}}^{\infty}\langle Y_{\{\vec{L}\}}(\Omega)|V(\xi)|Y_{\{\vec{L}\}}(\Omega)\rangle u_{\{\vec{L}\}}(r)=0 \qquad (Y-T)$$

$$l=L+\frac{D-3}{2}$$

با تولید یک پایه بهنجار شده داریم [۳۶]

$$Y_{\{L\}}(\Omega) = Y_{l1}^{m1}(\omega_1) \prod_{j=2}^{N} Y_{lj}^{mj}(\omega_j)^{(i)} P_j^{l_j, l_{j-1}}(\Phi_j) \qquad (\lambda - \tau)$$

جند جمله ای ژاکوبی می باشد. مجموعه $\{L\}$ از 1-N عدد $P_n^{a,b}$ چند جمله ای ژاکوبی می باشد. مجموعه J = 1, ..., N و J = 1, ..., N می با n_j, l_j و اعداد کوانتومی J = 1, ..., N می با n_j, l_j و N-1 عدد کوانتومی فوق کروی $J_j = 2, ..., N$ شامل عدد کوانتومی N-1 چرخشی بزرگ $L = L_N$ می باشد.

با رابطه زیر مرتبط با اعداد کوانتومی n_j, l_j می باشد L_j

$$L_{j} = \sum_{i=1}^{j} (2n_{i} + l_{i}), \quad (n_{1} = 0)$$
(9-5)

هارمونیک های فوق کروی (رابطه (۳–۸)) در رابطه زیر صدق می کنند

$$\int Y_{\{L\}}^{*}(\Omega) Y_{\{L\}}(\Omega) d\Omega = \delta_{\{L\},\{L\}} \qquad (1 - \tau)$$

مختصات فوق کروی که در این روش استفاده می شود، به صورت زیر می باشد [۳۶]

$$\Omega(\omega_1;\omega_2,\phi_2;..;\omega_n,\phi_n) \tag{11-T}$$

ها مربوط به مختصات زاویه ای ξ_i, ϕ_i هستند به طوریکه $arphi_i$

$$\tan \phi_i = (\sum_{j=1}^{i-1} \xi_j^2)^{1/2} \tag{17-7}$$

روابط بین گر و زوایا مطابق زیر می باشد

$$\xi_{N} = x \cos \varphi_{N}$$

$$\xi_{i} = x \sin \varphi_{N} \dots \sin \varphi_{i+1} \cos \varphi_{i}$$
 (17-7)

المان سطح فوق كره نيز به صورت زير مي باشد [٣٧]

$$d\Omega = d\omega_1 \prod_{j=2}^{N} d\omega_j (\sin \phi_j)^{3j-4} \cos^2 \phi_j d\phi_j \qquad (14-7)$$

برای بازنویسی معادله شرودینگر در فضای D بعدی به عملگر لاپلاس در مختصات فوق کروی در فضای D بعدی نیاز داریم که برای N ذره یکسان به صورت زیر نوشته می شود [۴۵–۳۸]

$$\sum_{i=1}^{N-1} \nabla_{\xi_i}^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x}\frac{d}{dx} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2}\right)$$
$$= -\left\{\frac{1}{x^{D-1}}\left[\frac{d}{dx}x^{D-1}\frac{d}{dx}\right] + \frac{L^2(\Omega)}{x^2}\right\}$$
(10-7)

فرض می شود که حرکت مرکز جرم از مساله حذف شود. جمله
$$rac{(\Omega)}{x^2}$$
 که
تعمیمی از سد گریز از مرکز برای فضای D بعدی می باشد، شامل مختصات
زاویه ای $\Omega_{arsigma_2}, \Omega_{arsigma_1}$می باشد.

یک چند جمله ای $L^2(\Omega)$ عملگر چرخشی بزرگ می باشد. $(r^{\gamma}Y_{\gamma}(\Omega)$ یک چند جمله ای $L^2(\Omega)$ نوسانی است و معادله ویژه مقداری آن به صورت زیر می باشد [۴۸-۴۱]

$$\{L^{2}(\Omega) - \gamma(\gamma + D - 2)\}Y_{[\gamma]}(\Omega) = 0 \qquad (1 \beta - \tau)$$

بنابراین ویژه مقادیر (Ω) با رابطه زیر مشخص می شوند $L^2(\Omega) = \gamma(\gamma + D - 2)$ (۱۷-۳)

 γ درجه چند جمله ای یا به عبارتی مرتبه یا عدد کوانتومی چرخشی بزرگ می باشد

$$\gamma = 2n + l_{\xi_1} + l_{\xi_2} + \dots$$
 (1A-r)

n عدد صحیح نامنفی و $l_{\xi i}$ تکانه زاویه ای معادل با مختصه j^{ξ} می باشد. مختصات فوق کروی بر حسب مولفه های $j^{\xi}_{2}, j^{\xi}_{2}, \cdots$ تعریف شده است. به طور مثال یک سیستم سه جسمی در چارچوب مرکز جرم از لحاظ ریاضی شش بعدی می باشد. در مختصات فوق کروی یک نقطه در این ساختار شش بعدی روی یک فوق کره به شعاع X قرار دارد. این کمیت فوق شعاع نامیده می شود و بقیه متغیرهایی را که مکان ذره را در فوق فضا شرح می دهند، می توان با پنج زاویه مشخص نمود. $Y_{\gamma}(\Omega_{\xi_1},...,t_1,..)$ به وسیله ($L^2(\Omega)$) به وسیله ($I_{\xi_1},...,t_1,...)$ نشان داده می شود که شامل هارمونیک های کروی شناخته شده با تکانه t_i نشان داده می شود که شامل هارمونیک های کروی شناخته شده با تکانه های زاویه ای $I_{\xi_2},l_{\xi_1},...$ و چند جمله ای های ژاکوبی و فوق زاویه t_i هستند [۵۸–۴۳] آنها هارمونیک های فوق کروی نامیده می شوند و یک پایه بهنجار کامل تشکیل می دهند.

بنابر مطالب گفته شده بخش وابسته به مکان معادله شرودینگر یا به عبارتی معادله شرودینگر فوق شعاعی را می توان به صورت زیر نوشت

$$\left\{\frac{-1}{2m}\frac{1}{x^{D-1}}\left[\frac{d}{dx}x^{D-1}\frac{d}{dx}\right] + \frac{L^2(\Omega)}{x^2} + V(x)\right\}\psi(x) = \mathbf{E}\psi(x) \qquad (19-7)$$

در این رابطه V(x) پتانسیل برهمکنش است که با فرض این که هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نشود فقط تابعی از فاصله بین ذرات می باشد [۵۵–۴۹]. با توجه به معادله های(۳–۱۶) و(۳–۱۹)، تابع موج فوق شعاعی، جوابی برای معادله شرودینگر کاهش یافته به صورت زیر می باشد [۵۹–۵۶]

$$\frac{-1}{2m} \left[\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{(D-1)}{x} \frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{-\gamma(\gamma + D - 2)}{x^2} \psi(x) \right] \quad (\gamma \cdot -\gamma)$$
$$+ V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

D بعد فضا و m جرم یکی از ذرات سیستم می باشد.

با استفاده از تغییر متغیر زیر برای تابع موج

$$\psi(x) = \frac{1}{x^{(\frac{D-1}{2})}} U(x)$$
(71-7)

و با انجام چند عمل ریاضی ساده، به معادله ساده شده زیر می رسیم

$$U''(x) + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(x)) - \left\{\frac{(D-1)(D-3)}{4} + \gamma(\gamma + D - 2)\right\}\frac{1}{x^2}\right]U(x) = 0$$
(YY-Y)

از این معادله فوق شعاعی می توان برای بررسی مسائل چند جسمی استفاده نمود. ما نیز در این رساله برای یافتن تابع موج هسته های مورد بحث از این معادله استفاده خواهیم کرد. لازم به ذکر است که سیستم مورد بررسی به وسیله معادله فوق شعاعی شرودینگر بایستی دارای تقارن کروی باشد و پتانسیل هایی که برای حل این معادله به کار می روند پتانسیل های فوق کروی می باشند.

۳-۳-حل قسمت فوق شعاعی معادله موج شرودینگر D بعدی

همانطور که ذکر شد، برای به دست آوردن تابع موج هسته های شرکت کننده در واکنش های مورد نظر در این رساله، باید ابتدا معادله موج مربوط به آنها را حل نمود. در این بخش با استفاده از معادله شرودینگر D بعدی بررسی شده در بخش قبل و همچنین روابط مربوط به توابع فوق هندسی، به محاسبه تابع موج مربوط به معادله شرودینگر D بعدی می پردازیم.

معادله شرودینگر D بعدی به دست آمده مطابق رابطه (۳-۲۲) را در نظر می گیریم. می دانیم که برای حل هر معادله موج به یک پتانسیل نیاز داریم. در بخش بعد معادله موج با هر کدام از پتانسیل های مورد نظر بررسی می شود. پتانسیل های مورد نظر در این رساله از میان پتانسیل های کوتاه برد انتخاب شده اند که به کار گیری انها در محدوده ی شعاع هسته، فرضی منطقی باشد.

۳-۳-۱-حل با پتانسیل یوکاوا⁽

مطابق رابطه (۳-۲۲) ، معادله موج فوق شعاعی به شکل زیر می باشد

$$U''(x) + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V(x)) - \left\{\frac{(D-1)(D-3)}{4} + \gamma(\gamma + D - 2)\right\}\frac{1}{x^2}\right]U(x) = 0$$
(YY-Y)

پتانسیل یوکاوا به صورت زیر در معادله بالا جایگذاری می شود [۶۱-۶۰]

$$V(x) = -V_o \frac{e^{-\alpha x}}{x} \tag{(TT-T)}$$

البته لازم به توضیح است که پتانسیل یوکاوای به کار رفته در این رساله، تنها وابسته به فوق شعاع است.

حال به حل معادله رابطه (۳-۳۲) با پتانسیل یوکاوا می پردازیم.این معادله به صورت زیر می باشد

$$\left\{\frac{-1}{2m}\frac{1}{x^{D-1}}\left[\frac{d}{dx}x^{D-1}\frac{d}{dx}\right] - \frac{\gamma(\gamma+D-2)}{x^2} - V_o\frac{e^{-\alpha x}}{x}\right\}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{E}\psi(\mathbf{x}) \quad (\forall \mathbf{f} - \forall)$$

[\]. Yukawa

یکی از روش هایی که به حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل کمک می کند، استفاده از تقریب هایی است که باعث ساده سازی معادلات می شوند. برای ساده سازی معادله بالا از تقریب زیر استفاده می کنیم [۶۷–۶۲]

$$\frac{1}{x} \approx 2\alpha \frac{e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-2\alpha x})} \tag{(4.1)}$$

هم چنین از تغییر متغیر زیر نیز برای حل معادله استفاده می کنیم $y = 1 - e^{-2lpha x}$ (۳۶-۳)

با جایگزینی دو رابطه بالا در معادله رابطه (۳-۳۴) به معادله زیر می رسیم

$$y(1-y)\frac{d^{2}\psi(y)}{dy^{2}} - y\frac{d\psi(y)}{dy} - [(\frac{(D-1)(D-3)}{4} + \gamma(\gamma+D-2))\frac{1}{y} \quad (\forall Y-\forall) - \frac{m(E-2)}{4\alpha^{2}}\frac{y}{1-y} - \frac{mV_{0}}{\alpha}]\psi(y) = 0$$

یکی از روش های حل موجود برای چنین معادله ای، در نظر گرفتن یک جواب برای این معادله و قرار دادن این جواب در معادله و حل آن می باشد. با در نظر گرفتن جوابی به شکل زیر

$$\psi(\mathbf{y}) = y^{\mu} (1 - y)^{\nu} f(y) \tag{(7A-7)}$$

و بازنویسی رابطه (۳۷-۳۷) با این تابع موج، به رابطه زیر می رسیم

$$y(1-y)f''(y) + [2\mu(1-y) - 2\nu y - y]f'(y) + [\mu(\mu-1)\frac{(1-y)}{y} - 2\mu\nu + (\gamma - \gamma)\frac{y}{(1-y)} - \mu + \nu \frac{y}{(1-y)} - (\frac{(D-1)(D-3)}{4} + \gamma(\gamma + D - 2))\frac{1}{y} + \frac{m(E-2)}{4\alpha^2}\frac{y}{(1-y)} + \frac{mV_0}{\alpha}]f(y) = 0$$

[۵۳] با توجه به شکل کلی معادله فوق هندسی به صورت زیر
$$y(1-y)f''(y) + [c - (a+b+1)y]f'(y) - (+--\pi)$$

 $abf(y) = 0, f(y) = {}_{2}F_{1}(a,b,c;y)$

رابطه (۳۹–۳۹) می تواند یک معادله فوق هندسی باشد. جوابی برای معادله بالا به صورت زیر در نظر می گیریم $f(y) = {}_{2}F_{1}(a,b,c;y)$ (۴۱-۳)

با استفاده از این تابع، رابطه (۳–۳۹) را حل نموده و ضرایب مجهول را به صورت زیر می یابیم

$$a = \mu + \nu + \sqrt{\frac{-m(E-2)}{4\alpha^2}}, b = \mu + \nu - \sqrt{\frac{-m(E-2)}{4\alpha^2}}, c = 2\mu$$

$$\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + (D-1)(D-3) + \frac{\gamma(\gamma + D-2)}{4}}, \nu = i\sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^2}}$$
(FT-T)

$$\psi(\mathbf{x}) = N(1 - e^{-2\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + (D-1)(D-3) + \frac{\gamma(\gamma + D-2)}{4}}} e^{-2\alpha i \sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^2}}} x$$

$${}_{2}F_{1}(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + (D-1)(D-3) + \frac{\gamma(\gamma + D-2)}{4}}} + 2i\sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^{2}}}, \quad (\text{fr-r})$$

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + (D-1)(D-3) + \frac{\gamma(\gamma + D-2)}{4}}},$$

$$1 \pm \sqrt{1 + (D-1)(D-3) + \frac{\gamma(\gamma + D-2)}{4}}; 1 - e^{-2\alpha x})$$

۲-۳-۲-حل با پتانسیل هالسن'

پتانسیل هالسن به صورت زیر می باشد [۶۹-۶۹]

$$V(x) = \frac{-V_0}{e^{\alpha x} - 1} \tag{FF-T}$$

تقریبی که به طور معمول برای حل معادله با این پتانسیل استفاده می شود، تقریب پکریس^۲به شکل زیر است [۶۳–۵۸]

$$\frac{1}{x^{2}} \approx \alpha^{2} (d_{0} + \frac{1}{e^{\alpha x} - 1} + \frac{1}{(e^{\alpha x} - 1)^{2}})$$
 (FQ-T)

هم چنین از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم

$$y = 1 - e^{-\alpha x} \tag{$\mathbf{F}_{-}\mathbf{v}$}$$

با جایگذاری پتانسیل هالسن و تقریب و تغییر متغیر ذکر شده در معادله شرودینگر، به رابطه زیر می رسیم

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d\psi(y)}{dy} + \frac{1}{y^2(1-y)^2}[(-Ad_0)(1-y)^2 - (fv-r)]$$

$$Ay(1-y) - Ay^{2} + \frac{2mE}{\alpha^{2}}(1-y)^{2} + \frac{2mV_{0}}{\alpha^{2}}y(1-y)]\psi(\mathbf{y}) = 0$$

به طوریکه

$$A = \frac{(D-1)(D-3)}{4} + \gamma(\gamma + D - 2) \qquad (fa-r)$$

[\]. Hulthen

 $\overline{}$

^r. Pekeris approximation

مطابق مطالب ذکر شده برای حل با پتانسیل یوکاوا، می توان با در نظر گرفتن جوابی مانند رابطه (۳–۳۸) و حل معادله به یک معادله فوق هندسی رسید که حل آن تابعی به صورت $f(y) = {}_{2}F_{1}(a,b,c;y)$ می باشد.

ضرایب مجهول به شکل زیر محاسبه شده اند

$$a = \mu + \nu + \sqrt{Ad_0 + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}}, b = \mu + \nu - \sqrt{Ad_0 + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}}, c = 2\mu$$
$$\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4A} \qquad , \nu = i\sqrt{Ad_0 - \frac{2mE}{\alpha^2}}$$

بنابراین تابع موج یک هسته با پتانسیل هالسن بر حسب توابع فوق هندسی به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{split} \psi(\mathbf{x}) &= N(1 - e^{-\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4A}} e^{-\alpha i \sqrt{Ad_0 - \frac{2mE}{\alpha^2 x}}} \\ {}_{2} F_{1}(i \sqrt{Ad_0 - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4A} + \sqrt{Ad_0 + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}}, \quad (\Delta \cdot - \nabla) \\ i \sqrt{Ad_0 - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4A} - \sqrt{Ad_0 + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}}, \\ 2i \sqrt{Ad_0 - \frac{2mE}{\alpha^2}} + 1; 1 - e^{-\alpha x}) \end{split}$$

۳-۳-۳-حل با پتانسیل یوکاوا-فرم'

پتانسیل یوکاوا-فرمی که در نظر گرفته ایم، به صورت زیر می باشد [۶۸]

$$V_{Yukawa-type}(x) = -V_0 (1 + \frac{1}{x}e^{-\alpha x})^2$$
 (21-7)

برای این پتانسیل، با استفاده از تقریب زیر [۵۸-۵۵]

[\]. Yukawa-type

$$\frac{1}{x^2} \approx 4\alpha^2 \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-2\alpha x})^2} \qquad (\Delta \tau - \tau)$$

$$y = 1 - e^{-2\alpha x} \qquad (\Delta \tau - \tau)$$

به معادله ای به صورت زیر می رسیم

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d\psi(y)}{dy} + \frac{1}{y^2(1-y)^2}\left[\left(-Ay + \frac{mV_0}{2\alpha^2}(1-y)^2 + \frac{mE}{2\alpha^2}(1-y)^2 + 2mV_0y^2 + \frac{2mV_0}{\alpha}y(1-y)\right]\psi(y) = 0\right]$$
(5.1)

برای این معادله نیز مانند مراحل طی شده برای پتانسیل های یوکاوا و هالسن ضرایب مجهول به صورت زیر محاسبه شده اند

$$a = \mu + \nu + \sqrt{\frac{2mE + 2mV_{0}(4\alpha^{2} - 4\alpha + 1))}{4\alpha^{2}}},$$

$$b = \mu + \nu - \sqrt{\frac{2mE + 2mV_{0}(4\alpha^{2} - 4\alpha + 1))}{4\alpha^{2}}}, c = 2\mu + 1$$

$$\nu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4(2mV_{0} - A)}, \mu = i\sqrt{\frac{2m(E + V_{0})}{4\alpha^{2}}}$$

$$\begin{split} \psi(\mathbf{x}) &= N(e^{-2\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_0 - A)}} (1 - e^{-2\alpha x})^{i\sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{4\alpha^2}}} \\ {}_{2}F_{1}(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_0 - A)} + i\sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{4\alpha^2}} + \sqrt{\frac{2mE + 2mV_0(4\alpha^2 - 4\alpha + 1))}{4\alpha^2}}, \quad (\Delta \mathcal{F} - \mathcal{V}) \\ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_0 - A)} + i\sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{4\alpha^2}} - \sqrt{\frac{2mE + 2mV_0(4\alpha^2 - 4\alpha + 1))}{4\alpha^2}}, \\ 1 + 2i\sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{4\alpha^2}}; 1 - e^{-2\alpha x}) \end{split}$$

۳-۳-۴-حل با پتانسیل منینگ-روزن'

پتانسیل منینگ-روزن به صورت زیر می باشد [۷۲-۷۰]

$$V_{Manning-Rosen}(x) = \frac{V_1}{(e^{\alpha x} - 1)^2} + \frac{V_2}{(e^{\alpha x} - 1)}$$
 (2Y-T)

و تقریب مورد استفاده، تقریب پکریس به صورت زیر می باشد [۶۷-۶۷]

$$\frac{1}{x^2} \approx \alpha^2 \left(d_0 + \frac{1}{e^{\alpha x} - 1} + \frac{1}{\left(e^{\alpha x} - 1\right)^2} \right) \qquad (\Delta \Lambda - \Upsilon)$$

با تغيير متغير زير

$$y = 1 - e^{-\alpha x} \qquad (\Delta 9 - r)$$

معادله زیر قابل حصول می باشد

$$\frac{d^2\psi(\mathbf{y})}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d\psi(\mathbf{y})}{dy} + \frac{1}{y^2(1-y)^2}\left[\left(-Ad_0(1-y)^2\right) - A(y-1) - A + \frac{2mE}{\alpha^2}(1-y)^2 - \frac{2mv_1}{\alpha^2} - \frac{2mv_2}{\alpha^2}(y-1)\right]\psi(\mathbf{y}) = 0$$
(5.-7)

[\]. Manning-Rosen

ضرایب مجهول به صورت زیر محاسبه شده اند

$$a = \mu + \nu + \sqrt{Ad_0 - \frac{2mE}{\alpha^2}}, b = \mu + \nu - \sqrt{Ad_0 - \frac{2mE}{\alpha^2}}, c = 2\mu$$
(۶۱-۳)

$$\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4A + \frac{8mV_1}{\alpha^2}}, v = i\sqrt{A(1 - d_0) + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}}$$

و بنابراین تابع موج یک هسته باپتانسیل منینگ-روزن به صورت زیر محاسبه می شود

(87-37)

$$\psi(\mathbf{x}) = N(1 - e^{-\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4A_{+}\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} (e^{-\alpha x})^{i\sqrt{A(1 - d_{0}) + \frac{2m(E - V_{1} + V_{2})}{\alpha^{2}}}}_{2}$$

$${}_{2}F_{1}(i\sqrt{A(1 - d_{0}) + \frac{2m(E - V_{1} + V_{2})}{\alpha^{2}}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4A_{+}\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}} + \sqrt{A(1 - d_{0}) + \frac{2m(E - V_{1} + V_{2})}{\alpha^{2}}},$$

$$i\sqrt{A(1 - d_{0}) + \frac{2m(E - V_{1} + V_{2})}{\alpha^{2}}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4A_{+}\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}} - \sqrt{A(1 - d_{0}) + \frac{2m(E - V_{1} + V_{2})}{\alpha^{2}}},$$

$$2i\sqrt{A(1 - d_{0}) + \frac{2m(E - V_{1} + V_{2})}{\alpha^{2}}} + 1; 1 - e^{-\alpha x})$$

پتانسیل دنگ-فان به صورت زیر می باشد [۷۳]

$$V_{Deng-Fan}(x) = V_0 + \frac{V_1}{(e^{\alpha x} - 1)} + \frac{V_2}{(e^{\alpha x} - 1)^2}$$
 (FT-T)

برای این پتانسیل هم تقریب پکریس و تغییر متغیر زیر اعمال می شود
$$-\alpha x$$

$$y = 1 - e^{-ax} \tag{9F-T}$$

بااعمال این تغییرات به معادله زیر می رسیم

[\]. Deng-Fan

$$\frac{d^2\psi(\mathbf{y})}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{d\psi(\mathbf{y})}{dy} + \frac{1}{y^2(1-y)^2} [(-Ad_0y^2 - Ay(1-y)) \qquad (\pounds \Delta - \Psi) -A(1-y)^2 + \frac{2mE}{\alpha^2}y^2 - \frac{2mV_0}{\alpha^2}y^2 - \frac{2mV_1}{\alpha^2}y(1-y) - \frac{2mV_2}{\alpha^2}(1-y)^2]\psi(\mathbf{y}) = 0$$

$$a = \mu + \nu + \sqrt{Ad_0 + \frac{2m(V_0 + V_2 - E)}{\alpha^2}}, b = \mu + \nu - \sqrt{Ad_0 + \frac{2m(V_0 + V_2 - E)}{\alpha^2}}, c = 2\mu (\mathcal{F}\mathcal{F} - \mathcal{T})$$
$$\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4(A + \frac{2mV_2}{\alpha^2})}, \nu = i\sqrt{Ad_0 - \frac{2m(E - V_0)}{\alpha^2}}$$

$$\begin{split} \psi(\mathbf{x}) &= N(1 - e^{-\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(A + \frac{2mV_2}{\alpha^2})}} e^{-\alpha i \sqrt{Ad_0 - \frac{2m(E - V_0)}{\alpha^2}x}} \\ {}_2 F_1(i \sqrt{Ad_0 - \frac{2m(E - V_0)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(A + \frac{2mV_2}{\alpha^2})} + \sqrt{Ad_0 + \frac{2m(V_0 + V_2 - E)}{\alpha^2}}, \quad (\clubsuit V - \r V) \\ i \sqrt{Ad_0 - \frac{2m(E - V_0)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(A + \frac{2mV_2}{\alpha^2})} - \sqrt{Ad_0 + \frac{2m(V_0 + V_2 - E)}{\alpha^2}}, \\ 1 \pm \sqrt{1 + 4(A + \frac{2mV_2}{\alpha^2})}; 1 - e^{-\alpha x}) \end{split}$$

از توابع موج به دست آمده در این بخش برای محاسبه پتانسیل برهمکنش و همچنین سطح مقطع پراکندگی در برهمکنش های مورد نظر در این رساله، در فصل بعد استفاده خواهد شد.

۳-۴-محاسبه سطح مقطع پراکندگی

به منظور مطالعه سیستم های کوانتوم مکانیکی، توجه به دو مساله، اساسی به نظر می رسد. این دو مساله حالات مقید و پراکنده سیستم تحت بررسی می باشند. حل این دو مساله اطلاعات مهمی راجع به سیستم کوانتوم مکانیکی تحت تاثیر پتانسیل به د ست می دهد. یکی از رو شهای برر سی حالت پراکندگی یک سیستم، روش پاره موجی می باشد.

۳-۴-۲-توضیح مختصر روش پاره موجی

در روش پاره موجی، یک موج تخت را به صورت مجموع موج های کروی و بر اساس توابع بسل و لژاندر بسط می دهند. بر این اساس موج ورودی را می توان به صورت زیر نوشت [۲۵–۷۴]

$$\varphi_{in}(r) = e^{ik \cdot r} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^l j_l(kr) \mathbf{P}_l(\cos\theta) \qquad (\text{FA-T})$$

اگر تابع بسل را بر حسب توابع نمایی به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\varphi_{in} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^{l} P_{l}(\cos\theta) \frac{e^{i(kr-l\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-l\frac{\pi}{2})}}{2ikr} \qquad (89-7)$$

موج خروجی را در این روش با اضافه کردن یک فاکتور η_i به موج ورودی می توان به صورت زیر نمایش داد [۲۵–۷۴]

$$\varphi_{out} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)i^{l} P_{l}(\cos\theta) \frac{\eta_{l} e^{i(kr-l\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-l\frac{\pi}{2})}}{2ikr} \quad (\forall \cdot -\forall)$$

فاکتور
$$\eta_l$$
 به صورت تابع نمایی از پارامتر فاز شیفت δ_l تعریف می شود $\eta_l = e^{2i\delta_l}$ (۷۱-۳)

با این تعریف، تابع موج پراکنده شده را می توان به صورت تفاضل موج ورودی از خروجی به شکل زیر نوشت

$$\varphi_{sc} = \varphi_{out} - \varphi_{in} = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(\cos\theta)(\eta_l - 1)\frac{e^{ikr}}{r} \quad (\forall \forall -\forall \forall d \in \mathcal{T})$$

با توجه به رابطه بالا دامنه پراکندگی به صورت زیر قابل استخراج می باشد

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(\cos\theta)(\eta_l - 1)$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(\cos\theta)e^{i\delta_l}\sin\delta_l$$
 (VT-T)

بنابراین سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی هم بر حسب دامنه پراکندگی به صورت زیر خواهد بود [۷۹-۷۴]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f(\theta) \right|^2 = f^*(\theta) f(\theta) \qquad (\forall \mathsf{F}-\mathsf{T})$$

با به کارگیری رابطه تعامد چند جمله ای های لژاندر به صورت زیر

$$\int d\Omega P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll} \qquad (\forall \Delta - \forall)$$

سطح مقطع کل با این روش، به صورت زیر قابل محاسبه می باشد [-۷۵] ۷۴]

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) Sin^2 \delta_l \qquad (\forall F-\forall)$$

در این رساله با استفاده از توابع موج به دست آمده برای هر هسته (با هر پتانسیل) ، سطح مقطع پراکندگی محاسبه می شود. نتایج محاسبه سطح مقطع پراکندگی در فصل بعد ارائه می شود.

فصل چهارم محاسبه پتانسیل برهمکنش و سطح مقطع پراکندگی

با توجه به این که شکل کلی تابع موج هسته در فصل قبل محاسبه شد اکنون می توانیم شکل دقیق تابع موج مربوط به هر هسته مورد نظر در این رساله را مشخص نماییم.

سه برهمکنش مختلف با پتانسیل های مختلف در این رساله بررسی می شود. دلیل انتخاب این برهمکنش ها کروی بودن هسته های شرکت کننده در واکنش می باشد که به این وسیله اثرات تغییر شکل هسته ها به محاسبات وارد نمی شود. این برهمکنش ها به صورت زیر می باشند

> ${}^{16}O + {}^{209}Bi$ ${}^{16}O + {}^{148}Nd$ ${}^{16}O + {}^{16}O$

¹⁶*O* -۱-۴-محاسبه تابع موج هسته

در این بخش شکل دقیق تابع موج هسته O^{16} را با پتانسیل های مختلف بررسی می کنیم.

۴–۱–۱ با پتانسیل یوکاوا (براساس روابط (۳–۴۲) و (۳–۴۳))

$$\psi(\mathbf{x}) = N(1 - e^{-2\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{4}}} e^{-2\alpha i\sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^2}}x}$$

$${}_{2}F_{1}(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{4}} + 2i\sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^2}}, \qquad (1-f)$$

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{4}}, 1 \pm \sqrt{1849 + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{4}}; 1 - e^{-2\alpha x})$$

$$\begin{split} \psi(\mathbf{x}) &= N(1 - e^{-\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43)}} e^{-\alpha i\left(\sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}}\right)x} \\ {}_{2}F_{1}\left(i\sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43)} + \frac{\sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12}} + \frac{2m(EV_{0} - 1)}{\alpha^{2}}}{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43)}} - \frac{\sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12}} + \frac{2m(EV_{0} - 1)}{\alpha^{2}}}{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43)}} - \sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12}} + \frac{2m(EV_{0} - 1)}{\alpha^{2}}}, \\ 2i\sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12}} - \frac{2mE}{\alpha^{2}}} + 1; 1 - e^{-\alpha x}) \end{split}$$

$$\begin{split} \psi(\mathbf{x}) &= N(e^{-2\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(2mV_0 - 462 - \gamma(\gamma + 43))}} (1 - e^{-2\alpha x})^{i \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{4\alpha^2}}} \\ {}_{2}F_{1}(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(2mV_0 - 462 - \gamma(\gamma + 43))} + i \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{4\alpha^2}} + \sqrt{\frac{2mE + 2mV_0(4\alpha^2 - 4\alpha + 1))}{4\alpha^2}}, \end{split}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(2mV_0 - 462 - \gamma(\gamma + 43))} + i \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{4\alpha^2}} - \sqrt{\frac{2mE + 2mV_0(4\alpha^2 - 4\alpha + 1))}{4\alpha^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1 + 2i \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{4\alpha^2}}; 1 - e^{-2\alpha x}) \end{aligned}$$

$$\begin{split} \psi(\mathbf{x}) &= N(1 - e^{-\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{849 + 4\gamma(\gamma + 43) + \frac{8mV_1}{\alpha^2}}} e^{-\alpha i(\sqrt{A(1 - d_0) + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}})x} \\ & {}_{2}F_{1}(i\sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43) + \frac{8mV_1}{\alpha^2}} \\ & +\sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}}, i\sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43) + \frac{8mV_1}{\alpha^2}} - \sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}}, \\ & 2i\sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}} + 1; 1 - e^{-\alpha x}) \end{split}$$

$$\begin{split} \psi(\mathbf{x}) &= N(1 - e^{-\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(462 + \gamma(\gamma + 43) + \frac{2mV_2}{\alpha^2})}} e^{-\alpha i \sqrt{Ad_0 - \frac{2m(E - V_0)}{\alpha^2}x}} \\ {}_2 F_1(i \sqrt{(\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12}) - \frac{2m(E - V_0)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(462 + \gamma(\gamma + 43) + \frac{2mV_2}{\alpha^2})} + (\Delta - F)} \\ \sqrt{(\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12}) + \frac{2m(V_0 + V_2 - E)}{\alpha^2}}, i \sqrt{(\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12}) - \frac{2m(E - V_0)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4(462 + \gamma(\gamma + 43) + \frac{2mV_2}{\alpha^2})} - \sqrt{(\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12}) + \frac{2m(V_0 + V_2 - E)}{\alpha^2}}, \\ 1 \pm \sqrt{1 + 4(462 + \gamma(\gamma + 43) + \frac{2mV_2}{\alpha^2})}; 1 - e^{-\alpha x}) \end{split}$$

شکل دقیق تابع موج هسته Bi²⁰⁹ با پتانسیل یوکاوا به صورت زیر می باشد

$$\psi(\mathbf{x}) = N(1 - e^{-2\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{383884 + \frac{\gamma(\gamma + 622)}{4}}} e^{-2\alpha i \sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^2}} x}$$

$${}_{2}F_{1}(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{383884 + \frac{\gamma(\gamma + 622)}{4}} + 2i\sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^2}},$$

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{383884 + \frac{\gamma(\gamma + 622)}{4}}, 1 \pm \sqrt{383884 + \frac{\gamma(\gamma + 622)}{4}}; 1 - e^{-2\alpha x})$$

شکل دقیق تابع موج هسته Nd¹⁴⁸N⁴ با پتانسیل هالسن به صورت زیر می باشد
$$\begin{split} \psi(\mathbf{x}) &= N(1 - e^{-\alpha x})^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}} e^{-\alpha i(\sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma+439)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}})x} {_{2}} F_{1}(i\sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma+439)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma+439)} + \sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma+439)}{12} + \frac{2m(EV_{0}-1)}{\alpha^{2}}}, \\ i\sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma+439)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^{2}}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma+439)} - \sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma+439)}{12} + \frac{2m(EV_{0}-1)}{\alpha^{2}}}, \\ 2i\sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma+439)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^{2}}} + 1; 1 - e^{-\alpha x}) \end{split}$$

(λ-۴)

(4-4)

$$\begin{split} V_{N}(\vec{R}, E_{P}) &= V_{ND}(\vec{R}, E_{P}) + V_{NE}(\vec{R}, E_{P}) \\ g(E_{P}) \int d\vec{r}_{1} \int d\vec{r}_{2} \rho_{1}(\vec{r}_{1}) \rho_{2}(\vec{r}_{2}) C\{1 + \alpha \exp(-\beta(\rho_{1}(\vec{r}_{1}) + \rho_{2}(\vec{r}_{2})))) \\ &- \gamma(\rho_{1}(\vec{r}_{1}) + \rho_{2}(\vec{r}_{2})))\} \sum_{i=1}^{3} G_{Di} \frac{\exp[-s/r_{Dvi}]}{[s/r_{Dvi}]} + \\ g(E_{P}) \int d\vec{r}_{1} \int d\vec{r}_{2} \rho_{1}(\vec{r}_{1} + \vec{s}/2) \hat{j}_{1}(|k_{eff}(\vec{r}_{1} + \vec{s}/2)|.\vec{s})) \\ &\rho_{2}(\vec{r}_{2} - \vec{s}/2) \hat{j}_{1}(|k_{eff}(\vec{r}_{2} - \vec{s}/2)|.\vec{s}) C\{1 + \alpha \exp(-\beta(\rho_{1}(\vec{r}_{1} + \vec{s}/2) + \rho_{2}(\vec{r}_{2} - \vec{s}/2)))) \\ &- \gamma(\rho_{1}(\vec{r}_{1} + \vec{s}/2) + \rho_{2}(\vec{r}_{2} - \vec{s}/2)))\} \sum_{i=1}^{3} G_{Ei} \frac{\exp[-s/r_{Evi}]}{[s/r_{Evi}]} \exp(ik_{rel}\vec{s}/A_{red}) \end{split}$$

$$\begin{cases} g(E_{p}) = 1 - k.(E_{lab}/A_{p}) \\ \hat{j}_{1}(x) = 3[\sin(x) - x\cos(x)]/x^{3} \\ k_{eff}^{2}(\vec{r}) = \left(\frac{3\pi^{2}\rho(\vec{r})}{2}\right)^{2/3} + \frac{5C_{s}}{3}\left(\frac{\vec{\nabla}\rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r})}\right)^{2} + \frac{5\nabla^{2}\rho(\vec{r})}{36\rho(\vec{r})} \quad (9-F) \\ k_{rel}^{2} = 2m_{n}A_{red}[E_{c.m.} - V_{lot}(R)]/\hbar^{2} \\ A_{red} = A_{p}A_{T}/(A_{p} + A_{T}) \end{cases}$$

توضيحات مربوط به كليه ضرايب در معادلات بالا در فصل دوم ارائه شد.

حال برای بررسی روش ارائه شده در این رساله، می بایست روابط مدل دابل فولدینگ را با توابع به دست آمده از حل معادله شرودینگر D بعدی، بررسی نمود. به این منظور برای هر کدام از برهمکنش های مورد نظر در این رساله، به صورت جداگانه پتانسیل برهمکنش هسته ای محاسبه می شود.

۴-۴-محاسبه پتانسیل برهمکنش

روابط به دست آمده برای پتانسیل های برهمکنش مستقیم، تبادلی و کل بخش هسته ای پتانسیل برهمکنش و بخش کولمبی برای همه برهمکنش های مورد نظر در این رساله، در ضمیمه گردآوری شده اند.

پتانسیل هسته ای مستقیم و تبادلی برای برهمکنش $Bi^{209}B^{i}$ را بر اساس روابط (الف-۲) و (الف-۳) از ضمیمه، به صورت عددی محاسبه کرده ایم که نتیجه محاسبات عددی در شکل (۴–۱) نمایش داده شده است. پتانسیل بخش تبادلی، هم در تقریب برد صفر هم در تقریب برد محدود، محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده اند.





سمت صفر میل می کنند. این مساله نشان می دهد که پتانسیل بخش تبادلی نسبت به پتانسیل بخش مستقیم و همین طور پتانسیل برد محدود نسبت به برد صفر جاذب تر است. بیشترین سهم وابستگی به چگالی و انرژی مربوط به بخش تبادلی است اما در ناحیه نزدیک سطح که چگالی همپوشانی به طور نمایی کاهش می یابد، سهم پتانسیل تبادل قابل مقایسه و حتی کمتر از پتانسیل مستقیم می شود. البته پتانسیل های مستقیم و تبادلی حتی در فواصل کوچک قدرت مشابهی دارند و قدرت پتانسیل تبادلی کاملا به انتخاب شکل نیروهای نوکلئون-نوکلئون وابسته است.

مقادیر عددی پتانسیل کولمبی برهمکنش برای برهمکنش $Bi^{209}Bi$ بر اساس رابطه (الف-۵) در شکل (۲–۴) نمایش داده شده است.



 $^{16}O+^{209}Bi$ شکل (۴–۲): پتانسیل برهمنکش کولمبی برای واکنش Bi

با توجه به این که پتانسیل کل برهمکنش مجموع پتانسیل های هسته ای و کولمبی می باشد، پتانسیل کل برهمکنش $Bi^{16}O^{+209}Bi$ بر اساس مقادیر پتانسیل هسته ای و کولمبی محاسبه شده و نتایج عددی آن در شکل (+) نمایش داده شده است.



شکل (۴–۳): پتانسیل کل برهمکنش محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته بر اساس فرمالیزم فوق کروی بر حسب فاصله بین دو هسته، در دستگاه مرکز جرم، برای واکنش $O^{16}O^{10} + O^{209}Bi$ در تقریب بردصفر و برد محدود.

با توجه به شکل (۴–۳) میبینیم که ارتفاع سد کولمبی برای مقادیر مربوط به تقریب برد صفر بیشتر است. ارتفاع سد کولمبی برای این تقریب در R=11fm مقدار ۸۱٬۰۹Mev را دارد و برای تقریب برد محدود در R= ۱۲٬۲۵fm را دارد. می بینیم که استفاده از محاسبات در برد محدود ارتفاع سد را به میزان قابل توجهی کاهش می دهد. ارتفاع سد با افزایش (کاهش) پتانسیل هسته ای جاذب، کاهش (افزایش) می یابد.

برای برهمکنش $Nd^{148}Nd^{16}$ پتانسیل هسته ای مستقیم و تبادلی را بر اساس روابط (الف-۶) و (الف-۷) به صورت عددی محاسبه کرده و در شکل (۴-۴) نمایش داده ایم. پتانسیل بخش تبادلی، هم در تقریب برد صفر هم در تقریب برد محدود محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده است. همچنین مقادیر پتانسیل کولمبی و پتانسیل برهمکنش کل در تقریب برد صفر و محدود محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده اند.



شکل (۴–۴): پتانسیل هسته ای مستقیم ، تبادلی، کولمبی و کل محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته بر اساس فرمالیزم فوق کروی بر حسب فاصله بین دو هسته، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب تقریب برد صفر و محدود برای واکنش $M^{-16}O$.

با توجه به شکل (۴-۴) می بینیم که نمودار مربوط به بخش مستقیم برهمکنش، مقادیر بزرگتری نسبت به مقادیر نمودار بخش تبادلی در هر نقطه دارد اما با شیب کمتری به سمت صفر میل می کند. شیب نمودار قسمت تبادلی برهمکنش در تقریب برد صفر بزرگتر است و مقادیر نمودار مربوط به تقریب برد محدود آهسته تر از مقادیر تقریب برد صفر به سمت صفر میل می کنند. این مساله نشان می دهد که پتانسیل بخش تبادلی نسبت به پتانسیل بخش مستقیم و همین طور پتانسیل برد محدود نسبت به برد صفر جاذب تر است. بیشترین سهم وابستگی به چگالی و انرژی مربوط به بخش تبادلی است اما در ناحیه نزدیک سطح که چگالی همیوشانی به طور نمایی کاهش می یابد، سهم پتانسیل تبادل قابل مقایسه و حتی کمتر از یتانسیل مستقیم می شود. البته یتانسیل های مستقیم و تبادلی حتی در فواصل کوچک قدرت مشابهی دارند و قدرت پتانسیل تبادلی کاملا به انتخاب شكل نيروهاى نوكلئون-نوكلئون وابسته است.

ارتفاع سد کولمبی برای مقادیر مربوط به تقریب برد صفر بیشتر است. ارتفاع سد کولمبی برای این تقریب در R= ۱۰٫۵ fm مقدار ۶۳٫۴ Mev را دارد در حالیکه برای تقریب برد محدود ارتفاع سد کولمبی در Rm ۱۱fm مقدار ۶۱٫۱۵ Mev

سد را کاهش می دهد. ارتفاع سد با افزایش (کاهش) پتانسیل هسته ای جاذب، کاهش (افزایش) می یابد.

حال به بررسی برهمکنش $O^{16} + O^{16}$ با پتانسیل های مختلف می پردازیم. برای پتانسیل یوکاوا پتانسیل هسته ای مستقیم و تبادلی برای برهمکنش $O^{16} + O^{16}$ را بر اساس روابط (الف-۹) و (الف-۱۰) به صورت عددی محاسبه کرده ایم که نتیجه عددی در شکل (۴–۵) نمایش داده شده است.



شکل (۴–۵): پتانسیل هسته ای مستقیم ، تبادلی و کل محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته، بر اساس فرمالیزم فوق کروی بر حسب فاصله بین دو هسته، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب تقریب برد محدود برای واکنش $O^{-16} - O^{-16}$. با توجه به شکل (۴–۵) می بینیم نمودار بخش مستقیم پتانسیل برهمکنش،

مقادیر بیشتری دارد و با شیب کمتری نسبت به نمودار بخش تبادلی به سمت صفر میل می کند. همچنین مقادیر پتانسیل برهمکنش هسته ای کل، آهسته تر از مقادیر بخش تبادلی به سمت صفر میل می کنند.

این مساله نشان می دهد که پتانسیل بخش تبادلی نسبت به پتانسیل بخش مستقیم جاذب تر است. بیشترین سهم وابستگی به چگالی و انرژی مربوط به بخش تبادلی است اما در ناحیه نزدیک سطح که چگالی همپوشانی به طور نمایی کاهش می یابد، سهم پتانسیل تبادل قابل مقایسه و حتی کمتر از پتانسیل مستقیم می شود. البته پتانسیل های مستقیم و تبادلی حتی در فواصل کوچک قدرت مشابهی دارند و قدرت پتانسیل تبادلی کاملا به انتخاب شکل نیروهای نوکلئون-نوکلئون وابسته است.

نتایج عددی محاسبه پتانسیل کولمبی و پتانسیل کل برای برهمکنش $O^{16} + O^{16}$ با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته بر اساس فرمالیزم فوق کروی بر حسب فاصله بین دو هسته، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب تقریب برد محدود در شکل (P-P) نمایش داده شده است.





با توجه به شکل (۴–۶) می بینیم که ارتفاع سد کولمبی در R = ۵ fm مقدار ۲۰٫۴ Mev را دارد. ارتفاع سد با افزایش (کاهش) پتانسیل هسته ای جاذب ،کاهش (افزایش) می یابد.

نتایج عددی پتانسیل هسته ای برای برهمکنش O⁻¹⁶ + O¹⁶ با پتانسیل های مختلف در شکل (۴–۲) با هم مقایسه شده اند.



شکل (۴–۲): پتانسیل هسته ای محا سبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته بر اساس فرمالیزم فوق کروی بر حسب فا صله بین دو هسته، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب تقریب برد محدود برای واکنش $O^{16} + O^{16}$ با پتانسیل های یوکاوا، هالسن، یوکاوا-فرم، منینگ-روزن و دنگ فان.

با توجه به شکل (۴–۷) می بینیم که نمودار مربوط به پتانسیل یوکاوا مقادیر بزرگتری نسبت به دیگر پتانسیل ها در هر نقطه دارد و با شیب کمتری به سمت صفر میل می کند و نمودار مربوط به پتانسیل های دیگر آهسته تر به سمت صفر میل می کند. این مساله نشان می دهد که پتانسیل منینگ-روزن نسبت به بقیه پتانسیل ها جاذب تر و پتانسیل یوکاوا نسبت به بقیه پتانسیل ها دافع تر است. قدرت جذب یا دفع سایر پتانسیل ها نیز بین این دو پتانسیل قرار می گیرد. اما در ناحیه نزدیک سطح که چگالی همپوشانی به طور نمایی کاهش می یابد، سهم همه پتانسیل ها با هم قابل مقایسه می شود.

هم چنین نتایج عددی پتانسیل کل برای برهمکنش O⁻¹⁶O + ¹⁶O با پتانسیل های مختلف در شکل (۴–۸) با هم مقایسه شده اند.



شکل (۴–۸): پتانسیل برهمکنش کل محاسبه شده با استفاده از تابع به دست آمده برای هسته، در دستگاه مرکز جرم، بر حسب تقریب برد محدود برای واکنش $O^{16} + O^{16}$ با پتانسیل های یوکاوا ، هالسن، یوکاوا-فرم، منینگ-روزن و دنگ فان.

با توجه به شــکل (۸–۴) می بینیم که ارتفاع ســد کولمبی برای نمودار مربوط به پتانسـیل دنگ-فان در R= ۷٫۷ fm مقدار ۱۶٫۶۰۵ Mev ، برای پتانسـیل منینگ-روزن در R ۸ fm مقدار ۱۶٫۵۷۶ Mev ، برای پتانسـیل fm یوکاوا در R ۵ fm مقدار ۲۰٫۴ Mev ، برای پتانسـیل هالســن در fm مقدار ۱۹٫۲۷۱ Mev مقدار پتانسـیل یوکاوا-فرم در R= ۶٫۸ fm مقدار ۱۹٫۲۷۱ Mev و برای پتانسـیل یوکاوا-فرم در R= ۶٫۸ fm مقدار ۱۹٫۳۵۱ Mev و برای پتانسـیل یوکاوا-فرم در آ مقدار ۱۹٫۳۵۱ Mev مقدار ما دارد. ارتفاع سد با افزایش (کاهش) پتانسیل هسته ای جاذب، کاهش (افزایش) می یابد. با توجه به این نتایج می بینیم که ارتفاع و مکان سد کولمبی برای برهمکنش $O^{1+}O^{1+}$ با پتانسیل هالسن و یوکاوا-فرم در توافق بهتری با تحقیقات پیشین می باشد [۸۷–۷۷].

4-۵-بررسی سطح مقطع پراکندگی با استفاده از خواص توابع فوق هندسی

سطح مقطع یک واکنش، احتمال رویداد آن واکنش را نشان می دهد. بنابراین سطح مقطع پراکندگی نشاندهنده ی احتمال رویداد پراکندگی دو هسته برهمکنش کننده می باشد. روش دابل فولدینگ به طور گسترده ای به وسیله گروه های مختلف تحقیقاتی، در شرح پراکندگی یونهای سبک و به وسیله گروه های مختلف تحقیقاتی، در شرح پراکندگی یونهای سبک و سنگین استفاده شده است [۲۹] به طور مثال بررسی پراکندگی $\alpha + {}^{12}C$ در Mev مقطع پراکندگی $C + {}^{12}C$ $^{16}O + ^{16}O$ [۲۲–۲۲] که با توجه به مساله تراکم ناپذیری هسته ای بررسی شده، این مرجع می تواند مورد علاقه کیهانشناسان باشد [۸۸] ، بررسی پراکندگی الاستیک و $^{6}Li + ^{28}Si$ [۸۳–۸۲] ، مطالعه پراکندگی الاستیک و سطح مقطع پراکندگی برای سیستم های با قید ضعیف [۵۸] ، اندازه گیری سطح مقطع پراکندگی برای سطح مقطع کل با مطح مقطع پراکندگی و اثر یک نوترون اضافی در پرتابه Be از هدف ^{6}Zn] ، تاثیر پلاریزاسیون دو قطبی بر سطح مقطع پراکندگی در هده مطح پراکندگی و اثر یک و از هدف اضافی مقطع پراکندگی و اثر یک نوترون اضافی مطح مقطع پراکندگی و اثر یک نوترون اضافی مقطع پراکندگی در هالو هسته ها از هدف ^{6}Zn] ، تاثیر پلاریزاسیون دو قطبی بر سطح مقطع پراکندگی در هالو هسته ها و ...

در این بخش با استفاده از دو ویژگی توابع فوق هندسی به بررسی فاز شیفت و سطح مقطع پراکندگی می پردازیم.

هر تابع فوق هندسی $F_1(a,b,c;x)$ را می توان به صورت زیر در نظر گرفت [۵۳]

$$2^{F_{1}(a,b,c;x)} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} 2^{F_{1}(a,b;a+b-c+1;1-x)} + (\Upsilon \Upsilon - \Upsilon)$$

$$(1-x)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} 2^{F_{1}(c-a,c-b;c-a-b+1;1-x)}$$

هم چنین تابع فوق هندسی گوسی در صفر مقدار ۱ دارد ۲.(*a,b,c*;0)=1 (۳۴-۴)

به این ترتیب برای پتانسیل های یوکاوا و یوکاوا-فرم قسمت فوق هندسی تابع موج کل با توجه به روابط (۴–۳۳) و(۴–۳۴) به صورت زیر خواهد بود

$$2^{F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x})} = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} 2^{F_{1}(a,b;a+b-c+1;e^{-2\alpha x})} + (\Upsilon\Delta-\Upsilon)$$

$$(e^{-2\alpha x})^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} 2^{F_{1}(c-a,c-b;c-a-b+1;e^{-2\alpha x})}$$

[۹۰] از معادله های (۳–۳) و (۵۵–۵۵) ، روابط زیر قابل استخراج هستند $a+b-c = (c-a-b)^*$ $a = (c-b)^*$ (۳۶-۴) $b = (c-a)^*$

نماد * نشاندهنده همیوغ مختلط یک کمیت می باشد. بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \left(\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\right)^* \tag{(4.17)}$$

طرف راست رابطه بالا را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} = \left| \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right| e^{i\delta}$$
(٣٨-٤)

که
$$\delta$$
 یک عدد حقیقی می باشد.

به این ترتیب طرف چپ رابطه (۴–۳۷) را هم می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \left| \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right| e^{-i\delta}$$
(٣٩-4)

برای ساده سازی از تغییر متغیر زیر برای ضریب V استفاده می کنیم $v = ik_{\gamma}$ (۴۰-۴)

حال حالت مجانبی تابع رابطه (۴–۳۵) را در x های بزرگ بررسی می کنیم [۹۱–۹۰]

$${}_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2ax}) \rightarrow \left\{ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}e^{4ik\gamma\alpha x} \right\}^{(f_{1}-f_{1})}$$

(47-4)

$$\begin{split} \psi(\mathbf{x} \to \infty) &\to N\Gamma(c) \left| \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right| \left(e^{-i(2k_{\gamma}\alpha x - \delta)} + e^{i(2k_{\gamma}\alpha x - \delta)} \right) \\ &= 2N\Gamma(c) \left| \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right| \cos(2k_{\gamma}\alpha x - \delta) \\ &= 2N\Gamma(c) \left| \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right| \sin(\delta - 2k_{\gamma}\alpha x + \frac{\pi}{2}) \end{split}$$

با توجه به شرط مرزی کلی برای تابع موج حالت پراکندگی (در این رابطه
$$arphi$$
 تابع موج حالت پراکندگی و δ_{γ} فاز شیفت حالت پراکندگی می باشد) $arphi$

$$\varphi(\mathbf{x} \to \infty) = 2\sin(k_{\gamma}x - \frac{\pi}{2}\gamma + \delta_{\gamma}) \qquad (\mathbf{f}\mathbf{r} - \mathbf{f})$$

و مقایسه با رابطه (۴–۴۱) می توان فاز شیفت پراکندگی را به صورت زیر محاسبه نمود [۹۱–۹۰]

$$\delta_{\gamma} = \frac{\pi}{2}(\gamma + 1) + \arg\Gamma(c - a - b) - \arg\Gamma(c - a) - \arg\Gamma(c - b) \quad (\text{ff-f})$$

همانطور که مشاهده می شود به دلیل وابستگی ضرایب a و b و c به E (انرژی) و γ (تکانه زاویه ای بزرگ)، کمیت فاز شیفت به انرژی و تکانه زاویه ای بزرگ وابسته است.

به طریق مشابه برای پتانسیل های هالسن، منینگ-روزن و دنگ-فان، قسمت فوق شعاعی تابع موج به صورت زیر می باشد

$$\begin{split} & {}_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha x}) \!=\! \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_{2}F_{1}(a,b;a+b-c+1;e^{-\alpha x}) + \\ & (e^{-\alpha x})^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_{2}F_{1}(c-a,c-b;c-a-b+1;e^{-\alpha x}) \end{split}$$

با توجه به روابطه (۴۹–۳)، (۴۹–۳) و (۶۱–۶۹) در مورد این پتانسیل ها نیز رابطه زیر در مورد ضرایب تابع موج برقرار است $a+b-c = (c-a-b)^*$ $a = (c-b)^*$ (۴۶-۴) $b = (c-a)^*$

بنابراین رابطه (۴–۳۹) در مورد این توابع نیز صدق می کنند و با استفاده از تغییرمتغیر رابطه (۴–۴۰)، حالت مجانبی تابع رابطه (۴–۴۵) در x های بزرگ به صورت زیر خواهد بود

$${}_{2} \operatorname{F}_{1}(a, b, c; 1-e^{-\alpha x}) \to \Gamma(c) \left\{ \left| \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right| (e^{i\delta} + e^{-i(2k_{y}x+\delta)}) \right\} \quad (\texttt{fV-f})$$

بر اساس این رابطه و روابط (۳–۴۹)، (۳–۶۱) و (۳–۶۶) تابع موج کل به صورت زیر خواهد بود

(4/-4)

(40-4)

$$\psi(\mathbf{x} \to \infty) \to N\Gamma(c) \left| \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right| \left(e^{i(k_{\gamma}x+\delta)} + e^{-i(k_{\gamma}x+\delta)} \right)$$
$$= 2N\Gamma(c) \left| \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right| \cos(k_{\gamma}x+\delta)$$
$$= 2N\Gamma(c) \left| \frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \right| \sin(\delta + k_{\gamma}x + \frac{\pi}{2})$$

با مقایسه این رابطه با تابع موج کلی حالت پراکندگی رابطه (۴–۴۳) ، رابطه
زیر برای فاز شیفت به دست می آید [۹۰–۹۰]
$$\delta_{\gamma} = \frac{\pi}{2}(\gamma+1) + \arg\Gamma(c-a-b) - \arg\Gamma(c-a) - \arg\Gamma(c-b)$$
 (۴۹–۴)
(۴۹–۴) بر اساس روابطه به دست آمده برای فاز شیفت و نیز با توجه به رابطه (۳–
بر اساس روابطه به دست آمده برای فاز شیفت و نیز با توجه به رابطه (۳–
(۳– ۵)) سطح مقطع پراکندگی کل را با رابطه زیر می توان محاسبه نمود
(۳– $\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2\gamma+1) \sin^2(\frac{\pi}{2}(\gamma+1) + \arg\Gamma(c-a-b)$

$$-\arg\Gamma(c-a) - \arg\Gamma(c-b))$$



شکل (۴-۹): مقایسه نتایج عددی سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی حاصل از به کارگیری فرمالیزم فوق کروی برای محاسبه تابع موج هسته بر حسب زاویه پراکندگی در تقریب برد صفر و محدود برای برهمکنش $B^{209} + 0^{16}$. خط با نقاط دایره ای مربوط به انرژی ۸۴ Mev در تقریب برد محدود، خط با نقاط مربعی مربوط به انرژی ۹۰ Mev در تقریب برد محدود، خط با نقاط مثلثی رو به بالا مربوط به انرژی ۸۰ Mev در تقریب برد صفر و خط با نقاط مثلثی رو به پایین مربوط به

با توجه به شکل (۴–۹)، سطح مقطع در هر دو انرژی ۸۴ Mev و ۹۰ Mev در تقریب برد صفر مقادیر بزرگتری دارد در حالیکه برای تقریب برد محدود مقادیر به هم نزدیکترند و در E= ۹۰ Mev نمودار شیب بیشتری دارد.



شکل (۴–۱۰): مقایسه نتایج عددی سطح مقطع پراکندگی بر حسب سطح مقطع رادرفورد حاصل از به کارگیری فرمالیزم فوق کروی برای محاسبه تابع موج هسته بر حسب زاویه پراکندگی در تقریب برد صفر و محدود برای برهمکنش M¹⁴⁸ H⁰ ب¹⁶ با داده های تجربی سطح مقطع پراکندگی در انرژی ۹۰٫۹ Mev [۹۲]. خط با نقاط دایره ای مربوط به تقریب برد صفر، خط با نقاط مثلثی مربوط به تقریب برد محدود و خط با نقاط مربعی مربوط به داده های تجربی می باشد. با توجه به شــکل (۴–۱۰) می بینیم که مقادیر سـطح مقطع مربوط به تقریب برد محدود در حالت کلی توافق بهتری با داده های تجربی دارد. البته در نقاط محدودی مقادیر مربوط به تقریب برد صفر در توافق بهتری با داده های تجربی می باشند.



شـکل (۴–۱۱): مقایسـه نتایج عددی سـطح مقطع پراکندگی بر حسـب سـطح مقطع رادرفورد حاصـل از به کارگیری فرمالیزم فوق کروی برای محاسـبه تابع موج هسـته در تقر یب برد محدود برای برهمکنش ¹⁶O⁺¹⁶ با داده های تجربی سـطح مقطع پراکندگی در انرژی ۱۲۴ Mev [۹۳]. خط با نقاط دایره ای مربوط به محاسـبات انجام شده و خط با نقاط مربعی مربوط به داده های تجربی می باشد. با توجه به شکل (۴–۱۱)، مقادیر سطح مقطع محا سبه شده توافق نسبتا خوبی را به خصوص در زوایای کوچکتر از ۴۰ درجه با داده های تجربی نشان می دهند.



شکل (۴–۱۲): مقایسه نتایج عددی سطح مقطع پراکندگی با استفاده از تابع موج هسته با پنج نوع پتان سیل کوتاه برد در تقریب برد محدود برای برهمکنش $O^{-1} + O^{-10}$ با داده های تجربی سطح مقطع پراکندگی در انرژی Mev ۱۲۴ [۹۳] . خط با نقاط دایره ای مربوط به پتانسیل یوکاوا ، خط با نقاط مثلث رو به بالا مربوط به پتانسیل هالسن، خط با نقاط مثلث رو به پایین مربوط به پتانسیل یوکاوا-فرم، خط با نقاط لوزی مربوط به پتانسیل دنگ-فان، خط با نقاط مثلث رو به سمت چپ مربوط به پتانسیل منینگ- با توجه به شکل (۴–۱۲) می بینیم که تفاوت مهمی در نتایج سطح مقطع پراکندگی برای پنج پتانسیل مختلف به کار رفته مشاهده نمی شود. به نظر می ر سد که در نظر گرفتن پتانسیل های مختلف در این ر ساله اثر مهمی در محاسبه سطح مقطع پراکندگی در بازه مورد بررسی ندارد و درنظر گرفتن هر یک از آنها نتیجه تقریبا مشابهی با سایر پتانسیل ها در محاسبه مقادیر سطح مقطع ایجاد می کند. علت مقایسه پتانسیل های مختلف در این رساله، یافتن بهترین نوع پتانسیل برای بررسی هسته می باشد که ظاهرا با توجه به محاسبات این رساله، رفتار پنج نوع پتانسیل انتخابی تفاوتی نداشت.

۴-۶-جمع بندی

در این رساله پتانسیل برهمکنش بین دو هسته برای واکنش های در این رساله پتانسیل برهمکنش بین دو هسته برای واکنش های $^{16}O^{+}^{209}Bi$ و $^{16}O^{+}^{16}O^{+}^{10}$ با استفاده از توابع موج هسته ها محاسبه شده است. هدف این محاسبات ارزیابی توابع موج D بعدی محاسبه شده برای هسته، با استفاده از فرمالیزم فوق کروی می باشد. پتانسیل برهمکنش بین دو هسته به روش دابل فولدینگ محاسبه شده است. این روش پتانسیل برهمکنش را با استفاده از چگالی های توزیع

نوکلئونی هسته های شرکت کننده در واکنش محا سبه می کند. روش به کار گرفته شده در این رساله استفاده از رابطه $| * \psi \psi |$ بر حسب تابع موج D بعدی هسته به جای چگالی توزیع نوکلئونی آن در محاسبه پتانسیل برهمکنش به روش دابل فولدینگ می باشد. همچنین وابستگی به مربع تابع موج در برهمکنش نوکلئون-نوکلئون مورد استفاده در انتگرال های دابل فولدینگ نیز لحاظ شده است. ضمنا نتایج پتانسیل برهمکنش بخش

تبادلی در تقریب برد محدود و صفر مورد مقایسه قرار گرفته است. محاسبات با پنج پتانسیل مختلف کوتاه برد یوکاوا، هالسن، یوکاوا-فرم، منینگ-روزن و دنگ فان انجام شده اند، تابع موج هر ه سته با هر کدام از پتانسیل ها محاسبه شده و پتانسیل برهمکنش مربوط به هر واکنش مورد نظر با پتانسیل دلخواه، به روش دابل فولدینگ محاسبه شده است. محاسبات عددی مربوط به پتانسیل برهمکنش کولمبی، هسته ای و کل

برای برهمکنش های مذکور با پتانسیل های مختلف ارائه شـده و با هم مقایسه شده اند.

همانطور که در شـکل های (۴–۱) تا (۴–۸) دیده می شـود، اسـتفاده از برهمکنش وابسته به چگالی و در تو صیف برد محدود در مقایسه با تقریب برد صفر و برهمکنش مستقل از چگالی، ارتفاع سد همجو شی را به مقدار قابل توجهی کاهش می دهد که با توجه به نتایج موجود می توان نتیجه گرفت که روش به کار گرفته شده در این ر ساله یعنی ا ستفاده از فرمالیزم فوق کروی برای محاسبه تابع موج هسته و سپس محاسبه پتانسیل برهمکنش به روش دابل فولدینگ برا ساس توابع موج محا سبه شده، در به د ست آمدن نتایجی نزدیک به داده های آزمایشگاهی موفق عمل می کند. هم چنین مکان و ارتفاع سد کولمبی در واکنش $O^{-1} + O^{-1}$ برای پتانسیل

های هالسن و یوکاوا-فرم توافق بهتری با نتایج کارهای پیشین دارد. با توجه به نتایج کلی که در شکل های (۴–۹) تا (۴–۱۲) ارائه شد، سطح مقطع پراکندگی کل که در این ر ساله بر اساس محاسبات پتانسیل کل به روش جایگزینی توابع موج محاسبه شده برای هسته بر مبنای فرمالیزم فوق کروی با برهمکنش وابسته به چگالی و در توصیف برد محدود به دست آمد، برای هر سه واکنش، نسبت به تقریب برد صفر و برهمکنش مستقل از چگالی، توافق نسبتا خوبی را با داده های تجربی نشان می دهد. گرچه این توافق در بعضی زوایا چشم گیرتر می باشد، اما در سایر نقاط نیز توافق نسبتاً قابل قبولی دارد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که جایگزینی چگالی های توزیع نوکلئونی هسته ها با توابع موج آنها در محاسبات دابل فولدینگ، نتایج قابل قبولی در محاسبات پتانسیل در برهمکنش ها ارائه می کند.

اما در مورد واکنش $O^{16} + O^{16}$ با توجه به شکل (۴–۱۲) ، اختلاف قابل توجهی در مقادیر سطح مقطع پراکندگی برای پنج پتانسییل مختلف مشاهده نشد. به نظر می رسد که در نظر گرفتن پتانسیل های مختلف ذکر شده در این رساله، تاثیر چندانی در محاسبه سطح مقطع کل پراکندگی در بازه مورد بررسی ندارد به طوریکه در نظر گرفتن هر کدام از پتانسیل های مذکور نتایج تقریبا مشابهی در مقادیر سطح مقطع ایجاد می کند. البته این موضوع به علت تقریب های به کار گرفته شده برای حل معادله فوق شعاعی شرودینگر می باشد. با در نظر گرفتن تقریب هایی مانند پکریس همه پتانسیل ها رفتار مشابه پتانسیل کولنی دارند و بنابراین رفتار مشابه در

پیش بینی می شود تفاوت مقادیر آزمایشگاهی با نتایج حاصل از این محاسبات در بعضی زوایا، ناشی از درنظرنگرفتن اثرات موضعی در این محاسبات باشد. درنظرگرفتن این اثرات، انتگرال دابل فولدینگ را بسیار پیچیده و محاسبات را وقت گیر می سازد. اثرات ناشی از تراکم ناپذیری هسته نیز که با تولید یک نیروی دافعه، از منفی شدن پتانسیل در فواصلی که ه سته ها به طور کامل همپو شانی می کنند جلوگیری می کند، نیز در محا سبات نادیده گرفته شده است. این مسئله نیز می تواند یکی از دلایل اختلافات موجود میان نتایج روش ارائه شـده در این رسـاله و داده های آزمایشگاهی باشد.

بنابراین با درنظر گرفتن این اثرات و تصحیحات بیشتر، احتمالاً می توان اختلافات موجود میان مقادیر سطح مقطع کل محاسبه شده و داده های آزمایشگاهی را تا حد زیادی مرتفع نمود. این مساله می تواند موضوع پروژه های تحقیقاتی در ادامه این رساله باشد.

الف- پيوست

الف-1–محاسبه پتانسیل برهمکنش Bi Bi با پتانسیل یوکاوا (بر اساس روابط مربوط به توابع موج محاسبه شده برای ^{16}O و Bi و Bi

با توجه به روابط (۴–۸) و (۴–۹) پتانسیل هسته ای کل به صورت زیر محاسبه می شود

(الف-۱)

$$\begin{aligned} V_{N({}^{ib}O^{+209}Bi)}(\vec{R}, E_{p}) &= V_{ND({}^{1b}O^{+}2^{209}Bi)}(\vec{R}, E_{p}) + V_{NE({}^{1b}O^{+}2^{209}Bi)}(\vec{R}, E_{p}) \\ g(E_{p}) \int d\vec{r}_{1} \int d\vec{r}_{2} \rho_{1}(\vec{r}_{1}) \rho_{2}(\vec{r}_{2}) C\{1 + \alpha \exp(-\beta(\rho_{1}(\vec{r}_{1}) + \rho_{2}(\vec{r}_{2})))) \\ &- \gamma(\rho_{1}(\vec{r}_{1}) + \rho_{2}(\vec{r}_{2})))\} \sum_{i=1}^{3} G_{D_{i}} \frac{\exp[-s/r_{D_{i'}}]}{[s/r_{D_{i'}}]} + \\ g(E_{p}) \int d\vec{r}_{1} \int d\vec{r}_{2} \rho_{1}(\vec{r}_{1} + \vec{s}/2) \hat{j}_{1}(|k_{eff}(\vec{r}_{1} + \vec{s}/2)|\vec{s}) \rho_{2}(\vec{r}_{2} - \vec{s}/2) \hat{j}_{1}(|k_{eff}(\vec{r}_{2} - \vec{s}/2)|\vec{s}) \\ C\{1 + \alpha \exp(-\beta(\rho_{1}(\vec{r}_{1} + \vec{s}/2) + \rho_{2}(\vec{r}_{2} - \vec{s}/2))) - \gamma(\rho_{1}(\vec{r}_{1} + \vec{s}/2) + \rho_{2}(\vec{r}_{2} - \vec{s}/2)))\} \sum_{i=1}^{3} G_{E_{i}} \frac{\exp[-s/r_{E_{i'}}]}{[s/r_{E_{i'}}]} \exp(ik_{rel}\vec{s}/A_{red}) \end{aligned}$$

اندیس های ۱ و ۲ مربوط به هسته اول و دوم می باشد. با توجه به توابع به دست آمده بر اساس روابط (4 - 1) = (4 - 8) + 100 و (4 - 8) + 100 و (1 - 8) + 100 و (1 - 1) = (1 - 1) براساس رابطه و تبادلی پتانسیل هسته ای برای برهمکنش $Bi = O^{-10} + 100$ براساس رابطه (الف-۱) با دو رابطه زیر محاسبه خواهد شد

$$(\Upsilon - i))$$

$$V_{_{ND}(^{16}a_{*} \rightarrow m_{B})}(\bar{R}, E_{p}) = g(E_{p}) \int d\bar{x}_{1} \int d\bar{x}_{2} \left| N^{2}(1 - e^{-2\alpha x_{1}})^{1 \pm \sqrt{4\pi a_{1} + \sqrt{4\pi a_{2} + \sqrt{4\pi a_{2}$$

$$\begin{split} & V_{x_{E}|_{\alpha_{0},..,\alpha_{B}|}}(\vec{k},E_{r}) = g(E_{r}) \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \\ & N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))] \\ & N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} (_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))] \\ & \tilde{J}_{1}(k_{\sigma}'(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)|\vec{s})J_{1}(k_{\sigma}'(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)|\vec{s}) \\ & C(1+\alpha\exp(-\beta q) N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))] \\ & + |N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))] \\ & - \gamma(C(1+\alpha\exp(-\beta q) N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))]] \\ & + |N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))]] \\ & + |N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))]] \\ & + |N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))]] \\ & + |N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))]] \\ & + |N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)}))]] \\ & + |N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{4\pi} \int_{\text{BSS},\frac{7(r+47)}{4}} [(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}-\vec{s}/2)})]] \\ & + |N^{2}(1-e^{-2\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)$$

به طوریکه

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1849 + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{4}} + 2i \sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^2}} \\ b = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1849 + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{4}} \\ a' = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{383884 + \frac{\gamma(\gamma + 622)}{4}} + 2i \sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^2}} \\ b' = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{383884 + \frac{\gamma(\gamma + 622)}{4}} \end{cases}$$

برای محاسبه پتانسیل کل برهمکنش، به محاسبه پتانسیل کولمبی برهمکنش نیاز داریم. معادله مربوط به پتانسیل کولمبی برهمکنش به صورت زیر می باشد [۷۶]

$$V_{C}(\vec{R}) = \int d\vec{r_{1}} \int d\vec{r_{2}} \rho_{1}(\vec{r_{1}}) \rho_{2}(\vec{r_{2}}) \frac{Z_{1}Z_{2}e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{r}$$
(field)

برای محاسبه پتانسیل کولمبی برهمکنش با استفاده از توابع به دست آمده بر اساس فرمالیزم فوق کروی، رابطه بالا را به صورت زیر بازنویسی می کنیم (الف-۵)

$$\begin{split} &V_{c(^{16}O_{+},^{50}B_{B})}(\vec{R}) = \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{1} \frac{Z_{1}Z_{2}e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{R} \\ & \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{1}})^{12\sqrt{|849+\frac{r(r+43)}{4}|}} [(_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}})] \right| \\ & \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{|849+\frac{r(r+43)}{4}|}} (_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}})) \right| \\ & C\{1+\alpha\exp(-\beta c \Big| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{1}})^{12\sqrt{|849+\frac{r(r+43)}{4}|}} (_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \Big| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{|8384+\frac{r(r+42)}{4}|}} (_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \Big| \right) \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{|8384+\frac{r(r+42)}{4}|}} (_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \Big| \right) \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{|83884+\frac{r(r+42)}{4}|}} (_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}})) \Big| \right) \right\} \end{split}$$

الف $-\Upsilon$ – محاسبه پتانسیل برهمکنش Nd الف $-\Upsilon$ با پتانسیل هالسن (بر اساس روابط مربوط به توابع موج محاسبه شده برای ^{16}O و Nd با پتانسیل هالسن (روابط (۲–۲) و (۲–۲)))

با توجه به رابطه (۸–۴) و نیز توابع به دست آمده بر اساس روابط (۴–۲) و (۷–۴) برای O^{16} و $Nd^{148}Nd$ بخش مستقیم و تبادلی پتانسیل هسته ای برای برهمکنش O^{16} با دو رابطه زیر محاسبه خواهد شد

(لف-۶)

$$\begin{split} & V_{ND(^{^{16}O_{1}+^{168}Nd)}}(\vec{R}, E_{p}) = g(E_{p}) \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{1}})^{1 \pm \sqrt{849 + 4\gamma(\gamma + 439)}} [(_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha X_{1}})] \right| \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right| \\ & C\{1 + \alpha \exp(-\beta \left(N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{1}})^{1 \pm \sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c; 1 - e^{-\alpha X_{1}})) \right] + \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c; 1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right|)) - \\ & \gamma(C\{1 + \alpha \exp(-\beta \left(N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{1}})^{1 \pm \sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 439)}} [(_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))] \right) + \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right| \right) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right| \right) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right| \right) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right| \right) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right| \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right| \right| \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{1 \pm \sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha X_{2}}) \right| \\ & + \left| N$$

$$\begin{split} & V_{\text{NE}(^{\text{H}_{O_{1}}\text{tria}_{\text{NE}})}(\vec{R}, E_{p}) = g(E_{p}) \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{1} + \vec{x}/2)})^{1:\sqrt{589+4\gamma(\gamma+43)}} [(_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{1} + \vec{x}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{1} + \vec{x}/2)}))] \right| \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{x}/2)})^{1:\sqrt{52721+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{x}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{x}/2)})) \right| \\ & \int_{1}^{1} \langle |\xi_{d''}(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)|^{2} \cdot \hat{J}_{1}^{*} \langle |\xi_{d''}(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)| \cdot \vec{s} \rangle \\ & C\{1 + \alpha \exp(-\beta q \Big| N^{2} (1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{52721+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)})) (_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)})) | + \\ & + |N^{2} (1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{52721+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) (_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) |) - \\ & \gamma(C\{1 + \alpha \exp(-\beta q \Big| N^{2} (1 - e^{-2\mathcal{A}(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{539+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) (_{2}F_{1}^{*}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\mathcal{A}(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)}) |) | \\ & + |N^{2} (1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{52721+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) (_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-2\mathcal{A}(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)}) |] \\ & + |N^{2} (1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{52721+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) (_{2}F_{1}^{*}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}) |]) |] \\ & + |N^{2} (1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{52721+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a', b', c'; 1 - e^{-\mathcal{A}(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) |]) |] \\ & \sum_{i=1}^{3} G_{E_{i}} \frac{\exp[(i - \beta_{i} - \beta_{i$$

$$a = i\sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43)} + \sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}}$$
(Y-ide)

$$b = i\sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43)} - \sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}}$$
(Y-ide)

$$c = 2i\sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + 1$$

$$a' = i\sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma + 439)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)} + \sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma + 439)}{12} + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}}$$
(Y-ide)

$$b' = i\sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma + 439)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)} - \sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma + 439)}{12} + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}}$$
(Y-ide)

$$b' = i\sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma + 439)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{192721 + 4\gamma(\gamma + 439)} - \sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma + 439)}{12} + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}}$$
(Y-ide)

$$c' = 2i\sqrt{4015 + \frac{\gamma(\gamma + 439)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + 1$$

$$- ido (1-ido) - \frac{16O}{\alpha} + \frac{148}{2}Nd$$

$$j = 0$$

$$(1-ido) - j = 0$$

(الف–۸)

$$\begin{split} &V_{c(^{16}o_{+}^{148})d}(\vec{R}) = \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \frac{Z_{1}Z_{2}e^{2}}{4\pi\epsilon_{0}} \frac{1}{R} \\ & \left| N^{2} \left(1 - e^{-\alpha X_{1}} \right)^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+43)}} \left[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}})) (_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}})) \right] \right| \\ & \left| N^{2} \left(1 - e^{-\alpha X_{2}} \right)^{1\pm\sqrt{182721+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a',b',c';1-e^{-\alpha X_{2}})) (_{2}F_{1}^{*}(a',b',c';1-e^{-\alpha X_{2}})) \right| \\ & C\{1 + \alpha \exp(-\beta \langle N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{1}})^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a',b',c';1-e^{-\alpha X_{2}})) (_{2}F_{1}^{*}(a',b',c';1-e^{-\alpha X_{2}})) \right] \\ & + \left| N^{2} \left(1 - e^{-\alpha X_{2}} \right)^{1\pm\sqrt{192721+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a',b',c';1-e^{-\alpha X_{2}})) (_{2}F_{1}^{*}(a',b',c';1-e^{-\alpha X_{2}})) \right|)) - \\ & \gamma (C\{1 + \alpha \exp(-\beta \langle N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{1}})^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a',b',c';1-e^{-\alpha X_{2}})) (_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right])) - \\ & + \left| N^{2} \left(1 - e^{-\alpha X_{2}} \right)^{1\pm\sqrt{192721+4\gamma(\gamma+439)}} (_{2}F_{1}(a',b',c';1-e^{-\alpha X_{2}})) (_{2}F_{1}^{*}(a',b',c';1-e^{-\alpha X_{2}})) \right] \right) \right\} \end{split}$$

$^{16}O+^{16}O$ الف-٣-محاسبه پتانسیل برهمکنش $O+^{16}O+$

الف-۳-۱-با پتانسیل یوکاوا (بر اساس روابط مربوط به تابع موج محاسبه شده برای ¹⁶0 (رابطه (۴-۱))

با توجه به تابع به دست آمده بر اساس رابطه (۴–۱) برای O^{16} بخش مستقیم و تبادلی پتانسیل هسته ای برای برهمکنش $O^{16} + O^{16}$ با توجه به رابطه (۴–۸) با دو رابطه زیر محاسبه خواهد شد

$$\begin{split} &V_{ND^{(16}O_{1}+16}O_{1})(\vec{R},E_{p}) = g(E_{p})\int d\vec{x}_{1}\int d\vec{x}_{2} \\ &\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{1}})^{12\sqrt{849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}}[(_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}}))| \\ &\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}}(_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}}))| \\ &C\{1+\alpha\exp(-\beta(\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{1}})^{12\sqrt{849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}}(_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}}(_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}}(_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}}(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))| \right)\right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}}(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))| \right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{12\sqrt{849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}}(_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^$$

$$\begin{split} & V_{\text{NE}(^{16}O^{+16}O^{+}O^{-})}(\vec{R}, E_{p}) = g(E_{p}) \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)})^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} [(_{2}F_{1}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)})] \right| \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)})^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)})) \right| \\ & \hat{j}_{1}(k_{eff}(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2) |\vec{s}\rangle) \hat{j}_{1}(k_{eff}(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2) |\vec{s}\rangle) \\ & C(1 + \alpha \exp(-\beta(N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)})^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)})) |)) \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)})^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)})) |)) - \\ & \gamma(C\{1 + \alpha \exp(-\beta(N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)}))^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} - \vec{s}/2)})) |)) \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)})^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} - \vec{s}/2)}) |)) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)})^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, 2b; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)}) |) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)})^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a', b', 2b'; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', 2b'; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)})) |) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)})^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a', b', 2b'; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a', b', 2b'; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)}) |) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)})^{1 \pm \sqrt{849+\frac{7(2+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a', b', 2b'; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1849 + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{4}} + 2i \sqrt{\frac{m(E-2)}{4\alpha^2}} \\ b = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1849 + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{4}} \end{cases}$$
 (1.1)

با توجه به تابع به دست آمده بر اساس رابطه (۴–۲) برای O^{16} ، بخش مستقیم و تبادلی پتانسیل هسته ای برای برهمکنش $O^{16} + O^{16}$ با توجه به رابطه (۴–۸) با دو رابطه زیر محاسبه خواهد شد

(الف–١١)

$$\begin{split} &V_{_{ND(^{16}O_{+}^{16}O_{)}}(\vec{R},E_{p}) = g(E_{p})\int d\vec{x}_{1}\int d\vec{x}_{2} \\ &\left|N^{2}(1-e^{-\alpha X_{1}})^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+43)}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))]\right| \\ &\left|N^{2}(1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+43)}}(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))\right| \\ &C\{1+\alpha\exp(-\beta(\left|N^{2}(1-e^{-\alpha X_{1}})^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+43)}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))]\right| + \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+43)}}(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))\right|)) - \\ &\gamma(C\{1+\alpha\exp(-\beta(\left|N^{2}(1-e^{-\alpha X_{1}})^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+43)}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))]\right) + \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+43)}}(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))\right|)\right) - \\ &\gamma(C\{1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm\sqrt{1849+4\gamma(\gamma+43)}}(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))]) \right)\} \\ &=\sum_{i=1}^{3}G_{Di}\frac{\exp[-s/r_{Dir_{i}}]}{[s/r_{Dir_{i}}]} \end{split}$$

$$\begin{split} &V_{\scriptscriptstyle NEC}^{\scriptscriptstyle (S_{OL}, s_{O})}(\vec{R}, E_{P}) = g(E_{P}) \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} [(_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)}))] \right| \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) \right| \\ & \hat{j}_{1} \langle |k_{eff}(\vec{x}_{1} + \vec{s}/2)|\vec{s}\rangle \hat{j}_{1} \langle |k_{eff}(\vec{x}_{2} - \vec{s}/2)|\vec{s}\rangle \\ & C\{1 + \alpha \exp(-\beta \langle N^{2}(1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)}))^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} [(_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)}))] + \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)})) \right| \right) \\ & \gamma (C\{1 + \alpha \exp(-\beta \langle N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)}))^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) \right|) \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{X}_{1} + \vec{s}/2)}) \right| \right) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}) \right| \right) \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) \right| \right| \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) \right| \right| \\ \\ & + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})^{1:\sqrt{580^{34/2}(r+43)}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-\alpha(\vec{X}_{2} - \vec{s}/2)})) \right| \right| \\ \\ & = \int$$

$$\begin{split} &V_{c(1^{i6}o^{+i6}o)}(\vec{R}) = \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \frac{Z_{1}Z_{2}e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{R} \\ & \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{1}})^{1\pm \sqrt{1849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}} [(_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{1}}))] \right| \\ & \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{1\pm \sqrt{1849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \right| \\ & C\{1+\alpha\exp(-\beta \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{1}})^{1\pm \sqrt{1849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{1\pm \sqrt{1849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \right| \right) \\ & \gamma(C\{1+\alpha\exp(-\beta \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{1}})^{1\pm \sqrt{1849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \right| \right) \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{1\pm \sqrt{1849+\frac{\gamma(\gamma+43)}{4}}} (_{2}F_{1}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a',b',2b';1-e^{-2\alpha x_{2}})) \right| \right) \right\} \end{split}$$

به طوریکه

 $(1 \forall -i) = i \sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43)} + \sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}} \\ b = i \sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43)} - \sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(EV_0 - 1)}{\alpha^2}} \\ c = 2i \sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma + 43)}{12} - \frac{2mE}{\alpha^2}} + 1$

الف-۳-۳-با پتانسیل منینگ-روزن (بر اساس روابط مربوط به تابع موج محاسبه شده برای ¹⁶ (رابطه (۴-۴))

با توجه به تابع به دست آمده بر اساس رابطه (۴–۴) برای O^{16} ، بخش مستقیم و تبادلی پتانسیل هسته ای برای برهمکنش $O^{16} + O^{16}$ با توجه به رابطه (۴–۸) با دو رابطه زیر محاسبه خواهد شد

$$(\uparrow \pounds_{-\alpha X_{1}}) = g(E_{p}) \int d\bar{x}_{1} \int d\bar{x}_{2} \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{1}})^{\frac{12}{\sqrt{849+4}r(r+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [({}_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{1}}))({}_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{1}}))] \right| \\ \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{\frac{12}{\sqrt{849+4}r(r+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} ({}_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{2}}))({}_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right| \\ C\{1 + \alpha \exp(-\beta \left\langle N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{1}})^{\frac{12}{\sqrt{849+4}r(r+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [({}_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{1}}))({}_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{2}}))] \right| \\ + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{\frac{12}{\sqrt{849+4}r(r+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [({}_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{1}}))({}_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{1}})] \right| \\ + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{\frac{12}{\sqrt{849+4}r(r+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [({}_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{1}}))({}_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{1}})] \right| \\ + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{\frac{12}{\sqrt{849+4}r(r+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} ({}_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{2}}))({}_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{1}})] \right| \\ + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{\frac{12}{\sqrt{849+4}r(r+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} ({}_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{2}}))({}_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{1}})] \right| \\ + \left| N^{2} (1 - e^{-\alpha X_{2}})^{\frac{12}{\sqrt{849+4}r(r+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} ({}_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{2}}))({}_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha X_{2}})) \right| \right\rangle \right\}_{i=1}^{2} G_{Di} \frac{\exp[-s/r_{Di}}{[s/r_{Di}]}$$

$$\begin{split} & V_{\scriptscriptstyle NE(^{w}_{O},^{w}_{O})}(\vec{k},E_{p}) = g(E_{p}) \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \\ & N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)})^{\frac{1}{2}\sqrt{849+4r(r+43)+\frac{8aW}{a^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))] \\ & N^{2} (1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{\frac{1}{2}\sqrt{849+4r(r+43)+\frac{8aW}{a^{2}}}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)}))] \\ & \hat{J}_{1}(|k_{eff}(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)|\vec{s}) \hat{J}_{1}(|k_{eff}(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)|\vec{s}) \\ & C\{1 + \alpha\exp(-\beta(N^{2}(1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))^{\frac{1}{2}\sqrt{849+4r(r+43)+\frac{8aW}{a^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{\frac{1}{2}\sqrt{849+4r(r+43)+\frac{8aW}{a^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))]) \\ & \gamma(C\{1 + \alpha\exp(-\beta(N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))^{\frac{1}{2}\sqrt{849+4r(r+43)+\frac{8aW}{a^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,2b;1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))] \\ & + |N^{2}(1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{\frac{1}{2}\sqrt{849+4r(r+43)+\frac{8aW}{a^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,2b;1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)})]] \\ & + |N^{2}(1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{\frac{1}{2}\sqrt{849+4r(r+43)+\frac{8aW}{a^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,2b;1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)})]] \\ & + |N^{2}(1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{\frac{1}{2}\sqrt{849+4r(r+43)+\frac{8aW}{a^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,2b;1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,2b;1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1}+\vec{s}/2)}))]] \\ & + |N^{2}(1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)})^{\frac{1}{2}\sqrt{849+4r(r+43)+\frac{8aW}{a^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1 - e^{-\alpha(\vec{x}_{2}-\vec{s}/2)}))]])] \\ & \sum_{i=1}^{3} G_{Ei}\frac{\exp[(-\beta_{i}/2)}{[s/r_{Ei}]}} \exp[(ik_{ai}\vec{s}/A_{ad})] \\ \\ & \sum_{i=1}^{3} G_{Ei}\frac{\exp[(-\beta_{i}/2)}{[s/r_{Ei}]}} \exp[(ik_{ai}\vec{s}/A_{ad})] \\ & \sum_{i=1}^{3} G_{Ei}\frac{\exp[(-\beta_{i}/2)}{[s/r_{Ei}]}} \exp[(ik_{$$

به طوريكه

(الف-١٥)

$$\begin{split} a &= i \sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43) + \frac{8mV_1}{\alpha^2}} + \sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}} \\ b &= i \sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1849 + 4\gamma(\gamma + 43) + \frac{8mV_1}{\alpha^2}} - \sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}} \\ c &= 2i \sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}} + 1 \\ c &= 2i \sqrt{\frac{2541}{6} + \frac{11\gamma(\gamma + 43)}{12} + \frac{2m(E - V_1 + V_2)}{\alpha^2}} + 1 \\ \end{split}$$

$$\begin{split} & V_{c(^{in}O^{+}{}^{in}O^{+})}(\vec{R}) = \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \frac{Z_{1}Z_{2}e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{R} \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{1}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))] \bigg| \\ & \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right| \\ & C\{1+\alpha\exp(-\beta(\bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{1}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))] \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))] \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}})] \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}})] \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}})] \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}})] \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}})] \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}})) \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))] \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))] \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))] \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4\gamma(\gamma+43)+\frac{8mV_{1}}{\alpha^{2}}}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))] \bigg| \\ & + \bigg| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{1\pm \sqrt{849+4$$

(الف–۱۷)

$$\begin{split} &V_{ND(^{16}O^{+16}O)}(\vec{R},E_{p}) = g(E_{p})\int d\vec{x}_{1}\int d\vec{x}_{2} \\ &\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{1}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))]\right| \\ &\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{2}}))]\right| \\ &C\{1+\alpha\exp(-\beta(\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{1}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))]\right| + \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))]\right| + \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))]\right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))]\right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))]\right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))]\right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))]\right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{1}}))]\right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{2}}))]\right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{2}}))]\right| \\ &+\left|N^{2}(1-e^{-2\alpha X_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-\gamma(\gamma+43))}}[(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha X_{2}}))]\right| \\ &+\left|N^{2}(1$$
$$\begin{split} & V_{\text{NE}(^{\text{W}_{O},\text{W}_{O})}}(\vec{R}, E_{p}) = g(E_{p}) \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2))^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} [(_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} - \vec{x}/2)}))] \right| \\ & \left| N^{2} (1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))(_{2}F_{1}^{*}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)}))] \right| \\ & f_{1}(|k_{eff}(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)|\vec{x})\hat{f}_{1}(|k_{eff}(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)|\vec{x}) \\ & C\{1 + \alpha \exp(-\beta(|N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} [(_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0} - 462 - \gamma(r + 43))}} (_{2}F_{1}(a, b, c; 1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{1} + \vec{x}/2)}))] + \\ & + |N^{2}(1 - e^{-2\alpha(\vec{x}_{2} - \vec{x}/2)})^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4(26W_{0$$

به طوريكه

(الف-١٨)
$$a = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4(2mV_0 - A)} + i\sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{4\alpha^2}} + \sqrt{\frac{2mE + 2mV_0(4\alpha^2 - 4\alpha + 1))}{4\alpha^2}}$$
$$b = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4(2mV_0 - A)} + i\sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{4\alpha^2}} - \sqrt{\frac{2mE + 2mV_0(4\alpha^2 - 4\alpha + 1))}{4\alpha^2}}$$
$$c = 1 + 2i\sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{4\alpha^2}}$$

رابطه مربوط به پتانسیل کولمبی نیز به صورت زیر می باشد

$$\begin{split} &V_{c(^{i6}o^{+i6}o)}(\vec{R}) = \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \frac{Z_{1}Z_{2}e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{R} \\ & \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{1}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})] \right| \\ & \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \right| \\ & C\{1+\alpha\exp(-\beta\langle \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{1}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{1}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{0}-462-r(r+43))}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-2\alpha x_{2}})) \right| \\ & + \left| N^{2}(1-e^{-2\alpha x_{2}})^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4(2mV_{$$

با توجه به تابع به دست آمده بر اساس رابطه (۴–۵) برای O^{16} بخش مستقیم و تبادلی پتانسیل هسته ای برای برهمکنش $O^{16} + O^{16}$ با توجه به رابطه (۴–۸) با دو رابطه زیر محاسبه خواهد شد

(الف-٢٠)

$$\begin{split} & V_{SD}(^{in}O^{-in}O^{in$$

$$\begin{aligned} &(\Upsilon) = i\sqrt{\left(\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma+43)}{12}\right) - \frac{2m(E-V_0)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma+43)}{12}\right) + \frac{2m(V_0 + V_2 - E)}{\alpha^2}} + \sqrt{\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma+43)}{12} + \frac{2m(Ev_0 - 1)}{\alpha^2}} \\ b = i\sqrt{\left(\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma+43)}{12}\right) - \frac{2m(E-V_0)}{\alpha^2}} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4(462 + \gamma(\gamma+43) + \frac{2mV_2}{\alpha^2})} - \sqrt{\left(\frac{231}{6} + \frac{\gamma(\gamma+43)}{12}\right) + \frac{2m(V_0 + V_2 - E)}{\alpha^2}} \\ c = 1 \pm \sqrt{1 + 4(462 + \gamma(\gamma+43) + \frac{2mV_2}{\alpha^2})} \end{aligned}$$

پتانسیل کولمبی به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{split} & V_{c_{(}^{(\eta_{0})+i_{0})}}(\vec{R}) = \int d\vec{x}_{1} \int d\vec{x}_{2} \frac{Z_{1}Z_{2}e^{2}}{4\pi\varepsilon_{0}} \frac{1}{R} \\ & \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{1}})^{12 \sqrt{i+4(462+\gamma(r+43)+\frac{2mV_{1}}{\sigma^{2}})}} [(_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))] \right| \\ & \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{12 \sqrt{i+4(462+\gamma(r+43)+\frac{2mV_{1}}{\sigma^{2}})}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right| \\ & C\{1+\alpha\exp(-\beta \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{1}})^{12 \sqrt{i+4(462+\gamma(r+43)+\frac{2mV_{1}}{\sigma^{2}})}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right| \\ & + \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{12 \sqrt{i+4(462+\gamma(r+43)+\frac{2mV_{1}}{\sigma^{2}})}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right|) - \\ & \gamma(C\{1+\alpha\exp(-\beta \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{1}})^{12 \sqrt{i+4(462+\gamma(r+43)+\frac{2mV_{1}}{\sigma^{2}})}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right|) - \\ & \gamma(C\{1+\alpha\exp(-\beta \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{1}})^{12 \sqrt{i+4(462+\gamma(r+43)+\frac{2mV_{1}}{\sigma^{2}})}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{1}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right|) + \\ & + \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{12 \sqrt{i+4(462+\gamma(r+43)+\frac{2mV_{1}}{\sigma^{2}})}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right| \right| \\ & + \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{12 \sqrt{i+4(462+\gamma(r+43)+\frac{2mV_{1}}{\sigma^{2}})}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}}))(_{2}F_{1}^{*}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right| \right| \\ & + \left| N^{2} (1-e^{-\alpha X_{2}})^{12 \sqrt{i+4(462+\gamma(r+43)+\frac{2mV_{1}}{\sigma^{2}})}} (_{2}F_{1}(a,b,c;1-e^{-\alpha X_{2}})) \right| \\ & (\Upsilon - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}$$

منابع:

[1]. D. P. Stanley, F. Petrovich and P. Schwandt (1980) "Doublefolding model potentials for 6Li elastic scattering at 99 Mev" *Phys. Rev. C* **22**, 3, pp 1357.

[7]. G. R. Satchler and W. G. Love (1979) "Folding model potentials from realistic interactions for heavy-ion scattering" *Phys. Rep.* **55**, 3, pp 183.

[\mathfrak{r}]. C. H. Dasso and G. Pollarolo (2003) "Investigation the nucleus-nucleus potential at very short distances" *Phys. Rev. C*

68, 5, pp 054604.

[*]. I. I. Gontchar, D. J. Hinde, M. Dasgupta, and J. O. Newton (2004) "Double folding nucleus-nucleus potential applied theavyion fusion reactions" *Phys. Rev. C* **69**, 5, pp 024610.

[a]. D. Gupta and D. N. Basu (2005) "Folding model analysis of proton scattering from mirror nuclei 18Ne and 18O" *Nucl. Phys. A* 583, 3, pp 383.

[*P*]. G. R. Satchler and C. B. Fulmer (1974) "Target-spin effects on elastic scattering cross sections" *Phys. Lett. B* **50**, 3, pp 309.

[Y]. D. T. Khoa, E. Khan, G. Colo and N. Van Giai (2002)"Folding model analysis of elastic and inelastic proton scattering on sulfur isotopes" *Nucl. Phys. A* **706**, 1, pp 61.

[\land]. D. C. Cuong, D. T. Khoa, and Y. Kanada-En'yo (2013) "Folding-model analysis of inelastic α +12C scattering at medium energies, and the isoscalar transition strengths of the cluster states of 12C" *Phys. Rev. C* **88**, 6, pp 064317.

[9]. E. C. Halbert and G. R. Satchler (1974) "Effective interactions for 208Pb + p reactions" *Nucl. Phys. A* 233, 2, pp 265.

[1.]. J. P. Elliott, A. D. Jackson, H. A. Mavromatis, E. A.

Sanderson and B. Singh (1968) "Matrix elements of the nucleon-

nucleon potential for use in nuclear-structure calculations" Nucl.

Phys. A **121**, 2, pp 241.

[11]. L. J. B. Goldfarb (1978) "Inferences concerning the real part

of the heavy-ion optical potential through folding techniques" *Nucl. Phys. A* **301**, 3, pp 497.

[17]. F. J. Dyson (1949) "The S Matrix in Quantum Electrodynamics" *Phys. Rev.* **75**, 11, pp 1736.

[1٣]. R. P. Feynman (1949) "The Theory of Positrons" *Phys. Rev.*76, 6, pp 749.

[14]. D. T. Khoa and W. V. Ortzen (1993) "A nuclear matter study using the density dependent M3Y interaction" *Phys. Lett. B* 304, 1, pp 8.

[1\Delta]. G. Bertsch, J. Borysowicz, H. McManus and W. G. Love(1977) "Interactions for inelastic scattering derived from realistic

potentials" Nucl. Phys. A 284, 3, pp 399.

[19]. H. De Vries, C. W. De Jager and C. De Vries (1987)

"Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering" *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **36**, 3, pp 495.

[1Y]. I.I. Gontchar and M.V. Chushnyakova (2010) "A C-code for

the double folding interaction potential of two spherical nuclei"

Computer Physics Communications 181, 1, pp 168.

[1A]. M. Aygun (2015) "Extended Double Folding Model Analysis of the Elastic Scattering of 6Li Using the No-Core Full Configuration Density Distribution" *Chiness Journal of Physics* **53**, 4, pp 080301.

[19]. J. W. Negele and D. Vautherin (1972) "Density-Matrix

Expansion for an Effective Nuclear Hamiltonian" Phys. Rev. C 5,

5, pp 1472.

[7.]. J. W. Negele and D. Vautherin (1975) "Density-matrix

expansion for an effective nuclear Hamiltonian. II" Phys. Rev. C

11, 3, pp 1031.

[1]. X. Campi and A. Bouyssy (1978) "A Simple Approximation

for the Nuclear Density Matrix" Phys. Lett. B 73, 23, pp 63.

[^ү^γ]. D. T. Khoa, W. von Oertzen and H. G. Bohlen (1994)
"Double-folding model for heavy-ion optical potential: Revised and applied to study 12C and 16O elastic scattering" *Phys. Rev. C* 49, 3, pp 1652.
[^ү^γ]. M. Rashdan (1996) "Folding model description of fusion

reaction" J. Phys. G 22, 1, pp 139.

[$\uparrow \uparrow$]. D. T. Khoa (2001) " α -nucleus optical potential in the double-folding model" *Phys. Rev. C* **63**, 3, pp 034007.

[Ya]. N. Anantaraman, H. Toki and G. F. Bertsch (1983) "An effective interaction for inelastic scattering derived from the Paris potential" *Nucl. Phys. A* **398**, 2, pp 269.

[79]. F. Perey and B. Buck (1962), Nucl. Phys. 32, 253.

[YV]. W. Bauhoff, H. V. von Geramb, and G. Palia (1983),

"Unified analysis of pionic atoms and low-energy pion-nucleus scattering: Phenomenological analysis", *Phys. Rev. C* 27, 2466.

[YA]. A. Gavron (1980), "Statistical model calculations in heavy ion reactions" *Phys. Rev. C* **21**, 230.

[79]. A. B. Balantekin, S. E. Koonin, and J. W. Negele (1983), "Inversion formula for the internucleus potential using subbarrier fusion cross sections", Phys. Rev. C 28, 1565.

[r.]. C. H. Dasso (1983), Nucl. Phys. A 405, 381.

[71]. C. H. Dasso, E. G. Lanza, H. M. Sofia (2010), "Event generator to construct cross sections for the multiphonon excitation of a set of collective vibrational modes", *Phys.Rev. C* **81**, 034610.

[77]. M. M. Giannini, E. Santopinto and A. Vassallo (2002) "The hypercentral constituent quark model" *Nucl. Phys. A* **699**, 1, pp

308.

[**rr**]. M. M. Giannini, E. Santopinto and A. Vassallo (2003) "An overview of the hypercentral constituent quark model" *Prog. Part. Nucl. Phys.* **50**, 2, pp 263.

[***f**]. E. Santopinto, F. Iachello and M. M. Giannini (1997) "Exactly solvable models of baryon spectroscopy" *Nucl. Phys. A* **623**, 1, pp 100.

[ra]. M. Fabre de la Ripelle (1983) "The potential harmonic expansion method" *Ann. Phys. N.Y.* **147**, 2, pp 281.

[**^r**⁹]. F. Zernike, H. C. Brinkman (1935) "Hyper Spherical

functions and orthogonal polynomials in spherical regions" *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet.* **33**, pp 3.

[***v**]. W. Zickendraht (1967) "Configuration-Space Approach to Three-Particle Scattering" *Phys. Rev.* **159**, 5, pp 1448.

[*****A]. V. Aquilanti and S. Tonzani (2004) "Three-body problem in quantum mechanics: hyperspherical elliptic coordinates and harmonic basis sets" *Chem. J. Phys.* **120**, 9, pp 4066.

[٣٩]. O. I. Tolstikhin, V. N. Ostrovsky and H. Nakamura (1998) "Siegert pseudostate formulation of scattering theory: Onechannel case" *Phys. Rev. A* **58**, 3, pp 2077.

[\mathbf{f} ·]. O. I. Tolstikhin and M. Matsuzawa (2001) "Exploring the separability of the three-body Coulomb problem in hyperspherical elliptic coordinates" *Phys. Rev. A* **63**, 6, pp 062705.

[*1]. S. H. Dong (2011), "*Wave Equations in Higher Dimensions*" ISBN:978-94-007-1916-3, Springer, Netherlands, pp 299.

[^fY]. J. L. Ballot and J. Navaroo (1975) "Hyperspherical formalism applied to He-like atoms" *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* 8, 2, pp 172.

[۴۳]. M. Fabre de la Ripelle (1987) "Models and Methods in Few-

Body Physics" (L. S. Ferreira, A. C. Fonseca and L. Streit eds.) *Lectures Notes in Physics* **273**, Springer, Berlin, pp 283.

[^{**f**}^{**f**}]. D. Drechsel, M. M. Giannini and L. Tiator (2005) "Threebody forces in the quark model" *Lecture Notes in Physics*, Springer, Vol. **260**, Berlin-Heidelberg-New York, pp 509; J. L. Ballot, M. Fabre de la Ripelle (1987) "*Few-Body Problems in* *Particle, Nuclear, Atomic, and Molecular Physics*" Springer, Vol. **2**, Wien-New York, pp 448.

[fa]. M. Bohm (1980) "The masses of the nonstrange baryon resonances in quark model with spin-spin and tensor interactions" *Z. Phys. C - Particles and Fields* **3**, 4, pp 321.

[f?]. F. Foster and G. Hughes (1983) "A simple quark model for resonance electroproduction" *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* **14**, 2, pp 123.

[[¢]Y]. A. M. Badalyan (1987) "Unified description of ground state mesons and baryons in a potential model" *Phys. Lett. B* **199**, 2, pp 267.

[^{*}A]. M. Fabre de la Ripelle (1989) "A confining potential for quarks "*Nucl. Phys. A* **497**, pp 595.

[۴۹]. J. D. Louck and W. H. Shaffer (1960) "Generalized orbital angular momentum and the n-fold degenerate quantum-

mechanical oscillator: Part I. The twofold degenerate oscillator", *J. Mol. Spec.* **4**, 1, pp 285; J. D. Louck (1960) "Generalized orbital angular momentum and the n-Fold degenerate quantum-mechanical oscillator: Part II. The n-Fold degenerate oscillator", *J. Mol. Spec.* **4**, 1, pp 298; (1960) "Generalized orbital angular momentum and the n-fold degenerate quantum-mechanical oscillator: Part III. Radial integrals", *J. Mol. Spec.* **4**, 1, pp 334. [Δ·]. L. Y. Wang, X. Y. Gu, Z. Q. Ma and S. H. Dong (2002)

"Exact solutions to D-dimensional Schrödinger equation with a pseudoharmonic oscillator" *Foundations of Physics Letters* **15**, 6, pp 569.

[Δ 1]. A. A. Rajabi (2005) "Exact analytical solution of the schrödinger equation for an N-identical body-force system" *Few-Body Systems* **37**, 4, pp 197.

[Δ T]. J. Pearson (2009), Master's thesis, "*Computation of hypergeometric functions*", Phys. depart. Oxford University.

[ar]. M. Abramowitz and I. A. Stegun (1964) (eds.) "Handbook

of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", Vol. 55, Courier Corporation, New York, pp 1064.

[Δ۴]. Y. L. Luke (1969) "*The Special Functions and Their Approximations*", Vol **53-I**, Academic Press, New-York and London, pp 348.

[۵۵]. M. Gavrila (1967) "Elastic Scattering of Photons by aHydrogen Atom" *Phys. Rev.* 163, 1, pp 147.

[Δ۶]. R. Pastor-Satorras and A. Vespignani (2001) "Epidemic dynamics and endemic states in complex networks" *Phys. Rev. E* 63, 6, pp 066117.

[ΔY]. K. L. Bell and N. S. Scott (1984) "*Coulomb Functions (Negative Energies)*", Computer Physics Communications **35**, pp C-648.

[$\Delta\Lambda$]. A. Adolphson (1994) "Hypergeometric functions and rings

generated by monomials Alan Adolphson" J. Math. 73, 2, pp 269.

[a٩]. E. Cattani, A. Dickenstein and B. Sturmfels (1998)"Residues and Resultants" *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* 5, 1, pp 119.

[۶·]. H. Yukawa (1935) "On the Interaction of Elementary Particles "Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 17, 48.

[۶1]. H. Yukawa and S. Sakata (1940) "On the Wave Equation of

Meson" Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 22, 757.

[FY]. W.C. Qiang and S. H. Dong (2007) "Analytical approximations to the solutions of the Manning–Rosen potential with centrifugal term" *Phys. Lett. A* **368**, 1, pp 13.

[۶٣] S. H. Dong and G. F. Wei (2010) "Pseudospin symmetry in the relativistic Manning–Rosen potential including a Pekeris-type approximation to the pseudo-centrifugal term" *Phys. Lett. B* 686, 4, pp 288.

[*P*^{*}] S. H. Dong and G. F. Wei (2010) "Pseudospin symmetry for modified Rosen-Morse potential including a Pekeris-type approximation to the pseudo-centrifugal term" *Eur. Phys. J. A* **46**, 2, pp 207.

[۶۵]. S. H. Dong (2007) "Factorization Method in Quantum Mechanics", Vol. 150, Springer, Netherlands, pp 297.

[*PP*]. S. H. Dong, W. C. Qiang, G. H. Sun and V. B. Bezerra (2007) "Analytical approximations to the l-wave solutions of the Schrödinger equation with the Eckart potential" *J Phys. A* **40**, 34, pp 10535.

[97]. S. Dong, G. H. Sun and S. H. Dong (2013) "Arbitrary l-

Wave Solutions of the Schrödinger Equation for the Screen Coulomb Potential" *Int. J. Mod. Phys. E* 22, 6, pp 1350036.

[FA]. L. Hulthen (1942) "On the characteristic solutions of the Schrodinger deuteron equation" *Ark. Mat. Astron, Fys. A* **28**, 5, pp 12.

[۶٩]. S. T. Ma (1954) "On the Coulomb and Hulthen Potentials" *Aust. J. Phys.* **7**, 3, pp 365.

 $[\gamma \cdot]$. S. M. Ikhdair, M. Hamzavi and B. J. Falaye (2013) "Relativistic symmetries in Yukawa-type interaction with Coulomb-like tensor" *Applied Mathematics and Computation* **225**, 775.

[Y1]. M. F. Manning and N. Rosen (1933) "Minutes of the Middletown meeting" Phys. Rev. 44, 11, pp 951.

[YY]. M.F. Manning and N. Rosen (1933) "A potential function for the vibration of diatomic molecules" *Phys. Rev.* **44**, 953.

[Yr]. Z. H. Deng and Y. P. Fan (1957) "A potential of diatomic molecules" *Shandong Univ. J* **7**, 1, pp 162.

[Y[¢]]. R. Navarro P'erez, J. E. Amaro and E. Ruiz Arriola (2013)

"Partial-wave analysis of nucleon-nucleon scattering below the pion-production threshold" *Phys. Rev. C* **88**, 2, pp 069902.

[Ya]. L. D. Landau and E. M. Lifshitz (1976) "*Course of theoretical physics 1 Mechanics*" J. B. Sykes and J. S. Bell, 3rd ed, Oxford: Pergamon press, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt, XVII-169 p.

[Y9]. D. T. Khoa, G. R. Satchler and W. von Oertzen (1997) "Nuclear incompressibility and density dependent NN interactions in the folding model for nucleus-nucleus potentials" *Phys. Rev. C* 56, 2, pp 954.

[YY]. D. M. Brink and FL. Stancu (1975) "Interaction potential between two 16O nuclei derived from the Skyrme interaction" *Nucl. Phys. A* **243**, 1, pp 175.

[YA]. I. I. Gontchar, D. J. Hinde, M. Dasgupta, and J. O. Newton (2004) "Double folding nucleus-nucleus potential applied to heavy-ion fusion reactions" *Phys. Rev. C* **69**, 2, pp 024610.

[Y9]. D. A. Goldberg, S. M. Smith, H. G. Pugh, P. G. Roz and N. S. Wall (1973)," Folding model analysis of a-particle elastic scattering with a semirealistic density-dependent effective interaction", *Phys. Rev. C* **7**, 1938.

 $[\land \cdot]$. G. Hauser, R. Lohken, H. Rebel, G. Schatz, G.W. Schweimer and J. Specht (1969)," Elastic scattering of 104 MeV alpha particles", *Nucl. Phys. A* **128**, 81.

[A1]. M. A. Hassanain (2011), "Analysis of 12C+12C Elastic and Inelastic Scatterings in the Framework of the Cluster Double Folding Model and Coupled-Channels Mechanism", *Progress of Theoretical Physics* **126**, 2.

[A7]. van Riper, K. A. (1988)," Effects of nuclear equation of state on general relativistic stellar core collapse models", *Astrophysical Journal*, Part 1 (ISSN 0004-637X), 326, 235.

[A٣]. Pakoua, N. Alamanosb, A. Lagoyannisa, A. Gillibertb, E.C. Pollaccob, P. A. Assimakopoulosa, G. Doukelisc, K. G.

Ioannidesa, D. Karadimosa, D. Karamanisa, M. Kokkorisc, E. Kossionidesc, N. G. Nicolisa, C. Papachristodouloua, N. Patronisa, G. Perdikakisc, D. Pierroutsakoud (2003), "The elastic scattering of 6 Li+ 28 Si at near-barrier energies", *Physics Letters B* **556**, 1, 21.

[A*]. M. F. Vineyard, J. Cook and K. W. Kemper (1983)," Largeangle 6Li + 28Si elastic and inelastic scattering at 27 and 34 MeV", *Nuclear Physics A* **405**, 2, 429.

[Ad]. P. R. S. Gomes, I. Padron, J. O. Fernández Niello, G. V.

Martí, M. D. Rodríguez, O. A. Capurro, A. J. Pacheco, J. E. Testoni, A. Arazi and J. Lubian (2005)," Fusion, break-up and elastic scattering of weakly bound nuclei", *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **31**, 10.

[$\lambda\beta$]. Y. Sugiyama, Y. Tomita, H. Ikezoe, Y. Yamanouchi, K. Ideno, S. Hamada, T. Sugimitsu, M. Hijiya, Y. Kondō (1993)," Observation of Airy oscillation for the 16O+ 16O system at E lab = 145 MeV", *Phys.Lett. B* **312**, 35.

[AV]. M. V. Andrés and J. Gómez-Camacho (1999), "Dipole Polarizability in the Scattering of 11Li below the Coulomb Barrier", *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1387.

[AA]. M. Hemalatha (2014), "Elastic scattering of the halo nucleus 11Be on 64Zn", *EPJ Web of Conferences* **66**, 03036.

[A9]. A. D. Pietro, P. Figuera1, M. Fisichella, M. Lattuada and M. Zadro (2013), "Elastic scattering induced by halo nuclei", *Symposium on Nuclear Physics (Cocoyoc 2014) Journal of Physics: Conference Series* **492**, 012001.

[$9\cdot$]. W. Qiang, K. Li, W. Chen (2009) "New bound and scattering state solutions of the Manning–Rosen potential with the centrifugal term" *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 20, pp 205306.

[91]. H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, N. Salehi, A. N. Ikot, and S. Zarrinkamar (2013) "Scattering states of the Dirac equation under

asymmetric Hulthén potential" *The European Physical Journal Plus* **128**, 10, 127.

[97]. K. Zhau, X. Lu, Y. Cheng, Q. Li, M. Li, Z. Li, J. Guo, Sh. Li, Q. Zhang, X. Song and C. Jiang (1994) "Comparison of the elastic and inelastic scatterings between 152SM-12ND-148+O-16(C)" *Zeitschrift Fur Phyzik A-Hadrons and Nuclei* **348**, 95.

[٩٣]. M. P. Nicoli, F. Haas, R. M. Freeman, N. Aissaoui, C. Beck,
A. Elanique, R. Nouicer, A. Morsad, S. Szilner, Z. Basrak, M. E.
Brandan and G. R. Satchler (1999) "Elastic scattering of 16O+16O at energies E/A between 5 and 8 MeV" *Phy. Rev. C* 60, 6, pp 064608.

Abstract

Using the hyperspherical formalism is one of the methods for solving the D-dimensional wave equation. In this thesis the wavefunction of the nucleus are calculated by solving the hyperradial wave equation using the hyperspherical formalism. The interaction between the nucleons of the nucleus is assumed as five different types of short-range potentials and the wavefunction for each potential is obtained. A two nuclei system is considered for evaluating the obtained nucleus wavefunction and the most appropriate potential for describing the nucleons interaction of the nucleus. The interaction potential between two nuclei is calculated using the double folding model with the effective nucleon-nucleon (NN) interaction. The calculations of the exchange part of the interaction were assumed to be of finiterange and the density dependence of the NN interaction is accounted for. Also the results are compared with the zero-range approximation. All of these calculations are done using the wave functions of the two colliding nuclei in place of their nucleon density distributions. The numerical results for the interaction potential and the scattering cross section are presented.

Keywords: D-dimensional Schrödinger equation, Hyperspherical formalism, DFM, M3Y interaction, Yukawa potential, Hulthen potential, Yukawa-type potential, Manning-Rosen potential, Deng-Fan potential.



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering PhD Thesis in Nuclear Physics

Calculation of the scattering cross section in nuclear interactions

By: Fatemeh Pakdel

Supervisor: Dr Ali Akbar Rajabi

Bahman 95